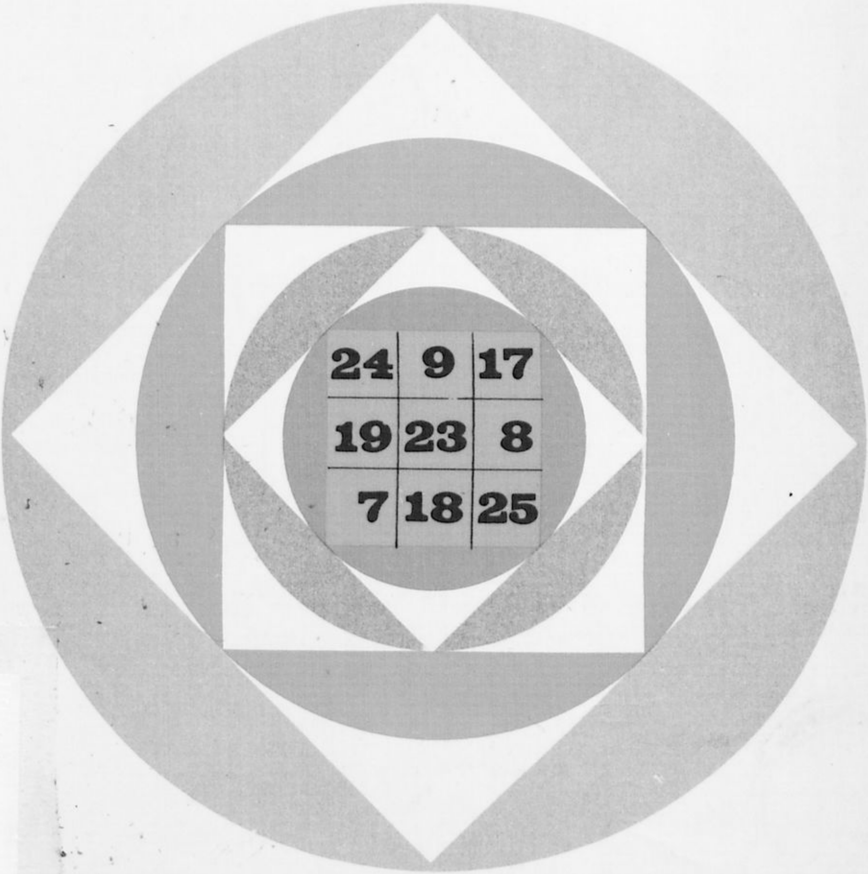
ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΑΝΑΣΤ. ΚΑΡΚΑΝΗ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
Γ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ



ΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΑΘΗΝΑΙ 1975

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ Γ/Δ = 17

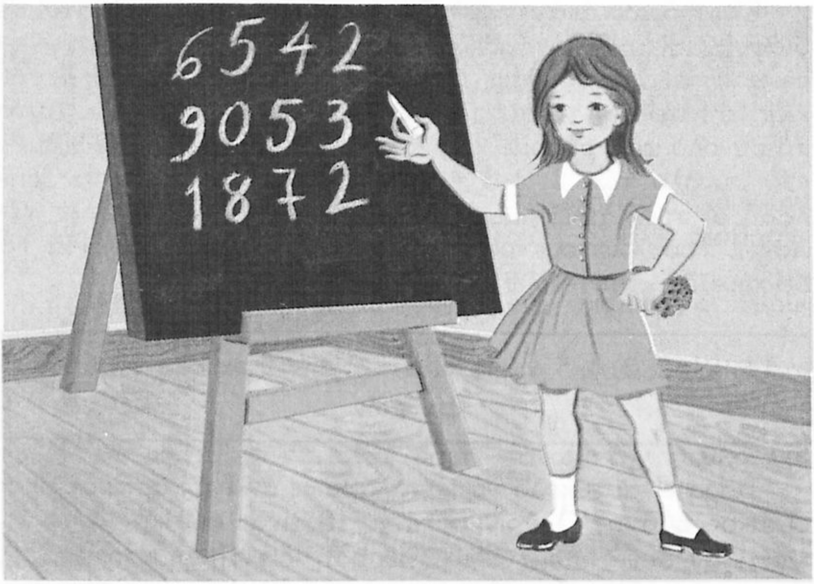
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
Γ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΔΩΡΕΑΝ

ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΑΝΑΣΤ. ΚΑΡΚΑΝΗ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
Γ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1975



ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΟΙ ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΠΟ ΤΟ 0 ΕΩΣ ΤΟ 100

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν

Στὴν ἀριθμητικὴ ἔχομε πολλῶν εἰδῶν ἀριθμούς. Στὶς προηγούμενες τάξεις μάθατε γιὰ τοὺς ἀριθμούς :

α) 1, 2, 3, 4, 5 . . . κλπ. ποὺ προχωροῦν ὅσο θέλομε.

β) Ἐπίσης μάθατε καὶ γιὰ τὸν ἀριθμὸ 0 (μηδέν).

γ.) Ἀκόμη ἔχετε ἀκούσει καὶ γιὰ τοὺς ἀριθμούς, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$.

Εἶναι ὅμως ἀνάγκη νὰ δώσωμε ξεχωριστὰ ὀνόματα σὲ διάφορες οἰκογένειες ἀριθμῶν γιὰ νὰ ἀποφύγωμε τὶς συγχύσεις. Ἔτσι λοιπὸν λέμε ὅτι ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4, . . . κλπ. ἀποτελοῦν τὸ σύνολο τῶν **φυσικῶν ἀριθμῶν.** Αὐτὸ τὸ σύνολο τὸ γράφομε { 1, 2, 3, 4, . . . } καὶ τὸ διαβάζομε : «τὸ σύνολο τῶν 1, 2, 3, 4 καὶ συνέχεια χωρὶς τέλος»· δηλαδὴ οἱ τρεῖς τελεῖες . . . σημαίνουν **«συνέχεια χωρὶς τέλος».** Τοὺς κλείνομε μέσα σὲ δύο **ἄγκιστρα** { } γιὰ νὰ δείξωμε ὅτι ἀποτελοῦν **σύνολο.** Ὥστε :

Τὸ { 1, 2, 3, 4, 5, . . . } εἶναι τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

Τώρα εἶναι εὔκολο νὰ καταλάβωμε ἂν ἕνας ἀριθμὸς εἶναι φυσικὸς ἢ ὄχι. Ὁ ἀριθμὸς π.χ. 18 εἶναι φυσικὸς ἀριθμός, γιατὶ ἂν συνεχίσωμε τὴν ἀρίθμηση καὶ τὴ γραφὴ 1, 2, 3, 4, . . . κλπ. θὰ συναντήσωμε καὶ τὸν 18. Γι᾽ αὐτὸ λέμε λοιπὸν ὅτι : «ὁ 18 εἶναι φυσικὸς ἀριθμὸς» ἢ ὅτι «ὁ 18 ἀνήκει στὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν».

Μποροῦμε νὰ γράψωμε στὴν τύχη ὅσους θέλομε φυσικοὺς ἀριθμοὺς καὶ ἀκόμη μποροῦμε νὰ καταλάβωμε ἂν ἕνας ἀριθμὸς εἶναι φυσικὸς ἢ ὄχι. Π.χ. οἱ 18, 20, 47, εἶναι τρεῖς φυσικοὶ ἀριθμοί, γιατὶ θὰ τοὺς συναντήσωμε ἂν συνεχίσωμε τὴν ἀρίθμηση καὶ τὴ γραφὴ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4,. . . κλπ.

Ὁ ἀκέραιος 0 (μηδὲν)

Τώρα μᾶς ρωτοῦν : Εἶναι ὁ 0 (μηδὲν) φυσικὸς ἀριθμός ;

Ἂν σκεφθοῦμε λίγο, θὰ καταλάβωμε ὅτι ὅσο κι ἂν συνεχίσωμε τὴ γραφὴ 1, 2, 3, 4, . . . κλπ. τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, οὐδέποτε θὰ συναντήσωμε τὸν ἀριθμὸ 0 (μηδέν). Ἡ ἀπάντησή μας λοιπὸν θὰ εἶναι : «ὁ 0 (μηδὲν) δὲν εἶναι φυσικὸς ἀριθμὸς» ἢ «ὁ 0 (μηδὲν) δὲν ἀνήκει στὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν». Λέμε ὅμως ὅτι ὁ **0 εἶναι ἀκέραιος** ἀριθμός.

Ὥστε : $\boxed{\text{Ὁ μηδὲν (0) εἶναι ἀκέραιος.}}$

Ἀσκήσεις

1. Νὰ γράψετε δύο, ὅποιους θέλετε, φυσικοὺς ἀριθμοὺς σὰ σύνολο (δηλαδὴ σὲ ἄγκιστρα). Π.χ.: { 3, 10 }. Διαβάστε το.

2. Νὰ γράψετε τρεῖς, ὅποιους θέλετε, φυσικοὺς ἀριθμοὺς σὰ σύνολο (δηλαδὴ σὲ ἄγκιστρα).

3. Νὰ γράψετε ὀχτώ, ὅποιους θέλετε, φυσικοὺς ἀριθμοὺς σὰ σύνολο.

Νὰ σκεφθῆτε καὶ νὰ ἀπαντήσετε πάνω στὴν παῦλα, ναὶ ἢ ὄχι.

Παράδειγμα : Εἶναι ὁ 14 φυσικὸς ἀριθμός ; **ναί.**

Ἀνήκει ὁ ἀριθμὸς $\frac{2}{3}$ στὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ; **ὄχι.**

4. Ἀνήκει ὁ 84 στὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ; ----
5. Εἶναι ὁ 84 φυσικὸς ἀριθμός ; ----
6. Εἶναι οἱ 79 καὶ 98 φυσικοὶ ἀριθμοί; ----
7. Εἶναι ὁ 0 (μηδὲν) φυσικὸς ἀριθμός; ----
8. Εἶναι ὁ $\frac{1}{2}$ φυσικὸς ἀριθμός ; ----

Τὸ σύνολο τῶν ἀπόλυτων ἀκεραίων

Μάθαμε ὅτι οἱ : 1, 2, 3, 4, . . . κλπ. εἶναι οἱ **φυσικοὶ ἀριθμοί.** Ἀκόμη μάθαμε ὅτι **ὁ 0 (μηδέν) δὲν εἶναι φυσικὸς ἀριθμός.**

Ἂν τώρα πάρωμε καὶ τὸ (μηδὲν) 0 μαζὶ μὲ τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς, θὰ ἔχωμε νέο σύνολο, τὸ { 0, 1, 2, 4, . . . }. Αὐτὸ εἶναι τὸ σύνολο **τῶν ἀπόλυτων ἀκεραίων.** Ὥστε λοιπὸν λέμε :

'Απόλυτοι ἀκέραιοι εἶναι ὁ 0 (μηδὲν) μαζὶ μὲ ὅλους τοὺς φυσ. ἀριθμοὺς δηλαδή. 'Απόλυτοι ἀκέραιοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ: 0, 1, 2, 3, 4, . . . κλπ. χωρὶς τέλος ἢ καὶ τὸ { 0, 1, 2, 3, . . . } εἶναι τὸ σύνολο τῶν ἀπόλυτων ἀκεραίων.

Μάθαμε λοιπὸν ὅτι :

Τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι τὸ { 1, 2, 3, 4, 5, . . . }.

Τὸ σύνολο τῶν ἀπόλυτων ἀκεραίων εἶναι τὸ { 0, 1, 2, 3, 4, 5, . . . }.

'Εκτὸς ἀπὸ τοὺς ἀπόλυτους ἀκεραίους ὑπάρχουν καὶ ἄλλοι ἀκέραιοι. Αὐτοὺς θὰ τοὺς μάθετε σὲ μεγαλύτερη τάξη.

'Επίσης γιὰ συντομία, μποροῦμε νὰ λέμε ἁπλῶς ἀκέραιοι, ἀλλὰ πάντοτε θὰ ἐννοοῦμε ἀπόλυτοι ἀκέραιοι, ὡσότου μάθωμε καὶ τοὺς ἄλλους ἀκεραίους.

Παραδείγματα :

Γράψτε κάτω ἀπὸ τοὺς ἀπόλυτους ἀκεραίους, τοὺς φυκοὺς ἀριθμοὺς δηλ.:

'Απόλυτοι ἀκέραιοι : { 0, 1, 2, 3, 4, . . . }. Πῶς τὸ διαβάζομε ;

Φυσικοὶ ἀριθμοί : { 1, 2, 3, 4, . . . }. Πῶς τὸ διαβάζομε ;

Τώρα μπορεῖτε νὰ διακρίνετε καὶ νὰ ἀπαντήσετε εὔκολα σὲ πολλὲς ἐρωτήσεις π.χ.

1. Ὁ 3 εἶναι: καὶ φυσικὸς ἀριθμὸς καὶ ἀκέραιος.
2. Ὁ 5 εἶναι: καὶ ἀκέραιος καὶ φυσικὸς ἀριθμός.
3. Ὁ 27 εἶναι: καὶ ἀκέραιος καὶ φυσικὸς ἀριθμός.
4. Ὁ 0 (μηδὲν) εἶναι ἀκέραιος ἀλλὰ δὲν εἶναι φυσικὸς ἀριθμός.

5. Εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\frac{3}{4}$ ἀκέραιος ; ἀπάντηση : ὄχι (διότι δὲν ἀνήκει στὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων).

6. Εἶναι ὁ 0 φυσικὸς ἀριθμός ; ἀπάντηση: ὄχι (διότι δὲν ἀνήκει στὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν).

7. Εἶναι ὁ 45 φυσικὸς ἀριθμός ; ἀπάντηση : ναὶ (διότι ἀνήκει στὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν).

8. Εἶναι ὁ 45 ἀκέραιος ; ἀπάντηση : ναὶ (διότι ἀνήκει στὸ σύνολο τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν).

9. Εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$ ἀκέραιος ; ἀπάντηση : ὄχι (διότι δὲν ἀνήκει στὸ σύνολο τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν)

10. Εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$ φυσικὸς ἀριθμός ; ἀπάντηση : ὄχι (διότι δὲν ἀνήκει στὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν)

11. Κάθε φυσικὸς ἀριθμὸς εἶναι καὶ (ἀπόλυτος) ἀκέραιος.

12. Τὸ σύνολο τῶν ἀπόλυτων ἀκεραίων περιέχει ἕνα μόνον ἀριθμὸ περισσότερο ἀπὸ τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εἶναι ὁ 0 (μηδέν).

Βλέπομε τώρα ὅτι οἱ ἀριθμοί, π.χ. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ δὲν εἶναι οὔτε ἀκέραιοι οὔτε φυσικοὶ ἀριθμοί. Αὐτοὶ ἀνήκουν σὲ ἄλλο σύνολο. Ἀνήκουν στὸ **σύνολο τῶν κλασμάτων,** ποὺ θὰ τὰ μάθωμε ἀργότερα.

Ὅταν λοιπὸν μιλᾶμε γιὰ ἀριθμούς, πρέπει νὰ ξέρωμε γιὰ ποιούς ἀκριβῶς ἀριθμοὺς ἐνδιαφερόμαστε. Στὴν ἀρχὴ μαθαίνομε νὰ κάνωμε πράξεις, νὰ κάνωμε σκέψεις, νὰ λογαριάζωμε καὶ νὰ λύνωμε προβλήματα, μόνο μὲ ἀκεραίους. Δηλαδή, ὅπως εἴπαμε, μὲ τοὺς ἀπόλυτους ἀκεραίους : 0, 1, 2, 3, 4, 5, . . . κλπ.

I. ΑΙΣΘΗΤΟΠΟΙΗΣΗ, ΟΡΙΣΜΟΙ, ΑΡΙΘΜΗΣΗ

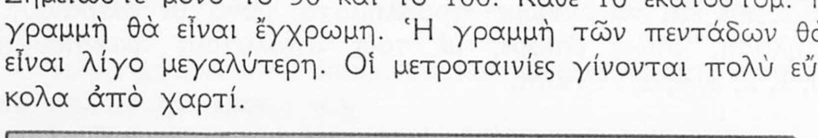
Ἀντικείμενα ποὺ μπορεῖτε νὰ χρησιμοποιῆτε, γιὰ νὰ λογαριάζετε

Στὸ σχολεῖο σας θὰ ἔχετε διάφορα πράγματα ποὺ θὰ σᾶς βοηθοῦν ὄχι μόνο νὰ κάνετε τοὺς λογαριασμούς, ἀλλὰ καὶ νὰ βεβαιώνεστε ὅτι τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι σωστό. Ἂν τυχὸν δὲν ἔχετε, πρέπει ὁπωσδήποτε νὰ τὰ συγκεντρώσετε ἢ νὰ τὰ κάμετε μόνοι σας. Εἶναι πολὺ εὔκολο. Θ᾽ ἀριθμῆτε πρόσωπα, ζῶα ἢ πράγματα ποὺ βλέπετε γύρω σας. Ἐπίσης θὰ χρησιμοποιῆτε γιὰ τοὺς λογαριασμούς σας :

1. Χάντρες περασμένες σὲ κλωστή. Ἀντὶ γιὰ χάντρες μπορεῖτε νὰ ἔχετε μακαρόνια «κοφτά». Τὰ χρωματίζετε μὲ διάφορα χρώματα καὶ τὰ περνᾶτε σὲ κλωστή.

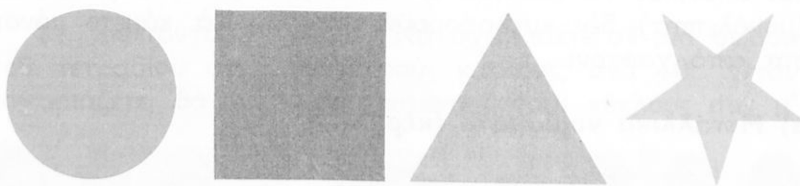
2. Μικρὰ ἀτομικὰ ἀριθμητήρια μὲ 100 σφαιρίδια, ἐκτὸς ἀπὸ τὸ ἀριθμητήριο τῆς τάξης.

3. Χάρτινες μετροταινίες χωρισμένες σὲ δακτύλους (ἑκατοστόμετρα), ἀλλὰ χωρὶς ἀριθμούς, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα. Σημειῶστε μόνο τὸ 50 καὶ τὸ 100. Κάθε 10 ἑκατοστόμ. ἡ γραμμὴ θὰ εἶναι ἔγχρωμη. Ἡ γραμμὴ τῶν πεντάδων θὰ εἶναι λίγο μεγαλύτερη. Οἱ μετροταινίες γίνονται πολὺ εὔκολα ἀπὸ χαρτί.

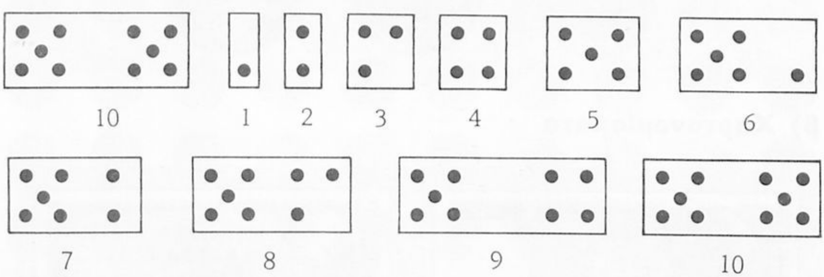


4. Κομμάτια σπάγγου τῶν 10 μέτρων (δεκάμετρα) καὶ τῶν 100 μέτρων (ἑκατόμετρα), γιὰ νὰ μετρᾶτε μεγαλύτερες ἀποστάσεις.

5. «Μάρκες» ἔγχρωμες ἀπὸ χαρτόνι· κόβετε πολλοὺς μικροὺς κύκλους, τετράγωνα, τρίγωνα, ἄστρα κλπ. ἀπὸ χαρτόνι, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα, καὶ τὰ χρωματίζετε.



6. Διάφορα σχήματα (κύκλους, τετράγωνα, τρίγωνα, ὀρθογώνια κλπ.) σχεδιασμένα ἀνὰ 10 σὲ ταινίες ἀπὸ χαρτόνι. Κατασκευάζετε πολλὲς τέτοιες ταινίες. Κόβετε μὲ τὸ ψαλίδι μερικὲς ἀπὸ αὐτὲς ἔτσι, ὥστε νὰ ἔχετε κομματάκια μ' ἕνα, δύο, τρία, τέσσερα, πέντε, ἕξι, ἑφτά, ὀχτώ, ἐννέα μικρὰ σχήματα μὲ κύκλους, τετράγωνα κλπ. Π.χ.:



7. Ξυλάκια (ὀδοντογλυφίδες κλπ.), δεμένα ἀνὰ 10 σὲ δεσμίδες.

8. Ὄσπρια ἢ ἄλλους σπόρους, ποὺ ὑπάρχουν στὸν τόπο σας.

9. Εἰκόνες διάφορων ἀντικειμένων : αὐτοκινήτων, πλοίων, δέντρων, λουλουδιῶν κλπ. Τὶς ζωγραφίζετε μόνοι σας στὰ τετράδιά σας. Ζωγραφίζετε ἐπίσης κύκλους, τετράγωνα, τρίγωνα, ἄστρα, γραμμές, τελεῖες κλπ. μὲ χρωματιστὰ μολύβια.

10. Νομίσματα (δραχμές, δεκάρες κλπ.) πραγματικὰ καὶ εἰκονικά. Τὰ εἰκονικὰ θὰ τὰ κάμετε μόνοι σας. Λεπτὰ (μονόλεπτα) δὲν κυκλοφοροῦν σήμερα. Νὰ κάμετε μόνοι σας ἀπὸ χαρτόνι.

α) Μεταλλικὰ νομίσματα (κέρματα)

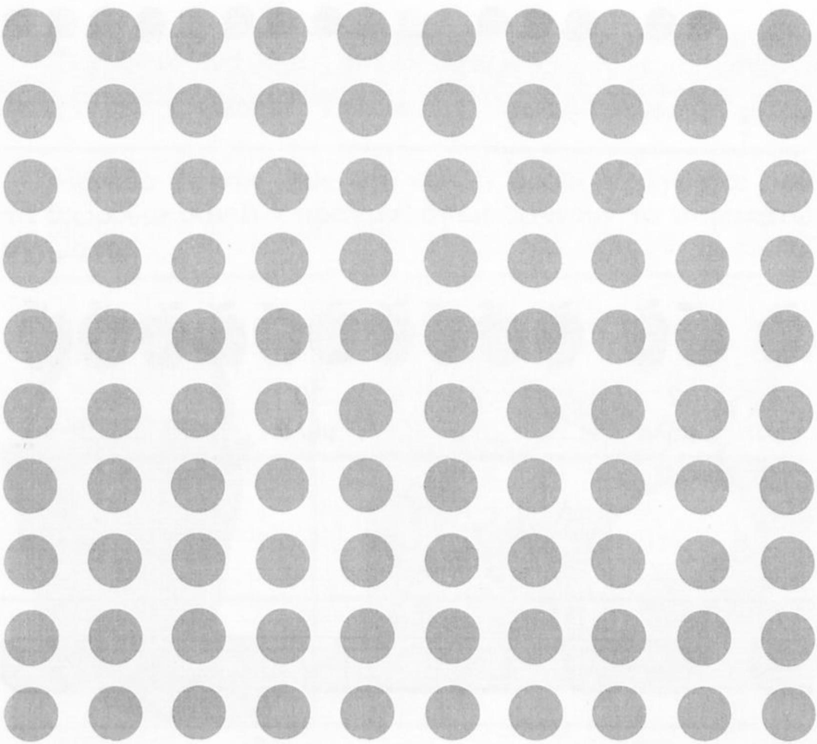
β) Χαρτονομίσματα

πενηντάδραχμο ἑκατοντάδραχμο

πεντακοσιόδραχμο

χιλιόδραχμο

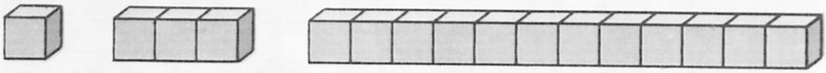
11. Ἑκατοντάδα κύκλων. Νὰ σχεδιάσετε σὲ μιὰ σελίδα τοῦ τετραδίου σας 100 μικροὺς κύκλους, ἀνὰ 10. Ὅταν λογαριάζετε, θὰ ἔχετε σκεπασμένους τοὺς κύκλους σας μ᾽



ἕνα φύλλο χαρτὶ καὶ κάθε φορὰ θὰ μετακινῆτε τὸ φύλλο καὶ θὰ ξεσκεπάζετε τοὺς κύκλους ποὺ θέλετε ν᾽ ἀριθμήσετε. Νὰ χρωματίσετε τοὺς κύκλους μὲ χρώματα ποὺ σᾶς ἀρέσουν.

Καθένας σας πρέπει καὶ μπορεῖ νὰ ἔχῃ τὶς δικές του μετροταινίες, τὰ δικά του σχήματα, τὰ δικά του ἀντικείμενα. Θὰ μετρᾶτε, θὰ συγκρίνετε καὶ θὰ λογαριάζετε, χρησιμοποιώντας συγχρόνως τ᾽ ἀντικείμενά σας.

Ἡ μονάδα



1 δραχμὴ

3 δραχμὲς

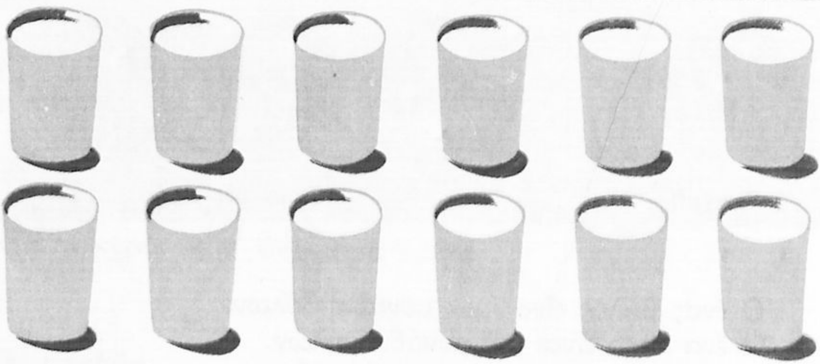
Ὁ ἕνας βόλος εἶναι μιὰ μονάδα βόλων.
Τὸ ἕνα μῆλο εἶναι μιὰ μονάδα μήλων.
Ὁ ἕνας κύβος εἶναι μιὰ μονάδα κύβων.
Ἡ δραχμὴ εἶναι μονάδα τῶν ἑλληνικῶν νομισμάτων.

Ὥστε, τὸ ἕνα ἀπὸ πολλὰ πράγματα λέγεται μονάδα τῶν πραγμάτων αὐτῶν.

Μονάδα ἐπίσης λέμε καὶ πολλὰ ὅμοια πράγματα ποὺ τὰ θεωροῦμε σὰν ἕνα πρᾶγμα, ὅπως δείχνουν τὰ παρακάτω σχήματα.

1 καλάθι μῆλα

1 κοπάδι πρόβατα

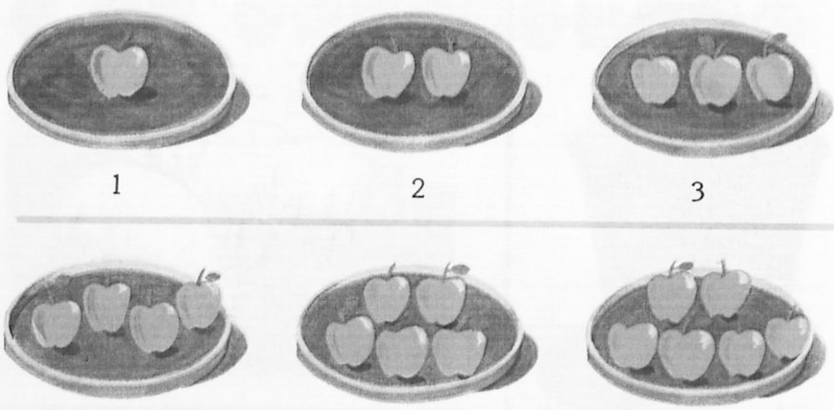


1 δωδεκάδα ποτήρια

Ἐπίσης 1 κουτὶ γλυκά, 1 τάξη μαθητῶν, 1 ἀνθοδέσμη εἶναι μονάδες.

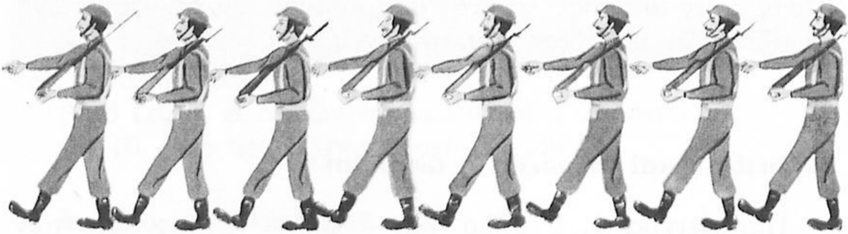
Νὰ πῆτε κι ἐσεῖς παραδείγματα ὅμοιων πραγμάτων, ποὺ τὰ θεωροῦμε σὰν ἕνα πρᾶγμα.

Οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ



1 2 3

4 5 6



1ος 2ος 3ος 4ος 5ος 6ος 7ος 8ος

Στὸ πρῶτο σχῆμα οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4, 5 κλπ. δείχνουν πόσα εἶναι τὰ ὅμοια πράγματα (μῆλα), δείχνουν τὸ πλῆθος τῶν ὅμοιων πραγμάτων.

Στὸ δεύτερο σχῆμα ἔχομε μιὰ ἀκολουθία στρατιωτῶν. Οἱ ἀριθμοὶ 1ος, 2ος, 3ος, 4ος, 5ος κλπ. δείχνουν τὴ θέση ποὺ ἔχει ὁ κάθε στρατιώτης στὴν ἀκολουθία.

Ὥστε, κάθε φυσικὸς ἀριθμὸς φανερώνει τὸ πλῆθος τῶν πραγμάτων· φανερώνει ἐπίσης καὶ τὴ θέση ποὺ ἔχει καθένα ἀπὸ τὰ πράγματα σὲ μιὰ ἀκολουθία.

Συγκεκριμένοι καὶ ἀφηρημένοι ἀκέραιοι

Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ 6 τετράδια, 8 μπαλόνια, 20 δραχμές, 10 μαθητὲς φανερώνουν ὄχι μόνο τὸ πλῆθος ἀλλὰ καὶ τὸ εἶδος τῶν μονάδων τους. Ἐπίσης, ἂν ἕνας μαθητὴς δὲν ἔχῃ καθόλου δραχμὲς στὴν τσέπη του, δηλώνομε ὅτι «ἔχει 0 δραχμὲς στὴν τσέπη του». Οἱ ἀκέραιοι: 6 τετράδια, 8 μπαλόνια, 20 δραχμές, 0 δραχμὲς, λέγονται συγκεκριμένοι ἀκέραιοι.

Ὥστε, ἕνας ἀκέραιος λέγεται συγκεκριμένος, ἂν φανερώνῃ καὶ τὸ εἶδος τῶν μονάδων του.

Ὅταν παίζετε κρυφτὸ καὶ μετρᾶτε 1, 2, 3, 4, 5 κλπ., τότε οἱ ἀκέραιοι αὐτοὶ φανερώνουν μόνο τὸ πλῆθος ὄχι ὅμως καὶ τὸ εἶδος τῶν μονάδων τους· εἶναι ἀφηρημένοι ἀκέραιοι.

Ὥστε, ἕνας ἀκέραιος λέγεται ἀφηρημένος, ἂν δὲν φανερώνη τὸ εἶδος τῶν μονάδων του.

Ὁμοειδεῖς καὶ ἑτεροειδεῖς ἀκέραιοι

Παράδειγμα 1. 5 μῆλα καὶ 7 μῆλα. Οἱ μονάδες τῶν συγκεκριμένων ἀκεραίων 5 μῆλα καὶ 7 μῆλα ἔχουν τὸ ἴδιο ὄνομα. Οἱ ἀκέραιοι αὐτοὶ λέγονται ὁ μ ο ε ι δ ε ῖ ς.

Παράδειγμα 2. 3 σπίτια, 8 δέντρα. Οἱ μονάδες τῶν συγκεκριμένων ἀκεραίων 3 σπίτια καὶ 8 δέντρα δὲν ἔχουν τὸ ἴδιο ὄνομα. Οἱ ἀκέραιοι αὐτοὶ λέγονται ἑ τ ε ρ ο ε ι δ ε ῖ ς.

Παράδειγμα 3. 4 δραχμές, 5 δεκάρες. Οἱ συγκεκριμένοι αὐτοὶ ἀκέραιοι φανερώνουν καὶ οἱ δύο νομίσματα (χρήματα), ἀλλὰ δὲν εἶναι ὁμοειδεῖς, διότι οἱ μονάδες τους δὲν ἔχουν τὸ ἴδιο ὄνομα. Εἶναι ἀκέραιοι ἑτεροειδεῖς. Μποροῦμε ὅμως νὰ τοὺς κάνωμε ὁμοειδεῖς, ἂν τρέψωμε τὶς 4 δραχμὲς σὲ δεκάρες (40). Τότε θὰ ἔχωμε 40 δεκάρες καὶ 5 δεκάρες (ἀκέραιοι ὁμοειδεῖς).

Συμπέρασμα :

1) Δύο συγκεκριμένοι ἀκέραιοι λέγονται ὁμοειδεῖς, ὅταν οἱ μονάδες τους ἔχουν τὸ ἴδιο ὄνομα.

2) Δύο συγκεκριμένοι ἀκέραιοι λέγονται ἑτεροειδεῖς, ὅταν οἱ μονάδες τους δὲν ἔχουν τὸ ἴδιο ὄνομα.

3) Οἱ ἀφηρημένοι ἀκέραιοι θεωροῦνται ὁμοειδεῖς.

Ἄρτιοι καὶ περιττοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ

Οἱ ἀκέραιοι 0,2,4,6,8,10,12 κλπ. λέγονται ἄρτιοι (ζυγοί). Οἱ ζυγοὶ ἀκέραιοι διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 2.

Οἱ ἀκέραιοι 1,3,5,7,9,11,13 κλπ. λέγονται περιττοὶ (μονοί). Οἱ μονοὶ ἀκέραιοι δὲν διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 2, ἀφήνουν ὑπόλοιπο πάντοτε 1.

Ἀσκήσεις

Νὰ γράψετε: α) 10 ἀκέραιους ἀριθμοὺς συγκεκριμένους καὶ 10 ἀφηρημένους.

β) 5 ζεύγη ὁμοειδῶν ἀκεραίων καὶ 5 ἑτεροειδῶν.

γ) 10 ἀκέραιους ζυγοὺς καὶ 10 μονούς.

Ἡ δεκάδα, ἡ ἑκατοντάδα

1 χάντρα — 10 χάντρες — 100 χάντρες

10 χάντρες (10 ἁπλὲς μονάδες) κάνουν 1 δεκάδα χάντρες. Ἡ δεκάδα εἶναι μονάδα ἀνώτερης τάξης ἀπὸ τὴν ἁπλὴ μονάδα (τὴ μιὰ χάντρα).
10 δεκάδες χάντρες κάνουν 100 χάντρες ἢ 1 ἑκατοντάδα χάντρες. Ἡ ἑκατοντάδα εἶναι μονάδα ἀμέσως ἀνώτερης τάξης ἀπὸ τὴ δεκάδα.

Ἄσκηση

Νὰ σχηματίσετε δεκάδες κι ἑκατοντάδες μὲ τ' ἀντικείμενά σας.

Γραφὴ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν

Γιὰ νὰ γράφωμε φυσικοὺς ἀριθμούς, ἔχομε τὰ γνωστά μας δέκα ψηφία: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Μὲ αὐτὰ μποροῦμε νὰ γράφωμε ὄχι μόνο τοὺς ἀκεραίους μηδέν, ἕνα, δύο, τρία, τέσσερα, πέντε, ἕξι, ἑφτά, ὀχτώ, ἐννέα ἀλλὰ καὶ ὅλους τοὺς ἄλλους πέρα ἀπὸ τὸ ἐννέα.

Αὐτὸ γίνεται, διότι μὲ τὰ ἴδια ψηφία παριστάνομε ὄχι μόνο τὶς ἁπλὲς μονάδες ἀλλὰ καὶ τὶς δεκάδες καὶ τὶς ἑκατοντάδες κλπ. Π.χ. ὁ ἀριθμὸς εἴκοσι δύο κάστανα ἀποτελεῖται ἀπὸ 2 δεκάδες κάστανα καὶ 2 κάστανα καὶ γράφεται 22. Ὁ ἀριθμὸς διακόσια εἴκοσι δύο κάστανα ἀποτελεῖται ἀπὸ 2 ἑκατοντάδες, 2 δεκάδες καὶ 2 κάστανα καὶ γράφεται 222. Βλέπομε ὅτι μὲ τὸ ἴδιο ψηφίο παριστάνομε καὶ τὶς 2 ἁπλὲς μονάδες καὶ τὶς 2 δεκάδες καὶ τὶς 2 ἑκατοντάδες. Καταλαβαίνομε ὅμως ὅτι ἡ ἀξία τοῦ ψηφίου ἀλλάζει σύμφωνα μὲ τὴ θέση ποὺ ἔχει.

Σημείωση. Τὸ ψηφίο τῶν ἁπλῶν μονάδων γράφεται στὸ τέλος. Ἀμέσως ἀριστερὰ ἀπὸ αὐτὸ γράφεται τὸ ψηφίο τῶν δεκάδων κι ἀμέσως ἀριστερὰ ἀπὸ αὐτὸ γράφεται τὸ ψηφίο τῶν ἑκατοντάδων.

Παρατήρηση. Ὅταν δὲν ὑπάρχουν μονάδες μιᾶς τάξης, στὴ θέση τους γράφομε μηδέν. Π.χ. ὁ ἀκέραιος σαράντα γράφεται 40, διότι ἀποτελεῖται ἀπὸ 4 δεκάδες καὶ 0 μονάδες. Ὁ ἀκέραιος ἑκατὸν πέντε γράφεται 105, διότι ἀποτελεῖται ἀπὸ 1 ἑκατοντάδα, 0 δεκάδες καὶ 5 μονάδες.

Ἀνάλυση καὶ σύνθεση τῶν ἀκεραίων ἀπὸ 0 ὡς τὸ 100

Ἀσκήσεις

(Θὰ τὶς λύνετε προφορικὰ κι ἔπειτα θὰ γράφετε τὶς ἀπαντήσεις στὰ τετράδιά σας).

1. Πόσες δραχμὲς ἔχει 1 δεκάρικο ; Πόσες ἔχουν τὰ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 δεκάρικα;

Ν' ἀριθμήσετε ἀνὰ 10 ἀπὸ τὸ 0 ὡς τὸ 100· ἔτσι θὰ ἔχετε τὴν ἀκολουθία: 10, 20, 30 κλπ. (Χρησιμοποιῆστε κύβους, ἀριθμητήρια, τὴν ἑκατοντάδα τῶν κύκλων, μετροταινίες, ξύλινα μέτρα, νομίσματα κλπ.).

2. Πόσες δραχμὲς ἔχουν τὰ 2, 3, 4, 5, . . . 20 πεντάδραχμα (τάληρα) ;

Ν' ἀριθμήσετε ἀνὰ 5 ἀπὸ τὸ 0 ὡς τὸ 100· ἔτσι : 5, 10, 15 κλπ. Καὶ ἀντίθετα ἀπὸ τὸ 100 ὡς τὸ μηδέν : 100, 95, 90, 85 κλπ.

3. Τὸ 10 ἔχει 1 δεκάδα. Πόσες δεκάδες ἔχει τὸ 20, 30, 40. . . 100 ; Νὰ γράψετε τὶς ἀπαντήσεις σας.

4. Ν' ἀριθμήσετε ἀνὰ 1 ἀπὸ τὸ 0 ὡς τὸ 100· καὶ ἀπὸ τὸ 100 ὡς τὸ 0.

5. Ν' ἀριθμήσετε ἀνὰ δύο ἀπὸ τὸ 0 ὡς τὸ 100 (ζυγοὶ ἀκέραιοι)· ἐπίσης ἀπὸ τὸ 1 ὡς τὸ 99 (μονοὶ ἀκέραιοι).

6. Ν' ἀριθμήσετε ἀνὰ δύο ἀπὸ τὸ 100 ὡς τὸ 0· ἐπίσης ἀνὰ δύο ἀπὸ τὸ 99 ὡς τὸ 1. (Χρησιμοποιῆστε τὴ μετροταινία, τὴ σκάλα ἐδάφους κλπ.).

7. Ν' ἀριθμήσετε ἀνὰ τρία ἀπὸ τὸ 90 ὡς τὸ 99· ἐπίσης ἀνὰ τρία ἀπὸ τὸ 81 ὡς τὸ 100.

Σημείωση. Νὰ γράφετε τὶς ἀριθμητικὲς ἀκολουθίες ποὺ σχηματίζετε.

Ἀσκήσεις μὲ μονάδες

1. Τὸ 10 ἔχει 1 δεκάδα καὶ 0 μονάδες.
Τὸ 20 ἔχει 2 δεκάδες καὶ 0 μονάδες.

Συνεχίστε μόνοι σας ὡς τὸ 100.

2. Τὸ 11 ἔχει 1 δεκάδα καὶ 1 μονάδα.
Τὸ 12 ἔχει 1 » καὶ 2 μονάδες.
Τὸ 13 ἔχει 1 » καὶ 3 »

Συνεχίστε μόνοι σας ὡς τὸ 19.
Κάμετε τὸ ἴδιο καὶ μὲ τὶς ἑπόμενες δεκάδες.

3. Πόσες δεκάδες καὶ πόσες μονάδες ἔχουν οἱ ἀκέραιοι 31, 34, 39, 58, 63, 75, 79, 82, 47, 66, 90, 28, 30, 17;

4. Παράδειγμα. 1 δεκάδα καὶ 8 μονάδες = 18 μονάδες. Δηλαδὴ $10 + 8 = 18$. Τὸ σύμβολο + τῆς προσθέσεως τὸ

διαβάζομε **σύν,** ποτὲ καί. Τὸ σύμβολο = διαβάζομε **εἶναι ἴσον μὲ** ἢ **ἰσοῦται μέ.** Τὸ $10 + 8$ λέγεται **ἄθροισμα** τῶν ἀκεραίων 10 καὶ 8. Αὐτὸ τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται μὲ 18. Δηλαδὴ $10 + 8 = 18$. Ὁ 18 λέγεται **ἐξαγόμενο** τοῦ ἀθροίσματος $10 + 8$. Οἱ 10 καὶ 8 ποὺ θέλομε νὰ προσθέσωμε λέγονται **προσθετέοι.**

Πόσες μονάδες ἔχουν:

2 δεκάδες καὶ 5 μονάδες;	5 δεκάδες καὶ 6 μονάδες;
4 » » 4 »	7 » » 7 »
3 » » 2 »	6 » » 3 »

5. Παραδείγματα. α) $35 = 30 + 5$. β) $57 = 50 + 7$. Κάμετε τὸ ἴδιο μὲ ὅλους τοὺς μονοὺς ἀκεραίους ποὺ βρίσκονται μεταξὺ τοῦ 20 καὶ τοῦ 60, καὶ μὲ ὅλους τοὺς ζυγοὺς ἀκεραίους μεταξὺ τοῦ 31 καὶ τοῦ 79.

6. Παραδείγματα. $26+2 = 20+6+2 = 20+8 = 28$
$39+0 = 30+9+0 = 30+9 = 39$

Νὰ ἐργαστῆτε μὲ τὸν ἴδιο τρόπο στὶς παρακάτω ἀσκήσεις:

$54+2 =$	$48+0 =$	$15+4 =$	$82+5 =$	$27+2 =$
$62+3 =$	$73+2 =$	$36+0 =$	$61+4 =$	$24+4 =$
		$90+5 =$		
		$98+1 =$		

Νὰ κάμετε καὶ μόνοι σας ὅμοιες ἀσκήσεις μὲ ἀκεραίους ποὺ εἶναι μεγαλύτεροι ἀπὸ τὸ 55 καὶ μικρότεροι ἀπὸ τὸ 78.

7. Παραδείγματα.

$10+1=11$	$20+1=21$	$30+1=31$	$40+1=41$
$10+2=12$	$20+2=22$	$30+2=32$	$40+2=42$
κλπ. ὡς τὸ	κλπ. ὡς τὸ	κλπ. ὡς τὸ	κλπ. ὡς τὸ
$10+9=$	$20+9=$	$30+9=$	$40+9=$

Ἂν στὸ ἄθροισμα $10+8$ **ἀντιμεταθέσωμε** τοὺς προσθετέους θὰ λάβωμε $8+10$ ποὺ πάλι ἰσοῦται μὲ 18. Δηλαδὴ $10+8=8+10$. Ὥστε:

Ἂν σ' ἕνα ἄθροισμα **ἀντιμεταθέσωμε** τοὺς προσθετέους, τὸ ἄθροισμα δὲ μεταβάλλεται. Π.χ. $8+5+2=$ $=8+2+5$.

Ἀσκήσεις μὲ δεκάδες

Πρώτη ὁμάδα

Ν' ἀντικαταστήσετε τὸ ἐρωτηματικὸ μὲ τὸν ἀκέραιο ποὺ ταιριάζει.

10+ ; =40	30+ ; =80	60=50 + ;	; +50= 90
10+ ; =50	40+ ; =100	70=30 + ;	; +30=100

2. Πόσα γίνονται ;

20+20+40= ;	20+30+ 40= ;	30+40+30= ;
10+30+50= ;	20+60+ 20= ;	40+20+ 0= ;
	50+10+ 20= ;	
	30+30+ 20= ;	

Σημείωση. Ὅταν ἔχωμε νὰ προσθέσωμε πολλοὺς ἀκεραίους, μποροῦμε νὰ προσθέσωμε τὸν πρῶτο μὲ τὸ δεύτερο, τὸ ἄθροισμά τους μὲ τὸν τρίτο, τὸ νέο ἄθροισμα μὲ τὸν τέταρτο κ.ο.κ., ὥσπου νὰ προσθέσωμε ὅλους τοὺς προσθετέους.

Δεύτερη ὁμάδα

Μάθαμε στὴν ἀφαίρεση ὅτι $8-5=3$. Τὸ σύμβολο $-$ τῆς ἀφαιρέσεως τὸ προφέρομε **πλὴν** ἢ **μεῖον.** Ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος 8, **ποὺ πρέπει νὰ μειωθῆ,** λέγεται **μειωτέος.** Ὁ ἀκέραιος 5, **ποὺ πρέπει νὰ ἀφαιρεθῆ,** λέγεται **ἀφαιρετέος.** Τὸ $8-5$ λέγεται **διαφορὰ** (μεταξὺ) τῶν ἀκεραίων 8 καὶ 5 (πρῶτα γράφομε τὸ μειωτέο 8). Ἐδῶ ἡ διαφορὰ $8-5$ ἰσοῦται μὲ 3. Δηλαδὴ $8-5=3$. Ὁ 3 εἶναι τὸ **ἐξαγόμενο** τῆς διαφορᾶς $8-5$. Σὲ ὁρισμένες περιπτώσεις, ἡ διαφορὰ συγκεκριμένων ἀριθμῶν λέγεται **ὑπόλοιπο.**

1. α) Ν' ἀντικαταστήσετε τὸ ἐρωτηματικὸ μὲ τὸν ἀφαιρετέο ποὺ ταιριάζει.

50 – ; = 20	70 – ; = 40
50 – ; = 0	90 – ; = 50

β) Ν' ἀντικαταστήσετε τὸ ἐρωτηματικὸ μὲ τὸν μειωτέο ποὺ ταιριάζει.

; – 10 = 40	; – 50 = 0
; – 20 = 20	; – 60 = 40

2. Πόσα μένουν ;

100 – 10 – 20 =	80 – 40 – 20 =	90 – 30 – 20 =
100 – 20 – 30 =	70 – 20 – 20 =	90 – 40 – 50 =
	70 – 30 – 30 =	
	60 – 40 – 0 =	
	70 – 30 – 30 =	
	60 – 40 – 0 =	

3. Πόσα γίνονται ;

50 + 30 – 20 – 40 =	70 – 10 – 30 – 20 =
80 – 20 – 10 + 30 =	20 + 60 – 10 + 30 =
30 + 40 – 50 + 20 =	
60 – 20 + 40 – 30 =	

4. Προσθέτω καὶ ἀφαιρῶ τοὺς ἴδιους ἀκεραίους.

Παράδειγμα. 20 + 30 = 50 50 – 30 = 20
30 + 20 = 50 50 – 20 = 30

Νὰ κάμετε τὸ ἴδιο στὶς παρακάτω ἀσκήσεις :

30 + 10, 60 + 20, 50 + 40, 70 + 30, 40 + 20.

Τρίτη ὁμάδα

1. Πόσα γίνονται ;

α) $1 \times 10 =$	$1 \times 20 =$	$1 \times 30 =$	$1 \times 50 =$
β) $9 \times 10 =$	$2 \times 40 =$	$3 \times 30 =$	$5 \times 20 =$

2. Νὰ κάμετε τὶς διαιρέσεις :

100 : 2	80 : 4	60 : 3	40 : 2	50 : 5	70 : 10
100 : 5	80 : 8	60 : 6	40 : 4	50 : 10	90 : 9
100 : 10	80 : 10	60 : 10	40 : 10	70 : 7	90 : 10

3. Πόσα γίνονται ; (Πρῶτα νὰ ἐκτελέσετε τὶς πράξεις, ποὺ εἶναι μέσα στὶς παρενθέσεις).

$$(20 + 10) \times 3 = ;$$
$$(30 + 20) + (4 + 10) = ;$$
$$(100 - 20 - 60 + 10) \times 3 = ;$$
$$(4 \times 20) - (10 \times 7) = ;$$

4. Τὸ μισὸ $\left(\frac{1}{2}\right)$ τοῦ 20 εἶναι 10. Νὰ βρῆτε τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν ἀριθμῶν 40, 60, 80, 100, 10, 30, 50, 70, 90.

Τὸ ἕνα τρίτο $\left(\frac{1}{3}\right)$ τοῦ 30 εἶναι 10. Νὰ βρῆτε τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ 60, 90.

Τὸ ἕνα τέταρτο $\left(\frac{1}{4}\right)$ τοῦ 40 εἶναι 10. Νὰ βρῆτε τὸ $\left(\frac{1}{4}\right)$ τοῦ 80, 20, 100, 60.

Τὸ ἕνα πέμπτο $\left(\frac{1}{5}\right)$ τοῦ 50 εἶναι 10. Νὰ βρῆτε τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ 100, 40, 80, 10, 30, 60.

5. Τί ἀριθμοὶ εἶναι οἱ $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$;

2. ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΑΠΟ ΜΝΗΜΗΣ

Πρόσθεση μονοψηφίου σὲ ἄλλον ἀριθμό, χωρὶς κρατούμενα

1. Νὰ ὑπολογίσετε τὰ ἀθροίσματα:

α) $1+3=$, $11+3=$, $21+3=$, κλπ. ὡς τὸ $91+3=$
β) $1+4=$, $11+4=$, $21+4=$, κλπ. ὡς τὸ $91+4=$

2. Νὰ σχηματίσετε παρόμοια ἀθροίσματα μὲ δεύτερο προσθετέο τὸ 5, 6, 7, 8, 9.

Ἀφαίρεση μονοψηφίου ἀπὸ ἄλλον ἀκέραιο χωρὶς κρατούμενα

1. Νὰ ὑπολογίσετε τὶς διαφορές :

$9-4=$	$8-6=$	$7-3=$
$19-4=$	$18-6=$	$17-3=$
$29-4=$	$28-6=$	$27-3=$
κλπ. ὡς τὸ	κλπ. ὡς τὸ	ὡς τὸ
$99-4=$	$98-6$	$97-3=$

$6-5=$	$5-2=$	$9-7=$
$16-5=$	$15-2=$	$19-7=$
$26-5=$	$25-2=$	$29-7=$
ὡς τὸ	ὡς τὸ	ὡς τὸ
$96-5=$	$95-2=$	$99-7=$

2. α) $10-3$, $20-3$, $30-3$, $40-3$ κλπ. ὡς τὸ $100-3$
β) $10-4$, $20-4$, $30-4$, $40-4$ κλπ. ὡς τὸ $100-4$

Νὰ σχηματίσετε ὅμοιες διαφορὲς μὲ ἀφαιρετέο τὸ 5, 6, 7, 8, 9.

Ἀριθμητικὲς ἀκολουθίες μὲ τὸ 4

1. Ν' ἀριθμήσετε ἀνὰ τέσσερα ἀπὸ τὸ 0 ὡς τὸ 100. Δηλαδή : 4, 8, 12, 16 κλπ. (Χρησιμοποιῆστε κύβους, ὅσ-

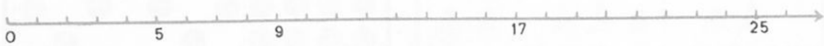
πρια, μάρκες, σχήματα στὸ τετράδιο, μετροταινία κλπ.). Νὰ κάμετε τὸ ἴδιο ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ 1 (δηλαδή: 1, 5, 9, 13 κλπ.)· ἔπειτα ἀπὸ τὸ 2 καὶ τέλος ἀπὸ τὸ 3.

2. Νὰ κατεβῆτε ἀπὸ τὸ 100 ὡς τὸ 0 ἀνὰ τέσσερα. Νὰ κάμετε τὸ ἴδιο ἀρχίζοντας πρῶτα ἀπὸ τὸ 99, ἔπειτα ἀπὸ τὸ 98 καὶ τέλος ἀπὸ τὸ 97.

Νὰ γράψετε τὶς παραπάνω ἀκολουθίες καὶ νὰ τὶς ἀπομνημονεύσετε.

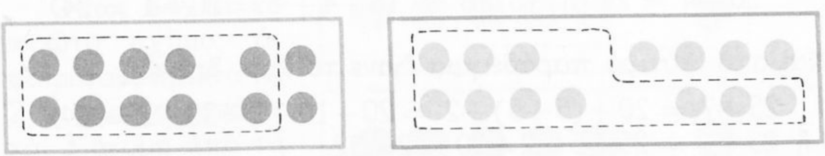
3. Συνεχίστε πάνω σὲ ἀριθμητικὲς γραμμὲς τὴν ἀκολουθία 4, 8, 12 κλπ., ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα.

4. Νὰ συμπληρώσετε τὴν ἀκολουθία ποὺ δείχνει ἡ ἀριθμητικὴ γραμμὴ καὶ νὰ τὴ συνεχίσετε σὲ ἄλλες ἀριθμητικὲς εὐθεῖες.



Πρόσθεση μονοψηφίου σὲ ἄλλον ἀκέραιο, μὲ κρατούμενα

1. Παραδείγματα: α) $8 + 4 = ;$ β) $7 + 7 = ;$



Ὅπως δείχνει τὸ πρῶτο σχῆμα, κλείσαμε μέσα σὲ καμπύλη γραμμὴ τοὺς 8 κύκλους τῆς μιᾶς ὁμάδας καὶ δύο ἀκόμη κύκλους τῆς ἄλλης ὁμάδας, γιὰ νὰ κάνωμε ὁλόκληρη δεκάδα. Ἔπειτα προσθέσαμε καὶ τοὺς ὑπόλοιπους 2. Δηλαδή: $8+4=8+2+2=10+2=12$.

Τὸ ἴδιο ἔγινε καὶ στὸ δεύτερο παράδειγμα, δηλαδή: $7+7=7+3+4=10+4=14$.

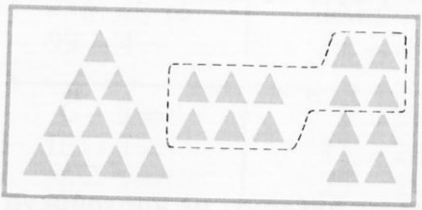
Σημείωση. Στὸ πρῶτο παράδειγμα ἑνώσαμε 8 κύκλους καὶ τοὺς 4 κύκλους καὶ βρήκαμε τὸ ἄθροισμά τους, δηλαδὴ 12. Ὁ νέος ἀριθμὸς 12 περιέχει ὅλες τὶς μονάδες (κύκλους) τῶν ἀριθμῶν 8 καὶ 4 καὶ μόνο αὐτές.

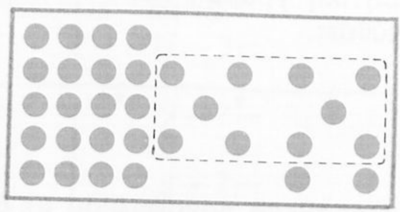
Τὸ ἴδιο κάναμε καὶ στὸ δεύτερο παράδειγμα.

Ἡ πράξη αὐτὴ μὲ τὴν ὁποία βρίσκομε τὸ ἄθροισμα δεδομένων ἀκέραιων ἀριθμῶν λέγεται πρόσθεση.

Ὥστε, πρόσθεση ἀκεραίων εἶναι ἡ πράξη μὲ τὴν ὁποία βρίσκομε νέο ἀκέραιο (ἄθροισμα), ὁ ὁποῖος περιέχει ὅλες τὶς μονάδες τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν καὶ μόνο αὐτές.

2. Παραδείγματα: α) $16+8=\,;$ β) $25+7=\,;$





Καὶ στὰ παραπάνω δύο παραδείγματα κάναμε τὸ ἴδιο.

Δηλαδή: $16+8=10+(6+4)+4=10+10+4=20+4=24$ ἢ $16+8=16+4+4=20+4=24$.

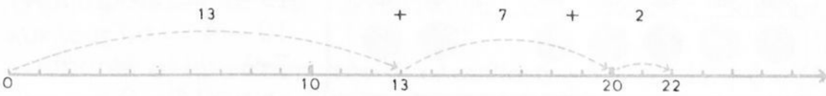
Καὶ στὸ δεύτερο παράδειγμα ἔγινε τὸ ἴδιο, δηλαδή:

$25+7=20+(5+5)+2=20+10+2=30+2=32$

ἢ $25+7=25+5+2=30+2=32$.

Κάμετε καὶ μόνοι σας ὅμοιες ἀσκήσεις μὲ σχήματα· ἐπίσης μὲ μάρκες, κύβους, ἀριθμητήρια κλπ.

3. Πόσα γίνονται $13 + 9$; Χρησιμοποιῆστε τὴν ἀριθμητικὴ εὐθεία.



Ὅπως βλέπετε, 7 μονάδες τοῦ 9 τὶς προσθέσαμε στὸ 13, γιὰ νὰ συμπληρωθῆ 20. Ἔπειτα προσθέσαμε καὶ τὶς ὑπόλοιπες 2. Δηλαδή: $13+9=13+7+2=20+2=22$.

Κάμετε κι ἐσεῖς πολλὲς ὅμοιες ἀσκήσεις, χρησιμοποιώντας τὴν ἀριθμητικὴ γραμμὴ ἢ τὴ μετροταινία σας.

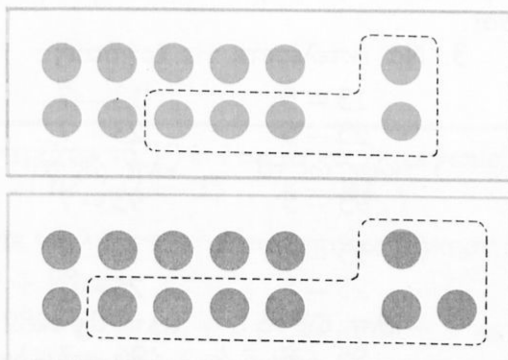
4. Νὰ ἐκτελέσετε τὶς παρακάτω ἐργασίες ἀναλύοντας τὸν δεύτερο προσθετέο σὲ δύο ἀκεραίους, ὥστε νὰ σχηματίζεται ὁλόκληρη δεκάδα (τὴν ἀνάλυση ἀκεραίου σὲ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτερων προσθετέων, τὴν λέμε **προσθετικὴ ἀνάλυση**).

α) $19+3=$, $19+4=$, $19+5=$ κλπ. ὡς τὸ $19+9=$
β) $18+3=$, $18+4=$, $18+5=$ κλπ. ὡς τὸ $18+9=$

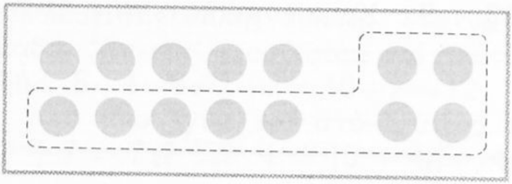
Συνεχίστε μόνοι σας μὲ πρῶτο προσθετέο τὸ 16, 15, 14, 13, 29, 28, 17, 26, 38, 36, 45, 44, 46, 59, 65, 77, 84.

Ἀφαίρεση μονοψηφίου ἀπὸ ἄλλον ἀκέραιο μὲ κρατούμενα

1. Παραδείγματα: $12-5=$; $13-7=$; $14-9=$;



Ὅπως δείχνει τὸ πρῶτο σχῆμα, ἀφαιρέσαμε πρῶτα τὶς 2 χωριστὲς μονάδες καὶ 3 ἀκόμη ἀπὸ τὴ δεκάδα. Δηλαδή: $12-5=12-2-3=10-3=7$



Στὸ δεύτερο παράδειγμα :
13–7 = 13–3–4 = 10 – 4 = 6.
Στὸ τρίτο παράδειγμα: 14 – 9 = 14–4–5= 10–5=5

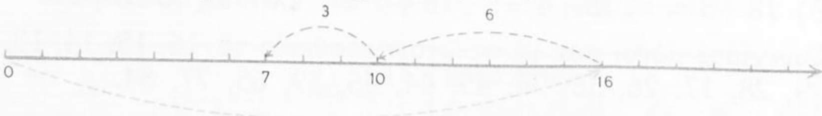
Σημείωση. Στὸ καθένα ἀπὸ τὰ παραπάνω παραδείγματα εἴχαμε δύο ἀκεραίους καὶ λιγοστέψαμε (μειώσαμε) τὸν ἕνα κατὰ τόσες μονάδες, ὅσες μονάδες εἶχε ὁ ἄλλος.

Ἡ πράξη αὐτὴ λέγεται ἀφαίρεση.

Ὥστε, ἀφαίρεση ἀκεραίων εἶναι ἡ πράξη στὴν ὁποία δίνονται δύο ἀκέραιοι καὶ λιγοστεύομε τὸν ἕνα κατὰ τόσες μονάδες, ὅσες μονάδες ἔχει ὁ ἄλλος.

Κάμετε κι ἐσεῖς ὅμοιες ἀσκήσεις. Χρησιμοποιῆστε σχήματα καὶ κατάλληλα ἀντικείμενα.

2. Κάμετε ἐπίσης πολλὲς ἀσκήσεις χρησιμοποιώντας τὴν ἀριθμητικὴ εὐθεία. Π.χ. 16 – 9 = ;



Ὅπως βλέπετε, ἀπὸ τὸ 16 γυρίζομε πίσω 6 θέσεις, ἀφαιροῦμε δηλαδὴ 6, καὶ φτάνομε στὸ 10. Συνέχεια ὀπισθοχωροῦμε ἄλλες 3 θέσεις κι ἔτσι φτάνομε στὸ 7.
Χρησιμοποιῆστε γιὰ ὅμοιες ἀσκήσεις καὶ τὴ μετροταινία σας.

3. Νὰ ἐκτελέσετε τὶς ἐργασίες :

13 – 5	13 – 7	13 – 6
23 – 5	23 – 7	24 – 6
κλπ. ὡς τὸ	κλπ. ὡς τὸ	κλπ. ὡς τὸ
93 – 5	93 – 7	94 – 6
15 – 8	16 – 7	14 – 8
25 – 8	26 – 7	24 – 8
κλπ. ὡς τὸ	κλπ. ὡς τὸ	κλπ. ὡς τὸ
95 – 8	96 – 7	94 – 8

Ἀριθμητικὲς ἀκολουθίες

(Χρησιμοποιῆστε τὴ μετροταινία σας, μάρκες, κύβους, κύκλους).

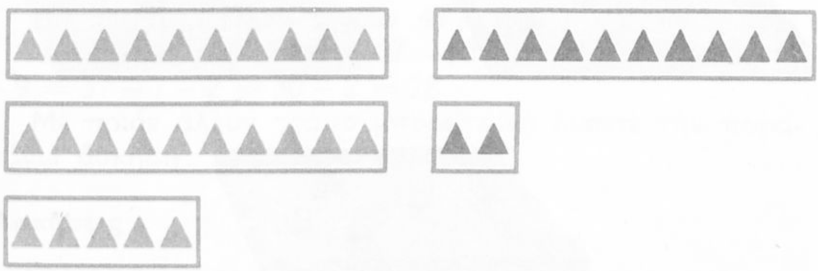
1. Νὰ σχηματίσετε τὴν ἀκολουθία $6+6=12$, $12+6=18$ κλπ., ὡς τὸ $90+6$. Τὴν ἴδια ἀκολουθία νὰ τὴ σχηματίσετε ἀπὸ μνήμης: 6, 12, 18, 24,. . . 96. Σχηματίστε ἄλλη ἀκολουθία τοῦ 6 ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ 1, δηλαδή : 1, 7, 13, 19,. . . 97· ἔπειτα ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ 2· ὕστερα ἀπὸ τὸ 3· κατόπιν ἀπὸ τὸ 4 καὶ τέλος ἀπὸ τὸ 5.

2. Νὰ ἐργαστῆτε κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο καὶ μὲ τὸ 7· δηλαδή, 7, 14, 21, 28,. . ., 98. 1, 8, 15, 22, . . . 99. Συνεχίστε ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ 2, 3, 4, 5, 6.

3. Νὰ σχηματίσετε ὅμοιες ἀκολουθίες μὲ τὸ 8· ἔπειτα καὶ μὲ τὸ 9.

Πρόσθεση διψηφίων ἀπὸ μνήμης.

Παράδειγμα 1. Πόσα γίνονται $25 + 12$;



Στὰ 25 προσθέτομε πρῶτα τὰ 10 κι ἔπειτα τὰ 2 τρίγωνα. δηλαδὴ $25+12 = 25 + 10 + 2 = 35 + 2 = 37$.

Πῶς ἀλλιῶς μπορεῖτε νὰ λύσετε τὴν παραπάνω ἄσκηση;

Παράδειγμα 2. $47 + 28 =$;

Ἀπάντηση. $47 + 28 = 47 + 20 + 8 = 67 + 3 + 5 = 70 + 5 = 75$ (μὲ ἀνάλυση τοῦ 8 σὲ $3+5$).

Ἀσκήσεις

1. Νὰ ἐκτελέσετε τὶς παρακάτω πράξεις μὲ τὸν τρόπο ποὺ δείξαμε :

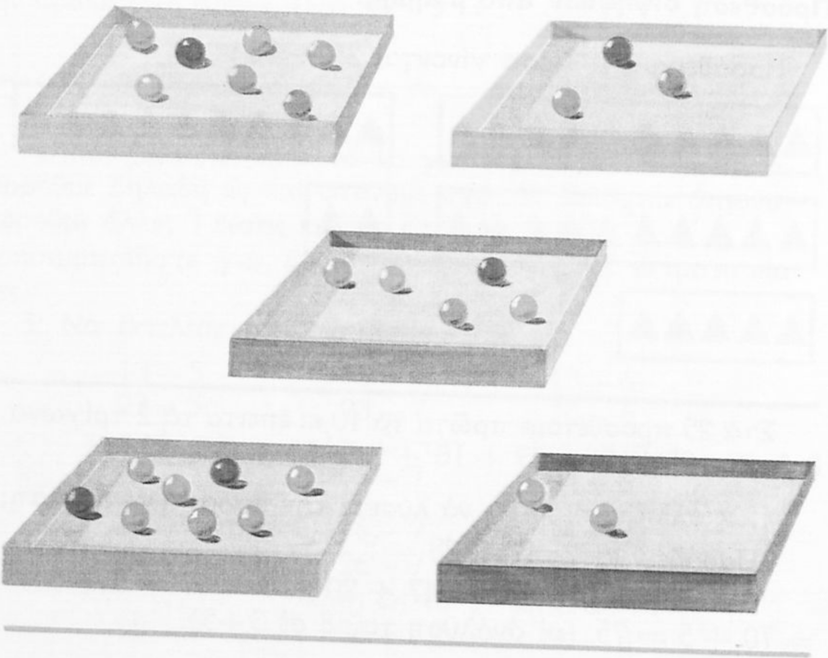
$16 + 30 =$	$15 + 23 =$	$28 + 12 =$	$37 + 15 =$
$14 + 60 =$	$27 + 22 =$	$36 + 24 =$	$46 + 29 =$
$18 + 50 =$	$64 + 13 =$	$45 + 35 =$	$32 + 48 =$
$30 + 34 =$	$85 + 12 =$	$57 + 33 =$	$54 + 27 =$
$20 + 58 =$	$38 + 31 =$	$41 + 59 =$	$18 + 76 =$

2. Νὰ σχηματίσετε τὶς σειρές :

α) 6+13, 16+13, 26+13 κλπ. ὡς τὸ 86+13
β) 6+16, 16+16, 26+16 κλπ. ὡς τὸ 86+16

Ἄθροισμα πολλῶν προσθετέων

Παράδειγμα. Πόσοι εἶναι συνολικὰ οἱ βόλοι ποὺ εἶναι στὰ κουτιά ;



Προσθέτομε τοὺς βόλους τοῦ πρώτου κουτιοῦ μὲ τοὺς βόλους τοῦ δευτέρου· $7 + 3 = 10$. Τὸ ἄθροισμα αὐτὸ τὸ προσθέτομε μὲ τοὺς βόλους τοῦ τρίτου κουτιοῦ· $10 + 5 = 15$ Τὸ νέο ἄθροισμα τὸ προσθέτομε μὲ τοὺς βόλους τοῦ τέταρτου κουτιοῦ· $15+8 = 23$. Καὶ αὐτὸ τὸ προσθέτομε μὲ τοὺς βόλους τοῦ τελευταίου κουτιοῦ· $23 + 2 = 25$ βόλοι.

Τὸ ἕνα κουτὶ περιέχει τώρα ὅλους τοὺς βόλους.

Περιέχει ὅλες τὶς μονάδες τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν καὶ μόνο αὐτές.

Ὥ σ τ ε, ἄθροισμα πολλῶν προσθετέων εἶναι ἕνας ἀκέραιος ποὺ περιέχει ὅλες τὶς μονάδες τῶν προσθετέων αὐτῶν καὶ μόνο αὐτές. Ὁ ἀκέραιος αὐτὸς βρίσκεται, ἂν προσθέσωμε τὸν πρῶτο μὲ τὸ δεύτερο, τὸ ἄθροισμά τους μὲ τὸν τρίτο, τὸ νέο ἄθροισμα μὲ τὸν τέταρτο κ.ο.κ., ὥσπου νὰ τοὺς προσθέσωμε ὅλους.

Ἀφαίρεση διψηφίου ἀπὸ διψήφιο, ἀπὸ μνήμης

Παράδειγμα. Πόσα μένουν $47 - 19$;

Ἀπάντηση : $47 - 19 = 47 - 10 - 9 = 37 - 9$ καὶ $37 - 9 = 37 - 7 - 2 = 30 - 2 = 28$.

Μὲ ποιόν ἄλλον τρόπο μπορεῖτε νὰ λύσετε τὴν παραπάνω ἄσκηση ;

Ἀσκήσεις

1. Νὰ κάμετε τὶς ἀφαιρέσεις μὲ τὸν τρόπο ποὺ δείξαμε :

19 – 10	64 – 20	19 – 16	86 – 44	20 – 14	21 – 13
71 – 10	93 – 60	18 – 18	75 – 23	60 – 49	83 – 57

2. Νὰ σχηματίσετε τὶς σειρές :

α) 26 – 20, 36 – 20, 46 – 20 κλπ. ὡς τὸ 96 – 20
β) 33 – 26, 43 – 26, 53 – 26 κλπ. ὡς τὸ 93 – 26

Ἰσότητες χωρὶς σημεῖα

Στὶς παρακάτω ἰσότητες λείπουν τὰ σύμβολα + (σὺν) καὶ – (πλήν). Νὰ σκεφτῆτε καὶ νὰ θέσετε τὰ σύμβολα ποὺ ταιριάζουν σὲ κάθε μία.

40 10 = 50	70 10 20 = 60	80 30 20 = 70
60 20 = 40	80 30 30 = 20	90 70 60 = 80
30 30 = 0	60 50 40 = 50	100 50 50 = 0
80 60 = 20	40 30 60 = 70	40 30 20 = 90
70 40 = 30	50 20 40 = 30	70 60 30 = 40

Ἀριθμητικὰ σταυρόλεξα

5	7	3	15
4	3	8	15
6	5	4	15
15	15	15	

Ὅπως βλέπετε στὸ παράδειγμα, εἴτε ὁριζόντια εἴτε κατακόρυφα προσθέσωμε τοὺς ἀριθμούς, βγαίνει πάντοτε τὸ ἴδιο ἄρθοισμα 15.

Συμπληρῶστε τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ λείπουν στὰ τετραγωνάκια, γιὰ νὰ βγαίνη τὸ ἄθροισμα ποὺ εἶναι γραμμένο στὰ παρακάτω σταυρόλεξα.

	5	6	13
			13
3	8		13
13	13	13	

4			18
	8		18
8		6	18
18	18	18	

20			70
	10	10	70
0			70
70	70	70	

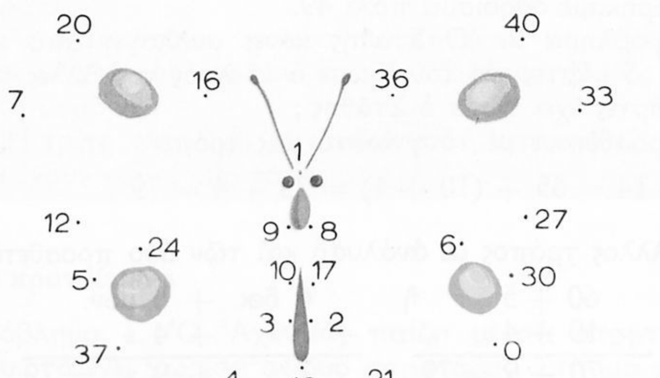
Κάμετε κι ἐσεῖς ὅμοια ἀριθμητικὰ παιγνίδια.

Παιγνίδι μὲ ἀκεραίους

Νὰ λύσης τὶς παρακάτω ἀσκήσεις. Οἱ ἀριθμοὶ ποὺ θὰ βρῆς εἶναι γραμμένοι σκορπιστὰ σὰ σχέδιο. Κάθε ἀριθμὸς δείχνει κι ἕνα σημεῖο (τελεία). Θ' ἀρχίσης ἀπὸ τὸ σημεῖο ποὺ δείχνει ὁ πρῶτος ἀριθμὸς ποὺ θὰ βρῆς κάνοντας τὶς πράξεις ποὺ ἀκολουθοῦν καὶ θὰ σύρης γραμμὴ γιὰ νὰ ἑνώσης τὸ σημεῖο ποὺ δείχνει ὁ δεύτερος ἀριθμός, ποὺ θὰ βρῆς, ἔπειτα ὁ τρίτος, ὕστερα ὁ τέταρτος κλπ., ὥσπου νὰ ἑνώσης ὅλα τὰ σημεῖα. Ὅταν τελειώσης, θὰ ἔχης σχηματίσει ἕνα ὡραῖο σχῆμα. Ἄρχισε :

$5 + 4 =$	$18 - 6 =$	$24 - 20 =$
$25 - 9 =$	$35 - 11 =$	$2 \times 5 =$
$12 + 8 =$	$32 - 27 =$	$20 - 17 =$
$7 - 0 =$	$50 - 13 =$	$35 - 17 =$
	$25 - 10 =$	
$11 - 9 =$	$6 \times 0 =$	$40 - 7 =$
$12 + 5 =$	$15 + 15 =$	$2 \times 20 =$
$3 \times 7 =$	$30 - 24 =$	$6 \times 6 =$
$28 - 14 =$	$13 + 14 =$	$2 \times 4 =$
		$1 - 0 =$

Τὸ σημεῖο ποὺ δείχνει ὁ τελευταῖος ἀριθμὸς ποὺ θὰ βρῆς νὰ τὸ ἑνώσης μὲ τὸ σημεῖο τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ. Τί βρῆκες ;



3. Η ΓΡΑΠΤΗ ΠΡΟΣΘΕΣΗ

α) Χωρὶς κρατούμενα

Πρόβλημα 1. Ὁ Ἀντρέας εἶχε στὸν κουμπαρά του 43 δραχμὲς κι ἔβαλε ἄλλες 6. Πόσες δραχμὲς εἶναι τώρα στὸν κουμπαρά ;

Θὰ κάνωμε πρόσθεση, γιὰ νὰ βροῦμε πόσες εἶναι ὅλες οἱ δραχμὲς μαζί. Θὰ προσθέσωμε τὶς 6 δραχμὲς στὶς 3 δραχμές. Τὶς 4 δεκάδες θὰ τὶς ἀφήσωμε, ὅπως εἶναι. Ὥστε : $43 + 6 = 49$ δραχμές. Αὐτὸ τὸ γράφομε κι ἔτσι :

$$\begin{array}{r} 40 + 3 \\ + \quad 6 \\ \hline 40 + 9 = 49 \end{array} \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{l} 4 \text{ δεκ.} + 3 \text{ μον.} \\ + \qquad\quad 6 \text{ »} \\ \hline 4 \text{ δεκ.} + 9 \text{ »} = 49 \end{array} \quad \text{ἢ πιὸ σύντομα} \quad \begin{array}{r} 43 \\ +6 \\ \hline 49 \end{array}$$

Δηλαδὴ γράψαμε τοὺς προσθετέους τὸν ἕνα κάτω ἀπὸ τὸν ἄλλο, προσέχοντας οἱ μονάδες νὰ εἶναι στὴν ἴδια στήλη. Ἔπειτα σύραμε μιὰ ὁριζόντια γραμμὴ καὶ ἀρχίσαμε τὴν πρόσθεση ἀπὸ τὶς μονάδες. Προσθέσαμε χωριστὰ τὶς μονάδες : $6 + 3 = 9$. Γράψαμε τὸ 9 κάτω ἀπὸ τὴ γραμμὴ καὶ ἀκριβῶς κάτω ἀπὸ τὶς μονάδες. Ἔπειτα κατεβάσαμε καὶ τὶς 4 δεκάδες. Καὶ βρήκαμε ἄθροισμα πάλι 49.

Πρόβλημα 2. Ὁ Στάθης κάνει συλλογὴ ἀπὸ κάρτες. Ἔχει 65 κάρτες καὶ τοῦ ἔδωσε ὁ ἀδελφός του ἄλλες 14. Πόσες κάρτες ἔχει τώρα ὁ Στάθης ;

Προσθέτομε μὲ τὸ γνωστό μας τρόπο :

$$65 + 14 = 65 + (10 + 4) = 75 + 4 = 79$$

Ἄλλος τρόπος μὲ ἀνάλυση καὶ τῶν δύο προσθετέων:

$$\begin{array}{r} 60 + 5 \\ + \; 10 + 4 \\ \hline 70 + 9 = 79 \end{array} \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{l} \;\; 6 \text{ δεκ.} + 5 \text{ μον.} \\ + 1 \text{ »} \quad + 4 \text{ »} \\ \hline \;\; 7 \text{ »} \quad + 9 \text{ »} = 79 \end{array}$$

Ἐδῶ προσθέσαμε χωριστὰ τὶς δεκάδες καὶ χωριστὰ τὶς μονάδες.

Μποροῦμε νὰ γράψωμε τὴν πράξη πιὸ σύντομα, ἔτσι :

$$\begin{array}{rl} \left.\begin{array}{r} 65 \\ +\ 14 \end{array}\right\} & \text{προσθετέοι} \\ \hline 79 & \text{ἄθροισμα} \end{array}$$

Κι ἐδῶ προσθέτομε χωριστὰ τὶς μονάδες καὶ χωριστὰ τὶς δεκάδες ἀρχίζοντας ἀπὸ τὶς μονάδες. Γράφομε τὸ ἄθροισμα κάτω ἀπὸ τὴ γραμμή. Προσέχομε νὰ γράφωμε τὶς μονάδες στὴν ἴδια στήλη καὶ τὶς δεκάδες στὴ στήλη τῶν δεκάδων.

Ἀσκήσεις

Νὰ ἐκτελέσετε τὶς παρακάτω προσθέσεις :

14	32	40	64	78	53	60	70	39	60
+ 3	+ 7	+ 8	+25	+20	+36	+27	+21	+ 0	+30

Προβλήματα

1. Ἕνα περιδέραιο ἔχει λευκὲς καὶ γαλάζιες χάντρες. Οἱ λευκὲς εἶναι 32 καὶ οἱ γαλάζιες 43. Πόσες χάντρες ἔχει τὸ περιδέραιο ;
2. Ἀπὸ ἕνα τόπι ὕφασμα πουλήθηκαν 24 μέτρα. Ὁ ἔμπορος ὑπολόγισε ὅτι τοῦ ἔμειναν 35 μέτρα. Πόσα μέτρα ἦταν τὸ ὕφασμα ;
3. Ἡ τρίτη τάξη ἔχει 34 παιδιὰ καὶ ἡ τετάρτη 42. Πόσα παιδιὰ ἔχουν καὶ οἱ δύο τάξεις ;

β) Μὲ κρατούμενα

Πρόβλημα 1. Ὁ Ἀχιλλέας παίζει μὲ τὰ στρατιωτάκια του. Τὰ ἔχει χωρίσει σὲ δύο παρατάξεις. Στὴ μιὰ παράταξη ἔχει 26 στρατιωτάκια καὶ στὴν ἄλλη 9. Πόσα εἶναι ὅλα τὰ στρατιωτάκια ποὺ ἔχει ὁ Ἀχιλλέας ;

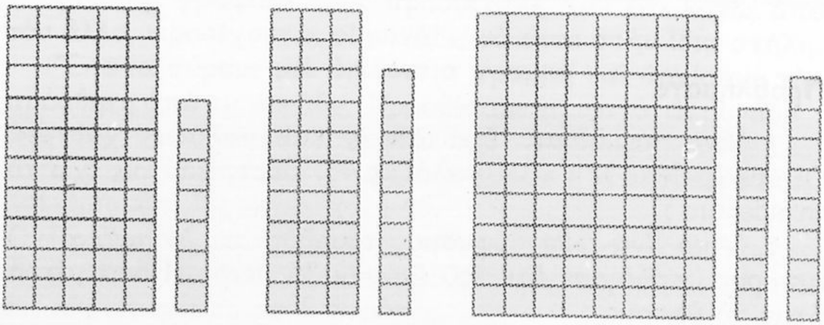
Ἀπάντηση. $26 + 9 = 26 + 4 + 5 = 30 + 5 = 35$.

Ἄλλος τρόπος ἀναλυτικὸς μὲ τὸν ἕναν προσθετέο κάτω ἀπὸ τὸν ἄλλο :

$$\begin{array}{l} 20+\ 6 \\ +\qquad 9 \\ \hline 20+15=35 \end{array} \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{l} 2\ \text{δεκ.} +\ 6\ \text{μον.} \\ +\qquad\qquad 9\ \text{»} \\ \hline 2\ \text{»}\ +15\ \text{»} = 35 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ἢ πιὸ} \\ \text{σύντομα} \end{array} \quad \begin{array}{r} 26 \\ +\ 9 \\ \hline 35 \end{array}$$

Ἀρχίσαμε τὴν πρόσθεση ἀπὸ τὶς μονάδες· 9+6=15. Τὸ 15 ἔχει μιὰ δεκάδα καὶ 5 μονάδες. Γράψαμε τὶς 5 μονάδες κάτω ἀπὸ τὴ γραμμὴ στὴ στήλη τῶν μονάδων καὶ κρατήσαμε τὴ 1 δεκάδα, γιὰ νὰ τὴν προσθέσωμε στὶς δεκάδες. Εἴπαμε : 1 δεκάδα ποὺ κρατήσαμε (ἢ 1 τὸ κρατούμενο) καὶ 2 κάνουν 3 δεκάδες.

Γράψαμε τὸ 3 κάτω ἀπὸ τὴ γραμμὴ στὴ στήλη τῶν δεκάδων. Ὥστε καὶ μὲ τὸ σύντομο τρόπο βρήκαμε ὅτι τὰ στρατιωτάκια ἦταν 35.



A B Γ

Πρόβλημα 2. Γιὰ νὰ στρώσωμε τὴ μεγάλη αὐλὴ τοῦ σπιτιοῦ μας, χρειάζονται 57 πλάκες καὶ γιὰ τὴ μικρὴ 38 πλάκες. Πόσες πλάκες χρειάζονται καὶ γιὰ τὶς δύο αὐλές ;

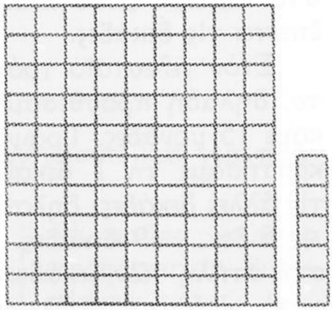
Πρέπει νὰ βροῦμε πόσες γίνονται οἱ πλάκες, ὅταν προσθέσωμε τὶς 57 πλάκες μὲ τὶς 38 πλάκες.

Τὸ σχῆμα A δείχνει τὶς πλάκες τῆς μεγάλης αὐλῆς καὶ τὸ B δείχνει τὶς πλάκες τῆς μικρῆς.

Τὸ σχῆμα Γ τὶς δείχνει ὅλες μαζί. Δηλαδὴ 8 δεκάδες πλάκες (=80) + 7 + 8 πλάκες.

῞Οπως βλέπετε, ἑνώσαμε πρῶτα τὶς δεκάδες (5 δεκ. + 3 δεκ. = 8 δεκ. = 80).

῾Ενώνομε τώρα τὶς 7 καὶ 8 πλάκες. Μᾶς κάνουν 15 πλάκες ἢ 1 δεκάδα καὶ 5 πλάκες. Τὴ δεκάδα αὐτὴ τὴν ἑνώνομε μὲ τὶς ἄλλες 8 δεκάδες. ῎Ετσι ἔχομε 9 δεκάδες πλάκες καὶ 5 πλάκες (=90 + 5 = 95). Τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ τὸ βλέπετε στὸ σχῆμα Δ.



Δ

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ἀρχίσαμε τὴν πρόσθεση ἀπὸ τὶς δεκάδες. Μποροῦμε νὰ τὴν ἀρχίσωμε καὶ ἀπὸ τὶς μονάδες κι ἔπειτα νὰ προχωρήσωμε στὶς δεκάδες.

Γράφομε τὶς παραπάνω πράξεις μὲ ὁριζόντια γραφή, ὅπως τὶς ἐκτελέσαμε, μὲ τὴ βοήθεια τῶν σχημάτων :

$$57 + 38 = 50 + 7 + 30 + 8 = 80 + 7 + 8 = 80 + 15 =$$
$$= 80 + 10 + 5 = 90 + 5 = 95.$$

᾿Εκτὸς ἀπὸ τὴν παραπάνω ὁριζόντια γραφή, μποροῦμε νὰ γράψωμε τὸν ἕναν προσθετέο κάτω ἀπὸ τὸν ἄλλο :

$$\begin{array}{rr} 57 = & 50 + 7 \\ +\ 38 = & +\ 30 + 8 \\ \hline & 80 + 15 = \end{array}$$
$$= 80 + 10 + 5 = 90 + 5 = 95$$

ἢ $57 + 38 = 80 + 15 = 95$

ἢ $57 + 38 = 15 + 80 = 95$ ἢ $\begin{array}{r} 57 \\ +\ 38 \\ \hline 95 \end{array}$

Στὸν πρῶτο τρόπο προσθέσαμε πρῶτα τὶς δεκάδες καὶ γράψαμε κάτω ἀπὸ τὴ γραμμὴ τὸ ἄθροισμα 80. ῎Επειτα προσθέσαμε τὶς μονάδες καὶ γράψαμε τὸ ἄθροισμα 15. Τέλος προσθέσαμε τὰ δύο ἀθροίσματα 80 καὶ 15.

Στὸ δεύτερο τρόπο ἐργαστήκαμε ὅπως καὶ στὸν πρῶτο ἀλλὰ συντομώτερα, δηλαδὴ χωρὶς ἀνάλυση τῶν προσθετέων σὲ δεκάδες καὶ μονάδες. Ἀρχίσαμε τὴν πρόσθεση ἀπὸ τὶς δεκάδες.

Στὸν τρίτο τρόπο κάναμε ἀκριβῶς τὸ ἴδιο ποὺ κάναμε στὸ δεύτερο μόνο ποὺ προσθέσαμε πρῶτα τὶς μονάδες κι ἔπειτα τὶς δεκάδες.

Στὸν τελευταῖο τρόπο ἐργαστήκαμε ὅπως καὶ στὸν τρίτο, δηλαδὴ προσθέσαμε πρῶτα τὶς μονάδες 8 + 7 καὶ βρήκαμε 15 μονάδες. Γράψαμε κάτω ἀπὸ τὴ γραμμὴ τὸ 5 καὶ κρατήσαμε τὴ 1 δεκάδα, τὴν ὁποία προσθέσαμε μαζὶ μὲ τὶς ἄλλες δεκάδες· δηλαδή, 1 δεκ. (ποὺ κρατήσαμε) + 3 δεκ. + 5 δεκ. = 9 δεκάδες. Γράψαμε κάτω ἀπὸ τὴ γραμμὴ καὶ στὴ στήλη τῶν δεκάδων τὸ 9. Ἔτσι ἔχομε καὶ μὲ τὸν τρόπο αὐτὸ τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα 95.

Ἂν συγκρίνετε τὸν τρίτο καὶ τέταρτο τρόπο, θὰ δῆτε ὅτι στὸν τέταρτο τρόπο κάνομε τὸ ἴδιο ἀκριβῶς ποὺ κάνομε στὸν τρίτο, ἀλλὰ πιὸ σύντομα.

Αὐτὸς ὁ σύντομος τρόπος εἶναι ὁ συνηθισμένος. Αὐτὸν χρησιμοποιοῦν οἱ ἄνθρωποι, ὅταν κάνουν γραπτὴ πρόσθεση. Αὐτὸν θὰ χρησιμοποιοῦμε κι ἐμεῖς. Θὰ μποροῦμε ὅμως νὰ χρησιμοποιήσωμε καὶ ὁποιονδήποτε ἄλλο τρόπο.

Σημείωση. Οἱ προσθετέοι, ὅταν εἶναι συγκεκριμένοι ἀριθμοί, πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς. Ἂν εἶναι ἑτεροειδεῖς (π.χ. 10 μῆλα καὶ 25 κάστανα), δὲν μποροῦμε νὰ τοὺς προσθέσωμε.

Θὰ ἔχετε προσέξει ὅτι, γιὰ νὰ κάνωμε τὴ γραπτὴ πρόσθεση, γράφομε τὸν ἕναν προσθετέο κάτω ἀπὸ τὸν ἄλλο, τὶς μονάδες κάτω ἀπὸ τὶς μονάδες στὴν ἴδια στήλη καὶ τὶς δεκάδες κάτω ἀπὸ τὶς δεκάδες. Προσθέτομε χωριστὰ τὶς μονάδες καὶ χωριστὰ τὶς δεκάδες.

Τὴν πρόσθεση μπορεῖτε νὰ τὴν ἀρχίζετε ἢ ἀπὸ κάτω ἢ ἀπὸ πάνω, πάντοτε ὅμως ἀπὸ τὶς μονάδες. Θὰ βρίσκετε τὸ ἴδιο ἄθροισμα ἀπ᾽ ὅπου καὶ ἂν ἀρχίζετε. Δοκιμάστε το.

Ὅταν ἐκτελοῦμε τὴν πρόσθεση, ἀποφεύγομε τὶς προφορικὲς πολυλογίες.

Π.χ. $\begin{array}{r} 56 \\ +\ 9 \\ \hline 65 \end{array}$

Δὲν πρέπει νὰ λέμε: «ἐννέα κι ἕξι κάνουν 15, γράφομε τὸ 5 καὶ κρατοῦμε 1 (δέκατα)· 1 τὸ κρατούμενο καὶ 5 κάνουν 6. Γράφομε τὸ 6. Ἄθροισμα 65».

Πρέπει, δείχνοντας τὰ ψηφία, **νὰ λέμε :**

«9, 15
1, 6, 65»
↑ δὲ λέμε «κρατούμενο».

Νὰ ἐπιμένετε καὶ σιγὰ-σιγὰ θὰ συνηθίσετε καὶ γιὰ πολλοὺς προσθετέους. Π.χ. :

$\begin{array}{r} 13 \\ 14 \\ 29 \\ 35 \\ \hline 91 \end{array}$

Λέγε: « **5**, 14, 18, **21**
2, 5, 7, 8, **9**. **91**»

Τὰ μαῦρα νούμερα προφέρονται δυνατότερα

Ἀσκήσεις

α) Νὰ ἐκτελέσετε τὶς παρακάτω προσθέσεις:

43	25	17	74	55	36	44
+ 9	+38	+56	+ 9	+29	+36	+27

β) Νὰ γράψετε τοὺς προσθετέους τὸν ἕνα κάτω ἀπὸ τὸν ἄλλο καὶ νὰ ἐκτελέσετε τὶς προσθέσεις :

23 + 14 + 32 = , 15 + 48 + 20 =
17 + 26 + 38 + 14 =

Στὰ καταστήματα σχολικῶν εἰδῶν

Μὲ τὸ ἄνοιγμα τῶν σχολείων τὰ παιδιὰ χρειάστηκαν ν' ἀγοράσουν μερικὰ ἀπαραίτητα σχολικὰ εἴδη. Πῆγαν μὲ τοὺς γονεῖς τους στὰ χαρτοπωλεῖα γιὰ σάκες, τετράδια, μολύβια κλπ. καὶ σ᾽ ἐμπορικὰ καταστήματα γιὰ σχολικὲς ποδιές, ἀθλητικὲς στολὲς κλπ. Οἱ καταστηματάρχες εἶχαν σημειώσει πάνω σὲ καρτέλες τὶς τιμὲς τῶν εἰδῶν. Τὰ παιδιὰ διάβασαν :

Σάκες· ἡ μία	47	δραχμὲς
Χρωματιστὰ μολύβια· τὸ κουτὶ	10	»
Νερομπογιές· τὸ κουτὶ	16	»
Κασετίνες· ἡ μία	15	»
Μολύβια· τὸ ἕνα	2	»
Στυλογράφοι· ὁ ἕνας	40	»
Γομολάστιχες· ἡ μία	3	»
Τετράδια γραφῆς· τὸ ἕνα	3	»
Τετράδια ἰχνογραφίας· τὸ ἕνα	5	»
Σχολικὲς ποδιές· ἡ μία	68	»

Αὐτὸ εἶναι ἕνα τιμολόγιο. Τέτοια τιμολόγια ἔχουν ὅλα τὰ καταστήματα ποὺ πουλοῦν διάφορα εἴδη.

Νὰ βρῆτε τί πλήρωσαν οἱ γονεῖς τῶν παιδιῶν γιὰ τὰ εἴδη ποὺ πῆραν ;

1. Ἡ μητέρα τῆς Ἄννας ἀγόρασε 1 ποδιὰ καὶ 1 κασετίνα. Πόσες δραχμὲς πλήρωσε ;

2. Ὁ Νίκος ἀγόρασε 1 στυλογράφο, 1 τετράδιο ἰχνογραφίας κι ἕνα κουτὶ χρωματιστὰ μολύβια. Πόσα πλήρωσε ;

3. Ὁ Θάνος πῆρε ὅλα τὰ εἴδη ποὺ εἶναι γραμμένα στὸ παραπάνω τιμολόγιο, ἐκτὸς ἀπὸ τὴν ποδιὰ καὶ τὴ σάκα. Πόσα χρήματα ἔδωσε ;

4. Ὁ πατέρας πῆρε 1 τετράδιο ἰχνογραφίας καὶ 1 κουτὶ νερομπογιὲς γιὰ τὸν γιό του. Γιὰ τὸ κοριτσάκι του πῆρε τὰ ἴδια πράγματα καὶ ἀκόμη μιὰ σάκα. Πόσα ἔδωσε γιὰ τὸ κάθε παιδὶ χωριστὰ καὶ πόσα καὶ γιὰ τὰ δύο μαζί ;

5. Νὰ βρῆτε τί μπορεῖτε ν᾽ ἀγοράσετε μὲ 50 δραχμὲς ἀπὸ τὰ εἴδη τοῦ τιμολογίου.

Τί μπορεῖτε ν᾽ ἀγοράσετε μὲ 100 δραχμές ; μὲ 85 δραχμές ; μὲ 90 ; μὲ 75 ;

6. Ὁ Τάκης ἔδωσε στὸ χαρτοπωλεῖο 48 δραχμὲς καὶ 45

δραχμὲς στὸ κατάστημα ἀπὸ τὸ ὁποῖο ἀγόρασε ἀθλητικὰ εἴδη γιὰ τὴ γυμναστική. Πόσα χρήματα ξόδεψε ;

7. Ἡ μητέρα ἀγόρασε σχολικὰ εἴδη ἀξίας 56 δραχμῶν καὶ τῆς ἔμειναν 37 δραχμές. Πόσα χρήματα εἶχε πρὶν ἀγοράση τὰ πράγματα ;

8. Ἡ Ἕλλη ἀγόρασε σχολικὰ εἴδη ἀξίας 27 δραχμῶν. Ἡ Σοφία ἀγόρασε εἴδη διπλάσιας ἀξίας. Πόσες δραχμὲς πῆρε ὁ χαρτοπώλης καὶ ἀπὸ τὰ δύο κορίτσια ;

4. Η ΓΡΑΠΤΗ ΑΦΑΙΡΕΣΗ

α) Χωρὶς κρατούμενα

Πρόβλημα 1. Ἀπὸ τὰ 28 γαρίφαλα ποὺ εἶχε μιὰ ἀνθοδέσμη, βγάλαμε τὰ 7 ποὺ μαράθηκαν. Πόσα ἔμειναν ;

Θὰ κάνωμε ἀφαίρεση, διότι θέλομε νὰ βγάλωμε (ἀφαιρέσωμε) ἀπὸ ἕναν ἀριθμὸ τόσες μονάδες, ὅσες ἔχει ἕνας ἄλλος ἀριθμός. Μειωτέος εἶναι τὸ 28 καὶ ἀφαιρετέος τὸ 7. Οἱ 8 μονάδες τοῦ μειωτέου φτάνουν, γιὰ ν' ἀφαιρέσωμε τὶς 7 μονάδες τοῦ ἀφαιρετέου, καὶ περισσεύει μιὰ μονάδα. Ἐπίσης θὰ μείνουν καὶ οἱ 2 δεκάδες ὁλόκληρες. Δηλαδὴ θὰ μείνουν στὴν ἀνθοδέσμη 21 γαρίφαλα.

Γράφομε τὴν πράξη $28 - 7 = 21$

Μποροῦμε νὰ τὴ γράψωμε κι ἔτσι :

$20 + 8$		2 δεκ. + 8 μον.	ἢ πιὸ	28
$-\ \ \ 7$	ἢ	– » 7 »	σύντομα	– 7
$20 + 1 = 21$		2 » + 1 » = 21		21

Σκεπτόμαστε : Ἂν τὸ 7 τὸ ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὸ 8, μᾶς μένει 1. Γράφομε κάτω ἀπὸ τὴ γραμμὴ τὴ 1 μονάδα ποὺ μένει. Δεκάδες δὲν ἔχομε ν' ἀφαιρέσωμε. Γι' αὐτὸ κατεβάζομε κάτω ἀπὸ τὴ γραμμὴ τὶς 2 δεκάδες τοῦ μειωτέου. Ἔτσι καὶ μὲ τὸν τρόπο αὐτὸ βρήκαμε ὑπόλοιπο 21.

Πρόβλημα 2. Εἶχα 89 δραχμὲς καὶ ξόδεψα τὶς 37. Πόσες μοῦ ἔμειναν;

Θὰ κάνωμε ἀφαίρεση· θ' ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὸ 89 τὸ 37.

Γιὰ νὰ βροῦμε σύντομα τὴ διαφορὰ 89 – 37, γράφομε:

89	Λέμε: 7 ἀπὸ 9, 2.
– 37	3 ἀπὸ 8, 5. 52
52	

Κανονικὰ **λέμε** καὶ σκεπτόμαστε ὅτι:

7 μέχρι 9, 2.
3 μέχρι 8, 5. 52

Ἀσκήσεις

Νὰ ἐκτελέσετε τὶς παρακάτω ἀφαιρέσεις:

α) Μὲ ἀνάλυση τῶν ἀριθμῶν.

38	45	49	54	76	88	86	97	99	68
– 6	– 4	– 7	–13	–25	–30	–52	–50	–49	–28

β) Μὲ τὸ σύντομο τρόπο χωρὶς ἀνάλυση τῶν ἀριθμῶν.

87	89	76	73	54	59	66	67	48	33
– 5	– 4	– 4	–21	–32	–20	–46	–40	–18	–10

β) Μὲ κρατούμενα

(1) Ἀφαίρεση μονοψήφιου ἀκεραίου

μειωτέος
ἀφαιρετέος

Ἂς πάρω τὴ διαφορὰ 7 – 3 ποὺ ἰσοῦται μὲ 4. Δηλ.: 7 – 3 = 4. Ἂς προσθέσωμε **τὸν ἴδιο προσθετέο,** π.χ. τὸν 2, καὶ στὸ μειωτέο καὶ στὸν ἀφαιρετέο, ἡ διαφορὰ θὰ γίνη 9 – 5. Ἀλλὰ πάλι 9 – 5 = 4.

Κάνετε δικά σας παραδείγματα, ὅσα θέλετε, ὅπως:

Διαφορά :	$4-2=\mathbf{2}$	$4-2=\mathbf{2}$	$4-2=\mathbf{2}$
Ἴσοι προσθετέοι :	$1 \quad 1$	$5 \quad 5$	$13 \quad 13$
Νέα διαφορά:	$\overline{5}-\overline{3}=\mathbf{2}$	$\overline{9}-\overline{7}=\mathbf{2}$	$\overline{17}-\overline{15}=\mathbf{2}$

Ἔχομε λοιπὸν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα τῶν **ἴσων προσθετέων** διαφορᾶς :

> Ἂν προσθέσωμε καὶ στὸ μειωτέο καὶ στὸν ἀφαιρετέο τὸν **ἴδιο προσθετέο,** τότε καὶ μόνον τότε δὲν μεταβάλλεται ἡ διαφορά.

Σκεφθῆτε!! Ὁ Γιῶργος εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὴ μητέρα του κατὰ 27 χρόνια. Πόσο θὰ εἶναι μικρότερος : ὕστερα ἀπὸ 3 μῆνες ; Ὕστερα ἀπὸ 3 χρόνια ; ὕστερα ἀπὸ 15 χρόνια ; (γιατί ;).

Πρόβλημα: Ἡ Ἄννα εἶχε 35 ζωγραφιές. Ἔδωσε τὶς 9 στὴ μικρότερη ἀδερφή της. Πόσες τῆς ἔμειναν ;

Θὰ βροῦμε τὴ διαφορὰ 35 – 9. Αὐτὴ γράφεται (30+5) – – 9, δηλαδὴ (3 δεκάδες + 5 μονάδες) – (9 μονάδες) ἢ συντομώτερα (3δ. + 5μ.) – (9μ.). Ἐπειδὴ οἱ 5μ. τοῦ μειωτέου δὲ φτάνουν γιὰ νὰ ἀφαιρεθοῦν οἱ 9 μ. τοῦ ἀφαιρετέου, ἔχομε δικαίωμα νὰ προσθέσωμε **τὸν ἴδιο προσθετέο,** 1δ. στὸ μειωτέο καὶ 1 δ. στὸν ἀφαιρετέο. Τώρα ἡ διαφορὰ γίνεται (3δ. + 1δ. + 5μ.) – (1δ. + 9μ.). Ἀλλὰ 1δ + 5μ. τοῦ μειωτέου κάνουν 15 μ. Δηλαδὴ ἡ διαφορὰ γίνεται: (3δ. +15μ) – (1δ. +9μ.). Τώρα μποροῦμε νὰ ἀφαιρέσωμε μονάδες ἀπὸ μονάδες, καὶ δεκάδες ἀπὸ δεκάδες. Βρίσκομε 2δ + 6μ = = 20+6 = 26 μ.

Τὴν ἐξήγηση αὐτὴ σύντομα τὴ γράφομε :

$$\left.\begin{array}{cc} δ & μ \\ 3 & 5 \\ & 9 \\ \hline ; & \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} δ & μ \\ 3 & 15 \\ -1 & 9 \\ \hline 2 & 6 \end{array}\right.$$

Τώρα **λέμε :**
9 ἀπὸ (μέχρι) 15, 6μ.
1 ἀπὸ (μέχρι) 3, 2δ.
26μ.

Ἀσκήσεις

1. Μὲ τὴν πάρα πάνω σύντομη ἐξήγηση καὶ σημειώνοντας: **1 δεκάδα στὸ μειωτέο** καὶ **1 δεκάδα στὸν ἀφαιρετέο** νὰ κάνετε τὶς ἀφαιρέσεις :

31	42	53	64	75	86	91
− 9	− 8	− 6	− 5	− 7	− 9	− 6

2. Νὰ κάνετε τὶς πάρα κάτω ἀφαιρέσεις, χωρὶς νὰ σημειώνετε τοὺς ἴσους προσθετέους, ἀλλὰ νὰ τοὺς ἔχετε στὸ μυαλό σας:

28	37	46	55	64	73	82	91
− 9	− 8	− 7	− 6	− 5	− 7	− 7	− 6

(2) Ἀφαίρεση διψήφιου ἀκεραίου.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο γιὰ τὴ διαφορὰ 73 − 45, γράφω :

$$\begin{array}{r} 73 \\ -45 \\ \hline ; \end{array} \quad \text{σκέπτομαι :} \quad \left\{ \begin{array}{r} 7\ 13 \\ -4\ \ 5, \\ 1\ \ \ \\ \hline 2\ \ 8 \end{array} \right. \quad \underline{28}$$

λέγω: 5 μέχρι 13, 8.
1 + 4... 5 μέχρι 7, 2.

(3) Τὸ «κρατούμενο» στὴν ἀφαίρεση

Γιὰ νὰ ἐκτελέσωμε τὴν ἀφαίρεση 73 − 45, μερικὲς φορὲς λέμε :

$$\begin{array}{r} 73 \\ -45 \\ \hline 28 \end{array}$$

5 ἀπὸ 3 δὲν ἀφαιρεῖται· 5 ἀπὸ 13, . . . **8.**
1 τὸ **κρατούμενο**, σὺν 4, . .5, ἀπὸ 7, . . . **2**
28

Λέμε «κρατούμενο», γιατὶ τὸ κρατοῦμε στὸ μυαλό μας ἐπειδὴ τὸ δώσαμε (προσθέσαμε) στὸν μειωτέο σὰν 1 δεκάδα καὶ **πρέπει** νὰ τὸ δώσωμε (προσθέσωμε) καὶ στὸν ἀφαιρετέο, γιὰ νὰ μὴ χαλάσωμε τὴ σωστὴ διαφορά.

(4) Ὁ 0 (μηδὲν) στὴν πρόσθεση καὶ στὴν ἀφαίρεση.

Ὁ ἀκέραιος 0 (μηδὲν) σὰν συγκεκριμένος, σημαίνει **«τίποτα» «καθόλου».** Ἔτσι π.χ. ἀντὶ νὰ λέμε δὲν ἔχω **καθόλου** ἢ δὲν πῆρα **καθόλου** δραχμές, λέμε 0 δραχμές. Ἑπομένως: (5 δραχμὲς) + (0 δραχμὲς) = 5 δραχμές. Ἐδῶ ἔχομε: $5+0=5$. Ἐπίσης: $0+5=5$. $0+0=0$.

Στὴν ἀφαίρεση, ὅταν ἀφαιροῦμε τὸν 0, σημαίνει ὅτι δὲν ἀφαιροῦμε τίποτα καὶ ἄρα ἡ διαφορὰ θὰ εἶναι ὁ ἴδιος ὁ μειωτέος π.χ.:

$$3-0=3, \qquad 0-0=0$$

(5) Ἀθροίσματα καὶ διαφορὲς ἀπὸ τὴν προσθετικὴ ἀνάλυση ἀκεραίου.

Ἂς πάρωμε τὸν ἀκέραιο 3. Αὐτὸς μπορεῖ νὰ ἀναλυθῆ σὲ διάφορα ἀθροίσματα. Π.χ.:

$3=1+1+0+1$ (4 προσθετέοι)
$3=1+2+0$ (3 προσθετέοι)
$3=2+1$ (2 προσθετέοι)

Τὴν ἀνάλυση τοῦ 3, μὲ ὅλους τοὺς τρόπους, σὲ **δύο** προσθετέους μποροῦμε νὰ τὴν ξεκινήσωμε παίρνοντας κάθε

$$\begin{array}{c}3\\\hline 0+\\1+\\2+\\3+\end{array}\qquad\begin{array}{c|}3\\\hline 0\\1\\2\\3\end{array}\qquad\begin{array}{c}3\\\hline 0+3\\1+2\\2+1\\3+0\end{array}\qquad\begin{array}{c|c}\multicolumn{2}{c}{3}\\\hline 0&3\\1&2\\2&1\\3&0\end{array}$$

(α) (β) (γ) (δ)

φορὰ γιὰ πρῶτο προσθετέο τὸν 0 ἢ 1 ἢ 2 ἢ 3. Βλέπετε τὰ ἀριθμοσχήματα (α) καὶ (β). Ὁ δεύτερος προσθετέος γράφεται στὴ δεύτερη στήλη, κι᾿ ἔτσι θὰ φθάσωμε στὸ (γ) γιὰ τὸ (α), καὶ στὸ (δ) γιὰ τὸ (β).

Ἀσκήσεις

1. Νὰ συμπληρώσετε στὸ τετράδιό σας τὶς ἀναλύσεις:

2		4		5		8		10		1		0		17	

Πόσες τὸ πολὺ ἀναλύσεις σὲ δύο προσθετέους μπορεῖ νὰ ἔχη ἕνας ἀκέραιος;

2. Γράψτε τὸν ἀκέραιο ποὺ λείπει στὰ ἐρωτηματικά.

6	
2	;
1	;
0	;
3	;
5	;
4	;
6	;

7	
3	;
;	1
2	;
;	0
4	;
;	7
6	;
;	5
0	;
;	4

9	
0	
	8
6	
	7
5	
	3
4	
	2

11	
6	
4	
3	
5	
7	
8	
9	

13	
7	
	6
5	
	4
8	
	11
3	

12	
8	
7	
6	
	5
3	
	9

16	
9	
	8
7	
	5
12	
	13

3. Μὲ τὸ πάρα κάτω ἀριθμόσχημα τοῦ 3, μποροῦμε νὰ ἔχωμε τὶς ἀναλύσεις του σὲ δύο προσθετέους διαβάζοντας καὶ ἀπὸ ἀριστερὰ καὶ ἀπὸ δεξιά. Δηλαδή:

3	
0	3
1	2

Ἀπὸ ἀριστερά: $0 + 3 = 3$, Ἀπὸ δεξιὰ $3 + 0 = 3$

» » $1 + 2 = 3$, » » $2 + 1 = 3$

Ἐπίσης μποροῦμε νὰ ἔχωμε ὅλες τὶς διαφορές. Δηλαδή:

Ἀπὸ ἀριστερὰ

3	
0	3
1	2

ἀπὸ δεξιὰ

3	
0	3
1	2

0 ἀπὸ (μέχρι) 3; 3. ἢ $3 - 0 = 3$
1 ἀπὸ (μέχρι) 3; 2. ἢ $3 - 1 = 2$
3 ἀπὸ (μέχρι) 3; 0. ἢ $3 - 3 = 0$
2 ἀπὸ (μέχρι) 3; 1. ἢ $3 - 2 = 1$.

Παράδειγμα 1. Νὰ βρεθοῦν ὅλα τὰ ἀθροίσματα καὶ ὅλες οἱ διαφορὲς τῆς προσθετικῆς ἀναλύσεως τοῦ 6.

Λύση: Μὲ τὸ ἀριθμόσχημα τοῦ 6, ἀριστερὰ - δεξιά, βρίσκω:

6		Ἀθροίσματα		Διαφορὲς	
0	6	$0+6=6$,	$6+0=6$	$6-0=6$	$6-6=0$
1	5	$1+5=6$,	$5+1=6$	$6-1=5$,	$6-5=1$
2	4	$2+4=6$,	$4+2=6$	$6-2=4$	$6-4=2$
3	3	$3+3=6$,		$6-3=3$.	

Παράδειγμα 2. Νὰ βρεθοῦν ὅλα τὰ ἀθροίσματα καὶ ὅλες οἱ διαφορὲς τοῦ 13 μὲ τὴν ἀνάλυσή του σὲ μονοψήφιους προσθετέους:

13		Ἀθροίσματα		Διαφορὲς	
4	9	$4+9=13$,	$9+4=13$	$13-4=9$,	$13-9=4$
5	8	$5+8=13$,	$8+5=13$	$13-5=8$,	$13-8=5$
6	7	$6+7=13$,	$7+6=13$	$13-6=7$,	$13-7=6$

Νὰ ἐργασθῆτε μὲ τὸν ἴδιο τρόπο καὶ μὲ τὴν ἀνάλυση σὲ δύο μονοψήφιους προσθετέους νὰ βρῆτε ὅλα τὰ ἀθροίσματα καὶ ὅλες τὶς διαφορὲς γιὰ τούς: 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18.

(6) Τί εἶναι ὑπόλοιπο καὶ τί διαφορὰ

Πρόβλημα 1. Ὁ Γιῶργος εἶχε 9 σοκολάτες καὶ ἔφαγε τὶς 5. Πόσες σοκολάτες τοῦ ἔμειναν;

Ἐδῶ ἔχομε τὴν ἀφαίρεση (9 σοκολ.) — (5 σοκολ.) ὁμοειδῶν συγκεκριμένων ἀριθμῶν.

Μειωτέος:	9 σοκολ.
—Ἀφαιρετέος:	5 σοκολ.
Ὑπόλοιπο	4 σοκολ.

Ἐδῶ, ἀποκόπτεται (χάνεται) ἕνα μέρος τοῦ μειωτέου. Αὐτὸ ποὺ ἀπομένει λέγεται **ὑπόλοιπο.** Δηλαδὴ (9 σοκολ. — 5 σοκολ.) = = 4 σοκολ.

Ἐδῶ λοιπόν, τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι **ὑπόλοιπο** 4 σοκολ.

Μποροῦσε ὅμως ὁ Γιῶργος νὰ φάη ὅλες τὶς 9 σοκολάτες του. Τώρα τοῦ μένουν **ὑπόλοιπο:** (9 σοκολ.) — (9 σοκολ.) = 0 σοκολ. Δηλαδὴ τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι πάλι ὑπόλοιπο 0 σοκολ. Ὥστε:

> Τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι **ὑπόλοιπο** ὅταν ἀπὸ τὸ μειωτέο χάνεται μέρος (κομμάτι) του ἢ καὶ ὁλόκληρος ὁ μειωτέος.

Πρόβλημα 2. Ὁ πατέρας ἔδωσε στὴν κόρη του 9 δραχμὲς καὶ στὸ γιό του 5 δραχμές. Πόσες δραχμὲς πρέπει νὰ δώση ἀκόμη στὸ γιό, γιὰ νὰ ἔχη τὸν ἴδιο ἀριθμὸ δραχμῶν μὲ τὴν κόρη ;

Πάλι θὰ κάνωμε τὴν ἀφαίρεση (9 — 5) δραχμές, ἀλλ' ὅμως, ἡ ἀφαίρεση αὐτὴ ἐξηγεῖ ὄχι πόσες δραχμὲς θὰ χαθοῦν ἀπὸ τὸν μειωτέο, ἀλλὰ πόσες πρέπει νὰ προστεθοῦν στὸν ἀφαιρετέο γιὰ νὰ ἐξισωθῆ μὲ τὸ μειωτέο. Ἐδῶ, τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι:

Μειωτέος:	9 δραχμὲς
—Ἀφαιρετέος:	5 δραχμὲς
Διαφορὰ	4 δραχμὲς

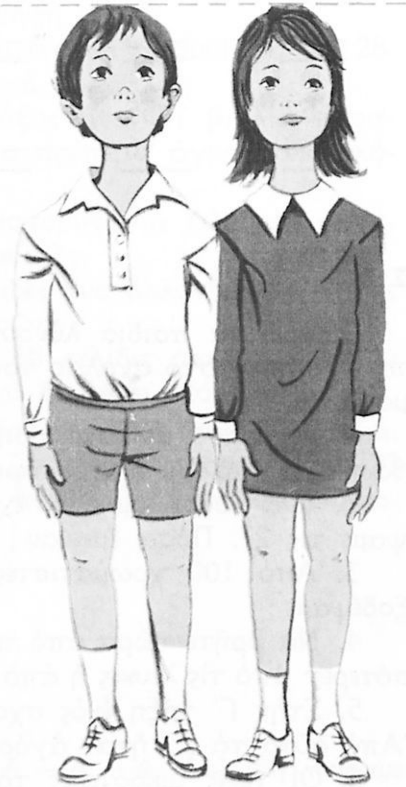
διαφορὰ 4 δραχμές. Δηλαδή, ἐδῶ δὲν ἔχομε ἀπώλεια (χάσιμο), ἀλλὰ σύγκριση.

Ὥστε:

> Τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι **διαφορὰ** ὅταν ἔχωμε:
>
> α) ἀφαίρεση **ἀφηρημένων ἀκεραίων,** καὶ
>
> β) ἀφαίρεση συγκεκριμένων ἀκεραίων ποὺ προβλέπει σύγκριση καὶ θέλει νὰ βρεθῆ τὸ ποσὸ ποὺ πρέπει νὰ προσθέσωμε στὸν ἀφαιρετέο, γιὰ νὰ φτάση (ἐξισωθῆ μὲ) τὸν μειωτέο.

᾿Αφαίρεση δύο συγκεκριμένων ἀκεραίων, εἶναι δυνατὴ ὅταν καὶ μόνον ὅταν εἶναι ὁμοειδεῖς. Τότε καὶ τὸ ἀποτέλεσμα (ὑπόλοιπο ἢ διαφορὰ) εἶναι πάντοτε ὁμοειδὲς πρὸς τὸν μειωτέο καὶ τὸν ἀφαιρετέο.

῾Ο Φάνης καὶ ἡ Χαρούλα ἔχουν τὸ ἴδιο ὕψος, δηλαδὴ 110 ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου. ῎Εχουν διαφορὰ ὕψους μηδέν. Δηλαδή: $110 - 110 = 0$



Συμπέρασμα. ῞Οταν ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος εἶναι ἴσοι, βρίσκομε ὑπόλοιπο (διαφορὰ) μηδέν.

᾿Ασκήσεις

Νὰ ἐκτελέσετε τὶς παρακάτω ἀφαιρέσεις :

α) Μὲ τὸν ἀναλυτικὸ τρόπο.

$$\begin{array}{r} 36 \\ -\ 8 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 43 \\ -\ 7 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 70 \\ -\ 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 62 \\ -\ 9 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 95 \\ -\ 8 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 41 \\ -27 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 54 \\ -18 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 80 \\ -32 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 98 \\ -49 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 65 \\ -30 \\ \hline \end{array}$$

β) Μὲ τὸν σύντομο (συνηθισμένο) τρόπο.

$$\begin{array}{r} 77 \\ -\ 8 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 53 \\ -\ 7 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 34 \\ -\ 9 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 82 \\ -48 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 91 \\ -35 \\ \hline \end{array}$$

80	63	50	90	86
− 59	− 26	− 17	− 8	− 39

γ) Μὲ ὅποιον τρόπο προτιμᾶτε.

83	92	74	77	60
− 9	− 5	− 45	− 29	− 13
57	55	42	80	70
− 38	− 16	− 7	− 56	− 54

Στὸ σχολεῖο

Σήμερα τὰ παιδιὰ λύνουν προβλήματα μὲ πράγματα ποὺ βλέπουν στὸ σχολεῖο τους. Νὰ μερικὰ τέτοια προβλήματα.

1. Ἀγόρασα σχολικὰ εἴδη ἀξίας 78 δραχμῶν. Τί ρέστα θὰ πάρω ἀπὸ ἕνα ἑκατοστάρικο ;
2. Ἕνα κουτὶ κιμωλίες ἔχει 100 λευκὲς κιμωλίες. Ξοδέψαμε τὶς 27. Πόσες ἔμειναν ;
3. Ἀπὸ 100 χρωματιστὲς κιμωλίες ἔμειναν 48. Πόσες ξοδέψαμε ;
4. Νὰ βρῆτε τώρα ἀπὸ ποιές κιμωλίες ξοδέψαμε περισσότερες· ἀπὸ τὶς λευκὲς ἢ ἀπὸ τὶς χρωματιστές ; καὶ πόσες ;
5. Στὴν Γ' τάξη ἑνὸς σχολείου γράφτηκαν 43 παιδιά. Ἀπὸ αὐτὰ τὰ 25 ἦταν ἀγόρια. Πόσα ἦταν τὰ κορίτσια ;
6. Οἱ τρεῖς μικρότερες τάξεις ἑνὸς ἄλλου σχολείου ἔχουν 98 παιδιά. Ἡ Α' τάξη ἔχει 25. Πόσα ἔχουν οἱ δύο ἄλλες τάξεις ;
7. Προσέξτε τώρα. Στὴ Β' τάξη εἶναι 30. Πόσα παιδιὰ εἶναι στὴν τρίτη ;
8. Στὶς τρεῖς μεγαλύτερες τάξεις τοῦ ἴδιου σχολείου φοιτοῦν 100 παιδιά. Ἀπὸ αὐτὰ φοιτοῦν στὴν Δ' τάξη 29. Πόσα παιδιά, δὲ φοιτοῦν στὴ Δ' τάξη ;
9. Τώρα νὰ βρῆτε ποιές τάξεις τοῦ σχολείου αὐτοῦ ἔ-

χουν περισσότερα παιδιὰ καὶ πόσα· ἡ Α΄ καὶ ἡ Β΄ μαζὶ ἢ ἡ Γ΄ καὶ ἡ Δ΄ μαζί ;

10. Ἡ μεγάλη πλευρὰ τοῦ χάρτη εἶναι 100 ἑκατοστόμετρα καὶ ἡ μικρὴ πλευρὰ εἶναι 82 ἑκατοστόμετρα. Πόσο διαφέρουν οἱ δύο πλευρές ; (Χρησιμοποιῆστε τὴν ἀριθμητικὴ γραμμή, γιὰ νὰ σᾶς βοηθήση.)

11. Στὸν πίνακα εἶναι γραμμένοι οἱ ἀριθμοὶ 74, 68, 28. Πόσο διαφέρει ὁ ἕνας ἀριθμὸς ἀπὸ τὸν ἄλλο ;

12. Στὴ βιβλιοθήκη τῆς τάξης εἶναι 37 βιβλία παραμυθιῶν. Γιὰ νὰ γίνουν 60, πόσα πρέπει ν' ἀγοράσωμε ἀκόμη ;

13. Ὑπάρχουν ἐπίσης 28 ἱστορίες γιὰ ζῶα καὶ φυτά. Πόσες θέλομε, γιὰ νὰ τὶς κάνωμε 50 ;

14. Ἕνα βιβλίο ἔχει 84 σελίδες· ἕνα ἄλλο ἔχει 58. Πόσες περισσότερες σελίδες ἔχει τὸ πρῶτο ;

15. Ἡ Ἀθηνᾶ διάβασε τὶς 68 σελίδες ἀπὸ τὶς 90 ποὺ ἔχει ἕνα βιβλίο. Πόσες μένουν νὰ διαβάση ἀκόμη ;

16. Εἴπαμε ὅτι στὶς 3 μικρότερες τάξεις ἦταν 98 παιδιά. Πῆγαν ἐκδρομὴ μὲ λεωφορεῖα. Στὸ ἕνα λεωφορεῖο ἦταν 33 παιδιὰ καὶ στὸ ἄλλο 34. Πόσα παιδιὰ ἦταν στὸ τρίτο λεωφορεῖο ;

5. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Γινόμενο - Πολλαπλασιασμὸς

Ἂς πάρωμε τὸ ἄθροισμα $4 + 4 + 4$. Δηλαδὴ πήραμε « **τρεῖς** φορὲς **τὸν ἴδιο** προσθετέο 4 ». Πιὸ σύντομα λέμε : «**τρεῖς** φορὲς 4» ἢ «3 φορὲς 4».

Ἔτσι λοιπόν, «4 φορὲς 5» σημαίνει $5 + 5 + 5 + 5$. Δηλαδή, «4 φορὲς 5» $= 5 + 5 + 5 + 5$.

Στὰ μαθηματικὰ ὅμως, ἀντὶ γιὰ τὴ λέξη «φορὲς» γράφομε τὸ σύμβολο $\times$. Τώρα λοιπὸν

γράφομε : $4 \times 5 = 5 + 5 + 5 + 5$, καὶ
λέμε : «4 φορὲς 5» $= 5 + 5 + 5 + 5$

᾿Επίσης, $1 \times 5 = 5$, διότι παίρνω 1 **φορὰ** τὸν 5
» $2 \times 0 = 0 + 0$ (γιατί ;)

Μὲ τὴν πρόσθεση ὅμως, ξέρομε νὰ βρίσκωμε τὰ ἀθροίσματα: $4 + 4 + 4 = 12$, $5 + 5 + 5 + 5 = 20$, $0 + 0 = 0$.

Γι᾿ αὐτὸ εἶναι: $3 \times 4 = 4 + 4 + 4 = 12$, $4 \times 5 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20$, $2 \times 0 = 0 + 0 = 0$.

Τὸ 3×4 λέγεται **γινόμενο** «τῶν 3 καὶ 4». Τώρα: Οἱ ἀκέραιοι 3 καὶ 4 λέγονται **παράγοντες** τοῦ γινομένου 3×4. Ὁ ἀκέραιος 12 ποὺ βρίσκομε μὲ τὴν πρόσθεση $4 + 4 + 4$ γιὰ τὸ γινόμενο 3×4, λέγεται **ἐξαγόμενο** (ἢ τιμὴ) τοῦ γινομένου 3×4.

Στὸ γινόμενο π.χ. 4×7, ὁ 4 μᾶς λέγει ὅτι πρέπει, στὸ ἄθροισμα ποὺ θὰ σχηματισθῇ, νὰ πάρωμε **πολλὲς** φορὲς (ἐδῶ 4 φορὲς) τὸν 7. Γι᾿ αὐτὸ λέμε ὅτι τὸ γινόμενο 4×7 δηλώνει νέα πράξη ποὺ λέγεται **πολλαπλασιασμὸς** καὶ ἔχει σύμβολό της τὸ $\times$. Τὸ σύμβολο $\times$ τὸ διαβάζομε **φορὲς** ἢ **ἐπί.**

Στὸ γινόμενο 4×7, ὁ 4 λέγεται **πολλαπλασιαστής,** γιατὶ αὐτὸς πολλαπλασιάζει τὸν 7. Ὁ 7, ἐπειδὴ πρέπει νὰ πολλαπλασιαστῇ λέγεται **πολλαπλασιαστέος.**

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α:

α) Τὸ 3×5 τὸ διαβάζομε «3 **φορὲς** 5» ἢ «3 **ἐπὶ** 5».
β) $3 \times 5 = 5 + 5 + 5 = 15$. Αὐτὸ εἶναι τὸ **ἐξαγόμενο** τοῦ γινομένου 3×5.
γ) $4 \times 0 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$. Αὐτὸ εἶναι τὸ **ἐξαγόμενο** τοῦ γινομένου 4×0.
δ) $4 \times 7 = 7 + 7 + 7 + 7 = 28$. Αὐτὸ εἶναι τὸ **ἐξαγόμενο** τοῦ γινομένου 4×7.
ε) Στὸ γινόμενο 4×7 ὁ 4 εἶναι ὁ πολλαπλασιαστής· ὁ 7 εἶναι ὁ πολλαπλασιαστέος.

Ἂν θυμηθοῦμε τώρα καὶ τὶς προηγούμενες πράξεις: πρόσθεση καὶ ἀφαίρεση, βλέπουμε ὅτι μποροῦμε δύο ἀκεραίους νὰ τοὺς συνδέσωμε μὲ πρόσθεση, μὲ ἀφαίρεση καὶ μὲ πολλαπλασιασμό. Ἔτσι π.χ. οἱ ἀκέραιοι 5 καὶ 2 :

α) μὲ **πρόσθεση** δίνουν τὸ **ἄθροισμα** $5 + 2$ καὶ λέγονται **προσθετέοι.**

β) μὲ **ἀφαίρεση** δίνουν τὴ **διαφορὰ** $5 - 2$ καὶ λέγονται **μειωτέος** (ὁ 5) καὶ **ἀφαιρετέος** (ὁ 2).

γ) μὲ **πολλαπλασιασμὸ** δίνουν τὸ **γινόμενο** 5×2 καὶ λέγονται **παράγοντες.**

Ἀσκήσεις

1. Γιὰ τὸ 3×6, στὶς παρακάτω 15 ἐρωτήσεις νὰ γράφετε πάνω στὶς παῦλες τὰ σύμβολα ἢ λέξεις ἢ ἀκεραίους ποὺ πρέπει :

Π.χ.: Τὸ 3×6 λέγεται **γινόμενο** τῶν ἀκεραίων **3** καὶ **6.**

1. Τὸ «3 φορὲς 6», στὴν ἀριθμητικὴ γράφεται «3—6».
2. Τὸ «3 ἐπὶ 6», στὴν ἀριθμητικὴ γράφεται «3—6».
3. Τὸ «3×6» τὸ διαβάζομε 3 ———6 ἢ 3———6.
4. Τὸ 3×6 λέγεται ————— τῶν ἀκεραίων —— καὶ ——.
5. Τὸ γινόμενο τῶν ἀκεραίων 3 καὶ 6 εἶναι τὸ 3 ——6.
6. Τὸ 3×6, σὰν ἄθροισμα γράφεται —————.
7. Ἐξαγόμενο τοῦ γινομένου 3×6 εἶναι ὁ ἀκέραιος —.
8. Τοῦ γινομένου 3×6, ὁ 18 εἶναι τὸ —————.
9. Οἱ 3 καὶ 6 λέγονται ————— τοῦ γινομένου 3×6.
10. Παράγοντες τοῦ γινομένου 3×6 εἶναι ὁ —— καὶ ὁ —.
11. Ὁ παράγοντας 3 τοῦ γινομένου 3×6 λέγεται

12. Ὁ παράγοντας 6 τοῦ γινομένου 3×6 λέγεται ___________.

13. Ὁ πολλαπλασιαστὴς στὸ γινόμενο 3×6 εἶναι ὁ ______.

14. Ὁ πολλαπλασιαστέος στὸ γινόμενο 3×6 εἶναι ὁ ______.

15. Τὸ ἄθροισμα $7 + 7 + 7 + 7 + 7$, σὰν γινόμενο γράφεται ______.

ΙΙ. Νὰ ἀπαντήσετε σὰν τὶς παραπάνω 15 ἐρωτήσεις γιὰ καθένα ἀπὸ τὰ γινόμενα 2×3, 3×2, 4×8, 8×4, 5×0.

Ἡ ἀντιμετάθεση τῶν παραγόντων

Ἄς πάρωμε τὸ γινόμενο 3×7. Εἴπαμε ὅτι $3 \times 7 = 7 + 7 + 7 = 21$.

Ἄν τώρα ἀντιμεταθέσωμε τοὺς παράγοντες τοῦ 3×7, θὰ ἔχωμε τό: $7 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 21$. Βλέπετε; $3 \times 7 = 21$ καὶ $7 \times 3 = 21$. Κάνετε καὶ σεῖς ὅσα παραδείγματα θέλετε. Θὰ δῆτε ὅτι :

Ἄν ἀντιμεταθέσωμε τοὺς παράγοντες γινομένου, τὸ ἐξαγόμενο δὲ μεταβάλλεται.

Μ' αὐτὴν τὴν ἰδιότητα μποροῦμε νὰ βρίσκωμε μερικὰ ἐξαγόμενα εὐκολώτερα καὶ γρηγορώτερα. Π.χ. ἀντὶ γιὰ 8×3 βρίσκομε τὸ $3 \times 8 = 24$.

Ἀντὶ γιὰ 5×1 βρίσκω τὸ $1 \times 5 = 5$
Ἀντὶ γιὰ 0×8 βρίσκω τὸ $8 \times 0 = 0$

Τὰ δύο γινόμενα π.χ. 2×3 καὶ 3×2 ποὺ τὸ ἕνα βγαίνει μὲ τὴν ἀντιμετάθεση τῶν παραγόντων τοῦ ἄλλου, λέγονται **δίδυμα** γινόμενα.

Τὸ ἐξαγόμενο τοῦ γινομένου 2×3 εἶναι ὁ 6. Αὐτὸς λέγεται **πολλαπλάσιο** τοῦ 3, διότι $6 = 2 \times 3 = 3 + 3$, δηλαδὴ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα **πολλῶν** προσθετέων ἴσων μὲ 3.

Ἐπίσης ὁ 6 εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 2, διότι $6 = 3 \times 2 = 2 + 2 + 2 =$ πολλοὶ προσθετέοι ἴσοι μὲ τὸ 2. Ὥστε:

> Κάθε γινόμενο εἶναι πολλαπλάσιο καθενὸς ἀπὸ τοὺς παράγοντές του.

Οἱ παράγοντες 0 καὶ 1

α) Ἂς πάρω γινόμενα μὲ ἕνα παράγοντα τὸν 0. Ἔχω: $1 \times 0 = 0$, $2 \times 0 = 0 + 0 = 0$, $3 \times 0 = 0 + 0 + 0 = 0$, προχωρεῖτε... $9 \times 0 = 0$

Ὥστε $1 \times 0 = 0$. Μὲ λόγια λέμε: 1 μηδέν; **μηδέν.** Δηλαδή, γιὰ συντομία, παραλείπομε τὸ «φορὲς» καὶ τὸ «ἰσοῦται μέ». Ἐπίσης: $2 \times 0 = 0$. Μὲ λόγια λέμε: 2 μηδὲν; **μηδέν.** Προχωροῦμε μέχρι $9 \times 0 = 0$· λέμε: 9 μηδέν; **μηδέν.**

Τὰ γινόμενα τῆς μορφῆς 0×5 τὰ λογαριάζομε εὔκολα μὲ τὴν ἀντιμετάθεση τῶν παραγόντων τους. Δηλαδή:
0×1; λέμε $1 \times 0 = 0$ (1 μηδέν; **μηδὲν**)
0×2; λέμε $2 \times 0 = 0$ (2 μηδέν; **μηδὲν**) κλπ. ὡς τὸ 0×9.
Ὥστε:

> Ὁ 0 (μηδὲν) σὰν παράγοντας μηδενίζει ὁλόκληρο τὸ γινόμενο.

Ἔτσι λοιπὸν θὰ λέμε:

$0 \times 0 = 0$ (μηδὲν τὸ μηδέν; **μηδὲν**)

β) Ἂς πάρωμε τώρα τὰ γινόμενα ποὺ ἔχουν γιὰ ἕνα παράγοντά τους τὸν ἀκέραιο 1. Λογαριάζομε καὶ λέμε:

$1 \times 0 = 0$ (1 μηδέν; **μηδὲν**).
$1 \times 1 = 1$ (1 ἕνα; **ἕνα**) ἢ (μία, μία; **μία**)
$1 \times 2 = 2$ (1 δύο; **δύο**) ἢ (μία, δύο; **δύο**)
⋮ ⋮ ⋮
$1 \times 9 = 9$ (1 ἐννέα; **ἐννέα**) ἢ (μία - ἐννιά; **ἐννιὰ**)

Τὰ γινόμενα τῆς μορφῆς 3×1, τὰ βρίσκομε εὔκολα μὲ τὴν ἀντιμετάθεση τῶν παραγόντων. Δηλαδή:

3×1; λέμε $1 \times 3 = 3$ (1 τρία; **τρία**) ἢ (μία οἱ τρεῖς; **τρεῖς**). Ὥστε:

> Ὁ παράγοντας 1 ἀφήνει τὸν ἄλλο παράγοντα ἀμετάβλητο.

Γι' αὐτὸ μάλιστα λέμε ὅτι ὁ 1 σὰν παράγοντας, εἶναι **οὐδέτερος.** Δηλαδὴ δὲν ἐπηρεάζει τὸν ἄλλο παράγοντα.

Καταλάβαμε λοιπὸν δύο σπουδαίους κανόνες:

α) Γινόμενο μὲ παράγοντα 0, μηδενίζεται· (ἢ δίνει ἐξαγόμενο 0)

β) Γινόμενο μὲ παράγοντα 1, δίνει ἐξαγόμενο τὸν ἄλλο παράγοντά του.

Ἀσκήσεις

Νὰ βρῆτε καὶ νὰ λέτε μὲ λόγια τὸ ἐξαγόμενο τῶν γινομένων:

α) 0×0, 1×0, 2×0, 3×0, ..., μέχρι τὸ 9×0. Ἕνας παράγ. πάντοτε 0.

β) τὰ δίδυμα: 0×1, 0×2, 0×3, ..., μέχρι τὸ 0×9. Ἕνας παράγ. πάντοτε 0.

γ) 1×9, 1×8, 1×7, 1×6, ..., μέχρι τὸ 1×0.

Ἕνας παράγ. πάντοτε 1.

δ) 9×1, 8×1, 7×1, 6×1, ..., μέχρι τὸ 0×1. Ἕνας παράγ. πάντοτε 1.

Ὁ πίνακας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

Μάθαμε νὰ βρίσκωμε καὶ νὰ λέμε μὲ συντομία τὰ γινόμενα (καὶ τὰ ἐξαγόμενά τους) ποὺ ἔχουν σὰν ἕνα παράγοντα τὸν 0 ἢ τὸν 1.

Τώρα θὰ μάθωμε νὰ βρίσκωμε τὰ ἐξαγόμενα καὶ νὰ λέμε μὲ συντομία τὰ γινόμενα μὲ ἄλλους (ἐκτὸς ἀπὸ 0 καὶ 1) παράγοντες.

Ἂς πάρωμε π.χ. τὸ 3×8. Γιὰ τὸ γινόμενο αὐτό, βρίσκομε: $3 \times 8 = 8 + 8 + 8 = 24$, δηλαδὴ $3 \times 8 = 24$. Λέμε: **τρεῖς 8; 24.**

Ἀφοῦ καταλάβαμε καλὰ γιατὶ $3 \times 8 = 24$, ἐπαναλαμβάνομε πολλὲς φορὲς τὴ φράση **«τρεῖς 8; 24»** γιὰ νὰ στερεωθῆ στὸ μυαλό μας καὶ νὰ μποροῦμε νὰ τὴ λέμε χωρὶς νὰ κάνωμε τὸ λογαριασμὸ $3 \times 8 = 8 + 8 + 8 = 24$. Δηλαδὴ **ἀποστηθίζομε** τὴ φράση **«τρεῖς 8; 24».** Αὐτὸ μπορεῖ νὰ γίνη καὶ σὰν παιγνίδι μεταξὺ δύο παιδιῶν. Ὁ Γιῶργος ρωτάει τὸν Κώστα **τρεῖς 8;** κι᾿ ὁ Κώστας ἀμέσως ἀπαντάει **24.** Τώρα λέμε ὅτι ὁ Γιῶργος κι ὁ Κώστας ἔχουν ἀποστηθίσει τὸ **τρεῖς 8;** 24. Ἡ ἀποστήθιση θὰ γίνεται μόνον γιὰ τὰ γινόμενα ποὺ ἔχουν τὸν πολλαπλασιαστὴ μικρότερο ἢ ἴσο τοῦ πολλαπλασιαστέου.

Γιὰ γινόμενο μὲ πολλαπλασιαστὴ μεγαλύτερο τοῦ πολλαπλασιαστέου, π.χ. 8×3, ἀμέσως σκεπτόμαστε, τὴν ἀντιμετάθεση τῶν παραγόντων καὶ λέμε **«τρεῖς 8; 24».** Ἔτσι, δὲν χρειάζεται αὐτοματισμὸς καὶ ἀποστήθιση τοῦ «ὀχτὼ 3; 24».

Ἔτσι λοιπόν, ἀρχίζοντας ἀπὸ τὶς μικρότερες τάξεις, μὲ διάφορα ἀντικείμενα κι ἔπειτα μὲ εἰκόνες ἀντικειμένων ἢ σχημάτων, πρῶτα λογαριάζομε κι ἔπειτα ἀποστηθίζομε τὰ γινόμενα καὶ τὶς φράσεις :

2 × 2 = 4 Δύο 2 ; **4**	2 × 3 = 6 Δύο 3 ; **6**	2 × 4 = 8 Δύο 4 ; **8**	2 × 5 = 10 Δύο 5 ; **10**	2 × 6 = 12 Δύο 6 ; **12**	2 × 7 = 14 Δύο 7 ; **14**	2 × 8 = 16 Δύο 8 ; **16**	2 × 9 = 18 Δύο 9 ; **18**
	3 × 3 = 9 τρεῖς 3 ; **9**	3 × 4 = 12 τρεῖς 4 ; **12**	3 × 5 = 15 τρεῖς 5 ; **15**	3 × 6 = 18 τρεῖς 6 ; **18**	3 × 7 = 21 τρεῖς 7 ; **21**	3 × 8 = 24 τρεῖς 8 ; **24**	3 × 9 = 27 τρεῖς 9 ; **27**
		4 × 4 = 16 τέσσερεις 4 ; **16**	4 × 5 = 20 τέσσερεις 5 ; **20**	4 × 6 = 24 τέσσερεις 6 ; **24**	4 × 7 = 28 τέσσερεις 7 ; **28**	4 × 8 = 32 τέσσερεις 8 ; **32**	4 × 9 = 36 τέσσερεις 9 ; **36**
			5 × 5 = 25 πέντε 5 ; **25**	5 × 6 = 30 πέντε 6 ; **30**	5 × 7 = 35 πέντε 7 ; **35**	5 × 8 = 40 πέντε 8 ; **40**	5 × 9 = 45 πέντε 9 ; **45**
				6 × 6 = 36 ἕξι 6 ; **36**	6 × 7 = 42 ἕξι 7 ; **42**	6 × 8 = 48 ἕξι 8 ; **48**	6 × 9 = 54 ἕξι 9 ; **54**
					7 × 7 = 49 ἑφτὰ 7 ; **49**	7 × 8 = 56 ἑφτὰ 8 ; **56**	7 × 9 = 63 ἑφτὰ 9 ; **63**
						8 × 8 = 64 ὀχτὼ 8 ; **64**	8 × 9 = 72 ὀχτὼ 9 ; **72**
							9 × 9 = 81 ἐννιὰ 9 ; **81**

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Ἔτσι φτάνομε λοιπὸν στὸν πίνακα πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀκεραίων 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ἀνὰ δύο, γιὰ τὸν ὁποῖο παρατηροῦμε :

α) Ὁ πίνακας περιέχει ὅλα τὰ 100 ἐξαγόμενα τῶν γινομένων ἀνὰ δύο τῶν ἀκεραίων 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

β) Ἕνα ἐξαγόμενο (π.χ. 28) εἶναι τοποθετημένο στὴν τομὴ μιᾶς ὁριζόντιας γραμμῆς, τοῦ πολλαπλασιαστοῦ (π.χ. 4) καὶ μιᾶς κατακόρυφης στήλης, τοῦ πολλαπλασιαστέου (π.χ. 7). Δηλαδὴ γιὰ τὸ ἐξαγόμενο 28 ἔχομε «τέσσερες 7; 28».

γ) Τὰ 36 πράσινα ἐξαγόμενα τὰ βρίσκομε ἀμέσως, μὲ τὴν ἀστραπιαία σκέψη ὅτι ὁ ἕνας παράγοντας εἶναι 0 (καὶ ἄρα τὸ ἐξαγόμενο εἶναι 0) ἢ 1 (καὶ ἄρα τὸ ἐξαγόμενο εἶναι ὁ ἄλλος παράγοντας).

δ) Τὰ 36 κόκκινα ἐξαγόμενα, μετὰ τὴν κατανόηση τὰ ἀποστηθίζομε.

ε) Τὰ 28 μαῦρα ἐξαγόμενα τὰ βρίσκομε ἀμέσως, μὲ τὴν ἀστραπιαία ἀντιμετάθεση τῶν παραγόντων. Π.χ. γιὰ τὸ «ὀχτὼ 3;» ἀμέσως μὲ τὸν ἀντιμετάθεση λέμε «τρεῖς 8; 24».

Ὥστε: ὁ αὐτοματισμὸς μὲ ἀποστήθιση χειάζεται μόνο στὰ 36 κόκκινα ἐξαγόμενα, στὰ ὁποῖα ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι μικρότερος ἢ ἴσος τοῦ πολλαπλασιαστέου. Σ' ὅλα τὰ ἄλλα 64 ἐξαγόμενα ὁ αὐτοματισμὸς ἐξασφαλίζεται μὲ ἀστραπιαία σκέψη.

Πόσα γίνονται ;

5×7	4×8	7×3	8×9	9×5	5×8
2×8	6×5	4×9	7×6	8×7	3×0
3×6	9×7	6×8	8×3	10×4	6×10

Προβλήματα

1. Πόσες δραχμὲς ἔχουν 2 δίδραχμα ; 3,5,7,6,9,4,8,10 δίδραχμα ;
2. Οἱ μαθητὲς ἔχουν σχηματίσει τριάδες. Πόσοι μαθητὲς εἶναι 3 τριάδες ; 2, 4, 8, 6, 9, 7, 5, 10 τριάδες ;
3. Ἡ ὥρα ἔχει 4 τέταρτα. Πόσα τέταρτα ἔχουν 2 ὧρες ; 4, 5, 3, 6, 9, 8, 10, 7 ὧρες ;
4. Πόσες δραχμὲς ἔχουν 2 πεντάδραχμα ; 3, 1, 4, 6, 8, 10, 5, 7, 9 πεντάδραχμα ;
5. Πόσους μῆνες ἔχουν 2 ἑξάμηνα ; 3, 5, 1, 4, 8, 10, 7, 6, 9 ἑξάμηνα ;
6. Πόσες ἡμέρες ἔχουν 3 ἑβδομάδες ; 2, 5, 4, 7, 6, 10, 8, 9 ἑβδομάδες ;
7. Κάμετε δεσμίδες μὲ 8 ξυλαράκια. Πόσα ξυλαράκια ἔχουν 2 δεσμίδες ; 3, 5, 4, 7, 10, 8 δεσμίδες ; Κάμετε τὸ ἴδιο καὶ μὲ τὸ 9.
8. Πόσες δραχμὲς ἔχει 1 δεκάδραχμο ; 3, 8, 4, 9 δεκάδραχμα ;

Πολλαπλασιαστικὴ ἀνάλυση ἀκεραίων

Παράδειγμα. Ξέρομε ὅτι 2 πεντάδραχμα κάνουν 10 δραχμές. Γράφομε τὴν πράξη : $2 \times 5 = 10$.

Οἱ ἀριθμοὶ 2 καὶ 5, ποὺ πολλαπλασιάζομε, λέγονται παράγοντες τοῦ 10. Τὸ 10 λέγεται γινόμενο.

Στὴν ἄσκηση $4 \times ; = 20$ βλέπομε ὅτι λείπει ὁ ἕνας παράγοντας. Μὲ τὸν πίνακα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εὔκολα βρίσκομε ὅτι εἶναι ὁ 5, διότι $4 \times 5 = 20$. Καὶ στὴν ἄσκηση $27 = ; \times 9$ εὔκολα βρίσκομε ὅτι λείπει ὁ παράγοντας 3, διότι $3 \times 9 = 27$. Τὴν ἀνάλυση ἀκεραίων σὲ γινόμενο δύο ἢ περισσότερων παραγόντων, τὴ λέμε **πολλαπλασιαστικὴ** ἀνάλυση.

Ποιοί παράγοντες λείπουν στὶς παρακάτω ἀσκήσεις;

$5 \times ; = 30$	$; \times 5 = 15$	$24 = 4 \times ;$	$30 = 10 \times ;$	$24 = 2 \times ;$
$4 + ; = 0$	$; \times 7 = 42$	$45 = 5 \times ;$	$49 = 7 \times ;$	$68 = 2 \times ;$

Σύνθετες ἀσκήσεις πολλαπλασιασμοῦ

1. Πόσα κάνουν $(3 \times 5) + (2 \times 6)$; Θὰ ἐκτελέσωμε πρῶτα τοὺς πολλαπλασιασμοὺς ποὺ εἶναι μέσα στὶς παρενθέσεις κι ἔπειτα θὰ προσθέσωμε τὰ γινόμενα ποὺ θὰ βροῦμε. Δηλαδή : $(3 \times 5) + (2 \times 6) = 15 + 12 = 27$.

2. $(5 \times 6) - (2 \times 5) = ;$ Θὰ ἐκτελέσωμε πρῶτα τοὺς πολλαπλασιασμοὺς ποὺ εἶναι στὶς παρενθέσεις κι ἔπειτα θ' ἀφαιρέσωμε τὰ γινόμενα. Δηλαδή : $(5 \times 6) - (2 \times 5) = 30 - 10 = 20$.

3. Νὰ λύσετε τὶς παρακάτω ἀσκήσεις:

$(2 \times 7) + (3 \times 4) = ;$ $\quad$ $(6 \times 10) - (4 \times 5) = ;$
$(5 \times 7) + (2 \times 0) = ;$ $\quad$ $(4 \times 10) - (5 \times 0) = ;$

$(6 \times 8) + (6 \times 8) = ;$
$(0 \times 4) + (4 \times 6) = ;$

Προβλήματα

1. Πόσες δραχμὲς μᾶς κάνουν:
   3 πεντάδραχμα καὶ 4 δεκάδραχμα ;
   2 εἰκοσάδραχμα καὶ 9 δίδραχμα ;
   4 πεντάδραχμα, 5 δεκάδραχμα καὶ 6 δίδραχμα ;

2. 4 τριάδες μαθητὲς καὶ 5 ἑξάδες πόσοι μαθητὲς εἶναι ;

3. Ἔχω 8 δεκάδραχμα καὶ ξόδεψα 6 πεντάδραχμα. Πόσες δραχμὲς μοῦ ἔμειναν ;

4. Πόσα πόδια ἔχουν συνολικὰ 2 γάτες, 6 γατάκια καὶ 1 σκύλος ;

5. Ἀγόρασα 2 κιλὰ ψωμὶ πρὸς 6 δραχμὲς τὸ κιλό. Τί ρέστα θὰ πάρω ἀπὸ ἕνα πενηντάρικο ;

Πολλαπλασιασμὸς μονοψηφίου μὲ διψήφιο ἀπὸ μνήμης

Πρόβλημα. Ὁ Γιαννάκης εἶναι 3 ἐτῶν. Πόσων μηνῶν εἶναι ;

Σκέψη. Τὸ 1 ἔτος ἔχει 12 μῆνες, τὰ 3 ἔτη ἔχουν 3×12. Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ 3×12 πόσο μᾶς κάνει, πολλαπλασιάζομε $3 \times 10 = 30$ καὶ $3 \times 2 = 6$. Ἔπειτα προσθέτομε $30 + 6 = 36$. Ὥστε $3 \times 12 = 36$.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο νὰ λύσετε τὶς παρακάτω ἀσκήσεις:

4×21	4×22	4×23	4×24	4×25	4×26
3×27	3×28	3×29	2×31	2×46	2×48
5×19	6×16	7×11	9×11	8×12	4×18

Στ' ὀπωροπωλεῖο

Στ' ὀπωροπωλεῖο τῆς γειτονιᾶς διαβάζομε τὶς παρακάτω τιμές :

σταφύλια	14	δραχ.	τὸ	κιλὸ	φράουλες	20	δρχ.	τὸ	κιλὸ
μῆλα	8	»	»	»	καρπούζια	4	»	»	»
ἀχλάδια	16	»	»	»	πεπόνια	6	»	»	»
ροδάκινα	12	»	»	»	ντομάτες	6	»	»	»
πορτοκάλια	6	»	»	»	κολοκυθάκια	12	»	»	»
μπανάνες	80	»	»	»	πατάτες	6	»	»	»

Νὰ βρῆτε τώρα :

1. Πόσο κάνουν 3 κιλὰ σταφύλια ; 7, 9, 5 κιλά ;

Σημείωση. Τὴν τιμὴ θὰ τὴ δῆτε στὸ τιμολόγιο.

2. Ἡ μητέρα ἀγόρασε 4 κιλὰ μῆλα καὶ 2 κιλὰ ἀχλάδια. Γιὰ ποιά φροῦτα ἔδωσε περισσότερα χρήματα;

3. Ὁ μανάβης πούλησε 9 καρπούζια. Κάθε καρπούζι ζύγιζε κατὰ μέσον ὅρο 3 κιλά. Πόσα χρήματα εἰσέπραξε;

4. Πόσο κάνουν: α) ὀχτώμισι κιλὰ πορτοκάλια; β) πεντέμισι κιλὰ κολοκυθάκια; γ) ἑνάμισι κιλὸ ἀχλάδια;

5. Ὁ μανάβης ἀγόρασε 3 σακιὰ πατάτες. Τὸ κάθε σακὶ ζύγιζε 32 κιλά. Πόσο ζύγιζαν καὶ τὰ τρία σακιά;

6. Πόσο ἀξίζουν 4 κιλὰ μπανάνες καὶ 2 κιλὰ φράουλες;

7. Κάμετε κι ἐσεῖς ὅμοια προβλήματα.

8. Νὰ βρῆτε τὸ διπλάσιο τοῦ 15,25,35,45,17,26,39,48.

9. Ἐπίσης τὸ τριπλάσιο τοῦ 20,30,15,25,24,32,18,27,16.

10. Ἐπίσης τὸ τετραπλάσιο τοῦ 10, 20, 25, 15,18.

11. Ὁ γιὸς εἶναι 18 ἐτῶν. Ὁ πατέρας του ἔχει ἡλικία δυόμισι φορὲς μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ἡλικία τοῦ γιοῦ. Πόσων ἐτῶν εἶναι ὁ πατέρας;

Πῶς γίνεται ὁ πολλαπλασιασμὸς μὲ μονοψήφιο πολλαπλασιαστὴ

α) Χωρὶς κρατούμενα

Πρόβλημα. Ἕνα κιλὸ μακαρόνια ἔχει 12 δραχμές. Πόσο ἔχουν τὰ 3 κιλά;

Γιὰ τὸ ἕνα κιλὸ θὰ δώσωμε 12 δραχμές. Γιὰ τὰ 2 κιλὰ θὰ δώσωμε $12 + 12$ δραχμές, δηλ. 2×12. Καὶ γιὰ τὰ 3 κιλὰ θὰ δώσωμε $12 + 12 + 12$ δραχμές, δηλαδὴ 3×12. Ἐδῶ ἐπαναλαμβάνομε τὸ 12 τρεῖς φορές. Εὔκολα βρίσκομε ὅτι $3 \times 12 = (3 \times 10) + (3 \times 2) = 30 + 6 = 36$

$$ἢ\ 3 \times 12 = \left\{ \begin{array}{lcl} 3 \times 1 \text{ δεκάδα} & = & 3 \text{ δεκάδες} \\ +3 \times 2 \text{ μονάδες} & = & 6 \text{ μονάδες.} \end{array} \right.$$

$$3 \text{ δεκάδες} + 6 \text{ μονάδες} = 36$$

Μποροῦμε νὰ γράψωμε τὶς παραπάνω πράξεις κι ἔτσι :

$$\begin{array}{r} 10+2 \\ \times\quad 3 \\ \hline 30+6=36 \end{array} \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{l} 1 \text{ δεκάδα} + 2 \text{ μονάδες} \\ \times \qquad\qquad 3 \\ \hline 3 \text{ δεκάδ.} + 6 \text{ μον.} = 36 \end{array}$$

Ἀρχίζομε τὸν πολλαπλασιασμὸ ἢ ἀπὸ τὶς δεκάδες ἢ ἀπὸ τὶς μονάδες.

Τὸν τελευταῖο τρόπο τὸν γράφομε πιὸ σύντομα :

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\quad 3 \\ \hline 36. \end{array}$$

Ἐδῶ ἀρχίζομε ἀπὸ τὶς μονάδες. Λέμε: 3×2 μονάδες $= 6$ μονάδες. Γράφομε τὸ 6 κάτω ἀπὸ τὴ γραμμὴ στὴ στήλη τῶν μονάδων. 3×1 δεκάδα $= 3$ δεκάδες. Γράφομε τὸ 3 στὴ στήλη τῶν δεκάδων.

β) Μὲ κρατούμενα

Πρόβλημα. Ἕνα κιλὸ ζάχαρη ἔχει 14 δραχμές. Πόσο ἔχουν τὰ 6 κιλά ; Σκεφτόμαστε, ὅπως καὶ στὸ προηγούμενο πρόβλημα. Θὰ πληρώσωμε $14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14$ δραχμές, δηλαδὴ 6×14 δραχμές. Ἐδῶ ἐπαναλαμβάνομε τὸ 14 ἔξι φορὲς καὶ βρίσκομε :

$$6 \times 14 = (6 \times 10) + (6 \times 4) = 60 + 24 = 84$$

$$\text{ἢ } 6 \times 14 = \left| \begin{array}{l} 6 \times 1 \text{ δεκάδα} = \ 6 \text{ δεκ.} \\ +6 \times 4 \text{ μονάδες} = 24 \text{ μον.} = 2 \text{ δεκ.} + 4 \text{ μον.} \end{array} \right.$$

$$6 \text{ δεκάδ.} + 2 \text{ δεκάδ.} + 4 \text{ μονάδ.} = 8 \text{ δεκάδ.} + 4 \text{ μον.} = 84.$$

Μποροῦμε νὰ γράψωμε τὶς παραπάνω πράξεις κι ἔτσι :

$$\begin{array}{r} 10+4 \\ \times\quad 6 \\ \hline 60+24 \end{array} = 84 \quad \text{ἢ} \quad \times \begin{array}{l} 1 \text{ δεκ.} + 4 \text{ μον.} \\ \qquad\quad 6 \\ \hline 6 \text{ δεκ.} + 24 \text{ μον.} \end{array} = 6 \text{ δεκ.} + 2 \text{ δεκ.} + 4 \text{ μον.} = 8 \text{ δεκ.} + 4 \text{ μον.} = 84$$

Τὸν τελευταῖο τρόπο τὸν γράφομε πιὸ σύντομα :

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times\ \ 6 \\ \hline 84 \end{array}$$

Ἀρχίζομε ἀπὸ τὶς μονάδες. Λέμε : 6×4 μονάδες = 24. Γράφομε τὸ 4 καὶ κρατοῦμε τὶς 2 δεκάδες (γιὰ νὰ τὶς προσθέσωμε στὶς δεκάδες). Ἔπειτα λέμε : 6 × 1 δεκάδα = 6 δεκάδες καὶ 2 τὰ κρατούμενα = 8. Γράφομε τὸ 8 στὴ στήλη τῶν δεκάδων. Βρήκαμε καὶ μὲ τὸν τρόπο αὐτὸ τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα 84. Ὁ τρόπος αὐτὸς εἶναι ὁ συνηθισμένος.

Σημείωση. Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ἐπαναλαμβάνομε τὸν ἀριθμὸ 14 ἕξι φορές. Ἡ πράξη αὐτὴ λέγεται π ο λ λ α π λ α σ ι α σ μ ό ς.

Ὥστε πολλαπλασιασμὸς λέγεται ἡ πράξη στὴν ὁποία μᾶς δίνονται δύο ἀριθμοὶ κι ἐπαναλαμβάνομε τὸν ἕνα τόσες φορές, ὅσες μονάδες ἔχει ὁ ἄλλος.

Ὅπως βλέπομε, ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι πρόσθεση ἴσων ἀριθμῶν (14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14).

Ὁ ἀριθμὸς ποὺ ἐπαναλαμβάνομε λέγεται π ο λ λ α π λ α σ ι α σ τ έ ο ς. Ὁ ἀριθμὸς ποὺ μᾶς δείχνει πόσες φορὲς θὰ ἐπαναλάβωμε τὸν πολλασιαστέο λέγεται π ο λ λ α π λ α σ ι α σ τ ή ς.

Αὐτὸ ποὺ βρίσκομε στὸν πολαπλασιασμὸ λέγεται γ ι ν ό μ ε ν ο.

Στὸ παραπάνω πρόβλημα πολλαπλασιαστέος εἶναι ὁ 14, πολλαπλασιαστὴς ὁ 6 καὶ γινόμενο ὁ 84.

Ἀσκήσεις

Νὰ λύσετε τὶς παρακάτω ἀσκήσεις :

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times\ \ 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ \ 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 21 \\ \times\ \ 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 32 \\ \times\ \ 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 23 \\ \times\ \ 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 41 \\ \times\ \ 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ \times\ \ 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 30 \\ \times\ \ 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 40 \\ \times\ \ 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 44 \\ \times\ \ 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 33 \\ \times\ \ 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 22 \\ \times\ \ 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ \ 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ \ 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ \times\ \ 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 16 \\ \times\ \ 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 19 \\ \times\ \ 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 18 \\ \times\ \ 5 \\ \hline \end{array}$$

$\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 6 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 24 \\ \times\ 4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 37 \\ \times\ 2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 28 \\ \times\ 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 49 \\ \times\ 2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 3 \\ \hline \end{array}$

Στὸ παντοπωλεῖο

Στὸ τιμολόγιο τοῦ παντοπωλείου διαβάζομε τὶς παρακάτω τιμές :

ΤΙΜΟΛΟΓΙΟ

Μακαρόνια	12	δραχμὲς	τὸ	κιλὸ
ρύζι	17	»	»	»
ζάχαρη	14	»	»	»
λάδι	34	»	»	»
ἐλιὲς α' ποιότητας	25	»	»	»
σαπούνι	13	»	»	»
τυρὶ φέτα	36	»	»	»

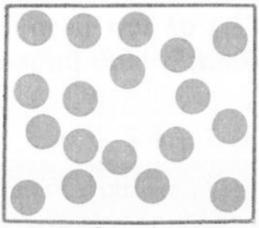
Νὰ πᾶτε στὸ παντοπωλεῖο. Ρωτῆστε γιὰ τὶς τιμὲς τῶν εἰδῶν αὐτῶν. Ποιό ἔγινε ἀκριβότερο ; φθηνότερο ; Γράψτε νέο, δικό σας, τιμολόγιο μὲ τὶς καινούριες τιμές. Ἂν θέλετε βάλτε στὸ τιμολόγιο κι ἄλλα εἴδη ποὺ θὰ βρῆτε. Ἔπειτα νὰ λύσετε τὰ παρακάτω προβλήματα. (Ἀργότερα θὰ φτιάξετε τιμολόγιο καὶ γιὰ τὸ μανάβικο ἢ γιὰ τὸ ἐμπορικό).

Νὰ βρῆτε :

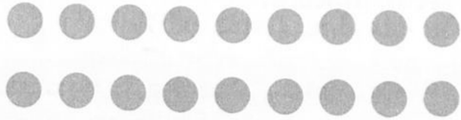
1. Πόσο κάνουν 4 κιλὰ ρύζι ; 3, 5, 2 κιλά ;
2. Πόσο κάνουν 7 κιλὰ σαπούνι ; 6, 4, 5 κιλά ;
3. Πόσα θὰ πληρώσωμε χωριστὰ γιὰ 2 κιλὰ λάδι ; γιὰ 2 κιλὰ τυρὶ φέτα ; γιὰ 7 κιλὰ μακαρόνια ;
4. Ἀγοράζω 3 κιλὰ ζάχαρη. Τί ρέστα θὰ πάρω ἀπὸ ἕνα ἑκατοστάρικο ;
5. Ἡ μητέρα ἀγόρασε 2 κιλὰ λάδι καὶ τῆς ἔμειναν 32 δραχμές. Πόσα χρήματα εἶχε πάρει μαζί της ;
6. Ποιά ἀξίζουν περισσότερο ; 4 κιλὰ μακαρόνια ἢ 3 κιλὰ ρύζι ;
7. Κάμετε κι ἐσεῖς ὅμοια προβλήματα, μὲ τὸ δικό σας τιμοκατάλογο.

6. ΔΙΑΙΡΕΣΗ

Ἐργασίες



Σχ. 1



Σχ. 2

1. Στὸ σχῆμα 1 βλέπετε μερικοὺς μικροὺς κύκλους. Μποροῦσαν νὰ ἦταν καὶ τρίγωνα, τετράγωνα, εἰκόνες ζώων, πουλιῶν, αὐτοκινήτων κλπ.

Σχεδιάστε τὰ στοίχεῖα αὐτά, στὸ τετράδιό σας, πρῶτα σὲ 2 ἰσάριθμες σειρὲς (σχ. 2), ἔπειτα σὲ 3 σειρές, ὕστερα σὲ 6 σειρὲς καὶ τέλος σὲ 9 σειρὲς καὶ σημειῶστε τὶς πράξεις.

Παρατηροῦμε ὅτι, ὅταν μοιράσωμε τὰ στοιχεῖα σὲ 2 ἰσάριθμες σειρές, θὰ ἔχη κάθε σειρὰ ἀπὸ 9, δηλαδὴ $18 : 2 = 9$. Ἐπίσης παρατηροῦμε ὅτι $18 : 3 = 6$, $18 : 6 = 3$, $18 : 9 = 2$.

2. Πάρτε 25 ἀντικείμενα· π.χ. κύβους, μάρκες, ξυλαράκια, χάντρες κλπ. Πῶς θὰ τὰ τοποθετήσετε σὲ σειρές, ὥστε ὅλες νὰ ἔχουν τὰ ἴδια καὶ νὰ μὴ μένη ὑπόλοιπο ; Σημειῶστε τὴν πράξη.

Τοποθετῆστε τὰ 25 ἀντικείμενα σὲ 6 σειρές· ἔπειτα σὲ 7 καὶ σὲ 3 σειρές. Πόσα θὰ ἔχη κάθε σειρὰ καὶ τί ὑπόλοιπο θὰ μένη κάθε φορά ; Σημειῶστε τὶς πράξεις.

Διαίρεση μερισμοῦ ἀπὸ μνήμης

Παράδειγμα 1. Νὰ μοιράσετε 12 μάρκες σὲ 3 παιδιά. Πόσες θὰ πάρη τὸ καθένα ; Εὔκολα βρίσκομε ὅτι θὰ πάρη 4. Ἐδῶ ἔχομε μιὰ ἄλλη πράξη, ποὺ δὲ μοιάζει μὲ τὶς τρεῖς προηγούμενες. Λέγεται δ ι α ί ρ ε σ η. Κι ἐπειδὴ χωρίζομε τὶς μάρκες ἢ ὁποιαδήποτε ἄλλα ἀντικείμενα σὲ ἴσα μερίδια, γι' αὐτὸ λέγεται δ ι α ί ρ ε σ η μ ε ρ ι σ μ ο ῦ. Γράφομε τὴν πράξη 12 : 3 = 4. Τὸ σύμβολο τῆς διαιρέσεως εἶναι τό : (διὰ ἢ μέ). Ὁ ἀριθμὸς 12 ποὺ πρέπει νὰ διαιρεθῆ λέγεται **διαιρετέος.** Ὁ ἀριθμὸς 3 ποὺ διαιρεῖ (χωρίζει) σὲ ἴσα μέρη τὸν διαιρετέο λέγεται **διαιρέτης.** Καὶ ὁ ἀριθμὸς 3 ποὺ βρήκαμε λέγεται **πηλίκο.**

Συμπέρασμα. Διαίρεση μερισμοῦ εἶναι ἡ πράξη στὴν ὁποία μᾶς δίνονται δύο ἀριθμοὶ καὶ μοιράζομε τὸν ἕνα σὲ τόσα ἴσα μέρη, ὅσα δείχνουν οἱ μονάδες ποὺ ἔχει ὁ ἄλλος.

Στὴ διαίρεση μ ε ρ ι σ μ ο ῦ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι ἀριθμοὶ ἑ τ ε ρ ο ε ι δ ε ῖ ς.

Παράδειγμα 2. Ἂν μοιράσωμε τὶς μάρκες σὲ δύο παιδιά, θὰ πάρη τὸ καθένα ἀπὸ 6. Δηλαδὴ 12 : 2 = 6. Τὸ λέμε κι ἔτσι: τὸ μισὸ τοῦ 12 εἶναι 6. Τὸ μισὸ τὸ γράφομε $\frac{1}{2}$. Μποροῦμε λοιπὸν νὰ γράψωμε : τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ 12 εἶναι 6.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο βρίσκομε εὔκολα ὅτι τὸ τέταρτο $\left(\frac{1}{4}\right)$ τοῦ 12 εἶναι 3· δηλαδή, ἂν μοιράσωμε τὶς 12 μάρκες σὲ 4 παιδιά, τὸ καθένα θὰ πάρη ἀπὸ 3. Δηλαδὴ 12 : 4 = 3 ἢ τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ 12 εἶναι 3.

Ἀσκήσεις

16 : 2 = ;	35 : 5 = ;	$\frac{1}{2}$ τοῦ 10 εἶναι ;	$\frac{1}{4}$ τοῦ 36 εἶναι ;
20 : 4 = ;	72 : 9 = ;	$\frac{1}{2}$ » 30 εἶναι ;	$\frac{1}{4}$ » 60 εἶναι ;
32 : 8 = ;	56 : 8 = ;	$\frac{1}{2}$ » 28 εἶναι ;	$\frac{1}{4}$ » 72 εἶναι ;

Βλέπομε ὅτι: $12 : 3 = 4$ καὶ $3 \times 4 = 12$. Δηλαδή:

> Σὲ κάθε τέλεια διαίρεση, τὸ γινόμενο τοῦ διαιρέτη μὲ τὸ πηλίκο ἰσοῦται μὲ τὸ διαιρετέο.

Ἐ φ α ρ μ ο γ έ ς:

$8 : 4 = 2$ διότι $4 \times 2 = 8$
$8 : 2 = 4$ διότι $2 \times 4 = 8$
$8 : 1 = 8$ διότι $1 \times 8 = 8$
$8 : 0 =$;

Τὸ πηλίκο $8 : 0$ δὲν ὑπάρχει, διότι μάθαμε ὅτι τὸ γινόμενο τοῦ (διαιρέτη) μηδενὸς μὲ ὁποιοδήποτε ἀριθμὸ εἶναι μηδέν. Δηλαδὴ δὲν μποροῦμε ποτὲ νὰ βροῦμε γινόμενο τὸν διαιρετέο 8.

Θὰ ξέρωμε λοιπὸν ὅτι :

> Διαίρεση μὲ διαιρέτη τὸν 0 δὲν γίνεται (εἶναι ἀδύνατη)

Προβλήματα

1. Ἕνας ποδηλάτης διέτρεξε 54 χιλιόμετρα σὲ 3 ὧρες. Πόσα χιλιόμετρα διέτρεξε σὲ 1 ὥρα ;

2. Ἕνα βιβλίο ἔχει 100 σελίδες. Πόσες εἶναι οἱ μισὲς σελίδες του ; Πόσο εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ (ἕνα τέταρτο) τῶν σελίδων ;

3. Δύο μικροὶ λαχειοπῶλες κέρδισαν μαζὶ ἀπὸ τὴν ἐργασία τους σὲ μιὰ μέρα 90 δραχμές. Πόσες δραχμὲς θὰ πάρη ὁ καθένας ;

Ἀπάντηση. Θὰ μοιράσωμε τὸ 90 σὲ 2 καὶ ὁ καθένας θὰ πάρη τὸ $\frac{1}{2}$ (μισὸ) τοῦ 90. Δηλαδὴ $90 : 2 = 45$ ἢ $\frac{1}{2}$ τοῦ 90 εἶναι 45.

Ἂν κέρδιζαν 80, 60, 70, 76, 72, 84, 50 δραχμές, πόσες θὰ ἔπαιρνε ὁ καθένας ; Νὰ γράψετε τὶς ἀπαντήσεις καὶ μὲ τοὺς δύο τρόπους.

Οἱ τέσσερεις πράξεις στὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων

Ἂς πάρωμε τοὺς ἀκεραίους 8 καὶ 2. Μάθαμε ὅτι δυὸ ἀκεραίους μποροῦμε νὰ τοὺς συνδέσωμε μὲ τὶς πράξεις:

α) **Πρόσθεση** (πάντοτε) καὶ δίνουν **ἄθροισμα.** Π.χ. τὸ $8 + 2$.

β) **Ἀφαίρεση** (ὅταν ὁ μειωτέος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἀφαιρετέου) καὶ δίνουν **διαφορά.** Π.χ. $8 - 2$ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν 8 καὶ 2.

γ) **Πολλαπλασιασμὸ** (πάντοτε) καὶ δίνουν **γινόμενο.** Π.χ. τὸ 8×2 εἶναι τὸ γινόμενο τῶν 8 καὶ 2.

δ) **Διαίρεση** (ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ διαιρέτη) καὶ δίνουν **πηλίκο.** Π.χ. $8 : 2$ εἶναι τὸ πηλίκο τῶν ἀκεραίων 8 καὶ 2 διότι ὁ 8 εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 2.

Προσοχὴ « ὁ μηδὲν 0, δὲν εἶναι ποτὲ διαιρέτης».

Διαίρεση μετρήσεως ἀπὸ μνήμης

Ἐργασίες. Νὰ γεμίσετε μὲ νερὸ ἄδειες φιάλες ἀπὸ γάλα ἢ ἄλλα δοχεῖα. Χρησιμοποιῆστε γιὰ μονάδα μικρὰ πρόχειρα κυπελλάκια πλαστικὰ ἢ φλιτζανάκια ἢ ποτηράκια. Νὰ μετρᾶτε κάθε φορὰ πόσα κυπελλάκια, φλιτζανάκια κλπ. νερὸ χωροῦν στὸ κάθε δοχεῖο.

Ὅταν τὸ γεμίσετε, νὰ κάνετε τὴν ἀντίθετη ἐργασία: θὰ μοιράζετε τὸ νερὸ τοῦ δοχείου σὲ κυπελλάκια στὴ σειρὰ καὶ θὰ μετρᾶτε πόσα χρειάζεστε κάθε φορά. Θὰ πρέπη νὰ βρίσκετε τὸν ἴδιο ἀριθμό, καὶ ὅταν γεμίζετε καὶ ὅταν ἀδειάζετε.

Σημείωση. Ἂν δὲν ἔχετε πολλὰ κυπελλάκια, θὰ γεμίζετε ἕνα καὶ θὰ χύνετε τὸ νερό. Θὰ μετρᾶτε πόσες τὸ γεμίσατε. Εἶναι τὸ ἴδιο, σὰ νὰ εἴχατε πολλὰ κυπελλάκια στὴ σειρὰ καὶ τὰ γεμίσατε.

Παράδειγμα 1. Ἕνα δοχεῖο γεμάτο λάδι περιέχει 10 κιλὰ λάδι. Μοιράζομε τὸ λάδι τοῦ δοχείου σὲ φιάλες τῶν 2 κιλῶν, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα. Μετροῦμε καὶ βρίσκομε ὅτι θὰ χρειαστοῦμε 5 τέτοιες φιάλες.

10 ΚΙΛΑ

Ἂν ρίξωμε τὸ λάδι ποὺ εἶναι τώρα στὶς φιάλες πάλι μέσα στὸ δοχεῖο, θὰ τὸ χωρέση ὅλο καὶ μόνο αὐτό. Δηλαδὴ θὰ χωρέση 5 φιάλες λάδι. Ἂν δὲν ἔχωμε 5 φιάλες ἀλλὰ μόνο 1, τότε, γιὰ νὰ γεμίσωμε τὸ δοχεῖο, θὰ πρέπη νὰ γεμίσωμε καὶ ν' ἀδειάσωμε στὸ δοχεῖο τὴ 1 φιάλη πέντε φορές.

Ὥστε τὰ 2 κιλὰ περιέχονται μέσα στὰ 10 κιλὰ πέντε φορές.

Γράφομε τὴν πράξη : $10 : 2 = 5$.

Ἂν ἔχωμε δοχεῖο μὲ 20 κιλὰ λάδι καὶ γεμίσωμε τὶς φιάλες, θὰ τὶς μετρήσωμε καὶ θὰ βροῦμε ὅτι εἶναι 10 στὴ σειρά, δηλαδὴ εἶναι τόσες, ὅσες φορὲς περιέχονται τὰ 2 κιλὰ μέσα στὰ 20 κιλά. Γράφομε τὴν πράξη: $20 : 2 = 10$.

Ἐδῶ ἔχομε ἄλλο εἶδος διαιρέσεως. Ἡ διαίρεση αὐτὴ λέγεται διαίρεση μετρήσεως. Γιατί;

Συμπέρασμα. Διαίρεση μετρήσεως εἶναι ἡ πράξη μὲ τὴν ὁποία βρίσκομε πόσες φορὲς ἕνας ἀριθμὸς χωράει σ᾽ ἕναν ἄλλο ἀριθμό.

Στὴ διαίρεση **μετρήσεως** ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι ἀριθμοὶ **ὁμοειδεῖς.**

Ἡ διαίρεση σὰν πράξη ἀντίστροφη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

Ἂς πάρωμε τὸ γινόμενο $3 \times 4 = 12$. Βλέπομε ὅτι

α) ὁ 12 εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 3. Ἔτσι λοιπὸν τὸ πηλίκο $12 : 3 = 4$.

β) ὁ 12 εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 4. Ἔτσι λοιπὸν τὸ πηλίκο $12 : 4 = 3$.

Ὥστε: Κάθε γινόμενο δύο παραγόντων καθορίζει καὶ δύο πηλίκα.

Σχηματίστε τὰ πηλίκα στὰ ἀριθμοσχήματα:

12 :	
12	1
6	2
4	3
3	4
2	6
1	12

10 :	
;	5
5	;
1	;
;	10

8 :   9 :   15 :   18 :   20 :

30 :   24 :   63 :   64 :   72 :   78 :   81 :

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Σημείωση. Τὶς ἴδιες ἀσκήσεις μποροῦμε νὰ τὶς γράψωμε καὶ μὲ τὸ : (διά). Π.χ. Τὸ 3 στὸ 15 χωράει 5, ἢ $15 : 3 = 5$.

Τὸ 3 στὸ 17 χωράει 5 φορὲς καὶ μένουν 2, ἢ $17 : 3$ μᾶς δίνει πηλίκο 5 καὶ ὑπόλοιπο 2.

Προβλήματα

1. Μὲ 48 δραχμὲς πόσα κιλὰ μῆλα ἀγοράζομε ; πόσα κιλὰ ἀχλάδια ; Τὶς τιμὲς θὰ τὶς βρῆτε στὸ τιμολόγιο τοῦ ὀπωροπωλείου.

2. 90 ἐκδρομεῖς πῆγαν ἐκδρομὴ μὲ λεωφορεῖα. Σὲ κάθε λεωφορεῖο ἦταν 30 ἐκδρομεῖς. Πόσα ἦταν τὰ λεωφορεῖα ;

3. Πόσα δοχεῖα τῶν 2 κιλῶν θὰ χρειαστῆ ἕνα ἐργοστάσιο τοματοπολτοῦ, γιὰ νὰ βάλη 66 κιλὰ τοματοπολτοῦ ;

4. Ἕνας γεωργὸς ἔσπειρε 72 κιλὰ σιτάρι στὸ χωράφι του. Σὲ κάθε στρέμμα ἔριχνε 12 κιλά. Πόσα στρέμματα ἔσπειρε ;

5. 42 μαθητὲς κάθονται στὰ θρανία τους ἀνὰ 2. Πόσα εἶναι τὰ θρανία ; Ἂν καθήσουν ἀνὰ 3, πόσα θρανία θὰ χρειαστοῦν ;

6. 36 μαθητὲς πόσες τριάδες κάνουν ; πόσες ἑξάδες, τετράδες, δυάδες ; Ἂν συνταχθοῦν σὲ πεντάδες, πόσες πεντάδες θὰ κάνουν ;

7. Πόσες δραχμὲς κάνουν 30 δεκάρες ; 65, 45, 58, 73, 80, 92 δεκάρες ;

8. Πόσες ἑβδομάδες κάνουν οἱ 42 μέρες ;

9. 36 ποτήρια πόσες δωδεκάδες ποτήρια μᾶς κάνουν ;

10. Ἕνα φορτηγὸ αὐτοκίνητο πρέπει νὰ μεταφέρη ἀπὸ τὸ δάσος 80 κορμοὺς ἀπὸ ἔλατα. Σὲ κάθε δρομολόγιο μεταφέρει 16 κορμούς. Πόσα δρομολόγια θὰ κάνη ;

Ἡ γραπτὴ διαίρεση μὲ μονοψήφιο διαιρέτη

Πρόβλημα 1. Μοιράζομε 48 καρύδια σὲ 2 παιδιά. Πόσα θὰ πάρη τὸ καθένα ;

Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα, θὰ κάνωμε διαίρεση· θὰ διαιρέσωμε τὸ 48 : 2. Τὸ 48 εἶναι 40 + 8 ἢ 4 δεκάδες καρύδια καὶ 8 καρύδια. Μοιράζομε πρῶτα τὶς 4 δεκάδες καὶ δίνομε σὲ κάθε παιδὶ ἀπὸ 2 δεκάδες (=20). Ἔπειτα μοιράζομε τὰ 8 καρύδια καὶ δίνομε ἀπὸ 4. Ὥστε κάθε παιδὶ παίρνει $20 + 4 = 24$. Γράφομε τὶς πράξεις :

$$48 : 2 = (40 + 8) : 2 = 20 + 4 = 24$$

ἢ 48 : 2 = (4 δεκ. + 8 μον.) : 2 = 2 δεκ. + 4 μον. = 24

Αὐτὸ τὸ γράφομε κι ἔτσι :

4 δεκ. + 8 μον.	2	ἢ πιὸ σύντομα	48	2
0 δεκ. + 8 » = 8	2 δεκ. + 4 μον. = 24		08	24
0			0	

Δηλαδὴ γράφομε ἀριστερὰ τὸ διαιρετέο καὶ δεξιὰ τὸ διαιρέτη καὶ τοὺς χωρίζομε μὲ μιὰ κατακόρυφη καὶ μιὰ ὁριζόντια γραμμή. Μοιράζομε πρῶτα τὶς δεκάδες. Λέμε : Τὸ 2 στὸ 4 χωράει 2 φορές. Γράφομε τὸ 2 κάτω ἀπὸ τὸν διαιρέτη. Ἀφοῦ τὸ κάθε παιδὶ παίρνει ἀπὸ 2 δεκάδες, τὰ 2 παιδιὰ θὰ πάρουν $2 \times 2 = 4$ δεκάδες. Τὶς ἀφαιροῦμε ἀπὸ τὶς 4 δεκάδες ποὺ ἔχομε καὶ μένει ὑπόλοιπο 0. Τὸ γράφομε κάτω ἀπὸ τὸ 4. Κατεβάζομε καὶ τὸ ψηφίο τῶν μονάδων 8. Τὸ 2 στὸ 8 χωράει 4. Γράφομε τὸ 4 κάτω ἀπὸ τὸν διαιρέτη καὶ δεξιὰ ἀπὸ τὶς 2 δεκάδες. Τὸ ἕνα παιδὶ παίρνει 4, τὰ 2 παιδιὰ θὰ πάρου $2 \times 4 = 8$. Ἀφαιροῦμε τὸ 8 ἀπὸ τὸ 8 τοῦ διαιρετέου καὶ βρίσκομε ὑπόλοιπο 0. Βρήκαμε ὅτι τὸ κάθε παιδὶ θὰ πάρη 24. Τὸ 24 εἶναι τὸ π η λ ί κ ο.

Σημείωση. Τὴ διαίρεση τὴν ἀρχίσαμε ἀπὸ τὶς δεκάδες.

Πρόβλημα 2. Ἂν μοιράσωμε τὰ 48 καρύδια σὲ 3 παιδιά, πόσα θὰ πάρη τὸ καθένα ;

Μοιράζομε πρῶτα τὶς 4 δεκάδες. Δίνομε σὲ κάθε παιδὶ ἀπὸ 1 καὶ μένει 1 δεκάδα (=10). Μιὰ δεκάδα καρύδια ποὺ μένει καὶ 8 καρύδια γίνονται 18. Μοιράζομε τὰ 18 καὶ δίνομε ἀπὸ 6. Ὥστε κάθε παιδὶ παίρνει 16 καρύδια.

Γράφομε τὶς πράξεις· $48 : 3 = (40 + 8) : 3 = (30 + 18) : 3 = 10 + 6 = 16$ ἢ 48 : 3 = (4 δεκ. + 8 μον.) : 3 = (3 δεκ. + 18 μον.) : 3 = 1 δεκ. + 6 μον. = 16.

ἢ 4 δεκ. + 8 μον.	3		48	3
1 » + 8 » = 18	1 δεκ. + 6 μον. = 16	ἢ πιὸ σύντομα	18	16
0			0	

Αὐτὸς ὁ τελευταῖος τρόπος εἶναι ὁ συνηθισμένος τρόπος τῆς γραπτῆς διαιρέσεως.

Πρόβλημα 3. Ἂν τὰ παιδιὰ ἦταν 6 τότε θὰ ἔπαιρνε τὸ καθένα ἀπὸ 8. Δηλαδὴ 48 : 6 = 8. Ἐδῶ οἱ 4 δεκάδες δὲν φτάνουν, γιὰ νὰ πάρη τὸ κάθε παιδὶ ἀπὸ 1 δεκάδα. Γι' αὐτὸ προσθέτομε καὶ τὶς 8 μονάδες καὶ μοιράζομε τὸ 48 διὰ 6. Λέμε : Τὸ 6 στὸ 48 χωράει 8. Τὸ 1 παιδὶ παίρνει, 8, τὰ 6 θὰ πάρουν 6 × 8 = 48 καὶ θὰ μείνῃ ὑπόλοιπο 0.

Γράφομε τὴν πρᾶξη	48	6	Λέμε: τὸ 6 στὸ 48 ; 8. ἕξι 8;
	0	8	48. . . Ἀπὸ (ἢ μέχρι) 48 ; 0.

Ἀσκήσεις

Νὰ κάμετε μὲ τὸν ἴδιο τρόπο τὶς παρακάτω διαιρέσεις :

56 : 7	72 : 8	42 : 6	27 : 9	40 : 8	28 : 4	81 : 9
73 : 9	45 : 6	54 : 8	36 : 7	49 : 5	63 : 9	34 : 4
43 : 8	51 : 7	64 : 9	39 : 6	26 : 5	47 : 7	58 : 6

Προβλήματα

1. Μὲ 75 χάντρες ἔκαμα 3 περιδέραια. Πόσες χάντρες ἔχει τὸ καθένα ;

2. Τὰ λαϊκὰ λαχεῖα πουλιοῦνται πρὸς 5 δραχμὲς τὸ ἕνα. Μὲ 60 δραχμὲς πόσα λαχεῖα ἀγοράζετε ;

Τὸ ἐθνικὸ λαχεῖο στοιχίζει 10 δραχμές. Πόσα θ' ἀγοράσετε μὲ τὶς ἴδιες δραχμές ;

3. Μὲ 100 δραχμὲς πόσα κιλὰ μῆλα ἀγοράζομε ; Ἡ τιμὴ εἶναι γραμμένη στὸ τιμολόγιο.

4. Στὸ σχολικό μας φυτώριο ἔχομε 100 μικρὰ δεντράκια, ἀμυγδαλιές, φυτεμένες ἐξ ἴσου σὲ 5 βραγιές. Πόσα δεντράκια εἶναι σὲ κάθε βραγιά ;

5. Γιὰ μιὰ ἀνδρικὴ ἐνδυμασία χρειάζονται 3 μέτρα ὕφασμα. Ἕνα τόπι ὕφασμα εἶναι 45 μέτρα. Πόσες ἐνδυμασίες τοῦ ἴδιου μεγέθους γίνονται ἀπὸ αὐτό ;

6. Σ' ἕνα ἐργοστάσιο κατασκευάζουν πουκάμισα. Σὲ κάθε πουκάμισο βάζουν 6 κουμπιά. 96 κουμπιὰ γιὰ πόσα πουκάμισα θὰ φτάσουν ;

Ἀντιστροφὴ προβλημάτων

Παραδείγματα

1. 4 ἑβδομάδες πόσες ἡμέρες ἔχουν ; Ἀπάντηση $4 \times 7 = 28$. Ἀντιστρέφω τὸ πρόβλημα : 28 μέρες πόσες ἑβδομάδες κάνουν ; Ἀπάντηση. $28 : 7 = 4$.

2. 6 τριάδες μαθητὲς πόσοι μαθητὲς εἶναι ; Ἀπάντηση. $6 \times 3 = 18$. Ἀντιστρέφω τὸ πρόβλημα : 18 μαθητὲς πόσες τριάδες κάνουν ; Ἀπάντηση $18 : 3 = 6$.

3. 3 δωδεκάδες πιάτα πόσα πιάτα εἶναι ; Ἀπάντηση. $3 \times 12 = 36$. Ἀντιστρέφω τὸ πρόβλημα : 36 πιάτα πόσες δωδεκάδες κάνουν ; Ἀπάντηση $36 : 12 = 3$.

4. Τὸ 1 κιλὸ σταφύλια ἔχει 7 δραχμές. Πόσο ἔχουν τὰ 5 κιλά ; Ἀπάντηση $5 \times 7 = 35$. Ἀντιστρέφω τὸ πρόβλημα : Τὰ 5 κιλὰ σταφύλια ἔχουν 35 δραχμές. Πόσο ἔχει τὸ 1 ; Ἀπάντηση. $35 : 5 = 7$.

Τὸ ἀντιστρέφω καὶ ἀλλιῶς : Τὸ 1 κιλὸ σταφύλια ἔχει 7 δραχμές. Πόσα κιλὰ ἀγοράζω μὲ 35 δραχμές ; Ἀπάντηση. Τὸ 7 στὸ 35 χωράει 5 φορὲς ἢ $35 : 7 = 5$.

Ὅπως βλέπετε, τὰ παραπάνω προβλήματα ἦταν προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ καὶ τ' ἀντέστρεψα κάνοντάς τα προβλήματα διαιρέσεως. Χρησιμοποίησα τοὺς ἴδιους ἀριθμούς.

Μποροῦμε νὰ κάνωμε καὶ τὸ ἀντίθετο· δηλαδὴ προβλήματα διαιρέσεως νὰ τ' ἀντιστρέψωμε σὲ προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ.

Παραδείγματα

1. 50 δραχμὲς πόσα δεκάρικα κάνουν ; Ἀπάντηση. $50 : 10 = 5$. Ἀντιστρέφω τὴν ἐρώτηση : 5 δεκάρικα πόσες δραχμὲς ἔχουν ; Ἀπάντηση $5 \times 10 = 50$.

2. Ὁ ἀνθοπώλης μὲ 42 γαρίφαλα ἔκαμε 3 ἀνθοδέσμες. Πόσα γαρίφαλα ἔβαλε σὲ κάθε ἀνθοδέσμη ; Ἀπάντηση. $42 : 3 = 14$. Λέγω τὸ πρόβλημα καὶ ἀλλιῶς, χωρὶς νὰ τὸ ἀντιστρέψω : Ὁ ἀνθοπώλης εἶχε 42 γαρίφαλα καὶ τὰ ἔκαμε ἀνθοδέσμες, βάζοντας 14 γαρίφαλα σὲ κάθε μία. Πόσες ἀνθοδέσμες ἔκαμε ; $42 : 14 = 3$.

Καὶ στὶς δύο περιπτώσεις τὸ πρόβλημα εἶναι πρόβλημα διαιρέσεως. Τώρα τὸ ἀντιστρέφω σὲ πρόβλημα πολλαπλασιασμοῦ. Ὁ ἀνθοπώλης ἔκαμε μὲ γαρίφαλα 3 ἀνθοδέσμες κι ἔβαλε 14 γαρίφαλα σὲ κάθε μία. Πόσα γαρίφαλα ἔβαλε καὶ στὶς τρεῖς ; Ἀπάντηση $3 \times 14 = 42$.

3. $(12 \times 3) : 3 = 12$ $\quad$ $(20 \times 4) : 4 = 20$
$(12 : 3) \times 3 = 12$ $\quad$ $(20 : 4) \times 4 = 20$

Παρατηροῦμε ὅτι, ἂν ἕναν ἀριθμὸ (π.χ. τὸν 12) τὸν πολλαπλασιάσωμε καὶ τὸ διαιρέσωμε μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό, ποὺ νὰ μὴν εἶναι ὁ μηδέν, ὁ ἀριθμὸς δὲ μεταβάλλεται. Ὥστε, ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεση προχωροῦν ἀντίθετα, εἶναι πράξεις ἀντίστροφες.

Νὰ λύσετε τὶς ἀσκήσεις :

$(8 \times 2) : 2 =$	$(15 \times 5) : 5 =$	$(18 \times 6) : 6 =$	$(30 : 3) \times 3 =$
$(8 : 2) \times 2 =$	$(15 : 5) \times 5 =$	$(18 : 6) \times 6 =$	$(30 \times 3) : 3 =$

Νὰ λύσετε καὶ μετὰ ν' ἀντιστρέψετε τὰ παρακάτω προβλήματα :

1. Ἕνα κιλὸ πατάτες ἔχει 3 δραχμές. Πόσο ἔχουν τὰ 7 κιλά ;
2. 6 πεντάδραχμα (τάληρα) πόσες δραχμὲς ἔχουν ;
3. Μιὰ οἰκογένεια ξοδεύει σὲ μιὰ βδομάδα (7 μέρες) γιὰ ψωμὶ 42 δραχμές. Πόσες δραχμὲς ξοδεύει τὴν ἡμέρα ;
4. Γιὰ νὰ τοποθετήσωμε 48 πλάκες σαπούνι, χρειαζόμαστε 3 κιβώτια. Πόσες πλάκες θὰ τοποθετήσωμε σὲ κάθε κιβώτιο ;

7. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΤΩΝ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ

1. Ἕνα εἰκοσάδραχμο, ἕνα πενηντάρικο κι ἕνα πεντάδραχμο πόσες δραχμὲς ἔχουν;
2. Ἕνας κηπουρὸς γέμισε 3 κοφίνια ντομάτες. Τὸ ἕνα ζυγίζει 28 κιλά, τὸ ἄλλο 36 καὶ τὸ τρίτο 35. Πόσα κιλὰ εἶναι ὅλες οἱ ντομάτες;
3. Ἡ κυρία Ἄννα ἀγόρασε 1 κιλὸ λάδι, 1 κιλὸ μπακαλιάρο καὶ μισὸ κιλὸ τυρὶ φέτα. Τί ρέστα θὰ πάρη ἀπὸ ἕνα ἑκατοστάρικο;
4. Ποιά ἀξίζουν περισσότερο; τὰ 3 κιλὰ μακαρόνια καὶ 2 κιλὰ ζάχαρη ἢ τὰ 9 κιλὰ πορτοκάλια καὶ 7 κιλὰ μῆλα; καὶ πόσο;
5. Ὁ μανάβης ἀγοράζει τὰ σταφύλια 5 δραχμὲς τὸ κιλό. Πόσες δραχμὲς θὰ κερδίση, ἂν πουλήση 9 κιλὰ σταφύλια;
6. Ἕνας ἑστιάτορας πῆρε γιὰ τὸ ἑστιατόριό του 6 κιλὰ σταφύλια, 8 κιλὰ ροδάκινα, 10 κιλὰ πορτοκάλια, 25 κιλὰ πεπόνια, 5 κιλὰ κολοκυθάκια καὶ 9 κιλὰ ντομάτες. Πόσα χρήματα πλήρωσε;
7. Ἡ κυρία Μαίρη ἀγόρασε 6 ποτήρια καὶ τῆς ἔδωσαν ρέστα ἀπὸ ἕνα ἑκατοστάρικο 28 δραχμές. Πόσο ἀγόρασε τὸ ἕνα ποτήρι;
8. Ἡ βιβλιοθήκη τῆς Γ′ τάξης ἔχει 84 βιβλία. Ἀπὸ αὐτὰ τὰ 17 εἶναι παραμύθια καὶ τὰ 28 ἱστορίες. Πόσα εἶναι τὰ ἄλλα βιβλία;
9. Ἡ κυρία Νίκη ἀγόρασε τυρὶ καὶ φροῦτα. Γιὰ τὸ τυρὶ ἔδωσε 36 δραχμές. Ἀπὸ τὸ ἑκατοστάρικο ποὺ εἶχε μαζί της τῆς ἔμειναν 37 δραχμές. Πόσο ἔδωσε γιὰ τὰ φροῦτα;
10. Ἕνα βαρέλι γεμάτο λάδι περιέχει 100 κιλά. Ἀπὸ τὸ λάδι ποὺ ἔχει μέσα πούλησαν τὴν πρώτη μέρα 18 κιλὰ καὶ τὴν ἑπομένη 29 κιλά. Πόσο λάδι ὑπάρχει τώρα μέσα στὸ βαρέλι;
11. Ἀπὸ 4 κιλὰ ἐλιὲς βγάζομε 1 κιλὸ λάδι. Πόσο λάδι θὰ βγάλωμε ἀπὸ 94 κιλὰ ἐλιές;
12. Στὸ σχολικὸ κῆπο μέτρησα 87 τριαντάφυλλα κόκκινα καὶ ἄσπρα. Τὰ ἄσπρα ἦταν 58. Πόσα ἦταν τὰ κόκκινα;
13. Πολλαπλασιάζω ἕναν ἀριθμὸ ἐπὶ τὸ 7 καὶ γίνεται 98. Ποιός εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός;
14. Νὰ βρῆτε τὸ ἕνα τέταρτο $\left(\frac{1}{4}\right)$ τῶν ἀριθμῶν, 60, 80, 100.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΟΙ ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΠΟ ΤΟ 100 ΕΩΣ ΤΟ 1000

Α. ΓΕΝΙΚΑ

Σχηματισμὸς τῆς πρώτης χιλιάδας μ' ἑκατοντάδες

Οἱ ἀκέραιοι ποὺ μάθαμε ὡς τώρα εἶναι ἀπὸ τὸ 0 ὡς τὸ 9 μ' ἕνα ψηφίο, δηλαδὴ μονοψήφιοι· ἀπὸ τὸ 10 ὡς τὸ 99 μὲ δύο ψηφία, δηλαδὴ διψήφιοι καὶ τὸ 100 μὲ τρία ψηφία (τριψήφιος ἀκέραιος).

Προχωροῦμε τώρα στοὺς ἄλλους τριψήφιους ἀκεραίους ὡς τὸ χίλια.

Ἐργασίες

1. Νὰ τοποθετήσετε στὸ πάτωμα ἢ στὴν αὐλὴ τὰ ξύλινα μέτρα σας. Πρῶτα ἕνα μέτρο, ἔπειτα ἄλλο ἕνα συνέχεια μὲ τὸ πρῶτο, ὕστερα ἄλλο ἕνα συνέχεια μὲ τὸ προηγούμενο κλπ., ὥσπου νὰ τοποθετήσετε 10 μέτρα. Κάθε φορὰ θὰ λέτε πόσους πόντους ἔχουν τὰ μέτρα ποὺ ἔχετε τοποθετήσει. Δηλαδή :

τὸ	ἕνα	μέτρο ἔχει	ἑκατὸ	(100)	πόντους,	
τὰ	2	μέτρα ἔχουν	διακόσιους		(200)	πόντους
τὰ	3	» »	τριακόσιους		(300)	»
τὰ	4	» »	τετρακόσιους		(400)	»
τὰ	5	» »	πεντακόσιους		(500)	»
τὰ	6	» »	ἑξακόσιους		(600)	»
τὰ	7	» »	ἑφτακόσιους		(700)	»
τὰ	8	» »	ὀχτακόσιους		(800)	»
τὰ	9	» »	ἐννιακόσιους		(900)	»
τὰ	10	» »	χίλιους		(1.000)	»

Νὰ γράψετε τοὺς ἀριθμοὺς 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1.000.

2. Τὶς χάρτινες μετροταινίες σας νὰ τὶς κολλήσετε στὸν τοῖχο, στὴ σειρά. Κι ἐδῶ θὰ παρατηρῆτε καὶ θὰ λέτε πόσους πόντους (ἑκατοστὰ) ἔχουν κάθε φορὰ οἱ μετροταινίες ποὺ ἔχετε κολλήσει.

3. Χρησιμοποιῆστε δεσμίδες ἀπὸ 10 ξυλάκια σὲ κάθε μία. Νὰ ἑνώσετε ἀπὸ 10 τέτοιες δεσμίδες καὶ νὰ κάμετε ἑκατοντάδες. Πόσα ξυλάκια ἔχουν 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 τέτοιες ἑκατοντάδες ;

4. Νὰ βάλετε στὴ σειρὰ 2, 3, 4, . . . 10 καρτέλες τῶν 100 κύκλων. Πόσους κύκλους θὰ ἔχετε κάθε φορά ;

5. Νὰ κάμετε παρόμοιες ἐργασίες μὲ ἀριθμητήρια ποὺ ἔχουν 100 σφαιρίδια ἢ 100 χάντρες τὸ καθένα. Θὰ τοποθετήσετε στὴ σειρὰ 2, 3 . . 10 ἀριθμητήρια. Πόσα σφαιρίδια ἢ πόσες χάντρες θὰ ἔχετε κάθε φορά ;

6. Νὰ σχεδιάσετε σὲ φύλλα χαρτιοῦ ἀπὸ 100 κύκλους. Νὰ τοποθετήσετε στὴ σειρὰ 2, 3,. . . 10 τέτοια φύλλα. Πόσους κύκλους θὰ ἔχετε κάθε φορά ;

7. Νὰ βάλετε σὲ κουτιὰ ἀπὸ 100 ὄσπρια. Νὰ τοποθετήσετε στὴ σειρὰ 2, 3 . . . 10 τέτοια κουτιὰ καὶ νὰ πῆτε πόσα ὄσπρια θὰ ἔχετε κάθε φορά.

8. Νὰ περάσετε σὲ κλωστὲς ἀπὸ 100 βελανίδια ἢ ἄλλους σπόρους. Νὰ βάλετε στὴ σειρὰ 2, 3 . . . 10 τέτοιες κλωστές. Πόσα βελανίδια θὰ ἔχετε ;

9. Νὰ μετρήσετε 1.000 βήματα. Κάθε 100 βήματα νὰ βάζετε ἕνα σημάδι, ποὺ νὰ φαίνεται ἀπὸ μακριά.

Μεταχειριστῆτε καὶ ὅσα ἄλλα κατάλληλα ἀντικείμενα ἔχετε, γιὰ νὰ κάμετε παρόμοιες ἐργασίες.

10. Τὸ σχῆμα τῆς ἄλλης σελίδας δείχνει μιὰ χιλιάδα μικροὺς κύκλους. Νὰ σχηματίσετε κι ἐσεῖς στὸ τετράδιό σας παρόμοια χιλιάδα μὲ τελεῖες ἢ μὲ ἄλλα στοιχεῖα (τετραγωνάκια, τρίγωνα, γραμμὲς κλπ.).

Μ' ἕνα φύλλο τοῦ τετραδίου σας κομμένο στὴ γωνία, ὅπως φαίνεται στὸ διπλανὸ σχῆμα, νὰ σκεπάσετε τὴ χιλιάδα τῶν κύκλων.

Μετακινῆστε τὸ φύλλο, ὥστε νὰ φανῆ μιὰ ἑκατοντάδα, ἔπειτα 2, ὕστερα 3 κλπ. καὶ τέλος 10 ἑκατοντάδες. Πόσους κύκλους θὰ ἔχετε κάθε φορά ;

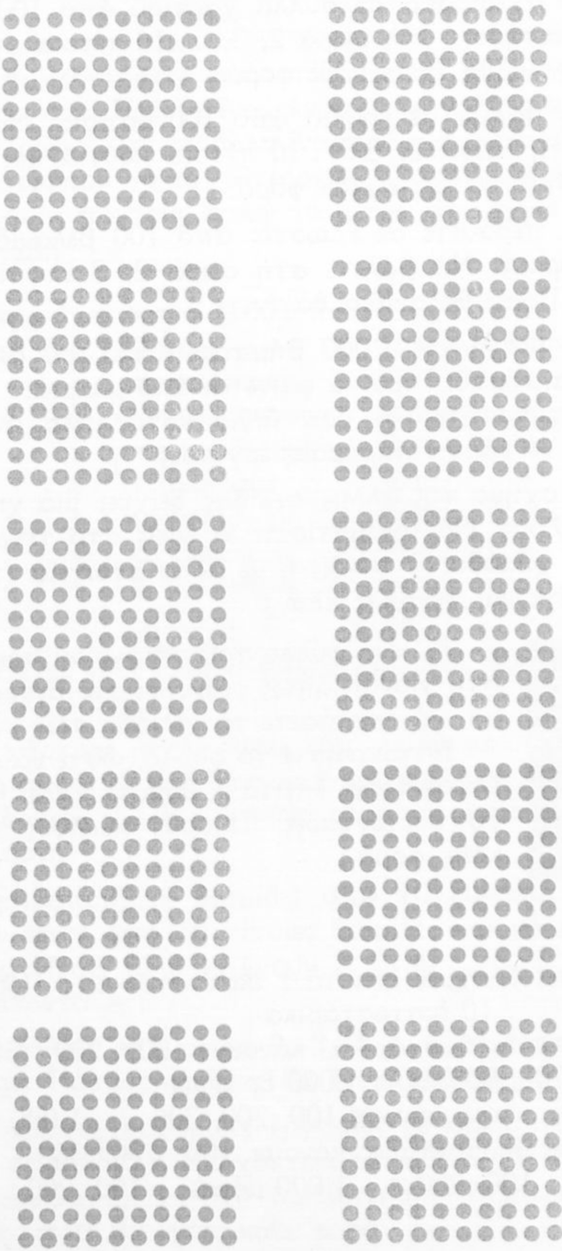
Ἀσκήσεις

1. Πόσες δραχμὲς ἔχει τὸ 1 ἑκατοστάρικο ; Πόσες ἔχουν τὰ 2, 3, 4 . . . 10 ἑκατοστάρικα ;

2. Πόσα ἑκατοστάρικα κάνουν 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1.000 δραχμές ;

3. Πόσα μέτρα κάνουν 100, 200, 300 . . . 1.000 πόντοι ;

4. Πόσες ἑκατοντάδες κάνουν 100, 200, 300 . . . 1.000 ξυλαράκια ; 100, 200 . . . 1.000 μάρκες ; 100, 200 . . . 1.000 χάντρες ;



5. Δείχνοντας τὰ παραπάνω ἀντικείμενα ἀνεβῆτε ἑκατὸ ἑκατὸ ὡς τὸ 1.000· ἔτσι : 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1.000.

6. Ἐπίσης δείχνοντας κατεβῆτε ἀνὰ 100 ἀπὸ τὸ 1.000 ὡς τὸ 0.

7. Τὸ 200 βρίσκεται ἀνάμεσα στὸ 100 καὶ στὸ 300. Ἀνάμεσα σὲ ποιὲς ἑκατοντάδες βρίσκεται τὸ 300 ; τὸ 500 ; τὸ 700 ; τὸ 400 ; τὸ 800 ; τὸ 900 ; τὸ 600 ;

8. Ἀνεβῆτε ἀνὰ 200 ὡς τὸ 1.000. Κάμετε τὸ ἴδιο ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ 100. Χρησιμοποιῆστε τὰ παραπάνω ἀντικείμενα.

9. Κατεβῆτε ἀνὰ 200 ἀπὸ τὸ 1.000 ὡς τὸ 0. Κάμετε τὸ ἴδιο ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ 900. Νὰ χρησιμοποιήσετε τ' ἀντικείμενα.

Ἀρίθμηση μὲ πεντηκοντάδες ὡς τὸ 1.000

1. Πόσες πεντηκοντάδες ἔχουν οἱ 10 ἑκατοντάδες κύκλοι ; πόσες οἱ 10 ἑκατοντάδες ξυλαράκια ; Πόσες πεντηκοντάδες πόντους ἔχουν τὰ 10 μέτρα ;

2. Δείχνοντας τὰ παραπάνω ἀντικείμενα ἀνεβῆτε ἀνὰ 50 ὡς τὸ 1.000. Οἱ ἀριθμοὶ ποὺ θὰ βρῆτε μὲ τὴ σειρὰ γράφονται : 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 550, 600, 650, 700, 750, 800, 850, 900, 950, 1.000. Ἐπίσης δείχνοντας κατεβῆτε ἀνὰ 50 ἀπὸ τὸ 1.000 ὡς τὸ 0 καὶ γράψτε τοὺς ἀριθμούς : 1.000, 950, 900, 850 κλπ.

3. Πόσα πενηντάρια ἔχουν 2 ἑκατοστάρικα ; 3, 5, 7, 9, 4, 6, 8, 10 ἑκατοστάρικα ;

4. Πόσες πεντηκοντάδες πόντους ἔχουν 3 μέτρα ; 4, 6, 8, 5 μέτρα ;

5. Χωρίστε 7 ἑκατοντάδες ξυλαράκια σὲ πεντηκοντάδες. Πόσες πεντηκοντάδες θὰ ἔχετε ; Κάμετε τὸ ἴδιο μὲ 3, 5, 6 ἑκατοντάδες ξυλαράκια.

6. Πόσες δραχμὲς ἔχουν 2 πενηντάρια ; Πόσες ἔχουν 3, 4, 6, 7, 5, 8, 10, 9 πενηντάρια ;

7. 50 δραχμὲς κάνουν 1 πενηντάρι. 150 δραχ. κάνουν 3 πενηντάρια. Πόσα πενηντάρια κάνουν 250, 350, 450, 500, 300, 200 δραχμές ;

8. Πόσες πεντηκοντάδες κάνουν οἱ 100, 200, 300, 250, 150 πόντοι ;

9. Πόσες δραχ. ἔχουν 2 ἑκατοστάρικα καὶ 3 πενηντάρια ; Πόσες ἔχουν 1 πεντακοσάρικο 1 ἑκατοστάρικο καὶ 4 πενηντάρια ;

10. Πόσους πόντους ἔχει τὸ μισὸ μέτρο ; πόσους τὸ ἑνάμισι, τὰ δυόμισι, τὰ πεντέμισι, τὰ ἑφτάμισι μέτρα ;

Ἀρίθμηση ἀνὰ 10 ὡς τὸ 1.000

1. Ἀνεβῆτε ἀνὰ 10 ἀπὸ τὸ 100 ὡς τὸ 1.000. Δηλαδὴ 100 + 10 = 110, 110 + 10 = 120 κλπ. Ἔτσι ἔχομε 100, 110, 120, 130 κλπ. Νὰ γράψετε τοὺς ἀριθμοὺς αὐτούς. Χρησιμοποιῆστε τὰ παραπάνω ἀντικείμενα. Χωρίστε τὶς ἑκατοντάδες τὰ ξυλάκια σὲ δεκάδες. Πολὺ θὰ σᾶς βοηθήση ἡ χάρτινη μετροταινία τῶν 10 μέτρων. Ὅπως ξέρετε, αὐτὴ ἔχει 1.000 πόντους. Εἶναι μιὰ ἀριθμητικὴ γραμμὴ ποὺ ἔχει στὴ σειρὰ τοὺς πρώτους χίλιους ἀριθμούς.

2. Χρησιμοποιῆστε τὰ ἴδια ἀντικείμενα, γιὰ νὰ κατεβῆτε ἀνὰ 10 ἀπὸ τὸ 1.000 ὡς τὸ 0. Ἔτσι ἔχομε 1.000 − 10 = 990, 990 − 10 = 980 καὶ 1.000, 990, 980, 970 κλπ.

3. Πόσες δεκάδες μετρήσατε ἀπὸ τὸ 100 ὡς τὸ 200 ; ἀπὸ τὸ 200 ὡς τὸ 300 ;

4. Πόσες δεκάδες εἶναι ἀπὸ τὸ 100 ὡς τὸ 300 ; ἀπὸ τὸ 200 ὡς τὸ 400 ;

5. Πόσα δεκάρικα ἔχει ἕνα ἑκατοστάρικο ; Πόσα ἔχουν 2, 3, 4, 5 ἑκατοστάρικα ; Πόσα ἔχουν ἕνα πεντακοσάρικο, 2 ἑκατοστάρικα καὶ 3 πενηντάρικα ; Πόσα ἔχει τὸ χιλιάρικο ;

6. Ποιά ἔχουν περισσότερα δεκάρικα ; τὰ 3 ἑκατοστάρικα ἢ τὰ 7 πενηντάρια ;

7. 20 δεκάρικα πόσα ἑκατοστάρικα κάνουν ; πόσα πενηντάρια ;

Β. ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΠΟ ΤΟ 100 ΩΣ ΤΟ 200

I. ΑΙΣΘΗΤΟΠΟΙΗΣΗ, ΑΡΙΘΜΗΣΗ, ΑΝΑΛΥΣΗ

Τὸ μέτρο

Ξέρετε ὅλοι τὸ μέτρο. Ἔχετε ὅλοι σας χάρτινες μετροταινίες. Ἔχετε ἐπίσης στὸ σχολεῖο σας μέτρα ἀπὸ λεπτὸ σανίδι. Παρατηρῆστε το πάλι. Χωρίζεται σὲ 100 δακτύλους ἢ πόντους· τοὺς λένε καὶ ἑκατοστά. Γιατί ;

10 δάκτυλοι (πόντοι) κάνουν 1 παλάμη. Νὰ δείξετε μὲ τοὺς δεῖχτες τῶν χεριῶν σας πόσο μάκρος ἔχει 1 παλάμη. Τὸ μέτρο ἔχει 10 παλάμες· τὶς λένε καὶ δέκατα τοῦ μέτρου. Γιατί ;

Μερικοὶ τεχνίτες χρησιμοποιοῦν διπλὸ μέτρο, τὸ δίμετρο, ὅπως τὸ λένε. Τὸ δίμετρο ἔχει μάκρος δύο μέτρα.

Οἱ μηχανικοὶ χρησιμοποιοῦν μιὰ μεγάλη μετροταινία (κορδέλα) ποὺ ἔχει μάκρος 10, 20 ἢ καὶ περισσότερα μέτρα.

Καὶ τὸ δίμετρο καὶ ἡ κορδέλα εἶναι χωρισμένα σὲ δακτύλους καὶ σὲ παλάμες.

Ἐργασίες

1. Νὰ ἑνώση ὁ καθένας σας δύο χάρτινες μετροταινίες. Πόσους πόντους θὰ ἔχουν ; Νὰ γράψετε : $100 + 100 = 200$.

Πόσα δέκατα τοῦ μέτρου (παλάμες) θὰ ἔχουν ; πόσες πεντηκοντάδες πόντων ;

2. Ν' ἀνεβῆτε ἀνὰ 10 τοὺς πόντους στὴ διπλή σας μετροταινία καὶ νὰ κατεβῆτε ἀνὰ 10 ἀπὸ τὸ 200 ὡς τὸ 0.

3. Δεῖξτε στὴ μετροταινία σας 120, 130, 110, 150, 190, 200 πόντους.

4. Νὰ κατεβῆτε ἀπὸ τοὺς 200 στοὺς 170 πόντους.

5. Νὰ τραβήξης στὸ πάτωμα ἢ στὴν αὐλὴ γραμμὲς ποὺ νὰ ἔχουν μάκρος 1 μέτρο, 130 πόντους, 150, 110, 160, 190, 170, 120, 180 πόντους .

6. Νὰ βάλης τὶς γραμμὲς αὐτὲς στὴ σειρά, ἀρχίζοντας ἀπὸ τὴ μικρότερη πρὸς τὴ μεγαλύτερη. Θὰ πρέπη νὰ τὶς βάλης, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα.

Ἂν τὶς βάλης στὴ σειρὰ ἀρχίζοντας ἀπὸ τὴ μεγαλύτερη πρὸς τὴ μικρότερη, πῶς θὰ εἶναι τὸ σχῆμα ; Σχεδίασέ το στὸ τετράδιό σου.

7. Νὰ μετρήσετε στὸ προαύλιο τοῦ σχολείου σας ἢ στὸ δρόμο μιὰ ἀπόσταση 50 μέτρων, 100, 120, 130, 180 μ. καὶ νὰ βάλετε σημάδια. Νὰ ὑπολογίσετε μὲ τὸ μάτι ἀποστάσεις 70, 100, 150, 120 μέτρων.

8. Νὰ βαδίσης μὲ τὸ συμμαθητή σου 100 βήματα. Ἂν ἐκεῖνος βαδίση μπροστὰ 20 ἀκόμη βήματα καὶ σὺ ὀπισθοχωρήσης 20 βήματα, σὲ ποιά ἀπόσταση θὰ εἶναι ἐκεῖνος καὶ σὲ ποιά θὰ εἶσαι σὺ ἀπὸ τὴν ἀφετηρία σας ; Καὶ πόσα βήματα θὰ σᾶς χωρίζουν ;

9. Ν' ἀνεβῆτε ἀνὰ 10 ἀπὸ τὸ 0 ὡς τὸ 200 καὶ νὰ κατεβῆτε χρησιμοποιώντας ξυλάκια, κύβους, χάντρες, ὄσπρια, μάρκες, κύκλους κλπ.

10. Ν' ἀνεβῆτε ἀνὰ 50 χρησιμοποιώντας τὰ ἴδια ἀντικείμενα : 50, 100, 150, 200· καὶ νὰ κατεβῆτε : 200, 150, 100, 50, 0· τὸ ἴδιο καὶ ἀνὰ 20, δηλαδὴ 20, 40, 60 κλπ. καὶ 200, 180, 160 κλπ.

11. Οἱ 200 δραχμὲς πόσα ἑκατοστάρικα κάνουν ; πόσα πενηντάρια ; πόσα δεκάδραχμα ; πόσα εἰκοσάδραχμα ;

12. Πόσα ξυλάκια ἔχουν 17 δεσμίδες (δεκάδες), 15, 12, 16 δεσμίδες ;

13. Πόσες δεκάδες κάνουν 140, 120, 180, 150, 200, 190, 110 κύκλοι ;

14. Πόσες παλάμες κάνουν 50, 100, 130, 170, 190 110 πόντοι ;

Ἀρίθμηση ἀνὰ πεντάδες, μονάδες καὶ δυάδες

1. Ν' ἀνεβῆτε ἀνὰ 5 ἀπὸ τὸ 0 ὡς τὸ 100 καὶ νὰ ἐξακολουθήσετε ὡς τὸ 200 ὡς ἑξῆς : 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200.

Χρησιμοποιῆστε τὴ διπλὴ μετροταινία σας. Ἔπειτα καὶ τ' ἄλλα ἀντικείμενα. Νὰ γράψετε τοὺς ἀριθμοὺς αὐτούς. Νὰ κατεβῆτε ἀνὰ 5 ἀπὸ τὸ 200 ὡς τὸ 0 καὶ νὰ γράψετε τὴ σειρά : 200, 195, 190, 185 κλπ.

2. Μιὰ δεκάδα ἔχει 2 πεντάρια (πεντάδες). Πόσα πεντάρια ἔχουν οἱ 2 δεκάδες ; Οἱ 3, 4, 5, 7, 9, 6 δεκάδες ; Πόσα ἔχει ἡ 1 πεντηκοντάδα ; Πόσα ἔχει ἡ μιὰ ἑκατοντάδα ; πόσα οἱ 2, 3, 4 πεντηκοντάδες ; Πόσα ἔχουν οἱ 11 δεκάδες ; οἱ 12, 13, 14, 15, 19, 17, 18, 20 δεκάδες ;

3. Πόσες δεκάδες κάνουν 4 πεντάρια ; 10, 12, 16, 18, 20, 40 πεντάρια ;

Πόσες δεκάδες καὶ μονάδες κάνουν 3 πεντάρια ; 7, 9, 11, 39 πεντάρια ; Πόσες πεντηκοντάδες κάνουν 10 πεντάρια ; 20, 30, 40 πεντάρια ;

Πόσες ἑκατοντάδες, δεκάδες καὶ μονάδες κάνουν 23 πεντάρια ;

Ἀπάντηση. 1 ἑκατοντάδα, 1 δεκάδα καὶ 5 μονάδες ἢ 115 μονάδες.

Νὰ βρῆτε πόσο κάνουν 24 πεντάρια, 25, 26, 29, 31, 34, 37, 39, 40 πεντάρια καὶ νὰ γράψετε τοὺς ἀριθμούς.

4. Ν' ἀριθμήσετε ἀνὰ 1 ἀπὸ τὸ 100 ὡς τὸ 200. Χρησιμοποιῆστε τὴ διπλὴ μετροταινία σας καὶ τ' ἄλλα ἀντικείμενά σας. Νὰ κατεβῆτε ἀνὰ 1 ἀπὸ τὸ 200 ὡς τὸ 100. Νὰ γράψετε ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τὸ 100 ὡς τὸ 200, δηλ. 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108 κλπ.

5. Ν' ἀνεβῆτε ἀνὰ 2 ἀπὸ τὸ 100 ὡς τὸ 200 (ζυγοὶ ἀριθμοί): 102, 104, 106 κλπ. καὶ ἀπὸ τὸ 101 ὡς τὸ 199 (μονοὶ ἀριθμοί): 101, 103, 105 κλπ. Ἀντίθετα νὰ κατεβῆτε ἀπὸ τὸ 200 ὡς τὸ 100 ἀνὰ 2 καὶ ἀπὸ τὸ 199 ὡς τὸ 101. Νὰ γράψετε τὶς σειρὲς αὐτές.

6. Νὰ σχηματίσετε μὲ τ' ἀντικείμενά σας τοὺς ἀριθμούς: 101, 132, 111, 121, 133, 143, 156, 161, 174, 187, 191.

7. Ὁ ἀριθμὸς 101 ἔχει μιὰ ἑκατοντάδα καὶ 1 μονάδα· δεκάδες δὲν ἔχει. Γι' αὐτὸ στὴ θέση τῶν δεκάδων γράφομε 0. Ὁ ἀριθμὸς 132 ἔχει 1 ἑκ. 3 δεκ. 2 μον. Γράφω αὐτὸν τὸν ἀριθμὸ καὶ σημειώνω ἀπὸ πάνω ἀπὸ τὶς μονάδες τὸ γράμμα Μ, ἀπὸ πάνω ἀπὸ τὶς δεκάδες τὸ Δ καὶ ἀπὸ πάνω ἀπὸ τὶς ἑκατοντάδες τὸ Ε, δηλαδή:

Ε	Δ	Μ
1	3	2

Νὰ κάμετε κι ἐσεῖς τὸ ἴδιο στὸ τετράδιό σας καὶ νὰ γράψετε ὅλους τοὺς παραπάνω ἀριθμοὺς τὸν ἕνα κάτω ἀπὸ τὸν ἄλλο.

8. Ν' ἀναλύσετε σ' ἑκατοντάδες, δεκάδες καὶ μονάδες τοὺς ἀριθμούς: 124, 111, 106, 150, 171· π.χ. 124 = 1 ἑκ. 2 δεκ. 4 μονάδες.

9. Νὰ βρῆτε πόσες δραχμὲς ἔχουν: α) 1 ἑκατοστάρικο καὶ 1 δραχ. β) 1 ἑκατοστ. 1 δεκάρικο καὶ 1 δραχ. γ) 1 ἑκατοστ. 1 εἰκοσάδραχμο καὶ 1 δραχ. δ) 1 ἑκατοστ. 3 δεκάρικα καὶ 1 πεντάδραχμο ε) 1 ἑκατοστάρικο καὶ 4 δεκάρικα στ) 1 ἑκατοστάρικο 1 πενηντάρι καὶ 3 δίδραχμα. Νὰ γράψετε τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ θὰ βρῆτε.

10. Ἐπίσης νὰ βρῆτε καὶ νὰ γράψετε πόσους πόντους κάνουν: α) 1 μέτρο 1 παλάμη καὶ 1 πόντος β) 1 μέτρο 3 παλάμες καὶ 1 πόντος γ) 1 μ. 9 παλ. καὶ 9 πόντοι δ) 1 μέτρο καὶ 7 πόντοι ε) 1 μ. καὶ 7 παλ.

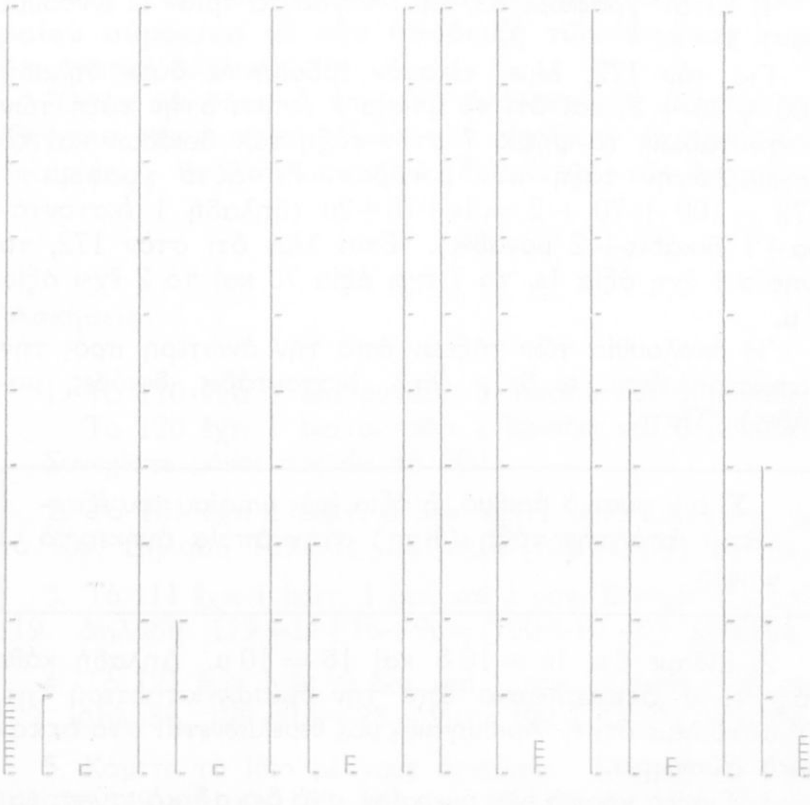
Παράσταση ἀκεραίων μὲ σχήματα

1. Ξέρομε ὅτι 10 μονάδες = 1 δεκάδα, 10 δεκάδες = 1 ἑκατοντάδα καὶ 10 ἑκατοντ. = 1 χιλιάδα. Ὅταν γράφωμε τοὺς ἀκεραίους, τὸ ψηφίο τῶν μονάδων τὸ γράφομε στὸ τέ-

λος. Μιὰ θέση ἀριστερὰ ἀπὸ αὐτὸ γράφομε τὸ ψηφίο τῶν δεκάδων. Καὶ μιὰ θέση ἀριστερὰ ἀπὸ τὶς δεκάδες γράφομε τὸ ψηφίο τῶν ἑκατοντάδων.

Τὸ σχῆμα Α παριστάνει τὸν ἀκέραιο 111. Ἡ μεγάλη γραμμὴ εἶναι ἑκατοντάδα. Αὐτὴ εἶναι 10 φορὲς μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ μικρὴ γραμμὴ ποὺ παριστάνει τὴ δεκάδα. Αὐτὴ πάλι εἶναι 10 φορὲς μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν πολὺ μικρὴ γραμμὴ ποὺ παριστάνει τὴ μονάδα.

Ποιούς ἀριθμοὺς παριστάνουν τ' ἄλλα σχήματα ; Νὰ τοὺς γράψετε.



Α Β Γ Δ Ε Ζ Η

Τὸ σχῆμα Δ ἔχει μόνο 2 ἑκατοντάδες. Γι᾽ αὐτὸ θὰ γράψωμε τὸ 2 καὶ στὴ θέση τῶν δεκάδων καὶ μονάδων θὰ γράψωμε μηδέν, δηλ. 200. Καὶ τὸ σχῆμα Ε παριστάνει τὸν ἀριθμὸ ἑκατὸν τέσσερα. Αὐτὸς ἔχει μιὰ ἑκατοντ. καὶ 4 μονάδες, Δεκάδες δὲν ἔχει· στὴ θέση τῶν δεκάδων θὰ γράψωμε 0, δηλαδὴ 104.

2. Νὰ παραστήσετε μὲ σχήματα τοὺς ἀριθμοὺς 101, 120, 136, 199.

Ψηφία καὶ ἀνάλυση ἀκεραίου

1. Ὅταν γράφωμε 83, λέμε: «ὀγδόντα τρία» κι ἐννοοῦμε $80 + 3$.

Γιὰ τὸν 172, λέμε: «ἑκατὸν ἑβδομήντα δύο» δηλαδὴ $100 + 70 + 2$, καὶ ὅτι τὸ ψηφίο 1 ἀνήκει στὴν τάξη τῶν ἑκατοντάδων, τὸ ψηφίο 7 στὴν τάξη τῶν δεκάδων καὶ τὸ ψηφίο 2 στὴν τάξη τῶν μονάδων. Γι᾽ αὐτὸ γράφομε: $172 = 100 + 70 + 2 = 1ε + 7δ + 2μ$ (δηλαδὴ 1 ἑκατοντάδα + 7 δεκάδες + 2 μονάδες). Ἔτσι λέμε ὅτι στὸν 172, τὸ ψηφίο 1 ἔχη ἀξία 1ε, τὸ 7 ἔχει ἀξία 7δ καὶ τὸ 2 ἔχει ἀξία 2 μ.

Ἡ ἀκολουθία τῶν τάξεων ἀπὸ τὴν ἀνώτερη πρὸς τὴν κατώτερη εἶναι: ε, δ, μ (δηλ. ἑκατοντάδες, δεκάδες, μονάδες). Ὥστε:

Σ᾽ ἕνα φυσικὸ ἀριθμό, ἡ ἀξία ἑνὸς ψηφίου του ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν τάξη (θέση) στὴν ὁποία ἀνήκει τὸ ψηφίο.

2. Εἴδαμε ὅτι $1ε = 10\,δ$ καὶ $1δ = 10\,μ$. Δηλαδὴ κάθε τάξη εἶναι **δεκαπλάσια** ἀπὸ τὴν ἀμέσως κατώτερή της. Γι᾽ αὐτὸ λέμε ὅτι ἡ Ἀριθμητική μας θεμελιώνεται στὸ **δεκαδικὸ σύστημα.**

3. Γιὰ τὴ γραφὴ ἑνὸς ἀκεραίου στὸ **δεκαδικὸ** σύστημα, διαλέγομε ἐκεῖνα ποὺ μᾶς χρειάζονται ἀπὸ **δὲκα** διαφορε-

τικὰ σύμβολα, καὶ τὰ λέμε ψηφία. Γιὰ τὴν Ἀριθμητική μας, αὐτὰ τὰ **δέκα** διαφορετικὰ σύμβολα εἶναι τὰ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 καὶ 9.

4. Τὰ ψηφία ἑνὸς φυσικοῦ ἀριθμοῦ, μᾶς δείχνουν ἀντίστοιχη ἀνάλυσή του π.χ. :

64=60+4=6δ.+4μ.	128=100+20+8=1ε+2δ+8μ.
46=40+6=4δ.+6μ.	103=100+ 0+3=1ε+0δ+3μ.

Αὐτὴ ἡ ἀνάλυση λέγεται **προσθετικὴ ἀνάλυση ἀκεραίου σύμφωνα μὲ τὴν ὑπόδειξη τῶν ψηφίων του,** ἢ «ψηφιακὴ ἀνάλυση».

Ὅπως θὰ δῆτε, ἡ ψηφιακὴ ἀνάλυση μᾶς βοηθάει νὰ ἐξηγοῦμε τὴν ἐκτέλεση ὅλων τῶν πράξεων (προσθέσεως, ἀφαιρέσεως, πολλαπλασιασμοῦ, διαιρέσεως) τῶν ἀκεραίων.

Ἀσκήσεις

1. Τὸ 110 ἔχει 1 ἑκατοντάδα 1 δεκάδα καὶ 0 μονάδες.
   Τὸ 120 ἔχει 1 ἑκατοντάδα 2 δεκάδες καὶ 0 μονάδες. Συνεχίστε μόνοι σας ὡς τὸ 200.

2. Τὸ 101 ἔχει 1 ἑκατ. 0 δεκ. καὶ 1 μον. Συνεχίστε ὡς τὸ 109. Δηλαδὴ 109=1ε+0δ+9μ=(100+0+9) μονάδες.

3. Τὸ 111 ἔχει 1 ἑκατ. 1 δεκ. καὶ 1 μον. Συνεχίστε ὡς τὸ 119. Δηλαδὴ 119=1ε+1δ+9μ=(100+10+9) μονάδες.

4. Τὸ 121 ἔχει 1 ἑκ. 2 δεκ. καὶ 1 μον. Συνεχίστε ὡς τὸ 129. Δηλαδὴ 129=1έ.+2δ.+9μ=(100+20+9) μονάδες.

5. Κάμετε τὸ ἴδιο μὲ τοὺς ἀριθμούς : 131 ὡς τὸ 139, 141 ὡς 149, 151 ὡς 159, 161 ὡς 169, 171 ὡς 179, 181 ὡς 189 καὶ 191 ὡς 199.

6. Τὸ $135=1$ ἑκ$+3$ δεκ.$+5$ μον.$=100+30+5$. Κάμετε τὸ ἴδιο μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 132, 146, 150, 167, 199, 180, 108.

7. Πιὸ σύντομα ἀπὸ τὴν προηγούμενη ἄσκηση ἔχομε : $124=100+20+4$. Ν' ἀναλύσετε μὲ τὸν ἴδιο τρόπο τοὺς ἀριθμοὺς 137, 162, 190, 109, 111.

8. $125+2=100+20+5+2=127$. Νὰ ἐκτελέσετε μὲ τὸν ἴδιο τρόπο τὶς προσθέσεις $142+6$, $151+8$, $184+5$, $117+0$, $183+6$, $106+0$, $160+0$.

9. $154=100+50+4$. Μποροῦμε ν' ἀναλύσωμε καὶ τὸ 100 σὲ πεντηκοντάδες, δηλαδή : $154=(50+50)+50+4$. Μποροῦμε ἐπίσης ν' ἀναλύσωμε τὸ 50 σὲ 30 καὶ 20, δηλαδή : $154=(50+50)+(30+20)+4$. Μποροῦμε τέλος ν' ἀναλύσωμε καὶ τὶς 4 μονάδες σὲ $3+1$ μονάδες, δηλαδή : $154=(50+50)+(30+20)+(3+1)$.

Γράφω τώρα μιὰν ἄλλη ἀνάλυση τοῦ 154· νὰ βρῆτε ἂν εἶναι σωστή. $154=(40+40+20)+(20+20+10)+(2+2+0)$. Κάμετε κι ἐσεῖς ἄλλες ἀναλύσεις τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ.

10. Μιὰ ἑκατοντ. 4 δεκάδες καὶ 7 μονάδες $=147$ μονάδες. Νὰ βρῆτε πόσες μονάδες ἔχουν : 1 ἑκατ. 1 δεκ. καὶ 1 μονάδα, 1 ἑκατ. 9 δεκ. καὶ 3 μον., 1 ἑκατοντ. 6 δεκάδες καὶ 0 μον.

2. ΠΡΟΣΘΕΣΗ

α) Πρόσθεση δεκάδων

Νὰ ἐκτελέσετε τὶς παρακάτω πράξεις προφορικῶς καὶ γραπτῶς. Χρησιμοποιῆστε κατάλληλα ἀντικείμενα καὶ σχήματα.

1) 110 + 30 | 120 + 50 | 130 + 60 | 170 + 20
140 + 40 | 130 + 40 |

2) 120 + ; = 140 | 110 + ; = 180 | 130 + ; = 190
160 = 130 + ; | ; + 50 = 170 |

3) ; + ; = 120 | ; + ; = 180 | 120 + 20 + 30 = ;
130 + 0 + 40 = ; |

4) Τὸ 140 γίνεται, ἂν προσθέσωμε 100 + 20 + 20 ἢ 110 + 20 + 10 ἢ 80 + 20 + 40 ἢ 60 + 60 + 20 ἢ 100 + 40 + 0 κλπ. Μὲ ποιούς ἄλλους ὅμοιους συνδυασμοὺς μπορεῖτε νὰ κάμετε τὸ 140 ;

Κάμετε τὸ ἴδιο καὶ μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 160, 180, 190.

β) Πρόσθεση μονοψηφίων μὲ τριψηφίους

Νὰ λύσετε τὶς παρακάτω ἀσκήσεις ἀπὸ μνήμης κι ἔπειτα νὰ τὶς γράψετε :

1) 110 + 1 | 130 + 2 | 180 + 3 | 190 + 7
140 + 6 | 170 + 0 |

2) 112 + 3 = 1 ἑκ. + 1 δεκ. + 2 μον. + 3 μον. = 115. Προσθέσαμε τὶς μονάδες μὲ τὶς μονάδες (3 + 2 = 5). Τὴν ἑκατοντάδα καὶ τὴ δεκάδα τὶς ἀφήσαμε ὅπως εἶναι. Νὰ βρῆτε :

114 + 3 = ; | 105 + 4 = ; | 121 + 7 = ; | 142 + 5 = ;
171 + 5 = ; | 109 + 0 = ; |

3) 108 + 2 = ; | 143 + 7 = ; | 106 + ; = 110
124 + ; = 130 | 161 + ; = 170

Μετὰ τὸ 127 πρῶτος τριψήφιος ἀριθμὸς ποὺ τελειώνει σὲ μηδὲν ἔρχεται τὸ 130. Ποιός παρόμοιος ἀριθμὸς ἔρχεται πρῶτος μετὰ καθένα ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 108, 116, 135, 157, 149;

Ποιός τριψήφιος ἀριθμὸς μὲ ψηφίο μονάδων τὸ 0 ἔρχεται μετὰ καθένα ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς 158, 166, 189, 173, 142, 133, 127, 111;

4) Παράδειγμα. 115 + 8 = 115 + 5 + 3 = 120+3 = 123. Ἀναλύσαμε τὶς 8 μονάδες σὲ 5 + 3. Προσθέσαμε πρῶτα τὸ 5, γιὰ νὰ συμπληρώσωμε δεκάδα. Ἔπειτα προσθέσαμε καὶ τὸ 3.

Νὰ ἐκτελέσετε τὶς παρακάτω προσθέσεις μὲ ἀνάλυση τοῦ δεύτερου προσθετέου.

106 + 9	115 + 7	137 + 7	176 + 8	158 + 7
154 + 8	184 + 9	179 + 7		

γ) Πρόσθεση διψηφίων μὲ διψήφιους καὶ τριψήφιους ἀριθμοὺς

1) Πόσα κάνουν 125 + 20; Λέμε: 120 + 20 = 140 καὶ 5 κάνουν 145.

135 + 20 = ;	130 + 15 = ;	160 + 37 = ;
120 + 13 = ;	177 + 20 = ;	90 + 21 = ;

2) Πόσα κάνουν 134 + 23; Λέμε: 134 + 20 = 154· καὶ 3 κάνουν 157· ἢ 130 + 20 = 150· καὶ 4 κάνουν 154· καὶ 3 κάνουν 157.

124 + 13	176 + 22	94 + 21	54 + 73
135 + 12	184 + 11	85 + 23	48 + 81
151 + 25	163 + 33	72 + 46	35 + 92

161 + 21 + 14, 145 + 32 + 12, 104 + 53 + 41

3) Τὶς ἴδιες ἀσκήσεις καὶ ἄλλες ὅμοιες μποροῦμε νὰ τὶς λύσωμε, καὶ ἂν γράψωμε τὸν ἕναν προσθετέο κάτω ἀπὸ τὸν ἄλλο. Π.χ. Νὰ βρεθῆ τὸ ἐξαγόμενο 141 + 23 + 15

Γράφομε :

$$\begin{array}{rr} 141 = & 1\varepsilon + 4\delta + 1\mu. \\ 23 = & 2\delta + 3\mu. \\ + \ 15 = & 1\delta + 5\mu. \\ \hline & 1\varepsilon + 7\delta + 9\mu. \end{array}$$

ἢ χωρὶς ἀνάλυση

$$\begin{array}{rl} 141 & \text{Σύντομα λέμε (ἐκ τῶν κάτω)} \\ 23 & 5,\ 8,\ \mathbf{9} \\ 15 & 1,\ 3,\ \mathbf{7} \\ \hline 179 & \quad\ \ \mathbf{1},\ 179 \end{array}$$

Ὅπως βλέπετε, προσθέτομε χωριστὰ τὶς μονάδες καὶ γράφομε τὸ ἄθροισμά τους κάτω ἀπὸ τὶς μονάδες χωριστὰ τὶς δεκάδες καὶ γράφομε τὸ ἄθροισμά τους κάτω ἀπὸ τὶς δεκάδες καὶ τέλος κατεβάζομε τὸ ψηφίο τῶν ἑκατοντάδων. Αὐτὸ μπορεῖ νὰ γίνη καὶ χωρὶς ἀνάλυση τῶν προσθετέων σ' ἑκατοντάδες, δεκάδες καὶ μονάδες.

Νὰ κάμετε τὶς παρακάτω προσθέσεις μὲ ἀνάλυση καὶ χωρὶς ἀνάλυση:

112	146	150	131	73
21	13	37	35	102
+ 24	+ 20	+ 12	+ 22	+ 11

44	81	62	70
12	75	80	64
+ 112	+ 30	+ 56	+ 31

4) Πόσα κάνουν 145 + 27 ; Λέμε : 145 + 20 = 165· καὶ 7 (μὲ ἀνάλυση σὲ 5 + 2) 172.

Μπορεῖτε νὰ τὸ βρῆτε καὶ μὲ ἄλλο τρόπο. Δοκιμάστε. Νὰ ἐκτελέσετε ἀπὸ μνήμης μὲ ὅποιο τρόπο θέλετε τὶς προσθέσεις : 123 + 18, 166 + 25, 118 + 54, 93 + 49, 98 + 36, 95 + 58 + 43.

Στὴν τελευταία ἄσκηση ἔχομε τρεῖς προσθετέους. Προσθέτομε τοὺς δύο πρώτους καὶ στὸ ἄθροισμα ποὺ θὰ βροῦμε προσθέτομε καὶ τὸν τρίτο. Π.χ. 134 + 28 + 17 = ; Λέμε : 134 + 20 = 154· καὶ 8 κάνουν 162. Ὡς ἐδῶ ἔχομε προσθέσει τοὺς δύο πρώτους προσθετέους. Συνεχίζομε : 162 + 10 = 172· καὶ 7 κάνουν 179. Μπορεῖτε ν' ἀκολουθήσετε καὶ ὁποιονδήποτε ἄλλο τρόπο θέλετε σεῖς.

῞Οπως εἴπαμε, τὶς προσθέσεις μποροῦμε νὰ τὶς σημειώσωμε ὄχι μόνο ὁριζόντια ἀλλὰ καὶ κατακόρυφα. Π.χ. πόσα κάνουν $156 + 18 + 23$; Γράφομε :

$$
\begin{array}{r}
156 = 1 \text{ ἑκ.} + 5 \text{ δεκ.} + 6 \text{ μον.} \\
18 = 0 \text{ ἑκ.} + 1 \text{ δεκ.} + 8 \text{ μον.} \\
+ \quad 23 = 0 \text{ ἑκ.} + 2 \text{ δεκ.} + 3 \text{ μον.} \\
\hline
1 \text{ ἑκ} + 8 \text{ δεκ.} + 17 \text{ μον.} = 1 \text{ ἑκ.} + 9 \text{ δεκ.} \\
7 \text{ μον.} = 197
\end{array}
$$

Τὴ 1 δεκάδα ποὺ βρήκαμε ἀπὸ τὶς μονάδες τὴν προσθέσαμε στὶς δεκάδες. Μποροῦμε νὰ κάνωμε τὴν πρόσθεση καὶ χωρὶς ἀνάλυση τῶν προσθετέων· δηλαδή:

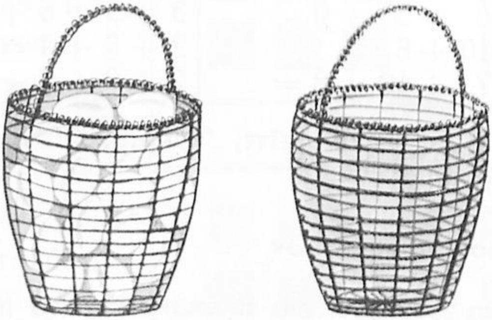
156	Σύντομα λέμε (ἐκ τῶν κάτω)
18	3, 11, **7** (ἔντονα τὸ 7)
+ 23	1, 3, 4 **9** (ἔντονα τὸ 1 καὶ 9)
197	**1**, 197

᾿Αρχίζομε ἀπὸ τὶς μονάδες. ᾿Εξηγοῦμε : $3 + 8 = 11$· καὶ 6 κάνουν 17. Γράφομε τὸ 7 κάτω ἀπὸ τὶς μονάδες καὶ κρατοῦμε τὴ 1 δεκάδα. Προχωροῦμε τώρα στὶς δεκάδες : 1 τὸ κρατούμενο καὶ 2 κάνουν 3· καὶ 1 κάνουν 4· καὶ 5 κάνουν 9. Γράφομε τὸ 9 κάτω ἀπὸ τὶς δεκάδες. Τέλος κατεβάζομε τὸ 1 (μία ἑκατοντάδα). Νὰ ἐκτελέσετε τὶς παρακάτω προσθέσεις :

$$
\begin{array}{r}
143 \\
+\ 39 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
166 \\
+\ 28 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
129 \\
+\ 47 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
173 \\
+\ 18 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
124 \\
+\ 57 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
16 \\
+\ 149 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
75 \\
+\ 26 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
54 \\
+\ 30 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
63 \\
+\ 38 \\
\hline
\end{array}
$$

Τὸ μηδὲν σὰν προσθετέος



1. Πόσα αὐγὰ εἶναι στὰ δύο καλάθια; Σημειώνομε τὴν πράξη :

$$15 + 0 = 15.$$

Συμπέρασμα. Ἂν προσθέσωμε τὸ 0 σ' ἕναν ἀριθμό, βρίσκομε ἄθροισμα τὸν ἴδιο ἀριθμό.

2. Πόσα τρίγωνα συνολικὰ βρίσκονται μέσα στοὺς παρακάτω 5 κύκλους ;

Σημειώνομε τὴν πράξη: $3 + 2 + 6 + 0 + 5 = 16$

Ἔχομε 4 θρανία. Στὸ πρῶτο κάθονται 2 παιδιά, στὸ δεύτερο 1, στὸ τρίτο 3 καὶ τὸ τέταρτο εἶναι ἄδειο. Πόσα παιδιὰ κάθονται καὶ στὰ 4 θρανία ; Σημειώνομε τὴν πράξη $2 + 1 + 3 + 0 = 6$

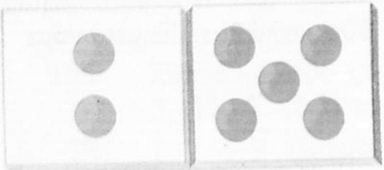
Νὰ ἐκτελέσετε τὶς παρακάτω προσθέσεις:

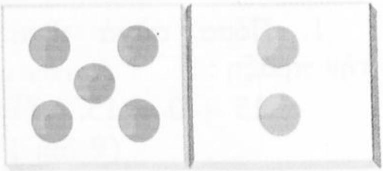
$4 + 6 + 3 =$	$3 + 5 + 6 =$
$4 + 6 + 3 + 0 =$	$3 + 5 + 6 + 0 =$
$7 + 10 + 8 =$	$2 + 9 + 4 =$
$0 + 7 + 10 + 8 =$	$2 + 0 + 9 + 4 =$

Τί βρήκατε; Τί παρατηρεῖτε; Ἂν προσθέσωμε τὸ 0, ἀλλάζει τὸ ἄθροισμα;

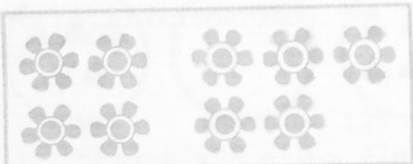
Ἀντιμετάθεση προσθετέων

Τὸ σχῆμα Α δείχνει ἕνα πλακάκι ἀπὸ τὸ παιγνίδι ποὺ λέγεται «ντόμινο». Τὸ πλακάκι αὐτὸ εἶναι χωρισμένο στὴ


Α


Β

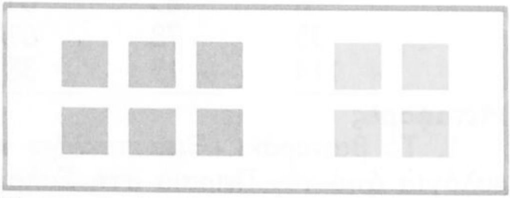
μέση κι ἔχει 2 κύκλους στὸ ἕνα μέρος καὶ 5 στὸ ἄλλο. Δηλ. ἔχει $2 + 5 = 7$ κύκλους. Ἂν γυρίσωμε τὸ πλακάκι, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα Β, θά 'ρθη πρῶτο τὸ μέρος μὲ τοὺς 5 κύκλους καὶ δεύτερο τὸ μέρος μὲ τοὺς 2 κύκλους. Τὸ πλακάκι θὰ ἔχη $5 + 2 = 7$ κύκλους, δηλ. τοὺς ἴδιους. Ἄλλαξε μόνο ἡ θέση τῶν προσθετέων· τὸ ἄθροισμά τους μένει τὸ ἴδιο.


Γ

Δ

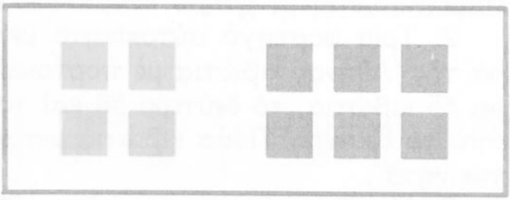
Τὸ ἴδιο παρατηροῦμε καὶ στὰ σχήματα Γ καὶ Δ. Δηλ. $4 + 5 = 9$ μαργαρίτες καὶ $5 + 4 = 9$ μαργαρίτες. Κι ἐδῶ τὸ ἄθροισμα μένει τὸ ἴδιο.

Στὰ σχήματα Ε καὶ Ζ ἔχομε 6+4=10 τετράγωνα καὶ 4+6==10 τετράγωνα.



Ε

Ὥστε τὸ ἄθροισμα δὲν ἀλλάζει, ἂν ἀλλάξωμε τὴ θέση τῶν προσθετέων.



Ζ

Ἀλλαγὴ στὴ θέση μπορεῖ νὰ γίνη, καὶ ὅταν ἔχωμε τρεῖς ἢ περισσότερους προσθετέους. Δοκιμάστε το μὲ τ' ἀντικείμενά σας. Αὐτὴ εἶναι μιὰ ἰδιότητα τῆς προσθέσεως. Τὴ λέμε ἀ ν τ ι μ ε τ α θ ε τ ι κ ὴ γιατὶ ἐπιτρέπει τὴν ἀντιμετάθεση τῶν προσθετέων.

Δοκιμὴ τῆς προσθέσεως

Γιὰ νὰ βεβαιωθοῦμε ὅτι δὲν κάνομε λάθος στὴν πρόσθεση, κάνομε τὴ δοκιμή της. Στὴ δοκιμὴ ἀρχίζομε τὴν πρόσθεση ἀπὸ πάνω πρὸς τὰ κάτω. Ἂν βροῦμε τὸ ἴδιο ἄθροισμα, ἡ πράξη μας εἶναι σωστή.

Ἡ δοκιμὴ τῆς προσθέσεως στηρίζεται στὴν ἀντιμετάθεση. Μὲ τὴν πρώτη ματιὰ δὲ φαίνεται ὅτι γίνεται ἀντιμετάθεση. Πραγματικὰ ὅμως γίνεται. Διότι, ἀρχίζοντας ἀπὸ πάνω, φέρνομε πρῶτο προσθετέο ἐκεῖνον ποὺ προηγουμένως τὸν εἴχαμε προσθέσει τελευταῖο.

Νὰ ἐκτελέσετε τὶς παρακάτω προσθέσεις μὲ τὴ δοκιμή τους. Νὰ συνηθίσετε νὰ λέτε φωναχτά, μόνο τὶς σύντομες ἐκφράσεις, μόνο τὰ ἀποτελέσματα.

146	108	94	75	59
37	45	28	47	18
+ 9	+ 19	+ 32	+ 54	+ 86

$$\begin{array}{r} 8 \\ 35 \\ +\ 114 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 83 \\ 78 \\ +\ 15 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 64 \\ 67 \\ +\ 38 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 104 \\ 59 \\ +\ 27 \\ \hline \end{array}$$

Μεταφορὲς

1. Τὸ βαποράκι «Θεμιστοκλῆς» κάνει κάθε μέρα 3 δρομολόγια ἀπὸ τὸν Πειραιὰ στὴ Σαλαμίνα. Χτὲς τὸ πρωῒ μετέφερε 49 ἐπιβάτες, τὸ μεσημέρι 58 καὶ τὸ βράδυ 77. Πόσους ἐπιβάτες μετέφερε χτὲς ὁ «Θεμιστοκλῆς»;

2. Τρία φορτηγὰ αὐτοκίνητα μεταφέρουν γιὰ τὴν ἀγορὰ τῆς Ἀθήνας κιβώτια μὲ πορτοκάλια. Τὸ πρῶτο μεταφέρει 65 κιβώτια, τὸ δεύτερο 58 καὶ τὸ τρίτο 17 περισσότερα ἀπὸ τὸ δεύτερο. Πόσα κιβώτια μεταφέρουν καὶ τὰ τρία αὐτοκίνητα ;

3. Μιὰ διλοχία στρατιωτῶν πηγαίνει γιὰ τὰ σύνορα μὲ τὸ τρένο. Στὸ πρῶτο βαγόνι εἶναι 37 στρατιῶτες, στὸ δεύτερο 39, στὸ τρίτο 45, στὸ τέταρτο 40 καὶ στὸ πέμπτο ὅσοι καὶ στὸ δεύτερο. Πόσους στρατιῶτες ἔχει ἡ διλοχία ;

4. Μὲ τὸ τρένο Ἀθηνῶν - Θεσσαλονίκης ταξιδεύουν 167 ἐπιβάτες. Στὴ Λάρισα ἀνέβηκαν 29 ἀκόμη ἐπιβάτες. Πόσοι ταξιδεύουν τώρα μὲ τὸ τρένο ;

5. Τὴν περασμένη Δευτέρα ἕνα ἀεροπλάνο τῆς «Ὀλυμπιακῆς» μετέφερε ἀπὸ τὴν Ἀθήνα στὰ Χανιὰ 88 ἐπιβάτες. Στὴν ἐπιστροφή του μετέφερε 95 ἐπιβάτες. Πόσοι ἐπιβάτες ταξίδεψαν συνολικὰ μὲ τὸ ἀεροπλάνο αὐτὸ καὶ κατὰ τὰ δύο δρομολόγια ;

6. Ἕνας γεωργὸς μεταφέρει μὲ τὸ κάρο του 4 σακιὰ σιτάρι. Τὸ πρῶτο ζυγίζει 56 κιλά, τὸ δεύτερο 58, τὸ τρίτο 50 καὶ τὸ τέταρτο τὰ μισὰ κιλὰ ἀπ' ὅσα ζυγίζει τὸ τρίτο. Πόσο σιτάρι μεταφέρει ὁ γεωργός ;

7. Ὁ κὺρ Πέτρος, ὁ κηπουρός, μετέφερε ἀπὸ τὴν ἀποθήκη του στὴν ἀγορὰ 119 κιλὰ πατάτες καὶ τοῦ ἔμειναν 78 κιλὰ στὴν ἀποθήκη. Πόσες πατάτες εἶχε ;

8. Πόσα γίνονται 80 καὶ 65 καὶ τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ 80 ;

9. Νὰ βρῆς πόσα κάνουν τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ 100 καὶ τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ 50 καὶ 79 ἀκόμη.

3. ΑΦΑΙΡΕΣΗ

Ἀπὸ μνήμης

α) Ἀφαίρεση δεκάδων

Νὰ ἐκτελέσετε τὶς παρακάτω πράξεις. Χρησιμοποιῆστε τ' ἀντικείμενά σας.

1)	50 − 20 = ; 180 − 60	180 − 50 110 − 10	190 − 40 200 − 10
2)	110 − 20 = ; 180 − 90	120 − 40 140 − 80	150 − 60 190 − 100
3)	180 − ; = 110 ; − 50 = 140	140 − ; = 100 190 − ; = 150	; − 20 = 130

4) 180 − 50 − 60 − 30 = ; | 160 − 80 − 30 − 50 = ;
140 − 50 − 10 − 60 = ;

5) 190 − 30 + 20 − 60 = ; | 150 + 20 − 60 − 40 = ;
160 + 20 − 90 + 10 = ;

6) 140 − 30 = 110. Ἀντίστροφα 110 + 30 = 140.
140 − 110 = 30 » 30 + 110 = 140.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο νὰ ἐργαστῆτε καὶ στὶς παρακάτω ἀσκήσεις νὰ γράψετε καὶ νὰ βρῆτε καὶ τὶς ἀντίστροφες πράξεις.

200 − 50 = ;	170 − 80 = ;	120 − 70 = ;
180 − 60 = ;	140 − 90 = ;	190 − 100 = ;

β) Ἀφαίρεση μονοψήφιου ἀριθμοῦ ἀπὸ τριψήφιο

1) $115 - 3 = ;$ $\quad 147 - 4 = ;$ $\quad 182 - 0 = ;$
$136 - 5 = ;$ $\quad 184 - 3 = ;$

2) $120 - 5 = ;$ $\quad 150 - 4 = ;$ $\quad 170 - 6 = ;$
$190 - 2 = ;$ $\quad 200 - 7 = ;$

3) Πόσα μένουν $124 - 6$;

Λέμε : $124 - 4 = 120$· πλὴν 2 μένουν 118.

$132 - 5 = ;$ $\quad 157 - 9 = ;$ $\quad 181 - 6 = ;$
$155 - 7 = ;$ $\quad 173 - 7 = ;$

γ) Ἀφαίρεση διψηφίων ἢ τριψηφίων ἀπὸ τριψηφίους

1) $195 - 70 = ;$ $\quad 146 - 60 = ;$ $\quad 165 - 120 =$
$191 - 150 = ;$ $\quad 129 - 120 = ;$

2) Πόσα μένουν $184 - 51$; Λέμε : $184 - 50 = 134$· πλὴν 1 μένουν 133.

$176 - 62 = ;$ $\quad 164 - 111 = ;$ $\quad 181 - 121 = ;$
$152 - 102 = ;$ $\quad 175 - 74 = ;$

3) Πόσα μένουν $140 - 23$; Λέμε : $140 - 20 = 120$, $120 - 3 = 117$.

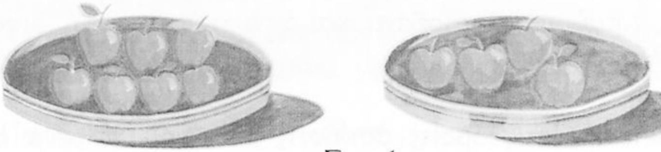
$160 - 38 = ;$ $\quad 170 - 24 = ;$ $\quad 150 - 105 = ;$
$170 - 95 = ;$ $\quad 110 - 78 = ;$

4) $173 - 48 = ;$ Λέμε : $173 - 40 = 133$· πλὴν 3 μένουν 130· πλὴν 5 μένουν 125.

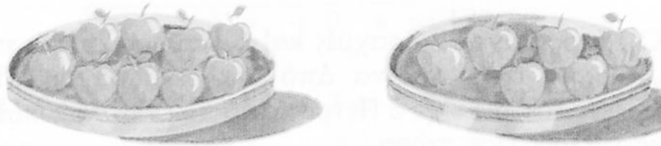
$173 - 54 = ;$ $\quad 116 - 49 = ;$ $\quad 195 - 99 = ;$
$103 - 57 = ;$ $\quad 114 - 75 = ;$

5) Πόσα γίνονται ; $75 + 50 - 32$, $110 - 34 + 40$, $200 - 75 + 48$.

Ἄλλαξε ἡ διαφορά;



Σχ. 1



Σχ. 2

Σχ. 3

Ἡ πρώτη φρουτιέρα ἔχει 3 μῆλα περισσότερα ἀπὸ τὴ δεύτερη. Τὸ λέμε καὶ ἀλλιῶς: Ἡ δεύτερη ἔχει 3 μῆλα λιγότερα ἀπὸ τὴν πρώτη. Ἡ διαφορὰ τῶν μήλων εἶναι 3, δηλαδὴ $7-4=3$ (Σχ. 1).

Προσθέτομε 2 μῆλα ἀκόμη σὲ κάθε φρουτιέρα. Ἡ πρώτη ἔχει τώρα $7+2=9$ μῆλα καὶ ἡ δεύτερη $4+2=6$. Πάλι ὅμως 3 μῆλα περισσότερα ἔχει ἡ πρώτη ἀπὸ τὴ δεύτερη. Δηλαδὴ $(7+2)-(4+2)=9-6=3$ (Σχ. 3). Ὅπως βλέπετε, ἡ διαφορὰ δὲν ἄλλαξε.

Ἀφαιροῦμε 2 μῆλα ἀπὸ κάθε φρουτιέρα τοῦ πρώτου σχήματος. Καὶ πάλι ἡ διαφορὰ ἔμεινε ἡ ἴδια, δηλαδὴ $(7-2)-(4-2)=5-2=3$ (Σχ. 3).

Ὥστε, ἂν προσθέσωμε καὶ στὸ μειωτέο καὶ στὸν ἀφαιρετέο τὸν ἴδιο ἀριθμό, ἡ διαφορὰ δὲν ἀλλάζει. Ἐπίσης ἂν ἀφαιρεθῆ καὶ ἀπὸ τὸ μειωτέο καὶ ἀπὸ τὸν ἀφαιρετέο ὁ ἴδιος ἀριθμὸς (ποὺ νὰ ἀφαιρῆται καὶ ἀπὸ τοὺς δυό), ἡ διαφορὰ δὲν ἀλλάζει.

Κάμετε κι ἐσεῖς ὅμοιες ἀσκήσεις μὲ τ' ἀντικείμενά σας.

Προβλήματα (ἀπὸ μνήμης)

1. Ὁ Πέτρος εἶχε 29 δραχμὲς καὶ ὁ Παῦλος 25. Ὁ πατέρας τους ἔδωσε στὸν καθένα ἀπὸ ἕνα δεκάδραχμο. Πόσες δραχμὲς περισσότερες εἶχε ὁ Πέτρος ἀπὸ τὸν Παῦλο ; καὶ πόσες περισσότερες ἔχει τώρα ;

2. Ὁ Θάνος εἶναι 15 ἐτῶν καὶ ὁ Γιάννης 9. Πόση εἶναι ἡ διαφορὰ τῆς ἡλικίας των ; Μετὰ 10 ἔτη πόση θὰ εἶναι ἡ διαφορά ; Πόση ἦταν ἡ διαφορὰ πρὶν ἀπὸ 5 ἔτη ;

Ἀσκήσεις

Παράδειγμα. $98 - 61 =$;

Λύση : Προσθέτω 2 μονάδες στὸ μειωτέο καὶ 2 στὸν ἀφαιρετέο καὶ θὰ ἔχω : $98 - 61 = (98 + 2) - (61 + 2) = 100 - 63$. Εὔκολα τώρα βρίσκω ὅτι $100 - 63 = 37$.

Ἄλλος τρόπος : Ἀφαιρῶ 1 ἀπὸ τὸ 61 καὶ μένουν 60. Ἀφαιρῶ ἐπίσης 1 ἀπὸ τὸ 98 καὶ μένουν 97. Εὔκολα τώρα βρίσκω ὅτι $97 - 60 = 37$.

Ἄλλος τρόπος : Προσθέτω 2 μονάδες στὸ 98 καὶ γίνεται 100. Ἀπὸ τὸ 100 ἀφαιρῶ 61 καὶ μένουν 39. Ἀπὸ τὸ 39 ἀφαιρῶ 2 (ποὺ πρόσθεσα στὸ 98) καὶ μένουν 37. Πάλι τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα βρῆκα.

Πόσα μένουν ;

α)	89 – 73	48 – 29	56 – 35	77 – 42
β)	63 – 45	72 – 54	94 – 28	81 – 37

Ἡ γραπτὴ ἀφαίρεση

α) Χωρὶς κρατούμενα

Ὅλες οἱ προηγούμενες ἀσκήσεις τῆς ἀφαιρέσεως λύνονται καὶ μὲ τὸν συνηθισμένο γραπτὸ τρόπο ποὺ ξέρομε.

Παράδειγμα 1. $150 - 20 =$; Γράφομε τὴν πράξη :

$$\begin{array}{rl} 150 = & 1\text{ ἑκ.} + 5\text{ δεκ} + 0\text{ μον.} \\ -\ \ 20 = & -\ (\ \ 2\text{ »} + 0\text{ »}) \\ \hline & 1\text{ »} + 3\text{ »} + 0\text{ »} = 130 \end{array}$$

ἢ πιὸ σύντομα χωρὶς ἀνάλυση

$$\begin{array}{r} 150 \\ -\ \ 20 \\ \hline 130 \end{array}$$

Παράδειγμα 2. $138 - 7 =$; Γράφομε τὴν πράξη :

$$\begin{array}{rl} 138 = & 1\text{ ἑκ} + 3\text{ δεκ.} + 8\text{ μον.} \\ -\ \ 7 = & -\ 0\text{ ἑκ.}\ \ 0\text{ δεκ.}\ \ 7\text{ μον.} \\ \hline & 1\text{ ἑκ.} + 3\text{ δεκ.} + 1\text{ μον.} = 131 \end{array}$$

ἢ πιὸ σύντομα χωρὶς ἀνάλυση

$$\begin{array}{r} 138 \\ -\ 7 \\ \hline 131 \end{array}$$

β) Μὲ κρατούμενα

Παράδειγμα 1. $162 - 9 =$; Μποροῦμε νὰ γράψωμε :

$$\begin{array}{rlll} 162 = & 1\text{ ἑκ.} + 6\text{δ.} + 2\text{μ.} = & & 1\text{ ἑκ.} + 5\text{δ.} + 12\text{μ.} \\ -\ \ 9 = & -\ 0\text{ ἑκ.}\ \ 0\text{δ.}\ \ 9\text{μ.} = & - & 0\text{ ἑκ.}\ \ 0\text{δ.}\ \ \ 9\text{μ.} \\ \hline & & & 1\text{ ἑκ.} + 5\text{δ.} + 3\text{μ.} \\ & & = & 153 \end{array}$$

ἢ

$$\begin{array}{r} 162 \\ -\ 9 \\ \hline 153 \end{array}$$

Λέμε : Τὸ 9 ἀπὸ τὸ 2 δὲν ἀφαιρεῖται. Δανειζόμαστε 1 δεκάδα ἀπὸ τὸ 6 καὶ τὴν προσθέτομε στὶς 2 μονάδες, οἱ ὁποῖες γίνονται 12. 9 ἀπὸ 12 μένουν 3. Γράφομε τὸ 3 κάτω ἀπὸ τὶς μονάδες. Βγάζομε τὸ ἕνα ποὺ δανειστήκαμε ἀπὸ τὸ 6 καὶ μᾶς μένουν 5. Γράφομε τὸ 5 στὴ στήλη τῶν δεκάδων. Κατεβάζομε καὶ τὴ 1 ἑκατοντάδα.

Παράδειγμα 2. $163 - 138 = ;$ Γράφομε :

$$\begin{array}{rcl}
163 = & 1\ \text{ἑκ.} + 6\ \delta. + 3\ \mu. & = \quad 1\ \text{ἑκ.} + 5\ \delta. + 13\ \mu. \\
-138 = - & (1\ \text{ἑκ.} + 3\ \delta. + 8\ \mu.) & = -\ (1\ \text{ἑκ.} + 3\ \delta. + 8\ \mu.) \\
\hline
 & & 0\ \text{ἑκ.} + 2\ \delta. + 5\ \mu. = \\
 & & = 25
\end{array}$$

ἢ χωρὶς ἀνάλυση

$$\begin{array}{r}
163 \\
-\ 138 \\
\hline
025
\end{array}$$

Πῶς κάναμε ἐδῶ τὴν ἀφαίρεση ;

Παράδειγμα 3. $105 - 26 = ;$ Γράφομε :

$$\begin{array}{rcl}
105 = & 1\ \text{ἑκ.} + 0\ \delta. + 5\ \mu. & = \quad 0\ \text{ἑκ.} + 10\ \delta. + 5\mu. \\
-\ 26 = - & (2\ \delta. + 6\ \mu.) & = - \quad (2\ \delta. + 6\ \mu.) \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
= & 0\ \text{ἑκ.} + 9\ \text{δεκ.} + 15\ \text{μον.} \\
= - & (2\ \text{δεκ.} + 6\ \text{μον.}) \\
\hline
 & 7\ \text{δεκ.} + 9\ \text{μον.} = 79
\end{array}$$

ἢ χωρὶς ἀνάλυση

$$\begin{array}{r}
105 \\
-\ 26 \\
\hline
079
\end{array}$$

Λέμε : Τὸ 6 ἀπὸ τὸ 5 δὲν ἀφαιρεῖται. Δανειζόμαστε 1 δεκάδα καὶ τὴν προσθέτομε στὸ 5, τὸ ὁποῖο γίνεται 15. 6 ἀπὸ 15 μένουν 9. Τὸ γράφομε στὴ στήλη τῶν μονάδων. 1 ποὺ δανειστήκαμε καὶ 2 κάνουν 3· ἀπὸ 0 δὲν ἀφαιρεῖται. Δανειζόμαστε 1 ἑκατοντάδα, δηλαδὴ 10 δεκάδες. Τὶς προσθέτομε στὸ 0 καὶ γίνονται 10 δεκάδες· 3 ἀπὸ 10 μένουν 7. Ἕνα ποὺ δανειστήκαμε ἀπὸ 1 μένει 0.

Ἀσκήσεις

Νὰ ἐκτελέσετε τὶς παρακάτω ἀφαιρέσεις :

$$\begin{array}{rrrrr}
140 & 120 & 139 & 152 & 177 \\
-\ 30 & -\ 40 & -\ 6 & -\ 121 & -\ 148 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr}
183 & 190 & 106 & 200 \\
-\ 79 & -\ 164 & -\ 52 & -\ 163 \\
\hline
\end{array}$$

Ἀντιστροφὴ προβλημάτων

Παράδειγμα 1. Ὁ Στέφανος εἶχε 100 δραχμὲς καὶ δάνεισε τὶς 40 στὸν Παῦλο. Πόσες τοῦ ἔμειναν ; Ἀπάντηση. $100 - 40 = 60$.

Ἀλλάζω τὸ πρόβλημα. Ὁ Στέφανος δάνεισε 40 δραχμὲς στὸν Παῦλο καὶ τοῦ ἔμειναν 60. Πόσες δραχ. εἶχε ; Ἀπάντηση. $60 + 40 = 100$.

Παράδειγμα 2. Ἀπὸ ἕνα τόπι ὕφασμα 50 μέτρων πουλήθηκαν τὰ 30. Πόσα μέτρα ἔμειναν ; Ἀπάντηση. $50 - 30 = 20$.

Ἀντιστρέφω τὸ πρόβλημα. Ἀπὸ ἕνα τόπι ὕφασμα πουλήθηκαν 30 μ. κι ἔμειναν 20. Πόσα μ. ἦταν ὅλο τὸ ὕφαμα ; Ἀπάντηση. $20 + 30 = 50$.

Νὰ λύσετε κι ἔπειτα ν' ἀντιστρέψετε τὰ παρακάτω προβλήματα :

1. Ἡ διπλὴ μετροταινία σας ἔχει 200 ἑκατοστόμ. (πόντους). Ἂν κόψετε ἕνα κομμάτι 50 πόντων, πόσους πόντους θὰ ἔχη τὸ κομμάτι ποὺ θὰ σᾶς μείνη ;

2. Ἕνα βαρέλι γεμάτο λάδι ζυγίζει 180 κιλά. Τὸ λάδι εἶναι 155 κιλά. Πόσο ζυγίζει τὸ ἄδειο βαρέλι ;

3. Νὰ κάμετε κι ἐσεῖς ὅμοια προβλήματα καὶ νὰ τ' ἀντιστρέψετε.

Δοκιμὴ τῆς ἀφαιρέσεως

Ὅπως εἴδατε, ἀντιστρέψαμε τὰ παραπάνω προβλήματα ἀφαιρέσεως καὶ τὰ κάναμε προβλήματα προσθέσεως. Μὲ τὴν ἀντιστροφὴ ὅμως αὐτὴ δὲν ἀλλάξαμε μόνο τὰ προβλήματα, ἀλλὰ βεβαιωθήκαμε κιόλας ὅτι οἱ ἀφαιρέσεις ἦταν σωστές. Κάναμε δηλαδὴ τὴ δοκιμὴ τῆς ἀφαιρέσεως. Πῶς ἔγινε ;

Ξανακοιτάξτε τὰ προβλήματα. Θὰ δῆτε ὅτι σὲ ὅλα προσθέσαμε τὸ ὑπόλοιπο καὶ τὸν ἀφαιρετέο καὶ βρήκαμε τὸ μειωτέο.

Γράφομε πάλι τὶς ἀφαιρέσεις, κατακόρυφα αὐτὴ τὴ φορά, καὶ δίπλα τὴ δοκιμή τους.

$$\begin{array}{r} 100 \\ -\ 40 \\ \hline 60 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 40 \\ +\ 60 \\ \hline 100 \end{array} \qquad \Bigg| \qquad \begin{array}{r} 50 \\ -\ 30 \\ \hline 20 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 30 \\ +\ 20 \\ \hline 50 \end{array}$$

῞Ωστε, γιὰ νὰ κάνωμε τὴ δοκιμὴ τῆς ἀφαιρέσεως, προσθέτομε τὸ ὑπόλοιπο καὶ τὸν ἀφαιρετέο. ῍Αν βροῦμε τὸ μειωτέο, ἡ ἀφαίρεση εἶναι σωστή.

῎Αλλος τρόπος, γιὰ νὰ κάμετε τὴ δοκιμὴ τῆς ἀφαιρέσεως, εἶναι νὰ ἐκτελέσετε ἄλλη μιὰ φορὰ τὴν ἀφαίρεση.

Νὰ ἐκτελέσετε τὶς παρακάτω ἀφαιρέσεις μὲ τὴ δοκιμή τους. 173 – 108 =, 138 – 79 =, 105 – 56 =, 190 – 107=, 200 – 143 =

Προβλήματα

1. Ἡ μητέρα ἀγόρασε ἕνα τραπεζομάντιλο ἀξίας 157 δραχμῶν κι ἔδωσε στὴ ταμία τοῦ καταστήματος 1 ἑκατοστάρικο καὶ 2 πενηντάρια. Τί ρέστα θὰ πάρη ;

2. ῞Ενας ἐργάτης παίρνει ἡμερομίσθιο 125 δραχμὲς καὶ ξοδεύει κατὰ μέσον ὅρο τὴν ἡμέρα 108. Πόσες δραχμὲς τοῦ μένουν ;

3. ῞Ενας κτηνοτρόφος ἔχει 190 γιδοπρόβατα. Ἀπὸ αὐτὰ τὰ 76 εἶναι γίδια. Πόσα εἶναι τὰ πρόβατα ;

4. Ὁ Ἀντρέας ἔχει στὸν κουμπαρά του 145 δραχμές. Πόσες πρέπει νὰ βάλη ἀκόμη, γιὰ νὰ τὶς κάμη 200 ;

5. Δύο αὐτοκίνητα πῆραν παραγγελία νὰ μεταφέρουν 200 σακιὰ τσιμέντο σὲ μιὰ οἰκοδομή. Τὸ ἕνα μετέφερε 60 σακιὰ καὶ τὸ ἄλλο 56. Πόσα πρέπει νὰ μεταφέρουν ἀκόμη ;

6. Ὁ μανάβης ἀγόρασε πορτοκάλια καὶ πλήρωσε 165 δρχ. Τὰ πούλησε καὶ πῆρε 200 δραχμές. Πόσες δραχμὲς κέρδισε ;

7. Ἕνας γεωργὸς μάζεψε ἀπὸ 3 καρυδιὲς 115 κιλὰ καρύδια. Ἀπὸ τὴ μιὰ μάζεψε 46 κιλὰ καὶ ἀπὸ τὴν ἄλλη 35. Πόσα μάζεψε ἀπὸ τὴν τρίτη ;

8. Τὰ παιδιὰ πηδοῦν ἅλμα σὲ ὕψος. Ὁ Γιῶργος πήδησε 120 πόντους, ὁ Γιάννης 128 πόντους, ὁ Παῦλος 117 καὶ ὁ Νίκος 132. Νὰ βρῆτε πόσους πόντους διαφέρει τὸ πήδημα τοῦ καθενὸς παιδιοῦ ἀπὸ τὰ πηδήματα τῶν ἄλλων παιδιῶν.

Σημειῶστε στὸν πίνακα μὲ κατακόρυφες γραμμὲς τὸ ὕψος ποὺ πήδησε τὸ κάθε παιδί. Τὸ σχῆμα αὐτὸ θὰ σᾶς βοηθήση στὴ σύγκριση καὶ στὶς πράξεις.

9. Ὁ Φάνης καὶ ὁ Χάρης βάδισαν 180 μέτρα, γιὰ νὰ φτάσουν ἀπὸ τὸ σπίτι τοῦ Φάνη στὴν Παιδικὴ Χαρά. Στὴν ἐπιστροφὴ ἀπὸ τὸν ἴδιο δρόμο βάδισαν 94 μέτρα καὶ ὁ Χάρης ἔφτασε στὸ σπίτι του. Πόσα θὰ βαδίση ἀκόμη ὁ Φάνης, γιὰ νὰ φτάση στὸ δικό του ;

Μπορεῖτε νὰ μαντέψετε ;

1. Ἔχω ἕναν ἀριθμό. Ἂν τοῦ προσθέσω 117, γίνεται 181. Ποιός εἶναι ;

2. Δύο ἀριθμοὶ ἔχουν ἄθροισμα 200. Ὁ ἕνας εἶναι ὁ 104. Ποιός εἶναι ὁ ἄλλος ;

4. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Παράγοντες τῶν ἀκεραίων 1 ὡς 200

1. Ἕνα ἑκατοστάρικο ἔχει 100 δραχμές· δηλαδὴ $1 \times 100 = 100$. 2 ἑκατοστάρικα ἔχουν 200 δραχμές· δηλαδὴ $2 \times 100 = 200$. Νὰ βρῆτε τὸν παράγοντα ποὺ λείπει· $200 = 2 \times ;$, $100 = 1 \times ;$

2. Πόσες δραχ. ἔχουν 2 πενηντάρια ; 1, 3, 4 πενηντάρια ; Σημειῶστε τὶς πράξεις. Νὰ βρῆτε $100 = ; \times 50$, $200 = ; \times 50$, $150 = ; \times 50$.

3. Ἕνα εἰκοσάδραχμο ἔχει 20 δραχμές. Πόσες ἔχουν τὰ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 εἰκοσάδραχμα ; Σημειῶστε τὶς πράξεις· δηλαδή : $1 \times 20 = 20$, $2 \times 20 = 40$ κλπ.

Παράδειγμα : Πόσες φορὲς τὸ 20 κάνει 40 ; Ἀπάντηση. $2 \times 20 = 40$. Νὰ βρῆτε : $; \times 20 = 60$, $; \times 20 = 140$ $; \times 20 = 200$, $; \times 20 = 80$, $100 = 5 \times ;$, $160 = 8 \times ;$

Ὁ ἐπιμερισμὸς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρὸς τὴν πρόσθεση

Νὰ βρεθῆ τὸ ἐξαγόμενο : $(3 + 4) \times 2$. Προσέξτε, μποροῦμε νὰ ἐργασθοῦμε μὲ δύο τρόπους :

α) Βρίσκομε πρῶτα τὸ ἄθροισμα $3 + 4$ καὶ ἔχομε $(3 + 4) \times 2 = 7 \times 2 = 14$.

β) Πολλαπλασιάζομε χωριστὰ κάθε προσθετέο μὲ τὸν παράγοντα 2. Δηλαδὴ $(3 + 4) \times 2 = (3 \times 2) + (4 \times 2) = 6 + 8 = 14$. Ἔχομε τὸ ἴδιο ἐξαγόμενο 14. Ὥστε

> Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε ἄθροισμα μὲ παράγοντα, πολλαπλασιάζομε κάθε προσθετέο μὲ τὸν παράγοντα κι ἔπειτα προσθέτομε τὰ μερικὰ γινόμενα.

Ἐπίσης : $3 \times (4 + 5) = (3 \times 4) + (3 \times 5) = 12 + 15 = 27$.

Αὐτὴν τὴν ἰδιότητα τὴ λέμε **ἐπιμεριστικότητα** τοῦ **πολλαπλασιασμοῦ** ὡς πρὸς τὴν **πρόσθεση,** ἐπειδὴ ὁ παράγοντας ἐπιμερίζεται στὸν κάθε προσθετέο τοῦ ἀθροίσματος.

Παραδείγματα

1. α) $3 \times 37 = 3 \times (30 + 7) = (3 \times 30) + (3 \times 7) = 90 + 21 = 111$.

β) $23 \times 4 = (20 + 3) \times 4 = (20 \times 4) + (3 \times 4) = 80 + 12 = 92$.

2. Ὅταν ξέρωμε νὰ πολλαπλασιάζωμε μὲ τὸ 10, εἶναι πολὺ εὔκολο νὰ πολλαπλασιάζωμε καὶ μὲ τὸ 11. Π.χ. $2 \times 11 =$; Λέμε : $2 \times 10 = 20$, $2 \times 1 = 2$, $20 + 2 = 22$.

Ἄλλο παράδειγμα : $9 \times 11 =$; Λέμε : $9 \times 10 = 90$, $9 \times 1 = 9$, $90 + 9 = 99$.

Νὰ σχηματίσετε τὴ σειρά : $1 \times 11 = 11$, $2 \times 11 = 22$ . . . κλπ. ὡς τὸ $18 \times 11 = 198$.

3. Μιὰ δωδεκάδα ποτήρια ἔχει 12 ποτήρια. Πόσα ἔχουν 2, 3, 4, 5. . . 16 δωδεκάδες ;

Παράδειγμα : Πόσα γίνονται 14×12 ;

Λέμε : $10 \times 12 = 120$, $4 \times 12 = 48$, $120 + 48 = 168$.

4. Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο νὰ σχηματίσετε τὶς σειρές :

α) 1×13, 2×13, 3×13, 4×13... ὡς τὸ 15×13.
β) 1×14, 2×14, 3×14. . . ὡς τὸ 14×14.
γ) 1×15, 2×15, 3×15. . . ὡς τὸ 13×15.

Γιὰ τὶς δύο πρῶτες σειρὲς χρησιμοποιῆστε ξυλάκια, κύβους, μάρκες, κύκλους κλπ. Γιὰ τὴν τρίτη χρησιμοποιῆστε τὴ μετροταινία σας.

5. Ὁ μήνας ἔχει 30 μέρες. Πόσες ἡμέρες ἔχουν 2, 3, 4, 5, 6 μῆνες ; Σημειῶστε τὶς πράξεις. Νὰ βρῆτε : Πόσες φορὲς τὸ 30 κάνει 90 ;

6. Πόσα γίνονται 1×40, 2×40, 3×30, 4×40, 5×40, $\frac{1}{2}$ τοῦ 40 ;

Νὰ βρῆτε : $; \times 40 = 160$, $; \times 40 = 200$, $; \times 40 = 0$, $; \times 40 = 20$.

7. Ἡ ὥρα ἔχει 60 λεπτά. Πόσα λεπτὰ ἔχουν 2, 3 ὧρες ;
Νὰ βρῆτε : $; \times 60 = 180$, $; \times 60 = 120$, $; \times 60 = 0$, $; \times 60 = 60$, $; \times 60 = 30$.

Πόσα λεπτὰ ἔχει μισὴ ὥρα ; Πόσα ἔχουν 2, 4, 6 μισὲς ὧρες ;

8. Ἕνα ἡμερονύκτιο ἔχει 24 ὧρες. Πόσες ὧρες ἔχουν 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ἡμερονύκτια;
Νὰ βρῆτε : $; \times 24 = 48$, $; \times 24 = 120$, $; \times 24 = 72$, $; \times 24 = 0$, $; \times 24 = 96$.

9. Πόσες ὧρες ἔχει ἡ ἑβδομάδα (7 ἡμερονύκτια) ;
Σκέπτομαι : Τὸ 1 ἡμερονύκτ. ἔχει 24 ὧρες.

Ἄρα : Τὰ 7 » ἔχουν 7 φορὲς 24, δηλαδὴ 7 φορὲς (20 + 4) = 7 φορὲς (2δ. + 4 μ.) = (7φορὲς 2δ) + (7 φορὲς 4 μον.) = 14 δ. + 28 μ. = 140μ + 28μ. = 168μ. Ἀπάντηση: Τὰ 7 ἡμερ. ἔχουν 168 ὧρες.

Στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα φθάνομε καὶ μὲ ἄλλη διάταξη. Δηλαδή :

ε δ μ	Πιὸ σύντομα	
2 4	24	Λέμε φωναχτά :
7 φορὲς	7 ×	Τέσσερεις 7 ; 28 (γράφω 8μ)
2 8 μονάδες	168	Δύο 7; 14...+2 ; 16. 168.
+ 1 4δ.		Ἀπάντηση : Μιὰ ἑβδομάδα
1 6 8 μονάδες		ἔχει 168 ὧρες.

Πολλαπλασιασμὸς διψηφίου μὲ διψήφιο

Παράδειγμα. Ἕνα κουτὶ περιέχει 16 γλυκίσματα. Πόσα περιέχουν 12 ὅμοια κουτιά ; Σκέψη. Ἀφοῦ τὸ ἕνα κουτὶ ἔχει 16 γλυκίσματα, τὰ 12 θὰ ἔχουν 12×16. Βρίσκομε πρῶτα πόσα γλυκίσματα ἔχουν τὰ 10 κουτιὰ κι ἔπειτα πόσα ἔχουν τὰ 2 :

Ἀφοῦ τὸ 1 κουτὶ ἔχει 16 γλ., τὰ 12 κουτιὰ θὰ ἔχουν

12 φορὲς 16
$= 12 \times 16$
$= (10 + 2) \times 16$
$= (10 \times 16) + (2 \times 16)$
$= 160 + 32$
$= 16\delta + 32\mu.$
$= 16\delta + 3\delta + 2\mu$
$= 19\delta + 2\mu$
$= 192.$

ἢ

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 12 \\ \hline ; \end{array} = \left\{ \begin{array}{r} 16 \\ \times 10 \\ \hline 160 \end{array} + \begin{array}{r} 16 \\ \times\ 2 \\ \hline 32 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{r} 16 \\ \times\ 12 \\ \hline 32 \\ +160 \\ \hline 192 \end{array}$$

Ἀπάντηση: Τὰ 12 κουτιὰ ἔχουν 192 γλυκίσματα.

Ἀκόμα πιὸ σύντομα.

16	Λέμε φωναχτά:	
12 ×	Δύο 6 ; . . . 12 (γράφω 2μ κρατῶ 1δ)	
32	Δύο 1 ; . . . 2, . . + 1 ; 3.	32μ.
16	Μία 6;. . . 6. Μία 1 ; 1.	16 δ.
192	Προσθέτω ⟶	192

$10 \times 16 = 160, \quad 2 \times 16 = 32, \quad 160 + 32 = 192,$ ἢ

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 12 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{r} 16 \\ \times\ (10 + \ 2) \\ \hline 160 + 32 = 192 \end{array} \text{ ἢ } \begin{array}{r} 16 \\ \times\ (1 \text{ δεκ.} + \ 2\mu) \\ \hline 16 \text{ δεκ.} + 32\mu. = 16 \text{ δεκ.} + \end{array}$$
$$+ 3 \text{ δεκ.} + 2\mu. = 192$$

ἢ πιὸ σύντομα, χωρὶς ἀνάλυση :

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 12 \\ \hline 32 \\ +\ 16 \\ \hline 192 \end{array}$$

Δηλαδὴ πολλαπλασιάσαμε πρῶτα μὲ τὶς 2 μονάδες: $2 \times 6 = 12$· γράφομε τὸ 2 καὶ κρατοῦμε τὴ 1 δεκ. $2 \times 1 = 2$ καὶ 1 τὸ κρατούμενο 3. Γράφομε τὸ 3 στὴ στήλη τῶν δεκάδων. Ἔτσι βρίσκομε 32. Συνεχίζομε μὲ τὶς δεκ. $1 \times 6 = 6$ δεκ.· γράφομε τὸ 6 στὴ στήλη τῶν δεκάδων, δηλαδὴ κάτω ἀπὸ τὸ 3. $1 \times 1 = 1$· γράφομε τὸ 1 στὴ στήλη τῶν ἑκατοντάδων. Σύρομε μιὰ γραμμὴ καὶ προσθέτομε τοὺς ἀριθμοὺς 32 καὶ 16 ποὺ βρήκαμε. Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ λέγονται *μερικὰ* γινόμενα. Αὐτὸ ποὺ βρίσκομε, ὅταν προσθέσωμε τὰ μερικὰ γινόμενα, λέγεται *τελικὸ* γινόμενο. Ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς λέγονται *παράγοντες* τοῦ γινομένου.

Ἀσκήσεις

Νὰ ἐκτελέσετε τοὺς παρακάτω πολλαπλασιασμούς :

$$\begin{array}{r} 52 \\ \times\ 3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 64 \\ \times\ 3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 17 \\ \times\ 11 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ 13 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10 \\ \times\ 18 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times\ 16 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16 \\ \times\ 11 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ \times\ 13 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 48 \\ \times\ 4 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 19 \\ \times\ 6 \\ \hline \end{array}$$

Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 1

Νὰ ἐκτελέσετε τοὺς παρακάτω πολλαπλασιασμούς :
$1 \times 5 =$; $1 \times 10 =$; $1 \times 18 =$; $4 \times 1 =$; $7 \times 1 =$; $30 \times 1 =$; Τί βρήκατε ; Τί παρατηρεῖτε ; Τὸ γινόμενο ποὺ βρίσκομε κάθε φορὰ εἶναι τὸ ἴδιο μὲ τὸν ἀριθμὸ ποὺ πολλαπλασιάζομε ἐπὶ 1. Μποροῦμε λοιπὸν νὰ μὴν κάνωμε τὸν πολλαπλασιασμὸ ἐπὶ τὸ 1.

Νὰ ἐκτελέσετε τώρα τοὺς παρακάτω πολλαπλασιασμούς.

$2 \times 5 =$	$3 \times 10 =$	$5 \times 8 =$	$3 \times 4 =$
$2 \times 5 \times 1 =$	$3 \times 10 \times 1 =$	$1 \times 5 \times 8 =$	$3 \times 1 \times 4 =$

Τί βρήκατε ; Κι ἐδῶ τὸ 1 ὡς παράγοντας δὲν ἀλλάζει τὸ γινόμενο τῶν ἄλλων παραγόντων.

Ἐρώτηση. Μπορῶ νὰ γράψω ὅτι ὁ ἀριθμὸς $175 = 1 \times 175$; Μάλιστα, διότι μία φορὰ τὸ 175 κάνει 175.

Προβλήματα

1. Ἕνα κιβώτιο ἔχει 24 φιάλες λεμονάδες. Πόσες φιάλες ἔχουν 5 ὅμοια κιβώτια ; πόσες τὰ 6, 7, 8 κιβώτια ;

2. Δώδεκα δωδεκάδες ποτήρια καὶ 10 ποτήρια ἀκόμη πόσα ποτήρια εἶναι ;

3. Ὁ διάδρομος ἑνὸς σπιτιοῦ εἶναι στρωμένος μὲ 11 σειρὲς πλακάκια. Κάθε σειρὰ ἔχει 18 πλακάκια. Πόσα εἶναι τὰ πλακάκια τοῦ διαδρόμου ; Νὰ σχεδιάσετε τὶς σειρὲς μὲ τὰ πλακάκια. Τὸ σχῆμα θὰ σᾶς βοηθήση στὴ λύση.

4. Ἕνα δωμάτιο τοῦ σπιτιοῦ αὐτοῦ ἔχει 14 σειρὲς ἀπὸ 14 πλακάκια σὲ κάθε σειρά. Πόσα εἶναι τὰ πλακάκια τοῦ δωματίου ;

5. Ἕνα κιβώτιο ἔχει 28 πλάκες σαπούνι. Πόσες πλάκες ἔχουν 7 ὅμοια κιβώτια ; πόσες τὰ 4, 5, 6 κιβώτια ;

6. Πόσα πρῶτα λεπτὰ ἔχουν τὰ 3 τέταρτα τῆς ὥρας ; τὰ 5, 9, 10, 11, 13 τέταρτα τῆς ὥρας ;

7. Πέντε λεωφορεῖα μεταφέρουν ἐκδρομεῖς. Κάθε λεωφορεῖο ἔχει 32 θέσεις καὶ σὲ κάθε θέση κάθεται ἀπὸ ἕνα ἄτομο. Πόσα ἄτομα ταξιδεύουν μὲ τὰ λεωφορεῖα ;
Ἕξι τέτοια λεωφορεῖα πόσες θέσεις ἔχουν ;

8. Ἡ μητέρα ἀγόρασε 4 πετσέτες πρὸς 96 δραχμές τὸ ζεῦγος. Τί ρέστα θὰ πάρη ἀπὸ 2 ἑκατοστάρικα ;

9. Στὸ κατάστημα τροφίμων βλέπομε 9 ράφια μὲ κουτιὰ κονσέρβες. Σὲ κάθε ράφι εἶναι 20 κουτιά. Πόσα κουτιὰ εἶναι στὰ 9 ράφια ;

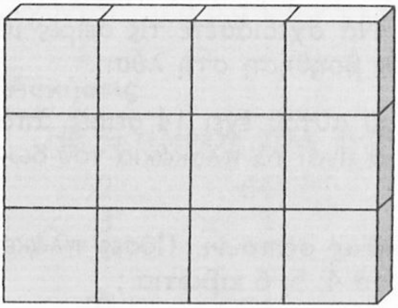
10. Ἕνα κιλὸ ἀρνάκι γάλακτος ἔχει 52 δραχμές. Πόσο κοστίζουν τὰ 3 κιλά ;

11. Διπλασίασε τοὺς μονοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τὸ 80 ὡς τὸ 90.
Τριπλασίασε τοὺς ζυγοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τὸ 60 ὡς τὸ 67.
Τετραπλασίασε τοὺς ἀριθμοὺς 40, 43, 46, 47, 49.

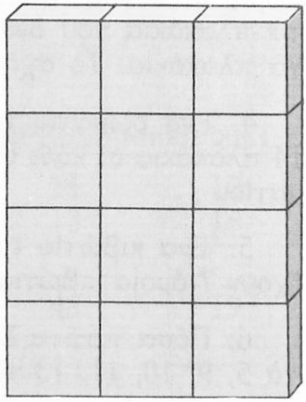
12. Ποιό εἶναι μεγαλύτερο καὶ πόσο ;
Τὸ ὀχταπλάσιο τοῦ 23 ἢ τὸ ἑξαπλάσιο τοῦ 28 ;
Τὸ ἐννιαπλάσιο τοῦ 19 ἢ τὸ ἑφταπλάσιο τοῦ 21 ;

Ἀντιμετάθεση παραγόντων

1. Νὰ κάμετε μὲ κύβους τρεῖς σειρὲς ἀπὸ 4 κύβους σὲ κάθε σειρά, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα Α. Δηλαδὴ $3 \times 4 = 12$.



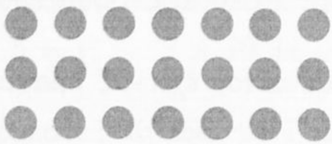
Α



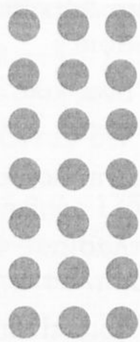
Β

Νὰ γυρίσετε μὲ προσοχὴ τοὺς κύβους ἔτσι, ὥστε νὰ πάρουν τὴ θέση ποὺ δείχνει τὸ σχῆμα Β. Θὰ ἔχετε τώρα τοὺς ἴδιους κύβους ἀλλὰ σὲ 4 σειρὲς ἀπὸ 3 κύβους σὲ κάθε σειρά. Δηλαδὴ $4 \times 3 = 12$. Ὅπως βλέπετε, ἄλλαξε ἡ θέση τῶν παραγόντων 3 καὶ 4· τὸ γινόμενο ὅμως εἶναι τὸ ἴδιο.

Σ η μ ε ί ω σ η. Τὸ γύρισμα εἶναι πολὺ εὔκολο, ἂν ἔχετε τ᾿ ἀντικείμενά σας ἐπάνω σὲ χαρτόνι.



Γ



Δ

2. Νὰ κάμετε ὅμοια ἐργασία μὲ τὶς μάρκες, ὅπως δείχνουν τὰ σχήματα Γ καὶ Δ.

3. Ἡ εἰκόνα τῶν γραμματοσήμων δείχνει τὸ γινόμενο $2 \times 3 = 6$. Ἂν γυρίσωμε τὸ βιβλίο, ἡ εἰκόνα θὰ δείχνῃ $3 \times 2 = 6$.

Ἔγινε κι ἐδῶ ἀλλαγὴ στὴ θέση τῶν παραγόντων. Ἔγινε ἀντιμετάθεση τῶν παραγόντων. Θυμᾶστε ποῦ ἀλλοῦ ἔχομε ἀντιμετάθεση ἀριθμῶν ;

4. Νὰ κάμετε καὶ ἄλλες ὅμοιες ἐργασίες μὲ τ' ἀντικείμενά σας καὶ νὰ σημειώσετε τὶς πράξεις.

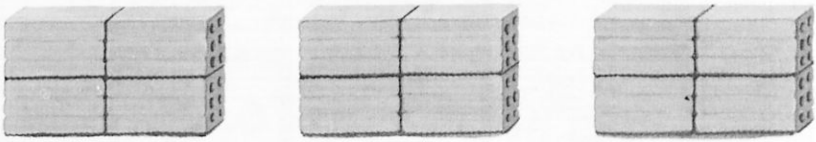
5. Νὰ ἐκτελέσετε τὶς παρακάτω πράξεις :

$2 \times 5 =$	$3 \times 8 =$	$7 \times 4 =$	$6 \times 7 =$
$5 \times 2 =$	$8 \times 3 =$	$4 \times 7 =$	7×6
$9 \times 5 =$	$6 \times 9 =$	$8 \times 10 =$	
$5 \times 9 =$	$9 \times 6 =$	$10 \times 8 =$	

Συμπέρασμα. Τὸ γινόμενο δὲν ἀλλάζει, ἂν ἀλλάξωμε τὴ θέση τῶν παραγόντων.

Γινόμενο πολλῶν παραγόντων

Νὰ τοποθετήσετε τοῦβλα ἢ κύβους, ὅπως δείχνουν τὰ σχήματα.



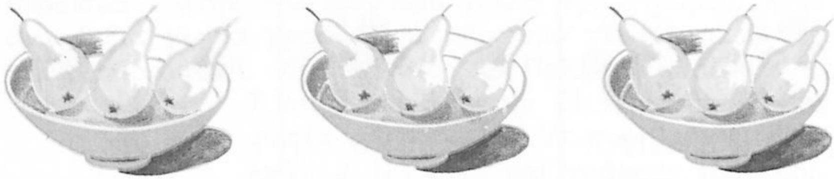
Στὸ πρῶτο ἔχομε 2 σειρὲς ἀπὸ 2 τοῦβλα σὲ κάθε σειρά, δηλαδὴ 2×2. Στὸ δεύτερο πάλι 2×2 καὶ στὸ τρίτο ἐπίσης 2×2. Ὥστε ἔχομε τὰ 2×2 τοῦβλα τρεῖς φορὲς ἢ $2 \times 2 \times 3$.

Ἐδῶ ἔχομε τρεῖς παράγοντες στὴ σειρά. Μποροῦμε νὰ ἔχωμε καὶ περισσότερους. Τὰ γινόμενα αὐτὰ ποὺ ἔχουν περισσότερους ἀπὸ δύο παράγοντες λέγονται γινόμενα πολλῶν παραγόντων καί, γιὰ νὰ τὰ βροῦμε, πολλαπασιάζομε τὸν πρῶτο παράγοντα ἐπὶ τὸν δεύτερο, τὸ γινόμενο ποὺ βρίσκομε τὸ πολλαπλασιάζομε ἐπὶ τὸν τρίτο παράγοντα κ.ο.κ.

Π.χ. γιὰ νὰ βροῦμε τὸ γινόμενο $5 \times 2 \times 3 \times 4$, λέμε: $5 \times 2 = 10$, $3 \times 10 = 30$, $4 \times 30 = 120$.

Νὰ παραστήσετε κι ἐσεῖς μὲ τ' ἀντικείμενά σας γινόμενα πολλῶν παραγόντων, νὰ τὰ βρῆτε καὶ νὰ σημειώσετε τὶς πράξεις.

Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ μηδὲν



$3 \times 3 = 9$

$3 \times 2 = 6$

$3 \times 1 = 3$

$3 \times 0 = 0$

Στὰ σχήματα μὲ τὶς φρουτιέρες ἔχομε :

Στὸ πρῶτο	:	3×3 ἀχλάδια	$= 9$	ἀχλάδια
Στὸ δεύτερο	:	3×2 »	$= 6$	»
Στὸ τρίτο	:	3×1 ἀχλάδι	$= 3$	»
Στὸ τελευταῖο	:	3×0 »	$= 0$	»

$2 \times 6 = 12$	$1 \times 6 = 6$	$0 = 9 \times 0$

Στὰ σχήματα μὲ τὰ λουλούδια ἔχομε:

Στὸ πρῶτο : 2×6 πέταλα $= 12$ πέταλα
Στὸ δεύτερο : 1×6 » $= 6$ »
Στὸ τελευταῖο : 0×6 » $= 0$ »

Ἀπὸ τὰ τελευταῖα σχήματα βλέπομε ὅτι, ὅταν πολλαπλασιάσωμε ἕναν ἀριθμὸ μὲ τὸ μηδέν, βρίσκομε γινόμενο μηδέν.

Τὸ ἴδιο παρατηροῦμε καὶ στὸ γινόμενο πολλῶν παραγόντων, ὅταν ὁ ἕνας τουλάχιστον ἀπὸ αὐτοὺς εἶναι μηδέν· βρίσκομε ἀποτέλεσμα μηδέν· π.χ. $2 \times 3 \times 0 = 6 \times 0 = 0$.

Ἀσκήσεις

α)	$1 \times 0 =$	$3 \times 0 =$	$56 \times 0 =$
	$0 \times 4 =$	$0 \times 148 =$	$0 \times 1.000 =$
β)	$4 \times 5 \times 0 =$	$0 \times 6 \times 2 =$	$3 \times 0 \times 7 =$
	$6 \times 8 \times 0 =$	$0 \times 5 \times 0 =$	

Σημείωση. Θυμηθῆτε στὴν πρόσθεση: τὸ μηδὲν ὡς προσθετέος παραλείπεται

Δοκιμὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

Πολλαπλασιάσαμε τὸ 16×12 καὶ βρήκαμε 192. Γιὰ νὰ βεβαιωθοῦμε ὅτι ἡ πράξη μας εἶναι σωστή, ξανακάνομε τὸν πολλαπλασιασμό. Αὐτὸ εἶναι μία δοκιμή. Ἢ ἀλλάζομε τὴ θέση τῶν παραγόντων καὶ ξανακάνομε τὸν πολλαπλασιασμό. Κι αὐτὸ εἶναι δοκιμή.

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 12 \\ \hline 32 \\ 16\ \ \\ \hline 192 \end{array}$$

Μποροῦμε ὅμως νὰ κάνωμε τὴ δοκιμὴ

κι ἔτσι: Κάνομε ἕνα σταυρό. Προσθέτομε τὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστέου, δηλαδὴ $1 + 6 = 7$ καὶ γράφομε τὸ ἄθροισμα 7 στὴν ἄνω ἀριστερὴ γωνία τοῦ σταυροῦ. Στὴν ἄνω δεξιὰ γωνία γράφομε τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστῆ, δηλαδὴ τὸ 3. Πολλαπλασιάζομε τὸ 7 ἐπὶ 3 καὶ βρίσκομε 21. Προσθέτομε τὰ ψηφία τοῦ γινομένου 21 ποὺ βρήκαμε, δηλαδὴ $2 + 1 = 3$, καὶ γράφομε τὸ ἄθροισμα 3 στὴν κάτω ἀριστερὴ γωνία. Τέλος προσθέτομε τὰ ψηφία τοῦ γινομένου 192, δηλαδὴ $1 + 9 + 2 = 12$. Προσθέτομε καὶ πάλι τὰ ψηφία τοῦ 12, γιὰ νὰ βροῦμε μονοψήφιο ἀριθμό, δηλαδὴ $1 + 2 = 3$. Γράφομε τὸ 3 στὴν κάτω δεξιὰ γωνία. Βλέπομε ὅτι στὶς κάτω γωνίες εἶναι ὁ ἴδιος μονοψήφιος ἀριθμός. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ πράξη εἶναι μᾶλλον σωστή. Ἂν δὲν εἶναι ἴδιος, ἔχει γίνει λάθος στὴν πράξη.

$$\begin{array}{c|c} 7 & 3 \\ \hline 3 & 3 \end{array}$$

Πρόσεξε· μπορεῖ τὸ λάθος νὰ εἶναι καὶ στὴ δοκιμή.

Σημείωση. Μερικὲς φορὲς ἡ δοκιμὴ μὲ τὸ σταυρὸ δὲ δείχνει τὸ λάθος.

π.χ.: $\begin{array}{r} 204 \\ \times\ 3 \\ \hline 621 \end{array}$ $\qquad \begin{array}{c|c} 6 & 3 \\ \hline 9 & 9 \end{array}$ $\qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ 12 \\ \hline 28 \\ +\ 14 \\ \hline 42 \end{array}$ $\qquad \begin{array}{c|c} 5 & 3 \\ \hline 6 & 6 \end{array}$

Καὶ στοὺς δύο πολλαπλασιασμοὺς ὑπάρχει λάθος. Ἡ δοκιμὴ ὅμως δὲ δείχνει τὸ λάθος. Μπορεῖτε νὰ τὸ βρῆτε σεῖς;

5. ΔΙΑΙΡΕΣΗ

Μερισμὸς

1. Νὰ μοιράσετε 100 κύβους, μάρκες, ξυλάκια κλπ. σὲ δύο ἴσα μέρη. Τὸ σχῆμα δείχνει τὸ ἀποτέλεσμα:

'Εδῶ μοιράζομε τὸ 100 σὲ 2 ἰσάριθμες σειρές, σὲ 2 πεντάρια· δηλαδὴ 100 : 2 = 50. Ἡ πράξη μας εἶναι σωστή, διότι 2 × 50 = 100.

2. Εὔκολα τώρα μπορεῖτε νὰ μοιράσετε σὲ 2 ἴσα μέρη 102, 104, 106, 108 κλπ. ὡς τὰ 200 ἀντικείμενα. Νὰ σημειώνετε κάθε φορὰ τὴ διαίρεση καὶ δίπλα τὸν πολλαπλασιασμό, γιὰ νὰ βεβαιώνεστε ὅτι κάματε τὴ διαίρεση σωστά· π.χ. 108 : 2 = 54 διότι 2 × 54 = 108.

3. Νὰ βρῆτε τὸ μισὸ $\left(\frac{1}{2}\right)$ ὅλων τῶν ζυγῶν ἀκεραίων ἀπὸ τὸ 120 ὡς τὸ 160. Χρησιμοποιῆστε τὴ μετροταινία σας καὶ ἄλλα ἀντικείμενα.

4. Νὰ μοιράσετε 102, 105, 108, 111 ἀντικείμενα σὲ 3 ἴσα μέρη. Πόσο εἶναι τὸ καθένα ἀπὸ τὰ τρία μέρη, δηλαδὴ τὸ ἕνα τρίτο ;

5. Νὰ βρῆτε τώρα τὸ ἕνα τρίτο τῶν 150, 153, 156, 180, 186, 189 ἀντικειμένων. Πῶς τὸ βρήκατε ;

6. Νὰ μοιράσετε σὲ 4 ἴσα μέρη 104, 108, 112, 116, 120 ἀντικείμενα. Νὰ μοιράσετε πρῶτα τὸ 100.

7. Πόσα εἶναι τὸ ἕνα τέταρτο τῶν 140, 144, 148, 152, 160, 168, 180, 184 ἀντικειμένων ; Πῶς τὸ βρήκατε ;

8. Νὰ μοιράσετε σὲ 5 ἴσα μέρη ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τὸ 100 ὡς τὸ 200, ποὺ τελειώνουν σὲ 0 καὶ σὲ 5. Μὴν ξεχνᾶτε πόσο εἶναι 100 : 5.

9. Νὰ μοιράσετε 102, 108, 126, 138, 162, 174, 180, 198 ἀντικείμενα σὲ 6 ἴσα μέρη. Πόσο εἶναι τὸ ἕνα ἕκτο τῶν ἀκεραίων αὐτῶν ;

10. Νὰ μοιράσετε 105, 112, 140, 168 ἀντικείμενα σὲ 7 ἴσα μέρη.

11. Πόσο εἶναι τὸ ἕνα ἕβδομο τοῦ 147 ;

12. Νὰ διαιρέσετε τὸ 104, 112, 120 σὲ 8 ἴσα μέρη· ὁμοίως τὸ 108, 117, 126, 135 σὲ 9 ἴσα μέρη.

13. 101 : 2 δίνει πηλίκο 50 καὶ ὑπόλοιπο 1. Πῶς τὸ βρίσκομε ; 103 : 2 δίνει πηλίκο 51 καὶ ὑπόλοιπο 1. Μὲ τὸν

ἴδιο τρόπο νὰ διαιρέσετε διὰ 2 ὅλους τοὺς μονοὺς ἀκεραίους ἀπὸ τὸ 105 ὡς τὸ 199.

14. Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο νὰ διαιρέσετε : α) διὰ 3 τοὺς ἀκεραίους 101, 103, 104, 106.

β) διὰ 4 τοὺς ἀκεραίους 105, 107, 126, 138,

γ) διὰ 5 τοὺς ἀκεραίους 103, 109, 124, 182,

δ) διὰ 6 τοὺς ἀκεραίους 103, 116, 147, 166.

15. Νὰ μοιράσετε 124, 148, 172, 190 ἀντικείμενα σὲ 7 ἴσα μέρη· ἔπειτα τὰ ἴδια ἀντικείμενα σὲ 8 ἴσα μέρη· καὶ τέλος σὲ 9 ἴσα μέρη.

Μέτρηση

1. 100 ἀντικείμενα (κύβοι, μάρκες, ξυλάκια, σφαιρίδια κλπ.) πόσα δυάρια κάνουν ; Ἀπάντηση. Ὅσες φορὲς τὸ 2 χωράει στὸ 100. Τὸ 2 στὸ 100 χωράει 50 φορές. Τὸ σχῆμα Α δείχνει τὰ 50 δυάρια. Ἡ πράξη εἶναι σωστή, διότι $50 \times 2 = 100$.

Α Β Γ Δ

Νὰ συγκρίνετε τὸ σχῆμα Α μὲ τὸ σχῆμα ποὺ εἶναι στὸ πρῶτο πρόβλημα τοῦ μερισμοῦ στὴ σελίδα 124. Ἐκεῖ ἔχομε 100 : 2 = 50, διότι 2 × 50 = 100. Ἐδῶ ἔχομε: τὸ 2 στὸ 100 χωράει 50 φορές, διότι 50 × 2 = 100.

Ὅταν ξέρωμε πόσα δυάρια κάνουν τὰ 100, εὔκολα μποροῦμε νὰ βροῦμε πόσα κάνουν τὰ 101, 102, 103 κλπ. ἀντικείμενα. Π.χ.

Τὸ 2 στὸ 101 χωράει 50 φορὲς καὶ μένει ὑπόλοιπο 1, διότι (50 × 2) + 1 = 101. Τὸ 2 στὸ 102 χωράει 51 φορές, διότι 51 × 2 = 102. Μποροῦμε νὰ τὸ γράψωμε κι ἔτσι : 102 : 2 = 51.

2. Πόσα δυάρια ἔχει τὸ 150 ; Σκέψη. Ἀφοῦ τὸ 100 ἔχει 50 δυάρια, τὸ 50 ποὺ εἶναι τὸ μισὸ τοῦ 100 θὰ ἔχει τὰ μισά, δηλαδὴ 25 δυάρια. Ὥστε τὸ 150 ἔχει 50 + 25 = 75 δυάρια.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο βρίσκομε πόσα ἔχει τὸ 140, 180, 160.

Μήπως μπορεῖτε νὰ στηριχτῆτε ὄχι μόνο στὸ 100 ἀλλὰ καὶ στὸ 150, γιὰ νὰ βρῆτε τὶς ἀπαντήσεις ;

3. Νὰ βρῆτε πόσα δυάρια ἔχει κάθε ἀκέραιος ἀπὸ τὸ 110 ὡς τὸ 120, ἀπὸ τὸ 160 ὡς τὸ 170 καὶ ἀπὸ τὸ 190 ὡς τὸ 200. Νὰ σημειώνετε κάθε φορὰ τὴ διαίρεση καὶ δίπλα σ' αὐτὴ τὸν πολλαπλασιασμό. Π.χ.

Τὸ 2 στὸ 110 χωράει 55 φορές, διότι 55 × 2 = 110.

4. Τοποθετῆστε τ' ἀντικείμενά σας, ὅπως δείχνουν τὰ σχήματα Β, Γ καὶ Δ. Τί παρατηρεῖτε ; Πόσα τριάρια, τεσσάρια, πεντάρια ἔχει τὸ 100 ; Νὰ τὸ θυμᾶστε.

5. Νὰ βρῆτε τώρα, πόσα τριάρια, πόσα τεσσάρια καὶ πόσα πεντάρια ἔχουν οἱ ἀκέραιοι τῆς ἀσκήσεως 3. Νὰ σημειώνετε τὶς διαιρέσεις καὶ δίπλα τὸν πολλαπλασιασμό.

6. Χρησιμοποιῆστε τ' ἀντικείμενά σας κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο, γιὰ νὰ βρῆτε : α) πόσα ἑξάρια ἔχουν οἱ ἀριθμοὶ ἀπὸ τὸ 100 ὡς τὸ 200 ποὺ τελειώνουν σὲ 2, β) πόσα ἑφτάρια ἔχουν οἱ ἀκέραιοι ποὺ τελειώνουν σὲ 5, γ) πόσα ὀχτάρια ἔχουν οἱ ἀκέραιοι ποὺ τελειώνουν σὲ 4, δ) πόσα ἐννιάρια ἔχουν οἱ ἀκέραιοι ποὺ τελειώνουν σὲ 8.

7. Πόσες δραχ. κάνουν 100, 126, 130, 141, 200 πενηνταράκια ;

8. Πόσες ἑβδομάδες κάνουν 172 μέρες ;

9. Πόσα πενηνταράκια κάνουν 185 δεκάρες; 170 πεντάρες;

Πῶς γίνεται ἡ διαίρεση τριψηφίου διὰ μονοψηφίου

Θὰ μᾶς βοηθήση ἡ ψηφιακὴ ἀνάλυση τοῦ διαιρετέου.

Παράδειγμα. Νὰ μοιράσετε 172 δραχμὲς ἐξ ἴσου σὲ 4 παιδιά. Πρῶτα νὰ τὸ βρῆτε μὲ τὸ νοῦ. Πόσο βρήκατε;

Νὰ τὸ βροῦμε καὶ γραπτῶς. Θὰ διαιρέσωμε τὸ 172 : 4. Τὸ 172 = 100 + 70 + 2 ἢ 1 ἑκατοστάρικο, 7 δεκάρικα καὶ 2 δραχμές. Μποροῦμε λοιπὸν νὰ γράψωμε: (100 + 70 + + 2) : 4 ἢ (1 ἑκ. + 7 δεκ. + 2 μ.) : 4. Τὸ 1 ἑκατοστάρικο δὲ φτάνει, γιὰ νὰ πάρουν ὅλα τὰ παιδιὰ ἀπὸ 1 ἑκατοστάρικο. Γι᾽ αὐτὸ τὸ τρέπομε σὲ 10 δεκάρικα· καὶ 7 ποὺ ἔχομε γίνονται 17 δεκάρικα. Θὰ ἔχωμε λοιπὸν νὰ μοιράσωμε: (17 δεκ. + 2 μον.) : 4.

Ἂν μοιράσωμε τὰ 17 δεκ., θὰ πάρη τὸ κάθε παιδὶ ἀπὸ 4 δεκ. καὶ θὰ περισσέψη 1. Αὐτὸ τὸ δεκάρικο ποὺ περισσεύει τὸ τρέπομε σὲ 10 δραχ. καὶ 2 ποὺ ἔχομε γίνονται 12. Ἂν μοιράσωμε τὶς 12 δραχ., θὰ πάρη τὸ κάθε παιδὶ ἀπὸ 3. Γράφομε τὶς πράξεις:

$$\begin{array}{l|l}
\text{1 ἑκ.} + \text{7 δεκ} + \text{2 μον.} & 4 \\ \hline
\text{ἢ} \quad 17 \text{ »} + 2 \text{ »} & \text{0 ἑκ.} + \text{4 δεκ.} + \\
\quad 1 \text{ »} + 2 \text{ »} = 12 & \text{3 μον.} = 43 \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

ἢ πιὸ σύντομα:

$$\begin{array}{r|l}
172 & 4 \\ \hline
12 & 43 \\
0 &
\end{array}$$

Μοιράζομε χωριστὰ τὶς ἑκατοντάδες, χωριστὰ τὶς δεκάδες καὶ χωριστὰ τὶς μονάδες.

Ἀρχίζομε τὴ διαίρεση ἀπὸ τὴν ἑκατοντάδα.

Διαίρεση τριψηφίου διὰ διψηφίου

Παράδειγμα 1. 12 κιλὰ ζάχαρη ἔχουν 168 δραχμές. Πόσο ἔχει τὸ 1 κιλό; Σκέψη. Ἀφοῦ τὰ 12 κιλὰ ἔχουν 168 δραχ., τὸ 1 θὰ ἔχῃ 12 φορὲς λιγότερο. Θὰ μοιράσωμε λοιπὸν τὸ 168 : 12· ἢ (1 ἑκατ. + 6 δεκ. + 8 μον.) : 12.

Τὸ 1 ἑκατοστάρικο δὲ φτάνει, γιὰ νὰ βάλωμε ἀπὸ 1 ἑκατοστάρικο σὲ κάθε κιλό· γι' αὐτὸ γράφομε 0 ἑκατοστ. στὸ πηλίκο. Τρέπομε τὸ 1 ἑκατοστ. σὲ 10 δεκάρικα· καὶ 6 δεκ. ποὺ ἔχομε γίνονται 16. Ἔτσι θὰ ἔχωμε νὰ μοιράσωμε : (16 δεκ. + 8 μ.) : 12. Μοιράζομε τὸ 16 : 12 καὶ βρίσκομε ὅτι ἀναλογεῖ 1 δεκάρικο γιὰ κάθε κιλὸ καὶ περισσεύουν 4 δεκ. Τὰ 4 δεκ. = 40 δραχμές· καὶ 8 γίνονται 48. Μοιράζομε τὸ 48 : 12 καὶ βρίσκομε 4.

Γράφομε τὶς πράξεις :

1 ἑκ. + 6 δεκ. + 8 μον.	12

ἢ

16 δεκ. + 8 μον.	12
4 » + 8 » = 48	0 ἑκ. + 1 δεκ. + 4 μον. = 14
0	

ἢ πιὸ σύντομα :

168	12
048	14
00	

Μοιράζομε χωριστὰ τὶς ἑκατοντάδες, χωριστὰ τὶς δεκάδες καὶ χωριστὰ τὶς μονάδες.

Λέμε : Τὸ 12 στὸ 1 δὲ χωράει· χωρίζομε καὶ τὸ ἑπόμενο ψηφίο 6 καὶ γίνεται 16. Τὸ 12 στὸ 16 χωράει 1 φορά. Γράφομε τὸ 1 στὴ θέση τοῦ πηλίκου κάτω ἀπὸ τὸ διαιρέτη λέγοντας· 1 × 12 = 12. Αὐτὸ τὸ ἀφαιροῦμε ἀπὸ τὸ 16 καὶ μένουν 4 δεκ. Γράφομε τὸ 4 ἀκριβῶς κάτω ἀπὸ τὸ 6. Ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσωμε 1 × 12 ὅλο μαζί, πολλαπλασιάζομε χωριστὰ τὶς 2 μονάδες του καὶ χωριστὰ τὴ 1 δεκάδα του. Δηλαδὴ 1 × 2 = 2. Τὸ ἀφαιροῦμε ἀπὸ τὶς 6 δεκάδες καὶ μένουν 4. Γράφομε τὸ 4 ἀκριβῶς κάτω ἀπὸ τὸ 6 καὶ συνεχίζομε : 1 × 1 = 1. Τὸ ἀφαιροῦμε ἀπὸ τὴ 1 ἑκατοντάδα τοῦ διαιρετέου καὶ μένει 0. Γράφομε τὸ 0 κάτω ἀπὸ τὸ 1 (καὶ μπροστὰ ἀπὸ τὸ 4). Κατεβάζομε καὶ τὸ 8 δίπλα στὸ 4 καὶ γίνεται 48. Τὸ 12 στὸ 48 χωράει 4 φορές. Γράφομε τὸ 4 στὸ πηλίκο μετὰ ἀπὸ τὸ 1 καὶ πολλαπλασιάζομε χωριστὰ τὶς μονάδες καὶ χωριστὰ τὴ δεκάδα τοῦ διαιρέτη, ὅπως κάναμε καὶ προηγουμένως· δηλαδὴ $4 \times 2 = 8$. Τὸ ἀφαιροῦμε ἀπὸ τὶς 8 μονάδες τοῦ 48 καὶ μένει 0. Τὸ γράφομε κάτω ἀπὸ τὸ 8 καὶ συνεχίζομε: $4 \times 1 = 4$. Τὸ ἀφαιροῦμε ἀπὸ τὶς 4 δεκάδες τοῦ 48 καὶ μένει 0. Τὸ γράφομε κάτω ἀπὸ τὸ 4. Ἔτσι βρήκαμε πηλίκο 14 καὶ ὑπόλοιπο 0. Ὥστε τὸ 1 κιλὸ ζάχαρη ἔχει 14 δραχμές.

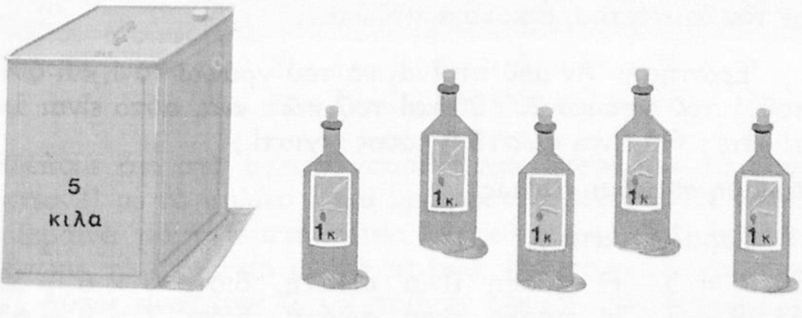
Ἡ διαίρεση αὐτὴ ποὺ δὲν ἀφήνει ὑπόλοιπο λέγεται τ ε λ ε ί α δ ι α ί ρ ε σ η.

Παράδειγμα 2. Νὰ βάλετε 195 καραμέλες ἐξ ἴσου σὲ 16 κουτιά. Πόσες θὰ βάλετε στὸ καθένα ;

Διαιροῦμε κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο :
$$\begin{array}{r|l} 1'9'5 & 16 \\ \cline{2-2} 035 & 12 \\ 3 & \end{array}$$

Σ η μ ε ί ω σ η. Ἡ διαίρεση αὐτὴ ποὺ ἀφήνει ὑπόλοιπο λέγεται ἀ τ ε λ ὴ ς δ ι α ί ρ ε σ η.

Διαίρεση διὰ τοῦ 1



Παραδείγματα. Μοιράζομε ἕνα δοχεῖο λάδι τῶν 5 κιλῶν σὲ φιάλες τοῦ ἑνὸς κιλοῦ. Πόσες φιάλες θὰ χρειαστοῦμε ;

Ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα, θὰ χρειαστοῦμε 5 φιάλες. Σημειώνω τὴν πράξη : $5 : 1 = 5$.

Ἂν τὸ λάδι εἶναι 30 κιλά, θὰ χρειαστοῦμε 30 φιάλες· δηλαδὴ $30 : 1 = 30$.

Μοιράζομε 100 κιλὰ ζάχαρη σὲ σακοῦλες τοῦ 1 κιλοῦ. Θὰ γεμίσωμε 100 σακοῦλες· δηλαδὴ $100 : 1 = 100$.

Ὥστε, ἂν διαιρέσωμε ἕναν ἀριθμὸ διὰ τοῦ 1, βρίσκομε πηλίκο τὸν ἴδιο τὸν ἀριθμό, δηλαδὴ τὸ διαιρετέο.

Μποροῦμε λοιπὸν νὰ βροῦμε ἀμέσως τὸ πηλίκο, χωρὶς νὰ κάνωμε τὴ διαίρεση.

Νὰ βρῆτε ἀμέσως ποιό εἶναι τὸ πηλίκο στὶς παρακάτω διαιρέσεις, χωρὶς νὰ τὶς ἐκτελέσετε :
$7 : 1 =$, $20 : 1 =$, $180 : 1 =$, $301 : 1 =$, $509 : 1 =$
$=$, $1.000 : 1 =$.

Ἐρώτηση. Ἀντὶ νὰ γράψω 25, μπορῶ νὰ γράψω $25 : 1$; Εἶναι τὸ ἴδιο ; γιατί ;

Διαιροῦμε ἀκεραίους μὲ τὸν ἑαυτό τους

Παραδείγματα. Τὸ 5 στὸ 5 χωράει 1 φορά· τὸ 10 στὸ 10 χωράει 1 φορά· τὸ 1 στὸ 1 χωράει 1 φορά· τὸ 150 στὸ 150 χωράει 1 φορά. Σημειώνομε τὶς πράξεις : $5 : 5 = 1$, $10 : 10 = 1$, $1 : 1 = 1$, $150 : 150 = 1$. Τί παρατηρεῖτε ;

Ὥστε, ἂν διαιρέσωμε ἕναν ἀριθμὸ (ἐκτὸς ἀπὸ τὸ μηδὲν) μὲ τὸν ἑαυτό του, βρίσκομε πηλίκο 1.

Ἐρώτηση. Ἂν μοῦ πῆ ἕνας νὰ τοῦ γράψω τὸ 1 καὶ ἀντὶ τοῦ 1 τοῦ γράψω $20 : 20$ καὶ τοῦ πῶ : «νά, αὐτὸ εἶναι 1», τί λέτε ; Θὰ εἶναι σωστὸ ἢ λάθος ; γιατί ;

Δοκιμὴ τῆς διαιρέσεως

Παραδείγματα :

$30 : 6 = 5$. Ἡ πράξη εἶναι σωστή, διότι $5 \times 6 = 30$.
$63 : 9 = 7$. Ἡ πράξη εἶναι σωστή, διότι $7 \times 9 = 63$.
$75 : 8$ δίνει πηλίκο 9 καὶ ὑπόλοιπο 3. Ἡ πράξη εἶναι σωστή, διότι $(9 \times 8) + 3 = 72 + 3 = 75$.

$150 : 30 = 5$. Ἡ πράξη εἶναι σωστή, διότι $5 \times 30 = 150$.

Μὲ τὸν τρόπο αὐτὸ βεβαιωθήκαμε ὅτι οἱ παραπάνω διαιρέσεις εἶναι σωστές.

Νὰ ἐκτελέσετε κι ἔπειτα νὰ ἐλέγξετε ἂν εἶναι σωστές οἱ διαιρέσεις: $18 : 3$, $40 : 10$, $80 : 9$, $150 : 25$, $127 : 15$.

Τί παρατηρεῖτε; Πῶς γίνεται ἡ δοκιμὴ τῆς διαιρέσεως;

Ἄλλα παραδείγματα:

Διαίρεση — Δοκιμὴ

$$\begin{array}{r|l} 28 & 7 \\ \cline{2-2} 0 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7 \\ \times\ 4 \\ \hline 28 \end{array}$$

Διαίρεση — Δοκιμὴ

$$\begin{array}{r|l} 165 & 12 \\ \cline{2-2} 045 & 13 \\ 09 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 12 & \\ \times\ 13 & \\ \hline 36 & \\ 12 & \\ \hline 156 & \\ +\ 9 & \text{ὑπόλοιπο} \\ \hline 165 & \end{array}$$

Κι ἐδῶ ἡ δοκιμὴ ἔγινε μὲ τὸν ἴδιο τρόπο.

Ὥστε, γιὰ νὰ κάνωμε τὴ δοκιμὴ τῆς διαιρέσεως, πολλαπλασιάζομε τὸ πηλίκο ἐπὶ τὸν διαιρέτη καὶ στὸ γινόμενο προσθέτομε τὸ ὑπόλοιπο, ἂν ὑπάρχη. Ἂν βροῦμε τὸ διαιρετέο, ἡ πράξη μας εἶναι σωστή.

Ἄλλος τρόπος.

Παραδείγματα: $21 : 3 = 7$, διότι $3 \times 7 = 21$

$21 : 7 = 3$, διότι $7 \times 3 = 21$

Βλέπομε ὅτι στὸ δεύτερο παράδειγμα διαιρέσαμε τὸ διαιρετέο 21 μὲ τὸ πηλίκο 7 καὶ βρήκαμε τὸ διαιρέτη 3. Αὐτὸ συμβαίνει πάντοτε στὴ τελεία διαίρεση. Δηλαδή, ἂν διαιρέσωμε τὸ διαιρετέο μὲ τὸ πηλίκο, βρίσκομε τὸ διαιρέτη.

Αὐτὸς εἶναι ἕνας ἄλλος τρόπος δοκιμῆς τῆς διαιρέσεως. Ἂν ἡ διαίρεση εἶναι ἀτελής, ἀφαιροῦμε πρῶτα τὸ ὑπόλοιπο ἀπὸ τὸ διαιρετέο καὶ αὐτὸ ποὺ μένει τὸ διαιροῦμε μὲ τὸ

πηλίκο. Ἂν βροῦμε τὸ διαιρέτη, ἡ πράξη εἶναι σωστή. Π.χ. 23 : 3 δίνει πηλίκο 7 καὶ ὑπόλοιπο 2.
Δοκιμή : 23 − 2 (ὑπόλοιπο) = 21. 21 : 7 (πηλίκο) = 3 (διαιρέτης).

Ἀσκήσεις

Νὰ ἐκτελέσετε τὶς παρακάτω διαιρέσεις καὶ νὰ κάμετε τὴ δοκιμή τους καὶ μὲ τοὺς δύο τρόπους.

124	2	150	3	108	5	187	9
146	8	153	4	129	11	138	12
106	14	105	21	102	25	167	23

Λογαριασμοὶ καταστημάτων

Ἕνας μικρέμπορος ἀγόρασε γιὰ τὸ μαγαζί του ἀπὸ ἕνα μεγάλο κατάστημα τὰ παρακάτω παιδικὰ παιγνίδια. Ὁ ταμίας τοῦ καταστήματος τοῦ ἔστειλε τὸν λογαριασμό :

32 τόπια	160	δρχ.	8 ἑλικόπτερα	184	δρχ.
15 σβοῦρες	195	»	43 στρατιωτάκια	129	»
18 καραβάκια	198	»	6 κοῦκλες μεγάλες	180	»
20 ἀεροπλανάκια	200	»	19 κοῦκλες μικτὲς	152	»
24 αὐτοκίνητα	192	»	28 σφυρίχτρες	168	»

Ξέχασε ὅμως νὰ γράψῃ πόσες δραχμὲς χρέωνε τὸ κάθε παιχνίδι. Μπορεῖτε νὰ τὸ βρῆτε σεῖς;

2. Ἕναν παρόμοιο λογαριασμὸ ἔλαβε τὸ ἑστιατόριο ἀπὸ τὸν κρεοπώλη του. Ἐδῶ ὁ κρεοπώλης σημείωσε τὴν τιμὴ τοῦ ἑνὸς κιλοῦ κρέατος καὶ τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν κιλῶν.

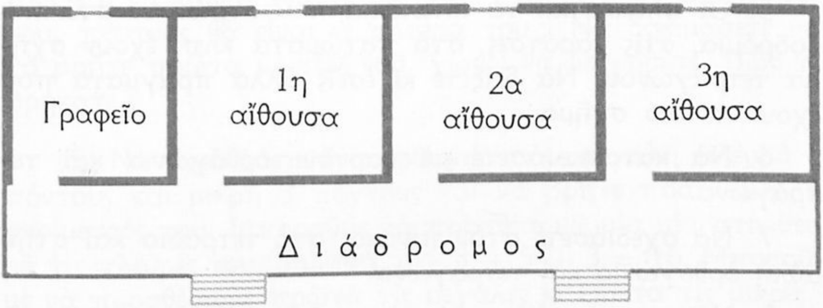
Ἀρνὶ γάλακτος	πρὸς	52	δρχ.	τὸ	κιλό.	Τὸ	ὅλο	156	δρχ.
Μοσχάρι γάλακτος	»	55	»	»	»	»	»	165	»
Κρέας πρόβειο	»	38	»	»	»	»	»	190	»
Χοιρινὸ	»	45	»	»	»	»	»	180	»
Κρέας κατεψυγμένο	»	28	»	»	»	»	»	196	»
Κοτόπουλα φρέσκα	»	36	»	»	»	»	»	144	»

Ὁ κρεοπώλης δὲν ἔγραψε πόσα κιλὰ κρέας ἔστειλε ἀπὸ κάθε εἶδος στὸ ἑστιατόριο. Νὰ τὸ βρῆτε σεῖς.

6. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

Τὸ σχέδιο τοῦ σχολείου

Παρατηρῆστε τὸ παρακάτω σχέδιο. Μᾶς δείχνει ἕνα σχολεῖο μὲ 3 αἴθουσες καὶ 1 γραφεῖο.



Μὲ τὶς παρακάτω ἐργασίες θὰ καταλάβετε γιατὶ λέμε ὅτι ὅλες οἱ αἴθουσες εἶναι ὀρθογώνιες καὶ ὅτι τὸ γραφεῖο εἶναι τετράγωνο. Μπροστὰ στὸ γραφεῖο καὶ στὶς αἴθουσες εἶναι ἕνας μακρὺς διάδρομος. Ἔχει καὶ αὐτός, ὅπως καὶ οἱ αἴθουσες, ὀρθογώνιο σχῆμα. Ἡ πρώτη αἴθουσα ἔχει 4 γωνίες. Εἶναι ὅλες ἴσες μεταξύ τους. Μπορεῖτε νὰ τὶς ἐλέγξετε, γιὰ νὰ βεβαιωθῆτε· εἶναι πολὺ εὔκολο. Διπλῶστε ἕνα χαρτάκι στὰ τέσσερα καὶ θὰ ἔχετε τὸ ὄργανο ποὺ χρειάζεστε. Ἐφαρμόστε τὸ διπλωμένο χαρτάκι καὶ στὶς 4 γωνίες καὶ θὰ δῆτε ὅτι εἶναι ἴσες· καμία δὲν εἶναι μικρότερη ἢ μεγαλύτερη. Τὸ ἴδιο θὰ δῆτε καὶ στὶς ἄλλες δύο αἴθουσες. Κι ἐκεῖ οἱ γωνίες εἶναι ὅλες ἴσες.

Τὸ ἴδιο θὰ παρατηρήσετε καὶ στὸ γραφεῖο. Καὶ οἱ 4 γωνίες τοῦ γραφείου εἶναι ἴσες.

Ἐργασίες

1. Μετρῆστε μὲ τὸ ὑποδεκάμετρό σας τὶς πλευρὲς τῆς πρώτης αἴθουσας.

2. Κάμετε τὸ ἴδιο καὶ μὲ τὶς ἄλλες αἴθουσες. Τί παρατηρεῖτε ;

3. Μετρῆστε τὶς πλευρὲς τοῦ γραφείου. Τί παρατηρεῖτε ; Σὲ τί διαφέρει τὸ **τετράγωνο** γραφεῖο ἀπὸ τὶς **ὀρθογώνιες** αἴθουσες ;

4. Ὁ πίνακας, ὁ χάρτης, τὸ φύλλο τοῦ τετραδίου, τὸ τραπέζι καί τὸ τζάμι ἔχουν σχῆμα ὀρθογωνίου. Νὰ δείξετε κι ἐσεῖς πράγματα ποὺ ἔχουν σχῆμα ὀρθογωνίου.

5. Οἱ πλάκες καὶ τὰ πλακάκια ποὺ στρώνουν στὰ πεζοδρόμια, στὶς ταράτσες, στὰ πατώματα κλπ. ἔχουν σχῆμα τετραγώνου. Νὰ δείξετε κι ἐσεῖς ἄλλα πράγματα ποὺ ἔχουν τέτοιο σχῆμα.

6. Νὰ κατασκευάσετε μὲ χαρτόνι ὀρθογώνια καὶ τετράγωνα.

7. Νὰ σχεδιάσετε στὸν πίνακα, στὸ τετράδιο καὶ στὴν αὐλὴ ὀρθογώνια καὶ τετράγωνα.

8. Νὰ κατασκευάσετε μὲ σύρμα ἕνα ὀρθογώνιο. Καὶ οἱ 4 συρματένιες πλευρὲς μαζὶ ποὺ κλείνουν γύρω γύρω τὸ ὀρθογώνιο ἀποτελοῦν τὴν περίμετρο τοῦ ὀρθογωνίου.

9. Νὰ τεντώσετε τώρα τὸ σύρμα· βλέπετε ὅτι οἱ 4 πλευρὲς τοῦ συρματένιου ὀρθογωνίου ἔγιναν ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα. Αὐτὸ ἔχει μῆκος τόσο, ὅσο ἔχουν καὶ οἱ 4 πλευ-

ρὲς τοῦ ὀρθογωνίου μαζί. Αὐτὸ εἶναι, ὅπως καταλαβαίνετε, τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου.

10. Νὰ κάμετε τὸ ἴδιο καὶ μ' ἕνα συρματένιο τετράγωνο. Καὶ αὐτὸ ἔχει περίμετρο. Κάνοντας τὴν ἐργασία αὐτὴ μὲ τὸ σύρμα, θὰ δῆτε μόνοι σας πόσες φορὲς ἡ περίμετρος εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ μιὰ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου.

Πῶς μπορεῖτε λοιπὸν νὰ βρίσκετε πόση εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ τετραγώνου, χωρὶς νὰ τὸ ἀνοίγετε ;

11. Νὰ σχεδιάσετε στὸ τετράδιό σας ἕνα τετράγωνο ποὺ νὰ ἔχη πλευρὰ 2 πόντους. Πόση θὰ εἶναι ἡ περίμετρός του ; Πῶς τὸ βρήκατε ;

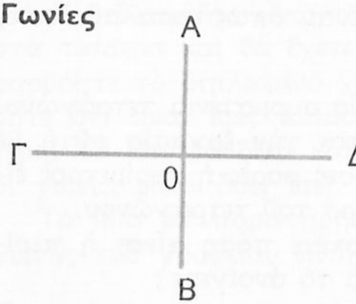
12. Νὰ σχεδιάσετε ἕνα τετράγωνο μὲ πλευρὰ 3 πόντους καὶ νὰ βρῆτε τὴν περίμετρό του. Ἐπίσης ἕνα ἄλλο μὲ πλευρὰ 5 πόντους καὶ νὰ βρῆτε τὴν περίμετρο.

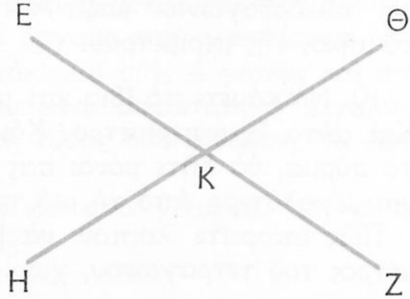
13. Νὰ βρῆτε ποιά εἶναι ἡ περίμετρος ἑνὸς τετραγώνου ποὺ ἔχει πλευρὰ 8 πόντους, 9, 7, 6, 10 πόντους.

14. Νὰ πάρετε ἕνα σύρμα ποὺ νὰ ἔχη μάκρος 20 πόντους καὶ νὰ κάμετε ἕνα τετράγωνο. Μπορεῖτε νὰ βρῆτε πόσους πόντους θὰ εἶναι ἡ πλευρά του ; Νὰ δοκιμάσετε νὰ τὸ βρῆτε πρῶτα μὲ τὸν νοῦ, χωρὶς νὰ μετρήσετε. Πῶς τὸ βρήκατε ;

15. Νὰ σχεδιάσετε ἕνα ὀρθογώνιο μὲ μεγάλη πλευρὰ 5 πόντους καὶ μικρὴ 3 πόντους καὶ νὰ βρῆτε πόση εἶναι ἡ περίμετρός του. Μποροῦμε νὰ προσθέσωμε μία μία στὴ σειρὰ τὶς πλευρές του, δηλαδὴ $5 + 3 + 5 + 3 = 16$. Μποροῦμε νὰ προσθέσωμε πρῶτα τὶς μεγάλες κι ἔπειτα τὶς μικρές : $5 + 5 + 3 + 3 = 16$. Ἐπειδὴ ὅμως οἱ δύο μεγάλες εἶναι ἴσες, ἀντὶ νὰ ποῦμε $5 + 5$, μποροῦμε νὰ ποῦμε 2×5. Καὶ γιὰ τὶς μικρὲς ἀντὶ $3 + 3$ λέμε 2×3. Ἔτσι θὰ ἔχωμε : $(2 \times 5) + (2 \times 3) = 16$. Ὑπάρχει καὶ ἄλλος τρόπος. Μπορεῖτε νὰ τὸν βρῆτε ; Παρατηρῆστε τὸ σχῆμα σας, γιὰ νὰ σᾶς βοηθήση.

Γωνίες





Στὸ πρῶτο σχῆμα βλέπομε δύο εὐθεῖες ποὺ τέμνονται καὶ σχηματίζουν 4 γωνίες ἴσες μεταξύ τους. Αὐτὲς λέγονται ὀρθὲς γωνίες.

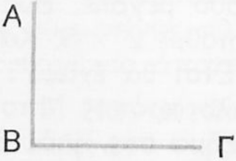
Στὸ δεύτερο σχῆμα βλέπομε πάλι δύο εὐθεῖες ποὺ τέμνονται, ἀλλὰ δὲν σχηματίζουν καὶ τὶς 4 γωνίες ἴσες. Καμία ἀπὸ αὐτὲς δὲν εἶναι ὀρθὴ γωνία.

Τὰ παρακάτω σχήματα δείχνουν ὀρθὲς γωνίες χωριστὰ τὴ μία ἀπὸ τὴν ἄλλη.

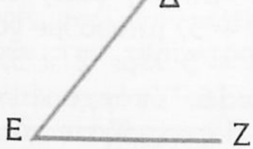
Ὀρθὲς γωνίες βλέπομε στὰ παράθυρα, στὸν πίνακα, στὸ τραπέζι, στὸ τετράδιο κλπ.

Εἴδη γωνιῶν

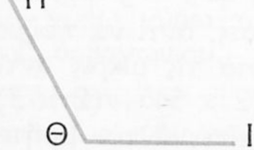
Τὰ ἑπόμενα σχήματα δείχνουν: 1) μιὰ ὀρθὴ γωνία, 2) μιὰ μικρότερη ἀπὸ τὴν ὀρθὴ ποὺ λέγεται ὀξεία γωνία, 3) μιὰ μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ὀρθὴ ποὺ λέγεται ἀμβλεία γωνία.



ὀρθὴ γωνία



ὀξεία γωνία



ἀμβλεία γωνία

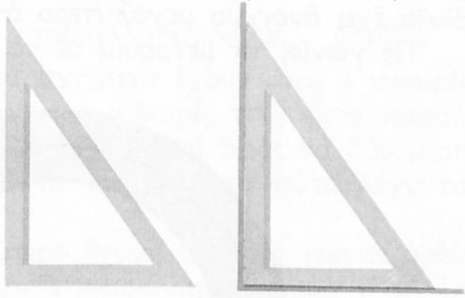
Οἱ ἡμιευθεῖες ποὺ σχηματίζουν μιὰ γωνία λέγονται πλευρὲς τῆς γωνίας.

Τὸ σημεῖο ποὺ συναντιοῦνται οἱ δύο πλευρὲς λέγεται κορυφὴ τῆς γωνίας.

Τὶς γωνίες τὶς ὀνομάζομε μὲ τρία γράμματα. Τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς τὸ διαβάζομε στὸ μέσο.

Π.χ. γων. ΑΒΓ ἢ ΓΒΑ, γων. ΔΕΖ ἢ ΖΕΔ, γων. ΗΘΙ ἢ ΙΘΗ.

Γιὰ νὰ σχηματίσωμε ὀρθὲς γωνίες, μεταχειριζόμαστε τὸ γνώμονα. Εἶναι ἕνα ὄργανο (ξύλινο ἢ μεταλλικὸ ἢ πλαστικὸ) ποὺ οἱ δύο του πλευρὲς σχηματίζουν ὀρθὴ γωνία.



Γνώμων

Τὸν μεταχειριζόμαστε ἐπίσης, γιὰ νὰ βεβαιωθοῦμε ἂν μιὰ γωνία εἶναι ὀρθὴ ἢ ὄχι. Τὸν τοποθετοῦμε, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα.

Ὅπως εἴπαμε, πρόχειρο γνώμονα μπορεῖτε νὰ κάμετε διπλώνοντας ἕνα χαρτάκι στὰ τέσσερα.

Ἐργασίες

1. Νὰ κατασκευάσετε μὲ σύρμα μιὰ ὀρθὴ γωνία. Νὰ πιέσετε τὶς πλευρές της ἔτσι, ὥστε ἡ γωνία νὰ γίνη ὀξεία. Ἔπειτα νὰ τὶς ἀνοίξετε, ὥστε νὰ γίνη ἀμβλεία γωνία.

2. Νὰ κόψετε ἀπὸ χαρτόνι γωνίες καὶ τῶν τριῶν εἰδῶν καὶ νὰ κάμετε συγκρίσεις, τοποθετώντας τὴ μία πάνω στὴν ἄλλη.

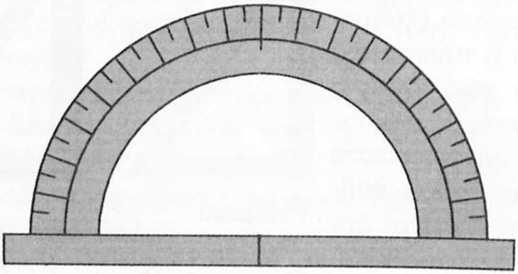
3. Νὰ ὀνομάσετε τὰ εἴδη τῶν παρακάτω γωνιῶν.

Μέτρηση γωνιῶν

Κάθε ὀρθὴ γωνία συμφωνοῦμε ὅτι χωρίζεται σὲ 90 ἴσα μέρη, δηλαδὴ σὲ 90 μικρὲς ἴσες γωνίες. Κάθε μία ἀπὸ αὐτὲς τὶς γωνίες λέμε ὅτι ἔχει ἄνοιγμα μιὰ μοίρα.

Ὥστε ἡ ὀρθὴ γωνία ἔχει ἄνοιγμα 90 μοιρῶν. Ἡ ὀξεία γωνία ἔχει ἄνοιγμα μικρότερο ἀπὸ 90 μοῖρες, ἐνῶ ἡ ἀμβλεῖα ἔχει ἄνοιγμα μεγαλύτερο ἀπὸ 90 μοῖρες.

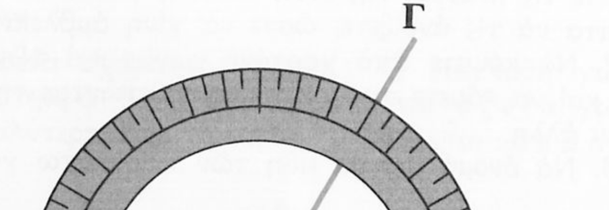
Τὶς γωνίες τὶς μετροῦμε μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο.



Σχ. 1

Μοιρογνωμόνιο

Εἶναι ἕνα ὄργανο ποὺ μᾶς δείχνει πόσες μοῖρες εἶναι ἡ γωνία ποὺ μετροῦμε (σχ. 1). Τὸ τοποθετοῦμε ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 2.



Σχ. 2

Παραλληλόγραμμα

τετράγωνο   ὀρθογώνιο   πλάγιο παραλληλόγραμμο   ρόμβος

Τὰ παραπάνω κλειστα σχήματα ἔχουν ἀπὸ 4 πλευρές· εἶναι τετράπλευρα. Οἱ ἀπέναντι πλευρές τους εἶναι παράλληλες (ὅσο καὶ ἂν τὶς προεκτείνωμε καὶ πρὸς τὰ δύο μέρη, δὲν συναντιοῦνται). Γι' αὐτὸ τὰ σχήματα αὐτὰ λέγονται παραλληλόγραμμα.

Τὸ πρῶτο καὶ τὸ δεύτερο ἔχουν ὅλες τὶς γωνίες ὀρθές· γι' αὐτὸ τὰ λέμε ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα ἢ μ' ἕνα ὄνομα: ὀ ρ θ ο γ ώ ν ι α.

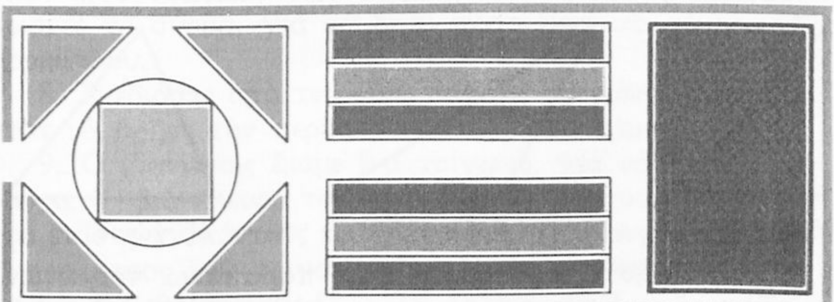
Τὸ πρῶτο ἔχει ἐπὶ πλέον καὶ ὅλες τὶς πλευρὲς ἴσες· γι' αὐτὸ τὸ λέμε καὶ τ ε τ ρ ά γ ω ν ο.

Τὸ τρίτο καὶ τὸ τέταρτο δὲν ἔχουν καμία γωνία ὀρθὴ καὶ τὰ λέμε π λ ά γ ι α π α ρ α λ λ η λ ό γ ρ α μ μ α.

Τὸ τέταρτο σχῆμα ἔχει ὅλες τὶς πευρὲς ἴσες καὶ λέγεται καὶ ρ ό μ β ο ς.

Κάθε παραλληλόγραμμο ποὺ ἔχει ὅλες τὶς πλευρές ἴσες λέγεται ρόμβος. Ἑπομένως καὶ τὸ τετράγωνο εἶναι ρόμβος.

Ὁ σχολικὸς κῆπος



Τὸ παραπάνω σχέδιο δείχνει ἕνα σχολικὸ κῆπο. Ὅλος ὁ κῆπος τί σχῆμα ἔχει ;

Μπροστὰ εἶναι ὁ ἀνθόκηπος. Τὰ παιδιὰ ἔχουν κάμει μὲ πρασινάδα διάφορα σχέδια στὸν ἀνθόκηπο. Στὴ μέση βλέπομε ἕναν κύκλο. Μέσα στὸν κύκλο εἶναι ἕνα τετράγωνο. Γύρω ἀπὸ τὸν κύκλο εἶναι 4 τρίγωνα. Μετὰ ἀπὸ τὸν ἀνθόκηπο εἶναι οἱ βραγιὲς τοῦ λαχανόκηπου. Αὐτὲς εἶναι ὅλες ὀρθογώνιες. Στὸ βάθος εἶναι ὁ δενδρόκηπος. Καὶ αὐτὸς εἶναι ἕνα μεγάλο ὀρθογώνιο.

Ποιά σχήματα βλέπομε στὸ σχολικὸ κῆπο, ποὺ δὲν τὰ βλέπομε στὸ σχέδιο τοῦ σχολείου ;

Εἴδη τριγώνων

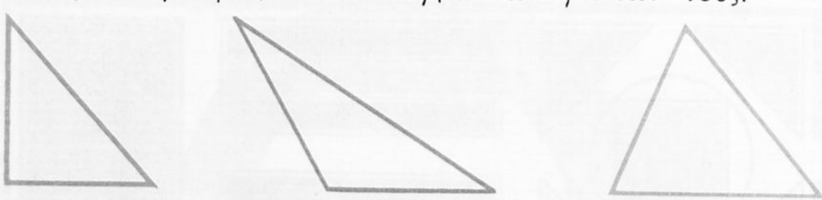
1) Μὲ γνώρισμα τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν τους.

ἰσόπλευρο ἰσοσκελὲς σκαληνὸ

Παρατηρῆστε τὶς πλευρὲς τῶν παραπάνω τριγώνων.

Τὸ πρῶτο ἔχει καὶ τὶς τρεῖς πλευρὲς ἴσες καὶ λέγεται ἰ σ ό π λ ε υ ρ ο τρίγωνο. Τὸ δεύτερο ἔχει τὶς δύο πλευρὲς ἴσες καὶ λέγεται ἰ σ ο σ κ ε λ ὲ ς τρίγωνο. Τὸ τρίτο ἔχει ὅλες τὶς πλευρές του ἄνισες καὶ λέγεται σ κ α λ η ν ὸ τρίγωνο.

2) Μὲ γνώρισμα τὸ ἄνοιγμα τῶν γωνιῶν τους.



ὀρθογώνιο ἀμβλυγώνιο ὀξυγώνιο

Παρατηρῆστε τὶς γωνίες τῶν παραπάνω τριγώνων.

Τὸ πρῶτο ἔχει μιὰ ὀρθὴ γωνία καὶ λέγεται ὀ ρ θ ο γ ώ-ν ι ο τρίγωνο. Τὸ δεύτερο ἔχει μιὰ ἀμβλεία γωνία καὶ λέγεται ἀ μ β λ υ γ ώ ν ι ο. Τὸ τρίτο ἔχει καὶ τὶς τρεῖς γωνίες ὀξεῖες καὶ λέγεται ὀ ξ υ γ ώ ν ι ο.

Ἐργασίες

1. Ἡ δραχμή, τὸ δίδραχμο καὶ τ' ἄλλα μεταλλικὰ νομίσματα ἔχουν σχῆμα κύκλου. Ἴδιο σχῆμα ἔχουν καὶ τὰ κουμπιά, οἱ ρόδες κλπ. Νὰ δείξετε κι ἐσεῖς ἀντικείμενα κυκλικά.

2. Νὰ κάμετε κύκλους ἀπὸ χαρτόνι. Νὰ σχεδιάσετε κύκλους στὸ τετράδιο, στὸν πίνακα ἢ στὴν αὐλὴ μὲ τὸ διαβήτη σας ἢ μὲ τὴ βοήθεια κυκλικῶν ἀντικειμένων.

3. Νὰ κάμετε κύκλους μὲ κλωστὴ πάνω στὸ θρανίο σας ἢ στὸ τραπέζι σας.

Ἡ γραμμὴ ποὺ κλείνει γύρω γύρω τὸν κύκλο λέγεται π ε ρ ι φ έ ρ ε ι α. Νὰ κάμετε μὲ σύρμα ἕναν κύκλο. Νὰ τεντώσετε ἔπειτα τὸ σύρμα, γιὰ νὰ δῆτε πόσο εἶναι τὸ μάκρος τῆς περιφέρειας.

4. Νὰ κάμετε τρίγωνα ἀπὸ χαρτόνι κόβοντας τὸ χαρτόνι μὲ ψαλίδι ἀκριβῶς ἐπάνω στὶς πλευρὲς τῶν τριγώνων.

5. Νὰ σχεδιάσετε στὸ τετράδιο, στὸν πίνακα ἢ στὴν αὐλὴ διάφορα τρίγωνα.

6. Νὰ δείξετε ἀντικείμενα ποὺ νὰ ἔχουν σχῆμα τριγώνου· νὰ εἶναι, ὅπως λέμε, τριγωνικά.

7. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα τρίγωνο μὲ σύρμα. Καὶ οἱ τρεῖς πλευρές του μαζὶ κάνουν τὴν περίμετρό του. Νὰ τεντώσετε τὸ σύρμα, γιὰ νὰ δῆτε πόσο εἶναι τὸ μάκρος τῆς περιμέτρου.

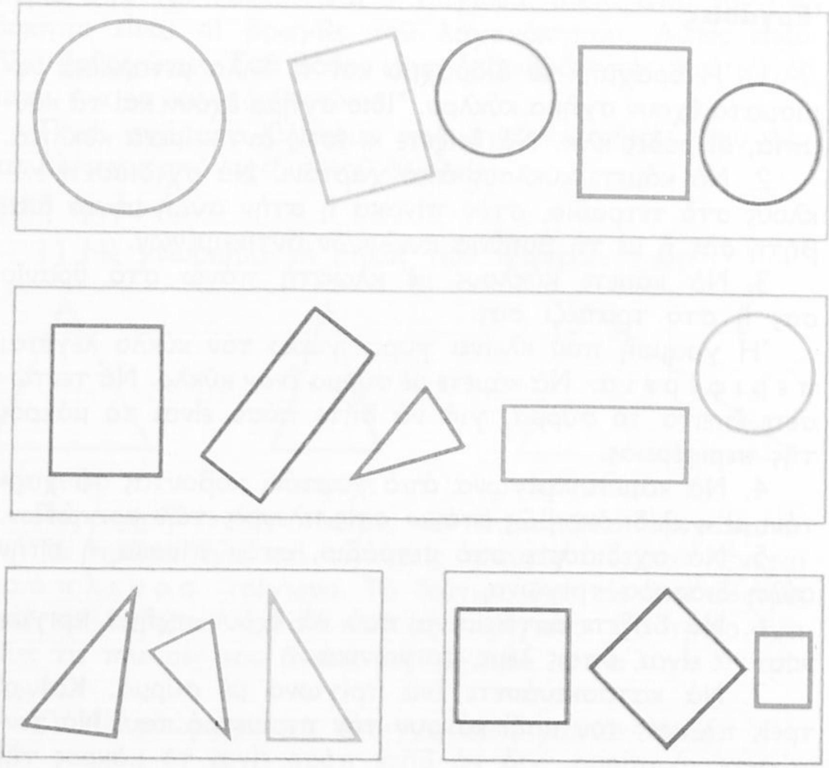
8. Σχεδιάστε στὸ τετράδιό σας ἕνα τρίγωνο. Πῶς μπορεῖτε νὰ βρῆτε τὴν περίμετρό του ; Τί θὰ κάμετε ;

9. Ὁ Γιαννάκης ἔκαμε ἕνα τρίγωνο, γιὰ νὰ πῆ τὰ κάλαντα. Ἡ μιὰ πλευρά του ἔχει μῆκος 15 πόντους, ἡ δεύτερη ἔχει ἐπίσης 15 πόντους καὶ ἡ τρίτη 12 πόντους. Πόση εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ποὺ ἔκαμε ὁ Γιαννάκης ;

Εὔκολα βρίσκομε : $15 + 15 + 12 = 42$.

Συγκρίσεις

Νὰ πῆτε πῶς λέγονται τὰ παρακάτω σχήματα καὶ νὰ βρῆτε ποιά ἀπὸ αὐτὰ εἶναι ἴσα μεταξύ τους.



Προβλήματα

1. Νὰ σχεδιάση ὁ καθένας σας στὸν πίνακα ἢ στὴν αὐλὴ δύο πλευρὲς τριγώνου. Ἡ μιὰ νὰ ἔχη μῆκος 27 πόντους καὶ ἡ ἄλλη 35. Τὴν τρίτη πλευρὰ νὰ τὴ μετρήσετε μόνοι σας μὲ τὴ μετροταινία. Μετὰ νὰ βρῆτε τὴν περίμετρο τοῦ τριγώνου.

2. Νὰ μετρήσετε τὶς πλευρὲς καὶ νὰ βρῆτε τὴν περίμετρο ἑνὸς φύλλου ἀπὸ τὸ τετράδιό σας σ᾿ ἑκατοστόμ. (πόντους). Νὰ βρῆτε καὶ τὴν περίμετρο ἑνὸς πλακακιοῦ ἢ ἑνὸς τζαμιοῦ σ᾿ ἑκατοστόμετρα.

3. Νὰ σχηματίσετε 3 τετράγωνα στὸ τετράδιό σας καὶ νὰ βρῆτε τὴν περίμετρό τους σ᾿ ἑκατοστόμετρα.

4. Νὰ βρῆς τὴν περίμετρο τετραγωνικῶν ἀντικειμένων ποὺ βλέπεις γύρω σου.

5. Ἡ περίμετρος μιᾶς τετραγωνικῆς πλατείας εἶναι 180 μέτρα. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ κάθε πλευρά της ;

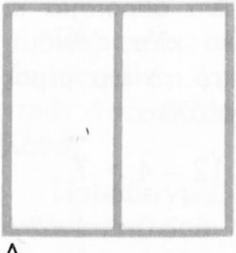
6. Ἕνα ὀρθογώνιο οἰκόπεδο ἔχει μῆκος 24 μέτρα καὶ πλάτος 15. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του ;

7. Νὰ μετρήσετε κυκλικὰ ἀντικείμενα (πιάτα, γλάστρες κλπ.) καὶ νὰ βρῆτε τὴν περιφέρειά τους. Χρησιμοποιῆστε κλωστή, γιὰ νὰ πάρετε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τους ἢ καλύτερα τὴ χάρτινη μετροταινία σας.

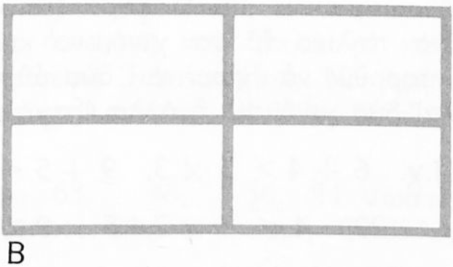
8. Τὸ σχῆμα Α εἶναι ἕνα τετράγωνο χωρισμένο σὲ 2 ἴσα μέρη. Πῶς ἀλλιῶς μπορεῖτε νὰ τὸ χωρίσετε σὲ δύο ἴσα μέρη ;

Τὸ σχῆμα Β εἶναι ὀρθογώνιο χωρισμένο σὲ 4 ἴσα μέρη. Πῶς ἀλλιῶς μπορεῖτε νὰ τὸ χωρίσετε σὲ 4 ἴσα μέρη ;

Νὰ τὸ σχεδιάσετε στὸ τετράδιό σας.



Α



Β

7. ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

Ἀνισότητες

Παράδειγμα. Ὁ 5 εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν 4. Γράφομε : $5 > 4$. Ἀπαγγέλλομε : ὁ 5 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 4. Ἐδῶ συγκρίνομε δύο ἀκεραίους καὶ βρίσκομε ὅτι δὲν εἶναι ἴσοι· εἶναι ἄνισοι· ὁ ἕνας εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἄλλον. Ἔχομε μιὰ ἀνισότητα. Τὸ σύμβολο τῆς ἀνισότητας εἶναι $>$ καὶ διαβάζεται «εἶναι μεγαλύτερο». Δηλαδὴ αὐτὸ τὸ σύμβολο εἶναι μιὰ μικρὴ γωνία. Μέσα στὴ γωνία γράφομε τὸν μεγαλύτερο ἀριθμὸ κι ἔξω ἀπὸ τὴ γωνία, κοντὰ στὴν κορυφή, γράφομε τὸν μικρότερο.

Τὴν παραπάνω ἀνισότητα μποροῦμε νὰ τὴ γράψωμε κι ἔτσι : $4 < 5$. Ἀπαγγέλλομε: ὁ 4 εἶναι μικρότερος τοῦ 5. Ὁ 4 ποὺ εἶναι μικρότερος εἶναι γραμμένος πάλι ἔξω ἀπὸ τὴ γωνία, κοντὰ στὴν κορυφή, καὶ ὁ 5 ποὺ εἶναι μεγαλύτερος εἶναι γραμμένος πάλι μέσα στὴ γωνία. Τώρα ὅμως τὸ σύμβολο τῆς ἀνισότητας βλέπει δεξιὰ $<$ καὶ διαβάζεται «εἶναι μικρότερο».

Πρόσεχε πάντοτε ποῦ βλέπει τὸ σημεῖο τῆς ἀνισότητας.

Ἀνισότητες σχηματίζομε ὄχι μόνο μὲ ἀριθμοὺς ἀλλὰ καὶ μὲ ἀθροίσματα· π.χ. $5 + 3 > 4 + 2$. Ἀπαγγέλλομε : $5 + 3$ εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ $4 + 2$. Γιὰ νὰ βεβαιωθοῦμε, ἐκτελοῦμε τὶς προσθέσεις :
Τὸ πρῶτο ἄθροισμα $5 + 3 = 8$· τὸ δεύτερο $4 + 2 = 6$.

Μποροῦμε στὶς ἀνισότητες νὰ ἔχωμε καὶ διαφορὲς καὶ γινόμενα καὶ πηλίκα ἢ ἕνα ἄθροισμα κι ἕνα γινόμενο ἢ ἕνα ἄθροισμα καὶ μιὰ διαφορὰ (ὑπόλοιπο) ἢ ἕνα ἄθροισμα κι ἕνα πηλίκο ἢ ἕνα γινόμενο κι ἕνα πηλίκο κλπ. Ἀκόμη μποροῦμε νὰ ἔχωμε καὶ δύο ἀθροίσματα ἀπὸ τὸ ἕνα μέρος καὶ δύο γινόμενα ἢ ἄλλα ἐξαγόμενα ἀπὸ τὸ ἄλλο.

Π.χ. $6 + 4 > 3 \times 3$, $9 + 5 < 3 \times 6$, $12 - 4 > 7$

$20 : 4 < 2 \times 7$, $5 \times 9 > 60 - 20$, $6 \times 0 < 4 : 2$

Πῶς θὰ ἐλέγξετε ἂν οἱ παραπάνω ἀνισότητες εἶναι σωστές ;

Ποῦ εἶναι τὰ λάθη ;

Παρακάτω εἶναι γραμμένες μερικὲς ἀνισότητες. Ἄλλες εἶναι σωστὲς καὶ ἄλλες λάθος. Νὰ τὶς ἐλέγξετε προσεκτικὰ καὶ νὰ γράψετε δίπλα στὶς σωστὲς τὸ γράμμα Σ καὶ δίπλα σ' αὐτὲς ποὺ εἶναι λάθος τὸ γράμμα Λ.

$7 + 8 < 20$ $\quad$ $50 : 2 > 30 - 10$
$4 \times 6 > 15 + 9$ $\quad$ $93 : 3 < 4 \times 9$
$3 \times 10 < 5 \times 8$ $\quad$ $37 + 18 < 4 \times 12$

$$75 - 16 > 70 - 11$$
$$10 + 8 < 15 + 8$$
$$(3 \times 4) + 6 > (30 : 2) - 2$$

Ἀριθμητικὰ σταυρόλεξα μὲ διψήφιους ἀριθμοὺς

60			140
80		60	140
		50	140
140	140	140	

		50	180
60	80		180
50			180
180	180	180	

20		75	160
			160
65		0	160
160	160	160	

Κάμετε καὶ μόνοι σας τέτοια σταυρόλεξα.

Ποιά εἶναι ἡ σωστὴ ἀπάντηση ;

Παρακάτω εἶναι μερικὲς ἀσκήσεις καὶ δίπλα σὲ κάθε ἄσκηση εἶναι γραμμένες στὴ σειρὰ 3 ἀπαντήσεις. Νὰ βρῆτε ποιές ἀπὸ τὶς ἀπαντήσεις εἶναι οἱ σωστές. Οἱ ἄλλες θὰ εἶναι λάθος.

Παράδειγμα. $7 \times 8 =$ 63, 48, <u>56.</u> Ἡ σωστὴ ἀπάντηση εἶναι 56. Τὴ σημειώνω μὲ μιὰ γραμμή. Οἱ ἄλλες δύο εἶναι λάθος.

Νὰ σημειώσετε τὶς σωστὲς ἀπαντήσεις στὶς παρακάτω ἀσκήσεις :

1.	$80 + 70 + 30 =$	108	180	200
	$68 + 59 + 7 + 36 =$	170	168	113
	$142 + 28 + 15 =$	158	185	175

2.	193 – 107 =	96	105	86
	106 – 89 =	117	17	28
	174 – 118 =	68	56	57

3.	8 × 12 =	86	96	72
	5 × 8 × 3 =	40	43	120
	14 × 13 =	143	182	172
	1 × 150 =	151	160	150

4.	80 : 10 =	70	8	10
	156 : 12 =	13	15	12
	195 : 15 =	17	13	20

Ἕνα παλιὸ τετράδιο

Ἔχω ἕνα πολὺ παλιὸ τετράδιο ἀριθμητικῆς. Μερικοὶ ἀριθμοὶ καὶ σημεῖα εἶναι σβησμένα καὶ δὲ διακρίνονται. Σᾶς γράφω ἐδῶ μερικὲς ἀσκήσεις ἀπὸ τὸ τετράδιο αὐτό. Ὅπου εἶναι σβησμένοι οἱ ἀριθμοί, γράφω ἕνα ἐρωτηματικό. Μπορεῖτε νὰ βρῆτε ποιοί ἀριθμοὶ λείπουν ;

1.	13;	1;6	53	36	108	67
	;8	3;	;	;;	92	45
	+ 51	+ 45	+ 132	+ 87	+ ;	+ 19
	199	;98	1;1	172	200	;;;

2.	164	170	15;	20	31	23
	– ;0;	– 13;	– 109	× 8	× ;	× 8
	056	;;4	;;2	16;	186	1;;

3. Στὶς παρακάτω ἀσκήσεις λείπουν τὰ σημεῖα τῶν πράξεων. Μπορεῖτε νὰ τὰ βάλετε ;

80 60 20 = 120, 90 40 100 = 150

50 108 36 = 194, 5 12 = 60

Μαντέματα

1. Ἂν ἀρχίσης νὰ κατεβαίνης ἀνὰ 11 ἀπὸ τὸ 60 πρὸς τὰ κάτω, σὲ ποιόν ἀριθμὸ θὰ φτάσης ποὺ δὲ θὰ μπορῆς νὰ κατεβῆς πιὸ κάτω ;

2. Διαιρῶ ἕναν ἀριθμὸ διὰ 4 καὶ βρίσκω 30. Ποιός εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός ;

3. Ποιό εἶναι μεγαλύτερο ; τὸ μισὸ τοῦ 200 καὶ 50 ἀκόμη ἢ τὸ τετραπλάσιο τοῦ 40 ;

4. Ἔχω ἕναν ἀριθμὸ στὸν νοῦ μου. Ἂν τοῦ προσθέσω 40, γίνεται 130. Ποιός εἶναι ὁ ἀριθμός ;

5. Ἔχω ἕναν ἄλλο ἀριθμό. Ἂν τοῦ προσθέσω 20 καὶ τοῦ ἀφαιρέσω 50, γίνεται 70. Ποιός εἶναι ;

6. Ρώτησαν ἕνα βοσκὸ πόσα πρόβατα ἔχει κι ἐκεῖνος ἀπάντησε : Ἂν εἶχα ὅσα ἔχω καὶ 60 ἀκόμη, θὰ εἶχα 100. Πόσα πρόβατα εἶχε ;

Προβλήματα καὶ τῶν τεσσάρων πράξεων

1. Ἕνας γεωργὸς ἔχει δύο ἐλαιῶνες. Στὸν ἕνα εἶναι 86 ἐλαιόδεντρα καὶ στὸν ἄλλο 109. Πόσα ἐλαιόδεντρα ἔχει ὁ γεωργός;

2. Ὁ ἴδιος ἔχει ἕνα περιβόλι μὲ 70 πορτοκαλιές, 28 μανταρινιὲς καὶ 89 λεμονιές. Πόσα δέντρα ἔχει τὸ περιβόλι ;

3. Ὁ ἴδιος ἔχει κι ἕνα χωράφι ὀρθογώνιο μὲ μῆκος 60 μέτρα καὶ πλάτος 32 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ χωραφιοῦ ;

4. Ἕνας ἀμπελουργὸς ἔχει δύο ἀμπέλια. Τὸ ἕνα εἶναι ὀρθογώνιο μὲ μῆκος 70 μέτρα καὶ πλάτος 26 καὶ τὸ ἄλλο εἶναι τετράγωνο μὲ πλευρὰ 50 μέτρα. Ποιό ἀμπέλι ἔχει μεγαλύτερη περίμετρο καὶ πόσο ;

5. Ἡ κυρία Ἑλένη πῆγε στὴν ἀγορὰ μὲ 2 ἑκατοστάρικα. Ὅταν γύρισε εἶχε 37 δραχμές. Πόσες δραχμὲς ξόδεψε ;

6. Ὁ ὀπωροπώλης εἶχε 150 κιλὰ σταφύλια, 105 κιλὰ μῆλα, 57 κιλὰ ἀχλάδια καὶ 120 κιλὰ πορτοκάλια. Τὸ ἀπόγευμα εἶδε ὅτι τοῦ ἔμειναν 68 κιλὰ σταφύλια, 49 κιλὰ μῆλα,

38 κιλὰ ἀχλάδια καὶ 72 κιλὰ πορτοκάλια. Πόσα κιλὰ πούλησε ἀπὸ κάθε εἶδος ;

7. Ἕνας ἔμπορος πούλησε μὲ ζημία ἕνα κομμάτι ὕφασμα καὶ πῆρε 155 δραχμές. Ζημιώθηκε 45 δραχμές. Πόσο εἶχε ἀγοράσει τὸ ὕφασμα ;

8. Στὴν κατασκήνωση εἶναι 70 κορίτσια καὶ 80 ἀγόρια. Πῆγαν ὅλα ἐκδρομὴ στὴν ἀκρογιαλιά. Ἐκεῖ ἄλλα ἔπαιζαν στὴν ἄμμο καὶ ἄλλα κολυμποῦσαν. Στὴν ἄμμο ἔπαιζαν 28 κορίτσια καὶ στὴ θάλασσα κολυμποῦσαν 35 ἀγόρια. Πόσα παιδιὰ ἔπαιζαν στὴν ἄμμο καὶ πόσα κολυμποῦσαν ;

9. Ἡ βιβλιοθήκη τοῦ σχολείου ἔχει 137 βιβλία. Πόσα θέλει ἀκόμη, γιὰ νὰ γίνουν 200 ;

10. Ἀπὸ 4 κιλὰ ἐλιὲς βγάζουν 1 κιλὸ λάδι. Πόσο λάδι θὰ βγάλουν ἀπὸ 180 κιλὰ ἐλιές ;

11. Πόσες ἑβδομάδες κάνουν 196 μέρες ;

12. Πόσα ἡμερονύκτια κάνουν 184 ὧρες ;

13. Ἕνα λεωφορεῖο μεταφέρει ἐπιβάτες ἀπὸ τὴν πρωτεύουσα τοῦ νομοῦ σ' ἕνα κοντινὸ χωριό. Τὸ εἰσιτήριο ἔχει 3 δραχμές. Τὸ λεωφορεῖο ἔκαμε τρία δρομολόγια. Στὸ πρῶτο εἶχε 27 ἐπιβάτες, στὸ δεύτερο 18 καὶ στὸ τρίτο 21 ἐπιβάτες. Πόσα χρήματα συγκεντρώθηκαν καὶ ἀπὸ τὰ τρία δρομολόγια ;

14. Πόσο εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ 200 ; τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ 200 ;

15. Ποιό εἶναι μεγαλύτερο ; τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ 189 ἢ τὸ διπλάσιο τοῦ 45 καὶ πόσο ;

16. Πενταπλασίασε τὸν ἀριθμὸ 37. Ἑξαπλασίασε τοὺς ἀριθμοὺς 28, 17, 19. Ἑφταπλασίασε τοὺς ἀριθμοὺς 24, 18, 16. Ὀχταπλασίασε τοὺς ἀριθμοὺς 20, 22, 19.

Γ. ΟΙ ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΠΟ ΤΟ 200 ΩΣ ΤΟ 1.000

Ι. ΑΙΣΘΗΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΓΡΑΦΗ

Οἱ ἀκέραιοι ἀπὸ τὸ 200 ὡς τὸ 300

Χρησιμοποιῆστε μετροταινίες, ξυλάκια, μάρκες, ἀριθμητήρια, ὄσπρια, ἑκατοντάδες κύκλων, τὴ χιλιάδα τῶν κύκλων, νομίσματα πραγματικὰ ἢ εἰκονικὰ κλπ., γιὰ νὰ λύσετε τὶς παρακάτω ἀσκήσεις:

1. Ν' ἀνεβῆτε ἀπὸ τὸ 100 ὡς τὸ 300 ἀνὰ 10 κι ἔπειτα νὰ κατεβῆτε· δηλαδὴ 210, 220, 230, 240, 250, 260, 270, 280, 290, 300· καὶ ἀντίθετα 300, 290, 280 κλπ.

2. Νὰ γράψετε τοὺς ἀκεραίους αὐτοὺς καὶ νὰ πῆτε πόσες ἑκατοντάδες, δεκάδες καὶ μονάδες ἔχει ὁ καθένας.

3. Νὰ τρέψετε τὶς ἑκατοντάδες σὲ δεκάδες καὶ νὰ βρῆτε πόσες δεκάδες συνολικὰ ἔχει ὁ καθένας ἀπὸ τοὺς παραπάνω ἀκεραίους.

4. Ν' ἀνεβῆτε καὶ νὰ κατεβῆτε ἀνὰ 5· δηλαδὴ 205, 210, 215 κλπ. καὶ 300, 295, 290, 285 κλπ.

5. Νὰ γράψετε τοὺς ἀκεραίους αὐτοὺς καὶ νὰ πῆτε πόσες ἑκατοντάδες, δεκάδες καὶ μονάδες ἔχει ὁ καθένας.

6. Νὰ τρέψετε τὶς ἑκατοντάδες σὲ δεκάδες καὶ νὰ βρῆτε πόσες δεκάδες καὶ πόσες μονάδες ἔχει κάθε ἀκέραιος.

7. Νὰ πῆτε τοὺς ζυγοὺς ἀκεραίους ἀπὸ τὸ 200 ὡς τὸ 300, καὶ ἀντίθετα ἀπὸ τὸ 300 ὡς τὸ 200, δηλαδὴ 300, 298, 296 κλπ. Νὰ γράψετε τὶς δύο αὐτὲς σειρὲς (ἀκολουθίες).

8. Νὰ πῆτε τοὺς μονοὺς ἀκεραίους ἀπὸ τὸ 200 ὡς τὸ 300, δηλαδὴ 201, 203, 205 κλπ. καὶ ἀντίθετα 299, 297, 295 κλπ. Νὰ γράψετε τὶς δύο αὐτὲς σειρές.

9. Πόσες ἑκατοντάδες, δεκάδες καὶ μονάδες ἔχουν οἱ ζυγοὶ ἀκέραιοι ἀπὸ τὸ 260 ὡς τὸ 270 ; πόσες οἱ μονοὶ ἀκέραιοι ἀπὸ τὸ 230 ὡς τὸ 240 ;

10. Νὰ σχηματίσετε μὲ ἀντικείμενα τοὺς ἀκεραίους ποὺ βρίσκονται μεταξὺ τοῦ 200 καὶ τοῦ 300 καὶ τελειώνουν σὲ 6.

Οἱ ἀκέραιοι ἀπὸ τὸ 300 ὡς τὸ 1.000

Τὶς προηγούμενες 11 ἀσκήσεις νὰ τὶς κάμετε καὶ στοὺς ἀκεραίους 300 ὡς 400, 400 ὡς 500, 500 ὡς 600, 600 ὡς 700, 700 ὡς 800, 800 ὡς 900, 900 ὡς 1.000.

Ψηφιακὴ ἀνάλυση τῶν ἀκεραίων ἀπὸ τὸ 100 ὡς τὸ 1.000

1. Ὁ 100 ἔχει 1 ἑκατοντάδα, 0 δεκάδες καὶ 0 μονάδες ἢ 10 δεκάδες καὶ 0 μονάδες ἢ 100 ἁπλὲς μονάδες.

Ὁ 200 ἔχει 2 ἑκατοντάδες, 0 δεκάδες καὶ 0 μονάδες ἢ 20 δεκάδες καὶ 0 μονάδες ἢ 200 ἁπλὲς μονάδες.

Συνεχίστε μόνοι σας ὡς τὸν 1.000.

2. Ὁ 110 ἔχει 1 ἑκατοντάδα, 1 δεκάδα καὶ 0 μονάδες ἢ 11 δεκάδες καὶ 0 μονάδες ἢ 110 ἁπλὲς μονάδες.

Ὁ 120 ἔχει 1 ἑκατοντάδα, 2 δεκάδες καὶ 0 μονάδες ἢ 12 δεκάδες καὶ 0 μονάδες ἢ 120 ἁπλὲς μονάδες.

Συνεχίστε ὡς τὸ 200.

3. Κάμετε τὸ ἴδιο καὶ στὶς ἑπόμενες ἑκατοντάδες, δηλαδὴ 210 ἔχει 2 ἑκατοντάδες, 1 δεκάδα καὶ 0 μονάδες ἢ 21 δεκάδες καὶ 0 μονάδες, ἢ 210 ἁπλὲς μονάδες κλπ.

Ὁ 310 ἔχει 3 ἑκατοντάδες, 1 δεκάδα καὶ 0 μονάδες, ἢ 31 δεκάδες καὶ 0 μονάδες ἢ 310 ἁπλὲς μονάδες κλπ.

4. Πόσες μονάδες ἔχουν :
3 ἑκατ. 5 δεκ. καὶ 4 μον. ; 8 ἑκατ. 9 δεκ. καὶ 9 μον. ;

5. $450 = 400 + 50 + 0$ $638 = 600 + 30 + 8$
Νὰ κάμετε καὶ μόνοι σας τέτοιες ψηφιακὲς ἀναλύσεις τριψήφιων ἀκεραίων.

6. $500 = 200 + 200 + 100$
$864 = 500 + 300 + 40 + 20 + 4$
Νὰ κάμετε κι ἐσεῖς τέτοιες ψηφιακὲς ἀναλύσεις.

᾿Ασκήσεις μ᾿ ἑκατοντάδες

Π ρ ώ τ η   ὁ μ ά δ α

1. 100 + 100 =	200 + 100 =	300 + 100 =
100 + 200 =	200 + 200 =	300 + 200 =
κλπ. ὥς τὸ	κλπ. ὥς τὸ	κλπ. ὥς τὸ
100 + 900 =	200 + 800 =	300 + 700 =

Κάμετε τὸ ἴδιο καὶ μὲ τὶς ὑπόλοιπες ἑκατοντάδες.

2. 100 + ; = 400	200 + ; = 500	300 + ; = 800	700 + ; = 900
100 + ; = 600	200 + ; = 900	400 + ; = 700	500 + ; = 700

3. ; + 600 = 900	; + ; = 700	200 + 200 + 300 = ;
; + 400 = 800	; + ; = 900	300 + 600 + 0 = ;

Κάμετε κι ἐσεῖς ὅμοιες ἀσκήσεις.

4. Τὸ 700 γίνεται, ἂν προσθέσωμε 400 + 200 + 100 ἢ 300 + 300 + 100 ἢ 400 + 300 + 0 κλπ. Ποιοὺς ἀκεραίους (ἑκατοντάδες) πρέπει νὰ προσθέσωμε, γιὰ νὰ γίνη τὸ 500, 800, 600 ; Κάμετε ὅσους συνδυασμοὺς περισσότερους μπορεῖτε.

Δ ε ύ τ ε ρ η   ὁ μ ά δ α

1. 1.000–100 =	900–100 =	800–100 =	700–100 =
1.000–200 =	900–200 =	800–200 =	700–200 =
κλπ. ὥς τὸ	κλπ. ὥς τὸ	κλπ. ὥς τὸ	κλπ. ὥς τὸ
1.000–1.000 =	900–900 =	800–800 =	700–700 =

Κάμετε τὸ ἴδιο καὶ μὲ τὸ 600, 500, 400.

2. 500–; = 300	600–; = 100	800–; = 200	900–; = 400
3. ;–100 = 400	;–800 = 100	;–500 = 0	;–300 = 500

4. ; – ; = 200. ᾿Απάντηση. 300 – 100 = 200 ἢ 400 – – 200 = 200 ἢ 500 – 300 = 200 ἢ 600 – 400 = 200 ἢ 800 – 600 = 200 κλπ.

Νὰ δώσετε ὅσες περισσότερες ἀπαντήσεις μπορεῖτε στὶς παρακάτω ὅμοιες ἀσκήσεις :

; – ; = 100,   ; – ; = 300,   ; – ; = 500.

5.

900 – 100 – 200 =	600 + 200 – 300 – 100 + 500 =
700 – 300 – 200 =	300 + 400 – 200 + 100 – 200 =
800 – 500 – 300 =	400 + 100 – 500 + 600 – 300 =

Τρίτη ὁμάδα

1.

1 × 100 =;	1 × 200 =;	5 × 200 =;	1 × 500 =;
2 × 100 =;	2 × 200 =;	1 × 300 =;	2 × 500 =;
κλπ. ὡς τὸ	3 × 200 =;	2 × 300 =;	1 × 400 =;
10 × 100 =;	4 × 200 =;	3 × 300 =;	2 × 400 =;

2.

1.000 : 2	800 : 4	600 : 3	400 : 2	500 : 5	700 : 10
1.000 : 5	800 : 8	600 : 6	400 : 4	500 : 10	900 : 9

3. (200 + 100) × 2 = ;   (600 + 300) : 3 = ;
(3 × 200) + (4 × 100) = ;   (900 – 400) : 5 = ;
(1.000 – 200 – 600 + 100) × 3 = ;   (800 : 4) × 5 = ;
(4 × 200) – (1 × 700) = ;   (300 + 400 + 200) × 0 = ;

4. Τὸ μισὸ $\left(\frac{1}{2}\right)$ τοῦ 200 εἶναι 100.

Νὰ βρῆτε τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ 400, 600, 800, 1.000, 100, 300, 500, 700, 900.

Τὸ ἕνα τρίτο $\left(\frac{1}{3}\right)$ τοῦ 300 εἶναι 100. Δηλαδὴ διαιροῦμε τὸ 300 : 3.

Νὰ βρῆτε τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ 600, 900.

Τὸ ἕνα τέταρτο $\left(\frac{1}{4}\right)$ τοῦ 400 εἶναι 100. Διαιροῦμε τὸ 400 : 4.

Νὰ βρῆτε τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ 800, 200, 600, 1.000.

Τὸ ἕνα πέμπτο $\left(\frac{1}{5}\right)$ τοῦ 500 εἶναι 100.

Νὰ βρῆτε τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ 1.000, 400, 800, 100, 300, 600.

2. ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΑΠΟ ΜΝΗΜΗΣ

Πρόσθεση καὶ ἀφαίρεση δεκάδων

α) Χωρὶς νὰ ξεπερνοῦμε τὴν ἑκατοντάδα.

Νὰ κάμετε τὶς παρακάτω ἐργασίες :

1. 200 + 10 = ; | 200 + 20 = ; | 200 + 30 = ; κλπ. ὡς τὸ 200 + 100 = ;

Συνεχίστε τὴν ἴδια ἐργασία καὶ στὶς ἑπόμενες ἑκατοντάδες.

2. 210 + 10 = ; | 210 + 20 = ; | 210 + 30 = ; κλπ. ὡς τὸ 210 + 90 = ;

Συνεχίστε καὶ στὶς ἑπόμενες ἑκατοντάδες.

Κάμετε τὸ ἴδιο μὲ πρῶτο προσθετέο τὸ 220, 320, 420 κλπ.,ἔπειτα μὲ τὸ 230, 330, 430 κλπ., ὕστερα μὲ τὸ 240, 340, 440 κλπ. Σὰν δεύτερο προσθετέο θὰ προσθέτετε κάθε φορὰ 10, 20, 30 κλπ.

3. 1.000 – 10 = ;   1.000 – 20 = ;   1.000 – 30 = ; κλπ. ὡς τὸ 1.000 – 100 = ;

Συνεχίστε καὶ στὶς ἄλλες ἑκατοντάδες πρὸς τὰ κάτω.

β) Μὲ ξεπέρασμα τῆς ἑκατοντάδας.

Παράδειγμα. $280 + 30 = ;$ Ἀπάντηση. $280 + 20 + 10 = 300 + 10 = 310$. Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο νὰ βρῆτε:

$290 + 50 =$	$340 + 90 =$	$560 + 70 =$	$730 + 90 =$
$740 + 70 =$	$860 + 60 =$		

Παράδειγμα. $320 - 50 = ;$ Ἀπάντηση. $320 - 20 - 30 = 300 - 30 = 270$.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο νὰ βρῆτε:

$330 - 70 =$	$550 - 70 =$	$740 - 50 =$	$850 - 90 =$
$610 - 80 =$	$410 - 60 =$		

Ἀριθμητικὲς ἀκολουθίες

α) Ν' ἀνεβῆτε ἀπὸ τὸ 100 ὡς τὸ 1.000 καὶ νὰ κατεβῆτε ἀπὸ τὸ 1.000 ὡς τὸ 100 α) ἀνὰ 20, δηλαδὴ 120, 140, 160 κλπ. καὶ ἀντίθετα 1.000, 980, 960 κλπ. Νὰ κάμετε τὸ ἴδιο ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ 110 καὶ νὰ κατεβῆτε πάλι ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ 990.

β) Ἀνὰ 30, δηλαδὴ 130, 160, 190 κλπ. καὶ ἀντίθετα 1.000, 970, 940 κλπ. Νὰ κάμετε τὸ ἴδιο ἀρχίζοντας πρῶτα ἀπὸ τὸ 110, δηλαδὴ 110, 140, 170 κλπ. κι ἔπειτα ἀπὸ τὸ 120, δηλαδὴ 120, 150, 180 κλπ. Καὶ ἀντίθετα ἀρχίστε πρῶτα ἀπὸ τὸ 990 κι ἔπειτα ἀπὸ τὸ 980.

γ) Νὰ κάμετε ὅμοιες ἀκολουθίες μὲ τὸ 40, 50, 60, 70, 80, 90.

Πρόσθεση μονοψηφίων μὲ τριψηφίους

1. $290 + 1 = ;$ $290 + 2 = ;$ $290 + 3 = ;$ κλπ. ὡς τὸ $290 + 9$.

Κάμετε τὸ ἴδιο καὶ στὸ 390, 490, 590, 690, 790, 890, 990.

2. $299 + 1$, $298 + 2$, $297 + 3$ κλπ. ὡς τὸ $291 + 9$.

Κάμετε τὸ ἴδιο καὶ στὶς ἑπόμενες ἑκατοντάδες· δηλαδή:

$399 + 1 = ;$ $398 + 2 = ;$ $397 + 3 = ;$ κλπ. $499 + 1 = ;$ $498 + 2 = ;$ κλπ.

3. Πόσα κάνουν $295 + 8$;

Ἀπάντηση. $295 + 8 = 295 + 5 + 3 = 300 + 3 = 303$.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο, δηλαδὴ μὲ ἀνάλυση τοῦ δεύτερου προσθετέου, νὰ βρῆτε :

299 + 4	397 + 8	496 + 6	599 + 2	698 + 3	799 + 9
298 + 6	395 + 6	499 + 5	598 + 8	696 + 9	796 + 7

895 + 9, 897 + 5

4. Ποιός ἀκέραιος ἀριθμὸς ἔρχεται ἀμέσως μετὰ τὸ 299 ; μετὰ τὸ 399, 499, 599, 699, 799. 899, 999 ;

5.

299 + ; = 300	499 + ; = 501	696 + ; = 703
298 + ; = 305	493 + ; = 500	699 + ; = 700
897 + ; = 903	999 + ; = 999	

Ἀφαίρεση μονοψηφίων ἀπὸ τριψηφίους

1. 209 – 9 = ;   208 – 8 = ;   207 – 7 = ;   κλπ. ὡς τὸ 201 – 1.

Κάμετε τὸ ἴδιο καὶ στὶς ἑπόμενες ἑκατοντάδες: δηλαδή : 309 – 9 = ;   308 – 8 = ;   κλπ.   409 – 9 = ;   408 – 8 = ; κλπ.

2. 200 – 1,   300 – 1,   400 – 1,   500 – 1,   600 – 1,
700 – 1,   800 – 1,   900 – 1,   1.000 – 1.

3. 200 – 2,   200 – 3,   200 – 4 κλπ. ὡς τὸ 200 – 9.

Κάμετε τὸ ἴδιο καὶ στὶς ἑπόμενες ἑκατοντάδες.

4. Πόσα μένουν 202 – 5 ;

Ἀπάντηση. 202 – 5 = 202 – 2 – 3 = 200 – 3 = 197

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο, δηλαδὴ μὲ ἀνάλυση τοῦ ἀφαιρετέου, νὰ βρῆτε : 302 – 3, 501 – 2, 708 – 9, 904 – 9, 305 – 7, 706 – 7.

5. Ποιός ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶναι ἀμέσως πρὶν ἀπὸ τὸ 200 ; πρὶν ἀπὸ τὸ 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1.000 ;

6.

202–; =199	405–; =399	607–; =599	804–; =799
304–; =299	503–; =499	706–; =699	908–; =899

Πρόσθεση διψηφίων καὶ τριψηφίων (ἀπὸ μνήμης)

Πόσα γίνονται 385 + 247 ;

'Απάντηση. 385 + 200 = 585· καὶ 40 625· καὶ 5 630· καὶ 2 632 (μὲ ἀνάλυση τῶν 7 μονάδων σὲ 5 + 2).

Μπορεῖτε νὰ τὸ βρῆτε καὶ μὲ ἄλλον τρόπο.

Μὲ ὅποιον τρόπο θέλετε, νὰ ἐκτελέσετε τὶς προσθέσεις : 178 + 35 = , 382 + 264 = , 537 + 398 = , 729 + + 193 = , 806 + 95 =

'Αφαίρεση διψηφίων καὶ τριψηφίων ἀπὸ τριψηφίους.

Πόσα μένουν 520 – 273 ;

'Απάντηση. 520 – 200 = 320· πλὴν 20 μένουν 300· πλὴν 50 μένουν 250 (μὲ ἀνάλυση τοῦ 70 σὲ 20 + 50)· πλὴν 3 μένουν 247.

Μπορεῖτε νὰ τὸ βρῆτε καὶ μὲ ἄλλον τρόπο.

Νὰ ἐκτελέσετε τὶς παρακάτω ἀφαιρέσεις ἀπὸ μνήμης : 356 – 145 = , 519 – 374 = , 795 – 406 = , 906 – – 307 = , 815 – 89 = , 803 – 504 =

Μιὰ ἰδιότητα τῆς προσθέσεως ποὺ μᾶς βοηθεῖ στοὺς λογαριασμοὺς ἀπὸ μνήμης

Παράδειγμα. Πόσα εἶναι τὰ μῆλα ποὺ δείχνει τὸ σχῆμα ;

'Απάντηση. 3 + 4 + 5 = 12

"Αν ἑνώσωμε τὰ 4 μῆλα μὲ τὰ 3 μῆλα, θὰ ἔχωμε :

δηλαδὴ (3 + 4) + 5
ἢ 7 + 5 = 12

"Αν τώρα ἑνώσωμε τὰ 4 μῆλα μὲ τὰ 5, θὰ ἔχωμε :

δηλαδὴ $3 \quad + \quad (4+5)$
ἢ $3 \quad + \quad 9 = 12$

Βλέπομε ὅτι $(3+4)+5=3+(4+5)$. Αὐτὴ εἶναι ἡ προσεταιριστικὴ ἰδιότητα τῆς προσθέσεως.

Σημείωση: Κάθε μία ἀπὸ τὶς παραπάνω γραφὲς $(3+4)+5$ καὶ $3+(4+5)$ μπορεῖ νὰ σημειωθῆ κι ἔτσι: $3+4+5$.

Νὰ κάμετε κι ἐσεῖς μὲ τ' ἀντικείμενά σας ὅμοιες ἐργασίες καὶ νὰ σημειώνετε κάθε φορὰ τὶς πράξεις.

Νὰ παραστήσετε μὲ κύβους, χάντρες, ὄσπρια κλπ. τ' ἀθροίσματα ποὺ δείχνουν οἱ παρακάτω ἀσκήσεις:

α) $2+3+4=$	$(2+3)+4=$	$2+(3+4)=$
β) $9+7+13=$	$(9+7)+13=$	$9+(7+13)=$
γ) $3+0+7=$	$(3+0)+7=$	$3+(0+7)=$

Νὰ ἐκτελέσετε τώρα τὶς πράξεις. Πρῶτα νὰ ἐκτελέσετε τὶς πράξεις μέσα στὶς παρενθέσεις.

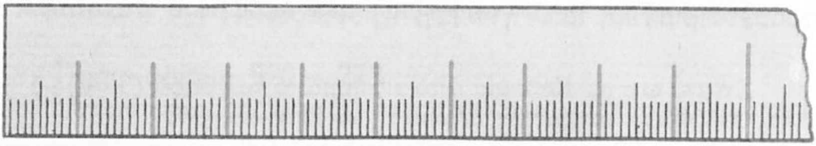
Πόσα γίνονται $189+75+25$; Ἀντὶ νὰ προσθέσωμε στὴ σειρὰ τοὺς προσθετέους, προσθέτομε πρῶτα τὸ $75+25$ καὶ βρίσκομε 100. Τώρα εὔκολα βρίσκομε $189+100=289$.

3. ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΣ

Τὰ χιλιοστὰ τοῦ μέτρου (χιλιοστόμετρα)

Τὸ μέτρο χωρίζεται σὲ 10 μεγάλα ἴσα μέρη· τὰ ξέρετε· τὰ λένε παλάμες ἢ δέκατα τοῦ μέτρου. Χωρίζεται καὶ σὲ 100 μικρότερα ἴσα μέρη· τὰ λένε δακτύλους ἢ πόντους ἢ ἑκατοστόμετρα. Ἐπίσης χωρίζεται σὲ 1.000 πολὺ μικρὰ ἴσα μέρη ποὺ τὰ λένε γραμμὲς ἢ χιλιοστόμετρα.

Νὰ χωρίσετε κι ἐσεῖς τὴ χάρτινη μετροταινία σας σὲ χιλιοστά. Τὸ σχῆμα δείχνει ἕνα κομμάτι τοῦ μέτρου χωρισμένο σὲ δέκατα, ἑκατοστὰ καὶ χιλιοστά. Μὲ τὰ χιλιοστόμετρα μετροῦμε ἀντικείμενα ποὺ ἔχουν πολὺ μικρὸ μάκρος ἢ πλάτος ἢ ὕψος.



Ὅπως βλέπετε, ἕνας δάκτυλος (πόντος) ἔχει 10 γραμμὲς (χιλιοστόμετρα). Μιὰ παλάμη ἔχει 100 γραμμές. Εὔκολα τώρα μποροῦμε νὰ βροῦμε, χωρὶς νὰ τὶς μετρήσωμε, πόσες γραμμὲς ἔχουν 2 πόντοι, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 πόντοι.

Πόσες γραμμὲς ἔχουν 2 παλάμες : 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 παλάμες ;

Σχεδιάστε ἕνα τρίγωνο στὸ τετράδιό σας καὶ μετρῆστε μὲ τὴ μετροταινία σας πόσα χιλιοστόμετρα εἶναι κάθε πλευρὰ τοῦ τριγώνου.

Νὰ κάμετε τὸ ἴδιο καὶ μ' ἕνα ὀρθογώνιο.

Τὸ χιλιόμετρο

Νὰ μετρήσετε μὲ τὰ ξύλινα μέτρα σας ἢ μὲ τὰ δεκάμετρά σας ἀποστάσεις 20, 50, 100, 200, 300 μέτρων.

Νὰ ἐκτιμήσετε μὲ τὸ μάτι ἀποστάσεις 30, 60, 50, 100, 150, 350 μέτρων.

Νὰ μετρήσετε μιὰ ἀπόσταση 1.000 μέτρων. Αὐτὸ εἶναι ἕνα χιλιόμετρο. Ἐπίσης ἀπόσταση μισοῦ χιλιομέτρου. Πόσα μέτρα θὰ εἶναι ;

Σὲ κάθε 100 μέτρα νὰ τοποθετήσετε ἕνα σημάδι. Πόσες ἑκατοντάδες μέτρα ἔχει τὸ χιλιόμετρο ;

Ὥστε τὰ 100 μέτρα εἶναι τὸ ἕνα δέκατο $\left(\frac{1}{10}\right)$ τοῦ χιλιομέτρου.

Πόσα μέτρα εἶναι τὰ δύο δέκατα τοῦ χιλιομέτρου ; τὰ 3, 5, 7, 9, 4, 6, 8, 10 δέκατα ;

Νὰ χωρίσετε τὸ χιλιόμετρο σὲ 4 ἴσα μέρη καὶ νὰ βάλετε σημάδια. Πόσα μέτρα θὰ ἔχῃ τὸ καθένα ἀπὸ αὐτὰ τὰ 4 μέρη ;

Ὥστε τὸ ἕνα τέταρτο $\left(\frac{1}{4}\right)$ τοῦ χιλιομέτρου εἶναι 250 μέτρα. Πόσα μέτρα εἶναι τὰ δύο τέταρτα τοῦ χιλιομέτρου ; τὰ 3, 4 τέταρτα ;

Νὰ χωρίσετε τώρα τὸ χιλιόμετρο σὲ πέμπτα. Πόσα μέτρα ἔχει τὸ καθένα ;

Πόσα μέτρα ἔχουν τὰ 2, 3, 4, 5 πέμπτα τοῦ χιλιομέτρου ;

Τὰ σταθμὰ (ζύγια)

Γιὰ νὰ ζυγίζωμε τὰ βάρη ἔχομε τὸ κιλό. Τὸ κιλὸ χωρίζεται σὲ 1.000 ἴσα μέρη ποὺ λέγονται γραμμάρια. Γι' αὐτό, τὸ κιλὸ τὸ λέμε καὶ χιλιόγραμμο.

Πόσα γραμμάρια ἔχει τὸ μισὸ κιλό ; πόσα τὸ ἕνα τέταρτο τοῦ κιλοῦ ; πόσα τὸ ἕνα πέμπτο ; πόσα τὸ ἕνα δέκατο;

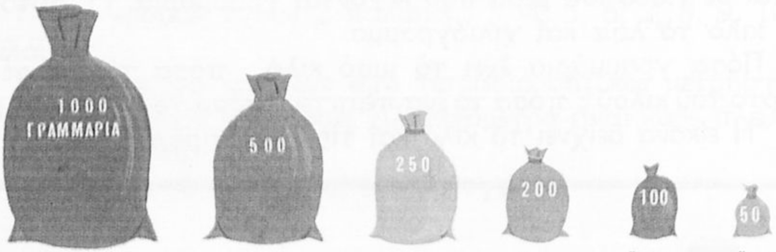
Ἡ εἰκόνα δείχνει τὸ κιλὸ καὶ τὶς ὑποδιαιρέσεις του.

Τὰ καταστήματα τροφίμων πουλοῦν διάφορα εἴδη σὲ πακέτα ἢ σὲ κουτιὰ ἢ σὲ σακοῦλες τοῦ ἑνὸς κιλοῦ, τοῦ μισοῦ κιλοῦ, τοῦ ἑνὸς τετάρτου κλπ. Π.χ. ζάχαρη σὲ πακέτα τοῦ ἑνὸς κιλοῦ· μακαρόνια σὲ πακέτα τοῦ μισοῦ κιλοῦ· διάφορα ὄσπρια (φασόλια, κουκιά, ρεβίθια, φακὲς) σὲ σακοῦλες νάυλον τοῦ ἑνὸς κιλοῦ ἢ τοῦ μισοῦ κιλοῦ· λάδι σὲ μπουκάλια ἢ δοχεῖα τοῦ ἑνὸς κιλοῦ· καφὲ σὲ πακετάκια τοῦ ἑνὸς δεκάτου τοῦ κιλοῦ, δηλαδὴ τῶν 100 γραμμαρίων· ρύζι σὲ κουτιὰ τοῦ ἑνὸς κιλοῦ ἢ τοῦ μισοῦ κιλοῦ κλπ.

Νὰ κάμετε κι ἐσεῖς στὸ σχολεῖο σας πρόχειρα σταθμά. Γεμίστε μὲ καλαμπόκι ἢ σιτάρι ἢ ὄσπρια σακουλάκια τοῦ ἑνὸς κιλοῦ, τοῦ μισοῦ κιλοῦ, τοῦ ἑνὸς τετάρτου (250 γραμμάρια), τοῦ ἑνὸς πέμπτου (200 γραμμάρια), τοῦ ἑνὸς δεκάτου τοῦ κιλοῦ (100 γραμμάρια) καὶ τέλος τῶν 50 γραμμαρίων.

Νὰ γεμίσετε πολλὰ τέτοια σακουλάκια, ἰδίως ἀπὸ τὰ μικρότερα, γιὰ νὰ σᾶς φτάνουν νὰ κάνετε τοὺς λογαριασμούς σας.

Ἡ εἰκόνα δείχνει τὰ σακουλάκια στὴ σειρά.



1 κιλὸ — μισὸ κιλὸ — ἕνα τέρτατο τοῦ κιλοῦ — ἕνα πέμπτο τοῦ κιλοῦ — ἕνα δέκατο τοῦ κιλοῦ — ἕνα εἰκοστὸ τοῦ κιλοῦ

Τὸ γραμμάριο εἶναι, ὅπως εἴπαμε, πολὺ μικρό. Ἔχει βάρος ὅσο ἔχουν ἕνα δυὸ φασόλια ἢ δυὸ τρία ρεβίθια ἢ δυὸ τρία σπυριὰ καλαμπόκι ἢ λίγα σπυράκια σιτάρι ἢ ρύζι. Τόσο μικρὸ εἶναι τὸ γραμμάριο !

Νὰ πιάνετε συχνὰ στὰ χέρια σας τὰ σακουλάκια, γιὰ νὰ συνηθίσετε νὰ ξεχωρίζετε ἀμέσως πόσο βαρὺ εἶναι τὸ ἕνα κιλό, τὸ μισὸ κιλό, τὸ τέταρτο τοῦ κιλοῦ κλπ.

Νὰ πῆτε ἀντικείμενα ποὺ εἶναι γύρω σας κι ἔχουν βάρος 2 κιλά, 3, 4, 5 κιλά.

Νὰ σηκώσετε καὶ νὰ ὑπολογίσετε τί βάρος ἔχει ἡ καρέκλα, τὸ ἀνθοδοχεῖο, ἡ γλάστρα, ἕνα πακέτο βαμβάκι, ἕνα κομμάτι σίδερο ἢ ξύλο ἢ μάρμαρο, μικρότερες ἢ μεγαλύτερες πέτρες, τὸ ποτιστήρι ἄδειο κι ἔπειτα γεμάτο μὲ νερὸ ἢ μισογεμάτο κλπ.

Ἀσκήσεις

(Χρησιμοποιῆστε τὰ σταθμά σας)

1. Πόσα τέταρτα ἔχει τὸ κιλό ; πόσα πέμπτα ; πόσα δέκατα ;

2. Πόσα γραμμάρια ἔχει τὸ ἕνα τέταρτο τοῦ κιλοῦ ; τὰ 2, 3, 4 τέταρτα ;

3. Πόσα ἔχει τὸ ἕνα πέμπτο ; τὰ 2, 3, 4, 5 πέμπτα τοῦ κιλοῦ ;

4. Πόσα γραμμάρια ἔχει τὸ ἕνα δέκατο ; τὰ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 δέκατα τοῦ κιλοῦ ;

5. Πόσα γραμμάρια ἔχουν 2 τέταρτα καὶ 3 δέκατα τοῦ κιλοῦ ; μισὸ κιλὸ καὶ 2 πέμπτα τοῦ κιλοῦ ; τρία τέταρτα καὶ 2 δέκατα τοῦ κιλοῦ καὶ 50 γραμμάρια ; ἕνα πέμπτο καὶ 6 δέκατα τοῦ κιλοῦ ;

6. Ποιά εἶναι περισσότερα : τὰ τρία τέταρτα ἢ τὰ 7 δέκατα τοῦ κιλοῦ ; τὰ 4 πέμπτα ἢ τὰ 8 δέκατα ;

7. 300 γραμμάρια πόσα δέκατα τοῦ κιλοῦ κάνουν ;
700 γραμμάρια πόσα δέκατα τοῦ κιλοῦ περιέχουν ;
πόσα πέμπτα ; πόσα τέταρτα ; πόσα μισὰ κιλά ;

Τὸ λίτρο

Γιὰ νὰ μετρήσωμε ἕνα ὑγρό, π.χ. νερό, λάδι, πετρέλαιο, χρειαζόμαστε δοχεῖο. Ἂς πάρωμε ἕνα κύβο (σὰ ζάρι) ποὺ ἡ ἀκμή του νὰ ἔχη μῆκος μιὰ παλάμη κι ἂς τὸν τυλίξωμε μὲ ἀλουμινόχαρτο ἀφήνοντας ἐλεύθερη μιὰ ἕδρα. Ὅταν βγάλωμε τὸν κύβο θὰ ἔχωμε ἕνα δοχεῖο ἀκριβῶς σὰν τὸν κύβο. Τώρα λοιπόν, λέμε ὅτι αὐτὸ τὸ δοχεῖο χωράει ἕνα λίτρο ὑγρό. Ἐπίσης λέμε ὅτι τὸ λίτρο εἶναι ἡ χωρητικότητα ἢ ὁ ὄγκος μιᾶς κυβικῆς παλάμης.


1 λίτρο μισὸ λίτρο

Μποροῦμε νὰ φτιάξωμε δοχεῖα τοῦ ἑνὸς λίτρου, ἢ τοῦ μισοῦ λίτρου γιὰ νὰ μετροῦμε τὰ ὑγρὰ σὲ λίτρα. Ἔτσι π.χ. μποροῦμε νὰ ἀγοράσωμε διόμισι λίτρα κρασί, ἢ τρία λίτρα οἰνόπνευμα· τὸ λίτρο δὲν εἶναι μονάδα βάρους· τὸ λίτρο εἶναι μονάδα ὄγκου ὑγρῶν.

Ζυγίζομε ἄδειο τὸ δοχεῖο τοῦ ἑνὸς λίτρου. Βρίσκομε τὸ βάρος τοῦ π.χ. 40 γραμμάρια.

Ἂν γεμίσωμε τώρα τὸ λίτρο μὲ νερὸ καὶ τὸ ξαναζυγίσωμε, τὸ βάρος του μαζὶ μὲ τὸ νερὸ θὰ εἶναι 1040 γραμάρια. Ἔτσι καταλαβαίνομε ὅτι τὸ ἕνα λίτρο νερὸ ζυγίζει 1000 γραμμάρια. Ἂν ἀντὶ νερό, πάρωμε λάδι θὰ βροῦμε ὅτι ἕνα λίτρο λάδι θὰ ζυγίζη ὄχι 1.000 ἀλλὰ 920 γραμμάρια, γιατὶ καὶ τὸ λάδι εἶναι ἐλαφρότερο ἀπὸ τὸ νερό. Αὐτὸ τὸ βλέπομε στὰ πλαστικὰ μπουκάλια ποὺ εἶναι γεμάτα λάδι. Τὸ λάδι καθαρὸ εἶναι 920 γραμμάρια· εἶναι γραμμένο πάνω στὰ μπουκάλια. Ἔτσι ἀγοράζομε ἕνα λίτρο λάδι καὶ ὄχι ἕνα κιλὸ λάδι. Ἂν ἕνα τέτοιο μπουκάλι, τὸ γεμίσωμε μὲ νερό, τότε τὸ καθαρὸ νερὸ θὰ ζυγίζη 1.000 γραμμάρια, δηλαδὴ 1 κιλό. Δοκιμάστε.

4. ΣΤΡΟΓΓΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Παραδείγματα. 1. Τὰ παιδιὰ κάνουν συλλογὲς γραμματοσήμων. Ὁ Κωστάκης ἔχει 73 γραμματόσημα καὶ λέει ὅτι ἔχει 70 περίπου.

2. Ὁ Γιαννάκης ἔχει 39 γραμματόσημα καὶ λέει ὅτι ἔχει 40 περίπου (πάνω κάτω).

Τὰ παιδιὰ στρογγυλοποίησαν τοὺς ἀριθμούς, τοὺς ἔκαμαν νὰ ἔχουν μόνο δεκάδες.

Ὁ Κωστάκης ἔκαμε τὴ στρογγυλοποίηση πρὸς τὰ κάτω παραλείποντας τὶς 3 μονάδες.

Ὁ Γιαννάκης τὴν ἔκαμε πρὸς τὰ πάνω προσθέτοντας μιὰ μονάδα.

Ἂν οἱ ἁπλὲς μονάδες τῶν ἀριθμῶν εἶναι περισσότερες ἀπὸ 5, στρογγυλοποιοῦμε τοὺς ἀριθμοὺς πρὸς τὰ πάνω, στὴν ἀμέσως ἀνώτερη δεκάδα. Ἂν εἶναι λιγότερες ἀπὸ 5, τὶς παραλείπομε καὶ στρογγυλοποιοῦμε πρὸς τὰ κάτω. Ἂν εἶναι 5, στρογγυλοποιοῦμε ἢ πρὸς τὰ πάνω ἢ πρὸς τὰ κάτω.

3. Ἕνα χωριὸ ἔχει 287 κατοίκους. Ἕνας χωρικὸς μᾶς λέει ὅτι τὸ χωριὸ ἔχει 300 κατοίκους περίπου. Ὁ χωρικὸς πρόσθεσε 13 μονάδες.

4. Τὸ φόρεμα τῆς Ἄννας ἀξίζει 415 δραχμές. Ἡ Ἄννα, παραλείποντας 15 μονάδες, λέει ὅτι τὸ φόρεμά της ἀξίζει 400 δραχμὲς περίπου.

Στὰ παραδείγματα 3 καὶ 4 ἡ στρογγυλοποίηση ἔγινε σ᾽ ἑκατοντάδες.

Στρογγυλοποίηση γίνεται καὶ σὲ χιλιάδες· π.χ. λέμε: Τοὺς χτεσινοὺς ἀθλητικοὺς ἀγῶνες παρακολούθησαν 15 χιλιάδες φίλαθλοι.

Τὴ στρογγυλοποίηση τὴν κάνομε, διότι τοὺς στρογγυλοὺς ἀριθμοὺς τοὺς θυμούμαστε καλύτερα.

Ἀσκήσεις

Νὰ στρογγυλοποιήσετε τοὺς ἀριθμούς:

α) 57, 71, 82, 96, 45, 22, 38, 69, 78, 33, 32, 89, 74, 64, 95, σὲ δεκάδες.

β) 214, 263, 282, 307, 312, 356, 517, 629, 786, 818, 891, 983 (πρῶτα σὲ δεκάδες κι ἔπειτα σ᾽ ἑκατοντάδες).

Στρογγυλοὺς ἀριθμοὺς μεταχειριζόμαστε, καὶ ὅταν δὲν ξέρωμε ἀκριβῶς τὶς μονάδες ἑνὸς ἀριθμοῦ Π.χ.

1. Δὲ γνωρίζω ἀκριβῶς τὴν ἀπόσταση ἀπὸ τὸ σπίτι μου ὡς τὸ σχολεῖο. Ὑπολογίζω ὅμως ὅτι θὰ εἶναι 400 μέτρα περίπου.

2. Ὑπολογίζω ὅτι αὐτὸ τὸ χωράφι θ' ἀποδώση περίπου 750 κιλὰ σιτάρι.

3. Τὴν περασμένη βδομάδα ἐπισκέφτηκαν τὸ χωριό μας 1.000 ἐκδρομεῖς περίπου.

Σημείωση. Οἱ φράσεις: καμιὰ εἰκοσαριὰ (=20 περίπου), καμιὰ ἑκατοστὴ (=100 περίπου), καμιὰ πεντακοσαριὰ (=500 περίπου) φανερώνουν τὶς μονάδες ποὺ ἔχει ἕνας ἀριθμὸς πάνω κάτω.

Λύση προβλημάτων καὶ ἀσκήσεων κατὰ προσέγγιση

Στρογγυλοποιώντας τοὺς ἀριθμοὺς μποροῦμε εὔκολα νὰ λύσωμε ἀσκήσεις καὶ προβλήματα ἀπὸ μνήμης κατὰ προσέγγιση (πάνω κάτω).

Παραδείγματα. 1. Ὁ Φάνης ἀγόρασε τὴν «Ὀδύσσεια» καὶ τὴν «Ἱστορία τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου». Γιὰ τὸ πρῶτο βιβλίο ἔδωσε 58 δραχμὲς καὶ γιὰ τὸ δεύτερο 34. Πόσα πλήρωσε καὶ γιὰ τὰ δύο βιβλία;

Θὰ προσθέσω τοὺς ἀριθμοὺς 58 + 34. Ἂν τοὺς στρογγυλοποιήσω, θὰ ἔχω 60 + 30. Πολὺ εὔκολα τώρα βρίσκω ὅτι 60 + 30 = 90. Ὥστε πλήρωσε 90 δραχμὲς κατὰ προσέγγιση (περίπου, πάνω κάτω).

Ἡ λύση αὐτὴ μᾶς βοηθάει πολὺ στὴ γραπτὴ λύση, γιατὶ μᾶς δίνει κατὰ προσέγγιση τὸ ἀποτέλεσμα ποὺ πρέπει νὰ βροῦμε.

Στὸ παράδειγμά μας τὸ σωστὸ ἀποτέλεσμα εἶναι 92 δραχμές.

2. Πόσες δραχμὲς γίνονται 487 + 195 + 254;

Στρογγυλοποιοῦμε τοὺς ἀριθμοὺς κι εὔκολα βρίσκομε 490 + 200 + 250 = 940. Ὥστε τὸ ἄθροισμα 487 + 195 + + 254 εἶναι 940 περίπου.

Ἂν στρογγυλοποιήσωμε τὸ 487 σ' ἑκατοντάδες, δηλαδὴ σὲ 500, πολὺ εὐκολώτερα θὰ βροῦμε ὅτι 500 + 200 + + 250 = 950. Ἀλλὰ τώρα θὰ πλησιάσωμε λιγότερο στὸ σωστὸ ἀποτέλεσμα (ποὺ εἶναι 936), θὰ ἔχωμε μικρότερη προσέγγιση.

3. Ἕνας αὐγοπώλης ἔπρεπε νὰ στείλη στὴν κατασκήνωση 1.000 αὐγά. Ἔστειλε τὰ 798. Πόσα πρέπει νὰ στείλη ἀκόμη ;

Στρογγυλοποιοῦμε τὸ 798 καὶ τὸ κάνομε 800. Εὐκολώτατα τώρα βρίσκομε ὅτι πρέπει νὰ στείλη 200 αὐγὰ περίπου. Γιὰ τὴν ἀκρίβεια θὰ στείλη 202.

4. Ἕνα ἑστιατόριο ἀγόρασε 9 κιλὰ κρέας πρὸς 52 δραχμὲς τὸ κιλὸ καὶ 6 κιλὰ ψάρια πρὸς 68 δραχμὲς τὸ κιλό. Πόσα πλήρωσε συνολικά ;

Πρέπει νὰ βροῦμε $(9 \times 52) + (6 + 68) = ;$

Στρογγυλοποιώντας τοὺς ἀριθμοὺς 52 καὶ 68 θὰ ἔχωμε 50 καὶ 70. Εὔκολα τώρα βρίσκομε ὅτι γιὰ τὸ κρέας θὰ δώση $9 \times 50 = 450$ δραχμὲς περίπου καὶ γιὰ τὰ ψάρια $6 \times 70 = 420$ δραχμὲς περίπου. Καὶ γιὰ τὰ δύο εἴδη θὰ δώση $450 + 420 = 870$ δρχ. Ὥστε θὰ πληρώση 870 δραχμὲς κατὰ προσέγγιση (περίπου). Ἀκριβῶς θὰ πληρώση 876 δραχμὲς

5. Πόσα γίνονται 3×296 ;

Στρογγυλοποιῶ καὶ ἔχω $3 \times 300 = 900$. Καὶ γιὰ νὰ βρῶ ἀκριβῶς τὸ ἀποτέλεσμα, ἀφαιρῶ $3 \times 4 = 12$. Δηλαδὴ $900 - 12 = 888$.

6. Τὰ 8 μέτρα ὕφασμα ἔχουν 416 δραχμές. Πόσο ἔχει τὸ 1 μέτρο ; Θὰ διαιρέσωμε τὸ $416 : 8$. Στρογγυλοποιοῦμε τὸ 416 καὶ θὰ ἔχωμε $400 : 8 = 50$, διότι $50 \times 8 = 400$. Ὥστε τὸ μέτρο ἔχει 50 δραχμὲς κατὰ προσέγγιση.

7. Νὰ λύσετε τὶς παρακάτω ἀσκήσεις καὶ προβλήματα πρῶτα ἀπὸ μνήμης κατὰ προσέγγιση, κι ἔπειτα γραπτῶς, γιὰ νὰ βρῆτε ἀκριβῶς τὸ ἀποτέλεσμα.

α) Ἀσκήσεις

177 + 52 + 98	84 – 29
177 + 52 + 98	84 – 29
325 + 246 + 407	700 – 93
603 + 166 + 51	512 – 158
455 + 98 + 254	947 – 675
509 + 187 + 62	819 – 346

5 × 89	92 : 3
19 × 43	756 : 5
3 × (97 + 206)	824 : 4
4 × (509 – 378)	(573 – 152) : 7
(6 × 163) – (7 × 115)	(368 + 407) : 8

β) Προβλήματα

1. Πόσα μέτρα γίνονται 385 + 152 + 127 ;

2. Ἀγοράσαμε εἴδη ἀξίας 571 δραχμῶν. Τί ὑπόλοιπο θὰ πάρωμε ἀπὸ ἕνα χιλιάρικο ;

3. Ἕνας ἐργάτης παίρνει ἡμερομίσθιο 185 δραχμὲς καὶ ξοδεύει τὴν ἡμέρα κατὰ μέσον ὅρο 117. Πόσες δραχμὲς θὰ ἐξοικονομήση σὲ 6 μέρες ;

4. Ἕνας γεωργὸς μοίρασε 486 κιλὰ σιτάρι ἐξίσου σὲ 9 σακιά. Πόσα κιλὰ ἔβαλε σὲ κάθε σακί ;

5. ΠΡΟΣΘΕΣΗ

Νὰ ἐκτελέσετε τὶς παρακάτω προσθέσεις γραπτῶς.

122	158	207	465
214	69	125	8
321	75	96	9
+ 12	+ 309	+ 89	+ 47

504	600	82	132
93	87	43	608
198	66	409	37
+ 5	+ 18	+ 50	+ 29

Προβλήματα

1. Ὁ Βασιλάκης κάνει συλλογὴ γραμματοσήμων. Εἶχε 245 γραμματόσημα καὶ μάζεψε ἄλλα 67. Πόσα ἔχει τώρα ;

Σκέψη. Θὰ κάνωμε πρόσθεση, γιὰ νὰ βροῦμε πόσα ἔχει τώρα. Θὰ προσθέσωμε τοὺς ἀριθμοὺς 245 καὶ 67.

2. Ὁ πατέρας ἔδωσε γιὰ ἕνα φόρεμα τῆς Μαίρης 375 δραχμὲς καὶ γιὰ ἕνα ζευγάρι παπούτσια 280 δραχμές. Ἔδωσε καὶ γιὰ μιὰ φορεσιὰ τοῦ Τάκη 630 δραχμές. Πόσα πλήρωσε γιὰ ὅλα ;

3. Μιὰ οἰκογένεια ξοδεύει τὴν ἑβδομάδα 210 δραχμὲς γιὰ ἐνοίκιο τοῦ σπιτιοῦ. 525 δραχμὲς γιὰ διατροφὴ καὶ 196 γιὰ τ' ἄλλα ἔξοδα. Πόσα χρήματα ξοδεύει συνολικά ;

4. Νὰ σχηματίσετε στὸ τετράδιό σας ἕνα τετράγωνο μὲ πλευρὰ 6 πόντους. Νὰ βρῆτε τὴν περίμετρό του πρῶτα σ' ἑκατοστόμετρα κι ἔπειτα σὲ χιλιοστόμετρα.

5. Νὰ σχηματίσετε ἕνα τρίγωνο. Ἡ μιά του πλευρὰ νὰ εἶναι 8 ἑκατοστόμετρα καὶ ἡ ἄλλη 9. Τὴν τρίτη νὰ τὴν κάμετε ὅση θέλετε σεῖς. Νὰ βρῆτε τὴν περίμετρο τοῦ τριγώνου σὲ χιλιοστόμετρα. Ἔπειτα νὰ βρῆτε πόσα χιλιοστόμετρα εἶναι οἱ πλευρές του ἀνὰ δύο.

6. Ἕνας ἁμαξιτὸς δρόμος ἔχει μάκρος 650 μέτρα. Ἄρχισαν ἐργασίες, γιὰ νὰ τὸν μεγαλώσουν 150 μέτρα πρὸς τὸ ἕνα μέρος καὶ 175 πρὸς τὸ ἄλλο. Πόσα μέτρα θὰ εἶναι τὸ μάκρος τοῦ δρόμου ;

7. Ἕνα αὐτοκίνητο ἔκαψε τὴ Δευτέρα 37 λίτρα βενζίνης, τὴν Τρίτη 88, τὴν Τετάρτη 65 καὶ τὴν Πέμπτη 46. Πόσα λίτρα ἔκαψε καὶ τὶς 4 ἡμέρες ;

8. Πόσα γραμμάρια εἶναι μισὸ κιλὸ κι ἕνα τέταρτο τοῦ κιλοῦ καὶ 75 γραμμάρια ἀκόμη ;

6. ΑΦΑΙΡΕΣΗ

Νὰ ἐκτελέσετε τὶς παρακάτω ἀφαιρέσεις γραπτῶς.

376	518	745	943
– 143	– 215	– 705	– 425
861	607	436	
– 274	– 98	– 87	

Προβλήματα

1. Ὁ πατέρας, γιὰ νὰ πληρώση τὴ φορεσιὰ τοῦ Τάκη, ποὺ ἔκανε 530 δραχμές, ἔδωσε στὴν ταμία τοῦ καταστήματος ἕνα χιλιάρικο. Τί ρέστα θὰ πάρη ;

Σκέψη. Θὰ κάνωμε ἀφαίρεση, διότι θέλομε νὰ βγάλωμε (ν' ἀφαιρέσωμε) ἀπὸ ἕναν ἀριθμὸ τόσες μονάδες, ὅσες ἔχει ἕνας ἄλλος ἀριθμός. Θ' ἀφαιρέσωμε τὸν ἀριθμὸ 530 ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ 1.000.

2. Ἡ ἀπόσταση ἀπὸ τὴν Ἀθήνα στὴ Θεσσαλονίκη εἶναι 514 χιλιόμετρα. Ἕνα ἐκδρομικὸ λεωφορεῖο ξεκίνησε ἀπὸ τὴν Ἀθήνα καὶ διέτρεξε 328 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα θὰ διατρέξη ἀκόμη, γιὰ νὰ φτάση στὴ Θεσσακονίκη ;

3. Νὰ μετρήσετε καὶ νὰ βρῆτε τὴν περίμετρο τοῦ πατώματος τῆς δικῆς σας αἴθουσας, πρῶτα σὲ μέτρα κι ἔπειτα σὲ δέκατα τοῦ μέτρου (Χρησιμοποιῆστε γιὰ τὴ μέτρηση τὰ ξύλινα μέτρα σας καὶ τὶς ξύλινες παλάμες ποὺ ἔχετε κόψει). Ἔπειτα νὰ βρῆτε τὴ διαφορὰ τῆς μεγάλης ἀπὸ τὴ μικρὴ πλευρὰ σὲ παλάμες.

4. Νὰ σχεδιάσετε ἕνα τρίγωνο στὴν αὐλή. Ἡ πιὸ μεγάλη πλευρά του νὰ εἶναι 550 ἑκατοστόμετρα. Τὶς ἄλλες δύο πλευρὲς νὰ τὶς κάμετε, ὅσο θέλετε σεῖς. Νὰ βρῆτε τώρα τί διαφορὰ ἔχει ἡ κάθε μία μικρὴ πλευρὰ ἀπὸ τὴ μεγαλύτερη πλευρὰ τοῦ τριγώνου.

5. Ἕνα μικρὸ φορτηγὸ αὐτοκίνητο ἐπιτρέπεται νὰ με-

ταφέρη χωρὶς κίνδυνο 750 κιλὰ βάρος. Εἶναι φορτωμένο μὲ 563 κιλά. Πόσα κιλὰ μπορεῖ νὰ μεταφέρη ἀκόμη ;

6. Σὲ μιὰ δενδροστοιχία εἶναι 700 λεῦκες καὶ ἀκακίες. Τὰ μισὰ ἀπὸ τὰ δέντρα αὐτὰ καὶ 80 ἀκόμη εἶναι λεῦκες. Πόσες εἶναι οἱ λεῦκες καὶ πόσες οἱ ἀκακίες ;

7. Ποιόν ἀριθμὸ πρέπει νὰ προσθέσω στὸ 475, γιὰ νὰ βρῶ 706 ;

8. Πρόσθεσα δύο ἀριθμοὺς καὶ βρῆκα ἄθροισμα 850. Ὁ ἕνας εἶναι ὁ ἀριθμὸς 563. Ποιός εἶναι ὁ ἄλλος ;

9. Πρόσθεσα τώρα τρεῖς ἀριθμοὺς καὶ βρῆκα ἄθροισμα 800. Ὁ ἕνας εἶναι τὸ 500 καὶ ὁ ἄλλος τὸ 160. Ποιός εἶναι ὁ τρίτος ;

10. Ἀφαίρεσα δύο ἀριθμοὺς καὶ βρῆκα ὑπόλοιπο 247. Ὁ μειωτέος εἶναι 895. Ποιός εἶναι ὁ ἀφαιρετέος ;

7. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Νὰ ἐκτελέσετε τοὺς παρακάτω πολλαπλασιασμούς :

$\begin{array}{r} 123 \\ \times\ 3 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 215 \\ \times\ 4 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 262 \\ \times\ 3 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 108 \\ \times\ 6 \\ \hline \end{array}$

$\begin{array}{r} 274 \\ \times\ 3 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 75 \\ \times\ 12 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 59 \\ \times\ 14 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 48 \\ \times\ 19 \\ \hline \end{array}$

Προβλήματα

1. Πόσες δραχμὲς ἀξίζουν 14 κιλὰ κρέας μοσχάρι ; (Τὴν τιμή του θὰ τὴ βρῆτε στὸ τιμολόγιο τοῦ κρεοπωλείου).

Σκέψη. Ἀφοῦ τὸ ἕνα κιλοῦ κρέας ἔχει 55 δραχμές, τὰ 14 κιλὰ θὰ ἔχουν 14 × 55. Θὰ κάνωμε πολλαπλασιασμό, διότι ξέρομε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας (τοῦ ἑνὸς κιλοῦ κρέατος) καὶ θέλομε νὰ βροῦμε τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων (τῶν πολλῶν κιλῶν). Θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμὸ 55 ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ 14.

2. Ὁ κρεοπώλης πούλησε ἕνα ὁλόκληρο ἀρνὶ τοῦ γάλακτος ποὺ ζύγιζε 9 κιλά. Τὸ εἶχε ἀγοράσει πρὸς 43 δραχμὲς τὸ κιλό. Πόσες δραχμὲς τὸ ἀγόρασε, πόσες εἰσέπραξε ἀπὸ τὴν πώλησή του καὶ πόσες κέρδισε ; (Ἡ τιμὴ πωλήσεως εἶναι στὸ τιμολόγιο).

3. Ἕνα αὐτοκίνητο τρέχει μὲ ταχύτητα 65 χιλιόμετρα τὴν ὥρα. Πόσα χιλιόμετρα θὰ διατρέξη σὲ 7 ὧρες ; σὲ 9, 10, 11 ὧρες ;

4. Τὸ πετρέλαιο ποὺ καῖνε τὰ λεωφορεῖα στὶς μηχανές τους πουλιέται πρὸς 4 δραχμὲς τὸ λίτρο. Πόσες δραχμὲς ἔχουν τὰ 70 λίτρα ;

5. Μιὰ θερμάστρα καίει κατὰ μέσον ὅρο 20 κιλὰ ξύλα τὴν ἡμέρα. Πόσα κιλὰ θὰ κάψη σὲ 1 μῆνα, σὲ 2, 3 μῆνες ;

6. Σ' ἕνα περιβόλι εἶναι 35 πορτοκαλιές. Ἂν κατὰ μέσον ὅρο ἔχη 18 κιλὰ πορτοκάλια ἡ κάθε μία, πόσα κιλὰ ἔχουν ὅλες οἱ πορτοκαλιές ;

7. Ἕνα κουτὶ ἔχει 20 τσιγάρα. Σ' ἕνα δέμα ὑπάρχουν 40 κουτιά. Πόσα τσιγάρα ἔχει τὸ δέμα ;

8. Ὑπάρχουν καὶ κουτιὰ ποὺ περιέχουν 10 τσιγάρα. Πόσα τσιγάρα περιέχουν 50 τέτοια κουτιά ;

9. Πόσα λεπτὰ ἔχουν 7 ὧρες ; 10, 9, 11 ὧρες !

10. Διαιρῶ ἕναν ἀριθμὸ διὰ τοῦ 50 καὶ βρίσκω πηλίκο 20. Ποιός εἶναι ὁ ἀριθμός ;

11. Νὰ ὀχταπλασιάσης τὸ 90. Τὸ γινόμενο ποὺ θὰ βρῆς πόσο περισσότερο θὰ εἶναι ἀπὸ τὸ 500 ;

Συντομίες πολλαπλασιασμοῦ

α) Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 10 καὶ 100

1. Πόσες δραχμὲς ἔχουν 5 δεκάρικα ; 3, 4, 6 δεκάρικα ; Ἀπάντηση. $5 \times 10 = 50$, $3 \times 10 = 30$, $4 \times 10 = 40$, $6 \times 10 = 60$.

2. Πόσες δραχμὲς ἔχουν 10 δίδραχμα ; 10 πεντάδραχμα ; 10 δεκάρικα ; 10 πενηντάρικα ; 10 ἑκατοστάρικα ;

Ἀπάντηση: $10 \times 2 = 20$, $10 \times 5 = 50$, $10 \times 10 = 100$ $10 \times 50 = 500$, $10 \times 100 = 1.000$.

3. Νὰ ἐκτελέσετε τοὺς παραπάνω πολλαπλασιασμοὺς καὶ μὲ τὸ συνηθισμένο τρόπο, δηλαδὴ μὲ τὸν ἕναν παράγοντα κάτω ἀπὸ τὸν ἄλλο.

Ἐδῶ πολλαπλασιάσαμε ἀριθμοὺς ἐπὶ 10 καὶ βρήκαμε γινόμενα τοὺς ἴδιους ἀριθμοὺς μ' ἕνα μηδενικὸ στὸ τέλος.

Ὥστε, ὅταν ἔχωμε νὰ πολλαπλασιάσωμε ἕναν φυσικὸ ἀριθμὸ ἐπὶ 10, μποροῦμε νὰ μὴν κάνωμε τὸν πολλαπλασιασμό, ἀλλὰ γιὰ συντομία νὰ γράψωμε ἕνα μηδενικὸ στὸ τέλος τοῦ ἀριθμοῦ.

4. Πόσους πόντους ἔχουν 2 μέτρα, 3, 6, 10 μέτρα;
Ἀπάντηση: $2 \times 100 = 200$, $3 \times 100 = 300$, $6 \times 10 = 600$, $10 \times 100 = 1.000$.

5. Πόσες δραχμὲς ἔχουν 100 δίδραχμα; 100 πεντάδραχμα;

Ἀπάντηση: $100 \times 2 = 200$, $100 \times 5 = 500$.

6. Νὰ ἐκτελέσετε τοὺς πολλαπλασιασμοὺς καὶ μὲ τὸ συνηθισμένο τρόπο. Στὰ παραδείγματα αὐτὰ πολλαπλασιάσαμε τοὺς ἀριθμοὺς ἐπὶ 100 καὶ βρήκαμε γινόμενα τοὺς ἴδιους τοὺς ἀριθμοὺς μὲ δύο μηδενικὰ στὸ τέλος.

Ὥστε, ὅταν ἔχωμε νὰ πολλαπλασιάσωμε ἕναν φυσικὸ ἀριθμὸ ἐπὶ 100, γιὰ συντομία γράφομε στὸ τέλος τοῦ ἀριθμοῦ δύο μηδενικά.

Ἀσκήσεις

Νὰ βρῆτε ἀμέσως πόσα γίνονται:

1. 12×10, 28×10, 49×10, 63×10, 10×75 10×94.
2. 3×100, 7×100, 100×4, 100×9, 8×100 6×100.

β) Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμῶν ποὺ τελειώνουν σὲ μηδενικὰ

Παράδειγμα 1. Μιὰ ὥρα ἔχει 60 πρῶτα λεπτά. Πόσα ἔχουν οἱ 3 ὧρες ;

Ἀπάντηση : $3 \times 60 = 180$. Λέμε : $3 \times 6 = 18$· γράφομε τὸ 0 στὸ τέλος καὶ γίνεται 180. Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο νὰ βρῆτε πόσα λεπτὰ ἔχουν 5, 6, 8 ὧρες. Τί παρατηρεῖτε ;

Παράδειγμα 2. Ἕνα κουτὶ ἔχει 20 τσιγάρα. Πόσα τσιγάρα ἔχουν τὰ 30 κουτιά ;

Ἀπάντηση. $30 \times 20 = 600$.

Παρατηροῦμε ὅτι, γιὰ νὰ πολλαπασιάσωμε ἀριθμοὺς ποὺ τελειώνουν σὲ μηδενικά, παραλείπομε τὰ μηδενικὰ ἀπὸ τὸ τέλος τῶν ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζομε τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ μένουν καὶ στὸ τέλος τοῦ γινομένου γράφομε ὅσα μηδενικὰ παραλείψαμε.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο νὰ βρῆτε πόσα τσιγάρα ἔχουν τὰ 20, 40, 50 κουτιά.

Ἀσκήσεις

1. Νὰ βρῆτε ἀμέσως πόσα πρῶτα λεπτὰ ἔχουν 7, 12, 13, 14, 15, 16 ὧρες.

2. Πόσα κουμπιὰ ἔχουν 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 δωδεκάδες ;

Ὅλες οἱ παραπάνω συντομίες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μᾶς βοηθοῦν πολὺ στοὺς λογαριασμοὺς ἀπὸ μνήμης.

Πολὺ ἐπίσης μᾶς βοηθοῦν καὶ οἱ παρακάτω ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Προσεταιριστικὴ ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

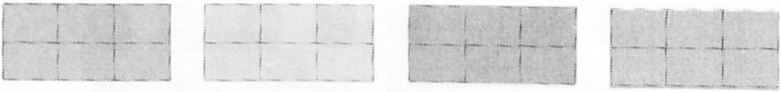
(Σχηματικὴ ἐφαρμογή)

Νὰ τοποθετήσετε 24 χρωματιστὲς μάρκες ἢ κύβους ἢ κουτιὰ σπίρτων κλπ., ὅπως δείχνουν τὰ σχήματα :

A

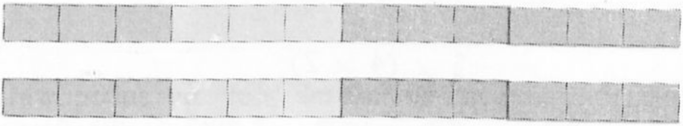
$2 \times 3 \times 4 = 24$

B



$(2 \times 3) \times 4$, δηλαδὴ $6 \times 4 = 24$

Γ



$2 \times (3 \times 4)$, δηλαδὴ $2 \times 12 = 24$

Τὸ σχῆμα Α δείχνει 2 σειρὲς μὲ 3 μάρκες ἀπὸ 4 διαφορετικὰ χρώματα, ὅλες μαζί, δηλαδὴ $2 \times 3 \times 4 = 24$.

Τὸ σχῆμα Β δείχνει 2 σειρὲς μὲ 3 μάρκες ἀπὸ τὰ ἴδια χρώματα ἀλλὰ χωριστά, δηλαδὴ $(2 \times 3) \times 4$ ἢ $6 \times 4 = 24$. Ἐδῶ πολλαπλασιάσαμε τοὺς παράγοντες 2 καὶ 3 καὶ τὸ γινόμενό τους 6 ἐπὶ 4.

Τὸ σχῆμα Γ δείχνει 2 σειρὲς χωριστές· κάθε σειρὰ ἔχει 3 μάρκες ἀπὸ 4 διαφορετικὰ χρώματα, δηλαδὴ $2 \times (3 \times 4)$ ἢ $2 \times 12 = 24$. Ἐδῶ πολλαπλασιάσαμε τοὺς παράγοντες 3 καὶ 4 καὶ κατόπιν τὸ 2 μὲ τὸ γινόμενό τους 12. Βλέπομε ὅτι $(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4)$.

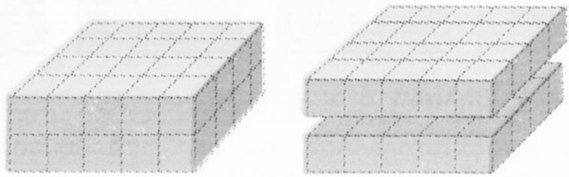
Αὐτὴ ὅπως μάθαμε εἶναι ἡ **προσεταιριστικὴ** ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Σημείωση. Κάθε μία ἀπὸ τὶς παραπάνω γραφὲς $(2 \times 3) \times 4$ καὶ $2 \times (3 \times 4)$ μπορεῖ νὰ γραφῆ κι ἔτσι: $2 \times 3 \times 4$.

Ἀσκήσεις

Νὰ παραστήσετε μὲ κύβους, κουτιὰ ἢ ἄλλα ἀντικείμενα σὲ σειρὲς τὰ παρακάτω γινόμενα : π.χ.

$5 \times 4 \times 2$, $(5 \times 4) \times 2$,



$5 \times (4 \times 2)$

α) $4 \times 3 + 5$
$(4 \times 3) \times 5$
$4 \times (3 \times 5)$

β) $6 \times 2 \times 7$
$(6 \times 2) \times 7$
$6 \times (2 \times 7)$

γ) $8 \times 4 \times 1$
$(8 \times 4) \times 1$
$8 \times (4 \times 1)$

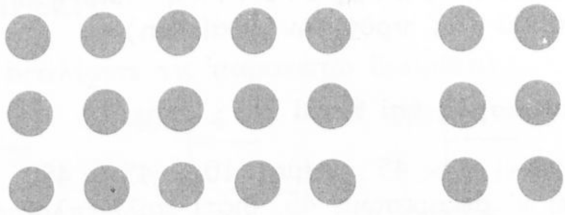
δ) $7 \times 3 \times 2$
$(7 \times 3) \times 2$
$7 \times (3 \times 2)$

Νὰ ἐκτελέσετε τώρα τὶς πράξεις. Τί βρήκατε ;

Ἐπιμεριστικὴ ἰδιότητα

(Σχηματικὴ ἐφαρμογὴ)

Παράδειγμα 1. Πόσοι εἶναι οἱ κύκλοι τοῦ σχήματος:



Μποροῦμε νὰ τοὺς ὑπολογίσωμε ἔτσι: Ἔχομε 3 σειρές· κάθε σειρὰ ἔχει $5 + 2$ κύκλους. Ἑπομένως ἔχομε $3 \times (5 + 2) = 3 \times 7 = 21$.

Μποροῦμε νὰ τοὺς ὑπολογίσωμε κι ἔτσι: Ἔχομε 3 σειρὲς ἀπὸ 5 κύκλους καὶ 3 σειρὲς ἀπὸ 2 κύκλους, δηλαδὴ $(3 \times 5) + (3 \times 2) = 15 + 6 = 21$.
Βλέπομε ὅτι $3 \times (5 + 2) = (3 \times 5) + (3 \times 2)$.

Αὐτὴ εἶναι ἡ ἐπιμεριστικὴ ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ὡς πρὸς τὴν πρόσθεση).

Τί λέτε; τὴ συναντήσαμε ὡς τώρα αὐτὴ τὴν ἰδιότητα; Μάλιστα, τὴ μεταχειριστήκαμε πάρα πολλὲς φορὲς στοὺς πολλαπλασιασμοὺς ἀπὸ μνήμης.

Παράδειγμα 1. $5 \times 14 =$; Λέμε: $5 \times 14 = 5 \times (10 + 4) = (5 \times 10) + (5 \times 4) = 50 + 20 = 70$. Πρῶτα ἀναλύσαμε τὸν παράγοντα 14 σὲ $10 + 4$.

Παράδειγμα 2. Ἀγοράσαμε 4 δοχεῖα λάδι. Κάθε δοχεῖο ἔχει μεικτὸ βάρος 17 κιλά. Ἂν τὸ ἀπόβαρο τοῦ καθενὸς εἶναι 2 κιλά, πόσο λάδι ἀγοράσαμε;

Λύση. $4 \times (17 - 2) = 4 \times 15 = 60$. Δηλαδὴ βρήκαμε τὴ διαφορὰ καὶ τὴν πολλαπλασιάσαμε ἐπὶ 4.

Ἄλλος τρόπος : $(4 \times 17) - (4 \times 2) = 68 - 8 = 60$. Δηλαδὴ βρήκαμε τὸ μεικτὸ βάρος καὶ τῶν 4 δοχείων καὶ ἀπὸ αὐτὸ ἀφαιρέσαμε τὸ ἀπόβαρο καὶ τῶν 4 δοχείων. Βλέπομε ὅτι καὶ μὲ τοὺς δύο τρόπους βρήκαμε τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα. Ἑπομένως $4 \times (17 - 2) = (4 \times 17) - (4 \times 2)$.

Αὐτὴ εἶναι ἡ ἐπιμεριστικὴ ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ὡς πρὸς τὴν ἀφαίρεση).

Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 9 καὶ 11

Πόσο κάνει 9×45 ; Λέμε : $10 \times 45 = 450$. Ἀπὸ τὸ 450 πρέπει ν' ἀφαιρέσωμε 45, διότι πολλαπλασιάσαμε 10 φορὲς τὸ 45, ἐνῶ ἔπρεπε νὰ τὸ πολλαπλασιάσωμε 9 φορές· ἔτσι ἔχομε $450 - 45 = 405$. Ὥστε $9 \times 45 = 405$. Μὲ παρόμοιο τρόπο βρίσκομε πολὺ σύντομα πόσο κάνει 11×45. Λέμε πάλι $10 \times 45 = 450$. Τώρα θὰ προσθέσωμε καὶ 45 ἀκόμη, διότι πρέπει νὰ πάρωμε 11 φορὲς τὸ 45, ἐνῶ μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸ τὸ πήραμε μόνο 10 φορές· ἔτσι ἔχομε $450 + 45 = 495$.

Ὥστε βρίσκομε εὔκολα ἀπὸ μνήμης ὅτι $11 \times 45 = 495$.

Συμπεράσματα

1. Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε ἕνα ἀριθμὸ ἐπὶ 9, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμὸ ἐπὶ 10 καὶ ἀπὸ τὸ γινόμενο ἀφαιροῦμε τὸν ἀριθμὸ αὐτό.

2. Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε ἕναν ἀριθμὸ ἐπὶ 11, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμὸ ἐπὶ 10 καὶ στὸ γινόμενο προσθέτομε τὸν ἀριθμὸ αὐτό.

Ἀσκήσεις

1. Τὸ κιλὸ τὸ λάδι ἔχει 34 δραχμές. Πόσο ἔχουν τὰ 9 κιλά ; τὰ 11 κιλά ;

2. Ἕνα μέτρο κορδέλα ἔχει 9 δραχμές. Πόσο ἔχουν τὰ 27, 32, 58, 64 μέτρα ;

3. Ἕνα ζεῦγος παιδικὲς κάλτσες ἔχει 11 δραχμές. Πόσο ἔχουν τὰ 7, 18, 32, 48, 86 ζεύγη ;

8. ΔΙΑΙΡΕΣΗ

Νὰ ἐκτελέσετε τὶς παρακάτω διαιρέσεις :

148 | 2	406 | 4	619 | 6	743 | 9
372 | 12	658 | 15	1.000 | 25	
375 | 20	514 | 30	763 | 41	982 | 45
421 | 50	897 | 28	573 | 36	

Προβλήματα

1. Τὰ 3 μέτρα ὕφασμα ἀξίζουν 960 δραχμές. Πόσο ἀξίζει τὸ 1 μέτρο ;

Σκέψη. Ἀφοῦ τὰ 3 μέτρα ἀξίζουν 960 δραχμές, τὸ 1 μέτρο θ' ἀξίζη 3 φορὲς λιγότερο. Θὰ κάνωμε διαίρεση. Θὰ διαιρέσωμε τὶς 960 δραχμὲς σὲ 3 ἴσα μέρη. Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ξέρομε τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων (τῶν πολλῶν μέτρων) καὶ θέλομε νὰ βροῦμε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας (τοῦ ἑνὸς μέτρου).

Ἡ διαίρεση αὐτὴ εἶναι μερισμός. Στὸν μερισμὸ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι ἑτεροειδεῖς ἀριθμοί.

2. Ἕνας παντοπώλης ἀγόρασε 40 κιλὰ ζάχαρη καὶ πλήρωσε 920 δραχμές. Πόσο ἀγόρασε τὸ κιλό ;

3. 224 παιδιὰ πᾶνε ἐκδρομή, μοιρασμένα ἐξίσου σὲ 7

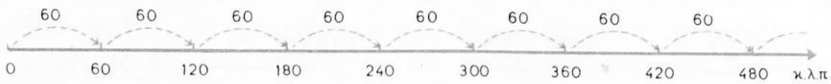
λεωφορεῖα. Πόσα παιδιὰ εἶναι σὲ κάθε λεωφορεῖο ;

4. Ἡ περίμετρος ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 840 ἑκατοστόμετρα. Πόσα ἑκατοστόμετρα εἶναι ἡ μιὰ πλευρά του ;

5. Νὰ βρῆτε πόσα εἶναι τὸ μισὸ τοῦ 1.000, τὸ ἕνα τέταρτο τοῦ 1.000 καὶ τὸ ἕνα πέμπτο τοῦ 1.000.

6. Πόσες ὧρες κάνουν 930 πρῶτα λεπτά ;

Σκέψη. Ἀφοῦ τὰ 60 πρῶτα λεπτὰ κάνουν 1 ὥρα, τὰ 930 λεπτὰ κάνουν τόσες ὧρες, ὅσες φορὲς τὸ 60 χωράει στὸ 930· δηλαδὴ θὰ χωρίσωμε τὰ 930 λεπτὰ σ' ἑξηντάρια, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα, κι ἔπειτα θὰ μετρήσωμε πόσα εἶναι.



Ἐδῶ ξέρομε τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων (τῶν πολλῶν ὡρῶν) καὶ τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας (τῆς μιᾶς ὥρας) καὶ θέλομε νὰ βροῦμε πόσες εἶναι αὐτὲς οἱ μονάδες.

Ἡ διαίρεση αὐτὴ εἶναι μέτρηση. Στὴ μέτρηση ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι ὁμοειδεῖς ἀριθμοί.

7. Ἕνα αὐτοκίνητο καίει ἕνα λίτρο βενζίνης κάθε 12 χιλιόμετρα. Πόσα λίτρα θὰ κάψη στὰ 840 χιλιόμετρα ;

8. Σὲ πόσες ὧρες τὸ αὐτοκίνητο θὰ διατρέξη τὰ χιλιόμετρα αὐτά, ἂν τρέχη μὲ ταχύτητα 60 χιλιόμετρα τὴν ὥρα ;

9. Ἕνα χιλιάρικο πόσα εἰκοσάδραχμα ἔχει ; πόσα πεντάδραχμα ; πόσα πενηντάρια ;

10. Πολλαπλασίασα ἕναν ἀριθμὸ ἐπὶ 40 καὶ βρῆκα 800. Ποιός εἶναι ὁ ἀριθμός ;

Διαίρεση διὰ τοῦ 10 καὶ 100

Παράδειγμα 1. Πόσα δεκάρικα κάνουν οἱ 145 δραχμές ; Στηριζόμαστε στὸ 100 ποὺ ἔχει 10 δεκάρικα κι εὔκολα βρίσκομε ὅτι οἱ 145 δραχμὲς κάνουν 14 δεκάρικα καὶ περισσεύουν 5 δραχμές· δηλαδὴ 145 : 10 δίδει πηλίκο 14 καὶ ὑπόλοιπο 5.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο βρίσκομε ὅτι 213 δραχμὲς κάνουν

21 δεκάρικα καὶ περισσεύουν 3 δραχμές· δηλαδὴ 213 : 10 δίνει πηλίκο 21 καὶ ὑπόλοιπο 3.

Βλέπομε ὅτι μποροῦμε νὰ βροῦμε ἀμέσως τὸ πηλίκο, χωρίζοντας τὸ τελευταῖο ψηφίο τοῦ διαιρετέου (τὸ ψηφίο τῶν μονάδων). Ὅπως ξέρομε, ὅταν χωρίσωμε τὶς μονάδες, ὁ ἀριθμὸς ποὺ ἀπομένει φανερώνει δεκάδες.

Ὥστε, γιὰ νὰ διαιρέσωμε ἕναν ἀκέραιο διὰ τοῦ 10, γιὰ συντομία χωρίζομε ἕνα ψηφίο ἀπὸ τὸ τέλος τοῦ ἀριθμοῦ. Ὁ ἀριθμὸς ποὺ ἀπομένει ἀριστερὰ εἶναι τὸ πηλίκο. Ὁ ἀριθμὸς (τὸ τελευταῖο ψηφίο) ποὺ χωρίσαμε δεξιὰ εἶναι τὸ ὑπόλοιπο.

Νὰ ἐκτελέσετε τὶς παραπάνω διαιρέσεις μὲ τὸν συνηθισμένο τρόπο, γιὰ νὰ βεβαιωθῆτε.

Ἄσκηση

Τὸ ἀλεύρι ἔχει 10 δραχμὲς τὸ κιλό. Πόσα κιλὰ ἀγοράζομε μὲ 200, 310, 423, 580, 794 δραχμές ;

Παράδειγμα 2. Πόσα ἑκατοστάρικα κάνουν 300 δραχμές; 425, 550, 870, 936 δραχμές;

Νὰ τὸ βρῆτε ἀπὸ μνήμης καὶ μετὰ νὰ σημειώσετε τὶς πράξεις.

Τί παρατηρεῖτε ; Νὰ ἐκτελέσετε τὶς πράξεις καὶ μὲ τὸ συνηθισμένο τρόπο, γιὰ νὰ βεβαιωθῆτε.

Ὥστε, ὅταν ἔχωμε νὰ διαιρέσωμε ἕναν ἀκέραιο διὰ τοῦ 100, γιὰ συντομία χωρίζομε δύο ψηφία, ἀπὸ τὸ τέλος τοῦ ἀριθμοῦ. Ὁ ἀριθμὸς ποὺ ἀπομένει ἀριστερὰ εἶναι τὸ πηλίκο. Ὁ ἀριθμὸς ποὺ σχηματίζουν τὰ 2 ψηφία ποὺ χωρίσαμε εἶναι τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως.

Ἀσκήσεις

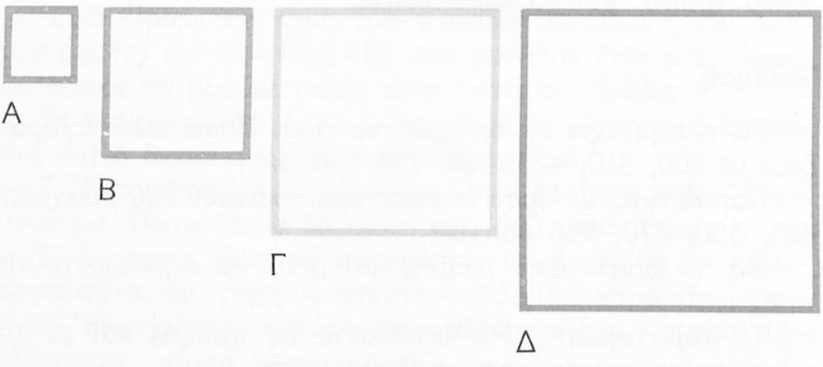
1. Πόσα μέτρα κάνουν οἱ 400 πόντοι ; οἱ 750, 640, 218, 913 πόντοι ;

2. Μὲ 100 δραχμὲς βγάζομε ἕνα ἐκδρομικὸ εἰσιτήριο. Πόσα εἰσιτήρια βγάζομε μὲ 500 δραχμές ; μὲ 700, 900, 850, 425, 675, 342 δραχμές ;

9. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

Ἐργασίες

1. Νὰ σχεδιάσετε ἕνα τετράγωνο μὲ πλευρὰ 1 ἑκατοστόμετρο (σχῆμα Α). Αὐτὸ λέγεται τετραγωνικὸ ἑκατοστόμετρο. Νὰ κάμετε ἕνα ἄλλο μὲ διπλάσια πλευρὰ (σχ. Β), ἕνα ἄλλο μὲ τριπλάσια πλευρὰ (σχ. Γ) κι ἕνα τέταρτο μὲ τετραπλάσια (σχῆμα Δ).



Νὰ ὑπολογίσετε μὲ τὸ μάτι πόσες φορὲς τὸ μικρὸ τετράγωνο χωράει στὸ Β, πόσες στὸ Γ καὶ πόσες στὸ Δ.

Γιὰ νὰ βεβαιωθῆτε ὅτι κάματε σωστὸ ὑπολογισμό, νὰ κάμετε ἀπὸ χαρτόνι τὸ μικρὸ τετράγωνο Α καὶ νὰ τὸ τοποθετήσετε πάνω στ' ἄλλα, γιὰ νὰ δῆτε πόσες φορὲς χωράει στὸ καθένα. Τὸ μικρὸ θὰ εἶναι ἡ μονάδα σας, γιὰ νὰ μετρήσετε τὴν ἐπιφάνεια τῶν τριῶν ἄλλων. Κάθε φορὰ ποὺ θὰ τὸ τοποθετῆτε, νὰ σημειώνετε μὲ τὸ μολύβι σας πόσο μέρος πιάνει.

2. Τὸ τετράγωνο Β πόσες φορὲς χωράει στὸ τετράγωνο Γ ; πόσες στὸ Δ ;

Ε

3. Νὰ σχεδιάσετε ἕνα ὀρθογώνιο (σχῆμα Ε) μὲ μεγάλη πλευρὰ 5 ἑκατοστόμετρα καὶ μικρὴ 3 καὶ νὰ ὑπολογίσετε μὲ τὸ μάτι πόσα τετραγωνικὰ ἑκατοστόμετρα χωράει. Ἔπειτα νὰ τὸ μετρήσετε, γιὰ νὰ βεβαιωθῆτε.

4. Νὰ σχεδιάσετε ἕνα τετράγωνο μὲ πλευρὰ 3 ἑκατοστόμετρα κι ἕνα ἄλλο μὲ διπλάσια πλευρά. Νὰ βρῆτε πόσα ἑκατοστόμετρα εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ πρώτου καὶ πόσα ἡ περίμετρος τοῦ δευτέρου. Καὶ νὰ ὑπολογίσετε μὲ τὸ μάτι πόσες φορὲς τὸ πρῶτο χωράει μέσα στὸ δεύτερο. Νὰ κόψετε ἔπειτα ἀπὸ χαρτόνι τὸ πρῶτο καὶ νὰ τὸ τοποθετήσετε πάνω στὸ δεύτερο, γιὰ νὰ βεβαιωθῆτε.

5. Νὰ σχεδιάσετε ἕνα ὀρθογωνιο μὲ μεγάλη πλευρὰ 5 ἑκ. καὶ μικρὴ πλευρὰ 4 ἑκ. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του ; Ἂν μεγαλώσωμε τὴ μεγάλη πλευρὰ κατὰ 1 ἑκ. καὶ μικρύνωμε τὴ μικρὴ κατὰ 1 ἑκ., τί ὀρθογώνιο θὰ ἔχωμε ; Νὰ τὸ σχεδιάσετε.

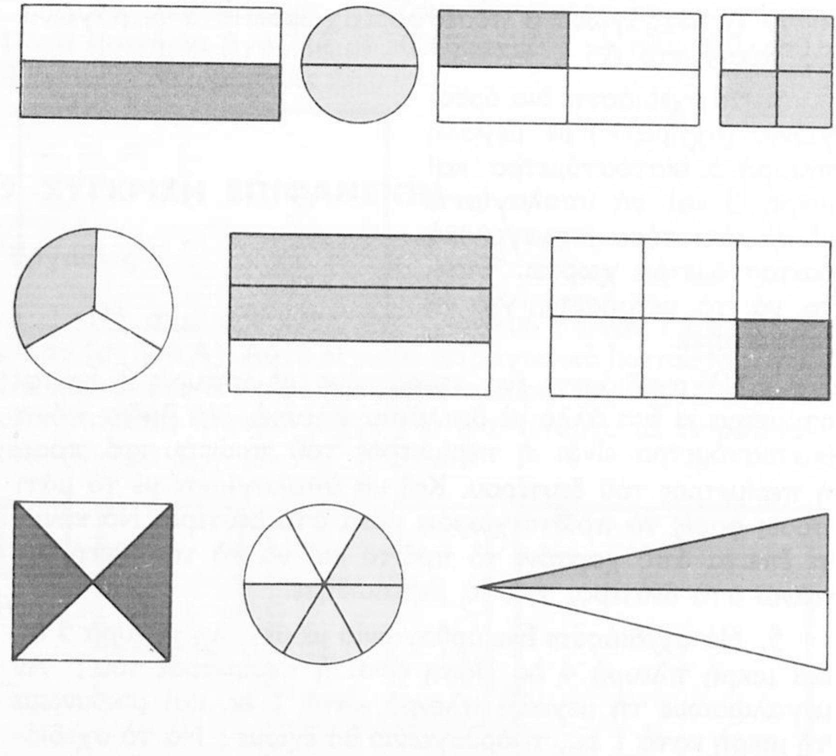
Τί λέτε ; Πόση θὰ εἶναι ἡ περίμετρός του ;

10. ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Χωρίζομε σχήματα σὲ ἴσα μέρη

Τὰ παρακάτω σχήματα εἶναι χωρισμενα σὲ ἴσα μέρη.

Τὸ ὀρθογώνιο τῆς πρώτης σειρᾶς εἶναι χωρισμένο σὲ 2 μέρη. Τὸ ἕνα ἀπὸ αὐτὰ εἶναι χρωματισμένο. Ὥστε τὸ μισὸ $\left(\frac{1}{2}\right)$ τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι χρωματισμένο. Τὸ ἑπόμενο σχῆμα



εἶναι κύκλος. Ἐδῶ χρωματισμένα εἶναι τὰ $\frac{2}{2}$ τοῦ κύκλου.

Στὸ τρίτο σχῆμα χρωματισμένο εἶναι τὸ ἕνα τέταρτο $\left(\frac{1}{4}\right)$ τοῦ ὀρθογωνίου. Στὸ ἄλλο σχῆμα χρωματισμένα εἶναι τὰ τρία τέταρτα $\left(\frac{3}{4}\right)$ τοῦ τετραγώνου.

Βλέπετε ; ἕνα κλάσμα δὲν εἶναι οὔτε φυσικὸς οὔτε ἀκέραιος ἀριθμός.

Νὰ βρῆτε πόσο εἶναι τὸ χρωματισμένο μέρος στ' ἄλλα σχήματα καὶ νὰ γράψετε τὸ κλάσμα.

Νὰ κάμετε κι ἐσεῖς τέτοια σχήματα, νὰ τὰ χωρίσετε σὲ ἴσα μέρη καὶ νὰ γράψετε τὸ κλάσμα.

Ἄλλες ἐργασίες

1. Νὰ διπλώσετε καὶ νὰ κόψετε τὴ χάρτινη μετροταινία σας σὲ δεύτερα, σὲ τέταρτα, σὲ ὄγδοα, σὲ πέμπτα, σὲ δέκατα, σὲ τρίτα, σὲ ἕκτα. Νὰ γράφετε μὲ κλάσμα πόσα παίρνετε κάθε φορὰ ἀπὸ τὰ δεύτερα, ἀπὸ τὰ τέταρτα, ἀπὸ τὰ πέμπτα κλπ.

2. Νὰ κάμετε τὶς ἴδιες ἐργασίες μὲ φύλλα χαρτιοῦ, μὲ καρποὺς (μῆλα κλπ.).

3. Παρόμοιες ἐργασίες ἔχετε κάμει μὲ τὰ σακουλάκια τοῦ κιλοῦ. Νὰ γράψετε μὲ κλάσμα τὰ μέρη τοῦ κιλοῦ.

4. Νὰ γράψετε μὲ κλάσμα τί μέρος τῆς δραχμῆς εἶναι τὸ πενηνταράκι καὶ τί μέρος εἶναι ἡ 1 δεκάρα, 2, 3, 4, 5 δεκάρες.

5. Τί μέρος τοῦ δεκάρικου εἶναι τὸ πεντάδραχμο ; τὰ 2 πεντάδραχμα ; τὰ 3 ; τὰ 4 ;

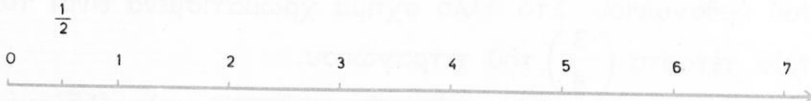
6. Τί μέρος τοῦ ἑκατοστάρικου εἶναι τὸ 1 πενηντάρι ; τὰ 2 πενηντάρια ; τὰ 3, 4, 5 πενηντάρια ;

7. Τί μέρος τοῦ κιλοῦ εἶναι τὰ 100 γραμμάρια ; τὰ 200, 400, 700, 1.000 γραμμάρια ;

8. Πόσες δραχμὲς εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ χιλιάρικου ; τὸ $\frac{1}{4}$, τὸ

$\frac{1}{5}$, τὰ $\frac{3}{5}$, τὸ $\frac{1}{10}$, τὰ $\frac{4}{10}$, τὸ $\frac{1}{8}$ τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ χιλιάρικου;

9. Στὴν παρακάτω ἀριθμητικὴ γραμμὴ τὸ μέρος ἀπὸ τὸ



0 ὡς τὸ 1 εἶναι χωρισμένο σὲ 2 δεύτερα $\left(\frac{2}{2}\right)$. Σημείωσα τὸ $\frac{1}{2}$. Ἐκεῖ ποὺ εἶναι τὸ 1 πρέπει νὰ σημειώσετε τὰ $\frac{2}{2}$. Ποῦ θὰ σημειώσετε τὰ $\frac{3}{2}$; τὰ $\frac{4}{2}$; Συνεχίστε ὡς τὸ τέλος τῆς γραμμῆς.

Τὰ $\frac{2}{2} = 1$. Τὰ $\frac{3}{2} = 1$ καὶ $\frac{1}{2}$. Συνεχίστε ὡς τὸ τέλος τῆς γραμμῆς. Ἀπὸ τὸ $\frac{1}{2}$ ὡς τὸ 2 καὶ $\frac{1}{2}$ εἶναι 2. Πόσα εἶναι ἀπὸ τὸ $\frac{1}{2}$ ὡς τὸ 4 καὶ $\frac{1}{2}$; πόσα ἀπὸ τὸ 3 ὡς τὸ 5 καὶ $\frac{1}{2}$; πόσα ἀπὸ τὸ 3 καὶ $\frac{1}{2}$ ὡς τὸ 7 ;

II. ΔΙΑΦΟΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ἑλληνικὸς Τουρισμὸς

Σ' ἕναν τουριστικὸ ὁδηγὸ διαβάζομε.

1. Ὁδικὲς ἀποστάσεις μεταξὺ διάφορων πόλεων τῆς Ἑλλάδας.

Ἀθήνα - Λαμία	212 χιλιόμετρα
Λαμία - Λάρισα	114 »

Λάρισα - Θεσσαλονίκη	188	χιλιόμετρα
Θεσσαλονίκη -᾿Αλεξανδρούπολη	351	»
᾿Αθήνα -᾿Αγρίνιο	295	»
᾿Αγρίνιο - Πρέβεζα	146	»
Πρέβεζα -᾿Ιωάννινα	107	»

2. ᾿Αποστάσεις σιδηροδρομικῶν σταθμῶν Πενοποννήσου.

᾿Αθήνα - Κόρινθος	91	χιλιόμετρα
Κόρινθος - Αἴγιο	91	»
Αἴγιο - Πάτρα	40	»
Πάτρα - Πύργος	99	»
Πύργος - Καλαμάτα	117	»

3. ᾿Αποστάσεις λιμανιῶν τῆς ῾Ελλάδας.

᾿Από	τὸν	Πειραιὰ ὡς τὸν Βόλο	93	μίλια
»	»	Βόλο ὡς τὴ Θεσσαλονίκη	130	»
»	τὴ	Θεσσαλονίκη ὡς τὴν Καβάλα	155	»
»	τὸν	Πειραιᾶ ὡς τὴν Τῆνο	72	»
»	»	Πειραιὰ ὡς τὰ Χανιὰ	148	»
»	»	Πειραιὰ ὡς τὸ ῾Ηράκλειο	178	»

Νὰ κάμετε ἕνα χάρτη τῆς ῾Ελλάδας καὶ νὰ σημειώσετε τὶς παραπάνω πόλεις. Τώρα νὰ βρῆτε :

1. Πόσα χιλιόμετρα θὰ διατρέξη τὸ λεωφορεῖο ἀπὸ τὴν ᾿Αθήνα ὡς τὴ Λάρισα μέσο Λαμίας ;

2. Πόσα μένουν ἀκόμη νὰ διατρέξη ἀπὸ τὴ Λάρισα ὡς τὴ Θεσσαλονίκη -᾿Αλεξανδρούπολη ;

3. ῞Ενας σιδηρόδρομος πηγαίνει ἀπὸ τὴν ᾿Αθήνα στὴν Καλαμάτα. Πόσα χιλιόμετρα θὰ κάμη ὡς τὴν Πάτρα ; πόσα ἀπὸ τὴν Πάτρα ὡς τὴν Καλαμάτα ; καὶ πόσα ἀπὸ τὴν ᾿Αθήνα στὴν Καλαμάτα ;

4. Τὸ λεωφορεῖο ποὺ πῆγε ἀπὸ τὴν ᾿Αθήνα στὴ Θεσσαλονίκη ἢ ὁ σιδηρόδρομος ποὺ πῆγε ἀπὸ τὴν ᾿Αθήνα στὴν Καλαμάτα διέτρεξε περισσότερα χιλιόμετρα καὶ πόσα ;

5. Νὰ βρῆτε τὴ διαφορὰ τῶν χιλιομετρικῶν ἀποστάσεων ᾿Αθήνας - Λαμίας καὶ Θεσσαλονίκης - Λάρισας.

6. Ἐπίσης τὴ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων Ἀθήνας - Ἀγρινίου καὶ Ἰωαννίνων - Πρέβεζας.

7. Πόσα χιλιόμετρα εἶναι ἀπὸ τὰ Ἰωάννινα στὴν Ἀθήνα μέσο Πρέβεζας - Ἀγρινίου ;

8. Πόσα μίλια εἶναι τὸ ταξίδι ἀπὸ τὸν Πειραιὰ στὰ Χανιὰ μ' ἐπιστροφή ; πόσα ἀπὸ τὸν Πειραιὰ στὸ Ἡράκλειο μ' ἐπιστροφή ;

9. Πόσα μίλια εἶναι ἀπὸ τὴ Θεσσαλονίκη στὸν Πειραιὰ μέσο Βόλου ;

10. Ποιὰ ἀπόσταση εἶναι μεγαλύτερη ; ἀπὸ τὴν Καβάλα στὴ Θεσσαλονίκη ἢ ἀπὸ τὸν Πειραιὰ στὴν Τῆνο μὲ ἐπιστροφή ; καὶ πόσο ;

11. Ἕνα λεωφορεῖο τρέχει μὲ ταχύτητα 70 χιλιόμετρα τὴν ὥρα. Σὲ πόσες ὧρες θὰ φτάση ἀπὸ τὴν Ἀθήνα στὴ Λαμία καὶ σὲ πόσες ἀπὸ τὴ Λαμία στὴ Θεσσαλονίκη, περνώντας ἀπὸ τὴ Λάρισα, ἂν διατηρῆ τὴν ἴδια ταχύτητα ;

12. Τὸ πλοῖο «Σοφία» πλέει μὲ ταχύτητα 15 μίλια τὴν ὥρα. Πόσες ὧρες θὰ κάμη ἀπὸ τὸν Πειραιὰ στὸ Ἡράκλειο ; Πόσα μίλια θὰ διανύση σὲ 5 ὧρες ; πόσα σὲ 10, 9, 11 ὧρες ;

13. 15 ἐκδρομικὰ λεωφορεῖα πῆγαν ἀπὸ τὴν Ἀλεξανδρούπολη στὴ Θεσσαλονίκη μὲ 36 ἐκδρομεῖς τὸ καθένα. Πόσοι ἐκδρομεῖς ταξίδεψαν μὲ τὰ λεωφορεῖα ; Καὶ σὲ πόσες ὧρες ἔφτασαν, ἂν τὰ λεωφορεῖα ἔτρεχαν κατὰ μέσον ὅρο 70 χιλιόμετρα τὴν ὥρα ;

14. Μὲ τὴν ἴδια ταχύτητα πόσα χιλιόμετρα θὰ διανύσουν σὲ 10, 9, 11 ὧρες ;

15. Τὸ εἰσιτήριο ἀπὸ τὴν Ἀθήνα στὴ Θήβα μὲ τὸ λεωφορεῖο ἔχει 34 δραχμὲς καὶ ἀπὸ τὴ Θήβα στὴ Λεβαδειὰ 9 δραχμές. Ἕνα λεωφορεῖο ξεκίνησε ἀπὸ τὴν Ἀθήνα γιὰ τὴ Λεβαδειὰ μὲ 36 ἐπιβάτες. Οἱ 24 κατέβηκαν στὴ Θήβα. Πόσα χρήματα πλήρωσαν συνολικὰ οἱ ἐπιβάτες ;

16. Κάμετε κι ἐσεῖς ὅμοια προβλήματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΟΙ ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΠΟ ΤΟ 1.000 ΕΩΣ ΤΟ 2.000

Ι. ΑΙΣΘΗΤΟΠΟΙΗΣΗ, ΑΡΙΘΜΗΣΗ

Σχηματισμὸς τῆς δεύτερης χιλιάδας μ' ἑκατοντάδες

1. Τοποθετῆστε στὴν αὐλὴ 10 ξύλινα μέτρα στὴ σειρά. Θὰ ἔχετε μιὰ χιλιάδα πόντους. Τοποθετῆστε ἀκόμη ἕνα μέτρο. Θὰ ἔχετε τώρα μιὰ χιλιάδα κι ἑκατὸ πόντους, δηλαδὴ χίλιους ἑκατὸ (1.100). Ἂν βάλετε ἀκόμη ἕνα, θὰ ἔχετε 1.200 πόντους. Συνεχίστε, ὥσπου νὰ τοποθετήσετε 20 μέτρα συνολικά. Κάθε φορὰ θὰ λέτε πόσους πόντους ἔχουν τὰ μέτρα καὶ θὰ γράφετε τοὺς ἀριθμούς.

2. Χρησιμοποιῆστε κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο μετροταινία τῶν 20 μέτρων, ξυλάκια σὲ δεσμίδες (ἑκατοντάδες), ἑκατοντάδες κύκλων.

3. Ἕνα κιλὸ (σακουλάκι μὲ ὄσπρια, σιτάρι κλπ.) ἔχει

1.000 γραμμάρια. Νὰ τοποθετήσετε δίπλα ἕνα σακουλάκι τῶν 100 γραμμαρίων. Πόσα γραμμάρια θὰ ἔχετε ; Νὰ συνεχίσετε τοποθετώντας τέτοια σακουλάκια ἕνα ἕνα, ὥσπου νὰ φτάσετε στὶς 2 χιλιάδες (2.000) γραμμάρια.

4. Πόσες δραχμὲς ἔχουν 11, 12, 13. . . 20 ἑκατοστάρικα ;

5. Πόσα ἑκατοστάρικα ἔχουν 1.100, 1.200, 1.300, 1.500, 1.800, 2.000 δρχ. ;

6. Πόσα μέτρα κάνουν 1.100, 1.200, 1.300 . . . 2.000 πόντοι ;

7. Ν' ἀνεβῆτε ἀνὰ 100 ἀπὸ τὸ 1.000 ὡς τὸ 2.000 καὶ νὰ κατεβῆτε· ἔπειτα ἀνὰ 200· ὕστερα ἀνὰ 300.

Ἀρίθμηση μὲ πεντηκοντάδες ἀπὸ τὸ 1.000 ὡς τὸ 2.000

1. Δείχνοντας τ' ἀντικείμενά σας ν' ἀνεβῆτε ἀνὰ 50 ἀπὸ τὸ 1.000 ὡς τὸ 2.000· δηλαδὴ 1050, 1100, 1150 κλπ. Ἔπειτα νὰ κατεβῆτε.

2. Πόσα πενηντάρια ἔχουν 10, 11, 13, 16, 19 20 ἑκατοστάρικα ;

3. Πόσες δραχμὲς ἔχουν 10, 11, 12, . . . 40 πενηντάρια ; Ἀντίθετα τώρα· πόσα πενηντάρια μᾶς κάνουν 1.000, 1.050, 1.150, 1.400, 1.850 δρχ. ;

4. Πόσες δραχμὲς ἔχουν 1 χιλιάρικο, 3 ἑκατοστάρικα καὶ 9 πενηντάρια ;

5. Πόσους πόντους ἔχουν τὰ 10 καὶ μισὸ μέτρα ; Τὰ 13 καὶ μισό ; Τὰ 17 καὶ μισό ; Τὰ 15 καὶ μισό ; Τὰ 19 καὶ μισό ;

Ἀρίθμηση ἀνὰ 10 καὶ 25 ἀπὸ τὸ 1.000 ὡς τὸ 2.000

1. Ἀνεβῆτε ἀνὰ 10 ἀπὸ τὸ 1.000 ὡς τὸ 2.000. Δηλαδὴ 1.010, 1.020, 1.030 κλπ. Νὰ γράψετε τοὺς ἀριθμοὺς αὐτούς. Χρησιμοποιῆστε μετροταινία 2 μέτρων, στὴν ὁποία θὰ δείχνετε ἀνὰ 10 χιλιοστά· ἐπίσης δεσμίδες, ξυλάκια κλπ.

2. Νὰ κατεβῆτε ἀνὰ 10. Χρησιμοποιῆστε τὰ ἴδια ἀντικείμενα.

3. Δείχνοντας χιλιοστὰ τοῦ μέτρου, ν' ἀνεβῆτε καὶ νὰ

κατεβῆτε ἀνὰ 25· δηλαδὴ 1.025, 1.050, 1.075, 1.100, 1.125 κλπ. καὶ 2.000, 1.975, 1.950, 1.925 κλπ. Νὰ γράψετε τοὺς ἀριθμοὺς αὐτούς.

4. Ἂν κόψετε τὴ χάρτινη μετροταινία σας σὲ 4 ἴσα μέρη, πόσους πόντους θὰ ἔχη τὸ καθένα ; Πόσους πόντους ἔχουν 10, 20. 40, 50, 64, 68, 76, 80 τέτοια κομμάτια ; Στηριχτῆτε στὸ 10, γιὰ νὰ βρῆτε τὰ ἐξαγόμενα ἀμέσως.

Ἀριθμητικὲς σειρὲς

Ν' ἀνεβῆτε καὶ νὰ κατεβῆτε ἀνὰ 20 ἀπὸ τὸ 1.000 ὡς τὸ 2.000· ἐπίσης ἀνὰ 30, 40, 60, 70, 80, 90. Νὰ γράψετε τὶς σειρὲς αὐτές.

Σημείωση: Ἡ γραφὴ τῶν ἀκεραίων ἀπὸ τὸ 1.000 ὡς τὸ 2.000 εἶναι πολὺ εὔκολη. Ὅποιος ξέρει νὰ γράφη τοὺς ἀκεραίους ὡς τὸ 1.000, ξέρει νὰ γράφη καὶ τοὺς ἀκεραίους ὡς τὸ 2.000.

Οἱ ἀκέραιοι ἀπὸ τὸ 100 ὡς τὸ 999 εἶναι τριψήφιοι. Ἀπὸ τὸ 1.000 ὡς τὸ 2.000 εἶναι τετραψήφιοι.

Τὸ σχῆμα δείχνει τὴ θέση τῶν μονάδων (Μ), τῶν δεκάδων (Δ), τῶν ἑκατοντάδων (Ε) καὶ τῶν χιλιάδων (Χ). Ὅπου δὲν ὑπάρχουν ἑκατοντάδες ἢ δεκάδες ἢ μονάδες γράφομε μηδέν.

Χ.	Ε.	Δ.	Μ.
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Μέτρηση καὶ ἐκτίμηση ἀποστάσεων

1. Νὰ μετρήσετε ἀπόσταση 1.000 μέτρων. Νὰ συνεχίσετε τὴ μέτρηση, ὥσπου νὰ μετρήσετε 1.000 ἀκόμη μέτρα, δηλαδὴ ἕνα ἀκόμη χιλιόμετρο. Νὰ χωρίσετε τὸ καθένα χιλιόμετρο σὲ μισά. Θὰ ἔχετε 4 μισὰ χιλιόμετρα. Πόσα μέτρα θὰ ἔχη τὸ μισὸ χιλιόμετρο ;

2. Μὲ τὴ βοήθεια τῶν μετρήσεων ποὺ ἔχετε κάμει νὰ ἐκτιμήσετε μὲ τὸ μάτι ἀποστάσεις 1 χιλιομέτρου, 2 χιλιομέτρων, 500 μέτρων, 700, 1.200, 1.300 μέτρων.

3. Νὰ βαδίσετε μὲ βῆμα κανονικὸ ἀπόσταση 1 χιλιομέτρου καὶ νὰ κοιτάξετε πόσα λεπτὰ τῆς ὥρας χρειαστήκατε. Νὰ κάμετε τὸ ἴδιο καὶ σὲ 2 χιλιόμετρα.

4. Οἱ τηλεγραφικοὶ στύλοι τοποθετοῦνται κάθε 40 μέτρα. Πόσους θὰ χρειαστοῦμε γιὰ μιὰ ἀπόσταση 2 χιλιομέτρων ;

5. Ἀπὸ ἕνα λόφο ἢ ἄλλη κατάλληλη θέση νὰ ὑπολογίσετε μὲ τὸ μάτι ἕνα πολὺ μεγάλο τετράγωνο, ποὺ νὰ ἔχη μάκρος ἕνα χιλιόμετρο. Αὐτὸ εἶναι τὸ τετραγωνικὸ χιλιόμετρο.

2. ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ ΑΠΟ ΤΟ 1.000 ΩΣ ΤΟ 2.000

Καὶ στοὺς τετραψήφιους ἀκεραίους οἱ 4 πράξεις γίνονται ἀκριβῶς, ὅπως καὶ στοὺς τριψήφιους.

Ἀσκήσεις

Πρόσθεση

1. Γραπτῶς

980	1.040	1.248	1.743	497	518
250	150	596	87	1.018	603
+697	+ 98	+ 89	+100	+ 75	+ 49

2. Ἀπὸ μνήμης

Παράδειγμα : 792 + 485 + 628 = ;

Λύση. 700 καὶ 400 κάνουν 1.100· καὶ 600 κάνουν 1.700· καὶ 90 κάνουν 1.790· καὶ 80 (μὲ ἀνάλυση τοῦ 80 σὲ 10 καὶ 70) κάνουν 1870· καὶ 20 κάνουν 1.890· καὶ 2 κάνουν 1892· καὶ 5 κάνουν 1.897· καὶ 8 (μὲ ἀνάλυση τοῦ 8 σὲ 3 καὶ 5) κάνουν 1.905.

Ἄλλος τρόπος (μὲ ἀνάλυση τοῦ 628, δηλαδὴ μὲ ἀντιμετάθεση καὶ προσεταιρισμό). $792 + 485 + 628 = 792 + 485 + 8 + 605 + 15 = (792 + 8) + (485 + 15) + 605 = 800 + 500 + 605 = 1.905$.

Ἄλλος τρόπος :

α) $700 + 400 + 600 = 1.700$

β) $92 + 85 + 28 = 92 + 85 + 8 + 15 + 5 = (92 + 8) + (85 + 15) + 5 = 100 + 100 + 5 = 205$.

γ) $1.700 + 205 = 1.905$.

Ἄλλος τρόπος. (Προσθέτομε τὶς μονάδες κάθε τάξης χωριστὰ καὶ ὕστερα προσθέτομε τ' ἀθροίσματα).

α) $700 + 400 + 600 = 1.700$ β) $90 + 80 + 20 = 190$

γ) $2 + 5 + 8 = 15$ δ) $1.700 + 190 + 15 = 1.905$

Νὰ λύσετε τὶς παρακάτω ἀσκήσεις ἀπὸ μνήμης μὲ ὅποιον τρόπο θέλετε.

170 + 230 + 285 + 115	1.007 + 315 + 183 + 205
147 + 375 + 83 + 225	461 + 759 + 540 + 180
508 + 694 + 76 + 102	376 + 183 + 641 + 203
954 + 249 + 120 + 397	523 + 367 + 110 + 412

Τὶς παραπάνω ἀσκήσεις νὰ τὶς λύσετε καὶ γραπτῶς.

Ἀφαίρεση

Νὰ ἐκτελέσετε τὶς παρακάτω πράξεις :

1. Γραπτῶς :

1.008	1.070	1.500	1.947	2.000	1.830
– 69	– 473	– 608	–1.058	– 72	– 45

2. Ἀπὸ μνήμης καὶ γραπτῶς :

Παράδειγμα. $1.594 - 1.265 =$; Λύση ἀπὸ μνήμης.

1.594 πλὴν 1.200 μένουν 394· πλὴν 60 μένουν 334· πλὴν 5 μένουν 329.

1.400 – 340	1.920 – 816	1.833 – 1.043
1.700 – 485	1.371 – 1.259	1.101 – 912

1.715 – 903	2.000 – 683
1.822 – 1.025	1.900 – 1.072

3. Ἀπὸ μνήνης καὶ γραπτῶς

Παράδειγμα. 895 – 397. Λύση ἀπὸ μνήμης. Προσθέτω 3 μονάδες στὸν ἀφαιρετέο καὶ 3 στὸ μεωτέο καὶ θὰ ἔχω 898 – 400 = 498.

1.600 – 294	1.245 – 975	1.587 – 649	1.902 – 788
1.750 – 689	1.434 – 886	1.016 – 836	1.280 – 477

2.000 – 1.343
1.800 – 491

4. Ἀπὸ μνήμης καὶ γραπτῶς

Παράδειγμα. 1.523 – 601 = ; Λύση ἀπὸ μνήμης. Ἀφαιρῶ 1 μονάδα ἀπὸ τὸν ἀφαιρετέο καὶ 1 ἀπὸ τὸ μειωτέο καὶ θὰ ἔχω 1.522 – 600 = 922.

675–402	1.740–513	1.427–825	1.170–414	2.000–1.406
819–205	1.908–1.101	1.800–1.201	1.530–430	2.000–505

5. Ἀπὸ μνήμης καὶ γραπτῶς

Παράδειγμα 1. (825 + 160) – (518 + 160) = ;
Λύση ἀπὸ μνήμης (μὲ διαγραφή): $(825 + 160) - (518 + 160) = 825 + \cancel{160} - 518 - \cancel{160} = 825 - 518 = 307$

Παράδειγμα 2. (1.860 + 90 + 45) – (560 + 135) = ;
Λύση ἀπὸ μνήμης (μὲ ἀνάλυση, σύνθεση καὶ διαγραφή) :
$(1.860 + 90 + 45) - (560 + 135) = 1.860 + 90 + 45 - 560 - 135 = 1.300 + \cancel{560} + \cancel{135} - \cancel{560} - \cancel{135} = 1.300.$

(1.200 + 150) – (800 + 150)	1.050–250–680 + 250
(1.500 + 200 + 80)–(1.300 + 280)	710–190–306 + 190
(1.650 + 320)–(1.160 + 220 + 100)	1.762–680–497 + 380
(1.300 + 470)–(750 + 570)	1.548–375–652 + 275

6. Ἀπὸ μνήμης μὲ τεχνάσματα. Ἔπειτα καὶ γραπτῶς.

α)

745 – 150	1.910 – 1.043	1.851 – 874
1.408 – 639	1.705 – 987	1.592 – 1.107
1.613 – 785	2.000 – 414	
1.004 – 636	2.000 – 1.381	

β)

356 + 518 + 709 – 409	1.600 – 400 – 150 – 45
295 + 163 + 644 – 807	1.908 – 619 – 470 – 308
1.005 + 134 + 79 – 605	1.742 – 330 – 412 – 526
1.896 + 104 + 0 – 996	1.480 – 649 – 351 – 80

Πολλαπλασιασμὸς

Νὰ λύσετε τὶς παρακάτω ἀσκήσεις:

1. Γραπτῶς

150	208	174	540	95	87
× 13	× 9	× 11	× 3	× 20	× 19

2. Ἀπὸ μνήμης καὶ γραπτῶς

Παράδειγμα. 397 × 3 = ;

Λύση ἀπὸ μνήμης (μὲ ἀνάλυση καὶ ἐπιμερισμό).

397 × 3 = (3 ἑκ. + 9 δεκ. + 7 μον.) × 3 ἢ (300 + 90 + + 7) × 3 = 900 + 270 + 21 = 1.191.

486 × 4	584 × 3	290 × 2	92 × 20	37 × 50
209 × 8	218 × 9	872 × 2	68 × 30	45 × 40
265 × 7	327 × 6	495 × 2	46 × 40	64 × 20
378 × 3	265 × 4	981 × 2	28 × 70	34 × 40

3. Ἀπὸ μνήμης

193 × 10	380 × 5	200 × 9	150 × 11	750 × 1
148 × 10	272 × 5	90 × 9	145 × 11	1.672 × 1
135 × 10	18 × 50	154 × 9	108 × 11	408 × 0
109 × 10	15 × 50	129 × 9	136 × 11	1.517 × 0

Παρατήρηση. Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε ἕναν ἀριθμὸ ἐπὶ 5, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμὸ ἐπὶ 10 καὶ διαιροῦμε τὸ γινόμενο διὰ 2.

Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε ἕναν ἀριθμὸ ἐπὶ 50, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμὸ ἐπὶ 100 καὶ διαιροῦμε τὸ γινόμενο διὰ 2.

4. Ἀπὸ μνήμης καὶ γραπτῶς

Μποροῦμε νὰ ἐκτελέσωμε πρῶτα τὶς πράξεις μέσα στὶς παρενθέσεις ἢ μποροῦμε νὰ πολλαπλασιάσωμε χωριστὰ κάθε προσθετέο ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ καὶ νὰ προσθέσωμε τὰ γινόμενα :

(20 + 40 + 30) × 15	(30 + 50 + 20) × 10
(29 + 35 + 16) × 24	(120 + 45 + 25) × 10
(18 + 27 + 15) × 32	(128 + 32 + 14) × 5
(36 + 17 + 23) × 18	(109 + 46 + 21) × 5
(314 + 146 + 190) × 2	(8 + 5 + 6) × 100
(705 + 85 + 208) × 2	(9 + 7 + 4) × 50

(32 + 13 + 154) × 9
(71 + 69 + 48) × 9
(83 + 17 + 64) × 11
(72 + 25 + 53) × 11
(193 + 204 + 543) × 1
(150 + 150 + 275) × 0

5. Ἀπὸ μνήμης καὶ γραπτῶς

Μποροῦμε νὰ ἐκτελέσωμε πρῶτα τὶς πράξεις μέσα στὶς παρενθέσεις ἢ μποροῦμε νὰ πολλαπλασιάσωμε χωριστὰ τὸ μειωτέο καὶ τὸν ἀφαιρετέο ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ καὶ ν' ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὸ πρῶτο γινόμενο τὸ δεύτερο :

$(600 - 200) \times 3$
$(360 - 280) \times 4$
$(904 - 785) \times 2$
$(85 - 67) \times 23$
$(102 - 58) \times 16$
$(125 - 125) \times 9$

$(199 - 89) \times 10$
$(150 - 32) \times 10$
$(327 - 147) \times 5$
$(363 - 209) \times 5$
$(20 - 8) \times 100$
$(18 - 7) \times 50$

$(175 - 82) \times 11$
$(91 - 67) \times 11$
$(186 - 98) \times 9$
$(84 - 84) \times 9$
$(1.872 - 1.418) \times 1$
$(1.965 - 871) \times 0$

6. Γραπτῶς. Νὰ ἐκτελεστοῦν πρῶτα οἱ πράξεις μέσα στὶς παρενθέσεις :

$(75 + 80 + 25) \times (6 + 4)$
$(32 + 140 + 8) \times (8 + 3)$
$(137 + 24 + 19) \times (2 + 7)$
$(17 + 19 + 15) \times (26 + 13)$

$(180 + 220 + 100) \times (108 - 104)$
$(795 + 379 + 683) \times (230 - 229)$
$(64 + 51 + 48) \times (80 - 792)$
$(2.000 - 300 - 1.550) \times (8 + 5)$

7. Ἀπὸ μνήμης καὶ γραπτῶς.

Παράδειγμα 1. $2 \times 8 \times 35 =$; Λύση ἀπὸ μνήμης (μὲ ἀντιμετάθεση καὶ προσεταιρισμό). $2 \times 8 \times 35 = 2 \times 35 \times \times 8 = 70 \times 8 = 560$.

$62 \times 5 \times 2 \times 3$	$4 \times 20 \times 3 \times 5$	$40 \times 3 \times 1 \times 14$
$25 \times 8 \times 2 \times 4$	$7 \times 15 \times 9 \times 2$	$65 \times 4 \times 7$
$3 \times 15 \times 11 \times 4$	$6 \times 30 \times 10$	$27 \times 5 \times 11$

Παράδειγμα 2. $75 \times 24 =$; Λύση ἀπὸ μνήμης μὲ ἀντικατάσταση ἑνὸς παράγοντα μὲ ἄλλους ποὺ ἔχουν αὐτὸν ὡς γινόμενο : $75 \times 24 = 75 \times 4 \times 6 = 300 \times 6 = 1.800$

45×12	$7 \times 5 \times 16$	$5 \times 3 \times 48$
$25 \times 9 \times 8$	$45 \times 3 \times 6$	$5 \times 3 \times 77$

8. Γραπτῶς

α) Ν' ἀντικαταστήσετε τὶς παρακάτω προσθέσεις μὲ πολλαπλασιασμοὺς καὶ νὰ ἐκτελέσετε τὶς πράξεις :

$137 + 137 + 137 + 137 + 137 + 137$
$186 + 186 + 186 + 186 + 186$

$96 + 96 + 96 + 96 + 85 + 85 + 85 + 85$
$250 + 130 + 130 + 250 + 250 + 130 + 250$

β) Ν' ἀντικαταστήσετε τοὺς παρακάτω πολλαπλασιασμοὺς μὲ προσθέσεις καὶ νὰ ἐκτελέσετε τὶς πράξεις :

278×7, 309×6, 617×3, 145×8, 265×5.

Διαίρεση

Νὰ λύσετε τὶς παρακάτω ἀσκήσεις :

1. Γραπτῶς

$1.715 \,|\, 9 \qquad 1.496 \,|\, 13 \qquad 1.904 \,|\, 25 \qquad 1.081 \,|\, 32$

2. Γραπτῶς. Νὰ ἐκτελεστοῦν πρῶτα οἱ πράξεις μέσα στὶς παρενθέσεις.

$(480 + 560 + 792) : 8$	$(1.800 - 600) : 20$
$(654 + 297 + 850) : 7$	$(1.672 - 895) : 4$
$(573 + 915 + 208) : 14$	$(1.438 - 909) : 16$
$(1.038 + 712 + 250) : 50$	$(1.903 - 27) : 38$

$1.740 : (3 \times 5 \times 2)$
$1.650 : (8 \times 4)$
$1.575 : (9 \times 5)$
$1.960 : (7 \times 10)$

3. Γραπτῶς

$(400 \times 2) : (10 \times 2)$	$(200 : 4) : (20 : 4)$
$(350 \times 4) : (7 \times 4)$	$(1.000 : 5) : (40 : 5)$
$(276 \times 8) : (12 \times 8)$	$(1.920 : 8) : (32 : 8)$
$(100 \times 17) : (20 \times 17)$	$(1.725 : 15) : (15 : 15)$

Παρατήρηση. Ἂν πολλαπλασιάσωμε ἢ διαιρέσωμε τὸ διαιρετέο καὶ τὸ διαιρέτη μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό, τὸ πηλίκο δὲ μεταβάλλεται. Ἂν ἡ διαίρεση εἶναι ἀτελής, τὸ ὑπόλοιπο πολλαπλασιάζεται ἢ διαιρεῖται μὲ τὸν ἀριθμὸ αὐτό.

(Ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης πρέπει νὰ διαιροῦνται ἀκριβῶς μὲ τὸν ἀριθμό).

4. Γραπτῶς

Μποροῦμε νὰ ἐκτελέσωμε πρῶτα τὶς πράξεις μέσα στὶς παρενθέσεις ἢ μποροῦμε νὰ διαιρέσωμε μόνο ἕναν παράγοντα μὲ τὸν ἀριθμό, ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς.

$(5 \times 20 \times 9) : 3$	$(5 \times 6 \times 3) : 3$
$(7 \times 18 \times 15) : 9$	$(8 \times 10 \times 2) : 2$
$(25 \times 6 \times 13) : 5$	$(50 \times 4 \times 7) : 4$
$(6 \times 32 \times 10) : 16$	$(12 \times 20 \times 8) : 12$

Π α ρ α τ ή ρ η σ η. Ἂν ὁ διαιρέτης εἶναι ἕνας ἀπὸ τοὺς παράγοντες τοῦ γινομένου, ἀρκεῖ νὰ διαγράψωμε τὸν παράγοντα αὐτό.

5. Ἀπὸ μνήμης

α)

1.400 : 40	1.780 : 10	1.300 : 5
1.920 : 80	1.638 : 10	1.045 : 5
1.560 : 30	1.900 : 100	1.800 : 50
1.845 : 20	1.652 : 100	1.675 : 50

624 : 2	840 : 4
1.702 : 2	1.420 : 4
1.316 : 2	1.508 : 4
1.008 : 2	1.204 : 4

Π α ρ α τ η ρ ή σ ε ι ς. Γιὰ νὰ διαιρέσωμε ἀπὸ μνήμης ἕναν ἀκέραιο διὰ 5 ἢ διὰ 50, διπλασιάζομε τὸν ἀκέραιο καὶ διαιροῦμε τὸ γινόμενο διὰ 10 ἢ καὶ 100 ἀντιστοίχως.

Γιὰ νὰ διαιρέσωμε ἕναν ἀκέραιο διὰ 2, βρίσκομε τὸ μισὸ τοῦ ἀκεραίου. Γιὰ νὰ διαιρέσωμε ἕναν ἀριθμὸ διὰ 4, βρίσκομε τὸ μισὸ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ πάλι τὸ μισὸ τοῦ ἐξαγομένου.

β) Νὰ βρῆτε τό:

$\frac{1}{2}$ τοῦ 1.000	$\frac{1}{4}$ τοῦ 700	$\frac{1}{5}$ τοῦ 1.110	$\frac{1}{3}$ τοῦ 300
$\frac{1}{2}$ τοῦ 1.480	$\frac{1}{4}$ τοῦ 1.948	$\frac{1}{10}$ τοῦ 100	$\frac{1}{3}$ τοῦ 960
$\frac{1}{2}$ τοῦ 1.792	$\frac{1}{5}$ τοῦ 500	$\frac{1}{10}$ τοῦ 1.000	$\frac{1}{3}$ τοῦ 1.482
$\frac{1}{4}$ τοῦ 400	$\frac{1}{5}$ τοῦ 1.805	$\frac{1}{10}$ τοῦ 1.560	

6. Νὰ βρεθῆ ὁ παράγοντας ποὺ λείπει, γραπτῶς. Π.χ. $4 \times ; = 60$. Λύση $60 : 4 = 15$.

$2 \times ; = 386$	$; \times 6 = 1.482$	$80 \times ; = 960 + 880$
$4 \times ; = 1.996$	$; \times 5 = 1.265$	$90 \times ; = 378 + 1.152$
$3 \times ; = 1.143$	$; \times 7 = 707$	$50 \times ; = 593 + 357$

$$; \times 10 = (1.720 - 1.040)$$
$$; \times 100 = (1.985 - 85)$$
$$; \times 37 = (2.000 - 2)$$

7. Διαίρεση ἀκεραίων ἀπὸ μνήμης

Ἀναλύομε τὸν διαιρετέο σὲ μικρότερους προσθετέους ποὺ διαιροῦνται ἀκριβῶς μὲ τὸν διαιρέτη. Π.χ.

α) $1.904 : 2 = (1.000 + 900 + 4) : 2 = 500 + 450 + 2 = 952$

ἢ $(1.800 + 100 + 4) : 2 = 900 + 50 + 2 = 952$

ἢ (18 ἑκ. + 10 δεκ. + 4 μον.) : 2 = 9 ἑκ. + 5 δ. + 2 μ. = 952 β) $1.000 : 8 = (800 + 160 + 40) : 8 = 100 + 20 + 5 = 125$

ἢ (8 ἑκ. + 16 δεκ. + 40 μον.) : 8 = 1 ἑκ. + 2 δεκ. + 5 μον. = 125

γ) $1.500 : 6 = (1.200 + 300) : 6 = 200 + 50 = 250$

ἢ (12 ἑκ. + 30 δεκ.) : 6 = 2 ἑκ. + 5 δεκ. = 250

δ) $1.800 : 7 = (1.400 + 350 + 49 + 1) : 7$ δίνει πηλίκο $200 + 50 + 7 = 257$ καὶ ὑπόλ. 1.

ἢ (14 ἑκ. + 35 δ. + 49 μ. + 1 μ.) : 7 δίνει πηλίκο 2 ἑκ. + 5 δ. + 7 μ. = 257 καὶ ὑπόλοιπο 1

ε) $1.710 : 15 = (1.500 + 150 + 60) : 15 = 100 + 10 + 4 = 114$

ἢ (15 ἑκ. + 15 δ. + 60 μ.) : 15 = 1 ἑκ. + 1 δεκ. + 4 μ. = 114

στ) $1.380 : 16 = (800 + 480 + 96 + 4) : 16$ δίνει πηλίκο $50 + 30 + 6 = 86$ καὶ ὑπόλοιπο 4

ζ) $1.450 : 17 = (850 + 510 + 85 + 5) : 17$ δίνει πηλίκο $50 + 30 + 5 = 85$ καὶ ὑπόλοιπο 5

8. Νὰ βρῆτε ἀπὸ μνήμης τὰ ἐξαγόμενα :

360 : 3	(2.000 − 660) : 4	(1.250 + 350) : 5
480 : 4	(1.850 − 350) : 6	(1.100 + 720) : 14
930 : 2	(1.900 − 570) : 7	(800 + 960) : 16
1.000 : 8	(1.580 − 680) : 9	(480 + 1.200) : 12

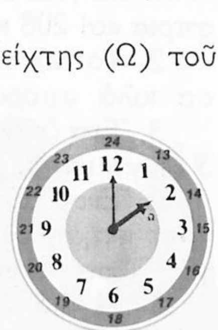
Ἀπὸ τὸ παλιὸ τετράδιο

Νὰ θέσετε τὸ σημεῖο $=$ ἢ $>$ ἢ $<$ ὅπου ταιριάζει :

$80 + 50$	$10 + 120$
$700 - 300$	$200 + 350$
3×200	1×550
10×65	$800 - 150$
9×82	$\frac{1}{2}$ τοῦ 1.000
$\frac{1}{2}$ τοῦ 1.200	$\frac{2}{3}$ τοῦ 900
$\frac{1}{3}$ τοῦ 1.500	2×250
$160 + 900$	$900 + 160$
$1.350 + 200$	$1.800 - 350$
11×150	9×180
6×300	$(6 \times 100) + (6 \times 200)$
$1.700 : 100$	17
$548 + 182$	$\left(\frac{1}{4} \text{ τοῦ } 1.000\right) + 500$
$806 - 298$	9×56

Τὸ ρολόι καὶ οἱ ὧρες

Παράδειγμα. Ἕνα πλοῖο ἀναχωρεῖ στὶς 12 τὰ μεσάνυχτα. Τὸ ταξίδι του κρατάει 14 ὧρες. Ὅταν τελειώση τὸ ταξίδι του, ὁ ὡροδείχτης (Ω) τοῦ ρολογιοῦ θὰ ἔχη κάμει μιὰ ὁλόκληρη στροφή, θὰ ἔχη περάσει ἀπὸ τὸ 12 καὶ θὰ δείχνη 2 μετὰ τὸ μεσημέρι (μ.μ.)



Ἔτσι, ὅταν ἀκοῦμε ὅτι ἡ ὥρα εἶναι 14, θὰ καταλαβαίνωμε ὅτι εἶναι 2 μ.μ. (μετὰ τὸ μεσημέρι).

Σὲ μερικὰ ρολόγια μάλιστα, αὐτὸ τὸ 14 τὸ βλέπομε γραμμένο μὲ μικρότερα ψηφία λίγο πιὸ ἔξω ἀπὸ τὸ 2.

Ἂν τὸ ταξίδι τοῦ πλοίου κρατοῦσε 15 ὧρες, ὁ ὡροδείχτης θὰ ἔδειχνε 3 μ.μ.

Ἂν κρατοῦσε 18 ὧρες, θὰ ἔδειχνε 6 μ.μ.

Ἂν ὅμως τὸ ταξίδι κρατοῦσε 3 ὧρες μόνο, τότε ὁ ὡροδείχτης θὰ ἔδειχνε 3, χωρὶς νὰ ἔχη κάμει πρῶτα καμιὰ ὁλόκληρη στροφή, δηλαδὴ χωρὶς νὰ ξεπεράση τὸ 12. Αὐτὸ θὰ τὸ γράφωμε 3 π.μ. καὶ θὰ τὸ διαβάζωμε «τρεῖς πρὶν ἀπὸ τὸ μεσημέρι».

Ἔτσι, ὅταν γράφωμε 10 π.μ., θὰ ἐννοῦμε ὅτι ἡ ὥρα εἶναι 10 πρὶν ἀπὸ τὸ μεσημέρι, δηλαδὴ 10η. Ἐνῶ, ὅταν γράφωμε 10 μ.μ., θὰ ἐννοοῦμε ὅτι ἡ ὥρα εἶναι 10 μετὰ τὸ μεσημέρι, δηλαδὴ 22α.

Πρόβλημα: Πῶς ἀλλιῶς μποροῦμε νὰ διαβάσωμε τὶς ὧρες: 11, 12, 13, 17;

Λέμε: 11 π.μ., 12 μ. (μεσημέρι), 1 μ.μ., 5 μ.μ.

Νὰ βρῆτε τώρα πῶς θὰ γράψωμε καὶ πῶς θὰ διαβάσωμε τὶς παρακάτω ὧρες;

1) 1, 2, 3, 4, 5, 6. . . 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24.

2) 5 μ.μ., 8 π.μ., 11 μ.μ., 7 π.μ., 8 μ.μ., 9 μ.μ., 12 μ.μ.,

Διάφορα προβλήματα

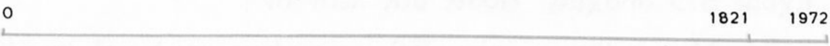
1. Ἕνας παντοπώλης φόρτωσε στὸ αὐτοκίνητο 350 κιλὰ λάδι, 285 κιλὰ ἐλιές, 175 κιλὰ σαπούνι, 382 κιλὰ ὄσπρια καὶ 208 κιλὰ ζάχαρι. Πόσα κιλὰ ἦταν ὅλο τὸ φορτίο;
2. Τὸ αὐτοκίνητο μπορεῖ νὰ μεταφέρη 2.000 κιλά. Πόσα κιλὰ μποροῦσε νὰ φορτώση ἀκόμη ὁ παντοπώλης;
3. Ἕνα ζεῦγος παπούτσια ἔχει 350 δραχμές. Πόσο ἔχουν 3 ζεύγη καὶ τί ρέστα θὰ πάρωμε ἀπὸ 1.500 δραχμές;
4. Ἕνας αὐγοπώλης ἔχει 1.860 αὐγὰ καὶ θέλει νὰ τὰ τοποθετήση σὲ αὐγοθῆκες. Κάθε αὐγοθήκη παίρνει 30 αὐγά. Πόσες αὐγοθῆκες θὰ χρειαστῆ;
5. Σὲ μιὰ ἀποθήκη εἶναι 2.000 κιλὰ σιτάρι. Πόσα σακιὰ χρειάζονται, γιὰ νὰ τὸ μεταφέρουν, ἂν τὸ κάθε σακὶ χωράη 64 κιλά;

6. Πόσα μέτρα εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ χιλιομέτρου ; τὰ $\frac{2}{4}$; τὸ $\frac{1}{5}$;

7. Ἕνας ἀθλητὴς προπονεῖται στὸ δρόμο τῶν 800 μέτρων. Ἔτρεξε 200 μέτρα. Τί μέρος τοῦ δρόμου ἔχει κάμει ; Καὶ τί μέρος μένει ἀκόμη ; (Τὸ σχῆμα θὰ σᾶς βοηθήση στὴ λύση).

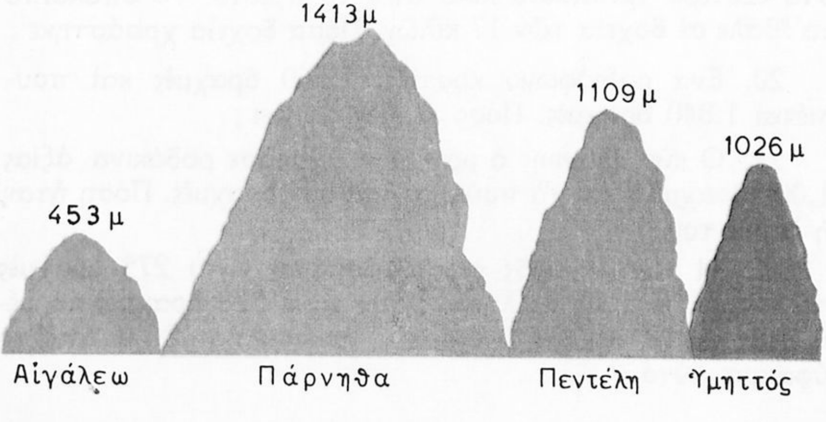
8. Ὅταν φτάση στὰ 400 μέτρα, τί μέρος τοῦ δρόμου θὰ ἔχη κάμει ; Ἂν διατρέξη τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ δρόμου, πόσα μέτρα θὰ ἔχη τρέξει ;

9. Πόσα χρόνια ἔχουν περάσει ἀπὸ τὴν ἑλληνικὴ ἐπανάσταση τοῦ 1821 μέχρι σήμερα ; (Τὸ σχῆμα θὰ σᾶς βοηθήση).



10. Τὸ σχῆμα δείχνει πόσα μέτρα εἶναι τὸ ὕψος τῶν βουνῶν ποὺ εἶναι γύρω ἀπὸ τὴν Ἀθήνα. Νὰ βρῆτε τί διαφορὰ ἔχει τὸ ὕψος τοῦ ἑνὸς βουνοῦ ἀπὸ τὸ ἄλλο.

Προσέξτε· πρέπει νὰ κάμετε 6 πράξεις.



11. Τὰ 10 κιλὰ λάδι ἔχουν 640 δραχμές. Πόσο ἔχουν τὰ 45 κιλά ;

12. Τὰ 3 μέτρα ὕφασμα ἔχουν 210 δραχμές. Πόσο ἔχουν τὰ 25 ;

13. Ἕνα αὐτοκίνητο μεταφέρει 56 σακιὰ βαμβάκι. Κάθε σακὶ ζυγίζει 32 κιλά. Πόσα κιλὰ εἶναι τὸ βαμβάκι ;

14. Σὲ μιὰ οἰκοδομὴ θέλουν ν' ἀνεβάσουν 2.000 τοῦβλα μὲ τὸ ζεμπίλι. Κάθε φορὰ ἀνεβάζουν 40 τοῦβλα κατὰ μέσον ὅρο. Πόσες φορὲς θ' ἀνεβῆ τὸ ζεμπίλι γεμάτο ;

15. Ἕνα τραπέζι στοιχίζει 1.500 δραχμές. Ἕνα ἄλλο τραπέζι στοιχίζει 1.375 δραχ. Ποιά διαφορὰ τιμῆς ἔχουν ;

16. Πόσα γραμμάρια διαφορὰ ἔχουν τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ κιλοῦ ἀπὸ τὸ ἑνάμισι κιλό ;

17. Θέλομε ν' ἀγοράσωμε εἴδη ἀξίας 930 δραχμῶν. Ἔχομε 675 δραχμές. Πόσες μᾶς λείπουν ;

18. Μιὰ φιάλη χωράει 750 γραμμάρια νερὸ καὶ περιέχει 245 γραμμάρια. Πόσα γραμμάρια πρέπει νὰ βάλωμε ἀκόμη, γιὰ νὰ γεμίση ;

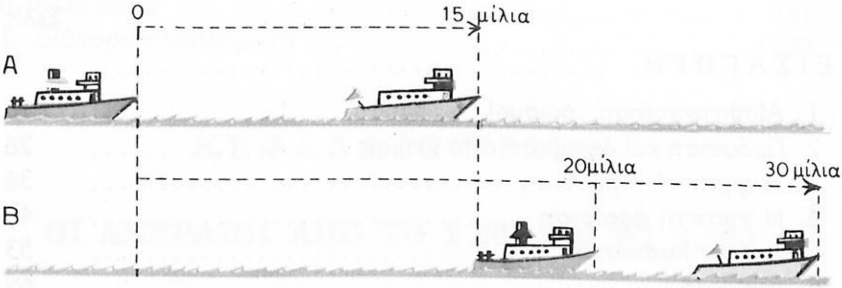
19. Ἕνας ἐλαιοπαραγωγὸς εἶχε 1.925 κιλὰ λάδι. Ἀπὸ αὐτὸ γέμισε δύο βαρέλια. Στὸ πρῶτο ἔβαλε 120 κιλὰ καὶ στὸ δεύτερο τριπλάσια κιλὰ ἀπὸ τὸ πρῶτο. Τὸ ὑπόλοιπο τὸ ἔβαλε σὲ δοχεῖα τῶν 17 κιλῶν. Πόσα δοχεῖα χρειάστηκε ;

20. Ἕνα ραδιόφωνο κοστίζει 1.560 δραχμὲς καὶ πουλιέται 1.840 δραχμές. Πόσο κέρδος ἀφήνει ;

21. Ὁ κὺρ Γιάννης ὁ μανάβης ἀγόρασε ροδάκινα ἀξίας 1.000 δραχμῶν καὶ τὰ πούλησε γιὰ 835 δραχμές. Πόση ἦταν ἡ ζημιά του ;

22. Ἡ τιμὴ ἀγορᾶς ἑνὸς ὑφάσματος εἶναι 275 δραχμὲς τὸ μέτρο. Ἡ τιμὴ πωλήσεώς του εἶναι 328 δραχμὲς τὸ μέτρο. Πόσα θὰ κερδίση ὁ ἔμπορος, ἂν πουλήση 36 μ. ἀπὸ τὸ ὕφασμα αὐτό ;

23. Τὸ πλοῖο «Νεράιδα» ἀναχώρησε ἀπὸ τὸν Πειραιὰ γιὰ τὴ Σάμο μὲ σταθερὴ ταχύτητα 15 μίλια τὴν ὥρα. Μετὰ μία ὥρα ἀναχώρησε τὸ πλοῖο «Δελφίνι» ἀκολουθῶντας τὴν ἴδια ἀκριβῶς πορεία μὲ ταχύτητα 20 μίλια τὴν ὥρα. Σὲ πόσες ὧρες τὸ δεύτερο πλοῖο θὰ φτάση τὸ πρῶτο ;



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΟΙ ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΠΟ ΤΟ 0 ΩΣ ΤΟ 100

Σελὶς

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΟΙ ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΠΟ ΤΟ 100 ΩΣ 1.000

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΟΙ ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΠΟ ΤΟ 1.000 ΩΣ ΤΟ 2.000

ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ: ΑΡΧΟΝΤΙΔΟΥ ΝΙΚΗ

ΕΚΔΟΣΙΣ Δ', 1975 (VI) — ΑΝΤΙΤΥΠΑ 220.000 — ΣΥΜΒΑΣΙΣ 2575/28-4-75

Ἐκτύπωσις — Βιβλιοδεσία : Τεχνογραφική Α. Ε.