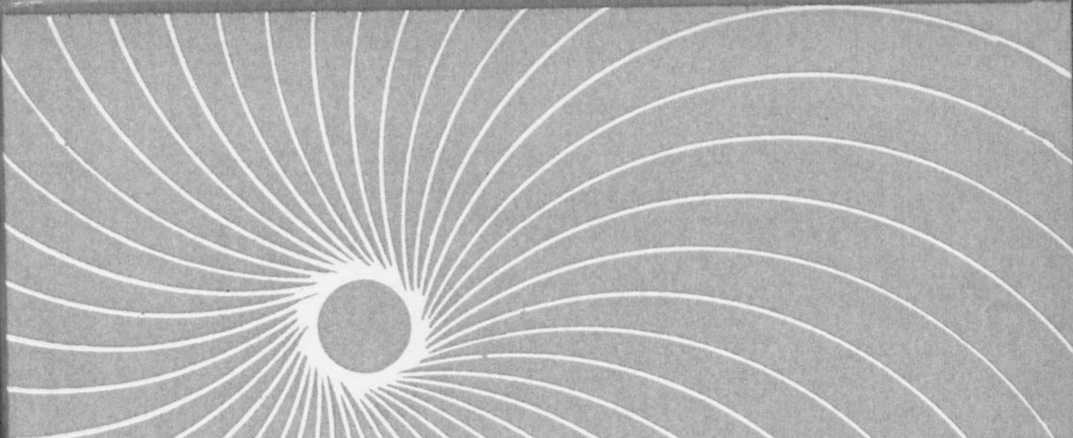


Ν. ΔΙΑΜΑΝΤΟΠΟΥΛΟΥ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

[illegible] ΑΙ 197[illegible]

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΣΤ/Δ 19

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΔΩΡΕΑΝ

ΣΤ 89 ΕΧΒ

Ν. ΔΙΑΜΑΝΤΟΠΟΥΛΟΥ
ΕΠ. ΔΙΕΥΘΥΝΤΟΥ ΠΡΟΤΥΠΟΥ ΤΗΣ ΜΑΡΑΣΛΕΙΟΥ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ

Ο.Ε.Δ.Β.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Γιὰ τοὺς μαθητὲς τῆς ΣΤ΄ Τάξεως
τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1976

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΣΥΝΟΛΑ

1. Ἔννοια τοῦ συνόλου

Παραδείγματα.

1. Ὁ ἀριθμὸς 2 ἀνήκει στὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.
2. Ἡ ἕδρα διδασκαλίας ἀνήκει στὸ σύνολο τῶν ἀντικειμένων τῆς αἴθουσας τῆς ΣΤ' τάξεως.
3. Τὸ γράμμα α ἀνήκει στὸ ἀλφάβητο.
4. Ὁ Γεώργιος » στὴν Ε' τάξη.

Παρατηροῦμε ὅτι σὲ κάθε πρόταση ἀναφέρονται δύο πράγματα, ὅπου τὸ πρῶτο ἀνήκει στὸ δεύτερο. Ἔτσι ὁ 2 ἀνήκει στὸ σύνολο τῶν φ. ἀριθμῶν, ἡ ἕδρα στὸ σύνολο..., τὸ α στὸ ἀλφάβητο καὶ ὁ Γ. στὴν Ε' τάξη.

Στὰ πρῶτα δύο παραδείγματα τὸ β' πράγμα ἀναφέρεται ὡς σύνολο ἀντικειμένων, ποὺ ἔχουν ὁρισμένη κοινὴ ἰδιότητα, τὴν ἰδιότητα τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ἢ τὴν ἰδιότητα νὰ βρίσκωνται στὴν αἴθουσα τῆς ΣΤ' τάξεως.

Στὰ δύο τελευταῖα τὸ β' πράγμα μπορεῖ καὶ πάλι νὰ θεωρηθῆ ὡς σύνολο, ὡς σύνολο γραμμάτων ἢ ὡς σύνολο συμμαθητῶν.

Συνεπῶς κάθε πράγμα στὸ ὁποῖον ἀνήκουν ἄλλα πράγματα, μπορεῖ νὰ θεωρηθῆ ὡς σύνολο ἀντικειμένων μὲ κοινὴ ἰδιότητα, ἀλλὰ καὶ κάθε σύνολο μπορεῖ νὰ θεωρηθῆ ὡς πράγμα, ὅπου ἀνήκουν ἄλλα πράγματα.

Ἡ λέξη **πράγματα** ἢ **ἀντικείμενα** μπορεῖ νὰ σημαίνῃ ὑλικὰ πράγματα (ἀνθρώπους, ζῶα, φυτά, θρανία κλπ.) ἀλλὰ καὶ ἀφηρημένες ἔννοιες (οἱ ἡμέρες τῆς ἑβδομάδας, οἱ μῆνες τοῦ ἔτους, οἱ 4 πράξεις τῆς Ἀριθμητικῆς κλπ.).

Κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ πράγματα ἢ τὰ ἀντικείμενα, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τὸ σύνολο, ὀνομάζεται **στοιχεῖο** τοῦ συνόλου ἢ **μέλος** τοῦ συνόλου. Π. χ. ἡ ἕδρα εἶναι στοιχεῖο τοῦ συνόλου «ἀντικείμενα τῆς αἴθουσας», ἐπίσης τὰ θρανία εἶναι στοιχεῖον τοῦ συνόλου αὐτοῦ, καθὼς καὶ ὁ μαυροπίνακας, οἱ χάρτες, οἱ εἰκόνες.

Τὰ **στοιχεῖα** ἑνὸς συνόλου δὲν εἶναι ἀπαραίτητο νὰ εἶναι ὁμοειδῆ. Ἀρκεῖ νὰ ἔχουν ἕνα κοινὸ γνώρισμα, τὸ ὁποῖο νὰ ἐπιτρέπῃ τὴν κατάταξή τους στὴν ὁλότητα. Π. χ. Τὰ ἀντικείμενα τῆς αἴθουσας τῆς ΣΤ΄ τάξεως (μαθητές, θρανία, ἕδρα, χάρτες, εἰκόνες κλπ.) δὲν εἶναι ὅμοια μεταξύ τους, εἶναι ὅμως **στοιχεῖα** τοῦ συνόλου «ἀντικείμενα τῆς αἴθουσας»· γιατὶ καθένα ἀπ᾽ αὐτὰ ἔχει τὸ κοινὸ χαρακτηριστικὸ γνώρισμα, ὅτι **βρίσκεται** στὴν αἴθουσα τῆς ΣΤ΄ τάξεως.

Ἄλλα παραδείγματα συνόλων:

1. Ἡ ἐνωμοτία τῶν Προσκόπων τοῦ σχολείου μας.
2. Ἡ ἀθλητικὴ ὁμάδα τοῦ σχολείου μας.
3. Ἡ ὁμάδα ποδοσφαιριστῶν τοῦ χωριοῦ.
4. Μία συλλογὴ γραμματοσήμων.
5. Ὅλοι οἱ κάτοικοι τῆς γῆς.
6. Ὅλοι οἱ κάτοικοι τῆς Ἑλλάδας.
7. Οἱ ποταμοὶ τῆς Μακεδονίας.
8. Τὰ ὄρη τῆς Ἠπείρου.
9. Οἱ λέξεις.
10. Τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου.
11. Τὰ φωνήεντα.
12. Τὰ σύμφωνα.
13. Οἱ ἀριθμοί.
14. Οἱ ἡμέρες τῆς ἑβδομάδας.
15. Οἱ μῆνες τοῦ ἔτους, κλπ. κλπ.

Ἐργασία. Νὰ ἀναφέρετε 10 παραδείγματα συνόλων ἀπὸ τὰ ἀντικείμενα τοῦ σπιτιοῦ σας, τοῦ σχολείου σας κλπ.

2. Τὸ μονομελὲς σύνολο. Τὸ διμελὲς σύνολο. Τὸ κενὸ σύνολο

α) Ἐὰν μᾶς ρωτήσουν, πόσα φωνήεντα ἔχει ἡ λέξη «φῶς», θὰ ἀπαντήσωμεν: ἕνα. Ἄρα τὸ σύνολο τῶν φωνηέντων τῆς λέξεως «φῶς» ἔχει ἕνα μόνο στοιχεῖο ἢ μέλος (φωνῆεν) καὶ γι' αὐτὸ λέγεται **μονομελὲς σύνολο.**

Παραδείγματα : Μονομελῆ σύνολα εἶναι :

Τὸ σύνολο τῶν φωνηέντων κάθε μιᾶς ἀπὸ τὶς λέξεις: γῆ, πώς, φῶς, σάν.

Τὸ σύνολο τῶν συμφώνων κάθε μιᾶς ἀπὸ τὶς λέξεις : γῆ, ἕνα, ἂν, ἄς, μή.

Τὸ σύνολο τῶν μηνῶν τοῦ ἔτους, ποὺ ἀρχίζουν ἀπὸ Φ.

Τὸ σύνολο τῶν ἡμερῶν τῆς ἑβδομάδας, ποὺ ἀρχίζουν ἀπὸ Δ.

Τὸ σύνολο τῶν Ἠπείρων τῆς γῆς, ποὺ ἀρχίζουν ἀπὸ Ε. κλπ.

β) Ἂν μᾶς ρωτήσουν, πόσα σύμφωνα ἔχει ἡ λέξη «φῶς», θὰ ἀπαντήσωμε : δύο. Ἄρα τὸ σύνολο τῶν συμφώνων τῆς λέξεως «φῶς» ἔχει δύο στοιχεῖα ἢ μέλη (σύμφωνα)· γι' αὐτὸ λέγεται **διμελὲς σύνολο** ἢ **ζεῦγος στοιχείων.**

Παραδείγματα : Διμελῆ σύνολα εἶναι:

Τὸ σύνολο τῶν συμφώνων κάθε μιᾶς ἀπὸ τὶς λέξεις: ψωμί, νερό, μέλι, τρία, ἑφτά, ὀχτώ, δέκα, φῶς, τώρα, πάλι.

Τὸ σύνολο τῶν φωνηέντων κάθε μιᾶς ἀπὸ τὶς λέξεις: ψωμί, νερό, μέλι, τρία, ἑφτά, ὀχτώ, δέκα, ἕνα, πένα, χάρτης, ἔτος.

Τὸ σύνολο τῶν μηνῶν, ποὺ ἀρχίζουν ἀπὸ Μ (Μάρτιος, Μάιος).

Τὸ σύνολο τῶν ἡμερῶν τῆς ἑβδομάδας, ποὺ ἀρχίζουν ἀπὸ Τ (Τρίτη, Τετάρτη).

Τὸ σύνολο τῶν χρωμάτων τῆς σημαίας μας (γαλάζιο, λευκό).

γ) Εἶναι Σάββατο. Ὅλοι οἱ μαθητὲς τῆς ΣΤ' τάξεως πῆγαν ἐκδρομή. Ποιὸ εἶναι, κατὰ τὴν ἡμέρα αὐτή, τὸ σύνολο τῶν μαθητῶν, ποὺ βρίσκονται στὴν αἴθουσα; Ἀπαντοῦμε ὅτι ἡ αἴθουσα εἶναι κενὴ (ἄδειανὴ) ἀπὸ μαθητές.

Ἄρα τὸ σύνολο τῶν μαθητῶν τῆς αἴθουσας κατὰ τὴν ἡμέρα αὐτὴ εἶναι **κενὸ σύνολο.** Αὐτὸ εἶναι ἕνα σύνολο χωρὶς στοιχεῖα.

Συνεπῶς, ἂν ἕνα σύνολο δὲν ἔχῃ στοιχεῖα, δὲ θὰ ποῦμε ὅτι δὲν ὑπάρχει σύνολο· θὰ ποῦμε ὅτι ὑπάρχει· εἶναι τὸ **κενὸ σύνολο.**

Παραδείγματα κενοῦ συνόλου:

Τὸ σύνολο τῶν μακρῶν φωνηέντων τῶν λέξεων: Θεός, νέος, ξένος, νερό.

Τὸ σύνολο τῶν βραχέων φωνηέντων τῶν λέξεων: φωνή, ἠχώ, πηγή, τρώγω.

Τὸ σύνολο τῶν ἡμερῶν τῆς ἑβδομάδας, ποὺ ἀρχίζουν ἀπὸ Μ.

Τὸ σύνολο τῶν μηνῶν τοῦ ἔτους, ποὺ ἀρχίζουν ἀπὸ Β. Τὸ σύνολο τῶν μαθητῶν τῆς αἴθουσας τῆς ΣΤ' τάξεως κατὰ τὸ διάλειμμα, ὅταν ὅλοι οἱ μαθητὲς τῆς τάξεως αὐτῆς βρίσκωνται στὴν αὐλὴ τοῦ σχολείου.

3. Συμβολισμοὶ τῶν συνόλων

Κάθε σύνολο, γιὰ συντομία, τὸ παριστάνομε μὲ ἕνα κεφαλαῖο γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου· π. χ. τὸ σύνολο Α, τὸ σύνολο Β κλπ.

Καὶ κάθε ἀντικείμενο, ποὺ εἶναι στοιχεῖο τοῦ συνόλου, τὸ παριστάνομε, γιὰ συντομία, μὲ ἕνα μικρὸ γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου ἢ μὲ ἀριθμητικὰ ψηφία· π.χ. τὸ στοιχεῖο α, τὸ στοιχεῖο β κλπ.

α) Γιὰ νὰ δηλώσωμε ὅτι τὸ ἀντικείμενο α εἶναι στοιχεῖο τοῦ συνόλου Α, χρησιμοποιοῦμε τὸ σύμβολο $\in$, τὸ ὁποῖο, σημαίνει **«ἀνήκει στὸ»** καὶ τὸ γράφομε συμβολικῶς ἔτσι:

$$\alpha \in A$$

τὸ διαβάζομε δέ: **«τὸ α ἀνήκει στὸ Α»**, ἢ **«τὸ α εἶναι στοιχεῖον τοῦ Α»**.

β) Γιὰ νὰ δηλώσωμεν ὅμως ὅτι τὸ ἀντικείμενο β δὲν εἶναι στοιχεῖο τοῦ συνόλου Α, τότε χρησιμοποιοῦμε τὸ σύμβολο $\notin$, ποὺ σημαίνει **«δὲν ἀνήκει στὸ»** καὶ τὸ γράφομε συμβολικῶς ἔτσι:

$$\beta \notin A$$

τὸ διαβάζομε δέ: **«τὸ β δὲν ἀνήκει στὸ Α»**, ἢ **«τὸ β δὲν εἶναι στοιχεῖο τοῦ Α»**.

γ) Γιὰ νὰ δηλώσωμε τὸ κενὸ σύνολο χρησιμοποιοῦμε τὸ σύμβολο $\varnothing$.

δ) Γιὰ νὰ δηλώσωμε ὅτι ὁρισμένα ἀντικείμενα ἀποτελοῦν ἕνα σύνολο, τὰ γράφομε μέσα σ' αὐτὸ τὸ σύμβολο { }, τὸ ὁποῖο ὀνομάζεται **ἄγκιστρο.**

Ἔτσι, γιὰ νὰ δείξωμε ὅτι τὸ σύνολο Β ἔχει ὡς στοιχεῖα τὰ γράμματα α, β, γ θὰ σημειώσωμε συμβολικῶς :

$$B = \{ \alpha, \beta, \gamma \}$$

καὶ γράφομε :

$$\alpha \in B$$
$$\beta \in B$$
$$\gamma \in B$$

διαβάζομε δέ : **«τὸ α εἶναι στοιχεῖο τοῦ Β», «τὸ β εἶναι στοιχεῖο τοῦ Β», «τὸ γ εἶναι στοιχεῖο τοῦ Β».**

Παρατήρηση : 1. Τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου μέσα στὸ ἄγκιστρο χωρίζονται μεταξύ τους μὲ κόμμα, καὶ μποροῦμε νὰ τὰ γράψωμε μὲ ὁποιαδήποτε σειρά. Π.χ.

$$B = \{ \alpha, \beta, \gamma \} \text{ ἢ } B = \{ \beta, \gamma, \alpha \} \text{ ἢ } B = \{ \gamma, \alpha, \beta \}.$$

2. Κάθε στοιχεῖο ἑνὸς συνόλου τὸ γράφομε μέσα στὸ ἄγκιστρο μιὰ μόνο φορά. Π. χ. τὸ σύνολο Γ τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως «χάρακας» γράφεται ἔτσι : $\Gamma = \{ \chi, \alpha, \rho, \kappa, \varsigma \}$.

Α. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

α) Πότε ἕνα σύνολο λέγεται μονομελές; πότε λέγεται διμελὲς καὶ πότε λέγεται κενό;

β) Τί σύνολα εἶναι : τὸ σύνολο τῶν φωνηέντων τῶν λέξεων : φῶς, πώς, σάν, τότε, φίλος, ξένος, μῆλο;

γ) Τί σύνολο εἶναι τὸ σύνολο τῶν βραχέων φωνηέντων τῆς λέξεως «πηγή»;

δ) Τί σύνολο εἶναι τὸ σύνολο τῶν μακρῶν φωνηέντων τῆς λέξεως «μέλος»;

ε) Ἀπὸ τὴν αἴθουσα διδασκαλίας τῆς ΣΤ' τάξεως ἔχουν ἀφαιρεθῆ ὅλοι οἱ χάρτες, γιὰ νὰ ἐλαιοχρωματιστοῦν οἱ τοῖχοι της. Πῶς θὰ ὀνομάσωμε τὸ σύνολο τῶν χαρτῶν τῆς αἴθουσας;

στ) Στὸ μάθημα τῶν Θρησκευτικῶν εἶναι παρόντες ὅλοι οἱ μαθητὲς τῆς τάξεως. Πῶς λέγεται τὸ σύνολο τῶν ἀπόντων μαθητῶν τῆς τάξεως αὐτῆς στὸ μάθημα αὐτὸ κατὰ τὴν ὥρα αὐτή;

ζ) Ποιὸ εἶναι τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι βρίσκονται μεταξὺ τοῦ 8 καὶ τοῦ 9;

4. Σύνολο μὲ περισσότερα στοιχεῖα

Παράδειγμα 1. Στὸ πρῶτο θρανίο τῆς ΣΤ' τάξεως κάθονται τρεῖς μαθητές, οἱ : Βλάσης, Δέδες, Νέγρης.

Ἂν παραστήσωμε μὲ τὸ γράμμα Μ τὸ σύνολο τῶν μαθητῶν τοῦ πρώτου θρανίου, τότε :

$$\mathrm{M} = \{\text{Βλάσης, Δέδες, Νέγρης}\}$$

ἢ

$$\mathrm{M} = \{\mathrm{B}, \Delta, \mathrm{N}\}$$

Παράδειγμα 2. Τὸ σύνολο τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως «πατρίδα» εἶναι

$$\Pi = \{\pi, \alpha, \tau, \rho, \iota, \delta\}$$

Στὸ πρῶτο παράδειγμα ἔχομε σύνολο μὲ τρία στοιχεῖα (τριμελὲς σύνολο). Στὸ δεύτερο παράδειγμα ἔχομε σύνολο μὲ 6 στοιχεῖα.

Ἑπομένως : ἕνα σύνολο μπορεῖ νὰ ἔχῃ ἕνα στοιχεῖο (μονομελὲς σύνολο) ἢ δύο στοιχεῖα (διμελὲς σύνολο) ἢ περισσότερα στοιχεῖα (σύνολο μὲ πολλὰ στοιχεῖα).

Μάθαμε πῶς γράφομε τὰ σύνολα. Ἂν ἔχωμε σύνολα μὲ πολλὰ στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα παρουσιάζουν μιὰ ὁρισμένη σειρά, ὅπως εἶναι οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ 1 ἕως 99, θὰ τοὺς γράψωμε ὅλους μέσα στὸ ἄγκιστρο ;

Ὄχι βέβαια. Μέσα στὸ ἄγκιστρο γράφομε τὰ δύο ἢ τρία πρῶτα ἀπὸ τὰ στοιχεῖα αὐτά, ὕστερα γράφομε τρεῖς τελεῖες (στιγμὲς) καὶ τέλος γράφομε τὸ τελευταῖο στοιχεῖο τοῦ συνόλου. Π. χ.

$$\mathrm{A} = \{1, 2, 3, \ldots, 99\}$$

Οἱ τρεῖς τελεῖες (στιγμὲς) σημαίνουν : «συνέχεια μέχρι τοῦ. . .».

Πῶς ὅμως θὰ γράψωμε ἕνα σύνολο, ἂν τὰ στοιχεῖα του δὲν παρουσιάζουν ὁρισμένη σειρά ;

Παράδειγμα. Ἂν θελήσωμε νὰ παραστήσωμε μὲ Μ τὸ σύνολο τῶν μαθητῶν τοῦ Μαρασλείου, δὲν εἶναι εὔκολο νὰ γράψωμε τὰ ὀνόματα ὅλων αὐτῶν τῶν μαθητῶν μέσα στὸ ἄγκιστρο ἀλλ' οὔτε καὶ παρουσιάζουν οἱ μαθητὲς ὁρισμένη σειρά, ὅπως συμβαίνει μὲ τοὺς ἀκέραιους ἀριθμούς.

Γι' αὐτὸ θὰ χρησιμοποιήσωμε ἕναν ἄλλο τρόπον ἁπλὸ καὶ σύντομο, ποὺ θὰ μπορῆ νὰ χρησιμοποιηθῆ σὲ κάθε περίπτωση.

Μὲ τὸ γράμμα Χ τοῦ ἀλφαβήτου μας παριστάνομε κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου. Μέσα στὸ ἄγκιστρο γράφομε πρῶτα τὸ Χ, δεξιά του γράφομε μιὰ μικρὴ διαχωριστικὴ γραμμὴ | ἢ δύο τελεῖες : καὶ τέλος γράφομε πάλι τὸ Χ, καὶ μετὰ ἀπ' αὐτὸ γράφεται ἡ ἰδιότητα ποὺ ἔχουν ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου.

Ἔτσι τὸ σύνολο Μ τοῦ παραπάνω παραδείγματος γράφεται :

$$M = \{X | X \text{ μαθητὴς τοῦ Μαρασλείου}\}$$

καὶ διαβάζεται ὡς ἑξῆς :

Μ εἶναι τὸ σύνολο τῶν Χ ὅπου Χ εἶναι μαθητὴς τοῦ Μαρασλείου.

Ἄλλα παραδείγματα

1. Τὸ σύνολο Μ = { Ἰανουάριος, Φεβρουάριος, Μάρτιος, Ἀπρίλιος, Μάιος, Ἰούνιος, Ἰούλιος, Αὔγουστος, Σεπτέμβριος, Ὀκτώβριος, Νοέμβριος, Δεκέμβριος } γράφεται:

$$M = \{X | X \text{ μήνας τοῦ ἔτους}\}$$

καὶ διαβάζεται : Μ εἶναι τὸ σύνολο τῶν Χ μὲ τὴν ἰδιότητα : Χ εἶναι μήνας τοῦ ἔτους.

2. Τὸ σύνολο Η = { Δευτέρα, Τρίτη, Τετάρτη, Πέμπτη, Παρασκευή, Σάββατο, Κυριακή } γράφεται :

$$H = \{X | X \text{ ἡμέρα τῆς ἑβδομάδας}\}$$

καὶ διαβάζεται : Η εἶναι τὸ σύνολο τῶν Χ μὲ τὴν ἰδιότητα : Χ εἶναι ἡμέρα τῆς ἑβδομάδας.

3. Τὸ σύνολο $A = \{1, 2, 3, \ldots, 99)$ γράφεται :

$$A = \{X \mid X \text{ φυσικὸς ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ } 100\}$$

καὶ διαβάζεται : Α εἶναι τὸ σύνολο τῶν Χ μὲ τὴν ἰδιότητα Χ εἶναι φυσικὸς ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 100.

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Παραστήσατε περιγραφικῶς :

1. Τὸ σύνολο τῶν Ἠπείρων τῆς Γῆς.
2. Τὸ σύνολο τῶν Ὠκεανῶν τῆς Γῆς.
3. Τὸ σύνολο τῶν Κρατῶν τῆς Εὐρώπης.
4. Τὸ σύνολο τῶν ποταμῶν τῆς Ἑλλάδας.
5. Τὸ σύνολο τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου.
6. Τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν 1 μέχρι 999.

5. Ἴσα σύνολα

Ἂν παραστήσωμε τὰ σύνολα $M = \{2, 3, 4\}$ καὶ $N = \{4, 3, 2\}$, βλέπομε ὅτι κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου Μ εἶναι καὶ στοιχεῖο τοῦ συνόλου Ν. Ἀλλὰ καὶ τὸ κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου Ν εἶναι καὶ στοιχεῖο τοῦ συνόλου Μ. Τὰ δύο αὐτὰ σύνολα Μ καὶ Ν λέγονται ἴσα σύνολα.

Ἐπίσης τὰ σύνολα $\Delta = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ καὶ $E = \{\gamma, \beta, \alpha\}$ εἶναι ἴσα μεταξύ τους, γιατὶ κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου Δ εἶναι καὶ στοιχεῖο τοῦ συνόλου Ε, ὅπως καὶ κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου Ε εἶναι καὶ στοιχεῖο τοῦ συνόλου Δ.

Ἄρα : *Δύο σύνολα λέγονται ἴσα σύνολα, ὅταν ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ καθενὸς εἶναι καὶ στοιχεῖα τοῦ ἄλλου.*

Τὴν ἰσότητα τῶν συνόλων Μ καὶ Ν τὴ σημειώνομε ὡς ἑξῆς : $M = N$.

6. Ἰσοδύναμα σύνολα, πληθικὸς ἀριθμὸς συνόλου

Φανταζόμενοι τὴν εἰκόνα ἑνὸς γεύματος μιᾶς τετραμελοῦς οἰκογένειας βλέπομε ὅτι στὸ κάθε μέλος ἀντιστοιχεῖ ἕνα κάθισμα, μία πετσέτα, ἕνα κουτάλι, ἕνα μαχαίρι κλπ. Λέμε ὅτι τὸ σύνολο τῶν μελῶν τῆς οἰκογένειας εἶναι **ἰσοδύναμο** πρὸς τὸ σύνολο τῶν καθισμάτων, τῶν πετσετῶν, τῶν κουταλιῶν κλπ.

Ἀπὸ τὴν ἰσοδυναμία αὐτὴ δημιουργεῖται στὸ μυαλὸ μία ἔννοια, μία ἀφηρημένη εἰκόνα, ποὺ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 4 καὶ λέγεται **πληθικὸς ἀριθμὸς** τοῦ συνόλου τῶν ἀτόμων, τῶν καθισμάτων κλπ.

7. Ἕνωση συνόλων

Παράδειγμα 1. Ἡ Ἕκτη τάξη ἑνὸς σχολείου ἔχει δύο ὁμάδες ἐρυθροσταυριτῶν. Τὸ σύνολο τῶν μαθητῶν, ποὺ ἀνήκουν στὴ μιὰ ὁμάδα, εἶναι : Α = {Παῦλος, Πέτρος, Κώστας, Φωκίων} καὶ τὸ σύνολο τῶν μαθητῶν, ποὺ ἀνήκουν στὴν ἄλλη ὁμάδα, εἶναι : Β = {Κώστας *, Φωκίων *, Φαίδων, Χρίστος, Θωμᾶς}.

Ἐὰν τώρα μᾶς ρωτήσουν : ποιὸ εἶναι τὸ σύνολο τῶν ἐρυθροσταυριτῶν μαθητῶν τῆς ΣΤ' τάξεως τοῦ Μαρασλείου; θ' ἀπαντήσωμε μὲ εὐκολία :

Μ = {Παῦλος, Πέτρος, Κώστας, Φωκίων, Φαίδων, Χρίστος, Θωμᾶς}.

Τί κάναμε, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ σύνολο ὅλων τῶν ἐρυθροσταυριτῶν τῆς ΣΤ' τάξεως ;

Ὅπως παρατηροῦμε, ἀπὸ τὰ δυὸ σύνολα σχηματίσαμε ἕνα ἄλλο σύνολο, ποὺ ὀνομάζεται **ἕνωση τῶν δύο συνόλων.**

Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι ὁ Κώστας καὶ ὁ Φωκίων ἀνήκουν καὶ στὶς δύο ὁμάδες· στὴν ἕνωση ὅμως δὲ λαμβάνονται δυὸ φορές, ἀλλὰ μόνο μιά, γιατὶ ἡ ἕνωση τῶν δύο αὐτῶν συνόλων εἶναι σύνολο. Καί, ὅπως γνωρίζομε, τὰ στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου πρέπει νὰ διακρίνωνται καθαρὰ μεταξύ των.

Ὥστε : *Ἕνωση δύο συνόλων λέγεται τὸ σύνολο, τὸ ὁποῖο ἔχει στοιχεῖα ὅλα τὰ στοιχεῖα τους· κάθε στοιχεῖο ὅμως λαμβάνεται μιὰ μόνο φορά.*

Σύμβολο τῆς ἑνώσεως εἶναι τὸ $\cup$. Ἔτσι ἡ ἕνωση τῶν δύο παραπάνω συνόλων Α καὶ Β γράφεται : $A \cup B$ καὶ διαβάζεται : «Α ἕνωση Β».

* Πρόκειται γιὰ τὸν ἴδιο μαθητὴ τοῦ συνόλου Α.

Παράδειγμα 2. Ἂν $A = \{2, 5, 6, 7\}$ καὶ $B = \{2, 4, 5, 7\}$ θὰ εἶναι : $A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 7\}$

Παράδειγμα 3. Ἂν $A = \{\pi, \rho, \sigma\}$ καὶ $B = \{\sigma, \tau, \upsilon\}$ θὰ εἶναι : $A \cup B = \{\pi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon\}$.

Σημείωση. 1. Τὸ σύνολο, ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴν ἕνωση, μποροῦμε νὰ τὸ ἑνώσωμε μὲ ἕνα τρίτο σύνολο, ὁπότε θὰ ἔχωμε ἕνωση τριῶν συνόλων. Ἐπίσης τὴν ἕνωση αὐτὴ μποροῦμε νὰ τὴν ἑνώσωμε μὲ ἕνα τέταρτο σύνολο, ὁπότε θὰ ἔχωμε ἕνωση 4 συνόλων κ.ο.κ.

2. Γιὰ τὴν ἕνωση ἑνὸς συνόλου Α μὲ τὸ κενὸ σύνολο $\varnothing$ ἔχομε : $\varnothing \cup A = A \cup \varnothing = A$ (γιατὶ τὸ κενὸ σύνολο δὲν ἔχει κανένα στοιχεῖο).

Γι᾽ αὐτὸ τὸ κενὸ σύνολο $\varnothing$ λέγεται οὐδέτερο στοιχεῖο γιὰ τὴν πράξη τῆς ἑνώσεως.

3. Γιὰ νὰ διδάξωμε ἢ νὰ παραστήσωμε τὴν πρόσθεση δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἑνώνομε δύο σύνολα (δακτύλων, ψηφίων, βόλων κλπ). Π. χ. ἡ ἕνωση $\{\alpha, \beta, \gamma\} \cup \{\delta, \varepsilon\} = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ παριστάνει τὴν πρόσθεση $3+2=5$, ὅπου 3 εἶναι ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ πρώτου συνόλου, 2 τοῦ δευτέρου καὶ 5 τῆς ἑνώσεως. Τὰ σύνολα ὅμως ποὺ ἑνώνομε πρέπει νὰ μὴν ἔχουν κοινὰ στοιχεῖα, νὰ εἶναι ὅπως λέμε **«ξένα μεταξύ τους»**.

Γ. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

α) Νὰ σχηματίσετε τὶς ἑνώσεις τῶν ἑξῆς συνόλων :

1. $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ καὶ $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$
2. $A = \{\beta, \gamma, \varepsilon, \zeta, \eta\}$ καὶ $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta\}$
3. $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ καὶ $B = \{\gamma, \beta, \alpha, \delta\}$
4. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ καὶ $B = \{3, 2, 4, 1\}$
5. $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $B = \{\beta, \gamma, \delta\}$ καὶ $\Gamma = \{\gamma, \delta, \varepsilon\}$
6. $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ καὶ $B = \phi$
7. $A = \{1, 2, 3\}$ καὶ $B = \phi$

β) Νὰ σχηματίσετε τὴν ἕνωση τοῦ συνόλου Α τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως **«μάθημα»** καὶ τοῦ συνόλου Β τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως **«βιβλίο»**.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΠΟΣΑ

1. Τί λέγεται ποσὸ

Παράδειγμα. *Ὁ Πέτρος, ὅταν ἄνοιξαν τὰ σχολεῖα, ἀγόρασε 4 τετράδια καὶ πλήρωσε 12 δραχμές. Ἀργότερα χρειάστηκε ἄλλα 8 ὅμοια τετράδια καὶ πλήρωσε 24 δραχμές.*

Στὸ παράδειγμα αὐτὸ βλέπομε ὅτι τὰ τετράδια ἀπὸ 4 ἔγιναν 8, δηλ. διπλασιάστηκε ὁ ἀριθμός τους· ὁμοίως καὶ οἱ δραχμὲς ἀπὸ 12 ἔγιναν 24. Δηλ. καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν τετραδίων καὶ οἱ δραχμὲς αὐξήθηκαν.

Θὰ ἦταν δυνατὸν νὰ ἀγοράση ὁ Πέτρος καὶ λιγότερα τετράδια ἀπὸ τὰ 4, ὁπότε θὰ πλήρωνε καὶ λιγότερες δραχμές.

Ἑπομένως τὰ τετράδια καὶ οἱ δραχμὲς εἶναι δυνατὸν νὰ γίνουν περισσότερες (νὰ αὐξηθοῦν) ἢ καὶ λιγότερες (νὰ ἐλαττωθοῦν).

Τὸ ἴδιο συμβαίνει καὶ μὲ τοὺς μαθητὲς τῆς τάξεως ἢ τοῦ σχολείου: εἶναι δυνατὸν νὰ αὐξηθοῦν, ἂν ἐγγραφοῦν καὶ ἄλλοι μαθητές, ἢ νὰ ἐλαττωθοῦν, ἂν μερικοὶ πάρουν ἀποφοιτήριο.

Ὁμοίως μπορεῖ νὰ αὐξηθοῦν ἢ νὰ ἐλαττωθοῦν τὰ θρανία, οἱ χάρτες, οἱ εἰκόνες, τὰ πρόβατα, οἱ ἐργάτες, τὰ ἡμερομίσθια κλπ.

Ὅλα αὐτὰ ὀνομάζονται **ποσά.**

Ποσὸ *στὴν Ἀριθμητικὴ ὀνομάζεται καθετί, τὸ ὁποῖο μπορεῖ νὰ αὐξηθῆ ἢ νὰ ἐλαττωθῆ, δηλαδὴ μπορεῖ νὰ λάβη μιὰ νέα ἀριθμητικὴ τιμή.*

2. Ποσὰ ἀνάλογα καὶ ποσὰ ἀντίστροφα

α) Ἀνάλογα ποσὰ

Παράδειγμα. *Ἕνας ἐργάτης γιὰ 2 ἡμερομίσθια πῆρε 240 δρχ. Ἂν ἐργαζόταν διπλάσιες ἡμέρες, δηλ.* $2 \times 2 = 4$ *ἡμέρες, θὰ ἔπαιρνε* *καὶ διπλάσιες δραχμές, δηλ. $240 \times 2 = 480$ δρχ. Γιὰ τριπλάσια ἡμερομίσθια θὰ ἔπαιρνε τριπλάσιες δραχμὲς κ.ο.κ. Καὶ γιὰ ἕνα ἡμερομίσθιο θὰ ἔπαιρνε 2 φορὲς λιγότερες δρχ., δηλ. $240 : 2 = 120$ δρχ.*

Στὸ παράδειγμα αὐτὸ ἔχομε δυὸ ἑτεροειδῆ (διαφορετικὰ) ποσά: ἡμερομίσθια καὶ δραχμές. Παρατηροῦμε ὅτι, ὅταν ἡ τιμὴ 2 τοῦ ἑνὸς ποσοῦ, τῶν ἡμερομισθίων, διπλασιαστῆ, τριπλασιαστῆ κλπ., καὶ ἡ ἀντίστοιχη τιμὴ 240 δραχμὲς τῆς ἀμοιβῆς τοῦ ἐργάτη διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κλπ.

Ὁμοίως παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν ἡ τιμὴ 2 τοῦ ποσοῦ τῶν ἡμερομισθίων διαιρεθῆ διὰ 2, καὶ ἡ ἀντίστοιχη τιμὴ 240 δραχμὲς τῆς ἀμοιβῆς τοῦ ἐργάτη διαιρεῖται διὰ 2.

Ἐπίσης, ἂν ἡ τιμὴ τοῦ ποσοῦ τῶν ἡμερομισθίων διαιρεθῆ διὰ 3, διὰ 4 κλπ., καὶ ἡ ἀντίστοιχη τιμὴ τῶν δραχμῶν θὰ διαιρεθῆ διὰ 3, διὰ 4 κλπ.

Τὰ ποσὰ αὐτὰ στὴν ἀριθμητικὴ λέγονται **εὐθέως ἀνάλογα** ἢ ἁπλῶς **ἀνάλογα ποσά.**

Δυὸ ποσὰ λέγονται ἀνάλογα, ὅταν ἔχουν ἀντίστοιχες τιμὲς καὶ πολλαπλασιαζομένης μιᾶς τιμῆς τοῦ ἑνὸς ποσοῦ μὲ ἕναν ἀριθμό, πολλαπλασιάζεται καὶ ἡ ἀντίστοιχη πρὸς αὐτὴ τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό· ἤ, διαιρουμένης μιᾶς τιμῆς τοῦ ἑνὸς ποσοῦ μὲ ἕναν ἀριθμό, διαιρεῖται καὶ ἡ ἀντίστοιχη πρὸς αὐτὴ τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό.

Σημείωση. Ἡ ἡλικία ἑνὸς παιδιοῦ καὶ τὸ ἀνάστημά του, ἂν καὶ συναυξάνονται, δὲν εἶναι ἀνάλογα ποσά· γιατὶ ὅταν διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κλπ. ἡ ἡλικία τοῦ παιδιοῦ, δὲ διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κλπ. καὶ τὸ ἀνάστημά του (συμμεταβλητὰ ποσά).

Παρατήρηση. Στὴν καθημερινὴ ζωὴ συχνὰ συναντοῦμε **ποσὰ ἀνάλογα**· λ. χ. Τὰ **κιλὰ** τῶν πραγμάτων ποὺ ἀγοράζομε καὶ τὰ **χρήματα** ποὺ πληρώνομε γι' αὐτά. Ὁ **ἀριθμὸς τῶν ἐνδυμασιῶν καὶ τὰ**

μέτρα τοῦ ὑφάσματος, ποὺ χρειάζονται γιὰ τὴν κατασκευή τους. Οἱ ἀποστάσεις ποὺ διανύομε καὶ ὁ **χρόνος** ποὺ χρειάζεται, γιὰ νὰ τὶς διανύσωμε.

Ἡ **ἀμοιβὴ** τοῦ ἐργάτη καὶ ὁ **χρόνος** τῆς ἐργασίας του.

β) Ἀντίστροφα ποσὰ

Παράδειγμα. *4 ἐργάτες τρυγοῦν ἕνα ἀμπέλι σὲ 12 ἡμέρες. Διπλάσιοι ἐργάτες, δηλ. 8 ἐργάτες (4 × 2), θὰ τὸ τρυγήσουν σὲ 6 ἡμέρες (12 : 2 = 6 ἡμ.). Καὶ μισοὶ ἐργάτες, δηλ. 2 ἐργάτες (4 : 2 = 2 ἐργάτες), θὰ τὸ τρυγήσουν σὲ διπλάσιες ἡμέρες, δηλ. σὲ 24 ἡμέρες (12 × × 2 = 24 ἡμ.).*

Στὸ παράδειγμα αὐτὸ ἔχομε δύο ἑτεροειδῆ ποσά: ἐργάτες καὶ ἡμέρες· δηλ. τὴν ἐργασία τοῦ ἐργάτη καὶ τὸ χρόνο ποὺ χρειάζεται γιὰ νὰ γίνη ἡ ἐργασία αὐτή.

Καθὼς παρατηροῦμε, ὅταν οἱ ἐργάτες εἶναι 4, τελειώνουν τὴν ἐργασία σὲ 12 ἡμέρες. Ὅταν οἱ ἐργάτες γίνουν διπλάσιοι, χρειάζονται τὸ μισὸ ἀριθμὸ ἡμερῶν γιὰ νὰ τελειώσουν τὴν ἴδια ἐργασία. Καὶ ὅταν οἱ ἐργάτες ἀπὸ 4 γίνουν 2, δηλ. 2 φορὲς λιγότεροι, τότε θὰ χρειαστοῦν δυὸ φορὲς περισσότερες ἡμέρες.

Καὶ στὸ παράδειγμα αὐτὸ βλέπομε, ὅτι τὰ ποσὰ ἐργάτες καὶ ἡμέρες ἔχουν σχέση μεταξύ τους, ἀλλὰ ἀντίθετη ἀπὸ ἐκείνη, ποὺ ἔχουν τὰ ἀνάλογα ποσά. Γιατὶ ἐδῶ, ὅταν ἡ τιμὴ 4 τοῦ ποσοῦ τῶν ἐργατῶν διπλασιαστῆ, ἡ ἀντίστοιχη τιμὴ 12 τοῦ ποσοῦ τῶν ἡμερῶν διαιρεῖται διὰ 2. Καὶ ὅταν ἡ τιμὴ 4 τῶν ἐργατῶν διαιρεθῆ διὰ 2, ἡ ἀντίστοιχη τιμὴ 12 τοῦ ποσοῦ τῶν ἡμερῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 2.

Τὰ ποσὰ αὐτὰ λέγονται **ἀντιστρόφως ἀνάλογα** ἢ ἁπλῶς **ἀντίστροφα ποσά.**

Δύο ποσὰ λέγονται ἀ ν τ ί σ τ ρ ο φ α, ὅταν ἔχουν ἀντίστοιχες τιμὲς καὶ πολλαπλασιαζομένης μιᾶς τιμῆς τοῦ ἑνὸς ποσοῦ μὲ ἕναν ἀριθμό, διαιρῆται ἡ ἀντίστοιχη πρὸς αὐτὴ τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό· ἤ, διαιρουμένης τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς ποσοῦ μὲ ἕναν ἀριθμό, πολλαπλασιάζεται ἡ ἀντίστοιχη πρὸς αὐτὴ τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό.

Σημείωση. Ὅταν αὐξάνεται ἕνα ποσὸν καὶ τὸ ἄλλο ἐλαττώνεται, δὲν πρέπει νὰ νομίζωμε ὅτι ὁπωσδήποτε εἶναι τὰ ποσὰ ἀντίστροφα.

Παταρήρηση. Ἀντίστροφα ποσὰ εἶναι:

Ἡ **ταχύτητα** καὶ ὁ **χρόνος** ποὺ χρειάζεται, γιὰ νὰ διανύσωμε ὁρισμένη ἀπόσταση.

Οἱ **ἡμέρες** ποὺ χρειάζονται γιὰ μιὰ ἐργασία καὶ οἱ **ὧρες** ποὺ ἐργαζόμαστε τὴν ἡμέρα, γιὰ νὰ τελειώση ἡ ἐργασία.

Τὸ **μῆκος** καὶ τὸ **πλάτος** ἑνὸς ὑφάσματος γιὰ μιὰ ἐνδυμασία.

Ἐρωτήσεις

α) Τί λέγεται ποσόν;

β) Ποιὰ ποσὰ λέγονται ἀνάλογα καὶ ποιὰ ἀντίστροφα;

γ) Τί παθαίνει ἡ τιμὴ τοῦ ποσοῦ τῶν δραχμῶν, ὅταν αὐξάνη ὁ ἀριθμὸς τῶν τετραδίων, ποὺ ἀγοράζομε;

δ) Τί ποσὰ εἶναι τὰ χιλιόμετρα, ποὺ διανύει τὸ αὐτοκίνητο τὴν ὥρα, καὶ οἱ ὧρες ποὺ χρειάζονται, γιὰ νὰ διανύση μιὰ ἀπόσταση;

ε) Γιατί κιλὰ καὶ δραχμὲς εἶναι ποσὰ ἀνάλογα;

στ) Γιατί ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν καὶ ὁ χρόνος ποὺ χρειάζονται, γιὰ νὰ τελειώση μιὰ ἐργασία εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ (ἀπὸ μνήμης)

1. Ἀγοράζομε 5 τετράδια καὶ πληρώνομε 15 δραχμές. Πόσο θὰ πληρώσωμε γιὰ διπλάσιο καὶ πόσο γιὰ τριπλάσιο ἀριθμὸ τετραδίων;

2. Μὲ 8 δρχ. ἀγοράζομε 8 κουλούρια· πόσα ἀπὸ τὰ κουλούρια αὐτὰ θὰ ἀγοράσωμε μὲ 2 δρχ. καὶ πόσα μὲ μιὰ δραχμή;

3. Γιὰ νὰ γίνη μιὰ σχολικὴ ποδιὰ χρειάζονται 2 μέτρα ὕφασμα πλάτους 1 μέτρου. Πόσο ὕφασμα πρέπει νὰ ἀγοράσωμε, ἂν ἔχη πλάτος διπλάσιο;

4. Ἕνα αὐτοκίνητο, ποὺ τρέχει μὲ 60 χιλιόμετρα τὴν ὥρα φτάνει στὸν προορισμό του ὕστερα ἀπὸ 2 ὧρες. Ὕστερα ἀπὸ πόσες ὧρες θὰ ἔφτανε, ἂν ἔτρεχε 20 χιλιόμετρα τὴν ὥρα (λόγῳ βροχῆς);

5. Ἂν 6 ἐργάτες τελειώνουν μιὰ ἐργασία σὲ 10 ἡμέρες, πόσοι

ἐργάτες μὲ τὴν ἴδια ὁ καθένας ἀπόδοση ὅπως οἱ προηγούμενοι θὰ τὴν τελειώσουν σὲ 5 ἡμέρες ;

6. Οἱ μαθητὲς μιᾶς κατασκηνώσεως ἔχουν τρόφιμα γιὰ 18 ἡμέρες. Πόσες ἡμέρες θὰ περάσουν μὲ τὰ ἴδια τρόφιμα καὶ τὴν ἴδια προηγούμενη ἡμερήσια μερίδα διπλάσιοι μαθητὲς καὶ πόσες ἡμέρες οἱ μισοὶ μαθητές ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΜΕΘΟΔΟΙ

1. Ἁπλὴ μέθοδος τῶν τριῶν

α) Μὲ ποσὰ ἀνάλογα

Πρόβλημα. *Τὰ 3 κιλὰ πορτοκάλια κοστίζουν 18 δραχμές. Πόσο κοστίζουν τὰ 8 κιλὰ ἀπὸ τὰ ἴδια πορτοκάλια ;*

Σκέψη.

Στὸ πρόβλημα αὐτό, ὅπως βλέπομε, μᾶς δίδεται ἡ τιμὴ τῶν 3 κιλῶν, δηλ. ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων, καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῶν 8 κιλῶν, δηλ. ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων πάλι.

Ἔχομε μάθει νὰ βρίσκωμε τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων, ὅταν γνωρίζωμε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας. Ἐδῶ ὅμως δὲ γνωρίζομε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας. Εἶναι λοιπὸν ἀνάγκη νὰ τὴ βροῦμε· νὰ βροῦμε δηλ. πόσο ἀξίζει τὸ ἕνα κιλὸ καὶ ὕστερα θὰ βροῦμε πόσο ἀξίζουν τὰ 8 κιλά. Γιὰ νὰ τὸ πετύχωμε αὐτό, θὰ χρησιμοποιήσωμε τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα.

Α΄ Λύση : (Μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα)

Ἡ τιμὴ τῶν 3 κ. εἶναι 18 δρχ.

Ἡ τιμὴ τοῦ 1 κ. εἶναι $\frac{18}{3}$ δρχ.

Ἡ τιμὴ τῶν 8 κ. εἶναι $\frac{18 \times 8}{3} = 18 \times \frac{8}{3} = \frac{144}{3} = 48$ δρχ.

Δὲν εἶναι ὅμως εὔκολο νὰ λύνωμε πάντοτε ὅλα τὰ προβλήματα μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα.

Εἶναι ἀνάγκη ἑπομένως νὰ βροῦμε ἕναν εὔκολο τρόπο, μιὰ μέθοδο, νὰ τὰ λύνωμε εὔκολα. Ἡ μέθοδος αὐτὴ εἶναι ἡ **μέθοδος τῶν τριῶν**.

Στὸ παραπάνω πρόβλημα μᾶς δίνονται τρεῖς ἀριθμοί, δηλ. οἱ ἀντίστοιχες τιμὲς δύο ποσῶν (3 κιλὰ καὶ 18 δραχμὲς) καὶ μιὰ ἄλλη τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἀπ' αὐτὰ τὰ ποσὰ (8 κιλὰ) καὶ ζητεῖται ἡ πρὸς αὐτὴ ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ. Ἡ μέθοδος αὐτὴ λέγεται **ἁπλὴ μέθοδος τῶν τριῶν.**

Β΄ Λύση. (Μὲ τὴν ἁπλὴ μέθοδο τῶν τριῶν)

Κατάταξη. Ἡ τιμὴ τῶν 3 κιλῶν εἶναι 18 δρχ.

» » » 8 » » x »

Μετὰ τὴν κατάταξη προσπαθοῦμε νὰ βροῦμε τὴ σχέση ποὺ ἔχουν τὰ ποσὰ αὐτὰ μεταξύ τους. Θὰ κάνωμε δηλ. τὴ **σύγκριση τῶν ποσῶν.** Καὶ λέμε :

Ἀφοῦ τὰ 3 κιλὰ ἔχουν τιμὴ 18 δρχ., τὰ διπλάσια κιλὰ θὰ ἔχουν διπλάσιες δραχμὲς κ.ο.κ. Ἄρα τὰ ποσὰ εἶναι **ἀνάλογα.** (Γιατί;)

Γιὰ τὴ λύση τοῦ προβλήματος μὲ τὴν ἁπλὴ μέθοδο τῶν τριῶν θὰ μᾶς βοηθήσῃ ἡ λύση του μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα. Ἐκεῖ βρήκαμε ὅτι ἡ τιμὴ τῶν 8 κιλῶν εἶναι : $\frac{18 \times 8}{3}$ δρχ.

Ἂν παρατηρήσωμε τοὺς ἀριθμούς, ὅπως τοὺς ἔχομε κατατάξει, βλέπομε ὅτι, γιὰ νὰ βροῦμε τὴν τιμὴ τῶν 8 κιλῶν, πολλαπλασιάσαμε τὸν ὑπεράνω τοῦ Χ ἀριθμὸ 18 δρχ. μὲ τὸ κλάσμα (τὸ λόγο) $\frac{3}{8}$, τὸ ὁποῖο σχηματίζουν οἱ δυὸ τιμὲς 3 καὶ 8 τοῦ ἄλλου ποσοῦ (τῶν κιλῶν), **ἀντεστραμμένο.** Ἔχομε δηλαδή :

$$X = \frac{18 \times 8}{3} = \frac{6 \times 8}{1} = \frac{48}{1} = 48 \text{ δρχ.}$$ (Ἁπλοποιήσαμε μὲ τὸ 3).

Ἀπάντηση. Τὰ 8 κιλὰ πορτοκάλια ἔχουν 48 δραχμές.

Σημείωση. *Λόγος* ἑνὸς ἀριθμοῦ πρὸς ἄλλον λέγεται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ διὰ τοῦ δευτέρου· π. χ. ὁ λόγος τοῦ 3 πρὸς τὸν 8 εἶναι 3 : 8 ἢ $\frac{3}{8}$.

Συμπέρασμα. Γιὰ νὰ λύσωμε προβλήματα μὲ τὴν ἁπλὴ μέθοδο τῶν τριῶν, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, πολλαπλασιάζομε τὸν ὑπεράνω τοῦ ἀγνώστου Χ ἀριθμὸ ἐπὶ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖο σχηματίζουν οἱ δύο τιμὲς τοῦ ἄλλου ποσοῦ, **ἀντεστραμμένο.**

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

α) Ἀπὸ μνήμης

7. Τὰ 5 μολύβια κοστίζουν 15 δρχ. Πόσο κοστίζουν 9 ἀπὸ τὰ ἴδια μολύβια ;

8. Μὲ 6 δρχ. ἀγοράζομε δυὸ παγωτά. Πόσα παγωτὰ σὰν κι αὐτὰ θὰ ἀγοράσωμε μὲ 18 δρχ. ;

9. Γιὰ 3 εἰσιτήρια στὸ λεωφορεῖο πληρώσαμε 12 δρχ. Πόσο θὰ πληρώναμε γιὰ 5 εἰσιτήρια τῆς ἴδιας διαδρομῆς ;

10. Ἕνας ἐργάτης γιὰ 2 ἡμερομίσθια παίρνει 240 δρχ. Πόσο θὰ πάρη γιὰ 6 ἡμερομίσθια, ἂν ἐργαστῆ μὲ τὸ ἴδιο ἡμερομίσθιο ;

β) Γραπτῶς

11. Τὰ 2 κιλὰ λάδι κοστίζουν 120 δρχ. Πόσο κοστίζουν τὰ 16 κιλὰ λάδι τῆς ἴδιας ποιότητας ;

12. Γιὰ 5 μέτρα ὕφασμα πληρώσαμε 280 δρχ. Ἂν ἀγοράσωμε ἀκόμη 0,75 μ., ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα, πόσο θὰ πληρώσωμε γι' αὐτό;

13. Οἱ 36 ^{0} Κελσίου ἰσοδυναμοῦν πρὸς 28,8 ^{0} Ρεωμύρου. Ὅταν τὸ θερμόμετρον δείχνη 42 ^{0} Κελσίου, σὲ πόσους βαθμοὺς Ρεωμύρου ἀντιστοιχοῦν αὐτοί ;

14. Αὐτοκίνητο σὲ 7 ὧρες διέτρεξε ἀπόσταση 434 χιλιομέτρων. Σὲ πόσες ὧρες θὰ διατρέξη ἀπόσταση 1426 χιλιομέτρων, ἂν τρέχη μὲ τὴν ἴδια ταχύτητα ;

15. Μία ὑφάντρια σὲ 3 ὧρες ὑφαίνει 2,50 μ. ὑφάσματος. Σὲ πόσες ὧρες, θὰ ὑφάνη 17,50 μ. τοῦ ἴδιου ὑφάσματος ;

16. Σὲ μιὰ μαθητικὴ κατασκήνωση, χρειάστηκαν 520 κιλὰ ψωμὶ γιὰ 20 ἡμέρες. Πόσα κιλὰ ψωμὶ ξόδευαν τὴν ἑβδομάδα κατὰ μέσο ὅρο ;

γ) Κάμετε κι' ἐσεῖς προβλήματα μὲ τὰ ἑξῆς ποσά :

Μὲ ἡμερομίσθια καὶ δραχμές.
Μὲ κιλὰ καὶ δραχμές.
Μὲ μέτρα καὶ δραχμές.
Μὲ ὧρες καὶ χιλιόμετρα.
Μὲ κτηνοτρόφους : Ζῶα καὶ παραγωγὴ προϊόντων.

β) Μὲ ποσὰ ἀντίστροφα

Πρόβλημα. *3 ἐργάτες γιὰ νὰ τρυγήσουν ἕνα ἀμπέλι, χρειάζονται 6 ἡμέρες. Πόσες ἡμέρες θὰ χρειάζονταν 9 ἐργάτες τῆς ἴδιας ἀποδόσεως γιὰ νὰ τρυγήσουν τὸ ἴδιο ἀμπέλι ;*

Παρατήρηση : Καὶ στὸ πρόβλημα αὐτὸ μᾶς δίνονται τρεῖς ἀριθμοὶ καὶ ζητεῖται ὁ τέταρτος, ποὺ εἶναι ἄγνωστος. Γι' αὐτὸ λέμε, ὅτι τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν. Διαφέρει ὅμως ἀπὸ τὸ προηγούμενο στὸ ὅτι τὰ ποσὰ δὲν ἔχουν τὴν ἴδια σχέση μεταξύ τους. Γιατὶ οἱ διπλάσιοι ἐργάτες θὰ τελειώσουν τὴν ἴδια ἐργασία στὸ δεύτερο τοῦ χρόνου (σὲ μισὲς ἡμέρες), ὅπως τριπλάσιοι ἐργάτες θὰ τὴν τελειώσουν στὸ τρίτο τοῦ χρόνου κ.ο.κ. Ἄρα τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα. (Γιατί;)

Α΄ Λύση. (Μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα)

Ἀφοῦ οἱ 3 ἐργάτες χρειάζονται 6 ἡμέρες

ὁ 1 ἐργάτης χρειάζεται 6×3 ἡμέρες

καὶ οἱ 9 ἐργάτες χρειάζονται $\frac{6 \times 3}{9}$ ἡμ. $= 6 \times \frac{3}{9}$ ἡμ. $= \frac{18}{9}$ ἡμ. $= 2$ ἡμ.

Β΄ Λύση. (Μὲ τὴν ἁπλὴ μέθοδο τῶν τριῶν) :

Κατάταξη. 3 ἐργάτες χρειάζονται 6 ἡμέρες

9 » » $\times$ »

Σύγκριση τῶν ποσῶν. Ἀφοῦ οἱ 3 ἐργάτες χρειάζονται 6 ἡμ., οἱ διπλάσιοι ἐργάτες θὰ χρειαστοῦν 3 ἡμέρες. Τὰ ποσὰ εἶναι **ἀντίστροφα.**

Στὴ λύση τοῦ προβλήματος αὐτοῦ μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα βρήκαμε ὅτι οἱ 9 ἐργάτες θὰ χρειαστοῦν $\frac{6 \times 3}{9}$ ἡμ. Δηλ. πολλαπλασιάσαμε τὸν ὑπεράνω τοῦ Χ ἀριθμὸ 6 ἡμ. ἐπὶ τὸ κλάσμα (τὸ λόγο) $\frac{3}{9}$ ὅπως ἔχει, δηλ. ὄχι ἀντεστραμμένο.

Καὶ ἔχομε:

$$X = 6 \times \frac{3}{9} = \frac{18}{9} = 2 \text{ ἡμέρες}$$

Ἀπάντηση. Οἱ 9 ἐργάτες θὰ τρυγήσουν τὸ ἀμπέλι σὲ 2 ἡμέρες.

Συμπέρασμα: *Γιὰ νὰ λύσωμε προβλήματα μὲ τὴν ἁπλὴ μέθοδο τῶν τριῶν, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, πολλαπλασιάζομε τὸν ὑπεράνω τοῦ ἀγνώστου Χ ἀριθμὸ ἐπὶ τὸ κλάσμα, ποὺ σχηματίζουν οἱ δύο τιμὲς τοῦ ἄλλου ποσοῦ, ὅπως ἔχει (καὶ ὄχι ἀντεστραμμένο).*

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

α) Ἀπὸ μνήμης

17. 10 ἐργάτες τελειώνουν μιὰ ἐργασία σὲ 6 ἡμέρες. 5 ἐργάτες τῆς ἴδιας ἀποδόσεως σὲ πόσες ἡμέρες θὰ τὴν τελειώσουν ;

18. Μία ὑφάντρια, ποὺ ἐργάζεται 8 ὧρες τὴν ἡμέρα, ὑφαίνει ἕνα ὕφασμα σὲ 6 ἡμέρες. Ἂν ἐργάζεται 4 ὧρες τὴν ἡμέρα, σὲ πόσες ἡμέρες θὰ ὑφάνη τὸ ἴδιο ὕφασμα ;

19. 10 στρατιῶτες ἔχουν τρόφιμα γιὰ 24 ἡμέρες. Τριπλάσιοι στρατιῶτες πόσες ἡμέρες θὰ περάσουν μὲ τὰ ἴδια τρόφιμα ;

β) Γραπτῶς

20. Σ᾽ ἕνα φρούριο ὑπάρχουν 24 στρατιῶτες καὶ ἔχουν τρόφιμα γιὰ 2 μῆνες καὶ 10 ἡμέρες. Πόσο χρόνο θὰ περάσουν μὲ τὰ ἴδια τρόφιμα, ἂν οἱ στρατιῶτες ἐλαττωθοῦν κατὰ 8 ;

21. Βουστάσιο μὲ 16 ἀγελάδες ἔχει τροφὲς γιὰ 24 ἡμέρες. Ἂν οἱ ἀγελάδες αὐξηθοῦν κατὰ 8, πόσες ἡμέρες θὰ περάσουν μὲ τὶς ἴδιες τροφές ;

22. Ἕνας ὁδοιπόρος ποὺ βαδίζει 8 ὧρες τὴν ἡμέρα, πῆγε ἀπὸ ἕνα χωριὸ σὲ ἄλλο σὲ 5 ἡμέρες. Ἂν ἤθελε νὰ φτάση μιὰ ἡμέρα νωρίτερα, πόσες ὧρες ἔπρεπε νὰ βαδίζη τὴν ἡμέρα ;

23. Γιὰ νὰ γίνη μία ἀνδρικὴ ἐνδυμασία χρειαζόμαστε 3 μ. ὕφασμα πλάτους 1,6 μ. Πόσα μέτρα θὰ χρειαστοῦν ἀπὸ ἄλλο ὕφασμα πλάτους 1,2 μ. γιὰ τὴν ἴδια ἐνδυμασία ;

24. Γιὰ νὰ στρωθῆ τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου χρειάζονται 26 σανίδες πλάτους 20 ἑκατοστομέτρων. Πόσες σανίδες πλάτους 13 ἑκατοστομέτρων καὶ μὲ τὸ αὐτὸ μῆκος θὰ χρειαστοῦν γιὰ τὸ ἴδιο πάτωμα ;

25. Ἕνα αὐτοκίνητο, ποὺ τρέχει μὲ $49\frac{1}{2}$ χιλιόμετρα τὴν ὥρα, διέτρεξε μιὰ ἀπόσταση σὲ 3 ὧρες καὶ 20 π. Σὲ πόσες ὧρες θὰ διατρέξη τὴν ἴδια ἀπόσταση μὲ ταχύτητα 60 χιλιομέτρων τὴν ὥρα;

26. Γιὰ νὰ κατασκευαστῆ ἕνα χαλὶ χρειάζονται $12\frac{8}{10}$ μέτρα ὑφάσματος πλάτους 1 μέτρου. Πόσα μέτρα θὰ χρειαστοῦν γιὰ τὸ ἴδιο χαλὶ ἀπὸ ἄλλο ὕφασμα 0,80 μ. πλάτους ;

Κάμετε καὶ σεῖς προβλήματα μὲ ποσὰ ἀντίστροφα.

γ) Γενικὰ προβλήματα

27. Γιὰ 12 ἀνδρικὰ πουκάμισα χρειάζονται 36 μ. ὑφάσματος. Πόσα μέτρα ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα θὰ χρειαστοῦν γιὰ 18 ὅμοια πουκάμισα ;

28. Τὰ $\frac{3}{4}$ μ. ὑφάσματος κοστίζουν 75 δρχ., πόσο κοστίζουν τὰ 15 μέτρα ;

29. Ἐργάτης, ἐργαζόμενος 8 ὧρες τὴν ἡμέρα, τελειώνει μιὰ ἐργασία σὲ 20 ἡμέρες. Ἂν ἐργαζόταν 2 ὧρες περισσότερο κάθε ἡμέρα, σὲ πόσες ἡμέρες θὰ τελείωνε τὴν ἐργασία αὐτή ;

30. Μὲ ἡμερήσια μερίδα ψωμιοῦ 600 γραμμαρίων, περνοῦν οἱ στρατιῶτες ἑνὸς φρουρίου μὲ μιὰ ποσότητα ἀλεύρι ἕνα μήνα.

α) Ἂν ἡ μερίδα τοῦ ψωμιοῦ λιγόστευε κατὰ 100 γραμμάρια ἡμερησίως, πόσες ἡμέρες θὰ περνοῦσαν μὲ τὴν ἴδια ποσότητα ἀλεύρι ;

β) Ἂν βρίσκονταν στὴν ἀνάγκη νὰ περάσουν οἱ στρατιῶτες μὲ τὴν ἴδια ποσότητα ἀλεύρι $1\frac{1}{2}$ μήνα, πόσο θὰ ἔπρεπε νὰ ἐλαττωθῆ ἀκόμη ἡ ἡμερήσια μερίδα ψωμιοῦ κάθε στρατιώτη;

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

α) Στὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα λύνονται μὲ τὴν ἁπλὴ μέθοδο τῶν τριῶν, δίνονται δύο ἀντίστοιχες τιμὲς δύο ποσῶν (ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφων) καὶ μιὰ ἄλλη τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἀπὸ τὰ δυὸ αὐτὰ ποσὰ καὶ ζητεῖται ἡ ἀντίστοιχη πρὸς αὐτὴ τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ. Ἐπειδὴ στὰ προβλήματα αὐτὰ δίνονται **τρεῖς ἀριθμοὶ** καὶ ζητεῖται τέταρτος, γι' αὐτὸ ἡ μέθοδος (ὁ τρόπος), μὲ τὴν ὁποία τὰ λύνομε, λέγεται **ἁπλὴ μέθοδος τῶν τριῶν.**

β) Ἡ ἁπλὴ μέθοδος τῶν τριῶν εἶναι συντόμευση τῆς ἀναγωγῆς στὴ μονάδα.

γ) Γιὰ νὰ λύσωμε τὰ προβλήματα μὲ τὴ μέθοδο τῶν τριῶν, χρειαζόμαστε τὴ σχέση, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ποσῶν, καὶ τὴ βρίσκομε μὲ τὴ σ ύ γ κ ρ ι σ η.

δ) Ἀφοῦ κατατάξωμε καὶ συγκρίνωμε τὰ ποσά, προχωροῦμε στὴ λύση τοῦ προβλήματος.

ε) Γιὰ νὰ λύσωμε τὰ προβλήματα μὲ τὴν ἁπλὴ μέθοδο τῶν τριῶν, ἐφαρμόζομε τὸν ἑξῆς κανόνα :

Κατατάσσομε τὰ ποσὰ καὶ τὰ συγκρίνομε. Ὕστερα πολλαπλασιάζομε τὸν ὑπεράνω τοῦ × ἀριθμὸ μὲ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖο σχηματίζουν οἱ δύο δοσμένες τιμὲς τοῦ ἄλλου ποσοῦ, ἀντεστραμμένο, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ἢ ὅπως εἶναι, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα.

2. Ποσοστὰ

Γενικά. Ὁ χαρτοπώλης, ὁ παντοπώλης, ὁ ἔμπορος, ποὺ πουλοῦν διάφορα πράγματα, ὅπως γνωρίζετε, δὲν τὰ κατασκευάζουν μόνοι τους, ἀλλὰ τὰ ἀγοράζουν ἀπὸ ἄλλους· ἀπὸ μεγαλύτερα καταστήματα, ἀπὸ ἀποθῆκες ἢ καὶ ἀπευθείας ἀπὸ τ : ἐργοστάσια. Τὰ πράγματα αὐτά, ποὺ ἀγοράζουν, τὰ μεταφέρουν στὰ καταστήματά τους καὶ τὰ μεταπωλοῦν.

Ἔτσι ὁ χαρτοπώλης μας ἀγοράζει ἀπὸ τὴν ἀποθήκη τὰ μολύβια 4 δρχ. τὸ ἕνα καὶ τὰ μεταπουλάει 5 δρχ. τὸ ἕνα. Καθὼς βλέπομε, ἀπὸ κάθε μολύβι, ποὺ κοστίζει 4 δραχμές, κερδίζει 1 δρχ.

Ἐδῶ τὸ ποσὸ τῆς δραχμῆς, ποὺ δίνει νὰ ἀγοράση κάθε μολύβι, λέγεται **τιμὴ ἀγορᾶς** ἢ **κόστος.** Τὸ ποσὸ τῶν 5 δρχ. ποὺ παίρνει, ὅταν πουλάη ἕνα μολύβι, λέγεται **τιμὴ πωλήσεως.**

Ὑπάρχει διαφορά, καθὼς φαίνεται, μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν τιμῶν. Ἡ διαφορὰ αὐτὴ στὸ παράδειγμά μας εἶναι 1 δρχ. Αὐτὸ τὸ ποσὸ λέγεται **κέρδος**. Λέμε δηλ. ὅτι ὁ χαρτοπώλης κερδίζει 1 δρχ. ἀπὸ κάθε μολύβι. Αὐτὸς ἄλλωστε εἶναι ὁ λόγος, γιὰ τὸν ὁποῖο κάνει τὴν ἐργασία αὐτή.

Σκεφτῆτε ὅτι ὁ χαρτοπώλης, ὅπως καὶ κάθε ἄλλος καταστηματάρχης, διατηρεῖ ἕνα κατάστημα, γιὰ τὸ ὁποῖο πληρώνει ἐνοίκιο· πληρώνει ἀκόμη μεταφορικά, φωτισμὸ κλπ. Ἐργάζεται ὁ ἴδιος στὸ κατάστημα ἢ πληρώνει καὶ ὑπαλλήλους. Γιὰ νὰ μπορέση λοιπὸν νὰ πληρώση ὅλα αὐτὰ τὰ ἔξοδα καὶ γιὰ νὰ ζήση ὁ ἴδιος καὶ νὰ συντηρήση καὶ τὴν οἰκογένειά του, προσθέτει στὴν τιμὴ ἀγορᾶς ἕνα ποσό, ποὺ ὀνομάζεται, ὅπως εἴπαμε, **κέρδος**.

Τὸ ποσὸ τοῦ κέρδους ὁρίζεται ἀπὸ τὸ Κράτος καὶ ὀνομάζεται **νόμιμο κέρδος**. Εἰδικὴ ὑπηρεσία τοῦ Κράτους, ἡ Ἀγορανομία, ὁρίζει τὸ νόμιμο κέρδος στὰ διάφορα εἴδη. Στὸ ψωμὶ λ.χ. ἐπιτρέπει κέρδος 8 δραχμὲς στὶς 100 δραχμές, στὸ κρέας 15 δρχ. στὶς 100 δρχ., στὰ φροῦτα 30 δρχ. στὶς 100 δρχ., στὰ ὑφάσματα 20 δρχ. στὶς 100 δρχ. κλπ. Ὁρισμένα εἴδη, ἰδίως τὰ ψιλικά, ἔχουν μεγαλύτερο κέρδος· σ' αὐτὰ τὸ κέρδος φτάνει 100 δρχ. στὶς 100 δρχ. ἢ καὶ περισσότερο. Ἔτσι μιὰ βελόνα ἀξίας 0,50 δρχ. πουλιέται 1 δρχ.

Ὥστε: *Κ έ ρ δ ο ς εἶναι τὸ ποσό, ποὺ προσθέτουν οἱ ἔμποροι στὸ κόστος τῶν ἐμπορευμάτων, ὅταν τὰ πουλοῦν.*

Τὸ κέρδος αὐτὸ ὁ ἔμπορος δὲν τὸ ὑπολογίζει σ' ὅλο τὸ χρηματικὸ ποσὸ ποὺ δίνει νὰ ἀγοράση διάφορα ἐμπορεύματα. Τὸ ὑπολογίζει στὶς 100 δρχ. ἢ στὶς 1000 δρχ., γιὰ νὰ γνωρίζη πόσο πρέπει νὰ πουλάη κάθε πράγμα.

Τὸ ποσὸ τῶν 100 δρχ. ἢ τῶν 1000 δρχ., πάνω στὸ ὁποῖο ὑπολογίζεται τὸ κέρδος, εἶναι 100 ἢ 1000 μονάδες τοῦ ἀρχικοῦ ποσοῦ.

Στὰ παραδείγματά μας **ἀρχικὸ ποσὸ** εἶναι τὸ κόστος καὶ **ποσοστὸ** εἶναι τὸ κέρδος.

Εἴπαμε ὅτι ὁ ἔμπορος στὰ ὑφάσματα, ὅταν τὰ πουλάη, κερδίζει 20 δρχ. στὶς 100 δρχ. Αὐτὸ στὴν ἀριθμητικὴ γιὰ συντομία τὸ γράφομε ἔτσι: 20% καὶ τὸ διαβάζομε: 20 στὰ ἑκατό.

Ἐπίσης τὸ 20 στὰ 1000 τὸ γράφομε ἔτσι : 20‰ καὶ τὸ διαβάζομε 20 στὰ χίλια.

Αὐτὸ τὸ 20% (20 στὰ ἑκατὸ) ἢ 20‰ (20 στὰ χίλια) ὀνομάζεται ποσοστὸ στὰ ἑκατὸ (%) ἢ ποσοστὸ στὰ χίλια (‰).

Ὁ ἔμπορος, ὅπως εἴπαμε, πουλάει τὰ ἐμπορεύματά του, γιὰ νὰ κερδίση. Μερικὲς φορὲς ὅμως ἀναγκάζεται νὰ πουλήση τὰ ἐμπορεύματά του σὲ τιμὴ μικρότερη τῆς ἀγορᾶς (τοῦ κόστους). Π.χ. ἕνας ἔμπορος φρούτων ἀγόρασε τὰ πεπόνια πρὸς 5 δρχ. τὸ κιλό· ἐπειδὴ ὅμως ἔφεραν στὴν ἀγορὰ πάρα πολλὰ πεπόνια καὶ σὲ μικρότερη τιμή, ἀναγκάζεται νὰ τὰ πουλήση πρὸς 4 δρχ. τὸ κιλό, γιὰ νὰ μὴ τοῦ μείνουν καὶ χαλάσουν.

Ἐδῶ βλέπομε ὅτι σὲ κάθε κιλὸ ἔχει **ζημία** 1 δραχμή.

Ὥστε : *Ζημία εἶναι τὸ ποσόν, ποὺ χάνει ὁ ἔμπορος, ὅταν πουλάη τὰ ἐμπορεύματα σὲ τιμὴ μικρότερη ἀπὸ τὸ κόστος.*

Καὶ τὴν ζημία τὴν ὑπολογίζομε μὲ βάση τὶς 100 δραχμές. Ἑπομένως, ἀφοῦ ὁ ἔμπορος στὶς 5 δρχ. εἶχε ζημία 1 δρχ., στὶς 100 δρχ. εἶχε ζημία 20 δρχ. Αὐτὸ τὸ γράφομε 20% καὶ τὸ διαβάζομε 20 στὰ ἑκατό.

Ἄλλοι ἔμποροι πάλι σὲ ὁρισμένη ἐποχὴ τοῦ ἔτους πουλοῦν τὰ ἐμπορεύματά τους σὲ τιμὴ μικρότερη τῆς ὁρισμένης· περιορίζουν δηλ. τὸ κέρδος τους. Τότε λέμε ὅτι πουλοῦν μὲ **ἔκπτωση** 20%, 25%, 30%.

Τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖο ἀναλογεῖ πάνω σ' ὅλη τὴν ἀξία καὶ τὸ βρίσκομε μὲ βάση τὸ 100 ἢ τὸ 1000, λέγεται ***ποσοστό****.*

Ἡ ἔκφραση «ποσοστὸ στὰ ἑκατὸ» ἢ «ποσοστὸ στὰ χίλια» χρησιμοποιεῖται σὲ πολλὲς περιπτώσεις:

α) Πολλοὶ σερβιτόροι σὲ μεγάλα ἑστιατόρια, ζαχαροπλαστεῖα κλπ. ἐργάζονται **μὲ ποσοστὰ ἐπὶ τῶν εἰσπράξεων.** Ἐπίσης οἱ εἰσπράκτορες ἑταιρειῶν ἢ συλλόγων ἐργάζονται καὶ παίρνουν ποσοστὰ ἀπὸ τὰ χρήματα ποὺ εἰσπράττουν. Οἱ κρατήσεις στοὺς μισθοὺς τῶν ἐργαζομένων ὑπολογίζονται στὰ ἑκατὸ λ.χ. 4%. Οἱ θάνατοι καὶ οἱ γεννήσεις ὑπολογίζονται στὰ ἑκατὸ ἢ στὰ χίλια.

β) Μερικοὶ ἄνθρωποι προμηθεύουν σ' ἐμπορευομένους ἐμπορεύματα καὶ παίρνουν ὡς ἀμοιβὴ ποσοστά, τὰ ὁποῖα λέγονται **προμήθεια.**

γ) Γιὰ τὴν ἀγορὰ ἢ πώληση οἰκοπέδων ἢ σπιτιῶν, καθὼς καὶ γιὰ τὴν ἐνοικίαση σπιτιῶν ἢ καταστημάτων, χρησιμοποιοῦνται οἱ κτηματομεσίτες. Αὐτοὶ ὡς ἀμοιβὴ παίρνουν ποσοστά, τὰ ὁποῖα λέγονται **μεσιτεία.**

δ) Τὰ σπίτια ἢ τὰ καταστήματα, καθὼς καὶ τὰ ἐμπορεύματα, ἀσφαλίζονται σὲ Ἀσφαλιστικὲς Ἑταιρεῖες κατὰ τῆς πυρκαγιᾶς καὶ ἄλλων κινδύνων καὶ πληρώνουν **ἀσφάλιστρα.** Αὐτὰ ὑπολογίζονται στὶς 1000 δραχμὲς π. χ. 2 ‰ (2 στὰ χίλια). Ἡ ἀσφάλιση σήμερα ἔχει ἀναπτυχτῆ πολύ· ἔτσι γίνεται καὶ ἀσφάλιση πλοίων, αὐτοκινήτων κλπ., καθὼς καὶ ἀσφάλιση ζωῆς.

ε) Τὸ **ἀπόβαρο** (ἡ διαφορὰ τοῦ καθαροῦ βάρους ἀπὸ τὸ μεικτὸ) στὰ ἐμπορεύματα ὑπολογίζεται σὲ ἑκατοστιαῖο ποσοστὸ ἐπὶ τοῦ μεικτοῦ βάρους.

στ) Οἱ **φόροι** τοῦ Δημοσίου καθορίζονται σὲ ἑκατοστιαῖο ποσοστὸ ἐπὶ τῶν εἰσοδημάτων.

Τὰ προβλήματα, στὰ ὁποῖα τὸ κέρδος, ἡ ζημία, ἡ ἔκπτωση, ἡ προμήθεια, ἡ μεσιτεία, ἡ ἀσφάλεια κλπ. ὑπολογίζονται στὶς 100 ἢ 1000 μονάδες ἑνὸς ποσοῦ, λέγονται **προβλήματα ποσοστῶν.**

Τὰ προβλήματα τῶν ποσοστῶν εἶναι εὔκολα καὶ λύνονται μὲ τὴν ἁπλὴ μέθοδο τῶν τριῶν. Τὰ **ποσά τους εἶναι πάντοτε ἀνάλογα.** Πρέπει μόνο νὰ προσέχωμε κατὰ τὴν κατάταξη τοῦ προβλήματος, ὥστε τὶς τιμὲς τοῦ ἴδιου ποσοῦ νὰ τὶς γράφωμε στὴν ἴδια κατακόρυφη στήλη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (ἀπὸ μνήμης)

31. Νὰ βρῆτε τὸ 1% τῶν 500 δρχ., τῶν 800 δρχ., τῶν 6.000 δρχ.

32. Νὰ βρῆτε τὸ 2% τῶν 400 δρχ., τῶν 1.200 δρχ., τῶν 30.000 δρχ.
33. Νὰ βρῆτε τὸ 5% τῶν 600 δρχ., τῶν 9.000 δρχ., τῶν 40.000 δρχ.

Σημείωση. Τὸ 1% ἑνὸς ἀριθμοῦ εὑρίσκεται εὔκολα, ἂν διαιρέσωμε τὸν ἀριθμὸ αὐτὸ διὰ 100.

Τὸ 2% τὸ εὑρίσκομε, ἂν διαιρέσωμε τὸν ἀριθμὸ διὰ 100 καὶ πολλαπλασιάσωμε ἐπὶ 2· κ.ο.κ.

Γιὰ νὰ βροῦμε π.χ. τὸ 2% τῶν 5.400, διαιροῦμε διὰ 100 καὶ τὸ πηλίκο τὸ πολλαπλασιάζομε ἐπὶ 2. Δηλ. 5.400 : 100 = 54
54 × 2 = 108.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΣΟΣΤΩΝ

(Ἀπὸ μνήμης)

34. Ὁ παντοπώλης ἀγοράζει τὴ ζάχαρη 14 δρχ. τὸ κιλὸ καὶ τὴν πουλάει 17,40 δρχ. τὸ κιλό. Πόσο κερδίζει στὸ κιλό;

35. Ὁ κρεοπώλης ἀγοράζει τὸ κρέας 74 δρχ. τὸ κιλὸ καὶ τὸ πουλάει μὲ κέρδος 15,40 δρχ. κατὰ κιλό. Πόσο πουλάει τὸ κιλό;

36. Ὀπωροπώλης ἀγοράζει φροῦτα ἀξίας 1.250 δρχ. καὶ τὰ πουλάει 1.150 δρχ. Πόσο ζημιώνεται ;

37. Ἔμπορος ἀγοράζει ἐμπορεύματα ἀξίας 2.600 δρχ. καὶ τὰ πουλάει μὲ ἔκπτωση 260 δρχ. Πόσο τὰ πουλάει;

38. Μεσίτης πούλησε οἰκία ἀξίας 300.000 δρχ. μὲ μεσιτεία 4%. Πόση μεσιτεία θὰ λάβη;

Π ε ρ ι π τ ώ σ ε ι ς

α) Δίνεται τὸ ποσοστὸ στὰ ἑκατὸ (%) καὶ ζητεῖται τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία.

Πρόβλημα 1. *Ἕνας μικροπωλητὴς πουλάει τὰ ἐμπορεύματά του μὲ κέρδος 25%. Ἂν πουλήση ἐμπορεύματα ἀξίας 400 δρχ., πόσο κέρδος θὰ ἔχη ;*

Λύση : α΄ Ἀπὸ μνήμης. Ἂν ἡ ἀξία τῶν ἐμπορευμάτων ἦταν 100 δρχ. θὰ κέρδιζε 25 δρχ. Τώρα, ποὺ ἡ ἀξία τους εἶναι 400 δρχ., θὰ κερδίση 25 × 4 = 100 δρχ.

β' Μὲ τὴν ἁπλὴ μέθοδο τῶν τριῶν.

Κατάταξη. Στὶς 100 δρχ. κερδίζει 25 δρχ.
» 400 » » X »

$$X = 25 \times \frac{400}{100} = 100 \text{ δρχ.}$$

Ἀπάντηση. Θὰ ἔχῃ κέρδος 100 δρχ.

Πρόβλημα 2. *Ἔμπορος πούλησε ραδιόφωνο ἀξίας 1500 δρχ. μὲ ἔκπτωση 20%. Πόση ἦταν ἡ ἔκπτωση ;*

Κατάταξη. Γιὰ ἐμπόρευμα ἀξίας 100 δρχ. γίνεται ἔκ/ση 20 δρχ.
» » » 1500 » » » X »

Λύση. $X = 20 \times \frac{1500}{100} = 300$ δρχ.

Ἀπάντηση. Ἡ ἔκπτωση ἦταν 300 δρχ.

Προβλήματα

39. Ὀπωροπώλης ἀγόρασε φροῦτα ἀξίας 3.750 δρχ. καὶ τὰ μεταπούλησε μὲ ζημία 5%. Πόσες δρχ. ζημιώθηκε;

40. Ἕνας ἔμπορος πούλησε ἐμπορεύματα ἀξίας 125.000 δρχ. μὲ κέρδος 15%. Πόσες δραχμὲς κέρδισε;

41. Εἰσπράκτορας ἑβδομαδιαίας ἐφημερίδας εἰσπράττει τὶς συνδρομὲς μὲ ποσοστὰ 20%. Σήμερα εἰσέπραξε 4.500 δρχ. Πόσες δρχ. θὰ κρατήσῃ γιὰ ποσοστά;

42. Ἔμπορος πουλάει τὰ ὑφάσματα μὲ ἔκπτωση 25%. Πόσο θὰ πληρώσωμε γιὰ τὸ μέτρο ὑφάσματος, ποὺ πουλιόταν πρὸς 240 δρχ.;

43. Ἕνας ἀσφάλισε τὸ σπίτι του, ἀξίας 425.000 δρχ. πρὸς 2,5‰. Πόσο θὰ πληρώσῃ γιὰ ἀσφάλιστρα;

β) Δίνεται τὸ ποσοστὸ τοῦ κέρδους ἢ τῆς ζημίας καὶ ἡ τιμὴ τοῦ ἀρχικοῦ ποσοῦ καὶ ζητεῖται τὸ ποσοστὸ στὰ ἑκατὸ (%) ἢ στὰ χίλια (‰).

Πρόβλημα 1. *Ἕνας ἔμπορος πούλησε ὕφασμα, τοῦ ὁποίου τὸ μέτρο κόστιζε 300 δρχ., πρὸς 315 δρχ. τὸ μέτρο. Πόσο στὰ ἑκατὸ κέρδισε ;*

Κατάταξη.

Ἀπὸ ἐμπόρευμα ἀξίας 300 δρχ. κερδίζει 15 δρχ. (315-300)
» » » 100 » » x »

Λύση. $X = 15 \times \frac{100}{300} = 5$ δρχ.

Ἀπάντηση. Κέρδισε 5%.

Πρόβλημα 2. *Ἔμπορος ἀγόρασε φροῦτα ἀξίας 12.000 δρχ., καὶ τὰ μεταπούλησε ἀντὶ 11.400 δρχ. Πόσο στὰ ἑκατὸ ζημιώθηκε;*

Κατάταξη.

Ἀπὸ ἐμπόρ. ἀξίας 12.000 δρχ. ζημ. 600 δρχ. (12.000-11.400)
Ἀπὸ » » 100 » » x »

Λύση. $X = 600 \times \frac{100}{12.000} = 5$ δρχ.

Ἀπάντηση. Ζημιώθηκε 5%.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

44. Ζωέμπορος ἀγόρασε ἄλογο ἀξίας 8.000 δρχ. καὶ τὸ μεταπούλησε ἀντὶ 10.000 δρχ. Πόσο στὰ ἑκατὸ κέρδισε;

45. Ἕνας ἀγόρασε ἕνα αὐτοκίνητο ἀντὶ 90.000 δρχ. Τὸ μεταπούλησε καὶ ζημιώθηκε 4.500 δρχ. Πόσο στὰ ἑκατὸ ζημιώθηκε;

46. Ἕνας ἔμπορος αὐγῶν ἔφερε γιὰ τὸ Πάσχα 12.000 αὐγά. Ἀπ' αὐτὰ ἔσπασαν 360 αὐγά. Πόσα στὰ χίλια ἔσπασαν;

47. Ἔμπορος ἀγόρασε ὕφασμα πρὸς 600 δρχ. τὸ τόπι (40 μέτρων) καὶ τὸ μεταπούλησε πρὸς 18 δρχ. τὸ μέτρο. Πόσο στὰ ἑκατὸ κερδίζει ἐπὶ τῆς τιμῆς τῆς ἀγορᾶς;

γ) Δίνεται τὸ ποσοστὸ στὰ ἑκατὸ καὶ ἡ τιμὴ ἀγορᾶς καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ πωλήσεως.

Πρόβλημα. *Ένα τρανζίστορ πού κοστίζει 800 δρχ., πουλιέται μὲ κέρδος 12%. Πόσο πουλιέται ;*

Λύση α΄. Κατάταξη. Στὶς 100 δρχ. κερδίζει 12 δρχ.
» 800 » » X »

$$X = 12 \times \frac{800}{100} = 96 \text{ δρχ. (κέρδος)}$$

Τιμὴ πωλήσεως : $800 + 96 = 896$ δρχ.

Λύση β΄. Κατάταξη. Ὅταν ἀξίζη 100 δρχ. πουλιέται 112 δρχ.
(100+12) » » 800 » » X »

$$X = 112 \times \frac{800}{100} = 896 \text{ δρχ. (τιμὴ πωλήσεως).}$$

Ἀπάντηση. Τὸ τρανζίστορ πουλιέται 896 δρχ.

Παρατήρηση. Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν τιμὴ πωλήσεως ἢ βρίσκομε πρῶτα τὸ κέρδος καὶ τὸ προσθέτομε στὴν τιμὴ τῆς ἀγορᾶς ἢ βρίσκομε ἀμέσως στὴν κατάταξη τὴν τιμὴ τῆς πωλήσεως τῶν 100 δρχ. καὶ λύνομε ὕστερα τὸ πρόβλημα.

Προβλήματα

48. Ὁ κρεοπώλης ἀγοράζει τὸ κρέας 70 δρχ. τὸ κιλὸ καὶ τὸ πουλάει μὲ κέρδος 20%. Πόσο πουλάει τὸ κιλό ;

49. Ἕνας ἐργολάβος οἰκοδομῶν ἔχτισε ἕνα σπίτι ποὺ τοῦ κόστισε 750.000 δρχ. Τὸ πούλησε μὲ κέρδος 12%. Πόσο τὸ πούλησε;

50. Ἔμπορος ἀγοράζει ὕφασμα πρὸς 200 δρχ. τὸ μέτρο καὶ τὸ πουλάει μὲ ἔκπτωση 15%. Πόσο πουλάει τὸ μέτρο;

51. Τὰ μολύβια μπὶκ κοστίζουν 4 δρχ. τὸ ἕνα καὶ πουλιοῦνται μὲ κέρδος 25%. Πόσο πουλιέται τὸ καθένα;

δ) Δίνεται ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς καὶ ἡ τιμὴ πωλήσεως καὶ ζητεῖται τὸ ποσοστὸ στὰ ἑκατὸ (%) ἢ στὰ χίλια (‰).

Πρόβλημα 1. *Ἔμπορος ἀγόρασε ὕφασμα πρὸς 64 δρχ. τὸ μέτρο καὶ τὸ πωλεῖ πρὸς 72 δρχ. τὸ μέτρο. Πόσο στὰ ἑκατὸ κερδίζει ;*

Κατάταξη. Ἀπὸ ἐμπόρευμα ἀξίας 64 δρχ. κερδίζει 8 δρχ. (72-64)
» » » 100 » » X »

$$X = 8 \times \frac{100}{64} = 12{,}5 \text{ δρχ.}$$

Ἀπάντηση. Τὸ κέρδος του ἦταν 12,5%.

Πρόβλημα 2. *Κτηματίας ἀγόρασεν κτῆμα ἀντὶ 88.000 δρχ., τὸ ὁποῖον μεταπούλησε ἀντὶ 85.800 δραχμῶν. Πόσο στὰ ἑκατὸ ἦταν ἡ ζημία του;*

Κατάταξη.

Ἐπὶ ἀξίας 88.000 δρχ. ζημιώθηκε 2200 δρχ. (88.000 - 85.800)
» » 100 » » X »

$$X = 2.200 \times \frac{100}{88.000} = 2{,}5 \text{ δρχ.}$$

Ἀπάντηση. Ἡ ζημία του ἦταν 2,5%.

Προβλήματα

52. Ἕνας παντοπώλης ἀγόρασε ἕνα δοχεῖο λάδι ἀντὶ 450 δρχ. καὶ τὸ μεταπούλησε ἀντὶ 540 δρχ. Πόσο στὰ ἑκατὸ κέρδισε;

53. Ὀπωροπώλης ἀπὸ φροῦτα ἀξίας 1.800 δρχ. εἰσέπραξε ὅταν τὰ πούλησε 1.728 δρχ. Πόσο στὰ ἑκατὸ ζημιώθηκε;

54. Χαρτοπώλης ἀγοράζει εἶδος μολυβιῶν πρὸς 1,25 δρχ. τὸ καθένα καὶ τὰ πουλάει πρὸς 1,50 δρχ. τὸ καθένα. Πόσο στὰ ἑκατὸ κερδίζει;

55. Ἡ ἐπισκευὴ ἑνὸς δρόμου ὑπολογίσθηκε ὅτι θὰ στοιχίση 275.000 δρχ. Ἐργολάβος Δημοσίων ἔργων ἀναλαμβάνει τὴν ἐπισκευὴ τοῦ δρόμου αὐτοῦ ἀντὶ 233.750 δραχμῶν. Σὲ πόσο στὰ ἑκατὸ ἔγινε ἡ ἔκπτωση;

ε) Δίνεται ἡ τιμὴ πωλήσεως, τὸ ποσοστὸ στὰ ἑκατὸ καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ ἀγορᾶς.

Πρόβλημα 1. *Ζωέμπορος μεταπούλησε ἄλογο ἀντὶ 4.200 δρχ. καὶ κέρδισε 20% ἐπὶ τῆς τιμῆς ἀγορᾶς του. Πόσο εἶχε ἀγοράσει τὸ ἄλογο καὶ πόσο κέρδισε;*

Σκέψη. Ἂν τὸ ἄλογο ἦταν ἀξίας 100 δρχ., μὲ κέρδος 20% θὰ τὸ πουλοῦσε 100 + 20 = 120 δρχ.

Κατάταξη. 120 δρχ. τιμὴ πωλήσεως 100 δρχ. τιμὴ ἀγορᾶς
4.200 » » » X » » »

Λύση. $X = 100 \times \frac{4.200}{120} = 3.500$ δρχ. (τιμὴ ἀγορᾶς).

Κέρδος $= 4.200$ (τιμὴ πωλήσεως) $- 3.500$ (τιμὴ ἀγορᾶς) $=$
$= 700$ δρχ.

Ἀπάντηση. Εἶχε ἀγοράσει τὸ ἄλογο 3.500 δρχ. καὶ κέρδισε ὅταν τὸ πούλησε, 700 δραχμές.

Πρόβλημα 2. *Ἕνας ταχυδρομικὸς διανομεὺς μεταπούλησε τὸ ποδήλατό του ἀντὶ 1800 δρχ. μὲ ζημία 20% ἐπὶ τῆς ἀξίας του. Πόσο τὸ εἶχε ἀγοράσει καὶ πόσο ζημιώθηκε;*

Σκέψη. Ἂν τὸ ποδήλατο τὸ εἶχε ἀγοράσει 100 δρχ., μετὰ τὴν ζημία (ἢ τὴν ἔκπτωση) 20% θὰ τὸ πουλοῦσε $100 - 20 = 80$ δρχ.

Κατάταξη. 80 δρχ. τιμὴ πωλήσεως 100 δρχ. τιμὴ ἀγορᾶς
1.800 » » » X » » »

Λύση. $X = 100 \times \frac{1.800}{80} = 2.250$ δρχ. (τιμὴ ἀγορᾶς).

Ζημία $= 2.250$ (τιμὴ ἀγορᾶς) $- 1.800$ (τιμὴ πωλήσεως) $=$
$= 450$ δρχ.

Ἀπάντηση. Τὸ ποδήλατο τὸ εἶχε ἀγοράσει 2.250 δρχ. καὶ ὅταν τὸ πούλησε ζημιώθηκε 450 δρχ.

Προβλήματα

56. Ἐμπόρευμα πουλήθηκε ἀντὶ 25.400 δρχ. μὲ κέρδος 25%. Ποιὰ ἦταν ἡ ἀξία του καὶ πόσο τὸ κέρδος;

57. Ἕνας ἔμπορος πούλησε ἐμπόρευμα ἀντὶ 22.000 δρχ. μὲ ζημία 12%. Ποιὰ ἡ ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος;

58. Μεταπούλησε κάποιος ἕνα σπίτι ἀντὶ 360.000 δρχ. μὲ ζημία 20%. Πόσο τὸ εἶχε ἀγοράσει καὶ πόσο ζημιώθηκε;

Διάφορα προβλήματα ποσοστῶν

59. Παραγγελιοδόχος ἀγοράζει γιὰ λογαριασμὸ ἐμπόρου ἐμπορεύματα ἀξίας 75.800 δρχ. Πόση εἶναι ἡ προμήθειά του πρὸς 2%;

60. Μεσίτης προμηθεύει σὲ ἔμπορο 1750 κιλὰ λάδι πρὸς 48 δρχ. τὸ κιλό. Πόση εἶναι ἡ προμήθειά του πρὸς 1,5%;

61. Ὑπάλληλος ἐμπορικοῦ καταστήματος ἐργάζεται μὲ ποσοστὰ 12,5% ἐπὶ τῶν εἰσπράξεων. Αὐτὸ τὸ μήνα πούλησε ἐμπορεύματα ἀξίας 27.560 δρχ. Πόσα ποσοστὰ θὰ λάβη;

62. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε τυρὶ Ὁλλανδίας πρὸς 65 δρχ. τὸ κιλό. Τὰ ἔξοδα μεταφορᾶς ἦταν 7% καὶ τὸ μεταπουλάει μὲ κέρδος 20%. Πόσο πουλάει τὸ κιλό;

63. Τὸ μεικτὸν βάρος ἐμπορεύματος εἶναι 7.500 κιλὰ καὶ τὸ καθαρὸ βάρος του εἶναι $7.312\frac{1}{2}$ κιλά. Πόσο στὰ ἑκατὸ ἦταν τὸ ἀπόβαρο;

64. Οἱ κρατήσεις στὸ μηνιαῖο μισθὸ ἑνὸς ὑπαλλήλου εἶναι 13,5% καὶ παίρνει τὸ μήνα καθαρὰ 2.595 δραχμές. Ποιὸς εἶναι ὁ μηνιαῖος μισθός του;

65. Τὸ καθαρὸ βάρος ἐμπορεύματος ἦταν 34.435 χιλιόγραμμα (κιλὰ) μετὰ τὴν ἀφαίρεση 3% ποὺ ἦταν τὸ ἀπόβαρο. Πόσο ἦταν τὸ ἀπόβαρο καὶ πόσο τὸ μεικτὸ βάρος ;

66. Ἀγοράσαμε 13 μέτρα ὑφάσματος μὲ ἔκπτωση 15% ἀντὶ 552,50 δρχ. Πόσο κόστιζε τὸ μέτρο χωρὶς τὴν ἔκπτωση;

67. Ἕνας ἔμπορος πούλησε τεμάχιο ὑφάσματος μὲ κέρδος 7,25% ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς του καὶ εἰσέπραξε ἀπὸ τὴν πώληση του 34.320 δρχ. Πόσο τὸ εἶχε ἀγοράσει;

68. Ἐμπόρευμα πουλήθηκε μὲ ζημία 15% ἀντὶ 17.000 δρχ. Ποιὰ ἦταν ἡ ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος καὶ πόση ἡ ζημία;

69. Οἰκόπεδο πουλήθηκε ἀντὶ 320.000 δρχ. μὲ κέρδος 28%. Ποιὰ ἦταν ἡ τιμὴ ἀγορᾶς καὶ πόσο τὸ κέρδος ;

70. Ἔμπορος πουλάει τὰ ἐμπορεύματά του μὲ κέρδος 20%.

Εἰσέπραξε μιὰ ἡμέρα ἀπὸ τὴν πώληση· 3.600 δρχ. Πόση ἦταν ἡ ἀξία τῶν ἐμπορευμάτων ποὺ πούλησε καὶ πόσο τὸ κέρδος;

71. Ἕνας ἰδιοκτήτης οἰκίας εἰσπράττει ἀπὸ ἐνοίκια 4.250 δρχ. μηνιαίως. Πληρώνει γιὰ φόρους καὶ ἄλλα ἔξοδα 30% ἐπὶ τῶν ἐνοικίων. Πόσο εἶναι τὸ καθαρὸ ἐτήσιο εἰσόδημά του ἀπὸ τὰ ἐνοίκια;

72. Τὸ μεικτὸ βάρος λαδιοῦ ποὺ πουλήθηκε ἦταν 3.560 κιλά. Ἂν τὸ ἀπόβαρο ὑπολογίζεται σὲ 5% ἐπὶ τοῦ μεικτοῦ βάρους, πόσο ἦταν τὸ καθαρὸ βάρος του καὶ ποιὰ ἡ ἀξία του ἂν πουλήθηκε πρὸς 56 δρχ. τὸ κιλό;

73. Ἔμπορος πούλησε τὰ $\frac{3}{4}$ ἑνὸς ὑφάσματος πρὸς 40 δρχ. τὸ μέτρο καὶ τὸ ὑπόλοιπο, ποὺ ἦταν 25 μέτρα, πρὸς 45 δρχ. τὸ μέτρο. Ὅταν τὸ πούλησε κέρδισε 25% τῆς ἀξίας ἀγορᾶς του. Πόσο εἶχε ἀγοράσει τὸ μέτρο;

74. Ἀγόρασε κάποιος σιτάρι ἀντὶ 4.800 δραχμῶν. Πλήρωσε γιὰ μεταφορικὰ 12% καὶ γιὰ φόρους 3%. Πόσες δραχμὲς πρέπει νὰ τὸ πουλήση, γιὰ νὰ κερδίση 9,5% ἐπὶ τοῦ κόστους;

3. Σύνθετη μέθοδος τῶν τριῶν

α) Μὲ ποσὰ ἀνάλογα

Πρόβλημα 1. *Οἱ 30 μαθητὲς τῆς α΄ ὁμάδας κατασκηνώσεως Δροσιᾶς γιὰ 20 ἡμέρες χρειάζονται 150 κιλὰ ψωμί. Πόσο ψωμὶ θὰ χρειαστοῦν 45 μαθητὲς μὲ τὴν ἴδια μερίδα γιὰ 16 ἡμέρες ;*

Παρατήρηση. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ μοιάζει, καθὼς βλέπετε, μὲ τὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν. Διαφέρει ὅμως ἀπ' αὐτή, γιατὶ ἐδῶ δίδονται περισσότερα ἀπὸ δυὸ ποσὰ καὶ περισσότεροι ἀπὸ 3 ἀριθμοὶ καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι **πρόβλημα τῆς σύνθετης μεθόδου τῶν τριῶν.**

Τὰ προβλήματα τῆς σύνθετης μεθόδου τῶν τριῶν λύνονται α) μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα καὶ β) συντομώτερα, ὅπως θὰ δοῦμε παρακάτω.

α) **Λύση** μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα:

Οἱ 30 μ. εἰς 20 ἡμ. χρειάζονται 150 κ. ψωμὶ

ὁ 1 μ. » 20 » χρειάζεται $\frac{150}{30}$ κ. ψωμὶ

οἱ 45 μ. » 20 » χρειάζονται $\frac{150 \times 45}{30}$ κ. ψωμὶ

οἱ 45 μ. » 1 » » $\frac{150 \times 45}{30 \times 20}$ κ. ψωμὶ

οἱ 45 μ. » 16 » » $\frac{150 \times 45 \times 16}{30 \times 20}$ κ. ψωμὶ =

$= 150 \times \frac{45}{30} \times \frac{16}{20}$ κ. ψ. $= \frac{720}{4}$ κ. ψ. = 180 κιλὰ ψωμί.

β) **Λύση μὲ τὴν σύνθετη μέθοδο τῶν τριῶν:**

Γιὰ νὰ κατανοήσωμε τὴ λύση αὐτή, ἀναλύομε τὸ πρόβλημα σὲ δύο προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν ὡς ἑξῆς:

α) 30 μ. (σὲ 20 ἡμ.) χρειάζ. 150 κιλὰ ψωμί.
45 μ. (σὲ 20 ἡμ.) χρειάζ. × κιλὰ ψωμί.

$$X = 150 \times \frac{45}{30}$$

β) (45 μ.) σὲ 20 ἡμ. χρειάζ. $150 \times \frac{45}{30}$ κιλὰ ψωμί.
(45 μ.) σὲ 16 ἡμ. χρειάζ. × κιλὰ ψωμί.

$$X = 150 \times \frac{45}{30} \times \frac{16}{20} = 180 \text{ κιλά.}$$

Παρατηρήσεις. 1. Στὴ πρώτη κατάταξη ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν εἶναι ὁ ἴδιος καὶ δὲν λαμβάνεται καθόλου ὑπ' ὄψη. Στὴ δεύτερη κατάταξη δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψη ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν.

2. Ἡ σύγκριση γίνεται ἀκριβῶς ὅπως καὶ στὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Ἂν συνθέσωμε τὶς δυὸ κατατάξεις σὲ μιά, θὰ ἔχωμε:

30 μαθ. σὲ 20 ἡμ. χρειάζονται 150 κιλὰ
45 » » 16 » » × »

Καὶ ἐδῶ προσέχομε πάντοτε νὰ γράφωμε τὶς τιμὲς τοῦ κάθε ποσοῦ στὴν ἴδια κατακόρυφη στήλη. Ὕστερα προχωροῦμε στὴ σύγκριση τῶν ποσῶν. Συγκρίνομε κάθε ποσὸ μὲ τὸ ποσὸ τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ τιμή, ὡς ἑξῆς:

α) **Μαθητὲς καὶ κιλά:** Ἀφοῦ 30 μαθητὲς σὲ 20 ἡμέρες χρειάζονται 150 κιλὰ ψωμί, διπλάσιοι μαθητὲς στὸ ἴδιο χρονικὸ διάστημα θὰ χρειαστοῦν διπλάσια κιλὰ ψωμί. Τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα καὶ γι' αὐτὸ θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμὸ 150, ποὺ εἶναι πάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο Χ, ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{30}{45}$, ποὺ σχηματίζουν οἱ δυὸ τιμὲς 30 καὶ 45 τοῦ ποσοῦ τῶν μαθητῶν, ἀντεστραμμένο· δηλ. θὰ ἔχωμε: $150 \times \frac{45}{30}$

β) **Ἡμέρες καὶ κιλά.** Ἀφοῦ 30 μαθητὲς σὲ 20 ἡμέρες χρειάζονται 150 κιλὰ ψωμί, οἱ ἴδιοι μαθητὲς στὶς μισὲς ἡμέρες θὰ χρειαστοῦν μισὰ κιλὰ ψωμί. Καὶ ἐδῶ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα· γι' αὐτὸ θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμὸ ποὺ βρήκαμε προηγουμένως $150 \times \frac{45}{30}$ ἐπὶ $\frac{16}{20}$, δηλ. ἐπὶ τὸ κλάσμα, ποὺ σχηματίζουν οἱ δυὸ τιμὲς 20 καὶ 16 τοῦ ποσοῦ τῶν ἡμερῶν, ἀντεστραμμένο.

Λύση. $X = 150 \times \frac{45}{30} \times \frac{16}{20} = 180$ κιλά.

Ἀπάντηση. Οἱ 45 μαθητὲς σὲ 20 ἡμέρες θὰ χρειαστοῦν 180 κιλὰ ψωμί.

Σημείωση. α) Ὅταν κάνωμε τὴ σύγκριση κάθε ποσοῦ μὲ τὸ ποσὸν τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ τιμή, πρέπει νὰ θεωρῶμε ὅτι τὰ ἄλλα ποσὰ μένουν ἀμετάβλητα.

β) Πρὶν ἐκτελέσωμε τὶς πράξεις, πρέπει νὰ κάνωμε ὅλες τὶς ἁπλοποιήσεις, ποὺ μποροῦν νὰ γίνουν.

Πρόβλημα 2. *Ἕνα τεμάχιο ὑφάσματος μήκους 6 μέτρων καὶ πλάτους 0,64 μ. κοστίζει 480 δραχμές. Πόσο κοστίζει ἕνα ἄλλο τεμάχιο ὑφάσματος τῆς αὐτῆς ποιότητας μήκους 10 μέτρων καὶ πλάτους 0,48 μ.;*

Κατάταξη.

Τὰ 6 μ. μῆκ. μὲ 0,64 μ. πλ. κοστίζουν 480 δρχ.
Τὰ 10 μ. μῆκ. μὲ 0,48 μ. πλ. κοστίζουν × »

Σύγκριση. α) **Μῆκος ὑφάσματος μὲ δραχμές:** Ἀφοῦ τὰ 6 μ. μῆκος τοῦ ὑφάσματος μὲ ὁρισμένο πλάτος κοστίζουν 480 δρ., τὰ διπλάσια μέτρα μῆκος μὲ τὸ ἴδιο πλάτος θὰ κοστίζουν διπλάσια χρήματα. **Τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα.**

β) **Πλάτος ὑφάσματος μὲ δραχμές:** Ὅταν τὸ πλάτος τοῦ ὑφάσματος εἶναι 0,64 μ. καὶ τὸ μῆκος του εἶναι 6 μ., κοστίζει τὸ ὕφασμα 480 δρχ. Ὅταν τὸ πλάτος εἶναι τὸ μισό, καὶ τὸ μῆκος μένει τὸ ἴδιο θὰ κοστίζῃ καὶ μισὰ χρήματα. Τὰ ποσὰ εἶναι **ἀνάλογα.**

Λύση. $X = 480 \times \frac{10}{6} \times \frac{0{,}48}{0{,}64} = \frac{480 \times 10 \times 48}{6 \times 64} = 600$ δρχ.

Σημείωση. Γιὰ εὐκολία τρέψαμε τοὺς δεκαδικοὺς σὲ ἀκέραιους.

Ἀπάντηση. Τὸ τεμάχιο τοῦ ὑφάσματος κοστίζει 600 δρχ.

Κανόνας. *Γιὰ νὰ λύσωμε προβλήματα τῆς σύνθετης μεθόδου τῶν τριῶν, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, πολλαπλασιάζομε τὸν ὑπεράνω τοῦ × ἀριθμὸ ἐπὶ τὰ κλάσματα, ποὺ σχηματίζουν οἱ τιμὲς τῶν ἄλλων ποσῶν, ἀντεστραμμένα.*

Προβλήματα

75. 80 παιδιὰ μιᾶς κατασκηνώσεως σὲ 20 ἡμέρες ξόδεψαν 600 κιλὰ ψωμί. Πόσα κιλὰ ψωμὶ θὰ ξοδέψουν τριπλάσια παιδιὰ σὲ 15 ἡμέρες;

76. Ἕνα χαλὶ μήκους 3,50 μ. καὶ πλάτους 2,80 μ. κοστίζει 3.500 δρχ. Πόσο κοστίζει ἄλλο χαλὶ τῆς ἴδιας ποιότητας μήκους 4,20 μ. καὶ πλάτους 3,50 μ.;

77. Πέντε ἐργάτες, ἐργαζόμενοι 8 ὧρες τὴν ἡμέρα, παίρνουν ἡμερησίως ὅλοι μαζὶ 1500 δρχ. Τριπλάσιοι ἐργάτες ἐργαζόμενοι 12 ὧρες τὴν ἡμέρα, πόσο παίρνουν ἡμερησίως (ὅλοι μαζί);

78. Δεκαπέντε ἄλογα ἔφαγαν σὲ 3 ἡμέρες 360 κιλὰ βρώμη. Πόση βρώμη θὰ χρειαστοῦν 10 ἄλογα σ' ἕνα μήνα;

β) Μὲ ποσὰ ἀντίστροφα

Πρόβλημα 1. *Ἕνας ὁδοιπόρος διατρέχει 90 χιλιόμετρα σὲ 2 ἡμέρες, ἂν βαδίζῃ 9 ὧρες τὴν ἡμέρα. Σὲ πόσες ἡμέρες θὰ διατρέξῃ ἀπόσταση 120 χιλιομέτρων, ἂν βαδίζῃ 6 ὧρες τὴ ἡμέρα ;*

Κατάταξη. 90 χλμ. 9 ὥρ. 2 ἡμ.
120 » 6 » × »

Σύγκριση. α) **Χιλιόμετρα μὲ ἡμέρες.** Ἀφοῦ ἀπόσταση 90 χιλιομέτρων, βαδίζοντας ὁ ὁδοιπόρος ὁρισμένες ὧρες τὴν ἡμέρα, τὴ διατρέχει σὲ 2 ἡμέρες, διπλάσια ἀπόσταση, βαδίζοντας τὶς ἴδιες ὧρες τὴν ἡμέρα, θὰ τὴ διατρέξη σὲ διπλάσιες ἡμέρες. Τὰ ποσὰ εἶναι **ἀνάλογα** καὶ γι' αὐτό, ὅπως γνωρίζομε, θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ὑπεράνω τοῦ Χ ἀριθμὸ 2 ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ ποσοῦ τῶν χιλιομέτρων ἀντεστραμμένο· δηλ. θὰ ἔχωμε $X = 2 \times \frac{120}{90}$.

β) **Ὧρες μὲ ἡμέρες.** Ἀφοῦ ὁρισμένη ἀπόσταση, ὅταν βαδίζη ὁ ὁδοιπόρος 9 ὧρες τὴν ἡμέρα, τὴ διατρέχει σὲ 2 ἡμέρες, τὴν ἴδια ἀπόσταση, ἂν βαδίζη τὶς μισὲς ὧρες τὴν ἡμέρα, θὰ τὴν διατρέξη σὲ διπλάσιες ἡμέρες. Τὰ ποσὰ εἶναι **ἀντίστροφα** καὶ γι' αὐτὸ θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμὸ ποὺ βρήκαμε προηγουμένως $2 \times \frac{120}{90}$ ἐπὶ $\frac{9}{6}$, δηλ. ἐπὶ τὸ κλάσμα, ποὺ γίνεται ἀπὸ τὶς τιμὲς τοῦ ποσοῦ τῶν ὡρῶν, ὅπως ἔχει.

Λύση. $X = 2 \times \frac{120}{90} \times \frac{9}{6} = 4$ ἡμ.

Ἀπάντηση. Θὰ διατρέξη τὴν ἀπόσταση σὲ 4 ἡμέρες.

Πρόβλημα 2. *12 ἐργάτες ἐργαζόμενοι 8 ὧρες τὴν ἡμέρα, τελείωσαν μιὰ ἐργασία σὲ 15 ἡμέρες. Σὲ πόσες ἡμέρες 20 ἐργάτες θὰ* *τελειώσουν τὴν ἴδια ἐργασία, ἂν ἐργαστοῦν 6 ὧρες τὴν ἡμέρα ;*

Κατάταξη.	12 ἐργ.	8 ὧρ.	15 ἡμ.
	20 »	6 »	Χ »

Σύγκριση. α) **Ἐργάτες μὲ ἡμέρες:** Ἀφοῦ 12 ἐργάτες, ἐργαζόμενοι ὁρισμένες ὧρες τὴν ἡμέρα, τελειώνουν μιὰ ἐργασία σὲ 15 ἡμέρες, διπλάσιοι ἐργάτες, ἐργαζόμενοι τὶς ἴδιες ὧρες τὴν ἡμέρα θὰ τελειώσουν τὴν ἴδια ἐργασία σὲ 15 : 2 ἡμέρες. Τὰ ποσὰ εἶναι **ἀντίστροφα.**

β) **Ὧρες μὲ ἡμέρες.** Ἀφοῦ ὁρισμένοι ἐργάτες, ἐργαζόμενοι 8 ὧρες τὴν ἡμέρα, τελειώνουν μιὰ ἐργασία σὲ 15 ἡμέρες, οἱ ἴδιοι ἐργάτες, ἐργαζόμενοι 4 ὧρες τὴν ἡμέρα, θὰ τελειώσουν τὴν ἴδια ἐργασία σὲ 30 ἡμέρες. Τὰ ποσὰ εἶναι **ἀντίστροφα.**

Λύση. $X = 15 \times \frac{12}{20} \times \frac{8}{6} = 12$ ἡμ.

Ἀπάντηση. Σὲ 12 ἡμέρες θὰ τελειώσουν τὴν ἐργασία.

Κανόνας. *Γιὰ νὰ λύσωμε προβλήματα τῆς σύνθετης μεθόδου τῶν τριῶν, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, **πολλαπλασιάζομε** τὸν ὑπεράνω τοῦ Χ ἀριθμὸ ἐπὶ τὰ **κλάσματα**, ποὺ σχηματίζουν οἱ τιμὲς τῶν ἄλλων ποσῶν, ὅπως ἔχουν (καὶ ὄχι ἀντεστραμμένα).*

Προβλήματα

79. 9 ἐργάτες, ἐργαζόμενοι 8 ὧρες τὴν ἡμέρα, τελειώνουν ἕνα ἔργο σὲ 15 ἡμέρες. Οἱ 15 ἐργάτες πόσες ὧρες τὴν ἡμέρα θὰ ἔπρεπε νὰ ἐργαστοῦν, γιὰ νὰ τελείωναν τὸ ἴδιο ἔργο σὲ 12 ἡμέρες;

80. Ἕνα αὐτοκίνητο διανύει ἀπόσταση 240 χιλιομέτρων σὲ 6 ὧρες μὲ ταχύτητα 40 χιλιομέτρων τὴν ὥρα. Ποιὰ ταχύτητα πρέπει νὰ ἔχη τὸ αὐτοκίνητο, γιὰ νὰ διανύση τριπλάσια ἀπόσταση σὲ 12 ὧρες;

81. Ἕνας ὁδοιπόρος σὲ 3 ἡμέρες διατρέχει ἀπόσταση 105 χι-

λιομέτρων, ὅταν βαδίζη 7 ὧρες τὴν ἡμέρα. Ἂν βαδίζη 8 ὧρες τὴν ἡμέρα, σὲ πόσες ἡμέρες θὰ διατρέξη ἀπόσταση 200 χιλιομέτρων;

82. Γιὰ νὰ στρωθῆ τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου μὲ σανίδες μήκους 2,80 μ. καὶ πλάτους 0,25 μ., χρειάζονται 40 σανίδες. Πόσες σανίδες θὰ χρειαστοῦν γιὰ τὸ ἴδιο πάτωμα, ἂν ἔχουν μῆκος 2 μ. καὶ πλάτος 0,20 μ.;

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

α) Στὰ προβλήματα τῆς σύνθετης μεθόδου τῶν τριῶν δίνονται περισσότερα ἀπὸ δύο ποσά.

β) Τὰ προβλήματα αὐτὰ μπορεῖ νὰ ἀναλυθοῦν σὲ δύο ἢ περισσότερα προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν· διὰ τοῦτο λέγονται **προβλήματα τῆς σύνθετης μεθόδου τῶν τριῶν.**

γ) Καὶ στὰ προβλήματα αὐτὰ ἄλλα ποσὰ εἶναι **ἀνάλογα** καὶ ἄλλα εἶναι **ἀντίστροφα.**

δ) Γιὰ νὰ λύσωμε τὰ προβλήματα τῆς σύνθετης μεθόδου τῶν τριῶν γενικῶς, ἐφαρμόζομε τὸν ἑξῆς κανόνα:

Στὰ προβλήματα σύνθετης μεθόδου τῶν τριῶν, γιὰ νὰ βροῦμε τὴν τιμὴ τοῦ ×, πολλαπλασιάζομε τὸν ὑπεράνω τοῦ × ἀριθμὸ ἐπὶ τὸ γινόμενο τῶν κλασμάτων, τὰ ὁποῖα σχηματίζουν οἱ διδόμενες ἀντίστοιχες τιμὲς τῶν ἄλλων ποσῶν, ἀντεστραμμένων ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα ἢ ὅπως ἔχουν, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα.

Προβλήματα

83. Μὲ 45 κιλὰ νῆμα κατασκευάζομε ὕφασμα μήκους 22,5 μ. καὶ πλάτους 0,72 μ. Μὲ 60 κιλὰ ἀπὸ τὸ ἴδιο νῆμα πόσα μέτρα ὑφάσματος θὰ κατασκευάσωμε, ἂν θέλωμε τὸ πλάτος του νὰ εἶναι 0,90 μ.;

84. Ἕνας ὁδοιπόρος διέτρεξε τὰ $\frac{3}{4}$ μιᾶς ἀποστάσεως σὲ 8 ἡμ., βαδίζοντας 6 ὧρες τὴν ἡμέρα. Ἂν βαδίζη δυὸ ὧρες ἐπὶ πλέον τὴν ἡμέρα, σὲ πόσες ἡμέρες θὰ διατρέξη τὸ ὑπόλοιπο τῆς ἀποστάσεως;

85. Οἰκόπεδο μήκους 16 μ. καὶ πλάτους 12,5 μ. πουλήθηκε 60.000 δραχμές. Πόσο κοστίζει τὸ διπλανὸ οἰκόπεδο, ποὺ πουλιέται μὲ τὴ ἴδια τιμὴ καὶ ἔχει μῆκος 17 μ. καὶ πλάτος 12 μ.;

86. 15 ἐργάτες σκάβουν σὲ ἕνα ὁρισμένο χρονικὸ διάστημα ἕνα δρόμο 30 μ. μήκους καὶ 4 μ. πλάτους, ἂν ἐργάζωνται 8 ὧρες τὴν ἡμέρα. Ἂν οἱ ἐργάτες αὐξηθοῦν κατὰ 3, τὸ μῆκος τοῦ δρόμου κατὰ 6 μ. καὶ τὸ πλάτος του κατὰ 0,5 μ., πόσες ὧρες πρέπει νὰ ἐργάζωνται ἡμερησίως, γιὰ νὰ τελειώσουν τὸ δρόμο στὸ ἴδιο χρονικὸ διάστημα ;

87. Γιὰ νὰ σκάψουν σὲ μιὰ ἡμέρα τάφρο μήκους 20 μ., πλάτους 3 μ. καὶ βάθους 0,50 μ., χρειάζονται 24 ἐργάτες. Πόσοι ἐργάτες θὰ χρειαστοῦν νὰ σκάψουν σὲ μιὰ ἡμέρα πάλι ἄλλη τάφρο μήκους 15 μ., πλάτους 2,5 μ. καὶ βάθους 0,80 μ.;

88. Γιὰ νὰ στρώσωμε τὸ πάτωμα δωματίου μήκους 5 μ. καὶ πλάτους 4 μ., χρειάστηκαν 100 πλακάκια. Πόσα ἀπὸ τὰ ἴδια πλακάκια θὰ χρειαστοῦν, γιὰ νὰ στρώσωμε ἄλλο πάτωμα μήκους 6 μ. καὶ πλάτους 4,70 μ.;

89. Μία ὑφάντρια, γιὰ νὰ ὑφάνη ὕφασμα μήκους 45 μ. καὶ πλάτους 0,80 μ. χρειάστηκε 12 κιλὰ καὶ 500 γραμμάρια νῆμα. Πόσο νῆμα τῆς ἴδιας ποιότητας θὰ χρειαστῆ, γιὰ νὰ ὑφάνη ἄλλο ὕφασμα μήκους 120 μ. καὶ πλάτους 0,60 μ.;

90. Ἕνας ὁδοιπόρος, ὅταν βαδίζη 9 ὧρες τὴν ἡμέρα, διατρέχει ἀπόσταση 180 χιλιομέτρων σὲ 4 ἡμέρες. Πόσες ὧρες πρέπει νὰ βαδίζη κάθε ἡμέρα, μὲ τὴν ἴδια ταχύτητα, γιὰ νὰ διατρέξη σὲ 6 ἡμέρες 240 χιλιόμετρα;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΤΟΚΟΣ

Γενικά : Ὅπως ὅλοι γνωρίζομε, οἱ ἄνθρωποι πολλὲς φορὲς βρίσκονται σὲ οἰκονομικὴ ἀνάγκη καὶ τότε δανείζονται χρήματα ἀπὸ ἄλλους ποὺ ἔχουν. Οἱ ἔμποροι λ. χ. δανείζονται χρήματα ἀπὸ τὴν Τράπεζα, γιὰ νὰ ἀγοράσουν τὰ ἐμπορεύματά τους. Ἐπίσης οἱ κτηματίες, οἱ γεωργοὶ καὶ οἱ κτηνοτρόφοι δανείζονται χρήματα ἀπὸ τὴν Τράπεζα ἢ ἀπὸ τοὺς Συνεταιρισμούς, γιὰ νὰ ἀγοράσουν ἐργαλεῖα, λιπάσματα, ζωοτροφές. Καί, ὅταν πουλήσουν τὰ προϊόντα τους, ἐπιστρέφουν τὸ δάνειο, δηλ. τὰ χρήματα ποὺ εἶχαν δανειστῆ.

Ἀλλὰ καὶ ὅποιος βρεθῆ σὲ χρηματικὴ ἀνάγκη, δανείζεται ἀπὸ ἄλλον λίγα ἢ πολλὰ χρήματα, γιὰ νὰ διευκολυνθῆ καὶ ὕστερα τὰ ἐπιστρέφει. Τὸ δανειζόμενο χρηματικὸ ποσὸ λέγεται **Κεφάλαιο.** Ἡ χρονικὴ διάρκεια τοῦ δανείου λέγεται **Χρόνος.**

Ἐκεῖνος ποὺ δανείζει τὰ χρήματα, λέγεται **δανειστής.** Ἐκεῖνος ποὺ δανείζεται, λέγεται **χρεώστης** ἢ **ὀφειλέτης.**

Στὴν περίπτωση τοῦ δανείου δίκαιο εἶναι ὁ δανειστὴς γιὰ τὰ χρήματα ποὺ δανείζει, νὰ παίρνη ἕνα κέρδος ὡς ἐνοίκιο, ὅπως παίρνομε ἐνοίκιο γιὰ τὸ σπίτι μας, ὅταν τὸ νοικιάζωμε σὲ κάποιον. Τὸ κέρδος αὐτὸ λέγεται τ ό κ ο ς. Ὥστε :

Τόκος *λέγεται τὸ κέρδος ποὺ παίρνει αὐτὸς ποὺ δανείζει χρήματα.*

Ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν σ' ἕνα ἔτος λέγεται **Ἐπιτόκιο.**

Τὰ προβλήματα, ποὺ περιέχουν τὰ στοιχεῖα αὐτά, λέγονται **προβλήματα τόκου.**

Σημείωση. α) Καὶ τὸ ἐπιτόκιο εἶναι τόκος· ὑπάρχει ὅμως ἡ ἑξῆς διαφορά : Ὁ τόκος εἶναι τὸ κέρδος γιὰ ὅλα τὰ χρήματα καὶ γιὰ ὅλη τὴ χρονικὴ διάρκεια τοῦ δανείου, ἐνῶ τὸ ἐπιτόκιο εἶναι ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν σ' ἕνα ἔτος.

β) Τὸ ὕψος τοῦ ἐπιτοκίου ὁρίζεται μὲ ἰδιαίτερη συμφωνία μεταξὺ δανειστῆ καὶ ὀφειλέτη. Δὲν ἐπιτρέπεται ὅμως νὰ εἶναι ἀνώτερο ἀπὸ ἐκεῖνο, ποὺ καθορίζει ὁ σχετικὸς Νόμος τῆς Πολιτείας. Ἡ παράβαση τοῦ Νόμου χαρακτηρίζεται ὡς τοκογλυφία καὶ τιμωρεῖται αὐστηρά.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

1. Στὰ προβλήματα τοῦ τόκου τὰ ποσὰ εἶναι 3 : Κεφάλαιο, Χρόνος καὶ Τόκος.

2. Τὶς τιμὲς τοῦ κεφαλαίου, τοῦ χρόνου καὶ τοῦ τόκου τὶς σημειώνομε μὲ τὰ γράμματα Κ, Χ, Τ ἀντιστοίχως. Τὸ ἐπιτόκιο τὸ σημειώνομε μὲ τὸ γράμμα Ε.

3. Στὰ προβλήματα τοῦ τόκου ἔχομε τρία ποσὰ καὶ γι' αὐτὸ θὰ τὰ λύνωμε μὲ τὴ σύνθετη μέθοδο τῶν τριῶν.

4. Τὰ προβλήματα αὐτὰ τὰ διακρίνομε σὲ τέσσερεις κατηγορίες, ἐκεῖνα στὰ ὁποῖα ζητεῖται : ὁ τόκος ἢ τὸ κεφάλαιο, ἢ ὁ χρόνος ἢ τὸ ἐπιτόκιο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ

1. Πῶς βρίσκομε τὸν τόκο

α) Ὅταν ὁ χρόνος ἐκφράζεται σὲ ἔτη.

Πρόβλημα. *Ὁ Παῦλος, μαθητὴς τῆς Ἕκτης τάξεως, ἔλαβε ὡς δῶρον ἀπὸ τοὺς γονεῖς του τὰ Χριστούγεννα 600 δραχμές. Τὰ χρήματα αὐτὰ τὰ κατέθεσε στὸ Ταμιευτήριο πρὸς 5%. Πόσο τόκο θὰ λάβη μετὰ 3 ἔτη ;*

Σκέψη. Ἐδῶ ἔχομε πρόβλημα τόκου μὲ γνωστὰ τὰ ποσά : κεφάλαιο, ἐπιτόκιο καὶ χρόνο καὶ ἄγνωστο ποσὸ τὸν τόκο.

Κ = 600 δρχ.
Ε = 5%
Χ = 3 ἔτη
Τ = ;

Θὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα αὐτὸ μὲ τὴ σύνθετη μέθοδο τῶν τριῶν.

Κατάταξη :

100 δρχ.	κεφάλαιο	σὲ	1 ἔτος	φέρουν	5 δρχ.	τόκο
600	»	»	3 ἔτη	»	x »	»

Σύγκριση: α) **Κεφάλαιο μὲ τόκο:** Ἀφοῦ οἱ 100 δρχ. κεφάλαιο σὲ 1 ἔτος φέρουν 5 δρχ. τόκο, τὸ διπλάσιο κεφάλαιο στὸν ἴδιο χρόνο θὰ φέρῃ διπλάσιο τόκο. Τὰ ποσὰ **Κεφάλαιο** καὶ **Τόκος** εἶναι **ἀνάλογα.**

β) **Χρόνος μὲ τόκο.** Ἀφοῦ οἱ 100 δρχ. σὲ 1 ἔτος φέρουν 5 δρχ. τόκο, τὸ ἴδιο κεφάλαιο σὲ διπλάσιο χρόνο θὰ φέρῃ διπλάσιο τόκο. Τὰ ποσὰ **Χρόνος** καὶ **Τόκος** εἶναι καὶ αὐτὰ **ἀνάλογα.**

Γι' αὐτὸ θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμό, ποὺ εἶναι πάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο, ἐπὶ τὰ κλάσματα, ποὺ σχηματίζουν οἱ τιμὲς τῶν δύο ἄλλων ποσῶν, ἀντεστραμμένα.

Λύση. $X = 5 \times \frac{600}{100} \times \frac{3}{1} = 90$ δρχ.

Ἀπάντηση. Θὰ λάβῃ τόκο ὁ Παῦλος 90 δρχ.

Παρατήρηση. Τὰ ποσὰ Κεφάλαιο - Τόκος καὶ Χρόνος - Τόκος εἶναι ἀνάλογα. Καί, γιὰ νὰ βροῦμε τὸν τόκο, πολλαπλασιάσαμε τὸ Κεφάλαιο (600 δρχ.) ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο (5%) ἐπὶ τὸν χρόνο (3 ἔτη) καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιρέσαμε διὰ τοῦ 100.

Τὸ ἴδιο θὰ παρατηρήσωμε ὅσα ὅμοια προβλήματα καὶ ἂν λύσωμε.

Δηλαδή: Θὰ πολλαπλασιάσωμε τὰ τρία γνωστὰ ποσά: Κεφάλαιο (Κ), Ἐπιτόκιο (Ε) καὶ Χρόνο (Χ) καὶ τὸ γινόμενο αὐτῶν θὰ τὸ διαιρέσωμε διὰ τοῦ 100. Ἑπομένως:

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν τόκο, ὅταν ὁ χρόνος μᾶς δίνεται σὲ ἔτη, πολλαπλασιάζομε τὸ κεφάλαιο ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο καὶ τὸ χρόνο καὶ τὸ γινόμενο διαιροῦμε διὰ τοῦ 100.

Τύπος: $T = \frac{K.E.X.}{100}$

Ὁ παραπάνω τύπος μπορεῖ νὰ γραφῆ $T = \frac{K}{100} \cdot (E.X)$, ποὺ σημαίνει ὅτι, γιὰ νὰ βροῦμε τὸν τόκο, πολλαπλασιάζομε τὸ $\frac{K}{100}$ ποὺ εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ἑκατονταδράχμων ποὺ τοκίστηκαν μὲ τὸ Ε.Χ., ποὺ εἶναι ὁ τόκος τοῦ ἑνὸς ἑκατονταδράχμου σὲ Χ ἔτη.

Σημείωση. α) Στὸν τύπο σὲ σημεῖο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ χρησιμοποιοῦμε τὴν τελεία (στιγμή), γιὰ νὰ ἀποφύγωμε τὴ σύγχυση.

β) Ὅταν λύνωμε τὰ προβλήματα πρέπει πρῶτα νὰ κάνωμε τὶς ἁπλοποιήσεις ποὺ μποροῦν νὰ γίνουν καὶ ὕστερα νὰ προχωροῦμε στὴν ἐκτέλεση τῶν πράξεων.

Προβλήματα

91. Πόσο τόκο θὰ μᾶς δώσουν 7.500 δρχ. σὲ 3 ἔτη πρὸς 6%;

92. Πόσο τόκο φέρει κεφάλαιο 1200 δρχ. σὲ 4 ἔτη πρὸς 7,5%;

93. Δανείσθηκε κάποιος 13.500 δρχ. γιὰ 2 ἔτη πρὸς 6,75%. Πόσον τόκο θὰ πληρώση;

94. Κεφάλαιο 1.800 δρχ. τοκίστηκε πρὸς $8\frac{1}{2}$%. Πόσο τόκο θὰ φέρη σὲ 6 ἔτη;

β) Ὅταν ὁ χρόνος μᾶς δίνεται σὲ μῆνες.

Πρόβλημα. *Κτηματίας δανείστηκε ἀπὸ τὴν Ἀγροτικὴ Τράπεζα 36.000 δρχ. γιὰ 5 μῆνες μὲ ἐπιτόκιο 12%. Πόσο τόκο θὰ πληρώση;*

Σκέψη. Καὶ στὸ πρόβλημα αὐτὸ τοῦ τόκου εἶναι γνωστὰ τὰ ποσά: Κεφάλαιο, ἐπιτόκιο καὶ χρόνος καὶ ἄγνωστο ποσὸ ὁ τόκος. Ὁ χρόνος δίνεται σὲ μῆνες.

Κ = 36.000 δρχ.
Ε = 12%
Χ = 5 μῆνες
Τ = ;

Κατάταξη :

100 δρχ. κεφ. σὲ 12 μῆνες φέρουν 12 δρχ. τόκο.
36.000 » » » 5 » » Χ » »

Λύση. Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ κεφάλαιο - τόκος καὶ χρόνος-τόκος εἶναι ἀνάλογα, θὰ ἔχωμε:

$$X = 12 \times \frac{36.000}{100} \times \frac{5}{12} = 1.800 \text{ δρχ.}$$

Ἀπάντηση. Θὰ πληρώση τόκο 1.800 δραχμές.

Παρατήρηση. Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν τόκο στὸ πρόβλημα αὐτό, καθὼς καὶ σὲ ὅσα προβλήματα ὁ χρόνος δίνεται σὲ μῆνες, πολλαπλασιάζομε τὸ κεφάλαιο ἐπὶ τὸ γινόμενον ἐπιτοκίου καὶ χρόνου καὶ τὸ νέο γινόμενο διαιροῦμε διὰ τοῦ 1200. Τὸ 1200 εἶναι τὸ γινόμενο τοῦ 100×12, ἐπειδὴ ὁ χρόνος δίνεται σὲ μῆνες καὶ στὴν κατάταξη ἀντὶ 1 ἔτος γράφομε 12 μῆνες. **Ἑπομένως :**

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν τόκο, ὅταν ὁ χρόνος δίνεται σὲ μῆνες, πολλαπλασιάζομε τὸ κεφάλαιο ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο καὶ τὸ χρόνο καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ 1200.

$$\textit{Τύπος}: T = \frac{K.E.X.}{1200}.$$

Προβλήματα

95. Πόσο τόκο φέρουν 1.300 δρχ. σὲ 6 μῆνες πρὸς 8%;

96. Κεφάλαιο 32.000 δρχ. τοκίστηκε γιὰ 9 μῆνες πρὸς 7,5%. Πόσο τόκο θὰ φέρη;

97. Ἐργολάβος οἰκοδομῶν δανείστηκε ἀπὸ τὴν Κτηματικὴ Τράπεζα 675.000 δρχ. πρὸς $8\frac{1}{2}$ % γιὰ 2 ἔτη καὶ 4 μῆνες. Πόσο τόκο θὰ πληρώση;

98. Πόσο τόκο φέρει κεφάλαιο 3.600 δρχ. πρὸς $6\frac{3}{4}$ % εἰς 1 ἔτος καὶ 4 μῆνες;

Προσέχετε: Τὰ ἔτη καὶ οἱ μῆνες νὰ τραποῦν σὲ μῆνες (1 ἔτος= =12 μῆνες).

γ) Ὅταν ὁ χρόνος δίνεται σὲ ἡμέρες.

Πρόβλημα. *Πόσο τόκο θὰ πληρώσωμε, ἂν δανειστοῦμε 5.000 δρχ. πρὸς 9% γιὰ 20 ἡμέρες ;*

Σκέψη. Στὸ πρόβλημα αὐτὸ τοῦ τόκου εἶναι πάλι γνωστὰ τὰ ποσά: κεφάλαιο, ἐπιτόκιο καὶ χρόνος καὶ ἄγνωστο ποσὸ ὁ τόκος. Ὁ χρόνος ἐδῶ δίνεται σὲ ἡμέρες.

K = 5.000 δρχ.
E = 9%
X = 20 ἡμέρες
T = ;

Κατάταξη. 100 δρχ. κεφ. σὲ 360 ἡμ. φέρουν 9 δρχ. τόκο
5.000 » » » 20 » » X » »

Λύση. Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ κεφάλαιο - τόκος καὶ χρόνος - τόκος εἶναι ἀνάλογα, θὰ ἔχωμε:

$$X = 9 \times \frac{5.000}{100} \times \frac{20}{360} = 25 \text{ δρχ.}$$

Ἀπάντηση. Θὰ πληρώσωμε 25 δρχ. τόκο.

Παρατήρηση. Γιὰ νὰ βροῦμε καὶ στὸ πρόβλημα αὐτὸ τὸν τόκο, πολλαπλασιάσαμε τὸ κεφάλαιο ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο καὶ τὸ χρόνο καὶ διαιρέσαμε διὰ τοῦ 36.000. Τὸ 36.000 εἶναι τὸ γινόμενο τοῦ 100× 360, ἐπειδὴ ὁ χρόνος στὸ πρόβλημα αὐτὸ δίνεται σὲ ἡμέρες καὶ στὴν Ἀριθμητικὴ τὸ ἔτος ὑπολογίζεται πάντοτε μὲ 360 ἡμέρες.

Ἑπομένως :

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν τόκο, ὅταν ὁ χρόνος δίνεται σὲ ἡμέρες, ***πολλαπλασιάζομε*** *τὸ* ***κεφάλαιο ἐπὶ*** *τὸ* ***ἐπιτόκιο καὶ*** *τὸ χρόνο καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ 36.000.*

$$\textit{Τύπος}: \; T = \frac{K.E.X.}{36.000}$$

Προβλήματα

99. Πόσο τόκο φέρουν 8.000 δρχ. σὲ 20 ἡμέρες πρὸς 4,5%;

100. Κεφάλαιο 7.400 δρχ. τοκίστηκε πρὸς 6,75% γιὰ 1 μήνα καὶ 10 ἡμέρες. Πόσο τόκο θὰ φέρῃ;

101. Ἕνας ἔμπορος δανείστηκε ἀπὸ τὴν Ἐμπορικὴ Τράπεζα στὶς 15 Μαΐου 450.000 δρχ. πρὸς 9,5 %. Ἐπέστρεψε τὰ χρήματα τὴν 1η Αὐγούστου τοῦ ἴδιου ἔτους. Πόσο τόκο πλήρωσε;

102. Ἕνας κτηματίας πούλησε τὰ προϊόντα του καὶ εἰσέπραξε 7.500 δρχ., τὶς ὁποῖες τόκισε πρὸς 9%. Πόσο τόκο θὰ λάβη μετὰ 1 ἔτος 1 μήνα καὶ 10 ἡμέρες;

Προσέχετε : Οἱ συμμιγεῖς νὰ τρέπωνται σὲ ἀκέραιους.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Σύμφωνα μὲ ὅσα εἴδαμε στὰ προηγούμενα προβλήματα, τὰ προβλήματα τοῦ τόκου τὰ λύνομε μὲ τὴ σύνθετη μέθοδο τῶν τριῶν. Γιὰ συντομία μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσωμε καὶ τοὺς τύπους.

Γενικὸς κανόνας : *Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν τόκο, πολλαπλασιάζομε τὸ κεφάλαιο ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο καὶ τὸ χρόνο καὶ τὸ γινόμενο διαιροῦμε διὰ τοῦ 100, ἂν ὁ χρόνος δίνεται σὲ ἔτη, διὰ τοῦ 1.200, ἂν δίνεται σὲ μῆνες, καὶ διὰ τοῦ 36.000, ἂν δίνεται σὲ ἡμέρες.*

Τύποι : $\alpha)\ T = \dfrac{K.E.X.}{100}$, $\beta) T = \dfrac{K.E.X.}{1.200}$, $\gamma)\ T = \dfrac{K.E.X.}{36.000}$

Σημείωση. Σ' ὅλα τὰ προβλήματα τοῦ τόκου, ὅταν ὁ χρόνος δίνεται ὡς συμμιγὴς ἀριθμός, τρέπομε τὸν συμμιγὴ σὲ ἀκέραιο, δηλ. στὴν κατώτερη μονάδα ποὺ ἀναφέρει τὸ πρόβλημα, ὡς ἑξῆς :

α) Τὰ ἔτη καὶ μῆνες τρέπονται σὲ μῆνες· (πολλαπλασιάζομε τὰ ἔτη ἐπὶ 12 καὶ προσθέτομε καὶ τοὺς μῆνες, ποὺ δίνει τὸ πρόβλημα).

β) Οἱ μῆνες καὶ ἡμέρες τρέπονται σὲ ἡμέρες (πολλαπλασιάζομε τοὺς μῆνες ἐπὶ 30 καὶ προσθέτομε τὶς ἡμέρες).

γ) Τὰ ἔτη, μῆνες καὶ ἡμέρες τρέπονται σὲ ἡμέρες· (τρέπομε τὰ ἔτη σὲ μῆνες καὶ προσθέτομε καὶ τοὺς μῆνες, ποὺ δίνει τὸ πρόβλημα. Τοὺς μῆνες ὕστερα τοὺς τρέπομε σὲ ἡμέρες καὶ προσθέτομε καὶ τὶς ἡμέρες, ποὺ δίνει τὸ πρόβλημα).

δ) Τὰ ἔτη καὶ ἡμέρες τρέπονται σὲ ἡμέρες (πολλαπλασιάζομε τὰ ἔτη ἐπὶ 360 καὶ προσθέτομε καὶ τὶς ἡμέρες, ποὺ δίνει τὸ πρόβλημα).

Προβλήματα

103. Πόσο τόκο φέρουν 6.000 δρχ. πρὸς 8% σὲ 2 ἔτη καὶ 1 μήνα;

104. Πόσο τόκο φέρει κεφάλαιο 67.500 δρχ. πρὸς 6% σὲ 1 ἔτος 1 μήνα καὶ 10 ἡμέρες;

105. Ἂν δανείσωμε 7.200 δρχ. πρὸς 7,5%, πόσο τόκο θὰ λάβωμε μετὰ 1 ἔτος καὶ 20 ἡμέρες;

2. Πῶς βρίσκομε τὸ κεφάλαιο

α) Ὅταν ὁ χρόνος δίνεται σὲ ἔτη

Πρόβλημα. *Ἕνας κτηνοτρόφος δανείστηκε ἀπὸ τὴν Ἀγροτικὴ Τράπεζα ἕνα χρηματικὸ ποσὸν πρὸς 8%. Μετὰ 4 ἔτη πλήρωσε τόκο 4.000 δρχ. Πόσα χρήματα δανείστηκε ;*

Σκέψη. Στὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι γνωστὰ τὰ ποσά: Τόκος, χρόνος, καὶ ἐπιτόκιο, καὶ ἄγνωστο ποσὸ τὸ κεφάλαιο. Θὰ τὸ λύσωμε μὲ τὴ σύνθετη μέθοδο τῶν τριῶν.

Κατάταξη.

		Κ=;
		Ε=8%
100 δρχ. κεφ. σὲ 1 ἔτος φέρουν	8 δρχ. τόκο	Χ=4 ἔτη
x » » » 4 ἔτη »	4.000 » »	Τ=4.000 δρχ.

Σύγκριση. α) **Τόκος καὶ κεφάλαιο:** Ἀφοῦ 8 δραχμὲς τόκο σὲ 1 ἔτος τὸν φέρουν 100 δρχ. κεφάλαιο, τὸ διπλάσιο τόκο στὸν ἴδιο χρόνο θὰ τὸν φέρῃ διπλάσιο κεφάλαιο. Τὰ ποσὰ **τόκος** καὶ **κεφάλαιο** εἶναι **ἀνάλογα.**

β) **Χρόνος καὶ κεφάλαιο:** Ἀφοῦ 8 δραχμὲς τόκο σὲ 1 ἔτος τὸν φέρουν 100 δρχ. κεφάλαιο, τὸν ἴδιο τόκο σὲ διπλάσιο χρόνο θὰ τὸν φέρη μισὸ κεφάλαιο. Τὰ ποσὰ **χρόνος** καὶ **κεφάλαιο** εἶναι **ἀντίστροφα.**

Γι' αὐτὸ θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμό, ποὺ εἶναι πάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο, ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ χρόνου ὅπως ἔχει καὶ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ τόκου ἀντεστραμμένο.

Λύση. $X = 100 \times \frac{1}{4} \times \frac{4000}{8} = 12.500$ δρχ.

Ἀπάντηση. Δανείστηκε 12.500 δραχμές.

Παρατήρηση. Τὰ ποσὰ χρόνος - κεφάλαιο εἶναι ἀντίστροφα, ἐνῶ τόκος - κεφάλαιο εἶναι ἀνάλογα. Καί, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ κεφάλαιο, πολλαπλασιάσαμε τὸν τόκο (4.000) ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιρέσαμε διὰ τοῦ χρόνου (4 ἔτη) ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο (8%).

Τὸ ἴδιο θὰ παρατηρήσωμε ὅσα ὅμοια προβλήματα καὶ ἂν λύσωμε.

Ἑπομένως :

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ κεφάλαιο, ὅταν ὁ χρόνος δίνεται σὲ ἔτη, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ χρόνου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο.

Τύπος: $K = \frac{T.100}{X.E}$.

Προβλήματα

106. Ποιὸ κεφάλαιο πρέπει νὰ τοκίσωμε πρὸς 8%, γιὰ νὰ λάβωμε μετὰ 3 ἔτη 1.200 δραχμὲς τόκο;

107. Ποιὸ κεφάλαιο πρέπει νὰ καταθέσωμε στὴν Τράπεζα πρὸς 9%, γιὰ νὰ λάβωμε 7.200 δρχ. τόκο μετὰ 2 ἔτη;

108. Ἕνα σπίτι νοικιάζεται πρὸς 1.500 δρχ. μηνιαίως. Πόσο πρέπει νὰ ὑπολογιστῆ ἡ ἀξία του, ἂν τὸ ἐτήσιο ἐνοίκιο θεωρηθῆ ὡς κέρδος καὶ ὑπολογιστῆ πρὸς 8% ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ σπιτιοῦ;

109. Ἕνας ὑπάλληλος παίρνει μισθὸ 3.250 δρχ. καθαρὲς κατὰ μήνα. Ποιὸ κεφάλαιο ἔπρεπε νὰ εἶχε καταθέσει στὸ Ταμιευτήριο πρὸς 5%, γιὰ νὰ τοῦ δίνη τὰ χρήματα αὐτὰ ὡς ἐτήσιο τόκο;

β) Ὅταν ὁ χρόνος δίνεται σὲ μῆνες.

Πρόβλημα. *Ποιὸ κεφάλαιο πρέπει νὰ τοκίσωμε πρὸς 6%, γιὰ νὰ λάβωμε σὲ 8 μῆνες 800 δραχμὲς τόκο ;*

Σκέψη. Στὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι γνωστὰ τὰ ποσὰ τόκος, χρόνος καὶ ἐπιτόκιο καὶ ἄγνωστο ποσὸ τὸ κεφάλαιο. Ὁ χρόνος ἐδῶ δίνεται σὲ μῆνες.

K=;
E=6%
X=8 μῆνες
T=800 δρχ.

Κατάταξη :

100 δρχ.	κεφ.	σὲ	12	μῆνες	φέρουν	6	δρχ.	τόκο
X	»	»	»	8	»	»	800	»	»

Λύση. Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ κεφάλαιο - τόκος εἶναι ἀνάλογα, ἐνῷ κεφάλαιο - χρόνος εἶναι ἀντίστροφα, θὰ ἔχωμε:

$$X = 100 \times \frac{12}{8} \times \frac{800}{6} = 20.000 \text{ δρχ.}$$

Ἀπάντηση. Πρέπει νὰ τοκίσωμε 20.000 δραχμές.

Παρατήρηση. Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ κεφάλαιο στὸ πρόβλημα αὐτό, καθὼς καὶ σὲ ὅσα προβλήματα ὁ χρόνος δίνεται σὲ μῆνες πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 1200 καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ χρόνου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο. Τὸ 1200 εἶναι τὸ γινόμενο 100 × 12, ἐπειδὴ ὁ χρόνος δίνεται σὲ μῆνες καὶ ἀντὶ 1 ἔτος γράφομε 12 μῆνες. **Ἐπομένως :**

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ κεφάλαιο, ὅταν ὁ χρόνος δίνεται σὲ μῆνες, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 1200 καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ χρόνου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο.

$$\textit{Τύπος}: K = \frac{T.1200}{X.E}.$$

Προβλήματα

110. Πόσα χρήματα πρέπει νὰ καταθέσωμε στὸ Ταμιευτήριο πρὸς 9,5%, γιὰ νὰ λάβωμε ὕστερα ἀπὸ 8 μῆνες 60 δρχ. τόκο;

111. Ποιὸ κεφάλαιο πρέπει νὰ τοκίσωμε πρὸς 6%, γιὰ νὰ λάβωμε μετὰ 3 μῆνες 11.250 δρχ. τόκο;

112. Πόσα χρήματα πρέπει νὰ δανείσωμε πρὸς 6,75%, γιὰ νὰ λάβωμε μετὰ 1 ἔτος καὶ 8 μῆνες 270 δρχ. τόκο;

Νὰ κάμετε ἕνα δικό σας πρόβλημα καὶ νὰ τὸ λύσετε.

γ) Ὅταν ὁ χρόνος δίνεται σὲ ἡμέρες.

Πρόβλημα. *Ποιὸ κεφάλαιο πρέπει νὰ καταθέσωμε στὴν Τράπεζα πρὸς 6,5%, γιὰ νὰ λάβωμε μετὰ 1 ἔτος 1 μήνα καὶ 10 ἡμέρες 6.500 δραχμὲς τόκο;*

Σκέψη. Ὁ χρόνος ἐδῶ δίνεται σὲ ἔτη, μῆνες καὶ ἡμέρες. Θὰ τὸν τρέψωμε σὲ ἡμέρες. (Θὰ τρέψωμε πρῶτα τὸ ἔτος σὲ 12 μῆνες καὶ θὰ προσθέσωμε καὶ τὸν 1 μήνα, ὁπότε θὰ ἔχωμε 13 μῆνες· τοὺς μῆνες θὰ τοὺς τρέψωμε σὲ ἡμέρες: $13 \times 30 = 390$ ἡμέρες καὶ στὶς ἡμέρες αὐτὲς προσθέτομε καὶ τὶς 10 ἡμέρες καὶ θὰ ἔχωμε: 390 ἡμ. +10 ἡμ. = = 400 ἡμέρες).

Θυμηθῆτε ὅτι κεφάλαιο καὶ τόκος εἶναι ποσὰ ἀνάλογα καὶ κεφάλαιο καὶ χρόνος εἶναι ἀντίστροφα. (Κάμετε καὶ μόνοι σας τὴ σύγκριση νὰ τὸ διαπιστώσετε).

Κ = ;
Ε = 6,5%
Χ = 400 ἡμ.
Τ = 6.500 δρχ.

Κατάταξη:

100	δρχ.	κεφ.	σὲ	360	ἡμ.	φέρουν	6,5	δρχ.	τόκο
Χ	»	»	»	400	»	»	6.500	»	»

$$X = 100 \times \frac{360}{400} \times \frac{6500}{6,5} = 100 \times \frac{360}{400} \times \frac{65000}{65} =$$

90.000 δρχ.

Ἀπάντηση. Τὸ ζητούμενο κεφάλαιο εἶναι 90.000 δρχ.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ κεφάλαιο, ὅταν ὁ χρόνος δίνεται σὲ ἡμέρες, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 36.000 καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ χρόνου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο.

$$Τύπος: K = \frac{T . 36000}{X . E}$$

Προβλήματα

113. Ποιὸ κεφάλαιο πρέπει νὰ τοκίσωμε πρὸς 8%, γιὰ νὰ λάβωμε μετὰ 72 ἡμέρες 8.000 δραχμὲς τόκο;

114. Πόσα χρήματα πρέπει νὰ καταθέσωμε στὴν Τράπεζα πρὸς 7,5%, γιὰ νὰ λάβωμε μετὰ 1 μήνα καὶ 10 ἡμέρες 6.250 δραχμὲς τόκο;

115. Ἕνας γεωργὸς δανείστηκε ἕνα χρηματικὸ ποσὸ πρὸς 6,75%. Μετὰ 1 ἔτος 1 μήνα καὶ 10 ἡμέρες ἐπέστρεψε τὸ δάνειο καὶ πλήρωσε τόκο 112,50 δραχμές. Πόσα χρήματα εἶχε δανειστῆ;

Νὰ γράψετε ἕνα δικό σας πρόβλημα καὶ νὰ τὸ λύσετε.

Γενικὸς κανόνας γιὰ νὰ βρίσκωμε τὸ κεφάλαιο

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ κεφάλαιο, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 100, ὅταν ὁ χρόνος δίνεται σὲ ἔτη, ἐπὶ 1200, ὅταν ὁ χρόνος δίνεται σὲ μῆνες, ἐπὶ 36.000, ὅταν ὁ χρόνος δίνεται σὲ ἡμέρες, καὶ τὸ γινόμενο διαιροῦμε διὰ τοῦ χρόνου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο.

$$Τύποι: α)\ K = \frac{T . 100}{X . E},\ β)\ K = \frac{T . 1200}{X . E},$$

$$γ)\ K = \frac{T . 36000}{X . E}$$

3. Πῶς βρίσκομε τὸ χρόνο

Πρόβλημα 1. *Ἕνας ἐργολάβος οἰκοδομῶν δανείστηκε ἀπὸ τὴν Κτηματικὴ Τράπεζα 250.000 δρχ. πρὸς 8%. Ὅταν ξόφλησε τὸ δά-*

νειο πλήρωσε τόκο 60.000 δραχμές. Γιὰ πόσο χρόνο εἶχαν τοκιστῆ τὰ χρήματα αὐτά ;

Σκέψη. Στὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι γνωστὰ τὰ ποσὰ κεφάλαιο, τόκος καὶ ἐπιτόκιο, καὶ ἄγνωστο ποσὸ ὁ χρόνος. Θὰ τὸ λύσωμε μὲ τὴ σύνθετη μέθοδο τῶν τριῶν.

K=250.000 δρχ.
E=8%
X=;
T=60.000 δρχ.

Κατάταξη.

100 δρχ. κεφ.	σὲ 1 ἔτος	φέρουν	8 δρχ.	τόκο
250.000 »	»	» X ἔτη	» 60.000	» »

Σύγκριση. α) **Κεφάλαιο καὶ χρόνος.** Ἀφοῦ 100 δρχ. κεφάλαιο φέρουν ὁρισμένο τόκο σὲ 1 ἔτος, διπλάσιο κεφάλαιο θὰ φέρη τὸν ἴδιο τόκο σὲ μισὸ χρόνο. Τὰ ποσὰ **κεφάλαιο** καὶ **χρόνος** εἶναι **ἀντίστροφα.**

β) **Τόκος καὶ χρόνος.** Ἀφοῦ 8 δραχμὲς τόκο τὸν φέρει ὁρισμένο κεφάλαιο σὲ 1 ἔτος, διπλάσιο τόκο θὰ τὸν φέρη τὸ ἴδιο κεφάλαιο σὲ διπλάσιο χρόνο. Τὰ ποσὰ **τόκος** καὶ **χρόνος** εἶναι **ἀνάλογα.**

Γι' αὐτὸ θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμὸ 1, ποὺ εἶναι πάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο, ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ κεφαλαίου ὅπως ἔχει καὶ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ τόκου ἀντεστραμμένο.

Λύση. $X = 1 \times \frac{100}{250.000} \times \frac{60.000}{8} = 3$ ἔτη.

Ἀπάντηση. Τὰ χρήματα εἶχαν τοκιστῆ γιὰ 3 ἔτη.

Κανόνας. *Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ χρόνο, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενο διαιροῦμε διὰ τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο. Τὸ ἐξαγόμενο μᾶς δίνει ἔτη.*

Τύπος: $X = \frac{T \cdot 100}{K \cdot E}$

Πρόβλημα 2. *Σὲ πόσο χρόνο κεφάλαιο 720.000 δρχ., τοκιζόμενο πρὸς 10%, γίνεται μαζὶ μὲ τοὺς τόκους του 800.000 δραχμές ;*

Σκέψη. Καὶ ἐδῶ ζητοῦμε τὸ χρόνο, ὅπως καὶ στὸ προηγούμενο πρόβλημα, ἀλλὰ δὲν μᾶς δίνεται καὶ ὁ τόκος. Μποροῦμε ὅμως νὰ τὸν βροῦμε, ἂν ἀπὸ τὶς 800.000 ποὺ εἶναι κεφάλαιο καὶ τόκος μαζὶ) ἀφαιρέσωμε τὸ 720.000 (κεφάλαιο). Δηλ. 800.000 δρχ. – 720.000 δρχ. = 80.000 δρχ. (τόκος).

Τώρα προχωροῦμε στὴ λύση τοῦ προβλήματος, ὅπως γνωρίζομε.

K=720.000 δρχ.
E=10%
X=;
T=80.000 δρχ.

Κατάταξη :

100 δρχ. κεφ.	σὲ	1 ἔτος	φέρουν	10 δρχ.	τόκο	
720.000 »	»	» X ἔτη	»	80.000	»	»

Λύση. $X = 1 \times \frac{100}{720.000} \times \frac{80.000}{10} = \frac{10}{9}$ ἔτη = (1 ἔτ., 1 μ., 10 ἡμ.)

Ἀπάντηση. Ὁ ζητούμενος χρόνος εἶναι 1 ἔτ. 1 μ. 10 ἡμ.

Παρατήρηση. Ἂν ὁ χρόνος βρεθῆ σὲ κλάσμα, τότε διαιροῦμε τὸν ἀριθμητὴ διὰ τοῦ παρονομαστῆ. Ὁ πρῶτος ἀριθμὸς τοῦ πηλίκου παριστάνει ἔτη· ἂν μείνη ὑπόλοιπο ἢ ἂν δὲ χωρῆ καθόλου ὁ διαιρέτης στὸν διαιρετέο, τὸ τρέπομε σὲ μῆνες πολλαπλασιάζοντας ἐπὶ 12. Τὸ νέο πηλίκο παριστάνει μῆνες. Τὸ νέο ὑπόλοιπο τὸ τρέπομε σὲ ἡμέρες πολλαπλασιάζοντας ἐπὶ 30. Τὸ νέο πηλίκο θὰ παριστάνη ἡμέρες.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

116. Σὲ πόσο χρόνο κεφάλαιο 7.500 δραχμῶν, τοκιζόμενο πρὸς 7,5%, δίνει τόκο 2.250 δραχμές;

117. Ὕστερα ἀπὸ πόσο χρόνο κεφάλαιο 12.000 δρχ., τοκιζόμενο πρὸς 8%, φέρει τόκο 240 δραχμές;

118. Σὲ πόσο χρόνο κεφάλαιο 15.000 δρχ., τοκιζόμενο πρὸς $4\frac{1}{2}$ %, φέρει τόκο 75 δραχμές;

119. Σὲ πόσο χρόνο κεφάλαιο 80.000 δρχ., τοκιζόμενο πρὸς 7,5%, γίνεται μὲ τοὺς τόκους του 95.000 δραχμές;

120. Γιὰ πόσο χρόνο πρέπει νὰ τοκιστοῦν 670.000 δρχ. πρὸς 8%, γιὰ νὰ γίνουν μὲ τοὺς τόκους τους 737.000 δραχμές;

121. Ἕνας μαθητὴς πούλησε τὰ καλύτερα γραμματόσημα τῆς συλλογῆς του καὶ πῆρε 2.400 δραχμές. Τὰ χρήματα αὐτὰ τὰ κατέθεσε στὴν Τράπεζα πρὸς 8%. Μὲ τοὺς τόκους ὁρισμένου χρόνου ἀγόρασε ἕνα ραδιόφωνο ἀξίας 1.600 δραχμῶν. Πόσο χρόνο ἔμειναν τοκισμένα τὰ χρήματα;

122. Ἕνας πατέρας, ὅταν γεννήθηκε ἡ κόρη του, κατέθεσε γιὰ λογαριασμό της σὲ μιὰ Τράπεζα 60.000 δραχμὲς πρὸς 6%. Ὅταν μεγάλωσε ἡ κόρη του, πῆρε τόκους καὶ κεφάλαιο μαζὶ 135.000 δραχμές. Σὲ ποιὰ ἡλικία τὶς πῆρε;

4. Πῶς βρίσκομε τὸ ἐπιτόκιο

α) Ὅταν ὁ χρόνος δίνεται σὲ ἔτη.

Πρόβλημα. *Κατέθεσε κάποιος στὴν Τράπεζα 35.000 δρχ. καὶ ὕστερα ἀπὸ 3 ἔτη ἔλαβε τόκο 6.300 δρχ. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο τοκίστηκαν τὰ χρήματα ;*

Σκέψη. Στὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι γνωστὰ τὰ ποσὰ κεφάλαιο, χρόνος καὶ τόκος καὶ ἄγνωστο ποσὸ τὸ ἐπιτόκιο. Ὁ χρόνος δίνεται σὲ ἔτη. Θὰ τὸ λύσωμε μὲ τὴν σύνθετη μέθοδο τῶν τριῶν.

Κ=35.000 δρχ.
Ε=;
Χ=3 ἔτη
Τ=6.300 δρχ.

Κατάταξη.

35.000 δρχ.	κεφ. σὲ	3 ἔτη	φέρουν	6.300 δρχ.	τόκο
100 »	» »	1 ἔτος	»	Χ »	»

Σύγκριση. α) **Κεφάλαιο καὶ τόκος.** 35.000 δρχ. κεφάλαιο σὲ ὁρισμένο χρόνο φέρουν 6.300 δρχ. τόκο. Μισὸ κεφάλαιο στὸν ἴδιο χρόνο θὰ φέρῃ μισὸ τόκο. Τὰ ποσὰ **κεφάλαιο** καὶ **τόκος** εἶναι **ἀνάλογα.**

β) **Χρόνος καὶ τόκος.** Ὁρισμένο κεφάλαιο σὲ 3 ἔτη φέρει 6.300 δρχ. τόκο· τὸ ἴδιο κεφάλαιο σὲ μισὸ χρόνο θὰ φέρῃ μισὸ τόκο. Τὰ ποσὰ **χρόνος** καὶ **τόκος** εἶναι **ἀνάλογα.**

Γι' αὐτὸ θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμό, ποὺ εἶναι πάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο, ἐπὶ τὰ κλάσματα τῶν δύο ἄλλων ποσῶν ἀντεστραμμένα.

Λύση. $X = 6.300 \times \frac{100}{35.000} \times \frac{1}{3} = 6\%$

Ἀπάντηση. Τὰ χρήματα τοκίστηκαν πρὸς 6%.

Κανόνας. *Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐπιτόκιο, ὅταν ὁ χρόνος δίνεται σὲ ἔτη, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸ χρόνο.*

Τύπος: $E = \frac{T \,.\, 100}{K \,.\, X}$

Προβλήματα

123. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο πρέπει νὰ τοκιστοῦν 1.200 δρχ., γιὰ νὰ φέρουν σὲ 4 ἔτη 324 δρχ. τόκο;

124. Δανείστηκε κάποιος 2.500 δρχ., τὶς ὁποῖες ἐπέστρεψε μετὰ 3 ἔτη πληρώνοντας καὶ 600 δρχ. γιὰ τόκους. Μὲ πόσο στὰ ἑκατὸ (%) εἶχε δανειστῆ τὰ χρήματα;

125. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο πρέπει νὰ τοκιστοῦν 1.500 δρχ., γιὰ νὰ φέρουν μετὰ 4 ἔτη 380 δρχ. τόκο;

Νὰ κάμετε καὶ σεῖς ἕνα πρόβλημα καὶ νὰ τὸ λύσετε.

β) Ὅταν ὁ χρόνος δίνεται σὲ μῆνες.

Πρόβλημα. *Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο πρέπει νὰ τοκίσωμε 45.000 δρχ., γιὰ νὰ λάβωμε μετὰ 4 μῆνες 1500 δραχμὲς τόκο ;*

Σκέψη. Γνωρίζομε τὰ ποσὰ κεφάλαιο, χρόνο καὶ τόκο καὶ ζητοῦμε τὸ ἐπιτόκιο. Ἐδῶ ὁ χρόνος δίνεται σὲ μῆνες.

K=45.000 δρχ.
E=;
X =4 μῆνες
T=1.500 δρχ.

Κατάταξη.

45.000	δρχ.	κεφ.	σὲ	4	μῆν.	φέρουν	1500	δρχ.	τόκο
100	»	»	»	12	»	»	X	»	»

Λύση. Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ὅπως γνωρίζομε, θὰ ἔχωμε: $X = 1500 \times \frac{100}{45.000} \times \frac{12}{4} = 10$ δρχ.

Ἀπάντηση. Τὸ ζητούμενο ἐπιτόκιο εἶναι 10%.

Παρατήρηση. Στὸ πρόβλημά μας ὁ χρόνος δίνεται σὲ μῆνες. Καί, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐπιτόκιο, πολλαπλασιάσαμε τὸν τόκο ἐπὶ 1200 (100 × 12) καὶ διαιρέσαμε διὰ τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸ χρόνο.

Κανόνας. *Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐπιτόκιο, ὅταν ὁ χρόνος δίνεται σὲ μῆνες, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 1200 καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸ χρόνο.*

Τύπος: $E = \frac{T\,.\,1200}{K\,.\,X}$

Προβλήματα

126. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο πρέπει νὰ τοκιστοῦν 6.000 δρχ., γιὰ νὰ φέρουν σὲ 3 μῆνες 120 δρχ. τόκο;

127. Κεφάλαιο 620.000 δρχ. τοκίστηκε κι ἔφερε μετὰ 1 ἔτος καὶ 3 μῆνες 58.125 δρχ. τόκο. Μὲ πόσο στὰ ἑκατὸ (%) εἶχε τοκιστῆ;

128. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο πρέπει νὰ τοκιστῆ κεφάλαιο 12.000 δρχ. γιὰ νὰ φέρη τόκο 1.440 δρχ. μετὰ 1 ἔτος καὶ 6 μῆνες;

129. Μὲ πόσο στὰ ἑκατὸ (%) πρέπει νὰ τοκιστοῦν 900 δρχ., γιὰ νὰ γίνουν μετὰ 2 μῆνες μαζὶ μὲ τὸν τόκο τους 913,50 δρχ.;

γ) Ὅταν ὁ χρόνος δίνεται σὲ ἡμέρες.

Πρόβλημα. *Ἔμπορος δανείστηκε 320.000 δρχ. καὶ μετὰ 1 ἔτος 1 μήνα καὶ 10 ἡμέρες πλήρωσε τόκο 32.000 δρχ. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο πῆρε τὸ δάνειο;*

Σκέψη. Μᾶς εἶναι γνωστὰ τὰ ποσὰ κεφάλαιο, χρόνος καὶ τόκος καὶ ἄγνωστο ποσὸ τὸ ἐπιτόκιο. Ὁ χρόνος ἐδῶ δίνεται σὲ ἔτη μῆνες καὶ ἡμέρες. Θὰ τρέψωμε τὸ συμμιγὴ σὲ ἀκέραιο, ὅπως γνωρίζομε, δηλ. σὲ ἡμέρες.

Κ=320.000 δρχ.
Ε=;
Χ=400 ἡμ.
Τ=32.000 δρχ.

Κατάταξη.

320.000 δρχ. κεφ. σὲ 400 ἡμ. φέρουν 32.000 δρχ. τόκο
100 » » » 360 » » Χ » »

Λύση. Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ὅταν ζητῆται τὸ ἐπιτόκιο, θὰ ἔχωμε:

$$Χ = 32.000 \times \frac{100}{320.000} \times \frac{360}{400} = 9 \text{ δρχ.}$$

Ἀπάντηση. Τὸ ζητούμενο ἐπιτόκιο εἶναι 9%.

Παρατήρηση. Ἐπειδὴ ὁ χρόνος στὸ πρόβλημα αὐτὸ δίνετα σὲ ἔτη, μῆνες καὶ ἡμέρες, τρέψαμε τὸ συμμιγὴ σὲ ἡμέρες. Ὕστερα πολλαπλασιάσαμε τὸν τόκο ἐπὶ 36.000 (=100×360) καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιρέσαμε διὰ τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸ χρόνο.

Κανόνας. *Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐπιτόκιο, ὅταν ὁ χρόνος δίνεται σὲ ἡμέρες, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 36.000 καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸ χρόνο.*

$$\textit{Τύπος}: E = \frac{T.\,36000}{K.X.}$$

Προβλήματα

130. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο κεφάλαιο 8.100 δρχ. φέρει τόκο 54 δρχ. μετὰ 1 μήνα καὶ 10 ἡμέρες;

131. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο πρέπει νὰ τοκιστοῦν 3.000 δρχ. γιὰ νὰ φέρουν σὲ 1 ἔτος 1 μήνα καὶ 10 ἡμέρες τόκο 200 δραχμές;

132. Ἕνας γεωργὸς πούλησε 1.250 κιλὰ σιτάρι πρὸς 3 δρχ. τὸ κιλό. Τὰ χρήματα, ποὺ πῆρε, τὰ δάνεισε. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο τὰ δάνεισε, γιὰ νὰ πάρη μετὰ 6 μῆνες καὶ 20 ἡμέρες τόκο 250 δραχμές;

133. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο πρέπει νὰ τοκίσωμε 46.800 δρχ., γιὰ νὰ πάρωμε μετὰ 3 μῆνες καὶ 10 ἡμέρες τόκους καὶ κεφάλαιο μαζὶ 47.580 δραχμές;

Γενικὸς κανόνας γιὰ νὰ βρίσκωμε τὸ ἐπιτόκιο

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐπιτόκιο, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 100, ὅταν ὁ χρόνος δίνεται σὲ ἔτη, ἢ ἐπὶ 1200, ὅταν ὁ χρόνος δίνεται σὲ μῆνες, ἢ ἐπὶ 36.000, ὅταν ὁ χρόνος δίνεται σὲ ἡμέρες, καὶ τὸ γινόμενο διαιροῦμε διὰ τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸ χρόνο.

Τύποι: $\alpha)\ E = \dfrac{T.\,100}{K.X}$, $\beta)\ E = \dfrac{T.\,1200}{K.X}$, $\gamma)\ E = \dfrac{T.\,36000}{K.X}$

ΓΕΝΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ

134. Ἕνας γεωργὸς πούλησε 724 κιλὰ κριθάρι πρὸς 4,25 δρχ. τὸ κιλὸ καὶ 170 κιλὰ φασόλια (γίγαντες) πρὸς 38,50 δρχ. τὸ κιλό. Τὰ χρήματα, ποὺ εἰσέπραξε, τὰ τόκισε πρὸς 8% ἐπὶ 1 ἔτος καὶ 3 μῆνες. Πόσο τόκο ἔλαβε;

135. Ἔμπορος ἀγόρασε ἐμπορεύματα ἀξίας 75.000 δραχμῶν. Πλήρωσε σὲ μετρητὰ τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ἀξίας τους, καὶ τὸ ὑπόλοιπο ὑποχρεώθηκε νὰ τὸ πληρώση μετὰ 3 μῆνες πρὸς 8%. Πόσο τόκο πλήρωσε;

136. Ὕστερα ἀπὸ πόσο χρόνο κεφάλαιο 24.000 δρχ., τοκιζόμενο πρὸς 7,5% γίνεται μὲ τοὺς τόκους του 24.600 δραχμές;

137. Σὲ πόσο χρόνο κεφάλαιο 250.000 δρχ., τοκιζόμενο πρὸς 12,5%, διπλασιάζεται;

138. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο πρέπει νὰ τοκιστῆ κεφάλαιο, γιὰ νὰ διπλασιαστῆ σὲ 20 ἔτη;

139. Πόσο τόκο θὰ πάρωμε, ἂν ἀπὸ κεφάλαιο 20.000 δρχ. τοκίσωμε γιὰ 8 μῆνες τὰ $\frac{3}{5}$ αὐτοῦ πρὸς 6%, καὶ τὸ ὑπόλοιπο πρὸς 9 %;

140. Ἕνας ὑπάλληλος παίρνει τὸ μήνα 2.500 δρχ. καθαρές. Ποιὸ κεφάλαιο ἔπρεπε νὰ καταθέση στὴν Τράπεζα πρὸς 5%, γιὰ νὰ τοῦ δίνη τὰ χρήματα αὐτὰ ὡς τόκο;

141. Γιὰ πόσο χρόνο πρέπει νὰ καταθέσωμε σὲ μιὰ Τράπεζα 8.000 δρχ. πρὸς 8,5%, γιὰ νὰ λάβωμε τόκο καὶ κεφάλαιο μαζὶ 65.340 δραχμές;

142. Πόσα κιλὰ βρώμη πρέπει νὰ πουλήση ἕνας γεωργὸς πρὸς 3,20 δρχ. τὸ κιλό, γιὰ νὰ καταθέση τὴν ἀξία της στὴν Τράπεζα πρὸς 5% καὶ νὰ λάβη μετὰ 1 ἔτος καὶ 3 μῆνες 300 δρχ. τόκο;

Νὰ κάμετε καὶ σεῖς παρόμοια προβλήματα τόκου.

5. Πρόβλημα ἀπαλοιφῆς τοῦ χρόνου

Πρόβλημα. *Ποιὸ κεφάλαιο, τοκιζόμενο πρὸς 6%, μετὰ 3 ἔτη γίνεται μὲ τοὺς τόκους του 9.440 δραχμές ;*

Σκέψη. Στὸ πρόβλημα αὐτὸ τοῦ τόκου ζητεῖται τὸ κεφάλαιο, μᾶς εἶναι ἄγνωστος ὅμως καὶ ὁ τόκος, ὁ ὁποῖος εἶναι ἑνωμένος μὲ τὸ κεφάλαιο καὶ δὲν μποροῦμε νὰ τὸν χωρίσωμε.

Κ=;
Ε=6%
Χ=3 ἔτη
Τ=;
Κ+Τ=9.440 δρχ.

Ἑπομένως στὴ στήλη τοῦ τόκου θὰ ἔχωμε τὸ ἄθροισμα Κ+Τ.

Κατάταξη :

100 δρχ. κεφ.	σὲ	1 ἔτος	γίνεται	μαζὶ	μὲ	τὸν	τόκο	106 δρχ.
Χ	»	»	» 3 ἔτη	»	»	»	»	» 9440 »

Ἐδῶ ὅμως παρουσιάζεται ἡ δυσκολία ὅτι ὁ χρόνος καὶ τὸ Κ + Τ δὲ μεταβάλλονται ἀναλόγως ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ὥστε νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα μὲ τὴν σύνθετη μέθοδο. Πρέπει λοιπὸν νὰ ἀπαλείψωμε τὸ χρόνο, νὰ κάμωμε δηλαδὴ ἀναγωγὴ στὸν κοινὸ χρόνο τῶν 3 ἐτῶν.

Λύση.

α΄ **Κατάταξη :** 100 δρχ. κεφ. σὲ 1 ἔτος φέρουν 6 δρχ. τόκο.
100 » » » 3 ἔτη » Χ » »

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ χρόνος καὶ τόκος εἶναι ἀνάλογα, θὰ ἔχωμε :

$$X = 6 \times \frac{3}{1} = 18 \text{ δρχ. (τόκος).}$$

Ἂν τὸν τόκο αὐτὸν τῶν 18 δραχμῶν τὸν προσθέσωμε στὸ κεφάλαιο τῶν 100 δρχ., θὰ βροῦμε : 100 + 18 = 118 δρχ. (κεφάλαιο + τόκος).

β΄ **Κατάταξη :** 118 δρχ. Κ + Τ προέρχονται ἀπὸ 100 δρχ. Κ.
9.440 » » » » Χ » »

Ἐπειδὴ τὸ κεφάλαιο καὶ τὸ ἄθροισμα Κ + Τ, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι σταθερός, εἶναι ἀνάλογα, ἔχομε:

$$X = 100 \times \frac{9.440}{118} = 8.000 \text{ δρχ.}$$

Ἀπάντηση : Τὸ ζητούμενο κεφάλαιο εἶναι 8.000 δρχ.

Παρατήρηση : Οἱ τόκοι θὰ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ κεφάλαια γιὰ τὸ ἴδιο ἐπιτόκιο καὶ τὸν ἴδιο χρόνο.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

143. Ποιὸ κεφάλαιο πρέπει νὰ τοκίσωμε πρὸς 8%, γιὰ νὰ λάβωμε μετὰ 3 μῆνες μαζὶ μὲ τοὺς τόκους του 6.120 δραχμές;

144. Ποιὸ κεφάλαιο, τοκιζόμενο πρὸς 9%, γίνεται μετὰ 6 μῆνες μὲ τοὺς τόκους του 1.881 δραχμές;

145. Ἕνας πατέρας, ὅταν γεννήθηκε ἡ κόρη του, κατέθεσε γιὰ λογαριασμό της σὲ μιὰ Τράπεζα ἕνα κεφάλαιο πρὸς 6%. Ὅταν ἡ κόρη του ἔγινε 21 ἐτῶν, ἔλαβε τόκους καὶ κεφάλαιο 135.600 δρχ. Ποιὸ κεφάλαιο εἶχε καταθέσει ὁ πατέρας της καὶ πόσο τόκο ἔφερε τὸ κεφάλαιο αὐτό;

6. Ὑφαίρεση

α) Δάνειο - Γραμμάτιο - Συναλλαγματικὴ

Στὸ κεφάλαιο «περὶ τόκου» εἴπαμε ὅτι οἱ ἔμποροι, γιὰ νὰ ἀγοράσουν τὰ ἐμπορεύματά τους, δανείζονται χρήματα ἀπὸ τὴν Τράπεζα. Τὸ ἴδιο κάνουν οἱ κτηματίες, οἱ γεωργοὶ καὶ οἱ κτηνοτρόφοι εἴτε ἀπὸ τὴν Τράπεζα εἴτε ἀπὸ Συνεταιρισμοὺς εἴτε ἀπὸ ἰδιῶτες. Καὶ στὸν ὁρισμένο χρόνο ἐπιστρέφουν τὸ **δάνειο.**

Οἱ ἔμποροι στὶς συναλλαγές τους διευκολύνονται καὶ μὲ ἄλλο τρόπο. Συνήθως δὲν πληρώνουν ὅλη τὴν ἀξία τῶν ἐμπορευμάτων, τὰ ὁποῖα ἀγοράζουν ἀπὸ ἄλλο μεγαλύτερο ἔμπορο (τὸν χονδρέμπορο) ἢ ἀπὸ τὴν ἀποθήκη ἢ ἀπὸ τὸ ἐργοστάσιο. Πληρώνουν ἕνα μέρος μόνο τῆς ἀξίας, καὶ ὑπόσχονται νὰ πληρώσουν τὰ ὑπόλοιπα μετὰ ἕνα ὁρισμένο χρονικὸ διάστημα. Γιὰ τὰ ὑπόλοιπα αὐτὰ ὑπογράφει ὁ ἀγοραστὴς ἔμπορος (ὁ ὀφειλέτης) μιὰ ἀπόδειξη, ποὺ ὀνομάζεται **Γραμμάτιο.**

Ὁ συνηθέστερος τύπος τοῦ γραμματίου εἶναι ὁ ἑξῆς:

Γραμμάτιον δρχ. 51.500

Τὴν 30ὴν Σεπτεμβρίου 1969 ὑπόσχομαι νὰ πληρώσω εἰς τὸν Π.Β... ἢ εἰς Διαταγὴν αὐτοῦ τὸ ἄνω ποσὸν τῶν δραχμῶν πεντήκοντα μιᾶς χιλιάδων πεντακοσίων, ἀξίαν ληφθεῖσαν εἰς ἐμπορεύματα.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 1 Ἀπριλίου 1969
(Ὑπογρ.) Χ.Ρ.......
Ὁδὸς....

Καθὼς βλέπομε στὸ γραμμάτιο ἀναγράφεται τὸ ποσὸ τοῦ χρέους (51.500). Σ' αὐτὸ περιλαμβάνεται τὸ κεφάλαιο καὶ ὁ τόκος τῶν 6 μηνῶν. Ἀναγράφεται ἐπίσης καὶ ἡ ἡμερομηνία ἐξοφλήσεως τοῦ χρέους (30 Σεπτεμβρίου 1969).

Τὸ **Γραμμάτιο** αὐτό, ποὺ ὀνομάζεται καὶ **χρεώγραφο,** τὸ ἐκδίδει καὶ τὸ ὑπογράφει ὁ **χρεώστης** (ὀφειλέτης) Χ.Ρ. καὶ τὸ κρατεῖ ὁ Π.Β., δηλ. ὁ **πιστωτὴς** (δανειστής), ὁ ὁποῖος λέγεται καὶ **κομιστὴς** τοῦ χρεωγράφου.

Ὁ πιστωτὴς Π.Β. μπορεῖ νὰ ζητήση ἀπὸ τὸν ὀφειλέτη του Χ.Ρ. νὰ τοῦ ὑπογράψη ἀντὶ γιὰ γραμμάτιο μιὰ συναλλαγματική. Καὶ ἡ **συναλλαγματικὴ** εἶναι χρεώγραφο· εἶναι δηλ. μία ἀπόδειξη, ποὺ ἀποδείχνει τὴ σύναψη τοῦ δανείου.

Ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ Γραμματίου καὶ τῆς συναλλαγματικῆς εἶναι ἡ ἑξῆς : Τὸ **Γραμμάτιο,** ὅπως εἴπαμε, τὸ ἐκδίδει καὶ τὸ ὑπογράφει ὁ χρεώστης (ὁ ὀφειλέτης), ἐνῶ τὴ **συναλλαγματικὴ** τὴν ἐκδίδει καὶ τὴν ὑπογράφει ὁ πιστωτὴς (ὁ δανειστὴς) καὶ τὴν ἀπευθύνει πρὸς τὸν ὀφειλέτη μὲ τὴν ἐντολὴ τῆς πληρωμῆς κατὰ τὴν ἡμέρα τῆς λήξεως. Ὁ ὀφειλέτης τὴν ἀποδέχεται μὲ τὴν ὑπογραφή του κάτω ἀπὸ τὴ λέξη **Δεκτή.**

Νά καὶ ὁ τύπος τῆς συναλλαγματικῆς :

Λῆξις τῇ 30/9/69. Συναλλαγματικὴ διὰ δρχ. 51.500.

Τὴν 30ὴν Σεπτεμβρίου 1969 πληρώσατε δυνάμει τῆς παρούσης μόνης συναλλαγματικῆς εἰς Διαταγὴν Π.Β.

......καὶ εἰς τὸ ἐν Ἀθήναις κατάστημα Ἐμπορικῆς Τραπέζης τὸ ποσὸν τῶν Δραχμῶν πεντήκοντα μιᾶς χιλιάδων πεντακοσίων.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 1 Ἀπριλίου 1969

Πρὸς
Τὸν κ. Χ.Ρ ....
Ὁδὸς ....
Ἀθήνας
(Ὑπογρ.) Χ.Ρ.

Ὁ Ἐκδότης
(ὑπογρ.) Π.Β. ....
Δεκτή

β) Ὑφαίρεση

Ὁ κομιστὴς τοῦ χρεωγράφου σπανίως κρατεῖ τὸ γραμμάτιο ἢ τὴν συναλλαγματικὴ μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς λήξεως. Οἱ ἐμπορευόμενοι συνήθως χρειάζονται χρήματα, γιὰ νὰ πληρώνουν τὶς ὑποχρεώσεις τους. Γι' αὐτὸ χρησιμοποιοῦν τὸ γραμμάτιο ἢ τὴ συναλλαγματικὴ ὡς χαρτονόμισμα.

Στὸ παράδειγμά μας: Ἂς ὑποθέσωμε ὅτι 4 μῆνες μετὰ τὴν ὑπογραφὴ τοῦ γραμματίου ἢ τῆς συναλλαγματικῆς ὁ πιστωτὴς Π.Β. χρειάστηκε χρήματα. Πηγαίνει τότε στὴν Τράπεζα ἢ σὲ ἰδιώτη καὶ μεταβιβάζει τὸ χρεώγραφο ποὺ ἔχει στὰ χέρια του, ἀφοῦ τὸ ὑπογράψη στὸ πίσω μέρος (ὀπισθογράφηση).

Ἡ Τράπεζα, ἡ ὁποία θὰ πάρη τὸ χρεώγραφο, δὲ θὰ δώση ὅλο τὸ ποσό, ποὺ ἀναγράφεται σ' αὐτό, ἀλλὰ θὰ κρατήση τὸν τόκο τῶν δύο μηνῶν, ποὺ ὑπολείπονται μέχρι τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου.

Κάνουν τὸ λογαριασμὸ καὶ βρίσκουν, ὅτι ὁ τόκος τῶν 51.500 δρχ. σὲ 2 μῆνες μὲ τὸ καθορισμένο ἐπιτόκιο 12% εἶναι 1.030 δραχμές. Τὸν ἀφαιροῦν τὸν τόκο αὐτὸν ἀπὸ τὸ ποσὸ τῶν 51.500 δραχμῶν καὶ τὸ ὑπόλοιπο παίρνει ὁ Π.Β. Θὰ πάρη δηλ. αὐτὸς 51.500 − 1.030 = 50.470 δραχμές.

Παρατηρήσεις. 1) Τὸ ποσὸ 51.500 δρχ., ποὺ γράφει πάνω τὸ χρεώγραφο, λέγεται **ὀνομαστικὴ ἀξία** (Ο.Α.) τοῦ γραμματίου. Τὸ ποσὸ 50.470 δρχ., ποὺ παίρνει ὁ πιστωτής, ὅταν προεξοφλῆ τὸ χρεώγραφο, λέγεται **παροῦσα ἀξία** ἢ **πραγματικὴ ἀξία** (Π.Α) τοῦ γραμματίου.

2) Ἡ ἡμερομηνία 30 Σεπτεμβρίου 1969, κατὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ πληρώση τὰ χρήματα ὁ ὀφειλέτης, λέγεται **λήξη** τοῦ γραμματίου.

3) Ὁ χρόνος, ποὺ μεσολαβεῖ ἀπὸ τὴν ἡμέρα ποὺ ἡ Τράπεζα πληρώνει τὸν πιστωτὴ μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου, λέγεται **χρόνος προεξοφλήσεως** τοῦ γραμματίου.

4) Τὸ ποσὸ τῶν 1.030 δραχμῶν, ποὺ κρατεῖ ἡ Τράπεζα ὡς τόκο, λέγεται **ἐξωτερικὴ ὑφαίρεση.**

Ὥστε : *Ἐξωτερικὴ Ὑφαίρεση λέγεται ὁ τόκος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας, τὸν ὁποῖον ἀφαιρεῖ ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ἐκεῖνος, ποὺ πληρώνει τὸ χρεώγραφο πρὶν ἀπὸ τὴ λήξη του.*

5) Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεση ὑπολογίζεται μὲ βάση τὸ ἐπιτόκιο ποὺ δὲν εἶναι πάντοτε τὸ ἴδιο. Ὁρίζεται συνήθως ἀπὸ τὸ Κράτος καὶ ὀνομάζεται **ἐπιτόκιο προεξοφλήσεως.**

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗΣ ΥΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

α) Πῶς βρίσκομε τὴν ἐξωτερικὴ ὑφαίρεση (τόκο)

Πρόβλημα. *Γραμμάτιο ὀνομαστικῆς ἀξίας 2.400 δρχ. προεξοφλεῖται 2 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12%. Ποιὰ εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεση καὶ ποιὰ ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου ;*

Σκέψη. Στὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι γνωστὰ τὰ ποσά : Ὀνομαστικὴ ἀξία (τὸ κεφάλαιο στὰ προβλήματα τοῦ τόκου), ὁ χρόνος προεξοφλήσεως καὶ τὸ ἐπιτόκιο καὶ ζητεῖται ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεση (ὁ τόκος) καὶ ἡ παροῦσα ἀξία.

Θὰ τὸ λύσωμε ὅπως καὶ τὰ προβλήματα τοῦ τόκου.

Κ = Ὀν. ἀξ. = 2.400 δρχ.
Ε = 12%
Χ = 2 μ.
Τ = ἐξ. ὑφ. = ;
Π.Α. (Κ - Τ) = ;

Κατάταξη :

100 δρχ.	Ο.Α.	σὲ	12 μῆνες	ἔχουν	12 δρχ.	Ε.Υ.
2.400 »	»	»	2 »	»	Χ »	»

Λύση. Γνωρίζομε ἀπὸ τὰ προβλήματα τοῦ τόκου ὅτι τὰ ποσὰ κεφάλαιο - τόκος καὶ χρόνος - τόκος εἶναι ἀνάλογα. Ἐπομένως θὰ ἔχωμε :

$$X = 12 \times \frac{2.400}{100} \times \frac{2}{12} = 48 \text{ δρχ. ἐξωτ. ὑφαίρεση.}$$

Παρούσα ἀξία = 2.400 − 48 = 2.352 δρχ.

Ἀπάντηση : Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεση τοῦ γραμματίου εἶναι 48 δρχ. καὶ ἡ παρούσα ἀξία του 2.352 δρχ.

Παρατήρηση : Ἡ παρούσα ἀξία βρίσκεται, ἂν ἀφαιρέσωμε τὴν ἐξωτ. ὑφαίρεση ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία.

β) Πῶς βρίσκομε τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία (κεφάλαιο)

Πρόβλημα. *Γραμμάτιο προεξοφλεῖται 3 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12% μὲ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεση 1500 δρχ. Ποιὰ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ;*

Σκέψη : Ἐδῶ τὸ πρόβλημα ζητεῖ τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ Γραμματίου, δηλ. τὸ κεφάλαιο. Ἑπομένως θὰ τὸ λύσωμε ὅπως καὶ τὰ προβλήματα τόκου, στὰ ὁποῖα ζητεῖται τὸ κεφάλαιο.

Κ = Ὀν. ἀξ. = ;
Ε = 12%
Χ = 3 μ.
Τ = ἐξ. ὑφ. = 1.500

Κατάταξη :

100 δρχ.	Ο.Α.	σὲ	12 μῆν.	ἔχουν	12 δρχ.	ἐξ.	ὑφαίρεση
Χ	»	»	» 3	»	» 1.500	»	»	»

Λύση : Ἐπειδή, ὅπως γνωρίζομε, χρόνος καὶ κεφάλαιο εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα, ἐνῶ τόκος καὶ κεφάλαιο εἶναι ποσὰ ἀνάλογα, θὰ ἔχωμε :

$$X = 100 \times \frac{12}{3} \times \frac{1.500}{12} = 50.000 \text{ δρχ. (Ο.Α.)}$$

Ἀπάντηση : Ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου εἶναι 50.000 δραχμές.

γ) Πῶς βρίσκομε τὸ χρόνο προεξοφλήσεως

Πρόβλημα. *Γραμμάτιο Ὀνομαστικῆς ἀξίας 8.000 δραχμῶν προ-*

εξοφλήθηκε πρὸς 9% μὲ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεση 450 δρχ. Πρὶν ἀπὸ πόσο χρόνο ἔγινε ἡ προεξόφληση ;

Σκέψη. Ἐδῶ ζητεῖται ὁ χρόνος προεξοφλήσεως. Θὰ τὸ λύσωμε ὅπως τὰ προβλήματα τόκου, στὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ χρόνος.

K=O.A.=8.000 δρχ.
E=9%
X=;
T=ἐξ. ὑφ.=450 δρχ.

Κατάταξη :

100 δρχ.	Ο.Α.	σὲ	1 ἔτος	ἔχουν	9 δρχ.	ἐξ.	ὑφαίρεση
8.000 »	»	»	X ἔτη	»	450 »	»	»

Λύση. Γνωρίζομε ὅτι κεφάλαιο καὶ χρόνος εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα, ἐνῶ τόκος καὶ χρόνος εἶναι ποσὰ ἀνάλογα. Ἑπομένως:

$$X=1\times\frac{100}{8.000}\times\frac{450}{9}=\frac{5}{8}\text{ ἔτ.}=7\text{ μῆνες }15\text{ ἡμ.}$$

Ἀπάντηση : Ἡ προεξόφληση ἔγινε πρὸ 7 μηνῶν καὶ 15 ἡμερῶν.

δ) Πῶς βρίσκομε τὸ ἐπιτόκιο

Πρόβλημα. *Γραμμάτιο 36.000 δραχμῶν προεξοφλεῖται 8 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του ἀντὶ 34.500 δρχ. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο ἔγινε ἡ προεξόφληση ;*

Σκέψη. Ἐπειδὴ στὸ πρόβλημα αὐτὸ ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιο, θὰ τὸ λύσωμε ὅπως τὰ σχετικὰ προβλήματα τόκου. Ἐπειδὴ δὲ μᾶς δίνεται ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεση (ὁ τόκος), θὰ τὰ βροῦμε, ἂν ἀφαιρέσωμε τὴν παροῦσα ἀξία ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία· ἤτοι : 36.000 – 34.500=1.500.

K=O.A.=36.000 δρχ.
E= ;
X=8 μ.
T=ἐξ. ὑφ.=1500δρχ.
Π.Α.=34.500 δρχ.

Κατάταξη :

36.000 δρχ.	Ο.Α.	σὲ	8 μῆν.	ἔχουν	1.500 δρχ.	ἐξ.	ὑφαίρ.	
100 »	»	»	12 »	»	X	»	»	»

Λύση. Ἐπειδή, ὅπως γνωρίζομε, στὰ προβλήματα ποὺ ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιο τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, θὰ ἔχωμε:

$$X = 1.500 \times \frac{100}{36.000} \times \frac{12}{8} = 6{,}25 \text{ δρχ.}$$

Ἀπάντηση: Ἡ προεξόφληση ἔγινε πρὸς 6,25%.

ε) Πρόβλημα ἀπαλοιφῆς τοῦ χρόνου

Πρόβλημα. *Γραμμάτιο προεξοφλήθηκε 45 ἡμέρες πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 10% ἀντὶ 5925 δραχμῶν. Ποιὰ ἦταν ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία του;*

Σκέψη. Γιὰ τὴ λύση τοῦ προβλήματος αὐτοῦ θὰ κάμωμε ἀναγωγὴ στὸν κοινὸ χρόνο τῶν 45 ἡμερῶν, ὅπως κάμαμε καὶ σὲ παρόμοια προβλήματα τόκου.

Κ=Ο.Α.=;
Ε=10%
Χ=45 ἡμ.
Τ=ἐξ. ὑφ.=;
Π.Α.=5.925 δρχ.

Λύση.

α′ **Κατάταξη:** 100 δρχ. σὲ 360 ἡμ. ἔχουν 10 δρχ. Ε.Υ.
100 » » 45 » » Χ » »

Ἐπειδὴ χρόνος καὶ τόκος εἶναι ποσὰ ἀνάλογα, ἔχομε:

$$X = 10 \times \frac{45}{360} = 1{,}25 \text{ δρχ. ἐξ. ὑφαίρ.}$$

Ἂν τὴν ὑφαίρεση αὐτὴ τὴν ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὶς 100 δρχ., θὰ ἔχωμε: 100–1,25 = 98,75 δρχ. παρ. ἀξία.

β′ **Κατάταξη:** 98,75 δρχ. Π.Α. προέρχονται ἀπὸ 100 δρχ. Ο.Α.
5.925 » » » » Χ » »

$$X = 100 \times \frac{5.925}{98{,}75} = 6.000 \text{ δρχ. Ο.Α.}$$

Ἀπάντηση. Ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ἦταν 6.000 δρχ.

Γενικὰ προβλήματα ἐξωτ. Ὑφαιρέσεως

146. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο ἔγινε ἡ προεξόφληση τῶν ἑξῆς γραμματίων, ἄν:

α) 3.600 δρχ. προεξοφλήθηκαν πρὸ 3 μηνῶν μὲ ἐξ. ὑφαίρεση 108 δρχ.

β) 1.600 » » » 3 μην. καὶ 10 ἡμ. ἀντὶ 1.560 δραχμῶν.

γ) 3.000 » » » 24 ἡμ. μὲ ἐξ. ὑφαίρ. 20 δρχ.

147. Ποιὸς εἶναι ὁ χρόνος προεξοφλήσεως τῶν ἑξῆς γραμματίων:

α) 3.500 δρχ. ὀν. ἀξίας πρὸς 12% μὲ ἐξ. ὑφαίρεση 700 δρχ.

β) 1.800 » » » 9% » » » 45 »

γ) 1.500 » » » 10% » » » 30 »

148. Γραμμάτιο ὀνομαστικῆς ἀξίας 4.800 δρχ. προεξοφλεῖται 2 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 8%. Ποιὰ ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεση καὶ ποιὰ ἡ παροῦσα ἀξία του;

149. Γραμμάτιο ὀνομ. ἀξίας 6.500 δρχ. προεξοφλεῖται 1 μῆνα καὶ 10 ἡμ. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 9%. Ποιὰ ἡ παροῦσα ἀξία του;

150. Ποιὰ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου, τὸ ὁποῖο προεξοφλεῖται 2 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 10% μὲ ἐξωτ. ὑφαίρεση 60 δραχμές;

151. Ἕνας χαρτοπώλης ἀγόρασε ἀπὸ ἀποθήκη διάφορα σχολικὰ εἴδη ἀξίας 5.700 δραχμῶν. Μὲ τὴν παραλαβὴ τοῦ ἐμπορεύματος πλήρωσε ἀμέσως 3.200 δραχμές, καὶ γιὰ τὸ ὑπόλοιπο ὑπέγραψε γραμμάτιο γιὰ 6 μῆνες πρὸς 10%. Ποιὰ ἦταν ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου;

152. Ἔμπορος προεξόφλησε στὴν Τράπεζα γραμμάτιο 2.625 δρχ. 2 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12%. Τί ποσὸ κράτησε ἡ Τράπεζα καὶ πόσα χρήματα ἔλαβε ὁ ἔμπορος;

153. Ποιὰ ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεση γραμματίου, ποὺ προεξοφλεῖται 45 ἡμέρες πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 10% ἀντὶ 2.370 δρχ.;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

ΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΕ ΜΕΡΗ ΑΝΑΛΟΓΑ

Πρόβλημα 1. *Δύο ἐργάτες συμφώνησαν νὰ σκάψουν ἕνα κτῆμα μὲ τὸ ἴδιο ἡμερομίσθιο. Ἐργάστηκαν ὁ ἕνας 4 ἡμέρες καὶ ὁ ἄλλος 6 ἡμέρες. Πῆραν καὶ οἱ δυὸ μαζὶ 1.000 δραχμές. Πόσα χρήματα θὰ πάρῃ ὁ καθένας;*

Σκέψη. Εἶναι φανερό, ὅτι δὲν εἶναι σωστὸ νὰ μοιραστοῦν τὰ χρήματα ἐξ ἴσου καὶ νὰ πάρῃ ὁ καθένας τὰ μισά, γιατὶ δὲν ἐργάστηκαν ἴσο ἀριθμὸ ἡμερῶν. Τὰ χρήματα, ποὺ θὰ πάρῃ ὁ καθένας τους, θὰ εἶναι ἀνάλογα μὲ τὶς ἡμέρες ἐργασίας τους.

Γιὰ τὴ λύση τοῦ προβλήματος σκεπτόμαστε ὡς ἑξῆς: Καὶ οἱ δυὸ ἐργάτες μαζὶ ἐργάστηκαν $4+6=10$ ἡμέρες. Ἄρα κάθε ἡμερομίσθιο εἶναι $1.000:10=100$ δραχμές. Ἑπομένως ὁ πρῶτος θὰ πάρῃ $4\times100=400$ δρχ. καὶ ὁ δεύτερος $6\times100=600$ δραχμές.

Πρόβλημα 2. *Τὸ φιλόπτωχο ταμεῖο ἑνὸς Ναοῦ μοίρασε τὰ Χριστούγεννα σὲ 3 οἰκογένειες 1500 δραχμὲς ἀνάλογα μὲ τὰ ἄτομα κάθε οἰκογένειας. Ἡ μιὰ οἰκογένεια εἶχε 2 ἄτομα, ἡ ἄλλη 3 καὶ ἡ ἄλλη 5 ἄτομα. Πόσα χρήματα πῆρε κάθε οἰκογένεια;*

Σκέψη. Καὶ ἐδῶ δὲ θὰ μοιράσωμε τὸ ποσὸ τῶν 1.500 δραχμῶν σὲ τρία ἴσα μέρη. Θὰ τὸ μοιράσωμε ἀνάλογα μὲ τὰ ἄτομα, ποὺ ἔχει κάθε οἰκογένεια· δηλ. ἀνάλογα μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 5.

Καὶ τὸ πρόβλημα αὐτὸ μποροῦμε νὰ τὸ λύσωμε νοερῶς, ὅπως καὶ τὸ προηγούμενο. Θὰ διαιρέσωμε τὸ $1.500:10$, γιατὶ 10 εἶναι ὅλα τὰ ἄτομα, καὶ θὰ βροῦμε ὅτι κάθε ἄτομο θὰ πάρῃ 150 δρχ. Ἑπομένως θὰ πάρουν: ἡ α' οἰκογένεια $2\times150=300$ δρχ., ἡ β' $3\times\times150=450$ δρχ. καὶ ἡ γ' $5\times150=750$ δραχμές.

Τὸ πρόβλημα λύνεται καὶ γραπτῶς μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα καὶ μὲ τὴν ἁπλὴ μέθοδο τῶν τριῶν, ποὺ ἔχομε μάθει.

Μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα

Τὰ 10 ἄτομα παίρνουν 1.500 δραχμές.

Τὸ 1 ἄτομο θὰ πάρη $\frac{1500}{10}$ δραχμές.

Τὰ 2 ἄτομα θὰ πάρουν $\frac{1500}{10} \times 2 = \frac{1500 \times 2}{10} = 300$ δρχ.

Τὰ 3 ἄτομα θὰ πάρουν $\frac{1500}{10} \times 3 = \frac{1500 \times 3}{10} = 450$ δρχ.

Τὰ 5 ἄτομα θὰ πάρουν $\frac{1500}{10} \times 5 = \frac{1500 \times 5}{10} = 750$ δρχ.

Ἀπάντηση. Ἡ α' οἰκογένεια πῆρε 300 δρχ., ἡ β' 450 δρχ. καὶ ἡ γ' 750 δρχ.

Παρατήρηση. Ὅπως βλέπετε, γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα, πολλαπλασιάσαμε τὸ 1500, δηλ. τὸ ποσὸ τῶν χρημάτων ποὺ εἴχαμε νὰ μοιράσωμε, πρῶτα ἐπὶ τὸ 2, ἔπειτα ἐπὶ τὸ 3 καὶ τέλος ἐπὶ τὸ 5 καὶ σὲ κάθε περίπτωση διαιρέσαμε τὸ γινόμενο διὰ 10, ποὺ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀτόμων τῶν τριῶν οἰκογενειῶν.

Κανόνας. *Γιὰ νὰ μοιράσωμεν ἀριθμὸ σὲ μέρη ἀνάλογα ἄλλων δοθέντων ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζομε τὸν μεριστέο ἀριθμὸ μὲ καθέναν ἀπὸ τοὺς δοθέντες ἀριθμοὺς καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε μὲ τὸ ἄθροισμά τους.*

Γι' αὐτὸ στὰ προβλήματα μερισμοῦ, πρὶν προχωρήσωμε στὴ λύση τους, πρέπει νὰ βροῦμε τὸ μεριστέο ἀριθμὸ καὶ τοὺς δοθέντες ἀριθμούς.

Κατάταξη :

		Δοθέντες
		α) 2 ἄτομα
Μεριστέος 1.500 δρχ.		β) 3 »
		γ) 5 »
	ἄθροισμα	10 »

Παρατήρηση. Ἂν τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 5 πολλαπλασιάσωμε μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό, π. χ. τὸν 2, τότε γίνονται 4, 6, 10 καὶ τὰ μερίδια θὰ εἶναι $1500 \times \frac{4}{20}$, $1500 \times \frac{6}{20}$, $1500 \times \frac{10}{20}$, τὰ ὁποῖα εἶναι τὰ ἴδια καὶ ὅταν μερίσωμε τὸν ἀριθμὸ 1.500 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5, ἤτοι πρὸς τά: $1.500 \times \frac{2}{10}$, $1.500 \times \frac{3}{10}$, $1.500 \times \frac{5}{10}$, διότι $\frac{4}{20} = \frac{2}{10}$, $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$, $\frac{10}{20} = \frac{5}{10}$.

Σύμφωνα μὲ αὐτά:

Κανόνας. *Τοὺς ἀριθμούς, ἀνάλογα μὲ τοὺς ὁποίους μερίζεται ἕνας ἀριθμός, μποροῦμε νὰ τοὺς πολλαπλασιάσωμε ἢ νὰ τοὺς διαιρέσωμε μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ (διαφορετικὸν ἀπὸ τὸ μηδέν), χωρὶς τὰ μερίδια νὰ μεταβληθοῦν.*

Σημείωση. Ἀπὸ ἐδῶ καὶ πέρα γιὰ τὴ λύση παρόμοιων προβλημάτων θὰ χρησιμοποιοῦμε μόνο τὴ μέθοδο μερισμοῦ σὲ μέρη ἀνάλογα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (προφορικῶς)

154. Νὰ μεριστοῦν 10 δρχ. σὲ δυὸ μαθητὲς ἀνάλογα μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 2 καὶ 3.

155. 60 στρέμματα ἀγροῦ νὰ μεριστοῦν σὲ δυὸ ἄτομα ἀνάλογα μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 1 καὶ 3.

156. Νὰ μεριστοῦν 1.400 κιλὰ σιτάρι σὲ δυὸ οἰκογένειες ἀνάλογα μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 3 καὶ 4.

1. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΡΙΣΜΟΥ

157. Τρεῖς μαθητὲς μοιράστησαν 750 δραχμὲς ἀνάλογα μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 5, 12 καὶ 13. Πόσες δρχ. πῆρε ὁ καθένας;

158. Γιὰ τὴν καλλιέργεια ἑνὸς ἀγροῦ πῆραν δυὸ ἐργάτες 900 δραχμές. Ὁ α' ἐργάστηκε 6 ἡμέρες καὶ ὁ β' 4 ἡμέρες. Πόσο θὰ πάρη ὁ καθένας;

159. Νὰ μεριστῆ τὸ χρηματικὸ ποσὸ 846.000 δρχ. σὲ δυὸ

πρόσωπα ἔτσι, ὥστε τὸ πρῶτο νὰ λάβῃ ὀκταπλάσιο μερίδιο ἀπὸ τὸ δεύτερο.

160. Γιὰ τὴν κατασκευὴ ἑνὸς γλυκοῦ πρέπει νὰ πάρωμε 5 μέρη ἀλεύρι, 3 μέρη βούτυρο καὶ 2 μέρη ζάχαρη. Γιὰ νὰ κατασκευάσωμε 8 κιλὰ ἀπὸ τὸ ἴδιο γλυκό, πόσα κιλὰ πρέπει νὰ πάρωμε ἀπὸ κάθε εἶδος;

Διάφορες περιπτώσεις μερισμοῦ

Πρόβλημα 1. *Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 2475 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν* $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ *καὶ* $\frac{2}{5}$.

Σκέψη. Στὸ πρόβλημα αὐτὸ οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι ἑτερώνυμα κλάσματα. Γιὰ νὰ γίνῃ ὁ μερισμὸς σὲ μέρη ἀνάλογα, πρέπει νὰ τρέψωμε τοὺς δοθέντες ἀριθμοὺς σὲ ὁμώνυμα κλάσματα. Τοὺς τρέπομε καὶ βρίσκομε $\frac{10}{20}$, $\frac{15}{20}$, $\frac{8}{20}$. Παραλείπομε τοὺς παρονομαστές, οἱ ὁποῖοι ἁπλῶς καὶ μόνο χαρακτηρίζουν τὸ εἶδος τῶν μονάδων τῶν ἀριθμητῶν, καὶ προκύπτουν οἱ ἀριθμοὶ 10, 15 καὶ 8. Αὐτοὶ εἶναι οἱ ἀριθμοί, ἀνάλογα πρὸς τοὺς ὁποίους θὰ γίνῃ ὁ μερισμός. (Κανόνας τῆς σελ. 76).

Κατάταξη : **Δοθέντες**

$$\textbf{Μεριστέος } 2.475 \left|\begin{array}{l} \alpha)\ \frac{1}{2} \ \text{ἢ}\ \frac{10}{20}\ \text{ἢ}\ 10 \\[2mm] \beta)\ \frac{3}{4}\ \text{ἢ}\ \frac{15}{20}\ \text{ἢ}\ 15 \\[2mm] \gamma)\ \frac{2}{5}\ \text{ἢ}\ \frac{8}{20}\ \text{ἢ}\ 8 \end{array}\right.$$

$$\text{ἄθροισμα} \quad \overline{33}$$

Λύση. Πολλαπλασιάζομε τώρα τὸν μεριστέο ἀριθμὸ μὲ καθένα ἀπὸ τοὺς δοθέντες καὶ διαιροῦμε μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων.

$$α'\ 2.475 \times \frac{10}{33} = 750$$

$$β'\ 2.475 \times \frac{15}{33} = 1.125$$

$$γ'\ 2.475 \times \frac{8}{33} = 600$$

Σύνολο $\overline{2.475}$

Ἀπάντηση. $α = 750$, $β = 1.125$, $γ = 600$.

Παρατήρηση. Ἂν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι ἑτερώνυμα κλάσματα, τὰ τρέπομε σὲ ὁμώνυμα καὶ προχωροῦμε στὴ λύση τοῦ προβλήματος, ὅπως κάμαμε στὸ πρόβλημα ποὺ λύσαμε.

Εἶναι δυνατὸν οἱ δοθέντες νὰ εἶναι μεικτοὶ καὶ κλάσματα, ἢ μόνο μεικτοί· τότε θὰ τρέψωμε τοὺς μεικτοὺς σὲ ἰσοδύναμα κλάσματα καὶ θὰ συνεχίσωμε ὅπως καὶ προηγουμένως.

Ἂν οἱ δοθέντες εἶναι ἀκέραιοι καὶ κλάσματα, τότε θὰ τρέψωμε τοὺς ἀκέραιους σὲ κλάσματα, γράφοντας τὸν ἀκέραιο ἀριθμητὴ καὶ τὴ μονάδα παρονομαστὴ καὶ θὰ συνεχίσωμε ὅπως καὶ προηγουμένως.

Πρόβλημα 2. *Ἕνας ὅρισε μὲ διαθήκη νὰ λάβῃ ἡ σύζυγός του τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς περιουσίας του, ἡ κόρη του τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς περιουσίας καὶ ἡ ἀνιψιὰ τὸ ὑπόλοιπο. Ἡ περιουσία του ἦταν 600.000 δρχ. Πόσο θὰ λάβῃ κάθε δικαιοῦχος;*

Σκέψη. Ὁ μεριστέος ἀριθμὸς εἶναι 600.000 δρχ. Οἱ δοθέντες εἶναι τὰ $\frac{2}{5}$, τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ τὸ ὑπόλοιπο τῆς περιουσίας, τὸ ὁποῖο θὰ βρεθῇ, ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων μεριδίων (συζύγου καὶ κόρης) ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὴν περιουσία ὁλόκληρη.

Λύση.

$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}$ τῆς περιουσίας (τὰ δύο μερίδια).

Τὸ ἄθροισμα αὐτὸ θὰ τὸ ἀφαιρέσωμε ἀπὸ ὁλόκληρη τὴν π...

ριουσία, τὴν ὁποία παριστάνομε μὲ τὴν ἀκέραια μονάδα ἢ μὲ τὸ ὁμώνυμο κλάσμα $\frac{15}{15}$ καὶ θὰ ἔχωμε: $\frac{15}{15} - \frac{11}{15} = \frac{4}{15}$.

Ὥστε ἡ ἀνιψιὰ θὰ λάβῃ τὰ $\frac{4}{15}$ τῆς περιουσίας.

Τώρα προχωροῦμε στὴ λύση τοῦ προβλήματος, ὅπως πρίν.

Δοθέντες

Μεριστέος 600.000 $\left\{\begin{array}{l} α' \ \frac{6}{15} \text{ ἢ } 6 \\ β' \ \frac{5}{15} \text{ ἢ } 5 \\ γ' \ \frac{4}{15} \text{ ἢ } 4 \end{array}\right.$

ἄθροισμα 15

$$α' \ \frac{600.000 \times 6}{15} = 240.000$$

$$β' \ \frac{600.000 \times 5}{15} = 200.000$$

$$γ' \ \frac{600.000 \times 4}{15} = 160.000$$

Σύνολο 600.000

Ἀπάντηση. Θὰ λάβουν: ἡ σύζυγος 240.000 δρχ., ἡ κόρη 200.000 δρχ. καὶ ἡ ἀνιψιὰ 160.000 δραχμές.

Σημείωση. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἦταν δυνατὸ νὰ τὸ λύσωμε καὶ μὲ ἁπλὸ πολλαπλασιασμὸ ἀκεραίου ἐπὶ κλάσμα, ὅτε:

ἡ σύζυγος θὰ λάβῃ $600.000 \times \frac{2}{5} = 240.000$ δρχ.

ἡ κόρη θὰ λάβῃ $600.000 \times \frac{1}{3} = 200.000$ δρχ.

Γιὰ νὰ βροῦμε καὶ τὸ μερίδιο τῆς ἀνιψιᾶς, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο μεριδίων ($240.000 + 200.000 = 440.000$) τὸ ἀφαιροῦμε ἀπὸ τὸν μεριστέο· δηλ. $600.000 - 440.000 = 160.000$ δρχ.

Πρόβλημα 3. *Δυὸ ὁδηγοὶ αὐτοκινήτων μετέφεραν ἄμμο καὶ πῆραν 4118 δραχμές. Ὁ πρῶτος ἔκαμε 6 διαδρομὲς μὲ φορτίο 5 τόνων τὴν κάθε φορὰ καὶ ὁ δεύτερος 7 διαδρομὲς μὲ φορτίο 4 τόνων τὴν κάθε φορά. Πῶς θὰ μοιραστοῦν τὰ χρήματα ;*

Σκέψη. Ἂν τὰ αὐτοκίνητα χωροῦσαν καὶ τὰ δυὸ τὴν ἴδια ποσότητα, ὁ μερισμὸς τῶν χρημάτων θὰ γινόταν ἀνάλογα μὲ τὸν ἀριθμὸ τῶν διαδρομῶν, ποὺ ἔκαμε τὸ καθένα. Τώρα ὅμως ποὺ διαφέρουν καὶ στὸ βάρος ποὺ μετέφερε τὸ καθένα καὶ στὶς διαδρομὲς ποὺ ἔκαμαν, πρέπει νὰ βροῦμε πόσους τόνους ἄμμο μετέφερε συνολικὰ τὸ πρῶτο αὐτοκίνητο καὶ πόσους τὸ δεύτερο.

Λύση.

Τὸ α΄ αὐτοκίνητο ἔκαμε 6 διαδρομὲς μεταφέροντας	6×5 τόν.	$=30$ τόν.
Τὸ β΄ » » 7 » »	7×4 »	$=28$ »
Καὶ τὰ δύο αὐτοκίνητα μετέφεραν συνολικὰ		58 τόν.

Τώρα θὰ μεριστῆ ὁ ἀριθμὸς 4.118 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 30 καὶ 28.

Νὰ συνεχίσετε μόνοι σας τὴ λύση.

ΓΕΝΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΡΙΣΜΟΥ

161. Ἕνας ἄφησε κληρονομιὰ 150.000 δρχ. στὴ γυναίκα του, τὰ 3 παιδιά του καὶ τὸ σχολεῖο τοῦ χωριοῦ του. Ὅρισε νὰ λάβουν ἡ γυναίκα του 4 μερίδια, κάθε παιδὶ 3 μερίδια καὶ τὸ σχολεῖο 2 μερίδια. Πόσα θὰ λάβη κάθε κληρονόμος;

162. Σ' ἕνα ἐργοστάσιο ἐργάστηκαν τρεῖς ἐργάτες· ὁ πρῶτος ἔκαμε 4 ἡμερομίσθια, ὁ β΄ 5 ἡμερομίσθια καὶ ὁ γ΄ 6 ἡμερομίσθια. Ἔλαβαν καὶ οἱ τρεῖς μαζὶ 2.250 δρχ. Πόσες δρχ. ἔλαβε ὁ καθένας;

163. Νὰ μεριστῆ ὁ ἀριθμὸς 5.100 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{3}{4}$.

164. Τὸ ποσὸ τῶν 350 δρχ. νὰ μεριστῆ σὲ δυὸ παιδιὰ σὲ μέρη ἀνάλογα τῆς ἡλικίας τους· τὸ ἕνα εἶναι 3 ἐτῶν καὶ τὸ ἄλλο 7 ἐτῶν.

165. Δύο βοσκοὶ νοίκιασαν ἕνα λιβάδι καὶ ἔδωσαν 4.200 δρχ· Ὁ α' βόσκησε σ' αὐτὸ τὰ πρόβατά του ἐπὶ 3 μῆνες καὶ ὁ β' ἐπὶ 5 μῆνες. Τὰ πρόβατα ὅμως τοῦ α' ἦταν τριπλάσια ἀπὸ τὰ πρόβατα τοῦ β'. Πόσο θὰ πληρώση ὁ καθένας;

166. Σ' ἕνα ἐργοστάσιο ἐργάζονται 10 ἄντρες, 12 γυναῖκες καὶ 6 παιδιὰ καὶ παίρνουν τὴν ἡμέρα ὅλοι μαζὶ 3.300 δραχμές. Τὸ ἡμερομίσθιο κάθε παιδιοῦ εἶναι τὸ μισὸ ἀπὸ τὸ ἡμερομίσθιο κάθε γυναίκας καὶ τὸ τρίτο ἀπὸ τὸ ἡμερομίσθιο κάθε ἄντρα. Πόσο εἶναι τὸ ἡμερομίσθιο τοῦ ἄνδρα, τῆς γυναίκας καὶ τοῦ παιδιοῦ;

167. 4 βαρέλια, ἴσης χωρητικότητας, περιέχουν ὅλα μαζὶ 1.550 κιλὰ κρασί. Τὸ α' εἶναι γεμάτο, τὸ β' μόνο τὸ μισό, τὸ τρίτο κατὰ τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ τὸ δ' κατὰ τὰ $\frac{3}{4}$. Πόσα κιλὰ κρασὶ περιέχει κάθε βαρέλι;

168. Νὰ μοιραστῆ τὸ ποσὸ τῶν 1.575 δρχ. μεταξὺ 4 προσώπων ἔτσι, ποὺ ὁ β' νὰ λάβη τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μεριδίου τοῦ α', ὁ γ' τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ μεριδίου τοῦ β' καὶ ὁ δ' τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μεριδίου τοῦ γ'. Πόσο θὰ λάβη κάθε πρόσωπο;

169. Σ' ἕνα σχολεῖο φοιτοῦν 420 μαθητές. Τὰ ἀγόρια εἶναι τριπλάσια ἀπὸ τὰ κορίτσια. Πόσα εἶναι τὰ ἀγόρια καὶ πόσα τὰ κορίτσια;

170. Ἕνας πατέρας μοίρασε στὰ τρία παιδιά του 390 στρέμματα ὡς ἑξῆς: ὁ β' νὰ λάβη τριπλάσια τοῦ α' καὶ ὁ γ' τριπλάσια τοῦ β'. Πόσα θὰ λάβη κάθε παιδί;

171. Σὲ μιὰ συγκέντρωση ἦταν 80 ἄτομα (ἄντρες, γυναῖκες καὶ παιδιά). Οἱ ἄντρες ἦταν διπλάσιοι τῶν γυναικῶν καὶ οἱ γυναῖκες τριπλάσιες τῶν παιδιῶν. Πόσοι ἦταν οἱ ἄντρες, πόσες οἱ γυναῖκες καὶ πόσα τὰ παιδιά;

172. Τρεῖς ἔμποροι κέρδισαν ἀπὸ μιὰ ἐργασία τους 17.900 δραχ. Ἀπ' αὐτοὺς ὁ α' θὰ λάβη 15% περισσότερες δρχ. ἀπὸ τὸν β' καὶ ὁ β' θὰ λάβη 20% περισσότερες δρχ. ἀπὸ τὸν γ'. Πόσο θὰ λάβη ὁ καθένας;

173. Ἕνας πατέρας ὅρισε μὲ διαθήκη νὰ μοιραστῆ ἡ περιουσία του, ποὺ ὑπολογίστηκε σὲ 458.000 δραχμὲς ὡς ἑξῆς: Ὁ γιός του νὰ λάβη τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μεριδίου τῆς θυγατέρας του καὶ ἡ σύζυγός του τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μεριδίου τοῦ γιοῦ. Πρὶν τὴ μοιράσουν ὅμως πρέπει νὰ εἰσπράξη τὸ Δημόσιο 10% γιὰ φόρο κληρονομίας. Πόσο θὰ λάβη κάθε κληρονόμος;

174. Τρεῖς οἰκογένειες μοιράστηκαν 4.340 κιλὰ σιτάρι. Ἡ β' ἔλαβε τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ μεριδίου τῆς α' καὶ ἡ γ' τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν ὅσων ἔλαβαν οἱ δυὸ πρῶτες. Πόσα κιλὰ ἔλαβε κάθε οἰκογένεια;

175. Νὰ μοιραστοῦν 3.750 κιλὰ σιτάρι σὲ τρεῖς οἰκογένειες κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπο: ἡ β' οἰκογένεια νὰ λάβη τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μεριδίου τῆς α' καὶ ἡ γ' τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν ὅσων ἔλαβαν οἱ δυὸ πρῶτες. Πόσα κιλὰ θὰ λάβη κάθε οἰκογένεια;

2. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Ὅλοι ἔχετε ἀκούσει τὶς λέξεις «**Ἑταιρεία**», «**συνεταιρισμός**», «**συνεταῖρος**». Σὲ κάθε Κράτος οἱ περισσότερες ἀπὸ τὶς ἐπιχειρήσεις (ἐμπορικές, βιομηχανικές, ναυτικὲς κλπ.) εἶναι Ἑταιρεῖες. Δυὸ ἢ περισσότεροι κεφαλαιοῦχοι ἑνώνουν τὰ χρήματά τους καὶ κάνουν μαζὶ μιὰ ἐπιχείρηση.

Τὰ χρήματα, ποὺ καταθέτουν, λέγονται **κεφάλαια**, ἡ ἐπιχείρηση αὐτὴ λέγεται **ἑταιρεία** καὶ οἱ ἄνθρωποι, οἱ ὁποῖοι συνεταιρίζονται, λέγονται **συνεταῖροι**.

Οἱ συνεταῖροι εἶναι δυνατὸν νὰ καταθέσουν ὅλοι ἴσα κεφάλαια. Εἶναι δυνατὸν ὅμως νὰ καταθέσουν καὶ διαφορετικὰ κεφάλαια, δηλ. ἄλλος περισσότερα καὶ ἄλλος λιγότερα.

Τὰ κεφάλαια αὐτὰ μένουν στὴν ἐπιχείρηση ἴσο χρονικὸ διάστημα ἢ καὶ διαφορετικό· δηλ. ἄλλων συνεταίρων μένουν περισσότερο χρόνο καὶ ἄλλων λιγότερο χρόνο.

Ἀναλόγως τώρα τῶν κεφαλαίων, τὰ ὁποῖα ἔχει καταθέσει ὁ καθένας ἀπὸ τοὺς συνεταίρους καὶ ἀναλόγως τοῦ χρόνου, ποὺ μένουν στὴν ἐπιχείρηση τὰ χρήματα τοῦ καθενός, γίνεται καὶ ἡ διανομὴ τοῦ κέρδους, ἢ τῆς ζημίας.

Τὰ σχετικὰ μὲ τὶς ἑταιρεῖες προβλήματα λέγονται **προβλήματα ἑταιρείας** καὶ λύνονται ὅπως τὰ προβλήματα μερισμοῦ σὲ μέρη ἀνάλογα. Γιατὶ καὶ στὰ προβλήματα ἑταιρείας γίνεται μερισμὸς τοῦ κέρδους ἢ τῆς ζημίας μιᾶς ἐπιχειρήσεως μεταξὺ ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν κάμει τὴν ἐπιχείρηση.

α) Προβλήματα μὲ διαφορετικὰ κεφάλαια

Πρόβλημα. *Τρεῖς συνεταῖροι κατέθεσαν σὲ μιὰ ἐπιχείρηση τὰ ἑξῆς ποσά : Ὁ α' 40.000 δρχ., ὁ β' 35.000 δρχ. καὶ ὁ γ' 25.000 δρχ. Ἀπὸ τὴν ἐπιχείρηση αὐτὴ κέρδισαν 30.000 δραχμές. Πόσο κέρδος θὰ λάβῃ ὁ καθένας ;*

Σκέψη. Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ἔχομε νὰ μοιράσωμε τὸ κέρδος τῶν 30.000 δραχμῶν σὲ τρεῖς συνεταίρους ἀνάλογα μὲ τὰ χρήματα, ποὺ κατέθεσε ὁ καθένας στὴν ἐπιχείρηση. Δηλαδὴ θὰ μεριστῇ τὸ κέρδος τῶν 30.000 δρχ. (μεριστέος ἀριθμὸς) σὲ μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 40.000, 35.000 καὶ 25.000 (κεφάλαια) ἢ πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 40, 35, 25 (μετὰ τὴν ἀφαίρεση ἴσου ἀριθμοῦ μηδενικῶν, ἀφοῦ διαιρέσωμε τοὺς ἀριθμοὺς διὰ 1000, σύμφωνα μὲ τὸν κανόνα σελ. 76).

Λύση.

Δοθέντες

$$\text{Μεριστέος } 30.000 \left\{ \begin{array}{l} α' \ 40.000 \ ἢ \ 40 \\ β' \ 35.000 \ ἢ \ 35 \\ γ' \ 25.000 \ ἢ \ 25 \end{array} \right.$$

ἄθροισμα 100

$$α'.\ 30.000 \times \frac{40}{100} = 12.000 \text{ δρχ.}$$

$$β'.\ 30.000 \times \frac{35}{100} = 10.500 \text{ »}$$

$$γ'.\ 30.000 \times \frac{25}{100} = 7.500 \text{ »}$$

Σύνολο 30.000 »

Ἀπάντηση. Θὰ λάβουν κέρδος ὁ α' 12.000 δρχ., ὁ β' 10.500 δρχ. καὶ ὁ γ' 7.500 δρχ.

176. Τρεῖς συνεταῖροι ἄρχισαν ἐπιχείρηση καὶ κατέβαλαν ὁ α' 100.000 δρχ., ὁ β' 70.000 καὶ ὁ γ' 40.000 δρχ. Ἀπὸ τὴν ἐπιχείρηση αὐτὴ κέρδισαν 84.000 δραχμές. Πόσο κέρδος ἀναλογεῖ στὸν καθένα;

177. Τρία χωριὰ ἀγόρασαν συνεταιρικῶς μιὰ ἀλωνιστικὴ μηχανὴ ἀξίας 45.000 δρχ. Πόσο ἀναλογεῖ νὰ πληρώση κάθε χωριό, ἂν τὰ στρέμματα τοῦ α' χωριοῦ ἦταν 3.500, τοῦ β' 3.750 καὶ τοῦ γ' 4.000;

178. Δύο συνεταῖροι κατέθεσαν σὲ μιὰ ἐπιχείρηση 180.000 δρχ. Ἀπὸ τὸ κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως ἔλαβαν ὁ α' 25.200 δρχ. καὶ ὁ β' 37.800 δρχ. Πόσα χρήματα εἶχε καταθέσει ὁ καθένας στὴν ἐπιχείρηση;

179. Τρεῖς συνεταῖροι εἶχαν καταθέσει σὲ μιὰ ἐπιχείρηση τὰ ἑξῆς ποσά: ὁ α' 120.000 δρχ., ὁ β' τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ποσοῦ τοῦ α' καὶ ὁ γ' τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ποσοῦ τοῦ β'. Ὕστερα ἀπὸ κάμποσο χρόνο διαλύθηκε ἡ ἐπιχείρηση μὲ ζημία 65.000 δρχ. Πόση ζημία ἀναλογεῖ στὸν καθένα;

β) Προβλήματα μὲ διαφορετικοὺς χρόνους

Πρόβλημα. *Ἕνας ἔμπορος ἄρχισε μιὰ ἐπιχείρηση μὲ ἕνα χρηματικὸ ποσό. Μετὰ 8 μῆνες προσέλαβε συνεταῖρο, ὁ ὁποῖος κατέθεσε τὸ ἴδιο ποσό· 5 μῆνες ἀργότερα ἀπὸ τὸ δεύτερο προσέλαβε καὶ ἄλλον συνεταῖρο, ὁ ὁποῖος κατέθεσε τὸ ἴδιο πάλι ποσό. Δυὸ ἔτη ἀπὸ τότε ποὺ ἄρχισε ἡ ἐπιχείρηση βρῆκαν ὅτι κέρδισαν 102.000 δραχμές. Πόσο κέρδος ἀναλογεῖ στὸν κάθε ἔμπορο ;*

Σκέψη. Ἐπειδὴ καὶ οἱ τρεῖς συνεταῖροι κατέθεσαν τὸ ἴδιο ποσό, τὸ κέρδος θὰ μοιραστῆ ἀνάλογα μὲ τοὺς χρόνους, ποὺ ἔμειναν τὰ χρήματα τοῦ καθενὸς στὴν ἐπιχείρηση. Ἐδῶ ὅμως οἱ χρόνοι δὲν ὁρίζονται καθαρὰ καὶ πρέπει νὰ βρεθοῦν. Ἐφ' ὅσον ὁ ἰσολογισμὸς ἔγινε 2 ἔτη ἀπὸ τότε ποὺ ἄρχισε ἡ ἐπιχείρηση, τὰ χρήματα τοῦ α' ἔμειναν στὴν ἐπιχείρηση 2 ἔτη ἢ 24 μῆνες· τοῦ β' ἔμειναν 24 - 8 = 16 μῆνες, καὶ τοῦ γ' 16 - 5 = 11 μῆνες.

Ἐπομένως ὁ μερισμὸς θὰ γίνη ἀνάλογα μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 24, 16, 11.

Λύση. **Δοθέντες**

Μεριστέος 102.000 | α' 24, β' 16, γ' 11

ἄθροισμα 51

$$α' \ 102.000 \times \frac{24}{51} = 48.000 \text{ δρχ.}$$

$$β' \ 102.000 \times \frac{16}{51} = 32.000 \text{ δρχ.}$$

$$γ' \ 102.000 \times \frac{11}{51} = 22.000 \text{ δρχ.}$$

Σ ύ ν ο λ ο 102.000 δρχ.

Ἀπάντηση. Ἀναλογεῖ κέρδος στὸν α' 48.000 δρχ., στὸν β' 32.000 δρχ. καὶ στὸν γ' 22.000 δρχ.

180. Δύο συνεταῖροι ζημιώθηκαν ἀπὸ μιὰ ἐπιχείρηση 14.700 δρχ. Καὶ οἱ δυὸ εἶχαν καταθέσει τὸ ἴδιο χρηματικὸ ποσό· ἀλλὰ τὰ χρήματα τοῦ α' ἔμειναν στὴν ἐπιχείρηση 12 μῆνες καὶ τοῦ β' 9 μῆνες. Πόση ζημία ἀναλογεῖ στὸν καθένα;

181. Τρεῖς συνεταῖροι κέρδισαν ἀπὸ ἐπιχείρηση 135.000 δρχ. Καὶ οἱ τρεῖς εἶχαν καταθέσει τὸ ἴδιο χρηματικὸ ποσό· ἀλλὰ τοῦ πρώτου τὰ χρήματα ἔμειναν στὴν ἐπιχείρηση ἕνα ἔτος, τοῦ δευτέρου 10 μῆνες καὶ τοῦ τρίτου 2 μῆνες λιγότερο τοῦ δευτέρου. Πόσο κέρδος ἀναλογεῖ στὸν καθένα;

182. Ἕνας ἐπιχειρηματίας ἄρχισε ἐπιχείρηση· μετὰ 3 μῆνες προσέλαβε συνεταῖρο, ὁ ὁποῖος κατέθεσε τὸ ἴδιο χρηματικὸ ποσό· ἕνα μῆνα μετὰ τὴν πρόσληψη αὐτοῦ προσέλαβε καὶ τρίτον μὲ τὸ ἴδιο ποσό. Ἕνα ἔτος ἀπὸ τότε ποὺ ἄρχισε ἡ ἐπιχείρηση ἔκαμαν λογαριασμὸ καὶ βρῆκαν ὅτι εἶχαν κέρδος 116.000 δρχ. Πόσο κέρδος ἀναλογεῖ στὸν καθένα;

183. Ένας έμπορος άρχισε μιὰ ἐπιχείρηση. Μετὰ 10 μῆνες προσέλαβε συνεταῖρο, ὁ ὁποῖος κατέθεσε τὸ ἴδιο χρηματικὸ ποσό· 2 μῆνες ἀργότερα προσέλαβε καὶ ἄλλον συνεταῖρο, ὁ ὁποῖος κατέθεσε τὰ ἴδια χρήματα. Ἕνα ἔτος μετὰ τὴν πρόσληψη τοῦ τρίτου συνεταίρου ἔκαμαν λογαριασμὸ καὶ βρῆκαν ὅτι κέρδισαν 100.000 δραχμές. Πόσο κέρδος ἀναλογεῖ στὸν καθένα;

γ) Προβλήματα μὲ διαφορετικὰ κεφάλαια καὶ διαφορετικοὺς χρόνους

Πρόβλημα. *Τρεῖς συνεταῖροι κέρδισαν ἀπὸ μιὰ ἐμπορικὴ ἐπιχείρηση 54.000 δρχ. Ὁ πρῶτος εἶχε καταθέσει 30.000 δρχ., ὁ δεύτερος 50.000 δρχ. καὶ ὁ γ' 40.000 δραχμές. Ἀλλὰ τὰ χρήματα τοῦ πρώτου ἔμειναν στὴν ἐπιχείρηση 10 μῆνες, τοῦ δευτέρου 8 μῆνες καὶ τοῦ τρίτου 5 μῆνες. Πόσο κέρδος θὰ λάβῃ ὁ καθένας;*

Σκέψη. Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ἔχομε διαφορετικὲς καταθέσεις (κεφάλαια) καὶ διαφορετικοὺς χρόνους. Μποροῦμε ὅμως νὰ κάμωμε ἀναγωγὴ τῶν κεφαλαίων στὸ χρονικὸ διάστημα τοῦ ἑνὸς μηνός, ὁπότε οἱ 30.000 τοῦ α' γιὰ 10 μῆνες ἰσοδυναμοῦν πρὸς 30.000 × × 10 = 300.000 γιὰ ἕνα μῆνα κ.ο.κ. Ἑπομένως τὸ κέρδος πρέπει νὰ μεριστῇ ἀνάλογα μὲ τὰ γινόμενα τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸν χρόνο τοῦ κάθε συνεταίρου.

Λύση. **Δοθέντες**

Μεριστέος 54.000

α'. 30.000 × 10 ἢ 3 × 10 = 30
β'. 50.000 × 8 ἢ 5 × 8 = 40
γ'. 40.000 × 5 ἢ 4 × 5 = 20

ἄθροισμα 90

$$\alpha'\ 54.000 \times \frac{30}{90} = 18.000$$

$$\beta'\ 54.000 \times \frac{40}{90} = 24.000$$

$$\gamma'\ 54.000 \times \frac{20}{90} = 12.000$$

Σύνολο 54.000

Ἀπάντηση. Θὰ λάβουν κέρδος ὁ α' 18.000 δρχ., ὁ β' 24.000 καὶ ὁ γ' 12.000 δρχ.

184. Τρεῖς συνεταῖροι κέρδισαν ἀπὸ μιὰ ἐπιχείρηση 44.517 δρχ. Ὁ α' εἶχε καταθέσει 14.000 δρχ., ὁ β' 17.500 δρχ. καὶ ὁ γ' 20.000 δρχ. Τὰ χρήματα τοῦ α' ἔμειναν στὴν ἐπιχείρηση 18 μῆνες, τοῦ β' 15 μῆνες καὶ τοῦ γ' 8 μῆνες. Πόσο κέρδος ἀναλογεῖ στὸν καθένα;

185. Ἕνας ἔμπορος ἄρχισε ἐπιχείρηση μὲ κεφάλαιο 40.000 δρχ. Μετὰ 2 μῆνες προσέλαβε συνεταῖρο, ὁ ὁποῖος κατέθεσε 50.000 δρχ., καὶ μετὰ 2 μῆνες ἀπὸ τὴν πρόσληψη τούτου προσέλαβε καὶ τρίτο συνεταῖρο μὲ κεφάλαιο 60.000 δραχμές. Μετὰ 7 μῆνες ἀπὸ τότε ποὺ ἄρχισε ἡ ἐπιχείρηση βρῆκαν ὅτι κέρδισαν 49.700 δραχμές. Πόσο κέρδος θὰ λάβη ὁ καθένας;

186. Ἔμπορος ἄρχισε ἐπιχείρηση μὲ κεφάλαιο 60.000 δρχ. Μετὰ 3 μῆνες προσλαμβάνει συνεταῖρο, ὁ ὁποῖος καταθέτει τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ποσοῦ τοῦ πρώτου· 2 μῆνες ἀργότερα προσλαμβάνει καὶ τρίτο συνεταῖρο, ὁ ὁποῖος καταθέτει 30.000 δρχ. περισσότερες ἀπὸ τὸν δεύτερο. Ἕνα ἔτος ἀπὸ τότε ποὺ προσέλαβε τὸν τρίτο συνεταῖρο ἔκαμαν λογαριασμὸ καὶ βρῆκαν ὅτι εἶχαν κέρδος 96.800 δραχμές. Πόσο κέρδος ἀναλογεῖ στὸν καθένα;

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Στὰ προβλήματα Ἑταιρείας διακρίνομε τρεῖς περιπτώσεις:

α' περίπτωση: Ὅταν διαφέρουν τὰ κεφάλαια τῶν συνεταίρων καὶ οἱ χρόνοι εἶναι ἴδιοι.

β' περίπτωση: Ὅταν οἱ χρόνοι, ποὺ μένουν τὰ χρήματα τοῦ κάθε συνεταίρου στὴν ἐπιχείρηση, εἶναι διαφορετικοὶ καὶ τὰ κεφάλαια εἶναι ἴδια.

γ' περίπτωση: Ὅταν καὶ τὰ κεφάλαια εἶναι διαφορετικὰ καὶ οἱ χρόνοι εἶναι διαφορετικοί.

Γιὰ νὰ λύσωμε τὰ προβλήματα τῆς Ἑταιρείας

α) Ὅταν τὰ κεφάλαια εἶναι διαφορετικὰ καὶ οἱ χρόνοι ἴδιοι, πολλαπλασιάζομε τὸν μεριστέο ἀριθμὸ (κέρδος ἢ ζημία) ἐπὶ τὸ κεφάλαιο τοῦ κάθε συνεταίρου καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν κεφαλαίων.

β) Ὅταν οἱ χρόνοι διαφέρουν καὶ τὰ κεφάλαια εἶναι ἴδια, πολλαπλασιάζομε τὸν μεριστέο ἀριθμὸ ἐπὶ τὸ χρόνο παραμονῆς κάθε κεφαλαίου στὴν ἐπιχείρηση καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν χρόνων.

γ) Ὅταν καὶ τὰ κεφάλαια διαφέρουν καὶ οἱ χρόνοι παραμονῆς τους στὴν ἐπιχείρηση εἶναι διαφορετικοί, πολλαπλασιάζομε τὸ κεφάλαιο τοῦ κάθε συνεταίρου ἐπὶ τὸν χρόνο παραμονῆς τῶν χρημάτων τοῦ καθενὸς στὴν ἐπιχείρηση καὶ βρίσκομε γιὰ τὸν καθένα νέο ἀριθμό. Αὐτοὶ εἶναι τώρα οἱ δοθέντες ἀριθμοί. Ὁπότε πολλαπλασιάζομε τὸ μεριστέο μὲ τὸν καθένα ἀπ' αὐτοὺς καὶ τὸ γινόμενο διαιροῦμε διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δοθέντων.

ΓΕΝΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

187. Τέσσερεις χωρικοὶ ἀγόρασαν μαζὶ ἕνα κτῆμα· ὁ α' ἀγόρασε 10 στρέμματα, ὁ β' 8 στρέμματα, ὁ γ' 7 στρέμματα καὶ ὁ δ' 5 στρέμματα. Τὸ καλλιέργησαν συνεταιρικῶς καὶ ἔλαβαν 7.500 κιλὰ σιτάρι. Πόσα κιλὰ ἀναλογοῦν στὸν καθένα καὶ πόσα χρήματα, ἂν πωλήσουν πρὸς 3 δρχ. τὸ κιλό;

188. Τρεῖς συνεταῖροι κέρδισαν ἀπὸ τὴν ἐπιχείρησή τους 60.000 δρχ. Ὁ α' εἶχε καταθέσει τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ ὁλικοῦ κεφαλαίου τους· ὁ β' τὸ τρίτον αὐτοῦ (τοῦ ὁλικοῦ κεφαλαίου) καὶ ὁ γ' τὸ ὑπόλοιπο, ποὺ ἦταν 70.000 δρχ. Πόσο εἶχε καταθέσει ὁ καθένας καὶ πόσο κέρδος ἔλαβε;

189. Ἕνα κτῆμα τὸ ἔσκαψαν μαζὶ σὲ 6 ἡμέρες 7 ἄντρες καὶ 5 γυναῖκες καὶ πῆραν 7.980 δρχ. Κάθε ἄντρας ἔπαιρνε διπλάσιο ἡμερομίσθιο ἀπὸ κάθε γυναίκα. Πόσο ἦταν τὸ ἡμερομίσθιο τοῦ ἄντρα καὶ πόσο τῆς γυναίκας;

190. Τρεῖς ἔμποροι συνεργάστηκαν σὲ ἐμπορικὴ ἐπιχείρηση ὁ α' μὲ 150.000 δρχ., ὁ β' μὲ 200.000 δρχ. καὶ ὁ γ' μὲ 250.000 δρχ. Τὸ κέρδος ἀπὸ τὴν ἐπιχείρηση ἦταν ἴσο πρὸς τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ συνολικοῦ κεφαλαίου. Πόσο θὰ λάβη καθένας ἀπὸ τοὺς συνεταίρους;

191. Δύο ἀδελφοὶ ἀγόρασαν οἰκόπεδο ἀντὶ 100.000 δραχμῶν. Ὁ μεγαλύτερος ἀδερφὸς πλήρωσε τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς ἀξίας καὶ ὁ μικρότερος τὸ ὑπόλοιπο. Ὕστερα ἀπὸ κάμποσο χρόνο μεταπούλησαν τὸ οἰκόπεδο ἀντὶ 160.000 δρχ. Πόσο κέρδος ἀναλογεῖ στὸν καθένα;

192. Δύο ἀδερφοὶ ἄρχισαν ἐμπορικὴ ἐργασία καὶ κατέβαλαν ὁ α΄ 20.000 δρχ. καὶ ὁ β΄ τὰ διπλάσια τοῦ πρώτου. Μετὰ 6 μῆνες προσέλαβαν καὶ γ΄ συνεταῖρο, ὁ ὁποῖος κατέβαλε 50.000 δρχ. Ἀφοῦ πέρασε $1\frac{1}{2}$ ἔτους ἀπὸ τότε ποὺ ἄρχισε ἡ ἐπιχείρηση εἶχαν κέρδος 98.000 δραχμές. Πόσο κέρδος θὰ λάβη ὁ καθένας;

193. Τρεῖς συνεταῖροι ἀπὸ τὸ κέρδος ἐμπορικῆς ἐργασίας ἔλαβαν ὁ α΄ 22.500 δρχ., ὁ β΄ 13.500 δρχ. καὶ ὁ γ΄ τὸ ὑπόλοιπο, ποὺ ἦταν τὸ $\frac{1}{7}$ τοῦ ὁλικοῦ κέρδους. Ποιὸ κεφάλαιο κατέθεσε ὁ α΄ καὶ ποιὸ ὁ β΄, ὅταν γνωρίζωμε ὅτι ὁ γ΄ εἶχε καταθέσει 28.500 δραχμές;

3. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΣΟΥ ΟΡΟΥ

Οἱ μαθητές, ὅταν πάρουν τὸν ἔλεγχό τους μὲ τοὺς βαθμούς τους ἀναλυτικῶς σὲ κάθε μάθημα, τοὺς προσθέτουν καὶ ὕστερα διαιροῦν τὸ ἄθροισμά τους διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μαθημάτων. Τὸ πηλίκον, ποὺ βρίσκουν, λέγεται **μέσος ὅρος**.

Πρόβλημα. *Ἕνας μαθητὴς πῆρε τοὺς ἑξῆς βαθμούς : Θρησκευτικὰ 10, Ἑλληνικὰ 9, Μαθηματικὰ 10, Ἱστορία 9, Φυσ. Ἱστορία 9, Φυσικὴ καὶ Χημεία 9, Γεωγραφία 9, Ἰχνογραφία 8, Καλλιγραφία 8, Χειροτεχνία 8, Ὠδικὴ 9 καὶ Γυμναστικὴ 10. Ποιὸς εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῆς βαθμολογίας του ;*

Λύση. $10+9+10+9+9+9+9+8+8+8+9+10=108$.
Τὸ ἄθροισμα αὐτὸ τῶν μαθημάτων τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μαθημάτων, δηλ. διὰ 12, καὶ ἔχομε: $108 : 12 = 9$.

Ἀπάντηση. Ὁ μέσος ὅρος τῆς βαθμολογίας εἶναι 9.

Παρατήρηση. Μὲ τὸ μέσο ὅρο ὡς κοινὸ βαθμὸ σ' ὅλα τὰ μαθήματα συγκεντρώνουν τὸ ἴδιο ἄθροισμα βαθμολογίας.

Ὥστε: *Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μέσο ὅρο δύο ἢ περισσοτέρων ἀφηρημένων ἀριθμῶν ἢ συγκεκριμένων ὁμοειδῶν, προσθέτομε τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς καὶ διαιροῦμε τὸ ἄθροισμά τους διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος φανερώνει τὸ πλῆθος τους.*

194. Ἕνας μικροπωλητὴς κέρδισε ἀπὸ τὴν ἐργασία του τὰ ἑξῆς ποσά: Τὴ Δευτέρα 145 δρχ., τὴν Τρίτη 128 δρχ., τὴν Τετάρτη 117 δρχ., τὴν Πέμπτη 135 δρχ., τὴν Παρασκευὴ 150 δρχ. καὶ τὸ Σάββατο 165 δραχμές. Πόσο κέρδισε τὴν ἡμέρα κατὰ μέσο ὅρο;

195. Ἕνας οἰκογενειάρχης ξόδεψε σὲ μιὰ ἑβδομάδα τὰ ἑξῆς ποσά: Δευτέρα 128 δρχ., Τρίτη 145 δρχ., Τετάρτη 117 δρχ., Πέμπτη 125 δρχ., Παρασκευὴ 132 δρχ., Σάββατο 123 δρχ. καὶ Κυριακὴ 140 δραχμές. Πόσες δρχ. ξόδεψε κατὰ μέσο ὅρο τὴν ἡμέρα;

196. Ἕνας κτηματίας ἐργάζεται στὰ κτήματά του κατὰ τὴ διάρκεια τοῦ ἔτους ὡς ἑξῆς: 120 ἡμέρες ἐπὶ 9 ὧρες τὴν ἡμέρα, 135 ἡμέρες ἐπὶ 8 ὧρες τὴν ἡμέρα καὶ 45 ἡμέρες ἐπὶ 12 ὧρες τὴν ἡμέρα. Πόσες ὧρες ἐργάζεται κατὰ μέσο ὅρο τὴν ἡμέρα;

197. Σὲ μιὰ πόλη ἡ μέση θερμοκρασία ἦταν: τὴν ἄνοιξη 15,2 ^{0} Κελσίου, τὸ καλοκαίρι 26,7 ^{0}, τὸ φθινόπωρο 14,9 ^{0} καὶ τὸ χειμώνα 6,4 ^{0}. Ποιὰ ἦταν ἡ μέση θερμοκρασία στὴν πόλη αὐτὴ ὁλόκληρη τὴ διάρκεια τοῦ ἔτους;

Νὰ βρῆτε τὸ μέσο ὅρο τῆς βαθμολογίας σας τῶν δύο πρώτων διμήνων.

4. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΙΞΕΩΣ

Οἱ ἔμποροι, κυρίως τῶν τροφίμων, ἀναμειγνύουν (ἀνακατώνουν) διάφορες ποιότητες ὁμοειδῶν πραγμάτων· π. χ. λάδι α' ποιότητας καὶ λάδι β' ποιότητας, καφέ, ρύζι κλπ. Ἢ ἀναμειγνύουν πράγματα, ποὺ δὲν εἶναι ὁμοειδῆ λ. χ. βούτυρο καὶ λίπος, κρασὶ καὶ νερό, οἰνόπνευμα καὶ νερὸ κλπ.

Τὸ κάνουν αὐτὸ γιατὶ δὲν μποροῦν νὰ πουλήσουν χωριστὰ τὰ εἴδη αὐτά, εἴτε γιατὶ ὁρισμένα εἶναι πολὺ ἀκριβὰ εἴτε γιατὶ ἄλλα εἶναι κατώτερης ποιότητας. Μὲ τὴν ἀνάμειξη σχηματίζουν ἕνα μεῖγμα μέτριας ποιότητας καὶ τὸ πουλοῦν εὐκολώτερα λόγῳ τῆς μέτριας ἀξίας του.

α) Προβλήματα μείξεως πρώτου εἴδους

Πρόβλημα 1. *Ἕνας παντοπώλης ἀνάμειξε 40 κιλὰ βούτυρο τῶν 50 δρχ. τὸ κιλὸ καὶ 100 κιλὰ λίπος τῶν 22 δρχ. τὸ κιλό. Πόσο πρέπει νὰ πουλήση τὸ κιλὸ τοῦ μείγματος ;*

Σκέψη. Ἂν ὁ παντοπώλης πουλοῦσε χωριστὰ τὸ βούτυρο καὶ χωριστὰ τὸ λίπος, θὰ ἔπαιρνε ἀπὸ τὸ βούτυρο 40 × 50 δρχ. = = 2.000 δρχ. καὶ ἀπὸ τὸ λίπος 100 × 22 δρχ. = 2.200 δρχ. Καὶ ἀπὸ τὰ δυὸ εἴδη θὰ ἔπαιρνε : 2.000 + 2.200 = 4.200 δρχ.

Τὰ ἴδια χρήματα ὅμως πρέπει νὰ πάρη καὶ ἀπὸ τὸ μεῖγμα, δηλ. ἀπὸ τὰ 140 κιλά. Ὁπότε, ἀφοῦ τὰ 140 κιλὰ τοῦ μείγματος θὰ κοστίζουν 4.200 δρχ., τὸ ἕνα κιλὸ θὰ κοστίζη 140 φορὲς λιγότερο δηλ. 4.200 : 140 = 30 δρχ.

Λύση.

α) Τὸ βούτυρο ἀξίζει	40 × 50 δρχ.	= 2.000 δρχ.
β) Τὸ λίπος ἀξίζει	100 × 22 »	= 2.200 »
Σύν. μείγματος	140 κ. ἀξίζουν	4.200 δρχ.
τὸ	1 κ. ἀξίζει	4.200 : 140 = 30 δρχ.

Ἀπάντηση. Πρέπει νὰ πουλήση τὸ κιλὸ τοῦ μείγματος 30 δρχ.

Παρατήρηση. Προβλήματα α' εἴδους μείξεως ἔχομε, ὅταν δίνωνται οἱ ποσότητες γιὰ ἀνάμειξη καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδας καθεμιᾶς ἀπ' αὐτὲς καὶ ζητῆται ἡ τιμὴ τῆς μονάδας τοῦ μείγματος. Καί :

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν τιμὴ τῆς μονάδας τοῦ μείγματος, βρίσκομε πρῶτα τὴν ἀξία τῆς ποσότητας κάθε εἴδους χωριστά. Προσθέτομε ὕστερα τὰ γινόμενα καὶ τὸ ἄθροισμα τῆς ἀξίας τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ πλήθους τῶν μονάδων τοῦ μείγματος.

Πρόβλημα 2. *Ένας ἀνέμειξε 250 κιλὰ λάδι τῶν 28 δρχ. τὸ κιλὸ μὲ 150 κιλὰ λάδι κατώτερης ποιότητας καὶ σχημάτισε μεῖγμα, τὸ ὁποῖο κοστίζει 26,50 δρχ. τὸ κιλό. Πόσο κόστιζε τὸ κιλὸ τὸ λάδι τῆς κατώτερης ποιότητας.*

Σκέψη. Στὸ πρόβλημα αὐτὸ δὲ γνωρίζομε πόσο κοστίζει τὸ κιλὸ τὸ λάδι τῆς κατώτερης ποιότητας, γνωρίζομε ὅμως πόσο κοστίζει τὸ κιλὸ τοῦ μείγματος.

Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα αὐτό, α) θὰ βροῦμε τὴν ἀξία τῆς ποσότητας τῶν 250 κιλῶν, β) θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ ἄθροισμα τῶν κιλῶν τοῦ μείγματος ἐπὶ τὴν τιμὴ τοῦ ἑνὸς κιλοῦ αὐτοῦ, γ) ἀπὸ τὸ γινόμενο θὰ ἀφαιρέσωμε τὴν ἀξία τῶν κιλῶν τῆς ἀνώτερης ποιότητας καὶ δ) τὸ ὑπόλοιπο θὰ τὸ διαιρέσωμε διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κιλῶν τῆς κατώτερης ποιότητας.

Λύση.

α)	250	×	28 δρχ.	=	7.000 δρχ.
β)	150	×	; δρχ.	=	δρχ.
	400	×	26,5 δρχ.	=	10.600 δρχ.
	10.600 δρχ.	–	7.000 δρχ.	=	3.600 δρχ.
	3.600 δρχ.	:	150	=	24 δρχ.

Ἀπάντηση. 24 δρχ. κοστίζει τὸ κιλὸ τὸ λάδι τῆς κατώτερης ποιότητας.

Προβλήματα

198. Ἕνας ἀνέμειξε 240 κιλὰ κρασὶ τῶν 15 δρχ. τὸ κιλὸ μὲ 160 κ. τῶν 12 δραχμῶν τὸ κιλό. Ποιὰ θὰ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ κιλοῦ τοῦ μείγματος;

199. Ἕνας παντοπώλης ἀνέμειξε 175 κ. λάδι τῶν 50 δρχ. τὸ κιλὸ μὲ 225 κ. τῶν 26 δρχ. τὸ κιλό. Πόσο κοστίζει τὸ κιλὸ τοῦ μείγματος καὶ πόσο κερδίζει στὸ κάθε κιλό, ἂν τὸ πουλάη πρὸς 48 δραχμές;

200. Ἀνέμειξε κάποιος 350 κιλὰ λίπος τῶν 25 δρχ. τὸ κιλὸ μὲ 150 κιλὰ τῶν 30 δρχ. τὸ κ. Πόσο κοστίζει τὸ κιλὸ τοῦ μείγματος καὶ πόσο πρέπει νὰ τὸ πουλάη, γιὰ νὰ κερδίση 1.250 δρχ. ἀπὸ ὅλο τὸ ποσὸ τοῦ μείγματος;

201. Ἕνας ἀνέμειξε 300 κιλὰ λίπος τῶν 26 δρχ. τὸ κ. μὲ 200 κιλὰ ἀνώτερης ποιότητας καὶ σχημάτισε μεῖγμα, τὸ ὁποῖο κοστίζει 28,40 δρχ. τὸ κιλό. Πόσο κόστιζε τὸ κιλὸ τὸ λίπος τῆς ἀνώτερης ποιότητας;

202. Ἕνας ἔμπορος ἔχει δύο βαρέλια κρασί· τὸ ἕνα περιέχει 1.000 κ. τῶν 15 δρχ. τὸ κιλὸ καὶ τὸ ἄλλο 800 κιλὰ τῶν 10 δρχ. τὸ κιλό. Ἀνέμειξε τὸ κρασὶ καὶ μὲ 200 κιλὰ νερὸ (μηδὲν ἡ ἀξία τοῦ νεροῦ). Πόσο κοστίζει τὸ κιλὸ τοῦ μείγματος καὶ πόσο στὰ ἑκατὸ (%) κερδίζει, ἂν τὸ πουλάη 13,80 δρχ. τὸ κιλό;

203. Ἕνας εἶχε λάδι τῶν 40 δρχ. τὸ κιλὸ καὶ σπορέλαιο τῶν 30 δρχ. τὸ κιλὸ καὶ τῶν 20 δρχ. τὸ κιλὸ καὶ τὰ ἀνέμειξε κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπο: Πῆρε ἀπὸ τὸ λάδι ποσότητα τριπλάσια ἀπὸ τὴν ποσότητα τοῦ σπορελαίου τῶν 30 δρχ., καὶ ἀπὸ τὸ σπορέλαιο τῶν 20 δρχ. ποσότητα διπλάσια ἀπὸ τὸ λάδι. Πόσο θὰ κοστίζη τὸ κιλὸ τοῦ μείγματος;

204. Ἔμπορος ἀγόρασε καὶ ἀνέμειξε 600 κιλὰ φασόλια Καστοριᾶς τῶν 36 δρχ. τὸ κιλὸ καὶ 300 κιλὰ τῶν 28 δρχ. τὸ κιλό. Ξόδεψε γιὰ μεταφορικὰ 5% ἐπὶ τῆς ἀξίας τους. Πόσο πρέπει νὰ πουλήση τὸ κιλὸ τοῦ μείγματος, γιὰ νὰ κερδίση ἀπὸ ὅλο τὸ μεῖγμα 2.700 δραχμές;

205. Ἕνας ἀνέμειξε 600 κιλὰ οἰνοπνεύματος 80° μὲ 500 κιλὰ 60° καὶ μὲ 100 κιλὰ νερό. Ποιὸς θὰ εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ μείγματος;

β) Προβλήματα μείξεως δευτέρου εἴδους

Πρόβλημα 1. *Ἔμπορος ἀνέμειξε λάδι τῶν 32 δρχ. τὸ κιλὸ μὲ ἄλλο λάδι τῶν 29 δρχ. τὸ κιλὸ καὶ ἔκαμε μεῖγμα 300 κιλῶν ἀξίας 30 δρχ. τὸ κιλό. Πόσα κιλὰ ἔλαβε ἀπὸ κάθε ποιότητα ;*

Σκέψη. Γιὰ νὰ γίνη τὸ μεῖγμα, πρέπει νὰ πάρωμε λάδι καὶ ἀπὸ τὶς δυὸ ποιότητες. Ἂν ἀναμείξωμε 1 κιλὸ ἀπὸ τὴν α' ποιότητα καὶ 1 κιλὸ ἀπὸ τὴν β' ποιότητα, στὸ δίκιλο τοῦ μείγματος, ποὺ θὰ πουλάη πρὸς 2 × 30 δρχ., θὰ ἔχη ζημία 2 δρχ. στὴν α' ποιότητα καὶ κέρδος 1 δρχ. στὴν β' ποιότητα. Ἄρα στὰ 2 κιλὰ μεῖγμα, ποὺ θὰ πουλάη, θὰ ἔχη μιὰ δρχ. ζημία.

Καταλαβαίνομε τώρα ὅτι, γιὰ νὰ μὴ ἔχη οὔτε ζημία οὔτε κέρδος, πρέπει νὰ ἀναμείξη 1 κιλὸ ἀπὸ τὴν α΄ ποιότητα καὶ 2 κιλὰ ἀπὸ τὴν β΄ ποιότητα.

Μὲ αὐτὴ τὴν ἀναλογία πρέπει νὰ γίνη ἡ ἀνάμειξη· δηλ. ὅσες φορὲς θὰ παίρνη 1 κιλὸ ἀπὸ τὴν α΄ ποιότητα, τόσες φορὲς θὰ πρέπη νὰ παίρνη 2 κιλὰ ἀπὸ τὴν β΄ ποιότητα.

Ἑπομένως, γιὰ νὰ βροῦμε πόσα κιλὰ πρέπει νὰ πάρη ἀπὸ κάθε ποιότητα, γιὰ νὰ σχηματίση μεῖγμα 300 κιλῶν, πρέπει νὰ μερίσωμε τὰ 300 κιλὰ σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 2. Ἤτοι:

	Δοθέντες
Μεριστέος 300	α) 1
	β) 2
ἄθροισμα	3

$$\alpha)\ 300 \times \frac{1}{3} = 100 \text{ κιλά},\ \beta)\ 300 \times \frac{2}{3} = 200 \text{ κιλά}.$$

Ὥστε: Πῆρε 100 κιλὰ ἀπὸ τὴν α΄ ποιότητα καὶ 200 κ. ἀπὸ τὴν β΄.

Συνήθως ὅμως γιὰ τὴ λύση τῶν προβλημάτων τοῦ δευτέρου εἴδους **μείξεως** [1] χρησιμοποιεῖται ἡ παρακάτω **κατάταξη**:

	Ἀξία		Διαφ.,	Ἀναλ. μείξ.
300 κιλὰ μεῖγμα	α΄ 32 δρχ.	$> 30 <$	1 →	1 κιλὸ α΄
	β΄ 29 δρχ.		2 →	2 κιλὰ β΄
				3 »

Σημείωση. Ὅπως βλέπομε, σχηματίζομε ἕνα πίνακα, στὸν ὁποῖο γράφομε τὶς τιμὲς τῶν μονάδων τῶν εἰδῶν, ποὺ ἀναμειγνύομε (32 δρχ. καὶ 29 δρχ.), τὴ μιὰ κάτω ἀπὸ τὴν ἄλλη· ἀνάμεσα στὶς τιμὲς αὐτὲς καὶ λίγο δεξιὰ γράφομε τὴν τιμὴ τῆς μονάδας τοῦ μείγματος (30 δρχ.). Βρίσκομε ὕστερα τὶς διαφορὲς 32 - 30 = 2 καὶ 30 - 29 = 1, τὶς ὁποῖες γράφομε στὸ ἄκρο τῶν διαγωνίων (δηλ. τοῦ ×) καὶ τὶς προσθέτομε. Κατόπιν κάνομε τὸ μερισμό, δηλ. μερίζομε τὸ μερι-

1. Προβλήματα β΄ εἴδους μείξεως ἔχομε, ὅταν δίνεται ἡ τιμὴ κάθε ποιότητας καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδας τοῦ μείγματος καὶ ζητοῦνται οἱ ποσότητες.

στέο (τὸ 300 κ.) ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 1 καὶ 2, ποὺ βρήκαμε ὡς διαφορές.

Λύση. α′ $\frac{300 \times 1}{3} = 100$ κιλὰ

β′ $\frac{300 \times 2}{3} = 200$ κιλὰ

Σύνολον 300 κιλὰ

Ἀπάντηση. Πῆρε 100 κιλὰ ἀπὸ τὴν α′ ποιότητα καὶ 200 κιλ. ἀπὸ τὴν β′.

Γιὰ νὰ λύσωμε τὰ προβλήματα τοῦ β′ εἴδους μείξεως, βρίσκομε τὶς διαφορὲς (ὅπως στὸν παρακάτω πίνακα) καὶ μερίζομε τὸ βάρος τοῦ μείγματος ἀνάλογα μὲ αὐτές.

Πρόβλημα 2. *Ἕνας παντοπώλης ἔχει δύο εἴδη βουτύρου. Τοῦ ἑνὸς εἴδους τὸ κιλὸ κοστίζει 55 δρχ. καὶ τοῦ ἄλλου 42 δρχ. Προκειμένου νὰ σχηματίσῃ μεῖγμα, τὸ ὁποῖο κοστίζει 46 δρχ. τὸ κιλό, πόσα κιλὰ θὰ πάρῃ ἀπὸ τὸ β′ εἶδος, ἂν ἀπὸ τὸ α′ εἶδος πῆρε 20 κιλά;*

Σκέψη. Καὶ τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι πρόβλημα β′ εἴδους μείξεως.

Κατάταξη :

Ἀξία		Διάφ., Ἀναλ. μείξ.
α′ 55 δρχ.	> 46 <	4 → 4 κ. α′
β′ 42 δρχ.		9 → 9 κ. β′

Λύση :

Ὅταν ἀπὸ τὸ α′ παίρνη 4 κ. ἀπὸ τὸ β′ παίρνει 9 κ.

» » » α′ » 20 » » » β′ » Χ κ.

$$X = 9 \times \frac{20}{4} = 5 \text{ κιλά.}$$

Παρατήρηση : Στὸ πρόβλημα αὐτό, ἀφοῦ βρήκαμε τὴν αναλογία μείξεως, κάμαμε ἁπλὴ μέθοδο τῶν τριῶν καὶ ὄχι μερισμό, ἐπειδὴ δὲν ἔχομε μεριστέο ἀριθμό.

Προβλήματα

206. Ἕνας ἀνέμειξε λίπος τῶν 32 δρχ. τὸ κιλὸ καὶ τῶν 20 δρχ. τὸ κιλὸ καὶ ἔκαμε μεῖγμα 240 κιλῶν, τὸ ὁποῖο πουλάει 28 δρχ. τὸ κιλό. Πόσο ἔλαβε ἀπὸ κάθε ποιότητα;

207. Πόσα κιλὰ κρασὶ πρέπει νὰ λάβωμε ἀπὸ δύο ποιότητες, γιὰ νὰ σχηματίσωμε μεῖγμα 300 κιλῶν, τὸ ὁποῖο νὰ πουλιέται πρὸς 16 δρχ. τὸ κιλό, ἂν τιμᾶται τὸ κιλὸ τῆς α′ ποιότητας 18 δρχ. καὶ τῆς β′ 13 δραχμές;

208. Ἕνας ἀνέμειξε βούτυρο τῶν 50 δρχ. τὸ κιλὸ μὲ λίπος τῶν 20 δρχ. τὸ κιλὸ καὶ σχημάτισε μεῖγμα 500 κιλῶν, τὸ ὁποῖο πουλιόταν 23 δρχ. τὸ κιλό. Πόσο ἔλαβε ἀπὸ κάθε εἶδος;

209. Μὲ ποιὰ ἀναλογία πρέπει νὰ ἀναμείξωμε λίπος τῶν 20 δρχ. τὸ κιλὸ μὲ βούτυρο τῶν 60 δρχ. τὸ κιλό, γιὰ νὰ σχηματίσωμε μεῖγμα τῶν 32 δρχ. τὸ κιλό;

210. Ἀνέμειξε ἕνας λίπος τῶν 24 δρχ. τὸ κιλὸ μὲ βούτυρο τῶν 48 δρχ. τὸ κιλὸ καὶ σχημάτισε μεῖγμα 150 κιλῶν, τὸ ὁποῖο πουλοῦσε 36 δρχ. τὸ κιλό. Πόσα κιλὰ ἔλαβε ἀπὸ κάθε εἶδος;

211. Παντοπώλης ἀνέμειξε βούτυρο τῶν 50 δρχ. τὸ κιλό, μὲ λίπος τῶν 19,50 δρχ. τὸ κιλὸ καὶ σχημάτισε μεῖγμα 1000 κιλῶν. Τὸ πούλησε ὕστερα καὶ εἰσέπραξε 25.600 δρχ. Πόσα κιλὰ ἔλαβε ἀπὸ κάθε εἶδος;

212. Ἔμπορος ἀνέμειξε 100 κιλὰ βούτυρο τῶν 50 δρχ. τὸ κιλὸ μὲ λίπος τῶν 19,50 δρχ. τὸ κιλό. Ἐπειδὴ θέλει νὰ σχηματίση μεῖγμα, τὸ ὁποῖο νὰ κοστίζη 25,60 δρχ. τὸ κιλό, πόσο λίπος πρέπει νὰ λάβη;

Κράματα

Συχνὰ λιώνουν καὶ ἀνακατώνουν χρυσὸ μὲ χαλκό, γιὰ νὰ κάμουν τὸ χρυσὸ στερεώτερο. Τὸ μεῖγμα, ποὺ παίρνουν ἀπὸ τὴ συγχώνευση αὐτή, λέγεται **κράμα**.

Γενικῶς **κράμα** λέγεται τὸ προϊὸν ποὺ προέρχεται ἀπὸ τὴ συγχώνευση μετάλλων. Τὸ ποσοστὸ τοῦ πολυτίμου μετάλλου (χρυσοῦ ἢ ἀργύρου), τὸ ὁποῖο περιέχεται στὸ κράμα, λέγεται **βαθμὸς καθαρότητας ἢ τίτλος τοῦ κράματος.**

Ὁ τίτλος ἐκφράζεται συνήθως σὲ **χιλιοστά.** Ὅταν λέμε π. χ. ὅτι ὁ τίτλος χρυσοῦ κοσμήματος εἶναι 0,800 ἐννοοῦμε, ὅτι στὰ 1000 μέρη τοῦ κοσμήματος αὐτοῦ τὰ 800 εἶναι καθαρὸς χρυσὸς καὶ τὰ ὑπόλοιπα 200 εἶναι ἄλλο μέταλλο.

Ὁ βαθμὸς καθαρότητας **τῶν χρυσῶν κοσμημάτων** ἐκφράζεται καὶ σὲ εἰκοστὰ τέταρτα, τὰ ὁποῖα λέγονται **καράτια.** Ὅταν ὁ χρυσὸς εἶναι καθαρός, λέμε ὅτι εἶναι 24 καρατίων. Ὅταν ὅμως λέμε ὅτι ἕνα χρυσὸ κόσμημα εἶναι 18 καρατίων, ἐννοοῦμε ὅτι μόνο τὰ 18 μέρη του εἶναι καθαρὸς χρυσός· τὰ ὑπόλοιπα 6 μέρη του εἶναι ἄλλο μέταλλο.

Σημείωση. Τὰ προβλήματα τῶν κραμάτων λύνονται ὅπως καὶ τὰ προβλήματα μείξεως (α' καὶ β' εἴδους).

Πρόβλημα. *Ἕνας χρυσοχόος συγχωνεύει 20 γραμμάρια χρυσοῦ τίτλου (βαθμοῦ καθαρότητας) 0,950 μὲ 15 γραμμάρια χρυσοῦ τίτλου 0,600. Ποιὸς εἶναι ὁ τίτλος (βαθμὸς καθαρότητας) τοῦ νέου κράματος;*

Σκέψη. Τὰ 20 γραμμάρια χρυσοῦ, τίτλου 0,950, περιέχουν 0,950 × 20 = 19 γραμμάρια καθαροῦ χρυσοῦ. Τὰ 15 γραμμάρια χρυσοῦ τίτλου 0,600 περιέχουν 0,600 × 15 = 9 γραμμάρια καθαροῦ χρυσοῦ. Καὶ τὰ 35 γραμμάρια τοῦ κράματος (20+15) περιέχουν 28 γραμμάρια (19+9) καθαροῦ χρυσοῦ.

Ἀφοῦ τὰ 35 γραμμάρια τοῦ κράματος περιέχουν 28 γραμμάρια καθαροῦ χρυσοῦ, τὸ ἕνα γραμμάριο τοῦ κράματος θὰ περιέχῃ 28 : 35 = 0,800 γραμμάρια καθαροῦ χρυσοῦ.

Λύση.

α) 20 γραμμάρ. × 0,950 = 19 γραμμάρ. καθαροῦ χρυσοῦ
β) 15 » × 0,600 = 9 » » »

Τὰ 35 γραμμάρ. τοῦ κράμ. περιέχουν 28 γραμμάρ. καθαροῦ χρυσ.
τὸ 1 » » » περιέχει 28 : 35 = 0,800 γρ. καθ. χρυσ.

Ἀπάντηση. Ὁ τίτλος τοῦ νέου κράματος εἶναι 0,800.

Προβλήματα κραμάτων

213. Ένας χρυσοχόος συγχώνευσε 13 γραμμάρ. χρυσοῦ τίτλου 0,900 μὲ 2 γραμμάρ. χαλκοῦ. Πόσος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ νέου κράματος; (Ὁ τίτλος τοῦ χαλκοῦ εἶναι μηδέν).

214. Συγχωνεύομε κράμα χρυσοῦ 285 γραμμαρ. τίτλου 0,835 μὲ ἄλλο κράμα χρυσοῦ 325 γραμμαρ. τίτλου 0,920 καὶ μὲ 152 γραμμάρ. καθαροῦ χρυσοῦ. Ποιὸς εἶναι ὁ τίτλος τοῦ νέου κράματος;

215. Ένας χρυσοχόος ἔχει δυὸ ἀσημένιες πλάκες. Ἡ μιὰ ἔχει τίτλο 0,760 καὶ ἡ ἄλλη 0,520. Πόσα γραμμάρια πρέπει νὰ λάβη ἀπὸ κάθε πλάκα, γιὰ νὰ κάμη κράμα 240 γραμμαρίων μὲ τίτλο 0,600;

216. Χρυσοχόος ἔχει δυὸ εἴδη χρυσοῦ. Τοῦ ἑνὸς ὁ τίτλος εἶναι 0,850 καὶ τοῦ ἄλλου 0,750. Πόση ποσότητα πρέπει νὰ λάβη ἀπὸ κάθε εἶδος, γιὰ νὰ σχηματίση κράμα 300 γραμμαρ. καὶ τίτλου 0,800;

217. Χρυσοχόος παίρνει 1700 γραμμάρ. καθαροῦ χρυσοῦ καὶ τὰ συγχωνεύει μὲ χαλκό, γιὰ νὰ σχηματίση κράμα χρυσοῦ τίτλου 0,850. Πόσα γραμμάρια χαλκοῦ πρέπει νὰ πάρη;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

ΧΡΗΣΗ ΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ

Μέχρι τώρα μάθαμε νὰ χρησιμοποιοῦμε **τὰ ἀραβικὰ σύμβολα** (0, 1, 2, 3, 4, 5...), γιὰ νὰ παραστήσωμε ἀριθμοὺς ἢ ποσότητες.

Εἶναι δυνατὸν ὅμως γιὰ μιὰ τέτοια παράσταση νὰ χρησιμοποιήσωμε καὶ τὰ **γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου.** Π. χ. λέμε: ξοδέψαμε στὴν ἐκδρομὴ **α δραχμές,** ἀντὶ νὰ ἀναφέρωμε μὲ ἀριθμὸ τὴν ποσότητα τῶν χρημάτων, ποὺ ξοδέψαμε. Ἐπίσης, ἀντὶ νὰ γράψωμε 5 μῆλα, γράφομε **α μῆλα**· ἀντὶ νὰ γράψωμε 2 δρχ., γράφομε **β δραχμές**· ἀντὶ νὰ ποῦμε 8 μαθητές, λέμε **γ μαθητὲς** κ.τ.λ.

Γιὰ τὴν παράσταση ὁρισμένων ἀριθμῶν ἢ ποσοτήτων μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσωμε ὁποιοδήποτε γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου· τὸ γράμμα ὅμως αὐτό, σὲ ὅλη τὴν ἐξέταση τοῦ ζητήματος, θὰ παριστάνη τὸν ἴδιο ἀριθμὸ ἢ τὴν ἴδια ποσότητα. Π. χ. Ἂν μὲ τὸ γράμμα α παραστήσωμε τὶς 7 ἡμέρες τῆς ἑβδομάδας, κατὰ τὸν ὑπολογισμὸ τῶν ἡμερῶν 4 ἑβδομάδων, ποὺ θὰ τὸν παραστήσωμε μὲ τὸ **4α,** τὸ α, θὰ παριστάνη 7 ἡμέρες πάλι. Σὲ ἄλλη περίπτωση μποροῦμε μὲ τὸ α νὰ παραστήσωμε ἄλλο ἀριθμὸ ἢ ἄλλη ποσότητα· λ. χ. α = 5 δραχμές, ἢ α = 10 κιλὰ κλπ.

Μὲ γράμματα μποροῦμε νὰ παραστήσωμε ὄχι μόνο ὁρισμένους ἀριθμοὺς ἢ ποσότητες, ἀλλὰ καὶ ἀγνώστους ἀριθμοὺς ἢ ζητούμενες ποσότητες. Συνήθως γιὰ τοὺς ὁρισμένους ἀριθμοὺς χρησιμοποιοῦμε τὰ πρῶτα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου (α, β, γ, δ...) καὶ γιὰ τοὺς ἀγνώστους ἢ ζητούμενους τὰ τελευταῖα (φ, χ, ψ, ω).

Ἔτσι μποροῦμε νὰ χρησιμοποιοῦμε τὰ γράμματα ἀντὶ ἀριθμῶν σὲ ἀσκήσεις καὶ προβλήματα ὅλων τῶν πράξεων τῆς ἀριθμητικῆς. Καί, γιὰ νὰ σημειώσωμε τὶς πράξεις, χρησιμοποιοῦμε τὰ γνωστά μας σύμβολα: τὸ + (σὺν) γιὰ τὴν πρόσθεση, τὸ — (πλὴν ἢ μεῖον) γιὰ τὴν ἀφαίρεση, τὸ $\times$ ἢ (ἐπὶ) γιὰ τὸν πολλαπλασιασμὸ καὶ τὸ : (διὰ ἢ πρὸς) γιὰ τὴ διαίρεση.

Παραδείγματα

α) Ἂν μιὰ οἰκογένεια ἔχῃ 4 ἀγόρια καὶ β κορίτσια, τότε ὁ συνολικὸς ἀριθμὸς τῶν παιδιῶν τῆς οἰκογένειας αὐτῆς θὰ εἶναι $4+\beta$.

β) Ἂν α εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν τῆς τάξεώς μας καὶ ἀπουσιάζουν σήμερα 5 μαθητές, ὁ ἀριθμὸς τῶν παρόντων μαθητῶν εἶναι $\alpha-5$.

γ) Ἂν σὲ κάθε θρανίο τῆς τάξεώς μας κάθωνται Χ μαθητὲς καὶ τὰ θρανία της εἶναι 8, τότε οἱ μαθητὲς τῆς τάξεώς μας εἶναι $8.X$ ἢ $8X$ (τὸ γινόμενο αὐτῶν).

Σημείωση. Τὸ γινόμενο συμβολίζεται χωρὶς τὸ σημεῖο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

δ) Ἂν β εἶναι τὸ βάρος ἑνὸς πεπονιοῦ, τὸ ὁποῖο μοιράζομε σὲ 4 ἴσα μέρη, τότε τὸ βάρος κάθε τεμαχίου θὰ εἶναι $\beta : 4$ ἢ $\frac{\beta}{4}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

218. Ὁ Νίκος ἔλαβε ὡς δῶρο α δρχ. ἀπὸ τὸν πατέρα του καὶ 3 δρχ. ἀπὸ τὴ μητέρα του. Πόσες δρχ. ἔχει συνολικά; (**Λύση.** $\alpha+3$).

219. Ὁ Κώστας ἔχει α δραχμές· ὁ Πέτρος ἔχει 253 δρχ. περισσότερες ἀπὸ τὸν Κώστα. Πόσες δρχ. ἔχει ὁ Πέτρος καὶ πόσες καὶ οἱ δύο μαζί; (**Λύση.** Ὁ Πέτρος ἔχει $\alpha+253$ δρχ. καὶ οἱ δύο μαζὶ $\alpha+\alpha+253$ ἢ $2\alpha+253$).

220. Ὁ Ἀντρέας ἔχει 345 δρχ. περισσότερες τοῦ Νίκου. Νὰ βρεθῇ: α) πόσες δρχ. ἔχει ὁ Ἀντρέας καὶ β) πόσες δρχ. ἔχουν καὶ οἱ δύο μαζί.

221. Ἡ Τροχαία μέτρησε τὰ αὐτοκίνητα, ποὺ πέρασαν ἀπὸ μιὰ διασταύρωση, καὶ βρῆκε ὅτι τὸ Σάββατο πέρασαν 185 αὐτοκίνητα περισσότερα ἀπὸ ὅσα πέρασαν τὴν Παρασκευή. Πόσα αὐτοκίνητα πέρασαν τὸ Σάββατο;

222. Ὁ Κώστας πλήρωσε γιὰ τὴν ἀγορὰ διαφόρων σχολικῶν εἰδῶν 12 δραχμές. Ἂν προτοῦ τ' ἀγοράσῃ εἶχε α δραχμές, πόσες δρχ. τοῦ ἔμειναν;

223. Στὴ βιβλιοθήκη τῆς τάξεώς μας ὑπάρχουν β βιβλία. Ἂν ἀπὸ αὐτὰ δοθοῦν γιὰ μελέτη 15 βιβλία, πόσα θὰ μείνουν στὴ βιβλιοθήκη;

224. Ἂν τὸ εἰσιτήριο ἐκδρομῆς κάθε μαθητῆ εἶναι ν δρχ., πόσο θὰ στοιχίσουν τὰ εἰσιτήρια τῶν 28 μαθητῶν τῆς τάξεως;

225. Ἡ ἀπόσταση Ἀθηνῶν - Πατρῶν εἶναι α χιλιόμετρα. Τὸ Κιάτο βρίσκεται στὸ μέσο τῆς ἀποστάσεως αὐτῆς. Πόσα χιλιόμετρα ἀπέχει τὸ Κιάτο ἀπὸ κάθε μιὰ ἀπὸ τὶς πόλεις αὐτές;

226. Ἕνας ὑπάλληλος διαιρεῖ τὸ μισθό του σὲ 5 ἴσα μέρη καὶ ἀποταμιεύει τὸ ἕνα μέρος ἀπ᾽ αὐτά. Ἂν α εἶναι ὁ μισθός του, τί ποσὸ ἀποταμιεύει μηνιαίως;

227. Ἂν ἡ βενζίνη τιμᾶται β δρχ. τὸ λίτρο, πόσο στοιχίζουν τὰ 9 λίτρα;

Χρήση ἑνὸς γράμματος γιὰ τὴ λύση ἁπλῶν ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων

Παράδειγμα 1. *Ὁ Νίκος ἀρχικῶς ἔχει α δραχμές, ἀλλ᾽ ὅταν λάβη ἀκόμη 5 δραχμές, θὰ ἔχη ὅσο καὶ ὁ Πέτρος, ὁ ὁποῖος ἔχει 12 δρχ. Πόσες δραχμὲς εἶχε ἀρχικῶς ὁ Νίκος ;*

Λύση. Ἡ ποσότητα τῶν δρχ. τοῦ Νίκου γίνεται $\alpha+5$. Ἡ ποσότητα αὐτὴ ἰσοῦται μὲ 12, ἀφοῦ τόσες εἶναι οἱ δρχ. τοῦ Πέτρου. Συνεπῶς ἔχομε δύο ποσότητες, $\alpha+5$ καὶ 12, οἱ ὁποῖες εἶναι ἴσες μεταξύ τους. Τοῦτο τὸ γράφομε ὡς ἑξῆς: $\alpha+5=12$, ποὺ τὸ διαβάζομε : α σὺν 5 ἴσον μὲ 12, καὶ ἐκφράζει τὴν ἰσότητα μιᾶς ποσότητας πρὸς μία ἄλλη ὁμοειδὴ πρὸς αὐτή.

Γιὰ νὰ βροῦμε τώρα πόσες δραχμὲς εἶχε ἀρχικῶς ὁ Νίκος, πρέπει νὰ βροῦμε ἕναν ὁρισμένο ἀριθμό, ὁ ὁποῖος, μαζὶ μὲ τὸν 5, νὰ μᾶς κάνη τὸ 12.

Ἄρα ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 7 δηλ. $\alpha=7$, ποὺ σημαίνει στὴν περίπτωσή μας ὅτι ὁ Νίκος ἀρχικῶς πρέπει νὰ εἶχε 7 δρχ.

Ἀλλὰ πῶς ὁ ἀριθμὸς 7 προκύπτει ἀπὸ τὸ 12; Μόνο ὅταν ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὸν 12 τὸν 5.

Συνεπῶς, ἂν λάβωμε τὴν ἰσότητά μας $\alpha+5=12$, θὰ ἔχωμε : $\alpha=12-5=7$.

Παράδειγμα 2. *Ὁ Ἀντρέας ἔλαβε ἀπὸ τὸν πατέρα του 100 δρχ., ποσότητα ἀκριβῶς ἴση μὲ τὸ διπλάσιο τῆς ποσότητας χρημάτων, τὴν ὁποία ἔλαβε ὁ Πέτρος ἀπὸ τὸ δικό του πατέρα. Πόσα χρήματα ἔλαβε ὁ Πέτρος ;*

Λύση. Ἂν μὲ τὸ γράμμα Χ παραστήσωμε τὰ χρήματα τοῦ Πέτρου, τότε τὸ διπλάσιο τῶν χρημάτων του, δηλ. 2Χ, θὰ ἰσοῦται μὲ τὶς 100 δρχ. τοῦ Ἀντρέα. Αὐτὸ τὸ γράφομε ὡς ἑξῆς : $2X=100$ καὶ $X=\frac{100}{2}=50$. Δηλ. ἂν τὶς ἴσες αὐτὲς ποσότητες ($2X=100$) τὶς διαιρέσωμε διὰ τοῦ 2, τότε οἱ νέες ποσότητες $\left(X=\frac{100}{2}\right)$, ποὺ προκύπτουν, εἶναι μὲν διαφορετικὲς ἀπὸ τὶς πρῶτες, ἀλλὰ εἶναι ἴσες μεταξύ τους. Διαιροῦμε λοιπὸν διὰ 2 καὶ ἔχομε : $\frac{2X}{2}=\frac{100}{2}$. Καὶ μετὰ τὴν ἁπλοποίηση ἔχομε $X=50$.

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ ἄγνωστη ποσότητα τῶν χρημάτων τοῦ Πέτρου εἶναι 50 δραχμές.

Συμπέρασμα. Ἀπὸ τὴν ἐξέταση τῶν δύο αὐτῶν παραδειγμάτων καὶ πολλῶν ἄλλων παρομοίων μὲ αὐτὰ συμπεραίνομε τὰ ἑξῆς: Ὅταν σ' ἕνα πρόβλημα τῆς ἀριθμητικῆς δίνωνται δύο ἢ περισσότερες ποσότητες, οἱ ὁποῖες ἔχουν σχέση μεταξύ τους, καὶ ζητῆται μία ἄγνωστη ποσότητα, μποροῦμε νὰ τὴ βροῦμε, ἂν τὴν παραστήσωμε μὲ ἕνα γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου καὶ κάμωμε τὶς κατάλληλες ἀριθμητικὲς πράξεις.

Τὸ ἴδιο μποροῦμε νὰ κάμωμε καὶ σὲ ἀσκήσεις μὲ ἕναν ἄγνωστο.

Προβλήματα

228. Ὁ Παῦλος, ποὺ εἶχε α δραχμές, ἔλαβε ἀπὸ τὸ θεῖο του ἄλλες 35 δραχμὲς καὶ ἔχει ὅσες καὶ ὁ Ἀντρέας, ὁ ὁποῖος ἔχει 68 δρχ. Πόσες δρχ. εἶχε ὁ Παῦλος;

229. Ὁ Κώστας εἶχε πενταπλάσιους βόλους ἀπὸ τὸν Πέτρο. Καὶ οἱ δυὸ μαζὶ εἶχαν 24 βόλους. Πόσους βόλους εἶχε ὁ καθένας ;

230. Ἡ Ἑλένη εἶχε 35 δραχμές. Ξόδεψε ἀπ' αὐτὲς ἕνα ποσὸ

γιὰ τὸ ἐργόχειρό της καὶ τῆς περίσσεψαν 9 δραχμές. Πόσες δρχ. ἔδωσε γιὰ τὸ ἐργόχειρό της;

231. Ἡ Μαρία ἀγόρασε τρόφιμα καὶ πλήρωσε 43 δρχ. Ἐπέστρεψε στὴ μητέρα της ρέστα 57 δραχμές. Πόσες δρχ. τῆς εἶχε δώσει ἡ μητέρα της;

232. Ἕνας μαθητὴς εἶχε ἕνα ποσὸ χρημάτων. Ἂν εἶχε τριπλάσιο ποσὸ καὶ ξόδευε 7 δρχ., θὰ τοῦ ἔμεναν 7 δραχμές. Πόσα χρήματα εἶχε;

233. Τίνος ἀριθμοῦ τὸ τρίτο ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸ 21;

234. Τὰ $\frac{3}{4}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι 75. Ποιὸς εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός;

235. Μιὰ ράβδο μήκους 65 ἑκατοστῶν τοῦ μέτρου, τὴ χωρίζομε σὲ τρία μέρη. Ἀπ᾽ αὐτὰ τὰ δύο εἶναι ἀκριβῶς ἴσα μεταξύ τους καὶ τὸ τρίτο ἔχει μῆκος 23 ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου. Τί μῆκος ἔχει καθένα ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη τῆς ράβδου;

236. Ὁ Ἀντρέας ὅταν ἐξετάστηκε στὴν Ἀριθμητικὴ ἀπάντησε στὰ $\frac{2}{3}$ τῶν ἐρωτήσεων ποὺ τοῦ ἔκαμαν. Δεδομένου ὅτι ἀπάντησεν ὀρθὰ σὲ 4 ἐρωτήσεις, πόσες ἐρωτήσεις τοῦ ἔκαμαν συνολικά;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ποιοὺς ἀριθμοὺς παριστάνουν τὰ γράμματα στὶς παρακάτω ἀσκήσεις.

$8 + 4 = \alpha$
$9 + 6 = \beta$

$5 + \alpha = 8$
$6 + \delta = 15$
$12 + \beta = 16$
$8 + \gamma = 13$

$\chi + 4 = 10$
$\varphi + 9 = 16$
$\psi + 8 = 13$
$\omega + 7 = 17$
$3 \times 4 = \alpha$
$4 \times 5 = \gamma$

$13 - 5 = \chi$
$10 - 3 = \psi$

$9 - \delta = 6$
$15 - \beta = 8$
$13 - \alpha = 9$
$10 - \gamma = 4$

$\omega - 5 = 9$
$\chi - 7 = 5$
$\psi - 4 = 7$
$\varphi - 6 = 8$
$8 : 2 = \alpha$
$12 : 4 = \gamma$

$5 \times 2 = \beta$	$9 : 3 = \beta$
$6 \times 3 = \delta$	$20 : 5 = \delta$
$4 \times \alpha = 12$	$12 : \chi = 4$
$6 \times \beta = 24$	$8 : \psi = 2$
$8 \times \delta = 32$	$16 : \omega = 8$
$5 \times \gamma = 10$	$15 : \varphi = 3$
$\alpha \times 4 = 8$	$\chi : 3 = 7$
$\delta \times 5 = 15$	$\omega : 4 = 5$
$\gamma \times 6 = 24$	$\varphi : 6 = 4$
$\beta \times 4 = 20$	$\psi : 5 = 3$

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΣΥΝΤΟΜΗ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΗΣ ΥΛΗΣ ΤΗΣ Ε΄ ΤΑΞΕΩΣ

Ἐρωτήσεις

1. Τί διδάσκει ἡ Γεωμετρία; Ποιὰ γεωμετρικὰ σχήματα γνωρίζετε;

2. Ποιὰ εἶναι ἡ εἰκόνα τῆς εὐθείας γραμμῆς; Ἀναφέρατε παραδείγματα τεθλασμένων καὶ καμπύλων γραμμῶν.

3. Ποιὲς ἰδιότητες ἔχει ἡ εὐθεία γραμμή;

4. Τί λέγεται ἡμιευθεία καὶ πῶς τὴν παριστάνομε;

5. Ποιὰ διαφορὰ ὑπάρχει μεταξὺ εὐθείας καὶ εὐθυγράμμου τμήματος; Σημειώσατε καὶ ἀπαγγείλατε δυὸ εὐθύγραμμα τμήματα.

6. Τί καλεῖται γωνία καὶ πῶς διαβάζεται;

7. Πῶς βλέπομε, ἂν δύο γωνίες εἶναι ἴσες;

8. Ποιὰ εἴδη γωνιῶν ἔχομε;

9. Πάνω σ' ἕνα φύλλο χαρτιοῦ νὰ σχηματίσετε μιὰ γωνία ἀπὸ κάθε εἶδος καὶ νὰ τὶς ἀπαγγείλετε.

10. Μὲ τὴ βοήθεια τοῦ κανόνα νὰ γράψετε στὸ τετράδιό σας δυὸ παράλληλες εὐθεῖες καὶ μιὰ ἄλλη εὐθεία, ἡ ὁποία νὰ τὶς τέμνη: α) καθέτως καὶ β) πλαγίως. Νὰ σημειώσετε γράμματα στὶς γωνίες ποὺ σχηματίζονται καὶ νὰ μετρήσετε μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο τὸ μέγεθος κάθε γωνίας χωριστά.

11. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ ὀρθὴ γωνία; Νὰ κατασκευάσετε ἀνὰ μιὰ γωνία 60^0, 45^0, 135^0 καὶ νὰ ὀνομάσετε τὴν κάθε μιά.

12. Τί λέγεται ἐπίπεδο σχῆμα καὶ ποιὰ ἐπίπεδα σχήματα γνωρίζετε;

13. Ποιὸ εὐθύγραμμο σχῆμα λέγεται τετράγωνο, ποιὸ ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο καὶ ποιὸ τραπέζιο;

14. Τί λέγεται πολύγωνο; Ἀπὸ ποῦ παίρνει τὸ ὄνομά του;

15. Τί λέγεται τρίγωνο; Ποιὰ εἴδη τριγώνου ἔχομε α) ἀνάλογα μὲ τὶς γωνίες τους καὶ β) ἀνάλογα μὲ τὴ σχέση ποὺ ἔχουν οἱ πλευρὲς μεταξύ τους.

16. Νὰ ἰχνογραφήσετε ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο καὶ νὰ φέρετε ἕνα ὕψος του. Σὲ τί διαιρεῖται τὸ τρίγωνο;

17. Νὰ ἰχνογραφήσετε ἕνα ὀρθογώνιο τραπέζιο καὶ νὰ φέρετε μιὰ διαγώνιό του. Τί εἴδους τρίγωνα θὰ προκύψουν; Πῶς θὰ τὸ ἐξακριβώσετε αὐτό;

18. Τί λέγεται περίμετρος τοῦ τετραγώνου καὶ πῶς βρίσκεται αὐτή;

19. Πῶς βρίσκομε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου, ὅταν γνωρίζωμε τὴν περίμετρο;

20. Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου;

21. Τί κάνομε, γιὰ νὰ βροῦμε τὴν περίμετρο τοῦ ὀρθογωνίου;

22. Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου;

23. Ἂν γνωρίζωμε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου καὶ τὸ μῆκος τῆς βάσεώς του, πῶς βρίσκομε τὸ ὕψος του;

24. Πῶς βρίσκομε τὸ μῆκος τῆς βάσεως ἑνὸς ὀρθογωνίου, ἂν γνωρίζωμε τὸ ἐμβαδόν του καὶ τὸ ὕψος του;

25. Τί λέγετε περίμετρος τριγώνου καὶ πῶς τὴ βρίσκομε;

26. Τί λέγεται ὕψος τοῦ τριγώνου;

27. Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου;

28. Ἂν γνωρίζωμε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου καὶ τὴ βάση του, πῶς βρίσκομε τὸ ὕψος του;

29. Πῶς βρίσκομε τὸ μῆκος τῆς βάσεως ἑνὸς τριγώνου, ὅταν γνωρίζωμε τὸ ἐμβαδόν του καὶ τὸ ὕψος του;

30. Τί λέγεται τραπέζιο καὶ ποιὸ εἶναι τὸ ὕψος του;

31. Πότε τὸ τραπέζιο λέγεται ἰσοσκελὲς καὶ πότε λέγεται ὀρθογώνιο;

32. Πῶς βρίσκομε τὴν περίμετρο τοῦ τραπεζίου;

33. Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου;

34. Τί λέγεται κανονικὸ πολύγωνο καὶ τί ἀπόστημα κανονικοῦ πολυγώνου;

35. Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου;

36. Πότε ἕνα πολύγωνο λέγεται ἐγγεγραμμένο;

37. Πῶς βρίσκομε τὸ μῆκος τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου;
38. Ὅταν γνωρίζωμε τὸ μῆκος τῆς περιφέρειας ἑνὸς κύκλου, πῶς βρίσκομε α) τὴ διάμετρό του καὶ β) τὴν ἀκτίνα του;
39. Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου;
40. Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέα;

Προβλήματα

1. Τὸ δάπεδο τῆς αἴθουσας μιᾶς τάξεως εἶναι τετραγωνικὸ καὶ κάθε πλευρά του ἔχει μῆκος 8,50 μέτρα. Νὰ βρεθῆ ἡ περίμετρός του.
2. Ὁ κῆπος ἑνὸς σχολείου εἶναι τετραγωνικὸς μὲ μῆκος πλευρᾶς 36,5 μ. Θέλουν νὰ τὸν περιφράξουν μὲ σύρμα, ποὺ τὸ μέτρο κοστίζει 15 δραχμές. Πόσα μέτρα σύρμα θὰ χρειαστοῦν καὶ πόσες δρχ. θὰ στοιχίση ἡ περίφραξη;
3. Ἕνα τετραγωνικὸ οἰκόπεδο ἔχει περίμετρο 876 μέτρα. Πόσο εἶναι τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς του;
4. Ἡ αὐλὴ τοῦ σχολείου εἶναι τετραγωνικὴ καὶ ἡ κάθε πλευρά της ἔχει μῆκος 36,50 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς αὐλῆς;
5. Ἕνα οἰκόπεδο, σχήματος ὀρθογωνίου, ἔχει μῆκος 145 μ. καὶ πλάτος 8 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;
6. Ἕνα ὀρθογώνιο κτῆμα ἔχει διαστάσεις 80 μ. καὶ 160 μ. Τί ἐμβαδὸν ἔχει α) σὲ τ. μέτρα καὶ β) σὲ στρέμματα;
7. Ἡ κατασκευὴ πατώματος ἀπὸ τσιμέντο (μωσαϊκὸ) κοστίζει 110 δρχ. τὸ τ. μ. Πόσο θὰ στοιχίση ἡ κατασκευὴ τοῦ πατώματος μιᾶς αἴθουσας μὲ διαστάσεις 7,5 μ. καὶ 12 μ.;
8. Ὅταν σπέρνουν τὸ σιτάρι ὑπολογίζουν ὅτι χρειάζονται κατὰ μέσο ὅρο 10 κιλὰ σπόρου γιὰ κάθε στρέμμα. Πόσα κιλὰ σπόρου χρειάζονται γιὰ τὴ σπορὰ κτήματος πλάτους 200 μέτρων καὶ μήκους 350 μέτρων;
9. Οἱ πλευρὲς τριγωνικοῦ κήπου ἔχουν μῆκος 27,50 μ., 13,50 μ. καὶ 20 μ. Πόσο θὰ στοιχίση ἡ περίφραξή του μὲ σύρμα, ποὺ στοιχίζει 18,50 δρχ. τὸ μέτρο;
10. Σ' ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο ἡ βάση εἶναι 2,5 ἑκατοστόμετρα καὶ ἡ μία ἀπὸ τὶς πλάγιες πλευρές του εἶναι 2,95 ἑκατοστόμετρα. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του;

11. Ἕνας κῆπος εἶναι τριγωνικός. Ἡ βάση του εἶναι 58,50 μ. καὶ τὸ ὕψος του 26,40 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

12. Ἑνὸς οἰκοπέδου, σχήματος ὀρθογωνίου τριγώνου, ἡ μία ἀπὸ τὶς κάθετες πλευρές του εἶναι 28,25 μ. καὶ ἡ ἄλλη 17,4 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

13. Ἀπὸ ἕνα ὀρθογώνιο οἰκόπεδο μήκους 54 μ. καὶ πλάτους 36 μ. πουλήθηκε τεμάχιο τριγωνικὸ μὲ βάση 48 μ., καὶ ὕψος 30 μ. Νὰ βρεθῇ: α) τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου καὶ β) τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος τοῦ οἰκοπέδου, ποὺ ἀπέμεινε.

14. Ἡ περίμετρος ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 60 μ. καὶ τὸ ὕψος του 10 μέτρα. Νὰ βρεθοῦν: α) οἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου καὶ β) τὸ ἐμβαδόν του.

15. Ἑνὸς κήπου, σχήματος ἰσοσκελοῦς τραπεζίου, οἱ παράλληλες πλευρὲς ἔχουν μῆκος 35,50 καὶ 17,50 μ., καὶ ἡ μία ἀπὸ τὶς μὴ παράλληλες πλευρὲς ἔχει μῆκος 12,50 μ. Πόσα μέτρα σύρμα θὰ χρειαστοῦν γιὰ τὴν περίφραξή του καὶ πόσο θὰ στοιχίση τὸ σύρμα, ἂν τὸ μέτρο του κοστίζη 16,50 δρχ.;

16. Ἡ στέγη μιᾶς ἀποθήκης ἔχει σχῆμα τραπεζίου μὲ μῆκος μεγάλης βάσεως 16,80 μ. καὶ μικρῆς βάσεως 7,20 μ. Τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου εἶναι 4,50 μέτρα. Θέλομε νὰ σκεπάσωμε τὴ στέγη αὐτὴ μὲ τσίγκο, τοῦ ὁποίου τὸ τ. μ. ἔχει 25 δρχ. Πόσο θὰ κοστίση ὁ τσίγκος;

17. Ἡ περίμετρος ἑνὸς ρόμβου ἰσοῦται μὲ τὴν περίμετρο ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἔχει μῆκος 12 μ. Πόσο εἶναι τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ ρόμβου;

18. Ἕνα ἀμπαζοὺρ ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 ἰσοσκελῆ τραπέζια. Οἱ παράλληλες πλευρὲς τῶν τραπεζίων αὐτῶν ἔχουν μῆκος 25 ἑκ. καὶ 35 ἑκατοστὰ τοῦ μ. καὶ ἡ μεταξύ τους ἀπόσταση εἶναι 15 ἑκατοστὰ τοῦ μ. Νὰ βρεθῇ ἡ συνολικὴ ἐπιφάνεια τοῦ ἀμπαζούρ.

19. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα ὀρθογώνιο τραπέζιο μὲ μήκη μεγάλης βάσεως 5,5 ἑκ., μικρῆς βάσεως 4,5 ἑκ. καὶ μὲ ὕψος 3 ἑκ. τοῦ μέτρου. Νὰ μετρήσετε ὕστερα τὴν τέταρτη πλευρά του καὶ νὰ ὑπολογίσετε α) τὴν περίμετρό του καὶ β) τὸ ἐμβαδόν του.

20. Ἡ ἀκτίνα τοῦ τροχοῦ ἑνὸς ποδηλάτου εἶναι 0,35 μ. Πόσο εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφέρειας τοῦ τροχοῦ; Καὶ πόσα μέτρα θὰ διανύση τὸ ποδήλατο, ἂν οἱ τροχοί του κάμουν 365 στροφές;

21. Ὁ τροχὸς ἑνὸς ποδηλάτου ἔχει διάμετρο ἕνα μέτρο καὶ

κάνει 120 στροφὲς στὸ πρῶτο λεπτὸ τῆς ὥρας (π). Πόσα χιλιόμετρα θὰ διανύση τὸ ποδήλατο σὲ μιὰ ὥρα καὶ 20 π.;

22. Οἱ τροχοὶ ἑνὸς αὐτοκινήτου κάνουν χίλιες στροφές, ὅταν τὸ αὐτοκίνητο διατρέξη 2512 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ ἀκτίνα κάθε τροχοῦ;

23. Ἡ διάμετρος κυκλικοῦ κήπου εἶναι 5 μέτρα. Πόσο εἶναι τὸ μῆκος τόξου 60^0;

24. Ἡ ἀκτίνα κυκλικοῦ ἁλωνιοῦ εἶναι 7,5 μ. Νὰ βρεθῆ πόσα μέτρα εἶναι τὸ μῆκος τόξου 30^0.

25. Στὸ γραφεῖο τοῦ σχολείου μας ὑπάρχει ἕνας κυκλικὸς καθρέφτης, μὲ ἀκτίνα 28 ἑκατοστὰ τοῦ μ. Νὰ βρῆτε α) τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του καὶ β) πόσο θὰ κοστίση ἡ ἐπαργύρωσή του πρὸς 40 λεπτὰ τῆς δραχμῆς τὸ τετραγ. ἑκατοστό;

26. Ἡ πλακόστρωση μιᾶς κυκλικῆς αὐλῆς, ποὺ ἔχει μῆκος περιφέρειας 50,24 μ., κόστισε 5024 δρχ. Πόσο κόστισε τὸ τ. μέτρο;

ΥΛΗ ΣΤ΄ ΤΑΞΕΩΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Ἐπιφάνεια

Γνωρίζομε ὅτι ἐπιφάνεια ἑνὸς σώματος εἶναι τὸ σύνολο τῶν σημείων, στὰ ὁποῖα περατοῦται (τελειώνει) τὸ σῶμα.

Ἡ ἐπιφάνεια ἔχει δύο διαστάσεις, τὸ **μῆκος** καὶ τὸ **πλάτος.**

Εἴδη ἐπιφανειῶν

α) Ἂς ἐξετάσωμε τὴν ἐπιφάνεια τοῦ μαυροπίνακα τῆς τάξεώς μας, πάνω στὴν ὁποία γράφομε. Παίρνομε μιὰ τεντωμένη κλωστή, ἡ ὁποία δίνει τὴν εἰκόνα τῆς εὐθείας γραμμῆς, καὶ τὴν τοποθετοῦμε πάνω στὴν ἐπιφάνεια αὐτή. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ τεντωμένη κλωστὴ (ἡ εὐθεία γραμμὴ) ἐφαρμόζει τελείως πάνω στὴν ἐπιφάνεια τοῦ πίνακα, ὁπωσδήποτε καὶ ἂν τοποθετηθῆ καὶ πρὸς ὅλες τὶς διευθύνσεις. Τὸ ἴδιο θὰ παρατηρήσωμε, ἂν πάνω στὴν ἐπιφάνεια αὐτὴ τοποθετήσωμε τὸ χάρακά μας.

Ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ λέγεται **ἐπίπεδη ἐπιφάνεια** ἢ ἁπλῶς **ἐπίπεδο.**

Ἑπομένως : *Ἐπίπεδη ἐπιφάνεια λέγεται ἡ ἐπιφάνεια, πάνω στὴν ὁποία ἐφαρμόζει τελείως καὶ πρὸς ὅλες τὶς διευθύνσεις ἡ εὐθεία γραμμή.*

Ἐπίπεδες ἐπιφάνειες εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πατώματος, τοῦ ὁμαλοῦ τοίχου, τοῦ φύλλου χαρτιοῦ, πάνω στὸ ὁποῖο γράφομε κ.τ.λ.

β) Ἂν μιὰ τεντωμένη κλωστὴ ἢ τὸ χάρακά μας τὰ ἀκουμπήσωμε στὴν ὑδρόγειο σφαίρα τοῦ σχολείου μας, θὰ δοῦμε ὅτι δὲν ἐφαρμόζουν παρὰ μόνο ἐλάχιστα καὶ σ' ἕνα μόνο σημεῖο τους. Αὐτὸ συμβαίνει, γιατὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ δὲν ἔχει κανένα ἐπίπεδο μέρος. Ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ λέγεται **καμπύλη ἐπιφάνεια.**

Ἄρα: *Καμπύλη ἐπιφάνεια λέγεται ἡ ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία δὲν ἔχει κανένα ἐπίπεδο μέρος.*

Καμπύλες ἐπιφάνειες εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αὐγοῦ, τοῦ πορτοκαλιοῦ, τῆς μπάλας κ.ἄ.

Σημείωση: Ἡ καμπύλη ἐπιφάνεια χαρακτηρίζεται ὡς **κυρτὴ** ἢ **κοίλη** ἀνάλογα μὲ τὸ ἂν βρισκόμαστε στὸ ἐξωτερικὸ ἢ τὸ ἐσωτερικό της.

γ) Ἂν παρατηρήσωμε ἕνα κουτὶ κιμωλίας, θὰ δοῦμε ὅτι ἡ ἐπιφάνειά του ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδα μέρη, πλὴν ὅμως τὰ μέρη αὐτὰ ὅλα μαζὶ δὲν ἀποτελοῦν ἕνα ἐπίπεδο. Ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ ὀνομάζεται **τεθλασμένη ἐπιφάνεια.**

Ὥστε: *Τεθλασμένη ἐπιφάνεια λέγεται ἡ ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδα μέρη, ἀλλὰ δὲν εἶναι ἐπίπεδη.*

Τεθλασμένες ἐπιφάνειες εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κουτιοῦ τῶν σπίρτων, τῆς πλάκας σαπουνιοῦ κ. ἄ.

δ) Ἡ ἐπιφάνεια τῆς γλάστρας, τοῦ ποτηριοῦ, τοῦ κουτιοῦ γάλακτος κ.ἄ. ἀποτελεῖται ἀπὸ καμπύλη ἐπιφάνεια καὶ ἀπὸ ἐπίπεδη. Γι' αὐτὸ ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ λέγεται **μεικτὴ ἐπιφάνεια.**

Ὥστε: *Μεικτὴ ἐπιφάνεια λέγεται ἡ ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ καμπύλα καὶ ἀπὸ ἐπίπεδα μέρη.*

2. Στερεὰ σχήματα—Γεωμετρικὰ στερεὰ

Γνωρίζομε ὅτι στὸ τετράγωνο, τὸ ὀρθογώνιο, τὸν κύκλο κλπ. ὅλα τὰ σημεῖα τους βρίσκονται στὸ ἴδιο ἐπίπεδο. Γι' αὐτὸ ὀνομάσαμε τὰ σχήματα αὐτὰ **ἐπίπεδα σχήματα**.

Τὰ σημεῖα ὅμως τοῦ κύβου, τῆς κασετίνας μας, τοῦ κουτιοῦ τῆς κιμωλίας κ. ἄ. δὲ βρίσκονται ὅλα μαζὶ στὸ ἴδιο ἐπίπεδο. Γι᾽ αὐτὸ ὀνομάζομε τὰ σχήματα αὐτὰ **στερεὰ σχήματα** ἢ **γεωμετρικὰ στερεά.**

Τὰ ἁπλούστερα γεωμετρικὰ στερεὰ θὰ ἐξετάσωμε ἐδῶ ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ γνωστό μας κύβο.

Ἐρωτήσεις

α. Τί λέγεται ἐπιφάνεια ἑνὸς σώματος;

β. Ποιὰ εἴδη ἐπιφάνειας ἔχομε; Νὰ δώσετε τὸν ὁρισμὸ κάθε εἴδους χωριστά.

γ. Ν᾽ ἀναφέρετε σώματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἐπιφάνεια ἐπίπεδη, καμπύλη, τεθλασμένη καὶ μεικτή.

δ. Τὸ στρογγυλὸ μολύβι σας τί ἐπιφάνεια ἔχει;

ε. Ὁ κάθε τοῖχος τῆς αἴθουσας τῆς τάξεώς σας τί ἐπιφάνεια ἔχει; Καὶ τί ἐπιφάνεια ἀποτελοῦν ὅλοι οἱ τοῖχοι μαζί;

στ. Κατὰ τί διαφέρει τὸ ἐπίπεδο σχῆμα ἀπὸ τὸ στερεὸ σχῆμα;

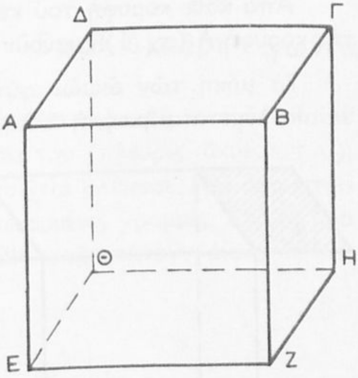
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΚΥΒΟΣ

1. Γεωμετρικὰ στοιχεῖα τοῦ κύβου

Τὸ στερεὸ σχῆμα, ποὺ παριστάνει τὸ σχῆμα 1, λέγεται **κύβος**.

Εὔκολα διακρίνομε ὅτι ὁ κύβος περικλείεται ἀπὸ 6 ἐπίπεδες ἐπιφάνειες, οἱ ὁποῖες λέγονται **ἕδρες τοῦ κύβου**. Οἱ 6 ἕδρες τοῦ κύβου ὅλες μαζὶ ἀποτελοῦν τὴν **ἐπιφάνειά του**. Οἱ γύρω γύρω 4 ἕδρες, οἱ ὁποῖες λέγονται καὶ **παράπλευρες ἕδρες**, ἀποτελοῦν τὴν **παράπλευρη ἐπιφάνεια τοῦ κύβου**. Ἡ ἕδρα, μὲ τὴν ὁποία στηρίζεται στὸ τραπέζι κ.τ.λ. ὁ κύβος, λέγεται **βάση** τοῦ κύβου. Βάση λέγεται καὶ ἡ ἀπέναντί της ἕδρα.



Σχ.1. Κύβος

Οἱ παράπλευρες ἕδρες τοῦ κύβου εἶναι κάθετες πάνω στὶς βάσεις του.

Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΑΔ, ΑΕ κ.τ.λ. (σχῆμα 1), τὰ ὁποῖα σχηματίζονται ἀπὸ τὴν τομὴ δύο γειτονικῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου λέγονται **ἀκμὲς** τοῦ κύβου. Ὁ κύβος ἔχει **12 ἀκμές**.

Ἂν μὲ τὸ ὑποδεκάμετρο μετρήσωμε τὶς ἀκμὲς τοῦ κύβου, βλέπομε ὅτι **οἱ ἀκμὲς τοῦ κύβου εἶναι ἴσες** μεταξύ τους.

Ἀλλὰ καὶ **οἱ ἕδρες τοῦ κύβου εἶναι ἴσες** μεταξύ τους. Αὐτὸ τὸ διαπιστώνομε, ἂν σκεπάσωμε μ' ἕνα φύλλο χαρτιοῦ μιὰ ὁποιαδήποτε ἕδρα τοῦ κύβου καὶ κόψωμε ὕστερα τὸ χαρτὶ αὐτὸ ἴσο μὲ τὴν ἕδρα ποὺ σκεπάσαμε. Ἂν μὲ τὸ χαρτὶ αὐτὸ δοκιμάσωμε ὅλες τὶς ἕδρες τοῦ κύβου, θὰ δοῦμε ὅτι αὐτὸ σκεπάζει ἀκριβῶς κάθε ἕδρα του.

Κάθε ἕδρα τοῦ κύβου ἔχει πλευρὲς ἴσες μεταξύ τους, ἐπειδὴ αὐτὲς εἶναι ἀκμὲς τοῦ κύβου.

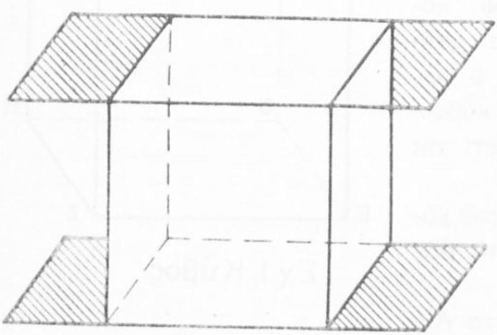
Οἱ ἀκμὲς τοῦ κύβου, τέμνονται ἀνὰ δύο συνεχόμενες καὶ σχηματίζουν γωνίες. Μὲ τὸ γνώμονα ἐξακριβώνομε ὅτι οἱ γωνίες αὐτὲς εἶναι ὀρθὲς καὶ σὰν ὀρθὲς εἶναι ἴσες μεταξύ τους.

Ἑπομένως : Οἱ ἀκμὲς τοῦ κύβου, οἱ ὁποῖες τέμνονται, εἶναι κάθετες μεταξύ τους. Ἀλλὰ εἴπαμε ὅτι εἶναι καὶ ἴσες. Συνεπῶς κάθε ἕδρα τοῦ κύβου εἶναι καὶ ἕνα τετράγωνο.

Κορυφὲς τοῦ κύβου εἶναι οἱ κορυφὲς τῶν γωνιῶν τῶν ἑδρῶν του. Ὁ κύβος ἔχει 8 κορυφές.

Ἀπὸ κάθε κορυφὴ τοῦ κύβου ἀρχίζουν τρεῖς ἀκμές· π.χ. ἀπὸ τὴν κορυφὴ Α (σχ. 1) ξεκινοῦν οἱ ἀκμὲς ΑΒ, ΑΔ, ΑΕ.

Τὰ μήκη τῶν ἀκμῶν αὐτῶν λέγονται **διαστάσεις τοῦ κύβου.** Ἡ μία λέγεται **μῆκος,** ἡ ἄλλη **πλάτος** ἢ πάχος καὶ ἡ τρίτη **ὕψος** ἢ βάθος. Οἱ διαστάσεις τοῦ κύβου, καθὼς καὶ κάθε στερεοῦ σώματος εἶναι τρεῖς : μῆκος, πλάτος, ὕψος.



Σχ. 2

Οἱ ἀπέναντι ἕδρες τοῦ κύβου εἶναι παράλληλες

Οἱ διαστάσεις τοῦ κύβου εἶναι ἴσες μεταξύ τους.

Ἂς ἐξετάσωμε τὶς ἀπέναντι ἕδρες τοῦ κύβου, π. χ. τὴν ἄνω καὶ τὴν κάτω ἕδρα (σχ. 2).

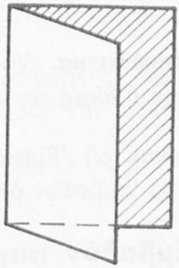
Παρατηροῦμε ὅτι αὐτὲς δὲν συναντιοῦνται, ὅσον καὶ ἂν τὶς προεκτείνωμε. Ἑπομένως: **οἱ ἀπέναντι ἕδρες τοῦ κύβου εἶναι παράλληλες.**

Ὁ κύβος ἔχει 6 ἕδρες, 12 ἀκμές, 8 κορυφὲς καὶ 24 ὀρθὲς γωνίες.

2. Πολύεδρο — Δίεδρη γωνία

Ὁ κύβος, καθὼς καὶ κάθε στερεὸ σῶμα ποὺ περικλείεται ἀπὸ ὅλα τὰ μέρη μὲ ἕδρες, λέγεται **πολύεδρο σῶμα.** Κάθε πολυέδρου ἑπομένως καὶ τοῦ κύβου, δύο γειτονικὲς ἕδρες τέμνονται καὶ σχηματίζουν μία γωνία, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἕδρες. Ἡ γωνία αὐτὴ λέγεται **δίεδρη** (σχ. 3).

Ἕνα μισοανοιγμένο βιβλίο, ἕνα φύλλο χαρτὶ τσακισμένο στὰ δύο μέρη μᾶς δίνουν τὴν εἰκόνα τῆς δίεδρης γωνίας.



Σχ. 3. Δίεδρη γωνία

Ἰχνογράφηση τοῦ κύβου

Γιὰ νὰ σχεδιάσωμε στὸ χαρτὶ ἢ στὸν πίνακα ἕναν κύβο καὶ γενικὰ ἕνα στερεὸ σῶμα, τοῦ ὁποίου δὲ βλέπομε ὅλα τὰ γεωμετρικὰ στοιχεῖα του (πλευρές, ἀκμὲς κ.τ.λ.), σχεδιάζομε μὲ συνεχεῖς γραμμὲς ὅσα στοιχεῖα βλέπομε, ἐνῶ ὅσα στοιχεῖα δὲ βλέπομε τὰ σχεδιάζομε μὲ διακεκομμένες γραμμές. Στὸ σχῆμα 1 οἱ διακεκομμένες γραμμὲς ΘΔ, ΘΕ, ΘΗ παριστάνουν ἀκμὲς κύβου, τὶς ὁποῖες δὲ βλέπομε.

Ἐρωτήσεις

α) Τί λέγεται κύβος; Ν' ἀναφέρετε σώματα μὲ σχῆμα κύβου.

β) Ποιὰ εἶναι τὰ γεωμετρικὰ στοιχεῖα τοῦ κύβου;

γ) Τί ἰδιότητα ἔχουν οἱ ἕδρες τοῦ κύβου, οἱ ἀκμές του, οἱ ἀπέναντι ἕδρες του;

δ) Τί λέγεται πολύεδρο καὶ τί λέγεται δίεδρη γωνία;

ε) Δεῖξτε μέσα στὴν αἴθουσα τῆς τάξεώς σας δίεδρες γωνίες.

3. Ἐμβαδὸν ἐπιφάνειας κύβου

α) Ἐμβαδὸν ὁλικῆς ἐπιφάνειας κύβου

Γνωρίζομε ὅτι ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου ἀποτελεῖται ἀπὸ τὶς 6 ἴσες ἕδρες του, καθεμιὰ ἀπὸ τὶς ὁποῖες εἶναι καὶ ἕνα τετράγωνο. **Ἑπομένως :**

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κύβου, πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς ἕδρας του ἐπὶ 6.

Παράδειγμα. *Νὰ βρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας κύβου, ποὺ ἡ ἀκμή του ἔχει μῆκος 25 ἑκατ. τοῦ μέτρου.*

Λύση. α) Ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας κύβου: 25 ἑκ. × 25 ἑκ. = 625 τ. ἑκ. β) Ἐμβαδὸν ὁλικῆς ἐπιφ. κύβου : 625 τ. ἑκ. × 6 = 3750 τ. ἑκ.

β) Ἐμβαδὸν παράπλευρης ἐπιφάνειας κύβου

Γνωρίζομε ἐπίσης ὅτι οἱ 4 παράπλευρες ἕδρες τοῦ κύβου ἀποτελοῦν τὴν παράπλευρη ἐπιφάνειά του. **Συνεπῶς :**

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τοῦ κύβου, πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς ἕδρας του ἐπὶ 4.

Παράδειγμα. *Ἡ ἀκμὴ ἑνὸς κύβου εἶναι 12 ἑκ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς του ;*

Λύση. α) Ἐμβ. μιᾶς ἕδρας κύβου : 12 ἑκ. × 12 ἑκ. = 144 τ. ἑκ.
β) Ἐμβ. παραπλ. ἐπιφ. κύβου : 144 τ. ἑ. × 4 = 576 τ. ἑκ.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

27. Ἡ ἀκμὴ ἑνὸς κυβικοῦ δοχείου εἶναι 45 ἑκ. Νὰ βρεθῆ : α) τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ δοχείου καὶ β) τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς του.

28. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς κύβου εἶναι 124,8 τετρ. παλάμες. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας του σὲ τετρ. ἑκατοστόμετρα;

29. Πόσα τετρ. μέτρα τσίγκου θὰ χρειαστοῦμε, γιὰ νὰ κατασκευάσωμε ἕνα δοχεῖο σχήματος κύβου μὲ ἀκμὴ 18,5 ἑκατ.;

30. Θέλομε νὰ χρωματίσωμε τοὺς 4 τοίχους τῆς αἴθουσας τῆς τάξεώς μας ποὺ ἔχει σχῆμα κύβου μὲ ἀκμὴ 4,25 μ. καθὼς καὶ τὴν ὀροφή της. Ἂν ὁ χρωματισμὸς στοιχίζη 16,30 δρχ. τὸ τ. μ., πόσο θὰ στοιχίση ὁ χρωματισμός της; (Τὰ κουφώματα δὲν ἀφαιροῦνται).

31. Γιὰ τὸ χρωματισμὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας κύβου μὲ ἀκμὴ 3 μέτρα πληρώσαμε 540 δρχ. Πόσο στοίχισε ὁ χρωματισμὸς κατὰ τετρ. μέτρο;

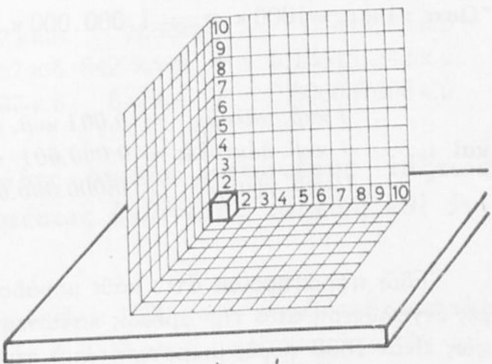
32. Τὸ συνολικὸ μῆκος τῶν ἀκμῶν μιᾶς ἀποθήκης, ποὺ ἔχει σχῆμα κύβου, εἶναι 72 μέτρα. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειάς της καὶ πόσο τῆς παράπλευρης;

4. Μέτρηση τοῦ ὄγκου ἑνὸς σώματος Μονάδες ὄγκου

Κάθε σῶμα μέσα στὴν αἴθουσά μας (θρανία, τραπέζι, καρέκλα, χάρτες, βιβλία κλπ.) καταλαμβάνει ἕνα χῶρο (ἕνα μέρος). Ἀλλὰ καὶ κάθε σῶμα (στὸ ἄπειρο διάστημα ποὺ μᾶς περιβάλλει), καταλαμβάνει ἕνα χῶρο. Τὸ χῶρο αὐτὸν τὸν ὀνομάζομε **ὄγκο τοῦ σώματος.**

Ὄγκος ὅμως ἑνὸς σώματος δὲ λέγεται μόνο ὁ χῶρος, ποὺ καταλαμβάνει τὸ σῶμα εἰς τὸ διάστημα, ἀλλὰ καὶ ὁ συγκεκριμένος ἀριθμός, ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴ σύγκριση τοῦ ὄγκου τοῦ σώματος μὲ ἕναν ἄλλο ὄγκο **σταθερὸ καὶ ὁρισμένο,** τὸν ὁποῖο ὀνομάζομε **μονάδα.**

Ὡς ἀρχικὴ μονάδα μετρήσεως τοῦ ὄγκου ἢ τῆς χωρητικότητας ἑνὸς σώματος χρησιμοποιοῦμε τὸ **κυβικὸ μέτρο.** Αὐτὸ εἶναι ἕνας κύβος, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ εἶναι ἴση μὲ ἕνα μέτρο (σχ. 4).



Σχ. 4 Κυβικὸ μέτρο

Ὑποδιαίρεση τοῦ κυβικοῦ μέτρου

Γιὰ νὰ βροῦμε τὶς ὑποδιαιρέσεις τοῦ κυβικοῦ μέτρου (κ. μ.), σκεπτόμαστε ὡς ἑξῆς:

Ἡ βάση τοῦ κ. μέτρου, ποὺ εἶναι, ὅπως γνωρίζομε, ἕνα τετραγωνικὸ μέτρο διαιρεῖται σὲ 100 τετραγωνικὲς παλάμες. Ἂν πάνω σὲ κάθε τετραγωνικὴ παλάμη τῆς βάσεως βάλωμε ἀπὸ μιὰ κυβικὴ παλάμη, βλέπομε ὅτι σχηματίζεται ἕνα στρῶμα ἀπὸ 100 κυβικὲς παλάμες. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ὕψος τοῦ κ. μέτρου εἶναι 10 παλάμες (1 μέτρο), γιὰ νὰ γεμίση τὸ κ.μ. θὰ χρειαστοῦν 10 ὅμοια στρώματα, δηλ. 10 φορὲς ἀπὸ 100 κυβικὲς παλάμες = 1000 κυβικὲς παλάμες.

Ἄρα τὸ κυβικὸ μέτρο ὑποδιαιρεῖται σὲ 1000 κυβ. παλάμες. Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο βρίσκομε ὅτι κάθε κυβικὴ παλάμη ὑποδιαιρεῖται σὲ 1000 κυβικὰ ἑκατοστόμετρα ἢ κυβικοὺς δακτύλους καὶ κάθε κυβικὸ ἑκατοστόμετρο σὲ 1000 κυβικὰ χιλιοστόμετρα ἢ κυβικὲς γραμμές. Ἔτσι ἔχομε:

1 κυβικὸ μέτρο = 1000 κυβ. παλάμες.
1 κυβικὴ παλάμη = 1000 κυβ. δάκτυλοι.
1 κυβ. δάκτυλος = 1000 κυβ. γραμμές.

Ὥστε : 1 κ.μ. = 1000 κ. π. = 1.000.000 κ. δ. = 1.000.000.000 κ. γρ.

καὶ

1 κυβ. παλάμη = 0,001 κυβ. μέτρου.
1 κυβ. δάκτυλος = 0,000.001 κυβ. μέτρου.
1 κυβ. γραμμὴ = 0,000.000.001 κυβ. μέτρου.

Ἐδῶ παρατηροῦμε ὅτι: κάθε μονάδα τοῦ ὄγκου εἶναι 1000 φορὲς μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ἀμέσως κατώτερή της μονάδα· ἢ ἀντιστρόφως εἶναι 1000 φορὲς μικρότερη ἀπὸ τὴν ἀμέσως ἀνώτερή της μονάδα.

5. Πῶς γράφομε καὶ πῶς διαβάζομε τοὺς ὄγκους

Τοὺς ὄγκους τοὺς γράφομε μὲ δεκαδικὸ ἀριθμό, καὶ τὸν διαβάζομε ὡς ἑξῆς: Διαβάζομε πρῶτα τὸ ἀκέραιο μέρος τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, ποὺ φανερώνει κυβικὰ μέτρα. Ὕστερα χωρίζομε τὸ δεκαδικὸ μέρος του σὲ τριψήφια τμήματα ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιά.

Τὸ πρῶτο μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴ τριψήφιο τμῆμα παριστάνει κυβικὲς παλάμες, τὸ δεύτερο κυβικοὺς δακτύλους καὶ τὸ τρίτο κυβικὲς γραμμές. Ἂν ἀπὸ τὸ τελευταῖο τμῆμα τοῦ δεκαδικοῦ μέρους λείπουν ἕνα ἢ δύο ψηφία, γράφομε στὶς κενὲς θέσεις ἕνα ἢ δύο μηδενικὰ ἀναλόγως, γιὰ νὰ συμπληρώσωμε τὸ τριψήφιο τμῆμα.

Ἔτσι οἱ παρακάτω ἀριθμοί, ποὺ παριστάνουν ὄγκους, διαβάζονται ὡς ἑξῆς:

α) 5,187235312 κ. μέτρ. διαβάζεται: 5 κ.μ. 187 κ.π. 235 κ.δ. 312 κ.γρ.

β) 0,165811 κ. μέτρ. διαβάζεται: 165 κ.π. 811 κ.δ.

γ) 8,24632171 κ. μέτρ. διαβάζεται: 8 κ.μ. 246 κ.π. 321 κ.δ. 710 κ.γρ.

δ) 15,0279136 κ. μέτρ. διαβάζεται: 15 κ.μ. 27 κ.π. 913 κ.δ. 600 κ.γρ.

Καὶ **ἀντιστρόφως**. Ἕνας ὄγκος, ποὺ μᾶς δίνεται σὲ κ. μέτρα, κυβ. παλάμες, κυβ. δακτύλους καὶ κυβικὲς γραμμές, μπορεῖ νὰ γραφῆ μὲ δεκαδικὸ ἀριθμό· π.χ.

α)	12 κ.μ.	413 κ.π.	625 κ.δ.		γράφεται :	12,413625 κ.μ
β)		136 κ.π.	457 κ.δ.	842 κ.γρ.	» :	0,136457842 κ.μ.
γ)			87 κ.δ.	8 κ.γρ.	» :	0,000087008 κ.μ.

6. Πῶς τρέπομε μονάδες ὄγκου κατώτερης τάξεως σὲ μονάδες τῆς ἀμέσως ἀνώτερης τάξεως καὶ ἀντιστρόφως

Ἀφοῦ κάθε μονάδα ὄγκου εἶναι 1000 φορὲς μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ἀμέσως κατώτερή της μονάδα ἢ 1000 φορὲς μικρότερη ἀπὸ τὴν ἀμέσως ἀνώτερή της μονάδα, εὔκολα καταλαβαίνομε ὅτι :

Γιὰ νὰ τρέψωμε μονάδες ὄγκου μιᾶς τάξεως σὲ μονάδες τῆς ἀμέσως κατώτερης τάξεως, πολλαπλασιάζομε τὶς μονάδες τῆς ὁρισμένης τάξεως ἐπὶ 1000.

Καὶ γιὰ νὰ τρέψωμε μονάδες ὄγκου μιᾶς τάξεως σὲ μονάδες τῆς ἀμέσως ἀνώτερης τάξεως, διαιροῦμε τὶς μονάδες τῆς ὁρισμένης τάξεως διὰ 1000.

Παράδειγμα 1. *Πόσες κυβικὲς παλάμες περιέχουν τὰ 25 κ. μέτρα ;*

Λύση. 25 κ.μ. = (25 × 1.000) κ.π. = 25.000 κ.π.

Παράδειγμα 2. *Πόσα κυβικὰ μέτρα μᾶς κάνουν οἱ 25000 κ. παλάμες ;*

Λύση. 25.000 κ.π. = (25.000 : 1.000) κ.μ. = 25 κ.μ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

33. Πόσα κυβ. ἑκατοστόμετρα (κυβ. δακτύλους) περιέχουν οἱ 2,5 κ. π.;

34. Τὰ 560 κ. χιλιοστόμετρα (κυβ. γραμμὲς) μὲ πόσους κ.δ. ἰσοδυναμοῦν;

35. Τὰ 800.000 κ. χιλιοστόμετρα νὰ τραποῦν σὲ κυβ. παλάμες.

36. Ὁ ὄγκος ἑνὸς κυβικοῦ δοχείου εἶναι 5,185 κ.μ. Μὲ πόσες κυβ. παλάμες ἰσοδυναμεῖ;

37. Νὰ γραφοῦν μὲ δεκαδικὸ ἀριθμὸ οἱ παρακάτω ὄγκοι :

α) 18 κ.μ. 25 κ.π. 142 κ.δ.

β) 6 κ.μ. 82 κ.π. 279 κ.δ. 63 κ.γρ.

γ) 362 κ.π. 75 κ.δ.

δ) 3 κ.π. 9 κ.δ. 8 κ.γρ.

ε) 15 κ.π. 35 κ.γρ.

7. Ὄγκος κύβου

Πρόβλημα. Ἡ αἴθουσα τῆς τάξεώς μας ἔχει σχῆμα κύβου μὲ ἀκμὴ 5 μέτρα. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της ;

Σκέψη. Πρῶτα θὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πατώματος. Τὸ πάτωμα εἶναι ἕνα τετράγωνο μὲ πλευρὰ 5 μ. Ἑπομένως τὸ ἐμβαδόν του εἶναι 5 μ. × 5 μ. = 25 τετρ. μέτρα.

Σὲ κάθε τ.μ. τοῦ πατώματος μποροῦμε νὰ τοποθετήσωμε ἀπὸ ἕνα κυβικὸ μέτρο. Τότε θὰ σχηματιστῇ ἕνα στρῶμα ἀπὸ 25 κυβικὰ μέτρα ποὺ θὰ ἔχῃ ὕψος 1 μέτρο. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ὕψος τῆς αἴθουσας (ἡ ἀκμὴ) εἶναι 5 μέτρα, γιὰ νὰ γεμίσῃ ἡ αἴθουσα θὰ χρειαστοῦν 5 ὅμοια στρώματα. Ἑπομένως ἡ αἴθουσα περιέχει :

25 κ.μ. × 5 = 125 κ.μ., τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τὸν ὄγκο της.

Ὁ ἀριθμὸς ὅμως 125 γίνεται ἀπὸ τὸν 5, ποὺ εἶναι ἡ ἀκμὴ τῆς αἴθουσας (τὸ ὕψος), ἀφοῦ τὸν πολλαπλασιάσωμε ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του δυὸ φορές· δηλ. 5 × 5 × 5 = 125.

Ἔτσι καταλήγομε στὸν ἑξῆς κανόνα :

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο ἑνὸς κύβου, πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος τῆς ἀκμῆς του ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του δυὸ φορές.

Δηλ. Ὄγκος κύβου = ἀκμὴ × ἀκμὴ × ἀκμή.

Παράδειγμα. *Νὰ βρεθῇ ὁ ὄγκος κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ ἔχει μῆκος 1,5 μ.*

Λύση. Ὄγκος κύβου = ἀκμὴ × ἀκμὴ × ἀκμὴ = 1,5 μ. × 1, 5μ. × 1,5 μ. = 3,375 κ.μ.

Προβλήματα

38. Νὰ βρεθῇ ὁ ὄγκος κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ εἶναι 2,30 μ.

39. Μιὰ δεξαμενὴ ἔχει σχῆμα κύβου μὲ ἀκμὴ 3,20 μ. Τὴ γεμίζομε νερὸ καὶ γιὰ κάθε κυβικὸ μέτρο νεροῦ πληρώνομε 4,5 δρχ. Πόσα χρήματα θὰ πληρώσωμε γιὰ τὸ νερό ;

40. Στὴν αἴθουσα τῆς τάξεώς μας, ποὺ ἔχει σχῆμα κύβου μὲ ἀκμὴ μήκους 6 μ., διδάσκονται 40 μαθητές. Πόσος ὄγκος ἀέρα ἀναλογεῖ στὸν κάθε μαθητή ;

41. Ἀπὸ μιὰ βρύση τρέχει 20 κ.μ. νερὸ τὴν ὥρα. Πόσες ὧρες χρειάζεται, γιὰ νὰ γεμίση κυβικὴ δεξαμενὴ μὲ ἀκμὴ μήκους 6 μέτρων;

42. Ἕνα κυβικὸ δοχεῖο ἔχει ἀκμὴ μήκους 0,75 μ. Πόσες λίτρες νεροῦ χωρεῖ; (Λίτρα εἶναι ἡ χωρητικότητα μιᾶς κυβικῆς παλάμης).

43. Ἡ ἀκμὴ ἑνὸς κυβικοῦ δοχείου εἶναι 1 μέτρο. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου καὶ πόσα χιλιόγραμμα (κιλὰ) λάδι χωρεῖ, ἂν τὸ εἰδικὸ βάρος τοῦ ἐλαίου (λαδιοῦ) εἶναι 0,912; (Βάρος = ὄγκος × εἰδικὸ βάρος).

Λύση. Ὄγκος δοχείου = 1 × 1 × 1 = 1 κ.μ.

Βάρος = ὄγκος × εἰδικὸ βάρος = 1 × 0,912 = 0,912 τόνοι.

Ὁ 1 τόνος ἔχει βάρος 1000 χιλιόγραμμα (κιλά), τὰ 0,912 τοῦ τόνου θὰ ἔχουν 1000 × 0,912 = 912 χιλιόγραμμα.

44. Μιὰ κυβικὴ δεξαμενὴ ἔχει ἀκμὴ 7,80 μ. Νὰ βρεθῆ α) ὁ ὄγκος της καὶ β) πόσους τόνους νερὸ χωρεῖ. (Εἰδικὸ βάρος νεροῦ ἀπεσταγμένου 1).

45. Μιὰ ἀποθήκη, σχήματος κύβου, ἔχει ὕψος 4 μέτρα. Πόσα κυβικὰ μέτρα σιτάρι χωρεῖ καὶ πόσο εἶναι τὸ βάρος τοῦ σιταριοῦ; α) σὲ τόνους καὶ β) σὲ κιλά, ἂν τὸ εἰδικὸ βάρος τοῦ σιταριοῦ εἶναι 1,56;

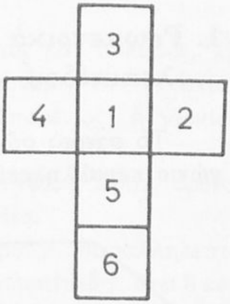
Σημείωση. Τὸ βάρος κάθε σώματος βρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸν ὄγκο του ἐπὶ τὸ εἰδικὸ βάρος του. (Ἂν ὁ ὄγκος μᾶς δίνεται σὲ κ.μ., τὸ βάρος θὰ φανερώνη τόνους· ἂν ὁ ὄγκος δίνεται σὲ κ. παλάμες, τὸ βάρος θὰ φανερώνη κιλά· καί, ἂν ὁ ὄγκος δίνεται σὲ κ. δακτύλους, τὸ βάρος θὰ φανερώνη γραμμάρια.)

Νὰ θυμᾶσαι ὅτι: 1 τόνος = 1000 κιλὰ = 1.000.000 γραμμάρια.

Πῶς κατασκευάζομε κύβο

Γιὰ νὰ κατασκευάσωμε ἕναν κύβο μὲ χαρτόνι, σχεδιάζομε πάνω στὸ χαρτόνι τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κύβου, δηλ. τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖο παρουσιάζεται, ὅταν ξεδιπλώσωμε τὶς ἕδρες του καὶ τὶς ἁπλώσωμε πάνω στὴν ἴδια ἐπίπεδη ἐπιφάνεια.

Τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ κύβου ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 ἴσα τετράγωνα σὲ σχῆμα σταυροῦ (σχ. 5). Ὕστερα μὲ τὸ ψαλίδι κόβομε τὸ σταυρὸ αὐτὸν ἀπὸ τὸ χαρτόνι καὶ μὲ ξυραφάκι χαράσσομε ἐλαφρὰ τὴν περίμετρο τοῦ τετραγώνου 1 καὶ τὴν εὐθεία, ποὺ συνδέει τὰ τετράγωνα 5 καὶ 6, ὥστε νὰ κλείνουν χωρὶς ὅμως νὰ ἀποκοποῦν.



Σχ. 5

Μετὰ κρατοῦμε πάνω στὸ τραπέζι τὸ τετράγωνο 1 καὶ στὶς πλευρές του ὑψώνομε τὰ τετράγωνα 2, 3, 4, καὶ 5, ὁπότε σχηματίζεται ἕνα κουτὶ ἀνοιχτὸ στὸ ἐπάνω μέρος.

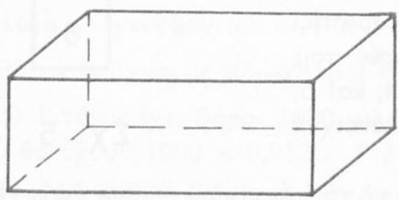
Τὸ κουτὶ αὐτὸ τὸ κλείνομε μὲ τὸ τετράγωνο 6 καὶ ἔχομε ἕτοιμον τὸν κύβο. Στὶς ἀκμὲς τοῦ κύβου κολλᾶμε ταινίες ἀπὸ χαρτί, γιὰ νὰ συνδεθοῦν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟ

1. Γεωμετρικὰ στοιχεῖα τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου

Τὸ στερεὸ σῶμα, ποὺ παριστάνει τὸ σχῆμα 6, λέγεται **ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο.** Τὸ κουτὶ τῶν σπίρτων, τὸ κουτὶ τῆς κιμωλίας, ἡ κασετίνα, οἱ πλάκες μερικῶν σαπουνιῶν ἔχουν σχῆμα ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου.



Σχ. 6

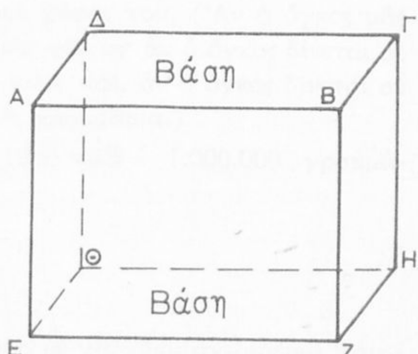
Ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο

Τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο περικλείεται, ὅπως καὶ ὁ κύβος, ἀπὸ 6 ἐπίπεδες ἐπιφάνειες, οἱ ὁποῖες λέγονται **ἕδρες** τοῦ παραλληλεπιπέδου.

Ἀπ' αὐτὲς οἱ ἀπέναντι ἕδρες εἶναι ἀνὰ δύο ἴσες καὶ παράλληλες. Τὸ σύνολο τῶν ἑδρῶν ἀποτελεῖ τὴν **ὁλικὴ ἐπιφάνεια** τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου.

Ἡ ἕδρα μὲ τὴν ὁποία στηρίζεται τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο καὶ ἡ ἀπέναντί της ἕδρα λέγονται **βάσεις.**

Συνήθως ὡς βάσεις παίρνομε τὶς δυὸ μεγαλύτερες ἕδρες (σχῆμα 7). Οἱ ὑπόλοιπες 4 ἕδρες λέγονται **παράπλευρες ἕδρες.** Αὐτὲς



Σχ. 7

εἶναι κάθετες πάνω στὶς βάσεις καὶ ἀποτελοῦν τὴν παράπλευρη ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου.

Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΑΔ, ΑΕ κ.τ.λ., τὰ ὁποῖα γίνονται ἀπὸ τὴν τομὴ δύο γειτονικῶν ἑδρῶν τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου, λέγονται **ἀκμὲς** (σχ. 7).

Τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἔχει, ὅπως καὶ ὁ κύβος, 12 ἀκμές. Μὲ τὴ βοήθεια τοῦ γνώμονα διαπιστώνομε, ὅτι οἱ ἀκμὲς ποὺ τέμνονται, εἶναι κάθετες μεταξύ τους καὶ ἑπομένως ἡ γωνία, τὴν ὁποία σχηματίζουν, εἶναι ὀρθή.

Ὅλες οἱ γωνίες τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου εἶναι ὀρθές. **Τὸ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδο ἔχει 24 ὀρθὲς γωνίες.**

Οἱ κορυφὲς τῶν γωνιῶν τῶν ἑδρῶν τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου εἶναι καὶ κορυφές του. Τὸ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδο **ἔχει 8 κορυφές.** Ἀπὸ κάθε κορυφή του ἀρχίζουν τρεῖς ἀκμές. Π.χ. ἀπὸ τὴν κορυφὴ Α (σχ. 7) ἀρχίζουν οἱ ἀκμὲς ΑΒ, ΑΔ καὶ ΑΕ. Τὰ μήκη τῶν ἀκμῶν αὐτῶν λέγονται διαστάσεις τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου. Ἡ μιὰ ἀπ' αὐτές, συνήθως ἡ μεγαλύτερη, λέγεται **μῆκος,** ἡ ἄλλη **πλάτος** ἢ πάχος καὶ ἡ τρίτη **ὕψος** ἢ βάθος.

Ἰχνογράφηση τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου

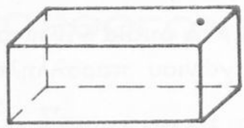
Τὸ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδο τὸ ἰχνογραφοῦμε ὅπως καὶ τὸν κύβο. Δηλ. ὅσα στοιχεῖα (ἕδρες, ἀκμές, γωνίες) βλέπομε, τὰ παριστάνομε μὲ συνεχεῖς γραμμές, ἐνῶ ὅσα δὲ βλέπομε, τὰ παριστάνομε μὲ διακεκομμένες γραμμὲς (σχ. 7).

2. Ἐμβαδὸν ἐπιφάνειας ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου

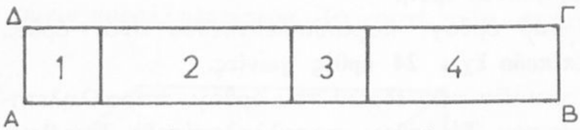
α) Ἐμβαδὸν παράπλευρης ἐπιφάνειάς του

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: Μὲ φύλλο χαρτὶ σκεπάζομε ἀκριβῶς τὶς 4 παράπλευρες ἕδρες τῆς κασετίνας μας (σχ. 8), ποὺ ἔχει σχῆμα ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου.

Ὕστερα ἁπλώνομε τὸ φύλλο αὐτὸ πάνω στὸ τετράδιό μας καὶ βλέπομε ὅτι αὐτὸ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου (σχ. 9). Τὸ ὀρθογώνιο αὐτὸ ΑΒΓΔ ἔχει βάση τὴν ΑΒ καὶ ὕψος τὴν ΑΔ. Μετρᾶμε ἔπειτα μὲ τὸ ὑποδεκάμετρό μας καὶ παρατηροῦμε, ὅτι ἡ βάση ΑΒ τοῦ ὀρθογωνίου ἰσοῦται μὲ τὴν περίμετρο τῆς βάσεως τῆς κασετίνας μας, δηλ. τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου.



Σχ. 8. Κασετίνα



Σχ. 9. Παράπλευρη ἐπιφάνεια ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου

Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τῆς κασετίνας, ἡ ὁποία ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου, θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ. Καί, ὅπως γνωρίζομε, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τὸ βρίσκομε, ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸ μῆκος τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἑπομένως: *Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας ἑνὸς ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου, πολλαπλασιάζομε τὴν περίμετρο τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του μετρημένα μὲ τὴν ἴδια μονάδα μετρήσεως.*

Δηλ. Ἐμβ. παραπλ. ἐπιφ. ὀρθογ. παραλληλεπ. = περίμ. βασ. × ὕψος.

Παράδειγμα. *Μία πλάκα σαπούνι, σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἔχει μῆκος 20 ἐκ., πλάτος 8 ἐκ. καὶ ὕψος 5 ἐκ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς της;*

Λύση. Περίμετρος βάσεως = 20 + 20 + 8 + 8 = 56 (ἐκ.)
Ἐμβ. παραπλ. ἐπιφαν. = περίμ. βάσ. × ὕψος = 56 × 5 = 280 τ. ἐκ.

β) Ἐμβαδὸν ὁλικῆς ἐπιφάνειας ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου

Πρόβλημα. *Τὸ κουτὶ τῆς κιμωλίας, σχήματος ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου, ἔχει μῆκος 25 ἑκ., πλάτος 12 ἑκ. καὶ ὕψος 9 ἑκ. Νὰ βρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κουτιοῦ.*

Σκέψη. Ἀφοῦ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν παράπλευρη ἐπιφάνειά του καὶ ἀπὸ τὶς δύο βάσεις του, εὔκολα ἐννοοῦμε ὅτι θὰ πρέπει νὰ βροῦμε: α) τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς του, ὅπως εἴδαμε παραπάνω, καὶ β) τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεών του. Καὶ ὕστερα νὰ προσθέσωμε τὰ δύο ἐμβαδά. Οἱ βάσεις του ἔχουν σχῆμα ὀρθογωνίου καὶ εἶναι ἴσες. Ἑπομένως ἀρκεῖ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς βάσεως.

Καὶ τὸ βρίσκομε, ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸ μῆκος τοῦ ὀρθογωνίου (βάση) ἐπὶ τὸ πλάτος του (ὕψος).

Λύση. α) Περίμετρος βάσεως $= 25 + 25 + 12 + 12 = 74$ ἑκ.

β) Ἐμβ. παραπλ. ἐπιφ. = Περίμ. βάσ. × ὕψος $= 74 \times 9 =$
$= 666$ τ. ἑκ.

γ) Ἐμβ. μιᾶς βάσεως $= 25 \times 12 = 300$ τ. ἑκ.

Ἄρα: Ἐμβ. ὁλικῆς ἐπιφάνειας $= 666 + 300 + 300 = 1266$ τ.ἑκ.

Ὥστε: *Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, προσθέτομε στὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς του τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεών του.*
Δηλ. Ἐμβ. ὁλικ. ἐπιφ. = Ἐμβ. παρ. ἐπιφ. + ἐμβ. 2 βασ.

Ἐρωτήσεις

α) Ποιὰ εἶναι τὰ στοιχεῖα τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου;
β) Σὲ τί μοιάζει μὲ τὸν κύβο καὶ σὲ τί διαφέρει ἀπ' αὐτόν;

γ) Δεῖξτε στὴν κασετίνα σας δυὸ ἴσες καὶ παράλληλες ἕδρες της, δυὸ ἕδρες κάθετες πρὸς τὴ βάση, καθὼς καὶ τὶς διαστάσεις τῆς κασετίνας.

δ) Μὲ ἕνα μέτρο μετρῆστε τὶς διαστάσεις τῆς αἴθουσας τῆς τάξεώς σας.

ε) Μὲ τὴ βοήθεια τοῦ γνώμονα νὰ βρῆτε τί εἴδους γωνίες ἔχει ἡ κασετίνα σας.

στ) Πῶς βρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου καὶ πῶς τῆς ὀλικῆς ἐπιφάνειάς του;

Προβλήματα

46. Ἡ αἴθουσα τῆς ΣΤ΄ τάξεως ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου μὲ μῆκος 8 μ., πλάτος 5 μ. καὶ ὕψος 3 μ. Νὰ βρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς της.

47. Τὸ μῆκος ἑνὸς δωματίου σχήματος ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου εἶναι 5 μ., τὸ πλάτος του 4 μ. καὶ τὸ ὕψος του 3 μ. Ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφάνειάς του ;

48. Μιὰ στήλη (κολόνα), σχήματος ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου, ἔχει ὕψος 4 μ. καὶ ἡ βάση της ἔχει διαστάσεις 0,50 μ. καὶ 0,40 μ. Νὰ βρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφάνειάς της.

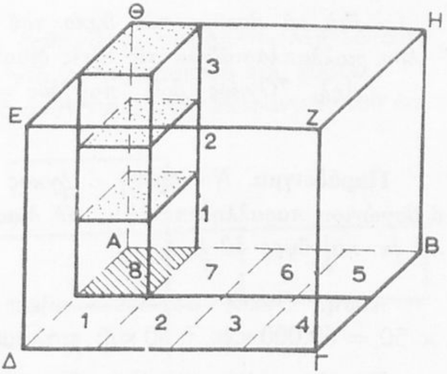
49. Μιὰ ἄλλη στήλη, μὲ τὸ ἴδιο σχῆμα, ἔχει βάση τετράγωνο μὲ πλευρὰ 0,50 μ. Τὸ ὕψος τῆς στήλης εἶναι 4,5 μέτρα. Νὰ βρεθῆ α) τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς της καὶ β) τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφάνειάς της.

50. Ἕνα σιδερένιο δοχεῖο (ντεπόζιτο), σχήματος ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου, ἔχει μῆκος 2,5 μ., πλάτος 1,20 μ. καὶ ὕψος 0 90 μ., καὶ θέλομε νὰ τοῦ χρωματίσωμε ἐξωτερικῶς ὅλες τὶς ἕδρες. Πόσο θὰ πληρώσωμε, ἂν ὁ ἐλαιοχρωματιστὴς ζητῆ 16 δρχ. τὸ τετραγωνικὸ μέτρο;

3. Ὄγκος ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου

Πρόβλημα. *Ποιὸς εἶναι ὁ ὄγκος ἑνὸς δωματίου μήκους 4 μ., πλάτους 2 μ. καὶ ὕψους 3 μ. ; (σχ. 10).*

Σκέψη. Ἐπειδὴ τὸ δωμάτιο ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου καὶ τὸ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδο μοιάζει πολὺ μὲ τὸν κύβο, θὰ ἐργαστοῦμε ὅπως ἐργαστήκαμε, γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τοῦ κύβου.



Σχ. 10

Ὄγκος ὀρθογ. παραλληλ/δου

Θὰ βροῦμε δηλ. τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ δωματίου. Αὐτὸ εἶναι 4 × 2 = 8 τ. μέτ. Ἂν πάνω σὲ κάθε τ.μ. τῆς βάσεως βάλωμε ἀπὸ ἕνα κυβ. μέτρο, θὰ σχηματιστῆ πάνω στὸ πάτωμα τοῦ δωματίου ἕνα στρῶμα ἀπὸ 8 κυβικὰ μέτρα, ὕψους 1 μέτρου (σχ. 10). Καί, γιὰ νὰ γεμίση τὸ δωμάτιο, θὰ χρειαστοῦν 3 ὅμοια στρώματα, γιατὶ 3 μ. εἶναι τὸ ὕψος τοῦ δωματίου.

Ἑπομένως τὸ δωμάτιο θὰ περιλάβη 8 × 3 = 24 κ.μ.

Ὁ ἀριθμὸς 24 κ.μ. ἀποτελεῖ τὸν ὄγκο τοῦ δωματίου ἢ τὸν ὄγκο τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου. **Ἑπομένως :**

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου, πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Δηλαδή : Ὄγκος ὀρθογ. παραλληλεπιπ. = ἐμβ. βάσ. × ὕψος.

Τὸ ἐμβαδὸν ὅμως τῆς βάσεως τὸ βρίσκομε, ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος της, ποὺ μαζὶ μὲ τὸ ὕψος ἀποτελοῦν τὶς τρεῖς διαστάσεις τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου.

Γι' αὐτὸ ὁ κανόνας, ποὺ μᾶς δείχνει πῶς βρίσκομε τὸν ὄγκο τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου μπορεῖ νὰ διατυπωθῆ καὶ ὡς ἑξῆς :

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου, πολλαπλασιάζομε τὶς τρεῖς διαστάσεις του.

Δηλ. Ὄγκος ὀρθ. παρ/δου = μῆκος × πλάτος × ὕψος.

Παράδειγμα. *Νὰ βρεθῇ ὁ ὄγκος δοχείου πετρελαίου, σχήματος ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου, μὲ διαστάσεις: μῆκος 40 ἑκ., πλάτος 30 ἑκ. καὶ ὕψος 50 ἑκ.*

Λύση. Ὄγκος δοχείου = μῆκος × πλάτος × ὕψος = 40 × 30 × 50 = 60.000 κ.ἑκ. ἢ 60 κυβ. παλάμες.

Σημείωση. Ὑπενθυμίζομε ὅτι καὶ οἱ τρεῖς διαστάσεις πρέπει νὰ μετριοῦνται μὲ τὴν ἴδια μονάδα.

Προβλήματα

51. Μετρῆστε τὶς διαστάσεις τῆς αἴθουσας τῆς τάξεώς σας, σχήματος ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου, καὶ ὑπολογίστε πόσος ὄγκος ἀέρα ἀναλογεῖ σὲ κάθε μαθητὴ τῆς τάξεώς σας. (Προσέξτε· ἐκτὸς ἀπὸ τὶς διαστάσεις τί ἄλλο θὰ σᾶς χρειαστῇ;)

52. Μιὰ αἴθουσα, σχήματος ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου, ἔχει μῆκος 6,50 μ., πλάτος 5,40 μ. καὶ ὕψος 3 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της;

53. Κτίστης χτίζει τοῖχο, σχήματος ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου, μήκους 56,34 μ., πάχους 0,40 μ. καὶ ὕψους 1,20 μ. Πόσα χρήματα θὰ πάρῃ γιὰ τὴν ἐργασία του, ἂν κάθε κυβικὸ μέτρο τιμᾶται 84 δραχμές;

54. Μιὰ πλατεία, σχήματος ὀρθογωνίου, μήκους 80 μ. καὶ πλάτους 50 μ., θέλομε νὰ τὴ στρώσωμε μὲ χαλίκια σὲ πάχος 0,12 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα χαλίκια χρειαζόμαστε;

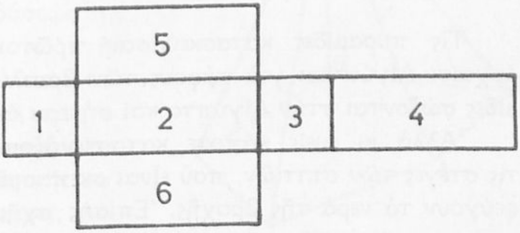
55. Γιὰ τὴν κατασκευὴ τοῦ πατώματος ἑνὸς δωματίου ἀγοράσαμε 25 σανίδες, σχήματος ὀρθογών. παραλληλεπιπέδου, μὲ μῆκος 2,65 μ., πλάτος 0,30 μ. καὶ πάχος 0,02 μ. Ἂν ἡ ξυλεία αὐτὴ τιμᾶται 8.000 δρχ. τὸ κυβικὸ μέτρο, πόσα χρήματα πληρώσαμε;

56. Ἕνα δοχεῖο (ντεπόζιτο), σχήματος ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου, μὲ μῆκος 1,40 μ., πλάτος 0,50 μ. καὶ ὕψος 0,80 μ., εἶναι γεμάτο λάδι. Πόσα κιλὰ λάδι περιέχει; (Εἰδικὸ βάρος λαδιοῦ 0,912).

Κατασκευὴ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου

Γιὰ νὰ κατασκευάσωμε ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἀπὸ χαρτόνι, ἐργαζόμαστε ὅπως καὶ γιὰ τὴν κατασκευὴ τοῦ κύβου.

Σχηματίζομε στὸ χαρτόνι τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφάνειας τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου, ὅπως φαίνεται στὸ σχῆμα 11. Μὲ τὸ ψαλίδι κόβομε αὐτὸ ἀπὸ τὸ χαρτόνι. Ἔπειτα μὲ ξυραφάκι χαράσσομε ἐλαφρὰ τὴν περίμετρο τοῦ ὀρθογωνίου 2 καὶ τὴν εὐθεία, ποὺ συνδέει τὰ ὀρθογώνια 3 καὶ 4.



Σχ.11

Ἀνάπτυγμα ὀρθογ. παρ/δου

Ὕστερα στηρίζομε πάνω στὸ τραπέζι τὸ ὀρθογώνιο 2 καὶ ὑψώνομε τὰ ὀρθογώνια 1, 3, 5, 6. Ἔτσι ἔχομε ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἀνοιχτὸ στὸ ἐπάνω μέρος, ποὺ τὸ κλείνομε μὲ τὸ ὀρθογώνιο 4. Στὶς ἀκμὲς τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου κολλᾶμε χαρτί, γιὰ νὰ συνδεθοῦν.

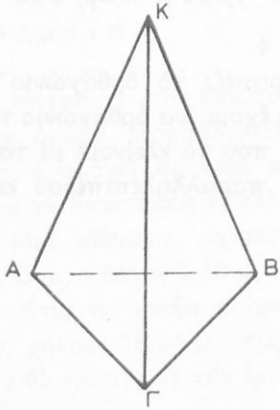
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

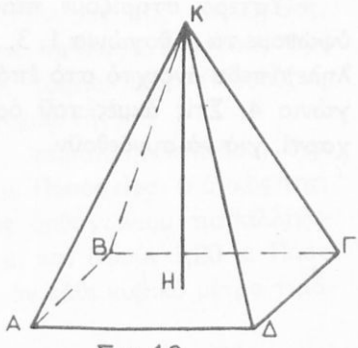
ΠΥΡΑΜΙΔΕΣ

1. Γεωμετρικὰ στοιχεῖα τῆς πυραμίδας

Τὶς πυραμίδες κατασκεύασαν πρῶτοι, ὅπως γνωρίζομε, οἱ ἀρχαῖοι Αἰγύπτιοι γιὰ τάφους τῶν βασιλέων τους. Τέτοιες πυραμίδες σώζονται στὴν Αἴγυπτο καὶ σήμερα ἀκόμη.

Ἀλλὰ κι ἐμεῖς κάποτε κατασκευάζομε σὲ σχῆμα πυραμίδας τὶς στέγες τῶν σπιτιῶν, ποὺ εἶναι σκεπασμένες μὲ κεραμίδια, γιὰ νὰ φεύγουν τὰ νερὰ τῆς βροχῆς. Ἐπίσης σχῆμα πυραμίδας ἔχουν μερικὰ μνημεῖα καὶ ἀναμνηστικὲς στῆλες.





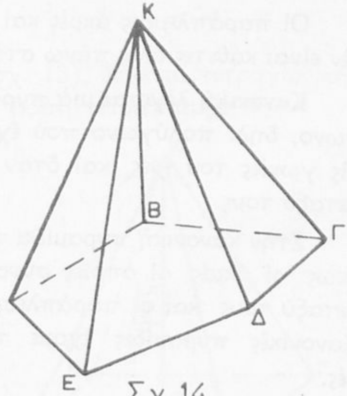
Σχ. 13

Σχ.12. Τριγωνικὴ πυραμίδα   Τετραγωνικὴ πυραμίδα

Τὰ στερεὰ σώματα, ποὺ εἰκονίζονται ἐδῶ (σχ. 12, 13, 14), εἶναι πυραμίδες. Καθὼς βλέπομε, κάθε μιὰ ἀπὸ τὶς πυραμίδες αὐτές, περικλείεται ἀπὸ ἐπίπεδες ἐπιφάνειες, οἱ ὁποῖες λέγονται ἕδρες τῆς πυραμίδας. Ἡ ἕδρα, μὲ τὴν ὁποία στηρίζεται ἡ πυραμίδα, λέγεται **βάση** τῆς πυραμίδας.

Ἡ βάση τῆς πυραμίδας μπορεῖ νὰ εἶναι ὁποιοδήποτε εὐθύγραμμο σχῆμα: τρίγωνο, τετράπλευρο, πεντάγωνο κ.λπ. Ἀπὸ τὸ σχῆμα τῆς βάσεώς της παίρνει ἡ πυραμίδα καὶ τὴν ὀνομασία της: τριγωνικὴ πυραμίδα, τετραγωνικὴ ἢ καὶ τετραπλευρική, πενταγωνικὴ κ.λπ.

Οἱ ὑπόλοιπες ἕδρες τῆς πυραμίδας, πλὴν τῆς βάσεως, λέγονται **παράπλευρες ἕδρες** καὶ ἀποτελοῦν τὴν **παράπλευρη ἐπιφάνεια** τῆς πυραμίδας.



Σχ. 14

Πενταγωνικὴ πυραμί

Κάθε παράπλευρη ἕδρα ἔχει σχῆμα τριγώνου μὲ βάση μιὰ πλευρὰ τῆς βάσεως τῆς πυραμίδας. Ἑπομένως οἱ παράπλευρες ἕδρες κάθε πυραμίδας εἶναι ὅσες οἱ πλευρὲς τῆς βάσεως.

Οἱ παράπλευρες ἕδρες τῆς πυραμίδας συναντιοῦνται ὅλες σὲ ἕνα σημεῖο, ποὺ βρίσκεται ἔξω ἀπὸ τὴ βάση. Τὸ σημεῖο αὐτὸ λέγεται **κορυφὴ τῆς πυραμίδας.**

Ὥστε :

Πυραμίδα *λέγεται τὸ πολύεδρο, ποὺ ἔχει βάση ἕνα ὁποιοδήποτε εὐθύγραμμο σχῆμα καὶ παράπλευρες ἕδρες τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάση τὶς πλευρὲς τῆς βάσεως τῆς πυραμίδας καὶ μιὰ κοινὴ κορυφή, ποὺ βρίσκεται ἔξω ἀπὸ τὴ βάση.*

Ἡ ἀπόσταση τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδας ἀπὸ τὴ βάση της λέγεται **ὕψος τῆς πυραμίδας.**

Ἀκμὲς τῆς πυραμίδας λέγονται τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, στὰ ὁποῖα τελειώνει κάθε ἕδρα της. Διακρίνομε **παράπλευρες ἀκμὲς** τῆς πυραμίδας καὶ **ἀκμὲς τῆς βάσεως της.**

Οἱ παράπλευρες ἀκμὲς καὶ οἱ παράπλευρες ἕδρες τῆς πυραμίδας δὲν εἶναι κάθετες ὅλες πάνω στὴ βάση της.

Κανονική λέγεται μιὰ πυραμίδα, ὅταν ἔχη βάση κανονικὸ πολύγωνο, δηλ. πολύγωνο ποὺ ἔχει ὅλες τὶς πλευρές του ἴσες καὶ ὅλες τὶς γωνίες του ἴσες, καὶ ὅταν οἱ παράπλευρες ἀκμές της εἶναι ἴσες μεταξύ τους.

Στὴν κανονικὴ πυραμίδα τὸ ὕψος περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρο τῆς βάσεως· οἱ ἀκμές, οἱ ὁποῖες συναντιοῦνται στὴν κορυφή της, εἶναι ἴσες μεταξύ τους καὶ οἱ παράπλευρες ἕδρες εἶναι ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἴσα. Κανονικὲς πυραμίδες ἔχομε τριγωνικές, τετραγωνικές, πολυγωνικές.

ΙΧΝΟΓΡΑΦΗΣΗ ΠΥΡΑΜΙΔΑΣ

Γιὰ νὰ ἰχνογραφήσωμε πυραμίδα, σχηματίζομε πρῶτα τὴ βάση της· ἔπειτα ἀπὸ ἕνα σημεῖο, ποὺ βρίσκεται ἔξω ἀπὸ τὴ βάση (κορυφή), φέρομε εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ ὁποῖα ἑνώνουν τὸ σημεῖο αὐτὸ μὲ τὶς κορυφὲς τῶν γωνιῶν τῆς βάσεως. Τὶς ἀκμὲς τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν τῆς πυραμίδας, τὶς ὁποῖες δὲ βλέπομε, τὶς σχηματίζομε μὲ διακεκομμένα εὐθύγραμμα τμήματα.

Ἐρωτήσεις

α) Τί λέγεται πυραμίδα καὶ ποιὰ τὰ γεωμετρικὰ στοιχεῖα της;

β) Τί λέγεται βάση τῆς πυραμίδας, τί κορυφὴ καὶ τί ὕψος της;

γ) Τί σχῆμα ἔχουν οἱ παράπλευρες ἕδρες τῆς πυραμίδας;

δ) Τί σχῆμα ἔχει ἡ βάση τῆς πυραμίδας;

ε) Ἀπὸ ποῦ παίρνουν τὴν ὀνομασία τους οἱ πυραμίδες;

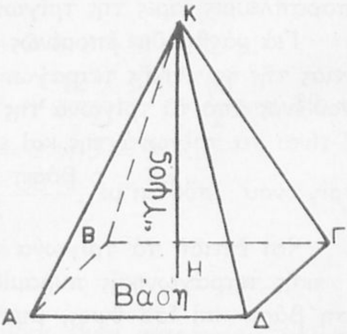
στ) Τί θέση ἔχουν οἱ παράπλευρες ἕδρες μιᾶς πυραμίδας ὡς πρὸς τὴ βάση της;

ζ) Τί λέγεται κανονικὴ πυραμίδα καὶ ποιὰ εἶναι τὰ ἰδιαίτερα γνωρίσματά της;

2. Τετραγωνική πυραμίδα

Ἡ πυραμίδα ποὺ βλέπομε ἐδῶ (σχ. 15), λέγεται τετραγωνικὴ ἢ τετραπλευρικὴ πυραμίδα, γιατὶ ἔχει βάση τετράπλευρο.

Ἡ τετραγωνικὴ πυραμίδα περικλείεται ἀπὸ 5 ἕδρες, δηλ. ἀπὸ τὴν ἕδρα τῆς βάσεως, ἡ ὁποία εἶναι τετράπλευρο, καὶ ἀπὸ τὶς 4 ἕδρες τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς της, οἱ ὁποῖες εἶναι τρίγωνα καὶ συναντιοῦνται σ' ἕνα σημεῖο, ποὺ λέγεται κορυφὴ τῆς πυραμίδας. Καὶ οἱ 5 ἕδρες μαζὶ ἀποτελοῦν τὴν ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδας.



Σχ. 15

Στὴν τετραγωνικὴ πυραμίδα διακρίνομε τὶς 4 παράπλευρες ἀκμές της καὶ τὶς 4 ἀκμὲς τῆς βάσεώς της. Ἔχει δηλ. αὐτὴ 8 ἀκμές, 8 δίεδρες γωνίες καὶ 5 κορυφές· δηλ. τὴν κυρίως κορυφὴ τῆς πυραμίδας καὶ τὶς 4 τῆς βάσεως.

Ὕψος τῆς τετραγωνικῆς πυραμίδας λέγεται ἡ ἀπόσταση τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδας ἀπὸ τὴ βάση της.

Ἡ τετραγωνικὴ πυραμίδα εἶναι **κανονικὴ πυραμίδα,** ὅταν 1) ἡ βάση της εἶναι κανονικὸ πολύγωνο, δηλαδὴ τετράγωνο καὶ 2) οἱ παράπλευρες ἀκμές της εἶναι ἴσες μεταξύ τους, δηλαδὴ ἔχῃ τὶς παράπλευρες ἕδρες της τρίγωνα ἰσοσκελῆ καὶ ἴσα μεταξύ τους.

Σημείωση. Τὸ σχῆμα τῆς κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδας τὸ βλέπομε σὲ μερικὰ μνημεῖα, ἀναμνηστικὲς στῆλες καὶ κωδωνοστάσια ἐκκλησιῶν. Στὴν Αἴγυπτο, στὴν περιοχὴ τῆς Γκίζης νοτιοδυτικὰ τοῦ Καΐρου, βρίσκεται ἡ μεγάλη πυραμίδα τοῦ Χέοπος. Αὐτὴ ἔχει βάση τετράγωνο μὲ μῆκος πλευρᾶς 227 μέτρα καὶ ὕψος 138 μέτρα.

α) Ἐμβαδὸν ἐπιφάνειας κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδας

Ὅπως γνωρίζομε, ἡ κανονικὴ τετραγωνικὴ πυραμίδα ἔχει τὶς παράπλευρες ἕδρες της τρίγωνα ἰσοσκελῆ καὶ ἴσα μεταξύ τους.

Γιὰ νὰ βροῦμε ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τῆς κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδας βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς ἀπὸ τὰ τρίγωνά της καὶ τὸ πολλαπλασιάζομε ἐπὶ 4, γιατὶ 4 εἶναι τὰ τρίγωνά της καὶ εἶναι ἴσα. (Γνωρίζομε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ἰσοῦται μὲ $\frac{\text{βάση} \times \text{ὕψος}}{2}$).

Καὶ ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τῆς κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδας εἶναι ἴσα μεταξύ τους καὶ ἔχουν ἴση βάση καὶ ἴσο ὕψος, μποροῦμε νὰ βροῦμε εὐκολώτερα τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας, ἂν πολλαπλασιάσωμε τὴν περίμετρο τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ὕψος τῶν τριγώνων καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιρέσωμε διὰ 2. Τὸ ὕψος τῶν τριγώνων αὐτῶν εἶναι ἡ ἀπόσταση τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδας ἀπὸ τὴν πλευρὰ τῆς βάσεώς της, καὶ λέγεται **ἀπόστημα** τῆς πυραμίδας.

Ἂν τώρα στὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας προσθέσωμε καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως, ἡ ὁποία εἶναι τετράγωνο (πλευρὰ × πλευρά), θὰ ἔχωμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τῆς τετραγωνικῆς πυραμίδας. **Ἑπομένως:**

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδας, πολλαπλασιάζομε τὴν περίμετρο τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ἀπόστημά της καὶ τὸ γινόμενο διαιροῦμε διὰ 2.

Δηλ. Ἐμβαδὸν παράπλ. ἐπιφ. καν. τετραγ. Πυραμίδας

$$= \frac{\text{περίμ. βάσ.} \times \text{ἀπόστημα}}{2}$$

Καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τῆς πυραμίδας ἰσοῦται μὲ ἐμβαδὸν παράπλευρης ἐπιφάνειας + ἐμβ. βάσεως.

Παράδειγμα. *Κανονικὴ πυραμίδα ἔχει βάση τετράγωνο μὲ πλευρὰ 3 μ. Ἂν τὸ ἀπόστημα τῆς πυραμίδας εἶναι 5 μ., πόσο εἶναι α) τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς της καὶ β) τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειάς της ;*

Λύση. α) Περίμετρος βάσεως $= 3 + 3 + 3 + 3 = 12$ μ.

β) Ἐμβαδὸν παραπλ. ἐπιφαν. $= \frac{12 \times 5}{2} = \frac{60}{2} = 30$ τ.μ.

γ) Ἐμβαδ. βάσεως πυραμ. $= 3 \times 3 = 9$ τ.μ.

δ) Ἐμβ. ὁλικῆς ἐπιφ. πυρ. $= 30 + 9 = 39$ τ.μ.

Προβλήματα

57. Ἡ βάση κανονικῆς πυραμίδας εἶναι τετράγωνο μὲ περίμετρο 8,80 μ. Ἂν τὸ ἀπόστημα τῆς πυραμίδας εἶναι 3,5 μ., πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς της ;

58. Τὴ στέγη ἑνὸς πύργου, σχήματος κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδας μὲ περίμετρο βάσεως 36 μ. καὶ μὲ ἀπόσταση τῆς κορυφῆς τῆς στέγης ἀπὸ κάθε πλευρὰ τῆς βάσεώς της 5 μ., θέλομε νὰ σκεπάσωμε (καλύψωμε) μὲ πλάκες τετραγωνικές, ποὺ ἔχουν πλευρὰ 40 ἑκ. Πόσες πλάκες θὰ χρειαστοῦμε ;

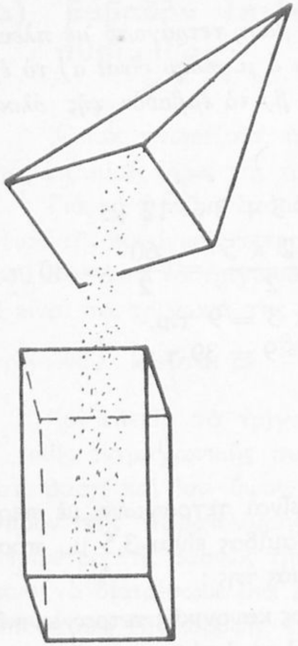
59. Κανονικὴ πυραμίδα ἔχει βάση τετράγωνο μὲ πλευρὰ 6,5 μ. καὶ ἀπόστημα 9 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς της καὶ πόσο τῆς ὁλικῆς ;

60. Τὴ στέγη ἑνὸς πύργου, σχήματος κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδας, μὲ πλευρὰ βάσεως 2,5 μ. καὶ ἀπόστημα 4,20 μ., θέλομε νὰ καλύψωμε μὲ λαμαρίνα, ποὺ τὸ τ.μ. στοιχίζει 30 δρχ. Πόσο θὰ στοιχίση ἡ λαμαρίνα ;

β) Ὄγκος πυραμίδας μὲ βάση τετράγωνο

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο μιᾶς πυραμίδας μὲ βάση τετράγωνο ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς :

Παίρνομε μιὰ πυραμίδα μὲ βάση τετράγωνο καὶ ἕνα ὀρθογώνιο


Σχ. 16

παραλληλεπίπεδο (σχ. 16), τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσες βάσεις καὶ ἴσα ὕψη.

Γεμίζομε τελείως τὴν πυραμίδα μὲ σιτάρι καὶ ὕστερα τὸ ἀδειάζομε μέσα στὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Παρατηροῦμε ὅτι πρέπει νὰ ἐπαναληφθῇ αὐτὸ τρεῖς φορές, γιὰ νὰ γεμίσῃ τελείως μὲ σιτάρι τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Αὐτὸ μᾶς φανερώνει ὅτι ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδας εἶναι 3 φορὲς μικρότερος ἀπὸ τὸν ὄγκο τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τὸ ὁποῖο ἔχει τὴν ἴδια βάση καὶ τὸ ἴδιο ὕψος.

Γνωρίζομε ὅμως ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου βρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἑπομένως :

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο πυραμίδας μὲ βάση τετράγωνο πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδας καὶ τὸ γινόμενο διαιροῦμε διὰ 3.

$$\textit{Δηλ. Ὄγκος Πυραμίδας} = \frac{\textit{ἐμβ. βάσεως} + \textit{ὕψος}}{3}$$

Παράδειγμα. *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως μιᾶς πυραμίδας μὲ βάση τετράγωνο εἶναι 60 τ. ἑκ. καὶ τὸ ὕψος της 25 ἑκ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της ;*

Λύση. $\text{Ὄγκος πυραμίδας} = \dfrac{\text{Ἐμβ. βάσ} \times \text{ὕψος}}{3} = \dfrac{60 \times 25}{3} =$

$= 500$ κ.ἑκ.

Προβλήματα

61. Ἡ βάση μιᾶς πυραμίδας εἶναι τετράγωνο μὲ πλευρὰ 0,09 μ., καὶ τὸ ὕψος της εἶναι 0,21 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της;

62. Ὁ τάφος τοῦ Χέοπος (Φαραὼ τῆς Αἰγύπτου) ἔχει σχῆμα μὲ βάση τετράγωνο πυραμίδας μὲ πλευρὰ βάσεως 227 μ. καὶ ὕψος 138 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του ;

63. Μιὰ μαρμάρινη ἀναμνηστικὴ στήλη, σχήματος πυραμίδας, ἔχει βάση τετράγωνο μὲ πλευρὰ 75 ἑκ. καὶ ὕψος 3,80 μ. Νὰ βρεθῇ τὸ βάρος της, ἂν τὸ εἰδικὸ βάρος τοῦ μαρμάρου εἶναι 2,7.

64. Μιὰ πυραμίδα μὲ τετραγωνικὴ βάση ἔχει ὄγκο 75 κ.μ. καὶ ὕψος 9 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της ;

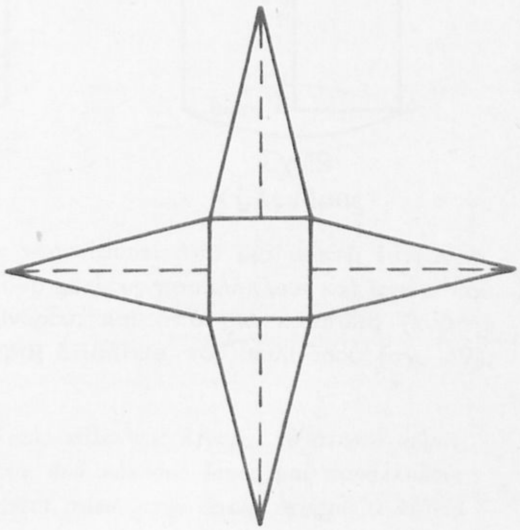
(**Ὑπόδειξη :** Θὰ πολλαπλασιάσετε τὸν ὄγκο ἐπὶ 3 καὶ τὸ γινόμενο θὰ τὸ διαιρέσετε διὰ τοῦ ὕψους, ποὺ εἶναι γνωστό).

65. Μιὰ πυραμίδα μὲ τετραγωνικὴ βάση ἔχει ὄγκο 75 κ.μ. καὶ ἐμβαδὸν βάσεως 25 τ.μ. Πόσο εἶναι τὸ ὕψος της ; (Ἀπάντηση : ὕψος = 9 μ.).

Κατασκευὴ κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδας

Γιὰ νὰ κατασκευάσωμε τὴν καν. τετραγωνικὴ πυραμίδα ἀπὸ χαρτόνι, γράφομε ἕνα τετράγωνο, τὸ ὁποῖο θὰ εἶναι ἡ βάση τῆς πυραμίδας.

Ἔπειτα σχεδιάζομε 4 ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἴσα μεταξύ τους, ποὺ τὸ καθένα ἔχει βάση ἀπὸ μιὰ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου καὶ ὕψος



Σχ. 17

μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ μισὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου. Ἔτσι ἔχομε τὸ ἀνάπτυγμα τῆς καν. τετραγωνικῆς πυραμίδας (σχ. 17).

Ὕστερα μὲ ξυραφάκι χαράσσομε ἐλαφρὰ τὶς πλευρὲς τοῦ τετραγώνου καὶ ὑψώνομε καὶ τὰ 4 τρίγωνα. Κολλᾶμε τὶς πλευρὲς τῶν τριγώνων καὶ ἔχομε ἕτοιμη τὴν καν. τετραγωνικὴ πυραμίδα.

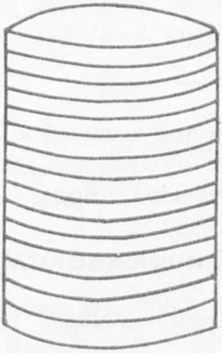
Ἐργασία. Νὰ κατασκευάσετε μὲ χαρτόνι μιὰ καν. τετραγωνικὴ πυραμίδα μὲ πλευρὲς βάσεως 8 ἑκ. καὶ παράπλευρες ἀκμὲς διπλάσιες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

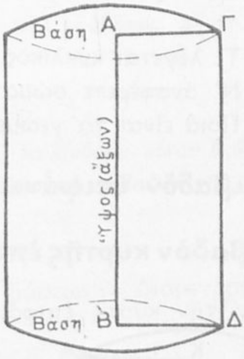
ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

1. Γεωμετρικὰ στοιχεῖα τοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου

Ἂν πολλὰ ὅμοια κέρματα (μεταλλικὰ νομίσματα) τὰ τοποθετήσωμε τὸ ἕνα πάνω στὸ ἄλλο, ἔτσι ὥστε τὸ ἕνα νὰ ἐφαρμόζη πάνω στὸ ἄλλο, τότε σχηματίζεται ἕνα στερεὸ σῶμα (σχῆμα), ποὺ λέγεται **ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος** (σχ. 18). Σχῆμα κυλίνδρου ἔχουν οἱ σωλῆνες τῆς θερμάστρας, τὰ κουτιὰ γάλακτος, ὁρισμένα κουτιὰ κονσερβῶν, τὰ στρογγυλὰ μολύβια κ.ἄ.



Σχ. 18
Κέρματα



Σχ. 19
Κύλινδρος

Ὁ κυκλικὸς κύλινδρος περικλείεται ἀπὸ μιὰ μεικτὴ ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ δυὸ κύκλους παράλληλους καὶ ἴσους, ποὺ λέγονται **βάσεις** τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἀπὸ μιὰ καμπύλη (κυρτὴ) ἐπιφάνεια, ποὺ λέγεται **κυρτὴ ἐπιφάνεια** τοῦ κυλίνδρου (σχ. 19).

Ὥστε : *Ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος λέγεται τὸ στερεὸ σῶμα, τὸ ὁποῖο περικλείεται ἀπὸ δυὸ κύκλους ἴσους καὶ παράλληλους καὶ ἀπὸ μιὰ κυρτὴ ἐπιφάνεια, πάνω στὴν ὁποία ἐφαρμόζει εὐθεία κάθετος πρὸς τὶς βάσεις.*

Ἡ ἀπόσταση μεταξὺ τῶν δύο βάσεων λέγεται ὕψος τοῦ κυλίνδρου ἢ ἄξονάς του.

Ὁ κυκλικὸς κύλινδρος μπορεῖ νὰ θεωρηθῆ ὅτι προκύπτει ἀπὸ ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο, ποὺ κάνει μιὰ πλήρη στροφὴ γύρω ἀπὸ μιὰ πλευρά του (ποὺ θεωρεῖται ἀκίνητη).

Αὐτὸ τὸ βλέπομε καλύτερα στὶς περιστρεφόμενες πόρτες τῶν Τραπεζῶν καὶ ἄλλων Δημοσίων Καταστημάτων. Ἐκεῖ ἡ πόρτα ποὺ στρέφεται κατὰ τὴν ἴδια φορὰ γύρω ἀπὸ τὰ στηρίγματά της (τὸν ἄξονά της) σχηματίζει κύλινδρο. Ὁ κύλινδρος αὐτὸς ἔχει τὶς βάσεις του κύκλους καθέτους πρὸς τὸν ἄξονά τους καὶ λέγεται **κυκλικὸς κύλινδρος** ἢ **«ἐκ περιστροφῆς»** ἢ **ὀρθὸς** κύλινδρος.

Ἐρωτήσεις

α) Τί λέγεται κυκλικὸς κύλινδρος;

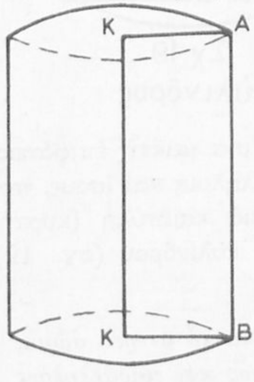
β) Ν' ἀναφέρετε σώματα κυλινδρικά.

γ) Ποιὰ εἶναι τὰ γεωμετρικὰ στοιχεῖα τοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου;

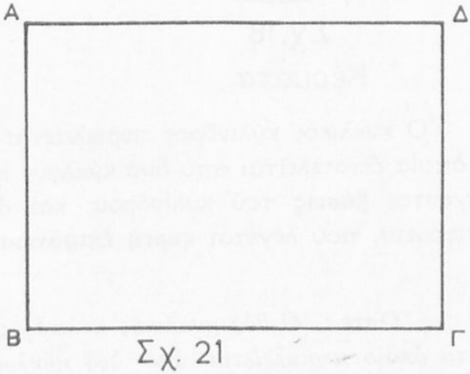
2. Ἐμβαδὸν ἐπιφάνειας κυκλικοῦ κυλίνδρου

α) Ἐμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου

Ἂν τὴν κυρτὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κυκλικοῦ κυλίνδρου (σχ. 20)



Σχ. 20



Σχ. 21
Ἀνάπτυγμα κυρτῆς ἐπιφάνειας κυλίνδρου.

καλύψωμε ἀκριβῶς μὲ φύλλο χαρτιοῦ καὶ ἔπειτα τὸ ἁπλώσωμε πάνω σὲ ἐπίπεδη ἐπιφάνεια (τραπέζι κ.λπ.), παρατηροῦμε ὅτι τὸ φύλλο αὐτὸ ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιου παραλληλογράμου (σχ. 21).

Εἶναι φανερὸ ὅτι τὸ ὀρθογώνιο αὐτὸ παραλληλόγραμμο ἔχει **βάση** ἴση μὲ τὸ μῆκος τῆς περιφέρειας τῆς μιᾶς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, **ὕψος** ἴσο μὲ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου καὶ **ἐμβαδὸν** ἴσο μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειάς του.

Ἑπομένως :

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου, πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος τῆς περιφέρειας τῆς μιᾶς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου.

Δηλ. Ἐμβ. κυρτῆς ἐπιφ. κυκλ. κυλ. = Μῆκος περιφ. βάσ. × ὕψος.

Παράδειγμα. *Τὸ ὕψος ἑνὸς κυκλ. κυλίνδρου εἶναι 0,95 μ. καὶ ἡ βάση του ἔχει ἀκτίνα 0,25 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυλίνδρου;*

Λύση. α) Μῆκος περιφέρειας βάσεως = Διάμετρος × 3,14 = 2 × 0,25 × 3,14 = 1,57 μ.

β) Ἐμβ. κυρτ. ἐπιφ. = μῆκος περιφ. βάσ. × ὕψ. = 1,57 × 0,95 = 1,4915 τ.μ.

β) Ἐμβαδὸν ὁλικῆς ἐπιφάνειας κυκλικοῦ κυλίνδρου

Γνωρίζομε ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν κυρτὴ ἐπιφάνειά του καὶ ἀπὸ τὴν ἐπιφάνεια τῶν δύο βάσεών του (σχ. 22). Γιὰ νὰ βροῦμε λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειάς του, πρέπει νὰ βροῦμε πρῶτα τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειάς του, ὅπως εἴδαμε προηγουμένως, καὶ σ' αὐτὸ νὰ προσθέσωμε τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεών του.

Οἱ βάσεις ἔχουν σχῆμα κύκλου καί, ὅπως γνωρίζομε, γιὰ νὰ

Σχ. 22. Ἀνάπτυγμα ὁλικῆς ἐπιφάνειας κυλίνδρου

βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, πολλαπλασιάζομε τὴν ἀκτίνα ἐπὶ τὸν ἑαυτό της καὶ τὸ γινόμενο ἐπὶ 3,14.

Ἑπομένως :

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου, προσθέτομε στὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυλίνδρου καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεών του.

Δηλ. Ἐμβ. ὁλ. ἐπιφ. κυλίνδρου = ἐμβ. κυρτ. ἐπιφ. + ἐμβ. 2 βάσεων.

Παράδειγμα. *Τὸ ὕψος μιᾶς κυλινδρικῆς στήλης εἶναι 11,5 μ. καὶ ἡ ἀκτίνα τῆς βάσεώς της 1,25 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τῆς στήλης αὐτῆς ;*

α) Διάμετρος βάσεως $= 1{,}25 \times 2 = 2{,}50$ μ.

β) Μῆκος περιφ. βάσεως $= 2{,}50 \times 3{,}14 = 7{,}85$ μ.

γ) Ἐμβ. κυρτ. ἐπιφ. $= 7{,}85 \times 11{,}5 = 90{,}275$ τ.μ.

δ) Ἐμβ. μιᾶς βάσεως $= 1{,}25 \times 1{,}25 \times 3{,}14 = 4{,}906250$ τ.μ.

ε) Ἐμβ. ὁλικ. ἐπιφ. $= 90{,}275 + 4{,}906250 + 4{,}906250 =$ $100{,}0875$ τ.μ.

Ἐρωτήσεις

α) Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου καὶ πῶς τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειάς του;

β) Τί σχῆμα ἔχει τὸ ἀνάπτυγμα τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου;

γ) Τί σχῆμα ἔχουν οἱ βάσεις τοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου;

Προβλήματα

66. Ἂν θέλωμε νὰ σκεπάσωμε μὲ χαρτὶ τὴν κυρτὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κυκλικοῦ κυλίνδρου ὕψους 15 ἑκ. καὶ μήκους περιφέρειας βάσεως 20 ἑκ., τί σχῆμα πρέπει νὰ κόψωμε ἀπὸ τὸ χαρτὶ καὶ πόσο ἐμβαδὸν πρέπει νὰ ἔχῃ αὐτό ;

67. Ἂν θέλωμε νὰ χρωματίσωμε ἐξωτερικὰ ἕνα σωλήνα, ποὺ ἡ περιφέρειά του εἶναι 3,25 μ. καὶ τὸ μῆκος (ὕψος) 13,14 μ., πόσα χρήματα θὰ πληρώσωμε πρὸς 40 δρχ. τὸ τετρ. μέτρο;

68. Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας κυκλικοῦ κυλίνδρου, ποὺ ἔχει μῆκος περιφέρειας βάσεως 15,7 ἑκ. καὶ ὕψος 70 ἑκατοστόμετρα.

69. Δύο διαμερίσματα ἑνὸς ἐργοστασίου συνδέονται μεταξύ τους μὲ κυλινδρικὸ ἀγωγὸ ποὺ ἔχει διάμετρο 1,75 μ. καὶ μῆκος 432 μέτρα. Νὰ βρεθῇ : α) τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ ἀγωγοῦ καὶ β) πόσο κοστίζει ὁ ἐξωτερικὸς χρωματισμὸς του πρὸς 50 δρχ. τὸ τ. μέτρο.

70. Ἕνα κυλινδρικὸ μολύβι ἔχει μῆκος (ὕψος) 20 ἑκ. καὶ διάμετρο βάσεως 8 χιλιοστὰ τοῦ μέτρου. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειάς του;

71. Θέλομε νὰ κατασκευάσωμε δοχεῖο κυλινδρικό, ἀνοιχτὸ ἀπὸ πάνω, ὕψους 2 μ. καὶ μὲ ἀκτίνα βάσεως 0,75 μ. Νὰ βρεθῆ : α) τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τσίγκου ποὺ θὰ χρειαστοῦμε καὶ β) τὸ κόστος τοῦ δοχείου, ἂν ὁ τσίγκος ἔχη 82 δρχ. τὸ τ.μ.

72. Ἂν θέλωμε νὰ κατασκευάσωμε κυλινδρικὸ δοχεῖο μὲ σκέπασμα, ποὺ νὰ ἔχη ὕψος 0,55 μ. καὶ διάμετρο βάσεως 0,40 μ., πόσο θὰ μᾶς κοστίση, ἂν ὁ τσίγκος ἀξίζη 90 δρχ. τὸ τ.μ. καὶ πληρώσωμε στὸν τεχνίτη 250 δρχ. γιὰ τὴν ἐργασία του;

73. Ἕνα ἐργοστάσιο κυτιοποιίας ἔλαβε παραγγελία γιὰ τὴν κατασκευὴ 5000 κυλινδρικῶν δοχείων. Κάθε δοχεῖο νὰ ἔχη ὕψος 1,8 παλάμες καὶ ἀκτίνα βάσεως 6 ἑκ. Πόσα τετρ. μέτρα τσίγκου θὰ χρειαστῆ γιὰ τὴν κατασκευή τους;

3. Ὄγκος κυκλικοῦ κυλίνδρου

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς : Παίρνομε δύο δοχεῖα μὲ τὸ ἴδιο ὕψος καὶ τὸ ἴδιο ἐμβαδὸν βάσεως. Τὸ ἕνα δοχεῖο ἀπ' αὐτὰ ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου καὶ τὸ ἄλλο κυκλικοῦ κυλίνδρου.

Γεμίζομε τελείως τὰ δοχεῖα αὐτὰ μὲ νερὸ καὶ βλέπομε ὅτι χωροῦν ἴσο ὄγκο νεροῦ· ἄρα τὰ δοχεῖα αὐτὰ ἔχουν τὸν ἴδιο ὄγκο.

Γνωρίζομε ὅμως ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου βρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του. Ἑπομένως καὶ ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου βρίσκεται μὲ τὸν ἴδιο τρόπο. Δηλαδή :

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τοῦ κυκλ. κυλίνδρου, πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Δηλ. Ὄγκος κυκλ. κυλίνδρου = ἐμβαδὸν βάσεως × ὕψος.

Σημείωση : Ἀπ' ὅσα εἴπαμε, βγαίνει τὸ συμπέρασμα ὅτι, ὅταν γνωρίζωμε τὸν ὄγκο ἑνὸς κυλίνδρου καὶ τὸ ὕψος του, μποροῦμε νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του, ἂν διαιρέσωμε τὸν ὄγκο τοῦ κυλίνδρου διὰ τοῦ ὕψους του. Δηλαδή :

$$\text{Ἐμβαδὸν βάσεως κυκλ. κυλίνδρου} = \frac{\text{ὄγκος κυκλ. κυλίνδρου}}{\text{ὕψος}}$$

Ἐφαρμογές :

Παράδειγμα 1. *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἑνὸς κυκλ. κυλίνδρου εἶναι 26 τετρ. παλάμες καὶ τὸ ὕψος του 8,5 παλ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου;*

Λύση. Ὄγκος κυκλ. κυλίνδρου = ἐμβ. βάσεως × ὕψος = 26 × 8,5 = 221 κ. παλ.

Παράδειγμα 2. *Ὁ ὄγκος ἑνὸς κυκλ. κυλίνδρου εἶναι 4,5 κ.μ. καὶ τὸ ὕψος του 1,8 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ;*

Λύση. $\text{Ἐμβ. βάσεως κυκλ. κυλίνδρου} = \frac{\text{ὄγκος κυλίνδρου}}{\text{ὕψος}} =$

$= \frac{4,5}{1,8} = 2,5$ τ.μ.

Ἐ ρ ω τ ή σ ε ι ς

α) Πῶς βρίσκομε τὸν ὄγκο τοῦ κυκλ. κυλίνδρου;

β) Γιατί λέμε ὅτι ὁ ὄγκος ἑνὸς κυκλ. κυλίνδρου βρίσκεται ὅπως καὶ ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου;

γ) Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἑνὸς κυλίνδρου, ὅταν γνωρίζωμε τὸν ὄγκο τοῦ κυλίνδρου καὶ τὸ ὕψος του;

δ) Εἶναι δυνατὸν νὰ βροῦμε τὸ ὕψος ἑνὸς κυλίνδρου; τί πρέπει νὰ γνωρίζωμε καὶ τί πράξη θὰ κάμωμε;

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

74. Ἕνας κυκλ. κύλινδρος ἔχει ἀκτίνα βάσεως 10 ἑκ. καὶ ὕψος 30 ἑκ. Πόσο ὄγκο ἔχει;

75. Ἡ διάμετρος τῆς βάσεως ἑνὸς κυλινδρικοῦ δοχείου εἶναι 0,80 μ. καὶ τὸ ὕψος του 2,50 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του; Πόσα κ.μ. γάλα χωρεῖ ;

76. Ἕνας κύλινδρος ἔχει ὄγκο 3,5 κ.π. καὶ ὕψος 7 ἑκ. Ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ;

77. Ἐργάτης, γιὰ νὰ ἀνοίξη ἕνα κυλινδρικὸ πηγάδι, ζητεῖ 185 δρχ. τὸ κυβ. μέτρο. Πόσες δρχ. θὰ λάβη γιὰ τὸ ἄνοιγμα τοῦ πηγαδιοῦ, ποὺ ἔχει περιφέρεια βάσεως 6,28 μ. καὶ βάθος 15,75 μέτρα;

87. Πόσα κυβικὰ μέτρα χῶμα πρέπει νὰ βγάλωμε ἀπὸ τὴ γῆ, γιὰ νὰ ἀνοίξωμε κυλινδρικὸ πηγάδι μὲ βάθος 12 μ. καὶ διάμετρο 2,5 μέτρα;

79. Ἀπὸ μία βρύση τρέχουν 15 κυβ. παλάμες νερὸ σ' ἕνα πρῶτο λεπτὸ τῆς ὥρας. Πόσο χρόνο χρειάζεται ἡ βρύση, γιὰ νὰ γεμίση κυλινδρικὸ δοχεῖο, ποὺ ἔχει διάμετρο βάσεως 0,8 μ. καὶ ὕψος 75 ἑκατοστόμετρα;

80. Μία κυλινδρικὴ δεξαμενὴ ἔχει ἐσωτερικὴ ἀκτίνα βάσεως 1,26 μ. καὶ ὕψος 2,4 μ. Νὰ βρεθῆ : α) Πόσες κυβ. παλάμες νερὸ (ἀπεσταγμένο καὶ θερμοκρασίας 4^0) χωρεῖ καὶ β) πόσα χιλιόγραμμα ζυγίζει τὸ νερό ;

81. Τὸ περιεχόμενο ἑνὸς βαρελιοῦ εἶναι 141,3 κυβ. παλάμες καὶ θέλομε νὰ τὸ μεταφέρωμε σὲ φιάλες κυλινδρικὲς μὲ ἀκτίνα βάσεως 3 ἑκ. καὶ ὕψος 10 ἑκ. Πόσες φιάλες θὰ χρειαστοῦμε ;

82. Μιὰ μαρμάρινη κυλινδρικὴ στήλη ἔχει περιφέρεια βάσεως 9,42 μ. καὶ ὕψος 4 μ. Νὰ βρεθῆ τὸ βάρος της, ἂν τὸ εἰδ. βάρος τοῦ μαρμάρου εἶναι 2,7.

83. Δυὸ δεξαμενὲς εἶναι γεμάτες μὲ νερό. Ἡ μιὰ εἶναι κυλινδρικὴ μὲ ὕψος 4 μ. καὶ ἐμβαδὸν βάσεως 12 τ.μ. καὶ ἡ ἄλλη εἶναι κυβικὴ μὲ ἀκμὴ 4 μέτρα. Ποιὰ δεξαμενὴ περιέχει περισσότερο νερὸ καὶ πόσο;

Κατασκευὴ κυκλικοῦ κυλίνδρου

Γιὰ νὰ κατασκευάσωμε κυκλικὸ κύλινδρο ἀπὸ χαρτόνι, σχεδιάζομε στὸ χαρτόνι τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου (σχ. 22), χωριστὰ τὸ ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο μὲ τὶς διαστάσεις ποὺ θέλομε καὶ χωριστὰ τοὺς δυὸ κύκλους. Κολλᾶμε ἔπειτα τὶς δύο ἀπέναντι πλευρὲς τοῦ ὀρθογωνίου (τὰ ὕψη), ὁπότε ἔχομε τὴν κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου. Τέλος, στὰ ἀνοιχτὰ μέρη της (ἄνω καὶ κάτω) κολλᾶμε τοὺς δυὸ κύκλους, ποὺ ἀποτελοῦν τὶς βάσεις τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἔχομε ἕτοιμο τὸν κυκλικὸ κύλινδρο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

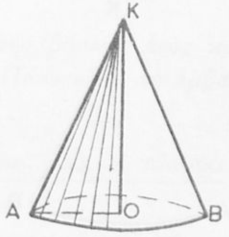
ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΚΩΝΟΣ

1. Γεωμετρικὰ στοιχεῖα τοῦ κώνου

Τὸ στερεὸ σῶμα, ποὺ παριστάνει τὸ σχῆμα 23, λέγεται **Ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος.** Σώματα μὲ σχῆμα κυκλικοῦ κώνου εἶναι τὸ χωνί, μερικὲς σκηνές, ἡ στέγη μερικῶν πύργων, ἡ στέγη ἀνεμομύλων κλπ.

Συνήθως τὸν κυκλικὸ κῶνο τὸν βρίσκομε ἑνωμένο μὲ τὸν κύλινδρο, τοῦ ὁποίου ἀποτελεῖ τὴ στέγη.

Ὁ κυκλικὸς κῶνος περικλείεται ἀπὸ ἕναν κύκλο, ποὺ λέγεται **βάση** τοῦ κώνου, καὶ ἀπὸ μιὰ καμπύλη ἐπιφάνεια, ποὺ καταλήγει σ' ἕνα σημεῖο Κ, τὸ ὁποῖο βρίσκεται ἔξω ἀπὸ τὴ βάση. Ἡ καμπύλη ἐπιφάνεια λέγεται **κυρτὴ ἐπιφάνεια** τοῦ κώνου καὶ τὸ σημεῖο Κ, στὸ ὁποῖο τελειώνει αὐτή, λέγεται **κορυφὴ** τοῦ κώνου.

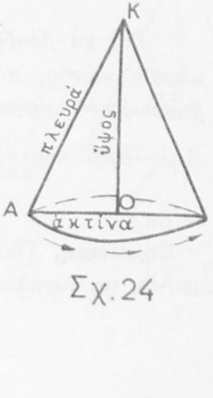


Σχ. 23
Κῶνος

Ἡ ἀπόσταση ΚΟ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ἀπὸ τὸ κέντρο τῆς βάσεώς του λέγεται **ὕψος** ἢ **ἄξονας** τοῦ κώνου. Ἡ ἀπόσταση ΚΑ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ἀπὸ ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς περιφέρειας τῆς βάσεώς του λέγεται **πλευρὰ** τοῦ κώνου.

Ἡ **ἀκτίνα** τοῦ κύκλου τῆς βάσεως ΟΑ (σχ. 24) εἶναι καὶ ἀκτίνα τοῦ κώνου.

Πῶς γίνεται ὁ ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος; Ὁ κῶνος αὐτὸς γίνεται ἀπὸ ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο, ποὺ κάνει ὁλόκληρη στροφή, ὅταν κινεῖται πάντοτε πρὸς τὴν ἴδια φορὰ (διεύθυνση), γύρω ἀπὸ μιὰ ἀπὸ τὶς κάθετες πλευρές του, ἡ ὁποία μένει ἀκίνητη (σχ. 24).



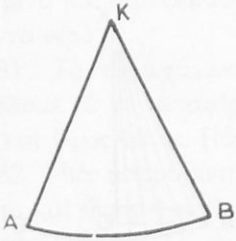
Σχ. 24

Τότε ἡ ἀκίνητη πλευρὰ τοῦ τριγώνου ἀποτελεῖ τὸ ὕψος ἢ τὸν ἄξονα τοῦ κυκλικοῦ κώνου. Ἡ κάθετη πρὸς τὸ ὕψος πλευρὰ τοῦ τριγώνου γράφει τὴ βάση τοῦ κώνου καὶ ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογων. τριγώνου διαγράφει μιὰ καμπύλη ἐπιφάνεια, ποὺ λέγεται παράπλευρη ἐπιφάνεια τοῦ κώνου.

2. Ἐμβαδὸν ἐπιφάνειας κυκλικοῦ κώνου

α) Ἐμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφάνειας κυκλικοῦ κώνου

Ἂν τὴν κυρτὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κυκλικοῦ κώνου σκεπάσωμε ἀκριβῶς μὲ φύλλο χαρτιοῦ καὶ ἔπειτα τὸ ἁπλώσωμε πάνω στὸ τραπέζι, θὰ παρατηρήσωμε ὅτι τὸ ἀνάπτυγμά της ἔχει σχῆμα κυκλικοῦ τομέα (σχ. 25).



Σχ. 25

Εἶναι φανερὸ ὅτι τὸ τόξο ΑΒ τοῦ κυκλικοῦ τομέα εἶναι ἴσο μὲ τὸ μῆκος τῆς περιφέρειας τῆς βάσεως τοῦ κώνου, ἡ δὲ ἀκτίνα ΚΑ εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευρὰ τοῦ κώνου. Ἐπίσης τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέα εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέα, ὅπως ξέρομε, βρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸ μῆκος τοῦ τόξου ΑΒ ἐπὶ τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς ἀκτίνας ΚΑ. **Ἑπομένως :**

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς κυκλικοῦ κώνου, πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος τῆς περιφέρειας τῆς βάσεως τοῦ κώνου ἐπὶ τὸ 1/2 τῆς πλευρᾶς του.

Δηλ. $\text{Ἐμβ. κυρτῆς ἐπιφ. κυκλ. κώνου} = \dfrac{\text{μῆκος περ. βάσ.} \times \text{πλευρ.}}{2}$

Σημείωση. Τὸ μῆκος τῆς περιφέρειας προκύπτει, ὅπως γνωρίζομε, ἂν πολλαπλασιάσωμε ἀκτίνα $\times 2 \times 3{,}14$. Ἂν ἑπομένως ἀναλύσωμε τὸν τύπο, ποὺ μᾶς δείχνει πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου, θὰ ἔχωμε:

$$\frac{\text{μῆκος περιφ. βάσεως} \times \text{πλευρὰ}}{2} = \frac{\alpha \times 2 \times 3{,}14 \times \text{πλευρὰ}}{2}$$

Ἀφοῦ ἁπλοποιήσωμε μὲ τὸ 2 ἔχομε: $\alpha \times 3{,}14 \times$ πλευρά.

Ὥστε ὁ παραπάνω κανόνας μπορεῖ νὰ διατυπωθῆ καὶ ἔτσι:

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς κυκλ. κώνου, πολλαπλασιάζομε τὴν ἀκτίνα τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευράν του καὶ τὸ γινόμενο ἐπὶ 3,14.

Δηλ. Ἐμβ. κυρτῆς ἐπιφάνειας κυκλ. κώνου = ἀκτίνα × πλευρὰ × 3,14.

Παράδειγμα. *Τὸ μῆκος τῆς περιφέρειας τῆς βάσεως ἑνὸς κυκλ. κώνου εἶναι 3,20 μ. καὶ ἡ πλευρά του 0,8 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειάς του;*

Λύση. Ἐμβ. κυρτ. ἐπιφ. κώνου $= \frac{\text{μῆκος περιφ. βάσ.} \times \text{πλευρὰ}}{2} =$

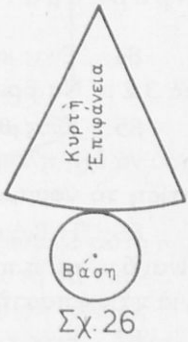
$$= \frac{3{,}20 \times 0{,}8}{2} = \frac{2{,}56}{2} = 1{,}28 \text{ τ.μ.}$$

β) Ἐμβαδὸν ὁλικῆς ἐπιφάνειας κυκλ. κώνου

Τὸ σχῆμα 26 παριστάνει τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυκλικοῦ κώνου. Ἀπ' αὐτὸ εὔκολα συμπεραίνομε ὅτι:

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυκλ. κώνου, προσθέτομε στὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυκλικῆς βάσεώς του.

Δηλ. Ἐμβ. ὁλ. ἐπιφ. Κώνου = Ἐμβ. κυρτῆς ἐπιφάνειας + ἐμβ. βάσεως.



Σχ. 26

Παράδειγμα. *Ἡ ἀκτίνα τῆς βάσεως ἑνὸς κυκλ. κώνου εἶναι 0,3 μ. καὶ ἡ πλευρά του 1 μ. Νὰ βρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου.*

Λύση. α) Ἐμβ. κυρτ. ἐπιφ. κώνου $=$ ἀκτίνα $\times$ πλευρὰ $\times 3{,}14$ $= 0{,}3 \times 1 \times 3{,}14 = 0{,}942$ τ.μ. Ἐπειδὴ στὸ πρόβλημα αὐτὸ γνωρίζομε τὴν ἀκτίνα, γιὰ νὰ τὸ λύσωμε εὐκολώτερα, ἐφαρμόζομε τὸν δεύτερο κανόνα, ποὺ μᾶς δείχνει πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου.

β) Ἐμβ. βάσεως $=$ ἀκτ. $\times$ ἀκτ. $\times 3{,}14 = 0{,}3 \times 0{,}3 \times 3{,}14 = 0{,}2826$ τ.μ.

γ) Ἐμβ. ὁλ. ἐπιφ. κυκλικοῦ κώνου $= 0{,}942 + 0{,}2826 = 1{,}2246$ τ.μ.

Ἐρωτήσεις

α) Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας κυκλικοῦ κώνου;

β) Τί σχῆμα ἔχει τὸ ἀνάπτυγμα τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας κυκλικοῦ κώνου;

γ) Γιατί λέμε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυκλικοῦ κώνου βρίσκεται ὅπως καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλ. τομέα;

δ) Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας κυκλικοῦ κώνου;

ε) Νὰ ἀναφέρετε 5 σώματα μὲ σχῆμα κυκλικοῦ κώνου.

Προβλήματα

84. Ἕνας κυκλικὸς κῶνος ἔχει ἀκτίνα βάσεως 0,45 μ. καὶ πλευρὰ 3,2 μ. Νὰ βρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειάς του.

85. Ἕνας θέλει νὰ κατασκευάση ἀπὸ ὕφασμα κωνικὴ σκηνή, ποὺ νὰ ἔχη πλευρὰ 2,5 μέτρα καὶ ἀκτίνα βάσεως 1,65 μ. Πόσο θὰ κοστίση τὸ ὕφασμα, ἂν τὸ τετραγωνικό του μέτρο ἔχη 120 δραχμές;

86. Ἡ διάμετρος τῆς βάσεως τῆς κωνικῆς στέγης ἑνὸς πύργου εἶναι 6 μ. καὶ ἡ πλευρά της 9,20 μ. Πόσα τ. μ. λαμαρίνας χρειάζονται, γιὰ νὰ σκεπαστῆ ἡ στέγη αὐτή;

87. Ἑνὸς κωνικοῦ δοχείου ἡ πλευρὰ εἶναι 75 ἑκ. καὶ ἡ περιφέ-

ρεια τῆς βάσεώς του 1,35 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειάς του;

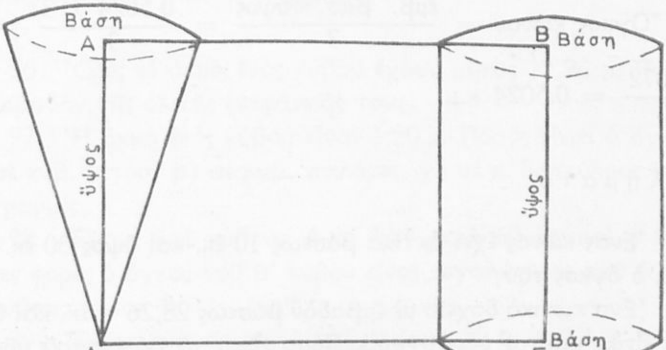
88. Ἂν θέλωμε νὰ κατασκευάσωμε τέσσαρα κωνικὰ δοχεῖα μὲ πλευρὰ 1,10 μ. καὶ διάμετρο βάσεως 80 ἑκ. τὸ καθένα, πόσα χρήματα θὰ χρειαστοῦμε, ἂν ὁ τσίγκος κοστίζη 92 δρχ. τὸ τετρ. μέτρο καὶ ὁ τεχνίτης θέλη 425 δρχ. γιὰ ὅλη τὴν ἐργασία;

89. Πόσο μῆκος ὑφάσματος χρειάζεται, ὅταν τὸ πλάτος εἶναι 0,60 μ., γιὰ νὰ κατασκευαστῆ σκηνὴ κωνικὴ μὲ πλευρὰ 4 μέτρα καὶ περιφέρεια βάσεως 15 μέτρα; (50 μ.)

Σημείωση. Γιὰ νὰ βρεθῆ τὸ μῆκος, πρέπει νὰ εἶναι γνωστὰ τὸ πλάτος καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας.

3. Ὄγκος κυκλικοῦ κώνου

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τοῦ κυκλ. κώνου, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: Παίρνομε δυὸ δοχεῖα, τὸ ἕνα κωνικὸ καὶ τὸ ἄλλο κυλινδρικό, ποὺ νὰ ἔχουν ἴση βάση καὶ ἴσο ὕψος (σχ. 27).



Σχ. 27

Ἂν τὸ κωνικὸ δοχεῖο τὸ γεμίσωμε μὲ νερὸ καὶ χύσωμε αὐτὸ στὸ κυλινδρικὸ δοχεῖο, θὰ παρατηρήσωμε ὅτι θὰ χρειαστῆ νὰ ἐπαναλάβωμε τρεῖς φορὲς τὸ ἴδιο πράγμα, ὥσπου νὰ γεμίση τελείως τὸ κυλινδρικὸ δοχεῖο.

Αὐτὸ φανερώνει ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι τρεῖς φορὲς μικρότερος ἀπὸ τὸν ὄγκο τοῦ κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἴση βάση καὶ ἴσο ὕψος μὲ αὐτόν.

Καὶ ἀφοῦ τὸν ὄγκο τοῦ κυλίνδρου τὸν βρίσκομε, ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του, συμπεραίνομε ὅτι:

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τοῦ κώνου, πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του καὶ τὸ γινόμενο διαιροῦμε διὰ 3.

$$\text{Δηλ. ὄγκος κώνου} = \frac{\text{ἐμβ. βάσεως} \times \text{ὕψος}}{3}$$

Παράδειγμα. *Νὰ βρεθῇ ὁ ὄγκος κώνου, ποὺ ἔχει ἀκτίνα βάσεως 0,4 μ. καὶ ὕψος 3 μ.*

Λύση. α) Ἐμβ. βάσ. κώνου = ἀκτίνα × ἀκτίνα × 3,14 = 0,4 × × 0,4 × 3,14 = 0,5024 τ. μ.

$$\beta)\ \text{Ὄγκος κώνου} = \frac{\text{ἐμβ. βάσ.} \times \text{ὕψος}}{3} = \frac{0{,}5024 \times 3}{3} =$$

$$= \frac{1{,}5072}{3} = 0{,}5024 \text{ κ.μ.}$$

Προβλήματα

90. Ἕνας κῶνος ἔχει ἀκτίνα βάσεως 10 ἑκ. καὶ ὕψος 30 ἑκ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

91. Ἕνα κωνικὸ δοχεῖο μὲ ἐμβαδὸν βάσεως 28,26 τ. ἑκ. καὶ ὕψος 12,5 ἑκ. εἶναι γεμάτο ὑδράργυρο. Πόσο εἶναι τὸ βάρος τοῦ ὑδραργύρου ποὺ περιέχει τὸ δοχεῖο; (Εἰδικὸ βάρος ὑδραργύρου 13,6).

92. Μέσα σὲ μιὰ κωνικὴ σκηνή, ποὺ ἔχει ὕψος 4,5 μ. καὶ μῆκος περιφέρειας βάσεως 31,4 μ. διαμένουν 15 πρόσκοποι. Πόσα κυβικὰ μέτρα ἀέρα ἀναλογοῦν σὲ κάθε πρόσκοπο;

93. Ἕνα κομμάτι σίδερο ποὺ ἔχει σχῆμα κώνου ἔχει ἀκτίνα βάσεως 12,5 ἑκ. καὶ ὕψος τὸ διπλάσιο τῆς ἀκτίνας τῆς βάσεώς του. Πόσο ζυγίζει; (Εἰδικὸ βάρος σιδήρου 7,8).

94. Τὸ ὕψος ἑνὸς κωνικοῦ δοχείου εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεώς του καὶ ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως 12,56 μέτρα. Νὰ βρεθῆ: α) ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου καὶ β) πόσα κιλὰ πετρέλαιο χωρεῖ τοῦτο. (Εἰδ. βάρος πετρελαίου 0,84).

95. Κωνικὸ δοχεῖο ἔχει μῆκος περιφέρειας βάσεως 25,12 μ. καὶ ὕψος 5,40 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου καὶ πόσα κιλὰ νερὸ (ἀπεσταγμένο) χωρεῖ;

Κατασκευὴ κυκλικοῦ κώνου

Γιὰ νὰ κατασκευάσωμε κυκλικὸ κῶνο μὲ χαρτόνι, σχεδιάζομε πάνω σ' αὐτὸ τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου (σχ. 26). Κόβομε ἔπειτα τὸν κυκλικὸ τομέα, τὸν τυλίγομε καὶ τὸν κολλᾶμε μὲ κόλλα. Ἔτσι ἔχομε τὴν παράπλευρη ἐπιφάνεια τοῦ κυκλικοῦ κώνου. Ὕστερα ἐφαρμόζομε στὸ ἀνοιχτὸ μέρος της τὴν κυκλικὴ βάση καὶ ἔχομε ἕτοιμο τὸν κυκλικὸ κῶνο.

ΓΕΝΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

96. Ὅλες οἱ ἀκμὲς ἑνὸς κύβου ἔχουν μῆκος 12,96 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειάς του;

97. Ἡ ἀκμὴ ἑνὸς κύβου εἶναι 1,20 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του: α) σὲ κυβ. μέτρα, β) σὲ κυβ. παλάμες, γ) σὲ κ. δακτύλους καὶ δ) σὲ κ. γραμμές;

98. Ἔχομε δυὸ κύβους· ὁ α' ἔχει ἀκμὴ 60 ἑκ. καὶ ὁ β' 1,8 μ. Πόσες φορὲς ὁ ὄγκος τοῦ β' κύβου εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ὄγκου τοῦ α' κύβου;

99. Ἔχομε δυὸ κύβους· ὁ α' ἔχει ἀκμὴ 50 ἑκ. καὶ ὁ β' τριπλάσια τοῦ α'. Πόσες φορὲς ὁ ὄγκος τοῦ β' κύβου εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ὄγκου τοῦ α' κύβου;

100. Ἕνα κιβώτιο σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, μὲ διαστάσεις 2 μ., 1,5μ., 1,20 μ. χρωματίστηκε ἐξωτερικὰ καὶ στοίχισε 126 δραχμές. Πόσο στοίχισε τὸ τ. μέτρο;

101. Κιβώτιο μήκους 2 μ., πλάτους 40 ἑκ. καὶ ὕψους 1,4 μ.

εἶναι γεμάτο σαπούνι. Ἡ κάθε πλάκα τοῦ σαπουνιοῦ ἔχει μῆκος 1,4 παλάμ., πλάτος δὲ καὶ ὕψος ἀπὸ 5 ἑκ. Πόσες πλάκες περιέχει τὸ κιβώτιο;

102. Ἕνα δωμάτιο τὸ γεμίσαμε τελείως μὲ 4.600 χαρτοδέματα, ποὺ τὸ καθένα ἔχει ὄγκο 3,5 κυβ. παλάμες. Νὰ ὑπολογιστῆ ὁ ὄγκος τοῦ δωματίου σὲ κυβ. μέτρα.

103. Ἕνα κουτὶ σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχει μῆκος 20 ἑκ., πλάτος 12 ἑκ. καὶ ὕψος 15 ἑκ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

104. Μία δεξαμενή, σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἔχει μῆκος 8 μ. καὶ πλάτος 4,5 μ. Πόσο βάθος (ὕψος) πρέπει νὰ ἔχῃ, γιὰ νὰ χωρῆ 252 τόνους νερό;

105. Πόσοι μαθητὲς εἶναι δυνατὸν νὰ παραμένουν σὲ μιὰ αἴθουσα μὲ 8 μ. μῆκος, 6 μ. πλάτος καὶ 5 μ. ὕψος, ἂν γιὰ κάθε μαθητὴ πρέπει νὰ ἀναλογοῦν 4 κ.μ. ἀέρα;

106. Μία ἐκκλησία στηρίζεται σὲ 6 κίονες (στύλους) ἀπὸ σκυρόδεμα (μπετὸν-ἀρμέ). Ὁ κάθε κίονας ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο μὲ ὕψος 5,20 μ. καὶ μὲ βάση τετράγωνο μὲ πλευρὰ 45 ἑκ. Νὰ βρεθῆ α) ὁ συνολικὸς ὄγκος τῶν κιόνων καὶ β) πόσο στοίχισε ἡ κατασκευή τους, ἂν τὸ σκυρόδεμα στοιχίζη 2000 δρχ. τὸ κυβικὸ μέτρο.

107. Δεξαμενὴ λαδιοῦ σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, μήκους 6 μ., πλάτους 5 μ. καὶ ὕψους 3 μ. ἔχει μέσα λάδι ἕως τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὄγκου της. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ λαδιοῦ, ποὺ περιέχει;

108. Ἕνα κτῆμα, σχήματος ὀρθογωνίου, ἔχει μῆκος 500 μ. καὶ πλάτος 300 μ. Μέσα ἀπὸ τὸ κτῆμα αὐτὸ πέρασε σιδηροδρομικὴ γραμμὴ καὶ τοῦ ἔκοψε τριγωνικὸ κομμάτι στὴ μιὰ γωνιά του, ποὺ εἶχε βάση 225 μ. καὶ ὕψος 150 μέτρα. Νὰ βρεθῆ: α) Πόσα στρέμματα ἦταν τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τοῦ κτήματος καὶ β) ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν σὲ στρέμματα τοῦ τριγωνικοῦ τμήματος ποὺ κόπηκε;

109. Ἡ περίμετρος ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου εἶναι 93 μ. Ἂν τὸ μῆκος τῆς μεγάλης βάσεώς του εἶναι 32 μ. καὶ τῆς μικρῆς 25 μ., πόσο εἶναι τὸ μῆκος κάθε μιᾶς ἀπὸ τὶς μὴ παράλληλες πλευρές του;

110. Ἀπὸ ἕνα φύλλο λαμαρίνας, σχήματος τετραγώνου, μὲ πλευρὰ 30 ἑκ. κόπηκε ἕνας κύκλος μὲ περιφέρεια 78,5 ἑκ. Νὰ βρεθῆ α) ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου (κατὰ προσέγγιση χιλιοστοῦ), β) τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, ποὺ κόπηκε, καὶ γ) τὸ ἐμβαδὸν τῆς λαμαρίνας, ποὺ ἀπέμεινε μετὰ τὴν ἀποκοπή.

111. Ἕνα τετραγωνικὸ κηπάριο μὲ πλευρὰ 3,60 μ. εἶναι μέσα σὲ κύκλο μὲ ἀκτίνα 2,70 μ. Νὰ βρεθῆ α) τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου, β) τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου καὶ γ) τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος ποὺ περιέχεται μεταξὺ τετραγώνου καὶ κύκλου.

112. Μία κανονικὴ τετραγωνικὴ πυραμίδα ἔχει πλευρὰ βάσεως 8,5 μ. καὶ ὕψος ἑνὸς τῶν τριγώνων τῆς τετραπλεύρου ἐπιφάνειάς της 15,40 μ. Ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειάς της;

113. Ἡ πλευρὰ τῆς βάσεως μιᾶς κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδας εἶναι 4,5 μ. καὶ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδας 3,2 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της;

114. Ἡ διάμετρος τῆς βάσεως ἑνὸς κυκλικοῦ κυλίνδρου εἶναι 0,30 μ. καὶ τὸ ὕψος του 1,20 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειάς του;

115. Ἑνὸς κυκλικοῦ κυλίνδρου ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως εἶναι 12,56 μ. καὶ τὸ ὕψος του 3,50 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειάς του;

116. Κυλινδρικὸ δοχεῖο (ντεπόζιτο) μὲ διάμετρο βάσεως 1,20 μ. καὶ ὕψος 1,80 μ. εἶναι γεμάτο λάδι. Πόσα κιλὰ λάδι περιέχει; (Εἰδικὸ βάρος λαδιοῦ 0,912).

117. Πόσες φιάλες ὄγκου 90 κυβ. ἑκ. μποροῦμε νὰ γεμίσωμε μὲ 180 κ. παλάμες κρασιοῦ;

118. Πόσες φιάλες ὄγκου 80 κυβ. ἑκ. μποροῦμε νὰ γεμίσωμε μὲ $\frac{1}{2}$ κ.μ. κρασιοῦ;

119. Ἡ διάμετρος τῆς βάσεως ἑνὸς κυκλικοῦ κώνου εἶναι 1,80 μ. καὶ ἡ πλευρά του 3,40 μ. Πόσα τ.μ. εἶναι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνειά του;

120. Θέλομε νὰ κατασκευάσωμε κωνικὴ σκηνή, ποὺ νὰ ἔχη ἀκτίνα βάσεως 1,20 μ. καὶ πλευρὰ 3,60 μ. Πόσα τ.μ. ὕφασμα θὰ χρειαστῆ γιὰ τὴν κατασκευή της καὶ πόσο θὰ στοιχίση, ἂν τὸ τετρ. μέτρο κοστίζη 39,50 δραχμές;

121. Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἑνὸς κυκλικοῦ κώνου ἔχει μῆκος 12,56 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειάς του, ὅταν ἡ πλευρά του εἶναι 4,50 μέτρα;

122. Ἕνα κωνικὸ δοχεῖο ἔχει μῆκος περιφέρειας βάσεως 6,28 μ. καὶ ὕψος 2,40 μ. Νὰ βρεθῇ α) ὁ ὄγκος, β) πόσους τόνους νερὸ χωρεῖ καὶ γ) πόσα κιλὰ νερὸ χωρεῖ.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΣΥΝΟΛΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΠΟΣΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΜΕΘΟΔΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

Μ Ε Ρ Ο Σ Δ Ε Υ Τ Ε Ρ Ο

Γ Ε Ω Μ Ε Τ Ρ Ι Α

Ὕλη ΣΤ΄ τάξεως.

Ε Ι Σ Α Γ Ω Γ Η

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο Α΄.

Κ Υ Β Ο Σ

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο Β΄.

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ'.

ΠΥΡΑΜΙΔΕΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ'.

ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε'.

ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΚΩΝΟΣ

Ἐξώφυλλον ΑΡΙΑΣ ΚΟΜΙΑΝΟΥ

ΕΚΔΟΣΙΣ Η.; 1976 (VI) ΑΝΤΙΤ. 213.000 ΣΥΜΒΑΣ. 2709/21/4/76

ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ Ε. ΧΑΤΖΑΡΑ: ΒΙΒΛΙΟΔ: Α/ΦΟΙ ΧΑΤΖΗΧΡΥΣΟΥ

ΟΕ
ΔΒ