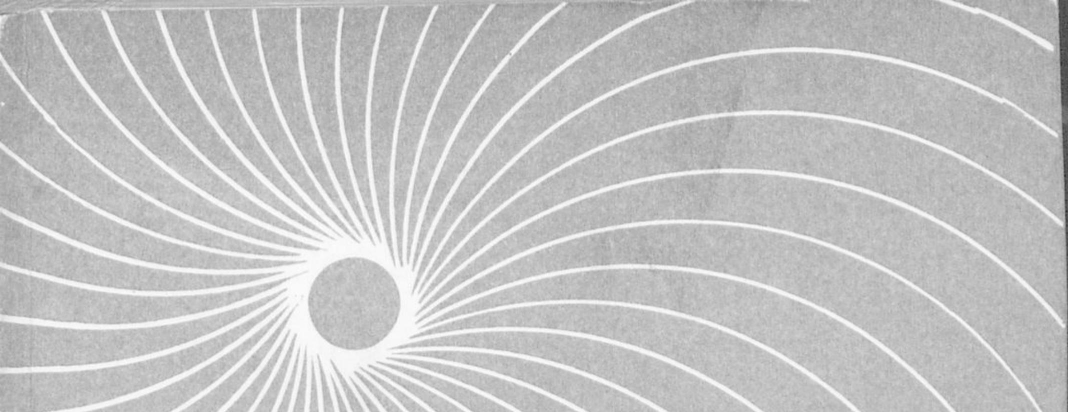


Ν. ΔΙΑΜΑΝΤΟΠΟΥΛΟΥ



# ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΣΤ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ



ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΑΘΗΝΑΙ 1974

# ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ
# ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΔΩΡΕΑΝ

# ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

# ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

## ΣΥΝΟΛΑ

### 1. Ἔννοια τοῦ συνόλου

**Παραδείγματα.**

1. Ὁ ἀριθμὸς 2 ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

2. Ἡ ἕδρα διδασκαλίας ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον τῶν ἀντικειμένων τῆς αἰθούσης τῆς ΣΤ΄ τάξεως.

3. Τὸ γράμμα α ἀνήκει εἰς τὸ ἀλφάβητον.

4. Ὁ Γεώργιος » εἰς τὴν Ε΄ τάξιν.

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς κάθε πρότασιν ἀναφέρονται δύο πράγματα, ὅπου τὸ πρῶτον ἀνήκει εἰς τὸ δεύτερον. Ἔτσι ὁ 2 ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον τῶν φ. ἀριθμῶν, ἡ ἕδρα εἰς τὸ σύνολον . . . ., τὸ α εἰς τὸ ἀλφάβητον καὶ ὁ Γ. εἰς τὴν Ε΄ τάξιν.

Εἰς τὰ πρῶτα δύο παραδείγματα τὸ β΄ πρᾶγμα ἀναφέρεται ὡς σύνολον ἀντικειμένων, ποὺ ἔχουν ὡρισμένην κοινὴν ἰδιότητα, τὴν ἰδιότητα τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ἢ τὴν ἰδιότητα νὰ κεῖνται εἰς τὴν αἴθουσαν τῆς ΣΤ΄ τάξεως.

Εἰς τὰ δύο τελευταῖα τὸ β΄ πρᾶγμα δύναται καὶ πάλιν νὰ θεωρηθῇ ὡς σύνολον, ὡς σύνολον γραμμάτων ἢ ὡς σύνολον συμμαθητῶν.

Συνεπῶς κάθε πρᾶγμα, εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκουν ἄλλα πράγματα, μπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς σύνολον ἀντικειμένων μὲ κοινὴν ἰδιότητα, ἀλλὰ καὶ κάθε σύνολον μπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς πρᾶγμα, ὅπου ἀνήκουν ἄλλα πράγματα.

Ἡ λέξις **πράγματα** ἢ **ἀντικείμενα** ἠμπορεῖ νὰ σημαίνῃ ὑλικὰ πράγματα (ἀνθρώπους, ζῷα, φυτά, θρανία κλπ.) ἀλλὰ καὶ ἀφῃρημένας ἐννοίας (αἱ ἡμέραι τῆς ἑβδομάδος, οἱ μῆνες τοῦ ἔτους, αἱ 4 πράξεις τῆς Ἀριθμητικῆς κλπ.).

Κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ πράγματα ἢ τὰ ἀντικείμενα, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τὸ σύνολον, ὀνομάζεται **στοιχεῖον** τοῦ συνόλου ἢ **μέλος** τοῦ συνόλου. Π.χ. ἡ ἕδρα εἶναι στοιχεῖον τοῦ συνόλου «ἀντικείμενα τῆς αἰθούσης», ὁμοίως τὰ θρανία εἶναι στοιχεῖον τοῦ συνόλου αὐτοῦ, καθὼς καὶ ὁ μαυροπίναξ, οἱ χάρται, αἱ εἰκόνες.

Τὰ **στοιχεῖα** ἑνὸς συνόλου δὲν εἶναι ἀπαραίτητον νὰ εἶναι ὁμοειδῆ. Ἀρκεῖ νὰ ἔχουν ἕνα κοινὸν γνώρισμα, τὸ ὁποῖον νὰ ἐπιτρέπῃ τὴν κατάταξίν των εἰς τὴν ὁλότητα. Π.χ. Τὰ ἀντικείμενα τῆς αἰθούσης τῆς ΣΤ΄ τάξεως (μαθηταί, θρανία, ἕδρα, χάρται, εἰκόνες κλπ.) δὲν εἶναι ὅμοια μεταξύ των, εἶναι ὅμως **στοιχεῖα** τοῦ συνόλου «ἀντικείμενα τῆς αἰθούσης»· διότι καθένα ἀπ' αὐτὰ ἔχει τὸ κοινὸν χαρακτηριστικὸν γνώρισμα, **ὅτι εὑρίσκεται** εἰς τὴν αἴθουσαν τῆς ΣΤ΄ τάξεως.

Ἄλλα παραδείγματα συνόλων:

1. Ἡ ἐνωμοτία τῶν Προσκόπων τοῦ σχολείου μας.
2. Ἡ ἀθλητικὴ ὁμὰς τοῦ σχολείου μας.
3. Ἡ ὁμὰς ποδοσφαιριστῶν τοῦ χωρίου.
4. Μία συλλογὴ γραμματοσήμων.
5. Ὅλοι οἱ κάτοικοι τῆς γῆς.
6. Ὅλοι οἱ κάτοικοι τῆς Ἑλλάδος.
7. Οἱ ποταμοὶ τῆς Μακεδονίας.
8. Τὰ ὄρη τῆς Ἠπείρου.
9. Αἱ λέξεις.
10. Τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου.
11. Τὰ φωνήεντα.
12. Τὰ σύμφωνα.
13. Οἱ ἀριθμοί.
14. Αἱ ἡμέραι τῆς ἑβδομάδος.
15. Οἱ μῆνες τοῦ ἔτους, κλπ. κλπ.

**Ἐργασία.** Νὰ ἀναφέρετε 10 παραδείγματα συνόλων ἀπὸ τὰ ἀντικείμενα τῆς οἰκίας σας, τοῦ σχολείου σας κλπ.

## 2. Τὸ μονομελὲς σύνολον. Τὸ διμελὲς σύνολον. Τὸ κενὸν σύνολον

α) Ἐὰν μᾶς ἐρωτήσουν, πόσα φωνήεντα ἔχει ἡ λέξις «πῦρ», θὰ ἀπαντήσωμεν: ἕνα. Ἄρα τὸ σύνολον τῶν φωνηέντων τῆς λέξεως «πῦρ» ἔχει ἕνα μόνον στοιχεῖον ἢ μέλος (φωνῆεν) καὶ δι᾽ αὐτὸ λέγεται **μονομελὲς σύνολον.**

**Παραδείγματα:** Μονομελῆ σύνολα εἶναι:

Τὸ σύνολον τῶν φωνηέντων τῶν λέξεων: γῆ, μήν, φῶς, μῦς.

Τὸ σύνολον τῶν συμφώνων τῶν λέξεων: γῆ, ἕνα, ἄν, ἄς, μή.

Τὸ σύνολον τῶν μηνῶν τοῦ ἔτους, οἱ ὁποῖοι ἀρχίζουν ἀπὸ Φ.

Τὸ σύνολον τῶν ἡμερῶν τῆς ἑβδομάδος, αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουν ἀπὸ Δ.

Τὸ σύνολον τῶν Ἠπείρων τῆς γῆς, αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουν ἀπὸ Ε. κλπ. κλπ.

β) Ἐὰν μᾶς ἐρωτήσουν, πόσα σύμφωνα ἔχει ἡ λέξις «πῦρ»; θὰ ἀπαντήσωμεν: δύο. Ἄρα τὸ σύνολον τῶν συμφώνων τῆς λέξεως «πῦρ» ἔχει δύο στοιχεῖα ἢ μέλη (σύμφωνα)· διὰ τοῦτο λέγεται **διμελὲς σύνολον** ἢ **ζεῦγος στοιχείων.**

**Παραδείγματα:** Διμελῆ σύνολα εἶναι:

Τὸ σύνολον τῶν συμφώνων τῶν λέξεων: ψωμί, νερό, μέλι, τρία, ἑπτά, ὀκτώ, δέκα, φῶς, μήν, μῦς.

Τὸ σύνολον τῶν φωνηέντων τῶν λέξεων: ψωμί, νερό, μέλι, τρία, ἑπτά, ὀκτώ, δέκα, ἕνα, πέννα, χάρτης, ἔτος.

Τὸ σύνολον τῶν μηνῶν, οἱ ὁποῖοι ἀρχίζουν ἀπὸ Μ (Μάρτιος, Μάϊος).

Τὸ σύνολον τῶν ἡμερῶν τῆς ἑβδομάδος, αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουν ἀπὸ Τ (Τρίτη, Τετάρτη).

Τὸ σύνολον τῶν χρωμάτων τῆς σημαίας μας (κυανοῦν, λευκόν).

γ) Εἶναι Σάββατον. Ὅλοι οἱ μαθηταὶ τῆς ΣΤ΄ τάξεως ἐπῆγαν ἐκδρομήν. Ποῖον εἶναι κατὰ τὴν ἡμέραν αὐτὴν τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν, οἱ ὁποῖοι εὑρίσκονται εἰς τὴν αἴθουσαν; Ἀπαντῶμεν ὅτι ἡ αἴθουσα εἶναι κενὴ (ἀδειανή) ἀπὸ μαθητάς.

Ἄρα τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν τῆς αἰθούσης κατὰ τὴν ἡμέραν αὐτὴν εἶναι **κενὸν σύνολον.** Τοῦτο εἶναι ἕνα σύνολον χωρὶς στοιχεῖα.

Συνεπῶς, ἐὰν ἕνα σύνολον δὲν ἔχῃ στοιχεῖα, δὲν θὰ εἴπωμεν ὅτι δὲν ὑπάρχει σύνολον· θὰ εἴπωμεν ὅτι ὑπάρχει **κενὸν σύνολον.**

**Παραδείγματα** κενοῦ συνόλου :

Τὸ σύνολον τῶν μακρῶν φωνηέντων τῶν λέξεων : Θεός, νέος, ξένος, νέφος.

Τὸ σύνολον τῶν βραχέων φωνηέντων τῶν λέξεων : φωνή, ἠχώ, πηγή, τρώγω.

Τὸ σύνολον τῶν ἡμερῶν τῆς ἑβδομάδος, αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουν ἀπὸ Μ.

Τὸ σύνολον τῶν μηνῶν τοῦ ἔτους, οἱ ὁποῖοι ἀρχίζουν ἀπὸ Β. Τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν τῆς αἰθούσης τῆς ΣΤ' τάξεως κατὰ τὸ διάλειμμα, ὅταν ὅλοι οἱ μαθηταὶ τῆς τάξεως αὐτῆς εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐλὴν τοῦ σχολείου.

## 3. Συμβολισμοὶ τῶν συνόλων

Κάθε σύνολον, χάριν συντομίας, τὸ παριστάνομεν μὲ ἕνα κεφαλαῖον γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου· π.χ. τὸ σύνολον Α, τὸ σύνολον Β κλπ.

Καὶ κάθε ἀντικείμενον, ποὺ εἶναι στοιχεῖον τοῦ συνόλου, τὸ παριστάνομεν, χάριν συντομίας, μὲ ἕνα μικρὸν γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου ἢ μὲ ἀριθμητικὰ ψηφία· π.χ. τὸ στοιχεῖον α, τὸ στοιχεῖον β κλπ.

α) Διὰ νὰ δηλώσωμεν ὅτι τὸ ἀντικείμενον α εἶναι στοιχεῖον τοῦ συνόλου Α, χρησιμοποιοῦμεν τὸ σύμβολον $\in$, τὸ ὁποῖον, σημαίνει **«ἀνήκει εἰς τό»** καὶ τὸ γράφομεν συμβολικῶς ἔτσι :

$$\alpha \in A$$

τὸ διαβάζομεν δέ : **«τὸ α ἀνήκει εἰς τὸ Α»**, ἢ **«τὸ α εἶναι στοιχεῖον τοῦ Α».**

β) Διὰ νὰ δηλώσωμεν ὅμως ὅτι τὸ ἀντικείμενον β δὲν εἶναι στοιχεῖον τοῦ συνόλου Α, τότε χρησιμοποιοῦμεν τὸ σύμβολον $\notin$, τὸ ὁποῖον σημαίνει **«δὲν ἀνήκει εἰς τό»** καὶ τὸ γράφομεν συμβολικῶς ἔτσι :

$$\beta \notin A$$

τὸ διαβάζομεν δέ : **«τὸ β δὲν ἀνήκει εἰς τὸ Α»**, ἢ **«τὸ β δὲν εἶναι στοιχεῖον τοῦ Α».**

γ) Διὰ νὰ δηλώσωμεν τὸ κενὸν σύνολον χρησιμοποιοῦμεν τὸ σύμβολον $\varnothing$.

δ) Διὰ νὰ δηλώσωμεν ὅτι τὰ ἀντικείμενα ἀποτελοῦν ἕνα σύνολον, τὰ γράφομεν μέσα εἰς αὐτὸ τὸ σύμβολον $\{\ \}$, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται **ἄγκιστρον.**

Ἔτσι, διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ σύνολον Β ἔχει ὡς στοιχεῖα τὰ γράμματα α, β, γ θὰ σημειώσωμεν συμβολικῶς:

$$B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

καὶ γράφομεν:

$$\alpha \in B$$
$$\beta \in B$$
$$\gamma \in B$$

διαβάζομεν δέ: **«τὸ α εἶναι στοιχεῖον τοῦ Β», «τὸ β εἶναι στοιχεῖον τοῦ Β», «τὸ γ εἶναι στοιχεῖον τοῦ Β».**

**Παρατήρησις.** 1. Τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου μέσα εἰς τὸ ἄγκιστρον χωρίζονται μεταξύ των μὲ κόμμα, καὶ ἠμποροῦμεν νὰ τὰ γράψωμεν κατὰ οἱανδήποτε σειράν. Π.χ.

$$B = \{\alpha, \beta, \gamma\} \text{ ἢ } B = \{\beta, \gamma, \alpha\} \text{ ἢ } B = \{\gamma, \alpha, \beta\}.$$

2. Κάθε στοιχεῖον ἑνὸς συνόλου τὸ γράφομεν ἐντὸς τοῦ ἀγκίστρου μίαν μόνον φοράν. Π.χ. τὸ σύνολον Γ τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως «χάρακας» γράφεται ἔτσι: Γ = {χ, α, ρ, κ, ς}.

## Α. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

α) Πότε ἕνα σύνολον λέγεται μονομελές; πότε λέγεται διμελὲς καὶ πότε λέγεται κενόν;

β) Τί σύνολα εἶναι: τὸ σύνολον τῶν φωνηέντων τῶν λέξεων: «Τρώς, θώς, φλέψ, πᾶς, ξένος, μῆλον, ἀστήρ»;

γ) Τί σύνολον εἶναι τὸ σύνολον τῶν βραχέων φωνηέντων τῆς λέξεως «πηγή»;

δ) Τί σύνολον εἶναι τὸ σύνολον τῶν μακρῶν φωνηέντων τῆς λέξεως «μέλος»;

ε) Ἀπὸ τὴν αἴθουσαν διδασκαλίας τῆς ΣΤ΄ τάξεως ἔχουν ἀφαιρεθῆ ὅλοι οἱ χάρται, λόγῳ ἐλαιοχρωματισμοῦ τῶν τοίχων της. Πῶς θὰ ὀνομάσωμεν τὸ σύνολον τῶν χαρτῶν τῆς αἰθούσης;

στ) Εἰς τὸ μάθημα τῶν Θρησκευτικῶν εἶναι παρόντες ὅλοι οἱ μαθηταὶ τῆς τάξεως. Πῶς λέγεται τὸ σύνολον τῶν ἀπόντων μαθητῶν τῆς τάξεως αὐτῆς εἰς τὸ μάθημα αὐτὸ κατὰ τὴν ὥραν αὐτήν;

ζ) Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι εὑρίσκονται μεταξὺ τοῦ 8 καὶ τοῦ 9;

## 4. Σύνολον μὲ περισσότερα στοιχεῖα

**Παράδειγμα 1.** Εἰς τὸ πρῶτον θρανίον τῆς ΣΤ' τάξεως κάθονται τρεῖς μαθηταί, οἱ: Βλάσης, Δέδες, Νέγρης.

Ἂν παραστήσωμεν μὲ τὸ γράμμα Μ τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν τοῦ πρώτου θρανίου, τότε:

Μ = {Βλάσης, Δέδες, Νέγρης}

ἢ Μ = {Β, Δ, Ν}

**Παράδειγμα 2.** Τὸ σύνολον τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως «Πατρίς» εἶναι:

Π = {π, α, τ, ρ, ι, ς}

Εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα ἔχομεν σύνολον μὲ τρία στοιχεῖα (τριμελὲς σύνολον). Εἰς τὸ δεύτερον παράδειγμα ἔχομεν σύνολον μὲ 6 στοιχεῖα.

**Ἑπομένως:** ἕνα σύνολον ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ ἕνα στοιχεῖον (μονομελὲς σύνολον) ἢ δύο στοιχεῖα (διμελὲς σύνολον) ἢ περισσότερα στοιχεῖα (σύνολον μὲ πολλὰ στοιχεῖα).

Ἐμάθομεν πῶς γράφομεν τὰ σύνολα. Ἐὰν ἔχωμεν σύνολα μὲ πολλὰ στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα παρουσιάζουν μίαν ὡρισμένην σειράν, ὅπως εἶναι οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ 1 ἕως 99, θὰ τοὺς γράψωμεν ὅλους ἐντὸς τοῦ ἀγκίστρου;

Ὄχι βέβαια. Μέσα εἰς τὸ ἄγκιστρον γράφομεν τὰ δύο ἢ τρία πρῶτα ἀπὸ τὰ στοιχεῖα αὐτά, κατόπιν γράφομεν τρεῖς τελείας (στιγμάς) καὶ τέλος γράφομεν τὸ τελευταῖον στοιχεῖον τοῦ συνόλου.

Π.χ. $A = \{1, 2, 3, \ldots, 99\}$

Αἱ τρεῖς τελεῖαι (στιγμαί) σημαίνουν: «καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τοῦ».

Πῶς ὅμως θὰ γράψωμεν ἕνα σύνολον, ἂν τὰ στοιχεῖα του δὲν παρουσιάζουν ὡρισμένην σειράν;

**Παράδειγμα.** Ἂν θελήσωμεν νὰ παραστήσωμεν μὲ Μ τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν τοῦ Μαρασλείου, δὲν εἶναι εὔκολον νὰ γράψωμεν τὰ ὀνόματα ὅλων αὐτῶν τῶν μαθητῶν ἐντὸς τοῦ ἀγκίστρου, ἀλλ' οὔτε καὶ παρουσιάζουν οἱ μαθηταὶ ὡρισμένην σειράν, ὅπως συμβαίνει μὲ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς.

Δι' αὐτὸ θὰ χρησιμοποιήσωμεν ἕνα ἄλλον τρόπον ἁπλοῦν καὶ σύντομον, ὁ ὁποῖος θὰ δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ εἰς πᾶσαν περίπτωσιν.

Μὲ τὸ γράμμα Χ τοῦ ἀλφαβήτου μας παριστάνομεν κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου. Μέσα εἰς τὸ ἄγκιστρον γράφομεν πρῶτα τὸ Χ, δεξιὰ αὐτοῦ γράφομεν μίαν μικρὰν διαχωριστικὴν γραμμὴν | ἢ δύο τελείας : καὶ τέλος γράφομεν πάλιν τὸ Χ, μετὰ τὸ ὁποῖον γράφεται ἡ ἰδιότης, τὴν ὁποίαν ἔχουν ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου.

Ἔτσι τὸ σύνολον Μ τοῦ παραπάνω παραδείγματος γράφεται:

$$M = \{X \mid X \text{ μαθητὴς τοῦ Μαρασλείου}\}$$

καὶ διαβάζεται ὡς ἑξῆς:

Μ εἶναι τὸ σύνολον τῶν Χ ὅπου Χ εἶναι μαθητὴς τοῦ Μαρασλείου.

## Ἄλλα παραδείγματα

1. Τὸ σύνολον Μ = {Ἰανουάριος, Φεβρουάριος, Μάρτιος, Ἀπρίλιος, Μάϊος, Ἰούνιος, Ἰούλιος, Αὔγουστος, Σεπτέμβριος, Ὀκτώβριος, Νοέμβριος, Δεκέμβριος} γράφεται:

$$M = \{X \mid X \text{ μὴν τοῦ ἔτους}\}$$

καὶ διαβάζεται: Μ εἶναι τὸ σύνολον τῶν Χ μὲ τὴν ἰδιότητα: Χ εἶναι μὴν τοῦ ἔτους.

2. Τὸ σύνολον Η = {Δευτέρα, Τρίτη, Τετάρτη, Πέμπτη, Παρασκευή, Σάββατον, Κυριακή} γράφεται:

$$H = \{X \mid X \text{ ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος}\}$$

καὶ διαβάζεται: Η εἶναι τὸ σύνολον τῶν Χ μὲ τὴν ἰδιότητα: Χ εἶναι ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος.

3. Τὸ σύνολον $A = \{1, 2, 3, \ldots, 99\}$ γράφεται :
$A = \{X | X$ φυσικὸς ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ $100\}$
καὶ διαβάζεται : A εἶναι τὸ σύνολον τῶν X μὲ τὴν ἰδιότητα : X εἶναι φυσικὸς ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 100.

B. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Παραστήσατε συμβολικῶς :
1. Τὸ σύνολον τῶν Ἠπείρων τῆς Γῆς.
2. Τὸ σύνολον τῶν Ὠκεανῶν.
3. Τὸ σύνολον τῶν Κρατῶν τῆς Εὐρώπης.
4. Τὸ σύνολον τῶν ποταμῶν τῆς Ἑλλάδος.
5. Τὸ σύνολον τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου.
6. Τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν 1 μέχρι 999.

## 5. Ἴσα σύνολα

Ἂν παραστήσωμεν τὰ σύνολα $M = \{2, 3, 4\}$ καὶ $N = \{4, 3, 2\}$, βλέπομεν ὅτι κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου M εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ συνόλου N. Ἀλλὰ καὶ τὸ κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου N εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ συνόλου M. Τὰ δύο αὐτὰ σύνολα M καὶ N λέγονται ἴσα.

Ὁμοίως τὰ σύνολα $\Delta = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ καὶ $E = \{\gamma, \beta, \alpha\}$ εἶναι ἴσα μεταξύ των, διότι κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου Δ εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ συνόλου E, ὅπως καὶ κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου E εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ συνόλου Δ.

**Ἄρα :** *Δύο σύνολα λέγονται ἴσα, ὅταν ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ ἑνὸς ταυτίζωνται ἕνα πρὸς ἕνα μὲ τὰ στοιχεῖα τοῦ ἄλλου.*

Τὴν ἰσότητα τῶν συνόλων M καὶ N τὴν σημειώνομεν ὡς ἑξῆς : $M = N$.

## 6. Ἰσοδύναμα σύνολα, πληθικὸς ἀριθμὸς συνόλου

Παρατηροῦντες τὴν εἰκόνα ἑνὸς γεύματος μιᾶς τετραμελοῦς οἰκογενείας βλέπομεν ὅτι εἰς τὸ κάθε μέλος ἀντιστοιχεῖ ἕνα κάθισμα, μία πετσέτα, ἕνα κουτάλι, ἕνα μαχαίρι κλπ. Λέγομεν ὅτι τὸ σύνολον τῶν μελῶν τῆς οἰκογενείας εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύνολον τῶν καθισμάτων, τῶν πετσετῶν, τῶν κουταλιῶν κλπ.

Ἀπὸ τὴν ἰσοδυναμία αὐτὴ δημιουργεῖται εἰς τὸ μυαλὸ μία ἔννοια, μία ἀφῃρημένη εἰκόνα, ποὺ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 4 καὶ λέγεται πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ συνόλου τῶν ἀτόμων, τῶν καθισμάτων κλπ.

## 7. Ἕνωσις συνόλων

**Παράδειγμα 1.** Ἡ Ἕκτη τάξις τοῦ Μαρασλείου ἔχει δύο ὁμάδας ἐρυθροσταυριτῶν. Τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν, ποὺ ἀνήκουν εἰς τὴν μίαν ὁμάδα, εἶναι : Α = {Παῦλος, Πέτρος, Κώστας, Φωκίων} καὶ τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν ,ποὺ ἀνήκουν εἰς τὴν ἄλλην ὁμάδα, εἶναι : Β = {Κώστας, Φωκίων, Φαίδων, Χρῖστος, Θωμᾶς}.

Ἐὰν τώρα μᾶς ἐρωτήσουν : ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἐρυθροσταυριτῶν μαθητῶν τῆς ΣΤ' τάξεως τοῦ Μαρασλείου; θ' ἀπαντήσωμεν μὲ εὐκολίαν :

Μ = {Παῦλος, Πέτρος, Κώστας, Φωκίων, Φαίδων, Χρῖστος, Θωμᾶς}.

Τί ἐκάμαμεν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἐρυθροσταυριτῶν τῆς ΣΤ' τάξεως;

Ὅπως παρατηροῦμεν, ἑνώσαμεν τὰ δύο σύνολα εἰς ἕνα σύνολον, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται **ἕνωσις τῶν δύο συνόλων**.

Παρατηροῦμεν ἐπίσης, ὅτι ὁ Κώστας καὶ ὁ Φωκίων ἀνήκουν καὶ εἰς τὰς δύο ὁμάδας· εἰς τὴν ἕνωσιν ὅμως δὲν λαμβάνονται δύο φοράς, ἀλλὰ μόνον μίαν, διότι ἡ ἕνωσις τῶν δύο αὐτῶν συνόλων εἶναι σύνολον. Καί, ὅπως γνωρίζομεν, τὰ στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου πρέπει νὰ διακρίνωνται σαφῶς μεταξύ των.

**Ὥστε :** *Ἕνωσις δύο συνόλων λέγεται τὸ σύνολον, τὸ ὁποῖον ἔχει στοιχεῖα ὅλα τὰ στοιχεῖα τούτων· κάθε στοιχεῖον ὅμως λαμβάνεται μίαν μόνον φοράν.*

Σύμβολον τῆς ἑνώσεως εἶναι τὸ $\cup$. Ἔτσι ἡ ἕνωσις τῶν δύο ἀνωτέρω συνόλων Α καὶ Β γράφεται : $A \cup B$ καὶ διαβάζεται : «Α ἕνωσις Β».

**Παράδειγμα 2.** Ἂν $A = \{2, 5, 6, 7\}$ καὶ $B = \{2, 4, 5, 7\}$ θὰ εἶναι: $E = A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 7\}$

**Παράδειγμα 3.** Ἂν $A = \{\pi, \rho, \sigma\}$ καὶ $B = \{\sigma, \tau, \upsilon\}$ θὰ εἶναι: $E = A \cup B = \{\pi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon\}$.

**Σημείωσις.** 1. Τὸ σύνολον, ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴν ἕνωσιν, ἠμποροῦμεν νὰ τὸ ἑνώσωμεν μὲ ἕνα τρίτον σύνολον, ὁπότε θὰ ἔχωμεν ἕνωσιν τριῶν συνόλων. Ὁμοίως τὴν ἕνωσιν αὐτὴν ἠμποροῦμεν νὰ τὴν ἑνώσωμεν μὲ ἕνα τέταρτον σύνολον, ὁπότε θὰ ἔχωμεν ἕνωσιν 4 συνόλων κ.ο.κ.

2. Διὰ τὴν ἕνωσιν ἑνὸς συνόλου A μὲ τὸ κενὸν σύνολον $\varnothing$ ἔχομεν:

$A \cup \varnothing = A$ (διότι τὸ κενὸν σύνολον δὲν ἔχει κανένα στοιχεῖον).

Διὰ τοῦτο τὸ κενὸν σύνολον $\varnothing$ λέγεται οὐδέτερον στοιχεῖον διὰ τὴν πρᾶξιν τῆς ἑνώσεως.

3. Διὰ νὰ διδάξωμεν ἢ νὰ παραστήσωμεν τὴν πρόσθεσιν δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἑνώνομεν δύο σύνολα (δακτύλων, ψηφίων, σβώλων κλπ). Π.χ. ἡ ἕνωσις $\{\alpha, \beta, \gamma\} \cup \{\delta, \varepsilon\} = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ παριστᾷ τὴν πρόσθεσιν $3 + 2 = 5$, ὅπου 3 εἶναι ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ πρώτου συνόλου, 2 τοῦ δευτέρου καὶ 5 τῆς ἑνώσεως. Τὰ σύνολα ὅμως ποὺ ἑνώνομε πρέπει νὰ μὴν ἔχουν κοινὰ στοιχεῖα, νὰ εἶναι ὅπως λέγομεν **«ξένα μεταξύ των»**.

## Γ. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

α) Νὰ σχηματίσετε τὰς ἑνώσεις τῶν ἑξῆς συνόλων:

1. $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ καὶ $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$
2. $A = \{\beta, \gamma, \varepsilon, \zeta, \eta\}$ καὶ $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta\}$
3. $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ καὶ $B = \{\gamma, \beta, \alpha, \delta\}$
4. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ καὶ $B = \{3, 2, 4, 1\}$
5. $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $B = \{\beta, \gamma, \delta\}$ καὶ $\Gamma = \{\gamma, \delta, \varepsilon\}$.
6. $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ καὶ $B = \varnothing$
7. $A = \{1, 2, 3\}$ καὶ $B = \varnothing$

β) Νὰ σχηματίσετε τὴν ἕνωσιν τοῦ συνόλου A τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως **«μάθημα»** καὶ τοῦ συνόλου B τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως **«βιβλίον»**.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

# Π Ο Σ Α

### 1. Τί λέγεται ποσὸν

**Παράδειγμα.** *Ὁ Πέτρος μὲ τὸ ἄνοιγμα τῶν σχολείων ἠγόρασε 4 τετράδια καὶ ἐπλήρωσε 12 δραχμάς. Ἀργότερα ἐχρειάσθη ἄλλα 8 ὅμοια τετράδια καὶ ἐπλήρωσε 24 δραχμάς.*

Εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ βλέπομεν ὅτι τὰ τετράδια ἀπὸ 4 ἔγιναν 8, δηλ. ἐδιπλασιάσθη ὁ ἀριθμός των· ὁμοίως καὶ αἱ δραχμαὶ ἀπὸ 12 ἔγιναν 24. Δηλ. καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν τετραδίων καὶ αἱ δραχμαὶ ηὐξήθησαν.

Θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ἀγοράσῃ ὁ Πέτρος καὶ ὀλιγώτερα τετράδια ἀπὸ τὰ 4, ὁπότε θὰ ἐπλήρωνε καὶ ὀλιγωτέρας δραχμάς.

**Ἑπομένως** τὰ τετράδια καὶ αἱ δραχμαὶ εἶναι δυνατὸν νὰ γίνουν περισσότεραι (νὰ αὐξηθοῦν) ἢ καὶ ὀλιγώτεραι (νὰ ἐλαττωθοῦν).

Τὸ ἴδιον συμβαίνει καὶ μὲ τοὺς μαθητὰς τῆς τάξεως ἢ τοῦ σχολείου : εἶναι δυνατὸν νὰ αὐξηθοῦν, ἂν ἐγγραφοῦν καὶ ἄλλοι μαθηταί, ἢ νὰ ἐλαττωθοῦν, ἂν μερικοὶ ἀπὸ τοὺς φοιτῶντας πάρουν ἀποφοιτήριον.

Ὁμοίως ἠμπορεῖ νὰ αὐξηθοῦν ἢ νὰ ἐλαττωθοῦν τὰ θρανία, οἱ χάρται, αἱ εἰκόνες, τὰ πρόβατα, οἱ ἐργάται, τὰ ἡμερομίσθια κλπ.

Ὅλα αὐτὰ ὀνομάζονται **ποσά.**

> **Ποσὸν** *εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν ὀνομάζεται κάθε τι, τὸ ὁποῖον ἠμπορεῖ νὰ αὐξηθῇ ἢ νὰ ἐλαττωθῇ, δηλαδὴ δύναται νὰ λάβῃ μίαν νέαν ἀριθμητικὴν τιμήν.*

### 2. Ποσὰ ἀνάλογα καὶ ποσὰ ἀντίστροφα

α) Ἀνάλογα ποσὰ

**Παράδειγμα.** *Ἕνας ἐργάτης διὰ 2 ἡμερομίσθια ἔλαβε 240 δρχ. Ἂν εἰργάζετο διπλασίας ἡμέρας, δηλ.* $2 \times 2 = 4$ *ἡμέρας, θὰ ἐλάμβανε* *καὶ διπλασίας δραχμάς, δηλ. 240 × 2 = 480 δρχ. Διὰ τριπλάσια ἡμερομίσθια θὰ ἐλάμβανε τριπλασίας δραχμὰς κ.ο.κ. Καὶ διὰ ἕνα ἡμερομίσθιον θὰ ἐλάμβανε 2 φορὰς ὀλιγωτέρας δρχ., δηλ. 240 : 2 = 120 δρχ.*

Εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ ἔχομεν δύο ἑτεροειδῆ (διαφορετικά) ποσά : ἡμερομίσθια καὶ δραχμάς. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι, ὅταν ἡ τιμὴ 2 τοῦ ἑνὸς ποσοῦ, τῶν ἡμερομισθίων, διπλασιασθῇ, τριπλασιασθῇ κλπ., καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ 240 δραχμαὶ τῆς ἀμοιβῆς τοῦ ἐργάτου διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κλπ.

Ὁμοίως παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν ἡ τιμὴ 2 τοῦ ποσοῦ τῶν ἡμερομισθίων γίνῃ τὸ ἥμισυ (μισή), καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ 240 δραχμαὶ τῆς ἀμοιβῆς τοῦ ἐργάτου γίνεται τὸ ἥμισυ.

Ἐπίσης, ἂν ἡ τιμὴ τοῦ ποσοῦ τῶν ἡμερομισθίων γίνῃ τὸ τρίτον, τὸ τέταρτον κ.τ.λ., καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῶν δραχμῶν θὰ γίνῃ τὸ τρίτον, τὸ τέταρτον κ.τ.λ.

Τὰ ποσὰ αὐτὰ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν λέγονται **εὐθέως ἀνάλογα** ἢ ἁπλῶς **ἀνάλογα ποσά.**

*Δύο ποσὰ λέγονται ἀ ν ά λ ο γ α, ὅταν ἔχουν ἀντιστοίχους τιμὰς καὶ πολλαπλασιαζομένης τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς ποσοῦ ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, πολλαπλασιάζεται καὶ ἡ ἀντίστοιχος πρὸς αὐτὴν τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν· ἤ, διαιρουμένης τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς ποσοῦ δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ, διαιρῆται καὶ ἡ ἀντίστοιχος πρὸς αὐτὴν τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

**Σημείωσις.** Ἡ ἡλικία ἑνὸς παιδιοῦ καὶ τὸ ἀνάστημα αὐτοῦ, μολονότι συναυξάνονται, δὲν εἶναι ἀνάλογα ποσά· διότι ὅταν διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κλπ. ἡ ἡλικία τοῦ παιδιοῦ, δὲν διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κλπ. καὶ τὸ ἀνάστημα αὐτοῦ (συμμεταβλητὰ ποσά).

**Παρατήρησις.** Εἰς τὴν καθημερινὴν ζωὴν συχνὰ συναντῶμεν **ποσὰ ἀνάλογα·** λ.χ. Τὰ **κιλὰ** τῶν πραγμάτων ποὺ ἀγοράζομεν καὶ τὰ **χρήματα** ποὺ πληρώνομεν δι' αὐτά. Ὁ **ἀριθμὸς τῶν ἐνδυ-**

**μασιῶν καὶ τὰ μέτρα τοῦ ὑφάσματος**, τὰ ὁποῖα χρειάζονται διὰ τὴν κατασκευήν των. Αἱ **ἀποστάσεις** τὰς ὁποίας διανύομεν καὶ ὁ **χρόνος** ποὺ χρειάζεται, διὰ νὰ τὰς διανύσωμεν. Ἡ **ἀπόστασις** ποὺ διανύει ἕνα αὐτοκίνητον καὶ ἡ **ποσότης** τῆς βενζίνης, τὴν ὁποίαν ἐξοδεύει διὰ τὴν ἀπόστασιν αὐτήν.

Ἡ **ἀμοιβὴ** τοῦ ἐργάτου καὶ ὁ **χρόνος** τῆς ἐργασίας του.

β) Ἀντίστροφα ποσὰ

**Παράδειγμα.** *4 ἐργάται τρυγοῦν ἕνα ἀμπέλι εἰς 12 ἡμέρας. Διπλάσιοι ἐργάται, δηλ. 8 ἐργάται (4 × 2), θὰ τὸ τρυγήσουν εἰς 6 ἡμέρας (12 : 2 = 6 ἡμ.). Καὶ μισοὶ ἐργάται, δηλ. 2 ἐργάται (4 : 2 = 2 ἐργάται), θὰ τὸ τρυγήσουν εἰς διπλασίας ἡμέρας, δηλ. εἰς 24 ἡμέρας (12 × × 2 = 24 ἡμ.).*

Εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ ἔχομεν δύο ἑτεροειδῆ ποσά : ἐργάτας καὶ ἡμέρας· δηλ. τὴν ἐργασίαν τοῦ ἐργάτου καὶ τὸν χρόνον ποὺ χρειάζεται διὰ νὰ γίνῃ ἡ ἐργασία αὐτή.

Καθὼς παρατηροῦμεν, ὅταν οἱ ἐργάται εἶναι 4, τελειώνουν τὴν ἐργασίαν εἰς 12 ἡμέρας. Ὅταν οἱ ἐργάται γίνουν διπλάσιοι, χρειάζονται τὸ ἥμισυ τῶν ἡμερῶν, διὰ νὰ τελειώσουν τὴν ἰδίαν ἐργασίαν. Καὶ ὅταν οἱ ἐργάται ἀπὸ 4 γίνουν 2, δηλ. 2 φορὰς ὀλιγώτεροι, τότε θὰ χρειασθοῦν δύο φορὰς περισσοτέρας ἡμέρας.

Καὶ εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ βλέπομεν, ὅτι τὰ ποσὰ ἐργάται καὶ ἡμέραι ἔχουν σχέσιν μεταξύ των, ἀλλὰ ἀντίθετον ἀπὸ ἐκείνην, τὴν ὁποίαν ἔχουν τὰ ἀνάλογα ποσά. Διότι ἐδῶ, ὅταν ἡ τιμὴ 4 τοῦ ποσοῦ τῶν ἐργατῶν διπλασιασθῇ, ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ 12 τοῦ ποσοῦ τῶν ἡμερῶν διαιρεῖται διὰ 2. Καὶ ὅταν ἡ τιμὴ 4 τῶν ἐργατῶν διαιρεθῇ διὰ 2, ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ 12 τοῦ ποσοῦ τῶν ἡμερῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 2.

Ὁμοίως, ἂν ἡ τιμὴ τοῦ ποσοῦ τῶν ἐργατῶν διαιρεθῇ διὰ 3, ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ποσοῦ τῶν ἡμερῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 3.

Τὰ ποσὰ αὐτὰ λέγονται **ἀντιστρόφως ἀνάλογα** ἢ ἁπλῶς **ἀντίστροφα ποσά.**

*Δύο ποσὰ λέγονται ἀ ν τ ί σ τ ρ ο φ α, ὅταν ἔχουν ἀντιστοίχους τιμὰς καὶ πολλαπλασιαζομένης τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς ποσοῦ ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, διαιρῆται ἡ ἀντίστοιχος πρὸς αὐτὴν τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ· ἤ, διαιρουμένης τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς ποσοῦ δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ, πολλαπλασιάζεται ἡ ἀντίστοιχος πρὸς αὐτὴν τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

**Σημείωσις.** Ὅταν αὐξάνεται ἓν ποσὸν καὶ τὸ ἄλλο ἐλαττοῦται, δὲν πρέπει νὰ νομίζωμεν ὅτι εἶναι τὰ ποσὰ ἀντίστροφα. Π.χ. Μία ἁμαξοστοιχία μὲ μίαν μηχανὴν διανύει μίαν ἀπόστασιν εἰς 10 ὥρας, ἡ αὐτὴ ἁμαξοστοιχία, ὅταν ἔχῃ δύο μηχανάς, δὲν ἕπεται ὅτι θὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν αὐτὴν εἰς 5 ὥρας, ἀλλὰ κατά τι ὀλιγώτερον τῶν 10 ὡρῶν. Τὰ ποσὰ δὲν εἶναι ἀντίστροφα, ἀλλὰ ποσὰ **μεταβαλλόμενα ἀνομοίως.**

**Παρατήρησις.** Ἀντίστροφα ποσὰ εἶναι :

Ἡ **ταχύτης** καὶ ὁ **χρόνος** ποὺ χρειάζεται, διὰ νὰ διανύσωμεν ὡρισμένην ἀπόστασιν.

Αἱ **ἡμέραι** ποὺ χρειάζονται διὰ μίαν ἐργασίαν καὶ αἱ **ὧραι** τὰς ὁποίας ἐργαζόμεθα τὴν ἡμέραν, διὰ νὰ τελειώσῃ ἡ ἐργασία.

Τὸ **μῆκος** καὶ τὸ **πλάτος** ἑνὸς ὑφάσματος διὰ μίαν ἐνδυμασίαν.

Ἐ ρ ω τ ή σ ε ι ς

α) Τί λέγεται ποσόν;

β) Ποῖα ποσὰ λέγονται ἀνάλογα καὶ ποῖα ἀντίστροφα;

γ) Τί παθαίνει ἡ τιμὴ τοῦ ποσοῦ τῶν δραχμῶν, ὅταν αὐξάνῃ ὁ ἀριθμὸς τῶν τετραδίων, τὰ ὁποῖα ἀγοράζομεν;

δ) Τί ποσὰ εἶναι τὰ χιλιόμετρα, τὰ ὁποῖα διανύει τὸ αὐτοκίνητον τὴν ὥραν, καὶ αἱ ὧραι ποὺ χρειάζονται, διὰ νὰ διανύσῃ μίαν ἀπόστασιν;

ε) Διατί κιλὰ καὶ δραχμαὶ εἶναι ποσὰ ἀνάλογα;

στ) Διατί ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν καὶ ὁ χρόνος περατώσεως μιᾶς ἐργασίας εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ (ἀπὸ μνήμης)

1. Ἀγοράζομεν 5 τετράδια καὶ πληρώνομεν 15 δραχμάς. Πόσον θὰ πληρώσωμεν διὰ διπλάσιον ἀριθμὸν τετραδίων καὶ πόσον διὰ τριπλάσιον ἀριθμὸν αὐτῶν;

2. Μὲ 8 δρχ. ἀγοράζομεν 8 κουλούρια· πόσα κουλούρια θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 2 δρχ. καὶ πόσα μὲ μίαν δραχμήν;

3. Διὰ νὰ γίνῃ μία σχολικὴ ποδιὰ χρειάζονται 2 μέτρα ὕφασμα πλάτους 1 μέτρου. Πόσον ὕφασμα πρέπει νὰ ἀγοράσωμεν, ἂν ἔχῃ πλάτος διπλάσιον;

4. Ἕνα αὐτοκίνητον, ποὺ τρέχει μὲ 60 χιλιόμετρα τὴν ὥραν, φθάνει εἰς τὸν προορισμόν του μετὰ 2 ὥρας. Μετὰ πόσας ὥρας θὰ φθάσῃ, ἂν τρέχῃ 20 χιλιόμετρα τὴν ὥραν (λόγῳ βροχῆς);

5. Ἂν 6 ἐργάται τελειώνουν μίαν ἐργασίαν εἰς 10 ἡμέρας, πόσοι ἐργάται θὰ τὴν τελειώσουν εἰς 5 ἡμέρας;

6. Οἱ μαθηταὶ μιᾶς κατασκηνώσεως ἔχουν τρόφιμα διὰ 18 ἡμέρας. Πόσας ἡμέρας θὰ περάσουν μὲ τὰ ἴδια τρόφιμα διπλάσιοι μαθηταὶ καὶ πόσας ἡμέρας οἱ μισοὶ μαθηταί;

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

## ΜΕΘΟΔΟΙ

### 1. Ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν

α) Μὲ ποσὰ ἀνάλογα

**Πρόβλημα.** *Τὰ 3 κιλὰ πορτοκάλια τιμῶνται 18 δραχμάς. Πόσον τιμῶνται τὰ 8 κιλὰ ἀπὸ τὰ ἴδια πορτοκάλια;*

**Σκέψις.**

Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτό, ὅπως βλέπομεν, μᾶς δίδεται ἡ τιμὴ τῶν 3 κιλῶν, δηλ. ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων, καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῶν 8 κιλῶν, δηλ. ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων πάλιν.

Ἔχομεν μάθει νὰ εὑρίσκωμεν τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν μονάδων, ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος. Ἐδῶ ὅμως δὲν γνωρίζομεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος. Εἶναι λοιπὸν ἀνάγκη νὰ τὴν εὕρωμεν· νὰ εὕρωμεν δηλ. πόσον ἀξίζει τὸ ἕνα κιλὸν καὶ κατόπιν θὰ εὕρωμεν πόσον ἀξίζουν τὰ 8 κιλά. Πρὸς τοῦτο θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα.

**Α΄ Λύσις.** (Μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα)
Ἀφοῦ τὰ 3 κ. τιμῶνται 18 δρχ.

τὸ 1 κ. τιμᾶται $\frac{18}{3}$ δρχ.

τὰ 8 κ. τιμῶνται $\frac{18 \times 8}{3} = \frac{144}{3} = 48$ δρχ.

Δὲν εἶναι ὅμως εὔκολον νὰ λύωμεν πάντοτε ὅλα τὰ προβλήματα μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα, διότι παρουσιάζονται ἀριθμοὶ δύσκολοι.

Εἶναι ἀνάγκη ἑπομένως νὰ εὕρωμεν ἕνα εὔκολον τρόπον, μίαν μέθοδον, νὰ τὰ λύνωμεν εὔκολα. Ἡ μέθοδος αὐτη εἶναι ἡ **μέθοδος τῶν τριῶν.**

Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα μᾶς δίδονται τρεῖς ἀριθμοί, δηλ. αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ δύο ποσῶν (3 κιλὰ καὶ 18 δραχμαί) καὶ μία ἄλλη τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν τῶν ποσῶν (8 κιλά) καὶ ζητεῖται ἡ πρὸς αὐτὴν ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ. Ἡ μέθοδος αὐτὴ λέγεται **ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν.**

**Β' Λύσις.** (Μὲ τὴν ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν)

**Κατάταξις.** Τὰ 3 κιλὰ τιμῶνται 18 δρχ.
» 8 » » X »

Μετὰ τὴν κατάταξιν προσπαθοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὴν σχέσιν τὴν ὁποίαν ἔχουν τὰ ποσὰ αὐτὰ μεταξύ των. Θὰ κάμωμεν δηλ. τὴν **σύγκρισιν τῶν ποσῶν.** Καὶ λέγομεν:

Ἀφοῦ τὰ 3 κιλὰ τιμῶνται 18 δρχ., τὰ διπλάσια κιλὰ θὰ τιμῶνται διπλασίας δραχμὰς κ.ο.κ. Ἄρα τὰ ποσὰ εἶναι **ἀνάλογα.** (Διατί;)

Διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος μὲ τὴν ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν θὰ μᾶς βοηθήσῃ ἡ λύσις του μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα. Ἐκεῖ ηὕραμεν ὅτι τὰ 8 κιλὰ τιμῶνται $\frac{18 \times 8}{3}$ δρχ.

Ἂν παρατηρήσωμεν τοὺς ἀριθμούς, ὅπως τοὺς ἔχομεν κατατάξει, βλέπομεν ὅτι, διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον τιμῶνται τὰ 8 κιλά, ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸν ὑπεράνω τοῦ X ἀριθμὸν 18 δρχ. ἐπὶ τὸ κλάσμα (τὸν λόγον) $\frac{3}{8}$, τὸ ὁποῖον σχηματίζουν αἱ δύο τιμαὶ 3 καὶ 8 τοῦ ἄλλου ποσοῦ (τῶν κιλῶν), **ἀντεστραμμένον.** Ἔχομεν δηλαδή:

$X = \frac{18 \times 8}{3} = \frac{6 \times 8}{1} = \frac{48}{1} = 48$ δρχ. (Ἁπλοποιήσαμεν μὲ τὸ 3).

**Ἀπάντησις.** Τὰ 8 κιλὰ πορτοκάλια τιμῶνται 48 δραχμάς.

**Σημείωσις.** *Λόγος* ἑνὸς ἀριθμοῦ πρὸς ἄλλον λέγεται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ διὰ τοῦ δευτέρου· π.χ. ὁ λόγος τοῦ 3 πρὸς τὸν 8 εἶναι 3 : 8 ἢ $\frac{3}{8}$.

**Συμπέρασμα.** Διὰ νὰ λύσωμεν προβλήματα μὲ τὴν ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω τοῦ ἀγνώστου X ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζουν αἱ δύο τιμαὶ τοῦ ἄλλου ποσοῦ, **ἀντεστραμμένον.**

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

α) Ἀπὸ μνήμης

7. Τὰ 5 μολύβια κοστίζουν 15 δρχ. Πόσον κοστίζουν 9 ὅμοια μολύβια;

8. Μὲ 6 δρχ. ἀγοράζομεν δύο παγωτά. Πόσα παγωτὰ θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 18 δρχ.;

9. Διὰ 3 εἰσιτήρια εἰς τὸ λεωφορεῖον ἐπληρώσαμεν 12 δρχ. Πόσον θὰ ἐπληρώναμεν διὰ 5 εἰσιτήρια;

10. Ἕνας ἐργάτης διὰ 2 ἡμερομίσθια λαμβάνει 240 δρχ. Πόσον θὰ λάβῃ διὰ 6 ἡμερομίσθια;

β) Γραπτῶς

11. Τὰ 2 κιλὰ λάδι κοστίζουν 90 δρχ. Πόσον κοστίζουν τὰ 16 κιλὰ λάδι τῆς ἰδίας ποιότητος;

12. Διὰ 5 μέτρα ὑφάσματος ἐπληρώσαμεν 280 δρχ. Ἂν ἀγοράσωμεν ἀκόμη 0,75 μ., πόσον θὰ πληρώσωμεν δι' αὐτό;

13. Οἱ 36° Κελσίου ἰσοδυναμοῦν πρὸς 28,8° Ρεωμύρου. Ὅταν τὸ θερμόμετρον δεικνύῃ 42° Κελσίου, εἰς πόσους βαθμοὺς Ρεωμύρου ἀντιστοιχοῦν οὗτοι;

14. Αὐτοκίνητον εἰς 7 ὥρας διέτρεξεν ἀπόστασιν 434 χιλιομέτρων. Εἰς πόσας ὥρας θὰ διατρέξῃ ἀπόστασιν 1426 χιλιομέτρων, ἂν τρέχῃ μὲ τὴν ἰδίαν ταχύτητα;

15. Μία ὑφάντρα εἰς 3 ὥρας ὑφαίνει 2,50 μ. ὑφάσματος. Εἰς πόσας ὥρας θὰ ὑφάνῃ 17,50 μ. τοῦ ἰδίου ὑφάσματος;

16. Εἰς μίαν μαθητικὴν κατασκήνωσιν ἐχρειάσθησαν 520 κιλὰ ψωμὶ διὰ 20 ἡμέρας. Πόσα κιλὰ ψωμὶ ἐξώδευον τὴν ἑβδομάδα;

γ) Κάμετε καὶ σεῖς προβλήματα μὲ τὰ ἑξῆς ποσά:

Μὲ ἡμερομίσθια καὶ δραχμάς.
Μὲ κιλὰ καὶ δραχμάς.
Μὲ μέτρα καὶ δραχμάς.
Μὲ ὥρας καὶ χιλιόμετρα.
Μὲ κτηνοτρόφους: Ζῶα καὶ παραγωγὴ προϊόντων.

β) Μὲ ποσὰ ἀντίστροφα

**Πρόβλημα.** *3 ἐργάται, διὰ νὰ τρυγήσουν ἕνα ἀμπέλι, χρειάζονται 6 ἡμέρας· Πόσας ἡμέρας θὰ χρειασθοῦν 9 ἐργάται τῆς αὐτῆς ἀποδόσεως, διὰ νὰ τρυγήσουν τὸ ἴδιον ἀμπέλι;*

**Παρατήρησις:** Καὶ εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ μᾶς δίδονται τρεῖς ἀριθμοὶ καὶ ζητεῖται ὁ τέταρτος, ὁ ὁποῖος εἶναι ἄγνωστος. Δι' αὐτὸ λέγομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν. Διαφέρει ὅμως ἀπὸ τὸ προηγούμενον εἰς τὸ ὅτι τὰ ποσὰ δὲν ἔχουν τὴν αὐτὴν σχέσιν μεταξύ των. Διότι οἱ διπλάσιοι ἐργάται θὰ τελειώσουν τὴν ἰδίαν ἐργασίαν εἰς τὸ δεύτερον τοῦ χρόνου (εἰς μισὰς ἡμέρας), ὅπως τριπλάσιοι ἐργάται θὰ τὴν τελειώσουν εἰς τὸ τρίτον τοῦ χρόνου κ.ο.κ. Ἄρα τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα. (Διατί;)

**Α' Λύσις.** (Μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα)
Ἀφοῦ οἱ 3 ἐργάται χρειάζονται 6 ἡμέρας
ὁ 1 ἐργάτης χρειάζεται $6 \times 3$ ἡμέρας
καὶ οἱ 9 ἐργάται χρειάζονται $\frac{6 \times 3}{9}$ ἡμ. $= \frac{18}{9} = 2$ ἡμ.

**Β' Λύσις.** (Μὲ τὴν ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν):

**Κατάταξις.** 3 ἐργάται χρειάζονται 6 ἡμέρας
9 » » X »

**Σύγκρισις τῶν ποσῶν.** Ἀφοῦ οἱ 3 ἐργάται χρειάζονται 6 ἡμ., οἱ διπλάσιοι ἐργάται θὰ χρειασθοῦν μισὰς ἡμέρας (καὶ οἱ μισοὶ ἐργάται θὰ χρειασθοῦν διπλασίας ἡμέρας). Τὰ ποσὰ εἶναι **ἀντίστροφα.**

Εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα ηὕραμεν ὅτι οἱ 9 ἐργάται θὰ χρειασθοῦν $\frac{6 \times 3}{9}$ ἡμ. Δηλ. ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸν ὑπεράνω τοῦ X ἀριθμὸν 6 ἡμ. ἐπὶ τὸ κλάσμα (τὸν λόγον) $\frac{3}{9}$ ὅπως ἔχει, δηλ. ὄχι ἀντεστραμμένον.

Καὶ ἔχομεν:

$$X = 6 \times \frac{3}{9} = \frac{18}{9} = 2 \text{ ἡμέραι}$$

**Ἀπάντησις.** Οἱ 9 ἐργάται θὰ τρυγήσουν τὸ ἀμπέλι εἰς 2 ἡμέρας.

**Συμπέρασμα:** *Διὰ νὰ λύσωμεν προβλήματα μὲ τὴν ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω τοῦ ἀγνώστου X ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζουν αἱ δύο τιμαὶ τοῦ ἄλλου ποσοῦ, ὅπως ἔχει (καὶ ὄχι ἀντεστραμμένον).*

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

### α) Ἀπὸ μνήμης

17. 10 ἐργάται τελειώνουν μίαν ἐργασίαν εἰς 6 ἡμέρας, 5 ἐργάται τῆς αὐτῆς ἀποδόσεως εἰς πόσας ἡμέρας θὰ τὴν τελειώσουν;

18. Μία ὑφάντρα, ποὺ ἐργάζεται 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, ὑφαίνει ἕνα ὕφασμα εἰς 6 ἡμέρας. Ἂν ἐργάζεται 4 ὥρας τὴν ἡμέραν, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ὑφάνῃ τὸ αὐτὸ ὕφασμα;

19. 10 στρατιῶται ἔχουν τρόφιμα διὰ 24 ἡμέρας. Τριπλάσιοι στρατιῶται πόσας ἡμέρας θὰ περάσουν μὲ τὰ ἴδια τρόφιμα;

### β) Γραπτῶς

20. Εἰς ἕνα φρούριον ὑπάρχουν 24 στρατιῶται καὶ ἔχουν τρόφιμα διὰ 2 μῆνας καὶ 10 ἡμέρας. Πόσον χρόνον θὰ περάσουν μὲ τὰ ἴδια τρόφιμα, ἂν οἱ στρατιῶται ἐλαττωθοῦν κατὰ 8;

21. Βουστάσιον μὲ 16 ἀγελάδας ἔχει τροφὰς διὰ 24 ἡμέρας. Ἂν αἱ ἀγελάδες αὐξηθοῦν κατὰ 8, πόσας ἡμέρας θὰ περάσουν μὲ τὰς ἰδίας τροφάς;

22. Ἕνας ὁδοιπόρος, βαδίζων 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, ἐπῆγεν ἀπὸ ἕνα χωρίον εἰς ἄλλο εἰς 5 ἡμέρας. Ἂν ἤθελε νὰ φθάσῃ μίαν ἡμέραν ἐνωρίτερον, πόσας ὥρας ἔπρεπε νὰ βαδίζῃ τὴν ἡμέραν;

23. Διὰ νὰ γίνῃ μία ἀνδρικὴ ἐνδυμασία χρειαζόμεθα 3 μ. ὕφασμα πλάτους 1,6 μ. Πόσα μέτρα θὰ χρειασθοῦν ἀπὸ ἄλλο ὕφασμα πλάτους 1,2 μ.;

24. Διὰ νὰ στρωθῇ τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου χρειάζονται 26 σανίδες πλάτους 20 δακτύλων (πόντων). Πόσαι σανίδες πλάτους 13 δακτύλων καὶ μὲ τὸ αὐτὸ μῆκος θὰ χρειασθοῦν διὰ τὸ ἴδιον πάτωμα;

25. Ἕνα αὐτοκίνητον, τὸ ὁποῖον τρέχει μὲ $49 \frac{1}{2}$ χιλιόμετρα τὴν ὥραν, διέτρεξε μίαν ἀπόστασιν εἰς 3 ὥρας καὶ 20 π. Εἰς πόσας ὥρας θὰ διατρέξῃ τὴν ἰδίαν ἀπόστασιν μὲ ταχύτητα 60 χιλιομέτρων τὴν ὥραν;

26. Διὰ νὰ κατασκευασθῇ ἕνα χαλὶ χρειάζονται $12 \frac{8}{10}$ μέτρα ὕφασμα πλάτους 1 μέτρου. Πόσα μέτρα θὰ χρειασθοῦν διὰ τὸ αὐτὸ χαλὶ ἀπὸ ἄλλο ὕφασμα 0,80 μ. πλάτους;

Κάμετε καὶ σεῖς προβλήματα μὲ ποσὰ ἀντίστροφα.

γ) Γενικὰ προβλήματα

27. Διὰ 12 ἀνδρικὰ ὑποκάμισα χρειάζονται 36 μ. ὑφάσματος. Πόσον ὕφασμα θὰ χρειασθῇ διὰ 18 ὅμοια ὑποκάμισα;

28. Τὰ $\frac{3}{4}$ μ. ὑφάσματος κοστίζουν 75 δρχ., πόσον κοστίζουν τὰ 15 μέτρα;

29. Ἐργάτης, ἐργαζόμενος 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, τελειώνει μίαν ἐργασίαν εἰς 20 ἡμέρας. Ἂν εἰργάζετο 2 ὥρας περισσότερον ἡμερησίως, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ἐτελείωνε τὴν ἐργασίαν αὐτήν;

30. Μὲ ἡμερησίαν μερίδα ἄρτου 600 γραμμαρίων περνοῦν οἱ στρατιῶται ἑνὸς φρουρίου μὲ μίαν ποσότητα ἀλεύρου ἐπὶ ἕνα μῆνα.

α) Ἂν ἡ μερὶς τοῦ ἄρτου ἐλαττωθῇ κατὰ 100 γραμμάρια ἡμερησίως, πόσας ἡμέρας θὰ περάσουν μὲ τὴν ἰδίαν ποσότητα ἀλεύρου;

β) Ἂν παραστῇ ἀνάγκη νὰ περάσουν οἱ στρατιῶται μὲ τὴν ἰδίαν ποσότητα ἀλεύρου $1 \frac{1}{2}$ μῆνα, πόσον πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ ἀκόμη ἡ ἡμερησία μερὶς τοῦ ἄρτου ἑκάστου στρατιώτου;

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΙΣ

α) Εἰς τὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα λύονται μὲ τὴν ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν, δίδονται αἱ τιμαὶ δύο ποσῶν (ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφων) καὶ μία ἄλλη τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν δύο αὐτῶν ποσῶν καὶ ζητεῖται ἡ ἀντίστοιχος πρὸς αὐτὴν τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ. Ἐπειδὴ εἰς τὰ προβλήματα αὐτὰ δίδονται **τρεῖς ἀριθμοὶ** καὶ ζητεῖται τέτ α ρ τ ο ς, διὰ τοῦτο ἡ μέθοδος (ὁ τρόπος), μὲ τὴν ὁποίαν τὰ λύομεν, λέγεται **ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν.**

β) Ἡ μέθοδος τῶν τριῶν εἶναι συντόμευσις τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

γ) Διὰ νὰ λύσωμεν τὰ προβλήματα μὲ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν, χρειαζόμεθα τὴν σχέσιν, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ποσῶν, καὶ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν μὲ τὴν σ ύ γ κ ρ ι σ ι ν.

δ) Ἀφοῦ κατατάξωμεν καὶ συγκρίνωμεν τὰ ποσά, προχωροῦμεν εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος.

ε) Διὰ νὰ λύσωμεν τὰ προβλήματα μὲ τὴν ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν, ἐφαρμόζομεν τὸν ἑξῆς κανόνα:

*Κατατάσσομεν τὰ ποσὰ καὶ τὰ συγκρίνομεν. Κατόπιν πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω τοῦ Χ ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζουν αἱ δύο τιμαὶ τοῦ ἄλλου ποσοῦ, ἀντεστραμμένον μὲν ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ὅπως ἔχει δὲ ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα.*

## 2. ΠΟΣΟΣΤΑ

**Γενικά.** Ὁ χαρτοπώλης, ὁ παντοπώλης, ὁ ἔμπορος, οἱ ὁποῖοι πωλοῦν διάφορα πράγματα, ὅπως γνωρίζετε, δὲν τὰ κατασκευάζουν μόνοι των, ἀλλὰ τὰ ἀγοράζουν ἀπὸ ἄλλους· ἀπὸ μεγαλύτερα καταστήματα, ἀπὸ ἀποθήκας ἢ καὶ ἀπ' εὐθείας ἀπὸ τὰ ἐργοστάσια. Τὰ πράγματα αὐτά, ποὺ ἀγοράζουν, τὰ μεταφέρουν εἰς τὰ καταστήματά των καὶ τὰ μεταπωλοῦν.

Ἔτσι ὁ χαρτοπώλης μας ἀγοράζει ἀπὸ τὴν ἀποθήκην τὰ μολύβια 1 δρχ. τὸ ἕνα καὶ τὰ μεταπωλεῖ 1,20 δρχ. τὸ ἕνα. Καθὼς βλέπομεν, ἀπὸ κάθε μολύβι, τὸ ὁποῖον κοστίζει 1 δραχμήν, κερδίζει 0,20 δρχ.

Ἐδῶ τὸ ποσὸν τῆς δραχμῆς, τὸ ὁποῖον δίδει νὰ ἀγοράσῃ κάθε μολύβι, λέγεται **τιμὴ ἀγορᾶς** ἢ **κόστος.** Τὸ ποσὸν τῶν 1,20 δρχ. τὸ ὁποῖον λαμβάνει ὅταν πωλῇ ἕνα μολύβι, λέγεται **τιμὴ πωλήσεως.**

Ὑπάρχει δὲ διαφορά, καθὼς φαίνεται, μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν τιμῶν. Ἡ διαφορὰ αὕτη εἰς τὸ παράδειγμά μας εἶναι 0,20 δρχ. Αὐτὸ τὸ ποσὸν λέγεται **κέρδος.** Λέγομεν δηλ. ὅτι ὁ χαρτοπώλης κερδίζει 0,20 δρχ. ἀπὸ κάθε μολύβι. Αὐτὸς ἄλλωστε εἶναι ὁ λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον κάμνει τὴν ἐργασίαν αὐτήν.

Σκεφθῆτε ὅτι ὁ χαρτοπώλης, ὅπως καὶ κάθε ἄλλος καταστηματάρχης, διατηρεῖ ἕνα κατάστημα, διὰ τὸ ὁποῖον πληρώνει ἐνοίκιον· πληρώνει ἀκόμη μεταφορικά, φωτισμὸν κλπ. Ἐργάζεται ὁ ἴδιος εἰς τὸ κατάστημα ἢ πληρώνει καὶ ὑπαλλήλους. Διὰ νὰ ἠμπορέσῃ λοιπὸν νὰ πληρώσῃ ὅλα αὐτὰ τὰ ἔξοδα καὶ διὰ νὰ ζήσῃ ὁ ἴδιος καὶ νὰ συντηρήσῃ καὶ τὴν οἰκογένειάν του, προσθέτει εἰς τὴν τιμὴν ἀγορᾶς ἕνα ποσόν, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται, ὅπως εἴπαμεν, **κέρδος.**

Τὸ ποσὸν τοῦ κέρδους ὁρίζεται ἀπὸ τὸ Κράτος καὶ ὀνομάζεται **νόμιμον κέρδος.** Εἰδικὴ ὑπηρεσία τοῦ Κράτους, ἡ Ἀγορανομία, ὁρίζει τὸ νόμιμον κέρδος εἰς τὰ διάφορα εἴδη. Εἰς τὸ ψωμὶ λ.χ. ἐπιτρέπει κέρδος 8 δραχμὰς εἰς τὰς 100 δραχμάς, εἰς τὸ κρέας 15 δρχ. εἰς τὰς 100 δρχ., εἰς τὰ φροῦτα 30 δρχ. εἰς τὰς 100 δρχ., εἰς τὰ ὑφάσματα 20 δρχ. εἰς τὰς 100 δρχ. κλπ. Ὡρισμένα εἴδη, ἰδίως τὰ ψιλικά, ἔχουν μεγαλύτερον κέρδος· εἰς αὐτὰ τὸ κέρδος φθάνει 100 δρχ. εἰς τὰς 100 δρχ. ἢ καὶ περισσότερον. Ἔτσι μία βελόνα ἀξίας 0,10 δρχ. πωλεῖται 0,20 δρχ.

**Ὥστε :** *Κέρδος εἶναι τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον προσθέτουν οἱ ἔμποροι εἰς τὸ κόστος τῶν ἐμπορευμάτων, ὅταν τὰ πωλοῦν.*

Τὸ κέρδος αὐτὸ ὁ ἔμπορος δὲν τὸ ὑπολογίζει εἰς ὅλα τὰ χρήματα τὰ ὁποῖα δίδει νὰ ἀγοράσῃ διάφορα ἐμπορεύματα. Τὸ ὑπολογίζει εἰς τὰς 100 δρχ. ἢ εἰς τὰς 1000 δρχ., διὰ νὰ γνωρίζῃ πόσον πρέπει νὰ πωλῇ κάθε πρᾶγμα.

Τὸ ποσὸν τῶν 100 δρχ. ἢ τῶν 1000 δρχ., ἐπὶ τοῦ ὁποίου ὑπολογίζεται τὸ κέρδος, εἶναι 100 ἢ 1000 μονάδες τοῦ ἀρχικοῦ ποσοῦ.

Εἰς τὰ παραδείγματά μας **ἀρχικὸν ποσὸν** εἶναι τὸ κόστος καὶ **ποσοστὸν** εἶναι τὸ κέρδος.

Εἴπαμεν ὅτι ὁ ἔμπορος εἰς τὰ ὑφάσματα, ὅταν τὰ πωλῇ, κερδίζει 20 δρχ. εἰς τὰς 100 δρχ. Αὐτὸ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν διὰ συντομίαν τὸ γράφομεν ἔτσι : 20% καὶ τὸ διαβάζομεν 20 τοῖς ἑκατόν.

Ὁμοίως τὸ 20 εἰς τὰ 1000 τὸ γράφομεν ἔτσι : 20 ‰ καὶ τὸ διαβάζομεν 20 τοῖς χιλίοις.

Αὐτὸ τὸ 20% (20 τοῖς ἑκατόν) ἢ 20 ‰ (20 τοῖς χιλίοις) ὀνομάζεται τόσον τοῖς ἑκατόν (%) ἢ τόσον τοῖς χιλίοις (‰).

Ὁ ἔμπορος, ὅπως εἴπαμεν, πωλεῖ τὰ ἐμπορεύματά του, διὰ νὰ κερδίσῃ. Μερικὰς φορὰς ὅμως ἀναγκάζεται νὰ πωλήσῃ τὰ ἐμπορεύματά του εἰς τιμὴν μικροτέραν τῆς ἀγορᾶς (τοῦ κόστους). Π.χ. ἕνας ἔμπορος φρούτων ἠγόρασε τὰ πεπόνια πρὸς 5 δρχ. τὸ κιλόν· ἐπειδὴ ὅμως ἔφερον εἰς τὴν ἀγορὰν πάρα πολλὰ πεπόνια καὶ εἰς μικροτέραν τιμήν, ἀναγκάζεται νὰ τὰ πωλήσῃ πρὸς 4 δρχ. τὸ κιλόν, διὰ νὰ μὴ τοῦ μείνουν καὶ χαλάσουν.

Ἐδῶ βλέπομεν ὅτι εἰς κάθε κιλὸν ἔχει **ζημίαν** 1 δραχμήν.

> **Ὥστε :** *Ζημία εἶναι τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον χάνει ὁ ἔμπορος, ὅταν πωλῇ τὰ ἐμπορεύματα εἰς τιμὴν μικροτέραν ἀπὸ τὸ κόστος.*

Καὶ τὴν ζημίαν τὴν ὑπολογίζομεν μὲ βάσιν τὰς 100 δραχμάς. Ἑπομένως, ἀφοῦ ὁ ἔμπορος εἰς τὰς 5 δρχ. εἶχε ζημίαν 1 δρχ., εἰς τὰς 100 δρχ. εἶχε ζημίαν 20 δρχ. Αὐτὸ τὸ γράφομεν 20% καὶ τὸ διαβάζομεν 20 τοῖς ἑκατόν.

Ἄλλοι ἔμποροι πάλιν εἰς ὡρισμένην ἐποχὴν τοῦ ἔτους πωλοῦν τὰ ἐμπορεύματά των εἰς τιμὴν μικροτέραν τῆς ὡρισμένης· περιορίζουν δηλ. τὸ κέρδος των. Τότε λέγομεν ὅτι πωλοῦν μὲ **ἔκπτωσιν** 20%, 25%, 30%.

> *Τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον ἀναλογεῖ ἐπὶ τῆς ὅλης ἀξίας καὶ τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ 100 ἢ τοῦ 1000, λέγεται* **ποσοστόν.**

Ἡ ἔκφρασις «τόσον τοῖς ἑκατόν» ἢ «τόσον τοῖς χιλίοις» χρησιμοποιεῖται εἰς πολλὰς περιπτώσεις :

α) Πολλοὶ σερβιτόροι εἰς μεγάλα ἑστιατόρια, ζαχαροπλαστεῖα κλπ. ἐργάζονται **μὲ ποσοστὰ ἐπὶ τῶν εἰσπράξεων.** Ἐπίσης οἱ εἰσπράκτορες ἑταιρειῶν ἢ συλλόγων ἐργάζονται καὶ λαμβάνουν ποσοστὰ ἐπὶ τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα εἰσπράττουν. Αἱ κρατήσεις ἐπὶ τοῦ μισθοῦ τῶν ἐργαζομένων ὑπολογίζονται ἐπὶ τοῖς ἑκατόν· λ.χ. 4%. Οἱ θάνατοι καὶ αἱ γεννήσεις ὑπολογίζονται ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν ἢ ἐπὶ τοῖς χιλίοις.

β) Μερικοὶ ἄνθρωποι προμηθεύουν εἰς ἐμπορευομένους ἐμπορεύματα καὶ λαμβάνουν ὡς ἀμοιβὴν ποσοστά, τὰ ὁποῖα λέγονται **προμήθεια.**

γ) Διὰ τὴν ἀγορὰν ἢ πώλησιν οἰκοπέδων ἢ οἰκιῶν, καθὼς καὶ διὰ τὴν ἐνοικίασιν οἰκιῶν ἢ καταστημάτων, χρησιμοποιοῦνται οἱ κτηματομεσῖται, οἱ ὁποῖοι ὡς ἀμοιβὴν λαμβάνουν ποσοστά, τὰ ὁποῖα λέγονται **μεσιτεία.**

δ) Τὰ σπίτια ἢ τὰ καταστήματα, καθὼς καὶ τὰ ἐμπορεύματα, ἀσφαλίζονται εἰς Ἀσφαλιστικὰς Ἑταιρείας κατὰ τῆς πυρκαϊᾶς καὶ ἄλλων κινδύνων καὶ πληρώνουν **ἀσφάλιστρα.**. Αὐτὰ ὑπολογίζονται ἐπὶ τῶν 1000 δραχμῶν π.χ. 2‰ (2 τοῖς χιλίοις). Ἡ ἀσφάλισις σήμερον ἔχει ἀναπτυχθῆ πολύ· ἔτσι γίνεται καὶ ἀσφάλισις πλοίων, αὐτοκινήτων κλπ., καθὼς καὶ ἀσφάλισις ζωῆς.

ε) Τὸ **ἀπόβαρον** (ἡ διαφορὰ τοῦ καθαροῦ βάρους ἀπὸ τὸ μεικτόν) εἰς τὰ ἐμπορεύματα ὑπολογίζεται τόσον τοῖς ἑκατὸν ἐπὶ τοῦ μεικτοῦ βάρους.

στ) Οἱ **φόροι** τοῦ Δημοσίου καθορίζονται τόσον τοῖς ἑκατὸν ἐπὶ τῶν εἰσοδημάτων.

Τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ κέρδος, ἡ ζημία, ἡ ἔκπτωσις, ἡ προμήθεια, ἡ μεσιτεία, ἡ ἀσφάλεια κλπ. ὑπολογίζονται ἐπὶ 100 ἢ 1000 μονάδων ἑνὸς ποσοῦ, λέγονται **προβλήματα ποσοστῶν.**

Τὰ προβλήματα τῶν ποσοστῶν εἶναι εὔκολα καὶ λύνονται μὲ τὴν ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν. Τὰ **ποσά των εἶναι πάντοτε ἀνάλογα.** Πρέπει μόνον νὰ προσέχωμεν κατὰ τὴν κατάταξιν τοῦ προβλήματος, ὥστε τὰ ὁμοειδῆ ποσὰ νὰ τὰ γράφωμεν εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (ἀπὸ μνήμης)

31. Νὰ εὕρετε τὸ 1% τῶν 500 δρχ., τῶν 800 δρχ., τῶν 6.000 δρχ.

32. Νὰ εὕρετε τὸ 2% τῶν 400 δρχ., τῶν 1.200 δρχ., τῶν 30.000 δρχ.

33. Νὰ εὕρετε τὸ 5% τῶν 600 δρχ., τῶν 9.000 δρχ., τῶν 40.000 δρχ.

**Σημείωσις.** Τὸ 1% ἑνὸς ἀριθμοῦ εὑρίσκεται εὔκολα, ἂν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν διὰ 100.

Τὸ 2% τὸ εὑρίσκομεν, ἂν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν διὰ 100 καὶ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 2· κ.ο.κ.

Διὰ νὰ εὕρωμεν π.χ. τὸ 2% τῶν 5.400, διαιροῦμεν διὰ 100 καὶ τὸ πηλίκον τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 2. Δηλ. $5.400 : 100 = 54 \times \times 2 = 108$.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΣΟΣΤΩΝ
(Ἀπὸ μνήμης)

34. Ὁ παντοπώλης ἀγοράζει τὴν ζάχαριν 14 δρχ. τὸ κιλὸν καὶ τὴν πωλεῖ 17,40 δρχ. τὸ κιλόν. Πόσον κερδίζει εἰς τὸ κιλόν;

35. Ὁ κρεοπώλης ἀγοράζει τὸ κρέας 74 δρχ. τὸ κιλὸν καὶ τὸ πωλεῖ μὲ κέρδος 15,40 δρχ. κατὰ κιλόν. Πόσον πωλεῖ τὸ κιλόν;

36. Ὀπωροπώλης ἀγοράζει φροῦτα ἀξίας 1.250 δρχ. καὶ τὰ πωλεῖ 1.150 δρχ. Πόσον ζημιώνεται;

37. Ἔμπορος ἀγοράζει ἐμπορεύματα ἀξίας 2.600 δρχ. καὶ τὰ πωλεῖ μὲ ἔκπτωσιν 260 δρχ. Πόσον τὰ πωλεῖ;

38. Μεσίτης ἐπώλησεν οἰκίαν ἀξίας 300.000 δρχ. μὲ μεσιτείαν 4%. Πόσην μεσιτείαν θὰ λάβη;

### Π ε ρ ι π τ ώ σ ε ι ς

**α) Δίδεται τὸ τόσον τοῖς ἑκατὸν (%) καὶ ζητεῖται τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία.**

**Πρόβλημα 1.** *Ἕνας μικροπωλητὴς πωλεῖ τὰ ἐμπορεύματά του μὲ κέρδος 25%. Ἂν πωλήση ἐμπορεύματα ἀξίας 400 δρχ., πόσον κέρδος θὰ ἔχη;*

**Λύσις : α΄ Ἀπὸ μνήμης.** Ἂν ἡ ἀξία τῶν ἐμπορευμάτων ἦτο 100 δρχ. θὰ ἐκέρδιζεν 25 δρχ. Τώρα, ποὺ ἡ ἀξία των εἶναι 400 δρχ., θὰ κερδίση $25 \times 4 = 100$ δρχ.

**β' Μὲ τὴν ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν.**

**Κατάταξις.** Εἰς 100 δρχ. κερδίζει 25 δρχ.
» 400 » » X »

$$X = 25 \times \frac{400}{100} = 100 \text{ δρχ.}$$

**Ἀπάντησις.** Θὰ ἔχῃ κέρδος 100 δρχ.

**Πρόβλημα 2.** *Ἔμπορος ἐπώλησε ραδιόφωνον ἀξίας 1500 μὲ ἔκπτωσιν 20 %. Πόση ἦτο ἡ ἔκπτωσις;*

**Κατάταξις.** Δι' ἐμπόρευμα ἀξίας 100 δρχ. γίνεται ἔκ)σις 20 δρχ.
» » » 1500 » » » X »

**Λύσις.** $X = 20 \times \frac{1500}{100} = 300$ δρχ.

**Ἀπάντησις.** Ἡ ἔκπτωσις ἦτο 300 δρχ.

Προβλήματα

39. Ὀπωροπώλης ἠγόρασε φροῦτα ἀξίας 3.750 δρχ. καὶ τὰ μετεπώλησε μὲ ζημίαν 5%. Πόσας δρχ. ἐζημιώθη;

40. Ἕνας ἔμπορος ἐπώλησεν ἐμπορεύματα ἀξίας 125.000 δρχ. μὲ κέρδος 15%. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισεν;

41. Εἰσπράκτωρ ἑβδομαδιαίας ἐφημερίδος εἰσπράττει τὰς συνδρομὰς αὐτῆς μὲ ποσοστὰ 20%. Σήμερον εἰσέπραξε 4.500 δρχ. Πόσας δρχ. θὰ κρατήσῃ διὰ ποσοστά;

42. Ἔμπορος πωλεῖ τὰ ὑφάσματα μὲ ἔκπτωσιν 25%. Πόσον θὰ πληρώσωμεν διὰ τὸ μέτρον ὑφάσματος, τὸ ὁποῖον ἐπωλεῖτο πρὸς 240 δρχ.;

43. Ἕνας ἠσφάλισε τὴν οἰκίαν του ἀξίας 425.000 δρχ. πρὸς 2,5‰. Πόσον θὰ πληρώσῃ δι' ἀσφάλιστρα;

**β) Δίδεται τὸ ποσὸν τοῦ κέρδους ἢ τῆς ζημίας καὶ ζητεῖται τὸ τόσον τοῖς ἑκατόν (%) ἢ τοῖς χιλίοις (‰).**

**Πρόβλημα 1.** *Ἕνας ἔμπορος ἐπώλησεν ὕφασμα, τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον ἐκόστιζεν 300 δρχ., πρὸς 315 δρχ. τὸ μέτρον. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισεν;*

**Κατάταξις.**

Εἰς ἐμπόρευμα ἀξίας 300 δρχ. κερδίζει 15 δρχ. (315 - 300)
» » » 100 » » X »

**Λύσις.** $X = 15 \times \frac{100}{300} = 5$ δρχ.

**Ἀπάντησις.** Ἐκέρδισεν 5%.

**Πρόβλημα 2.** *Ἔμπορος ἠγόρασε φροῦτα ἀξίας 12.000 δρχ., τὰ μετεπώλησε δὲ ἀντὶ 11.400 δρχ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐζημιώθη;*

**Κατάταξις.**

Ἀπὸ ἐμπόρ. ἀξίας 12.000 δρχ. ἐζημ. 600 δρχ. (12.000-11.400)
Ἀπὸ » » 100 » » X »

**Λύσις.** $X = 600 \times \frac{100}{12.000} = 5$ δρχ.

**Ἀπάντησις.** Ἐζημιώθη 5%.

Προβλήματα

44. Ζωέμπορος ἠγόρασεν ἵππον ἀξίας 3.000 δρχ. καὶ τὸν μετεπώλησεν ἀντὶ 3.600 δρχ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισεν;

45. Ἕνας ἠγόρασεν ἕνα αὐτοκίνητον ἀντὶ 90.000 δρχ. Τὸ μετεπώλησεν καὶ ἐζημιώθη 4.500 δρχ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐζημιώθη;

46. Ἕνας ἔμπορος αὐγῶν ἔφερε διὰ τὸ Πάσχα 12.000 αὐγά. Ἀπ' αὐτὰ ἔσπασαν 360 αὐγά. Πόσα τοῖς χιλίοις ἔσπασαν;

47. Ἔμπορος ἠγόρασεν ὕφασμα πρὸς 600 δρχ. τὸ τόπι (40 μέτρων) καὶ τὸ μετεπώλησεν πρὸς 18 δρχ. τὸ μέτρον. Πόσον τοῖς ἑκατὸν κερδίζει ἐπὶ τῆς τιμῆς τῆς ἀγορᾶς;

**γ) Δίδεται τὸ τόσον τοῖς ἑκατὸν καὶ ἡ τιμὴ ἀγορᾶς καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ πωλήσεως.**

**Πρόβλημα.** *Ἕνα ῥαδιόφωνον κόστους 800 δρχ. πωλεῖται μὲ κέρδος 12 %. Πόσον πωλεῖται;*

**Λύσις α΄. Κατάταξις.** Εἰς τὰς 100 δρχ. κερδίζει 12 δρχ.
» » 800 » » X »

$$X = 12 \times \frac{800}{100} = 96 \text{ δρχ. (κέρδος)}$$

Τιμὴ πωλήσεως : 800× 96= 896 δρχ.

**Λύσις β΄. Κατάταξις.** Ὅταν ἀξίζῃ 100 δρχ. πωλεῖται 112 δρχ.
(100 + 12) » » 800 » » X »

$$X = 112 \times \frac{800}{100} = 896 \text{ δρχ. (τιμὴ πωλήσεως).}$$

**Ἀπάντησις.** Τὸ ῥαδιόφωνον πωλεῖται 896 δρχ.

**Παρατήρησις.** Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν πωλήσεως ἢ εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ κέρδος καὶ τὸ προσθέτομεν εἰς τὴν τιμὴν τῆς ἀγορᾶς ἢ εὑρίσκομεν ἀμέσως εἰς τὴν κατάταξιν τὴν τιμὴν τῆς πωλήσεως τῶν 100 δρχ. καὶ λύομεν κατόπιν τὸ πρόβλημα.

Προβλήματα

48. Ὁ κρεοπώλης ἀγοράζει τὸ κρέας 60 δρχ. τὸ κιλὸν καὶ τὸ πωλεῖ μὲ κέρδος 20%. Πόσον πωλεῖ τὸ κιλόν;

49. Ἕνας ἐργολάβος οἰκοδομῶν ἔκτισε μίαν οἰκίαν, ἡ ὁποία τοῦ ἐκόστισεν 750.000 δρχ. Τὴν ἐπώλησε μὲ κέρδος 12%. Πόσον τὴν ἐπώλησεν;

50. Ἔμπορος ἀγοράζει ὕφασμα πρὸς 60 δρχ. τὸ μέτρον καὶ τὸ πωλεῖ μὲ ἔκπτωσιν 15%. Πόσον πωλεῖ τὸ μέτρον;

51. Τὰ μολύβια μπὶκ κοστίζουν 2 δρχ. τὸ ἕνα καὶ πωλοῦνται μὲ κέρδος 25%. Πόσον πωλεῖται ἕκαστον;

**δ) Δίδεται ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς καὶ ἡ τιμὴ πωλήσεως καὶ ζητεῖται τὸ τόσον τοῖς ἑκατὸν (%) ἢ τοῖς χιλίοις (‰).**

**Πρόβλημα 1.** *Ἔμπορος ἠγόρασεν ὕφασμα πρὸς 64 δρχ. τὸ μέτρον καὶ τὸ πωλεῖ πρὸς 72 δρχ. τὸ μέτρον. Πόσον τοῖς ἑκατὸν κερδίζει;*

**Κατάταξις.** Εἰς ἐμπόρευμα ἀξίας 64 δρχ. κερδίζει 8 δρχ. (72-64)
» » » 100 » » Χ »

$$X = 8 \times \frac{100}{64} = 12,5 \text{ δρχ.}$$

**Ἀπάντησις.** Τὸ κέρδος του ἦτο 12,5%.

**Πρόβλημα 2.** *Κτηματίας ἠγόρασεν κτῆμα ἀντὶ 88.000 δρχ., τὸ ὁποῖον μετεπώλησεν ἀντὶ 85.800 δραχμῶν. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἦτο ἡ ζημία του;*

**Κατάταξις.**
Ἐπὶ ἀξίας 88.000 δρχ. ἐζημιώθη 2200 δρχ. (88.000 - 85.800)
» » 100 » » Χ »

$$X = 2.200 \times \frac{100}{88.000} = 2,5 \text{ δρχ.}$$

**Ἀπάντησις.** Ἡ ζημία του ἦτο 2,5 %.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

52. Ἕνας παντοπώλης ἠγόρασεν ἕνα δοχεῖον λάδι ἀντὶ 450 δρχ. καὶ τὸ μετεπώλησεν ἀντὶ 540 δρχ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισεν;

53. Ὀπωροπώλης ἀπὸ φροῦτα ἀξίας 1.800 δρχ. εἰσέπραξεν κατὰ τὴν πώλησίν των 1.728 δρχ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐζημιώθη;

54. Χαρτοπώλης ἀγοράζει εἶδος τετραδίων πρὸς 1,25 δρχ. τὸ καθένα καὶ τὰ πωλεῖ πρὸς 1,50 δρχ. ἕκαστον. Πόσον τοῖς ἑκατὸν κερδίζει;

55. Ἡ κατασκευὴ ἑνὸς δρόμου ὑπελογίσθη ὅτι θὰ στοιχίσῃ 275.000 δρχ. Ἐργολάβος Δημοσίων ἔργων ἀναλαμβάνει τὴν κατασκευὴν τοῦ δρόμου αὐτοῦ ἀντὶ 233.750 δραχμῶν. Εἰς πόσον τοῖς ἑκατὸν ἀνῆλθεν ἡ ἔκπτωσις;

**ε) Δίδεται ἡ τιμὴ πωλήσεως, τὸ τόσον τοῖς ἑκατὸν καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ ἀγορᾶς.**

**Πρόβλημα 1.** *Ζωέμπορος μετεπώλησεν ἵππον ἀντὶ 4.200 δρχ. καὶ ἐκέρδισεν 20 % ἐπὶ τῆς τιμῆς ἀγορᾶς τούτου. Πόσον εἶχεν ἀγοράσει τὸν ἵππον καὶ πόσον ἐκέρδισε;*

**Σκέψις.** Ἂν ὁ ἵππος ἦτο ἀξίας 100 δρχ., μὲ κέρδος 20% θὰ τὸν ἐπώλει 100 + 20 = 120 δρχ.

**Κατάταξις.** 120 δρχ. τιμὴ πωλήσεως 100 δρχ. τιμὴ ἀγορᾶς
4.200 » » » X » » »

**Λύσις.** $X = 100 \times \frac{4.200}{120} = 3.500$ δρχ. (τιμὴ ἀγορᾶς).

Κέρδος = 4.200 (τιμὴ πωλήσεως) – 3.500 (τιμὴ ἀγορᾶς) =
= 700 δρχ.

**Ἀπάντησις.** Εἶχεν ἀγοράσει τὸν ἵππον 3.500 δρχ. καὶ ἐκέρδισεν ἐκ τῆς πωλήσεως 700 δραχμάς.

**Πρόβλημα 2.** *Ἕνας ταχυδρομικὸς διανομεὺς μετεπώλησε τὸ ποδήλατόν του ἀντὶ 1.800 δρχ. μὲ ζημίαν 20% ἐπὶ τῆς ἀξίας του. Πόσον εἶχεν ἀγοράσει τοῦτο καὶ πόσον ἐζημιώθη;*

**Σκέψις.** Ἂν τὸ ποδήλατον τὸ εἶχεν ἀγοράσει 100 δρχ., μετὰ τὴν ζημίαν (ἢ τὴν ἔκπτωσιν) 20% θὰ τὸ ἐπώλει 100 – 20 = 80 δρχ.

**Κατάταξις.** 80 δρχ. τιμὴ πωλήσεως 100 δρχ. τιμὴ ἀγορᾶς
1.800 » » » X » » »

**Λύσις.** $X = 100 \times \frac{1.800}{80} = 2.250$ δρχ. (τιμὴ ἀγορᾶς).

Ζημία = 2.250 (τιμὴ ἀγορᾶς) – 1.800 (τιμὴ πωλήσεως) =
= 450 δρχ.

**Ἀπάντησις.** Τὸ ποδήλατον τὸ εἶχεν ἀγοράσει 2.250 δρχ. καὶ ἐκ τῆς πωλήσεως ἐζημιώθη 450 δρχ.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

56. Ἐμπόρευμα ἐπωλήθη ἀντὶ 25.400 δρχ. μὲ κέρδος 25%. Ποία ἡ ἀξία του καὶ πόσον τὸ κέρδος;

57. Ἕνας ἔμπορος ἐπώλησεν ἐμπόρευμα ἀντὶ 22.000 δρχ. μὲ ζημίαν 12%. Ποίας ἀξίας ἦτο τὸ ἐμπόρευμα;

58. Μετεπώλησεν κάποιος οἰκίαν ἀντὶ 360.000 δρχ. μὲ ζημίαν 20%. Πόσον εἶχεν ἀγοράσει τὴν οἰκίαν καὶ πόσον ἐζημιώθη;

## Διάφορα προβλήματα ποσοστῶν

59. Παραγγελιοδόχος ἀγοράζει διὰ λογαριασμὸν ἐμπόρου ἐμπορεύματα ἀξίας 75.800 δρχ. Πόση εἶναι ἡ προμήθειά του πρὸς 2%;

60. Μεσίτης προμηθεύει εἰς ἔμπορον 1750 κιλὰ λάδι πρὸς 38 δρχ. τὸ κιλόν. Πόση εἶναι ἡ προμήθειά του πρὸς 1,5% ;

61. Ὑπάλληλος ἐμπορικοῦ καταστήματος ἐργάζεται μὲ ποσοστὰ 12,5% ἐπὶ τῶν εἰσπράξεων. Αὐτὸν τὸν μῆνα ἐπώλησεν ἐμπορεύματα ἀξίας 27.560 δρχ. Πόσα ποσοστὰ θὰ λάβῃ;

62. Ἕνας ἔμπορος ἠγόρασε τυρὶ Ὁλλανδίας πρὸς 65 δρχ. τὸ κιλόν. Τὰ ἔξοδα μεταφορᾶς ἀνῆλθον εἰς 7%, τὸ μεταπωλεῖ δὲ μὲ κέρδος 20%. Πόσον πωλεῖ τὸ κιλόν;

63. Τὸ μεικτὸν βάρος ἐμπορεύματος εἶναι 7.500 κιλά, τὸ δὲ καθαρὸν βάρος του εἶναι $7.312\frac{1}{2}$ κιλά. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἦτο τὸ ἀπόβαρον;

64. Αἱ κρατήσεις ἐπὶ τοῦ μηνιαίου μισθοῦ ἑνὸς ὑπαλλήλου ἀνέρχονται εἰς 13,5%, λαμβάνει δὲ κατὰ μῆνα καθαρὰ 2.595 δραχμάς. Ποῖος εἶναι ὁ μηνιαῖος μισθός του;

65. Τὸ καθαρὸν βάρος ἐμπορεύματος ἦτο 34.435 χιλιόγραμμα (κιλά) μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν 3% ποὺ ἦτο τὸ ἀπόβαρον. Πόσον ἦτο τὸ ἀπόβαρον καὶ πόσον τὸ μεικτὸν βάρος;

66. Ἠγοράσαμεν 13 μέτρα ὑφάσματος μὲ ἔκπτωσιν 15% ἀντὶ 552,50 δρχ. Πόσον ἐκόστιζε τὸ μέτρον χωρὶς τὴν ἔκπτωσιν;

67. Ἕνας ἔμπορος ἐπώλησε τεμάχιον ὑφάσματος μὲ κέρδος 7,25% ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς του καὶ εἰσέπραξεν ἐκ τῆς πωλήσεώς του 34.320 δρχ. Πόσον τὸ εἶχεν ἀγοράσει;

68. Ἐμπόρευμα ἐπωλήθη μὲ ζημίαν 15% ἀντὶ 17.000 δρχ. Ποία ἦτο ἡ ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος καὶ πόση ἡ ζημία;

69. Διαμέρισμα ἐπωλήθη ἀντὶ 320.000 δρχ. μὲ κέρδος 28%. Ποία ἡ τιμὴ ἀγορᾶς καὶ πόσον τὸ κέρδος;

70. Ἔμπορος πωλῶν τὰ ἐμπορεύματά του μὲ κέρδος 20% εἰσέ-

πραξε μίαν ἡμέραν ἐκ τῆς πωλήσεως 3.600 δρχ. Πόση ἦτο ἡ ἀξία τῶν πωληθέντων ἐμπορευμάτων καὶ πόσον τὸ κέρδος;

71. Ἕνας ἰδιοκτήτης οἰκίας εἰσπράττει ἀπὸ ἐνοίκια 4.250 δρχ. μηνιαίως, πληρώνει δὲ διὰ φόρους καὶ ἄλλα ἔξοδα 30% ἐπὶ τῶν ἐνοικίων. Πόσον εἶναι τὸ καθαρὸν ἐτήσιον εἰσόδημά του ἐκ τῶν ἐνοικίων;

72. Τὸ μεικτὸν βάρος πωληθέντος ἐλαίου εἶναι 3.560 κιλά. Ἂν τὸ ἀπόβαρον ὑπολογίζεται εἰς 5% ἐπὶ τοῦ μεικτοῦ βάρους, πόσον εἶναι τὸ καθαρὸν βάρος του καὶ ποία ἡ ἀξία του πρὸς 46 δρχ. τὸ κιλόν;

73. Ἔμπορος ἐπώλησε τὰ $\frac{3}{4}$ ἑνὸς ὑφάσματος πρὸς 40 δρχ. τὸ μέτρον καὶ τὸ ὑπόλοιπον, ποὺ ἦτο 25 μέτρα, πρὸς 45 δρχ. τὸ μέτρον. Ἐκ τῆς πωλήσεως ἐκέρδισεν 25% τῆς ἀξίας ἀγορᾶς τούτου. Πόσον εἶχεν ἀγοράσει τὸ μέτρον;

74. Ἠγόρασε κάποιος σῖτον ἀντὶ 4.800 δραχμῶν. Ἐπλήρωσε διὰ μεταφορικὰ 12% καὶ διὰ φόρους 3%. Ἀντὶ πόσων δραχμῶν πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸν σῖτον, διὰ νὰ κερδίσῃ 9,5% ἐπὶ τοῦ κόστους;

## 3. Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν

α) Μὲ ποσὰ ἀνάλογα

**Πρόβλημα 1.** *Οἱ 30 μαθηταὶ τῆς α΄ ὁμάδος κατασκηνώσεως Δροσιᾶς διὰ 20 ἡμέρας χρειάζονται 150 κιλὰ ψωμί. Πόσο ψωμὶ θὰ χρειασθοῦν 45 μαθηταὶ διὰ 16 ἡμέρας;*

**Παρατήρησις.** Τὸ πρόβλημα αὐτὸ ὁμοιάζει, καθὼς βλέπετε, μὲ τὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν. Διαφέρει ὅμως αὐτῆς, διότι ἐδῶ δίδονται περισσότερα ἀπὸ δύο ποσὰ καὶ περισσότεροι ἀπὸ 3 ἀριθμοὶ καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι **πρόβλημα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.**

Τὰ προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν λύονται α) μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα καὶ β) συντομώτερα μὲ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν.

α) **Λύσις** μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα :

Οἱ 30 μ. εἰς 20 ἡμ. χρειάζονται 150 κ. ψωμὶ

ὁ 1 μ. » 20 » χρειάζεται $\frac{150}{30}$ κ. ψωμὶ

οἱ 45 μ. » 20 » χρειάζονται $\frac{150 \times 45}{30}$ κ. ψωμὶ

οἱ 45 μ. » 1 » » $\frac{150 \times 45}{30 \times 20}$ κ. ψωμὶ

οἱ 45 μ. » 16 » » $\frac{150 \times 45 \times 16}{30 \times 20}$ κ. ψωμὶ

$= \frac{720}{4} = 180$ κιλὰ ψωμί.

β) **Λύσις** μὲ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν :

Διὰ νὰ κατανοήσωμεν τὴν λύσιν αὐτήν, ἀναλύομεν τὸ πρόβλημα εἰς δύο προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν ὡς ἑξῆς :

α) 30 μ. (εἰς 20 ἡμ.) χρειάζ. 150 κιλὰ ψωμί.
45 μ. (εἰς 20 ἡμ.) χρειάζ. Χ κιλὰ ψωμί.

$$X = 150 \times \frac{45}{30}$$

β) (45 μ.) εἰς 20 ἡμ. χρειάζ. $150 \times \frac{45}{30}$ κιλὰ ψωμί.
(45 μ.) εἰς 16 ἡμ. χρειάζ. Χ κιλὰ ψωμί.

$$X = 150 \times \frac{45}{30} \times \frac{16}{20} = 180 \text{ κιλά.}$$

**Παρατηρήσεις.** 1. Κατὰ τὴν πρώτην κατάταξιν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν εἶναι ὁ ἴδιος καὶ δὲν λαμβάνεται καθόλου ὑπ' ὄψιν. Κατὰ τὴν δευτέραν κατάταξιν δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν.

2. Ἡ σύγκρισις γίνεται ἀκριβῶς ὅπως καὶ εἰς τὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Ἂν ἑνώσωμεν τὰς δύο κατατάξεις εἰς μίαν, θὰ ἔχωμεν :

30 μαθ. εἰς 20 ἡμ. χρειάζονται 150 κιλὰ
45 » » 16 » » Χ »

Καὶ ἐδῶ προσέχομεν πάντοτε νὰ γράφωμεν τὰ ὁμοειδῆ ποσὰ εἰς τὴν ἰδίαν κατακόρυφον στήλην. Μετὰ προχωροῦμεν εἰς τὴν σύγκρισιν τῶν ποσῶν. Συγκρίνομεν κάθε ποσὸν μὲ τὸ ποσὸν τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ τιμή, ὡς ἑξῆς:

α) **Μαθηταὶ καὶ κιλά:** Ἀφοῦ 30 μαθηταὶ εἰς 20 ἡμέρας χρειάζονται 150 κιλὰ ψωμί, διπλάσιοι μαθηταὶ εἰς τὸ ἴδιον χρονικὸν διάστημα θὰ χρειασθοῦν διπλάσια κιλὰ ψωμί. Τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα καὶ δι' αὐτὸ θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 150, ὁ ὁποῖος εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστον Χ, ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{30}{45}$, τὸ ὁποῖον σχηματίζουν αἱ δύο τιμαὶ 30 καὶ 45 τοῦ ποσοῦ τῶν μαθητῶν, ἀντεστραμμένον· δηλ. θὰ ἔχωμεν: $150 \times \frac{45}{30}$

β) **Ἡμέραι καὶ κιλά.** Ἀφοῦ 30 μαθηταὶ εἰς 20 ἡμέρας χρειάζονται 150 κιλὰ ψωμί, οἱ ἴδιοι μαθηταὶ εἰς μισὰς ἡμέρας θὰ χρειασθοῦν μισὰ κιλὰ ψωμί. Καὶ ἐδῶ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα· δι' αὐτὸ θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν εὑρεθέντα προηγουμένως ἀριθμὸν $150 \times \frac{45}{30}$ ἐπὶ $\frac{16}{20}$, δηλ. ἐπὶ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζουν αἱ δύο τιμαὶ 20 καὶ 16 τοῦ ποσοῦ τῶν ἡμερῶν, ἀντεστραμμένον.

**Λύσις.** $X = 150 \times \frac{45}{30} \times \frac{16}{20} = 180$ κιλά.

**Ἀπάντησις.** Οἱ 45 μαθηταὶ εἰς 20 ἡμέρας θὰ χρειασθοῦν 180 κιλὰ ψωμί.

**Σημείωσις.** α) Κατὰ τὴν σύγκρισιν κάθε ποσοῦ πρὸς τὸ ποσὸν τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ τιμή, πρέπει νὰ θεωρῶμεν ὅτι τὰ ἄλλα ποσὰ μένουν ἀμετάβλητα.

β) Πρὸ τῆς ἐκτελέσεως τῶν πράξεων πρέπει νὰ γίνωνται πάντοτε αἱ δυναταὶ ἁπλοποιήσεις.

**Πρόβλημα 2.** *Ἕνα τεμάχιον ὑφάσματος μήκους 6 μέτρων καὶ πλάτους 0,64 μ. κοστίζει 480 δραχμάς. Πόσον κοστίζει ἕνα ἄλλο τεμάχιον ὑφάσματος τῆς αὐτῆς ποιότητος μήκους 10 μέτρων καὶ πλάτους 0,48 μ.;*

**Κατάταξις.**

Τὰ 6 μ. μῆκ. μὲ 0,64 μ. πλ. κοστίζουν 480 δρχ.
» 10 » » » 0,48 » » » X »

**Σύγκρισις.** α) **Μῆκος ὑφάσματος μὲ δραχμάς :** Ἀφοῦ τὰ 6 μ. μῆκος τοῦ ὑφάσματος μὲ ὡρισμένον πλάτος κοστίζουν 480 δρχ., τὰ διπλάσια μέτρα μῆκος μὲ τὸ ἴδιον πλάτος θὰ κοστίζουν διπλάσια χρήματα. **Τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα.**

β) **Πλάτος ὑφάσματος μὲ δραχμάς :** Ὅταν τὸ πλάτος τοῦ ὑφάσματος εἶναι 0,64 μ. καὶ τὸ μῆκος του εἶναι 6 μ., κοστίζει τὸ ὕφασμα 480 δρχ. Ὅταν τὸ πλάτος εἶναι τὸ μισό, καὶ τὸ μῆκος μένει τὸ ἴδιον θὰ κοστίζῃ καὶ μισὰ χρήματα. Τὰ ποσὰ εἶναι **ἀνάλογα.**

**Λύσις.** $X = 480 \times \frac{10}{6} \times \frac{0{,}48}{0\ 64} = \frac{480 \times 10 \times 48}{6 \times 64} = 600$ δρχ.

**Σημείωσις.** Πρὸς εὐκολίαν ἐτρέψαμεν τοὺς δεκαδικοὺς εἰς ἀκεραίους.

**Ἀπάντησις.** Τὸ τεμάχιον τοῦ ὑφάσματος κοστίζει 600 δρχ.

**Κανών.** *Διὰ νὰ λύσωμεν προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω τοῦ X ἀριθμὸν ἐπὶ τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα σχηματίζουν αἱ τιμαὶ τῶν ἄλλων ποσῶν, ἀντεστραμμένα.*

Προβλήματα

75. 80 παιδιὰ μιᾶς κατασκηνώσεως εἰς 20 ἡμέρας ἐξώδευσαν 600 κιλὰ ψωμί. Πόσα κιλὰ ψωμὶ θὰ ἐξοδεύσουν τριπλάσια παιδιὰ εἰς 15 ἡμέρας;

76. Ἕνα χαλὶ μήκους 3,50 μ. καὶ πλάτους 2,80 μ. κοστίζει 3.500 δρχ. Πόσον κοστίζει ἄλλο χαλὶ τῆς αὐτῆς ποιότητος μήκους 4,20 μ. καὶ πλάτους 3,50 μ.;

77. Πέντε ἐργάται, ἐργαζόμενοι 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, λαμβάνουν ἡμερησίως ὅλοι μαζὶ 610 δρχ. Τριπλάσιοι ἐργάται, ἐργαζόμενοι 12 ὥρας τὴν ἡμέραν, πόσον λαμβάνουν ἡμερησίως (ὅλοι μαζί);

78. Δεκαπέντε ἵπποι ἔφαγον εἰς 3 ἡμέρας 360 κιλὰ βρώμην. Πόσην βρώμην θὰ χρειασθοῦν 10 ἵπποι εἰς ἕνα μῆνα;

β) Μὲ ποσὰ ἀντίστροφα

**Πρόβλημα 1.** *Ἕνας ὁδοιπόρος διατρέχει 90 χιλιόμετρα εἰς 2 ἡμέρας, ἂν βαδίζῃ 9 ὥρας τὴν ἡμέραν. Εἰς πόσας ἡμέρας θὰ διατρέξῃ ἀπόστασιν 120 χιλιομέτρων, ἂν βαδίζῃ 6 ὥρας τὴν ἡμέραν;*

**Κατάταξις.**

| | | |
|---|---|---|
| 90 χλμ. | 9 ὥρ. | 2 ἡμ. |
| 120 » | 6 » | Χ » |

**Σύγκρισις.** α) **Χιλιόμετρα μὲ ἡμέρας :** Ἀφοῦ ἀπόστασιν 90 χιλιομέτρων, βαδίζων ὁ ὁδοιπόρος ὡρισμένας ὥρας τὴν ἡμέραν, τὴν διατρέχει εἰς 2 ἡμέρας, διπλασίαν ἀπόστασιν, βαδίζων τὰς ἰδίας ὥρας τὴν ἡμέραν, θὰ τὴν διατρέξῃ εἰς διπλασίας ἡμέρας. Τὰ ποσὰ εἶναι **ἀνάλογα** καὶ δι' αὐτό, ὅπως γνωρίζομεν, θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὑπεράνω τοῦ Χ ἀριθμὸν 2 ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ ποσοῦ τῶν χιλιομέτρων ἀντεστραμμένον· δηλ. θὰ ἔχωμεν $X = 2 \times \frac{120}{90}$.

β) **Ὧραι μὲ ἡμέρας.** Ἀφοῦ ὡρισμένην ἀπόστασιν, βαδίζων ὁ ὁδοιπόρος 9 ὥρας τὴν ἡμέραν, τὴν διατρέχει εἰς 2 ἡμέρας, τὴν ἰδίαν ἀπόστασιν, ἂν βαδίζῃ τὰς μισὰς ὥρας τὴν ἡμέραν, θὰ τὴν διατρέξῃ εἰς διπλασίας ἡμέρας. Τὰ ποσὰ εἶναι **ἀντίστροφα** καὶ δι' αὐτὸ θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν εὑρεθέντα προηγουμένως ἀριθμὸν $2 \times \frac{120}{90}$ ἐπὶ $\frac{9}{6}$, δηλ. ἐπὶ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον γίνεται ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ ποσοῦ τῶν ὡρῶν, ὅπως ἔχει.

**Λύσις.** $X = 2 \times \frac{120}{90} \times \frac{9}{6} = 4$ ἡμ.

**Ἀπάντησις.** Θὰ διατρέξῃ τὴν ἀπόστασιν εἰς 4 ἡμέρας.

**Πρόβλημα 2.** *12 ἐργάται, ἐργαζόμενοι 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, ἐτελείωσαν μίαν ἐργασίαν εἰς 15 ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας 20 ἐργάται* *θὰ τελειώσουν τὴν αὐτὴν ἐργασίαν, ἐὰν ἐργασθοῦν 6 ὥρας τὴν ἡμέραν;*

**Κατάταξις.** 12 ἐργ. 8 ὥρ. 15 ἡμ.
20 » 6 » X »

**Σύγκρισις.** α) **Ἐργάται μὲ ἡμέρας :** Ἀφοῦ 12 ἐργάται, ἐργαζόμενοι ὡρισμένας ὥρας τὴν ἡμέραν, τελειώνουν μίαν ἐργασίαν εἰς 15 ἡμέρας, διπλάσιοι ἐργάται, ἐργαζόμενοι τὰς ἰδίας ὥρας τὴν ἡμέραν, θὰ τελειώσουν τὴν ἰδίαν ἐργασίαν εἰς μισὰς ἡμέρας. Τὰ ποσὰ εἶναι **ἀντίστροφα.**

β) **Ὧραι μὲ ἡμέρας.** Ἀφοῦ ὡρισμένοι ἐργάται, ἐργαζόμενοι 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, τελειώνουν μίαν ἐργασίαν εἰς 15 ἡμέρας, οἱ ἴδιοι ἐργάται, ἐργαζόμενοι τὰς μισὰς ὥρας τὴν ἡμέραν, θὰ τελειώσουν τὴν ἰδίαν ἐργασίαν εἰς διπλασίας ἡμέρας. Τὰ ποσὰ εἶναι **ἀντίστροφα.**

**Λύσις.** $X = 15 \times \frac{12}{20} \times \frac{8}{6} = 12$ ἡμ.

**Ἀπάντησις.** Εἰς 12 ἡμέρας θὰ τελειώσουν τὴν ἐργασίαν.

**Κανών.** *Διὰ νὰ λύσωμεν προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω τοῦ X ἀριθμὸν ἐπὶ τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα σχηματίζουν αἱ τιμαὶ τῶν ἄλλων ποσῶν, ὅπως ἔχουν (καὶ ὄχι ἀντεστραμμένα).*

Προβλήματα

79. 9 ἐργάται, ἐργαζόμενοι 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, τελειώνουν ἕνα ἔργον εἰς 15 ἡμέρας. Οἱ 15 ἐργάται πόσας ὥρας τὴν ἡμέραν πρέπει νὰ ἐργασθοῦν, διὰ νὰ τελειώσουν τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς 12 ἡμέρας;

80. Ἕνα αὐτοκίνητον διανύει ἀπόστασιν 240 χιλιομέτρων εἰς 6 ὥρας μὲ ταχύτητα 40 χιλιομέτρων τὴν ὥραν. Ποίαν ταχύτητα πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ αὐτοκίνητον, διὰ νὰ διανύσῃ τριπλασίαν ἀπόστασιν εἰς 12 ὥρας;

81. Ἕνας ὁδοιπόρος εἰς 3 ἡμέρας διατρέχει ἀπόστασιν 105 χι-

λιομέτρων, ὅταν βαδίζῃ 7 ὥρας τὴν ἡμέραν. Ἐὰν βαδίζῃ 8 ὥρας τὴν ἡμέραν, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ διατρέξῃ ἀπόστασιν 200 χιλιομέτρων;

82. Διὰ νὰ στρωθῇ τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου μὲ σανίδας μήκους 2,80 μ. καὶ πλάτους 0,25 μ., χρειάζονται 40 σανίδες. Πόσαι σανίδες θὰ χρειασθοῦν διὰ τὸ ἴδιον πάτωμα, ἐὰν ἔχουν μῆκος 2 μ. καὶ πλάτος 0,20 μ.;

## ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΙΣ

α) Εἰς τὰ προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν δίδονται περισσότερα ἀπὸ δύο ποσά.

β) Τὰ προβλήματα αὐτὰ ἠμπορεῖ νὰ ἀναλυθοῦν εἰς δύο ἢ περισσότερα προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν· διὰ τοῦτο λέγονται **προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.**

γ) Καὶ εἰς τὰ προβλήματα αὐτὰ ἄλλα ποσὰ εἶναι **ἀνάλογα** καὶ ἄλλα εἶναι **ἀντίστροφα.**

δ) Διὰ νὰ λύσωμεν τὰ προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν γενικῶς, ἐφαρμόζομεν τὸν ἑξῆς κανόνα:

> *Διὰ νὰ λύσωμεν προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω τοῦ X ἀριθμὸν ἐπὶ ἕκαστον τῶν κλασμάτων, τὰ ὁποῖα σχηματίζουν αἱ τιμαὶ τῶν ἄλλων ποσῶν, ἀντεστραμμένον μέν, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ὅπως ἔχει δέ, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα.*

### Προβλήματα

83. Μὲ 45 κιλὰ νῆμα κατασκευάζομεν ὕφασμα μήκους 22,5 μ. καὶ πλάτους 0,72 μ. Μὲ 60 κιλὰ νῆμα τῆς αὐτῆς ποιότητος πόσα μέτρα ὑφάσματος θὰ κατασκευάσωμεν, ἂν θέλωμεν τὸ πλάτος του νὰ εἶναι 0,90 μ.;

84. Ἕνας ὁδοιπόρος διέτρεξε τὰ $\frac{3}{4}$ μιᾶς ἀποστάσεως εἰς 8 ἡμ., βαδίζων 6 ὥρας τὴν ἡμέραν. Ἂν βαδίζῃ δύο ὥρας ἐπὶ πλέον τὴν ἡμέραν, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ διατρέξῃ τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀποστάσεως;

85. Οἰκόπεδον μήκους 16 μ. καὶ πλάτους 12,5 μ. ἐπωλήθη ἀντὶ 60.000 δραχμῶν. Πόσον κοστίζει τὸ παραπλεύρως οἰκόπεδον, τὸ ὁποῖον πωλεῖται μὲ τὴν ἰδίαν τιμὴν καὶ ἔχει μῆκος 17 μ. καὶ πλάτος 12 μ.;

86. 15 ἐργάται σκάπτουν εἰς ἕνα ὡρισμένον χρονικὸν διάστημα ἕνα δρόμον 30 μ. μήκους καὶ 4 μ. πλάτους, ἂν ἐργάζωνται 8 ὥρας τὴν ἡμέραν. Ἐὰν οἱ ἐργάται αὐξηθοῦν κατὰ 3, τὸ μῆκος τοῦ δρόμου κατὰ 6 μ. καὶ τὸ πλάτος του κατὰ 0,5 μ., πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζωνται ἡμερησίως, διὰ νὰ τελειώσουν τὸν δρόμον εἰς τὸ ἴδιον χρονικὸν διάστημα;

87. Διὰ νὰ σκάψουν εἰς μίαν ἡμέραν τάφρον μήκους 20 μ., πλάτους 3 μ. καὶ βάθους 0,50 μ., χρειάζονται 24 ἐργάται. Πόσοι ἐργάται θὰ χρειασθοῦν νὰ σκάψουν εἰς μίαν ἡμέραν πάλιν ἄλλην τάφρον μήκους 15 μ., πλάτους 2,5 μ. καὶ βάθους 0,80 μ.;

88. Διὰ νὰ στρώσωμεν τὸ πάτωμα δωματίου μήκους 5 μ. καὶ πλάτους 4 μ., ἐχρειάσθησαν 100 πλακάκια. Πόσα πλακάκια θὰ χρειασθοῦν, διὰ νὰ στρώσωμεν ἄλλο πάτωμα μήκους 6 μ. καὶ πλάτους 4,70 μ.;

89. Μία ὑφάντρα, διὰ νὰ ὑφάνῃ ὕφασμα μήκους 45 μ. καὶ πλάτους 0,80 μ., ἐχρειάσθη 12 κιλὰ καὶ 500 γραμμάρια νῆμα. Πόσον νῆμα τῆς αὐτῆς ποιότητος θὰ χρειασθῇ, διὰ νὰ ὑφάνῃ ἄλλο ὕφασμα μήκους 120 μ. καὶ πλάτους 0,60 μ.;

90. Ἕνας ὁδοιπόρος, βαδίζων 9 ὥρας τὴν ἡμέραν, διατρέχει ἀπόστασιν 180 χιλιομέτρων εἰς 4 ἡμέρας. Πόσας ὥρας πρέπει νὰ βαδίζῃ κάθε ἡμέραν, μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα, διὰ νὰ διατρέξῃ εἰς 6 ἡμέρας 240 χιλιόμετρα;

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

## ΤΟΚΟΣ

**Γενικά :** Ὅπως ὅλοι γνωρίζομεν, οἱ ἄνθρωποι πολλὰς φορὰς εὑρίσκονται εἰς οἰκονομικὴν ἀνάγκην καὶ τότε δανείζονται χρήματα ἀπὸ ἄλλους ποὺ ἔχουν. Οἱ ἔμποροι λ.χ. δανείζονται χρήματα ἀπὸ τὴν Τράπεζαν, διὰ νὰ ἀγοράσουν τὰ ἐμπορεύματά των. Ὁμοίως οἱ κτηματίαι, οἱ γεωργοὶ καὶ οἱ κτηνοτρόφοι δανείζονται χρήματα ἀπὸ τὴν Τράπεζαν ἢ ἀπὸ τοὺς Συνεταιρισμούς, διὰ νὰ ἀγοράσουν ἐργαλεῖα, λιπάσματα, ζωοτροφάς. Καί, ὅταν πωλήσουν τὰ προϊόντα των, ἐπιστρέφουν τὸ δάνειον, δηλ. τὰ χρήματα ποὺ εἶχον δανεισθῆ.

Ἀλλὰ καὶ ὅποιος εὑρεθῇ εἰς χρηματικὴν ἀνάγκην, δανείζεται ἀπὸ ἄλλον ὀλίγα ἢ πολλὰ χρήματα, διὰ νὰ διευκολυνθῇ καὶ κατόπιν τὰ ἐπιστρέφει. Τὸ δανειζόμενον χρηματικὸν ποσὸν λέγεται **Κεφάλαιον.** Ἡ χρονικὴ διάρκεια τοῦ δανείου λέγεται **Χρόνος.**.

Ἐκεῖνος ποὺ δανείζει τὰ χρήματα, λέγεται **δανειστής**.. Ἐκεῖνος ποὺ δανείζεται, λέγεται **χρεώστης** ἢ **ὀφειλέτης.**

Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ δανείου δίκαιον εἶναι ὁ δανειστὴς διὰ τὰ χρήματά του, τὰ ὁποῖα δανείζει, νὰ λαμβάνῃ ἕνα κέρδος ὡς ἐνοίκιον, ὅπως λαμβάνομεν ἐνοίκιον διὰ τὸ σπίτι μας, ὅταν τὸ ἐνοικιάζωμεν εἰς κάποιον. Τὸ κέρδος αὐτὸ λέγεται τόκος. Ὥστε :

| |
|---|
| **Τόκος** *λέγεται τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον λαμβάνει ὁ δανείζων χρήματα.* |

Ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν εἰς ἕνα ἔτος λέγεται **Ἐπιτόκιον.**

Τὰ προβλήματα, ποὺ περιέχουν τὰ στοιχεῖα αὐτά, λέγονται **προβλήματα τόκου.**

**Σημείωσις.** α) Καὶ τὸ ἐπιτόκιον εἶναι τόκος· ὑπάρχει ὅμως ἡ ἑξῆς διαφορά : Ὁ τόκος εἶναι τὸ κέρδος δι' ὅλα τὰ χρήματα καὶ δι' ὅλην τὴν χρονικὴν διάρκειαν τοῦ δανείου, ἐνῷ τὸ ἐπιτόκιον εἶναι ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν εἰς ἕνα ἔτος.

β) Τὸ ὕψος τοῦ ἐπιτοκίου ὁρίζεται μὲ ἰδιαιτέραν συμφωνίαν μεταξὺ δανειστοῦ καὶ ὀφειλέτου. Δὲν ἐπιτρέπεται ὅμως νὰ εἶναι ἀνώτερον ἐκείνου, ποὺ καθορίζει ὁ σχετικὸς Νόμος τῆς Πολιτείας. Ἡ παράβασις τοῦ Νόμου τούτου χαρακτηρίζεται ὡς τοκογλυφία καὶ τιμωρεῖται αὐστηρῶς ὑπὸ τοῦ Νόμου.

## ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΙΣ

1. Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ τόκου τὰ ποσὰ εἶναι 3 : Κεφάλαιον, Χρόνος καὶ Τόκος.
2. Τὰς τιμὰς τοῦ κεφαλαίου, τοῦ χρόνου καὶ τοῦ τόκου τὰς σημειώνομεν μὲ τὰ γράμματα Κ, Χ, Τ ἀντιστοίχως. Τὸ ἐπιτόκιον τὸ σημειώνομεν μὲ τὸ γράμμα Ε.
3. Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ τόκου ἔχομεν τρία ποσὰ καὶ δι' αὐτὸ θὰ τὰ λύωμεν μὲ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν.
4. Τὰ προβλήματα αὐτὰ τὰ διακρίνομεν εἰς τέσσαρας κατηγορίας : ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ τόκος, ἐκεῖνα ὅπου ζητεῖται τὸ κεφάλαιον, ὁ χρόνος ἢ τὸ ἐπιτόκιον.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ

### 1. Εὕρεσις τοῦ τόκου

α) Ὅταν ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς ἔτη

**Πρόβλημα.** *Ὁ Παῦλος, μαθητὴς τῆς Ἕκτης τάξεως, ἔλαβεν ὡς δῶρον ἀπὸ τοὺς γονεῖς του κατὰ τὰς ἑορτὰς τῶν Χριστουγέννων 600 δραχμάς. Τὰ χρήματα αὐτὰ τὰ κατέθεσεν εἰς τὸ Ταμιευτήριον πρὸς 5%. Πόσον τόκον θὰ λάβῃ μετὰ 3 ἔτη;*

| |
|---|
| Κ = 600 δρχ. |
| Ε = 5% |
| Χ = 3 ἔτη |
| Τ = ; |

**Σκέψις.** Ἐδῶ ἔχομεν πρόβλημα τόκου μὲ γνωστὰ τὰ ποσά : κεφάλαιον, ἐπιτόκιον καὶ χρόνον καὶ ζητοῦμεν τὸν τόκον.

Θὰ τὸ λύσωμεν τὸ πρόβλημα αὐτὸ μὲ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν.

**Κατάταξις :**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 100 δρχ. κεφάλαιον | εἰς | 1 ἔτος | φέρουν | 5 δρχ. τόκον |
| 600 δρχ. » | » | 3 ἔτη | » | X » » |

**Σύγκρισις :** α) **Κεφάλαιον μὲ τόκον :** Ἀφοῦ αἱ 100 δρχ. κεφάλαιον εἰς 1 ἔτος φέρουν 5 δρχ. τόκον, τὸ διπλάσιον κεφάλαιον εἰς τὸν ἴδιον χρόνον θὰ φέρῃ διπλάσιον τόκον. Τὰ ποσὰ **Κεφάλαιον** καὶ **Τόκος** εἶναι **ἀνάλογα.**

β) **Χρόνος μὲ τόκον.** Ἀφοῦ αἱ 100 δρχ. εἰς 1 ἔτος φέρουν 5 δρχ. τόκον, τὸ ἴδιον κεφάλαιον εἰς διπλάσιον χρόνον θὰ φέρῃ διπλάσιον τόκον. Τὰ ποσὰ **Χρόνος** καὶ **Τόκος** εἶναι καὶ αὐτὰ **ἀνάλογα.**

Δι' αὐτὸ θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμόν, ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστον, ἐπὶ τὰ κλάσματα, ποὺ σχηματίζουν αἱ τιμαὶ τῶν δύο ἄλλων ποσῶν, ἀντεστραμμένα.

**Λύσις.** $X = 5 \times \frac{600}{100} \times \frac{3}{1} = 90$ δρχ.

**Ἀπάντησις.** Θὰ λάβῃ τόκον ὁ Παῦλος 90 δρχ.

**Παρατήρησις.** Τὰ ποσὰ Κεφάλαιον - Τόκος καὶ Χρόνος - Τόκος εἶναι ἀνάλογα. Καί, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον, ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸ Κεφάλαιον (600 δρχ.) ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον (5%) ἐπὶ τὸν χρόνον (3 ἔτη) καὶ τὸ γινόμενον τὸ διαιρέσαμεν διὰ τοῦ 100.

Τὸ ἴδιον θὰ παρατηρήσωμεν ὅσα ὅμοια προβλήματα καὶ ἂν λύσωμεν.

Δηλαδή : Θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ τρία γνωστὰ ποσά : Κεφάλαιον (Κ), Ἐπιτόκιον (Ε) καὶ Χρόνον (Χ) καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν θὰ τὸ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 100. Ἑπομένως :

*Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον, ὅταν ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς ἔτη, πολλαπλασιάζομεν τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον καὶ τὸν χρόνον καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 100.*

*Τύπος:* $T = \frac{K.E.X.}{100}$.

Ὁ ἀνωτέρω τύπος δύναται νὰ γραφῇ $T = \frac{K}{100} \cdot$ (E.X), ποὺ σημαίνει ὅτι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον, πολλαπλασιάζομεν τὸ $\frac{K}{100}$ (πλῆθος τῶν ἑκατονταδράχμων ποὺ ἐτοκίσθησαν) μὲ τὸ E.X., ποὺ εἶναι ὁ τόκος τοῦ ἑνὸς ἑκατονταδράχμου εἰς X ἔτη.

**Σημείωσις.** α) Εἰς τὸν τύπον ὡς σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ χρησιμοποιοῦμεν τὴν τελείαν (στιγμήν), διὰ νὰ ἀποφύγωμεν τὴν σύγχυσιν.

β) Κατὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων πρέπει πάντοτε νὰ ἐκτελοῦμεν τὰς δυνατὰς ἁπλοποιήσεις καὶ κατόπιν νὰ προχωροῦμεν εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων.

Προβλήματα

91. Πόσον τόκον θὰ μᾶς δώσουν 7.500 δρχ. εἰς 3 ἔτη πρὸς 6%;
92. Πόσον τόκον φέρει κεφάλαιον 1200 δρχ. εἰς 4 ἔτη πρὸς 7,5%;
93. Ἐδανείσθη κάποιος 13.500 δρχ. διὰ 2 ἔτη πρὸς 6,75%. Πόσον τόκον θὰ πληρώσῃ;
94. Κεφάλαιον 1.800 δρχ. ἐτοκίσθη πρὸς $8\frac{1}{2}$%. Πόσον τόκον θὰ φέρῃ εἰς 6 ἔτη;

β) Ὅταν ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς μῆνας

**Πρόβλημα.** *Κτηματίας ἐδανείσθη ἀπὸ τὴν Ἀγροτικὴν Τράπεζαν 36.000 δρχ. διὰ 5 μῆνας μὲ ἐπιτόκιον 12%. Πόσον τόκον θὰ πληρώσῃ;*

**Σκέψις.** Καὶ εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ τοῦ τόκου εἶναι γνωστὰ τὰ ποσά: Κεφάλαιον, ἐπιτόκιον καὶ χρόνος καὶ ζητεῖται ὁ τόκος. Ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς μῆνας.

K = 36.000 δρχ.
E = 12%
X = 5 μῆνες
T = ;

**Κατάταξις:**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 100 δρχ. κεφ. | εἰς | 12 μῆνας | φέρουν | 12 δρχ. | τόκον. |
| 36.000 » | » | » 5 » | » . | X » | » |

**Λύσις.** Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ κεφάλαιον - τόκος καὶ χρόνος - τόκος εἶναι ἀνάλογα, θὰ ἔχωμεν:

$$X = 12 \times \frac{36.000}{100} \times \frac{5}{12} = 1.800 \text{ δρχ.}$$

**Ἀπάντησις.** Θὰ πληρώσῃ τόκον 1.800 δραχμάς.

**Παρατήρησις.** Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον εἰς τὸ πρόβλημα αὐτό, καθὼς καὶ εἰς ὅσα προβλήματα ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς μῆνας, πολλαπλασιάζομεν τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον καὶ τὸν χρόνον καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 1200. Τὸ 1200 εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ 100× 12, ἐπειδὴ ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς μῆνας καὶ εἰς τὴν κατάταξιν ἀντὶ 1 ἔτος γράφομεν 12 μῆνας. **Ἑπομένως:**

*Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον, ὅταν ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς μῆνας, πολλαπλασιάζομεν τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον καὶ τὸν χρόνον καὶ τὸ γινόμενον τὸ διαιροῦμεν διὰ τοῦ 1200.*

$$\text{Τύπος: } T = \frac{K.E.X.}{1200}.$$

Προβλήματα

95. Πόσον τόκον φέρουν 1.300 δρχ. εἰς 6 μῆνας πρὸς 8%;

96. Κεφάλαιον 32.000 δρχ. ἐτοκίσθη διὰ 9 μῆνας πρὸς 7,5%. Πόσον τόκον θὰ φέρῃ;

97. Ἐργολάβος οἰκοδομῶν ἐδανείσθη ἀπὸ τὴν Κτηματικὴν Τράπεζαν 675.000 δρχ. πρὸς $8\frac{1}{2}$ % διὰ 2 ἔτη καὶ 4 μῆνας. Πόσον τόκον θὰ πληρώσῃ;

98. Πόσον τόκον φέρει κεφάλαιον 3.600 δρχ. πρὸς $6\frac{3}{4}$ % εἰς 1 ἔτος καὶ 4 μῆνας;

**Προσέχετε:** Τὰ ἔτη καὶ οἱ μῆνες νὰ τραποῦν εἰς μῆνας (1 ἔτος = = 12 μῆνες).

γ) Ὅταν ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς ἡμέρας

**Πρόβλημα.** *Πόσον τόκον θὰ πληρώσωμεν, ἂν δανεισθῶμεν 5.000 δρχ. πρὸς 9% διὰ 20 ἡμέρας;*

**Σκέψις.** Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ τοῦ τόκου εἶναι πάλιν γνωστὰ τὰ ποσά: κεφάλαιον, ἐπιτόκιον καὶ χρόνος καὶ ζητεῖται ὁ τόκος. Ὁ χρόνος ἐδῶ ἐκφράζεται εἰς ἡμέρας.

| |
|---|
| Κ = 5.000 δρχ. |
| Ε = 9% |
| Χ = 20 ἡμέραι |
| Τ = ; |

**Κατάταξις.** 100 δρχ. κεφ. εἰς 360 ἡμ. φέρουν 9 δρχ. τόκον
5.000 » » » 20 » » Χ » »

**Λύσις.** Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ κεφάλαιον - τόκος καὶ χρόνος - τόκος εἶναι ἀνάλογα, θὰ ἔχωμεν:

$$X = 9 \times \frac{5.000}{100} \times \frac{20}{360} = 25 \text{ δρχ.}$$

**Ἀπάντησις.** Θὰ πληρώσωμεν 25 δρχ. τόκον.

**Παρατήρησις.** Διὰ νὰ εὕρωμεν καὶ εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ τὸν τόκον, ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον καὶ τὸν χρόνον καὶ διαιρέσαμεν διὰ τοῦ 36.000. Τὸ 36.000 εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ 100 × 360, ἐπειδὴ ὁ χρόνος εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἐκφράζεται εἰς ἡμέρας καὶ εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν τὸ ἔτος ὑπολογίζεται πάντοτε μὲ 360 ἡμέρας.

**Ἑπομένως:**

*Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον, ὅταν ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς ἡμέρας, πολλαπλασιάζομεν τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον καὶ τὸν χρόνον καὶ τὸ γινόμενον τὸ διαιροῦμεν διὰ 36.000.*

$$\textit{Τύπος}: T = \frac{K.E.X.}{36.000}$$

Προβλήματα

99. Πόσον τόκον φέρουν 8.000 δρχ. εἰς 20 ἡμέρας πρὸς 4,5%;

100. Κεφάλαιον 7.400 δρχ. ἐτοκίσθη πρὸς 6,75% διὰ 1 μῆνα καὶ 10 ἡμέρας. Πόσον τόκον θὰ φέρῃ;

101. Ένας ἔμπορος ἐδανείσθη ἀπὸ τὴν Ἐμπορικὴν Τράπεζαν εἰς τὰς 15 Μαΐου 450.000 δρχ. πρὸς 9,5%. Ἐπέστρεψε δὲ τὰ χρήματα τὴν 1ην Αὐγούστου τοῦ ἰδίου ἔτους. Πόσον τόκον ἐπλήρωσεν;

102. Ένας κτηματίας ἐπώλησε τὰ προϊόντα του καὶ εἰσέπραξεν 7.500 δρχ., τὰς ὁποίας ἐτόκισεν πρὸς 9%. Πόσον τόκον θὰ λάβη μετὰ 1 ἔτος 1 μῆνα καὶ 10 ἡμέρας;

**Προσέχετε:** Οἱ συμμιγεῖς νὰ τρέπωνται εἰς ἀκεραίους.

## ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΙΣ

Σύμφωνα μὲ ὅσα εἴδομεν εἰς τὰ προηγούμενα προβλήματα, τὰ προβλήματα τοῦ τόκου τὰ λύομεν μὲ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν.

Διὰ συντομίαν δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν καὶ τοὺς τύπους.

**Γενικὸς κανών:** *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον, πολλαπλασιάζομεν τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον καὶ τὸν χρόνον καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 100, ἂν ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς ἔτη, διὰ τοῦ 1.200, ἂν ἐκφράζεται εἰς μῆνας, καὶ διὰ τοῦ 36.000, ἂν ἐκφράζεται εἰς ἡμέρας.*

*Τύποι:* α) $T=\dfrac{K.E.X}{100}$, β) $T=\dfrac{K.E.X}{1.200}$, γ) $T=\dfrac{K.E.X}{36.000}$

**Σημείωσις.** Εἰς ὅλα τὰ προβλήματα τοῦ τόκου, ὅταν ὁ χρόνος διατυπώνεται εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν, τρέπομεν τὸν συμμιγῆ εἰς ἀκέραιον, δηλ. εἰς τὴν κατωτέραν μονάδα τὴν ὁποίαν ἀναφέρει τὸ πρόβλημα, ὡς ἑξῆς:

α) Τὰ ἔτη καὶ μῆνες τρέπονται εἰς μῆνας· (πολλαπλασιάζομεν τὰ ἔτη ἐπὶ 12 καὶ προσθέτομεν καὶ τοὺς μῆνας, ποὺ δίδει τὸ πρόβλημα).

β) Οἱ μῆνες καὶ ἡμέραι τρέπονται εἰς ἡμέρας (πολλαπλασιάζομεν τοὺς μῆνας ἐπὶ 30 καὶ προσθέτομεν τὰς ἡμέρας).

γ) Τὰ ἔτη, μῆνες καὶ ἡμέραι τρέπονται εἰς ἡμέρας· (τρέπομεν τὰ ἔτη εἰς μῆνας καὶ προσθέτομεν καὶ τοὺς μῆνας, ποὺ δίδει τὸ πρόβλημα. Τοὺς μῆνας κατόπιν τοὺς τρέπομεν εἰς ἡμέρας καὶ προσθέτομεν καὶ τὰς ἡμέρας, ποὺ δίδει τὸ πρόβλημα).

δ) Τὰ ἔτη καὶ ἡμέραι τρέπονται εἰς ἡμέρας (πολλαπλασιάζομεν τὰ ἔτη ἐπὶ 360 καὶ προσθέτομεν καὶ τὰς ἡμέρας, ποὺ δίδει τὸ πρόβλημα).

Προβλήματα

103. Πόσον τόκον φέρουν 6.000 δρχ. πρὸς 8% εἰς 2 ἔτη καὶ 1 μῆνα;

104. Πόσον τόκον φέρει κεφάλαιον 67.500 δρχ. πρὸς 6% εἰς 1 ἔτος 1 μῆνα καὶ 10 ἡμέρας;

105. Ἂν δανείσωμεν 7.200 δρχ. πρὸς 7,5%, πόσον τόκον θὰ λάβωμεν μετὰ 1 ἔτος καὶ 20 ἡμέρας;

## 2. Εὕρεσις τοῦ Κεφαλαίου

α) Ὅταν ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς ἔτη

**Πρόβλημα.** *Ἕνας κτηνοτρόφος ἐδανείσθη ἀπὸ τὴν Ἀγροτικὴν Τράπεζαν ἕνα χρηματικὸν ποσὸν πρὸς 8%. Μετὰ 4 ἔτη ἐπλήρωσεν τόκον 4.000 δρχ. Πόσα χρήματα ἐδανείσθη;*

**Σκέψις.** Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι γνωστὰ τὰ ποσά : Τόκος, χρόνος, καὶ ἐπιτόκιον, ζητεῖται δὲ τὸ κεφάλαιον. Θὰ τὸ λύσωμεν μὲ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν.

**Κατάταξις :**

100 δρχ. κεφ. εἰς 1 ἔτος φέρουν 8 δρχ. τόκον
Χ » » » 4 ἔτη » 4.000 » »

Κ= ;
Ε= 8%
Χ= 4 ἔτη
Τ= 4.000 δρχ.

**Σύγκρισις.** α) **Τόκος καὶ κεφάλαιον**: Ἀφοῦ 8 δραχμὰς τόκον εἰς 1 ἔτος τὸν φέρουν 100 δρχ. κεφάλαιον, τὸν διπλάσιον τόκον εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον θὰ τὸν φέρῃ διπλάσιον κεφάλαιον. Τὰ ποσὰ **τόκος** καὶ **κεφάλαιον** εἶναι **ἀνάλογα.**

β) **Χρόνος καὶ κεφάλαιον :** Ἀφοῦ 8 δραχμὰς τόκον εἰς 1 ἔτος τὸν φέρουν 100 δρχ. κεφάλαιον, τὸν ἴδιον τόκον εἰς διπλάσιον χρόνον θὰ τὸν φέρῃ μισὸ κεφάλαιον. Τὰ ποσὰ **χρόνος** καὶ **κεφάλαιον** εἶναι **ἀντίστροφα.**

Δι' αὐτὸ θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμόν, ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστον, ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ χρόνου ὅπως ἔχει καὶ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ τόκου ἀντεστραμμένον.

**Λύσις.** $X = 100 \times \frac{1}{4} \times \frac{4000}{8} = 12.500$ δρχ.

**Ἀπάντησις.** Ἐδανείσθη 12.500 δραχμάς.

**Παρατήρησις.** Τὰ ποσὰ χρόνος - κεφάλαιον εἶναι ἀντίστροφα, ἐνῷ τόκος - κεφάλαιον εἶναι ἀνάλογα. Καί, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον, ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸν τόκον (4.000) ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον τὸ διαιρέσαμεν διὰ τοῦ χρόνου (4 ἔτη) ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον (8%).

Τὸ ἴδιον θὰ παρατηρήσωμεν ὅσα ὅμοια προβλήματα καὶ ἂν λύσωμεν.

**Ἑπομένως :**

> *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον, ὅταν ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς ἔτη, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον τὸ διαιροῦμεν διὰ τοῦ χρόνου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον.*
>
> *Τύπος :* $K = \frac{T.100}{X.E}$.

## Προβλήματα

106. Ποῖον κεφάλαιον πρέπει νὰ τοκίσωμεν πρὸς 8% ,διὰ νὰ λάβωμεν μετὰ 3 ἔτη 1.200 δραχμὰς τόκον;

107. Ποῖον κεφάλαιον πρέπει νὰ καταθέσωμεν εἰς τὴν Τράπεζαν πρὸς 9%, διὰ νὰ λάβωμεν 7.200 δρχ. τόκον μετὰ 2 ἔτη;

108. Μία οἰκία ἐνοικιάζεται πρὸς 1.500 δρχ. μηνιαίως. Πόσον πρέπει νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀξία της, ἂν τὸ ἐτήσιον ἐνοίκιον θεωρηθῇ ὡς κέρδος ὑπολογιζόμενον πρὸς 8% ἐπ' αὐτῆς;

109. Ἕνας ὑπάλληλος λαμβάνει μισθὸν 3.250 δρχ. καθαρὰς κατὰ μῆνα. Ποῖον κεφάλαιον ἔπρεπε νὰ εἶχε καταθέσει εἰς τὸ Ταμιευτήριον πρὸς 5%, διὰ νὰ τοῦ δίδῃ τὰ χρήματα αὐτὰ ὡς ἐτήσιον τόκον;

β) Ὅταν ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς μῆνας.

**Πρόβλημα.** *Ποῖον κεφάλαιον πρέπει νὰ τοκίσωμεν πρὸς 6%, διὰ νὰ λάβωμεν εἰς 8 μῆνας 800 δραχμὰς τόκον;*

**Σκέψις.** Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι γνωστὰ τὰ ποσά: τόκος, χρόνος καὶ ἐπιτόκιον καὶ ζητεῖται τὸ κεφάλαιον. Ὁ χρόνος ἐδῶ ἐκφράζεται εἰς μῆνας.

| |
|---|
| K = ; |
| E = 6% |
| X = 8 μῆνες |
| T = 800 δρχ. |

**Κατάταξις:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 δρχ. | κεφ. | εἰς | 12 | μῆνας φέρουν | 6 δρχ. | τόκον |
| X | » | » | 8 | » | 800 » | » |

**Λύσις.** Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ κεφάλαιον - τόκος εἶναι ἀνάλογα, ἐνῷ κεφάλαιον - χρόνος εἶναι ἀντίστροφα, θὰ ἔχωμεν:

$$X = 100 \times \frac{12}{8} \times \frac{800}{6} = 100 \times \frac{12}{8} \times \frac{800}{6} = 20.000 \text{ δρχ.}$$

**Ἀπάντησις.** Πρέπει νὰ τοκίσωμεν 20.000 δραχμάς.

**Παρατήρησις.** Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον εἰς τὸ πρόβλημα αὐτό, καθὼς καὶ εἰς ὅσα προβλήματα ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς μῆνας, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 1200 καὶ τὸ γινόμενον τὸ διαιροῦμεν διὰ τοῦ χρόνου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον. Τὸ 1200 εἶναι τὸ γινόμενον 100× 12, ἐπειδὴ ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς μῆνας καὶ ἀντὶ 1 ἔτος γράφομεν 12 μῆνας. **Ἑπομένως:**

*Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον, ὅταν ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς μῆνας, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 1200 καὶ τὸ γινόμενον τὸ διαιροῦμεν διὰ τοῦ χρόνου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον.*

*Τύπος:* $K = \dfrac{T . 1200}{X . E}$.

Προβλήματα

110. Πόσα χρήματα πρέπει νὰ καταθέσωμεν εἰς τὸ Ταμιευτήριον πρὸς 7,5%, διὰ νὰ λάβωμεν μετὰ 8 μῆνας 60 δρχ. τόκον;

111. Ποῖον κεφάλαιον πρέπει νὰ τοκίσωμεν πρὸς 6%, διὰ νὰ λάβωμεν μετὰ 3 μῆνας 11.250 δρχ. τόκον;

112. Πόσα χρήματα πρέπει νὰ δανείσωμεν πρὸς 6,75%, διὰ νὰ λάβωμεν μετὰ 1 ἔτος καὶ 8 μῆνας 270 δρχ. τόκον;

Κάμετε καὶ ἕνα ἰδικόν σας πρόβλημα καὶ νὰ τὸ λύσετε.

γ) Ὅταν ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς ἡμέρας

**Πρόβλημα.** *Ποῖον κεφάλαιον πρέπει νὰ καταθέσωμεν εἰς τὴν Τράπεζαν πρὸς 6,5 %, διὰ νὰ λάβωμεν μετὰ 1 ἔτος 1 μῆνα καὶ 10 ἡμέρας 6.500 δραχμὰς τόκον;*

**Σκέψις.** Ὁ χρόνος ἐδῶ ἐκφράζεται εἰς ἔτη, μῆνας καὶ ἡμέρας. Θὰ τὸν τρέψωμεν εἰς ἡμέρας. (Θὰ τρέψωμεν πρῶτον τὸ ἔτος εἰς 12 μῆνας καὶ θὰ προσθέσωμεν καὶ τὸν 1 μῆνα, ὅτε θὰ ἔχωμεν 13 μῆνας· τοὺς μῆνας θὰ τοὺς τρέψωμεν εἰς ἡμέρας : 13 × 30 = 390 ἡμέραι καὶ εἰς τὰς ἡμέρας αὐτὰς προσθέτομεν καὶ τὰς 10 ἡμέρας καὶ θὰ ἔχωμεν : 390 ἡμ. + 10 ἡμ. = 400 ἡμέραι).

Θυμηθῆτε ὅτι κεφάλαιον καὶ τόκος εἶναι ποσὰ ἀνάλογα καὶ κεφάλαιον καὶ χρόνος εἶναι ἀντίστροφα. (Κάμετε καὶ μόνοι σας τὴν σύγκρισιν νὰ τὸ διαπιστώσετε).

| |
|---|
| Κ = ; |
| Ε = 6,5 % |
| Χ = 400 ἡμ. |
| Τ = 6.500 δρχ. |

**Κατάταξις.**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 δρχ. | κεφ. | εἰς | 360 ἡμ. | φέρουν | 6,5 | δρχ. | τόκον |
| Χ | » | » | » 400 | » | » 6.500 | » | » |

$$X = 100 \times \frac{360}{400} \times \frac{6500}{6,5} = 100 \times \frac{360}{400} \times \frac{65000}{65} =$$

$$= 90.000 \text{ δρχ.}$$

**Ἀπάντησις.** Τὸ ζητούμενον κεφάλαιον εἶναι 90.000 δρχ.

*Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον, ὅταν ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς ἡμέρας, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 36.000 καὶ τὸ γινόμενον τὸ διαιροῦμεν διὰ τοῦ χρόνου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον.*

$$\text{Τύπος: } K = \frac{T \cdot 36000}{X \cdot E}$$

Προβλήματα

113. Ποῖον κεφάλαιον πρέπει νὰ τοκίσωμεν πρὸς 8%, διὰ νὰ λάβωμεν μετὰ 72 ἡμέρας 8.000 δραχμὰς τόκον;

114. Πόσα χρήματα πρέπει νὰ καταθέσωμεν εἰς τὴν Τράπεζαν πρὸς 7,5%, διὰ νὰ λάβωμεν μετὰ 1 μῆνα καὶ 10 ἡμέρας 6.250 δραχμὰς τόκον;

115. Ἕνας γεωργὸς ἐδανείσθη ἕνα χρηματικὸν ποσὸν πρὸς 6,75%. Μετὰ 1 ἔτος 1 μῆνα καὶ 10 ἡμέρας ἐπέστρεψε τὸ δάνειον καὶ ἐπλήρωσε τόκον 112,50 δραχμάς. Πόσα χρήματα εἶχε δανεισθῆ;

Νὰ γράψετε ἕνα ἰδικόν σας πρόβλημα καὶ νὰ τὸ λύσετε.

## Γενικὸς κανὼν εὑρέσεως τοῦ κεφαλαίου

*Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100, ὅταν ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς ἔτη, ἐπὶ 1200, ὅταν ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς μῆνας, ἐπὶ 36.000, ὅταν ὁ χρόνος ἐφράζεται εἰς ἡμέρας, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ χρόνου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον.*

$$\text{Τύποι: } α)\ K = \frac{T \cdot 100}{X \cdot E},\quad β)\ K = \frac{T \cdot 1200}{X \cdot E},$$

$$γ)\ K = \frac{T \cdot 36000}{X \cdot E}$$

## 3. Εὕρεσις τοῦ χρόνου

**Πρόβλημα 1.** *Ἕνας ἐργολάβος οἰκοδομῶν ἐδανείσθη ἀπὸ τὴν Κτηματικὴν Τράπεζαν 250.000 δρχ. πρὸς 8%. Κατὰ τὴν ἐξόφλησιν τοῦ* *δανείου ἐπλήρωσε τόκον 60.000 δραχμάς. Ἐπὶ πόσον χρόνον εἶχον τοκισθῆ τὰ χρήματα αὐτά;*

**Σκέψις.** Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι γνωστὰ τὰ ποσά: Κεφάλαιον, τόκος καὶ ἐπιτόκιον, ζητεῖται δὲ ὁ χρόνος. Θὰ τὸ λύσωμεν μὲ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν.

K = 250.000 δρχ.
E = 8%
X = ;
T = 60.000 δρχ.

**Κατάταξις.**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 δρχ. | κεφ. | εἰς | 1 ἔτος | φέρουν | 8 δρχ. | τόκον |
| 250.000 | » | » | » Χ ἔτη | » | 60.000 | » | » |

**Σύγκρισις.** α) **Κεφάλαιον καὶ χρόνος.** Ἀφοῦ 100 δρχ. κεφάλαιον φέρουν ὡρισμένον τόκον εἰς 1 ἔτος, διπλάσιον κεφάλαιον θὰ φέρῃ τὸν ἴδιον τόκον εἰς μισὸν χρόνον. Τὰ ποσὰ **κεφάλαιον** καὶ **χρόνος** εἶναι **ἀντίστροφα.**

β) **Τόκος καὶ χρόνος.** Ἀφοῦ 8 δραχμὰς τόκον τὸν φέρει ὡρισμένον κεφάλαιον εἰς 1 ἔτος, διπλάσιον τόκον θὰ τὸν φέρῃ τὸ ἴδιον κεφάλαιον εἰς διπλάσιον χρόνον. Τὰ ποσὰ **τόκος** καὶ **χρόνος** εἶναι **ἀνάλογα.**

Διὰ τοῦτο θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 1, ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστον, ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ κεφαλαίου ὅπως ἔχει καὶ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ τόκου ἀντεστραμμένον.

**Λύσις.** $X = 1 \times \frac{100}{250.000} \times \frac{60.000}{8} = 3$ ἔτη.

**Ἀπάντησις.** Τὰ χρήματα εἶχον τοκισθῆ ἐπὶ 3 ἔτη.

**Κανών.** *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν χρόνον, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον. Τὸ ἐξαγόμενον ἐκφράζει ἔτη.*

*Τύπος:* $X = \frac{T \cdot 100}{K \cdot E}$

**Πρόβλημα 2.** *Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 720.000 δρχ., τοκιζόμενον πρὸς 10 %, γίνεται μαζὶ μὲ τοὺς τόκους του 800.000 δραχμαί;*

**Σκέψις.** Καὶ ἐδῶ ζητοῦμεν τὸν χρόνον, ὅπως καὶ εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, ἀλλὰ δὲν μᾶς δίδεται καὶ ὁ τόκος. Ἠμποροῦμεν ὅμως νὰ τὸν εὕρωμεν τὸν τόκον, ἂν ἀπὸ τὰς 800.000 (αἱ ὁποῖαι εἶναι κεφάλαιον καὶ τόκος μαζί) ἀφαιρέσωμεν τὸ 720.000 (κεφάλαιον). Δηλ. 800.000 – 720.000 = 80.000 (τόκος).

Τώρα προχωροῦμεν εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, ὅπως γνωρίζομεν.

| |
|---|
| Κ = 720.000 δρχ. |
| Ε = 10% |
| Χ = ; |
| Τ = 80.000 δρχ. |

**Κατάταξις.**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 δρχ. | κεφ. | εἰς | 1 ἔτος | φέρουν | 10 δρχ. | τόκον | |
| 720.000 | » | » | » Χ ἔτη | » | 80.000 | » | » |

**Λύσις.** $Χ = 1 \times \frac{100}{720.000} \times \frac{80.000}{10} = \frac{10}{9}$ ἔτη = 1 ἔτ., 1 μ., 10 ἡμ.

**Ἀπάντησις.** Ὁ ζητούμενος χρόνος εἶναι 1 ἔτ. 1 μ. 10 ἡμ.

**Παρατήρησις.** Ἐὰν ὁ χρόνος εὑρεθῇ εἰς κλάσμα, τότε διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ. Ὁ πρῶτος ἀριθμὸς τοῦ πηλίκου παριστάνει ἔτη· ἂν μείνῃ ὑπόλοιπον ἢ ἂν δὲν χωρῇ καθόλου ὁ διαιρέτης εἰς τὸν διαιρετέον, τὸ τρέπομεν εἰς μῆνας πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 12. Τὸ νέον πηλίκον παριστάνει μῆνας. Τὸ νέον ὑπόλοιπον τὸ τρέπομεν εἰς ἡμέρας πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 30, τὸ δὲ νέον πηλίκον θὰ παριστάνῃ ἡμέρας.

Προβλήματα

116. Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 7.500 δραχμῶν, τοκιζόμενον πρὸς 7,5 %, δίδει τόκον 2.250 δραχμάς;

117. Μετὰ πόσον χρόνον κεφάλαιον 12.000 δρχ., τοκιζόμενον πρὸς 8%, φέρει τόκον 240 δραχμάς;

118. Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 15.000 δρχ., τοκιζόμενον πρὸς $4\frac{1}{2}$%, φέρει τόκον 75 δραχμάς;

119. Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 80.000 δρχ., τοκιζόμενον πρὸς 7,5%, γίνεται μὲ τοὺς τόκους του 95.000 δραχμαί;

120. Ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει νὰ τοκισθοῦν 670.000 δρχ. πρὸς 8%, διὰ νὰ γίνουν μὲ τοὺς τόκους των 737.000 δραχμαί;

121. Ἕνας μαθητὴς ἐπώλησε τὰ καλύτερα γραμματόσημα τῆς συλλογῆς του καὶ ἐπῆρε 2.400 δραχμάς. Τὰ χρήματα αὐτὰ τὰ κατέθεσεν εἰς τὴν Τράπεζαν πρὸς 8%. Μὲ τοὺς τόκους ὡρισμένου χρόνου ἠγόρασεν ἕνα ραδιόφωνον ἀξίας 1.600 δραχμῶν. Πόσον χρόνον ἔμειναν τοκισμένα τὰ χρήματα;

122. Ἕνας πατέρας, ὅταν ἐγεννήθη ἡ κόρη του, κατέθεσε διὰ λογαριασμόν της εἰς μίαν Τράπεζαν 60.000 δραχμὰς πρὸς 6%. Ὅταν ἐμεγάλωσεν ἡ κόρη του ἔλαβεν τόκους καὶ κεφάλαιον μαζὶ 135.000 δραχμάς. Εἰς ποίαν ἡλικίαν τὰς ἔλαβεν;

## 4. Εὕρεσις τοῦ ἐπιτοκίου

α) Ὅταν ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς ἔτη

**Πρόβλημα.** *Κατέθεσέ τις εἰς τὴν Τράπεζαν 35.000 δρχ. καὶ μετὰ 3 ἔτη ἔλαβε τόκον 6.300 δρχ. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθησαν τὰ χρήματα;*

**Σκέψις.** Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι γνωστὰ τὰ ποσά: κεφάλαιον, χρόνος καὶ τόκος καὶ ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιον. Ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς ἔτη. Θὰ τὸ λύσωμεν μὲ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν.

K = 35.000 δρχ.
E = ;
X = 3 ἔτη
T = 6.300 δρχ.

**Κατάταξις.**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 35.000 δρχ. | κεφ. | εἰς 3 ἔτη | φέρουν | 6.300 | δρχ. | τόκον |
| 100 | » | » 1 ἔτος | » | X | » | » |

**Σύγκρισις.** α) **Κεφάλαιον καὶ τόκος**: 35.000 δρχ. κεφάλαιον εἰς ὡρισμένον χρόνον φέρουν 6.300 δρχ. τόκον. Μισὸ κεφάλαιον εἰς τὸν ἴδιον χρόνον θὰ φέρῃ μισὸν τόκον. Τὰ ποσὰ **κεφάλαιον** καὶ **τόκος** εἶναι **ἀνάλογα.**

β) **Χρόνος καὶ τόκος.** Ὡρισμένον κεφάλαιον εἰς 3 ἔτη φέρει 6.300 δρχ. τόκον· τὸ ἴδιον κεφάλαιον εἰς μισὸν χρόνον θὰ φέρῃ μισὸν τόκον. Τὰ ποσὰ **χρόνος** καὶ **τόκος** εἶναι **ἀνάλογα.**

Διὰ τοῦτο θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμόν, ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστον, ἐπὶ τὰ κλάσματα τῶν δύο ἄλλων ποσῶν ἀντεστραμμένα.

**Λύσις.** $X = 6.300 \times \frac{100}{35.000} \times \frac{1}{3} = 6\%$

**Ἀπάντησις.** Τὰ χρήματα ἐτοκίσθησαν πρὸς 6 %.

**Κανών.** *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον, ὅταν ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς ἔτη, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον τὸ διαιροῦμεν διὰ τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸν χρόνον.*

*Τύπος:* $E = \frac{T \cdot 100}{K \cdot X}$

Προβλήματα

123. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ τοκισθοῦν 1.200 δρχ., διὰ νὰ φέρουν εἰς 4 ἔτη 324 δρχ. τόκον;

124. Ἐδανείσθη κάποιος 2.500 δρχ., τὰς ὁποίας ἐπέστρεψε μετὰ 3 ἔτη πληρώνων καὶ 600 δρχ. διὰ τόκους. Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν (%) εἶχε δανεισθῆ τὰ χρήματα;

125. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ τοκισθοῦν 1.500 δρχ., διὰ νὰ φέρουν μετὰ 4 ἔτη 380 δρχ. τόκον;

Κάμετε καὶ σεῖς ἕνα πρόβλημα καὶ νὰ τὸ λύσετε

β) Ὅταν ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς μῆνας

**Πρόβλημα.** *Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ τοκίσωμεν 45.000 δρχ., διὰ νὰ λάβωμεν μετὰ 4 μῆνας 1500 δραχμὰς τόκον;*

**Σκέψις.** Γνωρίζομεν τὰ ποσά: κεφάλαιον, χρόνον καὶ τόκον καὶ ζητοῦμεν τὸ ἐπιτόκιον. Ἐδῶ ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς μῆνας.

K = 45.000 δρχ.
E = ;
X = 4 μῆνας
T = 1.500 δρχ.

**Κατάταξις.**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 45.000 δρχ. | κεφ. | εἰς | 4 μῆν. | φέρουν | 1500 | δρχ. | τόκον. |
| 100 | » | » | 12 » | » | X | » | » |

**Λύσις.** Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ὅπως γνωρίζομεν, θὰ ἔχωμεν: $X = 1500 \times \frac{100}{45.000} \times \frac{12}{4} = 10$ δρχ.

**Ἀπάντησις.** Τὸ ζητούμενον ἐπιτόκιον εἶναι 10 %.

**Παρατήρησις.** Εἰς τὸ πρόβλημά μας ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς μῆνας. Καί, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον, ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸν τόκον ἐπὶ 1200 (100 × 12) καὶ διαιρέσαμεν διὰ τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸν χρόνον.

**Κανών.** *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον, ὅταν ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς μῆνας, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 1200 καὶ τὸ γινόμενον τὸ διαιροῦμεν διὰ τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸν χρόνον.*

*Τύπος:* $E = \frac{T \cdot 1200}{K \cdot X}$

Προβλήματα

126. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ τοκισθοῦν 6.000 δρχ., διὰ νὰ φέρουν εἰς 3 μῆνας 120 δρχ. τόκον;

127. Κεφάλαιον 620.000 δρχ. τοκισθὲν ἔφερε μετὰ 1 ἔτος καὶ 3 μῆνας 58.125 δρχ. τόκον. Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν (%) εἶχε τοκισθῆ;

128. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ τοκισθῆ κεφάλαιον 12.000 δρχ., διὰ νὰ φέρῃ τόκον 1.440 δρχ. μετὰ 1 ἔτος καὶ 6 μῆνας;

129. Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν (%) πρέπει νὰ τοκισθοῦν 900 δρχ., διὰ νὰ γίνουν μετὰ 2 μῆνας μαζὶ μὲ τὸν τόκον των 913.50 δρχ.;

γ) Ὅταν ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς ἡμέρας

**Πρόβλημα.** *Ἔμπορος ἐδανείσθη 320.000 δρχ. καὶ μετὰ 1 ἔτος 1 μῆνα καὶ 10 ἡμέρας ἐπλήρωσε τόκον 32.000 δρχ. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον συνῆψε τὸ δάνειον;*

| |
|---|
| K = 320.000 δρχ. |
| E = ; |
| X = 400 ἡμ. |
| T = 32.000 δρχ. |

**Σκέψις.** Μᾶς εἶναι γνωστὰ τὰ ποσά: Κεφάλαιον, χρόνος καὶ τόκος καὶ ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιον. Ὁ χρόνος ἐδῶ ἐκφράζεται εἰς ἔτη, μῆνας καὶ ἡμέρας. Θὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ εἰς ἀκέραιον, ὅπως γνωρίζομεν, δηλ. εἰς ἡμέρας.

**Κατάταξις.**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 320.000 δρχ. | κεφ. | εἰς 400 ἡμ. | φέρουν | 32.000 δρχ. | τόκον |
| 100 » | » | » 360 » | » | X » | » |

**Λύσις.** Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ὅταν ζητῆται τὸ ἐπιτόκιον, θὰ ἔχωμεν:

$$X = 32.000 \times \frac{100}{320.000} \times \frac{360}{400} = 9 \text{ δρχ.}$$

**Ἀπάντησις.** Τὸ ζητούμενον ἐπιτόκιον εἶναι 9 %.

**Παρατήρησις.** Ἐπειδὴ ὁ χρόνος εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἐκφράζεται εἰς ἔτη, μῆνας καὶ ἡμέρας, ἐτρέψαμεν τὸν συμμιγῆ εἰς ἡμέρας. Καὶ κατόπιν ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸν τόκον ἐπὶ 36.000 (100 × 360) καὶ τὸ γινόμενον τὸ διαιρέσαμεν διὰ τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸν χρόνον.

**Κανών.** *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον, ὅταν ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς ἡμέρας, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 36.000 καὶ τὸ γινόμενον τὸ διαιροῦμεν διὰ τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸν χρόνον.*

*Τύπος:* $E = \frac{T.36000}{K.X}$

Προβλήματα

130. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον κεφάλαιον 8.100 δρχ. φέρει τόκον 54 δρχ. μετὰ 1 μῆνα καὶ 10 ἡμέρας;

131. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ τοκισθοῦν 3.000 δρχ. διὰ νὰ φέρουν εἰς 1 ἔτος 1 μῆνα καὶ 10 ἡμέρας τόκον 200 δραχμάς;

132. Ἕνας γεωργὸς ἐπώλησε 1.250 κιλὰ σιτάρι πρὸς 3 δρχ. τὸ κιλόν. Τὰ χρήματα, ποὺ ἐπῆρε, τὰ ἐδάνεισε. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον τὰ ἐδάνεισε, διὰ νὰ λάβῃ μετὰ 6 μῆνας καὶ 20 ἡμέρας τόκον 250 δραχμάς;

133. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ τοκίσωμεν 46.800 δρχ., διὰ νὰ λάβωμεν μετὰ 3 μῆνας καὶ 10 ἡμέρας τόκους καὶ κεφάλαιον μαζὶ 47.580 δραχμάς;

## Γενικὸς κανὼν εὑρέσεως τοῦ ἐπιτοκίου

*Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100, ὅταν ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς ἔτη, ἐπὶ 1200, ὅταν ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς μῆνας, καὶ ἐπὶ 36.000, ὅταν ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς ἡμέρας, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸν χρόνον.*

*Τύποι:* α) $E = \dfrac{T.100}{K.X}$, β) $E = \dfrac{T.1200}{K.X}$, γ) $E = \dfrac{T.36000}{K.X}$

ΓΕΝΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ

134. Ἕνας γεωργὸς ἐπώλησεν 724 κιλὰ σιτάρι πρὸς 4,25 δρχ. τὸ κιλὸν καὶ 170 κιλὰ λάδι πρὸς 38,50 δρχ. τὸ κιλόν. Τὰ χρήματα, ποὺ εἰσέπραξε, τὰ ἐτόκισε πρὸς 8% ἐπὶ 1 ἔτος καὶ 3 μῆνας. Πόσον τόκον ἔλαβεν;

135. Ἔμπορος ἠγόρασεν ἐμπορεύματα ἀξίας 75.000 δραχμῶν. Ἐπλήρωσεν εἰς μετρητὰ τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ἀξίας των, τὸ δὲ ὑπόλοιπον ὑπεχρεώθη νὰ πληρώσῃ μετὰ 3 μῆνας πρὸς 8%. Πόσον τόκον ἐπλήρωσεν;

136. Μετὰ πόσον χρόνον κεφάλαιον 24.000 δρχ., τοκιζόμενον πρὸς 7,5% γίνεται μὲ τοὺς τόκους του 24.600 δραχμαί;

137. Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 250.000 δρχ., τοκιζόμενον πρὸς 12,5%, διπλασιάζεται;

138. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ τοκισθῇ κεφάλαιον, διὰ νὰ διπλασιασθῇ εἰς 20 ἔτη;

139. Πόσον τόκον θὰ πάρωμεν, ἂν ἀπὸ κεφάλαιον 20.000 δρχ. τοκίσωμεν διὰ 8 μῆνας τὰ μὲν $\frac{3}{5}$ αὐτοῦ πρὸς 6%, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πρὸς 9%;

140. Ἕνας ὑπάλληλος λαμβάνει τὸν μῆνα 2.500 δρχ. καθαράς. Ποῖον κεφάλαιον ἔπρεπε νὰ καταθέσῃ εἰς τὴν Τράπεζαν πρὸς 5%, διὰ νὰ τοῦ δίδῃ τὰ χρήματα αὐτὰ ὡς τόκον;

141. Ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει νὰ καταθέσωμεν εἰς μίαν Τράπεζαν 48.000 δρχ. πρὸς 8,5%, διὰ νὰ λάβωμεν τόκον καὶ κεφάλαιον μαζὶ 65.340 δραχμάς;

142. Πόσα κιλὰ σίτου πρέπει νὰ πωλήσῃ ἕνας γεωργὸς πρὸς 3,20 δρχ. τὸ κιλόν, διὰ νὰ καταθέσῃ τὴν ἀξίαν των εἰς τὴν Τράπεζαν πρὸς 5% καὶ νὰ λάβῃ μετὰ 1 ἔτος καὶ 3 μῆνας 300 δρχ. τόκον;

Κάμετε καὶ σεῖς προβλήματα τόκου ἀπὸ τὴν ζωήν.

## 5. Πρόβλημα ἀπαλοιφῆς τοῦ χρόνου

**Πρόβλημα.** *Ποῖον κεφάλαιον, τοκιζόμενον πρὸς 6%, μετὰ 3 ἔτη γίνεται μὲ τοὺς τόκους του 9.440 δραχμαί;*

**Σκέψις.** Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ τοῦ τόκου ζητεῖται τὸ κεφάλαιον, μᾶς εἶναι ἄγνωστος ὅμως καὶ ὁ τόκος, ὁ ὁποῖος εἶναι ἑνωμένος μὲ τὸ κεφάλαιον καὶ δὲν ἠμποροῦμεν νὰ τὸν χωρίσωμεν.

| |
|---|
| Κ = ; |
| Ε = 6% |
| Χ = 3 ἔτη |
| Τ = ; |
| Κ+Τ=9.440 δρχ. |

Ἑπομένως εἰς τὴν στήλην τοῦ τόκου θὰ ἔχωμεν τὸ ἄθροισμα Κ + Τ.

**Κατάταξις.**

100 δρχ. κεφ. εἰς 1 ἔτος γίνεται μετὰ τοῦ τόκου 106 δρχ.
Χ » » » 3 ἔτη » » » » 9440 »

Ἐδῶ ὅμως παρουσιάζεται ἡ δυσκολία ὅτι ὁ χρόνος καὶ τὸ Κ + Τ δὲν μεταβάλλονται κατ' εὐθεῖαν ἢ ἀντίστροφον ἀναλογίαν, ὥστε νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα μὲ τὴν σύνθετον μέθοδον. Πρέπει λοιπὸν νὰ ἀπαλείψωμεν τὸν χρόνον, νὰ κάμωμεν δηλαδὴ ἀναγωγὴν εἰς τὸν κοινὸν χρόνον τῶν 3 ἐτῶν.

**Λύσις.**

α' **Κατάταξις :** 100 δρχ. κεφ. εἰς 1 ἔτος φέρουν 6 δρχ. τόκον.
100 » » » 3 ἔτη » Χ » »

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ χρόνος καὶ τόκος εἶναι ἀνάλογα, θὰ ἔχωμεν:

$$Χ = 6 \times \frac{3}{1} = 18 \text{ δρχ. (τόκος).}$$

Ἐὰν τὸν τόκον αὐτὸν τῶν 18 δραχμῶν τὸν προσθέσωμεν εἰς τὸ κεφάλαιον τῶν 100 δρχ., θὰ εὕρωμεν: 100 + 18 = 118 δρχ. (κεφάλαιον + τόκος).

β' **Κατάταξις :** 118 δρχ. Κ + Τ προέρχονται ἀπὸ 100 δρχ. Κ.
9.440 » » » » Χ » »

Ἐπειδὴ τὸ κεφάλαιον ἀφ' ἑνὸς καὶ τὸ ἄθροισμα Κ + Τ ἀφ' ἑτέρου, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι σταθερός, εἶναι ἀνάλογα, ἔχομεν :

$$Χ = 100 \times \frac{9.440}{118} = 8.000 \text{ δρχ.}$$

**Ἀπάντησις :** Τὸ ζητούμενον κεφάλαιον εἶναι 8.000 δρχ.

**Παρατήρησις :** Οἱ τόκοι θὰ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ κεφάλαια διὰ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον καὶ τὸν αὐτὸν χρόνον.

Προβλήματα

143. Ποῖον κεφάλαιον πρέπει νὰ τοκίσωμεν πρὸς 8%, διὰ νὰ λάβωμεν μετὰ 3 μῆνας μαζὶ μὲ τοὺς τόκους του 6.120 δραχμάς;

144. Ποῖον κεφάλαιον, τοκιζόμενον πρὸς 9 %, γίνεται μετὰ 6 μῆνας μὲ τοὺς τόκους του 1.881 δραχμαί;

145. Ἕνας πατέρας, ὅταν ἐγεννήθη ἡ κόρη του, κατέθεσε διὰ λογαριασμόν της εἰς μίαν Τράπεζαν ἕνα κεφάλαιον πρὸς 6 %. Ὅταν ἡ κόρη του ἔγινεν 21 ἐτῶν, ἔλαβε τόκους καὶ κεφάλαιον 135.600 δρχ. Ποῖον κεφάλαιον εἶχε καταθέσει ὁ πατέρας της καὶ πόσον τόκον ἔφερε τὸ κεφάλαιον τοῦτο;

## 6. Ὑφαίρεσις

### α) Δάνειον - Γραμμάτιον - Συναλλαγματική

Εἰς τὸ κεφάλαιον «περὶ τόκου» εἴπαμεν ὅτι οἱ ἔμποροι, διὰ νὰ ἀγοράσουν τὰ ἐμπορεύματά των, δανείζονται χρήματα ἀπὸ τὴν Τράπεζαν. Τὸ ἴδιον κάμνουν οἱ κτηματίαι, οἱ γεωργοὶ καὶ οἱ κτηνοτρόφοι εἴτε ἀπὸ τὴν Τράπεζαν εἴτε ἀπὸ Συνεταιρισμοὺς εἴτε ἀπὸ ἰδιώτας. Καὶ εἰς τὸν ὡρισμένον χρόνον ἐπιστρέφουν τὸ **δάνειον.**

Οἱ ἔμποροι εἰς τὰς συναλλαγάς των διευκολύνονται καὶ κατ' ἄλλον τρόπον. Συνήθως δὲν πληρώνουν ὅλην τὴν ἀξίαν τῶν ἐμπορευμάτων, τὰ ὁποῖα ἀγοράζουν ἀπὸ ἄλλον μεγαλύτερον ἔμπορον (τὸν χονδρέμπορον) ἢ ἀπὸ τὴν ἀποθήκην ἢ ἀπὸ τὸ ἐργοστάσιον. Πληρώνουν ἕνα μέρος μόνον τῆς ἀξίας, ὑπόσχονται δὲ νὰ πληρώσουν τὰ ὑπόλοιπα μετὰ ἕνα ὡρισμένον χρονικὸν διάστημα. Διὰ τὰ ὑπόλοιπα αὐτὰ ὑπογράφει ὁ ἀγοραστὴς ἔμπορος (ὁ ὀφειλέτης) μίαν ἀπόδειξιν, ἡ ὁποία ὀνομάζεται **Γραμμάτιον.**

Ὁ συνηθέστερος τύπος τοῦ γραμματίου εἶναι ὁ ἑξῆς :

*Γραμμάτιον δρχ. 51.500*

*Τὴν 30ὴν Σεπτεμβρίου 1969 ὑπόσχομαι νὰ πληρώσω εἰς τὸν Π.Β . . . ἢ εἰς Διαταγὴν αὐτοῦ τὸ ἄνω ποσὸν τῶν δραχμῶν πεντήκοντα μιᾶς χιλιάδων πεντακοσίων, ἀξίαν ληφθεῖσαν εἰς ἐμπορεύματα.*

*Ἐν Ἀθήναις τῇ 1 Ἀπριλίου 1969*
*(Ὑπογρ.) Χ.Ρ. . . . . . .*
*Ὁδὸς . . . . .*

Καθὼς βλέπομεν, εἰς τὸ γραμμάτιον ἀναγράφεται τὸ ποσὸν τοῦ χρέους (51.500), εἰς τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ τόκος τῶν 6 μηνῶν. Ἀναγράφεται ἐπίσης καὶ ἡ ἡμερομηνία ἐξοφλήσεως τοῦ χρέους (30 Σεπτεμβρίου 1969).

Τὸ **Γραμμάτιον** αὐτό, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται καὶ **χρεώγραφον**, τὸ ἐκδίδει καὶ ὑπογράφει ὁ **χρεώστης** (ὀφειλέτης) Χ.Ρ. καὶ τὸ κρατεῖ ὁ Π.Β., δηλ. ὁ **πιστωτὴς** (δανειστής), ὁ ὁποῖος λέγεται καὶ **κομιστὴς** τοῦ χρεωγράφου.

Ὁ πιστωτὴς Π.Β. δύναται νὰ ζητήσῃ ἀπὸ τὸν ὀφειλέτην του Χ.Ρ. νὰ τοῦ ὑπογράψῃ ἀντὶ γραμματίου μίαν συναλλαγματικήν. Καὶ ἡ **συναλλαγματικὴ** εἶναι χρεώγραφον· εἶναι δηλ. μία ἀπόδειξις, ἡ ὁποία ἀποδεικνύει τὴν σύναψιν τοῦ δανείου.

Ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ Γραμματίου καὶ τῆς συναλλαγματικῆς εἶναι ἡ ἑξῆς: Τὸ **Γραμμάτιον,** ὅπως εἴπαμεν, τὸ ἐκδίδει καὶ τὸ ὑπογράφει ὁ χρεώστης (ὁ ὀφειλέτης), ἐνῷ τὴν **συναλλαγματικὴν** τὴν ἐκδίδει καὶ τὴν ὑπογράφει ὁ πιστωτὴς (ὁ δανειστὴς) καὶ τὴν ἀπευθύνει πρὸς τὸν ὀφειλέτην μὲ τὴν ἐντολὴν τῆς πληρωμῆς κατὰ τὴν ἡμέραν τῆς λήξεως. Ὁ ὀφειλέτης τὴν ἀποδέχεται μὲ τὴν ὑπογραφήν του κάτω ἀπὸ τὴν λέξιν **Δεκτή.**

Ἰδοὺ ὁ τύπος τῆς συναλλαγματικῆς:

*Λῆξις τῇ 30/9/69. Συναλλαγματικὴ διὰ δρχ. 51.500.*

*Τὴν 30ὴν Σεπτεμβρίου 1969 πληρώσατε δυνάμει τῆς παρούσης μόνης συναλλαγματικῆς εἰς Διαταγὴν Π.Β.*

*.........καὶ εἰς τὸ ἐν Ἀθήναις κατάστημα Ἐμπορικῆς Τραπέζης τὸ ποσὸν τῶν Δραχμῶν πεντήκοντα μιᾶς χιλιάδων πεντακοσίων.*

*Ἐν Ἀθήναις τῇ 1 Ἀπριλίου 1969*

*Πρὸς*
*Τὸν κ. Χ.Ρ .............*
*Ὁδὸς .............*
*Ἀθήνας*
*(Ὑπογρ.) Χ.Ρ.*

*Ὁ Ἐκδότης*
*(ὑπογρ.) Π.Β. .............*
*Δεκτὴ*

### 6) Ὑφαίρεσις

Ὁ κομιστὴς τοῦ χρεωγράφου σπανίως κρατεῖ τὸ γραμμάτιον ἢ τὴν συναλλαγματικὴν μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς λήξεως. Οἱ ἐμπορευόμενοι συνήθως χρειάζονται χρήματα, διὰ νὰ πληρώνουν τὰς ὑποχρεώσεις των. Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιοῦν τὸ γραμμάτιον ἢ τὴν συναλλαγματικὴν ὡς χαρτονόμισμα.

Εἰς τὸ παράδειγμά μας : Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι 4 μῆνας μετὰ τὴν ὑπογραφὴν τοῦ γραμματίου ἢ τῆς συναλλαγματικῆς ὁ πιστωτὴς Π.Β. ἐχρειάσθη χρήματα. Πηγαίνει τότε εἰς τὴν Τράπεζαν ἢ εἰς ἰδιώτην καὶ μεταβιβάζει τὸ εἰς χεῖράς του χρεώγραφον ὑπογράφων αὐτὸ εἰς τὸ ὄπισθεν μέρος (ὀπισθογράφησις).

Ἡ Τράπεζα, ἡ ὁποία θὰ πάρῃ τὸ χρεώγραφον, δὲν θὰ δώσῃ ὅλον τὸ ποσόν, ποὺ ἀναγράφεται εἰς αὐτό, ἀλλὰ θὰ κρατήσῃ τὸν τόκον τῶν δύο μηνῶν, οἱ ὁποῖοι ὑπολείπονται μέχρι τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου.

Κάμνουν τὸν λογαριασμὸν καὶ εὑρίσκουν, ὅτι ὁ τόκος τῶν 51.500 δρχ. εἰς 2 μῆνας μὲ τὸ καθωρισμένον ἐπιτόκιον 12% εἶναι 1.030 δραχμαί. Τὸν ἀφαιροῦν τὸν τόκον αὐτὸν ἀπὸ τὸ ποσὸν τῶν 51.500 δραχμῶν καὶ τὸ ὑπόλοιπον παίρνει ὁ Π.Β. Θὰ πάρῃ δηλ. αὐτὸς 51.500 – 1.030 = 50.470 δραχμάς.

**Παρατηρήσεις.** 1) Τὸ ποσὸν 51.500 δρχ., τὸ ὁποῖον γράφει ἐπάνω τὸ χρεώγραφον, λέγεται **ὀνομαστικὴ ἀξία** (Ο.Α.) τοῦ γραμματίου. Τὸ ποσὸν 50.470 δρχ., τὸ ὁποῖον παίρνει ὁ πιστωτής, ὅταν προεξοφλῇ τὸ χρεώγραφον, λέγεται **παροῦσα ἀξία** ἢ **πραγματικὴ ἀξία** (Π.Α.) τοῦ γραμματίου.

2) Ἡ Ἡμερομηνία 30 Σεπτεμβρίου 1969, κατὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ πληρώσῃ τὰ χρήματα ὁ ὀφειλέτης, λέγεται **λῆξις** τοῦ γραμματίου.

3) Ὁ χρόνος, ὁ ὁποῖος μεσολαβεῖ ἀπὸ τὴν ἡμέραν ποὺ ἡ Τράπεζα πληρώνει τὸν πιστωτὴν μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου, λέγεται **χρόνος προεξοφλήσεως** τοῦ γραμματίου.

4) Τὸ ποσὸν τῶν 1.030 δραχμῶν, τὸ ὁποῖον κρατεῖ ἡ Τράπεζα ὡς τόκον, λέγεται **ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις**.

| |
|---|
| *Ὥστε : Ἐξωτερικὴ Ὑφαίρεσις λέγεται ὁ τόκος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας, τὸν ὁποῖον ἀφαιρεῖ ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου ἐκεῖνος, ποὺ πληρώνει τὸ χρεώγραφον πρὸ τῆς λήξεώς του.* |

5) Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις ὑπολογίζεται ἐπὶ τῇ βάσει ἐπιτοκίου, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι πάντοτε τὸ ἴδιον. Ὁρίζεται συνήθως ὑπὸ τοῦ Κράτους καὶ ὀνομάζεται **ἐπιτόκιον προεξοφλήσεως.**

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗΣ ΥΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

## α) Εὕρεσις τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως (τόκου)

**Πρόβλημα.** *Γραμμάτιον Ὀνομαστικῆς ἀξίας 2.400 δρχ. προεξοφλεῖται 2 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12 %. Ποία εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις καὶ ποία ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ Γραμματίου;*

**Σκέψις.** Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι γνωστὰ τὰ ποσά : Ὀνομαστικὴ ἀξία (τὸ κεφάλαιον εἰς τὰ προβλήματα τοῦ τόκου), ὁ χρόνος προεξοφλήσεως καὶ τὸ ἐπιτόκιον καὶ ζητεῖται ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις (ὁ τόκος) καὶ ἡ παροῦσα ἀξία.

Θὰ τὸ λύσωμεν ὅπως καὶ τὰ προβλήματα τοῦ τόκου.

| |
|---|
| Κ = Ὀν. ἀξ. = 2.400 δρχ. |
| Ε = 12% |
| Χ = 2 μ. |
| Τ = ἐξ. ὑφ. = ; |
| Π.Α. (Κ - Τ) = ; |

**Κατάταξις :**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 δρχ. | Ο.Α. | εἰς 12 | μῆνας | ἔχουν | 12 δρχ. | Ε.Υ. |
| 2.400 » | » | » 2 | » | » | Χ » | » |

**Λύσις.** Γνωρίζομεν ἀπὸ τὰ προβλήματα τοῦ τόκου ὅτι τὰ ποσὰ κεφάλαιον - τόκος καὶ χρόνος - τόκος εἶναι ἀνάλογα. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν :

$$X = 12 \times \frac{2.400}{100} \times \frac{2}{12} = 48 \text{ δρχ. ἐξωτ. ὑφαίρεσις.}$$

Παροῦσα ἀξία = 2.400 − 48 = 2.352 δρχ.

**Ἀπάντησις :** Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις τοῦ γραμματίου εἶναι 48 δρχ. καὶ ἡ παροῦσα ἀξία του 2.352 δρχ.

**Παρατήρησις :** Ἡ παροῦσα ἀξία εὑρίσκεται, ἂν ἀφαιρέσωμεν τὴν ἐξωτ. ὑφαίρεσιν ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν.

### β) Εὕρεσις τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας (κεφαλαίου)

**Πρόβλημα.** *Γραμμάτιον προεξοφλεῖται 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12 % μὲ ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν 1500 δρχ. Ποία ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου;*

**Σκέψις.** Ἐδῶ ζητεῖται ἡ εὕρεσις τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ Γραμματίου, δηλ. τοῦ κεφαλαίου. Ἑπομένως θὰ τὸ λύσωμεν ὅπως καὶ τὰ προβλήματα τόκου, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται τὸ κεφάλαιον.

| |
|---|
| Κ = Ὀν. ἀξ. = ; |
| Ε = 12% |
| Χ = 3 μ. |
| Τ = ἐξ. ὑφ. = 1.500 |

**Κατάταξις :**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 δρχ. | Ο.Α. | εἰς | 12 μῆν. | ἔχουν | 12 δρχ. | ἐξ. | ὑφαίρεσιν |
| Χ | » | » | » 3 | » | » 1.500 | » | » | » |

**Λύσις.** Ἐπειδή, ὅπως γνωρίζομεν, χρόνος καὶ κεφάλαιον εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα, ἐνῷ τόκος καὶ κεφάλαιον εἶναι ποσὰ ἀνάλογα, θὰ ἔχωμεν :

$$X = 100 \times \frac{12}{3} \times \frac{1.500}{12} = 50.000 \text{ δρχ. (Ο.Α.)}$$

**Ἀπάντησις :** Ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου εἶναι 50.000 δραχμαί.

### γ) Εὕρεσις τοῦ χρόνου προεξοφλήσεως

**Πρόβλημα.** *Γραμμάτιον Ὀνομαστικῆς ἀξίας 8.000 δραχμῶν προ-*

*εξωφλήθη πρὸς 9 % μὲ ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν 450 δρχ. Πρὸ πόσου χρόνου ἔγινεν ἡ προεξόφλησις;*

| |
|---|
| Κ = Ο.Α. = 8.000 δρχ. |
| Ε = 9 % |
| Χ = ; |
| Τ = ἐξ. ὑφ. = 450 δρχ. |

**Σκέψις.** Ἐδῶ ζητεῖται ἡ εὕρεσις τοῦ χρόνου προεξοφλήσεως. Θὰ τὸ λύσωμεν ὅπως τὰ προβλήματα τόκου, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ χρόνος.

**Κατάταξις.**

100 δρχ. Ο.Α. εἰς 1 ἔτος ἔχουν 9 δρχ. ἐξ. ὑφαίρεσιν
8.000 » » » Χ ἔτη » 450 » » »

**Λύσις.** Γνωρίζομεν ὅτι κεφάλαιον καὶ χρόνος εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα, ἐνῷ τόκος καὶ χρόνος εἶναι ποσὰ ἀνάλογα. **Ἐπομένως:**

$$X = 1 \times \frac{100}{8.000} \times \frac{450}{9} = \frac{5}{8} \text{ ἔτ.} = 7 \text{ μῆνες } 15 \text{ ἡμ.}$$

**Ἀπάντησις:** Ἡ προεξόφλησις ἔγινε πρὸ 7 μηνῶν καὶ 15 ἡμερῶν.

## δ) Εὕρεσις τοῦ ἐπιτοκίου

**Πρόβλημα.** *Γραμμάτιον 36.000 δραχμῶν προεξοφλεῖται 8 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του ἀντὶ 34.500 δρχ. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἔγινεν ἡ προεξόφλησις;*

| |
|---|
| Κ = Ο.Α. = 36.000 δρχ. |
| Ε = ; |
| Χ = 8 μ. |
| Τ = ἐξ. ὑφ. = 1500 δρχ. |
| Π.Α. = 34.500 δρχ. |

**Σκέψις.** Ἐπειδὴ εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιον, θὰ τὸ λύσωμεν ὅπως τὰ σχετικὰ προβλήματα τόκου. Ἐπειδὴ δὲν μᾶς δίδεται καὶ ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις (ὁ τόκος), ταύτην εὑρίσκομεν, ἂν ἀφαιρέσωμεν τὴν παροῦσαν ἀξίαν ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν· ἤτοι: 36.000 – 34.500 = 1.500.

**Κατάταξις.**

36.000 δρχ. Ο.Α. εἰς 8 μῆν. ἔχουν 1.500 δρχ. ἐξ. ὑφαίρ.
100 » » » 12 » » Χ » » »

**Λύσις.** Ἐπειδή, ὅπως γνωρίζομεν, εἰς τὰ προβλήματα ποὺ ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιον τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, θὰ ἔχωμεν:

$$X = 1.500 \times \frac{100}{36.000} \times \frac{12}{8} = 6{,}25 \text{ δρχ.}$$

**Ἀπάντησις:** Ἡ προεξόφλησις ἔγινε πρὸς 6,25%.

## ε) Πρόβλημα ἀπαλοιφῆς τοῦ χρόνου

**Πρόβλημα.** *Γραμμάτιον προεξωφλήθη 45 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 10 % ἀντὶ 5925 δραχμῶν. Ποία ἦτο ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία του;*

**Σκέψις.** Διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος αὐτοῦ θὰ κάμωμεν ἀναγωγὴν εἰς τὸν κοινὸν χρόνον τῶν 45 ἡμερῶν, ὅπως ἐκάμαμεν καὶ εἰς παρόμοια προβλήματα τόκου.

| |
|---|
| Κ = Ο.Α. = ; |
| Ε = 10% |
| Χ = 45 ἡμ. |
| Τ = ἐξ. ὑφ. = ; |
| Π.Α. = 5.925 δρχ. |

**Λύσις.**

α′ **Κατάταξις:** 100 δρχ. εἰς 360 ἡμ. ἔχουν 10 δρχ. Ε.Υ.
100 » » 45 » » Χ » »

Ἐπειδὴ χρόνος καὶ τόκος εἶναι ποσὰ ἀνάλογα, ἔχομεν:

$$X = 10 \times \frac{45}{360} = 1{,}25 \text{ δρχ. ἐξ. ὑφαίρ.}$$

Ἐὰν τὴν ὑφαίρεσιν αὐτὴν τὴν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὰς 100 δρχ., θὰ ἔχωμεν: 100 − 1,25 = 98,75 δρχ. παρ. ἀξία.

β′ **Κατάταξις:** 98,75 δρχ. Π.Α. προέρχονται ἀπὸ 100 δρχ. Ο.Α.
5.925 » » » » Χ » »

$$X = 100 \times \frac{5.925}{98{,}75} = 6.000 \text{ δρχ. Ο.Α.}$$

**Ἀπάντησις.** Ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ἦτο 6.000 δρχ.

## Γενικὰ προβλήματα ἐξωτ. Ὑφαιρέσεως

146. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐγένετο ἡ προεξόφλησις τῶν ἑξῆς γραμματίων, ἐάν:

α) 3.600 δρχ. προεξωφλήθησαν πρὸ 3 μηνῶν μὲ ἐξ. ὑφαίρεσιν 108 δρχ.

β) 1.600 » » » 3 μην. καὶ 10 ἡμ. ἀντὶ 1.560 δραχμῶν.

γ) 3.000 » » » 24 ἡμ. μὲ ἐξ. ὑφαίρ. 20 δρχ.

147. Ποῖος εἶναι ὁ χρόνος προεξοφλήσεως τῶν ἑξῆς γραμματίων:

α) 3.500 δρχ. ὀν. ἀξίας πρὸς 12% μὲ ἐξ. ὑφαίρεσιν 700 δρχ.

β) 1.800 » » » 9% » » » 45 »

γ) 1.500 » » » 10% » » » 30 »

148. Γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 4.800 δρχ. προεξοφλεῖται 2 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 8%. Ποία ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις καὶ ποία ἡ παροῦσα ἀξία αὐτοῦ;

149. Γραμμάτιον ὀνομ. ἀξίας 6.500 δρχ. προεξοφλεῖται 1 μῆνα καὶ 10 ἡμ. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 9%. Ποία ἡ παροῦσα ἀξία του;

150. Ποία ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου, τὸ ὁποῖον προεξοφλεῖται 2 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 10% μὲ ἐξωτ. ὑφαίρεσιν 60 δραχμάς;

151. Ἕνας χαρτοπώλης ἠγόρασεν ἀπὸ ἀποθήκην διάφορα σχολικὰ εἴδη ἀξίας 5.700 δραχμῶν. Μὲ τὴν παραλαβὴν τοῦ ἐμπορεύματος ἐπλήρωσεν ἀμέσως 3.200 δραχμάς, διὰ δὲ τὸ ὑπόλοιπον ὑπέγραψε γραμμάτιον διὰ 6 μῆνας πρὸς 10%. Ποία ἦτο ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου;

152. Ἔμπορος προεξώφλησεν εἰς τὴν Τράπεζαν γραμμάτιον 2.625 δρχ. 2 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 12%. Τί ποσὸν ἐκράτησεν ἡ Τράπεζα καὶ πόσα χρήματα ἔλαβεν ὁ ἔμπορος;

153. Ποία ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις γραμματίου, τὸ ὁποῖον προεξοφλεῖται 45 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 10% ἀντὶ 2.370 δρχ.;

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

# ΜΕΡΙΣΜΟΣ ΕΙΣ ΜΕΡΗ ΑΝΑΛΟΓΑ

**Πρόβλημα 1.** *Δύο ἐργάται συνεφώνησαν νὰ σκάψουν ἕνα κτῆμα μὲ τὸ ἴδιον ἡμερομίσθιον. Εἰργάσθησαν ὁ ἕνας 4 ἡμέρας καὶ ὁ ἄλλος 6 ἡμέρας. Ἔλαβον καὶ οἱ δύο μαζὶ 1.000 δραχμάς. Πόσα χρήματα θὰ πάρῃ ἕκαστος;*

**Σκέψις.** Ἀντιλαμβανόμεθα ὅλοι, ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ μοιρασθοῦν τὰ χρήματα ἐξ ἴσου καὶ νὰ πάρῃ ὁ καθένας τὰ μισά, διότι δὲν εἰργάσθησαν ἴσας ἡμέρας. Τὰ χρήματα, ποὺ θὰ πάρῃ ὁ καθένας των, θὰ εἶναι ἀνάλογα μὲ τὰ ἡμερομίσθιά των.

Διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Καὶ οἱ δύο ἐργάται μαζὶ εἰργάσθησαν $4 + 6 = 10$ ἡμέρας. Ἄρα κάθε ἡμερομίσθιον εἶναι $1.000 : 10 = 100$ δραχμαί. Ἑπομένως ὁ πρῶτος θὰ λάβῃ $4 \times 100 = 400$ δρχ. καὶ ὁ δεύτερος $6 \times 100 = 600$ δραχμάς.

**Πρόβλημα 2.** *Τὸ φιλόπτωχον ταμεῖον ἑνὸς Ναοῦ ἐμοίρασεν κατὰ τὰς ἑορτὰς τῶν Χριστουγέννων εἰς 3 οἰκογενείας 1500 δραχμὰς ἀνάλογα μὲ τὰ ἄτομα ἑκάστης οἰκογενείας. Ἡ μία οἰκογένεια ἀπετελεῖτο ἀπὸ 2 ἄτομα, ἡ ἄλλη ἀπὸ 3 καὶ ἡ ἄλλη ἀπὸ 5 ἄτομα. Πόσα χρήματα ἐπῆρεν ἑκάστη οἰκογένεια;*

**Σκέψις.** Καὶ ἐδῶ δὲν θὰ μοιράσωμεν τὸ ποσὸν τῶν 1.500 δραχμῶν εἰς τρία ἴσα μέρη. Θὰ τὸ μοιράσωμεν ἀνάλογα μὲ τὰ ἄτομα, τὰ ὁποῖα ἔχει ἑκάστη οἰκογένεια· δηλ. ἀνάλογα μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 5.

Καὶ τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἠμποροῦμεν νὰ τὸ λύσωμεν νοερῶς, ὅπως καὶ τὸ προηγούμενον. Θὰ διαιρέσωμεν τὸ $1.500 : 10$, διότι 10 εἶναι ὅλα τὰ ἄτομα, καὶ θὰ εὕρωμεν ὅτι κάθε ἄτομον θὰ πάρῃ 150 δρχ. **Ἑπομένως** θὰ πάρουν: ἡ α' οἰκογένεια $2 \times 150 = 300$ δρχ., ἡ β' $3 \times 150 = 450$ δρχ. καὶ ἡ γ' $5 \times 150 = 750$ δραχμάς.

Τὸ πρόβλημα λύεται καὶ γραπτῶς μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα καὶ μὲ τὴν ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν, ποὺ ἔχομεν μάθει.

### Μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα

Τὰ 10 ἄτομα παίρνουν 1.500 δραχμάς.

Τὸ 1 ἄτομον θὰ πάρῃ $\frac{1500}{10}$ δραχμάς.

Τὰ 2 ἄτομα θὰ πάρουν $\frac{1500}{10} \times 2 = \frac{1500 \times 2}{10} = 300$ δρχ.

Τὰ 3 ἄτομα θὰ πάρουν $\frac{1500}{10} \times 3 = \frac{1500 \times 3}{10} = 450$ δρχ.

Τὰ 5 ἄτομα θὰ πάρουν $\frac{1500}{10} \times 5 = \frac{1500 \times 5}{10} = 750$ δρχ.

**Ἀπάντησις.** Ἡ α' οἰκογένεια ἐπῆρε 300 δρχ., ἡ β' 450 δρχ. καὶ ἡ γ' 750 δρχ.

**Παρατήρησις.** Ὅπως βλέπετε, διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα αὐτὸ μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα, ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸ 1500, δηλ. τὸ ποσὸν τῶν χρημάτων ποὺ εἴχαμεν νὰ μοιράσωμεν, πρῶτον ἐπὶ τὸ 2, ἔπειτα ἐπὶ τὸ 3 καὶ τέλος ἐπὶ τὸ 5 καὶ εἰς ἑκάστην περίπτωσιν διαιρέσαμεν τὸ γινόμενον διὰ 10, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀτόμων τῶν τριῶν οἰκογενειῶν.

**Κανών.** *Διὰ νὰ μερίσωμεν ἀριθμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα ἄλλων δοθέντων ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζομεν τὸν μεριστέον ἀριθμὸν ἐπὶ ἕκαστον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν καὶ τὸ γινόμενον τὸ διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.*

Διὰ τοῦτο εἰς τὰ προβλήματα μερισμοῦ, πρὶν προβῶμεν εἰς τὴν λύσιν των, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸν μεριστέον ἀριθμὸν καὶ τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.

**Κατάταξις :**

| | | |
|---|---|---|
| | | **Δοθέντες** |
| **Μεριστέος** 1.500 δραχ. | | α) 2 ἄτομα |
| | | β) 3 » |
| | | γ) 5 » |
| | ἄθροισμα | 10 » |

**Παρατήρησις.** Ἐὰν τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 5 πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, π.χ. τὸν 2, τότε γίνονται 4, 6, 10 καὶ τὰ μερίδια θὰ εἶναι $1500 \times \frac{4}{20}$, $1500 \times \frac{6}{20}$, $1500 \times \frac{10}{20}$, τὰ ὁποῖα εἶναι τὰ ἴδια καὶ ὅταν μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν 1.500 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5, ἤτοι πρὸς τά : $1.500 \times \frac{2}{10}$, $1.500 \times \frac{3}{10}$, $1.500 \times \frac{5}{10}$.

Κατὰ ταῦτα :

*Τοὺς ἀριθμούς, ἀναλόγως τῶν ὁποίων μερίζεται ἕνας ἀριθμός, δυνάμεθα νὰ τοὺς πολλαπλασιάσωμεν ἢ νὰ τοὺς διαιρέσωμεν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν (διάφορον τοῦ μηδενός), χωρὶς τὰ μερίδια νὰ μεταβληθοῦν.*

**Σημείωσις.** Εἰς τὸ ἑξῆς διὰ τὴν λύσιν παρομοίων προβλημάτων θὰ χρησιμοποιοῦμεν μόνον τὴν μέθοδον μερισμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ (προφορικῶς)

154. Νὰ μερισθοῦν 10 δρχ. εἰς δύο μαθητὰς ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 3.

155. 60 στρέμματα ἀγροῦ νὰ μερισθοῦν εἰς δύο ἄτομα ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 3.

156. Νὰ μερισθοῦν 1.400 κιλὰ σιτάρι εἰς δύο οἰκογενείας ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 4.

## 1. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΡΙΣΜΟΥ

157. Τρεῖς μαθηταὶ ἐμοιράσθησαν 750 δραχμὰς ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 5, 12 καὶ 13. Πόσας δρχ. ἔλαβεν ἕκαστος;

158. Διὰ τὴν καλλιέργειαν ἑνὸς ἀγροῦ ἔλαβον δύο ἐργάται 900 δραχμάς. Ὁ α΄ εἰργάσθη 6 ἡμέρας καὶ ὁ β΄ 4 ἡμέρας. Πόσον θὰ λάβη ἕκαστος;

159. Νὰ μερισθῇ τὸ χρηματικὸν ποσὸν 846.000 δρχ. εἰς δύο

πρόσωπα ἔτσι, ὥστε τὸ πρῶτον νὰ λάβῃ ὀκταπλάσιον μερίδιον τοῦ δευτέρου.

160. Διὰ τὴν κατασκευὴν ἑνὸς γλυκοῦ πρέπει νὰ λάβωμεν 5 μέρη ἀλεύρου, 3 μέρη βουτύρου καὶ 2 μέρη ζαχάρεως. Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν 8 κιλὰ ἀπὸ τὸ ἴδιον γλυκόν, πόσα κιλὰ πρέπει νὰ λάβωμεν ἀπὸ κάθε εἶδος;

## Διάφοροι περιπτώσεις μερισμοῦ

**Πρόβλημα 1.** *Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 2475 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν* $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ *καὶ* $\frac{2}{5}$.

**Σκέψις.** Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι ἑτερώνυμα κλάσματα. Διὰ νὰ γίνῃ ὁ μερισμὸς εἰς μέρη ἀνάλογα, πρέπει νὰ τρέψωμεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς εἰς ὁμώνυμα κλάσματα. Τοὺς τρέπομεν καὶ εὑρίσκομεν $\frac{10}{20}$, $\frac{15}{20}$, $\frac{8}{20}$. Παραλείπομεν τοὺς παρονομαστάς, οἱ ὁποῖοι ἁπλῶς καὶ μόνον χαρακτηρίζουν τὸ εἶδος τῶν μονάδων τῶν ἀριθμητῶν, καὶ προκύπτουν οἱ ἀριθμοὶ 10, 15 καὶ 8. Αὐτοὶ εἶναι οἱ ἀριθμοί, ἀνάλογα πρὸς τοὺς ὁποίους θὰ γίνῃ ὁ μερισμός.

**Κατάταξις.**

**Δοθέντες**

$$\textbf{Μεριστέος } 2.475 \left\{ \begin{array}{l} α)\ \frac{1}{2} \text{ ἢ } \frac{10}{20} \text{ ἢ } 10 \\[2mm] β)\ \frac{3}{4} \text{ ἢ } \frac{15}{20} \text{ ἢ } 15 \\[2mm] γ)\ \frac{2}{5} \text{ ἢ } \frac{8}{20} \text{ ἢ } \ \ 8 \end{array} \right.$$

ἄθροισμα $\quad 33$

**Λύσις.** Πολλαπλασιάζομεν τώρα τὸν μεριστέον ἀριθμὸν ἐπὶ ἕκαστον τῶν δοθέντων καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δοθέντων.

$$\alpha' \quad 2.475 \times \frac{10}{33} = 750$$

$$\beta' \quad 2.475 \times \frac{15}{33} = 1.125$$

$$\gamma' \quad 2.475 \times \frac{8}{33} = 600$$

Σύνολον $\quad 2.475$

**Ἀπάντησις.** $\alpha = 750$, $\beta = 1.125$, $\gamma = 600$.

**Παρατήρησις.** Ἐὰν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι ἑτερώνυμα κλάσματα, τὰ τρέπομεν εἰς ὁμώνυμα καὶ προβαίνομεν εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, ὅπως ἐκάμαμεν εἰς τὸ πρόβλημα ποὺ ἐλύσαμεν.

Εἶναι δυνατὸν οἱ δοθέντες νὰ εἶναι μεικτοὶ καὶ κλάσματα, ἢ μόνον μεικτοί· τότε θὰ τρέψωμεν τοὺς μεικτοὺς εἰς ἰσοδύναμα κλάσματα καὶ θὰ συνεχίσωμεν ὅπως καὶ προηγουμένως.

Ἐὰν οἱ δοθέντες εἶναι ἀκέραιοι καὶ κλάσματα, τότε θὰ τρέψωμεν τοὺς ἀκεραίους εἰς κλάσματα γράφοντες τὸν ἀκέραιον ἀριθμητὴν καὶ τὴν μονάδα παρονομαστὴν καὶ θὰ συνεχίσωμεν ὅπως καὶ προηγουμένως.

**Πρόβλημα 2.** *Ἕνας ὥρισε διὰ τῆς διαθήκης του νὰ λάβῃ ἡ σύζυγός του τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς περιουσίας του, ἡ κόρη του τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς περιουσίας καὶ ἡ ἀνεψιὰ τὸ ὑπόλοιπον. Ἡ περιουσία του ἦτο 600.000 δρχ. Πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος δικαιοῦχος;*

**Σκέψις.** Ὁ μεριστέος ἀριθμὸς εἶναι 600.000 δρχ. Οἱ δοθέντες εἶναι τὰ $\frac{2}{5}$, τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς περιουσίας, τὸ ὁποῖον θὰ εὑρεθῇ, ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων μεριδίων (συζύγου καὶ κόρης) ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὴν περιουσίαν ὁλόκληρον.

**Λύσις.**

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}$$ τῆς περιουσίας (τὰ δύο μερίδια).

Τὸ ἄθροισμα τοῦτο θὰ τὸ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ὁλόκληρον τὴν περιουσίαν, τὴν ὁποίαν παριστάνομεν μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα ἢ μὲ τὸ ὁμώνυμον κλάσμα $\frac{15}{15}$ καὶ θὰ ἔχωμεν: $\frac{15}{15} - \frac{11}{15} = \frac{4}{15}$.

Ὥστε ἡ ἀνεψιὰ θὰ λάβῃ τὰ $\frac{4}{15}$ τῆς περιουσίας.

Τώρα προχωροῦμεν εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, ὅπως πρίν.

**Δοθέντες**

**Μεριστέος** 600.000 $\left\{\begin{array}{l} \alpha' \ \frac{6}{15} \text{ ἢ } 6 \\ \beta' \ \frac{5}{15} \text{ ἢ } 5 \\ \gamma' \ \frac{4}{15} \text{ ἢ } 4 \end{array}\right.$

ἄθροισμα 15

$$\alpha' \quad \frac{600.000 \times 6}{15} = 240.000$$

$$\beta' \quad \frac{600.000 \times 5}{15} = 200.000$$

$$\gamma' \quad \frac{600.000 \times 4}{15} = 160.000$$

Σύνολον 600.000

**Ἀπάντησις.** Θὰ λάβουν: ἡ σύζυγος 240.000 δρχ., ἡ κόρη 200.000 δρχ. καὶ ἡ ἀνεψιὰ 160.000 δραχμάς.

**Σημείωσις.** Τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἦτο δυνατὸν νὰ τὸ λύσωμεν καὶ μὲ ἁπλοῦν πολλαπλασιασμὸν ἀκεραίου ἐπὶ κλάσμα, ὅτε:

ἡ σύζυγος θὰ λάβῃ $600.000 \times \frac{2}{5} = 240.000$ δρχ.

ἡ κόρη θὰ λάβῃ $600.000 \times \frac{1}{3} = 200.000$ »

Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ καὶ τὸ μερίδιον τῆς ἀνεψιᾶς, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο μεριδίων $(240.000 + 200.000 = 440.000)$ τὸ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν μεριστέον· δηλ. $600.000 - 440.000 = 160.000$ δρχ.

**Πρόβλημα 3.** *Δύο ὁδηγοὶ αὐτοκινήτων μετέφερον ἄμμον καὶ ἔλαβον 4118 δραχμάς. Ὁ πρῶτος ἔκαμεν 6 διαδρομὰς μὲ φορτίον 5 τόννων τὴν κάθε φορὰν καὶ ὁ δεύτερος 7 διαδρομὰς μὲ φορτίον 4 τόννων τὴν κάθε φοράν. Πῶς θὰ μοιρασθοῦν τὰ χρήματα;*

**Σκέψις.** Ἂν τὰ αὐτοκίνητα ἐχωροῦσαν καὶ τὰ δύο τὴν ἰδίαν ποσότητα, ὁ μερισμὸς τῶν χρημάτων θὰ ἐγίνετο ἀνάλογα πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν διαδρομῶν, ποὺ ἔκαμε τὸ καθένα. Τώρα ὅμως, ποὺ διαφέρουν καὶ εἰς τὸ βάρος ποὺ μετέφερε τὸ καθένα καὶ εἰς τὰς διαδρομὰς ποὺ ἔκαμον, πρέπει νὰ εὕρωμεν πόσους τόννους ἄμμον ἐν ὅλῳ μετέφερε τὸ πρῶτον αὐτοκίνητον καὶ πόσους τὸ δεύτερον.

**Λύσις.**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Τὸ | α′ | αὐτοκίνητον ἔκαμεν | 6 | διαδρομὰς | × 5 | τόνν. | = 30 τόνν. |
| » | β′ | » » | 7 | » | × 4 | » | = 28 » |
| | | Καὶ τὰ δύο αὐτοκίνητα μετέφερον ἐν ὅλῳ | | | | | 58 τόνν. |

Τώρα θὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 4.118 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 30 καὶ 28.

Συνεχίσατε μόνοι σας τὴν λύσιν.

## ΓΕΝΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΡΙΣΜΟΥ

161. Ἕνας ἄφησε κληρονομίαν 150.000 δρχ. εἰς τὴν γυναῖκά του, τὰ 3 παιδιά του καὶ τὸ σχολεῖον τοῦ χωριοῦ του. Ὥρισε δὲ νὰ λάβουν ἡ γυναῖκά του 4 μερίδια, κάθε παιδὶ 3 μερίδια καὶ τὸ σχολεῖον 2 μερίδια. Πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος κληρονόμος;

162. Εἰς ἕνα ἐργοστάσιον εἰργάσθησαν τρεῖς ἐργάται· ὁ πρῶτος ἔκαμε 4 ἡμερομίσθια, ὁ β′ 5 ἡμερομίσθια καὶ ὁ γ′ 6 ἡμερομίσθια. Ἔλαβον καὶ οἱ τρεῖς μαζὶ 2.250 δρχ. Πόσας δρχ. ἔλαβεν ἕκαστος;

163. Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 5.100 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{3}{4}$.

164. Τὸ ποσὸν τῶν 350 δρχ. νὰ μερισθῇ εἰς δύο παιδιὰ εἰς μέρη ἀνάλογα τῆς ἡλικίας των· τὸ ἕνα εἶναι 3 ἐτῶν καὶ τὸ ἄλλο 7 ἐτῶν.

165. Δύο βοσκοὶ ἐνοικίασαν ἕνα λιβάδι καὶ ἔδωσαν 4.200 δρχ. Ὁ α' ἐβόσκησεν εἰς αὐτὸ τὰ πρόβατά του ἐπὶ 3 μῆνας καὶ ὁ β' ἐπὶ 5 μῆνας. Τὰ πρόβατα ὅμως τοῦ α' ἦσαν τριπλάσια ἀπὸ τὰ πρόβατα τοῦ β'. Πόσον θὰ πληρώσῃ ἕκαστος;

166. Εἰς ἕνα ἐργοστάσιον ἐργάζονται 10 ἄνδρες, 12 γυναῖκες καὶ 6 παιδιὰ καὶ λαμβάνουν τὴν ἡμέραν ὅλοι μαζὶ 3.300 δραχμάς. Τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου παιδιοῦ εἶναι τὸ ἥμισυ ἀπὸ τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστης γυναικὸς καὶ τὸ τρίτον ἀπὸ τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου ἀνδρός. Πόσον εἶναι τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου ἀνδρός, ἑκάστης γυναικὸς καὶ ἑκάστου παιδιοῦ;

167. 4 βαρέλια, ἴσης χωρητικότητος, περιέχουν ὅλα μαζὶ 1.550 κιλὰ κρασί. Τὸ α' εἶναι γεμᾶτον ὁλόκληρον, τὸ β' μόνον κατὰ τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον κατὰ τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ τὸ δ' κατὰ τὰ $\frac{3}{4}$. Πόσα κιλὰ κρασὶ περιέχει κάθε βαρέλι;

168. Νὰ μοιρασθῇ τὸ ποσὸν τῶν 1.575 δρχ. μεταξὺ 4 προσώπων ἔτσι, ποὺ ὁ β' νὰ λάβῃ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μεριδίου τοῦ α', ὁ γ' τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ μεριδίου τοῦ β' καὶ ὁ δ' τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μεριδίου τοῦ γ'. Πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστον πρόσωπον;

169. Εἰς ἕνα σχολεῖον φοιτοῦν 420 μαθηταί. Τὰ ἀγόρια εἶναι τριπλάσια ἀπὸ τὰ κορίτσια. Πόσα εἶναι τὰ ἀγόρια καὶ πόσα τὰ κορίτσια;

170. Ἕνας πατέρας διέθεσεν εἰς τὰ τρία παιδιά του τὴν ἐκ 390 στρεμμάτων περιουσίαν του ὡς ἑξῆς: ὁ β' νὰ λάβῃ τριπλάσια τοῦ α' καὶ ὁ γ' τριπλάσια τοῦ β'. Πόσα θὰ λάβῃ κάθε παιδί;

171. Εἰς μίαν συναναστροφὴν ἦσαν 80 ἄτομα (ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παιδιά). Οἱ ἄνδρες ἦσαν διπλάσιοι τῶν γυναικῶν καὶ αἱ γυναῖκες τριπλάσιαι τῶν παιδιῶν. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες, πόσαι αἱ γυναῖκες καὶ πόσα τὰ παιδιά;

172. Τρεῖς ἔμποροι ἐκέρδισαν ἀπὸ μίαν ἐργασίαν των 17.900 δρχ. Ἐξ αὐτῶν ὁ α' θὰ λάβῃ 15% περισσοτέρας δρχ. ἀπὸ τὸν β' καὶ ὁ β' θὰ λάβῃ 20 % περισσοτέρας δρχ. ἀπὸ τὸν γ'. Πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος;

173. Ἕνας πατέρας διέταξε διὰ τῆς διαθήκης του νὰ μοιρασθῇ ἡ περιουσία του, ἀνερχομένη εἰς 458.000 δραχμάς, ὡς ἑξῆς: Ὁ υἱός του νὰ λάβῃ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μεριδίου τῆς θυγατρός του καὶ ἡ σύζυγός του τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μεριδίου τοῦ υἱοῦ. Πρὸ τοῦ μερισμοῦ ὅμως πρέπει νὰ εἰσπράξῃ τὸ Δημόσιον 10% διὰ φόρον κληρονομίας. Πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος κληρονόμος;

174. Τρεῖς οἰκογένειαι ἐμοιράσθησαν 4.340 κιλὰ σίτου. Ἡ β' ἔλαβε τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ μεριδίου τῆς α' καὶ ἡ γ' τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν ὅσων ἔλαβον αἱ δύο πρῶται. Πόσα κιλὰ σίτου ἔλαβεν ἑκάστη οἰκογένεια;

175. Νὰ μοιρασθοῦν 3.750 κιλὰ σίτου εἰς τρεῖς οἰκογενείας κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον: ἡ β' οἰκογένεια νὰ λάβῃ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μεριδίου τῆς α' καὶ ἡ γ' τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν ὅσων ἔλαβον αἱ δύο πρῶται. Πόσα κιλὰ θὰ λάβῃ ἑκάστη οἰκογένεια;

## 2. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Ὅλοι ἔχετε ἀκούσει τὰς λέξεις **«Ἑταιρεία», «συνεταιρισμός», «συνεταῖρος»**. Εἰς κάθε Κράτος αἱ περισσότεραι ἀπὸ τὰς ἐπιχειρήσεις (ἐμπορικαί, βιομηχανικαί, ναυτικαὶ κλπ.) εἶναι Ἑταιρεῖαι. Δύο ἢ περισσότεροι κεφαλαιοῦχοι ἑνώνουν τὰ χρήματά των καὶ κάμνουν μαζὶ μίαν ἐπιχείρησιν.

Τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα καταθέτουν, λέγονται **κεφάλαια,** ἡ ἐπιχείρησις αὐτὴ λέγεται **ἑταιρεία** καὶ οἱ ἄνθρωποι, οἱ ὁποῖοι συνεταιρίζονται, λέγονται **συνεταῖροι.**

Οἱ συνεταῖροι εἶναι δυνατὸν νὰ καταθέσουν ὅλοι ἴσα κεφάλαια. Εἶναι δυνατὸν ὅμως νὰ καταθέσουν καὶ διαφορετικὰ κεφάλαια, δηλ. ἄλλος περισσότερα καὶ ἄλλος ὀλιγώτερα.

Τὰ κεφάλαια αὐτὰ μένουν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν ἴσον χρονικὸν διάστημα ἢ καὶ διαφορετικόν· δηλ. ἄλλων συνεταίρων μένουν περισσότερον χρόνον καὶ ἄλλων ὀλιγώτερον χρόνον.

Ἀναλόγως τώρα τῶν κεφαλαίων, τὰ ὁποῖα ἔχει καταθέσει ἕκαστος τῶν συνεταίρων, καὶ ἀναλόγως τοῦ χρόνου, ποὺ μένουν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν τὰ χρήματα ἑκάστου τῶν συνεταίρων, γίνεται καὶ ἡ διανομὴ τοῦ κέρδους ἢ τῆς ζημίας.

Τὰ σχετικὰ μὲ τὰς ἑταιρείας προβλήματα λέγονται **Προβλήματα ἑταιρείας** καὶ λύονται ὅπως τὰ προβλήματα μερισμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα. Διότι καὶ εἰς τὰ προβλήματα ἑταιρείας γίνεται μερισμὸς τοῦ κέρδους ἢ τῆς ζημίας μιᾶς ἐπιχειρήσεως μεταξὺ ἐκείνων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν κάμει τὴν ἐπιχείρησιν.

## α) Προβλήματα μὲ διαφορετικὰ κεφάλαια

**Πρόβλημα.** *Τρεῖς συνεταῖροι κατέθεσαν εἰς μίαν ἐπιχείρησιν τὰ ἑξῆς ποσά : Ὁ α' 40.000 δρχ., ὁ β' 35.000 δρχ. καὶ ὁ γ' 25.000 δρχ. Ἀπὸ τὴν ἐπιχείρησιν αὐτὴν ἐκέρδισαν 30.000 δραχμάς. Πόσον κέρδος θὰ λάβῃ ἕκαστος;*

**Σκέψις.** Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἔχομεν νὰ μοιράσωμεν τὸ κέρδος τῶν 30.000 δραχμῶν εἰς τρεῖς συνεταίρους ἀνάλογα μὲ τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα κατέθεσεν ἕκαστος εἰς τὴν ἐπιχείρησιν. Δηλαδὴ θὰ μερισθῇ τὸ κέρδος τῶν 30.000 δρχ. (μεριστέος ἀριθμός) εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 40.000, 35.000 καὶ 25.000 (κεφάλαια) ἢ πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 40, 35, 25 (μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν ἴσου ἀριθμοῦ μηδενικῶν).

**Λύσις.**

**Δοθέντες**

**Μεριστέος** 30.000

| | | | |
|---|---|---|---|
| α' | 40.000 | ἢ | 40 |
| β' | 35.000 | ἢ | 35 |
| γ' | 25.000 | ἢ | 25 |
| ἄθροισμα | | | 100 |

$$\alpha'.\ 30.000 \times \frac{40}{100} = 12.000 \text{ δρχ.}$$

$$\beta'.\ 30.000 \times \frac{35}{100} = 10.500 \text{ »}$$

$$\gamma'.\ 30.000 \times \frac{25}{100} = 7.500 \text{ »}$$

Σύνολον 30.000 »

**Ἀπάντησις.** Θὰ λάβουν κέρδος ὁ α' 12.000 δρχ., ὁ β' 10.500 δρχ. καὶ ὁ γ' 7.500 δρχ.

176. Τρεῖς συνεταῖροι ἤρχισαν ἐπιχείρησιν καὶ κατέβαλον ὁ α' 100.000 δρχ., ὁ β' 70.000 καὶ ὁ γ' 40.000 δρχ. Ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως αὐτῆς ἐκέρδισαν 84.000 δραχμάς. Πόσον κέρδος ἀναλογεῖ εἰς τὸν καθένα;

177. Τρία χωρία ἠγόρασαν συνεταιρικῶς μίαν ἁλωνιστικὴν μηχανὴν ἀξίας 45.000 δρχ. Πόσον ἀναλογεῖ νὰ πληρώσῃ ἕκαστον χωρίον, ἂν τὰ στρέμματα τοῦ α' χωρίου ἦσαν 3.500, τοῦ β' 3.750 καὶ τοῦ γ' 4.000;

178. Δύο συνεταῖροι κατέθεσαν εἰς μίαν ἐπιχείρησιν 180.000 δρχ. Ἀπὸ τὸ κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως ἔλαβον ὁ α' 25.200 δρχ. καὶ ὁ β' 37.800 δρχ. Πόσα χρήματα εἶχε καταθέσει ἕκαστος εἰς τὴν ἐπιχείρησιν;

179. Τρεῖς συνεταῖροι εἶχον καταθέσει εἰς μίαν ἐπιχείρησιν τὰ ἑξῆς ποσά: ὁ α' 120.000 δρχ., ὁ β' τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ποσοῦ τοῦ α' καὶ ὁ γ' τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ποσοῦ τοῦ β'. Μετά τινα χρόνον διελύθη ἡ ἐπιχείρησις μὲ ζημίαν 65.000 δρχ. Πόση ζημία ἀναλογεῖ εἰς τὸν καθένα;

## β) Προβλήματα μὲ διαφορετικοὺς χρόνους

**Πρόβλημα.** *Ἕνας ἔμπορος ἤρχισε μίαν ἐπιχείρησιν μὲ ἕνα χρηματικὸν ποσόν. Μετὰ 8 μῆνας προσέλαβε συνεταῖρον, ὁ ὁποῖος κατέθεσε τὸ ἴδιον ποσόν· 5 μῆνας ἀργότερον ἀπὸ τὸν δεύτερον προσέλαβε καὶ ἄλλον συνεταῖρον, ὁ ὁποῖος κατέθεσε τὸ ἴδιον πάλιν ποσόν. Δύο ἔτη ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς ἐπιχειρήσεως εὗρον ὅτι ἐκέρδισαν 102.000 δραχμάς. Πόσον κέρδος ἀναλογεῖ εἰς ἕκαστον ἔμπορον;*

**Σκέψις.** Ἐπειδὴ καὶ οἱ τρεῖς συνεταῖροι κατέθεσαν τὸ ἴδιον ποσόν, τὸ κέρδος θὰ μοιρασθῇ ἀνάλογα πρὸς τοὺς χρόνους, κατὰ τοὺς ὁποίους ἔμειναν τὰ χρήματα ἑκάστου εἰς τὴν ἐπιχείρησιν. Ἐδῶ ὅμως οἱ χρόνοι δὲν ὁρίζονται σαφῶς καὶ πρέπει νὰ εὑρεθοῦν. Ἐφ' ὅσον ὁ ἰσολογισμὸς ἔγινε 2 ἔτη ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς ἐπιχειρήσεως, τὰ χρήματα τοῦ α΄ ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 2 ἔτη ἢ 24 μῆνας· τοῦ β΄ ἔμειναν $24 - 8 = 16$ μῆνας, καὶ τοῦ γ΄ $16 - 5 = 11$ μῆνας.

Ἑπομένως ὁ μερισμὸς θὰ γίνῃ ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 24, 16, 11.

**Λύσις.**

**Δοθέντες**

**Μεριστέος** 102.000 $\left\{ \begin{array}{ll} α' & 24 \\ β' & 16 \\ γ' & \underline{11} \end{array} \right.$

ἄθροισμα 51

$$α' \quad 102.000 \times \frac{24}{51} = 48.000 \text{ δρχ.}$$

$$β' \quad 102.000 \times \frac{16}{51} = 32.000 \text{ »}$$

$$γ' \quad 102.000 \times \frac{11}{51} = 22.000 \text{ »}$$

Σ ύ ν ο λ ο ν 102.000 »

**Ἀπάντησις.** Ἀναλογεῖ κέρδος εἰς τὸν α΄ 48.000 δρχ., εἰς τὸν β΄ 32.000 δρχ. καὶ εἰς τὸν γ΄ 22.000 δρχ.

180. Δύο συνεταῖροι ἐζημιώθησαν ἀπὸ μίαν ἐπιχείρησιν 14.700 δρχ. Καὶ οἱ δύο εἶχον καταθέσει τὸ αὐτὸ χρηματικὸν ποσόν· ἀλλὰ τὰ χρήματα τοῦ α΄ ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 12 μῆνας καὶ τοῦ β΄ 9 μῆνας. Πόση ζημία ἀναλογεῖ εἰς τὸν καθένα;

181. Τρεῖς συνεταῖροι ἐκέρδισαν ἀπὸ ἐπιχείρησιν 135.000 δρχ. Καὶ οἱ τρεῖς εἶχον καταθέσει τὸ αὐτὸ χρηματικὸν ποσόν· ἀλλὰ τοῦ πρώτου τὰ χρήματα ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν ἐπὶ ἓν ἔτος, τοῦ δευτέρου 10 μῆνας καὶ τοῦ τρίτου 2 μῆνας ὀλιγώτερον τοῦ δευτέρου. Πόσον κέρδος ἀναλογεῖ εἰς τὸν καθένα;

182. Ἕνας ἐπιχειρηματίας ἤρχισεν ἐπιχείρησιν· μετὰ 3 μῆνας προσέλαβε συνεταῖρον, ὁ ὁποῖος κατέθεσε τὸ αὐτὸ χρηματικὸν ποσόν· ἕνα μῆνα μετὰ τὴν πρόσληψιν αὐτοῦ προσέλαβε καὶ τρίτον μὲ τὸ αὐτὸ ποσόν. Ἓν ἔτος ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς ἐπιχειρήσεως ἐλογαριάσθησαν καὶ εὗρον ὅτι εἶχον κέρδος 116.000 δρχ. Πόσον κέρδος ἀναλογεῖ εἰς τὸν καθένα;

183. Ἕνας ἔμπορος ἤρχισεν ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν. Μετὰ 10 μῆνας προσέλαβε συνεταῖρον, ὅστις κατέθεσε τὸ αὐτὸ χρηματικὸν ποσόν· 2 μῆνας βραδύτερον προσέλαβε καὶ ἄλλον συνεταῖρον, ὁ ὁποῖος κατέθεσε τὰ ἴδια χρήματα. Ἕνα ἔτος μετὰ τὴν πρόσληψιν τοῦ τρίτου συνεταίρου ἐλογαριάσθησαν καὶ εὗρον, ὅτι ἐκέρδισαν 100.000 δραχμάς. Πόσον κέρδος ἀναλογεῖ εἰς τὸν καθένα;

## γ) Προβλήματα μὲ διαφορετικὰ κεφάλαια καὶ διαφορετικοὺς χρόνους

**Πρόβλημα.** *Τρεῖς συνεταῖροι ἐκέρδισαν ἀπὸ μίαν ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν 54.000 δρχ. Ὁ πρῶτος εἶχε καταθέσει 30.000 δρχ., ὁ δεύτερος 50.000 δρχ. καὶ ὁ γ' 40.000 δραχμάς. Ἀλλὰ τὰ χρήματα τοῦ πρώτου ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 10 μῆνας, τοῦ δευτέρου 8 μῆνας καὶ τοῦ τρίτου 5 μῆνας. Πόσον κέρδος θὰ λάβῃ ἕκαστος;*

**Σκέψις.** Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἔχομεν διαφορετικὰς καταθέσεις (κεφάλαια) καὶ διαφορετικοὺς χρόνους. Δυνάμεθα ὅμως νὰ κάμωμεν ἀναγωγὴν τῶν κεφαλαίων εἰς τὸ χρονικὸν διάστημα τοῦ ἑνὸς μηνός, ὁπότε αἱ 30.000 τοῦ α' διὰ 10 μῆνας ἰσοδυναμοῦν πρὸς $30.000 \times 10 = 300.000$ δι' ἕνα μῆνα κ.ο.κ. Ἑπομένως τὸ κέρδος πρέπει νὰ μερισθῇ ἀνάλογα μὲ τὰ γινόμενα τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸν χρόνον ἑκάστου συνεταίρου.

**Λύσις.** **Δοθέντες**

**Μεριστέος** 54.000

$$\left\{\begin{array}{lrcl} \alpha'. & 30.000 \times 10 & \text{ἢ} & 3 \times 10 = 30 \\ \beta'. & 50.000 \times 8 & \text{ἢ} & 5 \times 8 = 40 \\ \gamma'. & 40.000 \times 5 & \text{ἢ} & 4 \times 5 = \underline{20} \end{array}\right.$$

ἄθροισμα 90

$$\alpha' \quad 54.000 \times \frac{30}{90} = 18.000$$

$$\beta' \quad 54.000 \times \frac{40}{90} = 24.000$$

$$\gamma' \quad 54.000 \times \frac{20}{90} = 12.000$$

$$\overline{54.000}$$

**Ἀπάντησις.** Θὰ λάβουν κέρδος ὁ α' 18.000 δρχ., ὁ β' 24.000 καὶ ὁ γ' 12.000 δρχ.

184. Τρεῖς συνεταῖροι ἐκέρδισαν ἀπὸ μίαν ἐπιχείρησιν 44.517 δρχ. Ὁ α' εἶχε καταθέσει 14.000 δρχ., ὁ β' 17.500 δρχ. καὶ ὁ γ' 20.000 δρχ. Τὰ χρήματα τοῦ α' ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 18 μῆνας, τοῦ β' 15 μῆνας καὶ τοῦ γ' 8 μῆνας. Πόσον κέρδος ἀναλογεῖ εἰς τὸν καθένα;

185. Ἕνας ἔμπορος ἤρχισεν ἐπιχείρησιν μὲ κεφάλαιον 40.000 δρχ. Μετὰ 2 μῆνας προσέλαβε συνεταῖρον, ὅστις κατέθεσε 50.000 δρχ., καὶ μετὰ 2 μῆνας ἀπὸ τὴ πρόσληψιν τούτου προσέλαβε καὶ τρίτον συνεταῖρον μὲ κεφάλαιον 60.000 δραχμῶν. Μετὰ 7 μῆνας ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς ἐπιχειρήσεως εὗρον ὅτι ἐκέρδισαν 49.700 δραχμάς. Πόσον κέρδος θὰ λάβῃ ἕκαστος;

186. Ἔμπορος ἤρχισεν ἐπιχείρησιν μὲ κεφάλαιον 60.000 δρχ. Μετὰ 3 μῆνας προσλαμβάνει συνεταῖρον, ὅστις καταθέτει τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ποσοῦ τοῦ πρώτου· 2 μῆνας βραδύτερον προσλαμβάνει καὶ τρίτον συνεταῖρον, ὅστις καταθέτει 30.000 δρχ. περισσοτέρας τοῦ δευτέρου. Ἓν ἔτος ἀπὸ τῆς προσλήψεως τοῦ τρίτου συνεταίρου ἐλογαριάσθησαν καὶ εὗρον ὅτι εἶχον κέρδος 96.800 δραχμάς. Πόσον κέρδος ἀναλογεῖ εἰς τὸν καθένα;

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΙΣ

Εἰς τὰ προβλήματα Ἑταιρείας διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις :

α' περίπτωσις : Ὅταν διαφέρουν τὰ κεφάλαια τῶν συνεταίρων καὶ οἱ χρόνοι εἶναι ἴδιοι.

β' περίπτωσις : Ὅταν οἱ χρόνοι, ποὺ μένουν τὰ χρήματα ἑκάστου συνεταίρου εἰς τὴν ἐπιχείρησιν, εἶναι διάφοροι καὶ τὰ κεφάλαια εἶναι ἴδια.

γ' περίπτωσις : Ὅταν καὶ τὰ κεφάλαια εἶναι διάφορα καὶ οἱ χρόνοι εἶναι διάφοροι.

## Διὰ νὰ λύσωμεν τὰ προβλήματα τῆς Ἑταιρείας

α) Ὅταν τὰ κεφάλαια εἶναι διαφορετικὰ καὶ οἱ χρόνοι ἴδιοι, πολλαπλασιάζομεν τὸν μεριστέον ἀριθμὸν (κέρδος ἢ ζημίαν) ἐπὶ τὸ κεφάλαιον ἑκάστου τῶν συνεταίρων καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν κεφαλαίων.

β) Ὅταν οἱ χρόνοι διαφέρουν καὶ τὰ κεφάλαια εἶναι ἴδια, πολλαπλασιάζομεν τὸν μεριστέον ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν χρόνον παραμονῆς ἑκάστου κεφαλαίου εἰς τὴν ἐπιχείρησιν καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν χρόνων.

γ) Ὅταν καὶ τὰ κεφάλαια διαφέρουν καὶ οἱ χρόνοι παραμονῆς των εἰς τὴν ἐπιχείρησιν εἶναι διάφοροι, πολλαπλασιάζομεν τὸ κεφάλαιον ἑκάστου τῶν συνεταίρων ἐπὶ τὸν χρόνον παραμονῆς τῶν χρημάτων ἑκάστου εἰς τὴν ἐπιχείρησιν καὶ εὑρίσκομεν δι' ἕκαστον νέον ἀριθμόν. Αὐτοὶ εἶναι πλέον οἱ δοθέντες ἀριθμοί. Ὁπότε πολλαπλασιάζομεν τὸν μεριστέον ἐπὶ ἕκαστον τούτων καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δοθέντων.

## ΓΕΝΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

187. Τέσσαρες χωρικοὶ ἠγόρασαν ἀπὸ κοινοῦ ἕνα κτῆμα· ὁ α' ἠγόρασε 10 στρέμματα, ὁ β' 8 στρέμματα, ὁ γ' 7 στρέμματα καὶ ὁ δ' 5 στρέμματα. Τὸ ἐκαλλιέργησαν συνεταιρικῶς καὶ ἔλαβον 7.500 κιλὰ σίτου. Πόσα κιλὰ ἀναλογοῦν εἰς τὸν καθένα καὶ πόσα χρήματα, ἂν πωλήσουν πρὸς 3 δρχ. τὸ κιλόν;

188. Τρεῖς συνεταῖροι ἐκέρδισαν ἐκ τοῦ ἐμπορίου των 60.000 δρχ. Ὁ α' εἶχε καταθέσει τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ ὁλικοῦ κεφαλαίου των· ὁ β' τὸ τρίτον αὐτοῦ (τοῦ ὁλικοῦ κεφαλαίου) καὶ ὁ γ' τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ἦτο 70.000 δρχ. Πόσον εἶχε καταθέσει ἕκαστος καὶ πόσον κέρδος ἔλαβεν;

189. Ἕνα κτῆμα τὸ ἔσκαψαν ἀπὸ κοινοῦ εἰς 6 ἡμέρας 7 ἄνδρες καὶ 5 γυναῖκες καὶ ἔλαβον 7.980 δρχ. Ἕκαστος τῶν ἀνδρῶν ἐλάμβανε διπλάσιον ἡμερομίσθιον ἑκάστης γυναικός. Πόσον ἦτο τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου ἀνδρὸς καὶ πόσον ἑκάστης γυναικός;

190. Τρεῖς ἔμποροι συνειργάσθησαν εἰς ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν ὁ α' μὲ 150.000 δρχ., ὁ β' μὲ 200.000 δρχ. καὶ ὁ γ' μὲ 250.000 δρχ. Ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως προέκυψε κέρδος ἴσον πρὸς τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ συνολικοῦ κεφαλαίου. Πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος τῶν συνεταίρων;

191. Δύο ἀδελφοὶ ἠγόρασαν οἰκόπεδον ἀντὶ 100.000 δραχμῶν. Ὁ μεγαλύτερος ἀδελφὸς ἐπλήρωσε τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς ἀξίας καὶ ὁ μικρότερος τὸ ὑπόλοιπον. Μετά τινα χρόνον μετεπώλησαν τὸ οἰκόπεδον ἀντὶ 160.000 δρχ. Πόσον κέρδος ἀναλογεῖ εἰς τὸν καθένα;

192. Δύο ἀδελφοὶ ἤρχισαν ἐμπορικὴν ἐργασίαν καὶ κατέβαλον ὁ α' 20.000 δρχ. καὶ ὁ β' τὰ διπλάσια τούτου. Μετὰ 6 μῆνας προσέλαβον καὶ γ' συνεταῖρον, ὅστις κατέβαλε 50.000 δρχ. Μετὰ παρέλευσιν $1\frac{1}{2}$ ἔτους ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς ἐπιχειρήσεως εἶχον κέρδος 98.000 δραχμάς. Πόσον κέρδος θὰ λάβῃ ἕκαστος συνεταῖρος;

193. Τρεῖς συνεταῖροι ἀπὸ τὸ κέρδος ἐμπορικῆς ἐργασίας ἔλαβον ὁ α' 22.500 δρχ., ὁ β' 13.500 δρχ. καὶ ὁ γ' τὸ ὑπόλοιπον, ποὺ ἦτο τὸ $\frac{1}{7}$ τοῦ ὁλικοῦ κέρδους. Ποῖον κεφάλαιον κατέθεσεν ὁ α' καὶ ποῖον ὁ β', ὅταν γνωρίζωμεν ὅτι ὁ γ' εἶχε καταθέσει 28.500 δραχμάς;

## 3. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΣΟΥ ΟΡΟΥ

Οἱ μαθηταί, ὅταν λάβουν τὸν ἔλεγχόν των μὲ τοὺς βαθμούς των ἀναλυτικῶς εἰς ἕκαστον μάθημα, τοὺς προσθέτουν καὶ κατόπιν διαιροῦν τὸ ἄθροισμά των διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μαθημάτων. Τὸ πηλίκον, ποὺ εὑρίσκουν, λέγεται **μέσος ὅρος.**

**Πρόβλημα.** *Ἕνας μαθητὴς ἔλαβε τοὺς ἑξῆς βαθμούς : Θρησκευτικὰ 10, Ἑλληνικὰ 9, Μαθηματικὰ 10, Ἱστορία 9, Φυσ. Ἱστορία 9, Φυσικὴ καὶ Χημεία 9, Γεωγραφία 9, Ἰχνογραφία 8, Καλλιγραφία 8, Χειροτεχνία 8, Ὠδικὴ 9 καὶ Γυμναστικὴ 10. Ποῖος εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῆς βαθμολογίας του;*

**Λύσις.** $10+9+10+9+9+9+9+8+8+8+9+10=108.$

Τὸ ἄθροισμα αὐτὸ τῶν μαθημάτων τὸ διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μαθημάτων, δηλ. διὰ 12, καὶ ἔχομεν : $108 : 12 = 9.$

**Ἀπάντησις.** Ὁ μέσος ὅρος τῆς βαθμολογίας εἶναι 9.

**Παρατήρησις.** Μὲ τὸν μέσον ὅρον ὡς κοινὸν βαθμὸν εἰς ὅλα τὰ μαθήματα συγκεντρώνουν τὸ ἴδιον ἄθροισμα βαθμολογίας.

| |
|---|
| **Ὥστε :** *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μέσον ὅρον δύο ἢ περισσοτέρων ὁμοειδῶν ἀριθμῶν, προσθέτομεν αὐτοὺς καὶ διαιροῦμεν τὸ ἄθροισμά των διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος φανερώνει τὸ πλῆθος αὐτῶν.* |

194. Ἕνας μικροπωλητὴς ἐκέρδισεν ἀπὸ τὴν ἐργασίαν του τὰ ἑξῆς ποσά : Τὴν Δευτέραν 145 δρχ., τὴν Τρίτην 128 δρχ., τὴν Τετάρτην 117 δρχ., τὴν Πέμπτην 135 δρχ., τὴν Παρασκευὴν 150 δρχ. καὶ τὸ Σάββατον 165 δραχμάς. Πόσον ἐκέρδισε τὴν ἡμέραν κατὰ μέσον ὅρον;

195. Ἕνας οἰκογενειάρχης ἐξώδευσεν εἰς μίαν ἑβδομάδα τὰ ἑξῆς ποσά : Δευτέραν 128 δρχ., Τρίτην 145 δρχ., Τετάρτην 117 δρχ., Πέμπτην 125 δρχ., Παρασκευὴν 132 δρχ., Σάββατον 123 δρχ. καὶ Κυριακὴν 140 δραχμάς. Πόσας δρχ. ἐξώδευσε κατὰ μέσον ὅρον τὴν ἡμέραν;

196. Ἕνας κτηματίας ἐργάζεται εἰς τὰ κτήματά του κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ ἔτους ὡς ἑξῆς : 120 ἡμέρας ἐπὶ 9 ὥρας τὴν ἡμέραν, 135 ἡμέρας ἐπὶ 8 ὥρας τὴν ἡμέραν καὶ 45 ἡμέρας ἐπὶ 12 ὥρας τὴν ἡμέραν. Πόσας ὥρας ἐργάζεται κατὰ μέσον ὅρον τὴν ἡμέραν;

197. Εἰς μίαν πόλιν ἡ μέση θερμοκρασία ἦτο : τὴν ἄνοιξιν $15{,}2^{o}$ Κελσίου, τὸ θέρος $26{,}7^{o}$, τὸ φθινόπωρο $14{,}9^{o}$ καὶ τὸν χειμῶνα $6{,}4^{o}$. Ποία ἦτο ἡ μέση θερμοκρασία εἰς τὴν πόλιν αὐτὴν καθ' ὅλον τὸ ἔτος;

Νὰ εὕρετε τὸν μέσον ὅρον τῆς βαθμολογίας σας τῶν δύο πρώτων διμήνων.

## 4. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΙΞΕΩΣ

Οἱ ἔμποροι, κυρίως τροφίμων, ἀναμειγνύουν διαφόρους ποιότητας ὁμοειδῶν πραγμάτων· π.χ. λάδι α' ποιότητος καὶ λάδι β' ποιότητος, καφέ, ρύζι κλπ. Ἢ ἀναμειγνύουν καὶ μὴ ὁμοειδῆ πράγματα· λ.χ. βούτυρον καὶ λίπος, κρασὶ καὶ νερό, οἰνόπνευμα καὶ νερὸ κλπ.

Τοῦτο τὸ κάμνουν, διότι δὲν δύνανται νὰ πωλήσουν χωριστὰ τὰ εἴδη αὐτά, εἴτε διότι εἶναι πολὺ ἀκριβὰ ὡρισμένα τούτων εἴτε διότι ἄλλα εἶναι κατωτέρας ποιότητος. Διὰ τῆς ἀναμείξεως σχηματίζουν ἕνα μεῖγμα μετρίας ποιότητος, τὸ ὁποῖον τὸ πωλοῦν εὐκολώτερα λόγῳ τῆς μετρίας ἀξίας του.

## α) Προβλήματα μείξεως πρώτου εἴδους

**Πρόβλημα 1.** *Ἕνας παντοπώλης ἀναμειγνύει 40 κιλὰ βούτυρον τῶν 50 δρχ. τὸ κιλὸν καὶ 100 κιλὰ λίπος τῶν 22 δρχ. τὸ κιλόν. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὸ κιλὸν τοῦ μείγματος;*

**Σκέψις.** Ἂν ὁ παντοπώλης ἐπώλει χωριστὰ τὸ βούτυρον καὶ χωριστὰ τὸ λίπος, θὰ ἐλάμβανεν ἀπὸ τὸ βούτυρον 40 κιλὰ × 50 δρχ. = 2.000 δρχ. καὶ ἀπὸ τὸ λίπος 100 κιλὰ × 22 δρχ. = 2.200 δρχ. Καὶ ἀπὸ τὰ δυὸ εἴδη θὰ ἐλάμβανε : 2.000 + 2.200 = 4.200 δρχ.

Τὰ ἴδια χρήματα ὅμως πρέπει νὰ λάβῃ καὶ ἀπὸ τὸ μεῖγμα, δηλ. ἀπὸ τὰ 140 κιλά. Ὁπότε, ἀφοῦ τὰ 140 κιλὰ τοῦ μείγματος θὰ κοστίζουν 4.200 δρχ., τὸ ἕνα κιλὸν θὰ κοστίζῃ 140 φορὰς ὀλιγώτερον· δηλ. 4.200 : 140 = 30 δρχ.

**Λύσις.**

| | | |
|---|---|---|
| α) βούτυρον | 40 κ. × 50 δρχ. | = 2.000 δρχ. |
| β) λίπος | 100 κ. × 22 » | = 2.200 » |
| Σύν. μείγματος | 140 κ. τιμῶνται | 4.200 δρχ. |
| τὸ | 1 κ. τιμᾶται 4.200 : 140 | = 30 δρχ. |

**Ἀπάντησις.** Πρέπει νὰ πωλῇ τὸ κιλὸν τοῦ μείγματος πρὸς 30 δρχ.

**Παρατήρησις.** Προβλήματα α' εἴδους μείξεως ἔχομεν, ὅταν δίδωνται αἱ πρὸς ἀνάμειξιν ποσότητες καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἑκάστης αὐτῶν καὶ ζητῆται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μείγματος. Καί :

*Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῆς μονάδος τοῦ μείγματος, εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν ἀξίαν τῆς ποιότητος ἑκάστου εἴδους χωριστά. Προσθέτομεν κατόπιν τὰ γινόμενα καὶ τὸ ἄθροισμα τῆς ἀξίας τὸ διαιροῦμεν διὰ τοῦ πλήθους τῶν μονάδων τοῦ μείγματος.*

**Πρόβλημα 2.** *Ἕνας ἀνέμειξε 250 κιλὰ λάδι τῶν 28 δρχ. τὸ κιλὸν μὲ 150 κιλὰ λάδι κατωτέρας ποιότητος καὶ ἐσχημάτισε μεῖγμα, τὸ ὁποῖον κοστίζει 26,50 δρχ. τὸ κιλόν. Πόσον ἐκόστιζε τὸ κιλὸν τὸ λάδι τῆς κατωτέρας ποιότητος;*

**Σκέψις.** Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ δὲν γνωρίζομεν πόσον κοστίζει τὸ κιλὸν τὸ λάδι τῆς κατωτέρας ποιότητος, γνωρίζομεν ὅμως πόσον κοστίζει τὸ κιλὸν τοῦ μείγματος.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα αὐτό, α) θὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν τῆς ποσότητος τῶν 250 κιλῶν, β) θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν κιλῶν τοῦ μείγματος ἐπὶ τὴν τιμὴν τοῦ ἑνὸς κιλοῦ αὐτοῦ, γ) ἀπὸ τὸ γινόμενον θὰ ἀφαιρέσωμεν τὴν ἀξίαν τῶν κιλῶν τῆς ἀνωτέρας ποιότητος καὶ δ) τὸ ὑπόλοιπον θὰ τὸ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κιλῶν τῆς κατωτέρας ποιότητος.

**Λύσις.**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| α) | 250 κιλ. | × | 28 δρχ. | = | 7.000 δρχ. |
| β) | 150 » | × | ; » | = | ; » |
| | 400 » | × | 26,5 » | = | 10.600 » |
| | 10.600 » | − | 7.000 » | = | 3.600 » |
| | 3.600 » | : | 150 » | = | 24 » |

**Ἀπάντησις.** 24 δρχ. κοστίζει τὸ κιλὸν τὸ λάδι τῆς κατωτέρας ποιότητος.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

198. Ἕνας ἀνέμειξε 240 κιλὰ κρασὶ τῶν 15 δρχ. τὸ κιλὸν μὲ 160 κ. τῶν 12 δραχμῶν τὸ κιλόν. Ποία θὰ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ κιλοῦ τοῦ μείγματος;

199. Ἕνας παντοπώλης ἀνέμειξε 175 κ. λάδι τῶν 50 δρχ. τὸ κιλὸν μὲ 225 κ. τῶν 26 δρχ. τὸ κιλόν. Πόσον κοστίζει τὸ κιλὸν τοῦ μείγματος καὶ πόσον κερδίζει εἰς τὸ κιλόν, ἂν τὸ πωλῇ πρὸς 48 δραχμάς;

200. Ἀνέμειξε κάποιος 350 κιλὰ λίπος τῶν 25 δρχ. τὸ κιλὸν μὲ 150 κιλὰ τῶν 30 δρχ. τὸ κ. Πόσον κοστίζει τὸ κιλὸν τοῦ μείγματος καὶ πόσον πρέπει νὰ τὸ πωλῇ, διὰ νὰ κερδίσῃ 1.250 δρχ. ἀπὸ ὅλον τὸ ποσὸν αὐτοῦ;

201. Ἕνας ἀνέμειξε 300 κιλὰ λίπος τῶν 26 δρχ. τὸ κ. μὲ 200 κιλὰ ἀνωτέρας ποιότητος καὶ ἐσχημάτισε μεῖγμα, τὸ ὁποῖον κοστίζει 28,40 δρχ. τὸ κιλόν. Πόσον ἐκόστιζε τὸ κιλὸν τὸ λίπος τῆς ἀνωτέρας ποιότητος;

202. Ἕνας ἔμπορος ἔχει δύο βαρέλια κρασί· τὸ ἕνα χωρεῖ 1.000 κ. τῶν 15 δρχ. τὸ κιλὸν καὶ τὸ ἄλλο 800 κιλὰ τῶν 10 δρχ. τὸ κιλόν. Ἀνέμειξε τὸ κρασὶ καὶ μὲ 200 κιλὰ νερό (μηδὲν ἡ ἀξία τοῦ νεροῦ). Πόσον κοστίζει τὸ κιλὸν τοῦ μείγματος καὶ πόσον τοῖς ἑκατὸν (%) κερδίζει, ἂν τὸ πωλῇ 13,80 δρχ. τὸ κιλόν;

203. Ἕνας ἔχει λάδι τῶν 40 δρχ. τὸ κιλὸν καὶ σπορέλαιον τῶν 30 δρχ. τὸ κιλὸν καὶ τῶν 20 δρχ. τὸ κιλὸν καὶ τὰ ἀναμειγνύει κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον: Λαμβάνει ἀπὸ τὸ λάδι ποσότητα τριπλασίαν ἀπὸ τὴν ποσότητα τοῦ σπορελαίου τῶν 30 δρχ., καὶ ἀπὸ τὸ σπορέλαιον τῶν 20 δρχ. ποσότητα διπλασίαν ἀπὸ τὸ λάδι. Πόσον κοστίζει τὸ κιλὸν τοῦ μείγματος;

204. Ἔμπορος ἠγόρασε καὶ ἀνέμειξεν 600 κιλὰ φασόλια Καστοριᾶς τῶν 36 δρχ. τὸ κιλὸν καὶ 300 κιλὰ τῶν 28 δρχ. τὸ κιλόν. Ἐξώδευσε διὰ μεταφορικὰ 5% ἐπὶ τῆς ἀξίας των. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ κιλὸν τοῦ μείγματος, διὰ νὰ κερδίσῃ ἀπὸ ὅλον τὸ μεῖγμα 2.700 δραχμάς;

205. Ἕνας ἀνέμειξε 600 κιλὰ οἰνοπνεύματος 80° μὲ 500 κιλὰ 60° καὶ μὲ 100 κιλὰ νερό. Ποῖος θὰ εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ μείγματος;

## β) Προβλήματα μείξεως δευτέρου εἴδους

**Πρόβλημα 1.** *Ἔμπορος ἀνέμειξε λάδι τῶν 32 δρχ. τὸ κιλὸν μὲ ἄλλο λάδι τῶν 29 δρχ. τὸ κιλὸν καὶ ἔκαμε μεῖγμα 300 κιλῶν ἀξίας 30 δρχ. τὸ κιλόν. Πόσα κιλὰ ἔλαβεν ἀπὸ κάθε ποιότητα;*

**Σκέψις.** Διὰ νὰ γίνῃ τὸ μεῖγμα, πρέπει νὰ λάβωμεν λάδι καὶ ἀπὸ τὰς δύο ποιότητας. Ἂν ἀναμείξωμεν 1 κιλὸν ἀπὸ τὴν α' ποιότητα καὶ 1 κιλὸν ἀπὸ τὴν β' ποιότητα, εἰς τὸ κιλὸν τοῦ μείγματος, ποὺ θὰ πωλῇ πρὸς 30 δρχ., θὰ ἔχῃ ζημίαν 2 δρχ. εἰς τὴν α' ποιότητα καὶ κέρδος 1 δρχ. εἰς τὴν β' ποιότητα. Ἄρα εἰς τὰ 2 κιλὰ μεῖγμα, ποὺ θὰ πωλῇ, θὰ ἔχῃ μίαν δρχ. ζημίαν.

Ἐννοοῦμεν συνεπῶς ὅτι, διὰ νὰ μὴ ἔχῃ οὔτε ζημίαν οὔτε κέρδος, πρέπει νὰ ἀναμείξῃ 1 κιλὸν ἀπὸ τὴν α' ποιότητα καὶ 2 κιλὰ ἀπὸ τὴν β' ποιότητα.

Κατ' αὐτὴν τὴν ἀναλογίαν πρέπει νὰ γίνῃ ἡ ἀνάμειξις· δηλ. ὅσας φορὰς θὰ λαμβάνῃ 1 κιλὸν ἀπὸ τὴν α' ποιότητα, τόσας φορὰς θὰ πρέπῃ νὰ λαμβάνῃ 2 κιλὰ ἀπὸ τὴν β' ποιότητα.

Ἑπομένως, διὰ νὰ εὕρωμεν πόσα κιλὰ πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ κάθε ποιότητα, διὰ νὰ σχηματίσῃ μεῖγμα 300 κιλῶν, πρέπει νὰ μερίσωμεν τὰ 300 κιλὰ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 2. Ἤτοι :

$$\textbf{Μεριστέος}\ 300 \quad \overset{\textbf{Δοθέντες}}{\left\{ \begin{array}{l} α)\ 1 \\ β)\ \underline{2} \end{array} \right.}$$

$$\textbf{ἄθροισμα} \quad 3$$

$$α)\ 300 \times \frac{1}{3} = 100 \text{ κιλά},\quad β)\ 300 \times \frac{2}{3} = 200 \text{ κιλά}.$$

**Ὥστε :** Ἔλαβεν 100 κιλὰ ἀπὸ τὴν α' ποιότητα καὶ 200 κ. ἀπὸ τὴν β'.

Συνήθως ὅμως διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τοῦ δευτέρου εἴδους **μείξεως**[1] χρησιμοποιεῖται ἡ ἑξῆς **κατάταξις :**

$$\begin{array}{llcccl} & \textbf{Ἀξία} & & & & \textbf{Διαφ., Ἀναλ. μείξ.} \\ 300 \text{ κιλὰ μεῖγμα} & \left\{ \begin{array}{l} α'\ 32 \text{ δρχ.} \\ β'\ 29 \text{ δρχ.} \end{array} \right. & > & 30 & < & \begin{array}{l} 1 \rightarrow 1 \text{ κιλὸν α'}. \\ 2 \rightarrow \underline{2} \text{ κιλὰ β'}. \\ \quad\ \ 3 \quad » \end{array} \end{array}$$

**Σημείωσις.** Ὅπως βλέπομεν, σχηματίζομεν ἕνα πίνακα, εἰς τὸν ὁποῖον γράφομεν τὰς τιμὰς τῶν μονάδων τῶν εἰδῶν, τὰ ὁποῖα ἀναμειγνύομεν (32 δρχ. καὶ 29 δρχ.), τὴν μίαν κάτω ἀπὸ τὴν ἄλλην· μεταξὺ τῶν τιμῶν αὐτῶν καὶ ὀλίγον δεξιὰ γράφομεν τὴν τιμὴν τῆς μονάδος τοῦ μείγματος (30 δρχ.). Εὑρίσκομεν κατόπιν τὰς διαφορὰς $32 - 30 = 2$ καὶ $30 - 29 = 1$, τὰς ὁποίας γράφομεν εἰς τὸ ἄκρον τῶν διαγωνίων (δηλ. τοῦ $\times$) καὶ τὰς προσθέτομεν. Κατόπιν κάμνο-

1. Προβλήματα β' εἴδους μείξεως ἔχομεν, ὅταν δίδεται ἡ τιμὴ ἑκάστης ποιότητος καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μείγματος καὶ ζητοῦνται αἱ ποσότητες.

μεν τὸν μερισμὸν μερίζοντες τὸν μεριστέον (τὸ 300 κ.) ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 1 καὶ 2, ποὺ εὕρομεν ὡς διαφοράς.

**Λύσις.** α′ $\frac{300 \times 1}{3} = 100$ κιλὰ

β′ $\frac{300 \times 2}{3} = 200$ κιλὰ

Σύνολον 300 »

**Ἀπάντησις.** Ἔλαβεν 100 κιλὰ ἀπὸ τὴν α′ ποιότητα καὶ 200 κιλ. ἀπὸ τὴν β′.

> *Διὰ νὰ λύσωμεν τὰ προβλήματα τοῦ β′ εἴδους μείξεως, εὑρίσκομεν τὰς διαφοράς (ὡς εἰς τὸν ἀνωτέρω πίνακα) καὶ μερίζομεν τὸ βάρος τοῦ μείγματος ἀναλόγως αὐτῶν.*

**Πρόβλημα 2.** *Ἕνας παντοπώλης ἔχει δύο εἴδη βουτύρου. Τοῦ ἑνὸς εἴδους τὸ κιλὸν κοστίζει 55 δρχ. καὶ τοῦ ἄλλου 42 δρχ. Προκειμένου νὰ σχηματίσῃ μεῖγμα, τὸ ὁποῖον κοστίζει 46 δρχ. τὸ κιλόν, πόσα κιλὰ θὰ λάβῃ ἀπὸ τὸ β′ εἶδος, ἂν ἀπὸ τὸ α′ εἶδος ἔλαβεν 20 κιλά;*

**Σκέψις.** Καὶ τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι πρόβλημα β′ εἴδους μείξεως.

**Κατάταξις :**

| Ἀξία | | Διάφ., Ἀναλ. μείξ. |
|---|---|---|
| α′ 55 δρχ. | > 46 < | 4 → 4 κ. α′ |
| β′ 42 δρχ. | | 9 → 9 κ. β′ |

**Λύσις :**

Ὅταν ἀπὸ τὸ α′ λαμβάνῃ 4 κ. ἀπὸ τὸ β′ λαμβάνει 9 κ.
» » » α′ » 20 » » » β′ » Χ κ.

$$X = 9 \times \frac{20}{4} = 5 \text{ κιλά.}$$

**Παρατήρησις :** Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτό, ἀφοῦ ηὕραμεν τὴν ἀναλογίαν μείξεως, ἐκάμαμεν ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν καὶ ὄχι μερισμόν, διότι δὲν ἔχομεν μεριστέον ἀριθμόν.

Προβλήματα

206. Ἕνας ἀνέμειξε λίπος τῶν 32 δρχ. τὸ κιλὸν καὶ τῶν 20 δρχ. τὸ κιλὸν καὶ ἔκαμε μεῖγμα 240 κιλῶν, τὸ ὁποῖον πωλεῖ 28 δρχ. τὸ κιλόν. Πόσον ἔλαβεν ἀπὸ κάθε ποιότητα;

207. Πόσα κιλὰ κρασὶ πρέπει νὰ λάβωμεν ἀπὸ δύο ποιότητας, διὰ νὰ σχηματίσωμεν μεῖγμα 300 κιλῶν, τὸ ὁποῖον νὰ πωλῆται πρὸς 16 δρχ. τὸ κιλόν, ἂν τιμᾶται τὸ κιλὸν τῆς α΄ ποιότητος 18 δρχ. καὶ τῆς β΄ 13 δραχμάς;

208. Ἕνας ἀνέμειξε βούτυρον τῶν 50 δρχ. τὸ κιλὸν μὲ λίπος τῶν 20 δρχ. τὸ κιλὸν καὶ ἐσχημάτισε μεῖγμα 500 κιλῶν, τὸ ὁποῖον ἐπωλεῖτο 23 δρχ. τὸ κιλόν. Πόσον ἔλαβεν ἀπὸ κάθε εἶδος;

209. Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν πρέπει νὰ ἀναμείξωμεν λίπος τῶν 20 δρχ. τὸ κιλὸν μὲ βούτυρον τῶν 60 δρχ. τὸ κιλόν, διὰ νὰ σχηματίσωμεν μεῖγμα τῶν 32 δρχ. τὸ κιλόν;

210. Ἀνέμειξεν ἕνας λίπος τῶν 24 δρχ. τὸ κιλὸν μὲ βούτυρον τῶν 48 δρχ. τὸ κιλὸν καὶ ἐσχημάτισε μεῖγμα 150 κιλῶν, τὸ ὁποῖον ἐπώλει 36 δρχ. τὸ κιλόν. Πόσα κιλὰ ἐξ ἑκάστου εἴδους ἔλαβεν;

211. Παντοπώλης ἀναμειγνύει βούτυρον τῶν 50 δρχ. τὸ κιλόν, μὲ λίπος τῶν 19,50 δρχ. τὸ κιλὸν καὶ σχηματίζει μεῖγμα 1000 κιλῶν, τὸ ὁποῖον πωλεῖ καὶ εἰσπράττει 25.600 δρχ. Πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ κάθε εἶδος;

212. Ἔμπορος ἀναμειγνύει 100 κιλὰ βούτυρον τῶν 50 δρχ. τὸ κιλὸν μὲ λίπος τῶν 19,50 δρχ. τὸ κιλόν. Προκειμένου νὰ σχηματίσῃ μεῖγμα, τὸ ὁποῖον νὰ κοστίζῃ 25,60 δρχ. τὸ κιλόν, πόσον λίπος θὰ λάβῃ;

## Κράματα

Πολλάκις συγχωνεύουν διὰ τήξεως χρυσὸν μὲ χαλκόν, διὰ νὰ κάμουν τὸν χρυσὸν στερεώτερον. Τὸ μεῖγμα, τὸ ὁποῖον λαμβάνουν ἐκ τῆς συγχωνεύσεως αὐτῆς, λέγεται **κρᾶμα.**

Γενικῶς **κρᾶμα** λέγεται τὸ προϊὸν ἐκ τῆς συγχωνεύσεως μετάλλων. Τὸ ποσὸν τοῦ πολυτίμου μετάλλου (χρυσοῦ ἢ ἀργύρου), τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς μίαν μονάδα κράματος, λέγεται **βαθμὸς καθαρότητος ἢ τίτλος τοῦ κράματος.**

Ὁ τίτλος ἐκφράζεται συνήθως **εἰς χιλιοστά.** Ὅταν λέγωμεν π.χ. ὅτι ὁ τίτλος χρυσοῦ κοσμήματος εἶναι 0,800 ἐννοοῦμεν, ὅτι εἰς τὰ 1000 μέρη τοῦ κοσμήματος αὐτοῦ τὰ 800 εἶναι καθαρὸς χρυσὸς καὶ τὰ ὑπόλοιπα 200 εἶναι ἄλλο μέταλλον.

Ὁ βαθμὸς καθαρότητος **τῶν χρυσῶν κοσμημάτων** ἐκφράζεται καὶ εἰς εἰκοστὰ τέταρτα, τὰ ὁποῖα λέγονται **καράτια.** Ὅταν ὁ χρυσὸς εἶναι καθαρός, λέγομεν ὅτι εἶναι 24 καρατίων. Ὅταν ὅμως λέγωμεν ὅτι ἕνα χρυσοῦν κόσμημα εἶναι 18 καρατίων, ἐννοοῦμεν ὅτι μόνον τὰ 18 μέρη του εἶναι καθαρὸς χρυσός, τὰ δὲ ὑπόλοιπα 6 μέρη του εἶναι ἄλλο μέταλλον.

**Σημείωσις.** Τὰ προβλήματα τῶν κραμάτων λύονται ὅπως καὶ τὰ προβλήματα μείξεως (α' καὶ β' εἴδους).

**Πρόβλημα.** *Ἕνας χρυσοχόος συγχωνεύει 20 γραμμάρια χρυσοῦ τίτλου (βαθμοῦ καθαρότητος) 0,950 μὲ 15 γραμμάρια χρυσοῦ τίτλου 0,600. Ποῖος εἶναι ὁ τίτλος (βαθμὸς καθαρότητος) τοῦ νέου κράματος;*

**Σκέψις.** Τὰ 20 γραμμάρια χρυσοῦ, τίτλου 0,950, περιέχουν $0,950 \times 20 = 19$ γραμμάρια καθαροῦ χρυσοῦ. Τὰ 15 γραμμάρια χρυσοῦ τίτλου 0,600 περιέχουν $0,600 \times 15 = 9$ γραμμάρια καθαροῦ χρυσοῦ. Καὶ τὰ 35 γραμμάρια τοῦ κράματος $(20 + 15)$ περιέχουν 28 γραμμάρια $(19 + 9)$ καθαροῦ χρυσοῦ.

Ἀφοῦ τὰ 35 γραμμάρια τοῦ κράματος περιέχουν 28 γραμμάρια καθαροῦ χρυσοῦ, τὸ ἕνα γραμμάριον τοῦ κράματος θὰ περιέχῃ $28 : 35 = 0,800$ γραμμάρια καθαροῦ χρυσοῦ.

**Λύσις.**

α) 20 γραμμάρ. × 0,950 = 19 γραμμάρ. καθαροῦ χρυσοῦ
β) 15 » × 0,600 = 9 » » »

Τὰ 35 γραμμάρ. τοῦ κράμ. περιέχουν 28 γραμμάρ. καθαροῦ χρυσ.
τὸ 1 » » » περιέχει 28:35=0,800 γρ. καθ. χρυσ.

**Ἀπάντησις.** Ὁ τίτλος τοῦ νέου κράματος εἶναι 0,800.

Προβλήματα κραμάτων

213. Ένας χρυσοχόος έσυγχώνευσε 13 γραμμάρ. χρυσοῦ τίτλου 0,900 μὲ 2 γραμμάρ. χαλκοῦ. Πόσος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ νέου κράματος; (Ὁ τίτλος τοῦ χαλκοῦ εἶναι μηδέν).

214. Συγχωνεύομεν κρᾶμα χρυσοῦ 285 γραμμαρ. τίτλου 0,835 μὲ ἄλλο κρᾶμα χρυσοῦ 325 γραμμαρ. τίτλου 0,920 καὶ μὲ 152 γραμμάρ. καθαροῦ χρυσοῦ. Ποῖος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ νέου κράματος;

215. Ένας χρυσοχόος ἔχει δύο ἀσημένιας πλάκας. Ἡ μία ἔχει τίτλον 0,760 καὶ ἡ ἄλλη 0,520. Πόσα γραμμάρια πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ κάθε πλάκα, διὰ νὰ κάμῃ κρᾶμα 240 γραμμαρίων μὲ τίτλον 0,600;

216. Χρυσοχόος ἔχει δύο εἴδη χρυσοῦ. Τοῦ ἑνὸς ὁ τίτλος εἶναι 0,850 καὶ τοῦ ἄλλου 0,750. Πόσην ποσότητα πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ κάθε εἶδος, διὰ νὰ σχηματίσῃ κρᾶμα 300 γραμμαρ. καὶ τίτλου 0,800;

217. Χρυσοχόος λαμβάνει 1700 γραμμάρ. καθαροῦ χρυσοῦ καὶ τὰ συγχωνεύει μὲ χαλκόν, διὰ νὰ σχηματίσῃ κρᾶμα χρυσοῦ τίτλου 0,850. Πόσα γραμμάρια χαλκοῦ πρέπει νὰ λάβῃ;

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

## ΧΡΗΣΙΣ ΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΔΙΑ ΤΗΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ

Μέχρι τώρα ἐμάθομεν νὰ χρησιμοποιοῦμεν **τὰ ἀραβικὰ σύμβολα** (0, 1, 2, 3, 4, 5 . . .), διὰ νὰ παραστήσωμεν ἀριθμοὺς ἢ ποσότητας.

Εἶναι δυνατὸν ὅμως διὰ τὴν τοιαύτην παράστασιν νὰ χρησιμοποιήσωμεν καὶ τὰ **γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου.** Π.χ. λέγομεν : ἐξωδεύσαμεν εἰς τὴν ἐκδρομὴν **α δραχμάς,** ἀντὶ νὰ ἀναφέρωμεν μὲ ἀριθμὸν τὴν ποσότητα τῶν χρημάτων, ποὺ ἐξωδεύσαμεν. Ἐπίσης ἀντὶ νὰ γράψωμεν 5 μῆλα, γράφομεν **α μῆλα·** ἀντὶ νὰ γράψωμεν 2 δρχ., γράφομεν **β δραχμαί·** ἀντὶ νὰ εἴπωμεν 8 μαθηταί, λέγομεν γ **μαθηταὶ** κ.τ.λ.

Διὰ τὴν παράστασιν ὡρισμένων ἀριθμῶν ἢ ποσοτήτων δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν οἱονδήποτε γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου· τὸ γράμμα ὅμως αὐτό, καθ' ὅλην τὴν ἐξέτασιν τοῦ ζητήματος, θὰ παριστάνῃ τὸν ἴδιον ἀριθμὸν ἢ τὴν αὐτὴν ποσότητα. Π.χ. Ἂν μὲ τὸ γράμμα α παραστήσωμεν τὰς 7 ἡμέρας τῆς ἑβδομάδος, κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἡμερῶν 4 ἑβδομάδων, ποὺ θὰ τὸν παραστήσωμεν μὲ τὸ **4α,** τὸ α θὰ παριστᾷ 7 ἡμέρας πάλιν. Εἰς ἄλλην περίπτωσιν δυνάμεθα μὲ τὸ α νὰ παραστήσωμεν ἄλλον ἀριθμὸν ἢ ἄλλην ποσότητα· λ.χ. α = 5 δραχμαί, ἢ α = 10 κιλὰ κλπ.

Μὲ γράμματα ἠμποροῦμεν νὰ παραστήσωμεν ὄχι μόνον ὡρισμένους ἀριθμοὺς ἢ ποσότητας ἀλλὰ καὶ ἀγνώστους ἀριθμοὺς ἢ ζητουμένας ποσότητας. Συνήθως διὰ τοὺς ὡρισμένους ἀριθμοὺς χρησιμοποιοῦμεν τὰ πρῶτα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου (α, β, γ, δ . . .) καὶ διὰ τοὺς ἀγνώστους ἢ ζητουμένους τὰ τελευταῖα (φ, χ, ψ, ω).

Ἔτσι δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιοῦμεν τὰ γράμματα ἀντὶ ἀριθμῶν εἰς ἀσκήσεις καὶ προβλήματα ὅλων τῶν πράξεων τῆς ἀριθμητικῆς. Καί, διὰ νὰ σημειώσωμεν τὰς πράξεις, χρησιμοποιοῦμεν τὰ γνωστά μας σύμβολα : τὸ + (σύν) διὰ τὴν πρόσθεσιν, τὸ — (πλὴν ἢ μεῖον) διὰ τὴν ἀφαίρεσιν τὸ × ἢ • (ἐπί) διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τό : (διὰ ἢ πρός) διὰ τὴν διαίρεσιν.

## Παραδείγματα

α) Ἐὰν μία οἰκογένεια ἔχῃ 4 ἀγόρια καὶ β κορίτσια, τότε ὁ συνολικὸς ἀριθμὸς τῶν παιδιῶν τῆς οἰκογενείας αὐτῆς θὰ εἶναι 4 + β.

β) Ἐὰν α εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν τῆς τάξεώς μας καὶ ἀπουσιάζουν σήμερον 5 μαθηταί, ὁ ἀριθμὸς τῶν παρόντων μαθητῶν εἶναι α — 5.

γ) Ἂν εἰς κάθε θρανίον τῆς τάξεώς μας κάθωνται Χ μαθηταὶ καὶ τὰ θρανία της εἶναι 8, τότε οἱ μαθηταὶ τῆς τάξεώς μας εἶναι 8 • Χ ἢ 8Χ (τὸ γινόμενον αὐτῶν).

**Σημείωσις.** Τὸ γινόμενον συμβολίζεται χωρὶς τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

δ) Ἂν β εἶναι τὸ βάρος ἑνὸς πεπονιοῦ, τὸ ὁποῖον μοιράζομεν εἰς 4 ἴσα μέρη, τότε τὸ βάρος κάθε τεμαχίου θὰ εἶναι β : 4 ἢ $\frac{β}{4}$.

## ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

218. Ὁ Νῖκος ἔλαβεν ὡς δῶρον α δρχ. ἀπὸ τὸν πατέρα του καὶ 3 δρχ. ἀπὸ τὴν μητέρα του. Πόσας δρχ. ἔχει τὸ ὅλον; (**Λύσις.** α + 3).

219. Ὁ Κώστας ἔχει α δραχμάς· ὁ Πέτρος ἔχει 253 δρχ. περισσοτέρας ἀπὸ τὸν Κώσταν. Πόσας δρχ. ἔχει ὁ Πέτρος καὶ πόσας καὶ οἱ δύο μαζί; (**Λύσις.** Ὁ Πέτρος ἔχει α + 253 δρχ. καὶ οἱ δύο μαζὶ α + α + 253 ἢ 2α + 253).

220. Ὁ Ἀνδρέας ἔχει 345 δρχ. περισσοτέρας τοῦ Νίκου. Νὰ εὑρεθῇ : α) πόσας δρχ. ἔχει ὁ Ἀνδρέας καὶ β) πόσας δρχ. ἔχουν καὶ οἱ δύο μαζί.

221. Ἡ Τροχαία ἐμέτρησε τὰ αὐτοκίνητα, τὰ ὁποῖα ἐπέρασαν ἀπὸ μίαν διασταύρωσιν, καὶ εὗρεν ὅτι τὸ Σάββατον ἐπέρασαν 185 αὐτοκίνητα περισσότερα ἀπὸ ὅσα ἐπέρασαν τὴν Παρασκευήν. Πόσα αὐτοκίνητα ἐπέρασαν τὸ Σάββατον;

222. Ὁ Κώστας ἐπλήρωσε διὰ τὴν ἀγορὰν διαφόρων σχολικῶν εἰδῶν 12 δραχμάς. Ἐὰν πρὸ τῆς ἀγορᾶς αὐτῶν εἶχεν α δραχμάς, πόσαι δρχ. τοῦ ἔμειναν;

223. Εἰς τὴν βιβλιοθήκην τῆς τάξεώς μας ὑπάρχουν β βιβλία. Ἐὰν ἀπὸ αὐτὰ δοθοῦν πρὸς μελέτην 15 βιβλία, πόσα θὰ μείνουν εἰς τὴν βιβλιοθήκην;

224. Ἐὰν τὸ εἰσιτήριον ἐκδρομῆς ἑκάστου μαθητοῦ εἶναι ν δρχ., πόσον θὰ στοιχίσουν τὰ εἰσιτήρια τῶν 28 μαθητῶν τῆς τάξεως;

225. Ἡ ἀπόστασις Ἀθηνῶν - Πατρῶν εἶναι α χιλιόμετρα. Τὸ Κιᾶτον εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως αὐτῆς. Πόσα χιλιόμετρα ἀπέχει τὸ Κιᾶτον ἀπὸ ἑκάστην τῶν πόλεων αὐτῶν;

226. Ἕνας ὑπάλληλος διαιρεῖ τὸν μισθόν του εἰς 5 ἴσα μέρη καὶ ἀποταμιεύει τὸ ἕνα μέρος ἀπ' αὐτά. Ἐὰν α εἶναι ὁ μισθός του, τί ποσὸν ἀποταμιεύει μηνιαίως;

227. Ἐὰν ἡ βενζίνη τιμᾶται β δρχ. τὸ λίτρον, πόσον στοιχίζουν τὰ 9 λίτρα;

## Χρῆσις ἑνὸς γράμματος διὰ τὴν λύσιν ἁπλῶν ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων

**Παράδειγμα 1.** *Ὁ Νῖκος ἀρχικῶς ἔχει α δραχμάς, ἀλλ' ὅταν λάβῃ ἀκόμη 5 δραχμάς, θὰ ἔχῃ ὅσον καὶ ὁ Πέτρος, ὁ ὁποῖος ἔχει 12 δρχ. Πόσας δραχμὰς εἶχεν ἀρχικῶς ὁ Νῖκος;*

**Λύσις.** Ἡ ποσότης τῶν δρχ. τοῦ Νίκου γίνεται $\alpha + 5$. Ἡ ποσότης αὐτὴ ἰσοῦται μὲ 12, ἀφοῦ τόσαι εἶναι αἱ δρχ. τοῦ Πέτρου. Συνεπῶς ἔχομεν δύο ποσότητας, $\alpha + 5$ καὶ 12, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Τοῦτο τὸ γράφομεν ὡς ἑξῆς : $\alpha + 5 = 12$, ποὺ τὸ διαβάζομεν : α σὺν 5 ἴσον μὲ 12, καὶ ἐκφράζει τὴν ἰσότητα μιᾶς ποσότητος πρὸς μίαν ἄλλην.

Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ πόσας δραχμὰς εἶχεν ἀρχικῶς ὁ Νῖκος, πρέπει νὰ εὕρωμεν ἕνα ὡρισμένον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος μαζὶ μὲ τὸν 5 νὰ μᾶς κάμνῃ τὸ 12.

**Ἄρα** ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ **7** δηλ. $\alpha = \mathbf{7}$, ποὺ σημαίνει εἰς τὴν περίπτωσίν μας ὅτι ὁ Νῖκος ἀρχικῶς πρέπει νὰ εἶχε 7 δρχ.

Ἀλλὰ πῶς ὁ ἀριθμὸς **7** προκύπτει ἀπὸ τὸ 12; Μόνον ὅταν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν 12 τὸν 5.

**Συνεπῶς,** ἐὰν λάβωμεν τὴν ἰσότητά μας $\alpha + 5 = 12$, θὰ ἔχωμεν : $\alpha = 12 - 5 = \mathbf{7}$.

**Παράδειγμα 2.** *Ὁ Ἀνδρέας ἔλαβεν ἀπὸ τὸν πατέρα του 100 δρχ., ποσότητα ἀκριβῶς ἴσην μὲ τὸ διπλάσιον τῆς ποσότητος, τὴν ὁποίαν ἔλαβεν ὁ Πέτρος ἀπὸ τὸν ἰδικόν του πατέρα. Πόσα χρήματα ἔλαβεν ὁ Πέτρος;*

**Λύσις.** Ἂν μὲ τὸ γράμμα X παραστήσωμεν τὰ χρήματα τοῦ Πέτρου, τότε τὸ διπλάσιον τῶν χρημάτων του, δηλ. 2X, θὰ ἰσοῦται μὲ τὰς 100 δρχ. τοῦ Ἀνδρέα. Τοῦτο τὸ γράφομεν ὡς ἑξῆς : $2X = 100$ καὶ $X = \frac{100}{2} = 50$. Δηλ. ἂν τὰς ἴσας αὐτὰς ποσότητας $(2X = 100)$ τὰς διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 2, τότε αἱ νέαι ποσότητες $\left(X = \frac{100}{2}\right)$, ποὺ προκύπτουν, εἶναι μὲν διάφοροι ἀπὸ τὰς πρώτας, ἀλλὰ εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Διαιροῦντες λοιπὸν διὰ 2 θὰ ἔχωμεν : $\frac{2X}{2} = \frac{100}{2}$. Καὶ μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν ἔχομεν $X = 50$.

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ ἄγνωστη ποσότης τῶν χρημάτων τοῦ Πέτρου εἶναι 50 δραχμαί.

**Συμπέρασμα.** Ἀπὸ τὴν ἐξέτασιν τῶν δύο αὐτῶν παραδειγμάτων καὶ πολλῶν ἄλλων παρομοίων μὲ αὐτὰ συμπεραίνομεν τὰ ἑξῆς : Ὅταν εἰς ἕνα πρόβλημα τῆς ἀριθμητικῆς δίδωνται δύο ἢ περισσότεραι ποσότητες, αἱ ὁποῖαι ἔχουν σχέσιν μεταξύ των, καὶ ζητῆται μία ἄγνωστος ποσότης, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν αὐτήν, ἂν τὴν παραστήσωμεν μὲ ἕνα γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου καὶ κάμωμεν τὰς καταλλήλους ἀριθμητικὰς πράξεις.

Τοῦτο δυνάμεθα νὰ πράξωμεν καὶ εἰς ἀσκήσεις μὲ ἕνα ἄγνωστον.

### Προβλήματα

228. Ὁ Παῦλος, ποὺ εἶχεν α δραχμάς, ἔλαβεν ἀπὸ τὸν θεῖον του ἄλλας 35 δραχμὰς καὶ ἔχει ὅσας καὶ ὁ Ἀνδρέας, ὁ ὁποῖος ἔχει 68 δρχ. Πόσας δρχ. εἶχεν ὁ Παῦλος;

229. Ὁ Κώστας εἶχε πενταπλασίους βόλους ἀπὸ τὸν Πέτρον. Καὶ οἱ δύο μαζὶ εἶχον 24 βόλους. Πόσους βόλους εἶχεν ἕκαστος;

230. Ἡ Ἑλένη εἶχε 35 δραχμάς. Διέθεσεν ἀπ' αὐτὰς ἕνα ποσὸν

διὰ τὸ ἐργόχειρόν της καὶ τῆς ἐπερίσσευσαν 9 δραχμαί. Πόσας δρχ. ἔδωσεν διὰ τὸ ἐργόχειρόν της;

231. Ἡ Μαρία ἠγόρασε τρόφιμα καὶ ἐπλήρωσε 43 δρχ., ἐπέστρεψε δὲ εἰς τὴν μητέρα της ρέστα 57 δραχμάς. Πόσας δρχ. τῆς εἶχε δώσει ἡ μητέρα της;

232. Ἕνας μαθητὴς εἶχεν ὡρισμένα χρήματα. Ἐὰν εἶχε τριπλάσιον ποσὸν αὐτῶν καὶ ἐξώδευεν 7 δρχ., θὰ τοῦ ἔμεναν 7 δραχμαί. Πόσα χρήματα εἶχεν;

233. Τίνος ἀριθμοῦ τὸ τρίτον ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν 21;

234. Τὰ $\frac{3}{4}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι 75. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός;

235. Μίαν ράβδον, μήκους 65 ἑκατοστῶν τοῦ μέτρου, τὴν χωρίζομεν εἰς τρία μέρη, ἐκ τῶν ὁποίων τὰ δύο εἶναι ἀκριβῶς ἴσα μεταξύ των, τὸ δὲ τρίτον ἔχει μῆκος 23 ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου. Τί μῆκος ἔχει καθένα ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη τῆς ράβδου;

236. Ὁ Ἀνδρέας κατὰ τὴν ἐξέτασίν του εἰς τὸ μάθημα τῆς Ἀριθμητικῆς ἀπήντησεν εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν ὑποβληθεισῶν εἰς αὐτὸν ἐρωτήσεων. Δεδομένου ὅτι ἀπήντησεν ὀρθῶς εἰς 4 ἐρωτήσεις, πόσαι ἐρωτήσεις τοῦ ὑπεβλήθησαν ἐν ὅλῳ;

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ποίους ἀριθμοὺς παριστοῦν τὰ γράμματα εἰς τὰς κάτωθι ἀσκήσεις.

$8 + 4 = \alpha$
$9 + 6 = \beta$

$5 + \alpha = 8$
$6 + \delta = 15$
$12 + \beta = 16$
$8 + \gamma = 13$

$\chi + 4 = 10$
$\varphi + 9 = 16$
$\psi + 8 = 13$
$\omega + 7 = 17$

$13 - 5 = \chi$
$10 - 3 = \psi$

$9 - \delta = 6$
$15 - \beta = 8$
$13 - \alpha = 9$
$10 - \gamma = 4$

$\omega - 5 = 9$
$\chi - 7 = 5$
$\psi - 4 = 7$
$\varphi - 6 = 8$

$3 \times 4 = \alpha$
$4 \times 5 = \gamma$
$5 \times 2 = \beta$
$6 \times 3 = \delta$

$4 \times \alpha = 12$
$6 \times \beta = 24$
$8 \times \delta = 32$
$5 \times \gamma = 10$

$\alpha \times 4 = 8$
$\delta \times 5 = 15$
$\gamma \times 6 = 24$
$\beta \times 4 = 20$

$8 : 2 = \alpha$
$12 : 4 = \gamma$
$9 : 3 = \beta$
$20 : 5 = \delta$

$12 : \chi = 4$
$8 : \psi = 2$
$16 : \omega = 8$
$15 : \varphi = 3$

$\chi : 3 = 7$
$\omega : 4 = 5$
$\varphi : 6 = 4$
$\psi : 5 = 3$

# ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

# ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

## ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΣ ΤΗΣ ΥΛΗΣ ΤΗΣ Ε΄ ΤΑΞΕΩΣ

### Ἐρωτήσεις

1. Τί διδάσκει ἡ Γεωμετρία; Ποῖα γεωμετρικὰ σχήματα γνωρίζετε;
2. Ποία εἶναι ἡ εἰκὼν τῆς εὐθείας γραμμῆς; Ἀναφέρατε παραδείγματα τεθλασμένων καὶ καμπύλων γραμμῶν.
3. Ποίας ἰδιότητας ἔχει ἡ εὐθεῖα γραμμή;
4. Τί λέγεται ἡμιευθεῖα καὶ πῶς παριστάνομεν αὐτήν;
5. Ποία διαφορὰ ὑπάρχει μεταξὺ εὐθείας καὶ εὐθυγράμμου τμήματος; Σημειώσατε καὶ ἀπαγγείλατε δύο εὐθύγραμμα τμήματα.
6. Τί καλεῖται γωνία καὶ πῶς διαβάζεται;
7. Πῶς βλέπομεν, ἂν δύο γωνίαι εἶναι ἴσαι;
8. Ποῖα εἴδη γωνιῶν ἔχομεν;
9. Ἐπὶ φύλλου χάρτου σχηματίσατε ἀνὰ μίαν γωνίαν ἀπὸ κάθε εἶδος αὐτῶν καὶ νὰ τὰς ἀπαγγείλετε.
10. Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος γράψατε εἰς τὸ τετράδιόν σας δύο παραλλήλους εὐθείας καὶ μίαν ἄλλην εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ αὐτάς : α) καθέτως καὶ β) πλαγίως. Σημειώσατε γράμματα εἰς τὰς γωνίας ποὺ σχηματίζονται καὶ μετρήσατε μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον τὸ μέγεθος ἑκάστης γωνίας χωριστά.
11. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ ὀρθὴ γωνία; Νὰ κατασκευάσετε ἀνὰ μίαν γωνίαν $60^o$, $45^o$, $135^o$ καὶ νὰ ὀνομάσετε ἑκάστην.
12. Τί λέγεται ἐπίπεδον σχῆμα καὶ ποῖα ἐπίπεδα σχήματα γνωρίζετε;
13. Τί λέγεται τετράγωνον, τί ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον καὶ τί τραπέζιον;

14. Τί λέγεται πολύγωνον; 'Από ποῦ λαμβάνει τὸ ὄνομά του;

15. Τί λέγεται τρίγωνον; Ποῖα εἴδη τριγώνου ἔχομεν α) βάσει τοῦ εἴδους τῶν γωνιῶν αὐτῶν καὶ β) βάσει τῆς σχέσεως τῶν πλευρῶν των;

16. Νὰ ἰχνογραφήσετε εἰς φύλλον χάρτου ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ νὰ φέρετε τὸ ὕψος αὐτοῦ. Εἰς τί διαιρεῖται τοῦτο;

17. Νὰ κατασκευάσετε εἰς τὸ πρόχειρόν σας ἕνα ὀρθογώνιον τραπέζιον καὶ νὰ φέρετε μίαν διαγώνιον αὐτοῦ. Τί εἴδους τρίγωνα θὰ προκύψουν; Πῶς θὰ ἐξακριβώσετε τοῦτο;

18. Τί λέγεται περίμετρος τοῦ τετραγώνου καὶ πῶς εὑρίσκεται αὕτη;

19. Πῶς εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν περίμετρον αὐτοῦ;

20. Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου;

21. Τί κάμνομεν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν περίμετρον τοῦ ὀρθογωνίου;

22. Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου;

23. 'Εὰν γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου καὶ τὸ μῆκος τῆς βάσεώς του, πῶς εὑρίσκομεν τὸ ὕψος αὐτοῦ;

24. Πῶς εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς βάσεως ἑνὸς ὀρθογωνίου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ καὶ τὸ ὕψος του;

25. Τί λέγεται περίμετρος τριγώνου καὶ πῶς εὑρίσκεται αὕτη;

26. Τί λέγεται ὕψος τοῦ τριγώνου;

27. Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου;

28. 'Εὰν γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου καὶ τὴν βάσιν αὐτοῦ, πῶς εὑρίσκομεν τὸ ὕψος του;

29. Πῶς εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς βάσεως ἑνὸς τριγώνου, ὅταν γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ καὶ τὸ ὕψος του;

30. Τί λέγεται τραπέζιον καὶ τί λέγεται ὕψος αὐτοῦ;

31. Πότε τὸ τραπέζιον λέγεται ἰσοσκελὲς καὶ πότε λέγεται ὀρθογώνιον;

32. Πῶς εὑρίσκομεν τὴν περίμετρον τοῦ τραπεζίου;

33. Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου;

34. Τί λέγεται ἀπόστημα ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου;

35. Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου;

36. Πότε ἕνα πολύγωνον λέγεται ἐγγεγραμμένον;

37. Πῶς εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου;

38. Ὅταν γνωρίζωμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου, πῶς εὑρίσκομεν α) τὴν διάμετρον αὐτοῦ καὶ β) τὴν ἀκτῖνά του;

39. Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου;

40. Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως;

Προβλήματα

1. Τὸ δάπεδον τῆς αἰθούσης μιᾶς τάξεως εἶναι τετραγωνικὸν καὶ κάθε πλευρά του ἔχει μῆκος 8,50 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περίμετρός του.

2. Ὁ κῆπος ἑνὸς σχολείου εἶναι τετραγωνικὸς μὲ μῆκος πλευρᾶς 36,5 μ. Θέλουν νὰ τὸν περιφράξουν μὲ σύρμα, ποὺ τὸ μέτρον κοστίζει 15 δραχμάς. Πόσα μέτρα σύρμα θὰ χρειασθοῦν καὶ πόσας δρχ. θὰ στοιχίσῃ τοῦτο;

3. Ἕνα τετραγωνικὸν οἰκόπεδον ἔχει περίμετρον 876 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς του;

4. Ἡ αὐλὴ τοῦ σχολείου εἶναι τετραγωνικὴ καὶ ἡ κάθε πλευρά της ἔχει μῆκος 36,50 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς αὐλῆς;

5. Ἕνα οἰκόπεδον, σχήματος ὀρθογωνίου, ἔχει μῆκος 145 μ. καὶ πλάτος 8 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

6. Ἕνα ὀρθογώνιον κτῆμα ἔχει διαστάσεις 80 μ. καὶ 160 μ. Τί ἐμβαδὸν ἔχει α) εἰς τ. μέτρα καὶ β) εἰς στρέμματα;

7. Ἡ κατασκευὴ πατώματος ἀπὸ τσιμέντον (μωσαϊκὸν) κοστίζει 110 δρχ. τὸ τ.μ. Πόσον θὰ στοιχίσῃ ἡ κατασκευὴ τοῦ πατώματος μιᾶς αἰθούσης μὲ διαστάσεις 7,5 μ. καὶ 12 μ;

8. Διὰ τὴν σποράν τοῦ σίτου ἀπαιτοῦνται κατὰ μέσον ὅρον 10 κιλὰ σπόρου κατὰ στρέμμα. Πόσα κιλὰ σπόρου ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν σπορὰν κτήματος πλάτους 200 μέτρων καὶ μήκους 350 μέτρων;

9. Αἱ πλευραὶ τριγωνικοῦ κήπου ἔχουν μῆκος 27,50 μ., 13,50 μ. καὶ 20 μ. Πόσον θὰ στοιχίσῃ ἡ περίφραξίς του μὲ σύρμα πρὸς 18,50 δρχ. τὸ μέτρον;

10. Εἰς ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἡ βάσις εἶναι 2,5 ἑκατοστόμετρα καὶ ἡ μία ἀπὸ τὰς πλαγίας πλευράς του εἶναι 2,95 ἑκατοστόμετρα. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του;

11. Ἕνας κῆπος εἶναι τριγωνικός. Ἡ βάσις του εἶναι 58,50 μ. καὶ τὸ ὕψος του 26,40 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

12. Ἑνὸς οἰκοπέδου, σχήματος ὀρθογωνίου τριγώνου, ἡ μία ἀπὸ τὰς καθέτους πλευράς του εἶναι 28,25 μ. καὶ ἡ ἄλλη 17,4 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

13. Ἀπὸ ἕνα ὀρθογώνιον οἰκόπεδον μήκους 54 μ. καὶ πλάτους 36 μ. ἐπωλήθη τεμάχιον τριγωνικὸν βάσεως 48 μ. καὶ ὕψους 30 μ. Νὰ εὑρεθῇ : α) τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου καὶ β) τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος τοῦ οἰκοπέδου, ποὺ ἀπέμεινεν.

14. Ἡ περίμετρος ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 60 μ. καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ 10 μέτρα. Νὰ εὑρεθοῦν : α) αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου καὶ β) τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

15. Ἑνὸς κήπου, σχήματος ἰσοσκελοῦς τραπεζίου, αἱ παράλληλοι πλευραὶ ἔχουν μῆκος 35,50 καὶ 17,50 μ., καὶ ἡ μία ἀπὸ τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς ἔχει μῆκος 12,50 μ. Πόσα μέτρα σύρμα θὰ χρειασθοῦν διὰ τὴν περίφραξίν του καὶ πόσον θὰ στοιχίσῃ τὸ σύρμα, ἂν τὸ μέτρον του κοστίζῃ 16,50 δρχ.;

16. Ἡ στέγη μιᾶς ἀποθήκης ἔχει σχῆμα τραπεζίου μὲ μῆκος μεγάλης βάσεως 16,80 μ. καὶ μικρᾶς βάσεως 7,20 μ., τὸ δὲ ὕψος τοῦ τραπεζίου εἶναι 4,50 μέτρα. Θέλομεν νὰ σκεπάσωμεν τὴν στέγην αὐτὴν μὲ τσίγκον, τοῦ ὁποίου τὸ τ.μ. ἔχει 25 δρχ. Πόσον θὰ κοστίσῃ ὁ τσίγκος;

17. Ἡ περίμετρος ἑνὸς ρόμβου ἰσοῦται μὲ τὴν περίμετρον ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἔχει μῆκος 12 μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ ρόμβου;

18. Ἕνα ἀμπαζοὺρ ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 ἰσοσκελῆ τραπέζια, τῶν ὁποίων αἱ παράλληλοι πλευραὶ ἔχουν μῆκος 25 ἑκ. καὶ 35 ἑκατοστὰ τοῦ μ. καὶ ἡ μεταξύ των ἀπόστασις εἶναι 15 ἑκατοστὰ τοῦ μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνολικὴ ἐπιφάνεια τοῦ ἀμπαζούρ.

19. Γράψατε ἕνα ὀρθογώνιον τραπέζιον μὲ μῆκος μεγάλης βάσεως 5,5 ἑκ., μικρᾶς βάσεως 4,5 ἑκ. καὶ μὲ ὕψος 3 ἑκ. τοῦ μέτρου. Μετρήσατε τὴν μὴ παράλληλον πλευράν του καὶ ὑπολογίσατε α) τὴν περίμετρόν του καὶ β) τὸ ἐμβαδόν του.

20. Ἡ ἀκτὶς τοῦ τροχοῦ ἑνὸς ποδηλάτου εἶναι 0,35 μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ τροχοῦ; Καὶ πόσα μέτρα θὰ διανύσῃ τὸ ποδήλατον, ἂν οἱ τροχοί του κάμουν 365 στροφάς;

21. Ὁ τροχὸς ἑνὸς ποδηλάτου ἔχει διάμετρον ἑνὸς μέτρου καὶ

κάμνει 120 στροφὰς εἰς τὸ πρῶτον λεπτὸν τῆς ὥρας (π'). Πόσα χιλιόμετρα θὰ διανύσῃ τὸ ποδήλατον εἰς μίαν ὥραν καὶ 20 π.;

22. Οἱ τροχοὶ ἑνὸς αὐτοκινήτου κάμνουν χιλίας στροφάς, ὅταν τὸ αὐτοκίνητον διατρέξῃ 2512 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς ἑκάστου τροχοῦ;

23. Ἡ διάμετρος κυκλικοῦ κήπου εἶναι 5 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τόξου 60°;

24. Ἡ ἀκτὶς κυκλικοῦ ἁλωνιοῦ εἶναι 7,5 μ. Νὰ εὑρεθῇ πόσα μέτρα εἶναι τὸ μῆκος τόξου 30°.

25. Εἰς τὸ γραφεῖον τοῦ σχολείου μας ὑπάρχει ἕνας κυκλικὸς καθρέπτης ἀκτῖνος 28 ἑκατοστῶν τοῦ μ. Νὰ εὕρετε α) τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του καὶ β) πόσον θὰ κοστίσῃ ἡ ἐπαργύρωσίς του πρὸς 40 λεπτὰ τῆς δραχμῆς τὸ τετραγ. ἑκατοστόν;

26. Ἡ πλακόστρωσις μιᾶς κυκλικῆς αὐλῆς, ποὺ ἔχει μῆκος περιφερείας 50,24 μ., ἐκόστισε 5024 δρχ. Πόσον ἐκόστισε τὸ τ. μέτρον;

# ΥΛΗ ΣΤ' ΤΑΞΕΩΣ

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

### 1. Ἐπιφάνεια

**Γνωρίζομεν ὅτι ἐπιφάνεια ἑνὸς σώματος εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων, εἰς τὰ ὁποῖα περατοῦται (τελειώνει) τὸ σῶμα.**

Ἡ ἐπιφάνεια ἔχει δύο διαστάσεις, τὸ **μῆκος** καὶ τὸ **πλάτος**.

Εἴδη ἐπιφανειῶν

α) Ἂς ἐξετάσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ μαυροπίνακος τῆς τάξεώς μας, ἐπὶ τῆς ὁποίας γράφομεν. Λαμβάνομεν μίαν τεντωμένην κλωστήν, ἡ ὁποία δίδει τὴν εἰκόνα τῆς εὐθείας γραμμῆς, καὶ τὴν τοποθετοῦμεν ἐπάνω εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτήν. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ τεντωμένη κλωστὴ (ἡ εὐθεῖα γραμμή) ἐφαρμόζει τελείως ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ πίνακος, ὁπωσδήποτε καὶ ἂν τοποθετηθῇ, καὶ πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις. Τὸ ἴδιον θὰ παρατηρήσωμεν, ἂν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς τοποθετήσωμεν τὸν χάρακά μας.

Ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ λέγεται **ἐπίπεδος ἐπιφάνεια** ἢ ἁπλῶς **ἐπίπεδον.**

**Ἑπομένως :** *Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια λέγεται ἡ ἐπιφάνεια, εἰς τὴν ὁποίαν ἐφαρμόζει τελείως καὶ πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις ἡ εὐθεῖα γραμμή.*

**Ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι** εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πατώματος, τοῦ ὁμαλοῦ τοίχου, τοῦ φύλλου χάρτου ἐπὶ τῆς ὁποίας γράφομεν κ.τ.λ.

β) Ἐὰν τὴν τεντωμένην κλωστὴν ἢ τὸν χάρακά μας τοποθετήσωμεν εἰς τὴν ὑδρόγειον σφαῖραν τοῦ σχολείου μας, θὰ ἴδωμεν ὅτι δὲν ἐφαρμόζει τελείως παρὰ μόνον ἐλάχιστα καὶ εἰς ἕνα μόνον σημεῖόν της. Τοῦτο συμβαίνει, διότι ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ δὲν ἔχει κανένα ἐπίπεδον μέρος. Ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ λέγεται **καμπύλη ἐπιφάνεια.**

**Ἄρα :** *Καμπύλη ἐπιφάνεια λέγεται ἡ ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία δὲν ἔχει κανένα ἐπίπεδον μέρος.*

**Καμπύλαι ἐπιφάνειαι** εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αὐγοῦ, τοῦ πορτοκαλιοῦ, τοῦ τοπιοῦ κ.ἄ.

**Σημείωσις :** Ἡ καμπύλη ἐπιφάνεια χαρακτηρίζεται ὡς **κυρτὴ** ἢ **κοίλη** ἐν σχέσει μὲ τὸ ἐὰν εὑρισκώμεθα εἰς τὸ ἐξωτερικὸν ἢ τὸ ἐσωτερικὸν αὐτῆς.

γ) Ἂν παρατηρήσωμεν ἕνα κουτὶ κιμωλίας, θὰ ἴδωμεν ὅτι ἡ ἐπιφάνειά του ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδα μέρη, πλὴν ὅμως τὰ μέρη αὐτὰ ὅλα μαζὶ δὲν ἀποτελοῦν ἕνα ἐπίπεδον. Ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ ὀνομάζεται **τεθλασμένη ἐπιφάνεια.**

**Ὥστε :** *Τεθλασμένη ἐπιφάνεια λέγεται ἡ ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδα μέρη, ἀλλὰ δὲν εἶναι ἐπίπεδος.*

**Τεθλασμέναι ἐπιφάνειαι** εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κουτιοῦ τῶν σπίρτων, τῆς πλακὸς σάπωνος κ.ἄ.

δ) Ἡ ἐπιφάνεια τῆς γλάστρας, τοῦ ποτηριοῦ, τοῦ κουτιοῦ γάλακτος κ.ἄ. ἀποτελεῖται ἀπὸ καμπύλην ἐπιφάνειαν καὶ ἀπὸ ἐπίπεδον. Δι' αὐτὸ ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ λέγεται **μεικτὴ ἐπιφάνεια.**

**Ὥστε :** *Μεικτὴ ἐπιφάνεια λέγεται ἡ ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ καμπύλα καὶ ἀπὸ ἐπίπεδα μέρη.*

## 2. Στερεὰ σχήματα—Γεωμετρικὰ στερεὰ

Γνωρίζομεν ὅτι εἰς τὸ τετράγωνον, τὸ ὀρθογώνιον, τὸν κύκλον κλπ. ὅλα τὰ σημεῖά των εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Δι' αὐτὸ ὠνομάσαμεν τὰ σχήματα αὐτὰ **ἐπίπεδα σχήματα.**

Τὰ σημεῖα ὅμως τοῦ κύβου, τῆς κασετίνας μας, τοῦ κουτιοῦ τῆς κιμωλίας κ.ἄ. δὲν εὑρίσκονται ὅλα μαζὶ εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Δι' αὐτὸ ὀνομάζομεν τὰ σχήματα αὐτὰ **στερεὰ σχήματα** ἢ **Γεωμετρικὰ στερεά.**

Τὰ ἁπλούστερα Γεωμετρικὰ στερεὰ θὰ ἐξετάσωμεν ἐδῶ ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸν γνωστόν μας κύβον.

Ἐρωτήσεις

α. Τί λέγεται ἐπιφάνεια ἑνὸς σώματος;

β. Ποῖα εἴδη ἐπιφανείας ἔχομεν; Δώσατε τὸν ὁρισμὸν κάθε εἴδους χωριστά.

γ. Ἀναφέρατε σώματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἐπιφάνειαν ἐπίπεδον, καμπύλην, τεθλασμένην καὶ μεικτήν.

δ. Τὸ στρογγυλὸν μολύβι σας τί ἐπιφάνειαν ἔχει;

ε. Ὁ ἕνας τοῖχος τῆς αἰθούσης τῆς τάξεώς σας τί ἐπιφάνειαν ἔχει; Καὶ τί ἐπιφάνειαν ἀποτελοῦν ὅλοι οἱ τοῖχοι μαζί;

στ. Τί διαφέρει τὸ ἐπίπεδον σχῆμα ἀπὸ τὸ στερεὸν σχῆμα;

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

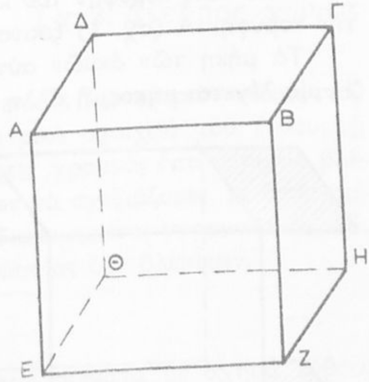
# ΚΥΒΟΣ

## 1. Γεωμετρικὰ στοιχεῖα τοῦ Κύβου

Τὸ στερεὸν σχῆμα, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ σχῆμα 1, λέγεται κύβος.

Εὐκόλως διακρίνομεν ὅτι ὁ κύβος περικλείεται ἀπὸ 6 ἐπιπέδους ἐπιφανείας, αἱ ὁποῖαι λέγονται **ἕδραι τοῦ κύβου.** Αἱ 6 ἕδραι τοῦ κύβου ὅλαι μαζὶ ἀποτελοῦν τὴν **ἐπιφάνειαν** αὐτοῦ. Αἱ γύρω γύρω 4 ἕδραι, αἱ ὁποῖαι λέγονται καὶ **παράπλευροι ἕδραι,** ἀποτελοῦν τὴν **παράπλευρον ἐπιφάνειαν τοῦ κύβου.** Ἡ ἕδρα, μὲ τὴν ὁποίαν στηρίζεται εἰς τὸ τραπέζι κ.τ.λ. ὁ κύβος, λέγεται **βάσις** τοῦ κύβου.

Αἱ παράπλευροι ἕδραι τοῦ κύβου εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις αὐτοῦ.



Σχ.1. Κύβος

Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΑΔ, ΑΕ κ.τ.λ. (σχῆμα 1), τὰ ὁποῖα σχηματίζονται ἀπὸ τὴν τομὴν δύο γειτονικῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου λέγονται **ἀκμαὶ** αὐτοῦ. Ὁ κύβος ἔχει **12 ἀκμάς.**

Ἐὰν μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον μετρήσωμεν τὰς ἀκμὰς τοῦ κύβου, βλέπομεν ὅτι αἱ **ἀκμαὶ τοῦ κύβου εἶναι ἴσαι** μεταξύ των.

Ἀλλὰ καὶ αἱ **ἕδραι τοῦ κύβου εἶναι ἴσαι** μεταξύ των. Τοῦτο τὸ διαπιστώνομεν, ἂν μὲ φύλλον τοῦ τετραδίου μας καλύψωμεν μίαν οἱανδήποτε ἕδραν τοῦ κύβου καὶ κόψωμεν κατόπιν τὸ χαρτὶ αὐτὸ ἴσον μὲ τὴν ἕδραν αὐτήν. Ἂν μὲ τὸ χαρτὶ αὐτὸ δοκιμάσωμεν ὅλας τὰς ἕδρας τοῦ κύβου, θὰ ἴδωμεν ὅτι αὐτὸ καλύπτει ἀκριβῶς κάθε ἕδραν τοῦ κύβου.

Κάθε δὲ ἕδρα τοῦ κύβου ἔχει πλευρὰς ἴσας μεταξύ των, ἐπειδὴ αὗται εἶναι ἀκμαὶ τοῦ κύβου. Συνεπῶς κάθε ἕδρα τοῦ κύβου εἶναι καὶ ἕνα **τετράγωνον.**

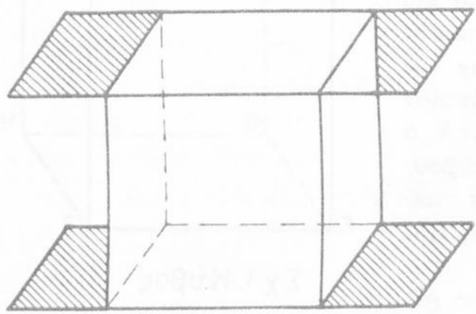
Αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου, ὅταν τέμνωνται ἀνὰ δύο, σχηματίζουν μεταξύ των γωνίας. Μὲ τὸν γνώμονα ἐξακριβώνομεν ὅτι αἱ γωνίαι αὐταὶ εἶναι ὀρθαὶ καὶ ὡς ὀρθαὶ εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

**Ἑπομένως:** Αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου, αἱ ὁποῖαι τέμνονται, εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

**Κορυφαὶ** τοῦ κύβου εἶναι αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν του. Ὁ κύβος ἔχει 8 κορυφάς.

Ἀπὸ κάθε κορυφὴν τοῦ κύβου ἀρχίζουν τρεῖς ἀκμαί· π.χ. ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α (σχ. 1) ξεκινοῦν αἱ ἀκμαὶ ΑΒ, ΑΔ, ΑΕ.

Τὰ μήκη τῶν ἀκμῶν αὐτῶν λέγονται **διαστάσεις τοῦ κύβου,** Ἡ μία λέγεται **μῆκος,** ἡ ἄλλη **πλάτος** ἢ πάχος καὶ ἡ τρίτη **ὕψος** ἢ βάθος. Αἱ διαστάσεις τοῦ κύβου, καθὼς καὶ κάθε στερεοῦ σώματος, εἶναι τρεῖς: μῆκος, πλάτος, ὕψος.



Σχ. 2

Αἱ ἀπέναντι ἕδραι τοῦ κύβου εἶναι παράλληλοι

**Αἱ διαστάσεις τοῦ κύβου εἶναι ἴσαι μεταξύ των.**

Ἂς ἐξετάσωμεν τὰς ἀπέναντι ἕδρας τοῦ κύβου, π.χ. τὴν ἄνω καὶ τὴν κάτω ἕδραν (σχ. 2).

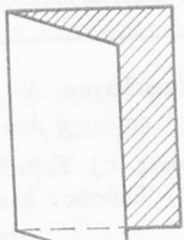
Παρατηροῦμεν ὅτι αὗται δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν τὰς προεκτείνωμεν. Ἑπομένως: **αἱ ἀπέναντι ἕδραι τοῦ κύβου εἶναι παράλληλοι.**

Ὁ κύβος ἔχει 6 ἕδρας, 12 ἀκμάς, 8 κορυφὰς καὶ 24 ὀρθὰς γωνίας.

## 2. Πολύεδρον — Δίεδρος γωνία

Ὁ κύβος, καθὼς καὶ κάθε στερεὸν σῶμα ποὺ περικλείεται ἀπὸ ὅλα τὰ μέρη μὲ ἕδρας, λέγεται **πολύεδρον σῶμα**. Κάθε πολυέδρου, ἑπομένως καὶ τοῦ κύβου, δύο γειτονικαὶ ἕδραι τεμνόμεναι σχηματίζουν μίαν γωνίαν, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἕδρας. Ἡ γωνία αὐτὴ λέγεται **δίεδρος** (σχ. 3).

Ἕνα μισοανοιγμένο βιβλίον, ἕνα φύλλον χάρτου τσακισμένον εἰς δύο μέρη μᾶς δίδουν τὴν εἰκόνα τῆς διέδρου γωνίας.



Σχ. 3. Δίεδρος γωνία

### Ἰχνογράφησις τοῦ κύβου

Διὰ νὰ σχεδιάσωμεν εἰς τὸ χαρτὶ ἢ εἰς τὸν πίνακα ἕνα κύβον καὶ γενικῶς ἕνα στερεὸν σῶμα, τοῦ ὁποίου δὲν βλέπομεν ὅλα τὰ γεωμετρικὰ στοιχεῖά του (πλευράς, ἀκμὰς κ.τ.λ.), σχεδιάζομεν μὲ συνεχεῖς γραμμὰς ὅσα στοιχεῖα βλέπομεν, ἐνῷ ὅσα στοιχεῖα δὲν βλέπομεν τὰ σχεδιάζομεν μὲ διακεκομμένας γραμμάς. Εἰς τὸ σχῆμα 1 αἱ διακεκομμέναι γραμμαὶ ΘΔ, ΘΕ, ΘΗ παριστάνουν ἀκμὰς κύβου, τὰς ὁποίας δὲν βλέπομεν.

Ἐρωτήσεις

α) Τί λέγεται κύβος; Ἀναφέρατε σώματα μὲ σχῆμα κύβου.

β) Ποῖα εἶναι τὰ γεωμετρικὰ στοιχεῖα τοῦ κύβου;

γ) Τί ἰδιότητα ἔχουν αἱ ἕδραι τοῦ κύβου, αἱ ἀκμαὶ αὐτοῦ, αἱ ἀπέναντι ἕδραι του;

δ) Τί λέγεται πολύεδρον καὶ τί λέγεται δίεδρος γωνία;

ε) Δείξατε ἐντὸς τῆς αἰθούσης τῆς τάξεώς σας διέδρους γωνίας.

## 3. Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας κύβου

### α) Ἐμβαδὸν ὁλικῆς ἐπιφανείας κύβου

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς 6 ἴσας ἕδρας του, κάθε μία τῶν ὁποίων εἶναι καὶ ἕνα τετράγωνον. **Ἑπομένως :**

| |
|---|
| *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου, πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς ἕδρας του ἐπὶ 6.* |

**Παράδειγμα.** *Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ ἔχει μῆκος 25 ἑκατ. τοῦ μέτρου.*

**Λύσις.** α) Ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας κύβου : 25 ἑκ. × 25 ἑκ. = 625 τ.ἑκ. β) Ἐμβαδὸν ὁλικῆς ἐπιφ. κύβου : 625 τ.ἑκ. × 6 = 3750 τ.ἑκ.

## β) Ἐμβαδὸν παραπλεύρου ἐπιφανείας κύβου

Γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι αἱ 4 παράπλευροι ἕδραι τοῦ κύβου ἀποτελοῦν τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν αὐτοῦ. **Συνεπῶς :**

| |
|---|
| *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ κύβου, πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς ἕδρας του ἐπὶ 4.* |

**Παράδειγμα.** *Ἡ ἀκμὴ ἑνὸς κύβου εἶναι 12 ἑκ. μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του;*

**Λύσις.** α) Ἐμβ. μιᾶς ἕδρας κύβου : 12 ἑκ. × 12 ἑκ. = 144 τ.ἑκ.
β) Ἐμβ. παραπλ. ἐπιφ. κύβου: 144 τ.ἑ. × 4 = 576 τ.ἑκ.

### Προβλήματα

27. Ἡ ἀκμὴ ἑνὸς κυβικοῦ δοχείου εἶναι 45 ἑκ. Νὰ εὑρεθῇ : α) τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ δοχείου καὶ β) τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του.

28. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κύβου εἶναι 124,8 τετρ. παλάμαι. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας του εἰς τετρ. ἑκατοστόμετρα;

29. Πόσα τετρ. μέτρα τσίγκου θὰ χρειασθῶμεν, διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα δοχεῖον σχήματος κύβου μὲ ἀκμὴν 18,5 ἑκατ.;

30. Θέλομεν νὰ χρωματίσωμεν τοὺς 4 τοίχους τῆς αἰθούσης τῆς τάξεώς μας σχήματος κύβου καὶ ἀκμῆς 4,25 μ. καθὼς καὶ τὴν ὀροφὴν της. Ἂν ὁ χρωματισμὸς τιμᾶται 16,30 δρχ. τὸ τ.μ., πόσον θὰ κοστίσῃ ὁ χρωματισμός της; (Τὰ κουφώματα δὲν ἀφαιροῦνται.)

31. Διὰ τὸν χρωματισμὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κύβου ἀκμῆς 3 μέτρων ἐπληρώσαμεν 540 δρχ. Πόσον ἐστοίχισεν ὁ χρωματισμὸς κατὰ τετρ. μέτρον;

32. Τὸ συνολικὸν μῆκος τῶν ἀκμῶν μιᾶς ἀποθήκης σχήματος κύβου εἶναι 72 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας της καὶ πόσον τῆς παραπλεύρου;

## 4. Μέτρησις τοῦ ὄγκου ἑνὸς σώματος
## Μονάδες ὄγκου

Κάθε σῶμα μέσα εἰς τὴν αἴθουσάν μας (θρανία, τραπέζι, καρέκλα, χάρται, βιβλία κλπ.) καταλαμβάνει ἕνα χῶρον (ἕνα μέρος). Ἀλλὰ καὶ κάθε σῶμα (εἰς τὸ ἄπειρον διάστημα ποὺ μᾶς περιβάλλει), καταλαμβάνει ἕνα χῶρον. Τὸν χῶρον αὐτὸν τὸν ὀνομάζομεν **ὄγκον τοῦ σώματος.**

Ὄγκος ὅμως ἑνὸς σώματος δὲν λέγεται μόνον ὁ χῶρος, τὸν ὁποῖον καταλαμβάνει τὸ σῶμα εἰς τὸ διάστημα, ἀλλὰ καὶ ὁ συγκεκριμένος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προκύπτει ἀπὸ τὴν σύγκρισιν τοῦ ὄγκου τοῦ σώματος πρὸς ἕνα ἄλλον ὄγκον **σταθερὸν καὶ ὡρισμένον,** τὸν ὁποῖον ὀνομάζομεν **μονάδα.**

Ὡς ἀρχικὴν μονάδα μετρήσεως τοῦ ὄγκου ἢ τῆς χωρητικότητος ἑνὸς σώματος χρησιμοποιοῦμεν τὸ **κυβικὸν μέτρον.** Τοῦτο εἶναι ἕνας κύβος, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ εἶναι ἴση μὲ ἕνα μέτρον (σχ. 4).

Σχ. 4 Κυβικὸν μέτρον

## Ὑποδιαίρεσις τοῦ κυβικοῦ μέτρου

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς ὑποδιαιρέσεις τοῦ κυβικοῦ μέτρου (κ.μ.), σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Ἡ βάσις τοῦ κ. μέτρου, ἡ ὁποία εἶναι, ὅπως γνωρίζομεν, ἕνα τετραγωνικὸν μέτρον, διαιρεῖται εἰς 100 τετραγωνικὰς παλάμας. Ἐὰν ἐπάνω εἰς ἑκάστην τετραγωνικὴν παλάμην τῆς βάσεως θέσωμεν ἀπὸ μίαν κυβικὴν παλάμην, βλέπομεν ὅτι σχηματίζεται ἕνα στρῶμα ἀπὸ 100 κυβικὰς παλάμας. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ὕψος τοῦ κ. μέτρου εἶναι 10 παλάμαι (1 μέτρον), διὰ νὰ γεμίσῃ τὸ κ.μ. θὰ χρειασθοῦν 10 ὅμοια στρώματα, δηλ. 10 φορὰς ἀπὸ 100 κυβικαὶ παλάμαι = 1000 κυβικαὶ παλάμαι.

**Ἄρα** τὸ κυβικὸν μέτρον ὑποδιαιρεῖται εἰς 1000 κυβ. παλάμας. Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι κάθε κυβικὴ παλάμη ὑποδιαιρεῖται εἰς 1000 κυβικὰ ἑκατοστόμετρα ἢ κυβικοὺς δακτύλους καὶ κάθε κυβικὸν ἑκατοστόμετρον εἰς 1000 κυβικὰ χιλιοστόμετρα ἢ κυβικὰς γραμμάς. Ἔτσι ἔχομεν :

| | | |
|---|---|---|
| *1 κυβικὸν μέτρον* | = | *1000 κυβ. παλάμαι.* |
| *1 κυβικὴ παλάμη* | = | *1000 κυβ. δάκτυλοι.* |
| *1 κυβ. δάκτυλος* | = | *1000 κυβ. γραμμαί.* |

**Ὥστε :** 1 κ.μ. = 1000 κ.π. = 1.000.000 κ.δ. = 1.000.000.000 κ.γρ.

**καὶ**

| | | |
|---|---|---|
| *1 κυβ. παλάμη* | = | *0,001 κυβ. μέτρου.* |
| *1 κυβ. δάκτυλος* | = | *0,000.001 κυβ. μέτρου.* |
| *1 κυβ. γραμμὴ* | = | *0,000.000.001 κυβ. μέτρου.* |

Ἐδῶ παρατηροῦμεν ὅτι : κάθε μονὰς τοῦ ὄγκου εἶναι 1000 φορὰς μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ἀμέσως κατωτέραν αὐτῆς μονάδα· ἢ ἀντιστρόφως εἶναι 1000 φορὰς μικροτέρα ἀπὸ τὴν ἀμέσως ἀνωτέραν αὐτῆς μονάδα.

## 5. Πῶς γράφομεν καὶ πῶς διαβάζομεν τοὺς ὄγκους

Τοὺς ὄγκους τοὺς γράφομεν μὲ δεκαδικὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον διαβάζομεν ὡς ἑξῆς: Διαβάζομεν πρῶτον τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, τὸ ὁποῖον φανερώνει κυβικὰ μέτρα. Κατόπιν χωρίζομεν τὸ δεκαδικὸν μέρος αὐτοῦ εἰς τριψήφια τμήματα ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιά.

Τὸ πρῶτον μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν τριψήφιον τμῆμα παριστᾷ κυβικὰς παλάμας, τὸ δεύτερον κυβικοὺς δακτύλους καὶ τὸ τρίτον κυβικὰς γραμμάς. Ἐὰν ἀπὸ τὸ τελευταῖον τμῆμα τοῦ δεκαδικοῦ μέρους λείπουν ἕνα ἢ δύο ψηφία, γράφομεν εἰς τὰς κενὰς θέσεις ἕνα ἢ δύο μηδενικὰ ἀναλόγως πρὸς συμπλήρωσιν τοῦ τριψηφίου τμήματος.

Ἔτσι οἱ παρακάτω ἀριθμοί, ποὺ παριστάνουν ὄγκους, διαβάζονται ὡς ἑξῆς:

α) 5,187235312 κ. μέτρ. διαβάζεται: 5 κ.μ. 187 κ.π. 235 κ.δ. 312 κ.γρ.

β) 0,165811 κ. μέτρ. διαβάζεται: 165 κ.π. 811 κ.δ.

γ) 8,24632171 κ. μέτρ. διαβάζεται: 8 κ.μ. 246 κ.π. 321 κ.δ. 710 κ.γρ.

δ) 15,0279136 κ. μέτρ. διαβάζεται: 15 κ.μ. 27 κ.π. 913 κ.δ. 600 κ.γρ.

Καὶ **ἀντιστρόφως**. Ἕνας ὄγκος, ὁ ὁποῖος ἐκφράζεται εἰς κ. μέτρα, κυβ. παλάμας, κυβ. δακτύλους καὶ κυβικὰς γραμμάς, δύναται νὰ γραφῇ μὲ δεκαδικὸν ἀριθμόν· π.χ.

α) 12 κ.μ. 413 κ.π. 625 κ.δ. γράφεται: 12,413625 κ.μ.

β) 136 κ.π. 457 κ.δ. 842 κ.γρ. » : 0,136457842 κ.μ.

γ) 87 κ.δ. 8 κ.γρ. » : 0,000087008 κ.μ.

## 6. Πῶς τρέπομεν μονάδας ὄγκου κατωτέρας τάξεως εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως καὶ ἀντιστρόφως

Ἀφοῦ κάθε μονὰς ὄγκου εἶναι 1000 φορὰς μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ἀμέσως κατωτέραν αὐτῆς μονάδα ἢ 1000 φορὰς μικροτέρα ἀπὸ τὴν ἀμέσως ἀνωτέραν αὐτῆς μονάδα, εὐκόλως ἐννοοῦμεν ὅτι:

> *Διὰ νὰ τρέψωμεν μονάδας ὄγκου μιᾶς τάξεως εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, πολλαπλασιάζομεν τὰς μονάδας τῆς ὡρισμένης τάξεως ἐπὶ 1000.*
>
> *Καὶ διὰ νὰ τρέψωμεν μονάδας ὄγκου μιᾶς τάξεως εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, διαιροῦμεν τὰς μονάδας τῆς ὡρισμένης τάξεως διὰ 1000.*

**Παράδειγμα 1.** *Πόσας κυβικὰς παλάμας περιέχουν τὰ 25 κ. μέτρα;*

**Λύσις.** 25 κ.μ. × 1000 = 25.000 κ.π.

**Παράδειγμα 2.** *Πόσα κυβικὰ μέτρα μᾶς κάμνουν αἱ 25000 κ. παλάμαι;*

**Λύσις.** 25.000 κ.π. : 1000 = 25 κ.μ.

Ἀσκήσεις

33. Πόσα κυβ. ἑκατοστόμετρα (κυβ. δακτύλους) περιέχουν αἱ 2,5 κ.π.;

34. Τὰ 560 κ. χιλιοστόμετρα (κυβ. γραμμαί) μὲ πόσους κ.δ. ἰσοδυναμοῦν;

35. Τὰ 800.000 κ. χιλιοστόμετρα νὰ τραποῦν εἰς κυβ. παλάμας.

36. Ὁ ὄγκος ἑνὸς κυβικοῦ δοχείου εἶναι 5,185 κ.μ. Μὲ πόσας κυβ. παλάμας ἰσοδυναμεῖ;

37. Νὰ γραφοῦν μὲ δεκαδικὸν ἀριθμὸν οἱ κάτωθι ὄγκοι :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| α) | 18 κ.μ. | 25 κ.π. | 142 κ.δ. | |
| β) | 6 κ.μ. | 82 κ.π. | 279 κ.δ. | 63 κ.γρ. |
| γ) | | 362 κ.π. | 75 κ.δ. | |
| δ) | | 3 κ.π. | 9 κ.δ. | 8 κ.γρ. |
| ε) | | 15 κ.π. | | 35 κ.γρ. |

## 7. Ὄγκος κύβου

**Πρόβλημα.** Ἡ αἴθουσα τῆς τάξεώς μας ἔχει σχῆμα κύβου μὲ ἀκμὴν 5 μέτρα. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της;

**Σκέψις.** Πρῶτον θὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πατώματος, τὸ ὁποῖον πάτωμα εἶναι ἕνα τετράγωνον μὲ πλευρὰν 5 μ. Ἑπομένως τὸ ἐμβαδόν του εἶναι 5 μ. × 5 μ. = 25 τετρ. μέτρα.

Εἰς κάθε τ.μ. τοῦ πατώματος δυνάμεθα νὰ τοποθετήσωμεν ἀπὸ ἕνα κυβικὸν μέτρον, ὁπότε σχηματίζεται ἕνα στρῶμα ἀπὸ 25 κυβικὰ μέτρα ὕψους 1 μέτρου. Καὶ ἐπειδὴ τὸ ὕψος τῆς αἰθούσης (ἡ ἀκμή) εἶναι 5 μέτρα, διὰ νὰ γεμίσῃ ἡ αἴθουσα θὰ χρειασθοῦν 5 ὅμοια στρώματα. Ἑπομένως ἡ αἴθουσα περιέχει:

25 κ.μ. × 5 = 125 κ.μ., τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τὸν ὄγκον της.

Ὁ ἀριθμὸς ὅμως 125 γίνεται ἀπὸ τὸν 5, ποὺ εἶναι ἡ ἀκμὴ τῆς αἰθούσης (τὸ ὕψος), ἀφοῦ πολλαπλασιάσωμεν τοῦτον ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του δύο φοράς· δηλ. 5 × 5 × 5 = 125.

**Ἔτσι** καταλήγομεν εἰς τὸν ἑξῆς κανόνα:

> *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον ἑνὸς κύβου, πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος τῆς ἀκμῆς του ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του δύο φοράς.*
> *Δηλ. Ὄγκος κύβου = ἀκμὴ × ἀκμὴν × ἀκμήν.*

**Παράδειγμα.** *Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ ἔχει μῆκος 1,5 μ.*

**Λύσις.** Ὄγκος κύβου = ἀκμὴ × ἀκμὴν × ἀκμὴν = 1,5 × 1,5 × 1,5 = 3,375 κ.μ.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

38. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ εἶναι 2,30 μ.

39. Μία δεξαμενὴ ἔχει σχῆμα κύβου μὲ ἀκμὴν 3,20 μ. Τὴν γεμίζομεν νερὸ καὶ διὰ κάθε κυβικὸν μέτρον νεροῦ πληρώνομεν 4,5 δρχ. Πόσα χρήματα θὰ πληρώσωμεν διὰ τὸ νερό;

40. Εἰς τὴν αἴθουσαν τῆς τάξεώς μας, σχήματος κύβου μὲ ἀκμὴν μήκους 6 μ., διδάσκονται 40 μαθηταί. Πόσος ὄγκος ἀέρος ἀναλογεῖ εἰς ἕκαστον μαθητήν;

41. Μία βρύση παρέχει 20 κ.μ. νερὸ τὴν ὥραν. Πόσας ὥρας χρειάζεται, διὰ νὰ γεμίσῃ κυβικὴν δεξαμενὴν μὲ ἀκμὴν μήκους 6 μέτρων;

42. Ἕνα δοχεῖον κυβικὸν ἔχει ἀκμὴν μήκους 0,75 μ. Πόσας λίτρας ὕδατος χωρεῖ; (Λίτρα εἶναι ἡ χωρητικότης μιᾶς κυβικῆς παλάμης.)

43. Ἡ ἀκμὴ ἑνὸς δοχείου εἶναι 1 μέτρον. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου καὶ πόσα χιλιόγραμμα (κιλά) λάδι χωρεῖ, ἂν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἐλαίου (λαδιοῦ) εἶναι 0,912; (Βάρος = ὄγκος × εἰδικὸν βάρος.)

**Λύσις.** Ὄγκος δοχείου = 1 × 1 × 1 = 1 κ.μ.

Βάρος = ὄγκος × εἰδικὸν βάρος = 1 × 0,912 = 0,912 τόννοι.

Ὁ 1 τόννος ἔχει βάρος 1000 χιλιόγραμμα (κιλά), τὰ 0,912 τοῦ τόννου θὰ ἔχουν 1000 × 0,912 = 912 χιλιόγραμμα.

44. Μία κυβικὴ δεξαμενὴ ἔχει ἀκμὴν 7,80 μ. Νὰ εὑρεθῇ α) ὁ ὄγκος της καὶ β) πόσους τόννους νερὸ χωρεῖ. (Εἰδικὸν βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου 1.)

45. Μία ἀποθήκη σχήματος κύβου ἔχει ὕψος 4 μέτρα. Πόσα κυβικὰ μέτρα σίτου χωρεῖ καὶ πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ σίτου: α) εἰς τόννους καὶ β) εἰς κιλά, ἂν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σίτου εἶναι 1,56;

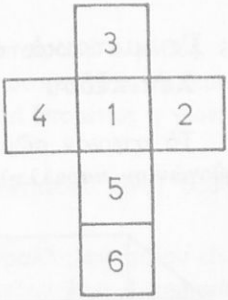
**Σημείωσις.** Τὸ βάρος κάθε σώματος εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὄγκον του ἐπὶ τὸ εἰδικὸν βάρος του. (Ἂν ὁ ὄγκος ἐκφράζεται εἰς κ. μ., τὸ βάρος θὰ φανερώνῃ τόννους· ἂν ὁ ὄγκος ἐκφράζεται εἰς κ. παλάμας, τὸ βάρος θὰ φανερώνῃ κιλά· καί, ἂν ὁ ὄγκος ἐκφράζεται εἰς κ. δακτύλους, τὸ βάρος θὰ φανερώνῃ γραμμάρια.)

Ὑπενθυμίζομεν ὅτι 1 τόννος = 1000 κιλὰ = 1.000.000 γραμμάρια.

## Πῶς κατασκευάζομεν κύβον

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα κύβον μὲ χαρτόνι, σχηματίζομεν εἰς τὸ χαρτόνι τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ κύβου, δηλ. τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον παρουσιάζει ὁ κύβος, ὅταν ξεδιπλώσωμεν τὰς ἕδρας του καὶ τὰς ἁπλώσωμεν ἐπὶ τῆς ἰδίας ἐπιπέδου ἐπιφανείας.

Τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ κύβου ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 ἴσα τετράγωνα εἰς σχῆμα σταυροῦ (σχ. 5). Κατόπιν μὲ τὸ ψαλίδι κόπτομεν τὸν σταυρὸν αὐτὸν ἀπὸ τὸ χαρτόνι καὶ μὲ ξυραφάκι χαράσσομεν ἐλαφρῶς τὴν περίμετρον τοῦ τετραγώνου 1 καὶ τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία συνδέει τὰ τετράγωνα 5 καὶ 6, ὥστε νὰ κλείουν χωρὶς ὅμως νὰ ἀποκοποῦν.



Σχ. 5

Μετὰ ταῦτα κρατοῦμεν ἐπάνω εἰς τὸ τραπέζι τὸ τετράγωνον 1 καὶ εἰς τὰς πλευράς του ὑψώνομεν τὰ τετράγωνα 2, 3, 4, καὶ 5, ὁπότε σχηματίζεται ἕνα κουτὶ ἀνοικτὸν εἰς τὸ ἐπάνω μέρος.

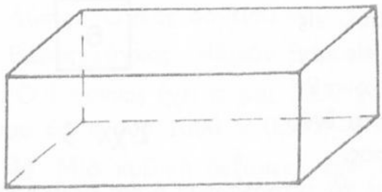
Τὸ κουτὶ αὐτὸ τὸ κλείομεν μὲ τὸ τετράγωνον 6 καὶ ἔχομεν ἕτοιμον τὸν κύβον. Εἰς τὰς ἀκμὰς τοῦ κύβου ἐπικολλῶμεν ταινίας χάρτου, διὰ νὰ συνδεθοῦν.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

# ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΝ

### 1. Γεωμετρικὰ στοιχεῖα τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Τὸ στερεὸν σῶμα, τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὸ σχῆμα 6, λέγεται **ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.** Τὸ κουτὶ τῶν σπίρτων, τὸ κουτὶ τῆς κιμωλίας, ἡ κασετίνα, αἱ πλάκες μερικῶν εἰδῶν σάπωνος ἔχουν σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.



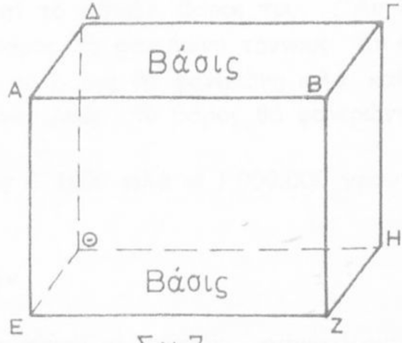
Σχ. 6
Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον

Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον περικλείεται, ὅπως καὶ ὁ κύβος, ἀπὸ 6 ἐπιπέδους ἐπιφανείας, αἱ ὁποῖαι λέγονται **ἕδραι** αὐτοῦ.

Ἀπ' αὐτὰς μόνον αἱ ἀπέναντι ἕδραι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Τὸ σύνολον τῶν ἑδρῶν ἀποτελεῖ τὴν **ὁλικὴν ἐπιφάνειαν** τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Ἡ ἕδρα μὲ τὴν ὁποίαν στηρίζεται τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον καὶ ἡ ἀπέναντι αὐτῆς ἕδρα λέγονται **βάσεις** αὐτοῦ.

Συνήθως ὡς βάσεις λαμβάνονται αἱ δύο μεγαλύτεραι ἕδραι (σχῆμα 7). Αἱ ὑπόλοιποι 4 ἕδραι λέγονται **παράπλευροι ἕδραι.** Αὗται




Σχ. 7

εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις καὶ ἀποτελοῦν τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΑΔ, ΑΕ κ.τ.λ., τὰ ὁποῖα γίνονται ἀπὸ τὴν τομὴν δύο γειτονικῶν ἑδρῶν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, λέγονται **ἀκμαὶ** αὐτοῦ (σχ. 7).

Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει, ὅπως καὶ ὁ κύβος, 12 ἀκμάς. Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ γνώμονος διαπιστώνομεν, ὅτι αἱ ἀκμαί, αἱ ὁποῖαι τέμνονται, εἶναι κάθετοι μεταξύ των καὶ ἐπομένως ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν, εἶναι ὀρθή.

Ὅλαι αἱ γωνίαι τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου εἶναι ὀρθαί. **Τοῦτο ἔχει 24 ὀρθὰς γωνίας.**

Αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν τοῦ ὀρθογων. παραλληλεπιπέδου εἶναι καὶ κορυφαὶ αὐτοῦ. Τὸ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδον **ἔχει 8 κορυφάς.** Ἀπὸ κάθε κορυφήν του ἀρχίζουν τρεῖς ἀκμαί. Π.χ. ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α (σχ. 7) ἀρχίζουν αἱ ἀκμαὶ ΑΒ, ΑΔ καὶ ΑΕ. Τὰ μήκη τῶν ἀκμῶν αὐτῶν λέγονται διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Ἡ μία ἐξ αὐτῶν, συνήθως ἡ μεγαλυτέρα, λέγεται **μῆκος,** ἡ ἄλλη **πλάτος** ἢ πάχος καὶ ἡ τρίτη **ὕψος** ἢ βάθος.

### Ἰχνογράφησις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

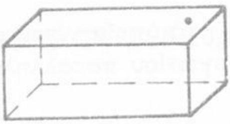
Τὸ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδον τὸ ἰχνογραφοῦμεν ὅπως καὶ τὸν κύβον. Δηλ. ὅσα στοιχεῖα (ἕδρας, ἀκμάς, γωνίας) βλέπομεν, τὰ παριστῶμεν μὲ συνεχεῖς γραμμάς, ἐνῷ ὅσα δὲν βλέπομεν, τὰ παριστῶμεν μὲ διακεκομμένας γραμμάς (σχ. 7).

## 2. Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

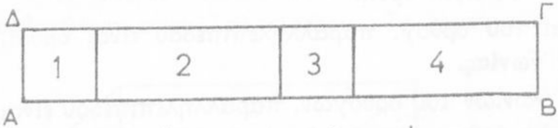
### α) Ἐμβαδὸν παραπλεύρου ἐπιφανείας του

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Μὲ φύλλον χάρτου καλύπτομεν ἀκριβῶς τὰς 4 παραπλεύρους ἕδρας τῆς κασετίνας μας (σχ. 8), ἡ ὁποία ἔχει σχῆμα ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου.

Κατόπιν ἁπλώνομεν τὸ φύλλον αὐτὸ ἐπάνω εἰς τὸ τετράδιόν μας καὶ βλέπομεν ὅτι τοῦτο ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου (σχ. 9). Τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο ΑΒΓΔ ἔχει βάσιν τὴν ΑΒ καὶ ὕψος τὴν ΑΔ. Διὰ μετρήσεων δὲ μὲ τὸ ὑποδεκάμετρόν μας ἐξακριβώνομεν, ὅτι ἡ βάσις ΑΒ τοῦ ὀρθογωνίου ἰσοῦται μὲ τὴν περίμετρον τῆς κασετίνας μας, δηλ. τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.



Σχ. 8. Κασετίνα




Σχ. 9. Παράπλευρος ἐπιφάνεια ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς κασετίνας, ἡ ὁποία ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ. Καί, ὅπως γνωρίζομεν, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τὸ εὑρίσκομεν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ μῆκος τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

**Ἑπομένως :** *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, πολλαπλασιάζομεν τὴν περίμετρον τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος του.*

*Δηλ. Ἐμβ. παραπλ. ἐπιφ. ὀρθογ. παραλληλεπ. = περίμ. βασ. × ὕψος.*

**Παράδειγμα.** *Μία πλάκα σάπωνος, σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἔχει μῆκος 20 ἑκ., πλάτος 8 ἑκ. καὶ ὕψος 5 ἑκ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της;*

**Λύσις.** Περίμετρος βάσεως = 20 + 20 + 8 + 8 = 56 ἑκ.

Ἐμβ. παραπλ. ἐπιφαν. = περίμ. βάσ. × ὕψος = 56 × × 5 = 280 τ.ἑκ.

## β) Ἐμβαδὸν ὁλικῆς ἐπιφανείας ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

**Πρόβλημα.** *Τὸ κουτὶ τῆς κιμωλίας, σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἔχει μῆκος 25 ἑκ., πλάτος 12 ἑκ. καὶ ὕψος 9 ἑκ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.*

**Σκέψις.** Ἀφοῦ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν αὐτοῦ καὶ ἀπὸ τὰς δύο βάσεις του, εὐκόλως ἐννοοῦμεν ὅτι θὰ πρέπῃ νὰ εὕρωμεν: α) τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του, ὅπως εἴδομεν ἀνωτέρω, καὶ β) τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεών του. Καὶ κατόπιν νὰ προσθέσωμεν τὰ δύο ἐμβαδά. Αἱ βάσεις του ἔχουν σχῆμα ὀρθογωνίου καὶ εἶναι ἴσαι. Ἑπομένως ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς βάσεως.

Καὶ εὑρίσκομεν τοῦτο, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ μῆκος τοῦ ὀρθογωνίου (βάσιν) ἐπὶ τὸ πλάτος του (ὕψος).

**Λύσις.** α) Περίμετρος βάσεως $= 25 + 25 + 12 + 12 = 74$ ἑκ.

β) Ἐμβ. παραπλ. ἐπιφ. $=$ Περίμ. βάσ. $\times$ ὕψος $= 74 \times 9 =$
$= 666$ τ.ἑ.κ.

γ) Ἐμβ. μιᾶς βάσεως $= 25 \times 12 = 300$ τ.ἑκ.

**Ἄρα:** Ἐμβ. ὁλικῆς ἐπιφανείας $= 666 + 300 + 300 = 1266$ τ.ἑκ.

> **Ὥστε:** *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, προσθέτομεν εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεών του.*
>
> *Δηλ. Ἐμβ. ὁλικ. ἐπιφ. = Ἐμβ. παρ. ἐπιφ. + ἐμβ. 2 βάσ.*

Ἐρωτήσεις

α) Ποῖα εἶναι τὰ στοιχεῖα τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου;

β) Κατὰ τί ὁμοιάζει μὲ τὸν κύβον καὶ εἰς τί διαφέρει ἀπ' αὐτόν;

γ) Δείξατε ἐπὶ τῆς κασετίνας σας δύο ἴσας καὶ παραλλήλους ἕδρας της, δύο καθέτους ἕδρας πρὸς τὴν βάσιν, ὡς καὶ τὰς διαστάσεις τῆς κασετίνας.

δ) Μὲ ἕνα μέτρον μετρήσατε τὰς διαστάσεις τῆς αἰθούσης τῆς τάξεώς σας.

ε) Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ γνώμονος ἐλέγξατε τί εἴδους γωνίας ἔχει ἡ κασετίνα σας.

στ) Πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ πῶς τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ;

Προβλήματα

46. Ἡ αἴθουσα τῆς ΣΤ´ τάξεως ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ μῆκος 8 μ., πλάτος 5 μ. καὶ ὕψος 3 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της.

47. Τὸ μῆκος ἑνὸς δωματίου εἶναι 5 μ., τὸ πλάτος του 4 μ. καὶ τὸ ὕψος του 3 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του;

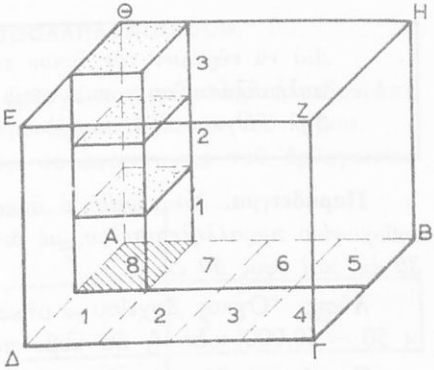
48. Μία στήλη (κολώνα), σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἔχει ὕψος 4 μ. καὶ ἡ βάσις της ἔχει διαστάσεις 0,50 μ. καὶ 0,40 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας της.

49. Μία ἄλλη στήλη, ἰδίου σχήματος, ἔχει βάσιν τετράγωνον μὲ πλευρὰν 0,50 μ. Τὸ ὕψος τῆς στήλης εἶναι 4,5 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ α) τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της καὶ β) τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας της.

50. Ἑνὸς σιδηροῦ δοχείου (ντεπόζιτου), σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, μήκους 2,5 μ., πλάτους 1,20 μ. καὶ ὕψους 0,90 μ., θέλομεν νὰ τοῦ χρωματίσωμεν ἐξωτερικῶς ὅλας τὰς ἕδρας. Πόσον θὰ πληρώσωμεν, ἂν ὁ χρωματισμὸς τιμᾶται 16 δρχ. τὸ τετραγωνικὸν μέτρον;

## 3. Ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

**Πρόβλημα.** *Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος ἑνὸς δωματίου μήκους 4 μ., πλάτους 2 μ. καὶ ὕψους 3 μ.; (σχ. 10)*




Σχ. 10

Όγκος ορθογ. παραλληλ/δου

**Σκέψις.** Ἐπειδὴ τὸ δωμάτιον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τὸ δὲ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδον ὁμοιάζει πολὺ μὲ τὸν κύβον, θὰ ἐργασθῶμεν ὅπως καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ὄγκου τοῦ κύβου.

Θὰ εὕρωμεν δηλ. τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ δωματίου. Τοῦτο εἶναι 4 × 2 = 8 τ. μέτ. Ἐὰν ἐπὶ ἑκάστου τ.μ. τῆς βάσεως θέσωμεν ἀνὰ ἕνα κυβικὸν μέτρον, θὰ σχηματισθῇ ἐπὶ τοῦ πατώματος τοῦ δωματίου ἕνα στρῶμα ἀπὸ 8 κυβικὰ μέτρα ὕψους 1 μέτρου (σχ. 10). Καί, διὰ νὰ γεμίσῃ τὸ δωμάτιον, θὰ χρειασθοῦν 3 ὅμοια στρώματα, διότι 3 μ. εἶναι τὸ ὕψος τοῦ δωματίου.

Ἑπομένως τὸ δωμάτιον θὰ περιλάβῃ 8 × 3 = 24 κ.μ.

Ὁ ἀριθμὸς 24 κ.μ. ἀποτελεῖ τὸν ὄγκον τοῦ δωματίου ἢ τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. **Ἑπομένως :**

> *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος του.*
>
> *Δηλαδή : Ὄγκος ὀρθογ. παραλληλεπιπ. = ἐμβ. βάσ. × ὕψος.*

Τὸ ἐμβαδὸν ὅμως τῆς βάσεως εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος της, ποὺ μαζὶ μὲ τὸ ὕψος ἀποτελοῦν τὰς τρεῖς διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Δι' αὐτὸ ὁ κανὼν εὑρέσεως τοῦ ὄγκου τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου δύναται νὰ διατυπωθῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

*Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, πολλαπλασιάζομεν τὰς τρεῖς διαστάσεις αὐτοῦ.*
*Δηλ. Ὄγκος ὀρθ. παρ/δου = μῆκος × πλάτος × ὕψος.*

**Παράδειγμα.** *Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος δοχείου πετρελαίου, σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, μὲ διαστάσεις : μῆκος 40 ἑκ., πλάτος 30 ἑκ. καὶ ὕψος 50 ἑκ.*

**Λύσις.** Ὄγκος δοχείου = μῆκος × πλάτος × ὕψος = 40 × 30 × 50 = 60.000 κ.ἑκ. ἢ 60 κυβ. παλάμαι.

**Σημείωσις.** Ὑπενθυμίζομεν ὅτι καὶ αἱ τρεῖς διαστάσεις πρέπει νὰ μετρῶνται μὲ τὴν ἰδίαν μονάδα.

Προβλήματα

51. Μετρήσατε τὰς διαστάσεις τῆς αἰθούσης τῆς τάξεώς σας, σχήματος ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου, καὶ ὑπολογίσατε πόσος ὄγκος ἀέρος ἀναλογεῖ εἰς κάθε μαθητὴν τῆς τάξεώς σας. (Προσέξατε· ἐκτὸς ἀπὸ τὰς διαστάσεις τί ἄλλο θὰ σᾶς χρειασθῇ;)

52. Μία αἴθουσα, σχήματος ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου, ἔχει μῆκος 6,50 μ., πλάτος 5.40 μ. καὶ ὕψος 3 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της;

53. Κτίστης κτίζει τοῖχον, σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, μήκους 56,34 μ., πάχους 0,40 μ. καὶ ὕψους 1,20 μ. Πόσα χρήματα θὰ λάβῃ διὰ τὴν ἐργασίαν του, ἂν κάθε κυβικὸν μέτρον τιμᾶται 84 δραχμάς;

54. Μίαν πλατεῖαν, σχήματος ὀρθογωνίου, μήκους 80 μ. καὶ πλάτους 50 μ., θέλομεν νὰ τὴν στρώσωμεν μὲ χαλίκια εἰς πάχος 0,12 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα χαλίκια χρειαζόμεθα;

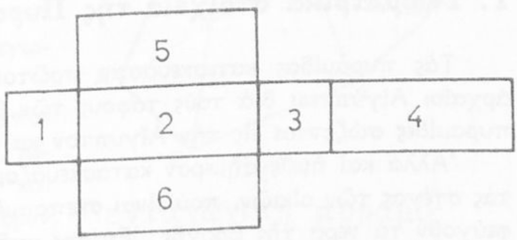
55. Διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ πατώματος ἑνὸς δωματίου ἠγοράσαμεν 25 σανίδας, σχήματος ὀρθογων. παραλληλεπιπέδου, μὲ μῆκος 2,65 μ., πλάτος 0,30 μ. καὶ πάχος 0,02 μ. Ἂν ἡ ξυλεία αὐτὴ τιμᾶται 8.000 δρχ. τὸ κυβικὸν μέτρον, πόσα χρήματα ἐπληρώσαμεν;

56. Ἕνα δοχεῖον (ντεπόζιτον), σχήματος ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου, μὲ μῆκος 1,40 μ., πλάτος 0,50 μ. καὶ ὕψος 0,80 μ., εἶναι γεμᾶτον λάδι. Πόσα κιλὰ λάδι περιέχει; (Εἰδικὸν βάρος ἐλαίου 0,912).

## Κατασκευὴ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἀπὸ χαρτόνι, ἐργαζόμεθα ὅπως καὶ διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ κύβου.

Σχηματίζομεν εἰς τὸ χαρτόνι τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 11. Μὲ τὸ ψαλίδι κόπτομεν αὐτὸ ἀπὸ τὸ χαρτόνι. Κατόπιν μὲ ξυραφάκι χαράσσομεν ἐλαφρῶς τὴν περίμετρον τοῦ ὀρθογωνίου 2 καὶ τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία συνδέει τὰ ὀρθογώνια 3 καὶ 4.




Σχ. 11

Ἀνάπτυγμα ὀρθογ. παρ/δου

Κατόπιν στηρίζομεν ἐπὶ τῆς τραπέζης τὸ ὀρθογώνιον 2 καὶ ὑψώνομεν τὰ ὀρθογώνια 1, 3, 5, 6. Τοιουτοτρόπως ἔχομεν ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἀνοικτὸν εἰς τὸ ἐπάνω μέρος.

Τοῦτο κλείομεν μὲ τὸ ὀρθογώνιον 4. Εἰς τὰς ἀκμὰς τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἐπικολλῶμεν χαρτί, διὰ νὰ συνδεθοῦν.

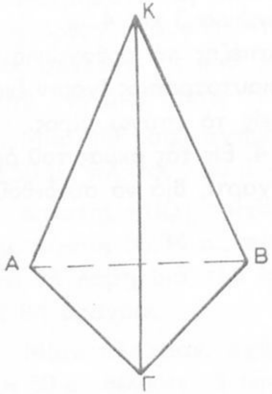
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

# ΠΥΡΑΜΙΔΕΣ

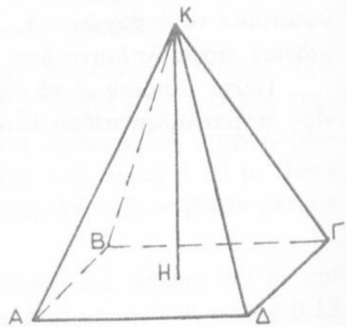
## 1. Γεωμετρικὰ στοιχεῖα τῆς Πυραμίδος

Τὰς πυραμίδας κατεσκεύασαν πρῶτοι, ὅπως γνωρίζομεν, οἱ ἀρχαῖοι Αἰγύπτιοι διὰ τοὺς τάφους τῶν βασιλέων των. Τοιαῦται πυραμίδες σώζονται εἰς τὴν Αἴγυπτον καὶ σήμερον ἀκόμη.

Ἀλλὰ καὶ ἡμεῖς σήμερον κατασκευάζομεν εἰς σχῆμα πυραμίδος τὰς στέγας τῶν οἰκιῶν, ποὺ εἶναι σκεπασμέναι μὲ κεραμίδια, διὰ νὰ φεύγουν τὰ νερὰ τῆς βροχῆς. Ἐπίσης σχῆμα πυραμίδος ἔχουν τὰ μνημεῖα καὶ αἱ ἀναμνηστικαὶ στῆλαι.

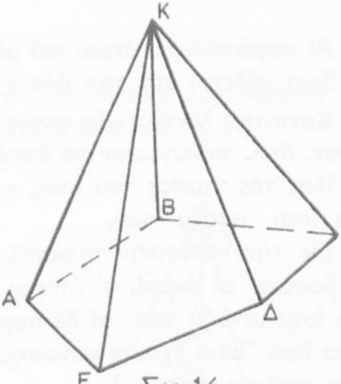



Σχ.12. Τριγωνική πυραμίς




Σχ. 13
Τετραγωνική πυραμίς

Τὰ στερεὰ σώματα, ποὺ εἰκονίζονται ἐδῶ (σχ. 12, 13, 14), εἶναι πυραμίδες. Καθὼς βλέπομεν, κάθε μία ἀπὸ τὰς πυραμίδας αὐτὰς περικλείεται ἀπὸ ἐπιπέδους ἐπιφανείας, αἱ ὁποῖαι λέγονται ἕδραι τῆς πυραμίδος. Ἡ ἕδρα, μὲ τὴν ὁποίαν στηρίζεται ἡ πυραμίς, λέγεται **βάσις** αὐτῆς.



Σχ. 14
Πενταγωνική πυραμίς

Ἡ βάσις τῆς πυραμίδος δύναται νὰ εἶναι οἱονδήποτε εὐθύγραμμον σχῆμα: τρίγωνον, τετράγωνον, πεντάγωνον κλπ. Ἀπὸ τὸ σχῆμα δὲ τῆς βάσεώς της λαμβάνει ἡ πυραμὶς καὶ τὴν ὀνομασίαν της: τριγωνικὴ πυραμίς, τετραγωνική, πενταγωνικὴ κλπ.

Αἱ ὑπόλοιποι ἕδραι τῆς πυραμίδος, πλὴν τῆς βάσεως, λέγονται **παράπλευροι ἕδραι** καὶ ἀποτελοῦν τὴν **παράπλευρον ἐπιφάνειαν** τῆς πυραμίδος. Κάθε παράπλευρος ἕδρα ἔχει σχῆμα τριγώνου μὲ βάσιν μίαν πλευρὰν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος. Ἑπομένως αἱ παράπλευροι ἕδραι κάθε πυραμίδος εἶναι ὅσαι αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως.

Αἱ παράπλευροι ἕδραι τῆς πυραμίδος συναντῶνται ὅλαι εἰς ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἔξω ἀπὸ τὴν βάσιν καὶ ἀπέναντι αὐτῆς. Τὸ σημεῖον αὐτὸ λέγεται **κορυφὴ τῆς πυραμίδος.**

**Ὥστε :**

**Πυραμὶς** *λέγεται τὸ πολύεδρον, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν μὲν ἕνα οἱονδήποτε εὐθύγραμμον σχῆμα, παραπλεύρους δὲ ἕδρας τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσιν τὰς πλευρὰς τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος καὶ μίαν κοινὴν κορυφήν, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἔξω τῆς βάσεως.*

Ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος ἀπὸ τὴν βάσιν της λέγεται **ὕψος τῆς πυραμίδος.**

**Ἀκμαὶ** τῆς πυραμίδος λέγονται τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, εἰς τὰ ὁποῖα τελειώνει κάθε ἕδρα της. Διακρίνομεν **παραπλεύρους ἀκμὰς** τῆς πυραμίδος καὶ **ἀκμὰς τῆς βάσεως** αὐτῆς.

Αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ καὶ αἱ παράπλευροι ἕδραι τῆς πυραμίδος δὲν εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν βάσιν αὐτῆς.

**Κανονικὴ** λέγεται μία πυραμίς, ὅταν ἔχῃ βάσιν κανονικὸν πολύγωνον, δηλ. πολύγωνον τὸ ὁποῖον ἔχει ὅλας τὰς πλευράς του ἴσας καὶ ὅλας τὰς γωνίας του ἴσας, καὶ ὅταν αἱ παράπλευροι ἀκμαί της εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

Εἰς τὴν κανονικὴν πυραμίδα τὸ ὕψος περνᾷ ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς βάσεως· αἱ ἀκμαί, αἱ ὁποῖαι συναντῶνται εἰς τὴν κορυφήν της, εἶναι ἴσαι μεταξύ των, αἱ δὲ παράπλευροι ἕδραι εἶναι ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἴσα. Ἔτσι ἔχομεν κανονικὰς πυραμίδας τριγωνικάς, τετραγωνικάς, πολυγωνικάς.

## ΙΧΝΟΓΡΑΦΗΣΙΣ ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ

Διὰ νὰ ἰχνογραφήσωμεν πυραμίδα, σχηματίζομεν πρῶτον τὴν βάσιν της· κατόπιν ἀπὸ ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἔξω ἀπὸ τὴν βάσιν καὶ ἀπέναντι αὐτῆς (κορυφή), φέρομεν εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ ὁποῖα ἑνώνουν τὸ σημεῖον τοῦτο μὲ τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν τῆς βάσεως. Τὰς ἀκμὰς τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν τῆς πυραμίδος, τὰς ὁποίας δὲν βλέπομεν, τὰς σχηματίζομεν μὲ διακεκομμένα εὐθύγραμμα τμήματα.

Ἐ ρ ω τ ή σ ε ι ς

α) Τί λέγεται πυραμὶς καὶ ποῖα τὰ γεωμετρικὰ στοιχεῖα αὐτῆς;

β) Τί λέγεται βάσις τῆς πυραμίδος, τί κορυφὴ καὶ τί ὕψος αὐτῆς;

γ) Τί σχῆμα ἔχουν αἱ παράπλευροι ἕδραι τῆς πυραμίδος;

δ) Τί σχῆμα ἔχει ἡ βάσις τῆς πυραμίδος;

ε) Ἀπὸ ποῦ παίρνουν τὴν ὀνομασίαν των αἱ πυραμίδες;

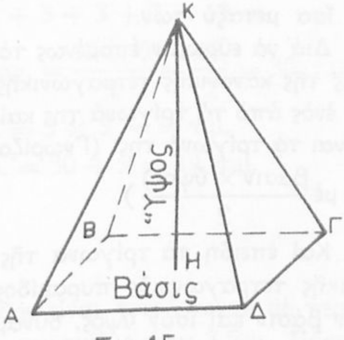
στ) Τί θέσιν ἔχουν αἱ παράπλευροι ἕδραι μιᾶς πυραμίδος ὡς πρὸς τὴν βάσιν της;

ζ) Τί λέγεται κανονικὴ πυραμὶς καὶ ποῖα τὰ ἰδιαίτερα γνωρίσματά της;

## 2. Τετραγωνική πυραμίς

Ἡ πυραμίς, τὴν ὁποίαν βλέπομεν ἐδῶ (σχ. 15), λέγεται τετραγωνικὴ πυραμίς, διότι ἔχει βάσιν τετράπλευρον.

Ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς περικλείεται ἀπὸ 5 ἕδρας, δηλ. ἀπὸ τὴν ἕδραν τῆς βάσεως, ἡ ὁποία εἶναι τετράπλευρον, καὶ ἀπὸ τὰς 4 ἕδρας τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της, αἱ ὁποῖαι εἶναι τρίγωνα καὶ συναντῶνται εἰς ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον λέγεται κορυφὴ τῆς πυραμίδος. Καὶ αἱ 5 ἕδραι μαζὶ ἀποτελοῦν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος.



Σχ. 15

Εἰς τὴν τετραγωνικὴν πυραμίδα διακρίνομεν τὰς 4 παραπλεύρους ἀκμάς της καὶ τὰς 4 ἀκμὰς τῆς βάσεώς της. Ἔχει δηλ. αὕτη 8 ἀκμάς, 8 διέδρους γωνίας καὶ 5 κορυφάς· δηλ. τὴν κυρίως κορυφὴν τῆς πυραμίδος καὶ τὰς 4 τῆς βάσεως.

**Ὕψος** τῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος λέγεται ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος ἀπὸ τὴν βάσιν αὐτῆς.

Ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς εἶναι **κανονικὴ πυραμίς,** ὅταν 1) ἡ βάσις της εἶναι κανονικὸν πολύγωνον, δηλαδὴ τετράγωνον καὶ 2) αἱ παράπλευροι ἀκμαί της εἶναι ἴσαι μεταξύ των, δηλαδὴ ἔχῃ τὰς παραπλεύρους ἕδρας της τρίγωνα ἰσοσκελῆ καὶ ἴσα μεταξύ των.

**Σημείωσις.** Τὸ σχῆμα τῆς κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος τὸ βλέπομεν εἰς μνημεῖα, εἰς ἀναμνηστικὰς στήλας καὶ εἰς κωδωνοστάσια τῶν ἐκκλησιῶν. Εἰς τὴν Αἴγυπτον, εἰς τὴν περιοχὴν τῆς Γκίζης νοτιοδυτικῶς τοῦ Καΐρου, εὑρίσκεται ἡ μεγάλη πυραμὶς τοῦ Χέοπος· αὕτη ἔχει βάσιν τετράγωνον μὲ μῆκος πλευρᾶς 227 μέτρα καὶ ὕψος 138 μέτρα.

### α) Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας κανονικῆς τετραγωνικῆς Πυραμίδος

Ὅπως γνωρίζομεν, ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς εἶναι κανονικὴ καὶ ὡς τοιαύτη ἔχει τὰς παραπλεύρους ἕδρας της τρίγωνα ἰσοσκελῆ καὶ ἴσα μεταξύ των.

Διὰ νὰ εὕρωμεν ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς ἀπὸ τὰ τρίγωνά της καὶ τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 4, διότι 4 εἶναι τὰ τρίγωνά της. (Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ἰσοῦται μὲ $\frac{\text{βάσιν} \times \text{ὕψος}}{2}$).

Καὶ ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος εἶναι ἴσα μεταξύ των καὶ ἔχουν ἴσην βάσιν καὶ ἴσον ὕψος, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν εὐκολώτερα τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν περίμετρον τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ὕψος τῶν τριγώνων καὶ τὸ γινόμενον τὸ διαιρέσωμεν διὰ 2. Τὸ ὕψος τῶν τριγώνων αὐτῶν εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος ἀπὸ τὴν πλευρὰν τῆς βάσεώς της, καὶ λέγεται **ἀπόστημα** τῆς Πυραμίδος.

Ἐὰν δὲ εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας προσθέσωμεν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως, ἡ ὁποία εἶναι τετράγωνον (πλευρὰ × πλευράν), θὰ ἔχωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος. **Ἑπομένως :**

*Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος, πολλαπλασιάζομεν τὴν περίμετρον τῆς βάσεως αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἀπόστημά της καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 2.*

*Δηλ. Ἐμβαδὸν παραπλ. ἐπιφ. καν. τετραγ. Πυραμίδος*

$$= \frac{\textit{περίμ. βάσ.} \times \textit{ἀπόστημα}}{2}$$

*Καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος ἰσοῦται μὲ Ἐμβαδὸν παραπλεύρου ἐπιφανείας + Ἐμβ. βάσεως.*

**Παράδειγμα.** *Κανονικὴ πυραμὶς ἔχει βάσιν τετράγωνον μὲ πλευρὰν 3 μ. Ἐὰν τὸ ἀπόστημα τῆς πυραμίδος εἶναι 5 μ., πόσον εἶναι α) τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της καὶ β) τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας της;*

**Λύσις.** α) Περίμετρος βάσεως $= 3 + 3 + 3 + 3 = 12$ μ.

β) Ἐμβαδὸν παραπλ. ἐπιφαν. $= \dfrac{12 \times 5}{2} = \dfrac{60}{2} = 30$ τ.μ.

γ) Ἐμβαδ. βάσεως πυραμ. $= 3 \times 3 = 9$ τ.μ.

δ) Ἐμβ. ὁλικῆς ἐπιφ. πυρ. $= 30 + 9 = 39$ τ.μ.

Προβλήματα

57. Ἡ βάσις κανονικῆς πυραμίδος εἶναι τετράγωνον μὲ περίμετρον 8,80 μ. Ἂν τὸ ἀπόστημα τῆς πυραμίδος εἶναι 3,5 μ., Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της;

58. Τὴν στέγην ἑνὸς πύργου, σχήματος κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος μὲ περίμετρον βάσεως 36 μ. καὶ μὲ ἀπόστασιν τῆς κορυφῆς τῆς στέγης ἀπὸ κάθε πλευρὰν τῆς βάσεώς της 5 μ., θέλομεν νὰ σκεπάσωμεν (καλύψωμεν) μὲ πλάκας τετραγωνικάς, πλευρᾶς 40 ἑκ. Πόσας πλάκας θὰ χρειασθῶμεν;

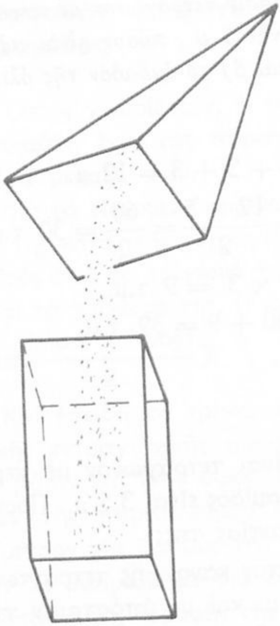
59. Κανονικὴ πυραμὶς ἔχει βάσιν τετράγωνον μὲ πλευρὰν 6,5 μ. καὶ ἀπόστημα 9 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της καὶ πόσον τῆς ὁλικῆς;

60. Τὴν στέγην ἑνὸς πύργου, σχήματος κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος, μὲ πλευρὰν βάσεως 2,5 μ. καὶ ἀπόστημα 4,20 μ., θέλομεν νὰ καλύψωμεν μὲ λαμαρίναν, ποὺ τὸ τ.μ. τιμᾶται 30 δρχ. Πόσον θὰ στοιχίσῃ ἡ λαμαρίνα;

## β) Ὄγκος τετραγωνικῆς πυραμίδος

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον μιᾶς τετραγωνικῆς πυραμίδος, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Λαμβάνομεν μίαν τετραγωνικὴν πυραμίδα καὶ ἕνα ὀρθογώνιον



Σχ. 16

παραλληλεπίπεδον (σχ. 16), τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Γεμίζομεν τελείως τὴν πυραμίδα μὲ σῖτον καὶ χύνομεν αὐτὸν ἐντὸς τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Παρατηροῦμεν ὅτι πρέπει νὰ ἐπαναληφθῇ τοῦτο τρεῖς φοράς, διὰ νὰ γεμίσῃ τελείως μὲ σῖτον τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον. Αὐτὸ μᾶς φανερώνει ὅτι ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος εἶναι 3 φορὰς μικρότερος ἀπὸ τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος.

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος του.

**Ἑπομένως :**

*Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τετραγωνικῆς πυραμίδος, πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 3.*

$$\text{Δηλ. Ὄγκος Πυραμίδος} = \frac{\text{ἐμβ. βάσεως} \times \text{ὕψος}}{3}$$

**Παράδειγμα.** *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως μιᾶς τετρ. πυραμίδος εἶναι 60 τ. ἑκ. καὶ τὸ ὕψος της 25 ἑκ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της;*

**Λύσις.** $\text{Ὄγκος πυραμίδος} = \frac{\text{Ἐμβ. βάσ.} \times \text{ὕψος}}{3} = \frac{60 \times 25}{3} =$

$= 50$ κ.ἑκ.

Προβλήματα

61. Ἡ βάσις μιᾶς πυραμίδος εἶναι τετράγωνον μὲ πλευρὰν 0,09 μ., τὸ δὲ ὕψος της εἶναι 0,21 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της;

62. Ὁ τάφος τοῦ Χέοπος (Φαραὼ τῆς Αἰγύπτου) ἔχει σχῆμα τετραγωνικῆς πυραμίδος μὲ πλευρὰν βάσεως 227 μ. καὶ ὕψος 138 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

63. Μία μαρμαρίνη ἀναμνηστικὴ στήλη, σχήματος πυραμίδος, ἔχει βάσιν τετράγωνον μὲ πλευρὰν 75 ἑκ. καὶ ὕψος 3,80 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος της, ἂν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ μαρμάρου εἶναι 2,7.

64. Μία πυραμὶς ἔχει ὄγκον 75 κ.μ. καὶ ὕψος 9 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της;

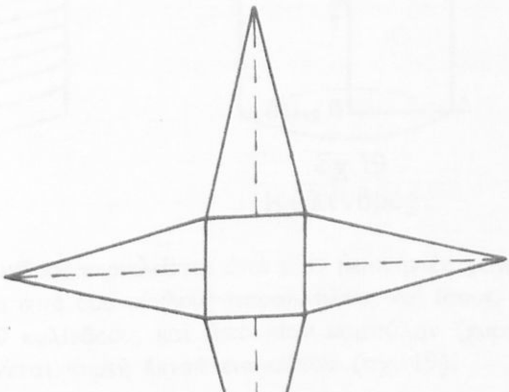
(**Ὑπόδειξις** : Θὰ πολλαπλασιάσετε τὸν ὄγκον ἐπὶ 3 καὶ τὸ γινόμενον θὰ τὸ διαιρέσετε διὰ τοῦ ὕψους, ποὺ εἶναι γνωστόν).

65. Μία πυραμὶς ἔχει ὄγκον 75 κ.μ. καὶ ἐμβαδὸν βάσεως 25 τ.μ. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος της; (Ἀπάντησις : ὕψος = 9 μ.).

## Κατασκευὴ κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν καν. τετραγωνικὴν πυραμίδα ἀπὸ χαρτόνι, γράφομεν ἕνα τετράγωνον, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι ἡ βάσις τῆς πυραμίδος.

Κατόπιν σχεδιάζομεν 4 ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἴσα μεταξύ των, ποὺ τὸ καθένα ἔχει βάσιν μὲν ἀπὸ μίαν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, ὕψος δὲ μεγαλύ-



Σχ. 17

τερον τοῦ ἡμίσεος τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου. Ἔτσι ἔχομεν τὸ ἀνάπτυγμα τῆς καν. τετραγωνικῆς πυραμίδος (σχ. 17).

Κατόπιν μὲ ξυραφάκι χαράσσομεν ἐλαφρῶς τὰς πλευρὰς τοῦ τετραγώνου καὶ ὑψώνομεν καὶ τὰ 4 τρίγωνα. Κολλῶμεν τὰς πλευρὰς τῶν τριγώνων καὶ ἔχομεν ἕτοιμον τὴν καν. τετραγωνικὴν πυραμίδα.

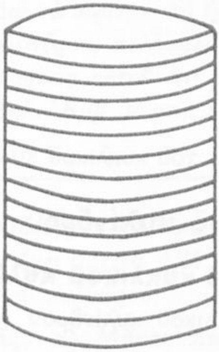
**Ἐργασία.** Νὰ κατασκευάσετε μὲ χαρτόνι μίαν καν. τετραγωνικὴν πυραμίδα μὲ πλευρὰς βάσεως 8 ἑκ. καὶ παραπλεύρους ἀκμὰς διπλασίας.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

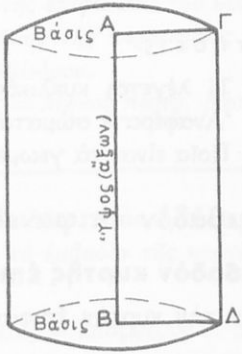
# ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

## 1. Γεωμετρικὰ στοιχεῖα τοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου

Ἂν πολλὰ ὅμοια κέρματα (μεταλλικὰ νομίσματα) τὰ τοποθετήσωμεν τὸ ἕνα ἐπάνω εἰς τὸ ἄλλο, ὥστε τὸ καθένα νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ κάτωθεν αὐτοῦ, τότε σχηματίζεται ἕνα στερεὸν σῶμα (σχῆμα), τὸ ὁποῖον λέγεται **ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος** (σχ. 18). Σχῆμα κυλίνδρου ἔχουν οἱ σωλῆνες τῆς θερμάστρας, τὰ κουτιὰ γάλακτος, ὡρισμένα κουτιὰ κονσερβῶν, τὰ στρογγυλὰ μολύβια κ.ἄ.



Σχ. 18
Κέρματα




Σχ. 19
Κύλινδρος

Ὁ κυκλικὸς κύλινδρος περικλείεται ἀπὸ μίαν μεικτὴν ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο κύκλους παραλλήλους καὶ ἴσους, ποὺ λέγονται **βάσεις** τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἀπὸ μίαν καμπύλην (κυρτὴν) ἐπιφάνειαν, ποὺ λέγεται **κυρτὴ ἐπιφάνεια** αὐτοῦ (σχ. 19).

> **Ὥστε :** *Ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος λέγεται τὸ στερεὸν σῶμα, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ δύο κύκλους ἴσους καὶ παραλλήλους καὶ ἀπὸ μίαν κυρτὴν ἐπιφάνειαν, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἐφαρμόζει εὐθεῖα καθέτως πρὸς τὰς βάσεις.*

Ἡ μεταξὺ τῶν δύο βάσεων ἀπόστασις λέγεται ὕψος τοῦ κυλίνδρου ἢ ἄξων αὐτοῦ.

Ὁ κυκλικὸς κύλινδρος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι προκύπτει ἀπὸ ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον κάμνει μίαν πλήρη στροφὴν γύρω ἀπὸ μίαν τῶν πλευρῶν του κινούμενον πρὸς τὴν αὐτὴν φορὰν (διεύθυνσιν).

Τοῦτο τὸ βλέπομεν καλύτερα εἰς τὰς περιστρεφομένας θύρας τῶν Τραπεζῶν καὶ ἄλλων Δημοσίων Καταστημάτων. Ἐκεῖ ἡ θύρα (πόρτα) στρεφομένη κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν γύρω ἀπὸ τὰ στηρίγματά της (τὸν ἄξονά της) παράγει κύλινδρον. Ὁ κύλινδρος αὐτὸς ἔχει τὰς βάσεις του κύκλους καθέτους πρὸς τὸν ἄξονά των καὶ λέγεται **κυκλικὸς κύλινδρος** ἢ **ἐκ περιστροφῆς** ἢ **ὀρθὸς** κύλινδρος.

Ἐρωτήσεις

α) Τί λέγεται κυκλικὸς κύλινδρος;

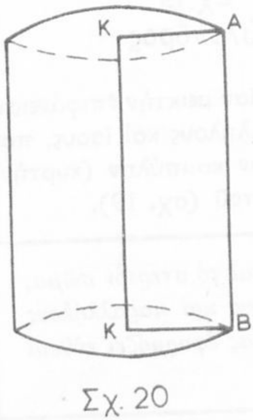
β) Ἀναφέρατε σώματα κυλινδρικά.

γ) Ποῖα εἶναι τὰ γεωμετρικὰ στοιχεῖα τοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου;

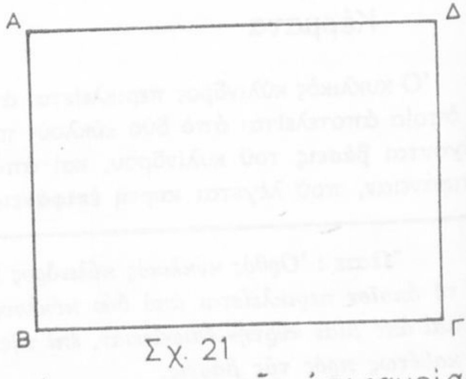
## 2. Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας κυκλικοῦ κυλίνδρου

### α) Ἐμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου

Ἂν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς κυκλικοῦ κυλίνδρου (σχ. 20)




Σχ. 20




Σχ. 21

Ἀνάπτυγμα κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου.

καλύψωμεν ἀκριβῶς μὲ φύλλον χάρτου καὶ κατόπιν ἁπλώσωμεν τοῦτο ἐπάνω εἰς ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν (τραπέζι κλπ.), παρατηροῦμεν ὅτι τὸ φύλλον αὐτὸ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου (σχ. 21).

Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο παραλληλόγραμμον ἔχει **βάσιν** ἴσην μὲ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς μιᾶς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, **ὕψος** ἴσον μὲ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου καὶ **ἐμβαδὸν** ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

**Ἑπομένως :**

> *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου, πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς μιᾶς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου.*
>
> *Δηλ. Ἐμβ. κυρτῆς ἐπιφ. κυκλ. κυλ. = Μῆκος περιφ. βάσ. × ὕψος.*

**Παράδειγμα.** *Τὸ ὕψος ἑνὸς κυκλ. κυλίνδρου εἶναι 0,95 μ. καὶ ἡ βάσις του ἔχει ἀκτῖνα 0,25 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου;*

**Λύσις.** α) Μῆκος περιφερείας βάσεως = Διάμετρος × 3,14 = 2 × 0,25 × 3,14 = 1,57 μ.

β) Ἐμβ. κυρτ. ἐπιφ. = μῆκος περιφ. βάσ. × ὕψ. = 1,57 × 0,95 = 1,4915 τ.μ.

### β) Ἐμβαδὸν ὁλικῆς ἐπιφανείας κυκλικοῦ κυλίνδρου

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειάν του καὶ ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τῶν δύο βάσεών του (σχ. 22). Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του, πρέπει νὰ εὕρωμεν πρῶτα τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του, ὅπως εἴδομεν προηγουμένως, καὶ εἰς αὐτὸ νὰ προσθέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεών του.

Αἱ βάσεις ἔχουν σχῆμα κύκλου καί, ὅπως γνωρίζομεν, διὰ νὰ


Σχ. 22. Ἀνάπτυγμα ὁλικῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου

εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, πολλαπλασιάζομεν τὴν ἀκτῖνα ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της καὶ τὸ γινόμενον ἐπὶ 3,14.

**Ἑπομένως :**

> *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου, προσθέτομεν εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ.*
>
> *Δηλ. Ἐμβ. ὁλ. ἐπιφ. κυλίνδρου = ἐμβ. κυρτ. ἐπιφ. + ἐμβ. 2 βάσεων.*

**Παράδειγμα.** *Τὸ ὕψος μιᾶς κυλινδρικῆς στήλης εἶναι 11,5 μ. καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεώς της 1,25 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τῆς στήλης αὐτῆς;*

α) Διάμετρος βάσεως = 1,25 × 2 = 2,50 μ.

β) Μῆκος περιφ. βάσεως = 2,50 × 3,14 = 7,85 μ.

γ) Ἐμβ. κυρτ. ἐπιφ. = 7,85 × 11,5 = 90,275 τ.μ.

δ) Ἐμβ. μιᾶς βάσεως = 1,25 × 1,25 × 3,14 = 4,906250 τ.μ.

ε) Ἐμβ. ὁλικ. ἐπιφ. = 90,275 + 4,906250 + 4,906250 = 100,0875 τ.μ.

Ἐρωτήσεις

α) Πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου καὶ πῶς τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του;

β) Τί σχῆμα ἔχει τὸ ἀνάπτυγμα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου;

γ) Τί σχῆμα ἔχουν αἱ βάσεις τοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου;

Προβλήματα

66. Προκειμένου νὰ καλύψωμεν μὲ χαρτὶ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς κυκλικοῦ κυλίνδρου ὕψους 15 ἑκ. καὶ μήκους περιφερείας βάσεως 20 ἑκ., τί σχῆμα πρέπει νὰ κόψωμεν ἀπὸ τὸ χαρτὶ καὶ πόσον ἐμβαδὸν πρέπει νὰ ἔχῃ τοῦτο;

67. Προκειμένου νὰ χρωματίσωμεν ἐξωτερικῶς ἕνα σωλῆνα, τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια εἶναι 3,25 μ. καὶ τὸ μῆκος (ὕψος) 13,14 μ., πόσα χρήματα θὰ πληρώσωμεν πρὸς 2,60 δρχ. τὸ τετρ. μέτρον;

68. Ὑπολογίσατε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυκλικοῦ κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει μῆκος περιφερείας βάσεως 15,7 ἑκ. καὶ ὕψος 70 ἑκατοστόμετρα.

69. Δύο διαμερίσματα ἑνὸς ἐργοστασίου συνδέονται μεταξύ των μὲ κυλινδρικὸν ἀγωγὸν διαμέτρου 1,75 μ. καὶ μήκους 432 μέτρων. Νὰ εὑρεθῇ : α) τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ ἀγωγοῦ καὶ β) πόσον κοστίζει ὁ ἐξωτερικὸς χρωματισμὸς αὐτοῦ πρὸς 12 δρχ. τὸ τ. μέτρον.

70. Ἕνα κυλινδρικὸν μολύβι ἔχει μῆκος (ὕψος) 20 ἑκ. καὶ διάμετρον βάσεως 8 χιλιοστὰ τοῦ μέτρου. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του;

71. Θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν δοχεῖον κυλινδρικόν, ἀνοικτὸν πρὸς τὰ ἄνω, ὕψους 2 μ. καὶ μὲ ἀκτῖνα βάσεως 0,75 μ. Νὰ εὑρεθῇ: α) τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀπαιτουμένου τσίγκου καὶ β) τὸ κόστος τοῦ δοχείου πρὸς 82 δρχ. τὸ τ.μ.

72. Προκειμένου νὰ κατασκευάσωμεν κυλινδρικὸν δοχεῖον μετὰ καλύμματος, ὕψους 0,55 μ. καὶ διαμέτρου βάσεως 0,40 μ., πόσον θὰ κοστίσῃ τοῦτο, ἂν ὁ τσίγκος τιμᾶται 90 δρχ. τὸ τ.μ. καὶ πληρώσωμεν εἰς τὸν τεχνίτην 25 δρχ. διὰ τὴν ἐργασίαν του;

73. Ἕνα ἐργοστάσιον κυτιοποιΐας ἔλαβε παραγγελίαν διὰ τὴν κατασκευὴν 5000 δοχείων κυλινδρικῶν. Κάθε δοχεῖον νὰ ἔχῃ ὕψος 1,8 παλάμας καὶ ἀκτῖνα βάσεως 6 ἑκ. Πόσα τετρ. μέτρα τσίγκου θὰ χρειασθῇ διὰ τὴν κατασκευήν των;

## 3. Ὄγκος κυκλικοῦ κυλίνδρου

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Λαμβάνομεν δύο δοχεῖα τοῦ αὐτοῦ ὕψους καὶ τοῦ αὐτοῦ ἐμβαδοῦ βάσεώς των. Τὸ ἕνα δοχεῖον ἀπ' αὐτὰ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ τὸ ἄλλο κυκλικοῦ κυλίνδρου.

Γεμίζομεν τελείως τὰ δοχεῖα αὐτὰ μὲ νερὸ καὶ βλέπομεν ὅτι χωροῦν ἴσον ὄγκον ὕδατος· ἄρα τὰ δοχεῖα αὐτὰ ἔχουν τὸν ἴδιον ὄγκον.

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του. Ἑπομένως καὶ ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εὑρίσκεται κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον. Δηλαδή:

> *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ κυκλ. κυλίνδρου, πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος του.*
> *Δηλ. Ὄγκος κυκλ. κυλίνδρου = ἐμβαδὸν βάσεως × ὕψος.*

**Σημείωσις:** Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει **ὅτι**, ὅταν γνωρίζωμεν τὸν ὄγκον ἑνὸς κυλίνδρου καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του, ἂν διαιρέσωμεν τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου διὰ τοῦ ὕψους του. Δηλαδή:

$$\text{Ἐμβαδὸν βάσεως κυκλ. κυλίνδρου} = \frac{\text{ὄγκος κυκλ. κυλίνδρου}}{\text{ὕψους}}$$

**Ἐφαρμογαί :**

**Παράδειγμα 1.** *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἑνὸς κυκλ. κυλίνδρου εἶναι 26 τετρ. παλάμαι καὶ τὸ ὕψος του 8,5 παλ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου;*

**Λύσις.** Ὄγκος κυκλ. κυλίνδρου = ἐμβ. βάσεως × ὕψος = 26 × 8,5 = 221 κ. παλ.

**Παράδειγμα 2.** *Ὁ ὄγκος ἑνὸς κυκλ. κυλίνδρου εἶναι 4,5 κ.μ. καὶ τὸ ὕψος του 1,8 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του;*

**Λύσις.** $\text{Ἐμβ. βάσεως κυκλ. κυλίνδρου} = \frac{\text{ὄγκος κυλίνδρου}}{\text{ὕψους}} = \frac{4,5}{1,8} = 2,5$ τ.μ.

Ἐρωτήσεις

α) Πῶς εὑρίσκεται ὁ ὄγκος τοῦ κυκλ. κυλίνδρου;

β) Διατὶ λέγομεν ὅτι ὁ ὄγκος ἑνὸς κυκλ. κυλίνδρου εὑρίσκεται ὅπως καὶ ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου;

γ) Πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἑνὸς κυλίνδρου, ὅταν γνωρίζωμεν τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου καὶ τὸ ὕψος του;

δ) Εἶναι δυνατὸν νὰ εὕρωμεν τὸ ὕψος ἑνὸς κυλίνδρου; τί πρέπει νὰ γνωρίζωμεν καὶ τί πρᾶξιν θὰ κάμωμεν;

Προβλήματα

74. Ἕνας κυκλ. κύλινδρος ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 10 ἑκ. καὶ ὕψος 30 ἑκ. Πόσον ὄγκον ἔχει;

75. Ἡ διάμετρος τῆς βάσεως ἑνὸς κυλινδρικοῦ δοχείου εἶναι 0,80 μ. καὶ τὸ ὕψος του 2,50 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του; Πόσα κ.μ. γάλα χωρεῖ;

76. Ἕνας κύλινδρος ἔχει ὄγκον 3,5 κ.π. καὶ ὕψος 7 ἑκ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του;

77. Ἐργάτης, διὰ νὰ ἀνοίξῃ ἕνα κυλινδρικὸν φρέαρ (πηγάδι), ζητεῖ 185 δρχ. τὸ κυβ. μέτρον. Πόσας δρχ. θὰ λάβῃ διὰ τὸ ἄνοιγμα τοῦ φρέατος, τὸ ὁποῖον ἔχει περιφέρειαν βάσεως 6,28 μ. καὶ ὕψος 15,75 μέτρα;

78. Πόσα κυβικὰ μέτρα χῶμα πρέπει νὰ βγάλωμεν ἐκ τῆς γῆς, διὰ νὰ ἀνοίξωμεν φρέαρ (πηγάδι) κυλινδρικὸν βάθους 12 μ. καὶ διαμέτρου 2,5 μέτρων;

79. Μία βρύση παρέχει 15 κυβ. παλάμας ὕδατος εἰς ἕνα πρῶτον λεπτὸν τῆς ὥρας. Πόσον χρόνον χρειάζεται ἡ βρύση, διὰ νὰ γεμίσῃ κυλινδρικὸν δοχεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει διάμετρον βάσεως 0,8 μ. καὶ ὕψος 75 ἑκατοστόμετρα;

80. Μία κυλινδρικὴ δεξαμενὴ ἔχει ἐσωτερικὴν ἀκτῖνα βάσεως 1,26 μ. καὶ ὕψος 2,4 μ. Νὰ εὑρεθῇ: α) Πόσας κυβ. παλάμας νερὸ (ἀπεσταγμένον καὶ θερμοκρασίας 4°) χωρεῖ καὶ β) πόσα χιλιόγραμμα ζυγίζει τὸ νερό;

81. Τὸ περιεχόμενον ἑνὸς βαρελίου εἶναι 141,3 κυβ. παλάμαι. Τοῦτο θέλομεν νὰ μεταφέρωμεν εἰς φιάλας κυλινδρικὰς μὲ ἀκτῖνα βάσεως 3 ἑκ. καὶ ὕψος 10 ἑκ. Πόσας φιάλας θὰ χρειασθῶμεν;

82. Μία μαρμαρίνη κυλινδρικὴ στήλη ἔχει περιφέρειαν βάσεως 9,42 μ. καὶ ὕψος 4 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος της, ἂν τὸ εἰδ. βάρος τοῦ μαρμάρου εἶναι 2,7.

83. Δύο δεξαμεναὶ εἶναι γεμᾶται μὲ νερό. Ἡ μία εἶναι κυλινδρικὴ ὕψους 4 μ. καὶ ἐμβαδοῦ βάσεως 12 τ.μ. καὶ ἡ ἄλλη εἶναι κυβικὴ μὲ ἀκμὴν 4 μέτρων. Ποία δεξαμενὴ περιέχει περισσότερον νερὸ καὶ πόσον;

## Κατασκευὴ κυκλικοῦ κυλίνδρου

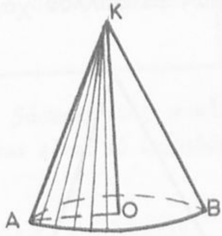
Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν κυκλικὸν κύλινδρον ἀπὸ χαρτόνι, σχεδιάζομεν εἰς τὸ χαρτόνι τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου (σχ. 22), χωριστὰ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον μὲ τὰς διαστάσεις ποὺ θέλομεν καὶ χωριστὰ τοὺς δύο κύκλους. Κολλῶμεν κατόπιν τὰς δύο ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου (τὰ ὕψη), ὁπότε ἔχομεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου. Τέλος εἰς τὰ ἀνοικτὰ μέρη αὐτῆς (ἄνω καὶ κάτω) ἐπικολλῶμεν τοὺς δύο κύκλους, ποὺ ἀποτελοῦν τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἔχομεν ἕτοιμον τὸν κυκλικὸν κύλινδρον.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

# ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΚΩΝΟΣ

## 1. Γεωμετρικὰ στοιχεῖα τοῦ κώνου

Τὸ στερεὸν σῶμα, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ σχῆμα 23, λέγεται **Κυκλικὸς Κῶνος.** Σώματα μὲ σχῆμα κυκλικοῦ κώνου εἶναι τὸ χωνί, ἡ σκηνή, ἡ στέγη μερικῶν πύργων, ἡ στέγη ἀνεμομύλων κλπ.

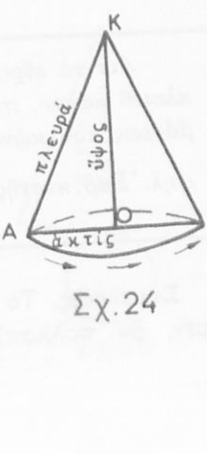


Σχ. 23
Κῶνος

Συνήθως ὁ κυκλικὸς κῶνος ἀπαντᾷ ἡνωμένος μὲ τὸν κύλινδρον, τοῦ ὁποίου ἀποτελεῖ τὴν στέγην.

Ὁ κυκλικὸς κῶνος περικλείεται ἀπὸ ἕνα κύκλον, ὁ ὁποῖος λέγεται **βάσις** τοῦ κώνου, καὶ ἀπὸ μίαν καμπύλην ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία καταλήγει εἰς ἕνα σημεῖον Κ εὑρισκόμενον ἐκτὸς τῆς βάσεως. Ἡ καμπύλη ἐπιφάνεια λέγεται **κυρτὴ ἐπιφάνεια** τοῦ κώνου, τὸ δὲ σημεῖον Κ, εἰς τὸ ὁποῖον τελειώνει αὐτή, λέγεται **κορυφὴ** τοῦ κώνου.

Ἡ ἀπόστασις ΚΟ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς βάσεως αὐτοῦ λέγεται **ὕψος** ἢ **ἄξων** τοῦ κώνου. Ἡ ἀπόστασις ΚΑ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ἀπὸ οἱονδήποτε σημεῖον τῆς περιφερείας τῆς βάσεως αὐτοῦ λέγεται **πλευρὰ** τοῦ κώνου.



Σχ. 24

Εἰς τὸν κῶνον ἔχομεν καὶ τὴν **ἀκτῖνα** αὐτοῦ, ἡ ὁποία εἰς τὸ σχῆμά μας εἶναι ἡ ΟΑ, δηλ. ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τῆς βάσεως τοῦ κώνου.

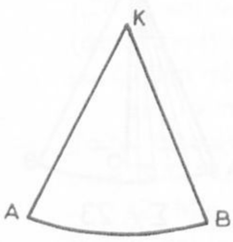
*Πῶς προκύπτει ὁ κυκλικὸς κῶνος;* Ὁ κῶνος αὐτὸς προκύπτει ἀπὸ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον κάμνει πλήρη στροφήν, κινούμενον πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν (διεύθυνσιν), γύρω ἀπὸ μίαν ἀπὸ τὰς καθέτους πλευράς του, ἡ ὁποία μένει ἀκίνητος (σχ. 24).

Τότε ἡ ἀκίνητος πλευρὰ τοῦ τριγώνου ἀποτελεῖ τὸ ὕψος ἢ τὸν ἄξονα τοῦ κυκλικοῦ κώνου. Ἡ κάθετος πρὸς τὸ ὕψος πλευρὰ τοῦ τριγώνου γράφει τὴν βάσιν τοῦ κώνου καὶ ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογων. τριγώνου διαγράφει μίαν καμπύλην ἐπιφάνειαν, ἥτις λέγεται παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ κώνου.

## 2. Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας κυκλικοῦ κώνου

### α) Ἐμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφανείας κυκλικοῦ κώνου

Ἂν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς κυκλικοῦ κώνου καλύψωμεν ἀκριβῶς μὲ φύλλον χάρτου καὶ κατόπιν ἀπλώσωμεν τοῦτο ἐπάνω εἰς τὸ τραπέζι, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ ἀνάπτυγμά της ἔχει σχῆμα κυκλικοῦ τομέως (σχ. 25).



Σχ. 25

Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ τόξον ΑΒ τοῦ κυκλικοῦ τομέως εἶναι ἴσον μὲ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεως τοῦ κώνου, ἡ δὲ ἀκτὶς ΚΑ εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου. Ἐπίσης τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως, ὡς γνωρίζομεν, εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ μῆκος τοῦ τόξου ΑΒ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος ΚΑ. **Ἑπομένως :**

> *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυκλικοῦ κώνου, πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεως τοῦ κώνου ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς του.*
>
> $$\text{Δηλ. Ἐμβ. κυρτῆς ἐπιφ. κυκλ. κώνου} = \frac{\text{μῆκος περ. βάσ.} \times \text{πλευρ.}}{2}$$

**Σημείωσις.** Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας προκύπτει, ὅπως γνωρίζομεν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἀκτῖνα $\times$ 2 $\times$ 3,14. Ἂν ἑπομένως ἀναλύσωμεν τὸν τύπον εὑρέσεως τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\text{μῆκος περιφ. βάσεως} \times \text{πλευρὰν}}{2} = \frac{\alpha \times 2 \times 3{,}14 \times \text{πλευρὰν}}{2}$$

Καὶ μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν μὲ τὸ 2 ἔχομεν : $\alpha \times 3{,}14 \times$ πλευράν.

Ὥστε ὁ ἀνωτέρω κανὼν δύναται νὰ διατυπωθῇ καὶ ἔτσι :

> *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυκλ. κώνου, πολλαπλασιάζομεν τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευράν του καὶ τὸ γινόμενον ἐπὶ 3,14.*
>
> *Δηλ. Ἐμβ. κυρτῆς ἐπιφανείας κυκλ. κώνου = ἀκτὶς × πλευρὰν × 3,14.*

**Παράδειγμα.** *Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἑνὸς κυκλ. κώνου εἶναι 3,20 μ. καὶ ἡ πλευρά του 0,8 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του;*

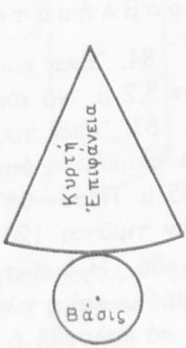
**Λύσις.** Ἐμβ. κυρτ. ἐπιφ. κώνου $= \frac{\text{μῆκος περιφ. βάσ.} \times \text{πλευρὰν}}{2} =$

$$= \frac{3{,}20 \times 0{,}8}{2} = \frac{2{,}56}{2} = 1{,}28 \text{ τ.μ.}$$

## 6) Ἐμβαδὸν ὁλικῆς ἐπιφανείας κυκλ. κώνου

Τὸ σχῆμα 26 παριστάνει τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κυκλικοῦ κώνου. Ἐξ αὐτοῦ εὐκόλως συμπεραίνομεν ὅτι :

> *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κυκλ. κώνου, προσθέτομεν εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυκλικῆς βάσεώς του.*
>
> *Δηλ. Ἐμβ. ὁλ. ἐπιφ. Κώνου = Ἐμβ. κυρτῆς ἐπιφανείας + ἐμβ. βάσεως.*




Σχ. 26

**Παράδειγμα.** *Ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως ἑνὸς κυκλ. κώνου εἶναι 0,3 μ., ἡ δὲ πλευρὰ τοῦ κώνου 1 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.*

**Λύσις.** α) Ἐμβ. κυρτ. ἐπιφ. κώνου = ἀκτὶς × πλευρὰν × 3,14 = 0,3 × 1 × 3,14 = 0,942 τ.μ. (Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτό, ἐπειδὴ γνωρίζομεν τὴν ἀκτῖνα, ἐφαρμόζομεν διὰ τὴν λύσιν του πρὸς εὐκολίαν μας τὸν δεύτερον κανόνα εὑρέσεως τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου).

β) Ἐμβ. βάσεως = ἀκτ. × ἀκτ. × 3,14 = 0,3 × 0,3 × 3,14 = = 0,2826 τ.μ.

γ) Ἐμβ. ὁλ. ἐπιφ. κυκλικοῦ κώνου = 0,942 + 0,2826 = = 1,2246 τ.μ.

Ἐρωτήσεις

α) Πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυκλικοῦ κώνου;

β) Τί σχῆμα ἔχει τὸ ἀνάπτυγμα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυκλικοῦ κώνου;

γ) Διατί λέγομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυκλικοῦ κώνου εὑρίσκεται ὅπως καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλ. τομέως;

δ) Πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κυκλικοῦ κώνου;

ε) Νὰ ἀναφέρετε 5 σώματα μὲ σχῆμα κυκλικοῦ κώνου.

Προβλήματα

84. Ἕνας κυκλικὸς κῶνος ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 0,45 μ. καὶ πλευρὰν 3,2 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του.

85. Ἕνας τουρίστας θέλει νὰ κατασκευάσῃ ἀπὸ ὕφασμα κωνικὴν σκηνήν, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ πλευρὰν 2,5 μέτρα καὶ ἀκτῖνα βάσεως 1,65 μ. Πόσον θὰ κοστίσῃ τὸ ὕφασμα, ἂν τὸ τετραγωνικόν του μέτρον τιμᾶται 120 δραχμάς;

86. Ἡ διάμετρος τῆς βάσεως τῆς κωνικῆς στέγης ἑνὸς πύργου εἶναι 6 μ. καὶ ἡ πλευρά της 9,20 μ. Πόσα τ.μ. λαμαρίνας χρειάζονται, διὰ νὰ καλυφθῇ ἡ στέγη αὐτή;

87. Ἑνὸς κωνικοῦ δοχείου ἡ πλευρὰ εἶναι 75 ἑκ. καὶ ἡ περιφέ-

ρεια τῆς βάσεώς του 1,35 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του;

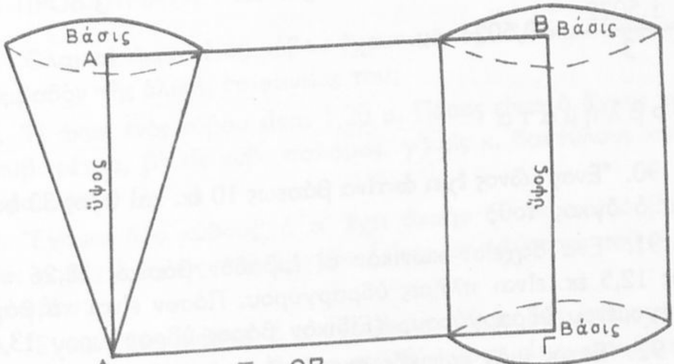
88. Προκειμένου νὰ κατασκευάσωμεν τέσσαρα κωνικὰ δοχεῖα μὲ πλευρὰν 1,10 μ. καὶ διάμετρον βάσεως 80 ἐκ. τὸ καθένα, πόσα χρήματα θὰ χρειασθῶμεν, ἂν ὁ τσίγκος τιμᾶται πρὸς 92 δρχ. τὸ τετρ. μέτρον καὶ ὁ τεχνίτης θέλῃ 125 δρχ. δι' ὅλην τὴν ἐργασίαν;

89. Πόσον μῆκος ὑφάσματος χρειάζεται, ὅταν τὸ πλάτος εἶναι 0,60 μ., διὰ νὰ κατασκευασθῇ σκηνὴ κωνικὴ μὲ πλευρὰν 4 μέτρα καὶ περιφέρειαν βάσεως 15 μέτρα; (50 μ.)

**Σημείωσις.** Διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος, πρέπει νὰ εἶναι γνωστὰ τὸ πλάτος καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας.

## 3. Ὄγκος κυκλικοῦ κώνου

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ κυκλ. κώνου, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Λαμβάνομεν δύο δοχεῖα, τὸ ἕνα κωνικὸν καὶ τὸ ἄλλο κυλινδρικόν, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν ἴσην βάσιν καὶ ἴσον ὕψος (σχ. 27).




Σχ. 27

Ἂν τὸ κωνικὸν δοχεῖον τὸ γεμίσωμεν μὲ νερὸ καὶ χύσωμεν τοῦτο εἰς τὸ κυλινδρικὸν δοχεῖον, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι θὰ χρειασθῇ νὰ ἐπαναλάβωμεν τρεῖς φορὰς τὸ ἴδιον πρᾶγμα, μέχρις ὅτου γεμίσῃ τελείως τὸ κυλινδρικὸν δοχεῖον.

Τοῦτο φανερώνει ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι τρεῖς φορὰς μικρότερος ἀπὸ τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἴσην βάσιν καὶ ἴσον ὕψος μὲ αὐτόν.

Καὶ ἀφοῦ τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου εὑρίσκομεν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος του, συνάγεται ὅτι:

*Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ κώνου, πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος του καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 3.*

$$\text{Δηλ. ὄγκος κώνου} = \frac{\text{ἐμβ. βάσεως} \times \text{ὕψος}}{3}$$

**Παράδειγμα.** *Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 0,4 μ. καὶ ὕψος 3 μ.*

**Λύσις.** α) Ἐμβ. βάσ. κώνου = ἀκτὶς × ἀκτῖνα × 3,14 = 0,4 × 0,4 × 3,14 = 0,5024 τ.μ.

$$\text{β) Ὄγκος κώνου} = \frac{\text{ἐμβ. βάσ.} \times \text{ὕψος}}{3} = \frac{0{,}5024 \times 3}{3} =$$

$$= \frac{1{,}5072}{3} = 0{,}5024 \text{ κ.μ.}$$

Προβλήματα

90. Ἕνας κῶνος ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 10 ἑκ. καὶ ὕψος 30 ἑκ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

91. Ἕνα δοχεῖον κωνικὸν μὲ ἐμβαδὸν βάσεως 28,26 τ.ἑκ. καὶ ὕψος 12,5 ἑκ. εἶναι πλῆρες ὑδραργύρου. Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ περιεχομένου ὑδραργύρου; (Εἰδικὸν βάρος ὑδραργύρου 13,6).

92. Ἐντὸς μιᾶς κωνικῆς σκηνῆς ὕψους 4,5 μ. καὶ μήκους περιφερείας βάσεως 31,4 μ. διαμένουν 15 πρόσκοποι. Πόσα κυβικὰ μέτρα ἀέρος ἀναλογοῦν εἰς κάθε πρόσκοπον;

93. Τεμάχιον σιδήρου σχήματος κώνου ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 12,5 ἑκ. καὶ ὕψος τὸ διπλάσιον τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεώς του. Πόσον ζυγίζει τοῦτο; (Εἰδικὸν βάρος σιδήρου 7,8).

94. Τὸ ὕψος ἑνὸς κωνικοῦ δοχείου εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεώς του καὶ ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως 12,56 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ : α) ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου καὶ β) πόσα κιλὰ πετρέλαιον χωρεῖ τοῦτο. (Εἰδ. βάρος πετρελαίου 0,84.)

95. Κωνικὸν δοχεῖον ἔχει μῆκος περιφερείας βάσεως 25,12 μ. καὶ ὕψος 5,40 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου τούτου καὶ πόσα κιλὰ ὕδατος (ἀπεσταγμένου) χωρεῖ;

## Κατασκευὴ κυκλικοῦ κώνου

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν κυκλικὸν κῶνον μὲ χαρτόνι, σχεδιάζομεν ἐπ' αὐτοῦ τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου (σχ. 26). Κόπτομεν κατόπιν τὸν κυκλικὸν τομέα, τὸν τυλίγομεν καὶ τὸν κολλῶμεν μὲ κόλλαν. Ἔτσι ἔχομεν τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τοῦ κυκλικοῦ κώνου. Ἔπειτα ἐφαρμόζομεν εἰς τὸ ἀνοικτὸν μέρος της τὴν κυκλικὴν βάσιν καὶ ἔχομεν ἕτοιμον τὸν κυκλικὸν κῶνον.

## ΓΕΝΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

96. Ὅλαι αἱ ἀκμαὶ ἑνὸς κύβου ἔχουν μῆκος 12,96 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του;

97. Ἡ ἀκμὴ ἑνὸς κύβου εἶναι 1,20 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του : α) εἰς κυβ. μέτρα, β) εἰς κυβ. παλάμας, γ) εἰς κ. δακτύλους καὶ δ) εἰς κ. γραμμάς;

98. Ἔχομεν δύο κύβους· ὁ α' ἔχει ἀκμὴν 60 ἐκ. καὶ ὁ β' 1,8 μ. Πόσας φορὰς ὁ ὄγκος τοῦ β' κύβου εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ὄγκου τοῦ α' κύβου;

99. Ἔχομεν δύο κύβους· ὁ α' ἔχει ἀκμὴν 50 ἐκ. καὶ ὁ β' τριπλασίαν τοῦ α'. Πόσας φορὰς ὁ ὄγκος τοῦ β' κύβου εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ὄγκου τοῦ α' κύβου;

100. Ἕνα κιβώτιον, σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, μὲ διαστάσεις 2 × 1,5 × 1,20 μ. ἐχρωματίσθη ἐξωτερικῶς καὶ ἐστοίχισεν 126 δραχμάς. Πόσον ἐστοίχισε τὸ τ. μέτρον;

101. Κιβώτιον μήκους 2 μ., πλάτους 40 ἐκ. καὶ ὕψους 1,4 μ.

εἶναι πλῆρες σάπωνος, τοῦ ὁποίου ἡ κάθε πλάκα ἔχει μῆκος 1,4 παλάμ., πλάτος δὲ καὶ ὕψος ἀνὰ 5 ἑκ. Πόσας πλάκας σάπωνος περιέχει τὸ κιβώτιον;

102. Ἕνα δωμάτιον τὸ ἐγεμίσαμεν τελείως μὲ 4.600 χαρτοδέματα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει ὄγκον 3,5 κυβ. παλάμας. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ δωματίου εἰς κυβ. μέτρα.

103. Ἕνα κουτὶ σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχει μῆκος 20 ἑκ., πλάτος 12 ἑκ. καὶ ὕψος 15 ἑκ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

104. Μία δεξαμενή, σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἔχει μῆκος 8 μ. καὶ πλάτος 4,5 μ. Πόσον βάθος (ὕψος) πρέπει νὰ ἔχῃ, διὰ νὰ χωρῇ 252 τόννους νερό;

105. Πόσοι μαθηταὶ εἶναι δυνατὸν νὰ παραμένουν εἰς μίαν αἴθουσαν μὲ 8 μ. μῆκος, 6 μ. πλάτος καὶ 5 μ. ὕψος, ἂν εἰς ἕκαστον μαθητὴν πρέπῃ νὰ ἀναλογοῦν 4 κ.μ. ἀέρος;

106. Μία ἐκκλησία στηρίζεται εἰς 6 κίονας (στύλους) ἀπὸ σκυρόδεμα (μπετὸν - ἀρμέ). Ὁ κάθε κίων ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ ὕψος 5,20 μ. καὶ μὲ βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 45 ἑκ. Νὰ εὑρεθῇ α) ὁ συνολικὸς ὄγκος τῶν κιόνων καὶ β) πόσον ἐστοίχισεν ἡ κατασκευή των, ἂν τὸ σκυρόδεμα τιμᾶται 2000 δρχ. τὸ κυβικὸν μέτρον.

107. Δεξαμενὴ ἐλαίου, σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, μήκους 6 μ., πλάτους 5 μ. καὶ ὕψους 3 μ. περιέχει ἔλαιον ἕως τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὄγκου της. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ ἐλαίου, ποὺ περιέχει;

108. Ἕνα κτῆμα, σχήματος ὀρθογωνίου, ἔχει μῆκος 500 μ. καὶ πλάτος 300 μ. Διὰ τοῦ κτήματος αὐτοῦ διῆλθε σιδηροδρομικὴ γραμμή, ἡ ὁποία ἀπέκοψε τριγωνικὸν τεμάχιον εἰς τὴν μίαν γωνίαν του βάσεως 225 μ. καὶ ὕψους 150 μέτρων. Νὰ εὑρεθῇ : α) Πόσα στρέμματα ἦτο τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τοῦ κτήματος καὶ β) ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν εἰς στρέμματα τοῦ ἀποκοπέντος τριγωνικοῦ τμήματος τοῦ κτήματος.

109. Ἡ περίμετρος ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου εἶναι 93 μ. Ἐὰν τὸ μῆκος τῆς μεγάλης βάσεώς του εἶναι 32 μ. καὶ τῆς μικρῆς 25 μ., πόσον εἶναι τὸ μῆκος ἑκάστης τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του;

110. Ἀπὸ ἕνα φύλλον λαμαρίνας, σχήματος τετραγώνου, πλευρᾶς 30 ἑκ. ἀπεκόπη ἕνας κύκλος περιφερείας 78,5 ἑκ. Νὰ εὑρεθῇ α) ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου (κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ), β) τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀποκοπέντος κύκλου καὶ γ) τὸ ἐμβαδὸν τῆς λαμαρίνας, ποὺ ἀπέμεινε μετὰ τὴν ἀποκοπήν.

111. Ἕνα τετραγωνικὸν κηπάριον πλευρᾶς 3,60 μ. εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον μὲ ἀκτῖνα 2,70 μ. Νὰ εὑρεθῇ α) τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου, β) τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου καὶ γ) τὸ ἐμβαδὸν τῶν 4 τμημάτων τοῦ κύκλου, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται μεταξὺ τετραγώνου καὶ κύκλου.

112. Μία τετραγωνικὴ πυραμὶς ἔχει πλευρὰν βάσεως 8,5 μ. καὶ ὕψος ἑνὸς τῶν τριγώνων τῆς τετραπλεύρου ἐπιφανείας της 15,40 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας της;

113. Ἡ πλευρὰ τῆς βάσεως μιᾶς τετραγωνικῆς πυραμίδος εἶναι 4,5 μ. καὶ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος 3,2 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της;

114. Ἡ διάμετρος τῆς βάσεως ἑνὸς κυκλικοῦ κυλίνδρου εἶναι 0,30 μ. καὶ τὸ ὕψος του 1,20 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του;

115. Ἑνὸς κυκλικοῦ κυλίνδρου ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως εἶναι 12,56 μ. καὶ τὸ ὕψος του 3,50 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του;

116. Κυλινδρικὸν δοχεῖον (ντεπόζιτον) μὲ διάμετρον βάσεως 1,20 μ. καὶ ὕψος 1,80 μ. εἶναι γεμᾶτον λάδι. Πόσα κιλὰ λάδι περιέχει; (Εἰδικὸν βάρος ἐλαίου 0,912.)

117. Πόσας φιάλας ὄγκου 90 κυβ. ἑκ. δυνάμεθα νὰ γεμίσωμεν μὲ 180 κ. παλάμας οἴνου;

118. Πόσας φιάλας ὄγκου 80 κυβ. ἑκ. δυνάμεθα νὰ γεμίσωμεν μὲ $\frac{1}{2}$ κ.μ. οἴνου;

119. Ἡ διάμετρος τῆς βάσεως ἑνὸς κυκλικοῦ κώνου εἶναι 1,80 μ. καὶ ἡ πλευρά του 3,40 μ. Πόσα τ.μ. εἶναι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνειά του;

120. Θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν κωνικὴν σκηνήν, ποὺ νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα βάσεως 1,20 μ. καὶ πλευρὰν 3,60 μ. Πόσα τ.μ. ὕφασμα θὰ χρειασθῇ διὰ τὴν κατασκευήν της καὶ πόσον θὰ στοιχίσῃ, ἂν τὸ τετρ. μέτρον κοστίζῃ 39,50 δραχμάς;

121. Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἑνὸς κυκλικοῦ κώνου ἔχει μῆκος 12,56 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του, ὅταν ἡ πλευρά του εἶναι 4,50 μέτρα;

122. Ἕνα δοχεῖον κωνικὸν ἔχει μῆκος περιφερείας βάσεως 6,28 μ. καὶ ὕψος 2,40 μ. Νὰ εὑρεθῇ α) ὁ ὄγκος, β) πόσους τόννους νερὸ χωρεῖ καὶ γ) πόσα κιλὰ νερὸ χωρεῖ.

# ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

## ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

## ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

### ΣΥΝΟΛΑ



### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

### ΠΟΣΑ



### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

### ΜΕΘΟΔΟΙ



### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ



ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ



Ὕλη ΣΤ' τάξεως.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'

ΚΥΒΟΣ



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΝ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

## ΠΥΡΑΜΙΔΕΣ



## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

## ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ



## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'.

## ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΚΩΝΟΣ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΣΤ', 1974 (VII) — ΑΝΤΙΤ. 170.000 — ΣΥΜΒΑΣΙΣ: 2427/22-3-74
ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: Μ. ΠΕΧΛΙΒΑΝΙΔΗΣ & ΣΙΑ - Α. Ε.