ρεμ
ν ὅτ
ατος.
γίνη
Ρ

Χ. Α. ΠΑΠΑΝΑΣΤΑΣΙΟΥ Ν. Ε. ΦΡΑΓΚΙΣΚΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΤΗΣ ΒΑΡΒΑΚΕΙΟΥ ΠΡΟΤΥΠΟΥ ΣΧΟΛΗΣ

Αγγ Θεοχάρη

ΛΟΥΚΙΑΝΟΥ
ΝΕΚΡΙΚΟΙ ΔΙΑΛΟΓΟΙ

ΕΚΛΟΓΑΙ

ΔΙΑ ΤΗΝ Α΄ ΤΑΞΙΝ
Τῶν Γυμνασίων καὶ Ἡμιγυμνασίων.

ΕΚΔΟΣΙΣ ΠΡΩΤΗ

Ἀριθ. ἀδείας κυκλοφορίας . . .	58379 / 21-10-32
Τιμὴ ἄνευ βιβλιοσήμου . . . . Δρ.	5.40
Ἀξία βιβλιοσήμου . . . . »	2.20
Πρόσθετος φόρος Ἀναγκ. Δανείου »	70
Συνολικὴ τιμὴ Δρ.	8.30

ΕΚΔΟΤΗΣ Ι. Ν. ΣΙΔΕΡΗΣ
ΑΘΗΝΑΙ
1932

Χ. Α. ΠΑΠΑΝΑΣΤΑΣΙΟΥ - Ν. Ε. ΦΡΑΓΚΙΣΚΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΤΗΣ ΒΑΡΒΑΚΕΙΟΥ ΠΡΟΤΥΠΟΥ ΣΧΟΛΗΣ

ΛΟΥΚΙΑΝΟΥ
ΝΕΚΡΙΚΟΙ ΔΙΑΛΟΓΟΙ
ΕΚΛΟΓΑΙ

ΔΙΑ ΤΗΝ Α΄ ΤΑΞΙΝ
Τῶν Γυμνασίων καὶ ἡμιγυμνασίων.

Έ ... ΔΕΡΗ ... 429)15238

ΕΚΔΟΤΗΣ Ι. Ν. ΣΙΔΕΡΗΣ
ΑΘΗΝΑΙ
1932

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΚΕΙΜΕΝΟΝ

ΛΟΥΚΙΑΝΟΥ
ΝΕΚΡΙΚΟΙ ΔΙΑΛΟΓΟΙ
ΕΚΛΟΓΑΙ

1.
ΔΙΟΓΕΝΟΥΣ ΚΑΙ ΠΟΛΥΔΕΥΚΟΥΣ

—ο—

1. ΔΙΟΓ. Ὦ Πολύδευκες, ἐντέλλομαί σοι, ἐπειδὰν τάχιστα ἀνέλθῃς, — σὸν γάρ ἐστιν, οἶμαι, ἀναβιῶναι αὔριον — ἤν που ἴδῃς Μένιππον τὸν κύνα, — εὕροις δ' ἂν αὐτὸν ἐν Κορίνθῳ κατὰ τὸ Κράνειον ἢ ἐν Λυκείῳ τῶν ἐριζόντων πρὸς ἀλλήλους φιλοσόφων καταγελῶντα — εἰπεῖν πρὸς αὐτόν, ὅτι σοί, ὦ Μένιππε, κελεύει ὁ Διογένης, εἴ σοι ἱκανῶς τὰ ὑπὲρ γῆς καταγεγέλασται, ἥκειν ἐνθάδε πολλῷ πλείω ἐπιγελασόμενον· ἐκεῖ μὲν γὰρ ἐν ἀμφιβόλῳ σοὶ ἔτι ὁ γέλως ἦν καὶ πολὺ τὸ „ τίς γὰρ ὅλως οἶδε τὰ μετὰ τὸν βίον; “ ἐνταῦθα δὲ οὐ παύσῃ βεβαίως γελῶν καθάπερ ἐγὼ νῦν, καὶ μάλιστα ἐπειδὰν ὁρᾷς τοὺς πλουσίους καὶ σατράπας καὶ τυράννους οὕτω ταπεινοὺς καὶ ἀσήμους, ἐκ μόνης οἰμωγῆς διαγινωσκομένους, καὶ ὅτι μαλθακοὶ καὶ ἀγεννεῖς εἰσι μεμνημένοι τῶν ἄνω. ταῦτα λέγε αὐτῷ, καὶ προσέτι, ἐμπλησάμενον τὴν πήραν ἥκειν θέρμων τε

πολλῶν καὶ εἴ που εὕροι ἐν τῇ τριόδῳ Ἑκάτης δεῖπνον κείμενον ἢ ᾠὸν ἐκ καθαρσίου ἤ τι τοιοῦτον.

2. ΠΟΛ. Ἀλλ᾿ ἀπαγγελῶ ταῦτα, ὦ Διόγενες. ὅπως δὲ εἰδῶ μάλιστα, ὁποῖός τίς ἐστι τὴν ὄψιν.

ΔΙΟΓ. Γέρων, φαλακρός, τριβώνιον ἔχων πολύθυρον, ἅπαντι ἀνέμῳ ἀναπεπταμένον καὶ ταῖς ἐπιπτυχαῖς τῶν ῥακίων ποικίλον, γελᾷ δ᾿ ἀεὶ καὶ τὰ πολλὰ τοὺς ἀλαζόνας τούτους φιλοσόφους ἐπισκώπτει.

ΠΟΛ. Ῥᾴδιον εὑρεῖν ἀπό γε τούτων.

3. ΔΙΟΓ. Τοῖς πλουσίοις δ᾿, ὦ φίλτατον Πολυδεύκιον, ἀπάγγελε ταῦτα παρ᾿ ἡμῶν· τί, ὦ μάταιοι, τὸν χρυσὸν φυλάττετε; τί δὲ τιμωρεῖσθε ἑαυτοὺς λογιζόμενοι τοὺς τόκους καὶ τάλαντα ἐπὶ ταλάντοις συντιθέντες, οὓς χρὴ ἕνα ὀβολὸν ἔχοντας ἥκειν μετ᾿ ὀλίγον;

ΠΟΛ. Εἰρήσεται καὶ ταῦτα πρὸς ἐκείνους.

ΔΙΟΓ. Ἀλλὰ καὶ τοῖς καλοῖς τε καὶ ἰσχυροῖς λέγε, Μεγίλλῳ τε τῷ Κορινθίῳ καὶ Δαμοξένῳ τῷ παλαιστῇ, ὅτι παρ᾿ ἡμῖν οὔτε ἡ ξανθὴ κόμη οὔτε τὰ χαροπὰ ἢ μέλανα ὄμματα ἢ ἐρύθημα ἐπὶ τοῦ προσώπου ἔτι ἔστιν ἢ νεῦρα εὔτονα ἢ ὦμοι καρτεροί, ἀλλὰ πάντα μία ἡμῖν κόνις, φασί, κρανία γυμνὰ τοῦ κάλλους.

ΠΟΛ. Οὐ χαλεπὸν οὐδὲ ταῦτα εἰπεῖν πρὸς τοὺς καλοὺς καὶ ἰσχυρούς.

4. ΔΙΟΓ. Καὶ τοῖς πένησιν, ὦ Λάκων, — πολλοὶ δ᾿ εἰσὶ καὶ ἀχθόμενοι τῷ πράγματι καὶ οἰκτίροντες τὴν ἀπορίαν — λέγε μήτε δακρύειν μήτε οἰμώζειν διηγησάμενος τὴν ἐνταῦθα ἰσοτιμίαν, καὶ ὅτι ὄψονται τοὺς ἐκεῖ πλουσίους οὐδὲν ἀμείνους αὐτῶν· καὶ Λακεδαιμονίοις δὲ τοῖς σοῖς ταῦτα, εἰ δοκεῖ, παρ᾿ ἐμοῦ ἐπιτίμησον λέγων ἐκλελύσθαι αὐτούς.

ΠΟΛ. Μηδέν, ὦ Διόγενες, περὶ Λακεδαιμονίων λέγε· οὐ γὰρ ἀνέξομαί γε. ἃ δὲ πρὸς τοὺς ἄλλους ἔφησθα, ἀπαγγελῶ.

ΔΙΟΓ. Ἐάσωμεν τούτους, ἐπεί σοι δοκεῖ· σὺ δὲ οἷς προεῖπον ἀπένεγκον παρ᾽ ἐμοῦ τοὺς λόγους.

*****

2.

ΠΛΟΥΤΩΝ Η ΚΑΤΑ ΜΕΝΙΠΠΟΥ

—o—

1. ΚΡΟΙΣ. Οὐ φέρομεν, ὦ Πλούτων, Μένιππον τουτονὶ τὸν κύνα παροικοῦντα· ὥστε ἢ ἐκεῖνόν ποι κατάστησον ἢ ἡμεῖς μετοικήσομεν ἐς ἕτερον τόπον.

ΠΛΟΥΤ. Τὶ δ᾽ ὑμᾶς δεινὸν ἐργάζεται ὁμόνεκρος ὤν;.

ΚΡΟΙΣ. Ἐπειδὰν ἡμεῖς οἰμώζωμεν καὶ στένωμεν ἐκείνων μεμνημένοι τῶν ἄνω, Μίδας μὲν ούτοσὶ τοῦ χρυσίου, Σαρδανάπαλλος δὲ τῆς πολλῆς τρυφῆς, ἐγὼ δὲ Κροῖσος τῶν θησαυρῶν, ἐπιγελᾷ καὶ ἐξονειδίζει ἀνδράποδα καὶ καθάρματα ἡμᾶς ἀποκαλῶν, ἐνίοτε δὲ καὶ ᾄδων ἐπιταράττει ἡμῶν τὰς οἰμωγάς, καὶ ὅλως λυπηρός ἐστι.

ΠΛΟΥΤ. Τὶ ταῦτά φασιν, ὦ Μένιππε;

ΜΕΝΙΠ. Ἀληθῆ, ὦ Πλούτων· μισῶ γάρ αὐτοὺς ἀγεννεῖς καὶ ὀλεθρίους ὄντας, οἷς οὐκ ἀπέχρησε βιῶναι κακῶς, ἀλλὰ καὶ ἀποθανόντες ἔτι μέμνηνται καὶ περιέχονται τῶν ἄνω· χαίρω τοιγαροῦν ἀνιῶν αὐτούς.

ΠΛΟΥΤ. Ἀλλ' οὐ χρή· λυποῦνται γὰρ οὐ μικρῶν στερόμενοι.

ΜΕΝΙΠ. Καὶ σὺ μωραίνεις, ὦ Πλούτων, ὁμόψηφος ὢν τοῖς τούτων στεναγμοῖς;

ΠΛΟΥΤ. Οὐδαμῶς, ἀλλ' οὐκ ἂν ἐθέλοιμι στασιάζειν ὑμᾶς.

ΜΕΝΙΠ. Καὶ μήν, ὦ κάκιστοι Λυδῶν καὶ Φρυγῶν καὶ Ἀσσυρίων, οὕτω γινώσκετε ὡς οὐδὲ παυσομένου μου· ἔνθα γὰρ ἂν ἴητε, ἀκολουθήσω ἀνιῶν καὶ κατᾴδων καὶ καταγελῶν.

ΚΡΟΙΣ. Ταῦτα οὐχ ὕβρις;

ΜΕΝΙΠ. Οὐκ, ἀλλ' ἐκεῖνα ὕβρις ἦν, ἃ ὑμεῖς ἐποιεῖτε, προσκυνεῖσθαι ἀξιοῦντες καὶ ἐλευθέροις ἀνδράσιν ἐντρυφῶντες καὶ τοῦ θανάτου τὸ παράπαν οὐ μνημονεύοντες· τοιγαροῦν οἰμώξεσθε πάντων ἐκείνων ἀφῃρημένοι.

ΚΡΟΙΣ. Πολλῶν γε ὦ θεοί, καὶ μεγάλων κτημάτων.

ΜΙΔ. Ὅσου μὲν ἐγὼ χρυσοῦ.

ΣΑΡΔ. Ὅσης δὲ ἐγὼ τρυφῆς.

ΜΕΝΙΠ. Εὖ γε, οὕτω ποιεῖτε· ὀδύρεσθε μὲν ὑμεῖς, ἐγὼ δὲ τὸ γνῶθι σαυτὸν πολλάκις συνείρων ἐπᾴσομαι ὑμῖν· πρέποι γὰρ ἂν ταῖς τοιαύταις οἰμωγαῖς ἐπᾳδόμενον.

*
** **

3.

ΠΛΟΥΤΩΝΟΣ ΚΑΙ ΕΡΜΟΥ

—o—

1. ΠΛΟΥΤ. Τὸν γέροντα οἶσθα, τὸν πάνυ γε-

γηρακότα λέγω, τὸν πλούσιον Εὐκράτην, ᾧ παῖδες μὲν οὐκ εἰσίν, οἱ τὸν κλῆρον δὲ θηρῶντες πεντακισμύριοι;

ΕΡΜ. Ναί, τὸν Σικυώνιον φής. τί οὖν;

ΠΛΟΥΤ. Ἐκεῖνον μέν, ὦ Ἑρμῆ, ζῆν ἔασον ἐπὶ τοῖς ἐνενήκοντα ἔτεσιν, ἃ βεβίωκεν, ἐπιμετρήσας ἄλλα τοσαῦτα, εἰ δὲ οἷόν τε ἦν, καὶ ἔτι πλείω, τοὺς δὲ κόλακας αὐτοῦ Χαρῖνον τὸν νέον καὶ Δάμωνα καὶ τοὺς ἄλλους κατάσπασον ἐφεξῆς ἅπαντας.

ΕΡΜ. Ἄτοπον ἂν δόξειε τὸ τοιοῦτον.

ΠΛΟΥΤ. Οὐ μὲν οὖν, ἀλλὰ δικαιότατον· τί γὰρ ἐκεῖνοι παθόντες εὔχονται ἀποθανεῖν ἐκεῖνον ἢ τῶν χρημάτων ἀντιποιοῦνται οὐδὲν προσήκοντες; ὃ δὲ πάντων ἐστὶ μιαρώτατον, ὅτι καὶ τὰ τοιαῦτα εὐχόμενοι ὅμως θεραπεύουσιν ἔν γε τῷ φανερῷ, καὶ νοσοῦντος ἃ μὲν βουλεύονται πᾶσι πρόδηλα, θύσειν δὲ ὅμως ὑπισχνοῦνται, ἢν ῥαΐσῃ, καὶ ὅλως ποικίλη τις ἡ κολακεία τῶν ἀνδρῶν· διὰ ταῦτα ὁ μὲν ἔστω ἀθάνατος, οἱ δὲ προαπίτωσαν αὐτοῦ μάτην ἐπιχανόντες.

2. ΕΡΜ. Γελοῖα πείσονται, πανοῦργοι ὄντες· πολλὰ κἀκεῖνος εὖ μάλα διαβουκολεῖ αὐτοὺς καὶ ἐλπίζει, καὶ ὅλως ἀεὶ θανόντι ἐοικὼς ἔρρωται πολὺ μᾶλλον τῶν νέων· οἱ δὲ ἤδη τὸν κλῆρον ἐν σφίσι διῃρημένοι βόσκονται ζωὴν μακαρίαν πρὸς ἑαυτοὺς τιθέντες.

ΠΛΟΥΤ. Οὐκοῦν ὁ μὲν ἀποδυσάμενος τὸ γῆρας ὥσπερ Ἰόλεως ἀνηβησάτω, οἱ δὲ ἀπὸ μέσων τῶν ἐλπίδων τὸν ὀνειροποληθέντα πλοῦτον ἀπολιπόντες ἡκέτωσαν ἤδη κακοὶ κακῶς ἀποθανόντες.

ΕΡΜ. Ἀμέλησον, ὦ Πλούτων· μετελεύσομαι γάρ σοι ἤδη αὐτοὺς καθ᾽ ἕνα ἑξῆς· ἑπτὰ δέ, οἶμαι, εἰσί.

ΠΛΟΥΤ. Κατάσπα, ὁ δὲ παραπέμψει ἕκαστον ἀντὶ γέροντος αὖθις πρωθήβης γενόμενος.

*
** **

4.
ΤΕΡΨΙΩΝΟΣ ΚΑΙ ΠΛΟΥΤΩΝΟΣ

—ο—

1. ΤΕΡΨ. Τοῦτο, ὦ Πλούτων, δίκαιον, ἐμὲ μὲν τεθνάναι τριάκοντα ἔτη γεγονότα, τὸν δὲ ὑπὲρ τὰ ἐνενήκοντα γέροντα Θούκριτον ζῆν ἔτι;

ΠΛΟΥΤ. Δικαιότατον μὲν οὖν, ὦ Τερψίων, εἴ γε ὁ μὲν ζῇ μηδένα εὐχόμενος ἀποθανεῖν τῶν φίλων, σὺ δὲ παρὰ πάντα τὸν χρόνον ἐπεβούλευες αὐτῷ περιμένων τὸν κλῆρον.

ΤΕΡΨ. Οὐ γὰρ ἐχρῆν γέροντα ὄντα καὶ μηκέτι χρήσασθαι τῷ πλούτῳ αὐτὸν δυνάμενον ἀπελθεῖν τοῦ βίου παραχωρήσαντα τοῖς νέοις;

ΠΛΟΥΤ. Καινά, ὦ Τερψίων, νομοθετεῖς, τὸν μηκέτι τῷ πλούτῳ χρήσασθαι δυνάμενον πρὸς ἡδονὴν ἀποθνήσκειν· τὸ δὲ ἄλλως ἡ Μοῖρα καὶ ἡ φύσις διέταξεν.

2. ΤΕΡΨ. Οὐκοῦν ταύτης αἰτιῶμαι τῆς διατάξεως· ἐχρῆν γὰρ τὸ πρᾶγμα ἑξῆς πως γίνεσθαι, τὸν πρεσβύτερον πρότερον καὶ μετὰ τοῦτον ὅστις καὶ τῇ ἡλικίᾳ μετ' αὐτόν, ἀναστρέφεσθαι δὲ μηδαμῶς, μηδὲ ζῆν μὲν τὸν ὑπέργηρων ὀδόντας τρεῖς ἔτι λοιποὺς ἔχοντα, μόγις ὁρῶντα, οἰκέταις τέτταρσιν ἐπικεκυφότα, κορύζης μὲν τὴν ῥῖνα, λήμης δὲ τοὺς ὀφθαλμοὺς μεστὸν ὄντα, οὐ-

δὲν ἔτι ἡδὺ εἰδότα, ἔμψυχόν τινα τάφον ὑπὸ τῶν νέων καταγελώμενον, ἀποθνήσκειν δὲ καλλίστους καὶ ἐρρωμενεστάτους νεανίσκους· ἄνω γὰρ ποταμῶν τοῦτό γε· ἢ τὸ τελευταῖον εἰδέναι ἐχρῆν, πότε καὶ τεθνήξεται τῶν γερόντων ἕκαστος, ἵνα μὴ μάτην ἄν ἐνίους ἐθεράπευον. νῦν δὲ τὸ τῆς παροιμίας, ἡ ἅμαξα τὸν βοῦν [πολλάκις ἐκφέρει].

3. ΠΛΟΥΤ. Ταῦτα μέν, ὦ Τερψίων, πολὺ συνετώτερα γίνεται ἤπερ σοὶ δοκεῖ. καὶ ὑμεῖς δὲ τί παθόντες ἀλλοτρίοις ἐπιχαίνετε καὶ τοῖς ἀτέκνοις τῶν γερόντων ἐσποιεῖτε φέροντες αὑτούς; τοιγαροῦν γέλωτα ὀφλισκάνετε πρὸ ἐκείνων κατορυττόμενοι, καὶ τὸ πρᾶγμα τοῖς πολλοῖς ἥδιστον γίνεται· ὅσῳ γὰρ ὑμεῖς ἐκείνους ἀποθανεῖν εὔχεσθε, τοσούτῳ ἅπασιν ἡδὺ προαποθανεῖν ὑμᾶς αὐτῶν.

4. ΤΕΡΨ. Ἀληθῆ ταῦτα φής· ἐμοῦ γοῦν Θούκριτος πόσα κατέφαγεν ἀεὶ τεθνήξεσθαι δοκῶν καὶ ὁπότε ἐσίοιμι ὑποστένων καὶ μύχιόν τι καθάπερ ἐξ ᾠοῦ νεοττὸς ἀτελὴς ὑποκρώζων, ὥστ᾽ ἔγωγε ὅσον αὐτίκα οἰόμενος ἐπιβήσειν αὐτὸν τῆς σοροῦ ἔπεμπόν τε πολλά, καὶ ὑπὸ φροντίδων ἄγρυπνος ἐκείμην ἀριθμῶν ἕκαστα καὶ διατάττων. ταῦτα γοῦν μοι καὶ τοῦ ἀποθανεῖν αἴτια γεγένηται, ἀγρυπνία καὶ φροντίδες· ὁ δὲ τοσοῦτόν μοι δέλεαρ καταπιὼν ἐφειστήκει θαπτομένῳ πρῴην ἐπιγελῶν.

5. ΠΛΟΥΤ. Εὖ γε, ὦ Θούκριτε, ζῴης ἐπὶ μήκιστον πλουτῶν ἅμα καὶ τῶν τοιούτων καταγελῶν, μηδὲ πρότερόν γε σὺ ἀποθάνοις ἢ προπέμψας πάντας τοὺς κόλακας.

ΤΕΡΨ. Τοῦτο μέν, ὦ Πλούτων, καὶ ἐμοὶ ἥδιστον ἤδη, εἰ καὶ Χαροιάδης προτεθνήξεται Θουκρίτου.

ΠΛΟΥΤ. Θάρρει, ὦ Τερψίων· καὶ Φείδων γὰρ καὶ Μέλανθος καὶ ὅλως ἅπαντες προελεύσονται αὐτοῦ ὑπὸ ταῖς αὐταῖς φροντίσιν.

ΤΕΡΨ. Ἐπαινῶ ταῦτα· ζῴης ἐπὶ μήκιστον, ὦ Θούκριτε.

*****

5.

ΖΗΝΟΦΑΝΤΟΥ ΚΑΙ ΚΑΛΛΙΔΗΜΙΔΟΥ

—o—

1. ΖΗΝ. Σὺ δέ, ὦ Καλλιδημίδη, πῶς ἀπέθανες; ἐγὼ μὲν γὰρ ὅτι παράσιτος ὢν Δεινίου πλέον τοῦ ἱκανοῦ ἐμφαγὼν ἀπεπνίγην, οἶσθα· παρῆς γὰρ ἀποθνήσκοντί μοι.

ΚΑΛ. Παρῆν, ὦ Ζηνόφαντε· τὸ δὲ ἐμὸν παράδοξόν τι ἐγένετο. οἶσθα γὰρ καὶ σύ που Πτοιόδωρον τὸν γέροντα;

ΖΗΝ. Τὸν ἄτεκνον, τὸν πλούσιον, ᾧ σε τὰ πολλα ᾔδειν συνόντα;

ΚΑΛ. Ἐκεῖνον αὐτὸν ἀεὶ ἐθεράπευον ὑπισχνούμενον ἐπ᾿ ἐμοὶ τεθνήξεσθαι. ἐπεὶ δὲ τὸ πρᾶγμα ἐς μήκιστον ἐπεγίνετο καὶ ὑπὲρ τὸν Τιθωνὸν ὁ γέρων ἔζη, ἐπίτομόν τινα ὁδὸν ἐπὶ τὸν κλῆρον ἐξεῦρον· πριάμενος γὰρ φάρμακον ἀνέπεισα τὸν οἰνοχόον, ἐπειδὰν τάχιστα ὁ Πτοιόδωρος αἰτήσῃ πιεῖν, — πίνει δὲ ἐπιεικῶς ζωρότερον — ἐμβαλόντα ἐς κύλικα ἑτοιμον ἔχειν αὐτὸ καὶ ἐπιδοῦναι αὐτῷ· εἰ δὲ τοῦτο ποιήσειεν, ἐλεύθερον ἐπωμοσάμην ἀφήσειν αὐτόν.

ΖΗΝ. Τί οὖν ἐγένετο; πάνυ γάρ τι παράδοξον ἐρεῖν ἔοικας.

2. ΚΑΛ. Ἐπεὶ τοίνυν λουσάμενοι ἥκομεν, δύο δὴ ὁ μειρακίσκος κύλικας ἑτοίμους ἔχων τὴν μὲν τῷ Πτοιοδώρῳ τὴν ἔχουσαν τὸ φάρμακον, τὴν δὲ ἑτέραν ἐμοί, σφαλεὶς οὐκ οἶδ᾽ ὅπως ἐμοὶ μὲν τὸ φάρμακον, Πτοιοδώρῳ δὲ τὴν ἀφάρμακτον κύλικα ἔδωκεν· εἶτα ὁ μὲν ἔπινεν, ἐγὼ δὲ αὐτίκα μάλα ἐκτάδην ἐκείμην ὑποβολιμαῖος ἀντ᾽ ἐκείνου νεκρός. τί τοῦτο γελᾷς, ὦ Ζηνόφαντε; καὶ μὴν οὐκ ἔδει γε ἑταίρῳ ἀνδρὶ ἐπιγελᾶν.

ΖΗΝ. Ἀστεῖα γάρ, ὦ Καλλιδημίδη, πέπονθας. ὁ γέρων δὲ τί πρὸς ταῦτα;

ΚΑΛ. Πρῶτον μὲν ὑπεταράχθη πρὸς τὸ αἰφνίδιον, εἶτα συνείς, οἶμαι, τὸ γεγενημένον ἐγέλα καὶ αὐτός, οἷά γε ὁ οἰνοχόος εἴργασται.

ΖΗΝ. Πλὴν ἀλλ᾽ οὐδὲ σὲ τὴν ἐπίτομον ἐχρῆν τραπέσθαι· ἧκε γὰρ ἄν σοι διὰ τῆς λεωφόρου ἀσφαλέστερον, εἰ καὶ ὀλίγῳ βραδύτερον.

*
** **

6.

ΧΑΡΩΝΟΣ ΚΑΙ ΕΡΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΚΡΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

—ο—

1. ΧΑΡ. Ἀκούσατε ὡς ἔχει ἡμῖν τὰ πράγματα. μικρὸν μὲν ἡμῖν, ὡς ὁρᾶτε, τὸ σκαφίδιον καὶ

ὑπόσαθρόν ἐστι καὶ διαρρεῖ τὰ πολλά, καὶ ἢν τραπῇ ἐπὶ θάτερα, οἰχήσεται περιτραπέν, ὑμεῖς δὲ ἅμα τοσοῦτοι ἥκετε πολλὰ ἐπιφερόμενοι ἕκαστος. ἢν οὖν μετὰ τούτων ἐμβῆτε, δέδια μὴ ὕστερον μετανοήσητε, καὶ μάλιστα ὁπόσοι νεῖν οὐκ᾽ ἐπίστασθε.

ΕΡΜ. Πῶς οὖν ποιήσαντες εὐπλοήσομεν;

ΧΑΡ. Ἐγὼ ὑμῖν φράσω· γυμνοὺς ἐπιβαίνειν χρὴ τὰ περιττὰ ταῦτα πάντα ἐπὶ τῆς ἠϊόνος καταλιπόντας. μόλις γὰρ ἂν καὶ οὕτως δέξαιτο ὑμᾶς τὸ πορθμεῖον. σοὶ δέ, ὦ Ἑρμῆ, μελήσει τὸ ἀπὸ τούτου μηδένα παραδέχεσθαι αὐτῶν, ὃς ἂν μὴ ψιλὸς ᾖ καὶ τὰ ἔπιπλα, ὥσπερ ἔφην, ἀποβαλών. παρὰ δὲ τὴν ἀποβάθραν ἑστὼς διαγίνωσκε αὐτοὺς καὶ ἀναλάμβανε γυμνοὺς ἐπιβαίνειν ἀναγκάζων.

2. ΕΡΜ. Εὖ λέγεις, καὶ οὕτω ποιήσωμεν. — Οὑτοσὶ τίς ὁ πρῶτός ἐστι;

ΜΕΝ. Μένιππος ἔγωγε. ἀλλ᾽ ἰδοὺ ἡ πήρα μοι, ὦ Ἑρμῆ, καὶ τὸ βάκτρον ἐς τὴν λίμνην ἀπερρίφθων, τὸν τρίβωνα δὲ οὐδὲ ἐκόμισα εὖ ποιῶν.

ΕΡΜ. Ἔμβαινε, ὦ Μένιππε ἀνδρῶν ἄριστε, καὶ τὴν προεδρίαν παρὰ τὸν κυβερνήτην ἔχε ἐφ᾽ ὑψηλοῦ, ὡς ἐπισκοπῇς ἅπαντας. 4. ὁ δὲ τὴν πορφυρίδα οὑτοσὶ καὶ τὸ διάδημα ὁ βλοσυρὸς τίς ὢν τυγχάνεις;

ΛΑΜΠ. Λάμπιχος Γελῴων τύραννος.

ΕΡΜ. Τί οὖν, ὦ Λάμπιχε, τοσαῦτα ἔχων πάρει;

ΛΑΜΠ. Τί οὖν; ἐχρῆν, ὦ Ἑρμῆ, γυμνὸν ἥκειν τύραννον ἄνδρα;

ΕΡΜ. Τύραννον μὲν οὐδαμῶς, νεκρὸν δὲ μάλα· ὥστε ἀπόθου ταῦτα.

ΛΑΜΠ. Ἰδού σοι ὁ πλοῦτος ἀπέρριπται.

ΕΡΜ. Καὶ τὸν τῦφον ἀπόρριψον, ὦ Λάμπιχε, καὶ τὴν ὑπεροψίαν· βαρήσει γὰρ τὸ πορθμεῖον συνεμπεσόντα.

ΛΑΜΠ. Οὐκοῦν ἀλλὰ τὸ διάδημα ἔασόν με ἔχειν καὶ τὴν ἐφεστρίδα.

ΕΡΜ. Οὐδαμῶς, ἀλλὰ καὶ ταῦτα ἄφες.

ΛΑΜΠ. Εἶεν τί ἔτι; πάντα γὰρ ἀφῆκα, ὡς ὁρᾷς·

ΕΡΜ. Καὶ τὴν ὠμότητα καὶ τὴν ἄνοιαν καὶ τὴν ὕβριν καὶ τὴν ὀργήν, καὶ ταῦτα ἄφες.

ΛΑΜΠ. Ἰδού σοι ψιλός εἰμι.

5. ΕΡΜ. Ἔμβαινε ἤδη. σὺ δὲ ὁ παχύς, ὁ πολύσαρκος, τίς ὢν τυγχάνεις;

ΛΑΜ. Δαμασίας ὁ ἀθλητής.

ΕΡΜ. Ναί, ἔοικας· οἶδα γάρ σε πολλάκις ἐν ταῖς παλαίστραις ἰδών.

ΛΑΜ. Ναί, ὦ Ἑρμῆ· ἀλλὰ παράδεξαί με γυμνὸν ὄντα.

ΕΡΜ. Οὐ γυμνόν, ὦ βέλτιστε, τοσαύτας σάρκας περιβεβλημένον· ὥστε ἀπόδυθι αὐτάς, ἐπεὶ καταδύσεις τὸ σκάφος τὸν ἕτερον πόδα ὑπερθεὶς μόνον· ἀλλὰ καὶ τοὺς στεφάνους τούτους ἀπόρριψον καὶ τὰ κηρύγματα.

ΛΑΜ. Ἰδού σοι γυμνός, ὡς ὁρᾷς, ἀληθῶς εἰμι καὶ ἰσοστάσιος τοῖς ἄλλοις νεκροῖς.

6. ΕΡΜ. Οὕτως ἄμεινον ἀβαρῆ εἶναι· ὥστε ἔμβαινε. καὶ σὺ δὲ τὸν πλοῦτον ἀποθέμενος, ὦ Κράτων, καὶ τὴν μαλακίαν δὲ προσέτι καὶ τὴν τρυφὴν μηδὲ τὰ ἐντάφια κόμιζε μηδὲ τὰ τῶν προγόνων ἀξιώματα, κατάλιπε δὲ καὶ γένος καὶ δόξαν καὶ εἴ ποτέ σε ἡ πόλις ἀνεκήρυξε καὶ τὰς τῶν ἀνδριάντων ἐπιγραφάς, μηδέ, ὅτι μέγαν τάφον ἐπί σοι ἔχωσαν, λέγε· βαρύνει γὰρ καὶ ταῦτα μνημονευόμενα.

ΚΡΑΤ. Οὐχ ἑκὼν μέν, ἀπορρίψω δέ· τί γὰρ ἂν καὶ πάθοιμι;

7. ΕΡΜ. Βαβαῖ. σὺ δὲ ὁ ἔνοπλος τί βούλει; ἢ τί τὸ τρόπαιον τοῦτο φέρεις;

ΣΤΡΑΤ. Ὅτι ἐνίκησα, ὦ Ἑρμῆ, καὶ ἠρίστευσα καὶ ἡ πόλις ἐτίμησέ με.

ΕΡΜ. Ἄφες ὑπὲρ γῆς τὸ τρόπαιον· ἐν ᾅδου γὰρ εἰρήνη καὶ οὐδὲν ὅπλων δεήσει. 8. ὁ σεμνὸς δὲ οὗτος ἀπό γε τοῦ σχήματος καὶ βρενθυόμενος, ὁ τὰς ὀφρῦς ἐπηρκώς, ὁ ἐπὶ τῶν φροντίδων τίς ἐστιν, ὁ τὸν βαθὺν πώγωνα καθειμένος;

ΜΕΝ. Φιλόσοφός τις, ὦ Ἑρμῆ, μᾶλλον δὲ γόης καὶ τερατείας μεστός. ὥστε ἀπόδυσον καὶ τοῦτον· ὄψει γὰρ πολλὰ καὶ γελοῖα ὑπὸ τῷ ἱματίῳ σκεπόμενα.

ΕΡΜ. Ἀπόθου σὺ τὸ σχῆμα πρῶτον, εἶτα καὶ ταυτὶ πάντα. ὦ Ζεῦ, ὅσην μὲν τὴν ἀλαζονείαν κομίζει, ὅσην δὲ ἀμαθίαν καὶ ἔριν καὶ κενοδοξίαν καὶ ἐρωτήσεις ἀπόρους καὶ λόγους ἀκανθώδεις καὶ ἐννοίας πολυπλόκους, ἀλλὰ καὶ ματαιοπονίαν μάλα πολλὴν καὶ λῆρον οὐκ' ὀλίγον καὶ ὕθλους καὶ μικρολογίαν, νὴ Δία καὶ χρυσίον γε τουτὶ καὶ ἡδυπάθειαν δὲ καὶ ἀναισχυντίαν καὶ ὀργὴν καὶ τρυφὴν καὶ μαλακίαν· οὐ λέληθε γάρ με, εἰ καὶ μάλα περικρύπτεις αὐτά. καὶ τὸ ψεῦδος δὲ ἀπόθου καὶ τὸν τῦφον καὶ τὸ οἴεσθαι ἀμείνων εἶναι τῶν ἄλλων· ὡς εἴ γε ταῦτα πάντα ἔχων ἐμβαίης, ποία πεντηκόντορος δέξαιτο ἄν σε;

ΦΙΛ. Ἀποτίθεμαι τοίνυν αὐτά, ἐπείπερ οὕτω κελεύεις.

9. ΜΕΝ. Ἀλλὰ καὶ τὸν πώγωνα τοῦτον ἀποθέ-

σθω, ὦ Ἑρμῆ, βαρύν τε ὄντα καὶ λάσιον, ὡς ὁρᾷς· πέντε μναῖ τριχῶν εἰσι τοὐλάχιστον.

ΕΡΜ. Εὖ λέγεις· ἀπόθου καὶ τοῦτον.

ΦΙΛ. Καὶ τίς ὁ ἀποκείρων ἔσται;

ΕΡΜ. Μένιππος οὑτοσὶ λαβὼν πέλεκυν τῶν ναυπηγικῶν ἀποκόψει αὐτὸν ἐπικόπῳ τῇ ἀποβάθρᾳ χρησάμενος.

ΜΕΝ. Οὔκ, ὦ Ἑρμῆ, ἀλλὰ πρίονά μοι ἀνάδος· γελοιότερον γὰρ τοῦτο.

ΕΡΜ. Ὁ πέλεκυς ἱκανός. εὖ γε. ἀνθρωπινώτερος νῦν ἀναπέφηνας ἀποθέμενος σαυτοῦ τὴν κινάβραν.

ΜΕΝ. Βούλει μικρὸν ἀφέλωμαι καὶ τῶν ὀφρύων;

ΕΡΜ. Μάλιστα· ὑπὲρ τὸ μέτωπον γὰρ καὶ ταύτας ἐπῆρκεν, οὐκ οἶδα ἐφ᾽ ὅτῳ ἀνατείνων ἑαυτόν. τί τοῦτο; καὶ δακρύεις, ὦ κάθαρμα, καὶ πρὸς θάνατον ἀποδειλιᾷς; ἔμβηθι δ᾽ οὖν.

ΜΕΝ. Ἓν ἔτι τὸ βαρύτατον ὑπὸ μάλης ἔχει.

ΕΡΜ. Τί, ὦ Μένιππε;

ΜΕΝ. Κολακείαν, ὦ Ἑρμῆ, πολλὰ χρησιμεύσασαν αὐτῷ ἐν τῷ βίῳ.

ΦΙΛ. Οὐκοῦν καὶ σύ, ὦ Μένιππε, ἀπόθου τὴν ἐλευθερίαν καὶ παρρησίαν καὶ τὸ ἄλυπον καὶ τὸ γενναῖον καὶ τὸν γέλωτα· μόνος γοῦν τῶν ἄλλων γελᾷς.

ΕΡΜ. Μηδαμῶς, ἀλλὰ καὶ ἔχε ταῦτα, κοῦφα γὰρ καὶ πάνυ εὔφορα ὄντα καὶ πρὸς τὸν κατάπλουν χρήσιμα 10. καὶ ὁ ῥήτωρ δὲ σὺ ἀπόθου τῶν ῥημάτων τὴν τοσαύτην ἀπεραντολογίαν καὶ ἀντιθέσεις καὶ παρισώσεις καὶ περιόδους καὶ βαρβαρισμοὺς καὶ τὰ ἄλλα βάρη τῶν λόγων.

ΡΗΤ. Ἢν ἰδού, ἀποτίθεμαι.

ΕΡΜ. Εὖ ἔχει· ὥστε λύε τὰ ἀπόγεια, τὴν ἀποβάθραν ἀνελώμεθα, τὸ ἀγκύριον ἀνεσπάσθω, πέτασον τὸ ἱστίον, εὔθυνε, ὦ πορθμεῦ, τὸ πηδάλιον· εὐπλοῶμεν. 11. τί οἰμώζετε, ὦ μάταιοι, καὶ μάλιστα ὁ φιλόσοφος σὺ ὁ ἀρτίως τὸν πώγωνα δεδῃωμένος;

ΦΙΛ. Ὅτι, ὦ Ἑρμῆ, ἀθάνατον ᾤμην τὴν ψυχὴν ὑπάρχειν.

ΜΕΝ. Ψεύδεται· ἄλλα γὰρ ἔοικε λυπεῖν αὐτόν.

ΦΙΛ. Σὺ δέ, ὦ Μένιππε, οὐκ ἄχθῃ ἀποθανών;

ΜΕΝ. Πῶς, ὃς ἔσπευσα ἐπὶ τὸν θάνατον καλέσαντος μηδενός; 12. ἀλλὰ μεταξὺ λόγων οὐ κραυγή τις ἀκούεται ὥσπερ τινῶν ἀπὸ γῆς βοώντων;

ΕΡΜ. Ναί, ὦ Μένιππε, οὐκ ἀφ' ἑνός γε χωρίου, ἀλλ' οἱ μὲν ἐς τὴν ἐκκλησίαν συνελθόντες ἄσμενοι γελῶσι πάντες ἐπὶ τῷ Λαμπίχου θανάτῳ καὶ ἡ γυνὴ αὐτοῦ συνέχεται πρὸς τῶν γυναικῶν καὶ τὰ παιδία νεογνὰ ὄντα ὁμοίως κἀκεῖνα ὑπὸ τῶν παίδων βάλλεται ἀφθόνοις τοῖς λίθοις· ἄλλοι δὲ Διόφαντον τὸν ῥήτορα ἐπαινοῦσιν ἐν Σικυῶνι ἐπιταφίους λόγους διεξιόντα ἐπὶ Κράτωνι τούτῳ. καὶ νὴ Δία γε ἡ Δαμασίου μήτηρ κωκύουσα ἐξάρχει τοῦ θρήνου σὺν γυναιξὶν ἐπὶ τῷ Δαμασίᾳ· σὲ δέ, ὦ Μένιππε, οὐδεὶς δακρύει, καθ' ἡσυχίαν δὲ κεῖσαι μόνος.

13. ΜΕΝ. Οὐδαμῶς, ἀλλ' ἀκούσῃ τῶν κυνῶν μετ' ὀλίγον ὠρυομένων οἴκτιστον ἐπ' ἐμοὶ καὶ τῶν κοράκων τυπτομένων τοῖς πτεροῖς, ὁπόταν συνελθόντες θάπτωσί με.

ΕΡΜ. Γεννάδας εἶ, ὦ Μένιππε. ἀλλ' ἐπεὶ καταπεπλεύκαμεν ἡμεῖς, ὑμεῖς μὲν ἄπιτε πρὸς τὸ δικαστήριον εὐθεῖαν ἐκείνην προϊόντες, ἐγὼ δὲ καὶ ὁ πορθμεὺς ἄλλους μετελευσόμεθα.

ΜΕΝ. Εὐπλοεῖτε, ὦ Ἑρμῆ· προΐωμεν δὲ καὶ ἡμεῖς. τί οὖν ἔτι καὶ μέλλετε; πάντως δικασθῆναι δεήσει, καὶ τὰς καταδίκας φασὶν εἶναι βαρείας, τροχοὺς καὶ λίθους καὶ γῦπας· δειχθήσεται δὲ ὁ ἑκάστου βίος ἀκριβῶς.

******

7.

ΚΡΑΤΗΤΟΣ ΚΑΙ ΔΙΟΓΕΝΟΥΣ

—ο—

1. ΚΡΑΤ. Μοίριχον τὸν πλούσιον ἐγίνωσκες, ὦ Διόγενες, τὸν πάνυ πλούσιον, τὸν ἐκ Κορίνθου, τὸν τὰς πολλὰς ὁλκάδας ἔχοντα, οὗ ἀνεψιὸς Ἀριστέας, πλούσιος καὶ αὐτὸς ὤν; ὅς τὸ Ὁμηρικὸν ἐκεῖνο εἰώθει ἐπιλέγειν,

ἤ μ' ἀνάειρ' ἢ ἐγὼ σέ.

ΔΙΟΓ. Τίνος ἕνεκα, ὦ Κράτης;

ΚΡΑΤ. Ἐθεράπευον ἀλλήλους τοῦ κλήρου ἕνεκα ἑκάτερος ἡλικιῶται ὄντες, καὶ τὰς διαθήκας ἐς τὸ φανερὸν ἐτίθεντο, Ἀριστέαν μὲν ὁ Μοίριχος, εἰ προαποθάνοι, δεσπότην ἀφιεὶς τῶν ἑαυτοῦ πάντων, Μοίριχον δὲ ὁ Ἀριστέας, εἰ προαπέλθοι αὐτοῦ. ταῦτα μὲν ἐγέγραπτο, οἱ δ᾽ ἐθεράπευον ὑπερβαλλόμενοι ἀλλήλους τῇ κολακείᾳ· καὶ οἱ μάντεις, οἵ τε ἀπὸ τῶν ἄστρων τεκμαιρόμενοι τὸ μέλλον οἵ τε ἀπὸ τῶν ὀνειράτων, ὥς γε Χαλδαίων παῖδες, ἀλλὰ καὶ ὁ Πύθιος αὐτὸς ἄρτι μὲν Ἀριστέᾳ παρεῖχε τὸ κράτος, ἄρτι δὲ Μοιρίχῳ, καὶ τὰ τάλαντα ποτὲ μὲν ἐπ᾽ ἐκεῖνον, νῦν δ᾽ ἐπὶ τοῦτον ἔρρεπε.

2. ΔΙΟΓ. Τί οὖν πέρας ἐγένετο, ὦ Κράτης; ἀκοῦσαι γὰρ ἄξιον.

ΚΡΑΤ. Ἄμφω τεθνᾶσιν ἐπὶ μιᾶς ἡμέρας, οἱ δὲ κλῆροι ἐς Εὐνόμιον καὶ Θρασυκλέα περιῆλθον ἄμφω συγγενεῖς ὄντας οὐδὲ πώποτε προμαντευομένους οὕτω γενέσθαι ταῦτα· διαπλέοντες γὰρ ἀπὸ Σικυῶνος ἐς Κίρραν κατὰ μέσον τὸν πόρον πλαγίῳ περιπεσόντες τῷ Ἰάπυγι ἀνετράπησαν.

3. ΔΙΟΓ. Εὖ ἐποίησαν. ἡμεῖς δέ, ὁπότε ἐν τῷ βίῳ ἦμεν, οὐδὲν τοιοῦτον ἐνενοοῦμεν περὶ ἀλλήλων· οὔτε ἐγώ ποτε ηὐξάμην Ἀντισθένην ἀποθανεῖν, ὡς κληρονομήσαιμι τῆς βακτηρίας αὐτοῦ—εἶχε δὲ πάνυ καρτερὰν ἐκ κοτίνου ποιησάμενος—οὔτε, οἶμαι, σὺ ὁ Κράτης ἐπεθύμεις κληρονομεῖν ἀποθανόντος ἐμοῦ τὰ κτήματα καὶ τὸν πίθον καὶ τὴν πήραν χοίνικας δύο θέρμων ἔχουσαν.

ΚΡΑΤ. Οὐδὲν γάρ μοι τούτων ἔδει, ἀλλ᾽ οὐδὲ σοί, ὦ Διόγενες· ἃ γὰρ ἐχρῆν, σύ τε Ἀντισθένους ἐκληρονόμησας καὶ ἐγὼ σοῦ, πολλῷ μείζω καὶ σεμνότερα τῆς Περσῶν ἀρχῆς.

ΔΙΟΓ. Τίνα ταῦτα φής;

ΚΡΑΤ. Σοφίαν, αὐτάρκειαν, ἀλήθειαν, παρρησίαν, ἐλευθερίαν.

ΔΙΟΓ. Νὴ Δία, μέμνημαι καὶ τοῦτον διαδεξάμενος τὸν πλοῦτον παρὰ Ἀντισθένους καὶ σοὶ ἔτι πλείω καταλιπών.

4. ΚΡΑΤ. Ἀλλ' οἱ ἄλλοι ἠμέλουν τῶν τοιούτων κτημάτων καὶ οὐδεὶς ἐθεράπευεν ἡμᾶς κληρονομήσειν προσδοκῶν, ἐς δὲ τὸ χρυσίον πάντες ἔβλεπον.

ΔΙΟΓ. Εἰκότως· οὐ γὰρ εἶχον ἔνθα ἂν δέξαιντο τὰ τοιαῦτα παρ' ἡμῶν διερρυηκότες ὑπὸ τρυφῆς, καθάπερ τὰ σαπρὰ τῶν βαλλαντίων· ὥστε εἴ ποτε καὶ ἐμβάλοι τις ἐς αὐτοὺς ἢ σοφίαν ἢ παρρησίαν ἢ ἀλήθειαν, ἐξέπιπτεν εὐθὺς καὶ διέρρει, τοῦ πυθμένος στέγειν οὐ δυναμένου, οἷόν τι πάσχουσιν αἱ τοῦ Δαναοῦ αὗται παρθένοι εἰς τὸν τετρημένον πίθον ἐπαντλοῦσαι· τὸ δὲ χρυσίον ὀδοῦσι καὶ ὄνυξι καὶ πάσῃ μηχανῇ ἐφύλαττον.

ΚΡΑΤ. Οὐκοῦν ἡμεῖς μὲν ἕξομεν κἀνταῦθα τὸν πλοῦτον, οἱ δὲ ὀβολὸν ἥξουσι κομίζοντες καὶ τοῦτον ἄχρι τοῦ πορθμέως.

*****

8.
ΜΕΝΙΠΠΟΥ ΚΑΙ ΤΑΝΤΑΛΟΥ

—ο—

1. ΜΕΝ. Τί κλάεις, ὦ Τάνταλε; ἢ τί σεαυτὸν ὀδύρῃ ἐπὶ τῇ λίμνῃ ἑστώς;

ΤΑΝ. Ὅτι, ὦ Μένιππε,, ἀπόλωλα ὑπὸ τοῦ δίψους.

ΜΕΝ. Οὕτως ἀργὸς εἶ, ὡς μὴ ἐπικύψας πιεῖν ἢ καὶ νὴ Δί' ἀρυσάμενος κοίλῃ τῇ χειρί;

ΤΑΝ. Οὐδὲν ὄφελος, εἰ ἐπικύψαιμι· φεύγει γὰρ τὸ ὕδωρ, ἐπειδὰν προσιόντα αἴσθηταί με· ἢν δέ ποτε καὶ ἀρύσωμαι καὶ προσενέγκω τῷ στόματι, οὐ φθάνω βρέξας ἄκρον τὸ χεῖλος, καὶ διὰ τῶν δακτύλων διαρρυὲν οὐκ οἶδ' ὅπως αὖθις ἀπολείπει ξηρὰν τὴν χεῖρά μοι.

ΜΕΝ. Τεράστιόν τι πάσχεις, ὦ Τάνταλε. ἀτὰρ εἰπέ μοι, τί δαὶ καὶ δέῃ τοῦ πιεῖν; οὐ γὰρ σῶμα ἔχεις, ἀλλ' ἐκεῖνο μὲν ἐν Λυδίᾳ που τέθαπται, ὅπερ καὶ πεινῆν καὶ διψῆν ἐδύνατο, σὺ δὲ ἡ ψυχὴ πῶς ἂν ἔτι ἢ διψῴης ἢ πίνοις;

ΤΑΝ. Τοῦτ' αὐτὸ ἡ κόλασίς ἐστι, τὸ διψῆν τὴν ψυχὴν ὡς σῶμα οὖσαν.

2. ΜΕΝ. Ἀλλὰ τοῦτο μὲν οὕτως πιστεύσομεν, ἐπεὶ φὴς κολάζεσθαι τῷ δίψει. τί δ' οὖν σοι τὸ δεινὸν ἔσται; ἢ δέδιας μὴ ἐνδείᾳ τοῦ ποτοῦ ἀποθάνῃς; οὐχ ὁρῶ γὰρ ἄλλον ᾅδην μετὰ τοῦτον ἢ θάνατον ἐντεῦθεν εἰς ἕτερον τόπον.

ΤΑΝ. Ὀρθῶς μὲν λέγεις· καὶ τοῦτο δ' οὖν μέρος τῆς καταδίκης, τὸ ἐπιθυμεῖν πιεῖν μηδὲν δεόμενον.

ΜΕΝ. Ληρεῖς, ὦ Τάνταλε, καὶ ὡς ἀληθῶς ποτοῦ δεῖσθαι δοκεῖς, ἀκράτου γε ἐλλεβόρου νὴ Δία, ὅστις τοὐναντίον τοῖς ὑπὸ τῶν λυττώντων κυνῶν δεδηγμένοις πέπονθας οὐ τὸ ὕδωρ, ἀλλὰ τὴν δίψαν πεφοβημένος.

ΤΑΝ. Οὐδὲ τὸν ἐλλέβορον, ὦ Μένιππε, ἀναίνομαι πιεῖν, γένοιτό μοι μόνον.

ΜΕΝ. Θάρρει, ὦ Τάνταλε, ὡς οὔτε σὺ οὔτε ἄλλος πίεται τῶν νεκρῶν· ἀδύνατον γάρ· καίτοι οὐ πάντες ὥσπερ σὺ ἐκ καταδίκης διψῶσι τοῦ ὕδατος αὐτοὺς οὐχ ὑπομένοντος.

****

9.

ΜΕΝΙΠΠΟΥ ΚΑΙ ΕΡΜΟΥ

—ο—

1. ΜΕΝ. Ποῦ δὲ οἱ καλοί εἰσιν ἢ αἱ καλαί, Ἑρμῆ; ξενάγησόν με νέηλυν ὄντα.

ΕΡΜ. Οὐ σχολή μοι, ὦ Μένιππε· πλὴν κατ' ἐκεῖνο ἀπόβλεψον, ἐπὶ τὰ δεξιά, ἔνθα ὁ Ὑάκινθός τέ ἐστι καὶ Νάρκισσος καὶ Νιρεὺς καὶ Ἀχιλλεὺς καὶ Τυρὼ καὶ Ἑλένη καὶ Λήδα καὶ ὅλως τὰ ἀρχαῖα πάντα κάλλη.

ΜΕΝ. Ὀστᾶ μόνα ὁρῶ καὶ κρανία τῶν σαρκῶν γυμνά, ὅμοια τὰ πολλά.

ΕΡΜ. Καὶ μὴν ἐκεῖνά ἐστιν ἃ πάντες οἱ ποιηταὶ θαυμάζουσι τὰ ὀστᾶ, ὧν σὺ ἔοικας καταφρονεῖν.

ΜΕΝ. Ὅμως τὴν Ἑλένην μοι δεῖξον· οὐ γὰρ ἂν διαγνοίην ἔγωγε.

ΕΡΜ. Τουτὶ τὸ κρανίον ἡ Ἑλένη ἐστίν.

2. ΜΕΝ. Εἶτα διὰ τοῦτο αἱ χίλιαι νῆες ἐπληρώθησαν ἐξ ἁπάσης τῆς Ἑλλάδος καὶ τοσοῦτοι ἔπεσον Ἕλληνές τε καὶ βάρβαροι καὶ τοσαῦται πόλεις ἀνάστατοι γεγόνασιν;

ΜΕΝ. Ἀλλ' οὐκ εἶδες ὦ Μένιππε, ζῶσαν τὴν γυναῖκα· ἔφης γὰρ ἂν καὶ σὺ ἀνεμέσητον εἶναι.

τοιῇδ' ἀμφὶ γυναικὶ πολὺν χρόνον ἄλγεα πάσχειν·

ἐπεὶ καὶ τὰ ἄνθη ξηρὰ ὄντα εἴ τις βλέποι ἀποβεβληκότα τὴν βαφήν, ἄμορφα δῆλον ὅτι αὐτῷ δόξει. ὅτε μέντοι ἀνθεῖ καὶ ἔχει τὴν χρόαν, κάλλιστά ἐστιν.

ΜΕΝ. Οὐκοῦν τοῦτο, ὦ Ἑρμῆ, θαυμάζω, εἰ μὴ συνίεσαν οἱ Ἀχαιοὶ περὶ πράγματος οὕτως ὀλιγοχρονίου καὶ ῥᾳδίως ἀπανθοῦντος πονοῦντες.

ΕΡΜ. Οὐ σχολή μοι, ὦ Μένιππε, συμφιλοσοφεῖν σοι. ὥστε σὺ μὲν ἐπιλεξάμενος τόπον, ἔνθα ἂν ἐθέλῃς, κεῖσο καταβαλὼν σεαυτόν, ἐγὼ δὲ τοὺς ἄλλους νεκροὺς ἤδη μετελεύσομαι.

****

10.

ΜΕΝΙΠΠΟΥ ΚΑΙ ΑΙΑΚΟΥ

—o—

1. ΜΕΝ. Πρὸς τοῦ Πλούτωνος, ὦ Αἰακέ, περιήγησαί μοι τὰ ἐν ᾅδου πάντα.

ΑΙΑΚ. Οὐ ῥᾴδιον, ὦ Μένιππε, ἅπαντα· ὅσα μέντοι κεφαλαιώδη, μάνθανε· οὑτοσὶ μὲν ὅτι Κέρβερός ἐστιν οἶσθα, καὶ τὸν πορθμέα τοῦτον, ὅς σε διεπέρασε, καὶ τὴν λίμνην καί τὸν Πυριφλεγέθοντα ἤδη ἑόρακας ἐσιών.

ΜΕΝ. Οἶδα ταῦτα καὶ σέ, ὅτι πυλωρεῖς, καὶ τὸν βασιλέα εἶδον καὶ τὰς Ἐρινῦς· τοὺς δὲ ἀνθρώπους μοι τοὺς πάλαι δεῖξον καὶ μάλιστα τοὺς ἐνδόξους αὐτῶν.

ΑΙΑΚ. Οὗτος μὲν Ἀγαμέμνων, οὗτος δὲ Ἀχιλλεύς, οὗτος δὲ Ἰδομενεὺς πλησίον, οὗτος δὲ Ὀδυσσεύς, εἶτα Αἴας καὶ Διομήδης καὶ οἱ ἄριστοι τῶν Ἑλλήνων.

ΜΕΝ. Βαβαῖ, ὦ Ὅμηρε, οἷά σοι τῶν ῥαψῳδιῶν τὰ κεφάλαια χαμαὶ ἔρριπται ἄγνωστα καὶ ἄμορφα, κόνις πάντα καὶ λῆρος πολύς, ἀμενηνὰ ὡς ἀληθῶς κάρηνα. οὗτος δέ, ὦ Αἰακέ, τίς ἐστι;

ΑΙΑΚ. Κῦρός ἐστιν· οὗτος δὲ Κροῖσος, ὁ δ' ὑπὲρ αὐτὸν Σαρδανάπαλλος, ὁ δ' ὑπὲρ τούτους Μίδας, ἐκεῖνος δὲ Ξέρξης.

ΜΕΝ. Εἶτα σέ, ὦ κάθαρμα, ἡ Ἑλλὰς ἔφριττε ζευγνύντα μὲν τὸν Ἑλλήσποντον, διὰ δὲ τῶν ὀρῶν πλεῖν ἐπιθυμοῦντα; οἷος δὲ καὶ ὁ Κροῖσός ἐστι. τὸν Σαρδανάπαλλον δέ, ὦ Αἰακέ, πατάξαι μοι κατὰ κόρρης ἐπίτρεψον.

ΑΙΑΚ. Μηδαμῶς· διαθρύπτεις γὰρ αὐτοῦ τὸ κρανίον γυναικεῖον ὄν.

ΜΕΝ. Οὐκοῦν, ἀλλὰ προσπτύσομαί γε πάντως ἀνδρογύνῳ γε ὄντι.

3. ΑΙΑΚ. Βούλει σοι ἐπιδείξω καὶ τοὺς σοφούς;

ΜΕΝ. Νὴ Δία γε.

ΑΙΑΚ. Πρῶτος οὗτός σοι ὁ Πυθαγόρας ἐστί.

ΜΕΝ. Χαῖρε, ὦ Εὔφορβε ἢ Ἄπολλον ἢ ὅ τι ἂν ἐθέλῃς.

ΠΥΘ. Νὴ Δία καὶ σύ γε, ὦ Μένιππε.

ΜΕΝ. Οὐκέτι χρυσοῦς ὁ μηρός ἐστί σοι;

ΠΥΘ. Οὐ γάρ· ἀλλὰ φέρε ἴδω εἴ τί σοι ἐδώδιμον ἡ πήρα ἔχει.

ΜΕΝ. Κυάμους, ὦγαθέ· ὥστε οὐ τοῦτό σοι ἐδώδιμον.

ΠΥΘ. Δός μόνον· ἄλλα παρὰ νεκροῖς δόγματα· ἔμαθον γάρ, ὡς οὐδὲν ἴσον κύαμοι καὶ κεφαλαὶ τοκήων ἐνθάδε.

4. ΑΙΑΚ. Οὗτος δὲ Σόλων ὁ Ἐξηκεστίδου καὶ Θαλῆς ἐκεῖνος καὶ παρ' αὐτοὺς Πιττακὸς καὶ οἱ ἄλλοι· ἑπτὰ δὲ πάντες εἰσίν, ὡς ὁρᾷς.

ΜΕΝ. Ἄλυποι, ὦ Αἰακέ, οὗτοι μόνοι καὶ φαιδροὶ τῶν ἄλλων· ὁ δὲ σποδοῦ πλέως, ὥσπερ ἐγκρυφίας ἄρτος, ὁ τὰς φλυκταίνας ἐξηνθηκώς, τίς ἐστιν;

ΑΙΑΚ. Ἐμπεδοκλῆς, ὦ Μένιππε, ἡμίεφθος ἀπὸ τῆς Αἴτνης παρών.

ΜΕΝ. Ὦ χαλκόπου βέλτιστε. τί παθὼν σαυτὸν ἐς τοὺς κρατῆρας ἐνέβαλες;

ΕΜΠ. Μελαγχολία τις, ὦ Μένιππε.

ΜΕΝ. Οὐ μὰ Δί', ἀλλὰ κενοδοξία καὶ τῦφος καὶ πολλὴ κόρυζα, ταῦτά σε ἀπηνθράκωσεν αὐταῖς κρηπῖσιν οὐκ ἀνάξιον ὄντα· πλὴν ἀλλ' οὐδέν σε τὸ σόφισμα ὤνησεν· ἐφωράθης γὰρ τεθνεώς. ὁ Σωκράτης δέ, ὦ Αἰακέ, ποῦ ποτε ἄρα ἐστίν;

ΑΙΑΚ. Μετὰ Νέστορος καὶ Παλαμήδους ἐκεῖνος ληρεῖ τὰ πολλά.

ΜΕΝ. Ὅμως ἐβουλόμην ἰδεῖν αὐτόν, εἴ που ἐνθάδε ἐστίν.

ΑΙΑΚ. Ὁρᾷς τὸν φαλακρόν;

ΜΕΝ. Ἅπαντες φαλακροί εἰσιν· ὥστε πάντων ἂν εἴη τοῦτο τὸ γνώρισμα.

ΑΙΑΚ. Τὸν σιμὸν λέγω.

ΜΕΝ· Καὶ τοῦτο ὅμοιον· σιμοὶ γὰρ ἅπαντες.

5. ΣΩΚΡ. Ἐμὲ ζητεῖς, ὦ Μένιππε;

ΜΕΝ. Καὶ μάλα, ὦ Σώκρατες.

ΣΩΚ. Τί τὰ ἐν Ἀθήναις;

ΜΕΝ. Πολλοὶ τῶν νέων φιλοσοφεῖν λέγουσι, καὶ τά γε σχήματα αὐτὰ καὶ τὰ βαδίσματα εἰ θεάσαιτό τις, ἄκροι φιλόσοφοι.

ΣΩΚ. Μάλα πολλοὺς ἑόρακας.

ΜΕΝ. Ἀλλὰ ἑόρακας, οἶμαι οἷος ἧκε παρὰ σοί Ἀρίστιππος, καὶ Πλάτων αὐτός, ὁ μὲν ἀποπνέων μύρου, ὁ δὲ τοὺς ἐν Σικελίᾳ τυράννους θεραπεύειν ἐκμαθών.

ΣΩΚ. Περὶ ἐμοῦ δὲ τί φρονοῦσιν;

ΜΕΝ. Εὐδαίμων, ὦ Σώκρατες, ἄνθρωπος εἶ τά γε τοιαῦτα. πάντες γοῦν σε θαυμάσιον οἴονται ἄνδρα γεγενῆσθαι καὶ πάντα ἐγνωκέναι καὶ ταῦτα— δεῖ γάρ, οἶμαι, τἀληθῆ λέγειν—οὐδὲν εἰδότα.

ΣΩΚ. Καὶ αὐτὸς ἔφασκον ταῦτα πρὸς αὐτούς, οἱ δὲ εἰρωνείαν ᾤοντο τὸ πρᾶγμα εἶναι.

6. ΜΕΝ. Τίνες δέ εἰσιν οὗτοι οἱ περὶ σέ;

ΣΩΚ. Χαρμίδης, ὦ Μένιππε, καὶ Φαῖδρος καὶ ὁ τοῦ Κλεινίου.

ΜΕΝ. Εὖ γε, ὦ Σώκρατες, ὅτι κἀνταῦθα μέτει τὴν σαυτοῦ τέχνην καὶ οὐκ ὀλιγωρεῖς τῶν καλῶν.

ΣΩΚ. Τὶ γάρ ἂν ἄλλο ἥδιον πράττοιμι; ἀλλὰ πλησίον ἡμῶν κατάκεισο, εἰ δοκεῖ.

ΜΕΝ. Μὰ Δί', ἐπεὶ παρὰ τὸν Κροῖσον καὶ τὸν Σαρδανάπαλλον ἄπειμι πλησίον οἰκήσων αὐτῶν· ἔοικα γοῦν οὐκ ὀλίγα γελάσεσθαι οἰμωζόντων ἀκούων.

ΑΙΑΚ. Κἀγὼ ἤδη ἄπειμι, μὴ καί τις ἡμᾶς νεκρῶν λάθῃ διαφυγών. τὰ λοιπά δ'ἐσαῦθις ὄψει, ὦ Μένιππε.

ΜΕΝ. Ἄπιθι· καὶ ταυτὶ γὰρ ἱκανά, ὦ Αἰακέ.

*****

11.

ΧΑΡΩΝΟΣ ΚΑΙ ΜΕΝΙΠΠΟΥ

—ο—

1. ΧΑΡ. Ἀπόδος, ὦ κατάρατε, τὰ πορθμεῖα.

ΜΕΝ. Βόα, εἰ τοῦτό σοι, ὦ Χάρων, ἥδιον.

ΧΑΡ. Ἀπόδος, φημί, ἀνθ' ὧν σε διεπορθμεύσαμεν.

ΜΕΝ. Οὐκ ἂν λάβοις παρὰ τοῦ μὴ ἔχοντος.

ΧΑΡ. Ἔστι δέ τις ὀβολὸν μὴ ἔχων;

ΜΕΝ. Εἰ μὲν καὶ ἄλλος τις οὐκ οἶδα, ἐγὼ δ' οὐκ ἔχω.

ΧΑΡ. Καὶ μὴν ἄγξω σε νὴ τὸν Πλούτωνα, ὦ μιαρέ, ἢν μὴ ἀποδῷς.

ΜΕΝ. Κἀγὼ τῷ ξύλῳ σου πατάξας διαλύσω τὸ κρανίον.

ΧΑΡ. Μάτην οὖν ἔσῃ πεπλευκὼς τοσοῦτον πλοῦν.

ΜΕΝ. Ὁ Ἑρμῆς ὑπὲρ ἐμοῦ σοι ἀποδότω, ὅς με παρέδωκέ σοι.

2. ΕΡΜ. Νὴ Δί' ὠνάμην γε, εἰ μέλλω καὶ ὑπερεκτίνειν τῶν νεκρῶν.

ΧΑΡ. Οὐκ ἀποστήσομαί σου.

ΜΕΝ. Τούτου γε ἕνεκα καὶ νεωλκήσας τὸ πορθμεῖον παράμενε· πλὴν ἀλλ' ὅ γε μὴ ἔχω, πῶς ἂν λάβοις;

ΧΑΡ. Σὺ δ' οὐκ ᾔδεις ὡς κομίζεσθαι δέον;

ΜΕΝ. Ἤδειν μέν, οὐκ εἶχον δέ. τί οὖν; ἐχρῆν διὰ τοῦτο μὴ ἀποθανεῖν;

ΧΑΡ. Μόνος οὖν αὐχήσεις προῖκα πεπλευκέναι;

ΜΕΝ. Οὐ προῖκα, ὦ βέλτιστε· καὶ γὰρ ἤντλησα καὶ τῆς κώπης συνεπελαβόμην καὶ οὐκ ἔκλαιον μόνος τῶν ἄλλων ἐπιβατῶν.

ΧΑΡ. Οὐδὲν ταῦτα πρὸς πορθμέα· τὸν ὀβολὸν ἀποδοῦναί σε δεῖ· οὐ θέμις ἄλλως γενέσθαι.

3. ΜΕΝ. Οὐκοῦν ἄπαγέ με αὖθις ἐς τὸν βίον.

ΧΑΡ. Χάριεν λέγεις, ἵνα καὶ πληγὰς ἐπὶ τούτῳ παρὰ τοῦ Αἰακοῦ προσλάβω.

ΜΕΝ. Μὴ ἐνόχλει οὖν.

ΧΑΡ. Δεῖξον τί ἐν τῇ πήρᾳ ἔχεις.

ΜΕΝ. Θέρμους, εἰ θέλεις, καὶ τῆς Ἑκάτης τὸ δεῖπνον.

ΧΑΡ. Πόθεν τοῦτο ἡμῖν, ὦ Ἑρμῆ, τὸν κύνα ἤγαγες; οἷα δὲ καὶ ἐλάλει παρὰ τὸν πλοῦν τῶν ἐπιβατῶν ἁπάντων καταγελῶν καὶ ἐπισκώπτων καὶ μόνος ᾄδων οἰμωζόντων ἐκείνων.

ΕΡΜ. Ἀγνοεῖς, ὦ Χάρων, ὅντινα ἄνδρα διεπόρθμευσας; ἐλεύθερον ἀκριβῶς, κοὐδενὸς αὐτῷ μέλει· οὗτός ἐστιν ὁ Μένιππος.

ΧΑΡ. Καὶ μὴν ἄν σε λάβω ποτέ.

ΜΕΝ. Ἂν λάβῃς, ὦ βέλτιστε· δὶς δὲ οὐκ ἂν λάβοις.

*****

12.

ΔΙΟΓΕΝΟΥΣ ΚΑΙ ΜΑΥΣΩΛΟΥ

—ο—

1. ΔΙΟΓ. Ὦ Κάρ, ἐπὶ τίνι μέγα φρονεῖς καὶ πάντων ἡμῶν προτιμᾶσθαι ἀξιοῖς;

ΜΑΥΣ. Καὶ ἐπὶ τῇ βασιλείᾳ μέν, ὦ Σινωπεῦ, ὅς ἐβασίλευσα Καρίας μὲν ἁπάσης, ἦρξα δὲ καὶ Λυδῶν ἐνίων καὶ νήσους δέ τινας ὑπηγαγόμην καὶ ἄχρι Μιλήτου ἐπέβην τά πολλὰ τῆς Ἰωνίας καταστρεφόμενος· καὶ καλὸς ἦν καὶ μέγας καὶ ἐν πολέμοις καρτερός· τὸ δὲ μέγιστον, ὅτι ἐν Ἁλικαρνασσῷ μνῆμα παμμέγεθες ἔχω ἐπικείμενον ἡλίκον οὐκ ἄλλος νεκρός, ἀλλ' οὐδὲ οὕτως ἐς κάλλος ἐξησκημένον, ἵππων καὶ ἀνδρῶν ἐς τὸ ἀκριβέστατον εἰκασμένων λίθου τοῦ καλλίστου, οἷον οὐδὲ νεὼν εὕροι τις ἂν ῥᾳδίως. οὐ δοκῶ σοι δικαίως ἐπὶ τούτοις μέγα φρονεῖν;

2. ΔΙΟΓ. Ἐπὶ τῇ βασιλείᾳ φὴς καὶ τῷ κάλλει καὶ τῷ βάρει τοῦ τάφου;

ΜΑΥΣ. Νὴ Δί' ἐπὶ τούτοις.

ΔΙΟΓ. Ἀλλ, ὦ καλὲ Μαύσωλε, οὔτε ἡ ἰσχὺς ἐκείνη ἔτι σοι οὔτε ἡ μορφὴ πάρεστιν· εἰ γοῦν τινα ἑλοίμεθα δικαστὴν εὐμορφίας πέρι, οὐκ ἔχω εἰπεῖν, τίνος ἕνεκα τὸ σὸν κρανίον προτιμηθείη ἂν τοῦ ἐμοῦ· φαλακρὰ γὰρ ἄμφω καὶ γυμνά, καὶ τοὺς ὀδόντας ὁμοίως προφαίνομεν καὶ τοὺς ὀφθαλμοὺς ἀφῃρήμεθα καὶ τὰς ῥῖνας ἀποσεσιμώμεθα· ὁ δὲ τάφος καὶ οἱ πολυτελεῖς ἐκεῖνοι λίθοι Ἁλικαρνασεῦσι μὲν ἴσως εἶεν ἐπιδείκνυσθαι καὶ φιλοτιμεῖσθαι πρὸς τοὺς ξένους, ὡς δή τι μέγα οἰκοδόμημα αὐτοῖς ἐστι· σὺ δέ, ὦ βέλτιστε, οὐχ ὁρῶ ὅ τι ἀπολαύεις αὐτοῦ, πλὴν εἰ μὴ τοῦτο φής, ὅτι μᾶλλον ἡμῶν ἀχθοφορεῖς ὑπὸ τηλικούτοις λίθοις πιεζόμενος.

3. ΜΑΥΣ. Ἀνόνητα οὖν μοι ἐκεῖνα πάντα καὶ ἰσότιμος ἔσται Μαύσωλος καὶ Διογένης;

ΔΙΟΓ. Οὐκ ἰσότιμος, ὦ γενναιότατε, οὐ γάρ· Μαύσωλος μὲν γὰρ οἰμώξεται μεμνημένος τῶν ὑπὲρ γῆς, ἐν οἷς εὐδαιμονεῖν ᾤετο, Διογένης δὲ καταγελάσεται αὐτοῦ· καὶ τάφον ὁ μὲν ἐν Ἁλικαρνασσῷ ἐρεῖ ἑαυτοῦ ὑπὸ Ἀρτεμισίας τῆς γυναικὸς κατεσκευασμένον, ὁ Διογένης δὲ τοῦ μὲν σώματος εἰ καί τινα τάφον ἔχει οὐκ οἶδεν· οὐδὲ γὰρ ἔμελεν αὐτῷ τούτου· λόγον δὲ τοῖς ἀρίστοις περὶ αὐτοῦ καταλέλοιπεν ἀνδρὸς βίον βεβιωκὼς ὑψηλότερον, ὦ Καρῶν ἀνδραποδωδέστατε, τοῦ σοῦ μνήματος καὶ ἐν βεβαιοτέρῳ χωρίῳ κατεσκευασμένον.

*****

13.

ΝΙΡΕΩΣ ΚΑΙ ΘΕΡΣΙΤΟΥ ΚΑΙ ΜΕΝΙΠΠΟΥ

—ο—

1. ΝΙΡ. Ἰδοὺ δή, Μένιππος οὑτοσὶ δικάσει, πότερος εὐμορφότερός ἐστιν. εἰπέ, ὦ Μένιππε, οὐ καλλίων σοι δοκῶ;

ΜΕΝ. Τίνες δὲ καὶ ἔστε; πρότερον, οἶμαι, χρὴ γὰρ τοῦτο εἰδέναι.

ΝΙΡ. Νιρεὺς καὶ Θερσίτης.

ΜΕΝ. Πότερος οὖν ὁ Νιρεὺς καὶ πότερος ὁ Θερσίτης; οὐδέπω γὰρ τοῦτο δῆλον.

ΘΕΡΣ. Ἓν μὲν ἤδη τοῦτο ἔχω, ὅτι ὅμοιός εἰμί σοι καὶ οὐδὲν τηλικοῦτον διαφέρεις ἡλίκον σε Ὅμηρος ἐκεῖνος ὁ τυφλὸς ἐπήνεσεν ἁπάντων εὐμορφότερον προσειπών, ἀλλ' ὁ φοξὸς ἐγὼ καὶ ψεδνὸς οὐδὲν χείρων ἐφάνην τῷ δικαστῇ· ὅρα δὲ σύ, ὦ Μένιππε, ὅντινα καὶ εὐμορφότερον ἡγῇ.

ΝΙΡ. Ἐμέ γε τὸν Ἀγλαΐας καὶ Χάροπος,
ὃς κάλλιστος ἀνὴρ ὑπὸ Ἴλιον ἦλθον.

2. ΜΕΝ. Ἀλλ' οὐχὶ καὶ ὑπὸ γῆν, ὡς οἶμαι, κάλλιστος ἦλθες, ἀλλὰ τὰ μὲν ὀστᾶ ὅμοια, τὸ δὲ κρανίον ταύτῃ μόνον ἄρα διακρίνοιτο ἀπὸ τοῦ Θερσίτου κρανίου, ὅτι εὔθρυπτον τὸ σόν· ἀλαπαδνὸν γὰρ αὐτὸ καὶ οὐκ ἀνδρῶδες ἔχεις.

ΝΙΡ. Καὶ μὴν ἐροῦ Ὅμηρον, ὁποῖος ἦν, ὁπότε συνεστράτευον τοῖς Ἀχαιοῖς.

ΜΕΝ. Ὀνείρατά μοι λέγεις· ἐγὼ δὲ βλέπω ἃ καὶ νῦν ἔχεις, ἐκεῖνα δὲ οἱ τότε ἴσασιν.

ΝΙΡ. Οὔκουν ἐγὼ ἐνταῦθα εὐμορφότερός εἰμι, ὦ Μένιππε;

ΜΕΝ. Οὔτε σὺ οὔτε ἄλλος εὔμορφος· ἰσοτιμία γὰρ ἐν ᾅδου καὶ ὅμοιοι ἅπαντες.

ΘΕΡΣ. Ἐμοὶ μὲν οὖν καὶ τοῦτο ἱκανόν.

*****

14.
ΜΕΝΙΠΠΟΥ ΚΑΙ ΧΕΙΡΩΝΟΣ

—ο—

1. ΜΕΝ. Ἤκουσα, ὦ Χείρων, ὡς θεὸς ὢν ἐπιθυμήσειας ἀποθανεῖν.

ΧΕΙΡ. Ἀληθῆ ταῦτα ἤκουσας, ὦ Μένιππε, καὶ τέθνηκα, ὡς ὁρᾷς, ἀθάνατος εἶναι δυνάμενος.

ΜΕΝ. Τίς δαί σε ἔρως τοῦ θανάτου ἔσχεν, ἀνεράστου τοῖς πολλοῖς χρήματος;

ΧΕΙΡ. Ἐρῶ πρὸς σὲ οὐκ ἀσύνετον ὄντα· οὐκ ἦν ἔτι ἡδύ ἀπολαύειν τῆς ἀθανασίας.

ΜΕΝ. Οὐχ ἡδὺ ἦν ζῶντα ὁρᾶν τὸ φῶς;

ΧΕΙΡ. Οὐκ, ὦ Μένιππε. τὸ γὰρ ἡδὺ ἔγωγε ποικίλον τι καὶ οὐχ ἁπλοῦν ἡγοῦμαι εἶναι· ἐγὼ δὲ ἔζων ἀεὶ καὶ ἀπέλαυον τῶν ὁμοίων, ἡλίου, φωτός, τροφῆς, αἱ ὧραι δὲ αἱ αὐταὶ καὶ τὰ γιγνόμενα ἅπαντα ἑξῆς ἕκαστον, ὥσπερ ἀκολουθοῦντα θἄτερον θατέρῳ· ἐνεπλήσθην γοῦν αὐτῶν· γὰρ ἐν τῷ αὐτῷ ἀεί, ἀλλὰ καὶ ἐν τῷ μὴ μετασχεῖν ὅλως τὸ τερπνὸν ἦν.

ΜΕΝ. Εὖ λέγεις, ὦ Χείρων· τὰ ἐν ᾅδου δὲ πῶς φέρεις, ἀφ' οὗ προελόμενος αὐτὰ ἥκεις;

2. ΧΕΙΡ. Οὐκ ἀηδῶς, ὦ Μένιππε· ἡ γὰρ ἰσοτιμία πάνυ δημοτικὴ καὶ τὸ πρᾶγμα οὐδὲν ἔχει τὸ διάφορον ἐν φωτὶ εἶναι ἢ καὶ ἐν σκότῳ· ἄλλως τε οὔτε διψῆν ὥσπερ ἄνω οὔτε πεινῆν δεῖ, ἀλλ' ἀνεπιδεεῖς τούτων ἁπάντων ἐσμέν.

ΜΕΝ. Ὅρα, ὦ Χείρων, μὴ περιπίπτῃς σεαυτῷ καὶ ἐς τὸ αὐτό σοι ὁ λόγος περιστῇ.

ΧΕΙΡ. Πῶς τοῦτο φής;

ΜΕΝ. Ὅτι εἰ τῶν ἐν τῷ βίῳ τὸ ὅμοιον ἀεὶ καὶ ταὐτὸν ἐγένετό σοι προσκορές, καὶ τἀνταῦθα ὅμοια ὄντα προσκορῆ ὁμοίως ἂν γένοιτο, καὶ δεήσει μεταβολήν σε ζητεῖν τινα καὶ ἐντεῦθεν ἐς ἄλλον βίον, ὅπερ, οἶμαι, ἀδύνατον.

ΧΕΙΡ. Τί οὖν ἂν πάθοι τις, ὦ Μένιππε;

ΜΕΝ. Ὅπερ, οἶμαι, φασί, συνετὸν ὄντα ἀρέσκεσθαι καὶ ἀγαπᾶν τοῖς παροῦσι καὶ μηδὲν ἀφόρητον οἴεσθαι.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

I. ΕΙΣΑΓΩΓΗ
II. ΕΡΜΗΝΕΥΤΙΚΑΙ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

Ι. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Α΄. ΒΙΟΣ ΤΟΥ ΛΟΥΚΙΑΝΟΥ

Ὁ Λουκιανὸς ἐγεννήθη εἰς τὰ Σαμόσατα τῆς συριακῆς χώρας Κομμαγηνῆς περὶ τὸ 120 μ. Χ. Οἱ γονεῖς του δὲν ἦσαν εὔποροι καὶ διὰ τοῦτο, ὅπως διηγεῖται ὁ ἴδιος εἰς τὸ Ἐνύπνιόν του, ἀφοῦ ἔμαθε τὰ πρῶτα γράμματα, ἐν οἰκογενειακῷ συμβουλίῳ ἔλαβον τὴν ἀπόφασιν νὰ ἀφήσουν τὴν παιδείαν, ἡ ὁποία ἀπῄτει χρόνον καὶ χρήματα καὶ νὰ τὸν διδάξουν τὴν Ἑρμογλυφικὴν τέχνην. Τὸν παρέδωκαν λοιπὸν πρὸς τοῦτο εἰς τὸν ἐκ μητρὸς θεῖόν του, ἄριστον Ἑρμογλύφον. Ἀλλ' ἐπειδὴ συνέβη εἰς τὸν μαθητευόμενον Λουκιανὸν τὸ ἀτύχημα εὐθὺς τὴν πρώτην ἡμέραν νὰ θραύσῃ μίαν πλάκα καὶ ἔλαβεν ἕνεκα τούτου πικρὰν πεῖραν τῆς ῥάβδου τοῦ θείου καὶ διδασκάλου του, ἐγκατέλιπε τὴν τέχνην καὶ ἐπεδόθη εἰς τὴν Παιδείαν, πρὸς τὴν ὁποίαν ᾐσθάνετο μεγάλην κλίσιν. Ἀφοῦ δὲ ἔμαθε τὴν Ἑλληνικὴν γλῶσσαν καὶ ἐδιδάχθη τὴν ῥητορικήν, ἐπεδόθη κατ' ἀρχὰς εἰς τὸ κατώτατον εἶδος αὐτῆς, τὸ δικανικόν, γενόμενος συνήγορος εἰς δίκας ἐν Ἀντιοχείᾳ. Ἐνωρὶς ὅμως ἀφῆκε τὸ εἶδος τοῦτο τῆς ῥητορικῆς καὶ ἐπεδόθη εἰς τὸ ἐπιδεικτικὸν καὶ σοφιστικόν,ἐκ τοῦ ὁποίου προσεδόκων φήμην καὶ κέρδη οἱ ἀσκοῦντες αὐτὸ κατὰ τοὺς χρόνους ἐκείνους.

Ἐπαιδεύθη δὲ ἐν Ἰωνίᾳ, πιθανῶς Σμύρνῃ, παρὰ τῷ Πολέμω νι. Ἔπειτα περιῆλθε πολλοὺς τόπους, Μ. Ἀσίαν, Ἑλλάδα, Μακεδονίαν, Ἰταλίαν καὶ Γαλατίαν, ἐπιδεικνύων τὴν ῥητορικήν του τέχνην εἰς πανηγύρεις, ὡς ἐπανειλημμένως ἐν Ὀλυμπίᾳ. Ἐπὶ μακρὸν χρόνον διέμεινεν ἐν Ἀντιοχείᾳ ὡς δικηγόρος καὶ ἐν Ἀθήναις, τὴν πόλιν τῆς διανοίας καὶ λεπτῆς παιδεύσεως. Ἐπὶ Σεβήρου δὲ ἔλαβε δοθεῖσαν αὐτῷ θέσιν εἰς τὰ δικαστήρια τῆς Ἀλεξανδρείας, ὅπου καὶ ἀπέθανε περὶ τὸ 180 μ. Χ.

Β΄. ΣΥΓΓΡΑΜΜΑΤΑ ΤΟΥ ΛΟΥΚΙΑΝΟΥ

Ὑπὸ τὸ ὄνομα τοῦ Λουκιανοῦ φέρονται 82 βιβλία, τὰ πλεῖστα ἐν διαλογικῇ μορφῇ. Ἔχων οὗτος πλουσίαν τὴν φαντασίαν καὶ πνεῦμα σκωπτικὸν ἔγραψε συγγράμματα ποικίλου περιεχομένου· εἰς αὐτὰ διακρίνεται εἰς λαμπρὰν Ἀττικὴν διάλεκτον χάρις, εὐφυΐα, ἀστειότης καὶ ζωηρὰ φαντασία· πᾶν ὅτι εἶχε τότε γελοῖον ἡ θρησκεία, ἡ φιλοσοφία, ἡ κοινωνία καὶ καθόλου ὁ ἀνθρώπινος βίος τὸ σατιρίζει εὐφυέστατα. Σκώπτει καὶ χλευάζει οὐχὶ ἁπλῶς, ἵνα τὸν ἀναγνώστην κινήσῃ εἰς γέλωτα, ἀλλὰ καὶ ἵνα βελτιώσῃ καὶ φωτίσῃ τὸν αἰῶνά του.

Εἶναι ἀντίπαλος πάσης φιλοσοφίας ἀνηκούσης εἰς σχολὴν καὶ πρὸ πάντων τῶν Κυνικῶν, τοὺς ὁποίους σφοδρῶς σκώπτει.

Γ΄. ΝΕΚΡΙΚΟΙ ΔΙΑΛΟΓΟΙ

Εἰς τούτους ὁ Λουκιανὸς σατιρίζει καὶ διασύρει τὰς ἀδυναμίας καὶ ἀτελείας τῶν ἀνθρώπων μὲ χαριεντισμοὺς φαιδροὺς ἢ σκώμματα ἐρεθιστικά.

II. ΕΡΜΗΝΕΥΤΙΚΑΙ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΔΙΟΓΕΝΟΥΣ ΚΑΙ ΠΟΛΥΔΕΥΚΟΥΣ

1. **Πολυδεύκης,** καὶ Κάστωρ, συνήθως λεγόμενοι Διόσκουροι (= τέκνα Διός). Εἰς τούτους ὁ Ζεὺς ἔδωκεν ἀθανασίαν καὶ ἐπέτρεψε νὰ μένουν ἐναλλὰξ ἀνὰ μίαν ἡμέραν εἰς τὸν Ἅδην καὶ τὸν Ὄλυμπον. **ἐντέλλομαι** = παραγγέλλω. **ἀνέλθῃς**· ἐνν. ἐκ τοῦ Ἅδου εἰς τὴν γῆν. **Σὸν γάρ ἐστι** = διότι εἶναι ἡ σειρά σου. **Διογένης** καὶ **Μένιππος**· φιλόσοφοι ζήσαντες κατὰ τοὺς χρόνους τοῦ Μ. Ἀλεξάνδρου. Ὠνομάζοντο σκωπτικῶς κύνες ἢ κυνικοί, διότι περιφρονοῦντες ὅλα ὅσα οἱ ἄλλοι ἐνόμιζον ἀγαθὰ περιεφέροντο ἀνυπόδυτοι μὲ κουρελιασμένα ροῦχα ὡς ἐπαῖται εἰς τοὺς δρόμους καὶ ἐχλεύαζον τοὺς ἀνθρώπους. **ἀναβιῶναι** = νὰ ἐπανέλθῃς εἰς τὴν ζωήν. **Κύνα** = τὸν κυνικὸν φιλόσοφον. **Κράνειον**· ἦτο γυμναστήριον ἐν Κορίνθῳ, εἰς τόπον κατάφυτον ἀπὸ κυπαρίσσους μετὰ παλαίστρας, ὅπου ἐσύχναζον οἱ νέοι καὶ ἔμενεν ὁ κυνικὸς Διογένης. **ἐν Λυκείῳ**· ἦτο γυμναστήριον μὲ στοὰς ἔξω τῶν Ἀθηνῶν, ὅπου σήμερον εἶναι ἡ μονὴ τῶν Ἀσωμάτων. Ἐκεῖ ἐδίδασκεν ὁ Ἀριστοτέλης καὶ οἱ διάδοχοί του, οἱ ὁποῖοι ἐκαλοῦντο "Λύκειοι περιπατητικοί,, φιλόσοφοι. **εἰπεῖν,** (ἐκ τοῦ ἐντέλλομαι). **εἴ σοι καταγεγέλασται** = ἐὰν ἔχῃς περιγελάσει. **ἐνθάδε** δηλ. ἐν τῷ Ἅδῃ. **καὶ πολὺ τὸ**=καὶ πολὺ συχνὰ ἐλέγετο τὸ ἑξῆς. **βεβαίως** = ἐκ τοῦ ἀσφαλοῦς. **οἰμωγὴ** = θρῆνος, κλάμματα. **διαγινώσκομαι** = ἀναγνωρίζομαι.

ἀγεννής = ἄνανδρος. **πήρα** = ταγάρι, σακκούλι. **θέρμοι** = λούπινα. **Ἑκάτης δεῖπνον·** εἰς τὸ τέλος ἑκάστου σεληνιακοῦ μηνὸς οἱ ἀρχαῖοι ἐθυσίαζον πρὸς καθαρισμὸν τῶν οἰκιῶν των καὶ ἐξαγνισμὸν καθόλου εἰς τὴν Ἑκάτην, ἡ ὁποία ἦτο θεὰ τῶν καθαρμῶν. Ὅ,τι ἔμενεν ἀπὸ τὰς θυσίας αὐτὰς (δεῖπνα Ἑκάτης) τὸ ἔθετον εἰς τὰ σταυροδρόμια, ἀπὸ ὅπου τὰ ἔπαιρναν οἱ πτωχοὶ καὶ τὰ ἔτρωγον. **ἐκ καθαρσίου** = ἐκ θυσίας πρὸς καθαρισμόν, ἐξαγνισμόν.

2. **Ὅπως δὲ εἰδῶ . . .** ἐννοεῖται τὸ εἰπέ μοι = πές μου πῶς νὰ τὸν ἀναγνωρίσω. **τριβώνιον πολύθυρον** = παλαιὸν ἐπανωφόριον μὲ πολλὲς τρῦπες. **ἀναπεπταμένον,** (ἀναπετάννυμι)= ἀνοικτόν. **ἐπιπτυχή** =μπάλωμα. **ἀπό γε τούτων** = ἀπὸ αὐτὰ βεβαίως τὰ γνωρίσματα.

3. **τιμωρεῖσθαι ἑαυτούς** = βασανίζεσθε. **συντιθέντες** = συσσωρεύοντες. **ἕνα ὀβολὸν ἔχοντας ἥκειν·** οἱ ἀρχαῖοι ἔθεταν εἰς τὸ στόμα τοῦ νεκροῦ ἕνα ὀβολόν, διὰ νὰ πληρώσῃ μὲ αὐτὸν τὸν Χάρωνα. Ἑπομένως ἕκαστος ἔφερε μαζί του εἰς τὸν Ἅδην ἀπὸ ὅλην τὴν περιουσίαν του ἕνα μόνον ὀβολόν. **τοῖς καλοῖς** = τοῖς ὡραίοις. **εὔτονα** =ἰσχυρά, εὔρωστα.**ἀχθόμενοι** = λυπούμενοι. **οἰκτίροντες** = ἐλεεινολογοῦντες.

4. **τοὺς ἐκεῖ πλουσίους,** δηλ. τοὺς εἰς τὸν Ἅδην. **λέγων ἐκλελύσθαι** = ὅτι εὑρίσκονται εἰς παραλυσίαν. **ἐάσωμεν** = ἄς ἀφήσωμεν. **ἐπεί σοι δοκεῖ** = ἀφοῦ τὸ θέλεις σύ. **ἀπένεγκον**, (τοῦ ἀποφέρω) = νὰ μεταφέρῃς (νὰ εἴπῃς).

*****

2.

ΠΛΟΥΤΩΝ Η ΚΑΤΑ ΜΕΝΙΠΠΟΥ

1. **οὐ φέρομεν** = δὲν ὑποφέρομεν. **κατάστησόν ποι** = βάλε τον κάπου. **τῶν ἄνω** = τῶν ἐπιγείων ἀγαθῶν. **Μίδας·** βασιλεὺς τῆς Φρυγίας, περίφημος διὰ τὸν πλοῦτόν του. **Σαρδα-**

νάπαλλος· βασιλεὺς τῶν Ἀσσυρίων, παροιμιώδης διὰ τὴν ἀγάπην του πρὸς τὰς ἡδονάς. **Κροῖσος·** βασιλεὺς τῆς Φρυγίας, περίφημος διὰ τοὺς θησαυρούς του. **ἐξονειδίζω τινά** = ἐπιπλήττω τινὰ πικρά. **ἀποχράω** = ἀρκῶ. **ἀγεννεῖς** = ἀνελεύθεροι. **οὐκ ἀπέχρησε βιῶναι** = δὲν ἔφτασε ποὺ ἔζησαν (κακῶς). **περιέχονται τῶν ἄνω** = ἀγαποῦν ὑπερβολικὰ τὰ ἐπίγεια. **οὐ χρὴ** (ἀνιᾶν αὐτοὺς)= ἀλλὰ δὲν πρέπει νὰ τοὺς ἐνοχλῆς(**λυπῆς**. **ὁμόψηφος** = ὁ ἔχων τὴν αὐτὴν γνώμην. **στασιάζω** = φιλονικῶ. **οὕτω γινώσκετε ὡς οὐδὲ παυσομένου μου** = μάθετε, ὅτι καὶ δὲν θὰ παύσω. **ἔνθα γὰρ ἄν ἴητε.** = ὅπου καὶ ἂν πᾶτε. **κατᾴδω** = ξεκωφαίνω ψάλλων.

2. **ἐντρυφῶ τινι** = περιπαίζω τινά. **τὸ παράπαν**=καθόλου. **πολλῶν γε . . .** ἐνν. ἀφῃρημένοι. **συνείρω** = συνάπτω, παρεμβάλλω. **τὸ γνῶθι σαυτὸν πολλάκις συνείρων ἐπᾴσομαι** = θὰ τραγουδῶ παρεμβάλλων πολλάκις τὸ γνῶθι σαυτόν. **πρέποι γὰρ ἄν . . .** = διότι ταιριάζει (εἰς παρομοίας περιπτώσεις). . .

*****

3.
ΠΛΟΥΤΩΝΟΣ ΚΑΙ ΕΡΜΟΥ

1. **κλῆρος** = κληρονομία. **θηράω - ῶ** = κυνηγῶ, ἐπιδιώκω. **Σικυών·** πόλις τῆς Πελοποννήσου ἐπὶ τοῦ Κορινθιακοῦ κόλπου, πλησίον τῆς Κορίνθου. **ἐπιμετρέω - ῶ** = προσθέτω. **οἷόν τε ἦν** = ἦτο δυνατόν. **κατασπάω** = σύρω δυνατὰ πρὸς τὰ κάτω. **ἐφεξῆς**=κατὰ σειράν, ὁ ἕνας κατόπιν τοῦ ἄλλου. **ἀντιποιοῦμαι** = προβάλλω ἀξιώσεις, θέλω νὰ οἰκειοποιηθῶ. **οὐδὲν προσήκοντες** = χωρὶς νὰ ἔχουν κἀμμίαν συγγένειαν. **ῥαΐζω** = καλυτερεύω. **προαπίτωσαν μάτην ἐπιχανόντες**= ἂς προαπέλθωσιν (προαποθάνουν), ἀφοῦ ἐπερίμεναν ματαίως μὲ τὸ στόμα ἀνοικτόν. **πείσονται**, μέλλ. τοῦ πάσχω.

2. **διαβουκολῶ** = ἐξαπατῶ. **ἐλπίζει** = δίδει ἐλπίδας. **καὶ ἀεί . . . . . ἐοικὼς** = καὶ μολονότι φαίνεται πάντοτε σὰν πεθαμένος. **ἔρρωται** τοῦ ῥώννυμαι=εἶμαι γερὸς, ἰσχυρός. **βόσκονται** = τρέφονται μὲ ἐλπίδας. **τιθέντες πρὸς ἑαυτούς** = φανταζόμενοι διὰ τὸν ἑαυτόν τους. **Ἰόλαος·** ἀνεψιὸς τοῦ Ἡρακλέους. Ὅταν ἀπέθανεν, ἔλαβε τὴν ἄδειαν τοῦ Πλούτωνος νὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν γῆν καὶ πολεμήσῃ ὑπὲρ τῶν Ἡρακλειδῶν. **ἀνηβάω** = γίνομαι ἐκ νέου νέος. **ἀμέλησον** = μὴ σὲ μέλῃ. **μετελεύσομαι** =θὰ ὑπάγω νὰ φέρω αὐτούς. **πρωθήβης(ὁ)**=νέος.

*****

4.
ΤΕΡΨΙΩΝΟΣ ΚΑΙ ΠΛΟΥΤΩΝΟΣ

1. **Δικαιότατον μὲν οὖν** = βεβαίως δικαιότατον. **κλῆρος** (ἰδὲ διαλογ. 3.). **ἐπιβουλεύω**=συνωμοτῶ. **Οὐ γὰρ ἐχρῆν . . . ἀπελθεῖν τοῦ βίου παραχωρήσαντα τοῖς νέοις** = δὲν θὰ ἔπρεπεν, ἀφοῦ εἶναι γέρων νὰ ἀπέλθῃ τοῦ βίου (ἀποθάνῃ), ἀφήνων τὴν θέσιν του εἰς τοὺς νέους; **καινὰ** =νέα. **τὸ δὲ ἄλλως . . . διέταξε** = ἀλλὰ τοῦτο κατ' ἄλλον τρόπον (διαφορετικά) ἡ Μοῖρα τὸ ἐκανόνισε.

2. **αἰτιῶμαι** = κατηγορῶ. **ἑξῆς πως**= μὲ κάποια σειρά. **ἀναστρέφεσθαι δὲ μηδαμῶς (ἐχρῆν)** = δὲν ἔπρεπε δὲ κατ' οὐδένα τρόπον νὰ γίνεται τὸ ἀντίθετον (ἀντίστροφον). **μόγις** = μόλις. **ἐπικύπτω τινί**=ἀκκουμβῶ, στηρίζομαι. **κόρυζα** = μύξα. **λήμη** = τσίμπλα. **ἔμψυχον τάφον ὑπὸ τῶν νέων καταγελώμενον** = ὁ καταγελώμενος ὑπὸ τῶν νέων ὡς ἔμψυχος τάφος. **καλός** = ὡραῖος. ἢ **τὸ τελευταῖον** = ἢ ἐπὶ τέλους ἢ τοὐλάχιστον. **ἄνω ποταμῶν·** ἡ παρομοία προῆλθεν ἀπὸ τὸν στίχον "ἄνω ποταμῶν χωροῦσι πηγαὶ„ = τὰ νερὰ τῶν ποταμῶν ῥέουν ἀντιστρόφως, πρὸς τὰ ἄνω, πρὸς τὰς πηγάς. Ὁμοία εἶναι καὶ ἡ παροιμία **ἡ ἅμαξα τὸν βοῦν,** ἤτοι δὲν σύρει ὁ

βοῦς τὴν ἅμαξαν, ἀλλ' ἀντιστρόφως προηγεῖται ἡ ἅμαξα παρασύρουσα καὶ τὸν βοῦν. Λέγονται δὲ ἀμφότεραι αἱ παροιμίαι αὗται ἐπὶ τῶν συμβαινόντων ἀντιθέτως πρὸς τὸ κανονικόν.

3. **ἤπερ σοὶ δοκεῖ** = παρὰ ὅσον νομίζεις σύ. **ἀλλοτρίοις ἐπιχαίνετε** = ἐπιθυμεῖτε πολὺ τὰ ξένα ἀγαθά. **εἰσποιεῖτε αὑτοὺς**=υἱοθετεῖσθε **γέλωτα ὀφλισκάνετε**=θεωρεῖσθε γελοῖοι. **κατορυττόμενοι** = θαπτόμενοι.

4. **ὁπότε ἐσίοιμι** = ὁσάκις εἰσηρχόμην (τὸν ἐπεσκεπτόμην). **ὑποστένω** = ἐκβάλλω βαθὺν στεναγμόν. **καὶ μύχιον ὑποκρώζων** = βογγῶν ἀσθενῶς. **σορός** = κάσσα, φέρετρον. **ὑπερβάλλω** = ξεπερνῶ. **ἐπιβήσειν τῆς σοροῦ** = ὅτι θὰ ξεψυχήση (θὰ πεθάνῃ). **δέλεαρ** = δόλωμα. **ἐφειστήκει ἐπιγελῶν** = ἵστατό πλησίον περιγελῶν με. **ζῴης ἐπὶ μήκιστον** = εἴθε νὰ ζῇς ἐπὶ μακρότατον χρόνον.

*****

5.
ΖΗΝΟΦΑΝΤΟΥ ΚΑΙ ΚΑΛΛΙΔΗΜΙΔΟΥ

1. **παράσιτος.**= τρεφόμενος ἀπὸ ἄλλον. **παρῆς ἀποθνήσκοντί μοι.** = ἦσο παρών, ὅτε ἀπέθνησκον. **οἶσθά που** = γνωρίζεις, ἂν δὲν ἀπατῶμαι. **ᾧ σε τά πολλὰ ᾔδειν συνόντα** = εἰς τὸν ὁποῖον ἐγνώριζα ὅτι ἐπήγαινες συχνά. **ὑπισχνούμην ἐπ' ἐμοὶ τεθνήξεσθαι** = ὁ ὁποῖος μοῦ ἔδιδεν ὑποσχέσεις ὅτι θὰ ἀποθάνῃ γρήγορα ἀφήνων ἐμὲ κληρονόμον. **ἐς μήκιστον ἐπεγίνετο** = παρετείνετο πάρα πολύ, ἐπὶ πολὺ μακρὸν χρόνον. **Τιθωνόν·** ἔλαβε παρὰ τοῦ Διὸς τὴν ἀθανασίαν. **ἐπίτομος** = σύντομος. **ἐπειδὰν τάχιστα** = μόλις. **πίνει ἐπιεικῶς ζωρότερον** =πίνει ἀρκετὰ πολύ, μεθάει. **ἐπομόω - ἐπόμνυμι** = ὀρκίζομαι. **μειρακίσκος**=παλληκάρι.

2. **ἥκομεν λουσάμενοι** = ἀφοῦ ἐγυρίσαμεν ἀπὸ τὸ λουτρόν. **κύλιξ** = ποτήριον. **ἀφάρμακτον** = τὸ χωρὶς φαρμάκι.

αὐτίκα μάλα = ἀμέσως. **ἐκτάδην** = ξαπλωμένος. **ἐπιγελῶ** = χλευάζω. **ὑποβολιμαῖος** = ὁ τιθέμενος εἰς ἀντικατάστασιν ἄλλου. **τί πρὸς ταῦτα** = πῶς διετέθη ἀπέναντι τοῦ γεγονότος αὐτοῦ, ποίαν ἐντύπωσιν τοῦ ἔκαμε τὸ γεγονὸς αὐτό. **ὑποταράσσομαι** = ταράσσομαι ὀλίγον. **οἷά γε εἴργασται** = δι' ὅσα ἔκαμε.

*****

6.

ΧΑΡΩΝΟΣ ΚΑΙ ΕΡΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΚΡΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

1. **ὑπόσαθρον** = ὀλίγον σαθρόν. **διαρρεῖ τὰ πολλὰ** = κάμνει νερὰ ἀπὸ πολλὰ μέρη. **οἰχήσεται περιτραπέν** = θὰ ἀνατραπῇ ἀμέσως. **ἥκετε** = ἤλθατε. **ἐπιφέρομαι** = φέρω μαζί μου. **δέδια** = φοβοῦμαι. **νέω** = κολυμβῶ. **εὐπλοῶ** = πλέω ἐν ἀσφαλείᾳ. **ἠϊών-όνος** = ἀκτή. **σοί μελήσει** = σὺ θὰ φροντίσῃς. **διαγιγνώσκω** = ἐξετάζω ἀκριβῶς.

4. **ἐρύθημα** = κοκκινάδα. **πορφυρίς** = πορφυροῦν ἔνδυμα. **διάδημα** = ταινία, σύμβολον τοῦ βασιλικοῦ ἀξιώματος. **βλοσυρός** = ὁ ἔχων βλέμμα αὐστηρόν. **ἀποτίθεμαι** = ἀπορρίπτω. **τῦφος** = ἀλαζονεία. **πορθμεῖον** = πλοιάριον. **συνεμπεσόντα** = ἐὰν πέσουν μαζί. **ἐφεστρίς** = ἐπανωφόριον (βασιλικόν). **ἄνοια** = ἀνοησία. **ὕβρις** = αὐθάδεια. **εἶεν**, ὡς ἐπιρρ. = ἔστω.

5. **ὑπερτίθεμαι** = θέτω ἐπάνω. **ἰσοστάσιος** = ἰσοβαρής.

6. **ἀβαρής** = χωρὶς βάρος. **μαλακία** = μαλθακότης. **ἐντάφια** · ὅσα θάπτουν μαζὶ μὲ τοὺς νεκρούς. **ἔχωσαν (χώω) τάφον** = ἤ-

γειραν τάφον. **τί γὰρ ἂν καὶ πάθοιμι**=τί μπορῶ νὰ κάμω.

8. **ἀπό γε τοῦ σχήματος**=ἂν τοὐλάχιστον κρίνῃ κανεὶς ἀπὸ τὸ ἐξωτερικόν. **βρενθύομαι** = ὑπερηφανεύομαι. **ἐπηρμένος τὰς ὀφρῦς** =μὲ τὰ φρύδια σηκωμένα. **ὁ ἐπὶ τῶν φροντίδων** =ὁ βυθισμένος εἰς τὰς σκέψεις. **βαθὺν πώγωνα καθειμένος**= ὁ ὁποῖος ἔχει ἀφήσει μακρὸν καὶ δασὺν πώγωνα. **γόης**=πλάνος, ψεύστης. **μεστὸς τερατείας** =τερατολόγος. **ἐρώτησις ἄπορος**=ἐρώτησις ἀκατανόητος. **ὕθλος** =μωρία· **οὐ λέληθέ με**=δὲν μὲ διαφεύγει. **περικρύπτω**=ἀποκρύπτω.

9. **λάσιος** = πυκνός. **μνᾶ**· μέτρον βάρους. **ἀποκείρω**= κουρεύω. **ἐπικόπῳ τῇ ἀποβάθρᾳ χρησάμενος**= χρησιμοποιῶν τὴν ἀποβάθραν ἀντὶ ξύλου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου λιανίζουν τὸ κρέας (κοπανίζουν κάτι). **κινάβρα**= ἡ δυσοσμία τῆς γενειάδος. **ὑπὲρ τὸ μέτωπον ἐπῆρκε** = τὸ πῆρε πολὺ ψηλά **ὑπὸ μάλης** = κάτω ἀπὸ τὴν μασχάλην. **τὸ γενναῖον** = ἡ παλληκαριά. **εὔφορος** = ὁ εὐκόλως φερόμενος.

10. **παρίσωσις** καὶ **ἀντίθεσις**· εἶναι ῥητορικὰ σχήματα. **βαρβαρισμός**· γραμματικῆς σφάλμα. **ἀπόγειον**· χονδρὸ σχοινί, μὲ τὸ ὁποῖον δένουν τὸ πλοῖον εἰς τὴν ξηράν, τὸ παλαμάρι. **ἀνελώμεθα**, τοῦ ἀναιροῦμαι = σηκώνω. **ἀνεσπάσθω τὸ ἀγκύριον** = ἂς σηκωθῇ ἡ ἄγκυρα. **πέτασον**, τοῦ πετάννυμι = ἀνοίγω εἰς τὸν ἄνεμον. **εὐθύνω** = διευθύνω.

12. **διεξέρχομαι λόγους** =ἐκφωνῶ λόγους. **κωκύω** = ὀδύρομαι. **ἐξάρχω**=κάμνω ἀρχήν, εἶμαι ἐπὶ κεφαλῆς. **καθ' ἡσυχίαν** = ἡσύχως, χωρὶς θρήνους. **συνέχεται πρὸς τῶν γυναικῶν** = σπρώχνεται ἀπὸ τὰς γυναῖκας (ἐνοχλεῖται).

13. **οἴκτιστον**=οἰκτρότατα, μὲ μεγάλην λύπην. **γεννάδας** =γενναῖος. **ἄλλους μετελευσόμεθα** = θὰ πάμε διὰ νὰ μεταφέρωμεν ἄλλους. **εὐπλοεῖτε**=στὸ καλό, καλὸ ταξίδι. **προΐ-**

ωμεν ἐνν. εἰς τὸ δικαστήριον. **τί οὖν ἔτι μέλλετε;**=διατὶ λοιπὸν ἀκόμη βραδύνετε; **τροχός**· εἶναι βασανιστήριον ὄργανον κατὰ τὴν περιφέρειαν τοῦ ὁποίου ἐξηπλοῦτο ὁ κατάδικος πρὸς τιμωρίαν.

*****

7.
ΚΡΑΤΗΤΟΣ ΚΑΙ ΔΙΟΓΕΝΟΥΣ

1. **ὁλκάς**· φορτηγὸν πλοῖον. **ἀνεψιός**=ἐξάδελφος. **ἀναείρω** = σηκώνω ἐπάνω ἀπὸ τὴν γῆν (ἐπὶ παλαιστοῦ ὁ ὁποῖος ἀγωνίζεται νὰ καταβάλῃ τὸν ἀντίπαλον). **ἤ μ' ἀνάειρ' ἢ ἐγὼ σε**=ἢ ἐσὺ νὰ μὲ σηκώσῃς νεκρὸν καὶ νὰ λάβῃς τὴν περιουσίαν μου ἢ ἐγὼ σέ. Τὸν στίχον τοῦτον λέγει ὁ Τελαμώνιος Αἴας πρὸς τὸν Ὀδυσσέα ἐν Ἰλ. Ψ. 725. **ἡλικιῶται**=συνομίληκοι. **Κράτης**· κυνικὸς φιλόσοφος ἐκ Θηβῶν. **ὑπερβαλλόμενοι ἀλλήλους τῇ κολακείᾳ**=ἀγωνιζόμενοι ποιὸς νὰ περάσῃ τὸν ἄλλον εἰς τὴν κολακείαν. **τεκμαίρομαι** = συμπεραίνω. **Χαλδαίων παῖδες**· οἱ Χαλδαῖοι ἦσαν ἱερεῖς τῶν Βαβυλωνίων, γνωστοὶ ὡς ἀστρονόμοι καὶ ὀνειροκρίται. **ἄρτι μὲν . . . ἄρτι δὲ**=ἄλλοτε μὲν ἄλλοτε δέ. **τάλαντον**=ἡ ζυγαρία. **ῥέπω**=κλίνω πρὸς τὸ ἕνα μέρος.

2. **Σικυών**· πόλις πλησίον τῆς Κορίνθου. **Κίρρα**· λιμὴν τῶν Δελφῶν, ἡ Ἰτέα. **Ἰάπυξ**· βορειοδυτικὸς ἄνεμος, ὁ Ἀργέστης.

3. **Ἀντισθένης**· μαθητὴς τοῦ Σωκράτους, θεμελιωτὴς τῆς κυνικῆς Σχολῆς. **κότινος**=ἀγριελαία. **χοῖνιξ**, μέτρον σίτου. **παρρησία**=θάρρος τῆς γνώμης. **διερρυηκότες ὑπὸ τῆς τρυ-**

φῆς =ἐξηντλημένοι ἀπὸ τὴν μαλθακότητα, σάπιοι ἀπὸ τὴν τρυφήν. **στέγω** = φυλάττω. **αἱ τοῦ Δαναοῦ παρθένοι**· αἱ 49 θυγατέρες τοῦ Δαναοῦ, βασιλέως τῆς Αἰγύπτου, φονεύσασαι τοὺς ἄνδρας των κατεδικάσθησαν εἰς τὸν Ἅδην νὰ ἀντλοῦν ἀκαταπαύστως εἰς τρυπημένον πίθον, ἐξ οὗ καὶ ἡ παροιμία "ἀντλεῖν εἰς πίθον Δαναΐδων,, λεγομένη ἐπὶ τῶν ματαιοπονούντων. **τετρημένον** (παρακ. τοῦ τετραίνω = τρυπῶ).

*****

8.
ΜΕΝΙΠΠΟΥ ΚΑΙ ΤΑΝΤΑΛΟΥ

1. **Οὕτως ἀργός εἶ ὡς . . .** = τόσον ὀκνηρός εἶσαι, ὥστε (νὰ μὴ κύψῃς νὰ πίῃς). **ἀρυσάμενος**, (τοῦ ἀρύτομαι= λαμβάνω ὕδωρ, ἀντλῶ). **ἤν δέ ποτε ἀρύσωμαι καὶ προσενέγκω** = ἐὰν δὲ κάμμιὰ φορὰ ἀντλήσω καὶ πλησιάσω εἰς τὸ στόμα μου. **οὐ φθάνω βρέξας ἄκρον χεῖλος καὶ οὐκ οἶδ' ὅπως . . . . . διαρρυὲν . . . . . ἀπολείπει ξηρὰν τὴν χεῖρά μοι** = δὲν προφθάνω νὰ βρέξω τὰ ἄκρα τῶν χειλέων μου καὶ ἀμέσως δὲν ξεύρω πῶς χύνεται καὶ μοῦ ἀφήνει ἀδειανὸ τὸ χέρι. **τεράστιος**=τερατώδης. **τί δαὶ καὶ δέῃ τοῦ πιεῖν;**=ποία δὰ λοιπὸν ἡ ἀνάγκη νὰ πίῃς;

2. **τοῦτο . . . . . τῆς καταδίκης . . . . . τό** = αὐτὸ ἴσα ἴσα εἶναι κόλασις τὸ νά . . . . **μηδὲν δεόμενον** = χωρὶς νὰ ἔχω κάμμίαν ἀνάγκην. **ληρῶ** = φλυαρῶ, λέγω ἀνοησίας. **ἀκράτου ἐλλεβόρου**= καθαροῦ ἐλλεβόρου. **ἐλλεβόρος**· = βοτάνη τὴν ὁποίαν μετεχειρίζοντο οἱ ἀρχαῖοι ὡς εἰδικὸν φάρμακον κατὰ πολλῶν νοσημάτων, κυρίως δὲ κατὰ τῆς παραφροσύνης.

ἀναίνομαι πιεῖν = ἀρνοῦμαι νὰ πίω. **γένοιτό μοι μόνον**

ἀρκεῖ, μακάρι, μόνον νὰ τὸν ἔχω. **πίεται** = θὰ πίῃ. **τοῦ ὕδατος αὐτοὺς οὐχ ὑπομένοντος** = διότι τὸ ὕδωρ δὲν τοὺς περιμένει (τοὺς διαφεύγει).

****

9.
ΜΕΝΙΠΠΟΥ ΚΑΙ ΕΡΜΟΥ

1. **ξενάγησόν με νέηλυν ὄντα** = ὁδήγησόν με, διότι εἶμαι νεοφερμένος. **οὐ γὰρ ἄν διαγνοίην** = διότι δὲν μπορῶ νὰ καταλάβω (διακρίνω).

2. **ἀνεμέσητος** = ἐκεῖνος τὸν ὁποῖον δὲν δύναταί τις νὰ κατακρίνῃ, ἄμεμπτος. **τοιῇδ' ἀμφί γυναικί**· στίχος ἀπὸ τὸν Ὅμηρον, τὸν ὁποῖον εἶπαν οἱ γέροντες Τρῶες, ὅταν εἶδαν νὰ περνᾷ ἀπὸ κοντά των ἡ Ἑλένη, ὅτι δηλ. ἀξίζει χάριν τοιαύτης γυναικὸς νὰ ὑποφέρῃ κανεὶς πολὺν χρόνον. **χρόα** = **χροιά** = χρῶμα. **εἰ μή συνίεσαν . . . . . πονοῦντες** = διότι δὲν ἀντελαμβάνοντο, ὅτι ἐκοπίαζον. **ἀπανθῶ** = ξηραίνομαι. **μετελεύσομαι τοὺς ἄλλους** = θὰ πάω νὰ φέρω τοὺς ἄλλους νεκρούς. **καταβαλὼν σεαυτὸν** = ξαπλωθείς.

****

10.
ΜΕΝΙΠΠΟΥ ΚΑΙ ΑΙΑΚΟΥ

1. **Πρὸς τοῦ Πλούτωνος** = ἐν ὀνόματι τοῦ Πλούτωνος, παρακαλῶ. **κεφαλαιώδη** = τὰ κυριώτερα, τὰ ἀξιοσημείωτα. **Κέρβερος**· κύων μέγας τοῦ

῞Αδου ἔχων 50 κεφαλὰς ἢ κατ' ἄλλους τρικέφαλος. **τὴν λίμνην**· δηλ. τὴν 'Αχερουσίαν. **Πυριφλεγέθων** ἢ **Φλεγέθων**· ὁ περιβάλλων τὸν Τάρταρον ὑποκάτω τῆς γῆς ποταμός. **πυλωρεῖς** = εἶσαι φύλαξ τῶν πυλῶν. **Ἐρινῦς**· αὗται ἐλατρεύοντο ὡς θεαὶ τιμωροὶ τῶν ἐν τῷ "Αδη κακῶν. **Ἀγαμέμνων**· ἀρχιστράτηγος τῶν στρατευσάντων εἰς Τροίαν. **Ἀχιλλεύς**· ἀνδρειότατος πάντων τῶν Ἑλλήνων. **Ἰδομενεύς**· βασιλεὺς τῆς Κρήτης, διακριθεὶς κατὰ τὸν Τρωικὸν πόλεμον. **Ὀδυσσεύς**· ὁ γνωστότατος βασιλεὺς τῆς Ἰθάκης. **Αἴας ὁ Τελαμώνιος**· υἱὸς τοῦ βασιλέως τῆς Σαλαμῖνος Τελαμῶνος, ὁ ἀνδρειότατος τῶν Ἑλλήνων μετὰ τὸν 'Αχιλλέα. **Διομήδης**· βασιλεὺς τοῦ "Αργους, ἐξεστράτευσε μετὰ 80 πλοίων εἰς Τροίαν καὶ ἠγωνίσθη λαμπρά.

2. **τὰ κεφάλαια τῶν ῥαψῳδιῶν** = οἱ ἥρωες τῶν ποιημάτων σου. **ἄγνωστα καὶ ἄμορφα** = ἄγνωστα καὶ ἄνευ μορφῆς. **ἀμενηνὰ κάρηνα** = φασματώδεις κεφαλαί, κρανία. **λῆρος** (ὁ) = ἀνοησία, μωρολογία. **Σαρδανάπαλλος**· βασιλεὺς τῶν 'Ασσυρίων, παροιμιώδης διὰ τὴν ἀγάπην του πρὸς τὰς ἡδονάς. **Μίδας**· βασιλεὺς τῆς Φρυγίας, περίφημος διὰ τὸν πλοῦτόν του. **διὰ τῶν ὀρῶν** = ὀρέων, ἐννοεῖ τὴν ὑπὸ τοῦ Ξέρξου διόρυξιν τοῦ "Αθω, ἵνα διαβιβάσῃ διὰ τούτου τὸν στρατόν του. **πατάξαι κατὰ κόρρης** = νὰ τοῦ δώσω μιὰ στὸ κεφάλι. **διαθρύπτεις** = τοῦ σπᾷς, θὰ τοῦ κάμῃς θρύμματα (κομμάτια). **προσπύσομαί γε . . . . ἀνδρογύνῳ ὄντι** = τοὐλάχιστον θὰ τὸν πτύσω, ἀφοῦ εἶναι γυναικωτός.

3. **Πυθαγόρας**· ἐκ Σάμου, ἱδρυτὴς τῆς ὁμωνύμου φιλοσοφικῆς Σχολῆς· ἐπίστευεν εἰς τὴν μετεμψύχωσιν καὶ ἔλεγεν, ὅτι ἡ ψυχή του ἦτο ἡ ψυχὴ τοῦ Εὐφόρβου. **Εὔφορβος**· εἷς τῶν ἀνδρειοτέρων Τρώων, πληγώσας τὸν Πάτροκλον καὶ φονευθεὶς ὑπὸ τοῦ Μενελάου. **χρυσοῦς ὁ μηρός**· κατὰ τὸν Λουκιανὸν ὁ Πυθαγόρας διέδιδεν ὅτι εἶχε χρυσοῦν μηρίον, ἵνα τὸν πιστεύσουν οἱ Κροτωνιᾶται ὡς θεὸν 'Απόλλωνα. **οὐδέν . . . . . κύαμοι** = ὅτι οἱ

κύαμοι (τὰ κουκκιὰ) ἐνταῦθα δὲν ἔχουν οὐδὲν κοινὸν πρὸς τὰς κεφαλὰς τῶν γονέων ἡμῶν. Οἱ Πυθαγόρειοι δὲν ἔτρωγον τὰ κουκκιὰ ὡς περιέχοντα ἔντομα, ἐδῶ ὅμως ὁ Λουκ. σατιρίζει τὸν Πυθ. ὡς πιστεύοντα ὅτι ὁ τρώγων κουκκιὰ εἶναι σὰν νὰ τρώγῃ τὰς κεφαλὰς τῶν προγόνων του, διότι ἐντὸς αὐτῶν εὑρίσκονται τὰ γνωστὰ ἔντομα, αἱ πιθαναὶ ψυχαὶ τῶν προγόνων του. **Θαλῆς**· ὁ γνωστὸς Μιλήσιος φιλόσοφος. **Πιττακός**· ἐκ Μυτιλήνης, εἷς τῶν ἑπτὰ σοφῶν τῆς Ἑλλάδος.

4. **πλέως σποδοῦ** = γεμᾶτος ἀπὸ στάκτην. **ἐγκρυφίας ἄρτος** = ψωμὶ ψημένο στὴ χόβολη. **φλύκταινα** = φουσκάλα. **Ἐμπεδοκλῆς**· φιλόσοφος ἐξ Ἀκράγαντος, περὶ τοῦ ὁποίου ἐλέγετο, ὅτι ἐρρίφθη εἰς τὸν κρατῆρα τῆς Αἴτνης μὲ χάλκινα ὑποδήματα. Ἐνταῦθα ὁ Λουκ. τὸν εἰρωνεύεται διὰ τοῦτο. **ἡμίεφθος** = μισοψημένος. **μελαγχολία** = νόσημα. **τῦφος** = ἀλαζονεία. **κόρυζα** = συνάχι, μεταφορ. βλακεία. **κρηπίς** = ὑπόδημα. **ὤνησεν**=ὠφέλησεν (τοῦ ῥ. ὀνίνημι). **ἐφωράθη τεθνεώς**= εὑρέθη νεκρός. Ὑπῆρχε διάδοσις ὅτι ὁ Ἐμπεδοκλῆς, ἵνα πιστευθῇ ἡ ἀνάληψίς του εἰς τοὺς οὐρανοὺς καὶ ἡ θεία **καταγωγή** του, ἐρρίφθη εἰς τὸν κρατῆρα τῆς Αἴτνης, ὁ ὁποῖος μετὰ ταῦτα τὸν ἐπρόδωκε ἐκβαλὼν ἓν τῶν ὑποδημάτων του. **ληρῶ** = φλυαρῶ. **σιμὸς**· ὁ ἔχων πεπιεσμένην τὴν ῥῖνα, πλατσουρομύτης.

5. **ἀποπνέων μύρου**· ὁ Λουκ. σατιρίζει τὸν φιλόσοφον Ἀρίστιππον ὡς θηλυπρεπῆ, ὅτι δηλ. βάζει μυρουδιὰ ἐπάνω του. **Κλεινίας**· πατὴρ τοῦ Ἀλκιβιάδου.

*****

11.
ΧΑΡΩΝΟΣ ΚΑΙ ΜΕΝΙΠΠΟΥ

1. **ἄγχω**= πνίγω δι' ἀγχόνης. **ὠνάμην γε** = καλὰ τὴν ἔχω. **ὑπερεκτίνειν τῶν νεκρῶν** = νὰ πληρώνω καὶ διὰ τοὺς νεκρούς. **νεωλκῶ** = σύρω τὸ πλοῖον εἰς τὴν ξηράν. **αὐχῶ** =

ὑπερηφανεύομαι. **προῖκα,** ἐπιρρ. = δωρεάν. **συνεπιλαμβάνομαί τινος** = βοηθῶ τινα.

2. **χάριεν** = νόστιμο. **Αἰακός·** εἷς τῶν τριῶν κριτῶν τοῦ Ἅδου. **Ἑκάτης δεῖπνον** (ὅρα διαλ. 1 § 1)

*****

12.

ΔΙΟΓΕΝΟΥΣ ΚΑΙ ΜΑΥΣΩΛΟΥ

1. **ὦ Κάρ·** ὁ Μαύσωλος ἦτο βασιλεὺς τῆς Καρίας. Πρὸς τιμήν του ἀνηγέρθη τὸ Μαυσώλειον, μεγαλοπρεπὴς τάφος, ὁ ὁποῖος ἐθεωρεῖτο ὡς ἓν τῶν ἑπτὰ θαυμάτων τοῦ κόσμου. **ἐπὶ τίνι μέγα φρονεῖς** = διατὶ ὑπερηφανεύεσαι. **ὑπηγαγόμην** = ὑπέταξα. **τὰ πολλὰ καταστρεφόμενος** = ὑποτάσσων τὰ περισσότερα μέρη. **καλὸς καὶ μέγας** = ὡραῖος καὶ ὑψηλός. **εἰς κάλλος ἐξησκημένον** = κομψῶς κατειργασμένον. **εἰκάζω** = ἀπεικονίζω, κατασκευάζω εἰκόνας. **ἵππων καὶ ἀνδρῶν εἰς τὸ ἀκριβέστατον εἰκασμένων** = ἐν ᾧ ἵπποι καὶ ἄνδρες μὲ μεγίστην τελειότητα εἶναι ἀπεικονισμένοι. **λίθου τοῦ καλλίστου** = ἀπὸ λαμπροτάτου μαρμάρου. **ἐλοίμεθα** τοῦ **αἱροῦμαι** = ἐκλέγω. **ἔχω εἰπεῖν** = δύναμαι νὰ εἴπω. **προφαίνομεν** = προβάλλομεν, δεικνύομεν.

2. **ἀποσεσιμώμεθα τὴν ῥῖνα** = ἔχομεν πεπλατυσμένην τὴν ῥῖνα, εἴμεθα πλατομύτηδες, ὅπως φαίνεται ἡ ῥὶς εἰς ὅλα τὰ γυμνὰ κρανία. **φιλοτιμεῖσθαι πρὸς τοὺς ξένους** = νὰ καυχῶνται πρὸς τοὺς ξένους. **ὡς δή τι μέγα οἰκοδόμημά ἐστι** = ὅτι τάχα ἔχουν μέγα οἰκοδόμημα. **μᾶλλον ἀχθοφορεῖς** = περισσότερον βαρύνεσαι.

3. **ἀνόνητος**=ἀνωφελής. **οὐ γάρ**, ἐνν. ἰσότιμος ἔσται. **οἰμώξεται** =θὰ στενάζῃ. **οὐδὲ γὰρ ἔμελεν αὐτῷ τούτου** = διότι δὲν ἐφρόντιζεν αὐτὸς περὶ τούτου. **λόγον καταλέλοιπε**= ἄφησε μνήμην. **ὑψηλότερον** = ἐνδοξότερον. **ἐν βεβαιοτέρῳ χωρίῳ**=εἰς τόπον στερεώτερον, δηλ. εἰς τὴν μνήμην τῶν ἀνθρώπων,εἰς τὴν ἱστορίαν.

*****

13.
ΝΙΡΕΩΣ ΚΑΙ ΘΕΡΣΙΤΟΥ ΚΑΙ ΜΕΝΙΠΠΟΥ

1. **Νιρεύς**· ἐκ Σύμης, ἐπαινεῖται ἀπὸ τὸν Ὅμηρον ὡς ὁ ὡραιότερος τῶν ἐκστρατευσάντων κατὰ τῆς Τροίας Ἀχαιῶν, (Ἰλ. Β. 671)· ὁ δὲ **Θερσίτης** χλευάζεται ὡς ὁ ἀσχημότατος (Ἰλ. Β. 212-271). **φοξός**=ὀξυκέφαλος. **ψεδνός** = φαλακρός. **ἡγῇ** = νομίζεις.

2. **εὔθρυπτος**=εὔθραυστος. **ἀλαπαδνὸς**=ἀσθενής.

*****

14.
ΜΕΝΙΠΠΟΥ ΚΑΙ ΧΕΙΡΩΝΟΣ

1. **Τίς δαί σε ἔρως** =ποία δὰ ἐπιθυμία. **ἀνεράστου τοῖς πολλοῖς χρήματος**=πράγματος, τὸ ὁποῖον οἱ πολλοὶ δὲν ἐπιθυμοῦσι, ἀνεπιθυμήτου. **ἐνεπλήσθην γοῦν** = ἐχόρτασα πιά. **οὐ γὰρ ἐν τῷ αὐτῷ ἀεί, ἀλλὰ καὶ ἐν τῷ μὴ μετασχεῖν**

τὸ τερπνὸν ἦν=διότι ἡ εὐχαρίστησις ὑπάρχει ὄχι μόνον εἰς τὸ νὰ ἔχῃ κανεὶς πάντοτε τὰ ἴδια πράγματα, ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν στέρησιν. Ἡ συνεχὴς ἀπόλαυσις τῶν ἀγαθῶν φέρει τὸν κόρον, ἐν ᾧ εὐχαριστεῖται κανεὶς προσπαθῶν ν' ἀποκτήσῃ, ὅ,τι δὲν ἔχει. **προελόμενος** τοῦ **προαιροῦμαι**=προτιμῶ.

2. **ἀνεπιδεής**=ὁ μὴ ἔχων ἀνάγκην. **μὴ περιπίπτῃς σεαυτῷ**=μήπως πίπτῃς εἰς τὴν παγίδα, τὴν ὁποίαν ἔστησες ὁ ἴδιος, εὑρίσκεσαι εἰς ἀντίφασιν μὲ τὸν ἑαυτόν σου. **προσκορές**=αηδές. **Τί οὖν ἂν πάθῃ τις**=τί λοιπὸν νὰ κάνῃ κανείς, τί νὰ κάνω;

ΤΥΠΟΙΣ Γ. Ι. ΜΠΑΡΔΑΝΗ - ΚΟΡΝΑΡΟΥ 6 (ΣΤΟΑ)

Χάρωνος καὶ Ἑρμοῦ καὶ νεκρῶν διαφόρων.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

Ἐν Ἀθήναις τῇ 9 Σεπτεμβρίου 1932

Ἀριθ. { Πρωτ. 44429|15238
Διεκπ.

Πρὸς
τὸν κ. ΙΩΑΝ. Ν. ΣΙΔΕΡΗΝ
Βιβλιεκδότην
Σταδίου 52

Ἀνακοινοῦμεν ὑμῖν ὅτι διὰ ταὐταρίθμου ὑπουργικῆς ἀποφάσεως, ἐκδοθείσης τὴν 12 Αὐγούστου ἐ. ἔ. καὶ δημοσιευθείσης τὴν 29 Αὐγούστου εἰς τὸ ὑπ' ἀριθ. 80 φύλλον τῆς Ἐφημ. Κυβερνήσεως, ἐνεκρίθη συμφώνως πρὸς τὰς διατάξεις τοῦ νόμου 5045 καὶ τὴν ἀπόφασιν τῆς οἰκείας κριτικῆς ἐπιτροπῆς, τὴν περιλαμβανομένην εἰς τὸ ὑπ' ἀριθ. 461 πρακτικὸν τοῦ Ἐκπαιδευτικοῦ Γνωμοδοτικοῦ Συμβουλίου, τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον **«Ἐκλογαὶ ἐκ τῶν νεκρικῶν διαλόγων τοῦ Λουκιανοῦ»** τῶν Χρ. Παπαναστασίου καὶ Ν. Φραγκίσκου βιβλίον των ὡς διδακτικὸν βιβλίον πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῆς Α' τάξεως τῶν Γυμνασίων διὰ μίαν πενταετίαν, ἀρχομένην ἀπὸ τοῦ σχολικοῦ ἔτους 1932—1933 ὑπὸ τὸν ὅρον ὅπως κατὰ τὴν ἐκτύπωσιν τοῦ βιβλίου τούτου συμμορφωθῆτε πρὸς τὰς ὑποδείξεις τῆς κριτικῆς ἐπιτροπῆς.

Ἐντολῇ τοῦ Ὑπουργοῦ
Ὁ Διευθυντὴς
(Τ.Σ.) Ε. ΚΑΚΟΥΡΟΣ

Ἄρθρον 9 τοῦ ἀπὸ 26 Ἰουλίου 1927 Προεδρικοῦ Διατάγματος

Τὰ διδακτικὰ βιβλία τὰ πωλούμενα μακρὰν τοῦ τόπου τῆς ἐκδόσεώς των ἐπιτρέπεται νὰ πωλῶνται ἐπὶ τιμῇ ἀνωτέρᾳ κατὰ 15% τῆς ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ παρόντος Διατάγματος κανονισθείσης ἄνευ βιβλιοσήμου τιμῆς πρὸς ἀντιμετώπισιν τῆς δαπάνης συσκευῆς καὶ τῶν ταχυδρομικῶν τελῶν, ὑπὸ τὸν ὅρον ὅπως ἐπὶ τῆς τελευταίας σελίδος τοῦ ἐξωφύλλου ἐκτυποῦται τὸ παρὸν ἄρθρον.

ΕΞΕΤΥΠΩΘΗ ΤΗ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 1932 ΕΙΣ 4.500 ΑΝΤΙΤΥΠΑ

ΙΩ. Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ

ΧΡ. Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν
τοῦ Πειραματικοῦ Σχολείου Πανεπ. Ἀθηνῶν.

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΔΙΑ ΤΗΝ Α΄ ΚΑΙ Β΄ ΤΑΞΙΝ ΤΟΥ ΕΞΑΤΑΞΙΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΠΡΩΤΗ

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΔΙΑ ΤΗΝ ΠΕΝΤΑΕΤΙΑΝ 1932—1937

Ἐξεδόθη εἰς 3000 ἀντίτυπα

Τιμᾶται μετὰ τοῦ βιβλιοσήμου καὶ φόρου δρχ. **25.20**
Βιβλιόσημον καὶ Φόρος Ἀναγκαστ. Δανείου δρχ. 8.60
Ἀριθ. Ἐγκριτικῆς ἀποφάσεως 44229 / 15212
Ἀριθ. ἀδείας κυκλοφορίας 57105 / 17/10/32

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΑΙ ΙΩΑΝΝΗΣ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΣ ΚΑΙ Σ^{ΙΑ}
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ"
46α—ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ—46α
1932

ΙΩ. Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ

ΧΡ. Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν
τοῦ Πειραματικοῦ Σχολείου Πανεπ. Ἀθηνῶν.

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΔΙΑ ΤΗΝ Α΄ ΚΑΙ Β΄ ΤΑΞΙΝ ΤΟΥ ΕΞΑΤΑΞΙΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΠΡΩΤΗ

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΔΙΑ ΤΗΝ ΠΕΝΤΑΕΤΙΑΝ 1932—1937

Ἀριθμ. ἐγκρ. ἀποφάσεως $\frac{44229/15212}{12/8/1932}$

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΑΙ ΙΩΑΝΝΗΣ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΣ ΚΑΙ ΣΙΑ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ„
46α—ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ—46α
1932

Πᾶν ἀντίτυπον μὴ φέρον τὴν ὑπογραφὴν τοῦ κ. Χρ. Μπαρμπαστάθη καὶ τὴν σφραγῖδα τοῦ Βιβλιοπωλείου τῆς Ἑστίας, θεωρεῖται ἐκ τυποκλοπίας προερχόμενον.

Μπαρμπαστάθης

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΕΣΤΙΑΣ
Ι. Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & Σ^ΑΣ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

Τυπογραφεῖον Π. ΛΕΩΝΗ, ὁδὸς Περικλέους 30

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΩΤΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Τὰ πράγματα τὰ ὁποῖα βλέπομεν ἢ ἐγγίζομεν τὰ ὀνομάζομεν ὑλικὰ σώματα ἢ ἁπλῶς σώματα. Κάθε σῶμα κατέχει ἕνα χῶρον ὁ ὁποῖος λέγεται **ἔκτασις** αὐτοῦ. Ἐξ ἄλλου τὰ διάφορα σώματα τελειώνουν ἐξωτερικῶς κατὰ διαφόρους τρόπους· ὁ **τρόπος** μὲ τὸν ὁποῖον τελειώνει ἐξωτερικῶς ἕνα σῶμα λέγεται **σχῆμα** αὐτοῦ. Τὰ περισσότερα σώματα εἰς τὴν φυσικήν των κατάστασιν ἔχουν σχῆμα **πολύπλοκον**. Εἰς πολλὰ ὅμως ἐξ αὐτῶν ὁ ἄνθρωπος δίδει σχήματα ἁπλούστερα.

Μερικὰ ἀπὸ τὰ περισσότερον ἁπλᾶ σχήματα δεικνύομεν εἰς τὴν εἰκόνα (1).

2. Ὅταν ἕνα σῶμα τὸ ἐξετάζωμεν, μόνον διὰ νὰ ἴδωμεν τί σχῆμα καὶ τί ἔκτασιν ἔχει, χωρὶς νὰ μᾶς ἐνδιαφέρῃ ἡ ὕλη ἀπὸ τὴν ὁποίαν εἶναι κατεσκευασμένον, τὸ λέγομεν **γεωμετρικὸν σῶμα** ἢ **στερεὸν** (γεωμετρικόν).

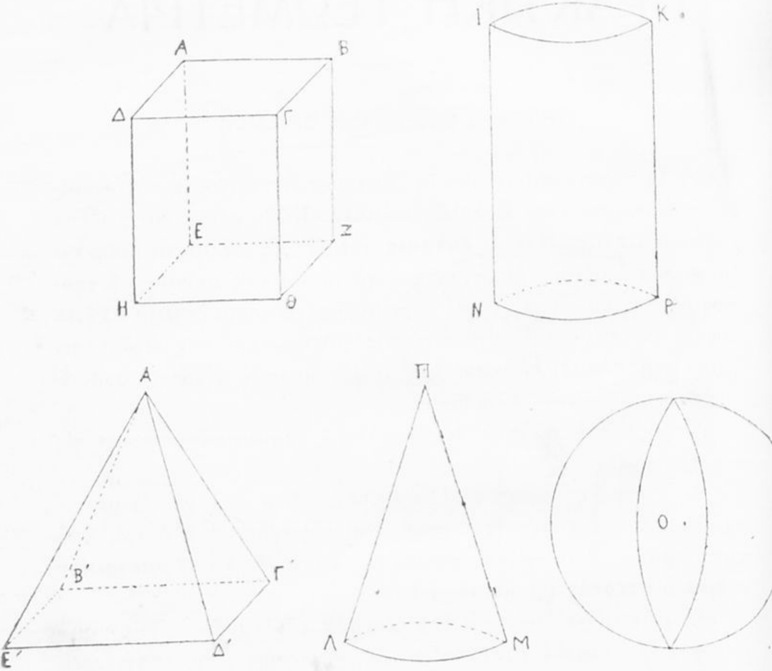
3. Ἐὰν τώρα λάβωμεν ἕνα οἱονδήποτε στερεόν, π. χ. τὸν κύβον, καὶ ἐξετάσωμεν τὴν ἔκτασίν του, θὰ ἴδωμεν, ὅτι αὐτὴ ἐκτείνεται πρὸς τὰ ἄνω, πρὸς τὰ ἐμπρὸς καὶ πρὸς τὰ πλάγια, δηλαδὴ κατὰ τρεῖς **διαστάσεις : μῆκος, πλάτος, ὕψος**. Ἐπειδὴ δὲ τὸ αὐτὸ παρατηροῦμεν καὶ εἰς κάθε ἄλλο στερεόν, λέγομεν, ὅτι τὰ σώματα ἔχουσι τρεῖς διαστάσεις.

4. Ὅταν κρατοῦμεν ἕνα στερεόν, ἐγγίζομεν μόνον τὰ ἄκρα εἰς τὰ ὁποῖα τελειώνει. Τὰ ἄκρα ἑκάστου στερεοῦ ἀποτελοῦσιν ὅλα ὁμοῦ τὴν **ἐπιφάνειαν** αὐτοῦ.

Καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἔχει σχῆμα καὶ ἔκτασιν· ἀλλ' ἂν ἐξετάσωμεν τὰς ἐπιφανείας τῶν στερεῶν (1) ὡς πρὸς τὴν ἔκτασίν των, θὰ ἴδωμεν, ὅτι αὗται ἔχουσι δύο διαστάσεις (μῆκος καὶ πλάτος).

Εἶναι λοιπὸν ἡ ἔκτασις τῆς ἐπιφανείας διάφορος τῆς ἐκτάσεως τῶν στερεῶν.

5. Ἂν ἐξετάσωμεν τώρα τὰ μέρη τῶν ἐπιφανειῶν π. χ. τοῦ κύβου, τῆς πυραμίδος, τοῦ κυλίνδρου κλπ. θὰ ἴδωμεν, ὅτι αὗται **τέμνονται** εἰς **γραμμάς**. Ὥστε **γραμμὴ** λέγεται ἡ τομὴ δύο ἐπιφανειῶν.



Εἰκ. 1.

6. Καὶ ἡ γραμμὴ ἔχει σχῆμα καὶ ἔκτασιν· ἐκτείνεται ὅμως ἡ γραμμὴ κατὰ μίαν διάστασιν (μῆκος). Ὥστε ἡ ἔκτασις τῆς γραμμῆς εἶναι διάφορος τῆς ἐκτάσεως τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῆς ἐκτάσεως τῶν στερεῶν.

7. Πολλαὶ ἀπὸ τὰς γραμμὰς τῶν σχημάτων (1) βλέπομεν ὅτι συναντῶνται ἢ τέμνονται. Ἡ τομὴ δύο γραμμῶν λέγεται **σημεῖον**.

Τὸ σημεῖον δὲν ἔχει ἔκτασιν, οὔτε μέρη.

~~8~~. Τὰ σημεῖα, αἱ γραμμαὶ καὶ αἱ ἐπιφάνειαι ἐξετάζονται καὶ καθὲν χωριστά, ἤτοι ***ἄνευ τῶν σωμάτων εἰς τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται.***

~~9~~. ***Ὁρισμὸς τῆς Γεωμετρίας.*** Ἡ ἐπιστήμη ἡ ὁποία ἐξετάζει τὰ στερεὰ σώματα, ὡς καὶ τὰς ἐπιφανείας καὶ τὰς γραμμὰς αὐτῶν, ὡς πρὸς τὸ σχῆμα καὶ τὴν ἔκτασιν λέγεται ***Γεωμετρία.***

ΓΡΑΜΜΑΙ

~~10~~. ***Εἴδη γραμμῶν.*** Ἐὰν προσέξωμεν τὰς γραμμὰς τῶν στερεῶν, θὰ ἴδωμεν, ὅτι μερικαὶ ἀπὸ αὐτὰς ἔχουσι σχήματα διάφορα. Τὸ ἁπλούστερον ὅμως σχῆμα εἶναι ὡς τὸ σχῆμα τῆς γραμμῆς ΑΒ, ἡ ὁποία λέγεται ***εὐθεῖα.***

Σχ. 2.

1 Διὰ νὰ λάβωμεν ἡμεῖς ἕνα τοιοῦτον σχῆμα πρέπει νὰ τεντώσωμεν ἕνα λεπτότατον νῆμα. Ἄλλα σχήματα γραμμῶν ποὺ παρατηροῦμεν εἰς τὰ στερεὰ (1) εἶναι ὡς τὸ σχῆμα τῆς γραμμῆς ΒΓΔ, ἡ ὁποία σχηματίζεται, ὅπως βλέπομεν, ἀπὸ εὐθείας γραμμὰς χωρὶς νὰ εἶναι εὐθεῖα· αἱ γραμμαί, ὡς αὐτή, λέγονται ***τεθλασμέναι.***

2 Ἄλλο διάφορον σχῆμα γραμμῆς βλέπομεν εἰς τὴν γραμμὴν ΑΜ τοῦ κώνου, τῆς ὁποίας κανένα μέρος δὲν εἶναι εὐθεῖα· αἱ τοιαῦται γραμμαὶ λέγονται ***καμπύλαι.***

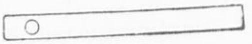
3 Ὅταν μία γραμμὴ ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθείας καὶ καμπύλας γραμμὰς λέγεται ***μικτή***· π. χ. μικτὴ γραμμὴ εἶναι ἡ τοῦ σχήματος 2.

Σχ. 2.

11. ***Χάραξις εὐθείας γραμμῆς.*** Διὰ νὰ χαράξωμεν ἐπὶ τοῦ χάρτου ἢ πίνακος εὐθεῖαν γραμμὴν χρησιμοποιοῦμεν τὸν κανόνα (σχ. 3) ὅστις εἶναι μία σανὶς λεπτὴ μὲ ἀκμὰς (κόψεις) εὐθυγράμμους. Ὁ τρόπος τῆς χρήσεως τοῦ κανόνος εἶναι εἰς ὅλους γνωστός.

12. ***Μέτρησις τῶν εὐθειῶν γραμμῶν.*** Διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν λαμβάνομεν ὡς μονάδα μίαν ἄλλην εὐθεῖαν γραμμὴν καὶ συγκρίνομεν τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πρὸς τὴν

μονάδα. Εὑρίσκομεν δὲ διὰ τῆς συγκρίσεως αὐτῆς πόσας φορὰς ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα περιέχει τὴν μονάδα καὶ τὰ μέρη αὐτῆς. Ὁ δὲ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος φανερώνει τοῦτο λέγεται ***μῆκος*** τῆς εὐθείας αὐτῆς.



Σχ. 3.

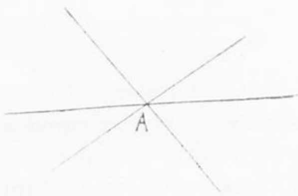
Σχ. 5.

Συνηθεστέρα μονὰς μήκους εἶναι τὸ (γαλλικὸν) μέτρον.

1 μέτρον = 10 παλάμαι
1 παλάμη = 10 δάκτυλοι
1 δάκτυλος = 10 γραμμαί.

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν μεγάλων εὐθειῶν γραμμῶν μεταχειριζόμεθα τὸ δεκάμετρον (10), τὸ ἑκατόμετρον (100 μ.) καὶ τὸ χιλιόμετρον (1000 μ.). Διὰ δὲ τὴν μέτρησιν τῶν οἰκοπέδων μεταχειριζόμεθα τὸν ***τεκτονικὸν*** πῆχυν, ὅστις εἶναι τὰ 0,75 τοῦ μέτρου.

13. ***Ἰδιότητες τῆς εὐθείας.*** Ἐὰν ζητηθῇ, νὰ γράψωμεν εὐθεῖαν, διερχομένην διὰ δοθέντος σημείου Α, παρατηροῦμεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν, ὅσας θέλομεν τοιαύτας εὐθείας (σχ. 4), ἐνῷ ἂν ζητηθῇ, νὰ γράψωμεν εὐθεῖαν διερχομένην διὰ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β, παρατηροῦμεν, ὅτι μίαν μόνον τοιαύτην εὐθεῖαν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν (Σχ. 5). Ὅθεν:

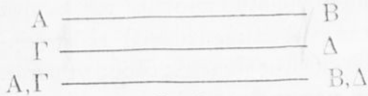


Σχ. 4.

1) ***Διὰ δύο σημείων μία μόνον εὐθεῖα γραμμὴ διέρχεται.***

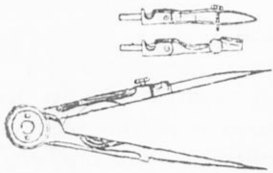
2) ***Μία εὐθεῖα δύναται νὰ αὐξηθῇ καὶ ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα της καὶ νὰ προχωρῇ χωρὶς νὰ παύσῃ νὰ εἶναι εὐθεῖα.***

3) ***Μία εὐθεῖα δύναται νὰ τεθῇ ἐπὶ μιᾶς ἄλλης οὕτως ὥστε νὰ συμπέσωσι δύο ἄκρα αὐτῶν·*** ἂν δὲ τότε συμπέσωσι καὶ τὰ ἄλλα δύο ἄκρα αὐτῶν, αἱ εὐθεῖαι εἶναι ***ἴσαι***· ἂν δὲ ὄχι, εἶναι ***ἄνισοι***· π. χ. ἡ εὐθεῖα ΑΒ δύναται νὰ τεθῇ ἐπὶ τῆς ΓΔ ὥστε νὰ συμπέσωσι τὰ ἄκρα αὐτῶν Α καὶ Γ· ἂν δὲ συμπέσωσι καὶ τὰ ἄλλα ἄκρα Β καὶ Δ, τότε αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι ἴσαι (σχ. 6), ἄλλως εἶναι ἄνισοι. Ἡ σύγκρισις δύο εὐθειῶν γίνεται καὶ διὰ τοῦ διαβήτου (σχ. 7). Διὰ νὰ ἴδωμεν δὲ δι' αὐτοῦ, ἂν δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ἴσαι ἢ ἄνισοι, ἐφαρμόζομεν τὰ ἄκρα τῶν σκελῶν εἰς τὰ

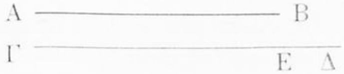


Σχ. 6.

ἄκρα τῆς εὐθείας ΑΒ, ἔπειτα θέτομεν μὲ τὸ ἴδιον ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου τὸ ἓν ἄκρον του εἰς τὸ Γ· ἂν δὲ τότε τὸ ἄλλο ἄκρον του πέσῃ εἰς τὸ Δ, αἱ εὐθεῖαι εἶναι ἴσαι, ἂν δὲ πέσῃ εἰς ἓν ση-



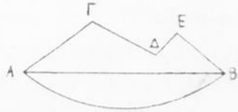
Σχ. 7.



Σχ. 8.

μεῖον Ε τῆς ΓΔ μεταξὺ Γ καὶ Δ, ἡ ΑΒ εἶναι μικροτέρα τῆς ΓΔ, ἂν δὲ πέσῃ πέραν τοῦ Δ, ἡ ΑΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΓΔ (σχ. 8).

4) Διὰ δύο σημείων Α καὶ Β γνωρίζομεν, ὅτι μία μόνον εὐθεῖα γραμμὴ διέρχεται. Διὰ τῶν αὐτῶν ὅμως σημείων εἶναι δυνατὸν νὰ διέλθωσιν, ὅσαι ἄλλαι γραμμαὶ θέλομεν (σχ. 9)· ἀλλ' εἶναι φανερόν, ὅτι ἐξ ὅλων τῶν γραμμῶν τούτων, αἱ ὁποῖαι ἔχουσιν ἄκρα τὰ Α καὶ Β, ἡ εὐθεῖα εἶναι ἡ μικροτέρα· λέγεται δὲ ἀπόστασις τῶν σημείων Α καὶ Β. Ὅθεν·

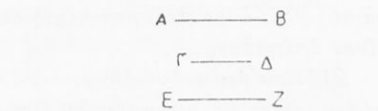


Σχ. 9.

α') ***Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι μικροτέρα πάσης ἄλλης γραμμῆς, ἡ ὁποία ἔχει τὰ αὐτὰ ἄκρα.***

β') ***Ἀπόστασις δύο σημείων λέγεται ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ἑνώνει αὐτά.***

14. ***Ἄθροισμα καὶ διαφορὰ εὐθειῶν.*** ***Ἄθροισμα*** δύο ἢ περισσοτέρων εὐθειῶν λέγεται ἡ εὐθεῖα τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦν, ὅταν τὰς θέσωμεν κατὰ σειρὰν καὶ συνεχῶς ἐπὶ ἄλλης εὐθείας. Π. χ. ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ εἶναι ἡ εὐθεῖα αζ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν, ἂν λάβωμεν (συνήθως διὰ τοῦ διαβήτου) ἐπὶ τῆς εὐθείας θη τὰς τρεῖς συνεχεῖς εὐθείας αγ, γε, εζ ἴσας μίαν πρὸς μίαν μὲ τὰς δοθείσας.



Σχ. 10.

Διαφορὰ δύο ἀνίσων εὐθειῶν λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία μένει, ὅταν ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ ἓν ἄκρον τῆς μεγαλυτέρας, ἀποκόψωμεν ἓν μέρος ἴσον μὲ τὴν μικροτέραν. Π. χ. ἡ εὐθεῖα γε εἶναι διαφορὰ τῶν εὐθειῶν αε καὶ αγ.

ΕΙΔΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

15. Αἱ ἐπιφάνειαι τῶν στερεῶν (1) παρατηροῦμεν, ὅτι δὲν ἔχουσι τὸ αὐτὸ σχῆμα. Ἐὰν δὲ λάβωμεν μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν (π. χ. ἕνα λεπτὸν νῆμα τεντωμένον) καὶ θελήσωμεν νὰ τὴν ἐφαρμόσωμεν εἰς τὰ μέρη τῶν ἐπιφανειῶν τῶν στερεῶν (1), θὰ ἴδωμεν, ὅτι εἰς ἄλλα μὲν ἐφαρμόζει ὅπως καὶ ἂν τὴν θέσωμεν, εἰς ἄλλας δὲ ἐφαρμόζει μόνον ἐὰν τὴν θέσωμεν κατὰ μίαν διεύθυνσιν, ἐνῷ εἰς ἄλλας δὲν ἐφαρμόζει ὁπωσδήποτε.

1) Αἱ ἐπιφάνειαι ***ἐπάνω εἰς τὰς ὁποίας ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἐφαρμόζει πανταχοῦ λέγονται ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι ἢ ἁπλῶς ἐπίπεδα***. Π. χ. τὰ μέρη τῶν ἐπιφανειῶν ἑνὸς κύβου (δηλ. αἱ ἕδραι αὐτοῦ), τῆς πυραμίδος, εἶναι ἐπίπεδα.

2) Ἐὰν μία ἐπιφάνεια ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπιπέδους ἐπιφανείας χωρὶς νὰ εἶναι ὁλόκληρος ἐπίπεδος λέγεται ***τεθλασμένη***. Ὅπως εἶναι π. χ. ἡ ὅλη ἐπιφάνεια τοῦ κύβου, τῆς πυραμίδος.

3) Αἱ ἐπιφάνειαι ἐπάνω εἰς τὰς ὁποίας ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἢ ἐφαρμόζει κατὰ μίαν διεύθυνσιν ἢ καθόλου λέγονται ***καμπύλαι***. Τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν οὐδὲν μέρος εἶναι ἐπίπεδος ἐπιφάνεια· π. χ. ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι καμπύλη.

4) Ὅταν μία ἐπιφάνεια ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπιπέδους καὶ καμπύλας ἐπιφανείας λέγεται ***μικτή***· π. χ. αἱ ἐπιφάνειαι τοῦ κώνου τοῦ κυλίνδρου εἶναι μικταί.

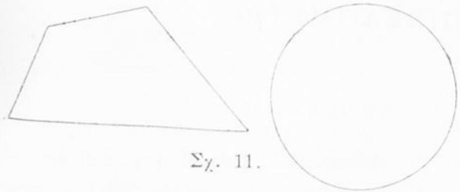
16. ***Ἰδιότητες τοῦ ἐπιπέδου***. ***1) Ἕνα ἐπίπεδον δύναται νὰ αὐξηθῇ, ὅσον θέλομεν πέριξ ἑαυτοῦ, χωρὶς νὰ παύσῃ νὰ εἶναι ἐπίπεδον.***

2) Ἕνα ἐπίπεδον δύναται νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ ἄλλου ἐπιπέδου, ὥστε νὰ σχηματισθῇ ἕνα ἐπίπεδον.

17. ***Ἐπίπεδον σχῆμα· ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τελειώνει πανταχόθεν, λέγεται ἐπίπεδον σχῆμα***, π. χ. ἐπίπεδα σχήματα εἶναι τὰ σχ. 11.

18. ***Διαίρεσις τῆς Γεωμετρίας***. Ἡ Γεωμετρία διαιρεῖται εἰς δύο μέρη· καὶ εἰς μὲν τὸ πρῶτον ἐξετάζονται σχήματα τῶν

ὁποίων ὅλα τὰ σημεῖα κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου, ὅπως τῶν σχ. 11, λέγεται δὲ τοῦτο ***Ἐπιπεδομετρία***· εἰς δὲ τὸ δεύτερον ἐξετάζονται σχήματα τῶν ὁποίων τὰ σημεῖα δὲν εὑρίσκονται ὅλα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ὅπως π.χ. τὰ σχ. 1· λέγεται δὲ τοῦτο ***Στερεομετρία***.



Σχ. 11.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Λάβετε ἕνα κῦβον καὶ δείξατε τὰς τρεῖς διαστάσεις αὐτοῦ.

2) Ἐξετάσατε ἕνα μέρος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου καὶ δείξατε τὰς δύο διαστάσεις αὐτῆς.

3) Εὕρετε τὰς διαστάσεις μιᾶς γραμμῆς τοῦ κύβου.

4) Τί σχῆμα ἔχουν τὰ ἑξῆς κεφαλαῖα γράμματα Γ Δ Ζ Ι Λ Ο Ρ Χ Ω;

5) Τί σχῆμα ἔχει τὸ δρέπανον;

6) Ποῖαι εἶναι αἱ ἰδιότητες τῆς εὐθείας;

7) Μετρήσατε τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος τοῦ τετραδίου σας.

8) Γράψατε εὐθείας μήκους 1 παλάμης, 5 δακτύλων καὶ 25 γραμμῶν.

9) Γράψατε δύο εὐθείας μήκους ἑκάστη 0,12 καὶ 0,08 καὶ γράψατε κατόπιν μίαν εὐθεῖαν τῆς ὁποίας τὸ μῆκος νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν δύο πρώτων εὐθειῶν.

10) Γράψατε τρεῖς εὐθείας μήκους ἑκάστη 0,09, 0,05 καὶ 0,12 καὶ γράψατε ἔπειτα εὐθεῖαν, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν τριῶν πρώτων εὐθειῶν.

11) Γράψατε δύο εὐθείας μήκους 0,15 καὶ 0,09 καὶ γράψατε ἔπειτα ἄλλην εὐθεῖαν τῆς ὁποίας τὸ μῆκος νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν μηκῶν τῶν δύο πρώτων εὐθειῶν.

12) Δώσατε παραδείγματα ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν.

13) Ποῖαι εἶναι αἱ ἰδιότητες τοῦ ἐπιπέδου;

14) Ἐὰν λάβωμεν δύο σημεῖα κείμενα ἐπὶ ἐπιπέδου καὶ συνδέσωμεν αὐτὰ δι' εὐθείας, πῶς θὰ κεῖται ἡ εὐθεῖα ἐν σχέσει μὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο;

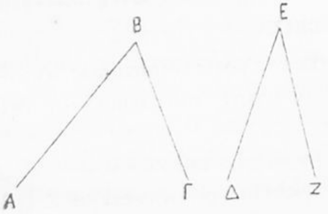
15) Πῶς θὰ ἐξελέγξωμεν ἂν μία ἐπιφάνεια εἶναι ἐπίπεδος;

16) Εἰς τί διαιρεῖται ἡ Γεωμετρία;

ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

ΓΩΝΙΑΙ

19. Ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΒΓ (σχ. 12) ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Β, χωρὶς ν' ἀποτελέσωσι μίαν μόνον εὐθεῖαν, σχηματίζεται σχῆμα τὸ ὁποῖον λέγεται ***γωνία***, σχηματίζεται δὲ ἡ γωνία ΑΒΓ ἢ ΓΒΑ ἢ Β. Ὁμοίως καὶ αἱ εὐθεῖαι ΔΕ καὶ ΕΖ σχηματίζουσι τὴν γωνίαν ΔΕΖ ἢ ΖΕΔ ἢ Ε. Αἱ δύο εὐθεῖαι ποὺ σχηματίζουν μίαν γωνίαν λέγονται ***πλευραὶ*** τῆς γωνίας, τὸ δὲ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν ***κορυφὴ*** αὐτῆς. Οὕτω τῆς γωνίας ΑΒΓ πλευραὶ εἶναι αἱ ΑΒ καὶ ΒΓ, κορυφὴ δὲ αὐτῆς τὸ Β.



Σχ. 12.

20. ***Ἴσαι γωνίαι.*** Ἐὰν δύο γωνίαι δύνανται νὰ τεθῶσιν ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης οὕτως, ὥστε ν' ἀποτελέσωσι μίαν γωνίαν, λέγονται ***ἴσαι.***

Οὕτω αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ θὰ εἶναι ἴσαι ἐάν, ἀφοῦ τεθῇ ἡ κορυφὴ Β ἐπὶ τῆς κορυφῆς Ε, ἡ πλευρὰ ΑΒ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΔΕ, πέσῃ καὶ ἡ πλευρὰ ΒΓ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΕΖ. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω λοιπὸν ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μέγεθος τῶν πλευρῶν αὐτῶν.

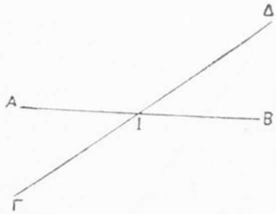
Ἐὰν ἔχωμεν δύο γωνίας, ὡς τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ θέσωμεν τὴν μίαν ἐπὶ τῆς ἄλλης οὕτως ὥστε ἡ κορυφὴ Β νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Ε καὶ ἡ πλευρὰ ΒΑ ἐπὶ τῆς ΕΔ, ἡ δὲ ΒΓ δὲν ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΕΖ, αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ***ἄνισοι*** καὶ μεγαλυτέρα θὰ εἶναι ἐκείνη τῆς ὁποίας ἡ δευτέρα πλευρὰ πίπτει ἐκτὸς τῆς ἄλλης γωνίας.

21. ***Γωνίαι κατὰ κορυφήν.*** Ἐὰν δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνωνται εἰς τὸ σημεῖον Ι, ἡ γωνία ΑΙΓ λέγεται κατὰ κορυφὴν τῆς γωνίας ΒΙΔ· ἐπίσης ἡ γωνία ΓΙΒ εἶναι κατὰ κορυφὴν τῆς γωνίας ΑΙΔ.

Ὅθεν ***δύο γωνίαι λέγονται κατὰ κορυφήν, ὅταν ἔχωσι***

κοινὴν κορυφὴν καὶ αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης.

22. ***Ἰδιότης τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν.*** Ἐὰν ἀποκόψωμεν τὴν γωνίαν ΑΙΓ καὶ τὴν ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτῆς ΒΙΔ, θὰ ἴδωμεν, ὅτι αὗται εἶναι ἴσαι. Τὸ αὐτὸ θὰ ἴδωμεν καὶ ἂν ἀποκόψωμεν τὴν ΓΙΒ καὶ τὴν ἐπιθέσωμεν ἐπὶ τῆς κατὰ κορυφήν της ΑΙΔ. Ὅθεν ***αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι.***



Σχ. 13.

23. ***Γωνίαι ἐφεξῆς.*** Ἐὰν εἰς τὸ σχῆμα 13 ἐξετάσωμεν τὰς γωνίας ΑΙΓ καὶ ΓΙΒ, παρατηροῦμεν, ὅτι αὗται ἔχουσι κοινὴν κορυφὴν τὴν Ι, τὴν πλευρὰν ΙΓ ἐπίσης κοινὴν καὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς ΑΙ, ΙΒ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τῆς κοινῆς. Τὸ αὐτὸ παρατηροῦμεν καὶ εἰς τὰς γωνίας ΔΟΕ καὶ ΕΟΖ (σχ. 14). Δύο τοιαῦται γωνίαι λέγονται ***ἐφεξῆς***. Ὅθεν ***ἐφεξῆς λέγονται δύο γωνίαι ὅταν ἔχωσι τὴν κορυφὴν καὶ μίαν πλευρὰν κοινήν, τὰς δὲ μὴ κοινάς, ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς.***

24. ***Ὀρθαὶ γωνίαι.*** Ἐὰν μία εὐθεῖα, ὡς ἡ ΓΔ, ἄρχεται

Σχ. 14.

Σχ. 15.

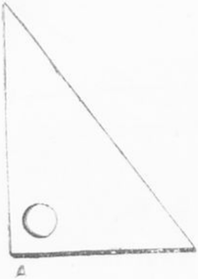
ἔκ τινος σημείου Γ τῆς εὐθείας ΑΒ (σχ. 15) καὶ σχηματίζει τὰς δύο ἐφεξῆς γωνίας ΑΓΔ καὶ ΔΓΒ ἴσας, τότε ἑκάστη τῶν ἴσων γωνιῶν καλεῖται ***ὀρθή***.

Αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τὰς ὁποίας βλέπομεν εἰς τὸν κῦβον εἶναι ὀρθαί.

25. ***Ἰδιότης τῶν ὀρθῶν γωνιῶν.*** Ἐὰν λάβωμεν δύο ὀρθὰς γωνίας καὶ τὰς ἐφαρμόσωμεν, θὰ ἴδωμεν, ὅτι εἶναι ἴσαι. Ὅθεν ***ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι.***

26. ***Γνώμων.*** Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθὴν γωνίαν με-

ταχειριζόμεθα τὸν ***γνώμονα,*** ὅστις εἶναι λεπτὴ σανὶς σχήματος ὁμοίου πρὸς τὸ σχ. 16 καὶ εἰς τὸ ὁποῖον ὀρθὴ γωνία εἶναι ἡ Α.



Σχ. 16.

Θέτομεν τὸν γνώμονα ἐπὶ τοῦ χάρτου ἢ τοῦ πίνακος καὶ σύροντες τὴν γραφίδα ἢ τὴν κιμωλίαν κατὰ μῆκος τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας Α, γράφομεν ὀρθὴν γωνίαν.

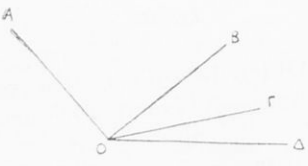
27. ***Ὀξεῖα καὶ ἀμβλεῖα γωνία.*** Μία γωνία ἡ ὁποία εἶναι μικροτέρα τῆς ὀρθῆς λέγεται **ὀξεῖα**, ἂν δὲ εἶναι μεγαλυτέρα λέγεται ***ἀμβλεῖα.*** Οὕτω ἡ γωνία ΔΒΓ εἶναι ὀξεῖα, ἡ δὲ ΕΒΓ εἶναι ἀμβλεῖα (σχ. 17).

28. ***Ἄθροισμα καὶ διαφορὰ γωνιῶν.*** Διὰ νὰ προσθέσωμεν γωνίας κάμνομεν τὴν πρώτην ἐφεξῆς μὲ τὴν δευτέραν, κατόπιν τὴν τρίτην ἐφεξῆς μὲ τὴν δευτέραν, τὴν τετάρτην ἐφεξῆς μὲ τὴν τρίτην κ.ο.κ. Τότε ἡ γωνία τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦν αἱ δύο ἄκραι πλευραὶ λέγεται ἄθροισμα τῶν δοθεισῶν γωνιῶν. Οὕτω ἡ γωνία ΑΟΔ εἶναι ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΟΒ, ΒΟΓ καὶ ΓΟΔ (σχ. 18).

Σχ. 17.

Διαφορὰ δύο ἀνίσων γωνιῶν λέγεται ἡ γωνία, ἡ ὁποία ὁμοῦ μὲ τὴν μικροτέραν δίδει ἄθροισμα τὴν μεγαλυτέραν.

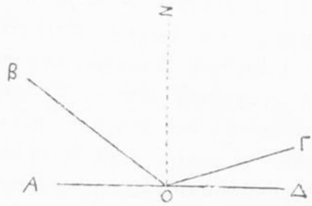
Διὰ νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ δύο γωνιῶν (ὡς τῶν ΔΟΒ, ΓΟΒ σχ. 18) ἐφαρμόζομεν τὰς κορυφάς των καὶ μίαν πλευρὰν τῆς μιᾶς μὲ μίαν πλευρὰν τῆς ἄλλης φροντίζοντες ὅπως ἡ δευτέρα πλευρὰ τῆς μικροτέρας γωνίας πέσῃ ἐντὸς τῆς μεγαλυτέρας· τότε ἡ γωνία τῶν ἄλλων πλευρῶν (ΟΓ, ΟΔ δηλ. ἡ ΔΟΓ) εἶναι ἡ ζητουμένη διαφορά.



Σχ. 18.

29. Εἶναι δυνατὸν κατὰ τὴν πρόσθεσιν γωνιῶν νὰ συμβῇ αἱ δύο ἄκραι πλευραὶ νὰ σχηματίζουν εὐθεῖαν καὶ ὄχι γωνίαν, ὅπως βλέπομεν εἰς τὸ σχῆμα 19, ἀλλὰ τότε ***τὸ ἄθροισμα εἶναι δύο ὀρθαὶ γωνίαι.*** Καὶ πράγματι, ἂν φέρωμεν τὴν ΟΖ οὕτως,

ὥστε νὰ σχηματίσῃ μετὰ τῆς ΑΔ ἐφεξῆς γωνίας ἴσας: τὰς ΑΟΖ καὶ ΖΟΔ παρατηροῦμεν ὅτι γων. ΑΟΒ+γωνΒΟΖ=γωνΑΟΖ=1 ὀρθὴ (24)· ἐπίσης εἶναι ΖΟΓ+ΓΟΔ=ΖΟΔ=1 ὀρθή· ἀλλὰ ΑΟΒ+ΒΟΓ+ΓΟΔ=ΑΟΖ+ΖΟΔ, ἤτοι ΑΟΒ + ΒΟΓ + ΓΟΔ=2 ὀρθαί.



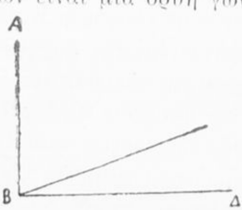
Σχ. 19.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται 1) ὅτι ***ἐὰν ἐκ σημείου εὐθείας ἀχθῶσιν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς, τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν εἶναι δύο ὀρθαὶ γωνίαι*** καὶ 2) ὅτι ***ἂν ἐξ ἑνὸς σημείου ἀχθῶσιν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι, τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν εἶναι 4 ὀρθαί.*** (σχ. 20α).


Σχ. 20α.

Διότι ἂν μία ἀπὸ τὰς εὐθείας αὐτὰς προεκταθῇ πέραν τοῦ κοινοῦ σημείου, θὰ ἔχωμεν δύο ὀρθὰς ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν κειμένων πρὸς τὸ μέρος τῆς προεκταθείσης εὐθείας καὶ δύο ὀρθὰς ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν πρὸς τὸ ἄλλο μέρος.

30. ***Γωνίαι συμπληρωματικαὶ καὶ παραπληρωματικαί.*** ***Συμπληρωματικαὶ*** λέγονται δύο γωνίαι, ἐὰν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι μία ὀρθὴ γωνία. (σχ. 20), ἂν δὲ ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς λέγονται ***παραπληρωματικαί***. (σχ. 21).



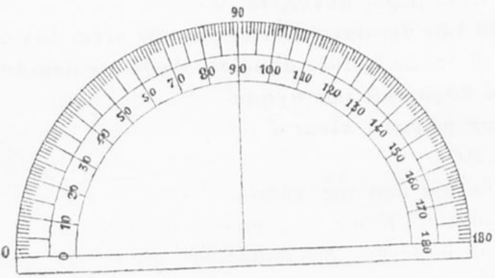
Σχ. 20.

Σχ. 21.

31. ***Μέτρησις γωνιῶν***. Διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν γωνίαν πρέπει πρῶτον νὰ λάβωμεν μίαν ὡρισμένην γωνίαν ὡς μονάδα· ἔπειτα εὑρίσκομεν ποσάκις ἡ δοθεῖσα γωνία περιέχει τὴν μονάδα καὶ τὰ μέρη αὐτῆς. Ὡς ἀρχικὴ μονὰς τῶν γωνιῶν λαμβάνεται ἡ ὀρθὴ γωνία, διαιρεῖται δὲ αὕτη εἰς 90 ἴσας γωνίας, ἑκά-

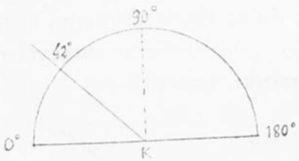
στη τῶν ὁποίων ὀνομάζομεν γωνίαν μιᾶς μοίρας (1°)· ἡ μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 πρῶτα λεπτὰ (60′) καὶ ἓν πρῶτον λεπτὸν εἰς (60″). Συνηθέστερον ὡς μονὰς τῶν γωνιῶν λαμβάνεται ἡ μοῖρα· ἐὰν π. χ. μία γωνία περιέχει τὴν μοῖραν 35 φοράς, θὰ εἴπωμεν, ὅτι ὁ ἀριθμός, ὁ μετρῶν τὴν γωνίαν, εἶναι 35°· ἐὰν δὲ περιέχει καὶ τὸ πρῶτον λεπτὸν 20 φορὰς καὶ τὸ δεύτερον 40 φοράς, θὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ γωνία αὕτη εἶναι 35° 20′ 40″.

32. Αἱ γωνίαι μετροῦνται εὐκόλως διὰ τοῦ ***μοιρογνωμονίου***. Εἶναι δὲ τοῦτο ὄργανον συνήθως ἐκ μετάλλου τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ (σχ. 22)· ἀπὸ τοῦ μέσου αὐτῆς Κ ἄγεται



Σχ. 22.

εὐθεῖα, ὥστε νὰ σχηματισθῶσι δύο ὀρθαὶ γωνίαι, ἑκάστη τῶν ὁποίων διαιρεῖται εἰς 90°· ὥστε εἰς τὸ ὄργανον αὐτὸ ὑπάρχουν σημειωμένοι 180°. Διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν γωνίαν διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Θέτομεν τὴν κοινὴν κορυφὴν Κ τοῦ μοιρογνωμονίου ἐπὶ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας καὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ, ἥτις φέρει τὴν διαίρεσιν 0°, ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς τῆς γωνίας (σχ. 23) τότε ἡ ἄλλη πλευρὰ αὐτῆς θὰ πέσῃ ἐπὶ μιᾶς διαιρέσεως τοῦ μοιρογνωμονίου, π. χ. ἐπὶ τῆς διαιρέσεως 42· ἄρα ἡ μετρηθεῖσα γωνία εἶναι 42°.



Σχ. 23.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

17) Τί καλεῖται γωνία; Πότε δύο γωνίαι λέγονται ἄνισοι;

18) Διὰ ποίας γωνίας ἄνευ μετρήσεως δυνάμεθα ἀμέσως νὰ εἴπωμεν, ὅτι εἶναι ἴσαι;

19) Ἐὰν δύο ἐφεξῆς γωνίαι ἔχουσι τὰς μὴ κοινὰς πλευρὰς αὐτῶν ἐπὶ εὐθείας, πόσων ὀρθῶν γωνιῶν εἶναι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν;

20) Δίδονται δύο γωνίαι συμπληρωματικαὶ καὶ μία ἐξ αὐτῶν εἶναι $\frac{1}{3}$ τῆς ὀρθῆς. Πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς εἶναι ἡ ἄλλη;

21) Δίδονται δύο γωνίαι παραπληρωματικαὶ καὶ ἡ μία ἐξ αὐτῶν εἶναι $\frac{4}{5}$ τῆς ὀρθῆς. Πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς εἶναι ἡ ἄλλη;

22) Εἰς τὰς ἀνωτέρω ἀσκήσεις 20 καὶ 21 αἱ τιμαὶ τῶν γωνιῶν νὰ ἐκφρασθῶσιν εἰς μοίρας.

23) Ἐξ ἑνὸς σημείου εὐθείας ἄγονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς 4 εὐθεῖαι, ἐκ δὲ τῶν 5 σχηματιζομένων γωνιῶν αἱ 4 εἶναι κατὰ σειρὰν 25^0, 30^0, 38^0, 43^0. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ ἄλλη γωνία;

24) Ἐξ ἑνὸς σημείου ἄγονται 5 εὐθεῖαι, ἐκ δὲ τῶν σχηματιζομένων 5 γωνιῶν αἱ 4 εἶναι κατὰ σειρὰν 40^0, 50^0, 70^0, 110^0. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ ἄλλη;

25) Ἐκ τῶν 4 γωνιῶν τὰς ὁποίας σχηματίζουσι δύο διασταυρούμεναι εὐθεῖαι ἡ μία εἶναι 45^0. Νὰ εὑρεθῇ πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη τῶν 3 ἄλλων γωνιῶν.

26) Νὰ κατασκευασθῶσι διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου γωνίαι 35^0 καὶ 55^0 καὶ κατόπιν νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων.

27) Νὰ κατασκευασθῶσι διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου γωνίαι 40^0, 62^0, 33^0 καὶ κατόπιν νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρώτων.

28) Νὰ κατασκευασθῶσιν ὁμοίως ὡς ἄνω γωνίαι 75^0 καὶ 30^0 καὶ κατόπιν νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τῶν δύο πρώτων.

29) Νὰ κατασκευασθῇ ὁμοίως γωνία 70^0 καὶ ἀπ᾿ αὐτῆς ν᾿ ἀποκοπῇ γωνία 30^0 οὕτως ὥστε τὸ ἀπομένον νὰ εἶναι μία γωνία. Πόσων μοιρῶν θὰ εἶναι ἡ ἀπομένουσα γωνία;

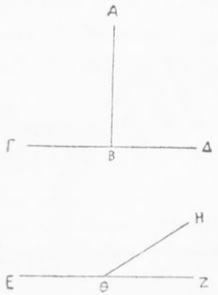
30) Δίδεται εὐθεῖα ΑΒ. Μὲ πλευρὰν τὴν ΑΒ καὶ κορυφὴν τὸ Α νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση μὲ 30^0.

31) Κατασκευάσατε ὁμοίως γωνίαν ΑΟΒ $= 36^0$, ἔπειτα νὰ προεκτείνητε τὴν ΑΟ μέχρι τῆς Γ καὶ νὰ καταακευάσητε μὲ πλευρὰν τὴν ΟΓ, ἀλλὰ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος (ἢ ἡ ΟΒ), γωνίαν

ΓΟΔ=36° καὶ κατόπιν νὰ μετρήσητε τὰς γωνίας ΑΟΔ καὶ ΒΟΓ. Ἐξετάσατε ἔπειτα τὴν γραμμὴν ΒΟΔ.

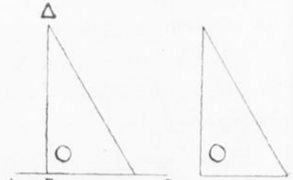
ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΑΣ

33. ***Εὐθεῖαι κάθετοι καὶ πλάγιαι.*** ***Κάθετος*** λέγεται μία εὐθεῖα πρὸς ἄλλην, ὅταν τὴν συναντᾷ καὶ σχηματίζει μετ᾽ αὐτῆς ὀρθὰς γωνίας· ἄλλως λέγεται ***πλαγία.*** Οὕτω ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ δὲ εὐθεῖα ΕΖ εἶναι πλαγία πρὸς τὴν ΗΘ. Τὸ κοινὸν σημεῖον Θ λέγεται ποῦς τῆς πλαγίας ΗΘ (σχ. 24).



Σχ. 24.

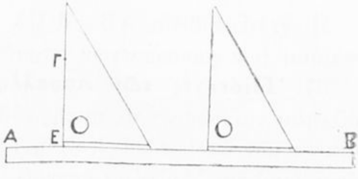
34. ***Κατασκευὴ καθέτων εὐθειῶν.*** Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν εὐθείας καθέτους πρὸς ἀλλήλας, μεταχειριζόμεθα τὸν γνώμονα τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας. Ἐὰν ζητηθῇ νὰ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ εὐθεῖαν π. χ. ΑΒ καὶ νὰ διέρχηται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον αὐτῆς Γ, ἐφαρμόζομεν τὴν μίαν κάθετον πλευρὰν τοῦ γνώμονος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας αὐτοῦ εἰς τὸ Γ· ἔπειτα κατὰ μῆκος τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς τοῦ γνώμονος σύρομεν τὴν γραφίδα καὶ γράφομεν τὴν ΔΓ, ἥτις εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Γ (σχ. 25). Ἐὰν ζητηθῇ νὰ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ ἀπὸ σημεῖον Γ κείμενον ἐκτὸς αὐτῆς, θέτομεν τὴν μίαν κάθετον πλευρὰν τοῦ γνώμονος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἐφαρμόζομεν ἐπ᾽ αὐτῆς τὸν κανόνα, κατόπιν διατηροῦντες τὸν κανόνα ἀκίνητον, σύρομεν κατὰ μῆκος αὐτοῦ τὸν γνώμονα, μέχρις ὅτου ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ αὐτοῦ συναντήσῃ τὸ σημεῖον Γ, ὁπότε κατὰ μῆκος τῆς πλευρᾶς αὐτῆς τοῦ γνώμονος σύρομεν τὴν γραφῖδα καὶ γράφομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐκ τοῦ σημείου Γ (σχ. 26).



Σχ. 25.

35. ***Ἰδιότητες τῶν καθέτων.*** 1) Ἐὰν εἰς ἀμφοτέρας τὰς ἄνω κατασκευὰς θελήσωμεν νὰ φέρωμεν ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ

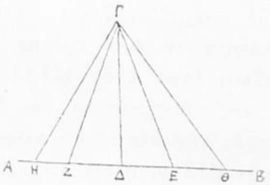
καὶ ἄλλας καθέτους διὰ τοῦ Γ ἢ ἀπὸ τοῦ Γ παρατηροῦμεν, ὅτι συμπίπτουν μὲ τὰς ἀχθείσας ΔΓ ἢ ΕΓ. Ὅθεν **ἐπὶ εὐθεῖαν μία μόνον ἄγεται κάθετος διὰ σημείου τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπ' αὐτῆς ἢ ἐκτὸς αὐτῆς.**



Σχ. 26.

2) Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ ΓΔ· ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ Δ λαμβάνομεν διὰ τοῦ διαβήτου τὰς ἴσας εὐθείας ΔΕ καὶ ΖΔ· ἔπειτα ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Η τῆς ΓΔ φέρομεν τὰς εὐθείας ΗΕ καὶ ΗΖ· ἂν τώρα τὰς τελευταίας ταύτας εὐθείας συγκρίνωμεν, παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι ἴσαι· ἀλλ'

Σχ. 27.



Σχ. 28.

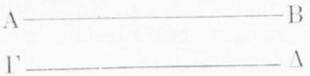
αἱ ΗΕ καὶ ΗΖ εἶναι αἱ ἀποστάσεις τοῦ Η κειμένου ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΕΖ, ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς ΕΖ· Ὅθεν, **πᾶν σημεῖον τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον εὐθείας ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων αὐτῆς.**

3) Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ ἕνα σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς, τὸ Γ· ἐκ δὲ τοῦ Γ ἂς φέρωμεν τὴν κάθετον ΓΔ ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ πλαγίας μέχρις αὐτῆς τὰς ΓΕ, ΓΖ, ΓΗ κ.τ.λ. Ἐὰν ἤδη συγκρίνωμεν **τὰς πλαγίας αὐτὰς** πρὸς τὴν κάθετον, παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα πάσης **πλαγίας**. Ἕνεκα δὲ τῆς ἰδιότητος αὐτῆς τῆς καθέτου ὁρίζομεν ὡς **ἀπόστασιν σημείου ἀπ' εὐθείας τὴν κάθετον, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν**. Οὕτω ἡ ἀπόστασις τοῦ Γ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι ἡ κάθετος ἐπ' αὐτὴν ΓΔ.

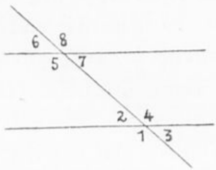
36. ***Εὐθεῖαι παράλληλοι. Δύο εὐθεῖαι λέγονται παράλληλοι, ὅταν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ δὲν συναντῶνται ὅσον καὶ ἂν προεκταθῶσιν.***

Π. χ. αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι· αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ τῶν χαρακωμένων τετραδίων εἶναι παράλληλοι.

37. ***Ἰδιότητες τῶν παραλλήλων.*** — Ἂν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι τμηθῶσιν ὑπὸ τρίτης εὐθείας, θὰ σχηματισθῶσιν 8 γωνίαι ἐκ τῶν ὁποίων αἱ 2, 3, 6, 7 εἶναι ὀξεῖαι, αἱ δὲ 1, 4, 5, 8 εἶναι ἀμβλεῖαι. Ἂν τώρα συγκρίνωμεν αὐτὰς διὰ τοῦ μοιρογνω-



Σχ. 29.



Σχ. 30.

μονίου, παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ 4 ὀξεῖαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας ὡς καὶ αἱ ἀμβλεῖαι. Ὅθεν, ***ὅταν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι τμηθῶσιν ὑπὸ τρίτης, αἱ σχηματιζόμεναι ὀξεῖαι γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, ὡς καὶ αἱ ἀμβλεῖαι·*** ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης ἕπεται ὅτι 1) ***ἂν ἡ τρίτη εὐθεῖα εἶναι κάθετος πρὸς τὴν μίαν τῶν παραλλήλων θὰ εἶναι κάθετος καὶ πρὸς τὴν ἄλλην,*** διότι καὶ αἱ ὀκτὼ γωνίαι θὰ εἶναι ὀρθαί. Ἀντιστρόφως:

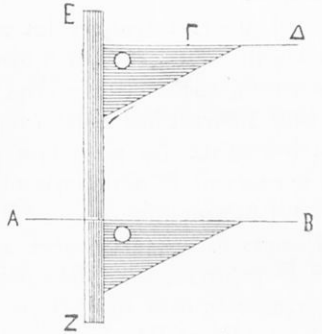
Σχ. 31.

2) ***Ἂν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ τρίτης καὶ σχηματίζουν 4 ὀξείας γωνίας ἴσας πρὸς ἀλλήλας ἢ ἀμβλείας ἴσας, αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι παράλληλοι.*** Ὁμοίως ἐκ τῆς ἰδιότητος αὐτῆς ἕπεται, ὅτι ***δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλοι.***

38. Ἡ ἰδιότης (2) μᾶς χρησιμεύει διὰ νὰ διακρίνωμεν, ἂν δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι ἢ ὄχι. Διότι ἀρκεῖ νὰ κόψωμεν αὐτὰς διὰ τρίτης καὶ νὰ μετρήσωμεν τὰς ὀξείας ἢ ἀμβλείας γωνίας.

39. ***Πρόβλημα. Νὰ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς μίαν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἀπὸ σημείου ἐκτὸς αὐτῆς.***

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς τὸ Γ (σχ. 32). Λαμβάνομεν τὸν γνώμονα καὶ τὴν μίαν κάθετον πλευρὰν αὐτοῦ ἐφαρμόζομεν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ εἰς τὴν ἄλλην κάθετον πλευράν του ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα ΕΖ· κατόπιν, διατηροῦντες τὸν κανόνα ἀκίνητον σύρομεν ἐπ᾽ αὐτοῦ τὸν γνώμονα, μέχρις ὅτου ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ τοῦ γνώμονος διέλθῃ διὰ τοῦ Γ, ὁπότε σύρομεν κατὰ μῆκος τῆς πλευρᾶς αὐτῆς τὴν γραφῖδα καὶ γράφομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΔ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος, διότι αἱ εὐθεῖαι ΓΔ καὶ ΑΒ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (τοῦ κανόνος).



Σχ. 32.

40. Διὰ τοῦ σημείου Γ μία μόνον παράλληλος ἄγεται πρὸς τὴν ΑΒ καὶ γενικῶς ***ἐκ σημείου κειμένου ἐκτὸς εὐθείας τινος μία μόνον παράλληλος ἄγεται πρὸς τὴν εὐθεῖαν αὐτήν.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

32) Δίδεται μία εὐθεῖα ΒΑ, Δ τὸ μέσον αὐτῆς, ΓΔ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ· ἔπειτα δίδεται σημεῖον Ε ἐκτὸς τῆς καθέτου ταύτης. Φέρατε τὰς ΕΑ καὶ ΕΒ καὶ συγκρίνατε μεταξύ των αὐτάς. Κατόπιν ἐκ τῆς συγκρίσεως αὐτῆς νὰ συναγάγητε γενικήν τινα πρότασιν.

33) Δίδεται εὐθεῖα τις ΑΒ καὶ σημεῖον Γ ἐκτὸς αὐτῆς, ἐκ τοῦ Γ ἄγεται κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΓΔ καὶ κατόπιν λαμβάνονται ἐπὶ τῆς ΑΒ αἱ εὐθεῖαι ΔΕ καὶ ΔΖ καὶ τοιαῦται, ὥστε ΔΕ>ΔΖ. Νὰ συγκρίνητε τὰς πλαγίας ΓΒ καὶ ΓΖ καὶ νὰ συναγάγητε ἐξ αὐτῆς γενικήν τινα πρότασιν.

34) Ἐκ τοῦ σημείου Γ τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως φέρομεν τὰς πλαγίας ΓΕ καὶ ΓΖ τοιαύτας ὥστε ΓΕ>ΓΖ. Νὰ συγκρίνητε τὰς ΔΕ καὶ ΔΖ καὶ νὰ συναγάγητε γενικήν τινα πρότασιν.

35) Ἀντὶ κατὰ τὴν ἰδιότητα τοῦ ἐδ 37 νὰ μετρήσωμεν τὰς τέσσαρας ὀξείας γωνίας διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν, ὅτι εἶναι ἴσαι ἀρκεῖ νὰ μετρήσωμεν τὰς 2 ἐξ αὐτῶν, ἀλλὰ μὴ κατὰ κορυφήν. Τὸ ἴδιον συμβαίνει καὶ διὰ τὰς ἀμβλείας. Διατί;

36) Νὰ δειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι 4 καὶ 7 τοῦ σχ. 30 εἶναι παραπληρωματικαί.

37) Φέρατε δύο εὐθείας, ἑκάστην παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Δείξατε, ὅτι αἱ δύο ἀχθεῖσαι εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι.

38) Δίδονται δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, αἱ ὁποῖαι τέμνονται ὑπὸ τρίτης· μία δὲ ἐκ τῶν 8 σχηματιζομένων γωνιῶν εἶναι 36°· Νὰ εὑρεθῇ πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη τῶν 7 ἄλλων γωνιῶν.

39) Δίδονται δύο εὐθεῖαι μὴ παράλληλοι, αἱ ὁποῖαι τέμνονται ὑπὸ τρίτης. Νὰ μετρήσητε τὰς σχηματιζομένας γωνίας καὶ νὰ συναγάγητε ἐξ αὐτοῦ γενικήν τινα πρότασιν.

40) Δίδεται μία εὐθεῖα ΑΒ· ἐκ τοῦ Α φέρατε τὴν εὐθεῖαν ΑΓ, ὥστε νὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς ΑΒ γωνίαν 60°, κατόπιν ἐκ τοῦ Β φέρατε πρὸς τὸ ἄλλο μέρος (ἢ ἡ ΑΓ) εὐθεῖαν ΒΔ, ὥστε νὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς ΑΒ γωνίαν ἐπίσης 60°. Δείξατε, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι παράλληλοι.

41) Εἰς τὴν ἀνωτέρω ἄσκησιν ὅταν σχηματισθῇ ἡ γωνία ΒΑΓ=60°, νὰ ἀχθῇ ἡ ΒΔ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος πρὸς ὃ καὶ ἡ ΑΓ, ὥστε νὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς ΑΒ γωνίαν 120°. Δείξατε, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι παράλληλοι.

42) Δίδεται ἡ γωνία ΑΒΓ=45°. Θέλομεν δὲ ἐκ τοῦ Α νὰ φέρωμεν εὐθεῖαν ΑΔ πρὸς τό ἄλλο μέρος ἢ ἡ ΒΓ, ἀλλὰ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν αὐτήν. Ποίαν γωνίαν πρέπει τότε νὰ σχηματίζῃ ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΑΒ ;

43) Ἐὰν θέλωμεν ἡ ἀνωτέρω εὐθεῖα ΑΔ νὰ ἀχθῇ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος πρὸς ὃ καὶ ἡ ΒΓ, ποίαν γωνίαν πρέπει νὰ σχηματίζῃ ἡ ΑΔ μετὰ τῆς ΑΒ, διὰ νὰ εἶναι ἡ ΑΔ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ ;

44) Διὰ ποίου ἄλλου τρόπου δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐξ ἑνὸς σημείου παράλληλον πρὸς εὐθεῖαν ἐκτὸς αὐτοῦ ;

45) Ποῖαι εἶναι αἱ διάφοροι θέσεις εὐθειῶν πρὸς ἀλλήλας ;

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

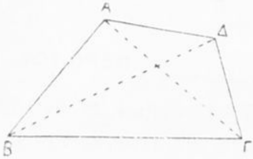
41. Εἰς τὸν κῦβον ἕνα μέρος τῆς ἐπιφανείας του περιέχεται ὑπὸ 4 εὐθειῶν, ἡ ἐπιφάνεια δὲ ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τούτων εἶναι ἐπίπεδος· ὁμοίως εἰς τὸ σχῆμα 33 ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ΑΒΓ περατοῦται εἰς εὐθείας γραμμάς.

Ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἡ ὁποία περατοῦται εἰς εὐθείας γραμμὰς λέγεται εὐθύγραμμον σχῆμα· αἱ δὲ εὐθεῖαι γραμ-

καὶ αἱ περιέχουσαι αὐτὸ λέγονται πλευραὶ τοῦ σχήματος. Οὕτω τὸ σχ. ΑΒΓ εἶναι εὐθύγραμμον καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εἶναι αἱ πλευραί αὐτοῦ.

Τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον περιέχεται ὑπὸ τριῶν πλευρῶν ὡς τὸ ΑΒΓ λέγεται **τρίπλευρον** ἢ **τρί-**

Σχ. 33.



Σχ. 34.

γωνον, τὸ ὑπὸ τεσσάρων, ὡς τὸ ΑΒΓΔ **τετράπλευρον** (σχ. 34), τὸ ὑπὸ πέντε **πεντάγωνον** κ. ο. κ. Γενικῶς τὰ πεντάγωνα, ἑξάγωνα κ. τ. λ. τὰ ὀνομάζομεν **πολύγωνα.**

Αἱ ὑπὸ τῶν πλευρῶν ἑνὸς εὐθυγράμμου σχήματος σχηματιζόμεναι γωνίαι λέγονται γωνίαι αὐτοῦ καὶ αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν αὐτῶν κορυφαὶ αὐτοῦ. Οὕτω γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι αἱ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ· καὶ κορυφαὶ αὐτοῦ αἱ Α,Β,Γ.

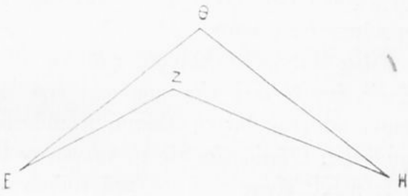
Περίμετρος εὐθυγράμμου σχήματος λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ· οὕτω περίμετρος τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ἄθροισμα ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ.

Διαγώνιος τοῦ εὐθυγράμμου σχήματος λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις συνδέει δύο κορυφὰς χωρὶς νὰ εἶναι πλευρά. Τοῦ ἀνωτέρω τετραπλεύρου διαγώνιοι εἶναι αἱ ΑΓ καὶ ΒΔ. Τὰ τρίγωνα δὲν ἔχουσι διαγωνίους.

Κυρτὸν λέγεται τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα, ἐάν, ἑκάστη πλευρὰ αὐτοῦ προεκβαλλομένη, τὸ ἀφίσῃ ὁλόκληρον πρὸς τὸ ἓν μέρος αὐτῆς.

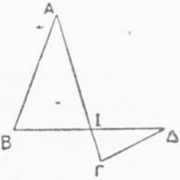
Τὰ μὴ κυρτὰ πολύγωνα λέγονται κοῖλα.

Τὸ τρίγωνον εἶναι κυρτὸν σχῆμα. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι κυρτόν· ἐνῷ τὸ ΕΖΗΘ εἶναι κοῖλον (σχ. 35). Ὑπάρχουν εὐθύ-



Σχ. 35.

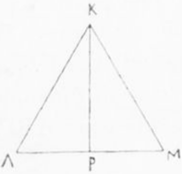
γραμμα σχήματα τὰ ὁποῖα δὲν περιέχουν ἓν **μόνον** μέρος τοῦ ἐπιπέδου, ἀλλὰ δύο ἢ περισσότερα καὶ τὰ ὁποῖα ἑνοῦνται εἰς ἓν ἢ περισσότερα σημεῖα, ὅπως π. χ. εἶναι τὸ εὐθ. σχημ. 36. Αὐτὰ λέγονται **σύνθετα**, ἐνῷ τὰ ἄλλα **ἁπλᾶ**. Ἡμεῖς, ὅταν λέγωμεν εὐθ. σχῆμα, θὰ ἐννοοῦμεν ἁπλοῦν καὶ κυρτόν.



Σχ. 36.

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

42. Εἰς τὸ σχῆμα 28 ἂν λάβωμεν τὸ τρίγωνον ΓΔΕ καὶ συγκρίνωμεν τὰς πλευράς του διὰ τοῦ διαβήτου, θὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι εἶναι ἄνισοι πρὸς ἀλλήλας. Ἓν τοιοῦτον τρίγωνον λέγεται **σκαληνόν**. Εἰς τὸ τρίγωνον ΓΕΖ παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ δύο πλευραὶ ΓΕ καὶ ΓΖ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ ὅτι ἡ τρίτη πλευρὰ εἶναι ἄνισος πρὸς αὐτάς. Ἓν τοιοῦτον τρίγωνον λέγεται **ἰσοσκελές**, ἂν δὲ καὶ αἱ τρεῖς πλευραὶ τριγώνου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, τὸ τρίγωνον λέγεται **ἰσόπλευρον**, ὅπως εἶναι τὸ τρίγωνον ΚΛΜ (σχ. 37)



Σχ. 37.

43. Εἰς τὸ ἀνωτέρω τρίγωνον ΓΔΕ παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ γωνία ΓΔΕ εἶναι ὀρθή, ἐνῷ αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ὀξεῖαι. Τὸ τρίγωνον τοῦτο τὸ καλοῦμεν **ὀρθογώνιον**, τὴν δὲ πλευρὰν αὐτοῦ ΓΕ, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας Δ, καλοῦμεν **ὑποτείνουσαν**. Εἰς τὸ τρίγωνον ΓΕΘ παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ γωνία ΓΕΘ εἶναι **ἀμβλεῖα**, ἐνῷ αἱ ἄλλαι δύο γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ὀξεῖαι. Τὸ τρίγωνον τοῦτο καλοῦμεν **ἀμβλυγώνιον**. Τέλος παρατηροῦμεν, ὅτι καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ τριγώνου ΓΕΖ εἶναι ὀξεῖαι καὶ διὰ τοῦτο τὸ τρίγωνον τοῦτο καλοῦμεν ὀξυγώνιον.

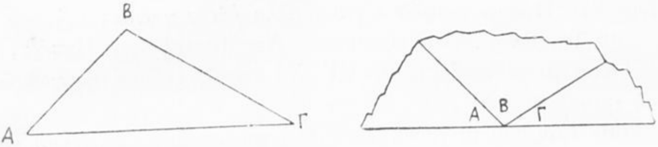
Μία οἱαδήποτε πλευρὰ τοῦ τριγώνου λαμβάνεται ὡς **βάσις** αὐτοῦ, ἐὰν δὲ ἀπὸ τὴν κορυφὴν τὴν ἀπέναντι τῆς βάσεως φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν βάσιν, ἡ κάθετος αὐτὴ λέγεται **ὕψος** τοῦ τριγώνου. Οὕτω, ἐὰν εἰς τὸ τρίγωνον ΚΛΜ ληφθῇ ὡς βάσις ἡ ΛΜ, ἡ ΚΡ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου τούτου.

Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον λαμβάνεται συνήθως ὡς βάσις ἡ ἄνισος πλευρά, εἰς δὲ τὸ ὀρθογώνιον ὡς βάσις καὶ ὕψος λαμβάνονται αἱ κάθετοι πλευραὶ αὐτοῦ.

44. ***Γενικαὶ ἰδιότητες τῶν τριγώνων.***

1) Ἑκάστη πλευρὰ τριγώνου εἶναι εὐθεῖα γραμμή, ἐνῷ αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ ὁμοῦ ἀποτελοῦν μίαν τεθλασμένην μὲ τὰ ἴδια ἄκρα τῆς εὐθείας. Ὅθεν ἕπεται, ὅτι ***ἑκάστη πλευρὰ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.***

3) Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ χάρτου. Ἐὰν καταστήσωμεν αὐτὰς ἐφεξῆς, θὰ ἴδωμεν, ὅτι αἱ ἄκραι πλευραὶ τοῦ ἀθροίσματος



Σχ. 38.

αὐτῶν κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας· ἄρα τὸ ἄθροισμα αὐτὸ εἶναι 2 ὀρθαὶ γωνίαι. ὅθεν ***τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

46) Τριγώνου τινὸς αἱ πλευραὶ εἶναι 5μ, 7μ. καὶ 8μ. Ποία εἶναι ἡ περίμετρος αὐτοῦ;

47) Εἰς τὶ διαιροῦνται τὰ τρίγωνα, ὅταν ἐξετάζωμεν τὰς πλευράς των; καὶ εἰς τί, ὅταν ἐξετάζωμεν τὰς γωνίας των;

48.) Ὑπάρχει τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι 15 μ., 25 μ. καὶ 9 μ.;

49) Τριγώνου τινὸς αἱ δύο γωνίαι εἶναι 58^0 καὶ 62^0. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τρίτη γωνία.

50) Τριγώνου τινὸς αἱ δύο γωνίαι εἶναι 27^0 καὶ 46^0. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τρίτη γωνία.

51) Τριγώνου τινὸς αἱ δύο γωνίαι εἶναι $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς καὶ $\frac{3}{5}$ τῆς ὀρθῆς. Πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς εἶναι ἡ τρίτη γωνία;

52) Ποίου τριγώνου αἱ δύο γωνίαι εἶναι 65^0 καὶ 123^0;

53) Τριγώνου τινὸς αἱ τρεῖς γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη;

54) Τριγώνου τινὸς ἡ μία γωνία εἶναι 50°, αἱ δέ ἄλλαι δύο εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη ἐξ αὐτῶν ;

55) Τριγώνου τινὸς ΑΒΓ εἶναι γωνία Α=90°. Πόσων μοιρῶν εἶναι τὸ ἄθροισμα Β+Γ τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ;

56) Ἐὰν τρίγωνον ἔχει μίαν ὀρθὴν γωνίαν, ποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ ;

57) Ἓν τρίγωνον δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ἢ μίαν μόνον ὀρθὴν ἢ ἀμβλεῖαν γωνίαν. Διατί ;

58) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ μία τῶν ὀξειῶν αὐτοῦ γωνιῶν εἶναι 54°. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ ἄλλη ὀξεῖα γωνία ;

59) Τριγώνου ΑΒΓ εἶναι γων. Α=70° καὶ γων. Β=42°, ἡ δὲ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ ἑκάστη τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΔΓ.

60) Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο γωνίας ἴσας, θὰ ἔχωσι καὶ τὴν τρίτην ἴσην ;

61) Τριγώνου ΑΒΓ εἶναι γων. Α=45° καὶ γων, Γ=60°. Ἐὰν προεκταθῇ ἡ ΒΓ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Γ μέχρι σημείου τινὸς Δ, νὰ εὑρεθῇ πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ γων ΑΓΔ.

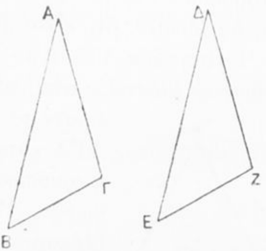
62) Ἡ γωνία ΑΓΔ τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως, ἥτις σχηματίζεται ὑπὸ τῆς πλευρᾶς ΑΓ τοῦ τριγώνου καὶ τῆς προεκτάσεως τῆς πλευρᾶς λέγεται ἐξωτερική γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Νὰ γίνῃ σύγκρισις τῆς εὑρεθείσης τιμῆς τῆς γωνίας ΑΓΔ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν Α καὶ Β καὶ νὰ ἐξαχθῇ γενική τις πρότασις.

45. ***Ἰσότης τῶν τριγώνων***. ***Ἴσα λέγονται δύο τρίγωνα, ὅταν τιθέμενα τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἐφαρμόζουσιν ἐντελῶς***. Ἀλλὰ διὰ νὰ συμβῇ τοῦτο, πρέπει τὰ 6 στοιχεῖα τοῦ ἑνὸς (δηλ. αἱ 3 πλευραὶ καὶ αἱ 3 γωνίαι) νὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ 6 στοιχεῖα τοῦ ἄλλου τριγώνου· ἂν λοιπὸν γνωρίζωμεν τὴν ἰσότητα τῶν στοιχείων αὐτῶν, συμπεραίνομεν τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων ἄνευ ἐπιθέσεως. Βεβαιούμεθα ὅμως περὶ τῆς ἰσότητος δύο τριγώνων καὶ ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἰσότητα μερικῶν μόνον στοιχείων αὐτῶν, ἤτοι

1ον) ***Ὅταν ἔχωσι τὰς τρεῖς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν***, δηλ. τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ θὰ εἶναι ἴσα, ἂν εἶναι ΑΒ=ΔΕ, ΒΓ=ΕΖ καὶ ΓΑ=ΖΔ (σχ. 39).

2ον) ***Ὅταν δύο πλευροὶ τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴσαι μὲ δύο πλευρὰς τοῦ ἄλλου μία πρὸς μίαν καὶ ἡ γωνία τῶν δύο αὐ-***

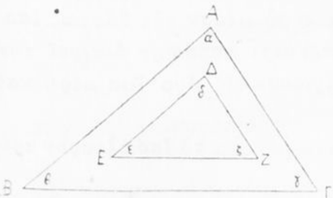
τῶν πλευρῶν τοῦ πρώτου ἰσοῦται μὲ τὴν γωνίαν τῶν δύο πλευρῶν τοῦ δευτέρου. Π.χ. τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ θὰ εἶναι ἴσα, ἂν εἶναι ΑΒ=ΔΕ, ΒΓ=ΕΖ καὶ γων ΑΒΓ=γων. ΔΕΖ.



Σχ. 39.

3ον) ***Ὅταν μία πλευρὰ τοῦ ἑνὸς ἰσοῦται μὲ μίαν πλευρὰν τοῦ ἄλλου καὶ αἱ δύο γωνίαι εἰς τὰ ἄκρα τῆς πλευρᾶς αὐτῆς τοῦ πρώτου εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς δύο γωνίας εἰς τὰ ἄκρα τῆς πλευρᾶς τοῦ δευτέρου***. Π.χ. τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ θὰ εἶναι ἴσα, ἂν εἶναι ΑΒ=ΔΕ καὶ γων. ΑΒΓ=γων. ΔΕΖ καὶ γων. ΒΑΓ=γων. ΕΔΖ.

ΣΗΜ. Δύο τρίγωνα τὰ ὁποῖα ἔχουν μόνον τὰς τρεῖς γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν δὲν εἶναι ἴσα, ὡς φαίνεται εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (σχ.40) τὰ ὁποῖα ἔχουν Α=Δ, Β=Ε καί Γ=Ζ.



Σχ. 40.

Παρατήρησις. Εἰς τὰ ἴσα τρίγωνα αἱ ἴσαι πλευραὶ εὑρίσκονται ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν καὶ αἱ ἴσαι γωνίαι ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν.

46. Διὰ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα αἱ ἀνωτέρω περιπτώσεις ἁπλοποιοῦνται ὡς ἑξῆς.

Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχωσι.

1ον) ***Τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ μίαν τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἴσην***. Δηλ. ὅταν εἶναι ΒΔ=ΑΓ καὶ ΒΖ=ΕΑ σχ. 41).

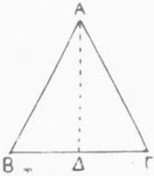
2ον) ***Τὰς δύο πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν***. Δηλ. ὅταν εἶναι ΖΒ=ΑΕ καὶ ΔΖ=ΕΓ.

Σχ. 41.

3ον) ***Τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἴσην***. Δηλ. ὅταν εἶναι ΒΔ=ΑΓ καὶ γων. Δ=γων. Γ.

47. ***Ἰδιότητες τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου.*** Ἐὰν λάβωμεν ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ΑΒ=ΑΓ καὶ μετρήσωμεν τὰς γωνίας Β καὶ Γ, αἱ ὁποῖαι εἶναι παρὰ τὴν βάσιν, θὰ ἴδωμεν, ὅτι εἶναι ἴσαι.

Ἐπίσης ἐὰν Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς βάσεως αὐτῆς ΒΓ καὶ κόψωμεν τὸ ἰσοσκελὲς αὐτὸ τρίγωνον κατὰ μῆκος τῆς ΑΔ καὶ θέσωμεν τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΓΔ καταλλήλως θὰ ἴδωμεν, ὅτι ταῦτα θὰ ἐφαρμόσωσιν. Ὥστε πάλιν θὰ ἴδωμεν, ὅτι αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ἴσαι· ἀλλ' ἐκτὸς αὐτοῦ βλέπομεν, ὅτι ἡ ΑΔ διήρεσε καὶ τὴν γωνίαν Α καὶ τὸ τρίγωνον εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ ὅτι ἐσχημάτισε μετὰ τῆς ΒΓ τὰς περὶ τὸ Δ γωνίας ἴσας. Ὅθεν συμπεραίνομεν, ὅτι



Σχ. 42.

α) Αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι παντὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσαι καὶ

β) Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ἑνώνει τὸ μέσον τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου μὲ τὴν ἀπέναντι κορυφὴν διαιρεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς καὶ τὸ τρίγωνον εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν.

48. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν, ὅτι ***τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσογώνιον.***

Παρατήρησις. Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔχει καὶ τὰς τρεῖς γωνίας αὐτοῦ ἴσας. Τὸ ἰσοσκελὲς ἔχει τὰς δύο γωνίας αὐτοῦ ἴσας (τὰς παρὰ τὴν βάσιν), ἐνῷ τὸ σκαληνὸν ἔχει καὶ τὰς τρεῖς γωνίας ἀνίσους, ἡ δὲ μεγαλυτέρα γωνία αὐτοῦ κεῖται ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς καὶ ἡ μικροτέρα ἀπέναντι τῆς μικροτέρας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

63) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ γωνία, ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως αὐτοῦ, εἶναι 40°. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη τῶν ἄλλων γωνιῶν τοῦ τριγώνου;

64) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ γωνία ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως εἶναι $\frac{4}{5}$ τῆς ὀρθῆς. Πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς εἶναι ἑκάστη τῶν ἄλλων γωνιῶν τοῦ τριγώνου;

65) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου μία γωνία παρὰ τὴν βάσιν εἶναι 52°.

Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη τῶν ἄλλων γωνιῶν τοῦ τριγώνου;

66) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου μία γωνία παρὰ τὴν βάσιν εἶναι $\frac{3}{7}$ τῆς ὀρθῆς. Πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς εἶναι ἑκάστη τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ;

67) Πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς εἶναι ἑκάστη τῶν γωνιῶν ἰσοπλεύρου τριγώνου;

68) Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη τῶν γωνιῶν ὀρθογωνίου ἰσοσκελοῦς τριγώνου;

69) Ὀρθογωνίου ἰσοσκελοῦς τριγώνου ποίας γωνίας αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι;

70) Ἀμβλυγωνίου ἰσοσκελοῦς τριγώνου ποίας γωνίας αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι;

71) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) ἡ γωνία Β εἶναι 70°· ἐὰν ἀχθῇ τὸ ὕψος ΑΔ, νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία ΒΑΔ.

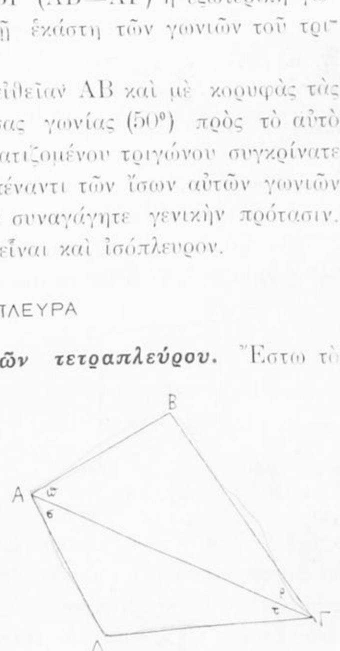
72) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) ἡ ἐξωτερικὴ γωνία ΑΓΔ εἶναι 130°. Νὰ εὑρεθῇ ἑκάστη τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

73) Μὲ πλευρὰν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ μὲ κορυφὰς τὰς Α καὶ Β κατασκευάσατε δύο ἴσας γωνίας (50°) πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ· ἔπειτα τοῦ σχηματιζομένου τριγώνου συγκρίνατε τὰς πλευράς, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀπέναντι τῶν ἴσων αὐτῶν γωνιῶν καὶ ἐκ τῆς συγκρίσεως αὐτῆς νὰ συναγάγητε γενικὴν πρότασιν.

74) Τὸ ἰσογώνιον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσόπλευρον.

ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

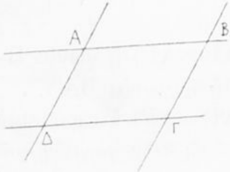
49. ***Ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τετραπλεύρου.*** Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 43). Ἐὰν φέρωμεν μίαν διαγώνιον αὐτοῦ, π. χ. τὴν ΑΓ, τότε τὸ τετράπλευρον διαιρεῖται εἰς δύο τρίγωνα, τὰ ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ· τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πρώτου εἶναι Β+π+ρ=2 ὀρθ. καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ δευτέρου Δ+τ+σ=2 ὀρθ. ἄρα Β+π+ρ+Δ+τ+σ=4 ὀρθ.



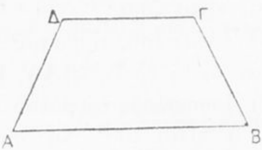
Σχ. 43.

Ἀλλὰ $\pi+\sigma=\mathrm{A}$ καὶ $\rho+\tau=\Gamma$· ὥστε ἔχομεν $\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma+\Delta=4$ ὀρθ. Ὅθεν ***τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τετραπλεύρου εἶναι 4 ὀρθαί.***

50. ***Εἴδη τετραπλεύρων.*** 1) Ἐὰν φέρωμεν δύο εὐθείας παραλλήλους καὶ ἔπειτα ἄλλας δύο εὐθείας παραλλήλους, αἱ ὁποῖαι νὰ τέμνουν τὰς πρώτας εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ (σχ. 44), τὸ σχηματισθὲν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους. Τὸ τετράπλευρον τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι λέγεται **παραλληλόγραμμον**. 2) Ἐὰν δύο παραλλήλους εὐθείας κόψωμεν διὰ δύο μὴ παραλλήλων εὐθειῶν, σχηματίζεται ἕνα τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου δύο μόνον πλευραὶ



Σχ. 44.

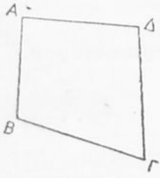


Σχ. 45.

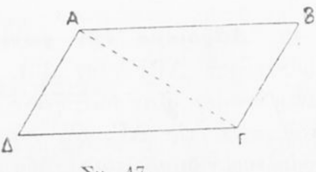
εἶναι παράλληλοι. Τὸ τετράπλευρον τοῦ ὁποίου δύο μόνον ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι λέγεται **τραπέζιον** (σχ. 45).

3) Τὸ τετράπλευρον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ δὲν εἶναι παράλληλοι λέγεται **σκαληνὸν** (σχ. 46).

51. ***Ἰδιότητες τοῦ παραλληλογράμμου.*** Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (ἐκ χάρτου). Ἐὰν φέρωμεν μίαν διαγώνιον



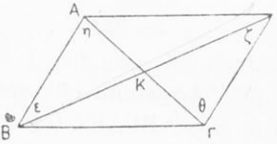
Σχ. 46.



Σχ. 47.

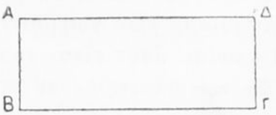
αὐτοῦ ΑΓ καὶ ἀποκόψωμεν τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ, παρατηροῦμεν διὰ τῆς ἐπιθέσεως αὐτῶν, ὅτι εἶναι ἴσα· ἑπομένως αἱ ἀπέναντι πλευραί, ὡς καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι αὐτοῦ, εἶναι ἴσαι. Ὅθεν ***παντὸς παραλληλογράμμου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι ἴσαι, ἑκάστη δὲ διαγώνιος αὐτοῦ τὸ διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα τρίγωνα.***

52. Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 48), εἰς τὸ ὁποῖον φέρομεν τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΒΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Κ. Ἐὰν ἤδη διὰ τοῦ διαβήτου συγκρίνωμεν τὰ δύο τμήματα ΑΚ καὶ ΚΓ τῆς μιᾶς διαγωνίου, θὰ ἴδωμεν, ὅτι εἶναι ἴσα· τὸ αὐτὸ βλέπομεν καὶ διὰ τὰ τμήματα ΒΚ καὶ ΚΔ τῆς ἄλλης διαγωνίου. Ὅθεν ***ἑκάστη διαγώνιος ἑνὸς παραλληλογράμμου τέμνει τὴν ἄλλην εἰς δύο ἴσα μέρη.***

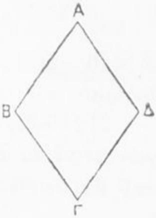


Σχ. 48.

53. ***Εἴδη παραλληλογράμμων.*** 1) Τὸ παραλληλόγραμμον τὸ ὁποῖον ἔχει ὅλας τὰς γωνίας του ὀρθὰς λέγεται ***ὀρθογώνιον*** (σχ. 49). 2) Ἐὰν τὸ παραλληλόγραμμον ἔχῃ πάσας τὰς πλευράς του ἴσας λέγεται ***ρόμβος*** (σχ. 50). 3) Ἐὰν τὸ παραλληλόγραμμον ἔχῃ καὶ τὰς γωνίας του ὅλας ὀρθὰς καὶ τὰς πλευράς του ὅλας ἴσας, λέγεται τετράγωνον (σχ. 51).

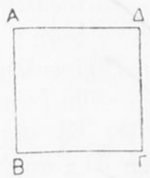


Σχ. 49.



Σχ. 50.

54. Ἐὰν ἐπὶ δύο παραλλήλων εὐθειῶν φέρωμεν καθέτους αὗται εἶναι μεταξύ των παράλληλοι (37,2)· τὰ τμήματα τῶν καθέτων, τὰ μεταξὺ τῶν δύο παραλλήλων, εἶναι ἴσα, διότι εἶναι παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων (51). Μία ἀπὸ τὰς καθέτους αἱ ὁποῖαι ἄγονται μεταξὺ δύο παραλλήλων λέγεται ***ἀπόστασις*** τῶν παραλλήλων τούτων.



Σχ. 51.

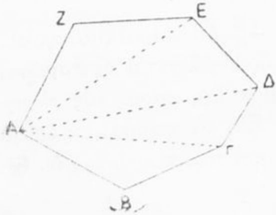
55. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν παραλληλογράμμου τινὸς λέγεται ***ὕψος*** αὐτοῦ. Ἑκάστη δὲ τῶν παραλλήλων τούτων πλευρῶν λέγεται ***βάσις*** αὐτοῦ. Π. χ. τοῦ παραλληλο-

Σχ. 52.

γράμμου ΑΒΓΔ, ἂν ληφθῇ ὡς βάσις ἡ ΑΒ, ὕψος θὰ εἶναι ἡ ΒΕ (σχ. 52).

Τοῦ τραπεζίου βάσεις λέγονται αἱ δύο παράλληλοι πλευραί του (ἄνω καὶ κάτω βάσις), ὕψος δὲ ἡ ἀπόστασις αὐτῶν.

56. ***Ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου.*** — Ἔστω τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 53). Ἐὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν αὐτοῦ Α φέρωμεν ὅλας τὰς διαγωνίους του, τὰς ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, διαιρεῖται τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα, ἀλλ' αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων τούτων εἶναι φανερόν, ὅτι ἀποτελοῦν τὰς γωνίας τοῦ δοθέντος πολυγώνου. Τὰ τρίγωνα αὐτὰ ὅμως εἶναι δύο ὀλιγώτερα ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου (6 — 2)· ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑκάστου τριγώνου εἶναι 2 ὀρθαί, ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν καὶ τῶν (6 — 2) τριγώνων



Σχ. 53.

εἶναι $2 \times (6-2) = 12 - 4 = 8$ ὀρθαί. Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς ὀκταγώνου εἶναι $2 \times (8-2) = 16 - 4 = 12$ ὀρθ. Ὅθεν ***τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς πολυγώνου εἶναι τόσαι ὀρθαὶ γωνίαι, ὅσον εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν του ἠλαττωμένον κατὰ 4.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

75) Ποῖα εἶναι τὰ εἴδη τῶν τετραπλεύρων καὶ ποῖα τὰ εἴδη τῶν παραλληλογράμμων;

76) Παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ εἶναι ΑΒ=5 μ. καὶ ΑΔ=3 μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περίμετρος αὐτοῦ.

77) Παραλληλογράμμου τινὸς ἡ μία τῶν γωνιῶν εἶναι 45°. Νὰ εὑρεθῇ ἑκάστη τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ.

78) Ἐὰν μία γωνία παραλληλογράμμου εἶναι ὀρθὴ καὶ αἱ ἄλλαι θὰ εἶναι ὀρθαί.

79) Παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αἱ διαγώνιοι τέμνονται εἰς τὸ Ο· ἐὰν δὲ εἶναι ΟΑ=6 μ. καὶ ΟΒ=5 μ. νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ἑκάστης τῶν διαγωνίων αὐτοῦ.

80) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου αἱ δύο προσκείμεναι πλευραὶ νὰ εἶναι 7 δάκτυλοι καὶ 4 δάκτυλοι.

81) Τοῦ ἀνωτέρω ὀρθογωνίου μετρήσατε καὶ συγκρίνατε τὰς διαγωνίους καὶ συναγάγετε γενικὴν τινὰ πρότασιν.

82) Αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσαι.

83) Ρόμβου ΑΒΓΔ εἶναι ΑΒ=3, 2 μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περίμετρος αὐτοῦ.

84) Ρόμβου τινὸς ΑΒΓΔ φέρομεν τὴν διαγώνιον ΑΓ. Τὶ τρίγωνα εἶναι τὰ ΑΔΓ καὶ ΑΒΓ ἐξεταζόμενα ὡς πρὸς τὰς πλευράς των;

85) Τοῦ ἀνωτέρω ῥόμβου φέρατε καὶ τὴν ἄλλην διαγώνιον. Ἔχοντες δὲ ὑπ' ὄψιν τὴν ἀνωτέρω ἄσκησιν καὶ τὴν ἰδιότητα(52) νὰ δείξητε, ὅτι αἱ διαγώνιαι τοῦ ῥόμβου τέμνονται καθέτως.

86) Αἱ διαγώνιαι τοῦ τετραγώνου τέμνονται καθέτως.

87) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ πλευρά.

88) Αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου διαιροῦσιν αὐτὸ εἰς 4 τρίγωνα. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ταῦτα, ἀνὰ δύο ἀπέναντι, εἶναι ἴσα.

89) Νὰ ἀχθῶσι δύο παράλληλοι εὐθεῖαι καὶ νὰ μετρηθῇ ἡ ἀπόστασις αὐτῶν.

90) Νὰ ἀχθῶσι δύο παράλληλοι εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι νὰ ἔχουν ἀπόστασιν 4 δακτύλων.

91) Πόσαι ὀρθαὶ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ δεκαγώνου;

92) Πόσαι ὀρθαὶ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ δωδεκαγώνου, τοῦ δεκαεξαγώνου;

93) Ἑξαγώνου τινὸς αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι. Πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς εἶναι ἑκάστη τῶν γωνιῶν αὐτοῦ;

94) Εἰκοσαγώνου τινὸς αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη τῶν γωνιῶν αὐτοῦ;

95) Πόσας πλευρὰς ἔχει ἓν πολύγωνον, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν εἶναι 14 ὀρθαί;

96) Πόσας πλευρὰς ἔχει ἓν πολύγωνον, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του εἶναι 12 ὀρθαί;

ΚΥΚΛΟΣ

57. Ἂν λάβωμεν τὸν κῶνον καὶ ἐξετάσωμεν τὴν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν αὐτοῦ, ἡ ὁποία λέγεται βάσις τοῦ κώνου, θὰ ἴδωμεν, ὅτι αὕτη περικλείεται ἀπὸ μίαν μόνον καμπύλην γραμμήν.

Τὸ σχῆμα τῆς βάσεως τοῦ κώνου λέγεται κύκλος· ἐπίσης κύκλος εἶναι καὶ τὰ σχήματα τῶν ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν τοῦ κυλίνδρου. Ἡ κλειστὴ καμπύλη γραμμὴ εἰς τὴν ὁποίαν τελειώνει ὁ κύκλος λέγεται ***περιφέρεια*** αὐτοῦ.

Κάθε κλειστὴ καμπύλη γραμμὴ ***δὲν εἶναι*** περιφέρεια.

Σχ. 54.

Διὰ νὰ εἶναι δὲ μία τοιαύτη γραμμὴ περιφέρεια πρέπει, νὰ ἔχῃ τὴν ἑξῆς ἰδιότητα (τὴν ὁποίαν αἱ ἄλλαι γραμμαὶ δὲν ἔχουν). ***Νὰ ὑπάρχῃ ἐντὸς τοῦ σχήματος τὸ ὁποῖον περικλείει, ἓν σημεῖον ἀπὸ τὸ ὁποῖον ὅλα τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς αὐτῆς νὰ ἀπέχουν ἴσας ἀποστάσεις.*** Τὸ σημεῖον αὐτὸ λέγεται κέντρον τοῦ κύκλου καὶ τῆς περιφερείας του. Ὅθεν

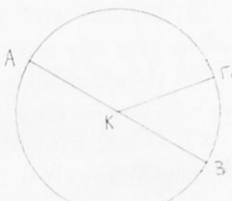
Κύκλος λέγεται ἓν ἐπίπεδον σχῆμα περικλειόμενον, ἀπὸ μίαν καμπύλην γραμμήν, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ ἓν σημεῖον ἐντὸς αὐτοῦ.

Περιφέρειαν κύκλου γράφομεν διὰ τοῦ διαβήτου.

58. ***Ἀκτὶς*** τοῦ κύκλου λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει τὸ κέντρον αὐτοῦ μὲ ἓν σημεῖον τῆς περιφερείας, π. χ. ἡ ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ κ. λ. π.

Πᾶσαι λοιπὸν αἱ ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

59. ***Διάμετρος*** τοῦ κύκλου λέγεται πᾶσα εὐθεῖα ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου καὶ περατοῦται ἑκατέρωθεν εἰς τὴν περιφέρειαν π. χ. ἡ ΑΚΒ.



Σχ. 55.

Πᾶσαι αἱ διάμετροι τοῦ αὐτοῦ κύκλου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Διότι εἶναι διπλάσιαι τῶν ἴσων ἀκτίνων.

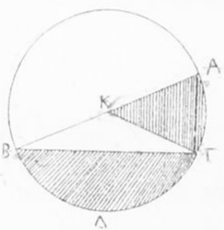
60. ***Ἰδιότης τῶν διαμέτρων.*** Ἐὰν κατασκευάσωμεν κύκλον ἐκ χάρτου καὶ κόψωμεν αὐτὸν εἰς δύο μέρη κατὰ μῆκος

μιᾶς διαμέτρου αὐτοῦ καὶ θέσωμεν κατόπιν τὸ ἓν μέρος ἐπὶ τοῦ ἄλλου θὰ ἴδωμεν, ὅτι ἐφαρμόζουσιν ἐντελῶς.

Ὥστε ***πᾶσα διάμετρος διαιρεῖ καὶ τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη*** (ἡμικύκλια, ἡμιπεριφέρειαι).

61. ***Τόξον, χορδή.*** Ἓν μέρος τῆς περιφερείας κύκλου π.χ. τὸ ΒΔΓ (σχ. 56) λέγεται **τόξον**, ἡ δὲ εὐθεῖα ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ ἄκρα τόξου, λέγεται **χορδή** αὐτοῦ· π. χ. ἡ ΒΓ εἶναι χορδὴ τοῦ τόξου ΒΔΓ (ἀλλὰ καὶ τοῦ τόξου ΒΑΓ σχ. 56)

62. ***Τμῆμα, τομεὺς.*** Τμῆμα τοῦ κύκλου λέγεται τὸ μέρος αὐτοῦ τὸ ὁποῖον περικλείουν ἓν τόξον καὶ ἡ χορδή του, π. χ. τὸ ΒΔΓΒ (σχ. 56). ***Τομεὺς δὲ τοῦ κύκλου*** λέγεται ἓν μέρος αὐτοῦ τὸ ὁποῖον περικλείει ἓν τόξον καὶ αἱ δύο ἀκτῖνες εἰς τὰ ἄκρα του· π.χ. ὁ τομεὺς ΚΒΔΓ (σχ. 56). Ἕκαστος τομεὺς ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓν τρίγωνον καὶ ἓν τμῆμα· π.χ. ὁ τομεὺς ΚΒΔΓ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΚΒΓ καὶ τὸ τμῆμα ΒΔΓΒ.



Σχ. 56.

63. ***Ἐπίκεντρος γωνία.*** Ἐὰν γωνία τις ἔχῃ τὴν κορυφήν της ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, λέγεται ἐπίκεντρος, ὅπως π. χ. ἡ γων. ΑΚΓ (σχ. 56), τὸ δὲ τόξον, τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχόμενον, λέγεται ***τόξον ἀντίστοιχον τῆς γωνίας*** (τὸ ΑΓ).

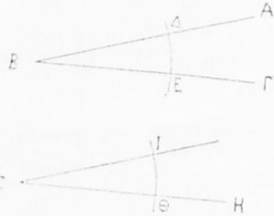
64. Ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῆς περιφερείας Κ δύο ἴσα τόξα (τῇ βοηθείᾳ τοῦ διαβήτου) ΑΒ καὶ ΒΓ καὶ ἂς φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ. Τότε σχηματίζονται δύο τομεῖς ΚΑΒ καὶ ΚΑΓ· ἂν δὲ τὸ σχῆμα εἶναι ἐπὶ χάρτου καὶ τὸ σχίσωμεν κατὰ μῆκος τῆς ΚΑ, περιστρέψωμεν δὲ ἔπειτα τὸν τομέα ΚΑΒ περὶ τὴν ΚΒ, μέχρις ὅτου πέσῃ ἐπὶ τοῦ ΒΚΓ, τὸ σημεῖον Α θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Γ καὶ ἑπομένως ἡ ἀκτὶς ΚΑ ἐπὶ τῆς ΚΓ, ἀλλὰ τότε ἐφαρμόζουν καὶ αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΚΒ καὶ ΒΚΓ· εἶναι λοιπὸν ἴσαι. Ὅθεν ***εἰς ἴσα τόξα*** τοῦ αὐτοῦ κύκλου (ἢ ἴσων κύκλων, δηλαδὴ κύκλων ποὺ ἔχουν ἴσας ἀκτῖνας) βαίνουσιν ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι.

Σχ. 57.

ΣΗΜ. Ἐπειδή, ὅταν τὸ Α πέσῃ εἰς τὸ Γ, ἡ χορδὴ ΑΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΒΓ, συνάγομεν ὅτι ***ἴσα τόξα τοῦ αὐτοῦ κύκλου (ἢ ἴσων κύκλων) ἔχουν ἴσας χορδάς.***

65. Τώρα ὑποθέσωμεν, ὅτι αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΚΒ καὶ ΒΚΓ (σχ. 57) εἶναι ἴσαι· ἐὰν ἐργασθῶμεν, ὅπως καὶ προηγου- μένως, συνάγομεν ὅτι α) ***ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι τοῦ αὐτοῦ κύκλου (ἢ ἴσων κύκλων) βαίνουσιν ἐπὶ ἴσων τόξων*** καὶ β) ***ἀντι εἰς ἴσας χορδὰς τοῦ αὐτοῦ κύκλου (ἢ ἴσων κύκλων) στοιχοῦν ἴσα τόξα*** (ὅταν ὅλα εἶναι μικρότερα ἡμιπεριφερείας ἢ ὅλα μεγαλύτερα αὐτῆς).

66. ***Πρόβλημα. Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς δοθεῖ- σαν γωνίαν.*** Τὸ πρόβλημα τοῦτο γνωρίζομεν νὰ λύωμεν διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου. Ἄνευ ὅμως αὐτοῦ διὰ τοῦ διαβήτου καὶ τοῦ γνώμονος λύεται ὡς ἑξῆς. Ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία ΑΒΓ (σχ. 58). Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν αὐτῆς Β καὶ μὲ ἀκτῖνα οἱαν- δήποτε γράφομεν ἓν τόξον τὸ ὁ- ποῖον τέμνει τὰς πλευρὰς αὐτῆς εἰς δύο σημεῖα Δ καὶ Ε. Ἔπειτα λαμβάνομεν μίαν εὐθεῖαν ΖΗ καὶ μὲ κέντρον ἓν σημεῖον αὐτῆς, π.χ. τὸ Ζ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ἰδίαν γρά φομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέ- μνει τὴν ληφθεῖσαν εὐθεῖαν ΖΗ εἰς ἓν σημεῖον Θ· λαμβάνομεν τότε ἐπ' αὐτῆς ἓν τόξον ΘΙ ἴσον μὲ τὸ ΕΖ καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΖΙ· ἡ γωνία ΙΖΘ εἶναι ἡ ζητουμένη.



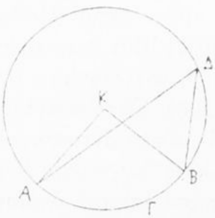
Σχ. 58.

67. ***Διαίρεσις τῆς περιφερείας εἰς μοίρας.*** Τὸ μοιρογνω- μόνιον (σχ. 22) ἔχει σχῆμα ἡμικυκλίου, αἱ δὲ περὶ τὸ Κ 180 γωνίαι εἶναι ἐπίκεντροι· ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἴσαι, ἕπεται ὅτι τὰ τόξα ἐπὶ τῶν ὁποίων αὗται βαίνουσιν εἶναι ἴσα (65). Ἡ ἡμιπεριφέ- ρεια ἄρα εἶναι διηρημένη εἰς 180 ἴσα τόξα, ἕκαστον τῶν ὁ- ποίων λέγεται τόξον μιᾶς μοίρας. Ὁλόκληρος λοιπὸν ἡ περιφέ- ρεια διαιρεῖται εἰς 360°. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται, ὅτι τόξον μιᾶς μοίρας ἀντιστοιχεῖ εἰς γωνίαν 1° καὶ τἀνάπαλιν. Ἑπομένως ἂν ἐπίκεντρος γωνία ἀντιστοιχεῖ εἰς τόξον π. χ. 45° θὰ εἶναι 45°

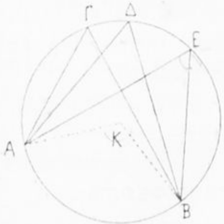
68. ***Ἐγγεγραμμένη γωνία*** εἰς κύκλον λέγεται ἡ γωνία, τῆς ὁποίας ἡ μὲν κορυφὴ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, αἱ δὲ πλευ- ραὶ αὐτῆς εἶναι χορδαὶ τοῦ κύκλου, ὅπως π. χ. ἡ γωνία ΑΔΒ·

ἡ αὐτὴ δὲ γωνία εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τμῆμα ΑΔΒΑ καὶ βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΓΒ.

69. Ἔστω ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΑΔΒ καὶ ἡ ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος ΑΚΒ (σχ. 59) (ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ καὶ ἡ ἐγγεγραμμένη τόξου). Ἐὰν τώρα κατασκευάσωμεν ἐκ χάρτου δύο ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἑκάστην πρὸς τὴν ΑΔΒ καὶ τὴν γωνίαν, ἥτις εἶναι ἄθροισμα αὐτῶν, θέσωμεν ἐπὶ τῆς ΑΚΒ, θὰ ἴδωμεν, ὅτι θὰ ἐφαρμόσουν. Ἐκ τούτου συνάγομεν, ὅτι ***πᾶσα ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἀντιστοίχου ἐπικέντρου.***



Σχ. 59.



Σχ. 60.

70. Ἔστωσαν αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι ΑΓΒ, ΑΔΒ, ΑΕΒ (σχ. 60)· ἀλλ' ἑκάστη τούτων εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς αὐτῆς ἐπικέντρου ΑΚΒ· ἐπομένως εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας· ὅθεν ***πᾶσαι αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι ὅσαι βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου (ἢ ἐπὶ ἴσων τόξων) εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

97) Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ ἀκτῖνα 5 δακτύλων καὶ νὰ ὁρισθῇ ἐπ' αὐτῆς τόξον τοῦ ὁποίου ἡ χορδὴ νὰ εἶναι 8 δακτύλων.

98) Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἥτις νὰ ἔχῃ διάμετρον 8 δακτύλων καὶ κατόπιν νὰ ὁρισθοῦν τρία σημεῖα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου τὰ ὁποῖα ν' ἀπέχουν ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτοῦ τὸ α' 3 δακτύλους, τὸ β' 4 δακτύλους καὶ τὸ γ' 5 δακτύλους· ἔπειτα νὰ ἐξετασθῇ ἡ θέσις αὐτῶν ὡς πρὸς τὸν κύκλον καὶ ἐξ αὐτῆς νὰ ἐξαχθῇ γενική τις πρότασις.

99) Εἰς κύκλον Κ φέρατε δύο διαμέτρους ΑΚΒ καὶ ΓΚΔ καθέτους πρὸς ἀλλήλας, συγκρίνατε ἔπειτα τὰ 4 τόξα εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ περιφέρεια ὑπὸ τῶν διαμέτρων τούτων, ὡς καὶ τὰς χορδὰς τῶν τόξων τούτων.

100) Ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω 4 τόξων πόσων μοιρῶν εἶναι;

101) Ὅταν τὸ τόξον, εἰς τὸ ὁποῖον βαίνει μία ἐπίκεντρος γωνία ἢ μία ἐγγεγραμμένη, γωνία, διπλασιασθῇ ἢ τριπλασιασθῇ κτλ. πόσον μεταβάλλεται ἡ γωνία;

102) Ἐὰν ἐγγεγραμμένη τις γωνία εἶναι 30°, πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος;

103) Ἐὰν ἐπίκεντρος τις γωνία εἶναι 40°,πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ εἰς αὐτὴν ἀντιστοιχοῦσα ἐγγεγραμμένη γωνία;

104) Ἐγγεγραμμένη τις γωνία εἶναι 60°, πόσων μοιρῶν εἶναι τὸ τόξον ἐπὶ τοῦ ὁποίου βαίνει;

105) Τὸ τόξον ἐπὶ τοῦ ὁποίου βαίνει μία ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι 45°, πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ γωνία αὕτη;

106) Ὅταν μία ἐγγεγραμμένη γωνία βαίνῃ ἐπὶ ἡμιπεριφερείας, εἶναι ὀρθή.

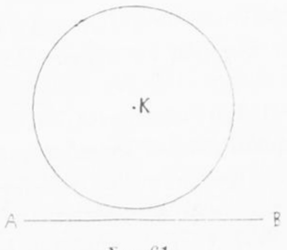
107) Ὅταν μία ἐγγεγραμμένη γωνία βαίνῃ ἐπὶ τόξου μικροτέρου τῆς ἡμιπεριφερείας εἶναι ὀξεῖα καὶ ὅταν βαίνῃ ἐπὶ τόξου μεγαλυτέρου τῆς ἡμιπεριφερείας εἶναι ἀμβλεῖα.

108) Ἡ γωνία ΑΒΓ τῆς ἀσκήσεως 99 πόσων μοιρῶν εἶναι; Τί σχῆμα δὲ εἶναι τὸ ΑΒΓΔ;

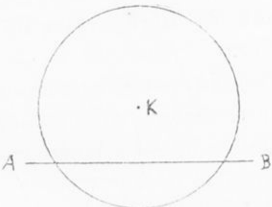
ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΠΡΟΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΝ

71. 1) Μία εὐθεῖα εἶναι δυνατόν, νὰ μὴ ἔχῃ κανὲν κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν περιφέρειαν. Τότε ἡ εὐθεῖα κεῖται ὅλη ἐκτὸς τῆς περιφερείας (σχ. 61).

2) Εὐθεῖά τις δύναται, νὰ ἔχῃ μὲ τὴν περιφέρειαν δύο κοινὰ



Σχ. 61.

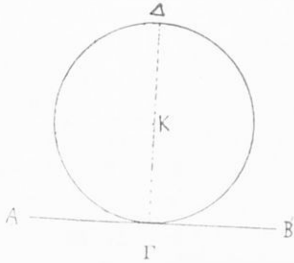


Σχ. 62.

σημεῖα· τότε λέγομεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα τέμνει τὴν περιφέρειαν (σχ. 61).

3) Μία εὐθεῖα δύναται ἐξ ἄλλου, νὰ ἔχῃ μόνον ἓν κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν περιφέρειαν, ὁπότε ἡ εὐθεῖα λέγεται ***ἐφαπτο-***

μένη τῆς περιφερείας· τὸ δὲ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν λέγεται ***σημεῖον ἐπαφῆς***· οὕτω ἡ ΑΒ (σχ. 63) εἶναι ἐφαπτομένη ἐπὶ τῆς περιφερείας Κ εἰς τὸ σημεῖον (ἐπαφῆς) Γ.



Σχ. 63.

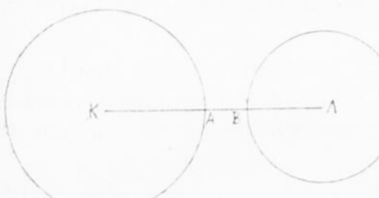
72. Ἐὰν ἤδη φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ΚΓ (σχῆμα 63) καὶ τὴν προεκτείνωμεν μέχρι τοῦ σημείου Δ καὶ στρέψωμεν ἔπειτα τὸ σχῆμα ΔΓΑ περὶ τὴν ΔΑ, αἱ δύο ἡμιπεριφέρειαι θὰ ἐφαρμόσουν, ὡς καὶ αἱ γωνίαι ΔΓΑ καὶ ΔΓΒ· εἶναι ἑπομένως αὗται ὀρθαί, ἤτοι ἡ ΚΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ· ὅθεν ***ἡ ἐφαπτομένη περιφερείας εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τὴν ἀγομένην εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς***.

Ἀντιστρόφως δὲ ***πᾶσα εὐθεῖα κάθετος εἰς τὸ ἄκρον μιᾶς ἀκτῖνος εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας***. Ἐπειδὴ δὲ μία μόνον κάθετος ἄγεται ἐπὶ εὐθείας εἰς ἓν σημεῖον αὐτῆς, ἕπεται, ὅτι ***εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς περιφερείας ὑπάρχει μία μόνον ἐφαπτομένη***.

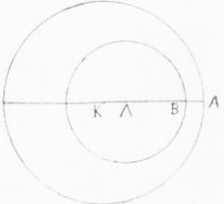
Ὥστε διὰ νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην περιφερείας εἰς ἓν σημεῖον αὐτῆς, ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν κάθετον εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος, ἡ ὁποία ἄγεται εἰς τὸ δοθὲν σημεῖον.

ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΩΝ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΑΣ

73. 1) Δύο περιφέρειαι δύνανται νὰ μὴ ἔχουν κανὲν κοινὸν σημεῖον, ὁπότε ἢ θὰ εὑρίσκεται ἡ μία ὅλη ἐκτὸς τῆς ἄλλης (σχ. 64) ἢ ἡ μία ὅλη ἐντὸς τῆς ἄλλης (σχ. 65).



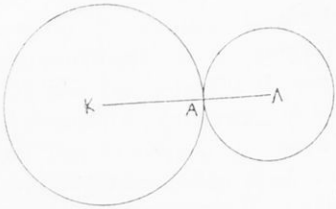
Σχ. 64.



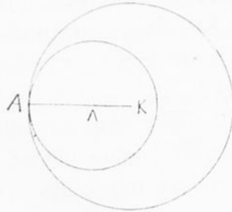
Σχ. 65.

2) Δύο περιφέρειαι δύνανται νὰ ἔχωσι ἓν κοινὸν σημεῖον καὶ

νὰ εἶναι ἡ μία ἐκτὸς τῆς ἄλλης, ὁπότε λέγομεν, ὅτι ἐφάπτονται ἐκτὸς (σχ. 66) ἢ ἐντὸς τῆς ἄλλης, ὁπότε ἐφάπτονται ἐντὸς (σχ. 67) καὶ

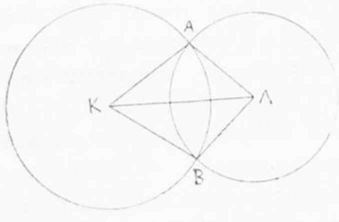


Σχ. 66.



Σχ. 67.

3) Ὅταν ἔχωσι δύο κοινὰ σημεῖα, ὁπότε τέμνονται (σχ. 68) ἡ εὐθεῖα, ἥτις ἑνώνει τὰ κέντρα δύο περιφερειῶν, λέγεται ***διάκεντρος***, ἡ δὲ ἑνοῦσα τὰ κοινὰ σημεῖα δύο τεμνομένων περιφερειῶν λέγεται ***κοινὴ χορδὴ*** αὐτῶν, ὅπως π. χ. ἡ AB (σχ. 68).



Σχ. 68.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

109) Νὰ συγκριθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου περιφερείας ἀπὸ μιᾶς εὐθείας, ἥτις κεῖται ὅλη ἐκτὸς αὐτῆς, πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας.

110) Ὁμοίως νὰ συγκριθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου περιφερείας ἀπὸ μιᾶς εὐθείας, ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν, πρὸς τὴν ἀκτῖνα της.

111) Ὁμοίως νὰ συγκριθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου περιφερείας ἀπὸ μιᾶς ἐφαπτομένης εἰς αὐτὴν πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας.

112) Δύο περιφέρειαι δὲν ἔχουν κανὲν κοινὸν σημεῖον καὶ ἡ μία εὑρίσκεται ἐκτὸς τῆς ἄλλης· ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ νὰ συγκριθῇ ἡ διάκεντρος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν περιφερειῶν τούτων.

113) Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ μία περιφέρεια κεῖται ὅλη ἐντὸς τῆς ἄλλης, νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ διάκεντρος εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων.

114) Ὅταν δύο περιφέρειαι τέμνωνται, ἡ διάκεντρος εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων.

115) Ὅταν δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐκτὸς ἢ ἐντός, νὰ ἐξετασθῇ ἡ θέσις τοῦ σημείου ἐπαφῆς ὡς πρὸς τὴν διάκεντρον.

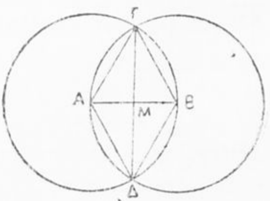
116) Ὅταν δύο περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἐκτὸς νὰ συγκριθῇ ἡ διάκεντρος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων.

117) Ὅταν δύο περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἐντός, νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ διάκεντρος ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων.

118) Ποία εἶναι ἡ σχετικὴ θέσις εὐθείας καὶ περιφερείας ὅταν α) ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς εὐθείας εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος, β) ὅταν ἡ ἀπόστασις αὕτη εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος καὶ γ) ὅταν εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα;

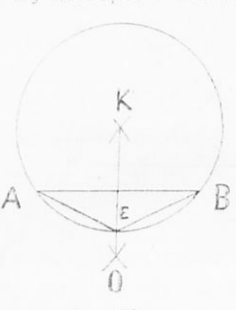
119) Ποία εἶναι ἡ σχετικὴ θέσις δύο περιφερειῶν, ὅταν ἡ διάκεντρος εἶναι α) μεγαλυτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἀκτίνων, β) μικροτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, γ) ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀκτίνων, δ) ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἀκτίνων καὶ ε) μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς των;

74. ***Πρόβλημα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέσον δοθείσης εὐθείας καὶ ἡ εἰς αὐτὸ κάθετος διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου.*** Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ. Μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΒ γράφομεν περιφέρειαν, καὶ μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν ἰδίαν γράφομεν ἄλλην περιφέρειαν· αἱ περιφέρειαι αὗται τέμνονται εἰς τὰ Γ καὶ Δ· ἂν δὲ φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΓΔ, αὕτη εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, τὸ δὲ Μ εἰς τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΑΒ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΒ, ὡς πειθόμεθα διὰ τοῦ διαβήτου καὶ τοῦ γνώμονος.



Σχ. 69.

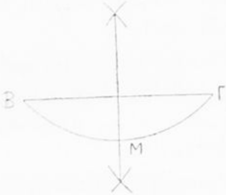
75. Ἔστω ἡ περιφέρεια Κ καὶ μία χορδὴ αὐτῆς ἡ ΑΒ. Ἐὰν τώρα μὲ κέντρα τὰ Α καὶ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΚ γράψωμεν δύο περιφερείας, αὗται θὰ τέμνωνται εἰς τὸ κέντρον Κ καὶ εἰς ἓν ἄλλο σημεῖον Ο, ἡ δὲ ΚΟ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΑΒ. Ἐὰν δὲ ἡ ΚΟ τέμνῃ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Ε αἱ χορδαὶ ΑΕ



Σχ. 70.

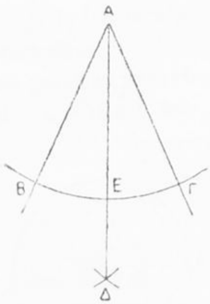
καὶ ΕΒ εἶναι ἴσαι, διότι τὸ Ε κεῖται εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ (35, 2)· ὥστε καὶ τὰ τόξα ΑΕ καὶ ΕΒ εἶναι ἴσα· ἄρα ***ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον χορδῆς κύκλου διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ καὶ διαιρεῖ τὸ τόξον τῆς χορδῆς εἰς δύο ἴσα μέρη.***

76. ***Πρόβλημα. Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τόξον ἢ δοθεῖσα γωνία εἰς δύο ἴσα μέρη διὰ τοῦ διαβήτου καὶ τοῦ κανόνος.***



Σχ. 71.

α) Ἔστω τὸ τόξον ΒΓ (σχ. 71)· ἐὰν φέρωμεν τὴν χορδὴν ΒΓ καὶ κατασκευάσωμεν (74) τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, αὕτη θὰ διαιρῇ τὸ τόξον εἰς δύο ἴσα τόξα (75).



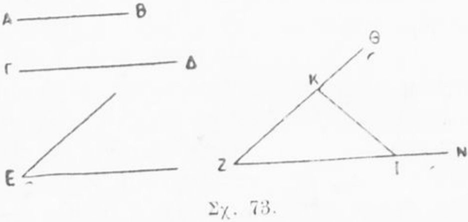
Σχ. 72.

β) Ἔστω ἡ γωνία ΒΑΓ· ἐὰν μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Α καὶ ἀκτῖνα οἱανδήποτε γράψωμεν τόξον ΒΓ, τέμνον τὰς πλευρὰς τῆς δοθείσης γωνίας καὶ διαιρέσωμεν τὸ τόξον ΒΓ εἰς δύο ἴσα μέρη διὰ τῆς εὐθείας ΑΕ, αὕτη θὰ διαιρῇ καὶ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εἰς δύο ἴσας γωνίας, τὰς ΒΑΕ καὶ ΕΑΓ (σχ. 72).

ΣΗΜ. Ἡ εὐθεῖα ἥτις διαιρεῖ μίαν γωνίαν εἰς δύο ἴσας γωνίας, λέγεται διχοτόμος αὐτῆς.

77. ***Πρόβλημα Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ πλευρὰς δύο δοθείσας εὐθείας καὶ γωνίαν τῶν πλευρῶν αὐτῶν μίαν δοθεῖσαν γωνίαν.***

Ἔστωσαν αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ ἡ γωνία Ε (σχ. 73).



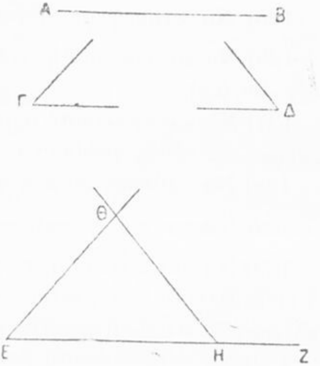
Σχ. 73.

ἐπὶ μιᾶς τυχούσης εὐθείας ΖΗ κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν ΗΖΘ ἴσην μὲ τὴν Ε. Ἔπειτα λαμβάνομεν μὲ τὸν διαβήτην ἐπὶ τῆς

ΖΗ τὸ τμῆμα ΖΙ ἴσον μὲ τὸ ΓΔ καὶ ἐπὶ τῆς ΖΘ τὸ τμῆμα ΖΚ ἴσον μὲ τὴν ΑΒ· ἂν δὲ φέρωμεν τὴν ΚΙ, τὸ τρίγωνον ΙΖΚ εἶναι τὸ ζητούμενον.

78. ***Πρόβλημα. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ πλευρὰν μίαν δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ γωνίας εἰς τὰ ἄκρα τῆς πλευρᾶς αὐτῆς δύο δοθείσας γωνίας.***

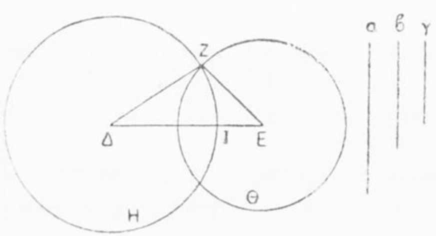
Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ αἱ δύο γωνίαι Γ καὶ Δ ($Γ+Δ<2$ ὀρθαὶ) (σχ. 74). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ΕΖ λαμβάνομεν μὲ τὸν διαβήτην ἓν μέρος ΕΗ ἴσον μὲ τὴν ΑΒ καὶ ἔπειτα κατασκευάζομεν μὲ πλευρὰν τὴν ΕΗ καὶ κορυφὰς τὰ ἄκρα Ε καὶ Η δύο γωνίας ἴσας μὲ τὴν Γ καὶ Δ, τὰς ΗΕΘ καὶ ΕΗΘ· αἱ πλευραὶ ΕΘ καὶ ΗΘ μετὰ τῆς ΕΗ σχηματίζουν τὸ ζητούμενον τρίγωνον.



Σχ. 74.

79. ***Πρόβλημα. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον μὲ πλευρὰς τρεῖς δοθείσας εὐθείας.***

Ἔστωσαν αἱ τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ ἀπὸ τὰς ὁποίας ἡ μεγαλυτέρα α εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος $β+γ$ (παρ. 44, 1).



Σχ. 75.

Λαμβάνομεν ἐπὶ εὐθείας ἓν μέρος ΔΕ ἴσον μὲ τὴν α καὶ μὲ κέντρα τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε καὶ ἀκτῖνας τὰς β καὶ γ γράφομεν δύο περιφερείας, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς δύο σημεῖα καὶ ἂν εἰς ἓν ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτά, π.χ. τὸ Ζ, φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΔΖ καὶ ΕΖ εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον τρίγωνον, τὸ ΔΕΖ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

120) Γράψατε μίαν εὐθεῖαν καὶ διαιρέσατε αὐτὴν εἰς 4 ἴσα μέρη.

121) Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας ὡς διαμέτρου νὰ γραφῇ περιφέρεια.

122) Κατασκευάσατε τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον δοθείσης χορδῆς.

123) Νὰ διαιρεθῇ γωνία ἢ δοθὲν τόξον εἰς 4 ἴσα μέρη.

124) Νὰ διχοτομηθῇ ἑκάστη τῶν γωνιῶν δοθέντος τριγώνου.

125) Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς $1\frac{1}{2}$ ὀρθ.

126) Νὰ κατασκευασθῇ γωνία 30° καὶ 150° (ὄχι διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου).

127) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας νὰ εἶναι 5 δάκτυλοι καὶ 7 δάκτυλοι.

128) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ δύο πλευραὶ νὰ εἶναι 5 δακτ. καὶ 4 δακτ. καὶ ἡ γωνία αὐτῶν $\frac{1}{2}$ τῆς ὀρθῆς.

129) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ νὰ εἶναι 0,03 καὶ αἱ γωνίαι εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς 30° καὶ 60°. Πόσων μοιρῶν θὰ εἶναι ἡ τρίτη γωνία ;

130) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ βάσιν 5 δακτ. καὶ γωνίαν ἀπέναντι τῆς βάσεως 90°.

131) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς πλευραὶ νὰ εἶναι 2 δακτ., 3 δακτ., 4 δακτ.

132) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς πλευραὶ νὰ εἶναι 3 δακτ., 4 δακτ., 5 δακτ. Μετρήσατε τὴν μεγαλυτέραν γωνίαν.

133) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον μὲ πλευρὰν 3,5 δακτ.

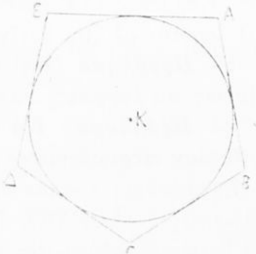
134) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ βάσιν 0,08 μ. καὶ ὕψος 0,05 μ.

135) Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου νὰ εἶναι ΑΒ=0,05 μ., ΑΔ=0,02 μ. καὶ ἡ διαγώνιος ΒΔ=0,06 μ.

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΚΑΙ ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

80. Ἐὰν εἰς τὸ σχῆμα 57 φέρωμεν τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΑΒ σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι χορδαί. Τὸ τρίγωνον αὐτὸ λέγεται ***ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν περιφέρειαν***. Γενικῶς δὲ ἓν πολύγωνον λέγεται ἐγγεγραμμένον εἰς μίαν περιφέ-

ρειαν, ὅταν ὅλαι αἱ κορυφαὶ αὐτοῦ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας. Ἡ δὲ περιφέρεια λέγεται τότε περιγεγραμμένη περὶ τὸ πολύγωνον. Ὅταν αἱ πλευραὶ πολυγώνου εἶναι ἐφαπτόμεναι περιφερείας τὸ πολύγωνον λέγεται **περιγεγραμμένον** περὶ τὴν περιφέρειαν· αὕτη δὲ τότε λέγεται ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ πολύγωνον (σχ. 76).

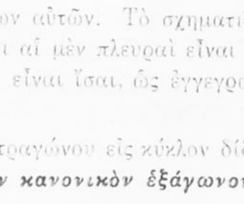


Σχ. 76.

81. ***Κανονικὰ πολύγωνα. Κανονικὸν λέγεται ἓν πολύγωνον, ὅταν ὅλαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι, ὡς καὶ αἱ γωνίαι.*** Π. χ. τὸ τετράγωνον καὶ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι κανονικὰ πολύγωνα. Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν ἓν κανονικὸν πολύγωνον εἰς περιφέρειαν τὴν διαιροῦμεν εἰς ἴσα τόξα, ὅσαι θὰ εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου καὶ ἔπειτα φέρομεν τὰς χορδὰς τῶν τόξων αὐτῶν. Τὸ σχηματιζόμενον πολύγωνον εἶναι κανονικόν, διότι αἱ μὲν πλευραὶ εἶναι ἴσαι, ὡς χορδαὶ ἴσων τόξων, αἱ δὲ γωνίαι εἶναι ἴσαι, ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς ἴσα τόξα.

82. Τὸν τρόπον τῆς ἐγγραφῆς τετραγώνου εἰς κύκλον δίδει ἡ ἄσκησις 99. Ἤδη ***θὰ ἐγγράψωμεν κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς μίαν περιφέρειαν.***

Αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰς ἴσας πλευρὰς τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου, εἶναι 6 καὶ ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Ἑκάστη λοιπὸν ἰσοῦται μὲ τὸ $\frac{1}{6}$ τῶν 4 ὀρθῶν, δηλαδὴ μὲ 60°. Ἂν κατασκευάσωμεν λοιπὸν περὶ τὸ Ο διαδοχικῶς 6 ἴσας γωνίας καὶ ἑκάστην ἴσην πρὸς 60° καὶ κατόπιν τὰ σημεῖα, εἰς ἃ αἱ πλευραὶ τῶν ἐπικέντρων τούτων γωνιῶν τέμνουσι τὴν περιφέρειαν, δηλαδὴ τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ (σχ. 77) ἑνώσωμεν διὰ τῶν χορδῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΕΖ, ΖΑ σχηματίζεται τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ.



Σχ. 77.

Παρατήρησις. Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΟΒ, ἡ γωνία Ο είναι 60°· ἄρα ἑκάστη τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ εἶναι ἴση πρὸς 60°. Ἐπομένως τὸ τρίγωνον ΑΟΒ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἡ πλευρὰ ΑΒ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου Ο.

83. ***Πρόβλημα.*** ***Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς προηγουμένης παρατηρήσεως νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς περιφέρειαν.***

84. ***Πρόβλημα.*** ***Νὰ ἐγγραφῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν.***

Ἐγγράφομεν πρῶτον κανονικὸν ἑξάγωνον, τὸ ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 78), καὶ ἔπειτα ἑνοῦμεν τὰς κορυφὰς αὐτοῦ ἐναλλὰξ διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΓΕ, ΕΑ. Τὸ τρίγωνον ΑΓΕ εἶναι ἰσόπλευρον, διότι ἕκαστον τῶν τόξων ΑΒΓ, ΓΔΕ, ΕΖΑ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίτον τῆς περιφερείας.

Σχ. 78.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

136) Νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον εἰς δοθέντα κύκλον.

137) Νὰ περιγραφῇ τετράγωνον εἰς δοθέντα κύκλον. (Διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ εἰς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως φέρομεν ἐφαπτομένας).

138) Νὰ ἐγγραφῇ καὶ νὰ περιγραφῇ κανονικὸν ὀκτάγωνον ἢ δωδεκάγωνον εἰς δοθέντα κύκλον.

139) Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη τῶν γωνιῶν α) κανονικοῦ ἑξαγώνου, β) κανονικοῦ ὀκταγώνου, γ) κανονικοῦ δωδεκαγώνου;

140) Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ ἐπίκεντρος γωνία, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς μίαν πλευρὰν ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ὀκταγώνου;

141) Ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὸν α' τρόπον τῆς ἐγγραφῆς κανονικοῦ ἑξαγώνου εἰς κύκλον καὶ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, νὰ ἐγγράψητε κανονικὸν πεντάγωνον εἰς δοθέντα κύκλον.

142) Εἰς τὴν ἐπίστρωσιν αὐλῶν, προαυλίων, διαδρόμων κλπ. διὰ πλακῶν χρησιμοποιοῦσι πλάκας, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι σχήματα κανονικῶν πολυγώνων, πρέπει ὅμως τὰ σχήματα νὰ εἶναι τοιαῦτα, ὥστε αἱ πλάκες νὰ μὴ ἀφίνουν μεταξύ των κενὰ καὶ δὲν θὰ ἀφίνουν, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν τῆς γωνίας τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ ὁποίου τὸ σχῆμα ἔχει ἡ πλάξ, εἰσέρχεται ἀκριβῶς εἰς τὸν 360. Κατόπιν τούτων νὰ εὑρεθῇ, ἐὰν αἱ πλάκες

μὲ κανονικὰ σχήματα τριγώνου, τετραγώνου ἢ πενταγώνου ἢ ἑξαγώνου εἶναι κατάλληλοι πρὸς τοῦτο.

143) Θέλει τις νὰ στρώσῃ τὸν διάδρομον τῆς οἰκίας του συνδυάζων πλάκας μὲ σχήματα κανονικῶν ἑξαγώνων καὶ ἰσοπλεύρων τριγώνων. Εἶναι δυνατὸν τοῦτο;

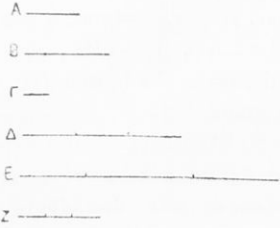
ΠΕΡΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ

85. Ἔστωσαν δύο ὁμοειδῆ ποσά, π. χ. αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἐὰν μετρήσωμεν τὴν ΑΒ διὰ τῆς ΓΔ λαμβανομένης ὡς

Σχ. 79.

μονάδος καὶ εὕρωμεν π. χ. ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι 5 φορὰς μεγαλυτέρα τῆς ΓΔ, τὸν ἀριθμὸν 5 καλοῦμεν **λόγον** τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. Ὥστε ***λόγος ἑνὸς ποσοῦ πρὸς ἓν ἄλλο ποσὸν ὁμοειδὲς λέγεται ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν, ὅταν μετρήσωμεν τὸ πρῶτον, διὰ τοῦ δευτέρου λαμβανομένου ὡς μονάδος.***

86. Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ Α, Β, Γ· ἂς ὑποτεθῇ δέ, ὅτι ἑκάστη τῶν εὐθειῶν τούτων ἐπανελήφθη τρὶς καὶ προέκυψαν αἱ Δ, Ε καὶ Ζ (σχ. 80). Τότε αἱ εὐθεῖαι Δ, Ε καὶ Ζ λέγονται ἀνάλογοι τῶν εὐθειῶν Α, Β, Γ. Γενικῶς δὲ ***δύο ἢ περισσότερα ποσὰ λέγονται ἀνάλογα πρὸς ἄλλα ποσὰ ὁμοειδῆ καὶ ἰσάριθμα, ἂν προκύπτωσιν ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.***



Σχ. 80.

87. Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα καὶ αἱ εὐθεῖαι Α, Β, Γ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς Δ, Ε καὶ Ζ, διότι προκύπτουσιν ἀπὸ τὰς δευτέρας πολλαπλασιαζομένας ἐπὶ $\frac{1}{3}$. Τὰ δύο ποσὰ τὰ ὁποῖα προκύπτουσιν ἐξ ἀλλήλων διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ λέγονται ***ἀντίστοιχα*** ἢ ***ὁμόλογα***. Οὕτω αἱ εὐθεῖαι Α καὶ Δ εἶναι ὁμόλογοι· ἐπίσης αἱ Β καὶ Ε, ὡς καὶ αἱ Γ καὶ Ζ.

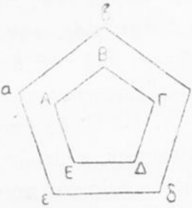
88. ***Ὁμοιότης.*** Ὅλοι γνωρίζομεν, ὅτι ἡ εἰκὼν ἑνὸς ἀντικειμένου πρέπει νὰ ***ὁμοιάζῃ*** μὲ τὸ ἀντικείμενον. Ἂν δὲ θελήσωμεν, νὰ ἐξετάσωμεν, ***εἰς τί συνίσταται ἡ ὁμοιότης***, βλέπομεν, ὅτι κυρίως ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἰδιότητας:

α´) ***Αἱ γραμμαὶ τῆς εἰκόνος εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀντιστοίχων γραμμῶν τοῦ πρωτοτύπου*** καὶ

β´) ***Αἱ γωνίαι τῶν γραμμῶν τῆς εἰκόνος εἶναι ἴσαι μὲ τὰς γωνίας τῶν ἀντιστοίχων γραμμῶν τοῦ πρωτοτύπου.***

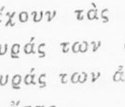
Π. χ. ἂν εἰς τὴν εἰκόνα ἑνὸς ἀνθρώπου, αἱ χεῖρες ἔχουν τὸ ἥμισυ τοῦ φυσικοῦ μεγέθους, τότε πρέπει καὶ οἱ πόδες καὶ τὰ σκέλη του καὶ ὁ κορμός του νὰ ἔχουν μέγεθος τὸ ἥμισυ τοῦ φυσικοῦ. Καὶ ἂν ὁ ἀπεικονιζόμενος ἄνθρωπος, κρατεῖ τὴν χεῖρά του κάθετον πρὸς τὸν κορμὸν καὶ εἰς τὴν εἰκόνα πρέπει τὸ ἴδιον νὰ συμβαίνῃ. Κατὰ ταῦτα. ***Δύο εὐθύγραμμα σχήματα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας κατὰ σειράν, μίαν μὲ μίαν, καὶ τὰς πλευρὰς τῶν ἴσων γωνιῶν κατὰ σειρὰν ἀναλόγους.***

Π.χ. σχ. 81 τὰ δύο πεντάπλευρα ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε εἶναι ὅμοια, ἂν ἔχουν γων. Α=γων.α, γων. Β=γων. β, γων. Γ= γων. γ, γων. Δ=γων. δ γων. Ε=γων. ε καὶ αβ=λ.ΑΒ, βγ=λ.ΒΓ, γδ=λ.ΓΔ, δε=λ.ΔΕ καὶ εδ=λ. ΕΑ (λ σημαίνει ὁποιονδήποτε ἀριθμόν).



Σχ. 81.

89. Δύο εὐθύγραμμα σχήματα εἱμποροῦν ***νὰ ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας, χωρὶς νὰ ἔχουν καὶ τὰς πλευράς των ἀναλόγους καὶ ἀντιστρόφως, νὰ ἔχουν τὰς πλευράς των ἀναλόγους, χωρὶς νὰ ἔχουν καὶ τὰς γωνίας των ἴσας.***



Σχ. 82.

Παράδειγμα τοῦ πρώτου εἶναι ***ἓν τετράγωνον καὶ ἓν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον.*** Ἐπίσης καὶ τὰ δύο πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ ΑΒΓΖΗ (σχ. 82), ὅπου ἡ ΖΗ εἶναι παράλληλος τῆς ΔΕ.

Παράδειγμα τοῦ δευτέρου εἶναι ***ἓν τετράγωνον*** καὶ εἷς ***ρόμβος.***

90. Τὰ τρίγωνα ὅμως ἐξαιροῦνται· 1) διότι ἐὰν κατασκευάσωμεν δύο τρίγωνα μὲ τὰς γωνίας των ἴσας κατὰ μίαν καὶ

συγκρίνωμεν τὰς πλευράς των, θὰ ἴδωμεν, ὅτι εἶναι ἀνάλογοι· ἤτοι τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ὅμοια.

Ὅθεν, ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν εἶναι ὅμοια.

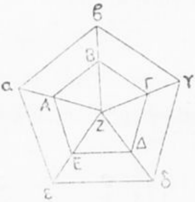
2) Ἐὰν κατασκευάσωμεν δύο τρίγωνα μὲ τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους καὶ συγκρίνωμεν τὰς γωνίας των, θὰ ἴδωμεν ὅτι εἶναι ἴσαι· ἤτοι τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ὅμοια.

Ὅθεν, ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους εἶναι ὅμοια.

3) Ἐὰν κατασκευάσωμεν δύο τρίγωνα μὲ μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς πλευράς, αἱ ὁποῖαι περιέχουν αὐτήν, ἀναλόγους καὶ συγκρίνωμεν ἔπειτα τὰς δύο ἄλλας γωνίας των, θὰ ἴδωμεν ὅτι εἶναι ἴσαι καὶ ἑπομένως κατὰ τὴν ἀνωτέρω 1ην περίπτωσιν εἶναι ὅμοια.

Ὅθεν, ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἀναλόγους εἶναι ὅμοια.

91. ***Κατασκευὴ πολυγώνου ὁμοίου πρὸς ἄλλο δοθέν.*** Ἔστω τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ καὶ ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν ἓν ἄλλο πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν καὶ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ εἶναι π. χ. διπλάσιαι τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν ἐντὸς δοθέντος πολυγώνου ἓν τυχὸν σημεῖον Ζ καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ· τὰς εὐθείας αὐτὰς διπλασιάζομεν, ὁπότε γίνονται Ζα, Ζβ, Ζγ, Ζδ, Ζε· ἐὰν δὲ συνδέσωμεν τὰ ἄκρα αὐτῶν διὰ τῶν εὐθειῶν αβ, βγ, γδ, δε, εα, λαμβάνομεν τὸ πολύγωνον αβγδε ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν, διότι τὰ τρίγωνα μὲ κορυφὴν τὸ Ζ εἶναι ὅμοια (90,3). Ἑπομένως τὰ δύο πολύγωνα ἔχουσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους καὶ τὰς γωνίας των ἴσας· καθ' ὅμοιον τρόπον κατασκευάζομεν καὶ ἄλλο πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι τριπλάσιαι, τετραπλάσιαι, $\frac{1}{2}$ κλπ. τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓΔΕ.



Σχ. 83.

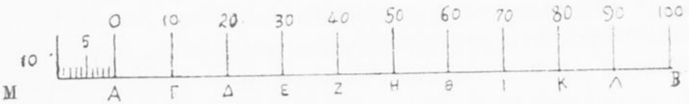
ΠΕΡΙ ΚΛΙΜΑΚΩΝ

92. α') ***Ἀριθμητική.*** Πολλάκις εἶναι ἀνάγκη σχήματα εὐθύγραμμα ἐπίπεδα, εὑρισκόμενα εἰς τὸ ἔδαφος, νὰ μεταφέρωμεν ἢ

νὰ ἀπεικονίζωμεν ἐπὶ τοῦ χάρτου· εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι τὰ ἐπὶ τοῦ χάρτου σχήματα πρέπει νὰ εἶναι ὅμοια μὲ τὰ ἀντίστοιχα σχήματα ἐπὶ τοῦ ἐδάφους. Ἡ ἐπὶ χάρτου δι᾽ ὁμοίων σχημάτων ἀπεικόνισις ἐπιπέδων σχημάτων λέγεται ***σχέδιον*** ἢ ***διάγραμμα***, ὁ δὲ λόγος τῶν πλευρῶν τοῦ διαγράμματος πρὸς τὰς ὁμολόγους πλευρὰς τοῦ πραγματικοῦ ἐπιπέδου σχήματος λέγεται ***ἀριθμητικὴ κλῖμαξ***, ἐκφράζεται δὲ συνήθως διὰ κλασματικῆς μονάδος, ἥτις ἔχει παρονομαστὴν πολλαπλάσιόν τι τοῦ 10, ὡς π. χ. $\frac{1}{2000}$, φανερώνει δὲ ὅτι, ἂν τὸ πραγματικὸν μῆκος εἶναι 2000 μ., τὸ ἀντίστοιχον ἐπὶ τοῦ διαγράμματος θὰ ἔχῃ μῆκος 1 μ. ἂν δὲ ἔχῃ μῆκος 200 μ., τὸ ἐπὶ τοῦ διαγράμματος θὰ ἔχῃ 200 : 2000 ἢ 0,1 μ.

Ἀντιστρόφως δέ, ἂν ἐπὶ τοῦ διαγράμματος τὸ μῆκος γραμμῆς τινος εἶναι 1 μ., τὸ ἀντίστοιχον πραγματικὸν μῆκος αὐτῆς εἶναι 2000 μ., ἂν δὲ εἶναι 0,1 μ., τὸ πραγματικὸν θὰ εἶναι $0,1 \times 2000 = 200$ μ.

β΄) ***Γραφικὴ κλῖμαξ.*** Ἐπειδὴ ἡ χρῆσις τῆς ἀριθμητικῆς κλίμακος ἀπαιτεῖ ὑπολογισμούς, πρὸς ἀποφυγὴν αὐτῶν γίνεται χρῆσις τῆς ***γραφικῆς*** λεγομένης κλίμακος, δι᾽ ἧς εὑρίσκομεν τὰ πραγματικὰ μήκη, τὰ ἀντίστοιχα ἐπὶ τοῦ διαγράμματος, δι᾽ ἁπλοῦ ἀνοίγματος τοῦ διαβήτου. Ἡ κατασκευὴ γραφικῆς κλίμακος, ἀντιστοιχούσης εἰς δεδομένην ἀριθμητικήν, π. χ. $\frac{1}{1000}$, γίνεται ὡς ἑξῆς· λαμβάνομεν ἐπὶ εὐθείας ΑΒ (σχ. 84) τμήματα ΑΓ, ΓΔ,



Σχ. 84.

ΔΕ.... ἴσα ἕκαστον πρὸς 0,01 μ. Ἐπὶ τῆς ἀρχῆς τῆς διαιρέσεως Α σημειοῦμεν τὸν ἀριθμὸν 0 μ., ἐπὶ τοῦ Γ τὸν 10 μ, διότι $0,01 \times 1000 = 10$, ἐπὶ τοῦ Δ τὸν 20, ἐπὶ τοῦ Ε τὸν 30 κ.ο.κ. Κατόπιν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Α λαμβάνομεν μῆκος ΑΜ ἴσον πρὸς 0,01 μ., ὅπερ διαιροῦμεν εἰς 10 ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀντιστοιχεῖ πρὸς $0,001 \times 1000 = 1$ μ., σημειοῦμεν δὲ ἐπὶ τῶν διαιρέσεων τοῦ τμήματος τούτου χωροῦντες πρὸς τὰ ἀριστερὰ κατὰ σειρὰν τοὺς ἀριθμοὺς 1,2,3... 10 μ.

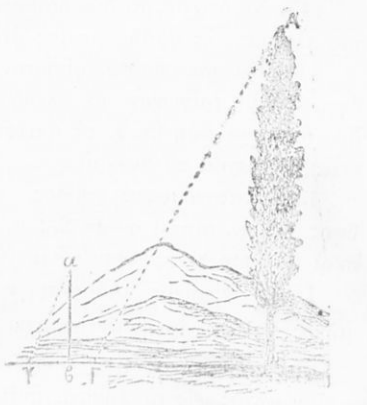
Ἤδη, ἂν μετὰ τὴν κατασκευὴν τῆς γραφικῆς κλίμακος, θελήσωμεν νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐπὶ τοῦ διαγράμματος μῆκος, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς πραγματικὸν μῆκος 63 π.χ. μέτρων, θέτομεν τὸ ἓν σκέλος τοῦ διαβήτου ἐπὶ τῆς διαιρέσεως 60, τὸ δὲ ἕτερον ἐπὶ τῆς τρίτης διαιρέσεως τοῦ τμήματος, τοῦ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ 0. Οὕτω δὲ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο σκελῶν τοῦ διαβήτου δίδει τὸ ζητούμενον μῆκος.

Ἂν ὅμως, ἔχοντες τὸ ἐπὶ τοῦ διαγράμματος μῆκος (ὑπὸ κλίμακα ἐννοεῖται 0,001), θελήσωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἀντίστοιχον πραγματικὸν μῆκος, θέτομεν τὸ ἓν σκέλος τοῦ διαβήτου ἐπὶ διαιρέσεως τῆς κλίμακος τοιαύτης, ὥστε τὸ ἕτερον σκέλος νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ 0 τμήματος· ἂν δὲ π. χ. τὸ ἓν σκέλος πέσῃ ἐπὶ τῆς διαιρέσεως 80, τὸ δὲ ἄλλο ἐπὶ τῆς τετάρτης διαιρέσεως, τοῦ πρὸς τ' ἀριστερὰ τοῦ 0 τμήματος, τὸ πραγματικὸν μῆκος θὰ εἶναι 84 μέτρων.

93. ***Κατασκευὴ διαγραμμάτων***. α') ***Τριγώνου***. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν διάγραμμα τριγωνικῆς ἐπιπέδου ἐκτάσεως ὑπὸ δοθεῖσαν κλίμακα, π.χ. 1 : 100. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν τμήματα ἴσα ἀντιστοίχως πρὸς τὸ $\frac{1}{100}$ τῶν πλευρῶν τῆς τριγωνικῆς ἐκτάσεως καὶ μὲ πλευρὰς τὰ τμήματα ταῦτα κατασκευάζομεν τρίγωνον αβγ, ὅπερ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον.

β') ***Οἱουδήποτε πολυγωνικοῦ εὐθυγράμμου σχήματος***. Διαιροῦμεν τοῦτο κατὰ πρῶτον διὰ διαγωνίων εἰς τρίγωνα καί, ἀφοῦ μετρήσωμεν τὰς πλευρὰς καὶ τὰς διαγωνίους, κατασκευάζομεν ὑπὸ δοθεῖσαν κλίμακα κατὰ σειρὰν συνεχόμενα τρίγωνα, ὅμοια πρὸς τὰ ληφθέντα διὰ τῆς διαιρέσεως.

94. ***Ἐφαρμογὴ τῶν ὁμοίων τριγώνων. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος δένδρου ἐκ τῆς σκιᾶς αὐτοῦ***. Ἔστω τὸ δένδρον ΑΒ (σχ. 85)· ἐπὶ τοῦ



Σχ. 85.

ἰδίου ἐδάφους (τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν ὁριζόντιον) ἐμπηγνύομεν κατακορύφως μίαν ῥάβδον αβ· τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ εἶναι ὀρθογώνια, ἔχοντα ὀρθὰς γωνίας τὰς Β καὶ β. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ γων. Γ=γων. γ (διότι αἱ ἡλιακαὶ ἀκτῖνες ΑΓ καὶ αγ σχηματίζουσιν ἴσας γωνίας μετὰ τοῦ ἐδάφους), ἕπεται ὅτι ταῦτα εἶναι ὅμοια· ἂν λοιπὸν μετρήσωμεν τὰς σκιὰς ΒΓ καὶ βγ καὶ εὕρωμεν ὅτι ἡ σκιὰ ΒΓ εἶναι π. χ. πενταπλασία τῆς σκιᾶς βγ, ἕπεται ὅτι καὶ τὸ ὕψος τοῦ δένδρου ΑΒ εἶναι πενταπλάσιον τοῦ ὕψους τῆς ῥάβδου αβ· ἂν λοιπὸν ἡ αβ εἶναι 1,5 μ., ἡ ΑΒ θὰ εἶναι 1,5×5=7,5 μ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

144) Δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ = ΒΓ) καὶ ΔΕΖ (ΔΕ=ΕΖ) ἔχουσι γων. Α = γων. Δ. Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ὅμοια.

145) Τριγώνου τινὸς ΑΒΓ αἱ πλευραὶ εἶναι ΑΒ = 7 μ. ΒΓ=9 μ. καὶ ΓΑ=14 μ., τὸ δὲ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ πρῶτον καὶ ἡ πλευρὰ ΔΕ, ἡ ὁμόλογος πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ εἶναι 24,5 μ. Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΔΕΖ.

146) Τριγώνου ΑΒΓ νὰ προεκταθῶσιν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ΑΒ καὶ ΑΓ πρὸς τὸ μέρος τῆς ΒΓ καὶ νὰ ληφθῇ τὸ ΑΕ τριπλάσιον τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΑΖ τριπλάσιον τοῦ ΑΓ. Νὰ εὑρεθῇ κατόπιν ὁ λόγος τῆς ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ.

147) Νὰ δειχθῇ, ὅτι δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰς πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια.

148) Κατασκευάσατε τρίγωνον μὲ πλευρὰς 2, 3, 4 δακτ. καὶ ἔπειτα ἄλλο τρίγωνον μὲ πλευρὰς 4, 6, 8 δακτ. φέρατε ἔπειτα δύο ὁμόλογα ὕψη (π. χ. τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰς πλευρὰς 3 μ. 6 μ.), τὰ ὁποῖα νὰ συγκρίνητε.

149) Κατακόρυφος ῥάβδος, στηριζομένη εἰς τὸ ἔδαφος μὲ ὕψος 1,5 μ., ῥίπτει σκιὰν 2,2 μ. Κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν ἡ σκιὰ δένδρου τινὸς εἶναι 5,5 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ δένδρου.

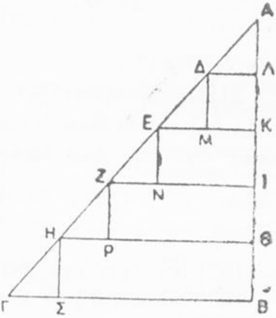
150) Ἓν μῆκος 8000 μέτρων ἐπάνω εἰς τὸ ἔδαφος, μὲ ποῖον μῆκος εἰς τὸν χάρτην ἀντιστοιχεῖ, ἂν ἡ κλῖμαξ μας εἶναι $\frac{1}{30000}$;

151) Ἓν μῆκος 40 χιλιοστῶν τοῦ μέτρου εἰς τὸν χάρτην μὲ ποῖον μῆκος εἰς τὸ ἔδαφος ἀντιστοιχεῖ, ἂν ἡ κλῖμαξ μας εἶναι $\frac{1}{5000}$;

ΑΛΛΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΔΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΒΗΤΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΚΑΝΟΝΟΣ

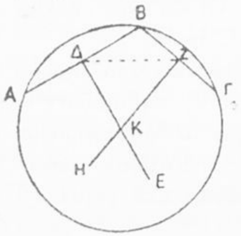
95. ***Πρόβλημα. Νὰ διαιρεθῇ δοθεῖσα εὐθεῖα εἰς ἴσα μέρη, ὅσα θέλομεν.***

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ, τὴν ὁποίαν θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν εἰς 5 ἴσα μέρη. Ἀπὸ τὸ ἓν ἄκρον αὐτῆς Α φέρομεν μίαν ἄλλην εὐθεῖαν ΑΓ· ἐπ᾿ αὐτῆς δὲ λαμβάνομεν διὰ τοῦ διαβήτου κατὰ σειρὰν 5 τμήματα ἴσα, τὰ ΑΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΓ (σχ. 86)· κατόπιν φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΒ καὶ πρὸς αὐτὴν φέρομεν παραλλήλους ἐκ τῶν σημείων Δ, Ε, Ζ, Η, αἱ ὁποῖαι διαιροῦν τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς 5 μέρη ΑΛ, ΛΚ, ΚΙ, ΙΘ, ΘΒ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα, ὡς φαίνεται εὐκόλως διὰ τοῦ διαβήτου.



Σχ. 86.

96. ***Πρόβλημα. Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχηται διὰ 3 δοθέντων σημείων, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας.***

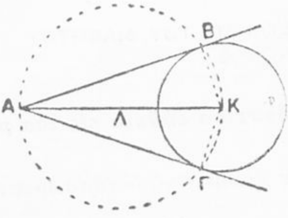


Σχ. 87.

Ἔστωσαν Α, Β, Γ τὰ τρία σημεῖα. Ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΒΓ καὶ ἔπειτα τὴν ΔΕ κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ καὶ τὴν ΖΗ κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ, παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ κάθετοι αὐταὶ τέμνονται εἰς τὸ Κ (σχ. 87) εἶναι δὲ ΚΑ=ΚΒ=ΚΓ (35,2). Ἂν λοιπὸν μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΑ γράψωμεν περιφέρειαν, αὕτη θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν σημείων Β καὶ Γ.

97. ***Πρόβλημα. Ἀπὸ δοθέντος σημείου ἐκτὸς περιφερείας νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη εἰς αὐτήν.***

Ἔστω Κ ἡ περιφέρεια καὶ Λ τὸ σημεῖον (σχ. 88). ἂν φέρωμεν τὴν ΛΚ καὶ μὲ κέντρον τὸ μέσον αὐτῆς Λ καὶ μὲ ἀκτῖνα



Σχ. 88.

τὴν ΛΑ γράψωμεν περιφέρειαν, αὕτη θὰ τέμνῃ τὴν δοθεῖσαν εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ· τότε αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι ἐφαπτόμεναι τῆς δοθείσης περιφερείας, διότι εἶναι κάθετοι εἰς τὰ ἄκρα τῶν ἀκτίνων ΚΒ καὶ ΚΓ· ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΒΚ καὶ ΑΓΚ εἶναι ὀρθαί, ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς ἡμιπεριφέρειαν.

ΣΗΜ. Αἱ ἐφαπτόμεναι ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι ἴσαι, ὡς πειθόμεθα διὰ τοῦ διαβήτου. Ὥστε ***ἀπὸ ἓν σημεῖον ἐκτὸς περιφερείας ἄγονται δύο ἐφαπτόμεναι εἰς αὐτήν, αἵτινες εἶναι ἴσαι.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

152) Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον δοθείσης περιφερείας (§ 90).

153) Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον περιφερείας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει τὸ δοθὲν τόξον.

154) Διὰ νὰ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ εὐθεῖαν εἰς ἓν σημεῖον αὐτῆς τῇ βοηθείᾳ τοῦ διαβήτου καὶ τοῦ κανόνος, λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν τοῦ δοθέντος σημείου καὶ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας δύο τμήματα ἴσα καὶ κατόπιν ἐργαζόμεθα κατὰ τὸ πρόβλημα 85. Κατόπιν τούτων, δοθείσης εὐθείας ΑΒ καὶ ἑνὸς σημείου αὐτῆς Γ, νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Γ.

155) Διὰ νὰ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ εὐθεῖαν ἀπὸ σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς, διὰ τοῦ διαβήτου καὶ τοῦ κανόνος, καθιστῶμεν ἓν μέρος τῆς εὐθείας χορδὴν τόξου μὲ κέντρον τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ ἔπειτα ἐργαζόμεθα κατὰ τὸ πρόβλημα 85. Κατόπιν τούτων φέρατε ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ κάθετον ἀπὸ σημείου Γ ἐκτὸς αὐτῆς.

156) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἔχον διαγώνιον δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

157) Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη δοθείσης περιφερείας εἰς ὡρισμένον σημεῖον αὐτῆς καὶ νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν ἀκτῖνα.

158) Κατασκευάσατε ἐκ χαρτονίου ὀρθογώνιον, ῥόμβον, τετράγωνον, κανονικὸν ἑξάγωνον.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

98. Ὡς μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν λαμβάνεται τὸ τετράγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν ἑνὸς μέτρου, δηλ. τὸ τετραγωνικὸν μέτρον.

Ὑποδιαιρέσεις τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου εἶναι ἡ ***τετραγωνικὴ παλάμη***, ἤτοι τετράγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν μίαν παλάμην καὶ ὁ ***τετραγωνικὸς δάκτυλος***, ἤτοι τετράγωνον ἔχον πλευρὰν ἕνα δάκτυλον.

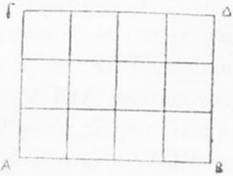
1 τ. μ.=100 τ. π.=10000 τ. δ.

1 τ. π.= 100 τ. δ.

Πολλαπλάσια αὐτοῦ εἶναι τὸ τετραγωνικὸν δεκάμετρον, (100 τ. μ.), τὸ τετραγωνικὸν ἑκατόμετρον (10000 τ. μ.) καὶ τὸ τετραγωνικὸν χιλιόμετρον (1000000 τ. μ.), ἤτοι τετράγωνα ἔχοντα πλευρὰν 10 μ., 100 μ., 1000 μ.

Τὴν ἔκτασιν τῶν οἰκοπέδων μετροῦσι διὰ τοῦ τετραγωνικοῦ τεκτονικοῦ πήχεως (1 τ.τ.π.= $\frac{9}{16}$ τ. μ.) τὴν δὲ τῶν ἀγρῶν διὰ τοῦ στρέμματος (1 στρέμμα=1000 τ. μ).

99. ***Μέτρησις τοῦ ὀρθογωνίου***. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ μετρήσωμεν τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ (σχ. 89), εἰς τὸ ὁποῖον τὸ μῆκος τῆς βάσεως ΑΒ=4 μ. καὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους ΑΓ=3 μ. Ἂν διαιρέσωμεν τὴν βάσιν ΑΒ εἰς 4 ἴσα μέρη, ἕκαστον μέρος θὰ ἔχῃ μῆκος ἑνὸς μέτρου, ἂν δὲ καὶ τὸ ὕψος εἰς τρία ἴσα μέρη, ἕκαστον μέρος θὰ ἔχῃ πάλιν μῆκος 1 μέτρου. Ἔπειτα ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως ΑΒ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΓ καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως τῆς ΑΓ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΒ. Τότε τὸ ὀρθογώνιον διαιρεῖται εἰς 4×3=12 μέρη, τὰ ὁποῖα ὅλα εἶναι τετράγωνα ἴσα μὲ πλευρὰν 1 μέτρου. Ἐπομένως τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ περιέχει τὴν μονάδα, δηλ. τὸ τετραγωνικὸν μέτρον 12 φοράς. Ἔχει δηλ. ἐμβαδὸν 12 τετραγωνικὰ μέτρα· ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 12 εἶναι γινόμενον τῶν μηκῶν τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου.



Σχ. 89.

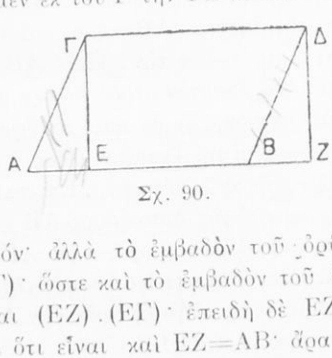
Ὅθεν, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι γινόμενον τοῦ μήκους τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους αὐτοῦ.

ΣΗΜ. Ὁ ἀνωτέρω κανὼν ἀληθεύει καὶ ὅταν οἱ ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι μετροῦσι τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος ὀρθογωνίου εἶναι οἱοιδήποτε. Οὕτω, ἐὰν ἡ βάσις ὀρθογωνίου εἶναι $\frac{5}{4}$ τοῦ μέτρου καὶ τὸ ὕψος $\frac{3}{5}$ αὐτοῦ, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τούτου εἶναι $\frac{5}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{15}{20}$ τοῦ τ.μ.

100. ***Μέτρησις τοῦ τετραγώνου.*** Ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον εἶναι ὀρθογώνιον μὲ ὅλας τὰς πλευράς του ἴσας, ἕπεται ὅτι ***τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της.*** Π. χ. ἓν τετράγωνον ἔχει πλευρὰν 6 μ.· τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι $6 \times 6 = 6^2 = 36$ τ. μ. Δι' αὐτὸν δὲ τὸν λόγον εἰς τὴν ἀριθμητικὴν τὴν δευτέραν δύναμιν ἀριθμοῦ τινος τὴν λέγομεν καὶ τετράγωνον.

ΣΗΜ. Ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραγώνου εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς του, ἐὰν εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ ἐμβαδοῦ. Οὕτω ἡ πλευρὰ τετραγώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 81 τ. μ., εἶναι $\sqrt{81} = 9$ μ.

101. ***Μέτρησις τοῦ παραλληλογράμμου.*** Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ· ἐὰν φέρωμεν ἐκ τοῦ Γ τὴν ΓΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΓΑΕ, ἂν δὲ ἀποκόψωμεν αὐτὸ καὶ τὸ θέσωμεν εἰς τὴν θέσιν ΒΔΖ, τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ μετασχηματίζεται εἰς τὸ ὀρθογώνιον ΕΓΔΖ, ὅπερ εἶναι φανερόν, ὅτι ἔχει τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν· ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τούτου εἶναι (ΕΖ).(ΕΓ)· ὥστε καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δοθέντος παραλληλογράμμου εἶναι (ΕΖ).(ΕΓ)· ἐπειδὴ δὲ ΕΖ=ΓΔ καὶ ἡ ΓΔ=ΑΒ, ἕπεται ὅτι εἶναι καὶ ΕΖ=ΑΒ· ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι (ΑΒ).(ΕΓ).



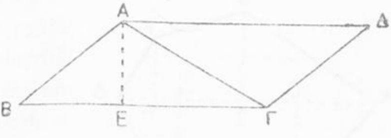
Σχ. 90.

Ὅθεν ***τὸ ἐμβαδὸν παντὸς παραλληλογράμμου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.***

ΣΗΜ. Τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ τὸ ὀρθογώνιο

ΔΕΖΓ, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν, ἀλλὰ τὰ ὁποῖα δὲν ἐφαρμόζουσιν ἀκέραια, λέγονται ἰσοδύναμα.

102. ***Μέτρησις τριγώνου.*** Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 91). Ἐὰν ἐκ τοῦ Α φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ ἐκ τοῦ Γ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, αἱ δύο αὗται παράλληλοι τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Δ καὶ σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ἡ ΑΓ εἶναι διαγώνιος. Αὕτη δὲ διαιρεῖ, ὡς γνωρίζομεν, τὸ παραλληλόγραμμον εἰς δύο ἴσα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ. Ὅθεν τὸ σχηματισθὲν παραλληλόγραμμον εἶναι διπλάσιον τοῦ δοθέντος τριγώνου καὶ ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ παραλληλογράμμου, ἤτοι ἐμβαδὸν ΑΒΓ $= \frac{(ΒΓ).(ΑΕ)}{2}$, ἀλλ' ἡ ΒΓ εἶναι βάσις τοῦ δοθέντος τριγώνου καὶ ΑΕ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

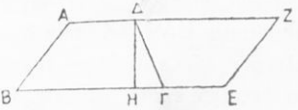


Σχ. 91.

Ὅθεν ***τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.***

Οὕτω ἐὰν ἡ βάσις τριγώνου εἶναι 5 μ. καὶ τὸ ὕψος 3 μ. τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι $\frac{5 \times 3}{2} = 7,5$ τ. μ.

103. ***Μέτρησις τοῦ τραπεζίου.*** Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ· ἂν λάβωμεν ἓν ἄλλο τραπέζιον ἴσον μὲ αὐτὸ καὶ τὸ ἑνώσωμεν, ὡς δεικνύει τὸ (σχ. 92), τὸ σχῆμα ΑΒΕΖ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἔχει ἐμβαδὸν (ΒΕ) $\times$ (ΔΗ) δηλ. (ΒΓ+ΓΕ)$\times$(ΔΗ) ἢ (ΓΒ+ +ΑΔ) (ΔΗ)· ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εἶναι $\frac{1}{2}$ (ΒΓ+ΑΔ) $\times$(ΔΗ).

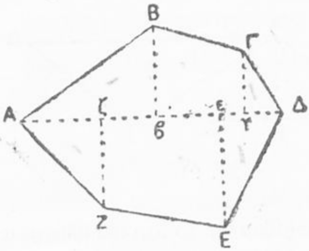


Σχ. 92.

Ὅθεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εἶναι ***γινόμενον τοῦ ὕψους του ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο βάσεών του.***

104. ***Ἐμβαδὸν τοῦ τυχόντος πολυγώνου.*** Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τυχόντος πολυγώνου εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς :

1ον) Ἀναλύομεν τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα διὰ διαγωνίων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς ἢ ἐκ διαφόρων, ἢ δι' εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται εἰς τὰς κορυφάς του ἀπὸ ἓν σημεῖον ἐντὸς αὐτοῦ. Ἔπειτα εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τριγώνου καὶ προσθέτομεν.



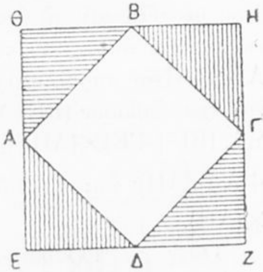
Σχ. 93.

2ον) Ἄλλος τρόπος εἶναι ὁ ἑξῆς: Φέρομεν τὴν μεγαλυτέραν διαγώνιον, τὴν ΑΔ (σχ. 93) καὶ ἀπὸ τὰς ἄλλας κορυφὰς φέρομεν καθέτους ἐπ᾽ αὐτοῦ· οὕτω διαιρεῖται τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα καὶ τραπέζια· ἑκάστου δὲ τῶν σχημάτων τούτων εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν καὶ ἔπειτα προσθέτομεν.

105. ***Πρότασις τοῦ Πυθαγόρου.*** Ὁ ἀρχαῖος Ἕλλην μαθηματικὸς Πυθαγόρας πρῶτος εὗρηκε τὴν σχέσιν ἡ ὁποία ὑπάρχει πάντοτε μεταξὺ τῶν τριῶν τετραγώνων, τὰ ὁποῖα κατασκευάζονται μὲ πλευρὰς τὰς τρεῖς πλευρὰς ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἑξῆς.

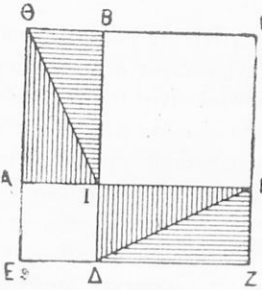
Τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν. Δεικνύεται δὲ ὡς ἑξῆς:

Κόπτομεν ἀπὸ χαρτόνιον 4 ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα καὶ κατασκευάζομεν καὶ ἓν τετράγωνον ΕΖΗΘ (σχ. 94) μὲ πλευρὰν τὸ ἄθροισμα ΕΔ+ΔΖ τῶν δύο καθέτων πλευρῶν τῶν τριγώνων τούτων. Ἔπειτα θέτομεν ἐντὸς τοῦ τετραγώνου ΕΖΗΘ τὰ 4 τρίγωνα μὲ τὸν αὐτὸν τρόπον, τὸν ὁποῖον δεικνύει τὸ σχῆμα. Τότε μένει ἐντὸς τοῦ τετραγώνου ἓν μέρος ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον δὲν σκεπάζεται ἀπὸ τὰ τρίγωνα· τὸ μέρος αὐτὸ εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ΑΔ (ἢ ΔΓ ἢ ΓΒ ἢ ΒΑ), διότι εἶναι τετράγωνον, ἀφοῦ αἱ πλευραί του εἶναι ἴσαι καὶ αἱ γωνίαι του εἶναι ὀρθαὶ (π. χ. ἡ γωνία του ΑΔΓ εἶναι ὀρθή, ἐπειδὴ αἱ ἄλλαι δύο γωνίαι εἰς τὸ Δ, αἱ ΑΔΕ καὶ ΓΔΖ ἔχουν ἄθροισμα μίαν ὀρθήν).



Σχ. 94.

Τώρα λαμβάνομεν πάλιν τὰ τέσσαρα τρίγωνα καὶ τὰ τοποθετοῦμεν ἐντὸς τοῦ ἰδίου τετραγώνου μὲ ἄλλον τρόπον, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 95. Μένουν τώρα δύο μέρη τοῦ τετραγώνου ΕΖΗΘ χωρὶς νὰ σκεπάζωνται καὶ εἶναι τὰ δύο τετράγωνα τῶν καθέτων πλευρῶν ἑνὸς ἀπὸ τὰ 4 ἴσα τρίγωνα, καθὼς φαίνεται ἀμέσως εἰς τὸ σχῆμα.



Σχ. 95.

Λοιπὸν ἀπὸ ***τὸ ἴδιον*** τετράγωνον ΕΖΗΘ ἀφαιρέσαμεν καὶ μὲ τὸν α' τρόπον καὶ μὲ τὸν β' ***τὸ ἴδιον*** ἐμβαδὸν (τὸ ἐμβαδὸν τῶν 4 ἴσων τριγώνων ὁμοῦ)· πρέπει συνεπῶς τὰ μένοντα ἐμβαδὰ καὶ τὴν μίαν φορὰν καὶ τὴν ἄλλην νὰ εἶναι ἴσα, δηλ. τὸ τετράγωνον ΑΔΒΓ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὰ δύο τετράγωνα τῆς ΑΕ καὶ τῆς ΖΔ ὁμοῦ.

Ὥστε ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (Α γωνία ὀρθὴ) ἔχομεν $(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2=(ΒΓ)^2$. Ἐὰν δὲ εἶναι $(ΑΒ)=4$ μ. καὶ $(ΑΓ)=3$ μ. ἡ σχέσις αὕτη γίνεται $4^2+3^2=(ΒΓ)^2$ ἢ $25=(ΒΓ)^2$. ἑπομένως (100. σημ.) $(ΒΓ)=5$ μ.

Σχ. 96.

Ἐὰν τώρα ἀπὸ τὰ δύο μέρη τῆς ἰσότητος $(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2=(ΒΓ)^2$ ἀφαιρέσωμεν τὸ $(ΑΓ)^2$, εὑρίσκομεν $(ΑΒ)^2=(ΒΓ)^2-(ΑΓ)^2$, ἥτις μᾶς λέγει, ὅτι ***τὸ τετράγωνον μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου εὑρίσκεται, ἂν ἀπὸ τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ἀφαιρέσωμεν τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς***· ἂν δὲ εἶναι $(ΒΓ)=13$ μ. καὶ $(ΑΓ)=12$ μ. ἔχομεν $(ΑΒ)^2=13^2-12^2$ ἢ $(ΑΒ)^2=25$ καὶ $(ΑΒ)=5$.

106. ***Τύποι ἐμβαδῶν***. Ἂν ἡ βάσις ὀρθογωνίου ἢ παραλληλογράμμου παρασταθῇ διὰ τοῦ β, τὸ ὕψος αὐτοῦ διὰ τοῦ υ καὶ τὸ ἐμβαδὸν διὰ τοῦ Ε ἔχομεν $Ε=β.υ$.

Διὰ τὸ τετράγωνον πλευρᾶς α ἔχομεν $Ε=α^2$.

Διὰ τὸ τρίγωνον, οὗ ἡ βάσις εἶναι β καὶ τὸ ὕψος υ, ἔχομεν $Ε=\frac{β.υ}{2}$.

Διὰ τὸ τραπέζιον, οὗ τὸ ὕψος εἶναι υ καὶ αἱ δύο βάσεις Β καὶ β, ἔχομεν $E = \frac{(B+\beta).\upsilon}{2}$.

ΛΟΓΟΣ ΤΩΝ ΕΜΒΑΔΩΝ ΔΥΟ ΟΜΟΙΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

107. Ἂς κατασκευάσωμεν ἕνα τρίγωνον αβγ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι 3, 5, 7 δακτ. καὶ ἓν ἄλλο ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι 6, 10, 14 δακτ.· τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΓ καὶ αβγ εἶναι ὅμοια, ὁ δὲ λόγος τῶν ὁμολόγων πλευρῶν (λόγος ὁμοιότητος) αὐτῶν εἶναι 2. Ἂν ἤδη εὕρωμεν τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν καὶ λάβωμεν τὸν λόγον τῶν ἐμβαδῶν, θὰ ἴδωμεν, ὅτι τὸ ΑΒΓ εἶναι τετραπλάσιον τοῦ αβγ, ἤτοι ὁ λόγος αὐτῶν εἶναι $2.2=2^2$.

Ὅθεν συμπεραίνομεν, ὅτι ***ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων τριγώνων ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου δύο ὁμολόγων πλευρῶν αὐτῶν***.

108. Τὰ ὅμοια πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε (σχ. 83) παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι διῃρημένα εἰς τρίγωνα ἰσάριθμα καὶ ὅμοια ἓν πρὸς ἕν· ἕκαστον δὲ τῶν τριγώνων τοῦ αβγδε εἶναι 4πλάσιον τοῦ ὁμοίου του τριγώνου τοῦ ΑΒΓΔΕ· ἑπομένως καὶ τὸ ὅλον πολύγωνον αβγδε εἶναι 4πλάσιον τοῦ ΑΒΓΔΕ, ἐνῷ ὁ λόγος δύο ὁμολόγων πλευρῶν αὐτῶν εἶναι 2.

Ὅθεν ***ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου δύο ὁμολόγων πλευρῶν αὐτῶν***.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

159) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου οὗ ἡ βάσις εἶναι 15 μ. καὶ τὸ ὕψος 7,5 μ.

160) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου, οὗ ἡ βάσις εἶναι 5,2 μέτρα καὶ τὸ ὕψος 8 παλάμαι.

161) Οἰκοπέδου σχήματος ὀρθογωνίου αἱ πλευραὶ εἶναι 7 καὶ 16 τεκτ. πήχεις. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

162) Τάπης σχήματος ὀρθογωνίου πλάτους 2,8 μ. καὶ μήκους 3,5 μ. ἠγοράσθη πρὸς 80 δραχ. τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Ἀντὶ πόσων δραχμῶν ἐπληρώθη;

163) Τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου σχήματος ὀρθογωνίου πρόκειται νὰ στρωθῇ διὰ σανίδων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν μῆκος 2,5 μ

καὶ πλάτος 0,8 μ. ἔχει δὲ τὸ δωμάτιον μῆκος 5 μ. καὶ πλάτος 3 μ. Πόσαι σανίδες θὰ χρειασθοῦν ;

164) Ἕνα οἰκόπεδον σχήματος ὀρθογωνίου ἔχει μῆκος 18,3 τεκτ. πήχεις καὶ πλάτος 12· ἐπωλήθη δὲ ἀντὶ 25000 δρ. Πόσον ἐπληρώθη ὁ τετρ. τεκτονικὸς πῆχυς ;

165) Ἡ περίμετρος ἑνὸς ἀγροῦ σχήματος ὀρθογωνίου εἶναι 260 μ., τὸ δὲ μῆκός του 60 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

166) Ἕνας κῆπος σχήματος ὀρθογωνίου ἔχει μῆκος 30 μ. καὶ ἐμβαδὸν 1200 τ. μ. Ποῖον εἶναι τὸ πλάτος του ;

167) Ἕνα κτῆμα ἔχει ἐμβαδὸν 16260 τ.μ. καὶ πλάτος 135,5 μ. ποῖον εἶναι τὸ μῆκός του ;

168) Εἷς τοῖχος μὲ πλάτος 12 μ. καὶ ὕψος 8 μ. πρόκειται νὰ χρωματισθῇ· τὸ χρωμάτισμα ἑνὸς τετραγ. μέτρου στοιχίζει 7,50 δρ. Πόσον θὰ στοιχίσῃ τὸ χρωμάτισμα ὅλου τοῦ τοίχου, ἂν ἐξαιρεθῇ μία θύρα του μὲ πλάτος 1,2 μ. καὶ ὕψος 3 μ. ;

169) Τετράγωνον ἔχει πλευρὰν 5,25 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

170) Τετράγωνον ἔχει περίμετρον 45 μ. Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ;

171) Τετραγώνου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 225 τ. μ. Ποία εἶναι ἡ πλευρά του ;

172) Πρόκειται νὰ στρωθῇ μία αὐλὴ μὲ πλάκας τετραγωνικὰς αἱ ὁποῖαι ἔχουν πλευρὰν 0,25 μ. Ἡ αὐλὴ ἔχει μῆκος 18 μέτρα καὶ πλάτος 7,2. Πόσαι πλάκες θὰ χρειασθοῦν ;

173) Ἓν χωράφιον σχήματος τετραγώνου μὲ πλευρὰν 18 μέτρων ἀνταλλάσσεται μὲ ἓν ἄλλο μὲ τὴν ἰδίαν ποιότητα τοῦ χώματος, ἀλλὰ μὲ σχῆμα ὀρθογώνιον· τὸ δὲ ὀρθογώνιον αὐτὸ ἔχει περίμετρον ἴσην μὲ τὴν περίμετρον τοῦ πρώτου καὶ πλάτος 10 μέτρα. Ἔγινε δικαίως ἡ ἀνταλλαγή ; ἂν ὄχι, ποῖος ἀπὸ τοὺς δύο ἀνθρώπους, οἱ ὁποῖοι τὰ ἀντήλλαξαν, ἠδικήθη καὶ πόσον ;

174) Εἷς κῆπος σχήματος ὀρθογωνίου μὲ μῆκος 25 μέτρα καὶ πλάτος 14,8 μ. διαιρεῖται εἰς 4 ἴσα μέρη μὲ δύο δρόμους οἱ ὁποῖοι διασταυροῦνται εἰς τὸ μέσον αὐτοῦ καὶ ἔχουν πλάτος 1 μέτρου. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα περιέχει τὸ καθὲν ἀπὸ τὰ 4 ἴσα μέρη τοῦ κήπου ;

175) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν 8,24 μ. καὶ ὕψος 4.05 μέτρα.

176) Παραλληλογράμμου τινὸς ἡ βάσις εἶναι 13,2 μ., τὸ δὲ ἐμβαδὸν 211,20 τ. μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος του·

177) Παραλληλογράμμου τινὸς ἡ περίμετρος εἶναι 22 μέτρα καὶ ἡ μία πλευρά του 4 μ., ἡ δὲ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν μεγαλυτέρων πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι 3 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου.

178) Δύο ἴσα παραλληλόγραμμα κεῖνται ἑκατέρωθεν μιᾶς κοινῆς πλευρᾶς αὐτῶν μήκους 4 μέτρων. Ἡ ἀπόστασις δὲ αὐτῆς ἀπὸ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς εἶναι 7,6 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο παραλληλογράμμων.

179) Ὅλα τὰ παραλληλόγραμμα, ὅσα ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη, εἶναι ἰσοδύναμα.

180) Παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ἡ βάσις ΓΔ εἶναι 14,06 μέτρα, ἡ δὲ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς Α ἀπὸ τῆς βάσεως εἶναι 5,8 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΓΔ.

181) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι 9,4 μ., ἡ δὲ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς εἶναι 4 μ.

182) Ἓν λιβάδιον τριγωνικοῦ σχήματος ἔχει μίαν πλευρὰν ἴσην μὲ 185 μέτρα· ἡ δὲ κάθετος πρὸς αὐτὴν ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς εἶναι 78 μ. Πόσα στρέμματα βασιλικὰ ἔχει τὸ λιβάδιον αὐτό;

183) Ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔχει βάσιν 8 μέτρων καὶ ὕψος 3 μέτρων. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τῶν τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ ὕψους.

184) Αἱ διαγώνιοι ῥόμβου εἶναι 15 μ. καὶ 9 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

185) Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒ, αἱ δὲ κορυφαὶ Γ καὶ Δ κεῖνται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΒ. Ἡ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων τούτων εἶναι 3,2 μ., ἡ δὲ ΑΒ εἶναι 5 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν τριγώνων τούτων.

186) Τριγώνου ἡ βάσις εἶναι 11,3 μ., τὸ δὲ ἐμβαδὸν 45,2 μ. Ποία εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς τῆς ἀπέναντι τῆς βάσεως ἀπὸ ταύτης;

187) Ὅλα τὰ τρίγωνα, ὅσα ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη, εἶναι ἰσοδύναμα.

188) Τραπεζίου ἡ μὲν μία βάσις εἶναι 14,6 μ., ἡ ἄλλη 9 μέτρα καὶ τὸ ὕψος 8,5 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

189) Ἑνὸς κήπου, ὁ ὁποῖος ἔχει σχῆμα τραπεζίου, αἱ δύο παράλληλοι πλευραὶ εἶναι ἡ μία 123 μ., ἡ ἄλλη 232,6 μ., ἡ δὲ ἀπόστασις αὐτῶν 85 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἰς τετρ. μέτρα ἢ εἰς βασ. στρέμματα.

190) Τραπεζίου αἱ δύο παράλληλοι πλευραὶ εἶναι 9,8 μ. καὶ 4,2 μ., τὸ δὲ ἐμβαδὸν 38,50. τ. μ. Ποία εἶναι ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν παραλλήλων πλευρῶν;

191) Εἰς τὸ σχῆμα 93 ἂς ὑποτεθῇ ὅτι εἶναι (Ββ)=5, (Γγ) =4 (Εε)=7, Ζζ=4,8, (Αζ)=3,(ζβ)=2,6, (βε)=2,8, (εγ)=1 καὶ (γΔ)=2 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ.

192) Ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ εἶναι 8 μ. καὶ 6 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης αὐτοῦ.

193) Ὀρθογωνίου αἱ δύο πλευραὶ εἶναι 24 μ. καὶ 7 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος μιᾶς τῶν διαγωνίων του.

194) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 17 μ. καὶ καὶ ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι 15 μ. Νὰ εὑρεθῇ α) ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ καὶ β) τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

195) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων.

196) Αἱ πλευραὶ τριγώνου τινὸς εἶναι πενταπλάσιαι τῶν πλευρῶν ἄλλου τριγώνου. Ποσάκις τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πρώτου εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ δευτέρου;

197) Τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ πενταγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἰσοῦται μὲ ἕνα μέτρον εἶναι 2,3774 τ. μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβα- τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 3 μ.

198) Τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ ἑξαγώνου πλευρᾶς 1 μ. εἶναι 2,598 τ. μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ ἑξαγώνου ἔχοντος πλευρὰν 2,5 μ.

109. ***Μέτρησις τοῦ κύκλου. α) Μῆκος τῆς περιφερείας αὐτοῦ.*** Πρακτικῶς δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν τὴν περιφέρειαν κύκλου, ἂν ἐφαρμόσωμεν εἰς αὐτὴν ἓν νῆμα καὶ κατόπιν τὸ τεντώσωμεν. Τὸ μῆκος τότε τοῦ νήματος εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας. Δὲν εἶναι ὅμως ἀνάγκη νὰ ἐπαναλαμβάνωμεν τὴν ἰδίαν ἐργασίαν διὰ κάθε περιφέρειαν, διότι, ***ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου διὰ τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου του, εὑρίσκομεν πάντοτε τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ὡς πη-***

λίκον καὶ εἶναι οὗτος ὁ 3,1415. Ἐπομένως ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου ἑνὸς κύκλου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3,1415 εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του. π. δ. Ἔστω ὁ κύκλος Α ἀκτῖνος 5 μ.· ἡ διάμετρος αὐτοῦ εἶναι λοιπὸν 10 μ. καὶ τὸ μῆκος Γ τῆς περιφερείας του εἶναι $Γ=10\times3,1415=31,415$ μ. Ὁ ἀριθμὸς 3,1415 παρίσταται διὰ τοῦ γράμματος π· ἐὰν δὲ καλέσωμεν α τὴν ἀκτῖνα ἑνὸς κύκλου καὶ Γ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του ἔχομεν τὸν τύπον $Γ=2.α.π$.

110. ***Μῆκος τόξου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τόξου 27⁰ περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος 3 μ.*** Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Τὸ μῆκος ὁλοκλήρου τῆς περιφερείας, δηλ. 360^0, εἶναι $6\times3,1415$. Τὸ μῆκος τόξου 1^0 εἶναι $\frac{6\times3,1415}{360}$ καὶ τὸ μῆκος τόξου 27^0 εἶναι $\frac{6\times3,1415\times27}{360}=1,2566$ μ. Ἂν α εἶναι ἡ ἀκτὶς κύκλου, τὸ δὲ τόξον τῆς περιφερείας του εἶναι $μ^0$ τὸ μῆκος αὐτοῦ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$τ=\frac{2απ}{360}.μ \quad ἢ \quad \frac{α.π.μ.}{180}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

199) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος περιφερείας κύκλου διαμέτρου 4 μέτρων.

200) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος 7 μ.

201) Εἷς τροχὸς ἁμάξης μὲ ἀκτῖνα 0,45 μ. ἔκαμεν 128 στροφὰς κατὰ τὴν κίνησιν τῆς ἁμάξης· πόσον διάστημα διέτρεξεν ἡ ἅμαξα ;

202) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια εἶναι 44 μ. $\left(α=\frac{Γ}{2π}\right)$.

203) Ἡ περιφέρεια τοῦ Ἰσημερινοῦ τῆς Γῆς εἶναι 40000000 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς αὐτῆς ;

204) Εἷς κορμὸς δένδρου ἔχει περιφέρειαν 15 μ. Πόση εἶναι ἡ διάμετρος αὐτοῦ ;

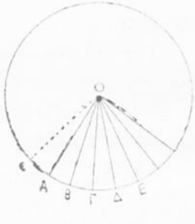
205) Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τόξου α) 90^0, β) 36^0 καὶ γ) 108^0 περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος 7 μ. ;

206) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τόξου κύκλου ἀκτῖνος 5 μέτρ. οὗ ἡ χορδὴ εἶναι α) πλευρὰ κανονικοῦ ἑξαγώνου, β) ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ γ) κανονικοῦ πενταγώνου ;

207) Τὸ μῆκος μιᾶς περιφερείας εἶναι 600 μέτρων· πόσων μοιρῶν εἶναι τὸ τόξον αὐτῆς τὸ ἔχον μῆκος 50 μ. $\left(\frac{360\times 50}{600}\right)$;

208) Τὸ μῆκος τόξου περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος 16 μ. εἶναι 12,566 μέτρα. Πόσων μοιρῶν εἶναι τὸ τόξον τοῦτο; (45°).

111. ***Ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου.*** Ἔστω ὁ κύκλος Ο τοῦ ὁποίου θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδόν. Διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ εἰς μέγαν ἀριθμῶν ἴσων τόξων καὶ εἰς τὰ σημεῖα τῶν διαιρέσεων φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ, ΟΒ κτλ. Διαιρεῖται οὕτω ὁ κύκλος εἰς ἴσους τομεῖςΟΑΒ, ΟΒΓ κτλ. Ἐὰν δὲ ἓν τῶν ἴσων τόξων, π. χ. τὸ ΑΒ, εἶναι πολὺ μικρὸν ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἀκτῖνα, ἕκαστος τομεύς, π. χ. ὁ ΟΑΒ, δύναται νὰ θεωρηθῇ ἰσοδύναμος μὲ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν τὸ τόξον ΑΒ καὶ ὕψος τὴν ἀκτῖνα ΟΑ, τὴν ὁποίαν παριστῶ διὰ τοῦ α.



Σχ. 97.

Ὥστε ἐμβαδὸν τομέως ΑΟΒ $= \frac{1}{2}.\ \alpha.(\mathrm{AB})$· ἐπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ὅλων τῶν τομέων ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{2}\alpha.(\mathrm{AB})+\frac{1}{2}\alpha.(\mathrm{B\Gamma})+\frac{1}{2}\alpha.(\Gamma\Delta)+\ldots+\frac{1}{2}\alpha.(\omega\mathrm{A}) = \frac{1}{2}\alpha.[(\mathrm{AB})+(\mathrm{B\Gamma})+(\Gamma\Delta)+\ldots+(\omega\mathrm{A})]$· ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα $(\mathrm{AB})+(\mathrm{B\Gamma})+(\Gamma\Delta)+\ldots+(\omega\mathrm{A})$ εἶναι τὸ μῆκος ὅλης τῆς περιφερείας τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν ὅτι εἶναι $2\alpha\pi$· ὥστε τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ κύκλου εἶναι $\frac{1}{2}.\alpha.2\pi.\ \alpha=\pi\alpha^2$, ἤτοι εἶναι γινόμενον τοῦ π ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος του. Π. χ. τὸ ἐμβαδὸν κύκλου μὲ ἀκτῖνα 8 μ. εἶναι $\mathrm{E}=\pi.\alpha^2=3,1415\times 64=201,056$ τ. μ.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εὑρίσκομεν τὴν ἀκτῖνά του ὡς ἑξῆς· διαιροῦμεν τὸ ἐμβαδὸν διὰ τοῦ π· ἔπειτα δὲ ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ πηλίκου· π.χ. τὸ ἐμβαδὸν κύκλου εἶναι 1256,6 τ.μ., τὸ πηλῖκον 1256,6 : 3,1415 $=400$ καὶ ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ εἶναι $\sqrt{400}=20$ μ.

112. ***Ἐμβαδὸν τομέως.*** Ἐξ ὅσων εἴπομεν περὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου, συνάγομεν ὅτι ***τὸ ἐμβαδὸν τομέως ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἡμίσεως τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ τόξου του.*** Π. χ. τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κυκλικοῦ τομέως, τοῦ ὁποίου

ἡ ἀκτὶς εἶναι 25 μέτρα καὶ τὸ μῆκος τοῦ τόξου του 6 μέτρα, εἶναι $\frac{25 \times 6}{2} = 75$ τ. μ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

209) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι 7 μέτρα.

210) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα 0,3 μέτρα.

211) Ἡ διάμετρος κύκλου τινὸς εἶναι 28 δάκτυλοι· ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ;

212) Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου εἶναι 31,415 μ. νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

213) Δύο περιφέρειαι αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον, ἔχουν ἀκτῖνας, ἡ μία 18 μ., ἡ ἄλλη 12 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν περιφερειῶν;

214) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος περιφερείας κύκλου καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ, ὅταν ἡ ἀκτὶς εἶναι 3 μ. Κατόπιν νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ, ὅταν ἔχῃ ἀκτῖνα διπλασίαν. Συγκρίνατε ἔπειτα τὰ μήκη τῶν περιφερειῶν, ὡς καὶ τὰ ἐμβαδὰ τῶν κύκλων καὶ εὕρητε πῶς μεταβάλλεται τὸ μῆκος τῆς περιφερείας καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, ὅταν ἡ ἀκτὶς διπλασιάζηται.

215) Τὸ ἐμβαδὸν κύκλου τινὸς εἶναι 50, 246 τ. μ. Ποία εἶναι ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ;

216) Τὸ μῆκος τόξου κυκλικοῦ τομέως εἶναι 12,566 μ. ἡ δὲ ἀκτίς του 8 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

217) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως ἀκτῖνος 6 μ., ὅταν ἡ ἐπίκεντρος γωνία τοῦ τομέως εἶναι 60^{0} μ.

218) Κυκλικοῦ τομέως τὸ τόξον εἶναι 40^{0} καὶ ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ 25 δάκτυλοι. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

219) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τμήματος κύκλου ἀκτῖνος 5 μ. καὶ ὅταν ἡ χορδὴ εἶναι πλευρὰ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸν τετραγώνου.

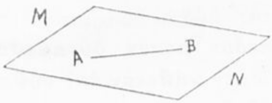
....

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

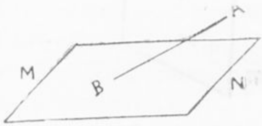
ΘΕΣΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΑ

113. ***Θέσις εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον.*** Μία εὐθεῖα εἶναι δυνατόν: α) Νὰ κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου (15).

β) Νὰ συναντᾷ (τέμνῃ) αὐτό· τέμνει δὲ τὸ ἐπίπεδον εἰς ἓν



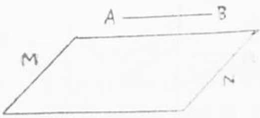
Σχ. 98.



Σχ. 99.

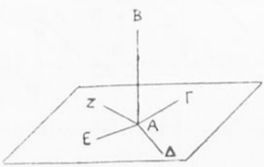
σημεῖον (σχ. 99). καὶ

γ) Νὰ μὴ τὸ συναντᾷ ὅσον καὶ ἂν προεκταθῶσιν ἡ εὐθεῖα καὶ τὸ ἐπίπεδον (σχ. 100) λέγονται δὲ τότε ἡ εὐθεῖα καὶ τὸ ἐπίπεδον παράλληλα.



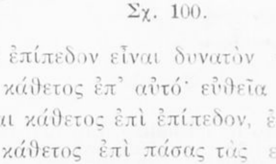
Σχ. 100.

114. Ὅταν εὐθεῖά τις τέμνῃ ἓν ἐπίπεδον εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτό· εὐθεῖα δὲ λέγεται κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, ἐὰν εἶναι κάθετος ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου, τὰς διερχομένας διὰ τοῦ σημείου τῆς τομῆς (σχ. 101) (καὶ τὸ ἐπίπεδον λέγεται τότε κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν).



Σχ. 101.

Διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν ὅτι μία εὐθεῖα, π.χ. ἡ ΑΒ, εἶναι κάθετος ἐπὶ ἓν ἐπίπεδον Π, γράφομεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο μόνον εὐθείας ΑΓ καὶ ΑΔ· καὶ ἂν αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΒΑΔ εἶναι ὀρθαὶ συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π· εἶναι δὲ εὔκολον ἄλλως τε νὰ ἴδωμεν, ὅτι ἡ ΑΒ σχηματίζει μὲ οἱανδήποτε ἄλλην εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ διερχομένην διὰ τοῦ Α ὀρθὴν γωνίαν.



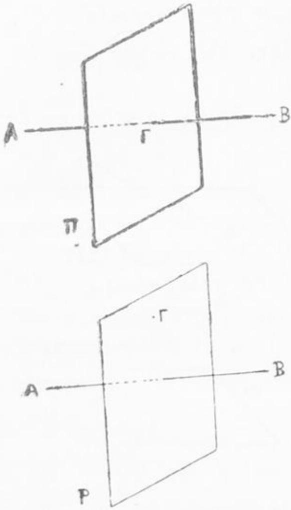
Σχ. 102.

115. Ὅταν μία εὐθεῖα δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, εἶναι πλαγία πρὸς αὐτὸ (σχ. 102).

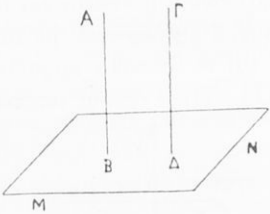
Τὸ σημεῖον εἰς ὃ ἡ κάθετος ἢ ἡ πλαγία τέμνει τὸ ἐπίπεδον λέγεται **πούς** τῆς εὐθείας.

116. Ἐὰν ἔχωμεν μίαν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ ἓν σημεῖον αὐτῆς Γ, δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ διερχομένην διὰ τοῦ Γ. Ὁμοίως δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ εὐθεῖαν καὶ διὰ σημείου ἐκτὸς τῆς εὐθείας (σχ. 103). Καὶ εἰς τὰς δύο δὲ περιπτώσεις ***ἓν ἐπίπεδον μόνον δυνάμεθα νὰ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ εὐθεῖαν.***

117. Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον ἐκτὸς δοθέντος ἐπιπέδου ἢ ἐπ᾽ αὐτοῦ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν εὐθεῖαν κάθετον ἐπ᾽ αὐτὸ καὶ μίαν μόνον.



Σχ. 103.



Σχ. 104.

Ἐὰν δὲ φέρωμεν ἀπὸ δύο διάφορα σημεῖα καθέτους ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, αἱ δύο αὗται κάθετοι εἶναι ***παράλληλοι*** (σχ. 104).

118. Ἔστω τὸ ἐπίπεδον Π καὶ Α σημεῖόν τι ἐκτὸς αὐτοῦ· ἐὰν ἐκ τοῦ Α φέρωμεν τὴν κάθετον ΑΒ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π καὶ τὰς πλαγίας ΑΓ, ΑΔ, ΔΕ, κ.τ.λ. (σχ. 105), ἡ κάθετος ΑΒ εἶναι μικροτέρα οἱασδήποτε ἀπὸ τὰς πλαγίας ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ κ.τ.λ. Ἕνεκα τῆς ἰδιότητος ταύτης τῆς καθέτου, ἡ ΑΒ ὁρίζει τὴν ***ἀπόστασιν*** τοῦ σημείου Α ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου Π.

Σχ. 105.

Ὥστε ***ἀπόστασις σημείου ἀπὸ ἐπιπέδου λέγεται ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον τοῦτο ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.***

119. ***Θέσις δύο ἐπιπέδων πρὸς ἄλληλα.*** Τὸ πάτωμα ἑνὸς

δωματίου καὶ ἡ ὀροφὴ αὐτοῦ, ὅσον καὶ ἂν τὰ φαντασθῶμεν αὐξανόμενα, δὲν συναντῶνται· λέγονται δὲ ***παράλληλα***.

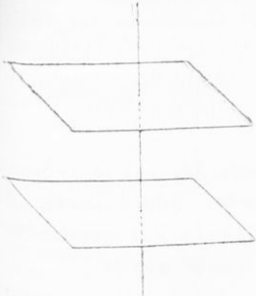
Ὥστε ***δύο ἐπίπεδα λέγονται παράλληλα ἐὰν δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσιν*** (σχ. 106).

Σχ. 106.

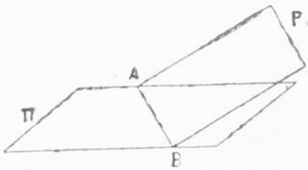
120. ***Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλα*** (σχ. 107).

121. Τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου καὶ ἕνας τοῖχος αὐτοῦ τέμνονται. Παρατηροῦμεν δέ, ὅτι ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

Ὅθεν ***ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνουσιν ἄλληλα, ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ*** (σχ. 108).



Σχ. 107.

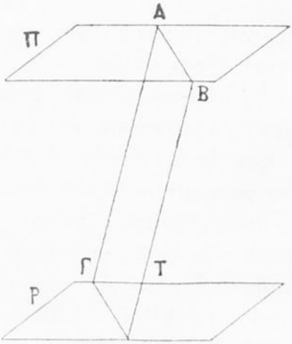


Σχ. 108.

122. Τὰ παράλληλα ἐπίπεδα τῆς ὀροφῆς καὶ τοῦ πατώματος ἑνὸς δωματίου τέμνονται ὑφ᾽ ἑνὸς τοίχου κατὰ εὐθείας γραμμάς, αἵτινες εἶναι παράλληλοι.

Ὅθεν, ***ἐὰν δύο παράλληλα ἐπίπεδα τέμνωνται ὑπὸ ἄλλου ἐπιπέδου, αἱ τομαὶ αὐτῶν εἶναι παράλληλοι***.

Οὕτω αἱ τομαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων Π καὶ Ρ τεμνομένων ὑπὸ τοῦ Τ εἶναι παράλληλοι (σχ. 109).



Σχ. 109.

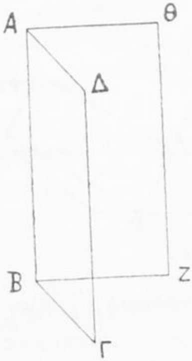
123. Εἰς τὸ σχῆμα 109 παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΒΔ περιέχονται μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων Π καὶ Ρ. Τὸ ἐπίπεδον δὲ τῶν παραλλήλων αὐτῶν τέμνει τὰ ἐν

λόγῳ ἐπίπεδα κατὰ τὰς παραλλήλους εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ. Τὸ σχῆμα λοιπὸν ΑΒΔΓ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἐπομένως αἱ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι ἴσαι.

Ὅθεν συνάγομεν, ὅτι ***παράλληλοι εὐθεῖαι μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχόμεναι εἶναι ἴσαι.***

124. Ἐὰν ἔχωμεν δύο παράλληλα ἐπίπεδα καὶ φέρωμεν μίαν εὐθεῖαν κάθετον εἰς τὸ ἓν ἐπίπεδον, θὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι εἶναι αὕτη κάθετος καὶ εἰς τὸ ἄλλο. Ἐὰν δὲ ἔχωμεν πολλὰς καθέτους μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, αὗται εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας (124). Μίαν δὲ τῶν καθέτων τούτων ὀνομάζομεν ***ἀπόστασιν*** τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων.

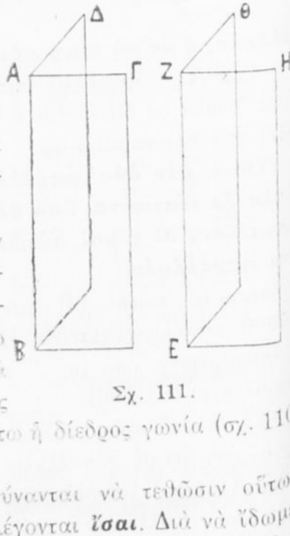
125. ***Δίεδροι γωνίαι.*** Ἂν ἕνα φύλλον χάρτου τὸ διπλώσωμεν καὶ τὸ ἀνοίξωμεν ἔπειτα ὄχι ἐντελῶς, τὸ σχῆμα (σχ. 110) τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται λέγεται ***δίεδρος γωνία.***



Σχ. 110.

Ὅθεν ***δίεδρος γωνία λέγεται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσι δύο ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα τέμνουσιν ἄλληλα καὶ περατοῦνται εἰς τὴν κοινὴν τομὴν αὐτῶν.***

Ἡ τομὴ (ΑΒ) τῶν δύο ἐπιπέδων λέγεται ἀκμὴ τῆς διέδρου γωνίας, τὰ δὲ δύο ἐπίπεδα (ΑΒΓΔ καὶ ΑΒΖΘ), τὰ ὁποῖα σχηματίζουν τὴν δίεδρον γωνίαν, λέγονται ***ἕδραι*** αὐτῆς.



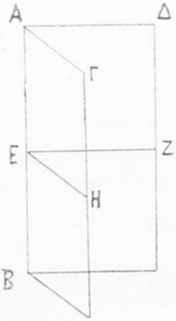
Σχ. 111.

Τὴν δίεδρον γωνίαν παριστῶμεν διὰ δύο γραμμάτων, τὰ ὁποῖα γράφονται εἰς τὴν ἀκμήν, ἢ διὰ τεσσάρων γραμμάτων, ἐκ τῶν ὁποίων δύο μὲν γράφονται ἐπὶ τῆς ἀκμῆς καὶ ἀνὰ ἓν ἐπὶ τῶν ἑδρῶν (τὰ γράμματα τῆς ἀκμῆς τὰ θέτομεν εἰς τὸ μέσον). Οὕτω ἡ δίεδρος γωνία (σχ. 110) σημειοῦται ΑΒ ἢ ΓΑΒΖ.

126. Ἐὰν δύο δίεδροι γωνίαι δύνανται νὰ τεθῶσιν οὕτως ὥστε ν' ἀποτελέσωσι μίαν μόνην, λέγονται ***ἴσαι.*** Διὰ νὰ ἴδωμεν ἂν δύο δίεδροι γωνίαι, π.χ. αἱ ΔΑΒΓ καὶ ΘΖΕΗ (σχ. 111) εἶνα

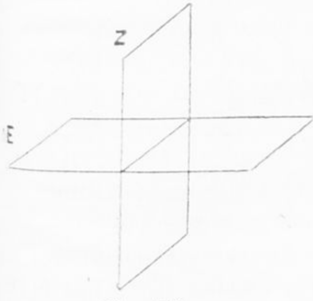
ἴσαι, ἐφαρμόζομεν τὴν ἀκμὴν ΑΒ ἐπὶ τῆς ΖΕ καὶ τὴν ἕδραν ΓΒΑ ἐπὶ τῆς ΗΖΕ· ἐὰν δὲ καὶ ἡ ἕδρα ΔΒΑ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΘΖΕ, αἱ δίεδροι εἶναι ἴσαι, ἄλλως εἶναι ἄνισοι.

127. Ἔστω ἡ δίεδρος γωνία ΔΑΒΓ καὶ Ε τυχὸν σημεῖον τῆς ἀκμῆς ΑΒ· ἐὰν φέρωμεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΔΑΒ τὴν ΕΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΓΑΒ τὴν ΕΗ κάθετον ἐπίσης ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ἐπίπεδος γωνία ΖΕΗ λέγεται **ἀντίστοιχος** γωνία τῆς διέδρου ΔΑΒΓ. ***Ἡ ἐπίπεδος γωνία, ἡ ἀντίστοιχος μιᾶς διέδρου, μετρεῖ τὴν δίεδρον ταύτην. Ἐὰν αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι γωνίαι δύο διέδρων γωνιῶν εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἀληθεύει δὲ καὶ τὸ ἀντίστροφον.***



Σχ. 112.

128. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνωσιν ἄλληλα καὶ σχηματίζουν, ἂν προεκταθοῦν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τῆς εὐθείας, τέσσαρας διέδρους γωνίας, ἴσας, λέγονται κάθετα πρὸς ἄλληλα (σχ. 113). Αἱ δὲ δίεδροι αὗται γωνίαι λέγονται **ὀρθαί**.

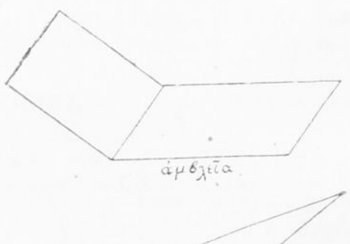


Σχ. 113.

Τὸ ἐπίπεδον τοῦ τοίχου ἑνὸς δωματίου καὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ πατώματος εἶναι κάθετα πρὸς ἄλληλα, ἡ δὲ ὑπ᾿ αὐτῶν σχηματιζομένη δίεδρος γωνία εἶναι ὀρθή.

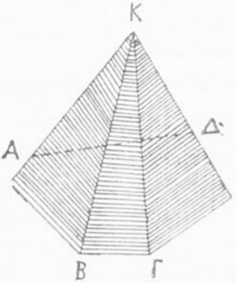
Ἡ ἐπίπεδος γωνία, ἡ ἀντίστοιχος ὀρθῆς διέδρου, εἶναι ὀρθή. Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν ἡ ἐπίπεδος γωνία, ἡ ἀντίστοιχος διέδρου εἶναι ὀρθή, καὶ ἡ δίεδρος εἶναι ὀρθή.

129. Ἐὰν μία δίεδρος γωνία εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς λέγεται **ἀμβλεῖα**, ἐὰν δὲ εἶναι μικροτέρα αὐτῆς λέγεται **ὀξεῖα** (σχ. 114).

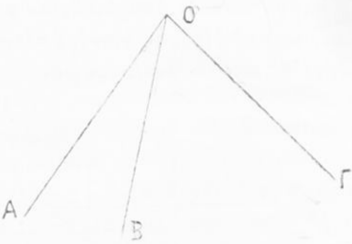


Σχ. 114.

130. ***Στερεαὶ γωνίαι.*** Ἐὰν ἔχωμεν τρία ἢ περισσότερα ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα νὰ διέρχωνται ὅλα ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ νὰ περατοῦται ἕκαστον εἰς τὰς δύο εὐθείας, κατὰ τὰς ὁποίας τέμνεται ὑπὸ τῶν δύο πλησίον αὐτοῦ ἐπιπέδων, τὸ σχῆμα ποὺ σχηματίζεται λέγεται ***στερεὰ*** γωνία. Στερεὰς γωνίας σχηματίζουν αἱ ἕδραι τοῦ κύβου, αἱ ὁποῖαι τέμνονται ἀνὰ τρεῖς· ἐπειδὴ δὲ τὰ ἐπίπεδα (αἱ ἕδραι), τὰ ὁποῖα σχηματίζουν μίαν στερεὰν γωνίαν τοῦ κύβου, εἶναι τρία, ἡ στερεὰ αὕτη γωνία λέγεται ***τρίεδρος***· ἂν εἶναι τέσσαρα τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα σχηματίζουν μίαν στερεὰν γωνίαν, λέγεται τετράεδρος (σχ. 115) κ.ο.κ. Αἱ εὐθεῖαι, εἰς



Σχ. 115.



Σχ. 116.

τὰς ὁποίας τέμνονται αἱ ἕδραι μιᾶς στερεᾶς γωνίας, λέγονται ***ἀκμαὶ*** αὐτῆς καὶ τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον συναντῶνται ὅλαι αἱ ἀκμαὶ λέγεται ***κορυφὴ*** τῆς στερεᾶς γωνίας. Τὸ σχῆμα (116) ΟΑΒΓ παριστᾷ τρίεδρον στερεὰν γωνίαν, τῆς ὁποίας κορυφὴ εἶναι τὸ Ο, ἕδραι τὰ ἐπίπεδα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΑΓ καὶ ἀκμαὶ αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

220) Λάβετε τὸν κύβον καὶ δείξατε εὐθείας καθέτους πρὸς ἐπίπεδον καὶ παραλλήλους πρὸς ἐπίπεδον.

221) Λαμβάνομεν ἕνα φύλλον χάρτου, τοῦ ὁποίου μία τῶν εὐθειῶν, εἰς τὰς ὁποίας ἀπολήγει, σημειοῦμεν ΑΒ· κατόπιν, ἀφοῦ λάβωμεν ἕνα σημεῖον Γ ἐπὶ τῆς ΑΒ, διπλώνομεν τὸ φύλλον οὕτως, ὥστε ἡ ΑΓ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΓΒ, ἔστω δὲ ΓΔ ἡ εὐθεῖα κατὰ τὴν ὁποίαν ἐδιπλώθη τὸ φύλλον· ἔπειτα τὸ ἀνοίγομεν ὀλίγον καὶ θέτομεν τὴν ἐπίπεδον γωνίαν ΑΓΒ ἐπὶ τῆς τραπέζης· Πῶς διευθύνεται ἡ ἀκμὴ ΓΔ πρὸς τὴν τράπεζαν ;

222) Εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν νὰ εὕρητε πῶς τέμνηται ἕκαστον τῶν ἐπιπέδων ΔΓΒ καὶ ΔΓΑ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τῆς τραπέζης.

223) Πόσας διέδρους γωνίας σχηματίζουν οἱ τοῖχοι, τὸ πάτωμα καὶ ἡ ὀροφὴ ἑνὸς δωματίου;

224) Τί δίεδροι γωνίαι εἶναι αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῶν ἑδρῶν ἑνὸς κύβου;

225) Ἔχοντες ὑπ' ὄψει τοὺς ὁρισμοὺς τῶν ἐφεξῆς ἐπιπέδων γωνιῶν καὶ τῶν κατὰ κορυφήν, νὰ ὁρίσητε τὰς ἐφεξῆς διέδρους γωνίας καὶ τὰς κατὰ κορυφὴν τοιαύτας.

226) Αἱ ὀρθαὶ δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

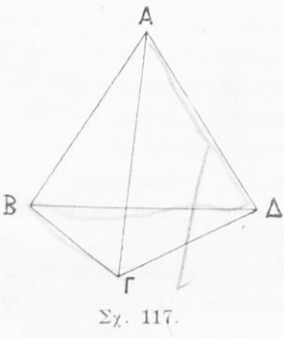
227) Αἱ κατὰ κορυφὴν δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

228) Πῶς θὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα δύο διέδρων γωνιῶν;

229) Ἐὰν ἐπὶ ἑνὸς καρτονίου χαράξωμεν δύο εὐθείας ΑΟΒ καὶ ΓΟΔ τεμνομένας καθέτους καὶ ἔπειτα ἀποκόψωμεν διὰ ψαλίδος μίαν τῶν ὀρθῶν γωνιῶν, π.χ. τὴν ΓΟΑ, καὶ διπλώσωμεν ἔπειτα τὰ μέρη τοῦ ἀπομένοντος καρτονίου κατὰ τὰς εὐθείας ΟΒ καὶ ΟΔ μέχρις ὅτου αἱ ΟΑ καὶ ΟΓ ἐφαρμόσουν, τότε σχηματίζεται μία τρίεδρος στερεὰ γωνία, τῆς ὁποίας ὅλαι αἱ δίεδροι καὶ ὅλαι αἱ ἐπίπεδοι εἶναι ὀρθαί· λέγεται δὲ διὰ τοῦτο τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία.

ΠΟΛΥΕΔΡΑ

131. Ὁ κύβος (σχ. 1) εἶναι ἕνα στερεόν, τὸ ὁποῖον περατοῦται πανταχόθεν ὑπὸ ἐπιπέδων ἢ ἑδρῶν, λέγεται δὲ διὰ τοῦτο ***πολύεδρον***.

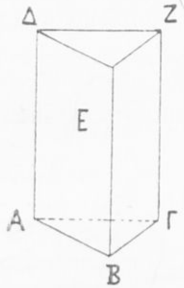


Σχ. 117.

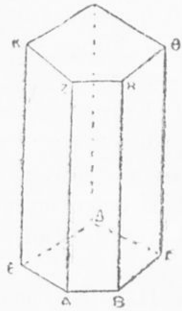
Ὥστε ***πολύεδρον λέγεται στερεὸν περατούμενον πανταχόθεν ὑπὸ ἐπιπέδων ἢ ἑδρῶν***. Ἂν δὲ αἱ ἕδραι τοῦ πολυέδρου εἶναι τέσσαρες, λέγεται ***τετράεδρον*** (σχ. 117), ἂν πέντε ***πεντάεδρον*** (σχ. 118) κ.ο.κ.

Γωνίαι τοῦ πολυέδρου λέγονται αἱ στερεαὶ γωνίαι αὐτοῦ καὶ ***κορυφαὶ*** αὐτοῦ αἱ κορυφαὶ τῶν στερεῶν γωνιῶν του· **ἀκμαὶ** ἢ **πλευραὶ** τοῦ πολυέδρου λέγονται αἱ πλευραὶ τῶν ἑδρῶν του.

132. ***Πρίσματα.*** Τὸ σχ. 119 παριστᾷ πολύεδρον. Παρατηροῦμεν ὅμως εἰς αὐτό, ὅτι αἱ δύο ἀπέναντι ἕδραι ΑΒΓΔΕ καὶ



Σχ. 118.



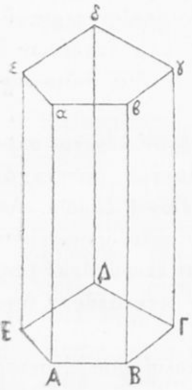
Σχ. 119.

ΖΗΘΙΚ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, αἱ δὲ ἄλλαι ἕδραι, ὡς αἱ ΑΒΗΖ, ΒΓΘΗ κ.τ.λ. εἶναι ὅλαι παραλληλόγραμμα. Τὰ πολύεδρα τὰ ἔχοντα τοιαύτην κατασκευὴν λέγονται **πρίσματα**.

Ὅθεν ***πρίσμα λέγεται τὸ στερεόν, τοῦ ὁποίου δύο ἕδραι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, αἱ δὲ λοιπαὶ παραλληλόγραμμα.***

Αἱ δύο ἴσαι καὶ παράλληλοι ἕδραι τοῦ πρίσματος λέγονται βάσεις αὐτοῦ.

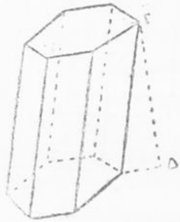
Ἐὰν τώρα φέρωμεν εὐθείας καθέτους μεταξὺ τῶν δύο (παραλλήλων) βάσεων τοῦ πρίσματος, αἱ κάθετοι αὗται εἶναι μεταξύ των ἴσαι· μία δὲ τῶν καθέτων τούτων λέγεται ὕψος τοῦ πρίσματος. Ἐὰν ἡ βάσις τοῦ πρίσματος εἶναι τρίγωνον, τὸ πρίσμα λέγεται **τριγωνικόν**, **τετραγωνικὸν** δὲ ἐὰν ἡ βάσις του εἶναι τετράπλευρον κ.ο.κ.



Σχ. 120

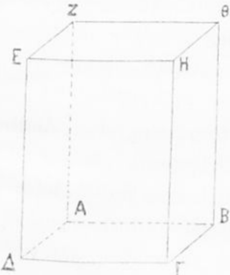
Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν πρίσμα λαμβάνομεν τυχὸν πολύγωνον, ὡς τὸ ΑΒΓΔΕ (σχ. 120), καὶ φέρομεν ἐκ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ εὐθείας ἴσας καὶ παραλλήλους, τὰς Αα, Ββ, Γγ, Δδ, Εε, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πολυγώνου, καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ. Τὰ ἄκρα τῶν εὐθειῶν τούτων θὰ κεῖνται ἐφ᾽ ἑνὸς ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ΑΒΓΔΕ καὶ τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον περατοῦται εἰς τὰ δύο παράλληλα ἐπίπεδα σχήματα ΑΒΓΔΑ, αβγδε καὶ εἰς τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒαβ, ΒΓβγ, ΓΔγδ, ΔΕδε, ΕΑεα, θὰ εἶναι πρίσμα.

Ἐὰν ἕνα πρίσμα ἔχῃ τὰς (παραπλεύρους) ἀκμάς, αἱ ὁποῖαι ἑνώνουσι τὰς ἀντιστοίχους κορυφὰς τῶν βάσεων, καθέτους ἐπὶ τὰς βάσεις λέγεται ὀρθόν, ἄλλως λέγεται ***πλάγιον***. Εἰς τὸ ὀρθὸν πρίσμα ἡ παράπλευρος ἀκμὴ ἰσοῦται μὲ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Τὸ σχῆμα 119 παριστᾷ ***ὀρθὸν*** πρίσμα· ὕψος δὲ αὐτοῦ εἶναι μία τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν, π. χ. ἡ ΑΖ. Τὸ σχῆμα 121 παριστᾷ πλάγιον πρίσμα, ὕψος αὐτοῦ εἶναι ἡ ΓΔ κάθετος μεταξὺ τῶν δύο βάσεών του.



Σχ. 121.

133. Τὸ πρίσμα ΑΗ (σχ. 122) παρατηροῦμεν, ὅτι ἔχει καὶ τὰς βάσεις αὐτοῦ παραλληλόγραμμα, δηλαδὴ ἔχει ὅλας τὰς ἕδρας αὐτοῦ ***παραλληλόγραμμα***, λέγεται δὲ διὰ τοῦτο ***παραλληλεπίπεδον***· εἶναι δὲ τὸ παραλληλεπίπεδον ***ἑξάεδρον***.



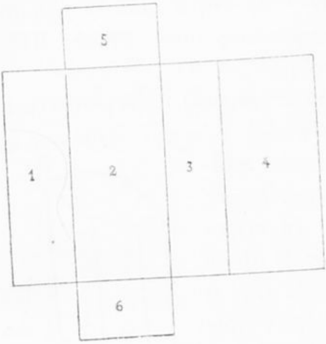
Σχ. 122.

Ἐὰν τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθόν, ἔχει δὲ καὶ βάσεις ὀρθογώνια, λέγεται ***ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον***· τὰ κυτία τῶν σπίρτων π. χ. ἔχουσι σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Ἐὰν αἱ βάσεις στερεοῦ εἶναι τετράγωνα καὶ αἱ λοιπαὶ ἕδραι ὡσαύτως, τὸ στερεὸν λέγεται ***κύβος*** ἢ ***κανονικὸν ἑξάεδρον***.

134. Κατασκευάζομεν ἐκ χαρτονίου τὸ σχ. 136, ὅπερ ἀποτελεῖται ἀπὸ τρία ὀρθογώνια ἴσα καὶ δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα· ἔπειτα χαράσσομεν διὰ μαχαιρίου καὶ τὰς τέσσαρας πλευρὰς τοῦ μεσαίου ὀρθογωνίου καὶ διπλώνομεν κατὰ τὰς πλευρὰς ταύτας τὰ λοιπὰ μέρη τοῦ σχήματος μέχρις ὅτου συναντηθῶσι· σχηματίζεται δὲ οὕτω ἓν ὀρθὸν τριγωνικὸν πρίσμα.

135. ***Κατασκευὴ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου***. Κατασκευάζομεν ἐκ χαρτονίου τὸ σχῆμα 123, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓξ ὀρθογώνια, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ 1 καὶ 3 εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα· ἐπίσης ἴσα μεταξύ των εἶναι τὰ 2 καὶ 4, ὡς καὶ τὰ 5



Σχ. 123.

καὶ 6. Ἔπειτα χαράσσομεν διὰ μαχαιρίου τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου 2 καὶ τοῦ 3 καὶ διπλώνομεν τὰ μέρη κατὰ τὰς χαραχθείσας γραμμάς, ὁπότε θὰ σχηματισθῇ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.

ΣΗΜ. Ἐὰν τὸ σχῆμα 123 ἀποτελεῖται ἐξ ἓξ τετραγώνων ἴσων, θὰ σχηματισθῇ κατὰ τὸν ἄνω τρόπον κύβος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

230) Τὸ τριγωνικὸν πρῖσμα πόσας ἕδρας, πόσας στερεὰς γωνίας ἔχει, πόσας κορυφὰς καὶ πόσας ἀκμάς ;

231) Τὸ παραλληλεπίπεδον πόσας κορυφάς, πόσας στερεὰς γωνίας καὶ πόσας ἀκμὰς ἔχει ;

232) Αἱ παράπλευροι ἕδραι ἑνὸς πρίσματος εἶναι ὀρθογώνια. Ὀρθὸν εἶναι τὸ πρῖσμα τοῦτο ἢ πλάγιον ;

233) Ποῖαι εἶναι αἱ ὁμοιότητες μεταξὺ ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ ἑνὸς ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος καὶ ποῖαι αἱ διαφοραί ;

234) Πόσαι ἀκμαὶ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος συνέρχονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ;

235) Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία συνδέει δύο κορυφὰς ἑνὸς πολυέδρου, αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἕδρας, λέγεται διαγώνιος αὐτοῦ. Πόσας διαγωνίους δυνάμεθα νὰ φέρωμεν εἰς ἓν παραλληλεπίπεδον ;

236) Κατασκευάσατε ἐκ χαρτονίου ὀρθὸν τριγωνικὸν πρῖσμα ἔχον βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 0,02 μ. καὶ ὕψος 0,2 μ.

237) Ὁμοίως κατασκευάσατε ἐκ χαρτονίου ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχον βάσιν τετράγωνον, πλευρὰς 0,03 μ. καὶ ὕψος 0,15 μ. ὡς καὶ μίαν κυβικὴν παλάμην.

136. ***Ἐμβαδὸν παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος.*** Ἔστω τὸ ὀρθὸν πρῖσμα ΘΕ (σχ. 119). Ἐὰν ἀναπτύξωμεν τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν αὐτοῦ ἐπὶ ἐπιπέδου, θὰ σχηματι-

σθῇ ἓν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον μὲ βάσιν τὴν περίμετρον τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος καὶ ὕψος τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ὥστε ***τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.***

Οὕτω, ἂν ἡ βάσις τοῦ πρίσματος εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον μὲ πλευρὰν 2 μέτρων καὶ τὸ ὕψος εἶναι 5 μ., τὸ περὶ οὗ πρόκειται ἐμβαδὸν εἶναι $12 \times 5 = 60$ τ. μ.

Ἂν ἡ περίμετρος τῆς βάσεως παρασταθῇ διὰ τοῦ γράμματος Τ καὶ τὸ ὕψος διὰ τοῦ υ ἔχομεν ἐμ. παρ. ἐπιφ. = Τ.υ.

ΣΗΜ. Ἐὰν εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος προσθέσωμεν τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς μιᾶς βάσεώς του, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

238) Ὀρθὸν τριγωνικὸν πρῖσμα ἔχει βάσιν τρίγωνον ἰσόπλευρον πλευρᾶς 3,5 μ. καὶ ὕψος 1,9 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του.

239) Δοχεῖον πρισματικὸν ἔχει βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 0,45 μέτρα, τὸ ὕψος δὲ αὐτοῦ εἶναι 0,86 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του;

240) Ὀρθὸν πρῖσμα ἔχει βάσιν κανονικὸν ἑξάγωνον πλευρᾶς ἑνὸς μέτρου· τὸ ὕψος αὐτοῦ εἶναι 4,75 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτοῦ.

241) Αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως ὀρθοῦ πενταγωνικοῦ πρίσματος εἶναι 2 μ., 2,75 μ., 1,60 μ., 3 μ., 3,25 μ., τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ εἶναι 7 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του.

242) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κύβου, τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἀκμὴ εἶναι 0,25 μ.

243) Αἱ βάσεις ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι τρίγωνα ὀρθογώνια μὲ πλευρὰς ἕκαστον 3, 4, 5 μέτρα, τὸ ὕψος δὲ αὐτοῦ εἶναι 2 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του.

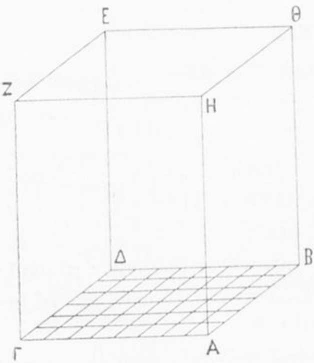
ΟΓΚΟΣ ΤΩΝ ΠΡΙΣΜΑΤΩΝ

137. ***Μονάδες ὄγκου.*** Ὡς μονὰς ὄγκου τῶν στερεῶν λαμβάνεται ὁ κύβος, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκμὴν ἴσην μὲ ἓν μέτρον καὶ λέγεται κυβικὸν μέτρον.

Ἂς λάβωμεν τὸ κυβικὸν μέτρον καὶ ἂς τὸ διαιρέσωμεν κατὰ μῆκος εἰς 10 ἴσα μέρη, ἔπειτα κατὰ πλάτος εἰς 10 ἴσα μέρη καὶ πάλιν κατὰ ὕψος εἰς 10 ἴσα μέρη, τότε παράγονται 1000 ***κυβικαὶ παλάμαι***. δηλ. 1000 μικροὶ κύβοι, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἀκμὴν ἴσην μὲ μίαν παλάμην (=0,1 τοῦ μέτρου).

Ἂν τώρα κάμωμεν τὸ ἴδιον καὶ εἰς τὴν κυβικὴν παλάμην, θὰ παραχθοῦν 1000 ***κυβικοὶ δάκτυλοι***. δηλ. 1000 μικροὶ κύβοι μὲ ἀκμὴν ἕνα δάκτυλον (=0,01 τοῦ μέτρου). Ἑπομένως εἶναι 1 κυβ. μέτρον=1000 κυβ. παλάμαι = 1000000 κυβ. δάκτ.

138. ***Ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου***. Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΔΗ, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις (σχ. 124) εἶναι τρεῖς ἀκμαί, αἱ ὁποῖαι ἄρχονται ἀπὸ τὴν αὐτὴν κορυφήν, π.χ. αἱ ΔΒ (μῆκος), ΔΓ (πλάτος) καὶ ἡ ΔΕ (ὕψος)· ἂς ὑποτεθῇ δὲ ὅτι εἶναι (ΔΒ) = 8 μ. (ΔΓ) = 6 μ. καὶ (ΔΕ) = 10 μ. Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως αὐτοῦ εἶναι 6 × 8=48 τ. μ. ἕπεται, ὅτι δυνάμεθα νὰ τοποθετήσωμεν ἐπὶ τῆς βάσεως 48 κυβικὰ μέτρα καὶ θὰ ἔχωμεν οὕτω ἓν στρῶμα ἀπὸ 48 κυβικὰ μέτρα· ἐπειδὴ δὲ τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου αὐτοῦ εἶναι 10 μ. ἕπεται, ὅτι θὰ χωρέσουν εἰς αὐτὸ 10 τοιαῦτα στρώματα, ἢ σειρὰ κυβικῶν μέτρων· θὰ ἔχωμεν δηλ. τὸ ὅλον ὡς ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου 3×6×10 = 480 κυβ. μέτρα. Ὥστε ***ὁ ὄγκος κάθε ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῶν μηκῶν τῶν τριῶν διαστάσεών του*** δηλ. εἶναι ἴσος μὲ α×β×γ, ἂν α,β,γ ὀνομάσωμεν ***γενικῶς τὰ μήκη τῶν διαστάσεών του*** (μετρημένων μὲ ***τὴν ἰδίαν*** μονάδα). Καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τῶν δύο παραγόντων α καὶ β, δηλ. α×β, δίδει τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ παραλληλεπιπέδου, συμπεραίνομεν, ὅτι ***ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶναι ἴσος καὶ μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ ὕψος***.



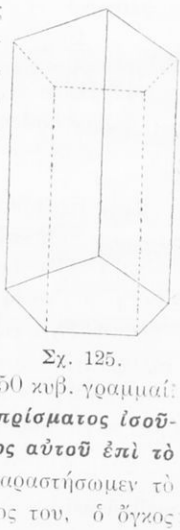
Σχ. 124.

139. ***Ὄγκος τοῦ κύβου***. ***Ὁ ὄγκος τοῦ κύβου εἶναι ἴσος μὲ τὴν τρίτην δύναμιν τοῦ μήκους τῆς ἀκμῆς του***. Π. χ. ἂν

ἡ ἀκμὴ ἔχῃ μῆκος 9, ὁ ὄγκος τοῦ κύβου εἶναι $9 \times 9 \times 9 = 9^3 = 729$ κυβ. μέτρα.

(Δι' αὐτὸν δὲ τὸν λόγον ὀνομάζομεν εἰς τὴν ἀριθμητικὴν τὴν τρίτην δύναμιν ἑνὸς ἀριθμοῦ καὶ ***κύβον)***.

140. ***Ὄγκος ὀρθοῦ πρίσματος.*** Ἔστω τὸ ὀρθὸν πρίσμα (σχ. 125) τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἶναι 750 τετραγωνικαὶ γραμμαὶ καὶ τὸ ὕψος 50 γραμμαί, ἀφοῦ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἶναι 750 τ. γραμμαί ἕπεται ὅτι ἡ βάσις δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς 750 τετράγωνα, ἕκαστον τῶν ὁποίων θὰ ἔχῃ πλευρὰν 1 γρ. Ἐὰν τώρα φαντασθῶμεν, ὅτι θέτομεν ἐπὶ ἑκάστου τετραγώνου τὴν βάσιν ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ὕψους 50 γραμ. καὶ βάσεως 1 τετρ. γραμμῆς, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ὄγκος ὅλων ὁμοῦ τῶν 750 παραλληλεπιπέδων ποὺ θὰ θέσωμεν, θὰ εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ δοθέντος πρίσματος. Ἀλλ' ὁ ὄγκος ἑνὸς τοιούτου ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι $1 \times 50 = 50$ κυβ. γραμμαὶ καὶ ἑπομένως ὁ ὄγκος τῶν παραλληλεπιπέδων. δηλαδὴ ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος εἶναι 50×750 κυβ. γραμμαί.



Σχ. 125.

Ὅθεν συνάγομεν ὅτι ***ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος του.*** Δηλ. ἂν διὰ τοῦ γράμματος β παραστήσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του καὶ διὰ τοῦ υ τὸ ὕψος του, ὁ ὄγκος αὐτοῦ θὰ εἶναι β. υ.

ΣΗΜ. Ἡ διαίρεσις τῆς βάσεως εἰς τετράγωνα ἴσα γίνεται τόσῳ μὲ μεγαλυτέραν ἀκρίβειαν, ὅσῳ ἡ πλευρὰ τῶν τετραγώνων εἶναι μικροτέρα.

141. ***Ὄγκος πλαγίου πρίσματος.*** Κατασκευάζομεν δύο δοχεῖα ἀπὸ λευκοσίδηρον ἀνοικτὰ εἰς τὸ ἐπάνω μέρος, ἀλλὰ τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν νὰ ἔχῃ σχῆμα ὀρθοῦ πρίσματος, τὸ δὲ ἄλλο πλαγίου· αἱ βάσεις ὅμως καὶ τὰ ὕψη τῶν δύο αὐτῶν πρισματικῶν δοχείων νὰ εἶναι ἴσα. Ἂν ἔπειτα γεμίσωμεν αὐτὰ μὲ ὕδωρ, θὰ ἴδωμεν ὅτι τὸ δοχεῖον τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα πλαγίου πρίσματος χωρεῖ τόσον ὕδωρ, ὅσον χωρεῖ καὶ τὸ ἄλλο, ἤτοι ἔχουσι τὰ δοχεῖα αὐτὰ ἴσους ὄγκους. Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι ***ὁ ὄγκος ἑνὸς πλαγίου πρίσματος εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

244) Εἷς τοῖχος ἔχει 12 μέτρα μῆκος, 0,75 πάχος καὶ 3 μ. ὕψος. Πόσων κυβικῶν μέτρων ὄγκον ἔχει ;

245) Τὸ ὕψος ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 0,25 μ. καὶ ἡ βάσις του εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς 0,06 μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος του.

246) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κύβου, τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἀκμὴ εἶναι $3\frac{1}{2}$ παλάμαι.

247) Πόσα κυβικὰ μέτρα ὕδατος χωρεῖ μία δεξαμενή, ἡ ὁποία ἔχει βάσιν ὀρθογώνιον μήκους 15 μ. καὶ πλάτος 4 μ., ὅταν τὸ βάθος της εἶναι $6\frac{1}{2}$ μέτρα ;

248) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι 8 τετρ. παλάμαι καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 2 μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος του.

249) Πλαγίου πρίσματος τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του εἶναι 2.50 τ. μ., τὸ δὲ ὕψος 3. μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος του.

250) Ἔχει τις μεταλλικὴν πλάκα σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις 1,2 μ., 0,8 μ., 1,5 μ., θέλει δὲ νὰ διαιρέσῃ αὐτὴν εἰς κύβους ἕκαστος τῶν ὁποίων θὰ ἔχῃ ἀκμὴν 0,02 μ. εἰς πόσους τοιούτους κύβους θὰ διαιρεθῇ ἡ πλάξ ;

251) Μία δεξαμενὴ σχήματος ὀρθοῦ πρίσματος χωρεῖ 3600 κυβικὰ μέτρα ὕδατος, τὸ δὲ βάθος αὐτῆς εἶναι $4\frac{1}{2}$ μέτρα. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της ;

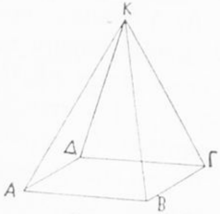
252) Μία δεξαμενὴ ἔχει τὸ σχῆμα ὀρθοῦ πρίσματος μὲ πυθμένα ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι 3 μ., τὸ βάθος της εἶναι 2 μέτρα καὶ χωρεῖ 30000 κυβικὰς παλάμας ὕδατος. Πόσον εἶναι τὸ πλάτος τοῦ πυθμένος της ;

253) Ἓν ὀρθὸν πρίσμα ἔχει ὕψος 8,5 δακτύλων καὶ ἡ βάσις του εἶναι τρίγωνον περιμέτρου 16,4 δακτύλων καὶ ἐμβαδοῦ 12,6 τετρ. δακτύλων. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος αὐτοῦ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του.

ΠΥΡΑΜΙΔΕΣ

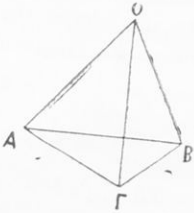
142. Τὸ πολύεδρον ΚΑΒΓΔ ἔχει 5 ἕδρας· ἐξ αὐτῶν ἡ μὲν ΑΒΓΔ εἶναι τετράπλευρον, αἱ δὲ λοιπαὶ εἶναι τρίγωνα, τὰ ὁποῖα

ἔχουσι βάσεις τὰς πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, κορυφὴν δὲ κοινήν, τὴν Κ, ἡ ὁποία κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ. Τὸ πολύεδρον τοῦτο λέγεται ***πυραμίς***.



Σχ. 126.

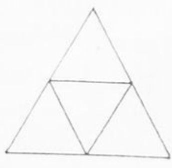
Βάσις τῆς πυραμίδος λέγεται τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔ, κορυφὴ τὸ σημεῖον Κ καὶ **ὕψος** ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος. Ἡ πυραμὶς λέγεται ἐκ τῆς βάσεως αὐτῆς ***τριγωνική***, ἂν ἔχῃ βάσιν ***τρίγωνον***, ***τετραγωνικὴ*** ἐὰν ***τετράπλευρον*** κ.ο.κ. Ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς (σχ. 127) εἶναι τετράεδρον, δύναται δὲ οἱαδήποτε ἐκ τῶν ἑδρῶν αὐτῆς νὰ ληφθῇ ὡς βάσις τῆς πυραμίδος.



Σχ. 127.

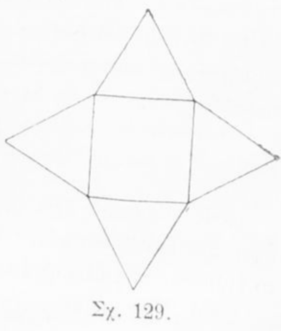
Κανονικὴ λέγεται ἡ πυραμίς, ἐὰν ἡ βάσις αὐτῆς εἶναι κανονικὸν πολύγωνον καὶ ἡ κάθετος, ἡ ἀγομένη ἐκ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν, πίπτῃ εἰς τὸ κέντρον αὐτῆς. Ἡ κάθετος αὐτὴ λέγεται ***ἄξων*** τῆς κανονικῆς πυραμίδος.

143. ***Κατασκευὴ τριγωνικῆς πυραμίδος.*** Κατασκευάζομεν ἐκ χαρτονίου τρίγωνον ἰσόπλευρον (σχ. 128) καὶ ἑνοῦμεν δι' εὐθειῶν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, ὁπότε διαιρεῖται τὸ τρίγωνον εἰς 4 ἴσα ἰσόπλευρα τρίγωνα· ἐὰν κατόπιν χαράξωμεν διὰ μαχαιρίου τὰς πλευρὰς τοῦ κεντρικοῦ τριγώνου καὶ διπλώσωμεν τὰ ἄλλα τρίγωνα κατὰ τὰς χαραχθείσας πλευράς, μέχρις ὅτου αἱ κορυφαὶ συμπέσουν, θὰ σχηματισθῇ τριγωνικὴ πυραμίς. Τί πυραμὶς εἶναι ἡ κατασκευασθεῖσα;



Σχ. 128.

Ἐὰν κατασκευάσωμεν ἐκ χαρτονίου τετράγωνον πλευρᾶς 2 δακτύλων καὶ τέσσαρα ἰσοσκελῆ τρίγωνα (σχ. 129) ἔχοντα βάσεις τὰς πλευρὰς τοῦ τετραγώνου καὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς ἴσας μὲ 2,5 δακτύλους καὶ χαράξωμεν ἔπειτα διὰ μαχαιρίου τὰς πλευρὰς τοῦ τετραγώνου, σχηματίζομεν ὡς ἄνω τετραγωνικὴν πυραμίδα.



Σχ. 129.

144. ***Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῶν πυραμίδων.***

α΄) Ἂν ἡ δοθεῖσα πυραμὶς εἶναι **κανονική**, τὰ τρίγωνα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της εἶναι ὅλα ἴσα μεταξύ των καὶ ἰσοσκελῆ· ἔχουν λοιπὸν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος. Ὥστε ἅμα εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ἀπὸ αὐτά, πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν τριγώνων (τὰ ὁποῖα εἶναι πάλιν τόσα, ὅσαι καὶ αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως) καὶ ἔχομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καθενὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του, ἂν τὴν βάσιν αὐτὴν τῶν τριγώνων (δηλ. τὴν πλευρὰν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος) τὴν ὀνομάσωμεν β καὶ τὸ ὕψος των υ, θὰ ἔχωμεν ὡς ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας.

$$Β = \frac{1}{2} \times β \times υ + \frac{1}{2} \times β \times υ + \frac{1}{2} \times β \times υ + \ldots$$

δηλαδὴ $Ε = \frac{1}{2} \times υ \times (β + β + β + \ldots)$ Ὥστε:

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἴσον μὲ τὴν περίμετρον τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους ἑνὸς τῶν παραπλεύρων τριγώνων της.

Π. χ. Ἐὰν ἡ βάσις εἶναι κανονικὸν πεντάγωνον μὲ πλευρὰν 0,25 τοῦ μέτρου καὶ τὸ ὕψος τῶν παραπλεύρων τριγώνων εἶναι 0,8 μέτρα, ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια ἔχει ἐμδαδόν

$$Ε = \frac{1}{2} \times 0{,}8 \times (0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}25) =$$

$\frac{1}{2} \times 0{,}8 \times 0{,}25 \times 5 = 0{,}5$ τετρ. μέτρα. Ἂν εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας προσθέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος.

β΄) Ἂν ἡ δοθεῖσα πυραμὶς **δὲν εἶναι κανονικὴ** πρέπει νὰ εὕρωμεν χωριστὰ τὸ ἐμβαδὸν κάθε τριγώνου καὶ ἔπειτα νὰ τὰ προσθέσωμεν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

254) Πυραμὶς ἔχει βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 2 μ., τὰ δὲ ὕψη τῶν τριγώνων εἶναι ἴσα ἕκαστον πρὸς 2,3 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας της.

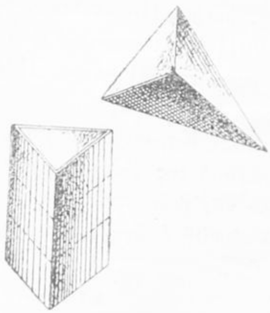
255) Ἑξαγωνικὴ κανονικὴ πυραμὶς ἔχει βάσιν πλευρᾶς 4 μέ-

τρων, τὸ δὲ ὕψος τῶν τριγώνων εἶναι 4,58 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς.

256) Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ἐκ χαρτονίου, διὰ τοῦ ὁποίου θὰ κατασκευάσωμεν πυραμίδα κατὰ τὰ ἐν § 144 ἔχει πλευρὰν 16 παλαμῶν. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τῆς κατασκευασθείσης πυραμίδος.

257) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας ἑκάστη ἀκμὴ εἶναι 8 μ.

145. ***Ὄγκος τῶν πυραμίδων.*** Διὰ νὰ εὕρωμεν ***πρακτικῶς*** τὸν ὄγκον πυραμίδος κάμνομεν τὸ ἑξῆς. Κατασκευάζομεν ἀπὸ λευκοσίδηρον ἓν δοχεῖον μὲ σχῆμα τριγωνικοῦ πρίσματος καὶ ἓν ἄλλο δοχεῖον μὲ σχῆμα τριγωνικῆς πυραμίδος, μὲ τὴν ***ἰδίαν*** ὅμως βάσιν καὶ τὸ ***ἴδιον*** ὕψος τοῦ πρώτου δοχείου (σχ. 130). Ἂν τότε θελήσωμεν νὰ γεμίσωμεν μὲ ὕδωρ τὸ ***πρισματικὸν*** δοχεῖον ἀπὸ τὸ ἄλλο τὸ ***πυραμιδικόν***, θὰ ἴδωμεν ὅτι τὸ πρισματικὸν χωρεῖ τρεῖς φορὰς τόσον ὕδωρ, ὅσον τὸ πυραμιδικόν, δηλ., τὸ πρισματικὸν ἔχει ὄγκον τριπλάσιον ἀπὸ τὸ ἄλλο. Καὶ ἂν ἀκόμη τὸ ἓν δοχεῖον, ἀντὶ νὰ ἔχῃ σχῆμα τριγωνικῆς πυραμίδος, ἔχει σχῆμα μιᾶς ***ὁποιασδήποτε πολυγωνικῆς*** πυραμίδος, μὲ τὴν ***ἰδίαν*** ὅμως βάσιν καὶ τὸ ***ἴδιον*** ὕψος μὲ τὸ ἄλλο δοχεῖον πάλιν εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ πρισματικὸν χωρεῖ ***τριπλάσιον*** ὕδωρ ἀπὸ τὸ πυραμιδικὸν δηλ. ***ἔχει ὄγκον τριπλάσιον.***



Σχ. 130.

Ὁ ὄγκος ὅμως κάθε πρίσματος, καθὼς εἴδομεν, εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του, ἑπομένως ***ὁ ὄγκος κάθε πυραμίδος εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἓν τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος της.*** Δηλ. ἂν ὀνομάσωμεν β τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της καὶ υ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους της, ὁ ὄγκος της θὰ εἶναι ἴσος μὲ $\frac{1}{3} \times \beta \times \upsilon$ (κυβικὰ μέτρα) π. χ. ἂν $\beta = 10$ τ. μ. καὶ $\upsilon = 9$ μέτρα, ὁ ὄγκος θὰ εἶναι $\frac{1}{3} \times 10 \times 9 = 30$ κυβικὰ μέτρα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

258) Μιᾶς πυραμίδος ἡ βάσις εἶναι τρίγωνον μὲ βάσιν 5 μέτρα καὶ ὕψος 3, τὸ δὲ ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι $6\frac{1}{2}$ μέτρα. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της;

259) Ἡ μεγαλυτέρα ἀπὸ τὰς πυραμίδας τῆς Αἰγύπτου, ἡ τοῦ βασιλέως ***Χέοπος***, (κτισθεῖσα 4000 ἔτη πρὸ Χριστοῦ), ἔχει βάσιν τετράγωνον μὲ πλευρὰν 232,75 μέτρα καὶ τὸ ὕψος της εἶναι 146 μέτρα. Πόσον ὄγκον ἔχει;

260) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως μιᾶς πυραμίδος εἶναι 40 τετραγ. μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος της;

261) Μιᾶς πυραμίδος ὁ ὄγκος εἶναι 800 κυβικὰ μέτρα καὶ τὸ ὕψος της 30 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της;

262) Κανονικὴ πυραμὶς μὲ βάσιν ἑξάγωνον ἔχει ὕψος 2 μ., ἡ πλευρὰ τῆς βάσεως εἶναι 1 μέτρον, ἡ δὲ κάθετος ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτῆς εἶναι 0,867 μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ταύτης.

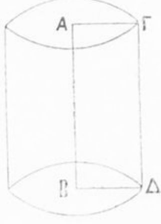
ΣΤΕΡΕΑ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

146. Ὁ ***κύλινδρος***. Τὸ σχ. 131 παριστᾷ ***κύλινδρον***.

Ὁ κύλινδρος εἶναι ἓν στερεόν, τὸ ὁποῖον ἐπάνω καὶ κάτω τελειώνει εἰς δύο ἐπιπέδους ἐπιφανείας παραλλήλους καὶ ἴσας, αἱ ὁποῖαι λέγονται ***βάσεις του***, ἀπὸ τὰ πλάγια δὲ περικλείεται ἀπὸ μίαν ἐπιφάνειαν κυρτήν. Ὁ κύλινδρος ἔχει πανταχοῦ τὸ ἴδιον πάχος, δηλ. δὲν στενεύει κατὰ μίαν διεύθυνσιν, οὔτε ἐξογκώνεται.

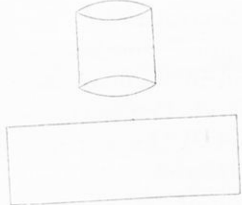
Σχ. 131.

Τὸ σχῆμα τοῦ κυλίνδρου ἔχουν πολλὰ ἀντικείμενα κοινῆς χρήσεως, π.χ. οἱ σωλῆνες τοῦ ὕδατος ἢ τοῦ φωταερίου, οἱ ὑάλινοι σωλῆνες τῶν λαμπῶν, τὰ δοχεῖα πρὸς μέτρησιν τῶν ὑγρῶν (οἴνου, ἐλαίου κλπ.) πολλὰ ποτήρια, μολυβδολόνδυλα, στῆλαι ἀγαλμάτων, στῦλοι ἐκκλησιῶν κτλ. Ὁ κύλινδρος δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν, ὅτι παράγεται ὡς ἑξῆς. Στρέφομεν ἓν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, τὸ ΑΒΓΔ (σχ. 132) πέριξ μιᾶς πλευρᾶς του τῆς ΑΒ, καὶ πάντοτε κατὰ τὴν ἰδίαν φοράν, ἕως ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν. Κατὰ τὴν περιστροφὴν αὐτὴν αἱ πλευραὶ ΑΓ καὶ ΒΔ γράφουν δύο κύκλους, οἱ ὁποῖοι λέγονται βάσεις ***(ἐπάνω καὶ κάτω)*** τοῦ κυλίνδρου. Ἡ δὲ πλευρὰ ΓΔ γράφει μίαν ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία λέγεται ***κυρτὴ*** ἐπιφάνεια τοῦ κυ- λίνδρου καὶ τῆς ὁποίας ἡ ΓΔ λέγεται ***γενέτειρα***. ***Ἄξων*** τέλος τοῦ κυλίνδρου (ἢ ὕψος του) λέγεται ἡ ἀκίνητος πλευρὰ ΑΒ.



Σχ. 132.

147. ***Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.*** Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι εἶναι σκεπασμένη μὲ ἓν λεπτὸν φύλλον χάρτου καὶ ὅτι κόπτωμεν αὐτὴν κατὰ μῆκος μιᾶς γενετείρας καὶ τὴν ἀναπτύσσωμεν ἐπάνω εἰς τὸ ἐπίπεδον. Τότε θὰ εὕρωμεν ἓν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ βάσιν ἴσην κατὰ τὸ μῆκος μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου καὶ ὕψος τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου. Ὥστε ***τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του***. Ἑπομένως, ἂν τὸ ὕψος του ὀνομασθῇ $υ$ καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του θὰ εἶναι $2\times\pi\times\alpha\times υ$. Π. χ. ὅταν $\alpha=5$ καὶ $υ=2$, τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας θὰ εἶναι $2\times\pi\times5\times2=6{,}283\times10=62{,}83$ τετρ. μέτρα.


Σχ. 133.

Ὁλόκληρος δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εὑρίσκεται, ἂν εἰς τὴν κυρτὴν προσθέσωμεν καὶ τὰς δύο ἴσας βάσεις του. δηλ. εἶναι ἴση μὲ $2\times\pi\times\alpha\times υ+2\times\pi\times\alpha^2=2\times\pi\times\alpha\,(υ+\alpha)$. Π. χ. Ὅταν $\alpha=5$, $υ=2$, τότε ὁλόκληρος ἡ ἐπιφάνεια εἶναι $2\times\pi\times5\,(2+5)=31{,}415\times7=219{,}905$ τετρ. μέτρα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

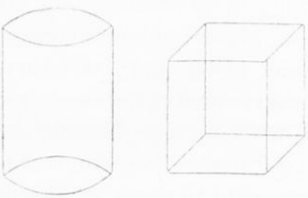
263) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου, ὅστις ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 2,4 μ. καὶ ὕψος 4 μέτρα.

264) Τοῦ ἀνωτέρω κυλίνδρου νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του.

265) Εἷς στῦλος κυλινδρικὸς ὕψους 4 μέτρων καὶ μὲ ἀκτῖνα βάσεως 0,60 μέτρα πρόκειται νὰ χρωματισθῇ· στοιχίζει δὲ ὁ χρωματισμὸς 1 τετρ. μέτρου 4 δραχ. Πόσας δραχμὰς θὰ στοιχίσῃ ὁ χρωματισμὸς τοῦ στύλου;

266) Θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα σωλῆνα ἀπὸ λευκοσίδηρον, ὁ ὁποῖος νὰ ἔχῃ μῆκος 10 μέτρων καὶ διάμετρον βάσεως 0,3 μ. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα λευκοσιδήρου χρειαζόμεθα; Ἐὰν δὲ ἕνα τετραγωνικὸν μέτρον λευκοσιδήρου τιμᾶται 15 δραχ. πόσον θὰ στοιχίσῃ ὁ σωλήν;

148. ***Ὄγκος τοῦ κυλίνδρου.*** Διὰ νὰ εὕρωμεν ***πρακτικῶς*** τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου κατασκευάζομεν δύο δοχεῖα ἀπὸ λευκοσίδηρον, τὸ ἓν μὲ σχῆμα κυλίνδρου καὶ τὸ ἄλλο μὲ σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἀλλὰ καὶ τὰ δύο μὲ τὸ ἴδιον ὕψος καὶ μὲ τὰ ἴδια ἐμβαδὰ τῶν βάσεών των (¹). Ἂν τότε τὸ ἓν ἀπὸ τὰ δύο δοχεῖα τὸ γεμίσωμεν ὕδωρ καὶ τὸ χύσωμεν εἰς τὸ ἄλλο θὰ γεμίσῃ καὶ τὸ ἄλλο ἀκριβῶς. Ἔχουν ἑπομένως τὸν ἴδιον ὄγκον. Καὶ ἐπειδὴ ὁ ὄγκος τοῦ παραλληληπιπέδου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του, συμπεραίνομεν, ὅτι ***ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.*** Δηλ. ἂν ὀνομάσωμεν υ τὸ ὕψος του, ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι $\pi \times \alpha^2 \times \upsilon$.



Σχ. 134.

Π. χ. ἂν $\alpha = 5$ καὶ $\upsilon = 4$, ὁ ὄγκος θὰ εἶναι $\pi \times 25 \times 4 = \pi \times 100 = 314{,}15$ κυβικὰ μέτρα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

267) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κυλίνδρου τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ἔχει ἐμβαδὸν 12,8 τετρ. μέτρα καὶ ὅστις ἔχει ὕψος 12,5 μέτρα.

(¹) Π. χ. Ἐὰν λάβωμεν ἀκτῖνα βάσεως τοῦ κυλίνδρου ἴσην μὲ 10 δακτύλους καὶ πλευρὰς τῆς βάσεως τοῦ παραλληλεπιπέδου ἴσας μὲ 5 καὶ 62,83 δακτ. αἱ δύο βάσεις θὰ ἔχουν ἴσα ἐμβαδὰ ($3{,}1415 \times 100 = 5 \times 62{,}83$).

268) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κυλίνδρου, ὅστις ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 0,2 μ. καὶ ὕψος 3 μέτρα.

269) Κυλινδρικὴ δοκὸς μήκους 10 μέτρων καὶ μὲ διάμετρον τῆς βάσεώς της 0,2 μ. πόσον ὄγκον ἔχει;

270) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι 16 δάκτυλοι καὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του εἶναι 16,5 δάκτυλοι.

271) Ἑνὸς κυλίνδρου ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι 0,5 τοῦ μέτρου, ὁ δὲ ὄγκος 3,1415 κυβ. μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος του; (Ἀπ. 4 μέτρα)

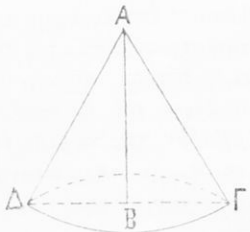
272) Ἑνὸς κυλίνδρου ὁ ὄγκος εἶναι 80 κυβ. μέτρα καὶ τὸ ὕψος 5 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του;

273) Ἕνας κοῖλος κυλινδρικὸς σωλὴν ἐκ μετάλλου ἔχει μῆκος 8 μέτρων· ἡ ἐξωτερικὴ διάμετρος τῆς βάσεώς του εἶναι 0,8 μ., ἡ δὲ ἐσωτερικὴ 0,6 μ. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ μετάλλου τοῦ σωλῆνος τούτου;

274) Ἕνα τηλεφωνικὸν καλώδιον κυλινδρικοῦ σχήματος ἔχει μῆκος 440 μέτρα καὶ διάμετρον τῆς καθέτου τομῆς αὐτοῦ 0,005 μέτρα. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

275) Ἕνα κυλινδρικὸν δοχεῖον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἶναι 200 τετρ. παλάμαι, χωρεῖ 10 κυβικὰ μέτρα ὕδατος. Ποῖον εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν ὕψος αὐτοῦ;

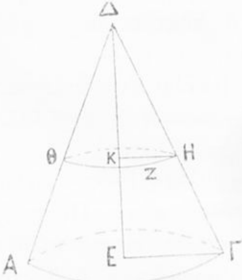
149. β′) **Κῶνος**. Τὸν κῶνον τὸν εἴδομεν εἰς τὴν § 57. Ὁ κῶνος εἰμπορεῖ νὰ παραχθῇ, ἂν ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 135) περιστραφῇ πέριξ μιᾶς ἀπὸ τὰς καθέτους πλευράς του (πέριξ τῆς ΑΒ) ἕως ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν. Ἡ ὑποτείνουσα ΑΒ θὰ γράψῃ τότε μίαν ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία λέγεται ***κυρτὴ*** ἐπιφάνεια τοῦ κώνου, ἡ πλευρὰ ΒΓ θὰ γράψῃ ἕνα κύκλον, τὴν βάσιν τοῦ κώνου, καὶ τὸ σημεῖον Γ θὰ γράψῃ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως. ***Ἄξων*** τοῦ κώνου (ἢ ***ὕψος*** του) λέγεται ἡ πλευρὰ ΑΒ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἡ μένουσα ἀκίνητος. ***Κορυφὴ*** του λέγεται ἡ κορυφὴ Α τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ τέλος



Σχ. 135.

πλευρὰ του ἢ ***γενέτειρα*** λέγεται ἡ ὑποτείνουσα ΑΓ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.

150. ***Κόλουρος κῶνος***. Ὅταν εἷς κῶνος κοπῇ μὲ ἓν ἐπίπεδον κάθετον πρὸς τὸν ἄξονά του, π. χ. μὲ τὸ ΘΗΖ (σχ. 136), ἡ τομὴ εἶναι εἷς κύκλος, ἔχων τὸ κέντρον του Κ ἐπάνω εἰς τὸν ἄξονα τοῦ κώνου, τὸ δὲ μέρος τοῦ κώνου, τὸ μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τῆς τομῆς, λέγεται ***κόλουρος κῶνος***. Οἱ δύο κύκλοι ΑΒΓΑ καὶ ΘΖΗΘ λέγονται ***βάσεις*** τοῦ κολούρου κώνου. ***Ἄξων*** αὐτοῦ λέγεται ἡ εὐθεῖα ΚΕ, ἡ ὁποία συνδέει τὰ κέντρα τῶν βάσεών του. ***Πλευρά*** του λέγεται τὸ μέρος ΗΓ τῆς πλευρᾶς ΔΓ τοῦ ὅλου κώνου, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν δύο βάσεών του. Σχῆμα κολούρου κώνου ἔχουν συνήθως αἱ γάστραι, οἱ κάδοι, τὰ ποτήρια, τὰ ἐπικαλύμματα τῶν λαμπῶν κτλ.



Σχ. 136.

151. ***Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου***. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, σκεπτόμεθα πάλιν ὡς ἑξῆς· φανταζόμεθα τὴν κυρτὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν σκεπασμένην μὲ ἓν φύλλον χάρτου λεπτοῦ καὶ ἀφοῦ σχίσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν αὐτὴν κατὰ μῆκος μιᾶς εὐθείας πλευρᾶς της ΑΓ (σχ. 135), τὴν ***ἀναπτύσομεν*** εἰς τὸ ἐπίπεδον καὶ λαμβάνομεν ἕνα κυκλικὸν τομέα τοῦ ὁποίου τὸ τόξον εἶναι ἴσον μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κώνου καὶ ἡ ἀκτίς του εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου. Ἐφαρμόζοντες τότε τὸν κανόνα τῆς εὑρέσεως τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κυκλικοῦ τομέως, βλέπομεν, ὅτι ***τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὴν πλευράν του***, δηλ. ἂν ἡ πλευρά του ὀνομασθῇ λ καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως α ὁ τύπος τοῦ ἐμβαδοῦ θὰ εἶναι $\frac{1}{2} \times 2 \times \pi \times \alpha \times \lambda$ ἢ $\pi \times \alpha \times \lambda$, π. χ. ἂν $\alpha = 5$ καὶ $\lambda = 2$, τότε τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 31,415 τετρ. μέτρα.

Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του, δηλ. τὸ $\pi . \alpha^2$.

152. ***Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολούρου κώνου***.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς πλευρᾶς του ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο περιφερειῶν τῶν βάσεών του. Δηλ. ἂν α καὶ β εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο περιφερειῶν τῶν βάσεών του καὶ λ ἡ πλευρά του, τὸ ἐμβαδὸν δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον $\frac{1}{2}\times\lambda\times2\times\pi\times(\alpha+\beta)$, δηλ. $\pi\times\lambda\times\alpha+\beta)$. Π.χ. $\alpha=6$μ. $\beta=3$μ. καὶ $\lambda=2$ μ. τὸ ἐμβαδὸν θὰ εἶναι 56,547 τ. μέτρα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

276) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει πλευρὰν 1,2 μ. καὶ ἀκτῖνα βάσεως 0,6 μ.

277) Τοῦ ἀνωτέρω κώνου νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του.

278) Πόσον ἐμβαδὸν ἔχει ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κώνου μὲ πλευρὰν 5 μ. καὶ διάμετρον βάσεως 3 μ. ; (Ἀπ. 23,5612 τετρ. μέτρα).

279) Πόσα μέτρα ὑφάσματος πλάτους 0,8 τοῦ μέτρου χρειάζονται διὰ νὰ κατασκευάσωμεν κωνικὴν σκηνὴν μὲ πλευρὰν 8 μ. καὶ περιφέρειαν βάσεως 15 μ. ;

280) Ἡ πλευρὰ ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι 3 μ. καὶ αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεών του εἶναι 5 μ. καὶ 2 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του ;

153. ***Ὄγκος τοῦ κώνου.*** Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ κώνου ὑποθέτομεν πάλιν, ὅτι ἔχομεν κατασκευάσει δύο δοχεῖα ἀπὸ λευκοσίδηρον, τὸ ἓν σχήματος κυλινδρικοῦ καὶ τὸ ἄλλο σχήματος κωνικοῦ, ἀλλὰ μὲ τὰ ὕψη ἴσα καὶ ἴσα ἐμβαδὰ βάσεως. Βλέπομεν τότε ὅτι διὰ νὰ γεμίσῃ μὲ ὕδωρ τὸ κυλινδρικὸν δοχεῖον, πρέπει νὰ χύσωμεν εἰς αὐτὸ τρεῖς ἀκριβῶς φορὰς τὸ κωνικὸν δοχεῖον πλῆρες μὲ ὕδωρ, ἑπομένως ***ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι ἴσος μὲ τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.*** δηλ. ἂν τὸ ὕψος ὀνομασθῇ υ, ὁ ὄγκος δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον $\frac{1}{3}\times\pi\times\alpha^2\times\upsilon$. Π. χ. ἂν $\alpha=10$ μ, καὶ $\upsilon=9$ μ. ὁ ὄγκος θὰ εἶναι $\frac{1}{3}\times\pi\times100\times9=300\times\pi=942,45$ κυβ. μέτρα.

154. ***Ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου.*** *Ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν ἑξῆς τύπον.*

$\frac{1}{3}\times\pi\times\upsilon\times(\alpha^2+\beta^2+\alpha\times\beta)$, ὅπου υ παριστᾷ τὸ ὕψος τοῦ κολούρου κώνου καὶ α καὶ β τὰς ἀκτῖνας τῶν βάσεών του. Π. χ. ἂν $\upsilon=3$ μ., $\alpha=5$ μ., $\beta=4$ μ. ὁ ὄγκος εἶναι $\frac{1}{3}\times\pi\times3\times(25+16+20)=\pi\times61=191{,}6315$ κυβικὰ μέτρα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

281) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος κώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι 9 μ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως αὐτοῦ 6,28 τετρ. μέτρα;

282) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κώνου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι 2 μέτρα καὶ τὸ ὕψος 1,6 μέτρα.

283) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος κώνου ὅστις ἔχει ὕψος 3,2 μέτρα καὶ οὗ ἡ διάμετρος τῆς βάσεως εἶναι 5 μέτρα;

284) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος ἑνὸς κώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι 8 μ. καὶ ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως 31, 415 μ.; (Ἀπ. $\frac{628{,}3}{3}=209{,}43$ περίπου).

285) Πόσον εἶναι τὸ ὕψος ἑνὸς κώνου, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶναι 30 κυβ. μέτρα καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του 8 τετρ. μέτρα;

286) Αἱ δύο περιφέρειαι τῶν βάσεων ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι ἡ μία 6,283 μ., ἡ ἄλλη 9,4245 μ. καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 4 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

(Ἀπ. $\frac{1}{3}\times\pi\times4\times\left(1+\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)=\frac{\pi\times19}{3}=19{,}8961$ (περίπου κυβικὰ μέτρα).

ΣΦΑΙΡΑ

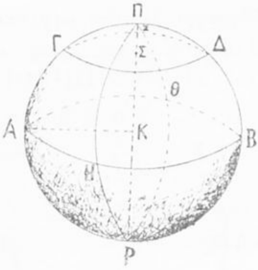
155. ***Σφαῖρα ὀνομάζεται τὸ στερεόν, τοῦ ὁποίου ἓν σημεῖον ἀπέχει ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας του***. Τὸ σημεῖον αὐτὸ λέγεται ***κέντρον*** τῆς σφαίρας.

Σχῆμα σφαίρας ἔχουν οἱ βόλοι, τὰ τόπια τῶν παιδίων, τὰ πορτοκάλια (συνήθως) κτλ.

ΣΗΜ. Τὴν σφαῖραν εἱμποροῦμεν νὰ θεωρήσωμεν ὡς παραγομένην ἀπὸ τὴν περιστροφὴν ἑνὸς ἡμικυκλίου, π. χ. τοῦ ΠΒΡ (σχ. 137) πέριξ τῆς διαμέτρου του ΠΡ κατὰ τὴν ἰδίαν πάντοτε φοράν, ἕως ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν.

Ἀκτῖνες τῆς σφαίρας λέγονται αἱ ἴσαι ἀποστάσεις τοῦ κέντρου ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειάν της, π. χ. αἱ ΚΑ, ΚΠ, ΚΡ.

Διάμετρος τῆς σφαίρας λέγεται κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον καὶ τελειώνει καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, π.χ. ἡ ΠΡ. Ὅλαι αἱ διάμετροι εἶναι ἴσαι μεταξύ των, ὡς διπλάσιαι τῶν ἴσων ἀκτίνων.



Σχ. 137.

156. ***Θέσεις ἐπιπέδου πρὸς σφαῖραν.*** α´) Ἓν ἐπίπεδον καὶ μία σφαῖρα εἶναι δυνατὸν νὰ μὴ ἔχωσι κανὲν κοινὸν σημεῖον. Τότε ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος.

β´) Ἓν ἐπίπεδον καὶ μία σφαῖρα εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον. Τότε τὸ ἐπίπεδον λέγεται ***ἐφαπτόμενον*** τῆς σφαίρας καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.

Διὰ νὰ φέρωμεν ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας εἰς ἓν σημεῖον φέρομεν τὴν ἀκτῖνα εἰς τὸ σημεῖον αὐτό, καὶ ἔπειτα ἐπίπεδον κάθετον ἐπ᾽ αὐτὴν εἰς τὸ ληφθὲν σημεῖον. Ἐπειδὴ δὲ ἓν μόνον ἐπίπεδον δύναται νὰ ἀχθῇ κάθετον ἐπὶ εὐθεῖαν εἰς ἓν σημεῖον αὐτῆς, ἔπεται ὅτι ***εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ὑπάρχει ἓν μόνον ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον αὐτῆς.***

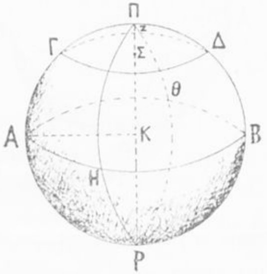
γ´) Ἓν ἐπίπεδον καὶ μία σφαῖρα εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωσι κοινὰ σημεῖα περισσότερα τοῦ ἑνός. Τότε ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος καὶ τὸ ἐπίπεδον τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ κύκλον.

ΜΕΓΙΣΤΟΙ ΚΑΙ ΜΙΚΡΟΙ ΚΥΚΛΟΙ ΤΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

Παράλληλοι κύκλοι, πόλοι, σφαιρικαὶ ζῶναι κτλ.

157. Εἴδομεν ὅτι, ὅταν κόψωμεν μίαν σφαῖραν μὲ ἓν ἐπίπεδον, ἡ τομὴ εἶναι κύκλος. Οἱ ***μεγαλύτεροι*** κύκλοι, τοὺς ὁποίους εἰμποροῦμεν οὕτω νὰ σχηματίσωμεν ἐπάνω εἰς μίαν δοθεῖσαν σφαῖραν, ἔχουν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας αὐτῆς καὶ παράγονται ὅταν τὸ ἐπίπεδον τῆς τομῆς διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.

Λέγονται δὲ τότε ***μέγιστοι κύκλοι*** τῆς σφαίρας. Ὅλοι δὲ οἱ ἄλλοι κύκλοι τῆς ἰδίας σφαίρας λέγονται ***μικροί.*** Π. χ. οἱ κύκλοι ΑΗΒΘΑ, ΠΗΡΘΠ (σχ. 138) εἶναι μέγιστοι κύκλοι τῆς σφαίρας, ὁ δὲ ΓΖΔΓ εἶναι μικρός.



Σχ. 138.

Ὅλοι οἱ μέγιστοι κύκλοι μιᾶς σφαίρας εἶναι ἴσοι μεταξύ των (διότι ἔχουν ἀκτῖνας ἴσας, τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας) καὶ ὁ καθεὶς διαιρεῖ τὴν σφαῖραν εἰς δύο ***ἡμισφαίρια***. Οἱ ἄλλοι ὅμως, οἱ μικροὶ κύκλοι τῆς σφαίρας, διαφέρουν ὁ εἷς ἀπὸ τὸν ἄλλον, διότι ὅσον ἡ τομὴ εἶναι μακρότερον ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, τόσον ὁ κύκλος εἶναι μικρότερος.

Παράλληλοι κύκλοι τῆς σφαίρας λέγονται ἐκεῖνοι, τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα μεταξύ των, π. χ. οἱ κύκλοι ΑΗΒΘΑ καὶ ΓΖΔΓ. ***Πόλους*** ἑνὸς κύκλου τῆς σφαίρας λέγομεν τά ἄκρα τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ τοῦ κύκλου.

Π. χ. ἂν ἡ διάμετρος ΠΡ εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΓΖΔΓ, τὰ ἄκρα της Π καὶ Ρ λέγονται ***πόλοι*** τοῦ κύκλου ΓΖΔΓ. Τοὺς ἰδίους πόλους ἔχει καὶ ὁ παράλληλος πρὸς τὸν ΓΖΔΓ κύκλος ΑΗΒΘΑ.

Κάθε πόλος ἔχει τὴν ἰδιότητα νὰ ἀπέχῃ ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, τοῦ ὁποίου εἶναι πόλος.

ΣΗΜ. Ἡ καταγραφὴ κύκλου ἐπάνω εἰς μίαν σφαῖραν γίνεται μὲ ἕνα ***εἰδικὸν*** διαβήτην, τὸν ***σφαιρικὸν*** διαβήτην (σχ. 139), τοῦ ὁποίου τὰ σκέλη εἶναι καμπύλα, διὰ νὰ εἰμπορῇ νὰ ἐγγίζῃ τὸ ἓν σκέλος τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, ὅταν τὸ ἄλλο στηρίζεται εἰς ἓν σταθερὸν σημεῖον τῆς σφαίρας. Τὸ σημεῖον αὐτὸ εἶναι προφανῶς εἷς ἀπὸ τοὺς δύο πόλους τοῦ γραφομένου κύκλου.


Σχ. 139.

158. ***Σφαιρικὸν τμῆμα*** ὀνομάζεται ἓν μέρος τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνουν δύο παράλληλα ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα κόπτουν τήν σφαῖραν.

Βάσεις τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος λέγονται οἱ δύο κύκλοι, εἰς τοὺς ὁποίους τελειώνει, ἂν τελειώνει, εἰς δύο, ἄλλως ἔχει ***μίαν μόνον*** βάσιν.

Ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος λέγεται ἡ κάθετος ἡ μεταξὺ τῶν δύο βάσεών του, ἂν ἔχῃ δύο, ἄλλως ὕψος του εἶναι ἡ κάθετος ἀπὸ τὸν πόλον τῆς βάσεώς του ἕως τὸ κέντρον τῆς βάσεως.

159. ***Σφαιρικὴ ζώνη***. λέγεται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνουν δύο παράλληλα ἐπίπεδα ἢ τὸ ὁποῖον ἀποκόπτεται μὲ ἓν ἐπίπεδον ἀπὸ ὅλην τὴν ἐπιφάνειάν της. Ὥστε ***ἡ σφαιρικὴ ζώνη εἶναι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος***.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

287) Πόσαι εἶναι αἱ διάφοροι θέσεις ἐπιπέδου πρὸς σφαῖραν;

288) Ποία εἶναι ἡ σχετικὴ θέσις ἐπιπέδου καὶ σφαίρας, ὅταν ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου αὐτῆς ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς;

289) Ποία εἶναι ἡ σχετικὴ θέσις ἐπιπέδου καὶ σφαίρας, ὅταν ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου αὐτῆς ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνά της;

290) Ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου μιᾶς σφαίρας ἀπὸ τινος ἐπιπέδου εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς. Ποία εἶναι ἡ σχετικὴ θέσις τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου;

291) Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ἀκτίνων δύο σφαιρῶν καὶ τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων των, ὅταν ἡ μία σφαῖρα εἶναι ὅλη ἐκτὸς τῆς ἄλλης καὶ ποία, ὅταν αἱ σφαῖραι ἔχουσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, ἀλλ' ἡ μία εἶναι ἐκτὸς τῆς ἄλλης;

292) Ἐὰν νοήσωμεν μίαν σφαῖραν ἐντὸς κυλίνδρου καὶ τοῦ ὁποίου κυλίνδρου αἱ βάσεις ἐφάπτονται τῆς σφαίρας (κύλινδρος περιγεγραμμένος εἰς σφαῖραν) τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου εἶναι φανερόν, ὅτι ἰσοῦται μὲ τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας. Διὰ ποίας πρακτικῆς κατασκευῆς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν ἀκτῖνα δοθείσης σφαίρας;

160. ***Μέτρησις τῆς σφαίρας α΄) Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας ἑνὸς μεγίστου κύκλου της ἐπὶ τὴν διάμετρόν της***. Δηλ. ἂν ἡ ἀκτὶς της ὀνομασθῇ α, ἡ περιφέρεια μεγίστου κύκλου της εἶναι $2 \times \pi \times \alpha$ καὶ ἐπομένως

τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἶναι $2\times\pi\times\alpha\times2\times\alpha$ $=4\times\pi\times\alpha^2$. Ἑπομένως ἴσον καὶ πρὸς τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς μεγίστου κύκλου της.

Π.χ. ἂν $\alpha=5$, τότε τὸ ἐμβαδόν της εἶναι $4\times\pi\times25=\pi\times100$ $=314{,}15$ τετρ. μέτρα.

β′) **Ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης. Τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς σφαιρικῆς ζώνης εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας ἑνὸς μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ὕψος τῆς ζώνης.** Δηλ. ἂν υ εἶναι τὸ ὕψος τῆς ζώνης καὶ α ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας θὰ εἶναι $2\times\pi\times\alpha\times\upsilon$. Π. χ. ἂν $\alpha=5$, $\upsilon=2$, θὰ εἶναι $2\times\pi\times5\times2=\pi\times20=62{,}83$ τετρ. μέτρα.

β′) **Ὄγκος τῆς σφαίρας.** Ἂς φαντασθῶμεν ἕνα μέγα πλῆθος πυραμίδων, ἑκάστη τῶν ὁποίων νὰ ἔχῃ βάσιν ἀπείρως μικρὰν καὶ ἂς θέσωμεν τοιαύτας πυραμίδας οὕτως, ὥστε ὅλαι νὰ ἔχουν τὴν κορυφήν των εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ τὰς βάσεις των ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς καὶ θέσωμεν τόσας, ὥστε νὰ καλυφθῇ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας. Εἶναι φανερὸν τότε, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν πυραμίδων τούτων θὰ μᾶς δώσῃ τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας. Ἐπειδὴ δὲ ὅλαι αὗται αἱ πυραμίδες ἔχουσιν ὕψος ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα, ἔπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων αὐτῶν, δηλαδὴ **ὁ ὄγκος σφαίρας εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνός της.** Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἀκτῖνος α εἶναι $4\times\pi\times\alpha^2$, ἑπομένως ὁ ὄγκος αὐτῆς $\frac{1}{3}\times\alpha\times4\times\pi\times\alpha^2=\frac{4}{3}\times\pi\times\alpha^3$. Π. χ. ἐὰν ἡ ἀκτὶς σφαίρας εἶναι 2 μ., ὁ ὄγκος της εἶναι

Σχ. 140.

$\frac{4}{3}\times3{,}1415\times2^3=33{,}509$ τ.μ.

ΠΡΑΚΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΟΓΚΟΥ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

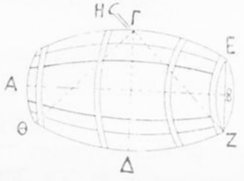
161. Εἰς τὰς ἐφαρμογὰς τῆς καθημερινῆς ζωῆς μας χρειάζεται συχνὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον διαφόρων σωμάτων, π.χ. κιβωτίων, δοχείων κτλ. Καὶ ἂν μὲν τὰ ἀντικείμενα αὐτὰ ἔχουν ἓν ἀπὸ τὰ σχήματα, τὰ ὁποῖα ἐξητάσαμεν ἤδη εἰς τὴν γεωμετρίαν καὶ γνωρίζομεν μὲ ποῖον κανόνα εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον των (π.χ.

ἂν εἶναι παραλληλεπίπεδα ἢ κυλινδρικὰ ἢ κωνικὰ ἢ σφαιρικὰ κτλ.) ὁ ὄγκος των ὑπολογίζεται ἀκριβῶς. Ἂν ὅμως καθὼς συχνότατα συμβαίνει, ἔχουν ἄλλο σχῆμα πολυπλοκώτερον, τότε προσπαθοῦμεν νὰ τὰ φαντασθῶμεν διῃρημένα εἰς μέρη μὲ γνωστόν μας σχῆμα, ἢ μὲ σχῆμα τὸ ὁποῖον νὰ πλησιάζῃ πολὺ εἰς γνωστόν μας σχῆμα. Καὶ μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον των, ἂν ὄχι ἀκριβῶς, τοὐλάχιστον μὲ μεγάλην προσέγγισιν. Δύο σπουδαῖα παραδείγματα εἶναι τὰ ἑξῆς :

Σχ. 141.

162. ***Εὕρεσις τοῦ ὄγκου ἑνὸς κάδου (κουβᾶ).*** Ὁ κάδος ἔχει τὸ σχῆμα κολούρου κώνου (σχ. 141), ἑπομένως ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ὄγκου τοῦ κολούρου κώνου (ἐδ. 153).

163. ***Εὕρεσις τοῦ ὄγκου ἑνὸς βαρελίου.*** Τὸ βαρέλιον (σχ. 142) δὲν ἔχει σχῆμα γνωστόν μας ἀπὸ τὴν γεωμετρίαν. Τὸν ὄγκον του λοιπὸν εὑρίσκομεν κατὰ προσέγγισιν κατὰ πολλοὺς τρόπους·



Σχ. 142.

α΄) τὸ ἐξομοιώνομεν μὲ δύο κολούρους κώνους μὲ κοινὴν βάσιν τὴν μέσην περιφέρειάν του (ὅπου εἶναι χονδρότερον)· β΄) τὸ ἐξομοιώνομεν μὲ κύλινδρον ὁ ὁποῖος νὰ ἔχῃ ὕψος μὲν τὴν ἐσωτερικὴν ἀπόστασιν τῶν κέντρων τῶν δύο βάσεών του, ἀκτῖνα δὲ βάσεως τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων τῆς ἐσωτερικῆς του βάσεως καὶ τοῦ μέσου του (ὅπου εἶναι χονδρότερον)· γ΄) Ὄγκος βαρελίου$=0{,}262\times(\Delta^2+\delta^2)\times M$, ὅπου Δ εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ διάμετρος τοῦ μέσου τοῦ βαρελίου, δ ἡ ἐσωτερικὴ διάμετρος τῆς μιᾶς ἀπὸ τὰς βάσεις του καὶ Μ ἡ ἐσωτερικὴ ἀπόστασις τῶν δύο του βάσεων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

293) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι 20 μ. ;

294) Ἡ διάμετρος σφαίρας τινὸς εἶναι 2,2 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ;

295) Ἡ περιφέρεια τοῦ μεγίστου κύκλου μιᾶς σφαίρας εἶναι 62,83 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της ;

296) Ἑκάστης τῶν ἀνωτέρω σφαιρῶν νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος.

297) Ἡ περιφέρεια τοῦ μεγίστου κύκλου τῆς Γῆς εἶναι περίπου 40000000 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς της, πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της καὶ πόσα κυβικὰ μέτρα εἶναι ὁ ὄγκος της ;

298) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης ἡ ὁποία ἔχει ὕψος 1,4 μ., ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς σφαίρας εἶναι 3 μέτρα.

299) Ἑκάστη ἀπὸ τὰς δύο εὐκράτους ζώνας τῆς Γῆς ἔχει ὕψος 3305 χιλιόμετρα περίπου. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἑκάστης ;

300) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος βαρελίου διὰ τοῦ τύπου, τὸ ὁποῖον ἔχει $\Delta=0,70$ μ., $\delta=0,60$ μ. καὶ $M=1\frac{1}{2}$ μέτρα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΜΕΙΚΤΟΙ

301) Πόσων μοιρῶν γωνίαν σχηματίζει ὁ ὡροδείκτης καὶ ὁ λεπτοδείκτης ἑνὸς ὡρολογίου εἰς τὴν 10ην ὥραν, τὴν 12ην καὶ τὴν 3ην ;

302) Πόσων μοιρῶν γωνίαν σχηματίζει ἡ διεύθυνσις πρὸς Α μετὰ τῆς διευθύνσεως πρὸς Β καὶ πόσων μοιρῶν μετὰ τῆς διευθύνσεως πρὸς ΒΑ ;

303) Διχοτομήσατε δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικὰς γωνίας καὶ μετρήσατε τὴν γωνίαν τῶν διχοτόμων αὐτῶν. Ποῖον ἀριθμὸν μοιρῶν πρέπει ἀπαραιτήτως νὰ εὕρητε ;

304) Φέρατε δύο εὐθείας παραλλήλους καὶ κόψατε αὐτὰς διὰ τρίτης εὐθείας· κατόπιν διχοτομήσατε τὰς δύο γωνίας, αἱ ὁποῖαι κεῖνται μεταξὺ τῶν ἀχθεισῶν παραλλήλων καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης καὶ τέλος μετρήσατε τὴν γωνίαν τῶν διχοτόμων τούτων. Ποῖον ἀριθμὸν μοιρῶν πρέπει ἀπαραιτήτως νὰ εὕρητε ;

305) Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον γράψατε δύο χορδὰς ἴσας καὶ κατόπιν συγκρίνατε τὰς ἀποστάσεις τοῦ κέντρου ἀπὸ ἑκάστην τῶν χορδῶν. Ἐκ τοῦ ἀποτελέσματος δὲ τῆς συγκρίσεως ταύτης νὰ ἐξαγάγητε ἓν γενικὸν συμπέρασμα.

306) Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον γράψατε δύο χορδὰς ἀνίσους καὶ συγκρίνατε τὰς ἀποστάσεις τοῦ κέντρου ἀπὸ ἑκάστην τῶν ἀχθει-

σῶν χορδῶν, ἐκ τῆς συγκρίσεως δὲ ταύτης νὰ ἐξαγάγητε γενικόν τι συμπέρασμα.

307) Κατασκευάσατε ἓν οἱονδήποτε τρίγωνον ΑΒΓ· κατόπιν φέρατε καθέτους ἐπὶ τὰς ΒΓ καὶ ΑΓ καὶ εἰς τὰ μέσα αὐτῶν. Ἐὰν δὲ αἱ κάθετοι αὐτῶν τέμνωνται εἰς τὸ Δ νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ Δ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ἑκάστης τῶν κορυφῶν Α,Β,Γ.

308) Ἔχομεν ἓν τρίγωνον ΑΒΓ· ἐκ τῆς κορυφῆς Α φέρομεν α) εὐθεῖαν μέχρι τοῦ μέσου τῆς ΒΓ, β) τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ γ) τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α. Αἱ τρεῖς αὗται εὐθεῖαι εἶναι διάφοροι. Εἰς ποῖον εἶδος τριγώνου αἱ τρεῖς αὗται εὐθεῖαι συμπίπτουν εἰς μίαν μόνην ;

309) Λάβατε μίαν γωνίαν ΑΒΓ καὶ μὲ πλευρὰς ΑΒ καὶ ΒΓ καὶ κορυφὴν τὸ Β κατασκευάσατε δύο γωνίας ἴσας μεταξύ των καὶ ἐκτὸς τῆς ΑΒΓ τὰς ΑΒΔ καὶ ΓΒΕ. Δείξατε ὅτι αἱ γωνίαι ΓΒΔ καὶ ΑΒΕ εἶναι ἴσαι.

310) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον τοῦ ὁποίου ἡ γωνία τῆς κορυφῆς νὰ εἶναι 40^0.

311) Κατασκευάσατε ἓν τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Μετρήσατε ἔπειτα δύο ἀπέναντι γωνίας καὶ εὕρητε κατόπιν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν. Τὸ αὐτὸ νὰ γίνῃ καὶ διὰ τὰς ἄλλας δύο ἀπέναντι γωνίας. Ἐκ τῶν ἐξαγομένων δὲ ποὺ θὰ εὕρητε νὰ συναγάγητε γενικὴν πρότασιν.

312) Αἱ γωνίαι αἱ ὁποῖαι ὑπερβαίνουσι τὰς 2 ὀρθὰς λέγονται κυρταί. Ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι 90^0. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ κυρτὴ γωνία ΑΒΓ;

313) Πόσων μοιρῶν, πρώτων καὶ δευτέρων λεπτῶν εἶναι ἡ γωνία ἥτις εἶναι συμπληρωματικὴ τῆς γωνίας $49^0\ 51'\ 48''$;

314) Τῆς ἀνωτέρω γωνίας νὰ εὑρεθῇ ἡ παραπληρωματική της.

315) Αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχουσιν ἄθροισμα 180^0. Ἐὰν ἡ ΑΒΓ εἶναι $79^0\ 2'\ 14''$ πόσον εἶναι ἡ ΔΕΖ ;

316) Τριγώνου ΑΒΓ εἶναι γων. $Β=60^0$ καὶ γων. $Γ=70^0$. Ἐὰν αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τούτων τέμνονται εἰς τὸ Δ πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ γωνία ΒΔΓ ;

317) Δύο γωνίαι τριγώνου εἶναι $63^0\ 42'$ καὶ $40^0\ 53'$. Πόσον εἶναι ἡ τρίτη γωνία τοῦ τριγώνου ;

318) Τριγώνου ΑΒΓ εἶναι γων. $Α=75^0$ καὶ γων. $Β=36^0$· ἐὰν ἤδη ἀχθῇ ἡ ΑΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ νὰ εὑρεθῇ ἑκάστη τῶν γωνιῶν τῶν δύο σχηματιζομένων τριγώνων.

319) Δύο ἄνθρωποι ἐκκινοῦσιν ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ ἀπομακρύνονται ἀκολουθοῦντες διευθύνσεις καθέτους πρὸς ἀλλήλους καὶ ὁ μὲν εἷς ἀπομακρύνεται ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐκκινήσεως 12 μέτρα, ὁ δὲ ἄλλος 16 μέτρα. Πόσον ἀπέχει ὁ εἷς τοῦ ἄλλου; (§ 105).

320) Τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου, αἱ δὲ διαστάσεις αὐτοῦ εἶναι 4 μέτρα καὶ 5 μέτρα. Ἐπὶ τοῦ πατώματος αὐτοῦ εἶναι ἐστρωμένος τάπης σχήματος τετραγώνου πλευρᾶς 3,5 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀκαλύπτου μέρους τοῦ πατώματος τοῦ δωματίου ;

321) Ἕνα παράθυρον ἔχει ὕψος 2 μ. καὶ πλάτος 1,2 μέτρα, ὑπάρχουν δὲ εἰς αὐτὸ 4 ὑαλοπίνακες διαστάσεων ἕκαστος 0,8 καὶ 0,5 μ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῶν ξυλίνων μερῶν τοῦ παραθύρου;

322) Παραλληλογράμμου τινὸς ἑκάστη τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι 7 μ., ἡ δὲ ἀπόστασις αὐτῶν εἶναι 6,25 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου τούτου καὶ κατόπιν νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων παραλλήλων πλευρῶν, ἐὰν ἑκάστη τούτων εἶναι 10 μ.

323) Παραλληλογράμμου τινὸς ΑΒΔΓ ἡ βάσις ΑΒ εἶναι 0,6, τό δὲ ὕψος 0,45 μ., ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΓΔ λαμβάνομεν σημεῖόν τι Ε καὶ φέρομεν τὰς ΕΑ καὶ ΕΒ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΕΒ.

324) Τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ αἱ πλευραὶ ΑΕ καὶ ΒΓ εἶναι ἴσαι καὶ κάθετοι ἐπὶ τῆς ΑΒ· ἐπίσης εἶναι μεταξύ των καὶ αἱ πλευραὶ ΔΕ καὶ ΔΓ. Ἡ ΑΒ εἶναι 6 παλάμαι, ἡ ΕΑ 26 δάκτυλοι καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ Δ ἀπὸ τῆς ΑΒ εἶναι 38 δάκτυλοι. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πενταγώνου.

325) Ἐὰν δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ ἔχωσι κοινὰ δύο σημεῖα Α καὶ Β, εἶναι φανερὸν ὅτι θὰ ἔχωσι κοινὰ καὶ τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας ΑΒ. Ἐὰν τώρα λάβωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ ἓν σημεῖον Γ ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ περιστρέψωμεν τὸ ἄλλο ἐπίπεδον Π περὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὸ Γ, θὰ ἴδωμεν ὅτι τὰ δύο ἐπίπεδα θὰ ἐφαρμόσουν καὶ θὰ ἀποτελέσουν ἕνα μόνον ἐπίπεδον. Κατόπιν τούτου ἀπαντήσατε εἰς τὴν ἐρώτησιν, διὰ τριῶν σημείων κειμένων ἐπὶ μιᾶς εὐθείας πόσα ἐπίπεδα διέρχονται καὶ πόσα ἐπίπεδα διέρχονται διὰ τριῶν σημείων μὴ κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ;

326) Δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου· διατί ;

327) Μία εὐθεῖα καὶ ἓν σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου, διατί ;

328) Δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου, διατί ;

329) Κιβώτιον ἐκ σανίδων ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, αἱ ἐξωτερικαὶ διαστάσεις αὐτοῦ εἶναι 1,6 μέτρα μῆκος, 1,5 μ. πλάτος καὶ 1 μέτρον ὕψος. Τὸ πάχος τῶν σανίδων ἐκ τῶν ὁποίων εἶναι κατεσκευασμένον εἶναι 0,02 μέτρων· εἶναι δὲ δὲ πλῆρες σάπωνος. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ σάπωνος ;

330) Μία δεξαμενὴ μήκους 7 μ. καὶ πλάτους 6 μ. χωρεῖ 210 κυβικὰ μέτρα ὕδατος. Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος τῆς δεξαμενῆς ;

331) Μολυβδοκόνδυλον κυλινδρικὸν ἔχει μῆκος 14 δακτύλων καὶ διάμετρον 1 δακτύλου, ἡ δὲ διάμετρος τοῦ γραφίτου 2 γραμμαί· εὑρεῖν τὸν ὄγκον τοῦ ξύλου ἐκ τοῦ ὁποίου εἶναι κατασκευασμένον τὸ μολυβδοκόνδυλον.

332) Πυραμὶς ἔχει βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 5,6 παλαμῶν· τὸ δὲ ὕψος αὐτῆς εἶναι 0,96 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος αὐτῆς.

333) Α καὶ Β εἶναι δύο διαδοχικαὶ κορυφαὶ κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος 1 μέτρου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τῶν μηκῶν τοῦ τόξου ΑΒ καὶ τῆς χορδῆς ΑΒ.

334) Τὸ διάγραμμα ἐδαφικῆς ἐκτάσεως κατεσκευάσθη ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{10000}$· εἶναι δὲ τοῦτο ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι 0,25 μ. καὶ 0,42 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐδαφικῆς ταύτης ἐκτάσεως.

335) Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς ἑνὸς μέτρου· μὲ τὰς πλευρὰς δὲ ταύτας ὡς διαμέτρους γράφομεν τέσσαρα ἡμικύκλια ἐξωτερικὰ πρὸς τὸ τετράγωνον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου τοῦ οὕτω προκύπτοντος σχήματος, ὡς καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

336) Ἕνα σῶμα ἔχει σχῆμα κυλίνδρου, περατοῦται ὅμως ἑκατέρωθεν εἰς κώνους ἴσους καὶ τῶν ὁποίων αἱ βάσεις ἰσοῦνται μὲ τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου. Ἡ διάμετρος τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου εἶναι 0,08 μέτρα, τὸ μῆκος αὐτοῦ εἶναι 0,8 μέτρα καὶ τὸ ὕψος ἑκάστου κώνου εἶναι 0,05 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ σώματος τούτου.

337) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος σφαίρας ἀκτῖνος 1 μ. καὶ κατόπιν νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος σφαίρας

ἀκτῖνος διπλασίας καὶ τέλος νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν, ὡς καὶ τῶν ὄγκων τῶν σφαιρῶν τούτων.

338) Κατασκευάσατε ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ καθέτους πλευρὰς 6 δακτ., 8 δακτ. Ἔπειτα μὲ διαμέτρους τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου γράψατε ἡμικύκλια ἐξωτερικὰ πρὸς τὸ τρίγωνον καὶ εὕρητε τὰ ἐμβαδὰ ἑκάστου τῶν ἡμικυκλίων· κατόπιν συγκρίνατε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἡμικυκλίων τῶν γραφέντων ἐπὶ τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ τριγώνου πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἡμικυκλίου τοῦ γραφέντος ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης, ἐκ δὲ τῆς συγκρίσεως αὐτῆς διατυπώσατε γενικὴν πρότασιν.

339) Διὰ τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων παραλληλογράμμων φέρατε εὐθείας, αἱ ὁποῖαι νὰ περατοῦνται εἰς τὰς πλευρὰς αὐτοῦ. Κατόπιν συγκρίνατε πρὸς ἄλληλα τὰ τμήματα τῶν εὐθειῶν τούτων εἰς ἃ διαιροῦνται ὑπὸ τοῦ κέντρου· ἐκ δὲ τῆς συγκρίσεως ταύτης νὰ συναγάγητε γενικήν τινα πρότασιν.

340) Εἰς κύκλον φέρομεν τυχοῦσαν διάμετρον καὶ ἔκ τινος σημείου τῆς περιφερείας φέρομεν χορδὰς εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου. Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν χορδῶν τούτων ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου.

341) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ βάσιν 5 δακτύλων καὶ ὕψος 6 δακτύλων. Πόσα τοιαῦτα τρίγωνα δύνασθε νὰ κατασκευάσητε; Τί εἶναι ταῦτα πρὸς ἄλληλα;

342) Δίδεται ἓν ἐπίπεδον Π καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ κάθετος ἐπ᾽ αὐτό. Διὰ τὰς ΑΒ διέρχονται ἐπίπεδα. Ἕκαστον τῶν ἐπιπέδων τούτων εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ Π. Ἐξ ἄλλου ἐὰν δύο ἐπίπεδα τεμνόμενα εἶναι κάθετα ἐπὶ τρίτον καὶ ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ τρίτον ἐπίπεδον. Δείξατε τοιαῦτα ἐπίπεδα εἰς τὸ δωμάτιον.

343) Αἱ διάφοροι θέσεις δύο σφαιρῶν πρὸς ἀλλήλας εἶναι αἱ αὐταὶ μὲ τὰς διαφόρους θέσεις δύο κύκλων πρὸν ἀλλήλους. Εὕρητε τὰς σχέσεις μεταξὺ τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων αὐτῶν καὶ τῶν ἀκτίνων των. Ἡ τομὴ δύο σφαιρῶν τί σχῆμα εἶναι;

344) Ἓν ἐπίπεδον ἐφάπτεται τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου. Κατὰ ποίαν γραμμὴν ἐφάπτεται αὐτῆς;

345) Ἓν ἐπίπεδον ἐφάπτεται τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου. Κατὰ ποίαν γραμμὴν ἐφάπτεται αὐτῆς;

346) Δίδεται ὀρθὸν τριγωνικὸν πρῖσμα μὲ βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον. Τί εἶναι πρὸς ἀλλήλας αἱ δίεδροι γωνίαι αἱ σχηματι-

ζόμεναι ὑπὸ τῶν ἑδρῶν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτῆς;

347) Τέμνω κύλινδρον δι᾽ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα αὐτοῦ. Τὶ σχῆμα ἔχει ἡ τομὴ καὶ τὶ σχῆμα θὰ ἔχῃ ἡ τομὴ ἐὰν τὸ τέμνον ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος;

348) Τέμνω κῶνον δι᾽ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα αὐτοῦ καὶ δι᾽ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος τούτου. Τὶ σχῆμα ἔχει ἑκάστη τομή;

349) Ἡ περίμετρος ὀρθογωνίου εἶναι 96 μέτρα, ἡ δὲ βάσις εἶναι τριπλασία τοῦ ὕψους αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου.

350) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ῥόμβου, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ εἶναι 5 μέτρα καὶ μία τῶν διαγωνίων του 8 μέτρα.

351) Τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου εἶναι 81 τετραγωνικοὶ δάκτυλοι. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου.

352) Τὸ μῆκος τόξου κύκλου ἀκτῖνος 5 μ. εἶναι 3,927 μέτρα. Πόσων μοιρῶν, πρώτων καὶ δευτέρων λεπτῶν εἶναι τὸ τόξον τοῦτο;

353) Τομεὺς κύκλου ἀκτῖνος 6 μ. ἔχει ἐμβαδὸν 1 τετραγωνικὸν μέτρον. Πόσων μοιρῶν, πρώτων καὶ δευτέρων λεπτῶν εἶναι ἡ γωνία τοῦ τομέως;

354) Τρίγωνον ὀρθογώνιον μὲ πλευρὰς 3 μ., 4 μ. καὶ 5 μ. στρέφεται πρῶτον περὶ τὴν πλευρὰν 3 καὶ ἔπειτα περὶ τὴν πλευρὰν 4. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ὄγκοι τῶν οὕτω σχηματιζομένων δύο κώνων καὶ κατόπιν νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τούτων.

355). Ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι 4 μ. καὶ 2 μ. στρέφεται πρῶτον περὶ τὴν πλευρὰν 4 καὶ κατόπιν περὶ τὴν πλευρὰν 2. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ὄγκοι τῶν οὕτω σχηματιζομένων κυλίνδρων καὶ κατόπιν νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων αὐτῶν.

356) Κύβος τέμνεται εἰς δύο ἴσα μέρη ὑπὸ ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ δύο ἀπέναντι ἀκμῶν. Ποῖον εἶναι τὸ σχῆμα τῆς τομῆς;

357) Δίδεται ἡ εὐθεῖα ΑΒ· ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ χάρτου, σημειώσατε ἐπ᾽ αὐτοῦ σημεῖα κείμενα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ καὶ εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ αὐτῆς. Τὶ γραμμὴ πρέπει νὰ

εἶναι ἡ ἑνοῦσα τὰ σημεῖα αὐτὰ καὶ ποίαν διεύθυνσιν ἔχει ἡ γραμμὴ αὕτη ὡς πρὸς τὴν ΑΒ ;

358) Δίδεται ἓν τρίγωνον ΑΒΓ, κατόπιν κατασκευάσατε τρίγωνα ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒ καὶ ὕψος ἴσον μὲ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ κείμενα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ πρὸς ὃ κεῖται καὶ ἡ κορυφὴ Γ. Αἱ κορυφαὶ τῶν τριγώνων τούτων ἐπὶ ποίας γραμμῆς κεῖνται καὶ ποίαν διεύθυνσιν ἔχει ὡς πρὸς τὴν ΑΒ;

359) Ἐπὶ ποίας ἐπιφανείας κεῖνται τὰ σημεῖα τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ ἓν δοθὲν σημεῖον ;

360) Δύο κύλινδροι ἔχουσιν ἴσας βάσεις καὶ τὸ ὕψος τοῦ ἑνὸς εἶναι διπλάσιον τοῦ ὕψους τοῦ ἄλλου. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῶν ὄγκων αὐτῶν ;

361) Δύο κῶνοι ἔχουσιν ἴσας βάσεις· ἀλλὰ τὸ ὕψος τοῦ ἑνὸς εἶναι τριπλάσιον τοῦ ὕψους τοῦ ἄλλου. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῶν ὄγκων αὐτῶν ;

ΤΕΛΟΣ

'Αριθ. Πρωτοκ. 44229

'Εν 'Αθήναις τῇ 12 Αὐγούστου 1932

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Ο ΥΠΟΥΡΓΟΣ
ΤΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

"Εχοντες ὑπ' ὄψει τὸ ἄρθρον 3 τοῦ Νόμου 5045, καὶ τὴν ἀπόφασιν τῆς οἰκείας κριτικῆς ἐπιτροπῆς τῶν διδακτικῶν βιβλίων τῆς Μέσης 'Εκπαιδεύσεως τὴν περιλαμβανομένην εἰς τὸ ὑπ' ἀρ. 401 πρακτικὸν τοῦ 'Εκπαιδευτικοῦ Γνωμοδοτικοῦ Συμβουλίου ἀποφασίζομεν, ὅπως ἐγκριθῇ ὡς διδακτικὸν βιβλίον πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῆς Α' καὶ Β' τάξεως τῶν Γυμνασίων τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον «***Πρακτικὴ Γεωμετρία***» βιβλίον τῶν ***Ι. Χατζιδάκι*** καὶ ***Χ. Μπαρμπαστάθη*** διὰ μίαν πενταετίαν, ἀρχομένην ἀπὸ τοῦ σχολικοῦ ἔτους 1932—1933 ὑπὸ τὸν ὅρον, ὅπως ὁ συγγραφεὺς συμμορφωθῇ κατὰ τὴν ἐκτύπωσιν τοῦ βιβλίου τούτου πρὸς τὰς ὑποδείξεις τῆς κριτικῆς ἐπιτροπῆς.

'Ο 'Υπουργὸς
Π. ΠΕΤΡΙΔΗΣ

"Αρθρον 6ον τοῦ Π. Διατάγματος
«Περὶ τοῦ τρόπου τῆς διατιμήσεως τῶν ἐγκεκριμένων διδακτικῶν βιβλίων».

Τὰ διδακτικὰ βιβλία τὰ πωλούμενα μακρὰν τοῦ τόπου τῆς ἐκδόσεώς των ἐπιτρέπεται νὰ πωλῶνται ἐπὶ τιμῇ ἀνωτέρᾳ κατὰ 15 $^0/_0$ τῆς ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ παρόντος Διατάγματος κανονισθείσης ἄνευ βιβλιοσήμου τιμῆς πρὸς ἀντιμετώπισιν τῆς δαπάνης συσκευῆς καὶ τῶν ταχυδρομικῶν τελῶν, ὑπὸ τὸν ὅρον ὅπως ἐπὶ τοῦ ἐσωτερικοῦ μέρους τοῦ ἐξωφύλλου ἢ τῆς τελευταίας σελίδος τούτου ἐκτυποῦται τὸ παρὸν ἄρθρον.

κεντρεχε..

πωτέρων πνε

κείνου, ἡ ὁποί

ἶπε περὶ τῶν Ισπα-

ἕνα μόνον καλὸ βι-

ἄλλα