

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΛΓΕΒΡΑ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Γ. ΓΡΑΦΑΚΟΥ - Κ. ΔΙΑΚΑΚΗ - Σ. ΜΑΝΤΖΑΡΑ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΘΗΝΑ 1978

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Με απόφαση τῆς Ἑλληνικῆς Κυβερνήσεως τὰ δι-
δακτικά βιβλία τοῦ Δημοτικοῦ, Γυμνασίου καὶ Λυ-
κείου τυπώνονται ἀπὸ τὸν Ὅργανισμό Ἐκδόσεως
Διδακτικῶν Βιβλίων καὶ μοιράζονται ΔΩΡΕΑΝ.

ΛΑΤΙΝΙΚΑ

Τὸ βιβλίο μεταγλωττίστηκε ἀπὸ τοὺς καθηγητὲς Ἀνδρ. Πατεράκη,
μαθηματικό, καὶ Ἀθ. Ματσούκα, φιλόλογο.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

(ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΛΓΕΒΡΑ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ)

Γ. ΓΡΑΦΑΚΟΥ - Κ. ΔΙΑΚΑΚΗ - Σ. ΜΑΝΤΖΑΡΑ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΘΗΝΑ 1978

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

(ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΛΓΕΒΡΑ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ)

Ε. ΤΡΑΪΑΝΙΔΗΣ - Δ. ΔΕΛΛΗΝΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΠΕΡΙ ΣΥΝΟΛΩΝ

1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ

(Επαναλήψεις και συμπληρώσεις)

§ 1. Φέρετε στο νοῦ σας τὰ πρόσωπα τῆς οἰκογένειάς σας καὶ θεωρήστε τα σὰν μιὰ ὁλότητα (μιὰ ὁμάδα, μιὰ συλλογὴ προσώπων). Τί παρατηρεῖτε;

Παρατηροῦμε ὅτι μὲ ἀντικείμενα, ποὺ τὰ γνωρίζουμε καλὰ (τὰ πρόσωπα τῆς οἰκογένειάς μας) καὶ ποὺ δὲν τὰ συγχέουμε μεταξύ τους, σχημάτισαμε μὲ τὴ σκέψη μας ἓνα νέο ἀντικείμενο.

Τὸ ἀντικείμενο αὐτὸ τὸ ὀνομάζουμε **σύνολο**. Τὸ σύνολο τῶν προσώπων τῆς οἰκογένειάς μας. Μποροῦμε λοιπὸν νὰ θεωρήσουμε ἀντικείμενα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ἐντελῶς καθορισμένα καὶ διαφορετικὰ μεταξύ τους σὰν ἓνα ἀντικείμενο: Τὸ σύνολο τῶν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Σύνολο εἶναι τὸ ἀντικείμενο, ποὺ σχηματίζουμε (μὲ τὴ σκέψη μας ἢ τὴ φαντασίᾳ μας), ἂν θεωρήσουμε ἀντικείμενα ἐντελῶς καθορισμένα καὶ διαφορετικὰ μεταξύ τους σὰν ἓνα ἀντικείμενο.

Τὰ ἀντικείμενα αὐτὰ λέγονται **στοιχεῖα τοῦ συνόλου** καὶ συμβολίζονται μὲ μικρὰ γράμματα τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$. Τὸ σύνολο τῶν ἀντικειμένων $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, συμβολίζεται μὲ κεφαλαῖο γράμμα: A ἢ B ἢ $\dots$.

Λέμε ὅτι **τὰ στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου A ἀνήκουν σ' αὐτό**, καὶ γράφουμε συμβολικὰ $\alpha \in A, \beta \in A$ κ.ο.κ., ἢ ὅτι **ἀπὸ τὸ σύνολο A λαμβάνονται τὰ στοιχεῖα του**. Συμβολικὰ $A \ni \alpha$ ἢ $A \ni \beta$ (ἀπὸ τὸ A λαμβάνεται τὸ α κ.λ.π.). *Ἄν τὸ ἀντικείμενο α δὲν ἀνήκει στὸ σύνολο A , γράφουμε $\alpha \notin A$.

§ 2. Ἐνα σύνολο καθορίζεται, ἂν δηλώσουμε τὰ στοιχεῖα του καὶ τὰ γράψουμε μέσα σὲ ἄγκιστρα· π.χ. τὸ σύνολο τῶν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, γράφεται $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Αὐτὸ τὸν τρόπο παραστάσεως τὸν λέμε καθορισμὸ τοῦ συνόλου μὲ ἀναγραφή τῶν στοιχείων του.

Παράδειγμα. Νὰ ὁρισθεῖ τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν 5, 6, 7, 8, 9. Τὸ σύνολο αὐτὸ ὀρίζεται ὡς ἐξῆς: $\{5, 6, 7, 8, 9\}$.

Μποροῦμε ὅμως νὰ ὀρίσουμε τὸ σύνολο αὐτὸ καὶ ὡς τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ποὺ εἶναι μεγαλύτεροι τοῦ 4 καὶ μικρότεροι τοῦ 10, καὶ νὰ γράψουμε $\{\chi/\chi \text{ φυσικὸς ἀριθμὸς καὶ } 4 < \chi < 10\}$.

Τὸν τρόπο αὐτὸν τὸν λέμε καθορισμὸ τοῦ συνόλου μὲ περιγραφή.

*Ἐνα σύνολο καθορίζεται μὲ περιγραφή, ἂν περιγράψουμε μιὰ χαρα-

κτηριστική ιδιότητα των στοιχείων του. Δηλαδή μιὰ ιδιότητα, πού τήν έχουν όλα τὰ στοιχεία του καί μόνο αὐτά.

Μιὰ ιδιότητα συμβολίζεται μέ $p(\cdot)$ ἢ $q(\cdot)$. Π.χ. $q(\cdot)$ σημαίνει «φυσικός ἀριθμός μεγαλύτερος τοῦ 10». Γιά τοὺς 11, 13, 17, πού ἔχουν τήν ιδιότητα αὐτή, γράφομε $11:q(11)^*$, $13:q(13)$, $17:q(17)$. Γιά τοὺς 6, 3, 2, πού δέν ἔχουν τήν ιδιότητα αὐτή, γράφομε ὄχι $6:q(6)$, ὄχι $3:q(3)$, ὄχι $2:q(2)$. Γιά ἓνα ἀντικείμενο x , πού ἔχει τήν ιδιότητα $q(\cdot)$, γράφομε $x:q(x)$. Δηλαδή τὸ x ἔχει τήν ιδιότητα $q(\cdot)$. Γιά ἓνα ἀντικείμενο ψ , πού δέν ἔχει τήν ιδιότητα αὐτή, γράφομε ὄχι $\psi:q(\psi)$ καί διαβάζομε: τὸ ψ δέν ἔχει τήν ιδιότητα $q(\cdot)$.

§ 3. Ὀνομάστε A τὸ σύνολο $\{3, 4, 5, 6\}$ καί B τὸ $\{x/x \text{ φυσικός μεγαλύτερος τοῦ } 2 \text{ καί μικρότερος τοῦ } 7\}$. Τί παρατηρεῖτε;

Παρατηροῦμε ὅτι κάθε στοιχεῖο τοῦ A ἀνήκει στοῦ B καί κάθε στοιχεῖο τοῦ B ἀνήκει στοῦ A . Λέμε τώρα ὅτι τὰ σύνολα A καί B εἶναι ἴσα καί συμβολίζομε $A = B$ ἢ λέμε ὅτι πρόκειται γιὰ τὸ ἴδιο σύνολο: $A \equiv B$. Τὰ ἴδια παρατηροῦμε καί στὰ σύνολα A καί $\Gamma = \{5, 3, 6, 4\}$. Ἐπομένως ἡ σειρά (ἢ τάξη), μέ τήν ὁποία γράφονται τὰ στοιχεῖα ἐνὸς συνόλου, δέν ἔχει καμιά σημασία γιὰ τὸν καθορισμό του.

Δύο σύνολα εἶναι ἴσα, ἂν κάθε στοιχεῖο τοῦ ἐνὸς ἀπὸ αὐτὰ ἀνήκει στοῦ ἄλλο καί ἀντιστρόφως.

Εὐκόλα διαπιστώνομε ἀπὸ τὰ παραπάνω παραδείγματα ὅτι: $A = A$, $A = B \Rightarrow B = A$ καί $A = B$ καί $B = \Gamma \Rightarrow A = \Gamma$.

Ἡ ἰσότητα τῶν συνόλων εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρική καί μεταβατική.

§ 4. Ἄν προσέξουμε μόνο τήν ιδιότητα: κάθε στοιχεῖο τοῦ A ἀνήκει στοῦ B , θὰ λέμε ὅτι τὸ A εἶναι ὑποσύνολο τοῦ B ἢ ὅτι τὸ A περιέχεται στοῦ B καί θὰ γράφομε: $A \subseteq B$. (στοῦ παραπάνω παράδειγμα τῆς § 3 εἶναι καί $B \subseteq A$). Ἐπομένως $A \subseteq B$ καί $B \subseteq A \Rightarrow A = B$.

Τῇ σχέσιν $A \subseteq B$ μποροῦμε νὰ τὴ γράψομε $B \supseteq A$. Θὰ λέμε τότε: **Τὸ B εἶναι ὑπερσύνολο τοῦ A .**

Στὰ σύνολα A καί $\Delta = \{x/x \text{ φυσικός ἀριθμός μεγαλύτερος τοῦ } 2\}$ παρατηροῦμε ὅτι $A \subseteq \Delta$, ἀλλὰ ὅτι $\Delta \not\subseteq A$ (γιατί τὰ στοιχεῖα 7, 8, 9, ... τοῦ Δ δέν ἀνήκουν στοῦ A). Στὴν περίπτωση αὐτὴ λέμε ὅτι τὸ A εἶναι γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ Δ * συμβολικὰ $A \subset \Delta$. Τὸ Δ λέγεται γνήσιο ὑπερσύνολο τοῦ A * συμβολικὰ $\Delta \supset A$.

Ἄν ὀρίσουμε μέ περιγραφὴ τὸ σύνολο $\{x/x \text{ φυσικός μεγαλύτερος τοῦ } 2 \text{ καί μικρότερος τοῦ } 3\}$, θὰ παρατηρήσουμε ὅτι δέν ἔχει κανένα στοι-

* Τὸ σύμβολο $11:q(11)$ διαβάζεται: 11 ἔχει τήν ιδιότητα.

χειό. Καθορίζεται λοιπόν ένα σύνολο, που δεν έχει κανένα στοιχείο. Το σύνολο αυτό λέγεται **κενό σύνολο** και συμβολίζεται με το $\emptyset$. Το $\emptyset$ είναι υποσύνολο κάθε συνόλου. $\emptyset \subseteq A$ για κάθε σύνολο A .

Δεχόμαστε ότι όλα τα αντικείμενα, που μπορούν να είναι στοιχεία των θεωρούμενων συνόλων, ανήκουν σ' ένα σύνολο U . Το U λέγεται **βασικό (ή γενικό) σύνολο** ή **σύνολο αναφοράς** των θεωρούμενων συνόλων.

Κάθε σύνολο A είναι υποσύνολο του U . $A \subseteq U$ για κάθε σύνολο A .

Η σχέση του **έγκλεισμού** $\subseteq$ έχει τις εξής ιδιότητες:

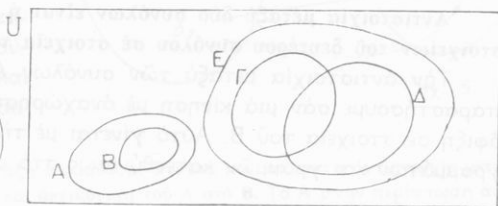
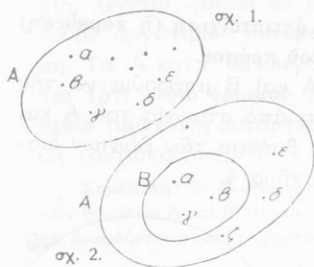
$A \subseteq A$ ανακλαστική (γιατί κάθε στοιχείο οποιουδήποτε συνόλου A ανήκει στο σύνολο A).

$A \subseteq B$ και $B \subseteq A \Rightarrow A = B$ αντισυμμετρική (§ 4),

$A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma \Rightarrow A \subseteq \Gamma$ μεταβατική (γιατί αν κάθε στοιχείο του A ανήκει στο B και κάθε στοιχείο του B ανήκει στο Γ , τότε κάθε στοιχείο του A ανήκει στο Γ). Νά το επαληθεύσετε στα παραπάνω παραδείγματα.

Για να κάνουμε αίσθητή την έννοια του συνόλου A των στοιχείων $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ παριστάνομε τα στοιχεία του με σημεία και το σύνολο $\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ με μία κλειστή γραμμή, ή όποια περιβάλλει τα σημεία αυτά. Σχημα (1).

Το υποσύνολο $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ του A , το παριστάνομε στο έσωτερικό του A . Σχημ. (2). Το βασικό σύνολο U το παριστάνομε σαν ένα ορθογώνιο· στο έσωτερικό του ορθογωνίου παριστάνονται όλα τα θεωρούμενα σύνολα. Σχημ. (3).



Οι παραστάσεις αυτές λέγονται βέννια διαγράμματα προς τιμή του Άγγλου φιλοσόφου και μαθηματικού J. Venn, (1834-1923), που τις χρησιμοποίησε πρώτος.

Άσκησης:

1. Νά βρείτε τα υποσύνολα των συνόλων $\{\alpha\}$, $\{1, 2\}$, $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\{3, 12, 6, 7\}$.
2. Νά βρείτε τα υποσύνολα του $\{x / x \text{ άκεραίος μεγαλύτερος του } \frac{7}{5} \text{ και μικρότερος του } \frac{10}{3}\}$.

3. Νά όρίσετε με άναγραφή τó σύνολο $\{x/x \text{ διαγώνιος του πενταγώνου } ABΓΔΕ\}$.
4. Νά όρίσετε με άναγραφή τó σύνολο $\{x/x \text{ υπόλοιπο της διαιρέσεως } κ : 5, \text{ όπου } κ \text{ άκέραιος}\}$ και με περιγραφή τó $\{ΑΓ, ΒΔ\}$.
5. Νά συγκρίνετε τά σύνολα $A = \{0, 1, 2\}$ και $B = \{x/x \text{ υπόλοιπο διαιρέσεως φυσικού άριθμού διά } 3\}$.
6. Νά συγκρίνετε τά σύνολα $A = \{x/x \text{ παραλληλόγραμμο}\}$, $B = \{x/x \text{ όρθογώνιο}\}$ και $\Gamma = \{x/x \text{ τετράγωνο}\}$ και νά κάνετε τά διαγράμμάτά τους.

2. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑΣ

Μονοσήμαντη και άμφιμονοσήμαντη άντιστοιχία.

Ίσοδύναμα σύνολα.

§ 5. Σέ μιá σλλογή (ένα σύνολο) A γραμματοσήμων άνήκουν τά γραμματόσημα $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$. Τά α, γ και δ άξίζον 1 δραχμή τó καθένα. Τά β και ϵ , 2 δραχ. Τά α και δ εκδόθηκαν τó 1932, τά β, γ και ϵ τó 1936.

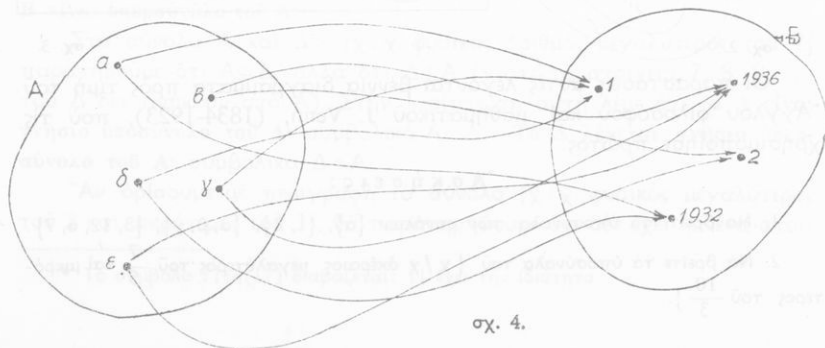
Θεωρήσετε τά σύνολα $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$ και $B = \{1, 2, 1932, 1936\}$. Σκεφτείτε τώρα ένα στοιχείο τού A και δίπλα σ' αυτό ένα στοιχείο τού B . Τί παρατηρείτε;

Παρατηρούμε ότι στο α παραθέτομε τόν 1 ή τó 1932 (τήν τιμή του ή τή χρονολογία εκδόσεώς του) συμβολικά $(\alpha, 1)$ ή $(\alpha, 1932)$. Στο β παραθέτομε ή άντιστοιχίζομε τόν 2 ή τó 1936. Συμβολικά $(\beta, 2)$ ή $(\beta, 1936)$ κ.λ.π.

Λέμε τώρα ότι μεταξύ τών συνόλων A και B ύπάρχει μιá άντιστοιχία (έπειδή στα στοιχεία τού A παραθέσαμε ή άντιστοιχίσασα στοιχεία τού B).

Άντιστοιχία μεταξύ δύο συνόλων είναι ή άντιστοιχισή (ή παράθεση) στοιχείων τού δευτέρου συνόλου σέ στοιχεία τού πρώτου.

Τήν άντιστοιχία μεταξύ τών συνόλων A και B μπορούμε νά τήν παραστήσουμε σάν μιá κίνηση με άναχώρηση άπό στοιχεία τού A και άφιξη σέ στοιχεία τού B . Αυτό γίνεται με τή βοήθεια τών βέννιων διαγραμμάτων και γραμμών κατευθύνσεως στο σχήμα 4.



σχ. 4.

Γι' αυτό το A λέγεται **σύνολο άφετηρίας** και το B **σύνολο άφίξεως**. Το σχήμα 4 το ονομάζουμε διάγραμμα (ή γράφημα) της αντιστοιχίας (στο γραμματόσημο αντιστοιχεί ή τιμή του και ή χρονολογία εκδόσεώς του).

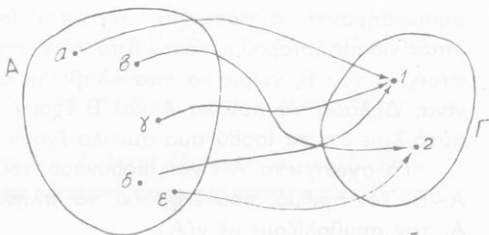
Σημείωση: Οι παραστάσεις $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 1932)$, $(\beta, 2)$ κ.λ.π., τις όποιες χρησιμοποίησαμε, για να συμβολίσουμε την αντιστοίχιση, λέγονται **διατεταγμένα ζεύγη**. Μπορούμε να παραστήσουμε (ή να όρίσουμε) μιάν αντιστοιχία σαν ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών.

§ 6. "Αν μεταξύ του συνόλου A των γραμματοσήμων και του συνόλου των τιμών $\Gamma = \{1, 2\}$ μελετήσουμε την αντιστοιχία: σ' ένα γραμματόσημο αντιστοιχεί ή τιμή του, θα παρατηρήσουμε ότι σε **κάθε** στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχεί **ένα μόνο** στοιχείο του συνόλου Γ . 'Η αντιστοιχία αυτή λέγεται **μονοσήμαντη αντιστοιχία**. Τα πρώτα μέλη των διατεταγμένων ζευγών $(\alpha, 1)$, $(\gamma, 1)$, $(\delta, 1)$, $(\beta, 2)$, $(\epsilon, 2)$ είναι τώρα διαφορετικά μεταξύ τους.

Μονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ δύο συνόλων έχουμε, όταν σε **κάθε** στοιχείο του πρώτου συνόλου αντιστοιχεί **ένα μόνο** στοιχείο του δευτέρου.

Στο σχήμα 5 έχουμε το διάγραμμα της μονοσήμαντης αντιστοιχίας μεταξύ των συνόλων A και Γ .

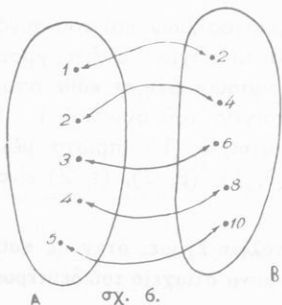
Παρατήρηση: Το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών, το όποιο παριστάνει μιá μονοσήμαντη αντιστοιχία, λέγεται —όπως θα μάθουμε αργότερα— **συνάρτηση**. Τα A και Γ θα λέγονται τότε **πεδίο όρισμού** και **πεδίο τιμών** της συναρτήσεως (αντιστοίχως).



Σημείωση: Σε άνωτερη τάξη θα μάθουμε ότι μιá μονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των συνόλων A και B λέγεται και **άπεικόνιση του A στο B** . Το A στην περίπτωση αυτή θα ονομάζεται σύνολο άρχετύπων και το B σύνολο είκόνων.

§ 7. Μεταξύ του συνόλου των αριθμών $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ και του συνόλου των διπλασίων τους $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ υπάρχει μιá μονοσήμαντη αντιστοιχία, ή έξης: σε κάθε αριθμό του A αντιστοιχεί ό διπλάσιός του στο B . 'Αλλά και μεταξύ των συνόλων B και A υπάρχει μιá μονοσήμαντη αντιστοιχία. 'Η αντίστροφη της προηγούμενης: σε κάθε στοιχείο (αριθμό) του B αντιστοιχεί το $\frac{1}{2}$ αυτού στο A . 'Η αντιστοιχία αυτή λέγεται **άμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία**.

Ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία μεταξύ δύο συνόλων (ἡ ἀπεικόνιση ἓνα πρὸς ἓνα) ἔχομε, ὅταν σὲ **κάθε στοιχείο τοῦ πρώτου συνόλου ἀντιστοιχεῖ ἓνα μόνο στοιχείο τοῦ δευτέρου καὶ σὲ κάθε στοιχείο τοῦ δευτέρου συνόλου ἀντιστοιχεῖ ἓνα μόνο στοιχείο τοῦ πρώτου** (ἐκεῖνο πού τὸ εἶχε ὡς ἀντίστοιχο) ἢ ὅταν μεταξύ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου ὑπάρχει **μιὰ μονοσήμαντη ἀντιστοιχία καὶ μεταξύ τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ πρώτου ὑπάρχει ἡ ἀντίστροφή της.**



Στὸ σχῆμα 6 ἔχομε τὸ διάγραμμα τῆς ἀμφιμονοσήμαντης ἀντιστοιχίας μεταξύ τῶν συνόλων A καὶ B. Αὐτὸ μποροῦμε νὰ τὸ παραστήσουμε καὶ ὡς ἑξῆς:

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10

Παρατηροῦμε ὅτι μποροῦμε κάτω ἀπὸ κάθε στοιχείο τοῦ πρώτου συνόλου νὰ γράψουμε ἓνα στοιχείο τοῦ δευτέρου, χωρὶς νὰ ἐπαναλάβουμε ἢ νὰ παραλείψουμε κανένα.

§ 8. Τὰ σύνολα A καὶ B, μεταξύ τῶν ὁποίων εἶναι δυνατὴ μιὰ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία, λέγονται **ισοδύναμα** σύνολα. Τότε ὅμως, ὅπως εἶδαμε, μποροῦμε κάτω ἀπὸ κάθε στοιχείο τοῦ A νὰ γράψουμε ἓνα στοιχείο τοῦ B, χωρὶς νὰ ἐπαναλάβουμε καὶ χωρὶς νὰ παραλείψουμε κανένα. Δηλαδή τὰ σύνολα A καὶ B ἔχουν τὸ ἴδιο πλῆθος στοιχείων. Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι τὰ **ισοδύναμα** σύνολα ἔχουν τὸν ἴδιο **πληθικὸ ἀριθμὸ**.

Τὴ σχέση «τὸ A εἶναι ἰσοδύναμο τοῦ B» τὴν γράφουμε συμβολικά: $A \sim B$. Τὸν ἀριθμὸ, πού ἐκφράζει τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου A, τὸν συμβολίζομε μὲ $n(A)$.

Ὡστε $A \sim B \Leftrightarrow n(A) = n(B)$. Αὐτὸ τὸ διαπιστώνομε καὶ ἂν ἀπαριθμήσουμε τὰ στοιχεῖα τῶν A καὶ B.

Μεταξύ ἐνὸς συνόλου A καὶ τοῦ ἑαυτοῦ του εἶναι δυνατόν νὰ ἔχομε μιὰ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία τὴν

1	2	3	4	5
1	2	3	4	5

Ἄν μεταξύ τῶν A καὶ B εἶναι δυνατὴ ἡ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10,

τότε εἶναι δυνατὴ καὶ ἡ

2	4	6	8	10
1	2	3	4	5

μεταξύ τῶν B καὶ A.

Θεωροῦμε τώρα καὶ τὸ σύνολο Γ μὲ στοιχεῖα τὰ τριπλάσια τῶν

στοιχείων του συνόλου A : $\Gamma = \{3, 6, 9, 12, 15\}$. Παρατηρούμε ότι μεταξύ των A και B , A και Γ έχουμε τις αμφιμονοσήμαντες αντιστοιχίες:

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15

τότε όμως έχουμε και την

2	4	6	8	10
3	6	9	12	15

μεταξύ των B και Γ .

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η ισοδυναμία των συνόλων έχει τις γνωστές ιδιότητες της ισότητας:

$$A \sim A, \quad A \sim B \Rightarrow B \sim A \quad \text{και} \quad A \sim B \quad \text{και} \quad B \sim \Gamma \Rightarrow A \sim \Gamma$$

ἀνακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

Επομένως τις ίδιες ιδιότητες έχει και η ισότητα των πληθικών αριθμών τους.

3. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΥΝΟΛΑ— ΑΠΕΙΡΟΣΥΝΟΛΑ

§ 9. Αν θεωρήσουμε το σύνολο $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$, θα παρατηρήσουμε ότι το πλήθος των στοιχείων του εκφράζεται από το φυσικό αριθμό 5. Συνεπώς $n(A) \in \mathbb{N}$.

Τα σύνολα, που οι πληθικοί τους αριθμοί είναι φυσικοί αριθμοί, λέγονται **πεπερασμένα σύνολα**.

Πάστε τώρα ένα γνήσιο υποσύνολο του A και εξετάστε αν μεταξύ του και του A μπορούμε να έχουμε μιαν αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία. Τι παρατηρείτε;

Παίρνουμε το $B = \{\alpha, \gamma, \delta\}$ και παρατηρούμε ότι αυτό δεν είναι δυνατόν:

α	β	γ	δ	ϵ	η	α	β	γ	δ	ϵ
α		γ	δ			α	γ	δ		

Το ίδιο θα παρατηρήσουμε, αν πάρουμε οποιοδήποτε γνήσιο υποσύνολο του A . Λέμε λοιπόν ότι ένα σύνολο είναι **πεπερασμένο, όταν δεν έχει γνήσιο υποσύνολο ισοδύναμο με αυτό**.

§ 10. Ας πάρουμε τώρα το σύνολο N των φυσικών αριθμών: $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ και το σύνολο N_a των άρτίων $N_a = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$. Παρατηρούμε ότι το N_a είναι γνήσιο υποσύνολο του N , $N_a \subset N$ και ότι κάτω από κάθε στοιχείο του N μπορούμε να γράψουμε ένα στοιχείο του N_a , χωρίς να επαναλάβουμε ή να παραλείψουμε κανένα.

1	2	3	4	5	6	7	8		1000	
2	4	6	8	10	12	14	16		2000	

Τὸ σύνολο N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἔχει ἓνα γνήσιο ὑποσύνολο ἰσοδύναμο μὲ αὐτό. Κανένας φυσικὸς ἀριθμὸς —ὅσοδήποτε μεγάλος— δὲν μπορεῖ νὰ ἐκφράσει τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων του. Τὸ N εἶναι ἓνα ἀπειροσύνολο. Τὸ N_a εἶναι ἐπίσης ἓνα ἀπειροσύνολο.

Ὡστε, ἓνα σύνολο εἶναι ἀπειροσύνολο, ὅταν ἔχει ἓνα γνήσιο ὑποσύνολο ἰσοδύναμο μὲ αὐτό.

Ἐνα σύνολο ἰσοδύναμο μὲ ἓνα ἀπειροσύνολο εἶναι ἐπίσης ἀπειροσύνολο. Τὸ ὑπερσύνολο ἑνὸς ἀπειροσυνόλου εἶναι ἀπειροσύνολο. Π.χ. τὸ σύνολο Q τῶν ρητῶν.

Τὸ σύνολο Δ τῶν σημείων ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος AB εἶναι ἀπειροσύνολο.

§ 11. Τὰ παραπάνω σύνολα δὲν μπορούμε νὰ τὰ ὀρίσουμε πλήρως μὲ ἀναγραφή. Γι' αὐτὸ ὡς τώρα χρησιμοποίησαμε ἀτελεῖς ἀναγραφές: $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ $Q = \{\dots \frac{1}{3}, \dots \frac{1}{2}, \dots 1, \dots \frac{3}{2}, \dots\}$. Μποροῦμε ὅμως νὰ τὰ ὀρίσουμε μὲ περιγραφή. Δηλαδή νὰ δηλώσουμε μιὰν ἰδιότητα, ποὺ ἂν τὴν ἔχει ἓνα ἀντικείμενο, ἀνήκει στὸ σύνολο, ἂν ὅμως δὲν τὴν ἔχει, δὲν ἀνήκει σ' αὐτό.

$N = \{x/x \text{ εἶναι πηλικὸς ἀριθμὸς πεπερασμένου συνόλου}\}.$

$N_a = \{x/x \text{ εἶναι φυσικὸς ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 2}\}.$

$Q = \{x/x = \frac{\mu}{\nu}, \mu: \text{εἶναι ἀκέραιος, } \nu: \text{εἶναι φυσικὸς καὶ } \frac{\mu}{\nu} \text{ ἀνάγωγο κλάσμα}\}.$

$\Delta = \{x/x \text{ εἶναι τὸ σημεῖο } A \text{ ἢ } B \text{ ἢ σημεῖο μεταξὺ τῶν } A \text{ καὶ } B\}.$

Συνεπῶς μὲ περιγραφή ὀρίζονται κυρίως τὰ ἀπειροσύνολα, ἀλλὰ καὶ πεπερασμένα σύνολα.

Σημείωση: Μποροῦμε τώρα νὰ ποῦμε ὅτι ἓνα σύνολο εἶναι μιὰ κατηγορία ἢ ἓνα εἶδος ἀντικειμένων, τὰ ὁποῖα ἔχουν μιὰ ὀρισμένη ἰδιότητα (ὡς πρὸς τὴν ὁποία θεωροῦνται).

Ἀσκήσεις:

7. Κάνετε μεταξὺ τῶν συνόλων $A = \{3, 8, 15, 13, 14, 12, 7\}$ καὶ $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ τὴν ἀντιστοιχία: σὲ στοιχεῖο τοῦ A ἀντιστοιχεῖ τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ 3, τὸ ὁποῖο ἀνήκει στὸ B .

8. Στὸ σύνολο A τῶν χωρῶν τῆς Δυτικῆς Εὐρώπης ἀντιστοιχίστε τὸ σύνολο B τῶν πρωτευουσῶν τους. Χαρακτηρίστε τὴν ἀντιστοιχία. Κάνετε τὸ διάγραμμά της.

9. Ἐξετάστε ἂν εἶναι ἰσοδύναμα τὰ σύνολα $A = \{x/x \text{ εἶναι ἀντισπλάσιο τοῦ 3}\}$ καὶ $B = \{x/x \text{ εἶναι ὑπόλοιπο διαιρέσεως φυσικοῦ ἀριθμοῦ διὰ 7}\}.$

10. Νὰ γίνουν ὅλες οἱ δυνατὲς ἀμφιμονοσήμαντες ἀντιστοιχίες μεταξὺ τῶν συνόλων $A = \{2, 9, 4\}$ καὶ $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Πόσες εἶναι αὐτές;

11. Νὰ ὀρίσετε μὲ ἀναγραφή τὸ σύνολο τῶν ὑποσυνόλων ἑνὸς τριμελοῦς συνόλου καὶ τὸ σύνολο τῶν πηλικῶν ἀριθμῶν τους. Κάνετε μεταξὺ τους μιὰ ἀντιστοιχία. Χαρακτηρίστε τὸ εἶδος της.

12. Μεταξύ των συνόλων $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ και $B = \{0, 1, 2, 3, 9, 12, 18\}$ να γίνει η αντιστοιχία: σε στοιχείο του A αντιστοιχεί το υπόλοιπο της διαιρέσεώς του διά 3 ή πολλαπλασίου του, το οποίο ανήκει στο B .

13. Έξετάστε αν μεταξύ των συνόλων $A = \{x/x \text{ είναι πολλαπλάσιο του } 11 \text{ μικρότερο του } 97\}$ και ενός γνήσιου υποσυνόλου του είναι δυνατή μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία.

14. Να ορίσετε με περιγραφή το σύνολο $A = \{0, 7, 14, 21, 28, \dots\}$.

15. Ποιά σχέση υπάρχει μεταξύ του συνόλου των άρτιων N_a και του συνόλου N_4 των άκ. πολλαπλασίων του 4.

16. Έξετάστε αν είναι ισοδύναμα τα σύνολα $E = \{x/x \text{ έπίκεντρον γωνία σ' έναν κύκλο } (0)\}$ και $T = \{x/x \text{ τόξο του κύκλου } (0)\}$.

17. Έξετάστε αν είναι ισοδύναμα τα σύνολα N και $K = \{x/x \text{ είναι κλασματική μονάδα}\}$.

4. ΕΝΩΣΗ ΚΑΙ ΤΟΜΗ ΣΥΝΟΛΩΝ — ΔΙΑΖΕΥΞΗ ΚΑΙ ΣΥΖΕΥΞΗ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ

§ 12. Το σύνολο, στο οποίο ανήκουν όλα τα στοιχεία δύο συνόλων A και B , και μόνον αυτά, λέγεται **ένωση των A και B** και συμβολίζεται $A \cup B$.

‘Η ένωση ορίζεται από την ισοδυναμία $\alpha \in A$ είτε $\alpha \in B \Leftrightarrow \alpha \in A \cup B$.

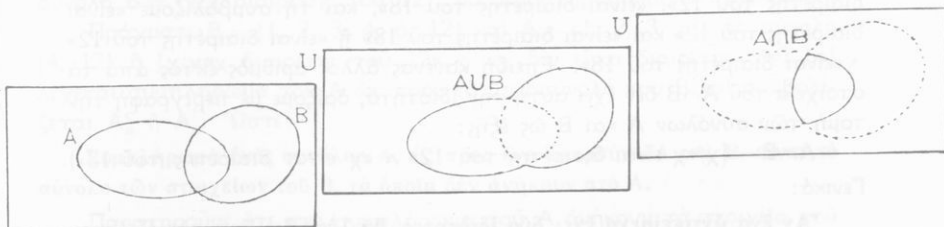
Τήν πράξη, με την οποία βρίσκουμε το $A \cup B$, αν δοθούν τα A και B , τήν ονομάζουμε «ένωση συνόλων» και τή συμβολίζουμε με το $\cup$.

Το σύνολο, στο οποίο ανήκουν τα κοινά στοιχεία δύο συνόλων A και B και μόνον αυτά, λέγεται **τομή των A και B** και συμβολίζεται $A \cap B$.

‘Η τομή ορίζεται από την ισοδυναμία $\alpha \in A$ και $\alpha \in B \Leftrightarrow \alpha \in A \cap B$.

Τήν αντίστοιχη πράξη τή λέμε «τομή συνόλων» και τή συμβολίζουμε με $\cap$.

Παράδειγμα. ‘Αν $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$ και $B = \{\gamma, \delta, \epsilon, \zeta\}$ τότε $A \cup B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta\}$ και $A \cap B = \{\gamma, \delta, \epsilon\}$. ‘Αν χρησιμοποιήσουμε τα βέννια διαγράμματα, έχουμε:



σχ. 7.

§ 13. Θεωρήστε τα σύνολα $A = \{x/x \text{ είναι διαιρέτης του } 12\}$ και $B = \{x/x \text{ είναι διαιρέτης του } 18\}$ και καθορίστε με αναγραφή 1) την ένωση και 2) την τομή τους.

Ἀφοῦ καθορίσουμε μέ ἀναγραφὴ τὰ σύνολα, τὰ ὅποια μᾶς ἔχουν δοθεῖ $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ καὶ $B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, βρίσκουμε:

1) τὸ σύνολο $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$ καὶ παρατηροῦμε ὅτι κάθε στοιχεῖο τοῦ $A \cup B$ ἢ διαιρεῖ μόνο τὸν 12 (οἱ 4 καὶ 12) ἢ διαιρεῖ μόνο τὸν 18 (οἱ 9 καὶ 18) ἢ διαιρεῖ καὶ τοὺς δύο (οἱ 1, 2, 3, 6).

Τῇ σύνθετῃ αὐτῇ ιδιότητῃ, τὴν ὅποια ἔχουν τὰ στοιχεῖα τοῦ $A \cup B$, τὴ λέμε **διάζευξη** (συμβολικά $\vee$, προφορικά «εἴτε»), τῶν **ιδιοτήτων** «εἶναι διαιρέτης τοῦ 12», «εἶναι διαιρέτης τοῦ 18» καὶ τὴ συμβολίζουμε: «Εἶναι διαιρέτης τοῦ 12» $\vee$ «εἶναι διαιρέτης τοῦ 18» (καὶ πιὸ ἀπλὰ «εἶναι διαιρέτης τοῦ 12» εἴτε «εἶναι διαιρέτης τοῦ 18»).

Κανένα ἄλλο ἀντικείμενο ἐκτὸς ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τοῦ $A \cup B$ δὲν ἔχει τὴν ιδιότητα αὐτή.

Ἐπομένως μποροῦμε νὰ ὀρίσουμε μέ περιγραφὴ τὸ σύνολο $A \cup B$ ὡς ἑξῆς: $A \cup B = \{x / \langle x \text{ εἶναι διαιρέτης τοῦ } 12 \rangle \text{ εἴτε } \langle x \text{ εἶναι διαιρέτης τοῦ } 18 \rangle\}$ ἢ $A \cup B = \{x / \langle x \text{ εἶναι διαιρέτης τοῦ } 12 \rangle \vee \langle x \text{ εἶναι διαιρέτης τοῦ } 18 \rangle\}$.

Γενικά ἂν ἓνα ἀντικείμενο ἔχει μιὰ τουλάχιστο ἀπὸ δύο ιδιότητες, λέμε ὅτι ἔχει **σὺν ιδιότητα** τὴ **διάζευξή** τους.

Συμβολικά: $x : p(x) \text{ ἢ } x : q(x) \Rightarrow x : p(x) \vee q(x)$.

Συνεπῶς: Ἄν δύο σύνολα περιγράφονται (ἀντιστοίχως) ἀπὸ τὶς ιδιότητες $p(\)$ καὶ $q(\)$, ἡ ἔνωση τῶν συνόλων αὐτῶν περιγράφεται ἀπὸ τὴ **διάζευξή** τους.

$A = \{x / x : p(x)\}$, $B = \{x / x : q(x)\} \Rightarrow A \cup B = \{x / x : p(x) \vee q(x)\}$.

2) Ὅρίζουμε μέ ἀναγραφὴ τὸ σύνολο $A \cap B = \{1, 2, 3, 6\}$ καὶ παρατηροῦμε ὅτι κάθε στοιχεῖο του εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ 12 καὶ τοῦ 18.

Τῇ σύνθετῃ αὐτῇ ιδιότητῃ τὴ λέμε **σύζευξη** τῶν **ιδιοτήτων** «εἶναι διαιρέτης τοῦ 12», «εἶναι διαιρέτης τοῦ 18», καὶ τὴ συμβολίζουμε «εἶναι διαιρέτης τοῦ 12» καὶ «εἶναι διαιρέτης τοῦ 18» ἢ «εἶναι διαιρέτης τοῦ 12» $\wedge$ «εἶναι διαιρέτης τοῦ 18». Ἐπειδὴ κανένας ἄλλος ἀριθμὸς ἐκτὸς ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τοῦ $A \cap B$ δὲν ἔχει αὐτὴ τὴν ιδιότητα, ὀρίζομε μέ περιγραφὴ τὴν τομὴ τῶν συνόλων A καὶ B ὡς ἑξῆς:

$A \cap B = \{x / \langle x \text{ εἶναι διαιρέτης τοῦ } 12 \rangle \wedge \langle x \text{ εἶναι διαιρέτης τοῦ } 18 \rangle\}$.

Γενικά:

Ἄν ἓνα ἀντικείμενο ἔχει δύο ιδιότητες, θὰ λέμε ὅτι ἔχει **σὺν ιδιότητα** καὶ τὴ **σύζευξή** τους. (Ἡ σύζευξη συμβολίζεται μέ $\wedge$ καὶ διαβάζεται «καί»).

Ἄν δύο σύνολα περιγράφονται ἀντιστοίχως ἀπὸ δύο ιδιότητες, ἡ τομὴ τους περιγράφεται ἀπὸ τὴν **σύζευξη** τῶν **ιδιοτήτων**.

$A = \{x / x : p(x)\}$, $B = \{x / x : q(x)\} \Rightarrow A \cap B = \{x / x : p(x) \wedge q(x)\}$.

Εύκολα επαληθεύουμε με παραδείγματα τις γνωστές ιδιότητες της ένωσης και της τομής.

Το μονότιμο

Τη μεταθετική

Την προσεταιριστική

Του ουδετέρου

Την επιμεριστική

$$A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap \Gamma$$

$$A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$$

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap U = A$$

$$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$$

$$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$$

* Ασκήσεις :

18. Ποιά είναι η διάζευξη των ιδιοτήτων «είναι άρτιος», «είναι περιττός»;
19. Ποιά είναι η σύζευξη των ιδιοτήτων $x > 5$, $x < 13$;
20. Ποιό είναι το σύνολο $\{x/x: \text{«}x \text{ είναι άρτιος»} \wedge \text{«}x \text{ είναι περιττός»}\}$;
21. Να ορισθούν με περιγραφή και άναγραφή η ένωση και η τομή των συνόλων $\Delta_1 = \{x/x: \text{«}x \text{ είναι διαιρέτης του } 18\text{»}\}$, $\Delta_2 = \{x/x: \text{«}x \text{ είναι διαιρέτης του } 54\text{»}\}$.
22. Ποιά είναι η ένωση των τριών συνόλων $A = \{x/x: \text{«}x \text{ είναι διαιρέτης του } 32\text{»} \wedge \text{«}x \text{ είναι διαιρέτης του } 40\text{»}\}$, $B = \{x/x: \text{«}x \text{ είναι διαιρέτης του } 40\text{»}\}$ και $\Gamma = \{x/x: \text{«}x \text{ είναι διαιρέτης του } 40+32\text{»}\}$.
23. Να βρεθεί το σύνολο $A = \{x/x: \text{«}x \in Q_0^+ \text{»} \wedge \text{«}x+1 = 5\text{»}\}$, $B = \{x: \text{«}x \in Q_0^+ \text{»} \wedge \text{«}x-3 = 7\text{»}\}$.
24. Να εκτελεσθούν οι πράξεις $(A \cup B) \cap (\Gamma \cup B)$, $(A \cup B \cap \Gamma) \cap \Delta$.

5. ΤΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΣΥΝΟΛΟΥ — ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΟΛΩΝ — ΚΛΑΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

§ 14. "Αν θεωρήσουμε το σύνολο $A = \{x/x \text{ διαιρέτης του } 6\}$ και το σύνολο $B = \{x/x \text{ διαιρέτης του } 12\}$, θα παρατηρήσουμε ότι $A \subseteq B$.

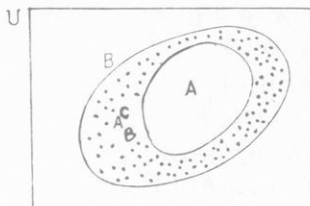
Πράγματι $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ και $A = \{1, 2, 3, 6\}$. Το σύνολο $\{4, 12\}$ ή $\{x/x \text{ «}x \text{ διαιρέτης του } 12\text{»} \wedge \text{«}x \text{ δεν είναι διαιρέτης του } 6\text{»}\}$ λέγεται συμπλήρωμα του A ως προς το υπερσύνολό του B και συμβολίζεται A_B^c ή A_B' . "Ωστε:

Συμπλήρωμα ενός συνόλου A , ως προς ένα υπερσύνολό του B , είναι το σύνολο των στοιχείων του B , τα όποια δεν ανήκουν στο A .

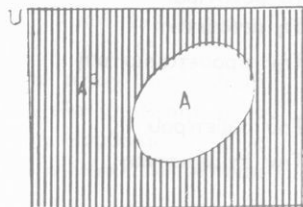
Παρατηρούμε ότι στο συμπλήρωμα του A ανήκουν τα στοιχεία του B , τα όποια δεν έχουν τη χαρακτηριστική ιδιότητα των στοιχείων του A . Το B_B^c είναι το $\emptyset$, Το $\emptyset_B^c$ είναι το B .

"Όταν λέμε απλώς συμπλήρωμα του A (συμβολικά A^c), εννοούμε το συμπλήρωμά του ως προς το βασικό σύνολο U (υπερσύνολο όλων των θεωρούμενων συνόλων).

Τὸ βέννιο διάγραμμα τοῦ A'' τὸ βλέπομε στὸ σχῆμα 8 καὶ τὸ διάγραμμα τοῦ A^c στὸ σχῆμα 9.



σχ. 8.



σχ. 9.

§ 15. Θεωροῦμε τὰ σύνολα $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$, $A = \{\beta, \delta, \epsilon\}$ καὶ $A'' = \{\alpha, \gamma\}$. Ἡ τομὴ τῶν A καὶ A'' εἶναι τὸ κενὸ σύνολο, ἢ μὲ ἄλλα λόγια τὰ σύνολα αὐτὰ εἶναι ξένα μεταξύ τους.

Ἡ ἔνωση τους εἶναι τὸ B . Λέμε ὅτι τὰ σύνολα A καὶ A'' ἀποτελοῦν ἓνα **διαμερισμὸ** τοῦ συνόλου B . Ὁμοίως λέμε ὅτι τὰ σύνολα $\{\alpha, \gamma\}$, $\{\beta, \epsilon\}$ καὶ $\{\delta\}$ ἀποτελοῦν ἓνα διαμερισμὸ τοῦ συνόλου B , γιατί εἶναι διαφορετικὰ ἀπὸ τὸ κενὸ σύνολο, εἶναι ξένα μεταξύ τους ἀνὰ δύο καὶ ἡ ἔνωση τους εἶναι τὸ B . Μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι τὸ B διαμερίζεται στὰ σύνολα αὐτά.

Τὰ σύνολα $A_1, A_2, A_3, \dots$ εἶναι ἓνας **διαμερισμὸς** τοῦ συνόλου A , ὅταν κανένα ἀπὸ αὐτὰ δὲν εἶναι κενό, εἶναι ξένα μεταξύ τους ἀνὰ δύο καὶ ἡ ἔνωση ὅλων εἶναι τὸ A .

§ 16. Νὰ διαμερισθεῖ τὸ σύνολο:

$$K = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{3}, \frac{3}{6}, \frac{6}{10}, \frac{7}{14}, \frac{12}{20} \right\}$$

σὲ σύνολα, πού καθένα νὰ περιέχει **ἴσους** ρητούς ἀριθμούς. Μὲ βάση τὴ σχέση **ισότητος** τῶν κλασμάτων διαμερίζομε τὸ K στὰ σύνολα.

$$K_1 = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{3}{3} \right\}, \quad K_2 = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{6}, \frac{7}{14} \right\}, \quad K_3 = \left\{ \frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{12}{20} \right\}.$$

Τὰ στοιχεῖα καθενὸς ἀπὸ τὰ K_1, K_2, K_3 ἀντιπροσωπεύουν τὸν ἴδιο ρητὸ ἀριθμὸ. Τὰ στοιχεῖα τοῦ K_1 τὸν ρητὸ $\frac{1}{1}$, τοῦ K_2 τὸν ρητὸ $\frac{1}{2}$ καὶ τοῦ K_3 τὸν $\frac{3}{5}$.

Τὰ σύνολα K_1, K_2, K_3 λέγονται **κλάσεις ἰσοδυναμίας**.

Γενικὰ ἡ σχέση τῆς **ισότητος** τῶν κλασμάτων διαμερίζει τὸ σύνολο ὅλων τῶν κλασμάτων σὲ κλάσεις ἰσοδυναμίας. Κάθε κλάση παριστάνει ἡ ἀντιπροσωπεύει ἓναν ρητὸ ἀριθμὸ.

Ἄν ἓνα σύνολο A διαμερίζεται σὲ ἄλλα σύνολα $A_1, A_2, A_3, \dots$ ἔτσι, ὥστε ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ A νὰ ἀντιπροσωπεύουν ἓνα ἀντικείμενο, ὅλα τὰ

στοιχεία του A_2 ένα άλλο αντικείμενο κ.ο.κ., τὰ $A_1, A_2, A_3, \dots$ λέγονται **κλάσεις ισοδυναμίας**.

Ἡ σχέση, με βάση τὴν ὁποία γίνεται ὁ διαμερισμὸς αὐτός, λέγεται **σχέση ισοδυναμίας** καὶ ἔχει τὶς ιδιότητες τῆς ισοτήτας.

Ἀσκήσεις:

25. Νὰ βρεθῇ τὸ A_N^C ὅπου $A = \{x/x \text{ φυσικὸς ἀριθμὸς } \wedge x > 6\}$.
26. Ἄν $A = \{x/\langle x \in Q_0^+ \rangle \wedge x > 3\}$ καὶ $B = \{x/\langle x \in Q_0^+ \rangle \wedge x < 11\}$, νὰ βρεθοῦν τὰ σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$, $A_{Q_0^+}^C$ καὶ ἡ τομὴ τῶν συμπληρωμάτων τῶν A καὶ B ὡς πρὸς Q_0^+ .
27. Νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ πράξη $(A \cup A^C) \cap A$.
28. Ἄν $A = \{x/x \text{ εἶναι διαιρέτης τοῦ } 60\}$, $B = \{x/x \text{ εἶναι διαιρέτης τοῦ } 12\}$ καὶ $\Gamma = \{x/x \text{ εἶναι διαιρέτης τοῦ } 15\}$, νὰ βρεῖτε τὰ συμπληρώματα τῶν B καὶ Γ ὡς πρὸς A .
29. Νὰ ἐπαληθεύσετε μετὰ τὰ σύνολα τῆς προηγούμενης ἀσκῆσεως ὅτι τὸ συμπλήρωμα τῆς ἐνώσεως τῶν B καὶ Γ ἰσοῦται μετὰ τὴν τομὴ τῶν συμπληρωμάτων τῶν συνόλων αὐτῶν (ὡς πρὸς τὸ ὑπερσύνολό τους A). Ἐπίσης ὅτι τὸ συμπλήρωμα τῆς τομῆς ἰσοῦται μετὰ τὴν ἐνωση τῶν συμπληρωμάτων. Συμβολικὰ:

$$(B \cup \Gamma)_A^C = (B_A^C) \cap (\Gamma_A^C) \text{ καὶ } (B_A^C) \cup (\Gamma_A^C) = (B \cap \Gamma)_A^C.$$

30. Νὰ ἐπαληθεύσετε μετὰ παραδείγματα, ὅτι τὸ σύνολο, ποὺ περιγράφεται μετὰ τὴ σύζευξη δύο ιδιοτήτων, εἶναι ὑποσύνολο ἐκείνου, ποὺ περιγράφεται μετὰ μία ἀπ' αὐτές.

31. Διαμερίστε τὸ σύνολο $A = \{2, 5, 9, 6\}$ σὲ μονομελῆ σύνολα.

32. Νὰ διαμερισθῇ τὸ σύνολο $A = \{x/x \text{ εἶναι διαιρέτης τοῦ } 4\}$ σὲ διμελῆ σύνολα.

33. α) Νὰ κάνετε ἓνα διαμερισμὸ τοῦ συνόλου τῶν πλευρῶν ἑνὸς παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ μετὰ βάση τὴ σχέση «εἶναι παράλληλος». β) Κάνετε ἓνα διαμερισμὸ τοῦ συνόλου τῶν τριγώνων σὲ τρία ὑποσύνολα.

34. Νὰ διαμερίσετε τὸ σύνολο $A = \{2, 5, 3, 6, 7, 8, 9, 11, 13\}$ σὲ κλάσεις ισοδυναμίας μετὰ βάση τὴ σχέση: οἱ ἀριθμοὶ κάθε κλάσεως ἀφήνουν τὸ ἴδιο ὑπόλοιπο, ἂν διαιρεθοῦν διὰ 3.

35. Σὲ πόσες κλάσεις ισοδυναμίας διαμερίζεται τὸ σύνολο N μετὰ βάση τὴ σχέση: ὑπόλοιπο διαιρέσεως τοῦ α διὰ 5 = ὑπόλοιπο διαιρέσεως τοῦ β διὰ 5;

36. Σχηματίστε τὰ ὑποσύνολα τοῦ συνόλου τῶν διαγωνίων τοῦ πενταγώνου $AB\Gamma\Delta E$ ἔτσι, ὥστε σ' ἓνα ὑποσύνολο ν' ἀνήκουν οἱ διαγώνιοι, οἱ ὁποῖες περνοῦν ἀπὸ τὴν ἴδια κορυφή. Ἀποτελοῦν διαμερισμὸ αὐτὰ τὰ ὑποσύνολα;

6. ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ

§ 17. Ὅταν —κατὰ τὴν μελέτη τῆς ἀντιστοιχίας— ἀντιστοιχίσουμε στὸ στοιχεῖο α τὸ στοιχεῖο β , χρησιμοποιήσαμε τὸ συμβολισμό: (α, β) . Αὐτὸ εἶναι ἓνα διμελὲς σύνολο, στὸ ὁποῖο τὸ ἓνα μέλος προηγῆται ἀπὸ τὸ ἄλλο (δηλαδὴ ἔχει σημασία ἡ τάξη τῶν στοιχείων του). Τὸ (α, β) λέγεται **διατεταγμένο ζεῦγος** ἢ **διατεταγμένο (διμελὲς) σύνολο**. Ἐπειδὴ μποροῦμε στὸ α νὰ ἀντιστοιχίσουμε τὸ α , θεωροῦμε καὶ τὸ (α, α) διατεταγμένο ζεῦγος.

Πρόβλημα. Να γράψετε το σύνολο $\{2, 3, 1, 5, 4\}$ έτσι, ώστε να προηγείται ο μικρότερος αριθμός.

Γράφουμε τότε $(1, 2, 3, 4, 5)$. Το $(1, 2, 3, 4, 5)$ είναι ένα διατεταγμένο σύνολο. (Για την παράστασή του χρησιμοποιήσαμε παρενθέσεις αντί για άγκιστρα).

Ένα σύνολο είναι διατεταγμένο, όταν μεταξύ δύο στοιχείων του έχει οριστεί ποιά προηγείται.

Μεταξύ δύο στοιχείων του $(1, 2, 3, 4, 5)$, π.χ. των 3 και 2, ισχύει η σχέση: $2 < 3$. Σχηματίζουμε τότε το ζεύγος $(2, 3)$. Για το ζεύγος $(4, 4)$ ισχύει $4 = 4$.

Γενικά για δύο στοιχεία του α και β μπορούμε να γράψουμε $\alpha \leq \beta$ ή $\beta \leq \alpha$.

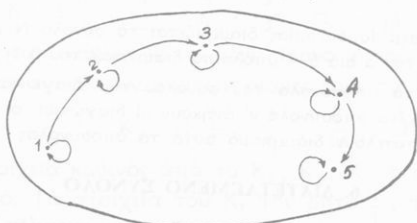
Γι' αυτό λέμε ότι το διατεταγμένο σύνολο $(1, 2, 3, 4, 5)$, είναι το σύνολο $\{2, 3, 1, 5, 4\}$ έφοδιασμένο με τη διάταξη (ή τη σχέση διατάξεως) $\leq$. Τη διάταξη αυτή την ονομάζουμε διάταξη κατά μέγεθος.

Παρατηρούμε ότι οποιοδήποτε διμελές υποσύνολο του $\{2, 3, 1, 5, 4\}$ μπορεί να διαταχθεί με τη διάταξη $\leq$. Το $\{2, 3\}$: $2 \leq 3$. Το $\{5, 4\}$: $4 \leq 5$ κ.ο.κ. Γι' αυτό η διάταξη $\leq$ λέγεται **ολική διάταξη** και το $(1, 2, 3, 4, 5)$ **ολικώς διατεταγμένο σύνολο**.

Γραφικώς παριστάνουμε τη διάταξη: $\alpha < \beta$ ως εξής: $\alpha \curvearrowright \beta$. Δηλαδή με γραμμή που κετευθύνεται από το α προς το β .

Την περίπτωση $\alpha = \alpha$ την παριστάνουμε με $\alpha \curvearrowright \alpha$, δηλαδή με μια θηλειά, που έπιστρέφει στο α .

Στο σχήμα 10 έχουμε γραφική παράσταση (διάγραμμα) της διατάξεως στο διατεταγμένο σύνολο $(1, 2, 3, 4, 5)$.



σχ. 10.

Μερικές φορές μās δίνεται ή εύκαιρία να κάνουμε και διασκεδαστικά διαγράμματα διατεταγμένων συνόλων, όπως στα σχήματα 11 και 12 για το $(1, 2, 3, 4)$.



σχ. 11.



σχ. 12.

§ 18. Τή σχέση ό α διαιρεί τόν β· τή συμβολίζομε προσωρινά μέ α/β . "Αν έφοδιάσουμε τó σύνολο $\{2, 3, 4, 6, 9\}$ μέ τή διάταξη αύτή, θά παρατηρήσουμε ότι μερικά άπό τά διμελή ύποσύνολά του δέν διατάσσονται.

Γράφομε $2/4$ (ό 2 διαιρεί τόν 4), $2/2$, $4/4$ κ.ο.κ, άλλα δέν μπορούμε νά γράψουμε: $2/3$ (ό 2 διαιρεί τόν 3), $6/9$.

Τό σύνολο $\{2, 3, 4, 6, 9\}$ έφοδιασμένο μέ τή διάταξη / λέγεται **μερικώς διατεταγμένο σύνολο** καί ή σχέση «διαιρεί τόν ...» λέγεται **μερική διάταξη**.

"Αν τή διάταξη: τό α προηγείται άπό τό β ή ταυτίζεται μέ τό β, τή συμβολίσουμε μέ $\alpha \leq \beta$ καί τήν: τό β άκολουθεί τό α (ή ταυτίζεται μέ τό α) μέ $\beta \geq \alpha$, έπαληθεύομε εύκολα άπό τά παραδείγματά μας ότι οί ιδιότητες τής διατάξεως είναι οί έξής:

$\alpha \leq \alpha$ ανακλαστική
 $\alpha \leq \beta$ καί $\beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$ άντισυμμετρική καί
 $\alpha \leq \beta$ καί $\beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \leq \gamma$ μεταβατική.

Άσκήσεις:

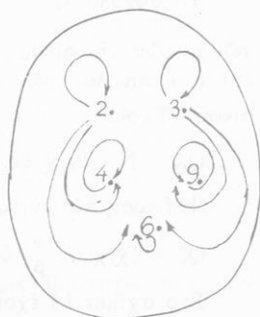
37. Νά διατάξετε τó σύνολο $\{3^5, 3^2, 3^1, 3^0, 3^3, 3^4\}$, ώστε νά προηγείται ή δύναμη μέ τό μικρότερο εκθέτη.

38. Κάνετε τό ίδιο καί στό σύνολο $\{3^2, 5^1, 10^0, 2^9\}$. Αύτή ή διάταξη είναι διάταξη κατά μέγεθος;

39. Νά διατάξετε τó σύνολο $\{4, 8, 9, 3, 12, 16, 18\}$ έτσι, ώστε μεταξύ δύο στοιχείων του νά προηγείται εκείνο πού είναι πολλαπλάσιο του άλλου. Θά είναι τότε τό σύνολο όλικώς διατεταγμένο; Νά γίνει τό διάγραμμα τής διατάξεως.

40. Είναι όλικώς διατεταγμένο τό N μέ διάταξη κατά μέγεθος; Γιατί;

41. Έξηγήστε γιατί είναι όλικώς διατεταγμένο τό σύνολο τών ρητών τής άριθμητικής μέ διάταξη κατά μέγεθος.



σχ. 13.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

Α'. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ Q_0^+ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ (ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ).

§ 19. Μάθαμε στην Α' τάξη για τους ρητούς αριθμούς, τις πράξεις τους και τις ιδιότητες των πράξεων.

Παρακάτω θα επαναλάβουμε μερικούς γνωστούς κανόνες για τους ρητούς αριθμούς και για τις πράξεις τους.

$$\text{Το σύνολο } Q_0^+ = \{0, \dots, \frac{1}{2}, \dots, \frac{3}{4}, \dots, 1, \dots, 2, \dots, 2\frac{1}{2}, \dots\}$$

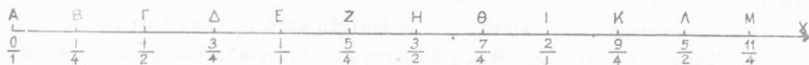
των ρητών της αριθμητικής είναι η ένωση του συνόλου N_0 των άκεραίων και του συνόλου των μη άκεραιων πηλίκων ενός άκεραίου δια ενός φυσικού. Έχομε:

$$Q_0^+ = N_0 \cup \{x/x \text{ δεν είναι άκεραιο πηλίκος ενός άκερ. δια ενός φυσικού}\}.$$

Η ένωση αυτών των δύο συνόλων δίνει περιγραφικά το Q_0^+ , ως εξής:

$$Q_0^+ = \{x/x = \frac{\alpha}{\beta} \text{ όταν } \alpha \in N_0, \beta \in N \text{ και } \frac{\alpha}{\beta} \text{ ανάγωγο}\}.$$

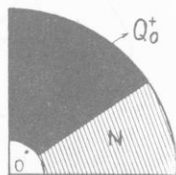
Στο σχήμα 14 έχομε τη γραφική παράσταση των ρητών στην ημιευθεία ΑΧ και στο σχήμα 15 το διάγραμμα του συνόλου Q_0^+ .



σχ. 14.

§ 20. Αν δοθούν δύο ρητοί α και β , τότε υπάρχει πάντοτε ο ρητός $\alpha + \beta$. Δηλαδή μπορούμε να εκτελέσουμε την πράξη της προσθέσεως στο σύνολο των ρητών της αριθμητικής και να βρούμε σαν άθροισμά τους έναν ρητό. Αυτό όμως δεν συμβαίνει

σχ. 15.



στην πράξη της αφαίρεσας. 'Η διαφορά $\alpha - \beta$ υπάρχει, αν $\alpha \geq \beta$. 'Επομένως δέν μπορούμε νά ἐκτελέσουμε πάντοτε τήν πράξη τῆς αφαίρεσας, ἢ λέμε ὅτι ἡ ἀφαίρεση δέν εἶναι πάντοτε δυνατή στό σύνολο τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς.

"Αν ἡ διαφορά $\alpha - \beta$ υπάρχει καί εἶναι ὁ ρητός γ , τότε, ὅπως εἶναι γνωστό, ἔχομε: $\alpha - \beta = \gamma \Leftrightarrow \alpha = \beta + \gamma \Leftrightarrow \alpha - \gamma = \beta$. 'Επίσης ἂν γ , δ εἶναι ρητοί, υπάρχει πάντοτε ὁ ρητός $\gamma \cdot \delta$ καί ἂν $\gamma \neq 0$, υπάρχει ὁ ρητός $\frac{1}{\gamma}$ (ἀντίστροφος τοῦ γ) καί ἔχομε $\delta : \gamma = \delta \cdot \frac{1}{\gamma}$.

§ 21. Τò μηδέν «0» εἶναι τὸ οὐδέτερο στοιχεῖο τῆς προσθέσεως: $0 + \alpha = \alpha$, σάν παράγοντας μηδενίζει τὸ γινόμενο: $0 \cdot \alpha = 0$ καί δέν θεωρεῖται ποτέ σάν διαιρέτης. 'Η μονάδα «1» εἶναι τὸ οὐδέτερο στοιχεῖο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ: $1 \cdot \alpha = \alpha$.

§ 22. Οἱ πράξεις τῆς προσθέσεως καί τοῦ πολ/σμοῦ εἶναι μονότιμες. Δηλαδή τὸ ἄθροισμα καί τὸ γινόμενο δύο ρητῶν εἶναι ἕνας μόνο ρητός. (Τὸ ἴδιο συμβαίνει καί μὲ τήν ἀφαίρεση, ἂν εἶναι δυνατή). Γιατί, ἀφοῦ ἡ διαφορά $18 - 5$ ἢ 13 εἶναι τέτοια, ὥστε τὸ ἄθροισμά της μὲ τὸν ἀφαιρετέο 5 νά δίνει τὸν μειωτέο 18 , δέν μπορεῖ νά ὑπάρχει ἄλλη διαφορά, γιὰ τὸν λόγο ὅτι ἡ πρόσθεση εἶναι μονότιμη. 'Ομοίως καί ἡ διαίρεση $\alpha : \beta$ ($\beta \neq 0$) εἶναι μονότιμη, γιατί $\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$ καί ὁ πολλαπλασιασμός δύο ρητῶν εἶναι πράξη μονότιμη).

'Ο παρακάτω πίνακας περιέχει τίς κυριότερες ιδιότητες τῶν πράξεων συμβολικά.

Οἱ $\alpha, \beta, \gamma \in Q_0^+$		
Πράξεις	Πρόσθεση	Πολ/μός
"Υπαρξη ἄθροισμ. καί γινομένου	$(\alpha + \beta) \in Q_0^+$	$(\alpha \cdot \beta) \in Q_0^+$
'Αντιμεταθ. ιδιότητα	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
προσεταιρ. ιδιότητα	$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$	$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$
'Επιμεριστ. ιδιότητα	$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$	

Άσκησης:

42. α) 'Απλοποιήστε τὰ κλάσματα:

$$\frac{24}{27}, \frac{15}{14}, \frac{55}{30}, \frac{12}{30}, \frac{35}{35}, \frac{42}{21}, \frac{11}{33}, \frac{9}{18}$$

β) Κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{5}, \quad \frac{7}{6} + \frac{8}{9}, \quad \frac{13}{4} - \frac{5}{16}, \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}, \quad \frac{7}{3} \cdot \frac{9}{14}, \quad \frac{11}{8} \cdot \frac{0}{4},$$

$$\frac{12}{13} : \frac{4}{13}, \quad \frac{15}{16} : \frac{1}{4}$$

43. Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές, ποιές λαθεμένες και γιατί;

α) $(17:15,2) \in Q_0^+$, β) $\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{3}{8} - \frac{5}{8}$, γ) $200:40 = 40:200$,

δ) $205 \cdot \left(\frac{1}{3} + 19\right) = 205 \cdot \left(19 + \frac{1}{3}\right)$, ε) $(97-98) \in N_0$,

στ) $\frac{3}{4} + 8 = \left(\frac{3}{4} + 8\right) \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)$

ζ) $\left(\frac{7}{13} + \frac{3}{7}\right) + 1 = \frac{7}{13} + \left(\frac{3}{7} + 1\right)$, η) $\left(15\frac{1}{2} - \frac{31}{2}\right) \in Q_0^+$

θ) $0,5 \cdot \left(7 \cdot \frac{1}{3}\right) = \left(0,5 \cdot 7\right) \cdot \frac{1}{3}$

44. Να εκτελεσθούν οι παρακάτω πράξεις:

α) $\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right) : 2\frac{2}{3} + \left(4\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) : \frac{2}{5}$,

β) $\left[\left(\frac{3}{16} + \frac{2}{8} + \frac{3}{4}\right) : \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) : \frac{3}{4}\right] \cdot 10\frac{2}{7}$,

γ) $2\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{7}{8} - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{8} \cdot \left(2 - \frac{3}{4}\right)$,

δ) $\left(5\frac{7}{26} - 1\frac{4}{39}\right) : \left(6\frac{2}{9} - 4\frac{5}{6}\right)$

2. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΡΗΤΩΝ

§ 23. Θα προσπαθήσουμε να επιλύσουμε τα παρακάτω προβλήματα.

α) Στην πόλη Α η θερμοκρασία το μεσημέρι ήταν 10 βαθμοί πάνω από το μηδέν. Το βράδυ η θερμοκρασία είχε κατεβεί κατά 7 βαθμούς. Ποιά ήταν η θερμοκρασία το βράδυ;

*Έχουμε: 10 βαθμ. - 7 βαθμ. = 3 βαθμ. πάνω από το μηδέν.

*Αρα η θερμοκρασία το βράδυ στην πόλη Α ήταν 3 βαθμοί πάνω από το μηδέν.

β) Η θερμοκρασία το μεσημέρι στην πόλη Β ήταν 6 βαθμοί πάνω από το μηδέν. Το βράδυ η θερμοκρασία είχε κατεβεί κατά 8 βαθμούς. Ποιά ήταν η θερμοκρασία στην πόλη Β το βράδυ;

*Αν ονομάσουμε χ βαθμούς τη θερμοκρασία το βράδυ στην πόλη Β,

τότε σύμφωνα με τὸ πρόβλημα ἔχομε νὰ ἐκτελέσουμε τὴν ἀφαίρεση 6 βαθμοὶ − 8 βαθμοὶ ἢ νὰ ἐπιλύσουμε τὴν ἐξίσωση $6 - 8 = \chi$.

Ἡ ἀφαίρεση αὐτὴ δὲν εἶναι δυνατὴ στὸ σύνολο Q_0^+ τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς. Ἐπομένως καὶ ἡ παραπάνω ἐξίσωση δὲν ἔχει λύση στὸ σύνολο αὐτό.

Ὅμως τὸ πρόβλημα ἔχει λύση καὶ ὁ καθένας μπορεῖ νὰ ἀπαντήσει ὅτι ἡ θερμοκρασία τὸ βράδυ στὴν πόλη Β ἦταν 2 βαθμοὶ κάτω ἀπὸ τὸ μηδέν.

Ἐχομε λοιπόν: $6 \text{ βαθμοὶ} - 8 \text{ βαθμοὶ} = 2 \text{ βαθμοὶ κάτω ἀπὸ τὸ μηδέν.}$

Γιὰ νὰ ἐκφράσουμε τὴ διαφορά αὐτὴ, πρέπει νὰ δημιουργήσουμε νέους ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι νὰ δίνουν λύση σὲ προβλήματα ὅπως τὸ παραπάνω.

Στὴν περίπτωση αὐτὴ ὁ νέος ἀριθμὸς χ , ὁ ὁποῖος θὰ ἀντιπροσωπεύει τὴν ἔκφραση «δύο βαθμοὶ κάτω ἀπὸ τὸ μηδέν», πρέπει νὰ ὀρισθεῖ μὲ τέτοιον τρόπο, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτοῦ μὲ τὸν 8 νὰ ἰσοῦται μὲ 6, γιὰ νὰ διατηρεῖται ἡ γνωστὴ μας ἰσοδυναμία: $6 - 8 = \chi \Leftrightarrow 6 = 8 + \chi$

Ἀλλὰ τότε ἔχομε:

$$6 = 8 + \chi \Leftrightarrow 6 = \underbrace{(6+2)}_8 + \chi \Leftrightarrow 6 = 6 + \underbrace{(2+\chi)}_0$$

Ἐπειδὴ $6 = 6 + 0$, πρέπει ὁ 2 καὶ ὁ χ νὰ ἔχουν ἄθροισμα μηδέν. Δηλαδή $2 + \chi = 0$. Ὁ νέος ἀριθμὸς χ συμβολίζεται μὲ -2 καὶ διαβάζεται **ἀρνητικός δύο ἢ πλὴν δύο**.

Ὡστε ἡ θερμοκρασία «δύο βαθμοὶ κάτω ἀπὸ τὸ μηδέν» παριστάνεται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ -2 βαθμοί.

Ὁ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς 2 (-2) λέγεται **ἀντίθετος** τοῦ 2 καὶ εἶδαμε ὅτι $2 + (-2) = 0$. Ὁμοίως ἔχομε $(-2) + 2 = 0$, γιατί, ὅταν τὸ θερμομέτρο δείχνει -2 βαθμούς (2 βαθμοὶ κάτω ἀπὸ τὸ μηδέν) καὶ ἀνεβεῖ κατὰ 2 βαθμούς, θὰ δείχνει τὴ θερμοκρασία 0 βαθμ.

Συνεπῶς τὸ ἄθροισμα δύο ἀντίθετων ἀριθμῶν εἶναι μηδέν. Ἡ ἐξίσωση $2 + \chi = 0$, γιὰ τὴν ὁποία ἔχομε τώρα τὴ λύση -2 , ἐκφράζει καὶ τὸ ἐξῆς πρόβλημα:

Ποῖον ἀριθμὸ πρέπει νὰ προσθέσουμε στὸ 2, γιὰ νὰ ἔχομε ἄθροισμα μηδέν;

Ἀνάλογα προβλήματα ἐκφράζουν καὶ οἱ παρακάτω ἐξισώσεις:

$$1 + \psi = 0 \quad \text{ἢ} \quad \psi + 1 = 0, \quad \frac{1}{2} + \varphi = 0 \quad \text{ἢ} \quad \varphi + \frac{1}{2} = 0$$

$$3 + z = 0 \quad \text{ἢ} \quad z + 3 = 0, \quad \frac{3}{4} + \tau = 0 \quad \text{ἢ} \quad \tau + \frac{3}{4} = 0$$

$$\omega + 4 = 0 \quad \text{ἢ} \quad 4 + \omega = 0$$

Οί αντίθετοι τῶν $1, 3, 4, \frac{1}{2}$ καὶ $\frac{3}{4}$ παριστάνονται ἀντιστοίχως μὲ $-1, -3, -4, -\frac{1}{2}$ καὶ $-\frac{3}{4}$ καὶ ἔχομε: $1+(-1)=0$, $3+(-3)=0$, $(-4)+4=0$, $\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})=0$ καὶ $\frac{3}{4}+(-\frac{3}{4})=0$.

Οί ἀριθμοὶ $-1, -2, -3, -4, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}$ κ.λ.π. δὲν ἀνήκουν στὸ σύνολο Q_0^+ τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς. Γι' αὐτὸ ὀρίζομε τὸ σύνολο τῶν ἀρνητικῶν ρητῶν, τὸ ὁποῖο ἔχει στοιχεῖα τοὺς ἀριθμοὺς $-1, -2, -3, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}$, καὶ γενικῶς τὸν ἀριθμὸ $-a$ ὅπου $a \in Q_0^+$.

Τὸ σύνολο αὐτὸ τὸ συμβολίζομε μὲ τὸ Q^- καὶ ἔχει τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Q^+ , μπροστὰ ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἔχομε θέσει τὸ πρόσημο πλὴν $(-)$. Δηλαδή τὰ ἀντίθετα τῶν στοιχείων τοῦ Q^+ .

Στοιχεῖα τοῦ Q^+ : $1, \dots, \frac{1}{2}, \dots, \frac{3}{4}, \dots, 2, \dots, 2\frac{1}{2}, \dots, 3, \dots$

Στοιχεῖα τοῦ Q^- : $-1, \dots, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{3}{4}, \dots, -2, \dots, -2\frac{1}{2}, \dots, -3, \dots$



σχ. 16.

§ 24. Παρατηροῦμε στὸ θερμόμετρο (σχ. 16) ὅτι τὸ ἄκρο τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης περνᾷ μπροστὰ ἀπὸ τοὺς νέους ἀριθμοὺς $-1, -2, -3$, κ.λ.π., ὅταν ἡ θερμοκρασία ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ μηδέν ἐλαττώνεται. (Αὐτὸ δικαιολογεῖ γιὰ ποιὸ λόγο διαλέξαμε τὸ πρόσημο πλὴν « $-$ », γιὰ νὰ παραστήσουμε τοὺς νέους ἀριθμούς).

Γιὰ νὰ περάσει ὁμως τὸ ἄκρο τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης μπροστὰ ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς, πού εἶναι πάνω ἀπὸ τὸ μηδέν, πρέπει ἡ θερμοκρασία, ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ μηδέν, νὰ αὐξάνει. Γι' αὐτὸν τὸ λόγο γιὰ τὴν παράσταση τῶν γνωστῶν μας ἀριθμῶν τοῦ Q^+ θὰ χρησιμοποιήσουμε τὸ πρόσημο σὺν « $+$ ».

Σύμφωνα μὲ αὐτὰ ἐκφράζομε τὴ λύση τοῦ πρώτου προβλήματος ὡς ἑξῆς: «Ἡ θερμοκρασία τὸ βράδυ θὰ εἶναι $+3$ βαθμοί».

Στὸ σύνολο Q^+ ἀνήκουν τώρα οἱ ἀριθμοὶ $+1, +\frac{1}{2}, +2$ κ.λ.π., τοὺς ὁποῖους ὀνομάζομε θετικούς ρητούς καὶ τὸ σύνολο Q^+ σύνολο τῶν θετικῶν ρητῶν.

*ἔχομε τώρα:

Στοιχεία του συνόλου $Q^+ : +1, \dots, +\frac{1}{2}, \dots, +2, \dots, +\frac{5}{2}, \dots, +3, \dots$

Στοιχεία του συνόλου $Q^- : -1, \dots, -\frac{1}{2}, \dots, -2, \dots, -\frac{5}{2}, \dots, -3, \dots$

Τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου τῶν ἀρνητικῶν ρητῶν ἀπὸ τὸν ὀρισμὸς τῶν ἀντιστοιχοῦν ἓνα πρὸς ἓνα στὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Q^+ .

Τὰ στοιχεῖα τοῦ Q^- λέγονται ἀντίθετα (ἢ συμμετρικὰ) τῶν ἀντιστοιχῶν στοιχείων τοῦ Q^+ ὅπως ἐπίσης καὶ τὰ στοιχεῖα τοῦ Q^+ λέγονται ἀντίθετα τῶν ἀντιστοιχῶν στοιχείων τοῦ Q^- .

Π.χ. Ὁ ἀντίθετος τοῦ $+\frac{5}{2}$ εἶναι ὁ $-\frac{5}{2}$ καὶ ὁ ἀντίθετος τοῦ $-\frac{5}{2}$ εἶναι ὁ $+\frac{5}{2}$. Αὐτοὶ ἔχουν ἄθροισμα μηδέν

$$\left(+\frac{5}{2}\right) + \left(-\frac{5}{2}\right) = 0 \quad \eta \quad \left(-\frac{5}{2}\right) + \left(+\frac{5}{2}\right) = 0.$$

Ὁ μηδὲν δὲν ἀνήκει στὸ Q^+ οὔτε στὸ Q^- καὶ συνεπῶς δὲν ἔχει πρόσημο. (Δὲν γράφομε $+0$ ἢ -0)

Ἀντίθετος ὁμῶς τοῦ μηδενὸς εἶναι ὁ μηδέν, διότι $0+0=0$.

§ 25 Ἄν συνοψίσουμε τὰ παραπάνω, ἔχομε:

1) Τὸ γνωστὸ μας σύνολο Q^+ (τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς ἐκτὸς ἀπὸ τὸ μηδέν) τὸ ὀνομάσαμε σύνολο τῶν θετικῶν ρητῶν καὶ μπροστὰ ἀπὸ τὰ στοιχεῖα του θέσαμε τὸ πρόσημο σὺν «+»

Εἶναι:

$$\text{Σύνολο θετικῶν ρητῶν} = Q^+ = \left\{ \dots, +\frac{1}{2}, \dots, +1, \dots, +2, \dots \right\}.$$

Σημείωση: Στὰ ἐπόμενα ὁ θετικὸς ρητὸς θὰ γράφεται μὲ τὸ πρόσημό του ἢ χωρὶς αὐτὸ (π.χ. ὁ θετικὸς $\frac{1}{2}$ θὰ γράφεται $+\frac{1}{2}$ ἢ $\frac{1}{2}$). Τὸ πρόσημο σὺν θὰ τὸ θέτουμε στὸν θετικὸ ἀριθμὸ, ἂν θέλουμε νὰ δώσουμε μεγαλύτερη ἐμφαση στὴν ἐκφραση «θετικὸς».

Ὡστε: **Θετικὸς ρητὸς λέγεται κάθε ρητὸς τῆς ἀριθμητικῆς ἐκτὸς ἀπὸ τὸ μηδέν.** Μπροστὰ ἀπ' αὐτὸν θέτομε τὸ πρόσημο σὺν «+» ἢ κανένα πρόσημο.

2) Ὅρισame ἓνα νέο σύνολο, τὸ ὁποῖο ὀνομάσαμε σύνολο τῶν ἀρνητικῶν ρητῶν, ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς, στὰ ὁποῖα ἐθέσαμε μπροστὰ τὸ πρόσημο πλὴν «-».

Ὡστε: **Ἀρνητικὸς ρητὸς λέγεται κάθε ἀντίθετος θετικοῦ ρητοῦ.** Συμβολικά: **κάθε ρητὸς τῆς ἀριθμητικῆς (ἐκτὸς ἀπὸ τὸ μηδέν) ὁ ὁποῖος ἔχει τὸ πρόσημο πλὴν «-».**

Είναι: Σύνολο ἀρνητικῶν ρητῶν $= Q^- = \{\dots, -\frac{1}{2}, \dots, -1, \dots, -2, \dots\}$.

3) Μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν συνόλων Q^+ καὶ Q^- ὑπάρχει ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία. Τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα εἶναι αὐτὰ ποὺ ἔγιναν ἀπὸ τὸ ἴδιο στοιχεῖο τοῦ συνόλου τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς καὶ λέγονται ἀντίθετα στοιχεῖα.

“Ὅστε: Κάθε θετικὸς ρητὸς ἔχει ἓναν καὶ μόνο ἓναν ἀρνητικὸ ὡς ἀντίθετό του. Καὶ κάθε ἀρνητικὸς ἔχει ἓναν καὶ μόνο ἓναν θετικὸ ὡς ἀντίθετό του.

Ἀσκήσεις:

45. Ἀπαντήστε στὰ παρακάτω ἐρωτήματα:

α) Ἀνήκει ὁ μηδὲν στὸ σύνολο Q^+ ἢ στὸ Q^- ;

β) Ποιοὶ εἶναι οἱ ἀντίθετοι τῶν : $+\frac{35}{17}, -20, +\frac{17}{20}, -\frac{25}{2}, +16, 15, \frac{1}{2}$.

46. Ποιοὶ εἶναι οἱ ἀρνητικοὶ ρητοὶ $\chi, \psi, z, \omega, \phi$, γιὰ τοὺς ὁποίους ἔχομε:

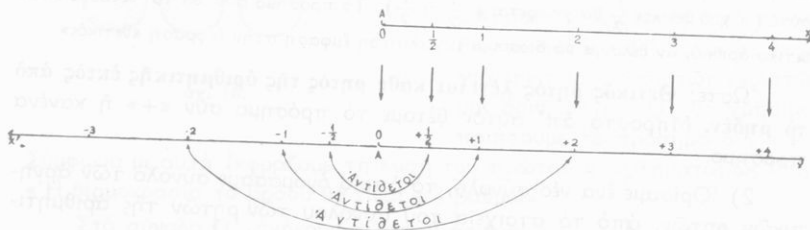
$$\chi + \frac{7}{8} = 0, \quad \frac{11}{3} + \psi = 0, \quad \frac{1}{5} + z = 0, \quad \omega + 10,3 = 0, \quad \phi + 12 = 0;$$

47. Ποιοὶ εἶναι οἱ θετικοὶ ρητοὶ $\kappa, \lambda, \mu, \nu$, γιὰ τοὺς ὁποίους ἔχομε:

$$-\frac{8}{9} + \kappa = 0, \quad \lambda + \left(-\frac{2}{7}\right) = 0, \quad \mu + (-100) = 0, \quad -\frac{35}{2} + \nu = 0;$$

48. Ποῖον κανόνα ξέρετε γιὰ τοὺς ἀντίθετους ρητοὺς;

3. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ Q ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



σχ. 17α καὶ 17β.

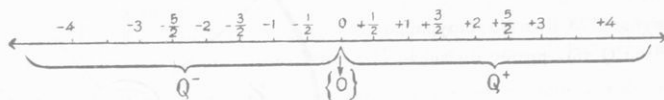
§ 26. Το σχήμα 17α παριστάνει την ήμικυκλίδα AX , στην οποία έχουν τοποθετηθεί με τὸν γνωστὸ τρόπο οἱ ρητοὶ τῆς ἀριθμητικῆς.

Στὸ σχήμα 17β γίνεται ἐπέκταση τῆς ήμικυκλίδας AX κατὰ τὴν ἀντικείμενὴ τῆς AX' καὶ σχηματίζεται ἡ εὐθεΐα $X'AX$. Οἱ ρητοὶ τῆς ἀριθμητικῆς (ἐκτὸς ἀπὸ τὸ μηδέν), οἱ ὁποῖοι εἶναι τοποθετημένοι στὴν AX , λέγονται τώρα θετικοὶ ρητοὶ.

Στὴν ήμικυκλίδα AX' μποροῦν νὰ τοποθετηθοῦν (στὸ σχήμα ἔχουν τοποθετηθεῖ) οἱ ἀντίθετοι τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς, οἱ ἀρνητικοί, με τέτοιον τρόπο, ὥστε κάθε ἀρνητικὸς νὰ τοποθετεῖται σ' ἓνα σημεῖο ἀριστερὰ τοῦ A , τὸ ὁποῖο νὰ ἀπέχει ἀπὸ τὸ A ὅσο ἀπέχει καὶ τὸ σημεῖο, στὸ ὁποῖο ἔχει τοποθετηθεῖ ὁ ἀντίθετός του θετικὸς.

Ὡστε οἱ ἀντίθετοι ἀριθμοὶ τοποθετοῦνται στὴν $X'AX$ συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ σημεῖο A .

Μποροῦμε ἀπὸ αὐτὸ νὰ παρατηρήσουμε ὅτι κάθε θετικὸς εἶναι δεξιὰ τοῦ μηδενὸς καὶ κάθε ἀρνητικὸς εἶναι ἀριστερὰ τοῦ μηδενὸς.



$$\left\{ \dots, -2, \dots, -1, \dots, -\frac{1}{2}, \dots \right\} \cup \{0\} \cup \left\{ \dots, +\frac{1}{2}, \dots, +1, \dots, +2, \dots \right\}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_Q$

σχ. 17γ.

Στὸ σχήμα 17γ ἔχομε τοποθετήσει σὲ μιὰ εὐθεΐα: α) Τὸ σύνολο τῶν ἀρνητικῶν ρητῶν, β) τὸ σύνολο τὸ ὁποῖο ἔχει στοιχεῖο μόνο τὸ μηδέν καὶ γ) τὸ σύνολο τῶν θετικῶν ρητῶν.

Ἡ ἔνωση τῶν τριῶν αὐτῶν συνόλων δίνει ἓνα νέο σύνολο Q ($Q = Q^- \cup \{0\} \cup Q^+$), τὸ ὁποῖο λέγεται **σύνολο τῶν ρητῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν**.

Σημείωση α': Ὁ τρόπος με τὸν ὁποῖο παραστήσαμε τοὺς ρητοὺς στὴν εὐθεΐα $X'AX$ σημαίνει ὅτι κάθε ρητὸς ἔχει τοποθετηθεῖ σ' ἓνα μόνο σημεῖο τῆς εὐθείας, χωρὶς αὐτὸ νὰ σημαίνει ὅτι σὲ κάθε σημεῖο τῆς ἔχει τοποθετηθεῖ ἓνας ρητὸς πραγματικὸς ἀριθμὸς.

Σημείωση β': Στὰ ἐπόμενα θὰ λέμε «**ρητὸς**» καὶ θὰ ἔννοοῦμε «**πραγματικὸς ρητὸς**».

Σημείωση γ': Σὲ παλαιότερα βιβλία οἱ πραγματικοὶ ρητοὶ λέγονταν σχετικοὶ (ρητοὶ) ἀριθμοί.

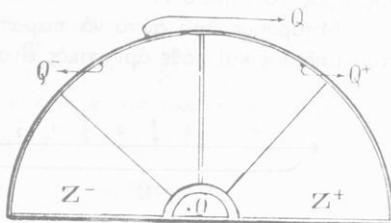
§ 27. Ὑποσύνολα τοῦ Q (συνόλου τῶν ρητῶν) εἶναι τὰ Q^- , $\{0\}$, Q^+ .

Ὅμοιως ὑποσύνολα τοῦ Q εἶναι τὸ σύνολο τῶν ἀρνητικῶν ἀκεραίων, τὸ ὁποῖο συμβολίζομε μὲ τὸ Z^- (αὐτὸ εἶναι ὑποσύνολο καὶ τοῦ Q^-) καὶ τὸ σύνολο τῶν θετικῶν ἀκεραίων, τὸ ὁποῖο συμβολίζομε μὲ τὸ Z^+ (Τὸ Z^+ εἶναι ὑποσύνολο καὶ τοῦ Q^+). Ἡ ἔνωση τῶν συνόλων Z^- , $\{0\}$, Z^+ δίνει τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων, τὸ ὁποῖο συμβολίζομε μὲ τὸ Z .

$$\underbrace{\{\dots, -4, -3, -2, -1\}}_{Z^-} \cup \{0\} \cup \underbrace{\{+1, +2, +3, +4, \dots\}}_{Z^+} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_Z$$

$$\text{"Ὡστε } Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+$$

Τὸ σχῆμα 176 εἶναι τὸ διάγραμμα τοῦ συνόλου Q τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.



σχ. 176.

Ἀνακεφαλαίωση :

1. Οἱ ἀρνητικοὶ ρητοί, τὸ μηδέν καὶ οἱ θετικοὶ ρητοὶ λέγονται ρητοὶ ἀριθμοὶ καὶ τὸ σύνολό τους συμβολίζεται μὲ Q .

Τὰ στοιχεῖα τοῦ Q μέσα σὲ ἄγκιστρα γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$Q = \{0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

2. Οἱ ἀρνητικοὶ ἀκέραιοι, τὸ μηδέν καὶ οἱ θετικοὶ ἀκέραιοι λέγονται ἀκέραιοι ἀριθμοὶ καὶ τὸ σύνολό τους συμβολίζεται μὲ τὸ Z .

Τὰ στοιχεῖα τοῦ Z μέσα σὲ ἄγκιστρα γράφονται, μὲ συντομία καὶ ὡς ἑξῆς:

$$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

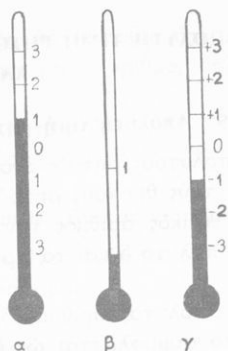
§ 28. Ἐφαρμογές:

Τοὺς ρητοὺς ἀριθμοὺς τοὺς χρησιμοποιοῦμε στὰ προβλήματα τῆς καθημερινῆς ζωῆς.

1. Το θερμόμετρο α σχ. 18 δείχνει 1 βαθμό πάνω από το μηδέν.

"Αν καλυφθεί η θερμομετρική κλίμακα (σχ. 18β) με τέτοιο τρόπο, ώστε να φαίνεται μόνο το άκρο της υδραργυρικής στήλης και ο αριθμός της κλίμακας, ο οποίος είναι παραπλευρώς (ο «1»), δεν μπορούμε να απαντήσουμε με βεβαιότητα αν η θερμοκρασία είναι 1 βαθμός πάνω από το μηδέν ή 1 βαθμός κάτω από το μηδέν.

"Όμως με το θερμόμετρο γ δεν αντιμετωπίζουμε αυτή τη δυσκολία, γιατί, αν το άκρο της υδραργυρικής στήλης είναι στον -1 , θα καταλάβουμε ότι η θερμοκρασία είναι 1 βαθμός κάτω από το μηδέν, αν είναι στον $+1$, η θερμοκρασία είναι 1 βαθμός πάνω από το μηδέν.



σχ. 18.

2. Ο ταμίας μπορεί να αντικαταστήσει τις εκφράσεις: «πληρωμή 2.000 δρχ», «είσπραξη 1800 δρχ.» με τους ρητούς -2000 δρχ. και $+1800$ δρχ. αντίστοιχως.

3. Οι χρονολογίες πρὸ Χριστοῦ μπορούν να παρασταθοῦν με ἀρνητικούς ρητούς και οι χρονολογίες μ.Χ. με θετικούς ρητούς. Π.χ. ἂν γράψουμε -300 ἔτη, ἔννοούμε 300 ἔτη π.Χ., ἐνῶ ἂν γράψουμε $+1900$ ἔτη (ἢ 1900 ἔτη), ἔννοούμε 1900 ἔτη μ.Χ.

4. Γιά τὸ κέρδος καὶ τὴ ζημία μπορούμε νὰ χρησιμοποιήσουμε τοὺς ρητοὺς ἀριθμοὺς.

Ἀσκήσεις:

49. Ἀπαντήστε στὰ παρακάτω ἐρωτήματα:

- Ὁ μηδέν ἀνήκει στὸ Q;
- Ὁ μηδέν ἀνήκει στὸ Z;
- Ποιά εἶναι ἡ τομὴ καὶ ἡ ἔνωση τῶν συνόλων Z^- , Z^+ ;
- Ποιά εἶναι ἡ τομὴ καὶ ἡ ἔνωση τῶν συνόλων Q^- , Q^+ ;
- Τὸ σύνολο Z εἶναι ὑποσύνολο τοῦ συνόλου Q^+ ἢ τοῦ Q^- ;
- Διαμερίστε τὰ σύνολα Q καὶ Z σὲ γνωστὰ σὰς ὑποσύνολα.

50. Χρησιμοποιήστε τοὺς ρητοὺς γιὰ νὰ ἐκφράσετε σύντομα τὰ παρακάτω:

$3\frac{1}{2}$ m κάτω ἀπὸ τὴν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας.

500 m πάνω ἀπὸ τὴν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας.

Κέρδος 2600 δρχ., ζημία 3500 δρχ.

Χρονολογία τῆς μάχης τῶν Θερμοπυλῶν.

Χρονολογία τῆς κηρύξεως τῆς ἐλληνικῆς ἐπαναστάσεως.

"Ετος γεννήσεως τοῦ Χριστοῦ.

51. Βρεῖτε παραδείγματα, στὰ ὁποῖα νὰ χρησιμοποιοῦνται οἱ ρητοὶ ἀριθμοί.

4. ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΡΗΤΟΥ - Η ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ.

§ 29. Απόλυτη τιμή ρητού.

Απόλυτους ρητούς ονομάζουμε τούς ρητούς τῆς ἀριθμητικῆς, ἐπομένως καὶ τούς θετικούς ρητούς.

Ὁ θετικός ἀριθμὸς πέντε γράφεται $+5$ ἢ 5 , δηλαδή **συμβολίζεται** με τὸν ἀπόλυτο 5 καὶ τὸ πρόσημο σὺν μπροστά του ἢ μόνο με τὸν ἀπόλυτο 5 .

Ὁ ἀπόλυτος ἀριθμὸς 5 λέγεται ἀπόλυτη τιμὴ τοῦ $+5$.

Αὐτὸ συμβολίζεται ὡς ἐξῆς: $|+5| = 5$.

Ὡστε **ἀπόλυτη τιμὴ θετικοῦ ἀριθμοῦ** ονομάζουμε τὸν ἴδιο τὸν ἀριθμό.

Ὁ ἀρνητικὸς τρία γράφεται -3 . Συμβολίζεται με τὸν ἀπόλυτο τρία καὶ τὸ πρόσημο $-$ μπροστά του. Ὁ 3 λέγεται ἀπόλυτη τιμὴ τοῦ -3 καὶ συμβολίζεται με $|-3|$. Εἶναι: $|-3| = 3$ καὶ διαβάζεται «ἀπόλυτη τιμὴ τοῦ πλὴν τρία ἴσον 3».

Ὡστε **ἀπόλυτη τιμὴ ἐνὸς ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ** εἶναι ὁ ἀντίθετός του.

Ἐπειδὴ $|+3| = 3$ καὶ $|-3| = 3$, ἔχομε $|+3| = |-3|$ (γιατί;)

Ἀπόλυτη τιμὴ τοῦ μηδενὸς εἶναι τὸ μηδέν $|0| = 0$

Γενικά: ἂν α εἶναι θετικὸς ρητός, ἔχομε $|\alpha| = \alpha$,
 ἂν α εἶναι ἀρνητικὸς ρητός, ἔχομε $|\alpha| = \delta$ ἀντίθετος τοῦ α
 καὶ ἂν α εἶναι μηδέν, ἔχομε $|\alpha| = 0$.

Ἐφαρμογές :

α) Νὰ βρεθεῖ ἡ ἀπόλυτη τιμὴ τῶν ρητῶν:

$$-\frac{7}{2}, -\frac{1}{8}, +\frac{3}{5}, +2\frac{4}{9}, +3, 6, \frac{4}{5}, 0.$$

$$\text{Ἐχομε: } \left| -\frac{7}{2} \right| = \frac{7}{2}, \left| -\frac{1}{8} \right| = \frac{1}{8}, \left| +\frac{3}{5} \right| = \frac{3}{5},$$

$$\left| +2\frac{4}{9} \right| = 2\frac{4}{9}, | +3 | = 3, | 6 | = 6, \left| \frac{4}{5} \right| = \frac{4}{5}, | 0 | = 0.$$

β) Ἄν $|x-1| = 12$ καὶ $x-1$ εἶναι θετικὸς ρητός, νὰ βρεθεῖ ὁ x .

Ἐπειδὴ $x-1$ εἶναι θετικὸς, ἔχομε $|x-1| = x-1$. Ἄρα $|x-1| = x-1 = 12 \Leftrightarrow x = 12+1 \Leftrightarrow x = 13$.

§ 30. Συμβολισμὸς ρητοῦ με ἓνα γράμμα.

Ὅπως εἶδαμε, συμβολίσαμε ἕναν ὁποιοδήποτε ρητὸ με ἓνα γράμμα α .

Μποροῦμε πάντοτε νὰ συμβολίζουμε με γράμματα τούς ρητούς ἀριθμούς.

Όταν λέμε ότι ο β είναι ρητός αριθμός, θα εννοούμε ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον β με οποιοδήποτε ρητό αριθμό, δηλαδή θετικό, αρνητικό ή μηδέν.

Η έκφραση «ο β είναι θετικός» συμβολίζεται: $\beta = +|\beta|$

Η έκφραση «ο β είναι αρνητικός» συμβολίζεται: $\beta = -|\beta|$

§ 31. Δύο ή περισσότεροι θετικοί αριθμοί είναι όμοσημοι.

Δύο ή περισσότεροι αρνητικοί αριθμοί είναι όμοσημοι.

Ένας θετικός και ένας αρνητικός είναι ετερόσημοι.

Π.χ. ο $+\frac{3}{4}$ και ο $-\frac{2}{3}$ είναι ετερόσημοι,

ο -2 και ο $+\frac{1}{2}$ είναι ετερόσημοι,

ο 3 και ο -4 είναι ετερόσημοι

Οι αριθμοί: $+\frac{3}{2}$, $+2$, $+1$, $\frac{4}{7}$, 8 είναι όμοσημοι.

Οι αριθμοί: $-\frac{3}{10}$, -4 , -20 , $-2\frac{1}{4}$, -5 είναι όμοσημοι.

§ 32. Η ισότητα στο σύνολο των ρητών.

Ξέρουμε ότι τον αριθμό 8 μπορούμε να τον παραστήσουμε με τὰ σύμβολα 8 , $\frac{16}{2}$, $6+2$, $2\cdot 4$ κ.λ.π.

Επομένως $8 = \frac{16}{2} = 6+2 = 2\cdot 4$. Όταν λέμε ότι δύο αριθμοί α και β τῆς αριθμητικῆς είναι ἴσοι, εννοούμε ότι πρόκειται γιὰ δύο διαφορετικούς συμβολισμούς τοῦ ἴδιου ρητοῦ.

Ἄν ἔχουμε τώρα τοὺς ρητοὺς $+3$ καὶ $+\frac{6}{2}$, παρατηροῦμε ὅτι ἔχουν ἴσες ἀπόλυτες τιμές (εἶναι $|+3| = 3$ καὶ $|+\frac{6}{2}| = \frac{6}{2}$, ἄρα $|+3| = |+\frac{6}{2}|$ ἢ $3 = \frac{6}{2}$) καὶ τὸ ἴδιο πρόσημο (εἶναι ὁμόσημοι).

Ἐπίσης οἱ ρητοὶ $-\frac{2}{5}$ καὶ $-\frac{4}{10}$ ἔχουν ἴσες ἀπόλυτες τιμές καὶ εἶναι ὁμόσημοι.

Τοὺς ρητοὺς, οἱ ὅποιοι εἶναι ὁμόσημοι καὶ ἔχουν ἴσες ἀπόλυτες τιμές, τοὺς ὀνομάζουμε ἴσους.

Ὡστε οἱ ρητοὶ α καὶ β λέγονται ἴσοι (συμβολικὰ $\alpha = \beta$), ἂν καὶ μόνο ἂν εἶναι ὁμόσημοι καὶ ἔχουν ἴσες ἀπόλυτες τιμές.

Ὁ συμβολισμὸς $\alpha = \beta$, ὁ ὁποῖος σημαίνει ὅτι ὁ α εἶναι ἴσος μὲ τὸν β , λέγεται **ισότητα**.

Επειδή $\acute{o}$ $-5 = -5$, ισχύει ή ανακλαστική ιδιότητα τής ισότητας.

Επίσης $\acute{a}\nu$ $-5 = -\frac{10}{2}$, είναι και $-\frac{10}{2} = -5$. επομένως ισχύει και ή συμμετρική ιδιότητα τής ισότητας.

Τέλος $\acute{a}\nu$ $-5 = -\frac{10}{2}$ και $-\frac{10}{2} = -\frac{15}{3} \Rightarrow -5 = -\frac{15}{3}$, $\acute{a}\rho\alpha$ ισχύει και ή μεταβατική ιδιότητα τής ισότητας.

Ωστε ή ισότητα τών ρητῶν αριθμῶν ἔχει τὶς γνωστὲς ιδιότητες:

$\alpha = \alpha$ (ανακλαστική ιδιότητα)

$\alpha = \beta \Rightarrow \beta = \alpha$ (συμμετρική ιδιότητα)

$\alpha = \beta$ και $\beta = \gamma \Rightarrow \alpha = \gamma$ (μεταβατική ιδιότητα)

Ἀσκήσεις:

52. Νά βρεθεῖ ή απόλυτη τιμή τῶν παρακάτω ρητῶν:

$$+ 8 - \frac{25}{3}, -\frac{13}{20}, +\frac{12}{3}, +\frac{1}{12}, \frac{11}{4}, 0$$

53. Ποιους ρητούς παριστάνουν τὰ χ , ψ , z , $\acute{a}\nu$:

$$|\chi| = 1, |\psi| = 0, |z| = \left| -\frac{3}{2} \right|;$$

54. α) Ἄν $|\chi + 3| = 5$ και $\chi + 3$ εἶναι θετικός ρητός, νά βρεθεῖ $\acute{o}$ χ .

β) Ἄν $|3\chi| = 0$, νά βρεθεῖ $\acute{o}$ χ .

γ) Ἄν γιὰ τοὺς ρητοὺς α , β , γ , δ ἔχουμε $\alpha + 1 = \beta + \gamma + \delta$ και $\beta + \gamma + \delta = 5$, νά βρεθεῖ $\acute{o}$ α .

55. Ἐξετάστε $\acute{a}\nu$ οἱ ἀριθμοὶ α και γ εἶναι ὁμόσημοι ή ἑτερόσημοι στὶς παρακάτω περιπτώσεις.

1. Ὁ α εἶναι ὁμόσημος τοῦ β και $\acute{o}$ β εἶναι ὁμόσημος τοῦ γ .

2. Ὁ α εἶναι ὁμόσημος τοῦ β και $\acute{o}$ β εἶναι ἑτερόσημος τοῦ γ .

3. Ὁ α εἶναι ἑτερόσημος τοῦ β και $\acute{o}$ β εἶναι ἑτερόσημος τοῦ γ .

4. Ὁ α εἶναι ἑτερόσημος τοῦ β και $\acute{o}$ β εἶναι ὁμόσημος τοῦ γ .

Β' ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

Οἱ πράξεις στὸ σύνολο Q εἶναι ή πρόσθεση, ή ἀφαίρεση, $\acute{o}$ πολλαπλασιασμός και ή διαίρεση.

§ 33.

1. ΠΡΟΣΘΕΣΗ

α) Ἐνα ἀεροπλάνο ἀνέβηκε ἀρχικὰ 3 km και κατόπι ἄλλα 2 km. Σὲ ποιοῦ ὕψος ἀνέβηκε τελικὰ τὸ ἀεροπλάνο;

Εἶναι φανερό $\acute{o}\tau\iota$ τὸ ἀεροπλάνο ἀνέβηκε 5 km.

“Αν χρησιμοποιήσουμε τούς ρητούς αριθμούς, τότε η έκφραση «άνεβηκε 3 km» συμβολίζεται + 3 km, τὸ ἴδιο γιὰ τὴν έκφραση «άνέβηκε 2 km» ἔχομε +2 km καὶ γιὰ τὴν «άνέβηκε 5 km» γράφομε +5 km.

Ἐπειδὴ ἀνέβηκε 3 km + ἀνέβηκε 2 km = ἀνέβηκε 5 km,
 ἔχομε $(+3 \text{ km}) + (+2 \text{ km}) = +5 \text{ km}$.

Ἄν τὸ ἀεροπλάνο κατέβαινε 3 km καὶ 2 km, θὰ κατέβαινε τελικὰ 5 km.
 Ἄρα $(-3 \text{ km}) + (-2 \text{ km}) = -5 \text{ km}$.

Συνεπῶς τὸ ἄθροισμα δύο ὁμόσημων ρητῶν εἶναι ρητὸς ὁμόσημος μὲ αὐτοὺς καὶ ἔχει ἀπόλυτη τιμὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τους.

Παραδείγματα.

$$(+5) + (+8) = +13 = +(5+8)$$

$$(-7) + (-3) = -10 = -(7+3)$$

$$\left(+\frac{6}{11}\right) + \left(+\frac{5}{11}\right) = +\frac{11}{11} = +\left(\frac{6}{11} + \frac{5}{11}\right)$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{2}{4}\right) = -\frac{5}{4} = -\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{4}\right)$$

Γενικὰ ἔὰν α καὶ β εἶναι θετικοί, τὸ ἄθροισμα $\alpha + \beta$ εἶναι θετικὸς καὶ ἡ ἀπόλυτη τιμὴ του ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπόλυτων τιμῶν.

$$|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|.$$

(Ἄν α καὶ β εἶναι ἀρνητικοί, τὸ $\alpha + \beta$ εἶναι ἀρνητικὸς).

β) Γνωρίζομε ὅτι τὸ μηδέν εἶναι τὸ οὐδέτερο στοιχεῖο τῆς προσθέσεως στὸ σύνολο Q_0^+ . Δηλαδή $5+0 = 0+5 = 5$, ἐπομένως καὶ $(+5)+0 = 0+(+5) = +5$.

Ἄν ἡ θερμοκρασία εἶναι -2 βαθμοὶ καὶ ἀνεβεῖ κατὰ 0 βαθμούς, τελικὰ θὰ ἔχομε θερμοκρασία -2 βαθμούς.

Ἄρα $(-2)+0 = -2$. Ὀμοίως καὶ $0+(-2) = -2$.

Ὡστε τὸ μηδέν εἶναι τὸ οὐδέτερο στοιχεῖο τῆς προσθέσεως στὸ σύνολο τῶν ρητῶν.

Συμβολικά: Ἄν $\alpha \in Q \Rightarrow \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$

γ) Ἄν ἡ θερμοκρασία ἀνεβεῖ 3 βαθμούς καὶ ὕστερα κατεβεῖ 3 βαθμούς, τελικὰ δὲν γίνεται καμιά μεταβολὴ τῆς θερμοκρασίας. Δηλαδή:

$$(+3) + (-3) = 0.$$

Τὸ ἄθροισμα δύο ἀντίθετων ρητῶν ἰσοῦται μὲ μηδέν.

δ) Νὰ βρεθεῖ τὸ ἄθροισμα $(-3) + (+7)$.

Γιὰ νὰ λύσουμε αὐτὸ τὸ πρόβλημα, θὰ στηριχτοῦμε στοὺς κανόνες τοῦ ἁθροίσματος τῶν ὁμόσημων καὶ τοῦ ἁθροίσματος τῶν ἀντίθετων ρητῶν.

Ἐπειδὴ $+7 = +(3+4) = (+3)+(+4)$,
 ἔχομε: $(-3) + (+7) = \underbrace{(-3) + (+3)}_0 + (+4) = 0 + (+4) = +4 =$
 $= +(7-3).$

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμα $(+3)+(-5)$, ἐργαζόμαστε μὲ τὸν ἴδιο τρόπο. Δηλαδή

$$\begin{aligned} -5 &= -(3+2) = (-3)+(-2), \text{ ἄρα } (+3)+(-5) = (+3)+\underbrace{(-3)+(-2)}_0 = \\ &= 0+(-2) = -2 = -(5-3). \end{aligned}$$

Ἀπὸ τὰ παραπάνω παραδείγματα τοῦ ἄθροίσματος δύο ἐτερόσημων ρητῶν ἔχομε:

Τὸ ἄθροισμα δύο ἐτερόσημων ρητῶν εἶναι ρητὸς ὁμόσημος μὲ ἐκεῖνον ποὺ ἔχει τὴ μεγαλύτερη ἀπόλυτη τιμὴ καὶ ἡ ἀπόλυτη τιμὴ του ἰσοῦται μὲ τὴ διαφορά (τῆς μικρότερης ἀπὸ τὴν μεγαλύτερη) τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τους.

Παραδείγματα.

$$(-12) + (+11) = -(12-11) = -1$$

$$(+10) + (-4) = +(10-4) = +6$$

$$\left(-\frac{7}{8}\right) + \left(+\frac{5}{8}\right) = -\left(\frac{7}{8}-\frac{5}{8}\right) = -\frac{2}{8}$$

Γενικά:

Ἄν $\alpha \in \mathbb{Q}^+$, $\beta \in \mathbb{Q}^-$ καὶ $|\alpha| > |\beta| \Rightarrow \alpha + \beta = +(|\alpha| - |\beta|)$, ὅπου $|\alpha| - |\beta| > 0$.

Ἄν $\alpha \in \mathbb{Q}^+$, $\beta \in \mathbb{Q}^-$ καὶ $|\alpha| < |\beta| \Rightarrow \alpha + \beta = -(|\beta| - |\alpha|)$, ὅπου $|\beta| - |\alpha| > 0$

Ἐφαρμογές:

$$1. (+4) + (+2) = +6 = +(4+2), (+4) + (-7) = -3 = -(7-4)$$

$$(-2) + (-3) = -5 = -(2+3), (-3) + (+8) = +5 = +(8-3)$$

$$2. \left(-\frac{1}{6}\right) + \left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{6}{6} = -\left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\right),$$

$$\left(-\frac{5}{3}\right) + \left(+\frac{2}{3}\right) = -\frac{3}{3} = -\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}\right)$$

§ 34. Ἀπὸ τὰ πρὶν πάνω καὶ ἀπὸ τὰ προηγούμενα παραδείγματα παρατηροῦμε ὅτι ὑπάρχει πάντοτε τὸ ἄθροισμα δύο ρητῶν καὶ εἶναι μονότιμο (βρίσκεται μόνο μία τιμὴ του), γιατί ὁ ὑπολογισμὸς του ἀνάγεται στὴν πρόσθεση ἢ στὴν ἀφαίρεση τῶν ἀπόλυτων ἀριθμῶν.

Γενικά εάν a και β είναι ρητοί, υπάρχει ο ρητός $(a+\beta)$ | συμβολικά:
 $a, \beta \in \mathbb{Q} \Rightarrow (a+\beta) \in \mathbb{Q}$, ο οποίος λέγεται άθροισμα αυτών.

Το άθροισμα δύο ρητών είναι μονότιμο.

Έπειδή $(+2)+(-5) = -3$ και $(-5)+(+2) = -3$, έχουμε ότι
 $(+2)+(-5) = (-5)+(+2)$.

Ώστε: "Αν a και β είναι ρητοί, έχουμε $a+\beta = \beta+a$ (μεταθετική ιδιότητα της προσθέσεως).

3. Παρακάτω δίνεται γεωμετρική εξήγηση των προσθέσεων της πρώτης εφαρμογής:

$$(+4)+(+2)=+6$$



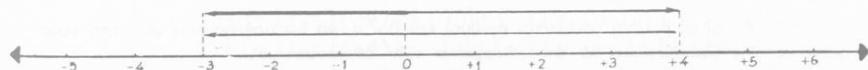
σχ. 19.

$$(-2)+(-3)=-5$$



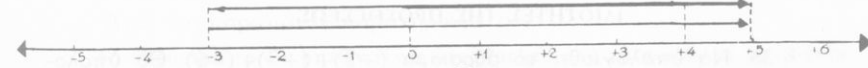
σχ. 20.

$$(+4)+(-7)=-3$$



σχ. 21.

$$(-3)+(+8)=+5$$



σχ. 22.

4. "Αν προσθέσουμε και στα δύο μέλη της ισότητας $-3 = -\frac{6}{2}$ τον $+2$, έχουμε

α' μέλος $-3 + (+2) = -1$,

β' μέλος $-\frac{6}{2} + (+2) = -(\frac{6}{2} - 2) = -1$.

$$^*\text{Άρα } -3+(+2) = -\frac{6}{2}+(+2)$$

$$\text{Γενικά } \alpha = \beta \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q})$$

Άσκησης:

56. Νά υπολογισθούν τὰ ἀθροίσματα:

$$\alpha) (+3) + \left(+\frac{1}{2}\right), \quad \beta) (-5) + (-19), \quad \gamma) (+12) + (-7),$$

$$\delta) (+7) + (-13,5), \quad \epsilon) \left(-\frac{1}{2}\right) + (+1), \quad \sigma\tau) \left(-\frac{13}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$\zeta) \left(+\frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{3}{10}\right), \quad \eta) (-1) + \left(+\frac{3}{2}\right), \quad \theta) -\frac{4}{3} + \left(+\frac{1}{6}\right),$$

$$\iota) +\frac{5}{2} + \left(-\frac{3}{5}\right), \quad \kappa) +\frac{3}{8} + \left(-\frac{87}{16}\right), \quad \lambda) +\frac{2}{5} + \left(-\frac{4}{7}\right).$$

57. Νά βρεθούν τὰ παρακάτω ἀθροίσματα μὲ τὸν κανόνα τῆς προσθέσεως ὁμόσημων ρητῶν:

$$\alpha) (-3) + (-2) + (-1), \quad \beta) \left(-\frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right),$$

$$\gamma) (-2) + (-2) + (-2), \quad \delta) -\frac{3}{4} + (-1) + \left(-\frac{3}{8}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right).$$

(Γιὰ τὴν α' νὰ δοθεῖ καὶ γεωμετρικὴ ἐρμηνεία).

58. Ἄν α, β, γ , δ εἶναι ρητοί, νὰ ἐπαληθεύσετε μὲ ἀριθμητικὰ παραδείγματα τὴν παρακάτω ἰδιότητα:

$$\alpha = \beta \quad \text{καὶ} \quad \gamma = \delta \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta.$$

Σημείωση: Ἡ ἐργασία αὕτὴ λέγεται πρόσθεση τῶν δύο ἰσοτήτων κατὰ μέλη. Ἡ παραπάνω ἰδιότητα ἐκφράζει τὸ μονότιμο τῆς προσθέσεως.

59. Ἄν οἱ α, β εἶναι ἀπόλυτοι ἀριθμοὶ καὶ $\beta < \alpha$, νὰ δικαιολογήσετε μὲ βάση τοὺς κανόνες τῆς προσθέσεως τὰ ἀποτελέσματα τῶν ἀθροισμάτων:

$$1. (+\alpha) + (-\beta) = +(\alpha - \beta),$$

$$2. (-\alpha) + (+\beta) = -(\alpha - \beta),$$

$$3. (-\alpha) + (-\beta) = -(\alpha + \beta),$$

$$4. (+\alpha) + (+\beta) = +(\alpha + \beta).$$

2. ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΑΠΟ ΔΥΟ ΠΡΟΣΘΕΤΕΩΝ.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ

§ 35. Νά υπολογισθεῖ τὸ ἄθροισμα $(+2) + (+3) + (-6)$. Θὰ υπολογίσουμε τὸ ἄθροισμα αὐτὸ μὲ τὸν τρόπο ἐργασίας ποὺ μάθαμε στὴν Α' τάξη.

Δηλαδή θὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων προσθετέων, $(+2) + (+3) = +5$ καὶ σ' αὐτὸ θὰ προσθέσουμε τὸν τρίτο προσθετέο, $(+5) + (-6) = -1$.

Αὐτὸ τὸ γράφομε ὡς ἑξῆς:

$$(+2) + (+3) + (-6) = [(+2) + (+3)] + (-6) = (+5) + (-6) = -1.$$

Ὁ ρητὸς -1 εἶναι τὸ ἄθροισμα $(+2) + (+3) + (-6)$.

Ἡ ἀγκύλη $[(+2) + (+3)]$ ἔχει τὴν ἔννοια ὅτι κάνομε πρῶτα τὴν πράξη ποὺ εἶναι μέσα σ' αὐτή.

Ἀνάλογα ἐργαζόμαστε, ἂν ἔχουμε περισσότερους ἀπὸ τρεῖς προσθετέους.

Ὡστε τὸ ἄθροισμα περισσότερων ἀπὸ δύο ρητῶν εἶναι ὁ ρητὸς, τὸν ὁποῖο βρίσκομε, ἂν στὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων προσθέσουμε τὸν τρίτο, στὸ νέο ἄθροισμα προσθέσουμε τὸν τέταρτο κ.ο.κ.

Γενικὰ ἂν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι ρητοί, ἔχομε

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = [(\alpha + \beta) + \gamma] + \delta.$$

§ 36. α) Παρατηροῦμε ὅτι:

$$\begin{aligned} [(+2) + (+3)] + (-6) &= (+5) + (-6) = -1 \\ \text{καὶ } [(+3) + (-6)] + (+2) &= (-3) + (+2) = -1 & \Rightarrow \\ [(+2) + (+3)] + (-6) &= [(+3) + (-6)] + (+2) \quad \text{ἢ} \\ [(+2) + (+3)] + (-6) &= (+2) + [(+3) + (-6)] \end{aligned}$$

Ἀπὸ τὴν παραπάνω ἰσότητα προκύπτει ὅτι ἡ πρόσθεση τῶν ρητῶν ἔχει τὴν ιδιότητα τῆς προσεταιριστικότητας.

Γενικὰ ἂν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q} \Rightarrow (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

β) Νὰ βρεθεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν ρητῶν $-4, +7, -1$ μὲ ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους.

Ἔχομε:

$$\begin{aligned} (-4) + (+7) + (-1) &= [(-4) + (+7)] + (-1) = (+3) + (-1) = +2 \\ (-4) + (-1) + (+7) &= [(-4) + (-1)] + (+7) = (-5) + (+7) = +2 \\ (+7) + (-1) + (-4) &= [(+7) + (-1)] + (-4) = (+6) + (-4) = +2 \\ (+7) + (-4) + (-1) &= [(+7) + (-4)] + (-1) = (+3) + (-1) = +2 \\ (-1) + (-4) + (+7) &= [(-1) + (-4)] + (+7) = (-5) + (+7) = +2 \\ (-1) + (+7) + (-4) &= [(-1) + (+7)] + (-4) = (+6) + (-4) = +2 \end{aligned}$$

Ἀπὸ τὰ παραπάνω παρατηροῦμε ὅτι:

Τὸ ἄθροισμα τριῶν ρητῶν εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπὸ τὴ σειρά, μὲ τὴν ὁποία λαμβάνονται οἱ προσθετέοι.

Γενικὰ ἂν α, β, γ εἶναι ρητοί, ἔχομε

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \gamma + \beta = \beta + \alpha + \gamma = \dots$$

(Αὐτὸ ἰσχύει καὶ γιὰ περισσότερους ἀπὸ τρεῖς ρητούς).

Ἐφαρμογές.

1. Νὰ ὑπολογισθεῖ τὸ ἄθροισμα $(-3) + (+5) + (-4) + (+6)$.

Σύμφωνα μὲ τὴν παραπάνω β' ιδιότητα ἔχομε:

$$\begin{aligned}
 (-3) + (+5) + (-4) + (+6) &= (+6) + (+5) + (-4) + (-3) = \\
 &= [(+6) + (+5)] + [(-4) + (-3)] \\
 &= (+11) + (-7) = +4.
 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η β' ιδιότητα και η προσεταιριστικότητα της προσθέσεως μάς επιτρέπουν να προσθέσουμε χωριστά τους θετικούς και χωριστά τους αρνητικούς και να καταλήξουμε σ' ένα άθροισμα δύο ετερόσημων ρητών αριθμών.

2. Να βρεθεί το άθροισμα:

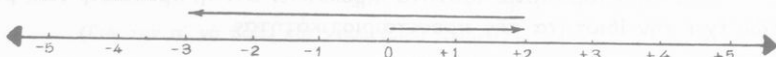
$$\left(+\frac{5}{2}\right) + (-3) + \left(+\frac{8}{2}\right) + \left(+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{8}{2}\right)$$

*Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 &\left(+\frac{5}{2}\right) + \left(+\frac{1}{2}\right) + \left(+\frac{8}{2}\right) + \left(-\frac{8}{2}\right) + (-3) = \\
 &\quad \quad \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{+\frac{6}{2}} \quad \quad \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_0 \\
 &= \left(+\frac{6}{2}\right) + 0 + (-3) = (+3) + (-3) = 0.
 \end{aligned}$$

3. Παρακάτω δίνεται γεωμετρική έρμηνεία των ιδιοτήτων (άντιμεταθετική-προσεταιριστική) της προσθέσεως.

$$(+2) + (-5) = -3$$



$$(-5) + (+2) = -3$$

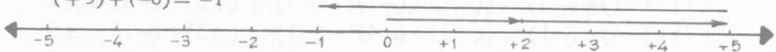
σχ. 23.



$$[(+2) + (+3)] + (-6)$$

$$(+5) + (-6) = -1$$

σχ. 24.

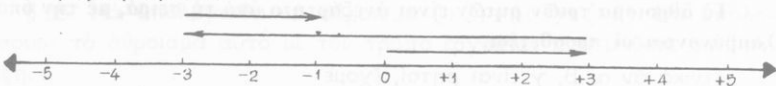


$$(+2) + [(+3) + (-6)]$$

$$[(+3) + (-6)] + (+2)$$

$$(-3) + (+2) = -1$$

σχ. 25.



Σημείωση.

σχ. 26.

Συμφωνούμε σ' ένα άθροισμα να παραλείψουμε το σύμβολο της προσθέσεως και να γράφουμε τους προσθετέους τόν ένα μετά τόν άλλον με τὸ πρόσημό τους.

Π. χ. αντί να έχουμε $(+6) + (-5) + (+2)$,

γράφουμε $+6 - 5 + 2$ ή $6 - 5 + 2$.

Όταν λοιπόν λέμε να υπολογισθεί το άθροισμα:

$$-3+4-12+5, \text{ έννοούμε το } (-3)+(+4)+(-12)+(+5)$$

$$\text{Π.χ. } -3+4-12+5 = (-3)+(+4)+(-12)+(+5) = (+4)+(+5)+(-12)+(-3) = (+9)+(-15) = -6.$$

Άσκησης:

60. Να βρεθούν τα άθροισματα:

α) $(-10)+(-11)+(-12)+(+13)+(+14).$

β) $(+15)+(-7)+(+3)+(-5)+(-4).$

γ) $(-4,2)+(+3,7)+(-2,6)+(+1).$

δ) $\left(+\frac{27}{5}\right) + \left(-\frac{23}{6}\right) + \left(+8\frac{1}{2}\right) + \left(-2\frac{7}{15}\right) + \left(-8\frac{2}{3}\right)$

61. α) "Αν $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = -5\frac{3}{4}$, $\gamma = -\frac{4}{12}$ και $\delta = +6$, να βρεθεί το άθροισμα $\alpha+\beta+\gamma+\delta$.

β) Να βρεθεί το άθροισμα $-\frac{4}{5} + \frac{2}{10} - 3\frac{1}{2} + 1.$

γ) Να βρεθεί το άθροισμα $16-7+5\frac{1}{6}-13\frac{1}{3}-1.$

δ) Να βρεθεί το άθροισμα $-15+15,5-\frac{1}{2}+2,3-0,3.$

62. Να συγκριθούν τα δύο επόμενα άθροισματα:

α) $[(-4)+(+8)+(-6)]+(-3), \quad (-4)+(+8)+[(-6)+(-3)],$

β) επίσης τά: $(-4)+(+12)+(-13), \quad (-4)+(+20)+(-8)+(-13).$

63. "Αν α, β, γ είναι ρητοί, να δείξετε με παραδείγματα ότι η ισότητα $\alpha+\gamma = \beta+\gamma$ συνεπάγεται την ισότητα $\alpha = \beta$.

3. ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΤΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΡΗΤΩΝ.

§ 37. α) Να συγκριθεί η απόλυτη τιμή των άθροισμάτων $(+6) + (+3)$ και $(-6)+(-3)$ με το άθροισμα των απόλυτων τιμών των προσθετέων τους.

Γνωρίζουμε ότι $(+6)+(+3) = +9$ και $(-6)+(-3) = -9$.

Επίσης ότι $6 = |+6| = |-6|$, $3 = |+3| = |-3|$ και $9 = |+9| = |-9|$

Επειδή όμως

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 6 & + & 3 & = & 9 \\ & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow \\ \text{έχουμε} & |+6| & + & |+3| & = & |+9| & \text{και} & |-6| & + & |-3| & = & |-9| \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \text{ή } |+6| + |+3| = |(+6) + (+3)| \text{ και } |-6| + |-3| = |(-6) + (-3)| \\ \text{ή } |(+6) + (+3)| = |+6| + |+3| \text{ και } |(-6) + (-3)| = |-6| + |-3| \end{array}$$

“Ωστε ἡ ἀπόλυτη τιμὴ τοῦ ἁθροίσματος δύο ὁμόσημων ρητῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τους.

Γενικὰ ἂν οἱ ρητοὶ α , β εἶναι ὁμόσημοι, ἔχομε

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{|\alpha + \beta|} & = & \underbrace{|\alpha| + |\beta|} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{ἀπόλυτη τιμὴ} & & \text{ἄθροισμα τῶν} \\ \text{τοῦ ἁθροίσματος} & & \text{ἀπόλυτων τιμῶν} \end{array}$$

β) Νὰ συγκριθεῖ ἡ ἀπόλυτη τιμὴ τοῦ ἁθροίσματος $(+8) + (-6)$ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τῶν προσθετέων του.

Ἔχομε $|(+8) + (-6)| = |2| = 2$ καὶ $|+8| + |-6| = 8 + 6 = 14$. Ἀπ’ αὐτὰ συμπεραίνομε ὅτι $|(+8) + (-6)| < |+8| + |-6|$

“Ωστε ἡ ἀπόλυτη τιμὴ τοῦ ἁθροίσματος δύο ἐτερόσημων ρητῶν εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τους.

Γενικὰ ἂν οἱ ρητοὶ α , β εἶναι ἐτερόσημοι, ἔχομε :

$$|\alpha + \beta| < |\alpha| + |\beta|$$

Παραδείγματα:

1. Νὰ ἀποδειχθεῖ ὅτι $|(-10) + (+3)| < |-10| + |+3|$

Ἔχομε: $|(-10) + (+3)| = |-7| = 7$ καὶ $|-10| + |+3| = 10 + 3$.

Ἐπειδὴ $7 < 10 + 3 \Rightarrow |(-10) + (+3)| < |-10| + |+3|$

2. Νὰ ἀποδειχθεῖ ὅτι $|(+\frac{3}{5}) + (-\frac{3}{5})| < |+\frac{3}{5}| + |-\frac{3}{5}|$

Ἔχομε:

$$|(+\frac{3}{5}) + (-\frac{3}{5})| = |0| = 0 \text{ καὶ } |+\frac{3}{5}| + |-\frac{3}{5}| = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$$

Ἀρα: $|(+\frac{3}{5}) + (-\frac{3}{5})| < |+\frac{3}{5}| + |-\frac{3}{5}|$

Ἀνακεφαλαίωση.

§ 38. Ἀπὸ ὅσα ἀναφέρονται στὴν «πρόσθεση τῶν ρητῶν» συμπεραίνομε ὅτι:

α. Ὅταν δοθοῦν δύο ρητοὶ α καὶ β ὑπάρχει πάντοτε ὁ ρητὸς $\alpha + \beta$. Συμβολικά: $\alpha, \beta \in \mathbb{Q} \Rightarrow (\alpha + \beta) \in \mathbb{Q}$

Δηλαδή:

Ἄν α καὶ β εἶναι ὁμόσημοι, τότε ὁ $(\alpha + \beta)$ εἶναι ὁμόσημος μὲ αὐτοὺς καὶ ἔχει ἀπόλυτη τιμὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τους.

$$|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|.$$

Αν α, β είναι έτερόσημοι, τότε ο $(\alpha + \beta)$ είναι όμόσημος με τόν ρητό που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή και η απόλυτη τιμή του ίσουται με τη διαφορά τών απόλυτων τιμών τών προσθετέων.

$$|\alpha + \beta| = |\alpha| - |\beta| \quad \text{αν } |\alpha| > |\beta|$$

$$|\alpha + \beta| = |\beta| - |\alpha| \quad \text{αν } |\alpha| < |\beta|$$

β) Το άθροισμα δύο ρητών είναι ένας και μόνο ένας ρητός (μονότιμο της προσθέσεως).

γ) Ίσχύει η μεταθετικότητα στο άθροισμα δύο ρητών

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

δ) Αν δοθούν οι ρητοί α, β, γ , ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα της προσθέσεως

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

ε) Υπάρχει ένα μόνο στοιχείο στο σύνολο τών ρητών, το μηδέν, το όποιο είναι το ουδέτερο στοιχείο της προσθέσεως.

$$\text{Αν } \alpha \in \mathbb{Q} \text{ είναι: } 0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha$$

στ) Για κάθε ρητό υπάρχει ένας και μόνο ένας άλλος ρητός αντίθετος (ή συμμετρικός) του.

Το άθροισμα τών αντίθετων είναι ίσο με μηδέν.

Αν α είναι απόλυτος αριθμός, ο αντίθετος του $+\alpha$ είναι ο $-\alpha$ και $(+\alpha) + (-\alpha) = 0$.

Άσκησης:

64. Με αριθμητικά παραδείγματα να συγκρίνετε το $|\alpha + \beta + \gamma|$ με το $|\alpha| + |\beta| + |\gamma|$, α) αν α, β, γ είναι όμόσημοι και β) αν είναι έτερόσημοι.

65. Να συγκριθεί η απόλυτη τιμή του άθροίσματος δύο έτερόσημων ρητών με τη διαφορά τών απόλυτων τιμών τους. Δηλαδή αν α, β είναι έτερόσημοι, να συγκριθεί το $|\alpha + \beta|$ με το $|\alpha| - |\beta|$, αν $|\alpha| > |\beta|$ η το $|\alpha + \beta|$ με το $|\alpha| - |\beta|$, αν $|\alpha| < |\beta|$.

66. Ποιοι ρητοί μπορούν ν' αντικαταστήσουν το x στις παρακάτω ισότητες;

$$\alpha) \left| \left(+\frac{3}{4} \right) + x \right| = \left| +\frac{3}{4} \right| + \left| +\frac{1}{4} \right| \quad \beta) |(-3) + x| = |-3| + |-1|,$$

$$\gamma) \left| (+5) + \left(+\frac{1}{2} \right) \right| = |+5| + |x|$$

$$\delta) \left| \left(-\frac{5}{8} \right) + \left(-\frac{3}{8} \right) \right| = \left| -\frac{5}{8} \right| + |x|$$

67. Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για τούς ρητούς α και β , αν α) $\alpha + \beta = 0$, β) $\alpha + \beta = \alpha$.

68. Να βρεθούν τὰ άθροίσματα:

$$\alpha) (-12) + (-18) + (+24) + (+30) + (-36).$$

$$\beta) \left(-\frac{5}{8}\right) + \left(-\frac{7}{4}\right) + \left(+\frac{11}{2}\right) + \left(+\frac{10}{16}\right) + (-1)$$

$$\gamma) \left(-\frac{4}{9}\right) + (+2) + \left(-\frac{25}{6}\right) + \left(-\frac{14}{3}\right) + \left(+\frac{8}{18}\right) + (+1).$$

69. Να βρεθούν τα άθροισματα:

$$\alpha) -4 - 6 + 8 - 10 + 14 - 20,$$

$$\beta) 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - 1$$

$$\gamma) 5 + \frac{18}{9} - \frac{15}{3} + \frac{21}{7} - \frac{24}{6} - 2$$

$$\delta) 1 + \frac{5}{12} - \frac{4}{3} + \frac{3}{4} - 2.$$

70. Να βρεθεί το άθροισμα των δύο άθροισμάτων.

$$\alpha) [(+3) + (-8) + (+2) + (-1)] + [(-7) + (+10) + (-2)],$$

$$\beta) (-1 + 3 - 8 + 12) + (5 - 7 - 13).$$

71. Να επιλυθούν οι εξισώσεις: $\alpha) (-2) + \chi = +3$ και $\beta) \chi + \left(-\frac{1}{2}\right) = -2.$

4. Η ΠΡΑΞΗ ΤΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

§ 39. Πρόβλημα. Το πρωί το θερμόμετρο έδειχνε -2° και το μεσημέρι $+3^{\circ}$. Κατά πόσους βαθμούς μεταβλήθηκε η θερμοκρασία;

*Έστω ότι η θερμοκρασία μεταβλήθηκε κατά χ° . Για να βρούμε το ζητούμενο, πρέπει από την τελική θερμοκρασία $+3^{\circ}$ να αφαιρέσουμε την αρχική θερμοκρασία -2° .

$$\begin{aligned} \text{*Έχουμε λοιπόν } \chi^{\circ} &= (+3)^{\circ} - (-2)^{\circ} \quad \eta \\ \chi &= (+3) - (-2). \end{aligned}$$

Η τιμή του χ μπορεί να θεωρηθεί και σαν λύση της εξίσωσης $(-2) + \chi = +3$, ή οποία εκφράζει το πρόβλημα. «Ποιόν ρητό πρέπει να προσθέσουμε στον (-2) , για να βρούμε το $+3$;».

Μάθαμε στην Α' τάξη ότι η αφαίρεση είναι πράξη αντίστροφη της προσθέσεως. Το ίδιο ισχύει και στο σύνολο Q των ρητών αριθμών.

Δηλαδή και στους νέους αριθμούς αφαίρεση είναι ή πράξη, κατά την οποία δίνονται δύο ρητοί και βρίσκεται ένας τρίτος, ο οποίος όταν προστεθεί στον δεύτερο, δίνει άθροισμα τον πρώτο.

*Ωστε έχουμε την ισοδυναμία:

$$(+3) - (-2) = \chi \Leftrightarrow (-2) + \chi = +3$$

σχ. 27

Για να βρούμε όμως τη διαφορά $(+3) - (-2)$, κάνουμε τις εξής σκέψεις: στο αρχικό πρόβλημα: Το θερμόμετρο δείχνει -2° , άρα πρέπει να ανέβει 2° ή θερμοκρασία, για να φθάσει στο μηδέν και ύστερα να ανέβει 3° . Δηλαδή πρέπει να ανέβει ή θερμοκρασία 5° .

*Αρα $\chi^{\circ} = (+2)^{\circ} + (+3)^{\circ} = 5^{\circ}$. Συνεπώς ή διαφορά $(+3)^{\circ} - (-2)^{\circ} = (+2)^{\circ} + (+3)^{\circ}$ ή $(+3) - (-2) = (+3) + (+2)$.



“Ωστε η διαφορά δύο ρητών βρίσκεται, αν προσθέσουμε στον μειωτέον τον αντίθετο του αφαιρετέου.

Επομένως και η εξίσωση $(-2)+\chi=+3$ επιλύεται ως εξής:
 $(-2)+\chi=+3 \Leftrightarrow \chi=(+3)-(-2) \Leftrightarrow \chi=(+3)+(+2) \Leftrightarrow \chi=+5$.

Χρησιμοποιούμε τώρα την ιδιότητα $\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma$, ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$), για να αιτιολογήσουμε γενικότερα την επίλυση της εξίσωσης $(-2)+\chi=+3$ ή την εύρεση της διαφοράς $\chi=(+3)-(-2)$.

Προσθέτουμε και στα δύο μέλη της $(-2)+\chi=+3$ τον αντίθετο του -2 και έχουμε:

$$\begin{aligned} (-2)+\chi &= +3 \Leftrightarrow [(-2)+\chi] + (+2) = +3 + (+2) \\ [\chi + (-2)] + (+2) &= +3 + (+2) \\ \chi + [(-2) + (+2)] &= +3 + (+2) \\ \chi + 0 &= +3 + (+2) \\ \chi &= (+3) + (+2) = +5 \end{aligned}$$

“Ωστε $\chi = (+3) - (-2) = (+3) + (+2)$.

Δηλαδή διαπιστώνουμε ότι, για να αφαιρέσουμε έναν ρητό, πρέπει να προσθέσουμε τον αντίθετό του. ($-\alpha = \text{ό αντίθετος του } \alpha$). Έπειδή στο σύνολο των ρητών υπάρχει πάντοτε ο αντίθετος ενός αριθμού που μας δίνεται, υπάρχει πάντοτε και η διαφορά δύο ρητών και επομένως η αφαίρεση είναι πάντοτε δυνατή στο σύνολο αυτό. Η αφαίρεση είναι πράξη μονότιμη, γιατί το άθροισμα του μειωτέου και του αντίθετου του αφαιρετέου είναι μονότιμο.

“Ωστε, αν α και β είναι ρητοί αριθμοί, ονομάζουμε διαφορά $\alpha-\beta$ τον ρητό γ , ο οποίος είναι ίσος με τον $\alpha + (\text{αντίθετος του } \beta)$.

Έχουμε $\gamma = \alpha + (\text{αντίθ. του } \beta) \Rightarrow \gamma + \beta = \alpha + (\text{αντίθ. του } \beta) + \beta$

$$\Rightarrow \gamma + \beta = \alpha$$

Συμβολικά:

$^{\circ}\text{Αν } \alpha, \beta \in \mathbb{Q}: \alpha - \beta = \gamma \Leftrightarrow \beta + \gamma = \alpha, \gamma \in \mathbb{Q}$

Εφαρμογές.

1. $\alpha - 0 = \alpha + 0 = \alpha$ (γιατί ο αντίθετος του μηδενός είναι το μηδέν)

$$(-3) - (-3) = (-3) + (+3) = 0. \text{ Γενικά } \alpha - \alpha = 0, (\alpha \in \mathbb{Q})$$

2. $0 - (+3) = 0 + (-3) = -3$

$$0 - (-3) = 0 + (+3) = +3$$

$$0 - \alpha = 0 + (-\alpha) = -\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{Q})$$

Έπειδή $0 - \alpha = 0 + (\text{αντίθ. του } \alpha)$, **συμβολίζουμε** τον αντίθετο ενός ρητού α με $-\alpha$.

“Ωστε για κάθε ρητό α έχουμε: $\alpha - 0 = \alpha$, $0 - \alpha = -\alpha$, $\alpha - \alpha = 0$.

3. Να βρεθούν οι παρακάτω διαφορές:

$$(+6)-(-7)=(+6)+(+7)=+13$$

$$(-7)-(+6)=(-7)+(-6)=-13$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{5}{4}\right)=\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(+\frac{5}{4}\right)=+\frac{2}{4}$$

$$\left(-\frac{5}{4}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)=\left(-\frac{5}{4}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)=-\frac{2}{4}$$

Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι (άν $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$) οι ρητοί $\alpha-\beta$ και $\beta-\alpha$ είναι αντίθετοι.

Άσκησης:

72. Νά βρεθούν οι παρακάτω διαφορές:

α) $(-10) - (+25),$

β) $(+25) - (-10)$

γ) $(+14) - (+11),$

δ) $(+11) - (+14)$

ε) $(-5) - (+5),$

στ) $(-18) - (-18)$

ζ) $\left(+\frac{3}{16}\right) - \left(-\frac{3}{16}\right),$

η) $\left(-\frac{4}{9}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right)$

73. Νά επιλυθούν οι επόμενες εξισώσεις:

α) $x - \left(+\frac{7}{3}\right) = -1,$ δ) $\left(-\frac{4}{15}\right) + x = -1,$ ζ) $x - \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$

β) $x + \left(-\frac{3}{20}\right) = -\frac{1}{5},$ ε) $x - \left(+\frac{13}{2}\right) = -2,$ η) $-x - (-12) = -12$

γ) $x - (-13) = -13,$ στ) $-4x = -14,$ θ) $+3 - x = -3.$

74. Νά βρεθούν οι επόμενες διαφορές και νά επαληθευθεί η ισότητα «μειωτέος = αφαιρετέος + διαφορά».

α) $\left(-\frac{1}{3}\right) - \left(+\frac{3}{4}\right),$ β) $(-5) - \left(-\frac{2}{3}\right),$ γ) $\left(+\frac{1}{2}\right) - \left(+\frac{1}{3}\right),$

δ) $\left(+\frac{3}{5}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right),$ ε) $\left(-\frac{10}{7}\right) - (-1),$ στ) $(+3) - \left(-\frac{11}{2}\right).$

5. ΤΟ ΣΥΜΒΟΛΟ (—) ΣΑΝ ΣΥΜΒΟΛΟ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ ΚΑΙ ΣΑΝ ΠΡΟΣΗΜΟ. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

§ 40. Είδαμε (§ 36 σημείωση) ότι ένα άθροισμα π.χ. τὸ $(+3)+(-2)$ γράφεται σύντομα $+3-2$ ἢ $3-2$.

Τὸ πλὴν μπροστὰ ἀπὸ τὸ δύο θεωρεῖται σὰν πρόσημο.

Μπορεῖ ὅμως τὸ πλὴν νὰ θεωρηθεῖ καὶ σὰν σύμβολο ἀφαίρεσεως τοῦ θετικοῦ δύο ἀπὸ τὸν 3, γιὰτὶ

$$3-2 = (+3)-(+2) = (+3)+(-2).$$

Επίσης για το $3-7$ έχουμε: $3-7 = (+3)+(-7) = -4$

↓
πρόσημο του έπτά
Πρόσθεση του -7 στον $+3$

$$3-7 = (+3)-(+7) = (+3)+(-7) = -4$$

↓
Σύμβολο αφαιρέσεως
Αφαίρεση του $+7$ από τον $+3$
ή του 7 από τον 3

Συνεπώς το σύμβολο πλήν $(-)$ μπορεί να θεωρηθεί σαν σύμβολο αφαιρέσεως ή σαν πρόσημο.

Παραδείγματα

1. Στο σύμβολο $-(+2)$ το πλήν θεωρείται σαν πρόσημο του $(+2)$ αλλά και σαν σύμβολο αφαιρέσεως του $+2$.

↓ → σύμβολο αφαιρέσεως του θετικού πέντε από το μηδέν

$$2. 0-5 = 0-(+5) = 0+(-5) = -5$$

$$0-5 = 0+(-5) = -5$$

↓ → πρόσημο του πέντε

↓ → πρόσημο

$$3. -8-3 = (-8)-(+3) = (-8)+(-3) = -11$$

↓ → σύμβ. αφαιρέσεως.

↓ → πρόσημο

$$-8-3 = -(+8)-(+3) = +(-8)+(-3) = (-8)+(-3) = -11$$

↓ → σύμβολο αφαιρέσεως

$$4) \text{ Έχουμε } -4-10 = (-4)+(-10) = -14 = -(+14) = -[(+4)+(+10)]$$

$$\text{Δηλαδή: } -[(+4)+(+10)] = (-4)+(-10), \text{ αλλά } (+4)+(+10) = [(+4)+(+10)] \text{ ή } [(+4)+(+10)] = (+4)+(+10)$$

Ωστε το αντίθετο ενός αθροίσματος ισούται με το άθροισμα των αντίθετων των προσθετέων.

§ 41. **Ιδιότητες της αφαιρέσεως** (οί παρακάτω ιδιότητες έπαληθεύονται εύκολα).

1. 'Η διαφορά δέν μεταβάλλεται, αν προσθέσουμε (ή αφαιρέσουμε) στὸν μειωτέο καὶ στὸν ἀφαιρετέο τὸν ἴδιο ρητό.

$$\alpha - \beta = (\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma) \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q})$$

$$\alpha - \beta = (\alpha - \gamma) - (\beta - \gamma)$$

2. Πῶς ἀφαιρῶ ρητὸ ἀπὸ ἄθροισμα.

$$(\alpha + \beta) - \gamma = \alpha + (\beta - \gamma) \quad \eta$$

$$(\alpha + \beta) - \gamma = (\alpha - \gamma) + \beta$$

3. Πῶς ἀφαιρῶ ἀριθμὸ ἀπὸ διαφορά.

$$(\alpha - \beta) - \gamma = \alpha - (\beta + \gamma) \quad \eta$$

$$(\alpha - \beta) - \gamma = (\alpha - \gamma) - \beta$$

4. Πῶς ἀφαιρῶ ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμὸ.

$$\alpha - (\beta + \gamma) = (\alpha - \beta) - \gamma \quad \eta$$

$$\alpha - (\beta + \gamma) = (\alpha - \gamma) - \beta \quad \eta$$

$\alpha - (\beta + \gamma) = \alpha + [(-\beta) + (-\gamma)]$ (βλέπε προηγούμενο παράδειγμα 4).

5. Πῶς ἀφαιρῶ διαφορά ἀπὸ ἀριθμὸ

$$\alpha - (\beta - \gamma) = (\alpha - \beta) + \gamma \quad \eta$$

$$\alpha - (\beta - \gamma) = (\alpha + \gamma) - \beta$$

Οἱ παραπάνω ιδιότητες ἰσχύουν χωρὶς κανέναν περιορισμό, γιατί ἡ διαφορά ὑπάρχει πάντοτε στὸ σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.

6. Νὰ ἐπαληθευθεῖ ἡ ιδιότητα: $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha - \gamma = \beta - \gamma$

*Αφαιροῦμε καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος $-5 = -\frac{10}{2}$ τὸν -3 .

α' μέλος: $(-5) - (-3) = (-5) + (+3) = -2$

β' μέλος: $(-\frac{10}{2}) - (-3) = (-\frac{10}{2}) + (+3) = -(\frac{10}{2} - 3) = -(5 - 3) = -2$

*Αρα $(-5) - (-3) = (-\frac{10}{2}) - (-3)$

Συνεπῶς ἀπὸ τὴν $-5 = -\frac{10}{2} \Rightarrow (-5) - (-3) = (-\frac{10}{2}) - (-3)$.

Ἐφαρμογή.

*Αφαιροῦμε καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος $-8 + 3 = -5$ τὸν 3 .

*Έχομε:

$$-8 + 3 - 3 = -5 - 3$$

$$-8 + 0 = -5 - 3$$

$$-8 = -5 - 3$$

*Αν παρατηρήσουμε τὶς ἰσότητες: $-8 + 3 = -5$

$$-8 = -5 - 3$$

καταλήγουμε στὸ συμπέρασμα ὅτι: *Αν μεταφέρουμε ἓναν ὅρο ἀπὸ τὸ ἓνα μέλος μιᾶς ἰσότητος στὸ ἄλλο, ἀλλάζουμε τὸ πρόσημό του.

7. Ἐάν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}$, νά ἐπαληθευθεῖ ἡ ιδιότητα $\alpha = \beta$ καί $\gamma = \delta \Rightarrow \alpha - \gamma = \beta - \delta$ μέ ἀριθμητικό παράδειγμα.

(Ἡ ιδιότητα αὐτή ἐκφράζει τὸ μονότιμο τῆς διαφορᾶς).

Σημείωση: Ἡ ἐργασία, κατὰ τὴν ὁποία ἂν $\alpha = \beta$ καί $\gamma = \delta \Rightarrow \alpha - \gamma = \beta - \delta$, λέγεται ἀφαίρεση τῶν δύο ἰσοτήτων κατὰ μέλη.

Ἀσκήσεις:

75. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ τιμὴ τῶν παρακάτω παραστάσεων:

α) ἂν θεωρηθεῖ τὸ $(-)$ σὰν σύμβολο ἀφαιρέσεως καί β) ἂν θεωρηθεῖ τὸ πλὴν σὰν πρόσημο:

$$\alpha) 7-10, \quad \beta) 5-\frac{1}{2}, \quad \gamma) \frac{1}{3}-\frac{1}{2}, \quad \delta) -17-19, \quad \epsilon) -6-\frac{2}{5}.$$

76. Νά ἐπαληθεύσετε τὶς ιδιότητες 1, 2, 3, 4, 5 τῆς ἀφαιρέσεως μέ τὰ παρακάτω ἀριθμητικά παραδείγματα:

$$1. \alpha = +5, \quad \beta = -12 \quad \text{καί} \quad \gamma = +7.$$

$$2. \alpha = -\frac{3}{5}, \quad \beta = +1 \quad \text{καί} \quad \gamma = -\frac{2}{3}$$

$$3. \alpha = 5,6, \quad \beta = 7,2 \quad \text{καί} \quad \gamma = -11.$$

77. Νά βρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν πράξεων:

$$\alpha) 7-(-3), \quad \beta) (7+8)-(-3+8), \quad \gamma) (7-5)-(-3-5),$$

$$\delta) [12+(-2)+3]-(-4), \quad \epsilon) -7-(7+3),$$

$$\sigma\tau) -12-[5-(-2)], \quad \zeta) (-3-7)-9, \quad \eta) (15-21)+(-4).$$

78. Νά ὑπολογισθοῦν τὰ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \chi, \psi$ ἀπὸ τὶς:

$$1) \alpha = (-4+7) + (5-12), \quad 2) \beta = (-4+5) - [7+(-12)],$$

$$3) \gamma = (-5+9) + (-5-9), \quad 4) \delta = (-5+9) - (-5-9),$$

$$5) -\chi - 3 = -5, \quad 6) \psi + 4 = -7.$$

79. Νά βρεθοῦν μέ ἀναγραφή τῶν στοιχείων τοὺς τὰ σύνολα:

$$A = \{\chi / \chi + 3 = 3\}, \quad B = \{\psi / \psi - 5 = -7\}, \quad \Gamma = \{\omega / 2 - \omega = -3\}$$

80. Νά δοκιμάσετε ἂν τὰ παρακάτω ζεύγη τιμῶν α καί β ἐπαληθεύουν τὴν ἰσότητα

$$|\alpha - \beta| = |\alpha| - |\beta|:$$

$$1) \alpha = 7, \quad \beta = 2, \quad 2) \alpha = 2, \quad \beta = 7, \quad 3) \alpha = -7, \quad \beta = -2,$$

$$4) \alpha = -7, \quad \beta = 2, \quad 5) \alpha = 7, \quad \beta = -2, \quad 6) \alpha = 2, \quad \beta = -7,$$

$$7) \alpha = -2, \quad \beta = -7, \quad 8) \alpha = -2, \quad \beta = 7,$$

6. ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ.

§ 42. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ ἀριθμητικὴ παράσταση:

$$(+6) - (-5) + (-3) - (+4)$$

Κάνομε τὶς πράξεις μέ τὴ σειρά πού εἶναι σημειωμένες:

$$(+6) - (-5) + (-3) - (+4)$$

$$\begin{aligned}
 & (+6) + (+5) + (-3) - (+4) \\
 & \quad \underbrace{(+6) + (+5)}_{(+11)} + (-3) - (+4) \\
 & \quad \quad \underbrace{(+11) + (-3)}_{(+8)} - (+4) = (+8) + (-4) = +4
 \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα +4 είναι η τιμή της αριθμητικής παραστάσεως. Γενικά αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι ρητοί, έχουμε:

$\alpha - \beta + \gamma - \delta = [(\alpha - \beta) + \gamma] - \delta$ χωρίς περιορισμούς, γιατί οι αφαιρέσεις στο σύνολο Q είναι πάντοτε δυνατές.

Οι αριθμητικές παραστάσεις $\alpha) (+6) - (-5) + (-3) - (+4)$

$$\beta) \left(+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(+\frac{1}{3}\right) + (-2)$$

$$\gamma) (-1) + (-3) + (-6) + \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$\delta) 12 - 6 + 7 - 14$$

λέγονται **άλγεβρικά άθροίσματα**.

Ώστε κάθε αριθμητική παράσταση, ή οποία περιέχει ρητούς αριθμούς, που συνδέονται με το + ή το -, λέγεται **άλγεβρικό άθροισμα** (ή **αριθμητικό πολυώνυμο**).

Τα παραπάνω άλγεβρικά άθροίσματα β, γ είναι άθροίσματα πολλών προσθετέων (§ 35). Οι προσθετέοι τους λέγονται και όροι.

Επίσης και το δ είναι άθροισμα πολλών προσθετέων με όρους: 12, -6, +7, -14, γιατί

$$12 - 6 + 7 - 14 = 12 + (-6) + (+7) + (-14)$$

(πιό απλή μορφή άθροίσματος § 36 σημείωση 4)

Το α' άλγεβρικό άθροισμα $(+6) - (-5) + (-3) - (+4)$ μπορεί να γραφεί και $(+6) + (+5) + (-3) + (-4)$. Αυτό έχει όρους τούς: +6, +5, -3, -4, οι όποιοι είναι όροι και του άρχικοῦ, και τιμή +4.

Αν σ' ένα άλγεβρικό άθροισμα προσθέσουμε τούς αντίθετους τῶν ρητῶν οἱ όποιοι αφαιρούνται, θα έχουμε ένα άθροισμα πολλῶν προσθετέων.

Παραδείγματα:

$$1. -\frac{1}{5} + \left(-\frac{4}{9}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right) + (-1) = \left(-\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{4}{9}\right) + \left(+\frac{2}{3}\right) + (-1)$$

$$2. 7 - \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(+\frac{3}{2}\right) + 2 = 7 + \left(+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) + 2$$

$$3. \quad +8 - (+7) - (-6) + (-5) + (+4) = +8 + (-7) + (+6) + (-5) + (+4) = 8 - 7 + 6 - 5 + 4$$

Παρατηρήσεις:

1. Ένα άθροισμα πολλών προσθετέων είναι ανεξάρτητο από τη σειρά των όρων του (§ 36). Αυτό ισχύει και σ' ένα αλγεβρικό άθροισμα, αν στους αριθμούς που αφαιρούνται μεταφέρουμε μπροστά το σύμβολο της αφαίρεσας, όταν τους αλλάξουμε σειρά.

$$\begin{array}{cccccccccccc} (+6) & - & (-5) & + & (-3) & - & (+4) & = & - & (-5) & + & (+6) & - & (+4) & + & (-3) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \text{προσθετ.} & & \text{αφαιρ.} & & \text{προσθετ.} & & \text{αφαιρ.} & & \text{αφαιρ.} & & \text{προσθετ.} & & \text{αφαιρ.} & & \text{προσθετ.} \end{array}$$

Δηλαδή κάθε αριθμός που προσθέτεται (ή αφαιρείται) στο πρώτο μέλος, πρέπει να προσθέτεται (ή να αφαιρείται) και στο δεύτερο μέλος.

Είπαμε ότι όροι του $(+6) - (-5) + (-3) - (+4)$ είναι οι όροι του $(+6) + (+5) + (-3) + (-4)$. Δηλαδή οι $+6, +5, -3, -4$.

Έπειδή:

$$\begin{aligned} (+6) &= +(+6) = +6 \\ -(-5) &= +(+5) = +5 \\ +(-3) &= +(-3) = -3 \\ -(+4) &= +(-4) = -4, \end{aligned}$$

μπορούμε να θεωρήσουμε σαν όρους του αλγεβρικού άθροίσματος $(+6) - (-5) + (-3) - (+4)$ τους $+6, -(-5), -3, -(+4)$

Σημείωση: Για να αποφύγουμε λάθη, η αντιμετάθεση των όρων αλγ. άθροίσματος γίνεται συνήθως, όταν μετατραπεί σε άθροισμα πολλών προσθετέων.

Ύπενθυμίζουμε ότι κάθε θετικός ή αρνητικός αριθμός, ο οποίος έχει μπροστά του το $+$ (ή κανένα πρόσημο) προσθέτεται, π.χ. οι αριθμοί $+(+6), +(-3), (+6)$ προσθέτονται. Αν υπάρχει μπροστά του το $-$, αφαιρείται, δηλαδή προσθέτεται ο αντίθετος του. Π.χ. $-(-5) = +(+5) = +5 = 5$

2. Έχουμε:

$$\begin{aligned} (+6) - (-5) + (-3) - (+4) &= (+6) + (+5) + (-3) + (-4) = 6 + 5 - 3 - 4 \\ (+6) - (-5) - (+3) + (-4) &= (+6) + (+5) + (-3) + (-4) = 6 + 5 - 3 - 4. \end{aligned}$$

Απ' αυτά παρατηρούμε ότι η απλουστευμένη γραφή ενός άθροίσματος μπορεί να προέρχεται από ένα αλγεβρικό άθροισμα, το οποίο έχει γραφεί με διάφορους τρόπους.

$$\begin{aligned} \text{Π.χ. τό:} \quad -6 + 3 - 1 + 2 &= (-6) + (+3) + (-1) - (-2) \quad \text{ή} \\ &= -(+6) - (-3) + (-1) + (+2) \quad \text{ή} \\ &= +(-6) + (+3) - (+1) + (+2) \quad \text{κ.λ.π.} \end{aligned}$$

Εφαρμογές:

$$1. \alpha) (-3) + (-6) - (-8) = (-3) + (-6) + (+8) = (-9) + (+8) = -1$$

$$\beta) (+3) - (-6) - (+8) = (+3) + (+6) + (-8) = (+9) + (-8) = +1$$

Τὰ παραπάνω άθροίσματα έχουν αντίθετους όρους και λέγονται αντίθετα.

$$2. \text{ Προσθέτουμε δύο άλγ. άθροίσματα π.χ: } [(-4) + (-5) - (-10)] + [(-6) - (+9)] =$$

$$[(-4) + (-5) + (+10)] + [(+6) + (-9)] = (-4) + (-5) + (+10) + (+6) + (-9) =$$

$$= (+16) + (-18) = -2$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$[(-9) + (+10)] + [-3] = [+1] + [-3] = -2.$$

Η τιμή του άθροίσματος τών δύο παραπάνω άθροισμάτων βρέθηκε με δύο τρόπους.

α) Σχηματίσαμε ένα άθροισμα από τούς όρους τών άλγεβρικών άθροισμάτων και βρήκαμε την τιμή του κατά τὰ γνωστά (§ 36 εφαρμογή 1) και

β) Βρήκαμε την τιμή καθενός από τὰ άλγεβρικά άθροίσματα και καταλήξαμε σε άθροισμα δύο ρητών.

$$3. [(-4) + (-5) - (-10)] - [(-6) - (+9)] = [(-4) + (-5) + (+10)] - [(+6) + (-9)]$$

$$= [(-4) + (-5) + (+10)] + [(+6) + (+9)] = [+1] + [+3] = +4$$

Για να αφαιρέσουμε ένα άλγεβρικό άθροισμα, προσθέτουμε τὸ αντίθετό του.

Άσκησης:

81. Να υπολογίσετε τὰ παρακάτω άλγεβρικά άθροίσματα:

$$\alpha) (-4) - (+3) + (-15), \quad \gamma) \frac{7}{2} - (+2) + \left(+\frac{1}{2}\right) - (+2,5) - (-0,5)$$

$$\beta) -(+10) - 8 - (-16) + (-7) + 1, \quad \delta) -\frac{3}{11} - \left(-\frac{4}{22}\right) + (-1) - \left(+\frac{8}{11}\right)$$

82. Να υπολογίσετε τὰ παρακάτω άλγεβρικά άθροίσματα:

$$\alpha) [-5 - (-9) + (-13) + (+17)] + (-13),$$

$$\beta) \left[(-12) + (+7) - (+19) - \left(-\frac{29}{2}\right) \right] + \left(+\frac{1}{2}\right)$$

$$\gamma) \left[\frac{1}{2} - (-2) + \left(-\frac{1}{3}\right) \right] + \left[\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right) - (+3) \right]$$

$$\delta) -\frac{38}{5} - \left[1 - (+7) - \left(-\frac{2}{5}\right) \right]$$

$$\epsilon) \left[+3 - (+6) - \left(-\frac{22}{3}\right) \right] - \left[\left(-\frac{2}{3}\right) - (-3) + (+2) \right]$$

83. Να υπολογίσετε τὰ παρακάτω άλγεβρικά άθροίσματα:

$$\alpha) \alpha + \beta + \gamma, \quad \beta) -\alpha - \beta - \gamma, \quad \gamma) \alpha - \beta + \gamma, \quad \delta) -\alpha - \beta + \gamma,$$

$$\epsilon) \alpha - \beta - \gamma, \quad \sigma\tau) -\alpha + \beta - \gamma, \quad \zeta) -\alpha + \beta + \gamma,$$

$$\text{όν } \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{3}{4} \text{ και } \gamma = 1.$$

7. Η ΣΧΕΣΗ ΤΗΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ Q. ΔΙΑΤΑΞΗ.

§ 43. Τί σημαίνει ή σχέση $a > b$; Τί ή $\gamma < \delta$;

Ξέρομε ότι ή σχέση $\alpha > \beta$ σημαίνει «ό α είναι μεγαλύτερος του β ».

Η σχέση αυτή λέγεται ανισότητα με πρώτο μέλος τόν α και δεύτερο μέλος τόν β .

Ἡ ἀνισότητα $\gamma < \delta$ ἐκφράζει ὅτι «ὁ γ εἶναι μικρότερος τοῦ δ ».

Οἱ ἀνισότητες $\alpha > \beta$, $\epsilon > \zeta$ εἶναι ὁμόστροφες (ἢ τῆς ἴδιας φορᾶς).

Οἱ ἀνισότητες $\alpha > \beta$, $\gamma < \delta$ εἶναι ἐτερόστροφες (ἢ ἀντίθετης φορᾶς).

Παρατηροῦμε τὸ σχῆμα 28, τὸ ὁποῖο παριστάνει ἓνα μέρος τῆς θερμομετρικῆς κλίμακας. Εἶναι φανερό ὅτι ἡ θερμοκρασία $+3^\circ$ εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ θερμοκρασία 0° καὶ ὅτι ἡ θερμοκρασία 0° εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ θερμοκρασία -2° .

Ἐπίσης ἡ θερμοκρασία -1° εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ θερμοκρασία -4° .

Ἀπ' αὐτὰ συμπεραίνομε τὰ ἑξῆς:

1. Κάθε θετικός ρητός εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸ μηδὲν ἢ ὅτι τὸ μηδὲν εἶναι μικρότερο ἀπὸ κάθε θετικὸ ἀριθμὸ.

$$\alpha \in \mathbb{Q} \text{ καὶ } \alpha \text{ εἶναι θετικὸς} \Leftrightarrow \alpha > 0$$

2. Τὸ μηδὲν εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ κάθε ἀρνητικὸ ἢ ὅτι κάθε ἀρνητικὸς εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸ μηδὲν

$$\beta \in \mathbb{Q} \text{ καὶ } \beta \text{ εἶναι ἀρνητικὸς} \Leftrightarrow \beta < 0$$

3. Κάθε θετικὸς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ κάθε ἀρνητικὸ.

$$\alpha \text{ εἶναι θετικὸς ρητὸς καὶ } \beta \text{ ἀρνητικὸς} \Rightarrow \alpha > \beta.$$

4. Μεταξὺ δύο θετικῶν ρητῶν μεγαλύτερος εἶναι ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος ἔχει τὴ μεγαλύτερη ἀπόλυτη τιμὴ.

$$\alpha, \gamma \text{ θετικοὶ καὶ } |\alpha| > |\gamma| \Rightarrow \alpha > \gamma$$

5. Μεταξὺ δύο ἀρνητικῶν μεγαλύτερος εἶναι ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος ἔχει τὴ μικρότερη ἀπόλυτη τιμὴ.

$$\beta, \delta \text{ ἀρνητικοὶ καὶ } |\beta| > |\delta| \Rightarrow \beta < \delta.$$

Ξέρομε ὅτι κάθε ἀριθμὸς, ποῦ εἶναι τοποθετημένος δεξιότερα ἀπὸ ἓναν ἄλλο στὴν εὐθεΐα τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς, εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ αὐτόν.

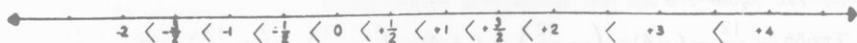


σχ. 28.



σχ. 29.

Τὸ ἴδιο ἰσχύει καὶ γιὰ τοὺς ρητούς, οἱ ὁποῖοι εἶναι τοποθετημένοι στὴν εὐθεΐα τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.



σχ. 30

§ 44. Νά συγκριθεῖ ἡ διαφορὰ δύο ρητῶν μὲ τὸ μηδέν.

$$\begin{aligned} \left(+\frac{1}{2}\right) - 0 &= \left(+\frac{1}{2}\right) + 0 = +\frac{1}{2} && \text{ἡ διαφορὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς} \\ 0 - (-1) &= 0 + (+1) = +1 && \text{ἡ διαφορὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς} \\ (+5) - (-2) &= (+5) + (+2) = +7 && \text{ἡ διαφορὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς} \\ \left(-\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{12}{3}\right) &= \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(+\frac{12}{3}\right) = +\frac{10}{3} && \text{ἡ διαφορὰ εἶναι θετικ. ἀριθμ.} \\ \left(-\frac{5}{8}\right) - \left(-\frac{5}{8}\right) &= \left(-\frac{5}{8}\right) + \left(+\frac{5}{8}\right) = 0 && \text{ἡ διαφορὰ εἶναι ἴση μὲ μηδέν} \\ (+3) - (+5) &= (+3) + (-5) = -2 && \text{ἡ διαφορὰ εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμὸς.} \\ (-6) - (-5) &= (-6) + (+5) = -1 && \text{ἡ διαφορὰ εἶναι ἀρνητ. ἀριθμὸς}\end{aligned}$$

Ἀπὸ αὐτὰ παρατηροῦμε τὰ ἑξῆς:

1. Ἡ διαφορὰ ἐνὸς μικρότερου ἀπὸ ἕναν μεγαλύτερο εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς.
2. Ἡ διαφορὰ δύο ἴσων ἀριθμῶν εἶναι μηδέν.
3. Ἡ διαφορὰ ἐνὸς μεγαλύτερου ἀπὸ ἕναν μικρότερο εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμὸς.

Ἐπομένως διατυπώνομε τὸν παρακάτω ὅρισμό:

Ὁ ρητὸς α εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ρητὸ β , ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν $\alpha - \beta$ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς· εἶναι ἴσος μὲ τὸν β , ἐὰν $\alpha - \beta$ ἰσοῦται μὲ μηδέν· εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν β , ἐὰν $\alpha - \beta$ εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμὸς.

Συμβολικά: $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned}\alpha - \beta > 0 &\Leftrightarrow \alpha > \beta \\ \alpha - \beta &= 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta \\ \alpha - \beta < 0 &\Leftrightarrow \alpha < \beta\end{aligned}$$

Ἐφαρμογή.

Νά συγκριθοῦν οἱ παρακάτω ἀριθμοί.

α) +7 καὶ -5

*Ἐχομε $(+7) - (-5) = (+7) + (+5) = +12 > 0$

*Ἀρα $+7 > -5$

β) -13 καὶ -12

Εἶναι $(-13) - (-12) = (-13) + (+12) = -1 < 0$

Ἐπομένως $-13 < -12$

γ) $-\frac{12}{3}$ καὶ -4

$$\begin{aligned}\text{*Ἐπειδὴ } -\frac{12}{3} - (-4) &= \left(-\frac{12}{3}\right) + (+4) = \left(-\frac{12}{3}\right) + \left(+\frac{12}{3}\right) = 0 \\ &\Rightarrow -\frac{12}{3} = -4.\end{aligned}$$

§ 45. Ιδιότητες.

1. Παρατηρούμε ότι οι ανισότητες

$$+7 > +2 \text{ και } +2 > -10 \text{ συνεπάγονται την ανισότητα } +7 > -10.$$

Δηλαδή ισχύει η μεταβατική ιδιότητα στην ανισότητα.

$$\text{Γενικά: } \alpha > \beta \text{ και } \beta > \gamma \Rightarrow \alpha > \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q})$$

Αυτό δικαιολογείται ως εξής:

Έπειδή $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$, έχουμε ότι $\alpha - \beta$ είναι θετικός και $\beta - \gamma$ είναι θετικός αριθμός. Το άθροισμά τους: $\alpha - \beta + \beta - \gamma$ είναι θετικός αριθμός.

Αλλά $-\beta$ και β είναι αντίθετοι: άρα $\alpha - \beta + \beta - \gamma = \alpha - 0 - \gamma = \alpha - \gamma$ είναι θετικός αριθμός, επομένως $\alpha > \gamma$.

2. Έπειδή $+\frac{5}{9} > 0$ και ο αντίθετός του $-\frac{5}{9} < 0$, έχουμε γενικά την ισοδυναμία: $\alpha > 0 \Leftrightarrow -\alpha < 0 \quad (\alpha \in \mathbb{Q})$

3. Επίσης από τα παραδείγματα:

$$-3 - (-8) = -3 + (+8) = +5, \quad -3 > -8$$

$$-8 - (-3) = -8 + (+3) = -5, \quad -8 < -3$$

$$\text{Έχουμε: } \alpha > \beta \Leftrightarrow \beta < \alpha \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{Q})$$

Δικαιολόγηση:

$\alpha > \beta$, συνεπάγεται ότι $\alpha - \beta$ είναι θετικός αριθμός· αλλά τότε ο αντίθετός του $\beta - \alpha$ θα είναι αρνητικός αριθμός. Συνεπώς $\beta < \alpha$.

4. Αν και στα δύο μέλη μιās ανισότητας προσθέσουμε τον ίδιο ρητό, βρίσκουμε ομόστροφη ανισότητα. π.χ. $-5 > -12$ προσθέτουμε τον -3 :

$$-5 + (-3) > -12 + (-3) \text{ δηλαδή } -8 > -15$$

$$\text{Γενικά: } \alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q})$$

Δικαιολόγηση:

Έπειδή $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha - \beta > 0$. Προσθέτουμε και στα δύο μέλη της το μηδέν:

$$\alpha - \beta + 0 > 0$$

$$\alpha - \beta + \gamma - \gamma > 0 \Rightarrow \alpha + \gamma - \beta - \gamma > 0 \Rightarrow \alpha + \gamma - (\beta + \gamma) > 0 \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$$

Έφαρμογή

$$\alpha + \beta > \gamma \Leftrightarrow \alpha + \beta + (-\beta) > \gamma + (-\beta) \Rightarrow \alpha > \gamma - \beta.$$

Αν από το ένα μέλος μιās ανισότητας μεταφέρουμε έναν όρο στο άλλο, αλλάζουμε το πρόσημό του.

5. Να διατυπώσετε με λόγια και να επαληθεύσετε την ιδιότητα:

$$\alpha > \beta \Rightarrow \alpha - \gamma > \beta - \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q})$$

§ 46. Διάταξη.

“Αν δοθούν δύο ρητοί αριθμοί, αυτοί ή είναι ίσοι ή ο ένας είναι μικρότερος από τον άλλο.

Την έκφραση «... είναι μικρότερος ή ίσος ...» τη συμβολίζουμε με $\leq$.

“Αν λάβουμε υπ’ όψη τις ιδιότητες της ανισότητας και της ισότητας, παρατηρούμε ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

$\alpha \leq \alpha$		άνακλαστική
$\alpha \leq \beta$ και $\beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$		άντισυμμετρική
$\alpha \leq \beta$ και $\beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \leq \gamma$		μεταβατική

Τη σχέση $\leq$ τη λέμε διάταξη των ρητών κατά μέγεθος.

Σημείωση: Κάθε σχέση, που έχει τις ιδιότητες «άνακλαστική», «άντισυμμετρική» και «μεταβατική» λέγεται σχέση διατάξεως.

Άσκήσεις:

84. Από τα σύμβολα $>$, $<$, $=$ να βάλετε το κατάλληλο μεταξύ των αριθμών:
 -2 και -5 , -1 και $-\frac{3}{2}$, 0 και -6 , $-\frac{5}{6}$ και $-\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$ και 0 , $-\frac{1}{2}$ και $-\frac{1}{3}$
 $-\frac{2}{14}$ και $-\frac{1}{7}$, $(-3+1)$ και -8 .

85. Ποιές από τις επόμενες σχέσεις είναι αληθείς;

α) $-12+15-2 > 3-13+17-7$, β) $-2+12-5 = 2-3+10$,

γ) $-10 > -\frac{21}{2}$, δ) $-50 < -\frac{1}{2}$, ε) $-\frac{3}{4} > 0$, στ) $0 < -20$,

ζ) $-1 + \frac{24}{5} > -0,6 + 4,2$, η) $-\frac{2}{3} + \frac{3}{4} < 0,75 - \frac{5}{8}$.

86. Εφαρμόζοντας την ιδιότητα $\alpha + \beta > \gamma \Rightarrow \alpha > \gamma - \beta$ να αποδείξετε ότι:

$$\alpha + 2 > 12 \Rightarrow \alpha > 10$$

$$\beta - 3 < 5 \Rightarrow \beta < 8 \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q})$$

$$2 - \gamma > 2 \Rightarrow \gamma < 0.$$

87. Να αποδείξετε με αριθμητικά παραδείγματα τις παρακάτω ιδιότητες και να τις διατυπώσετε και με λόγια: $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}$.

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow -\alpha < -\beta,$$

$$\alpha > \beta \text{ και } \gamma = \delta \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta,$$

$$\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta.$$

88. Να προσθέσετε κατά μέλη τις παρακάτω ανισότητες:

α) $\begin{matrix} -5 < -3 \\ 3 < 5 \end{matrix}$

β) $\begin{matrix} -5 < -3 \\ -4 < -1 \end{matrix}$

γ) $\begin{matrix} -5 < -3 \\ 1 < 3 \end{matrix}$

Τί παρατηρείτε; Μπορείτε να αφαιρέσετε κατά μέλη; Διατυπώστε κανόνες.

Άσκησης για επανάληψη :

89. Βρείτε τα εξαγόμενα τῶν παρακάτω πράξεων:

α) $0 - \frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4} - 0$, $-3 + 4 - 6$, $-6 + 4 - 3$,

β) $-1 - \frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2} - 1$, $-1 - (-\frac{3}{2})$, $-\frac{3}{2} - (-1)$,

γ) $-1 - 11 - 111$, $-1 + (-2 - 3)$, $-1 - (-2 - 3)$,

δ) $-30,3 - 15,7 + \frac{63}{5} - 10 + \frac{1}{2}$, $17,7 + 12,5 - 9,4 + \frac{2}{5} - 1$.

90. Απαντήστε στα παρακάτω ἐρωτήματα:

α) $\alpha = \beta$ συνεπάγεται $|\alpha| = |\beta|$; Άν $|\alpha| = |\beta|$, τί συμπέρασμα βγαίνει για τούς ρητούς α , β ;

β) Ποιός είναι ὁ ρητὸς χ , ὅταν $|\chi| = \left| -\frac{3}{7} \right|$;

γ) Ἀληθεύει για τὸν ρητὸ γ ὅτι $\gamma = -|\gamma|$;

δ) Σὲ ποιὸ ὑποσύνολο τοῦ Q ἀνήκει ὁ ρητὸς ψ , ἂν

1) $\psi = |\psi|$, 2) $0 = |\psi|$ καὶ 3) $-\psi = |\psi|$;

ε) Ποιός είναι ὁ ἀντίθετος τοῦ $\kappa - \lambda$ καὶ ποιὸς τοῦ $-\mu + \nu$; ($\kappa, \lambda, \mu, \nu \in Q$).

91. Ἄν $\chi = -12 + 17 - 9$, $\psi = 5 - 11 + 10$ καὶ $z = -19 + 22$, νὰ βρεθοῦν τὰ

α) $\chi + \psi - z$, β) $\chi - \psi + z$, γ) $-\chi + z + \psi$ καθὼς καὶ τὰ

δ) $\chi + \psi + z$, ε) $(\chi + \psi) + z$, στ) $\chi + (\psi + z)$

92. Ἄν $\chi = -\frac{5}{6} + \frac{7}{3} - 1$ καὶ $\psi = \frac{1}{6} - \frac{2}{3} + 3$, νὰ βρεθοῦν τὰ

α) $\chi + \psi$, β) $\chi - \psi$, γ) $-\chi + \psi$.

93. Νὰ ὑπολογίσετε τὰ α) $-\alpha + \beta - \gamma$, β) $-\gamma + \beta - \alpha$, γ) $-\alpha - \gamma + \beta$,

ἂν $\alpha = -\frac{3}{2}$, $\beta = -\frac{5}{3}$, $\gamma = +\frac{1}{6}$

94. Νὰ διατάξετε τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου $\{-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1, -5, +\frac{1}{8}, +1, 0\}$ κατὰ τάξη μεγέθους.

95. Ποιὲς ἀπὸ τὶς παρακάτω σχέσεις εἶναι ἀληθεῖς;

α) $-4 > -2$, β) $13 > -31$, γ) $-\frac{1}{3} > -\frac{1}{2}$, δ) $-\frac{1}{5} < -1$

ε) $-\frac{3}{2} + 5 - 1 \neq 4 - 1,5$, στ) $-\frac{2}{3} + \frac{3}{2} \neq \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$.

96. Ποιὰ ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ἐπαληθεύουν τὴ σχέση $\chi - 5 < -2$;

97. Μὲ παραδείγματα νὰ ἐπαληθεύσετε ὅτι:

ἂν $\alpha < \beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$.

98. Ἄν για τούς ρητούς α, β ἔχουμε τὴ σχέση $\alpha > \beta$, νὰ ἐξετάσετε ποιά σχέση ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ἀντιθέτων τοῦ α καὶ β .

99. "Αν $x \in Q$, $\psi \in Q^+$, $z \in Q^-$, να βρεθούν με άναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα:

α) $\{x / \frac{5}{7} - x = -\frac{5}{7}\}$, β) $\{\psi / \psi - 3 = -1\}$, γ) $\{x / -\frac{3}{5} - x = -\frac{3}{5}\}$,

δ) $\{\psi / \frac{1}{2} - \psi = 20\}$, ε) $\{x / -\frac{5}{2} + x = -\frac{5}{2}\}$, στ) $\{z / -\frac{2}{3} + z = -\frac{2}{3}\}$,

100. "Αν $\alpha = 0$, $\beta = -1$ και $\gamma = -2$, να υπολογίσετε τα

1) $(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) + (\gamma - \alpha)$ και 2) $-(\alpha - \beta) - (\beta - \gamma) - (\gamma - \alpha)$.

8. Η ΠΡΑΞΗ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ Q ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΥΟ ΡΗΤΩΝ

§ 47. Στις πράξεις των ρητών αριθμών, τις οποίες όρισαμε μέχρι τώρα, είδαμε ότι διατηρούνται οι ιδιότητες των πράξεων των ρητών της αριθμητικής.

Γι' αυτό θα όρίσουμε τον πολλαπλασιασμό στο σύνολο των ρητών αριθμών έτσι, ώστε να ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες του πολ/σμού.

$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ αντιμεταθετική
 $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ προσεταιριστική
 $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ επιμεριστική

1. "Επειδή $3 \cdot 5 = 15$ είναι και
 $(+3) \cdot (+5) = +15$.

Δηλαδή το γινόμενο δύο θετικών είναι θετικός αριθμός.

2. Στον πίνακα (α) παρατηρούμε τα εξής:

"Όταν ο πολ/στής 3 ελαττώνεται κατά μία μονάδα και γίνεται: 2, 1, 0, το γινόμενο ελαττώνεται κατά 5 και γίνεται: 10, 5, 0. "Αν συνεχίσουμε να ελαττώνουμε τον πολ/στή κατά ένα: -1, -2, -3, ... πρέπει να ελαττώνουμε και το γινόμενο κατά 5: -5, -10, -15, ...

Δηλαδή πρέπει $(-1) \cdot 5 = -5$, $(-2) \cdot 5 = -10$, $(-3) \cdot 5 = -15$ κ.ο.κ. ή $(-1) \cdot (+5) = -5$, $(-2) \cdot (+5) = -10$ κ.ο.κ.

Δεχόμαστε ότι $5 \cdot (-2) = (-2) \cdot 5 = -10$ (μεταθετική ιδιότητα του πολ/σμού).

"Επομένως το γινόμενο δύο ετερόσημων ρητών είναι άρνητικός αριθμός.

Παράγοντες	Γινόμενο
$3 \cdot 5$	15
$2 \cdot 5$	10
$1 \cdot 5$	5
$0 \cdot 5$	0
$-1 \cdot 5$	; - 5
$-2 \cdot 5$	; - 10
$-3 \cdot 5$	; - 15
.	.
.	.
.	.

Παράγοντες	Γινόμενο
$5 \cdot (-2)$	- 10
$4 \cdot (-2)$	- 8
$3 \cdot (-2)$	- 6
$2 \cdot (-2)$	- 4
$1 \cdot (-2)$	- 2
$0 \cdot (-2)$	; 0
$(-1) \cdot (-2)$	; 2
$(-2) \cdot (-2)$	; 4
$(-3) \cdot (-2)$	; 6
.	.
.	.
.	.

3. Ἀφοῦ παραδεχτήκαμε ὅτι $(-2) \cdot 5 = 5 \cdot (-2) = -10$ (μεταθετική ιδιότητα τοῦ πολ/σμοῦ), παρατηροῦμε τὸν πίνακα (β).

Ὅταν ὁ πολ/στῆς 5 ἐλαττώνεται κατὰ ἓνα, τὸ γινόμενο αὐξάνεται κατὰ δύο.

Ἀρα πρέπει νὰ δεχτοῦμε ὅτι: $0 \cdot (-2) = 0$, $(-1) \cdot (-2) = 2$, $(-2) \cdot (-2) = 4$, $(-3) \cdot (-2) = 6$ κ.ο.κ.

Συνεπῶς τὸ γινόμενο δύο ἀρνητικῶν εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς.

§ 48. Μποροῦμε νὰ αἰτιολογήσουμε τὰ παραπάνω, ἂν δεχτοῦμε ὅτι ἰσχύουν οἱ ιδιότητες:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma, \quad \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha, \quad \alpha \cdot 0 = 0$$

1. Ἐπειδὴ $\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15}$ ἔχομε $\boxed{\left(+\frac{2}{3}\right) \cdot \left(+\frac{7}{5}\right) = +\frac{14}{15}}$

2. Εἶναι $\frac{3}{4} \cdot 0 = 0$

$$\eta \quad \frac{3}{4} \cdot (-2 + 2) = 0$$

$$\eta \quad \frac{3}{4} \cdot (-2) + \frac{3}{4} \cdot 2 = 0 \quad (\text{ἐπιμεριστική ιδιότητα})$$

$\eta \quad \frac{3}{4} \cdot (-2) + \frac{6}{4} = 0$. Ἀπ' αὐτῆ παρατηροῦμε ὅτι τὸ $\frac{3}{4} \cdot (-2)$ πρέπει νὰ παριστάνει τὸν ἀντίθετο τοῦ $\frac{6}{4}$, δηλαδὴ τὸ $-\frac{6}{4}$.

Συνεπῶς $\frac{3}{4} \cdot (-2) = -\frac{6}{4}$ ἢ $\left(+\frac{3}{4}\right) \cdot (-2) = -\frac{6}{4}$ καὶ

$$\boxed{\left(+\frac{3}{4}\right) \cdot (-2) = (-2) \cdot \left(+\frac{3}{4}\right) = -\frac{6}{4}} \quad (\text{μεταθετική ιδιότητα})$$

3. Ἐχομε $(-2) \cdot 0 = 0$

$$\eta \quad (-2) \cdot \left(-\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\right) = 0$$

$$\eta \quad (-2) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + (-2) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = 0$$

$$\eta \quad (-2) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{6}{4}\right) = 0.$$

Ἀπὸ τὴν τελευταία αὐτὴ ἰσότητα συμπεραίνομε ὅτι τὸ $(-2) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$ παριστάνει τὸν ἀντίθετο τοῦ $-\frac{6}{4}$, δηλαδὴ τὸν $+\frac{6}{4}$. Ἀρα:

$$\boxed{(-2) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = +\frac{6}{4}}$$

Ἀπ' αὐτὰ καταλήγομε στὸ συμπέρασμα ὅτι:

Τὸ γινόμενο δύο ρητῶν εἶναι ρητὸς ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀπόλυτη τιμὴ τὸ γινόμενο τῶν ἀπόλυτων τιμῶν καὶ εἶναι θετικὸς, ἂν αὐτοὶ εἶναι ὁμόσημοι, ἀρνητικὸς ἂν εἶναι ἐτερόσημοι, καὶ μηδέν, ἂν ὁ ἓνας εἶναι μηδέν.

Συμβολικά: $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ και α, β όμοσημοι, $\alpha \cdot \beta = |\alpha| \cdot |\beta|$

α, β έτερόσημοι, $\alpha \cdot \beta = -(|\alpha| \cdot |\beta|)$

$$\alpha \cdot 0 = 0$$

Σημείωση: Το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ γράφεται και $\alpha\beta$.

Παραδείγματα

$$(+2) \cdot (+\frac{3}{5}) = +(2 \cdot \frac{3}{5}) = +\frac{6}{5} > 0, \quad (-\frac{6}{7}) \cdot (+3) = -(\frac{6}{7} \cdot 3) = -\frac{18}{7} < 0,$$

$$(-\frac{2}{3}) \cdot (-\frac{5}{7}) = +(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}) = +\frac{10}{21} > 0, \quad (+4) \cdot (-\frac{2}{5}) = -(4 \cdot \frac{2}{5}) = -\frac{8}{5} < 0.$$

α, β ρητοί όμοσημοι $\Leftrightarrow \alpha\beta > 0$, α, β ρητοί έτερόσημοι $\Leftrightarrow \alpha\beta < 0$,

$$0 \cdot (-\frac{1}{2}) = 0, \quad 0 \cdot (+\frac{5}{16}) = 0, \quad 0 \cdot \alpha = 0.$$

§ 49. Ιδιότητες.

Σύμφωνα με τόν κανόνα για την εύρεση του γινομένου δύο ρητών παρατηρούμε ότι ο πολ/σμός εκτός από τις ιδιότητες, που δεχτήκαμε, έχει και τις παρακάτω:

α) Όταν δοθούν δύο ρητοί α και β , υπάρχει πάντοτε ο ρητός $\alpha\beta$ (γινόμενο αυτών). Συμβολικά $\alpha, \beta \in \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha\beta \in \mathbb{Q}$

β) Το γινόμενο δύο ρητών είναι ένας μόνο ρητός. Δηλαδή ή πράξη του πολ/σμού είναι μονότιμη.

γ) Έπειδή $(+1) \cdot (+\frac{2}{3}) = +(1 \cdot \frac{2}{3}) = +\frac{2}{3}$, $(-\frac{4}{7}) \cdot (+1) = -(\frac{4}{7} \cdot 1) = -\frac{4}{7}$ συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός $+1$ είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολ/σμού.

$$\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow (+1) \cdot \alpha = \alpha$$

δ) Έπειδή $(-1) \cdot (-5) = +(1 \cdot 5) = +5$, $(+\frac{3}{10}) \cdot (-1) = -(\frac{3}{10} \cdot 1) = -\frac{3}{10}$ συμπεραίνουμε ότι το γινόμενο ενός ρητού επί (-1) είναι ίσο με τόν αντίθετό του.

$$\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow (-1) \cdot \alpha = -\alpha$$

ε) Έχουμε:

$$(+2) \cdot (+\frac{1}{2}) = +(2 \cdot \frac{1}{2}) = +1, \quad (+\frac{5}{3}) \cdot (+\frac{3}{5}) = +(\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5}) = +1$$

$$(-2) \cdot (-\frac{1}{2}) = +(2 \cdot \frac{1}{2}) = +1, \quad (-\frac{5}{3}) \cdot (-\frac{3}{5}) = +(\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5}) = +1$$

*Αρα δύο όμοσημοι ρητοί, οι οποίοι έχουν αντίστροφες απόλυτες τιμές, έχουν γινόμενο το +1. Οι ρητοί αυτοί λέγονται αντίστροφοι.

Συνεπώς όταν δοθεί ένας ρητός a ($a \neq 0$), υπάρχει ένας μόνο ρητός όμοσημος με αυτόν και με αντίστροφη απόλυτη τιμή, ο οποίος λέγεται αντίστροφος του a και συμβολίζεται με $\frac{1}{a}$ ή a^{-1}

Συντομότερα:

Για κάθε στοιχείο του συνόλου Q των ρητών (εκτός από το μηδέν) υπάρχει ένα μόνο στοιχείο του Q , το οποίο λέγεται αντίστροφο αυτού.

Π.χ. ο αντίστροφος του $+20$ είναι ο $+\frac{1}{20}$, του -48 είναι ο $-\frac{1}{48}$ του $-\frac{17}{19}$ είναι ο $-\frac{19}{17}$ του $+1$ είναι ο $+1$ και του -1 είναι ο -1 .

Άσκησης:

101. Βρήτε τα γινόμενα:

$$\alpha) +1 \cdot (-1), \quad (+8) \cdot (+1), \quad -\frac{3}{5} \cdot (-1), \quad (-\frac{15}{7}) \cdot (+1) \\ \beta) 0 \cdot (-12), \quad (-\frac{4}{21}) \cdot (-\frac{21}{4}), \quad (+\frac{1}{2}) \cdot (+2), \quad (+\frac{3}{8}) \cdot (-\frac{8}{3})$$

102. Βρήτε τα εξαγόμενα των παρακάτω πράξεων:

$$\alpha) -\frac{13}{15} \cdot (-\frac{15}{13}) + 8 \cdot (-\frac{1}{8}), \quad \beta) -\frac{1}{2} \cdot (-2) + \frac{41}{61} \cdot \frac{61}{41} + (-\frac{101}{119}) \cdot (-\frac{119}{101}) \\ \gamma) \frac{5}{3} \cdot (-\frac{3}{5}) + \frac{1}{2} \cdot (-2) + 15 \cdot (-\frac{1}{15}) + \frac{46}{3} \cdot (-\frac{3}{23}) \\ \delta) -\frac{4}{7} \cdot \frac{7}{4} + \frac{10}{17} \cdot (-\frac{17}{10}) + \frac{21}{29} \cdot (-\frac{29}{21})$$

103. Να βρεθούν τα εξαγόμενα με τον συντομότερο τρόπο:

[χρησιμοποιήστε την ιδιότητα: $\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma)$]

$$\alpha) 5 \cdot (-7) + 5 \cdot 27, \quad \beta) 6 \cdot (-12) - 6 \cdot 18, \quad \gamma) 59 \cdot (-19) + 59 \cdot 9, \\ \delta) -\frac{2}{5} \cdot 11 - \frac{2}{5} \cdot 19, \quad \epsilon) -21 \cdot (-17) + (-21) \cdot (-13), \quad \sigma\tau) \frac{15}{23} \cdot (-18) - \frac{30}{46} \cdot 12.$$

104. Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα με δύο τρόπους:

$$\alpha) -5 \cdot (+12 - 19), \quad \beta) \frac{3}{4} \cdot (-\frac{2}{3} + \frac{5}{6}), \quad \gamma) (-4 + \frac{7}{2} - \frac{3}{5}) \cdot (-\frac{10}{11}) \\ \delta) (\frac{4}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{6}) \cdot (-\frac{24}{13}), \quad \epsilon) (\frac{2,1}{7} - \frac{11}{5} + \frac{7}{2} - 1) \cdot (-\frac{70}{19}).$$

105. Ποιο συμπέρασμα εξάγεται για τους ρητούς α, β , αν $\alpha\beta > 0$ ή $\alpha\beta = 0$ ή $\alpha\beta < 0$;

9. ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΤΡΙΩΝ Η ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΡΗΤΩΝ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

§ 50. Να υπολογισθεί το γινόμενο $2 \cdot (-3) \cdot 4$.

Βρίσκουμε το γινόμενο των δύο πρώτων παραγόντων, $2 \cdot (-3) = -6$

καὶ κατόπιν πολλαπλασιάζουμε τὸ γινόμενο αὐτὸ μὲ τὸν τρίτο παράγοντα.

Αὐτὸ τὸ γράφομε καὶ ὡς ἑξῆς:

$$2 \cdot (-3) \cdot 4 = [2 \cdot (-3)] \cdot 4 = (-6) \cdot 4 = -24.$$

Ἀνάλογα ἐργαζόμαστε, ἂν ἔχουμε περισσότερους ἀπὸ τρεῖς παράγοντες.

Ὡστε γινόμενο τριῶν ἢ περισσότερων ρητῶν εἶναι ὁ ρητός, τὸν ὁποῖο βρίσκουμε, ἂν πολλαπλασιάσουμε τοὺς δύο πρώτους, τὸ γινόμενο ποὺ θὰ βροῦμε μὲ τὸν τρίτο κ.ο.κ.

$$\text{Συμβολικά: } \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta = [(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma] \cdot \delta \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}).$$

Παραδείγματα :

$$(+2) \cdot (+4) \cdot (+5) = [(+2) \cdot (+4)] \cdot (+5) = (+8) \cdot (+5) = +40 = +(2 \cdot 4 \cdot 5)$$

$$(-2) \cdot (+4) \cdot (+5) = [(-2) \cdot (+4)] \cdot (+5) = (-8) \cdot (+5) = -40 = -(2 \cdot 4 \cdot 5)$$

$$(-2) \cdot (-4) \cdot (+5) = [(-2) \cdot (-4)] \cdot (+5) = (+8) \cdot (+5) = +40 = +(2 \cdot 4 \cdot 5)$$

$$(-2) \cdot (-4) \cdot (-5) = [(-2) \cdot (-4)] \cdot (-5) = (+8) \cdot (-5) = -40 = -(2 \cdot 4 \cdot 5)$$

Ἀπ' αὐτὰ παρατηροῦμε ὅτι:

Ἐνα γινόμενο μὲ περισσότερους ἀπὸ δύο παράγοντες ἔχει ἀπόλυτη τιμὴ τὸ γινόμενο τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τῶν παραγόντων του καὶ εἶναι θετικό, ἂν οἱ παράγοντές του εἶναι θετικοὶ ἢ τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι ἄρτιος ἀριθμός· εἶναι ἀρνητικό, ἂν τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι περιττὸς ἀριθμός.

Μὲ βάση τὸν προηγούμενο κανόνα νὰ ὑπολογίσετε τὰ γινόμενα:

$$(+2) \cdot (+3) \cdot (+4) \cdot (+5) = +(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = +120$$

$$(-2) \cdot (+3) \cdot (+4) \cdot (+5) = -(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = -120$$

$$(+2) \cdot (+3) \cdot (-4) \cdot (-5) = +(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = +120$$

$$(+2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (-5) = -(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = -120$$

$$(-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (-5) = +(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = +120$$

Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι θετικοὶ ἔχομε:

$$(-\alpha) \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta = -(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta)$$

$$(-\alpha) \cdot (-\beta) \cdot \gamma \cdot \delta = (\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta)$$

$$(-\alpha) \cdot (-\beta) \cdot (-\gamma) \cdot \delta = -(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta)$$

$$(-\alpha) \cdot (-\beta) \cdot (-\gamma) \cdot (-\delta) = (\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta)$$

Σημείωση: Τὸ γινόμενο $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta$ γράφεται καὶ $\alpha\beta\gamma\delta$.

§ 51. Ἰδιότητες.

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενο ρητῶν ἔχει ἀπόλυτη τιμὴ τὸ γινόμενο τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τους, ἰσχύουν σ' αὐτὸ ὅλες οἱ ἰδιότητες τοῦ γινομένου τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς.

1. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \gamma) \cdot \beta$
2. $(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma) \cdot (\delta \cdot \epsilon) = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta \cdot \epsilon$
3. $\alpha\beta\gamma\delta = \gamma\alpha\delta\beta = \beta\alpha\delta\gamma = \dots$
4. $(\alpha + \beta) \cdot (\gamma + \delta) = \alpha(\gamma + \delta) + \beta(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$

Π.χ. $[(-2) \cdot (-5)] \cdot (-6) = (+10) \cdot (-6) = -60$

$(-2) \cdot [(-5) \cdot (-6)] = (-2) \cdot (+30) = -60$. *Αρα

$[(-2) \cdot (-5)] \cdot (-6) = (-2) \cdot [(-5) \cdot (-6)]$ και γενικὰ

$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ ή προσεταιριστική ιδιότητα τουῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ἐφαρμογές :

ο) $2 \cdot (-\frac{3}{5}) \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{3}{4} \cdot (-\frac{5}{3}) = -(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{4}) = -(1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{4}) = -\frac{3}{4}$

β) $(-2) \cdot (-2) = (2 \cdot 2) = 2^2$, $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -(3 \cdot 3 \cdot 3) = -3^3$

γ) $(-\frac{3}{4} \cdot 5) \cdot (-\frac{4}{3} \cdot 2) = (-\frac{3}{4}) \cdot 5 \cdot (-\frac{4}{3}) \cdot 2 =$
 $= (\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot 5 \cdot 2) = 1 \cdot 10 = 10$

δ) $[(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)] \cdot [(-2) \cdot (-2)] = [-(2 \cdot 2 \cdot 2)] \cdot [+(2 \cdot 2)] =$
 $[-2^3] \cdot [2^2] = -(2^3 \cdot 2^2) = -2^5$

ε) $[(-3) + (-6)] \cdot [(-8) + (-6)] = (-3) \cdot [(-8) + (-6)] + (-6) \cdot [(-8) + (-6)] =$
 $= 24 + 18 + 48 + 36 = 126$

$[(-3) + (-6)] \cdot [(-8) + (-6)] = [-9] \cdot [-14] = 126$. (β' τρόπος πιό απλός).

στ) $(-2 + \alpha) \cdot (-3 + \beta) = (-2) \cdot [-3 + \beta] + \alpha[-3 + \beta] = (-2) \cdot (-3) + (-2)\beta + \alpha(-3) + \alpha\beta$
 $= 6 - 2\beta - 3\alpha + \alpha\beta$.

ζ) $-2 \cdot (-3 + \alpha) + (-5 + \alpha) \cdot 3 = (-2) \cdot (-3) + (-2) \cdot \alpha + (-5) \cdot 3 + 3\alpha$
 $= 6 - 2\alpha + (-15) + 3\alpha =$
 $= 6 - 2\alpha - 15 + 3\alpha =$
 $= 6 - 15 + 3\alpha - 2\alpha =$
 $= -9 + \alpha$

§ 52. Ἀπόλυτη τιμὴ γινομένου ρητῶν ἀριθμῶν.

*Ἐχομε: $|(-2) \cdot (+\frac{3}{4})| = |-\frac{6}{4}| = \frac{6}{4}$

$|-2| \cdot |+\frac{3}{4}| = 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{4}$

Συνεπῶς $|(-2) \cdot (+\frac{3}{4})| = |(-2)| \cdot |+\frac{3}{4}|$.

***Ὡστε ἡ ἀπόλυτη τιμὴ ἐνὸς γινομένου εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενο τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τῶν παραγόντων.**

Γενικά αν $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, είναι $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

Η ιδιότητα αυτή ισχύει και για περισσότερους από δύο παράγοντες.

Ιδιότητες ισότητων και ανισοτήτων

§ 53. α) Ιδιότητα: "Αν $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$, ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$)

Π.χ. Έχουμε την ισότητα $-\frac{4}{5} = -\frac{8}{10}$ και πολ/με και τὰ δύο μέλη της επί τὸν ρητὸ -5 .

$$\alpha' \text{ μέλος } -\frac{4}{5} \cdot (-5) = +4$$

$$\beta' \text{ μέλος } -\frac{8}{10} \cdot (-5) = +\frac{8}{2} \text{ ἄρα } -\frac{4}{5} \cdot (-5) = -\frac{8}{10} \cdot (-5)$$

Επομένως μπορούμε νὰ πολ/σουμε καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ισότητος μὲ τὸν ἴδιο ρητὸ καὶ νὰ λάβουμε ισότητα.

β) Ιδιότητα: "Αν $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$ καὶ $\gamma \neq 0$, θὰ ἔχουμε καὶ $\alpha = \beta$ ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$).

Π.χ. ἂν $\chi \cdot (-5) = (-4) \cdot (-5)$, ($\chi \in \mathbb{Q}$) πολ/με καὶ τὰ δύο μέλη της ἐπὶ τὸν ἀντίστροφο τοῦ -5 .

$$\alpha' \text{ μέλος: } [\chi \cdot (-5)] \cdot (-\frac{1}{5}) = \chi \cdot [(-5) \cdot (-\frac{1}{5})] = \chi \cdot (+1) = \chi$$

$$\beta' \text{ μέλος } [(-4) \cdot (-5)] \cdot (-\frac{1}{5}) = (-4) \cdot [(-5) \cdot (-\frac{1}{5})] = (-4) \cdot (+1) = -4$$

$$\text{"Ἀρα } \chi = -4$$

§ 54. α) Ιδιότητα: "Αν $\alpha > \beta$ καὶ $\gamma > 0$ εἶναι καὶ

$$\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma, \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{Q}, \gamma \in \mathbb{Q}^+)$$

Π.χ. $-3 > -4$ πολ/με καὶ τὰ δύο μέλη ἐπὶ τὸ $+2$ καὶ ἔχουμε:

$$\alpha' \text{ μέλος: } (-3) \cdot (+2) = -6$$

$$\beta' \text{ μέλος: } (-4) \cdot (+2) = -8$$

$$\text{"Ἀρα } (-3) \cdot (+2) > (-4) \cdot (+2)$$

β) Ιδιότητα: "Αν $\alpha > \beta$ καὶ $\gamma < 0$ εἶναι καί:

$$\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{Q}, \gamma \in \mathbb{Q}^-)$$

Π.χ. $+\frac{2}{3} > -\frac{4}{5}$ πολ/με καὶ τὰ δύο μέλη ἐπὶ τὸν -2

$$\alpha' \text{ μέλος: } (+\frac{2}{3}) \cdot (-2) = -\frac{4}{3}$$

$$\beta' \text{ μέλος: } -\frac{4}{5} \cdot (-2) = +\frac{8}{5} \text{ καὶ ἐπειδὴ } -\frac{4}{3} < +\frac{8}{5}, \text{ ἔχουμε ὅτι:}$$

$$(+\frac{2}{3}) \cdot (-2) < (-\frac{4}{5}) \cdot (-2). \text{ Ἐπομένως:}$$

Ἄν πολλαπλασιάσουμε καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ, διάφορο τοῦ μηδενός, προκύπτει ὁμόστροφη ἀνισότητα, ἂν ὁ ἀριθμὸς εἶναι θετικός, καὶ ἐτερόστροφη ἂν ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἀρνητικός.

Ἐφαρμογές :

§ 55. 1. Πολλαπλασιάζουμε καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος $-10 + 7 = -3$ ἐπὶ τὸν -1 .
 $-10 + 7 = -3 \Rightarrow (-10 + 7) \cdot (-1) = -3 \cdot (-1) \Rightarrow (-10) \cdot (-1) + 7 \cdot (-1) = 3 \Rightarrow 10 - 7 = 3$
 Δηλαδή μποροῦμε νὰ ἀλλάξουμε τὸ πρόσημο τῶν ὁρῶν καὶ τῶν δύο μελῶν μιᾶς ἰσότητος.

Γενικά: $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q})$ ἂν $\alpha - \beta = \gamma \Rightarrow -\alpha + \beta = -\gamma$

2. Πολλαπλασιάζουμε καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος $-\frac{1}{3} > -2$ ἐπὶ τὸν -1 .

$$-\frac{1}{3} > -2 \Rightarrow -\frac{1}{3}(-1) < (-2) \cdot (-1) \Rightarrow \frac{1}{3} < 2$$

Μποροῦμε νὰ ἀλλάξουμε τὸ πρόσημο τῶν ὁρῶν καὶ τῶν δύο μελῶν μιᾶς ἀνισότητος, ἂν ἀλλάξουμε τὴ φορά της.

Γενικά: $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q})$. Ἄν $\alpha + \beta > \gamma \Rightarrow -\alpha - \beta < -\gamma$.

§ 56. Ἀνακεφαλαίωση:

Ἀπὸ ὅσα ἀναφέρονται στὸν πολ/σμό τῶν ρητῶν συμπεραίνομε ὅτι:

α. Ὄταν δοθοῦν δύο ρητοὶ α καὶ β , ὑπάρχει ὁ ρητὸς $\alpha\beta$ (γινόμενο αὐτῶν).

Συμβολικὰ $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ καὶ $\alpha\beta \in \mathbb{Q}$. Δηλαδή:

Ἄν α, β εἶναι ὁμόσημοι, τότε $\alpha\beta = |\alpha| \cdot |\beta|$

ἂν α, β εἶναι ἐτερόσημοι, τότε $\alpha\beta = -(|\alpha| \cdot |\beta|)$,

ἂν ὁ ἓνας εἶναι μηδέν, τότε $\alpha \cdot \beta = 0$.

Σὲ ὅλες τὶς παραπάνω περιπτώσεις ἔχομε

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$$

β. Τὸ γινόμενο δύο ρητῶν εἶναι ἓνας καὶ μόνο ἓνας ρητὸς (μονότιμο τοῦ πολ/σμοῦ).

γ. Ἰσχύει ἡ μεταθετικὴ ιδιότητα: $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{Q})$

δ. Ὄταν δοθοῦν οἱ ρητοὶ α, β καὶ γ , ἰσχύει ἡ προσεταιριστικὴ ιδιότητα τοῦ πολ/σμοῦ: $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$

ε. Ὑπάρχει ἓνα στοιχεῖο τοῦ $\mathbb{Q}$, τὸ $+1$, τὸ ὁποῖο εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο τοῦ πολ/σμοῦ.

$$\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha \cdot (+1) = \alpha$$

στ. Γιὰ κάθε στοιχεῖο τοῦ $\mathbb{Q}$, (ἐκτὸς ἀπὸ τὸ μηδέν) ὑπάρχει ἓνα ἄλλο στοιχεῖο αὐτοῦ (καὶ εἶναι μοναδικό), τὸ ὁποῖο εἶναι ἀντίστροφό τσου.

Ὁ ἀντίστροφος τοῦ ρητοῦ α ($\alpha \neq 0$) εἶναι ὁ $\frac{1}{\alpha}$ ἢ α^{-1} καὶ $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$

ζ. Γιὰ τοὺς ρητοὺς α, β καὶ γ ἰσχύει ἡ ἐπιμεριστικὴ ιδιότητα:

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

Άσκησης:

106. Νά βρεθοῦν τὰ γινόμενα:

$$\alpha) (-8) \cdot (-13) \cdot (+2) \cdot (-5), \quad \beta) (-125) \cdot (-8) \cdot (+179) \cdot (-1),$$

$$\gamma) -\frac{17}{19} \cdot \left(-\frac{3}{16}\right) \cdot (+4) \cdot \left(+\frac{19}{17}\right) \cdot \left(-\frac{16}{3}\right) \cdot$$

$$\delta) \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(+\frac{2}{3}\right) \cdot \left(+\frac{3}{2}\right) \cdot$$

$$\epsilon) (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$$

$$\sigma\tau) \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

107. Νά βρεθοῦν τὰ γινόμενα:

$$\alpha) \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right),$$

$$\delta) \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right),$$

$$\beta) \left[(-2) \cdot (-3) \cdot \left(+\frac{4}{5}\right) \right] \cdot (-5), \quad \epsilon) \left[\left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) \cdot (-5) \right] \cdot \left(-\frac{56}{6}\right)$$

$$\gamma) [(3) \cdot (-3) \cdot (-3)] \cdot [(-3) \cdot (-3)] \quad \sigma\tau) \left[-\frac{7}{8} \cdot \left(-\frac{8}{9}\right) \cdot \left(-\frac{11}{10}\right) \right] \cdot$$

$$\left[\left(-\frac{9}{7}\right) \cdot \left(-\frac{10}{11}\right) \right]$$

108. Νά βρεθοῦν τὰ παρακάτω γινόμενα μὲ δύο τρόπους:

$$\alpha) [(-5)+2] \cdot [(-3)+(-2)],$$

$$\beta) \left[\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) \right] \cdot \left[\left(-\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{3}{2}\right) \right],$$

$$\gamma) \left[-4 + \left(-\frac{2}{3}\right) \right] \cdot \left[\left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{1}{3} \right] \cdot \left(-\frac{15}{16}\right),$$

$$\delta) \left(-1 + \frac{3}{2} - \frac{5}{3}\right) \cdot \left(-2 + \frac{1}{2}\right)$$

109. Ἄν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$, νά ἐπαληθεύσετε ὅτι

$$|\alpha \cdot \beta \cdot \gamma| = |\alpha| \cdot |\beta| \cdot |\gamma|$$

110. Νά ὑπολογίσετε τὰ γινόμενα:

$$\alpha) (-4+7) \cdot (-4-7), \quad \beta) (-5+\beta) \cdot (\alpha-3), \quad \gamma) (-3+5) \cdot (-3+5),$$

$$\delta) (-4+\beta) \cdot (+3+\alpha), \quad \epsilon) (-4-6) \cdot (-4-6), \quad \sigma\tau) (\alpha-5) \cdot (\alpha+5).$$

111. Νά γίνουν οἱ πράξεις:

$$\alpha) 3 \cdot (\alpha-\beta) - 4 \cdot (\alpha-4) + 3 \cdot (\beta-2), \quad \beta) 4(\alpha+\beta+\gamma) - 3(\alpha-\beta) - 2(\beta+\gamma).$$

112. Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις.

$$\alpha) x \cdot \frac{1}{2} = 1, \quad \beta) x \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 1, \quad \gamma) \left(-\frac{5}{7}\right) \cdot x = 1, \quad \delta) \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot x = \frac{6}{8}.$$

113. α) Στη θέση του ερωτηματικού να θέσετε το κατάλληλο σύμβολο από τα $=, >, <$ μεταξύ των παραστάσεων:

$$\alpha) \frac{17}{6} + \frac{2}{3} ; \frac{1}{2} + 3, \quad \beta) \frac{2}{5} - 1 ; -\frac{7}{5} + \frac{1}{10}$$

$$\gamma) \frac{20}{3} ; 7 - \frac{1}{3}, \quad \delta) \frac{7}{3} ; 6 - \frac{7}{2}$$

β) Πολλαπλασιάστε και τα δύο μέλη των σχέσεων που βρήκατε:

1) επί το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών,

2) επί τον αντίθετο του Ε.Κ.Π. των παρονομαστών και

3) επί (-1) .

114. Να αλλάξετε το πρόσημο των όρων και των δύο μελών στις παρακάτω ισότητες και ανισότητες. Τι παρατηρείτε;

$$\alpha) -\frac{20}{3} = \frac{1}{3} - 7, \quad \beta) -5 > -\frac{15}{2}, \quad \gamma) -\frac{1}{1000} > -10,$$

$$\delta) \frac{7}{8} - 1 < -\frac{1}{9}, \quad \epsilon) -\chi + 5 = -12, \quad \sigma\tau) -6 - \chi > -6.$$

115. Πολλαπλασιάστε κατά μέλη τις παρακάτω ομόστροφες ανισότητες. Τι παρατηρείτε;

$$\alpha) \begin{matrix} -3 > -8 \\ 4 > 2 \end{matrix}$$

$$\beta) \begin{matrix} -3 < 2 \\ -5 < 5 \end{matrix}$$

$$\gamma) \begin{matrix} 3 > -2 \\ 2 > -3 \end{matrix}$$

116. *Αν μεταξύ των θετικών ρητών α και β υπάρχει η σχέση $\alpha > \beta$, να εξετάσετε ποιά σχέση ισχύει μεταξύ των αντίστροφων του α και του β .

10. Η ΠΡΑΞΗ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ ΣΤΟ Q — ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ.

§ 57. Πηλίκο δύο ρητών.

Να βρεθεί ρητός, δ όποιος, όταν πολλαπλασιάζεται επί τον $-\frac{3}{5}$, δίνει γινόμενο τον 6.

*Αν χ είναι δ ζητούμενος ρητός, έχουμε την εξίσωση $(-\frac{3}{5}) \cdot \chi = 6$.

*Η διαίρεση στο σύνολο των ρητών αριθμών δ ρίζεται ως πράξη αντίστροφη του πολ/σμού.

Διαίρεση είναι ή πράξη, κατά την οποία δίνονται δύο αριθμοί και βρίσκειται τρίτος, δ όποιος, όταν πολλαπλασιάζεται επί τον δεύτερο, δίνει γινόμενο τον πρώτο.

*Ωστε μπορούμε να γράψουμε:

$$(-\frac{3}{5}) \cdot \chi = 6 \Rightarrow \chi = 6 : (-\frac{3}{5})$$

Για την εύρεση του χ θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα: $\alpha = \beta \Leftrightarrow \gamma \cdot \alpha = \gamma \cdot \beta$

$$* \text{Έχουμε: } (-\frac{3}{5}) \cdot \chi = 6 \Rightarrow (-\frac{5}{3}) \cdot [(-\frac{3}{5}) \cdot \chi] = (-\frac{5}{3}) \cdot 6$$

$$\Rightarrow [(-\frac{5}{3}) \cdot (-\frac{3}{5})] \cdot \chi = 6 \cdot (-\frac{5}{3})$$

$$\Rightarrow [+1] \cdot \chi = 6 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)$$

$$\chi = 6 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)$$

Άρα

$$\chi = 6 : \left(-\frac{3}{5}\right) = 6 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)$$

Ώστε διαίρεση είναι ο πολλαπλασιασμός του διαιρετέου επί τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$(\alpha, \beta \in \mathbb{Q}) \quad \alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} \quad (\beta \neq 0)$$

Έφαρμογές

$$(+12) : (+3) = (+12) \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) = +\frac{12}{3} = +4$$

$$(-15) : (-5) = (-15) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = +\frac{15}{5} = +3$$

$$(+24) : (-7) = (+24) \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) = -\frac{24}{7}$$

$$\left(-\frac{4}{7}\right) : \left(+\frac{4}{9}\right) = \left(-\frac{4}{7}\right) \cdot \left(+\frac{9}{4}\right) = -\frac{36}{28} = -\frac{9}{7}$$

$$0 : \left(-\frac{2}{3}\right) = 0 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 0$$

Ἡ διαίρεση $\left(-\frac{4}{5}\right) : 0$ είναι αδύνατη, διότι δὲν ὑπάρχει ἀντίστροφος τοῦ μηδενὸς καὶ ἐπομένως δὲν ὑπάρχει καὶ τὸ πηλίκο αὐτό.

Ἀπ' αὐτὰ παρατηροῦμε ὅτι:

Ἄν δοθοῦν οἱ ρητοὶ α καὶ β , τὸ πηλίκο τοῦ α διὰ τοῦ β ($\beta \neq 0$) εἶναι θετικό, ἂν αὐτοὶ εἶναι ὁμόσημοι, ἄρνητικό ἂν εἶναι ἑτερόσημοι, καὶ μηδέν ἂν ὁ α εἶναι μηδέν. Ἡ ἀπόλυτη τιμὴ του εἶναι ἴση μὲ τὸ πηλίκο τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τῶν α καὶ β .

Τὸ πηλίκο $\alpha : \beta$ γράφεται καὶ μὲ μορφή κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$.

Συμβολικά: 1. $\alpha \cdot \beta > 0$ τὸ $\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta} > 0$

($\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$) 2. $\alpha \cdot \beta < 0$ τὸ $\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta} < 0$ $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$

3. $\alpha = 0$ τὸ $\alpha : \beta = \frac{0}{\beta} = 0$

Σημείωση: Εἶπαμε ὅτι διαίρεση εἶναι ὁ πολ/σμός τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸν ἀντίστροφο τοῦ διαιρέτη. Συνεπῶς ἐπειδὴ ὁ πολ/σμός εἶναι πράξη μονότιμη, καὶ ἡ διαίρεση εἶναι πράξη μονότιμη.

Ἡ διαίρεση εἶναι δυνατή, ὅταν ὑπάρχει ἀντίστροφος τοῦ διαιρέτη, ἀλλὰ ἀντίστροφος τοῦ διαιρέτη ὑπάρχει μόνον, ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι διαφορετικός ἀπὸ τὸ μηδέν.

§ 58. Ιδιότητες της διαιρέσεως.

Ἀπὸ τὸν ὀρισμὸ τοῦ πηλίκου δύο ρητῶν εἶναι φανερό, ὅτι ἰσχύουν οἱ ιδιότητες τῆς διαιρέσεως.

1. $\alpha : \beta = (\alpha \cdot \gamma) : (\beta \cdot \gamma) \quad (\gamma \neq 0)$
2. $(\alpha + \beta + \gamma) : \delta = (\alpha : \delta) + (\beta : \delta) + (\gamma : \delta)$
3. $(\alpha - \beta) : \gamma = (\alpha : \gamma) - (\beta : \gamma)$
4. $(\alpha \cdot \beta) : \gamma = (\alpha : \gamma) \cdot \beta = \alpha \cdot (\beta : \gamma)$
5. $\alpha : (\beta \cdot \gamma \cdot \delta) = [(\alpha : \beta) : \gamma] : \delta$

Ἐπαληθεύουμε τὴν 1η ιδιότητα:

$$(+3) : (-4) = -\frac{3}{4}, [(+3) \cdot (-2)] : [(-4) \cdot (-2)] = (-6) : (+8) = -\frac{6}{8}$$

$$\text{*} \text{ Ἀρα } (+3) : (-4) = [(+3) \cdot (-2)] : [(-4) \cdot (-2)]$$

Μποροῦμε ὁμῶς νὰ αἰτιολογήσουμε καὶ γενικότερα τὴν ιδιότητα $\alpha : \beta = (\alpha \cdot \gamma) : (\beta \cdot \gamma)$.

$$\begin{aligned} \text{*} \text{ Ἐχομε } \alpha : \beta &= \alpha \cdot \frac{1}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} \cdot (+1) = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \left(\gamma \cdot \frac{1}{\gamma} \right) = \\ &= \alpha \cdot \gamma \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\gamma} = \alpha \cdot \gamma \cdot \frac{1}{\beta \cdot \gamma} = (\alpha \cdot \gamma) : (\beta \cdot \gamma) \end{aligned}$$

Αἰτιολογοῦμε καὶ τὴν 2η ιδιότητα:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta + \gamma) : \delta &= (\alpha + \beta + \gamma) \cdot \frac{1}{\delta} = \alpha \cdot \frac{1}{\delta} + \beta \cdot \frac{1}{\delta} + \gamma \cdot \frac{1}{\delta} = \\ &= (\alpha : \delta) + (\beta : \delta) + (\gamma : \delta) \end{aligned}$$

Ὅμοίως αἰτιολογοῦνται καὶ οἱ ὑπόλοιπες ιδιότητες.

Σημείωση: Μποροῦμε νὰ διατυπώσουμε καὶ μὲ λόγια τὶς παραπάνω ιδιότητες. Π.χ. τὶς ιδιότητες 1 καὶ 2:

1. Ἄν πολ/σουμε διαιρετέο καὶ διαιρέτη μὲς διαιρέσεως ἐπὶ ἓναν ρητὸ διαφορετικὸ ἀπὸ τὸν μηδέν, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται.

2. Γιὰ νὰ διαιρέσουμε ἓνα ἄθροισμα διὰ ἐνὸς ρητοῦ διαφορετικοῦ ἀπὸ τὸ μηδέν, διαιροῦμε καθένα ἀπὸ τοὺς προσθετοὺς τοῦ ἀθροίσματος διὰ τοῦ ρητοῦ καὶ προσθέτομε τὰ πηλικά πού προκύπτουν.

Ἀσκήσεις:

$$\begin{aligned} 117. \text{ Νὰ βρεῖτε τὰ πηλικά: } \alpha) (-24) : (+6), \beta) (-48) : (-16), \gamma) (-4) : \left(+\frac{3}{7}\right) \\ \delta) \left(+\frac{3}{8}\right) : \left(-\frac{5}{7}\right), \epsilon) -\frac{10}{11} : (+3), \sigma\tau) (-6) : \left(-\frac{15}{2}\right), \\ \zeta) \left(-\frac{4}{5}\right) : \left(-\frac{3}{10}\right), \eta) \left(+\frac{15}{17}\right) : (+15) \end{aligned}$$

118. Νὰ γίνουν οἱ πράξεις:

$$\begin{aligned} \alpha) \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3} + 3\right) : (-3), \quad \delta) \left[\left(-\frac{5}{6}\right) \cdot 8 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)\right] : \left(-\frac{1}{2}\right) \\ \beta) \left[\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)\right] : \left(-\frac{3}{5}\right), \quad \epsilon) \left(-\frac{3}{4} - \frac{6}{2} + 1\right) : \left(-\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\gamma) [(-3) \cdot (-5) \cdot 4] : [(-2) \cdot (-3)], \text{ στ} [(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)] : [(-3) \cdot (-3)]$$

119. Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

$$\begin{aligned} \alpha) x \cdot (-3) &= -\frac{27}{31}, & \beta) x \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) &= -8, & \gamma) \frac{5}{8} \cdot x &= -\frac{4}{15}, \\ \delta) -x &= \frac{3}{11}, & \epsilon) x : \left(-\frac{13}{15}\right) &= -\frac{5}{26}, & \text{στ} \left(-\frac{2}{7}\right) : x &= -\frac{23}{7}, & \zeta) (-10) \cdot x &= 0. \end{aligned}$$

120. Νά ἐπαληθεύσετε τὶς ἰσοδυναμίες:

1. $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha : \gamma = \beta : \gamma$ ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}, \gamma \neq 0$)
2. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha : \gamma > \beta : \gamma$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{Q}, \gamma \in \mathbb{Q}^+$)
3. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha : \gamma < \beta : \gamma$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{Q}, \gamma \in \mathbb{Q}^-$)
4. $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{Q}, \beta \neq 0$).

Μπορεῖτε νὰ τὶς δικαιολογήσετε;

11. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ — ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΩΝ

§ 59. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἀριθμητικὲς παραστάσεις:

- α. $-(-5) + (-2) - (+12)$
- β. $-(-8 + 13 - 14) + (10 - 6 + 1) - (12 - 6)$
- γ. $[(2 - 8) + (-15 + 17)] - [(-6 + 3) - (-12 + 7)] + (-5 + 3)$
- δ. $(-7 + 2) - (-2 + \frac{3}{4}) \cdot (-\frac{2}{3}) + [(-\frac{5}{8}) \cdot (-\frac{8}{6}) + 1] : (-\frac{11}{3})$
- ε. $(-3 + \frac{7}{5}) \cdot (-\frac{5}{4}) + (2 - \frac{1}{6}) : (-11) - (-\frac{3}{5} - 1) \cdot (\frac{2}{3} + 1)$

Γιὰ τὸν ὑπολογισμό τῶν παραστάσεων αὐτῶν ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Παρατηροῦμε ὅτι στὶς παραστάσεις α, β, γ δὲν ἔχουν σημειωθεῖ πολ/σμοὶ ἢ διαιρέσεις, ἐπομένως αὐτὲς μποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ἀλγεβρικὰ ἄθροίσματα. Ἀλλὰ γιὰ τὰ β καὶ γ (ἀλγ. ἄθροίσματα) ὁ ρητός, ὁ ὁποῖος προσθέτεται ἢ ἀφαιρεῖται, εἶναι τὸ ἄθροισμα ποὺ βρίσκεται μέσα στὴν παρένθεση ἢ τὸ ἄθροισμα ἀθροισμάτων ἢ ἡ διαφορὰ ἀθροισμάτων, ποὺ βρίσκεται μέσα στὴν ἀγκύλη.

1. Ὑπολογισμὸς τῆς παραστάσεως γ .

$$\begin{aligned} \text{Α' τρόπος: } [(2-8) + (-15+17)] - [(-6+3) - (-12+7)] + (-5+3) &= \\ &= [(-6) + 2] - [(-3) - (-5)] + (-5+3) = \\ &= (-4) - [-3 + (+5)] + (-2) = \\ &= (-4) - (+2) + (-2) = \\ &= (-4) + (-2) + (-2) = -8 \end{aligned}$$

Σημείωση. Ἡ ἀγκύλη, ἡ ὁποία παύει νὰ περιέχει παρενθέσεις, μετατρέπεται σὲ παρένθεση.

Υπολογίσουμε τις τιμές των αλγεβρικών άθροισμάτων, τα όποια βρίσκονται μέσα στις άγκύλες, και καταλήξαμε σ' ένα αλγεβρικό άθροισμα ρητών αριθμών.

$$\begin{aligned} \text{Β' τρόπος } & [(2-8) + (-15 + 17)] - [(-6+3) - (-12+7)] + (-5+3) = \\ & [(2-8) + (-15 + 17)] + [-(6-3) + (-12+7)] + (-5+3) = \\ & (2-8) + (-15 + 17) - (-6+3) + (-12+7) + (-5+3) = \\ & (2-8) + (-15 + 17) + (-6-3) + (-12+7) + (-5+3) = \\ & 2-8 \quad -15 + 17 \quad +6-3 \quad -12+7 \quad -5+3 = \\ & 2-8-15 + 17+6-3-12+7-5+3 = 35-43 = -8 \end{aligned}$$

Στην αρχή προσθέσαμε το αντίθετο των άθροισμάτων, που βρίσκονται μέσα στη δεύτερη άγκύλη, ή όποια έχει μπροστά της το πλήν(-).

Κατόπι παραλείψαμε τις άγκύλες και το σύμβολο + που βρίσκεται μπροστά τους.

Ύστερα προσθέσαμε το αντίθετο των άθροισμάτων, τα όποια αφαιρούνται (έχουν μπροστά από την παρένθεσή τους το πλήν (-)), αφαιρείται μόνο το $(-6+3)$, και παραλείψαμε τις παρενθέσεις και το σύμβολο + που βρίσκεται μπροστά τους.

Τελικά ύπολογίσαμε την τιμή του άθροίσματος που προκύπτει.

Ανάλογα εργαζόμαστε και για την παράσταση β.

(Στην παράγραφο 42, εφαρμογή, έχουμε ύπολογίσει άθροισμα και διαφορά αλγεβρικών άθροισμάτων).

Από τον δεύτερο τρόπο του ύπολογισμού της γ' αριθμ. παραστάσεως συμπεραίνομε τα εξής:

1) Μπορούμε να εξαλείψουμε μιὰ παρένθεση (ή άγκύλη), όταν έχει μπροστά της το σύμβολο + (ή κανένα πρόσημο), και να αφήσουμε τους όρους που βρίσκονται μέσα σ' αυτή και καθένα με το πρόσημό του στο νέο άθροισμα.

2. "Αν μπροστά από μιὰ παρένθεση (ή μιὰ άγκύλη) ύπάρχει το σύμβολο -, προσθέτομε την παρένθεση (ή την άγκύλη) που περιέχει το άθροισμα των αντίθετων όρων, οί όποιοι ύπάρχουν μέσα σ' αυτή, και ανάγομαστε στην πρώτη περίπτωση.

Παραδείγματα

α) $10 + (-7 + 5 + 4) =$	β) $-(-8 + 13 - 14) =$
$10 - 7 + 5 + 4 =$	$+ (+8 - 13 + 14) =$
$10 - 7 + 5 + 4 = 12$	$+ 8 - 13 + 14 =$
	$8 - 13 + 14 = 9$
γ) $10 + (5 - 7 + 4) =$	δ) $(10 - 6 + 1) - (12 - 6) =$
$10 + (+5 - 7 + 4) =$	$(10 - 6 + 1) + (-12 + 6) =$
$10 + 5 - 7 + 4 =$	$10 - 6 + 1 - 12 + 6 =$
$10 + 5 - 7 + 4 = 12$	$10 - 6 + 1 - 12 + 6 = -1$

Σημείωση.

1. "Όταν ο πρώτος όρος ενός άθροίσματος είναι θετικός, συνήθως δέν έχει τὸ πρόσημό του +. Για νὰ συνδεθεῖ όμως στο νέο άθροισμα, πρέπει νὰ θέσουμε τὸ πρόσημό του. (Βλ. παρ. γ).

2. Οἱ παραστάσεις $(\alpha - \beta + \gamma) + (\beta - \gamma + 3\alpha)$ καὶ $(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)$ γίνονται πιὸ απλές, ἂν ἐξαλείψουμε τὶς παρενθέσεις.

$$\begin{array}{rcll} \text{Π.χ. } (\alpha - \beta + \gamma) + (\beta - \gamma + 3\alpha) & = & (\alpha + \beta) - (\alpha - \beta) & = \\ \alpha - \beta + \gamma + \beta - \gamma + 3\alpha & = & (\alpha + \beta) + (-\alpha + \beta) & = \\ \alpha + 3\alpha + \beta - \beta + \gamma - \gamma & = & \alpha + \beta - \alpha + \beta & = \\ & & \alpha + \beta - \alpha + \beta & = 2\beta \end{array}$$

$$\text{"Έχομε: } (\alpha - \beta) - (\delta - \gamma) = (\alpha - \beta) + (-\delta + \gamma) = \alpha - \beta - \delta + \gamma.$$

"Αν ἐφαρμόσουμε τὴ συμμετρικὴ ιδιότητα τῆς ἰσότητος καὶ γράψουμε $\alpha - \beta - \delta + \gamma = (\alpha - \beta) - (\delta - \gamma)$,

παρατηροῦμε ὅτι:

Μποροῦμε νὰ θέσουμε ὅρους ενός άθροίσματος μέσα σὲ παρένθεση μπροστὰ ἀπὸ τὴν ὁποία ἔχομε θέσει τὸ σύμβολο +.

"Αν ὅμως θέσουμε ὅρους ενός άθροίσματος μέσα σὲ παρένθεση, μπροστὰ ἀπὸ τὴν ὁποία ἔχομε θέσει τὸ -, πρέπει νὰ ἀλλάξουμε τὰ πρόσημά τους.

2. Ὑπολογισμὸς τῆς παραστάσεως δ.

$$\begin{aligned} & (-7+2) - (-2 + \frac{3}{4}) \cdot (-\frac{2}{3}) + [(-\frac{5}{8}) \cdot (-\frac{8}{6}) + 1] : (-\frac{11}{3}) \\ & (-5) - (-\frac{8}{4} + \frac{3}{4}) \cdot (-\frac{2}{3}) + [\frac{5 \cdot 8}{8 \cdot 6} + 1] \cdot (-\frac{3}{11}) = \\ & (-5) - (-\frac{5}{4}) \cdot (-\frac{2}{3}) + [\frac{5}{6} + \frac{6}{6}] \cdot (-\frac{3}{11}) = \\ & (-5) - (+\frac{5 \cdot 2}{4 \cdot 3}) + [\frac{11}{6}] \cdot (-\frac{3}{11}) = \\ & (-5) - (+\frac{5}{6}) + [-\frac{11 \cdot 3}{6 \cdot 11}] = \\ & (-\frac{30}{6}) + (-\frac{5}{6}) + [-\frac{3}{6}] = -\frac{38}{6} = -\frac{19}{3} \end{aligned}$$

3. Ὑπολογισμὸς τῆς παραστάσεως ε.

$$\begin{aligned} & (-3 + \frac{7}{5}) \cdot (-\frac{5}{4}) + (2 - \frac{1}{6}) : (-11) - (-\frac{3}{5} - 1) \cdot (\frac{2}{3} + 1) \\ & (-\frac{8}{5}) \cdot (-\frac{5}{4}) + (\frac{11}{6}) \cdot (-\frac{1}{11}) - (-\frac{8}{5}) \cdot (\frac{5}{3}) = \\ & \frac{8}{4} + (-\frac{1}{6}) - (-\frac{8}{3}) = \\ & \frac{4}{2} + (-\frac{1}{6}) + (+\frac{8}{3}) = \frac{12}{6} - \frac{1}{6} + \frac{16}{6} = \frac{27}{6} \end{aligned}$$

Γιὰ τὸν ὑπολογισμό τῶν παραστάσεων δ καὶ ε ἐργαστήκαμε ὡς ἑξῆς:

- α) Βρήκαμε τὸν ρητὸ σὲ κάθε παρένθεση (ἢ ἀγκύλη)
 β) Ἐκτελέσαμε τοὺς πολ/σμούς καὶ τὶς διαιρέσεις καὶ
 γ) Ἐκτελέσαμε τὶς ἀφαιρέσεις καὶ τὶς προσθέσεις.

Παραδείγματα :

- α) $(-4+3) \cdot 2 + (8-6) \cdot (-3) =$
 $(-8+6) + (-24+18) = -8+6-24+18 = -8$
 β) $(12-15) : (-3) + (23-3) : (-4) =$
 $(-3) : (-3) + (20) : (-4) = 1 + (-5) = -4$
 γ) $6 - (-5) \cdot (-2) + (-14) : (-7) + 7 =$
 $6 - (+10) + (+2) + 7 =$
 $6 + (-10) + 2 + 7 = 15 - 10 = 5.$

Παρατήρηση.

Στὸ α' παράδειγμα ἔχομε ἄθροισμα γινομένων.

Βρήκαμε πρῶτα τὰ γινόμενα (ἐπιμεριστική ιδιότητα) καὶ κατόπι τὰ προσθέσαμε.

Στὸ β' παράδειγμα ἔχομε ἄθροισμα πηλίκων.

Γιὰ νὰ βρεθῇ τὸ ἄθροισμα, προηγήθηκαν οἱ διαιρέσεις (ἐπιμεριστική ιδιότητα).

Καὶ στὸ γ' παράδειγμα προηγήθηκαν οἱ πολ/σμοὶ καὶ οἱ διαιρέσεις.

Ἀσκήσεις :

121. Νὰ ἐκτελεστοῦν οἱ πράξεις:

- α) $(-6+2-3) + (13-7)$, β) $(7-10) + (-8+10-6)$, γ) $-(3-12)$,
 δ) $-(-4+11)$, ε) $(11-12) - (-2+4)$,
 στ) $(-3+2) - (-8+7) - (7-2) + (-3+1-10)-5.$

122. Νὰ ἐκτελεστοῦν οἱ πράξεις:

- α) $(20-13) + [(5-10) + (-12+9)]$, β) $-[(4-6) + (7-3)] + [(-7+11) - (-5+2)]$
 γ) $[-(-7+12) + (-3+10)] - [-(-3+11) - (8-15)] + [-(-17+3) - 5]$,
 δ) $[(-5+7) + (3-12)] - [-6 + (-8)].$

123. Νὰ ἐκτελεστοῦν οἱ πράξεις:

- α) $(\frac{1}{5} - \frac{1}{4} - 1) + (\frac{1}{10} - \frac{3}{20} + 1) - (\frac{3}{4} - \frac{2}{5})$
 β) $0 - [(5,5 - \frac{15}{2}) - \frac{3}{2}] + [-(0,5 - 4) + 2] - (-\frac{1}{2} + 1),$
 γ) $[(- 10,5 + 15,50) - \frac{1}{2}] + [0 + (-\frac{18}{5} + \frac{15}{7}) + \frac{1}{35}] - \frac{10}{7}$

124. Νὰ ἐκτελεστοῦν οἱ πράξεις:

$$\alpha) \left(-3 + \frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + \left(2 - \frac{5}{8}\right) : (-5),$$

$$\beta) \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) : \left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$\gamma) \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right) : \left(-\frac{5}{2} + \frac{1}{4}\right),$$

$$\delta) \left(2 - \frac{1}{2} + \frac{3}{5}\right) \cdot (-3) - \left(-\frac{1}{3} + 4 - \frac{5}{6}\right) : (-3)$$

125. Νά εκτελεσθούν οι πράξεις:

$$\alpha) (-7+13) : (-2) + (12-19) \cdot (15-16) - 4,$$

$$\beta) (21-27) : (-3) - (12-16) : (-4) + 5-5 \cdot (-2),$$

$$\gamma) 12-6 \cdot (-3) + 7-15 : (-3) + 18-16 : (-4) + 1.$$

126. Νά εκτελεσθούν οι πράξεις:

$$\alpha) \left(-\frac{5}{3}\right) : \left(-\frac{11}{6}\right) + \left(-\frac{10}{3}\right) : \left(+\frac{2}{9}\right) - 15 : (-1),$$

$$\beta) (3-2) \cdot (-3+2) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{42}{8} - \frac{11}{4}\right)$$

$$\gamma) -0,01 : (0,001-0,01) - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4} : \frac{3}{5}\right)$$

$$\delta) [-3 + (-7+2) - 1] \cdot [-2 + (-3+2-9)] - (3-8+2) \cdot (-5).$$

127. Νά εξαλείψετε τις παρενθέσεις:

$$\alpha) (\alpha-\beta) + (\gamma-\delta), \quad (\alpha-\beta) - (\gamma-\delta),$$

$$\beta) \alpha - (-\beta + \gamma - \delta), \quad -(\alpha - \beta) - (-\gamma + \delta),$$

$$\gamma) \alpha - [(\beta - \gamma) + \alpha] - (\gamma - \beta) + (\alpha - \gamma),$$

$$\delta) \alpha + (\beta - \gamma) + [-\delta + (\alpha - \beta) + \gamma] - (\delta - \gamma).$$

128. Νά υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων, αν $\alpha = -2$, $\beta = -3$, $\gamma = 4$:

$$1. \frac{\alpha + \beta - \gamma}{-\alpha + \gamma - \beta}, \quad 2. \frac{-3\alpha + 2\beta - \gamma}{\alpha + \beta + \gamma}, \quad 3. \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}.$$

129. Νά γράψετε τις επόμενες παραστάσεις με μορφή αθροίσματος περισσότερων παραστάσεων.

$$1) -\alpha + \beta + \gamma - \delta + \kappa - \lambda,$$

$$2) \alpha - \beta + \gamma - \delta + \epsilon - \zeta + \eta.$$

130. Στις επόμενες παραστάσεις νά βάλετε τὸν πρῶτο καὶ τὸν τρίτο ὅρο σὲ μιὰ παρένθεση μὲ τὸ σύμβολο + μπροστά της καὶ τοὺς υπόλοιπους σὲ ἄλλη παρένθεση μὲ τὸ σύμβολο - μπροστά της.

$$\alpha) -15,4 - 11,7 + 12 - 10 + \frac{1}{3}, \quad \beta) 19,6 + 13,5 - 9,4 + \frac{2}{5} - 1,$$

$$\gamma) \rho + \tau - \mu - \nu + \sigma - \kappa,$$

$$\delta) -\alpha - \beta + \gamma - \delta + \epsilon.$$

12. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

§ 60. α) Έφαρμοστό διάνυσμα.

Στή Γεωμετρία μπορούμε νά ὀρίσουμε τὸ εὐθύγραμμο τμήμα AB σὰν

τὸ διμελές σύνολο τῶν ἄκρων του, $\{A, B\}$.

Γι' αὐτό, ὅταν λέμε εὐθύγραμμο τμήμα AB ἢ εὐθύγραμμο τμήμα BA , ἐννοοῦμε τὸ ἴδιο ἀντικείμενο (γιατί;)

Πρόβλημα.

α) "Ἐνα αὐτοκίνητο πὺν κινεῖται πάνω σὲ εὐθύγραμμο δρόμο ἀπὸ τὸ σημείο A ἔφθασε στὸ σημείο B .

β) "Ἐνα αὐτοκίνητο πὺν κινεῖται πάνω σὲ εὐθύγραμμο δρόμο ἀπὸ τὸ σημείο B ἔφθασε στὸ σημείο A .

Πῶς θὰ ἐκφράσουμε μαθηματικὰ τὶς διαφορετικὲς αὐτὲς κινήσεις;

"Ἄν ποῦμε ὅτι τὸ αὐτοκίνητο διέτρεξε καὶ στὶς δύο περιπτώσεις τὸ εὐθύγραμμο τμήμα (τοῦ δρόμου) AB , δὲν θὰ εἴμαστε ἀκριβεῖς.

Τὸ σωστὸ εἶναι νὰ ποῦμε στὴν α) περίπτωση «... διάνυσε τὸ εὐθύγραμμο τμήμα, τὸ ὁποῖο ἔχει **ἀρχὴ** τὸ A καὶ **πέρασ** τὸ B » καὶ στὴν β) «διάνυσε τὸ εὐθύγραμμο τμήμα, τὸ ὁποῖο ἔχει **ἀρχὴ** τὸ B καὶ **πέρασ** τὸ A ».

Τώρα πιά τὸ εὐθύγρ. τμήμα AB , πὺν διανύεται ἀπὸ τὸ A πρὸς τὸ B , δὲν εἶναι τὸ ἴδιο μὲ τὸ εὐθύγρ. τμήμα BA , πὺν διανύεται ἀπὸ τὸ B πρὸς τὸ A , γιατί διαφέρει ἡ φορὰ τῆς κινήσεως.

Τὰ ἀντικείμενα αὐτὰ τὰ λέμε **διανύσματα**, τὰ συμβολίζομε $\vec{AB}$, $\vec{BA}$ καὶ τὰ παριστάνομε γραφικῶς: (δηλαδὴ σὰν βέλη μὲ τὴν αἰχμὴ στὸ πέρασ τους).

Διάνυσμα, λοιπόν, εἶναι ἓνα εὐθύγραμμο τμήμα μὲ ὀρισμένη ἀρχὴ καὶ ὀρισμένο πέρασ,

ἢ λέμε μὲ συντομία ὅτι:

Διάνυσμα εἶναι ἓνα προσανατολισμένο εὐθύγραμμο τμήμα.

"Ἄν ἓνα διάνυσμα ἔχει ὀρισμένη θέση (ἄρα καὶ ἀρχὴ ὀρισμένη), λέγεται **ἐφαρμοστὸ διάνυσμα** (ἢ δεσμευμένο διάνυσμα).

Παρατήρηση.

Τὸ ἐφαρμοστὸ διάνυσμα εἶναι ἓνα διατεταγμένο ζεῦγος σημείων καὶ ὄχι ἀπλῶς ἓνα διμελές σύνολο σημείων.



σχ. 31.



σχ. 32.



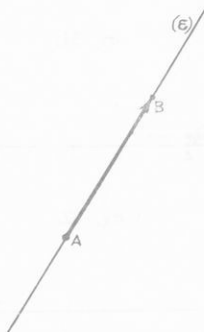
σχ. 33.



σχ. 34.

*Έχομε λοιπόν: Εὐθύγραμμο τμήμα $AB \equiv \{(A, B) \equiv (B, A)\}$
 Διάνυσμα $\vec{AB} \equiv (A, B)$, διάνυσμα $\vec{BA} \equiv (B, A)$.

§ 61. Στοιχεία ἐφαρμοστοῦ διανύσματος.



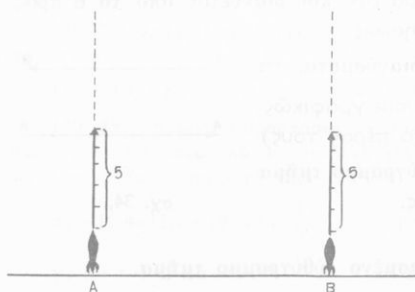
σχ. 35.

Τὸ διατεταγμένο ζεῦγος (A, B) καθορίζεται:

1. Ἀπὸ τὴν εὐθεία AB , δηλαδὴ τὸ **φορέα** του ϵ .
2. Ἀπὸ τὴν φοράν ποὺ καθορίζει ἡ κίνηση ἀπὸ τὸ A πρὸς τὸ B .
3. Ἀπὸ τὴν τιμὴν τοῦ εὐθυγρ. τμήματος AB , δηλαδὴ τὸ λόγο $*$ του πρὸς τὴν μονάδα μετρήσεως. Ἡ τιμὴ τοῦ AB συμβολίζεται μὲ $|\vec{AB}|$, ($|\vec{AB}| \in \mathbb{Q}_0^+$) καὶ διαβάζεται «ἀπόλυτη τιμὴ τοῦ $\vec{AB}$ »
4. Ἀπὸ τὴν ἀρχὴν A .

§ 62. Τὸ ἐλεύθερο διάνυσμα.

Ἕνας πύραυλος ἐκτοξεύεται ἀπὸ ἓνα σημεῖο A τοῦ πεδίου ἐκτοξεύσεως πυραύλων κατακόρυφα πρὸς τὰ πάνω μὲ ταχύτητα 5 km/sec . Πῶς θὰ παραστήσουμε τὴν ταχύτητά του;



σχ. 36.

Ὁ καλύτερος τρόπος παραστάσεως εἶναι: ἓνα διάνυσμα μὲ **φορέα** τὴν κατακόρυφον εὐθείαν, ποὺ περνᾷ ἀπὸ τὸ A , **φορά** πρὸς τὰ πάνω καὶ **ἀπόλυτη τιμὴ** 5 .

Ἄν ἓνας δεύτερος πύραυλος ἐκτοξευθεῖ ἀπὸ τὸ σημεῖο B κατακόρυφα πρὸς τὰ πάνω μὲ τὴν ἴδια ταχύτητα, ἡ ταχύτητα τοῦ δεύτερου πυραύλου εἶναι ἓνα διάνυσμα μὲ **φορέα** τὴν κατακόρυφον εὐθείαν, ποὺ περνᾷ ἀπὸ τὸ B , **φορά** πρὸς τὰ πάνω καὶ **ἀπόλυτη τιμὴ** 5 .

* Βλέπε § 13 τοῦ μέρους τῆς Γεωμετρίας τοῦ βιβλίου αὐτοῦ.

Τὰ δύο αὐτὰ διανύσματα παριστάνουν τὸ ἴδιο ἀντικείμενο, τὴν ἴδια ταχύτητα.

Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι εἶναι ἰσοδύναμα ἢ **ἴσα διανύσματα**.

Τὰ ἴσα αὐτὰ διανύσματα ἔχουν: α) παράλληλους φορεῖς
β) τὴν ἴδια φορά (πρὸς τὰ πάνω)
γ) ἴσες ἀπόλυτες τιμές.

Παρατήρηση.

Τὸ σύνολο τῶν εὐθειῶν, οἱ ὁποῖες εἶναι **παράλληλες μετὰ τὴν πλατιά ἔννοια** (εἶναι παράλληλες ἢ συμπίπτουν), τὸ ὀνομάζουμε **διεύθυνση**. Λέμε τώρα, ὅτι δύο διανύσματα, πού βρίσκονται πάνω σὲ παράλληλους φορεῖς ἢ πάνω στὸν ἴδιο φορέα, ἔχουν τὴν ἴδια διεύθυνση.

Ἐπομένως τὰ διανύσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν **τὴν ἴδια διεύθυνση, τὴν ἴδια φορά καὶ ἴσες ἀπόλυτες τιμές, εἶναι ἴσα**.

§ 63. Ἰδιότητες τῆς ἰσότητος τῶν διανυσμάτων.

1. Κάθε διάνυσμα εἶναι ἴσο μετὰ τὸν ἑαυτό του.

$$\vec{AB} = \vec{AB}$$

2. Ἄν ἓνα διάνυσμα $\vec{\Gamma\Delta}$ εἶναι ἴσο μετὰ τὸ $\vec{E\Z}$, τότε καὶ τὸ $\vec{E\Z}$ εἶναι ἴσο μετὰ τὸ $\vec{\Gamma\Delta}$.

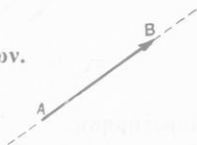
$$\vec{\Gamma\Delta} = \vec{E\Z} \Rightarrow \vec{E\Z} = \vec{\Gamma\Delta}$$

3. Δύο διανύσματα ἴσα μ' ἓνα τρίτο διάνυσμα εἶναι καὶ μεταξύ τους ἴσα.

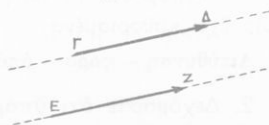
$$\left. \begin{array}{l} \vec{H\Theta} = \vec{K\Lambda} \\ \vec{K\Lambda} = \vec{M\N} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{H\Theta} = \vec{M\N}$$

Δηλαδή ἡ ἰσότης τῶν διανυσμάτων ἔχει τὶς ἰδιότητες **ἀνακλαστική, συμμετρική, μεταβατική**.

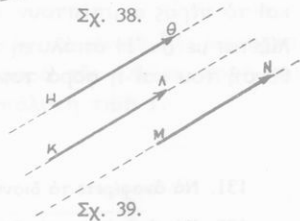
§ 64. Ἄν ἔχουμε ἓνα σύνολο ἴσων διανυσμάτων, μπορούμε σύμφωνα με τὶς ἰδιότητες αὐτὲς νὰ θεωροῦμε ὅτι ἓνα ὁποιοδήποτε ἀπὸ τὰ διανύσματα αὐτὰ ἀντιπροσωπεύει τὸ σύνολο.



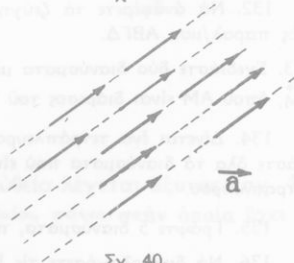
Σχ. 37.



Σχ. 38.



Σχ. 39.



Σχ. 40.

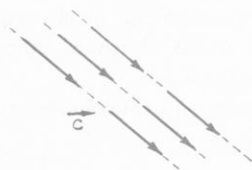
Ένα σύνολο ίσων διανυσμάτων ορίζεται από τα εξής στοιχεία:



σχ. 41.

1. Τη διεύθυνση.
2. Τη φορά.
3. Την απόλυτη τιμή.

Το σύνολο αυτό λέγεται **ελεύθερο διάνυσμα** ή απλώς **διάνυσμα**.



σχ. 42.

Τα ελεύθερα διανύσματα τα συμβολίζουμε με $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \alpha, \beta$ κ.λπ.

(Γράμματα του λατινικού ή ελληνικού αλφαβήτου με το σύμβολο $\rightarrow$ πάνω απ' αυτά).

Τις απόλυτες τιμές των $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ τις συμβολίζουμε με $|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{c}|, \dots$

Παρατήρηση.

1. Μπορούμε να θεωρήσουμε ελεύθερο διάνυσμα ένα διάνυσμα, το οποίο έχει καθορισμένα:

Διεύθυνση — φορά — απόλυτη τιμή (χωρίς ορισμένη αρχή).

2. Δεχόμαστε ότι υπάρχει ένα διάνυσμα $\vec{AA}$, του οποίου η αρχή και το πέρας συμπίπτουν. Το διάνυσμα αυτό λέγεται μηδενικό και συμβολίζεται με $\vec{0}$. Η απόλυτη τιμή του μηδενικού διανύσματος είναι 0, ή διεύθυνσή του και η φορά του δεν ορίζονται.

Άσκησης:

131. Να αναφέρετε τα διανύσματα, που ορίζουν τρία σημεία A, B, Γ.

132. Να αναφέρετε τα ζεύγη των ίσων διανυσμάτων, που ορίζουν οι κορυφές ενός παραλ/μου ΑΒΓΔ.

133. Σχεδιάστε δύο διανύσματα με αρχές τα σημεία Β και Γ και ίσα με το διάνυσμα $\vec{AM}$, όπου ΑΜ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ.

134. Δίνεται ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Με αρχή ένα οποιοδήποτε σημείο Ο σχεδιάστε όλα τα διανύσματα που είναι ίσα με εκείνα, τα οποία ορίζουν οι κορυφές του τετραπλεύρου.

135. Γράψτε 5 διανύσματα, που αντιπροσωπεύουν το ίδιο ελεύθερο διάνυσμα.

136. Να δικαιολογήσετε τις ιδιότητες της ισότητας των διανυσμάτων.

13. Η ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗ ΕΥΘΕΙΑ (ΑΞΟΝΑΣ) — ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΤΙΜΗ
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ — ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΣΤΗΝ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗ ΕΥΘΕΙΑ

1. Ἡ προσανατολισμένη εὐθεία - Ἄξονας.

§ 65. Πάρτε δύο σημεία O καὶ A στὴν εὐθεία ϵ (τὸ A δεξιὰ τοῦ O). Συγκρίνετε τὰ διανύσματα $\vec{OA}$ καὶ $\vec{AO}$. Τί παρατηρεῖτε;



σχ. 43.

Παρατηροῦμε ὅτι τὰ διανύσματα $\vec{OA}$ καὶ $\vec{AO}$ ἔχουν τὴν ἴδια διεύθυνση καὶ τὴν ἴδια ἀπόλυτη τιμὴ, ἀλλὰ διαφέρουν κατὰ τὴ φορά τους. Τὰ διανύσματα αὐτὰ λέγονται **ἀντίθετα**.

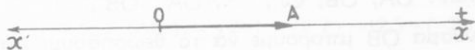
Συμφωνοῦμε νὰ ὀνομάζουμε **θετικὴ φορά τῆς εὐθείας ϵ** τὴ φορά τοῦ διανύσματος $\vec{OA}$, καὶ **ἀρνητικὴ φορά τῆς ϵ** τὴ φορά τοῦ διανύσματος $\vec{AO}$.

Κάθε εὐθεία, τῆς ὁποίας ἔχει ὀρισθεῖ ἡ θετικὴ φορά, λέγεται **προσανατολισμένη εὐθεία**.

Ἡ ἡμιευθεία OX , πάνω στὴν ὁποία βρίσκεται τὸ διάνυσμα $\vec{OA}$, λέγεται **θετικὴ ἡμιευθεία** καὶ ἡ ἀντικείμενὴ τῆς ἡμιευθείας OX ἀρνητικὴ ἡμιευθεία. Τὸ σημεῖο O λέγεται **ἀρχὴ τῆς προσανατολισμένης εὐθείας ϵ** .

Ἄν θεωρήσουμε ὅτι τὸ μήκος τοῦ εὐθύγρ. τμήματος OA εἶναι ἡ μονάδα τοῦ μήκους, τὸ διάνυσμα $\vec{OA}$ τῆς εὐθείας ϵ λέγεται **μοναδιαῖο διάνυσμα**.

Αὐτὸ τὸ διάνυσμα ἔχει φορά τὴ θετικὴ φορά τῆς εὐθείας, ἀρχὴ τὴν ἀρχὴ τῆς προσανατολισμένης εὐθείας ϵ καὶ ἀπόλυτη τιμὴ 1.



σχ. 43α

Στὴν περίπτωση αὐτὴ ἡ προσανατ. εὐθεία λέγεται **ἄξονας** (σχ. 43α)

Ἄξονας εἶναι ἡ **προσανατολισμένη εὐθεία, πάνω στὴν ὁποία ἔχει ὀρισθεῖ ἡ ἀρχὴ καὶ τὸ μοναδιαῖο διάνυσμα**.

2. Ἀπεικόνιση τῶν ρητῶν ἀριθμῶν στὴν προσανατολισμένη εὐθεία.

§ 66. Μποροῦμε νὰ ἀπεικονίσουμε τὸ σύνολο Q τῶν ρητῶν πάνω σὲ μιὰ προσανατολισμένη εὐθεία (ἄξονα), ὡς ἑξῆς:

Στὴν ἀρχὴ O τοῦ ἄξονα $X'OX$ ἀπεικονίζουμε (δηλαδή ἀντιστοιχίζουμε μονοσήμαντα) τὸν ἀριθμὸ μηδέν.

Στὸ πέρασ τοῦ μοναδιαίου διανύσματος $\vec{OA}$ τὸν ἀριθμὸ $+1$, στὸ πέρασ τοῦ διανύσματος $\vec{OB}$, πού ἡ ἀπόλυτη τιμὴ του εἶναι 2, ἀπεικονίζουμε τὸν $+2$ κ.ο.κ.

Δηλαδή στὰ πέρατα τῶν διανυσμάτων τοῦ ἄξονα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀρχὴ τὸ O καὶ φορὰ θετική, ἀπεικονίζουμε τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ Q^+ , οἱ ὁποῖοι εἶναι ἀντιστοίχως οἱ ἀπόλυτες τιμές των.



σχ. 44.

Στὰ πέρατα τῶν διανυσμάτων $\vec{OA'}$, $\vec{OB'}$ κ.λ.π., τὰ ὁποῖα εἶναι ἀντίθετα τῶν $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ κ.ο.κ. ἀντιστοίχως, ἀπεικονίζουμε τοὺς -1 , -2 , κ.λ.π., οἱ ὁποῖοι εἶναι ἀντίθετοι τῶν $+1$, $+2$, κ.ο.κ.

Μὲ τὸν τρόπο αὐτὸ τὸ σύνολο Q τῶν ρητῶν ἀπεικονίζεται μονοσήμαντα πάνω στὸν ἄξονα $X'OX$ (στὸ σύνολο τῶν σημείων τῆς εὐθείας ϵ).

Παρατηρήσεις:

1. Μποροῦμε νὰ λέμε ὅτι τὸ σύνολο Q ἀπεικονίζεται στὸ σύνολο τῶν διανυσμάτων: $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OΓ}$, ..., $\vec{OA'}$, $\vec{OB'}$, ...

2. Τὸ διάνυσμα $\vec{OB}$ μποροῦμε νὰ τὸ θεωρήσουμε σὰν γινόμενο τοῦ ἀριθμοῦ $+2$ ἐπὶ τὸ μοναδιαῖο $\vec{OA}$ καὶ νὰ γράψουμε: $\vec{OB} = (+2) \cdot \vec{OA}$ (ἢ $\vec{OB} = 2\vec{OA}$).

Ὁμοίως $\vec{OA'} = (-1) \cdot \vec{OA}$, $\vec{OB'} = (-2) \cdot \vec{OA}$ κ.λ.π.

Τοὺς ἀριθμοὺς 0 , $+1$, $+2$, ..., -1 , -2 , ... τοὺς λέμε **τετμημένες** τῶν σημείων O , A , B , ..., A' , B' , ... ἀντιστοίχως.

Ἐπομένως **τετμημένη σημείου** ἐνός ἄξονα εἶναι ὁ ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος ἀπεικονίζεται σ' αὐτό.

3. Άλγεβρική τιμή διανύσματος.

§ 67. Άλγεβρική τιμή του διανύσματος $\vec{OB}$ λέγεται ο αριθμός $+2$. Έπειδή θεωρήσαμε $\vec{OB} = +2\vec{OA}$, ο $+2$ είναι ο λόγος του $\vec{OB}$ προς το μοναδιαίο $\vec{OA}$.

$$\frac{\vec{OB}}{\vec{OA}} = +2$$

Τὴν ἀλγεβρική τιμή του $\vec{OB}$ τὴ συμβολίζομε μὲ $(\vec{OB})$. "Ωστε $(\vec{OB}) = +2$, $(\vec{OO}) = 0$ (τὸ μηδενικὸ διάνυσμα ἔχει ἀλγεβρική τιμή 0). $(\vec{OG}) = +3$, $(\vec{OB'}) = -2$ κ.λ.π.

Παρατηροῦμε ὅτι: $(\vec{OB}) = +2 = +2 - 0 = \text{τετμ. B} - \text{τετμ. O}$.

"Αρα ἡ ἀλγεβρική τιμή ἑνὸς διανύσματος ἰσοῦται μὲ τὴ διαφορὰ τῆς τετμημένης τῆς ἀρχῆς ἀπὸ τὴν τετμημένη τοῦ πέρατός του.

Παραδείγματα:

$$(\vec{BZ}) = 2,5 - 2 = 0,5$$

$$(\vec{ZA}) = 1 - 2,5 = -1,5$$

$$(\vec{B'A'}) = -1 - (-2) = 1$$

$$(\vec{\Gamma'O}) = 0 - (-3) = +3$$

Παρατηροῦμε ὅτι, ἂν ἡ ἀλγεβρική τιμή ἑνὸς διανύσματος πάνω σ' ἓναν ἄξονα εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς, τὸ διάνυσμα ἔχει φορὰ θετική, καὶ ἂν εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμὸς, τὸ διάνυσμα ἔχει φορὰ ἀρνητική.

Ἐφαρμογή

Θεωροῦμε τὰ σημεῖα Z, A, B' καὶ τὰ διανύσματα $\vec{ZA}$, $\vec{AB'}$, $\vec{B'Z}$ (Σχ. 44).

Υπολογίστε τὸ ἄθροισμα $(\vec{ZA}) + (\vec{AB'}) + (\vec{B'Z})$.

Ἐχομε: $(\vec{ZA}) = 1 - 2,5$, $(\vec{AB'}) = -2 - 1$, $(\vec{B'Z}) = 2,5 - (-2)$.

$$\begin{aligned} \text{"Ωστε: } (\vec{ZA}) + (\vec{AB'}) + (\vec{B'Z}) &= (1 - 2,5) + (-2 - 1) + [2,5 - (-2)] = \\ &= 1 - 2,5 - 2 - 1 + 2,5 + (-2) = \\ &= 1 - 2,5 - 2 - 1 + 2,5 + 2 = 0 \end{aligned}$$

Ἀσκήσεις:

137. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ἀλγεβρικές τιμές τῶν διανυσμάτων $\vec{KL}$, $\vec{MN}$, $\vec{LM}$, $\vec{MK}$, ὅν οἱ τετμημένες τῶν σημείων K, L, M, N τοῦ ἄξονα εἶναι ἀντιστοίχως -7 , $+2$, $-\frac{3}{8}$, $-\frac{13}{5}$.

138. Νά βρεθῇ ἡ ἀλγεβρική τιμὴ ἑνὸς διανύσματος, ἂν:

- α) ἡ τετμημένη τῆς ἀρχῆς εἶναι $\frac{11}{2}$ καὶ ἡ τετμημένη τοῦ πέρατος 8,
 β) » » » » » $-\frac{4}{2}$ » » » » -1 ,
 γ) » » » » » $-\frac{3}{2}$ » » » » 4,
 δ) » » » » » 2 » » » » -5 ,
 ε) » » » » » 5 » » » » 2.

139. Νά βρεθῇ ἡ τετμημένη τοῦ πέρατος ἑνὸς διανύσματος ἂν:

- α) ἡ τετμημένη τῆς ἀρχῆς εἶναι -2 καὶ ἡ ἀλγεβρική τιμὴ τοῦ εἶναι $+1$,
 β) » » » » » -1 » » » » » 3,
 γ) » » » » » 2 » » » » » 2,
 δ) » » » » » -5 » » » » » -7 ,
 ε) » » » » » $\frac{3}{2}$ » » » » » 4.

14. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΜΕ ΕΚΘΕΤΗ ΑΚΕΡΑΙΟ — ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΙΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ.

§ 68. α) Δυνάμεις μὲ βάση ρητὸ καὶ ἐκθέτη ἀκέραιο ≥ 2 .

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ γινόμενα: $(-3) \cdot (-3)$, $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$,

$$\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right), \quad (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$$

Ἔχομε: $(-3) \cdot (-3) = +(3 \cdot 3) = 3^2$

$$(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -(2 \cdot 2 \cdot 2) = -2^3$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = +\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -(4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4) = -4^5$$

Γνωρίζομε ὅτι τὸ γινόμενο $\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \dots \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$ λέγεται νιοστή δύναμη τοῦ α .

καὶ γράφεται συντόμως: $\alpha^\nu \left(\begin{array}{l} \text{ὅ } \alpha \text{ λέγεται βάση, } \alpha \in \mathbb{Q}_0^+ \\ \text{ὅ } \nu \text{ λέγεται ἐκθέτης, } \nu \in \mathbb{N} \\ \text{καὶ } \nu \geq 2 \end{array} \right)$

Ἐπίσης ὅτι: $\alpha^1 = \alpha$ καὶ $\alpha^0 = 1$ ($\alpha \neq 0$)

Τοὺς ὁρίσμοὺς αὐτοὺς τοὺς ἐπεκτείνομε καὶ στοὺς ρητοὺς πραγμ. ἀριθμοὺς, δηλαδὴ ἂν $\alpha \in \mathbb{Q}$ καὶ $\nu \in \mathbb{N}$, τὸ α^ν παριστάνει τὸ γινόμενο ν παραγόντων ἴσων μὲ τὸν α καὶ λέγεται νιοστή δύναμη τοῦ α .

Έπομένως ή 2η δύναμη του -3 είναι: $(-3) \cdot (-3) = (-3)^2$

ή 3η δύναμη του -2 είναι: $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (-2)^3$

ή 4η δύναμη του $-\frac{2}{3}$ είναι: $(-\frac{2}{3}) \cdot (-\frac{2}{3}) \cdot (-\frac{2}{3}) \cdot (-\frac{2}{3}) = (-\frac{2}{3})^4$

και ή 5η δύναμη του -4 είναι: $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = (-4)^5$

Αν συγκρίνουμε αυτά μ' εκείνα που βρήκαμε παραπάνω, έχουμε:

$$(-3)^2 = 3^2 \text{ (θετικός)} \quad (-\frac{2}{3})^4 = (\frac{2}{3})^4 \text{ (θετικός)}$$

$$(-2)^3 = -2^3 \text{ (άρνητικός)} \quad (-4)^5 = -4^5 \text{ (άρνητικός)}$$

Αρα όταν ένας άρνητικός αριθμός υψώνεται σε άρτια δύναμη, δίνει θετικό εξαγόμενο, ενώ όταν υψώνεται σε περιττή δύναμη, δίνει άρνητικό.

Παρατηρούμε ότι:

$$(-2)^2 \cdot (-2)^3 = (-2)^{2+3} = (-2)^5$$

$$[(-2) \cdot (-2)] \cdot [(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)] = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (-2)^5$$

$$[(-2)^3]^2 = (-2)^{2 \cdot 3} = (-2)^6$$

$$(-2)^3 \cdot (-2)^3 = (-2)^{3+3} = (-2)^6$$

$$(-3)^4 : (-3)^2 = (-3)^{4-2} = (-3)^2$$

$$\frac{(-3)^4}{(-3)^2} = \frac{(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)}{(-3) \cdot (-3)} = (-3) \cdot (-3) = (-3)^2$$

$$[(-2) \cdot (-3)]^2 = (-2)^2 \cdot (-3)^2$$

$$[(-2) \cdot (-3)] \cdot [(-2) \cdot (-3)] = (-2) \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot (-3) = (-2) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-3)$$

$$[(-2) \cdot (-2)] \cdot [(-3) \cdot (-3)] = (-2)^2 \cdot (-3)^2$$

Έπομένως ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων

$$\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu} \quad (\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \dots \alpha}_{\mu \text{ παράγ.}} \cdot \underbrace{\alpha \cdot \alpha \dots \alpha}_{\nu \text{ παράγ.}} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \dots \alpha}_{\mu+\nu \text{ παράγ.}} = \alpha^{\mu+\nu})$$

$$\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu} \quad (\mu \geq \nu) \quad \left(\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \frac{\overbrace{\alpha \alpha \dots \alpha}^{\mu \text{ παράγ.}}}{\underbrace{\alpha \alpha \dots \alpha}_{\nu \text{ παράγ.}}} = \underbrace{\alpha \alpha \dots \alpha}_{\mu-\nu \text{ παρ.}} = \alpha^{\mu-\nu} \right)$$

$$(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu \nu} \quad \left(\underbrace{\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\mu} \dots \alpha^{\mu}}_{\nu \text{ παράγ.}} = \alpha^{\mu+\mu+\dots+\mu} = \alpha^{\mu \nu} \right)$$

$$(\alpha \beta \gamma)^{\nu} = \alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu} \cdot \gamma^{\nu} \quad \text{και} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q} \quad (\mu, \nu \in \mathbb{N}),$$

Εφαρμογές.

$$\begin{aligned}
 (-1)^0 &= 1, \left(-\frac{1}{2}\right)^0 = 1, \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8} \\
 (-1)^1 &= -1, \left(-\frac{1}{2}\right)^1 = -\frac{1}{2}, \left(-\frac{3}{5}\right)^5 : \left(-\frac{3}{5}\right)^3 = \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \\
 (-1)^2 &= 1, \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \left[\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} \\
 (-1)^3 &= -1 \\
 (-1)^4 &= 1, \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}, \left[\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{4}\right]^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{16} = \frac{9}{64}
 \end{aligned}$$

§ 69. β) Δυνάμεις με εκθέτη άκέραιο μικρότερο από το μηδέν.

Γνωρίζουμε τί παριστάνει το σύμβολο α^n , όταν το $\alpha \in \mathbb{Q}$ και το $n \in \mathbb{N}$ δηλαδή γνωρίζουμε ότι:

$$\alpha^1 = \alpha, \quad \alpha^2 = \alpha \cdot \alpha, \quad \alpha^3 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha, \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Τί παριστάνει όμως το σύμβολο α^k , όταν το $k \in \mathbb{Z}^-$; Δηλαδή τί παριστάνει το α^{-1} ; το α^{-2} ; το α^{-3} ; κ.ο.κ.

Στήν § 49ε είδαμε ότι ο αντίστροφος του α συμβολίζεται με $\frac{1}{\alpha}$ ή με α^{-1} . Άρα τα δύο αυτά σύμβολα είναι ίσα, αφού συμβολίζουν τον ίδιο αριθμό (τον αντίστροφο του α).

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha} \quad \text{ή} \quad \alpha^{-1} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^1 = \frac{1}{\alpha}$$

Έτσι βρίσκουμε αυτό το συμβολισμό και έχουμε:

$$\alpha^{-2} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\alpha^{-3} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha^3}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\alpha^{-v} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^v = \frac{1}{\alpha^v} \quad v \in \mathbb{N}$$

“Όστε κάθε δύναμη ρητού (διαφορετικού από το μηδέν) με εκθέτη αρνητικό άκέραιο παριστάνει τη δύναμη του αντίστροφου του ρητού με εκθέτη τον αντίθετο θετικό άκέραιο.

Έπειδή όμως ο αντίστροφος του α υπάρχει, όταν ο α είναι διαφορετικός από το μηδέν, γι’ αυτό το σύμβολο α^{-v} , ($v \in \mathbb{N}$) έχει έννοια, όταν $\alpha \neq 0$.

Συμβολικά: αν το $v \in \mathbb{N}_0$ και $\alpha \neq 0$, τότε $\alpha^{-v} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^v$.

Έφαρμογές.

$$\begin{aligned}
 2^{-1} &= \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}, & \left(\frac{4}{5}\right)^{-2} &= \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}, & (-2)^{-1} &= \left(-\frac{1}{2}\right)^1 = -\frac{1}{2} \\
 (-3)^{-2} &= \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}, & (-3)^{-3} &= \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}, & (-2)^{-2} &= \\
 &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \\
 \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} &= \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8}, & (-3)^{-1} &= \left(-\frac{1}{3}\right)^1 = -\frac{1}{3}, & (-2)^{-3} &= \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

Σημείωση.

1. Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι ισχύει ο κανόνας για το πρόσθετο της δυνάμεως, όταν η βάση είναι αρνητική και ο εκθέτης άρτιος ή περιττός.

2. Στον τύπο $\alpha^{-v} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^v$ αν $v=0$, έχουμε $\alpha^{-0} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^0$. Αλλά έπειδή $-0=0$,

είναι $\alpha^{-0} = \alpha^0 = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^0 = 1$.

3. Στα επόμενα, όταν γράφουμε το σύμβολο α^v , θα έννοούμε ότι $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha \neq 0$ και $v \in \mathbb{Z}$.

§ 70. Ιδιότητες των δυνάμεων με βάση ρητό (διαφορετικό από το μηδέν) και εκθέτη ακέραιο.

$$1. (-2)^{-2} \cdot (-2)^{-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = (-2)^{-5}$$

*Αρα γενικά: $\alpha^u \cdot \alpha^v = \alpha^{u+v}$

$$\begin{aligned}
 2. [(-2)^{-3}]^{-2} &= \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^{-2} = \left[\left(\frac{1}{-2}\right)^3\right]^2 = \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 = \\
 &= \left[\left(\frac{1}{-2}\right)\right]^{2 \cdot 3} = (-2)^6 = (-2)^{(-3) \cdot (-2)}
 \end{aligned}$$

*Αρα γενικά: $(\alpha^u)^v = \alpha^{u \cdot v}$

$$3. (-4)^{-5} : (-4)^{-3} = \left(-\frac{1}{4}\right)^5 : \left(-\frac{1}{4}\right)^3 = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = (-4)^{-2}$$

*Αλλά και $(-4)^{-5} : (-4)^{-3} = (-4)^{-5-(-3)} = (-4)^{-5+3} = (-4)^{-2}$

Γενικά: $\alpha^u : \alpha^v = \alpha^{u-v}$

$$\begin{aligned}
 4. [(-2) \cdot (-3)]^{-2} &= \left[\frac{1}{(-2)(-3)}\right]^2 = \left[\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\right]^2 = \\
 &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = (2)^{-2} \cdot (3)^{-2}
 \end{aligned}$$

Γενικά: $(\alpha \cdot \beta)^v = \alpha^v \cdot \beta^v$

Ο τύπος αυτός ισχύει και για περισσότερους παράγοντες:

$$(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta)^v = \alpha^v \cdot \beta^v \cdot \gamma^v \cdot \delta^v$$

Εφαρμογές.

$$(-3) \cdot (-3)^{-2} \cdot (-3)^3 = (-3)^{1-2+3} = (-3)^2 = 9$$

$$\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \right]^{-2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} = (-2)^4 = 16$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2} : \left(-\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2-(-3)} = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2+3} = \left(-\frac{3}{4}\right)^1 = -\frac{3}{4}$$

$$\left[\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-3) \right]^{-2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot (-3)^{-2} = (-2)^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 4 \cdot \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

$$\left(-\frac{131}{25}\right) \cdot \left(-\frac{131}{25}\right)^2 \cdot \left(-\frac{131}{25}\right)^{-3} = \left(-\frac{131}{25}\right)^{1+2-3} = \left(-\frac{131}{25}\right)^0 = 1$$

Άσκησης:

140. Να υπολογισθούν οι δυνάμεις:

α) 4^{-2} , $(-7)^{-2}$, $(-1)^1$, $(-1)^{-1}$, $(-1)^{-2}$, -1^{12} , $-(-1)^{-3}$,

β) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$, $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$, $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$, $(-0,5)^3$, $(-0,5)^{-2}$.

141. Να εκτελεσθούν με τον συντομότερο τρόπο οι πράξεις:

α) $\left(-\frac{101}{305}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{101}{305}\right)^3 \cdot \left(-\frac{101}{305}\right)^{-1}$, β) $\left(\frac{259}{748}\right)^2 \cdot \left(\frac{259}{748}\right)^3 \cdot \left(\frac{748}{259}\right)^5$

γ) $\left(-\frac{149}{245}\right)^{-4} : \left(-\frac{149}{245}\right)^{-3}$, δ) $\left(-\frac{15}{16}\right)^{+3} : \left(-\frac{16}{15}\right)^{-3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$

142. Να εκτελεσθούν οι πράξεις:

α) $(-1)^1 + (-1)^{-1} + (-1)^2 + (-1)^{-2} + (-1)^0 + 1^0$, β) $(10^{-4})^{-3}$.

γ) $2^{-2} + 4^{-1} + 3^0 - 8^1 + (-1)^{-2}$, δ) $[(-10)^2]^{-3}$, ε) $\left[\left(-\frac{1}{10}\right)^{-2} \right]^{-3}$

143. Να γράψετε με μορφή δυνάμεως τους αριθμούς:

α) 10, -10, 0,1, -0,1, -8, $-\frac{16}{9}$

β) 100, -100, 0,01, -0,01.

γ) 1000, -1000, 0,001, -0,001, $-\frac{1}{8}$, $-\frac{27}{64}$

144. Να γράψετε με σύντομο τρόπο τους αριθμούς:

α) 0,0000001, δ) $\frac{1}{0,00000007}$

β) 0,0000000015,

γ) -0,000000000045, ε) $\frac{1}{-0,0000000009}$

145. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $2x^{-4} - 6 \cdot 4x^{-3} + 1x^{-2} - 5x^{-1}$, αν $x = 1$,

β) $2 \cdot x^{-2} - 2 \cdot x + x^x - 3 \cdot (-1)^{-3}$, αν $x = -2$,

γ) $(x+4) \cdot 2x^{-2} - 3 \cdot 3x^{+1} + 6 \cdot 3x^{-1}$, αν $x = 0$.

$$\delta) 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 \cdot (-2)^{-2} - (-3)^{-3} + (-1)^{-1},$$

$$\epsilon) \frac{x^2 - \psi^2}{x + \psi} \quad \text{αν } x = -\frac{1}{2} \text{ και } \psi = -2$$

146. Τα παρακάτω γινόμενα να γίνουν δυνάμεις ενός ρητού:

$$\alpha) (-8)^2 \cdot (-4)^3 \quad \beta) \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$\gamma) \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot (-2)^3 \quad \delta) (-1)^{-3} \cdot (-2)^{-1} \cdot 2^3$$

$$\epsilon) \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot 3^2 \quad \sigma\tau) \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot \frac{1}{3}$$

147. Να εξισώσεις:

$$\alpha) \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot x = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} \quad \beta) \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} : x = \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$\gamma) x : \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} = -\frac{1}{2} \quad \delta) 0,00000016 = x \cdot 4^2 \cdot 10^{-8}$$

15. ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ ΤΟΥ II ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ.

§ 71. Στόν παρακάτω πίνακα περιλαμβάνονται οι βασικές πράξεις: Πρόσθεση — Πολλαπλασιασμός και οι σπουδαιότερες ιδιότητές τους.

Σημείωση. Ἀφαίρεση ρητοῦ εἶναι ἡ πρόσθεση τοῦ ἀντίθετου του καὶ διαίρεση ρητοῦ εἶναι ὁ πολλαπλασιασμός ἐπὶ τὸν ἀντίστροφο τοῦ διαιρέτη:

Τὰ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$		
Πράξεις	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Ὑπαρξη ἁθροίσματος καὶ γινομένου	Γιὰ κάθε α καὶ β $\alpha + \beta \in \mathbb{Q}$	Γιὰ κάθε α καὶ β $\alpha\beta \in \mathbb{Q}$
Μεταθετική ιδιότητα	Γιὰ κάθε α καὶ β $\alpha + \beta = \beta + \alpha$	Γιὰ κάθε α καὶ β $\alpha\beta = \beta\alpha$
Προσεταιριστική ιδιότητα	Γιὰ κάθε α, β καὶ γ $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$	Γιὰ κάθε α, β καὶ γ $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
Ὑπαρξη οὐδέτερου στοιχείου	Ὑπάρχει τὸ $0 \in \mathbb{Q}$, ὥστε γιὰ κάθε α $\alpha + 0 = \alpha$	Ὑπάρχει τὸ $1 \in \mathbb{Q}$, ὥστε γιὰ κάθε α $1 \cdot \alpha = \alpha$
Ὑπαρξη ἀντίθετου καὶ ἀντίστροφου στοιχείου	Γιὰ κάθε α ὑπάρχει τὸ στοιχείο $-\alpha$ ὥστε, $\alpha + (-\alpha) = 0$	Γιὰ κάθε $\alpha \neq 0$ ὑπάρχει τὸ στοιχείο $\frac{1}{\alpha}$, ὥστε $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$
Ἐπιμεριστική ιδιότητα	Γιὰ κάθε α, β καὶ γ , $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$	

§ 72. Ιδιότητες ισότητων και άνισοτήτων.

- $$\begin{array}{ll}
 \alpha + \gamma = \beta + \gamma & \alpha = \beta \quad \alpha + \gamma = \beta + \delta \\
 1. \alpha = \beta \Leftrightarrow & 2. \Rightarrow \\
 \alpha \gamma = \beta \gamma \ (\gamma \neq 0) & \gamma = \delta \quad \alpha \gamma = \beta \delta \\
 3. \alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma & 4. \alpha > \beta \\
 \alpha \gamma > \beta \gamma \ (\gamma > 0) & \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta \\
 \alpha \gamma < \beta \gamma \ (\gamma < 0) & \gamma \geq \delta
 \end{array}$$

§ 73. Ιδιότητες τών δυνάμεων.

- $$\begin{array}{lll}
 1. \alpha^m \cdot \alpha^n \cdot \dots \alpha^p = \alpha^{m+n+\dots+p} & 2. (\alpha^m)^n = \alpha^{mn} & 3. \alpha^m : \alpha^n = \alpha^{m-n} \\
 4. (\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \dots \kappa)^n = \alpha^n \cdot \beta^n \cdot \gamma^n \cdot \dots \kappa^n & & \\
 5. \alpha^1 = \alpha, \quad \alpha^0 = 1 \ (\alpha \neq 0), \quad \alpha^{-n} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n \ (\alpha \neq 0) & &
 \end{array}$$

Γενικές άσκήσεις τοῦ κεφαλαίου II.

148. *Αν $\chi = -6 + 7 - 2 + 3$, $\psi = -4 + 3 - 7 + 2$ καὶ $z = -4 + 6 - 3$, νὰ βρεθοῦν τὰ α) $\chi + \psi + z$, β) $\chi - \psi - z$, γ) $\chi^2 + \psi^2 + z^2$, δ) $-\chi^2 + \psi^2 - z^2$

149. Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις:

- $$\begin{array}{ll}
 \alpha) (2-5+7) \cdot (-2+7) + (-13+7) : (-12+15), & \\
 \beta) \left(-\frac{2}{5}+1\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}-1\right) - \left(1+\frac{5}{2}\right) : \left(-2-\frac{1}{3}\right), & \\
 \gamma) \left(-3+\frac{1}{3}-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{1}{4}+3-\frac{1}{2}\right) : \left(-\frac{2}{3}\right), & \\
 \delta) \left(-\frac{3}{5}+\frac{7}{3}\right) \cdot \left(-\frac{15}{7}\right) - \left(\frac{7}{2}-1\right) : \left(-\frac{1}{2}\right), & \\
 \epsilon) -[-4-(-3+2)] + [-(6+2)-14] \cdot [-0,5+1] &
 \end{array}$$

150. Νὰ βρεθεῖ ὁ χ ἀπὸ τὶς ἰσότητες:

- $$\begin{array}{ll}
 \alpha) -\frac{2}{5}\chi = -\frac{14}{5} - \frac{5}{10}, & \beta) \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} : \chi = \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} \\
 \gamma) \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} : \chi = -\frac{1}{2} & \delta) -\frac{1}{4} \cdot \chi = [(-2)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3]^2 \\
 \epsilon) \left(-\frac{3}{4}\right) : \chi = \frac{1}{4} - \frac{27}{8}, & \sigma\tau) \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-\chi) = -\frac{1}{2^2} \\
 \zeta) [2^3 \cdot 10^{-7}] : \chi = 5^2 \cdot 10^{-9} &
 \end{array}$$

151. *Αν $\alpha = -5$ καὶ $\beta = +3$, νὰ βρεθεῖ ἡ τιμὴ τῶν παραστάσεων:

- $$\begin{array}{lll}
 \alpha) (\alpha + \beta)^2 & \beta) (\alpha - \beta)^2 & \gamma) \alpha^2 - \beta^2 \\
 \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2, & \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2, & (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)
 \end{array}$$

Τί παρατηρεῖτε ;

152. Να βρεθεί η τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

$$\alpha) \frac{3\alpha^2 - 2\beta^3}{2} - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{3}, \text{ αν } \alpha = -\frac{1}{2}, \beta = 2$$

$$\beta) \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{3} - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{4} \right) : \left(\frac{\alpha^3 - \beta^2 + 1}{\alpha\beta} \right), \text{ αν } \alpha = 1, \beta = 2$$

$$\gamma) \frac{\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3}{\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3}, \text{ αν } \alpha = -3, \beta = 2$$

$$\delta) (4 \cdot \chi^x)^2 - 6(\chi\psi)^{x\psi} - \psi^{2\psi}, \text{ αν } \chi = -1, \psi = 2$$

153. Στις επόμενες παραστάσεις να βρεθεί το εξαγόμενο και να γραφεί σαν δύναμη.

$$\alpha) (3^2 \cdot 3^3) : 3^4 + (2^5 \cdot 2^3) \cdot 2 - 6 \cdot 5$$

$$\beta) (-3^{-2} : 3^{-3}) \cdot 3^{-4} + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 4^2 : 3^3$$

$$\gamma) \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{7}\right)^{-3} : \left[\frac{4}{7} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2}\right)^0\right]^{-2} - \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{2}\right]^{-1}$$

$$\delta) 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-4} + \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{81}\right)^0 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} : 5^{-2}$$

154. Να βρεθεί η τιμή των παραστάσεων:

$$\alpha) 4 \cdot 2^{x+1} - 3 \cdot 3^x - 6 \cdot 3^{x-1} + (x-2) \cdot 2^{x-2} \quad \text{εάν } x = 0$$

$$\beta) \left(-\frac{1}{2}\right)^{x-4} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{x-3} + \left(-\frac{1}{5}\right)^{x-2} + (-1)^{x-1} - (-1)^x \quad \text{εάν } x = 1$$

$$\gamma) \left(-\frac{1}{3}\right)^{x-3} + \left(-\frac{1}{5}\right)^{x-2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{x-1} + (-1)^x \quad \text{εάν } x = 1$$

155. Στη θέση του ερωτηματικού να βάλετε το κατάλληλο σύμβολο από τα $>$, $<$, $=$ στα παρακάτω:

$$\alpha) -\frac{7}{3} + \frac{14}{6} \quad ; \quad -\frac{1}{2}$$

$$\beta) -5 + \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{3}{8} - \frac{7}{4}$$

$$\gamma) -\frac{3}{5} \quad ; \quad -\frac{4}{3} + \frac{11}{15}$$

και να πολλαπλασιάσετε επί (-1) και τα δύο μέλη των σχέσεων που προκύπτουν.

δ) Στις προηγούμενες σχέσεις να μεταφέρετε τους όρους του β' μέλους στο πρώτο.

156. Να πολλαπλασιάσετε και τα δύο μέλη των παρακάτω ισοτήτων και άνισοτήτων με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών τους:

$$\alpha) \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{6}, \quad \beta) \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}, \quad \gamma) \frac{12}{14} - \frac{1}{7} = 1 - \frac{2}{7}$$

$$\delta) \frac{13}{14} > 1 - \frac{1}{7}, \quad \epsilon) \frac{7}{3} < 3 - \frac{1}{2}, \quad \sigma\tau) 1 - \frac{1}{4} < \frac{25}{8} - 2$$

157. Να επαληθεύσετε με αριθμητικά παραδείγματα τις σχέσεις:

1) $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$, 2) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$.

158. Να αποδείξετε τά:

α) $|\alpha^v| = |\alpha|^v$, β) $(-1)^{2v} = 1$,

γ) $(-1)^{2v+1} = -1$, δ) $\alpha^{\kappa-\lambda} \cdot \alpha^{\lambda-\mu} \cdot \alpha^{\mu-\kappa} = 1$,

ε) $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^v = \beta^v$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

Α. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ — ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ — ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

1. Η ΕΞΙΣΩΣΗ $\alpha x + \beta = 0$. ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΥΤΗΣ.

§ 74. Στην Α' τάξη μάθαμε εξισώσεις, όπως είναι οι $x+3=0$, $12-x=8$, $3x=15$ και είδαμε ότι αυτές αληθεύουν για όρισμένες τιμές του γράμματος x , το οποίο λέγεται άγνωστος της εξίσωσης.

Όστε εξίσωση ως προς x είναι μια ισότητα, ή οποία περιέχει τον άγνωστο x και ή οποία αληθεύει για όρισμένες από τις τιμές, που μπορεί να λάβει ο x .

Ο αριθμός, που επαληθεύει την εξίσωση, λέγεται λύση της εξίσωσης.

Η εύρεση των λύσεων λέγεται επίλυση της εξίσωσης.

Σημείωση.

1. Όταν λέμε ότι η εξίσωση $x+3=8$ αληθεύει για την τιμή 5 του x , ή ότι ο αριθμός 5 επαληθεύει την εξίσωση, εννοούμε ότι, αν στην εξίσωση $x+3=8$ θέσουμε αντί για τον x τον 5, θα πάρουμε την αριθμητική ισότητα $5+3=8$ ή $8=8$ (το πρώτο μέλος ίσο με το δεύτερο μέλος).

Με την εργασία αυτή, κατά την οποία θέτομε αντί για τον x τη λύση της εξίσωσης και βρίσκομε ότι το πρώτο μέλος είναι ίσο με το δεύτερο, λέμε ότι επαληθεύομε την εξίσωση ή ότι γίνεται ή επαλήθευση της εξίσωσης.

Όταν μια εξίσωση επαληθεύεται για μια τιμή του άγνωστου, λέμε ότι ή τιμή αυτή είναι πράγματι λύση της εξίσωσης. Π.χ. επειδή ο αριθμός 3 επαληθεύει την εξίσωση $x-2=1$, συμπεραίνομε ότι ο 3 είναι λύση της εξίσωσης αυτής.

2. Μια εξίσωση είναι δυνατόν να μην έχει λύση. Π.χ. ή εξίσωση $3+x=x+\frac{5}{2}$ δεν επαληθεύεται, οποιονδήποτε ρητό κι αν θέσουμε αντί για τον x .

Αυτή λέγεται αδύνατη εξίσωση.

Υπάρχουν και εξισώσεις οι οποίες έχουν άπειρες λύσεις π.χ. ή $x+5=5+x$ επαληθεύεται με οποιονδήποτε ρητό. Η εξίσωση αυτή λέγεται ταυτότητα ή άοριστη εξίσωση.

Οι εξισώσεις, τις οποίες ξετάζομε, ανάγονται στη γενική μορφή $\alpha x + \beta = 0$, ή οποία λέγεται εξίσωση πρώτου βαθμού ως προς x , επειδή ο άγνωστος έχει εκθέτη τη μονάδα, $\alpha x^1 + \beta = 0$ ή $\alpha x + \beta = 0$.

Οι α, β είναι αριθμοί ή παραστάσεις ανεξάρτητες από τον x (δεν περιέχουν τον x).

Ο α λέγεται συντελεστής του άγνωστου και θεωρείται διαφορετικός από το μηδέν. Ο β λέγεται γνωστός όρος.

Στην εξίσωση $6x-5=3x+1$, ή οποία είναι 1ου βαθμού ως προς x , παρατηρούμε τα εξής:

Οι παραστάσεις $6x-5$, $3x+1$ λέγονται «μέλη της εξίσωσης».

Οί ὅροι τους λέγονται καὶ ὅροι τῆς ἐξισώσεως.

Οί -5 , 1 εἶναι οἱ γνωστοὶ ὅροι καὶ οἱ $6x$, $3x$ εἶναι οἱ ἀγνωστοὶ ὅροι.

Στὴν ἐξίσωση $\frac{2x+3}{2} + \frac{x-1}{3} = \frac{x+2}{6}$ μπορούμε νὰ θεωρήσουμε σὰν ὅρους

τοῦ 1ου μέλους τὶς παραστάσεις $\frac{2x+3}{2}$ καὶ $\frac{x-1}{3}$ καὶ τοῦ δευτέρου μέλους τὴν παράσταση $\frac{x+2}{6}$.

§ 75. Ἰσοδύναμες ἐξισώσεις.

Οἱ ἐξισώσεις $x-2=5$, $x+3=10$ ἔχουν τὴ λύση 7 (γιατὶ ἐπαληθεύονται ἂν ἀντὶ τοῦ x θέσουμε τὸν 7) καὶ μόνον αὐτή.

Δύο ἐξισώσεις μὲ ἓναν ἀγνωστο λέγονται ἰσοδύναμες, ἂν ἔχουν τὶς ἴδιες λύσεις.

§ 76. Ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων.

α) Ἄν στὴν ἐξίσωση $(x+2) \cdot 3 - 6 = 12$ ἐκτελέσουμε τὶς πράξεις

$$3x + 6 - 6 = 12$$

$$3x + 0 = 12,$$

καταλήγουμε στὴν ἐξίσωση $3x = 12$, ἡ ὁποία ἔχει λύση τὸν ἀριθμὸ 4.

Ἡ λύση αὐτὴ εἶναι καὶ λύση τῆς ἀρχικῆς, γιατί παρατηροῦμε ὅτι τὴν ἐπαληθεύει:

$$(x+2) \cdot 3 - 6 = 12$$

α' μέλος: $(4+2) \cdot 3 - 6$

$$6 \cdot 3 - 6$$

$$18 - 6 = 12$$

β' μέλος: 12

Ὡστε, ἂν στὰ μέλη μιᾶς ἐξισώσεως ἐκτελέσουμε τὶς σημειωμένες πράξεις, βρίσκουμε ἰσοδύναμη ἐξίσωση.

β) Ἡ ἐξίσωση $x+3=2$ ἔχει τὴ λύση -1 . Ἄν προσθέσουμε καὶ στὰ δύο μέλη τῆς τὸν 4, θὰ ἔχουμε:

$$x+3+4=2+4 \Leftrightarrow x+7=6$$

Ἡ ἐξίσωση $x+7=6$ ἔχει τὴ λύση -1 , γιατί τὴν ἐπαληθεύει καὶ ἐπομένως εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴν ἀρχικὴν.

Ἄρα, ἂν προσθέσουμε καὶ στὰ δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως τὸν ἴδιο ρητό, παίρνομε ἰσοδύναμη ἐξίσωση.

Σημείωση. Τὸ ἴδιο ἰσχύει καὶ ὅταν προσθέσουμε τὴν ἴδια παράσταση, ἡ ὁποία περιέχει τὸν ἀγνωστο x . π.χ. $x+3=2 \Leftrightarrow x+3+(x+1)=2+(x+1) \Leftrightarrow 2x+4=x+3$

Αὐτὴ ἔχει τὴ λύση -1 , γιατί τὴν ἐπαληθεύει,

$$2(-1)+4 = -1+3$$

$$-2+4 = -1+3$$

$$2 = 2$$

Πρακτικό συμπέρασμα της ιδιότητας αυτής.

Αν προσθέσουμε και στα δύο μέλη της εξίσωσης $2x+3=5$ τον -3 , παίρνομε την ισοδύναμη εξίσωση $2x+3+(-3)=5+(-3)$ ή την $2x=5-3$, ή όποια είναι πιο απλή από την αρχική.

Παρατηρούμε ότι από την εξίσωση $2x+3=5$ μεταβαίνομε στην $2x=5-3$, αν μεταφέρουμε τον 3 από το πρώτο μέλος στο δεύτερο και αλλάξουμε το πρόσημό του.

Ωστε μπορούμε να μεταφέρουμε έναν όρο αθροίσματος από το ένα μέλος μιας εξίσωσης στο άλλο, αν του αλλάξουμε το πρόσημο ή με συντομία:

Ο όρος μιας εξίσωσης, ο οποίος αλλάζει μέλος, αλλάζει και πρόσημο.

Παραδείγματα:

$$1. x-5=7 \Leftrightarrow x=7+5$$

$$2. 3-2x+6=5x-1 \Leftrightarrow 3+6=2x+5x-1 \Leftrightarrow 3+6+1=2x+5x \Leftrightarrow 5x+2x=3+6+1. \text{ Στή μορφή αυτή της εξίσωσης λέμε ότι έχουμε χωρίσει γνωστούς από άγνωστους.}$$

$$\gamma) \text{ 'Η εξίσωση } \frac{x}{2} - 1 = 0 \text{ έχει τή λύση } 2, \text{ γιατί τήν έπαληθεύει.}$$

$$\text{Πολλαπλασιάζομε και τὰ δύο μέλη της επί } 2 \text{ και έχουμε } \left(\frac{x}{2} - 1\right) \cdot 2 = 0 \cdot 2 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 0 \cdot 2 \Leftrightarrow x - 2 = 0.$$

Η εξίσωση $x-2=0$ έχει τή λύση 2, άρα είναι ισοδύναμη με τήν αρχική.

Επομένως, αν πολ/σουμε και τὰ δύο μέλη μιας εξίσωσης επί έναν ρητό, διαφορετικό από το μηδέν, παίρνομε εξίσωση ισοδύναμη.

Πρακτικά συμπεράσματα της ιδιότητας αυτής.

$$1. \text{ πολ/ζομε επί } (-1) \text{ και τὰ δύο μέλη της εξίσωσης } 2-x=3, (2-x)(-1)=3(-1) \text{ και παίρνομε την ισοδύναμη εξίσωση } -2+x=-3$$

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να αλλάξουμε τὰ πρόσημα τῶν ὁρῶν και τῶν δύο μελῶν μιᾶς εξίσωσης.

$$\text{Παραδείγματα : } -x=7 \Leftrightarrow x=-7, -x+3=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x-3=\frac{1}{2}$$

$$2. \text{ Πολ/ζομε και τὰ δύο μέλη της εξίσωσης } \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 1 \text{ επί το } 6.$$

$$(\text{Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν}), 6. \left(\frac{x}{2} - \frac{x}{3}\right) = 6 \cdot 1 \Leftrightarrow 6 \cdot \frac{x}{2} - 6 \cdot \frac{x}{3} = 6 \Leftrightarrow 3x - 2x = 6$$

Άρα μπορούμε να απαλείψουμε τούς παρονομαστές μιᾶς εξίσωσης, αν πολ/με τὰ μέλη της επί τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν.

Παραδείγματα:

$$1. \frac{x}{2} - 3 = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{x}{2} - 2 \cdot 3 = 2 \cdot 1 \Leftrightarrow x - 6 = 2$$

$$2. \frac{2x}{3} + \frac{1-x}{4} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 12 \cdot \frac{2x}{3} + \frac{12(1-x)}{4} = 12 \cdot \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4 \cdot 2x + 3(1-x) = 6 \cdot 3$$

§ 77. Έργασία για την επίλυση μιᾶς εξισώσεως πρώτου βαθμοῦ μὲ ἓναν ἄγνωστο.

$$\text{Νὰ ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: } \frac{2x+1}{4} - \frac{x-2}{3} = \frac{1}{2}$$

Γιὰ νὰ ἐπιλύσουμε τὴν ἐξίσωση αὐτή, ἀπαλείφουμε πρῶτα τοὺς παρονομαστῆς.

Γιὰ τὸ σκοπὸ αὐτὸ βρίσκουμε τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν 4, 3, 2 τὸ ὁποῖο εἶναι ὁ 12, πολ/με καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως μὲ τὸν 12 καὶ ἐκτελοῦμε τὶς πράξεις διαιρέσεως (ἀπλοποιήσεις). Αὐτὸ εἶναι πάντοτε δυνατόν, γιατί τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι διαιρετὸ μὲ καθένα ἀπ' αὐτοὺς.

$$\text{Ὡστε: } \frac{2x+1}{4} - \frac{x-2}{3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 12 \left(\frac{2x+1}{4} - \frac{x-2}{3} \right) = 12 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{12 \cdot (2x+1)}{4} - \frac{12(x-2)}{3} = 6 \cdot 1 \Leftrightarrow 3 \cdot (2x+1) - 4 \cdot (x-2) = 6$$

Γιὰ τὴν ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως $3(2x+1) - 4(x-2) = 6$ (καὶ κάθε ἄλλης τῆς μορφῆς αὐτῆς) ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Ἐκτελοῦμε τὶς πράξεις τοῦ πολ/μοῦ:

$$3(2x+1) - 4(x-2) = 6 \Leftrightarrow (6x+3) - (4x-8) = 6$$

$$\text{Ἐξαλείφουμε τὶς παρενθέσεις: } (6x+3) - (4x-8) = 6 \Leftrightarrow 6x+3-4x+8=6$$

$$\text{Ἐκτελοῦμε τὶς πράξεις προσθέσεως: } 6x+3-4x+8=6 \Leftrightarrow 2x+11=6$$

(Ἡ ἐργασία αὐτὴ λέγεται καὶ ἀναγωγή τῶν ὁμοίων ὄρων).

Τώρα γιὰ νὰ ἐπιλύσουμε τὴν $2x+11=6$, μεταφέρουμε τὸν 11 στὸ β' μέλος (χωρίζουμε γνωστούς ἀπὸ ἀγνώστους), $2x+11=6 \Leftrightarrow 2x=6-11$ καὶ ἐκτελοῦμε τὴν τελευταία πράξη τῆς προσθέσεως ἢ ἀναγωγή,

$$2x=6-11 \Leftrightarrow 2x=-5$$

Κατόπι ἐπιλύουμε τὴν $2x=-5$, ἂν διαιρέσουμε καὶ τὰ δύο μέλη τῆς μὲ τὸ συντελεστή τοῦ ἀγνώστου, δηλαδὴ ἂν πολ/σουμε καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐπὶ τὸν ἀντίστροφο τοῦ συντελεστή τοῦ ἀγνώστου.

$$2x=-5 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}. \text{ Συντομότερα } 2x=-5 \Leftrightarrow$$

$$x = -\frac{5}{2}. \text{ Ὡστε ἡ λύση τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως } \frac{2x+1}{4} - \frac{x-2}{3} = \frac{1}{2}$$

εἶναι ὁ ἀριθμὸς $-\frac{5}{2}$.

Ἐπαλήθευση:

α' μέλος:

$$\frac{2 \left(-\frac{5}{2} \right) + 1}{4} - \frac{-\frac{5}{2} - 2}{3} = \frac{-5 + 1}{4} - \frac{\frac{-5-4}{2}}{3} = \frac{-4}{4} - \frac{-9}{6} =$$

$$= -1 + \frac{9}{6} = -\frac{6}{6} + \frac{9}{6} = \frac{-6+9}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

β' μέλος: $\frac{1}{2}$

Ἄν συνοψίσουμε τὰ παραπάνω γιὰ τὴν ἐπίλυση μιᾶς πρωτοβάθμιας ἐξίσωσης, ἔχομε τὴν ἑξῆς γενικὴ πορεία ἐπιλύσεως:

1. Ἀπαλείφομε τοὺς παρανομαστὲς (ἂν ὑπάρχουν).
2. Ἐκτελοῦμε τὶς πράξεις τοῦ πολ/μοῦ.
3. Ἐξαλείφομε τὶς παρενθέσεις.
4. Χωρίζομε γνωστούς ἀπὸ ἀγνώστους.
5. Ἐκτελοῦμε τὶς ἀναγωγὲς τῶν ὁμοίων ὄρων καὶ στὰ δύο μέλη.
6. Διαιροῦμε μὲ τὸ συντελεστὴ τοῦ ἀγνώστου, ἂν εἶναι διαφορετικὸς ἀπὸ τὸ μηδέν.

Μὲ τὴν παραπάνω ἐργασία κάθε ἐξίσωση 1ου βαθμοῦ μὲ ἓναν ἀγνωστο παίρνει τὴ μορφή $\gamma\chi = \delta$ καὶ ἔχει τὴν λύση $\chi = \frac{\delta}{\gamma}$ ἂν $\gamma \neq 0$.

Σημείωση. Εἶναι δυνατόν ἡ ἐκτέλεση τῶν πράξεων τοῦ πολ/μοῦ καὶ ἡ ἐξάλειψη τῶν παρενθέσεων νὰ γίνουν συγχρόνως. Π.χ. $2(3\chi+1)-3(\chi+2)=5(\chi+1)-4(\chi-1) \Leftrightarrow 6\chi+2-3\chi-6=5\chi+5-4\chi+4$.

Ἐπίσης πρὶν χωρίσουμε γνωστούς ἀπὸ ἀγνώστους,μποροῦμε νὰ κάνουμε ἀναγωγὲς καὶ στὰ δύο μέλη τῆς ἐξίσωσης: Π.χ. $6\chi+2-3\chi-6=5\chi+5-4\chi+4 \Leftrightarrow 3\chi-4=\chi+9$ Στὴ συνέχεια χωρίζομε γνωστούς ἀπὸ ἀγνώστους...

§ 78. Ἐπίλυση τῆς γενικῆς ἐξίσωσης πρώτου βαθμοῦ.

Ἡ γενικὴ ἐξίσωση πρώτου βαθμοῦ ἔχει τὴ μορφή $\alpha\chi + \beta = 0$. Μεταφέρομε τὸ γνωστὸ ὅρο β στὸ δεῦτερο μέλος καὶ ἔχομε $\alpha\chi = 0 - \beta$ ἢ $\alpha\chi = -\beta$.

Διαιροῦμε καὶ τὰ δύο μέλη μὲ τὸ συντελεστὴ α τοῦ ἀγνώστου:

$$\frac{\alpha\chi}{\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ καὶ βρίσκομε τὴ λύση } \chi = -\frac{\beta}{\alpha}$$

Σημείωση. Ὁ α θεωρεῖται διαφορετικὸς ἀπὸ τὸ μηδέν. Ἄν $\alpha=0$ καὶ $\beta \neq 0$, ἡ ἐξίσωση εἶναι ἀδύνατη. Π.χ. ἡ $0\chi=5$ εἶναι ἀδύνατη, γιατί δὲν ὑπάρχει ρητός, ὁ ὁποῖος δταν πολ/ται μὲ τὸ 0 νὰ δίνει γινόμενο τὸν 5. Ἄν $\alpha=0$ καὶ $\beta=0$, ἡ ἐξίσωση εἶναι ἀόριστη ἢ ταυτότητα. Π.χ. ἡ ἐξίσωση $0\chi=0$ εἶναι ταυτότητα, γιατί ἐπαληθεύεται ἀπὸ κάθε ρητὸ ἀριθμὸ.

Άσκησης:

159. Να επιλυθούν και να επαληθευθούν οι εξισώσεις:

α) $-12x+60=12$, β) $3x-14=+8$, γ) $5(x-2)-2(3-x)=3x-4$

δ) $x-1=2(3-2x)-3(1-x)$, ε) $2x-5=\frac{4x-3}{5}$, στ) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=5$

ζ) $x-\frac{2x-1}{3}=\frac{3(x+1)}{4}$

160. Να επιλύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{4-5x}{12}-\frac{3(x-1)}{2}=2x-6$, β) $2x+\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{4}\right)=\frac{5x}{3}+30$

γ) $\frac{3x-5}{2}-\frac{4x-2}{5}=\frac{3(x-2)}{10}+\frac{x-23}{2}$, δ) $\frac{2x-1}{3}-\frac{3x-2}{4}=\frac{5x-4}{6}-\frac{7x+6}{12}$

161. Να βρεθεί με αναγραφή το σύνολο $A \cup B$, αν:

α) $A=\{x/3(x-1)=12, x \in Q\}$ και $B=\{x/\frac{3x-4}{5}-\frac{3-2x}{2}=0, x \in Q\}$

β) $A=\{x/\frac{x}{3}+2=4, x \in Q\}$ και $B=\{x/\frac{2x+3}{3}=\frac{x-1}{4}, x \in Q\}$

γ) $A=\{x/\frac{2x}{3}+\frac{x}{6}-5=\frac{5x}{4}, x \in Q\}$ και $B=\{x/6,5-\frac{5x-1}{6}=\frac{20}{3}, x \in Q\}$

162. Να επιλυθούν οι εξισώσεις:

α) $x+2=x+1$, β) $x+3=2+x+1$, γ) $\frac{2x-3}{2}=x-5$,

δ) $x-\frac{5x-12}{4}=3-\frac{x}{4}$, ε) $\frac{3x+7}{15}=\frac{x-1}{5}$, στ) $\frac{5x+6}{6}=0,5x+\frac{x+3}{3}$

163. Να βρεθούν τα υποσύνολα του Q : A , B , Γ , Δ , E και Z , αν:

$A=\{x/0x=-4\}$, $B=\{x/0x=0\}$, $\Gamma=\{x/x-3=2+x\}$,

$\Delta=\{x/1x=x\}$, $E=\{x/\frac{2x-1}{3}-\frac{5x-2}{12}=\frac{x+1}{4}\}$, $Z=\{x/2x-\frac{5x-12}{4}=3+\frac{3x}{4}\}$

164. Για ποιές τιμές των α , β , γ , δ οι παρακάτω εξισώσεις είναι αδύνατες;

1) $(\alpha+2)x=1$, 2) $\beta x=6+5x$, 3) $(3\gamma-1)x=2$, 4) $\delta x+x+1=5x+7$

165. Για ποιές τιμές των α και β οι παρακάτω εξισώσεις είναι άοριστες;

1) $(\alpha-1)x=\beta-2$, 2) $(3\alpha+4)x=\beta+\frac{1}{2}$, 3) $\alpha x-1=\beta-3x$,

4) $\alpha x-\beta=8x+3\beta-1$.

2. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΙΛΥΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΑΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑΝ ΑΓΝΩΣΤΟ.

§ 79. Πρόβλημα είναι μια πρόταση, που περιλαμβάνει δεδομένα και ζητούμενα, τα όποια είναι ρητοί αριθμοί που συνδέονται μεταξύ τους. Η εύρεση των ζητούμενων λέγεται επίλυση του προβλήματος.

“Ένα πρόβλημα μπορεί να εκφρασθεί από μια εξίσωση, όπως θα δοῦμε παρακάτω.

Με τις εξισώσεις βρίσκουμε συντομότερα και εύκολότερα τη λύση τῶν προβλημάτων.

Σημείωση. Ἄν τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος δὲν εἶναι ἐπαρκῆ καὶ κατάλληλα, τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύση. Π.χ. “Ένας μαθητὴς ἔχει 20 δρχ. καὶ ξοδεύει 3 δρχ. τὴν ἡμέρα. “Ένας ἄλλος μαθητὴς ἔχει 12 δρχ. καὶ ξοδεύει 2 δρχ. τὴν ἡμέρα. Μετὰ πόσες ἡμέρες θὰ ἔχουν τὸ ἴδιο χρηματικὸ ποσὸ;

Δὲν ὑπάρχει λύση. Ἡ λύση 8 ἡμέρες δὲν εἶναι δεκτὴ, γιατί μετὰ τὴν ἕκτη ἡμέρα δὲν θὰ ἔχουν χρήματα.

Παραδείγματα:

1^ο. Οἱ τρεῖς πρώτες τάξεις ἑνὸς Γυμνασίου ἔχουν 360 μαθητὲς. Ἡ Α' τάξη ἔχει διπλάσιους μαθητὲς ἀπὸ τὴ Β' τάξη καὶ ἡ Γ' τάξη ἔχει τριπλάσιους ἀπὸ τὴ Β' τάξη.

Πόσους μαθητὲς ἔχει κάθε τάξη;

Οἱ λύσεις πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί.

“Ένα ἀπὸ τὰ ζητούμενα τὸ συμβολίζομε μὲ x . Σ' αὐτὸ τὸ πρόβλημα συμβολίζομε μὲ x τὸν ἀριθμὸ τῶν μαθητῶν τῆς Β' τάξης. Γιὰ νὰ σχηματίσουμε τὴν εξίσωση, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Ἡ Β' τάξη ἔχει x μαθητὲς. Ἡ πρώτη τάξη, ἡ ὁποία ἔχει 2πλάσιους μαθητὲς ἀπὸ τὴν Β' τάξη, θὰ ἔχει $2x$ μαθητὲς καὶ ἡ Γ' τάξη $3x$ μαθητὲς. Ἀλλὰ μαθητὲς Α' τάξης + μαθητὲς Β' τάξης + μαθητὲς Γ' τάξης = 360 μαθ.

$$2x + x + 3x = 360$$

Ἐπίλυση τῆς εξίσωσης:

$$2x + x + 3x = 360 \Leftrightarrow 6x = 360 \Leftrightarrow x = \frac{360}{6} \Leftrightarrow x = 60$$

Ἀπάντηση στὸ πρόβλημα:

Ἡ Β' τάξη ἔχει 60 μαθητὲς

Ἡ Α' τάξη ἔχει $2 \cdot 60 = 120$ μαθητὲς

Ἡ Γ' τάξη ἔχει $3 \cdot 60 = 180$ μαθητὲς

Ἐπαλήθευση: $60 \text{ μαθ} + 120 \text{ μαθ} + 180 \text{ μαθ} = 360 \text{ μαθ}$.

2^ο. Δύο πόλεις Α καὶ Β ἀπέχουν μεταξύ τους 21 km. Δύο αὐτοκίνητα ξεκινοῦν συγχρόνως ἀπὸ τὶς πόλεις αὐτὲς μὲ σταθερὲς ταχύτητες 45 km/h καὶ 38 km/h ἀντιστοιχῶς καὶ κινεῦνται εὐθύγραμμα κατὰ τὴ φορά τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$. Μετὰ πόσες ὥρες θὰ συναντηθοῦν καὶ σὲ πόση ἀπόσταση ἀπὸ τὴν πόλη Α;

Οἱ λύσεις πρέπει νὰ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί.

Ἐκλογή τοῦ ἀγνώστου:

Ἐστω ὅτι μετὰ x ὥρες θὰ συναντηθοῦν στὸ Σ.



σχ. 45.

Σχηματισμός τῆς ἐξισώσεως:

Ἀφοῦ σὲ 1 ὥρα τὸ 1ο αὐτοκίνητο διανύει 45 km, σὲ x ὥρες θὰ διανύσει 45 x km. Τὸ 2ο αὐτοκίνητο σὲ x ὥρες θὰ διανύσει 38 x km.

Ἀρα θὰ ἔχουμε τὴν ἐξίσωση: $AS = AB + BS$

$$45x = 21 + 38x$$

Ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως. $45x = 21 + 38x \Leftrightarrow 45x - 38x =$

$$= 21 \Leftrightarrow 7x = 21 \Leftrightarrow x = \frac{21}{7} \Leftrightarrow x = 3$$

(Ἐπαλήθευση τῆς ἐξισώσεως: $45x = 21 + 38x$

α' μέλος: $45 \cdot 3 = 135$

β' μέλος: $21 + 38 \cdot 3 = 21 + 114 = 135$)

Ἀπάντηση στὸ πρόβλημα:

Θὰ συναντηθοῦν μετὰ 3 ὥρες.

Σὲ ἀπόσταση 3·45 km = 135 km ἀπὸ τὴν πόλη Α.

30. Ὄταν τὸ 3πλάσιο ἑνὸς ἀριθμοῦ αὐξηθεῖ κατὰ $\frac{11}{2}$, γίνεται 41,5. Ποιὸς εἶναι ὁ ἀριθμός;

Ἡ λύση εἶναι ρητὸς ἀριθμός.

Ἐστω x ὁ ζητούμενος ἀριθμός, ἄρα τὸ 3πλάσιό του θὰ εἶναι 3 x . Σύμφωνα μὲ τὸ πρόβλημα σχηματίζουμε τὴν ἐξίσωση.

«Τὸ 3πλάσιο ἑνὸς ἀριθμοῦ» «ὅταν αὐξηθεῖ κατὰ $\frac{11}{2}$ » «γίνεται» 41,5

$$3x + \frac{11}{2} = 41,5$$

Ἀπὸ τὴν ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως βρίσκουμε τὴ λύση 12, ἡ ὁποία τὴν ἐπαληθεύει καὶ ἐπομένως εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός τοῦ προβλήματος.

40. Δύο ἀκέραιοι θετικοὶ ἀριθμοὶ ἔχουν ἄθροισμα 188. Ἄν διαιρεθεῖ ὁ μεγαλύτερος διὰ τοῦ μικρότερου, δίνει πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 8. Ποιοὶ εἶναι οἱ ἀριθμοί;

Οἱ λύσεις εἶναι ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί. Ἄν ὁ μικρότερος εἶναι x , τότε ὁ μεγαλύτερος θὰ εἶναι $188 - x$ καὶ σύμφωνα μὲ τὴν ιδιότητα:

Διαιρετέος = διαιρέτης ἐπὶ πηλίκον + ὑπόλοιπον ἔχομε τὴν ἐξίσωση:

$$188 - x = x \cdot 3 + 8.$$

Ἡ λύση τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι 45.

Ἀρα ὁ μικρότερος ἀριθμός εἶναι ὁ 45 καὶ ὁ μεγαλύτερος ὁ $188 - 45 = 143$.

Πραγματικά ό 143 αν διαιρεθεί δια 45, δίνει πηλίκο 3 και υπόλοιπο 8.

5^ο Μια βρύση γεμίζει μια άδεια δεξαμενή σε 4 ώρες και μια άλλη σε 12 ώρες Σε πόσες ώρες θα γεμίσουν τη δεξαμενή, αν τρέχουν και οι δύο συγχρόνως;

Έστω ότι σε x ώρες θα γεμίσουν τη δεξαμενή, αν τρέχουν συγχρόνως. (Ο x πρέπει να είναι θετικός).

Επειδή η πρώτη βρύση γεμίζει τη δεξαμενή σε 4 ώρες, σε μια ώρα θα γεμίσει το $\frac{1}{4}$ της δεξαμενής, σε 2 ώρες τα $\frac{2}{4}$, και σε x ώρες τα $\frac{x}{4}$.

Η δεύτερη βρύση σε x ώρες θα γεμίσει τα $\frac{x}{12}$ της δεξαμενής. Άρα έχουμε την εξίσωση:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Μέρος της δεξ. που} & & \text{μέρος της δεξ. που} & & \text{Ολόκληρη ή δεξαμενή} \\ \text{γεμίζει ή α' βρύση σε} & + & \text{γεμίζει ή β' βρύση} & = & \text{(Μια δεξαμενή)} \\ x \text{ ώρες} & & \text{σε } x \text{ ώρες} & & \\ \frac{x}{4} & + & \frac{x}{12} & = & 1 \end{array}$$

Η λύση της εξίσωσης είναι 3.

Επομένως σε 3 ώρες θα γεμίσουν τη δεξαμενή και οι δύο βρύσες.

6^ο Ένας πατέρας είναι 42 ετών και ο γιός του 10 ετών. Μετά πόσα έτη η ηλικία του πατέρα θα είναι 3πλάσια από την ηλικία του γιού;

Έστω μετά x έτη. (Αν η τιμή του x βρεθεί αρνητική, το ζητούμενο έγινε στο παρελθόν).

Τότε η ηλικία του πατέρα θα είναι $42+x$ και του γιού $10+x$. Επειδή η ηλικία του πατέρα είναι τριπλάσια από την ηλικία του γιού, έχουμε την εξίσωση:

$$42+x=3 \cdot (10+x) \Leftrightarrow 42+x=30+3x \Leftrightarrow 2x=12 \Leftrightarrow x=6. \text{ Άρα μετά από 6 έτη η ηλικία του πατέρα θα είναι 3πλάσια από την ηλικία του γιού.}$$

7^ο Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 10. Αν εναλλάξουμε τη θέση των ψηφίων του, βρίσκουμε αριθμό μεγαλύτερο κατά 18. Ποιός είναι ο αριθμός;

Έστω x το ψηφίο των δεκάδων, τότε το ψηφίο των μονάδων θα είναι $10-x$ και ο αριθμός.

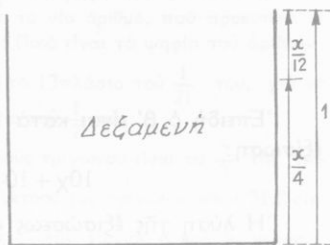
$$10 \cdot x + (10-x) : (\text{π.χ. } 53 = 10 \cdot 5 + 3)$$

↓
δεκάδες

↓
μονάδες

↓
δεκάδες

↓
μονάδες



σχ. 46.

Περιορισμός: Οί x , $10-x$ πρέπει να είναι άκεραίοι, μεγαλύτεροι ή ίσοι του 0 και μικρότεροι από το 10.

Αν εναλλάξουμε τα ψηφία του, βρίσκουμε τον αριθμό

$$10 \cdot \underbrace{(10-x)}_{\substack{\downarrow \\ \text{δεκάδες}}} + \underbrace{x}_{\substack{\downarrow \\ \text{μονάδες}}}$$

Επειδή ο β' είναι κατά 18 μεγαλύτερος από τον α', θα έχουμε την εξίσωση:

$$10x + 10 - x + 18 = 10(10 - x) + x$$

Η λύση της εξίσωσης αυτής είναι ο 4.

Επομένως έχουμε 4 δεκάδες και $10-4=6$ μονάδες. Άρα ο αριθμός είναι ο 46.

8°. Η τιμή του κιλού του κρέατος είναι κατά 9 δρχ. μεγαλύτερη από το τριπλάσιο της τιμής του κιλού των ζυμαρικών. Αν 15 κιλά κρέας και 50 κιλά ζυμαρικά αξίζουν 1370 δρχ., ποιά είναι η τιμή του κιλού του κρέατος και ποιά του κιλού των ζυμαρικών; (οι λύσεις πρέπει να είναι θετικοί αριθμοί).

Εστω x δρχ. η τιμή του κιλού των ζυμαρικών. Η τιμή του κιλού του κρέατος θα είναι $3x+9$ και θα έχουμε την εξίσωση:

$$(3x+9) \cdot 15 + 50x = 1370 \Leftrightarrow 45x + 135 + 50x = 1370 \Leftrightarrow 95x = 1370 - 135 \Leftrightarrow 95x = 1235 \Leftrightarrow x = 13. \text{ Ώστε η τιμή του κιλού των ζυμαρικών είναι 13 δρχ. και η τιμή του κιλού του κρέατος είναι 48 δρχ.}$$

Προβλήματα:

166. Μετρήσαμε 360 άτομα: άνδρες, γυναίκες και παιδιά. Οι άνδρες ήταν 2πλάσιοι από τις γυναίκες και τα παιδιά ήταν τα $\frac{3}{5}$ των γυναικών. Πόσα ήταν τα παιδιά;

167. Ο Πέτρος έχει 3πλάσιες δραχμές από όσες έχει ο Παύλος. Πόσες δραχμές έχει ο καθένας, αν ο Πέτρος έχει 12 δραχμές περισσότερες από τον Παύλο;

168. Από δύο πόλεις, που απέχουν μεταξύ τους 108 km, ξεκινούν συγχρόνως δύο ποδηλάτες με ταχύτητες 19 km/h και 17 km/h και κατευθύνονται για συνάντηση. Ύστερ' από πόσες ώρες θα συναντηθούν και σε ποιά απόσταση από τις πόλεις;

169. Αν σ' έναν αριθμό προσθέσουμε το $\frac{1}{3}$ του, βρίσκουμε τον αριθμό 19 ελαττωμένο κατά το $\frac{1}{4}$ του ζητούμενου αριθμού. Ποιός είναι ο αριθμός αυτός;

170. Να βρεθούν δύο θετικοί άκεραίοι αριθμοί, που να έχουν διαφορά 401, το πηλίκο του μεγαλύτερου διά του μικρότερου να είναι 6 και το υπόλοιπο 6.

171. Μια βρύση γεμίζει μιάν άδεια δεξαμενή σε 3 ώρες, μία άλλη σε 6 ώρες και μία τρίτη την άδειάζει σε 4 ώρες. Σε πόσες ώρες θα γεμίσει η δεξαμενή, αν τρέχουν και οι τρεις μαζί;

172. Ένας πατέρας είναι 59 χρονών και ο γιός του 29. "Υστερ' από πόσα χρόνια ή ηλικία του πατέρα θα είναι τα $\frac{5}{3}$ της ηλικίας του γιού;

173. 'Η διαφορά του ψηφίου τών δεκάδων από το ψηφίο τών μονάδων ενός διψήφιου αριθμού είναι 3. "Αν σ' αυτόν προσθέσουμε το νέο αριθμό, που προκύπτει με έναλλαγή τών ψηφίων του, βρίσκουμε άθροισμα 121. Ποιά είναι τα ψηφία του αριθμού;

174. 'Από ποιόν αριθμό πρέπει ν' αφαιρέσουμε το $\frac{1}{21}$ του, για να βρούμε έναν αριθμό κατά 4 μικρότερο από το 2πλάσιο του $\frac{1}{7}$ του;

175. Καθεμιά από τις ίσες πλευρές ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι τα $\frac{5}{3}$ της τρίτης πλευράς του. Να βρεθούν οι πλευρές, αν η περίμετρος του τριγώνου είναι 31,2 cm.

176. 'Η γωνία Β ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι τα $\frac{3}{5}$ της γωνίας Α και η γωνία Γ είναι το $\frac{1}{3}$ της γωνίας Β. Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

177. Ένας υπάλληλος έδωσε τα $\frac{2}{5}$ του μισθού του για ν' αγοράσει ύφασμα και το $\frac{1}{3}$ για ραφτικά. 'Εάν του περίσσευσαν 800 δραχ., πόσος είναι ο μισθός του;

178. Τίνος αριθμού το 10πλάσιο είναι μεγαλύτερο κατά 16 από το 2πλάσιο του $\frac{1}{5}$ του;

179. Να διατυπωθούν σε προβλήματα οι επόμενες εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x}{2} - \frac{x}{4} = 9, \quad \beta) \frac{x}{2} = 35 - \frac{x}{3}, \quad \gamma) x - \frac{3x}{4} = \frac{4x}{5} + \frac{11}{2}$$

3. ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑΝ ΑΓΝΩΣΤΟ.

§ 80. 'Η σχέση $x+1 > 5$ για $x=7$ αληθεύει: $7+1 > 5$, αλλά για $x=2$ δέν αληθεύει ($2+1$ δέν είναι μεγαλύτερο του 5). 'Η $x+1 > 5$ λέγεται ανίσωση πρώτου βαθμού ως προς x .

'Ανίσωση ως προς x είναι μια ανισότητα, ή όποια περιέχει τόν άγνωστο x .

Παραδείγματα ανισώσεων 1ου βαθμού:

$$x-1 > 3, \quad 2x+6 > 0, \quad 4x+10 < 0, \quad 3x-1 < 8$$

Γενικά την ανίσωση 1ου βαθμού ως προς έναν άγνωστο x την παριστάνομε με τη σχέση: $\alpha x + \beta > 0$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$)

Λύση ανισώσεως λέγεται κάθε τιμή του άγνωστου, ή όποια την επαληθεύει.

Π.χ. το 7 είναι λύση της $x+1 > 5$.

'Επίλυση ανισώσεως λέγεται ή εύρεση τών λύσεων της.

Δύο ανισώσεις λέγονται ισοδύναμες, όταν έχουν τις ίδιες λύσεις ή το ίδιο σύνολο λύσεων.

Ιδιότητες ανισώσεων

Οι ανισώσεις έχουν τις ιδιότητες που μάθαμε στις εξισώσεις (§ 76). Με βάση τις ιδιότητες αυτές, παίρνουμε όμοστροφη ισοδύναμη ανίσωση, με την παρατήρηση ότι:

“Αν πολ/με και τα δύο μέλη μιᾶς ανίσωσης ἐπὶ θετικό ἀριθμό, προκύπτει όμόστροφη ισοδύναμη ανίσωση, ἐνῶ, ἂν πολ/με ἐπὶ ἀρνητικό, προκύπτει ἐτερόστροφη ισοδύναμη ανίσωση.

Ἐπομένως, ἂν ἀλλάξουμε τὰ πρόσημα τῶν ὄρων καὶ τῶν δύο μελῶν μιᾶς ανίσωσης, πρέπει νὰ ἀλλάξουμε καὶ τὴ φορά της.

Γιὰ τὴν ἐπίλυση μιᾶς ανίσωσης ἀκολουθοῦμε πορεία ἐργασίας παρόμοια μ' ἐκείνη, πού μάθαμε στὶς εξισώσεις.

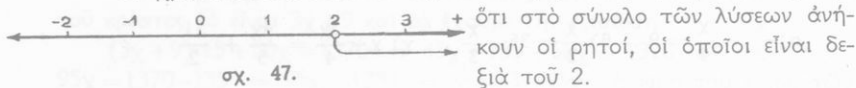
Παραδείγματα.

1) Νὰ ἐπιλυθεῖ ἡ ανίσωση $3x - 2 > 4$

$$3x - 2 > 4 \Leftrightarrow 3x > 4 + 2 \Leftrightarrow 3x > 6 \Leftrightarrow \frac{3x}{3} > \frac{6}{3} \Leftrightarrow x > 2$$

Ἐπομένως ὅλοι οἱ ρητοί, πού εἶναι μεγαλύτεροι τοῦ 2, εἶναι λύσεις τῆς ανίσωσης $3x - 2 > 4$.

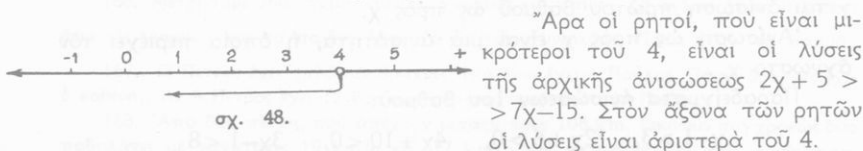
Ἄν χρησιμοποιήσουμε τὸν ἄξονα τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, παρατηροῦμε



2) Νὰ ἐπιλυθεῖ ἡ ανίσωση $2x + 5 > 7x - 15$

$$2x + 5 > 7x - 15 \Leftrightarrow 2x - 7x > -5 - 15 \Leftrightarrow -5x > -20 \Rightarrow 5x < 20 \Leftrightarrow$$

$$\frac{5x}{5} < \frac{20}{5} \Leftrightarrow x < 4.$$



3) Νὰ ἐπιλυθεῖ ἡ ανίσωση: $\frac{2x+1}{3} < \frac{x}{2}$

$$\frac{2x+1}{3} < \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{6 \cdot (2x+1)}{3} < 6 \cdot \frac{x}{2} \Leftrightarrow 2(2x+1) < 3x \Leftrightarrow 4x+2 < 3x \Leftrightarrow$$

$$4x - 3x < -2 \Leftrightarrow x < -2$$

Οἱ ρητοί, πού εἶναι ἀριστερὰ τοῦ -2 στὸν ἄξονα τῶν ρητῶν, ἀποτελοῦν τὸ σύνολο τῶν λύσεων τῆς $x < -2$, συνεπῶς καὶ τῆς ισοδύναμης

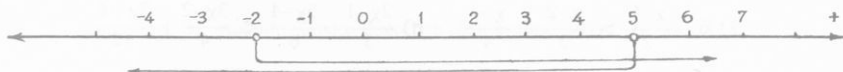
$$\text{τῆς } \frac{2x+1}{3} < \frac{x}{2}.$$



σχ. 49.

Έχουμε: $2x+4>0 \Leftrightarrow 2x>-4 \Leftrightarrow x>-2$
 $3x-4<11 \Leftrightarrow 3x<4+11 \Leftrightarrow 3x<15 \Leftrightarrow x<5$

4) Να προσδιορισθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων:
 $2x+4>0$ και $3x-4<11$.



σχ. 50.

Οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων είναι οι ρητοί, που είναι μεγαλύτεροι του -2 και μικρότεροι του 5 . Το σύνολο αυτών των ρητών περιγράφεται από την: $-2 < x < 5$

Σημείωση.

Αν $A = \{ x/2x+4>0 \}$ και $B = \{ x/3x-4<11 \}$

Έχουμε: $A = \{ x/x>-2 \}$ και $B = \{ x/x<5 \}$

$A \cap B = \{ x/x>-2 \} \cap \{ x/x<5 \} = \{ x/-2<x<5 \}$

5) Αν $x \in \mathbb{Z}$ και $-3 < x < 5$ (ό x περιέχεται μεταξύ του -3 και του 5), να βρεθεί με άναγραφή το σύνολο $A = \{ x/2x-1 < 2+x \}$

Έχουμε: $2x-1 < 2+x \Leftrightarrow 2x-x < 2+1 \Leftrightarrow x < 3$. Άρα ό x είναι:
 $-2, 0, 1, 2$ και $A = \{-2, 0, 1, 2\}$.

6) Να γίνει πιο άπλη ή περιγραφή του συνόλου:

$A = \{ x/4x-5 < 3+3x \wedge 5x-5 > 4x-2 \}$

Είναι: $4x-5 < 3+3x \Leftrightarrow 4x-3x < 3+5 \Leftrightarrow x < 8$

$5x-5 > 4x-2 \Leftrightarrow 5x-4x > 5-2 \Leftrightarrow x > 3 \Leftrightarrow 3 < x$

Άρα $A = \{ x/3 < x < 8 \}$

Άσκησης:

180. Να επιλυθούν οι ανισώσεις:

α) $2x+8 < 0$, δ) $3x < x+1$, στ) $-2x+1 < x$, ζ) $x+1 > \frac{x}{2}$

β) $-3x > \frac{6}{5}$, ε) $\frac{3x}{-2} + 5 > x$, η) $7x-3 < 3(x-2)+2(3-x)$,

γ) $\frac{3x+1}{2} - \frac{x-1}{3} > 0$, θ) $\frac{2x+1}{3} + \frac{1-x}{2} > 3$, ι) $\frac{3x+1}{4} - \frac{4-x}{3} > 1$

181. Να επιλυθούν οι ανισώσεις:

$$\alpha) 2-x > 2, \quad \epsilon) -x + \frac{1}{2} < -\frac{3}{2}, \quad \theta) x - \frac{5}{4} < 2x - \frac{1}{4}$$

$$\beta) 5(x-3) > 3(x-1), \quad \sigma\tau) 18-5(x+1) < 3(x-1)-2$$

$$\gamma) 2(4-x)-3(x-7) < 16x+1, \quad \zeta) -13(x-2) > 1-6(x-3)$$

$$\delta) 6 - \frac{x-1}{2} > \frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{4}, \quad \eta) \frac{2x-1}{3} - \frac{5x-4}{6} < \frac{3x-2}{4} + \frac{7x+6}{12}$$

$$182. \text{ "Αν } A = \{ x / \frac{x}{3} + 2 > x - \frac{2x-4}{3} \} \text{ και } B = \{ x / \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} > \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \},$$

να παραστήσετε γραφικώς τὸ σύνολο $A \cap B$ στὴν εὐθεία τῶν ρητῶν.

$$183. \text{ "Αν } A = \{ x / x - 5 > 5x - 1 \} \text{ και } B = \{ x / \frac{3}{2}x + 1 > x - 2 \}, \text{ να βρείτε με}$$

ἀναγραφή τὸ σύνολο $A \cap B = \{ x / x \in \mathbb{Z} \}$

184. Να παραστήσετε γραφικώς τὰ σύνολα (στὴν εὐθεία τῶν ρητῶν).

$$\alpha) A = \{ x / 8-x < x+2 \wedge 8-x > x-1 \}$$

$$\beta) B = \{ x / 4x-5 < 3+3x \wedge 5x-5 > 4x-2 \}$$

$$\gamma) \Gamma = \{ x / \frac{1}{2}x + 5 > -3x-2 \wedge \frac{1}{2}x-1 < x-2 \}$$

$$\delta) \Delta = \{ x / -\frac{2}{3}x-4 > 0 \wedge -\frac{1}{2}x+2 > 0 \}$$

185. Να επιλυθούν οι ανισώσεις:

$$\alpha) x-2 > x, \quad \gamma) x+3 < x, \quad \epsilon) \frac{1}{2}-x < \frac{1}{4}-x$$

$$\beta) x+1 > x, \quad \delta) x-1 < x, \quad \sigma\tau) x+6 > x+4$$

Β' ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ — ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ $\alpha x + \beta \geq 0$

1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΚΑΙ Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

α) Ἡ ἔννοια τῆς μεταβλητῆς.

§ 81. Ποιές τιμές μπορεί νὰ πάρει ἡ ἡλικία ἑνὸς παιδιοῦ;

Ἡ ἡλικία ἑνὸς παιδιοῦ μπορεί νὰ λάβει τὶς τιμές: $\frac{1}{2}$ ἔτους, 1 ἔτος, 1,5 ἔτη, καθὼς καὶ ὅλες τὶς τιμές ποὺ βρίσκονται μεταξύ τους. Γενικά μπορεί νὰ πάρει ὅλες τὶς τιμές μεταξύ 0 καὶ 12 ἔτη.

Ἄν συμβολίσουμε με x τὴν ἡλικία τοῦ παιδιοῦ, ἔχουμε τὸν πίνακα:

x	...	$\frac{1}{2}$	1	1,5	...
-----	-----	---------------	---	-----	-----

Οι τιμές του χ είναι στοιχεία του συνόλου

$$A = \{0, \dots, \frac{1}{2}, \dots, 1, \dots, 12\} \text{ ή } A = \{\chi/0 \leq \chi \leq 12\}$$

Το γράμμα χ λέγεται μεταβλητή.

"Ωστε μεταβλητή είναι κάθε γράμμα, το οποίο παίρνει τιμές από ένα σύνολο αριθμών.

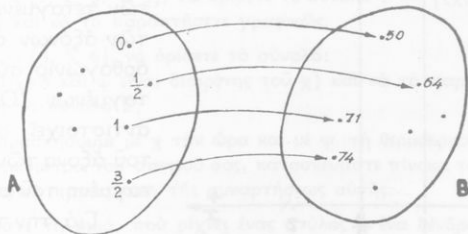
Σημείωση. 'Η παιδική ηλικία θεωρείται ότι διαρκεί μέχρι το 12ο έτος.

β) 'Η έννοια της συναρτήσεως.

§ 82. "Όταν γεννήθηκε ένα παιδί, είχε ύψος 50 cm, όταν έγινε 6 μηνών, είχε ύψος 64 cm, σε ηλικία ενός έτους είχε ύψος 71 cm κ.ο.κ., όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, στον οποίο παριστάνομε με χ έτη την ηλικία και με ψ cm το ύψος του παιδιού (Στις τιμές της ηλικίας, που βρίσκονται μεταξύ των $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$, αντιστοιχούν τιμές του ύψους που βρίσκονται μεταξύ των 50, 64, 71, 74 αντιστοίχως).

'Ηλικία: χ έτη	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1	...	$\frac{3}{2}$	...
"Υψος : ψ cm	50	...	64	...	71	...	74	...

Παρατηρούμε ότι σε **κάθε τιμή** της ηλικίας του παιδιού αντιστοιχεί **μία μόνο τιμή** του ύψους του. Δηλαδή σε κάθε στοιχείο του συνόλου $A = \{0, \dots, \frac{1}{2}, \dots, 1, \dots, \frac{3}{2}, \dots\}$ αντιστοιχεί ένα μόνο στοιχείο του συνόλου $B = \{50, \dots, 64, \dots, 71, \dots, 74, \dots\}$. 'Επομένως μεταξύ του συνόλου A των τιμών της ηλικίας και του συνόλου B των τιμών του ύψους υπάρχει μία μονοσήμαντη αντιστοιχία, της οποίας το διάγραμμα βλέπετε στο σχ. (51)



σχ. 51.

Τὸ σύνολο A , ἀπὸ τὸ ὁποῖο παίρνει τιμὲς ἡ μεταβλητὴ x , λέγεται **πεδίο ὁρίσμου** καὶ τὸ σύνολο B **πεδίο τιμῶν**.

Ἄν σὲ κάθε στοιχεῖο ἐνὸς συνόλου ἀντιστοιχεῖ ἓνα καὶ μόνο ἓνα στοιχεῖο ἐνὸς ἄλλου συνόλου, τότε ἔχουμε μεταξύ τῶν συνόλων αὐτῶν μία **μονοσήμαντη ἀντιστοιχία**.

Ἡ ἀντιστοιχία αὕτὴ ὀρίζει μία **συνάρτηση**.

γ) Ἡ **συνάρτηση** σὰν **σύνολο διατεταγμένων ζευγῶν**.

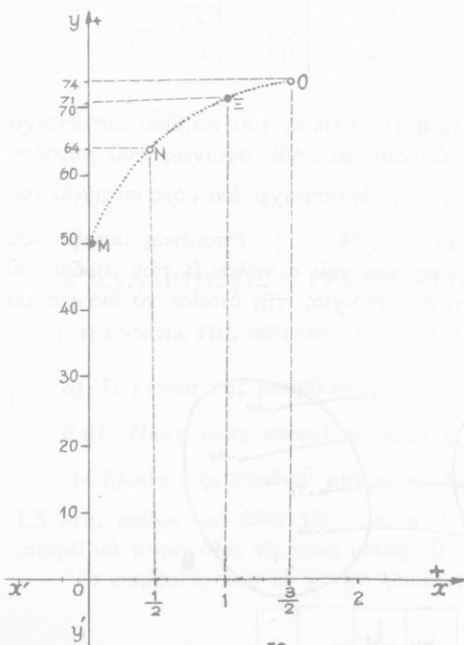
§ 83. Ἄν σχηματίσουμε τὰ διατεταγμένα ζεύγη:

$(0, 50)$, $(\frac{1}{2}, 60)$, $(1, 71)$, $(\frac{3}{2}, 74)$, ... τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς πρῶτο μέλος μιὰ τιμὴ τοῦ x καὶ ὡς δεύτερο μέλος τὴν ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ y , παίρνουμε ἓνα σύνολο διατεταγμένων ζευγῶν τὸ

$$F = \{(0, 50), (\frac{1}{2}, 64), (1, 71), (\frac{3}{2}, 74), \dots\}$$

Τὸ σύνολο αὐτὸ **παριστάνει τὴν προηγούμενη συνάρτηση**.

Ἐπειδὴ ἡ ἀντιστοιχία μεταξύ τῶν συνόλων A καὶ B εἶναι **μονοσήμαντη**, δὲν ὑπάρχουν στὸ σύνολο F ζεύγη μὲ τὸ ἴδιο πρῶτο μέλος.



σχ. 52.

δ) **Γραφικὴ παράσταση τῆς συναρτήσεως F** .

§ 84. Παίρνουμε δύο ἄξονες, οἱ ὁποῖοι τέμνονται καθέτως.

Θεωροῦμε τὸ σημεῖο τομῆς τους ὡς ἀρχὴ καὶ τοποθετοῦμε πάνω σ' αὐτοὺς τοὺς ρητοὺς ἀριθμοὺς ὅπως μάθαμε.

Τὸν $x'ox$ τὸν ὀνομάζουμε ἄξονα τῶν x (ἢ ἄξονα τῶν τετμημένων) καὶ τὸν ἄξονα $y'oy$ ἄξονα τῶν y ἢ ἄξονα τῶν τεταγμένων. Τὸ ζεῦγος τῶν ἀξόνων αὐτῶν τὸ λέμε ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων. Ὁ ἀριθμὸς, ποὺ ἀντιστοιχεῖ σ' ἓνα σημεῖο τοῦ ἄξονα τῶν y , λέγεται **τεταγμένη τοῦ σημείου αὐτοῦ**.

Γιὰ τὴν τετμημένη ἐνὸς σημείου τοῦ ἄξονα τῶν x μάθαμε στὴν § 66.

Στὸ σημεῖο, ποὺ ἔχει τετμημένη $\frac{1}{2}$, ὑψώνομε κάθετο στὸν ἄξονα τῶν χ καὶ στὸ σημεῖο ποὺ ἔχει τεταγμένη 64, φέρνουμε κάθετο στὸν ἄξονα τῶν ψ . Οἱ κάθετες αὐτὲς τέμνονται στὸ σημεῖο N. Λέμε ὅτι τὸ N εἶναι ἡ **γραφικὴ παράσταση** τοῦ ζεύγους $(\frac{1}{2}, 64)$ ἢ ἡ **γραφικὴ εἰκόνα** του. Τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{1}{2}$ καὶ 64 τοὺς ὀνομάζομε ἀντιστοιχῶς **τετμημένη** καὶ **τεταγμένη** τοῦ σημείου N ἢ **συντεταγμένες** του.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο κατασκευάζουμε τὶς γραφικὲς παραστάσεις τῶν ζευγῶν τοῦ συνόλου F, δηλαδὴ τῆς συναρτήσεως.

Ἡ γραφικὴ παράσταση τοῦ ζεύγους (0, 50) εἶναι τὸ σημεῖο M τοῦ ἄξονα τῶν ψ , γιατί ἡ τετμημένη τοῦ σημείου αὐτοῦ εἶναι 0 καὶ ἡ τεταγμένη 50.

Τὸ σύνολο τῶν M, ..., N, ..., Ξ, ..., O, ... τὸ λέμε **γραφικὴ εἰκόνα τῆς συναρτήσεως F**.

Σημείωση: Ἄν πάρουμε τὶς γραφικὲς παραστάσεις πολλῶν ζευγῶν, ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς συναρτήσεως θὰ εἶναι μία γραμμὴ.

Ἀσκήσεις:

186. Ἄν παραστήσουμε μὲ χ τὴν ἡλικία ἐνὸς παιδιοῦ σὲ ἔτη καὶ μὲ ψ τὸ βάρος του σὲ kg*, ἔχουμε τὸν πίνακα:

χ	...	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	...
ψ	...	7	9,2	10,4	11,5	...

Νὰ παραστήσετε τὴ συνάρτηση μεταξὺ ἡλικίας καὶ βάρους σὰν σύνολο διατεταγμένων ζευγῶν καὶ νὰ κατασκευάσετε τὴ γραφικὴ παράστασή της. (Χρησιμοποιήστε τετραγωνισμένο ἢ χιλιοστομετρικὸ χαρτί).

187. Τὸ σύνολο $F = \{(1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$ εἶναι συνάρτηση; Ποιὸ εἶναι τὸ πεδίου ὀρισμοῦ καὶ τὸ πεδίο τιμῶν της;

188. Ἄν $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, νὰ ὀρίσετε τὸ σύνολο $F = \{(\chi, \psi)/\chi \in A \text{ καὶ } \psi \text{ εἶναι διπλάσιο τοῦ } \chi\}$ καὶ νὰ τὸ παραστήσετε γραφικῶς.

189. Ἄν $A = \{4, 5, 6\}$, νὰ ὀρίσετε τὸ σύνολο:

$\Sigma = \{(\chi, \psi)/\chi \in A \text{ καὶ } \psi \text{ εἶναι διαίρετὴς τοῦ } \chi\}$ καὶ νὰ τὸ παραστήσετε γραφικῶς. Εἶναι συνάρτηση τὸ σύνολο Σ ;

190. Ἄν παραστήσουμε μὲ χ τὴν ὥρα καὶ μὲ ψ τὴ θερμοκρασία, ποὺ δείχνει τὴν ὥρα αὐτὴ τὸ θερμόμετρο τοῦ σπιτιοῦ σας, κατασκευάστε πίνακα τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν καὶ τὴ γραφικὴ παράσταση τῆς συναρτήσεως αὐτῆς.

191. Μετρήστε τὴ σκιά, ποὺ ρίχνει ἕνας στύλος ἢ ἕνα δένδρο κατὰ τὶς ἀκέραιες ὥρες, καὶ κατασκευάστε τὴ γραφικὴ παράσταση τοῦ μήκους τῆς σκιάς συναρτήσει τῆς ὥρας.

2. Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $\psi = \alpha\chi$ ΚΑΙ Η ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ

§ 85. Πρόβλημα. "Ένα αεροπλάνο έχει σταθερή ταχύτητα 500 km/h. Πόση απόσταση θα διανύσει σε χ ώρες, αν κινείται εὐθύγραμμα;

$$\Sigma \epsilon \text{ 1 \acute{\omega}\rho\alpha \text{ διαν\acute{\upsilon}\nu\epsilon\iota } 1.500 \text{ km} = 500 \text{ km}}$$

$$\Sigma \epsilon \text{ 2 \acute{\omega}\rho\epsilon\varsigma \text{ διαν\acute{\upsilon}\nu\epsilon\iota } 2.500 \text{ km} = 1000 \text{ km}}$$

$$\Sigma \epsilon \text{ 3 \acute{\omega}\rho\epsilon\varsigma \text{ διαν\acute{\upsilon}\nu\epsilon\iota } 3.500 \text{ km} = 1500 \text{ km}}$$

$$\Sigma \epsilon \text{ } \chi \text{ \acute{\omega}\rho\epsilon\varsigma \text{ διαν\acute{\upsilon}\nu\epsilon\iota } } \chi \cdot 500 \text{ km} = \psi \text{ km}$$

Μπορούμε νά ποῦμε ὅτι:

$$\Sigma \epsilon \text{ 0 \acute{\omega}\rho\epsilon\varsigma \text{ διαν\acute{\upsilon}\nu\epsilon\iota } 0. 500 \text{ km} = 0 \text{ km}}$$

Παρατηρούμε ὅτι σὲ κάθε τιμὴ τοῦ χρόνου χ ἀντιστοιχεῖ μία μόνο τιμὴ τῆς ἀποστάσεως.

Δηλαδή ἡ ἀπόσταση, τὴν ὁποία διανύει τὸ αεροπλάνο, εἶναι συνάρτηση τοῦ χρόνου χ .

Ἡ συνάρτηση αὐτὴ ὀρίζεται ἀπὸ τὴ σχέση $\psi = 500\chi$.

Ἡ μεταβλητὴ χ παίρνει τιμὲς ἀπὸ τὸ σύνολο Q_0^+ καὶ οἱ ἀντίστοιχες τιμὲς τῆς ψ ἀνήκουν ἐπίσης στὸ Q_0^+ , ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸν παρακάτω πίνακα.

(Δηλαδή τὸ πεδίο ὁρισμοῦ καὶ τὸ πεδίο τιμῶν τῆς συναρτήσεως εἶναι ὑποσύνολα τοῦ Q_0^+)

Χρόνος σὲ ὥρες χ	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	4	...	χ
Ἀπόσταση σὲ km ψ	0	250	500	750	1000	1500	2000	...	$\psi = 500\chi$

Ἡ συνάρτηση σὰν σύνολο διατεταγμένων ζευγῶν παριστάνεται ὡς ἑξῆς:

$$F = \{(0, 0), (\frac{1}{2}, 250), (1, 500), (\frac{3}{2}, 750), \dots, (2, 1000), \dots\}$$

ἢ μὲ περιγραφή: $F = \{(\chi, \psi) / \chi \in Q_0^+ \text{ καὶ } \psi = 500\chi\}$

Ἐπειδὴ ἡ σχέση $\psi = 500\chi$ ὀρίζει τὴ συνάρτηση F , λέμε πολλές φορές ἡ **συνάρτηση $\psi = 500\chi$** .

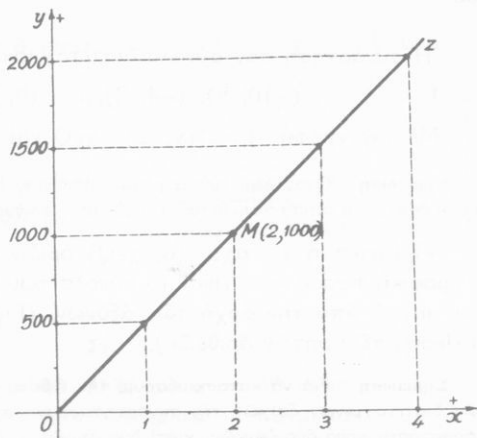
Γραφικὴ παράσταση τῆς συναρτήσεως.

Κατασκευάζουμε τὶς γραφικὲς εἰκόνες τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τῆς F καὶ παρατηροῦμε ὅτι τὰ σημεῖα αὐτὰ βρίσκονται πάνω σὲ μιὰ ἡμιευθεία ρητῶν ἀριθμῶν, τὴν OZ (σχ. 53)

β) Τί παριστάνει η
σχέση $\psi = -\frac{1}{2}\chi$; ($\chi \in \mathbb{Q}$)

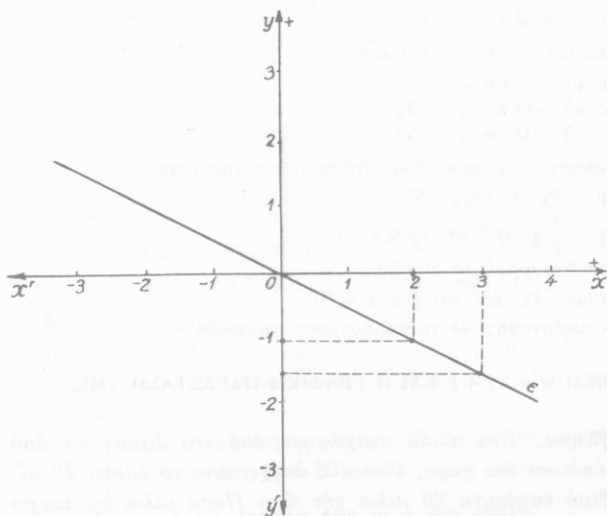
Ἡ σχέση $\psi = -\frac{1}{2}\chi$

εἶναι συνάρτηση (μέ πε-
δίο ὁρισμοῦ τὸ $\mathbb{Q}$ καὶ
πεδίο τιμῶν ἐπίσης τὸ
 $\mathbb{Q}$), γιατί, ὅπως φαί-
νεται ἀπὸ τὸν παρακά-
τω πίνακα, σὲ κάθε τι-
μὴ τοῦ χ θετική, ἀρνη-
τική ἢ μηδέν ἀντιστοι-
χεῖ μία μόνο ρητὴ τιμὴ
τοῦ ψ (μονότιμο τοῦ
πολ/σμοῦ).



σχ. 53.

χ	...	-10	-4	-1	0	1	2	3	4	10	...
$\psi = -\frac{1}{2}\chi$	...	5	2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-2	-5	...



σχ. 54.

Παρατήρηση: Τὸ
πηλίκο τῶν ἀντί-
στοιχων τιμῶν εἶ-
ναι σταθερό, δηλα-
δὴ ἴσο μὲ -2 , ἐκτὸς
τῶν ἀντίστοιχων
τιμῶν $0,0$.

Κατασκευάζομε
τὴ γραφικὴ πα-
ράσταση τῆς συν-
αρτήσεως $\psi =$
 $= -\frac{1}{2}\chi$ σ' ἓνα
σύστημα ὀρθογώ-
νιων ἀξόνων καὶ
παρατηροῦμε ὅτι
αὐτὴ εἶναι μιὰ
εὐθεῖα ϵ ρητῶν
πραγματ. ἀριθ-
μῶν, ποὺ περνᾷ ἀ-
πὸ τὴν ἀρχὴ τῶν
ἀξόνων (σχ. 54)

Ἡ συνάρτηση σὰν σύνολο διατεταγμένων ζευγῶν εἶναι:

$$F = \{ \dots (-10, 5), (-4, 2), \dots (0, 0), \dots (2, -1), \dots \}$$

$$\text{Μὲ περιγραφή: } F = \{(\chi, \psi) / \chi \in \mathbb{Q} \text{ καὶ } \psi = -\frac{1}{2}\chi\}$$

Σημείωση: Ὄταν λέμε εὐθεία ρητῶν ἀριθμῶν, ἐννοοῦμε τὸ σύνολο τῶν σημείων μιᾶς εὐθείας, στὰ ὁποῖα τοποθετοῦνται οἱ ρητοὶ ἀριθμοί.

γ) Γενικὰ ἡ $\psi = \alpha\chi$, ($\alpha, \chi \in \mathbb{Q}$) ὀρίζει μιὰ συνάρτηση, τῆς ὁποίας ἡ γραφικὴ παράσταση εἶναι τὸ σύνολο τῶν ρητῶν σημείων μιᾶς εὐθείας, ποὺ περνᾷ ἀπὸ τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων. (Ρητὰ σημεία μιᾶς εὐθείας εἶναι οἱ εἰκόνες τῶν ρητῶν ἀριθμῶν).

Σημείωση. Γιά νὰ κατασκευάσουμε τὴν εὐθεία, στὴν ὁποία βρίσκονται οἱ εἰκόνες τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τῆς συναρτήσεως $\psi = \alpha\chi$, ἀρκεῖ νὰ βροῦμε τὶς γραφικὲς παραστάσεις μόνο δύο ζευγῶν, γιατί δύο σημεία ὀρίζουν μία μόνον εὐθεία.

Ἀσκήσεις:

192. Νὰ σχηματίσετε πίνακα ἀντίστοιχων τιμῶν καὶ νὰ κατασκευάσετε τὴ γραφικὴ παράσταση τῶν παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) F_1 = \{(\chi, \psi) / \chi \in \mathbb{Z}^+ \text{ καὶ } \psi = 2\chi\}$$

$$\beta) F_2 = \{(\chi, \psi) / \chi \in \mathbb{Q}^+ \text{ καὶ } \psi = 4\chi\}$$

$$\gamma) F_3 = \{(\chi, \psi) / \chi \in \mathbb{Q} \text{ καὶ } \psi = \chi\}$$

193. Κάνετε τὸ ἴδιο καὶ γιὰ τὶς συναρτήσεις:

$$\alpha) F_1 = \{(\chi, \psi) / \chi \in \mathbb{Z} \text{ καὶ } \psi = -3\chi\}$$

$$\beta) F_2 = \{(\chi, \psi) / \chi \in \mathbb{Q} \text{ καὶ } \psi = -2\chi\}$$

$$\gamma) F_3 = \{(\chi, \psi) / \chi \in \mathbb{Q} \text{ καὶ } \psi = -\chi\}.$$

194. Νὰ κατασκευάσετε τὴ γραφικὴ παράσταση τῶν συναρτήσεων:

$$\alpha) \{(\chi, \psi) / \psi = 2\chi \wedge 1 \leq \chi \leq 5\},$$

$$\beta) \{(\chi, \psi) / \psi = \frac{3}{2}\chi, \chi \in \mathbb{Z} \text{ καὶ } -2 \leq \chi < 3\}.$$

195. Νὰ ὀρίσετε μὲ ἀναγραφή τὸ σύνολο.

$$\Sigma = \{(\chi, \psi) / |\psi| = 2\chi, \chi \in \mathbb{Z} \text{ καὶ } 2 \leq \chi \leq 5\}.$$

Εἶναι αὐτὸ τὸ σύνολο συνάρτησης; Νὰ τὸ παραστήσετε γραφικῶς.

3. Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $\psi = \alpha\chi + \beta$ ΚΑΙ Η ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ.

§ 86. α) Πρόβλημα. Ἐνα πλοῖο ἀναχώρησε ἀπὸ ἓνα λιμάνι καὶ ἀπὸ τὴ στιγμή ποὺ παρέπλευσε ἓνα φάρο, ὁ ὁποῖος ἀπέχει ἀπὸ τὸ λιμάνι 40 μίλια, ἀπόκτησε σταθερὴ ταχύτητα 20 μίλια τὴν ὥρα. Πόσα μίλια θὰ ἀπέχει τὸ πλοῖο ἀπὸ τὸ λιμάνι μετὰ χ ὥρες, ἀπὸ τὴ στιγμή ποὺ παρέπλευσε τὸ φάρο; (τὸ πλοῖο κινεῖται εὐθύγραμμα κατὰ τὴ διεύθυνση καὶ φορὰ Λιμάνι-Φάρου).

Τὴν 0 ὥρα τὸ πλοῖο βρίσκεται μπροστὰ στὸ φάρο. Ἐπομένως:



Σχ. 55.

Σὲ 0 ὥρες ἔχει διανύσει $40 + 0 \cdot 20$ μίλια = 40 μίλια

Σὲ 1 ὥρα ἔχει διανύσει $40 + 1 \cdot 20$ μίλια = 60 μίλια

Σὲ 2 ὥρες ἔχει διανύσει $40 + 2 \cdot 20$ μίλια = 80 μίλια

Σὲ 3 ὥρες ἔχει διανύσει $40 + 3 \cdot 20$ μίλια = 100 μίλια

.....

Σὲ χ ὥρες ἔχει διανύσει $40 + \chi \cdot 20$ μίλια = ψ μίλια = $20 \cdot \chi + 40$ μίλια.

Παρατηροῦμε ὅτι σὲ κάθε τιμὴ τοῦ χ ἀντιστοιχεῖ μιὰ τιμὴ τοῦ ψ (μονότιμο πολ/μοῦ καὶ προσθέσεως).

Παρατηρήστε το καὶ στὸν παρακάτω πίνακα.

Χρόνος χ h	0	1	2	3	·	·	·	χ
Ἀπόσταση ψ mil	40	60	80	100	·	·	·	$\psi = 20\chi + 40$

Συνεπῶς ἡ σχέση $\psi = 20\chi + 40$ ὀρίζει τὴ συνάρτηση

$$F = \{ (0, 40), (1, 60), (2, 80), (3, 100), \dots \}$$

Μὲ περιγραφή:

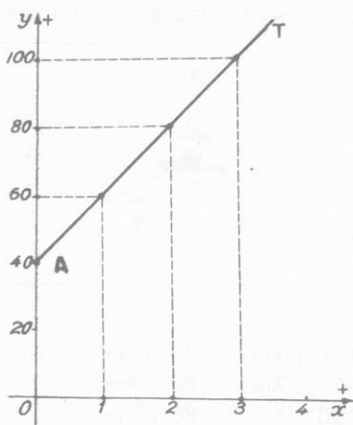
$F = \{ (\chi, \psi) / \psi = 20\chi + 40 \wedge \chi \in Q_0^+ \}$ μὲ πεδίο ὀρισμοῦ τὸ Q_0^+ καὶ πεδίο τιμῶν τὸ σύνολο τῶν ρητῶν, ποὺ εἶναι μεγαλύτεροι ἢ ἴσοι μὲ τὸν 40.

Ἐπειδὴ ἡ σχέση $\psi = 20\chi + 40$ ὀρίζει τὴ συνάρτηση F , λέμε:

Ἡ συνάρτηση $\psi = 20\chi + 40$

Γραφικὴ παράσταση τῆς $\psi = 20\chi + 40$.

Βρίσκουμε κατὰ τὰ γνωστὰ τὶς γραφικὲς παραστάσεις τῶν ζευγῶν τῆς συναρτήσεως καὶ παρατηροῦμε ὅτι ἡ $\psi = 20\chi + 40$ παριστάνεται γρα-



σχ. 56.

φικῶς ἀπὸ τὴν ἡμιευθεία ΑΤ
τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.

β) Νὰ ἐξετάσετε, ἂν ἡ σχέση
 $\psi = 2\chi + 1$, ($\chi \in \mathbb{Q}$) εἶναι συνάρ-
τηση καὶ νὰ βρεῖτε τὴ γραφικὴ
παράστασή της.

Δίνουμε διάφορες τιμές στοῦ
 χ καὶ βρίσκουμε τὶς ἀντίστοιχες
τιμές τοῦ ψ , ὅπως φαίνεται
στὸν παρακάτω πίνακα:

χ	...	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	...
$\psi = 2\chi + 1$	...	-5	-3	-2	-1	0	1	2	3	5	7	9	...

Παρατηροῦμε ὅτι σὲ κάθε τιμὴ τοῦ χ ἀντιστοιχεῖ μία καὶ μόνο μία
τιμὴ τοῦ ψ . Ἄρα ἡ $\psi = 2\chi + 1$ εἶναι συνάρτηση μὲ πεδίο ὀρίσμου καὶ
πεδίο τιμῶν τὸ $\mathbb{Q}$.

Αὕτὴ σὰν σύνολο δια-
τεταγμένων ζευγῶν εἶναι:

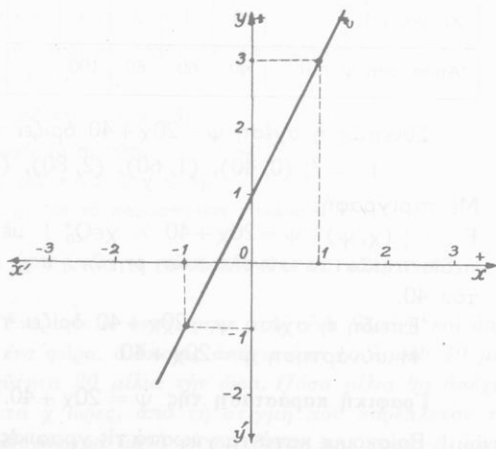
$$F = \left\{ (-3, -5), \dots, \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \right. \\ \left. (0, 1), \left(\frac{1}{2}, 2\right), (1, 3), \dots \right\}$$

Μὲ περιγραφή:

$$F = \{(\chi, \psi) / \psi = 2\chi + 1 \wedge \chi \in \mathbb{Q}\}$$

Γραφικὴ παράσταση
τῆς $\psi = 2\chi + 1$.

Κατασκευάζουμε τὶς
γραφικὲς παραστάσεις (εἰ-
κόνες) τῶν ζευγῶν καὶ
παρατηροῦμε ὅτι αὐτὲς



σχ. 57.

βρίσκονται σε μία ευθεία ϵ , που δεν περνά από την αρχή των αξόνων.

γ) Γενικά ή $\psi = \alpha\chi + \beta$, όπου α, β είναι σταθεροί ρητοί και χ μεταβλητή, που παίρνει τιμές από το Q , είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών το Q .

Γραφικώς παριστάνεται από τα ρητά σημεία μιας ευθείας, που δεν περνά από την αρχή των αξόνων.

Άσκησης:

196. Να γίνει γραφική παράσταση της συναρτήσεως:

$$\psi = -\frac{1}{2}\chi - 1, \quad \text{αν } \chi \in A = \{-4, -2, 0, 2, 4, 6\}.$$

197. Σε τετραγωνισμένο χαρτί να σχεδιάσετε δύο ορθογώνιους άξονες και να βρείτε τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως $F = \{(\chi, \psi) / \psi = -\frac{1}{2}\chi + 1 \wedge \chi \in Q\}$.

Επίσης να βρείτε τα ζεύγη της F , τα όποια έχουν τις εικόνες των πάνω στους άξονες.

198. Κάνετε τα ίδια και για τις συναρτήσεις:

$$F_1 = \{(\chi, \psi) / \psi = 0\chi + 2 \wedge \chi \in Q\} \text{ και } F_2 = \{(\chi, \psi) / \psi = 0\chi + 0 \wedge \chi \in Q\}.$$

199. Να κατασκευάσετε την ευθεία, από την όποια παριστάνεται γραφικώς η συνάρτηση $\psi = 2\chi - 1 (\chi \in Q)$ σε τετραγωνισμένο χαρτί, και να σημειώσετε το σημείο, στο όποιο η πιό πάνω ευθεία τέμνει τον άξονα των χ . Ποιά είναι η τετμημένη του σημείου αυτού; Να θέσετε την τετμημένη αυτή στην εξίσωση $2\chi - 1 = 0$. Τι παρατηρείτε;

200. Στο ίδιο σύστημα ορθογώνιων αξόνων να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$F_1 = \{(\chi, \psi) / \psi = \chi + 1 \wedge \chi \in Q\}, F_2 = \{(\chi, \psi) / \psi = 2\chi - 4 \wedge \chi \in Q\}.$$

201. Επίσης των συναρτήσεων:

$$F_3 = \{(\chi, \psi) / \psi = -2\chi + 2 \wedge \chi \in Q\}, F_4 = \{(\chi, \psi) / \psi = -2\chi + 3 \wedge \chi \in Q\}.$$

202. Το ίδιο για τις συναρτήσεις:

$$F_5 = \{(\chi, \psi) / \psi = -2\chi + 2 \wedge \chi \in Q\}, F_6 = \{(\chi, \psi) / \psi = \frac{4-4\chi}{2} \wedge \chi \in Q\}.$$

4. ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ $\alpha\chi + \beta = 0$ ΚΑΙ ΤΗΣ $\alpha\chi + \beta > 0$

α) Πρόβλημα. Να βρεθεί γραφικώς η λύση της εξισώσεως $-\frac{1}{2}\chi + 1 = 0$.

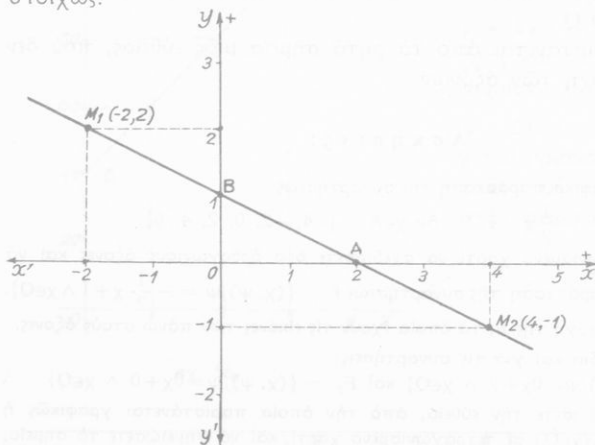
§ 87. Πάνω σε τετραγωνισμένο χαρτί γράφουμε τους ορθογώνιους άξονες και βρίσκουμε τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως: $\psi = -\frac{1}{2}\chi + 1$.

(Δίνουμε δύο τιμές στο χ έστω τις $\chi = -2$ και $\chi = 4$ και βρίσκουμε τις αντίστοιχες τιμές του ψ , δηλαδή $\psi = 2$ και $\psi = -1$).

Επειτα βρίσκουμε τις εικόνες των ζευγών $(-2, 2)$, $(4, -1)$ και έστω ότι αυτές είναι τα σημεία M_1 και M_2 αντίστοιχως, και φέρνουμε την ευθεία M_1M_2)

‘Η ευθεία M_1M_2 παριστάνει γραφικῶς τὴ συνάρτηση $\psi = -\frac{1}{2}x + 1$.

‘Η ευθεία αὐτὴ τέμνει τοὺς ἄξονες $x'x$ καὶ $y'y$ στὰ σημεῖα A καὶ B ἀντιστοίχως.



σχ. 58.

Τὸ σημεῖο B εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ ζεύγους $(0, 1)$ καὶ τὸ A ἡ εἰκόνα τοῦ ζεύγους $(2, 0)$.

Τὸ πρῶτο μέλος τοῦ ζεύγους $(2, 0)$, δηλαδὴ ὁ 2, ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν: $-\frac{1}{2}x + 1 = 0$ ἄρα εἶναι ἡ λύση τῆς.

“Ὡστε γιὰ νὰ βροῦμε γραφικῶς τὴ λύση τῆς ἐξίσωσης $\alpha x + \beta = 0$

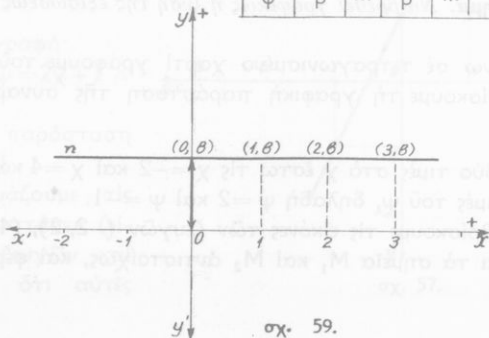
($\alpha \neq 0$), κατασκευάζομε τὴ γραφικὴ παράσταση τῆς συναρτήσεως $\psi = \alpha x + \beta$ καὶ βρίσκουμε τὸ σημεῖο τομῆς τῆς μετὸν ἄξονα τῶν x . ‘Η τετμημένη τοῦ σημείου αὐτοῦ εἶναι ἡ λύση τῆς ἐξίσωσεως $\alpha x + \beta = 0$.

Σημείωση.

1. ‘Η συνάρτηση $\psi = 0 \cdot x + \beta$ ($\beta \neq 0$) παριστάνεται γραφικῶς ἀπὸ μιὰ ευθεῖα // πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x . “Αρα γραφικῶς δὲν προσδιορίζεται λύση τῆς ἐξίσωσεως $0x + \beta = 0$. “Αλλὰ οὔτε καὶ ἀριθμητικῶς, ὅπως μάθαμε. “Επομένως καὶ γραφικῶς ἐπαληθεύεται ὅτι ἡ ἐξίσωση $0x + \beta = 0$ ($\beta \neq 0$) εἶναι ἀδύνατη.

Πίνακ. τιμῶν τῆς συναρτήσεως $\psi = 0x + \beta$:

x	0	...	1	...	2	...	3	...
ψ	β	...	β	...	β	...	β	...



σχ. 59.

2. Ἡ συνάρτηση $\psi=0\chi+0$ παριστάνεται γραφικῶς ἀπὸ τὸν ἄξονα τῶν χ . Ἄρα δὲν προσδιορίζεται γραφικῶς μία λύση γιὰ τὴν ἐξίσωση $0\chi+0=0$. Αὕτὴ ἔχει ἄπειρες λύσεις.

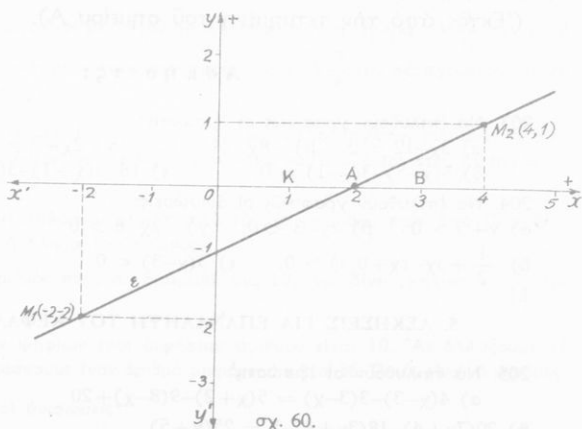
Πίνακας τιμῶν τῆς συναρτήσεως $\psi = 0\chi + 0$:

χ	0	...	1	...	2	...	3	...
ψ	0	...	0	...	0	...	0	...

β) Νὰ βρεθοῦν γραφικῶς οἱ λύσεις τῆς $\frac{1}{2}\chi - 1 > 0$

§ 88. Θεωροῦμε τὴ συνάρτηση $\psi = \frac{1}{2}\chi - 1$ καὶ ἐργαζόμενοι ὅπως στὰ προηγούμενα κατασκευάζουμε τὴν εὐθεΐα ϵ (γραφ. παράσταση αὐτῆς), ποὺ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν χ στὸ σημεῖο A , τὸ ὁποῖο ἔχει τετμημένη 2.

Θέτουμε στὴν ἀνίσωση $\frac{1}{2}\chi - 1 > 0$ ἀντὶ χ τὴν τετμημένη 3 ἑνὸς σημείου B τοῦ ἄξονα $X'X$, τὸ ὁποῖο βρίσκεται δεξιὰ τοῦ A , καὶ παρατηροῦμε ὅτι ὁ 3 ἐπαληθεύει τὴν ἀνίσωση.



σχ. 60.

$$\left(\frac{1}{2} \cdot 3 - 1 = \frac{3}{2} - \frac{2}{2} = \frac{1}{2} > 0\right)$$

Τὸ ἴδιο συμβαίνει μὲ τὴν τετμημένη ὁποιοῦδήποτε ἄλλου σημείου, τὸ ὁποῖο βρίσκεται δεξιὰ τοῦ A πάνω στὸν ἄξονα τῶν χ . Ἄρα οἱ λύσεις τῆς ἀνίσωστος $\frac{1}{2}\chi - 1 > 0$ εἶναι οἱ ρητοί, ποὺ εἶναι μεγαλύτεροι ἀπὸ τὸν 2 ($\chi > 2$). Αὐτὸ ἐπαληθεύεται καὶ ἀπὸ τὴν ἀριθμ. ἐπίλυση τῆς ἀνίσωστος.

Σημείωση: Ἄν θέσουμε τὴν τετμημένη 1 ἑνὸς σημείου K , τὸ ὁποῖο βρίσκεται ἀριστερά τοῦ A πάνω στὸν ἄξονα τῶν χ , παρατηροῦμε ὅτι δὲν ἐπαληθεύει τὴν ἀνίσωση.

$$\frac{1}{2}\chi - 1 > 0 \quad \left(\frac{1}{2} \cdot 1 - 1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{2} = -\frac{1}{2} < 0\right)$$

Ἄρα οἱ τετμημένες τῶν σημείων τοῦ ἄξονα τῶν χ , τὰ ὁποῖα βρίσκονται ἀριστερά τοῦ A , δὲν ἐπαληθεύουν τὴν ἀνίσωση.

Γενικά ἂν ἔχουμε τὴν ἀνίσωση $\alpha\chi + \beta > 0$ ($\alpha \neq 0$), γιὰ νὰ βροῦμε γραφικῶς τὶς λύσεις της, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

1) Κατασκευάζουμε τὴν εὐθεία, ποὺ ὀρίζεται ἀπὸ δύο τυχόντα ζεύγη τῆς συναρτήσεως.

2) Βρίσκουμε τὸ σημεῖο τομῆς τῆς εὐθείας αὐτῆς καὶ τοῦ ἄξονα τῶν χ . Ἔστω A τὸ σημεῖο αὐτό.

3) Δοκιμάζουμε ἂν ἡ τετμημένη ἑνὸς ὁποιουδήποτε σημείου τοῦ ἄξονα τῶν χ (π.χ. δεξιὰ τοῦ A) ἐπαληθεύει τὴν ἀνίσωση.

Ἄν τὴν ἐπαληθεύει, οἱ λύσεις της εἶναι οἱ ρητὲς τετμημένες τῶν σημείων τῆς ἡμιευθείας AX' . Ἄν δὲν τὴν ἐπαληθεύει, οἱ λύσεις της εἶναι οἱ ρητὲς τετμημένες τῶν σημείων τῆς ἀντικείμενης ἡμιευθείας AX' .

(Ἐκτὸς ἀπὸ τὴν τετμημένη τοῦ σημείου A).

Ἀσκήσεις:

203. Νὰ ἐπιλυθοῦν γραφικῶς οἱ ἐξισώσεις:

$$\alpha) 3\chi - 12 = 0 \quad \beta) -8\chi - 24 = 0, \quad \gamma) 2\chi + 3 = 0,$$

$$\delta) 5(\chi - 3) - 3(\chi - 1) = 0, \quad \epsilon) 18 - 5(\chi + 1) - 3(\chi - 1) = 0$$

204. Νὰ ἐπιλυθοῦν γραφικῶς οἱ ἀνισώσεις:

$$\alpha) \chi + 3 > 0, \quad \beta) 2\chi - 3 < 0, \quad \gamma) -2\chi - 6 > 0$$

$$\delta) \frac{1}{2} + 3\chi - (\chi + 0,5) > 0, \quad \epsilon) 3(\chi - 3) < 0$$

5. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ III:

205. Νὰ ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

$$\alpha) 4(\chi - 3) - 3(3 - \chi) = 5(\chi + 2) - 9(8 - \chi) + 20$$

$$\beta) 20(7\chi + 4) - 18(3\chi + 4) - 5 = 25(\chi + 5)$$

$$\gamma) 6 - [2\chi - (3\chi - 4) - 1] = 0$$

206. Νὰ ἐπιλυθοῦν καὶ νὰ ἐπαληθευθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

$$\alpha) 5 - 4(\chi - 3) = \chi - 2(\chi - 1), \quad \beta) 6(\chi - 1) - (3\chi + 11) + 7 = 0$$

207. Νὰ ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

$$\alpha) \frac{7\chi - 4}{15} + \frac{\chi - 1}{3} = \frac{3\chi - 1}{5} - \frac{7 + \chi}{10}, \quad \beta) \frac{2\chi}{15} + \frac{\chi - 6}{12} = \frac{3}{10} \left(\frac{\chi}{2} - 5 \right)$$

$$\gamma) \frac{18\chi + 13}{9} = \frac{6\chi + 1}{5} + \frac{2}{3} \cdot \left(6 - \frac{3\chi}{2} \right), \quad \delta) \frac{2}{5} \left(\frac{3\chi}{4} - \frac{2}{7} \right) = \frac{5}{7} \left(\frac{12\chi}{25} - \frac{1}{75} \right)$$

208. Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ παρακάτω προβλήματα μετὰ τὴ βοήθεια ἐξισώσεων:

α) Νὰ βρεθοῦν οἱ γωνίες τοῦ παραλ/μου $AB\Delta\Gamma$, ἂν ἡ γωνία τοῦ A ἰσοῦται μετὰ $\frac{2}{3}$ τῆς γωνίας B .

β) Νὰ βρεθοῦν οἱ γωνίες ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$, ἂν ἡ γωνία B ἰσοῦται μετὰ $\frac{1}{2}$ τῆς γωνίας A καὶ ἡ γωνία Γ ἰσοῦται μετὰ $\frac{3}{8}$ τῆς γωνίας A .

γ) Δύο κομμάτια ύφασμα διαφέρουν κατά 66,5 m. Το μεγαλύτερο είναι 5πλάσιο από το μικρότερο και 4,5 m ακόμη. Να βρεθούν τα μήκη τους.

δ) Να βρεθούν τρεις διαδοχικοί θετικοί άκεραίοι τέτοιοι, πού, αν από το ήμισυ του ενός των δύο μικρότερων αφαιρέσουμε το $\frac{1}{3}$ του μεγαλύτερου, θα βρούμε τον ρητό $\frac{127}{6}$.

ε) Ένα αυτοκίνητο αναχώρησε στις 7 το πρωί από την πόλη Α με ταχύτητα 33 km/h. Τί ώρα πρέπει να αναχωρήσει ένα άλλο αυτοκίνητο από την ίδια πόλη και προς την ίδια φορά με ταχύτητα 45 km/h, για να φτάσει το πρώτο ύστερ' από 2h 45min;

209. Με τη βοήθεια εξισώσεων να επιλυθούν τα προβλήματα:

α) Έφαγαν μαζί 47 άνδρες και γυναίκες. Κάθε άνδρας πλήρωσε 50 δρχ. και κάθε γυναίκα 47 δρχ. Αν οι άνδρες πλήρωσαν 1380 δρχ. περισσότερα από τις γυναίκες, πόσοι ήταν οι άνδρες;

β) Από το περιεχόμενο ενός βαρελιού πουλήθηκαν την α' ημέρα τα $\frac{3}{8}$ και τη β' ημέρα 39 κιλά. Εάν το πουλημένο ποσό αντιπροσωπεύει τα $\frac{3}{4}$ του περιεχομένου, πόσα κιλά έμειναν ακόμη στο βαρέλι;

γ) Ένας εργάτης τελειώνει ένα έργο σε 3 ημέρες. Άλλος εργάτης τελειώνει το ίδιο έργο σε 6 ημέρες. Σε πόσες ημέρες θα τελειώσουν το έργο και οι δύο εργάτες, αν εργάζονται συγχρόνως;

δ) Ένας πατέρας έχει 2πλάσια ηλικία από το γιό του, ενώ πριν από 15 χρόνια είχε 3πλάσια. Ποιά είναι η ηλικία του καθενός;

ε) Να βρεθεί ένας αριθμός πού, αν διαιρεθεί δια 13, να δίνει πηλίκο το $\frac{1}{14}$ του και υπόλοιπο 12.

ζ) Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 10. Αν αλλάξουμε τη θέση των ψηφίων του, βρίσκουμε έναν αριθμό μικρότερο κατά 36. Ποιός είναι ο αριθμός;

210. Να επιλυθούν οι ανισώσεις:

$$\alpha) 2(8x-5) > 15x-8, \quad \beta) 2(2x-3)-5x + \frac{1}{2} > 0$$

$$\gamma) \frac{x}{4} - x > \frac{1}{6} - \frac{2x}{3} \quad \delta) \frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{3} > 1$$

$$211. \text{ Αν } A = \{x/\frac{3}{4}x + 3 > 0 \wedge x \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{x/x-2 < 0 \wedge x \in \mathbb{Z}\},$$

να βρεθεί το σύνολο $A \cap B$ με αναγραφή.

$$212. \text{ Να βρεθεί η τομή των συνόλων } A = \{x/x+1 > \frac{x}{2}-2\} \text{ και}$$

$$B = \{x/x+1 < \frac{x}{3}-3\} \text{ (με άπλη περιγραφή).}$$

213. Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

$$\alpha) \psi = 3x \quad \beta) \psi = -2x + 1 \quad \gamma) \psi = 1,5x - \frac{1}{2} \quad (x \in \mathbb{Q}),$$

214. Αν $A = \{(x, \psi)/\psi = 2x \wedge x \in \mathbb{Q}\}$ και $B = \{(x, \psi)/\psi = x + 2 \wedge x \in \mathbb{Q}\}$, να βρεθεί γραφικώς το σύνολο $A \cap B$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

Α. ΛΟΓΟΙ — ΜΕΓΕΘΗ ΕΥΘΕΩΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ — ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

1. ΛΟΓΟΣ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ — ΛΟΓΟΣ ΔΥΟ ΟΜΟΕΙΔΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ — ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΛΟΓΟΥ.

§ 89. Λόγος δύο ἀριθμῶν.

Δίνονται οἱ ἀριθμοὶ 54 καὶ 9. Μὲ ποιὸν ἀριθμὸ πρέπει νὰ πολλαπλασιά-
σουμε τὸν δευτέρου (9), γιὰ νὰ βροῦμε τὸν πρώτο (54);

Ἄν χ εἶναι ὁ ἀριθμός, θὰ ἔχουμε: $9\chi = 54 \Leftrightarrow \chi = \frac{54}{9} \Leftrightarrow \chi = 6$. Ὁ
ἀριθμὸς 6 λέγεται λόγος τοῦ 54 πρὸς τὸν 9.

Ὡστε λόγος ἐνὸς ἀριθμοῦ α πρὸς ἕναν ἀριθμὸ β ($\beta \neq 0$) λέγεται ὁ ἀρι-
θμός, ὁ ὁποῖος, ὅταν πολλαπλασιάζεται μὲ τὸν β , δίνει γινόμενο τὸν α .

Ἄν ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β εἶναι λ , ἔχουμε:

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} = \lambda \Leftrightarrow \beta \cdot \lambda = \alpha}$$

Συνεπῶς ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεώς τους.

Ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β παριστάνεται καί: (α, β)

Ὁ α καὶ ὁ β λέγονται ὅροι τοῦ λόγου, ὁ α λέγεταῖ ἡγούμενος καὶ ὁ
 β ἐπόμενος.

§ 90. Λόγος δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν.

Δίνεται τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα AB . Νὰ βοηθεῖ ἕνα ἄλλο εὐθύγραμμο
τμῆμα $\Gamma\Delta$, ὥστε $\Gamma\Delta = AB + AB + \frac{1}{4} AB$.



Κατασκευάζουμε
κατὰ τὰ γνωστὰ τὸ

$$\Gamma\Delta = AB + AB + \frac{1}{4} AB \quad \eta$$

σχ. 61.

$$\Gamma\Delta = (1 + 1 + \frac{1}{4})AB \Leftrightarrow \Gamma\Delta = \frac{9}{4} AB.$$

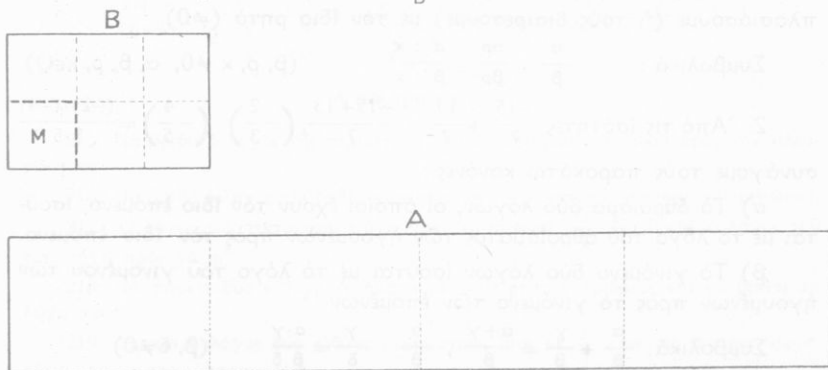
Ο αριθμός $\frac{9}{4}$, με τον οποίο πολλαπλασιάζεται το AB και δίνει το ΓΔ, λέγεται λόγος του ΓΔ προς το AB και συμβολίζεται $\frac{\Gamma\Delta}{AB}$ ή $(\Gamma\Delta, AB)$.

$$\text{Ώστε } \frac{\Gamma\Delta}{AB} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \Gamma\Delta = \frac{9}{4} AB$$

Γενικά λόγος ενός μεγέθους A προς ένα άλλο όμοειδές μέγεθος B λέγεται ο αριθμός λ, με τον οποίο όταν πολλαπλασιάζεται το μέγεθος B, δίνει το A.

$$\text{Συμβολικά: } \frac{A}{B} = \lambda \Leftrightarrow A = \lambda \cdot B$$

§ 91. Στο σχήμα (62) ο λόγος του ὀρθογωνίου A προς το ὀρθογώνιο B είναι ο αριθμός 4, δηλαδή $\frac{A}{B} = 4$ διότι $A = 4B$.



σχ. 62.

Αν λάβουμε το τετράγωνο M ως μονάδα μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν, τότε ὁ λόγος $\frac{B}{M}$ λέγεται τιμὴ τοῦ B καὶ παριστάνεται $\frac{B}{M} = (B)$.

Ὀμοίως καὶ ὁ λόγος $\frac{A}{M} = (A)$ λέγεται τιμὴ τοῦ A.

Ἐχουμε $\frac{B}{M} = (B) = 6$, γιατί $B = 6M$ καὶ $\frac{A}{M} = (A) = 24$, γιατί $A = 24M$.

Ἀπὸ τὶς ἰσότητες: $(A) = 24$

$(B) = 6$ με διαίρεση κατὰ μέλη παίρνουμε:

$$\frac{(A)}{(B)} = \frac{24}{6} = 4. \text{ Ἀλλὰ καὶ } \frac{A}{B} = 4, \text{ ἐπομένως } \boxed{\frac{A}{B} = \frac{(A)}{(B)}} \quad (1)$$

Ώστε ὁ λόγος δύο ἐπιφανειῶν ἰσοῦται μετὰ τὸν λόγο τῶν τιμῶν τους, ἂν μετρηθοῦν μετὰ τὴν ἴδια μονάδα.

Ἡ ἰδιότητα αὕτη ἰσχύει γιὰ ὁποιαδήποτε ὁμοειδῆ μεγέθη A καὶ B

και ο λόγος $\frac{A}{B}$ είναι ανεξάρτητος από τη μονάδα μετρήσεώς τους.

Δηλαδή η ισότητα (1) ισχύει, και αν πάρουμε άλλη μονάδα μετρήσεως αντί για τη μονάδα M.

§ 92. Ιδιότητες του λόγου.

1) Να συγκρίνετε το λόγο των αριθμών -5 και -8 με το λόγο των $(-5) \cdot (-2)$ και $(-8) \cdot (-2)$

$$\text{*Έχομε} \quad \frac{-5}{-8} = \frac{5}{8} \text{ και } \frac{(-5) \cdot (-2)}{(-8) \cdot (-2)} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

$$\text{*Άρα} \quad \frac{-5}{-8} = \frac{(-5) \cdot (-2)}{(-8) \cdot (-2)} \cdot \text{Ισχύει και } \frac{-5}{-8} = \frac{(-5) : (-2)}{(-8) : (-2)}$$

Συνεπώς ο λόγος δύο αριθμών δεν μεταβάλλεται, αν τους πολλαπλασιάσουμε (ή τους διαιρέσουμε) με τον ίδιο ρητό ($\neq 0$).

$$\text{Συμβολικά:} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\rho}{\beta\rho} = \frac{\alpha : \kappa}{\beta : \kappa} \quad (\beta, \rho, \kappa \neq 0, \alpha, \beta, \rho, \kappa \in \mathbb{Q}).$$

$$2. \text{ Από τις ισότητες } \frac{-15}{7} + \frac{13}{7} = \frac{-15+13}{7}, \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{(-2) \cdot (-4)}{3 \cdot 5}$$

συνάγομε τους παρακάτω κανόνες :

α) Το άθροισμα δύο λόγων, οι όποιοι έχουν τον **ίδιο** επόμενο, ισούνται με το λόγο του άθροίσματος των ηγουμένων προς τον **ίδιο** επόμενο.

β) Το γινόμενο δύο λόγων ισούνται με το λόγο του **γινόμενου** των ηγουμένων προς το γινόμενο των επόμενων.

$$\text{Συμβολικά:} \quad \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta}, \quad \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \delta} \quad (\beta, \delta \neq 0)$$

$$3. \text{ Ο λόγος του } (-3) \text{ προς τον } 5 \text{ είναι } \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$$

Ο λόγος των αντιστρόφων των όρων του είναι

$$\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}} = -\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}} = -\frac{5}{3}$$

Επομένως ο λόγος των αντιστρόφων των όρων ενός λόγου ισούται με τον **αντίστροφο** του λόγου.

$$\text{Συμβολικά:} \quad \text{Εάν } \lambda_1 = \frac{\alpha}{\beta} \text{ τότε } \lambda_2 = \frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{\beta}} = \frac{\beta}{\alpha} \text{ και } \lambda_1 \lambda_2 = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = 1$$

***Εφαρμογές.**

$$\alpha) \frac{-5}{-6} = \frac{(-5) \cdot (-1)}{(-6) \cdot (-1)} = \frac{5}{6} \quad \beta) \frac{-7}{8} = \frac{(-7) \cdot (-1)}{8 \cdot (-1)} = \frac{7}{-8} = -\frac{7}{8}$$

$$\gamma) \frac{6}{17} + \frac{1}{17} + \left(-\frac{5}{17}\right) = \frac{6+1-5}{17} = \frac{2}{17}$$

$$\delta) \frac{-5}{9} \cdot \frac{3}{-4} = \frac{(-5) \cdot 3}{9 \cdot (-4)} = \frac{-15}{-36} = \frac{-5}{-12} = \frac{5}{12}$$

$$\epsilon) \lambda_1 = \frac{-2}{-3} = +\frac{2}{3}, \quad \lambda_2 = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{3}} = +\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \text{ και } \lambda_1 \lambda_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1.$$

$$\zeta) \text{ 'Εάν } \frac{X}{\Psi} = 2, \text{ νά βρεθεί ό λόγος } \frac{X+\Psi}{2X-\Psi}.$$

Διαιρούμε καί τούς δύο όρους του λόγου $\frac{X+\Psi}{2X-\Psi}$ διά του Ψ :

$$\frac{X+\Psi}{2X-\Psi} = \frac{\frac{X}{\Psi} + \frac{\Psi}{\Psi}}{2 \cdot \frac{X}{\Psi} - \frac{\Psi}{\Psi}} = \frac{\frac{X}{\Psi} + 1}{2 \cdot \frac{X}{\Psi} - 1} = \frac{2+1}{2 \cdot 2-1} = \frac{3}{4-1} = \frac{3}{3} = 1$$

Άσκησης:

215. Νά βρεθεί ό λόγος τής περιμέτρου του ισόπλευρου τριγώνου πρὸς τήν πλευρά του.

216. Νά βρεθεί ό λόγος τής ὀρθῆς γωνίας πρὸς τή γωνία του ισόπλευρου τριγώνου.

217. Ό λόγος του τεκτονικού πῆχης πρὸς τὸ m εἶναι $\frac{3}{4}$. Νά βρεθεί ό λόγος του τ.τ. πῆχης πρὸς τὸ m².

218. Νά πάρете δύο εὐθύγρ. τμήματα με τιμές ρητούς ἀριθμούς καί νά βρεῖτε τὸ λόγο τους.

219. Δίνεται ό λόγος δύο εὐθύγρ. τμημάτων, ἴσος με $\frac{3}{5}$, καί τὸ ἓνα ἀπ' αὐτά. Νά βρεθεί τὸ ἄλλο εὐθύγρ. τμήμα.

$$220. \text{ 'Αν } \frac{X}{\Psi} = -\frac{1}{2}, \text{ νά βρεθοῦν οἱ λόγοι: } \alpha) \frac{\Psi}{X}, \beta) \frac{\Psi-X}{X+\Psi}, \gamma) \frac{X+2\Psi}{2X-\Psi}.$$

$$221. \text{ 'Αν } \frac{X}{\Psi} = -2, \text{ νά βρεθοῦν οἱ λόγοι: } \alpha) \frac{2X+\Psi}{X+3\Psi}, \beta) \frac{2X\Psi-\Psi^2}{X^2-\Psi^2}, \gamma) \frac{X^2+\Psi^2}{X^2-\Psi^2}$$

222. Μπορεῖτε νά βρεῖτε τὸ λόγο δύο ὁποιοῦνδήποτε εὐθύγρ. τμημάτων;

2. ΜΕΓΕΘΗ ΕΥΘΕΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ — ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ — ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΣΧΕΣΗΣ.

§ 93. Ξαναρχόμαστε στὸ πρόβλημα τῆς § 85.

Ἐνα ἀεροπλάνο, τὸ ὁποῖο κινεῖται εὐθύγραμμα με σταθερὴ ταχύτητα 500 km/h, περνᾷ πάνω ἀπὸ τὸ σχολεῖο μας Α. Μετὰ χ ὥρες περνᾷ πάνω ἀπὸ ἓνα σημεῖο Β. Πόση εἶναι ἡ ἀπόσταση ΑΒ; (Τὸ ἀεροπλάνο κινεῖται ὀριζοντίως).

Ἄν ΑΒ = ψ km, ἔχουμε τὴ συνάρτηση ψ = 500χ. Σχηματίζουμε τὸν πίνακα τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν.

Τιμές χρόνου σε ώρες	χ	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	...	χ
Τιμές αποστάσεως σε km	$\psi = 500\chi$	0	25	50	250	500	1000	1500	...	500χ

Παρατηρούμε ότι, αν πολλαπλασιάσουμε την τιμή του χρόνου $\frac{1}{20}$ επί 10, θα βρούμε $\frac{1}{2}$. Αν πολ/σουμε και την αντίστοιχη τιμή 25 της αποστάσεως επί 10, θα βρούμε 250. Άλλα από τον πίνακα διαπιστώνουμε ότι οι τιμές $\frac{1}{2}$ και 250 είναι αντίστοιχες.

Επίσης αν πολλαπλασιάσουμε τις αντίστοιχες τιμές $\frac{1}{10}$ και 50 επί 30, βρίσκουμε τις αντίστοιχες τιμές 3 και 1500.

Ωστε, αν πολ/σουμε αντίστοιχες τιμές των μεγεθών χρόνου και αποστάσεως με έναν ρητό, βρίσκουμε πάλι αντίστοιχες τιμές. Τα μεγέθη χρόνος και απόσταση είναι ανάλογα.

Ωστε δύο μεγέθη λέγονται εὐθέως ανάλογα, αν έχουν αντίστοιχες τιμές και τα γινόμενα δύο αντίστοιχων τιμών επί τον ίδιο ρητό είναι πάλι αντίστοιχες τιμές.

Συνεπώς, αν οι αντίστοιχες τιμές χ, ψ δύο μεγεθών συνδέονται με τη σχέση $\psi = \alpha\chi$ ($\alpha \neq 0$), τα μεγέθη αυτά είναι εὐθέως ανάλογα.

Αν δύο μεγέθη είναι εὐθέως ανάλογα, οι αντίστοιχες τιμές τους συνδέονται με μιὰ σχέση της μορφής $\psi = \alpha\chi$;

Δύο μεγέθη A και B έχουν αντίστοιχες τιμές αυτές που αναγράφονται στον παρακάτω πίνακα.

Τιμές μεγ. A	1	...	2	...	3	...	4	...	5	...	6	...	7	...	8	...	χ
Τιμές μεγ. B	2	...	4	...	6	...	8	...	10	...	12	...	14	...	16	...	ψ

Τα μεγέθη A και B είναι ανάλογα διότι, αν πολ/σουμε δύο αντίστοιχες τιμές π.χ. τις 2 και 4 με τον ίδιο αριθμό 2 ή 3 ή 4 κ.λ.π., βρίσκουμε πάλι αντίστοιχες τιμές.

Παρατηρούμε ότι: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \dots = \frac{\chi}{\psi}$. 'Απ' αυτά έχουμε:

$$\frac{\chi}{\psi} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \psi = 2\chi$$

Ωστε οι αντίστοιχες τιμές χ και ψ των ανάλογων μεγεθών A και B συνδέονται με μιὰ σχέση της μορφής $\psi = \alpha\chi$.

Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι δύο μεγέθη με αντίστοιχες τιμές χ και ψ είναι ευθέως ανάλογα, αν οι τιμές τους συνδέονται με μια σχέση της μορφής $\psi = \alpha\chi$ ($\alpha \neq 0$)

§ 94. Ιδιότητες.

1 Για τις τιμές των ανάλογων μεγεθών A και B είδαμε ότι:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \dots$$

Ώστε, αν δύο μεγέθη είναι ανάλογα, οι αντίστοιχες τιμές τους έχουν τον ίδιο λόγο.

Σημείωση: Στη συνάρτηση $\psi = \alpha\chi$ ($\alpha \neq 0$) διά $\chi=0$ έχουμε $\psi=0$. Έπειδή το $\frac{0}{0}$ δεν είναι ορισμένο, γι' αυτό εξαιρείται από τον παραπάνω κανόνα ο λόγος των αντίστοιχων τιμών 0 και 0.

2. Συγκρίνουμε το λόγο δύο τιμών του μεγέθους A με το λόγο των αντίστοιχων τιμών του μεγέθους B .

Λόγος των τιμών 2 και 6 του μεγέθους A : $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Λόγος των αντίστοιχων τιμών 4 και 12 του μεγέθους B : $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Συνεπώς, αν δύο μεγέθη είναι ευθέως ανάλογα, ο λόγος δύο τιμών του ενός ισούται με το λόγο των αντίστοιχων τιμών του άλλου.

Παραδείγματα ευθέως ανάλογων μεγεθών:

α) 'Ο αριθμός εργατών της ίδιας αποδόσεως και το έργο το οποίο εκτελούν στον ίδιο χρόνο.

β) Το βάρος ενός εμπορεύματος και η τιμή του.

γ) 'Η πλευρά ισόπλευρου τριγώνου, και η περίμετρος του.

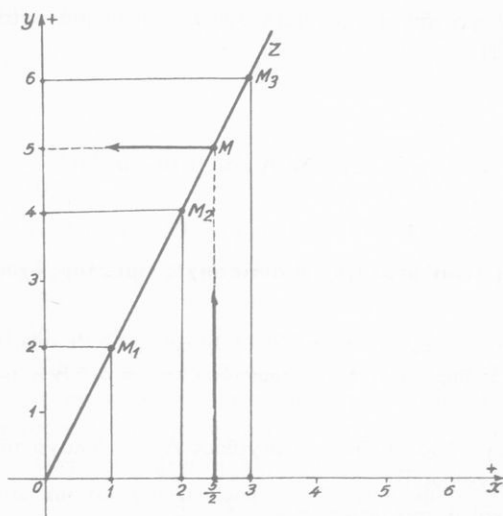
δ) 'Ο χρόνος και το διάστημα στην ισοταχή κίνηση.

ε) 'Η ακτίνα του κύκλου και το μήκος του.

§ 95. Γραφική παράσταση.

'Η γραφική παράσταση της σχέσης, που συνδέει τις τιμές ευθέως ανάλογων μεγεθών, είναι η γραφική παράσταση της συναρτήσεως $\psi = \alpha\chi$, την οποία έμελετήσαμε στην § 85 α και την επαναλαμβάνουμε με συντομία παρακάτω για τη σχέση $\psi = 2\chi$, η οποία συνδέει τις αντίστοιχες τιμές των ευθέως ανάλογων μεγεθών A και B .

Οι τετμημένες των σημείων του ημίαξονα ox παριστάνουν τιμές του μεγέθους A και οι τεταγμένες των σημείων του oy τιμές του μεγέθους B .



σχ. 63.

Τὰ σημεία M_1 , M_2 , M_3 , ... είναι οι γραφικές παραστάσεις (ή εικόνες) τῶν ζευγῶν $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 6)$, ... καὶ βρίσκονται πάνω στὴν ἡμιευθεία OZ .

Παρατήρηση :

Μὲ τὴν ἡμιευθεία OZ μπορούμε νὰ βροῦμε τιμὲς τοῦ μεγέθους B ἀντίστοιχες τιμῶν τοῦ A . Π.χ. Γιὰ νὰ βροῦμε ποιά τιμὴ τοῦ μεγέθους B ἀντίστοιχὴ στὴν τιμὴ $\frac{5}{2}$ τοῦ μεγέθους A , ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Στὸ σημείο, τὸ ὁποῖο ἔχει τετμημένη $\frac{5}{2}$, φέρνουμε κάθετο στὸν $οχ$, ἢ ὁποία τέμνει τὴν OZ στὸ σημείο M . Ἀπὸ τὸ σημείο M φέρνουμε $//$ πρὸς τὸν $οχ$ (ἢ $\perp$ στὸν $οψ$). Αὕτὴ τέμνει τὸν $οψ$ σ' ἓνα σημείο, τοῦ ὁποῖου ἡ τεταγμένη 5 εἶναι ἡ ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ $\frac{5}{2}$.

Ἀσκήσεις :

223. Ἐξετάστε ἂν τὰ ἐπόμενα μεγέθη εἶναι ἀνάλογα:
 - α) Ὁ χρόνος καὶ τὸ ἔργο ποὺ ἐκτελεῖ μιὰ ὁμάδα ἀπὸ ἐργάτες.
 - β) Ἡ ἡλικία ἑνὸς ἀτόμου καὶ τὸ βάρος του.
 - γ) Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν καὶ ὁ χρόνος ἐκτέλεσεως ἑνὸς ἔργου.
224. Βρεῖτε παραδείγματα εὐθέως ἀνάλογων μεγεθῶν.
225. Νὰ συμπληρωθεῖ ὁ παρακάτω πίνακας, νὰ βρεθεῖ ἡ σχέση, ποὺ συνδέει τίς ἀντίστοιχες τιμές, καὶ νὰ γίνῃ γραφικὴ παράσταση αὐτῆς.

Τιμὲς μήκους ὑφάσματος σὲ m							
Τιμὲς πωλήσεως ὑφάσματος σὲ δρχ.	10	150	400				

226. Για τὰ μεγέθη «πλευρὰ τετραγώνου» καὶ «περίμετρος αὐτοῦ» νὰ βρεθῇ ἡ σχέση, ποὺ συνδέει τὶς ἀντίστοιχες τιμὲς τους, καὶ νὰ γίνῃ γραφικὴ παράσταση αὐτῆς.

227. Νὰ γίνῃ τὸ ἴδιο καὶ γιὰ τὰ μεγέθη βάρος ἐμπορεύματος καὶ τιμὴ του, ἂν ἡ τιμὴ τῆς μονάδας βάρους εἶναι 40 δρχ.

228. Ἐξετάστε ἂν μεγέθη μὲ τιμὲς, ποὺ τὶς συνδέει ἡ σχέση τῆς μορφῆς $\psi = \alpha\chi + \beta$, εἶναι ἀνάλογα.

3. ΜΕΓΕΘΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ—ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ — ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΣΤΡΩΣ ΤΩΝ ΣΧΕΣΗΣ.

§ 96. **Πρόβλημα.** Μὲ ποιά ταχύτητα πρέπει νὰ κινηθεῖ ἓνα αὐτοκίνητο, γιὰ νὰ διανύσει μιὰ ἀπόσταση 100 χιλιομέτρων σὲ 1 ὥρα, 2 ὥρες, 2,5 ὥρες, 4 ὥρες κ.ο.κ.;

*Αν παραστήσουμε μὲ χ τὴν τιμὴ τοῦ χρόνου σὲ ὥρες καὶ μὲ ψ τὴν τιμὴ τῆς ταχύτητας σὲ χιλιόμετρα ἀνὰ ὥρα, θὰ ἔχουμε τὴ σχέση:

Ταχύτητα ἐπὶ χρόνο = διάστημα

$$\psi \cdot \chi = 100 \Leftrightarrow \psi = \frac{100}{\chi}$$

*Αν στὴ σχέση $\psi = \frac{100}{\chi}$ θέσουμε ὅπου χ τὶς τιμὲς 1, 2, 2,5, ..., βρίσκουμε τὶς ἀντίστοιχες τιμὲς τοῦ ψ 100, 50, 40, ... καὶ σχηματίζουμε τὸν παρακάτω πίνακα:

Τιμὲς τοῦ χρόνου σὲ ὥρες	χ	...	1	2	2,5	4	5	...	χ
Τιμὲς τῆς ταχύτητας σὲ km/h	ψ	...	100	50	40	25	20	...	$\frac{100}{\chi}$

*Απὸ τὸν πίνακα αὐτὸ παρατηροῦμε τὰ ἑξῆς:

1. Σὲ κάθε τιμὴ τοῦ χρόνου ἀντιστοιχεῖ μιὰ μόνο τιμὴ τῆς ταχύτητας (μονότιμο τῆς διαιρέσεως), ἄρα ἡ $\psi = \frac{100}{\chi}$ εἶναι συνάρτηση.

2. *Αν πολ/σουμε τὴν τιμὴ 2,5 τοῦ χρόνου ἐπὶ 2, βρίσκουμε 5. *Αν διαιρέσουμε τὴν τιμὴ 40 τῆς ταχύτητας (ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ 2,5) διὰ 2, βρίσκουμε 20, δηλαδή τὴν ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ 5.

Τὰ μεγέθη χρόνος καὶ ταχύτητα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὶς ιδιότητες αὐτές, λέγονται **ἀντιστρόφως ἀνάλογα** μεγέθη.

Δύο μεγέθη λέγονται **ἀντιστρόφως ἀνάλογα**, ὅταν ἔχουν ἀντίστοιχες τιμὲς τέτοιες ὥστε, ὅταν πολλαπλασιάζεται μιὰ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἐπὶ ἓναν ρητό ($\neq 0$) καὶ διαιρεῖται ἡ ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ ἄλλου μὲ τὸν ἴδιο ρητό, νὰ βρίσκονται νέες τιμὲς ἀντίστοιχες.

§ 97. Ιδιότητες.

α) Παρατηρούμε ότι: $1 \cdot 100 = 2 \cdot 50 = 2,5 \cdot 40 = \dots$

Άρα τὸ γινόμενο δύο ἀντίστοιχων τιμῶν τῶν ἀντιστρόφως ἀνάλογων μεγεθῶν εἶναι τὸ ἴδιο (σταθερό).

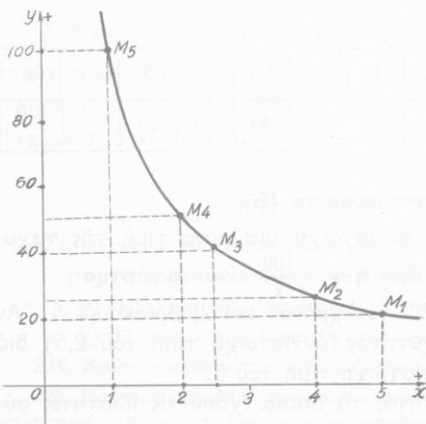
β) Οἱ προηγούμενες ἰσότητες γράφονται:

$$\frac{1}{\frac{1}{100}} = \frac{2}{\frac{1}{50}} = \frac{2,5}{\frac{1}{40}} = \dots$$

Ἐπομένως στὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα μεγέθη οἱ τιμές τοῦ ἑνὸς εἶναι ἀνάλογες πρὸς τὶς ἀντίστροφες τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν τοῦ ἄλλου.

γ) Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι ὁ λόγος τῶν τιμῶν 1 καὶ 4 τοῦ χρόνου εἶναι $\frac{1}{4}$ καὶ ὁ λόγος τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν 100 καὶ 25 τῆς ταχύτητας εἶναι $\frac{100}{25} = 4$, δηλαδή ὁ ἀντίστροφος τοῦ $\frac{1}{4}$.

Συνεπῶς στὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα μεγέθη ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀντίστροφο τοῦ λόγου τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν τοῦ ἄλλου.

§ 98. Γραφικὴ παράσταση τῆς σχέσης $\psi = \frac{100}{x}$ 

σχ. 64.

Οἱ τετμημένες τῶν σημείων τοῦ οχ παριστάνουν τιμές χρόνου σὲ ὥρες καὶ οἱ τεταγμένες τῶν σημείων τοῦ οψ τιμές ταχύτητας σὲ χιλιόμετρα ἀνὰ ὥρα.

Βρίσκουμε κατὰ τὰ γνωστά τὶς γραφικὲς παραστάσεις (εἰκόνες) τῶν ζευγῶν (5, 20), (4, 25), (2, 5, 40) ... καὶ παρατηροῦμε ὅτι τὰ σημεία $M_1, M_2, M_3, \dots$ δὲν βρίσκονται πάνω σὲ μιὰ εὐθεία, ἀλλὰ σὲ μιὰ καμπύλη, ἡ ὁποία λέγεται ὑπερβολή.

Ἐπειδὴ τὸ πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως $\psi = \frac{100}{x}$ εἶναι τὸ Q^+ , ἡ ὑπερβολὴ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓναν κλάδο, ὁ ὁποῖος βρίσκεται μέσα στὴ $\times$ χοψ.

Εφαρμογή :

§ 99. Δίνεται η συνάρτηση $\psi = \frac{1}{\chi}$.

α) Νά κατασκευασθεί πίνακας αντίστοιχων τιμών.

β) Νά εξετασθεί αν οι αντίστοιχες τιμές είναι τιμές αντιστρόφως ανάλογων μεγεθών.

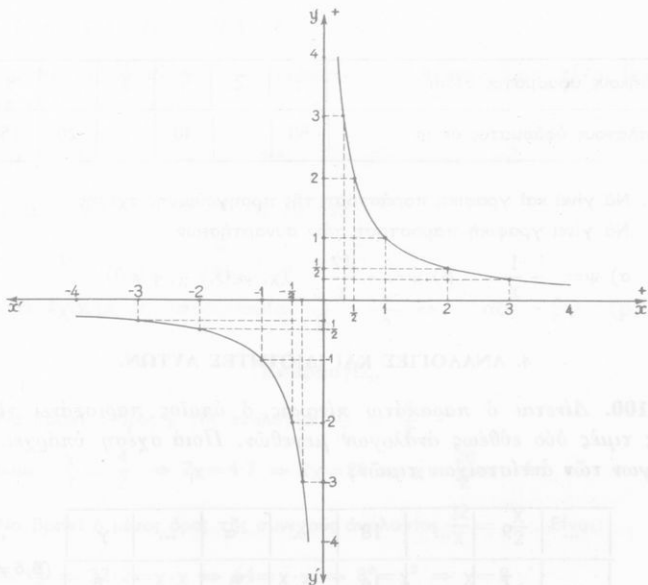
γ) Νά γίνει η γραφική παράσταση της $\psi = \frac{1}{\chi}$

α)

χ	...	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	2	3	...
ψ	...	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	1	2	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	...

β) Πολλαπλασιάζουμε την τιμή $\frac{1}{2}$ του χ επί 6 και βρίσκουμε την τιμή 3. Διαιρούμε την τιμή 2 του ψ (αντίστοιχη του $\frac{1}{2}$) διά 6 και βρίσκουμε την τιμή $\frac{1}{3}$. Οι τιμές όμως 3 και $\frac{1}{3}$ είναι αντίστοιχες, όπως προκύπτει από τον πίνακα.

Άρα οι αντίστοιχες τιμές είναι τιμές αντιστρόφως ανάλογων μεγεθών.



σχ. 65.

γ) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της συναρτήσεως $\psi = \frac{1}{\chi}$ αποτελείται από δύο καμπύλες συμμετρικές προς την αρχή των αξόνων, οι οποίες είναι οι δύο κλάδοι μιᾶς ὑπερβολῆς.

Γενικά ἡ συνάρτηση $\psi = \frac{\alpha}{\chi}$ ($\alpha, \chi, \psi \in \mathbb{Q}$ καὶ $\alpha, \chi, \psi \neq 0$) ὀρίζει ζεύγη τιμῶν ἀντιστρόφως ἀνάλογων μεγεθῶν.

Τὸ γινόμενο τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν εἶναι σταθερὸ ($\chi\psi = \alpha$). Ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ χ ἰσοῦται μὲ τὸν ἀντίστροφο λόγο τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν τοῦ ψ .

Γραφικῶς ἡ $\psi = \frac{\alpha}{\chi}$ παριστάνεται ἀπὸ μιὰ καμπύλη (μὲ ἓνα ἢ δύο κλάδους, ἀνάλογα μὲ τὸ πεδίο ὁρισμοῦ της), ποὺ λέγεται ὑπερβολὴ (ὀρθογώνια ὑπερβολή).

Ἀσκήσεις:

229. Ἐξετάστε ἂν τὰ παρακάτω μεγέθη εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα:

α) Ἀριθμὸς ἐργατῶν καὶ χρόνος γιὰ ἓνα ὁρισμένο ἔργο.

β) Ἡ πλευρὰ τριγώνου καὶ τὸ ἀντίστοιχο σ' αὐτὴ ὕψος, ὅταν παραμένει σταθερὸ τὸ ἐμβαδὸ του.

230. Βρεῖτε παραδείγματα ἀντιστρόφως ἀνάλογων μεγεθῶν.

231. Νὰ συμπληρώσετε τὸν παρακάτω πῖνακα καὶ νὰ γράψετε τὴ σχέση ποὺ συνδέει δύο ὁποιοσδήποτε ἀντίστοιχες τιμές, ἂν παραμένει σταθερὴ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑφάσματος.

Τιμὲς μήκους ὑφάσματος σὲ m		;	2		;	5		;	8		χ
Τιμὲς πλάτους ὑφάσματος σὲ m	80		;	40		;	20		15		ψ

232. Νὰ γίνῃ καὶ γραφικὴ παράσταση τῆς προηγούμενης σχέσης.

233. Νὰ γίνῃ γραφικὴ παράσταση τῶν συναρτήσεων:

$$\alpha) \psi = -\frac{1}{\chi}, \quad \beta) \psi = -\frac{12}{\chi} \quad (\chi, \psi \in \mathbb{Q}, \quad \chi, \psi \neq 0).$$

4. ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΥΤΩΝ.

§ 100. Δίνεται ὁ παρακάτω πῖνακας, ὁ ὁποῖος παριστάνει τὶς ἀντίστοιχες τιμές δύο εὐθέως ἀνάλογων μεγεθῶν. Ποιὰ σχέση ὑπάρχει μεταξὺ τῶν λόγων τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν;

...	9	...	18	...	α	...	γ
...	7	...	14	...	β	...	δ

($\beta, \delta \neq 0$)

$$\text{Ξέρουμε ότι } \frac{9}{7} = \frac{18}{14} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

‘Η ισότητα $\frac{9}{7} = \frac{18}{14}$ ή γενικά $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ ονομάζεται αναλογία.

‘Ωστε αναλογία είναι ή ισότητα δύο λόγων.

‘Η αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ γράφεται συμβολικά: $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ ή $[(\alpha, \beta), (\gamma, \delta)]$.

Οί α, γ , λέγονται **ήγούμενοι** όροι και οί β, δ **επόμενοι** όροι τής αναλογίας.

Οί β, γ λέγονται **μέσοι** όροι και οί α, δ **ἄκροι** όροι τής αναλογίας.

Σημείωση. Στην αναλογία $\frac{\chi}{\psi} = \frac{\varphi}{z}$ ό ψ λέγεται **μέσος ανάλογος** τών χ και z .

Στήν περίπτωση αυτή ή αναλογία λέγεται **συνεχής**.

Στή συνεχή αναλογία $\frac{8}{4} = \frac{4}{2}$ ό 4 είναι **μέσος ανάλογος** τών 8 και 2.

‘Ο μέσος ανάλογος δύο αριθμών λέγεται και **γεωμετρικός μέσος** αυτών.

§ 101. Ίδιότητες τών αναλογιών.

Στήν αναλογία $\frac{4}{2} = \frac{6}{3}$ παρατηρούμε ότι $4 \cdot 3 = 2 \cdot 6$. ‘Ομοίως στήν $\frac{9}{6} = \frac{6}{4}$ έχουμε $9 \cdot 4 = 6 \cdot 6$ ή $9 \cdot 4 = 6^2$

‘Αρα σέ μιὰ αναλογία τὸ γινόμενο τών ἄκρων ὄρων είναι ἴσο μετὸ γινόμενο τών μέσων ὄρων.

$$\text{Γενικά: } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \cdot \beta\delta = \frac{\gamma}{\delta} \cdot \beta\delta \Rightarrow \alpha\delta = \gamma\beta$$

‘Αν $\alpha\delta = \gamma\beta$ και $\beta\delta \neq 0$ θὰ έχουμε:

$$\alpha\delta = \gamma\beta \Rightarrow \frac{\alpha\delta}{\beta\delta} = \frac{\gamma\beta}{\beta\delta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

‘Ωστε έχουμε τήν ισοδυναμία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$ ($\beta, \delta \neq 0$).

‘Εφαρμογές.

α) Νὰ βρεθῇ ὁ ὄρος χ τής αναλογίας $\frac{\chi}{7} = \frac{4}{2}$.

‘Εχουμε: $\frac{\chi}{7} = \frac{4}{2} \Rightarrow 2\chi = 4 \cdot 7 \Rightarrow 2\chi = 28 \Rightarrow \chi = \frac{28}{2} = 14$

β) Νὰ βρεθῇ ὁ μέσος ὄρος τής συνεχούς αναλογίας $\frac{32}{\chi} = \frac{\chi}{2}$. Είναι:

$$\frac{32}{\chi} = \frac{\chi}{2} \Rightarrow 32 \cdot 2 = \chi \cdot \chi \Rightarrow 64 = \chi \cdot \chi \Leftrightarrow 8^2 = \chi^2 \Rightarrow \chi = 8$$

2. Έστω ή αναλογία $\frac{10}{5} = \frac{8}{4}$. Οι αντίστροφοι λόγοι είναι ίσοι και έχουμε την αναλογία $\frac{5}{10} = \frac{4}{8}$. Επίσης παρατηρούμε ότι, αν εναλλάξουμε τους μέσους όρους, προκύπτει μιὰ νέα αναλογία: $\frac{10}{8} = \frac{5}{4}$. Ομοίως αν εναλλάξουμε τους άκρους όρους: $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$.

Γενικά, αν έχουμε την αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0$), βρίσκουμε τις νέες αναλογίες: 1) $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$, 2) $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$, 3) $\frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$

Πραγματικά:

$$1) \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \alpha\delta = \beta\gamma \Rightarrow \frac{\alpha\delta}{\alpha\gamma} = \frac{\beta\gamma}{\alpha\gamma} \Rightarrow \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$2) \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \alpha\delta = \beta\gamma \Rightarrow \frac{\alpha\delta}{\gamma\delta} = \frac{\beta\gamma}{\gamma\delta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$$

$$3) \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \alpha\delta = \beta\gamma \Rightarrow \frac{\alpha\delta}{\alpha\beta} = \frac{\beta\gamma}{\alpha\beta} \Rightarrow \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Αν έχουμε μιὰ αναλογία με όρους διαφορετικούς από το 0 και α) αντιστρέψουμε τους λόγους β) εναλλάξουμε τους μέσους όρους γ) εναλλάξουμε τους άκρους όρους της, παίρνουμε νέες αναλογίες.

Έφαρμογή.

Από την αναλογία $\frac{-12}{-6} = \frac{-10}{-5}$ νά σχηματίσετε νέες αναλογίες.

1ο. Αντιστρέφουμε τους λόγους: $\frac{-6}{-12} = \frac{-5}{-10}$

2ο. Εναλλάσσουμε τους μέσους όρους: $\frac{-12}{-10} = \frac{-6}{-5}$

3ο. Εναλλάσσουμε τους άκρους όρους: $\frac{-5}{-6} = \frac{-10}{-12}$

3. Να προσθέσετε τή μονάδα στους λόγους τής αναλογίας $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ και νά εξετάσετε αν προκύπτει νέα αναλογία.

$$\text{Έχουμε: } \frac{3}{5} = \frac{6}{10} \Leftrightarrow \frac{3}{5} + 1 = \frac{6}{10} + 1 \Leftrightarrow \frac{3}{5} + \frac{5}{5} = \frac{6}{10} + \frac{10}{10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3+5}{5} = \frac{6+10}{10} \cdot \left(\frac{8}{5} = \frac{16}{10} \right)$$

Αν στους ήγούμενους όρους μιās αναλογίας προσθέσουμε τους επόμενους, έχουμε πάλι αναλογία.

Γενικά: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}$

*Αν αφαιρέσουμε από τους λόγους της αναλογίας $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τη μονάδα, έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} - 1 = \frac{\gamma}{\delta} - 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} - \frac{\delta}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha-\beta}{\beta} = \frac{\gamma-\delta}{\delta}$$

Να διατυπώσετε κανόνα για την ισοδυναμία:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha-\beta}{\beta} = \frac{\gamma-\delta}{\delta}$$

Έφαρμογές.

α) Να βρεθεί ο x από την αναλογία $\frac{28-x}{x} = \frac{2}{5}$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{28-x}{x} = \frac{2}{5} &\Leftrightarrow \frac{28-x+x}{x} = \frac{2+5}{5} \Leftrightarrow \frac{28}{x} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow 7x = 5 \cdot 28 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{5 \cdot 28}{7} \Leftrightarrow x = 5 \cdot 4 \Leftrightarrow x = 20. \end{aligned}$$

β) Να βρεθούν δύο αριθμοί, που να έχουν άθροισμα 50 και λόγο $\frac{12}{13}$

*Έστω x και ψ οι αριθμοί. Έχουμε $x + \psi = 50$ και $\frac{x}{\psi} = \frac{12}{13}$.

*Από την $\frac{x}{\psi} = \frac{12}{13} \Leftrightarrow \frac{x+\psi}{\psi} = \frac{12+13}{13} \Leftrightarrow \frac{50}{\psi} = \frac{25}{13} \Leftrightarrow 25\psi = 13 \cdot 50 \Leftrightarrow$

$$\psi = \frac{13 \cdot 50}{25} \Leftrightarrow \psi = 13 \cdot 2 \Leftrightarrow \psi = 26. \text{ Έπομένως } x = 50 - 26 = 24.$$

4. Να συγκρίνετε το λόγο $\frac{2+8}{3+12}$ με τους λόγους της αναλογίας $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$

Τί παρατηρείτε;

Παρατηρούμε ότι $\frac{2+8}{3+12} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

*Αρα $\frac{2}{3} = \frac{8}{12} = \frac{2+8}{3+12}$. Γενικά: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$ ($\beta \cdot \delta > 0$).

Πραγματικά: αν $\frac{\alpha}{\beta} = \lambda$, τότε και $\frac{\gamma}{\delta} = \lambda$. Έπομένως έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \beta \lambda \\ \gamma = \delta \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta \lambda + \delta \lambda \Rightarrow \alpha + \gamma = (\beta + \delta) \lambda \Rightarrow \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} = \lambda = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

*Αν έχουμε ίσους λόγους με όμοσημους παρονομαστές, ο λόγος που έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρονομαστή το άθροισμα των παρονομαστών είναι ίσος με τους αρχικούς λόγους.

Δηλαδή γενικότερα

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3} = \dots = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots}$$

Σημείωση. *Αν οι παρονομαστές δὲν εἶναι ὁμόσημοι, εἶναι δυνατόν νὰ γίνουν ὁμόσημοι.

$$\text{Π.χ. } \frac{-2}{4} = \frac{5}{-10} = \dots$$

$$\text{*Εχουμε } \frac{-2}{4} = \frac{5(-1)}{-10 \cdot (-1)} = \dots \Leftrightarrow \frac{-2}{4} = \frac{-5}{10} = \dots$$

*Εφαρμογή.

$$\text{*Αν } \frac{\alpha}{-5} = \frac{\beta}{-7} = \frac{\gamma}{-12} \text{ καὶ } \alpha + \beta + \gamma = 48, \text{ νὰ βρεθοῦν οἱ } \alpha, \beta, \gamma.$$

$$\text{*Εχουμε } \frac{\alpha}{-5} = \frac{\beta}{-7} = \frac{\gamma}{-12} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{-5 - 7 - 12} = \frac{48}{-24} = -2$$

$$\text{*Αρα } \frac{\alpha}{-5} = -2 \Rightarrow \alpha = (-5) \cdot (-2) \Rightarrow \alpha = 10$$

$$\frac{\beta}{-7} = -2 \Rightarrow \beta = (-7) \cdot (-2) \Rightarrow \beta = 14$$

$$\frac{\gamma}{-12} = -2 \Rightarrow \gamma = (-12) \cdot (-2) \Rightarrow \gamma = 24.$$

*ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

234. Νὰ βρεθοῦν οἱ ἀγνωστοὶ ὅροι τῶν παρακάτω ἀναλογιῶν:

$$\alpha) \frac{-10}{x} = \frac{5}{4}, \quad \delta) \frac{x}{-4} = \frac{-25}{x}, \quad \zeta) \frac{8}{-4} = \frac{4}{x}, \quad \iota) \frac{6}{-3} = \frac{x}{2}$$

$$\beta) \frac{-9}{6} = \frac{6}{x}, \quad \epsilon) \frac{x}{-9} = \frac{-9}{27}, \quad \eta) \frac{2}{5} = \frac{6}{\psi}, \quad \iota\alpha) \frac{27}{42} = \frac{\psi}{70}$$

$$\gamma) \frac{2}{\beta} = \frac{10}{35}, \quad \sigma\tau) \frac{16}{\gamma} = \frac{\gamma}{9}, \quad \theta) \frac{4,5}{\psi} = \frac{\psi}{2}, \quad \iota\beta) \frac{-4}{7} = \frac{\gamma}{56}, \quad \iota\gamma) \frac{\alpha}{15} = \frac{15}{12}.$$

235. Νὰ ἀποδείξετε ὅτι ἀποτελοῦν ἀναλογία οἱ τετράδες:

$$\alpha) (15, 35, 9, 21) \quad \beta) (-12, 34, -18, 51)$$

$$\gamma) (9, 21, 21, 49) \quad \delta) (x, \psi, x^2, x\psi)$$

236. Νὰ βρεθεῖ ὁ μέσος ἀνάλογος τῶν 16 καὶ 25.

237. Νὰ βρεθοῦν οἱ ἡγούμενοι ὅροι τῆς ἀναλογίας

$$\frac{x}{6} = \frac{\psi}{7} \quad \alpha) \text{ ἂν } x + \psi = 65 \text{ καὶ } \beta) \text{ ἂν } x - \psi = 78.$$

238. Νὰ βρεθοῦν δύο ἀριθμοί, ποὺ νὰ ἔχουν ἀθροισμα 560 καὶ λόγος $\frac{2}{5}$.

239. Νὰ βρεθοῦν δύο ἀριθμοί, ποὺ νὰ ἔχουν διαφορά 200 καὶ λόγος $\frac{7}{5}$.

240. *Αν $\frac{x}{2} = \frac{\psi}{3} = \frac{z}{5}$ καὶ $x + \psi + z = 200$, νὰ βρεθοῦν τὰ x, ψ, z .

241. Νὰ βρεθοῦν οἱ ἐπόμενοι ὅροι τῶν ἴσων λόγων $\frac{2}{x} = \frac{3}{\psi} = \frac{4}{z}$, ἂν $x + \psi + z = 81$.

242. *Αν $\frac{x}{\psi} = \frac{3}{4}$ καὶ $x + \psi = 56$, νὰ βρεθοῦν τὰ x καὶ ψ .

243. *Αν $\frac{x-3}{x} = \frac{\psi-4}{\psi}$ καὶ $x + \psi = 84$, νὰ βρεθοῦν τὰ x καὶ ψ .

Β. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

1. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΠΛΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

§ 102. Πρόβλημα 1^ο. *Αν 6 εργάτες σκάβουν 3 στρέμματα σε 8 ώρες, πόσα στρέμματα θα σκάψουν 14 εργάτες σε 8 ώρες; (όλοι οι εργάτες έχουν την ίδια απόδοση).

*Εστω ότι στην τιμή «14 εργάτες» αντιστοιχεί η τιμή «χ στρέμματα». Σχηματίζουμε τὸν παρακάτω πίνακα.

Πλήθος εργατῶν	6	14	2πλάσιοι εργ. 12	3πλάσιοι, εργ. 18	...
Τιμές έργου σε στρέμματα	3	χ	2πλάσια στρέμ. 6	3πλάσια στρέμ. 9	...

*Επειδὴ τὰ μεγέθη πλήθος εργατῶν καὶ ἔργο εἶναι εὐθέως ἀνάλογα, ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἐνὸς εἶναι ἴσος μὲ τὸ λόγο τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν τοῦ ἄλλου, δηλαδὴ $\frac{6}{14} = \frac{3}{\chi}$

$$\text{*Επομένως } \frac{6}{14} = \frac{3}{\chi} \Leftrightarrow 6\chi = 3 \cdot 14 \Leftrightarrow 6\chi = 42 \Leftrightarrow \chi = 7.$$

*Αρα οἱ 14 εργάτες θὰ σκάψουν 7 στρέμματα σε 8 ὥρες.

Σημείωση 1.

Τὸ παραπάνω πρόβλημα μποροῦμε νὰ τὸ κατατάξουμε ὡς ἑξῆς:

Πλήθος εργατῶν τῆς ἴδιας ἀποδόσεως	Τιμές έργου σε στρέμ.	Τιμές χρόνου σε ὥρες
6	3	8
14	χ	8

ἢ πιὸ ἀπλᾶ

6 εργάτες → 3 στρέμ.

14 » → χ »

Σημείωση 2.

Σχηματίζουμε τὴν ἀναλογία $\frac{6}{3} = \frac{14}{\chi}$, ἂν χρησιμοποιήσουμε τὴν ιδιότητα: «Στὰ εὐθέως ἀνάλογα ποσὰ οἱ λόγοι τῶν ἀντίστοιχων τιμῶν εἶναι ἴσοι». Ἀλλὰ καὶ ἀπὸ αὐτὴ τὴν ἀναλογία βρίσκουμε $\chi = 7$.

Πρόβλημα 2^ο. "Αν 10 εργάτες σκάβουν σε 12 ημέρες 50 στρέμματα, 8 εργάτες σε πόσες ημέρες θα σκάψουν τα 50 στρέμματα; (όλοι οι εργάτες έχουν την ίδια απόδοση και εργάζονται τις ίδιες ώρες κάθε ημέρα).

"Εστω ότι οι 8 εργάτες θα σκάψουν σε x ημέρες τα 50 στρέμματα.

Σχηματίζουμε τον πίνακα:

Πλήθος εργατών	10	8		20	5
Τιμές χρόνου σε ημέρες	12	x		6	24

Επειδή τα μεγέθη πλήθος εργατών και χρόνος είναι αντιστρόφως ανάλογα, ο λόγος δύο τιμών του ενός είναι ίσος με τον αντίστροφο λόγο των αντίστοιχων τιμών του άλλου.

"Αρα έχουμε την αναλογία $\frac{10}{8} = \frac{x}{12}$, από την οποία βρίσκουμε $x = 15$.

Επομένως οι 8 εργάτες θα σκάψουν σε 15 ημέρες τα 50 στρέμματα.

Σημείωση 1.

"Αν χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα «στα αντιστρόφως ανάλογα μεγέθη τα γινόμενα των αντίστοιχων τιμών είναι ίσα», έχουμε $10 \cdot 12 = 8 \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{10 \cdot 12}{8} \Leftrightarrow$

$$x = \frac{120}{8} \Leftrightarrow x = 15.$$

Σημείωση 2.

Μπορούμε να κατατάξουμε το παραπάνω πρόβλημα και ως εξής:

Πλήθος εργατών της ίδιας απόδοσης	Τιμές χρόνου σε ημέρες	Τιμές έργου σε στρέμματα
10	12	50
8	x	50

10 εργάτες $\rightarrow$ 12 ημέρες

ή

8 » $\rightarrow x$ »

Προβλήματα:

244. Για τα $\frac{3}{4}$ ενός έργου διατέθηκε το ποσό των 9.000 δρχ. Τί ποσό χρημάτων αντιστοιχεί στα $\frac{5}{6}$ του ίδιου έργου;

245. Για 100 ένδυμασιές χρειάζονται 300 m μήκος από ένα ύφασμα πλάτους 1,40 m. Για 125 όμοιες ένδυμασιές πόσο πρέπει να είναι τὸ πλάτος τοῦ ύφασματος, ἂν τὸ μήκος παραμένει σταθερό;

246. Ἐνα αὐτοκίνητο κινεῖται διατηρώντας γιὰ $\frac{8}{3}$ ὥρες ταχύτητα 67,5 km/h. Πόσα km θὰ διανύσει μὲ τὴν ἴδια ταχύτητα σὲ $\frac{32}{9}$ ὥρες;

247. Ἐνα αὐτοκίνητο ἔχει ταχύτητα 56 km/h καὶ διανύει ἀπόσταση 182 km. Σὲ πόσες ὥρες θὰ διανύσει τὴν ἀπόσταση αὐτή, ἂν ἐλαττώσει τὴν ταχύτητά του κατὰ τὸ $\frac{1}{14}$ τῆς;

248. 50 στρατιῶτες ἔχουν τροφὲς γιὰ 30 ἡμέρες. Πόσες ἡμέρες θὰ περάσουν μὲ αὐτές, ἂν αὐξηθεῖ ἡ μερίδα κατὰ τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς;

249. Συμφωνήθηκε νὰ τελειώσει ἓνα ἔργο σὲ 25 ἡμέρες. Ἐὰν 6 ἐργάτες τέλειωσαν τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ ἔργου σὲ 10 ἡμέρες, πόσοι ἐργάτες πρέπει νὰ χρησιμοποιηθοῦν, γιὰ νὰ τελειώσει τὸ ὑπόλοιπο ἔργο στὴν καθορισμένη προθεσμία;

250. 12 ἄνδρες ἐκτελοῦν ἓνα ἔργο σὲ 20 ἡμέρες. Σὲ πόσες ἡμέρες θὰ ἐκτελέσουν τὸ ἴδιο ἔργο 20 γυναῖκες, ἂν ἡ ἐργασία 4 ἀνδρῶν ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν ἐργασία 5 γυναικῶν;

2. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΣΟΣΤΩΝ

§ 103. Πρόβλημα 1^ο. Ἐνα ἐμπόρευμα κόστους 800.000 δραχ. πουλήθηκε μὲ κέρδος 12%. Πόσο ἦταν τὸ κέρδος;

Ἄν καλέσουμε x δραχ. τὸ κέρδος, ἐπειδὴ 12% σημαίνει «σὲ 100 μονάδες κόστους τὸ κέρδος εἶναι 12» καὶ τὸ κέρδος θεωρεῖται ἀνάλογο τοῦ κόστους, ἔχουμε:

Κόστος	100	800.000
Κέρδος	12	x

$$\Rightarrow \frac{100}{800.000} = \frac{12}{x} \Rightarrow x = 96.000$$

Ἄρα τὸ κέρδος εἶναι 96.000 δραχ.

Τὸ κέρδος λέγεται ποσοστὸ ἐπὶ τοῦ κόστους.

Στὴν πράξη καὶ στὴν οἰκονομικὴ ζωὴ ἓνα μέγεθος, ποῦ ὀνομάζεται **ποσοστό**, θεωρεῖται ἀνάλογο ἐνὸς ἄλλου μεγέθους, τὸ ὁποῖο καλεῖται **ἀρχικὸ μέγεθος** ἢ **ἀρχικὸ ποσὸ**.

Τὸ ποσοστὸ καὶ τὸ ἀρχικὸ ποσὸ εἶναι ὁμοειδῆ μεγέθη, συνήθως νομισματικά ἢ μεγέθη βάρους ἢ ὅγκου.

Συμβολίζουμε μὲ A τὸ ἀρχικὸ μέγεθος καὶ μὲ Π τὸ ποσοστὸ.

Τὸ ποσοστὸ, ποῦ ἀντιστοιχεῖ σὲ 100 μονάδες ἀρχικοῦ ποσοῦ, λέγε-

τα «ποσόστωση» ή απλώς «ποσοστό» ἐπὶ τοῖς ἑκατό. Τὸ συμβολίζουμε μὲ τὸ ϵ καὶ γράφουμε $\epsilon\%$.

(Μποροῦμε νὰ ἔχουμε καὶ ποσοστὸ ἐπὶ 1000 μονάδων ἀρχικοῦ ποσοῦ, ὁπότε γράφουμε $\epsilon\text{‰}$).

Τὸ ἐμπορικὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία εἶναι ποσοστὰ ἐπὶ τῆς τιμῆς κόστους, ἢ ὁποία εἶναι γι' αὐτὰ ἀρχικὸ ποσὸ, (ἐκτὸς ἂν ὀρίζονται ρητῶς ἐπὶ τῆς τιμῆς πωλήσεως).

Τὰ ἐξοδα γιὰ μεταφορὰ - ἀποθήκευση - δασμούς, μὲ τὰ ὁποία ἐπιβαρύνεται ἓνα προϊόν, εἶναι ποσοστὸ μὲ ἀρχικὸ ποσὸ τὴν τιμὴ τῆς ἀγορᾶς.

Ἡ ἀμοιβὴ ἑνὸς ἐμπορικοῦ ἀντιπροσώπου εἶναι ποσοστὸ μὲ ἀρχικὸ ποσὸ τὴν τιμὴ πωλήσεως τῶν προϊόντων, τὰ ὁποία διαθέτει.

Τὸ ἀπόβαρο (βάρος συσκευασίας ἑνὸς προϊόντος) εἶναι ποσοστὸ μὲ ἀρχικὸ ποσὸ τὸ μεικτὸ βάρος.

Τὸ βάρος ἑνὸς διαλυμένου σώματος εἶναι ποσοστὸ μὲ ἀρχικὸ ποσὸ τὸ βάρος τοῦ διαλύματος.

Ἄν A , Π , $\epsilon\%$ εἶναι ἀντιστοίχως τὸ ἀρχικὸ ποσὸ, τὸ ποσοστὸ καὶ ἡ ποσόστωση (ποσοστὸ ἐπὶ τοῖς ἑκατό) ἔχουμε τὸν πίνακα:

Ἀρχικὸ ποσὸ	A	100	καὶ ἀπ' αὐτὸν τὴν ἀναλογία $\frac{A}{100} = \frac{\Pi}{\epsilon}$, ἀπὸ τὴν ὁποία παίρνουμε τοὺς τύπους $A = \frac{100}{\epsilon} \cdot \Pi$, $\Pi = \frac{\epsilon}{100} \cdot A$.
Ποσοστὸ	Π	ϵ	

Πρόβλημα 2^ο. Ἐνα ἐμπόρευμα πωλήθηκε 805.000 δρχ. μὲ κέρδος 15%. Πόσο κόστιζε τὸ ἐμπόρευμα;

Ἄν x δρχ. εἶναι τὸ κόστος, τὸ ποσοστὸ θὰ εἶναι 805.000— x δρχ. Κατατάσσουμε αὐτὰ σὲ πίνακα, γράφουμε τὴν ἀναλογία καὶ βρίσκουμε τὸν x .

A	100	x	$\Rightarrow \frac{x}{100} = \frac{805000-x}{15} \Leftrightarrow \dots x = 700000$
Π	15	805000— x	

Ἐπειδὴ ἔχουμε $\frac{A}{100} = \frac{\Pi}{\epsilon} = \frac{A+\Pi}{100+\epsilon}$ (ιδιότητα τῶν ἀναλογιῶν), τὰ A , $A+\Pi$ εἶναι μεγέθη ἀνάλογα, καθὼς ἐπίσης καὶ τὰ Π , $A+\Pi$. Τὸ $A+\Pi$ εἶναι τὸ ἀρχικὸ ποσὸ, τὸ ὁποῖο ἔχει αὐξηθεῖ κατὰ τὸ ἀντίστοιχο ποσοστὸ Π .

Μποροῦμε λοιπὸν νὰ χρησιμοποιήσουμε καὶ τὸν ἑξῆς πίνακα:

A	100	x	$\Rightarrow \frac{x}{805000} = \frac{100}{115} \Leftrightarrow 115x = 805.000 \cdot 100$
$A+\Pi$	115	805000	

$$\Leftrightarrow \chi = \frac{805.000 \cdot 100}{115} \Leftrightarrow \chi = 7000 \cdot 100 \Leftrightarrow \chi = 700.000$$

*Αρα τὸ κόστος εἶναι 700.000 δραχ.

Σημείωση 1. Ἀπὸ τὴν ἀναλογία $\frac{A}{100} = \frac{\Pi}{\epsilon} \Rightarrow \frac{A}{100} = \frac{A-\Pi}{100-\epsilon}$ καὶ $\frac{\Pi}{\epsilon} = \frac{A-\Pi}{100-\epsilon}$. Τὸ $A-\Pi$ εἶναι τὸ ἀρχικὸ ποσὸ ἐλαττωμένο κατὰ τὸ ἀντίστοιχο ποσοστὸ. Τὸ μέγεθος αὐτὸ εἶναι ἀνάλογο καὶ πρὸς τὸ ἀρχικὸ ποσὸ A καὶ πρὸς τὸ ποσοστὸ Π . Ἀπὸ τὶς προηγούμενες ἀναλογίες προκύπτουν καὶ οἱ παρακάτω τύποι γιὰ τὰ A καὶ Π .

$$A = \frac{(A-\Pi) \cdot 100}{100-\epsilon}, \quad \Pi = \frac{(A-\Pi) \cdot \epsilon}{100-\epsilon} \text{ καὶ ἀντιστοίχως οἱ: } A = \frac{(A+\Pi) \cdot 100}{100+\epsilon},$$

$$\Pi = \frac{(A+\Pi) \cdot \epsilon}{100+\epsilon} \quad (\text{Πρόβλ. 2})$$

Σημείωση 2. Οἱ παραπάνω ὀριζόντιοι πίνακες χρησιμοποιοῦνται καὶ κατακόρυφα.

Πρόβλημα 3^ο. Τὸ καθαρὸ βάρος ἑνὸς ἐμπορεύματος εἶναι 1067 kgr*. Ἄν τὸ ἀπόβαρό του εἶναι 3%, πόσο εἶναι τὸ μεικτὸ βάρος του καὶ πόσο τὸ ἀπόβαρό του;

α) Ἐστω χ kgr* τὸ μεικτὸ βάρος. Τὸ ἀντίστοιχο ἀπόβαρο εἶναι $\chi - 1067$ kgr*

A	Π
100	3
χ	$\chi - 1067$

$$\Rightarrow \frac{\chi}{100} = \frac{\chi - 1067}{3} \Leftrightarrow \dots \chi = 1100$$

Μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσουμε τὸν πίνακα:

A	Π
100	97
χ	1067

$$\Rightarrow \frac{\chi}{100} = \frac{1067}{97} \Leftrightarrow 97\chi = 106700 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \chi = \frac{106700}{97} \Leftrightarrow \chi = 1100$$

Αρα τὸ μεικτὸ βάρος εἶναι 1100 kgr.

β) Τὸ ἀπόβαρο εἶναι $1100 - 1067 = 33$ kgr*.

Μποροῦμε νὰ τὸ βροῦμε καὶ ἀπ' εὐθείας.

Εστω x kg τὸ ἀπόβαρο. *Έχουμε τὸν πίνακα.

Π	A-Π
3	97
x	1067

$$\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{1067}{97} \Leftrightarrow x = \frac{1067 \cdot 3}{97} \Leftrightarrow x = 11.3 \Leftrightarrow x = 33$$

Πρόβλημα 4^ο. *Ένας ἔμπορος ἀγοράζει ἐμπόρευμα καὶ πληρώνει 82.000 δρχ. *Έχει ἔξοδα 12% (ἐπὶ τῆς τιμῆς ἀγορᾶς) καὶ πουλᾷ μὲ κέρδος 15% (ἐπὶ τοῦ κόστους). Πόσες δρχ. θὰ πουλήσει τὸ ἐμπόρευμα;

*Υπολογίζουμε πρῶτα τὸ κόστος· ἔστω ὅτι αὐτὸ εἶναι x δρχ.

A	A+Π
100	112
82000	x

$$\Rightarrow x = 91840$$

*Υπολογίζουμε τώρα τὴν τιμὴ πωλήσεως ψ δρχ.

A	A+Π
100	115
91840	ψ

$$\Rightarrow \frac{\psi}{115} = \frac{91840}{100} \Leftrightarrow \psi = \frac{91840 \cdot 115}{100} \Leftrightarrow \psi = 105616$$

*Άρα ἡ τιμὴ πωλήσεως τοῦ ἐμπορεύματος εἶναι 105.616 δρχ.

Παρατήρηση. Στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα καταλήγουμε, ἂν κάνουμε τὴν κατάταξη:

x δρχ. πώληση 82000 δρχ. ἀγορά

100 δρχ. ἀγορά 112 δρχ. κόστος

100 δρχ. κόστος 115 δρχ. πώληση καὶ σχηματίζουμε τὴν ἔξισωση:

$x \cdot 100 \cdot 100 = 82000 \cdot 112 \cdot 115$ ἢ ὅποια, ὅταν ἐπιλυθεῖ, δίνει

$$x = \frac{82000 \cdot 112 \cdot 115}{100 \cdot 100} \Leftrightarrow x = \frac{1056160000}{10000} \Leftrightarrow x = 105616.$$

Προβλήματα:

251. Ένας έμπορος πούλησε έμπορεύμα με κέρδος 20% και εισέπραξε 360.000 δρχ. Ποιά είναι ή αξία του έμπορεύματος;
252. Ένας έμπορος πούλησε έμπορεύμα με κέρδος 15% και κέρδισε 60.000 δρχ. Ποιά είναι ή αξία του έμπορεύματος;
253. Τò μεικτό βάρος ενός προϊόντος είναι 375 kg* και τò καθαρό 300 kg*. Πόσο τοίς εκατό είναι τò άπόβαρο α) επί του μικτού βάρους και β) επί του καθαρού βάρους;
254. Ένα αντίκειμένο αξίας 3750 δρχ. πουλήθηκε με κέρδος 25% επί του κόστους. Ποιά είναι ή τιμή πωλήσεως και πόσο είναι τò κέρδος;
255. Έάν τò κέρδος με 20% είναι 4940 δρχ, ποιά είναι ή τιμή πωλήσεως και ποιό τò κόστος;
256. Μιά τηλεόραση πουλήθηκε με έκπτωση 30% 4550 δρχ. Πόσο ήταν τò κόστος και πόση ή έκπτωση;
257. Ένας έμπορος πουλά τόν τ. πήχη όσο αγοράζει τò m. Πόσο τοίς εκατό κερδίζει;
258. Έάν ένας έμπορος πουλά με κέρδος 25 % επί της τιμής αγοράς, πόσο τοίς εκατό κερδίζει επί της τιμής πωλήσεως;
259. Έάν ένας έμπορος πουλούσε τò έμπορεύμα του 11500 δρχ, θά κέρδιζε 15% επί του κόστους του. Τò πούλησε όμως 9500 δρχ. Πουλήθηκε τò έμπορεύμα πάνω ή κάτω άπό τò κόστος του και πόσο τοίς εκατό επί του κόστους;
260. Ένας έμπορος πούλησε ένα αντίκειμένο με ζημία 7%. Έάν τò πουλούσε με κέρδος 3%, θά έπαιρνε 750 δρχ. περισσότερο. Ποιό ήταν τò κόστος του αντίκειμένου;
261. Πόσο άγοράστηκε ένα έμπορεύμα, που έπιβαρύνθηκε με έξοδα 10% και πουλήθηκε με κέρδος 11% 183150 δρχ.;
262. Δύο αντίκειμένα κοστίζουν μαζί 5000 δρχ. και πουλήθηκαν τò α' με κέρδος 20% και τò β' με κέρδος 15%. Άν τò όλικό κέρδος ήταν 900 δρχ., νά βρεθεί τò κόστος του καθενός.
263. Ένας έμπορος ύπολογίζει νά κερδίσει 25% επί τού κόστους ενός έμπορεύματος. Τò πούλησε όμως με υπερτίμηση 5 % επί της τιμής που έγραφε πάνω. Πόσο τοίς εκατό κέρδισε επί του κόστους;
264. Ένας έμπορος γράφει πάνω σ' ένα έμπορεύμα τιμή κατά 30% άνωτερη άπό τò κόστος και τò πουλά με έκπτωση κερδίζοντας έτσι 23,50% επί του κόστους. Ποιά είναι ή έκπτωση επί της τιμής που γράφει πάνω;

3. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

§ 104. Πρόβλημα.

3 m ³ τοίχον χτίζονται άπό	5 χτίστες σέ	2 ήμέρες
6 m ³ τοίχον χτίζονται άπό	; χτίστες σέ	2 ήμέρες
9 m ³ τοίχον χτίζονται άπό	; χτίστες σέ	2 ήμέρες
6 m ³ τοίχον χτίζονται άπό	5 χτίστες σέ ;	ήμέρες
12 m ³ τοίχον χτίζονται άπό	5 χτίστες σέ ;	ήμέρες

Νά συμπληρωθεΐν οί τιμές «πλήθος χτιστών» και «τιμή χρόνου».

Οί απαντήσεις είναι με τη σειρά 10 χτίστες, 15 χτίστες, 4 ημέρες, 8 ημέρες, διότι το μέγεθος «τιμή έργου» είναι ανάλογο με καθένα από τα μεγέθη «πλήθος εργατών», «τιμή χρόνου», εφόσον το άλλο διατηρεί την ίδια τιμή (παραμένει σταθερό).

Λέμε ότι το μέγεθος «τιμή χρόνου» είναι ανάλογο προς το ζεύγος των μεγεθών «πλήθος εργατών», «τιμή χρόνου».

Σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα αντίστοιχων τιμών.

Τιμή έργου χ	3	6	9	6	12
Πλήθος εργατών ψ	5	10	15	5	5
Τιμή χρόνου z	2	2	2	4	8
Γινόμενο $\psi \cdot z$	10	20	30	20	40

καί παρατηρούμε ότι, όταν πολλαπλασιάζεται μια τιμή του χ επί έναν αριθμό, πολλαπλασιάζεται μια από τις τιμές ψ ή z με τον ίδιο αριθμό (εφόσον η άλλη παραμένει σταθερή). Έπομένως το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών $\psi \cdot z$ πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο αριθμό (σύμφωνα με την προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού).

Δηλαδή το μέγεθος χ είναι ανάλογο προς το μέγεθος $\psi \cdot z$. 'Απ' αυτά συμπεραίνουμε ότι:

1. "Ένα μέγεθος είναι ανάλογο προς ένα ζεύγος, μια τριάδα, κ.ο.κ. μεγεθών, όταν είναι ανάλογο προς καθένα από αυτά, εφόσον τα άλλα διατηρούνται σταθερά.

2. "Αν ένα μέγεθος είναι ανάλογο προς ένα ζεύγος, μια τριάδα κ.ο.κ. μεγεθών, είναι ανάλογο προς το γινόμενό τους.

"Αν στο ζεύγος ή την τριάδα υπάρχει ένα μέγεθος π.χ. το ψ αντίστροφως ανάλογο του χ , τότε το αντικαθιστούμε με εκείνο, το οποίο έχει τις αντίστροφες τιμές, δηλαδή το $\frac{1}{\psi}$, γιατί, όπως μάθαμε, οι τιμές του χ είναι ανάλογες προς τις αντίστροφες των τιμών του ψ .

Εφαρμογές. 1. "Ένα οικόπεδο έχει μήκος 32m, πλάτος 30m και τιμή 480.000 δρχ. Πόσο πλάτος θα είχε, αν είχε μήκος 20m και τιμή 450000 δρχ.;

Καλούμε χ δρχ. το ζητούμενο και κατατάσσουμε σε πίνακα τις αντίστοιχες τιμές, ορίζοντάς.

Πλάτος	Μήκος	Χρηματική τιμή
30	32	480000
χ	20	450000

Συγκρίνουμε το μέγεθος του άγνωστου με το μέγεθος του ζεύγους των γνωστών.

Επειδή το μέγεθος πλάτος είναι αντιστρόφως ανάλογο του μήκους και ευνθέως ανάλογο της χρημ. τιμής, είναι ανάλογο του γινομένου $\frac{1}{\text{μήκος}} \cdot \text{χρημ. τιμή}$.

$$\text{Συνεπώς έχουμε την αναλογία} \quad \frac{30}{\chi} = \frac{\frac{1}{32} \cdot 480000}{\frac{1}{20} \cdot 450000}$$

$$\text{Από την αναλογία αυτή προκύπτει ή } \frac{\chi}{30} = \frac{32 \cdot 450000}{20 \cdot 480000} \text{ ή } \chi = 30 \cdot \frac{32 \cdot 450000}{20 \cdot 480000} (1).$$

Τελικά βρίσκουμε $\chi = 45$. Άρα το οικόπεδο θα είχε πλάτος 45m.

Παρατήρηση. Η εξίσωση (1) δικαιολογεί τον γνωστό κανόνα από το Δημοτικό Σχολείο: ο χ ισούται με τον υπεράνω του αριθμό επί τα κλάσματα κάθε στήλης αντιστραμμένα, όταν το ποσό είναι ανάλογο προς το ποσό του άγνωστου, και επί τα κλάσματα όπως είναι, όταν το ποσό είναι αντιστρόφως ανάλογο.

2. 8 εργάτες τελειώνουν ένα έργο σε 12.ήμερες, όταν εργάζονται 7 ώρες την ημέρα. Σε πόσες ημέρες 18 εργάτες θα τελειώσουν το 3πλάσιο του έργου, όταν εργάζονται 8 ώρες την ημέρα. (Οι εργάτες είναι της ίδιας αποδοσίας).

Αν εργαστούμε όπως προηγουμένως, έχουμε:

Ήμέρες εργασίας	Πλήθος εργατών	Ώρες εργασίας	Έργο
12	8	7	1
χ	18	8	3

Επειδή το μέγεθος «ήμ. έργο» είναι αντιστρ. ανάλογο του «πλήθους εργατών» και του «ώρες εργασίας» και ανάλογο του «έργου», θα είναι

$$\text{ανάλογο του γινομένου : } \frac{1}{\text{πλ. εργ.}} \cdot \frac{1}{\text{ώρ. εργ.}} \cdot \text{«έργο»}.$$

ήμ. εργασίας

$$\begin{aligned} \text{Έπομένως } 12 &\rightarrow \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot 1 \\ \chi &\rightarrow \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{8} \cdot 3 \end{aligned} \Rightarrow \frac{12}{\chi} = \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot 1}{\frac{1}{18} \cdot \frac{1}{8} \cdot 3}$$

$$\Leftrightarrow \chi \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} = 12 \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{8} \cdot 3 \Leftrightarrow \frac{\chi}{8 \cdot 7} = \frac{12 \cdot 3}{18 \cdot 8} \Leftrightarrow \chi = 12 \cdot \frac{8}{18} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{3}{1}$$

$\Leftrightarrow \chi = 14$. Το τριπλάσιο έργο θα τελειώσει σε 14 ημέρες.

3. Ένας έμπορικός αντιπρόσωπος που περιοδεύει (πλασιέ) πληρώνεται με 3% κάθε έτος επί της τιμής πωλήσεως των προϊόντων που πουλά. Η προμήθεια όμως διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται, κ.ο.κ., αν πετύχει τις πωλήσεις στο $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ κ.ο.κ. του καθορισμένου χρόνου. Κάποτε πούλησε εμπορεύματα μέσα σε 3 μήνες, και, αφού κράτησε την προμήθειά του, παρέδωσε στον εργοδότη του 88.000 δρχ. Τί ποσό κράτησε;

Ο αντιπρόσωπος κράτησε την προμήθειά του, που είναι ανάλογη προς την τιμή πωλήσεως (δταν ο χρόνος παραμένει σταθερός) και αντίστροφως ανάλογη προς το χρόνο (δταν η τιμή πωλήσεως παραμένει σταθερή).

Αν χ δρχ. είναι η προμήθεια του, η αντίστοιχη σ' αυτήν τιμή πωλήσεως είναι $88000 + \chi$ και ο χρόνος είναι 3 μήνες. Αν η τιμή πωλήσεως είναι 100 δρχ. και ο χρόνος 12 μήνες, η προμήθεια είναι 3 δρχ.

Προμήθεια	Τιμή πωλήσεως	Χρόνος
3	100	12
χ	$88000 + \chi$	3
Προμήθεια	Τιμή πωλήσεως επί $\frac{1}{\text{χρόνος}}$	
3	$100 \cdot \frac{1}{12}$	
χ	$(88000 + \chi) \cdot \frac{1}{3}$	

$$\Rightarrow \frac{\chi}{3} = \frac{\frac{1}{3}(88000 + \chi)}{\frac{1}{12} \cdot 100} \Leftrightarrow$$

$$100\chi = 12(88000 + \chi) \Leftrightarrow 100\chi = 12 \cdot 88000 + 12\chi \Leftrightarrow 100\chi - 12\chi = 12 \cdot 88000 \Leftrightarrow 88\chi = 12 \cdot 88000 \Leftrightarrow \chi = \frac{12 \cdot 88000}{88} \Leftrightarrow \chi = 12 \cdot 1000 \Leftrightarrow \chi = 12000. \text{ Έκράτησε για προμήθεια } 12000 \text{ δρχ.}$$

Προβλήματα :

265. 8 εργάτες τελειώνουν ένα έργο σε 12 ημέρες με 7 ώρες εργασία την ημέρα. Σε πόσες ημέρες θα τελειώσουν το ίδιο έργο 12 εργάτες, δταν εργάζονται 8 ώρες την ημέρα;

266. 9 εργάτες σκάβουν 18 στρέμματα σε 6 ημέρες, αν εργάζονται 8 ώρες την ημέρα. Σε πόσες ημέρες 8 εργάτες θα σκάψουν 16 στρέμματα, αν εργάζονται 8 ώρες την ημέρα;

267. 20 εργάτες με εργασία 8 ώρες την ημέρα τελείωσαν τα $\frac{2}{5}$ ενός έργου σε 14 ημέρες. Πόσες ώρες την ημέρα πρέπει να εργάζονται 16 εργάτες, για να τελειώσουν το υπόλοιπο έργο σε 30 ημέρες;

268. Για το πάτωμα ενός δωματίου αγοράστηκαν 700 σανίδες μήκους 3,4 dm και πλάτους 6 cm. Πόσες σανίδες μήκους 3 dm και πλάτους 7 cm θα χρειαστούν για το ίδιο πάτωμα;

269. Ένας ράφτης χρειάζεται ύφασμα 60 m μήκους και 1 m πλάτους για 20 όμοιες ένδυμας. Πόσα m μήκος θα χρειαστεί για 18 όμοιες ένδυμας, αν τó πλάτος τού ύφασματος είναι 1,2 m;

270. Ένα πλοίο αναχώρησε για ταξίδι 45 ημερών με 35 έπιβάτες. Τó απόθεμα τών τροφίμων του έπιτρέπει να παρέχεται στους έπιβάτες ημερήσια μερίδα τροφίμων 1200 gr*. Έστερ από 15 ήμέρες περισυλλέγει ναυαγούς και συντομεύει τó ταξίδι του κατά 5 ήμέρες, ένω ή μερίδα τών τροφίμων περιορίζεται σε 1008 gr*. Πόσους ναυαγούς περισυνέλεξε τó πλοίο;

271. Οι έπιστήμονες ύπολόγισαν ότι τó βάρος ένός σώματος είναι ανάλογο πρós τή μάζα τού πλανήτη, πάνω στόν όποιο βρίσκεται, και αντίστρόφως ανάλογο πρós τó τετράγωνο τής άκτίνας του. Νά ύπολογισθεί τó βάρος ένός άστρωναύτη στη Σελήνη, αν αυτός ζυγίζει στη Γη 70 kg*. Οι μάζες Γης και Σελήνης είναι αντίστοιχα 6.10^{21} ton και $7.5.10^{19}$ ton και οι άκτίνες τους 6400 km, 1740 km.

272. Μεταξύ παραγωγών και μιάς έταιρείας μεταφορών έγινε ή έξης συμφωνία:

Έ ή εταιρεία θα παίρνει 5% έπί τής τιμής πωλήσεως τών πρώιμων λαχανικών, τά όποια θα μεταφέρει στη Δυτική Γερμανία μέσα σε 10 ήμέρες, και ή άμοιβή της θα είναι έπίσης και αντίστρόφως ανάλογη πρós τó χρόνο μεταφοράς. Έ ή εταιρεία μετέφερε προϊόντα μέσα σ' 6 ήμέρες. Αυτά πουλήθηκαν και οι παραγωγοί είσέπραξαν ένα ποσό, πού αφαιρώντας τήν άμοιβή τής έταιρείας έμεινε 102000 δρχ. Ποιά ήταν ή τιμή πωλήσεως τών προϊόντων;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ

§ 105. Έαν καταθέσουμε στην τράπεζα ένα ποσό χρημάτων και μετά από όρισμένο χρόνο τó άποσύρουμε, θα πάρουμε αυτό και έπί πλέον ένα άλλο χρηματικό ποσό, πού λέγεται **τόκος**.

Ό τόκος δηλαδή είναι τó κέρδος πού παίρνουμε, όταν τοκίζουμε τά χρήματά μας.

Τά χρήματα, πού καταθέτουμε στην Τράπεζα ή δανείζουμε σε ιδιώτες, χρησιμοποιούνται σε διάφορες έπιχειρήσεις με σκοπό τήν παραγωγή κέρδους. ΈΑπό τó κέρδος πού δίνουν αυτά, είναι δίκαιο να παίρνουμε κι έμεις ένα μέρος, δηλαδή τόν τόκο.

Έπιτόκιο είναι ό τόκος τών 100 νομισματικών μονάδων σ' ένα έτος.

Ό τόκος είναι ανάλογος πρós τó κεφάλαιο, πρós τó χρόνο, κατά τόν όποιο τοκίζεται αυτό, και πρós τó έπιτόκιο.

Σημείωση. Έαν κάποιος δανειστεί π.χ. 100 δρχ. για ένα έτος με 6%, στο τέλος τού έτους θα έπιστρέψει 106 δρχ. δηλ. τó κεφάλαιο και τόν αντίστοιχο τόκο του: αυτό λέγεται **αύξημένο κεφάλαιο** κατά τόν αντίστοιχο τόκο του.

Σε μερικές περιπτώσεις ό δανειστής κρατεί προκαταβολικά τόν τόκο και ό όφειλέτης παίρνει σάν δάνειο 94 δρχ. αυτό λέγεται **ελαττωμένο κεφάλαιο** κατά τόν αντίστοιχο τόκο του. Στο τέλος τού έτους θα έπιστρέψει στο δανειστή 100 δρχ.

β) Έαν καταθέσουμε στην τράπεζα ένα κεφάλαιο, μάς δίνουν ένα βιβλιário, στο όποιο αναγράφεται ό αριθμός τού λογαριασμού μας, τó όνοματεπώνυμό μας, ή διεύθυνσή μας, τó ποσό πού καταθέσαμε, και ή ήμερομηνία καταθέσεως.

Συνήθως οι τράπεζες υπολογίζουν τους τόκους κατά το τέλος του Ιουνίου και το τέλος του Δεκεμβρίου κάθε έτους. Αν δεν αποσύρουμε τους τόκους την ημέρα, κατά την οποία υπολογίζονται, τότε για το επόμενο εξάμηνο το κεφάλαιο έχει αυξηθεί κατά τον τόκο του. (Η πρόσθεση των τόκων στο κεφάλαιο λέγεται κεφαλοποίηση των τόκων).

Το ίδιο γίνεται και στα Ταχ. Ταμειυτήρια, αλλά εκεί οι τόκοι υπολογίζονται στο τέλος κάθε έτους.

Αν γίνεται κεφαλοποίηση των τόκων, τότε έχουμε σύνθετο τόκο ή ανατοκισμό.

Στα παρακάτω προβλήματα το κεφάλαιο παραμένει σταθερό σ' όλη τη διάρκεια του τοκισμού του.

Όταν πρόκειται για τράπεζα ή ταμειυτήριο, θεωρούμε ότι οι τόκοι αποσύρονται κατά την ημέρα του υπολογισμού τους (δηλαδή δεν γίνεται κεφαλοποίησή τους).

Πρόβλημα 1. Ποιός είναι ο τόκος ενός κεφαλαίου 20000 δρχ. σε 3 έτη με 5%.

Κεφάλαιο	Χρόνος	Τόκος
100	1	5
20000	3	χ

Επειδή ο τόκος είναι ανάλογος προς το κεφάλαιο και προς το χρόνο, θα είναι ανάλογος και προς το γινόμενο «Κεφάλαιο» επί «Χρόνος». Συνεπώς έχουμε:

Κεφάλαιο·χρόνος	Τόκος
100·1	5
20000·3	χ

$$\Rightarrow \frac{100 \cdot 1}{20000 \cdot 3} = \frac{5}{\chi} \Leftrightarrow 100\chi = 20000 \cdot 5 \cdot 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \chi = \frac{20000 \cdot 5 \cdot 3}{100} \quad (1) \Leftrightarrow \chi = 3000.$$

Αρα ο τόκος είναι 3000 δρχ.

Αν είναι τ ο τόκος, κ το κεφάλαιο, ε το επιτόκιο και t ο χρόνος και εργαζοῦμε όπως και στην εξίσωση (1), θα έχουμε τον τύπο

$$\tau = \frac{\kappa \cdot \epsilon \cdot t}{100}$$

Τον τύπο αυτό τον βρίσκουμε και ως εξής.

Επειδή 100 δρχ. φέρουν τόκο ε σε 1 έτος

ή 1 δρχ. θα φέρει τόκο $\frac{\epsilon}{100}$ σε 1 έτος και

οί κ δρχ. θα φέρουν τόκο κ $\cdot \frac{\epsilon}{100}$ σε 1 έτος

Οί κ δρχ. σε t έτη θα φέρουν τόκο κ $\cdot \frac{\epsilon}{100} \cdot t$ δρχ. Αρα $\tau = \frac{\kappa \cdot \epsilon \cdot t}{100}$

Σημείωση 1. Στὸν τύπο τοῦ τόκου ἡ μεταβλητὴ t παριστάνει τιμὲς χρόνου σὲ ἔτη. *Αν ἔχουμε μῆνες ἢ ἡμέρες, τότε ὁ πῶς πάνω τύπος γίνεται: $t = \frac{\kappa \cdot \epsilon \cdot \mu}{1200}$ ἢ $t = \frac{\kappa \cdot \epsilon \cdot \eta}{36000}$ (μ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ χρόνου σὲ μῆνες καὶ η ἡ τιμὴ τοῦ χρόνου σὲ ἡμέρες).

2. Τὸ ἐμπορικὸ ἔτος τὸ θεωροῦμε μὲ 360 ἡμέρες καὶ κάθε μῆνα μὲ 30 ἡμέρες.

3. Ὁ τύπος $t = \frac{\kappa \cdot \epsilon \cdot \eta}{36000}$ παίρνει τὴ μορφή $t = \frac{\kappa \cdot \eta}{\frac{36000}{\epsilon}} = \frac{\nu}{\delta}$

Τὸ πηλίκον $\frac{36000}{\epsilon}$ λέγεται 'σταθερὸς διαιρέτης καὶ τὸ γινόμενο $\kappa \cdot \eta = \nu$ λέγεται τοκαρίθμος. *Αρα ὁ τόκος ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τοῦ τοκαρίθμου διὰ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτη.

Πρόβλημα 2. Ποιὸ κεφάλαιο σὲ 11 μῆνες, ὅταν τοκίζεται μὲ 6%, φέρνει τόκο 1100 δρχ.;

*Εστω χ δρχ. τὸ κεφάλαιο. Ἀπὸ τὸν τύπο τοῦ τόκου $t = \frac{\kappa \cdot \epsilon \cdot \mu}{1200}$ παίρνουμε τὴν ἐξίσωση $1100 = \frac{\chi \cdot 6 \cdot 11}{1200} \Leftrightarrow 1100 \cdot 1200 = 6 \cdot 11 \cdot \chi \Leftrightarrow \chi = \frac{1200 \cdot 1100}{6 \cdot 11} \Leftrightarrow \chi = 200 \cdot 100 \Leftrightarrow \chi = 20.000$. *Αρα τὸ κεφάλαιο εἶναι 20.000 δρχ.

Πρόβλημα 3. Σὲ πόσο χρόνο κεφάλαιο 18.000 δρχ. ὅταν τοκίζεται μὲ 8%, φέρνει τόκο 160 δρχ.,

*Εστω χ ἔτη ὁ χρόνος. Ἀπὸ τὸν τύπο $t = \frac{\kappa \cdot \epsilon \cdot t}{100}$ παίρνουμε τὴν ἐξίσωση $160 = \frac{18000 \cdot 8 \cdot \chi}{100} \Leftrightarrow 160 = 180 \cdot 8 \cdot \chi \Leftrightarrow \chi = \frac{160}{180 \cdot 8} \Leftrightarrow \chi = \frac{20}{180} \Leftrightarrow \chi = \frac{1}{9}$. Ἐπομένως ὁ χρόνος εἶναι $\frac{1}{9}$ ἔτη ἢ $\frac{1}{9} \cdot 12 = \frac{4}{3}$ μῆνες ἢ $\frac{4}{3} \cdot 30 = 40$ ἡμέρες.

Πρόβλημα 4. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο πρέπει νὰ τοκίσουμε 45000 δρχ., γιὰ νὰ πάρουμε μετὰ 52 ἡμέρες 260 δρχ. τόκο;

*Αντικαθιστοῦμε τὰ δεδομένα στὸν τύπο $t = \frac{\kappa \cdot \epsilon \cdot \eta}{36000}$ καὶ ἐπιλύουμε τὴν ἐξίσωση ὡς πρὸς τὸν ἄγνωστο ϵ .

$260 = \frac{45000 \cdot 52 \cdot \epsilon}{36000} \Leftrightarrow 260 = \frac{45 \cdot 52 \cdot \epsilon}{36} \Leftrightarrow 45 \cdot 52 \cdot \epsilon = 260 \cdot 36 \Leftrightarrow \epsilon = \frac{260 \cdot 36}{45 \cdot 52} \Leftrightarrow \epsilon = 4$.

*Αρα $\epsilon\% = 4\%$ δηλαδὴ πρέπει νὰ τὸ τοκίσουμε μὲ 4%.

Πρόβλημα 5. Ποιὸ κεφάλαιο ὅταν τοκίζεται μὲ 5% γιὰ 72 ἡμέρες γίνεται μὲ τὸν τόκο του 10100 δρχ.;

*Ἐχουμε κεφάλαιο σὺν τόκος ἴσον 10100 δρχ. *Αν χ δρχ. εἶναι τὸ κε-

φάλαιο, παίρνουμε την εξίσωση $x + \frac{x \cdot 5 \cdot 72}{36000} = 10100 \Leftrightarrow x + \frac{x \cdot 360}{360 \cdot 100} =$
 $10100 \Leftrightarrow x + \frac{x}{100} = 10100 \Leftrightarrow 100x + x = 1010000 \Leftrightarrow 101x = 1010000 \Leftrightarrow$
 $x = \frac{101 \cdot 10000}{101} \Leftrightarrow x = 10000$. Το κεφάλαιο είναι 10000 δρχ.

Πρόβλημα 6. Κάποιος τόκισε τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ κεφαλαίου του με 5,5% καὶ τὸ ὑπόλοιπο με 4,5%. Ἄν ἀπὸ τὸ α' μέρος τοῦ κεφαλαίου πῆρε μετὰ ἕνα ἔτος 120 δρχ. τόκο περισσότερο παρὰ ἀπὸ τὸ β' μέρος, νὰ βρεθῇ τὸ κεφάλαιο.

Ἐστω x δρχ. τὸ κεφάλαιο. Τὸ α' μέρος εἶναι $\frac{3}{5}x$ καὶ ὁ τόκος του $\frac{3}{5}x \cdot 5,5 \cdot \frac{1}{100}$. Τὸ β' μέρος εἶναι $\frac{2}{5}x$ καὶ ὁ τόκος του (σ' ἕνα ἔτος): $\frac{2}{5}x \cdot 4,5 \cdot \frac{1}{100}$.

Ἐχουμε ὁμως: Τόκος α' μέρους πλην τόκος β' μέρους ἴσον 120 δρχ.
 Ἐχουμε συνεπῶς τὴν εξίσωση

$$\frac{\frac{3}{5}x \cdot 5,5}{100} - \frac{\frac{2}{5}x \cdot 4,5}{100} = 120 \Leftrightarrow \frac{3x \cdot 1,1}{100} - \frac{2x \cdot 0,9}{100} = 120$$

$$\Leftrightarrow \frac{3,3x - 1,8x}{100} = 120 \Leftrightarrow \frac{1,5x}{100} = 120 \Leftrightarrow 1,5x = 12000 \Leftrightarrow x = \frac{12000}{1,5}$$

$$\Leftrightarrow x = 8000$$
. Τὸ κεφάλαιο εἶναι 8000 δρχ.

Σημείωση. Ὁ τόκος ἐνὸς κεφαλαίου 6000 δρχ. με 6% γιὰ 89 ἡμέρες βρίσκεται σὺντομα με τὸν τύπο

$$T = \frac{v}{8} = \frac{6000 \cdot 89}{36000} = \frac{6000 \cdot 89}{6000} = 89. \quad \text{Ὁ τόκος εἶναι 89 δρχ.}$$

Ὅταν τὸ κεφάλαιο ἰσοῦται με τὸ σταθερὸ διαιρέτη, ὁ τόκος εἶναι ἴσος με τὸν ἀριθμὸ τῶν ἡμερῶν.

Προβλήματα.

273. Πόσο τόκο φέρνουν α) 16000 δρχ. με 4,5% γιὰ 8 μῆνες;
 β) 4500 δρχ. με 8% γιὰ 179 ἡμέρες;
 γ) 7200 δρχ. με 5% γιὰ 211 ἡμέρες;
 δ) 12000 δρχ. με 6% γιὰ 97 ἡμέρες;

274. Νὰ βρεθῇ τὸ κεφάλαιο, ἂν $\epsilon\% = 5\%$, ὁ τόκος εἶναι 345 δρχ. καὶ ὁ χρόνος 115 ἡμέρες.

275. Νὰ βρεθῇ ἡ χρόνος, ἂν $\epsilon\% = 6\%$, ὁ τόκος εἶναι 138 δρχ. καὶ τὸ κεφ. 4600 δρχ.

276. Νὰ βρεθῇ τὸ ἐπιτόκιο, ἂν τὸ κεφ. εἶναι 3600 δρχ., ὁ τόκος 480 δρχ. καὶ ὁ χρόνος 20 μῆνες.

277. Ποιό κεφάλαιο σέ 100 ημέρες με 4,5% φέρνει τόκο, όσο δίνει κεφάλαιο 8000 δρχ. σέ 6 μήνες με 5%;

278. Τά $\frac{5}{8}$ ενός κεφαλαίου τοκίστηκαν με 6,5% και σέ 5 μήνες έδωσαν τόκο 650 δρχ.

Ποιό ήταν τó κεφάλαιο;

279. Κεφάλαιο 37500 δρχ. τοκίστηκε με 6% κι έγινε με τόν τόκο του 37750 δρχ. Νά βρεθεί ó χρόνος.

280. Δανειστήκαμε 1200 δρχ. με 9% και πληρώσαμε στις 2 Φεβρουαρίου γιά κεφάλαιο και τόκο 1386 δρχ. Πότε δανειστήκαμε τó κεφάλαιο;

281. Με ποιό έπιτόκιο ένα κεφάλαιο 12000 δρχ. έδωσε τόκο 1250 δρχ. σέ χρόνο ίσο με τó χρόνο, κατά τόν όποιο τοκίστηκαν 3600 δρχ. με 4% κι έγιναν μαζί με τόν τόκο τους 4000 δρχ.;

282. Κεφάλαιο 111000 δρχ. κατατέθηκε σέ μία τράπεζα στις 14 Μαρτίου και στις 17 'Οκτωβρίου τού έπόμενου έτους αποσύρθηκε μαζί με τούς τόκους του. Ποιό ήταν τó έπιτόκιο, αν κεφάλαιο και τόκος μαζί έγιναν 121600,50 δρχ.;

283. Ποιό κεφάλαιο σέ 40 μήνες με 4,5% έγινε μαζί με τόν τόκο του 13800 δρχ. (Αν x δρχ. τó κεφάλαιο, ó τόκος του θα είναι $\frac{x \cdot 4,5 \cdot 40}{1200}$ και $x + \frac{x \cdot 4,5 \cdot 40}{1200} = 13800$)

284. Δανειστήκαμε ένα ποσό χρημάτων με τή συμφωνία νά κρατηθούν οι τόκοι προκαταβολικά. Ποιό ήταν τó κεφάλαιο, αν μάς έδωσαν 9800 δρχ. και κράτησαν τόκους 4 μηνών με 6%; (Κεφάλαιο πλην τόκος = 9800 δρχ.: $\kappa - \frac{\kappa \cdot \epsilon \cdot \mu}{1200} = 9800$).

285. Έτόκισε κάποιος τά $\frac{2}{3}$ τού κεφαλαίου του με 4% και τó υπόλοιπο με 5% και πήρε σέ ένα έτος τόκο 546 δρχ. Ποιό ήταν τó κεφάλαιο;

5. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΥΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

§ 106. α) Γραμμάτια.

Έκείνος πού δανείζεται χρήματα ή αγοράζει έμπορεύματα με πίστωση (δέν πληρώνει άμέσως τήν άξία τους) δίνει στόν δανειστή ή στόν πιστωτή μιá έγγραφη ύπόσχεση πληρωμής τού χρέους του. Τó έγγραφο αυτό λέγεται **γραμμάτιο**.

Τύπος γραμματίου

Έν Αθήναις τῇ 20ῇ Μαρτίου 1970 Διά δραχμὰς 5000.

Μετά δύο μήνας από σήμερα, ήτοι τήν 20ην Μαΐου 1970, ύπόσχομαι νά πληρώσω εἰς τόν κ. Α..... ή εἰς διαταγήν αὐτοῦ τó άνω ποσόν τῶν πέντε χιλιάδων δραχμῶν (5000), όπερ έλαβον παρ' αὐτοῦ ως δάνειον.

Χαρτόσημον

Β.....

(Ύπογραφή και Δ/σις όφειλέτου)

Συνήθως στις έμπορικες συναλλαγές γίνεται χρήση ενός έγγραφου, πού λέγεται **συναλλαγματική**. Τη συναλλαγματική την εκδίδει ο πιστωτής και την αποδέχεται ο οφειλέτης με την υπογραφή του.

Τύπος συναλλαγματικής

Λήξις τῇ 20 - 5 - 1970.

Συναλλαγματική διὰ δρχ. 5000.

Τὴν 20ὴν Μαΐου 1970 πληρώσατε δυνάμει τῆς παρούσης μόνης Συναλλαγματικῆς εἰς διαταγὴν μου καὶ εἰς.....τὸ ἄνω ποσὸν τῶν πέντε χιλιάδων δραχμῶν, ὧν τὸ ἰσότιμον ἐλάβετε παρ' ἐμοῦ εἰς ἐμπορεύματα τῆς τελείας ἀρεσκείας σας καὶ ἐν ὑπερῃμερίᾳ μετὰ τοῦ νομίμου τόκου ἀπὸ τῆς λήξεως μέχρις ἐξοφλήσεως.

Χαρτόσημον

Πρὸς τὸν κ. Β..... Ἐν Ἀθήναις τῇ 20-3-1970
Δ/νσις..... ὁ ἐκδότης

Ἐν Ἀθήναις τῇ 20-3-1970 Α.....
Δεκτὴ (Ὑπογραφή καὶ Δ/νσις)

Β.....
(ὑπογραφή)

Τὸ ποσό, πού ἀναγράφεται στὴν ἔγγραφη ὑπόσχεση, λέγεται **ὄνομαστικὴ ἀξία** τοῦ γραμματίου. Αὕτῃ τῇ συμβολίζουμε μὲ ο.

Ἡ ἡμερομηνία, κατὰ τὴν ὁποία πρέπει νὰ πληρωθεῖ τὸ γραμμάτιο, εἶναι ἡ **λήξις** τοῦ γραμματίου.

β) Ὁπισθογράφηση καὶ προεξόφληση γραμματίου.

Ὑποθέτουμε ὅτι ὁ κ. Α. εἶναι κάτοχος τοῦ πιὸ πάνω γραμματίου ὀνομ. ἀξίας 5000 δρχ., τὸ ὁποῖο λήγει μετὰ ἀπὸ 2 μῆνες. Μετὰ ἀπὸ 20 ἡμέρες ἀπὸ τὴν ἐκδοσὴ τοῦ γραμματίου (ἡ 40 ἡμέρες πρὶν ἀπὸ τὴ λήξιν του, δηλαδὴ στὶς 10-4-1970) ὁ κ. Α. ἔχει ἀνάγκη ἀπὸ χρήματα καὶ μεταβιβάζει, δηλαδὴ πουλᾷ τὸ γραμμάτιο σ' ἓνα τρίτο πρόσωπο (ἡ συνήθως στὴν Τράπεζα) ἀφοῦ προηγουμένως ὑπογράψει στὴν πίσω ὀψη του γιὰ τὴ μεταβίβαση ἢ πώληση αὐτῇ. Αὕτῃ ἡ πράξις λέγεται **ὀπισθογράφηση τοῦ γραμματίου**. Ὁ πωλητὴς κ. Α. λέγεται καὶ κοιμιστὴς τοῦ γραμματίου.

Ὁ ἀγοραστὴς τοῦ γραμματίου κρατεῖ ἀπὸ τὴν ὁν. ἀξία του τὸν τόκο τῆς γιὰ 40 ἡμέρες μὲ ἓνα ὀρισμένο ἐπιτόκιο π.χ. 4,5% $\left(5000 \cdot \frac{4,5}{100} \cdot \frac{40}{360} = 25\right)$ καὶ τὸ ὑπόλοι-

πο (5000 - 25 = 4975) τὸ δίνει στὸν κομιστὴ κ. Α. Ἡ διαδικασία αὐτὴ λέγεται **προεξόφληση τοῦ γραμματίου**. Ὁ χρόνος μεταξύ ἡμερομηνίας προεξόφλησεως καὶ λήξεως τοῦ γραμματίου λέγεται καὶ **προθεσμία**.

Τὸ ποσὸ τῶν 25 δρχ., ποὺ κρατεῖ ὁ ἀγοραστής, λέγεται **ἐξωτερικὴ ὑφαίρεση**. Τὴ συμβολίζουμε μὲ τὸ γράμμα υ. (Γενικὰ ὑφαίρεση εἶναι ἡ ἐκπτώση, ποὺ γίνεται σ' ἓνα γραμμάτιο, ὅταν προεξοφλεῖται, δηλαδὴ ὅταν πληρώνεται πρὶν ἀπὸ τὴ λήξη του). Στὰ ἐπόμενα θὰ λέμε ὑφαίρεση καὶ θὰ ἐννοοῦμε ἐξωτερικὴ ὑφαίρεση). Τὸ ποσὸ 4975 δρχ. = 5000 δρχ. - 25 δρχ. λέγεται **παρούσα ἀξία** τοῦ γραμματίου καὶ ἰσοῦται μὲ τὴ διαφορά τῆς ἐξ. ὑφ. ἀπὸ τὴν ὄν. ἀξία. Ἄν συμβολίσουμε μὲ π τὴν παρούσα ἀξία, ἔχουμε τὶς παρακάτω ἰσοδυναμίες:

$$\pi = o - u \Leftrightarrow \pi + u = o \Leftrightarrow u = o - \pi \quad (1)$$

Ἐπειδὴ ἡ ὑφαίρεση εἶναι ὁ τόκος τῆς **ονομαστικῆς ἀξίας**, τὰ προβλήματα τῆς ὑφαίρεσεως ἐπιλύονται μὲ τοὺς τύπους τοῦ τόκου, εἰς τοὺς ὁποίους τὸ κεφάλαιο κ ἀντικαθίσταται μὲ τὴν ὄν. ἀξία ο καὶ τὸ τ μὲ τὸ υ. π.χ.

Τύπος τοῦ τόκου

$$t = \frac{\kappa \cdot \epsilon \cdot t}{100}$$

Τύπος τῆς ἐξ. ὑφαίρεσεως

$$u = \frac{o \cdot \epsilon \cdot t}{100}$$

Σημείωση. Ἐνα γραμμάτιο ἢ μιὰ συναλλαγματική, ποὺ δὲν περιέχει τὶς λέξεις «εἰς διαταγὴν», δὲν μπορεῖ νὰ μεταβιβασθεῖ σὲ ἄλλον.

Στὰ παρακάτω προβλήματα θὰ χρησιμοποιήσουμε τὴ λέξη «γραμμάτιο» καὶ θὰ ἐννοοῦμε ἔγγραφη ὑπόσχεση (γραμμάτιο ἢ συναλλαγματική), ἡ ὁποία μεταβιβάζεται σ' ἓνα τρίτο πρόσωπο ἢ στὴν Τράπεζα.

Παραδείγματα:

1^ο. Ἐνα γραμμάτιο ὄν. ἀξίας 3000 δρχ. προεξοφλήθηκε τὴν 10^η Μαΐου μὲ 6% γιὰ 2980 δρχ. Πότε ἔληγε τὸ γραμμάτιο;

Ἄν χ ἔτη εἶναι ὁ χρόνος μεταξύ προεξοφλήσεως καὶ λήξεως τοῦ γραμματίου, ἀπὸ τὸν τύπο $u = o - \pi$ βρίσκουμε τὴν ὑφαίρεση 20 δρχ. καὶ ἀπὸ τὸν τύπο $u = \frac{o \cdot \epsilon \cdot t}{100}$ ἔχουμε τὴν ἐξίσωση $20 = \frac{3000 \cdot 6 \cdot \chi}{100} \Leftrightarrow 20 = 30 \cdot 6 \cdot \chi \Leftrightarrow \chi = \frac{20}{180} \Leftrightarrow \chi = \frac{1}{9}$. Ὁ χρόνος εἶναι $\frac{1}{9}$ ἔτη ἢ $\frac{1}{9} \cdot 360$ ἡμέρες = 40 ἡμέρες. Ἄρα τὸ γραμμάτιο ἔληγε στὶς 20 Ἰουνίου τοῦ ἴδιου ἔτους.

2^ο. Νὰ βρεθεῖ ἡ ὄν. ἀξία καὶ ἡ ὑφαίρεση ἐνὸς γραμματίου, τὸ ὁποῖο προεξοφλήθηκε 40 ἡμέρες πρὶν ἀπὸ τὴ λήξη του μὲ 9% γιὰ 1980 δρχ.

Ἄν εἶναι χ δρχ ἡ ὄν. ἀξία του, ἡ ὑφαίρεση θὰ εἶναι $\frac{\chi \cdot \epsilon \cdot \eta}{36000}$ καὶ ὁ τύπος $o - u = \pi$ γίνεται:

$$\chi - \frac{\chi \cdot \epsilon \cdot \eta}{36000} = \pi. \text{ Ἀπ' αὐτὸν τὸν τύπο λαμβάνουμε τὴν ἐξίσωση } \frac{\chi \cdot 9 \cdot 40}{36000} = 1980 \Leftrightarrow$$

$$\chi - \frac{\chi}{100} = 1980 \Leftrightarrow 100\chi - \chi = 198000 \Leftrightarrow 99\chi = 198000 \Leftrightarrow \chi = \frac{198000}{99}$$

$\Leftrightarrow \chi = 2000$. Ἡ ὄν. ἀξία τοῦ γραμματίου εἶναι 2000 δρχ. καὶ ἡ ὑφαίρεση 2000 δρχ. - 1980 δρχ. = 20 δρχ.

Προβλήματα.

286. Ποιά είναι η έξ. ύφαίρεση και η παρ. αξία ενός γραμματίου όνομ. αξίας 2600 δρχ., τὸ ὁποῖο προεξοφλήθηκε 2 μῆνες πρὶν ἀπὸ τὴ λήξη του μὲ 6%;

287. Νὰ βρεθεῖ ἡ ὄνομ. αξία καὶ ἡ παρ. αξία ενός γραμματίου, πού προεξοφλήθηκε 5 μῆνες πρὶν ἀπὸ τὴ λήξη του μὲ 7,2% καὶ εἶχε έξ. ύφαίρεση 60 δρχ.

288. Ποιὸς ἦταν ὁ χρόνος ἀπὸ τὴν προεξόφληση μέχρι τὴν λήξη ενός γραμματίου 2160 δρχ., πού προεξοφλήθηκε μὲ 8% γιὰ 2131,2 δρχ.;

289. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο προεξοφλήθηκε ἓνα γραμμάτιο 3200 δρχ. 50 ἡμέρες πρὶν ἀπὸ τὴ λήξη του γιὰ 3168 δρχ.;

290. Νὰ βρεθεῖ ἡ έξ. ύφαίρεση ενός γραμματίου, πού προεξοφλήθηκε 3 μῆνες πρὶν ἀπὸ τὴ λήξη του γιὰ 2751 δρχ. μὲ 7%.

291. Ἐνα γραμμάτιο, πού ἔπρεπε νὰ πληρωθεῖ στὶς 28 Ἰουνίου, προεξοφλήθηκε γιὰ 2970 δρχ. στὶς 13 Μαΐου (τοῦ ἴδιου ἔτους) μὲ 8%. Ποιά ἦταν ἡ ὄνομ. αξία του;

292. Ἐνα γραμμάτιο προεξοφλήθηκε 80 ἡμέρες πρὶν ἀπὸ τὴ λήξη του μὲ 9% γιὰ 4410 δρχ. Τί κέρδος θὰ εἶχε ὁ κομιστής, ἐὰν ἡ προεξόφληση γινόταν μὲ 8%;

293. Ἐὰν ἡ ὄνομ. αξία εἶναι 1600 δρχ., $\epsilon\% = 9\%$ καὶ ἡ παρ. αξία εἶναι 1562 δρχ., νὰ βρεθεῖ ὁ χρόνος.

294. Ἐὰν ἡ ὄνομ. αξία εἶναι 1200 δρχ., ἡ παρ. αξία εἶναι 1155 δρχ. καὶ ὁ χρόνος εἶναι 5 μῆνες, νὰ βρεθεῖ τὸ ἐπιτόκιο.

295. Ἐὰν ἡ παρ. αξία εἶναι 4900 δρχ., $\epsilon\% = 6\%$ καὶ ὁ χρόνος εἶναι 4 μῆνες, νὰ βρεθεῖ ἡ ὄνομ. αξία.

296. Δύο γραμμάτια, πού ἔχουν ἄθροισμα ὄνομ. αξιῶν 14400 δρχ., προεξοφλοῦνται μαζί μὲ 6% γιὰ 14214 δρχ. Ἄν τὸ α' ἔληγε μετὰ ἀπὸ 3 μῆνες καὶ τὸ β' μετὰ ἀπὸ 2 μῆνες, νὰ ὑπολογισθεῖ ἡ ὄνομ. αξία τοῦ κάθε γραμματίου.

6. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΣΟΥ ΟΡΟΥ.

§ 107. Ἄν ἓνας μαθητὴς ἔχει 8 στὰ γραπτὰ ενός μαθήματος καὶ 12 στὰ προφορικά, τότε ὁ βαθμὸς του σ' αὐτὸ τὸ μάθημα θὰ εἶναι $\frac{8+12}{2} = 10$. Ὁ ἀριθμὸς 10 λέγεται μέσος ὅρος τῶν ἀριθμῶν 8 καὶ 12.

Ἄν οἱ βαθμοὶ τοῦ μαθητῆ στὰ μαθήματά του εἶναι: 10, 11, 17, 12, 14, 13, 16, 14, 15, 17, τότε ὁ γενικὸς βαθμὸς στὸ ἐνδεικτικὸ του θὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς
$$\frac{10+11+17+12+14+13+16+14+15+17}{10} = \frac{139}{10} = 13\frac{9}{10},$$
 ὁ ὁποῖος εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῶν βαθμῶν τοῦ μαθητῆ.

Γενικά: Ἀριθμητικὸς μέσος ὅρος διάφορων ὁμοειδῶν ἀριθμῶν λέγεται τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ ἁθροίσματός των διὰ τοῦ πλήθους των.

Ἄν $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots, \chi_n$ εἶναι ὁμοειδεῖς ἀριθμοὶ ($n \in \mathbb{N}$), τότε ὁ ἀριθμὸς
$$\frac{\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \dots + \chi_n}{n} = \chi_\mu$$
 εἶναι ὁ μέσος ὅρος τους. Ἐπειδὴ $\chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_n = n \cdot \chi_\mu$, λέμε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν, πού μᾶς ἔχουν δοθεῖ, εἶναι ἴσο μὲ τὸ γινόμενο τοῦ μέσου ὅρου τους ἐπὶ τὸ πλῆθος τους.

Σημείωση. Αν ο αριθμός χ_1 εμφανίζεται κ_1 φορές, ο χ_2 κ_2 φορές και ο χ_3 κ_3 φορές, τότε $\chi_\mu = \frac{\kappa_1\chi_1 + \kappa_2\chi_2 + \kappa_3\chi_3}{\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3}$

Εφαρμογές.

1. Να βρεθεί ο αριθμός, ο οποίος είναι ο μέσος όρος των 15 και 20.

*Έχουμε $\frac{15+20}{2} = \frac{35}{2} = 17,5$. Παρατηρούμε ότι $15 < 17,5 < 20$ και ότι $17,5 - 15 = 20 - 17,5$.

Ο μέσος όρος των αριθμών α και β είναι $\frac{\alpha+\beta}{2}$, ο οποίος περιέχεται μεταξύ των α και β (π.χ. αν $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$) και είναι $\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha = \beta - \frac{\alpha+\beta}{2}$.

2. Αν ο βαθμός στα προφορικά ενός μαθητή σ' ένα μάθημα είναι 11 και στον έλεγχο του ο μ. όρος είναι 13 σ' αυτό το μάθημα, ποιός είναι ο βαθμός στα γραπτά;

Αν χ είναι ο βαθμός των γραπτών του, έχουμε $\frac{11+\chi}{2} = 13 \Leftrightarrow 11+\chi=26 \Leftrightarrow \chi=15$.

Προβλήματα:

297. Να βρεθεί η μέση θερμοκρασία ενός ασθενούς σε μία ημέρα, αν θερμομετρήθηκε τρεις φορές κι έδειξε θερμοκρασία 38 β., 38,7 β. και 38,2 β.

298. Να βρεθεί ο μέσος όρος των αριθμών 7, 10, 13, 16, 19. Επίσης των αριθμών 7 και 19. Τί παρατηρείτε;

299. Να βρεθεί ο μ. ό. των 10, 14, 18, 22. Επίσης των 10 και 22. Τί παρατηρείτε;

300. Να βρεθεί το άθροισμα των άκεραίων από 1 ως 49 (Βρείτε πρώτα τον μ. ό.)

301. Ο μ. ό. των βαθμών σε τρία μαθήματα ήταν 14,5. Κατόπι μεταβλήθηκε ο βαθμός στο ένα μάθημα και ο μ. ό. έγινε 15, 5. Πόσο αυξήθηκε ο βαθμός σ' αυτό το μάθημα;

7. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΡΙΣΜΟΥ

§ 108. Πρόβλημα 1^ο.

Να μερισθεί ο αριθμός 100 σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς 2, 3 και 5,

Αν χ, ψ, z είναι οι αριθμοί που ζητούμε, θα έχουμε $\chi + \psi + z = 100$ και επειδή είναι ανάλογοι προς τους 2, 3 και 5, θα έχουμε ίσους λόγους:

$$\frac{\chi}{2} = \frac{\psi}{3} = \frac{z}{5} \Leftrightarrow \frac{\chi}{2} = \frac{\psi}{3} = \frac{z}{5} = \frac{\chi+\psi+z}{2+3+5} = \frac{100}{10} = 10.$$

*Αρα $\frac{\chi}{2} = 10 \Leftrightarrow \chi = 20$, $\frac{\psi}{3} = 10 \Leftrightarrow \psi = 30$ και $\frac{z}{5} = 10 \Leftrightarrow z = 50$

Πρόβλημα 2^ο.

Να μερισθεί ο 130 σε μέρη αντίστροφως ανάλογα των αριθμών 2, 3 και 4.

Αν χ, ψ, z είναι τα μέρη του 130, θα είναι $\chi + \psi + z = 130$.

Ἐπειδὴ οἱ χ, ψ, z εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν 2, 3, 4, θὰ εἶναι ἀνάλογοι τῶν $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$. Ἐπομένως:

$$\frac{\chi}{\frac{1}{2}} = \frac{\psi}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow \frac{\chi}{\frac{1}{2} \cdot 12} = \frac{\psi}{\frac{1}{3} \cdot 12} = \frac{z}{\frac{1}{4} \cdot 12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\chi}{6} = \frac{\psi}{4} = \frac{z}{3} = \frac{\chi + \psi + z}{6 + 4 + 3} = \frac{130}{13} = 10. \text{ Ἄρα } \chi = 60, \psi = 40, z = 30.$$

Πρόβλημα 3ο. Ἐνα κεφάλαιο 10000 δρχ. εἶχε κατατεθεῖ γιὰ 6 μῆνες καὶ ἕνα ἄλλο 9000 δρχ. γιὰ 10 μῆνες μὲ τὸ ἴδιο ἐπιτόκιο. Ἄν καὶ τὰ δύο κεφάλαια ἔφεραν 500 δρχ. τόκο, πόσος τόκος ἀναλογεῖ σὲ κάθε κεφάλαιο;

Ἐστω χ δρχ. ὁ τόκος ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ κεφάλαιο τῶν 10000 δρχ. καὶ ψ δρχ. ὁ τόκος ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ κεφάλαιο τῶν 9000 δρχ.

Γνωρίζουμε ὅτι ὁ τόκος εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ κεφάλαιο καὶ πρὸς τὸ χρόνο, ἔπομένως θὰ εἶναι ἀνάλογος καὶ πρὸς τὸ γινόμενο «κεφάλαιο ἐπὶ χρόνο».

$$\begin{aligned} \text{Συνεπῶς } \frac{\chi}{10000 \cdot 6} &= \frac{\psi}{9000 \cdot 10} \Leftrightarrow \frac{\chi}{6} = \frac{\psi}{9} \Leftrightarrow \frac{\chi}{2} = \frac{\psi}{3} = \frac{\chi + \psi}{2 + 3} = \\ &= \frac{500}{5} = 100. \end{aligned}$$

$$\text{Ἄρα } \frac{\chi}{2} = 100 \Leftrightarrow \chi = 200 \text{ καὶ } \frac{\psi}{3} = 100 \Leftrightarrow \psi = 300.$$

Οἱ τόκοι εἶναι 200 δρχ. καὶ 300 δρχ. ἀντιστοίχως.

Σημείωση.

Ἄν t_1, t_2 εἶναι τιμὲς τοῦ τόκου

κ_1, κ_2 τιμὲς τοῦ κεφαλαίου

t_1, t_2 τιμὲς τοῦ χρόνου, ἔχουμε τὸν πίνακα

τ	τ_1	τ_2
κ	κ_1	κ_2
t	t_1	t_2
κt	$\kappa_1 t_1$	$\kappa_2 t_2$

$$\text{καὶ ἀπ' αὐτὸν τὴν ἀναλογία } \frac{\tau_1}{\kappa_1 t_1} = \frac{\tau_2}{\kappa_2 t_2}.$$

Ἄν $t_1 = t_2$ μερίζουμε τὸν τόκο (ἢ τὸ κέρδος) ἀναλόγως τῶν κεφαλαίων.

Ἄν $\kappa_1 = \kappa_2$ μερίζουμε τὸν τόκο (ἢ τὸ κέρδος) ἀναλόγως τῶν χρόνων.

(Τὸ ἐπιτόκιο θεωρεῖται σταθερό. Εἶναι δυνατὸν νὰ βρεθεῖ τὸ ἐπιτόκιο στὸ 3ο πρόβλημα;)

Πρόβλημα 4^ο. Ένα χρηματικό έπαθλο από 4840 δρχ. πρόκειται να μοιραστεί στους τρεις πρώτους δρομείς, οι οποίοι πέτυχαν τις εξής τιμές χρόνου επίδοσης (σ' ένα αγώνισμα δρόμου μιάς απόστάσεως): ο πρώτος τερμάτισε σε 2,4 min, ο β' σε 2,7 min και ο γ' σε 3 min. Πόσες δρχ. θα πάρει ο καθένας;

Έστω x δρχ, y δρχ, z δρχ, οι άμοιβές των α', β' γ' αντίστοιχως

Άμοιβή	x	y	z
Χρόνος επίδ.	2,4	2,7	3
Απόσταση	1	1	1

Επειδή η άμοιβή είναι αντιστρόφως ανάλογη του χρόνου επίδοσης (για την ίδια απόσταση), θα έχουμε.

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{1}{2,4} \cdot 21,6} = \frac{y}{\frac{1}{2,7} \cdot 21,6} = \frac{z}{\frac{1}{3} \cdot 21,6} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{8} = \frac{z}{7,2} = \frac{x+y+z}{9+8+7,2} = \frac{4840}{24,2} = 200.$$

Άρα $\frac{x}{9} = 200 \Leftrightarrow x = 1800$, $\frac{y}{8} = 200 \Leftrightarrow y = 1600$ και $z = 1440$.

Ο α' θα πάρει 1800 δρχ., ο β' 1600 δρχ. και ο γ' 1440 δρχ.

Πρόβλημα 5^ο.

Τρεις συνεταιίροι κατέθεσαν σε μία επιχείρηση τα εξής ποσά: Ο α' 500.000 δρχ., ο β' 600.000δρχ. και ο γ' 660.000 δρχ.

Τα χρήματα του α' έμειναν στην επιχείρηση 2 έτη

τα χρήματα του β' έμειναν στην επιχείρηση 18 μήνες

τα χρήματα του γ' έμειναν στην επιχείρηση 20 μήνες.

Αν έκέρδισαν 300000 δρχ, πόσο κέρδος πρέπει να πάρει καθένας;

Το πρόβλημα αυτό επιλύεται, όπως το παραπάνω 3ο πρόβλημα. Μεριζούμε το κέρδος αναλόγως προς το γινόμενο των καταθέσεων επί τούς χρόνους.

Έστω x δρχ, y δρχ, z δρχ, τα κέρδη αντίστοιχως. Έχουμε

$$\frac{x}{500000 \cdot 24} = \frac{y}{600000 \cdot 18} = \frac{z}{660000 \cdot 20} \Leftrightarrow \frac{x}{120} = \frac{y}{108} = \frac{z}{132} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{9} = \frac{z}{11} = \frac{x+y+z}{10+9+11} = \frac{300000}{30} = 10000.$$

*Αρα $x = 100000$, $y = 90000$, $z = 110000$.

‘Ο α’ θα πάρει 100000 δραχμές, ο β’ 90000 δραχμές και ο γ’ 110000 δρχ.

Προβλήματα:

302. Να μερισθεί ο 180 σε μέρη ανάλογα προς τους α) 6, 10, 14. β) 3, 5, 7. γ) 18, 30, 42 και δ) 360, 600, 840. Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα των 4 περιπτώσεων και να δικαιολογήσετε αυτό που θα βρείτε.

303. Να μερισθεί ο 260 ανάλογα προς τους: $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ και $\frac{7}{12}$

304. Να μερισθούν: α) ο 480 ανάλογα προς τους 2, $\frac{9}{4}$ και $\frac{6}{8}$, β) ο 310 αντίστροφως ανάλογα προς τους 2, 3 και 5 και γ) ο 24 αντιστρόφως ανάλογα προς τους 2, $\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{5}$

305. Ένας σύλλογος φιλοπτώχων μοίρασε 600 δρχ. σε 3 φτωχές οικογένειες ανάλογα προς τον αριθμό των μελών τους. ‘Η α’ οικογένεια είχε 4 μέλη, ή β’ 6 και ή γ’ 10. Πόσες δραχμές πήρε κάθε οικογένεια;

306. ‘Από δύο πόλεις, που απέχουν μεταξύ τους 220 km, ξεκινούν συγχρόνως δύο αυτοκίνητα με ταχύτητες 50 km/h και 60 km/h και τρέχουν να συναντηθούν. Να βρείτε πόσα km θα διανύσει το καθένα μέχρι να συναντηθούν.

307. Ένα χρηματικό έπαθλο 5200 δρχ. πρόκειται να μοιραστεί σε 2 ποδηλάτες ανάλογα προς τις επιδόσεις τους σ’ ένα αγώνισμα δρόμου κάποιας απόστασης· ο α’ έτρεξε την απόσταση σε 18 min και ο β’ σε 21 min. Πόσες δραχμές θα πάρει ο καθένας;

308. Δύο αυτοκινητιστές μετέφεραν εμπορεύματα με άμοιβή 6800 δραχμές. ‘Ο α’ μετέφερε 4,5 ton σε απόσταση 40 km και ο β’ 5 ton σε απόσταση 32 km. Πόσες δραχμές πήρε ο καθένας;

309. Τρεις αδελφές κληρονόμησαν από το θείο τους 700960 δρχ. με τον όρο να τις μοιραστούν ανάλογα προς την ηλικία τους. Οι ηλικίες τους ήταν 14, 16 και 21 έτη. Πόσες δραχμές θα πάρει η καθεμιά;

310. Δύο βοσκοί ένοίκισαν ένα χωράφι 2850 δρχ. ‘Ο α’ έβόσκησε 200 πρόβατα 20 ημέρες και ο β’ 150 πρόβατα 30 ημέρες. Πόσα χρήματα θα πληρώσει ο καθένας;

311. Ένας έμπορος άρχισε μιá επιχείρηση καταθέτοντας 100000 δρχ. Δύο μήνες άργότερα πήρε συνεταίρο, ο όποιος κατέθεσε 150000 δρχ. Ένα χρόνο μετά την πρόσληψη του συνεταίρου βρήκαν ότι κέρδισαν 99000 δρχ. Πόσο κέρδος θα πάρει ο καθένας;

8. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΙΞΕΩΣ

§ 109. Τα προβλήματα, στα όποια γίνεται λόγος για άναμειξη έμπορευμάτων του ίδιου είδους με διαφορετικές ποιότητες και γενικά διάφορων σωμάτων, τα όποια μπορούν να άναμιχθούν, λέγονται προβλήματα άναμειξεως ή μείξεως. Το προϊόν τής άναμειξεως ή μείξεως λέγεται **μείγμα**. Τα σώματα, που άναμειγνύονται, λέγονται **μέρη** του μείγματος.

‘Η έπίλυση των προβλημάτων αυτών θα γίνει με τή βοήθεια των εξισώσεων και στηρίζεται στους έξης κανόνες:

1. Τα βάρη των μερών έχουν άθροισμα το βάρος του μείγματος.

2. ‘Η τιμή κόστους του μείγματος είναι ίση με το άθροισμα των τιμών, που κοστίζουν τα μέρη του.

Πρόβλημα 1^ο. "Ενας έμπορος ανάμειξε 150 kg* λάδι τών 24 δρχ. τὸ kg* μὲ 100 kg* λάδι ἄλλης ποιότητας τών 29 δρχ. τὸ kg*. Πόσο ἀξίζει τὸ kg* τοῦ μείγματος;

Εστω x δρχ. ἡ τιμὴ τοῦ kg τοῦ μείγματος

*Έχουμε: Τιμὴ α' ποιότητας συν τιμὴ β' ποιότητας ἴσον τιμὴ μείγματος.

$$100 \cdot 29 + 150 \cdot 24 = (150 + 100) \cdot x$$

*Επιλύουμε τὴν ἐξίσωση καὶ βρίσκουμε $x = 26$

Έπομένως 26 δρχ. ἀξίζει τὸ kg τοῦ μείγματος.

Σημείωση. Στὸ πρόβλημα αὐτὸ μπορούμε νὰ ζητήσουμε: Πόσο πρέπει νὰ πουλᾷ τὸ κιλὸ τοῦ μείγματος, γιὰ νὰ κερδίσει 25% ἐπὶ τῆς τιμῆς κόστους τοῦ μείγματος;

*Αφοῦ βρούμε πόσο κοστίζει τὸ κιλὸ τοῦ μείγματος, προχωροῦμε στὴν ἐπίλυση σύμφωνα μὲ τὰ γνωστὰ ἀπὸ τὰ ποσοστὰ

$$\begin{array}{ll} 100 \text{ δρχ. κόστος} & 125 \text{ δρχ. πώληση} \\ 26 \text{ δρχ. κόστος} & x \end{array} \Rightarrow \frac{100}{26} = \frac{125}{x} \Leftrightarrow x = 32,50$$

Πρέπει νὰ πουλᾷ 32,50 δρχ. τὸ κιλὸ, γιὰ νὰ κερδίζει 25% ἐπὶ τοῦ κόστους.

Πρόβλημα 2^ο. "Ενας οἰνοπώλης ἀνάμειξε κρασί τών 5 δρχ./kg* μὲ κρασί ἄλλης ποιότητας τών 4 δρχ./kg* καὶ ἔκανε μείγμα 100 kg* τών 4,60 δρχ./kg* Πόσα kg* πῆρε ἀπὸ κάθε εἶδος;

Εστω ὅτι πῆρε x kg ἀπὸ τὴν ποιότητα τών 5 δρχ./kg*. Τότε ἀπὸ τὴν ἄλλη ποιότητα ἔλαβε $(100-x)$ kg*. *Έπομένως ἔχουμε τὴν ἐξίσωση $5x + 4(100-x) = 4,6 \cdot 100$ ἀπὸ τὴν ὁποία βρίσκουμε $x = 60$.

Αρα ἔλαβε 60 kg ἀπὸ τὴν α' ποιότητα καὶ 40 kg* ἀπὸ τὴ β' ποιότητα.

Πρόβλημα 3^ο. Μὲ ποιά ἀναλογία πρέπει νὰ ἀναμείξουμε λίπος τών 35 δρχ/kg* μὲ λίπος τών 30 δρχ/kg*, γιὰ νὰ σχηματίσουμε μείγμα τών 32 δρχ/kg*;

Αν πάρουμε x kg ἀπὸ τὸ λίπος τών 35 δρχ/kg* καὶ ψ kg* ἀπὸ τὸ λίπος τών 30 δρχ./kg*, τότε τὸ μείγμα θὰ εἶναι $(x+\psi)$ kg* καὶ θὰ ἔχουμε τὴν ἐξίσωση.

$$35x + 30\psi = 32(x + \psi), \text{ ἡ ὁποία ἔχει δύο ἀγνώστους.}$$

*Η μορφή τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι τέτοια, ὥστε μπορεῖ νὰ βρεθεῖ ὁ λόγος τών x καὶ ψ .

$$\begin{aligned} \text{Π.χ. } 35x + 30\psi &= 32(x + \psi) \Leftrightarrow 35x + 30\psi = 32x + 32\psi \Leftrightarrow \\ 35x - 32x &= 32\psi - 30\psi \Leftrightarrow 3x = 2\psi \Leftrightarrow \frac{x}{\psi} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\psi}{3} \end{aligned}$$

Η ἀναλογία ἀναμείξεως εἶναι 2 kg ἀπὸ τὴν ποιότητα τών 35 δρχ/kg* καὶ 3 kg* ἀπὸ τὴν ἄλλη ποιότητα.

Πρόβλημα 4^ο. "Ενας έμπορος ἀνάμειξε δύο ποιότητες ἑνὸς εἶδους

των 36 δρχ./kgr* και των 25 δρχ./kgr* Το κόστος του μείγματος ήταν 30 δρχ./kgr* "Αν από την α' ποιότητα πήρε 100 kgr*, πόσα kgr* πήρε από την άλλη;

Εστω ότι πήρε x kgr από τη β' ποιότητα.

*Έχουμε την εξίσωση $36 \cdot 100 + 25 \cdot x = 30(100 + x) \Leftrightarrow$

$3600 + 25x = 3000 + 30x \Leftrightarrow 3600 - 3000 = 30x - 25x \Leftrightarrow$

$5x = 600 \Leftrightarrow x = \frac{600}{5} \Leftrightarrow x = 120.$

Επηρε 120 kgr από τη β' ποιότητα.

Προβλήματα :

312. "Αναμειχθηκαν 200 kgr* κρασι των 4 δρχ./kgr* με 300 kgr* από άλλη ποιότητα των 4,5 δρχ./kgr*. Πόσο αξίζει το kgr* του μείγματος;

313. "Ενας έμπορος ανάμειξε 80 kgr* λάδι των 25 δρχ./kgr* με 120 kgr* από άλλη ποιότητα των 30 δρχ./kgr*. Πόσο πρέπει να πουλά το kgr* του μείγματος, για να κερδίζει 10% επί του κόστους; (Οι τιμές είναι τιμές κόστους).

314. Σε ποιά αναλογία πρέπει να αναμειξουμε βούτυρο των 50 δρχ./kgr* με βούτυρο των 60 δρχ./kgr*, για να πετύχουμε μείγμα των 56 δρχ./kgr*; Και αν κάνουμε μείγμα 50 kgr*, πόσα kgr* πρέπει να πάρουμε από κάθε ποιότητα βουτύρου;

315. "Ενας καφεπώλης ανάμειξε καφέ των 90 δρχ./kgr* με καφέ των 82 δρχ./kgr* κι έκανε μείγμα 12 kgr* των 88 δρχ./kgr*. Πόσα kgr* πήρε από κάθε ποιότητα;

316. "Ενας έμπορος ανάμειξε 150 kgr* λάδι των 32 δρχ./kgr* με 100 kgr* από άλλη ποιότητα των 26 δρχ./kgr*. "Αν πουλά το μείγμα 34,80 δρχ. το kgr*, πόσο τοίς εκατό κερδίζει; (Οι τιμές είναι τιμές κόστους).

317. "Εγινε μείγμα $(100 + x)$ kgr* από δύο ποιότητες ενός είδους. "Η τιμή του kgr* της α' ποιότητας ήταν 35 δρχ., της β' ποιότητας 30 δρχ. και του μείγματος 32 δρχ. "Αν από τη β' ποιότητα χρησιμοποιήθηκαν x kgr*, να βρεθεί ο x .

318. "Αναμειχθηκαν 100kgr * των 20 δρχ./kgr * με 80kgr* των x δρχ./kgr* από δύο ποιότητες ενός είδους. "Αν η τιμή του μείγματος ήταν 22 δρχ./kgr*, να βρεθεί ο x .

319. Πώς πρέπει να αναμειξουμε δύο ποιότητες ενός είδους, που έχουν κόστος 48 δρχ./kgr* και 44 δρχ./kgr*, για να κάνουμε μείγμα, που αν το πουλάμε 49,50 δρχ./kgr*, να κερδίζουμε 10% επί του κόστους;

9. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΡΑΜΑΤΩΝ

§ 110. "Αν συγχωνεύσουμε ή συντήξουμε (με διάφορες μεθόδους) δύο ή περισσότερα μέταλλα, παίρνουμε ένα σώμα που λέγεται **κράμα**.

Στην οικονομική ζωή ενδιαφέρουν τα κράματα, που γίνονται από πολύτιμα μέταλλα (χρυσό, άργυρο). "Η αξία τους εκτιμάται από το λόγο του βάρους του πολύτιμου μετάλλου προς το όλικό βάρος του κράματος. "Ο λόγος αυτός λέγεται **τίτλος** του κράματος και εκφράζεται **σε χιλιοστά**.

"Αν Α είναι το βάρος του πολύτιμου μετάλλου, Β το βάρος του κράματος και τ ο τίτλος του κράματος, έχουμε

$$\frac{A}{B} = \tau \Leftrightarrow A = B \cdot \tau$$

Π.χ. όταν λέμε ότι το κράμα έχει τίτλο 0,850 ή $\frac{850}{1000}$, εννοούμε ότι από τα 1000 gr* του κράματος τα 850 gr* είναι πολύτιμο μέταλλο και τα 150 gr* είναι άλλο ή άλλα μέταλλα.

Ο τίτλος των χρυσών κοσμημάτων εκφράζεται και σε **καράτια**. Π.χ. όταν λέμε ότι ένα χρυσό κόσμημα είναι 18 καρατιών, εννοούμε ότι τα $\frac{18}{24}$ του βάρους του είναι καθαρός χρυσός και τα υπόλοιπα $\frac{6}{24}$ άλλα μέταλλα.

Η επίλυση των προβλημάτων θα γίνει με τη βοήθεια των εξισώσεων, όπως και στα προβλήματα της μείξεως, με βάση τους κανόνες.

α) «Το άθροισμα των βαρών του πολύτιμου μετάλλου, το οποίο περιέχεται στα κράματα που πρόκειται να συντηχθούν είναι ίσο με το βάρος του πολύτιμου μετάλλου στο νέο κράμα».

β) Το άθροισμα των βαρών των κραμάτων ισούται με το βάρος του νέου κράματος.

Πρόβλημα 1^ο. Ένας χρυσοχός συνέτηξε 12 gr* χρυσό τίτλου 0,900 με 18 gr* άλλο χρυσό τίτλου 0,800.

Να βρεθεί ο τίτλος του νέου κράματος.

Έστω χ ο τίτλος του νέου κράματος.

Το βάρος του καθαρού χρυσού στο α' κράμα είναι $0,900 \cdot 12$ gr*.

Το βάρος του καθαρού χρυσού στο β' κράμα είναι $0,800 \cdot 18$ gr*.

Το βάρος του καθαρού χρυσού στο νέο κράμα είναι $\chi \cdot (12 + 18)$ gr*.

Σύμφωνα με τον παραπάνω κανόνα έχουμε την εξίσωση

$$0,900 \cdot 12 + 0,800 \cdot 18 = \chi(12 + 18) \Leftrightarrow 10,8 + 14,4 = 30\chi \Leftrightarrow 30\chi = 25,2$$

$$\chi = \frac{25,2}{30} \Leftrightarrow \chi = 0,840.$$

Ο τίτλος του νέου κράματος είναι 0,840.

Πρόβλημα 2^ο. Αν συντηξουμε δύο είδη κραμάτων (του ίδιου πολύτιμου μετάλλου) με τίτλους 0,900 και 0,600, παίρνουμε ένα νέο κράμα, που έχει βάρος 42 gr* και τίτλο 0,700. Πόσα γραμμάρια πήραμε από κάθε κράμα;

Έστω ότι πήραμε χ gr* από το κράμα με τίτλο 0,900, τότε από το άλλο κράμα θα έχουμε πάρει $(42 - \chi)$ gr*. Επομένως έχουμε την εξίσωση: $0,900\chi + 0,600(42 - \chi) = 0,700 \cdot 42 \Leftrightarrow 9\chi + 6(42 - \chi) = 7 \cdot 42 \Leftrightarrow 9\chi + 6 \cdot 42 - 6\chi = 7 \cdot 42 \Leftrightarrow 9\chi - 6\chi = 7 \cdot 42 - 6 \cdot 42 \Leftrightarrow 3\chi = (7 - 6) \cdot 42 \Leftrightarrow 3\chi = 42 \Leftrightarrow \chi = \frac{42}{3}$

$$\Leftrightarrow \chi = 14$$

Ωστε πήραμε 14 gr* από το κράμα με τίτλο 0,900 και 42 gr* - 14 gr* = 28 gr* από το άλλο κράμα.

Πρόβλημα 3^ο. Σε ποιά αναλογία πρέπει να συγχωνεύσουμε δύο κράματα (του ίδιου πολύτιμου μετάλλου) με τίτλους 0,920 και 0,800, για να πετύχουμε νέο κράμα με τίτλο 0,840;

Αν πάρουμε x gr από τὸ κράμα μὲ τίτλο 0,920 καὶ y gr* ἀπὸ τὸ ἄλλο κράμα, τὸ νέο κράμα θὰ εἶναι $(x+y)$ gr*

$$\begin{aligned} & \text{*Εχουμε τὴν ἐξίσωση } 0,920x + 0,800y = 0,840(x+y) \Leftrightarrow \\ & 92x + 80y = 84(x+y) \Leftrightarrow 23x + 20y = 21x + 21y \Leftrightarrow 23x - 21x = 21y - 20y \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 2x = y \Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ἡ ἀναλογία συγχωνεύσεως εἶναι 1 gr ἀπὸ τὸ κράμα μὲ τίτλο 0,920 καὶ 2 gr* ἀπὸ τὸ ἄλλο κράμα.

Προβλήματα:

320. Ἐνας χρυσοχόος συγχωνεύει 10 gr* χρυσὸ τίτλου 0,900 μὲ 14 gr* ἄλλο χρυσὸ τίτλου 0,600. Νὰ βρεθῇ ὁ τίτλος τοῦ νέου κράματος.

321. Κάνουμε νέο κράμα βάρους 90 gr* καὶ τίτλου 0,840 ἀπὸ δύο ἄλλα κράματα τίτλων 0,900 καὶ 0,800. Πόσα gr* θὰ πάρουμε ἀπὸ κάθε κράμα;

322. Σὲ ποιά ἀναλογία πρέπει νὰ συγχωνεύσουμε δύο εἶδη χρυσοῦ μὲ τίτλους 0,900 καὶ 0,750, γιὰ νὰ πετύχουμε κράμα τίτλου 0,800, καὶ πόσα gr* θὰ πάρουμε ἀπὸ κάθε εἶδος, ἂν τὸ νέο κράμα ἔχει βάρους 75 gr*;

323. Συγχωνεύουμε 80 gr* ἄργυρο τίτλου 0,920 μὲ ἄλλο ἄργυρο τίτλου 0,850 καὶ παίρνουμε νέο κράμα τίτλου 0,900. Πόσα gr* ἀπὸ τὸ β' κράμα θὰ χρησιμοποιήσουμε;

324. α) Πόσα gr* καθαρὸς χρυσὸς περιέχονται σὲ 50,5 gr* χρυσὸ τίτλου 0,740; β) Κράμα χρυσοῦ 80 gr* περιέχει 50 gr* καθαρὸ χρυσό. Ποιὸς εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράματος;

325. Ἐνας χρυσοχόος συνέντηξε 10 gr* χρυσὸ 17 καρατιῶν μὲ 20 gr* ἄλλο χρυσὸ 20 καρατιῶν καὶ μὲ 30 gr* τίτλου 22 καρατιῶν. Νὰ βρεθῇ ὁ τίτλος τοῦ νέου κράματος σὲ καράτια.

326. Πόσα gr* χαλκὸ πρέπει νὰ συγχωνεύσουμε μὲ 140 gr* καθαρὸ χρυσό, γιὰ νὰ πετύχουμε κράμα τίτλου 0,700;

10. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦ. IV.

327. Ἐὰν $\frac{x}{y} = 2$ καὶ $x+y=15$, νὰ βρεθοῦν τὰ x, y .

328. Ἐὰν $\frac{x}{y} = -\frac{2}{3}$, νὰ βρεθοῦν οἱ λόγοι:

$$\alpha) \frac{2x-y}{x+y} \quad \beta) \frac{x+2}{y-3} \quad (\psi \neq 3) \quad \gamma) \frac{x-2}{\psi+3} \quad (\psi \neq -3) \quad \text{καὶ} \quad \delta) \frac{x+y}{3x-2\psi}$$

329. Ἐὰν $3x+4y=52$ καὶ $\frac{x}{y} = \frac{2}{5}$, νὰ βρεθοῦν τὰ x, y .

$$\left(\frac{x}{y} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{3x}{3 \cdot 2} = \frac{4y}{4 \cdot 5} = \frac{3x}{6} = \frac{4y}{20} = \frac{3x+4y}{6+20} = \frac{52}{26} = \dots \right)$$

330. Νὰ βρεθοῦν οἱ ἡγούμενοι ὁροι τῆς ἀναλογίας $\frac{x}{3} = \frac{y}{1}$, ἂν α) $2x+3y=180$ καὶ β) $2x-5y=30$.

331. Νά βρεθοῦν οἱ ὅροι τοῦ λόγου $\frac{x}{\psi} = \frac{3}{4}$, ἂν α) $x + 3\psi = 150$ καὶ β) $5x - 3\psi = 30$

332. Δύο ἐργάτες τέλειωσαν ἓνα ἔργο. Ὁ α' ἔκανε τὰ $\frac{2}{7}$ τοῦ ἔργου καὶ ὁ β' τὸ ὑπόλοιπο. Ἄν ὁ α' πῆρε 4200 δρχ., πόσο ἐκόστισε ὁλόκληρο τὸ ἔργο;

333. Γιὰ ν' ἀγοράσει κάποιος μία ἐνδυμασία, τοῦ ἐγίνε ἐκπτώση 270 δρχ. καὶ πλήρωσε 1230 δρχ. Πόσο τοῖς ἑκατὸ ἦταν ἡ ἐκπτώση;

334. Ἐνα ἀντικείμενο κόστους 1800 δρχ. πουλήθηκε 1440 δρχ. Πόσο τοῖς ἑκατὸ ἦταν ἡ ἐκπτώση; Ἄν εἶχε κόστος 1400 δρχ. καὶ πουλιόταν 1750 δρχ., πόσο τοῖς ἑκατὸ θὰ ἦταν τὸ κέρδος;

335. 15 ἐργάτες ἔκαναν σὲ 8 ἡμέρες τὸ $\frac{1}{3}$ ἐνὸς ἔργου. Ἄν ἀπολύθηκαν 5 ἐργάτες, σὲ πόσες ἡμέρες οἱ ὑπόλοιποι θὰ τελειώσουν τὸ ὑπόλοιπο ἔργο;

336. Ἐὰν ἓνας πεζοπόρος βαδίζει 7 ἡμέρες ἐπὶ 8 ὥρες κάθε μέρα, θὰ διανύσει τὰ $\frac{7}{13}$ μιᾶς ἀποστάσεως. Πόσες ὥρες τὴν ἡμέρα πρέπει νὰ βαδίζει, γιὰ νὰ διανύσει τὴν ὑπόλοιπη ἀπόσταση σὲ 8 ἡμέρες;

337. Τὰ $\frac{5}{16}$ ἐνὸς κεφαλαίου τοκίστηκαν μὲ 7% κι ἔγιναν μαζί μὲ τὸν τόκο τους 9831 δρχ. Νά βρεθεῖ ὁ χρόνος, ἂν ὁλόκληρο τὸ κεφάλαιο ἦταν 28928 δραχμές.

338. Τὸ $\frac{1}{2}$ ἐνὸς κεφαλαίου τοκίστηκε μὲ 5%, τὸ $\frac{1}{3}$ του μὲ 6% καὶ τὸ ὑπόλοιπο μὲ 4%. Ἄν σ' ἓνα χρόνο κεφάλαιο καὶ τόκοι ἔγιναν 18930 δρχ., νὰ βρεθεῖ τὸ κεφάλαιο.

339. Τοκίστηκαν τὰ $\frac{2}{3}$ ἐνὸς κεφαλαίου μὲ 6% καὶ τὸ ὑπόλοιπο μὲ 5%. Ἄν τοκίζοταν ὁλόκληρο τὸ κεφάλαιο μὲ 5%, θὰ ἔδινε 120 δρχ. τόκο λιγότερο ἀπὸ ὅσο ἔδωσε στὴν προηγούμενη περίπτωση. Ἄν ὁ χρόνος καὶ στὶς δύο περιπτώσεις εἶναι 12 μῆνες, νὰ βρεθεῖ τὸ κεφάλαιο.

340. Ἄν κεφ. + τόκ. εἶναι 10100 δρχ., ὁ χρόνος εἶναι 2,5 μῆνες καὶ $\epsilon\% = 4,8\%$, νὰ βρεθεῖ τὸ κεφάλαιο.

341. Ἄν κεφ. + τόκ. εἶναι 9126 δρχ., ὁ χρόνος εἶναι 63 ἡμέρες καὶ $\epsilon\% = 8\%$, νὰ βρεθεῖ τὸ κεφάλαιο.

342. Ἄν κεφ. — τόκ. εἶναι 4440 δρχ., ὁ χρόνος εἶναι 4 μῆν. καὶ $\epsilon^0/0 = 4^0/0$, νὰ βρεθεῖ τὸ κεφάλαιο.

343. Στὶς παρακάτω ἐξισώσεις ὁ x παριστάνει τὸ κεφάλαιο σὲ δραχμές. Νὰ διατυπώσετε τὶς ἐξισώσεις αὐτὲς σὲ προβλήματα καὶ νὰ τὶς ἐπιλύσετε.

$$\alpha) x + x \cdot \frac{4}{100} \cdot \frac{5}{12} = 18300, \quad \beta) x - x \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{105}{360} = 9460.$$

344. Ἀπὸ δύο πόλεις, ποὺ ἀπέχουν μεταξύ τους 360 km, ξεκινοῦν συγχρόνως γιὰ συνάντηση δύο αὐτοκίνητα μὲ ταχύτητες 65 km/h καὶ 55 km/h. Σὲ ποιά ἀπόσταση θὰ συναντηθοῦν;

345. Νά μεριστεῖ ὁ ἀριθ. 3600 ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τοὺς 12, 15, 20.

346. Νά μεριστεῖ ὁ ἀριθ. 250 ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τοὺς $\frac{4}{6}$ καὶ $\frac{4}{9}$

347. Δύο ἔμποροι κατέθεσαν γιὰ μιὰ ἐπιχείρηση 100.000 δρχ. ὁ α' καὶ 80.000 δρχ. ὁ β'. Ὑστερ' ἀπὸ 18 μῆνες κέρδισαν 54000 δρχ. Πόσο κέρδος θὰ πάρει ὁ καθένας;

348. Ἐνας ἔμπορος ἀρχισε μιὰ ἐπιχείρηση μὲ 500.000 δρχ. Ὑστερ' ἀπὸ 3 μῆνες πῆρε συνεταῖρο, ὁ ὁποῖος κατέθεσε τὸ ἴδιο ποσό. 6 μῆνες μετὰ τὴν πρόσληψη τοῦ συνεταίρου βρῆκαν ὅτι κέρδισαν 60.000 δρχ. Πόσο κέρδος θὰ πάρει ὁ καθένας;

349. Δύο συνεταίροι κατέθεσαν 405000 δρχ. για μία επιχείρηση. Τα χρήματα του α' έμειναν στην επιχείρηση 15 μήνες και του β' 12 μήνες. Εάν πήραν ίσα κέρδη, να βρεθεί το κεφάλαιο, που είχε καταθέσει ο καθένας.

350. Ένας έμπορος ανάμειξε 100/kg* ενός είδους τών 35 δρχ./kg* με άλλο τών 30 δρχ./kg*. Πόσα kg* χρησιμοποίησε από τη β' ποιότητα, εάν πουλούσε 33 δρχ. το kg* του μείγματος κι έκέρδισε 250 δραχμές;

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

351. Εάν $\alpha = -4$ και $\beta = 2$, να βρεθεί η αριθμ. τιμή τών παραστάσεων $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ και $(\alpha + \beta)^3$. Τί παρατηρείτε;

352. Εάν $\alpha = -2$, $\beta = -3$ και $\gamma = -1$, να βρεθεί η αριθμ. τιμή τών παραστάσεων: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$ και $(\alpha + \beta + \gamma)^2$. Τί παρατηρείτε;

353. Εάν $\chi = -2$, $\alpha = -3$ και $\beta = 4$, να βρεθεί η αριθμ. τιμή τών παραστάσεων $\chi^2 + (\alpha + \beta)\chi + \alpha\beta$ και $(\chi + \alpha) \cdot (\chi + \beta)$. Τί παρατηρείτε;

354. Εάν $\chi = 3$, $\psi = -4$, $\alpha = -2$ και $\beta = 1$, να βρεθεί η αριθμητική τιμή τών παραστάσεων $(\alpha^2 + \beta^2) \cdot (\chi^2 + \psi^2) - (\alpha\chi + \beta\psi)^2$ και $(\alpha\psi - \beta\chi)^2$. Τί παρατηρείτε;

355. Να επιλυθούν και να επαληθευθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{3\chi - 1}{5} = \frac{5 - 7\chi}{15}, \quad \beta) \frac{5\chi + 1}{7} = \frac{2\chi - 3}{3}, \quad \gamma) \frac{2\chi - 2,5}{3} = \frac{4\chi - 5}{6},$$

$$\delta) \frac{2\chi - 1,5}{5} = \frac{0,8\chi - 1}{2}$$

(Για την άπαλοιφή τών παρονομαστών να χρησιμοποιηθεί η ιδιότητα τών αναλογιών:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma).$$

356. Να επιλυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) (\chi + 1) \cdot (\chi + 2) = \chi(\chi + 7) - 6, \quad \beta) 2 \cdot (\chi - 1) \cdot (\chi + 1) = \chi(2\chi - 6) + 16, \\ \gamma) (\chi - 3) \cdot (\chi - 4) - 2\chi(\chi - 3) = \chi(11 - \chi), \quad \delta) \frac{1}{3} \left(\chi - \frac{5}{2} \right) - \frac{3}{5} \left(\chi + \frac{4}{3} \right) + \frac{7}{2} = 0$$

357. Να επιλυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{\chi - 7}{4} + \frac{\chi + 10}{21} + 1 = \frac{5\chi - 7}{8} - \frac{9\chi + 6}{35},$$

$$\beta) \frac{3\chi - 2}{8} - \frac{13\chi + 3}{27} + 9 = \frac{5\chi - 12}{18} - \frac{2 - 5\chi}{4},$$

$$\gamma) \frac{3\chi}{4} + \frac{5}{17} (2\chi + 1) = (\chi - 1) + \frac{7\chi - 5}{51} - \frac{2 - \chi}{2},$$

$$\delta) \frac{4 + 13\chi}{22} + \frac{\chi}{2} - \frac{7\chi - 1}{3} + \frac{3 - 15\chi}{33} - \frac{6 - 5\chi}{4} = 0.$$

358. Τίνος αριθμού τὸ $\frac{1}{7}$ είναι κατὰ $\frac{13}{5}$ μικρότερο ἀπὸ τὸ τριπλάσιό του;

359. "Αν σ' ἓναν ἀριθμὸ προσθέσουμε τὸ 4πλάσιό του, βρίσκουμε ἀριθμὸ κατὰ $\frac{8}{25}$ μικρότερο ἀπὸ τὸν 10,32. Ποιὸς εἶναι ὁ ἀριθμός;

360. "Απὸ ποιὸν ἀριθμὸ πρέπει ν' ἀφαιρέσουμε τὸ 8πλάσιο τοῦ $\frac{1}{8}$ του, γιὰ νὰ βροῦμε ἀριθμὸ κατὰ $\frac{21}{2}$ μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ $\frac{1}{10}$ αὐτοῦ;

361. Μὲ ποιὸν ἀριθμὸ πρέπει νὰ διαιρέσουμε τὸν 744, γιὰ νὰ βροῦμε πηλίκο 14 καὶ ὑπόλοιπο 44;

362. Νὰ χωριστεῖ ὁ ἀριθμὸς $\frac{378}{5}$ σὲ δύο ἄλλους, ὥστε ὁ ἓνας νὰ εἶναι διπλάσιος ἀπὸ τὸν ἄλλο.

363. Ἡ ἡλικία τοῦ Πέτρου εἶναι 2πλάσια ἀπὸ τοῦ Παύλου. Πρὶν ἀπὸ 7 χρόνια οἱ ἡλικίες τους εἶχαν ἄθροισμα ἴσο μὲ τῇ σημερινῇ ἡλικίᾳ τοῦ Πέτρου. Νὰ βρεθοῦν οἱ ἡλικίες τους.

364. "Ενα πλοῖο ἀναχώρησε ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ μὲ ταχύτητα 19,5 mil/h. "Υστερ' ἀπὸ 4 ὥρες ἀναχώρησε δεύτερο πλοῖο μὲ ταχύτητα 23,5 mil/h πρὸς τὴν ἴδια κατεύθυνση. Μετὰ ἀπὸ πόσες ὥρες τὸ β' πλοῖο θὰ φτάσει τὸ α';

365. Ἡ γωνία Γ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A}=1$ ὀρθ.) εἶναι ἴση μὲ τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς γωνίας Β. Νὰ βρεθοῦν οἱ γωνίες τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

366. Νὰ βρεθοῦν δύο διαδοχικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ποὺ τὰ τετράγωνά τους διαφέρουν κατὰ 39.

367. Δύο ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἔχουν ἄθροισμα 17 καὶ τὰ τετράγωνά τους διαφέρουν κατὰ 119. Ποιοὶ εἶναι οἱ ἀριθμοί;

368. Δύο ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἔχουν ἄθροισμα 27. "Αν στὸ γινόμενό τους προσθέσουμε τὸ τετράγωνο τοῦ μικρότερου, βρίσκουμε 216. Ποιοὶ εἶναι οἱ ἀριθμοί;

369. "Ενας ἀκέραιος ἀριθμὸς ἂν διαιρεθεῖ διὰ 11, δίνει ὑπόλοιπο 9, ἐνῶ ἂν διαιρεθεῖ διὰ 3, δίνει ὑπόλοιπο 2. "Εάν ἡ διαφορά τῶν πηλίκων εἶναι 53, βρεῖτε τὸν ἀριθμὸ.

370. Τὸ ψηφίο τῶν δεκάδων ἐνὸς διψήφιου ἀριθμοῦ εἶναι κατὰ 4 μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ ψηφίο τῶν μονάδων. "Αν στὸν ἀριθμὸ προσθέσουμε τὸ $\frac{1}{5}$ του, βρίσκουμε 114. Ποιὸς εἶναι ὁ ἀριθμός;

371. "Ενα ρολοὶ δείχνει μεσημέρι ἀκριβῶς (12 h 0 min 0 sec). Ποιὰ ὥρα θὰ συναντηθοῦν (γιὰ δεύτερη φορά) ὁ ὥροδείκτης καὶ ὁ λεπτοδείκτης;

372. Δύο θετικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἔχουν διαφορά 48. "Αν ὁ μεγαλύτερος διαιρεθεῖ διὰ τοῦ μικρότερου, δίνει πηλίκο 3 καὶ ὑπόλοιπο 2. Ποιοὶ εἶναι οἱ ἀριθμοί;

373. Νὰ ἐπιλυθοῦν οἱ ἀνισώσεις:

$$\alpha) \frac{3x-1}{5} > \frac{x-1}{3}, \quad \beta) \frac{x+5}{2} - \frac{x-1}{3} > 3, \quad \gamma) 3x-3 + \frac{x-1}{-4} > 0.$$

$$\delta) \frac{x+1}{3} - \frac{x-1}{2} < 1, \quad \epsilon) 2\left(\frac{5}{2}-x\right) > \frac{1}{2} + 2(1,5-x).$$

374. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ κοινὲς λύσεις τῶν ἀνισώσεων:

$$\alpha) x-1 > -2 \text{ καὶ } 2(x-3) < 0$$

$$\beta) \frac{1}{2} + x > x \text{ καὶ } x-3 < 10$$

$$\gamma) x-3 > x \text{ καὶ } 2-x > -x$$

$$375. \text{ "Αν } A = \left\{x/x - \frac{x-1}{2} > \frac{x-2}{2} - \frac{x-3}{4} \text{ καὶ } x \in \mathbb{Z}\right\} \text{ καὶ}$$

$B = \{x/-x+1 < 4x+1 \wedge x \in \mathbb{Z}\}$, να βρεθεί το $A \cap B$ με αναγραφή.

376. Να παραστήσετε γραφικώς τις συναρτήσεις:

$$\alpha) \psi = -2x+5, \quad \beta) \psi = \frac{24}{x} \quad \gamma) \psi = -4x \quad (x, \psi \in \mathbb{Q})$$

377. Έαν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, ν' αποδείξετε ότι ισχύουν οι πιο κάτω αναλογίες:

$$1) \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{\gamma}{\gamma+\delta}, \quad 2) \frac{\alpha}{\alpha-\beta} = \frac{\gamma}{\gamma-\delta}, \quad 3) \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta} \quad (\beta, \delta \neq 0, |\alpha| \neq |\beta|, |\gamma| \neq |\delta|)$$

378. Αν $\frac{x}{x+1} = \frac{\psi}{\psi+2}$ και $x+\psi=21$, να βρεθούν τα x, ψ .

379. Να βρεθούν οι ηγούμενοι όροι των ίσων λόγων $\frac{x}{2} = \frac{\psi}{3} = \frac{z}{5}$, εάν $2x+3\psi+4z=330$.

380. Να μερισθεί 99 ανάλογα προς τους $\alpha) 2, 3, 4$ και $\beta) 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.

381. Να μερισθεί 390 αντίστρ. ανάλογα προς τους $\alpha) 2, 3, 4$ και $\beta) \frac{5}{2}, \frac{5}{6}, 1$.

382. Ένας έμπορος αγοράζει καφέ 81 δρχ. το kg^* , τον καβουρδίζει και τον μετα-πουλά. Πόσο πρέπει να πουλά το kg^* , για να πετύχει κέρδος 10% επί του κόστους, αν λάβουμε υπ' όψη ότι ο καφές χάνει το $\frac{1}{10}$ του βάρους του, όταν καβουρδίζεται;

383. Ένας έμπορος γράφει επάνω σ' ένα έμπορεύμα τιμή κατά 25% μεγαλύτερη από την τιμή κόστους. Ύστερα κάνει έκπτωση 10% επί της τιμής που γράφει επάνω. Βρείτε πόσο τοίς εκατό επί του κόστους κερδίζει τελικά ο έμπορος.

384. Έάν κέφ.-τόκ. = 54000 δρχ., ό χρόνος είναι 2,5 έτη και $\epsilon\% = 4\%$, να βρεθεί ό τόκος.

385. Έάν κέφ.+τόκ. = 4060 δρχ., ό χρόνος είναι 3 μην. και $\epsilon\% = 6\%$, να βρεθεί ό τόκος.

386. Έάν κέφ.-τόκ. = 7160 δρχ., ό χρόνος είναι 40 ήμ. και $\epsilon\% = 5\%$, να βρεθεί ό τόκος.

387. Ένα μέρος κεφαλαίου 40.000 δρχ. τοκίστηκε με 4% για 5 μήνες κι έφερε τόκο 500 δρχ. περισσότερο από το υπόλοιπο μέρος του, που τοκίστηκε με 5% για 6 μήνες. Να βρεθεί το μέρος του κεφαλαίου που τοκίστηκε (το πρώτο).

388. Δύο ίσα κεφάλαια τοκίζονται το ένα με 4,5% και το άλλο με 5,5% και δίνουν τόκο 4500 δρχ. σε 2 έτη. Ποιά είναι τα κεφάλαια;

389. Στις παρακάτω εξισώσεις ό x παριστάνει το κεφάλαιο σε δραχμές. Να διατυπώσετε αυτές τις εξισώσεις σε προβλήματα και να τις επιλύσετε.

$$\alpha) x+x \cdot \frac{6}{100} \cdot \frac{2,4}{12} = 10120, \quad \beta) x-x \cdot \frac{2,5}{100} \cdot \frac{400}{360} = 7000.$$

390. Ένας γεωργός πούλησε έναν κήπο 1050 m^2 . Τα χρήματα που πήρε τα τόκισε με 12% και μετά από 3 έτη και 2 μήνες πήρε τόκο και κεφάλαιο 115920 δρχ. Πόσο πούλησε το στρέμμα;

391. Αγόρασε κάποιος οικόπεδο 700 m^2 . Έπληρώσε τη μισή τιμή άμέσως κι έπέτυχε έκπτωση 8% έπ' αυτής. Για την άλλη μισή πλήρωσε ύστερ' από 8 μήνες 104000 δρχ. μαζί με τον τόκο, με 6%. Τί ποσό πλήρωσε συνολικά για το οικόπεδο και ποιά ήταν ή τιμή του στρέμματος;

392. 4 άδελφοί μοιράστηκαν κληρονομιά 540 στρέμματα ως έξης: Ό πρώτος πήρε τα μισά από όσα πήραν οι άλλοι τρεις, που τα μερίδιά τους ήταν ανάλογα προς τους αριθμούς 3, 4 και 5. Πόσα στρέμματα πήρε ό καθένας;

393. Δύο έμποροι έκαναν έπιχείρηση. Ό α' κατέθεσε 70000 δρχ. και πήρε κέρδος 6000 δρχ., ό β' κατέθεσε 80000 δρχ. και το κέρδος του ήταν 8000 δρχ. Πόσο χρόνο έμειναν τα χρήματα του β' στην έπιχείρηση, αν τα χρήματα του α' έμειναν 6 μήνες;

ΜΕΡΟΣ Β'

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Η Ελλάδα είναι χώρα με μεγάλη ιστορία και πολιτισμό. Η οικονομία της έχει υποστεί σημαντικές αλλαγές τα τελευταία χρόνια.

2. Η Ελλάδα είναι χώρα με μεγάλη ιστορία και πολιτισμό. Η οικονομία της έχει υποστεί σημαντικές αλλαγές τα τελευταία χρόνια.

3. Η Ελλάδα είναι χώρα με μεγάλη ιστορία και πολιτισμό. Η οικονομία της έχει υποστεί σημαντικές αλλαγές τα τελευταία χρόνια.

4. Η Ελλάδα είναι χώρα με μεγάλη ιστορία και πολιτισμό. Η οικονομία της έχει υποστεί σημαντικές αλλαγές τα τελευταία χρόνια.

5. Η Ελλάδα είναι χώρα με μεγάλη ιστορία και πολιτισμό. Η οικονομία της έχει υποστεί σημαντικές αλλαγές τα τελευταία χρόνια.

6. Η Ελλάδα είναι χώρα με μεγάλη ιστορία και πολιτισμό. Η οικονομία της έχει υποστεί σημαντικές αλλαγές τα τελευταία χρόνια.

7. Η Ελλάδα είναι χώρα με μεγάλη ιστορία και πολιτισμό. Η οικονομία της έχει υποστεί σημαντικές αλλαγές τα τελευταία χρόνια.

8. Η Ελλάδα είναι χώρα με μεγάλη ιστορία και πολιτισμό. Η οικονομία της έχει υποστεί σημαντικές αλλαγές τα τελευταία χρόνια.

9. Η Ελλάδα είναι χώρα με μεγάλη ιστορία και πολιτισμό. Η οικονομία της έχει υποστεί σημαντικές αλλαγές τα τελευταία χρόνια.

10. Η Ελλάδα είναι χώρα με μεγάλη ιστορία και πολιτισμό. Η οικονομία της έχει υποστεί σημαντικές αλλαγές τα τελευταία χρόνια.

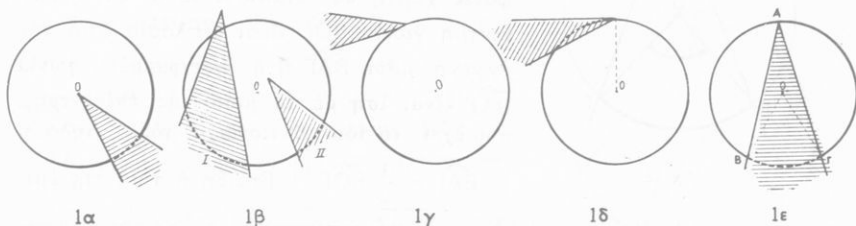
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

Α. ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ

§ 1. Σχεδιάστε στο τετράδιό σας έναν κύκλο και στο χαρτόνι σας μία κυρτή γωνία. Κόψτε τη γωνία και σχεδιάστε τις διάφορες θέσεις, πού μπορεί να πάρει η γωνία σχετικά με τον κύκλο.

Περιγράφουμε μερικές από τις θέσεις αυτές:



σχ. 1.

Η γωνία του σχήματος 1α έχει την κορυφή της στο κέντρο του κύκλου. Η γωνία αυτή, όπως έχουμε μάθει στην Α' τάξη, λέγεται **ἐπίκεντρο**. Οί γωνίες του σχήματος 1β δὲν ἔχουν την κορυφή τους στὸν κύκλο· ἡ (I) τὴν ἔχει στὸ ἐξωτερικὸ καὶ ἡ (II) στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ κύκλου. Η γωνία τοῦ σχήματος 1γ ἔχει τὴν κορυφή της στὸν κύκλο καὶ οἱ πλευρές της βρίσκονται στὸ ἐξωτερικὸ του. Στὸ σχῆμα 1δ ἡ μία πλευρὰ τῆς γωνίας ἀποκόβει χορδὴ καὶ ἡ ἄλλη εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου στὸ ἓνα ἄκρο τῆς χορδῆς.

Η γωνία $\widehat{BA\Gamma}$ τοῦ σχήματος 1ε ἔχει τὴν κορυφή της στὸν κύκλο καὶ οἱ πλευρές της τὸν τέμνουν. Η γωνία αὐτὴ λέγεται **ἐγγεγραμμένη** στὸν κύκλο.

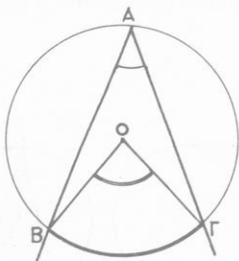
Ὡστε: Ἐγγεγραμμένη στὸν κύκλο γωνία ὀνομάζεται ἡ γωνία, πού ἔχει τὴν κορυφή της στὸν κύκλο καὶ οἱ πλευρές της τὸν τέμνουν.

Τὸ τόξο $\widehat{B\Gamma}$, πού βρίσκεται στὸ ἐσωτερικὸ τῆς γωνίας αὐτῆς, λέγεται **ἀντίστοιχο τόξο τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας** (σχῆμα 1ε).

Τὴν ἐπίκεντρη γωνία $\widehat{BOΓ}$, ποὺ ἔχει τὸ ἴδιο ἀντίστοιχο τόξο μὲ τὴν ἔγγεγραμμένην, τὴ λέμε **ἀντίστοιχη ἐπίκεντρη** τῆς ἔγγεγραμμένης γωνίας $\widehat{BAΓ}$. (σχῆμα 1ε).

§ 2. Σχέση τῆς ἔγγεγραμμένης γωνίας μὲ τὴν ἐπίκεντρη, ποὺ ἔχει τὸ ἴδιο ἀντίστοιχο τόξο.

Σχεδιάστε ἕναν κύκλο, μία ἔγγεγραμμένη γωνία σ' αὐτὸν καὶ τὴν ἐπίκεντρη, ποὺ ἔχει τὸ ἴδιο ἀντίστοιχο τόξο. Συγκρίνετε τὶς δύο αὐτὲς γωνίες. Τί παρατηρεῖτε; (σχ. 2).



σχ. 2.

Ἐστω κύκλος (O, R) καὶ ἡ ἔγγεγραμμένη σ' αὐτὸν γωνία $\widehat{BAΓ}$. Σχηματίζουμε τὴν ἀντίστοιχὴ τῆς ἐπίκεντρη γωνία $\widehat{BOΓ}$.

Ἄν μετρήσουμε ἢ χρησιμοποιήσουμε διαφανὲς χαρτί, θὰ διαπιστώσουμε ὅτι ἡ ἐπίκεντρη γωνία $\widehat{BOΓ}$ εἶναι διπλάσια ἀπὸ τὴν ἔγγεγραμμένη $\widehat{BAΓ}$ ἢ ἡ ἔγγεγραμμένη γωνία $\widehat{BAΓ}$ εἶναι ἴση μὲ τὸ μισὸ τῆς ἐπίκεντρης, ποὺ ἔχει τὸ ἴδιο ἀντίστοιχο τόξο. Δηλαδή

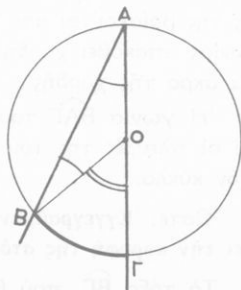
$$\widehat{BAΓ} = \frac{1}{2} \widehat{BOΓ}. \quad \text{Ἐπειδὴ ἡ τιμὴ τῆς ἐπί-}$$

κεντρῆς γωνίας ἰσοῦται μὲ τὴν τιμὴ τοῦ ἀντίστοιχου τόξου τῆς, συμπεραίνουμε ὅτι ἡ τιμὴ τῆς ἔγγεγραμμένης γωνίας ἰσοῦται μὲ τὸ μισὸ τῆς τιμῆς τοῦ ἀντίστοιχου τόξου τῆς.

Γιὰ νὰ αἰτιολογήσουμε τὴ σχέση τῆς ἔγγεγραμμένης γωνίας σ' ἕναν κύκλο μὲ τὴν ἀντίστοιχὴ τῆς ἐπίκεντρη, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Διακρίνουμε τρεῖς περιπτώσεις:

α' περίπτωση. Μία ἀπὸ τὶς πλευρὲς τῆς ἔγγεγραμμένης γωνίας εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου. (σχῆμα 3). Ἐστω κύκλος (O, R) , ἡ ἔγγεγραμμένη σ' αὐτὸν γωνία $\widehat{BAΓ}$ καὶ ἡ ἀντίστοιχη ἐπίκεντρη γωνία $\widehat{BOΓ}$. Ἡ ἐπίκεντρη γωνία $\widehat{BOΓ}$ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου AOB . Ἐπομένως $\widehat{BOΓ} = \widehat{BAΓ} + \widehat{ABO}$ καὶ ἐπειδὴ $\widehat{ABO} = \widehat{BAΓ}$, ἔχουμε $\widehat{BOΓ} = 2 \cdot \widehat{BAΓ}$ ἄρα $\widehat{BAΓ} = \frac{1}{2} \widehat{BOΓ}$



σχ. 3.

Δηλαδή ἡ ἔγγεγραμμένη γωνία $\widehat{BAΓ}$ εἶναι τὸ μισὸ τῆς ἐπίκεντρῆς $\widehat{BOΓ}$.

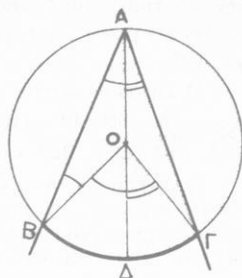
β' περίπτωση *Εστω ότι το κέντρο O είναι έσωτερικό σημείο της έγγεγραμμένης γωνίας $\widehat{BAG}$ (σχ. 4). Φέρνουμε τη διάμετρο $AO\Delta$ και σχηματίζονται δύο έγγεγραμμένες γωνίες, οι $\widehat{BAD}$ και $\widehat{DAG}$, για τις όποιες έχουμε (αν λάβουμε ύπ' όψη την α' περίπτωση):

$$\widehat{BAD} = \frac{1}{2} \widehat{BOD} \quad \text{Προσθέτουμε τις ισότητες}$$

$$\widehat{DAG} = \frac{1}{2} \widehat{DOG} \quad \text{αυτές κατά μέλη και έχουμε}$$

$$\widehat{BAD} + \widehat{DAG} = \frac{1}{2} (\widehat{BOD} + \widehat{DOG}) \quad \text{δηλαδή}$$

$$\boxed{\widehat{BAG} = \frac{1}{2} \widehat{BOG}}$$



σχ. 4.

γ' περίπτωση. Το κέντρο O είναι έξω-τερικό σημείο της γωνίας $\widehat{BAG}$ (σχ. 5).

Φέρνουμε τη διάμετρο $AO\Delta$ και σχηματίζονται οι έγγεγραμμένες γωνίες $\widehat{BAD}$ και $\widehat{GAD}$, για τις όποιες έχουμε (α' περίπτωση):

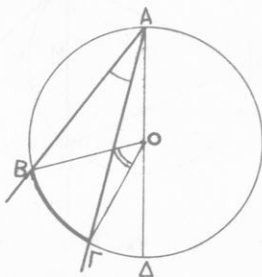
$$\widehat{BAD} = \frac{1}{2} \widehat{BOD} \quad \text{'Αφαιρούμε τις ισότητες αυ-}$$

$$\widehat{GAD} = \frac{1}{2} \widehat{GOD} \quad \text{τές κατά μέλη και βρίσκουμε:}$$

$$\widehat{BAD} - \widehat{GAD} = \frac{1}{2} (\widehat{BOD} - \widehat{GOD}),$$

Συνεπώς

$$\boxed{\widehat{BAG} = \frac{1}{2} \widehat{BOG}}$$



σχ. 5.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι: **Κάθε έγγεγραμμένη γωνία σε κύκλο ισούται με το μισό της επίκεντρης, που έχει το ίδιο αντίστοιχο τόξο.**

Παρατηρήσεις

- 1) Κάθε έγγεγραμμένη γωνία σε κύκλο είναι πάντοτε **κυρτή** γωνία.
- 2) 'Η επίκεντρη γωνία, που έχει το ίδιο αντίστοιχο τόξο με την έγγεγραμμένη, μπορεί να είναι κυρτή ή μη κυρτή γωνία.

*Άσκήσεις

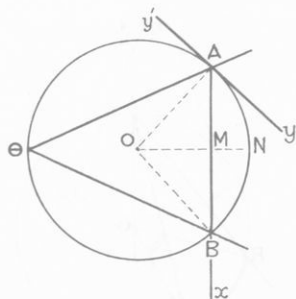
- 1) Μία επίκεντρη γωνία είναι 120° . Να βρεθεί η έγγεγραμμένη γωνία, που έχει το ίδιο αντίστοιχο τόξο με την επίκεντρη αυτή.

2) *Αν μία ἐγγεγραμμένη γωνία είναι $23^\circ 30'$, νὰ βρεῖτε σὲ μοῖρες καὶ σὲ μέρη ὀρθῆς τὴν ἀντίστοιχὴ τῆς ἐπίκεντρῆς γωνίας.

3) Νὰ βρεῖτε τὴν ἐγγεγραμμένη γωνία, ποὺ ἔχει ἀντίστοιχο τόξο α) 35° , β) 42° , γ) 192° .

4) Σημειώνουμε στὸν κύκλο (O, R) 4 διαδοχικὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ ἔτσι ὥστε νὰ ἔχουμε $\widehat{AD} = 50^\circ$, $\widehat{BF} = 110^\circ$, $\widehat{\Gamma\Delta} = 70^\circ$. Νὰ ὑπολογίσετε τὶς γωνίες $\widehat{BA\Gamma}$, $\widehat{B\Delta\Gamma}$, $\widehat{\Gamma\Delta A}$, $\widehat{\Gamma\Delta B}$, $\widehat{\Delta\Gamma A}$, $\widehat{\Delta\Gamma B}$, $\widehat{B\Delta A}$ καὶ $\widehat{A\Gamma B}$.

5) Δίνεται ὁ κύκλος (O, R) . Φέρνουμε δύο χορδὲς τοῦ AD καὶ $B\Gamma$, οἱ ὁποῖες τέμνουνται στὸ σημεῖο E , ποὺ βρίσκεται στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ κύκλου. Νὰ συγκρίνετε τὴν τιμὴ τῆς γωνίας, ποὺ ἔχει κορυφὴ τὸ E , μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τιμῶν τῶν τόξων, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς καὶ τῶν προεκτάσεών τους. (*Υπόδειξη: Φέρετε τὴν AG).



σχ. 6.

6) Δίνεται ὁ κύκλος (O, R) . Φέρνουμε δύο εὐθεῖες, οἱ ὁποῖες τὸν τέμνουν ἀντιστοίχως στὰ σημεῖα B, Γ καὶ A, Δ συναντιοῦνται στὸ σημεῖο Z , ποὺ βρίσκεται στὸ ἐξωτερικὸ τοῦ κύκλου. Νὰ συγκρίνετε τὴν τιμὴ τῆς γωνίας, ποὺ ἔχει κορυφὴ τὸ Z , μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰ τῶν τιμῶν τῶν τόξων τοῦ κύκλου, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας αὐτῆς. (*Υπόδειξη: Φέρετε τὴν AG ἢ BD).

7) Δίνεται ὁ κύκλος (O, R) καὶ μία χορδὴ τοῦ AB (σχ. 6). Στὸ ἓνα ἄκρο τῆς (π.χ. στὸ A) φέρετε τὴν ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου $\psi' A\psi$. Νὰ συγκρίνετε τὴ γωνία $\widehat{\psi AB}$, ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ τὴ χορδὴ AB καὶ τὴν ἐφαπτομένη στὸ ἄκρο τῆς, μὲ τὴν ἐγγεγραμμένη $\widehat{AOB}$, ποὺ ἔχει ἀντίστοιχο τόξο τὸ $\widehat{ANB}$. (*Υπόδειξη: Συγκρίνετε τὶς γωνίες αὐτὲς μὲ τὸ μισὸ τῆς ἐπι-

κεντρῆς $\widehat{BOA}$. Διατυπῶστε τὴ σχετικὴ πρόταση).

§ 3. Ἐφαρμογὲς τῶν ἐγγεγραμμένων γωνιῶν.

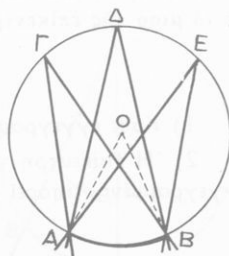
*Άμεσες ἐφαρμογὲς τῆς προηγούμενης προτάσεως ἔχουμε στὰ παρακάτω:

1. *Ἐστω ὁ κύκλος (O, R) καὶ οἱ ἐγγεγραμμένες γωνίες σ' αὐτὸν $\widehat{AGB}$, $\widehat{ADB}$, $\widehat{AEB}$, ποὺ ἔχουν τὸ ἴδιο ἀντίστοιχο τόξο $\widehat{AB}$. Συγκρίνετε αὐτὲς τὶς γωνίες (σχ. 7).

Οἱ γωνίες αὐτὲς εἶναι ἴσες, ἐπειδὴ κάθε μία ἀπ' αὐτὲς εἶναι ἴση μὲ τὸ μισὸ τῆς ἴδιας ἐπίκεντρῆς γωνίας $\widehat{AOB}$. Δηλαδή

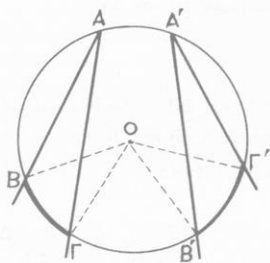
$$\widehat{AGB} = \widehat{ADB} = \widehat{AEB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}.$$

*Αρα: Οἱ ἐγγεγραμμένες γωνίες, ποὺ ἔχουν τὸ ἴδιο ἀντίστοιχο τόξο, εἶναι ἴσες.



σχ. 7.

2. Έχουμε τις εγγεγραμμένες στον ίδιο κύκλο O γωνίες $\widehat{BA\Gamma}$ και $\widehat{B'A'\Gamma'}$, οι οποίες έχουν τα αντίστοιχά τους τόξα ίσα, $\widehat{B\Gamma} = \widehat{B'\Gamma'}$. Να συγκρίνετε αυτές τις γωνίες (σχ. 8).



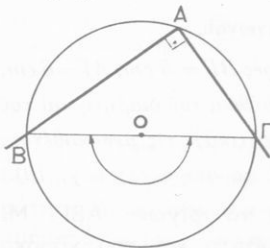
σχ. 8.

Στις γωνίες αυτές έχουμε τις ισότητες $\widehat{BA\Gamma} = \frac{1}{2} \widehat{BO\Gamma}$ και $\widehat{B'A'\Gamma'} = \frac{1}{2} \widehat{B'O\Gamma'}$.

Επειδή $\widehat{B\Gamma} = \widehat{B'\Gamma'}$, έχουμε $\widehat{BO\Gamma} = \widehat{B'O\Gamma'}$, οπότε και $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{B'A'\Gamma'}$, γιατί είναι μισά ίσων γωνιών.

Στον ίδιο κύκλο (ή σε ίσους κύκλους) δύο εγγεγραμμένες γωνίες, που έχουν ίσα τα αντίστοιχά τους τόξα, είναι ίσες.

Αντιστρόφως, αν οι εγγεγραμμένες γωνίες $\widehat{BA\Gamma}$, $\widehat{B'A'\Gamma'}$ είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{B'A'\Gamma'}$, θα είναι και οι αντίστοιχες τους επίκεντρες γωνίες ίσες, δηλαδή $\widehat{BO\Gamma} = \widehat{B'O\Gamma'}$ και συνεπώς $\widehat{B\Gamma} = \widehat{B'\Gamma'}$. Ωστε παρατηρούμε ότι δύο ίσες εγγεγραμμένες γωνίες στον ίδιο κύκλο (ή σε ίσους κύκλους) έχουν ίσα αντίστοιχα τόξα.



σχ. 9.

3. Έστω κύκλος (O, R) και η εγγεγραμμένη γωνία σ' αυτόν $\widehat{BA\Gamma}$, η οποία έχει αντίστοιχο τόξο ίσο με ένα ημικύκλιο. Μετρήστε την γωνία αυτή (σχ. 9).

Μετρώντας την διαπιστώνουμε ότι είναι 90° (ή 1 όρθ.). Αυτό δικαιολογείται ως εξής: Η γωνία αυτή είναι όρθή, γιατί η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία είναι μία ευθεία γωνία. Δηλαδή $\widehat{BA\Gamma} = \frac{1}{2} \widehat{BO\Gamma} = \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ όρθ.} = 1 \text{ όρθ.}$

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία σε κύκλο, της οποίας το αντίστοιχο τόξο είναι ένα ημικύκλιο, είναι όρθή.

Σημείωση.

Την πρόταση της § 2 «κάθε εγγεγραμμένη γωνία σε κύκλο ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας, η οποία έχει το ίδιο αντίστοιχο τόξο» την αιτιολογήσαμε με τη βοήθεια άλλων προτάσεων, που είναι γνωστές από την προηγούμενη τάξη. Το ίδιο επαναλάβαμε στις προτάσεις 1, 2, 3 της § 3. Την εργασία αυτή την ονομάζουμε **απόδειξη** και τις προτάσεις τις λέμε **θεωρήματα**.

Ωστε: **θεώρημα** είναι μία πρόταση, της οποίας αποδείχνουμε την αλήθεια.

Στην Α' τάξη μάθαμε μερικές βασικές προτάσεις, τις οποίες δεν αποδείξαμε, όπως

π.χ. «ἀπὸ δύο σημεία διέρχεται μία καὶ μόνο εὐθεία» ἢ «ἀπὸ ἑνα σημείο, ποὺ βρίσκεται ἐκτὸς εὐθείας, διέρχεται μία μόνο παράλληλη πρὸς αὐτήν». Τὶς προτάσεις αὐτὲς τὶς ὀνομάζουμε **ἀξιώματα**.

*Ὡστε: **ἀξίωμα** εἶναι μία βασικὴ πρόταση, ποὺ τὴν δεχόμαστε ὡς ἀληθῆ.

Ἀσκήσεις

8) Σ' ἓναν κύκλο νὰ φέρετε δύο κάθετες διαμέτρους AA' καὶ BB' . Ἐν M εἶναι ἓνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ τόξου $A'B'$, νὰ συγκρίνετε τὶς γωνίες $\widehat{AMB}$ καὶ $\widehat{B'MA}$.

9) Βρεῖτε τὸ εἶδος τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας σὲ κύκλο μὲ ἀντίστοιχο τόξο μεγαλύτερο, ἴσο, ἢ μικρότερο ἀπὸ ἡμικύκλιο.

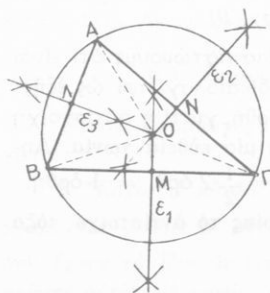
10) Δύο κύκλοι μὲ κέντρα O καὶ O' τέμνονται στὰ σημεία A καὶ B . Ἐν Γ καὶ Δ εἶναι τὰ ἐκ διαμέτρου ἀντίθετα σημεία τοῦ A ὡς πρὸς τοὺς κύκλους αὐτοὺς, ν' ἀποδείξετε ὅτι τὰ σημεία Γ, B, Δ βρίσκονται πάνω σὲ μία εὐθεία καὶ νὰ συγκρίνετε τὰ εὐθ. τμήματα OO' καὶ $\Gamma\Delta$. (Σημ. Μὲ τὸν ὑπολογισμό τῶν γωνιῶν $\widehat{AB\Gamma}$ καὶ $\widehat{AB\Delta}$ θὰ βοηθηθεῖτε νὰ ἀποδείξετε τὴν πρόταση).

11) Σημειώνουμε στὸν κύκλο (O, R) 4 διαδοχικὰ σημεία A, B, Γ, Δ ἔτσι ποὺ νὰ εἶναι $\widehat{AB}=70^\circ$, $\widehat{B\Gamma}=100^\circ$, $\widehat{\Gamma\Delta}=110^\circ$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ γωνίες $\widehat{AB\Gamma}$, $\widehat{A\Delta\Gamma}$. Τί παρατηρεῖτε; Τὸ ἴδιο καὶ γιὰ τὶς γωνίες $\widehat{BA\Delta}$ καὶ $\widehat{B\Gamma\Delta}$.

Β'. ΕΥΘΕΙΕΣ ΣΥΝΤΡΕΧΟΥΣΕΣ ΣΕ ΤΡΙΓΩΝΟ

1ο. Μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν τριγώνου.

§ 4. Κατασκευάστε ἓνα τρίγωνο $AB\Gamma$ μὲ πλευρὰς $B\Gamma=5\text{ cm}$, $A\Gamma=6\text{ cm}$,



σχ. 10.

$AB=4\text{ cm}$. Μὲ τὴ βοήθεια τοῦ διαβήτη καὶ τοῦ χάρακα φέρετε (προσεκτικὰ) τὶς μεσοκάθετους τῶν πλευρῶν του. Τί παρατηρεῖτε; (σχ. 10).

Κατασκευάζουμε τὸ τρίγωνο $AB\Gamma$. Μὲ τὴ βοήθεια τοῦ διαβήτη καὶ τοῦ χάρακα φέρνουμε κατὰ τὸν γνωστὸ μας τρόπο τὶς μεσοκάθετους $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ παρατηροῦμε ὅτι αὐτὲς **συντρέχουν** σ' ἓνα σημεῖο O .

Συγκρίνουμε (μὲ τὸ διαβήτη) τὰ τμήματα OA, OB, OG καὶ παρατηροῦμε ὅτι αὐτὰ εἶναι ἴσα, δηλαδὴ $OA=OB=OG$. Ἐν μὲ κέντρο τὸ O καὶ ἀκτίνα OA γράψουμε κύκλο, αὐτὸς διέρχεται ἀπὸ τὶς τρεῖς κορυφές A, B, Γ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος** τοῦ τριγώνου.

*Ἀρα: **Οἱ τρεῖς μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν τριγώνου συντρέχουν σ' ἓνα σημεῖο, ποὺ εἶναι τὸ κέντρο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τοῦ τριγώνου.**

Γιὰ νὰ αἰτιολογήσουμε τὸ παραπάνω ἀποτέλεσμα, στηριζόμαστε στὴ γνωστὴ μας πρόταση: «Κάθε σημεῖο τῆς μεσοκάθετου ἐνὸς εὐθ. τμήματος ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα του» καὶ «κάθε σημεῖο, ποὺ ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα ἐνὸς εὐθ. τμήματος, βρίσκεται πάνω στὴν μεσοκάθετο αὐτοῦ».

Οἱ μεσοκάθετοι ϵ_1 καὶ ϵ_2 τῶν πλευρῶν ΒΓ καὶ ΑΓ τέμνονται σ' ἓνα σημεῖο Ο, (ἐπειδὴ οἱ κάθετοι πάνω σ' αὐτὲς ΑΓ καὶ ΒΓ τέμνονται). Ἐπειδὴ τὸ Ο βρίσκεται πάνω στὴ μεσοκάθετο ϵ_1 , ἔχουμε $OB=OG$. Ὁμοίως, ἐπειδὴ τὸ Ο βρίσκεται καὶ πάνω στὴ μεσοκάθετο ϵ_2 , ἔχουμε καὶ $OG=OA$. Συνεπῶς $OA=OB$. Ἐπειδὴ τὸ Ο ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς πλευρᾶς ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, βρίσκεται πάνω στὴ μεσοκάθετό της ϵ_3 . Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνουμε, ὅτι $OA=OB=OG$. Ἄν μὲ κέντρο τὸ Ο καὶ ἀκτίνα ΟΑ γράψουμε κύκλο, αὐτὸς περνᾷ ἀπὸ τὶς τρεῖς κορυφές Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ λέγεται **περιγεγραμμένος** κύκλος τοῦ τριγώνου.

Ὡστε: **Οἱ τρεῖς μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν κάθε τριγώνου συντρέχουν σ' ἓνα σημεῖο, ποὺ εἶναι τὸ κέντρο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τοῦ τριγώνου.**

Ἀσκήσεις:

12) Φέρετε τὶς μεσοκάθετους τῶν πλευρῶν ἐνὸς ὀρθογωνίου καὶ ἐνὸς ἀμβλυγωνίου τριγώνου. Τί ἔχετε νὰ παρατηρήσετε γιὰ τὴ θέση τοῦ κέντρου τῶν περιγεγραμμένων κύκλων σ' αὐτά;

13) Φέρετε τὶς μεσοκάθετους τῶν ἰσῶν πλευρῶν ἐνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ τὸ ὕψος, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴ βάση του. Τί παρατηρεῖτε; Δικαιολογήστε μὲ συλλογισμοὺς τὴ παρατήρησή σας.

14) Κατασκευάστε ἓνα τρίγωνο ΑΒΓ. Μὲ βάσεις τὶς πλευρές του σχηματίστε ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΟΒ, ΒΚΓ, ΓΛΑ καὶ φέρετε τὰ ὕψη τους ΟΟ', ΚΚ', ΛΛ'. Προεκτείνετε τα καὶ δικαιολογήστε τὸ ὅτι αὐτὰ συντρέχουν στὸ ἴδιο σημεῖο.

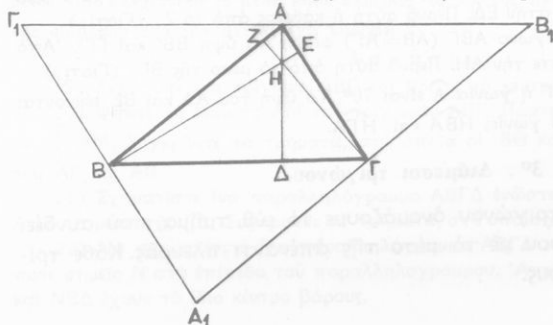
2ο. Ὑψη ἐνὸς τριγώνου.

§ 5. Ὑψος ἐνὸς τριγώνου ὀνομάζουμε τὸ εὐθ. τμήμα, τὸ ὁποῖο συνδέει μιὰ κορυφὴ τοῦ τριγώνου μὲ τὸ ἴχνος τῆς καθέτου ἀπὸ τὴν κορυφὴ αὐτὴ στὴν ἀπέναντι πλευρά. Ὑψος ὅμως θεωρεῖται καὶ ὁ φορέας τοῦ τμήματος αὐτοῦ. Ἐπομένως κάθε τρίγωνο ἔχει τρία ὕψη.

Νὰ κατασκευάσετε ἓνα τρίγωνο ΑΒΓ μὲ πλευρές $AB=3,5$ cm, $BΓ=4$ cm

καὶ $ΑΓ=2,5$ cm. Φέρετε μὲ τὴ βοήθεια τοῦ χάρακα καὶ τοῦ διαβήτη τὰ ὕψη τοῦ τριγώνου. Τί παρατηρεῖτε; (Σχ. 11).

Φέρνουμε μὲ προσοχὴ τὰ ὕψη ΑΔ, ΒΕ καὶ ΓΖ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Παρατηροῦμε ὅτι τὰ



σχ. 11.

τρία ύψη συντρέχουν στο ίδιο σημείο H , που το ονομάζουμε **ὀρθόκεντρο** τοῦ τριγώνου. Ἔχουμε λοιπὸν τὴν πρόταση: **Τὰ ύψη κάθε τριγώνου συντρέχουν σὲ ἓνα σημείο.**

Ἄν θέλουμε νὰ **αἰτιολογήσουμε** αὐτὴ τὴν παρατήρηση μὲ συλλογισμούς, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: (σχ. 11).

Γράφουμε τρεῖς εὐθεῖες, ποὺ περνοῦν ἀπὸ τὶς κορυφές A, B καὶ Γ τοῦ τριγώνου καὶ εἶναι παράλληλες πρὸς τὶς πλευρές του $B\Gamma, A\Gamma, AB$ ἀντιστοίχως. Οἱ τρεῖς αὐτὲς εὐθεῖες τέμνονται ἀνὰ δύο καὶ σχηματίζουν τὸ τρίγωνο $A_1B_1\Gamma_1$.

$$\begin{array}{l} \text{Ἔχουμε: } AB_1 // B\Gamma \\ \quad \quad \quad B\Gamma_1 // AB \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} AB_1 // B\Gamma \\ B\Gamma_1 // AB \end{array}} \right\} \Rightarrow AB\Gamma B_1 \text{ εἶναι παραλληλόγραμμο} \Rightarrow AB_1 = B\Gamma$$

$$\text{καὶ } \begin{array}{l} B\Gamma_1 // A\Gamma \\ A\Gamma_1 // B\Gamma \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} B\Gamma_1 // A\Gamma \\ A\Gamma_1 // B\Gamma \end{array}} \right\} \Rightarrow A\Gamma_1 B\Gamma \text{ εἶναι παραλληλόγραμμο} \Rightarrow A\Gamma_1 = B\Gamma.$$

Ἐπομένως $AB_1 = A\Gamma_1$. Ἄρα τὸ σημεῖο A εἶναι τὸ μέσο τῆς $B_1\Gamma_1$. Τὸ ὕψος AD τοῦ $AB\Gamma$ (κάθετο) στὴ $B\Gamma$ εἶναι κάθετο στὴν παράλληλὴ τῆς $B_1\Gamma_1$, στὸ μέσο τῆς A . Δηλαδή ἡ AD εἶναι μεσοκάθετος τῆς πλευρᾶς $B_1\Gamma_1$ τοῦ τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$. Ὅμοίως καὶ τὰ ἄλλα ύψη BE καὶ ΓZ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ εἶναι μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν Γ_1A_1, A_1B_1 τοῦ τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$.

Οἱ μεσοκάθετοι ὁμῶς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$, ὅπως ξέρομε πιά, συντρέχουν σ' ἓνα σημεῖο H . Ἄρα καὶ τὰ ύψη AD, BE καὶ ΓZ **συντρέχουν** σ' ἓνα σημεῖο H , τὸ **ὀρθόκεντρο** τοῦ τριγ. $AB\Gamma$. Ὡστε: **Τὰ ύψη κάθε τριγώνου συντρέχουν σὲ ἓνα σημείο.**

Παρατηρήσεις

- 1) Ἐὰν τὸ τρίγωνο εἶναι ὀρθογώνιο στὸ A , ἐπεὶ δύο ύψη του εἶναι οἱ κάθετες πλευρές του, τὸ ὀρθόκεντρό του εἶναι ἡ κορυφή τῆς ὀρθῆς γωνίας του.
- 2) Ἐὰν τὸ τρίγωνο εἶναι ὀξυγώνιο, τὸ ὀρθόκεντρό του βρίσκεται στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ τριγώνου, καὶ ἂν εἶναι ἀμβλυγώνιο, βρίσκεται στὸ ἐξωτερικὸ του.

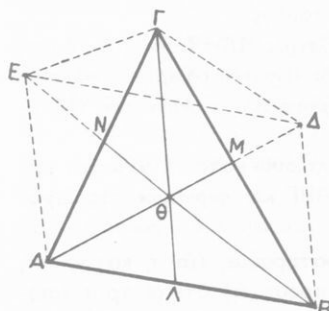
Ἀσκήσεις

- 15) Νὰ κατασκευάσετε τρίγωνο $AB\Gamma$ καὶ νὰ βρεῖτε τὸ ὀρθόκεντρό του H . Νὰ ὀρίσετε τὰ ὀρθόκεντρα τῶν τριγώνων $ABH, B\Gamma H$ καὶ ΓAH .
- 16) Σ' ἓνα τρίγωνο ΔEZ φέρετε τὰ ύψη $\Delta\Delta'$ καὶ EE' . Αὐτὰ τέμνονται στὸ σημεῖο H . Ἀπὸ τὸ H φέρετε κάθετο στὴν $E\Delta$. Περνᾷ αὐτὴ ἡ κάθετος ἀπὸ τὸ Z ; (Γιατί;)
- 17) Σ' ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρετε τὰ ύψη BB' καὶ $\Gamma\Gamma'$. Ἀπὸ τὸ σημεῖο τομῆς τους H φέρετε τὴν AH . Περνᾷ αὐτὴ ἀπὸ τὸ μέσο τῆς $B\Gamma$; (Γιατί;).
- 18) Ἐνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ ἡ γωνία $\hat{A}$ εἶναι 70° . Τὰ ύψη του AD καὶ BE τέμνονται στὸ H . Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ γωνίες $\hat{HBA}$ καὶ $\hat{H\Gamma A}$.

3^ο. Διάμεσοι τριγώνου.

§ 6. Διάμεσο ἐνὸς τριγώνου ὀνομάζουμε τὸ εὐθ. τμήμα, ποὺ συνδέει μίαν κορυφή τοῦ τριγώνου μὲ τὸ μέσο τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς. Κάθε τρίγωνο ἔχει τρεῖς διαμέσους.

Νά κατασκευάσετε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $AB=4\text{ cm}$, $B\Gamma=5\text{ cm}$ και $A\Gamma=6\text{ cm}$. Με τη βοήθεια των γεωμετρικών οργάνων γράψτε (προσεκτικά) τις διαμέσους του τριγώνου. Τί παρατηρείτε; (σχ. 12).



σχ. 12.

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε τις διαμέσους AM , BN και $\Gamma\Lambda$ και παρατηρούμε ότι αυτές **συντρέχουν** στο ίδιο σημείο Θ . 'Αν συγκρίνουμε με το διαβήτη τὰ εὐθ. τμήματα $A\Theta$ και ΘM , τὰ $B\Theta$ και ΘN , καθώς και τὰ $\Gamma\Theta$ και $\Theta\Lambda$, θὰ διαπιστώσουμε ότι $A\Theta=2\Theta M$ και $\Theta M=\frac{1}{3}AM$ (ἢ $A\Theta=\frac{2}{3}AM$). 'Ομοίως ἔχουμε $\Theta N=\frac{1}{3}BN$ και $\Theta\Lambda=\frac{1}{3}\Gamma\Lambda$.

Ἐπομένως: **Οἱ τρεῖς διάμεσοι ἑνὸς τριγώνου συντρέχουν σ' ἓνα σημείο, πού λέγεται κέντρο βάρους τοῦ τριγώνου και ἀπέχει ἀπὸ τὸ μέσο κάθε πλευρᾶς τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ἀντί-**

στοιχῆς διαμέσου (ἢ τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς διαμέσου ἀπὸ τὴν ἀντίστοιχη κορυφή).

Μποροῦμε νὰ **αιτιολογήσουμε** τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ με τὸν ἑξῆς τρόπο:

Στὶς προεκτάσεις τῶν AM και BN (πέρα ἀπὸ τὰ M και N) παίρνουμε ἀντιστοιχῶς τμήματα $M\Delta=M\Theta$ και $NE=N\Theta$. Φέρνουμε τὶς ΓE και $\Gamma\Delta$. Τὸ τετράπλευρο $\Theta B\Delta$ πού σχηματίζεται εἶναι παραλληλόγραμμο, ἐπειδὴ οἱ διαγώνιοι του διχοτομοῦνται ($GM=MB$ και $\Theta M=M\Delta$). 'Ομοίως και τὸ $\Gamma\Theta A E$ εἶναι παραλληλόγραμμο, ἐπειδὴ $\Gamma N=NA$ και $\Theta N=NE$. Συνεπῶς $B\Delta\parallel\Gamma\Theta$ και $A E\parallel\Gamma\Theta$. 'Αρα $B\Delta\parallel A E$. 'Ωστε τὸ $A B\Delta E$ εἶναι παραλληλόγραμμο, γιατί ἔχει δύο ἀπέναντι πλευρῆς ἴσες και παράλληλες. Τότε ὁμως ἔχουμε $A\Theta=\Theta\Delta$ και $B\Theta=\Theta E$ (γιατί οἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου διχοτομοῦνται). 'Αλλὰ $\Theta\Delta=2\Theta M$, ὥστε $A\Theta=2\Theta M$ και $\Theta M=\frac{1}{3}AM$. 'Ομοίως συμπεραίνουμε ὅτι $\Theta N=\frac{1}{3}BN$. Μὲ ὁμοιο τρόπο ἀποδεικνύουμε ὅτι ἡ διάμεσος $\Gamma\Lambda$ τέμνει τὴν BN σ' ἓνα σημείο, πού ἀπέχει ἀπὸ τὸ N τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς BN , δηλαδή στο σημείο Θ , τὸ ὁποῖο ἀπέχει ἀπὸ τὸ Λ τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς $\Gamma\Lambda$. 'Ωστε: **Οἱ τρεῖς διάμεσοι ἑνὸς τριγώνου συντρέχουν σ' ἓνα σημείο. Αὐτὸ ἀπέχει ἀπὸ τὸ μέσο κάθε πλευρᾶς τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ἀντίστοιχῆς διαμέσου ἢ τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς διαμέσου ἀπὸ τὴν ἀντίστοιχη κορυφή.**

Ἀ σ κ ῆ σ ε ι ς

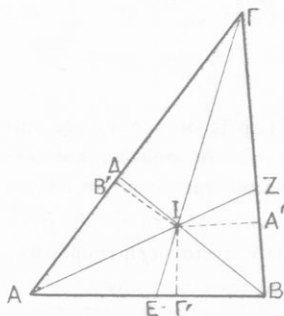
- 19) Σχεδιάστε ἓνα τρίγωνο $AB\Gamma$ και βρεῖτε τὸ κέντρο βάρους του.
- 20) Φέρετε τὴν διάμεσο AM τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$. Πάρτε σ' αὐτὴν ἓνα τμήμα $A\Theta=\frac{2}{3}AM$. Συγκρίνετε τὰ τμήματα, στὰ ὁποῖα οἱ $B\Theta$ και $\Gamma\Theta$ τέμνουν τὶς πλευρῆς τοῦ $A\Gamma$ και AB .
- 21) Σχηματίστε ἓνα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ἐνῶστε με εὐθ. τμήμα τὴν κορυφή A με τὸ μέσο τῆς $\Gamma\Delta$. Συγκρίνετε τὰ τμήματα, στὰ ὁποῖα χωρίζεται ἡ AM ἀπὸ τὴν $B\Delta$.
- 22) Νὰ σχηματίσετε ἓνα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και νὰ πάρετε ἓνα ὁποιοδήποτε σημείο N στὸ ἐπίπεδο τοῦ παραλληλογράμμου. Ἀποδείξτε ὅτι τὰ τρίγωνα $NA\Gamma$ και $NB\Delta$ ἔχουν τὸ ἴδιο κέντρο βάρους.

4^ο. Διχοτόμοι τριγώνου.

§ 7. 'Ονομάζουμε έσωτερική **διχοτόμο** ενός τριγώνου τή διχοτόμο μιās γωνιάς του. Διχοτόμο ονομάζουμε καί τὸ τμήμα τῆς προηγούμενης ἀπὸ τὴν κορυφή μέχρι τὴν ἀπέναντι πλευρά.

Κάθε τρίγωνο ἔχει τρεῖς έσωτερικὲς διχοτόμους.

Νὰ κατασκευάσετε ἓνα τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρὲς $AB=4\text{ cm}$, $B\Gamma=5\text{ cm}$, $A\Gamma=6\text{ cm}$. Μὲ τὴ βοήθεια τῶν γεωμετρικῶν ὁργάνων (διαβήτη, χάρακα) νὰ φέρετε (προσεκτικὰ) τὶς έσωτερικὲς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου. Τί παρατηρεῖτε; (σχ. 13).



σχ. 13.

Κατασκευάζουμε κατὰ τὰ γνωστὰ μας τὸ τρίγωνο $AB\Gamma$ καὶ φέρνουμε τὶς διχοτόμους τῶν έσωτερικῶν γωνιῶν τοῦ $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$. Παρατηροῦμε, (ἂν ἡ κατασκευή ἔχει γίνει με προσοχή) ὅτι οἱ τρεῖς έσωτερικὲς διχοτόμοι τοῦ **συντρέχουν** στὸ ἴδιο σημεῖο I . Φέρνουμε τὶς ἀποστάσεις IA' , IB' , $I\Gamma'$ τοῦ σημείου I ἀπὸ τὶς πλευρὲς $B\Gamma$, ΓA , AB ἀντιστοίχως. Συγκρίνουμε τὶς ἀποστάσεις αὐτὲς με τὸ διαβήτη καὶ παρατηροῦμε ὅτι εἶναι ἴσες, δηλαδή $IA' = IB' = I\Gamma'$.

Έπομένως: Οἱ τρεῖς έσωτερικὲς διχοτόμοι κάθε τριγώνου συντρέχουν σὲ ἓνα σημεῖο, ποὺ ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὶς πλευρὲς του.

Μποροῦμε νὰ **αἰτιολογήσουμε** τὴν παρατήρηση αὐτὴ με συλλογισμούς, ἂν στήριχτοῦμε στὶς γνωστὲς ἰδιότητες: «Κάθε σημεῖο τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνιάς ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὶς πλευρὲς τῆς» καὶ «κάθε έσωτερικὸ σημεῖο μιᾶς γωνιάς, τὸ ὁποῖο ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὶς πλευρὲς τῆς, εἶναι σημεῖο τῆς διχοτόμου τῆς γωνιάς αὐτῆς».

Ἡ έσωτερικὴ διχοτόμος AZ τῆς γωνιάς $\widehat{A}$ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνει τὴν πλευρὰ $B\Gamma$ στὸ Z . Ἡ έσωτ. διχοτόμος BD τῆς γωνιάς $\widehat{B}$ τοῦ τριγώνου ABZ τέμνει τὴν πλευρὰ τοῦ AZ σ' ἓνα σημεῖο I .

Σημειώνουμε με τὰ A' , B' , Γ' τοὺς πόδες τῶν καθέτων, οἱ ὁποῖες ἄγονται ἀπὸ τὸ I στὶς πλευρὲς $B\Gamma$, ΓA , AB . Τὸ σημεῖο I , ἐπειδὴ βρίσκεται πάνω στὴ διχοτόμο AZ τῆς γωνιάς $\widehat{A}$, ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὶς AB καὶ $A\Gamma$. Εἶναι ὁμως καὶ σημεῖο τῆς διχοτόμου BD , ὅρα ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὶς AB καὶ $B\Gamma$. Έπομένως ἀπέχει ἐξ ἴσου καὶ ἀπὸ τὶς πλευρὲς $B\Gamma$ καὶ $A\Gamma$. Έπειδὴ τὸ I εἶναι έσωτερικὸ σημεῖο τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, συμπεραίνουμε ὅτι τὸ I βρίσκεται καὶ πάνω στὴ διχοτόμο ΓE τῆς γωνιάς $\widehat{\Gamma}$ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

Έστω: **Οἱ τρεῖς έσωτερικὲς διχοτόμοι κάθε τριγώνου συντρέχουν σὲ ἓνα σημεῖο, ποὺ ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὶς πλευρὲς του.**

Παρατηρήσεις

1. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $I\Gamma' = IB' = IA'$ (τῶν ἀποστάσεων τοῦ I ἀπὸ τὶς πλευρὲς) παρατηροῦμε ὅτι, ἂν με κέντρο τὸ σημεῖο I καὶ ἀκτῖνα $IA' =$

$=IB' = IG'$ γράψουμε έναν κύκλο, αυτός θα εφάπτεται στις πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$ στα σημεία A', B', Γ' (γιατί;). Όστε το σημείο, στο οποίο συντρέχουν οι εσωτερικές διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου $AB\Gamma$, είναι το κέντρο ενός κύκλου, ο οποίος εφάπτεται στις πλευρές του τριγώνου και λέγεται **έγγεγραμμένος κύκλος** στο τρίγωνο.

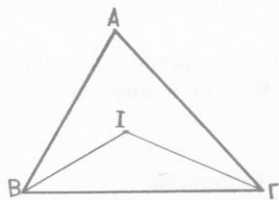
2. Στο ισοπλευρο τρίγωνο οι διάμεσοι είναι και ύψη και διχοτόμοι των γωνιών του. Άρα το κοινό σημείο τους είναι το κέντρο βάρους του, το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου, το κέντρο του έγγεγραμμένου και το ὀρθόκέντρο του ισοπλεύρου τριγώνου. Λέμε ὅτι το O είναι το **κέντρο** του ισοπλεύρου τριγώνου.

Σημ. Οι προτάσεις των § 4, 5, 6, 7 είναι θεωρήματα.

Ἀσκήσεις

23) Κατασκευάστε ένα ισοσκελές τρίγωνο και βρείτε το σημείο τομῆς των διχοτόμων του. Ἐξηγήστε γιατί βρίσκεται αυτό πάνω στο ὕψος του.

24) Ἐνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ οἱ γωνίες $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ εἶναι ἀντιστοιχῶς 60° καὶ 50° . Νὰ υπολογισθεῖ ἡ γωνία $B\widehat{I}\Gamma$ (τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τοῦ $BI, I\Gamma$), (σχ. 14).



σχ. 14.

25) Σ' ένα ὀρθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) νὰ φέρετε τὶς διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$. Ἐν I εἶναι τὸ σημείο τομῆς τους, μετρήστε τὴ γωνία $B\widehat{I}\Gamma$. Μπορεῖτε νὰ αἰτιολογήσετε τὸ ἀποτέλεσμα αὐτό;

26) Κατασκευάστε ἕναν κύκλο ($O, R = 2\text{ cm}$) Φέρετε τρεῖς ἐφαπτόμενές του, οἱ ὁποῖες τέμνονται ἀνὰ δύο στὰ σημεία A, B, Γ . Ἀπὸ ποῖο σημείο περνοῦν οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$;

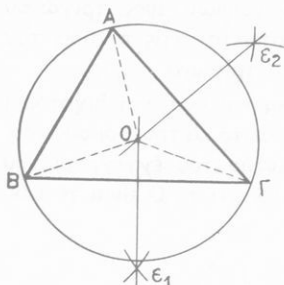
27) Κατασκευάστε ἕνα τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Φέρετε τὴ διαγώνιόν τοῦ $A\Gamma$ καὶ τὶς διχοτόμους τῶν γωνιῶν $B\widehat{A}\Gamma, B\widehat{\Gamma}A$. Αὐτὲς τέμνονται πάνω στὴ διαγώνιόν $B\Delta$ τοῦ τετραγώνου. Γιατί;

§ 8. Περιγεγραμμένος κύκλος τριγώνου. Κατασκευή.

Σχεδιάστε ἕνα τρίγωνο $AB\Gamma$ καὶ κατασκευάστε ἕναν κύκλο, πὺν νὰ περνᾷ ἀπὸ τὶς κορυφές τοῦ τριγώνου.

Σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε στὴν § 4 ὑπάρχει ἕνας κύκλος, ὁ ὁποῖος περνᾷ ἀπὸ τὶς κορυφές A, B, Γ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$. Αὐτὸν τὸν ὀνομάσαμε περιγεγραμμένο κύκλο τοῦ τριγώνου. Ἐν O εἶναι τὸ κέντρο του, τότε $OA = OB = OG$ (ἐπειδὴ εἶναι ἀκτίνες).

Ἐπομένως τὸ κέντρο O εἶναι τὸ σημείο, στὸ ὁποῖο συντρέχουν οἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν $AB, B\Gamma$ καὶ $A\Gamma$ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

Κατασκευή:

σχ. 15.

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$. Με τη βοήθεια του διαβήτη και του χάρακα φέρνουμε τις μεσοκαθέτους ϵ_1 και ϵ_2 των πλευρών του $B\Gamma$ και $A\Gamma$. Οί ϵ_1 και ϵ_2 τέμνονται σέ ένα (μοναδικό) σημείο O , πού είναι τό κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$, γιατί έχουμε $OB = OG$, έπειδή τό O βρίσκεται πάνω στην ϵ_1 , και $OG = OA$, έπειδή τό O βρίσκεται πάνω στην ϵ_2 . Έπομένως $OA = OB = OG$.

Άρα, εάν μέ κέντρο τό O και άκτίνα OA γράψουμε κύκλο (O, OA) , αυτός θα περάσει από τά σημεία A, B, Γ και συνεπώς θα είναι ό περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $AB\Gamma$.

Αν τώρα προσπαθήσουμε νά γράψουμε και άλλον κύκλο περιγεγραμμένο στο τρίγωνο $AB\Gamma$, θα παρατηρήσουμε ότι αυτός ταυτίζεται μέ τον πρώτο (έπειδή οί ϵ_1 και ϵ_2 τέμνονται σέ ένα μόνο σημείο).

Όστε: **Υπάρχει ένας κύκλος (και μόνον ένας), πού περνά από τις τρεις κορυφές ενός τριγώνου.** Αύτός λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος** του τριγώνου.

Τό κέντρο του O είναι τό σημείο, στο όποιο συντρέχουν οί μεσοκάθετοι των πλευρών του τριγώνου. **Άκτίνα του R** είναι ή απόσταση αυτού του σημείου από μία κορυφή του.

§ 9. Έγγεγραμμένος κύκλος σ' ένα τρίγωνο. Κατασκευή.

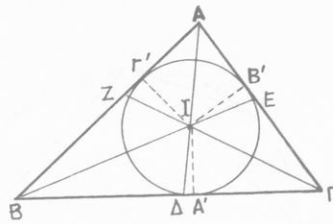
Νά κατασκευάσετε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ και έναν κύκλο, πού νά εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου έσωτερικά.

Σύμφωνα μέ όσα είπαμε στην § 7 υπάρχει ένας κύκλος, πού εφάπτεται στις πλευρές $AB, B\Gamma$ και $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$. Τό κέντρο I του κύκλου αυτού είναι τό σημείο, στο όποιο συντρέχουν οί έσωτερικές διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου. Ό κύκλος αυτός λέγεται **έγγεγραμμένος κύκλος** στο τρίγωνο.

Κατασκευή:

Σχεδιάζουμε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$. Με τη βοήθεια του διαβήτη και του χάρακα φέρνουμε τις έσωτερικές διχοτόμους των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου (σχ. 16). Αυτές, όπως γνωρίζουμε (§ 7), συντρέχουν σέ ένα σημείο I .

Με κέντρο τὸ I καὶ ἀκτίνα τὴν ἀπόσταση τοῦ I ἀπὸ τῆς $B\Gamma$, τὴν IA' , γράφουμε κύκλο (I, IA') , ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται στὴν πλευρὰ $B\Gamma$ στὸ σημεῖο A' . Ὁ κύκλος αὐτὸς ἐφάπτεται καὶ στὶς πλευρὲς AB καὶ AG τοῦ τριγώνου αὐτοῦ, γιατί, ἂν φέρουμε τὶς ἀποστάσεις IG' , IB' ἀπὸ τὶς πλευρὲς AB καὶ AG , ἔχουμε (καθὼς μάθαμε) $IB' = IG' = IA'$. Ἄρα ὁ κύκλος (I, IA') εἶναι ὁ ἐγγεγραμμένος στὸ τρίγωνο $AB\Gamma$, γιατί οἱ πλευρὲς του εἶναι κάθετες στὰ ἄκρα τῶν ἀκτίνων IA' , IB' , IG' .



σχ. 16.

Ἄν ἐπιχειρήσουμε νὰ γράφουμε καὶ ἄλλον κύκλο ἐγγεγραμμένο στὸ ἴδιο τρίγωνο $AB\Gamma$, αὐτὸς θὰ ταυτισθεῖ μὲ τὸν πρῶτο (γιατί οἱ διχοτόμοι ΓZ , BE τέμνονται σὲ ἓνα μόνο σημεῖο).

Ὡστε: Ὑπάρχει ἕνας κύκλος καὶ μόνο ἕνας ἐγγεγραμμένος στὸ τρίγωνο $AB\Gamma$. Τὸ κέντρο τοῦ I εἶναι τὸ σημεῖο, στὸ ὁποῖο συντρέχουν οἱ τρεῖς ἐσωτερικὲς διχοτόμοι τοῦ τριγώνου. Ἀκτίνα τοῦ ρ , εἶναι ἡ ἀπόσταση τοῦ σημείου αὐτοῦ ἀπὸ μιὰ πλευρὰ του.

Ἀσκήσεις

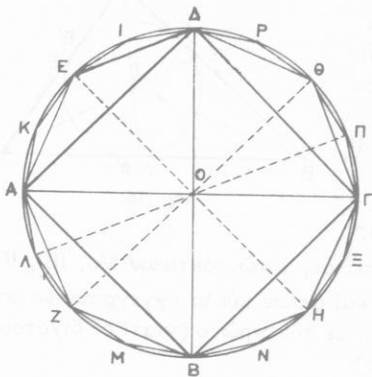
- 28) Κατασκευάστε ἰσόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ μὲ πλευρὰ 4 cm καὶ σχεδιάστε τὸν περιγεγραμμένο κύκλο του.
- 29) Κατασκευάστε ἰσόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ μὲ πλευρὰ 5 cm καὶ σχεδιάστε τὸν ἐγγεγραμμένο κύκλο σ' αὐτό.
- 30) Νὰ κατασκευάσετε τὸν περιγεγραμμένο κύκλο ἐνὸς ὀρθογωνίου καὶ ἐνὸς ἀμβλυγωνίου τριγώνου.
- 31) Νὰ σχηματίσετε ἓνα τρίγωνο $AB\Gamma$ καὶ νὰ κατασκευάσετε τὸν περιγεγραμμένο κύκλο του. Νὰ βρεῖτε τὸ συμμετρικὸ τοῦ ὀρθόκέντρου τοῦ τριγώνου ὡς πρὸς τὶς πλευρὲς του. Τί παρατηρεῖτε;
- 32) Νὰ πάρετε τρία σημεῖα, ποὺ δὲν βρίσκονται πάνω στὴν ἴδια εὐθεῖα, καὶ νὰ κατασκευάσετε τὸν κύκλο, ποὺ περνᾷ ἀπ' αὐτά.

Γ. ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΚΥΚΛΟΥ ΣΕ 2^n ($n \in \mathbb{N}$ καὶ $n > 1$) ἢ $3 \cdot 2^n$
(ὅπου n ἄκέρ.) **ΙΣΑ ΤΟΞΑ ΚΑΙ ΤΑ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ.**

§ 10. Κατασκευάστε κύκλο (O, R) καὶ διαιρέστε τὸν σὲ 4 ἴσα τόξα. Ἐπειτα διαιρέστε τὸν κύκλο σὲ 8, 16, ... ἴσα τόξα καὶ ἐνῶστε μὲ ἐνθύγραμμα τμήματα τὰ σημεῖα κάθε διαιρέσεώς του. Τί παρατηρεῖτε; (σχ. 17).

Σχηματίζουμε έναν κύκλο με κέντρο O και ακτίνα R .

Για να τον διαιρέσουμε σε 4 ίσα τόξα, φέρνουμε δύο διαμέτρους κάθετες, τις $ΑΓ$ και $ΒΔ$. Οί επί-κεντρες γωνίες $\widehat{ΑΟΒ}$, $\widehat{ΒΟΓ}$, $\widehat{ΓΟΔ}$, $\widehat{ΔΟΑ}$ είναι ίσες, επειδή είναι ὀρθές. Ἐπομένως και τὰ ἀντίστοιχα τόξα τους εἶναι ἴσα, δηλαδή $\widehat{ΑΒ} = \widehat{ΒΓ} = \widehat{ΓΔ} = \widehat{ΔΑ}$.



σχ. 17.

Φέρνουμε τις $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΓΔ$, $ΔΑ$ κι ἔτσι ὀρίζουμε ἕνα κυρτὸ τετράπλευρο, ποὺ ἔχει τὶς πλευρές του ἴσες, δηλαδή $ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΑ$ (χορδές ἴσων τόξων τοῦ ἰδίου κύκλου), καὶ τὶς γωνίες του ἴσες $\widehat{Α} = \widehat{Β} = \widehat{Γ} = \widehat{Δ}$, γιατί εἶναι ὀρθές (γωνίες ἐγγεγραμμένες σὲ ἡμικύκλιο). Τὸ τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ λέγεται **κανονικὸ τετράπλευρο** ἢ **τετράγωνο**.

Ὡστε: **Κανονικὸ πολὺγωνο** λέγεται τὸ πολὺγωνο, ποὺ ἔχει τὶς πλευρές του ἴσες καὶ τὶς γωνίες του ἴσες. Τὸ μήκος μιᾶς ἀπὸ τὶς ἴσες πλευρές του τὸ συμβολίζουμε μὲ τὸ $λ$.

Ἄν φέρουμε τὶς διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\widehat{ΑΟΒ}$, $\widehat{ΒΟΓ}$, $\widehat{ΓΟΔ}$, $\widehat{ΔΟΑ}$, ὁ κύκλος διαιρεῖται σὲ 8 ἴσα τόξα (ἀντίστοιχα ἴσων ἐπίκεντρων γωνιῶν). Φέρνουμε τὶς χορδές τῶν τόξων αὐτῶν καὶ ἔτσι κατασκευάζουμε ἕνα κυρτὸ ὀκτάγωνο. Τὸ ὀκτάγωνο αὐτὸ εἶναι κανονικὸ, γιατί ἔχει τὶς πλευρές του ἴσες, ἐπειδὴ εἶναι χορδές ἴσων τόξων, καὶ τὶς γωνίες του ἴσες, ἐπειδὴ καθεμιὰ τους εἶναι ἐγγεγραμμένη στὸν κύκλο καὶ ἔχει ἀντίστοιχο τόξο ἴσο μὲ τὰ $\frac{6}{8}$ τοῦ κύκλου.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ἐργασίας διαιροῦμε τὸν κύκλο σὲ 16 ἴσα τόξα, 32 κλπ. καὶ ὀρίζουμε κανονικὸ δεκαεξάγωνο, ἔπειτα κυρτὸ κανονικὸ πολὺγωνο μὲ 32 πλευρές κ.ο.κ.

Βασισμένοι στὶς προηγούμενες κατασκευές λέμε ὅτι μπορούμε νὰ διαιρέσουμε τὸν κύκλο (μὲ τὴ βοήθεια τοῦ διαβήτη καὶ τοῦ χάρακα) σὲ $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2^5, \dots, 2^n$ ἴσα τόξα καὶ νὰ ὀρίσουμε μ' αὐτὸν τὸν τρόπο κανονικὰ κυρτὰ πολὺγωνα μὲ $2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^n$ πλευρές.

Ὁ κύκλος (O, R) ποὺ περνᾷ ἀπὸ τὶς κορυφές τῶν κανονικῶν αὐτῶν πολυγώνων, λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος** καὶ τὰ πολὺγωνα εἶναι ἐγγεγραμμένα στὸν κύκλο αὐτό. Οἱ ἀκτίνες τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, ποὺ καταλήγουν στὶς κορυφές τῶν κανονικῶν πολυγώνων, λέγονται **ἀκτίνες** τῶν πολυγώνων.

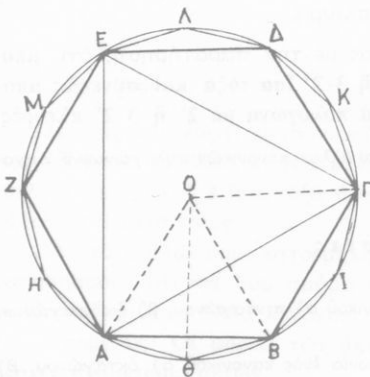
Ἡ κυρτὴ γωνία δύο διαδοχικῶν ἀκτίνων τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου λέγεται **κεντρικὴ** γωνία τοῦ πολυγώνου καὶ ἰσοῦται μὲ $\frac{360}{n}$, ὅπου n εἶναι τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.

Τὸ κέντρο O τοῦ κύκλου λέγεται **κέντρο** τοῦ καν. πολυγώνου.

Οἱ ἀποστάσεις τοῦ κέντρου O ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ εἶναι ἴσες (ἀποστάσεις τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀπὸ ἴσες χορδές του). Ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου ἀπὸ τὴν πλευρὰ λέγεται **ἀπόστημα** τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου καὶ τὸ μήκος του συμβολίζεται μὲ α (π.χ. τοῦ τετραγώνου α_4 , τοῦ καν. ἑξαγώνου α_6 κ.ο.κ. Ἀντιστοίχως τὸ μήκος τῶν πλευρῶν τους συμβολίζεται μὲ λ_4 , λ_6 κ.ο.κ.).

Ἄν ἓνα κανονικὸ πολύγωνο εἶναι κυρτό, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του εἶναι $\Sigma = (n-2) \cdot 2 \text{ ὀρθ.} = (2n-4) \text{ ὀρθ.}$ (ὅπου n τὸ πλῆθος τῶν γωνιῶν του). Ἐπειδὴ ὅλες οἱ γωνίες του εἶναι ἴσες, καθεμιά εἶναι ἴση μὲ $\frac{2n-4}{n} \text{ ὀρθ.} = \left(2 - \frac{4}{n}\right) \text{ ὀρθ.}$

§ 11. *Νὰ κατασκευάσετε κύκλο (O, R) καὶ νὰ ἐγγράψετε σ' αὐτὸν ἓνα κανονικὸ ἑξάγωνο, ἀφοῦ διαιρέσετε τὸν κύκλο σὲ 6 ἴσα τόξα. Τί παρατηρεῖτε; (σχ. 18).*



σχ. 18.

Κατασκευάζουμε κύκλο μὲ κέντρο O καὶ ἀκτίνα R . Ὑποθέτουμε ὅτι μὲ τὰ σημεῖα $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$ ἔχουμε διαιρέσει τὸν κύκλο σὲ 6 ἴσα τόξα. Τὸ τρίγωνο AOB εἶναι ἰσοσκελὲς ($OA = OB$, ἐπειδὴ εἶναι ἀκτίνες τοῦ κύκλου) καὶ ἔχει τὴ γωνία $\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ (κεντρικὴ γωνία). Ἄρα καὶ οἱ γωνίες του εἶναι $\widehat{A} = \widehat{B} = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$. Δηλαδή τὸ τρίγωνο AOB εἶναι ἰσόπλευρο. Ἐπομένως $AB = R$.

Γιὰ νὰ διαιρέσουμε λοιπὸν ἓναν κύκλο σὲ 6 ἴσα τόξα, γράφουμε 6 διαδοχικὲς χορδὲς ἴσες μὲ τὴν ἀκτίνα. Ἐνώνουμε τὰ σημεῖα $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$, ποὺ διαιροῦν τὸν κύκλο, καὶ σχηματίζουμε ἓνα κυρτὸ ἑξάγωνο. Αὐτὸ εἶναι κανονικὸ, ὅπως μπορούμε νὰ τὸ διαπιστώσουμε, ἂν συγκρίνουμε τὰς πλευρὰς του μὲ τὸ διαβήτη καὶ τὰς γωνίες του μὲ διαφανὲς χαρτί (ἢ μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο). Μποροῦμε ὁμως καὶ νὰ αἰτιολογήσουμε τὴ διαπίστωσή μας αὐτὴ μὲ τὴν παρατή-

ρηση ότι οι πλευρές του πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ είναι **ίσες**, γιατί τις πήραμε κατά την κατασκευή του ίσες με την ακτίνα του κύκλου, και οι γωνίες του είναι **ίσες**, επειδή είναι έγγεγραμμένες στον ίδιο κύκλο κι έχουν αντίστοιχα τόξα ίσα με $\frac{4}{6}$ του κύκλου.

Για να εγγράψουμε στον κύκλο κανονικό **δωδεκάγωνο**, τὸν διαιρούμε σὲ 12 ἴσα τόξα. Για να γίνει αυτό, φέρνουμε τις διχοτόμους τῶν κεντρικῶν γωνιῶν τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου, ἐνώνουμε τὰ διαδοχικά σημεῖα διαιρέσεως τοῦ κύκλου καὶ κατασκευάζουμε ἔτσι κανονικό δωδεκάγωνο (γιατί;). Μὲ ὅμοιο τρόπο ἐργασίας διαιρούμε τὸν κύκλο σὲ 24, 48 κ.ο.κ. ἴσα τόξα καὶ ἐγγράφουμε σ' αὐτὸν κανονικό **εἰκοσιτετράγωνο**, ἔπειτα κυρτὸ κανονικό πολύγωνο μὲ 48 πλευρὲς κ.ο.κ. Τελικὰ συνδέουμε μὲ εὐθύγραμμα τμήματα ἀνὰ δύο τὶς μὴ διαδοχικὲς κορυφές Α, Γ, Ε τοῦ ἐγγεγραμμένου στὸν κύκλο κανονικοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ. Ἔτσι σχηματίζεται ἓνα τρίγωνο ΑΓΕ ἐγγεγραμμένο στὸν κύκλο, τὸ ὁποῖο εἶναι ἰσόπλευρο, διότι $ΑΓ = ΓΕ = ΕΑ$, ἐπειδὴ εἶναι χορδὲς ἴσων τόξων τοῦ κύκλου. Αὐτὸ εἶναι τὸ **κανονικό τρίγωνο**. Ἀπὸ τὶς προηγούμενες κατασκευὲς συμπεραίνουμε ὅτι μπορούμε νὰ διαιρέσουμε ἕναν κύκλο σὲ 3, $3 \cdot 2 = 6$, $3 \cdot 2^2 = 12$, $3 \cdot 2^3$, $3 \cdot 2^4$, ..., $3 \cdot 2^n$ ἴσα τόξα καὶ νὰ ἐγγράψουμε κανονικό πολύγωνο στὸν κύκλο μὲ 3, $3 \cdot 2 = 6$, $3 \cdot 2^2 = 12$, $3 \cdot 2^3$, ..., $3 \cdot 2^n$ πλευρὲς.

Συνοψίζουμε τὰ συμπεράσματά μας μὲ τὴν παρατήρηση, ὅτι **μποροῦμε νὰ διαιρέσουμε τὸν κύκλο σὲ 2^n ἢ $3 \cdot 2^n$ ἴσα τόξα καὶ συνεπῶς μπορούμε νὰ ἐγγράψουμε σ' αὐτὸν κανονικά πολύγωνα μὲ 2^n ἢ $3 \cdot 2^n$ πλευρὲς.**

Σημείωση. Μὲ τὴν ἐγγραφή στὸν κύκλο καὶ ἄλλων κανονικῶν πολυγώνων θ' ἀσχοληθοῦμε σὲ ἀνώτερη τάξη.

Ἀσκήσεις

33) Βρεῖτε τὴν κεντρικὴ γωνία ἑνὸς κανονικοῦ α) πενταγώνου, β) δωδεκαγώνου, γ) εἰκοσιτετραγώνου, δ) τριγώνου.

34) Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ γωνία ἑνὸς κανονικοῦ α) ὀκταγώνου, β) δεκαεξαγώνου, γ) δωδεκαγώνου;

35) Τίνος κανονικοῦ πολυγώνου ἡ κεντρικὴ γωνία εἶναι α) 90° , β) $\frac{1}{2}$ ὀρθ., γ) 30° καὶ δ) 24° ;

36) Τίνος κανονικοῦ πολυγώνου ἡ ἐσωτερικὴ γωνία εἶναι α) 108° , β) $\frac{4}{3}$ ὀρθ., γ) 135° , δ) $\frac{5}{3}$ ὀρθ. καὶ ε) 175° ;

37) Νὰ κατασκευάσετε ἓναν κύκλο μὲ κέντρο Ο καὶ ἀκτίνα $R=5$ cm καὶ νὰ ἐγγράψετε σ' αὐτὸν ἓνα κανονικό εἰκοσιτετράγωνο.

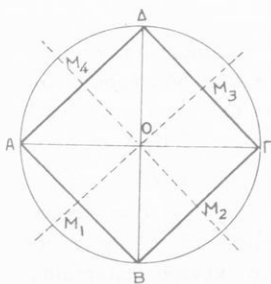
38) Νὰ κατασκευάσετε κανονικό ἑξάγωνο μὲ πλευρὰ μήκους 4 cm.

39) Νά γράψετε ένα ευθ. τμήμα AB μήκους 3 cm και νά κατασκευάσετε ένα κανονικό οκτάγωνο, πού νά έχει τὸ AB ὡς πλευρά.

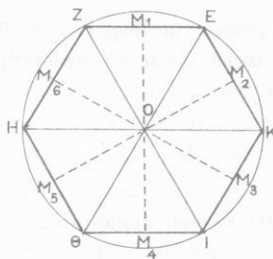
40) Νά ἐγγράψετε σ' ἕναν κύκλο μὲ ἀκτίνα R κανονικό ἐξάγωνο καὶ νά ἐνώσετε μὲ εὐθύγραμμα τμήματα τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του. Ἐτσι ὀρίζεται ἕνα νέο ἐξάγωνο. Τί ἔχετε νά παρατηρήσετε γι' αὐτό;

§ 12. Στοιχεῖα συμμετρίας καθενὸς ἀπὸ τὰ κανονικὰ πολύγωνα καὶ ὑπαρξὴ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου σ' αὐτά.

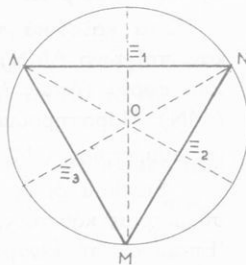
Κατασκευάστε σὲ διαφανὲς χαρτὶ ἕνα τετράγωνο, ἕνα κανονικό ἐξάγωνο καὶ ἕνα κανονικό τρίγωνο καὶ βρεῖτε τοὺς ἄξονες συμμετρίας τοῦ καθενὸς τους. Τί παρατηρεῖτε; (σχ. 19).



σχ. 19α.



σχ. 19β.



σχ. 19γ.

Σὲ διαφανὲς χαρτὶ κατασκευάζουμε ἕνα τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$, ἕνα κανονικό ἐξάγωνο $EZH\Theta IK$ καὶ ἕνα κανονικό τρίγωνο ΛMN διαιρώντας τρεῖς κύκλους σὲ 4, 6 καὶ 3 ἴσα τόξα ἀντιστοίχως καὶ γράφουμε τὶς ἀκτίνες καὶ τὰ ἀποστήματά τους.

Ἄν τὰ διπλώσουμε κατὰ μῆκος τοῦ φορέα μιᾶς ἀκτίνης τους, θὰ παρατηρήσουμε ὅτι τὰ δύο τμήματα καθενὸς τους ταυτίζονται. Τὸ ἴδιο συμβαίνει καὶ στὰ ἄλλα κανονικὰ πολύγωνα.

Ἐπομένως: Οἱ φορεῖς τῶν ἀκτίνων τῶν κανονικῶν πολυγώνων εἶναι ἄξονες συμμετρίας αὐτῶν.

Ἄν τώρα διπλώσουμε τὰ παραπάνω κανονικὰ πολύγωνα κατὰ μῆκος τοῦ φορέα ἑνὸς ἀπὸ τὰ ἀποστήματά τους, θὰ παρατηρήσουμε πάλι ὅτι τὰ δύο τμήματα τοῦ καθενὸς ἀπ' αὐτὰ ταυτίζονται. Τὸ ἴδιο μπορούμε νὰ διαπιστώσουμε καὶ στὰ ἄλλα κανονικὰ πολύγωνα. Ἄρα οἱ φορεῖς τῶν ἀποστημάτων ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι ἄξονες συμμετρίας αὐτοῦ. Παρατηροῦμε λοιπόν, ὅτι τὰ κανονικὰ πολύγωνα ἔχουν ὡς ἄξονες συμμετρίας τοὺς φορεῖς τῶν ἀκτίνων τους καὶ τοὺς φορεῖς τῶν ἀποστημάτων τους.

Στὰ κανονικὰ πολύγωνα μὲ ἄρτιο πλῆθος πλευρῶν (π.χ. στὸ καν.

εξάγωνο ΕΖΗΘΙΚ) δύο ακτίνες βρίσκονται πάνω στον ίδιο φορέα (όπως οί ΟΗ και ΟΚ του καν. εξαγώνου ΕΖΗΘΙΚ). "Ωστε : 'Ο άριθμός των φορέων των ακτίνων ενός κανονικού πολυγώνου με άρτιο πλήθος πλευρών ισούται με το μισό του άριθμού των πλευρών του (στο ΕΖΗΘΙΚ είναι τρεις). 'Επίσης το πλήθος των φορέων των άποστημάτων τους είναι ίσο με το μισό του πλήθους των πλευρών του κανονικού πολυγώνου, γιατί τα άποστήματά τους ανά δύο έχουν τον ίδιο φορέα (όπως π.χ. στο κανονικό εξάγωνο ΕΖΗΘΙΚ τα άποστήματα ΟΜ₁ και ΟΜ₄, δηλαδή το πλήθος των φορέων των άποστημάτων του είναι $\frac{6}{2} = 3$). Το κανονικό εξάγωνο λοιπόν έχει 6 άξονες συμμετρίας.

"Ωστε: "Ένα κανονικό πολύγωνο με άρτιο πλήθος πλευρών n , έχει n άξονες συμμετρίας.

Στά κανονικά πολύγωνα με περιττό άριθμό πλευρών (π.χ. στο καν. τρίγωνο ΑΜΝ) οί ακτίνες και τα άποστήματα ανά δύο έχουν τον ίδιο φορέα (όπως ή ακτίνα ΟΝ και το άπόστημα ΟΞ₃ του τριγώνου ΑΜΝ). Παρατηρούμε άκόμη ότι στο κανονικό εξάγωνο ΕΖΗΘΙΚ οί άξονες συμμετρίας ΟΜ₁ και ΟΗ είναι κάθετοι ($\widehat{Μ_1ΟΖ} = 30^\circ$ και $\widehat{ΖΟΗ} = 60^\circ$).

'Εμάθαμε όμως στην Α' τάξη ότι ένα σχήμα, που έχει δύο άξονες συμμετρίας κάθετους, έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο της τομής τους. 'Επομένως το κέντρο του κανονικού εξαγώνου είναι κέντρο συμμετρίας του. Το ίδιο συμβαίνει σε όλα τα κανονικά πολύγωνα με άρτιο πλήθος πλευρών. Στο κανονικό τρίγωνο ΑΜΝ δέν υπάρχουν κάθετοι άξονες συμμετρίας. 'Επομένως αυτό δέν έχει κέντρο συμμετρίας. Το ίδιο συμβαίνει σ' όλα τα κανονικά πολύγωνα με περιττό πλήθος πλευρών. "Ωστε στα κανονικά πολύγωνα με άρτιο πλήθος πλευρών το κέντρο τους είναι κέντρο συμμετρίας, ενώ στα κανονικά πολύγωνα με περιττό άριθμό πλευρών το κέντρο τους δέν είναι κέντρο συμμετρίας.

Το κέντρο καθενός από τα κανονικά πολύγωνα είναι κέντρο ενός κύκλου, ο όποιος εφάπτεται στις πλευρές του, γιατί, όπως μάθαμε, αυτό απέχει εξ ίσου από τις πλευρές. 'Ο κύκλος αυτός λέγεται έγγεγραμμένος στο καν. πολύγωνο.

Κάθε κανονικό πολύγωνο έχει έναν έγγεγραμμένο κύκλο, που είναι όμόκεντρος με τον περιγεγραμμένο και έχει ακτίνα το άπόστημα του καν. πολυγώνου.

Άσκήσεις

41) Νά κατασκευάσετε κανονικό όκτάγωνο και νά φέρετε τους άξονες συμμετρίας του. Βρείτε τα ζεύγη των κάθετων άξόνων.

42) Κάνετε το ίδιο και για ένα κανονικό δωδεκάγωνο.

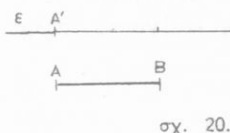
43) Νά κατασκευάσετε ένα κανονικό δεκαεξάγωνο και ένα κανονικό δωδεκάγωνο και νά γράψετε τους έγγεγραμμένους κύκλους σε καθένα άπ' αυτά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ ΚΑΙ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

Α. ΛΟΓΟΣ ΔΥΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

§ 13. Πάρτε μιὰ εὐθεία ϵ καὶ ἓνα εὐθύγραμμο τμήμα AB . Πάνω στὴν ϵ , μὲ ἀρχὴ τὸ A' , πάρτε τρία εὐθύγραμμο τμήματα διαδοχικὰ καὶ ἴσα μὲ τὸ AB . Ἐστω B' τὸ ἄκρο τοῦ τελευταίου (σχ. 20).



Λέμε ὅτι ὁ λόγος τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος $A'B'$ πρὸς τὸ AB εἶναι ὁ ἀριθμὸς 3 καὶ γράφουμε $\frac{A'B'}{AB} = 3$. Ὁ ἀριθμὸς 3 εἶναι ἐκεῖνος μὲ τὸν ὁποῖο πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ AB , γιὰ νὰ δώσει τὸ $A'B'$.

Ὡστε: Λόγος ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος A πρὸς ἓνα εὐθύγραμμο τμήμα B (συμβολικὰ $\frac{A}{B}$) εἶναι ὁ ἀριθμὸς λ , μὲ τὸν ὁποῖο ὅταν πολλαπλασιάσεται τὸ δεύτερο, δίνει τὸ πρῶτο.

Ἄν $\Gamma\Delta$ καὶ EZ εἶναι εὐθύγρ. τμήματα, λέμε «τὸ $\Gamma\Delta$ ἔχει πρὸς τὸ EZ λόγο λ » ἢ συντομότερα « $\Gamma\Delta$ πρὸς EZ ἴσον λ » καὶ γράφουμε $(\Gamma\Delta, EZ) = \lambda$

ἢ συνηθέστερα:

$$\boxed{\frac{\Gamma\Delta}{EZ} = \lambda}$$

ὥστε

$$\boxed{\frac{\Gamma\Delta}{EZ} = \lambda \Leftrightarrow \Gamma\Delta = \lambda \cdot EZ}$$

Τιμὴ εὐθύγραμμου τμήματος εἶναι ὁ λόγος του πρὸς τὴ μονάδα μετρήσεως ἢ συγκρίσεως.

Τὴν τιμὴ τοῦ AB τὴ συμβολίζουμε μὲ (AB) . Τὸ AB εἶναι εὐθύγραμμο τμήμα. Ἡ τιμὴ (AB) εἶναι ἀριθμὸς. Ἄν α εἶναι ἡ μονάδα μετρήσεως τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων καὶ $AB = 5 \cdot \alpha$, $\Gamma\Delta = 8 \cdot \alpha$ τότε $\frac{AB}{\alpha} = 5$ καὶ $\frac{\Gamma\Delta}{\alpha} = 8$. Συνεπῶς $(AB) = 5$ καὶ $(\Gamma\Delta) = 8$ (1)

Θεωροῦμε τὸ λόγο $\frac{BA}{\Gamma\Delta}$. Ἄν $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \lambda$ τότε $AB = \lambda \cdot \Gamma\Delta$. Ἄν ἀντικαταστήσουμε ἀπὸ τὴν (1) τὰ AB καὶ $\Gamma\Delta$ μὲ τὰ ἴσα τους, θὰ πάρουμε $5\alpha = \lambda \cdot 8\alpha$, συνεπῶς $5 = 8\lambda$ (ἐπειδὴ τὸ γινόμενο εὐθ. τμήματος α ἐπὶ ἓναν ἀριθμὸ εἶναι μονότιμο) ἄρα $\lambda = \frac{5}{8}$ δηλαδή:

$$\boxed{\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{(AB)}{(\Gamma\Delta)}}$$

Ὁ λόγος δύο εὐθύγραμμων τμημάτων είναι ἴσος μὲ τὸ λόγο τῶν τιμῶν τους (ὅταν μετρηθοῦν μὲ τὴν ἴδια μονάδα).

Σημείωση: Αὐτὸ ἰσχύει γενικὰ γιὰ τὸ λόγο δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν. Ἐπίσης ἀληθεύει ὅτι: Ἡ τιμὴ τοῦ ἄθροίσματος δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν τους (ὅταν μετρηθοῦν μὲ τὴν ἴδια μονάδα). Τὴν ιδιότητα αὕτη θὰ τὴ χρησιμοποιήσουμε στὴ μέτρηση τῶν ἐμβαδῶν καὶ τῶν ὀγκῶν τῶν σχημάτων.

§ 14. Ἀνάλογα εὐθύγραμμα τμήματα.

Εὐθύγραμμα τμήματα λέγονται ἀνάλογα πρὸς ἄλλα ἀντίστοιχά τους, ὅταν τὰ γινόμενα δύο ἀντίστοιχων τμημάτων ἐπὶ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ εἶναι ἀντίστοιχα εὐθύγραμμα τμήματα.

Δηλαδή, ἂν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα α καὶ β εἶναι ἀντίστοιχα, τότε καὶ τὰ 2α καὶ 2β εἶναι ἀντίστοιχα ὅπως καὶ τὰ 3α , 3β καὶ γενικὰ τὰ $\lambda\alpha$ καὶ $\lambda\beta$ (λ εἶναι ὁποιοσδήποτε ἀριθμός).



σχ' 21.

Ἄν συγκρίνουμε τὸ λόγο δύο τμημάτων ἀπὸ αὐτὰ π.χ. τῶν 2α καὶ 3α μὲ τὸ λόγο τῶν ἀντίστοιχῶν τους (ἀντίστοιχά τους εἶναι τὰ 2β καὶ 3β) παρατηροῦμε ὅτι $\frac{2\alpha}{3\alpha} = \frac{2}{3}$ καὶ $\frac{2\beta}{3\beta} = \frac{2}{3}$ (θεωροῦμε ὡς μονάδα τὸ α γιὰ τὰ πρῶτα καὶ τὸ β γιὰ τὰ δευτέρα). Ὡστε: **Ἀν εὐθύγραμμα τμήματα εἶναι ἀνάλογα, ὁ λόγος δύο (ὁποιοιδήποτε) ἀπὸ αὐτὰ ἰσοῦται μὲ τὸν λόγο τῶν ἀντίστοιχῶν τους.**

Ἄν σὲ ἀνάλογα εὐθύγραμμα τμήματα τὰ $A'B'$ καὶ $\Gamma'D'$ εἶναι ἀντίστοιχα τῶν AB καὶ $\Gamma\Delta$, τὴν ἰσότητα τῶν λόγων $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{A'B'}{\Gamma'D'}$ τὴ λέμε **ἀναλογία τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων AB , $\Gamma\Delta$, $A'B'$, $\Gamma'D'$** . Μποροῦμε νὰ ἀντικαταστήσουμε τοὺς λόγους τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων μὲ τοὺς λόγους τῶν τιμῶν τους καὶ νὰ ἔχουμε τὴν $\frac{(AB)}{(\Gamma\Delta)} = \frac{(A'B')}{(\Gamma'D')}$, ἡ ὁποία εἶναι **ἀναλογία ἀριθμῶν**.

Ἀναλογία τῶν ἀριθμῶν α , β , γ , δ ἔχουμε, ὅταν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$. Οἱ α καὶ δ λέγονται **ἄκροι** ὅροι τῆς ἀναλογίας, οἱ β καὶ γ λέγονται **μέσοι** ὅροι αὐτῆς.

Οἱ α καὶ γ **ἡγούμενοι** καὶ οἱ β καὶ δ **ἐπόμενοι** ὅροι. Γιὰ τὶς ἀναλογίες τῶν ἀριθμῶν μπορεῖτε νὰ δεῖτε στὴν Ἀριθμητικὴ (κεφ. 4 § 100, 101).

Ἀναφέρουμε μὲ συντομία μερικὲς ιδιότητες τῶν ἀναλογιῶν, τὶς ὁποῖες θὰ χρησιμοποιήσουμε στὰ ἐπόμενα.

1) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \beta\gamma = \alpha\delta$ συνεπώς τὸ γινόμενο τῶν μέσων ὄρων μιᾶς ἀναλογίας ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τῶν ἄκρων ὄρων της.

2) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ καὶ $\frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$. Σὲ μιὰ ἀναλογία μποροῦμε νὰ ἐναλλάξουμε τοὺς ἄκρους ἢ τοὺς μέσους ὄρους της.

3) $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'} = \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha' + \beta' + \gamma'}$. Λόγοι ἴσοι μεταξύ τους εἶναι ἴσοι καὶ μὲ τὸ λόγο πού ἔχει ἀριθμητὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστὴ τὸ ἄθροισμα τῶν παρονομαστῶν.

Ἀσκήσεις.

44) Νὰ ἐξηγήσετε γιατί καὶ σὲ μιὰ ἀναλογία εὐθύγραμμων τμημάτων μποροῦμε νὰ ἐναλλάξουμε τοὺς μέσους ἢ τοὺς ἄκρους ὄρους.

45) Νὰ ἐξηγήσετε γιατί, ἂν δύο λόγοι εὐθύγραμμων τμημάτων εἶναι ἴσοι, θὰ εἶναι ἴσοι καὶ μὲ τὸ λόγο τοῦ ἄθροίσματος τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπομένων.

Ἐπίσης ἂν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ δεῖξτε ὅτι $\frac{\alpha + \beta}{\beta} = \frac{\gamma + \delta}{\delta}$

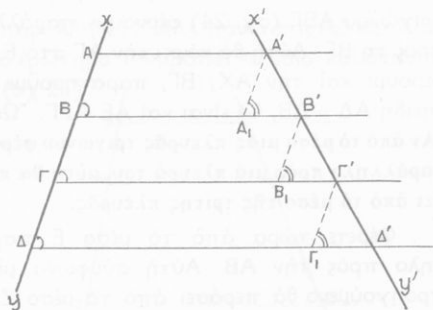
Τὸ Θεώρημα τοῦ Θαλῆ

1^ο. Θεώρημα.

§ 15. Πάνω σὲ μιὰ εὐθεΐα $\chi\psi$ πάστε ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$. Ἀπὸ τὰ σημεῖα A, B, Γ καὶ Δ φέρετε εὐθεΐες παράλληλες μεταξύ τους. Ἐπειτα φέρετε μιὰ ἄλλη εὐθεΐα, πὺν νὰ τέμνει τὶς παράλληλες αὐτὲς στὰ σημεῖα A', B', Γ', Δ' ἀντιστοίχως. Συγκρίνετε (μὲ τὸ διαβήτη) τὰ εὐθ. τμήματα $A'B', B'\Gamma', \Gamma'\Delta'$.

Τὰ συγκρίνουμε καὶ παρατηροῦμε ὅτι εἶναι ἴσα.

Ἐπομένως : "Ἄν παράλληλες εὐθεΐες τέμνουν δύο ἄλλες καὶ ὀρίζουν πάνω στὴ μιὰ ἴσα εὐθ. τμήματα, θὰ ὀρίζουν ἴσα εὐθ. τμήματα καὶ πάνω στὴν ἄλλη.



σχ. 22.

Γιὰ νὰ αἰτιολογήσουμε τὸ ἀποτέλεσμα αὐτό, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Ἀπὸ τὰ σημεῖα A' καὶ B' φέρνουμε παράλληλες πρὸς τὴ $\chi\psi$ (ἄρα καὶ παράλληλες

μεταξύ τους). Αὐτὲς τέμνουν τὶς BB' καὶ $\Gamma\Gamma'$ στὰ σημεῖα A_1 καὶ B_1 ἀντιστοίχως. Παρατηροῦμε ὅτι τὰ τετράπλευρα ABA_1A' καὶ $B\Gamma B_1B'$ εἶναι παραλληλόγραμμα. Ἐπομένως $A'A_1=AB$ καὶ $B'B_1=B\Gamma$. Ἀλλὰ $AB=B\Gamma$ συνεπῶς $A'A_1=B'B_1$.

Συγκρίνουμε τώρα τὰ τρίγωνα $A'A_1B'$ καὶ $B'B_1\Gamma'$. Αὐτὰ εἶναι ἴσα, γιατί ἔχουν:

$$A'A_1 = B'B_1, \quad \text{ὅπως δείξαμε πιὸ πάνω.}$$

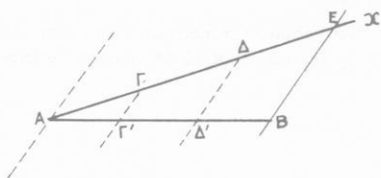
$$\widehat{A_1A'B'} = \widehat{B_1B'\Gamma'} \quad \text{ἐπειδὴ εἶναι ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῶν παραλλήλων}$$

$$A'A_1, B'B_1, \text{ οἱ ὁποῖες τέμνονται ἀπὸ τὴν } A'B', \text{ καὶ}$$

$$\widehat{A_1} = \widehat{B_1}, \quad \text{ἐπειδὴ } \widehat{A_1} = \widehat{B}, \widehat{B_1} = \widehat{\Gamma} \text{ καὶ } \widehat{\Gamma} = \widehat{B} \text{ (γιατί);}$$

Ἐπομένως $A'B' = B'\Gamma'$. Ὁμοίως $B'\Gamma' = \Gamma'D'$ κ.ο.κ.

Ἐφαρμογές



σχ. 23.

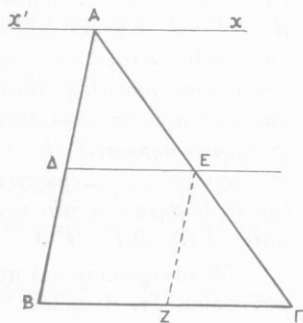
1. Νὰ διαιρεθεῖ ἓνα εὐθύγραμμο τμήμα AB σὲ τρία ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα (σχ. 23). Φέρνουμε μιὰ ἡμιευθεῖα AX καὶ παίρνουμε σ' αὐτὴν τὰ ἴσα διαδοχικὰ εὐθύγραμμα τμήματα AG , GD , DE . Φέρνουμε τὴ BE καὶ ἀπὸ τὰ Δ , Γ καὶ A φέρνουμε παράλληλες πρὸς αὐτή, οἱ ὁποῖες τέμνουν τὸ

AB στὰ σημεῖα Δ' καὶ Γ' . Τότε θὰ εἶναι $AG' = \Gamma'D' = \Delta'B$.

Παρατήρηση: Τὸ AG' ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο $\frac{1}{3} AB$.

2. Ἀπὸ τὸ μέσο Δ τῆς πλευρᾶς AB ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ (σχ. 24) φέρνουμε παράλληλο πρὸς τὴ $B\Gamma$. Αὕτὴ θὰ κόψει τὴν AG στὸ E . Ἄν φέρουμε καὶ τὴν $AX \parallel B\Gamma$, παρατηροῦμε ὅτι, ἐπειδὴ $AD = \Delta B$, θὰ εἶναι καὶ $AE = EG$. Ὡστε: Ἄν ἀπὸ τὸ μέσο μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου φέρουμε παράλληλο πρὸς μιὰ πλευρά του, αὕτὴ θὰ περάσει ἀπὸ τὸ μέσο τῆς τρίτης πλευρᾶς.

Φέρετε τώρα ἀπὸ τὸ μέσο E παράλληλο πρὸς τὴν AB . Αὕτὴ σύμφωνα μὲ τὸ προηγούμενο θὰ περάσει ἀπὸ τὸ μέσο Z τῆς $B\Gamma$ καί, ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρο ΔBZE εἶναι παραλληλόγραμμο, θὰ εἶναι $\Delta E = BZ$, δηλαδὴ $\Delta E = \frac{1}{2} B\Gamma$.



σχ. 24.

3. Σημειώστε τὰ μέσα Δ καὶ E τῶν πλευρῶν AB καὶ AG ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$. Συγκρίνετε τὴ ΔE μὲ τὴ $B\Gamma$.

Ἡ ΔE εἶναι παράλληλος πρὸς τὴ $B\Gamma$, γιατί ἀπὸ τὸ Δ περνᾷ μιὰ

μόνο παράλληλος πρὸς τὴ ΒΓ. Αὐτὴ ὅμως ἢ παράλληλος, ὅπως εἶδαμε στὸ προηγούμενο, περνᾷ καὶ ἀπὸ τὸ Ε καὶ δύο σημεῖα ὀρίζουν μιὰ εὐθεία. Τὸ τμήμα ΔΕ εἶναι ἴσο, ὅπως εἶδαμε, μὲ τὸ $\frac{1}{2}$ ΒΓ. Μὲ συντομία γράφουμε τὶς δύο αὐτὲς ιδιότητες ΔΕ = // $\frac{1}{2}$ ΒΓ. Ὡστε:

Τὸ εὐθύγραμμο τμήμα, τὸ ὁποῖο ἐνώνει τὰ μέσα δύο πλευρῶν τριγώνου, εἶναι παράλληλο πρὸς τὴν τρίτη πλευρὰ καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ μισό αὐτῆς.

Ἀσκήσεις

- 46) Νὰ διαιρεθεῖ ἓνα εὐθύγραμμο τμήμα σὲ πέντε ἴσα μέρη.
 47) Νὰ πάρετε ἓνα εὐθύγραμμο τμήμα ΑΒ καὶ νὰ βρεῖτε τὰ $\frac{2}{5} \cdot ΑΒ$.
 48) Δίνεται ἓνα τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ). Ἀπὸ τὸ μέσο Μ τῆς διαγωνίου ΒΔ νὰ φέρετε παράλληλο πρὸς τὶς βάσεις του, ἢ ὁποῖα τέμνει τὴν ΑΔ στὸ Ν καὶ τὴν ἄλλη διαγώνιο στὸ Λ. Νὰ συγκρίνετε τὸ τμήμα ΝΛ μὲ τὸ ΓΔ καὶ τὸ ΜΛ μὲ τὴ διαφορά τῶν βάσεων.
 49) Νὰ πάρετε τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς τετραπλεύρου καὶ νὰ ἐξετάσετε μὲ τὰ γεωμετρικὰ ὄργανα ἂν εἶναι κορυφὲς ἑνὸς παραλληλογράμμου.
 50) Νὰ ἐξηγήσετε γιατί τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, ποὺ συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἑνὸς τετραπλεύρου, διχοτομοῦνται.

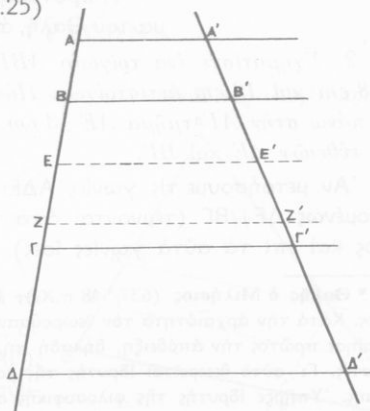
2^ο. Θεώρημα

§ 16. Στὴν § 15 σχ. 24, εἶδαμε ὅτι ἂν $ΑΒ = ΓΔ$, θὰ εἶναι καὶ $Α'Β' = Γ'Δ'$. Τότε ὁμως $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{Α'Β'}{Γ'Δ'} = 1$. Δηλαδή τὰ ἀντίστοιχα εὐθύγραμμα τμήματα, ποὺ ὀρίζονται ἀπὸ τὶς παράλληλες εὐθεῖες πάνω στὶς ΑΔ καὶ Α'Δ', εἶναι ἀνάλογα. Γεννᾶται τώρα τὸ ἐρώτημα: συμβαίνει τὸ ἴδιο καὶ ὅταν τὸ ΑΒ εἶναι διαφορετικὸ ἀπὸ τὸ ΓΔ; (σχ.25)

Κατασκευάστε ἓνα τραπέζιο ΑΒΒ'Α' (ΑΑ'//ΒΒ') μὲ $ΑΒ = 3$ cm, $Α'Β' = 5$ cm καὶ στὴν προέκταση τοῦ ΑΒ νὰ πάρετε ἓνα εὐθύγραμμο τμήμα ΓΔ = 6 cm.

Ἀπὸ τὰ Γ καὶ Δ νὰ φέρετε παράλληλες πρὸς τὶς βάσεις τοῦ τραπέζιου, οἱ ὁποῖες τέμνουν τὴν προέκταση τῆς Α'Β' στὰ σημεῖα Γ' καὶ Δ' ἀντιστοίχως. Μετρήστε τὸ Γ'Δ' καὶ συγκρίνετε τοὺς λόγους: $\frac{ΑΒ}{ΓΔ}$ καὶ $\frac{Α'Β'}{Γ'Δ'}$.

Βρίσκουμε $Γ'Δ' = 10$ cm,



σχ. 25.

έπομένως $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{A'B'}{\Gamma'\Delta'} = \frac{1}{2}$. Άρα: "Αν παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες, τὰ ἀντίστοιχα εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ ὁποῖα ὀρίζονται ἀπὸ τὶς παράλληλες, εἶναι ἀνάλογα.

Γιὰ νὰ αἰτιολογήσουμε τὸ ἀποτέλεσμα αὐτό, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: Στὴν προέκταση τῆς AB παίρνουμε τμήμα BE=AB. Ἡ παράλληλος ἀπὸ τὸ E πρὸς τὶς AA' καὶ BB' τέμνει τὴν A'B' στὸ E' καὶ εἶναι A'B'=B'E'. Τὰ εὐθ. τμήματα AB καὶ A'B' εἶναι ἀντίστοιχα (βρίσκονται μεταξύ τῶν ἰδίων παραλλήλων). Ἀλλὰ καὶ τὰ AE καὶ A'E' εἶναι ἀντίστοιχα. Αὐτὰ ὅμως εἶναι ἴσα μὲ 2AB καὶ 2A'B' ἀντιστοίχως. Ἄν θεωρήσουμε καὶ τὸ AZ=3·AB, θὰ πάρουμε ὡς ἀντίστοιχό του τὸ A'Z'=3·A'B' κ.ο.κ.

Ἀποδεικνύεται (ὅπως θὰ μάθουμε σὲ μεγαλύτερη τάξη) ὅτι, ἂν $\Gamma\Delta = \lambda \cdot AB$, τότε $\Gamma'\Delta' = \lambda \cdot A'B'$ (λ ἕνας ὁποιοσδήποτε ἀριθμός).

Ἐπομένως: Τὰ τμήματα πὺ ὀρίζονται πάνω στὴν εὐθεῖα AB ἀπὸ τὶς παράλληλες εὐθείες, εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀντίστοιχά τους, πὺ ὀρίζονται ἀπὸ τὶς ἰδίες παράλληλες πάνω στὴν A'B'.

Ἐφαρμογές.

1. Μὴ εὐθεῖα παράλληλη πρὸς μὴ πλευρὰ ἑνὸς τριγώνου διαιρεῖ τὶς ἄλλες πλευρές του σὲ τμήματα ἀνάλογα.

Φέρνουμε μὴ εὐθεῖα παράλληλη πρὸς τὴν πλευρὰ BΓ ἑνὸς τριγώνου ABΓ. Αὐτὴ τέμνει τὶς AB καὶ AΓ στὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως. Ἄν φέρουμε καὶ τὴν AX//BΓ, θὰ συμπεράνουμε σύμφωνα μὲ τὸ προηγούμενο ὅτι:

$$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma}, \quad \frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\Delta B}{AB} = \frac{E\Gamma}{A\Gamma}.$$

Ἡ πρόταση αὐτὴ πὺ εἶναι γνωστὴ σὰν Θεώρημα τοῦ Θαλῆ, ἀποδίδεται στὸ Θαλῆ τὸ Μιλήσιο(*).

2. Σχηματίστε ἕνα τρίγωνο ABΓ μὲ μίκη πλευρῶν AB καὶ AΓ ἴσα μὲ 8 cm καὶ 12 cm ἀντιστοίχως. Πάνω στὴν AB πάρτε τμήμα AD=2cm καὶ πάνω στὴν AΓ τμήμα AE=3 cm. Νὰ βρεῖτε τὴ σχετικὴ θέση (σχ. 26) τῶν εὐθειῶν DE καὶ BΓ.

Ἄν μετρήσουμε τὶς γωνίες $\widehat{ADE}$ καὶ $\widehat{AB\Gamma}$, θὰ βροῦμε ὅτι εἶναι ἴσες. Ἐπομένως DE//BΓ (τέμνονται ἀπὸ τὴν AB καὶ σχηματίζουν δύο ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ γωνίες ἴσες). Μποροῦμε νὰ ἀποδείξουμε, δηλαδὴ

* Θαλῆς ὁ Μιλήσιος (637-548 π.Χ.): Μεγάλος Ἕλληνας μαθηματικὸς καὶ φιλόσοφος. Κατὰ τὴν ἀρχαιότητα τὸν θεωροῦσαν ἕνα ἀπὸ τοὺς ἑπτὰ σοφοὺς. Αὐτὸς χρησιμοποίησε πρῶτος τὴν ἀπόδειξη, δηλαδὴ τὴ δικαιολόγηση μὴς ἀλήθειας μὲ βάση ἄλλες γνωστές. Γι' αὐτὸ θεωρεῖται ἰδρυτὴς τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης καὶ γενικὰ τῆς ἐπιστήμης. Ὑπῆρξε ἰδρυτὴς τῆς φιλοσοφικῆς σχολῆς τῆς Μιλήτου. Οἱ πρῶτες γνώσεις γιὰ τὸν ἠλεκτρισμὸ ὀφείλονται σ' αὐτόν.

νά αιτιολογήσουμε τὸ ἀποτέλεσμα αὐτό. Παρατηροῦμε ὅτι $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{4}$ καὶ $\frac{AE}{AG} = \frac{1}{4}$, ἐπομένως $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AG}$. Ἄρα ἡ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, ποὺ φέρνεται ἀπὸ τὸ Δ, ὀφείλει (κατὰ τὸ προηγούμενο) νὰ περάσει ἀπὸ τὸ Ε.

Ὡστε: Ἐν μιᾷ εὐθείᾳ διαιρεῖ δύο πλευρὲς τριγώνου σὲ τμήματα ἀνάλογα, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτη πλευρά του.

Ἀσκήσεις

51) Νὰ διαιρεθῇ ἓνα εὐθ. τμήμα σὲ δύο τμήματα, ποὺ νὰ ἔχουν λόγος $\frac{3}{4}$.

52) Δίνονται τὸ εὐθύγραμμο τμήμα ΑΒ καὶ δύο εὐθύγραμμα τμήματα α καὶ β. Νὰ διαιρέσετε τὸ ΑΒ σὲ τμήματα ἀνάλογα πρὸς τὰ α καὶ β.

53) Κατασκευάστε ἓνα τρίγωνο ΑΒΓ μὲ πλευρὲς ΑΒ=5 cm καὶ ΑΓ=6 cm. Πάρτε πάνω στὴν ΑΒ ἓνα τμήμα $AD = \frac{1}{3} AG$ καὶ φέρετε ἀπὸ τὸ Δ// πρὸς τὴν ΒΓ. Ἐν αὐτῇ τέμνει τὴν ΑΓ στὸ Ζ, βρεῖτε τὸ μήκος τοῦ ΑΖ.

54) Ἀπὸ τὸ κέντρο βάρους ἐνὸς τριγώνου ΑΒΓ νὰ φέρετε παράλληλο πρὸς τὴν ΒΓ. Ἐν αὐτῇ τέμνει τὴν ΑΒ στὸ Δ, ὑπολογίστε τοὺς λόγους $\frac{AD}{DB}$, $\frac{AB}{AD}$, $\frac{AB}{DB}$.

55) Νὰ κατασκευάσετε τὴν διχοτόμο ΑΔ ἐνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἀπὸ τὸ Β νὰ φέρετε παράλληλο πρὸς τὴν ΑΔ. Ἐν αὐτῇ τέμνει τὴν προέκταση τῆς ΑΓ στὸ Ε, νὰ συγκρίνετε τὰ ΑΒ καὶ ΑΕ. Νὰ συγκρίνετε ἐπίσης τοὺς λόγους $\frac{DB}{AD}$, $\frac{AB}{AG}$.

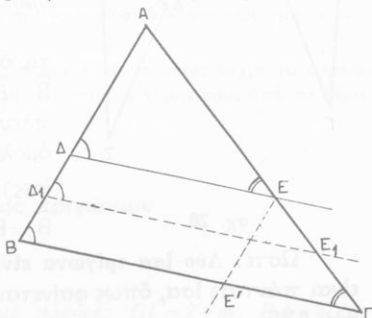
56) Νὰ κατασκευάσετε τρεῖς παράλληλες εὐθεῖες ε, ε', ε'' ὥστε ἡ ε νὰ ἀπέχει ἀπὸ τὴν ε' 3 cm καὶ ἡ ε' ἀπὸ τὴν ε'' 5 cm. Νὰ τὶς κόψετε μὲ μιᾷ εὐθείᾳ χψ καὶ νὰ ὑπολογίσετε τοὺς λόγους τῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα ὀρίζουν οἱ παράλληλες πάνω στὴ χψ.

Β. ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

§ 17. Πάρτε ἓνα τρίγωνο ΑΒΓ καὶ φέρετε μιᾷ εὐθείᾳ παράλληλῃ πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία νὰ τέμνει τὶς πλευρὲς ΑΒ καὶ ΑΓ στὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως. Συγκρίνετε τὶς γωνίες καὶ τὶς πλευρὲς τῶν τριγώνων ΑΔΕ καὶ ΑΒΓ. Τί παρατηρεῖτε;

Παρατηροῦμε ὅτι, $\hat{A} = \hat{A}$, $\hat{B} = \hat{D}$ καὶ $\hat{G} = \hat{E}$ (εἶναι ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῶν παραλλήλων ΒΓ καὶ ΔΕ, οἱ ὁποῖες τέμνονται ἀπὸ τὶς ΑΒ καὶ ΑΓ).

Γιὰ τὶς πλευρὲς τοῦ τριγώνου, σύμφωνα μὲ τὸ θεώρημα τοῦ Θαλῆ ἔχουμε:



σχ. 27.

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AG}$. Φέρνουμε τώρα από το E παράλληλο προς την AB. Αυτή τέμνει την BG στο E'. Σύμφωνα πάλι με το θεώρημα του Θαλή θα είναι $\frac{AE}{AG} = \frac{BE'}{BG}$.

Το τετράπλευρο όμως ΔBE'E είναι παραλληλόγραμμο. Άρα $BE' = DE$, επομένως $\frac{AE}{AG} = \frac{DE}{BG}$.

Έχουμε λοιπόν $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AG} = \frac{DE}{BG}$. Τα τρίγωνα ADE και ABG έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες και τις πλευρές, που βρίσκονται απέναντι των ίσων γωνιών, ανάλογες.

Λέμε ότι τα τρίγωνα ADE και ABG είναι όμοια.

Οι αντίστοιχες κορυφές A, A, Δ, B και E, Γ των ίσων γωνιών λέγονται **ομόλογες κορυφές**. Οι γωνίες τους λέγονται **ομόλογες γωνίες**, και οι πλευρές, οι οποίες συνδέουν δύο ομόλογες κορυφές ή βρίσκονται απέναντι ομόλογων γωνιών, λέγονται **ομόλογες πλευρές**.

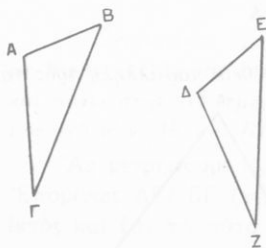
Θα λέμε ότι δύο τρίγωνα είναι όμοια, όταν έχουν τις ομόλογες γωνίες τους ίσες και τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.

$$\widehat{A} = \widehat{\Delta}, \widehat{B} = \widehat{E}, \widehat{\Gamma} = \widehat{Z} \text{ και } \frac{AB}{DE} = \frac{BG}{EZ} = \frac{AG}{AZ} \Leftrightarrow \text{Τριγ. ABG } \sim \text{Τριγ. } \Delta EZ.$$

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω, μιὰ εὐθεία παράλληλη πρὸς μιὰ πλευρὰ τριγώνου ὀρίζει ἕνα νέο τρίγωνο ὁμοιο μὲ αὐτό.

Σημείωση: Οι ομόλογες κορυφές πρέπει να γράφονται με την ίδια τάξη.

§ 18. Ἐφαρμογές.



σχ. 28.

1. Πάρτε δύο ίσα τρίγωνα (με την βοήθεια διαφανούς χαρτιού) τα ABG και ΔEZ και συγκρίνετε τις γωνίες τους και τους λόγους των ομόλογων πλευρών τους.

Επειδή τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν τις ομόλογες γωνίες τους ίσες, δηλαδή $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$ και $\widehat{\Gamma} = \widehat{Z}$. Οι λόγοι των ομόλογων πλευρών είναι ίσοι με τη μονάδα (γιατί οι ομόλογες πλευρές των ίσων τριγώνων είναι ίσες). Επομένως: $\frac{AB}{DE} = \frac{BG}{EZ} = \frac{AG}{AZ}$ και $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$ και $\widehat{\Gamma} = \widehat{Z}$.

Ωστε: **Δύο ίσα τρίγωνα είναι όμοια.** Άλλα δύο όμοια τρίγωνα δεν είναι πάντοτε ίσα, όπως φαίνεται στο σχήμα (27) για τα τρίγωνα ADE και ABG.

2. Έπειδή στο σχήμα (27) φέραμε τη ΔΕ παράλληλο προς τη ΒΓ, συμπεράναμε ότι το τρίγ. ΑΔΕ είναι ὁμοιο με το τρίγ. ΑΒΓ.

Παρατηρούμε ὅμως ὅτι καὶ ἡ ΒΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰ ΔΕ τοῦ τριγώνου ΑΔΕ. Ἐπομένως, ἂν ἓνα τρίγωνο εἶναι ὁμοιο με ἓνα ἄλλο, καὶ τὸ δεύτερο εἶναι ὁμοιο με τὸ πρῶτο.

3. Στὸ σχήμα (27) φέρνουμε τὴ $\Delta_1 E_1$ παράλληλο πρὸς τὴ ΒΓ.

Τότε τὸ τρίγ. $\Delta \Delta_1 E_1$ εἶναι ὁμοιο με τὸ τρίγ. ΑΒΓ. Διαπιστώσαμε ὅτι τὸ τρίγ. ΑΔΕ εἶναι ὁμοιο με τὸ τρίγ. ΑΒΓ, καὶ ἔπειδὴ οἱ $\Delta E // B\Gamma$ καὶ $\Delta_1 E_1 // B\Gamma$ συνεπάγονται τὴν $\Delta E // \Delta_1 E_1$, ἔχουμε ὅτι τὸ τρίγωνο $\Delta \Delta_1 E_1$ εἶναι ὁμοιο με τὸ τρίγωνο ΑΔΕ. Ὡστε δύο τρίγωνα ὁμοια με ἓνα τρίτο εἶναι ὁμοια.

Ἄν συνοψίσουμε, θὰ παρατηρήσουμε ὅτι ἡ σχέση τῆς ὁμοιότητας ἔχει τὶς γνωστὲς ιδιότητες τῆς ἰσότητας.

Τρίγ. ΑΒΓ ὁμοιο τρίγ. ΑΒΓ (ἀνακλαστική).

τρίγ. ΑΒΓ ὁμοιο τρίγ. ΔΕΖ $\Rightarrow$ τρίγ. ΔΕΖ ὁμοιο τρίγ. ΑΒΓ (συμμετρική) καὶ

τρίγ. ΑΒΓ ὁμοιο τρίγ. ΔΕΖ καὶ τρίγ. ΔΕΖ ὁμοιο τρίγ. ΗΘΙ $\Rightarrow$ τρίγ. ΑΒΓ ὁμοιο τρίγ. ΘΗΙ (μεταβατική).

Ἀσκήσεις

57) Κατασκευάστε ἓνα τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρὲς $AB=3\text{ cm}$, $BF=5\text{ cm}$ καὶ $AG=6\text{ cm}$. Πάνω στὴν ΑΒ πάρτε τμῆμα $AD=2\text{ cm}$ καὶ φέρτε παράλληλο πρὸς τὴ ΒΓ, ἡ ὁποία νὰ τέμνει τὴν ΑΓ στὸ Ε. Ὑπολογίστε τὸ μήκος τῆς ΔΕ.

58) Ἡ πλευρὰ ἐνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ ἔχει μήκος 6 cm. Ἀπὸ τὸ ὀρθόκεντρο τοῦ τριγώνου νὰ φέρετε παράλληλο πρὸς τὴ ΒΓ. Πόσο εἶναι τὸ μήκος τοῦ τμήματός της, ποῦ εἶναι ἐσωτερικὸ τοῦ τριγώνου;

59) Σχηματίστε ἓνα τρίγωνο ΑΒΓ καὶ προεκτείνετε τὶς ΑΒ καὶ ΑΓ μέχρι τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως, ὥστε $AD=\frac{3}{5} \cdot AB$ καὶ $AE=\frac{3}{5} \cdot AG$. Ὑπολογίστε τὸ λόγος $\frac{\Delta E}{B\Gamma}$.

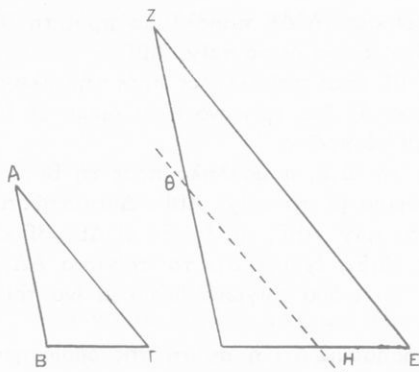
60) Ἐνα τραπέζιο ἔχει βάσεις 12 cm καὶ 7 cm. Ποιὸς εἶναι ὁ λόγος τῶν τμημάτων, στὰ ὁποῖα ἡ μία διαγώνιος χωρίζει τὴν ἄλλη;

61) Στὸ ἴδιο τραπέζιο προεκτείνετε τὶς μὴ παράλληλες πλευρὲς μέχρι τὸ σημεῖο τομῆς τους. Ποιὸς εἶναι ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου τομῆς τους ἀπὸ τὰ ἄκρα μὴς ἀπὸ τὶς μὴ παράλληλες πλευρὲς;

Κριτήρια ὁμοιότητας τριγώνων

§ 19. 1^ο Κριτήριο ὁμοιότητας.

Κατασκευάστε ἓνα τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρὲς $BF=2\text{ cm}$, $BA=4\text{ cm}$



σχ. 29.

και $\Gamma\Lambda = 5 \text{ cm}$. Μετά πάρετε ένα ευθύγραμμο τμήμα $\Delta\Xi = 4 \text{ cm}$ και με βάση αυτό κατασκευάστε το τρίγωνο $\Delta\Xi\Theta$, ώστε $\hat{\Delta} = \hat{B}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Xi}$. Συγκρίνετε τις γωνίες $\hat{A}$, $\hat{Z}$ και τους λόγους των ομόλογων πλευρών. Τι παρατηρείτε; (σχ. 29).

Χρησιμοποιώντας μοιρογνωμόνιο ή «διαφανές» βρίσκουμε ότι $\hat{A} = \hat{Z}$. Έπομένως τα τρίγωνα έχουν τις ομόλογες γωνίες τους ίσες, δηλαδή $\hat{A} = \hat{Z}$, $\hat{B} = \hat{\Delta}$, $\hat{\Gamma} = \hat{\Xi}$.

Μετρώντας με ύποδεκάμετρο βρίσκουμε ότι $\Delta Z = 8 \text{ cm}$ και $\Xi Z = 10 \text{ cm}$.

Τότε $\frac{B\Gamma}{\Delta\Xi} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{AB}{\Delta\Delta} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ και $\frac{A\Gamma}{\Delta\Xi} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

Όστε $\frac{B\Gamma}{\Delta\Xi} = \frac{AB}{\Delta\Delta} = \frac{A\Gamma}{\Delta\Xi}$, δηλαδή οι ομόλογες πλευρές των τριγώνων είναι ανάλογες. Έπομένως τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta\Delta\Xi$, τα όποια έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, είναι όμοια.

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, είναι όμοια.

Για να αιτιολογήσουμε το αποτέλεσμα της εργασίας μας και να πειστούμε, ότι δεν είναι συμπτωματικό, εργαζόμαστε ως εξής: Παίρνουμε πάνω στη $\Delta\Xi$ τμήμα $\Delta\Theta = B\Gamma$ και από το Θ φέρνουμε παράλληλο προς την ΞZ , ή όποια τέμνει τη ΔZ στο Θ . Παρατηρούμε ότι, το τρίγ. $\Theta\Delta\Theta$ είναι όμ. με το $\Delta\Delta\Xi$ (1), όπως μάθαμε στην § 17. Αλλά τα τρίγωνα $\Theta\Delta\Theta$ και $AB\Gamma$ είναι ίσα, γιατί έχουν $\Delta\Theta = B\Gamma$ και $\hat{\Delta} = \hat{B}$, $\hat{\Theta} = \hat{\Gamma}$ (επειδή $\hat{\Theta} = \hat{\Xi}$ και $\hat{\Xi} = \hat{\Gamma}$).

Άρα το τρίγ. $\Theta\Delta\Theta$ είναι όμοιο με το τρίγ. $AB\Gamma$ (2). Από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι το τρίγ. $AB\Gamma$ είναι όμοιο με το τρίγ. $\Delta\Delta\Xi$. Όστε: Δύο τρίγωνα με δύο γωνίες ίσες μία προς μία είναι όμοια.

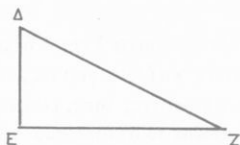
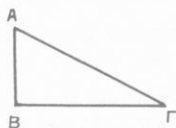
Εφαρμογές.

1. Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια, γιατί κάθε ένα απ' αυτά έχει γωνίες 60° . Δηλαδή έχουν δύο γωνίες ίσες.

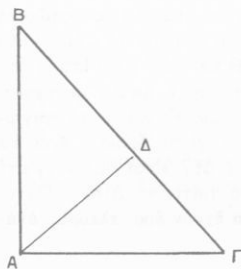
2. Κατασκευάστε δύο ορθογώνια τρίγωνα, ώστε μία οξεία γωνία του ενός να είναι ίση με μία οξεία γωνία του άλλου. Τι παρατηρείτε;

Κατασκευάζουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta\Xi Z$ έτσι ώστε $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$. Παρατηρούμε ότι $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$ και $\hat{A} = \hat{\Xi}$, επειδή είναι όρθες. Έπομένως, **αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία οξεία γωνία ίση, είναι όμοια.** (σχ. 30)

3. Σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο $BA\Gamma$ ($\hat{A} = 1$ όρθη) να φέρετε το ύψος



σχ. 30.



σχ. 31.

ΑΔ και νά συγκρίνετε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ και ΓΔΑ με τὸ ΓΑΒ. Τί παρατηρεῖτε; (σχ. 31).

Παρατηροῦμε ὅτι τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΔΒ και ΓΑΒ ἔχουν μία ὀξεία γωνία κοινή, τὴν $\widehat{B}$. Ἄρα εἶναι ὅμοια. Ὁμοίως τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΓΔΑ και ΓΑΒ ἔχουν τὴν ὀξεία γωνία $\widehat{\Gamma}$ κοινή, εἶναι λοιπὸν και αὐτὰ ὅμοια. Ἐπομένως και τὰ τρίγωνα ΑΔΒ και ΓΔΑ εἶναι ὅμοια (ἐπεὶ δὴ εἶναι ὅμοια με ἓνα τρίτο).

Ἀσκήσεις

62) Ἐξετάστε ἂν δύο ἰσοσκελῆ ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ὅμοια.

63) Νά κατασκευάσετε δύο ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' και νά φέρετε τῖς διχοτόμους τοὺς ΑΔ και Α'Δ'. Ἐξετάστε ἂν τὰ τρίγωνα ΑΒΔ και Α'Β'Δ' καθὼς και τὰ ΑΓΔ και Α'Γ'Δ' εἶναι ὅμοια.

64) Νά κατασκευάσετε ἓνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και νά φέρετε τὸ ὕψος τοῦ ΑΔ. Νά συγκρίνετε τοὺς λόγους $\frac{ΔΒ}{ΑΒ}$ και $\frac{ΑΒ}{ΓΒ}$.

65) Κατασκευάστε ἓνα τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρὲς ΑΒ=7 cm, ΒΓ=6 cm και ΓΑ=9 cm. Πάρτε πάνω στὴν ΑΒ ἓνα τμήμα ΒΔ=4 cm και κατασκευάστε γωνία $\widehat{ΒΔΕ}=\widehat{\Gamma}$, τῆς ὁποίας ἡ πλευρά ΔΕ τέμνει τὴν ἡμιευθεία ΒΓ στὸ Ε. Ὑπολογίστε τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΒΔΕ.

66) Νά σχηματίσετε ἓνα τρίγωνο ΑΒΓ και τὴ διάμεσό του ΑΜ. Νά φέρετε μιὰ παράλληλο πρὸς τὴ ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τῖς ΑΒ, ΑΜ, ΑΕ στὰ σημεῖα Β', Μ', Γ' ἀντιστοίχως. Νά συγκρίνετε τὰ τμήματα Β'Μ' και Γ'Μ'.

67) Νά κατασκευάσετε δύο ὀξυγώνια τρίγωνα με πλευρὲς ἀντιστοίχως παράλληλες και νά τὰ συγκρίνετε. Νά διαπιστώσετε, ὅτι αὐτὰ εἶναι ὅμοια.

§ 20. 2^ο Κριτήριο ὁμοιότητας τριγώνων.

Κατασκευάστε ἓνα τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρὲς ΑΒ=3 cm, ΑΓ=4 cm και ΒΓ=6 cm. Ἐπειτα νά κατασκευάσετε μιὰ γωνία Δ ἴση με τὴν Α και στῖς πλευρὲς τῆς νά πάρετε τμήματα ΔΕ=6 cm και ΔΖ=8 cm. Συγκρίνετε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ. Τί παρατηρεῖτε; (σχ. 32).

Χρησιμοποιώντας μοιρογνωμόνιο ἢ διαφανὲς χαρτί βρίσκουμε ὅτι $\widehat{B}=\widehat{E}$ και $\widehat{Z}=\widehat{\Gamma}$. Ἄν μετρήσουμε τὴν ΕΖ, βρίσκουμε ὅτι εἶναι 12 cm. Ἐπεὶδὴ τώρα εἶναι $\frac{ΑΒ}{ΔΕ} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $\frac{ΑΓ}{ΔΖ} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ και $\frac{ΒΓ}{ΕΖ} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, ἔχουμε

$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{EZ}$ και $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$. Συνεπώς, τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ὁμοία. Τὰ τρίγωνα αὐτὰ κατασκευάστηκαν ἀπὸ τὴν

ἀρχὴ ἔτσι, ὥστε οἱ ἴσες γωνίες τους $\hat{A}$ καὶ $\hat{\Delta}$ νὰ περιέχονται μεταξὺ τῶν ἀνάλογων πλευρῶν AB , $A\Gamma$ καὶ ΔE , ΔZ . Ὡστε:

Ἐάν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὲς ἀνάλογες καὶ τὶς γωνίες, πὺν περιέχονται ἀπ' αὐτές, ἴσες, εἶναι ὁμοία.

Αἰτιολογοῦμε τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἐργασίας μας ὡς ἑξῆς: Πάνω στὶς ΔE καὶ ΔZ παίρνουμε τμήματα $\Delta H = AB$ καὶ $\Delta \Theta = A\Gamma$.

Ἐπειδὴ εἶναι $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{\Delta H}{\Delta E} = \frac{\Delta \Theta}{\Delta Z}$. Τότε ὁμως, ὅπως μάθαμε στὴν § 16.2, θὰ εἶναι $H\Theta // EZ$, συνεπῶς τὸ τρίγωνο $\Delta H\Theta$ εἶναι ὁμοιο μὲ τὸ ΔEZ . Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα $\Delta H\Theta$ καὶ $AB\Gamma$ εἶναι ἴσα, γιατί ἔχουν μία γωνία ἴση, ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ ἴσων πλευρῶν. Ἐπομένως τὰ τρίγωνα $\Delta H\Theta$ καὶ $AB\Gamma$ εἶναι ὁμοία. Ἀρα τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ ΔEZ εἶναι ὁμοία (γιατὶ εἶναι ὁμοία μὲ ἓνα τρίτο, τὸ $\Delta H\Theta$). Ὡστε:

Τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν δύο πλευρὲς ἀνά-

λογες καὶ τὶς γωνίες τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἴσες, εἶναι ὁμοία.

Ἐφαρμογές.

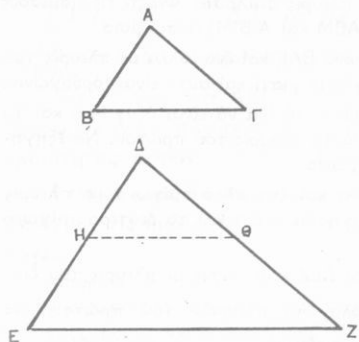
1. Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὶς κάθετες πλευρὲς τους ἀνάλογες, εἶναι ὁμοία, γιατί ἔχουν μία γωνία ἴση (τὴν ὀρθή), ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ ἀνάλογων πλευρῶν.

2. Σχηματίζουμε τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$, ὥστε οἱ γωνίες τῶν κορυφῶν τους νὰ εἶναι ἴσες, $\hat{A} = \hat{A'}$ καὶ $AB = A\Gamma$, $A'B' = A'\Gamma'$ τότε $\frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$. Ἀπ' αὐτὰ συμπεραίνουμε ὅτι, ἂν δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἔχουν τὶς γωνίες τῶν κορυφῶν τους ἴσες, εἶναι ὁμοία.

§ 21. 3^ο Κριτήριο ὁμοιότητας τριγώνων.

Κατασκευάστε ἓνα τρίγωνο $AB\Gamma$ μὲ πλευρὲς $AB = 4$ cm, $B\Gamma = 5$ cm καὶ $\Gamma A = 6$ cm καὶ ἓνα ἄλλο τρίγωνο ΔEZ μὲ πλευρὲς $\Delta E = 8$ cm, $EZ = 10$ cm καὶ $Z\Delta = 12$ cm. Συγκρίνετε τώρα τὶς γωνίες τῶν τριγώνων αὐτῶν.

Μὲ τὴ βοήθεια διαφανοῦς χαρτιοῦ ἢ μοιρογνωμονίου βρίσκουμε εὐκολα ὅτι οἱ ὁμόλογες γωνίες τους εἶναι ἴσες. Τὰ τρίγωνα αὐτὰ ἀπὸ τὴν ἀρχὴ



σχ. 33.

Είχαν και τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες: $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$. 'Απ' αυτά συμπεραίνουμε ότι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια "Ωστε:

"Αν δύο τρίγωνα έχουν τις (ομόλογες) πλευρές τους ανάλογες, είναι όμοια.

Τò αποτέλεσμα αυτό μπορούμε νά τò αιτιολογήσουμε ως εξής (σχ. 33): Πάνω στis ΔΕ και ΔΖ παίρνουμε τμήματα ΔΗ=ΑΒ και ΔΘ=ΑΓ και έπειδή από την άρχή είναι $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$, θά είναι και $\frac{\Delta H}{\Delta E} = \frac{\Delta \Theta}{\Delta Z}$ (άντικαθιστοῦ-

με μέ τὰ ίσα τους). Τότε όμως τρίγ. ΔΗΘ όμοιον μέ τρίγ. ΔΕΖ, συνεπώς $\frac{H\Theta}{EZ} = \frac{\Delta \Theta}{\Delta Z}$

Θέτουμε όπου ΔΘ τò ίσο του ΑΓ και έχουμε $\frac{H\Theta}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$. 'Από την άρχή όμως είναι $\frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{EZ}$, συνεπώς $\frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{H\Theta}{EZ}$, άρα ΗΘ = ΒΓ. Τὰ τρίγωνα τώρα ΔΗΘ και ΑΒΓ είναι ίσα, γιατί έχουν τις πλευρές τους ίσες μία πρὸς μία. Συνεπώς είναι όμοια. "Αρα τὰ τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια (γιατί είναι όμοια μέ τò τρίγωνο ΔΗΘ). Έπομένως: **Δύο τρίγωνα μέ τις (ομόλογες) πλευρές τους ανάλογες είναι όμοια.**

Έφαρμογές.

Σχηματίστε ένα όρθογώνιο τρίγωνο και κατασκευάστε ένα άλλο τρίγωνο μέ πλευρές ανάλογες πρὸς τις πλευρές τοῦ όρθογωνίου τριγώνου. Τί παρατηρεῖτε;

Παρατηρούμε ότι τò δεύτερο τρίγωνο είναι όμοιο μέ τò πρώτο. Έπομένως οί ομόλογες γωνίες τους είναι ίσες. Συνεπώς και τò δεύτερο τρίγωνο είναι όρθογώνιο.

Άσκήσεις

68) Νά κατασκευάσετε δύο ίσοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ (ΑΒ=ΑΓ και ΑΔ=ΑΕ), ώστε $\widehat{BAG} = \widehat{DAE}$ και ή ΑΔ νά είναι έσωτερική τῆς $\widehat{BAG}$. Νά συγκρίνετε τὰ τρίγωνα ΒΑΔ και ΓΑΕ και νά δικαιολογήσετε γιατί είναι όμοια.

69) Νά κατασκευάσετε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ', ώστε $\widehat{A} = \widehat{A'}$ και $\frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'G'} = \frac{2}{3}$. Νά δικαιολογήσετε γιατί αυτά είναι όμοια.

70) Νά σχηματίσετε ένα τρίγωνο και νά ενώσετε τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του. Νά συγκρίνετε τὰ τέσσερα τρίγωνα, πού σχηματίζονται, μέ τò αρχικό.

71) Νά κατασκευάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ μέ πλευρές ΑΒ=2,5 cm, ΒΓ=4,2 cm και

$\Gamma\Lambda=3$ cm. και ένα άλλο $A'B'\Gamma'$ με αντίστοιχες πλευρές διπλάσιες. Φέρετε τις διαμέσους AM και $A'M'$ και αποδείξτε γιατί τὰ τρίγωνα ABM και $A'B'M'$ είναι όμοια.

72) Νά κατασκευάσετε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $BA\Gamma$ και ένα άλλο με πλευρές τριπλάσιες από τις πλευρές του πρώτου. Δικαιολογήστε γιατί και αυτό είναι ορθογώνιο.

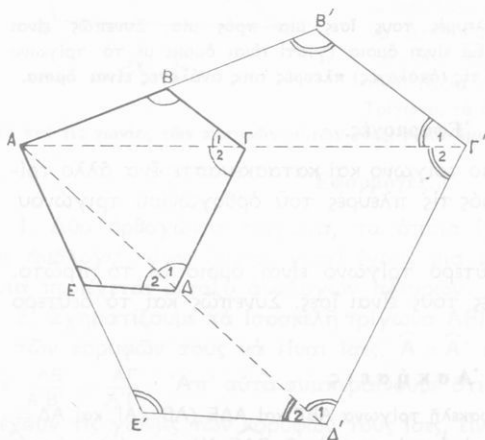
73) Νά κατασκευάσετε δύο τρίγωνα έτσι, ώστε τὸ ένα νά είναι οξυγώνιο και τὸ άλλο νά έχει πλευρές ἀντιστοίχως τριπλάσιες από τις πλευρές του πρώτου. Νά ἐξηγήσετε γιατί και τὸ δεύτερο τρίγωνο θά είναι οξυγώνιο.

74) Κατασκευάστε ένα ἀμβλυγώνιο τρίγωνο και ένα άλλο τρίγωνο με πλευρές διπλάσιες από τις πλευρές του πρώτου. Νά ἐξηγήσετε γιατί και τὸ δεύτερο τρίγωνο θά έχει μιὰ ἀμβλεία γωνία.

75) Νά κατασκευάσετε τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έτσι, ώστε οἱ πλευρές του δευτέρου νά είναι τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν ἀντίστοιχων (ὁμόλογων) πλευρῶν του πρώτου. Νά φέρετε μετὰ τις διάμεσες AM και ΔN και νά τις συγκρίνετε.

76) Νά κατασκευάσετε δύο ορθογώνια τρίγωνα με τις πλευρές τους ἀντιστοίχως παράλληλες και νά ἐξετάσετε ἀν είναι όμοια.

Γ. ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ



σχ. 34.

§ 22. Σχηματίσετε ένα πεντάγωνο $AB\Gamma\Delta E$ και προεκτείνετε την AB μέχρι τὸ B' , ώστε $AB'=2\cdot AB$.

Προεκτείνετε με τὸν ἴδιο τρόπο τις διαγωνίους $A\Gamma$ μέχρι τὸ Γ' , $A\Delta$ μέχρι τὸ Δ' και τὴν πλευρὰ AE μέχρι τὸ E' . Συγκρίνετε τις ὁμόλογες (ἀντίστοιχες) γωνίες $\widehat{A}$, $\widehat{A'}$, $\widehat{B}$, $\widehat{B'}$, $\widehat{\Gamma}$, $\widehat{\Gamma'}$, $\widehat{\Delta}$, $\widehat{\Delta'}$, $\widehat{E}$, $\widehat{E'}$ και τις ὁμόλογες πλευρές AB , AB' , $B\Gamma$, $B'\Gamma'$, $\Gamma\Delta$, $\Gamma'\Delta'$, ΔE , $\Delta'E'$, EA , $E'A$ τῶν πενταγώνων $AB\Gamma\Delta E$ και $AB'\Gamma'\Delta'E'$. Τί παρατηρεῖτε; (σχ. 34).

Χρησιμοποιοῦμε μοιρογνωμόνιο ἢ διαφανές και βρίσκουμε, ὅτι οἱ ὁμόλογες γωνίες τῶν πενταγώνων αὐτῶν είναι ἴσες. Με τὸ διαβήτη ἢ τὸ ὑποδεκάμετρο διαπιστώνουμε ὅτι $AB = \frac{1}{2} \cdot AB'$, $B\Gamma = \frac{1}{2} B'\Gamma'$, $\Gamma\Delta =$

$$= \frac{1}{2} \Gamma \Delta', \Delta E = \frac{1}{2} \Delta' E' \text{ και } AE = \frac{1}{2} \cdot AE' \text{ ή } \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta'E'} = \frac{EA}{E'A'}, \text{ δηλαδή οι όμολογες πλευρές τους είναι ανάλογες.}$$

Τὰ πεντάγωνα $AB\Gamma\Delta E$ και $AB'\Gamma'\Delta'E'$ λέγονται **ὅμοια**. 'Ο λόγος λ δύο. όμόλογων πλευρών τών όμοιων αὐτῶν πενταγώνων λέγεται **λόγος όμοιότητας** αὐτῶν. (στήν περίπτωσή μας $\lambda = \frac{1}{2}$).

Γενικά λέμε ότι δύο πολύγωνα (μέ τὸ ἴδιο πλῆθος κορυφῶν) εἶναι **ὅμοια**, ἂν ἔχουν τὶς όμόλογες γωνίες τους ἴσες και τὶς όμόλογες πλευρές τους **ανάλογες**.

Μποροῦμε νὰ ἐργαστοῦμε μέ τὰ πεντάγωνα $AB\Gamma\Delta E$ και $AB'\Gamma'\Delta'E'$, (σχ. 34) χωρὶς νὰ χρησιμοποιήσουμε γεωμετρικά ὄργανα.

Συγκρίνουμε τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB'\Gamma'$. Αὐτὰ ἔχουν μιὰ γωνία κοινὴ (τὴν Α), ἢ ὅποια περιέχεται μεταξύ τῶν ἀνάλογων πλευρῶν AB , $A\Gamma$ και AB' , $A\Gamma'$. Ἀρα:

$$\begin{aligned} \widehat{B} &= \widehat{B'} \\ \widehat{\Gamma}_1 &= \widehat{\Gamma'} \end{aligned} \quad \text{και} \quad \frac{AB}{AB'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A\Gamma'}$$

Μέ ὁμοιο τρόπο διαπιστώνουμε ὅτι τὰ τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $A\Gamma'\Delta'$ εἶναι ὅμοια. Ἐπομένως:

$$\widehat{\Gamma}_2 = \widehat{\Gamma}_2', \widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_1' \text{ και } \frac{A\Gamma}{A\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{A\Delta}{A\Delta'}$$

Ἀλλὰ και τὰ τρίγωνα $A\Delta E$ και $A\Delta'E'$ εἶναι ὅμοια (ἔχουν μιὰ γωνία κοινὴ μεταξύ ἀνάλογων πλευρῶν), συνεπῶς:

$$\widehat{\Delta}_2 = \widehat{\Delta}_2', \widehat{E} = \widehat{E'} \text{ και } \frac{A\Delta}{A\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta'E'} = \frac{AE}{AE'}$$

Ἀπ' αὐτὰ συμπεραίνουμε ὅτι οἱ όμόλογες γωνίες τῶν πενταγώνων μας εἶναι ἴσες ἢ ἀπ' εὐθείας ($\widehat{A} = \widehat{A}$, $\widehat{E} = \widehat{E}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$) ἢ σάν ἀθροίσματα ἴσων γωνιῶν ($\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$, $\widehat{\Delta} = \widehat{\Delta'}$) και οἱ όμόλογες πλευρές τους εἶναι ἀνάλογες.

Παρατήρηση 1. Οἱ διαγώνιοι, πού ἐνώνουν δύο όμόλογες κορυφές, λέγονται όμόλογες διαγώνιοι. Στὰ ὅμοια πεντάγωνα τοῦ σχήματος 34 δύο διαγώνιοι τοῦ ἐνός εἶναι ἀνάλογες πρὸς τὶς όμόλογες διαγωνίους τοῦ ἄλλου π.χ. οἱ $A\Gamma$, $A\Delta$ εἶναι ἀνάλογες πρὸς τὶς $A\Gamma'$, $A\Delta'$.

Οἱ όμόλογες διαγώνιοι δύο όμοιων πολυγώνων εἶναι ἀνάλογες.

Παρατήρηση 2. Στὸ σχ. 34 παρατηροῦμε ὅτι τὰ τρίγωνα $AB'\Gamma'$, $A\Gamma'\Delta'$, $A\Delta'E'$ ἔχουν τὴν ἴδια διάταξη μέ τὰ ἀντιστοιχῶς ὁμοιά τους $AB\Gamma$, $A\Gamma\Delta$, $A\Delta E$.

Ἐπομένως: **Δύο ὅμοια πολύγωνα χωρίζονται σὲ τρίγωνα ὅμοια ἕνα πρὸς ἕνα και ὁμοίως διατεταγμένα.**

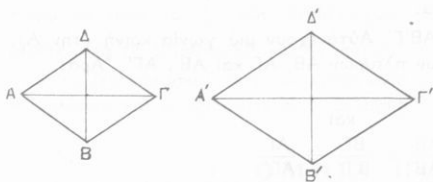
Παρατήρηση 3. Στὴν ἀρχὴ τῆς ἐργασίας μας κατασκευάσαμε πρῶτα τὰ πεντάγωνα ἔτσι, ὥστε νὰ χωρίζονται σὲ τρίγωνα κατὰ τὸν παραπάνω τρόπο και ἀπ' αὐτὸ καταλήξαμε στὸ συμπέρασμα ὅτι εἶναι ὅμοια.

Ἐπομένως: **Ἀν δύο πολύγωνα χωρίζονται σὲ τρίγωνα ὅμοια ἕνα πρὸς ἕνα και ὁμοίως διατεταγμένα, εἶναι ὅμοια.**

Στὰ ἴδια συμπεράσματα καταλήγουμε καὶ ὅταν τὰ πολύγωνα βρίσκονται σὲ διαφορετικές θέσεις, γιατί μπορούμε νὰ θέσουμε τὸ ἓνα πάνω στὸ ἄλλο, ὅπως στὸ σχ. 34, χρησιμοποιώντας διαφανὲς ἢ κατασκευάζοντας ἓνα πολύγωνο ἴσο μὲ τὸ ἓνα.

§ 23. Ἐφαρμογές.

1. Δύο ρόμβοι $AB\Gamma\Delta$ καὶ $A'B'\Gamma'\Delta'$ μὲ μία γωνία ἴση εἶναι ὅμοιοι (σχ. 35).



σχ. 35.

Ἄν $\widehat{A} = \widehat{A'}$ τότε καὶ $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$. Ἀλλὰ καὶ $\widehat{B} = \widehat{B'}$ καὶ $\widehat{\Delta} = \widehat{\Delta'}$ (εἶναι ἴσες μὲ ἴσες ἢ συμπληρωματικές ἴσων). Ἐπειδὴ εἶναι $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A$ καὶ $A'B' = B'\Gamma' = \Gamma'\Delta' = \Delta'A'$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta A}{\Delta'A'}$.

2. Ὁ λόγος τῶν περιμέτρων δύο ὁμοίων πολυγώνων ἰσοῦται μὲ τὸ λόγο τῆς ὁμοιότητάς των.

Ἄν λ εἶναι ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητάς τῶν πενταγώνων τοῦ σχήματος (34), θὰ ἔχουμε $\lambda = \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta'E'} = \frac{EA}{E'A'}$ συνεπῶς:

$$\lambda = \frac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta E + EA}{A'B' + B'\Gamma' + \Gamma'\Delta' + \Delta'E' + E'A'} \quad (\text{ἰδιωτ. τῶν ἀναλογιῶν § 14}).$$

3. Σχεδιάζουμε δύο ἄνισους κύκλους καὶ ἐγγράφουμε σ' αὐτοὺς τὰ κανονικὰ ἐξάγωνα $AB\Gamma\Delta E Z$ καὶ $A'B'\Gamma'\Delta'E'Z'$ ἀντιστοιχῶς. Παρατηροῦμε ὅτι: $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$, $\widehat{\Delta} = \widehat{\Delta'}$, $\widehat{E} = \widehat{E'}$, $\widehat{Z} = \widehat{Z'}$ (κάθε μία ἀπ' αὐτὲς εἶναι 120°) καὶ $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta'E'} = \frac{EZ}{E'Z'} = \frac{ZA}{Z'A'}$ γιατί οἱ λόγοι αὐτοὶ ἔχουν ἴσους ὅρους.

Ἐπομένως: (§ 22).

Δύο κανονικὰ πολύγωνα μὲ τὸ ἴδιο πλῆθος πλευρῶν εἶναι ὅμοια.

Ἀσκήσεις

- 77) Νὰ ἐξετάσετε ἂν δύο τετράγωνα εἶναι ὅμοια.
78) Δύο ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα ἔχουν διαστάσεις 3 cm, 4 cm καὶ 6 cm, 8 cm ἀντιστοιχῶς. Εἶναι ὅμοια; Γιατί;
79) Ἐξηγήστε γιατί δύο ρόμβοι μὲ ἀνάλογες διαγωνίους εἶναι ὅμοιοι.
80) Νὰ κατασκευάσετε δύο ὀρθογώνια ἔτσι, ὥστε οἱ διαγώνιοι καθενὸς νὰ σχη-

ματίζουν γωνία 30° και η διαγώνιος του ενός να είναι τριπλάσια από μία διαγώνιο του άλλου. Ξηγήστε γιατί είναι όμοια.

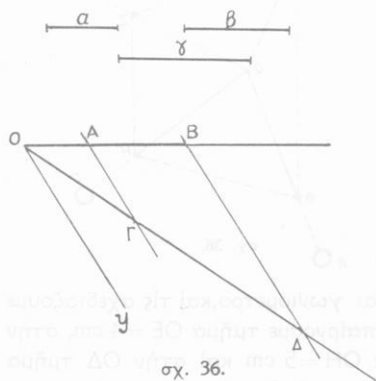
81) Ξηγήστε γιατί δύο παραλληλόγραμμα με πλευρές ανάλογες και μία γωνία ίση είναι όμοια.

82) Να σχηματίσετε ένα τρίγωνο και σε κάθε μία από τις διαμέσους του να πάρετε ένα σημείο, το οποίο να απέχει από την αντίστοιχη κορυφή το $\frac{1}{3}$ της διαμέσου. Ξηγήστε γιατί τα σημεία αυτά είναι κορυφές τριγώνου όμοιου με το αρχικό.

Δ'. ΑΠΛΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

§ 24. Κατασκευή τετάρτης αναλόγου.

Πάρτε τρία εὐθύγραμμα τμήματα $\alpha=3\text{ cm}$, $\beta=4\text{ cm}$, $\gamma=6\text{ cm}$ και βρείτε ένα τέταρτο εὐθύγραμμο τμήμα χ , ώστε να είναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\chi}$, δηλαδή τα α , β , γ , χ να αποτελούν αναλογία. Το χ λέγεται τετάρτη ανάλογος των α , β , γ .



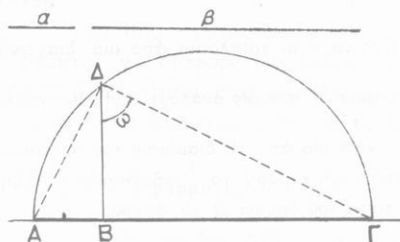
Αν πάνω στη μία πλευρά μιᾶς γωνίας O πάρουμε $OA=3\text{ cm}$, $AB=4\text{ cm}$ και στην ἄλλη πλευρά τμήμα $OG=6\text{ cm}$ και φέρουμε από το B παράλληλο πρὸς τὴν AG , αὐτὴ τέμνει τὴν εὐθεία OG στὸ Δ . Μετρώντας βρίσκουμε ὅτι $GD=8\text{ cm}$, συνεπῶς ἡ GD ἐπαληθεύει τὴν ἀναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\chi}$ καὶ εἶναι ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν α , β , γ , τὴν ὁποία ζητοῦμε.

Αν φέρουμε από το O τὴν $O\psi \parallel AG$, βλέπουμε ὅτι τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ δικαιολογεῖται ἀπὸ τὸ θεώρημα τοῦ Θαλῆ: Παράλληλες εὐθεῖες ὀρίζουν πάνω σὲ δύο εὐθεῖες, τὶς ὁποῖες τέμνουν (δηλαδή τὶς πλευρὲς τῆς γωνίας O), ἀνάλογα εὐθύγραμμα τμήματα.

Σημείωση: Ἀν μὲ α , β , γ , ὀνομάσουμε τὶς τιμὲς τῶν τριῶν τμημάτων καὶ μὲ χ τὴν τιμὴ τῆς τετάρτης ἀναλόγου τους, θὰ ἔχουμε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\chi} \Leftrightarrow \alpha \cdot \chi = \beta \cdot \gamma$. Ἡ ἐργασία, πού κάναμε παραπάνω, ἀποτελεῖ γεωμετρικὴ ἐπίλυση τῆς ἐξίσωσης αὐτῆς.

§ 25. Πάρτε τὰ εὐθ. τμήματα $\alpha=2\text{ cm}$ καὶ $\beta=8\text{ cm}$. Νὰ βρεῖτε ἓνα εὐθύγραμμο τμήμα χ , ὥστε $\frac{\alpha}{\chi} = \frac{\chi}{\beta}$. Τὸ χ λέγεται μέση ἀνάλογος τῶν α καὶ β . Ἀν πάρουμε τὶς τιμὲς τους, θὰ ἔχουμε $\frac{(\alpha)}{(\chi)} = \frac{(\chi)}{(\beta)} \Leftrightarrow (\chi)^2 = (\alpha) \cdot (\beta)$.

Παίρνουμε πάνω σὲ μιὰ εὐθεῖα τὰ διαδοχικὰ τμήματα AB καὶ $B\Gamma$ ἴσα μὲ 2 cm καὶ 8 cm ἀντιστοίχως. Μὲ διάμετρο τὴν AG γράφουμε ἡμικύκλιο. Στὸ B ὑψώνουμε κάθετο

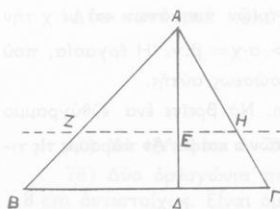


σχ. 37.

είναι έγγεγραμμένη σέ ήμικύκλιο, καί ΔΒ τό ύψος πού άντιστοιχεί στήν ύποτείνουσα). Έπομένως $\frac{(AB)}{(BD)} = \frac{(BD)}{(BG)}$ καί $(BD)^2 = (AB) \cdot (BG)$.

§ 26. Οί άποστάσεις τεσσάρων πόλεων Α, Β, Γ, Δ άπό ένα σημείο είναι 40 km, 60 km, 50 km καί 45 km άντιστοίχως. Νά σχεδιάσετε χάρτη τής περιοχής αύτής μέ κλίμακα 1/1.000.000.

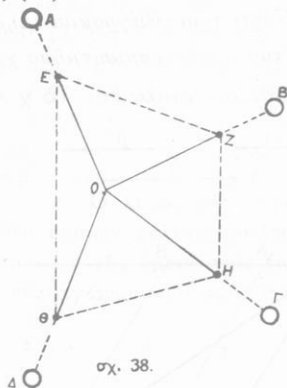
Αυτό σημαίνει ότι πρέπει νά κατασκευάσουμε σχήματα όμοια μέ τά σχήματα του έδάφους μέ λόγο όμοιότητας 1/1000.000. Για νά γίνει αυτό, μετρούμε (μέ σκόπευση άπό τό σημείο Ο του έδάφους) τίς γωνίες $\widehat{ΑΟΒ}$, $\widehat{ΒΟΓ}$, $\widehat{ΓΟΔ}$, $\widehat{ΔΟΑ}$ μέ ένα όργανο, πού λέγεται γωνιόμετρο, καί τίς σχεδιάζουμε στό χαρτί μας. Πάνω στήν πλευρά ΟΑ παίρνουμε τμήμα ΟΕ = 4 cm, στήν ΟΒ τμήμα ΟΖ = 6 cm, στήν ΟΓ τμήμα ΟΗ = 5 cm καί στήν ΟΔ τμήμα ΟΘ = 4,5 cm. Τά σημεία Ο, Ε, Ζ, Η, Θ άποτελούν τό χάρτη τής περιοχής Ο, Α, Β, Γ, Δ. Πραγματικά τό τρίγωνο ΟΘΕ είναι όμοιο μέ τό ΟΔΑ (έχουν δύο γωνίες ίσες μεταξύ άνάλογων πλευρών) καί ό λόγος όμοιότητας λ είναι ίσος μέ $\frac{OE}{OA} = \frac{4 \text{ cm}}{4000000 \text{ cm}} = \frac{1}{1000000}$.



σχ. 39.

στήν ΑΓ, ή όποία τέμνει τό ήμικύκλιο στό σημείο Δ. Μέ μέτρηση βρίσκουμε ότι ΒΔ = 4cm. Τότε όμως $4^2 = 2 \cdot 8$, δηλαδή $(BD)^2 = (AB) \cdot (AG)$. Ώστε τό ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ είναι ή ζητούμενη μέση άνάλογος.

Τό αποτέλεσμα αυτό δέν είναι τυχαίο, γιατί όπως μάθαμε στήν § 19.3 τά όρθογώνια τρίγωνα ΔΒΑ καί ΓΒΔ είναι όμοια (τό τρίγ. ΑΔΓ είναι όρθογώνιο, γιατί $\widehat{ΑΔΓ} = 1$ όρθή έπειδή



σχ. 38.

§ 27. Σχηματίστε ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Μετά νά κατασκευάσετε ένα άλλο τρίγωνο όμοιο μέ αυτό, τό όποιο νά έχει ένα ύψος ίσο μέ 6 cm.

Φέρνουμε τό ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ καί παίρνουμε σ' αυτό τμήμα ΑΕ ίσο μέ 6 cm. Άπό τό Ε φέρνουμε παράλληλο πρós τή ΒΓ, ή όποία τέμνει τίς ΑΒ καί ΑΓ στό Ζ καί Η άντιστοίχως. Συγκρίνουμε τά τρίγωνα ΑΖΗ καί ΑΒΓ. Αύτά είναι όμοια σύμφωνα μέ όσα

μάθαμε. Τὸ AZH ἔχει ὕψος $AE = 6$ cm, γιατί ἐφόσον ἡ AE εἶναι κάθετος στὴ $BΓ$, θὰ εἶναι κάθετος καὶ στὴν παράλληλό της ZH . Ὡστε τὸ AZH εἶναι τὸ ζητούμενο τρίγωνο.

Ἀσκήσεις

83) Κατασκευάστε τὴν τετάρτη ἀνάλογο τῶν πλευρῶν α, β, γ , ἐνὸς τριγώνου $AB\Gamma$.

84) Κατασκευάστε τὴν τετάρτη ἀνάλογο τῶν ὑψῶν AD , BE , ΓZ τοῦ προηγούμενου τριγώνου.

85) Σχηματίστε ἓνα τρίγωνο $AB\Gamma$ καὶ κατασκευάστε ἓνα ἄλλο ὁμοιο μὲ αὐτό, τοῦ ὁποίου τὸ ὁμόλογο ὕψος πρὸς τὸ ὕψος BE τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ νὰ εἶναι 4 cm.

86) Βόρεια, ἀνατολικά καὶ βορειοδυτικά τοῦ Γυμνασίου σας Γ βρίσκονται τὰ σημεῖα A, B καὶ Δ ἀντιστοίχως, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἀπὸ τὸ Γ 4,7 km, 6,5 km, καὶ 7,3 km. Κατασκευάστε χάρτη τῆς περιοχῆς (κλίμακα 1:1.000.000).



ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

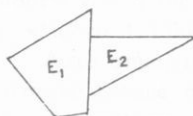
ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

Α. ΕΜΒΑΔΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

1. Όροι:

§ 28. Όνομάζουμε επιφάνεια ενός επιπέδου σχήματος (άπλης κλειστής γραμμής) τὸ μέρος τοῦ επιπέδου, τὸ ὁποῖο εἶναι ἔσωτερικὸ του.

Ἐπιφάνειες ἐπιπέδων σχημάτων μπορούμε νὰ παρατηρήσουμε στὸ σχῆμα (40). Ἡ εἰκόνα αὐτὴ παριστάνει δύο ἐπιφάνειες ἐπιπέδων σχημάτων E_1 καὶ E_2 . Ἐπομένως τῶν ἐπιφανειῶν E_1 καὶ E_2 ὀνομάζουμε τὴν ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος, τὸ ὁποῖο παίρνουμε, ἂν διαγράψουμε (σβήσουμε) τὴν κοινὴ γραμμή.



σχ. 40.

Ἐμβαδὸ ἐπιφάνειας καλοῦμε τὴν ἔκτασή της, ἢ ὁποία ἔχει ἑκφρασθεῖ σὲ μονάδες μετρήσεως, καὶ τὸ συμβολίζουμε μὲ τὸ E .

Θέτουμε τώρα τὸ ἑξῆς πρόβλημα: Πῶς μπορούμε νὰ προσδιορίσουμε τὴν ἔκταση (δηλ. τὸ ἔμβαδὸ) τῆς ἐπιφάνειας τοῦ σχήματος (40) ἢ τῆς ἐπιφάνειας κάθε ἐπιπέδου σχήματος;

Αὐτὸ μπορούμε νὰ τὸ πετύχουμε συγκρίνοντας τὴν ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος μὲ τὴν ἐπιφάνεια ἑνὸς ὀρισμένου ἐπιπέδου σχήματος, τὴν ὁποία παίρνουμε ὡς μονάδα. Τὸ ἀποτέλεσμα αὐτῆς τῆς συγκρίσεως εἶναι ἕνας ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος καλεῖται **τιμὴ τοῦ ἐμβαδοῦ** τῆς ἐπιφάνειας. (Τὴν τιμὴ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ΑΒΓΔ τὴ συμβολίζουμε μὲ (ΑΒΓΔ)).

Ἡ εὕρεση τῆς τιμῆς τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς ἐπιφάνειας λέγεται **μέτρηση** αὐτῆς. Ἡ τιμὴ λοιπὸν τοῦ ἐμβαδοῦ εἶναι ἕνας ἀριθμὸς, μὲ τὸν ὁποῖο πρέπει νὰ πολλαπλασιάσουμε τὴ μονάδα, γιὰ νὰ πάρουμε τὸ ἔμβαδὸ (δηλ. ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ πρὸς τὴ μονάδα).

§ 29. Μονάδες μετρήσεως ἐπιφανειῶν

Οἱ μονάδες ἐπιφανειῶν εἶναι ἐπιφάνειες τετραγώνων, τῶν ὁποίων ἡ πλευρὰ ἴσονται μὲ μιὰ μονάδα μήκους.

Ἡ κυριότερη μονάδα γιὰ τὴ μέτρηση ἐπιφανειῶν εἶναι:

Τὸ τετραγωνικὸ μέτρο (m^2), δηλαδή τὸ ἔμβαδὸ τῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς τετραγώνου μὲ πλευρὰ 1 m.

Τὰ πολλαπλάσιά του εἶναι:

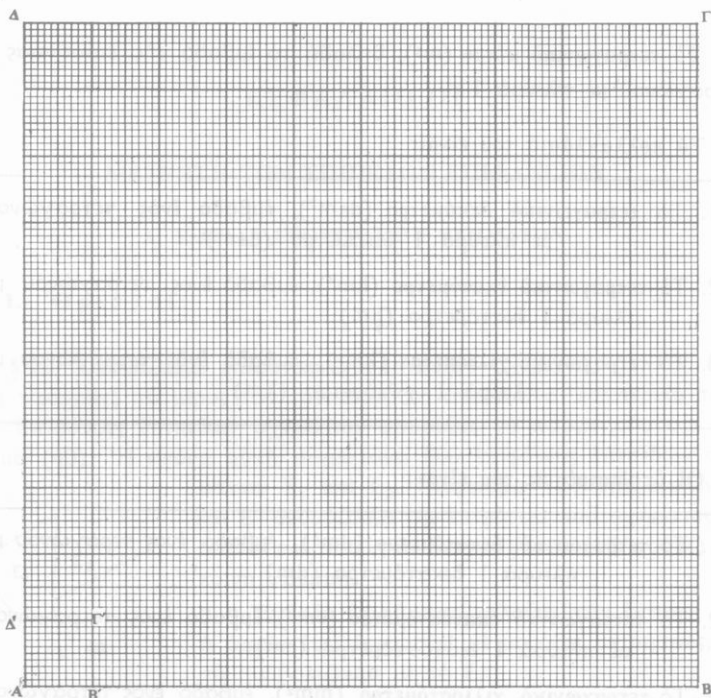
1. Τὸ τετραγωνικὸ δεκάμετρο (dam^2), ἔμβαδὸ ἑνὸς τετραγώνου μὲ πλευρὰ 1 δεκάμετρο (dam)
2. Τὸ τετραγωνικὸ ἑκατόμετρο (hm^2), ἔμβαδὸ ἑνὸς τετραγώνου μὲ πλευρὰ 1 ἑκατόμετρο (hm)
3. Τὸ τετραγωνικὸ χιλιόμετρο (km^2), ἔμβαδὸ ἑνὸς τετραγώνου μὲ πλευρὰ 1 χιλιόμετρο (km)

Οἱ ὑποδιαίρέσεις του εἶναι :

1. Τὸ τετραγωνικὸ δεκατόμετρο (dm^2), ἔμβαδὸ ἑνὸς τετραγώνου μὲ πλευρὰ 1 δεκατόμετρο (dm).
2. Τὸ τετραγωνικὸ ἑκατοστόμετρο (cm^2), ἔμβαδὸ ἑνὸς τετραγώνου μὲ πλευρὰ 1 ἑκατοστόμετρο (cm).
3. Τὸ τετραγωνικὸ χιλιοστόμετρο (mm^2), ἔμβαδὸ ἑνὸς τετραγώνου μὲ πλευρὰ 1 χιλιοστόμετρο (mm).

Κατασκευὴ ὁρισμένων μονάδων ἐπιφανειῶν.

1. Κατασκευάζουμε πάνω σ' ἓνα φύλλο χιλιοστομετρικοῦ χαρτιοῦ ἓνα τετράγωνο ΑΒΓΔ μὲ πλευρὰ 1 dm καὶ ὀρίζουμε ἔτσι ἓνα τετραγωνικὸ δεκατόμετρο (dm^2).
2. Στὸ ἐσωτερικὸ τῆς γωνίας Α τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε τὸ τετράγωνο ΑΒ'Γ'Δ', μὲ πλευρὰ 1 cm, δηλαδή ἓνα τετραγωνικὸ ἑκατοστόμετρο (cm^2).
3. Ἐπίσης μέσα στὸ τετράγωνο ΑΒ'Γ'Δ' ὑπάρχουν μικρότερα τετράγωνα, μὲ πλευρὰ 1mm, καθένα ἀπ' αὐτὰ εἶναι μιὰ ὑποδιαίρεση τῆς ἀρχικῆς μονάδας ἐπιφάνειας. Καθένα τους τὸ ὀνομάσαμε τετραγωνικὸ χιλιοστόμετρο (mm^2).



σχ. 41.

Μπορούμε έτσι να βρούμε π.χ. πόσα τετράγωνα ίσα με το $ΑΒ'Γ'Δ'$ περιέχει το $ΑΒΓΔ$ και πόσα τετραγωνικά χιλιοστόμετρα υπάρχουν στο έσωτερικό του τετραγώνου $ΑΒ'Γ'Δ'$ και να όρίσουμε τη σχέση, που υπάρχει μεταξύ των αντίστοιχων μονάδων επιφανειών.

Σύγκριση μονάδων επιφανειών: Συγκρίνοντας την επιφάνεια του τετραγώνου $ΑΒΓΔ$ με την επιφάνεια του $ΑΒ'Γ'Δ'$, το οποίο έχει πλευρά το $\frac{1}{10}$ της πλευράς του πρώτου, βρίσκουμε ότι το τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ περιέχει δέκα ταινίες. Κάθε μία από τις ταινίες αυτές περιέχει 10 τετράγωνα ίσα με το $ΑΒ'Γ'Δ'$.

“Ωστε: $ΑΒΓΔ = 100 \cdot ΑΒ'Γ'Δ'$.”

Συνεχίζοντας με όμοιο τρόπο και με τις άλλες υποδιαιρέσεις της αρχικής μονάδας συμπεραίνουμε γενικά ότι: «Κάθε μονάδα επιφάνειας αποτελείται από 100 μονάδες επιφάνειας της άμέσως κατώτερης τάξης» (1)

Δηλαδή: $1\text{m}^2 = 100\text{dm}^2 = 10.000\text{cm}^2 = 1.000.000\text{mm}^2$

$$1\text{dm}^2 = 100\text{cm}^2 = 10.000\text{mm}^2$$

$$1\text{cm}^2 = 100\text{mm}^2$$

Ἡ ιδιότητα (1) μᾶς ὁδηγεῖ καὶ στοὺς ἀκόλουθους κανόνες:

1) Γὰ νὰ τρέψουμε ἓνα συμμιγῆ σὲ ἀπλὸ (τῆς τελευταίας τάξης), ὁ ὁποῖος ἐκφράζει ἓνα ἐμβαδό, παριστάνουμε κάθε ἀριθμὸ τοῦ συμμιγῆ σὰν διψήφιο (ἂν δὲν εἶναι) ἀναπληρώνοντας μὲ μηδενικά κάθε μονάδα ποὺ λείπει.

Π.χ. α) $8\text{hm}^2 \ 2\text{dm}^2 \ 7\text{m}^2 = 08\text{hm}^2 \ 02\text{dm}^2 \ 07\text{m}^2 = 80207\text{m}^2$

β) $9\text{m}^2 \ 18\text{cm}^2 = 90018\text{cm}^2$

2) Μποροῦμε νὰ μεταβάλουμε τὴ μονάδα ἐπιφάνειας μεταθέτοντας τὴν ὑποδιαστολὴ κατὰ 2, κατὰ 4, κ.ο.κ. θέσεις πρὸς τὰ δεξιὰ, ἂν θέλουμε νὰ πᾶμε ἀπὸ μιὰ μονάδα στὴν ἀμέσως κατώτερη μονάδα ἐπιφάνειας, ἢ πρὸς τὰ ἀριστερά, γὰ νὰ πᾶμε ἀπὸ μιὰ μονάδα ἐμβαδοῦ στὴν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνώτερης τάξης. (Ἀναπληρώνουμε μὲ μηδενικά τὰ ψηφία ποὺ λείπουν ἀπὸ μονάδα μιᾶς ὀρισμένης τάξης).

Π.χ. α) $832, 18\text{m}^2 = 8,3218\text{dam}^2 = 83218\text{dm}^2 = 8321800\text{cm}^2$.

Παρατήρηση:

Γιὰ τὴ μέτρηση τῆς ἐπιφάνειας τῶν ἀγρῶν χρησιμοποιοῦν ἄλλοι:

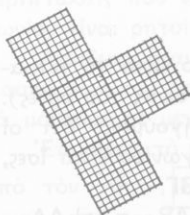
1) Τὸ τετραγωνικὸ δεκάμετρο (dam^2) $= 100\text{m}^2$, τὸ ὁποῖο ὀνομάζουν ἄρ (α) καὶ 2) τὸ τετραγωνικὸ ἐκατόμετρο (hm^2) $= 100\text{dam}^2 = 10.000\text{m}^2$, τὸ ὁποῖο λέγεται ἐκτάριο (ha) καὶ ἰσοῦται μὲ $100\text{ἄρ} = 100\text{a}$. Στὴ χώρα μας χρησιμοποιεῖται τὸ στρέμμα $= 1000\text{m}^2 = \frac{1}{10}\text{ha}$. Γιὰ τὴ μέτρηση τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν οἰκοπέδων χρησιμοποιοῦμε ἀκόμη καὶ τὸν τετραγωνικὸ τεκτονικὸ πήχη, $1\text{τπ}^2 = \frac{9}{16}\text{m}^2 = 0,5625\text{m}^2$.

Τέλος γιὰ τὴ μέτρηση μεγάλων ἐπιφανειῶν χρησιμοποιοῦμε τὸ τετραγωνικὸ χιλιόμετρο (1km^2) $= 1.000.000\text{m}^2$.

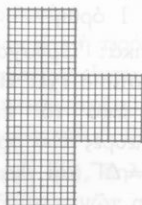
§ 30. Ἰσοδύναμες ἐπιφάνειες.— Ἰσοδύναμα σχήματα.

Οἱ ἐπιφάνειες τῶν ἴσων σχημάτων εἶναι ἴσες.

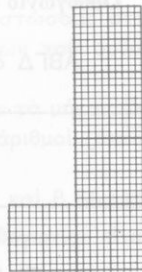
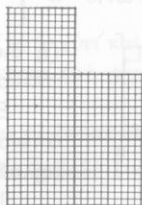
Δύο ἴσες ἐπιφάνειες (ὅταν μετροῦνται μὲ τὴν ἴδια μονάδα) ἔχουν τὸ ἴδιο ἐμβαδό. Π.χ. οἱ ἐπιφάνειες τοῦ σχήματος 42α, ποὺ εἶναι ἴσες καὶ κάθε μιὰ ἔχει ἐμβαδό 4cm^2 .



α

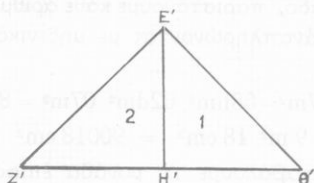
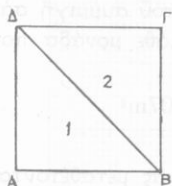


σχ. 42.



β

Οι επιφάνειες στο σχήμα 42β δεν είναι ίσες, έχουν όμως έμβαδο ίσο με 5cm^2 . Αύτες λέγονται **ισοδύναμες** ή **ισεμβαδικές** επιφάνειες.



σχ. 43.

Τα επίπεδα σχήματα ΑΒΓΔ και Ε'Ζ'Θ' (σχ. 43) έχουν ισοδύναμες επιφάνειες. Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε με κατάλληλη διαίρεσή τους. Τα παραπάνω σχήματα

λέγονται **ισοδύναμα** σχήματα.

Ίσοδύναμες επιφάνειες είναι αυτές που έχουν ίσα έμβαδα.

Ίσοδύναμα σχήματα είναι αυτά που έχουν ισοδύναμες επιφάνειες.

Παρατήρηση: Δύο ίσα έμβαδα έχουν ίσες τιμές και αντίστροφως.

$$^{\circ}\text{Εμβ. ΑΒΓΔ} = ^{\circ}\text{Εμβ. Α'Β'Γ'Δ'} \Leftrightarrow (\text{ΑΒΓΔ}) = (\text{Α'Β'Γ'Δ'})$$

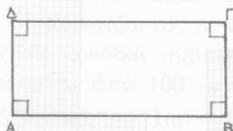
Άσκησης

- 87) Να τραπούν σε m^2 τά: 13 dam^2 , 1 hm^2 , 2 km^2 , 18 dam^2 , 58 hm^2 .
- 88) Πόσα mm^2 έχουν α) 3 m^2 , β) 4 dam^2 , γ) 38 cm^2 .
- 89) Έκφράστε σε m^2 και κατόπι σε ares α) $\frac{1}{10}\text{ hm}^2$, β) $\frac{1}{10}\text{ km}^2$.
- 90) Να τραπούν σε m^2 τά έμβαδα α) 5 hm^2 6 dam^2 8 mm^2 και β) $156,25\text{ dm}^2$.
- 91) Μετατρέψετε σε cm^2 α) 672 dm^2 , β) $3,84\text{ hm}^2$ γ) 29 dam^2 .
- 92) Έκτελέσετε την πρόσθεση, αφού πρηγουμένως μετατρέψετε τούς προσθετέους σε cm^2 : $\frac{2}{5}\text{ m}^2 + 560000\text{ mm}^2 + 152\text{ cm}^2 + 16\text{ dm}^2$.
- 93) Υπολογίσετε σε m^2 τις διαφορές: α) $8\text{ στρεμ.} - 243\text{ m}^2$ και β) $4\text{ ha} - 136,25\text{ a}$.
- 94) Ένα γήπεδο με έμβαδο 6 ha έχει διαιρεθεί σε δύο μέρη, από τα όποια το ένα είναι μεγαλύτερο από το άλλο κατά 40 a . Να βρείτε πόσο είναι το έμβαδο κάθε μέρους του γηπέδου.

§ 31. Έμβαδο όρθογωνίου.

Όρθογώνιο είναι ένα παραλληλόγραμμο, το όποιο έχει μια γωνία όρθη.

$$\text{ΑΒΓΔ όρθογώνιο} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο} \\ \hat{A} = 1 \text{ όρθη} \end{cases}$$



σχ. 44.

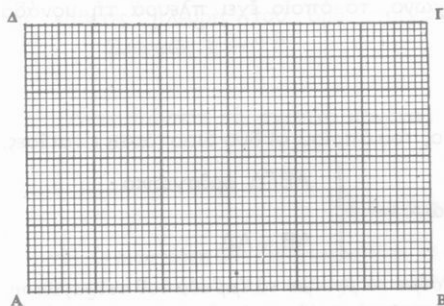
(ή διαφορετικά: Όρθογώνιο είναι το τετράπλευρο, το όποιο έχει τις γωνίες του όρθές).

Ξέρουμε από τα προηγούμενα ότι οι απέναντι πλευρές του όρθογωνίου είναι ίσες, δηλαδή $AB = \Delta\Gamma$ και $AD = B\Gamma$.

Τα μήκη τών πλευρών $AB = \alpha$ και $AD =$

$=\beta$ λέγονται **διαστάσεις** τοῦ ὀρθογωνίου. Τὸ πρῶτο λέγεται **βάση** ἢ **μῆκος** καὶ τὸ δεύτερο **ὑψος** ἢ **πλάτος** τοῦ ὀρθογωνίου.

Κατασκευάστε σὲ μία γωνία ἐνὸς φύλλον χιλιοστομετρικοῦ χαρτιοῦ (ἢ τετραγωνισμένου χαρτιοῦ) ἓνα ὀρθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ μὲ $AB=6\text{ cm}$ καὶ $AD=4\text{ cm}$ καὶ βρεῖτε τὸ ἐμβαδό του.



σχ. 45.

$=12\text{ cm}^2 = \frac{12}{100}\text{ dm}^2 = \left(\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10}\right)\text{ dm}^2 = \frac{4}{10}\text{ dm} \cdot \frac{3}{10}\text{ dm}$ ἴσο μὲ τὸ γινόμενο τῶν διαστάσεών του.

Ἄν πάνω στὸ χιλιοστομετρικὸ χαρτί κατασκευάσουμε ἓνα ὀρθογώνιο $\Delta EZ\Theta$ μὲ $\Delta E=6,5\text{ cm}$ καὶ $\Delta \Theta=3,4\text{ cm}$, μπορούμε νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδό του σὲ ἀκέραιο ἀριθμὸ μονάδων, δηλαδή σὲ τετρ. χιλιοστόμετρα (mm^2), $E_{\Delta EZ\Theta}=2210\text{ cm}^2$. Μετατρέπουμε τὸ ἐμβαδό του σὲ τετρ. ἑκατοστόμετρα $E_{\Delta EZ\Theta}=22,10\text{ cm}^2$ καὶ συγκρίνοντάς το μὲ τὸ γινόμενο τῶν διαστάσεών του σὲ ἑκατοστόμετρα (cm), βρίσκουμε ὅτι τὸ $E_{\Delta EZ\Theta}=22,10\text{ cm}^2=(6,5 \cdot 3,4)\text{ cm}^2$.

Δηλαδή διαπιστώνουμε πάλι ὅτι τὸ ἐμβαδό του εἶναι ἴσο μὲ τὸ γινόμενο τῶν διαστάσεών του (ἢ μὲ τὸ γινόμενο τοῦ μήκους τῆς βάσης του ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὑψους του) (1). Αὐτὸ ἰσχύει, ὅπως διαπιστώσαμε στὶς περιπτώσεις ποὺ ἐξετάσαμε, ὅταν τὰ μήκη τῶν διαστάσεων τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ρητοὶ ἀριθμοί.

Ἀποδεικνύεται ὁμως ὅτι ἡ πρόταση (1) ἰσχύει καὶ ὅταν τὰ μήκη τῶν διαστάσεων τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἀσύμμετροι (μὴ ρητοὶ) ἀριθμοὶ (ὅπως θὰ μάθουμε σὲ μεγαλύτερη τάξη).

Ἐπομένως τὸ ἐμβαδό τοῦ ὀρθογωνίου μὲ διαστάσεις α καὶ β δίνεται ἀπὸ τὸν τύπο $\boxed{E=\alpha \cdot \beta}$ (2), δηλαδή: **Τὸ ἐμβαδὸ ἐνὸς ὀρθογωνίου εἶναι ἴσο μὲ τὸ γινόμενο τῶν διαστάσεών του.**

Διαπιστώνουμε ὅτι τὸ ὀρθογώνιο αὐτὸ ἀποτελεῖται ἀπὸ 24 cm^2 ἢ $(6 \times 4)\text{ cm}^2$, καὶ βρίσκουμε ἔτσι τὸ ἐμβαδό του $E_{AB\Gamma\Delta}=24\text{ cm}^2=(6 \times 4)\text{ cm}^2$ δηλ. $(6\text{ cm} \times 4\text{ cm})$ ἴσο μὲ τὸ γινόμενο τῶν διαστάσεών του.

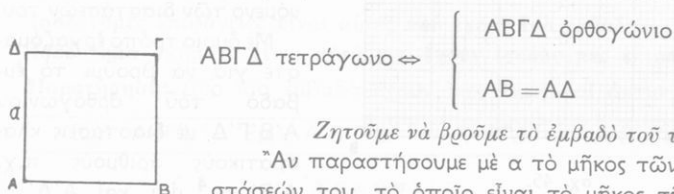
Μὲ ὅμοιο τρόπο ἐργαζόμεστε γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸ τοῦ ὀρθογωνίου $A'B'\Gamma'\Delta'$ μὲ διαστάσεις κλασματικούς ἀριθμούς π.χ. $A'B'=\frac{4}{10}\text{ dm}$ καὶ $A'\Delta'=\frac{3}{10}\text{ dm}$. Ἐχομε $E_{A'B'\Gamma'\Delta'}=$

Ο τύπος (2) γράφεται και $E = \beta \cdot \nu$, γιατί ξέρουμε ότι η μιά από τις διαστάσεις του ορθογωνίου λέγεται **βάση** και η άλλη **ύψος** του. Από τον τύπο $E = \beta \cdot \nu$ παίρνουμε και τους $\beta = \frac{E}{\nu}$ και $\nu = \frac{E}{\beta}$.

Είναι φανερό ότι το μήκος των δύο διαστάσεων πρέπει να εκφράζεται με την ίδια μονάδα μήκους, όποτε το έμβαδο εκφράζεται με τη μονάδα που παριστάνεται με το τετράγωνο, το οποίο έχει πλευρά τη μονάδα μήκους που έχουμε εκλέξει.

§ 32. Έμβαδο τετραγώνου.

Τετράγωνο είναι ένα ορθογώνιο, του οποίου οι δύο διαστάσεις είναι ίσες.



σχ. 46.

Ζητούμε να βρούμε το έμβαδο του τετραγώνου.
Αν παραστήσουμε με α το μήκος των ίσων διαστάσεων του, το οποίο είναι το μήκος της πλευράς του τετραγώνου, το έμβαδό του είναι $E = \alpha \cdot \alpha = \alpha^2$,

δηλαδή: $E = \alpha^2$.

Το έμβαδο ενός τετραγώνου είναι ίσο με το τετράγωνο του μήκους της πλευράς του.

Παρατηρήσεις:

1. Ξέρουμε ότι η δεύτερη δύναμη ενός αριθμού λέγεται και τετράγωνο του αριθμού αυτού, γιατί δίνει την τιμή του εμβαδού του τετραγώνου, του οποίου το μήκος της πλευράς έχει τιμή ίση με τον αριθμό αυτό.

2. Είναι χρήσιμο να ξέρουμε από μνήμης τα τετράγωνα μερικῶν φυσικῶν ἀριθμῶν:

α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
α^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	...

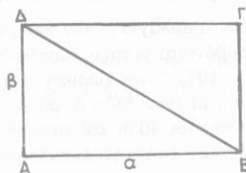
Έφαρμογή.

Τὰ μήκη των κάθετων πλευρῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγῶνου εἶναι α καὶ β . Νὰ βρεῖτε τὸ έμβαδό του.

Έχουμε βρεῖ ότι ἡ διαγώνιος ἑνὸς ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ χωρίζει αὐτό

σε δύο ίσα ὀρθογώνια τρίγωνα, τῶν ὁποίων οἱ πλευρές τῆς ὀρθῆς γωνίας ἔχουν μήκη τῆς διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου. Ἐπομένως τὸ ἔμβαδὸ τοῦ ὀρθ. τριγώνου π.χ. τοῦ ΔΑΒ εἶναι ἴσο μὲ τὸ μισό τοῦ ἔμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ, ποὺ ἔχει διαστάσεις ἴσες μὲ τῆς κάθετες πλευρές τοῦ ὀρθ. τριγώνου.

$$\text{Συνεπῶς } E = \frac{\alpha \cdot \beta}{2}$$



σχ. 47.

(Διατυπώσετε τὸ σχετικὸ κανόνα).

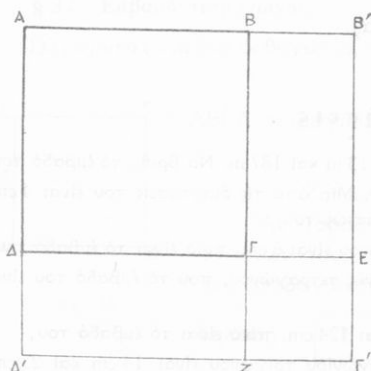
Ἀσκήσεις

- 95) Οἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 13 m καὶ 187 m. Νὰ βρεθῇ τὸ ἔμβαδὸ του.
- 96) Ἐνα ὀρθογώνιο ἔχει ἔμβαδὸ 36 cm². Μία ἀπὸ τῆς διαστάσεις του εἶναι 4 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ μήκος τῆς ἄλλης διαστάσεώς του.
- 97) Τὸ μήκος τῆς πλευρᾶς ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 6 cm, ποῖο εἶναι τὸ ἔμβαδὸ του;
- 98) Ποῖο εἶναι τὸ μήκος μιᾶς πλευρᾶς ἑνὸς τετραγώνου, ποὺ τὸ ἔμβαδὸ του εἶναι 121 cm²;
- 99) Ἡ περίμετρος ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 124 cm, ποῖο εἶναι τὸ ἔμβαδὸ του;
- 100) Οἱ δύο κάθετες πλευρές ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 14 cm καὶ 23 cm, ποῖο εἶναι τὸ ἔμβαδὸ του;
- 101) Ἡ περίμετρος ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 150 cm. Ἄν ἡ μία ἀπὸ τῆς διαστάσεις του εἶναι 25 cm, νὰ βρεῖτε τὸ ἔμβαδὸ του.
- 102) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸ ἑνὸς ὀρθογωνίου, ὅταν γνωρίζουμε ὅτι ἡ περίμετρος του ἴσουςται μὲ 24 cm καὶ ὁ λόγος τῶν διαστάσεών του εἶναι $\frac{1}{3}$.
- 103) Νὰ βρεθῇ ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου ΑΒΓΔ, ὅταν εἶναι γνωστὸ ὅτι, ἂν αὐξήσουμε τὴν ΑΒ κατὰ 4m καὶ ἐλαττώσουμε τὴ ΒΓ κατὰ 8 m, βρίσκουμε ἕνα ὀρθογώνιο, τὸ ὁποῖο ἔχει ἔμβαδὸ κατὰ 196 m² μικρότερο ἀπὸ τὸ ἔμβαδὸ τοῦ τετραγώνου.
- 104) Τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς ὀρθογωνίου ἀγροῦ ἔχουν ἔμβαδὸ 8,112 στρέμματα. Ποῖο εἶναι τὸ ἔμβαδὸ τοῦ ἀγροῦ; Ποῖα εἶναι ἡ μία ἀπὸ τῆς διαστάσεις του, ἂν ἡ ἄλλη εἶναι 169 m;
- 105) Ἐνας ὀρθογώνιος ἀγρός, ποὺ ἡ μία διάστασή του εἶναι 180 m, ἀγοράστηκε 288000 δρχ. μὲ 16.000 δρχ. τὸ στρέμμα. Ἐνας δρόμος πλάτους 3 m κάνει τὸ γύρο τοῦ ὀρθογωνίου ἀγροῦ κατὰ μήκος τῆς περιμέτρου του καὶ στὸ ἐσωτερικὸ του. Δύο ἄλλοι δρόμοι πλάτους 2 m εἶναι χαραγμένοι παράλληλα μὲ τοὺς ἀξονες συμμετρίας τοῦ ὀρθογωνίου. Οἱ τρεῖς αὐτοὶ δρόμοι διαιροῦν τὸν ἀγρὸ σὲ 4 ἴσα μέρη. Ὑπολογίστε τὸ ἔμβαδὸ ἑνὸς ἀπὸ τὰ ἴσα αὐτὰ μέρη τοῦ ἀγροῦ.
- 106) Ἡ περίμετρος ἑνὸς ἀγροῦ σχήματος ὀρθογωνίου εἶναι 240 m. Κατὰ μήκος τῆς περιμέτρου του καὶ στὸ ἐσωτερικὸ του φυτεύουμε δένδρα, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν 5 m

μεταξύ τους και 5 m από την περίμετρο. Το πλάτος του άγρου είναι τα $\frac{3}{5}$ του μήκους του. Υπολογίστε τον αριθμό των δένδρων και την επιφάνεια του άγρου, η οποία περιλαμβάνεται μεταξύ των δενδροστοιχιών και των πλευρών του άγρου.

107) Ένας χωρικός αντάλλαξε έναν άγρο, που είχε σχήμα τετραγώνου πλευρᾶς 60m, με έναν άλλο άγρο (με την ίδια ποιότητα χώματος) που είχε σχήμα ορθογωνίου με πλάτος 40 m και περίμετρο ίση με την περίμετρο του πρώτου. Έχασε ή κέρδισε ο χωρικός από την ανταλλαγή αυτή;

108) Κατασκευάστε ένα τετράγωνο με μήκος πλευρᾶς ἔστω α . Ν' αὐξήσετε την πλευρά του κατά τὸ μήκος β ($\beta \neq \alpha$) ἔτσι, ὥστε νὰ σχηματίσετε τὸ τετράγωνο $AB'\Gamma'\Delta'$



σχ. 48.

(σχ. 48). Ἡ προέκταση τῆς $\Delta\Gamma$ τέμνει τὴν $B'\Gamma'$ στὸ E καὶ ἡ προέκταση τῆς $B\Gamma$ τὴν $\Gamma'\Delta'$ στὸ Z . Νὰ συγκρίνετε τὸ ἔμβαδὸ τοῦ τετραγώνου $AB'\Gamma'\Delta'$ μετὰ τὸ ἔμβαδὸ τοῦ ἀρχικοῦ τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$. Ποιὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου $AB'\Gamma'\Delta'$; Ποιὰ εἶναι ἡ φύση τῶν τετραπλευρῶν $BB'\Gamma\Gamma'$, $\Gamma\Gamma'Z\Delta'$, $Z\Delta'\Delta\Gamma$; Ποιές εἶναι οἱ διαστάσεις τους; Νὰ συμπληρώσετε τὶς τιμὲς τῶν ἔμβαδῶν:

$$(AB'\Gamma'\Delta') = (\alpha + \beta)^2$$

$$(AB\Gamma\Delta) = \dots, (BB'\Gamma\Gamma') = \dots$$

$$(\Gamma\Gamma'Z\Delta') = \dots, (\Delta\Gamma Z\Delta') = \dots$$

Νὰ βρεῖτε τὴ σχέσηὴ ποὺ συνδέει τὰ ἔμβαδά αὐτά.

(Παρατηροῦμε ὅτι τὸ ἔμβαδὸ τοῦ $AB'\Gamma'\Delta'$ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἔμβαδῶν τῶν ἄλλων τεσσάρων. Τὸ ἀποτέ-

λεσμα αὐτὸ ἐκφράζεται μετὰ ἑνὸς τύπου, ὁ ὁποῖος περιέχει τὶς τιμὲς τῶν ἔμβαδῶν ποὺ βρήκαμε: $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta + \alpha\beta$. Ὁ τύπος αὐτὸς μπορεῖ νὰ γραφεῖ μετὰ τὴ μορφή $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$, τὸ ὁποῖο ἐκφράζεται ὡς ἑξῆς: Τὸ τετράγωνο τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσο μετὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τους συν τὸ διπλάσιο γινόμενό τους.

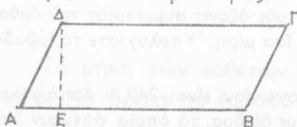
Ἐφαρμόζουμε τὸν τύπο αὐτὸν στὸν ὑπολογισμὸ τοῦ τετραγώνου ἐνὸς διηγήσιου ἀριθμοῦ. π.χ. $45^2 = 40^2 + 5^2 + 2 \cdot 40 \cdot 5 = 1600 + 25 + 400 = 2025$.

109) Νὰ ἐργασθεῖτε μετὰ ὁμοῖο τρόπο καὶ νὰ δώσετε γεωμετρικὴ ἐξήγηση τῶν τύπων:

$$\alpha) (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \text{ καὶ } \beta) (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2.$$

§ 33. Ἐμβαδὸ παραλληλογράμμου

Παραλληλόγραμμο εἶναι ἕνα τετράπλευρο, τὸ ὁποῖο ἔχει τὶς ἀπέναντι πλευρὲς του παράλληλες.

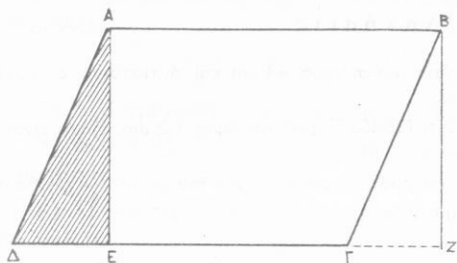


σχ. 49.

$$AB\Gamma\Delta \text{ παραλληλόγραμμο} \Leftrightarrow \begin{cases} AB \parallel \Delta\Gamma \\ AD \parallel B\Gamma \end{cases}$$

Βάση ἐνὸς παραλληλογράμμου λέγεται μιὰ ὁποιαδήποτε πλευρὰ του.

Ύψος παραλληλογράμμου είναι τὸ μῆμα τῆς καθέτου σὲ δύο ἀπέναντι βάσεις, τὸ ὁποῖο περιέχεται μεταξύ τῶν δύο αὐτῶν βάσεων.



σχ. 50.

Κατασκευάστε ἓνα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, φέρετε τὰ ὕψη του AE καὶ BZ καὶ συγκρίνετε τὸ ἐμβαδὸν του μετὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου $AEZB$. Τί παρατηρεῖτε;

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ADE καὶ $B\Gamma Z$ εἶναι ἴσα, ἐπεὶδὴ ἔχουν τὶς ὑποτείνουσες των ἴσες ($AD = B\Gamma$) καὶ μία κάθετη πλευρὰ ἴση ($AE = BZ$) (γιατί;).

Ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἰσεμβαδικά. Συνεπῶς $(ADE) = (B\Gamma Z)$. (1) Τὰ ἰσεμβαδικὰ σχήματα ἔχουν ἴσες τιμὲς ἐμβαδῶν § 30.

Ἐπομένως, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα (50), ἔχουμε: $(AB\Gamma\Delta) = (AB\Gamma E) + (ADE)$. Ἀπ' αὐτὴ καὶ τὴν (1) προκύπτει ἡ $(AB\Gamma\Delta) = (AB\Gamma E) + (B\Gamma Z)$ ἢ $(AB\Gamma\Delta) = (AEZB)$, δηλαδὴ μετασχηματίσαμε τὸ παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ στὸ ἰσεμβαδικὸ ὀρθογώνιο $AEZB$. Ἀλλὰ ὅπως γνωρίζουμε $E_{AEZB} = (AE) \cdot (EZ)$ καὶ ἐπεὶδὴ $\Delta\Gamma = AB = EZ = \beta$, $AE = BZ = \nu$ καὶ $E_{AB\Gamma\Delta} = E_{AEZB}$, ἔχουμε $E_{AB\Gamma\Delta} = \beta \cdot \nu$, δηλαδὴ

$$E = \beta \cdot \nu \quad (2).$$

Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς παραλληλογράμμου εἶναι ἴσο μετὰ τὸ γινόμενο τοῦ μήκους τῆς βάσεως του ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους ποὺ ἀντιστοιχεῖ σ' αὐτήν. (Τὰ μήκη ἐκφράζονται μετὰ τὴν ἴδια μονάδα).

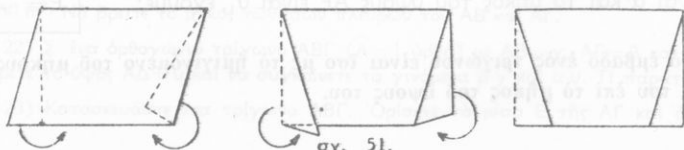
Παρατηρήσεις:

1. Εἶναι φανερὸ πὺς μπορούμε νὰ χρησιμοποιήσουμε ὡς βάση ὅποια-δήποτε πλευρὰ τοῦ παραλληλογράμμου, ἀρκεῖ νὰ πάρουμε καὶ τὸ ὕψος, ποὺ ἀντιστοιχεῖ σ' αὐτήν. Ἄν β' εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἄλλης πλευρᾶς καὶ ν' τὸ ὕψος ποὺ ἀντιστοιχεῖ σ' αὐτήν, ἔχουμε $E = \beta \cdot \nu = \beta' \cdot \nu'$.

2. Ἐννοεῖται πὺς τὸ μῆκος τῆς βάσεως καὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους τοῦ παραλληλογράμμου ἐκφράζονται μετὰ τὴν ἴδια μονάδα μήκους.

3. Ἀπὸ τὴν (2) ἔχουμε $\beta = \frac{E}{\nu}$ καὶ $\nu = \frac{E}{\beta}$.

Σημείωση: Μποροῦμε ἐποπτικὰ μὲ ἓνα παραλληλόγραμμο ἀπὸ χαρτόνι καὶ μὲ



σχ. 51.

δίπλωση και αναδίπλωση τῶν ἰσῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, ὅπως φαίνεται στὸ σχ. (51), νὰ δούμε τὸ μετασχηματισμὸ τοῦ παραλληλογράμμου σὲ ἰσεμβαδικὸ ὀρθογώνιο.

Ἀσκήσεις

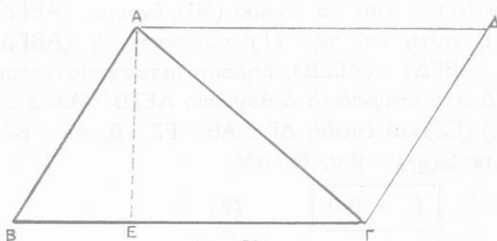
110) Ἐνα παραλληλόγραμμο ἔχει μιὰ πλευρὰ 48 cm καὶ ἀντίστοιχο σ' αὐτὴν ὕψος 3 dm. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ του.

111) Ἐνα παραλληλόγραμμο ἔχει ἐμβαδὸ 72 cm^2 καὶ ὕψος 1,2 dm. Πόση εἶναι ἡ βάση του;

112) Ἐνα παραλληλόγραμμο ἔχει βάση 96 cm καὶ ὕψος ἴσο μὲ τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς βάσης του. Νὰ βρεθῇ τὸ ἐμβαδὸ του σὲ dm^2 .

§ 34. Ἐμβαδὸ τριγώνου.

Κατασκευάστε ἓνα τρίγωνο $AB\Gamma$. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ του ἀπὸ τὴ βάση του $B\Gamma$ καὶ τὸ ὕψος του AE .



σχ. 52.

Εἶναι γνωστὸ ὅτι **βάση** ἑνὸς τριγώνου λέγεται μιὰ ὁποιαδήποτε πλευρὰ του. Π.χ. ἡ $B\Gamma$ εἶναι βάση. Ἀντίστοιχο ὕψος σ' αὐτὴ εἶναι τὸ AE . Φέρνουμε ἀπὸ τὶς κορυφές A καὶ Γ τὶς παραλλήλους AD καὶ ΓD πρὸς τὶς $B\Gamma$ καὶ AB ἀντιστοίχως,

ὁπότε τὸ τετράπλευρο $AB\Gamma D$, τὸ ὁποῖο σχηματίζεται, εἶναι παραλληλόγραμμο μὲ βάση τὴ $B\Gamma$ καὶ ὕψος τὸ AE .

Ἔχουμε μάθει ὅτι κάθε διαγώνιος παραλληλογράμμου τὸ χωρίζει σὲ δύο ἴσα τρίγωνα. Ἐπομένως ἡ $A\Gamma$ χωρίζει τὸ $AB\Gamma D$ σὲ δύο ἰσεμβαδικὰ τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$ καὶ $A\Gamma D$ συνεπῶς $(AB\Gamma) = (A\Gamma D)$.

Ἀρα τὸ ἐμβαδὸ τοῦ καθενὸς τριγώνου εἶναι ἴσο μὲ τὸ μισὸ τοῦ παραλληλογράμμου. Ἐπομένως εἶναι:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} (AB\Gamma D) = \frac{1}{2} (B\Gamma) \cdot (AE) \text{ καὶ ἂν τὸ μήκος τῆς βάσης}$$

$B\Gamma$ εἶναι α καὶ τὸ μήκος τοῦ ὕψους AE εἶναι u_1 , ἔχουμε:

$$E = \frac{\alpha \cdot u_1}{2}$$

Τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἡμικινόμενο τοῦ μήκους τῆς βάσης του ἐπὶ τὸ μήκος τοῦ ὕψους του.

Παρατηρήσεις:

1) Είναι φανερό ότι βρίσκουμε το ίδιο έμβασό, αν πάρουμε ως βάση μιὰ ἄλλη πλευρά καὶ ὡς ὕψος ἐκείνο πού ἀντιστοιχεῖ στήν πλευρά αὐτή. Ἐπομένως:

$$\frac{\alpha \cdot u_1}{2} = \frac{\beta \cdot u_2}{2} = \frac{\gamma \cdot u_3}{2} = E$$

2) Δύο τρίγωνα μὲ ἴσες βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἰσεμβαδικά.

3) Δύο τρίγωνα μὲ ἴσες βάσεις ἔχουν ἐμβαδὰ ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀντίστοιχα ὕψη τους (γιατί);

4) Τί συμπεραίνετε γιὰ τὰ ἐμβαδὰ δύο τριγώνων, τὰ ὅποια ἔχουν ἴσα ὕψη;

Ἀσκήσεις

113) Ἐνα τρίγωνο ἔχει βάση 62 cm καὶ ὕψος ἴσο μὲ τὸ μισό τῆς βάσης του. Νὰ βρεθεῖ τὸ ἐμβαδὸ του.

114) Πόσο εἶναι τὸ ὕψος ἑνὸς τριγώνου, πού ἔχει ἐμβαδὸ 5 m², ἂν ἡ ἀντίστοιχη πλευρὰ στὸ ὕψος αὐτὸ ἔχει μήκος 20 dm;

115) Οἱ πλευρὲς ἑνὸς παραλληλογράμμου ἔχουν μήκη 24 cm καὶ 27 cm. Τὸ ὕψος πού ἀντιστοιχεῖ στήν πρώτη πλευρὰ ἔχει μήκος 18 cm. Νὰ ὑπολογισθεῖ τὸ ὕψος πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἄλλη πλευρὰ.

116) Ἐνας κῆπος ἔχει σχῆμα παραλληλογράμμου. Ἡ περίμετρος του εἶναι 186 m καὶ ἡ μία πλευρὰ του 24m. Ἀν ἡ ἀπόσταση μεταξὺ τῶν μεγαλύτερων πλευρῶν του εἶναι 19 m, νὰ βρεθεῖ τὸ ἐμβαδὸ του.

117) Ἐνα παραλληλόγραμμο εἶναι ἰσεμβαδικὸ μὲ ἕνα τετράγωνο, πού ἔχει πλευρὰ 16 cm. Ἀν ἡ βάση τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι 3,2 dm, νὰ βρεθεῖ τὸ ἀντίστοιχὸ τῆς ὕψος.

118) Ἐνα τρίγωνὸ καὶ ἕνα ὀρθογώνιο ἔχουν μιὰ πλευρὰ κοινὴ καὶ ἴσα ἐμβαδὰ. Ποιὰ σχέση συνδέει τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖο ἀντιστοιχεῖ στήν κοινὴ πλευρὰ, μὲ τὴν πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου, πού εἶναι κάθετὴ στήν κοινὴ πλευρὰ;

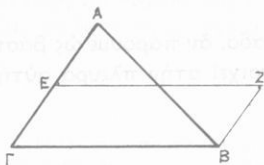
119) Ἐνα τρίγωνο ἔχει ἐμβαδὸ 27 cm². Ἐνα ἀπὸ τὰ ὕψη του εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς πλευρᾶς, πού ἀντιστοιχεῖ σ' αὐτό. Νὰ ὑπολογισθεῖ τὸ ὕψος καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ τριγώνου.

120) Δίνεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ὀρθογώνιο καὶ ἰσοσκελές. Οἱ ἴσες πλευρὲς του ΑΒ καὶ ΑΓ ἔχουν μήκος 8 cm κάθε μία. Ὑπολογίστε τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Πῶς ὑπολογίζεται γενικὰ τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου;

121) Τὸ ἐμβαδὸ ἑνὸς ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ ($\widehat{A}=1$ ὀρθή) εἶναι 50 m². Νὰ βρεῖτε τὸ μήκος τῶν ἴσων πλευρῶν του ΑΒ καὶ ΑΓ.

122) Σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A}=1$ ὀρθή) μὲ ΑΒ=γ, ΑΓ=β καὶ ΒΓ=α νὰ φέρετε τὸ ὕψος ΑΔ=υ καὶ νὰ συγκρίνετε τὰ γινόμενα β·γ καὶ α·υ. Τί παρατηρεῖτε;

123) Κατασκευάστε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ. Ὅρίστε τὸ μέσο Ε τῆς ΑΓ καὶ ἀπὸ τὰ



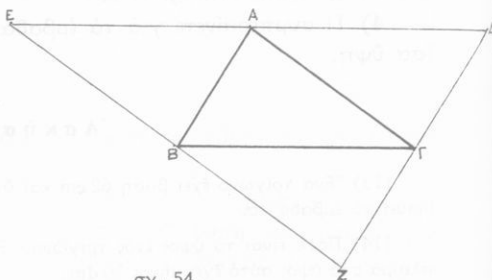
σχ. 53.

Ε και Β φέρετε παραλλήλους προς τις ΓΒ και ΓΑ αντίστοιχως. Αὐτὲς τέμνονται στὸ Ζ. Συγκρίνετε τὸ ἔμβαδὸ τοῦ παραλληλογράμμου ΕΓΒΖ, ποὺ σχηματίζεται, μὲ τὸ ἔμβαδὸ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 53).

124) Σχηματίστε ἓνα κυρτὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ καὶ ἀπὸ τὶς κορυφές του φέρετε παραλλήλους πρὸς τὶς διαγωνίους του. Σχηματίζεται τότε ἓνα παραλληλόγραμμο, τὸ ΕΖΗΘ. Νὰ συγκρίνετε τὸ ἔμβαδὸ τοῦ παραλληλογράμμου αὐτοῦ μὲ τὸ ἔμβαδὸ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

125) Σχηματίστε ἓνα τρίγωνο ΑΒΓ καὶ ἀπὸ τὶς κορυφές του νὰ φέρετε παραλλήλους πρὸς τὶς πλευρές του. Σχηματίζεται τότε ἓνα δεύτερο τρίγωνο ΔΕΖ. Νὰ συγκρίνετε τὰ ἔμβαδὰ τῶν δύο τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (σχ. 54).

Σημείωση: Στὶς ἀσκήσεις 123, 124 καὶ 125 γίνεται μετασχηματισμὸς εὐθύγραμμων σχημάτων σὲ ἄλλα ἰσοδύναμα μὲ χάραξη κατάλληλων γραμμῶν.

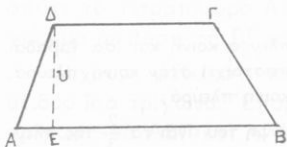


σχ. 54.

§ 35. Ἐμβαδὸ τραπέζιου.

Τραπέζιο εἶναι ἓνα κυρτὸ τετράπλευρο, τὸ ὁποῖο ἔχει δύο μόνο παράλληλες πλευρές.

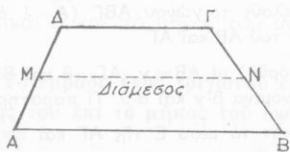
$$\text{Τραπέζιο ΑΒΓΔ} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ΑΒΓΔ κυρτὸ} \\ \text{μόνο ΑΒ} \parallel \text{ΓΔ} \end{cases}$$



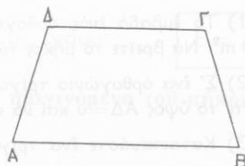
σχ. 55.

Οἱ παράλληλες πλευρές τοῦ τραπέζιου λέγονται **βάσεις** του. **Ύψος** τοῦ τραπέζιου εἶναι τὸ εὐθύγραμμο τμήμα τῆς καθέτου πρὸς τὶς βάσεις του, τὸ ὁποῖο περιέχεται μεταξύ τῶν βάσεων. **Διάμεσος** τραπέζιου λέγεται τὸ εὐθ. τμήμα, τὸ ὁποῖο συνδέει τὰ μέσα τῶν μὴ παράλληλων πλευρῶν του (σχ. 55β).

Ἴσοσκελὲς τραπέζιο εἶναι τὸ τραπέζιο, ποὺ ἔχει ἴσες τὶς μὴ παράλληλες πλευρές του. (σχ. 56).



σχ. 55β.

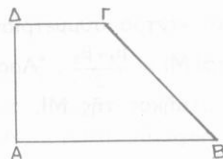


σχ. 56.

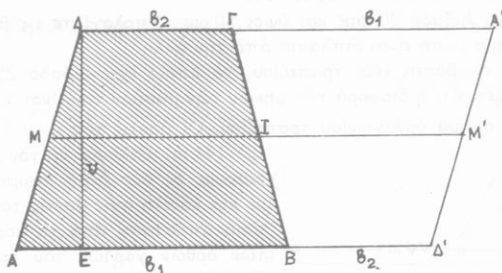
Ὁρθογώνιο τραπέζιο εἶναι τὸ τραπέζιο, ποὺ ἔχει μία πλευρὰ κάθετη στὶς βάσεις του. (σχ.57)

Ζητοῦμε νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τραpezίου $AB\Gamma\Delta$.

Τὸ τυχὸν τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ (σχ. 58) ἔχει βάσεις $AB = \beta_1$, $\Delta\Gamma = \beta_2$ καὶ ὕψος $\Delta E = u$. Ἐστω l τὸ μέσο τῆς μὴ παράλληλης πλευρᾶς $B\Gamma$. Κατασκευάζουμε τὸ συμμετρικὸ τοῦ $AB\Gamma\Delta$ ὡς πρὸς κέντρο συμμετρίας τὸ l . Τὸ συμμετρικὸ τοῦ τραpezίου $AB\Gamma\Delta$ εἶναι τὸ τραπέζιο $A'\Gamma B\Delta'$, ποὺ εἶναι ἴσο μὲ τὸ $AB\Gamma\Delta$. Τὸ ἄθροισμα τῶν



σχ. 57.



σχ. 58.

καὶ $A'\Gamma B\Delta'$ εἶναι τὸ μισὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ παραλληλογράμμου $AD'A'\Delta$, δηλαδή $E_{AB\Gamma\Delta} = \frac{1}{2} E_{AD'A'\Delta}$.

Ἐπειδὴ τὸ παραλληλόγραμμο αὐτὸ ἔχει βάση τὴν $AD' = \beta_1 + \beta_2$ καὶ ὕψος u , τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τραpezίου δίνεται ἀπὸ τὸν τύπο:

$$E = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \cdot u \quad (1)$$

Τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τραpezίου εἶναι ἴσο μὲ τὸ γινόμενο τοῦ ἡμισθροίσματος τῶν μηκῶν τῶν βάσεων του ἐπὶ τὸ μήκος τοῦ ὕψους του.

Ἀπὸ τὸν τύπο (1) ἔχουμε: $E = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \cdot u \Leftrightarrow 2E = (\beta_1 + \beta_2) \cdot u \Leftrightarrow \beta_1 + \beta_2 = \frac{2E}{u} \Leftrightarrow \beta_1 = \frac{2E}{u} - \beta_2$. Ἐπίσης ἔχουμε τὸν τύπο $u = \frac{2E}{\beta_1 + \beta_2}$.

Παρατήρηση :

Ἡ διάμεσος IM τοῦ τραpezίου τέμνει τὴν $A'\Delta'$ στὸ μέσο τῆς M' (λόγῳ τῆς συμμετρίας) τότε $MM' = AD' = \beta_1 + \beta_2$. Ἄλλ' ἔπειδὴ τὸ l εἶναι

τὸ κέντρο συμμετρίας, εἶναι τὸ μέσο τοῦ MM' , ἐπομένως $2MI = \beta_1 + \beta_2$ καὶ $MI = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$. Ἀρα ὁ τύπος (1) γράφεται καὶ $E = \mu \cdot v$, ἂν μ εἶναι τὸ μήκος τῆς MI .

Ἀσκήσεις

126) Τὰ μήκη τῶν βάσεων ἐνὸς τραpezίου εἶναι $\beta_1 = 8 \text{ cm}$ καὶ $\beta_2 = 6 \text{ cm}$ καὶ τὸ μήκος τοῦ ὕψους του $v = 7 \text{ cm}$. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τραpezίου.

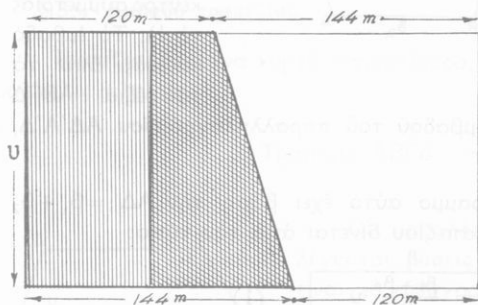
127) Ἐνα τραpezίον ἔχει ἐμβαδὸ 63 cm^2 . Τὸ ὕψος του εἶναι 6 cm καὶ ἡ μία ἀπὸ τὶς βάσεις του 14 cm . Νὰ ὑπολογίσετε τὴν ἄλλη βάση.

128) Τὸ ἐμβαδὸ ἐνὸς ἀγροῦ σχήματος τραpezίου εἶναι 3 στρέμ. καὶ οἱ βάσεις του ἔχουν μήκη 180 m καὶ 120 m . Ποιὸ εἶναι τὸ ὕψος του;

129) Ἐνα τραpezίον ἔχει ἐμβαδὸ 30 dm^2 καὶ ὕψος 50 cm . Ὑπολογίστε τὶς βάσεις του, ὅταν γνωρίζετε ὅτι ἡ μία βάση εἶναι διπλάσια ἀπὸ τὴν ἄλλη.

130) Νὰ ὑπολογίσετε τὶς βάσεις ἐνὸς τραpezίου, τὸ ὁποῖο ἔχει ἐμβαδὸ 252 m^2 καὶ ὕψος 24 m , ὅταν γνωρίζετε ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν μηκῶν τῶν βάσεων του εἶναι 5 m .

131) Ἐνας ἀγρὸς ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου τραpezίου. Οἱ βάσεις του εἶναι 120 m καὶ 144 m . Θέλουμε νὰ τὸν διαιρέσουμε σὲ δύο μέρη ἰσεμβαδικὰ μὲ μιὰ κάθετο στὶς βάσεις του. Σὲ ποία ἀπόσταση ἀπὸ τὶς κορυφές τῶν ὀρθῶν γωνιῶν τοῦ τραpezίου θὰ τέμνει ἡ κάθετος αὐτὴ τὶς βάσεις του;



σχ. 59.

Ὑπόδειξη: Τὸ ἐμβαδὸ τοῦ ἀγροῦ, ποῦ ἔχει σχῆμα ὀρθογ. τραpezίου, εἶναι ἴσο μὲ τὸ μισὸ τοῦ ἐμβαδοῦ ἐνὸς ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖο ἔχει διαστάσεις τὸ ἀθροῖσμα τῶν βάσεων τοῦ τραpezίου ($120 \text{ m} + 144 \text{ m} = 264 \text{ m}$) καὶ τὸ ὕψος του $v \text{ m}$, ἢ εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἐμβαδὸ ἐνὸς ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖο ἔχει διαστάσεις $\frac{264}{2} \text{ m} = 132 \text{ m}$

καὶ $v \text{ m}$. Ἡ κάθετος στὶς δύο βάσεις χωρίζει τὸ τραpezίον σὲ ἕνα ὀρθογώνιο καὶ σ' ἕνα ὀρθογώνιο

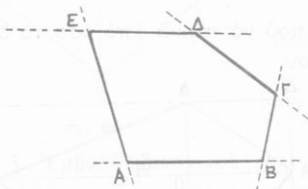
τραpezίον (τὸ ὕψος v τοῦ τραpezίου εἶναι ἡ μιὰ διάσταση τοῦ ὀρθογωνίου). Ἐπειδὴ οἱ δύο αὐτὲς ἐπιφάνειες ἔχουν ἴσα ἐμβαδὰ, πρέπει κάθε μία νὰ ἔχει ἐμβαδὸ τὸ μισὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τραpezίου ποῦ μᾶς δόθηκε, δηλαδὴ τὸ μισὸ τοῦ ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖο ἔχει διαστάσεις 132 m καὶ $v \text{ m}$. Τώρα πιά εἶναι εὐκόλο νὰ ὑπολογίσουμε τὴν ἀπόσταση τῆς καθέτου πρὸς τὶς βάσεις τοῦ τραpezίου ἀπὸ τὶς κορυφές τῶν ὀρθῶν γωνιῶν του, τὴν ὁποία ἔχετε νὰ ὑπολογίσετε.

§ 36. Έμβαδὸ πολυγώνου.

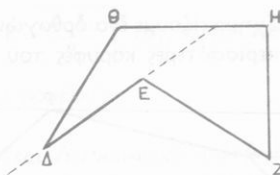
Ἄν πάρουμε πάνω σ' ἓνα ἐπίπεδο τὰ σημεῖα $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$ μὲ τὴ σειρά πού ἀναφέρονται καὶ φέρουμε τὰ εὐθύγραμμα τμήματα $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta E, EZ$ καὶ ZA , ἡ πολυγωνικὴ γραμμὴ $AB\Gamma\Delta EZA$ λέγεται **πολύγωνο** $AB\Gamma\Delta EZ$.

Λέμε ὅτι ἓνα πολύγωνο εἶναι **κυρτὸ** (σχ. 60), ὅταν βρίσκεται ὁλόκληρο στὸ ἓνα ἀπὸ τὰ ἡμιεπίπεδα, πού ὀρίζονται, ἀπὸ τὸ φορέα κάθε πλευρᾶς του. Σὲ κάθε ἄλλη περίπτωσις εἶναι **μὴ κυρτὸ** (σχ. 61). **Διαγώνιος** πολυγώνου λέγεται τὸ εὐθύγραμμο τμήμα, τὸ ὁποῖο ἐνώνει δύο μὴ διαδοχικὰ κορυφές του.

Ζητοῦμε νὰ βροῦμε τὸ ἔμβαδὸ ἐνὸς κυρτοῦ πολυγώνου.



σχ. 60.

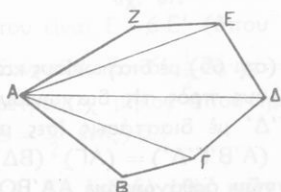


σχ. 61.

Μποροῦμε νὰ βροῦμε τὸ ἔμβαδὸ του χρησιμοποιώντας τὶς παρακάτω μεθόδους:

Α. Τὴν προσθετικὴ μέθοδο:

α) Διαίρεση κυρτοῦ πολυγώνου σὲ τρίγωνα:

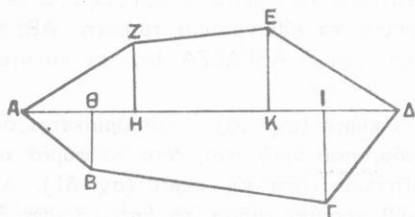


σχ. 62.

Ἐστω ἓνα κυρτὸ πολύγωνο $AB\Gamma\Delta EZ$. Φέρουμε τὶς διαγωνίους τοῦ $A\Gamma, A\Delta, AE$, οἱ ὁποῖες διέρχονται ἀπὸ τὴν κορυφή A , καὶ διαιροῦμε τὸ πολύγωνο σὲ 4 τρίγωνα τὰ $AB\Gamma, A\Gamma\Delta, A\Delta E, AEZ$ (σχ. 62). Ἔχουμε: $(AB\Gamma\Delta EZ) = (AB\Gamma) + (A\Gamma\Delta) + (A\Delta E) + (AEZ)$

Ἄρα: τὸ ἔμβαδὸ τοῦ πολυγώνου εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων, στὰ ὁποῖα διαιρεῖται.

β) Ἀνάλυση τοῦ πολυγώνου σὲ κυρτὰ τραπέζια, ὀρθογώνια καὶ ὀρθογώνια τρίγωνα:



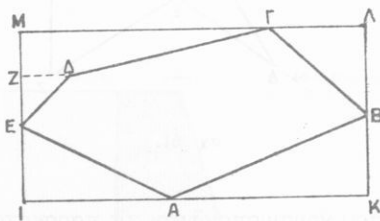
σχ. 63.

Φέρνουμε τὴ μεγαλύτερη διαγώνιο, τὴν ΑΔ, καὶ ἀπὸ τὶς ἄλλες κορυφὲς φέρνουμε τὶς καθέτους σ' αὐτήν. Διαίρουµε ἔτσι τὸ πολύγωνο σὲ ὀρθογώνια τραπέζια καὶ ὀρθογώνια τρίγωνα (σχ. 63) καὶ ἔχουμε:

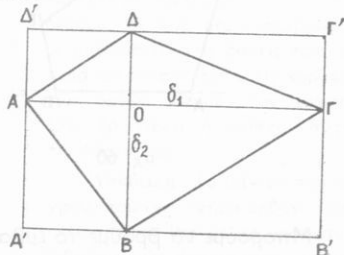
$$E_{ABΓΔΕΖ} = E_{ABΘ} + E_{ΘΒΓΙ} + E_{ΙΓΔ} + E_{ΔΕΚ} + E_{ΚΕΖΗ} + E_{ΖΑΗ}.$$

Β. Τὴ μέθοδο τῆς διαφορᾶς τῶν ἐμβαδῶν:

Σχηματίζουμε ἓνα ὀρθογώνιο ΙΚΛΜ, πού νὰ περνᾷ ἀπὸ ὅσο τὸ δυνατὸν περισσότερες κορυφὲς τοῦ πολυγώνου.



σχ. 64.



σχ. 65.

Τὸ ἐμβαδὸ τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἐμβαδὸ τοῦ ὀρθογώνιου ΙΚΛΜ, τὸ ὁποῖο ἔχει ἐλαττωθεῖ κατὰ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ἢ ὀρθ. τραπεζίων πού σχηματίσθηκαν (σχ. 64).

$$\text{Δηλαδή: } E_{ABΓΔΕ} = E_{ΚΛΜΙ} - E_{ΑΚΒ} - E_{ΒΛΓ} - E_{ΓΜΖΔ} - E_{ΔΖΕ} - E_{ΕΙΑ}.$$

§ 37. Ἐφαρμογές.

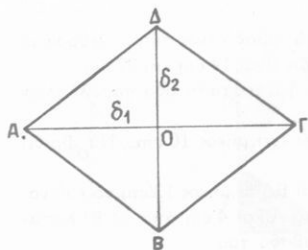
1. Κατασκευάστε ἓνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ (σχ. 65) μὲ διαγωνίους καθετοὺς καὶ ἀπὸ τὶς κορυφὲς του φέρετε παραλλήλους πρὸς τὶς διαγωνίους του. Σχηματίζεται τότε τὸ ὀρθογώνιο Α'Β'Γ'Δ' μὲ διαστάσεις ἴσες μὲ τὶς διαγωνίους τοῦ τετραπλεύρου. Ἐπομένως $(Α'Β'Γ'Δ') = (ΑΓ) \cdot (ΒΔ)$

Τὸ ὀρθογώνιο Α'Β'Γ'Δ' εἶναι ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων ΑΑ'ΒΟ, ΒΒ'ΓΟ, ΓΓ'ΔΟ, ΟΔΔ'Α πού καθένα τους εἶναι ἀντιστοίχως διπλάσιο ἀπὸ τὰ ὀρθογ. τρίγωνα ΒΟΑ, ΒΓΟ, ΓΔΟ, ΑΟΔ τὰ ὁποῖα ἔχουν ἄθροι-

σμα τὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Συνεπῶς τὸ ἔμβαδὸ τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι τὸ μισὸ τοῦ ἔμβαδου τοῦ ὀρθογωνίου Α'Β'Γ'Δ'.

*Αρα: Τὸ ἔμβαδὸ ἑνὸς τετραπλεύρου μὲ καθέτους διαγωνίους, εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἡμιγινόμενο τῶν μηκῶν τῶν διαγωνίων του. $E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$ (δ_1, δ_2 εἶναι τὰ μήκη τῶν ΑΓ, ΒΔ σχ. 65).

2. Ἐμβαδὸ ρόμβου.



σχ. 66.

Ἐπειδὴ, ὅπως γνωρίζουμε, οἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου τέμνονται καθέτως (σχ. 66), τὸ ἔμβαδὸ του ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιγινόμενο τῶν μηκῶν τῶν διαγωνίων του.

Δηλαδή: $E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$ (δ_1, δ_2 τὰ μήκη τῶν διαγωνίων τοῦ ρόμβου).

3. Ἐμβαδὸ κανονικοῦ πολυγώνου: Δίνεται ἓνα κανονικὸ πολύγωνο ἐγγεγραμμένο σ' ἓναν κύκλο (π.χ. στὴν περίπτωση αὐτὴ ἓνα κανονικὸ ἑξάγωνο) καὶ ζητεῖται νὰ βρεθεῖ τὸ ἔμβαδὸ του (σχ. 67).



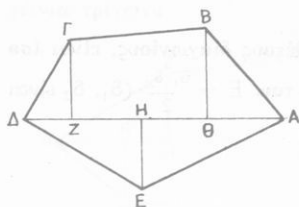
σχ. 67.

Περίμετρο ἑνὸς εὐθ. σχήματος ὀνομάσαμε μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν του. Ἐπειδὴ στὰ κανονικὰ πολύγωνα οἱ πλευρὲς τους εἶναι ὅλες ἴσες, ἡ περίμετρος π.χ. τοῦ παραπάνω ἑξαγώνου θὰ εἶναι $6 \cdot \lambda_6$ καὶ γενικὰ ἡ περίμετρος ἑνὸς κανονικοῦ ν-πλεύρου εἶναι $n \cdot \lambda_n$. Ἄν φέρομε τὶς ἀκτίνες τοῦ παραπάνω κανονικοῦ πολυγώνου (σχ. 67), αὐτὸ διαιρεῖται σὲ 6 ἴσα τρίγωνα. Ἄρα τὸ ἔμβαδὸ

του εἶναι $E = 6 \cdot E'$ (ὅπου E' εἶναι τὸ ἔμβαδὸ ἑνὸς ἀπὸ τὰ ἴσα τρίγωνα). Συνεπῶς $E = 6 \cdot \frac{1}{2} \lambda_6 \cdot \alpha_6 = \frac{1}{2} (6\lambda_6) \cdot \alpha_6$, δηλαδή $E = \frac{1}{2} \chi$ μῆκος περιμέτρου χ μῆκος ἀποστήματος. Καὶ γενικὰ γιὰ ἓνα κανονικὸ ν-πλευρο $E = \frac{1}{2} (n\lambda_n) \cdot \alpha_n$.

Τὸ ἔμβαδὸ ἑνὸς κανονικοῦ κυρτοῦ πολυγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ γινομένου τοῦ μήκους τῆς περιμέτρου του ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀποστήματός του.

Άσκήσεις



σχ. 68.

132) Ένα πολύγωνο ΑΒΓΔΕ έχει τη διαγώνιο ΑΔ=148 m. Οί κάθετες ΓΖ, ΕΗ και ΒΘ είναι 43 m, 45 m και 52 m αντίστοιχως (σχήμα 68). "Αν ΔΖ=18 m, ΘΑ=38 m και ΔΗ=70 m. Να υπολογίσετε το έμβαδό του.

133) Ένας ρόμβος έχει διαγωνίους 12 cm και 9 cm. Να βρεθεί το έμβαδό του.

134) "Αν το έμβαδό ενός ρόμβου είναι 42 cm² και ή μία διαγώνιός του είναι 12 cm, να βρεθεί ή άλλη διαγώνιος.

135) Να βρεθεί το έμβαδό ενός τετραπλεύρου με καθέτους διαγωνίους, όταν τὰ μήκη τῶν διαγωνίων αὐτῶν είναι 14 cm και 27 cm.

136) "Η περίμετρος ενός ρόμβου είναι 144 cm και ή απόσταση δύο παράλληλων πλευρῶν του 28 cm. Να βρείτε το έμβαδό του.

137) Κάθε μιὰ ἀπὸ τίς διαγωνίους ενός τετραγώνου έχει μήκος 10 cm. Να βρεθεί το έμβαδό του.

138) Φέρετε δύο κάθετα εὐθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ με μήκος 12 cm τὸ καθένα. Αὐτὰ τέμνονται σ' ένα σημείο Ι, πού απέχει 5 cm ἀπὸ τὸ Α και 4 cm ἀπὸ τὸ Β. Κατασκαύστε τὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ και υπολογίστε τὸ έμβαδό του.

139) "Εστω ένα οικόπεδο, πού έχει σχήμα ὅπως αὐτὸ πού εἰκονίζεται στὸ σχήμα (69). (Α=1 ὀρθή). Να βρεθεί τὸ έμβαδό του.

140) Να σχηματίσετε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ και νὰ φέρετε ἀπὸ τὸ Α μιὰ παράλληλο πρὸς τὴν διαγώνιό του ΒΔ. "Η παράλληλος αὐτὴ τέμνει τὴν εὐθεία ΓΒ στὸ Ε. Συγκρίνετε τὸ έμβαδό τοῦ τετραπλεύρου με τὸ έμβαδό τοῦ τριγώνου ΔΕΓ.

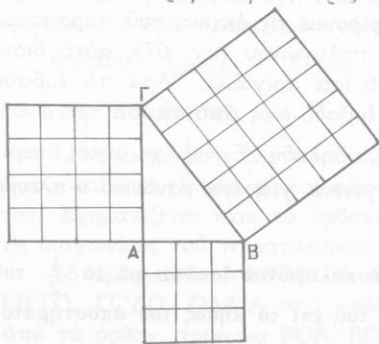


σχ. 69.

Β'. ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ.

§ 38. Κατασκευάστε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές ΑΓ=4 μονάδ. μήκους και ΑΒ=3 μονάδ. μήκους. Μετρήστε τὴν ὑποτείνουσά του. "Επειτα

κατασκευάστε τετράγωνα με πλευρές τίς πλευρές τοῦ τριγώνου και συγκρίνετε τὸ έμβαδό τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτείνουσας με τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τετραγώνων τῶν κάθετων πλευρῶν του. Τί παρατηρεῖτε;



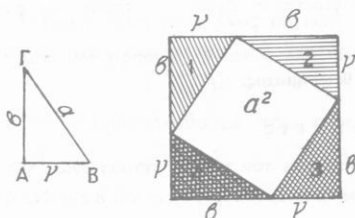
σχ. 70.

Μετρώντας διαπιστώνουμε ὅτι ή ὑποτείνουσα ΒΓ είναι ἴση με 5 μον. μήκους και παρατηροῦμε (σχ. 70) ὅτι τὸ τετράγωνο, πού έχει πλευρὰ τὴν ὑποτείνουσα, περιέχει 25 τετραγωνάκια με πλευρὰ τὴ μονάδα μήκους και ὅτι τὰ δύο ἄλλα τετράγωνα περιέχουν

ἀντιστοίχως 9 καὶ 16 τέτοια τετραγωνάκια. Ἀλλὰ $25 = 16 + 9$ ἢ $5^2 = 4^2 + 3^2$ ἄρα $(ΒΓ)^2 = (ΑΓ)^2 + (ΑΒ)^2$ (1). Ἡ σχέση (1), ποὺ συνδέει τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, ἐκφράζει τὸ πυθαγόρειο θεώρημα.

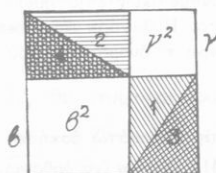
Μποροῦμε γενικὰ νὰ αἰτιολογήσουμε τὴν σχέση (1) ὡς ἑξῆς:

Ἐστω ἓνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ μὲ $\hat{A} = 1$ ὀρθή καὶ μὲ μήκη πλευρῶν $ΑΒ = \gamma$, $ΑΓ = \beta$ καὶ $ΒΓ = \alpha$. Κατασκευάζουμε δύο ἴσα τετράγωνα καὶ καθένα μὲ πλευρὰ ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα $\beta + \gamma$, τῶν μηκῶν τῶν κάθετων πλευρῶν τοῦ τριγώνου.



(71α)

σχ. 71.



(71β)

Παριστάνουμε μὲ E_1 τὸ ἔμβαδὸ καθενὸς ἀπὸ τὰ τετράγωνα αὐτά. Κατασκευάζουμε ἐπίσης ἀπὸ χαρτόνι τέσσερα ὀρθογώνια τρίγωνα ἴσα μὲ τὸ ΑΒΓ ποὺ μᾶς δόθηκε (Ε τὸ ἔμβαδὸ καθενὸς). Θέτουμε τὰ τρίγωνα αὐτὰ πάνω στὸ τετράγωνο, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 71α, καὶ παρατηροῦμε ὅτι τὸ ἓνα τετράγωνο ἀποτελεῖται ἀπὸ 4 τρίγωνα ἴσα μὲ τὸ ΑΒΓ, ποὺ μᾶς δόθηκε, καὶ ἀπὸ ἓνα τετράγωνο μὲ πλευρὰ ἴση μὲ τὴν ὑποτείνουσα τοῦ ΑΒΓ, δηλαδὴ $E_1 = \alpha^2 + 4E$ (2). Ἐπειτα τοποθετοῦμε τὰ τρίγωνα στὸ ἄλλο τετράγωνο μὲ τὸν τρόπο ποὺ δείχνει τὸ σχῆμα 71β. Παρατηροῦμε, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα 71β, ὅτι αὐτὸ ἀποτελεῖται ἀπὸ 2 τετράγωνα μὲ πλευρὲς β καὶ γ ἀντιστοίχως, καὶ ἀπὸ τέσσερα ὀρθογώνια τρίγωνα ἴσα μὲ τὸ ΑΒΓ. Ἀρα $E_1 = \beta^2 + \gamma^2 + 4E$ (3).

Ἐφαρμόζουμε τὴ μεταβατικὴ ιδιότητα στὶς σχέσεις (2) καὶ (3) καὶ ἔχουμε $\alpha^2 + 4E = \beta^2 + \gamma^2 + 4E$. Συνεπῶς $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. Δηλαδὴ βρήκαμε πάλι τὴν σχέση $(ΒΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2$, ἡ ὁποία ἐκφράζει τὸ πυθαγόρειο θεώρημα:

Τὸ τετράγωνο τῆς ὑποτείνουσας ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἰσodύναμο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο κάθετων πλευρῶν του.

Παρατήρηση: Ἀπὸ τὴν σχέση $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ βρίσκουμε τὶς ἑξῆς σχέσεις: $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$ καὶ $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$, δηλαδὴ: Τὸ τετράγωνο κάθε μιᾶς ἀπὸ τὶς κάθετες πλευρὲς ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου βρίσκεται, ἂν ἀπὸ τὸ τετράγωνο τῆς ὑποτείνουσας ἀφαιρέσουμε τὸ τετράγωνο τῆς ἄλλης κάθετης πλευρᾶς.

Ίστορική σημείωση: Ὁ διάσημος μαθηματικός καὶ φιλόσοφος **Πυθαγόρας** γεννήθηκε τὸ 580 π.Χ. στὴ Σάμο καὶ πέθανε τὸ 500 π.Χ. στὸ Μεταπόντιο τῆς Κάτω Ἰταλίας.

Μετὰ ἀπὸ σύσταση τοῦ Θαλῆ πῆγε στὴν Αἴγυπτο (πιθανῶς καὶ στὴ Βαβυλώνα) ὅπου παρέμεινε γιὰ πολλὰ χρόνια καὶ μύηθηκε στὶς γνώσεις τῶν Αἰγυπτίων μὲ τὴ μελέτη τῶν βιβλίων τους.

Μετὰ τὴν ἐπιστροφή του στὴν Ἑλλάδα πῆγε στὴν Κρήτη καὶ τὴ Σάμο καὶ τέλος πέρασε στὸν Κρότωνα τῆς Κάτω Ἰταλίας (Μεγάλη Ἑλλάδα), ὅπου ἱδρυσε καὶ διεύθυνε Σχολή, ἡ ὁποία θεωρεῖται ὡς τὸ Πρῶτο Πανεπιστήμιο τοῦ κόσμου. Ὁ Πυθαγόρας καὶ οἱ μαθητὲς του, ποὺ ὀνομάζονταν **Πυθαγόρειοι**, συνέβαλαν στὴν ἀνάπτυξη τῶν μαθηματικῶν.

Ὁ Πυθαγόρας ὑπῆρξε ἀπὸ τὶς κορυφαῖες μορφές τῆς ἐπιστήμης ὅλων τῶν ἐποχῶν καὶ ἡ πνευματικὴ του δραστηριότητα ἀναφέρεται σ' ὅλους τοὺς τομεῖς τῶν φυσικῶν καὶ μαθηματικῶν ἐπιστημῶν.

Στὸν Πυθαγόρα ἀποδίδεται μεταξὺ τῶν ἄλλων καὶ ἡ ἐπινόηση τοῦ θεωρήματος ποὺ φέρει τ' ὄνομά του, τοῦ **πυθαγορείου θεωρήματος**.

Ἀ σ κ ῆ σ ε ι ς

Στὶς παρακάτω ἀσκῆσεις νὰ χρησιμοποιήσετε τὸν πίνακα τετραγώνων τῆς § 32.

141) Δίνεται ἓνα ὀρθογώνιο τρίγωνο μὲ κάθετες πλευρὲς 6 cm καὶ 8 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ μήκος τῆς ὑποτείνουσάς του.

142) Ἐνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει ὑποτείνουσα ΒΓ=15 cm καὶ τὴν κάθετη πλευρὰ ΑΒ=9 cm. Νὰ ὑπολογισθεῖ ἡ ἄλλη κάθετη πλευρὰ τοῦ ΑΓ.

143) Οἱ διαγώνιοι ἐνὸς ρόμβου εἶναι 6 cm καὶ 8 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ὕψος του.

144) Σ' ἓνα ἰσοσκελὲς τραπέζιο ἡ μικρὴ βάση εἶναι $\beta_1=50$ cm, κάθε μιά ἀπὸ τὶς μὴ παράλληλες πλευρὲς τοῦ 10 cm καὶ τὸ ὕψος τοῦ 6 cm. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ του.

145) Δίνεται ἓνα ἰσοσκελὲς τραπέζιο, ποὺ ἔχει μεγάλῃ βάση ἴση μὲ $\frac{11}{5} \alpha$ καὶ τὶς ἄλλες τρεῖς πλευρὲς τοὺς ἴσες μὲ α . Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸ του. Ἐφαρμογή: $\alpha=5$ cm.

146) Νὰ ὑπολογισθεῖ τὸ ἐμβαδὸ ἐνὸς ὀρθογωνίου, ποὺ ἔχει μιά πλευρὰ μήκους 3 cm καὶ διαγώνιο μήκους 5 cm.

147) Ἐνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ἔχει ὑποτείνουσα 25 cm καὶ μιά κάθετη πλευρὰ 24 cm. Νὰ βρεῖτε τὸ ὕψος, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν ὑποτείνουσα.

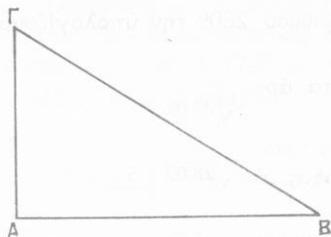
148) Ἐνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ἔχει ἐμβαδὸ 6 cm². Μία κάθετη πλευρὰ του εἶναι 4 cm. Νὰ βρεθεῖ τὸ μήκος τῆς ὑποτείνουσάς του.

Τετραγωνικὴ ρίζα

§ 39. Τετραγωνικὴ ρίζα θετικοῦ ἀριθμοῦ καὶ ὑπολογισμὸς τῆς.

Νὰ κατασκευάσετε ἓνα ὀρθογώνιο τρίγωνο μὲ κάθετες πλευρὲς 45 mm καὶ 28 mm καὶ νὰ ὑπολογίσετε τὸ τετράγωνο τῆς τιμῆς τῆς ὑποτείνουσας καὶ τὴν τιμὴ τῆς.

Κατασκευάζουμε ἓνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΓΑΒ μὲ κάθετες πλευρὲς ΑΒ=45 mm καὶ ΑΓ=28 mm καὶ ἐφαρμόζουμε τὸ πυθαγόρειο θεώρημα (σχ. 72).



σχ. 72.

$$\begin{aligned}(B\Gamma)^2 &= (AB)^2 + (A\Gamma)^2 \Rightarrow (B\Gamma)^2 = \\ &= 45^2 + 28^2 \Rightarrow (B\Gamma)^2 = 2025 + 784 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (B\Gamma)^2 = 2809\end{aligned}$$

“Αν μετρήσουμε την ύποτείνουσα, θα βρούμε ότι $B\Gamma = 53$ mm. “Ωστε: $53^2 = 2809$. Τὸν ἀριθμὸ 53 τὸν ὀνομάζουμε **τετραγωνικὴ ρίζα** τοῦ ἀριθμοῦ 2809 καὶ συμβολίζουμε $\sqrt{2809}$ “Ωστε $\sqrt{2809} = 53$. Γενικά:

Τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ a εἶναι ὁ θετικὸς ἀριθμὸς $\sqrt{a}$, ὁ ὁποῖος ὅταν ὑψώνεται στὴ δευτέρα δύναμη δίνει τὸν a .

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad \text{ἢ} \quad a = \beta^2 \Rightarrow \beta = \sqrt{a}$$

“Αν συμβουλευθοῦμε τὸν πίνακα τῆς § 32, θὰ συμπεράνουμε ὅτι:

$$\begin{aligned}\sqrt{1} &= 1, & \sqrt{4} &= 2, & \sqrt{9} &= 3, & \sqrt{16} &= 4, & \sqrt{25} &= 5, & \sqrt{36} &= 6 \\ & & \sqrt{49} &= 7, & \sqrt{64} &= 8, & \sqrt{81} &= 9 & \text{κ.λ.π.}\end{aligned}$$

Τοὺς ἀριθμοὺς 1 ... 4 ... 9 ... 16 ... 25 ... 36 ... 49 ... 64 ... 81... τοὺς λέμε τέλεια τετράγωνα ἀκεραίων ἢ ἀπλῶς τέλεια τετράγωνα, γιατί γράφονται μὲ τὴ μορφή $1^2 \dots 2^2 \dots 3^2 \dots 4^2 \dots 5^2 \dots 6^2 \dots 7^2 \dots 8^2 \dots 9^2 \dots$

Οἱ τετραγωνικὲς ρίζες τῶν παραπάνω τέλειων τετραγώνων εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί.

§ 40. Παρατηροῦμε ὅτι κάθε ἀκέραιος ἀριθμὸς, ποὺ δὲν εἶναι τέλειο τετράγωνο, βρίσκεται μεταξὺ δύο διαδοχικῶν τέλειων τετραγώνων.

$$\text{Π.χ. } 1 < 3 < 4, \quad 25 < 31 < 36 \text{ κ.λ.π. ἢ } 1^2 < 3 < 2^2, \quad 5^2 < 31 < 6^2.$$

Λέμε ὅτι ὁ 1 εἶναι τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 3 κατὰ προσέγγιση μονάδας, μὲ ἔλλειψη, καὶ ὁ 2 εἶναι τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 3 κατὰ προσέγγιση μονάδας, μὲ ὑπεροχή, καὶ συμβολίζουμε: μὲ ἔλ. $\sqrt{3} = 1$ κατὰ προσέγγιση μονάδας καί: μὲ ὑπ. $\sqrt{3} = 2$ κατὰ προσέγγιση μονάδας. “Ομοίως: μὲ ἔλ. $\sqrt{31} = 5$ κατὰ προσέγγιση μονάδας καί: μὲ ὑπ. $\sqrt{31} = 6$ κατὰ προσέγγιση μονάδας.

“Απ’ ἐδῶ κι ἔμπρὸς ὅταν λέμε τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγιση μονάδας, θὰ ἐννοοῦμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα μὲ ἔλλειψη.

Τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγιση μονάδας εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος, τοῦ ὁποῖου τὸ τετράγωνο εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ ποὺ μᾶς ἔχει δοθεῖ.

“Ο ἀριθμὸς 2809 εἶναι τέλειο τετράγωνο, γιατί ἡ τετραγωνικὴ ρίζα του εἶναι ὁ ἀκέραιος 53.

§ 41. Τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ 2809 τὴν ὑπολογίζουμε ὡς ἑξῆς:

1. Τὸν χωρίζουμε σὲ διψήφια τμήματα ἀρ-
χίζοντας ἀπὸ τὸ τέλος.

$$\sqrt{28'09}$$

2. Βρίσκουμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ πρώ-
του τμήματος 28 κατὰ προσέγγιση μονάδας μὲ
ἔλλειψη.

$$\sqrt{28'09} \quad \begin{array}{r} 5 \\ \hline \end{array}$$

3. Ἀφαιροῦμε ἀπὸ τὸ 28 τὸ τετράγωνο
τοῦ 5 (τὸν 25).

$$\begin{array}{r} \sqrt{28'09} \\ -25 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ \hline \end{array}$$

4. Παραθέτουμε δεξιὰ ἀπὸ τὴ διαφορὰ 3 τὸ
ἐπόμενο διψήφιο τμήμα 09 καὶ χωρίζουμε τὸ τελευ-
ταῖο ψηφίο τοῦ ἀριθμοῦ 309 ποὺ σχηματίσθηκε.

$$\begin{array}{r} \sqrt{28'09} \\ -25 \\ \hline 30'9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ \hline \end{array}$$

5. Διπλασιάζουμε τὸν ἀριθμὸ 5 ποὺ βρήκα-
με (πάνω-δεξιὰ) καὶ βρίσκουμε 10, τὸ ὁποῖο γρά-
φουμε κάτω ἀπὸ τὸν 5.

6. Διαιροῦμε τὸ 30 τοῦ 309 διὰ τοῦ 10 καὶ
τὸ πηλίκο 3 τὸ γράφουμε δεξιὰ τοῦ 10 καὶ σχη-
ματίζουμε τὸν ἀριθμὸ 103· πολλαπλασιάζουμε αὐ-
τὸν μὲ τὸν 3 (γράφουμε καὶ δεξιὰ καὶ κάτω ἀπὸ
τὸν 10 τὸ πηλίκο 3). Ἀφαιροῦμε τὸ γινόμενο
309 ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ 309 ("Ἄν τὸ γινόμενο 103×3
ἦταν μεγαλύτερο ἀπὸ τὸν 309, θὰ γράφαμε δε-
ξιὰ καὶ κάτω ἀπὸ τὸν 10 τὸν ἀμέσως μικρότερο
ἀριθμὸ τὸν 3, τὸν 2, ὡς ἑξῆς 102 καὶ θὰ συνεχι-
ζαμε νὰ ἐργαζόμαστε τὸ ἴδιο). $\times 2$

$$\begin{array}{r} \sqrt{28'09} \\ -25 \\ \hline 30'9 \\ -30'9 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \\ \hline 103 \\ \times 3 \\ \hline 309 \end{array}$$

7. Παραθέτουμε δεξιὰ ἀπὸ τὸν 5 ποὺ βρήκα-
με (στάδιο 2), τὸ πηλίκο 3. Ὁ ἀριθμὸς 53 ποὺ
βρήκαμε πάνω δεξιὰ εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα
τοῦ 2809.

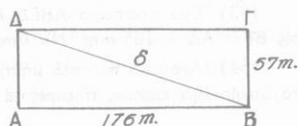
$$\begin{array}{r} \sqrt{28'09} \\ -25 \\ \hline 309 \\ -309 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 53 \\ \hline 103 \\ \times 3 \\ \hline 309 \end{array}$$

Ὁ 2809 εἶναι τέλειο τετράγωνο, γιατί κάτω
ἀριστερὰ βρήκαμε ὑπόλοιπο 0. Ἄν ἔχουμε καὶ
τρίτο τμήμα, ἐπαναλαμβάνουμε τὴν ἐργασία ἀπὸ
τὸ στάδιο 4 καὶ κάτω.

Ἐφαρμογές.

1. Νὰ ὑπολογισθεῖ ἡ διαγώνιος ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου
μὲ διαστάσεις 57 m καὶ 176 m (σχ. 73).

Ἐφαρμόζουμε τὸ πυθαγόρειο θεώρημα καὶ βρίσκουμε τὸ μήκος δ τῆς διαγωνίου. $\delta^2 = 57^2 + 176^2 \Leftrightarrow \delta^2 = 34225 \Leftrightarrow \delta = \sqrt{34225}$.



σχ. 73.

(ἐδῶ τὸ πρῶτο τμήμα εἶναι μονοψήφιο).

$\sqrt{3'42'25}$	185		
-1	29	28	365
24'2	$\times 9$	$\times 8$	$\times 5$
-224	261	224	1825
182'5			
-1825			
0			

Ὡστε ἡ διαγώνιος ἔχει μήκος 185 m^2 .

Παρατήρηση: Κατὰ τὴ διαίρεση 24:2 θέτουμε τὸν μεγαλύτερο μονοψήφιο 9. Ἄν ὅμως, ὅπως ἐδῶ, τὸ γινόμενο 29×9 εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸν 242, θέτουμε τὸν ἀμέσως μικρότερο ἀριθμὸ 8 κ.ο.κ.

Ἄν ἡ τελικὴ διαφορὰ δὲν εἶναι 0, τότε ἡ τετραγωνικὴ ρίζα, ποὺ βρίσκουμε, εἶναι κατὰ προσέγγιση μονάδας καὶ μὲ ἔλλειψη.

2. Ἡ ὑποτείνουσα ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 139 mm καὶ μία κάθετη πλευρὰ τοῦ 38 mm. Νὰ βρεθεῖ ἡ ἄλλη κάθετη πλευρὰ.

Ἄν x εἶναι ἡ τιμὴ τῆς, ἔχουμε:

$$x^2 + 38^2 = 139^2 \Leftrightarrow x^2 = 139^2 - 38^2 \Leftrightarrow x^2 = 17877 \Leftrightarrow x = \sqrt{17877}.$$

$\sqrt{1'78'77}$	133	
-1	23	263
07'8	$\times 3$	$\times 3$
-69	69	789
097'7		
-789		
188		

Ὡστε $\sqrt{17877} = 133$ κατὰ προσέγγιση μονάδας.

Δηλ. $133^2 < 17877 < 134^2$. Πραγματικὰ $\Rightarrow 17689 < 17877 < 17956$

Μὲ μέτρηση διαπιστώνουμε ὅτι ἡ πλευρὰ εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ 133 mm ἀλλὰ μικρότερη ἀπὸ 134 mm.

Ἀσκήσεις

149) Ὑπολογίστε τοὺς ἀριθμοὺς $\sqrt{121}$, $\sqrt{6241}$, $\sqrt{12321}$

150) Βρεῖτε τὶς τετραγωνικὲς ρίζες τῶν ἀριθμῶν 11, 45, 1797, 394563 κατὰ προσέγγιση μονάδας.

151) Ἐνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο ἔχει ἴσες πλευρὲς 185 m καὶ βάση 222 m. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ὕψος τοῦ καὶ τὸ ἐμβαδὸ τοῦ.

152) Μία χορδὴ AB ἐνὸς κύκλου εἶναι 336 cm καὶ ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρο τοῦ ἀπόστασι 374 cm. Ποιὸ εἶναι τὸ μήκος τῆς ἀκτίνας τοῦ κύκλου;

153) Ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ έχει βάσεις $AB=276$ mm και $ΓΔ=78$ mm και πλευρές $ΒΓ=AD=165$ mm. Νά υπολογίσετε τὸ ὕψος του καὶ τὸ ἐμβαδὸ του.

154) Ἀνάμεσα σὲ ποιά μήκη βρίσκεται ἡ ὑποτείνουσα ἐνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, τὸ ὁποῖο ἔχει κάθετες πλευρὲς μὲ μήκη 389 cm καὶ 214 cm;

§ 42. Τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγιση.

Νὰ βρεῖτε μεταξὺ ποιῶν ἀκεραίων τετραγώνων περιέχεται ὁ ἀριθμὸς 1200 καὶ νὰ διαιρέσετε τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ θὰ βρεῖτε καὶ τὸν 1200 διὰ 100. Τί παρατηρεῖτε;

Ὑπολογίζουμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 1200 κατὰ προσέγγιση μονάδας μὲ ἔλλειψη

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{12'00} & 34 \\ -9 & 64 \\ \hline 30'0 & \times 4 \\ -256 & \\ \hline 44 & 256 \end{array}$$

Αὕτὴ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 34

$$\begin{aligned} \text{Τότε ἔχουμε } 34^2 < 1200 < 35^2 &\Leftrightarrow \frac{34^2}{100} < 12 < \frac{35^2}{100} \\ \Rightarrow \frac{34^2}{10^2} < 12 < \frac{35^2}{10^2} &\Rightarrow \left(\frac{34}{10}\right)^2 < 12 < \left(\frac{35}{10}\right)^2 \\ \Rightarrow 3,4^2 < 12 < 3,5^2. \end{aligned}$$

Παρατηροῦμε, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 12 περιέχεται μεταξὺ τῶν τετραγώνων τῶν δεκαδικῶν 3,4 καὶ 3,5. Οἱ ἀριθμοὶ αὗτοί διαφέρουν κατὰ 0,1.

Ὁ ἀριθμὸς 3,4 εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 12 κατὰ προσέγγιση 0,1 μὲ ἔλλειψη. Ὁ ἀριθμὸς 3,5 εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 12 κατὰ προσέγγιση 0,1, μὲ ὑπεροχή.

Ὅταν λέμε ἀπλῶς τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγιση, θὰ ἐννοοῦμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα μὲ ἔλλειψη καὶ θὰ γράφουμε μὲ ἔλ. $\sqrt{12} = 3,4$ κατὰ προσέγγιση 0,1. Ἄν ἐργαστοῦμε ὁμοίᾳ μὲ τὸν ἀριθμὸ 120.000, θὰ βρούμε:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{12'00'00} & 346 \\ -9 & 64 \quad 686 \\ \hline 30'0 & \times 4 \quad \times 6 \\ -256 & 256 \quad 4116 \\ \hline 440'0 & \\ -4116 & \\ \hline 284 & \end{array}$$

Δηλαδή $346^2 < 120.000 < 347^2$. Διαιροῦμε διὰ $10.000 = 100^2$ καὶ ἔχουμε: $\left(\frac{346}{100}\right)^2 < 12 < \left(\frac{347}{100}\right)^2 \Rightarrow (3,46)^2 < 12 < (3,47)^2$.

Ὁ ἀριθμὸς 3,46 εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 12 κατὰ προσέγγιση ἑκατοστοῦ (0,01).

Τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού κατά προσέγγιση δεκάτου, εκατοστοῦ, χιλιοστοῦ κλπ. είναι ὁ μεγαλύτερος ἀπὸ τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς μὲ ἓνα, δύο, τρία κλπ. δεκαδικὰ ψηφία ἀντιστοιχῶς, τοῦ ὁποῖου τὸ τετράγωνο εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ, ποὺ μᾶς ἔχει δοθεῖ.

Γιὰ νὰ βροῦμε προηγουμένως τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 12 κατὰ προσέγγιση 0,1, ὑπολογίσαμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $1200 = 12 \cdot 100 = 12 \cdot 10^2$ κατὰ προσέγγιση μονάδας καὶ τὴ διαιρέσαμε διὰ 10.

Γιὰ τὸν ὑπολογισμό τῆς τετραγωνικῆς ρίζας τοῦ 12 κατὰ προσέγγιση 0,01 ὑπολογίσαμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $120000 = 12 \cdot 10000 = 12 \cdot 100^2$ καὶ τὴ διαιρέσαμε διὰ 100.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγιση δεκάτου, εκατοστοῦ, χιλιοστοῦ, ... ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: 1) πολλαπλασιάζουμε τὸν ἀριθμὸ ἐπὶ $100 = 10^2$, $10000 = 100^2$, $1000000 = 1000^2$ κλπ. ἀντιστοιχῶς. 2) Ὑπολογίζουμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ γινομένου κατὰ προσέγγιση μονάδας καὶ 3) διαιροῦμε αὐτὴ διὰ 10, 100, 1000 ἀντιστοιχῶς.

Τετραγωνικὴ ρίζα κλασματικοῦ ἀριθμοῦ.

α) Δίνεται τὸ κλάσμα $\frac{16}{25}$. Παρατηροῦμε ὅτι οἱ ὅροι του εἶναι ἀκέραια τετράγωνα: $\frac{16}{25} = \frac{4^2}{5^2} \Rightarrow \frac{16}{25} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}$. Ὁ $\frac{16}{25}$ λέγεται τέλειο τετράγωνο τοῦ ρητοῦ $\frac{4}{5}$. Οἱ ἀριθμοὶ $\frac{16}{25}$, $\frac{36}{81}$, $\frac{9}{64}$, ... εἶναι τέλεια τετράγωνα ρητῶν ἀριθμῶν.

Γενικά: $\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2}} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sqrt{\alpha^2}}{\sqrt{\beta^2}}$, διότι $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$

β) Νὰ βρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\frac{3}{8}$ κατὰ προσέγγιση $\frac{1}{8}$. Πολλαπλασιάζουμε τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ ἐπὶ 8^2 καὶ ἔχουμε $\frac{3}{8} \cdot 8^2 = 3 \cdot 8 = 24$. Ὑπολογίζουμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ γινομένου 24 κατὰ προσέγγιση μονάδας καὶ τὴ διαιροῦμε διὰ 8. Δηλαδή $\sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{24}}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ κατὰ προσέγγιση $\frac{1}{8}$, δηλαδή μὲ ἑλλ. $\sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{1}{2}$ κατὰ προσέγγιση $\frac{1}{8}$.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα κλάσματος κατὰ προσέγγιση τῆς κλασματικῆς μονάδας του, πολλαπλασιάζουμε τὸ κλάσμα ἐπὶ τὸ τετράγωνο τοῦ παρονομαστή, ὑπολογίζουμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ γι-

νομένου κατά προσέγγιση μονάδας και τη διαιρούμε με τὸν παρονομαστή τοῦ κλάσματος.

Ἐφαρμογές.

1) Νὰ βρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 19,763 κατὰ προσέγγιση 0,01. Πολλαπλασιάζουμε τὸν ἀριθμὸ ἐπὶ 10000 καὶ ἔχουμε $19,763 \cdot 10000 = 197630$.

Ὑπολογίζουμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 197630 κατὰ προσέγγιση μονάδας, ἡ ὁποία εἶναι 444, καὶ τὴ διαιρούμε διὰ 100. Ὡστε $\sqrt{19,763} = 4,44$ κατὰ προσέγγιση 0,01.

2) Θέλουμε νὰ μετρήσουμε τὴν ὑποτείνουσα ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ κάθετες πλευρὲς $\frac{3}{5}$ m καὶ $\frac{2}{3}$ m καὶ διαθέτουμε μιὰ μετροταινία, ποὺ ἔχει διαιρέσεις σὲ mm.

Μεταξὺ ποιῶν τιμῶν θὰ βροῦμε τὸ μῆκος τῆς ὑποτείνουσας; Ἐστω χ m τὸ μῆκος τῆς ὑποτείνουσας. Τότε $\chi^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow \chi^2 = \frac{9}{25} + \frac{4}{9} \Rightarrow \chi^2 = \frac{81+100}{225} \Rightarrow \chi^2 = \frac{181}{225} \Rightarrow \chi = \sqrt{\frac{181}{225}}$.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μῆκος μέχρι χιλιοστόμετρο, πρέπει νὰ ὑπολογίσουμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\frac{181}{225}$ κατὰ προσέγγιση 0,001. Γιὰ τὸ σκοπὸ αὐτὸ πολλαπλασιάζουμε τὸ $\frac{181}{225}$ ἐπὶ 1000^2 δηλαδή $\frac{181}{225} \cdot 1000000 = \frac{181000000}{225}$.

Βρίσκουμε τὸ ἀκέραιο πηλίκο τοῦ $\frac{181000000}{225} = 804444$.

Ὑπολογίζουμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 804444 κατὰ προσέγγιση μονάδας καὶ τὴ διαιρούμε διὰ 1000.

$\sqrt{80'44'44''}$ $\underline{-64}$ $164'4''$ $\underline{-15'2''}$ $12'34'4''$ $\underline{-10'71''}$ $1628''$	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">896</td> <td style="padding: 5px;">169</td> <td style="padding: 5px;">1786</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">$\times 9$</td> <td style="padding: 5px;">$\times 6$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">1521</td> <td style="padding: 5px;">10716</td> <td></td> </tr> </table>	896	169	1786		$\times 9$	$\times 6$	1521	10716	
896	169	1786								
	$\times 9$	$\times 6$								
1521	10716									

$$\sqrt{\frac{181}{225}} = 0,896 \text{ κατὰ προσέγγιση } 0,001 \Rightarrow 0,896 < \chi < 0,897.$$

Ὡστε τὸ μῆκος τῆς ὑποτείνουσας εἶναι μεταξὺ 0,896 m καὶ 0,897 m.

Σημείωση 1. Νὰ ὑπολογίσετε τὶς ἀνώτερες καὶ κατώτερες τετραγωνικὲς ρίζες τοῦ 3 κατὰ προσέγγιση 0,1, 0,01, 0,001 καὶ νὰ τὶς διατάξετε πάνω σ' ἕνα ἀξονα.

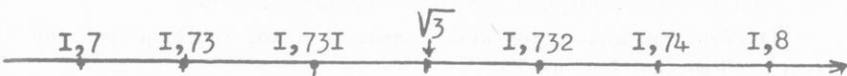
(Ὅταν λέμε ἀνώτερες καὶ κατώτερες τετρ. ρίζες, ἔννοοῦμε τὶς τετραγ. ρίζες μὲ ὑπεροχὴ καὶ μὲ ἔλλειψη ἀντιστοίχως).

Οἱ ρίζες εἶναι 1,7, 1,8 κατὰ προσέγγιση 0,1

1,73, 1,74 κατὰ προσέγγιση 0,01

1,731, 1,732 κατά προσέγγιση 0,001

Διατάσσουμε αυτές πάνω σ' έναν άξονα.



Όσοσδήποτε φορές και αν επαναλάβουμε τὸν ὑπολογισμό, δὲν θὰ βροῦμε ἀκριβῶς τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 3. Ἄν τοποθετήσουμε τὶς κατὰ προσέγγιση τετραγωνικὲς ρίζες πάνω σ' ἕναν ἄξονα μεταξύ τῶν ἀνωτέρων καὶ κατωτέρων, θὰ ὑπάρχει πάντοτε ἓνα σημεῖο. Σ' αὐτὸ τοποθετεῖται ὁ ἀριθμὸς 1,731 ..., ὁ ὁποῖος ἔχει ἀπειρα δεκαδικὰ ψηφία, ἀλλὰ δὲν εἶναι περιοδικός. Τὸν ἀριθμὸ αὐτὸ τὸν λέμε τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 3 καὶ τὸν συμβολίζουμε μὲ $\sqrt{3}$.

Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς δὲν ἀνήκει στὸ $\mathbb{Q}$. Σὲ μεγαλύτερη τάξη θὰ μάθουμε ὅτι ὀνομάζεται **ἀσύμμετρος** ἀριθμός. Ἀριθμοὶ αὐτοῦ τοῦ εἶδους εἶναι καὶ οἱ $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ κλπ.

Σημείωση 2. Ὁ ἀριθμὸς 2 εἶναι τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 4, γιὰτὶ $2^2=4$. Παρατηροῦμε ὅμως ὅτι καὶ $(-2)^2=4$. Ὁ -2 λέγεται δεῦτερη τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 4.

Γενικά, ἂν $a > 0$, ἐκτός ἀπὸ τὸν θετικὸ ἀριθμὸ $\sqrt{a}$ ὑπάρχει καὶ δεῦτερη τετραγωνικὴ ρίζα, ποὺ συμβολίζεται μὲ $-\sqrt{a}$.

Ἀσκήσεις

155) Ὑπολογίστε τὶς τετραγωνικὲς ρίζες τῶν ἀριθμῶν 138, 272, 19836, κατὰ προσέγγιση 0,1 καὶ 0,001.

156) Ὑπολογίστε τὶς τετραγωνικὲς ρίζες τῶν ἀριθμῶν 97, 635, $\frac{3}{17}$, 0,003845 κατὰ προσέγγιση 0,001.

157) Ὑπολογίστε τὶς τετραγωνικὲς ρίζες τῶν κλασμάτων $\frac{2}{5}$, $\frac{13}{19}$, $\frac{47}{131}$, $\frac{656}{713}$ κατὰ προσέγγιση $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{19}$, $\frac{1}{131}$, $\frac{1}{713}$ ἀντιστοίχως.

158) Ποιὸ εἶναι κατὰ προσέγγιση 0,001 τὸ μήκος τῆς διαγωνίου ἑνὸς τετραγώνου μὲ πλευρὰ τὴ μονάδα μήκους;

159) Ποιὸ εἶναι κατὰ προσέγγιση 0,0001 τὸ ὕψος ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου μὲ πλευρὰ 2 cm;

Γ'. ΜΗΚΟΣ ΚΥΚΛΟΥ — ΕΜΒΑΔΟ ΚΥΚΛΟΥ

Α'. Μήκος κύκλου

§ 43. Ἀποκόψτε ἕναν κύκλο μὲ ἀκτῖνα 5 cm ἀπὸ ἕνα χονδρὸ χαρτόνι ἢ ξύλο. Μετρήστε τὸ μήκος τοῦ κύκλου μὲ μιὰ πάνινη μετροταινία περιτυλίγοντάς την γύρω ἀπὸ τὸν κύκλο καὶ βρεῖτε τὸ λόγος τοῦ μήκους τοῦ κύκλου πρὸς τὸ μήκος τῆς διαμέτρου του.

Τὸ μήκος τοῦ κύκλου ποὺ μετρήθηκε εἶναι 31,4 cm. Ἄρα $\frac{31,4 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 3,14$.

Ἐπαναλάβουμε τὴν ἴδια ἐργασία μὲ περισσότερους κύκλους, θὰ παρατηρήσουμε ὅτι ὁ λόγος τοῦ μήκους κάθε κύκλου πρὸς τὸ μήκος τῆς διαμέτρου του εἶναι 3,14 (κατὰ προσέγγιση). Δηλαδή:

Ὁ λόγος τοῦ μήκους τοῦ κύκλου πρὸς τὸ μήκος τῆς διαμέτρου του εἶναι σταθερὸς καὶ ἴσος μὲ 3,14.

Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς παριστάνεται διεθνῶς μὲ τὸ γράμμα π τοῦ ἀλφαβήτου μας (*).

Ἄν παραστήσουμε μὲ Γ τὸ μήκος ἐνὸς κύκλου μὲ ἀκτίνα R , θὰ ἔχουμε:

$$\frac{\Gamma}{2R} = \pi \Leftrightarrow \boxed{\Gamma = 2\pi R}$$

Δηλαδή: Τὸ μήκος τοῦ κύκλου εἶναι ἴσο μὲ τὸ γινόμενο τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου του ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ π .

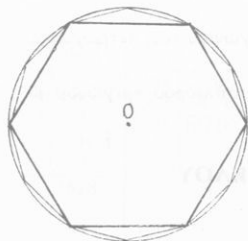
§ 44. Μῆκος τόξου.

Γνωρίζουμε ὅτι ὁ κύκλος διαιρεῖται σὲ 360° . Ἐστω τ τὸ μήκος ἐνὸς τόξου μ° καὶ Γ τὸ μήκος τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος εἶναι τόξο 360° . Τότε ἔχουμε:

$\frac{\tau}{\Gamma} = \frac{\mu}{360}$ (ἐπεὶδὴ ὁ λόγος δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸ λόγο τῶν τιμῶν τους, ἂν μετρηθοῦν μὲ τὴν ἴδια μονάδα).

Ἐπομένως: $\frac{\tau}{2\pi R} = \frac{\mu}{360} \Leftrightarrow \tau = 2\pi R \cdot \frac{\mu}{360} \Leftrightarrow \boxed{\tau = \pi R \frac{\mu}{180}}$ Δηλαδή:

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μήκος ἐνὸς τόξου μ° , πολλαπλασιάζουμε τὸ μήκος τοῦ κύκλου ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{360}$ ἢ τὸ μήκος τοῦ ἡμικυκλίου ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{180}$.



σχ. 74.

Σημείωση: Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μήκος τοῦ κύκλου, μπορούμε νὰ χρησιμοποιήσουμε τὴν ἐξῆς μέθοδο: Ἐγγράφουμε στὸν κύκλο ἓνα κανονικὸ κυρτὸ ἑξάγωνο. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ περίμετρός του εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὸ μήκος τοῦ κύκλου. Ἄν τώρα ἐγγράψουμε κανονικὸ δωδεκάγωνο, παρατηροῦμε ὅτι ἡ περίμετρός του πλησιάζει περισσότερο τὸ μήκος τοῦ κύκλου, ἀλλὰ παραμένει μικρότερη ἀπ' αὐτό. Ἄν διπλασιάσουμε συνεχῶς τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, πλησιάζουμε ὅσο θέλουμε τὸ μήκος τοῦ κύκλου (σχ. 74).

Σημ. Τὴ μέθοδο αὐτὴ χρησιμοποίησε ὁ Ἀρχιμήδης στὸ βιβλίο του «Κύκλου μέτρησις».

* Ἱστορική σημείωση:

Ἀπὸ τὴν ἀρχαιότητα εἶχε διαπιστωθεῖ ὅτι ὁ λόγος τοῦ μήκους τοῦ κύκλου διὰ τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου του εἶναι **σταθερὸς**. (Ἰπποκράτης ὁ Χίος 450 π.Χ.).

Αὐτὸ τὸ σταθερὸ λόγο τὸν παρέστησαν μὲ τὸ γράμμα π .

Πρώτος ό μεγάλος Έλληνας μαθηματικός τής αρχαιότητας **Άρχιμήδης** όρισε κατά προσέγγιση ως τιμή τού π τό κλάσμα $\frac{22}{7} = 3,1428 \left(\frac{310}{71} < \pi < \frac{31}{7} \right)$. Για τό σκοπό αυτό χρησιμοποίησε τή μέθοδο πού αναφέρουμε στήν προηγούμενη σημείωση.

Ό Πτολεμαίος βρήκε τήν τιμή 3,14166. Ό Όλλανδός γεωμέτρης Μέττιους (1571-1635 μ.Χ.) βρήκε τό $\pi = 3,1415920$.

Κατά προσέγγιση τιμή τού π παίρνουμε τόν αριθμό 3,14 καί για μεγαλύτερη προσέγγιση τόν αριθμό 3,14159.

Γι' ατή τήν τιμή τού π ύπάρχει καί μνημονικός κανόνας.

αεί ό Θεός ό Μέγας γεωμετρεί

3, 1 4 1 5 9

Δηλαδή ό αριθμός τών γραμμάτων κάθε λέξης αντιπροσωπεύει τό αντίστοιχο ψηφίο τού αριθμού π .

Άσκήσεις

160) Νά βρείτε τό μήκος τού κύκλου, πού έχει άκτίνα 4 cm.

161) Νά ύπολογίσετε τήν άκτίνα τού κύκλου, ό όποιός έχει μήκος 37,68 cm.

162) Ποιό είναι τό μήκος τόξου 50° σ' έναν κύκλο άκτίνας 12 cm;

163) Νά βρείτε τό μήκος ενός τόξου 100° σ' έναν κύκλο μέ άκτίνα 5 cm.

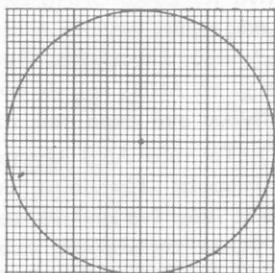
164) Ποιά είναι ή άκτίνα ενός κύκλου, άν ένα τόξο του 30° έχει μήκος 2 cm;

165) Ένας κύκλος έχει μήκος 62π cm. Ποιά είναι ή άκτίνα τού κύκλου αούτου;

Β'. Έμβαδό κύκλου καί κυκλικού τομέα

§ 45. Έμβαδό κύκλου.

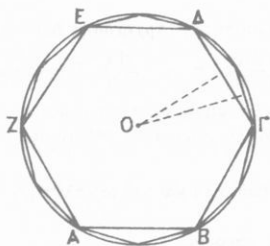
Έμβαδό κύκλου καλούμε τήν έκταση τής επιφάνείας του, δηλαδή τήν έκταση τού έσωτερικού του, ή όποία έχει έκφρασθεί σέ μονάδες μετρήσεως.



σχ. 75.

Πάνω σέ χιλιοστομετρικό χαρτί σχηματίστε έναν κύκλο μέ άκτίνα 2 cm. (Χρησιμοποιήστε ως κέντρο ένα σημείο τομής δύο έντονων γραμμών). Μετρήστε τό έμβαδό τής επιφάνείας του σέ cm^2 . (σχ. 75).

Μετρούμε τά cm^2 , πού περικλείει ό κύκλος καί τά επί πλέον mm^2 καί βρίσκουμε ότi τó έμβαδό τού κύκλου είναι περίπου $12,56 \text{ cm}^2$. Παρατηρούμε ότi $3,14 \cdot 2^2 = 3,14 \cdot 4 = 12,56 \text{ cm}^2$. Δηλαδή τó έμβαδό τού κύκλου δίνεται άπό τόν τύπο $3,14 \cdot R^2$ ή $E = \pi R^2$ (όπου R τó μήκος τής άκτίνας τού κύκλου). Μπορούμε νά αίτιολογήσουμε τά παραπάνω ως έξης:



σχ. 76.

Σχεδιάζουμε έναν κύκλο με ακτίνα R (σχ.76). Στον κύκλο αυτό εγγράφουμε ένα κανονικό κυρτό έξάγωνο $ΑΒΓΔΕΖ$. 'Η περίμετρος του κανονικού έξαγώνου είναι μικρότερη από το μήκος του κύκλου. Διχοτομούμε τὰ τόξα $\widehat{ΑΒ}$, $\widehat{ΒΓ}$, $\widehat{ΓΔ}$, ... με το γνωστό τρόπο και εγγράφουμε έτσι ένα κανονικό δωδεκάγωνο. 'Η περίμετρος του είναι μεγαλύτερη από την περίμετρο του $ΑΒΓΔΕΖ$, αλλά παραμένει μικρότερη

από το μήκος του κύκλου και πλησιάζει περισσότερο αυτόν. Στη συνέχεια εγγράφουμε στον ίδιο κύκλο ένα κανονικό κυρτό 24-γωνο κ.ο.κ.

Διπλασιάζοντας συνεχώς το πλήθος των πλευρών του εγγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου παρατηρούμε ότι:

1) 'Η περίμετρος του κανονικού κυρτού πολυγώνου, που εγγράφεται στον κύκλο, πλησιάζει **όσο θέλουμε** το μήκος του κύκλου.

2) Το απόστημα **πλησιάζει όσο θέλουμε** το μήκος της ακτίνας του κύκλου.

3) Το έμβαδο του κανονικού πολυγώνου **πλησιάζει όσο θέλουμε** το έμβαδο του κύκλου.

"Αν αντίκαταστήσουμε στον τύπο του έμβαδου του κανονικού πολυγώνου ($E = \frac{1}{2} \times \text{μήκος περιμέτρου} \times \text{μήκος απόστήματος}$) το μήκος της περιμέτρου με το μήκος του κύκλου $2\pi R$ και το μήκος του απόστήματος με την ακτίνα R , έχουμε: $E = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2$, άρα $E = \pi R^2$.

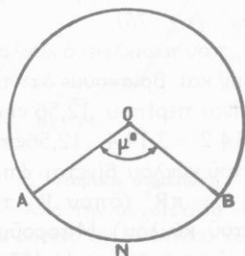
Δηλαδή: Το έμβαδο ενός κύκλου ισούται με το γινόμενο του π επί το τετράγωνο της ακτίνας του.

Σημ. Τη μέθοδο αυτή χρησιμοποίησε ο 'Αρχιμήδης στο βιβλίο του «κύκλου μέτρησις».

§ 46. Έμβαδο κυκλικού τομέα

Θεωρούμε έναν κύκλο με κέντρο O και ακτίνα R . Έστω $OANB$ ένας τομέας του κύκλου. Όπως είναι γνωστό, **κυκλικός τομέας** λέγεται ή μει-

κτή κλειστή γραμμή που αποτελείται από ένα τόξο κύκλου (π.χ. το $\widehat{ΑΝΒ}$) και τις δύο ακτίνες, που καταλήγουν στα άκρα του τόξου αυτού (σχ. 77). Το τόξο $\widehat{ΑΝΒ}$ λέγεται βάση του κυκλικού τομέα. Μπορούμε να θεωρήσουμε τον κύκλο σαν ένα κυκλικό τομέα, του οποίου ή γωνία της κορυφής είναι 360° . Έμβαδο κυκλικού τομέα καλούμε την έκταση της επιφάνειάς του (δηλαδή του έσωτερικού του) έκφρασμένη σε μονάδες μετρήσεως.



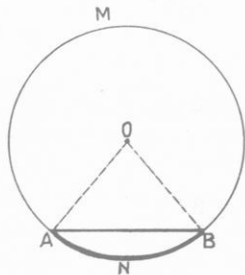
σχ. 77.

Ἐάν ε εἶναι τὸ ἔμβαδὸ ἑνὸς κυκλικοῦ τομέα μ° καὶ E τὸ ἔμβαδὸ τοῦ κύκλου, θὰ ἔχουμε $\frac{\varepsilon}{E} = \frac{\mu}{360} \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{E \cdot \mu}{360} \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{\pi R^2 \cdot \mu}{360}$.

Ἀλλὰ $\varepsilon = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \mu}{360} = \frac{\pi R \cdot \mu}{180} \cdot \frac{R}{2} = \tau \cdot \frac{R}{2}$ (ὅπου τ τὸ μήκος τῆς βάσης τοῦ τομέα).

Ἐφαρμογές.

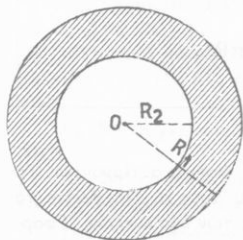
1. Ἐμβαδὸ κυκλικοῦ τμήματος: Ἐπιφάνεια κυκλικοῦ τμήματος ὀνομάζουμε τὴν ἐπιφάνεια, ποὺ περιέχεται μεταξὺ ἑνὸς τόξου κύκλου καὶ τῆς χορδῆς του (π.χ. στὸ σχ. 78 τὸ σχῆμα ANBA καθὼς καὶ τὸ AMBA εἶναι κυκλικά τμήματα).



σχ. 78.

εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ ἡμικύκλιο, προσθέτοντας στὸ ἔμβαδὸ τοῦ κυκλικοῦ τομέα AOBMA τὸ ἔμβαδὸ τοῦ τριγώνου AOB.

2. Ἐμβαδὸ κυκλικῆς στεφάνης: Ἡ ἐπιφάνεια ποὺ περιέχεται μεταξὺ δύο ὁμόκεντρων κύκλων μὲ ἀκτίνες R_1 καὶ R_2 (ὅπου $R_1 > R_2$) λέγεται **κυκλικὴ στεφάνη** (ἢ κυκλικὸς δακτύλιος) (σχ. 79). Τὸ ἔμβαδὸ τῆς κυκλικῆς στεφάνης δίνεται ἀπὸ τὸν τύπο $E = \pi R_1^2 - \pi R_2^2 = \pi (R_1^2 - R_2^2)$.



σχ. 79.

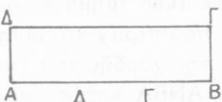
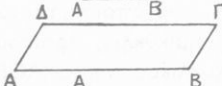
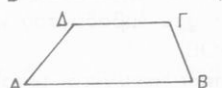
Ἀσκήσεις

- 166) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἔμβαδὸ ἑνὸς κύκλου μὲ ἀκτίνα 13 cm.
- 167) Νὰ βρεθεῖ ἡ ἀκτίνα ἑνὸς κύκλου, ποὺ ἔχει ἔμβαδὸ 50,24 cm².
- 168) Τὸ μήκος ἑνὸς κύκλου εἶναι 37,68 dm. Νὰ βρεῖτε τὸ ἔμβαδὸ του.
- 169) Νὰ βρεῖτε τὸ ἔμβαδὸ ἑνὸς κυκλικοῦ τομέα 60° ἑνὸς κύκλου ἀκτίνας 10 cm.
- 170) Νὰ ὑπολογισθεῖ τὸ ἔμβαδὸ τῆς κυκλικῆς στεφάνης, ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ δύο ὁμόκεντρους κύκλους μὲ ἀκτίνες 8 cm καὶ 5 cm.
- 171) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἔμβαδὸ ἑνὸς κύκλου μὲ ἀκτίνα $R = 3\alpha$.
- 172) Τὸ ἔμβαδὸ ἑνὸς κύκλου εἶναι 24 π α². Νὰ ὑπολογίσετε τὴν ἀκτίνα του.
- 173) Δίνεται κύκλος μὲ ἀκτίνα $R = 4\alpha$ καὶ ἓνας κυκλικὸς τομέας τοῦ γωνίας 60°. Νὰ βρεῖτε τὸ ἔμβαδὸ τοῦ κυκλικοῦ τομέα αὐτοῦ καὶ τὴν περίμετρό του.

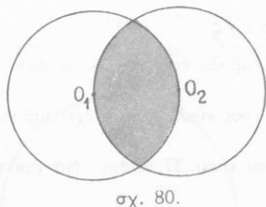
174) Νά βρείτε τὸ ἔμβαδὸ ἑνὸς κυκλικοῦ τμήματος, ποὺ ὀρίζεται σ' ἕναν κύκλο μὲ ἀκτίνα R καὶ ποὺ ἔχει ἀντίστοιχο τόξο 60° . Ἐφαρμογὴ $R=15$ cm.

175) Ἡ περίμετρος ἑνὸς κυκλικοῦ τομέα, ὁ ὁποῖος ὀρίζεται σ' ἕναν κύκλο μὲ ἀκτίνα 6 dm, εἶναι 13,57 dm. Νά βρείτε τὴν ἐπίκεντρη γωνία τοῦ κυκλικοῦ τομέα καὶ τὸ ἔμβαδὸ του.

Πίνακας τύπων τοῦ ἔμβαδου διάφορων ἐπιπέδων σχημάτων

Εἰκόνα τοῦ εὐθ. σχήμ.	Ὄνομα τοῦ σχήματος	Τύπος ποὺ δίνει τὸ ἔμβαδὸ τῆς ἐπιφάνειάς του
	Ὁρθογώνιο	$E = \alpha\beta$ (ἢ $E = B \cdot \nu$)
	Τετράγωνο	$E = \alpha^2$
	Παραλληλόγραμμο	$E = \beta \cdot \nu$
	Τρίγωνο	$E = \frac{\alpha \cdot \nu_1}{2} = \frac{\beta \cdot \nu_2}{2} = \frac{\gamma \cdot \nu_3}{2}$
	Τραπεζίο	$E = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \cdot \nu$
	Κύκλος	$E = \pi R^2$

Διάφορες ασκήσεις στὰ ἔμβραδά.



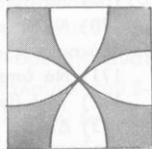
σχ. 80.

τε τὸ ἔμβαδὸ τῆς γραμμοσκιασμένης ἐπιφάνειας τοῦ σχήματος (81).

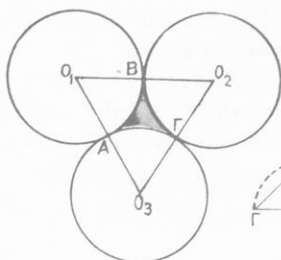
178) Δίδονται τρεῖς ἴσοι κύκλοι μὲ κέντρα O_1, O_2, O_3 καὶ ἀκτίνα $R=10$ cm. Οἱ κύκλοι αὐτοὶ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς ἀνά δύο καὶ ὀρίζουν ἔτσι ἕνα καμπυλόγραμμο τρίγωνο $ΑΒΓ$ (τὸ γραμμοσκιασμένο ἐπίπεδο μέρος). Νά ὑπολογίσετε τὸ ἔμβαδὸ τῆς ἐπιφάνειας τοῦ καμπυλόγραμμου αὐτοῦ τριγώνου (σχ. 82).

176) Δύο ἴσοι κύκλοι μὲ ἀκτίνα α τέμνονται. Τὰ κέντρα τους ἀπέχουν μεταξύ τους α . Νά βρείτε τὸ ἔμβαδὸ τῆς κοινῆς ἐπιφάνειας τῶν δύο κύκλων. Ἐφαρμογὴ $\alpha=5$ cm (σχ. 80).

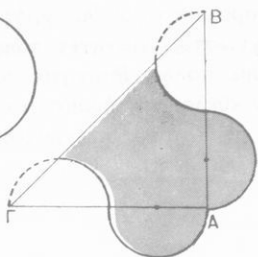
177) Δίνεται ἕνα τετράγωνο πλευρᾶς 10 cm. Μὲ κέντρα τῆς κορυφῆς του καὶ ἀκτίνα τὸ μισό τῆς διαγωνίου του γράφουμε τέσσερα τεταρτοκύκλια (τὰ ὁποῖα περατώνονται στὶς πλευρὲς τοῦ τετραγώνου). Νά βρεῖ-



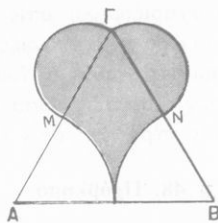
σχ. 81.



σχ. 82



σχ. 83.



σχ. 84.

179) Δίνεται ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$. Το μήκος τῶν κάθετων πλευρῶν του είναι α . Μὲ διαμέτρους τὰ μισὰ τῶν κάθετων πλευρῶν του γράφουμε 4 ἡμικύκλια, ὅπως φαίνεται στὸ σχῆμα 83. Νὰ βρεῖτε τὸ ἔμβαδὸ τῆς γραμμοσκιασμένης ἐπιφάνειας. Ἐφαρμογή: $\alpha = 4$ cm.

180) Δίνεται ένα ἰσοπλευρὸ τρίγωνο $AB\Gamma$ μὲ μήκος πλευρᾶς α . Μὲ κέντρα τὶς κορυφές B καὶ A καὶ ἀκτῖνα $\frac{\alpha}{2}$ γράφουμε τόξα, τὰ ὁποῖα νὰ βρίσκονται στὸ ἐσωτερικὸ τῶν γωνιῶν A καὶ B καὶ νὰ περατώνονται στὶς πλευρές του. Ἐπίσης γράφουμε δύο ἡμικύκλια μὲ διαμέτρους $GM = GN = \frac{\alpha}{2}$, ὅπως φαίνεται στὸ σχῆμα 84. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἔμβαδὸ τῆς γραμμοσκιασμένης ἐπιφάνειας. Ἐφαρμογή: $\alpha = 6$ cm.

181) Δίνεται ένα τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ὀρθογώνιο στὰ A καὶ Δ , στὸ ὁποῖο ἔχουμε $AD = AB = \frac{\Gamma\Delta}{2}$. Τὸ ἔμβαδὸ τοῦ τραπέζιου αὐτοῦ εἶναι $6\alpha^2$. Ὑπολογίστε τὶς βάσεις καὶ τὸ ὕψος τοῦ τραπέζιου συναρτήσει τοῦ α .

182) Σχεδιάστε ένα τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($\Delta\Gamma \parallel AB$). Βρεῖτε τὸ μέσο I τῆς $B\Gamma$ καὶ φέρετε τὴν ΔI , ἡ ὁποία τέμνει τὴν AB στὸ E . Συγκρίνετε τὰ ἔμβαδὰ τοῦ τραπέζιου καὶ τοῦ τριγώνου ΔAE .

183) Ἀπὸ τὸ μέσο I τῆς πλευρᾶς $\Delta\Gamma$ τοῦ τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$ ($AD \parallel B\Gamma$) φέρετε παράλληλο πρὸς τὴν AB , ἡ ὁποία τέμνει τὶς εὐθεῖες AD καὶ $B\Gamma$ στὰ σημεῖα E καὶ Z ἀντιστοίχως.

1ο. Νὰ συγκρίνετε τὰ ἔμβαδὰ τοῦ τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$ καὶ τοῦ παραλληλογράμμου $ABZE$.

2ο. Φέρετε τὴν IK κάθετο στὴν AB καὶ βρεῖτε τὸ ἔμβαδὸ τοῦ τραπέζιου ἀπὸ τὸ μήκος τῆς AB καὶ τὸ μήκος τῆς IK .

184) Στὸ παραπάνω τραπέζιο φέρετε τὶς διαγωνίους, οἱ ὁποῖες τέμνονται στὸ O .

1ο. Συγκρίνετε τὰ ἔμβαδὰ τῶν τριγῶνων $AB\Gamma$ καὶ $\Delta B\Gamma$ καὶ

2ο. Συγκρίνετε ἐπίσης τὰ ἔμβαδὰ τῶν τριγῶνων AOB καὶ ΔOG .

Δ. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

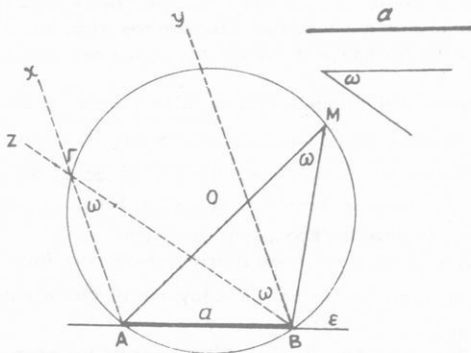
§ 47. Λέμε ὅτι κατασκευάζουμε ἓνα σχῆμα, ὅταν τὸ σχεδιάζουμε μὲ τὴ βοήθεια τοῦ χάρακα καὶ τοῦ διαβήτη, μὲ βάση ὁρισμένα δεδομένα· π.χ. ὅταν κατασκευάζουμε ἓνα τρίγωνο, τοῦ ὁποῖου μᾶς δίνονται οἱ πλευρές· ὅταν κατασκευάζουμε τὴ μεσοκάθετο ἐνὸς δεδομένου εὐθύγραμμου τμήματος ἢ ὅταν κατασκευάζουμε τὴ διχοτόμο μιᾶς δεδομένης γωνίας.

Τις κατασκευές τις πραγματοποιοῦμε γράφοντας εὐθείες καὶ κύκλους καὶ στηριζόμενοι στὶς γνωστὲς ιδιότητες τῶν σχημάτων.

Τώρα πιά γνωρίζουμε πολλές ιδιότητές των σχετικὲς μετὶς ἐγγεγραμμένες γωνίες σ' ἓναν κύκλο, τὴν ὁμοιότητα καὶ τὰ ἐμβαδὰ τῶν σχημάτων. Συνεπῶς εἴμαστε σὲ θέση νὰ πραγματοποιήσουμε καὶ ἄλλες κατασκευές πέρα ἀπ' ὅσες ἔχουμε μάθει.

§ 48. Πρόβλημα.

Δίνεται ἓνα εὐθ. τμήμα a καὶ μιὰ γωνία ω . Νὰ κατασκευασθεῖ τόξο κύκλου, ποὺ νὰ ἔχει χορδὴ ἴση μετὶς a καὶ νὰ ἐγγράφεται σ' αὐτὸ γωνία ἴση μετὶς ω .



σχ. 85.

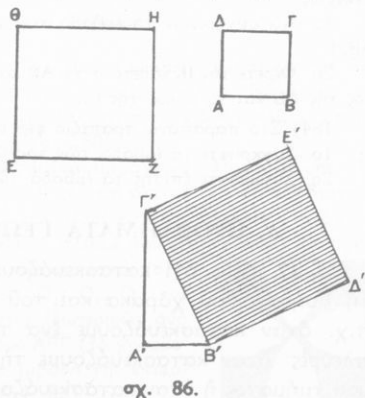
Σὲ μιὰ εὐθεία ϵ παίρνουμε τμήμα $AB = a$ καὶ φέρνουμε πρὸς τὸ ἴδιο μέρος τῆς ϵ τὶς παράλληλες ἡμιεὐθείες AX καὶ BY . Κατασκευάζουμε τώρα τὴ γωνία $\widehat{YBZ} = \omega$. Ἡ BZ τέμνει τὴν AX στὸ σημεῖο Γ (ἡ γωνία $\widehat{AGB}$ εἶναι ἴση μετὶς ω κατὰ τὶς γνωστὲς ιδιότητες τῶν παραλλήλων). Κατασκευάζουμε σύμφωνα μετὰ τὰ γνωστὰ τὸν περιγεγραμμένο κύκλο τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ (σχ.85).

Τὸ τόξο AGB τοῦ κύκλου αὐτοῦ εἶναι τὸ ζητούμενο, γιατί κάθε γωνία AMB μετὶς τὴν κορυφὴ τῆς πάνω σ' αὐτὸ εἶναι ἴση μετὶς τὴν $\widehat{AGB}$, δηλαδή ἴση μετὶς ω .

§ 49. Πρόβλημα 1ο.

Δίνονται δύο τετράγωνα $AB\Gamma A$ καὶ $EZH\Theta$. Νὰ κατασκευασθεῖ ἓνα τετράγωνο, ποὺ νὰ ἔχει ἐμβαδὸ ἴσο μετὶς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο αὐτῶν τετραγώνων.

Ἄν καλέσουμε χ τὴν τιμὴ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου ποὺ ζητεῖται, θὰ πρέπει νὰ εἶναι $\chi^2 = (AB)^2 + (EZ)^2$. Ἐπειδὴ αὐτὸ μᾶς ὑπενθυμίζει τὸ πυθαγόρειο θεώρημα, κάνουμε τὴν ἑξῆς κατασκευή. Κατασκευά-

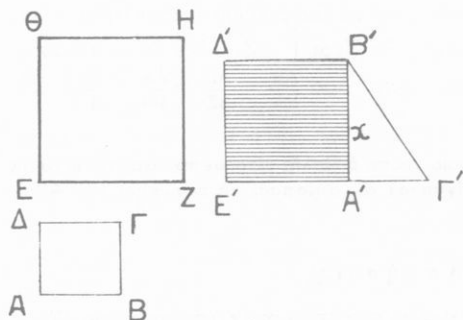


σχ. 86.

ζουμε ένα ὀρθογώνιο τρίγωνο $B'A'Γ'$ με κάθετες πλευρές $A'B' = AB$ και $A'Γ' = EZ$. Με πλευρά την ὑποτείνουσά του κατασκευάζουμε τὸ τετράγωνο $B'D'E'Γ'$ (σχ. 86). Αὐτὸ εἶναι τὸ ζητούμενο, γιατί $(B'Γ')^2 = (A'B')^2 + (A'Γ')^2$, δηλαδή $(B'Γ')^2 = (AB)^2 + (EZ)^2$.

Πρόβλημα 2ο. Δίνονται δύο τετράγωνα $ABΓΔ$ καὶ $EZHΘ$ (σχ. 87).

Νὰ κατασκευασθεῖ ἓνα τετράγωνο, ποὺ νὰ ἔχει ἐμβαδὸ ἴσο μετὰ τὴ διαφορά τῶν δύο αὐτῶν τετραγώνων.



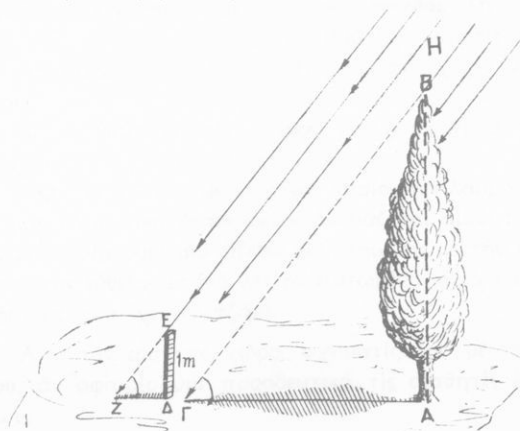
σχ. 87.

τὸ τετράγωνο $A'B'D'E'$, τὸ ὁποῖο εἶναι τὸ ζητούμενο.

§ 50. Μερικὲς φορές μπορούμε νὰ μετρήσουμε φυσικὰ μεγέθη με γεωμετρικὲς κατασκευές.

Παράδειγμα:

Μετροῦμε τὸ μῆκος τῆς σκιᾶς ἑνὸς δένδρου καὶ τὸ βρίσκουμε 22,5 m.



σχ. 88.

Πώς μπορούμε να μετρήσουμε το ύψος του δένδρου (χωρίς ν' ανεβοῦμε μέχρι την κορυφή του) χρησιμοποιώντας έναν κατακόρυφο στύλο με μήκος ένα μέτρο; (σχ. 88).

Παριστάνουμε το ύψος του δένδρου με την AB , κάθετο στην οριζόντια γραμμή, τη σκιά του δένδρου με το τμήμα $ΑΓ$, το στύλο με το $ΕΔ$ και τη σκιά του με $ΔΖ$. Μετρούμε στο έδαφος με μετροταινία τη $ΔΖ$ και βρίσκουμε $ΔΖ = 1,5$ m.

Επειδή οι ήλιακές ακτίνες μπορούν να θεωρηθούν παράλληλες λόγω της μεγάλης απόστασεως του ήλιου, θα είναι $\widehat{\Gamma} = \widehat{Z}$. Τότε όμως τα ὀρθογώνια τρίγωνα $ΒΑΓ$ και $ΕΔΖ$ είναι ὅμοια· ἄρα $\frac{AB}{ΕΔ} = \frac{ΑΓ}{ΔΖ} \Rightarrow \frac{AB}{1m} = \frac{22,5}{1,5} = 15$. Το ύψος του δένδρου είναι 15 m.

Σημείωση: Λέγεται ότι με παρόμοιο τρόπο ὁ Θαλῆς μέτρησε τὸ ὕψος τῆς μεγάλης πυραμίδας (σ' ἓνα ταξίδι του στὴν Αἴγυπτο) καὶ ἀπέσπασε τὸ θαυμασμὸ τῶν Αἰγυπτίων σοφῶν.

Ἀσκήσεις

- 185) Νὰ κατασκευάσετε ἓνα τόξο κύκλου, στὸ ὁποῖο νὰ ἐγγράφεται γωνία 45° .
- 186) Νὰ διαιρέσετε ἓνα τρίγωνο σὲ δύο ἰσοδύναμα τρίγωνα μὲ μιὰ εὐθεία, ποὺ νὰ περνᾷ ἀπὸ μιὰ κορυφή του.
- 187) Δίνονται τρία τετράγωνα. Νὰ κατασκευάσετε ἓνα τετράγωνο, ποὺ νὰ ἔχει ἐμβαδὸ ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριῶν τετραγώνων.
- 188) Νὰ κατασκευάσετε ἓνα τετράγωνο, ποὺ ἡ διαγώνιός του εἶναι ἴση μὲ ἓνα γνωστὸ εὐθ. τμήμα δ .

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

A. ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

§ 51. Είσαγωγή

Στην Α' τάξη μάθαμε για τὰ γεωμετρικὰ στερεὰ (ἢ ἀπλῶς στερεὰ) καὶ τὶς διαφορὰς τῶν ἀπὸ τὰ ἀντίστοιχα φυσικὰ στερεά.

Γνωρίσαμε ιδιότητες τῶν γεωμετρικῶν στερεῶν α) τὸ μέγεθός τους ἢ τὴν ἔκτασή τους στὸν τρισδιάστατο χῶρο, β) τὸ σχῆμα τους (τὴ μορφή τους) καὶ γ) τὴ δυνατότητα νὰ ἀλλάζουμε τὴ θέση τους στὸ χῶρο, χωρὶς νὰ μεταβάλλονται τὸ σχῆμα καὶ τὸ μέγεθός τους. (Σὲ μεγαλύτερη τάξη θὰ ἐξετάσουμε λεπτομερέστερα τὴν ιδιότητα αὐτὴ καὶ θὰ μάθουμε, ὅτι σὲ κάθε θέση ὑπάρχει στερεὸ ἴσο μ' αὐτὸ ποὺ μετατοπίζεται). Τέλος γνωρίσαμε διάφορα γεωμετρικὰ σχήματα (εὐθεία, ἐπίπεδο, γωνία, τρίγωνο, κύκλο, πολύγωνο, πρίσματα, πυραμίδες, κύλινδρο, κῶνο καὶ σφαῖρα).

Ἀπὸ τὰ γεωμετρικὰ σχήματα ἄλλα ἔχουν ὅλα τὰ σημεῖα τους στὸ ἴδιο ἐπίπεδο καὶ λέγονται **ἐπίπεδα σχήματα** (ὅπως τὰ: εὐθεία, γωνία, τρίγωνο, πολύγωνο, κύκλος), ἄλλα ὅμως δὲν ἔχουν ὅλα τὰ σημεῖα τους στὸ ἴδιο ἐπίπεδο καὶ λέγονται **μὴ ἐπίπεδα γεωμετρικὰ σχήματα ἢ στερεὰ σχήματα** (ὅπως τὰ: πρίσματα, πυραμίδες, κύλινδροι, κ.ἄ.).

Τὸ μέρος τῆς γεωμετρίας, ποὺ ἀναφέρεται στὴ μελέτῃ τῶν ἐπιπέδων σχημάτων, λέγεται **Γεωμετρία τοῦ ἐπιπέδου** (ἢ ἐπιπεδομετρία) καὶ τὸ μέρος τῆς, ποὺ ἀναφέρεται στὶς ιδιότητες καὶ τὶς σχέσεις τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων ἐπιπέδων καὶ στερεῶν στὸ χῶρο, λέγεται **Γεωμετρία τοῦ χῶρου**.

Μὲ τὸ δεῦτερο αὐτὸ μέρος τῆς γεωμετρίας θὰ ἀσχοληθοῦμε στὴ συνέχεια.

§ 52. Ὁ χῶρος, μέσα στὸν ὁποῖο ἀντιλαμβανόμαστε μὲ τὶς αἰσθήσεις μας τὰ φυσικὰ ἀντικείμενα, ὀνομάζεται αἰσθητὸς χῶρος. Στὸν αἰσθητὸ χῶρο παίρνουμε μιὰ «ιδέα» τοῦ σημείου μὲ τὴν αἰχμὴ μιᾶς λεπτῆς βελόνας, τῆς εὐθείας μὲ ἓνα λεπτὸ τεντωμένο νῆμα καὶ τοῦ ἐπιπέδου μὲ τὴν ἐπιφάνεια ποὺ ἔχει τὸ τζάμι.

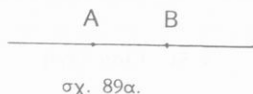
Ἀπὸ τὸν αἰσθητὸ χῶρο σχηματίζουμε μὲ τὴ νόηση τὸ **Γεωμετρικὸ χῶρο**, ἂν ἀφαιρέσουμε προοδευτικὰ τὶς αἰσθητὲς ιδιότητες τῶν ἀντικειμένων.

Στοιχεία τοῦ γεωμετρικοῦ χώρου εἶναι τὰ **σημεῖα**, οἱ **εὐθεῖες** καὶ τὰ **ἐπίπεδα**.

Τὶς ιδιότητες τῶν στοιχείων τοῦ γεωμετρικοῦ χώρου τὶς δίνουμε μὲ μερικὲς βασικὲς προτάσεις, τὶς ὁποῖες ὀνομάζουμε **ἀξιώματα**.

§ 53. Καθορισμὸς μιᾶς εὐθείας στὸ χῶρο.

Ἀξιώματα:



1. Ἀπὸ δύο ὁποιαδήποτε διαφορετικὰ σημεῖα τοῦ χώρου διέρχεται μία εὐθεῖα καὶ μόνο μία. (σχ. 89α.)

2. Ἡ εὐθεῖα εἶναι ἀπεριόριστη (δηλαδή τὸ εὐθ. τμῆμα AB μπορεῖ νὰ προεκταθεῖ καὶ ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα του).

§ 54. Ὅρισμὸς τοῦ ἐπιπέδου.

Ἄν παρατηρήσουμε τὴν ἐπιφάνεια τοῦ νεροῦ ποὺ βρίσκεται σὲ ἡρεμία μέσα σὲ μιὰ δεξαμενὴ ἢ μέσα σ' ἕνα δοχεῖο ἢ τὴν ἐπιφάνεια ποὺ ἔχει τὸ τζάμι, παίρνουμε μιὰ **ιδέα τῆς ἐπίπεδης ἐπιφάνειας**.

Γιὰ νὰ ἐξακριβώσουμε πρακτικὰ ἂν μιὰ ἐπιφάνεια εἶναι ἐπίπεδη, θέτουμε πάνω σ' αὐτὴ ἕνα χάρακα καὶ τὸν μετατοπίζουμε πρὸς διάφορες διευθύνσεις παρατηρώντας ἂν ἡ ἄκμὴ του ἐφαρμόζει σ' ὅλες τὶς θέσεις πάνω στὴν ἐπιφάνεια.

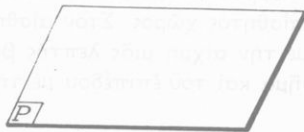
ἔχουμε λοιπὸν στὸ γεωμ. χῶρο τὸ παρακάτω ἀξίωμα:

Ἐνα ἐπίπεδο (p) εἶναι μιὰ ἐπιφάνεια τέτοια ὥστε, ἂν δύο σημεῖα μιᾶς εὐθείας ἀνήκουν στὸ ἐπίπεδο, τότε ὁλόκληρὴ ἡ εὐθεῖα ἀνήκει στὸ ἐπίπεδο.

Οἱ εὐθεῖες ἐνὸς ἐπιπέδου εἶναι, ὅπως εἴπαμε, ἀπεριόριστες, ἄρα καὶ τὸ ἐπίπεδο εἶναι μιὰ ἐπιφάνεια ἀπεριόριστη.

Παράσταση τοῦ ἐπιπέδου.

Ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδο εἶναι μιὰ ἀπεριόριστη ἐπιφάνεια, παριστάνουμε μόνο ἕνα μέρος του συνήθως μὲ ἕνα **ὀρθογώνιο** (σχ. 89). Τὸ ὀρθογώνιο αὐτὸ φαίνεται προοπτικῶς σὰν ἕνα παραλληλόγραμμο. Πάνω σ' αὐτὸ σημειώνουμε ἕνα ἀπὸ τὰ ἐπόμενα λατινικὰ γράμματα (p), (q), κ.λ.π.



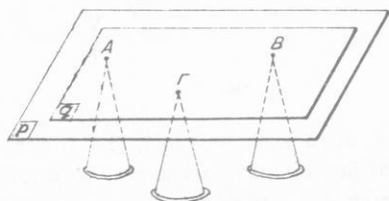
σχ. 89.

Σημ. Ἡ παράσταση αὐτὴ τοῦ ἐπιπέδου δὲν πρέπει νὰ μᾶς παρασῇ, ὥστε νὰ λησμονοῦμε πῶς τὸ ἐπίπεδο εἶναι μιὰ ἐπιφάνεια, ποὺ ἐκτείνεται ἀπεριόριστα.

§ 55. Καθορισμός ενός επιπέδου στο χώρο.

Ἀξίωμα: Ἀπὸ τρία σημεία, τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν στὴν ἴδια εὐθεία, διέρχεται ἓνα καὶ μόνο ἓνα ἐπίπεδο.

Πρακτικὰ εἶναι εὐκόλο νὰ πετύχουμε τὴν ἀναπαράσταση τοῦ καθορισμοῦ τοῦ ἐπιπέδου. Τοποθετοῦμε μιά μεταλλικὴ πλάκα πάνω σὲ τρία ση-



σχ. 90.

μεῖα π.χ. A, B, Γ τὰ ὁποῖα νὰ μὴν ἀνήκουν στὴν ἴδια εὐθεία ϵ , καὶ παρατηροῦμε ὅτι αὐτὴ **στηρίζεται** σ' αὐτὰ (σχ. 90). (Αὐτὸ δὲν πετυχαίνεται μὲ δύο σημεία). Ἄν θελήσουμε νὰ στηρίξουμε καὶ ἄλλη μεταλλικὴ πλάκα στὰ τρία σημεία (π.χ. ἄκρα ἀκίδων) A, B, Γ , θὰ παρατηρήσουμε ὅτι αὐτὴ θὰ ἐφαρμόσει πάνω στὴν πρώτη με-

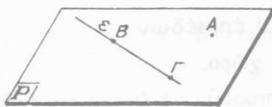
ταλλικὴ πλάκα καὶ οἱ ἐπίπεδες ἐπιφάνειές των θὰ ταυτισθοῦν.

Ἀπ' αὐτὴ καὶ ἄλλες παρόμοιες παρατηρήσεις σὲ φαινόμενα τῆς καθημερινῆς ζωῆς (π.χ. τραπέζια, τρίποδα, καθίσματα κ.ἄ), δικαιολογοῦμε γιὰ τὴν θέσασιν τοῦ γεωμ. χώρου τὸ παραπάνω ἀξίωμα.

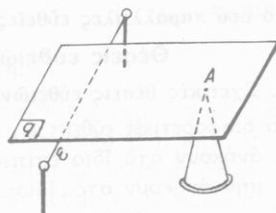
Μποροῦμε νὰ συμπεράνουμε ἀκόμη, ὅτι:

I) Ἀπὸ μιά εὐθεία καὶ ἓνα σημεῖο A , ποὺ δὲν ἀνήκει σ' αὐτὴ, διέρχεται ἓνα καὶ μόνο ἓνα ἐπίπεδο.

Θεωροῦμε μιά εὐθεία ϵ καὶ ἓνα σημεῖο A ποὺ δὲν ἀνήκει σ' αὐτὴ. Ἄν πάρουμε στὴν ϵ δύο ὁποιαδήποτε σημεία B καὶ Γ καὶ θεωρήσουμε



σχ. 91.



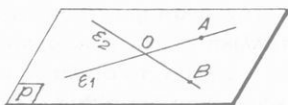
σχ. 92.

καὶ τὸ A , ἔχουμε τρία σημεία, ποὺ δὲν ἀνήκουν στὴν ἴδια εὐθεία, καί, ὅπως μάθαμε, αὐτὰ ὀρίζουν ἓνα ἐπίπεδο, τὸ P , στὸ ὁποῖο ἀνήκει καὶ ἡ ϵ (γιατί;)

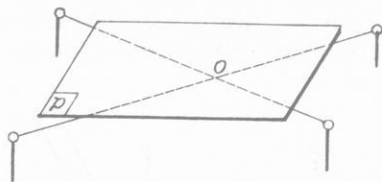
Αὐτὸ μποροῦμε νὰ τὸ διαπιστώσουμε καὶ πρακτικὰ, ἂν στηρίξουμε μιά ἐπίπεδη μεταλλικὴ πλάκα πάνω σ' ἓνα τεντωμένο νῆμα (συρμάτινο) ϵ καὶ σ' ἓνα σημεῖο A (ἄκρο ἀκίδας), τὸ ὁποῖο δὲν ἀνήκει στὸ νῆμα. Τὸ ἐπίπεδο, ὅταν στρέφεται γύρω ἀπὸ τὴν ϵ , μπορεῖ νὰ περάσει ἀπὸ κάθε νέα θέσιν τοῦ σημείου A (σχ. 92).

II) Ἀπὸ δύο εὐθεΐες, πὺν τέμνονται, διέρχεται ἓνα μόνο ἐπίπεδο.

Αὐτὸ συμβαίνει, γιατί ἔχουμε τρία σημεῖα, τὰ O , A καὶ B τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν στὴν ἴδια εὐθεΐα.



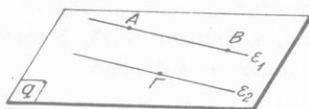
σχ. 93.



σχ. 94.

Μποροῦμε νὰ τὸ διαπιστώσουμε αὐτὸ καὶ πρακτικά, ἂν τοποθετήσουμε μιὰ μεταλλικὴ πλάκα πάνω σὲ δύο συρμάτινα νήματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἓνα κοινὸ σημεῖο, ὁπότε θὰ δοῦμε ὅτι στηρίζεται πάνω σ' αὐτὰ (σχ. 94).

III) Ἀπὸ δύο παράλληλες εὐθεΐες διέρχεται ἓνα μόνο ἐπίπεδο.



σχ. 95.

Αὐτὸ εἶναι φανερό, γιατί δύο παράλληλες εὐθεΐες, ἀπὸ τὸν ὅρισμό, ἀνήκουν στὸ ἴδιο ἐπίπεδο (σχ. 95).

Ὡστε τὸ ἐπίπεδο ὀρίζεται:

I. Ἀπὸ τρία σημεῖα, τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν στὴν ἴδια εὐθεΐα.

II. Ἀπὸ μία εὐθεΐα καὶ ἓνα σημεῖο, τὸ ὁποῖο δὲν ἀνήκει σ' αὐτήν.

III. Ἀπὸ δύο εὐθεΐες, πὺν τέμνονται.

IV. Ἀπὸ δύο παράλληλες εὐθεΐες.

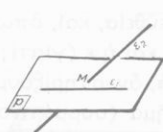
Θέσεις εὐθειῶν καὶ ἐπιπέδων

§ 56. I. Σχετικὲς θέσεις εὐθειῶν στὸ χώρο.

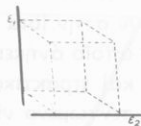
A. Δύο διαφορετικὲς εὐθεΐες ϵ_1 , ϵ_2 μποροῦν νὰ ἔχουν τὶς ἑξῆς θέσεις:

α) Νὰ ἀνήκουν στὸ ἴδιο ἐπίπεδο (νὰ εἶναι συνεπίπεδες).

β) Νὰ μὴν ἀνήκουν στὸ ἴδιο ἐπίπεδο.



σχ. 96.



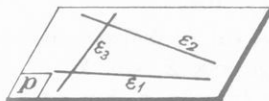
σχ. 97.

Στὴν πρώτη περίπτωση οἱ εὐθεΐες θὰ τέμνονται ἢ θὰ εἶναι παράλληλες.

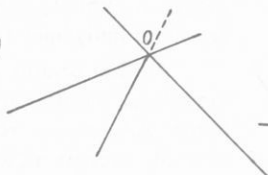
Στὴ δεύτερη περίπτωση δὲν τέμνονται καὶ δὲν εἶναι παράλληλες. Τότε οἱ εὐθεΐες ϵ_1 καὶ ϵ_2 λέγονται **ἀσύμβατες** εὐθεΐες (ἢ στρεβλές ἢ μὴ συνεπίπεδες) (σχ. 96, 97).

II. Τρεῖς ἢ περισσότερες εὐθεῖες μποροῦν:

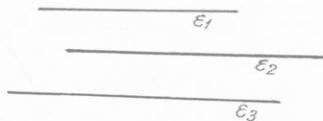
α) Νὰ εἶναι συνεπίπτεδες (σχ. 98).



σχ. 98.



σχ. 99.



σχ. 100.

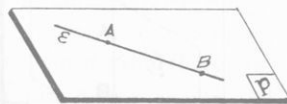
β) Νὰ περνοῦν ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο, χωρὶς νὰ εἶναι συνεπίπτεδες (σχ. 99).

γ) Νὰ εἶναι ἀνὰ δύο παράλληλες χωρὶς νὰ εἶναι συνεπίπτεδες. (Σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση ἔχουν τὶς ιδιότητες τῆς παραλληλίας, τὶς ὁποῖες μάθαμε) (σχ. 100).

§ 57. Σχετικὲς θέσεις εὐθείας καὶ ἐπιπέδου

α' περίπτωση:

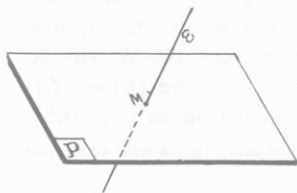
"Αν μιὰ εὐθεῖα ϵ ἔχει δύο κοινὰ σημεῖα A καὶ B μὲ ἓνα ἐπίπεδο (P) , ἀνήκει στὸ ἐπίπεδο αὐτό, ὅπως μάθαμε κατὰ τὸν ὅρισμό τοῦ ἐπιπέδου (σχ. 101).



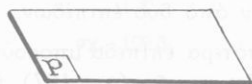
σχ. 101.

β' περίπτωση:

"Αν μιὰ εὐθεῖα ϵ ἔχει ἓνα μόνο κοινὸ σημεῖο M μὲ τὸ ἐπίπεδο (P) , λέμε ὅτι ἡ εὐθεῖα ϵ τέμνει τὸ ἐπίπεδο αὐτό ἢ ὅτι τὸ ἐπίπεδο (P) τέμνει τὴν εὐθεῖα ϵ . Τὸ κοινὸ σημεῖο τους M λέγεται **σημεῖο τομῆς ἢ ἴχνος** (σχ. 102).



σχ. 102.



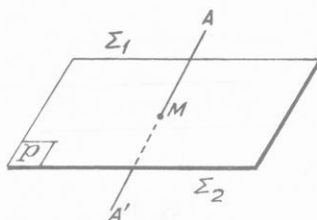
σχ. 103.

γ' περίπτωση:

"Αν τέλος μιὰ εὐθεῖα ϵ δὲν ἔχει κανένα κοινὸ σημεῖο μὲ τὸ ἐπίπεδο (P) , λέμε ὅτι εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδο αὐτό. (σχ. 103).

§ 58. Ἡ ἔννοια τοῦ ἡμιχώρου.

Ἐνα ἐπίπεδο P , ἐπειδὴ προεκτείνεται ἀπεριόριστα πρὸς ὅλες τὶς διευθύνσεις, χωρίζει τὸ χῶρο σὲ δύο περιοχὲς Σ_1 καὶ Σ_2 . Αὐτὲς οἱ δύο περιοχὲς λέγονται **ἡμίχωροι** (σχ. 104).



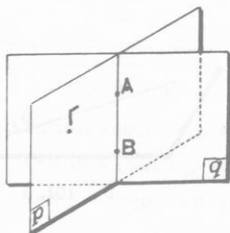
σχ. 104.

Ἄν δύο σημεῖα A καὶ A' ἀνήκουν ἀντιστοίχως στοὺς ἡμιχώρους Σ_1 καὶ Σ_2 , ἡ εὐθεῖα AA' τέμνει τὸ ἐπίπεδο σ' ἓνα σημεῖο M , μεταξὺ τῶν A καὶ A' , τὸ ὁποῖο καλοῦμε σημεῖο τομῆς τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἐπιπέδου. Ἡ ἡμιευθεῖα MA περιέχεται στὸν ἡμίχωρο Σ_1 καὶ ἡ MA' περιέχεται στὸν ἡμίχωρο Σ_2 .

§ 59. Σχετικὲς θέσεις ἐπιπέδων

A' . Δύο ἐπιπέδων.

α) Ἄν δύο διαφορετικὰ ἐπίπεδα (p) καὶ (q) ἔχουν κοινὰ δύο σημεῖα A, B , θὰ ἔχουν κοινὴ καὶ τὴν εὐθεῖα AB (γιατί;). Τότε λέμε ὅτι τὰ ἐπίπεδα (p) καὶ (q) τέμνονται κατὰ τὴν εὐθεῖα AB . Ἡ εὐθεῖα αὐτὴ λέγεται **τομὴ** τῶν δύο ἐπιπέδων.

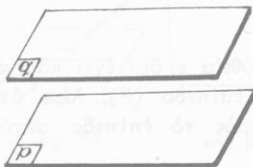


σχ. 105.

Τὰ ἐπίπεδα (p) καὶ (q) δὲν ἔχουν ἄλλο κοινὸ σημεῖο Γ , τὸ ὁποῖο νὰ **βρίσκεται** ἐκτὸς τῆς εὐθείας AB , γιατί τότε θὰ εἶχαν τρία κοινὰ σημεῖα, πού δὲν ἀνήκουν στὴν ἴδια εὐθεῖα, καὶ θὰ ταυτίζονταν. Αὐτὸ ὅμως δὲν εἶναι δυνατόν, γιατί τὰ ἐπίπεδα (p) καὶ (q) εἶναι διαφορετικὰ. Τὰ ἐπίπεδα (p) καὶ (q) λέγονται **τεμνόμενα** (σχ. 105).

Σημ. Ἄν δύο διαφορετικὰ ἐπίπεδα ἔχουν ἓνα κοινὸ σημεῖο, τέμνονται κατὰ μίαν εὐθεῖα, ἡ ὁποία περνᾷ ἀπὸ τὸ σημεῖο αὐτό. (Ἀξίωμα).

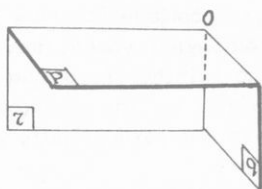
β) Δύο ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν κοινὸ σημεῖο, λέγονται **παράλληλα** $[(p) \parallel (q)]$. (σχ. 106).



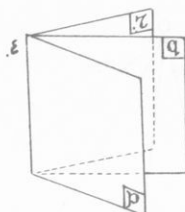
σχ. 106.

B' . Περισσότερων ἀπὸ δύο ἐπιπέδων.

α) Τρία ἢ περισσότερα ἐπίπεδα μποροῦν νὰ περνοῦν ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο (σχ. 107), ἢ ἀπὸ μίαν εὐθεῖα (σχ. 108).



σχ. 107.



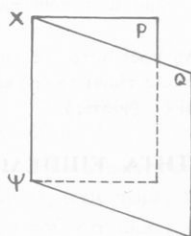
σχ. 108.

β) "Αν δύο διαφορετικά επίπεδα είναι παράλληλα πρὸς ἓνα τρίτο, εἶναι καὶ μεταξύ τους παράλληλα. Μποροῦν συνεπῶς καὶ περισσότερα ἀπὸ δύο επίπεδα νὰ εἶναι ἀνὰ δύο παράλληλα. Παράδειγμα: Οἱ ὀροφὲς (ἢ τὰ δάπεδα) τῶν ὀρόφων μιᾶς πολυκατοικίας παράλληλες πρὸς τὴν ὀροφή τοῦ α' ὀρόφου (ἢ τὸ ἔδαφος) εἶναι καὶ μεταξύ τους παράλληλες. (Σχ. 109).



σχ. 109.

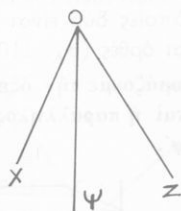
§ 59α. Διέδρη γωνία — Πολύεδρη (στερεὰ) γωνία



σχ. 109α.

Διέδρη γωνία εἶναι τὸ σχῆμα, ποὺ ὀρίζουν δύο ἡμιεπίπεδα μὲ κοινὴ ἀρχικὴ εὐθεία. Τὴν ἀρχικὴ εὐθεία τὴν ὀνομάζουμε ἀκμὴ τῆς διέδρης γωνίας καὶ τὰ ἡμιεπίπεδα ἔδρες της.

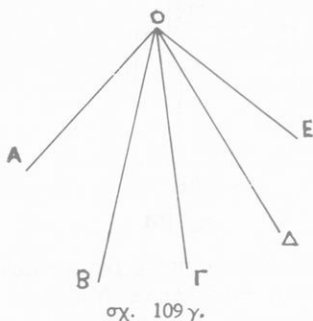
Ἡ $P-X\Psi-Q$ εἶναι μιὰ διέδρη γωνία. Ἡ ἀκμὴ της εἶναι ἡ εὐθεία $x\psi$ καὶ οἱ ἔδρες της τὰ ἡμιεπίπεδα P καὶ Q (σχ. 109α). Δύο ἐπίπεδα, ποὺ τέμνονται, ὀρίζουν τέσσερες διαδοχικὲς διέδρες γωνίες (σχ. 105).



σχ. 109β.

Τρεῖς ἡμιευθεῖες μὲ κοινὴ ἀρχή, ποὺ δὲν ἀνήκουν στὸ ἴδιο ἐπίπεδο, ὀρίζουν τρεῖς διαδοχικὲς ἀλλὰ μὴ συνεπίπεδες γωνίες. Τὸ σχῆμα τῶν τριῶν αὐτῶν γωνιῶν τὸ ὀνομάζουμε τρίεδρη στερεὰ γωνία καὶ τὶς τρεῖς ἐπίπεδες γωνίες ἑδρικές γωνίες της. Στὸ σχῆμα 109β οἱ ἡμιευθεῖες OX , $O\Psi$, OZ ὀρίζουν τὴν τρίεδρη γωνία $O.X\Psi Z$ μὲ ἑδρικές γωνίες τὶς $\widehat{XO\Psi}$, $\widehat{\Psi O Z}$, $\widehat{ZO X}$. Τὸ σημεῖο O τὸ λέμε κορυφή τῆς τρίεδρης γωνίας.

Περισσότερες ἀπὸ τρεῖς ἡμιευθεῖες μὲ κοινὴ ἀρχή, ἀλλὰ μὴ συνεπίπεδες



ἀνὰ τρεῖς, ὀρίζουν ἰσάριθμους τοὺς ἐπίπεδες διαδοχικὰς γωνίας, ποὺ δὲν εἶναι στὸ ἴδιο ἐπίπεδο. Τὸ σχῆμα τῶν γωνιῶν αὐτῶν τὸ λέμε πολυέδρη στερεὰ γωνία καὶ τὶς γωνίες ἑδρικές γωνίες τῆς πολυέδρης.

Ἡ $O.ABΓΔΕ$ εἶναι μιὰ πολυέδρη (πεντάεδρη) στερεὰ γωνία μὲ ἑδρικές γωνίες τὶς $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOΓ}$, $\widehat{ΓΟΔ}$, $\widehat{ΔΟΕ}$, $\widehat{ΕΟΑ}$ (σχ. 109 γ.).

Ἀσκήσεις

189) Στὴν αἴθουσα διδασκαλίας νὰ βρεῖτε εὐθεῖες α) παράλληλες, β) τεμνόμενες καὶ γ) ἀσύμβατες.

190) Στὴν αἴθουσα διδασκαλίας νὰ ὀρίσετε τὰ ζεύγη τῶν τεμνόμενων ἐπιπέδων καὶ τὰ ζεύγη τῶν παράλληλων ἐπιπέδων.

191) Ἐχουμε τέσσερα σημεῖα $A, B, Γ, Δ$, τὰ ὅποια δὲν ἀνήκουν στὸ ἴδιο ἐπίπεδο. Βρεῖτε τὴν τομὴ τῶν ἐπιπέδων $ABΓ$ καὶ $ABΔ$.

192) Κατασκευάστε τρεῖς παράλληλες εὐθεῖες e_1, e_2 καὶ e_3 α) ὅταν ἀνήκουν στὸ ἴδιο ἐπίπεδο, β) ὅταν δὲν ἀνήκουν ὅλες στὸ ἴδιο ἐπίπεδο (π.χ. μὲ νήματα τοποθετημένα παράλληλα).

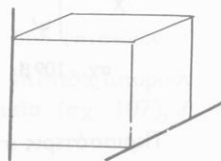
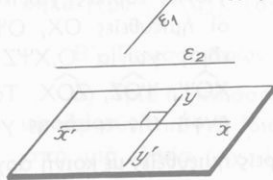
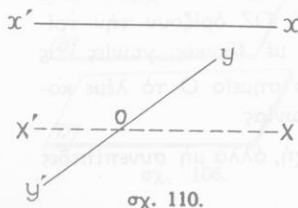
193) Δίνονται ἓνα ἐπίπεδο (p) καὶ μιὰ εὐθεῖα e παράλληλη πρὸς αὐτό. Τὸ τυχὸν σημεῖο M τοῦ ἐπιπέδου (p) ὀρίζει μὲ τὴν e ἓνα ἐπίπεδο (q), τὸ ὁποῖο τέμνει τὸ (p) κατὰ μιὰ εὐθεῖα d . Ποιὰ εἶναι ἡ σχετικὴ θέση τῶν εὐθειῶν αὐτῶν e καὶ d ; (γιατί;)

Β'. ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΘΕΤΗ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ—ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

§ 60. Γωνία δύο ἀσύμβατων εὐθειῶν.

Θεωροῦμε δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες τοῦ χώρου $χχ'$ καὶ $ψψ'$. Ἀπὸ ἓνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς μιᾶς φέρνουμε παράλληλο πρὸς τὴν ἄλλη. Σχηματίζονται τότε τέσσερες κυρτὲς γωνίες, ἀπὸ τὶς ὁποῖες δύο εἶναι ὀξείες (ἴσες) καὶ δύο ἀμβλείες (ἴσες) ἢ καὶ οἱ τέσσερες εἶναι ὀρθές (σχ. 110).

Γωνία δύο ἀσύμβατων εὐθειῶν $χχ'$ καὶ $ψψ'$ ὀνομάζουμε τὴν ὀξεία (ἢ τὴν ὀρθή) γωνία, τὴν ὁποία σχηματίζουν οἱ $ψψ'$ καὶ ἡ παράλληλος $ΧΧ'$ πρὸς τὴν $χχ'$, ἢ ὁποία περνᾷ ἀπὸ τὸ σημεῖο O τῆς $ψψ'$.



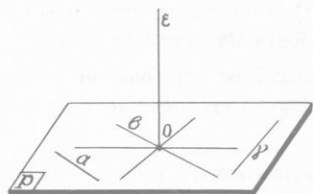
Ἄρα ἡ γωνία τῶν δύο εὐθειῶν $\chi\chi'$ καὶ $\psi\psi'$ εἶναι ἡ γωνία (OX, OY) (σχ. 110).

Δύο εὐθεῖες λέγονται **ὀρθογώνιες**, ὅταν ἡ γωνία τους εἶναι **ὀρθή** (σχ. 111).

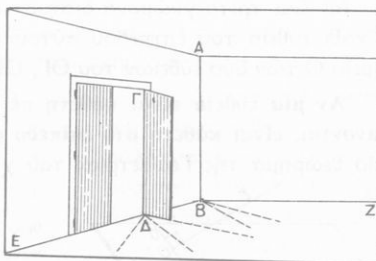
Ἄν δύο εὐθεῖες τέμνονται καὶ εἶναι ὀρθογώνιες, εἶναι **κάθετες**. Σὰν παράδειγμα ὀρθογωνίων εὐθειῶν ἀναφέρουμε τὶς μὴ παράλληλες ἀκμὲς ἐνὸς κύβου (σχ. 112).

§ 61. Καθετότητα εὐθείας καὶ ἐπιπέδου.

Μία εὐθεία, ἡ ὁποία τέμνει ἓνα ἐπίπεδο (p) σ' ἓνα σημεῖο O , λέγεται **κάθετη** σ' αὐτό, ἂν εἶναι κάθετη σὲ ὅλες τὶς εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου, πού περνοῦν ἀπὸ τὸ O .



σχ. 113.

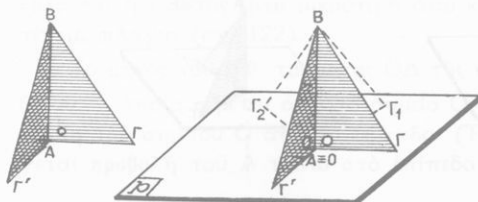


σχ. 114.

Μποροῦμε νὰ διαπιστώσουμε ὅτι ἡ ϵ εἶναι ὀρθογώνια πρὸς ὅλες τὶς εὐθεῖες τοῦ (p) . (σχ. 113).

Ἡ κατακόρυφη τομὴ AB δύο τοίχων τῆς σχολικῆς αἵθουσας εἶναι κάθετη στὶς τομὲς BZ καὶ BE τῶν ἐπιπέδων τῶν τοίχων καὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πατώματος. Μὲ τὸ γνῶμονα διαπιστώνουμε ὅτι ἡ AB εἶναι κάθετη σὲ ὅλες τὶς εὐθεῖες τοῦ πατώματος, πού περνοῦν ἀπὸ τὸ B . Συνεπῶς ἡ εὐθεία AB εἶναι κάθετη στοῦ πάτωμα. Τὸ ἴδιο παρατηροῦμε γιὰ τὴν εὐθεία περιστροφῆς $(\Gamma\Delta)$ (εὐθεία πού περνᾷ ἀπὸ τοὺς στροφεῖς τῆς) τῆς πόρτας τῆς αἵθουσας (σχ. 114).

Ἄν τὴν ἀνοίγοκλείσουμε καὶ σημειώσουμε μὲ κιμωλία στὸ πάτωμα τὶς διάφορες θέσεις τῆς κάτω εὐθύγραμμης ἀκμῆς τῆς πόρτας, θὰ παρατηρήσουμε ὅτι οἱ γωνίες, πού σχηματίζονται ἀπὸ τὶς

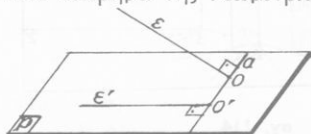


σχ. 115.

ήμευθεῖς αὐτὲς καὶ τὴν εὐθεῖα περιστροφῆς τῆς πόρτας, ὅταν μετρηθῶν μὲ τὸ γνῶμονα, εἶναι ὀρθές. Ἄρα ἡ εὐθεῖα ΓΔ εἶναι κάθετη στοῦ ἐπίπεδο τοῦ πατώματος. Γιὰ νὰ αἰτιολογήσουμε τὶς παραπάνω παρατηρήσεις, στερεώνουμε δύο γνῶμονες τὸν ἓνα πάνω στὸν ἄλλο ἔτσι, ὥστε νὰ ἔχουν μιὰ κοινὴ πλευρὰ ΑΒ τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ τοὺς τοποθετοῦμε πάνω στοῦ ἐπίπεδο μὲ τρόπο ὥστε τὸ Α νὰ συμπίπτει μὲ τὸ Ο καὶ οἱ πλευρὲς ΟΓ καὶ ΟΓ' νὰ βρίσκονται στοῦ ἐπίπεδο (σχ. 115). Ἡ κοινὴ πλευρὰ τῶν δύο γνῶμόνων εἶναι κάθετη στὶς εὐθεῖες ΟΓ καὶ ΟΓ' τοῦ ἐπιπέδου στοῦ Ο ($OB \perp OG$ καὶ $OB \perp OG'$, γιατί εἶναι κάθετες πλευρὲς ὀρθογωνίου τριγώνου).

Μὲ ἓνα τρίτο γνῶμονα διαπιστώνουμε ὅτι ἡ εὐθεῖα ΟΒ εἶναι κάθετη σὲ κάθε εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ (σχ. 115), ποὺ περνᾷ ἀπὸ τὸ κοινὸ σημεῖο Ο τῶν δύο εὐθειῶν του ΟΓ, ΟΓ', ἄρα εἶναι κάθετη στοῦ ἐπίπεδο (ρ).

Ἄν μιὰ εὐθεῖα εἶναι κάθετη σὲ δύο εὐθεῖες ἑνὸς ἐπιπέδου, οἱ ὁποῖες τέμνονται, εἶναι κάθετη στοῦ ἐπίπεδο αὐτό. (Ἡ πρόταση αὕτη εἶναι σπουδαῖο θεώρημα τῆς Γεωμετρίας τοῦ χώρου).



σχ. 116.

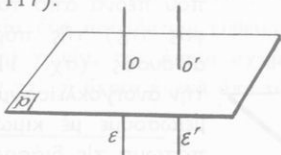
Σημείωση. Μιὰ εὐθεῖα ϵ κάθετη σὲ μιὰ εὐθεῖα α τοῦ ἐπιπέδου (ρ) εἶναι δυνατόν νὰ εἶναι κάθετη στοῦ ἐπίπεδο, ἀλλὰ εἶναι δυνατό καὶ νὰ μὴν εἶναι ἢ νὰ ἀνήκει σ' αὐτό. Ἄν μιὰ εὐθεῖα τέμνει ἓνα ἐπίπεδο χωρὶς νὰ εἶναι κάθετη σ' αὐτό, λέγεται **πλάγια** πρὸς τὸ (ρ) (σχ. 116).

§ 62. Ἰδιότητες τῆς καθέτου – (θεωρήματα)

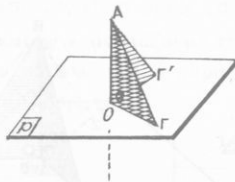
Ἄν χρησιμοποιήσουμε τὸ σύστημα μὲ τοὺς γνῶμονες τῆς § 61, καταλήγουμε στὰ ἑξῆς συμπεράσματα:

α) Ἀπὸ ἓνα σημεῖο Ο τοῦ ἐπιπέδου μπορούμε νὰ φέρουμε μόνο **μία** εὐθεῖα κάθετη στοῦ ἐπίπεδο.

β) Δύο εὐθεῖες ϵ καὶ ϵ' κάθετες στοῦ ἴδιο ἐπίπεδο (ρ) εἶναι παράλληλες (σχ. 117).



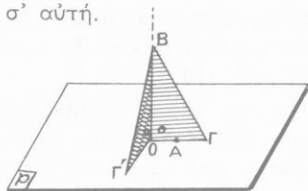
σχ. 117.



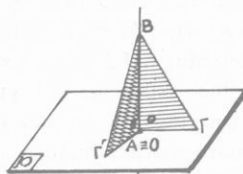
σχ. 118.

γ) Ἀπὸ ἓνα σημεῖο Α μπορούμε νὰ φέρουμε μιὰ μόνο κάθετο σ' ἓνα ἐπίπεδο, εἴτε τὸ σημεῖο Α ἀνήκει σ' αὐτό εἴτε ὄχι (σχ. 118).

δ) 'Από ένα σημείο μπορούμε να φέρουμε ένα επίπεδο κάθετο σε μία ευθεία. Το σημείο αυτό είναι δυνατό να ανήκει στην AB ή να μην ανήκει σ' αυτή.

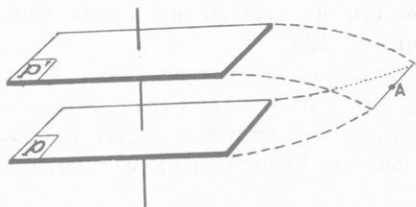


σχ. 119.



σχ. 120.

Με το σύστημα τών δύο γνωμώνων μπορούμε να όρίσουμε τη θέση του επιπέδου αυτού, όπως φαίνεται στα σχήματα 119 και 120.



σχ. 121.

ε) Δύο επίπεδα κάθετα στην ίδια ευθεία είναι παράλληλα (γιατί;). "Αν τέμνονταν στο A , θα είχαμε από αυτό δύο επίπεδα κάθετα στην ίδια ευθεία.

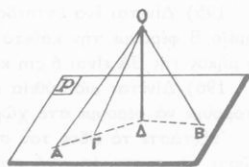
ζ) Μία ευθεία κάθετη στο ένα από δύο παράλληλα επίπεδα είναι κάθετη και στο άλλο.

§ 63. 'Απόσταση σημείου από επίπεδο

Είπαμε ότι από ένα σημείο π.χ. O , που δέν ανήκει σ' ένα επίπεδο (p), μπορούμε να φέρουμε μία μόνο κάθετο στο επίπεδο, την OD .

"Αν από το O φέρουμε και διάφορες πλάγιες πρὸς τὸ επίπεδο, θὰ διαπιστώσουμε εύκολα ὅτι ἡ κάθετος εἶναι μικρότερη ἀπὸ κάθε τέτοια πλάγια (σχ. 122).

Τὸ μήκος τοῦ εὐθ. τμήματος OD τῆς καθέτου, ἡ ὁποία φέρεται ἀπὸ τὸ σημείο O πρὸς τὸ επίπεδο, λέγεται **ἀπόσταση** τοῦ σημείου O ἀπὸ τὸ επίπεδο. (Τὸ ἴχνος D τῆς καθέτου OD λέγεται **προβολή** τοῦ A πάνω στὸ επίπεδο (p)).



σχ. 122.

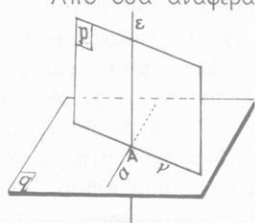
§ 64. Καθετότητα επιπέδων

Είπαμε στην προηγούμενη § 61 ὅτι ἡ ευθεία, πὺν περνᾷ ἀπὸ τοὺς

στροφείς τῆς σχολικῆς αἵθουσας, εἶναι κάθετη στοῦ ἐπίπεδο τοῦ πατώματος. Τότε τὸ ἐπίπεδο Θ τῆς πόρτας αὐτῆς λέγεται **ἐπίπεδο κάθετο** πρὸς τὸ ἐπίπεδο τοῦ πατώματος (γιατὶ τοποθετήθηκε μὲ τέτοιον τρόπο, ὥστε νὰ περιέχει τὴ $\Gamma\Delta$, ποὺ εἶναι κάθετος στοῦ **ὀριζόντιο** ἐπίπεδο τοῦ πατώματος, δηλαδή ἡ $\Gamma\Delta$ εἶναι κατακόρυφη (σχ. 114).

Τὸ ἴδιο συμβαίνει καὶ γιὰ τοὺς τοίχους τῆς αἵθουσας διδασκαλίας (ἢ τοῦ σπιτιοῦ), οἱ ὁποῖοι κατασκευάστηκαν ἔτσι, ὥστε νὰ περιέχουν **κατακόρυφες** εὐθεῖες, δηλαδή εὐθεῖες κάθετες στοῦ ὀριζόντιο ἐπίπεδο τοῦ πατώματος ἢ τῆς ὀροφῆς. (Σημ. Οἱ κτίστες κατὰ τὴν κατασκευὴ τῶν τοίχων μιᾶς οἰκοδομῆς χρησιμοποιοῦν τὸ **νῆμα** τῆς **στάθμης**, γιὰ νὰ πετύχουν ὥστε οἱ τοῖχοι νὰ εἶναι κατακόρυφοι, δηλαδή κάθετοι στὴν ὀριζόντια ἐπιφάνεια τοῦ πατώματος).

Ἀπὸ ὅσα ἀναφέραμε παραπάνω συμπεραίνουμε γενικὰ ὅτι: **Ἐνα ἐπίπεδο (p) λέγεται κάθετο πρὸς ἕνα ἄλλο ἐπίπεδο (q), ἂν περιέχει μιὰ εὐθεῖα κάθετη στοῦ (q)** (σχ. 123).



σχ. 123.

Μποροῦμε νὰ διαπιστώσουμε ὅτι ἂν $(p) \perp (q)$, τότε καὶ $(q) \perp (p)$. Ἄρα στὴν καθετότητα τῶν ἐπιπέδων ἰσχύει ἡ συμμετρικὴ ιδιότητα, δηλαδή: $(p) \perp (q) \Leftrightarrow (q) \perp (p)$.

Ἀσκήσεις

194) Βρεῖτε μέσα στὴν αἶθουσα

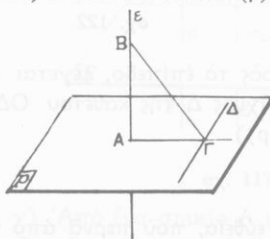
α) Ἐπίπεδα κάθετα β) ἕνα ἐπίπεδο παράλληλο πρὸς τὸ πάτωμά της, γ) ἐπίπεδα ὀριζόντια καὶ κατακόρυφα καὶ δ) εὐθεῖες κάθετες σὲ ἐπίπεδο.

195) Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο (p) καὶ ἕνα σημεῖο B, ποὺ δὲν ἀνήκει σ' αὐτό. Ἀπὸ τὸ σημεῖο B φέρουμε τὴν κάθετο BA στοῦ ἐπίπεδο (p) καὶ τὴν πλάγια πρὸς αὐτὸ BG. Ἄν τὸ μήκος τῆς BA εἶναι 6 cm καὶ τῆς BG 10 cm, νὰ υπολογίσετε τὸ μήκος τῆς AG.

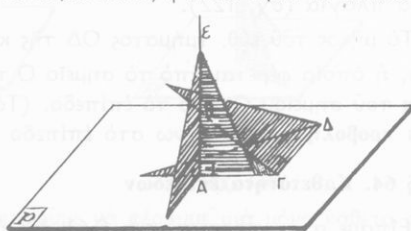
196) Δίνεται μιὰ εὐθεῖα ε, στὴν ὁποία παίρνουμε ἕνα σημεῖο A. Στὸ σημεῖο αὐτὸ μποροῦμε νὰ φέρουμε στοῦ χώρου ἄπειρες καθετοὺς στὴν ε.

Ἐξετάστε τὸ εἶδος τοῦ σχήματος, ποὺ παράγεται ἀπὸ τὶς καθετοὺς αὐτές. (Διατυπῶστε τὰ συμπεράσματά σας).

197) Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο (p). Ἐστω μιὰ εὐθεῖα, ἡ ὁποία τέμνει τὸ ἐπίπεδο σ' ἕ-



σχ. 124.



σχ. 125.

να σημείο A και είναι κάθετη στο (p) . Από ένα σημείο B της ϵ φέρουμε την κάθετο $B\Gamma$ σε μια οποιαδήποτε ευθεία $\Gamma\Delta$ του επιπέδου (p) . Εξετάστε αν οι $A\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ είναι κάθετες. (Με τη βοήθεια των τριών γνωμών της § 61).

198) Δίνεται ένα επίπεδο (p) . Αν από ένα σημείο A του επιπέδου φέρουμε την κάθετο $A\Gamma$ σε μια ευθεία του, να δείξετε ότι η ευθεία, ή οποία συνδέει το σημείο Γ με ένα οποιοδήποτε σημείο B της καθέτου προς το επίπεδο στο A , είναι κάθετη στην $\Gamma\Delta$ (Σχ. 124). (Με τη βοήθεια των γνωμών).

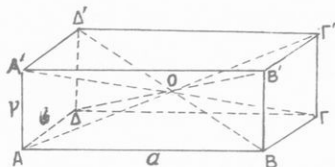
199) Δίνεται ένα επίπεδο (p) . Αν από ένα σημείο B , που δεν ανήκει στο επίπεδο, φέρουμε την κάθετο $B\Gamma$ σε μια ευθεία $\Gamma\Delta$ του επιπέδου αυτού κι έπειτα φέρουμε την κάθετο ΓA (ή οποία ανήκει στο (p)) στη $\Gamma\Delta$, δείξετε ότι η κάθετος που φέρεται από το B προς την ΓA είναι κάθετος στο επίπεδο (p) . (Σχ. 125). (Με τη βοήθεια των γνωμών).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

A. ΕΜΒΑΔΟ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΚΑΙ ΟΓΚΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΥ

§ 65. Ὁρθογώνιο παραλληλεπίπεδο εἶναι ἓνα στερεό, τὸ ὁποῖο ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 ὀρθογώνια (σὲ τρόπο ὥστε κάθε πλευρὰ καθενὸς νὰ εἶναι κοινὴ ἐνὸς μόνο ἄλλου). Τὰ ὀρθογώνια αὐτὰ ὀνομάζονται ἔδρες (ἢ βάσεις) τοῦ ὀρθογωνίου παραλ/δου. Οἱ πλευρὲς τῶν ὀρθογωνίων λέγονται

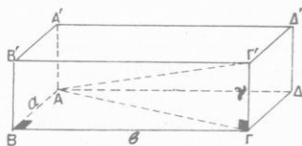


σχ. 126.

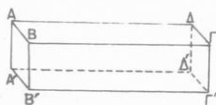
ἄκμές. Διαστάσεις τοῦ παραλληλεπιπέδου λέγονται τὰ μήκη τῶν τριῶν ἀκμῶν, πού περνοῦν ἀπὸ τὴν ἴδια κορυφή. Ἡ μιὰ ἀπ' αὐτὲς λέγεται μῆκος, ἡ ἄλλη πλάτος καὶ ἡ τρίτη ὕψος. π.χ. στὸ σχ.126 οἱ $AB=a$, $AD=\beta$ καὶ $AA'=\gamma$.

Διαγώνιο τοῦ ὀρθογ. παραλ/δου ὀνομάζουμε τὸ εὐθ. τμήμα, τὸ ὁποῖο ὀρίζουν δύο κορυφές του, πού δὲν ἀνήκουν στὴν ἴδια ἔδρα.

Μποροῦμε νὰ μελετήσουμε τὶς ιδιότητες τοῦ ὀρθ. παραλ/δου μὲ τὴ



σχ. 127.



σχ. 128.



σχ. 129.

βοήθεια ἑνὸς στερεομετρικοῦ ὑποδείγματος (μοντέλου) ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, μὲ ὑλοποιημένες μόνο τὶς ἄκμές του (π.χ. ἀπὸ σκληρὸ σύρμα) καὶ στὸ ὁποῖο οἱ διαγώνιες εἶναι κατασκευασμένες ἀπὸ νήματα.

α) Οἱ ἄκμές τοῦ ὀρθ. παραλ/δου πού εἶναι παράλληλες, εἶναι ἴσες.

β) Οἱ ἀπέναντι ἔδρες του εἶναι παράλληλες καὶ ἴσες.

γ) Οἱ διαγώνιοί του περνοῦν ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο, τὸ ὁποῖο εἶναι τὸ μέσο κάθε μιᾶς ἀπ' αὐτὲς καὶ λέγεται **κέντρο** τοῦ ὀρθογωνίου παραλ-

ληλεπιπέδου (είναι και κέντρο συμμετρίας του).

Σημ. Οί παραπάνω ιδιότητες ισχύουν για όλα τα παραλληλεπίπεδα, όπως θα δούμε στα επόμενα μαθήματα.

δ) Οί διαγώνιοι του ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι ἴσες.

Μπορούμε να ὑπολογίσουμε τὸ μήκος τῆς διαγωνίου ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου συναρτήσει τῶν διαστάσεών του.

Γιὰ νὰ ὑπολογίσουμε τὴ διαγώνιο $ΑΓ' = δ$ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου $ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ'$ (σχ. 127), ἐφαρμόζουμε τὸ πυθαγόρειο θεώρημα στὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $ΑΒΓ$ καὶ $ΑΓΓ'$ (τὸ τρίγωνο $ΑΓΓ'$ εἶναι ὀρθογώνιο, γιατί ἡ $ΓΓ'$ εἶναι κάθετος στὸ ἐπίπεδο $ΑΒΓΔ$, ἄρα κάθετος καὶ στὴν $ΓΑ$. Ἐπομένως ἡ γωνία $ΑΓΓ' = 1$ ὀρθή.)

$$* \text{Έτσι ἔχουμε: } ΑΓ'^2 = ΑΓ^2 + ΓΓ'^2 \quad \text{καὶ} \quad ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2. * \text{Άρα } ΑΓ'^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 + ΓΓ'^2 \Rightarrow δ^2 = α^2 + β^2 + γ^2 \quad \text{καὶ} \quad \text{ἐπομένως } δ = \sqrt{α^2 + β^2 + γ^2}.$$

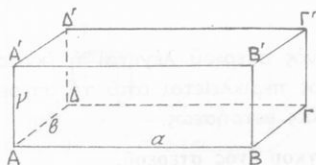
Ἡ ἀπόσταση τῶν δύο ἀπέναντι ἐδρῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου λέγεται ὕψος αὐτοῦ.

Ἐμβαδὸ τῆς ἐπιφάνειας τοῦ ὀρθογωνίου παρ/δου εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐδρῶν του.

Ἀνάπτυγμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἡ ἐπίπεδη ἐπιφάνεια, τὴν ὁποία παίρνουμε, ἂν τὸ κόψουμε κατὰ μήκος τῆς $ΒΓ$ καὶ τῶν $ΒΒ'$, $ΒΑ$, $Α'Β'$, $ΓΔ$, $Δ'Γ'$, $ΓΓ'$ καὶ τὸ ἀναπτύξουμε (ξεδιπλώσουμε) σ' ἓνα ἐπίπεδο (σχ. 128, 129).

§ 66. Ἐμβαδὸ τῆς ἐπιφάνειας ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Θεωροῦμε ἓνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο μὲ διαστάσεις $ΑΒ=α$, $ΑΔ=β$, $ΑΑ'=γ$ (σχ. 130). Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ τῆς ἐπιφάνειάς του.



σχ. 130.

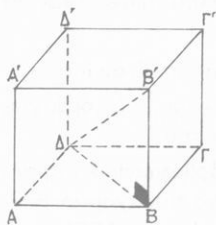
Παρατηροῦμε ὅτι τὸ ἐμβαδὸ τῆς ἑδρας $ΑΒΓΔ$ εἶναι $α·β$ καθώς ἐπίσης καὶ τῆς ἑδρας $Α'Β'Γ'Δ'$. (γιατί;)

Τὸ ἐμβαδὸ τῆς ἑδρας $ΑΒΒ'Α'$ εἶναι $α·γ$ καθώς καὶ τῆς ἀπέναντί της ἑδρας $ΔΓΓ'Δ'$. Τῆς ἑδρας $ΑΑ'Δ'Δ$ τὸ ἐμβαδὸ εἶναι $β·γ$ καθώς καὶ τῆς $ΒΒ'Γ'Γ$, ποὺ εἶναι ἀπέναντι σ' αὐτήν.

Ὅστε τὸ ἐμβαδὸ τῆς ἐπιφάνειας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

$$ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ' \text{ εἶναι } E = 2αβ + 2αγ + 2βγ \quad \text{ἢ} \quad \boxed{E = 2(αβ + βγ + γα)}$$

§ 67. Κύβος



σχ. 131.

Κύβος είναι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, που έχει όλες τις άκμές του ίσες.

Επομένως οι έδρες του κύβου είναι τετράγωνα (σχ. 131).

Για να βρούμε το μήκος της διαγωνίου ενός κύβου, εφαρμόζουμε τον τύπο $\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ και έχουμε $\delta^2 = \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2$ άρα $\delta^2 = 3\alpha^2 \Leftrightarrow \delta = \alpha\sqrt{3}$.

Το έμβαδο της όλικης επιφάνειάς του είναι:

$$E = 2 \cdot (\alpha \cdot \alpha + \alpha \cdot \alpha + \alpha \cdot \alpha) = 2 \cdot 3\alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$E = 6\alpha^2$$

Άσκησης

200) Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου είναι 6 cm, 5 cm, 4 cm. Να υπολογίσετε το έμβαδο της επιφάνειάς του.

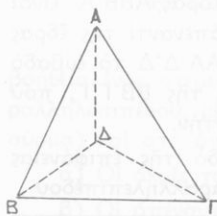
201) Κατασκευάστε το ανάπτυσμα ενός κύβου με άκμή 3 cm και βρείτε το έμβαδο της επιφάνειάς του.

202) Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Οι τρεις διαστάσεις του είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 8, 10, 12 και το έμβαδο της (ολικής) επιφάνειάς του είναι 2368 cm^2 . Να υπολογισθούν οι διαστάσεις του.

203) Το έμβαδο της όλικης επιφάνειας ενός κύβου είναι 54 cm^2 . Να βρείτε το μήκος της πλευράς του και το μήκος της διαγωνίου του.

204) Δίνεται το μήκος, το ύψος, και το μήκος της διαγωνίου μίας έδρας ενός ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου. Να βρεθεί το έμβαδο της επιφάνειάς του.

Όγκος στερεών



σχ. 132.

§ 68. Όγκος ενός στερεού λέγεται ή έκταση του χώρου, ο οποίος περικλείεται από το στερεό, έκφρασμένη σε μονάδες μετρήσεως.

Μέτρηση του όγκου ενός στερεού.

Τιμή του όγκου ενός στερεού είναι ο λόγος του όγκου του προς τη μονάδα μετρήσεως των όγκων. Την τιμή του όγκου του στερεού π.χ. $AB\Gamma\Delta$ (σχ. 132) τη συμβολίζουμε με $(AB\Gamma\Delta)$ και τον όγκο του με το V ή $V_{AB\Gamma\Delta}$.

Μέτρηση του όγκου ενός στερεοῦ είναι ἡ εὕρεση τῆς τιμῆς τοῦ ὅγκου του. Ἡ τιμὴ τοῦ ὅγκου ενός στερεοῦ εἶναι ὁ ἀριθμὸς, μὲ τὸν ὁποῖο πρέπει νὰ πολλαπλασιάσουμε τὴ μονάδα, γιὰ νὰ ἔχουμε τὸν ὅγκο του.

Μονάδες ὅγκου

Ἡ μονάδα ὅγκου εἶναι ὁ ὅγκος ἑνὸς κύβου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκμὴ τῆ μονάδα μήκους ποὺ ἔχουμε ἐκλέξει.

Μονάδα μήκους ἔχουμε ὀρίσει τὸ μέτρο (1 m), ἄρα ἡ μονάδα ὅγκου εἶναι ὁ ὅγκος ἑνὸς κύβου μὲ ἀκμὴ ἓνα μέτρο· δηλαδή τὸ **κυβικὸ μέτρο**, τὸ ὁποῖο σημειώνεται μὲ συντομία (m^3).

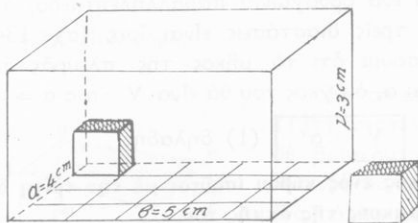
Οἱ ὑποδιαίρεσεις τοῦ κυβικοῦ μέτρου εἶναι:

- 1) Τὸ κυβικὸ δεκατόμετρο (dm^3), δηλαδή ὁ ὅγκος ἑνὸς κύβου μὲ ἀκμὴ μήκους 1 dm.
- 2) Τὸ κυβικὸ ἑκατοστόμετρο (cm^3), δηλαδή ὁ ὅγκος ἑνὸς κύβου μὲ ἀκμὴ μήκους 1 cm.
- 3) Τὸ κυβικὸ χιλιοστόμετρο (mm^3), δηλαδή ὁ ὅγκος ἑνὸς κύβου μὲ ἀκμὴ μήκους 1 mm.

§ 69. Ὅγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Δίνεται ἓνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο μὲ διαστάσεις $a=4\text{ cm}$, $b=5\text{ cm}$ καὶ $\gamma=3\text{ cm}$. Σκεφθεῖτε πὼς μπορούμε νὰ μετρήσουμε αὐτὸ τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὅγκο αὐτοῦ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τὸ γεμίζουμε μὲ κύβους, ποὺ ἔχουν ἀκμὴ 1 cm. Γιὰ νὰ γεμίσει, χρειάζονται 60 κύβοι ὅγκου ἴσου μὲ 1 cm^3 δηλαδή $V=60\text{ cm}^3$. Παρατηροῦμε ὁμῶς ὅτι καταλήγουμε στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα, ἂν πολλαπλασιάσουμε καὶ τὶς τρεῖς διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου,



σχ. 133.

$$4\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 60\text{ cm}^3.$$

Ἄρα $V=4\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 60\text{ cm}^3$, δηλαδή γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὅγκο τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου πολλαπλασιάζουμε τὶς τρεῖς διαστάσεις του ἐκφρασμένες στὴν ἴδια μονάδα μήκους.

Το αποτέλεσμα αυτό δικαιολογείται ως εξής:

Ἡ βάση τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου χωρίζεται σὲ 5 ἐπὶ 4 ἴσα τετράγωνα μὲ πλευρὰ 1 cm. Πάνω σὲ καθένα ἀπ' αὐτὰ τοποθετοῦμε τὴν βάση ἐνὸς κύβου μὲ πλευρὰ 1 cm καὶ σχηματίζεται ἔτσι ἓνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο μὲ τὴν ἴδια βάση καὶ ὕψος 1 cm. Αὐτὸ ἔχει ὄγκο $4\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} \cdot 1\text{ cm} = 20\text{ cm}^3$. Τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο χωρίζεται (μὲ ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὴν βάση του) σὲ τρία ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα μὲ τὸν ἴδιο ὄγκο.

Συνεπῶς: $V = 3 \cdot 20\text{ cm}^3 = 60\text{ cm}^3 = 3 \cdot (4\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} \cdot 1\text{ cm}) = 4\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} \cdot 3\text{ cm}$.

Ἄν δοθεῖ ἓνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, τοῦ ὁποῖου οἱ διαστάσεις ἔχουν μήκη α , β , γ , ὁ ὄγκος του εἶναι $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$

Ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τῶν τριῶν διαστάσεών του.

Ἀποδεικνύεται ὅτι αὐτὸ ἀληθεύει καὶ ὅταν οἱ τιμές τῶν α , β , γ εἶναι ὁποιοῖδήποτε ἀριθμοί.

Παρατηροῦμε στὸν τύπο $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ ὅτι τὸ γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ δίνει τὸ ἐμβαδὸ E_β τοῦ ὀρθογωνίου τῆς βάσης μὲ διαστάσεις α καὶ β , ἐνῶ τὸ γ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου:

Ἄρα $V = E_\beta \cdot u$ δηλαδή:

Ὁ ὄγκος ἐνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς βάσης του ἐπὶ τὸ μήκος τοῦ ἀντίστοιχου ὕψους.

§ 70. Ὁγκος κύβου

Γνωρίζουμε ὅτι ὁ κύβος εἶναι ἓνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, τοῦ ὁποῖου οἱ τρεῖς διαστάσεις εἶναι ἴσες (σχ. 134).

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι τὸ μήκος τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου εἶναι α , ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι $V = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \Rightarrow$

$$V = \alpha^3 \quad (1) \text{ δηλαδή:}$$

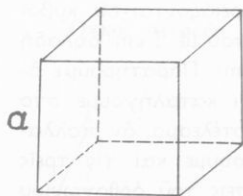
Ὁ ὄγκος ἐνὸς κύβου ἰσοῦται μὲ τὴν τρίτη δύναμη τοῦ μήκους τῆς ἀκμῆς του.

Παρατήρηση: Γιὰ τὸ λόγο αὐτὸ ἡ τρίτη δύναμη ἐνὸς ἀριθμοῦ λέγεται κύβος τοῦ ἀριθμοῦ. Ἀπὸ τὸν τύπο (1) ἐννοοῦμε ὅτι κάθε μονάδα ὁγκου

ἰσοῦται μὲ $1000 = 10^3$ μονάδες τῆς ἀμέσως κατώτερης τάξης, ἄρα:

$$1\text{ m}^3 = 1000\text{ dm}^3 = 1000000\text{ cm}^3 = 1000000000\text{ mm}^3 \quad \eta$$

$$1\text{ m}^3 = 10^3\text{ dm}^3 = 10^6\text{ cm}^3 = 10^9\text{ mm}^3.$$



σχ. 134.

$$1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3 = 1000000 \text{ mm}^3$$

$$1 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ mm}^3.$$

Άσκησης

205) Βρείτε τον όγκο ενός κύβου πλευράς 3,5 m.

206) Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει διαστάσεις 5 m, 14 dm, και 8 cm. Να βρείτε τον όγκο του.

207) Ο όγκος ενός ορθογωνίου παρ/δου είναι 64 dm^3 και το έμβαδόν της βάσης του 16 dm^2 . Να βρείτε το μήκος του ύψους του, που αντιστοιχεί στη βάση αυτή.

208) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ενός κύβου, που έχει όγκο 4913 cm^3 . (Υπόδειξη: αναλύστε τον αριθμό σε γινόμενο παραγόντων).

209) Η ολική επιφάνεια ενός κύβου είναι 294 dm^2 . Να υπολογίσετε τον όγκο του.

210) Ένας σιδηρουργός έχει μια μεταλλική πλάκα σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με διαστάσεις 4 m, 5 m και 0,5 m και σκοπεύει να τη διαιρέσει σε κύβους, που καθένας τους να έχει ακμή 0,05 m. Σε πόσους τέτοιους κύβους μπορεί να διαιρεθεί η πλάκα;

211) Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που οι διαστάσεις του είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 3, 5, 6 και έχουν άθροισμα 70 dm. Να βρείτε τον όγκο του.

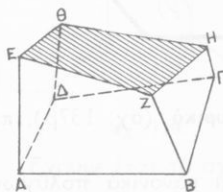
212) Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει όγκο 960 cm^3 . Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του, αν γνωρίζετε ότι αυτές είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 4, 5, 6.

213) Ένα δοχείο έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με διαστάσεις 2 m, 3 m, 4 m. Ένα άλλο δοχείο με το ίδιο σχήμα έχει όκταπλάσιο όγκο και διαστάσεις ανάλογες προς τις διαστάσεις του πρώτου δοχείου. Να βρεθούν οι διαστάσεις του δεύτερου δοχείου.

214) Αν πολλαπλασιάσουμε το μήκος α της ακμής ενός κύβου επί 2, πόσος γίνεται ο όγκος του; Εφαρμογή: $\alpha = 5 \text{ cm}$.

B. ΠΡΙΣΜΑΤΑ

§ 71. Πολύεδρο



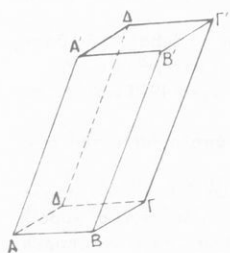
σχ. 135.

Το στερεό που εικονίζεται στο σχήμα (135) αποτελείται από πολύγωνα, τα οποία δε βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Κάθε πλευρά καθενός πολυγώνου ανήκει και σε ένα (μόνο ένα) άλλο πολύγωνο. Το στερεό αυτό είναι ένα **πολύεδρο**. Τα πολύγωνα, από τα οποία αποτελείται, είναι οι **έδρες** του πολυέδρου. Οι πλευρές των εδρών είναι οι **ακμές** του πολυέδρου και οι κορυφές των εδρών οι **κορυφές** του πολυέδρου. Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και ο κύβος είναι πολυέδρα.

Σημ. Σημεία τοῦ πολυέδρου λέγονται τὰ σημεῖα τῶν ἀκμῶν του καὶ τὰ ἐσωτερικὰ σημεῖα τῶν ἑδρῶν του.

§ 72. Πρίσμα

Πρίσμα εἶναι ἓνα πολυέδρου, ποὺ ἔχει δύο ἑδρες ἴσες καὶ παράλληλες καὶ τὶς ἄλλες παραλληλόγραμμα. (σχ. 136).

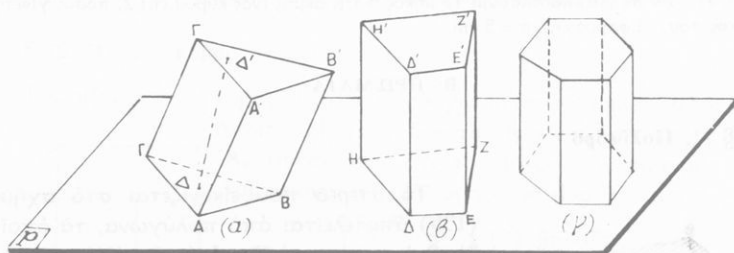


σχ. 136.

Οἱ ἴσες καὶ παράλληλες ἑδρες $ABΓΔ$, $A'B'Γ'D'$ λέγονται βάσεις τοῦ πρίσματος. Τὰ παραλληλόγραμμα λέγονται παράπλευρες ἑδρες τοῦ πρίσματος, ὅπως τὰ $ABB'A'$, $BΓΓ'B'$ κ.λ.π. Οἱ ἀκμὲς AA' , BB' , ..., οἱ ὁποῖες περιέχονται μεταξὺ τῶν βάσεων, λέγονται παράπλευρες ἀκμὲς. Αὐτὲς εἶναι ἴσες καὶ παράλληλες.

Ἡ ἀπόσταση τῶν ἐπιπέδων τῶν βάσεων λέγεται **ῥψος** τοῦ πρίσματος, π.χ. τὸ $ΔΔ'$ (σχ. 137α). Ἄν οἱ παράπλευρες ἀκμὲς εἶναι κάθετες στὰ ἐπίπεδα τῶν βάσεων, τὸ πρίσμα λέγεται **ὀρθό πρίσμα**, διαφορετικὰ λέγεται **πλάγιον**. Συνεπῶς τὸ ῥψος τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ἴσο μὲ τὴν παράπλευρη ἀκμὴ του καὶ οἱ παράπλευρες ἑδρες του εἶναι ὀρθογώνια, π.χ. τὸ $ΔΔ'$ (σχ. 137β).

Ἄν τὸ πρίσμα ἔχει τριγωνικὲς βάσεις, λέγεται **τριγωνικὸ πρίσμα**, ὅπως τὸ $ABΓA'B'Γ'$ στὸ σχῆμα 137α. Ἄν ἔχει βάσεις τετράπλευρα,



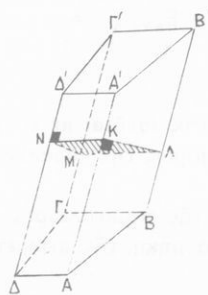
σχ. 137.

πεντάγωνα κ.λ.π., λέγεται ἀντιστοίχως **τετραπλευρικὸ** (σχ. 137β), **πενταγωνικὸ** κ.λ.π. πρίσμα.

Ὅταν οἱ βάσεις ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι κανονικὰ πολύγωνα, αὐτὸ λέγεται **κανονικὸ πρίσμα**. (σχ. 137γ).

Παρατήρηση: Μποροῦμε μὲ μιὰ ἀπλή κατασκευὴ νὰ ἔχουμε ἓνα στερεομετρικὸ ὑπόδειγμα (μοντέλο) πρίσματος.

Παίρνουμε δύο (ή περισσότερα) ἴσα πολύγωνα ἀπὸ ξύλο ἢ χαρτόνι. Ἀνοίγουμε τρύπες στὶς κορυφές τῶν πολυγώνων αὐτῶν καὶ περνᾶμε νήματα, τὰ ὁποῖα παίρνουν παράλληλες θέσεις. Μὲ παράλληλη μεταφορὰ



σχ. 138.

τῶν πολυγώνων θὰ ἔχουμε τὴν ἔννοια τοῦ πρίσματος (ὀρθοῦ καὶ πλάγιου) καθὼς καὶ τῆς παράλληλης πρὸς τὶς βάσεις ἢ τῆς κάθετης τομῆς του.

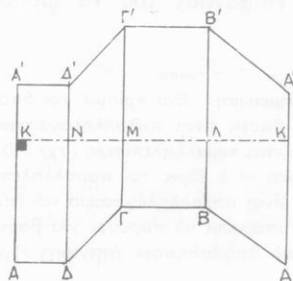
Ἄν φέρουμε ἓνα ἐπίπεδο κάθετο στὶς παράπλευρες ἀκμές τοῦ πρίσματος, παίρνουμε ἓνα πολύγωνο, τὸ ὁποῖο λέγεται **κάθετη τομὴ** τοῦ πρίσματος. Οἱ πλευρές τῆς κάθετης τομῆς ἑνὸς πρίσματος εἶναι ὕψη τῶν ἀντίστοιχων παράπλευρων ἐδρῶν, ὅταν λάβουμε ὡς βάσεις των τὶς παράπλευρες ἀκμές. Στὰ ὀρθὰ πρίσματα ἡ κάθετη τομὴ εἶναι ἴση μὲ τὶς βάσεις.

§ 73. Ἐμβαδὸ ἐπιφάνειας πρίσματος.

Ἐμβαδὸ τῆς ὅλικης ἐπιφάνειας πρίσματος λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβადῶν τῶν ἐδρῶν του.

Ἐμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας πρίσματος εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβადῶν τῶν παράπλευρων ἐδρῶν του.

Λίνεται τὸ πλάγιο πρίσμα $AB\Gamma\Delta A'B'\Gamma'\Delta'$ καὶ ἔστω $KLMN$ μιὰ κάθετη τομὴ του. (σχ. 138). Ζητεῖται νὰ βροῦτε:



σχ. 139.

α) Τὸ ἐμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τοῦ πρίσματος καὶ

β) Τὸ ἐμβαδὸ τῆς ὅλικης ἐπιφάνειάς του.

α) Κατασκευάζουμε ἓνα στερεομετρικὸ ὑπόδειγμα (μοντέλο) τοῦ πρίσματος αὐτοῦ.

Κόβουμε κατὰ μῆκος μιᾶς ἀκμῆς π.χ. τῆς AA' τὴν παράπλευρη ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος ποὺ μᾶς δόθηκε καὶ ἀναπτύσσουμε τὶς ἑδρες τῆς (τοῦ στερεοτύπου) πάνω σ' ἓνα ἐπίπεδο.

ἔχουμε ἔτσι τὸ σχῆμα 139, ποὺ εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τοῦ πρίσματος. Παρατηροῦμε ὅτι αὐτὸ ἀποτελεῖται ἀπὸ τέσσερα (4) παραλληλόγραμμα, τὰ $ABB'A'$, $BB'C'B'$, $\Gamma\Delta\Delta'\Gamma'$, $\Delta\Delta'A'D'$ τῶν ὁποίων τὰ ὕψη εἶναι οἱ πλευρές KL , LM , MN , NK τῆς κάθετης τομῆς τοῦ πρίσματος καὶ οἱ βάσεις ἴσες μὲ τὴν παράπλευρη ἀκμὴ του. Ἄν α,

β, γ, δ είναι αντίστοιχως τὰ μήκη τους καὶ λ εἶναι τὸ μήκος τῆς παράπλευρης ἄκμης τοῦ πρίσματος, τὸ ἔμβαδὸ τοῦ ἀναπτύγματος αὐτοῦ εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἔμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τοῦ πρίσματος αὐτοῦ. Δηλαδή:

$$E_{\text{παρ. ἐπιφ. πρίσμ.}} = E_{\text{ABB'A'}} + E_{\text{BGG'B'}} + E_{\text{ΓΔΔ'Γ'}} + E_{\text{ΔΑΑ'Δ'}} \Rightarrow$$

$$E_{\text{παρ. ἐπιφ. πρίσμ.}} = \alpha\lambda + \beta\lambda + \gamma\lambda + \delta\lambda \text{ συνεπῶς}$$

$$E_{\text{παρ. ἐπιφ. πρίσμ.}} = (\alpha + \beta + \gamma + \delta) \cdot \lambda. \text{ Δηλαδή:}$$

Τὸ ἔμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τῆς περιμέτρου τῆς κάθετης τομῆς του ἐπὶ τὸ μήκος τῆς παράπλευρης ἄκμης του.

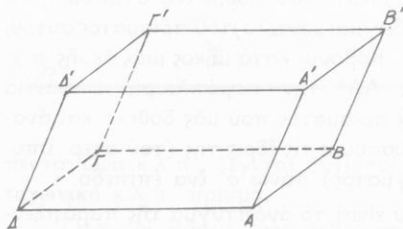
Ἄν τὸ πρίσμα εἶναι ὀρθό, τὸ ἀνάπτυγμα τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς του εἶναι ἓνα ὀρθογώνιο μὲ διαστάσεις τὰ μήκη τῆς περιμέτρου τῆς βάσης του καὶ τοῦ ὕψους του.

Ἄρα: Τὸ ἔμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τῶν μηκῶν τῆς περιμέτρου τῆς βάσης του καὶ τοῦ ὕψους του.

Στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα μποροῦμε νὰ καταλήξουμε καὶ ἂν θεωρήσουμε ἅπ' εὐθείας τὸ στερεό, χωρὶς νὰ χρησιμοποιήσουμε τὸ στερεομετρικὸ ὑπόδειγμα καὶ τὸ ἀνάπτυγμά του. Ἐπειδὴ κάθε παράπλευρη ἔδρα εἶναι παραλληλόγραμμο, ἔχουμε $E_{\text{παρ. ἐπιφ. πρίσμ.}} = E_{\text{ABB'A'}} + E_{\text{BGG'B'}} + E_{\text{ΓΔΔ'Γ'}} + E_{\text{ΔΑΑ'Δ'}} \Rightarrow E_{\text{παρ. ἐπιφ. πρίσμ.}} = \alpha\lambda + \beta\lambda + \gamma\lambda + \delta\lambda \Rightarrow E_{\text{παρ. ἐπιφ. πρίσμ.}} = (\alpha + \beta + \gamma + \delta) \cdot \lambda$

β) Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἔμβαδὸ τῆς ὀλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ πρίσματος προσθέτουμε στὸ ἔμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς του τὰ ἔμβαδὰ τῶν δύο ἴσων βάσεων του.

$$\text{Ἔτσι ἔχουμε: } E_{\text{ὀλ. ἐπιφ. πρίσμ.}} = E_{\text{παρ. ἐπ. πρ.}} + 2E_{\text{βάσης.}}$$



σχ. 140.

Σημείωση: Ἐνα πρίσμα, τοῦ ὁποίου οἱ βάσεις εἶναι παραλληλόγραμμα, ὀνομάζεται **παραλληλεπίπεδο** (σχ. 140). Ἔτσι καὶ οἱ 6 ἔδρες τοῦ παραλληλεπίπεδου εἶναι παραλληλόγραμμα καὶ ἐπομένως μποροῦμε νὰ πάρουμε γιὰ βάσεις του δυὸ ὅποιεςδήποτε ἀπέναντι ἔδρες του.

Ἐνα παραλληλεπίπεδο ὀνομάζεται ὀρθό, ἂν οἱ παράπλευρες ἔδρες του εἶναι ὀρθογώνια.

Συνεπῶς, ὅσα ἀναφέραμε παραπάνω γιὰ τὸ ἔμβαδὸ τῆς παράπλευρης καὶ τῆς ὀλικῆς ἐπιφάνειας πρίσματος, ἰσχύουν καὶ γιὰ τὰ παραλληλεπίπεδα.

Άσκήσεις

215) Ένα ὀρθό πρίσμα ἔχει βάση ὀρθογώνιο τρίγωνο μὲ κάθετες πλευρὲς 6 cm καὶ 8 cm καὶ ὕψος 15 cm. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφανείας του, καθὼς καὶ τὸ ἐμβαδὸ τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας του.

216) Ἡ κάθετη τομὴ ἐνὸς πλάγιου τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἰσόπλευρο τρίγωνο μὲ πλευρὰ 3 cm. Ἡ παράπλευρη ἀκμὴ τοῦ πρίσματος εἶναι 8 cm. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφανείας του.

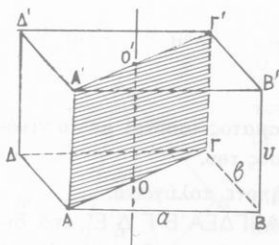
217) Δίνεται ἓνα κανονικὸ πρίσμα ἀκμῆς 5 m, τοῦ ὁποῖου ἡ βάση εἶναι τετράγωνο πλευρᾶς 2 m. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφανείας του.

218) Νὰ κατασκευάσετε ἓνα ὀρθό πρίσμα ἀπὸ χαρτόνι, ποῦ νὰ ἔχει ὕψος 7 cm καὶ ἡ βάση του νὰ εἶναι ρόμβος μὲ διαγωνίους 6 cm καὶ 8 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸ τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας του.

219) Δίνεται ἓνα κανονικὸ πρίσμα μὲ ἀκμὴ 5α, τοῦ ὁποῖου ἡ βάση εἶναι ἰσόπλευρο τρίγωνο μὲ πλευρὰ α. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβαδὸ α) τῆς παράπλευρης ἐπιφανείας του καὶ β) τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας του. Ἐφαρμογὴ: $\alpha = 13$ cm.

§ 74. Ὅγκος πρίσματος

α) Ὅγκος ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος μὲ βάση ὀρθογώνιο τρίγωνο:



σχ. 141.

Δίνεται ἓνα ὀρθό τριγωνικὸ πρίσμα μὲ βάση ὀρθογώνιο τρίγωνο μὲ μὴκη κάθετων πλευρῶν α καὶ β καὶ ὕψος μῆκους υ. Νὰ βρεῖτε τὸν ὄγκο του.

Θεωροῦμε ἓνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο μὲ διαστάσεις α, β καὶ υ. Τὸ στερεὸ αὐτὸ τέμνεται ἀπὸ τὸ διαγώνιο ἐπίπεδο ΑΑ'Γ'Γ' (σχ. 141) σὲ δύο πρίσματα, ποῦ ἔχουν βάσεις ὀρθογώνια τρίγωνα μὲ μὴκη κάθετων πλευρῶν α καὶ β καὶ ὕψος υ. Τὰ ὀρθὰ αὐτὰ πρίσματα εἶναι ἴσα (γιατὶ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸν ἀξονα ΟΟ', ὁ ὁποῖος συν-

δέει τὰ κέντρα Ο καὶ Ο' τῶν βάσεων).

Συνεπῶς ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, τὸ ὁποῖο ἔχει βάση ὀρθογώνιο τρίγωνο, εἶναι τὸ μισὸ τοῦ ὄγκου τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις α, β, υ.

Διηλαθῇ: $V = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \upsilon}{2} \Rightarrow V = \frac{\alpha \cdot \beta}{2} \cdot \upsilon$. Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸ τῆς βάσης τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος, ἡ ὁποία εἶναι ὀρθογώνιο τρίγωνο, εἶναι

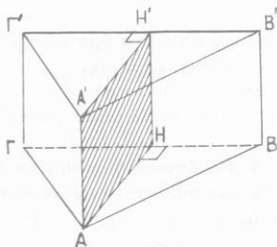
$$E = \frac{\alpha \cdot \beta}{2} \quad \text{Ἀρα} \quad \boxed{V = E_{\beta} \cdot \upsilon}$$

Ἐπομένως: Ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος μὲ βάση ὀρθογώνιο τρίγωνο, ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσης ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους.

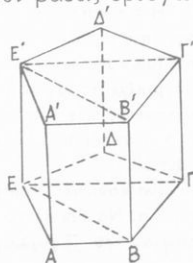
β) Όγκος ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος:

Δίνεται ἓνα ὀρθό τριγωνικὸ πρίσμα $ABΓ\Lambda'B'\Gamma'$ με βάση ἓνα τετὸν τρίγωνο $ABΓ$. Νὰ βρεῖτε τὸν ὄγκο του.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τοῦ πρίσματος $ABΓ\Lambda'B'\Gamma'$, τὸ διαιροῦμε σὲ δύο ὀρθὰ τριγωνικὰ πρίσματα, ποὺ ἔχουν βάσεις ὀρθογώνια τρίγωνα,



σχ. 142.



σχ. 143.

με τὸ ἐπίπεδο $AHH'\Lambda'$, τὸ ὁποῖο ὀρίζεται ἀπὸ τὸ ὕψος AH τοῦ τριγώνου $ABΓ$ καὶ τὸ ὕψος AA' τοῦ πρίσματος. Δηλαδή με ἓνα ἐπίπεδο κάθετο στὸ $BΓΓ'\Lambda'$ (σχ. 142).

$$\begin{aligned}\text{Ἀρα: } V_{ABΓ\Lambda'B'\Gamma'} &= V_{ABH\Lambda'B'H'} + V_{ΓAHH'\Lambda'H'} = E_{ABH} \cdot u + E_{AHH'} \cdot u = \\ &= (E_{ABH} + E_{AHH'}) \cdot u = E_{ABΓ} \cdot u\end{aligned}$$

$$\text{Ὡστε: } V_{ABΓ\Lambda'B'\Gamma'} = E_{\text{βάσεως}} \cdot u.$$

Ἀρα: Ὁ ὄγκος κάθε ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται με τὸ γινόμενο τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσης ἐπὶ τὸ μήκος τοῦ ὕψους του.

γ) Όγκος ὀρθοῦ πρίσματος με βάση ὁποιοδήποτε πολύγωνο:

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τοῦ πρίσματος $ABΓΔΕ\Lambda'B'\Gamma'\Delta'E'$, τὸ διαιροῦμε σὲ ὀρθὰ τριγωνικὰ πρίσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὕψος τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος ποὺ μᾶς ἔχει δοθεῖ καὶ βάσεις τὰ τρίγωνα ABE , BEG , $ΓΕΔ$ (σχ. 143). Ὀνομάζουμε με V_1, V_2, V_3 τοὺς ὄγκους τῶν πρισμάτων αὐτῶν καὶ με E_1, E_2, E_3 τὰ ἐμβαδὰ τῶν βάσεων τους. Τότε ἔχουμε

$$V_{\text{πρίσμ.}} = V_1 + V_2 + V_3, \text{ ΣΥΝΕΠΤΩΣ}$$

$$V_{\text{πρίσμ.}} = E_1 \cdot u + E_2 \cdot u + E_3 \cdot u = (E_1 + E_2 + E_3)u$$

$$\text{Ἐπομένως } V_{\text{πρίσμ.}} = E_{\text{βάσ.}} \cdot u.$$

Ὡστε: Ὁ ὄγκος κάθε ὀρθοῦ πρίσματος ἰσοῦται με τὸ γινόμενο τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσης ἐπὶ τὸ μήκος τοῦ ὕψους.

δ) Όγκος ὁποιοδήποτε πλάγιου πρίσματος:

Ὁ τύπος $V_{\text{πρίσμ.}} = E_{\text{βάσ.}} \cdot u$, ὁ ὁποῖος χρησιμοποιεῖται γιὰ τὴν εὑρεση τοῦ ὄγκου ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι γενικὸς καὶ ἰσχύει, ὅπως θὰ μάθουμε σὲ μεγαλύτερη τάξη, καὶ γιὰ τὰ πλάγια πρίσματα.

Ἀρα γενικά: Ὁ ὄγκος ὁποιοδήποτε πρίσματος ἰσοῦται με τὸ γινόμενο τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσης ἐπὶ τὸ μήκος τοῦ ὕψους.

Σημ. 'Ο όγκος οποιουδήποτε πρίσματος δίνεται και από τὸν τύπο $V = E \cdot \lambda$ κάθετης τομῆς $\cdot \lambda$ (όπου λ τὸ μήκος τῆς παράπλευρης ἀκμῆς).

Ἀσκήσεις

220) "Ενα ὀρθὸν τριγωνικὸν πρίσμα ἔχει ὕψος 40 cm καὶ βάση ὀρθογώνιο τρίγωνο μὲ κάθετες πλευρὰς 6 cm καὶ 8 cm. Νὰ βρεῖτε τὸν ὄγκο του.

221) Δίνεται ἕνα κανονικὸν ἑξαγωνικὸν πρίσμα, τὸ ὁποῖο ἔχει ὕψος 12 dm καὶ μήκος τῆς πλευρᾶς τῆς βάσης του 8 dm. Νὰ βρεῖτε τὸν ὄγκο του.

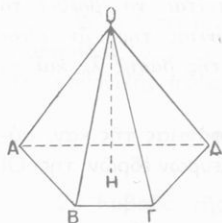
222) "Ενα ὀρθὸν πρίσμα ἔχει ὄγκο 200 cm^3 καὶ ὕψος 8 cm. "Αν ἡ βάση του εἶναι τετράγωνο, νὰ ὑπολογίσετε τὴν πλευρὰ τῆς.

223) "Η παράπλευρη ἐπιφάνεια ἐνὸς κανονικοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι 324 cm^2 . "Αν τὸ ὕψος του εἶναι τριπλάσιο ἀπὸ τὴν πλευρὰ τῆς βάσης του, νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκο του.

224) "Ενα κανονικὸν ἑξαγωνικὸν πρίσμα ἔχει πλευρὰ τῆς βάσης του α καὶ ὕψος 2 α . Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκο τοῦ πρίσματος. Ἐφαρμογή: $\alpha = 9 \text{ cm}$.

Γ. ΠΥΡΑΜΙΔΑ—ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΠΥΡΑΜΙΔΑ—ΜΕΤΡΗΣΗ ΠΥΡΑΜΙΔΑΣ

§ 75. Πυραμίδα:



σχ. 144.

Πυραμίδα εἶναι ἕνα στερεό, ποὺ ὀρίζεται ἀπὸ ἕνα πολύγωνο καὶ ἀπὸ τρίγωνα. Τὰ τρίγωνα ἔχουν μία κοινὴ κορυφή (ποὺ δὲν ἀνήκει στὸ ἐπίπεδο τοῦ πολυγώνου) καὶ καθένα ἔχει μία πλευρὰ κοινὴ μὲ τὸ πολύγωνο (σχ. 144).

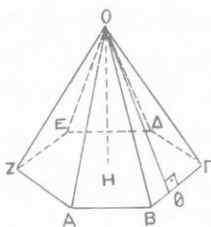
Τὸ πολύγωνο ABΓΔ λέγεται **βάση** τῆς πυραμίδας καὶ τὰ τρίγωνα AOB, BOΓ, ... λέγονται **παράπλευρες ἑδρες** τῆς. Τὸ σημεῖο O λέγεται **κορυφή** τῆς πυραμίδας· τὰ εὐθ. τμήματα OA, OB, ... λέγονται **παράπλευρες ἀκμές** τῆς. Ἡ ἀπόσταση OH τῆς κορυφῆς ἀπὸ τὴν βάση τῆς πυραμίδας εἶναι τὸ ὕψος τῆς. Τὸ **σύνολο** τῶν παράπλευρων ἐδρῶν ἀποτελεῖ τὴν παράπλευρη ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδας. "Αν ἡ

βάση τῆς πυραμίδας εἶναι τρίγωνο, ἡ πυραμίδα λέγεται **τριγωνικὴ** ἂν εἶναι τετράπλευρο, πεντάγωνο κλπ., λέγεται **τετραπλευρικὴ, πενταγωνικὴ** κλπ.

"Η τριγωνικὴ πυραμίδα εἶναι ἕνα πολυέδρο μὲ 4 ἑδρες καὶ λέγεται **τετράεδρο**.

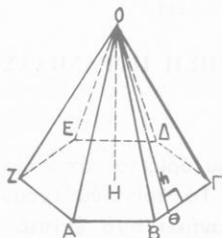
§ 76. Κανονικὴ πυραμίδα

Μία πυραμίδα λέγεται **κανονικὴ**, ὅταν ἡ βάση τῆς εἶναι κανονικὸν πολύγωνο καὶ τὸ ἴχνος τοῦ ὕψους εἶναι τὸ κέντρο τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου (σχ. 145).



σχ. 145.

§ 77. Έμβαδὸ κανονικῆς πυραμίδας.



σχ. 146.

Οἱ παράπλευρες ἔδρες τῆς κανονικῆς πυραμίδας εἶναι ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἴσα (AOB, BOΓ, ...). Τὸ ὕψος ΟΘ ἑνὸς ἀπὸ τὰ ἴσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα λέγεται **ἀποστήμα** τῆς κανονικῆς πυραμίδας (ἢ **παράπλευρο ὕψος**) καὶ συμβολίζεται μὲ h . Ἐν ἡ βάση μιᾶς κανονικῆς πυραμίδας εἶναι ἰσόπλευρο τρίγωνο, αὐτὴ λέγεται κανονικὴ τριγωνικὴ πυραμίδα. Ἐνα τετράεδρο εἶναι κανονικό, ἂν οἱ 4 ἔδρες του εἶναι ἴσα ἰσόπλευρα τρίγωνα.

Ὀνομάζουμε **ἐμβαδὸ πυραμίδας** τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐδρῶν τῆς. **Ἐμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας** λέμε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν παράπλευρων ἐδρῶν τῆς.

1. Ἐμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας μιᾶς κανονικῆς πυραμίδας:

Λίνεται μιὰ κανονικὴ πυραμίδα (π.χ. ἑξαγωνικὴ) OABΓΔΕΖ (σχ. 146) καὶ ζητεῖται νὰ βοηθεῖ τὸ ἐμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς τῆς, ἂν εἶναι γνωστὸ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τῆς βάσης λ_6 καὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀποστήματος h .

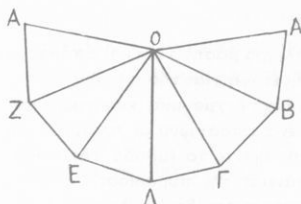
Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τῆς καν. αὐτῆς πυραμίδας, προσθέτουμε τὰ ἐμβαδὰ τῶν παράπλευρων ἐδρῶν τῆς. Οἱ ἔδρες αὐτὲς εἶναι ἴσες.

$$\begin{aligned} \text{Ἄρα } E_{\text{π. π. πυρ.}} &= 6 \cdot E_{\text{AOB}} = 6 \cdot \frac{\lambda_6 \cdot h}{2} = \frac{6\lambda_6 \cdot h}{2} = \\ &= \frac{\text{μῆκος περιμέτρου βάσης} \times \text{μῆκος ἀποστήματος}}{2} \end{aligned}$$

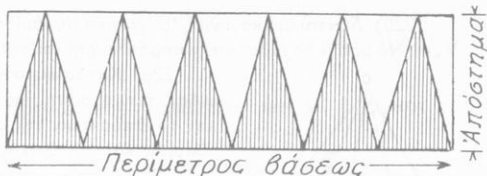
Ἐπομένως: Τὸ ἐμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας μιᾶς κανονικῆς πυραμίδας ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιγινόμενο τοῦ μήκους τῆς περιμέτρου τῆς βάσης τῆς ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀποστήματός τῆς.

Παρατηρήσεις: 1) Ἄν κόψουμε τὴν παράπλευρη ἐπιφάνεια κατὰ μῆκος μιᾶς παράπλευρης ἀκμῆς καὶ τὴν ἀναπτύξουμε σ' ἐπίπεδο, ἔχουμε τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ σχήματος 146 (σχ. 147).

2) Μποροῦμε κόβοντας τὴν πυραμίδα κατὰ μῆκος ὅλων τῶν παρά-



σχ. 147.



σχ. 148.

πλευρών ακμῶν νὰ ἔχουμε τὸ ἀνάπτυγμα τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τῆς κανονικῆς πυραμίδας (σχ. 148).

Τότε τὸ ἔμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας αὐτῆς βρίσκεται, ἂν πάρουμε τὸ μισὸ τοῦ ἔμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου, ποῦ ἔχει διαστάσεις τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου τῆς βάσης τῆς πυραμίδας καὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀποστήματος τῆς.

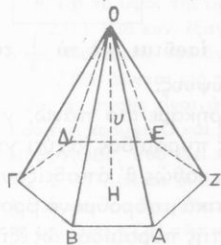
*Αρα $E_{\text{πυρ. ἐπιφ. καν. πυρ.}} =$

$$= \frac{\text{μῆκος περιμέτρου βάσης} \times \text{μῆκος ἀποστήματος}}{2}$$

*Ἄν καλέσουμε λ_v τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τῆς βάσης τῆς κανονικῆς πυραμίδας, v τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσης καὶ h τὸ ἀπόστημα τῆς κανονικῆς πυραμίδας, θὰ ἔχουμε:

$$E_{\text{πυρ. ἐπιφ. καν. πυρ.}} = \frac{v \cdot \lambda_v \cdot h}{2}$$

2. Ἐμβαδὸ τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας κανονικῆς πυραμίδας:



σχ. 149

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἔμβαδὸ τῆς ὁλ. ἐπιφάνειας μιᾶς κανονικῆς πυραμίδας, προσθέτουμε στὸ ἔμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τὸ ἔμβαδὸ τῆς βάσεως τῆς.

$$E_{\text{ολ.}} = E_{\text{πυρ.}} + E_{\text{βασ.}} \quad (1)$$

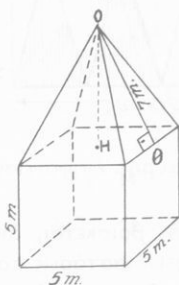
δηλαδή: $E_{\text{ολ.}} = \frac{v \cdot \lambda_v \cdot h}{2} + E_{\text{βασ.}} \quad (2)$

*Ὁ τύπος (1) ἰσχύει καὶ γιὰ τὶς μὴ κανονικὲς πυραμίδες.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἔμβαδὸ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας μιᾶς ὁποιασδήποτε πυραμίδας, προσθέτουμε τὰ ἔμβαδὰ τῶν ἐδρῶν τῆς.

Άσκησης

225) Δίνεται μια κανονική εξαγωνική πυραμίδα με πλευρά βάσης 3 cm και απόσταση 9 cm. Να βρείτε το έμβαδο της παράπλευρης και της όλικης επιφάνειας της πυραμίδας.



σχ. 150.

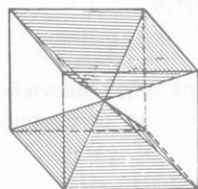
226) Κατασκευάστε το ανάπτυγμα μίας κανονικής πυραμίδας, που η βάση της είναι ένα τετράγωνο με πλευρά 3 cm και το απόστημα της 2,5 cm. Βρείτε το έμβαδο της παράπλευρης και της όλικης επιφάνειας της πυραμίδας.

227) Δίνεται μια κανονική πυραμίδα με βάση ένα τετράγωνο, που έχει πλευρά 6 cm, και ύψος 4 cm. Να υπολογίσετε το έμβαδο της παράπλευρης και της όλικης επιφάνειας της κανονικής πυραμίδας.

228) Δίνεται μια κανονική εξαγωνική πυραμίδα, που η παράπλευρη ακμή της είναι 10 cm και το ύψος 6 cm. Να υπολογίσετε το έμβαδο της όλικης επιφάνειας της.

229) Το στερεό του σχήματος 150 αποτελείται από έναν κύβο με πλευρά 5 m και από μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα, που το απόστημά της είναι 7 m. Βρείτε το έμβαδο της επιφάνειας του.

§ 78. Όγκος πυραμίδας.



σχ. 151.

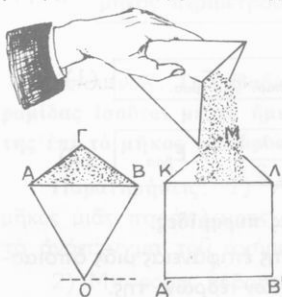
1. Λίνεται μια κανονική τετραγων. πυραμίδα με μήκος πλευρ. βάσης λ και μήκος ύψους $v = \frac{\lambda}{2}$. Να βρείτε τον όγκο της.

Κατασκευάζουμε 6 πυραμίδες ίσες με αυτή που μας δόθηκε και τις τοποθετούμε έτσι, ώστε να έχουν κοινή την κορυφή και ανά δύο κοινή παράπλευρη έδρα. Τότε σχηματίζεται ένας κύβος με ακμή λ (σχ. 151).

Άρα ο όγκος καθεμιάς από τις ίσες αυτές πυραμίδες είναι το $\frac{1}{6}$ του όγκου του κύβου.

$$\text{Δηλαδή: Έχουμε } V_{\text{καν. πυρ.}} = \frac{1}{6} \lambda^3 = \frac{1}{3} \lambda^2 \cdot \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \boxed{V = \frac{1}{3} E_{\text{β.υ}}}$$

Έπομένως: Ο όγκος της κανονικής πυραμίδας ισούται με το $\frac{1}{3}$ του γινομένου του έμβαδου της βάσης επί το μήκος του ύψους.



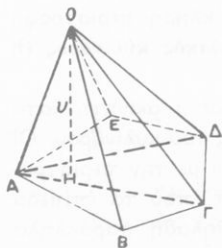
σχ. 152.

2. Ο τύπος, που βρήκαμε πιο πάνω, για τον όγκο της κανονικής πυραμίδας ισχύει για οποιαδήποτε πυραμίδα, καθώς θ' αποδείξουμε σε ανώτερη τάξη. Πρακτικά μπορούμε να βρούμε τον τύπο του όγκου της πυραμίδας ως εξής.

Χρησιμοποιούμε δύο δοχεία: ένα σε σχήμα τριγωνικής πυραμίδας OABΓ με ανοικτή τη βάση ABΓ και ένα άλλο πρισματικό, που έχει βάση ίση με τη βάση ABΓ της τριγωνικής πυραμίδας και ύψος ίσο με της πυραμίδας.

Παρατηρούμε ότι, αν γεμίσουμε με φιλή άμμο (ή νερό) τὸ πρῶτο δοχείο καὶ ἀδειάσουμε τὸ περιεχόμενό του στὸ δεύτερο, θὰ χρειαστεῖ νὰ ἐπαναλάβουμε αὐτὴ τὴν ἐργασία τρεῖς φορές, ὥσπου νὰ γεμίσει τὸ πρισματικὸ δοχείο (σχ. 152)

Ἄν εἶναι V ὁ ὄγκος τῆς τριγωνικῆς πυραμίδας καὶ V' ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος, θὰ ἔχουμε:



σχ. 153.

$$3V = V' \Leftrightarrow V = \frac{V'}{3} \Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \cdot E_{\beta} \cdot \upsilon \quad (V' = E_{\beta} \cdot \upsilon)$$

3. Γιὰ νὰ μετρήσουμε μιὰ ὁποιαδήποτε πυραμίδα $OAB\Gamma\Delta$ (σχ. 153), ποὺ ἔχει ἐμβαδὸ βάσης E_{β} καὶ ὕψος υ , τὴ διαιροῦμε στὶς τριγωνικὲς πυραμίδες $OAB\Gamma$, $OAG\Delta$, $OADE$, οἱ ὁποῖες ἔχουν τὸ ἴδιο ὕψος, ὄγκους V_1, V_2, V_3 ἀντιστοίχως καὶ ἐμβαδὰ βάσεων E_1, E_2, E_3 , τὰ ὁποῖα ἔχουν ἄθροισμα E . Ἐπομένως:

$$\begin{aligned} V_{OAB\Gamma\Delta} &= V_1 + V_2 + V_3 \Leftrightarrow V_{OAB\Gamma\Delta} = \frac{1}{3} E_1 \cdot \upsilon + \frac{1}{3} E_2 \cdot \upsilon + \frac{1}{3} E_3 \cdot \upsilon \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow V_{OAB\Gamma\Delta} = \frac{1}{3} (E_1 + E_2 + E_3) \cdot \upsilon \Leftrightarrow V = \frac{1}{3} E_{\beta} \cdot \upsilon \end{aligned}$$

Ἄρα καταλήγουμε στὸ συμπέρασμα ὅτι: Ὁ ὄγκος μιᾶς ὁποιασδήποτε πυραμίδας ἰσοῦται μὲ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσης ἐπὶ τὸ μήκος τοῦ ὕψους.

Ἀσκήσεις

230) Μιὰ κανονικὴ πυραμίδα ἔχει γιὰ βάση ἓνα τετράγωνο μὲ πλευρὰ μήκους 8 cm καὶ τὸ ὕψος τῆς εἶναι 6 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ὄγκο τῆς.

231) Μιὰ καν. ἑξαγωνικὴ πυραμίδα ἔχει παράπλευρη ἀκμὴ μήκους 10 cm καὶ ὕψος 8 cm. Νὰ βρεῖτε τὸν ὄγκο τῆς.

232) Δίνεται μιὰ τριγωνικὴ πυραμίδα $OAB\Gamma$ μὲ ἀκμὲς $OA=3\alpha$, $OB=4\alpha$ καὶ $OG=2\alpha$, οἱ ὁποῖες εἶναι ἀνὰ δύο κάθετες. Ὑπολογίστε τὸν ὄγκο τῆς πυραμίδας $OAB\Gamma$, ποὺ ἔχει κορυφὴ O καὶ βάση $AB\Gamma$ (θὰ τὸ πετύχετε αὐτὸ, ἂν βρεῖτε τὸν ὄγκο τῆς πυραμίδας $AOB\Gamma$, ποὺ ἔχει κορυφὴ A καὶ βάση $OB\Gamma$). Ἐφαρμογὴ: $\alpha=5$ cm.

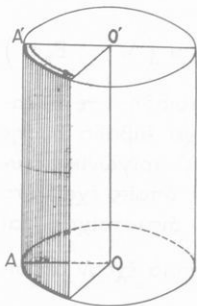
233) Δίνεται μιὰ πυραμίδα $OAB\Gamma\Delta$ μὲ κορυφὴ O καὶ βάση ἓνα ρόμβο $AB\Gamma\Delta$, ποὺ ἡ πλευρὰ του ἔχει μήκος 8 cm καὶ ἡ διαγωνίός του AG ἔχει ἐπίσης μήκος 8 cm. Τὸ ἴχνος H τοῦ ὕψους OH τῆς πυραμίδας εἶναι τὸ σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων AG καὶ BD τοῦ ρόμβου. Τὸ μήκος τῆς παράπλευρης ἀκμῆς OB εἶναι 8 cm. Νὰ βρεῖτε τὸν ὄγκο τῆς πυραμίδας $OAB\Gamma\Delta$.

234) Δίνεται ἓνα κανονικὸ τετράεδρο μὲ ἀκμὴ α καὶ ζητεῖται ὁ ὄγκος του. Ἐφαρμογὴ: $\alpha=6$ cm.

235) Νὰ συγκρίνετε τὰ ὕψη ἑνὸς κανονικοῦ τετραέδρου (χρησιμοποιήστε τὸν ὄγκο του).

Δ. ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ (ΟΡΘΟΣ ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ) ΜΕΤΡΗΣΗ ΟΡΘΟΥ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

§ 79. Όρθος κυκλικός κύλινδρος.



σχ. 154.

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο $ΑΟΟ'Α'$ (σχ. 154) που περιστρέφεται γύρω από την $ΟΟ'$, ή όποια παραμένει ακίνητη. Με μιὰ ολόκληρη περιστροφή του παράγεται ένας όρθος κυκλικός κύλινδρος (ή κύλινδρος εκ περιστροφής).

‘Η ευθεία $ΟΟ'$, που παραμένει ακίνητη κατά την περιστροφή, λέγεται **άξονας** του κυλίνδρου. Οί πλευρές $ΟΑ$ και $Ο'Α'$ παράγουν με την περιστροφή δύο ίσους κυκλικούς δίσκους, που τὰ επίπεδά τους είναι κάθετα στην $ΟΟ'$, δηλαδή παράλληλα μεταξύ τους. Οί κύκλοι αυτοί λέγονται **βάσεις** του κυλίνδρου. ‘Η ακτίνα τής βάσης λέγεται **ακτίνα του κυλίνδρου**. ‘Η πλευρά $ΑΑ'$ παράγει με την περιστροφή την κυρτή επιφάνεια του κυλίνδρου.

‘Η $ΑΑ'$ λέγεται **γενέτειρα** του κυλίνδρου. Τò κοινό μήκος τών γενετειρών του κυλίνδρου εκ περιστροφής είναι ίσο με την απόσταση $ΟΟ'$ τών κέντρων τών βάσεων του και είναι τò ύψος του κυλίνδρου.

‘Από τὰ παραπάνω συμπεραίνουμε ότι:

“Ενας όρθος κυκλικός κύλινδρος (ή απλά κύλινδρος) είναι ένα στερεό εκ περιστροφής, τò όποιο παράγεται από ένα ορθογώνιο, που περιστρέφεται γύρω από μιὰ πλευρά του, ή όποια παραμένει ακίνητη.



σχ. 155.

§ 80. Έμβαδό όρθου κυκλικού κυλίνδρου.

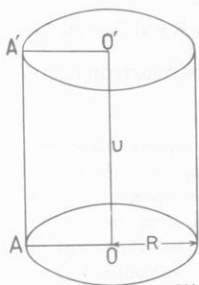
α) Έμβαδό τής κυρτής επιφάνειας όρθου κυκλικού κυλίνδρου:

Λίνεται ένας όρθος κυκλικός κύλινδρος με ακτίνα βάσης R και ύψος $υ$. Να βρείτε τò έμβαδό τής κυρτής επιφάνειάς του.

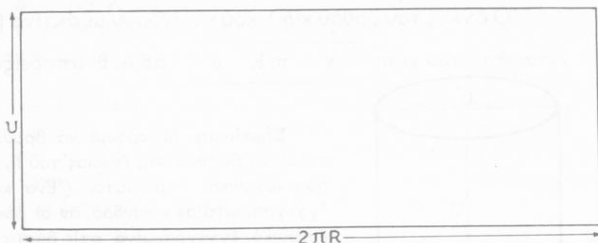
“Αν κόψουμε την κυρτή επιφάνεια του κυλίνδρου κατά μήκος μιὰς

Σημείωση: Μπορούμε με κάποιο μηχανισμό νά περιστρέψουμε γρήγορα ένα ορθογώνιο (από χαρτόνι ή άλλο υλικό) γύρω από μιὰ διάστασή του και λόγω του όπτικού μεταίσθηματος νά έχουμε την εικόνα ενός όρθου κυκλικού κυλίνδρου στο χώρο τών τριών διαστάσεων. ‘Η εικόνα αυτή δικαιολογεί και κινητικώς τόν τρόπο παραγωγής του όρθου κυκλικού κυλίνδρου (ή εκ περιστροφής) (σχ. 155). Στο εξής όταν λέμε «κύλινδρος», θά έννοούμε «όρθος κυκλικός κύλινδρος».

γενέτειράς του (σχ. 156) και την αναπτύσσουμε σ' ένα επίπεδο, θά πά-
ρουμε ένα ορθογώνιο, που έχει διαστάσεις τὰ μήκη τοῦ κύκλου τῆς βάσης
καὶ τοῦ ὕψους (σχ. 157).



σχ. 156.



σχ. 157.

Ἐπομένως: Τὸ ἔμβαδὸ τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς κυλίνδρου ἰσοῦται
μὲ τὸ γινόμενο τοῦ μήκους τοῦ κύκλου τῆς βάσης ἐπὶ τὸ μήκος τοῦ ὕψους.

Δηλαδή

$$E_{\text{κυρτ. ἐπιφ. κυλ.}} = 2\pi R \cdot u$$

β) Ἐμβαδὸ τῆς ὀλικῆς ἐπιφάνειας κυλίνδρου:

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἔμβαδὸ τῆς ὀλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ προηγούμενου
κυλίνδρου, προσθέτουμε τὸ ἔμβαδὸ τῶν βάσεων τοῦ κυλίνδρου στὸ ἔμ-
βαδὸ τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειάς του.

*Ἐτσι ἔχουμε

$$E_{\text{ὀλικ.}} = 2\pi R \cdot u + 2\pi R^2$$

ἢ ἀλλιῶς $E_{\text{ὀλικ.}} = 2\pi R \cdot (u + R)$

Ἀσκήσεις

236) Δίνεται ἕνας κύλινδρος μὲ ἀκτίνα βάσης 5 cm καὶ ὕψος $u=25$ cm. Νὰ βρεῖτε
τὸ ἔμβαδὸ α) τῆς κυρτῆς καὶ β) τῆς ὀλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυλίνδρου.

237) Μία δεξαμενὴ πετρελαίου σὲ σχῆμα ὀρθοῦ κυλίνδρου ἔχει διάμετρο (ἑσωτερι-
κὴ) βάσης 10 m καὶ ὕψος 20m. Νὰ βρεῖτε τὸ ἔμβαδὸ τῆς κυρτῆς (ἑσωτερικῆς) ἐπιφάνειας
τῆς δεξαμενῆς αὐτῆς.

238) Δίνεται ἕνας κύλινδρος, τοῦ ὁποίου τὸ ἔμβαδὸ τῆς ὀλικῆς ἐπιφάνειας εἶναι
471 cm² καὶ ἡ ἀκτίνα τῆς βάσης 5 cm. Βρεῖτε τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου.

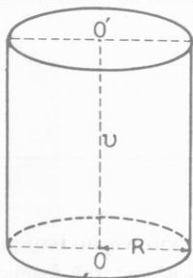
239) Ἐνα κυλινδρικό μολύβι ἄξυστο ἔχει διάμετρο 6 mm καὶ μήκος 18 cm. Νὰ
βρεῖτε τὸ ἔμβαδὸ τῆς κυρτῆς καὶ τῆς ὀλικῆς ἐπιφάνειάς του.

240) Δίνεται ἕνα ὀρθογώνιο μὲ διαστάσεις α καὶ β. Τὸ περιστρέφουμε πρῶτα γύρω
ἀπὸ τὴ μιὰ πλευρὰ καὶ ἔπειτα γύρω ἀπὸ τὴν ἄλλη (τὴ διαδοχικὴ μὲ τὴν πρώτη πλευρὰ)
καὶ παράγονται ἔτσι δύο κύλινδροι ἐκ περιστροφῆς. Τί ἔχετε νὰ παρατηρήσετε γιὰ τὰ
ἔμβαδὰ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο αὐτῶν κυλίνδρων;

§ 81. Όγκος του ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου.

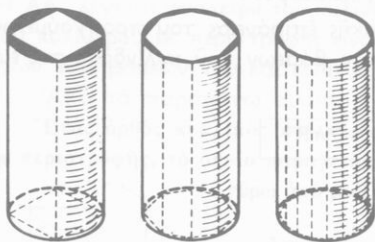
Δίνεται ἓνας ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος μὲ ἀκτίνα βάσης R καὶ ὕψος $υ$. (σχ. 158). Νὰ βρεῖτε τὸν ὄγκο του.

Ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου μὲ ἀκτίνα βάσης R καὶ ὕψος $υ$ δίνεται ἀπὸ τὸν τύπο $V = \pi \cdot R^2 \cdot υ$, καθὼς θ' ἀποδείξουμε σὲ ἀνώτερη τάξη.



σχ. 158.

Αὐτὸ μπορούμε νὰ τὸ δείξουμε μὲ τὴ βοήθεια ἑνὸς ἀνοικτοῦ ἀπὸ πάνω κυλίνδρου ἀπὸ χαρτόνι καὶ μερικῶν κανονικῶν πρισμάτων, πού ἔχουν ὕψος ἴσο μὲ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου καὶ βάσεις σχήματος τετραγώνου, καν. ὀκταγώνου, καν. δεκαεξαγώνου κλπ. (πολυγώνων, τὰ ὁποῖα μποροῦν νὰ ἐγγραφοῦν στὴ βάση τοῦ κυλίνδρου).



σχ. 159.

ξάνει τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσης τοῦ ἐγγεγραμμένου πρίσματος, καὶ μπορεῖ νὰ γίνεῖ ὅσο θέλουμε μικρὴ (σχ. 159).

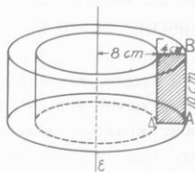
Γι' αὐτὸ τὸ λόγο λέμε ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος προσεγγίζει (ἔχει ὄριο) τὸν ὄγκο τοῦ κυλίνδρου. Ἀλλὰ ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι $V = E_{\beta} \cdot υ$. Ἐπομένως καὶ τοῦ κυλίνδρου ὁ ὄγκος θὰ εἶναι $V = E_{\beta} \cdot υ = \pi R^2 \cdot υ$.

(Μὲ περισσότερες λεπτομέρειες θὰ ἐξετάσουμε τὸ θέμα αὐτὸ σὲ ἀνώτερη τάξη).

Ἀσκήσεις

241) Ἐνας ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος ἔχει ἀκτίνα βάσης $R = 5 \text{ cm}$ καὶ ὕψος 15 cm . Νὰ βρεῖτε τὸν ὄγκο του.

242) Ἐνας κύλινδρος, πού ὁ ὄγκος του εἶναι $45\pi \text{ cm}^3$, ἔχει ὕψος 5 cm . Νὰ βρεῖτε τὴν ἀκτίνα τῆς βάσης του.



σχ. 160.

243) 'Η κυρτή επιφάνεια ενός κυλίνδρου είναι $94,20 \text{ cm}^2$. Τò ὕψος του είναι 15 cm . Νά υπολογίσετε τὸν ὄγκο του.

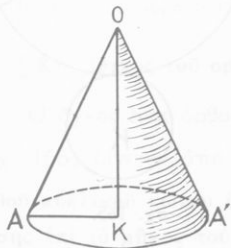
244) "Ένα πηγάδι κυλινδρικοῦ σχήματος ἔχει βάθος 6 m . Νά υπολογίσετε τὸν ὄγκο τῆς λιθοδομῆς του, ἂν ἡ ἑσωτερικὴ διάμετρος τοῦ πηγαδιοῦ εἶναι 3 m καὶ τὸ πάχος τοῦ τοίχου $2,5 \text{ dm}$.

245) "Ένα ὀρθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ μὲ διαστάσεις $AB = 10 \text{ cm}$ καὶ $B\Gamma = 4 \text{ cm}$ στρέφεται γύρω ἀπὸ μιὰ εὐθεῖα ϵ παράλληλη πρὸς τὴν AB , ποὺ βρίσκεται στὸ ἐπίπεδο τοῦ ὀρθογωνίου καὶ σὲ ἀπόσταση 12 cm ἀπ' αὐτήν. Νά υπολογίσετε τὸν ὄγκο τοῦ στερεοῦ, ποὺ παράγεται κατὰ τὴν περιστροφή τοῦ ὀρθογωνίου γύρω ἀπὸ τὴν εὐθεῖα ϵ (σχ. 160).

Ε. ΟΡΘΟΣ ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΚΩΝΟΣ (ΚΩΝΟΣ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ) ΜΕΤΡΗΣΗ ΟΡΘΟΥ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΚΩΝΟΥ

§ 82. Ὁρθὸς κυκλικὸς κώνος.

Θεωροῦμε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο AKO (γων. $K = 1\text{ὀρθ.}$). Τὸ περιστρέφουμε γύρω ἀπὸ τὴν OK . Μὲ μιὰ ὁλόκληρη περιστροφή τοῦ τριγώνου αὐτοῦ γύρω ἀπὸ μιὰ κάθετη πλευρὰ του παράγεται ἕνας ὀρθὸς κυκλικὸς κώνος. Ἡ KO παραμένει ἀκίνητη κατὰ τὴν περιστροφή καὶ ὁ φορέας τῆς λέγεται **ἄξονας** τοῦ κώνου (σχ. 161).



σχ. 161.

Ἡ πλευρὰ OA (ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογ. τριγώνου AKO) μὲ τὴν περιστροφή παράγει τὴν κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου καὶ ὀνομάζεται **γενέτειρα** ἢ **πλευρὰ** τοῦ κώνου.

Ἡ πλευρὰ KA παράγει μὲ τὴν περιστροφή ἕνα κυκλικὸ δίσκο, ποὺ τὸ ἐπίπεδό του εἶναι κάθετο στὸν ἄξονα τοῦ κώνου στὸ σημεῖο K . Ὁ δίσκος αὐτὸς λέγεται **βάση**

τοῦ κώνου. Ἡ ἀκτίνα R τῆς βάσης εἶναι ἡ **ἀκτίνα** τοῦ κώνου καὶ τὸ σημεῖο O εἶναι ἡ **κορυφή** τοῦ κώνου.

Ἡ ἀπόσταση τῆς κορυφῆς O τοῦ κώνου ἀπὸ τὴ βάση, δηλαδὴ τὸ εὐθ. τμήμα OK τοῦ ἄξονά του λέγεται **ὑψος** τοῦ κώνου. Ἡ γωνία AOK τοῦ ὀρθογ. τριγώνου AOK εἶναι τὸ μισὸ τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου. "Αν τὸ τρίγωνο AOA' εἶναι ἰσόπλευρο, δηλαδὴ ἡ διάμετρος τῆς βάσης εἶναι ἴση μὲ τὴ γενέτειρα τοῦ κώνου, τότε ὁ κώνος λέγεται **ἰσόπλευρος**.

Σημείωση. Μποροῦμε νὰ περιστρέψουμε γρήγορα μὲ κάποιο μηχανισμὸ ἕνα ὀρθογ.



Σχ. 162.

τρίγωνο (ἀπὸ χαρτόνι ἢ κάτι ἄλλο) γύρω ἀπὸ μιὰ κάθετη πλευρά του καὶ νὰ ἔχουμε τὴν εἰκόνα ἐνὸς κώνου ἐκ περιστροφῆς στὸ χωρὸ τῶν τριῶν διαστάσεων (σχ. 162).

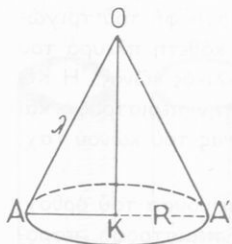
Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι: Τὸ στερεό, ποὺ παρύγεται μὲ μιὰ ὁλόκληρη περιστροφή ἐνὸς ὀρθογ. τριγώνου γύρω ἀπὸ μιὰ ἀκίνητη κάθετη πλευρά του, λέγεται ὀρθὸς κυκλικὸς κώνος (ἢ κώνος ἐκ περιστροφῆς). Στὰ ἐπόμενα ὅταν λέμε «κώνος», θὰ ἔννοοῦμε «ὀρθὸς κυκλικὸς κώνος».

§ 83. Ἐμβαδὸ τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου.

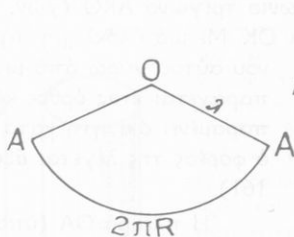
α) Ἐμβαδὸ τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου:

Δίνεται ἓνας κώνος μὲ ἀκτίνα βάσης R καὶ πλευρὰ l . Νὰ βρεῖτε τὸ ἔμβαδὸ τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειάς του.

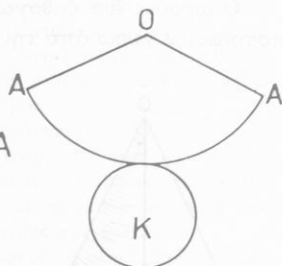
Κόβουμε τὴν κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου κατὰ μῆκος μιᾶς γενέτειράς του καὶ τὴν ἀναπτύσσουμε σ' ἓνα ἐπίπεδο (σχ. 163, 164).



σχ. 163.



σχ. 164.



σχ. 165.

Τὸ ἀνάπτυγμα τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου εἶναι ἓνας κυκλικὸς τομέας, ποὺ τὸ ἔμβαδόν του εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἔμβαδὸ τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου καὶ τὸ τόξο εἶναι ἴσο μὲ τὸ μῆκος τοῦ κύκλου τῆς βάσης τοῦ κώνου, δηλαδὴ $\tau = 2\pi R$.

Ξέρουμε ὅτι τὸ ἔμβαδὸ τοῦ κυκλικοῦ τομέα δίνεται καὶ ἀπὸ τὸν τύπο:

$$\epsilon = \tau \cdot \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2} 2\pi R l = \pi R l.$$

Ἄρα

$$E_{\text{κυρτ. ἐπιφ. κών. ἐκ περ.}} = \pi R l$$

δηλαδή:

Τὸ ἔμβαδὸ τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας ἐνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τοῦ μήκους τοῦ ἡμικυκλίου τῆς βάσης ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς γενέτειρας τοῦ κώνου.

β) Έμβασο τῆς ὀλικῆς ἐπιφάνειας ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου:

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβασο τῆς ὀλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου, προσθέτουμε στὸ ἐμβασο τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειάς του τὸ ἐμβασο τῆς βάσης του (σχ. 165).

$$\text{Δηλαδή } E_{\text{ὀλικ.}} = \pi R\lambda + \pi R^2 \quad \eta \quad \alpha\lambda\lambda\iota\omega\varsigma \quad E_{\text{ὀλικ.}} = \pi R \cdot (R + \lambda)$$

Ἀσκῆσεις

246) Δίνεται ἓνας κώνος μὲ ἀκτίνα βάσης 8 cm καὶ πλευρὰ 10 cm. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβασο τῆς κυρτῆς καὶ τῆς ὀλικῆς ἐπιφάνειάς του.

247) Ἐνας κώνος ἐκ περιστροφῆς ἔχει πλευρὰ μήκους 15 cm καὶ ὕψος 12 cm. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβασο τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειάς του.

248) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβασο τῆς ὀλικῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς κώνου, ποῦ ἔχει ὕψος 16 cm καὶ πλευρὰ μήκους 20 cm.

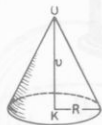
249) Τὸ ἐμβασο τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς κώνου εἶναι 47,10 dm² καὶ ἡ πλευρὰ του 5 dm. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβασο τῆς ὀλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου.

250) Ἐνας ἰσοπλευρὸς ὀρθὸς κυκλικὸς κώνος ἔχει ὕψος 10 cm. Νὰ βρεῖτε τὸ μήκος τῆς ἀκτίνας τῆς βάσης, τὸ μήκος τῆς πλευρᾶς καὶ τὸ ἐμβασο τῆς ὀλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου αὐτοῦ.

251) Ἐνα τετράγωνο μὲ πλευρὰ 20 cm περιστρέφεται γύρω ἀπὸ μιὰ διαγωνίό του. Νὰ βρεῖτε τὸ ἐμβασο τῆς ἐπιφάνειας τοῦ στερεοῦ ποῦ παράγεται.

§ 84. Ὀγκος τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου

Ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου μὲ ἀκτίνα βάσης R καὶ ὕψος u (σχ. 166) δίνεται ἀπὸ τὸν τύπο $V = \frac{1}{3} \pi R^2 u$, δηλαδή ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου ἰσοῦται μὲ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσης ἐπὶ τὸ μήκος τοῦ ὕψους του.



σχ. 166.

Σὲ ἀνώτερη τάξη θ' ἀποδείξουμε αὐτὴ τὴν πρόταση.

Μποροῦμε ὅμως νὰ βροῦμε τὸν τύπο αὐτὸ μὲ συλλογισμοὺς ἀνάλογους πρὸς ἐκείνους τῆς § 81.

Γιὰ τὸ σκοπὸ αὐτὸ θὰ χρησιμοποιήσουμε κανονικὲς πυραμίδες ἐγγεγραμμένες στὸν κώνο, ποῦ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσης των συνεχῶς διπλασιάζεται.

Παρατήρηση: Ἀπὸ τοὺς τύπους τῶν ὀγκων τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ κώνου, ποῦ ἔχουν τὴν ἴδια βάση καὶ τὸ ἴδιο ὕψος, παρατηροῦμε ὅτι ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου ἰσοῦται μὲ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὄγκου ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει τὴν ἴδια βάση καὶ τὸ ἴδιο ὕψος μὲ τὸν κώνο.

Αυτό το διαπιστώνουμε, αν χρησιμοποιήσουμε ένα κωνικό και ένα κυλινδρικό δοχείο με ίσες βάσεις και ίσα ύψη και έργαστούμε όπως στην § 78.

Άσκησης

252) Ένας κώνος έχει ακτίνα βάσης 15 cm και ύψος 40 cm. Να υπολογίσετε τον όγκο του.

253) Ένας κώνος, που το έμβαδόν της κυρτής επιφάνειάς του είναι $47,10 \text{ cm}^2$, έχει πλευρά μήκους 5 cm. Να βρείτε τον όγκο του.

254) Να υπολογίσετε τον όγκο ενός όρθου κυκλικού κώνου, που έχει ύψος $u=9 \text{ cm}$ και μήκος γενέτειρας $\lambda=15 \text{ cm}$.

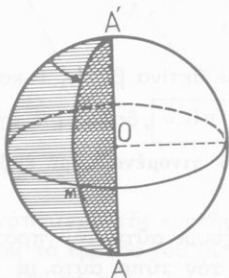
255) Το μήκος του κύκλου της βάσης ενός όρθου κυκλικού κώνου είναι 18,84 dm και η γενέτειρά του 5 dm. Να υπολογίσετε τον όγκο του κώνου αυτού.

256) Δίνεται ένας ισόπλευρος κώνος, που έχει ύψος 8 cm. Να υπολογίσετε την ακτίνα της βάσης και τον όγκο του.

ΣΤ. ΣΦΑΙΡΑ — ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

§ 85. Σφαίρα.

Δίνεται ένα ήμικύκλιο AMA' . Αν το περιστρέψουμε (μια δόκληρη περιστροφή) γύρω από την ακίνητη διάμετρό του AA' , παράγεται ένα στερεό, που λέγεται **σφαίρα**.



σχ. 167.



σχ. 168.

Κάθε σημείο της σφαίρας απέχει από το O απόσταση R ίση με την ακτίνα του ήμικυκλίου. Το O λέγεται κέντρο της σφαίρας. Η σφαίρα συμβολίζεται: σφαίρα (O, R) .

Κάθε επίπεδο, που περνά από το O , τέμνει τη σφαίρα κατά έναν κύκλο, ο οποίος έχει κέντρο O και ακτίνα R και λέγεται **μέγιστος κύκλος** της σφαίρας.

Κάθε επίπεδο, που τέμνει τη σφαίρα, αλλά δεν περνά από το κέντρο της, την τέμνει κατά έναν κύκλο, ο οποίος λέγεται **μικρός κύκλος** της σφαίρας.

Σημ. Μὲ ἓναν μηχανισμό περιστρέφουμε γρήγορα ἓνα ἡμικύκλιο (ἀπὸ χαρτόνι ἢ ἄλλο ὑλικό) καὶ ἔχουμε τὴν εἰκόνα μιᾶς σφαίρας στὸ χῶρο τῶν τριῶν διαστάσεων (σχ. 168).

§ 86. Ἐμβαδὸ σφαίρας.

Τὸ ἔμβαδὸ τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὸ τετραπλάσιο τοῦ ἔμβαδου ἑνὸς κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτίνα ἴση μὲ τὴν ἀκτίνα τῆς σφαίρας (μέγιστος κύκλος).

Δηλαδή:

$$E_{\text{σφαιρ.}} = 4\pi R^2$$

Ἀσκήσεις

257) Μία σφαῖρα ἔχει ἀκτίνα 8 cm. Βρεῖτε τὸ ἔμβαδὸ τῆς.

258) Τὸ μήκος ἑνὸς μεγίστου κύκλου μιᾶς σφαίρας εἶναι 50,24 cm. Νὰ βρεῖτε τὸ ἔμβαδὸ τῆς σφαίρας.

259) Τὸ ἔμβαδὸ μιᾶς σφαίρας εἶναι 50,24 cm². Νὰ ὑπολογίσετε τὴν ἀκτίνα τῆς, καθὼς καὶ τὴν ἀκτίνα μιᾶς ἄλλης σφαίρας, ποὺ τὸ ἔμβαδὸ τῆς εἶναι τετραπλάσιο ἀπὸ τὸ ἔμβαδὸ τῆς πρώτης.

260) Νὰ βρεῖτε τὸ λόγο τῶν ἐμβαδῶν δύο σφαιρῶν μὲ ἀκτίνες 3 cm καὶ 2 cm.

261) Κάνετε τὸ ἴδιο, ὅταν οἱ ἀκτίνες εἶναι R_1 , R_2 .

§ 87. Ὅγκος σφαίρας.

Ὁ ὅγκος V μιᾶς σφαίρας μὲ ἀκτίνα R δίνεται ἀπὸ τὸν τύπο $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ (1)

καθὼς θ' ἀποδείξουμε σ' ἀνώτερη τάξη.

Δηλαδή: Ὁ ὅγκος τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τοῦ κύβου τοῦ μήκους τῆς ἀκτίνας τῆς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ $\frac{4}{3} \pi$.

Ὁ τύπος (1) μπορεῖ νὰ γραφεῖ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{4}{3} \pi \frac{D^3}{8} \Rightarrow V = \frac{1}{6} \pi D^3, \text{ ὅπου } D = 2R.$$

Σημ. Ὁ μεγάλος Ἑλληνας μαθηματικὸς Ἀρχιμήδης πέτυχε πρῶτος νὰ μετρήσει τὸ ἔμβαδὸ καὶ τὸν ὄγκο τῆς σφαίρας.

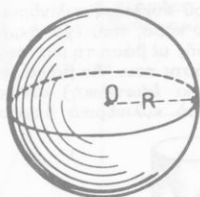
Ἐφαρμογές.

1. Δύο σφαῖρες ἔχουν ἀκτίνες 2 καὶ 3 cm. Νὰ βρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὀγκων τους.

2. Δύο σφαῖρες ἔχουν ἀκτίνες R_1 , R_2 . Βρεῖτε τὸν λόγο τῶν ὀγκων τους.

$$\left(\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}\right)$$

3. Ἄν R καὶ $2R$ εἶναι οἱ ἀκτίνες δύο σφαιρῶν, ποῖα εἶναι ἡ σχέση τῶν ὀγκων τους;



σχ. 169.

Άσκήσεις

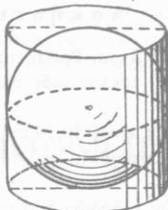
- 262) Να υπολογίσετε τον όγκο μιάς σφαίρας με ακτίνα 5 m.
 263) Βρείτε την ακτίνα μιάς σφαίρας, που έχει όγκο $113,04 \text{ cm}^3$.
 264) Το έμβασό μιάς σφαίρας είναι 314 cm^2 . Να υπολογίσετε τον όγκο της.
 265) Το έμβασό μιάς σφαίρας είναι $113,04 \text{ cm}^2$. Να βρείτε τον όγκο μιάς άλλης σφαίρας, που έχει ακτίνα τριπλάσια από την ακτίνα της πρώτης σφαίρας.
 266) Το έμβασό ενός μεγίστου κύκλου μιάς σφαίρας είναι $153,86 \text{ cm}^2$. Να υπολογίσετε τον όγκο της σφαίρας αυτής.

Άσκήσεις για επανάληψη του κεφ. V.

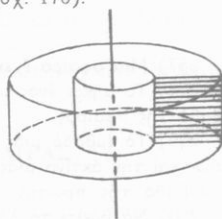
- 267) Ένα σώμα σε σχήμα κυκλικού κυλίνδρου με ακτίνα βάσης 1,5 dm και μήκος 4 dm καταλήγει στο ένα άκρο του σε κώνο με την ίδια ακτίνα και ύψος 2 dm· στο άλλο άκρο του καταλήγει σε ημισφαίριο με την ίδια ακτίνα (έξωτερικώς). Να βρείτε το έμβασό της επιφάνειας (έξωτερικής) του στερεού και τον όγκο του (σχ. 170).



σχ. 170.



σχ. 171.



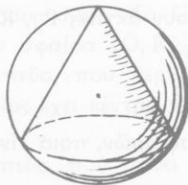
σχ. 172.

- 268) Μία σφαίρα είναι εγγεγραμμένη σε κύλινδρο εκ περιστροφής (σχ. 171), δηλαδή η σφαίρα περιέχεται ακριβώς στο έσωτερικό του κύλινδρου και εφάπτεται στις δύο βάσεις και στην κυρτή επιφάνειά του κατά μήκος ενός μεγίστου κύκλου. Αν η ακτίνα της σφαίρας είναι 5 cm, να βρείτε α) την ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου, β) το ύψος του, γ) το έμβασό της κυρτής επιφάνειας του όρθου κυκλικού κυλίνδρου, δ) το έμβασό της σφαίρας, ε) το λόγο των δύο αυτών εμβαδών και στ) το λόγο των όγκων των στερεών αυτών.

- 269) Στο παραπάνω σχήμα (σχ. 172) έχουμε ένα τετράγωνο με πλευρά 5 cm, που κάνει μία ολόκληρη περιστροφή γύρω από μία ευθεία ϵ του επιπέδου του, η οποία είναι παράλληλη προς μία πλευρά του και βρίσκεται σ' απόσταση 3 cm απ' αυτή. Να βρεθεί το έμβασό της ολικής επιφάνειας του στερεού, που παράγεται από την περιστροφή του τετραγώνου γύρω από την ευθεία ϵ . (σχ. 172).

- 270) Ένας ισόπλευρος όρθος κυκλικός κώνος είναι εγγεγραμμένος σε μία σφαίρα με ακτίνα 6 cm (δηλ. η σφαίρα περνά από την κορυφή του κώνου και ο κύκλος της βάσης του είναι ένας μικρός κύκλος της σφαίρας). Να βρείτε το έμβασό της ολικής επιφάνειας του κώνου (σχ. 173).

- 271) Ένα δοχείο ανοικτό προς τα πάνω έχει σχήμα όρθου κυκλικού κυλίνδρου με ακτίνα βάσης 6 m και ύψος 8 m και στηρίζεται πάνω σ' έναν κύβο, που έχει ακμή 18 m. Το έσωτερικό του δοχείου έχει σχήμα κώνου εκ περιστροφής με βάση τη μία από τις βάσεις του κυλίνδρου αυτού και κορυφή το κέντρο της άλλης βάσης του. Αν βάσουμε με λαδομπογιά ολόκληρη την επιφάνεια του δοχείου (έξωτερική κι έσωτερική) καθώς και την ελεύθερη επιφάνεια της κυβικής βάσης, όπου στηρίζεται το κυλινδρικό δοχείο πληρώνοντας 85 δρχ. το m^2 , πόσες δραχμές θα ξοδεύσουμε;

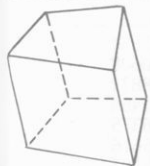
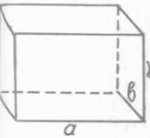
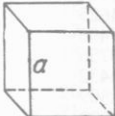
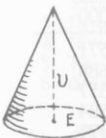


σχ. 173.



σχ. 174.

Πίνακας τύπων έμβαδών και όγκων διαφόρων στερεών

Εικόνα στερεού	Όνομα Στερεού	Έμβαδο για ύπολογισμό	Τύπος που δίνει το έμβαδο	Όγκος για ύπολογισμό	Τύπος που δίνει τον όγκο
	Πρίσμα	Έμβαδο παράπλ. έπιφάνειας Έμβαδο όλικης έπιφάνειας	Όρθου πρίσματος $E_{\text{παρ. έπ.}} = \text{περ. βάσ.} \times u$ $E_{\text{όλ.}} = \text{περ. βάσ.} \times u + 2E_{\text{β}}$	Όγκος Πρίσματος	$V = E_{\text{β}} \cdot u$
	Όρθ. παρ/δο	Έμβαδο όλικης έπιφάνειας	$E = 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$	Όγκος όρθ. παρ/δου	α) $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ και β) $V = E_{\text{β}} \cdot u$
	Κύβος	Έμβαδο όλικης έπιφάνειας	$E = 6\alpha^2$	Όγκος κύβου	$V = \alpha^3$
	Πυραμίδα (κανονική)	Έμβαδο παράπλ. έπιφάνειας Έμβαδο όλικης	$E = \frac{\text{περ. βάσ.} \times \text{άπόστ.}}{2}$ $E = \frac{\text{περ. βάσ.} \times \text{άπόστ.}}{2} + E_{\text{β}}$	Όγκος πυραμίδας	$V = \frac{1}{3} E_{\text{β}} \cdot u$
	Πυραμίδα (όποιαδήποτε)	Έμβαδο	$E = \text{Αθροισ. } E_{\text{έδρων}}$	Όγκος	$V = \frac{1}{3} E_{\text{β}} \cdot u$
	Κύλινδρος (όρθος κυκλ.)	Έμβαδο κυρτ. έπιφάνειας Έμβαδο όλικης έπιφάνειας	$E = 2\pi R u$ $E = 2\pi R u + 2\pi R^2$ ή $E = 2\pi R(u + R)$	Όγκος κυλίνδρου	$V = \pi R^2 \cdot u$
	Κώνος (όρθος κυκλ.)	Έμβαδο κυρτ. έπιφάνειας Έμβαδο όλικ. έπιφάνειας	$E = \pi R \lambda$ $E = \pi R \lambda + \pi R^2$ ή $E = \pi R(R + \lambda)$	Όγκος κώνου	$V = \frac{1}{3} \pi \cdot R^2 \cdot u$
	Σφαίρα	Έμβαδο	$E = 4\pi R^2$	Όγκος	$V = \frac{4}{3} \pi \cdot R^3$

**Πίνακας τών τετραγώνων και τών κύβων τών φυσικῶν ἀριθμῶν
ἀπὸ 1 ὥς 100**

α	α^2	α^3	α	α^2	α^3
1	1	1	51	2601	132651
2	4	8	52	2704	140608
3	9	27	53	2809	148877
4	16	64	54	2916	157464
5	25	124	55	3025	166375
6	36	216	56	3136	175616
7	49	343	57	3249	185193
8	64	512	58	3364	195112
9	81	729	59	3481	205379
10	100	1000	60	3600	216000
11	121	1331	61	3721	226981
12	144	1728	62	3844	238328
13	169	2197	63	3969	250047
14	196	2744	64	4096	262144
15	225	3375	65	4225	274625
16	256	4096	66	4356	287496
17	289	4913	67	4489	300756
18	324	5832	68	4624	314432
19	361	6859	69	4761	328509
20	400	8000	70	4900	343000
21	441	9261	71	5041	357911
22	484	10648	72	5184	373248
23	529	12167	73	5329	389017
24	576	13824	74	5476	405224
25	625	15625	75	5625	421875
26	676	17576	76	5776	438976
27	729	19683	77	5929	456533
28	784	21952	78	6084	474552
29	841	24389	79	6241	493039
30	900	27000	80	6400	512000
31	961	29791	81	6561	531441
32	1024	32768	82	6724	551368
33	1089	35937	83	6889	571787
34	1156	39304	84	7056	592704
35	1225	42875	85	7224	614125
36	1296	46656	86	7396	636056
37	1369	50653	87	7569	658503
38	1444	54872	88	7744	681472
39	1521	59139	89	7921	704969
40	1600	64000	90	8100	729000
41	1681	68921	91	8281	753571
42	1764	74088	92	8464	778688
43	1849	79507	93	8649	804357
44	1936	85184	94	8836	830584
45	2025	91125	95	9025	857375
46	2116	97336	96	9216	884735
47	2209	103823	97	9409	912673
48	2304	110592	98	9604	941192
49	2401	117649	99	9801	970299
50	2500	125000	100	10000	1000000

Πίνακας τετραγωνικών ριζών των φυσικών αριθμών από 1 έως 100

Αριθμός α	Τετραγ. ρίζα $\sqrt{\alpha}$	Αριθμός α	Τετραγ. ρίζα $\sqrt{\alpha}$	Αριθμός α	Τετραγ. ρίζα $\sqrt{\alpha}$	Αριθμός α	Τετραγ. ρίζα $\sqrt{\alpha}$
1	1,000	26	5,099	51	7,141	76	8,718
2	1,414	27	5,196	52	7,211	77	8,775
3	1,732	28	5,292	53	7,280	78	8,832
4	2,000	29	5,385	54	7,349	79	8,888
5	2,236	30	5,477	55	7,416	80	8,944
6	2,450	31	5,568	56	7,483	81	9,000
7	2,646	32	5,657	57	7,550	82	9,055
8	2,828	33	5,745	58	7,616	83	9,110
9	3,000	34	5,831	59	7,681	84	9,165
10	3,162	35	5,916	60	7,746	85	9,220
11	3,317	36	6,000	61	7,810	86	9,274
12	3,464	37	6,083	62	7,874	87	9,327
13	3,606	38	6,164	63	7,937	88	9,381
14	3,741	39	6,245	64	8,000	89	9,434
15	3,873	40	6,325	65	8,062	90	9,487
16	4,000	41	6,403	66	8,124	91	9,539
17	4,123	42	6,481	67	8,185	92	9,591
18	4,243	43	6,557	68	8,246	93	9,644
19	4,359	44	6,633	69	8,307	94	9,695
20	4,472	45	6,708	70	8,367	95	9,747
21	4,583	46	6,782	71	8,426	96	9,798
22	4,690	47	6,856	72	8,485	97	9,849
23	4,796	48	6,928	73	8,544	98	9,900
24	4,899	49	7,000	74	8,602	99	9,950
25	5,000	50	7,071	75	8,660	100	10,000

Σημείωση: Οι τετραγωνικές ρίζες των μη τελείων τετραγώνων είναι κατά προσέγγιση 0,001.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ – ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι – ΣΥΝΟΛΑ

σελίδα

1. 'Η έννοια του συνόλου – (Έπαναλήψεις και συμπληρώσεις)	5
2. 'Η έννοια της αντιστοιχίας – Μονοσήμαντη και άμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία – Ισοδύναμα σύνολα	8
3. Πεπερασμένα σύνολα – 'Απειροσύνολα	11
4. Ένωση και τομή συνόλων – Διάσχυση και σύζευξη ιδιοτήτων	13
5. Τò συμπλήρωμα συνόλου – Διαμερισμός συνόλων – Κλάσεις Ισοδυναμίας	15
6. Διατεταγμένο σύνολο	17

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ – Α' ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. Τò σύνολο Q_0^+ των ρητών αριθμών της αριθμητικής (έπαναληψη)	20
2. Τò σύνολο των θετικών και άρνητικών ρητών	22

3. Το σύνολο Q των ρητών πραγματικών αριθμών – Έφαρμογές	26
4. Απόλυτη τιμή ρητού αριθμού – Συμβολισμός ρητού με ένα γράμμα – Η ισότητα στο σύνολο των ρητών και οι ιδιότητές της.	30

Β' ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. Πρόσθεση	32
2. Πρόσθεση περισσότερων από δύο προσθετέων – 'Ιδιότητες της προσθέσεως	36
3. Απόλυτη τιμή του αθροίσματος δύο ρητών	39
4. 'Η πράξη της αφαιρέσεως	42
5. Το σύμβολο (–) σαν σύμβολο αφαιρέσεως και σαν πρόσημο	44
6. Άλγεβρικά αθροίσματα	47
7. 'Η σχέση της ανισότητας στο σύνολο Q – Διάταξη	50
8. 'Η πράξη του πολλαπλασιασμού στο σύνολο Q. – Γινόμενο δύο ρητών	56
9. Γινόμενο τριών ή περισσότερων ρητών – Ιδιότητες	59
10. 'Η πράξη της διαιρέσεως στο Q – Πηλίκο δύο ρητών – 'Ιδιότητες	65
11. Αριθμητικές παραστάσεις – Σημασία των παρενθέσεων	68
12. 'Η έννοια του διανύσματος	72
13. 'Η προσανατολισμένη ευθεία (άξονας) – Άλγεβρική τιμή διανύσματος – 'Απεικόνιση των ρητών στην προσανατολισμένη ευθεία	77
14. Δυνάμεις των ρητών με εκθέτη ακέραιο – Πράξεις πάνω στις δυνάμεις των ρητών	80
15. Περίληψη των περιεχομένων στο κεφάλαιο II – Άσκησης για επανάληψη	85

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III – Α' ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

1. 'Η εξίσωση $ax + b = 0$. 'Επίλυση αυτής	89
2. Προβλήματα που επιλύονται με τη βοήθεια εξισώσεως α' βαθμού με έναν άγνωστο	94
3. 'Ανισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο	99

Β' ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ $ax + b = 0$ ΚΑΙ ΤΗΣ $ax + b > 0$

1. 'Η έννοια της μεταβλητής και η έννοια της συναρτήσεως	102
2. 'Η συνάρτηση $y = ax$ και η γραφική παράστασή της	106
3. 'Η συνάρτηση $y = ax + b$ και η γραφική παράστασή της	108
4. Γραφική επίλυση της $ax + b = 0$ και της $ax + b > 0$	111
5. Άσκησης για επανάληψη του κεφαλαίου III	114

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

Α' ΛΟΓΟΙ – ΜΕΓΕΘΗ ΕΥΘΕΩΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ – ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

1. Λόγος δύο αριθμών – Λόγος δύο όμοιων μεγεθών – Ιδιότητες του λόγου	116
2. Μεγέθη ευθέως ανάλογα – 'Ιδιότητες – Γραφική παράσταση της $y = ax$	119
3. Μεγέθη αντίστροφως ανάλογα – 'Ιδιότητες – Γραφική παράσταση της $y = \frac{a}{x}$	123
4. Αναλογίες και ιδιότητες αυτών	126

Β' ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

1. Προβλήματα απλής μεθόδου των τριών	131
2. » ποσοστών	133
3. » συνθέτου μεθόδου των τριών	137
4. » τόκου	141
5. » ύφαιρέσεως	145
6. » μέσου όρου	148
7. » μερισμού	149
8. » μείξεως	152
9. » κραμάτων	154
10. Άσκησης για επανάληψη του κεφαλαίου IV	156

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	158
------------------------	-----

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι — Α. ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ

1. Έγγεγραμμένες γωνίες	σελίδα 163
2. Έφαρμογές των έγγεγραμμένων γωνιών. Άσκήσεις	166

Β. ΕΥΘΕΙΕΣ ΣΥΝΤΡΕΧΟΥΣΕΣ ΣΕ ΤΡΙΓΩΝΟ

1. Μεσοκάθετοι των πλευρών τριγώνου. Άσκήσεις	168
2. Ύψι ενός τριγώνου. Άσκήσεις	169
3. Διάμεσοι τριγώνου. Άσκήσεις	170
4. Διχοτόμοι τριγώνου. Άσκήσεις	172
5. Περιγεγραμμένος και έγγεγραμμένος κύκλος σ' ένα τρίγωνο. Κατασκευή	173

Γ. ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΚΥΚΛΟΥ ΣΕ 2^ο ΚΑΙ 3·2^ο ΙΣΑ ΤΟΞΑ — ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

1. Διάρεση κύκλου σέ 2 ^ο ίσα τόξα — Άντίστοιχα έγγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα	175
2. Διάρεση κύκλου σέ 3·2 ^ο ίσα τόξα — Άντίστοιχα έγγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα	177
3. Στοιχεία συμμετρίας καθενός από τά κανονικά πολύγωνα — Άσκήσεις ..	179

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ — Α. ΛΟΓΟΣ ΔΥΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

1. Λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων. Άνάλογα ευθύγραμμα τμήματα. Άσκήσεις	181
2. Τό θεώρημα του Θαλή 1ο, 2ο θεώρημα. Άσκήσεις	183

Β. ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

1. Όμοια τρίγωνα. Άσκήσεις	187
2. Κριτήρια όμοιότητας τριγώνων. Έφαρμογές. Άσκήσεις	189

Γ. ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

Όμοια πολύγωνα . Έφαρμογές. Άσκήσεις	194
--	-----

Δ. ΑΠΛΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

Γεωμετρικές κατασκευές. Άσκήσεις	197
--	-----

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ. Α. ΕΜΒΑΔΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

1. Όρισμοί. Μονάδες μετρήσεως έπιφανειών. Σχέσεις αυτών. Άσκήσεις	200
2. Έμβαδο όρθογωνίου και τετραγώνου. Έφαρμογές. Άσκήσεις	204
3. Έμβαδο παραλληλογράμμου. Έμβαδο τριγώνου. Έφαρμογές. Άσκήσεις ..	208
4. Έμβαδο τραπεζίου. Άσκήσεις	212
5. Έμβαδο πολυγώνου. Έφαρμογές. Άσκήσεις	215

Β. ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

1. Πυθαγόρειο θεώρημα. Άσκήσεις	218
2. Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού — Ύπολογισμός αυτής. Έφαρμογές. Άσκήσεις	220
3. Τετραγωνική ρίζα αριθμού κατά προσέγγιση. Έφαρμογές. Άσκήσεις ...	224

Γ. ΜΗΚΟΣ ΚΥΚΛΟΥ — ΕΜΒΑΔΟ ΚΥΚΛΟΥ

1. Μήκος κύκλου — Μήκος τόξου. Άσκήσεις	227
2. Έμβαδο κύκλου και κυκλικού τμήα. Έφαρμογές. Άσκήσεις	229
3. Πίνακας τύπων έμβαδών σχημάτων. Άσκήσεις διάφορες	232

Δ. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

σελίδα

Προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών	233
---	-----

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV – Α. ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

1. Εισαγωγή	237
2. Σχετικές θέσεις ευθειών, επιπέδων, ευθειών και επιπέδων. Άσκήσεις	240
3. Διέδρη γωνία – πολυέδρη γωνία	243

Β. ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΘΕΤΗ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ – ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

1. Γωνία ασύμβατων ευθειών	244
2. Καθετότητα ευθείας και επιπέδου. Καθετότητα επιπέδων. Άσκήσεις	245

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V – ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

1. Όρθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Ιδιότητες	250
2. Έμβαδο επιφάνειας ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου και κύβου. Άσκήσεις	251
3. Όγκος στερεού. Μονάδες όγκου	252
4. Όγκος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου και κύβου. Άσκήσεις	253
5. Πρίσματα. Έμβαδο επιφάνειας πρίσματος	255
6. Όγκος πρίσματος. Εφαρμογές. Άσκήσεις	259
7. Πυραμίδα – Κανονική πυραμίδα – Έμβαδο κανονικής πυραμίδας. Άσκήσεις	261
8. Όγκος πυραμίδας. Άσκήσεις	264
9. Κυλινδρος εκ περιστροφής. Έμβαδο όρθου κυκλικού κυλίνδρου. Άσκήσεις	266
10. Όγκος κυλίνδρου εκ περιστροφής. Άσκήσεις	268
11. Όρθος κυκλικός κώνος. Έμβαδο όρθου κυκλικού κώνου. Άσκήσεις	269
12. Όγκος όρθου κυκλικού κώνου. Άσκήσεις	271
13. Σφαίρα – Έμβαδο σφαίρας. Άσκήσεις	272
14. Όγκος σφαίρας. Άσκήσεις	273
15. Άσκήσεις	274
16. Πίνακας τύπων εμβαδών και όγκων των στερεών που έχουν εξετασθεί.	275

ΕΚΔΟΣΗ Θ', (IV) 1978 – ΑΝΤΙΤΥΠΑ 180.000 – ΣΥΜΒΑΣΗ 3042/6-4-78

ΕΚΤΥΠΩΣΗ: ΚΕΡΚΥΡΑΪΚΗ ΛΙΘΟΓΡΑΦΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: ΚΑΤΣΙΑΒΡΙΑΣ Δ. Ο.Ε.



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής