Δ. ΠΑΠΑΜΙΧΑΗΛ - Α. ΣΚΙΑΔΑ

Θεωρητική Γεωμετρία

ΤΕΥΧΟΣ ΠΡΩΤΟ

Α΄. ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1981

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Δ. ΠΑΠΑΜΙΧΑΗΛ - Α. ΣΚΙΑΔΑ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΤΕΥΧΟΣ ΠΡΩΤΟ

Α΄. ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1981

Ὁ Εὐκλείδης

Ὁ Ἕλληνας γεωμέτρης Εὐκλείδης ὑπῆρξε ὁ πιὸ διάσημος μαθηματικὸς ὅλων τῶν ἐποχῶν καὶ ὅλων τῶν ἐθνῶν. Γιὰ τὴ ζωή του ξέρουμε πολὺ λίγα πράγματα. Γεννήθηκε τὸ 330 π.Χ. στὴ Σικελία ἢ στὴ Συρία καὶ πέθανε τὸ 270 ἢ 275 π.Χ. Ὁ πατέρας του Ναύκρατος τὸν ἔστειλε ἀρχικὰ γιὰ σπουδὲς στὴν Ἀθήνα, ὅπου γρήγορα διακρίθηκε γιὰ τὶς μαθηματικές του ἱκανότητες καὶ τὶς γεωμετρικές του ἐργασίες. Ἀργότερα πῆγε ὡς προσκεκλημένος τοῦ Πτολεμαίου στὴν Ἀλεξάνδρεια καὶ δίδαξε Ἀριθμητικὴ καὶ Γεωμετρία. Ἡ διδασκαλία του ἐκεῖ ἄφησε ἐποχὴ καὶ ὁ Εὐκλείδης ταύτισε γιὰ ἑκατοντάδες χρόνια τὸ ὄνομά του μὲ τὴ Γεωμετρία στὴν ὁποία εἶχε ἰδιαίτερη ἀγάπη. Κατὰ τὸν Πάππο (3ος αἰώνας μ.Χ.) ὁ Εὐκλείδης ἦταν πρᾶος καὶ εἶχε μία ξεχωριστὴ ἱκανότητα νὰ μεταδίδει γνώσεις στοὺς συνανθρώπους του.

Ἡ μεγάλη φήμη τοῦ Εὐκλείδη ὀφείλεται κυρίως στὸ ἔργο του «Στοιχεῖα», ἀπὸ τὸ ὁποῖο πῆρε καὶ τὸ ὄνομα τοῦ «Στοιχειωτοῦ». Τὸ ἔργο αὐτὸ ποὺ ἀποτελεῖ ὑπόδειγμα θεμελιώσεως καὶ παρουσιάσεως μαθηματικοῦ κλάδου *μεινε γιὰ πολλοὺς αἰῶνες τὸ βασικὸ κείμενο διδασκαλίας τῆς Γεωμετρίας στὰ πιὸ περίφημα σχολεῖα. Τὰ «Στοιχεῖα» τοῦ Εὐκλείδη ἀποτελοῦνται ἀπὸ δεκατρία βιβλία τὰ ὁποῖα περιλαμβάνουν, ἐκτὸς ἀπὸ τὶς ἀρχικὲς προτάσεις, 93 προβλήματα καὶ 372 θεωρήματα. Τὰ τέσσερα πρῶτα βιβλία καὶ τὸ ἕκτο περιέχουν τὴν ἐπίπεδη Γεωμετρία, ἐνῶ τὸ πέμπτο πραγματεύεται τὴ θεωρία τῶν ἀναλογιῶν. Τὰ ἑπόμενα τρία βιβλία, ἕβδομο, ὄγδοο καὶ ἔνατο, περιέχουν καθαρῶς ἀριθμητικὰ θέματα καὶ στὸ δέκατο γίνεται μὲ θαυμάσιο τρόπο ἡ ἀνάπτυξη τῆς θεωρίας τῶν ἀσυμμέτρων γεωμετρικῶν μεγεθῶν. Τέλος τὰ τρία τελευταῖα βιβλία ἀναφέρονται στὴ Στερεομετρία. Ἡ πρώτη ἔκδοση τῶν «Στοιχείων» ἔγινε τὸ 1482 στὴ Βενετία.*

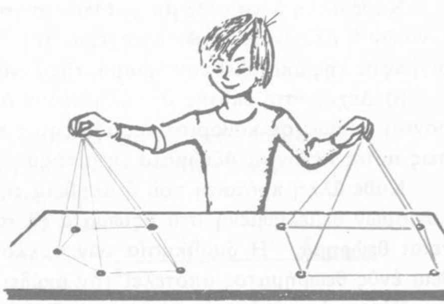
Πολλοὶ καὶ μεγάλοι μαθηματικοὶ ἀσχολήθηκαν τοὺς τελευταίους αἰῶνες μὲ τὴ θεμελίωση τῆς Γεωμετρίας ποὺ καθιέρωσε ὁ Εὐκλείδης καὶ ἀρκετοὶ ἀπὸ αὐτοὺς συνέβαλαν στὸ νὰ γίνεται σήμερα ἡ θεμελίωση αὐτὴ μὲ πιὸ αὐστηρὸ τρόπο. Μερικοὶ τροποποίησαν ἀκόμη καὶ ὁρισμένες ἀπὸ τὶς «ἀρχὲς» ποὺ ἔβαλε ὁ Εὐκλείδης καὶ δημιούργησαν ἄλλα «λογικὰ οἰκοδομήματα» τὰ ὁποῖα ὅμως δὲν ἔχουν οὔτε τὴν ἁπλότητα οὔτε τὴν ὀμορφιὰ τῆς Γεωμετρίας ποὺ στηρίζεται στὶς ἀρχὲς τοῦ Εὐκλείδη. Ἔτσι οἱ ἀρχὲς αὐτὲς κυριαρχοῦν ἀκόμη καὶ σήμερα στὴ Γεωμετρία ἡ ὁποία διδάσκεται στὰ Γυμνάσια ὅλου τοῦ κόσμου καὶ ἡ ὁποία, γι' αὐτὸν ἀκριβῶς τὸ λόγο, λέγεται «Εὐκλείδειος Γεωμετρία».

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΟΙ ΠΡΩΤΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

1. 1. Εἰσαγωγή.

Τὰ Μαθηματικά, ὅταν ἀσχολοῦνται μὲ τὴν περιγραφὴ καὶ τὴ μελέτη τῶν σωμάτων τοῦ «αἰσθητοῦ» χώρου (δηλαδὴ τοῦ χώρου ποὺ μᾶς περιβάλλει), περιορίζονται μόνο στὴ μορφή τους καὶ σὲ κάθε τὶ ποὺ ἐξαρτᾶται ἀπ' αὐτή. Ἔτσι τὰ Μαθηματικὰ «ἀγνοοῦν» τὴν ὕλη ἢ τὶς ἄλλες ἰδιότητες τῶν σωμάτων καὶ σπουδάζουν τὴ μορφή τους καὶ μάλιστα γιὰ τὸ σκοπὸ αὐτὸ ἀντικαθιστοῦν αὐτὰ μὲ ἁπλοποιημένα (ἰδεατὰ) πρότυπα, ποὺ λέγονται **γεωμετρικὰ σχήματα.** Τὰ γεωμετρικὰ σχήματα λοιπὸν εἶναι μαθηματικὲς ἐπινοήσεις ποὺ ἀντιπροσωπεύουν σώματα ἢ μέρη σωμάτων ἢ νοητικὲς προεκτάσεις τους.



Μὲ τὴν εἰσαγωγὴ καὶ τὴ μελέτη τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων ἀσχολεῖται ἡ Γεωμετρία[1], ποὺ εἶναι ἕνας ἰδιαίτερος καὶ αὐτόνομος κλάδος τῶν Μαθηματικῶν. Ἰδιαίτερα στὰ ἑπόμενα θὰ ἀσχοληθοῦμε μὲ τὴν Εὐκλείδειο Θεωρητικὴ Γεωμετρία.

1.2. Ἀρχικὲς ἔννοιες - Ἀξιώματα.

Γιὰ τὴ θεμελίωση τῆς Γεωμετρίας κάνουμε τὶς παρακάτω δύο παραδοχές:

α) Δεχόμαστε τὴν ὕπαρξη ὁρισμένων ἐννοιῶν ποὺ τοὺς δίνουμε κάποια ὀνομασία χωρὶς νὰ τὶς περιγράψουμε μὲ τὴ βοήθεια ἄλλων στοιχείων. Οἱ ἔννοιες αὐτὲς λέγονται **ἀρχικὲς ἔννοιες** τῆς Γεωμετρίας.

Ἔτσι δεχόμαστε ὅτι ὑπάρχει ἕνα μὴ κενὸ σύνολο ποὺ τὸ ὀνομάζουμε **γεωμετρικὸ χῶρο** καὶ τὰ στοιχεῖα του τὰ ὀνομάζουμε **γεωμετρικὰ σημεῖα** ἢ ἁπλῶς **σημεῖα.** Κάθε ὑποσύνολο τοῦ γεωμετρικοῦ χώρου λέγεται γεω-

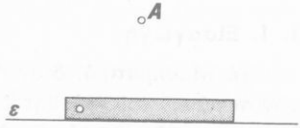
1. Ἡ λέξη Γεωμετρία, γράφει ὁ Ἡρόδοτος, σημαίνει τὴ μέτρηση τῆς γῆς.

μετρικὸ σχῆμα. Ὁρισμένα ἀπὸ αὐτά, τὰ ὑποσύνολα, τὰ λέμε **εὐθεῖες** καὶ ὁρισμένα τὰ λέμε **ἐπίπεδα.**

Οἱ βασικὲς λοιπὸν ἀρχικὲς ἔννοιες τῆς Γεωμετρίας εἶναι:

- τὸ σημεῖο
- ἡ εὐθεία
- τὸ ἐπίπεδο.

Στὸ σχέδιό μας ἕνα σημεῖο ἐντοπίζεται μὲ μιὰ τελεία καὶ σημειώνεται μὲ ἕνα κεφαλαῖο γράμμα.



Μιὰ εὐθεία κατασκευάζεται μὲ τὴ βοήθεια ἑνὸς κανόνα (χάρακα) καὶ σημειώνεται μὲ ἕνα μικρὸ γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου.

Γιὰ νὰ σημειώσουμε ἕνα ἐπίπεδο, θὰ χρησιμοποιοῦμε ἕνα ἀπὸ τὰ μικρὰ λατινικὰ γράμματα: p, q, r, ...

Κάθε ἄλλη ἔννοια θὰ μπορεῖ νὰ περιγραφεῖ μὲ τὴ βοήθεια τῶν ἀρχικῶν ἐννοιῶν ἢ ἄλλων γνωστῶν στοιχείων τῆς Γεωμετρίας. Ὁ τρόπος αὐτὸς περιγραφῆς της ἀποτελεῖ τὸν **ὁρισμὸ** τῆς ἔννοιας αὐτῆς.

β) Δεχόμαστε ἐπίσης ὅτι ἀληθεύουν ὁρισμένες προτάσεις ποὺ ἀναφέρονται κυρίως σὲ καθοριστικὲς ἰδιότητες τῶν ἀρχικῶν ἐννοιῶν. Οἱ προτάσεις αὐτὲς λέγονται **ἀξιώματα** (ἢ αἰτήματα).

Κάθε ἄλλη πρόταση ποὺ ἡ ἀλήθεια της προκύπτει ἀπὸ μιὰ σειρὰ συλλογισμῶν θεμελιωμένη στὰ ἀξιώματα (ἢ σὲ ἄλλες ἀληθεῖς προτάσεις) λέγεται **θεώρημα.** Ἡ διαδικασία τῶν συλλογισμῶν ποὺ ὁδηγεῖ στὴν ἀλήθεια ἑνὸς θεωρήματος ἀποτελεῖ τὴν **ἀπόδειξη** τοῦ θεωρήματος.

Ἔτσι οἱ προτάσεις ποὺ συναντοῦμε στὴ Γεωμετρία διακρίνονται σέ:

- ἀξιώματα
- θεωρήματα.

Πρέπει νὰ σημειώσουμε ὅτι ὁ ρόλος τῶν ἀξιωμάτων καὶ τῶν θεωρημάτων στὴ Γεωμετρία δὲ διαφέρει καὶ ἡ χρησιμοποίησή τους γίνεται μὲ τὸν ἴδιο τρόπο.

Ἀκόμα ὑπάρχουν προτάσεις ποὺ εἶναι ἄμεσες συνέπειες ἑνὸς θεωρήματος. Μιὰ τέτοια πρόταση λέγεται εἰδικότερα **πόρισμα** τοῦ θεωρήματος[1]. Τὰ πορίσματα λοιπὸν εἶναι καὶ αὐτὰ θεωρήματα ποὺ ἡ ἀλήθεια τους εἶναι ἄμεση συνέπεια κάποιου θεωρήματος (καὶ γι' αὐτὸ ἡ ἀπόδειξή τους πολλὲς φορὲς παραλείπεται).

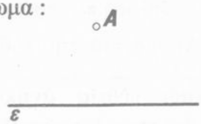
---

1. Ἡ Θεωρητικὴ Γεωμετρία θεμελιώθηκε γιὰ πρώτη φορὰ σὲ καθαρὴ ἐπιστήμη ἀπὸ τὸν Ἕλληνα μαθηματικὸ Εὐκλείδη (τὸ 300 π.Χ.). Σήμερα ἡ Εὐκλείδειος Γεωμετρία θεμελιώνεται μὲ ἕνα «σύστημα» ἀξιωμάτων ποὺ πρότεινε ὁ μαθηματικὸς D. Hilbert (1862-1943). Ἀπὸ τὰ ἀξιώματα αὐτὰ ἐδῶ θὰ ἀναφέρουμε ἐκεῖνα ποὺ εἶναι ἀπαραίτητα γιὰ ἕνα σχολικὸ ἐγχειρίδιο.

1.3. Βασικὲς προτάσεις γιὰ τὴν εὐθεία.

Εἴπαμε παραπάνω ὅτι ὁρισμένα ὑποσύνολα τοῦ γεωμετρικοῦ χώρου τὰ λέμε εὐθεῖες. Γιὰ νὰ τὰ καθορίσουμε αὐτὰ τὰ ὑποσύνολα, δεχόμαστε ὁρισμένα ἀξιώματα καὶ ἀποδείχνουμε μερικὰ θεωρήματα.

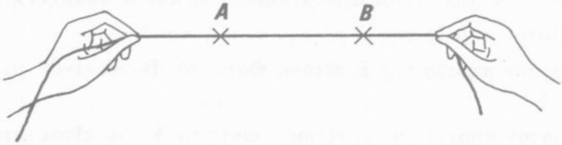
Ἔτσι δεχόμαστε ὅτι μιὰ εὐθεία εἶναι γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ γεωμετρικοῦ χώρου. Τοῦτο τὸ διατυπώνουμε μὲ τὸ ἑξῆς ἀξίωμα :



Ὑπάρχει τουλάχιστον ἕνα σημεῖο πού δέν ἀνήκει σέ δεδομένη εὐθεία. (I)

Σὲ σχέση μὲ τὰ σημεῖα, γιὰ τὴν εὐθεία δεχόμαστε τὸ παρακάτω ἀξίωμα :

Δύο σημεῖα ἀνήκουν σέ μιά καί μόνο σέ μιά εὐθεία. (II)



Τὸ ἀξίωμα (II) ἐκφράζεται ἰσοδύναμα καὶ μὲ τὴν πρόταση :

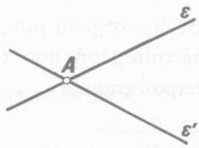
«Δύο σημεῖα ὁρίζουν τὴ θέση μιᾶς καὶ μόνο μιᾶς εὐθείας».

Ἡ εὐθεία ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ δύο σημεῖα Α καὶ Β ὀνομάζεται **εὐθεία ΑΒ** καὶ λέμε γι᾽ αὐτὴν ὅτι **«διέρχεται»** ἀπὸ τὰ Α καὶ Β. Τὰ σημεῖα ποὺ ἀνήκουν στὴν ἴδια εὐθεία λέγονται **συνευθειακά.**

Ἀπὸ τὸ ἀξίωμα (II) εἶναι φανερὸ ὅτι :

«Δύο εὐθεῖες ποὺ δὲ συμπίπτουν ἔχουν τὸ πολὺ ἕνα κοινὸ σημεῖο».

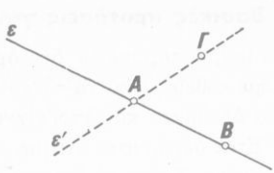
Δύο εὐθεῖες ποὺ δὲ συμπίπτουν καὶ ἔχουν ἕνα κοινὸ σημεῖο λέγονται **τεμνόμενες εὐθεῖες** καὶ τὸ κοινὸ σημεῖο τους λέγεται τομὴ τῶν εὐθειῶν αὐτῶν. Γιὰ νὰ δηλώσουμε ὅτι ἕνα σημεῖο Α εἶναι τομὴ δύο εὐθειῶν ε καὶ ε′, λέμε ὅτι οἱ εὐθεῖς ε καὶ ε′ τέμνονται στὸ Α καὶ γράφουμε:



$$\{A\} = \varepsilon \cap \varepsilon'$$

ΘΕΩΡΗΜΑ : Ἀπὸ ἕνα σημεῖο διέρχονται περισσότερες ἀπὸ μιὰ εὐθεῖες.

Ἀπόδειξη : Θεωροῦμε δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ τὴν εὐθεία ε ποὺ διέρχεται ἀπὸ αὐτά. Σύμφωνα μὲ τὸ ἀξίωμα (I) ὑπάρχει σημεῖο Γ ποὺ δὲν ἀνήκει στὴν εὐθεία ε. Κατὰ τὸ ἀξίωμα (ΙΙ) τὰ σημεῖα Α καὶ Γ ὁρίζουν μιὰ ἄλλη εὐθεία ε′. Οἱ εὐθεῖες ε καὶ ε′ ἔχουν κοινὸ σημεῖο μόνο τὸ Α, γιατί, ἂν αὐτὲς εἶχαν καὶ ἄλλο κοινὸ σημεῖο, θὰ ταυτίζονταν, ποὺ δὲν εἶναι δυνατό, γιατὶ τότε τὸ Γ θὰ ἦταν σημεῖο τῆς ε, ἐνῶ τὸ πήραμε νὰ μὴν ἀνήκει σ' αὐτή. Συνεπῶς ἀπὸ τὸ Α διέρχονται οἱ εὐθεῖες ε καὶ ε′, δηλαδὴ περισσότερες ἀπὸ μιὰ εὐθεῖες.



Ἀκόμα γιὰ τὴν εὐθεία δεχόμαστε ὅτι :

Σέ κάθε εὐθεία ἀνήκουν τουλάχιστον δύο σημεῖα. **(III)**

καὶ μάλιστα ὅτι : (ἀξίωμα (ιν))[1]

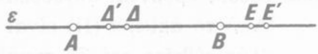
Ἄν σέ μιά εὐθεία σημειώσουμε δύο σημεῖα Α καί Β ὑπάρχει :

α) ἕνα τουλάχιστον σημεῖο της Δ μεταξύ τῶν Α καί Β.

β) ἕνα τουλάχιστον σημεῖο της Ε, τέτοιο, ὥστε τό Β νά εἶναι μεταξύ τῶν Α καί Ε.

γ) ἕνα τουλάχιστον σημεῖο της Ζ τέτοιο, ὥστε τό Α νά εἶναι μεταξύ τῶν Ζ καί Β.

Ἀπὸ τὰ ἀξιώματα αὐτὰ θὰ ξέρουμε ὅτι, ὅταν μᾶς δίνεται μιὰ εὐθεία ε καὶ σημειώσουμε δυὸ σημεῖα της Α καὶ Β, ὑπάρχει σημεῖο Δ μεταξὺ τῶν Α καὶ Β, σημεῖο Δ′ μεταξὺ τῶν Α καὶ Δ καὶ συνέχεια θὰ ὑπάρξουν ἄπειρα[2] σημεῖα μεταξὺ τῶν Α καὶ Β[3]. Τὸ ἴδιο θὰ ἰσχύει καὶ γὰ τὰ σημεῖα τῆς ε ποὺ δὲ βρίσκονται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β.



Ἔτσι δύο σημεῖα μιᾶς εὐθείας τὴ χωρίζουν σὲ τρία μέρη ποὺ τὸ καθένα τους ἔχει «ἄπειρα» σημεῖα.

1. Τὸ ἀξίωμα (IV) λέγεται καὶ ἀξίωμα διατάξεως.

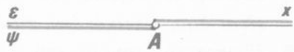
2. Γενικὰ ὅταν γιὰ ἕνα πλῆθος στοιχείων χρησιμοποιοῦμε τὸν ὅρο «ἄπειρα», ἐννοοῦμε ὅτι τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων αὐτῶν ξεπερνᾶ κάθε φυσικὸ ἀριθμὸ ν ὁσοδήποτε μεγάλο.

3. Ἐδῶ δεχόμαστε ἀκόμα τὸ ἀξίωμα :
«Ἄν σημεῖο Δ μιᾶς εὐθείας ε εἶναι μεταξὺ δύο σημείων της Α καὶ Β καὶ ἕνα σημεῖο Δ′ τῆς ε εἶναι μεταξὺ τῶν Α καὶ Δ, τότε καὶ τὸ Δ′ βρίσκεται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β».

1.4. Ἡ ἡμιευθεία.

Ἂς θεωρήσουμε μιὰ εὐθεία ε καὶ ἕνα σημεῖο της Α. Ὀνομάζουμε:

Ἡμιευθεία τὸ σημειοσύνολο ποὺ στοιχεῖα του εἶναι τὸ Α καὶ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ε ποὺ βρίσκονται πρὸς «τὸ ἴδιο» μέρος τοῦ Α.



Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ αὐτὸ προκύπτει ὅτι σὲ κάθε εὐθεία ε καὶ γιὰ κάθε σημεῖο της Α ἀντιστοιχοῦν δύο ἡμιευθεῖες [1]:

ἡ Αx καὶ ἡ Αy

Τὸ Α λέγεται **ἀρχὴ** τῆς κάθε ἡμιευθείας. Δύο ἡμιευθεῖες ποὺ προκύπτουν ἀπὸ τὴν ἴδια εὐθεία καὶ ἔχουν τὴν ἴδια ἀρχὴ λέγονται **ἀντικείμενες ἡμιευθεῖες.**

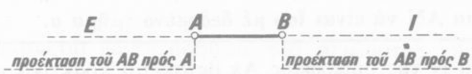
Μιὰ ἡμιευθεία θὰ καθορίζεται πλήρως, ὅταν ξέρουμε τὴν ἀρχή της καὶ ἕνα ἄλλο σημεῖο της, καὶ θὰ γράφουμε τότε : **ἡμιευθεία ΑΒ.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1 - 4

1.5. Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα.

Ἂν δοθοῦν δύο σημεῖα Α καὶ Β, ξέρουμε ὅτι ὑπάρχει μόνο μία εὐθεία ΑΒ ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτὰ (ἀξίωμα § 1.3) καὶ ὅτι ὑπάρχουν ἄπειρα σημεῖα αὐτῆς τῆς εὐθείας μεταξὺ τῶν Α καὶ Β. Ὀνομάζουμε :

Εὐθύγραμμο τμῆμα μὲ ἄκρα δύο σημεῖα Α καὶ Β τὸ σημειοσύνολο ποὺ ἔχει στοιχεῖα τὰ δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας ΑΒ ποὺ βρίσκονται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β.



Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα θὰ σημειώνεται ΑΒ ἢ ΒΑ (ἢ μὲ ἕνα μικρὸ γράμμα, π.χ. α) καὶ θὰ λέγεται καὶ ἁπλῶς **τμῆμα ΑΒ.** Ἡ εὐθεία ε ποὺ ὁρίζουν

---

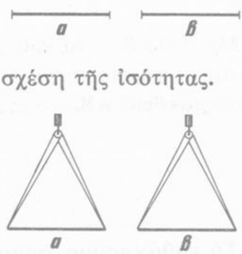
1. Ἡ ὕπαρξη τῶν δύο ἡμιευθειῶν ἐξασφαλίζεται ἀξιωματικά· ἐπίσης ὅτι τὸ μόνο κοινὸ σημεῖο ποὺ ἔχουν εἶναι τὸ Α.

τὰ σημεῖα Α καὶ Β λέγεται **φορέας** τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Θὰ λέμε ἀκόμα ὅτι τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ **συνδέει** ἢ **ἑνώνει** τὰ δύο σημεῖα Α καὶ Β. Ὁρίζουμε ἀκόμα ὅτι:

- **ἐσωτερικὸ σημεῖο τοῦ ΑΒ** *λέγεται τὸ κάθε σημεῖο τοῦ τμήματος ποὺ εἶναι διαφορετικὸ ἀπὸ τὰ ἄκρα του.*
- **ἐξωτερικὸ σημεῖο τοῦ ΑΒ** *λέγεται κάθε σημεῖο τοῦ φορέα του ποὺ δὲν ἀνήκει στὸ ΑΒ.* Ἡ ἡμιευθεία ΑΕ ποὺ ὅλα της τὰ σημεῖα (ἐκτός ἀπὸ τὸ Α) εἶναι ἐξωτερικὰ τοῦ τμήματος ΑΒ λέγεται **προέκταση τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ Α.** Ἡ ἡμιευθεία ΒΙ ποὺ ὅλα της τὰ σημεῖα (ἐκτὸς ἀπὸ τὸ Β)εἶναι ἐξωτερικὰ τοῦ τμήματος *ΑΒ* λέγεται **προέκταση τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ Β.**

1.6. Ἰσότητα εὐθ. τμημάτων.

Ἂν πάρουμε δύο εὐθύγραμμα τμήματα α καὶ β ἀπὸ τὸ σύνολο $\mathscr{E}$ τῶν εὐθ. τμημάτων εἶναι δυνατὸ νὰ τὰ συνδέσουμε μεταξύ τους, χαρακτηρίζοντάς τα ὡς **ἴσα** ἢ **ἄνισα.** Δεχόμαστε δηλαδὴ ὅτι στὸ σύνολο $\mathscr{E}$ τῶν εὐθ. τμημάτων ὑπάρχει ἡ σχέση τῆς ἰσότητας.



Ἡ ἰσότητα δύο τμημάτων διαπιστώνεται μὲ ἕνα διαβήτη, ὅπου τὰ τμήματα α καὶ β εἶναι ἴσα, ὅταν ἀντιπροσωπεύονται ἀπὸ τὸ ἴδιο ἄνοιγμα τοῦ διαβήτη.

Θὰ γράφουμε: $\alpha = \beta$.

Ἡ ἰσότητα τῶν εὐθ. τμημάτων εἶναι μιὰ σχέση **ἰσοδυναμίας,** δηλαδὴ εἶναι:

Ἀνακλαστική: $\alpha = \alpha \quad \forall\ \alpha \in \mathscr{E}$.
συμμετρική: $\alpha = \beta \Rightarrow \beta = \alpha$
μεταβατική: $\alpha = \beta$ καὶ $\beta = \gamma \Rightarrow \alpha = \gamma$.

Γιὰ τὴν ἰσότητα τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων δεχόμαστε τὸ ἀξίωμα

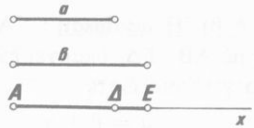
Σέ κάθε ἡμιευθεία Αχ ὑπάρχει ἕνα καί μόνο ἕνα σημεῖο Ν τέτοιο, ὥστε τό τμῆμα ΑΝ νά εἶναι ἴσο μέ δεδομένο τμῆμα α.

Τὸ σημεῖο Ν τῆς ἡμιευθείας Αχ βρίσκεται πρακτικὰ μὲ ἕνα διαβήτη, ποὺ τὸ «ἄνοιγμά» του ἀντιπροσωπεύει τὸ τμῆμα α (σχ. 1).

Μὲ τὴ βοήθεια τοῦ ἀξιώματος αὐτοῦ ὁρίζουμε καὶ τὰ ἄνισα εὐθύγραμμα τμήματα:

Σχ. 1

Ἂν δοθοῦν δύο τμήματα α καὶ β καὶ πάρουμε σὲ μιὰ ἡμιευθεία Αx τὰ τμήματα ΑΔ = α καὶ ΑΕ = β, ἔχουμε μιὰ ἀπὸ τὶς περιπτώσεις :



Τὸ Ε καὶ τὸ Δ εἶναι τὸ ἴδιο σημεῖο τῆς ἡμιευθείας Αx, τότε ἔχουμε α = β·

Τὸ Δ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Ε καὶ τότε λέμε ὅτι τὸ α εἶναι **μικρότερο** ἀπὸ τὸ β καὶ γράφουμε : α<β (βλ. σχῆμα).

Τὸ Ε κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Δ τότε λέμε ὅτι τὸ α εἶναι **μεγαλύτερο** ἀπὸ τὸ β καὶ γράφουμε : α>β.

1.7. Τὸ μέσο εὐθ. τμήματος.

Ὁρισμός : Ἕνα σημεῖο Μ ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ θὰ λέγεται μέσο του, ἂν καὶ μόνο ἂν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΜ καὶ ΜΒ εἶναι ἴσα.

Δηλαδή : Μ μέσο τοῦ ΑΒ $\underset{\text{ορ}}{\Longleftrightarrow}$ ΑΜ = ΜΒ.

Γιὰ τὸ μέσο ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος δεχόμαστε τὸ ἀξίωμα :

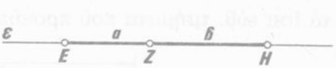
Κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα ἔχει ἕνα καί μόνο ἕνα μέσο.

Θὰ δοῦμε ἀργότερα (§ 8.6.) πῶς βρίσκουμε τὸ μέσο ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος μὲ τὸν κανόνα καὶ τὸ διαβήτη.

1.8. Οἱ πράξεις στὰ εὐθύγραμμα τμήματα.

α) Ἡ πρόσθεση : Ὡς πρόσθεση ὁρίζεται ἡ πράξη ἐκείνη πού, ἂν μᾶς δοθοῦν δύο εὐθ. τμήματα ΑΒ = α καὶ ΓΔ = β, μποροῦμε σ' αὐτὰ νὰ ἀντιστοιχίσουμε ἕνα καὶ μόνο ἕνα τρίτο γ, τὸ **ἄθροισμά τους.**

Ἔτσι : α + β = γ



Τὸ ἄθροισμα βρίσκεται μὲ τὴ βοήθεια τοῦ ἀξιώματος τῆς § 1.6.

Σὲ μιὰ εὐθεία ε σημειώνουμε ἕνα σημεῖο Ζ καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ Ζ τὰ σημεῖα Ε καὶ Η ὥστε : ΖΕ = ΑΒ καὶ ΖΗ = ΓΔ, τότε :

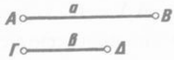
$$ΕΗ = ΕΖ + ΖΗ = ΑΒ + ΓΔ = α + β.$$

Ἡ πράξη τῆς προσθέσεως εὐθύγραμμων τμημάτων ἔχει τὶς γνωστὲς ἰδιότητες :

α) Ἀντιμεταθετική : $α+β=β+α.$

β) Προσεταιριστική : $(α+β)+γ=α+(β+γ).$

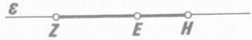
β) **Ἡ ἀφαίρεση :** Ἂν δοθοῦν δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ=α, ΓΔ=β μὲ ΑΒ>ΓΔ, ὑπάρχει ἕνα τρίτο γ τέτοιο ὥστε :



$$\alpha = \beta + \gamma$$

ποὺ ἰσοδύναμα γράφεται : α — β = γ.

Τὸ γ βρίσκεται μὲ τὸν ἑξῆς τρόπο :



Σὲ εὐθεία ε παίρνουμε ἕνα σημεῖο Ζ καὶ στὴν ἴδια ἡμιευθεία τῆς ε ὡς πρὸς τὸ Ζ τὰ τμήματα ΖΗ=α καὶ ΖΕ=β τότε :

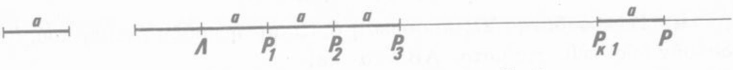
$$EH = \alpha - \beta.$$

Γιὰ νὰ ἔχει νόημα ἡ διαφορὰ α — β καὶ ὅταν α=β, δεχόμαστε ὅτι ὑπάρχει ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ποὺ τὰ ἄκρα του συμπίπτουν. Τὸ τμῆμα αὐτὸ λέγεται **μηδενικὸ εὐθύγραμμο τμῆμα** καὶ σημειώνεται : $\overline{0}$. Ἔτσι μποροῦμε νὰ γράφουμε :

$$(1)\ \alpha - \alpha = \overline{0} \text{ γιὰ κάθε τμῆμα } \alpha.$$

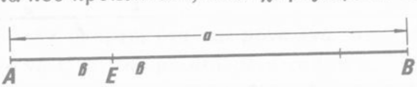
Ἀπὸ τὴν (1) προκύπτει : $\alpha + \overline{0} = \alpha$, ποὺ ἀληθεύει γιὰ κάθε τμῆμα α καὶ σημαίνει ὅτι τὸ μηδενικὸ εὐθ. τμῆμα εἶναι τὸ «οὐδέτερο στοιχεῖο» τῆς προσθέσεως τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων.

γ) **Γινόμενο εὐθ. τμήματος ἐπὶ ρητὸ ἀριθμό :** Ἂς πάρουμε ἕνα εὐθ. τμῆμα ΑΒ = α. Γιὰ κάθε φυσικὸ ἀριθμὸ κ ὁρίζουμε τὸ κ· ΑΒ ὡς τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΛΡ ποὺ εἶναι ἄθροισμα κ τμημάτων ἴσων μὲ ΑΒ = α.



Δηλαδή : ΛΡ=κ·ΑΒ=α+α+α+...+α, κ προσθετέοι.

Ἂν ὁ $\kappa = \dfrac{1}{\lambda}$ (ὅπου λ φυσικὸς ἀριθμὸς ≠ο) τὸ $\dfrac{1}{\lambda}\cdot AB$ εἶναι ἕνα ἀπὸ τὰ ἴσα εὐθ. τμήματα ποὺ προκύπτουν, ὅταν χωρίζουμε τό ΑΒ σὲ λ ἴσα μέρη[1].

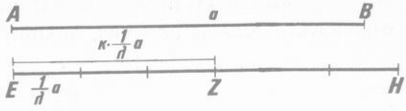


Δηλαδή : $AE = \dfrac{1}{\lambda}\cdot .AB \Leftrightarrow \lambda \cdot AE = AB.$

Τέλος ἂν κ, λ εἶναι φυσικοὶ ἀριθμοί, ὁρίζουμε τὸ $\dfrac{\kappa}{\lambda}\cdot AB = \kappa\cdot\dfrac{1}{\lambda}\cdot AB$ ὡς τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ποὺ εἶναι τὸ ἄθροισμα κ τμημάτων ἴσων μὲ $\dfrac{1}{\lambda}\cdot AB$.

1. Θὰ δοῦμε σὲ ἄλλη παράγραφο πῶς γίνεται ὁ χωρισμὸς ἑνὸς εὐθ. τμήματος σὲ κ ἴσα μέρη (ὁ κ φυσικὸς ἀριθμὸς) μὲ τὸν κανόνα καὶ τὸ διαβήτη.

Δηλαδή : $EZ = \kappa \cdot \frac{1}{\lambda} AB = \frac{\kappa}{\lambda} AB.$



1.9. Λόγος εὐθύγραμμων τμημάτων.

Ἂν ὑποθέσουμε ὅτι ἔχουμε δύο τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ, ποὺ συνδέονται σὲ μιὰ ἰσότητα τῆς μορφῆς :

$$(3) \quad \Gamma\Delta = \frac{\kappa}{\lambda} AB$$

ὅπου τὰ κ καὶ λ εἶναι φυσικοὶ ἀριθμοὶ καὶ $\lambda \neq 0$, ὁ ἀριθμὸς $\frac{\kappa}{\lambda}$ λέγεται **λόγος** τοῦ τμήματος ΓΔ πρὸς τὸ τμῆμα ΑΒ καὶ σημειώνεται μὲ $\Gamma\Delta : AB$ ἢ $\frac{\Gamma\Delta}{AB}$.

Ἔτσι ἡ ἰσότητα $\frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\Gamma\Delta}{AB}$ δηλώνει ὅτι ὁ ἀριθμὸς $\frac{\kappa}{\lambda}$ εἶναι ὁ λόγος τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΑΒ καὶ συνεπῶς εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴν ἰσότητα $\Gamma\Delta = \frac{\kappa}{\lambda} AB$.

Ἔχουμε λοιπόν :

$$\Gamma\Delta = \frac{\kappa}{\lambda} AB \Leftrightarrow \frac{\Gamma\Delta}{AB} = \frac{\kappa}{\lambda}.$$

Εἶναι φανερὸ ὅτι, ἂν εἶναι $\Gamma\Delta = AB$, θὰ εἶναι καὶ $\kappa = \lambda$, ἐνῶ ἂν εἶναι $\Gamma\Delta > AB$, θὰ εἶναι $\kappa > \lambda$.

Στὸ τεῦχος αὐτὸ θὰ σημειώνουμε μὲ $\mathscr{E}$ τὸ σύνολο τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων ποὺ εἶναι τέτοια, ὥστε δύο ὁποιαδήποτε α καὶ β ἀπ' αὐτὰ νὰ συνδέονται μὲ σχέση τῆς μορφῆς[1] : $\alpha = \frac{\kappa}{\lambda} \beta$.

1.10. Μέτρηση εὐθύγραμμων τμημάτων.

Ἂς πάρουμε στὸ σύνολο $\mathscr{E}$ τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων ἕνα ὁρισμένο τμῆμα $\Theta H \neq \bar{0}$ ποὺ θὰ τὸ λέμε **μοναδιαῖο τμῆμα** ἢ **μονάδα** καὶ ἂς σχηματίσουμε γιὰ κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ τοῦ $\mathscr{E}$ τὸ λόγο $\frac{AB}{H\Theta}$. Ὁ λόγος

---

1. Αὐτὸ δὲ συμβαίνει πάντοτε, γιατὶ (ὅπως θὰ δοῦμε στὴν ἑπόμενη τάξη) ὑπάρχουν τμήματα α καὶ β γιὰ τὰ ὁποῖα δὲν ἰσχύει ἰσότητα τῆς μορφῆς $\alpha = \frac{\kappa}{\lambda}\beta$. Στὴν περίπτωση αὐτὴ λέμε ὅτι ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸ β εἶναι «ἄρρητος» (μὴ ρητὸς) ἀριθμός.

αὐτὸς λέγεται τώρα μέτρο τοῦ ΑΒ **ὡς πρὸς μονάδα μετρήσεως τὸ ΗΘ** καὶ σημειώνεται ἁπλῶς μὲ (ΑΒ), δηλαδὴ εἶναι:

$$(\mathrm{AB}) = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{H\Theta}}.$$

Τονίζεται ὅτι, ὅταν γράφουμε ΑΒ, ἐννοοῦμε εὐθύγραμμο τμῆμα, δηλαδὴ γεωμετρικὸ σχῆμα, ἐνῶ ὅταν γράφουμε (ΑΒ), ἐννοοῦμε ἕναν ἀριθμὸ ποὺ εἶναι τὸ μέτρο τοῦ ΑΒ γιὰ κάποια γνωστὴ μονάδα μετρήσεως[1].

Τὸ μέτρο ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ λέγεται καὶ μῆκος τοῦ ΑΒ. Εἶναι φανερὸ ὅτι γιὰ κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα $\mathrm{AB} \neq \bar{0}$, ὁ ἀριθμὸς (ΑΒ) ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴ μονάδα ποὺ πήραμε, δηλαδὴ ἀπὸ τὸ ΗΘ. Ἔτσι, ἂν παίρναμε γιὰ μονάδα ἕνα ἄλλο τμῆμα Η′ Θ′, τὸ μέτρο $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{H'\Theta'}}$ τοῦ ΑΒ θὰ ἦταν διαφορετικὸς ἀριθμός, ἄσχετα ἂν τὸν σημειώναμε πάλι μὲ (ΑΒ). Στὴ συνέχεια καὶ ὅπου παρουσιάζονται μέτρα εὐθύγραμμων τμημάτων θὰ ὑποθέτουμε ὅτι ἀναφέρονται στὴν ἴδια μονάδα μετρήσεως.

Γιὰ τὸ μηδενικὸ τμῆμα $\bar{0}$ ἔχουμε πάντοτε $(\bar{\mathrm{O}}) = \mathrm{O}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Ὁ λόγος δύο τμημάτων ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι πάντοτε ἴσος μὲ τὸ λόγο τῶν μέτρων τους, δηλαδή:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\Gamma\Delta} = \frac{(\mathrm{AB})}{(\Gamma\Delta)}.$$

Ἀπόδειξη: Ἀπὸ τὶς $(\mathrm{AB}) = \mathrm{AB} : \mathrm{H\Theta}$ καὶ $(\Gamma\Delta) = \Gamma\Delta : \mathrm{H\Theta}$ ἔχουμε τὶς ἰσότητες: $\mathrm{AB} = (\mathrm{AB})\mathrm{H\Theta}$, $\quad \Gamma\Delta = (\Gamma\Delta)\mathrm{H\Theta}$.

Ἀπὸ τὴ δεύτερη ἰσότητα παίρνουμε $\mathrm{H\Theta} = \frac{1}{(\Gamma\Delta)}\Gamma\Delta$ καὶ τότε ἡ πρώτη γράφεται:

$$\mathrm{AB} = (\mathrm{AB})\frac{1}{(\Gamma\Delta)}\Gamma\Delta = \frac{(\mathrm{AB})}{(\Gamma\Delta)}\Gamma\Delta.$$

Ἡ ἰσότητα ὅμως αὐτὴ εἶναι, ὅπως ξέρουμε, ἰσοδύναμη μὲ τὴν

$$\mathrm{AB} : \Gamma\Delta = (\mathrm{AB}) : (\Gamma\Delta).$$

Ἀπὸ τὸ θεώρημα αὐτὸ ἔχουμε ἀμέσως τὰ πορίσματα:

Ι. Ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα ἔχουν ἴσα μέτρα καὶ ἀντιστρόφως, δηλαδή:

$$\mathbf{AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow (AB) = (\Gamma\Delta).}$$

---

1. Ξέρουμε ἀπὸ τὸ Γυμνάσιο ὅτι γιὰ μονάδα μετρήσεως τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων παίρνουμε συνήθως ἕνα τμῆμα ἴσο μὲ τὸ γνωστό μας μέτρο ἢ μιὰ ὑποδιαίρεσή του ἢ ἕνα πολλαπλάσιό του.

II. Ἄνισα εὐθύγραμμα τμήματα ἔχουν ὁμοίως ἄνισα μέτρα καὶ ἀντιστρόφως, δηλαδή:

$$AB > \Gamma\Delta \Leftrightarrow (AB) > (\Gamma\Delta).$$

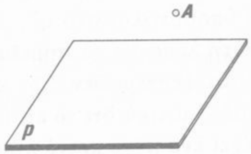
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5 - 11

1.11. Τὸ ἐπίπεδο.

Ὅπως εἴπαμε, ὁρισμένα ὑποσύνολα τοῦ γεωμετρικοῦ χώρου τὰ λέμε **ἐπίπεδα.** Τὸ ἐπίπεδο εἶναι ἀπὸ τὶς ἀρχικὲς ἔννοιες τῆς Γεωμετρίας.

Γιὰ τὸ ἐπίπεδο δεχόμαστε τὰ ἀξιώματα :

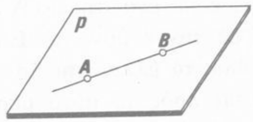
—Ὑπάρχει τουλάχιστον ἕνα σημεῖο ποὺ δὲν ἀνήκει σὲ δεδομένο ἐπίπεδο.



—Ἂν μιὰ εὐθεία διέρχεται ἀπὸ δύο σημεῖα ἑνὸς ἐπιπέδου, τότε ὅλα τὰ σημεῖα της ἀνήκουν στὸ ἐπίπεδο.

— Ἕνα ἐπίπεδο ἔχει τουλάχιστον τρία μὴ συνευθειακὰ σημεῖα.

— Ἀπὸ τρία μὴ συνευθειακὰ σημεῖα «διέρχεται» ἕνα καὶ μόνο ἕνα ἐπίπεδο.

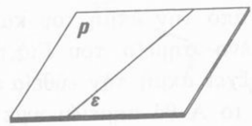


Τὸ τελευταῖο ἀξίωμα ἐκφράζεται ἰσοδύναμα μὲ τὴν πρόταση :

Τρία μὴ συνευθειακὰ σημεῖα ὁρίζουν τὴ θέση ἑνὸς καὶ μόνο ἑνὸς ἐπιπέδου.

Ἕνα ἐπίπεδο θὰ τὸ συμβολίζουμε μὲ ἕνα μικρὸ γράμμα : p, q, r, ...

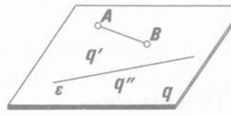
Ἂς θεωρήσουμε ἕνα ἐπίπεδο p καὶ μιὰ εὐθεία του ε. Ὅπως ἀντιλαμβανόμαστε ἐποπτικά, τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ἐκτὸς ἀπό τά σημεῖα τῆς ε διαχωρίζονται ἀπὸ τὴν ε σὲ δύο μέρη ποὺ δὲν ἔχουν κοινὸ σημεῖο· αὐτὸ θεωρητικὰ τὸ κατοχυρώνουμε μὲ τὸ παρακάτω ἀξίωμα :



Κάθε εὐθεία ἑνὸς ἐπιπέδου διαχωρίζει τὰ ὑπόλοιπα σημεῖα του σὲ δύο ὑποσύνολα ποὺ δὲν ἔχουν κοινὰ σημεῖα.

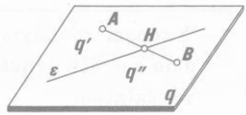
Ἂς θεωρήσουμε ἕνα ἐπίπεδο q καὶ ἂς ὀνομάσουμε q' καὶ q'' τὰ δύο ὑποσύνολα (μέρη) στὰ ὁποῖα χωρίζεται αὐτὸ ἀπὸ μιὰ εὐθεία του ε. Γιὰ δυὸ σημεῖα A καὶ B τοῦ ἐπιπέδου, ποὺ δὲν ἀνήκουν στὴν ε, εἶναι δυνατὲς οἱ ἑξῆς δύο περιπτώσεις :

α) Τὰ δύο σημεῖα A καὶ B βρίσκονται στὸ ἴδιο ὑποσύνολο q' ἢ q'' τοῦ ἐπιπέδου (σχ. 2) Στὴν περίπτωση αὐτὴ λέμε ὅτι τὰ A καὶ B βρίσκονται **πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος** τῆς ε καὶ δεχόμαστε ἀξιωματικὰ ὅτι **τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα AB δὲν ἔχει κοινό σημεῖο μὲ τὴν ε.**



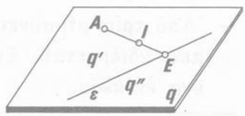
Σχ. 2

β) Τὸ ἕνα σημεῖο βρίσκεται στὸ ἕνα ὑποσύνολο, στὸ q', καὶ τὸ ἄλλο στὸ δεύτερο ὑποσύνολο, στὸ q''. Στὴν περίπτωση αὐτὴ λέμε ὅτι τὰ σημεῖα A καὶ B βρίσκονται **ἑκατέρωθεν** τῆς ε καὶ δεχόμαστε ἀξιωματικὰ **ὅτι τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα AB ἔχει ἕνα μόνο κοινὸ σημεῖο μὲ τὴν ε.** Ἂν ὀνομάσουμε H τὸ κοινὸ σημεῖο τοῦ AB μὲ τὴν ε, θὰ λέμε ἐπίσης ὅτι τὸ AB **τέμνει** τὴν ε στὸ H, (σχ. 3).



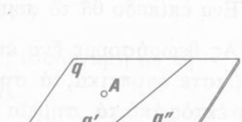
Σχ. 3

Εἶναι φανερὸ ὅτι ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα AE ποὺ συνδέει ἕνα σημεῖο E τῆς ε μὲ ἕνα σημεῖο A ἔξω ἀπ' αὐτὴν ἔχει μὲ τὴν ε μόνο τὸ E κοινὸ σημεῖο, ἐνῶ ὅλα τὰ ἄλλα σημεῖα τοῦ AE βρίσκονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ε (ἀφοῦ κάθε ἐσωτερικὸ σημεῖο I τοῦ AE τὸ AI δὲν ἔχει κοινὸ σημεῖο μὲ τὴν ε).



Ὁρισμός : Ἂν δοθεῖ ἕνα ἐπίπεδο q καὶ μιὰ εὐθεία του ε, τὸ σημειοσύνολο ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας ε καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τοῦ q, ποὺ βρίσκονται πρὸς τὸ ἴδιο μέρος τῆς ε, λέγεται **ἡμιεπίπεδο μὲ ἀκμὴ ε.**

Ἕνα ἡμιεπίπεδο καθορίζεται πλήρως ἀπὸ τὴν ἀκμή του καὶ ἀπὸ ἕνα ὁρισμένο σημεῖο του. Γιὰ τὸ ἡμιεπίπεδο ποὺ ἔχει ἀκμὴ τὴν εὐθεία ε καὶ ἕνα σημεῖο τὸ A θὰ σημειώνουμε : **ἡμιεπίπεδο** (ε, A).

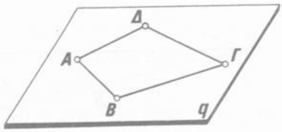


Ἔτσι ὅταν λέμε ὅτι τὰ σημεῖα A, B (σχ. 2) βρίσκονται στὸ ἴδιο ἡμιεπίπεδο, ὡς πρὸς τὴν ε, σημαίνει ὅτι τὸ τμῆμα AB δὲν ἔχει κοινὸ σημεῖο μὲ τὴν ε.

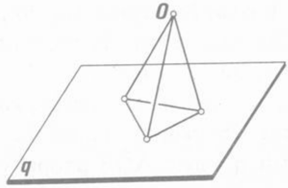
Ἐνῶ ὅταν λέμε ὅτι τὰ σημεῖα Α, Β βρίσκονται σὲ διαφορετικὰ ἡμιεπίπεδα, ὡς πρὸς τὴν ε, σημαίνει ὅτι τὸ τμῆμα ΑΒ τέμνει τὴν ε, (σχ. 3).

1.12. Οἱ κλάδοι τῆς Γεωμετρίας.

Κάθε γεωμετρικὸ σχῆμα ποὺ ὅλα τὰ σημεῖα του ἀνήκουν στὸ ἴδιο ἐπίπεδο λέγεται **ἐπίπεδο σχῆμα** (σχ. 4) καὶ ὁ κλάδος τῆς Γεωμετρίας ποὺ



Σχ. 4



Σχ. 5

ἀσχολεῖται μὲ τὴ μελέτη τῶν ἐπίπεδων σχημάτων λέγεται εἰδικότερα **ἐπιπεδομετρία**. Μὲ τὴ μελέτη τῶν μὴ ἐπίπεδων σχημάτων (σχ. 5) ἀσχολεῖται ἡ **στερεομετρία.**

Ἔτσι ἡ Γεωμετρία διαιρεῖται σὲ δύο βασικοὺς κλάδους:

- τὴν **ἐπιπεδομετρία**
- τὴ **στερεομετρία**.

Στὰ ἑπόμενα μαθήματά μας θὰ ἀσχοληθοῦμε μόνο μὲ ἐπίπεδα σχήματα καὶ μάλιστα θὰ ταυτίζουμε τὸ ἐπίπεδό τους μὲ τὸ ἐπίπεδο τῆς σελίδας ποὺ γράφουμε ἢ διαβάζουμε.

1.13. Ἡ γωνία.

Ἂν θεωρήσουμε δύο ὁρισμένες ἡμιευθεῖες ΟΑ καὶ ΟΒ ἑνὸς ἐπιπέδου, τὸ σημειοσύνολο ποὺ εἶναι τομὴ τῶν δύο ἡμιεπιπέδων (εὐθεία ΟΑ, Β) καὶ

(I) (II)

Σχ. 6

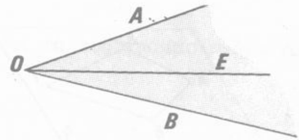
(εὐθεία ΟΒ, Α) λέγεται **«κυρτὴ γωνία» μὲ κορυφὴ Ο καὶ πλευρὲς ΟΑ καὶ ΟΒ** (βλ. σχ. 6.Ι.). Ἡ γωνία αὐτὴ θὰ σημειώνεται $A\hat{O}B$ ἢ $B\hat{O}A$.

Ἐπίσης, ἂν ΟΑ′ καὶ ΟΒ′ εἶναι οἱ ἀντικείμενες ἡμιευθεῖες τῶν ΟΑ καὶ ΟΒ, τὸ σημειοσύνολο ποὺ εἶναι ἕνωση τῶν δύο ἡμιεπιπέδων (εὐθεία ΟΑ, Β′)

καὶ (εὐθεία ΟΒ, Α΄) λέγεται **«μὴ κυρτὴ γωνία» μὲ κορυφὴ Ο καὶ πλευρὲς ΟΑ καὶ ΟΒ** (βλ. σχ. 6. ΙΙ).

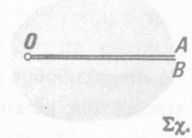
Εἶναι φανερὸ ὅτι οἱ δυὸ αὐτὲς γωνίες ἔχουν ἕνωση ὁλόκληρο τὸ ἐπίπεδο καὶ τομὴ τὶς δυὸ ἡμιευθεῖες ΟΑ καὶ ΟΒ.

Κάθε σημεῖο μιᾶς (κυρτῆς ἢ μὴ κυρτῆς) γωνίας ποὺ δὲν ἀνήκει σὲ πλευρά της λέγεται ἐσωτερικὸ σημεῖο τῆς γωνίας. Διακρίνουμε εὔκολα ὅτι, **ἂν Ε εἶναι ἐσωτερικὸ** σημεῖο μιᾶς γωνίας ΑÔΒ, ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἡμιευθείας ΟΕ, ἐκτὸς ἀπὸ τὸ σημεῖο της Ο, βρίσκονται στὸ ἐσωτερικὸ τῆς γωνίας καὶ ἡ ΟΕ λέγεται ἐσωτερικὴ ἡμιευθεία τῆς ΑÔΒ. Ἔτσι ἡ γωνία ΑÔΒ μπορεῖ νὰ θεωρηθεῖ ὡς σημειοσύνολο ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ σημεῖα τῶν δύο πλευρῶν της καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα ὅλων τῶν ἐσωτερικῶν ἡμιευθειῶν της.

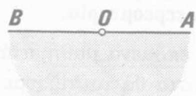


Στὴ μερικὴ περίπτωση ποὺ ἡ ἡμιευθεία ΟΒ τοῦ σχήματος 6 ταυτίζεται μὲ τὴν ΟΑ, ἡ κυρτὴ γωνία Α Ô Β περιορίζεται στὶς πλευρὲς της (δηλαδὴ περιορίζεται σὲ μιὰ ἡμιευθεία) καὶ λέγεται **μηδενικὴ γωνία** (βλ. σχ. 7), ἐνῶ

Σχ. 7



Σχ. 8



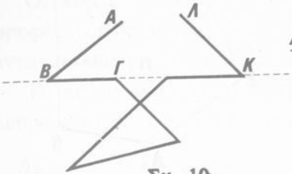
Σχ. 9

ἡ μὴ κυρτὴ γωνία ταυτίζεται μὲ ὅλο τὸ ἐπίπεδο καὶ λέγεται **πλήρης γωνία** (βλ. σχ. 8). Μία ἄλλη μερικὴ περίπτωση ἔχουμε, ὅταν ἡ ἡμιευθεία ΟΒ΄ τοῦ σχήματος 6, ταυτίζεται μὲ τὴν ἡμιευθεία ΟΑ. Τότε ἡ κυρτὴ γωνία ΑÔΒ ταυτίζεται μὲ τὸ ἕνα ἡμιεπίπεδο ποὺ ἔχει ἀκμὴ τὴν εὐθεία ΑΒ καὶ λέγεται **πεπλατυσμένη ἢ εὐθεία γωνία μὲ κορυφὴ Ο καὶ πλευρὲς ΟΑ καὶ ΟΒ** (βλ. σχ. 9), ἐνῶ ἡ κυρτὴ γωνία ταυτίζεται μὲ τὸ ἄλλο ἡμιεπίπεδο ποὺ ἔχει ἀκμὴ τὴν εὐθεία ΑΒ.

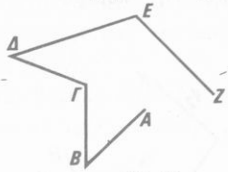
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 12-16

1.14. Ἡ τεθλασμένη γραμμή.

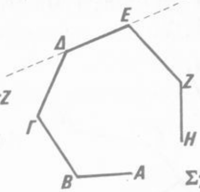
Ἂς θεωρήσουμε διατεταγμένα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, ..., Κ, Λ διαφορετικὰ μεταξύ τους ποὺ ἀνὰ τρία διαδοχικὰ δὲν εἶναι συνευθειακά. Ἂν φέρουμε τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ..., ΚΛ, ἡ ἕνωση τῶν εὐθύγραμμων αὐτῶν τμημάτων λέγεται **τεθλασμένη γραμμὴ μὲ κορυφὲς Α, Β, Γ, ..., Κ, Λ καὶ πλευρὲς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ..., ΚΛ** καὶ θὰ γράφεται ΑΒΓ... ΚΛ (βλ. σχ. 10). Ἡ πρώτη κορυφὴ Α καὶ ἡ τελευταία κορυφὴ Λ λέγονται ἄκρα τῆς γραμμῆς, ἐνῶ δύο κορυφὲς ποὺ ἀνήκουν στὴν ἴδια πλευρὰ λέγονται «γειτονικὲς» κορυφές της. Στὸ παρακάτω σχῆμα 11 ἔχουμε τεθλασμένη γραμμὴ



Σχ. 10



Σχ. 11

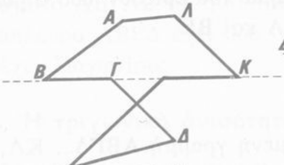


Σχ. 12

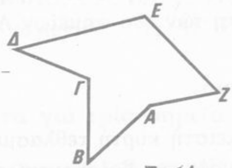
ΑΒΓΔΕΖ μὲ 6 κορυφὲς καὶ 5 πλευρές. Εἶναι φανερὸ ὅτι κάθε τεθλασμένη γραμμὴ μὲ ν κορυφὲς ἔχει ν—1 πλευρές.

Μιὰ τεθλασμένη γραμμὴ θὰ λέγεται **κυρτή**, ἂν καὶ μόνο ἂν ὁ φορέας κάθε πλευρᾶς της ἔχει πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος του ὅλες τὶς ἄλλες κορυφὲς τῆς τεθλασμένης γραμμῆς. Σὲ ἀντίθετη περίπτωση λέγεται **μὴ κυρτή.** Στὸ παραπάνω σχῆμα 12 ἔχουμε κυρτὴ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓΔΕΖΗ μὲ 7 κορυφὲς καὶ 6 πλευρές.

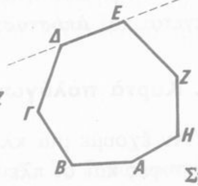
Μὲ τὴ βοήθεια τῶν δεδομένων σημείων Α, Β, Γ, ..., Κ, Λ ὁρίζεται ἀκόμη καὶ ἡ **κλειστὴ πολυγωνικὴ (ἢ κλειστὴ τεθλασμένη) γραμμὴ** ποὺ ἀποτελεῖται (βλ. σχ. 13) ὄχι μόνο ἀπὸ τὰ τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ..., ΚΛ ἀλλὰ



Σχ. 13



Σχ. 14



Σχ. 15

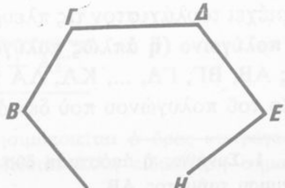
καὶ ἀπὸ τὸ ΛΑ. Στὸ παραπάνω σχ. 14 ἔχουμε τὴν κλειστὴ πολυγωνικὴ γραμμὴ ΑΒΓΔΕΖ ποὺ ἔχει 6 κορυφὲς καὶ 6 πλευρές. Εἶναι φανερὸ ὅτι κάθε κλειστὴ τεθλασμένη γραμμὴ μὲ ν κορυφὲς ἔχει καὶ ν πλευρὲς καὶ μπορεῖ νὰ εἶναι κυρτὴ ἢ μὴ κυρτή. Τὸ σχ. 15 δείχνει μιὰ κυρτὴ κλειστὴ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓΔΕΖΗ μὲ 7 κορυφὲς καὶ 7 πλευρές.

1.15. Περίμετρος τεθλασμένης γραμμῆς.

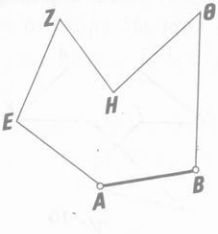
Ἔστω μιὰ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓΔΕΖ. Τὸ ἄθροισμα :

ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΕ+ΕΗ

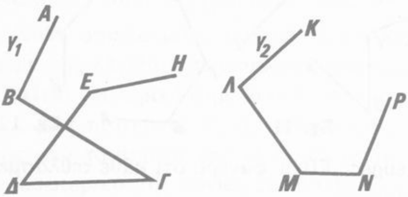
τῶν πλευρῶν της λέγεται **περίμετρος** τῆς τεθλασμένης αὐτῆς γραμμῆς.



Ἔτσι, ὅταν λέμε ὅτι μιὰ τεθλασμένη γραμμὴ γ_1 εἶναι μικρότερη (ἢ ἴση ἢ μεγαλύτερη) ἀπὸ μιὰ ἄλλη τεθλασμένη γραμμὴ γ_2, ἐννοοῦμε ὅτι ἡ περίμετρος τῆς γ_1 εἶναι μικρότερη (ἢ ἴση ἢ μεγαλύτερη) ἀπὸ τὴν περίμετρο τῆς γ_2.



Σχ.17



Σχ.16

Δεχόμαστε τὸ ἀξίωμα:

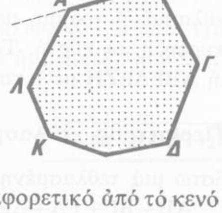
Ἕνα εὐθ. τμῆμα AB εἶναι μικρότερο ἀπὸ κάθε τεθλασμένη γραμμὴ ποὺ ἔχει ἄκρα τὰ σημεῖα A καὶ B.

Ἔτσι στὸ σχῆμα 17 ἔχουμε: $AB < AE + EZ + ZH + H\Theta + \Theta B$.

Ἀπὸ τὴν ἰδιότητά του αὐτὴ τὸ εὐθ. τμῆμα ποὺ ὁρίζουν δύο σημεῖα A, B λέγεται καὶ **ἀπόσταση** τῶν δύο σημείων A καὶ B[1].

1.16. Κυρτὰ πολύγωνα.

Ἂν ἔχουμε μιὰ κλειστὴ κυρτὴ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓΔ... ΚΛ, ὅλες οἱ κορυφὲς καὶ οἱ πλευρές της βρίσκονται στὸ ἕνα ἀπὸ τὰ δύο ἡμιεπίπεδα ποὺ ὁρίζονται ἀπὸ τὸ φορέα κάθε πλευρᾶς της. Ἔτσι π.χ. ἂν φέρουμε τὸ φορέα τῆς AB, ὅλες οἱ κορυφὲς καὶ πλευρὲς τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς βρίσκονται στὸ ἡμιεπίπεδο (εὐθεία AB, Γ).



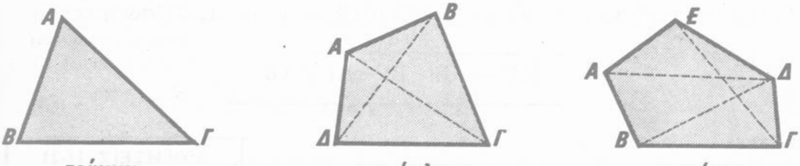
Ἂς θεωρήσουμε τὴν τομὴ τῶν ἡμιεπιπέδων (εὐθεία AB, Γ), (εὐθεία ΒΓ, Δ), (εὐθεία ΓΔ, Ε)..., (εὐθεία ΚΛ, Α), (εὐθεία ΛΑ, Β). Ἡ τομὴ αὐτὴ εἶναι ἕνα σημειοσύνολο, διαφορετικό ἀπό τό κενό (ἀφοῦ περιέχει τουλάχιστον τὶς πλευρὲς τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς) καὶ λέγεται **κυρτὸ πολύγωνο (ἢ ἁπλῶς πολύγωνο) μὲ κορυφὲς Α, Β, Γ, ..., Κ, Λ καὶ πλευρὲς** ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ..., ΚΛ, ΛΑ καὶ θὰ γράφεται πάλι ΑΒΓ... ΚΛ. Κάθε σημεῖο τοῦ πολυγώνου ποὺ δὲν ἀνήκει σὲ πλευρὰ λέγεται **ἐσωτερικὸ σημεῖο**

1. Συνήθως ἡ ἀπόσταση δύο σημείων Α καὶ Β ἐκφράζεται μὲ τὸ μῆκος τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

του καὶ τὸ σύνολο τῶν ἐσωτερικῶν σημείων ἀποτελεῖ τὸ **ἐσωτερικὸ τοῦ πολυγώνου.**

Οἱ κυρτὲς γωνίες $\Lambda\hat{A}B$, $A\hat{B}\Gamma$, $B\hat{\Gamma}\Delta$, ..., $K\hat{\Lambda}A$, ποὺ ἔχουν κορυφὲς τὶς κορυφὲς τοῦ πολυγώνου, λέγονται **γωνίες τοῦ πολυγώνου** καὶ θὰ σημειώνονται ἁπλῶς μὲ $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$, ..., $\hat{K}$, $\hat{\Lambda}$.

Τὰ πολύγωνα διακρίνονται βασικὰ ἀπὸ τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν ἢ τῶν πλευρῶν τους. Ἕνα πολύγωνο μὲ τρεῖς, τέσσερις, πέντε, ... κορυφὲς λέγε-



τρίγωνο *τετράπλευρο* *πεντάγωνο*

ται ἀντίστοιχα τρίγωνο (ἢ τρίπλευρο), τετράπλευρο[1], πεντάγωνο (ἢ πεντάπλευρο)... κ.ο.κ. Στὰ ἑπόμενα, γιὰ νὰ σχεδιάζουμε ἕνα πολύγωνο, θὰ χαράζουμε μόνο τὶς πλευρές του.

Κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα ποὺ συνδέει δύο μὴ γειτονικὲς κορυφὲς τοῦ πολυγώνου λέγεται **διαγώνιος** τοῦ πολυγώνου. Ἔτσι π.χ. στὸ παραπάνω πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ τὰ τμήματα ΑΔ, ΕΓ, ΒΔ, ... εἶναι διαγώνιοί του. Ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἔχει δύο διαγωνίους, τὶς ΑΓ καὶ ΒΔ, ἐνῶ τὸ τρίγωνο δὲν ἔχει διαγωνίους.

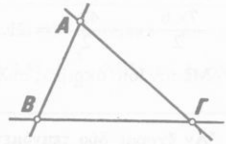
1.17. Ἡ τριγωνικὴ ἀνισότητα γιὰ τρία σημεῖα.

Ἂς θεωρήσουμε τρία (μὴ συνευθειακὰ) σημεῖα Α, Β, Γ πάνω στὸ ἐπίπεδο. Ἂν ἐφαρμόσουμε τὸ παραπάνω ἀξίωμα τῆς § 1.15, ἔχουμε :

$$B\Gamma < AB + A\Gamma \qquad (1)$$

$$AB < B\Gamma + A\Gamma \qquad (2)$$

$$A\Gamma < AB + B\Gamma \qquad (3)$$



Ἂν ἀκόμα ὑποθέσουμε ὅτι $AB < A\Gamma$, ἡ ἀνισότητα (3) γίνεται :

$$A\Gamma - AB < B\Gamma \qquad (4).$$

Οἱ (1) καὶ (4) μᾶς δίδουν :

$$A\Gamma - AB < B\Gamma < AB + A\Gamma.$$

1. Γιὰ πολύγωνο μὲ τέσσερις κορυφὲς δὲ χρησιμοποιεῖται ὁ ὅρος «τετράγωνο», γιατὶ στὸν ὅρο αὐτὸ (ὅπως θὰ δοῦμε ἀργότερα) ἀποδίδεται ἄλλη εἰδικότερη σημασία.

'Αποδείξαμε λοιπὸν τὴν πρόταση :

Σὲ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ κάθε πλευρά του εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων καὶ μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ διαφορά τους.

Ἂν σημειώσουμε μὲ τὸ γνωστὸ σύμβολο τῆς ἀπόλυτης τιμῆς $|ΑΓ-ΑΒ|$ τὴ διαφορὰ τῶν δύο πλευρῶν ΑΓ καὶ ΑΒ, ὅταν ἀπὸ τὴ μεγαλύτερη ἀφαιρέσουμε τὴ μικρότερη, ἡ πρότασή μας διατυπώνεται μὲ τὶς ἀνισότητες :

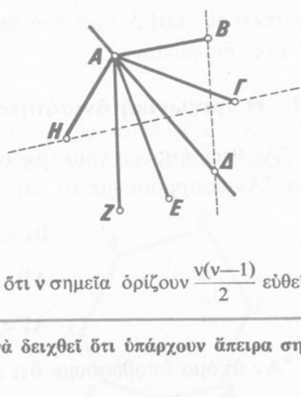
$$|ΑΓ-ΑΒ|<ΒΓ<ΑΓ+ΑΒ.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 17-21

1.18. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Θεωροῦμε 7 σημεῖα Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ,Η ἀνὰ τρία μὴ συνευθειακά. Πόσες εὐθεῖες ὁρίζονται, ἂν ἑνώσουμε τὰ σημεῖα αὐτὰ ἀνὰ δύο; Νὰ γενικευθεῖ ἡ ἄσκηση γιὰ ν σημεῖα.**

Λύση. Ὅταν ἑνώνουμε ἕνα ὁρισμένο σημεῖο, π.χ. τὸ Α, μὲ ὅλα τὰ ἄλλα, φέρνουμε 6 εὐθεῖες. Τότε ὅμως, ἑνώνοντας κάθε σημεῖο μὲ ὅλα τὰ ἄλλα, φέρνουμε 7×6 εὐθεῖες. Στὸν ἀριθμὸ αὐτὸ 7×6 ἡ κάθε εὐθεία πάρθηκε δύο φορὲς (π.χ. ἡ ΑΔ πάρθηκε ὅταν φέραμε τὶς εὐθεῖες ἀπὸ τὸ Α καὶ ὅταν φέραμε τὶς εὐθεῖες ἀπὸ τὸ Δ). Ἔτσι ὁ ἀριθμὸς 7×6 εἶναι διπλάσιος ἀπὸ τὸ πλῆθος τῶν ζητούμενων εὐθειῶν, ὁπότε τὸ πλῆθος αὐτὸ εἶναι :

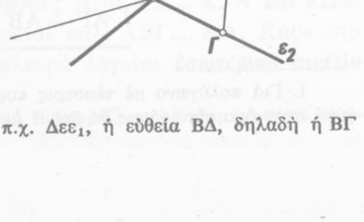


$$\frac{7\times 6}{2}=\frac{42}{2}=21.$$

Μὲ τὸν ἴδιο ἀκριβῶς συλλογισμὸ ἀποδεικνύουμε ὅτι ν σημεῖα ὁρίζουν $\frac{ν(ν-1)}{2}$ εὐθεῖες.

2. **Ἂν ἔχουμε δύο τεμνόμενες εὐθεῖες $ε_1$ καὶ $ε_2$, νὰ δειχθεῖ ὅτι ὑπάρχουν ἄπειρα σημεῖα ποὺ δὲν ἀνήκουν στὸ σύνολο $ε_1 \cup ε_2$.**

Λύση. Ἂν πάρουμε σημεῖα $Β\in ε_1$ καὶ $Γ\in ε_2$, διαφορετικὰ ἀπὸ τὸ Α, ἡ εὐθεία ΒΓ εἶναι διαφορετικὴ καὶ ἀπὸ τὴν $ε_1$ καὶ ἀπὸ τὴν $ε_2$ (γιατὶ π.χ. ἂν ἡ ΒΓ συνέπιπτε μὲ τὴν $ε_1$, τὸ σημεῖο $ΒΓ\cap ε_2=\{Γ\}$ θὰ συνέπιπτε μὲ τὸ $ε_1 \cup ε_2=[Α]$, πράγμα ἀδύνατο).



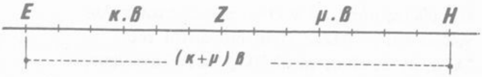
Κατὰ τὸ ἀξίωμα τῆς διατάξεως ὑπάρχει σημεῖο $Δ\in ΒΓ$ μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ. Τὸ Δ εἶναι ἐσωτερικὸ σημεῖο τοῦ τμήματος ΒΓ καὶ δὲν ἀνήκει οὔτε στὴν $ε_1$ οὔτε στὴν $ε_2$ (γιατὶ ἂν π.χ. $Δ\in ε_1$, ἡ εὐθεία ΒΔ, δηλαδὴ ἡ ΒΓ θὰ συνέπιπτε μὲ τὴν $\varepsilon)_1$. Ἔτσι, τουλάχιστον τὰ ἄπειρα ἐσωτερικὰ σημεῖα τοῦ τμήματος ΒΓ δὲν ἀνήκουν στὸ $\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2$.

---

3. Νὰ δειχθεῖ ὅτι γιὰ δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ ἰσχύει πάντοτε ἡ ἰσότητα

$$(AB+\Gamma\Delta)=(AB)+(\Gamma\Delta).$$

Λύση. Ἂν ὀνομάσουμε $H\Theta = \alpha$ τὸ μοναδιαῖο εὐθύγραμμο τμῆμα (καὶ ὑποθέσουμε ὅτι τρέψαμε τοὺς ρητοὺς ἀριθμοὺς (ΑΒ) καὶ (ΓΔ) σὲ ὁμώνυμα κλάσματα, δηλαδὴ ὑποθέσουμε ὅτι



$(AB)=\frac{\kappa}{\lambda}$, $(\Gamma\Delta) = \frac{\mu}{\lambda}$), θὰ ἰσχύσουν οἱ σχέσεις:

$$(1) \qquad AB = (AB)\cdot\alpha = \frac{\kappa}{\lambda}\alpha = \kappa\frac{1}{\lambda}\alpha = \kappa\cdot\beta$$

$$(2) \qquad \Gamma\Delta = (\Gamma\Delta)\cdot\alpha = \frac{\mu}{\lambda}\alpha = \mu\frac{1}{\lambda}\alpha = \mu\cdot\beta$$

ὅπου θέσαμε $\frac{1}{\lambda}\alpha = \beta$. Γιὰ νὰ σχηματίσουμε τώρα τὸ $AB + \Gamma\Delta$, θὰ πρέπει νὰ πάρουμε σὲ εὐθεία ε δύο διαδοχικὰ τμήματα ΕΖ καὶ ΖΗ ποὺ τὸ ἕνα θὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ κ τμήματα ἴσα μὲ β καὶ τὸ ἄλλο θὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ μ τμήματα ἴσα μὲ β. Τότε ἔχουμε

$$AB + \Gamma\Delta = EZ = (\kappa+\mu)\beta = (\kappa+\mu)\frac{1}{\lambda}\alpha = \frac{\kappa+\mu}{\lambda}\alpha,$$

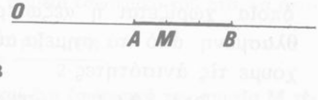
ὁπότε $(AB+\Gamma\Delta) = \frac{\kappa+\mu}{\lambda} = \frac{\kappa}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda} = (AB) + (\Gamma\Delta)$.

Μὲ τὴ βοήθεια αὐτῆς τῆς ἀσκήσεως ἀποδεικνύονται οἱ ἰδιότητες τῶν πράξεων τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων ποὺ εἶναι ἀνάλογες μὲ τὶς ἰδιότητες τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων (βλ. ἄσκ. 6).

---

4. Δίνεται ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ μιᾶς εὐθείας ε, ἕνα σημεῖο Μ ἐσωτερικὸ του καὶ ἕνα σημεῖο Ο στὴν προέκταση τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ Α. Ἂν εἶναι $AM=\frac{1}{2}MB$, νὰ δειχθεῖ ὅτι $OM = \frac{2OA+OB}{3}$.

Λύση. Ἐπειδὴ $OM = OA + AM = OA + \frac{1}{2}MB = \frac{2OA+MB}{2}$, ἔχουμε $2OM = 2OA + MB$. Εἶναι ὅμως ἀκόμη καὶ $OM = OB - MB$. Ἔτσι ἂν προσθέσουμε κατὰ μέλη τὶς ἰσότητες



$$2OM = 2OA + MB$$
$$OM = OB - MB,$$

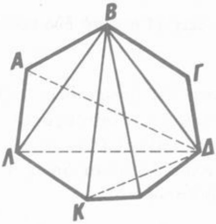
βρίσκουμε $3OM = 2OA + OB \Rightarrow OM = \frac{2OA+OB}{3}$.

Γενικότερα, ἂν εἶναι $AM = \frac{\kappa}{\lambda}MB$, βρίσκουμε $OM = \frac{\lambda OA + \kappa OB}{\kappa+\lambda}$.

---

5. Νὰ δειχθεῖ ὅτι ἕνα πολύγωνο μὲ ν πλευρὲς ἔχει $\frac{\nu(\nu-3)}{2}$ διαγωνίους,(Ἐφαρμογὴ στὸ δεκάγωνο).

Λύση. Ἂν ΑΒΓΔ...ΚΛ εἶναι πολύγωνο μὲ ν πλευρές, οἱ ν κορυφές του Α,Β,Γ,...,Κ,Λ, ἀνὰ τρεῖς δὲ βρίσκονται στὴν ἴδια εὐθεία καὶ ὁρίζουν (βλ. ἄσκ. 1) $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$ εὐθεῖες. Ἀπὸ τὶς εὐθεῖες αὐτὲς οἱ ν εἶναι πλευρὲς τοῦ πολυγώνου καὶ οἱ ἄλλες εἶναι διαγώνιοί του. Ἄρα, ἂν δ_ν εἶναι τὸ πλῆθος τῶν διαγωνίων, ἔχουμε



$$\delta_\nu = \frac{\nu(\nu-1)}{2} - \nu = \frac{\nu(\nu-1)-2\nu}{2} = \frac{\nu(\nu-3)}{2}$$

Ἔτσι π.χ. ἕνα δεκάγωνο ἔχει $\frac{10\times 7}{2} = 35$ διαγωνίους.

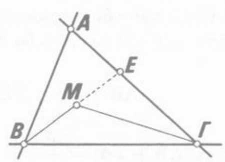
---

6. Ἂν Μ εἶναι ὁποιοδήποτε ἐσωτερικὸ σημεῖο τριγώνου ΑΒΓ, ἰσχύει πάντοτε ἡ ἀνισότητα

$$MB + M\Gamma < AB + A\Gamma.$$

Ἀπόδ. Ἂν Ε εἶναι ἡ τομὴ τῆς ΒΜ μὲ τὴν ΑΓ, στὸ τρίγωνο ΒΑΕ ἔχουμε τὴν ἀνισότητα $BE < BA + AE$ ἢ

(Ι) $BM + ME < BA + AE$.



Ἐπίσης στὸ τρίγωνο ΜΕΓ ἔχουμε

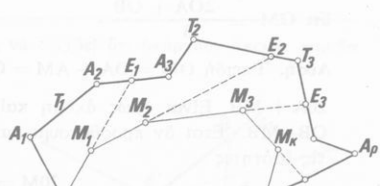
(ΙΙ) $M\Gamma < ME + E\Gamma$.

Προσθέτοντας κατὰ μέλη τίς (Ι) καὶ (ΙΙ) βρίσκουμε:

$BM + M\Gamma < BA + (AE + E\Gamma)$ ἢ $BM + M\Gamma < BA + A\Gamma$.

***7.([1]) Κάθε κυρτὴ τεθλασμένη γραμμὴ $BM_1M_2 \ldots M\kappa\Gamma$ εἶναι μικρότερη ἀπὸ ὁποιαδήποτε ἄλλη τεθλασμένη γραμμὴ $BA_1A_2 \ldots A\rho\Gamma$ ἡ ὁποία ἔχει τὰ ἴδια ἄκρα καὶ «περικλείει» τὴν κυρτὴ τεθλασμένη.**

Ἀπόδ. Ἂν οἱ BM_1, M_1M_2, $M_2M_3 \ldots$ τέμνουν τὴν «ἐξωτερική» τεθλασμένη στὰ σημεῖα $E_1, E_2, E_3, \ldots, E\kappa$» καὶ ὀνομάσουμε $T_1, T_2, T_3 \ldots$ τὰ μέρη στὰ ὁποῖα χωρίζεται ἡ «ἐξωτερική» τεθλασμένη ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτά, θὰ ἔχουμε τὶς ἀνισότητες



$$BM_1 + M_1E_1 < T_1$$
$$M_1M_2 + M_2E_2 < M_1E_1 + T_2$$

---

1. Κάθε παράδειγμα ἢ ἐφαρμογὴ ποὺ ἔχει ἀστερίσκο (*) πρέπει νὰ ἀντιμετωπίζεται ὡς συνέχεια τῆς βασικῆς θεωρίας.

$$M_2M_2+M_3E_3 < M_2E_2+T_3$$

....

Προσθέτοντας κατὰ μέλη τὶς ἀνισότητες αὐτὲς βρίσκουμε: $BM_1+M_1M_2+M_2M_3+... < T_1+T_2+T_3+...$, δηλαδὴ βρίσκουμε τὴν ἀνισότητα ποὺ ζητᾶμε.

1.19. ΑΣΚΗΣΕΙΣ *

1. Δίδονται 10 σημεῖα ποὺ ἀνὰ τρία δὲν εἶναι συνευθειακά:
   α) Πόσες εὐθεῖες ὁρίζουν τὰ σημεῖα αὐτά;
   β) Πόσες ἡμιευθεῖες ὁρίζουν;
2. Στὸ ἐπίπεδο δίδονται ν εὐθεῖες, ἔτσι ὥστε: ἀνὰ δὺο νὰ τέμνονται καὶ ἀνὰ τρεῖς νὰ μὴ διέρχονται ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο. Πόσα εἶναι τὰ σημεῖα τομῆς τῶν εὐθειῶν αὐτῶν; Ἐφαρμογή: $\nu = 12$.
3. Πάρτε ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Α καὶ φέρτε δύο εὐθεῖες ε_1 καὶ ε_2 ποὺ νὰ διέρχονται ἀπὸ τὸ Α. Πάρτε ἀκόμη ἕνα ἄλλο σημεῖο Β τῇ ε_1 καὶ ἕνα ἄλλο σημεῖο Γ τῆς ε_2 καὶ ὀνομάστε ε τὴν εὐθεία ΒΓ. Νὰ ἀποδείξετε ὅτι:
   α) Ἡ εὐθεία ε δέ διέρχεται ἀπό τό σημεῖο Α.
   β) Ἂν Ι εἶναι σημεῖο τῆς ε διαφορετικό ἀπό τά Β καί Γ, ἡ εὐθεία ΑΙ δέ συμπίπτει οὔτε μέ τήν ε_1 οὔτε μέ τήν ε_2.
   γ) Ὑπάρχουν ἄπειρες εὐθεῖες πού διέρχονται ἀπό τό ὁρισμένο σημεῖο Α.
4. Πάρτε ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Α καί φέρτε μία εὐθεία ε πού διέρχεται ἀπό τό Α. Πάρτε ἀκόμη ἕνα ἄλλο σημεῖο Β τῆς ε καί ἕνα σημεῖο Γ πού δέν ἀνήκει στήν ε. Νά ἀποδείξετε ὅτι:
   α) Τό σημεῖο Α δέν ἀνήκει σήν εὐθεία ΒΓ.
   β) Ὑπάρχουν ἄπειρες εὐθεῖες πού δέ διέρχονται ἀπό τό ὁρισμένο σημεῖο Α.
5. Ἂν Α, Β, Γ εἶναι τρία σημεῖα μιᾶς εὐθείας ε τέτοια, ὥστε $ΑΓ + ΒΓ = ΑΒ$, νά βρεθοῦν τά κοινά σημεῖα τῶν: i) ΓΒ καί ΒΑ ii) ΑΓ καί ΑΒ iii) ΓΑ καί ΓΒ.
6. Ἂν α, β, γ, δ εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα τέτοια, ὥστε $\alpha = \beta$ καί $\gamma = \delta$, ἀποδεῖξτε ὅτι $\alpha + \gamma = \beta + \delta$. Ἀποδεῖξτε ἐπίσης τήν πρόταση: $\alpha = \beta \Longleftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$
7. Σέ μιά εὐθεία ε παίρνουμε στή σειρά τά σημεῖα Α, Β, Γ, Δ τέτοια, ὥστε τά τμήματα ΑΔ καί ΒΓ νά ἔχουν τό ἴδιο μέσο Μ. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $ΑΒ = ΓΔ$ καί $ΑΓ = ΒΔ$.
8. Σέ μιά εὐθεία ε παίρνουμε στή σειρά τέσσερα τυχόντα σημεῖα Α,Β,Γ,Δ καί ὀνομάζουμε Μ τό μέσο τοῦ ΑΒ καί Ν τό μέσο τοῦ ΓΔ. Ἀποδεῖξτε ὅτι:
$$MN = \frac{ΑΔ + ΒΓ}{2}.$$
9. Θεωροῦμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ εὐθείας ε καί τό μέσο του Μ. Ἂν Σ εἶναι ἕνα σημεῖο στήν προέκταση τοῦ ΑΒ καί Ρ εἶναι ἕνα σημεῖο ἐσωτερικό τοῦ ΜΒ, νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἰσότητες:
$$ΣΜ = \frac{ΣΑ + ΣΒ}{2}, \quad ΡΜ = \frac{ΡΑ - ΡΒ}{2}.$$
10. Θεωροῦμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ εὐθείας ε καί ἕνα ἐσωτερικό του σημεῖο Μ τέτοιο, ὥστε $ΜΒ = \frac{3}{4}ΜΑ$. Ἂν Ο εἶναι σημεῖο στήν προέκταση τοῦ ΑΒ, πρός τό Α, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι
$$ΟΜ = \frac{3.ΟΑ + 4.ΟΒ}{7}.$$

11. Δίνεται τμῆμα ΑΒ εὐθείας ε καί ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο του Μ τέτοιο, ὥστε $MA = \frac{5}{3}MB$. Ἄν Σ εἶναι σημεῖο στήν προέκταση τοῦ ΑΒ πρός τό Β τέτοιο, ὥστε $ΣΑ = \frac{5}{3}ΣΒ$., ἀποδεῖξτε ὅτι

$$\frac{2}{(AB)} = \frac{1}{(AM)} + \frac{1}{(AΣ)}.$$

12. Θεωροῦμε τό ἐπίπεδο q πού διέρχεται ἀπό τρία μή συνευθειακά σημεῖα Α,Β,Γ καί παίρνουμε ἕνα σημεῖο Δ ἔξω ἀπό τό q. Ἄν καλέσουμε q΄ τό ἐπίπεδο πού διέρχεται ἀπό τά σημεῖα Α,Β,Δ, νά δειχθεῖ ὅτι:
α) Τό Δ δέν ἀνήκει στίς εὐθεῖες ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ.
β) Τό ἐπίπεδο q΄ δέ συμπίπτει μέ τό q.
γ) Κάθε σημεῖο τῆς εὐθείας ΑΒ ἀνήκει στό σύνολο $q \cap q'$.
δ) Κάθε σημεῖο τοῦ συνόλου $q \cap q'$ εἶναι σημεῖο τῆς ΑΒ.

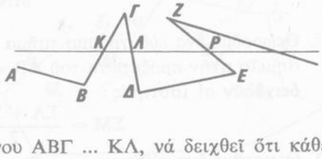
13. Θεωροῦμε δύο ἐπίπεδα διαφορετικά πού ἔχουν δύο κοινά σημεῖα Α, Β. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό σύνολο τῶν κοινῶν σημείων τῶν δύο ἐπιπέδων εἶναι τά σημεῖα τῆς εὐθείας ΑΒ καί μόνο αὐτά.

14. Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΓΔ ἔχει τά ἄκρα του Γ καί Δ στίς δύο πλευρές μιᾶς κυρτῆς γωνίας $A\hat{O}B$. Νά δειχθεῖ ὅτι:
α) Τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΓΔ ἀνήκει στή γωνία $A\hat{O}B$.
β) Κάθε ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ τμήματος ΓΔ εἶναι καί ἐσωτερικό σημεῖο τῆς $A\hat{O}B$.
γ) Κάθε σημεῖο τῆς προεκτάσεως τοῦ ΓΔ εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τῆς μή κυρτῆς γωνίας $A\hat{O}B$.

15. Δίνεται μία κυρτή γωνία $A\hat{O}B$ καί ἕνα ὁρισμένο ἐσωτερικό σημεῖο της Ε. Ἄν Ι εἶνει ἕνα ἄλλο ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς ἡμιευθείας ΟΕ, διαφορετικό ἀπό τό Ο, νά δειχθεῖ ὅτι:
α) Τό τμῆμα ΙΕ δέν τέμνει τίς εὐθεῖες ΟΑ καί ΟΒ.
β) Τό ΙΕ ἀνήκει στήν κυρτή γωνία $A\hat{O}B$.

16. Δίνονται δύο εὐθεῖες ΑΑ΄ καί ΒΒ΄ πού τέμνονται στό Ο καί ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο Ε τῆς κυρτῆς γωνίας $A\hat{O}B$. Ἄν πάρουμε ἕνα σημεῖο Ε΄ στήν ἀντικείμενη ἡμιευθεία τῆς ΟΕ, νά δειχθεῖ ὅτι:
α) Τό Ε΄ εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τῆς κυρτῆς γωνίας $A'\hat{O}B'$.
β) Ἄν μία εὐθεία εἶναι ἐσωτερική τῆς κυρτῆς γωνίας $A\hat{O}B$, τότε ἡ ἀντικείμενή της ἡμιευθεία εἶναι ἐσωτερική τῆς κυρτῆς γωνίας $A'\hat{O}B'$.

17 Στό διπλανό σχῆμα μας ἔχουμε μιά τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓΔ... καί μία εὐθεία ε πού δέ συμπίπτει μέ φορέα πλευρᾶς καί τέμνει τήν τεθλασμένη σέ περισσότερα ἀπό δύο σημεῖα. Νά δειχθεῖ ὅτι ἡ τεθλασμένη εἶναι μή κυρτή.



18. Ἄν Ι εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο κυρτοῦ πολυγώνου ΑΒΓ ... ΚΛ, νά δειχθεῖ ὅτι κάθε εὐθεία ε πού διέρχεται ἀπό τό Ι τέμνει τήν πολυγ. γραμμή τῶν πλευρῶν του σέ δύο σημεῖα, ἐνῶ κάθε ἡμιευθεία μέ ἀρχή τό Ι τήν τέμνει σ' ἕνα σημεῖο.

19. Ἄν Ρ εἶναι σημεῖο ἐσωτερικό τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἀποδεῖξτε τίς ἀνισότητες

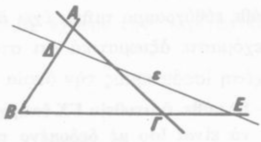
$$\frac{AB + BΓ + ΓA}{2} < PA + PB + PΓ < AB + BΓ + ΓA.$$

20. Ἀποδεῖξτε ὅτι σέ κάθε τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἔχουμε τίς ἀνισότητες

α) ΑΓ+ΒΔ>ΑΒ+ΔΓ β) $\frac{ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ}{2} < ΑΓ+ΒΔ < ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ$.

1.20 ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

21. Θεωροῦμε δύο εὐθεῖες Α΄Α καί Β΄Β πού τέμνονται στό Ο καί μία εὐθεία ε πού διέρχεται ἀπό τό Ο καί τέτοια ὥστε ἡ μία ἡμιευθεία της ΟΕ νά βρίσκεται μέσα στήν κυρτή γωνία $A\hat{O}B$. Νά δειχθεῖ ὅτι:
 α) Ἡ εὐθεία ε δέν τέμνει τά εὐθύγραμμα τμήματα πού ἔχουν τά ἄκρα τους στίς ἡμιευθεῖες ΟΑ καί ΟΒ΄.
 β) Ἡ ἡμιευθεία ΟΕ τέμνει κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα πού τά ἄκρα του βρίσκονται στίς πλευρές τῆς κυρτῆς γωνίας $A\hat{O}B$.
22. Ἔχουμε μία τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓ ... ΚΛ πού ἕνα σημεῖο Ρ μιᾶς πλευρᾶς της (δέν ἀποκλείεται ἡ περίπτωση νά εἶναι τό Ρ κορυφή) βρίσκεται στήν προέκταση μιᾶς ἄλλης πλευρᾶς. Νά δείξετε ὅτι ἡ τεθλασμένη γραμμή εἶναι μή κυρτή.
23. Δίνεται μιά «ἀνοικτή» κυρτή τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓ ... ΚΛ μέ ἄκρα Α καί Λ. Νά δειχθεῖ ὅτι:
 α) Ἡ εὐθεία ΑΛ ἔχει μέ τήν τεθλ. γραμμή κοινά μόνο τά σημεῖα Α καί Λ.
 β) Ἡ κλειστή τεθλασμένη γραμμή, πού σχηματίζεται ἄν φέρουμε καί τὸ τμῆμα ΑΛ, εἶναι κυρτή.
 γ) Κάθε εὐθεία ε πού ἔχει ἑκατέρωθέν της τά σημεῖα Α καί Λ ἔχει μὲ τὴν «ἀνοικτή» κυρτή τεθλασμένη γραμμή ἕνα καί μόνο ἕνα κοινό σημεῖο.
24. Γιά κάθε τριάδα μή συνευθειακῶν σημείων Α,Β,Γ, δεχόμαστε τό ἀξίωμα τοῦ Pasch:
 «Μία εὐθεία ε ποὺ δὲ διέρχεται ἀπὸ τὰ Α,Β,Γ καὶ τέμνει τὸ τμῆμα ΑΒ, θὰ τέμνει ὁπωσδήποτε ἕνα ἀκόμη καὶ μόνο ἕνα ἀπὸ τὰ τμήματα ΑΓ καὶ ΒΓ».
 Μέ τό ἀξίωμα αὐτό νά δείξετε ὅτι σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἡ εὐθεία πού διέρχεται ἀπό ἕνα σημεῖο Δ τῆς ΑΒ καί ἕνα σημεῖο Ε τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΓ τέμνει τήν ΑΓ.



25. Θεωροῦμε τέσσερις εὐθεῖες $ε_1,ε_2,ε_3,ε_4$ πού τέμνονται ἀνά δύο καί ἀνά τρεῖς δέ διέρχονται ἀπό τὸ ἴδιο σημεῖο. Ὀνομάζουμε Ω τό σύνολο τῶν σημείων τομῆς τους ἀνά δύο καί ὁρίζουμε στό Ω τή διμελή σχέση R:
 $$MRN \iff \text{τό N δέν ἀνήκει σ' εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τό M.}$$
 Ἐξετάστε ἄν ἡ R εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρική καί μεταβατική.
26. Σέ μιά εὐθεία ε παίρνουμε στή σειρά τέσσερα ὁποιαδήποτε σημεῖα Α,Β,Γ,Δ καί ὀνομάζουμε Μ,Ν,Ρ,Λ τά μέσα τῶν ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΑ. Ἀποδεῖξτε ὅτι:
 α) Τά τμήματα ΜΡ καί ΝΛ ἔχουν τό ἴδιο μέσο Ο.
 β) Τό Ο εἶναι ἐπίσης μέσο τοῦ τμήματος ΤΣ ὅταν Τ καί Σ εἶναι τά μέσα τῶν ΑΓ καί ΒΔ.
27. Στίς πλευρές ΑΒ,ΒΓ,ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε ἀντιστοίχως τά σημεῖα Δ,Ε,Ζ. Ἀποδεῖξτε ὅτι:
 $$ΑΕ + ΒΖ + ΓΔ < \frac{3}{2}(ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ)..$$

28. Δίνεται ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ πού οἱ διαγώνιοί του τέμνονται στό Ο. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν Ρ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο, τό ἄθροισμα ΡΑ + ΡΒ + ΡΓ + ΡΔ γίνεται ἐλάχιστον, ὅταν τό Ρ συμπίπτει μέ τό Ο.

29. Θεωροῦμε ἕνα πολύγωνο μέ ν πλευρές καί ὀνομάζουμε σ τό ἄθροισμα τῶν διαγωνίων του καί π_ν τήν περίμετρό του. Ἀποδεῖξτε ὅτι:

α) ἡ κάθε διαγώνιός του εἶναι μικρότερη ἀπό τήν «ἡμιπερίμετρο» $\pi_\nu/_2$

β) ἰσχύει ἡ ἀνισότητα $\sigma < \frac{\nu(\nu-3)}{4}\pi_\nu$.

1.21. ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1

1. **Ὁ γεωμετρικὸς χῶρος**: Δεχόμαστε τήν ὕπαρξη ἑνός μή κενοῦ συνόλου, **τοῦ γεωμετρικοῦ χώρου**, πού τά στοιχεῖα του λέγονται **σημεῖα** καί τά ὑποσύνολά του λέγονται **γεωμετρικὰ σχήματα**.

2. **Ἡ εὐθεία**: Ὁρισμένα ἀπό τά ὑποσύνολα τοῦ γεωμετρικοῦ χώρου τά λέμε **εὐθεῖες** καί οἱ σπουδαιότερες προτάσεις (ἀξιώματα ἤ θεωρήματα) γι' αὐτές εἶναι:

—Ἀπὸ ἕνα σημεῖο διέρχονται ἄπειρες εὐθεῖες.

—Ἀπὸ δύο σημεῖα διέρχεται μία καὶ μόνο μία εὐθεία (καί ἔτσι δύο εὐθεῖες πού ἔχουν δύο κοινά σημεῖα συμπίπτουν).

— Δύο εὐθεῖες ποὺ δὲ συμπίπτουν ἔχουν τὸ πολὺ ἕνα κοινὸ σημεῖο (καί οἱ εὐθεῖες πού ἔχουν ἕνα μόνο κοινό σημεῖο λέγονται «τεμνόμενες»).

— Μία εὐθεία ἔχει ἄπειρα σημεῖα καὶ κάθε ἕνα ἀπὸ αὐτὰ τὴ χωρίζει σὲ δύο ἡμιευθεῖες.

3. **Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα**: Τό σημειοσύνολο πού ἔχει στοιχεῖα δύο ὁρισμένα σημεῖα Α καί Β καί ὅλα τά σημεῖα τῆς εὐθείας ΑΒ, πού βρίσκονται μεταξύ τῶν Α καί Β, λέγεται **εὐθύγραμμο τμῆμα** μέ ἄκρα Α καί Β.

Κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα ἔχει ἄπειρα σημεῖα.

Δεχόμαστε ἀξιωματικά ὅτι στό σύνολο $\mathscr{E}$ τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων ὑπάρχει μία σχέση ἰσοδυναμίας τήν ὁποία ὀνομάζουμε «ἰσότητα» καί ὅτι:

— Σὲ κάθε ἡμιευθεία ΓΧ ὑπάρχει ἕνα καὶ μόνο ἕνα σημεῖο Θ τέτοιο, ὥστε τὸ τμῆμα ΓΘ νὰ εἶναι ἴσο μὲ δεδομένο τμῆμα α.

Ἄν δοθοῦν δύο τμήματα α καί β καί πάρουμε σέ μιά ἡμιευθεία ΓΧ τά τμήματα ΓΘ = α καί ΓΔ = β, ἔχουμε μία ἀπό τίς περιπτώσεις:

— Τό Θ καί τό Δ πέφτουν στό ἴδιο σημεῖο τῆς ἡμιευθείας ΓΧ, ὁπότε ἔχουμε α = β,

— Τό Θ πέφτει μεταξύ τῶν Γ καί Δ, ὁπότε ἔχουμε α < β.

— Τό Δ πέφτει μεταξύ τῶν Γ καί Θ, ὁπότε ἔχουμε α > β.

Στό σύνολο $\mathscr{E}$ ὁρίζουμε ἀκόμη «*πρόσθεση*» καί «*ἀφαίρεση*». Ἔτσι, ἄν δοθοῦν δύο τμήματα α καί β μέ α > β, ὀνομάζουμε:

— **ἄθροισμα α + β** τό τμῆμα ΛΡ πού βρίσκουμε, ἄν πάρουμε σέ μία εὐθεία δύο «διαδοχικά» τμήματα ΛΜ = α καί ΜΡ = β.

— **διαφορὰ α — β** ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα γ τέτοιο ὥστε β + γ = α.

Γιά τήν πρόσθεση καί τήν ἀφαίρεση τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων ἰσχύουν ὅλες οἱ ἰδιότητες πού ἰσχύουν στήν πρόσθεση καί τήν ἀφαίρεση τῶν θετικῶν ἀριθμῶν.

4. **Τὸ ἐπίπεδο**: Ὁρισμένα ἀπό τά ὑποσύνολα τοῦ γεωμ. χώρου τά λέμε **ἐπίπεδα καί οἱ** σπουδαιότερες προτάσεις γι' αὐτά εἶναι:

—Ἀπὸ τρία μὴ συνευθειακὰ σημεῖα διέρχεται ἕνα μόνο ἐπίπεδο.

— Μία εὐθεία ποὺ διέρχεται ἀπὸ δύο σημεῖα ἑνὸς ἐπιπέδου ἔχει ὅλα τὰ σημεῖα της στὸ ἐπίπεδο.

—Ἕνα ἐπίπεδο ἔχει ἄπειρες εὐθεῖες καὶ κάθε μιὰ ἀπὸ αὐτὲς τὸ χωρίζει σὲ δύο ἡμιεπίπεδα·

Τά γεωμετρικά σχήματα πού ἔχουν ὅλα τά σημεῖα τους στό ἴδιο ἐπίπεδο λέγονται «**ἐπίπεδα σχήματα**» καί μέ αὐτά ἀσχολεῖται ἡ **ἐπιπεδομετρία** στήν ὁποία ἀπό δῶ καί πέρα περιοριζόμαστε.

5. Μέ τά σημεῖα καί τίς εὐθεῖες ἑνός ἐπιπέδου ὁρίζουμε τά βασικά ἐπίπεδα σχήματα. Αὐτά εἶναι :

—**Ἡ κυρτὴ γωνία,** πού εἶναι τομή δύο ἡμιεπιπέδων τά ὁποῖα ἔχουν διαφορετικές ἀκμές (καί μερικές περιπτώσεις της εἶναι ἡ «μηδενική γωνία» καί ἡ «πεπλατυσμένη γωνία»).

—**Ἡ μὴ κυρτὴ γωνία,** πού εἶναι ἕνωση δύο ἡμιεπιπέδων τά ὁποῖα ἔχουν διαφορετικές ἀκμές.

—**Ἡ τεθλασμένη γραμμή,** πού ἔχει γιά κορυφές ν διατεταγμένα σημεῖα Α,Β,Γ, ..., Κ,Λ καί πλευρές τά εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ,ΒΓ,...,ΚΛ καί **ἡ κλειστὴ πολυγωνικὴ γραμμή,** πού ἔχει γιά κορυφές τά διατεταγμένα σημεῖα Α,Β,Γ,...,Κ,Λ καί πλευρές τά εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ,ΒΓ,...,ΚΛ,ΛΑ.

—**Ἡ κυρτὴ τεθλασμένη γραμμή,** πού ὁ φορέας τῆς κάθε πλευρᾶς της ἔχει πρὸς τό αὐτό μέρος του ὅλες τίς ἄλλες κορυφές τῆς τεθλασμένης γραμμῆς.

— **Τὸ κυρτὸ πολύγωνο,** τό ὁποῖο εἶναι τομή τῶν ἡμιεπιπέδων πού τό καθένα τους ἔχει ἀκμή μία πλευρά κλειστῆς κυρτῆς τεθλασμένης γραμμῆς καί περιέχει ὅλες τίς ἄλλες κορυφές τῆς τεθλασμένης γραμμῆς.

6. Δεχόμαστε ὅτι :

—Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ εἶναι μικρότερο ἀπὸ κάθε τεθλασμένη γραμμὴ ποὺ ἔχει ἄκρα Α καὶ Β

καί ἐφαρμόζοντάς το στίς πλευρές ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ἔχουμε τήν «τριγωνική ἀνισότητα» :

$$|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$$

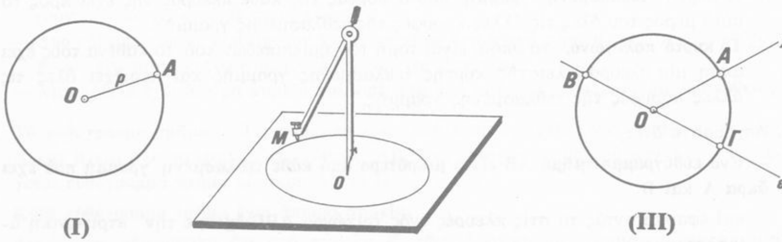
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ

2.1. Ὁ κύκλος.

Ὁρισμός : Ὀνομάζουμε κύκλο μὲ κέντρο τὸ σημεῖο O καὶ ἀκτίνα τὸ τμῆμα ρ τὸ σύνολο τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ποὺ οἱ ἀποστάσεις τους ἀπὸ τὸ ὁρισμένο σημεῖο O τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἴσες μὲ τὸ δεδομένο εὐθύγραμμο τμῆμα ρ.

Τὸ σημειοσύνολο αὐτὸ θὰ σημειώνεται : κυκλ. (O, ρ) ἢ ἁπλῶς (O, ρ).



(I) (II) (III)

Σχ. 1

Εἶναι φανερό : $A \in (O, \rho) \Longleftrightarrow OA = \rho$.

Γιὰ νὰ σχεδιάσουμε τὸν κύκλο (O, ρ), χρησιμοποιοῦμε τὸ γνωστό μας ὄργανο, **τὸ διαβήτη.**

Ὅλα τὰ σημεῖα ποὺ ἀνήκουν στὸν ἴδιο κύκλο θὰ λέγονται **ὁμοκυκλικά.**

Σ' ἕναν κύκλο (O, ρ) :

— Τὸ O λέγεται **κέντρο.**

— Τὸ τμῆμα $OA = \rho$ λέγεται **ἀκτίνα.**

— Τὸ τμῆμα ΒΓ (σχ. III) ποὺ ἔχει ἄκρα δύο σημεῖα B καὶ Γ τοῦ κύκλου καὶ περιέχει τὸ κέντρο O λέγεται **διάμετρος** τοῦ κύκλου καὶ εἶναι $BΓ = 2\rho$.

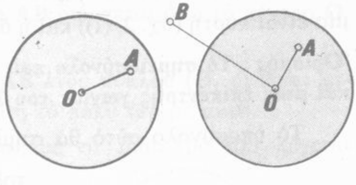
Δύο κύκλοι ποὺ ἔχουν ἴσες ἀκτίνες λέγονται ἴσοι κύκλοι.

2.2. Ὁ κυκλικὸς δίσκος.

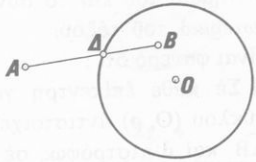
Ὁρισμός : Ὀνομάζουμε κυκλικὸ δίσκο μὲ κέντρο τὸ σημεῖο O καὶ ἀκτίνα τὸ τμῆμα ρ τὸ σύνολο τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, ποὺ οἱ ἀποστάσεις τους ἀπὸ τὸ O εἶναι μικρότερες ἀπὸ τὸ ρ ἢ ἴσες μὲ τὸ ρ.

Συμβολίζουμε : **κδισ(Ο,ρ).** Εἶναι φανερὸ ὅτι : $Α \in$ κδισ (Ο, ρ) $\Longleftrightarrow ΟΑ \leq ρ$.

Οἱ ἀκτίνες καὶ οἱ διάμετροι τοῦ κύκλου (Ο, ρ) λέγονται τώρα **ἀκτίνες καὶ διάμετροι** τοῦ κδισ (Ο, ρ).



Κάθε σημεῖο Β τοῦ ἐπιπέδου μας μὲ $ΟΑ < ρ$ λέγεται *ἐσωτερικὸ* σημεῖο τοῦ κδισ (Ο,ρ), ἐνῶ κάθε σημεῖο Β μὲ $ΟΒ > ρ$ λέγεται *ἐξωτερικὸ* σημεῖο του.



Ἔτσι τὰ σημεῖα ἑνὸς ἐπιπέδου χωρίζονται ἀπὸ ἕναν κύκλο (Ο, ρ) σὲ δύο ὑποσύνολα : τὰ ἐσωτερικὰ καὶ τὰ ἐξωτερικὰ σημεῖα. Γι' αὐτὰ τὰ δύο ὑποσύνολα δεχόμαστε τὸ ἀξίωμα :

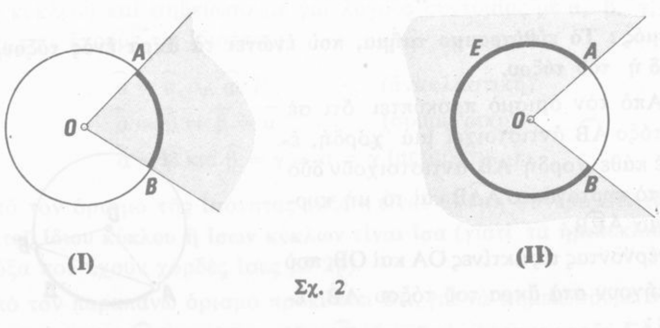
Κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ ποὺ συνδέει ἕνα ἐσωτερικὸ σημεῖο Β ἑνὸς κυκλικοῦ δίσκου (Ο, ρ) μὲ ἕνα ἐξωτερικό του σημεῖο Α ἔχει ἕνα καὶ μόνο ἕνα κοινὸ σημεῖο μὲ τὸν κύκλο (Ο, ρ).

Ἂν ὀνομάσουμε Δ τὸ κοινὸ αὐτὸ σημεῖο, λέμε ὅτι τὸ τμῆμα ΑΒ «τέμνει» τὸν (Ο, ρ) στὸ σημεῖο Δ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1-5

2.3. Ἐπίκεντρες γωνίες καὶ τόξα.

Ἂν Α καὶ Β εἶναι δύο διαφορετικὰ σημεῖα ἑνὸς κύκλου (Ο, ρ), ἡ γω-



Σχ. 2

νία $Α\hat{Ο}Β$ λέγεται **ἐπίκεντρη γωνία** τοῦ κύκλου (Ο, ρ) ἢ τοῦ κδισ (Ο, ρ).

Εἶναι φανερὸ ὅτι ὑπάρχουν δύο ἐπίκεντρες γωνίες $\mathrm{A\hat{O}B}$ ἀπὸ τὶς ὁποῖες ἡ μία εἶναι κυρτὴ (σχ. 2, (I)) καὶ ἡ ἄλλη εἶναι μὴ κυρτὴ (σχ. 2, (II)).

Ὁρισμός : Τὸ σημειοσύνολο ποὺ εἶναι ἡ τομὴ ἑνὸς ὁρισμένου κύκλου (O,ρ) καὶ μιᾶς ἐπίκεντρης γωνίας του λέγεται τόξο τοῦ κυκλ (O, ρ).

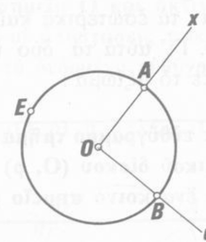
Τὸ ὑποσύνολο αὐτὸ θὰ σημειώνεται :

τοξ AB ἢ $\widehat{\mathrm{AB}}$.

Κάθε σημεῖο ἑνὸς τόξου, διαφορετικὸ ἀπὸ τὰ ἄκρα του, λέγεται *ἐσωτερικὸ* σημεῖο του καὶ τὸ σύνολο τῶν ἐσωτερικῶν σημείων του ἀποτελεῖ τὸ *ἐσωτερικὸ* τοῦ τόξου.

Εἶναι φανερὸ ὅτι :

α) Σὲ κάθε ἐπίκεντρη γωνία $\mathrm{A\hat{O}B}$ ἑνὸς κύκλου (O, ρ) ἀντιστοιχεῖ ἕνα τόξο του $\widehat{\mathrm{AB}}$ καὶ ἀντιστρόφως σὲ κάθε τόξο $\widehat{\mathrm{AB}}$ ἀντιστοιχεῖ μιὰ ἐπίκεντρη γωνία του $\mathrm{A\hat{O}B}$ γιὰ τὴν ὁποία λέμε ὅτι *βαίνει* στὸ τόξο $\widehat{\mathrm{AB}}$.



β) Ἂν θεωρήσουμε δύο ὁρισμένα σημεῖα A καὶ B ἑνὸς κύκλου (O, ρ), ὑπάρχουν δύο ἐπίκεντρες γωνίες $\mathrm{A\hat{O}B}$, ἡ κυρτὴ καὶ ἡ μὴ κυρτή· ἔτσι θὰ ὑπάρχουν καὶ δύο τόξα μὲ ἄκρα A καὶ B. Τὸ τόξο ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν κυρτὴ ἐπίκεντρη γωνία λέγεται *κυρτογώνιο*, ἐνῶ ἐκεῖνο ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴ μὴ κυρτὴ ἐπίκεντρη γωνία λέγεται μὴ *κυρτογώνιο*. Γιὰ νὰ ξεχωρίζουμε τὰ δύο αὐτὰ τόξα, γράφουμε συνήθως μεταξὺ τῶν ἄκρων τους καὶ ἕνα ἐσωτερικό τους σημεῖο. Ἔτσι π.χ. γράφουμε : $\widehat{\mathrm{AB}}$ καὶ $\widehat{\mathrm{AEB}}$.

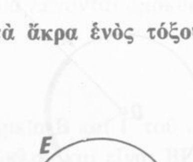
2.4. Χορδὲς τόξων. Τὸ ἡμικύκλιο.

Ὁρισμός : Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα, ποὺ ἑνώνει τὰ ἄκρα ἑνὸς τόξου, λέγεται χ ο ρ δ ὴ τοῦ τόξου.

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ προκύπτει ὅτι σὲ κάθε τόξο $\widehat{\mathrm{AB}}$ ἀντιστοιχεῖ μιὰ χορδή, ἐνῶ σὲ κάθε χορδὴ AB ἀντιστοιχοῦν δύο τόξα, τὸ κυρτογώνιο $\widehat{\mathrm{A\Delta B}}$ καὶ τό μὴ κυρτογώνιο $\widehat{\mathrm{AEB}}$.

Φέρνοντας τὶς ἀκτίνες OA καὶ OB, ποὺ καταλήγουν στὰ ἄκρα τοῦ τόξου $\widehat{\mathrm{AB}}$, ἔχουμε :

$$\mathrm{AB} \leq \mathrm{OA} + \mathrm{OB} \Rightarrow \mathrm{AB} \leq \rho + \rho \Rightarrow \mathrm{AB} \leq 2\rho,$$



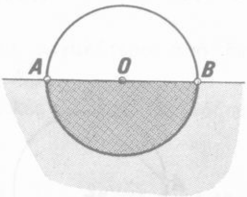
Σχ. 3

ὅπου ἡ ἰσότητα ἰσχύει μόνο ὅταν ἡ χορδὴ ΑΒ διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρο Ο, δηλ. ὅταν εἶναι διάμετρος.

Ἄρα : **Ἡ χορδὴ ὁποιουδήποτε τόξου ΑΒ ἑνὸς κύκλου (Ο, ρ) εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὴ διάμετρο τοῦ κύκλου αὐτοῦ ἢ τὸ πολὺ ἴση μὲ αὐτή.**

Κάθε τόξο κύκλου ποὺ ἔχει χορδὴ ἴση μὲ τὴ διάμετρό του λέγεται **ἡμικύκλιο.**

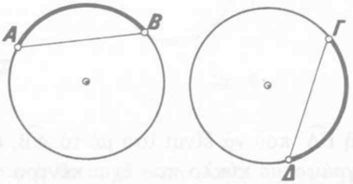
Τέλος καλοῦμε **ἡμικυκλικὸ δίσκο** τὴν τομὴ ἑνὸς κυκλικοῦ δίσκου καὶ ἑνὸς ἡμιεπιπέδου ποὺ ἔχει ἀκμὴ τὸ φορέα μιᾶς διαμέτρου.



Σχ. 4

2.5. Ἰσότητα τόξων.

Ὁρισμός : Δύο τόξα τοῦ ἴδιου κύκλου (ἢ ἴσων κύκλων) θὰ λέγονται ἴσα, ἂν καὶ μόνο ἂν εἶναι καὶ τὰ δύο κυρτογώνια ἢ καὶ τὰ δύο μὴ κυρτογώνια καὶ ἔχουν ἴσες χορδές.



Γιὰ νὰ δηλώσουμε ὅτι τὰ τόξα $\widehat{AB}$ καὶ $\widehat{\Gamma\Delta}$ εἶναι ἴσα, γράφουμε $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$. Ἔχουμε λοιπὸν ἀπὸ τὸν ὁρισμό μας, γιὰ ὁμοειδὴ τόξα,

$$\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta} \Longleftrightarrow AB = \Gamma\Delta.$$

Ἀφοῦ ἡ ἰσότητα ὁμοειδῶν τόξων ἀνάγεται σὲ ἰσότητα χορδῶν (δηλαδὴ σὲ ἰσότητα εὐθύγραμμων τμημάτων), θὰ ἰσχύουν γι' αὐτὴν ἰδιότητες ἀνάλογες μὲ τὶς ἰδιότητες τῆς ἰσότητας τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων. Ἔτσι λοιπόν, ἂν καλέσουμε T τὸ σύνολο τῶν ὁμοειδῶν τόξων τοῦ ἴδιου κύκλου (ἢ ἴσων κύκλων) καὶ σημειώσουμε γιὰ λόγους συντομίας μὲ $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, $\widehat{\gamma}$, ... τὰ στοιχεῖα του, ἔχουμε τὶς ἰδιότητες

$\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha}, \ \forall\ \widehat{\alpha} \in T$ (ἀνακλαστική)

$\widehat{\alpha} = \widehat{\beta} \Rightarrow \widehat{\beta} = \widehat{\alpha}$ (συμμετρική)

$\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$ καὶ $\widehat{\beta} = \widehat{\gamma} \Rightarrow \widehat{\alpha} = \widehat{\gamma}$ (μεταβατική),

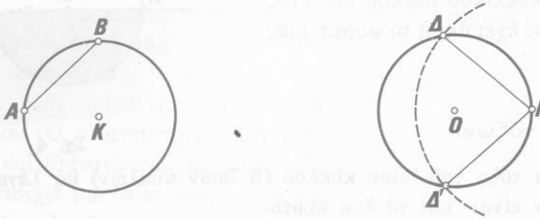
Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τῆς ἰσότητας τόξων εἶναι ἀκόμη φανερὸ ὅτι **τὰ ἡμικύκλια τοῦ ἴδιου κύκλου ἢ ἴσων κύκλων εἶναι ἴσα** (γιατὶ τὰ ἡμικύκλια αὐτὰ εἶναι τόξα ποὺ ἔχουν χορδὲς ἴσες μὲ 2ρ).

Ἀπὸ τὸν παραπάνω ὁρισμὸ προκύπτει ὅτι, γιὰ νὰ σημειώσουμε σ' ἕναν κύκλο ἕνα τόξο $\widehat{\Gamma\Delta}$ ἴσο μὲ ἕνα τόξο $\widehat{AB}$, ἀρκεῖ νὰ πάρουμε χορδὴ $\Gamma\Delta = AB$.

Γιὰ τὴν κατασκευὴ αὐτὴ δεχόμαστε τὸ ἀξίωμα :

Ἂν Γ εἶναι ἕνα σημεῖο τοῦ κύκλου (Ο,ρ), ὑπάρχουν δύο τόξα $\overset{\frown}{Γ\!Δ}$ καὶ $\overset{\frown}{Γ\!Δ'}$ τοῦ κύκλου αὐτοῦ, πού εἶναι ἴσα μὲ ἕνα τόξο $\overset{\frown}{AB}$ τοῦ ἴδιου (ἢ ἴσου) κύκλου.

Ἔστω λοιπὸν τὸ τόξο ΑΒ τοῦ (Κ, ρ) καὶ τὸ σημεῖο Γ τοῦ κύκλου (Ο, ρ) ποὺ εἶναι ἴσος μὲ τὸν κύκλο (Κ, ρ). Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἄλλο ἄκρο τοῦ τόξου $\overset{\frown}{Γ\!Δ}$



Σχ. 5

ἢ $\overset{\frown}{Γ\!Δ'}$ ποὺ νὰ εἶναι ἴσο μὲ τὸ $\overset{\frown}{AB}$, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: Μὲ τὸ διαβήτη μας γράφουμε κύκλο ποὺ ἔχει κέντρο τὸ Γ καὶ ἀκτίνα ἴση μὲ τὴ χορδὴ ΑΒ. Ὀνομάζουμε Δ καὶ Δ′ τὰ σημεῖα ποὺ ὁ κύκλος αὐτὸς τέμνει τὸν (Ο, ρ). Τὰ τόξα $\overset{\frown}{Γ\!Δ}$ καὶ $\overset{\frown}{Γ\!Δ'}$ εἶναι ἴσα μὲ τὸ $\overset{\frown}{AB}$, γιατὶ ἔχουν χορδὴ ἴση μὲ τὴ χορδὴ τοῦ $\overset{\frown}{AB}$.

2.6. Τὸ μέσο ἑνὸς τόξου.

Ὁρισμός : Ἕνα σημεῖο Μ ἑνὸς τόξου $\overset{\frown}{AB}$ θὰ λέγεται μέσο του, ἂν καὶ μόνο ἂν τὰ τόξα $\overset{\frown}{AM}$ καὶ $\overset{\frown}{MB}$ εἶναι ἴσα, δηλαδὴ ἂν καὶ μόνο ἂν εἶναι : $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$.

Δεχόμαστε τὸ ἀξίωμα :

Κάθε τόξο ἔχει ἕνα καὶ μόνο ἕνα μέσο.

Θὰ δοῦμε ἀργότερα πῶς μποροῦμε νὰ βροῦμε τὸ μέσο ἑνὸς τόξου μὲ τὸν κανόνα καὶ τὸ διαβήτη.

2.7. Ἄνισα τόξα.

Δύο τόξα τοῦ ἴδιου κύκλου (ἢ ἴσων κύκλων) ποὺ δὲν εἶναι ἴσα λέγονται «ἄνισα». Γιὰ τὰ ἄνισα τόξα ὁρίζουμε ὅτι :

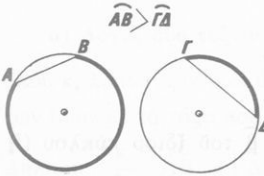
— **Κάθε μὴ κυρτογώνιο τόξο ἑνὸς κύκλου εἶναι «μεγαλύτερο» ἀπὸ κάθε κυρτογώνιο τόξο αὐτοῦ ἢ ἴσου κύκλου του.**

— **Μεταξὺ δύο κυρτογώνιων τόξων τοῦ ἴδιου κύκλου «μεγαλύτερο» εἶναι ἐκεῖνο ποὺ ἔχει μεγαλύτερη χορδή.**

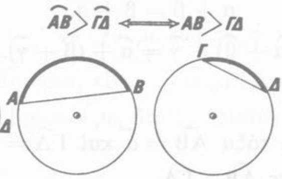
— **Μεταξὺ δύο μὴ κυρτογώνιων τόξων τοῦ ἴδιου κύκλου «μεγαλύτερο» εἶναι ἐκεῖνο ποὺ ἔχει μικρότερη χορδή.**

Γιὰ νὰ δηλώσουμε ὅτι ἕνα τόξο $\widehat{\mathrm{AB}}$ εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ ἕνα τόξο $\widehat{\Gamma\Delta}$, γράφουμε $\widehat{\mathrm{AB}} > \widehat{\Gamma\Delta}$ ἢ ἰσοδύναμα $\widehat{\Gamma\Delta} < \widehat{\mathrm{AB}}$.

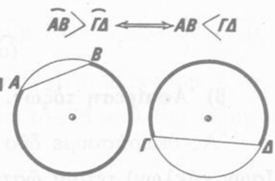
Στὰ παρακάτω σχήματα ἔχουμε τὶς ἀνισοτικὲς σχέσεις τῶν τόξων στὶς τρεῖς περιπτώσεις ποὺ ἀναφέραμε.



Σχ. 6



Σχ. 7



Σχ. 8

2.8. Οἱ πράξεις στὰ τόξα.

Στὸ σύνολο T τῶν τόξων ἑνὸς κύκλου ἢ ἴσων κύκλων ὁρίζουμε τὶς παρακάτω πράξεις:

α) Πρόσθεση τόξων.

Ἂν δοθοῦν δύο κυρτογώνια τόξα $\widehat{\mathrm{AB}} = \widehat{\alpha}$ καὶ $\widehat{\Gamma\Delta} = \widehat{\beta}$ τοῦ ἴδιου κύκλου (ἢ ἴσων κύκλων), μποροῦμε πάντοτε νὰ κατασκευάσουμε ἕνα ἄλλο

τόξο $\widehat{\Lambda\mathrm{P}}$ παίρνοντας (μὲ τὸ διαβήτη μας) πάνω σὲ κύκλο ἴσης ἀκτίνας τὰ διαδοχικὰ[1] τόξα $\widehat{\Lambda\mathrm{M}} = \widehat{\alpha}$ καὶ $\widehat{\mathrm{MP}} = \widehat{\beta}$. Τὸ τόξο $\widehat{\Lambda\mathrm{P}}$ (ἢ ἀκριβέστερα τὸ $\widehat{\Lambda\mathrm{MP}}$),

1. Δύο τόξα $\widehat{\Lambda\mathrm{M}}$ καὶ $\widehat{\mathrm{MP}}$, ποὺ ἔχουν τὸ ἕνα ἄκρο τους κοινό, εἶναι διαδοχικά, ὅταν τὸ κοινὸ ἄκρο τους εἶναι ἐσωτερικὸ σημεῖο τοῦ τόξου ποὺ ὁρίζουν τὰ μὴ κοινὰ ἄκρα τους, δηλ. τοῦ $\widehat{\Lambda\mathrm{P}}$.

ποὺ κατασκευάζεται μὲ τὸν τρόπο αὐτό, λέγεται **ἄθροισμα τῶν** $\widehat{AB}=\widehat{\alpha}$ **καὶ** $\widehat{\Gamma\Delta}=\widehat{\beta}$ καὶ σημειώνεται $\widehat{AB}+\widehat{\Gamma\Delta}$ ἢ $\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}$. Γιὰ νὰ δηλώσουμε ὅτι τὸ $\widehat{\Lambda P}$ εἶναι ἄθροισμα τῶν $\widehat{AB}=\widehat{\alpha}$ καὶ $\widehat{\Gamma\Delta}=\widehat{\beta}$, γράφουμε

$$\widehat{\Lambda P}=\widehat{AB}+\widehat{\Gamma\Delta} \quad \text{ἢ} \quad \widehat{\Lambda P}=\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}.$$

Ἡ πράξη ποὺ κάνουμε, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμα δύο τόξων, λέγεται **πρόσθεση**. Ἡ πρόσθεση[1] ἐπεκτείνεται καὶ σὲ περισσότερους ἀπὸ δύο προσθετέους, ὅπως ἀκριβῶς καὶ στὰ εὐθύγραμμα τμήματα.

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τοῦ ἀθροίσματος διαπιστώνεται ὅτι ἡ πρόσθεση τῶν τόξων εἶναι πράξη ἀντιμεταθετικὴ καὶ προσεταιριστική[2], δηλαδὴ ὅτι:

$$\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}=\widehat{\beta}+\widehat{\alpha},$$
$$(\widehat{\alpha}+\widehat{\beta})+\widehat{\gamma}=\widehat{\alpha}+(\widehat{\beta}+\widehat{\gamma}).$$

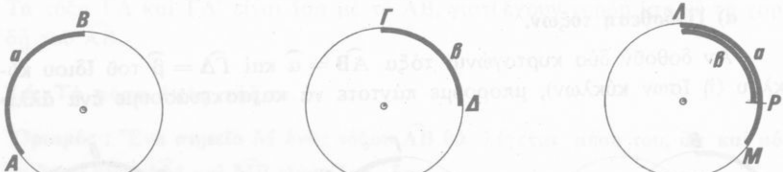
β) Ἀφαίρεση τόξων.

Ἂς θεωρήσουμε δύο τόξα $\widehat{AB}=\widehat{\alpha}$ καὶ $\widehat{\Gamma\Delta}=\widehat{\beta}$ τοῦ ἴδιου κύκλου (ἢ ἴσων κύκλων) τέτοια ὥστε $\widehat{AB}>\widehat{\Gamma\Delta}$.

Εἶναι δυνατὸ νὰ κατασκευάσουμε μὲ τὰ τόξα αὐτὰ ἕνα ἄλλο τόξο $\widehat{PM}$ τέτοιο ὥστε:

$$\widehat{AB}=\widehat{\Gamma\Delta}+\widehat{PM}.$$

Γιὰ τὴν κατασκευὴ τοῦ $\widehat{PM}$ παίρνουμε (μὲ τὸ διαβήτη μας) πάνω σὲ κύ



κλο (Κ, ρ) ἴσης ἀκτίνας δύο τόξα $\widehat{\Lambda M}=\widehat{\alpha}$ καὶ $\widehat{\Lambda P}=\widehat{\beta}$ κατὰ τέτοιο τρόπο ὥστε τὸ ἄλλο ἄκρο P τοῦ μικρότερου τόξου νὰ εἶναι ἐσωτερικὸ σημεῖο τοῦ $\widehat{\Lambda M}$. Τὸ τόξο $\widehat{PM}$ εἶναι τὸ ζητούμενο, λέγεται **διαφορὰ τῶν τόξων** $\widehat{AB}=\widehat{\alpha}$ **καὶ** $\widehat{\Gamma\Delta}=\widehat{\beta}$ καὶ σημειώνεται: $\widehat{AB}-\widehat{\Gamma\Delta}$ ἢ $\widehat{\alpha}-\widehat{\beta}$. Γιὰ νὰ δηλώσουμε ὅτι τὸ $\widehat{PM}$ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν τόξων $\widehat{AB}=\widehat{\alpha}$ καὶ $\widehat{\Gamma\Delta}=\widehat{\beta}$, γράφουμε:

$$\widehat{PM}=\widehat{AB}-\widehat{\Gamma\Delta} \quad \text{ἢ} \quad \widehat{PM}=\widehat{\alpha}-\widehat{\beta}$$

1. Δὲν ὁρίζεται πρόσθεση τόξων ποὺ ἀνήκουν σὲ ἄνισους κύκλους.
2. Ὑποθέτουμε ὅτι στὴ δεύτερη ἰσότητα τὸ α + β εἶναι ἐπίσης κυρτογώνιο. Στὴν ἀντίθετη περίπτωση ἰσχύουν αὐτὰ ποὺ γράφονται στὴν § 2.10.

Ἔτσι ἔχουμε τὴν ἰσοδυναμία:

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} + \overset{\frown}{PM} \iff \overset{\frown}{PM} = \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{\Gamma\Delta}.$$

Ἡ πράξη ποὺ κάνουμε, γιὰ νὰ βροῦμε τὴ διαφορὰ δύο τόξων, λέγεται **ἀφαίρεση** αὐτῶν καὶ ἰσχύουν γι' αὐτὴ συμπεράσματα ἀντίστοιχα μὲ ἐκεῖνα ποὺ ἰσχύουν στὴν ἀφαίρεση εὐθύγραμμων τμημάτων. Ἔτσι π.χ. γιὰ νὰ ἔχει νόημα ἡ διαφορὰ $\overset{\frown}{\alpha} - \overset{\frown}{\beta}$ καὶ ὅταν $\overset{\frown}{\alpha} = \overset{\frown}{\beta}$, δεχόμαστε τὴν ὕπαρξη ἑνὸς τόξου τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα συμπίπτουν. Τὸ τόξο αὐτὸ λέγεται «*μηδενικὸ τόξο*» καὶ εἶναι τὸ «οὐδέτερο στοιχεῖο» τῆς προσθέσεως.

2.9. Μέτρηση τόξων.

α) **Λόγος δύο τόξων:** Ἂν ἔχουμε ἕνα τόξο $\overset{\frown}{AB}$, τὸ γινόμενο $\frac{\kappa}{\lambda} \cdot \overset{\frown}{AB}$, ὅπου κ, λ εἶναι φυσικοὶ ἀριθμοί, εἶναι τὸ τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ ποὺ εἶναι ἄθροισμα κ τόξων ἴσων μὲ τὸ τόξο ποὺ βρίσκουμε, ὅταν χωρίσουμε τὸ $\overset{\frown}{AB}$ σὲ λ ἴσα μέρη[1]. Δηλαδή: $\frac{\kappa}{\lambda} \cdot \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.

Ὁ ἀριθμὸς $\frac{\kappa}{\lambda}$ λέγεται **λόγος τοῦ τόξου $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ πρὸς τὸ τόξο $\overset{\frown}{AB}$** καὶ γράφεται $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} : \overset{\frown}{AB}$ ἢ $\frac{\overset{\frown}{\Gamma\Delta}}{\overset{\frown}{AB}}$. Ἔτσι ἡ ἰσότητα $\frac{\overset{\frown}{\Gamma\Delta}}{\overset{\frown}{AB}} = \frac{\kappa}{\lambda}$ δηλώνει ὅτι ὁ ἀριθμὸς $\frac{\kappa}{\lambda}$ εἶναι ὁ λόγος τοῦ $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ πρὸς τὸ $\overset{\frown}{AB}$ καὶ ἄρα εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴν $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \frac{\kappa}{\lambda} \overset{\frown}{AB}$, δηλαδή.

$$\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \frac{\kappa}{\lambda} \overset{\frown}{AB} \Leftrightarrow \frac{\overset{\frown}{\Gamma\Delta}}{\overset{\frown}{AB}} = \frac{\kappa}{\lambda}.$$

Θὰ θεωροῦμε πρὸς τὸ παρὸν τόξα τοῦ ἴδιου κύκλου (ἢ ἴσων κύκλων) τέτοια ὥστε δύο ὁποιαδήποτε $\overset{\frown}{\alpha}$ καὶ $\overset{\frown}{\beta}$ ἀπ' αὐτὰ νὰ συνδέονται μὲ σχέση τῆς μορφῆς $\overset{\frown}{\alpha} = \frac{\kappa}{\lambda} \overset{\frown}{\beta}$, ὅπου τὰ κ καὶ λ εἶναι φυσικοὶ ἀριθμοί.

β) **Μέτρο ἑνὸς τόξου:**

Ἂς πάρουμε στὸ σύνολο τῶν τόξων (τοῦ ἴδιου κύκλου) ποὺ θεωροῦμε ἕνα ὁρισμένο τόξο $\overset{\frown}{H\Theta}$ ποὺ θὰ τὸ λέμε «*μοναδιαῖο τόξο*» ἢ «*μονάδα*» καὶ

1. Ἀντίθετα μὲ ὅ,τι συμβαίνει μὲ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, ἡ διαίρεση ἑνὸς τόξου σὲ λ ἴσα μέρη μὲ τὸν κανόνα καὶ τὸ διαβήτη δὲν εἶναι πάντοτε δυνατή.

ἂς σχηματίσουμε γιὰ κάθε τόξο $\widehat{AB}$ τοῦ κύκλου τὸ λόγο $\dfrac{\widehat{AB}}{\widehat{H\Theta}}$. Ὁ λόγος αὐτὸς λέγεται τώρα **μέτρο τοῦ $\widehat{AB}$ ὡς πρὸς μονάδα μετρήσεως τὸ $\widehat{H\Theta}$** καὶ θὰ σημειώνεται ἁπλῶς μὲ $(\widehat{AB})$, δηλαδὴ εἶναι :

$$(\widehat{AB}) = \frac{\widehat{AB}}{\widehat{H\Theta}}.$$

Ἐπειδὴ ἡ μέτρηση τῶν τόξων γίνεται μὲ τρόπο ἀνάλογο πρὸς τὴ μέτρηση τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων, θὰ ἰσχύουν καὶ ἐδῶ οἱ ἰδιότητες

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{\Gamma\Delta}} = \frac{(\widehat{AB})}{(\widehat{\Gamma\Delta})}$$

$$\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta} \Longleftrightarrow (\widehat{AB}) = (\widehat{\Gamma\Delta})$$

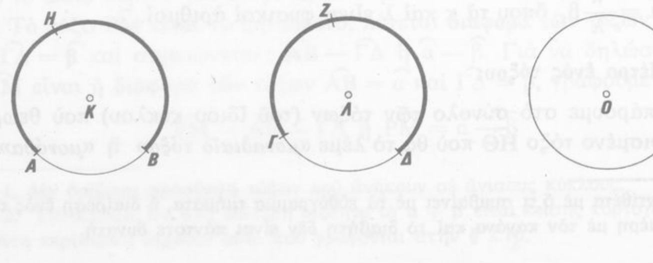
$$\widehat{AB} > \widehat{\Gamma\Delta} \Longleftrightarrow (\widehat{AB}) > (\widehat{\Gamma\Delta}).$$

Γιὰ μονάδα μετρήσεως τῶν τόξων παίρνουμε συνήθως τὴ «**μοίρα**» (^{o}), ποὺ εἶναι τόξο ἴσο μὲ τὸ $\dfrac{1}{360}$ τοῦ κύκλου. Ὑποδιαιρέσεις τῆς μοίρας εἶναι τὸ «**πρῶτο λεπτὸ**» ($'$), ποὺ εἶναι τόξο ἴσο μὲ τὸ $\dfrac{1}{60}$ τῆς μοίρας, καὶ τὸ «**δεύτερο λεπτὸ**» ($''$), ποὺ εἶναι τόξο ἴσο μὲ τὸ $\dfrac{1}{60}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ. Εἶναι φανερὸ ὅτι ὁλόκληρος ὁ κύκλος ἔχει μέτρο 360^{o}, ἐνῶ τὸ ἡμικύκλιο ἔχει μέτρο 180^{o}.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6 - 9

2.10. Ἡ ἐπέκταση τῆς ἔννοιας τοῦ τόξου.

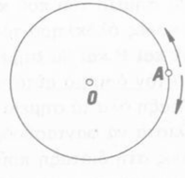
Εἶναι φανερό ὅτι γιά νά προσθέσουμε δύο μή κυρτογώνια τόξα μέ τή διαδικασία πού ἀκολουθήσαμε στήν § 2.8, θά παρατηρήσουμε ὅτι τά τόξα πού θά σημειώσουμε στόν



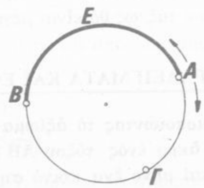
(Ο,ρ) θά «ἐπικαλύπτονται». Ἡ ἀνάγκη νά εἶναι δυνατή καί ἡ πρόσθεση μή κυρτογώνιων τόξων μᾶς ὁδήγησε στήν ἐπέκταση τῆς ἔννοιας πού δώσαμε γιά τό τόξο στὴν § 2.3.

Ἄς θεωρήσουμε ἕναν κυκλ(Ο,ρ) καί ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἕνα σημεῖο του Α κινεῖται πάνω σ' αὐτόν. Γιά τήν κίνηση τοῦ Α δεχόμαστε τό ἀξίωμα :

Ἕνα σημεῖο Α τοῦ κυκλ (Ο,ρ) μπορεῖ νὰ κινηθεῖ πάνω σ' αὐτὸν κατὰ δύο ἀντίθετες φορὲς καὶ ὅταν κινεῖται διαρκῶς μὲ μιὰ ἀπὸ τὶς δύο φορές, διέρχεται ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ κύκλου καὶ ἐπιστρέφει στὴν ἀρχική του θέση.



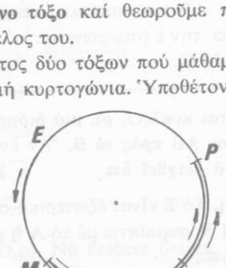
Ἡ κίνηση τοῦ Α πάνω στόν κύκλο μέ μιά ὁρισμένη φορά λέγεται «περιστροφή τοῦ Α». Ἔχουμε λοιπὸν δύο φορές περιστροφῆς καί ἡ μία φορά περιστροφῆς ὀνομάζεται «*θετικὴ φορὰ*»[1], ἐνῶ ἡ ἀντίθετή της ὀνομάζεται «*ἀρνητικὴ φορὰ*». Ἄν πάρουμε τρία διαφορετικά σημεῖα Α, Β, Γ, τοῦ κύκλου, τά σημεῖα αὐτά κατά τή μία φορά περιστροφῆς διαγράφονται κατά τή διάταξη Α→ Β→ Γ ἤ Β → Γ→ Α ἤ Γ→ Α→ Β, ἐνῶ κατά τήν ἀντίθετη φορά περιστροφῆς διαγράφονται κατά τή διάταξη Α→ Γ→ Β ἤ Γ→ Β→ Α ἤ Β→ Α→ Γ.



Ἄς θεωρήσουμε τώρα ἕνα τόξο $\widehat{AB}$ τοῦ κυκλ(Ο,ρ) καί ἄς πάρουμε ἕνα τυχόν ἐσωτερικό σημεῖο του Ε. Στή μία φορά περιστροφῆς τό $\widehat{AB}$ διαγράφεται κατά τή διάταξη Α→ Ε→ Β καί τότε τό Α λέγεται «*ἀρχή*» καί τό Β «*τέλος*» του, ἐνῶ στήν ἀντίθετη φορά περιστροφῆς τό $\widehat{AB}$ διαγράφεται κατά τή διάταξη Β → Ε → Α καί τότε τό Β λέγεται «*ἀρχὴ*» καί τό Α «*τέλος*» του.

Ἕνα τόξο πού τό ἕνα του ἄκρο χαρακτηρίζεται ὡς «ἀρχή» καί τό ἄλλο ἄκρο του χαρακτηρίζεται ὡς «τέλος» θά λέγεται **προσανατολισμένο τόξο** καί θεωροῦμε πάντοτε ὅτι διαγράφεται κατά μία φορά, ἀπό τήν ἀρχή πρός τό τέλος του.

Ἄς ἀκολουθήσουμε τήν κατασκευή τοῦ ἀθροίσματος δύο τόξων πού μάθαμε στήν § 2.8, ὅταν τά δεδομένα τόξα $\widehat{AB} = \widehat{\alpha}$ καί $\widehat{\Gamma\Delta} = \widehat{\beta}$ εἶναι μή κυρτογώνια. Ὑποθέτοντας ὅτι τά ἀντίστοιχα διαδοχικά τόξα $\widehat{\Lambda M} = \widehat{\alpha}$ καί $\widehat{MP} = \widehat{\beta}$ διαγράφονται κατά τή θετική φορά ἀπό ἕνα κινητό σημεῖο Ε, παρατηροῦμε ὅτι τὸ Ε θά ξεκινήσει ἀπό τό Α καί κατά τή διαγραφή τοῦ δεύτερου τόξου $\widehat{MP}$ θά ξαναπεράσει ἀπό τό Α. Βλέπουμε δηλαδή ὅτι τό σύνολο τῶν σημείων ποὺ διαγράφει τὸ Ε δὲν εἶναι ὑποσύνολο τοῦ κύκλου μας, γιατί περιέχει σέ μιά ὁρισμένη διάταξη ὅλα τά σημεῖα τοῦ κύκλου καί μερικά ἀπό αὐτά δύο φορές[1]. Ἔτσι τό σύνολο τῶν σημείων πού διαγράφει τό Ε δέν εἶναι «τόξο» μέ τήν ἔννοια πού τό ὁρίσαμε στήν § 2.3 καί γι' αὐτό ἀκριβῶς δέν μποροῦμε νά τό ὀνομάσουμε «ἄθροισμα» τῶν $\widehat{AB}$ καί $\widehat{\Gamma\Delta}$.



1. Σχεδόν πάντοτε παίρνουμε γιά «θετική» φορά περιστροφῆς τήν ἀντίθετη πρός τήν κίνηση τῶν δεικτῶν ἑνός ρολογιοῦ. Τότε τή θετική φορά τή λέμε καί «τριγωνομετρική φορά».

Γιά νά καλύψουμε καί τήν περίπτωση αὐτή (πού μπορεῖ νά παρουσιασθεῖ καί ὅταν τό ἕνα μόνο τόξο εἶναι μή κυρτογώνιο ἤ ἀκόμη καί ὅταν προσθέτουμε περισσότερα ἀπό δύο κυρτογώνια τόξα), ἐπεκτείνουμε τήν ἔννοια τοῦ τόξου ὁρίζοντας ὅτι:

Τό σύνολο τῶν διατεταγμένων σημείων ἑνός κύκλ(Ο, ρ), ἀπό τά ὁποῖα διέρχεται ἕνα κινητό σημεῖο του πού κινεῖται μέ ὁρισμένη φορά, ὅταν ξεκινᾶ ἀπό σημεῖο Λ, διαγράφει κ φορές ὁλόκληρο τόν κύκλο καί καταλήγει σέ σημεῖο Ρ, *λέγεται* **τόξο κ τάξεως μὲ ἄκρα Λ καὶ Ρ** καί θά σημειώνεται τοξ$_κ$ ΛΡ.

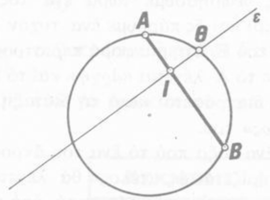
Ἀπό τόν ὁρισμό αὐτό καταλαβαίνουμε ὅτι ἕνα τόξο κ τάξεως περιέχει σέ μιά ὁρισμένη διάταξη ὅλα τά σημεῖα τοῦ κύκλου κ φορές καί μερικά ἀπ' αὐτά κ + 1 φορές. Μποροῦμε μάλιστα νά φαντασθοῦμε ὅτι τά σημεῖα τοῦ κύκλου μας στή δεύτερη, τρίτη ..., ἐμφάνισή τους στή διάταξη πού θεωροῦμε ἀνήκουν σ' ἕνα δεύτερο, τρίτο,... ἴσο κύκλο πού ταυτίζεται μέ τόν ἀρχικό. Τά τόξα ὅπως τά ὁρίσαμε στήν § 2.3 εἶναι τόξα «μηδενικῆς» τάξεως. Ἡ ἰσότητα καί ἀνισότητα στά τόξα κ τάξεως ὁρίζεται χωρίς δυσκολία. Ἔτσι π.χ. δύο ἴσα τόξα εἶναι πάντοτε τῆς ἴδιας τάξεως καί ἔχουν ἴσες χορδές. Ἐπίσης, ἄν κ>λ, κάθε τόξο κ τάξεως θά εἶναι μεγαλύτερο ἀπό κάθε τόξο λ τάξεως, κ.ο.κ.

2.11. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Χρησιμοποιώντας τὸ ἀξίωμα:**
Ἄν τὰ ἄκρα ἑνὸς τόξου $\widehat{AB}$ βρίσκονται ἑκατέρωθεν μιᾶς εὐθείας ε, τὸ $\widehat{AB}$ ἔχει μὲ τὴν ε ἕνα καὶ μόνο ἕνα κοινὸ σημεῖο, νὰ ἀποδείξετε τὴν πρόταση: Κάθε εὐθεία ε ποὺ τέμνει τὴ χορδὴ ΑΒ ἑνὸς τόξου $\widehat{AB}$ τοῦ κύκλου (Ο, ρ) τέμνει καὶ τὸ τόξο.

Λύση. Ἄν ἡ ε τέμνει τή χορδή ΑΒ στό Α (ἤ στό Β), ἡ πρόταση εἶναι φανερή, γιατί ἡ ε τέμνει καί τό τόξο $\widehat{AB}$ στό Α (ἤ στό Β).

Ἄν ἡ ε τέμνει τή χορδή ΑΒ σ' ἐσωτερικό σημεῖο της Ι, τότε τά Α καί Β βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς ε. Ἀφοῦ ὅμως τά ἄκρα τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς ε, τό τόξο $\widehat{AB}$ πού συνδέει τά σημεῖα Α καί Β θά τέμνει τήν ε (σύμφωνα μέ τό ἀξίωμα) σ' ἕνα σημεῖο Θ.



2. **Δίνεται κυκλ(Ο, ρ), μιὰ διάμετρός του ΑΒ καὶ ἕνα σημεῖο Σ στὴν προέκταση τῆς διαμέτρου ΑΒ πρὸς τὸ Β. Ἄν ἑνώσουμε τὸ Σ μ' ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τοῦ κυκλ(Ο, ρ), νὰ δειχθεῖ ὅτι** $$ΣΜ \geq ΣΒ \text{ καὶ } ΣΜ \leq ΣΑ$$

Λύση. Τό Σ εἶναι ἐξωτερικό σημεῖο τοῦ κδισ(Ο, ρ), ἀφοῦ ΟΣ>ΟΒ, δηλαδή ΟΣ>ρ. Ἄν τό Μ δέ συμπίπτει μέ τό Α ἤ μέ τό Β, ἔχουμε τρίγωνο ΜΟΣ στό ὁποῖο ἰσχύουν οἱ ἀνισότητες

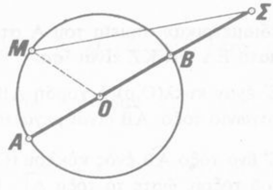
$$ΣΟ - ΟΜ < ΣΜ < ΣΟ + ΟΜ$$
$$\text{ἤ} \quad ΣΟ - ρ < ΣΜ < ΣΟ + ρ \qquad (Ι)$$

---

1. Οἱ διαφορετικές «θέσεις» στή διάταξη αὐτή τῶν σημείων τοῦ κύκλου θεωροῦνται διαφορετικά στοιχεῖα τοῦ συνόλου, ἔστω καί ἄν ἐμφανίζεται σ'αὐτές τό ἴδιο σημεῖο. Γιά νά γίνει αὐτό πιό κατανοητό, μποροῦμε νά φαντασθοῦμε ὅτι τά σημεῖα τοῦ κύκλου πού ἐμφανίζονται δύο φορές στό σύνολο πού θεωροῦμε στή δεύτερη ἐμφάνισή τους ἀνήκουν σ' ἕναν ἄλλο ἴσο κύκλο πού ταυτίζεται μέ τόν ἀρχικό.

Ἐπειδή ὅμως ΣΟ + ρ = ΣΑ καί ΣΟ — ρ = = ΣΒ, οἱ ἀνισότητες (Ι) γράφονται τελικά

$$ΣΒ < ΣΜ < ΣΑ$$



Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι, ὅταν τό Μ συμπίπτει μέ τό Α, ἔχουμε ΣΜ = ΣΑ, καί ὅταν τό Μ συμπίπτει μέ τό Β, ἔχουμε ΣΜ = ΣΒ (δηλαδή τό ΣΑ εἶναι τό «μέγιστο» τοῦ ΣΜ καί τό ΣΒ εἶναι τό «ἐλάχιστο» τοῦ ΣΜ).

2.12. ΑΣΚΗΣΕΙΣ *

1. Σχεδιάστε τέσσερις ἴσους κύκλους πού νά ἔχουν ἀκτίνα 3cm καί νά διέρχονται ἀπό ἕνα δεδομένο σημεῖο Α. Ἄν καλέσουμε O_1, O_2, O_3, O_4 τά κέντρα τους, δεῖξτε ὅτι τά σημεῖα αὐτά βρίσκονται σέ κύκλο μέ κέντρο Α.

2. Νά γράψετε κύκλο πού νά ἔχει ἀκτίνα 4 cm καί νά διέρχεται ἀπό δύο σημεῖα Α καί Β τέτοια ὥστε (ΑΒ) = 3 cm.

3. Ἄν δοθεῖ ἕνα σημεῖο Κ, σχεδιάστε τό σημειοσύνολο
$$\Omega = \{ M\colon 3\text{cm} < (KM) < 5\text{cm} \}.$$

4. Δίνεται εὐθύγραμμο τμῆμα ΚΛ μέ (ΚΛ) = 6cm. Νά σχεδιαστεῖ τό σημειοσύνολο
$$\Omega = \left\{ M : KM \le \frac{2}{3}\ K\Lambda \text{ καί } \Lambda M \le \frac{5}{6} K\Lambda \right\}.$$

5. Σέ μιά εὐθεία ε παίρνουμε διαδοχικά τά σημεῖα Α, Β, Γ, Δ ὥστε : ΑΒ = α, ΒΓ = 2α, καί ΓΔ = α, ὅπου α ἕνα γνωστό εὐθ. τμῆμα. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι κάθε σημεῖο τοῦ κδισ (Δ, ΔΓ) εἶναι ἐξωτερικό σημεῖο τοῦ κδισ (Β, ΒΑ).

6. Δίνεται κυρτογώνιο τόξο $\widehat{AB}$ κυκλ(Ο,ρ), ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο Γ τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ καί ἕνα σημεῖο Δ τοῦ μή κυρτογώνιου τόξου $\widehat{AB}$. Νά δείξετε ὅτι ἡ ἡμιευθεία ΟΓ τέμνει τή χορδή ΑΒ, ἐνῶ ἡ ἡμιευθεία ΟΔ δέν τέμνει τή χορδή.

7. Ἄν $\widehat{AB}$ καί $\widehat{\Gamma\Delta}$ εἶναι κυρτογώνια τόξα τοῦ ἴδιου κύκλου, δεῖξτε ὅτι
$$(\widehat{AB} + \widehat{\Gamma\Delta}) = (\widehat{AB}) + (\widehat{\Gamma\Delta}).$$

8. Νά δειχθεῖ ὅτι γιά κυρτογώνια τόξα ἰσχύουν οἱ προτάσεις
$$\widehat{\alpha} = \widehat{\beta} \iff \widehat{\alpha} + \widehat{\gamma} = \widehat{\beta} + \widehat{\gamma}$$
$$\widehat{\alpha} < \widehat{\beta} \iff \widehat{\alpha} + \widehat{\gamma} < \widehat{\beta} + \widehat{\gamma}.$$

9. Θεωροῦμε δύο διαμέτρους ΑΑ΄ καί ΒΒ΄ ἑνός κυκλ(Ο,ρ). Νά δείξετε ὅτι τά τόξα $\widehat{A'B}$ καί $\widehat{AB'}$ εἶναι ἴσα.

2.13. ΑΣΚΗΣΕΙΣ **

10. Δίνεται κυκλ(Κ,ρ) καί ἕνα σημεῖο του Λ. Γράφουμε τόν κυκλ(Λ,ρ) καί ὀνομάζουμε Α ἕνα κοινό σημεῖο τῶν δύο κύκλων καί Ε,Ζ τά σημεῖα στά ὁποῖα οἱ προεκτάσεις τῶν ΑΚ καί ΑΛ τέμνουν τούς κύκλους μέ κέντρα Κ καί Λ καί ἀντιστοίχως (τά Ε,Ζ εἶναι

«διαμετρικά» σημεῖα τοῦ Α στούς δύο κύκλους). Νά δεχθεῖ ὅτι τά εὐθύγραμμα τμήματα ΕΛ καί ΚΖ εἶναι ἴσα.

11. Σ' ἕναν κυκλ(O,ρ) ἡ χορδή ΑΒ εἶναι διπλάσια ἀπό τή χορδή ΑΓ. Δεῖξτε ὅτι τό κυρτογώνιο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό διπλάσιο τοῦ κυρτογώνιου τόξου $\overset{\frown}{A\Gamma}$.

12. Σ' ἕνα τόξο $\overset{\frown}{AB}$ ἑνός κύκλου (O,ρ) παίρνουμε διαδοχικά τά ἐσωτερικά σημεῖα Γ καί Δ τοῦ τόξου, ὥστε τά τόξα $\overset{\frown}{A\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, $\overset{\frown}{\Delta B}$ νά εἶναι ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4. Ἄν Μ καί Ν τά μέσα τῶν $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ καί $\overset{\frown}{\Delta A}$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι: $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MN}$.

13. Σέ διάμετρο ΑΒ ἑνός κυκλ(O,ρ) παίρνουμε σημεῖο Ρ ἐσωτερικό τῆς ἀκτίνας ΟΒ. Ἄν Μ εἶναι ἕνα «κινητὸ» σημεῖο τοῦ κύκλου, νά δείξετε ὅτι τό τμῆμα ΡΜ γίνεται μέγιστο, ὅταν τό Μ πέφτει στό Α, καί ἐλάχιστο, ὅταν τό Μ πέφτει στό Β.

2.14. ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 2

1. Δύο βασικά σημειοσύνολα τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ὁ **κύκλος** κέντρου Ο καί ἀκτίνας ρ καί ὁ ἀντίστοιχος **κυκλικὸς δίσκος**. Αὐτά ὁρίζονται ἀπό τίς

$$\text{κυκλ}(O,\rho)=\{A : OA \doteq \rho\}, \qquad \text{κδισ}(O,\rho)=\{A : OA \leq \rho\}$$

Μία γωνία πού ἔχει τήν κορυφή της στό κέντρο ἑνός κύκλου λέγεται **ἐπίκεντρη γωνία** καί ἡ τομή τοῦ κύκλου καί ἐπίκεντρης γωνίας του λέγεται **τόξο.** Ἕνα τόξο πού προκύπτει ὡς τομή κύκλου καί κυρτῆς ἐπίκεντρης γωνίας του λέγεται **κυρτογώνιο τόξο.** Τό εὐθύγραμμο τμῆμα πού συνδέει τά ἄκρα ἑνός τόξου λέγεται **χορδὴ** τοῦ κύκλου καί κάθε χορδή πού διέρχεται ἀπό τό κέντρο τοῦ κύκλου λέγεται **διάμετρος** τοῦ κύκλου. Ἔτσι ἡ διάμετρος εἶναι τό διπλάσιο τῆς ἀκτίνας (δηλαδή ὅλες οἱ διάμετροι εἶναι ἴσες), ἐνῶ ἀποδεικνύεται ὅτι :

— Κάθε χορδὴ ἑνὸς κύκλου εἶναι μικρότερη ἢ ἴση μὲ τὴ διάμετρό του.

Δύο κύκλοι (ἤ δύο κυκλικοί δίσκοι) πού ἔχουν ἴσες ἀκτίνες λέγονται ἴσοι.

2. Δύο κυρτογώνια (ἤ μή κυρτογώνια) τόξα τοῦ ἴδιου κύκλου ἤ ἴσων κύκλων πού ἔχουν ἴσες χορδές λέγονται **ἴσα.**

Γιά ἄνισα (μή ἴσα) τόξα τοῦ ἴδιου κύκλου ἤ ἴσων κύκλων ὁρίζουμε ὅτι :

— Κάθε μὴ κυρτογώνιο τόξο εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ κάθε κυρτογώνιο τόξο.

— Μεταξὺ δύο κυρτογώνιων τόξων μεγαλύτερο εἶναι ἐκεῖνο ποὺ ἔχει μεγαλύτερη χορδή.

— Μεταξὺ δύο μὴ κυρτογώνιων τόξων μεγαλύτερο εἶναι ἐκεῖνο ποὺ ἔχει μικρότερη χορδή.

Γιά τήν ἰσότητα καί ἀνισότητα τῶν τόξων ἰσχύουν ὅλες οἱ ἰδιότητες πού ἰσχύουν γιά τήν ἰσότητα καί ἀνισότητα τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων.

Τονίζεται ὅτι δὲν ὁρίζεται ἰσότητα ἢ ἀνισότητα σὲ τόξα ποὺ δὲν ἀνήκουν στὸν ἴδιο κύκλο ἢ σὲ ἴσους κύκλους.

3. Στό σύνολο T τῶν τόξων τοῦ ἴδιου κύκλου (ἤ ἴσων κύκλων) ὁρίζουμε **ὅπως ἀκριβῶς καὶ στὰ εὐθύγραμμα τμήματα:**

— Τό ἄθροισμα $\overset{\frown}{\alpha}+\overset{\frown}{\beta}$.

— Τή διαφορά $\overset{\frown}{\alpha}-\overset{\frown}{\beta}$.

— Τό γινόμενο $\frac{\kappa}{\lambda}\overset{\frown}{\alpha}$, ὅταν τά κ καί λ εἶναι φυσικοί ἀριθμοί.

Ἂν ἰσχύει μία ἰσότητα τῆς μορφῆς $\widehat{\beta}=\frac{\kappa}{\lambda}\widehat{\alpha}$, ὁ ἀριθμός $\frac{\kappa}{\lambda}$ λέγεται πάλι **λόγος τοῦ $\widehat{\beta}$ πρὸς τὸ $\widehat{\alpha}$** καί σημειώνεται $\frac{\widehat{\beta}}{\widehat{\alpha}}$. Ἂν πάρουμε γιά «μονάδα» ἕνα ὁρισμένο τόξο $\widehat{\mu}\in T$, ὁ λόγος $\frac{\widehat{\alpha}}{\widehat{\mu}}$ λέγεται **μέτρο τοῦ α** καί σημειώνεται $(\widehat{\alpha})$, δηλαδή ἔχουμε πάλι

$$(\widehat{\alpha})=\frac{\widehat{\alpha}}{\widehat{\mu}}.$$

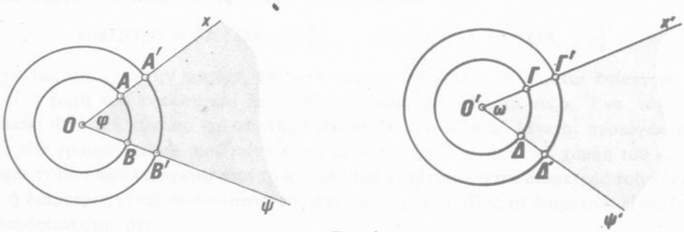
Στή μέτρηση τῶν τόξων ἰσχύουν ὅλες οἱ ἰδιότητες πού ἰσχύουν στή μέτρηση τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

ΣΧΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΓΩΝΙΩΝ

3.1. Ἰσότητα γωνιῶν.

Ἄς θεωρήσουμε δύο γωνίες $X\hat{O}\Psi = \hat{\varphi}$ καὶ $X'\hat{O}'\Psi' = \hat{\omega}$ καὶ ἂς γράψουμε δύο κύκλους μὲ κέντρα τὶς κορυφές τους O καὶ O′ καὶ μὲ τὴν ἴδια ἀκτίνα ρ, ὀνομάζοντας A, B τὰ σημεῖα στὰ ὁποῖα ὁ κυκλ (O, ρ) τέμνει



Σχ. 1

τὶς πλευρὲς τῆς γωνίας $X\hat{O}\Psi$, καὶ Γ, Δ τὰ σημεῖα στὰ ὁποῖα ὁ κυκλ (O′,ρ) τέμνει τὶς πλευρὲς τῆς γωνίας X′O′Ψ′ (σχ. 1). Μὲ τὴ διαδικασία αὐτὴ κάναμε τὶς γωνίες $\hat{\varphi}$ καὶ $\hat{\omega}$ ἐπίκεντρες ἴσων κύκλων ποὺ βαίνουν στὰ τόξα τους $\overset{\frown}{AB}$ καὶ $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$. Καταλαβαίνουμε λοιπὸν ὅτι **μποροῦμε πάντοτε νὰ θεωροῦμε δύο δεδομένες γωνίες ὡς ἐπίκεντρες γωνίες ἴσων κύκλων.**

Ἄς γράψουμε ἐπίσης μὲ ἀκτίνα $R \neq \rho$ δύο ἄλλους ἴσους κύκλους (O, R) καὶ (O′, R) καὶ ἂς ὀνομάσουμε $\overset{\frown}{A'B'}$ καὶ $\overset{\frown}{\Gamma'\Delta'}$ τὰ τόξα τους, στὰ ὁποῖα βαίνουν οἱ γωνίες $\hat{\varphi}$ καὶ $\hat{\omega}$. Δεχόμαστε τὸ ἀξίωμα :

Ἄν τὰ τόξα $\overset{\frown}{AB}$ καὶ $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ στὰ ὁποῖα βαίνουν γωνίες $\hat{\varphi}$ καὶ $\hat{\omega}$, ὅταν γίνουν ἐπίκεντρες ἴσων κύκλων, εἶναι ἴσα ἢ ἄνισα, τότε καὶ τὰ τόξα $\overset{\frown}{A'B'}$ καὶ $\overset{\frown}{\Gamma'\Delta'}$ στὰ ὁποῖα βαίνουν οἱ $\hat{\varphi}$ καὶ $\hat{\omega}$, ὅταν γίνουν ἐπίκεντρες δύο ἄλλων ἴσων κύκλων, θὰ εἶναι ἐπίσης ἴσα ἢ ὁμοιοτρόπως ἄνισα.

Μὲ τὸ ἀξίωμα αὐτὸ μποροῦμε νὰ ὁρίσουμε σχέσεις μεταξὺ γωνιῶν μὲ βάση τὶς σχέσεις ποὺ ἔχουν τὰ τόξα στὰ ὁποῖα βαίνουν, ὅταν γίνουν ἐπίκεντρες ἴσων κύκλων. Ὁρίζουμε λοιπὸν ὅτι :

Δύο γωνίες $\hat{\varphi}$ και $\hat{\omega}$ εἶναι ἴσες, ἂν καὶ μόνον ἂν βαίνουν σὲ ἴσα τόξα, ὅταν γίνουν ἐπίκεντρες ἴσων κύκλων.

Ἀφοῦ ἡ ἰσότητα γωνιῶν ἀνάγεται σὲ ἰσότητα τόξων, θὰ ἰσχύουν καὶ κι' αὐτὴ ἰδιότητες ἀντίστοιχες μὲ τὶς ἰδιότητες τῆς ἰσότητας τόξων. Ἔτσι, ἂν ὀνομάσουμε $\mathscr{T}$ τὸ σύνολο τῶν γωνιῶν καὶ σημειώσουμε, γιὰ λόγους συντομίας, μὲ $\hat{\varphi}$, $\hat{\omega}$, $\hat{\theta}$, ... τὰ στοιχεῖα του, ἔχουμε τὶς ἰδιότητες

$$\hat{\varphi} = \hat{\varphi}, \ \forall \ \varphi \in \mathscr{T} \qquad \text{(ἀνακλαστικὴ)}$$

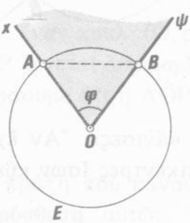
$$\hat{\varphi} = \hat{\omega} \Rightarrow \hat{\omega} = \hat{\varphi} \qquad \text{(συμμετρικὴ)}$$

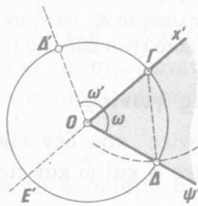
$$\hat{\varphi} = \hat{\omega} \text{ καὶ } \hat{\omega} = \hat{\theta} \Rightarrow \hat{\varphi} = \hat{\theta} \qquad \text{(μεταβατική).}$$

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τῆς ἰσότητας γωνιῶν εἶναι φανερὸ ὅτι ὅλες οἱ πεπλατυσμένες γωνίες εἶναι ἴσες.

3.2. Κατασκευή γωνίας ἴσης μέ δεδομένη γωνία.

Ἂν δίνεται μιὰ κυρτὴ γωνία $X\hat{O}\Psi = \hat{\varphi}$ καὶ μιὰ ἡμιευθεία $O'X'$, **θὰ κατασκευάσουμε μὲ τὸν κανόνα καὶ τὸ διαβήτη γωνία $\hat{\omega}$ ἴση μὲ τὴ $\hat{\varphi}$ ποὺ ἔχει κορυφὴ τὸ O' καὶ πλευρὰ τὴν $O'X'$**





Γιὰ τὴν κατασκευὴ τῆς $\hat{\omega}$ ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: Γράφουμε μὲ κέντρα O καὶ O' καὶ μὲ ὁποιαδήποτε ἀκτίνα ρ δύο ἴσους κύκλους καὶ ὀνομάζουμε $\widehat{AB}$ τὸ τόξο τοῦ πρώτου κύκλου, στὸ ὁποῖο βαίνει ἡ $\hat{\varphi}$, καὶ Γ τὸ σημεῖο τομῆς τοῦ δεύτερου κύκλου μὲ τὴν $O'X'$. Παίρνουμε μετὰ στὸν κυκλ(O', ρ) τόξο $\widehat{\Gamma\Delta}$ ἴσο μὲ τὸ $\widehat{AB}$ καὶ φέρνουμε τὴν ἡμιευθεία $O'\Delta$. Εἶναι τότε φανερὸ ὅτι ἡ γωνία $\Gamma\hat{O}'\Delta$ εἶναι ἴση μὲ τὴ $\hat{\varphi}$ (ἀφοῦ οἱ $\hat{\varphi}$ καὶ $\hat{\omega}$ εἶναι ἐπίκεντρες γωνίες ἴσων κύκλων ποὺ βαίνουν σὲ ἴσα τόξα) καὶ συνεπῶς εἶναι αὐτὴ ποὺ ζητοῦμε, δηλαδὴ $\Gamma\hat{O}'\Delta = \hat{\omega}$.

Ἂν πάρουμε στὸν κυκλ(O', ρ) καὶ ἕνα ἄλλο τόξο $\widehat{\Gamma\Delta'}$ ἴσο μὲ τὸ $\widehat{\Gamma\Delta}$ ἀλλὰ ἀντίθετης φορᾶς, ἡ γωνία $\Gamma\hat{O}'\Delta' = \hat{\omega}'$ θὰ εἶναι ἐπίσης ἴση μὲ τὴ $\hat{\varphi}$ καὶ θὰ ἔχει πλευρὰ τὴν $O'X'$. Βλέπουμε δηλαδὴ ὅτι, ὅταν ἡ $\hat{\varphi}$ εἶναι κυρτή, οἱ γωνίες $\hat{\omega}$ καὶ $\hat{\omega}'$ βρίσκονται στὰ δύο διαφορετικὰ ἡμιεπίπεδα ποὺ ἔχουν ἀκμὴ τὴν εὐθεία Ο′Χ′.

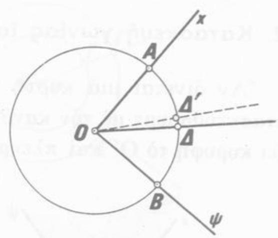
3.3. Ἡ διχοτόμος γωνίας.

Ὁρισμός : Μία ἐσωτερικὴ ἡμιευθεία ΟΔ γωνίας $X\hat{O}\Psi$ θὰ λέγεται **διχοτόμος τῆς $X\hat{O}\Psi$**, ἂν καὶ μόνο ἂν χωρίζει τὴ γωνία $X\hat{O}\Psi$ σὲ δύο ἴσα μέρη, δηλαδὴ ἂν καὶ μόνο ἂν εἶναι

$$X\hat{O}\Delta = \Delta\hat{O}\Psi.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ : Κάθε γωνία $X\hat{O}\Psi$ ἔχει μία καὶ μόνο μία διχοτόμο.

Ἀπόδ. Θεωροῦμε μιά γωνία $X\hat{O}\Psi$ καί γράφουμε κύκλο μέ κέντρο τό Ο καί ὁποιαδήποτε ἀκτίνα ρ. Ἄν ὀνομάσουμε Α καί Β τά σημεῖα στά ὁποῖα ὁ κυκλ(Ο,ρ) τέμνει τίς πλευρές τῆς γωνίας, καί Δ τό μέσο τοῦ τόξου ΑΒ, ἔχουμε



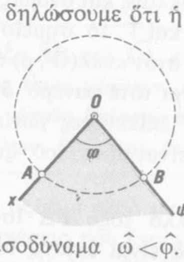
$\widehat{A\Delta} = \widehat{\Delta B} \Rightarrow A\hat{O}\Delta = \Delta\hat{O}B \Rightarrow O\Delta =$ διχοτόμος τῆς $A\hat{O}B$. Ἔτσι ἡ ΟΔ εἶναι διχοτόμος τῆς δεδομένης γωνίας καὶ εἶναι μοναδική, γιατί, ἄν ὑπῆρχε καί μιά ἄλλη διχοτόμος, θά ἔτεμνε τό $\widehat{AB}$ σ' ἕνα διαφορετικό σημεῖο Δ′ τέτοιο, ὥστε $\widehat{A\Delta'} = \widehat{\Delta' B}$, δηλαδή τό Δ′ θά ἦταν ἐπίσης μέσο τοῦ ΑΒ, ἀλλ' αὐτό εἶναι ἀδύνατο (βλ. § 2.6.).

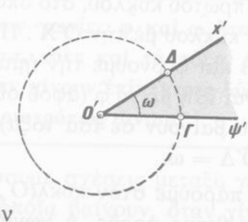
3.4. Ἄνισες γωνίες.

Δύο γωνίες ποὺ δὲν εἶναι ἴσες λέγονται «ἄνισες». Ἄν ἔχουμε δύο ἄνισες γωνίες $\hat{\varphi}$ καὶ $\hat{\omega}$ καὶ τὶς καταστήσουμε ἐπίκεντρες ἴσων κύκλων, ὁρίζουμε ὅτι :

Ἡ γωνία $\hat{\varphi}$ θὰ λέγεται μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ γωνία $\hat{\omega}$, ἂν καὶ μόνο ἂν τὸ τόξο $\widehat{AB}$ ποὺ βαίνει ἡ $\hat{\varphi}$ εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ τόξο $\widehat{\Gamma\Delta}$ ποὺ βαίνει ἡ $\hat{\omega}$.

Γιὰ νὰ δηλώσουμε ὅτι ἡ γωνία $\hat{\varphi}$ εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ω, γράφουμε





με $\hat{\varphi} > \hat{\omega}$ ἢ ἰσοδύναμα $\hat{\omega} < \hat{\varphi}$. Ἔχουμε λοιπὸν

$$\hat{\varphi} > \hat{\omega} \Longleftrightarrow \widehat{AB} > \widehat{\Gamma\Delta}.$$

Ἐπειδὴ ἡ ἀνισότητα γωνιῶν ἀνάγεται σὲ ἀνισότητα τόξων, θὰ ἰσχύει γι' αὐτὴν ἡ μεταβατικὴ ἰδιότητα :

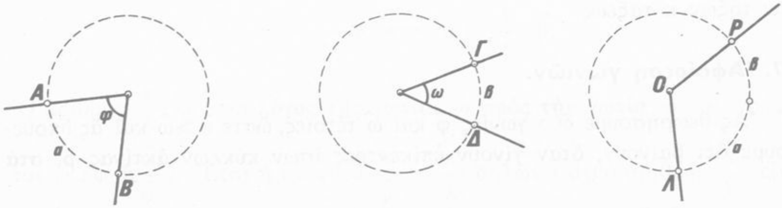
$$\hat{\varphi} > \hat{\omega} \text{ καὶ } \hat{\omega} > \hat{\theta} \Rightarrow \hat{\varphi} > \hat{\theta}.$$

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τῶν ἄνισων γωνιῶν εἶναι φανερὸ ὅτι κάθε κυρτὴ γωνία εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὴν πεπλατυσμένη γωνία, ἐνῶ κάθε μὴ κυρτὴ γωνία εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν πεπλατυσμένη γωνία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1 - 3

3.5. Ἄθροισμα γωνιῶν.

Ἄς θεωρήσουμε δύο γωνίες $\hat{\varphi}$ καὶ $\hat{\omega}$ ποὺ βαίνουν, ὅταν γίνουν ἐπίκεντρες ἴσων κύκλων ἀκτίνας ρ, στὰ τόξα $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\alpha}$ καὶ $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{\beta}$. Ἄν σχηματίσουμε σ' ἕναν κυκλ (Ο, ρ) τὸ ἄθροισμα $\overset{\frown}{\Lambda P} = \overset{\frown}{\alpha} + \overset{\frown}{\beta}$ τῶν δύο τόξων, ἡ γωνία $\Lambda\hat{O}P$ λέγεται **ἄθροισμα τῶν γωνιῶν $\hat{\varphi}$ καὶ $\hat{\omega}$** καὶ σημειώνεται $\hat{\varphi} + \hat{\omega}$. Γιὰ νὰ δηλώσουμε ὅτι ἡ $\Lambda\hat{O}P$ εἶναι ἄθροισμα τῶν $\hat{\varphi}$ καὶ $\hat{\omega}$, γράφουμε



$$\Lambda\hat{O}P = \hat{\varphi} + \hat{\omega}.$$

Ἡ πράξη ποὺ κάνουμε, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμα δύο γωνιῶν, λέγεται **πρόσθεση** αὐτῶν. Ἡ πρόσθεση ἐπεκτείνεται καὶ σὲ περισσότερους ἀπὸ δύο προσθετέους, ὅπως ἀκριβῶς καὶ στὰ τόξα. Ἀφοῦ ἡ πρόσθεση τῶν γωνιῶν ἀνάγεται σὲ πρόσθεση τόξων, θὰ εἶναι πράξη ἀντιμεταθετικὴ καὶ προσεταιριστική, δηλαδὴ

$$\hat{\varphi} + \hat{\omega} = \hat{\omega} + \hat{\varphi}$$

$$(\hat{\varphi} + \hat{\omega}) + \hat{\theta} = \hat{\varphi} + (\hat{\omega} + \hat{\theta}).$$

Ἐπίσης στὴν πρόσθεση τῶν γωνιῶν ἰσχύουν ἰδιότητες ἀνάλογες μὲ ἐκεῖνες ποὺ ἰσχύουν στὴν πρόσθεση τῶν τόξων.

3.6. Ἐπέκταση τῆς ἔννοιας τῆς γωνίας.

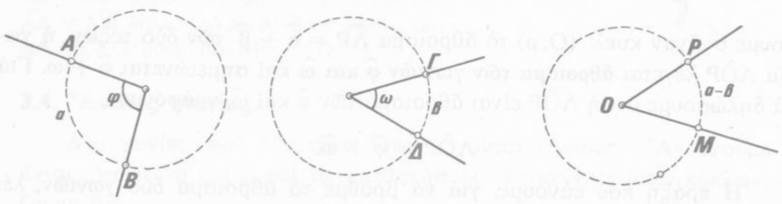
Ἄν δοθοῦν δύο ἢ περισσότερες γωνίες, ἡ εὕρεση τοῦ ἀθροίσματός τους ἀνάγεται, ὅπως εἴδαμε, στὴν εὕρεση τοῦ ἀθροίσματος τῶν τόξων στὰ ὁποῖα βαίνουν, ὅταν γίνουν ἐπίκεντρες ἴσων κύκλων. Εἶναι ὅμως δυνατὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τόξων τους νὰ εἶναι «τόξο κ τάξεως» (βλ. § 2.10) καὶ τότε δὲν μποροῦμε νὰ μιλᾶμε γιὰ «ἄθροισμα» τῶν γωνιῶν μας, ἀφοῦ ἡ ἐπίκεντρη γωνία τόξου κ τάξεως δὲν εἶναι «γωνία» μὲ τὴν ἔννοια ποὺ τὴν ὁρίσαμε στὴν § 1.13. Γιὰ νὰ καλύψουμε λοιπὸν καὶ τὴν περίπτωση αὐτή, ἐπεκτείνουμε πάλι τὴν ἔννοια τῆς γωνίας ὁρίζοντας ὅτι:

Ἕνα ἄθροισμα γωνιῶν θὰ λέγεται **γωνία κ τάξεως,** ἂν καὶ μόνο ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν τόξων στὰ ὁποῖα βαίνουν οἱ γωνίες, ὅταν γίνουν ἐπίκεντρες ἴσων κύκλων, εἶναι τόξο κ τάξεως.

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ αὐτὸ καταλαβαίνουμε ὅτι μία γωνία κ τάξεως ἀποτελεῖται ἀπὸ κ πλήρεις γωνίες, ποὺ τὰ ἐπίπεδά τους «συμπίπτουν» μὲ τὸ ἐπίπεδό μας, καὶ ἀπὸ μία γωνία τοῦ ἐπιπέδου μας. Οἱ γωνίες ὅπως τὶς ὁρίσαμε στὴν § 1.13 εἶναι γωνίες «μηδενικῆς» τάξεως. Εἶναι φανερὸ ὅτι ἡ ἰσότητα καὶ ἀνισότητα στὶς γωνίες κ τάξεως θὰ ἀνάγεται σὲ ἰσότητα καὶ ἀνισότητα τῶν τόξων κ τάξεως.

3.7. Ἀφαίρεση γωνιῶν.

Ἄς θεωρήσουμε δύο γωνίες $\hat{\varphi}$ καὶ $\hat{\omega}$ τέτοιες, ὥστε $\hat{\varphi} > \hat{\omega}$ καὶ ἂς ὑποθέσουμε ὅτι βαίνουν, ὅταν γίνουν ἐπίκεντρες ἴσων κύκλων ἀκτίνας ρ, στὰ



τόξα $\widehat{AB} = \widehat{\alpha}$ καὶ $\widehat{\Gamma\Delta} = \widehat{\beta}$, γιὰ τὰ ὁποῖα ἐπίσης $\widehat{\alpha} > \widehat{\beta}$. Ἂν τώρα σχηματίσουμε σ' ἕναν κύκλ (Ο, ρ) τὴ διαφορὰ $\widehat{MP} = \widehat{\alpha} - \widehat{\beta}$ τῶν δύο τόξων $\widehat{\alpha}$ καὶ $\widehat{\beta}$, ἡ γωνία $M\hat{O}P$ λέγεται **διαφορὰ τῶν γωνιῶν $\hat{\varphi}$ καὶ $\hat{\omega}$** καὶ σημειώνεται $\hat{\varphi} - \hat{\omega}$. Γιὰ νὰ δηλώσουμε ὅτι ἡ $M\hat{O}P$ εἶναι διαφορὰ τῶν $\hat{\varphi}$ καὶ $\hat{\omega}$, γράφουμε

$$M\hat{O}P = \hat{\varphi} - \hat{\omega}.$$

Ἡ πράξη ποὺ κάνουμε, γιὰ νὰ βροῦμε τὴ διαφορὰ αὐτή, λέγεται **ἀφαίρεση** τῶν γωνιῶν καὶ ἰσχύουν γι' αὐτὴ συμπεράσματα ἀνάλογα μὲ ἐκεῖνα ποὺ ἰσχύουν στὴν ἀφαίρεση τόξων. Ἔτσι π.χ. γιὰ νὰ ἔχει νόημα ἡ διαφορὰ $\hat{\varphi} - \hat{\omega}$ καὶ ὅταν $\hat{\varphi} = \hat{\omega}$, δεχόμαστε τὴν ὕπαρξη μιᾶς γωνίας ποὺ οἱ πλευρές της συμπίπτουν. Αὐτὴ ὀνομάσθηκε *μηδενικὴ γωνία* (βλ. § 1.13) καὶ εἶναι τὸ *«οὐδέτερο στοιχεῖο»* τῆς προσθέσεως γωνιῶν.

3.8. Λόγος δύο γωνιῶν.

Ἂν διατυπώσουμε ὁρισμοὺς ἀνάλογους μὲ ἐκείνους ποὺ διατυπώσαμε στὰ τόξα (ἢ στὰ εὐθύγραμμα τμήματα, βλ. § 1.9), δίνουμε νόημα γωνίας καὶ σὲ κάθε γινόμενο $\frac{\kappa}{\lambda}\hat{\varphi}$, ὅταν τὰ κ καὶ λ εἶναι φυσικοὶ ἀριθμοὶ καὶ ἡ $\hat{\varphi}$ εἶναι δεδομένη γωνία. Ἔτσι μιὰ ἰσότητα τῆς μορφῆς

$$\hat{\omega} = \frac{\kappa}{\lambda}\hat{\varphi}$$

δηλώνει ὅτι ἡ γωνία $\hat{\omega}$ εἶναι ἄθροισμα κ γωνιῶν ἴσων μὲ τὴ γωνία ποὺ βρίσκεται, ὅταν χωρίζουμε τὴ $\hat{\varphi}$ σὲ λ ἴσα μέρη[1]. Εἶναι φανερὸ ὅτι, ἂν οἱ γωνίες $\hat{\omega}$ καὶ $\hat{\varphi}$ βαίνουν, ὅταν γίνουν ἐπίκεντρες ἴσων κύκλων, στὰ τόξα $\widehat{\alpha}$ καὶ $\widehat{\beta}$, θὰ ἔχουμε

$$\hat{\omega} = \frac{\kappa}{\lambda}\hat{\varphi} \iff \widehat{\alpha} = \frac{\kappa}{\lambda}\widehat{\beta}.$$

Ὁ ἀριθμὸς $\frac{\kappa}{\lambda}$ λέγεται **λόγος τῆς γωνίας $\hat{\omega}$ πρὸς τὴν γωνία $\hat{\varphi}$** καὶ γράφεται $\hat{\omega} : \hat{\varphi}$ ἢ $\frac{\hat{\omega}}{\hat{\varphi}}$. Ἔτσι ἡ ἰσότητα $\frac{\hat{\omega}}{\hat{\varphi}} = \frac{\kappa}{\lambda}$ δηλώνει ὅτι ὁ ἀριθμὸς $\frac{\kappa}{\lambda}$ εἶναι λόγος τῆς $\hat{\omega}$ πρὸς τὴ $\hat{\varphi}$ καὶ συνεπῶς εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴν $\hat{\omega} = \frac{\kappa}{\lambda}\hat{\varphi}$, δηλ.

$$\hat{\omega} = \frac{\kappa}{\lambda}\hat{\varphi} \iff \frac{\hat{\omega}}{\hat{\varphi}} = \frac{\kappa}{\lambda}.$$

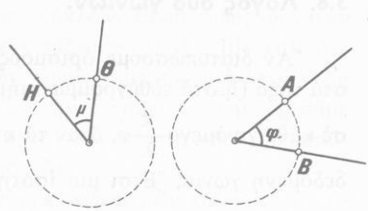
Θὰ θεωροῦμε πρὸς τὸ παρὸν γωνίες τέτοιες, ὥστε δύο ὁποιεσδήποτε ἀπ' αὐτὲς $\hat{\varphi}$ καὶ $\hat{\omega}$ νὰ συνδέονται μὲ σχέση τῆς μορφῆς $\hat{\omega} = \frac{\kappa}{\lambda}\hat{\varphi}$, ὅπου κ καὶ λ εἶναι φυσικοὶ ἀριθμοί. Τὸ σύνολο τῶν γωνιῶν αὐτῶν θὰ σημειώνεται μὲ $\mathscr{T}$.

3.9. Μέτρηση γωνιῶν.

Ἂς πάρουμε στὸ σύνολο τῶν γωνιῶν ἑνὸς ἐπιπέδου μιὰ ὁρισμένη γωνία $\hat{\mu}$ ποὺ θὰ τὴ λέμε «*μοναδιαία γωνία*» ἢ «*μονάδα*», καὶ ἂς σχηματίσουμε

1. Ἡ διαίρεση μιᾶς γωνίας σὲ λ ἴσα μέρη μὲ τὸν κανόνα καὶ τὸ διαβήτη δὲν εἶναι πάντοτε δυνατή.

γιὰ κάθε γωνία $\widehat{\varphi}$ τὸ λόγο $\frac{\widehat{\varphi}}{\widehat{\mu}}$. Ὁ λόγος αὐτὸς λέγεται τώρα **μέτρο τῆς γωνίας $\widehat{\varphi}$ ὡς πρὸς μονάδα μετρήσεως τὴ $\widehat{\mu}$** καὶ θὰ σημειώνεται μὲ $(\widehat{\varphi})$, δηλαδὴ εἶναι



$$(\widehat{\varphi}) = \frac{\widehat{\varphi}}{\widehat{\mu}}.$$

Ἐπειδὴ ἡ μέτρηση τῶν γωνιῶν γίνεται μὲ τρόπο ἀνάλογο πρὸς τὴ μέτρηση τῶν τόξων (ἢ τὴ μέτρηση εὐθύγραμμων τμημάτων), θὰ ἰσχύουν καὶ ἐδῶ οἱ ἰδιότητες :

$$\frac{\widehat{\varphi}}{\widehat{\omega}} = \frac{(\widehat{\varphi})}{(\widehat{\omega})}$$

$$\widehat{\varphi} = \widehat{\omega} \Longleftrightarrow (\widehat{\varphi}) = (\widehat{\omega})$$

$$\widehat{\varphi} < \widehat{\omega} \Longleftrightarrow (\widehat{\varphi}) < (\widehat{\omega}).$$

Ἄς ὀνομάσουμε $\widehat{AB}$ καὶ $\widehat{H\Theta}$ τὰ τόξα, στὰ ὁποῖα βαίνουν οἱ γωνίες $\widehat{\varphi}$ καὶ $\widehat{\mu}$, ὅταν γίνουν ἐπίκεντρες ἴσων κύκλων. Τότε ἔχουμε

$$\frac{\widehat{\varphi}}{\widehat{\mu}} = \frac{\widehat{AB}}{\widehat{H\Theta}}$$

Ἄν συμφωνήσουμε νὰ παίρνουμε γιὰ *μοναδιαία γωνία $\widehat{\mu}$ τὴν ἐπίκεντρη γωνία ποὺ βαίνει στὸ μοναδιαῖο τόξο $\widehat{H\Theta}$*, ἀπὸ τὴν προηγούμενη ἰσότητα προκύπτει ἡ

$$(\widehat{\varphi}) = (\widehat{AB}).$$

Βλέπουμε δηλ. ὅτι **τὸ μέτρο τῆς γωνίας $\widehat{\varphi}$ εἶναι ἴσο μὲ τὸ μέτρο τοῦ τόξου $\widehat{AB}$, στὸ ὁποῖο βαίνει ἡ $\widehat{\varphi}$.** Συνήθως παίρνουμε γιὰ μοναδιαία γωνία ἐκείνη ποὺ βαίνει σὲ τόξο 1^o καὶ τὴν ὀνομάζουμε ἐπίσης «*μοίρα*». Ἔτσι ὅταν τὸ τόξο $\widehat{AB}$ ἐκφράζεται σὲ μοῖρες, καὶ ἡ γωνία $\widehat{\varphi}$ θὰ ἐκφράζεται σὲ μοῖρες[1].

Κάθε πεπλατυσμένη γωνία μπορεῖ νὰ θεωρηθεῖ ἐπίκεντρη γωνία κύκλου (Ο, ρ) ποὺ βαίνει σὲ ἡμικύκλιο. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ ἡμικύκλιο εἶναι τό-

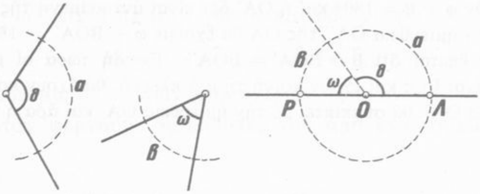
1. Πολλές φορές τό μέτρο μιᾶς γωνίας $\widehat{\varphi}$ σημειώνεται σύντονα μέ τό ἴδιο τό σύμβολο $\widehat{\varphi}$ καί ὄχι μέ τό $(\widehat{\varphi})$. Αὐτό γίνεται συνήθως, ὅταν τό μέτρο τῆς $\widehat{\varphi}$ ἐκφράζεται σέ μοῖρες. Ἔτσι π.χ. συνηθίζουμε νά γράφουμε ἰσότητες τῆς μορφῆς $\widehat{\varphi} + \widehat{\omega} + \ldots = 180^o$ στίς ὁποῖες τά γράμματα τοῦ πρώτου μέλους παριστάνουν μέτρα γωνιῶν.
Τό μέτρο μιᾶς γωνίας σέ μοῖρες βρίσκεται πρακτικά, ὅπως ξέρουμε ἀπό τό Γυμνάσιο, μέ τό μοιρογνωμόνιο.

ξο 180°, ἔπεται ὅτι **κάθε πεπλατυσμένη γωνία ἔχει μέτρο 180°**. Ἐπίσης, ἐπειδὴ ἡ πλήρης γωνία μπορεῖ νὰ θεωρηθεῖ ἐπίκεντρη ποὺ βαίνει σ' ὁλόκληρο τὸν κύκλο, ἔπεται ὅτι **κάθε πλήρης γωνία ἔχει μέτρο 360°**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5, 6

3.10. Παραπληρωματικές γωνίες.

Ὁρισμός : Δύο γωνίες $\hat{\theta}$ καὶ $\hat{\omega}$ θὰ λέγονται **παραπληρωματικές**, ἂν καὶ μόνο ἂν ἔχουν ἄθροισμα ἴσο μὲ μιὰ πεπλατυσμένη γωνία. Τότε ἡ κάθε μιὰ γωνία λέγεται καὶ «*παραπλήρωμα*» τῆς ἄλλης.



Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ ποὺ δώσαμε γίνεται φανερὸ ὅτι :

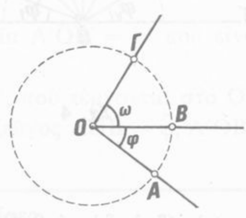
— **Δύο γωνίες εἶναι παραπληρωματικές, ἂν καὶ μόνο ἂν ἔχουν ἄθροισμα 180 μοῖρες.**

— **Τὰ παραπληρώματα τῆς ἴδιας γωνίας (ἢ ἴσων γωνιῶν) εἶναι γωνίες ἴσες.**

3.11. Ἐφεξῆς γωνίες.

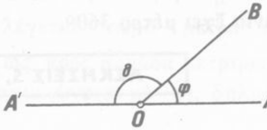
Ὁρισμός : Δύο κυρτὲς γωνίες ποὺ ἔχουν κοινὴ κορυφή, μιὰ κοινὴ πλευρὰ καὶ τὶς μὴ κοινὲς πλευρὲς ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς λέγονται **ἐφεξῆς γωνίες**.

Ἂν ἔχουμε δύο ἐφεξῆς γωνίες $\hat{\varphi}$ καὶ $\hat{\omega}$ καὶ τὶς καταστήσουμε ἐπίκεντρες τοῦ ἴδιου κύκλου, τὰ ἀντίστοιχα τόξα τους $\overset{\frown}{ΑΒ}$ καὶ $\overset{\frown}{ΒΓ}$ θὰ εἶναι διαδοχικά. Ἔτσι ἡ γωνία ποὺ ἔχει πλευρὲς τὶς μὴ κοινὲς πλευρές τους (καὶ περιέχει τὴν κοινὴ πλευρά) εἶναι ἄθροισμα τῶν δύο ἐφεξῆς γωνιῶν.

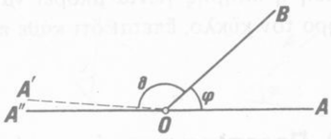


ΘΕΩΡΗΜΑ. Δύο ἐφεξῆς γωνίες εἶναι παραπληρωματικές, ἂν καὶ μόνο ἂν ἔχουν τὶς μὴ κοινὲς πλευρές τους ἀντικείμενες ἡμιευθεῖες.

Ἀπόδ. Ἄν οἱ ἐφεξῆς γωνίες $A\hat{O}B = \hat{\varphi}$ καί $B\hat{O}A' = \hat{\theta}$ ἔχουν τίς μή κοινές πλευρές



Σχ. 2



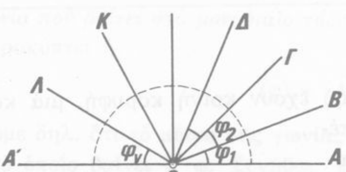
Σχ. 3

τους ἀντικείμενες ἡμιευθεῖες, τότε τό ἄθροισμα $\hat{\varphi} + \hat{\theta}$ ἰσοῦται μέ τήν πεπλατυσμένη γωνία $A\hat{O}A'$ καί ἄρα οἱ $\hat{\varphi}$ καί $\hat{\theta}$ εἶναι παραπληρωματικές.

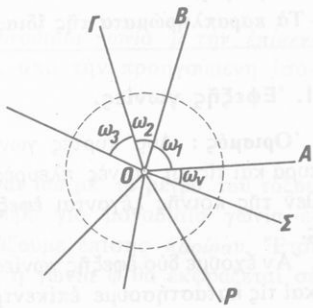
Ἀντιστρόφως, ἄν οἱ ἐφεξῆς γωνίες $A\hat{O}B = \hat{\varphi}$ καί $B\hat{O}A' = \hat{\theta}$ εἶναι παραπληρωματικές, (σχ. 3), δηλ. ἄν $\hat{\varphi} + \hat{\theta} = 180^o$ καί ἡ OA' δέν εἶναι ἀντικείμενη τῆς ΟΣ, τότε φέρνοντας τήν ἀντικείμενη ἡμιευθεία OA'' τῆς OA θά ἔχουμε $\hat{\varphi} + B\hat{O}A'' = 180^o$. Ἀπό αὐτή καί τήν $\hat{\varphi} + \hat{\theta} = 180^o$ ἕπεται ὅτι $\hat{\theta} = B\hat{O}A' = B\hat{O}A''$. Ἐπειδή τώρα οἱ μή ἐφεξῆς γωνίες $B\hat{O}A'$ καί $B\hat{O}A''$ εἶναι ἴσες καί ἔχουν κοινή τή μιά πλευρά, θά ἔχουν κοινή καί τήν ἄλλη, δηλαδή ἡ ἡμιευθεία OA'' θά συμπίπτει μέ τήν ἡμιευθεία OA' καί ἄρα ἡ OA' εἶναι ἀντικείμενη τῆς OA.

3.12. Διαδοχικές γωνίες μέ ἄθροισμα 2 ἤ 4 ὀρθές.

Ἄς πάρουμε τώρα ἕνα σημεῖο Ο μιᾶς εὐθείας $A'A$ καὶ ἂς φέρουμε στὸ ἕνα ἡμιεπίπεδο ἀκμῆς $A'A$ τὶς ἡμιευθεῖες ΟΒ, ΟΓ, ..., ΟΛ (σχ. 4) κατὰ τέτοιο τρόπο, ὥστε οἱ γωνίες $A\hat{O}B = \hat{\varphi}_1$, $B\hat{O}\Gamma = \hat{\varphi}_2$, ..., $\Lambda\hat{O}A' = \hat{\varphi}_\nu$ νὰ εἶναι



Σχ. 4



Σχ. 5

διαδοχικὲς (δηλαδὴ νὰ βαίνουν σὲ διαδοχικὰ τόξα, ὅταν γίνουν ἐπίκεντρες ἑνὸς κύκλου μὲ κέντρο τὸ Ο). Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν αὐτῶν εἶναι

$$\hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2 + ... + \hat{\varphi}_\nu = \hat{\varphi}_1 + (\hat{\varphi}_2 + \hat{\varphi}_3 + ... + \hat{\varphi}_\nu) = A\hat{O}B + B\hat{O}A' = 180^o,$$

συμπεραίνουμε ὅτι **τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν ποὺ σχημα-**

τίζονται σ' ἕνα ἡμιεπίπεδο, ὅταν φέρνουμε ἡμιευθεῖες ἀπὸ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς ἀκμῆς του, εἶναι 180°.

Ἀντίστροφα, ἂν ἔχουμε διαδοχικὲς γωνίες $\hat{\varphi}_1 = \hat{AOB}$, $\hat{\varphi}_2 = \hat{BO\Gamma}$, ..., $\hat{\varphi}_\nu = \hat{\Lambda OA'}$ ποὺ τὸ ἄθροισμά τους εἶναι 180°, τότε οἱ ἡμιευθεῖες ΟΑ καὶ ΟΑ' εἶναι ἀντικείμενες (γιατὶ οἱ γωνίες $\hat{\varphi}_1 = \hat{AOB}$ καὶ $\hat{BOA'} = \hat{\varphi}_2 + \hat{\varphi}_3 + + ... + \hat{\varphi}_\nu$ εἶναι ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικές).

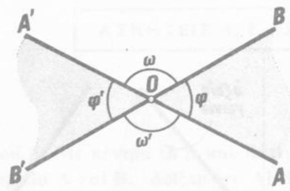
Ἂς φέρουμε τέλος ἀπὸ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Ο τοῦ ἐπιπέδου μας ἡμιευθεῖες ΟΑ, ΟΒ, ..., ΟΣ (σχ. 5) τέτοιες, ὥστε οἱ γωνίες $\hat{AOB} = \hat{\omega}_1$, $\hat{BO\Gamma} = \hat{\omega}_2$, ..., $\hat{\Sigma OA} = \hat{\omega}_\nu$ νὰ εἶναι διαδοχικές. Ἂν φέρουμε κύκλο μὲ κέντρο Ο, οἱ γωνίες $\hat{\omega}_1$, $\hat{\omega}_2$, ..., $\hat{\omega}_\nu$ θὰ βαίνουν σὲ διαδοχικὰ τόξα του, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἄθροισμα ὁλόκληρο τὸν κύκλο. Ἔτσι τὸ ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν $\hat{\omega}_1$, $\hat{\omega}_2$, ..., $\hat{\omega}_\nu$ εἶναι πλήρης γωνία καὶ θὰ ἔχουμε

$$\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 + ... + \hat{\omega}_\nu = 360°,$$

δηλαδὴ **τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν ποὺ σχηματίζονται σ' ἕνα ἐπίπεδο, ὅταν φέρνουμε ἡμιευθεῖες του ἀπὸ ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου, εἶναι 360°.**

3.13. Κατακορυφὴν γωνίες.

Ὁρισμός : Δύο κυρτὲς γωνίες, ποὺ ἔχουν κοινὴ κορυφὴ καὶ οἱ πλευρὲς τῆς μιᾶς εἶναι ἡμιευθεῖες ἀντικείμενες στὶς πλευρὲς τῆς ἄλλης, λέγονται **κατακορυφὴν γωνίες** (ἢ **καὶ ἀντικόρυφες γωνίες**).



Γιὰ νὰ σχηματίσουμε λοιπὸν τὴν κατακορυφὴν γωνία μιᾶς κυρτῆς γωνίας $\hat{AOB} = \hat{\varphi}$, φέρνουμε τὶς ἡμιευθεῖες ΟΑ' καὶ ΟΒ', τὶς ἀντικείμενες τῶν ΟΑ καὶ ΟΒ. Ἔτσι βλέπουμε ὅτι γιὰ κάθε γωνία $\hat{AOB} = \hat{\varphi}$ ὑπάρχει μιὰ καὶ μοναδικὴ γωνία $\hat{A'OB'} = \hat{\varphi}'$ ποὺ εἶναι κατακορυφὴν μὲ τὴ $\hat{\varphi}$.

Εἶναι φανερὸ ὅτι δύο εὐθεῖες ΑΑ' καὶ ΒΒ', ποὺ τέμνονται στὸ Ο, σχηματίζουν δύο ζεύγη κατακορυφὴν γωνιῶν : τὸ ζεῦγος $\hat{AOB} = \hat{\varphi}$, $\hat{A'OB'} = \hat{\varphi}'$ καὶ τὸ ζεῦγος $\hat{A'OB} = \hat{\omega}$, $\hat{AOB'} = \hat{\omega}'$.

ΘΕΩΡΗΜΑ : Οἱ κατακορυφὴν γωνίες εἶναι ἴσες.

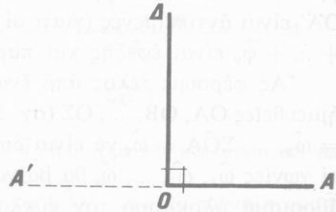
Ἀπόδ. Ἡ κάθε μιὰ ἀπὸ τὶς κατακορυφὴν γωνίες $\hat{AOB} = \hat{\varphi}$ καὶ $\hat{A'OB'} = \hat{\varphi}'$ εἶναι ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικὴ τῆς $\hat{A'OB} = \hat{\omega}$. Ἔχουμε δηλαδὴ

$$\hat{\varphi} + \hat{\omega} = 180° \quad \text{καί} \quad \hat{\varphi}' + \hat{\omega} = 180°$$

Ἀπὸ τὴ σύγκριση αὐτῶν τῶν σχέσεων προκύπτει ὅτι $\hat{\varphi} + \hat{\omega} = \hat{\varphi}' + \hat{\omega} \Rightarrow \hat{\varphi} = \hat{\varphi}'$.

3.14. Ἡ ὀρθὴ γωνία. Συμπληρωματικὲς γωνίες.

Ὁρισμός : Μία γωνία θὰ λέγεται ὀρθή, ἂν καὶ μόνον ἂν εἶναι ἴση μὲ τὸ μισὸ μιᾶς πεπλατυσμένης γωνίας.



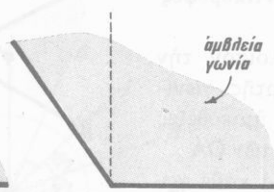
Ἂν λοιπὸν ἔχουμε μιὰ ἡμιευθεία ΟΑ καὶ θέλουμε νὰ κατασκευάσουμε ὀρθὴ γωνία μὲ κορυφὴ τὸ Ο καὶ μία πλευρὰ τὴν ΟΑ, ἀρκεῖ νὰ φέρουμε τὴν ἡμιευθεία ΟΑ΄ ἀντικείμενη τῆς ΟΑ καὶ μετὰ νὰ φέρουμε τὴ διχοτόμο ΟΔ τῆς πεπλατυσμένης γωνίας $A\hat{O}A'$. Ἐπειδὴ οἱ πεπλατυσμένες γωνίες εἶναι ἴσες καὶ κάθε μία πεπλατυσμένη γωνία εἶναι 180°, ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ ποὺ δώσαμε συμπεραίνουμε ὅτι :

—Ὅλες οἱ ὀρθὲς γωνίες εἶναι ἴσες.

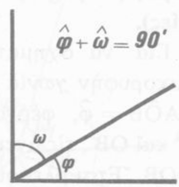
—Ἡ ὀρθὴ γωνία ἔχει μέτρο 90°.

Κάθε γωνία μικρότερη ἀπὸ τὴν ὀρθὴ λέγεται **ὀξεία γωνία**, ἐνῶ κάθε γωνία μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ὀρθὴ λέγεται **ἀμβλεία γωνία.** Τέλος δύο γωνίες $\hat{\varphi}$ καὶ

Σχ. 6



Σχ. 7



Σχ. 8

$\hat{\omega}$, ποὺ ἔχουν ἄθροισμα μιὰ ὀρθὴ γωνία, λέγονται **συμπληρωματικὲς γωνίες** καὶ ἡ κάθε μιὰ ἀπ᾽ αὐτὲς λέγεται «*συμπλήρωμα*» τῆς ἄλλης. Εἶναι φανερὸ ὅτι γιὰ δυὸ συμπληρωματικὲς γωνίες $\hat{\varphi}$ καὶ $\hat{\omega}$ ἔχουμε :

$$\hat{\varphi} + \hat{\omega} = 90°.$$

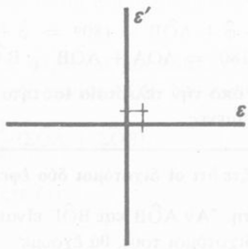
3.15. Κάθετες εὐθεῖες.

Ὁρισμός : Δύο τεμνόμενες εὐθεῖες ε καὶ ε΄, ποὺ σχηματίζουν τέσσερις διαδοχικὲς γωνίες ἴσες, λέγονται κάθετες εὐθεῖες.

Γράφουμε τότε : $ε \perp ε'$.

Ἂν $ε \perp ε'$, εἶναι φανερὸ ὅτι κάθε μιὰ ἀπὸ τὶς τέσσερις ἴσες γωνίες τους ἔχει μέτρο 90^o (ἀφοῦ και οἱ τέσσερις ἔχουν ἄθροισμα 360^o), δηλαδὴ εἶναι ὀρθή.

Ἀντιστρόφως, ἂν μία ἀπὸ τὶς διαδοχικὲς γωνίες ποὺ σχηματίζουν δύο τεμνόμενες εὐθεῖες ε καὶ ε΄ εἶναι ὀρθή, τότε οἱ εὐθεῖες ε καὶ ε΄ εἶναι κάθετες, γιατὶ τότε ὅπως εἶναι φανερὸ καὶ οἱ τέσσερις διαδοχικὲς γωνίες, ποὺ σχηματίζουν οἱ ε καὶ ε΄, εἶναι ὀρθὲς (ἀφοῦ ἡ κατακορυφὴν τῆς ὀρθῆς εἶναι ὀρθή, ἐνῶ οἱ δυὸ ἄλλες κατακορυφὴν γωνίες εἶναι ἴσες καὶ ἔχουν ἄθροισμα $360^o - 180^o = 180^o$) καὶ ἐπομένως εἶναι ὅλες ἴσες.



Δείξαμε λοιπὸν ὅτι **δύο τεμνόμενες εὐθεῖες εἶναι κάθετες, ἂν καὶ μόνο ἂν σχηματίζουν ὀρθὴ γωνία.**

Δύο εὐθύγραμμα τμήματα, ποὺ οἱ φορεῖς τους εἶναι κάθετες εὐθεῖες, θὰ λέγονται «*κάθετα τμήματα*». Ἐπίσης δύο ἡμιευθεῖες ποὺ ἀνήκουν σὲ κάθετες εὐθεῖες θὰ λέγονται «*κάθετες ἡμιευθεῖες*». Τέλος ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα θὰ λέγεται «κάθετο» σὲ εὐθεία (ἢ ἡμιευθεία), ἂν ὁ φορέας του εἶναι κάθετος στὴν εὐθεία (ἢ τὴν ἡμιευθεία).

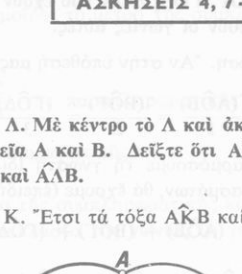
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4, 7 - 13

3.16. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Δίνεται ἕνας κυκλ(Ο, ρ) καὶ ἕνα ὁρισμένο σημεῖο του Λ. Μὲ κέντρο τὸ Λ καὶ ἀκτίνα ρ γράφουμε κύκλο ποὺ τέμνει τὸν κύκλ(Ο, ρ) στὰ σημεῖα Α καὶ Β. Δεῖξτε ὅτι $A\hat{K}B = A\hat{\Lambda}B$ καὶ ὅτι ἡ ΚΛ εἶναι διχοτόμος τῶν γωνιῶν $A\hat{K}B$ καὶ $A\hat{\Lambda}B$.**

Λύση. Ἐπειδή ΛΚ = ρ, ὁ κύκλ(Λ,ρ) περνάει ἀπό τό Κ. Ἔτσι τά τόξα $A\hat{K}B$ καί $A\hat{\Lambda}B$ εἶναι ἴσα, γιατί εἶναι τόξα ἴσων κύκλων πού ἔχουν κοινή χορδή τήν ΑΒ. Στά τόξα αὐτά ὅμως βαίνουν ἀντίστοιχα οἱ ἐπίκεντρες γωνίες $A\hat{\Lambda}B$ καί $A\hat{K}B$. Ἔτσι ἔχουμε

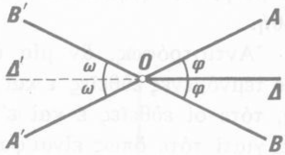
$$A\hat{\Lambda}B = A\hat{K}B.$$



Ἐπειδή ΑΛ = ΛΒ, γιατί οἱ ΑΛ καί ΛΒ εἶναι ἀκτίνες τοῦ κυκλ(Ο,ρ), τά τόξα $\overset{\frown}{A\Lambda}$ καί $\overset{\frown}{\Lambda B}$ τοῦ κυκλ(Κ,ρ) εἶναι ἴσα, γιατί ἀντιστοιχοῦν σέ ἴσες χορδές του. Ἔτσι καί οἱ ἐπίκεντρες γωνίες $A\hat{K}\Lambda$ καί $\Lambda\hat{K}B$ εἶναι ἴσες, ὁπότε ἡ ΚΛ εἶναι διχοτόμος τῆς $A\hat{K}B$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ΛΚ διχοτομεῖ τήν $A\hat{\Lambda}B$.

2. **Δεῖξτε ὅτι οἱ διχοτόμοι δύο κατακορυφὴν γωνιῶν βρίσκονται στὴν ἴδια εὐθεία.**

Λύση. Ἂν $A\hat{O}B$ καί $A'\hat{O}B'$ εἶναι οἱ κατακορυφήν γωνίες καί ΟΔ, ΟΔ′ οἱ διχοτόμοι τους, θέτουμε $A\hat{O}\Delta = \Delta\hat{O}B = \hat{\varphi}$ καί $B'\hat{O}\Delta' = \Delta'\hat{O}A' = \hat{\omega}$, ὁπότε θά εἶναι $\hat{\varphi} = \hat{\omega}$ (ἀφοῦ οἱ γωνίες $A\hat{O}B = 2\hat{\varphi}$ καί $A'\hat{O}B' = 2\hat{\omega}$ εἶναι ἴσες). Παρατηροῦμε τώρα ὅτι ἡ ἰσότητα $B\hat{O}A + A'\hat{O}B' = 180^o$ γράφεται



$$\hat{\varphi} + \hat{\varphi} + A\hat{O}B' = 180^o \Rightarrow \hat{\varphi} + A\hat{O}B' + \hat{\omega} = 180^o \Rightarrow \hat{\Delta}OA + A\hat{O}B' + B'\hat{O}\Delta' = 180^o$$

καί ἀπό τήν τελευταία ἰσότητα συμπεραίνουμε ὅτι οἱ ἡμιευθεῖες ΟΔ καί ΟΔ′ εἶναι ἀντικείμενες.

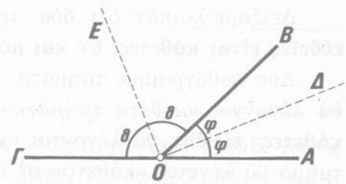
---

3. **Δεῖξτε ὅτι οἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς καί παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι κάθετες.**

Λύση. Ἂν $A\hat{O}B$ καί $B\hat{O}\Gamma$ εἶναι δύο ἐφεξῆς καί παραπληρωματικές γωνίες καί ΟΔ, ΟΕ οἱ διχοτόμοι τους, θά ἔχουμε

$$A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma = 180^o \Rightarrow \frac{A\hat{O}B}{2} + \frac{\Delta\hat{O}\Gamma}{2} = 90^o \Rightarrow \Delta\hat{O}B + B\hat{O}E = 90^o \Rightarrow \Delta\hat{O}E = 90^o$$

δηλαδή οἱ ἡμιευθεῖες ΟΔ καί ΟΕ σχηματίζουν ὀρθή γωνία, ἄρα εἶναι κάθετες.



---

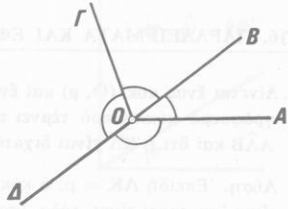
4. **Τέσσερις ἡμιευθεῖες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ σχηματίζουν τὶς διαδοχικὲς γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$, $\Delta\hat{O}A$ ποὺ ἔχουν μέτρα ἀνάλογα μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2,3,4. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ γωνίες αὐτές.**

Λύση. Ἂν στήν ὑπόθεσή μας

$$\frac{(A\hat{O}B)}{1} = \frac{(B\hat{O}\Gamma)}{2} = \frac{(\Gamma\hat{O}\Delta)}{3} = \frac{(\Delta\hat{O}A)}{4}$$

ἐφαρμόσουμε τή γνωστή ἰδιότητα τῶν ἴσων κλασμάτων, θά ἔχουμε (ἐπειδή εἶναι καί

$$(A\hat{O}B) + (B\hat{O}\Gamma) + (\Gamma\hat{O}\Delta) + (\Delta\hat{O}A) = 360^o)$$



$$\frac{(A\hat{O}B)}{1} = \frac{(B\hat{O}\Gamma)}{2} = \frac{(\Gamma\hat{O}\Delta)}{3} = \frac{(\Delta\hat{O}A)}{4} = \frac{(A\hat{O}B) + (B\hat{O}\Gamma) + (\Gamma\hat{O}\Delta) + (\Delta\hat{O}A)}{1+2+3+4} = \frac{360^o}{10}$$

$= 36^o$, ὁπότε $(A\hat{O}B) = 36^o$, $(B\hat{O}\Gamma) = 2(36^o) = 72^o$, $(\Gamma\hat{O}\Delta) = 3(36^o) = 108^o$, $(\Delta\hat{O}A) = 4(36^o) = 144^o$.

3.17 ΑΣΚΗΣΕΙΣ *

1. Δίνεται κυκλ(Ο, ρ) καί ἀκτίνα του ΟΑ. Μέ κέντρο τό Α καί ἀκτίνα $\frac{\rho}{2}$ γράφουμε κύκλο πού τέμνει τόν κυκλ(Ο,ρ) στά σημεῖα Β καί Γ. Νά δείξετε ὅτι $B\hat{O}A = A\hat{O}\Gamma$

2. Δίνεται ἡμικύκλιο μέ κέντρο Ο καί μία διάμετρός του $AB = 2\rho$. Μέ κέντρο τά Α καί Β καί ἀκτίνα ρ γράφουμε κύκλους πού τέμνουν τό ἡμικύκλιο ἀντιστοίχως στά σημεῖα Α′ καί Β′. Νά δειχθεῖ ὅτι $A\hat{O}A' = B\hat{O}B'$.

3. Δίνεται μία μή κυρτή γωνία $A\hat{O}B$ καί μία ἡμιευθεία Ο′Χ′. Νά κατασκευαστεῖ μιά γωνία ἴση μέ τήν $A\hat{O}B$ πού νά ἔχει κορυφή τό Ο′ καί μία πλευρά τήν Ο′Χ′.

4. Δεῖξτε ὅτι οἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς γωνιῶν σχηματίζουν γωνία ἴση μέ τό ἡμιάθροισμα τῶν γωνιῶν αὐτῶν.

5. Θεωροῦμε κυρτή γωνία $A\hat{O}B$ καί τή διχοτόμο της ΟΔ. Φέρνουμε μία εὐθεία ΟΡ ἐσωτερική τῆς γωνίας $B\hat{O}\Delta$ καί μία εὐθεία ΟΣ ἐξωτερική τῆς γωνίας $A\hat{O}B$. Νά δειχθεῖ ὅτι

$$P\hat{O}\Delta = \frac{1}{2}(P\hat{O}A - P\hat{O}B), \qquad \Sigma\hat{O}\Delta = \frac{1}{2}(\Sigma\hat{O}A + \Sigma\hat{O}B).$$

6. Ἄν μέ $(\hat{\varphi})$ σημειώνουμε τό μέτρο μιᾶς γωνίας $\hat{\varphi}$, δεῖξτε ὅτι

$$(\widehat{\varphi + \omega}) = (\hat{\varphi}) + (\hat{\omega}).$$

7. Ἀπό σημεῖο Ο μιᾶς εὐθείας ΑΒ φέρνουμε πρός τό ἴδιο μέρος τῆς ΑΒ ἡμιευθεῖες ΟΓ καί ΟΔ τέτοιες, ὥστε οἱ γωνίες $A\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$ καί $\Delta\hat{O}B$ νά εἶναι διαδοχικές. Ἄν ΟΕ, ΟΗ εἶναι οἱ διχοτόμοι τῶν $A\hat{O}\Gamma$, $\Delta\hat{O}B$ καί $(E\hat{O}H) = 100^o$, νά ὑπολογισθεῖ τό μέτρο τῆς γωνίας $\Gamma\hat{O}\Delta$.

8. Θεωροῦμε τέσσερις διαδοχικές ἡμιευθεῖες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ καί καλοῦμε ΟΚ, ΟΛ, ΟΜ, ΟΝ τίς διχοτόμους τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$, $\Delta\hat{O}A$. Ἄν τόσο οἱ ἡμιευθεῖες ΟΚ, ΟΜ ὅσο καί οἱ ἡμιευθεῖες ΟΛ, ΟΝ εἶναι ἀντικείμενες, νά δείξετε ὅτι οἱ ἡμιευθεῖες ΟΑ,ΟΓ καί οἱ ΟΒ,ΟΔ εἶναι ἐπίσης ἀντικείμενες.

9. Μία γωνία $\hat{\varphi}$ εἶναι ἴση μέ $\frac{4}{5}$ ὀρθῆς. Νά βρεθεῖ σέ μοῖρες τό μέτρο τῆς συμπληρωματικῆς καί τῆς παραπληρωματικῆς γωνίας τῆς $\hat{\varphi}$.

10. Ὑπολογίστε μιά γωνία $\hat{\varphi}$, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μέ τά $\frac{2}{3}$ τῆς παραπληρωματικῆς της, καί μία γωνία $\hat{\omega}$, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μέ τά $\frac{4}{5}$ τῆς συμπληρωματικῆς της.

11. Νά βρεθεῖ τό μέτρο μιᾶς γωνίας $\hat{\varphi}$, ὅταν τό ἄθροισμα τῆς συμπληρωματικῆς καί τῆς παραπληρωματικῆς της γωνίας εἶναι ἴσο μέ τό τετραπλάσιο τῆς γωνίας (ἤ γενικότερα ὅταν τό ἄθροισμα αὐτό εἶναι ἴσο μέ $\frac{\kappa}{\lambda}\hat{\varphi}$).

12. Νά βρεθεῖ ὀξεία γωνία $\hat{\varphi}$ τέτοια, ὥστε ἡ διαφορά της ἀπό τήν παραπληρωματική της νά ἰσοῦται μέ τό διπλάσιο τῆς $\hat{\varphi}$.

13. Δίνεται κυρτή γωνία $A\hat{O}\Gamma$ καί ἐσωτερική ἡμιευθεία της ΟΒ τέτοια, ὥστε ἡ διαφορά τῶν γωνιῶν $A\hat{O}\Gamma$ καί $A\hat{O}B$ νά εἶναι 90^o. Ἄν ΟΕ καί ΟΖ εἶναι οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $A\hat{O}B$ καί $A\hat{O}\Gamma$, νά δειχθεῖ ὅτι $E\hat{O}Z = 45^o$.

3.18. ΑΣΚΗΣΕΙΣ **

14. Θεωροῦμε τέσσερις διαδοχικές ἡμιευθεῖες ΟΑ,ΟΒ,ΟΓ,ΟΔ τέτοιες, ὥστε $(A\hat{O}B) =$

$= 150^o$, $(\widehat{\Gamma O \Delta}) = \frac{1}{2}$ ὀρθῆς, $(\widehat{\Delta O A}) = \frac{7}{6}$ ὀρθῆς. Νά δείξετε ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς $\widehat{BO\Gamma}$ εἶναι ἀντικείμενη ἡμιευθεία τῆς ΟΑ.

15. Ἀπό τήν κορυφή Ο μιᾶς γωνίας $\widehat{AOB}$ φέρνουμε ἐσωτερική ἡμιευθεία της ΟΡ καί δύο ἡμιευθεῖες ΟΑ΄ καί ΟΒ΄ τέτοιες, ὥστε ἡ ΟΑ νά εἶναι διχοτόμος τῆς $\widehat{A'OP}$ καί ἡ ΟΒ νά εἶναι διχοτόμός τῆς $\widehat{B'OP}$. Δεῖξτε ὅτι γιά κάθε θέση τῆς ΟΡ ἔχουμε

$$\widehat{A'OB'} = 2\widehat{AOB}.$$

16. Θεωροῦμε ν γωνίες $\widehat{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_2 ..., \widehat{\varphi_\nu}$ ἀνάλογες μέ τούς ἀριθμούς 1,2,3,...,ν. Νά ὑπολογισθοῦν τά μέτρα τῶν γωνιῶν αὐτῶν, ὅταν γνωρίζουμε ὅτι τό ἄθροισμά τους εἶναι 90^o ἤ 180^o ἤ γενικότερα κ ὀρθές.

(Γνωρίζουμε ὅτι $1 + 2 + ... + \nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$, $\forall\ \nu \in N$).

17. Σέ κυκλ(Ο,ρ) ἡ χορδή ΑΒ εἶναι τετραπλάσια ἀπό τή χορδή ΑΔ. Δεῖξτε ὅτι ἡ κυρτή γωνία $\widehat{AOB}$ εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τό τετραπλάσιο τῆς κυρτῆς γωνίας $\widehat{AO\Delta}$.

3.19 ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 3

1. Ἡ σύγκριση γωνιῶν ἀνάγεται στή σύγκριση τῶν τόξων στά ὁποῖα βαίνουν, ὅταν γίνουν ἐπίκεντρες ἴσων κύκλων. Ἄν λοιπόν ἔχουμε δύο γωνίες $\widehat{\varphi}$ καί $\widehat{\omega}$ οἱ ὁποῖες (ὅταν διαγράψουμε μέ κέντρα τίς κορυφές τους δύο ἴσους κύκλους) βαίνουν ἀντίστοιχα στά τόξα $\widehat{AB}$ καί $\widehat{\Gamma\Delta}$, θά ἔχουμε

$$\widehat{\varphi} \gtreqless \widehat{\omega} \iff \widehat{AB} \gtreqless \widehat{\Gamma\Delta}.$$

Μέ τόν ἴδιο τρόπο ὁρίζεται καί ἡ πρόσθεση καί ἡ ἀφαίρεση στό σύνολο $\mathscr{T}$ τῶν γωνιῶν. Ἔτσι, ἄν καλέσουμε πάλι $\widehat{AB}$ καί $\widehat{\Gamma\Delta}$ τά τόξα στά ὁποῖα βαίνουν (ὅταν γίνουν ἐπίκεντρες δύο κύκλων ἀκτίνας ρ) οἱ γωνίες $\widehat{\varphi}$ καί $\widehat{\omega}$, ὁρίζουμε ὡς :

— **ἄθροισμα** $\widehat{\varphi} + \widehat{\omega}$, τή γωνία πού εἶναι ἐπίκεντρη κύκλου ἀκτίνας ρ καί βαίνει στό τόξο $\widehat{AB} + \widehat{\Gamma\Delta}$.

— **Διαφορὰ** $\widehat{\varphi} - \widehat{\omega}$ τὴ γωνία ποὺ εἶναι ἐπίκεντρη κύκλου ἀκτίνας ρ καὶ βαίνει στὸ τόξο $\widehat{AB} - \widehat{\Gamma\Delta}$.

Τόσο γιά τή σύγκριση τῶν γωνιῶν ὅσο καί γιά τίς πράξεις τους ἰσχύουν οἱ ἴδιες ἰδιότητες πού ἰσχύουν στή σύγκριση καί τίς πράξεις τῶν τόξων.

2. Ὁρίζουμε ἀκόμη, **ὅπως ἀκριβῶς στὰ τόξα ἢ στὰ εὐθύγραμμα τμήματα,** τό γινόμενο $\frac{\kappa}{\lambda}\widehat{\varphi}$, ὅταν κ καί λ εἶναι φυσικοί ἀριθμοί. Ἄν ἰσχύει μία ἰσότητα τῆς μορφῆς :

$$\widehat{\omega} = \frac{\kappa}{\lambda}\widehat{\varphi},$$

ὁ ἀριθμός κ/λ λέγεται πάλι **λόγος τῆς γωνίας $\widehat{\omega}$ πρὸς τὴ γωνία $\widehat{\varphi}$** καί σημειώνεται $\widehat{\omega} / \widehat{\varphi}$. Ἄν πάρουμε γιά «μονάδα» μία ὁρισμένη γωνία $\widehat{\mu} \in \mathscr{T}$, ὁ λόγος $\widehat{\varphi} / \widehat{\mu}$ λέγεται **μέτρο τῆς γωνίας φ** καί σημειώνεται μέ $(\widehat{\varphi})$. Ἔτσι ἔχουμε καί ἐδῶ $(\widehat{\varphi}) = \widehat{\varphi} / \widehat{\mu}$.

Στή μέτρηση τῶν γωνιῶν ἰσχύουν ὅλες οἱ ἰδιότητες πού ἰσχύουν στή μέτρηση τόξων ἤ εὐθύγραμμων τμημάτων.

Συνήθως γιά μονάδα $\widehat{\mu}$ παίρνουμε τή **μοίρα**, πού εἶναι ἴση μέ τή γωνία πού (ὅταν γίνει ἐπίκεντρη κύκλου) βαίνει σέ τόξο ἴσο μέ τό 1/360 τοῦ κύκλου. Τότε :

— Ἡ πλήρης γωνία ἔχει μέτρο 360^o καί ἡ πεπλατυσμένη γωνία ἔχει μέτρο 180^o.

— Μία γωνία πού ἔχει μέτρο 90^o λέγεται **ὀρθὴ γωνία**.

— Κάθε γωνία μικρότερη (ἤ μεγαλύτερη) ἀπό τήν ὀρθή λέγεται **ὀξεία (ἤ ἀμβλεία)** γωνία.

— Δύο γωνίες πού ἔχουν ἄθροισμα 180^o λέγονται **παραπληρωματικές**.

— Δυὸ γωνίες ποὺ ἔχουν ἄθροισμα 90^o λέγονται **συμπληρωματικές**.

3. Δύο κυρτές γωνίες λέγονται **ἐφεξῆς**, ἄν ἔχουν κοινή κορυφή, μιά κοινή πλευρά καί τίς μή κοινές πλευρές ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς.

— **Δύο ἐφεξῆς γωνίες εἶναι παραπληρωματικές, ἂν καὶ μόνο ἂν οἱ μὴ κοινὲς πλευρὲς τους εἶναι ἀντικείμενες ἡμιευθεῖες.**

Γενικότερα, ἄν ἀπό ἕνα σημεῖο μιᾶς εὐθείας ε φέρουμε ἡμιευθεῖες στό ἕνα ἡμιεπίπεδο ἀκμῆς ε, τότε ὅλες οἱ διαδοχικές γωνίες πού σχηματίζουνται ἔχουν ἄθροισμα 180^o. Ἀντιστρόφως, ἄν διαδοχικές γωνίες $\widehat{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_2, ..., \widehat{\varphi}_\nu$ ἔχουν ἄθροισμα 180^o, τότε ἡ πρώτη πλευρά τῆς $\widehat{\varphi}_1$ καί ἡ δεύτερη πλευρά τῆς $\widehat{\varphi}_\nu$ εἶναι ἀντικείμενες ἡμιευθεῖες.

Δύο γωνίες λέγονται **κατακορυφήν**, ἄν ἔχουν κοινή κορυφή καί οἱ πλευρές τῆς μιᾶς εἶναι ἡμιευθεῖες ἀντικείμενες μέ τίς πλευρές τῆς ἄλλης.

— **Οἱ κατακορυφὴν γωνίες εἶναι ἴσες.**

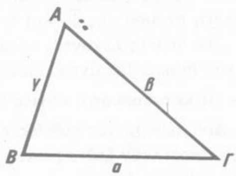
Δύο τεμνόμενες εὐθεῖες ε καί ε΄ σχηματίζουν τέσσερις διαδοχικές γωνίες πού ἀνά δύο ἀποτελοῦν ζεῦγος κατακορυφήν γωνιῶν. Οἱ τεμνόμενες εὐθεῖες ε καί ε΄ θά λέγονται **κάθετες**, ἄν καί μόνο ἄν οἱ τέσσερις γωνίες πού σχηματίζουν εἶναι ἴσες (ὁπότε καθεμιά τους εἶναι ὀρθή γωνία).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

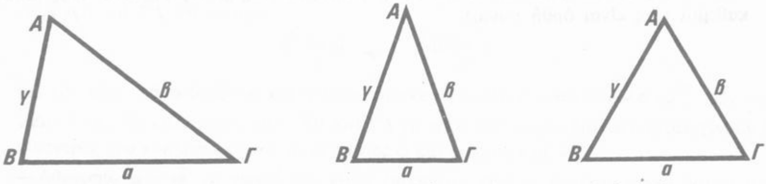
ΤΡΙΓΩΝΑ

4.1. Είδη τριγώνων.

Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ μὲ κορυφὲς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, οἱ πλευρὲς ποὺ βρίσκονται ἀπέναντι ἀπὸ τὶς κορυφὲς αὐτὲς (ἢ ἀπέναντι ἀπὸ τὶς γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$) σημειώνονται ἀντίστοιχα μὲ α, β, γ. Ἔχουμε λοιπόν :



$$\alpha = \mathrm{B\Gamma},\ \beta = \mathrm{A\Gamma},\ \gamma = \mathrm{AB}.$$



σκαληνό — ισοσκελές $\beta = \gamma$ — ισόπλευρο $\alpha = \beta = \gamma$

Ἕνα τρίγ. ΑΒΓ, ποὺ ἐξετάζεται ὡς πρὸς τὶς πλευρές του, λέγεται :

- **σκαληνό**, ἂν οἱ πλευρές του εἶναι ἄνισες μεταξύ τους,
- **ἰσοσκελές**, ἂν δύο πλευρές του εἶναι ἴσες,
- **ἰσόπλευρο**, ἂν καὶ οἱ τρεῖς πλευρές του εἶναι ἴσες.

Σ' ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο μὲ $\beta = \gamma$ ἡ τρίτη πλευρά του $\mathrm{B\Gamma} = \alpha$ λέγεται καὶ *βάση* του. Τὸ ἰσόπλευρο τρίγωνο μπορεῖ νὰ θεωρηθεῖ καὶ ἰσοσκελὲς μὲ βάση ὁποιαδήποτε πλευρά του.

Ἔχουμε ἀποδείξει (§ 1.17), ὅτι κάθε πλευρὰ τριγώνου εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων καὶ μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ διαφορά τους. Ἔτσι π.χ. ἂν $\beta > \gamma$, γιὰ τὴν πλευρὰ α ἔχουμε :

$$\boldsymbol{\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma}$$

Ἕνα τρίγωνο ποὺ ἐξετάζεται ὡς πρὸς τὶς γωνίες του λέγεται :

- **ὀξυγώνιο**, ἂν ὅλες του οἱ γωνίες εἶναι ὀξεῖες,
- **ὀρθογώνιο**, ἂν μία γωνία του εἶναι ὀρθή,
- **ἀμβλυγώνιο**, ἂν μία γωνία του εἶναι ἀμβλεία.

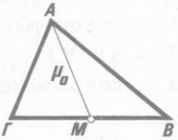
Σὲ ὀρθογώνιο τρίγωνο ἡ πλευρὰ ποὺ βρίσκεται ἀπέναντι ἀπὸ τὴν ὀρθὴ γωνία λέγεται **ὑποτείνουσα.**

4.2. Διάμεσοι, διχοτόμοι καί ὕψη τριγώνου.

Σ' ἕνα τρίγωνο ὁρίζουμε τὰ ἑξῆς στοιχεῖα :

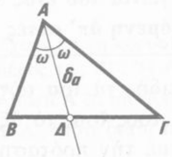
α) **Διάμεσοι :** Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ποὺ συνδέει μιὰ κορυφὴ ἑνὸς τριγώνου μὲ τὸ μέσο τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς του λέγεται **διάμεσος** τοῦ τριγώνου.

Ἔτσι, ἂν Μ εἶναι τὸ μέσο τῆς ΒΓ (σχ. 1), τὸ τμῆμα ΑΜ εἶναι ἡ διάμεσος τοῦ τριγ. ΑΒΓ πρὸς τὴν πλευρά του α καὶ σημειώνεται : μ_α. Τὸ τρίγωνο λοιπὸν ἔχει τρεῖς διαμέσους, ποὺ θὰ σημειώνονται ἀντίστοιχα : μ_α, μ_β, μ_γ.



Σχ. 1

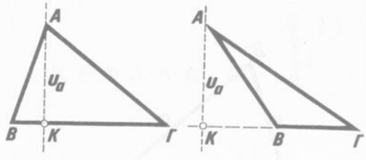
β) **Διχοτόμοι** : Ἄς θεωρήσουμε τὴ διχοτόμο τῆς γωνίας Â ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἄς ὀνομάσουμε Δ τὸ σημεῖο, στὸ ὁποῖο αὐτὴ τέμνει τὴν ἀπέναντι πλευρὰ α (σχ. 2). Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΔ λέγεται **ἐσωτερικὴ διχοτόμος τοῦ τριγώνου** ἢ ἁπλῶς **διχοτόμος τοῦ τριγώνου** καὶ θὰ σημειώνεται δ_α.



Σχ. 2

Ἔτσι ἕνα τρίγ. ΑΒΓ ἔχει τρεῖς διχοτόμους, ποὺ θὰ σημειώνονται ἀντίστοιχα δ_α, δ_β, δ_γ.

γ) Ὕψη: Ἄς θεωρήσουμε μιὰ εὐθεία ε ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφὴ Α καὶ εἶναι κάθετη[1] στὴν εὐθεία ΒΓ. Ἄν ὀνομάσουμε Κ τὸ σημεῖο στὸ ὁποῖο ἡ ε τέμνει τὴν ΒΓ (σχ. 3), τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΚ λέγεται **ὕψος** τοῦ τριγώνου καὶ θὰ σημειώνεται μὲ $υ_α$. Ἔτσι ἕνα τρίγ. ΑΒΓ ἔχει τρία ὕψη, ποὺ θὰ σημειώνονται ἀντίστοιχα: $υ_α$, $υ_β$, $υ_γ$.



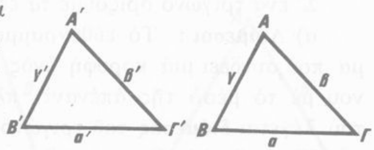
Σχ. 3

Ἄν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τὴ διάμεσο $ΑΜ = μ_α$, τὴ διχοτόμο $ΑΔ = δ_α$ καὶ τὸ ὕψος $ΑΚ = υ_α$, τὰ σημεῖα Μ καὶ Δ εἶναι πάντοτε ἐσωτερικὰ σημεῖα τῆς πλευρᾶς ΒΓ, ἐνῶ τὸ σημεῖο Κ μπορεῖ νὰ βρίσκεται καὶ στὴν προέκταση τῆς ΒΓ (σχ. 3).

4.3. Ἰσότητα τριγώνων.

Ὁρισμός: Δύο τρίγωνα θά λέγονται ἴσα, ἄν καὶ μόνο ἄν ἔχουν τίς πλευρές τους μία πρός μία ἴσες καί τίς ἀπέναντι ἀπό τίς ἴσες πλευρές γωνίες τους ἐπίσης ἴσες.

Γιὰ νὰ δηλώσουμε ὅτι τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ἴσα, θὰ γράφουμε τριγ.ΑΒΓ = τριγΑ΄Β΄Γ΄ ἢ ἁπλῶς ΑΒΓ = Α΄Β΄Γ΄. Σὲ ἴσα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ τοποθετοῦμε ἔτσι τὰ γράμματα τῶν κορυφῶν τους, ὥστε νὰ εἶναι Α΄Β΄ = ΑΒ, Β΄Γ΄ = ΒΓ, Γ΄Α΄ = ΓΑ. Ἔχουμε λοιπὸν κατὰ τὸν ὁρισμό μας



$$\text{τριγ}ΑΒΓ = \text{τριγ}Α'Β'Γ' \iff \begin{cases} α = α',\ β = β',\ γ = γ' \\ \hat{Α} = \hat{Α}',\ \hat{Β} = \hat{Β}',\ \hat{Γ} = \hat{Γ}'. \end{cases}$$

Δεχόμαστε τὸ ἀξίωμα:

Ἄν δύο τρίγωνα εἶναι τέτοια, ὥστε δύο πλευρὲς καὶ ἡ περιεχόμενη ἀπ' αὐτὲς γωνία τοῦ ἑνὸς νὰ εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μὲ δύο πλευρὲς καὶ τὴν περιεχόμενη ἀπ' αὐτὲς γωνία τοῦ ἄλλου, τότε τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.

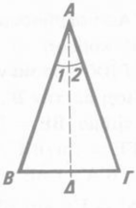
Ἐπειδὴ τὰ ἴσα αὐτὰ τρίγωνα θὰ ἔχουν καὶ τὰ ὑπόλοιπα ἀντίστοιχα στοιχεῖα τους ἴσα, τὸ ἀξίωμά μας γιὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ διατυπώνεται μὲ τὴν πρόταση:

$$β = β',\ γ = γ',\ \hat{Α} = \hat{Α}' \Rightarrow \begin{cases} \text{τριγ}ΑΒΓ = \text{τριγ}Α'Β'Γ' \\ α = α',\ \hat{Β} = \hat{Β}',\ \hat{Γ} = \hat{Γ}'. \end{cases}$$

1. Θὰ δοῦμε παρακάτω ὅτι ὑπάρχει μία καὶ μόνο μία τέτοια εὐθεία.

Σὰν ἐφαρμογὴ τοῦ παραπάνω ἀξιώματος θὰ ἀποδείξουμε ὅτι:

ΘΕΩΡΗΜΑ: Σὲ κάθε τρίγωνο ἀπέναντι ἀπὸ ἴσες πλευρὲς βρίσκονται ἴσες γωνίες, δηλ. $\beta = \gamma \Rightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma}$.



Ἀπόδ. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ μέ ΑΒ = ΑΓ. Ἄν φέρουμε τή διχοτόμο του ΑΔ, ἔχουμε τριγΑΒΔ = τριγΑΓΔ (γιατί ΑΒ = ΑΓ, ΑΔ = ΑΔ, $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$) καί ἄρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Ἀπὸ τὴν πρόταση αὐτὴ ἔχουμε ἀμέσως τὰ πορίσματα:

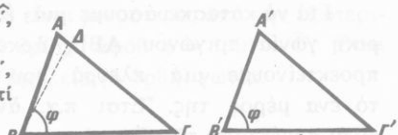
— Στό ἰσοσκελές τρίγωνο οἱ γωνίες πού πρόσκεινται στή βάση του εἶναι ἴσες.

— Σέ ἰσόπλευρο τρίγωνο ὅλες οἱ γωνίες του εἶναι ἴσες.

4.4. Κριτήρια ἰσότητας τριγώνων.

Τὸ ἀξίωμα τῆς § 4.3 εἶναι κριτήριο ἰσότητας τριγώνων, δηλαδὴ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ διαπιστώσουμε τὴν ἰσότητα δύο τριγώνων μὲ λιγότερα στοιχεῖα ἀπὸ ὅσα ἀπαιτεῖ ὁ ὁρισμός της. Δύο ἄλλα βασικὰ κριτήρια ἰσότητας τριγώνων δίνουν τὰ θεωρήματα:

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι. Ἄν δύο τρίγωνα εἶναι τέτοια, ὥστε μία πλευρὰ καὶ οἱ προσκείμενες σ' αὐτὴ γωνίες τοῦ ἑνὸς νὰ εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μὲ μία πλευρὰ καὶ τὶς προσκείμενες σ' αὐτὴ γωνίες τοῦ ἄλλου, τότε τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.



Ἀπόδ. Ἄς θεωρήσουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ τέτοια, ὥστε ΒΓ = Β΄Γ΄, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$.

Ἄν πάρουμε στήν πλευρά ΓΑ τμῆμα ΓΔ = Γ΄Α΄, παρατηροῦμε ὅτι τριγ. ΔΒΓ = τριγ Α΄Β΄Γ΄ (γιατί ΒΓ = Β΄Γ΄, ΓΔ = Γ΄Α΄, $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$) καί ἄρα

$$\Delta\hat{B}\Gamma = \hat{B}' = \hat{B}.$$

Τότε ὅμως οἱ ἴσες γωνίες $\Delta\hat{B}\Gamma$ καί $A\hat{B}\Gamma$ θά ταυτίζονται, γιατί ἔχουν κοινή κορυφή Β, κοινή πλευρά ΒΓ καί τίς μή κοινές πλευρές τους πρός τό ἴδιο μέρος τῆς ΒΓ. Ἡ ἡμιευθεία λοιπόν ΒΔ ταυτίζεται μέ τήν ἡμιευθεία ΒΑ καί ἄρα τό $\{\Delta\} = B\Delta \cap \Gamma A$ θά ταυτίζεται μέ τό $\{A\} = BA \cap \Gamma A$. Ἔτσι τά τρίγωνα μας ἔχουν καί ΓΑ = ΓΔ = Γ΄Α΄, ὁπότε (κατά τό ἀξίωμα τῆς § 4.3) εἶναι ἴσα.

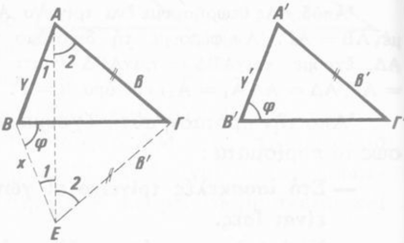
Ἔτσι λοιπὸν σὲ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ ἰσχύει ἡ πρόταση:

$$\alpha = \alpha',\ \hat{B} = \hat{B}',\ \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}' \Rightarrow \begin{cases} \text{τριγ}AB\Gamma = \text{τριγ}A'B'\Gamma' \\ \beta = \beta',\ \gamma = \gamma',\ \hat{A} = \hat{A}'. \end{cases}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ. Ἂν δύο τρίγωνα εἶναι τέτοια, ὥστε οἱ πλευρὲς τοῦ ἑνὸς νὰ εἶναι ἴσες μία πρὸς μία μὲ τὶς πλευρὲς τοῦ ἄλλου, τότε τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.

Ἀπόδ. Ἄς θεωρήσουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ μέ ΑΒ = Α΄Β΄ καί ἄς κατασκευάσουμε μέ κορυφή τό Β καί πλευρά ΒΓ μία γωνία $\widehat{ΓΒΧ}$ ἡ ὁποία νά εἶναι ἐφεξῆς μέ τήν $\hat{Β}$ καί ἴση μέ τήν $\hat{Β}'$. Ἄν πάνω στή ΒΧ πάρουμε τμῆμα ΒΕ = Β΄Α΄ = ΒΑ, θά ἔχουμε τριγΒΓΕ = τριγΒ΄Γ΄Α΄ (γιατί ΒΓ = = Β΄Γ΄, ΒΕ = Β΄Α΄, $\widehat{ΓΒΕ} = \hat{Β}'$) καί ἄρα

ΓΕ = Γ΄Α΄ = ΓΑ καί $\widehat{ΒΕΓ} = \hat{Α}'$.



Παρατηροῦμε τώρα ὅτι ἀπό τά ἰσοσκελή τρίγωνα ΑΒΕ καί ΑΓΕ ἔχουμε $\hat{Α}_1 = \hat{Ε}_1$, $\hat{Α}_2 = \hat{Ε}_2 \Rightarrow \hat{Α}_1 + \hat{Α}_2 = \hat{Ε}_1 + \hat{Ε}_2$ καί ἐπομένως $\hat{Α} = \widehat{ΒΕΓ} = \hat{Α}'$. Ἔτσι τά τρίγωνά μας εἶναι ἴσα,γιατί ἔχουν β = β΄, γ = γ΄, $\hat{Α} = \hat{Α}'$.

Δείξαμε λοιπὸν ὅτι σὲ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ ἰσχύει ἡ πρόταση :

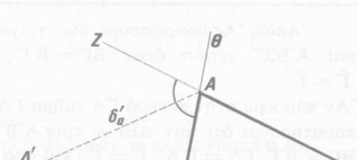
$$\alpha = \alpha',\ \beta = \beta',\ \gamma = \gamma' \ \Rightarrow \begin{cases} \text{τριγ}ΑΒΓ = \text{τριγ}Α'Β'Γ' \\ \hat{Α} = \hat{Α}',\ \hat{Β} = \hat{Β}',\ \hat{Γ} = \hat{Γ}'. \end{cases}$$

Προσέξτε : Ὅλα τὰ κριτήρια ἰσότητας δύο τριγώνων περιέχουν μία τουλάχιστον ἰσότητα μεταξὺ τῶν πλευρῶν τους, δηλαδὴ ἀπαραίτητο στοιχεῖο ἰσότητας δύο τριγώνων εἶναι ἡ ἰσότητα μιᾶς τουλάχιστον πλευρᾶς τοῦ ἑνὸς μὲ μιὰ πλευρὰ τοῦ ἄλλου.

4.5. Ἐξωτερικές γωνίες τριγώνου.

Ὁρισμός : Κάθε γωνία ποὺ εἶναι ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικὴ μιᾶς γωνίας ἑνὸς τριγώνου λέγεται **ἐξωτερικὴ γωνία** τοῦ τριγώνου.

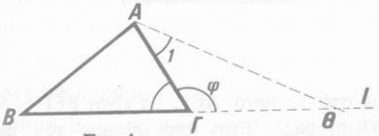
Γιὰ νὰ κατασκευάσουμε μιὰ ἐξωτερικὴ γωνία τριγώνου ΑΒΓ, ἀρκεῖ νὰ προεκτείνουμε μιὰ πλευρά του πρὸς τὸ ἕνα μέρος της. Ἔτσι π.χ. ἂν ΑΖ εἶναι προέκταση τῆς ΓΑ, ἡ γωνία $\widehat{ΖΑΒ}$ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΓ μὲ κορυφὴ τὸ Α καὶ λέμε γι᾽ αὐτὴ ὅτι ἔχει «*ἀπέναντι*» της τὶς ἐσωτερικὲς γωνίες $\hat{Β}$ καὶ $\hat{Γ}$. Παρατηροῦμε ὅτι ὡς ἐξωτερικὴ γωνία μὲ κορυφὴ Α μποροῦμε νὰ πάρουμε καὶ τὴν $\widehat{ΘΑΓ}$ ποὺ σχηματίζεται, ἂν προεκτείνουμε τὴν ΒΑ, ἡ γωνία ὅμως αὐτὴ εἶναι κατακορυφὴν καὶ ἄρα ἴση μὲ τὴν $\widehat{ΖΑΒ}$.



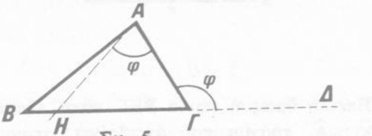
Ἂν ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας $\widehat{ΖΑΒ}$ τέμνει τὴν προέκταση τῆς πλευρᾶς ΒΓ στὸ Δ΄, τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΔ΄ λέγεται **ἐξωτερικὴ διχοτόμος** τῆς γωνίας $\hat{Α}$ καὶ θὰ σημειώνεται δ'_α. Ἔτσι ἕνα τρίγωνο ἔχει τρεῖς ἐξωτερικὲς διχοτόμους ποὺ θὰ τὶς σημειώνουμε ἀντίστοιχα δ'_α, δ'_β, δ'_γ.

ΘΕΩΡΗΜΑ : Κάθε ἐξωτερικὴ γωνία τριγώνου ΑΒΓ εἶναι μεγαλύτερη καὶ ἀπὸ τὶς δύο ἀπέναντί της ἐσωτερικὲς γωνίες.

'Απόδ. Ἄς θεωρήσουμε τρίγωνο ΑΒΓ καί τήν ἐξωτερική του γωνία $A\hat{\Gamma}I = \hat{\varphi}$. Γιά νά δείξουμε π.χ. ὅτι $\hat{\varphi} > \hat{A}$, ἀρκεῖ νά ἀποκλείσουμε τίς περιπτώσεις $\hat{\varphi} = \hat{A}$ καί $\hat{\varphi} < \hat{A}$. Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι $\hat{\varphi} = \hat{A}$ καί πάρουμε στήν προέκταση ΓΙ τῆς ΒΓ τμῆμα $\Gamma\Theta = AB$ (σχ. 4), ἔχουμε τριγ$A\Gamma\Theta$ = τριγ$A\Gamma B$ (γιατί $A\Gamma = A\Gamma$, $\Gamma\Theta = AB$, $A\hat{\Gamma}\Theta = \hat{A}$) καί ἄρα $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$. Ἔτσι ἡ φανερή ἀπό τό σχῆμα μας ἰσότητα $\hat{\Gamma} + \hat{\varphi} = 180^o$ γράφεται



Σχ. 4

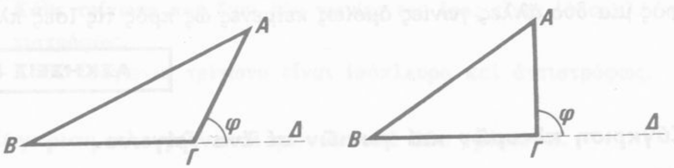


Σχ. 5

$\hat{A}_1 + \hat{A} = 180^o$ καί ἑπομένως θά πρέπει οἱ ἐφεξῆς γωνίες $\hat{A}_1$ καί $\hat{A}$ νά ἔχουν τίς μή κοινές πλευρές τους ΑΒ καί ΑΘ ἐπ' εὐθείας, πράγμα ἀδύνατο, ἀφοῦ τό Α δέν ἀνήκει στήν ΒΘ.

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι $\hat{\varphi} < \hat{A}$ καί φέρουμε ἐσωτερική ἡμιευθεία τῆς $\hat{A}$ πού τέμνει τήν ΒΓ στό Η (σχ. 5) καί σχηματίζει γωνία $\hat{\varphi}$ μέ τήν ΑΓ, τό τρίγωνο ΑΗΓ ἔχει τήν ἐξωτερική γωνία του $A\hat{\Gamma}\Delta$ ἴση μέ μιά ἀπέναντί της ἐσωτερική, πράγμα ἀδύνατο κατά τήν προηγούμενη ἀπόδειξη.

'Από τὸ θεώρημα αὐτὸ προκύπτει ὅτι **κάθε τρίγωνο ποὺ ἔχει μιὰ γωνία του ἀμβλεία (ἢ ὀρθὴ) θὰ ἔχει τὶς ἄλλες δύο γωνίες του ὀξεῖες,** γιατί ἂν π.χ. εἶναι $\hat{\Gamma} \geq 90^o$, οἱ γωνίες $\hat{A}$ καὶ $\hat{B}$ εἶναι μικρότερες ἀπὸ τὴν ἐξωτερικὴ γωνία $A\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\varphi}$ ποὺ εἶναι ὀξεία (ἢ ὀρθή), ἀφοῦ $\hat{\varphi} = 180^o - \hat{\Gamma}$. Ἔτσι ἕνα τρίγωνο μπορεῖ νὰ ἔχει μιὰ τὸ πολὺ ἀμβλεία (ἢ ὀρθὴ) γωνία.



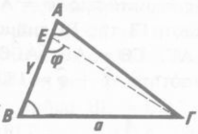
4.6. Ἕνα κριτήριο ἰσότητας.

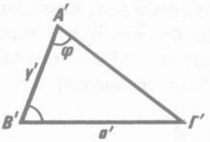
Θὰ ἀποδείξουμε τώρα ἕνα ἀκόμη κριτήριο ἰσότητας δύο τριγώνων.

ΘΕΩΡΗΜΑ : Ἄν δύο τρίγωνα εἶναι τέτοια, ὥστε μία πλευρά, ἡ ἀπέναντί της γωνία καὶ μιὰ προσκείμενη σ' αὐτὴ γωνία τοῦ ἑνὸς τριγώνου νὰ εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μὲ μιὰ πλευρά, τὴν ἀπέναντί της γωνία καὶ μία προσκείμενη σ' αὐτὴ γωνία τοῦ ἄλλου τριγώνου, τότε τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.

'Απόδ. Ἄν θεωρήσουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α'Β'Γ' τέτοια, ὥστε $B\Gamma = B'\Gamma'$, $\hat{A} = \hat{A}'$ καί $\hat{B} = \hat{B}'$, θά ἀποδείξουμε ὅτι ἔχουμε σ' αὐτά καί $AB = A'B'$. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $AB \neq A'B'$ καί μάλιστα ὅτι $AB > A'B'$. Τότε, ἄν πάρουμε στήν ΒΑ τμῆμα

ΒΕ = Β'Α', θά έχουμε τριγΒΕΓ = τριγΒ'Α'Γ' (γιατί ΒΕ = Β'Α', ΒΓ = Β'Γ', $\hat{B} = \hat{B}'$) καί τότε : $B\hat{E}\Gamma = \hat{A}'$.





Ἐπειδή ὅμως ἡ γωνία $B\hat{E}\Gamma$ εἶναι ἐξωτερική στό τρίγωνο ΑΕΓ, θά εἶναι $B\hat{E}\Gamma > \hat{A} \Rightarrow \hat{A}' > \hat{A}$, πράγμα πού ἀντιβαίνει στήν ὑπόθεση μας. Ἔτσι ἀποκλείσαμε τήν περίπτωση $AB \neq A'B'$ καί ἄρα δέν ἀπομένει παρά ἡ $AB = A'B'$, πού μᾶς ἐξασφαλίζει ὅτι τά τρίγωνα εἶναι ἴσα (γιατί ἔχουν $\alpha = \alpha'$, $\gamma = \gamma'$ καί $\hat{B} = \hat{B}'$).

Δείξαμε λοιπὸν ὅτι σὲ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἰσχύει ἡ πρόταση :

$$\alpha = \alpha',\ \hat{A} = \hat{A}',\ \hat{B} = \hat{B}' \Rightarrow \begin{cases} \text{τριγ}AB\Gamma = \text{τριγ}A'B'\Gamma' \\ \beta = \beta',\ \gamma = \gamma',\ \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'. \end{cases}$$

Ἔτσι λοιπὸν δύο τρίγωνα, στὰ ὁποῖα μία πλευρὰ τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴση μὲ μία πλευρὰ τοῦ ἄλλου, θὰ εἶναι ἴσα ὄχι μόνον ὅταν ἔχουν ἴσες μία πρὸς μία τὶς προσκείμενες στὶς ἴσες πλευρὲς γωνίες τους, ἀλλὰ καὶ ὅταν ἔχουν ἴσες μία πρὸς μία δύο ἄλλες γωνίες ὁμοίως κείμενες ὡς πρὸς τὶς ἴσες πλευρές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1 - 6

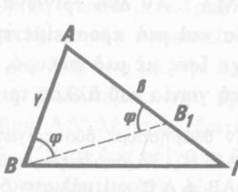
4.7. Σύγκριση πλευρῶν καί γωνιῶν σέ ἕνα τρίγωνο.

Εἴδαμε ὅτι σ' ἕνα τρίγωνο ἀπέναντι ἀπὸ ἴσες πλευρές βρίσκονται ἴσες γωνίες (βλ. § 4.3). Γενικεύοντας τὴν ἰδιότητα αὐτὴ θὰ δείξουμε ὅτι :

ΘΕΩΡΗΜΑ : Σὲ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ οἱ γωνίες ποὺ βρίσκονται ἀπέναντι ἀπὸ δύο ἄνισες πλευρὲς εἶναι ὁμοιότροπα ἄνισες καὶ ἀντιστρόφως, δηλαδὴ

$$\beta > \gamma \Leftrightarrow \hat{B} > \hat{\Gamma}.$$

Ἀπόδ. Θεωροῦμε τρίγωνο ΑΒΓ καί $A\Gamma > AB$ καί παίρνουμε στήν ΑΓ τμῆμα $AB_1 = AB$. Τότε τό τρίγωνο BAB_1 εἶναι ἰσοσκελές μέ βάση BB_1 καί ἔχουμε $A\hat{B}B_1 = A\hat{B}_1B = \varphi$. Ἡ γωνία ὅμως $A\hat{B}B_1 = \hat{\varphi}$ εἶναι μικρότερη ἀπό τή $\hat{B}$, ἐνῶ ἡ $A\hat{B}_1B = \hat{\varphi}$ εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τή $\hat{\Gamma}$, γιατί εἶναι ἐξωτερική τοῦ τριγώνου $BB_1\Gamma$.



Ἄρα ἔχουμε $\hat{B} > \hat{\varphi}$ καί $\hat{\varphi} > \hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{B} > \hat{\Gamma}$.

Ἀντιστρόφως, ἄν στό τρίγωνο ΑΒΓ ἔχουμε $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$, τότε θά εἶναι $A\Gamma > AB$ (ἀφοῦ ἄν ἦταν $A\Gamma = AB$ ἤ $A\Gamma < AB$, θά εἴχαμε καί $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ ἤ $\widehat{B} < \widehat{\Gamma}$).

Ἀπὸ τὸ θεώρημα αὐτὸ συμπεραίνουμε ὅτι ἀπέναντι ἀπὸ τὴ μεγαλύτερη πλευρὰ (ἢ γωνία) τριγώνου βρίσκεται ἡ μεγαλύτερη γωνία (ἢ πλευρά) του. Ἔτσι π.χ. μεγαλύτερη πλευρὰ ἑνὸς ὀρθογώνιου τριγώνου εἶναι ἡ ὑποτείνουσα (ἀφοῦ μεγαλύτερη γωνία τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου εἶναι ἡ ὀρθή). Ἐπίσης, μεγαλύτερη πλευρὰ ἑνὸς ἀμβλυγώνιου τριγώνου εἶναι αὐτὴ ποὺ βρίσκεται ἀπέναντι ἀπὸ τὴν ἀμβλεία γωνία του.

Καταλαβαίνουμε ἀκόμη ὅτι, ἂν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἔχουμε $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, τότε θὰ ἔχουμε καὶ $\beta = \gamma$ (γιατί, ἂν ἦταν $\beta > \gamma$ ἢ $\beta < \gamma$, θὰ εἴχαμε ἀπὸ τὸ θεώρημα $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$ ἢ $\widehat{B} < \widehat{\Gamma}$, πού δέ συμβιβάζεται μὲ τὴν ὑπόθεσή μας). Ἡ ἰδιότητα αὐτὴ εἶναι τὸ ἀντίστροφο τοῦ θεωρήματος τῆς § 4.3. Ἔτσι ἔχουμε τώρα τὴν πιὸ ὁλοκληρωμένη πρόταση :

ΘΕΩΡΗΜΑ : Σὲ κάθε τρίγωνο ἀπέναντι ἀπὸ ἴσες πλευρὲς βρίσκονται ἴσες γωνίες καὶ ἀντιστρόφως, δηλαδή :

$$\beta = \gamma \iff \widehat{B} = \widehat{\Gamma}$$

Ἀπὸ τὴν πρόταση αὐτὴ ἔχουμε ἀμέσως τὰ πορίσματα :

— **Κάθε τρίγωνο ποὺ ἔχει δύο γωνίες του ἴσες εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἀντιστρόφως.**

— **Κάθε ἰσογώνιο τρίγωνο εἶναι ἰσόπλευρο καὶ ἀντιστρόφως.**

4.8. Σύγκριση πλευρῶν καὶ γωνιῶν σέ δύο τρίγωνα.

Εἴδαμε ὅτι, ἂν δύο τρίγωνα ἔχουν ἴσες μία πρὸς μία δύο πλευρὲς τους καὶ τὶς περιεχόμενες ἀπὸ τὶς πλευρὲς αὐτὲς γωνίες ἐπίσης ἴσες, τότε τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα καὶ θὰ ἔχουν ἴσα καὶ ὅλα τὰ ἄλλα ἀντίστοιχα στοιχεῖα τους. Θὰ συγκρίνουμε τώρα ἀντίστοιχα στοιχεῖα σὲ δύο τρίγωνα, ποὺ ἔχουν πάλι ἴσες μία πρὸς μία δύο πλευρές τους ἀλλὰ οἱ περιεχόμενες ἀπὸ τὶς πλευρὲς αὐτὲς γωνίες εἶναι ἄνισες.

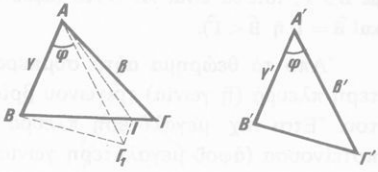
ΘΕΩΡΗΜΑ Ι : Δύο τρίγωνα ποὺ ἔχουν ἴσες μία πρὸς μία δύο πλευρές τους, ἂν ἔχουν τὶς περιεχόμενες ἀπὸ τὶς ἴσες πλευρὲς γωνίες ἄνισες, τότε θὰ ἔχουν ὁμοιότροπα ἄνισες καὶ τὶς τρίτες πλευρές τους καὶ ἀντιστρόφως, δηλαδὴ

$$\beta = \beta',\ \gamma = \gamma',\ \widehat{A} > \widehat{A}' \iff \beta = \beta',\ \gamma = \gamma',\ \alpha > \alpha'.$$

Ἀπόδ. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $\widehat{A} > \widehat{A}'$. Φέρνουμε ἐσωτερική ἡμιευθεία τῆς $\widehat{A}$ πού νά σχηματίζει μέ τήν ΑΒ γωνία ἴση μέ $\widehat{A}'$ καί παίρνουμε σ' αὐτή τμῆμα $A\Gamma_1 = A'\Gamma'$.

Τότε ἔχουμε τριγ$AB\Gamma_1$ = τριγ$A'B'\Gamma'$ (γιατί $AB = A'B'$, $A\Gamma_1 = A'\Gamma'$, $B\hat{A}\Gamma_1 = \hat{A}'$) καί ἄρα

$$B\Gamma_1 = B'\Gamma'.$$



Ἄν τώρα ἡ διχοτόμος τῆς $\Gamma_1\hat{A}\Gamma$ τέμνει τήν $B\Gamma$ στό I, ἔχουμε τριγ.$A\Gamma_1 I$ = τριγ. $AI\Gamma$ (γιατί $A\Gamma_1 = A'\Gamma' = A\Gamma$, $AI = AI$, $\Gamma_1\hat{A}I = I\hat{A}\Gamma$) δηλαδή

$$\Gamma_1 I = I\Gamma.$$

Ἔτσι ἡ ἀνισότητα $B\Gamma_1 < BI + I\Gamma_1$ γράφεται $B'\Gamma' < BI + I\Gamma$ ἤ $B'\Gamma' < B\Gamma$.

Ἀντιστρόφως. ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $B\Gamma > B'\Gamma'$. Τότε δέν μπορεῖ νά ἔχουμε $\hat{A} = \hat{A}'$ γιατί στήν περίπτωση αὐτή θά ἦταν τριγ$AB\Gamma$ = τριγ$A'B'\Gamma'$ $\Rightarrow$ $B\Gamma = B'\Gamma'$, πού εἶναι ἀντίθετο μέ τήν ὑπόθεσή μας. Ἐπίσης δέν μπορεῖ νά ἔχουμε καί $\hat{A} < \hat{A}'$, γιατί στήν περίπτωση αὐτή θά εἴχαμε καί $B\Gamma < B'\Gamma'$, πού εἶναι πάλι ἀντίθετο μέ τήν ὑπόθεσή μας. Ἄρα ἡ μόνη δυνατή σχέση πού ἀπομένει εἶναι $\hat{A} > \hat{A}'$.

Λέμε λοιπὸν συντομότερα, **προϋποθέτοντας τίς δυό ἰσότητες μεταξύ τῶν πλευρῶν τους, ὅτι «σέ δυό τρίγωνα ἀπέναντι ἀπό δυό ἄνισες πλευρές βρίσκονται ὁμοιότροπα ἄνισες γωνίες καί ἀντιστρόφως».**

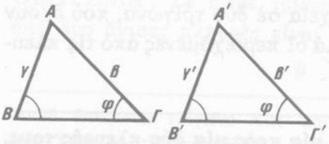
Θὰ συγκρίνουμε τέλος στοιχεῖα σὲ δύο τρίγωνα ποὺ ἔχουν ἴσες μία πρὸς μία δύο πλευρές τους καὶ ἔχουν ἀκόμη ἴσες τὶς γωνίες ποὺ βρίσκονται ἀπέναντι ἀπὸ τὸ ἕνα ζεῦγος τῶν ἴσων πλευρῶν.

Στὴν περίπτωση αὐτὴ ἔχουμε τὴν πρόταση :

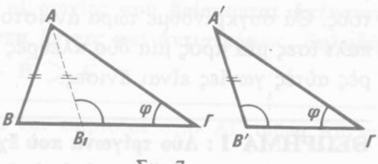
ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ : Ἂν δύο τρίγωνα ἔχουν ἴσες μία πρὸς μία δύο πλευρές τους καὶ τὶς γωνίες ποὺ βρίσκονται ἀπέναντι ἀπὸ τὸ ἕνα ζεῦγος τῶν ἴσων πλευρῶν, τότε ἔχουν τὶς γωνίες ποὺ βρίσκονται ἀπέναντι ἀπὸ τὸ ἄλλο ζεῦγος τῶν ἴσων πλευρῶν ἢ ἴσες ἢ παραπληρωματικές, δηλαδή :

$$\beta = \beta',\ \gamma = \gamma',\ \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}' \Rightarrow \hat{B} = \hat{B}' \text{ ἢ } \hat{B} + \hat{B}' = 180^\circ.$$

Ἀπόδ. Οἱ πλευρές $B\Gamma$ καί $B'\Gamma'$ θά εἶναι ἴσες ἤ ἄνισες. Ἄν εἶναι $B\Gamma = B'\Gamma'$, τότε



Σχ. 6



Σχ. 7

τριγ.$AB\Gamma$ = τριγ$A'B'\Gamma'$ καί ἄρα $\hat{B} = \hat{B}'$ (βλ. σχ. 6). Ἄν εἶναι $B\Gamma \neq B'\Gamma'$, παίρνουμε στή μεγαλύτερη, π.χ. στήν $B\Gamma$, τμῆμα $\Gamma B_1 = \Gamma'B'$ (βλ. σχ. 7). Ἔχουμε τότε τριγ. $A\Gamma B_1$ = τριγ$A'\Gamma'B'$ (γιατί $A\Gamma = A'\Gamma'$, $\Gamma B_1 = \Gamma'B'$, $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$) καί ἄρα

$$AB_1 = A'B' = AB \text{ καί } A\hat{B}_1\Gamma = \hat{B}'.$$

Τό τρίγωνο λοιπόν BAB_1 εἶναι ἰσοσκελές καί ἑπομένως $A\hat{B}_1B = \hat{B}$. Τότε ὅμως ἡ φανερή ἀπό τό σχῆμα μας ἰσότητα $\hat{A}B_1B + \hat{A}B_1\Gamma = 180^\circ$ γράφεται $\hat{B} + \hat{B}' = 180^\circ$.

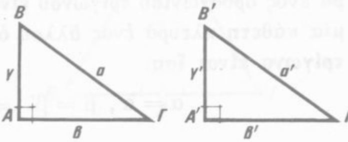
Ἀπὸ τὴν πρόταση αὐτὴ συμπεραίνουμε ὅτι:

- ἂν εἶναι $\hat{B} = \hat{B}'$, τὰ δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα (γιατὶ ἔχουμε τὴν περίπτωση τῆς § 4.6).
— ἂν εἶναι $\hat{B} \neq \hat{B}'$, τότε ὑποχρεωτικὰ οἱ γωνίες $\hat{B}$ καὶ $\hat{B}'$ εἶναι παραπληρωματικὲς καὶ ἑπομένως ἡ μία θὰ εἶναι ὀξεία καὶ ἡ ἄλλη ἀμβλεία.

Σὲ πολλὲς περιπτώσεις διακρίνουμε ἀπὸ τὰ δεδομένα μας ὅτι δὲ μπορεῖ οἱ γωνίες $\hat{B}$ καὶ $\hat{B}'$ νὰ εἶναι παραπληρωματικές, ὅπως π.χ. ὅταν οἱ δύο αὐτὲς γωνίες εἶναι ἀμβλεῖες ἢ ὀξεῖες. Τότε ἔχουμε ὁπωσδήποτε $\hat{B} = \hat{B}'$ καὶ τὰ τρίγωνά μας εἶναι ἴσα.

4.9. Κριτήρια ἰσότητας ὀρθογώνιων τριγώνων.

Εἴδαμε ὅτι σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ μὲ $\hat{A} = 90^o$ μεγαλύτερη γωνία του εἶναι ἡ ὀρθή, δηλαδὴ ἡ $\hat{A}$. Ἔτσι οἱ δυὸ ἄλλες γωνίες του $\hat{B}$ καὶ $\hat{\Gamma}$ ποὺ πρόσκεινται στὴν ὑποτείνουσα ΒΓ εἶναι ὀξεῖες. Οἱ πλευρὲς ΑΒ καὶ ΑΓ τῆς ὀρθῆς γωνίας του λέγονται **κάθετες πλευρὲς** τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου καὶ κάθε μία τους εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὴν ὑποτείνουσα, ἀφοῦ ἡ ἀπέναντι γωνία της εἶναι ὀξεία καὶ ἄρα μικρότερη ἀπὸ τὴν ὀρθὴ ποὺ εἶναι ἀπέναντι ἀπὸ τὴν ὑποτείνουσα.



Ἂς θεωρήσουμε τώρα δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' μὲ $\hat{A} = 90^o$ καὶ $\hat{A}' = 90^o$. Στὰ τρίγωνα αὐτὰ ἔχουμε πάντοτε μία γωνία τοῦ ἑνὸς ἴση μὲ μιὰ γωνία τοῦ ἄλλου (ἀφοῦ $\hat{A} = \hat{A}' = 90^o$) καὶ ἔτσι ἀπὸ τὰ γενικὰ κριτήρια ἰσότητας δύο τριγώνων θὰ προκύπτουν κριτήρια ἰσότητας ὀρθογώνιων τριγώνων ποὺ θὰ στηρίζονται σὲ ἰσότητες μόνο δύο στοιχείων τους. Τέτοια κριτήρια (ποὺ οἱ ἀποδείξεις τους εἶναι ἄμεσες συνέπειες τῶν γενικῶν κριτηρίων) δίνει ἡ πρόταση:

Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα:

- **ὅταν οἱ κάθετες πλευρὲς τοῦ ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μία πρὸς μία μὲ τὶς κάθετες πλευρὲς τοῦ ἄλλου τριγώνου.**
- **ὅταν μία κάθετη πλευρά καὶ ἡ προσκείμενή της ὀξεία γωνία τοῦ ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μὲ μιὰ κάθετη πλευρὰ καὶ τὴν προσκείμενή της ὀξεία γωνία τοῦ ἄλλου τριγώνου.**
- **ὅταν μία κάθετη πλευρά του καὶ ἡ ἀπέναντί της ὀξεία γωνία τοῦ ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μὲ μιὰ κάθετη πλευρὰ καὶ τὴν ἀπέναντί της ὀξεία τοῦ ἄλλου τριγώνου.**
- **ὅταν ἡ ὑποτείνουσα καὶ μία ὀξεία γωνία τοῦ ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἀντί-**

στοιχα ἴση μὲ τὴν ὑποτείνουσα καὶ μιὰ ὀξεία γωνία τοῦ ἄλλου τριγώνου.

Ἔτσι λοιπὸν σὲ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ μὲ $\hat{A} = \hat{A}' = 90^o$ ἔχουμε :

$$\beta = \beta', \quad \gamma = \gamma' \Rightarrow \alpha = \alpha', \quad \hat{B} = \hat{B}', \quad \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$$
$$\beta = \beta', \quad \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}' \Rightarrow \alpha = \alpha', \quad \gamma = \gamma', \quad \hat{B} = \hat{B}'$$
$$\beta = \beta', \quad \hat{B} = \hat{B}' \Rightarrow \alpha = \alpha', \quad \gamma = \gamma', \quad \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$$
$$\alpha = \alpha', \quad \hat{B} = \hat{B}' \Rightarrow \beta = \beta', \quad \gamma = \gamma', \quad \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$$

Ἄς ὑποθέσουμε τέλος ὅτι στὰ ὀρθογώνια ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ ἔχουμε $\alpha = \alpha'$ καὶ $\beta = \beta'$. Ἐπειδὴ εἶναι καὶ $\hat{A} = \hat{A}'$ ($= 90^o$), τότε σύμφωνα μὲ τὸ θεώρημα ΙΙ τῆς § 4.8 θὰ εἶναι ἢ $\hat{B} = \hat{B}'$ ἢ $\hat{B} + \hat{B}' = 180^o$. Ἡ περίπτωση ὅμως $\hat{B} + \hat{B}' = 180^o$ ἀποκλείεται, ἀφοῦ καὶ οἱ δύο γωνίες $\hat{B}$ καὶ $\hat{B}'$ εἶναι ὀξεῖες. Ἔτσι ἀπομένει $\hat{B} = \hat{B}'$ καὶ τότε τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα (ἀφοῦ $\alpha = \alpha'$ καὶ $\hat{B} = \hat{B}'$). Δείξαμε λοιπὸν ὅτι, **ἂν ἡ ὑποτείνουσα καὶ ἡ μία κάθετη πλευρὰ ἑνὸς ὀρθογώνιου τριγώνου εἶναι ἀντίστοιχα ἴσες μὲ τὴν ὑποτείνουσα καὶ μία κάθετη πλευρὰ ἑνὸς ἄλλου ὀρθογώνιου τριγώνου, τότε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα.**

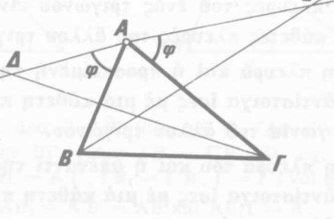
$$\alpha = \alpha', \ \beta = \beta' \Rightarrow \gamma = \gamma', \ \hat{B} = \hat{B}', \ \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7 - 15

4.10 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Δίνεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ. Ἐξωτερικὰ του φέρνουμε τὰ τμήματα ΑΔ = ΑΒ, ΑΕ = ΑΓ καὶ ἔτσι, ὥστε: $B\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{A}E$. Νὰ συγκριθοῦν τὰ τμήματα ΒΕ καὶ ΓΔ.

Λύση. Γιά νά συγκρίνουμε τά τμήματα ΒΕ καί ΓΔ, θά μελετήσουμε δύο τρίγωνα πού τά ἔχουν πλευρές τους. Δύο τέτοια τρίγωνα εἶναι τά : ΒΑΕ καί ΔΑΓ.



Αὐτά ἔχουν : ΑΔ = ΑΒ καί ΑΓ = ΑΕ ἀπό τίς ὑποθέσεις καί ἀκόμα $\Delta\hat{A}\Gamma = B\hat{A}E$, γιατί

καθεμιά εἶναι τό ἄθροισμα $\hat{A} + \hat{\varphi}$. Ἐπομένως: τριγ. ΔΑΓ = τριγ. ΒÂΕ καί ἄρα: ΒΕ = ΓΔ.

***2. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, στὸ ὁποῖο τὸ Δ εἶναι σημεῖο τῆς πλευρᾶς του ΒΓ, θεωροῦμε τὶς προτάσεις:**

I. Τὸ ΑΔ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

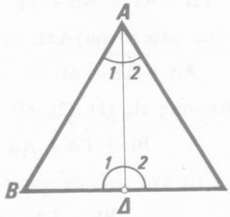
II. Τὸ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

III. Τὸ ΑΔ εἶναι ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Νά δειχθεῖ ὅτι:

α) Ἂν τὸ τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ βάση ΒΓ καὶ ἀληθεύει μία ἀπὸ τρεῖς προτάσεις I, II, III, τότε θὰ ἀληθεύουν καὶ οἱ ἄλλες δύο.

β) Ἂν ἀληθεύουν δύο ἀπὸ τὶς προτάσεις I, II, III, τότε τὸ τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ βάση ΒΓ.



Λύση: α) Θεωροῦμε ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο μὲ ΑΒ = ΑΓ.

i) Ἂν ΑΔ = διάμεσος ⇒ τριγ ΑΒΔ = = τριγ ΑΔΓ (γιατὶ ΑΒ = ΑΓ, ΒΔ = = ΔΓ, ΑΔ = ΑΔ) ⇒ $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, δηλ. ἡ ΑΔ διχοτόμος καὶ $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι καὶ $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180^o$, θὰ ἔχουμε $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90^o$, δηλαδὴ ΑΔ ⊥ ΒΓ.

ii) Ἂν ΑΔ = διχοτόμος ⇒ τριγΑΒΔ = τριγΑΔΓ (γιατὶ ΑΒ=ΑΓ, ΑΔ= = ΑΔ, $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$) ⇒ ΒΔ = ΔΓ, δηλ. ΑΔ διάμεσος καὶ $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, ὁπότε $\hat{\Delta}_1 = \Delta_2 = 90^o$, δηλαδὴ ΑΔ ⊥ ΒΓ.

iii) Ἂν ΑΔ = ὕψος ⇒ τριγΑΔΒ = τριγΑΔΓ (γιατὶ ΑΔ = ΑΔ, $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90^o$, ΑΒ = ΑΓ) ⇒ $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ καὶ ΒΔ = ΔΓ, δηλ. ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος καὶ διάμεσος.

β) Ἂν ΑΔ = διάμεσος καὶ ὕψος ⇒ τριγΑΔΒ = τριγΑΔΓ (γιατὶ $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90^o$, ΑΔ = ΑΔ, ΒΔ = ΔΓ) ⇒ ΑΒ = ΑΓ.

Ἂν ΑΔ = διχοτόμος καὶ ὕψος ⇒ τριγ. ΑΔΒ = τριγ. ΑΔΓ (γιατὶ $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90^o$, ΑΔ = ΑΔ, $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$) ⇒ ΑΒ = ΑΓ.

Τέλος ἂν ΑΔ = διάμεσος καὶ διχοτόμος ⇒ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ ἔχουν ΑΔ = ΑΔ, ΒΔ = ΔΓ καὶ $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$. Τότε ὅμως θὰ ἔχουν ἢ $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ἢ $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o$. Ἡ ἰσότητα $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o$ ἀποκλείεται (βλ. ἄσκ. 3) καὶ ἄρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ⇒ ΑΒ = ΑΓ.

---

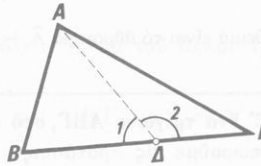
3. Νά δειχθεῖ ὅτι τὸ ἄθροισμα δύο ὁποιωνδήποτε γωνιῶν ἑνός τριγώνου ΑΒΓ εἶναι μικρότερο ἀπὸ 180^o.

Λύση: Θά ἀποδείξουμε π.χ. ὅτι $\hat{B} + \hat{\Gamma} < 180^o$. Ἂν πάρουμε ἕνα σημεῖο Δ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, οἱ γωνίες $\hat{\Delta}_1$ = ΑΔ̂Β καί $\hat{\Delta}_2$ = ΑΔ̂Γ εἶναι ἐξωτερικές στά τρίγωνα ΑΔΓ καί ΑΔΒ. Ἔτσι ἔχουμε

$$\hat{B} < \hat{\Delta}_2 \text{ καί } \hat{\Gamma} < \hat{\Delta}_1.$$

Προσθέτοντας αὐτές κατά μέλη βρίσκουμε

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} < \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 \Rightarrow \hat{B} + \hat{\Gamma} < 180^\circ.$$



4. Θεωροῦμε ἕνα τριγ. ΑΒΓ ποὺ ἔχει $\hat{A} \geq 90^\circ$. Σημειώνουμε ἕνα σημεῖο Δ στὴν πλευρὰ τοῦ ΑΒ καὶ ἕνα σημεῖο Ε τῆς ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθεῖ ὅτι: $ΒΕ + ΓΔ > ΒΔ + ΔΕ + ΕΓ$.

Λύση. Στό τριγΒΑΕ ἡ γωνία του $\hat{A}$ εἶναι ἡ πιό μεγάλη, ἄρα:

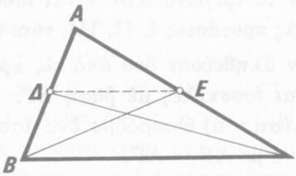
$$\hat{A} > Α\hat{E}Β \Rightarrow ΒΕ > ΑΒ = ΑΔ + ΔΒ \quad (1)$$

Ἐπίσης στό τριγΑΔΓ ἔχουμε:

$$ΓΔ > ΑΓ = ΑΕ + ΕΓ \quad (2)$$

Καί ἀκόμα ἀπό τό τριγΑΔΕ ἔχουμε:

$$ΑΔ + ΑΕ > ΔΕ \quad (3)$$



Προσθέτοντας τίς (1), (2), (3) ἔχουμε:

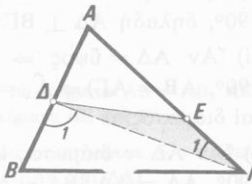
$$ΒΕ + ΓΔ + ΑΔ + ΑΕ > ΑΔ + ΔΒ + ΑΕ + ΕΓ + ΔΕ$$

καί μετά τίς ἀναγωγές ἔχουμε τήν ἀποδεικτέα:

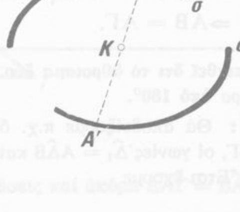
$$ΒΕ + ΓΔ > ΔΒ + ΕΓ + ΔΕ.$$

5. Στίς πλευρές ΒΑ καί ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τμήματα ΒΔ = ΓΕ. Νά δειχθεῖ ὅτι ΔΕ < ΒΓ.

Λύση. Ἡ γωνία $Β\hat{Δ}Γ = \hat{Δ}_1$ εἶναι ἐξωτερική στό τρίγωνο ΑΔΓ καί συνεπῶς θά εἶναι $\hat{Δ}_1 > \hat{Γ}_1$. Ἔτσι τά δύο τρίγωνα ΒΔΓ καί ΓΔΕ ἔχουν δύο πλευρές ἴσες (ΔΒ = ΓΕ, ΓΔ = ΓΔ) καί τίς περιεχόμενες γωνίες τους ἄνισες καί μάλιστα $\hat{Γ}_1 < \hat{Δ}_1$. Ἐπομένως εἶναι ΔΕ < ΒΓ.



*6. Ἂν Ε εἶναι τὸ σύνολο τῶν σημείων ἑνὸς ἐπιπέδου, κάθε ἀπεικόνιση $\varphi: E \to E$ λέγεται «μετασχηματισμός τοῦ Ε». Ξέρουμε ἀπὸ τὸ Γυμνάσιο ὅτι ἕνας μετασχηματισμός τοῦ Ε εἶναι ἡ «συμμετρία ὡς πρός κέντρο Κ». Στὸ μετασχηματισμὸ αὐτὸ δίνεται ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Κ καὶ σὲ κάθε $Α \in Ε$ ἀντιστοιχίζουμε τὸ σημεῖο Α′ τῆς εὐθείας ΚΑ ποὺ εἶναι τέτοιο, ὥστε



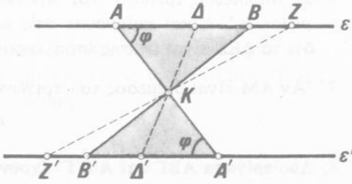
$$ΚΑ' = ΚΑ$$

Τὸ σημεῖο Α΄ λέγεται «συμμετρικὸ τοῦ Α ὡς πρὸς τὸ Κ» καὶ σημειώνεται Α΄ = σημμ$_κ$ Α

Τὰ συμμετρικὰ ὅλων τῶν σημείων ἑνὸς σχήματος σ ἀποτελοῦν ἕνα ἄλλο σχῆμα σ΄ ποὺ λέγεται «συμμετρικὸ τοῦ σ ὡς πρὸς Κ» καὶ σημειώνεται σ΄ = συμμ$_κ$ σ.

Νά δειχθεῖ ὅτι τό συμμετρικό μιᾶς εὐθείας ε ὡς πρός κέντρο Κ εἶναι εὐθεῖα.

᾿Απόδ. Θεωροῦμε μιὰ εὐθεία ε, δύο σημεῖα της Α καὶ Β καὶ τὰ σημεῖα Α΄= συμμ $_κ$Α καὶ Β΄ = συμμ $_κ$Β. Ἂν ὀνομάσουμε ε΄ τὴν εὐθεία Α΄Β΄, θὰ ἀποδείξουμε ὅτι ε΄ = συμμ $_κ$ε καὶ ἀρκεῖ γι᾿ αὐτὸ νὰ ἀποδείξουμε ὅτι τὸ συμμετρικὸ κάθε σημείου Δ τῆς ε βρίσκεται στὴν ε΄ καὶ ὅτι κάθε σημεῖο Ζ΄ τῆς ε΄ εἶναι συμμετρικὸ ἑνὸς σημείου τῆς ε.



᾿Επειδὴ τριγΑΚΒ = τριγΑ΄ΚΒ΄, (γιατὶ ΑΚ = ΚΑ΄, ΒΚ = ΚΒ΄, Α$\hat{Κ}$Β = = Α΄$\hat{Κ}$Β΄) θὰ εἶναι

$$ΑΒ = Α΄Β΄ \text{ καὶ } Β\hat{Α}Κ = Β΄\hat{Α}΄Κ.$$

Ἔτσι, ἂν ἡ ΔΚ τέμνει τὴν ε΄ στὸ Δ΄, θὰ εἶναι τριγ.ΔΑΚ = τριγΔ΄Α΄Κ (γιατὶ ΚΑ = ΚΑ΄, Δ$\hat{Α}$Κ = Δ΄$\hat{Α}$΄Κ = $\hat{φ}$, Δ$\hat{Κ}$Α = Δ΄$\hat{Κ}$Α΄) καὶ ἄρα ΚΔ΄ = ΚΔ, δηλ. Δ΄ = συμμ $_κ$Δ. ᾿Επίσης, ἂν ἡ Ζ΄Κ τέμνει τὴν ε στὸ Ζ, βρίσκουμε μὲ ἀνάλογο τρόπο (ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων ΑΚΖ καὶ Α΄ΚΖ΄) ὅτι ΖΚ = Ζ΄Κ, δηλ. ὅτι Ζ΄ = συμμ $_κ$Ζ.

Καταλαβαίνουμε λοιπὸν ὅτι: **γιὰ νὰ βροῦμε τὸ συμμετρικὸ μιᾶς εὐθείας ὡς πρὸς κέντρο Κ, ἀρκεῖ νὰ βροῦμε τὰ συμμετρικὰ μόνο δύο σημείων της ὡς πρὸς τὸ Κ.**

4.11 ΑΣΚΗΣΕΙΣ *

1. Δίνεται ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ καί στίς ἴσες πλευρές του ΑΒ καί ΑΓ παίρνουμε ἀντιστοίχως τά τμήματα ΑΔ = $\frac{1}{3}$ ΑΒ καί ΑΕ = $\frac{1}{3}$ ΑΓ. Ἂν Μ εἶναι τό μέσο τῆς ΒΓ, νά δείξετε ὅτι τό τρίγωνο ΔΜΕ εἶναι ἰσοσκελές.
2. Θεωροῦμε ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ καί στίς προεκτάσεις τῆς βάσεώς του ΒΓ παίρνουμε σημεῖα Ε,Ζ τέτοια, ὥστε ΒΕ = ΓΖ. Νά δείξετε ὅτι τό τρίγωνο ΑΕΖ εἶναι ἐπίσης ἰσοσκελές.
3. Θεωροῦμε γωνία Χ$\hat{Ο}$Ψ καί δύο σημεῖα Α καί Β τῶν πλευρῶν της ΟΧ καί ΟΨ τέτοια, ὥστε ΟΑ = ΟΒ. Ἂν Μ εἶναι ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς διχοτόμου ΟΔ, νά δείξετε ὅτι

$MA = MB$. Ἐπίσης, ἄν οἱ ΑΜ καί ΜΒ τέμνουν τίς πλευρές ΟΨ καί ΟΧ στά Α′ καί Β′, νά δείξετε ὅτι $AA' = BB'$.

4. Σέ τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τίς πλευρές του ΒΑ καί ΓΑ πρός τό μέρος τοῦ Α καί στίς προεκτάσεις αὐτές παίρνουμε ἀντιστοίχως τά τμήματα $AB' = AB$ καί $A\Gamma' = A\Gamma$. Νά δείξετε ὅτι ἡ προέκταση τῆς διαμέσου ΑΜ διέρχεται ἀπό τό μέσο τῆς Β′Γ′.

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ καί δύο ἡμιευθεῖες ΑΧ καί ΑΨ κάθετες στίς πλευρές ΑΒ καί ΑΓ καί τέτοιες, ὥστε κάθε μία ἀπό τίς γωνίες $X\hat{A}B$ καί $\Psi\hat{A}\Gamma$ νά εἶναι ἐφεξῆς μέ τήν $\hat{A}$. Στίς ΑΧ καί ΑΨ παίρνουμε τά εὐθύγραμμα τμήματα $AB' = AB$ καί $A\Gamma' = A\Gamma$. Νά δείξετε ὅτι $B\Gamma' = \Gamma B'$.

6. Σέ ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τίς πλευρές του ΑΒ,ΒΓ,ΓΑ πρός τίς κορυφές Β,Γ,Α καί παίρνουμε στίς προεκτάσεις τμήματα $B\Delta = \Gamma E = AZ$. Νά δείξετε ὅτι τό ΔΕΖ εἶναι ἐπίσης ἰσόπλευρο τρίγωνο.

7. Ἄν ΑΜ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, στό ὁποῖο εἶναι $AB < A\Gamma$, νά δείξετε ὅτι

$$A\hat{M}\Gamma > A\hat{M}B.$$

8. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α′Β′Γ′ ἔχουν $\beta = \beta'$, $\hat{A} = \hat{A}'$, $\delta_\alpha = \delta_{\alpha'}$. Νά δείξετε ὅτι τά τρίγωνα εἶναι ἴσα.

9. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α′Β′Γ′ ἔχουν $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $\mu_\beta = \mu_{\beta'}$. Νά δείξετε ὅτι τά τρίγωνα εἶναι ἴσα.

10. Νά δείξετε ὅτι δύο ἀμβλυγώνια (στίς κορυφές Α καί Α′) τρίγωνα ΑΒΓ καί Α′Β′Γ′ εἶναι ἴσα σέ κάθε μία ἀπό τίς παρακάτω περιπτώσεις:
I) $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ II) $\beta = \beta'$, $\alpha = \alpha'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ III) $\beta = \beta'$, $\alpha = \alpha'$, $\hat{A} = \hat{A}'$.

11. Νά δείξετε ὅτι στίς ἴσες πλευρές δύο ἴσων τριγώνων ἀντιστοιχοῦν ἴσες διάμεσοι, ἴσες διχοτόμοι καί ἴσα ὕψη.

12. Ἄν α,β,γ εἶναι οἱ πλευρές τριγώνου ΑΒΓ, νά διατυπωθοῦν μέ λόγια καί ν' ἀποδειχθοῦν οἱ προτάσεις:

$\Pi_1 : \beta = \gamma \Longleftrightarrow \upsilon_\beta = \upsilon_\gamma$ $\qquad$ $\Pi_4 : \alpha = \beta = \gamma \Longleftrightarrow \upsilon_\alpha = \upsilon_\beta = \upsilon_\gamma$

$\Pi_2 : \beta = \gamma \Rightarrow \mu_\beta = \mu_\gamma$ $\qquad$ $\Pi_5 : \alpha = \beta = \gamma \Rightarrow \mu_\alpha = \mu_\beta = \mu_\gamma$

$\Pi_3 : \beta = \gamma \Rightarrow \delta_\beta = \delta_\gamma$ $\qquad$ $\Pi_6 : \alpha = \beta = \gamma \Rightarrow \delta_\alpha = \delta_\beta = \delta_\gamma$

13. Νά δείξετε ὅτι δύο ὀξυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ καί Α′Β′Γ′ εἶναι ἴσα σέ κάθε μιά ἀπό τίς παρακάτω προτάσεις:

I) $\alpha = \alpha'$, $\upsilon_\beta = \upsilon_{\beta'}$, $\upsilon_\gamma = \upsilon_{\gamma'}$ $\qquad$ II) $\alpha = \alpha'$, $\upsilon_\beta = \upsilon_{\beta'}$, $\upsilon_\alpha = \upsilon_{\alpha'}$

III) $\hat{A} = \hat{A}'$, $\upsilon_\beta = \upsilon_{\beta'}$, $\upsilon_\gamma = \upsilon_{\gamma'}$ $\qquad$ IV) $\hat{A} = \hat{A}'$, $\upsilon_\beta = \upsilon_{\beta'}$, $\upsilon_\alpha = \upsilon_{\alpha'}$.

14. Στήν ἐξωτερική διχοτόμο τῆς γωνίας $\hat{A}$ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ σημειώνουμε ἕνα σημεῖο Ρ. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι: $PB + P\Gamma > AB + A\Gamma$.

15. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ προτάσεις:

α) Τό συμμετρικό ἑνός εὐθ. τμήματος ὡς πρός κέντρο συμμετρίας ἕνα σημεῖο Ο εἶναι εὐθ. τμῆμα ἴσο πρός τό δεδομένο.

β) Τό συμμετρικό ἑνός τριγώνου ὡς πρός κέντρο συμμετρίας ἕνα σημεῖο Ο εἶναι τρίγωνο ἴσο πρός τό δεδομένο.

Διατυπῶστε καί ἀποδείξατε ἀντίστοιχες προτάσεις γιά γωνία καί γιά τόν κύκλο.

4.12 ΑΣΚΗΣΕΙΣ **

16. Αν ΒΓ καί Β΄Γ΄ εἶναι οἱ βάσεις δύο ἰσοσκελῶν τριγώνων ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ πού ἔχουν κοινή κορυφή Α, μή συμπίπτουσες πλευρές καί $B\hat{A}\Gamma = B'\hat{A}\Gamma'$, νά δείξετε ὅτι ΒΒ΄ = ΓΓ΄.

17. Θεωροῦμε τρίγωνο ΑΒΓ μέ $AB < A\Gamma$, ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τῆς διχοτόμου τῆς $\hat{A}$ καί ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Ν τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς Α. Νά δειχθοῦν οἱ ἀνισότητες $M\Gamma - MB < A\Gamma - AB$ καί $N\Gamma + NB > A\Gamma + AB$.

18. Ἄν Δ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς πλευρᾶς $B\Gamma = \alpha$ τριγώνου ΑΒΓ, νά δείξετε ὅτι $$A\Delta > \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}$$
Μέ βάση τήν ἀνισότητα αὐτή νά δείξετε ὅτι σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ἔχουμε $\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma > \tau$ καί $\delta_\alpha + \delta_\beta + \delta_\gamma > \tau$, ὅπου τ εἶναι ἡ ἡμιπερίμετρος τοῦ τριγώνου. Τέλος νά δείξετε ὅτι σέ κάθε ὀξυγώνιο τρίγωνο ἔχουμε ἀκόμη
$$\upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma > \tau.$$

19. Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ἴσα, ὅταν μία κάθετη πλευρά τοῦ ἑνός εἶναι ἴση μέ μιά κάθετη πλευρά τοῦ ἄλλου καί ἡ περίμετρος τοῦ ἑνός ἴση μέ τήν περίμετρο τοῦ ἄλλου.

20. Δίνεται κυρτή γωνία $X\hat{O}\Psi$, δύο σημεῖα Α,Β στήν πλευρά τῆς ΟΧ καί δύο σημεῖα Α΄,Β΄ στήν πλευρά της ΟΨ τέτοια, ὥστε ΟΑ΄ = ΟΑ καί ΟΒ΄ = ΟΒ. Νά δείξετε ὅτι:
α) Τό σημεῖο τομῆς Κ τῶν ΑΒ΄ καί ΒΑ΄ βρίσκεται στή διχοτόμο τῆς γωνίας $X\hat{O}\Psi$.
β) Ἄν Μ καί Ν εἶναι τά μέσα τῶν ΑΒ΄ καί Α΄Β, οἱ γωνίες $M\hat{O}X$ καί $N\hat{O}\Psi$ εἶναι ἴσες.

21. Δίνεται γωνία $X\hat{O}\Psi$ καί σημεῖα Α,Β,Γ,Δ,... στήν πλευρά της ΟΧ. Στήν πλευρά ΟΨ παίρνουμε σημεῖα Α΄,Β΄,Γ΄,Δ΄,... τέτοια, ὥστε ΟΑ΄=ΟΑ, ΟΒ΄=ΟΒ, ΟΓ΄=ΟΓ, ΟΔ΄ = ΟΔ,... καί κατόπι βρίσκουμε τά $\{K\} = AB'\cap BA'$, $\{\Lambda\} = A\Gamma'\cap \Gamma A'$, $\{M\} = A\Delta'\cap \Delta A'$, $\{P\} = B\Gamma'\cap \Gamma B'$,... Νά δειχθεῖ ὅτι τά σημεῖα Κ,Λ,Μ,Ρ,... βρίσκονται σ' εὐθεία.

4.13 ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 4

1. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ λέγονται ἴσα, ἄν καί μόνο ἄν ἔχουν μία πρός μία τίς πλευρές τους ἴσες καί τίς ἀπέναντι ἀπό τίς ἴσες πλευρές γωνίες τους ἐπίσης ἴσες. Συνήθως ἡ ἰσότητα δύο τριγώνων ἐξασφαλίζεται μέ λιγότερα στοιχεῖα. Τά βασικά κριτήρια ἰσότητας δύο ὁποιωνδήποτε τριγώνων δίνονται στόν πρῶτο ἀπό τούς παρακάτω πίνακες, ἐνῶ στό δεύτερο δίνονται τά κριτήρια ἰσότητας ὀρθογώνιων τριγώνων πού ἔχουν $\hat{A} = \hat{A'} = 90^o$.

$\alpha=\alpha'$	$\beta=\beta'$	$\gamma=\gamma'$	$\hat{A}=\hat{A'}$	$\hat{B}=\hat{B'}$	$\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma'}$
●	●	●			
	●	●	●		
●				●	●
●			●		●
●			●	●	

$\alpha=\alpha'$	$\beta=\beta'$	$\gamma=\gamma'$	$\hat{B}=\hat{B'}$	$\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma'}$
	●	●		
●	●			
●			●	
	●		●	
●				●

Παρατηροῦμε ὅτι **κάθε κριτήριο ἰσότητας δύο τριγώνων περιέχει ἀπαραίτητα μία τουλάχιστον ἰσότητα μεταξὺ τῶν πλευρῶν τους.**

2. Σέ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἡ σχέση πού ἰσχύει γιά δυό πλευρές (ἤ γωνίες) ἰσχύει καί γιά τίς ἀπέναντι γωνίες του (ἤ πλευρές του), δηλαδή :

$$\beta \gtreqless \gamma \iff \hat{B} \gtreqless \hat{\Gamma}$$

'Από αὐτή διακρίνουμε ὅτι ἕνα **ἰσόπλευρο τρίγωνο** (τρίγωνο πού ἔχει ὅλες τίς πλευρές του ἴσες) εἶναι καί **ἰσογώνιο** καί ἀντιστρόφως.

'Επίσης ἕνα **ἰσοσκελὲς τρίγωνο** (τρίγωνο πού ἔχει δύο πλευρές ἴσες) ἔχει ἴσες τίς γωνίες πού πρόσκεινται στήν τρίτη πλευρά ἡ ὁποία λέγεται **βάση** του. 'Αντιστρόφως, ἕνα τρίγωνο πού ἔχει δύο γωνίες ἴσες εἶναι ἰσοσκελές. Σέ ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ μέ ΑΒ = ΑΓ τό ὕψος $υ_α$, ἡ διάμεσος $μ_α$ καί ἡ διχοτόνος $δ_α$ συμπίπτουν.

3. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ μπορεῖ νά εἶναι ἴσα ἤ ἄνισα· ὅταν ὅμως εἶναι ἄνισα, δέν μπορούμε νά λέμε ὅτι τό ἕνα εἶναι «μικρότερο» ἤ «μεγαλύτερο» ἀπό τό ἄλλο.

Σέ ἄνισα τρίγωνα ἀπό τή σχέση πού ἰσχύει γιά δύο πλευρές (ἤ γωνίες) τους δέν προκύπτει γενικά σχέση γιά τίς ἀπέναντι γωνίες (ἤ πλευρές) τους παρά μόνο στήν περίπτωση πού τά δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ ἔχουν δύο πλευρές ἴσες. Ἔτσι :

Ἄν σέ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ ἔχουμε $\beta = \beta'$ καί $\gamma = \gamma'$, τότε ἰσχύουν οἱ προτάσεις :

$$\text{I. } \hat{A} \gtrless \hat{A}' \iff B\Gamma \gtrless B'\Gamma'$$

$$\text{II. } \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}' \Rightarrow \hat{B} = \hat{B}' \text{ ἤ } \hat{B} + \hat{B}' = 180^\circ.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

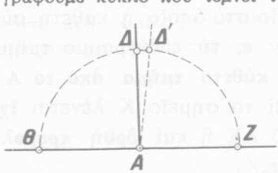
ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ ΕΥΘΕΙΩΝ

5.1. Θεωρήματα καθετότητας δύο εὐθειῶν.

Ὁρίσαμε στὴν § 3.15 πότε δύο εὐθεῖες λέγονται κάθετες καὶ εἴδαμε ὅτι δύο τεμνόμενες εὐθεῖες εἶναι κάθετες, ἂν καὶ μόνο ἂν σχηματίζουν ὀρθὴ γωνία. Τὰ ἑπόμενα θεωρήματα δείχνουν ὅτι ὑπάρχουν κάθετες εὐθεῖες καὶ ὅτι ὑπάρχει πάντα μία εὐθεία ε΄ ποὺ διέρχεται ἀπὸ ἕνα σημεῖο καὶ εἶναι κάθετη σὲ δεδομένη εὐθεία ε.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι. Σ' ἕνα σημεῖο Α μιᾶς εὐθείας ε μποροῦμε νὰ φέρουμε μία καὶ μόνο μία εὐθεία κάθετη στὴν ε.

Ἀπόδ. Μέ κέντρο Α καί ἀκτίνα ὁποιαδήποτε γράφουμε κύκλο πού τέμνει τήν ε στά σημεῖα Θ καί Ζ. Ἂν Δ εἶναι τό μέσο τοῦ ἑνός ἡμικυκλίου $\widehat{ΘΖ}$, οἱ γωνίες $Δ\hat{Α}Θ$ καί $Δ\hat{Α}Ζ$ εἶναι ἴσες καί ἔχουν ἄθροισμα 180^{o}. Ἄρα

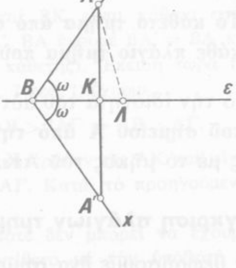


$$Δ\hat{Α}Θ = Δ\hat{Α}Ζ = 90^{o} \Rightarrow ΔΑ \perp ε.$$

Ἂν τώρα ὑποθέσουμε ὅτι ὑπάρχει καί ἄλλη κάθετη στό Α, αὐτή θά τέμνει τό $\widehat{ΘΖ}$ σ' ἕνα σημεῖο Δ΄ διαφορετικό ἀπό τό Δ πού θά εἶναι ἐπίσης μέσο τοῦ $\widehat{ΘΖ}$ (ἀφοῦ $Δ'\hat{Α}Θ = Δ'\hat{Α}Ζ = 90^{o} \Rightarrow \widehat{ΘΔ'} = \widehat{Δ'Ζ}$), πού εἶναι ἀδύνατο.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ. Ἀπὸ σημεῖο Α ποὺ δὲν ἀνήκει σὲ εὐθεία ε μποροῦμε νὰ φέρουμε μία καὶ μόνο μία εὐθεία κάθετη στὴν ε.

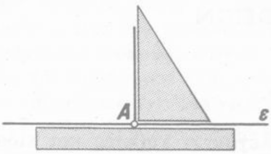
Ἀπόδ. Ἂς πάρουμε ἕνα ὁποιαδήποτε σημεῖο Β τῆς ε καί ἄς καλέσουμε ω τή μικρότερη κυρτή γωνία πού σχηματίζει ἡ ἡμιευθεία ΒΑ μέ τήν ε. Φέρνουμε ἀκόμη ἀπό τό Β μία ἡμιευθεία πρός τό ἄλλο μέρος τῆς ε, πού νά σχηματίζει γωνία $\hat{ω}$ μέ τήν ε, καί παίρνουμε πάνω σ' αὐτή τμῆμα ΒΑ΄ = ΒΑ. Ἡ ΑΑ΄ τέμνει τήν ε σ' ἕνα σημεῖο Κ καί τριγΑΒΚ = τριγΑ΄ΒΚ (γιατί ΑΒ = Α΄Β, ΒΚ = ΒΚ, $\hat{ω} = \hat{ω}$). Συνεπῶς

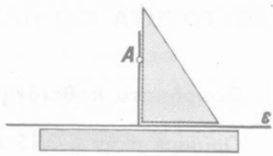


$$Α\hat{Κ}Β = Α'\hat{Κ}Β.$$

Ἐπειδή ὅμως εἶναι καί $A\hat{K}B + A'\hat{K}B = 180^o$, θά ἔχουμε $A\hat{K}B = A'\hat{K}B = 90^o \Rightarrow AK \perp \varepsilon$. Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι ὑπάρχει καί ἄλλη κάθετη ἀπό τό Α πού τέμνει τήν ε σέ ἕνα σημεῖο Λ διαφορετικό ἀπό τό Κ. Τότε θά εἶναι $A\hat{\Lambda}K = 90^o$· καί ἔτσι τό τρίγωνο ΑΚΛ θά ἔχει δύο ὀρθές γωνίες, πού εἶναι ἀδύνατο.

Ξέρουμε ἀπὸ τὸ Γυμνάσιο ὅτι ἡ κατασκευὴ τῆς εὐθείας ποὺ διέρχεται ἀπὸ ἕνα σημεῖο Α καὶ εἶναι κάθετη σὲ δεδομένη εὐθεία ε γίνεται πρακτικὰ

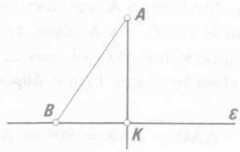




μὲ τὴ βοήθεια ἑνὸς κανόνα (χάρακα) καὶ ἑνὸς γνώμονα, ὅπως δείχνουν τὰ παραπάνω σχήματα.

5.2. Ἀπόσταση σημείου ἀπό εὐθεία.

Ἄς θεωρήσουμε μία εὐθεία ε καὶ ἄς φέρουμε ἀπὸ σημεῖο Α ἐκτὸς αὐτῆς τὴν κάθετη πρὸς τὴν ε. Ἄν Κ εἶναι τὸ σημεῖο στὸ ὁποῖο ἡ κάθετη αὐτὴ τέμνει τὴν ε, τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΚ λέγεται **κάθετο τμῆμα ἀπὸ τὸ Α πρὸς τὴν ε** καὶ τὸ σημεῖο Κ λέγεται **ἴχνος ἢ πόδι τοῦ ΑΚ** ἢ καὶ **ὀρθὴ προβολὴ τοῦ Α στὴν ε.**



Κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ ποὺ τὸ ἄκρο του Β εἶναι σημεῖο τῆς ε διαφορετικὸ ἀπὸ τὸ Κ θὰ λέγεται **πλάγιο τμῆμα ἀπὸ τὸ Α πρὸς τὴν ε.** Τὸ σημεῖο Β θὰ λέγεται πάλι **ἴχνος ἢ πόδι τοῦ ΑΒ.** Ἐπειδὴ στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΚΒ ἡ ΑΚ εἶναι κάθετη πλευρὰ καὶ ἡ ΑΒ εἶναι ὑποτείνουσα, ἔχουμε τὴν πρόταση:

— **Τὸ κάθετο τμῆμα ἀπὸ σημεῖο Α πρὸς εὐθεία εἶναι μικρότερο ἀπὸ κάθε πλάγιο τμῆμα ποὺ ἑνώνει τὸ Α μὲ σημεῖο τῆς ε.**

Ἀπὸ τὴν ἰδιότητά του αὐτὴ τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΚ λέγεται καὶ **ἀπόσταση τοῦ σημείου Α ἀπό τήν εὐθεία ε.** Ἡ ἀπόσταση αὐτὴ ἐκφράζεται συνήθως μὲ τὸ μῆκος τοῦ ΑΚ.

5.3. Σύγκριση πλάγιων τμημάτων.

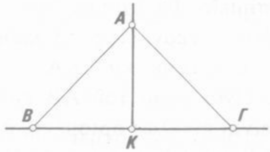
Ἄς θεωρήσουμε ἕνα σημεῖο Α ἐκτὸς εὐθείας ε καὶ ἄς φέρουμε ἀπὸ τὸ

Α πρὸς τὴν ε τὸ κάθετο τμῆμα ΑΚ καὶ δύο πλάγια τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ. Θὰ ἀποδείξουμε ὅτι :

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι. Δύο πλάγια τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι ἴσα, ἂν καὶ μόνο ἂν τὰ ἴχνη τους ἰσαπέχουν ἀπὸ τὸ ἴχνος τοῦ κάθετου τμήματος, δηλαδὴ

$$\mathbf{KB = K\Gamma \iff AB = A\Gamma.}$$

᾿Απόδ. ῎Αν ΑΒ = ΑΓ, θά εἶναι τριγΑΚΒ = τριγΑΚΓ (γιατί $A\hat{K}B = A\hat{K}\Gamma = 90^o$, ΑΚ = ΑΚ, ΑΒ = ΑΓ) καί ἄρα ΚΒ = ΚΓ.

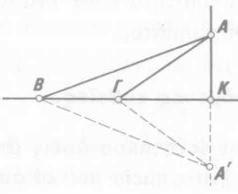


᾿Αντιστρόφως ἄν ΚΒ = ΚΓ, τότε εἶναι πάλι τριγΑΚΒ = τριγΑΚΓ (γιατί τώρα $A\hat{K}B = A\hat{K}\Gamma = 90^o$, ΑΚ = ΑΚ, ΚΒ = ΚΓ) καί ἄρα ΑΒ = ΑΓ.

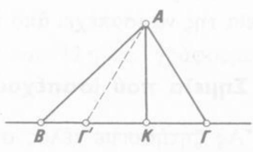
ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ. Δύο πλάγια τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ, ποὺ τὰ ἴχνη τους ἔχουν ἄνισες ἀποστάσεις ἀπὸ τὸ ἴχνος τοῦ κάθετου τμήματος, εἶναι ὁμοιοτρόπως ἄνισα καί ἀντιστρόφως, δηλαδὴ

$$\mathbf{KB > K\Gamma \iff AB > A\Gamma.}$$

᾿Απόδ. ῾Υποθέτουμε ὅτι τά ΑΒ καί ΑΓ βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος τῆς ΑΚ καί ὅτι ΚΒ > ΚΓ (βλ. σχ. 1), ὁπότε τό Γ θά εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ τμήματος ΒΚ.



Σχ. 1



Σχ. 2

῎Αν πάρουμε $A' = \text{συμμ}_K A$, τά τμήματα ΓΚ καί ΒΚ εἶναι κάθετα στήν ΑΑ′, ἐνῶ γιά τά πλάγια πρός αὐτήν τμήματα ΓΑ′, ΓΑ, ΒΑ′, ΒΑ ἔχουμε ΒΑ′ = ΒΑ καί ΓΑ′ = ΓΑ (ἀφοῦ τά ἴχνη τους ἰσαπέχουν ἀπό τό ἴχνος τῆς κάθετης). ᾿Επειδή τώρα ἡ τεθλασμένη ΑΓΑ′ εἶναι μικρότερη ἀπό τήν ΑΒΑ′ (βλ. ἐφαρμ. 7 κεφ. Ι) ἔχουμε,

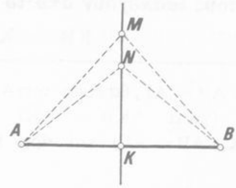
$$AB + BA' > A\Gamma + \Gamma A' \Rightarrow 2AB > 2A\Gamma \Rightarrow AB > A\Gamma.$$

Στήν περίπτωση πού τά ΑΒ καί ΑΓ βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς ΑΚ καί εἶναι ΚΒ > ΚΓ, παίρνουμε στήν ε τμῆμα ΚΓ′ = ΚΓ ⇒ ΑΓ′ = ΑΓ. Κατά τό προηγούμενο ὅμως εἶναι ΑΒ > ΑΓ′ καί ἄρα ΑΒ > ΑΓ.

᾿Αντιστρόφως ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ΑΒ > ΑΓ, τότε δέν μπορεῖ νά ἔχουμε ΚΒ = ΚΓ, γιατί τότε θά εἴχαμε ΑΒ = ΑΓ, πού εἶναι ἀντίθετο μέ τήν ὑπόθεσή μας. ᾿Επίσης

δέν μπορεῖ νά ἔχουμε ΚΒ < ΚΓ (γιατί τότε θά εἴχαμε ΑΒ < ΑΓ, πού πάλι εἶναι ἀντίθετο μέ τήν ὑπόθεσή μας). Ἔτσι ἀπομένει ΚΒ > ΚΓ.

5.4. Σημεῖα πού ἰσαπέχουν ἀπό τά ἄκρα εὐθύγραμμου τμήματος.



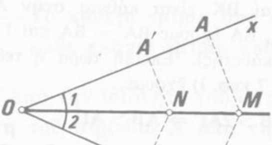
Θὰ ζητήσουμε τώρα σημεῖα ποὺ νὰ ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰ ἄκρα ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Ἂν Μ εἶναι ἕνα τέτοιο σημεῖο, θὰ ἔχουμε ΜΑ = ΜΒ καὶ ἑπομένως, φέρνοντας τὸ κάθετο τμῆμα ΜΚ, θὰ ἔχουμε καὶ ΚΑ = ΚΒ. Ἔτσι τὸ Κ εἶναι μέσο τοῦ ΑΒ καὶ ἡ εὐθεία ΜΚ εἶναι ἐντελῶς ὁρισμένη, ἀφοῦ εἶναι ἡ μοναδικὴ κάθετη πρὸς τὴν ΑΒ ποὺ διέρχεται ἀπὸ τό σημεῖο Κ. Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι κάθε ἄλλο σημεῖο Ν τῆς κάθετης αὐτῆς ἰσαπέχει ἐπίσης ἀπὸ τὰ Α καὶ Β, γιατὶ τὰ ΝΑ καὶ ΝΒ εἶναι πλάγια τμήματα μὲ ἴχνη ποὺ ἰσαπέχουν ἀπὸ τὸ ἴχνος Κ τοῦ κάθετου τμήματος ΝΚ. Δείξαμε λοιπὸν ὅτι:

Ἕνα σημεῖο ἰσαπέχει ἀπὸ τὰ ἄκρα ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος, ἂν καὶ μόνο ἂν ἀνήκει στὴν εὐθεία ποὺ εἶναι κάθετη στὸ τμῆμα καὶ περνάει ἀπὸ τὸ μέσο του.

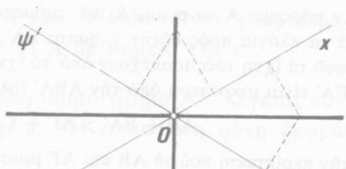
Ἡ εὐθεία ποὺ εἶναι κάθετη σὲ ἕνα τμῆμα ΑΒ στὸ μέσο του λέγεται **μεσοκάθετος τοῦ ΑΒ** καί, ὅπως εἴδαμε, ἔχει τὴν ἰδιότητα κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ σημεῖα της νὰ ἰσαπέχει ἀπὸ τὰ ἄκρα Α καὶ Β τοῦ τμήματος.

5.5. Σημεῖα πού ἰσαπέχουν ἀπό δύο τεμνόμενες εὐθεῖες.

Ἂς ζητήσουμε τέλος σημεῖα ποὺ νὰ ἔχουν ἴσες ἀποστάσεις ἀπὸ τὶς πλευρὲς μιᾶς γωνίας $X\hat{O}\Psi$. Ἂν καλέσουμε Μ ἕνα σημεῖο ποὺ οἱ ἀποστά-



Σχ. 3



Σχ. 4

σεις του ΜΑ καὶ ΜΒ ἀπὸ τὶς πλευρὲς ΟΧ καὶ ΟΨ νὰ εἶναι ἴσες (σχ. 3), τότε θὰ ἔχουμε τργΟΜΑ = τριγΟΜΒ (γιατὶ $\hat{A} = \hat{B} = 90^o$, ΜΑ = ΜΒ, ΟΜ = ΟΜ) καὶ ἄρα $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, δηλαδὴ ἡ ΟΜ εἶναι διχοτόμος τῆς ΧÔΨ. Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι κάθε ἄλλο σημεῖο Ν τῆς διχοτόμου ἰσαπέχει ἀπὸ τὶς πλευρὲς τῆς γωνίας, γιατὶ ἂν καλέσουμε ΝΑ′ καὶ ΝΒ′ τὶς ἀποστάσεις του ἀπὸ τὶς πλευρὲς τῆς γωνίας, ἔχουμε τριγΟΝΑ′ = τριγΟΝΒ′ (ἀφοῦ τώρα $\hat{A}' = \hat{B}' = 90^o$, ΟΝ = ΟΝ, $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$) καὶ ἄρα ΝΑ′ = ΝΒ′. Δείξαμε λοιπὸν ὅτι :

Ἕνα σημεῖο ἰσαπέχει ἀπὸ τὶς πλευρὲς μιᾶς γωνίας, ἂν καὶ μόνο ἂν ἀνήκει στὴ διχοτόμο της.

Ὅταν ζητᾶμε σημεῖα ποὺ ἰσαπέχουν ἀπὸ δύο τεμνόμενες εὐθεῖες Χ′Χ καὶ Ψ′Ψ, εἶναι σὰν νὰ ζητᾶμε σημεῖα ποὺ ἰσαπέχουν ἀπὸ τὶς πλευρὲς ὅλων τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν ποὺ σχηματίζονται ἀπὸ τὶς εὐθεῖες αὐτές. Ἔτσι τὰ ζητούμενα σημεῖα βρίσκονται στὶς διχοτόμους τῶν τεσσάρων διαδοχικῶν γωνιῶν ποὺ σχηματίζουν οἱ εὐθεῖες μας (βλ. σχ. 4). Οἱ τέσσερις αὐτὲς διχοτόμοι ἀποτελοῦν δύο κάθετες εὐθεῖες, (Βλέπε § 3.16 Παραδ. 3).

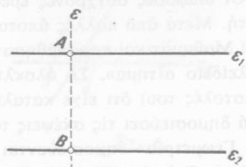
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1-5

5.6. Παράλληλες εὐθεῖες.

Ὁρισμός : Δύο εὐθεῖες ε_1 καὶ ε_2 τοῦ ἐπιπέδου μας ποὺ δὲν ἔχουν κοινὸ σημεῖο λέγονται παράλληλες εὐθεῖες.

Γιὰ νὰ δηλώσουμε ὅτι οἱ ε_1 καὶ ε_2 εἶναι παράλληλες, γράφουμε

$$\varepsilon_1 \,//\, \varepsilon_2$$



Ἡ ὕπαρξη παράλληλων εὐθειῶν διαπιστώνεται, ἂν παρατηρήσουμε ὅτι οἱ δύο εὐθεῖες ε_1 καὶ ε_2 ποὺ εἶναι κάθετες σὲ δυὸ διαφορετικὰ σημεῖα Α καὶ Β μιᾶς εὐθείας ε δὲν τέμνονται (γιατὶ ἂν τέμνονταν σὲ ἕνα σημεῖο, θὰ εἴχαμε ἀπὸ τὸ σημεῖο αὐτὸ πρὸς τὴν ε δύο κάθετες εὐθεῖες, πράγμα ἀδύνατο). Ἔχουμε λοιπὸν τὴν πρόταση :

— Δύο εὐθεῖες κάθετες στὴν ἴδια εὐθεία εἶναι μεταξύ τους παράλληλες.

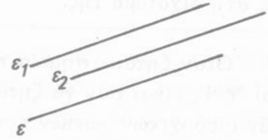
Ἄς θεωρήσουμε τώρα μία εὐθεία ε_1 καὶ ἕνα σημεῖο Β ἐκτὸς αὐτῆς. Ἂν φέρουμε τὴν εὐθεία ΒΑ $\perp$ ε_1 καὶ καλέσουμε ε_2 τὴν εὐθεία ποὺ εἶναι κάθετη στὸ Β πρὸς τὴν ΑΒ, παρατηροῦμε ὅτι $\varepsilon_1 \,//\, \varepsilon_2$ (ἀφοῦ καὶ οἱ δύο εἶναι κάθετες στὴν ΑΒ). Ἔτσι λοιπὸν ὑπάρχει εὐθεία ποὺ διέρχεται ἀπὸ ἕνα σημεῖο Β καὶ εἶναι παράλληλη πρὸς δεδομένη εὐθεία ε_1. Δεχόμαστε **ἀξιωματικά** ὅτι ἡ εὐθεία αὐτὴ εἶναι μοναδική, δηλαδὴ δεχόμαστε τὸ **αἴτημα τοῦ Εὐκλείδη :**

Ἀπὸ σημεῖο Β ποὺ δὲν ἀνήκει σὲ εὐθεία ε_1 διέρχεται μία καὶ μόνο μία εὐθεία ε_2 παράλληλη πρὸς τὴν ε_1.

Ἡ πρόταση αὐτή[1] εἶναι τόσο βασική, ὥστε ὁλόκληρη ἡ Γεωμετρία ποὺ σπουδάζουμε ὀνομάσθηκε ἐξαιτίας της «**Εὐκλείδειος Γεωμετρία**». Ἄμεσες συνέπειες τοῦ εὐκλείδειου αἰτήματος εἶναι οἱ προτάσεις :

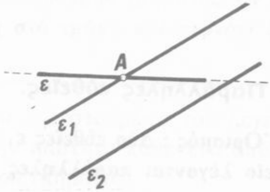
I. Ἂν δύο εὐθεῖες ε_1 καὶ ε_2 εἶναι παράλληλες πρὸς μία τρίτη εὐθεία ε, τότε εἶναι καὶ μεταξύ τους παράλληλες, δηλαδή :

$$\varepsilon_1 \,//\, \varepsilon \text{ καὶ } \varepsilon_2 \,//\, \varepsilon \Rightarrow \varepsilon_1 \,//\, \varepsilon_2$$



Ἀπόδ. Ἂν οἱ ε_1 καί ε_2 τέμνονταν σέ ἕνα σημεῖο, θά εἴχαμε ἀπό τό σημεῖο αὐτό πρός τήν ε δύο παράλληλες, πράγμα πού δέ συμβιβάζεται μέ τό ἀξίωμά μας. Ἔτσι οἱ ε_1 καί ε_2 δέν τέμνονται καί ἄρα $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

II. Ἂν δύο εὐθεῖες ε_1 καὶ ε_2 εἶναι παράλληλες καὶ μία εὐθεία ε τέμνει τὴ μία ἀπὸ αὐτές, τότε ἡ ε θὰ τέμνει καὶ τὴν ἄλλη.



Ἀπόδ. Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ ε τέμνει τήν ε_1 στό Α. Ἂν ἡ ε δέν ἔτεμνε τήν ε_2, θά ἤ-

1. Οἱ διάφορες σύγχρονες ἔρευνες στή Γεωμετρία ἀρχίζουν ἱστορικά μέ τήν πρόταση αὐτή. Μετά ἀπό πολλές ἀποτυχημένες ἀπόπειρες γιά τήν ἀπόδειξη τῆς προτάσεως αὐτῆς, οἱ Μαθηματικοί προσπάθησαν νά οἰκοδομήσουν Γεωμετρίες στίς ὁποῖες δέν ἰσχύει τό «εὐκλείδειο αἴτημα». Σέ ὁλοκληρωμένη εἰκόνα μιᾶς τέτοιας Γεωμετρίας φαίνεται (ἀπό ἐπιστολές του) ὅτι εἶχε καταλήξει ἀρχικά ὁ Gauss (1777-1855) ὁ ὁποῖος ὅμως δίστασε νά δημοσιεύσει τίς σκέψεις του. Ἔτσι οἱ πρῶτες σχετικές ἐργασίες γιά μή «Εὐκλείδειο Γεωμετρία» δημοσιεύονται τό 1829 ἀπό τόν Lobatschewski (1793-1856) καί τό 1831 ἀπό τόν Bolyai (1802-1860). Ἡ πρώτη αὐτή διαφορετική Γεωμετρία δέχεται ὅτι «ἀπό σημεῖο ἐκτός εὐθείας ε διέρχονται δύο τουλάχιστον εὐθεῖες παράλληλες πρός τήν ε» καί ὀνομάζεται «Ὑπερβολική Γεωμετρία». Ἀρκετά ἀργότερα, τό 1867, δημοσιεύεται μετά τό θάνατο τοῦ Riemman (1826-1866) μιά ἐργασία του μέ τίτλο «Περί τῶν ὑποθέσεων πού θεμελιώνουν τή Γεωμετρία» ὅπου ἡ εὐθεία παρουσιάζεται πεπερασμένη καί κλειστή καί ὁρίζεται κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε δύο εὐθεῖες νά τέμνονται πάντοτε. Ἔτσι οἰκοδομεῖται ἡ «Ἐλλειπτική Γεωμετρία» στήν ὁποία «ἀπό ἕνα σημεῖο ἐκτός εὐθείας ε δέ διέρχεται εὐθεία παράλληλη πρός τήν ε».

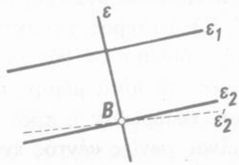
Ἂν καί οἱ μή Εὐκλείδειες Γεωμετρίες βρῆκαν ἐφαρμογή σέ ὁρισμένα πεδία τῆς νεώτερης Φυσικῆς, ἡ Εὐκλείδειος Γεωμετρία παραμένει πάντοτε ἡ Γεωμετρία τοῦ χώρου τῆς ἀνθρώπινης ἐποπτείας.

ταν ε // ε_2 καί ἔτσι θά εἴχαμε ἀπό τό Α πρός τήν ε_2 δύο παράλληλες, πράγμα ἀδύνατο. Ἄρα ἡ ε τέμνει τήν ε_2.

III. Ἄν δύο εὐθεῖες ε_1 καὶ ε_2 εἶναι παράλληλες καὶ μία εὐθεία ε εἶναι κάθετη στὴν ε_1, τότε ἡ ε θὰ εἶναι κάθετη καὶ στὴν ε_2 δηλαδὴ

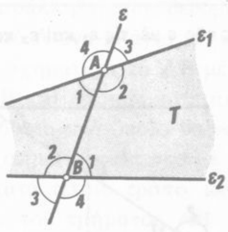
$$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \text{ καὶ } \varepsilon \perp \varepsilon_1 \Rightarrow \varepsilon \perp \varepsilon_2.$$

Ἀπόδ. Ἡ ε θά τέμνει τήν ε_2 (ἀφοῦ τέμνει τήν παράλληλή της ε_1) σέ ἕνα σημεῖο Β. Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ε δέν εἶναι κάθετη στήν ε_2, φέρνουμε στό Β τήν εὐθεία $\varepsilon'_2 \perp$ ε. Τότε οἱ ε_1 καί ε'_2 εἶναι παράλληλες (ὡς κάθετες στήν ε) καί ἔτσι ἔχουμε ἀπό τό Β πρός τήν ε_1 δύο παράλληλες εὐθεῖες τήν ε_2 καί ε'_2, πράγμα ἀδύνατο. Ἄρα ε $\perp \varepsilon_2$.

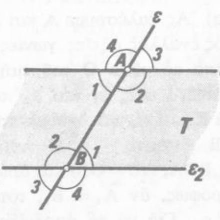


5.7. Γωνίες παράλληλων εὐθειῶν πού τέμνονται ἀπό ἄλλη.

Ἄς θεωρήσουμε δύο εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 πού τέμνονται ἀπό μιά τρίτη εὐθεία ε στά σημεῖα Α καί Β καί ἄς καλέσουμε Τ τήν τομή τῶν ἡμιεπιπέδων (ε_1,Β) καί (ε_2,Α). Ἄν οἱ εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 τέμνονται (βλ. σχ. 5), τό σύνολο Τ εἶναι ὡς γνωστό μία κυρτή γωνία πού οἱ πλευρές της ἀνήκουν στίς ε_1 καί ε_2. Ἄν οἱ εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 εἶναι παράλληλες (βλ. σχ. 6), τό σύνολο Τ θά λέγεται **ζώνη τῶν παράλληλων εὐθειῶν ε_1 καί ε_2.**



Σχ. 5



Σχ. 6

Ἡ εὐθεία ε σχηματίζει μέ κάθε μία ἀπό τίς εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 τέσσερις κυρτές διαδοχικές γωνίες πού ἀνά δύο εἶναι κατακορυφήν. Ἔχουμε λοιπόν συνολικά ὀκτώ γωνίες, πού θά τίς ὀνομάσουμε

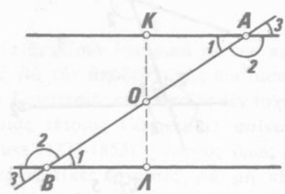
$$\hat{A}_1,\ \hat{A}_2,\ \hat{A}_3,\ \hat{A}_4 \quad \text{καί} \quad \hat{B}_1,\ \hat{B}_2,\ \hat{B}_3,\ \hat{B}_4.$$

Κάθε γωνία ἀπ' αὐτές, πού ἔχει ἐσωτερικά σημεῖα κοινά μέ τό Τ, θά χαρακτηρίζεται ὡς «ἐσωτερική» τοῦ Τ, ἐνῶ στήν ἀντίθετη περίπτωση θά χαρακτηρίζεται ὡς «ἐξωτερική» τοῦ Τ. Ἔτσι π.χ. ἡ $\hat{A}_1$ εἶναι «ἐσωτερική» τοῦ Τ, ἐνῶ ἡ $\hat{B}_3$ εἶναι «ἐξωτερική» τοῦ Τ.

Παταρηροῦμε τώρα ὅτι οἱ ὀκτώ γωνίες εἶναι χωρισμένες ἀπό τό γράμμα τῆς κορυφῆς τους σέ δύο ὁμάδες. Ἄν θέλουμε νά συγκρίνουμε μία γωνία τῆς μιᾶς ὁμάδας μέ μιά γωνία τῆς ἄλλης ὁμάδας, δίνουμε στό ζευγάρι τῶν γωνιῶν πού διαλέξαμε δύο χαρακτηρισμούς: Ὁ πρῶτος χαρακτηρισμός ἀναφέρεται στή θέση τῶν γωνιῶν ὡς πρός τίς εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 καί θά χρησιμοποιοῦμε γι᾽ αὐτόν τούς τρεῖς ὅρους «ἐντός», «ἐκτός», «ἐντός (καί) ἐκτός», ἀνάλογα μέ τό ἄν οἱ γωνίες πού πήραμε εἶναι καί οἱ δυό ἐσωτερικές τοῦ T ἤ καί οἱ δύο ἐξωτερικές τοῦ T ἤ ἡ μία ἐσωτερική καί ἡ ἄλλη ἐξωτερική τοῦ T. Ὁ δεύτερος χαρακτηρισμός ἀναφέρεται στή θέση τῶν γωνιῶν ὡς πρός τήν εὐθεία ε καί θά χρησιμοποιοῦμε γι᾽ αὐτόν τούς δύο ὅρους «ἐναλλάξ» καί «ἐπί τά αὐτά μέρη», ἀνάλογα μέ τό ἄν οἱ γωνίες πού πήραμε βρίσκονται ἑκατέρωθεν ἤ πρός τό ἴδιο μέρος τῆς ε. Ἔτσι π.χ. τό ζευγάρι $(\hat{A}_1, \hat{B}_1)$ εἶναι γωνίες «ἐντός ἐναλλάξ», ἐνῶ τό ζευγάρι $(\hat{A}_1, \hat{B}_3)$ εἶναι γωνίες «ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη».

ΘΕΩΡΗΜΑ : Ἄν δύο παράλληλες εὐθεῖες ε_1 καὶ ε_2 τέμνονται ἀπὸ μία εὐθεία ε, ἰσχύουν οἱ προτάσεις :
— Οἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίες τους εἶναι ἴσες.
— Οἱ ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίες τους εἶναι ἴσες.
— Οἱ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίες τους εἶναι παραπληρωματικές.
Ἀντιστρόφως, ἂν δύο εὐθεῖες ε_1 καὶ ε_2 τέμνονται ἀπὸ μία εὐθεία ε καὶ ἰσχύει μιὰ ἀπὸ τὶς προτάσεις αὐτές, τότε οἱ εὐθεῖες ε_1 καὶ ε_2 εἶναι παράλληλες.

Ἀπόδ, α) Ἄς καλέσουμε A καί B τά σημεῖα τομῆς τῆς ε μέ τίς ε_1 καί ε_2 καί $\hat{A}_1$, $\hat{B}_1$ τίς δύο ἐντός ἐναλλάξ ὀξεῖες γωνίες. Ἄν φέρουμε ἀπό τό μέσο O τοῦ τμήματος AB εὐθεία κάθετη στίς ε_1 καί ε_2 πού τίς τέμνει στά K καί Λ, θά ἔχουμε τριγOKA = τριγOΛB (γιατί $A\hat{K}O = B\hat{\Lambda}O = 90^o$, $A\hat{O}K = B\hat{O}\Lambda$, AO=OB) καί ἄρα $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$. Ἀντιστρόφως, ἄν $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$, τότε θά ἔχουμε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$. Γιά νά τό ἀποδείξουμε αὐτό, φέρνουμε ἀπό τό μέσο O τῆς AB τήν $OK \perp \varepsilon_1$ καί καλοῦμε Λ τό σημεῖο τομῆς τῶν OK καί ε_2. Τότε ἔχουμε τριγOKA = τριγOΛB (γιατί OA = OB, $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$, $K\hat{O}A = B\hat{O}\Lambda$) καί ἄρα $O\hat{\Lambda}B = O\hat{K}A = 90^o$, δηλαδή $O\Lambda \perp \varepsilon_2$. Ἔτσι οἱ εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 εἶναι παράλληλες, ἐπειδή εἶναι κάθετες στήν KΛ. Δείξαμε λοιπόν ὅτι



$$\text{(I)} \qquad \varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Longleftrightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1.$$

Ἄν $\hat{A}_2$ καί $\hat{B}_2$ εἶναι οἱ ἐντός ἐναλλάξ ἀμβλεῖες γωνίες, ἔχουμε ἐπίσης $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ (γιατί $\hat{A}_2 = 180^o - \hat{A}_1$ καί $\hat{B}_2 = 180^o - \hat{B}_1$).

β) Ἄν καλέσουμε $\hat{B}_3$ τή γωνία, πού μέ τήν $\hat{A}_1$ εἶναι ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη, ἔχουμε $\hat{B}_3 = \hat{B}_1$. Ἔτσι ἡ (I) γράφεται

$$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Longleftrightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_3.$$

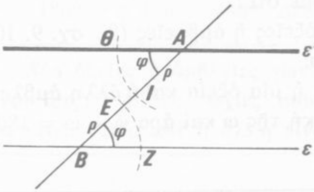
γ) Ἂν καλέσουμε $\widehat{B}_2$ τή γωνία ἡ ὁποία μέ τήν A_1 εἶναι ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη, ἔχουμε $\widehat{B_1} = 180^o - \widehat{B_2}$. Ἔτσι ἡ (I) γράφεται $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Longleftrightarrow \widehat{A_1} = 180^o - B_2$ δηλαδή

$$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Longleftrightarrow \widehat{A}_1 + \widehat{B}_2 = 180^o.$$

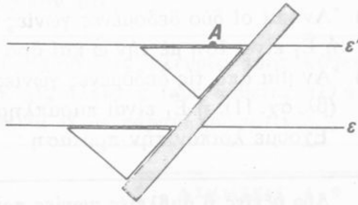
Εἶναι φανερό ὅτι μποροῦμε νά διατυπώσουμε καί ἄλλες προτάσεις σχετικές μέ τή σύγκριση δύο γωνιῶν. Ἔτσι π.χ. ἄν $\widehat{A}_3$ καί $\widehat{B}_3$ εἶναι οἱ κατακορυφήν γωνίες τῶν $\widehat{A}_1$ καί $\widehat{B_1}$, θά ἔχουμε $\widehat{A}_3 = \widehat{A}_1$ καί $\widehat{B}_3 = \widehat{B}_1$ καί τότε ἡ πρόταση $\varepsilon_1//\varepsilon_2 \Longleftrightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ γράφεται $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Longleftrightarrow \widehat{A}_3 = \widehat{B}_3$, δηλαδή **δύο εὐθεῖες ε_1 καὶ ε_2 εἶναι παράλληλες, ἂν καὶ μόνο ἂν οἱ ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίες τους εἶναι ἴσες.**

5.8. Κατασκευή παράλληλης εὐθείας.

Ἀπό τό παραπάνω θεώρημα προκύπτει ἀμέσως ἕνας τρόπος γιά νά κατασκευάσουμε γεωμετρικά τήν εὐθεία ε΄ πού διέρχεται ἀπό ἕνα σημεῖο Α



Σχ. 7



Σχ. 8

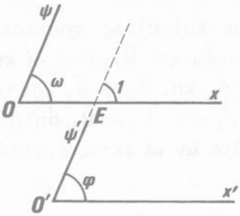
καί εἶναι παράλληλη πρός δεδομένη εὐθεία ε. Γιά τήν κατασκευή τῆς ε΄ φέρνουμε ἀπό τό Α ἕνα πλάγιο τμῆμα ΑΒ πρός τήν ε καί καλοῦμε $\widehat{\varphi}$ τήν ὀξεία γωνία πού σχηματίζει τό ΑΒ μέ τήν ε, (βλ. σχ. 7). Ἔπειτα, μέ κέντρο τό ἴχνος της Β καί ὁποιαδήποτε ἀκτίνα γράφουμε κυκλ(Β,ρ) καί ὀνομάζουμε $\widehat{EZ}$ τό τόξο του στό ὁποῖο βαίνει ἡ $\widehat{\varphi}$. Τέλος γράφουμε κυκλ(Α,ρ), ὀνομάζουμε Ι τό σημεῖο τομῆς του μέ τήν ΑΒ καί παίρνουμε πάνω σ' αὐτόν τόξο $\widehat{I\Theta} = \widehat{EZ}$ κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε τά δύο τόξα $\widehat{I\Theta}$ καί $\widehat{EZ}$ νά βρίσκονται ἑκατέρωθεν τοῦ τμήματος ΑΒ. Τότε ἔχουμε $\Theta\widehat{A}I = E\widehat{B}Z = \widehat{\varphi}$ καί ἐπειδή οἱ γωνίες $\Theta\widehat{A}I$ καί $E\widehat{B}Z$ εἶναι ἐντός ἐναλλάξ τῶν εὐθειῶν ΑΘ καί ε, οἱ ὁποῖες τέμνονται ἀπό τήν ΑΒ, ἕπεται ὅτι ΑΘ // ε. Ἔτσι ἡ εὐθεία ΑΘ εἶναι ἡ ζητούμενη παράλληλος.

Ξέρουμε ἀπό τό Γυμνάσιο ὅτι πρακτικά ἡ παράλληλη εὐθεία ε΄ κατασκευάζεται μέ τή βοήθεια ἑνός γνώμονα καί ἑνός κανόνα, ὅπως δείχνει τό σχ. 8.

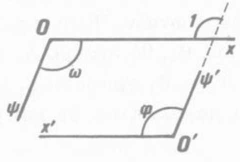
5.9. Γωνίες μέ πλευρές παράλληλες.

Ἄς θεωρήσουμε δύο γωνίες $X\widehat{O}\Psi$ καί $X'\widehat{O'}\Psi'$ πού ἔχουν τίς πλευρές τους ἀνά δύο παράλληλες καί ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $OX // O'X'$ καί $O\Psi // O'\Psi'$.

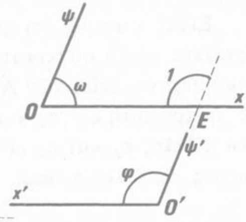
Ἄς καλέσουμε ἀκόμη Ε τό σημεῖο τομῆς τῶν εὐθειῶν Ο΄Ψ΄ καί ΟΧ (ἡ Ο΄Ψ΄ τέμνει τήν ΟΧ, γιατί τέμνει τήν παράλληλό της Ο΄Χ΄) καί $\hat{E}_1$ τήν γωνία πού



Σχ. 9



Σχ. 10



Σχ. 11

εἶναι ἴση μέ τήν $\hat{\varphi}$ ἀπό τήν παραλληλία τῶν ΟΧ καί Ο΄Χ΄. Τότε, ἀπό τήν παραλληλία τῶν ΟΨ καί Ο΄Ψ΄ παρατηροῦμε ὅτι:

α) Ἄν καί οἱ δύο δεδομένες γωνίες εἶναι ὀξεῖες ἤ ἀμβλεῖες (βλ. σχ. 9. 10), ἡ $\hat{E}_1$ εἶναι ἴση μέ τήν $\hat{\omega}$ καί ἄρα $\hat{\varphi} = \hat{\omega}$.

β) Ἄν μία ἀπό τίς δεδομένες γωνίες εἶναι ἡ μία ὀξεία καί ἡ ἄλλη ἀμβλεία (βλ. σχ. 11), ἡ $\hat{E}_1$ εἶναι παραπληρωματική τῆς $\hat{\omega}$ καί ἄρα $\hat{\varphi} + \hat{\omega} = 180^o$.

Ἔχουμε λοιπόν τήν πρόταση:

Δύο ὀξεῖες ἢ ἀμβλεῖες γωνίες ποὺ ἔχουν τὶς πλευρές τους παράλληλες, εἶναι ἴσες, ἐνῶ δύο γωνίες ποὺ ἔχουν τὶς πλευρές τους παράλληλες ἀλλὰ ἡ μία εἶναι ὀξεία καὶ ἡ ἄλλη εἶναι ἀμβλεία εἶναι παραπληρωματικές.

5.10. Γωνίες μέ πλευρές κάθετες.

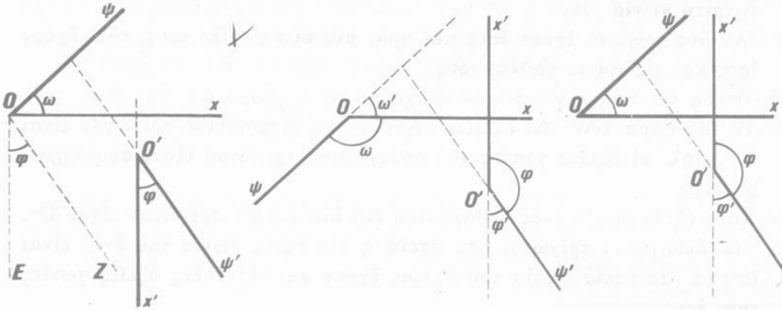
Ἄς θεωρήσουμε τώρα δύο γωνίες $X\hat{O}\Psi = \hat{\omega}$ καί $X'\hat{O}'\Psi' = \hat{\varphi}$ πού ἔχουν τίς πλευρές τους κάθετες καί ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $OX \perp O'X'$ καί $O\Psi \perp O'\Psi'$. Ἄν οἱ γωνίες $\hat{\varphi}$ καί $\hat{\omega}$ εἶναι ὀξεῖες, κατασκευάζουμε γωνία $E\hat{O}Z = \hat{\varphi}$ φέρνοντας $OE \,//\, O'X'$ καί $OZ \,//\, O'\Psi'$. Ἔχουμε τότε $EO \perp OX$ καί $ZO \perp O\Psi$ καί ἄρα:

$$E\hat{O}X = Z\hat{O}\Psi = 90^o \Rightarrow E\hat{O}Z + Z\hat{O}X = Z\hat{O}X + X\hat{O}\Psi$$

$$\Rightarrow \hat{\varphi} + Z\hat{O}X = Z\hat{O}X + \hat{\omega} \Rightarrow \hat{\varphi} = \hat{\omega}.$$

Ἄν οἱ γωνίες $\hat{\omega}$ καί $\hat{\varphi}$ εἶναι ἀμβλεῖες, τά παραπληρώματά τους $\hat{\omega}'$ καί $\hat{\varphi}'$ (πού σχηματίζονται, ἄν προεκτείνουμε μία πλευρά τῆς κάθε γωνίας) θά εἶναι ὀξεῖες γωνίες μέ πλευρές κάθετες, δηλαδή θά εἶναι γωνίες ἴσες. Ἄρα οἱ $\hat{\varphi}$ καί $\hat{\omega}$ εἶναι πάλι ἴσες, ἐπειδή εἶναι παραπληρώματα ἴσων γωνιῶν.

Τέλος, ἄν ἡ $\hat{\varphi}$ εἶναι ἀμβλεία καί ἡ $\hat{\omega}$ εἶναι ὀξεία, ἡ γωνία $\hat{\varphi}'$, πού σχηματίζεται ἄν προεκτείνουμε τήν Ο΄Ψ΄, εἶναι παραπληρωματική τῆς $\hat{\varphi}$ καί ἴση



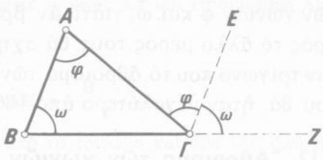
μέ τήν $\hat{\omega}$ (ἀφοῦ οἱ $\hat{\varphi}'$ καί $\hat{\omega}$ εἶναι ὀξεῖες μέ πλευρές κάθετες). Ἔτσι εἶναι $\hat{\varphi} + \hat{\varphi}' = 180^o \Rightarrow \hat{\varphi} + \hat{\omega} = 180^o$. Δείξαμε λοιπόν ὅτι :

Δύο ὀξεῖες ἤ ἀμβλεῖες γωνίες πού ἔχουν τίς πλευρές τους κάθετες εἶναι ἴσες, ἐνῶ δύο γωνίες πού ἔχουν τίς πλευρές τους κάθετες ἀλλά ἡ μία εἶναι ὀξεία καί ἡ ἄλλη εἶναι ἀμβλεία εἶναι παραπληρωματικές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6-9

5.11. Ἄθροισμα γωνιῶν τριγώνου.

Ἄν φέρουμε ἀπό τήν κορυφή Γ τριγώνου ΑΒΓ τήν εὐθεία ΓΕ // ΒΑ, ἔχουμε (ἀπό τή σύγκριση τῶν γωνιῶν πού σχηματίζουν οἱ παράλληλες, ὅταν τέμνονται ἀπό τίς ΑΓ καί ΒΓ)



$$E\hat{\Gamma}A = \hat{A}, \; E\hat{\Gamma}Z = \hat{B}.$$

Ἔτσι ἡ ἰσότητα $\hat{\Gamma} + A\hat{\Gamma}E + E\hat{\Gamma}Z = 180^o$, πού εἶναι φανερή ἀπό τό σχῆμα μας, γράφεται τελικά

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o,$$

δηλαδή :

Τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνός τριγώνου εἶναι 2 ὀρθές γωνίες.

Ἀπό τήν πρόταση αὐτή ἔχουμε ἀμέσως τά πορίσματα :

- **Ἡ ἐξωτερική γωνία ἑνός τριγώνου εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντί της ἐσωτερικῶν γωνιῶν.**

- **Ὅταν εἶναι γνωστὲς δύο γωνίες ἑνὸς τριγώνου, τότε εἶναι γνωστὴ καὶ ἡ τρίτη γωνία του.**
- **Ἂν δύο τρίγωνα ἔχουν ἴσες μία πρὸς μία δύο γωνίες τους, τότε ἔχουν ἴσες καὶ τὶς τρίτες γωνίες τους**

Εἰδικότερα σέ ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουμε τὰ πορίσματα:

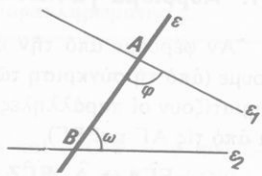
- **Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὀξειῶν γωνιῶν τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου εἶναι 90^o, δηλ. οἱ ὀξεῖες γωνίες τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου εἶναι συμπληρωματικές.**
- **Κάθε ὀξεία γωνία ἑνὸς ὀρθογώνιου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 45^o.**
- **Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, στὰ ὁποῖα ἡ μία ὀξεία γωνία τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴση μὲ μία ὀξεία γωνία τοῦ ἄλλου, ἔχουν καὶ τίς ἄλλες ὀξεῖες γωνίες τους ἴσες.**

Εἶναι φανερό ἐπίσης ὅτι **κάθε γωνία ἰσόπλευρου τριγώνου εἶναι 60^o.**

Θά ἀποδείξουμε τώρα ἕνα βασικό θεώρημα μέ τό ὁποῖο ἐλέγχουμε ἄν δύο εὐθεῖες τέμνονται.

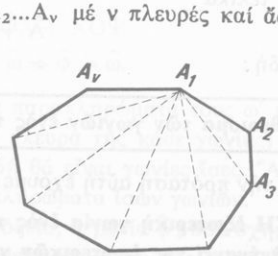
ΘΕΩΡΗΜΑ : Ἂν δύο εὐθεῖες ε_1 καὶ ε_2 τέμνονται ἀπὸ μιὰ τρίτη εὐθεία ε καὶ οἱ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίες τους ἔχουν ἄθροισμα μικρότερο ἀπὸ 180^o, τότε, οἱ ε_1 καὶ ε_2 τέμνονται καί τὸ σημεῖο τομῆς τους βρίσκεται πρὸς τὸ μέρος τῶν γωνιῶν αὐτῶν.

Ἔστω μία εὐθεία ε ἡ ὁποία τέμνει δύο ἄλλες εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 καί οἱ ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίες $\hat{\varphi}$ καί $\hat{\omega}$ ἔχουν ἄθροισμα μικρότερο ἀπό 180^o. Τότε οἱ ε_1 καί ε_2, δέν εἶναι παράλληλες (ἀφοῦ $\hat{\varphi} + \hat{\omega} \neq 180^o$) καί τό κοινό σημεῖο τους βρίσκεται πρός τό μέρος τῶν γωνιῶν $\hat{\varphi}$ καί $\hat{\omega}$, γιατί ἄν βρισκόταν πρός τό ἄλλο μέρος τους, θά σχηματιζόταν τρίγωνο πού τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του θά ἦταν μεγαλύτερο ἀπό 180^o.



5.12. Ἄθροισμα τῶν γωνιῶν πολυγώνου.

Ἂς πάρουμε τέλος ἕνα πολύγωνο $A_1A_2...A_\nu$ μέ ν πλευρές καί ἄς φέρουμε ἀπό μία κορυφή του, π.χ. τήν A_1 ὅλες τίς διαγωνίους πού διέρχονται ἀπ' αὐτή. Κάθε πλευρά τοῦ πολυγώνου, διαφορετική ἀπό τίς πλευρές πού διέρχονται ἀπό τήν κορυφή A_1, σχηματίζει μέ τίς διαγωνίους πού φέραμε ἕνα τρίγωνο. Ἔτσι σχηματίζονται ν—2 τρίγωνα πού τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τους εἶναι ἴσο



μέ τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου.᾿Επειδή τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν ν—2 τριγώνων εἶναι 2(ν—2)= 2ν — 4 ὀρθές, προκύπτει ὅτι :

Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς κυρτοῦ πολυγώνου μὲ ν πλευρὲς εἶναι 2ν-4 ὀρθές.

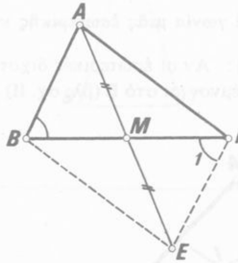
Δηλαδή : $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + ... + \hat{A}_\nu = 2\nu - 4$ ὀρθές.

Ἔτσι π.χ. τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνός τετραπλεύρου εἶναι 2.4 — 4 = 4 ὀρθές, ἐνῶ ἕνα δεκάγωνο ἔχει ἄθροισμα γωνιῶν 2.10 — 4 = 16 ὀρθές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 10 - 15

5.13. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Στὴν προέκταση τῆς διαμέσου ΑΜ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τμῆμα ΜΕ = ΑΜ. Νὰ δειχθεῖ ὅτι τὰ τμήματα ΓΕ καὶ ΒΕ εἶναι ἴσα καὶ παράλληλα μὲ τὶς πλευρὲς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως.**



Λύση : Τά τρίγωνα ΑΒΜ καί ΜΓΕ εἶναι ἴσα, γιατί ἔχουν ΑΜ = ΜΕ, ΒΜ = ΜΓ, $A\hat{M}B = \Gamma\hat{M}E$. Ἄρα ἔχουμε

$$\Gamma E = AB \text{ καί } \hat{\Gamma}_1 = \hat{B}.$$

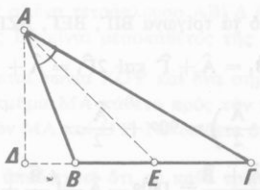
᾿Από τήν ἰσότητα $\hat{\Gamma}_1 = \hat{B}$ ἕπεται ὅτι ΓΕ // ΑΒ. Μέ τόν ἴδιο τρόπο δείχνουμε., ἀπό τήν ἰσότητα τῶν τριγώνων ΑΜΓ καί ΒΜΕ, ὅτι ΒΕ//=ΑΓ.

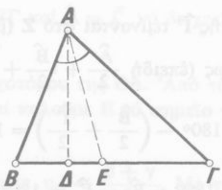
2. **Σὲ τρίγωνο ΑΒΓ, στὸ ὁποῖο εἶναι ΑΒ<ΑΓ, φέρνουμε τὸ ὕψος ΑΔ καὶ τὴ διχοτόμο ΑΕ. Νὰ δειχθεῖ ὅτι :**

   α) Τὸ ὕψος ΑΔ δὲν περιέχεται στὴ γωνία $E\hat{A}\Gamma$.

   β) Ἡ γωνία τοῦ ὕψους καὶ τῆς διχοτόμου εἶναι: $\Delta\hat{A}E = \dfrac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$.

Λύση: α) Ἄν $\hat{B} > 90^o$, τό ὕψος βρίσκεται ἔξω ἀπό τό τρίγωνο καί ἄρα ἔξω ἀπό τή





γωνία $E\hat{A}\Gamma$. Ἄν $\hat{B} < 90^o$, πρέπει νά δείξουμε ὅτι $\Delta\hat{A}\Gamma > E\hat{A}\Gamma$, δηλ. ὅτι $\Delta\hat{A}\Gamma > \dfrac{\hat{A}}{2}$.

Ἐπειδή ὅμως $\hat{B} > \hat{\Gamma}$, ἔχουμε $90^o - \hat{B} < 90^o - \hat{\Gamma}$, δηλαδή $\Delta\hat{A}B < \Delta\hat{A}\Gamma \Rightarrow \hat{A} - \Delta\hat{A}\Gamma <$ $\Delta\hat{A}\Gamma \Rightarrow \Delta\hat{A}\Gamma > \frac{\hat{A}}{2}$.

β) Ἀφοῦ τό ΑΔ βρίσκεται ἔξω ἀπό τή γωνία $E\hat{A}\Gamma = \frac{\hat{A}}{2}$, θά εἶναι $\Delta\hat{A}E = \Delta\hat{A}\Gamma - E\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}\Gamma - \frac{\hat{A}}{2}$. Ἔτσι ἄν θέσουμε $\Delta\hat{A}\Gamma = 90^o - \hat{\Gamma}$ καί $\frac{\hat{A}}{2} = 90^o - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$, βρίσκουμε τελικά:

$$\Delta\hat{A}E = (90^o - \hat{\Gamma}) - \left(90^o - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}\right) = -\hat{\Gamma} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}.$$

---

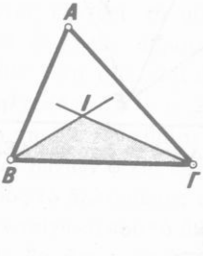
3. Σὲ τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τίς ἐσωτερικὲς καὶ ἐξωτερικὲς διχοτόμους τῶν γωνιῶν του $\hat{B}$ καί $\hat{\Gamma}$. Νὰ δειχθεῖ ὅτι:

α) Ἡ γωνία τῶν δύο ἐσωτερικῶν διχοτόμων εἶναι ἴση μὲ $90^o + \frac{\hat{A}}{2}$.

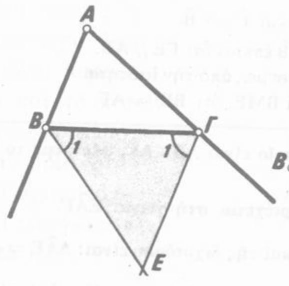
β) Ἡ γωνία τῶν δύο ἐξωτερικῶν διχοτόμων εἶναι ἴση μὲ $90^o - \frac{\hat{A}}{2}$.

γ) Ἡ γωνία μιᾶς ἐσωτερικῆς καὶ μιᾶς ἐξωτερικῆς διχοτόμου εἶναι ἴση μὲ $\frac{\hat{A}}{2}$.

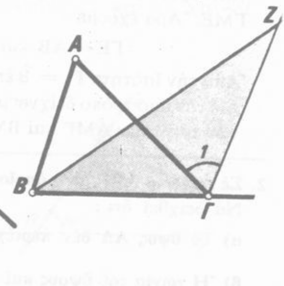
Λύση: Ἄν οἱ ἐσωτερικές διχοτόμοι τέμνονται στό Ι (βλ. σχ. Ι), οἱ ἐξωτερικές διχοτόμοι τέμνονται στό Ε (βλ. σχ. ΙΙ) καί ἡ ἐσωτερική διχοτόμος τῆς Β καί ἡ ἐξωτερική δι-



(I)



(II)



(III)

χοτόμος τῆς $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στό Ζ (βλ. σχ. ΙΙΙ). ἀπό τά τρίγωνα ΒΙΓ, ΒΕΓ, ΒΖΓ ἔχουμε ἀντιστοίχως (ἐπειδή $\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90^o$, $2\hat{B}_1 = \hat{A} + \hat{\Gamma}$ καί $2\hat{\Gamma}_1 = \hat{A} + \hat{B}$):

α) $B\hat{I}\Gamma = 180^o - \left(\frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2}\right) = 180^o - \left(90^o - \frac{\hat{A}}{2}\right) = 90^o + \frac{\hat{A}}{2}$.

β) $B\hat{E}\Gamma = 180^o - \hat{B}_1 - \hat{\Gamma}_1 = 180^o - \frac{\hat{A} + \hat{\Gamma}}{2} - \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} = 180^o - \hat{A} - \left(\frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2}\right) =$
$180^o - \hat{A} - \left(90^o - \frac{\hat{A}}{2}\right) = 90^o - \frac{\hat{A}}{2}$.

γ) $B\hat{Z}\Gamma = 180^o - \frac{\hat{B}}{2} - (\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}) = 180^o - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2} - \hat{\Gamma} = 180^o - (\hat{B}+\hat{\Gamma}) -$

$\frac{\hat{A}}{2} = \hat{A} - \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{A}}{2}.$

---

4. Σὲ τρίγωνο ΑΒΓ, στὸ ὁποῖο ἡ ἡμιευθεία ΑΕ βρίσκεται ἔξω ἀπὸ τὴ γωνία του Α, θεωροῦμε τὶς προτάσεις:

I. Τὸ τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ ΑΒ=ΑΓ.

II. Ἡ ΑΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.

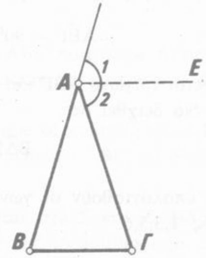
III. Ἡ ΑΕ εἶναι ἐξωτερικὴ διχοτόμος τῆς γωνίας $\hat{A}$.

Νὰ δειχθεῖ ὅτι, ἂν ἀληθεύουν οἱ δυὸ προτάσεις, τότε θὰ ἀληθεύει καὶ ἡ τρίτη.

Λύση: Ἂν ΑΒ = ΑΓ καί ΑΕ // ΒΓ, τότε ἀπό τήν παραλληλία τῶν ΑΕ καί ΒΓ ἔχουμε $\hat{A}_1 = \hat{B}$ καί $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma}$ καί ἐπειδή $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, θά εἶναι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$.

Ἂν ΑΒ = ΑΓ καί $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$. τότε ἡ ἰσότητα $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{\Gamma}$ (πού προκύπτει ἀπό τήν ἰδιότητα τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας $\hat{A}$) γράφεται $2\hat{A}_2 = 2\hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{\Gamma} \Rightarrow$ ΑΕ // ΒΓ.

Τέλος ἄν ΑΕ // ΒΓ καί $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ τότε οἱ ἰσότητες $\hat{A}_1 = \hat{B}$ καί $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma}$, πού προκύπτουν ἀπό τήν παραλληλία τῶν ΑΕ καί ΒΓ, δίνουν ἀμέσως $\hat{B} = \hat{\Gamma} \Rightarrow$ τριγ.ΑΒΓ = ἰσοσκελές.



5.14 ΑΣΚΗΣΕΙΣ *

1. **Δίνεται ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ καί ἡ μεσοκάθετός του ε. Στό ἡμιεπίπεδο πού ὁρίζουν ἡ εὐθεία ε καί τό σημεῖο Β παίρνουμε ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ. Νά δείξετε ὅτι ΜΑ > ΜΒ.**

2. **Θεωροῦμε γωνία ΧÔΨ καί ἕνα σημεῖο Μ τῆς διχοτόμου της ΟΔ. Ἀπό τό Μ φέρνουμε τά κάθετα πρός τίς πλευρές τμήματα ΜΑ καί ΜΒ. Νά δείξετε ὅτι ἡ ΟΔ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ ΑΒ.**

3. **Ἂν σ' ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἔχουμε ΑΒ = ΒΓ καί $\hat{A} = \hat{\Gamma}$, νά δειχτεῖ ὅτι ἡ διαγώνιος ΒΔ εἶναι μεσοκάθετος τῆς διαγωνίου ΑΓ.**

4. **Δίνεται γωνία ΧÔΨ καί ἕνα σημεῖο Μ τῆς διχοτόμου της ΟΔ. Ἀπό τό Μ φέρνουμε τό τμῆμα ΜΑ κάθετο πρός τήν πλευρά ΟΧ καί καλοῦμε Ε τό σημεῖο τομῆς τῶν εὐθειῶν ΜΑ καί ΟΨ. Νά δείξετε ὅτι ΜΑ < ΜΕ.**

5. **Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ἔχουμε $\upsilon_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}$. Μέ τή βοήθεια αὐτῆς τῆς ἀνισότητας νά δειχθεῖ ὅτι:**

$$\upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma < \alpha + \beta + \gamma.$$

6. Δίνονται δύο παράλληλες εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 πού τέμνονται ἀπό μιά τρίτη εὐθεία ε. Νά δειχθεῖ ὅτι οἱ διχοτόμοι τῶν ἐντός ἐναλλάξ γωνιῶν εἶναι παράλληλες, ἐνῶ οἱ διχοτόμοι τῶν ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνιῶν εἶναι κάθετες.

7. Θεωροῦμε δύο γωνίες μέ πλευρές παράλληλες. Νά δείξετε ὅτι, ἄν οἱ γωνίες εἶναι ἴσες, οἱ διχοτόμοι τους εἶναι εὐθεῖες παράλληλες, ἐνῶ ἄν οἱ γωνίες εἶναι παραπληρωματικές, οἱ διχοτόμοι τους εἶναι εὐθεῖες κάθετες.

8. Θεωροῦμε δύο γωνίες μέ πλευρές κάθετες. Νά δείξετε ὅτι, ἄν οἱ γωνίες εἶναι ἴσες, οἱ διχοτόμοι τους εἶναι εὐθεῖες κάθετες, ἐνῶ ἄν οἱ γωνίες τους εἶναι παραπληρωματικές, οἱ διχοτόμοι τους εἶναι εὐθεῖες παράλληλες.

9. Νά δείξετε ὅτι τό συμμετρικό μιᾶς εὐθείας ε ὡς πρός κέντρο Ο εἶναι εὐθεία παράλληλη πρός τήν ε.

10. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ μέ $ΑΒ < ΑΓ$ καί φέρνουμε τή διχοτόμο του ΑΕ. Νά δειχθεῖ ὅτι $$Α\hat{Ε}Γ = 90^o + \frac{\hat{Β} - \hat{Γ}}{2},\ Α\hat{Ε}Β = 90^o - \frac{\hat{Β} - \hat{Γ}}{2}.$$

11. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ καί $ΑΒ < ΑΓ$ καί παίρνουμε στήν πλευρά του ΑΓ τμῆμα $ΑΔ = ΑΒ$. Νά δειχθεῖ ὅτι
$$Β\hat{Δ}Γ = 90^o + \frac{\hat{Α}}{2},\ Δ\hat{Β}Γ = \frac{\hat{Β} - \hat{Γ}}{2}.$$

12. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ γωνίες ἑνός τετραπλεύρου, ὅταν εἶναι ἀνάλογες μέ τούς ἀριθμούς 1,3,5,6.

13. Θεωροῦμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ μέ $\hat{Α} > \hat{Γ}$ καί καλοῦμε $\hat{\omega}$ τή γωνία τῶν διχοτόμων τῶν $\hat{Γ}$, $\hat{Δ}$ καί $\hat{\varphi}$ τήν ὀξεία γωνία τῶν διχοτόμων τῶν $\hat{Β}$, $\hat{Δ}$. Νά δείξετε ὅτι
$$\hat{\omega} = \frac{\hat{Α} + \hat{Β}}{2},\quad \hat{\varphi} = \frac{\hat{Α} - \hat{Γ}}{2}.$$

14. Ἕνα πολύγωνο ἔχει ὅλες τίς γωνίες του ἴσες καὶ κάθε μιά τους εἶναι 144^o. Νά βρεθεῖ τό πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου.

15. Νά δείξετε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν κάθε (κυρτοῦ) πολυγώνου εἶναι ἴσο μέ 360^o.
(Ἐξωτερική γωνία πολυγώνου λέγεται ἡ ἐφεξῆς καί παραπληρωματική κάθε γωνίας του).

5.15 ΑΣΚΗΣΕΙΣ **

16. Θεωροῦμε τρίγωνο ΑΒΓ, τίς διχοτόμους ΒΔ καί ΓΕ τῶν γωνιῶν του $\hat{Β}$ καί $\hat{Γ}$ καί τήν ἐξωτερική διχοτόμο ΑΧ τῆς γωνίας του $\hat{Α}$. Ἀπό τό Δ φέρνουμε παράλληλο πρός τήν ΓΕ πού τέμνει τήν ΑΧ στό Ζ καί ἀπό τό Ε φέρνουμε παράλληλο πρός τήν ΒΔ πού τέμνει τήν ΑΧ στό Η. Νά δείξετε ὅτι:
$$Δ\hat{Ζ}Α = \frac{\hat{Β}}{2},\quad Ε\hat{Η}Α = \frac{\hat{Γ}}{2}.$$

17. Νά δείξετε ὅτι κάθε διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ εἶναι μικρότερη ἀπό τό ἡμιάθροισμα τῶν πλευρῶν πού τήν περιέχουν καί μεγαλύτερη ἀπό τήν ἡμιδιαφορά τους, δηλαδή νά δείξετε π.χ. ὅτι:

$$\frac{|\beta-\gamma|}{2} < \mu_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}.$$

Νά δείξετε ἀκόμη ὅτι σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ἔχουμε: $\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < \alpha + \beta + \gamma$.

18. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ μέ ΑΒ < ΑΓ. Νά δειχθεῖ ὅτι:
    I) Τό ὕψος $ΑΔ = \upsilon_\alpha$ σχηματίζει μέ τή μικρότερη πλευρά μικρότερη γωνία.
    II) Ἡ διάμεσος $ΑΜ = \mu_\alpha$ σχηματίζει μέ τή μικρότερη πλευρά μεγαλύτερη γωνία.
    III) Τό ὕψος υ_α καί ἡ διάμεσος μ_α βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς διχοτόμου $ΑΕ = \delta_\alpha$.
    IV) Ἰσχύουν πάντα οἱ ἀνισότητες $\upsilon_\alpha < \delta_\alpha < \mu_\alpha$, $\upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma < \delta_\alpha + \delta_\beta + \delta_\gamma < \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma$.
    V) Ἰσχύει πάντα ἡ ἀνισότητα $\delta_\alpha + \delta_\beta + \delta_\gamma < \alpha + \beta + \gamma$.
19. Στίς κάθετες πλευρές ΑΒ καί ΑΓ ὀρθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε δύο σημεῖα Δ καί Ε ἀντιστοίχως. Δεῖξτε ὅτι ΔΕ < ΒΓ.
20. Στίς πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἑνός ἰσόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε ἀντιστοίχως τά σημεῖα Δ, Ε, Ζ, τέτοια ὥστε ΑΔ = ΒΕ = ΓΖ. Νά δείξετε ὅτι τό τρίγωνο ΔΕΖ εἶναι ἐπίσης ἰσόπλευρο.
    Ἀντιστρόφως, ἄν ἔχουμε ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο ΔΕΖ πού οἱ κορυφές του Δ,Ε,Ζ, εἶναι στίς πλευρές[1] ΑΒ,ΒΓ,ΓΑ ἑνός ἄλλου ἰσόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ, νά δείξετε ὅτι ΑΔ = ΒΕ = ΓΖ.
21. Οἱ ἀπέναντι πλευρές ἑνός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται στά Ε καί Ζ. Νά δειχθεῖ ὅτι ἡ γωνία τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν $\hat{Ε}$ καί $\hat{Ζ}$ εἶναι ἴση μέ τό ἡμιάθροισμα δύο ἀπέναντι γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου.
22. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ καί ἡ διάμεσός του ΑΜ. Νά δειχθεῖ ὅτι ἡ γωνία $\hat{Α}$ εἶναι ὀξεία, ὀρθή ἤ ἀμβλεία, ἄν ἡ ΑΜ εἶναι μεγαλύτερη, ἴση ἤ μικρότερη, ἀπό τό μισό τῆς ΒΓ

5.16 ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 5

1. Γιά τίς κάθετες εὐθεῖες ἔχουμε δύο θεμελιώδη θεωρήματα:
   Ι. Σ' ἕνα σημεῖο Α μιᾶς εὐθείας ε μποροῦμε νά φέρουμε μία καί μόνο μία κάθετη στήν ε.
   ΙΙ. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α πού δέν ἀνήκει σέ εὐθεία ε μποροῦμε νά φέρουμε μία καί μόνο μία εὐθεία κάθετη στήν ε.

   Ἄν καλέσουμε Κ τό σημεῖο στό ὁποῖο ἡ κάθετη εὐθεία πού φέρνουμε ἀπό σημεῖο Α πρός εὐθεία ε τέμνει τήν ε, τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΚ λέγεται **ἀπόσταση τοῦ Α ἀπό τήν ε** καί εἶναι **μικρότερο** ἀπό κάθε πλάγιο τμῆμα ΑΒ.

   Ἡ σύγκριση δύο πλάγιων τμημάτων ΑΒ καί ΑΓ ἀνάγεται στή σύγκριση τῶν ἀποστάσεων τῶν ἰχνῶν τους ἀπό τό ἴχνος Κ τοῦ κάθετου τμήματος. Ἔτσι ἔχουμε

$$ΑΒ \gtreqless ΑΓ \Longleftrightarrow ΚΒ \gtreqless ΚΓ.$$

   Ἡ κάθετη εὐθεία πού φέρνουμε σ' ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ στό μέσο του Κ λέγεται **μεσοκάθετος τοῦ ΑΒ**. Κάθε σημεῖο πού ἰσαπέχει ἀπό δύο σημεῖα Α καί Β βρίσκεται στή μεσοκάθετο τοῦ τμήματος ΑΒ καί ἀντιστρόφως.

---

1. Ἄν ἔχουμε ἕνα τρίγωνο ΔΕΖ πού κάθε κορυφή του εἶναι πάνω σέ μιά πλευρά ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, τότε τό ΔΕΖ λέγεται «ἐγγεγραμμένο» στό ΑΒΓ.

Ἐπίσης κάθε σημεῖο πού ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές μιᾶς γωνίας βρίσκεται στή διχοτόμο της καί ἀντιστρόφως.

2. Δύο εὐθεῖες ἑνός ἐπιπέδου πού δέν ἔχουν κοινό σημεῖο λέγονται **παράλληλες εὐθεῖες.** Δεχόμαστε τό «Εὐκλείδειο αἴτημα»:

— Ἀπὸ ἕνα σημεῖο ποὺ δὲν ἀνήκει σὲ εὐθεία ε διέρχεται μία καὶ μόνο μία εὐθεία παράλληλη πρὸς τὴν ε.

Δύο εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 εἶναι παράλληλες, ὅταν:

— Εἶναι καὶ οἱ δυὸ κάθετες στὴν ἴδια εὐθεία ε.

— Εἶναι καὶ οἱ δυὸ παράλληλες πρὸς μία ἄλλη εὐθεία ε.

— Τέμνονται ἀπὸ μία τρίτη εὐθεία καὶ σχηματίζουν τὶς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίες τους ἴσες ἢ τὶς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίες τους ἴσες ἢ τὶς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίες τους παραπληρωματικές.

Ἄν ἔχουμε δύο εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 παράλληλες καί μία εὐθεία ε τέμνει τή μία, τότε ἡ ε θά τέμνει καί τήν ἄλλη. Ἐπίσης ἄν ἡ ε εἶναι κάθετη στή μία ἀπό τίς ε_1 καί ε_2, τότε θά εἶναι κάθετη καί στήν ἄλλη.

Δύο γωνίες ποὺ ἔχουν τὶς πλευρὲς τους παράλληλες (ἢ κάθετες) εἶναι ἴσες, ὅταν εἶναι καὶ οἱ δύο ὀξεῖες ἢ καὶ οἱ δύο ἀμβλεῖες, ἐνῶ εἶναι παραπληρωματικές, ὅταν ἡ μία εἶναι ὀξεία καὶ ἡ ἄλλη ἀμβλεία.

3. Μέ τή βοήθεια τῶν παράλληλων εὐθειῶν ἀποδεικνύεται τό βασικό θεώρημα:

— Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι 2 ὀρθὲς γωνίες.

Ἔτσι ὅταν εἶναι γνωστές οἱ δυό γωνίες ἑνός τριγώνου, ξέρουμε καί τήν τρίτη γωνία του. Ἐπίσης ὅταν δύο τρίγωνα ἔχουν ἴσες μία πρός μία δύο γωνίες τους, τότε ἔχουν ἴσες καί τίς τρίτες γωνίες τους. Ἁπλά πορίσματα τοῦ θεωρήματος εἶναι οἱ προτάσεις:

— Κάθε ἐξωτερική γωνία ἑνός τριγώνου εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντί της ἐσωτερικῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

— Οἱ ὀξεῖες γωνίες ὀρθογώνιου τριγώνου εἶναι συμπληρωματικές.

— Κάθε ὀξεία γωνία ὀρθογώνιου καί ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 45°.

— Κάθε γωνία ἰσόπλευρου τριγώνου εἶναι 60°.

Τέλος, ἄν φέρουμε ὅλες τίς διαγωνίους ἑνός πολυγώνου μέ ν πλευρές ἀπό μία κορυφή του, τό πολύγωνο χωρίζεται σέ ν-2 τρίγωνα καί ἔτσι **τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου εἶναι 2ν—4** ὀρθές γωνίες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο

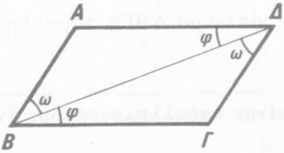
ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΑ

6.1. Παραλληλόγραμμο.

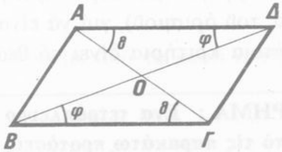
Ὁρισμός : Ἕνα τετράπλευρο ποὺ ἔχει τὶς ἀπέναντι πλευρές του παράλληλες λέγεται παραλληλόγραμμο, δηλαδή :

ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο $\Longleftrightarrow$ ΑΒ / / ΓΔ καί ΑΔ / / ΒΓ.

Ἄν φέρουμε μία διαγώνιο τοῦ παρ/μου ΑΒΓΔ, π.χ. τή ΒΔ (βλ. σχ. 1) ἀπό τήν παραλληλία τῶν πλευρῶν του ἔχουμε $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = \Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \hat{\varphi}$ καί $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta =$



Σχ. 1



Σχ. 2

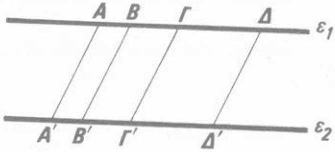
$\mathrm{B}\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\omega}$. Τότε ὅμως εἶναι τριγΑΒΔ = τριγ.ΒΓΔ (γιατί καί ΒΔ = ΒΔ) καί συνεπῶς **κάθε διαγώνιος τοῦ παραλληλογράμμου χωρίζει τὸ παραλληλόγραμμο σὲ δύο ἴσα τρίγωνα.** Ἀπό τήν ἰσότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν ἔχουμε ΑΔ = ΒΓ, ΑΒ = ΔΓ καί $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\Gamma}$ (ἐνῶ εἶναι καί $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Delta} = \hat{\varphi} + \hat{\omega}$). Δείξαμε λοιπόν ὅτι :

I. Στὸ παραλληλόγραμμο οἱ ἀπέναντι πλευρές του εἶναι ἴσες.
II. Στὸ παραλληλόγραμμο οἱ ἀπέναντι γωνίες του εἶναι ἴσες.

Ἄν φέρουμε καί τίς δύο διαγωνίους τοῦ παραλληλογράμμου καί καλέσουμε Ο τό σημεῖο τομῆς τους (βλ. σχ. 2), ἀπό τήν παραλληλία ΑΔ/ /ΓΒ ἔχουμε $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{O} = \mathrm{O}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \hat{\varphi}$ καί $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{O} = \mathrm{O}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = \hat{\theta}$. Τότε ὅμως εἶναι τριγ. ΑΟΔ = τριγΟΒΓ (γιατί καί ΑΔ = ΒΓ) καί ἀπό τήν ἰσότητα αὐτή ἔχουμε ΑΟ = ΟΓ καί ΟΒ = ΟΔ. Βλέπουμε δηλαδή ὅτι τό σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων εἶναι μέσο τῆς κάθε διαγωνίου. Τήν ἰδιότητα αὐτή τή διατυπώνουμε συντομότερα λέγοντας ὅτι :

III. Οἱ διαγώνιοι ἑνὸς παραλληλογράμμου διχοτομοῦνται.

Οἱ προτάσεις I, II, III ἀποτελοῦν τίς βασικές ἰδιότητες ἑνός παραλληλογράμμου. Ἄμεση συνέπειά τους εἶναι ἡ πρόταση :



Παράλληλα τμήματα ποὺ ἔχουν τὰ ἄκρα τους σὲ δύο παράλληλες εὐθεῖες εἶναι ἴσα,

δηλαδή ἄν τά παράλληλα τμήματα AA′, BB′, ΓΓ′, ... ἔχουν τά ἄκρα τους στίς παράλληλες εὐθεῖες ε_1 καί ε_2, θά ἔχουμε AA′ = BB′ = ΓΓ′ = ... (ἀφοῦ δύο ὁποιαδήποτε ἀπό αὐτά, π.χ. τά AA′ καί BB′, σχηματίζουν τό παραλληλόγραμμο AA′B′B καί αὐτό γιατί ἔχει τίς ἀπέναντι πλευρές του παράλληλες).

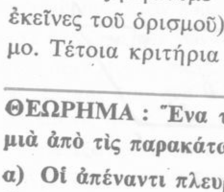
6.2. Κριτήρια γιά παραλληλόγραμμο.

Θά ζητήσουμε τώρα κριτήρια (δηλαδή συνθῆκες διαφορετικές ἀπό ἐκεῖνες τοῦ ὁρισμοῦ), γιά νά εἶναι ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο. Τέτοια κριτήρια δίνει τό θεώρημα :

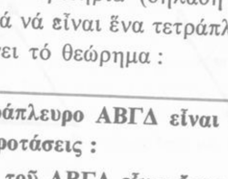
ΘΕΩΡΗΜΑ : Ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο, ἂν ἰσχύει μιὰ ἀπὸ τὶς παρακάτω προτάσεις :

α) Οἱ ἀπέναντι πλευρὲς τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι ἴσες.
β) Δύο ἀπέναντι πλευρὲς τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι ἴσες καὶ παράλληλες.
γ) Οἱ ἀπέναντι γωνίες τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι ἴσες.
δ) Οἱ διαγώνιοι τοῦ ΑΒΓΔ διχοτομοῦνται.

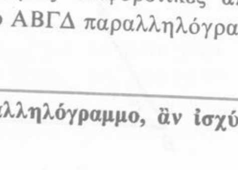
Ἀπόδ. Γιά νά ἀποδείξουμε τό θεώρημα, θά πρέπει (σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό) νά ἀποδείξουμε ὅτι σέ κάθε περίπτωση οἱ ἀπέναντι πλευρές τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι παράλληλες
α) Ἄν ΑΒ = ΓΔ καί ΑΔ = ΒΓ, φέρνοντας τή διαγώνιο ΒΔ (βλ. σχ. 3) ἔχουμε τριγ.



Σχ. 3



Σχ. 4



Σχ. 5

ΑΒΔ = τριγΒΔΓ (γιατί ΑΒ = ΔΓ, ΑΔ = ΒΓ, ΒΔ = ΒΔ) καί ἄρα $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{B}_1 \Rightarrow$ ΑΔ//ΒΓ καί $\widehat{B}_2 = \widehat{\Delta}_2 \Rightarrow$ ΑΒ//ΔΓ. Ἔτσι τό ΑΒΓΔ ἔχει τίς ἀπέναντι πλευρές του παράλληλες.

β) Ἂν εἶναι $ΑΔ \,//\!= ΒΓ$ καί φέρουμε πάλι τή διαγώνιο ΔΒ (βλ. σχ. 3), ἔχουμε τριγ. $ΑΒΔ =$ τριγ.$ΒΔΓ$ (γιατί $ΑΔ = ΒΓ$, $ΒΔ = ΒΔ$, $\widehat{Δ}_1 = \widehat{Β}_1$) καί ἄρα $\widehat{Β}_2 = \widehat{Δ}_2 \Rightarrow$ $ΑΒ \,//\, ΔΓ$. Ἔτσι τό ΑΒΓΔ ἔχει καί τίς ἄλλες δύο ἀπέναντι πλευρές του παράλληλες.

γ) Ἂν ἔχουμε $\widehat{Β} = \widehat{Δ} = \widehat{φ}$ καί $\widehat{Α} = \widehat{Γ} = \widehat{ω}$ (βλ. σχ. 4), τότε ἡ $\widehat{Α} + \widehat{Β} + \widehat{Γ} + \widehat{Δ} = 360^o$ γράφεται $2\widehat{φ} + 2\widehat{ω} = 360^o \Rightarrow \widehat{φ} + \widehat{ω} = 180^o$. Ἀπό αὐτή ἔχουμε $\widehat{Α} + \widehat{Β} = 180^o$ $\Rightarrow ΑΔ \,//\, ΒΓ$ καί $\widehat{Β} + \widehat{Γ} = 180^o \Rightarrow ΑΒ \,//\, ΓΔ$, δηλαδή οἱ ἀπέναντι πλευρές τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι παράλληλες.

δ) Ἂν οἱ διαγώνιοι τέμνονται στό Ο (βλ. σχ. 5), θά ἔχουμε ἀπό τήν ὑπόθεσή μας $ΟΑ = ΟΓ$ καί $ΟΔ = ΟΒ$. Τότε ὅμως θά εἶναι τριγ$ΑΟΔ =$ τριγ$ΒΟΓ$ γιατί $ΟΑ = ΟΓ$, $ΟΔ = ΟΒ$, $Α\widehat{Ο}Δ = Β\widehat{Ο}Γ$) καί ἄρα $ΑΔ = ΒΓ$ καί $\widehat{Δ}_1 = \widehat{Β}_1 \Rightarrow ΑΔ \,//\, ΒΓ$. Ἔτσι τό ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο, ἀφοῦ ἔχει τίς ἀπέναντι πλευρές ΑΔ καί ΒΓ ἴσες καί παράλληλες (περίπτωση β).

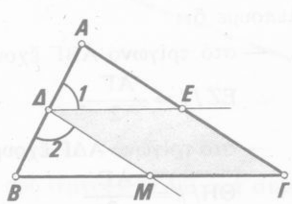
Εἶναι φανερό ὅτι τά κριτήρια (α), (γ), (δ) εἶναι οἱ ἀντίστροφες προτάσεις τῶν βασικῶν ἰδιοτήτων I, II, III τοῦ παραλληλογράμμου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1-6

6.3. Ἐφαρμογές τῶν παραλληλογράμμων.

α) Στὸ τρίγωνο.

Ἂς πάρουμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί ἄς φέρουμε ἀπό τό μέσο Δ τῆς ΑΒ τήν παράλληλο πρός τή ΒΓ πού τέμνει τὴν ΑΓ στό Ε καί τήν παράλληλο πρός τήν ΑΓ πού τέμνει τή ΒΓ στό Μ. Τότε τό σχῆμα ΔΕΓΜ εἶναι παραλληλόγραμμο καί θά ἔχουμε $ΔΜ = ΕΓ$ καί $ΔΕ = ΜΓ$. Ἐπειδή ὅμως εἶναι τριγ$ΑΔΕ =$ τριγ$ΔΒΜ$ (γιατί $ΑΔ = ΔΒ$, $\widehat{Δ}_1 = \widehat{Β}$, $\widehat{Α} = \widehat{Δ}_2$) ἔχουμε καί $ΔΜ = ΑΕ$ καί $ΔΕ = ΒΜ$, ὁπότε εἶναι



$$ΑΕ = ΕΓ, \qquad ΒΜ = ΜΓ$$

δηλαδή τά Ε καί Μ εἶναι μέσα τῶν πλευρῶν ΑΓ καί ΒΓ. Ἂν περιορισθοῦμε λοιπόν στήν ΔΕ, πού εἶναι $ΔΕ = ΜΓ = \dfrac{ΒΓ}{2}$, ἔχουμε τήν πρόταση:

ΘΕΩΡΗΜΑ : Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἡ παράλληλος πρὸς τὴ ΒΓ ποὺ φέρνουμε ἀπὸ τὸ μέσο Δ τῆς πλευρᾶς ΑΒ περνάει ἀπὸ τὸ μέσο Ε τῆς τρίτης πλευρᾶς καὶ τὸ τμῆμα ΔΕ εἶναι ἴσο μὲ τὸ μισὸ τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

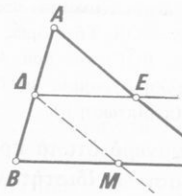
Στήν πρόταση αὐτή ἔχουμε γιά ὑπόθεση τίς συνθῆκες $ΑΔ = ΔΒ$ καί

$ΔΕ // ΒΓ$ καί γιά συμπέρασμα τίς $ΑΕ = ΕΓ$ καί $ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2}$. Μιά ἀντίστροφη πρόταση εἶναι τό θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ : Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ποὺ συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι παράλληλο πρὸς τὴν τρίτη πλευρὰ καὶ ἴσο μὲ τὸ μισό της.

Ἀπόδ. Ἄν Δ καί Ε τά μέσα τῶν ΑΒ καί ΑΓ, θά ἀποδείξουμε ὅτι

$$ΔΕ // = \frac{ΒΓ}{2}.$$



Ἄν φέρουμε ἀπό τό Δ παράλληλο πρός τήν ΑΓ πού τέμνει τή ΒΓ στό Μ, θά εἶναι (κατά τήν προηγούμενη πρόταση) $ΒΜ = ΜΓ$ καί $ΔΜ = // ΕΓ$.

Ἔτσι τό ΔΕΓΜ εἶναι παραλληλόγραμμο (κατά τό κριτήριο (β) τῆς § 6.2) καί ἑπομένως $ΔΕ // = ΜΓ \Rightarrow ΔΕ // = \frac{ΒΓ}{2}$.

β) Στὸ τετράπλευρο.

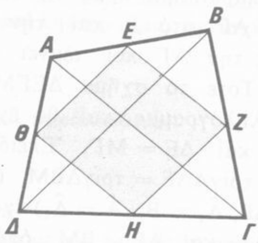
Ἄς ἐφαρμόσουμε τό θεώρημα στά δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί ΑΔΓ στά ὁποῖα χωρίζεται ἕνα τετλάπευρο ΑΒΓΔ ἀπό τή διαγώνιό του ΑΓ. Ἄν καλέσουμε Ε,Ζ,Η,Θ τά μέσα τῶν ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΑ, βλέπουμε ὅτι:

— στό τρίγωνο ΑΒΓ ἔχουμε:

$$ΕΖ // = \frac{ΑΓ}{2},$$

— στό τρίγωνο ΑΔΓ ἔχουμε:

$$ΘΗ // = \frac{ΑΓ}{2}$$



καί ἔτσι εἶναι $ΕΖ // = ΘΗ$, δηλαδή τό ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμο. Δείξαμε λοιπόν ὅτι:

ΘΕΩΡΗΜΑ : Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι κορυφὲς παραλληλογράμμου.

Ἀπό τά τρίγωνα ΑΒΔ καί ΒΓΔ παρατηροῦμε ὅτι ἔχουμε καί $ΕΘ // = ΖΗ // = ΒΔ/2$, δηλαδή τό παραλληλόγραμμο ΕΖΗΘ ἔχει τίς ἀπέναντι πλευρές του παράλληλες πρός τίς διαγωνίους τοῦ τετραπλεύρου καί ἴσες μέ τά μισά τους.

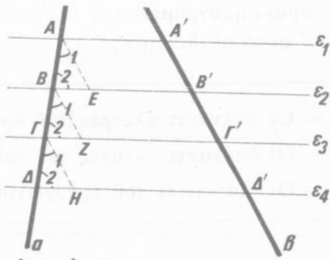
6.4. Διαίρεση εὐθύγραμμου τμήματος σέ ν ἴσα μέρη.

Θά ἀποδείξουμε τώρα ἕνα γενικότερο θεώρημα :

Ἂν παράλληλες εὐθεῖες ε_1, ε_2, ε_3, ... τέμνουν δύο εὐθεῖες α καὶ β καὶ ὁρίζουν ἴσα τμήματα στὴν εὐθεία α, τότε θὰ ὁρίζουν ἴσα τμήματα καὶ στὴν εὐθεία β.

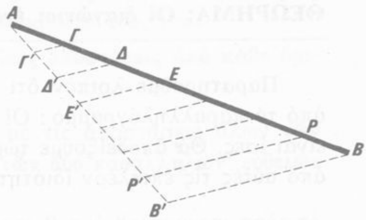
Ἀπόδ. Ἂν οἱ παράλληλες εὐθεῖες $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$... τέμνουν τήν εὐθεία α στά σημεῖα Α,Β,Γ, Δ,... τήν β στά σημεῖα Α′, Β′, Γ′, Δ′, ... καί εἶναι ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ... θά ἀποδείξουμε ὅτι

$$A'B' = B'\Gamma' = \Gamma'\Delta' = \dots$$



Φέρνουμε ἀπό τά Α,Β,Γ,... τμήματα ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ,... παράλληλα πρός τήν β πού τά ἄκρα τους Ε,Ζ,Η,... εἶναι στίς ε_2, ε_3, ε_4, ... Τότε ἔχουμε ΑΕ = Α′Β′, ΒΖ = Β′Γ′, ΓΗ = Γ′Δ′, ... καί συνεπῶς ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι ΑΕ = ΒΖ = ΓΗ = = ... Οἱ ἰσότητες ὅμως αὐτές ἀληθεύουν, γιατί τριγΑΒΕ = τριγΒΓΖ = τριγΓΔΗ = ... (ἀφοῦ ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ..., $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 = \widehat{\Gamma}_1 = \dots$ καί $\widehat{B}_2 = \widehat{\Gamma}_2 = \widehat{\Delta}_2 = \dots$).

Μέ τήν βοήθεια τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ μποροῦμε **νὰ χωρίσουμε δεδομένο εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ σὲ ν ἴσα μέρη.**



Φέρνουμε ἀπό τό ἄκρο τοῦ Α μιά ὁποιαδήποτε ἡμιευθεία ΑΧ, διαφορετική ἀπό τήν ΑΒ, καί παίρνουμε (μέ τό διαβήτη μας) πάνω σέ αὐτή ν διαδοχικά ἴσα τμήματα ΑΓ′ = Γ′Δ′ = Δ′Ε′ = ... = = Ρ′Β′. Ἔπειτα ἑνώνουμε τό σημεῖο Β′ μέ τό Β καί ἀπό τά σημεῖα Γ′, Δ′, ..., Ρ′ φέρνουμε εὐθεῖες παράλληλες πρός τήν Β′Β πού τέμνουν τό ΑΒ στά σημεῖα Γ,Δ,Ε, ..., Ρ. Τά σημεῖα αὐτά χωρίζουν τό ΑΒ σέ ν ἴσα μέρη, γιατί, ὅπως εἶναι φανερό ἀπό τό προηγούμενο θεώρημα, ἔχουμε

$$A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta E = \dots = PB.$$

Παρατηροῦμε ὅτι γιά τή διαίρεση τοῦ ΑΒ σέ ν ἴσα μέρη μέ τόν τρόπο αὐτό χρησιμοποιοῦμε μόνο κανόνα καί διαβήτη.

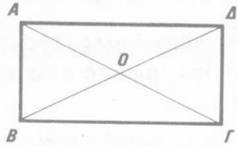
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7 - 12

6.5. Τό ὀρθογώνιο.

Ὁρισμός : Τὸ τετράπλευρο ποὺ ἔχει ὅλες τὶς γωνίες του ἴσες λέγεται ὀρθογώνιο, δηλαδή :

$$\text{ΑΒΓΔ ὀρθογώνιο} \Longleftrightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta}.$$

Ἐπειδή τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κάθε τετραπλεύρου εἶναι 4 ὀρθές, εἶναι φανερό ὅτι **οἱ γωνίες ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι ὀρθές.** Ἐπίσης, ἀφοῦ οἱ ἀπέναντι γωνίες τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἴσες, καταλαβαίνουμε ἀμέσως ὅτι **τὸ ὀρθογώνιο εἶναι παραλληλόγραμμο** καί ἑπομένως ἰσχύουν γι' αὐτό οἱ ἰδιότητες :



— Οἱ ἀπέναντι πλευρὲς τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι παράλληλες.
— Οἱ ἀπέναντι πλευρὲς τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἴσες.
— Οἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου διχοτομοῦνται.

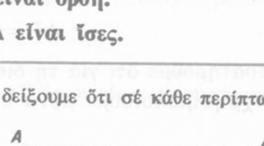
Τά τρίγωνα ΑΒΓ καί ΒΓΔ εἶναι τώρα ὀρθογώνια καί ἴσα (ἀφοῦ ΒΓ = ΒΓ, ΑΒ = ΓΔ) καί ἔτσι ἔχουμε ἀκόμη ΑΓ = ΒΔ), δηλαδή :

ΘΕΩΡΗΜΑ: Οἱ διαγώνιοι ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι ἴσες.

Παρατηροῦμε λοιπόν ὅτι τό ὀρθογώνιο ἔχει δύο ἐπιπλέον ἰδιότητες ἀπό τό παραλληλόγραμμο : Οἱ γωνίες του εἶναι ὀρθές καί οἱ διαγώνιοί του εἶναι ἴσες. Θά ἀποδείξουμε τώρα ὅτι κάθε παραλληλόγραμμο πού ἔχει μιά ἀπό αὐτές τίς ἐπιπλέον ἰδιότητες εἶναι ὀρθογώνιο.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνιο, ἂν ἰσχύει μιὰ ἀπὸ τὶς παρακάτω προτάσεις:
α) Μία γωνία τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθή.
β) Οἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ εἶναι ἴσες.

Ἀπόδ. Γιά νά ἀποδείξουμε τό θεώρημα, θά πρέπει νά δείξουμε ὅτι σέ κάθε περίπτωση ὅλες οἱ γωνίες τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι ἴσες.



α) Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $\hat{A} = 1$ ὀρθή. Τότε οἱ ἰσότητες $\hat{\Gamma} = \hat{A}$, $\hat{B} + \hat{A} = 2$ ὀρθ., $\hat{\Delta} + \hat{A} = 2$ ὀρθ., πού ἰσχύουν σέ κάθε παραλληλόγραμμο, δίνουν ἀντίστοιχα $\hat{\Gamma} = 1$ ὀρθ., $\hat{B} = 1$ ὀρθ. $\hat{\Delta} = 1$ ὀρθ. $\Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$.

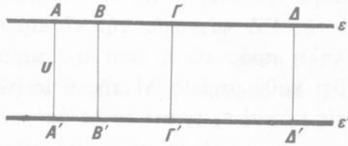
β) Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ΑΓ = ΒΔ. Τότε τριγΑΒΓ = τριγΒΓΔ (γιατί ΑΓ = ΒΔ, ΑΒ = ΔΓ

ΒΓ = ΒΓ) καί ἄρα $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$. Ἐπειδή ὅμως σέ κάθε παραλληλόγραμμο εἶναι καί $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 2$ ὀρθ., ἔπεται ὅτι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 1$ ὀρθ. ⇒ τό ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνιο.

Γιά νά δείχνουμε τώρα ὅτι ἕνα τετράπλευρο εἶναι ὀρθογώνιο, πρέπει πρῶτα νά δείχνουμε ὅτι εἶναι παραλληλόγραμμο (μέ κάποιο ἀπό τά κριτήρια τῆς § 6.2) καὶ μετά νά δείχνουμε ὅτι μία γωνία του εἶναι ὀρθή ἤ ὅτι οἱ διαγώνιοί του εἶναι ἴσες.

6.6. Ἀπόσταση δύο παράλληλων εὐθειῶν.

Ἄς θεωρήσουμε δύο παράλληλες εὐθεῖες ε καί ε′ καί τά κάθετα σ' αὐτές εὐθύγραμμα τμήματα ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′, ... πού ἔχουν τά ἄκρα τους στίς ε καί ε′. Ἐπειδή τά τμήματα αὐτά εἶναι παράλληλα (κάθετα στήν ἴδια εὐθεία, π.χ. τήν ε) καί βρίσκονται μεταξύ παράλληλων εὐθειῶν, θά εἶναι ἴσα. Τά τμήματα ὅμως αὐτά εἶναι καί ἀποστάσεις σημείων τῆς μιᾶς παραλλήλου ἀπό τήν ἄλλη. Ἔτσι ἔχουμε τίς προτάσεις :

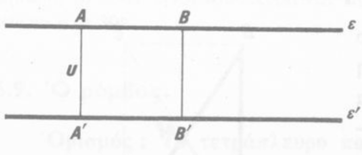


— **Εὐθύγραμμα τμήματα ποὺ ἔχουν τὰ ἄκρα τους σὲ δύο παράλληλες εὐθεῖες καὶ εἶναι κάθετα σὲ αὐτὲς εἶναι μεταξύ τους ἴσα.**

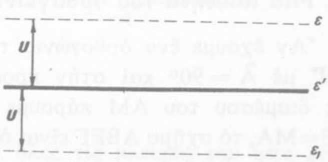
— **Ὅλα τὰ σημεῖα μιᾶς εὐθείας ε ἔχουν ἴσες ἀποστάσεις ἀπὸ κάθε ὁρισμένη εὐθεία παράλληλη πρὸς τὴν ε.**

Τό εὐθύγραμμο τμῆμα υ πού εἶναι ἴσο μέ τίς ἀποστάσεις ὅλων τῶν σημείων τῆς ε ἀπό τήν ε′ λέγεται **ἀπόσταση τῶν δύο παράλληλων εὐθειῶν ε καὶ ε′**.

Ἀντιστρόφως, ἄν ἔχουμε δύο σημεῖα Α καί Β πού βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος μιᾶς εὐθείας ε′ καί οἱ ἀποστάσεις τους ΑΑ′ καί ΒΒ′ ἀπό τήν ε′ εἶναι ἴσες (βλ. σχ. 6), τότε ἡ εὐθεία ΑΒ εἶναι παράλληλη πρός τήν ε′ (ἀφοῦ τό ΑΑ′Β′Β εἶναι ὀρθογώνιο). Ἄν λοιπόν θέσουμε ΑΑ′ = υ, συμπεραίνουμε ὅτι κάθε σημεῖο Β πού βρίσκεται πρός τό μέρος τοῦ Α καί ἀπέχει υ ἀπό τήν ε′ βρίσκεται στήν παράλληλο πού φέρνουμε ἀπό τό Α πρός τήν ε′. Ἄρα :



Σχ. 6



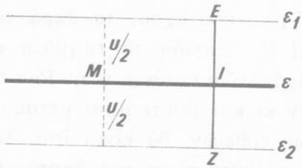
Σχ. 7

—Ὅλα τὰ σημεῖα ποὺ βρίσκονται πρὸς τὸ ἴδιο μέρος μιᾶς εὐθείας ε′ καὶ ἔχουν ἀπόσταση υ ἀπὸ αὐτὴ βρίσκονται σ᾿ εὐθεία ε//ε′.

Τότε ὅμως εἶναι φανερό ὅτι ὅλα τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου πού ἔχουν ἀπόσταση υ ἀπό τήν ε′ βρίσκονται σέ δύο εὐθεῖες ε καί $ε_1$ παράλληλες πρός τήν ε′ (βλ. σχ. 7) οἱ ὁποῖες εἶναι ἑκατέρωθεν τῆς ε′ σέ ἀπόσταση υ.

6.7. Ἡ μεσοπαράλληλος δύο παράλληλων.

Ἄς πάρουμε πάλι δύο παράλληλες εὐθεῖες $ε_1$ καί $ε_2$ καί ἕνα τμῆμα ΕΖ = υ κάθετο πρός αὐτές πού ἔχει τά ἄκρα του στίς $ε_1$ καί $ε_2$. Ἄν ἀπό τό μέσο Ι τῆς ΕΖ φέρουμε τήν εὐθεία ε παράλληλη πρός τίς $ε_1$ καί $ε_2$, παρατηροῦμε ὅτι κάθε σημεῖο Μ τῆς ε ἰσαπέχει ἀπό τίς $ε_1$ καί $ε_2$ (γιατί τό Μ ἀπέχει ἀπό κάθε μιά παράλληλο ἀπόσταση $\frac{υ}{2}$). Ἡ εὐθεία ε πού κάθε σημεῖο της ἰσαπέχει ἀπό δύο παράλληλες εὐθεῖες $ε_1$ καί $ε_2$ λέγεται **μεσοπαράλληλος τῶν $ε_1$ καὶ $ε_2$**.



Ἀντιστρόφως, κάθε σημεῖο πού ἰσαπέχει ἀπό τίς $ε_1$ καί $ε_2$ βρίσκεται στή μεσοπαράλληλο, γιατί εἶναι σημεῖο τῆς ζώνης τῶν παραλλήλων καί ἀπέχει ἀπό κάθε μιά τους ἀπόσταση $\frac{υ}{2}$. Ἔτσι λοιπόν:

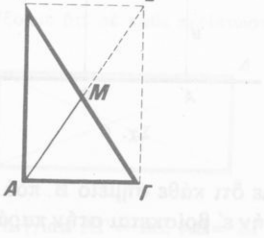
Ἕνα σημεῖο ἰσαπέχει ἀπὸ δύο παράλληλες εὐθεῖες, ἂν καὶ μόνο ἂν βρίσκεται στὴ μεσοπαράλληλό τους.

Δηλαδή, ἡ μεσοπαράλληλος δύο παράλληλων εὐθειῶν περιέχει ὅλα τά σημεῖα πού ἰσαπέχουν ἀπό τίς δύο παράλληλες καί μόνο αὐτά.

6.8. Μία ἰδιότητα τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου.

Ἄν ἔχουμε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ μέ $\hat{Α} = 90^ο$ καί στήν προέκταση τῆς διαμέσου του ΑΜ πάρουμε τμῆμα ΜΕ=ΜΑ, τό σχῆμα ΑΒΕΓ εἶναι ὀρθογώνιο (γιατί οἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται καί ἡ γωνία του $\hat{Α}$ εἶναι ὀρθή). Τότε

$$ΑΕ = ΒΓ \Rightarrow 2ΑΜ = ΒΓ \Rightarrow ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$$



δηλαδή :

ΘΕΩΡΗΜΑ: Ἡ διάμεσος ἑνὸς ὀρθογώνιου τριγώνου πρὸς τὴν ὑποτείνουσα εἶναι ἴση μὲ τὸ μισὸ τῆς ὑποτείνουσας.

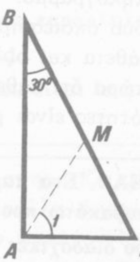
Ἰσχύει καί τό ἀντίστροφο, δηλαδή ἄν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἡ διάμεσός του ΑΜ εἶναι ἴση μέ τό μισό τῆς ΒΓ, τότε τό τρίγωνο εἶναι ὀρθογώνιο στήν κορυφή Α. Πραγματικά, ἄν εἶναι $AM = B\Gamma/2$ καί πάρουμε στήν προέκταση τῆς ΑΜ τμῆμα $ME = MA$, ἔχουμε $AE = 2AM = B\Gamma$, δηλαδή τό τετράπλευρο ΑΒΕΓ εἶναι πάλι ὀρθογώνιο (ἀφοῦ οἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται καί εἶναι ἴσες), ὁπότε $\hat{A} = 90^o$. Ἔτσι λοιπόν ἔχουμε τήν ὁλοκληρωμένη πρόταση :

Ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιο σέ μιά κορυφή του, ἄν καί μόνο ἄν ἡ διάμεσος πρός τήν ἀπέναντι πλευρά εἶναι ἴση μέ τό μισό τῆς πλευρᾶς αὐτῆς.

Μιά χρήσιμη ἐφαρμογή τῆς προτάσεως αὐτῆς εἶναι τό θεώρημα :

Σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο, ἄν ἡ μία ὀξεία γωνία του εἶναι 30°, τότε ἡ ἀπέναντι πλευρά της εἶναι ἴση μέ τό μισό τῆς ὑποτείνουσας καί ἀντιστρόφως.

Ἀπόδ. Θεωροῦμε ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) μέ $\hat{B} = 30^o$. Τότε θά εἶναι καί $\hat{\Gamma} = 60^o$. Τό τρίγωνο ΑΜΓ εἶναι ἰσοσκελές $\left(\text{γιατί } AM = \dfrac{B\Gamma}{2} = M\Gamma\right)$ καί ἄρα $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma} = 60^o$. Τότε ὅμως εἶναι ἰσόπλευρο, ἀφοῦ καί ἡ τρίτη γωνία του εἶναι 60° καί ἄρα $A\Gamma = M\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2}$.



Ἀντιστρόφως ἄν $A\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2}$, θά εἶναι $A\Gamma = M\Gamma$, ἐνῶ ἔχουμε ἐπίσης $AM = \dfrac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$. Δηλαδή τό ΑΜΓ εἶναι ἰσόπλευρο καί ἄρα $\hat{\Gamma} = 60^o \Rightarrow \hat{B} = 30^o$.

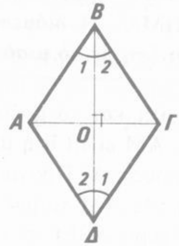
6.9. Ὁ ρόμβος.

Ὁρισμός : Τό τετράπλευρο πού ἔχει ὅλες τίς πλευρές του ἴσες λέγεται ρόμβος, δηλαδή :

$$AB\Gamma\Delta \text{ ρόμβος} \Longleftrightarrow AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A.$$

Ἀπό τόν ὁρισμό μας προκύπτει ἀμέσως ὅτι **ὁ ρόμβος εἶναι παραλληλό-**

γραμμο (γιατί οἱ ἀπέναντι πλευρές του εἶναι ἴσες) καί ἄρα ἰσχύουν γι' αὐτόν οἱ ἰδιότητες:



— Οἱ ἀπέναντι πλευρές τοῦ ρόμβου εἶναι παράλληλες.

— Οἱ ἀπέναντι γωνίες τοῦ ρόμβου εἶναι ἴσες.

— Οἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου διχοτομοῦνται.

Ἄν Ο εἶναι τό σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων ρόμβου ΑΒΓΔ, θά ἔχουμε τριγΑΟΒ = τριγΒΟΓ (γιατί ΒΟ = ΒΟ, ΑΒ = ΒΓ, ΑΟ = ΟΓ) καί ἄρα $B\hat{O}A = B\hat{O}\Gamma$ καί $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$. Ἐπειδή ὅμως εἶναι $B\hat{O}A + B\hat{O}\Gamma = 2$ὀρθ., ἕπεται ὅτι $B\hat{O}A = B\hat{O}\Gamma = 1$ ὀρθ., δηλαδή ὅτι $BO \perp A\Gamma$. Ἀκόμη, ἀπό τήν παραλληλία τῶν ἀπέναντι πλευρῶν, ἔχουμε $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$, $\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2 \Rightarrow \hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, δηλαδή ἡ διαγώνιος ΒΔ διχοτομεῖ καί τίς δύο γωνίες $\hat{B}$ καί $\hat{\Delta}$. Ἔτσι ἔχουμε τήν πρόταση:

— Οἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου τένονται κάθετα καί διχοτομοῦν τίς γωνίες του.

Παρατηροῦμε λοιπόν ὅτι ὁ ρόμβος ἔχει τρεῖς ἐπιπλέον ἰδιότητες ἀπό τό παραλληλόγραμμο. Ὅλες οἱ πλευρές του εἶναι ἴσες (καί ἑπομένως εἶναι ἴσες καί δύο ὁποιεσδήποτε διαδοχικές πλευρές του), οἱ διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα καί οἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦν τίς γωνίες του. Θά ἀποδείξουμε τώρα ὅτι κάθε παραλληλόγραμμο πού ἔχει μιά ἀπό αὐτές τίς ἐπιπλέον ἰδιότητες εἶναι ρόμβος.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος, ἄν ἰσχύει μιά ἀπό τίς παρακάτω προτάσεις.

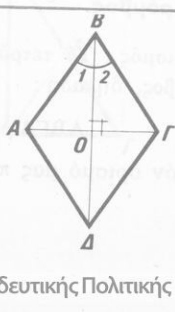
α) Δύο διαδοχικές πλευρές του εἶναι ἴσες.

β) Οἱ διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.

γ) Μιά διαγώνιος διχοτομεῖ μιά γωνία του.

Ἀπόδ. Γιά νά ἀποδείξουμε τό θεώρημα, θά πρέπει σέ κάθε περίπτωση νά δείξουμε ὅτι ὅλες οἱ πλευρές τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι ἴσες.

α) Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ΑΒ = ΒΓ. Ἐπειδή εἶναι ΑΒ = ΓΔ καί ΒΓ = ΑΔ, ἔχουμε ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΑ ⇒ τό ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος.



β) Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $B\Delta \perp A\Gamma$. Τότε τριγ.$AOB =$ τριγ$BO\Gamma$ (γιατί $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}B = 90^o$, $BO = BO$, $AO = O\Gamma$) $\Rightarrow AB = B\Gamma$ καί ἔχουμε τήν περίπτωση (α).

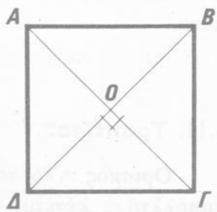
γ) Ἄς ὑποθέσουμε τέλος ὅτι $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$. Τότε τριγ$AB\Gamma =$ ἰσοσκελές (γιατί $BO =$ διάμεσος καί διχοτόμος) $\Rightarrow AB = B\Gamma$ καί ἔχουμε πάλι τήν περίπτωση (α).

Γιά νά δείχνουμε τώρα ὅτι ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος, θά πρέπει νά δείχνουμε πρῶτα ὅτι εἶναι παραλληλόγραμμο (μ' ἕνα ἀπό τά κριτήρια τῆς § 6.2) καί κατόπι νά δείχνουμε ὅτι ἤ δύο διαδοχικές πλευρές του εἶναι ἴσες ἤ ὅτι οἱ διαγώνιοί του εἶναι κάθετες ἤ ὅτι μιά διαγώνιός του διχοτομεῖ μιά γωνία του.

6.10. Τό τετράγωνο.

Ὁρισμός : Τό τετράπλευρο πού ἔχει ὅλες τίς πλευρές καί ὅλες τίς γωνίες του ἴσες λέγεται τετράγωνο, δηλαδή :

$$AB\Gamma\Delta \text{ τετράγωνο} \iff \begin{cases} AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A \\ \hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} \end{cases}$$



Ἀπό τόν ὁρισμό μας εἶναι φανερό ὅτι **τετράγωνο εἶναι τό παραλληλόγραμμο πού εἶναι συγχρόνως ὀρθογώνιο καί ρόμβος.** Ἔτσι θά ἰσχύουν γι' αὐτό οἱ ἰδιότητες :

— Οἱ ἀπέναντι πλευρές τοῦ τετραγώνου εἶναι παράλληλες.

— Ὅλες οἱ γωνίες τοῦ τετραγώνου εἶναι ὀρθές.

— Οἱ διαγώνιοι τοῦ τετραγώνου διχοτομοῦνται, εἶναι ἴσες καί κάθετες καί διχοτομοῦν τίς γωνίες του.

Ἔτσι λοιπόν κάθε διαγώνιος τοῦ τετραγώνου σχηματίζει μέ κάθε πλευρά του γωνία 45^o. Γιά νά ἀποδείξουμε ὅτι ἕνα παραλληλόγραμμο εἶναι τετράγωνο, θά πρέπει νά ἀποδείξουμε ὅτι ἔχει δύο ἐπιπλέον ἰδιότητες, μιά ἰδιότητα πού μᾶς ἐξασφαλίζει ὅτι εἶναι ὀρθογώνιο καί μιά ἄλλη ἰδιότητα πού μᾶς ἐξασφαλίζει ὅτι εἶναι ρόμβος. Μποροῦμε λοιπόν νά διατυπώσουμε κριτήρια γιά τό πότε ἕνα παραλληλόγραμμο (ἤ ἕνα ὀρθογώνιο ἤ ἕνας ρόμβος) εἶναι τετράγωνο. Μερικά ἀπό τά κριτήρια αὐτά δίνουν οἱ προτάσεις:

● **Ἕνα παραλληλόγραμμο εἶναι τετράγωνο σέ κάθε μιά ἀπό τίς παρακάτω περιπτώσεις:**

α) Ὅταν μία γωνία του εἶναι ὀρθή καί δύο διαδοχικές πλευρές του εἶναι ἴσες.

β) Ὅταν μία γωνία του εἶναι ὀρθή καί οἱ διαγώνιοί του εἶναι κάθετες.

γ) Ὅταν μία γωνία του εἶναι ὀρθή καί διχοτομεῖται ἀπό τή διαγώνιό του.

δ) Ὅταν οἱ διαγώνιοί του εἶναι ἴσες καί κάθετες.

● Ἕνα ὀρθογώνιο εἶναι τετράγωνο σέ κάθε μιά ἀπό τίς παρακάτω περιπτώσεις:

α) Ὅταν δύο διαδοχικές πλευρές του εἶναι ἴσες.

β) Ὅταν οἱ διαγώνιοί του εἶναι κάθετες.

γ) Ὅταν μία διαγώνιός του διχοτομεῖ μία γωνία του.

● Ἕνας ρόμβος εἶναι τετράγωνο σέ κάθε μιά ἀπό τίς παρακάτω περιπτώσεις:

α) Ὅταν μία γωνία του εἶναι ὀρθή.

β) Ὅταν οἱ διαγώνιοί του εἶναι ἴσες.

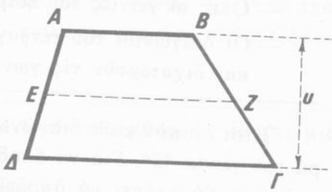
Οἱ ἀποδείξεις ὅλων αὐτῶν τῶν προτάσεων εἶναι φανερές ἀπό τά προηγούμενα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 13, 22 - 24

6.11. Τραπέζια.

Ὁρισμός: Τό τετράπλευρο πού ἔχει δύο μόνο ἀπέναντι πλευρές του παράλληλες λέγεται τραπέζιο.

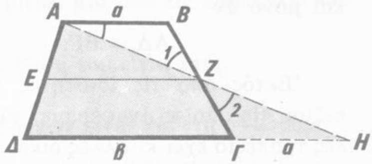
Οἱ παράλληλες πλευρές τοῦ τραπεζίου λέγονται **βάσεις** του, ἐνῶ τό εὐθύγραμμο τμῆμα πού ἑνώνει τά μέσα τῶν μή παράλληλων πλευρῶν του λέγεται **διάμεσος τοῦ τραπεζίου.** Ἔτσι π.χ. ἄν σ' ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἔχουμε μόνο ΑΒ//ΓΔ, τό ΑΒΓΔ εἶναι τραπέζιο μέ βάσεις ΑΒ καί ΓΔ, ἐνῶ τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΕΖ πού ἑνώνει τά μέσα Ε καί Ζ τῶν μή παράλληλων πλευρῶν ΑΔ καί ΒΓ εἶναι ἡ διάμεσός του.



Ἀπό τήν παραλληλία τῶν βάσεων εἶναι φανερό ὅτι $\hat{A}+\hat{\Delta}=2$ορθ. καί $\hat{B}+\hat{\Gamma}=2$ορθ., δηλαδή ὅτι οἱ γωνίες πού πρόσκεινται στίς μή παράλληλες πλευρές εἶναι παραπληρωματικές. Ἡ ἀπόσταση υ τῶν παράλληλων εὐθειῶν ΑΒ καί ΓΔ λέγεται ὕψος τοῦ τραπεζίου.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι. Ἡ διάμεσος τοῦ τραπεζίου εἶναι παράλληλη πρός τίς βάσεις του καί ἴση μέ τό ἡμιάθροισμα τῶν βάσεων.

Ἀπόδ. Ἄς θεωρήσουμε τραπέζιο ΑΒΓΔ μέ βάσεις $AB = \alpha$ καί $\Gamma\Delta = \beta$ καί ἄς καλέσουμε Ε καί Ζ τά μέσα τῶν ΑΔ καί ΒΓ. Ἄν Η εἶναι τό σημεῖο τομῆς τῶν εὐθειῶν ΑΖ καί ΔΓ, ἔχουμε τριγ ΑΖΒ = τριγΓΖΗ (γιατί ΒΖ = ΖΓ, $A\hat{B}Z = Z\hat{\Gamma}H$, $\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$) καί ἄρα



$$AZ = ZH \text{ καί } \Gamma H = AB = \alpha.$$

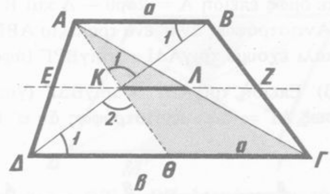
Ἔτσι τό Ζ εἶναι μέσο καί τῆς ΑΗ, δηλαδή ἡ ΕΖ ἑνώνει τά μέσα δύο πλευρῶν στό τρίγωνο ΑΔΗ.

Εἶναι λοιπόν $EZ // = \frac{\Delta H}{2}$, δηλαδή

$$EZ // \Delta\Gamma // AB \text{ καί } EZ = \frac{\Delta\Gamma + \Gamma H}{2} = \frac{\Delta\Gamma + AB}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ. Τό εὐθύγραμμο τμῆμα πού συνδέει τά μέσα τῶν διαγωνίων ἑνός τραπεζίου εἶναι παράλληλο πρός τίς βάσεις τοῦ τραπεζίου καί ἴσο μέ τήν ἡμιδιαφορά τους.

Ἀπόδ. Στό τραπέζιο ΑΒΓΔ ἄς καλέσουμε Κ καί Λ τά μέσα τῶν διαγωνίων του ΒΔ καί ΑΓ. Ἄν Θ εἶναι τό σημεῖο τομῆς τῶν εὐθειῶν ΑΚ καί ΔΓ, ἔχουμε τριγΑΚΒ = τριγΔΚΘ (γιατί $BK = K\Delta$, $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$, $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$) καί ἄρα



$$AK = K\Theta \text{ καί } \Delta\Theta = AB = \alpha.$$

Ἔτσι τό Κ εἶναι μέσο τῆς ΑΘ, δηλαδή ἡ ΚΛ ἑνώνει τά μέσα δύο πλευρῶν τοῦ ΑΘΓ. Εἶναι λοιπόν $K\Lambda // = \frac{\Theta\Gamma}{2}$, δηλαδή:

$$K\Lambda // \Delta\Gamma // AB \text{ καί } K\Lambda = \frac{\Theta\Gamma}{2} = \frac{\Delta\Gamma - \Delta\Theta}{2} = \frac{\Delta\Gamma - AB}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

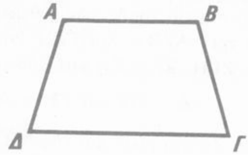
Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι στό τρίγωνο ΑΔΓ ἡ εὐθεία ΚΛ διέρχεται ἀπό τό μέσο τῆς ΑΓ καί εἶναι παράλληλη πρός τήν ΓΔ. Ἑπομένως θά περάσει ἀπό τό μέσο Ε τῆς ΑΔ. Ὁμοίως ἀπό τό τρίγωνο ΒΔΓ προκύπτει ὅτι ἡ εὐθεία ΚΛ θά περάσει ἀπό τό μέσο Ζ τῆς ΒΓ. Δηλαδή τά μέσα τῶν διαγωνίων βρίσκονται στή διάμεσο τοῦ τραπεζίου. Εἶναι λοιπόν φανερό ὅτι, ἄν φέρουμε παράλληλο πρός τίς βάσεις τοῦ τραπεζίου ἀπό ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο ἀπό τά Ε,Κ,Λ,Ζ, ἡ παράλληλος αὐτή θά περιέχει καί τά τρία ἄλλα σημεῖα.

6.12. Τό ἰσοσκελές τραπέζιο.

Ὁρισμός: Ἕνα τραπέζιο πού ἔχει ἴσες τίς μή παράλληλες πλευρές του λέγεται ἰσοσκελές τραπέζιο.

Ἔτσι π.χ. τό τραπέζιο ΑΒΓΔ μέ βάσεις ΑΒ καί ΓΔ θά εἶναι ἰσοσκελές, ἄν καί μόνο ἄν

$$ΑΔ = ΒΓ.$$

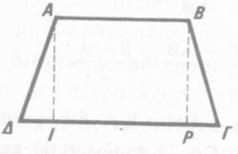


Ἐκτός ἀπό τίς ἰδιότητες τοῦ τραπεζίου τίς ὁποῖες ἀναφέραμε, τό ἰσοσκελές τραπέζιο ἔχει κι ἄλλες δικές του ἰδιότητες. Θά ἀποδείξουμε λοιπόν ὅτι:

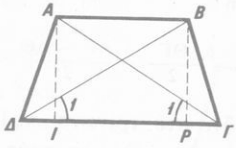
ΘΕΩΡΗΜΑ : Σ' ἕνα τραπέζιο ἰσοσκελές ΑΒΓΔ μέ βάσεις ΑΒ καί ΓΔ
- **οἱ γωνίες πού πρόσκεινται σέ κάθε βάση του εἶναι ἴσες,**
- **οἱ διαγώνιοί του εἶναι ἴσες,**
- **ἡ εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τά μέσα τῶν βάσεων εἶναι μεσοκάθετος τῆς κάθε βάσεως.**

Ἀπόδ. α) Ἄν φέρουμε τίς ἀποστάσεις ΑΙ καί ΒΡ τῶν κορυφῶν Α καί Β ἀπό τή βάση ΓΔ (βλ. σχ. 8), ἔχουμε τριγΑΙΔ = τριγΒΡΓ (γιατί ΑΙ = ΒΡ, ΑΔ = ΒΓ) καί ἄρα $\widehat{Δ} = \widehat{Γ}$. Τότε ὅμως ἐπειδή $\widehat{Α} = 2ορθ - \widehat{Δ}$ καί $\widehat{Β} = 2ορθ - \widehat{Γ}$, ἔχουμε καί $\widehat{Α} = \widehat{Β}$.
Ἀντιστρόφως, ἄν σ' ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ ἔχουμε $\widehat{Γ} = \widehat{Δ}$, τό τραπέζιο εἶναι ἰσοσκελές, γιατί πάλι ἔχουμε τριγΑΔΙ = τριγΒΡΓ (ἀφοῦ τώρα ΑΙ = ΒΡ καί $\widehat{Δ} = \widehat{Γ}$) καί ἄρα ΑΔ = ΒΓ.

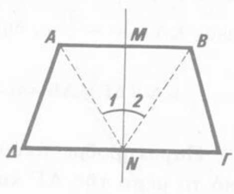
β) Ἐπειδή τριγΑΔΓ = τριγΒΔΓ (γιατί ΔΓ = ΔΓ, ΑΔ = ΒΓ, $Α\widehat{Δ}Γ = Β\widehat{Γ}Δ$) ἔχουμε ἀμέσως ΑΓ = ΒΔ. Ἀντιστρόφως ἄν σ' ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ ἔχουμε ΑΓ = ΒΔ, τό τραπέζιο



Σχ. 8



Σχ. 9



Σχ. 10

εἶναι ἰσοσκελές, γιατί (βλ. σχ. 9) τριγΑΙΓ = τριγΒΔΡ ⇒ $\widehat{Γ}_1 = \widehat{Δ}_1$ καί τότε πάλι τριγ. ΑΓΔ = τρίγ.ΒΓΔ ⇒ ΑΔ = ΒΓ.

γ) Ἄν Μ καί Ν τά μέσα τῶν βάσεων ΑΒ καί ΓΔ, ἔχουμε τριγΑΝΔ = τριγΒΝΓ (γιατί ΑΔ = ΒΓ, ΔΝ = ΝΓ καί $\widehat{Δ} = \widehat{Γ}$) ἄρα ΝΑ = ΝΒ. Τότε ὅμως ἡ διάμεσος ΝΜ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΝΒ εἶναι τό ὕψος του. Ἔτσι $ΝΜ \perp ΑΒ$ καί φυσικά $ΝΜ \perp ΔΓ$ (βλ. σχ. 10).
Ἀντιστρόφως, ἄν σ' ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ ἡ ΝΜ εἶναι κάθετη στίς βάσεις, τό τραπέζιο εἶναι ἰσοσκελές, γιατί τό τρίγωνο ΑΝΒ εἶναι ἰσοσκελές, ἀφοῦ (ἡ ΝΜ εἶναι μεσοκάθετος τῆς ΑΒ), ὁπότε ΝΑ=ΝΒ καί $\widehat{Ν}_1 = \widehat{Ν}_2 \Rightarrow 90^0 - \widehat{Ν}_1 = 90^0 - \widehat{Ν}_2 \Rightarrow Α\widehat{Ν}Δ = Β\widehat{Ν}Γ$. Ἔτσι ἔχουμε τριγΑΝΔ = τριγΒΝΓ (γιατί ΑΝ = ΝΒ, ΝΔ = ΝΓ, $Α\widehat{Ν}Δ = Β\widehat{Ν}Γ$) καί ἄρα ΑΔ = ΒΓ.

Ἀποδείξαμε ὅτι στό ἰσοσκελὲς τραπέζιο ὄχι μόνο ἰσχύουν οἱ παραπάνω ἰδιότητες ἀλλά καί καθεμιά ἀπ' αὐτές ἀποτελεῖ κριτήριο, γιά νά εἶναι ἕνα τραπέζιο ἰσασκελές, δηλαδή ἀποδείξαμε ὅτι:

Ἕνα τραπέζιο εἶναι ἰσοσκελές, ἄν ἀληθεύει μιά ἀπό τίς παρακάτω προτάσεις :

α) οἱ γωνίες πού πρόσκεινται στή μία βάση του εἶναι ἴσες,

β) οἱ διαγώνιοί του εἶναι ἴσες,

γ) ἡ εὐθεία πού ἑνώνει τά μέσα τῶν βάσεων εἶναι κάθετη σ' αὐτές.

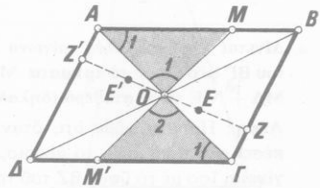
Ἔτσι, γιά νά δείχνουμε ὅτι ἕνα τετράπλευρο εἶναι ἰσοσκελές τραπέζιο, θά πρέπει πρῶτα νά δείχνουμε ὅτι εἶναι τραπέζιο καί μετά νά δείχνουμε ὅτι ἀληθεύει μιά ἀπό τίς παραπάνω προτάσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 25 - 36

6.13 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Ἄν οἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τέμνονται στὸ Ο, νὰ δειχθεῖ ὅτι τὸ Ο εἶναι κέντρο συμμετρίας[1] τοῦ παραλληλογράμμου.**

Λύση: Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι τό συμμετρικό ὡς πρός τό Ο ὁποιουδήποτε σημείου τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἐπίσης σημεῖο τοῦ παραλληλογράμμου.

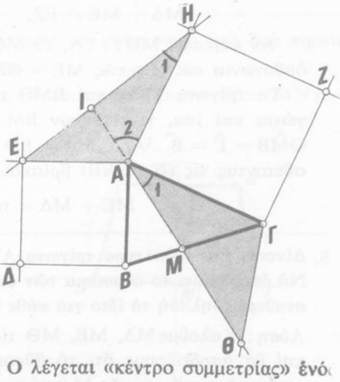


Παίρνουμε πρῶτα ἕνα σημεῖο Μ τῆς περιμέτρου. Ἄν τό Μ βρίσκεται στήν ΑΒ, ἡ εὐθεία ΟΜ θά τέμνει τήν ΓΔ σ' ἕνα σημεῖο Μ' καί θά εἶναι τριγΟΜΑ = τριγΟΜ'Γ (γιατί ΟΑ = ΟΓ, $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$, $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$). Ἄρα ΟΜ' = ΟΜ ⇒ Μ' = συμμ$_0$Μ.

Παίρνουμε τέλος ἕνα σημεῖο Ε ἐσωτερικό τοῦ ΑΒΓΔ καί καλοῦμε Ζ καί Ζ' τά σημεῖα στά ὁποῖα ἡ ΟΕ τέμνει τήν περίμετρο, ὁπότε ΟΖ' = ΟΖ. Ἄν λοιπόν τό Ε εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ ΟΖ καί θεωρήσουμε τό σημεῖο Ε' = συμμ$_0$Ε, τό Ε' θά εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ ΟΖ' (ἀφοῦ ΟΕ' = ΟΕ < ΟΖ ⇒ ΟΕ' < ΟΖ'), ἄρα θά εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ παραλληλογράμμου.

Ἀπό τήν ἰδιότητά του αὐτή τό Ο λέγεται ἁπλῶς «κέντρο» τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

2. **Θεωροῦμε τρίγωνο ΑΒΓ καὶ κατασκευάζουμε ἔξω ἀπ' αὐτὸ τὰ τετράγωνα ΑΓΖΗ καὶ ΑΒΔΕ. Ἄν ΑΜ εἶναι διάμεσος τοῦ ΑΒΓ, νὰ δειχθεῖ ὅτι ἡ ΑΜ εἶναι κάθετη στὴν ΕΗ καὶ ἴση μὲ τὸ μισὸ τῆς ΕΗ.**



Λύση: Ἄν πάρουμε στήν προέκταση τῆς ΑΜ τμῆμα ΜΘ = ΜΑ, θά εἶναι (βλ. ἀσκ. 1 τῆς § 5.13) ΓΘ // = ΑΒ. Τά τρίγωνα ΕΑΗ καί ΑΓΘ εἶναι ἴσα, γιατί ἔχουν ΑΗ = ΑΓ, ΑΕ =

1. Ξέρουμε ἀπό τό Γυμνάσιο ὅτι ἕνα σημεῖο Ο λέγεται «κέντρο συμμετρίας» ἑνός σχήματος σ, ὅταν ὅλα τά σημεῖα τοῦ σ εἶναι ἀνά δύο συμμετρικά ὡς πρός τό Ο.

$= AB = \Gamma\Theta$ καί $E\hat{A}H = A\hat{\Gamma}\Theta$ (γιατί κάθε μία ἀπό τίς γωνίες αὐτές εἶναι $180^o - \hat{A}$).

Ἄρα

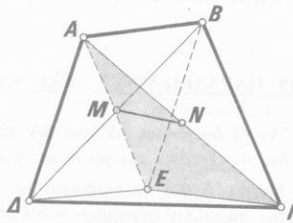
$$A\Theta = EH \text{ καί } \hat{A}_1 = \hat{H}_1.$$

Ἡ ἰσότητα $A\Theta = EH$ γράφεται $2AM = EH$ καί δίνει $AM = \frac{EH}{2}$.

Ἀκόμη, ἐπειδή εἶναι $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^o$, ἀπό τή δεύτερη ἰσότητα $\hat{A}_1 = \hat{H}_1$ προκύπτει ὅτι $\hat{H}_1 + \hat{A}_2 = 90^o$. Ἔτσι τό τρίγωνο AIH εἶναι ὀρθογώνιο καί $A\hat{I}H = 90^o \Rightarrow AM \perp EH$.

---

3. **Ἀπὸ τὴν κορυφὴ Δ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ φέρνουμε (στὸ ἴδιο ἡμιεπίπεδο μὲ ἀκμὴ ΑΔ στὸ ὁποῖο βρίσκεται ἡ ΑΒ) τμῆμα $\Delta E // = AB$.**
Ἂν Μ καὶ Ν εἶναι τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ΒΔ καὶ ΑΓ, νὰ δειχθεῖ ὅτι $E\Gamma // = 2MN$.



Λύση: Ἐπειδή τό σχῆμα ΑΒΕΔ εἶναι παραλληλόγραμμο, ἡ διαγώνιός του ΑΕ διέρχεται ἀπό τό μέσο Μ τῆς διαγωνίου ΒΔ καί εἶναι $AM = ME$.

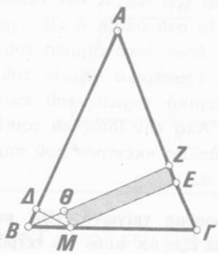
Ἔτσι στό τρίγωνο ΑΕΓ τό τμῆμα ΜΝ συνδέει τά μέσα δύο πλευρῶν του. Ἄρα

$$MN // = \frac{E\Gamma}{2} \Rightarrow E\Gamma // = 2MN.$$

---

4. **Δίνεται ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΑΒΓ καὶ ἀπὸ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τῆς βάσεώς του ΒΓ φέρνουμε τὰ τμήματα $M\Delta \perp AB$ καὶ $ME \perp A\Gamma$. Νὰ δειχθεῖ ὅτι τὸ ἄθροισμα $M\Delta + ME$ εἶναι σταθερὸ (δηλαδὴ τὸ ἴδιο γιὰ κάθε θέση τοῦ Μ στὴ ΒΓ).**

Λύση: Παρατηροῦμε ὅτι, ὅταν τό σημεῖο Μ (πού «κ ι ν ε ῖ τ α ι» ἐπάνω στήν ΒΓ) πέσει στό σημεῖο Β, τό ἄθροισμα $M\Delta + ME$ γίνεται ἴσο μέ τό ὕψος ΒΖ τοῦ τριγώνου (γιατί τότε $M\Delta = O$ καί $ME = BZ$). Θά πρέπει λοιπόν ν' ἀποδείξουμε ὅτι καί στήν ὁποιαδήποτε θέση τοῦ Μ ἔχουμε



$$M\Delta + ME = BZ.$$

Ἂν φέρουμε $M\Theta // \Gamma A$, τό ΜΘΖΕ εἶναι ὀρθογώνιο καί συνεπῶς $ME = \Theta Z$. (I)

Τά τρίγωνα ΒΜΔ καί ΒΜΘ εἶναι ὀρθογώνια καί ἴσα, γιατί ἔχουν $BM = BM$ καί $\Theta\hat{M}B = \hat{\Gamma} = \hat{B}$. Ἄρα $M\Delta = B\Theta$ (II). Προσθέτοντας τίς (I) καί (II) βρίσκουμε

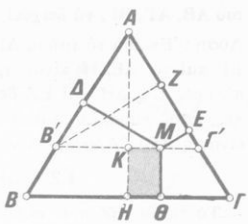
$$ME + M\Delta = \Theta Z + B\Theta \Rightarrow ME + M\Delta = BZ.$$

---

5. **Δίνεται ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ καὶ ἕνα ὁποιοδήποτε ἐσωτερικὸ σημεῖο του Μ. Νὰ δειχθεῖ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τοῦ Μ ἀπὸ τὶς πλευρὲς τοῦ τριγώνου εἶναι σταθερὸ (δηλαδὴ τὸ ἴδιο γιὰ κάθε θέση τοῦ Μ μέσα στὸ τρίγωνο).**

Λύση: Καλοῦμε ΜΔ, ΜΕ, ΜΘ τίς ἀποστάσεις τοῦ Μ ἀπό τίς πλευρές ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ καί θά ἀποδείξουμε ὅτι τό ἄθροισμα $M\Delta + ME + M\Theta$ εἶναι σταθερό. Παρατηροῦμε ὅτι, ὅταν τό σημεῖο Μ (πού κινεῖται μέσα στό τρίγωνο) πέσει στήν κορυφή Α, τό ἄθροισμα γίνεται ἴσο μέ τό ὕψος ΑΗ (γιατί τότε $ΜΔ = Ο$, $ΜΕ = Ο$, $ΜΘ = ΑΗ$). Θά πρέπει λοιπόν ν' ἀποδείξουμε ὅτι καί στήν ὁποιαδήποτε θέση τοῦ Μ ἔχουμε

$$ΜΔ + ΜΕ + ΜΘ = ΑΗ.$$



Φέρνουμε ἀπό τό Μ παράλληλο πρός τήν ΒΓ πού τέμνει τίς πλευρές ΑΒ καί ΑΓ στά σημεῖα Β' καί Γ' καί τό ὕψος ΑΗ στό Κ. Τότε τό τρίγωνο ΑΒ'Γ,' εἶναι ἐπίσης ἰσόπλευρο καί θά ἔχουμε (ἀπό τήν προηγούμενη ἄσκηση)

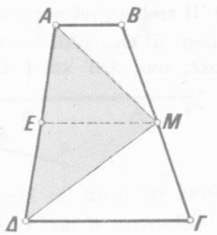
$$ΜΔ + ΜΕ = Β'Ζ = ΑΚ \qquad (Ι)$$

Ἐπειδή τό σχῆμα ΚΜΘΗ εἶναι ὀρθογώνιο, ἔχουμε ἀκόμη καί $ΜΘ = ΚΗ$ (ΙΙ). Προσθέτοντας κατά μέλη τίς (Ι) καί (ΙΙ) βρίσκουμε

$$ΜΔ + ΜΕ + ΜΘ = ΑΚ + ΚΗ = ΑΗ.$$

6. Σ' ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ ἡ μία ἀπὸ τὶς μὴ παράλληλες πλευρές του ΑΔ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων. Ἂν Μ εἶναι τὸ μέσο τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς, νὰ δείξετε ὅτι

$$Α\hat{Μ}Δ = 90^0$$



Λύση: Ἂν ΑΒ,ΔΓ εἶναι οἱ βάσεις τοῦ τραπεζίου καί Ε τό μέσο τῆς ΑΔ, ἔχουμε

$$(Ι) \qquad ΕΜ = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2}.$$

Ἀπό τήν ὑπόθεσή μας ὅμως $ΑΔ = ΒΑ + ΓΔ$ ἡ ἰσότητα (Ι) γράφεται

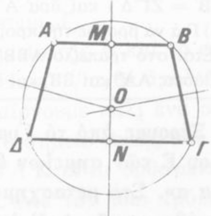
$$ΕΜ = \frac{ΑΔ}{2},$$

δηλαδή τό τρίγωνο ΑΜΔ ἔχει μία διάμεσο ἴση μέ τό μισό τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς του. Ἔτσι τό ΑΜΔ εἶναι ὀρθογώνιο (βλ. § 6.8) καί $Α\hat{Μ}Δ = 90^0$.

7. Στὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιο οἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν του διέρχονται ἀπὸ ἕνα σημεῖο τὸ ὁποῖο ἰσαπέχει ἀπὸ ὅλες τὶς κορυφὲς τοῦ τραπεζίου.

Λύση: Οἱ μεσοκάθετοι τῶν δύο βάσεων ΑΒ καί ΓΔ συμπίπτουν μέ τήν εὐθεία ΜΝ πού συνδέει τά μέσα τους Μ καί Ν. Ἂν τώρα ἡ μεσοκάθετος τῆς ΒΓ τέμνει τήν ΜΝ στό Ο, θά ἀποδείξουμε ὅτι καί ἡ μεσοκάθετος τῆς ΑΔ θά περάσει ἀπό τό Ο καί ἀρκεῖ γι' αὐτό ν' ἀποδείξουμε ὅτι:

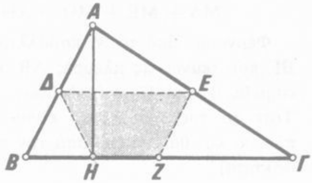
$$ΟΑ = ΟΔ.$$



Ἐπειδή ὅμως τό Ο βρίσκεται στή μεσοκάθετο τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ἔχουμε τίς ἰσότητες $ΟΑ = ΟΒ$, $ΟΒ = ΟΓ$, $ΟΓ = ΟΔ$ ἀπό τίς ὁποῖες προκύπτει ἀμέσως ἡ ζητούμενη $ΟΑ = ΟΔ$.

8. Δίνεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καὶ τὸ ὕψος του ΑΗ. Ἂν Δ, Ε, Ζ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ, νὰ δειχθεῖ ὅτι τὸ σχῆμα ΔΕΖΗ εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιο.

Λύση : Ἐπειδή τό τμῆμα ΔΕ συνδέει τά μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καί ΑΓ, θά εἶναι ΔΕ // ΒΓ καί τό ΔΕΖΗ εἶναι τραπέζιο (γιατί οἱ πλευρές του ΔΗ καί ΕΖ δέν εἶναι παράλληλες, ἀφοῦ παράλληλη ἀπό τό Δ πρός τήν ΕΖ εἶναι ἡ ΑΒ). Ἄρα ἀρκεῖ ν' ἀποδείξουμε ὅτι :



$$ΕΖ = ΔΗ$$

Τό τμῆμα ΕΖ πού συνδέει τά μέσα τῶν ΑΓ καί ΓΒ εἶναι $ΖΕ = \frac{ΑΒ}{2}$. Εἶναι ὅμως καί $ΗΔ = \frac{ΑΒ}{2}$, γιατί τό ΗΔ εἶναι ἡ διάμεσος τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου ΑΗΒ πού ἰσοῦται μέ τό μισό τῆς ὑποτείνουσάς του. Ἄρ α ἔχουμε ΖΕ = ΗΔ.

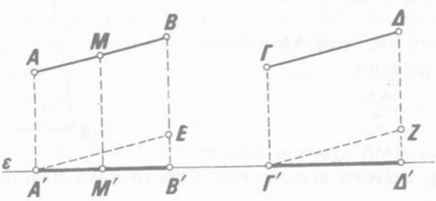
---

9. Ἂν Α΄ καὶ Β΄ εἶναι οἱ ὀρθὲς προβολὲς τῶν ἄκρων ἑνὸς τμήματος ΑΒ σὲ μία εὐθεία ε, τὸ τμῆμα Α΄ Β΄ λέγεται «ὀρθὴ προβολὴ» (ἢ ἁπλῶς προβολὴ) τοῦ ΑΒ στὴν ε. Νὰ δειχθεῖ ὅτι :

α) Ἴσα καὶ παράλληλα τμήματα ἔχουν ἴσες προβολὲς σὲ μία εὐθεία.

β) Ἡ προβολὴ τοῦ μέσου ἑνὸς τμήματος εἶναι τὸ μέσο τῆς προβολῆς τοῦ τμήματος.

Λύση : α) Θεωροῦμε δύο τμήματα ΑΒ καί ΓΔ παράλληλα καί ἴσα καί τίς (ὀρθές) προβολές τους Α΄Β΄ καί Γ΄Δ΄ σέ μιά εὐθεία ε. Ἀπό τά Α΄ καί Γ΄ φέρνουμε εὐθεῖες



παράλληλες πρός τίς ΑΒ καί ΓΔ πού τέμνουν τίς ΒΒ΄ καί ΔΔ΄ στά Ε καί Ζ. Ἀπό τά παραλληλόγραμμα ΑΒΕΑ΄ καί ΓΔΖΓ΄ ἔχουμε

$$Α΄Ε // = ΑΒ, Γ΄Ζ // = ΓΔ \Rightarrow Α΄Ε // = Γ΄Ζ$$

Ἔτσι τά ὀρθογώνια τρίγωνα Α΄ΕΒ΄ καί Γ΄ΖΔ΄ εἶναι ἴσα (γιατί Α΄Ε = Γ΄Ζ καί $Ε\hat{Α}΄Β΄ = Ζ\hat{Γ}΄Δ΄$) καί ἄρα Α΄Β΄ = Γ΄Δ΄.

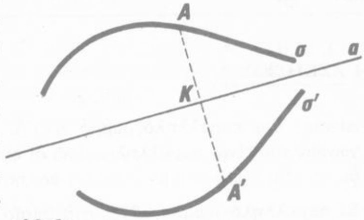
β) Γιά νά βροῦμε τήν προβολή τοῦ μέσου Μ τοῦ τμήματος ΑΒ, θά φέρουμε τή ΜΜ΄ $\perp$ ε. Ἔτσι στό τραπέζιο ΑΒΒ΄Α΄ ἡ ΜΜ΄ εἶναι διάμεσος (ἀφοῦ εἶναι παράλληλη πρός τίς βάσεις ΑΑ΄ καί ΒΒ΄ καί διέρχεται ἀπό τό μέσο τῆς ΑΒ) καί συνεπῶς Α΄Μ΄ = Μ΄Β΄.

---

10. Ξέρουμε ἀπό τό Γυμνάσιο ὅτι ἕνας μετασχηματισμός $Ε \to Ε$ τοῦ συνόλου Ε τῶν σημείων ἑνός ἐπιπέδου εἶναι καί ἡ «συμμετρία ὡς πρός ἄξονα α». Στὸ μετασχηματισμό αὐτό δίνεται μιά ὁρισμένη εὐθεία α καί σέ κάθε σημεῖο $Α \in Ε$ ἀντιστοιχίζουμε τό σημεῖο Α΄ πού βρίσκουμε, ἄν φέρουμε τὸ τμῆμα ΑΚ $\perp$ α καί πάρουμε στήν προέκτασή του τμῆμα

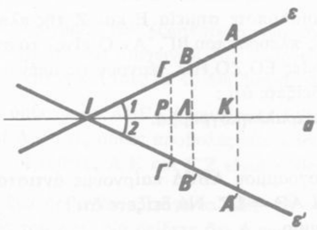
$KA' = KA$

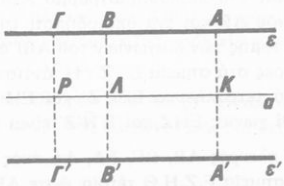
Τό Α΄ λέγεται «συμμετρικό τοῦ Α ὡς πρός ἄξονα α» καί σημειώνεται $A' = συμμ_α A$. Τά συμμετρικά ὅλων τῶν σημείων ἑνός σχήματος σ ἀποτελοῦν ἕνα ἄλλο σχῆμα σ΄ πού λέγεται «συμμετρικό τοῦ σ ὡς πρός τόν ἄξονα α» καί σημειώνεται $σ' = συμμ_α σ$.



Νά δειχθεῖ ὅτι τό συμμετρικό μιᾶς εὐθείας ε ὡς πρός τόν ἄξονα α εἶναι εὐθεία.

Ἀπόδ. Ἄς θεωρήσουμε μία εὐθεία ε πού τέμνει τόν ἄξονα α στό σημεῖο Ι, ἕνα σημεῖο της Α καί τό σημεῖο $A' = συμμ_α A$. Θά ἀποδείξουμε ὅτι





ἡ εὐθεία ΙΑ΄ εἶναι συμμετρικό σχῆμα τῆς ε. Ἀρκεῖ γι' αὐτό νά ἀποδείξουμε ὅτι κάθε σημεῖο Β τῆς ε ἔχει τό συμμετρικό του Β΄ στήν ΙΑ΄ καί ἀκόμη ὅτι κάθε σημεῖο Γ΄ τῆς ΙΑ΄ εἶναι συμμετρικό ἑνός σημείου Γ τῆς ε. Ἐπειδή εἶναι τριγ ΙΚΑ = τριγ ΙΚΑ΄ (γιατί $I\hat{K}A = I\hat{K}A' = 90^o$, $AK = KA'$, $IK = IK$), θά ἔχουμε $\hat{I}_1 = \hat{I}_2$. Ἔτσι ἄν φέρουμε $BΛ \perp α$ καί καλέσουμε Β΄ τό σημεῖο τομῆς τῶν ΒΛ καί ΙΑ΄, θά ἔχουμε τριγ ΙΒΛ = τριγΙΒ΄Λ (γιατί $I\hat{Λ}B = I\hat{Λ}B' = 90^o$, $IΛ = IΛ$, $\hat{I}_1 = \hat{I}_2$ (καί ἄρα $ΛB' \Rightarrow ΛB \Rightarrow B' = συμμ_α B$. Ἐπίσης, ἄν φέρουμε $Γ'P \perp α$ καί καλέσουμε Γ τό σημεῖο τομῆς τῶν Γ΄Ρ καί ΙΑ, θά ἔχουμε τριγ ΙΡΓ΄ = τριγ ΙΡΓ (γιατί $I\hat{P}Γ' = I\hat{P}Γ = 90^o$, $IP = IP$, $\hat{I}_1 = \hat{I}_2$) καί ἄρα $ΓP = ΓP' \Rightarrow Γ' = συμμ_α Γ$.

Ἄς θεωρήσουμε τώρα μία εὐθεία ε/ / α, ἕνα σημεῖο τῆς Α καί τό σημεῖο $A' = συμμ_α A$. Ἄν φέρουμε ἀπό τό Α΄ τήν εὐθεία ε΄ / / α, θά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ ε΄ εἶναι τό συμμετρικό σχῆμα τῆς ε. Παίρνουμε πάλι ἕνα σημεῖο Β τῆς ε, φέρνουμε τήν $BΛ \perp α$ καί καλοῦμε Β΄ τό σημεῖο τομῆς τῶν ε΄ καί ΒΛ. Παρατηροῦμε τώρα ὅτι τά ΒΛΚΑ καί ΛΒ΄Α΄Κ εἶναι ὀρθογώνια καί ἄρα $ΛB' = A'K = KA = ΛB \Rightarrow B' = συμμ_α B$. Μέ τόν ἴδιο τρόπο δείχνεται ὅτι καί κάθε σημεῖο Γ΄ τῆς ε΄ εἶναι συμμετρικό ἑνός σημείου Γ τῆς ε (ὅπου τό Γ θά εἶναι τομή τῆς ε μέ τήν κάθετο πρός τήν α ἀπό τόΓ΄).

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι, γιά νά βροῦμε τό συμμετρικό μιᾶς εὐθείας ὡς πρός ἄξονα α, ἀρκεῖ νά βροῦμε μόνο τά συμμετρικά δύο σημείων της.

6.14 ΑΣΚΗΣΕΙΣ *

1. Δίνεται ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Νά δείξετε ὅτι οἱ διχοτόμοι τῶν ἀπέναντι γωνιῶν του εἶναι παράλληλες, ἐνῶ οἱ διχοτόμοι τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν του εἶναι κάθετες. (Νά ἐξετάσετε ἄν ἰσχύει ἡ ἄσκηση καί γιά τίς ἐξωτερικές διχοτόμους).
2. Σέ παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ στό ὁποῖο εἶναι $\hat{A} > 90^o$ νά δείξετε ὅτι $A\Gamma < B\Delta$.
3. Δίνεται ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ καί ἕνα σημεῖο Μ τῆς βάσεώς του ΒΓ. Φέρνουμε ἀπό τό Μ παράλληλο πρός τήν πλευρά ΒΑ, ἡ ὁποία τέμνει τήν ΑΓ στό Δ, καί παράλληλο πρός τήν πλευρά ΓΑ, ἡ ὁποία τέμνει τήν ΑΒ στό Ε. Νά δείξετε ὅτι $M\Delta + ME = AB$.
4. Δίνεται ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, δύο ὁποιαδήποτε σημεῖα Ε καί Ζ τῆς πλευρᾶς του ΑΒ καί ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Η τῆς πλευρᾶς του ΒΓ. Ἄν Ο εἶναι τό σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων τοῦ ΑΒΓΔ καί οἱ εὐθεῖες ΕΟ,ΖΟ,ΗΟ τέμνουν τίς ἀπέναντι πλευρές στά σημεῖα Ε΄, Ζ΄, Η΄ ἀντιστοίχως, νά δείξετε ὅτι :
   α) Τά τετράπλευρα ΕΖΕ΄Ζ΄ καί ΕΗΕ΄Η΄ εἶναι παραλληλόγραμμα.
   β) Οἱ γωνίες $E\hat{H}Z$ καί $E'\hat{H'}Z'$ εἶναι ἴσες.
5. Στίς πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἑνός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ παίρνουμε ἀντιστοίχως σημεῖα Ε,Ζ,Η,Θ τέτοια, ὥστε $AE = \Gamma H$ καί $A\Theta = \Gamma Z$. Νά δείξετε ὅτι :
   α) Τό τετράπλευρο ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμο.
   β) Τά σημεῖα στά ὁποῖα τέμνονται οἱ διαγώνιοι τῶν δύο παραλληλογράμμων ΑΒΓΔ καί ΕΖΗΘ συμπίπτουν.
6. Στίς πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἑνός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ παίρνουμε ἀντιστοί χως σημεῖα Ε,Ζ,Η,Θ τέτοια, ὥστε τό τετράπλευρο ΕΖΗΘ νά εἶναι παραλληλόγραμμο. Νά δείξετε ὅτι $AE = \Gamma H$ καί $A\Theta = \Gamma Z$.
7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ καί σημεῖο Ι τῆς πλευρᾶς του ΒΓ τέτοιο, ὥστε $BI = \frac{1}{4}B\Gamma$. Ἄν Ε εἶναι τό μέσο τῆς διαμέσου ΒΔ, νά δειχθεῖ ὅτι $IE = // \frac{AB}{4}$.
8. Σέ τρίγωνο ΑΒΓ ὀνομάζουμε Δ τό μέσο τῆς διαμέσου ΑΜ. Ἄν ἡ ΒΔ τέμνει τήν πλευρά ΑΓ στό Ε, νά δειχθεῖ ὅτι $E\Gamma = 2AE$.
9. Ἄν Ε καί Ζ εἶναι τά μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καί ΓΔ ἑνός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, νά δείξετε ὅτι οἱ εὐθεῖες ΔΕ καί ΒΖ τέμνουν τή διαγώνιο ΑΓ σέ σημεῖα, τά ὁποῖα τή χωρίζουν σέ τρία ἴσα μέρη.
10. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ μέ $A\Gamma > AB$ στό ὁποῖο Μ εἶναι τό μέσο τῆς ΒΓ. Ἀπό τήν κορυφή Β φέρνουμε εὐθεία κάθετη στή διχοτόμο τῆς $\hat{A}$, ἡ ὁποία τέμνει τή διχοτόμο στό Δ καί τήν πλευρά ΑΓ στό Ε. Νά δείξετε ὅτι :
    α) $E\Gamma = A\Gamma - AB$ β) $\Delta M = \frac{A\Gamma - AB}{2}$ γ) $B\hat{\Delta}M = 90^o + \frac{\hat{A}}{2}$.
11. Ἀπό τήν κορυφή Β τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε εὐθεία κάθετη στήν ἐξωτερική διχο-

τόμο τῆς $\hat{A}$, ἡ ὁποία τέμνει τή διχοτόμο αὐτή στό Δ καί τήν προέκταση τῆς πλευρᾶς ΑΓ στό Ε. Ἄν Μ εἶναι τό μέσο τῆς πλευρᾶς ΒΓ, νά δείξετε ὅτι:

α) $ΓΕ = ΑΒ + ΑΓ$ β) $ΔΜ = \frac{ΑΒ + ΑΓ}{2}$ γ) $Β\hat{Δ}Μ = \frac{\hat{A}}{2}$.

12. Σέ τετράπλευρο ΑΒΓΔ ὀνομάζουμε Ε,Ζ,Η,Θ τά μέσα τῶν πλευρῶν του ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ, ΔΑ καί Κ, Λ τά μέσα τῶν διαγωνίων του ΑΓ,ΒΔ ἀντιστοίχως. Νά δειχθεῖ ὅτι:
α) Τά σχήματα ΕΚΗΛ καί ΖΚΘΛ εἶναι παραλληλόγραμμα.
β) Οἱ εὐθεῖες ΕΗ, ΖΘ, ΛΚ διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

13. Ἄν ΚΛΜΡ εἶναι τό παραλληλόγραμμο πού ἔχει κορυφές τά μέσα τῶν πλευρῶν ἑνός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, νά δείξετε ὅτι: α) Τό ΚΛΜΡ εἶναι ὀρθογώνιο, ἄν καί μόνο ἄν οἱ διαγώνιοι τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι κάθετες β) τό ΚΛΜΡ εἶναι ρόμβος, ἄν καί μόνο ἄν οἱ διαγώνιοι τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι ἴσες γ) Τό ΚΛΜΡ εἶναι τετράγωνο, ἄν καί μόνο ἄν οἱ διαγώνιοι τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι ἴσες καί κάθετες.

14. Οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ σχηματίζουν ὀρθογώνιο. Οἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ εἶναι παράλληλες πρός τίς πλευρές τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ καί ἴσες μέ τή διαφορά τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓΔ.

15. Οἱ διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν ἑνός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ σχηματίζουν ὀρθογώνιο. Οἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ εἶναι παράλληλες πρός τίς πλευρές τοῦ ΑΒΓΔ καί ἴσες μέ τό ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓΔ.

16. Σέ ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ ὀνομάζουμε Ε,Ζ τά μέσα τῶν πλευρῶν του ΑΒ,ΒΓ ἀντιστοίχως καί Α΄,Γ΄ τίς ὀρθές προβολές τῶν κορυφῶν του Α καί Γ στή διαγώνιο ΒΔ. Νά δειχθεῖ ὅτι οἱ εὐθεῖες Α΄Ε καί Γ΄Ζ εἶναι κάθετες.

17. Σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) φέρνουμε τή διάμεσο του ΑΜ καί τό ὕψος του ΑΗ. Νά δείξετε ὅτι ἡ γωνία $Μ\hat{A}Η$ εἶναι ἴση μέ τή διαφορά τῶν ὀξειῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

18. Σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) φέρνουμε τό ὕψος του ΑΗ. Νά δείξετε τήν πρόταση:

$$\hat{B} = 15^o \iff ΑΗ = \frac{ΒΓ}{4}.$$

19. Οἱ γωνίες $\hat{B}$ καί $\hat{Δ}$ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθές. Ἄν Κ καί Λ εἶναι τά μέσα τῶν διαγωνίων ΒΔ καί ΑΓ, νά δείξετε ὅτι $ΚΛ \perp ΒΔ$.

20. Σέ τρίγωνο ΑΒΓ μέ $\hat{B} > \hat{Γ}$ φέρνουμε τό ὕψος του ΑΗ καί ὀνομάζουμε Μ καί Ρ τά μέσα τῶν πλευρῶν του ΒΓ καί ΑΓ. Νά δειχθεῖ ὅτι $Η\hat{Ρ}Μ = \hat{B} - \hat{Γ}$.

21. Ἄν Κ καί Λ εἶναι οἱ ὀρθές προβολές τῆς κορυφῆς Α τριγώνου ΑΒΓ στήν ἐσωτερική καί στήν ἐξωτερική διχοτόμο τῆς γωνίας $\hat{B}$, νά δείξετε ὅτι:
α) Τό ΑΚΒΛ εἶναι ὀρθογώνιο.
β) Ἡ εὐθεία ΚΛ εἶναι παράλληλη πρός τή ΒΓ καί διέρχεται ἀπό τό μέσο τῆς πλευρᾶς ΑΓ.

22. Ἕνα παραλληλόγραμμο εἶναι ρόμβος, ἄν καί μόνο ἄν οἱ ἀποστάσεις τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του εἶναι ἴσες.

23. Ἀπό ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο Ι τετραγώνου ΑΒΓΔ φέρνουμε δύο κάθετες εὐθεῖες $ε_1$ καί $ε_2$ πού ἡ μία τέμνει τίς πλευρές ΑΒ καί ΓΔ στά σημεῖα Λ καί Κ καί ἡ ἄλλη τέμνει τίς ΒΓ καί ΑΔ στά Ρ καί Σ. Νά δείξετε ὅτι ΚΛ = ΡΣ.

24. Νά δειχθεῖ ὅτι οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνός ὀρθογωνίου σχηματίζουν τετράγωνο. Ὁμοίως καί οἱ διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν του.

25. Σέ τραπέζιο ΑΒΓΔ, πού ἔχει βάσεις τίς ΑΒ καί ΔΓ, νά δείξετε ὅτι

$$AB + \Delta\Gamma < A\Gamma + B\Delta.$$

26. Σ' ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ ἡ βάση του ΑΒ εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν μή παράλληλων πλευρῶν του ΑΔ καί ΒΓ. Νά δειχθεῖ ὅτι οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{\Delta}$ καί $\widehat{\Gamma}$ τέμνονται σέ σημεῖο τῆς ΑΒ.

27. Σ' ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ ἡ βάση του ΔΓ εἶναι διπλάσια ἀπό τή βάση του ΑΒ. Νά δείξετε ὅτι οἱ διαγώνιοι ΒΔ καί ΑΓ τέμνουν τή διάμεσο σέ δύο σημεῖα, τά ὁποῖα τή χωρίζουν σέ τρία ἴσα μέρη.

28. Σ' ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ, πού ἔχει βάσεις ΑΒ καί ΔΓ, ἔχουμε $\Delta\Gamma = 2AB$, $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^o$. Φέρνουμε τό τμῆμα $BH \perp \Delta\Gamma$ πού τέμνει τή διαγώνιο ΑΓ στό Ρ καί τό τμῆμα ΑΗ πού τέμνει τήν ἄλλη διαγώνιο ΒΔ στό Ν. Νά δείξετε ὅτι: α) Τό Ρ εἶναι μέσο τῆς ΒΗ β) Ἡ ΝΡ εἶναι τό $\frac{1}{4}$ τῆς βάσεως ΔΓ.

29. Σέ τραπέζιο ΑΒΓΔ μέ βάσεις ΑΒ καί ΔΓ ἔχουμε $A\Delta = AB + \Delta\Gamma$. Νά δείξετε ὅτι οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{A}$ καί $\widehat{\Delta}$ τέμνονται στή ΒΓ.

30. Καλοῦμε ΑΑ΄ καί ΒΒ΄ τίς ἀποστάσεις δύο σημείων Α καί Β ἀπό μία εὐθεία ε καί ΜΜ΄ τήν ἀπόσταση τοῦ μέσου Μ τοῦ τμήματος ΑΒ ἀπό τήν ε. Νά δείξετε ὅτι, ἄν τά σημεῖα Α καί Β βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος τῆς ε, θά ἔχουμε $AA' + BB' = 2MM'$, ἐνῶ ἄν τά σημεῖα Α καί Β βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς ε, θά ἔχουμε $|AA' - BB'| = 2MM'$.

31. Σέ τετράπλευρο ΑΒΓΔ φέρνουμε τίς ἀποστάσεις ΑΑ΄, ΒΒ΄ τῶν κορυφῶν του Α καί Β ἀπό τήν πλευρά ΓΔ. Ἄν Κ εἶναι τό σημεῖο τομῆς τῶν εὐθειῶν, πού διέρχονται ἀπό τά μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, καί ΚΚ΄ εἶναι ἡ ἀπόσταση του ἀπό τήν πλευρά ΓΔ, νά δειχθεῖ ὅτι $AA' + BB' = 4KK'$.

32. Ἀπό τήν κορυφή Α τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε μία εὐθεία ε καί καλοῦμε ΒΒ΄ καί ΓΓ΄ τίς ἀποστάσεις τῶν Β καί Γ ἀπό τήν ε. Ἄν Μ εἶναι τό μέσο τῆς Β΄Γ΄ καί Ι εἶναι τό μέσο τῆς διαμέσου ΑΔ, νά δείξετε ὅτι $IM = A\Delta/2$.
(Νά ἐξετασθοῦν δύο περιπτώσεις, ἄν τά Β καί Γ βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος ἤ ἑκατέρωθεν τῆς ε).

33. Σέ τραπέζιο ΑΒΓΔ μέ βάσεις ΑΒ καί ΔΓ ἔχουμε $\Delta\Gamma = \frac{3}{2}AB$. Ἄν Ε, Ζ εἶναι τά μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ καί Η εἶναι τό μέσο τῆς ΔΕ, νά δείξετε ὅτι $HZ = //AB$.

34. Δίνεται ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ καί στήν προέκταση τῆς ΔΓ πρός τό μέρος τοῦ Γ παίρνουμε ἕνα τμῆμα $\Gamma E = 3\Gamma\Delta$. Ἄν Κ καί Λ εἶναι τά μέσα τῶν ΑΕ καί ΒΓ, νά δείξετε ὅτι τό τετράπλευρο ΑΒΚΛ εἶναι παραλληλόγραμμο.

35. Ἄν σέ τραπέζιο ΑΒΓΔ, πού ἔχει βάσεις ΑΒ καί ΓΔ, οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του $\widehat{A}$ καί $\widehat{\Delta}$ τέμνονται στό Η καί οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$ τέμνονται στό Κ, νά δείξετε ὅτι ἡ ΗΚ εἶναι παράλληλη πρός τίς βάσεις.

36. Ἕνα τραπέζιο εἶναι ἰσοσκελές, ἄν καί μόνο ἄν τά μέσα τῶν πλευρῶν του εἶναι κορυφές ρόμβου.

37. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό συμμετρικό ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ὡς πρός ἄξονα εἶναι ἴσο μέ τό δεδομένο.

Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό συμμετρικό ἑνός τριγώνου ὡς πρός ἄξονα εἶναι τρίγωνο ἴσο μέ τό δεδομένο.
Νά διατυπώσετε καί ἀποδείξετε ἀνάλογες προτάσεις γιά τή γωνία καί τόν κύκλο.

38. Δίνεται ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ καί βρίσκουμε τό σημεῖο $A' = \text{συμμ}_{ΒΔ}\, A$, Νά δείξετε ὅτι τό τετράπλευρο Α΄ΓΒΔ εἶναι ἰσοσκελές τραπέζιο.

39. Δίνεται μία εὐθεία ε, δύο σημεῖα Α καί Β πρός τό ἴδιο μέρος τῆς ε καί τό σημεῖο $A' = \text{συμμ}_{ε}\, A$. Νά δείξετε ὅτι γιά κάθε σημεῖο Μ τῆς εὐθείας ε ἔχουμε $AM + MB = A'M + MB$. Μέ τή βοήθεια τῆς ἰσότητας αὐτῆς νά βρεῖτε τή θέση τοῦ Μ πάνω στήν ε, γιά τήν ὁποία τό ἄθροισμα $AM + MB$ γίνεται ὅσο τό δυνατό μικρότερο.

40. Δίνεται μία εὐθεία ε, δύο σημεῖα Α καί Β ἑκατέρωθεν αὐτῆς καί τό σημεῖο $A' = \text{συμμ}_{ε}\, A$. Νά δείξετε ὅτι γιά κάθε σημεῖο Μ τῆς εὐθείας ε ἔχουμε $|AM - MB| = |A'M - MB|$. Μέ τή βοήθεια τῆς ἰσότητας αὐτῆς νά βρεῖτε τή θέση τοῦ Μ πάνω στήν ε, γιά τήν ὁποία ἡ διαφορά $|AM - MB|$ γίνεται ὅσο τό δυνατό μεγαλύτερη.

41. Δίνεται μία γωνία $X\hat{O}Ψ$ καί δύο ἐσωτερικά της σημεῖα Α καί Β .Θεωροῦμε ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τῆς ΟΧ, ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Ν τῆς ΟΨ καί τά σημεῖα $A' = \text{συμμ}_{OX} A$ καί $B' = \text{συμμ}_{OΨ} B$. Νά δείξετε ὅτι $AM + MN + NB = A'M + MN + NB'$. Μέ τή βοήθεια τῆς ἰσότητας αὐτῆς νά βρεῖτε τίς θέσεις τῶν σημείων Μ καί Ν, γιά τίς ὁποῖες τό ἄθροισμα $AM + MN + NB$ γίνεται ὅσο τό δυνατό μικρότερο.

6.15 ΑΣΚΗΣΕΙΣ **

42. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί $AB < AΓ$ θεωροῦμε τό μέσο Δ τῆς πλευρᾶς ΑΒ καί ἕνα σημεῖο Ε τῆς ἡμιευθείας ΔΒ τέτοιο, ὥστε $ΔΕ = \frac{AΓ}{2}$. Ἀπό τά Β καί Ε φέρνουμε κάθετες στή διχοτόμο τῆς γωνίας $\hat{A}$, οἱ ὁποῖες τέμνουν τήν πλευρά ΑΓ στά Β΄ καί Ε΄ ἀντιστοίχως. Νά δείξετε ὅτι:
α) $B'E' = \frac{AΓ - AB}{2}$.
β) Ἡ εὐθεία ΕΕ΄ διέρχεται ἀπό τό μέσο τῆς ΒΓ.

43. Νά δειχθεῖ ὅτι οἱ ὀρθές προβολές τῆς κορυφῆς Α τριγώνου ΑΒΓ στίς ἐσωτερικές καί ἐξωτερικές διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\hat{B}$ καί $\hat{Γ}$ εἶναι συνευθειακά σημεῖα.

44. Δίνονται δύο παράλληλες εὐθεῖες ε καί ε΄ καί ἕνα σημεῖο Α τῆς ε. Ἀπό τό Α φέρνουμε κάθετο τμῆμα ΑΚ καί ἕνα πλάγιο τμῆμα ΑΒ πρός τήν ε΄. Τέλος θεωροῦμε σημεῖο Δ τῆς ε τέτοιο, ὥστε ἡ ΒΔ νά τέμνει τό τμῆμα ΑΚ σ' ἕνα σημεῖο Ζ καί νά ἔχουμε $ZΔ = 2AB$. Νά δείξετε ὅτι $A\hat{B}K = 3Δ\hat{B}K$.

45. Δίνεται ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ καί ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ στήν προέκταση τῆς βάσεως ΒΓ πρός τό μέρος τοῦ Β. Ἀπό τό Μ φέρνουμε εὐθεῖες παράλληλες πρός τίς ΒΑ καί ΑΓ, οἱ ὁποῖες τέμνουν τίς προεκτάσεις τῶν πλευρῶν ΓΑ καί ΑΒ στά σημεῖα Δ καί Ε. Νά δειχθεῖ ὅτι ἡ διαφορά $MΔ - ME$ εἶναι σταθερή (ἀνεξάρτητη ἀπό τή θέση τοῦ Μ).

46. Δίνεται ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ καί ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ στήν προέκταση τῆς βάσεώς του ΒΓ πρός τό μέρος τοῦ Β. Ἄν Δ καί Ε εἶναι οἱ ὀρθές προβολές τοῦ Μ στίς εὐθεῖες ΑΓ καί ΑΒ, νά δείξετε ὅτι ἡ διαφορά $MΔ - ME$ εἶναι σταθερή (ἀνεξάρτητη ἀπό τή θέση τοῦ Μ).

47. Δίνεται ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, ἕνα σημεῖο Μ στή βάση του ΒΓ καί ἕνα σημεῖο Μ′ στήν προέκταση τῆς ΒΓ πρός τό μέρος τοῦ Β. Ἡ κάθετος πρός τή ΒΓ στό Μ τέμνει τίς εὐθεῖες ΑΓ καί ΑΒ στά σημεῖα Δ καί Ε, ἐνῶ ἡ κάθετος πρός τή ΒΓ στό σημεῖο Μ′ τίς τέμνει στά Δ′ καί Ε′ ἀντιστοίχως. Νά δείξετε ὅτι:

α) Τό ἄθροισμα ΜΔ + ΜΕ παραμένει σταθερό, ὅταν τό Μ κινεῖται στή ΒΓ.

β) Ἡ διαφορά Μ′Δ′— Μ′Ε′ παραμένει σταθερή, ὅταν τό Μ′ κινεῖται στήν προέκταση τῆς ΓΒ.

48. Δίνεται μία γωνία $X\hat{O}\Psi = 120^o$ καί ἡ διχοτόμος τῆς ΟΔ. Ἀπό τό ἐσωτερικό σημεῖο Ρ τῆς $X\hat{O}\Delta$ φέρνουμε τά τμήματα ΡΕ, ΡΖ, ΡΗ κάθετα στίς ΟΧ,ΟΔ,ΟΨ ἀντιστοίχως. Νά δείξετε ὅτι ΡΕ + ΡΖ = ΡΗ.

49. Θεωροῦμε τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ καί κατασκευάζουμε ἔξω ἀπό αὐτό τά τετράγωνα ΑΒΕΖ, ΒΓΗΘ, ΓΔΙΚ, ΔΑΛΜ. Ἄν Ν,Ρ,Σ,Τ εἶναι τά κέντρα τῶν τετραγώνων αὐτῶν, νά δείξετε ὅτι τό σχῆμα ΝΡΣΤ εἶναι τετράγωνο.

50. Θεωροῦμε τό τρίγωνο ΑΒΓ καί κατασκευάζουμε ἔξω ἀπό αὐτό τά τετράγωνα ΑΓΖΗ καί ΑΒΔΕ. Ἄν Σ καί Ρ εἶναι τά κέντρα τῶν τετραγώνων αὐτῶν καί Μ τό μέσο τῆς ΒΓ, νά δείξετε ὅτι τό τρίγωνο ΣΜΡ εἶναι ἰσοσκελές καί ὀρθογώνιο.

51. Δίνεται ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ καί μία εὐθεία ε πού διέρχεται ἀπό τήν κορυφή Γ καί ἔχει πρός τό ἴδιο μέρος της τίς κορυφές Α,Β,Δ. Νά δείξετε ὅτι ἡ ἀπόσταση τῆς κορυφῆς Α ἀπό τήν ε εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν Β καί Δ ἀπό τήν ε.

52. Μία εὐθεία ε διέρχεται ἀπό τήν κορυφή Γ ἑνός παραλληλογράμου ΑΒΓΔ καί ἔχει ἑκατέρωθεν αὐτῆς τίς κορυφές Β καί Δ. Νά δείξετε ὅτι ἡ ἀπόσταση τοῦ Α ἀπό τήν ε εἶναι ἴση μέ τή διαφορά τῶν ἀποστάσεων τῶν δύο κορυφῶν Β καί Δ ἀπό τήν ε.

53. Σ' ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ, πού ἔχει βάσεις ΑΒ καί ΓΔ, ἔχουμε $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o$ καί ἡ πλευρά του ΒΓ εἶναι διπλάσια ἀπό τή βάση του ΔΓ. Ἄν Μ εἶναι τό μέσο τῆς ΒΓ, νά δείξετε ὅτι $A\hat{M}\Gamma = 3M\hat{A}B$.

54. Μία εὐθεία ε ἔχει πρός τό ἴδιο μέρος της τίς κορυφές ἑνός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Ἄν Κ εἶναι τό σημεῖο τομῆς τῶν εὐθειῶν, πού διέρχονται ἀπό τά μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, καί ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′, ΔΔ′, ΚΚ′ εἶναι οἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων Α,Β,Γ,Δ,Κ ἀπό τήν ε, νά δείξετε ὅτι ΑΑ′ + ΒΒ′ + ΓΓ′ + ΔΔ′ = 4ΚΚ′.

55. Δίνεται μία γωνία $X\hat{O}\Psi$ καί ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο της Α. Θεωροῦμε ἕνα σημεῖο Μ τῆς πλευρᾶς της ΟΧ καί καλοῦμε ΜΝ τήν ἀπόσταση τοῦ Μ ἀπό τήν ΟΨ. Νά βρεθεῖ ἡ θέση τοῦ Μ στήν ΟΧ, γιά τήν ὁποία τό ἄθροισμα ΑΜ + ΜΝ εἶναι ὅσο τό δυνατό μικρότερο.

56. Ἀπό τά ἄκρα Α,Β ἑνός τμήματος ΑΒ φέρνουμε δύο παράλληλες ἡμιευθεῖες ΑΧ καί ΒΨ οἱ ὁποῖες νά βρίσκονται στά διαφορετικά ἡμιεπίπεδα ἀκμῆς ΑΒ. Στήν ΑΧ παίρνουμε ἕνα αὐθαίρετο τμῆμα ΑΔ καί στή ΒΨ παίρνουμε τμῆμα ΒΕ = ΑΔ + ΑΒ. Ἄν Μ εἶναι τό μέσο τῆς ΔΕ, νά δείξετε ὅτι ἡ γωνία $A\hat{M}B$ εἶναι ὀρθή.

57. Θεωροῦμε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) καί κατασκευάζουμε ἔξω ἀπό αὐτό τά τετράγωνα ΑΒΕΖ καί ΑΓΗΘ. Ἄν ΕΚ ⊥ ΒΓ καί ΗΛ ⊥ ΒΓ, νά δείξετε ὅτι:

α) Οἱ προβολές τῶν τμημάτων ΒΕ καί ΓΗ στήν εὐθεία ΒΓ εἶναι ἴσες, ἐνῶ τά ΕΚ καί ΗΛ ἔχουν ἄθροισμα τήν πλευρά ΒΓ.

β) Τά σημεῖα Ε,Α,Η εἶναι συνευθειακά.

γ) Ἄν Μ εἶναι τό μέσο τοῦ τμήματος ΕΗ, ἡ γωνία $B\hat{M}\Gamma = 90^o$.

1. Ἕνα τετράπλευρο λέγεται **παραλληλόγραμμο,** ἄν καί μόνο ἄν οἱ ἀπέναντι πλευρές του εἶναι παράλληλες. Οἱ βασικές ἰδιότητες ἑνός παραλληλογράμμου εἶναι:

— **Οἱ ἀπέναντι πλευρές του εἶναι ἴσες.**

— **Οἱ ἀπέναντι γωνίες του εἶναι ἴσες.**

— **Οἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται.**

Κάθε μία ἀπό τίς ἰδιότητες αὐτές εἶναι ἱκανή συνθήκη, γιά νά εἶναι ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο. Μία τέτοια ἱκανή συνθήκη εἶναι ἀκόμη τό ΑΒΓΔ νά ἔχει δύο ἀπέναντι πλευρές του ἴσες καί παράλληλες. Ἕνα παραλληλόγραμμο θά λέγεται εἰδικότερα:

— **ὀρθογώνιο,** ἄν καί μόνο ἄν ἔχει μία γωνία του ὀρθή, ὁπότε ὅλες οἱ γωνίες του εἶναι ὀρθές. Στό ὀρθογώνιο ἔχουμε ἐπιπλέον ὅτι οἱ **διαγώνιοι εἶναι ἴσες.** Ἡ ἰδιότητα αὐτή εἶναι καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμο ὀρθογώνιο.

— **ρόμβος,** ἄν καί μόνο ἄν ἔχει δύο διαδοχικές πλευρές του ἴσες, ὁπότε ὅλες οἱ πλευρές του εἶναι ἴσες. Στό ρόμβο ἔχουμε ἐπί πλέον ὅτι **οἱ διαγώνιοι τέμνονται κάθετα καὶ διχοτομοῦν τὶς γωνίες του.** Κάθε μία ἀπό τίς ἰδιότητες αὐτές εἶναι καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμο ρόμβος.

— **τετράγωνο,** ἄν καί μόνο ἄν ἔχει ὅλες τίς γωνίες του ὀρθές καί ὅλες τίς πλευρές του ἴσες (δηλαδή ἄν εἶναι συγχρόνως ὀρθογώνιο καί ρόμβος). Στό τετράγωνο ἔχουμε ἐπιπλέον ὅτι **οἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσες, τέμνονται κάθετα καὶ διχοτομοῦν τὶς γωνίες του.**

2. Μέ τίς ἰδιότητες τῶν παραλληλογράμμων βρίσκουμε τίς προτάσεις:

— **Ἡ εὐθεία ποὺ ἑνώνει τὰ μέσα δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι παράλληλη πρὸς τὴν τρίτη πλευρὰ καὶ ἴση μὲ τὸ μισό της.**

— **Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς ὁποιουδήποτε τετραπλεύρου εἶναι κορυφὲς παραλληλογράμμου.**

— **Ἡ διάμεσος ὀρθογώνιου τριγώνου ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν ὑποτείνουσα του εἶναι τὸ μισὸ τῆς ὑποτείνουσας.**

— **Ἄν σέ ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ἡ μία ὀξεία γωνία του εἶναι 30^o, ἡ ἀπέναντι πλευρά του εἶναι τό μισό τῆς ὑποτείνουσας.**

Ἐπίσης, ἄν ἔχουμε δύο παράλληλες εὐθεῖες ε_1 καί ε_2, ὅλα τά σημεῖα τῆς μιᾶς ἀπέχουν τήν ἴδια ἀπόσταση ἀπό τήν ἄλλη καί ἡ κοινή ἀπόσταση αὐτή υ λέγεται **«ἀπόσταση τῶν δύο παραλλήλων».** Τέλος ὅλα τά σημεῖα πού ἰσαπέχουν ἀπό δύο παράλληλες εὐθεῖες βρίσκονται στή **μεσοπαράλληλό τους.**

3. **Τραπέζιο** λέγεται ἕνα τετράπλευρο πού ἔχει δύο μόνο ἀπέναντι πλευρές του παράλληλες (καί αὐτές λέγονται «β ά σ ε ι ς» του). Σέ κάθε τραπέζιο διακρίνουμε δύο χαρακτηριστικά εὐθύγραμμα τμήματα.

— **Τὸ τμῆμα ποὺ ἑνώνει τὰ μέσα τῶν μὴ παράλληλων πλευρῶν του, τὸ ὁποῖο λέγεται διάμεσος τοῦ τραπεζίου καὶ εἶναι παράλληλο πρὸς τὶς βάσεις του καὶ ἴσο μὲ τὸ ἡμιάθροισμά τους.**

— **Τὸ τμῆμα ποὺ ἑνώνει τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του, τὸ ὁποῖο εἶναι παράλληλο πάλι πρὸς τὶς βάσεις του καὶ ἴσο μὲ τὴν ἡμιδιαφορά τους.**

Τό τραπάζιο πού ἔχει τίς μή παράλληλες πλευρές του ἴσες λέγεται **ἰσοσκελές**. Σ' αὐτό ἰσχύουν οἱ προτάσεις :

— Οἱ γωνίες ποὺ πρόσκεινται στὴν κάθε βάση του εἶναι ἴσες.

— Οἱ διαγώνιοί του εἶναι ἴσες.

—Ἡ εὐθεία ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν βάσεων εἶναι κέθετη πρὸς τὶς βάσεις.

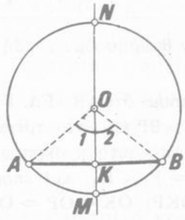
Κάθε μία ἀπό τίς ἰδιότητες αὐτές εἶναι καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά εἶναι ἕνα τραπέζιο ἰσοσκελές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ — ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

7.1. Χορδὲς καὶ ἀποστήματα.

Ὁρισμός : Ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου ἑνός κυκλ(Ο,ρ) ἀπό μιά χορδή του λέγεται ἀπόστημα τῆς χορδῆς.



Ἔτσι ἀπόστημα τῆς χορδῆς ΑΒ ἑνός κύκλ(Ο,ρ) εἶναι τό κάθετο στή χορδή τμῆμα ΟΚ. Ἐπειδή τό τρίγωνο ΑΟΒ εἶναι ἰσοσκελές καί τό ΟΚ εἶναι ὕψος του, θά ἔχουμε : $AK = KB$ καί $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, ὁπότε θά εἶναι ἀκόμη $\widehat{AM} = \widehat{MB}$ καί $\widehat{AN} = \widehat{NB}$. Δείξαμε λοιπόν ὅτι :

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι. Ἄν φέρουμε ἀπό τό κέντρο ἑνός κυκλ(Ο,ρ) εὐθεία κάθετη πρός τή χορδή του ΑΒ, αὐτή διέρχεται ἀπό τό μέσο τῆς χορδῆς καί ἀπό τό μέσο τοῦ τόξου $\widehat{AB}$.

Εἶναι φανερό (ἀπό τήν ἴδια ἰδιότητα τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΟΒ) ὅτι θά ἀληθεύουν καί οἱ ἀντίστροφες προτάσεις :

- **Ἡ εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τό κέντρο ἑνός κύκλου (Ο,ρ) καί ἀπό τό μέσο μιᾶς χορδῆς του ΑΒ εἶναι κάθετη στή χορδή καί διέρχεται ἀπό τό μέσο τοῦ τόξου $\widehat{AB}$.**
- **Ἡ εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τό κέντρο ἑνός κύκλου (Ο,ρ) καί ἀπό τό μέσο ἑνός τόξου $\widehat{AB}$ εἶναι κάθετη στή χορδή ΑΒ καί διέρχεται ἀπό τό μέσο της.**
- **Ἡ εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τό μέσο μιᾶς χορδῆς ΑΒ ἑνός κύκλου (Ο, ρ) καί ἀπό τό μέσο τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ διέρχεται ἀπό τό κέντρο Ο τοῦ κύκλου καί εἶναι κάθετη στή χορδή.**

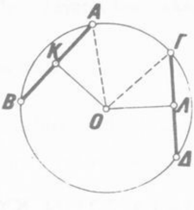
Θά ἀποδείξουμε ἀκόμη τά θεωρήματα :

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ. Δύο χορδές ΑΒ καί ΓΔ τοῦ ἴδιου κύκλου (ἤ ἴσων κύκλων) εἶναι ἴσες, ἄν καί μόνο ἄν τά ἀποστήματά τους ΟΚ καί ΟΛ εἶναι ἴσα,

δηλαδή : $AB = \Gamma\Delta \iff OK = O\Lambda$.

'Απόδ. Ἂν εἶναι $AB = Γ\Delta$, τότε εἶναι καί $AK = ΓΛ$. Ἔτσι ἔχουμε τριγOKA = τριγ$OΛΓ$ (γιατί $O\widehat{K}A = O\widehat{Λ}Γ = 90^o$, $OA = OΓ$, $AK = ΓΛ$) καί ἄρα $OK = OΛ$.

'Αντιστρόφως, ἄν εἶναι $OK = OΛ$, τότε ἔχουμε πάλι τριγOAK = τριγ$OΛΓ$ (γιατί τώρα $O\widehat{K}A = O\widehat{Λ}Γ = 90^o$, $OA = OΓ$, $OK = OΛ$) καί ἄρα $AK = ΓΛ$, ὁπότε $AB = Γ\Delta$.



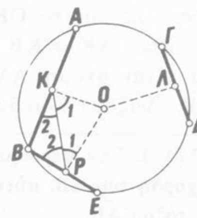
ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ. Μιά χορδή ΑΒ ἑνός κύκλ(Ο,ρ) εἶναι μεγαλύτερη ἀπό χορδή ΓΔ τοῦ ἴδιου κύκλου (ἤ ἴσου κύκλου), ἄν καί μόνο ἄν τό ἀπόστημα ΟΚ τῆς ΑΒ εἶναι μικρότερο ἀπό τό ἀπόστημα ΟΛ τῆς ΓΔ.

Δηλαδή : $AB > Γ\Delta \iff OK < OΛ$.

'Απόδ. Ἂν θεωρήσουμε χορδή $BE = Γ\Delta$ καί καλέσουμε OP τό ἀπόστημά της, θά εἶναι $OP = OΛ$.

Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι $AB > Γ\Delta$. Τότε θά εἶναι $AB > BE \Rightarrow BK > BP$ καί στό τρίγωνο KBP ἔχουμε $\widehat{P}_2 > \widehat{K}_2$. 'Από αὐτή προκύπτει ὅτι $90^o - \widehat{P}_1 > 90^o - \widehat{K}_1 \Rightarrow \widehat{P}_1 < \widehat{K}_1$ καί ἑπομένως εἶναι (στό τρίγωνο OKP) $OK < OP \Rightarrow OK < OΛ$.

'Αντιστρόφως, ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $OK < OΛ$. Τότε εἶναι $OK < OP$ καί στό τρίγωνο OKP εἶναι $\widehat{P}_1 < \widehat{K}_1$. 'Από αὐτή προκύπτει ὅτι $90^o - \widehat{P}_1 > 90_0 - \widehat{K}_1 \Rightarrow \widehat{P}_2 > \widehat{K}_2$ καί ἑπομένως εἶναι (στό τρίγωνο KBP) $KB > BP \Rightarrow AB > BE \Rightarrow AB > Γ\Delta$.

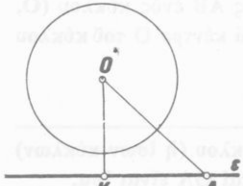


Μέ τά θεωρήματα αὐτά μετατρέπουμε τή σύγκριση χορδῶν σέ σύγκριση ἀποστημάτων καί ἀντιστρόφως.

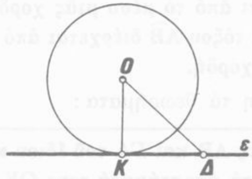
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1-7

7.2. Εὐθεία καὶ κύκλος.

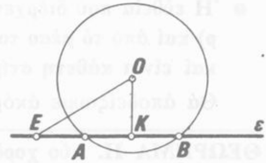
Ἂς θεωρήσουμε ἕναν κυκλ(Ο,ρ) καί μιά εὐθεία ε καί ἄς φέρουμε ἀπό



Σχ. 1



Σχ. 2



Σχ. 3

τό κέντρο Ο τοῦ κύκλου τό τμῆμα ΟΚ κάθετο στήν ε. Γιά τίς δυνατές θέσεις τοῦ σημείου Κ παρατηροῦμε ὅτι :

α) Τό Κ μπορεῖ νά εἶναι ἐξωτερικό σημεῖο τοῦ κδισ(Ο,ρ), δηλ. νά εἶναι ΟΚ > ρ (βλ. σχ. 1). Τότε γιά κάθε ἄλλο σημεῖο Δ τῆς ε ἔχουμε ΟΔ > ΟΚ > ρ. Ἔτσι ὅλα τά σημεῖα τῆς ε εἶναι ἐξωτερικά τοῦ κδισ(Ο,ρ) καί ἡ εὐθεία ε δέν ἔχει κοινό σημεῖο μέ τόν κύκλ(Ο,ρ). Μία τέτοια εὐθεία λέγεται **ἐξωτερική εὐθεία** τοῦ κύκλου.

β) Τό Κ μπορεῖ νά εἶναι σημεῖο τοῦ κυκλ(Ο,ρ), δηλ. νά εἶναι ΟΚ = ρ (βλ. σχ. 2). Τότε γιά κάθε ἄλλο σημεῖο Δ τῆς ε ἔχουμε ΟΔ > ΟΚ = ρ. Ἔτσι ὅλα τ' ἄλλα σημεῖα τῆς ε εἶναι πάλι ἐξωτερικά τοῦ κδισ(Ο,ρ) καί ἡ εὐθεία ε ἔχει ἕνα μόνο κοινό σημεῖο μέ τόν κυκλ(Ο,ρ), τό Κ.

γ) Τό Κ μπορεῖ νά εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ κδισ(Ο,ρ), δηλαδή νά εἶναι ΟΚ < ρ (βλ. σχ. 3). Ἄν πάρουμε τώρα στήν ε τμῆμα ΚΕ > ρ, θά ἔχουμε ΟΕ > ΚΕ > ρ καί ἔτσι τό Ε θά εἶναι ἐξωτερικό σημεῖο τοῦ κδισ (Ο,ρ). Τό τμῆμα λοιπόν ΚΕ τέμνει τόν κυκλ(Ο,ρ) σέ σημεῖο Α (βλ. ἀξ. § 2.2). Ἐπίσης ἄν πάρουμε στήν ε τμῆμα ΚΒ = ΚΑ, θά ἔχουμε ΟΒ = ΟΑ = ρ, ὁπότε καί τό Β εἶναι σημεῖο τοῦ κυκλ(Ο,ρ). Βλέπουμε δηλαδή ὅτι στήν περίπτωση αὐτή ὁ κυκλ(Ο,ρ) καί ἡ εὐθεία ε ἔχουν δύο κοινά σημεῖα, τά Α καί Β, ἐνῶ δέν μπορεῖ νά ἔχουν καί τρίτο κοινό σημεῖο (γιατί ἄν π.χ. εἶχαν κοινό καί ἕνα τρίτο σημεῖο Α′ πρός τό μέρος Α, τότε θά εἴχαμε ΟΑ′ = ΟΑ = ΟΒ ⇒ ΚΑ′ = ΚΒ καί ΚΑ = ΚΒ ⇒ ΚΑ = ΚΑ′, πού εἶναι ἀδύνατο κατά τό ἀξίωμα § 1.6).

Δείξαμε λοιπόν ὅτι :

Εὐθεία καί κύκλος ἔχουν τό πολύ δύο κοινά σημεῖα.

Εἰδικότερα δείξαμε ὅτι, ἄν ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου Ο ἑνός κύκλ(Ο,ρ) ἀπό μιά εὐθεία ε εἶναι μικρότερη, ἴση ἤ μεγαλύτερη ἀπό τήν ἀκτίνα του ρ, τότε ὁ κυκλ(Ο,ρ) ἔχει δύο, ἕνα ἤ κανένα κοινό σημεῖο μέ τήν εὐθεία ε. Ἀποδεικνύεται εὔκολα καί ἡ ἀντίστροφη πρόταση. Ἔτσι π.χ. ἄν μιά εὐθεία ε ἔχει δύο κοινά σημεῖα μέ τόν κυκλ(Ο,ρ), ἡ ἀπόσταση ΟΚ τοῦ Ο ἀπό τήν ε εἶναι μικρότερη ἀπό τήν ἀκτίνα (γιατί ἄν ἦταν ΟΚ = ρ ἤ ΟΚ > ρ, ἡ ε καί ὁ κυκλ(Ο,ρ) θά εἶχαν ἕνα ἤ κανένα κοινό σημεῖο). Ἔχουμε λοιπόν τελικά τήν πρόταση :

Μία εὐθεία ε ἔχει δύο, ἕνα ἤ κανένα κοινό σημεῖο μέ τόν κυκλ(Ο,ρ), ἄν καί μόνο ἄν ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου Ο ἀπό τήν εὐθεία ε εἶναι μικρότερη ἴση ἤ μεγαλύτερη ἀπό τήν ἀκτίνα ρ.

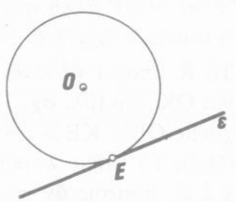
Ἄν ἡ ε ἔχει δύο κοινά σημεῖα Α καί Β μέ τόν κυκλο, θά λέγεται τέ-

μνουσα τοῦ κύκλου καί θά λέμε γι' αὐτή ὅτι **τέμνει** τόν κύκλο στά Α καί Β. Κάθε «τέμνουσα» τοῦ κύκλου ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τό κέντρο του θά λέγεται **διακεντρική εὐθεία**.

7.3. Ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου.

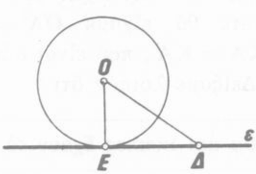
Ὁρισμός : Μία εὐθεία ε θά λέγεται **ἐφαπτομένη κυκλ (Ο,ρ),** ἄν καί μόνο ἄν ἡ ε ἔχει μόνο ἕνα κοινό σημεῖο μέ τόν κυκλ(Ο,ρ).

Ἀπό αὐτά πού εἴπαμε στήν § 7.2 συμπεραίνουμε ὅτι ἡ εὐθεία ε θά εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κυκλ(Ο,ρ), ἄν καί μονο ἄν ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου Ο ἀπό τήν ε εἶναι ἴση μέ τήν ἀκτίνα ρ. Ἄν Ε εἶναι τό μοναδικό κοινό σημεῖο τῆς εὐθείας ε καί τοῦ κυκλ(Ο,ρ), τό Ε λέγεται **σημεῖο ἐπαφῆς** τῆς εὐθείας ε καί λέμε ἀκόμη ὅτι ἡ ε *ἐφάπτεται* στόν κύκλο στό Ε. Ὅλα τά ἄλλα σημεῖα τῆς εὐθείας ε εἶναι ἐξωτερικά τοῦ κδισ(Ο,ρ).



ΘΕΩΡΗΜΑ : Ἄν μία εὐθεία ε ἐφάπτεται κυκλ(Ο,ρ) στό σημεῖο Ε, τότε ἡ ἀκτίνα ΟΕ εἶναι κάθετη στήν εὐθεία ε.

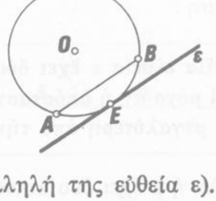
Ἀπόδ. Ἀφοῦ κάθε ἄλλο σημεῖο Δ τῆς ε εἶναι ἐξωτερικό τοῦ κδισ(Ο,ρ), θά ἔχουμε ΟΔ > ρ, δηλαδή ΟΔ > ΟΕ. Ἔτσι τό τμῆμα ΟΕ εἶναι τό μικρότερο τμῆμα πού ἔχει τό ἕνα ἄκρο του στό Ο καί τό ἄλλο στήν εὐθεία ε καί γι' αὐτό ΟΕ ⊥ ε.



Ἀπό τό θεώρημα αὐτό προκύπτουν ἀμέσως τά πορίσματα :

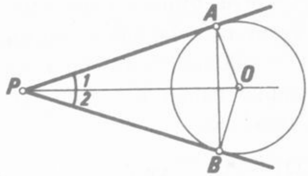
- **Ἡ εὐθεία πού εἶναι κάθετη στό ἄκρο μιᾶς ἀκτίνας τοῦ κυκλ(Ο,ρ) εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου.**
- **Ἡ εὐθεία πού εἶναι κάθετη σέ μία ἐφαπτομένη στό σημεῖο ἐπαφῆς διέρχεται ἀπό τό κέντρο τοῦ κύκλου.**
- **Ἄν ἀπό τό κέντρο ἑνός κυκλ(Ο,ρ) φέρνουμε εὐθεία κάθετη σέ μιά ἐφαπτομένη του, ἡ εὐθεία αὐτή διέρχεται ἀπό τό σημεῖο ἐπαφῆς.**

Τέλος καταλαβαίνουμε ὅτι, **ἄν ἔχουμε ἐφαπτομένη ε ἑνός κυκλ(Ο,ρ) παράλληλη πρός χορδή του ΑΒ, τό σημεῖο ἐπαφῆς Ε θά εἶναι μέσο τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$**, γιατί ἡ ΟΕ εἶναι κάθετη πρός τή χορδή ΑΒ (ἀφοῦ εἶναι κάθετη στήν παράλληλή της εὐθεία ε).



7.4. Ἐφαπτόμενες κύκλου ἀπό σημεῖο.

Ἄς θεωρήσουμε τώρα τίς ἐφαπτόμενες ἑνός κυκλ(Ο,ρ) στά ἄκρα μιᾶς χορδῆς του ΑΒ (ἡ ὁποία δέν εἶναι διάμετρος). Οἱ ἐφαπτόμενες αὐτές τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο Ρ (ἀφοῦ τέμνονται οἱ κάθετες σ' αὐτές ἀκτίνες ΟΑ καί ΟΒ) καί τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΡΑΟ καί ΡΒΟ πού σχηματίζονται εἶναι ἴσα, γιατί ἔχουν τήν ΟΡ κοινή καί ΟΑ = ΟΒ. Ἔτσι ἔχουμε τίς ἰσότητες :



$$PA = PB, \qquad \hat{P}_1 = \hat{P}_2.$$

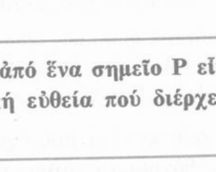
Τά δυό εὐθύγραμμα τμήματα ΡΑ καί ΡΒ πού ἀνήκουν σ' εὐθεῖες οἱ ὁποῖες διέρχονται ἀπό τό Ρ καί εἶναι ἐφαπτόμενες τοῦ κυκλ(Ο,ρ) στά Λ καί Β θά λέγονται «*ἐφαπτόμενα τμήματα τοῦ κύκλου ἀπό τό σημεῖο Ρ*». Ἔτσι οἱ παραπάνω ἰσότητες ἀποτελοῦν τήν πρόταση :

ΘΕΩΡΗΜΑ : Τά ἐφαπτόμενα τμήματα τοῦ κύκλου ἀπό ἕνα σημεῖο Ρ εἶναι ἴσα καί σχηματίζουν ἴσες γωνίες μέ τή διακεντρική εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τό Ρ.

Ἐπειδή στό ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΡΒ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας του $\hat{P}$ εἶναι μεσοκάθετος τῆς βάσεως, ἕπεται, ἀκόμη ὅτι **ἡ ΟΡ εἶναι μεσοκάθετος τῆς χορδῆς ΑΒ.**

7.5. Τεμνόμενοι κύκλοι.

Ἄς θεωρήσουμε τρία μή συνευθειακά σημεῖα Α,Β,Γ καί τίς μεσοκαθέτους ε_1 καί ε_2 τῶν τμημάτων ΑΒ καί ΒΓ. Οἱ εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 τέμνονται (γιατί τέμνονται τά κάθετα σ' αὐτές τμήματα ΑΒ καί ΒΓ) καί τό σημεῖο τομῆς τους Ο εἶναι τέτοιο, ὥστε



$$OA = OB = O\Gamma.$$

Ἔτσι ὁ κύκλος πού γράφεται μέ κέντρο Ο καί ἀκτίνα ΟΑ διέρχεται ἀπό τά σημεῖα Α,Β,Γ.

Δέν ὑπάρχει ἄλλος κύκλος διαφορετικός ἀπό τόν κυκλ(Ο,ΟΑ) πού νά διέρχεται ἐπίσης ἀπό τά Α,Β,Γ, γιατί, ἄν ὑπῆρχε ὁ κυκλ(Ο′,Ο′Α), θά εἴχαμε Ο′Α = Ο′Β = Ο′Γ, δηλαδή τό Ο′ θά ἦταν τό κοινό σημεῖο τῶν ε_1 καί ε_2 καί συνεπῶς θά ταυτιζόταν μέ τό Ο. Δείξαμε λοιπόν ὅτι :

Ἀπό τρία μή συνευθειακά σημεῖα διέρχεται ἕνας καί μόνο ἕνας κύκλος.

Ἀπό τήν πρόταση αὐτή καταλαβαίνουμε ὅτι δύο κύκλοι πού ἔχουν τρία κοινά σημεῖα συμπίπτουν. Ἔτσι **δύο διαφορετικοί κύκλοι μπορεῖ νά ἔχουν τό πολύ δύο κοινά σημεῖα.**

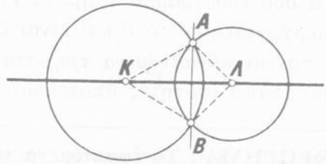
Ἄν θεωρήσουμε δύο κύκλους, τούς κυκλ(Κ,R) καί κυκλ(Λ,ρ), τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΚΛ, πού ἔχει ἄκρα τά κέντρα τους, λέγεται **διάκεντρος** τῶν κύκλων.

ΘΕΩΡΗΜΑ : Ἄν δύο κύκλοι μέ κέντρα Κ καί Λ ἔχουν ἕνα κοινό σημεῖο Α πού δέν ἀνήκει στήν εὐθεία ΚΛ, τότε θά ἔχουν καί δεύτερο κοινό σημεῖο πού εἶναι τό συμμετρικό τοῦ Α ὡς πρός τήν ΚΛ.

Ἀπόδ. Ἄν πάρουμε τό σημεῖο $Β = \text{συμμ}_{ΚΛ}Α$, ἡ ΚΛ θά εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΑΒ καί ἔτσι

$$ΚΒ = ΚΑ \text{ καί } ΛΒ = ΛΑ.$$

Οἱ ἰσότητες αὐτές μᾶς ἐξασφαλίζουν ὅτι οἱ δύο κύκλοι διέρχονται ἀπό τό Β, δηλαδή ὅτι τό Β εἶναι κοινό σημεῖο τους.



Δύο κύκλοι πού ἔχουν δύο κοινά σημεῖα λέγονται **τεμνόμενοι κύκλοι.** Τό εὐθύγραμμο τμῆμα πού ἔχει ἄκρα τά κοινά σημεῖα δύο τεμνόμενων κύκλων λέγεται **κοινή χορδή** τους. Ἀπό τό παραπάνω θεώρημα προκύπτει ὅτι **ἡ διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων εἶναι μεσοκάθετος τῆς κοινῆς χορδῆς τους.**

Θά ἀποδείξουμε ὅτι :

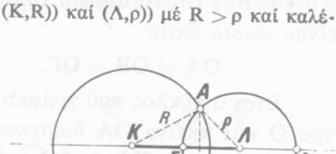
ΘΕΩΡΗΜΑ : Δύο κύκλοι τέμνονται, ἄν καί μόνο ἄν ἡ διάκεντρός τους εἶναι μικρότερη ἀπό τό ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τους καί μεγαλύτερη ἀπό τή διαφορά τῶν ἀκτίνων τους.

Δηλαδή : $R - ρ < ΚΛ < R + ρ$.

Ἀπόδ. Ἄν θεωρήσουμε δύο τεμνόμενους κύκλους (Κ,R)) καί (Λ,ρ)) μέ $R > ρ$ καί καλέσουμε Α τό ἕνα κοινό σημεῖο τους, ἀπό τό τρίγωνο ΚΑΛ ἔχουμε $ΚΑ - ΑΛ < ΚΛ < ΚΑ + ΑΛ$, δηλαδή

$$R - ρ < ΚΛ < R + ρ.$$

Ἀντιστρόφως, ἄν ἰσχύουν οἱ ἀνισότητες αὐτές, θά ἀποδείξουμε ὅτι οἱ δύο κύκλοι τέμνονται. Ἄν καλέσουμε Γ καί Δ τά σημεῖα τομῆς τοῦ κύκλ. (Λ,ρ) μέ τήν ΚΛ, ἔχουμε (ἐπειδή $ΚΓ = ΚΛ - ρ$ καί $ΚΔ = ΚΛ + ρ$) :



$K\Lambda < R + \rho \Rightarrow K\Lambda - \rho < R \Rightarrow K\Gamma < R \Rightarrow \Gamma =$ ἐσωτ. σημεῖο τοῦ κδισ(K,ρ). Ἀκόμα:
$R - \rho < K\Lambda \Rightarrow R < K\Lambda + \rho \Rightarrow R < K\Delta \Rightarrow \Delta =$ ἐξωτ. σημεῖο τοῦ κδισ(K, R).

Τότε ὅμως κάθε τόξο $\widehat{\Gamma\Delta}$ τοῦ κυκλ(Λ,ρ) θά τέμνει τόν κύκλ(K,R) καί ἔτσι οἱ δύο κύκλοι ἔχουν δύο κοινά σημεῖα[1].

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8 - 12

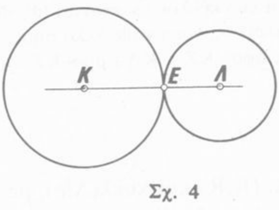
7.6. Ἐφαπτόμενοι κύκλοι.

Ὁρισμός : Δύο κύκλοι πού ἔχουν ἕνα καί μόνο ἕνα κοινό σημεῖο λέγονται «ἐφαπτόμενοι κύκλοι».

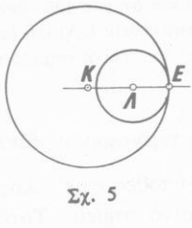
Ἄν ἔχουμε δύο ἐφαπτόμενους κύκλους καί καλέσουμε Ε τό κοινό σημεῖο τους, θά λέμε ὅτι οἱ κύκλοι **ἐφάπτονται** στό Ε ἤ ὅτι τό Ε εἶναι σημεῖο ἐπαφῆς τους. Ἀπό τό πρῶτο θεώρημα τῆς § 7.5 προκύπτουν ἀμέσως οἱ προτάσεις :

- **Τό σημεῖο ἐπαφῆς δύο ἐφαπτόμενων κύκλων βρίσκεται στήν εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τά κέντρα τους.**
- **Ἄν δύο κύκλοι ἔχουν κοινό σημεῖο Ε καί αὐτό ἀνήκει στήν εὐθεία ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τά κέντρα τους, τότε οἱ κύκλοι ἐφάπτονται στό Ε.**

Ἄς θεωρήσουμε λοιπόν δύο κύκλους πού ἐφάπτονται στό σημεῖο Ε, τούς κυκλ(K,R) καί κυκλ(Λ,ρ) καί ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $R > \rho$. Θά λέμε ὅτι οἱ κύκλοι **ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς**, ἄν καί μονο ἄν ὅλα τά σημεῖα (ἐκτός ἀπό τό Ε) τοῦ κυκλ(Λ,ρ) εἶναι ἐξωτερικά σημεῖα τοῦ κδισ(K,R) (βλ. σχ. 4), ἐνῶ θά λέμε ὅτι οἱ κύκλοι **ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς**, ἄν καί μόνο ἄν ὅλα



Σχ. 4



Σχ. 5

τά σημεῖα (ἐκτός ἀπό τό Ε) τοῦ κυκλ(Λ,ρ) εἶναι ἐσωτερικά σημεῖα τοῦ κδισ. (K,R) (βλ. σχ. 5). Παρατηροῦμε ὅτι στήν πρώτη περίπτωση τό σημεῖο ἐπαφῆς εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τῆς διακέντρου ΚΛ, ἐνῶ στή δεύτερη περίπτωση εἶναι ἐξωτερικό σημεῖο της.

1. Δεχόμαστε ἀξιωματικά ὅτι κάθε τόξο πού συνδέει ἕνα ἐσωτερικό καί ἕνα ἐξωτερικό σημεῖο ἑνός κυκλ. δίσκου (K,R) ἔχει μέ τόν κύκλο (K, ρ) ἕνα καί μόνο ἕν κοινό σημεῖο.

ΘΕΩΡΗΜΑ : Δύο κύκλοι ἐφάπτονται, ἄν καί μόνο ἄν ἡ διάκεντρός τους εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα ἤ μέ τή διαφορά τῶν ἀκτίνων τους. Εἰδικότερα οἱ κύκλοι :

Ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς $\Longleftrightarrow$ $K\Lambda = R + \rho$.

Ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς $\Longleftrightarrow$ $K\Lambda = R - \rho$.

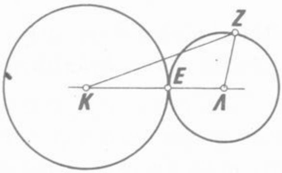
Ἀπόδ. Ἄν οἱ κυκλ(K,R) καί κυκλ(Λ,ρ) ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς στό Ε, τότε τό Ε εἶναι σημεῖο τῆς διακέντρου ΚΛ (βλ. σχ. 6) καί ἔχουμε $K\Lambda = KE + E\Lambda$ ἤ

$$\text{(I)} \qquad K\Lambda = R + \rho.$$

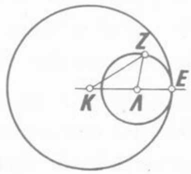
Ἀντιστρόφως, ἄν ἰσχύει ἡ (Ι) καί καλέσουμε Ε τό σημεῖο τομῆς τοῦ κυκλ(Λ,ρ) καί τῆς διακέντρου ΚΛ, θά ἔχουμε $KE = K\Lambda - \rho = (R + \rho) - \rho = R$, δηλαδή τό Ε θά εἶναι καί σημεῖο τοῦ κυκλ(Κ,R). Ἔτσι οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτονται (ἀφοῦ ἔχουν κοινό σημεῖο ἐπάνω στή διάκεντρο) καί ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς, γιατί κάθε ἄλλο σημεῖο Ζ τοῦ κυκλ. (Λ,ρ) εἶναι ἐξωτερικό τοῦ κδισ(Κ,R), ἀφοῦ εἶναι $KZ > K\Lambda - \rho \Rightarrow KZ > (R + \rho) - \rho \Rightarrow KZ > R$. Ἄν οἱ κύκλοι ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς στό Ε, τότε τό Ε εἶναι στήν προέκταση τῆς διακέντρου ΚΛ (βλ. σχ. 7) καί ἔχουμε $K\Lambda = KE - E\Lambda$ ἤ

$$\text{(II)} \qquad K\Lambda = R - \rho.$$

Ἀντιστρόφως, ἄν ἰσχύει ἡ (ΙΙ) καί καλέσουμε Ε τό σημεῖο τομῆς τοῦ κυκλ(Λ,ρ) μέ τήν



Σχ. 6



Σχ. 7

προέκταση τῆς διακέντρου ΚΛ, θά ἔχουμε $KE = K\Lambda + \Lambda E = (R - \rho) + \rho = R$, δηλ. τό Ε εἶναι καί σημεῖο τοῦ κυκλ(Κ,R). Ἔτσι οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτονται (ἀφοῦ ἔχουν κοινό σημεῖο στήν εὐθεία ΚΛ) καί ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς, γιατί κάθε ἄλλο σημεῖο Ζ τοῦ κυκλ. (Λ,ρ) εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ κδισ(Κ,R), ἀφοῦ $KZ < K\Lambda + \rho \Rightarrow KZ < (R - \rho) + \rho \Rightarrow KZ < R$.

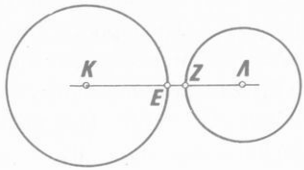
7.7. Μή τεμνόμενοι κύκλοι.

Ἄς ὑποθέσουμε τέλος ὅτι οἱ κυκλ. (Κ,R) καί κυκλ(Λ,ρ), μέ $R > \rho$, δέν ἔχουν κοινό σημεῖο. Τότε ἔχουμε μία ἀπό τίς δύο περιπτώσεις :

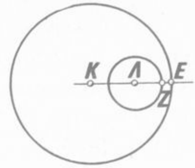
α) Τά σημεῖα τοῦ κυκλ(Λ,ρ) εἶναι ἐξωτερικά σημεῖα τοῦ κδισ(Κ,R). Στήν περίπτωση αὐτή ἡ διάκεντρος ΚΛ τέμνεται ἀπό τούς κύκλους σέ δύο ση- Ε καί Ζ (βλ σχ. 8) καί ἔχουμε $K\Lambda = KE + EZ + \Lambda Z = R + \rho + EZ$. Συνεπῶς

$$K\Lambda > R + \rho.$$

β) Τά σημεῖα τοῦ κυκλ(Λ,ρ) εἶναι ἐσωτερικά σημεῖα τοῦ κδισ(Κ,R). Στήν περίπτωση αὐτή ἡ προέκταση τῆς διακέντρου ΚΛ τέμνεται ἀπό τούς κύ-



Σχ. 8



Σχ. 9

κλους στά δύο σημεῖα Ε καί Ζ (βλ. σχ. 9) καί ἔχουμε $ΚΛ = ΚΕ - ΕΛ = R - (ΛΖ + ΖΕ) = R - \rho - ΕΖ$. Συνεπῶς

$$ΚΛ < R - \rho.$$

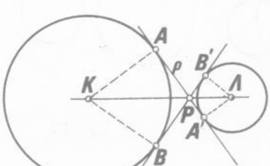
Ἀντιστρόφως, ἄν ἰσχύει ἡ ἀνισότητα $ΚΛ > R + \rho$ ἤ ἡ ἀνισότητα $ΚΛ < R - \rho$, καταλαβαίνουμε ὅτι οἱ δύο κύκλοι δέν ἔχουν κοινό σημεῖο (γιατί ἄν εἶχαν ἕνα μόνο κοινό σημεῖο, θά εἴχαμε $ΚΛ = R + \rho$ ἤ $ΚΛ = R - \rho$, ἐνῶ ἄν τέμνονταν, θά εἴχαμε $ΚΛ < R + \rho$ καί $ΚΛ > R - \rho$). Εἰδικότερα:

—Ἄν ἰσχύει ἡ ἀνισότητα $ΚΛ > R + \rho$, ὁ κυκλ(Λ,ρ) εἶναι «ἔξω» ἀπό τόν κδισ(Κ,R) γιατί ἄν ἦταν «μέσα», θά εἴχαμε $ΚΛ < R - \rho < R < R + \rho$.

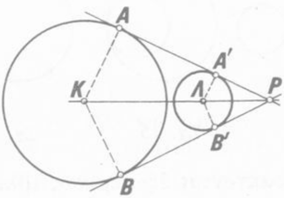
—Ἄν ἰσχύει ἡ ἀνισότητα $ΚΛ < R - \rho$, ὁ κυκλ(Λ,ρ) εἶναι «μέσα» στόν κδισ(Κ,R), γιατί ἄν ἦταν «ἔξω», θά εἴχαμε $ΚΛ > R + \rho > R > R - \rho$.

7.8. Κοινὴ ἐφαπτομένη δύο κύκλων.

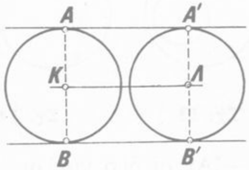
Ὁρισμός: Μία εὐθεία ε πού ἐφάπτεται σέ δύο κύκλους λέγεται **κοινή ἐφαπτομένη** τους. Εἰδικότερα ἄν ἡ ε ἔχει ἑκατέρωθεν αὐτῆς τούς δύο κύκλους (Βλ. σχ. 10), θά λέγεται **κοινή ἐσωτερική ἐφαπτομένη**, ἐνῶ στήν ἀντίθετη περίπτωση (βλ. σχ. 11) θέ λέγεται **κοινή ἐξωτερική ἐφαπτομένη**.



Σχ. 10



Σχ. 11



Σχ. 12

Ἄς θεωρήσουμε δύο κύκλους, τούς κυκλ(Κ,R) καί κυκλ(Λ,ρ) καί τίς κοινές ἐσωτερικές ἤ ἐξωτερικές ἐφαπτόμενές τους. Ἄς ὑποθέσουμε ἀκόμη ὅτι μία κοινή ἐσωτερική (ἤ ἐξωτερική) ἐφαπτομένη ἐφάπτεται στούς κύκλους στά Α καί Α΄ καί ὅτι μία ἄλλη κοινή ἐσωτερική (ἤ ἐξωτερική) ἐφαπτομένη ἐφάπτεται στούς κύκλους στά Β καί Β΄. Τά εὐθύγραμμα τμήματα ΑΑ΄

καί ΒΒ΄, πού ἔχουν ἄκρα τά σημεῖα ἐπαφῆς, θά λέγονται **κοινά ἐφαπτόμενα τμήματα** τῶν δύο κύκλων καί θά χαρακτηρίζονται «ἐσωτερικά» ἤ «ἐξωτερικά», ἄν ἀνήκουν ἀντίστοιχα σέ ἐσωτερικές ἤ ἐξωτερικές ἐφαπτόμενες.

Ἄν οἱ κοινές ἐσωτερικές (ἤ ἐξωτερικές) ἐφαπτόμενες τέμνονται στό σημεῖο Ρ, θά ἔχουμε (βλ. § 7.4) ΡΑ = ΡΒ καί ΡΑ΄ = ΡΒ΄. Προσθέτοντας (ἤ ἀφαιρώντας) τίς ἰσότητες αὐτές κατά μέλη βρίσκουμε ΑΑ΄ = ΒΒ΄, δηλαδή :

Τά κοινά ἐφαπτόμενα τμήματα δύο κύκλων εἶναι ἴσα.

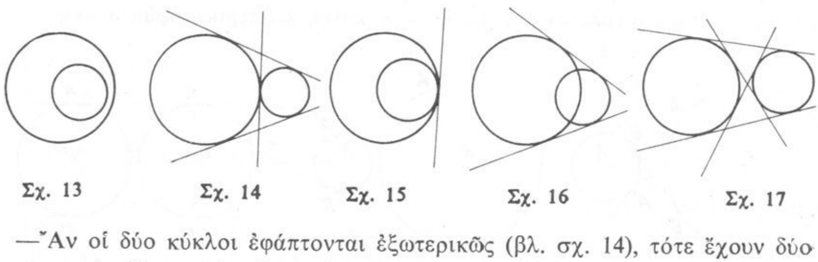
Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι τό Κ ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές τῆς γωνίας $A\hat{P}B$ (γιατί ΚΑ = ΚΒ) καί τό Λ ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές τῆς γωνίας $A'\hat{P}B'$ (γιατί ΛΑ΄ = ΛΒ΄). Τότε ὅμως οἱ εὐθεῖες ΡΚ καί ΡΛ συμπίπτουν, γιατί διχοτομοῦν γωνίες ἀντικόρυφες (σχ. 10) ἤ συμπίπτουσες (σχ. 11). Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι :

—Ἡ εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τά κέντρα δύο κύκλων διέρχεται καί ἀπό τό σημεῖο τομῆς τῶν ἐσωτερικῶν καί ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων τους καί διχοτομεῖ τή γωνία τους.

Ἄν ἔχουμε ἴσους κύκλους (βλ. σχ. 12). οἱ κοινές ἐξωτερικές ἐφαπτόμενες δέν τέμνονται, ἀλλά τά κοινά ἐξωτερικά ἐφαπτόμενα τμήματα εἶναι πάλι ἴσα (ἀφοῦ ἀπό τά ὀρθογώνια ΑΚΛΑ΄ καί ΒΚΛΒ΄ ἔχουμε ΑΑ΄ // = ΚΛ καί ΒΒ΄ // = ΚΛ).

Παρατηροῦμε τέλος ὅτι στίς διάφορες θέσεις τῶν δύο κύκλων παρουσιάζονται οἱ ἑξῆς περιπτώσεις :

—Ἄν οἱ δύο κύκλοι δέν ἔχουν κοινό σημεῖο καί ὁ ἕνας βρίσκεται μέσα στόν ἄλλο (βλ. σχ. 13), τότε οἱ κύκλοι δέν ἔχουν κοινές ἐφαπτόμενες.



Σχ. 13 Σχ. 14 Σχ. 15 Σχ. 16 Σχ. 17

—Ἄν οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς (βλ. σχ. 14), τότε ἔχουν δύο κοινές ἐξωτερικές ἐφαπτόμενες καί μία κοινή ἐσωτερική ἐφαπτομένη (πού διέρχεται ἀπό τό σημεῖο ἐπαφῆς τους).

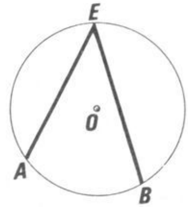
—Ἄν οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς (βλ. σχ. 15), τότε ἔχουν μόνο μία κοινή ἐξωτερική ἐφαπτομένη (πού διέρχεται ἀπό τό σημεῖο ἐπαφῆς τους).

—Ἄν οἱ δύο κύκλοι τέμνονται (βλ. σχ. 16), τότε ἔχουν δύο κοινές ἐξωτερικές ἐφαπτόμενες.

—Ἄν οἱ δύο κύκλοι δέν ἔχουν κοινό σημεῖο καί ὁ ἕνας βρίσκεται ἔξω ἀπό τόν ἄλλο (βλ. σχ. 17), τότε ἔχουν δύο κοινές ἐξωτερικές ἐφαπτόμενες καί δύο κοινές ἐσωτερικές ἐφαπτόμενες.

7.9. Ἐγγεγραμμένες γωνίες.

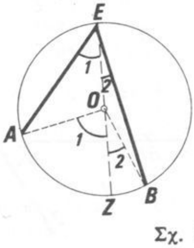
Ὁρισμός : Μία γωνία πού ἡ κορυφή της ἀνήκει σ' ἕναν κυκλ(Ο,ρ) καί οἱ πλευρές της τέμνουν τόν κύκλο λέγεται ἐγγεγραμμένη στόν κύκλο αὐτό.



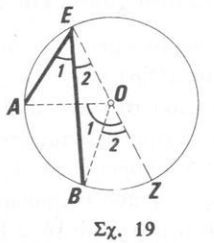
Ἄν οἱ πλευρές μιᾶς ἐγγεγραμμένης γωνίας μέ κορυφή Ε τέμνουν τόν κύκλ(Ο,ρ) στά σημεῖα Α καί Β, θά λέμε ὅτι ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία $A\hat{E}B$ *«βαίνει στό τόξο $\widehat{AB}$»* ἤ τό τόξο $\widehat{AB}$ φαίνεται ἀπό τό Ε ὑπό γωνία $A\hat{E}B$. Ἡ ἐπίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ θεωρεῖται *«ἀντίστοιχη»* τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας $A\hat{E}B$. Εἶναι φανερό ὅτι, ἐνῶ ὑπάρχει μιά ἐπίκεντρη γωνία πού βαίνει σέ δεδομένο τόξο $\widehat{AB}$, ὑπάρχουν ἄπειρες ἐγγεγραμμένες γωνίες πού βαίνουν στό τόξο αὐτό.

ΘΕΩΡΗΜΑ : Κάθε ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι τό μισό τῆς ἐπίκεντρης γωνίας πού βαίνει στό ἴδιο τόξο.

Ἀπόδ. Θεωροῦμε τήν ἐγγεγραμμένη γωνία $A\hat{E}B$ καί φέρνουμε ἀπό τήν κορυφή της Ε



Σχ. 18



Σχ. 19

τή διάμετρο ΕΖ. Ἐπειδή τά τρίγωνα ΕΟΑ καί ΕΟΒ εἶναι ἰσοσκελή, γιά τίς ἐξωτερικές γωνίες τους $A\hat{O}Z = \hat{O}_1$ καί $Z\hat{O}B = \hat{O}_2$ ἔχουμε (βλ.σχ. 18, 19)

$$\hat{O}_1 = 2O\hat{E}A = 2\hat{E}_1, \qquad \hat{O}_2 = 2\hat{O}EB = 2\hat{E}_2.$$

Προσθέτοντας (ἤ στήν περίπτωση τοῦ σχ. 19 ἀφαιρώντας) κατά μέλη αὐτές βρίσκουμε

$$A\hat{O}B = 2A\hat{E}B \Rightarrow A\hat{E}B = \frac{1}{2}\, A\hat{O}B.$$

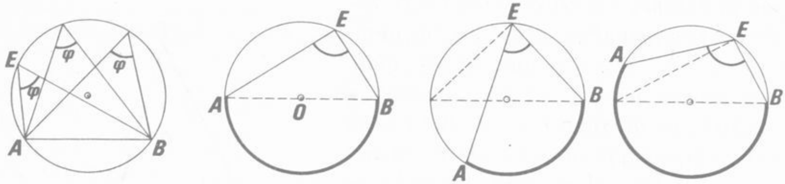
Ἀπό τό θεώρημα αὐτό ἔχουμε ἀμέσως τά πορίσματα :

— **Οἱ ἐγγεγραμμένες γωνίες πού βαίνουν στό ἴδιο τόξο (ἤ σέ ἴσα τόξα) εἶναι ἴσες.**

— **Ἐγγεγραμμένη γωνία πού βαίνει σέ ἡμικύκλιο εἶναι ὀρθή.**

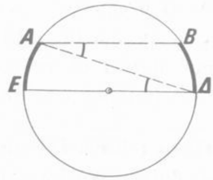
— **Ἐγγεγραμμένη γωνία πού βαίνει σέ τόξο μικρότερο ἀπό ἡμικύκλιο εἶναι ὀξεία, ἐνῶ ἐγγεγραμμένη γωνία πού βαίνει σέ τόξο μεγαλύτερο ἀπό ἡμικύκλιο εἶναι ἀμβλεία.**

Στά παρακάτω σχήματα δίνονται μέ τή σειρά οἱ ἐποπτικές εἰκόνες

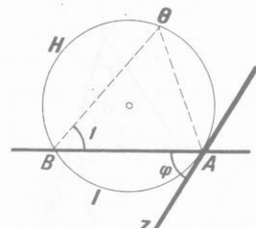


τῶν παραπάνω πορισμάτων.

Εἶναι φανερό ὅτι **τά τόξα στά ὁποῖα βαίνουν δύο ἴσες ἐγγεγραμένες γωνίες εἶναι ἴσα.** Ἀπό αὐτό καταλαβαίνουμε ἀμέσως ὅτι τά **τόξα πού περιέχονται μεταξύ παράλληλων χορδῶν εἶναι ἴσα** (γιατί ἄν $AB \,//\, E\Delta$, θά ἔχουμε $A\hat{\Delta}E = B\hat{A}\Delta \Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{B\Delta}$).



7.10. Γωνία ἀπό χορδή καί ἐφαπτομένη.



Ἄς θεωρήσουμε τέλος μία χορδή AB τοῦ κυκλ(O,ρ) καί τήν ἐφαπτόμενη EZ τοῦ κύκλου στό ἕνα ἄκρο τῆς AB, π.χ. στό A. Σχηματίζονται ἔτσι δύο ἐφεξῆς γωνίες μέ κορυφή τό A, μία ὀξεία γωνία $B\hat{A}Z = \hat{\varphi}$ πού θεωροῦμε ὅτι ἀντιστοιχεῖ στό κυρτογώνιο τόξο $\widehat{BIA}$ καί μία ἀμβλεία γωνία $E\hat{A}B$ πού θεωροῦμε ὅτι ἀντιστοιχεῖ στό μή κυρτογώνιο τόξο $\widehat{BHA}$. Ἄν φέρουμε ἀπό τό B χορδή $B\Theta \,//\, EZ$, τά τόξα $\widehat{AIB}$ καί $\widehat{A\Theta}$ εἶναι ἴσα (βλ. § 7.3) καί ἀκόμη $\hat{\varphi} = A\hat{B}\Theta = \hat{B}_1$. Ἔχουμε λοιπόν $\hat{\varphi} = \hat{B}_1 = \text{εγγ}\widehat{A\Theta} = \text{εγγ}\widehat{AIB}$. Ἡ ἰσότητα

$$\hat{\varphi} = \text{εγγ}\widehat{AIB} = A\hat{\Theta}B$$

ἐκφράζει τό θεώρημα:

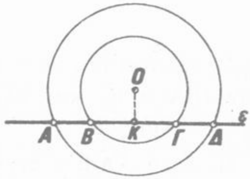
Ἡ γωνία $\hat{\varphi}$ πού σχηματίζεται ἀπό χορδή ἑνός κύκλου καί τήν ἐφαπτομένη στό ἕνα ἄκρο της εἶναι ἴση μέ ἐγγεγραμμένη γωνία τοῦ κύκλου πού βαίνει στό ἀντίστοιχο τόξο τῆς $\hat{\varphi}$.

Ἡ γωνία $\hat{\varphi}$, δηλαδή ἡ ὀξεία γωνία πού σχηματίζει ἡ χορδή ΑΒ μέ τήν ἐφαπτομένη στό ἕνα ἄκρο της, λέγεται **γωνία τῆς εὐθείας ΑΒ καί τοῦ κυκλ(Ο,ρ).** Εἶναι φανερό ὅτι ἡ γωνία τῆς εὐθείας ΑΒ καί τοῦ κυκλ(Ο,ρ) μποροῦσε νά σχηματισθεῖ καί στό ἄλλο σημεῖο Β (γιατί, ὅπως προκύπτει ἀπό τήν § 7.4, οἱ ἐφαπτόμενες στά Α καί Β σχηματίζουν ἴσες γωνίες μέ τή χορδή ΑΒ).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 13 - 22

7.11 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Δίδονται δύο ὁμόκεντροι κύκλοι μὲ κέντρο Ο καὶ μία εὐθεία ε, ποὺ τοὺς τέμνει κατὰ σειρὰ στὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ. Νὰ δειχθεῖ ὅτι ΑΒ=ΓΔ.**



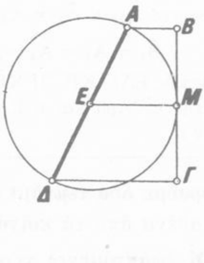
Λύση: Ἄν φέρουμε τήν ΟΚ ⊥ ε, θά ἔχουμε τίς ἰσότητες (ἐπειδή ἡ κάθετη ἀπό τό κέντρο πρός τή χορδή διέρχεται ἀπό τό μέσο της):

$$ΚΑ = ΚΔ,\ ΚΒ = ΚΓ.$$

Ἀφαιρώντας κατά μέλη αὐτές βρίσκουμε ΑΒ = ΓΔ.

2. **Σὲ τραπέζιο ΑΒΓΔ ἡ μὴ παράλληλη πλευρά του ΑΔ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων ΑΒ καὶ ΔΓ, ἐνῶ οἱ γωνίες του $\hat{B}$ καὶ $\hat{\Gamma}$ εἶναι ὀρθές. Νὰ δειχθεῖ ὅτι ὁ κύκλος ποὺ γράφεται μὲ διάμετρο ΑΔ ἐφάπτεται στὴν πλευρὰ ΒΓ.**

Λύση: Ὁ κύκλος θά ἔχει κέντρο τό μέσο Ε τῆς ΑΔ καί ἀκτίνα $\frac{ΑΔ}{2}$. Γιά νά δείξουμε ὅτι ὁ κύκλος αὐτός ἐφάπτεται στή ΒΓ, θά πρέπει ν' ἀποδείξουμε ὅτι ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου Ε ἀπό τήν ΒΓ εἶναι ἴση μέ τήν ἀκτίνα του, δηλαδή ἄν φέρουμε ΕΜ ⊥ ΒΓ, θά πρέπει νά δείξουμε ὅτι



$$ΕΜ = \frac{ΑΔ}{2}.$$

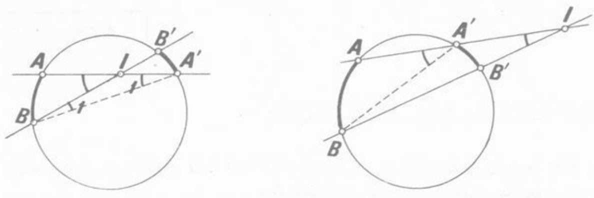
Ἐπειδή ὅμως ΕΜ ⊥ ΒΓ, θά εἶναι ΕΜ // ΑΒ // ΔΓ. Ἔτσι ἡ ΕΜ εἶναι διάμεσος τοῦ ΑΒΓΔ καί τότε $ΕΜ = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2} = \frac{ΑΔ}{2}$.

***3. Θεωροῦμε δύο εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 τεμνόμενες στό Ι καί ἕναν κύκλ(Ο,ρ). Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ ε_1 τέμνει τόν κύκλο στά σημεῖα Α,Α΄ καί ἡ ε_2 στά σημεῖα Β, Β΄. Ἄν σημειώσουμε τίς ἐγγεγραμμένες γωνίες τοῦ κύκλου πού βαίνουν στά τόξα $\overset{\frown}{AB}$ καί $\overset{\frown}{A'B'}$ μέ εγγ$\overset{\frown}{AB}$, καί εγγ$\overset{\frown}{A'B'}$, νά δειχθεῖ ὅτι :**

α) Ὅταν τό Ι εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ κδισ(Ο,ρ), ἔχουμε:
$\mathbf{A\hat{I}B = \varepsilon\gamma\gamma\overset{\frown}{AB} + \varepsilon\gamma\gamma\overset{\frown}{A'B'}}$

β) Ὅταν τό Ι εἶναι ἐξωτερικό σημεῖο τοῦ κδισ(Ο,ρ), ἔχουμε :
$\mathbf{A\hat{I}B = |\,\varepsilon\gamma\gamma\overset{\frown}{AB} - \varepsilon\gamma\gamma\overset{\frown}{A'B'}\,|}$

Λύση : α) Ἐπειδή ἡ γωνία $A\hat{I}B$ εἶναι ἐξωτερική στό τρίγωνο ΙΒΑ΄ (βλ.



(I) (II)

σχ. Ι), θά εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν δύο ἐντός καί ἀπέναντί της γωνιῶν $I\hat{B}A' = \hat{B}_1$ καί $I\hat{A}'B = \hat{A}'_1$. Ἔτσι ἔχουμε $A\hat{I}B = \hat{B}_1 + \hat{A}'_1 =$ εγγ$\overset{\frown}{A'B'}$ + εγγ$\overset{\frown}{AB}$.

β) Ἡ γωνία $A\hat{A}'B$ = εγγ$\overset{\frown}{AB}$ εἶναι ἐξωτερική τοῦ ΙΒΑ΄ (βλ. σχ.ΙΙ). Ἄρα εἶναι $A\hat{I}B = A\hat{A}'B - A'\hat{B}B'$ = ἐγγ$\overset{\frown}{AB}$ — εγγ$\overset{\frown}{A'B'}$.

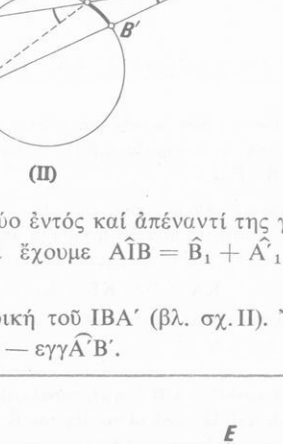
---

4. **Θεωροῦμε δύο κύκλους, τοὺς κύκλ(Κ, R) καὶ κυκλ(Λ, ρ), ποὺ ἐφάπτονται ἐξωτερικὰ στὸ Α. Ἂν εὐθεία ε ἐφάπτεται στὸν κυκλ(Κ, R) στὸ Β καὶ ἡ εὐθεία ΒΑ τέμνει τὸν κύκλο (Λ,ρ) στὸ Ε, νὰ δειχθεῖ ὅτι ΕΛ ⊥ ε.**

Λύση : Ἐπειδή τά τρίγωνα ΒΚΑ καί ΑΛΕ εἶναι ἰσοσκελή καί $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, ἔχουμε

$$\hat{B}_1 = \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{E}$$

καί συνεπῶς ΕΛ//ΚΒ. Ἡ ΚΒ ὅμως εἶναι κάθετη στήν ε. Ἄρα καί ἡ ΕΛ θά εἶναι κάθετη στήν ε.



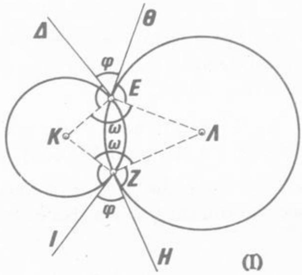
***5. Θεωροῦμε δύο τεμνόμενους κύκλους καί φέρνουμε τίς ἐφαπτόμενές τους σέ καθένα ἀπό τά κοινά σημεῖα τους. Νά δειχθεῖ ὅτι:**

α) Οἱ ἐφαπτόμενες τῶν δύο κύκλων σέ καθένα ἀπό τά κοινά σημεῖα τους σχηματίζουν ἴσες γωνίες. Κάθε μιά ἀπό τίς γωνίες αὐτές λέγεται «γωνία τῶν δύο κύκλων».

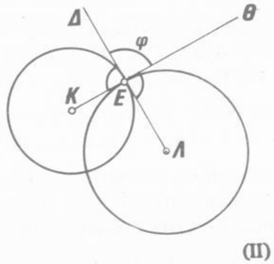
β) Ἡ γωνία τῶν δύο κύκλων εἶναι παραπληρωματική τῆς γωνίας πού ἔχει πλευρές τίς ἀκτίνες πού καταλήγουν σέ ἕνα κοινό σημεῖο τους.

῎Αν ἡ γωνία δύο κύκλων εἶναι ὀρθή, λέμε ὅτι οἱ κύκλοι «τέμνονται ὀρθογωνίως» ἤ ὅτι εἶναι ὀρθογώνιοι. Νά δειχθεῖ ὅτι, ἄν δύο κύκλοι εἶναι ὀρθογώνιοι, οἱ ἐφαπτόμενες κάθε κύκλου στά κοινά σημεῖα τους διέρχονται ἀπό τό κέντρο τοῦ ἄλλου κύκλου.

Λύση: ῎Αν θεωρήσουμε δύο τεμνόμενους κύκλους μέ κέντρα Κ καί Λ καὶ καλέσουμε Ε καί Ζ τά σημεῖα τομῆς τους, τά τρίγωνα ΚΕΛ καί ΚΖΛ εἶναι ἴσα (γιατί ἔχουν τίς τρεῖς πλευρές τους ἴσες) καί θά ἔχου-



(I)



(II)

με $K\hat{E}\Lambda = K\hat{Z}\Lambda = \hat{\omega}$ (βλ. σχ. Ι). ῎Ας φέρουμε τώρα τίς ἐφαπτόμενες τῶν δύο κύκλων στό σημεῖο Ε καί στό σημεῖο Ζ. Οἱ ἐφαπτόμενες στό Ε σχηματίζουν γωνία $\Delta\hat{E}\Theta = 180^o - K\hat{E}\Lambda = 180^o - \hat{\omega}$ (γιατί $K\hat{E}\Delta = \Lambda\hat{E}\Theta = 90^o$) καί ὁμοίως οἱ ἐφαπτόμενες στό Ζ σχηματίζουν γωνία $I\hat{Z}H = 180^o - K\hat{Z}\Lambda = 180^o - \hat{\omega}$. ῎Ετσι λοιπόν οἱ δύο γωνίες $\Delta\hat{E}\Theta$ καί $I\hat{Z}H$ εἶναι ἴσες καί ἄν θέσουμε $\hat{\varphi} = \Delta\hat{E}\Theta = I\hat{Z}H$, ἔχουμε

$$\hat{\varphi} = 180^o - \hat{\omega}.$$

῎Αν δύο κύκλοι μέ κέντρα Κ καί Λ τέμνονται ὀρθογωνίως, δηλαδή ἄν $\hat{\varphi} = 90^o$ (βλ. σχ. ΙΙ), ἔχουμε καί $K\hat{E}\Lambda = \hat{\omega} = 90^o \Rightarrow K\hat{E}\Delta + K\hat{E}\Lambda = 180^o$. ῎Ετσι οἱ ἐφεξῆς γωνίες $\Delta\hat{E}K$ καί $K\hat{E}\Lambda$ εἶναι παραπληρωματικές καί οἱ ἡμιευθεῖες ΕΔ καί ΕΛ εἶναι ἀντικείμενες.

7.12 ΑΣΚΗΣΕΙΣ *

1. ῎Αν δύο ἴσες χορδές κυκλ(Ο,ρ) τέμνονται σέ σημεῖο Ι (ἤ ἄν τέμνονται στό Ι οἱ προεκτάσεις τῶν χορδῶν), ἡ εὐθεία ΟΙ διχοτομεῖ τή γωνία τῶν χορδῶν.
2. Δίνεται μιά χορδή ΑΒ ἑνός κυκλ(Ο,ρ.) καί τά σημεῖα της Γ καί Δ τέτοια, ὥστε $A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta B$. Νά δείξετε ὅτι $A\hat{O}\Gamma = \Delta\hat{O}B$ καί ὅτι $A\hat{O}\Gamma < \Gamma\hat{O}\Delta$.
3. Δίνεται ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο Α τοῦ κδισ(Ο,ρ). Νά δείξετε ὅτι ἡ χορδή, πού εἶναι κάθετη στήν ΟΑ, εἶναι μικρότερη ἀπό κάθε ἄλλη χορδή πού διέρχεται ἀπό τό Α.
4. ῎Αν ἔχουμε δύο ὁμόκεντρους κύκλους, ὅλες οἱ χορδές τοῦ μεγάλου κύκλου πού ἐφάπτονται στό μικρό κύκλο εἶναι ἴσες.

5. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι, ἄν δύο χορδές ἑνός κύκλου (Ο,ρ) ἔχουν κοινό τό μέσο τους, τότε οἱ χορδές αὐτές εἶναι διάμετροι.

6. Θεωροῦμε δύο ἴσους κύκλους μέ κέντρα Κ καί Λ καί ἀπό τό μέσο Μ τῆς ΚΛ φέρνουνουμε μία εὐθεία, ἡ ὁποία τέμνει τόν ἕναν κύκλο στά σημεῖα Α,Β καί τόν ἄλλο στά σημεῖα Γ,Δ. Νά δείξετε ὅτι ΑΒ = ΓΔ.

7. Δίνεται μία διάμετρος ΑΒ ἑνός κύκλου (Ο,ρ) καί μία χορδή του ΓΔ. Νά δείξετε ὅτι οἱ χορδές ΑΓ καί ΔΒ ἔχουν ἴσες προβολές στήν εὐθεία ΓΔ.

8. Μία ἐφαπτομένη τοῦ κυκλ(Ο,ρ) τέμνει δύο ἄλλες παράλληλες ἐφαπτόμενές του στά σημεῖα Β καί Γ. Νά δείξετε ὅτι $B\widehat{O}\Gamma = 90^o$.

9. Θεωροῦμε μία διάμετρο ΑΒ ἑνός κυκλ(Ο,ρ) καί ἕνα σημεῖο Γ στήν προέκτασή της πρός τό μέρος τοῦ Α. Ἀπό τό Γ φέρνουμε ἡμιευθεία πού τέμνει τόν κύκλο σέ σημεῖα Δ καί Ε τέτοια, ὥστε ΓΔ = ρ. Νά δείξετε ὅτι $E\widehat{O}B = 3\Delta\widehat{O}A$.

10. Δύο κύκλοι τέμνονται στά σημεῖα Α καί Β. Ἄν Γ καί Δ εἶναι τά διαμετρικά σημεῖα τοῦ Α στούς δύο κύκλους, νά δείξετε ὅτι ἡ εὐθεία ΓΔ διέρχεται ἀπό τό Β.

11. Ἀπό ἕνα κοινό σημεῖο Α δύο τεμνόμενων κύκλων φέρνουμε πρός τή διάκεντρο εὐθεία παράλληλη ἡ ὁποία τέμνει τούς κύκλους στά σημεῖα Γ καί Δ. Νά δείξετε ὅτι τό τμῆμα ΓΔ εἶναι διπλάσιο ἀπό τή διάκεντρο.

12. Δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐξωτερικά (ἤ ἐσωτερικά) στό σημεῖο Α καί μία εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τό Α τέμνει τούς δύο κύκλους στά σημεῖα Β καί Γ. Νά δείξετε ὅτι οἱ δύο εὐθεῖες, πού ἐφάπτονται στούς κύκλους στά σημεῖα Β καί Γ εἶναι παράλληλες.

13. Δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐξωτερικά (ἤ ἐσωτερικά) στό σημεῖο Α καί δύο εὐθεῖες, πού διέρχονται ἀπό τό Α, τέμνουν τόν ἕναν κύκλο στά σημεῖα Β καί Β΄ καί τόν ἄλλο κύκλο στά σημεῖα Γ καί Γ΄. Νά δείξετε ὅτι ΒΒ΄ // ΓΓ΄.

14. Δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐξωτερικά στό Α καί μία εὐθεία ἐφάπτεται στούς δύο κύκλους στά σημεῖα Β καί Γ. Νά δείξετε ὅτι $B\widehat{A}\Gamma = 90^o$.

15. Δύο κύκλοι μέ κέντρα Κ καί Λ ἐφάπτονται ἐξωτερικά στό Α. Φέρνουμε μιά ὁποιαδήποτε χορδή ΑΒ τοῦ κύκλου Κ καί κατόπι τή χορδή $A\Gamma \perp AB$ τοῦ κύκλου Λ. Νά δείξετε ὅτι ΚΒ // ΛΓ.

16. Δύο ἴσοι κύκλοι μέ κέντρα Κ καί Λ ἐφάπτονται ἐξωτερικά στό Α. Φέρνουμε μιά ὁποιαδήποτε χορδή ΑΒ τοῦ κύκλου Κ καί κατόπι τή χορδή $A\Gamma \perp AB$ τοῦ κύκλου Λ. Νά δείξετε ὅτι ΒΓ // = ΚΛ.

17. Θεωροῦμε δύο παράλληλες χορδές ΑΒ καί ΓΔ ἑνός κυκλ(Ο,ρ) οἱ ὁποῖες σχηματίζουν ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ. Νά δείξετε ὅτι ἡ γωνία πού σχηματίζουν οἱ ἐφαπτόμενες σέ δύο ἀπέναντι κορυφές τοῦ τραπεζίου, εἶναι ἴση μέ τή γωνία τῶν μή παράλληλων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου.

18. Δίνονται δύο κύκλοι μέ κέντρα Κ καί Λ, μία ἐξωτερική ἐφαπτομένη τους ΑΒ καί μία ἐσωτερική ἐφαπτομένη τους ΓΔ. Ἄν οἱ ἐφαπτόμενες αὐτές τέμνονται στό Ι, νά δείξετε ὅτι $K\widehat{I}\Lambda = 90^o$.

19. Ἄν ἔχουμε δύο κύκλους (Κ, R) καί (Λ,ρ), καλοῦμε «ἀπόσταση» τῶν κύκλων τό πιό μικρό εὐθύγραμμο τμῆμα πού τά ἄκρα του εἶναι σημεῖα τῶν δύο κύκλων. (Ἀπό τόν ὁρισμό αὐτό εἶναι φανερό ὅτι δύο κύκλοι, πού ἐφάπτονται ἤ τέμνονται, ἔχουν «μηδενική» ἀπόσταση). Νά δείξετε ὅτι ἡ ἀπόσταση δύο κύκλων (πού ὁ ἕνας εἶναι ἔξω ἤ μέσα στόν ἄλλο) βρίσκεται πάνω στήν εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τά κέντρα τους.

7.13 ΑΣΚΗΣΕΙΣ **

20. Μέ διάμετρο τήν κάθετη πλευρά ΑΒ ὀρθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ γράφουμε κύκλο. Ἄν Δ εἶναι τό σημεῖο, στό ὁποῖο ὁ κύκλος αὐτός τέμνει τήν ὑποτείνουσα ΒΓ, νά δείξετε ὅτι ἡ ἐφαπτομένη στό Δ διέρχεται ἀπό τό μέσο τῆς ΑΓ.

21. Θεωροῦμε κυκλ(Ο,ρ), τήν ἐφαπτομένη ε σ' ἕνα σημεῖο του Α καί ἕνα σημεῖο Σ τῆς ε. Φέρνουμε ἀπό τό Σ μία εὐθεία πού τέμνει τόν κύκλο στά Β καί Γ. Ἄν ἡ διχοτόμος τῆς $\widehat{ΒΑΓ}$ τέμνει τή χορδή ΒΓ στό Ι, νά δείξετε ὅτι $ΣΙ = ΣΑ$.

22. Δίνεται μία ὁρισμένη διάμετρος ΑΒ ἑνός κύκλου (Ο,ρ) καί μία ὁποιαδήποτε χορδή τοῦ ΑΓ. Φέρνουμε ἀπό τό κέντρο Ο εὐθεία παράλληλη πρός τήν ΑΓ καί ὀνομάζουμε Μ τό σημεῖο στό ὁποῖο ἡ παράλληλη αὐτή τέμνει τήν ἐφαπτομένη στό Γ. Νά δείξετε ὅτι ἡ εὐθεία ΜΒ ἐφάπτεται στόν κύκλο στό Β.

23. Θεωροῦμε δύο κάθετες χορδές ΑΒ καί ΓΔ ἑνός κυκλ(Ο,ρ) οἱ ὁποῖες τέμνονται στό Ι καί ὀνομάζουμε Μ καί Ρ τά μέσα τῶν χορδῶν ΑΔ καί ΓΒ. Νά δείξετε ὅτι

α) $ΙΜ \perp ΓΒ$ καί $ΙΡ \perp ΑΔ$ β) $ΟΜ = \frac{ΓΒ}{2}$ καί $ΟΡ = \frac{ΑΔ}{2}$.

24. Δύο κύκλοι ἐφάπτονται στό Α. Φέρνουμε εὐθεία ε πού ἐφάπτεται στό μικρότερο κύκλο σ' ἕνα σημεῖο του Δ καί τέμνει τό μεγαλύτερο κύκλο στά Β καί Γ. Νά δείξετε ὅτι:

α) Ἄν οἱ κύκλοι ἐφάπτονται ἐσωτερικά, ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{ΒΑΓ}$.

β) Ἄν οἱ κύκλοι ἐφάπτονται ἐξωτερικά, ἡ ΑΔ εἶναι ἐξωτερική διχοτόμος τῆς $\widehat{ΒΑΓ}$.

25. Δίνονται δύο σημεῖα Ε καί Ζ ἑνός ἡμικυκλίου μέ διάμετρο ΑΒ καί οἱ ἐφαπτόμενές του στά Ε καί Ζ, οἱ ὁποῖες τέμνονται στό Δ. Ἄν φέρουμε ἀπό τό Δ τήν εὐθεία ε κάθετη στήν ΑΒ, νά δείξετε ὅτι :

α) Ἡ ΑΕ τέμνει τήν ε σ' ἕνα σημεῖο Ι τέτοιο, ὥστε $ΔΙ = ΔΕ$.

β) Οἱ εὐθεῖες ΑΕ καί ΒΖ τέμνονται πάνω στήν ε.

26. Οἱ κορυφές ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, πού ἔχει $ΑΒ < ΒΓ$, εἶναι σημεῖα τοῦ κυκλ(Ο,ρ). Παίρνουμε τό μέσο Μ τοῦ τόξου $\widehat{ΑΓ}$ καί τήν προβολή του Ι στήν πλευρά ΒΓ. Νά δείξετε ὅτι

$$ΙΓ = \frac{ΒΓ - ΑΒ}{2}, \quad ΙΒ = \frac{ΒΓ + ΑΒ}{2}.$$

27. Θεωροῦμε τετράγωνο ΑΒΓΔ καί τό ἡμικύκλιο πού ἔχει διάμετρο τήν ΑΔ καί ὅλα τά σημεῖα του μέσα στό τετράγωνο. Μέ κέντρο τό Α καί ἀκτίνα ΑΔ γράφουμε τόξο ΔΒ, πού ἔχει ὅλα τά σημεῖα του ἐπίσης μέσα στό τετράγωνο. Φέρνουμε τέλος μιά ὁποιαδήποτε εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τό Α καί τέμνει τό ἡμικύκλιο στό Ε καί τό τόξο $\widehat{ΔΒ}$ στό Ζ. Νά δείξετε ὅτι τό τμῆμα ΖΕ εἶναι ἴσο μέ τήν ἀπόσταση τοῦ Ζ ἀπό τήν πλευρά ΔΓ.

28. Ἀπό ἕνα σταθερό σημεῖο Σ φέρνουμε μιά ὁποιαδήποτε εὐθεία ε, ἡ ὁποία τέμνει ἕνα δεδομένο κύκλο (Ο,ρ) στά σημεῖα Α καί Β. Ἄν Α΄ καί Β΄ εἶναι τά διαμετρικά σημεῖα τῶν Α καί Β, νά δείξετε ὅτι ἡ εὐθεία Α΄Β΄ διέρχεται ἀπό σταθερό σημεῖο (δηλαδή διέρχεται ἀπό τό ἴδιο πάντα σημεῖο, ὅταν μεταβάλλεται ἡ εὐθεία ε).

29. Ἀπό ἕνα κοινό σημεῖο Α δύο τεμνόμενων κύκλων φέρνουμε δύο εὐθεῖες πού τέμνουν τόν ἕνα κύκλο στά Γ καί Ε καί τόν ἄλλο στά Δ καί Ζ. Νά δείξετε ὅτι ἡ γωνία τῶν εὐθειῶν ΓΕ καί ΔΖ εἶναι σταθερή (δηλαδή εἶναι ἡ ἴδια πάντοτε, ὁποιεσδήποτε καί ἄν εἶναι οἱ εὐθεῖες πού φέραμε ἀπό τό Α).

30. Δίνεται μία γωνία $X\hat{O}\Psi$ καί ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Σ στή διχοτόμο της. Θεωροῦμε ἕναν ὁποιοδήποτε κύκλο πού διέρχεται ἀπό τά δύο σημεῖα Ο καί Σ καί καλοῦμε Α καί Β τά σημεῖα, στά ὁποῖα τέμνει τίς πλευρές ΟΧ καί ΟΨ τῆς γωνίας. Νά δείξετε ὅτι τό ἄθροισμα $OA + OB$ εἶναι σταθερό (δηλαδή παραμένει τό ἴδιο καί γιά ὁποιοδήποτε ἄλλο κύκλο πού διέρχεται ἀπό τά σημεῖα Ο καί Σ).

31. Στίς πλευρές ΟΧ καί ΟΨ μιᾶς γωνίας $X\hat{O}\Psi$ «κινοῦνται» δύο σημεῖα Α καί Β κατά τέτοιον τρόπο, ὥστε τό ἄθροισμα $OA + OB$ νά εἶναι πάντοτε ἴσο μέ γνωστό μῆκος λ. Νά δείξετε ὅτι ὁ κύκλος πού διέρχεται ἀπό τά σημεῖα Α,Ο,Β, (ὁ ὁποῖος εἶναι μεταβλητός, ἀφοῦ ἐξαρτᾶται ἀπό τήν κίνηση τῶν Α καί Β) διέρχεται καί ἀπό ἕνα ἄλλο σταθερό σημεῖο τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας.

7.14 ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 7

1. Ἄν φέρουμε ἀπό τό κέντρο ἑνός κύκλ(Ο,ρ) εὐθεία κάθετη σέ μία χορδή του ΑΒ, αὐτή θά περάσει ἀπό τό μέσο Κ τῆς χορδῆς καί ἀπό τό μέσο Μ τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$. Ἔτσι τά τρία σημεῖα Ο,Κ,Μ εἶναι πάντα συνευθειακά καί μία εὐθεία, πού διέρχεται ἀπό τά δύο, θά διέρχεται καί ἀπό τό τρίτο καί θά εἶναι μεσοκάθετος τῆς χορδῆς ΑΒ.
Ἡ ἀπόσταση ΟΚ τοῦ κέντρου ἑνός κυκλ(Ο,ρ) ἀπό μία χορδή του λέγεται **ἀπόστημα τῆς χορδῆς.** Ἄν ΑΒ καί ΓΔ εἶναι δύο χορδές τοῦ ἴδιου κύκλου, ἔχουμε.

$$AB \ \overset{\geq}{\underset{<}{}} \ \Gamma\Delta \iff \text{ἀπόστημα τῆς } AB \ \overset{\leq}{\underset{>}{}} \ \text{ἀπόστημα τῆς } \Gamma\Delta,$$

δηλαδή ἀπό τή σχέση πού ἰσχύει γιά δύο χορδές προκύπτει ἡ σχέση πού ἰσχύει γιά τά ἀποστήματά τους καί ἀντιστρόφως.
Μία γωνία λέγεται **ἐγγεγραμμένη σὲ κύκλ(Ο,ρ)**, ἄν καί μόνο ἄν ἡ κορυφή της εἶναι σημεῖο τοῦ κύκλου καί οἱ πλευρές της χορδές του.
— **Κάθε ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι τὸ μισὸ τῆς ἐπίκεντρης ποὺ βαίνει στὸ ἴδιο τόξο.**
Ἀπό τό βασικό αὐτό θεώρημα ἔχουμε τά πορίσματα :
— Ὅλες οἱ ἐγγεγραμμένες γωνίες πού βαίνουν στό ἴδιο τόξο εἶναι ἴσες.
— Ἡ γωνία πού βαίνει σέ ἡμικύκλιο εἶναι ὀρθή.
— Γωνία ἐγγεγραμμένη σέ κυρτογώνιο (ἤ μή κυρτογώνιο) τόξο εἶναι ὀξεία (ἤ ἀμβλεία).

2. Μία εὐθεία ε καί ἕνας κυκλ(Ο,ρ) ἔχουν τό πολύ δύο κοινά σημεῖα .Τό πλῆθος τῶν κοινῶν σημείων τους προκύπτει ἀπό τή σύγκριση τῆς ἀκτίνας ρ μέ τήν ἀπόσταση ΟΚ τοῦ κέντρου Ο ἀπό τήν ε. Ἔτσι ἡ εὐθεία καί ὁ κύκλος θά ἔχουν :
— **κανένα κοινὸ σημεῖο,** ἄν καί μόνο ἄν $OK > \rho$·
— **ἕνα κοινὸ σημεῖο,** ἄν καί μόνο ἄν $OK = \rho$ (ὁπότε κοινό σημεῖο τους εἶναι τό Κ). Στήν περίπτωση αὐτή ἡ εὐθεία λέγεται **ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου** καί εἶναι κάθετη στό ἄκρο τῆς ἀκτίνας πού καταλήγει στό σημεῖο ἐπαφῆς·
— **δύο κοινὰ σημεῖα** ἄν καί μόνο ἄν $OK < \rho$. Τότε λέμε ὅτι ἡ εὐθεία **τέμνει** τόν κύκλο. Ἄν Α καί Β εἶναι τά κοινά σημεῖα τους, ἡ ὀξεία γωνία πού σχηματίζεται ἀπό τήν εὐθεία ε καί ἀπό τήν ἐφαπτομένη στό Α ἤ στό Β λέγεται **γωνία τῆς εὐθείας καὶ τοῦ κύκλου** καί ἰσοῦται μέ μία ἐγγεγραμμένη στό κυρτογώνιο τόξο $\overset{\frown}{AB}$.

3. Δύο κύκλοι (Κ,R) καί (Λ,ρ) ἔχουν τό πολύ δύο κοινά σημεῖα. Τόσο τό πλῆθος τῶν κοινῶν σημείων τους ὅσο καί ἡ μεταξύ τους θέση προκύπτει ἀπό τή σύγκριση τῆς

διακέντρου ΚΛ μέ τό ἄθροισμα καί τή διαφορά τῶν ἀκτίνων τους. Ἔτσι ἄν $R > \rho$, οἱ δύο κύκλοι θά ἔχουν:

— **κανένα κοινὸ σημεῖο,** ἄν καί μόνο ἄν $KΛ > R + \rho$ ἤ $KΛ < R - \rho$. Ὅταν εἶναι $KΛ > R + \rho$ (ἤ ἀντίστοιχα $KΛ < R - \rho$), ὁ κυκλ(Λ,ρ) βρίσκεται «ἔξω» (ἤ ἀντίστοιχα «μέσα») στόν κυκλ(Κ,R)·

— **ἕνα κοινὸ σημεῖο,** ἄν καί μόνο ἄν $KΛ = R + \rho$ ἤ $KΛ = R - \rho$. Ὅταν εἶναι $KΛ = R + \rho$ (ἤ ἀντίστοιχα $KΛ = R - \rho$) ὁ κυκλ(Λ,ρ) βρίσκεται ἔξω (ἤ ἀντίστοιχα μέσα) στόν κύκλ(Κ,R). Στήν περίπτωση αὐτή οἱ κύκλοι λέγονται **ἐφαπτόμενοι** καί τό κοινό σημεῖο τους βρίσκεται πάνω στή διάκεντρο ΚΛ·

— **δύο κοινὰ σημεῖα,** ἄν καί μόνο ἄν $R - \rho < KΛ < R + \rho$. Στήν περίπτωση αὐτή οἱ κύκλοι λέγονται **τεμνόμενοι** καί τά κοινά σημεῖα τους εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τή διάκεντρο.

4. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α πού βρίσκεται ἔξω ἀπό τόν κυκλ(Ο,ρ) μποροῦμε νά φέρουμε δύο ἐφαπτόμενες τοῦ κύκλου. Ἄν Ε καί Ε΄ εἶναι τά σημεῖα ἐπαφῆς τους,

— **τὰ ἐφαπτόμενα τμήματα ΑΕ καὶ ΑΕ΄ εἶναι ἴσα·**

— **ἡ εὐθεία ΑΟ διχοτομεῖ τὴ γωνία $E\hat{A}E'$ καὶ εἶναι μεσοκάθετος τῆς χορδῆς ΕΕ΄.**

Μία εὐθεία ε πού ἐφάπτεται σέ δύο κύκλους λέγεται **κοινὴ ἐφαπτομένη** τους. Ἡ κοινή ἐφαπτομένη τῶν δύο κύκλων λέγεται **ἐξωτερική** (ἤ ἀντίστοιχα **ἐσωτερική**), ἄν οἱ δύο κύκλοι βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος της (ἤ ἀντίστοιχα ἑκατέρωθεν αὐτῆς). Δύο κύκλοι ἀνάλογα μέ τή θέση τους ἔχουν τό πολύ δύο κοινές ἐξωτερικές ἐφαπτόμενες καί δύο κοινές ἐσωτερικές ἐφαπτόμενες. Ἄν οἱ κύκλοι ἔχουν δύο κοινές ἐξωτερικές (ἤ ἐσωτερικές) ἐφαπτόμενες:

— **τὰ κοινὰ ἐφαπτόμενα τμήματα εἶναι ἴσα·**

— **ἡ διακεντρικὴ εὐθεία διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖο τομῆς τῶν κοινῶν ἐφαπτομένων τους καὶ διχοτομεῖ τὴ γωνία τους.**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8ο

ΑΠΛΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ —ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

8.1. Γεωμετρική κατασκευή.

Τά γεωμετρικά σχήματα εἶναι, ὅπως εἴπαμε, μαθηματικές ἐπινοήσεις, καί γιά τή μελέτη τους χρησιμοποιοῦμε τίς «*ἐποπτικές εἰκόνες*» τους οἱ ὁποῖες μᾶς διευκολύνουν στήν ἀποκάλυψη τῶν ἰδιοτήτων τους. Ὅταν λοιπόν λέμε «**κατασκευάζουμε**» ἕνα γεωμετρικό σχῆμα, ἐννοοῦμε ὅτι σχεδιάζουμε τήν ἐποπτική του εἰκόνα. Τά δυό βασικά γεωμετρικά σχήματα, ἡ εὐθεία καί ὁ κύκλος, κατασκευάζονται ἀντίστοιχα, ὅπως εἶναι γνωστό, μέ τόν κανόνα (χάρακα) καί μέ τό διαβήτη. Ὁ διαβήτης χρησιμοποιεῖται ἀκόμη καί ὅταν θέλουμε νά κατασκευάσουμε εὐθύγραμμο τμῆμα ἴσο μέ ἄλλο δεδομένο.

Κάθε πρόταση, στήν ὁποία ζητεῖται νά κατασκευασθεῖ ἕνα γεωμετρικό σχῆμα ἀπό ὁρισμένα στοιχεῖα του ἤ ἀπό ὁρισμένες ἰδιότητές του,λέγεται **γεωμετρικό πρόβλημα**. Ἔτσι ἡ «λύση» ἑνός προβλήματος ἀποτελεῖται ἀπ' ὅλες τίς διαδοχικές ἐργασίες πού κάνουμε, γιά νά κατασκευάσουμε τό ζητούμενο σχῆμα. Ἄν σέ ὅλες τίς διαδοχικές αὐτές ἐργασίες χρησιμοποιοῦμε μόνο κανόνα καί διαβήτη, λέμε ὅτι ἔχουμε «**γεωμετρική λύση**» τοῦ προβλήματος ἤ **γεωμετρική κατασκευή** τοῦ ζητούμενου σχήματος[1]. Στά προηγούμενα εἴδαμε ὁρισμένες κατασκευές. Αὐτές εἶναι :

—Ἡ κατασκευή μιᾶς γωνίας πού ἔχει ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Ο γιά κορυφή, μία ὁρισμένη ἡμιευθεία ΟΧ γιά πλευρά καί εἶναι ἴση μέ δεδομένη γωνία (βλ. § 3.2).

---

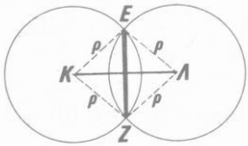
1. Ἡ λύση ἑνός γεωμετρικοῦ προβλήματος μέ κανόνα καί διαβήτη ξεκίνησε ἀπό τόν Πλάτωνα (427-347 π.Χ.). Πολύ ἀργότερα, τόν 17ο καί 18ο αἰώνα, προσπάθησαν νά δώσουν λύσεις γεωμετρικῶν προβλημάτων μόνο μέ τό διαβήτη ἤ μόνο μέ τόν κανόνα καί ἀπέδειξαν ὅτι τά προβλήματα πού λύνονται μέ τόν κανόνα καί τό διαβήτη μποροῦν νά λυθοῦν μόνο μέ τόν διαβήτη.

Ὑπάρχουν προβλήματα πού ἔχει ἀποδειχθεῖ, ὅτι δέ λύνονται μέ κανόνα καί διαβήτη. Ἕνα τέτοιο ἄλυτο πρόβλημα εἶναι π.χ. ἡ διαίρεση μιᾶς ὁποιασδήποτε γωνίας σέ τρία ἴσα μέρη.

—Ἡ κατασκευή μιᾶς εὐθείας πού διέρχεται ἀπό ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Α καί εἶναι παράλληλη πρός δεδομένη εὐθεία ε (βλ. § 5.8).
—Ἡ διαίρεση ἑνός τμήματος ΑΒ σέ ν ἴσα μέρη (βλ. § 6.4).

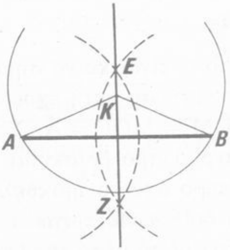
8.2. Κατασκευή τῆς μεσοκαθέτου ἑνός τμήματος.

Ξέρουμε ὅτι ἡ κοινή χορδή δύο τεμνόμενων κύκλων εἶναι κάθετη στή διάκεντρό τους (βλ. § 7.5). Ἄν τώρα θεωρήσουμε δύο ἴσους κύκλους μέ κέντρα Κ,Λ καί ἀκτίνα ρ καί καλέσουμε ΕΖ τήν κοινή χορδή τους, τό σχῆμα ΚΕΛΖ εἶναι ρόμβος καί ἡ κοινή χορδή ΕΖ εἶναι μεσοκάθετος τῆς διακέντρου ΚΛ. Μέ τή βοήθεια τῆς ἰδιότητας αὐτῆς, πού ἔχουν μόνο οἱ ἴσοι τεμνόμενοι κύκλοι, λύνουμε τό ἑξῆς πρόβλημα:



Νά κατασκευασθεῖ ἡ μεσοκάθετος ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

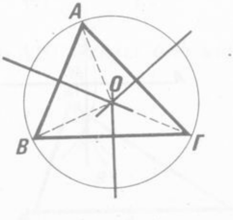
Λύση: Μέ κέντρο τά ἄκρα Α καί Β τοῦ τμήματος ΑΒ καί μέ ὁποιαδήποτε ἀκτίνα ρ μεγαλύτερη ἀπό τό τμῆμα $\frac{AB}{2}$ γράφουμε δύο κύκλους. Αὐτοί οἱ δύο κύκλοι τέμνονται, γιατί τό ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τους εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τή διάκεντρο ΑΒ. Ἄν ὀνομάσουμε Ε καί Ζ τά σημεῖα τομῆς τους, ἡ εὐθεία ΕΖ εἶναι (σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη ἰδιότητα) ἡ μεσοκάθετος πού ζητᾶμε.



Ὑπενθυμίζουμε ὅτι κάθε σημεῖο τῆς μεσοκαθέτου ΕΖ ἰσαπέχει ἀπό τά ἄκρα τοῦ τμήματος ΑΒ. Ἔτσι κάθε κύκλος, πού γράφεται μέ κέντρο ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Κ τῆς ΕΖ καί ἀκτίνα ΚΑ, διέρχεται ἀπό τά ἄκρα Α καί Β τοῦ τμήματος.

8.3. Τό περίκεντρο ἑνός τριγώνου.

Ἄς θεωρήσουμε τώρα ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί ἄς φέρουμε τίς μεσοκαθέτους τῶν δύο πλευρῶν του ΑΒ καί ΑΓ. Οἱ μεσοκάθετοι αὐτές τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο Ο (γιατί τέμνονται οἱ κάθετες εὐθεῖες τους ΑΒ καί ΑΓ), τό ὁποῖο ἰσαπέχει τόσο ἀπό τά Α καί Β ὅσο καί ἀπό τά Β καί Γ. Ἀπό τίς ἰσότητες ὅμως ΟΑ = ΟΒ καί ΟΒ = ΟΓ βρίσκουμε ὅτι ΟΑ = ΟΓ, δηλαδή ὅτι τό Ο ἰσαπέχει

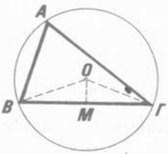


ἀκόμη καί ἀπό τά σημεῖα Α καί Γ καί συνεπῶς θά βρίσκεται καί στή μεσοκάθετο τῆς πλευρᾶς ΑΓ. Δείξαμε λοιπόν ὅτι :

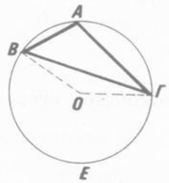
— Οἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν ἑνός τριγώνου διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

Τό σημεῖο Ο, ἀπό τό ὁποῖο διέρχονται οἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, λέγεται **περίκεντρο** τοῦ τριγώνου αὐτοῦ. Ἄν τώρα κατασκευάσουμε τόν κύκλο πού ἔχει κέντρο τό Ο καί ἀκτίνα ΟΑ, ὁ κύκλος αὐτός θά περάσει ἀπό τίς κορυφές Α, Β, Γ καί λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος** στό τρίγωνο ΑΒΓ. Τήν ἀκτίνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου θά τή σημειώνουμε μέ R.

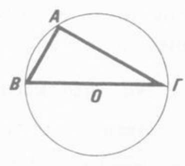
Σέ ὀξυγώνιο τρίγωνο τό περίκεντρο εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο του γιατί (βλ. σχ. 1) τά τόξα $\widehat{\mathrm{B\Gamma}}$, $\widehat{\mathrm{\Gamma A}}$, $\widehat{\mathrm{AB}}$ εἶναι μικρότερα ἀπό ἡμικύκλιο καί συ-



Σχ. 1



Σχ. 2



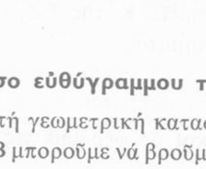
Σχ. 3

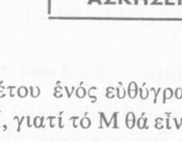
νεπῶς τό Ο εἶναι κοινό σημεῖο τῶν ἡμιεπιπέδων (ΒΓ, Α), (ΓΑ, Β), (ΑΒ, Γ). Στήν περίπτωση αὐτή ἔχουμε π.χ. $\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\Gamma = 2\hat{\mathrm{A}}$ καί, ἄν Μ εἶναι τό μέσο τῆς ΒΓ, $\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{M} = \mathrm{M}\hat{\mathrm{O}}\Gamma = \hat{\mathrm{A}}$. Σέ ἀμβλυγώνιο τρίγωνο μέ ἀμβλεία γωνία τήν $\hat{\mathrm{A}}$ τό περίκεντρο βρίσκεται ἔξω ἀπό τό τρίγωνο (ἀφοῦ τό τόξο $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma$ εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό ἡμικύκλιο) καί ἔχουμε $\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\Gamma = 360^{\circ} - 2\hat{\mathrm{A}}$ (σχ. 2). Τέλος σέ ὀρθογώνιο τρίγωνο μέ κορυφή ὀρθῆς γωνίας τό Α τό περίκεντρο συμπίπτει μέ τό μέσο τῆς ὑποτείνουσας ΒΓ (σχ. 3).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1 - 9

8.4. Μέσο εὐθύγραμμου τμήματος.

Μέ τή γεωμετρική κατασκευή τῆς μεσοκαθέτου ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ μποροῦμε νά βροῦμε καί τό μέσο του Μ, γιατί τό Μ θά εἶναι (βλ. σχ.

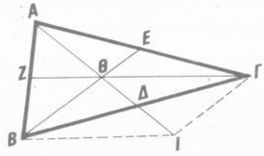




4) σημεῖο τομῆς τοῦ ΑΒ μέ τή μεσοκάθετό του. Μιά ἄλλη γεωμετρική κατασκευή τοῦ μέσου Μ τοῦ τμήματος ΑΒ ἔχουμε μέ τό πρόβλημα τῆς § 6.4 γιά $\nu = 2$ (βλ. σχ. 5). Εἶναι φανερό ὅτι μέ κάθε μία ἀπό τίς παραπάνω κατασκευές μποροῦμε νά βροῦμε καί τίς διαμέσους ἑνός τριγώνου.

8.5. Τό βαρύκεντρο τριγώνου.

Ἄς κατασκευάσουμε σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ τίς δύο διαμέσους του ΒΕ καί ΓΖ. Ἐπειδή εἶναι $\Theta\hat{B}\Gamma + \Theta\hat{\Gamma}B < \hat{B} + \hat{\Gamma} < 180^o$, οἱ δύο διάμεσοι τέμνονται σ' ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο Θ τοῦ τριγώνου. Ἄν ἡ ΑΘ τέμνει τή ΒΓ στό σημεῖο Δ, θ' ἀποδείξουμε ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι ἡ τρίτη διάμεσος τοῦ τριγώνου μας, δηλαδή ὅτι $B\Delta = \Delta\Gamma$.



Στήν ἡμιευθεία ΘΔ παίρνουμε τμῆμα $\Theta I = A\Theta$. Τότε οἱ ΘΖ καί ΘΕ συνδέουν τά μέσα δύο πλευρῶν στά τρίγωνα ΑΒΙ καί ΑΓΙ ἀντιστοίχως καί ἔχουμε

$$\Theta Z // = \frac{BI}{2} \Rightarrow \Gamma Z // IB, \quad \Theta E // = \frac{\Gamma I}{2} \Rightarrow BE // I\Gamma.$$

Ἔτσι τό σχῆμα ΘΓΙΒ εἶναι παραλληλόγραμμο (γιατί ἔχει τίς ἀπέναντι πλευρές του παράλληλες) καί οἱ διάμεσοί του διχοτομοῦνται, ὁπότε $B\Delta = \Delta\Gamma$. Δείξαμε λοιπόν ὅτι:

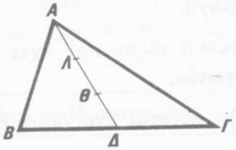
Οἱ διάμεσοι ἑνός τριγώνου διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

Τό σημεῖο Θ, στό ὁποῖο τέμνονται οἱ διάμεσοι τοῦ ΑΒΓ, λέγεται **βαρύκεντρο** τοῦ τριγώνου (ἤ καί **κέντρο βάρους** του).

Ἀπό τό παραλληλόγραμμο ΒΘΓΙ ἔχουμε ἀκόμη $\Theta\Delta = \Delta I \Rightarrow \Theta\Delta = \frac{1}{2}$ $\Theta I = \frac{1}{2}\Theta A \Rightarrow A\Delta - A\Theta = \frac{1}{2}\Theta A \Rightarrow A\Delta = \frac{3}{2}\Theta A$ καί τελικά $\Theta A = \frac{2}{3}$ $A\Delta$. Ὁμοίως βρίσκουμε (ἐπειδή $\Theta Z = \frac{1}{2}BI = \frac{1}{2}\Gamma\Theta$ καί $\Theta E = \frac{1}{2}I\Gamma = \frac{1}{2}$ $B\Theta$) ὅτι $\Theta B = \frac{2}{3}BE$ καί $\Theta\Gamma = \frac{2}{3}\Gamma E$. Οἱ ἰσότητες

$$\Theta A = \frac{2}{3}A\Delta, \quad \Theta B = \frac{2}{3}BE, \quad \Theta\Gamma = \frac{2}{3}\Gamma Z$$

ἐκφράζουν ὅτι τό **βαρύκεντρο Θ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ἀπέχει ἀπό κάθε κορυφή του τά $\frac{2}{3}$ τῆς ἀντίστοιχης διαμέσου.**



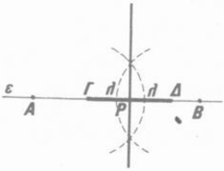
Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι, ἄν χωρίσουμε μία διάμεσο τοῦ τριγώνου, π.χ. τήν ΑΔ, σέ τρία ἴσα μέρη μέ δύο σημεῖα Λ καί Θ (δηλαδή ἄν πάρουμε ΑΛ = ΛΘ = ΘΔ) τό πλησιέστερο στήν πλευρά σημεῖο Θ εἶναι τό βαρύκεντρο τοῦ ΑΒΓ. Ἔτσι τό βαρύκεντρο ἑνός τριγώνου εἶναι πάντοτε ἐσωτερικό σημεῖο του.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 10 - 13

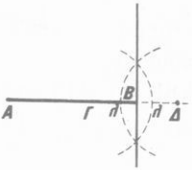
8.6 Κατασκευή εὐθείας κάθετης σέ ἄλλη.

Θά κατασκευάσουμε τώρα τήν εὐθεία πού εἶναι κάθετη σέ μιά δεδομένη εὐθεία (ἤ σ' ἕνα δεδομένο εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ) καί διέρχεται ἀπό ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Ρ.

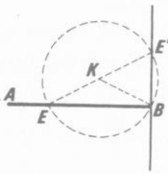
Ἄν τό Ρ ἀνήκει στήν ε (ἤ στό τμῆμα ΑΒ), παίρνουμε μέ τό διαβήτη



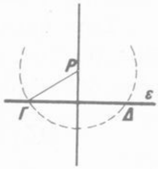
Σχ. 6



Σχ. 7



Σχ. 8



Σχ. 9

μας ἑκατέρωθεν τοῦ Ρ δύο τμήματα ΡΓ καί ΡΔ ἴσα μέ ἕνα αὐθαίρετο μῆκος λ (βλ. σχ. 6) καί κατόπι φέρνουμε τή μεσοκάθετο τοῦ τμήματος ΓΔ.

Εἶναι φανερό ὅτι ἡ ἴδια κατασκευή ἰσχύει καί ὅταν ζητᾶμε εὐθεία κάθετη στό ἄκρο εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ (βλ. σχ. 7). Στήν περίπτωση αὐτή μποροῦμε ἀκόμη νά φέρουμε ἕνα πλάγιο τμῆμα ΚΒ (βλ. σχ. 8), νά γράψουμε τόν κυκλ(Κ,ΚΒ), ὁ ὁποῖος θά τέμνει τό ΑΒ καί σ' ἕνα ἄλλο σημεῖο Ε, καί νά πάρουμε τό Ε′ διαμετρικό τοῦ Ε, ὁπότε Ε′Β $\perp$ ΑΒ.

Ἄν τό Ρ δέν ἀνήκει στήν ε_1, φέρνουμε ἀπό τό Ρ πρός τήν εὐθεία ε ἕνα πλάγιο τμῆμα ΡΓ (βλ. σχ. 9) καί κατασκευάζουμε τόν κυκλ(Ρ,ΡΓ) ὁ ὁποῖος θά τέμνει τήν ε σ' ἕνα ἀκόμη σημεῖο Δ (γιατί ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου Ρ ἀπό τήν ε εἶναι μικρότερη ἀπό τήν ἀκτίνα ΡΓ). Ἡ μεσοκάθετος τῆς χορδῆς ΓΔ τοῦ κύκλου αὐτοῦ εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεία (γιατί περνάει ἀπό τό κέντρο Ρ τοῦ κύκλου).

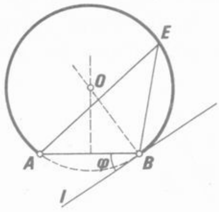
Μέ αὐτή τή γεωμετρική κατασκευή μποροῦμε νά φέρουμε ἀπό τίς κορυφές ἑνός τριγώνου εὐθεῖες κάθετες στίς ἀπέναντι πλευρές του καί νά βροῦμε ἔτσι τά ὕψη του.

Ἐφαρμογή.

Κατασκευή τόξου πού ἔχει δεδομένη χορδή καί δέχεται γνωστή ἐγγεγραμμένη γωνία.

Ἄν δίνεται ἕνα ὁρισμένο εὐθ. τμῆμα ΑΒ, μποροῦμε νά βροῦμε τόξο ἑνός κύκλου, τό ὁποῖο νά ἔχει χορδή ὁ ΑΒ καί κάθε σημεῖο του νά «βλέπει» τό τμῆμα ΑΒ ὑπό γνωστή γωνία φ.

Ἡ κατασκευή αὐτή γίνεται ὡς ἑξῆς:



α) Κατασκευάζουμε μέ κορυφή τό Β καί μέ πλευρά τήν ἡμιευθεία ΒΑ μιά γωνία $\hat{ABI} = \varphi$, ὅπως δείχνει τό σχῆμα.

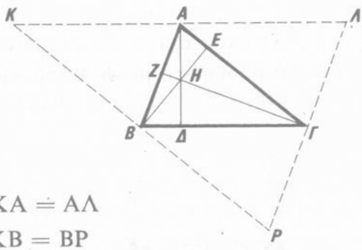
β) Φέρνουμε τήν κάθετο πρός τή ΒΙ στό σημεῖο Β καί τήν μεσοκάθετο ε τοῦ ΑΒ.

γ) Ὀνομάζουμε 0 τό σημεῖο τομῆς τῆς μεσοκαθέτου μέ τήν κάθετο στή ΒΙ καί γράφουμε τόν κυκλ(Ο,ΟΒ).

Ἐπειδή ὁ κύκλος αὐτός ἐφάπτεται τῆς ΒΙ στό Β (ἀφοῦ $OB \perp BI$), ἡ γωνία $\hat{ABI} = \varphi$ σχηματίζεται ἀπό χορδή καί ἐφαπτομένη του καί εἶναι ἴση μέ ὁποιαδήποτε ἐγγεγραμμένη γωνία $\hat{AEB}$. Συνεπῶς τό τόξο $\overset{\frown}{AEB}$ (αὐτό δηλαδή πού δέ βρίσκεται στό ἴδιο ἡμιεπίπεδο μέ τή ΒΙ) εἶναι τό ζητούμενο.

8.7. Τό ὀρθόκεντρο ἑνός τριγώνου.

Ἄς θεωρήσουμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί ἄς κατασκευάσουμε μέ τόν παραπάνω τρόπο τά ὕψη του ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ. Ἄς φέρουμε ἀκόμη ἀπό τίς κορυφές Α,Β,Γ τοῦ τριγώνου εὐθεῖες παράλληλες πρός τίς ἀπέναντι πλευρές του καί ἄς ὑποθέσουμε ὅτι οἱ παράλληλες αὐτές τέμνονται στά σημεῖα Κ, Λ, Ρ. Ἐπειδή τά τετράπλευρα ΚΑΓΒ, ΑΛΓΒ καί ΑΓΡΒ εἶναι παραλληλόγραμμα, ἔχουμε



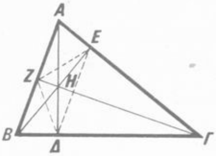
$$KA = B\Gamma,\ A\Lambda = B\Gamma \Rightarrow KA = A\Lambda$$
$$KB = A\Gamma,\ BP = A\Gamma \Rightarrow KB = BP$$
$$\Lambda\Gamma = AB,\ \Gamma P = AB \Rightarrow \Lambda\Gamma = \Gamma P,$$

δηλαδή τά Α,Β,Γ εἶναι μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΚΛΡ. Παρατηροῦμε τώρα ὅτι οἱ εὐθεῖες ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ εἶναι ἀντιστοίχως κάθετες στίς πλευρές ΚΛ,ΚΡ,ΛΡ τοῦ τριγώνου ΚΛΡ (ἀφοῦ εἶναι κάθετες στίς παράλληλές τους ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ) καί μάλιστα στά μέσα τους. Ἀφοῦ λοιπόν οἱ εὐθεῖες ΑΔ,ΕΒ,ΓΖ εἶναι μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΚΛΡ, θά διέρχονται ἀπό ἕνα σημεῖο καί ἔτσι:

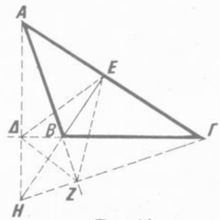
Οἱ εὐθεῖες τῶν ὑψῶν ἑνός τριγώνου διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

Τό σημεῖο αὐτό, πού εἶναι σημεῖο τομῆς τῶν εὐθειῶν, στίς ὁποῖες βρίσκονται τά ὕψη, λέγεται **ὀρθόκεντρο** τοῦ τριγώνου. Εἶναι φανερό ὅτι τό ὀρθόκεντρο τοῦ ΑΒΓ εἶναι τό περίκεντρο τοῦ τριγώνου ΚΛΡ.

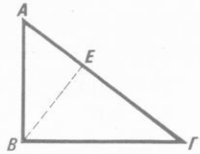
Σέ ὀξυγώνιο τρίγωνο τά ὕψη βρίσκονται σ' ἐσωτερικές ἡμιευθεῖες τῶν γωνιῶν του καί τό ὀρθόκεντρο Η εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο του (βλ. σχ.



Σχ. 10



Σχ. 11

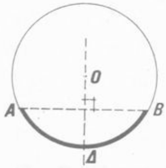


Σχ. 12

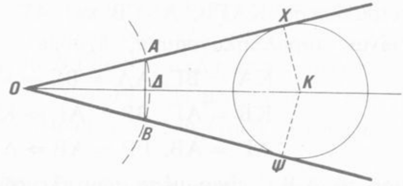
10.). Σέ ἀμβλυγώνιο τρίγωνο τά δύο ὕψη βρίσκονται σ' ἐξωτερικές ἡμιευθεῖες τῶν (ὀξειῶν) γωνιῶν του καί τό ὀρθόκεντρό του Η βρίσκεται ἔξω ἀπό τό τρίγωνο (βλ. σχ. 11), ἐνῶ σέ ὀρθογώνιο τρίγωνο τά δύο ὕψη συμπίπτουν μέ τίς κάθετες πλευρές του καί τό ὀρθόκεντρό του συμπίπτει μέ τήν κορυφή τῆς ὀρθῆς γωνίας (Βλ. σχ. 12). Στίς δύο πρῶτες περιπτώσεις τό τρίγωνο ΔΕΖ, πού ἔχει κορυφές τά ἴχνη τῶν ὑψῶν, λέγεται **ὀρθικό τρίγωνο** τοῦ ΑΒΓ.

8.8. Μέσο τόξου. Κατασκευή τῆς διχοτόμου γωνίας.

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι μᾶς δίνεται ἕνας κυκλ.(Ο,ρ) καί ἕνα τόξο του $\widehat{AB}$. Γιά νά βροῦμε τό μέσο Δ τοῦ τόξου ΑΒ, δέν ἔχουμε παρά νά φέρουμε πάλι



Σχ. 13



Σχ. 14

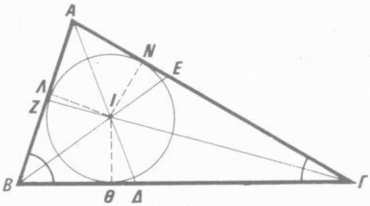
τή μεσοκάθετο τῆς χορδῆς ΑΒ (βλ. σχ. 13), ἀφοῦ ξέρουμε ὅτι ἡ μεσοκάθετος αὐτή θά περάσει τόσο ἀπό τό κέντρο τοῦ κύκλου ὅσο καί ἀπό τό μέσο τοῦ τόξου.

Σ' αὐτή τή γεωμετρική κατασκευή στηρίζεται καί ἡ κατασκευή τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας ΧÔΨ (βλ. σχ. 14). Πραγματικά,, ἄν κάνουμε τή γωνία $X\hat{O}\Psi$ ἐπίκεντρη σ' ἕναν κυκλ(Ο,ρ), καλέσουμε $\overset{\frown}{AB}$ τό τόξο, στό ὁποῖο βαίνει, καί Δ τό μέσο του, ἡ ἡμιευθεία ΟΔ θά εἶναι ἡ διχοτόμος πού ζητᾶμε. Ἔτσι βλέπουμε πάλι ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας μας βρίσκεται στή μεσοκάθετο τῆς χορδῆς ΑΒ.

Ὑπενθυμίζεται ὅτι ὅλα τά σημεῖα τῆς διχοτόμου ΟΔ ἰσαπέχουν ἀπό τίς πλευρές ΟΧ καί ΟΨ τῆς γωνίας. Ἄν κατασκευάσουμε λοιπόν κύκλο πού νά ἔχει κέντρο ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Κ τῆς διχοτόμου καί ἀκτίνα τήν ἀπόσταση τοῦ Κ ἀπό μιά πλευρά, ὁ κύκλος αὐτός θά ἐφάπτεται καί στίς δύο πλευρές τῆς γωνίας.

8.9. Τό ἔγκεντρο ἑνός τριγώνου.

Ἄς θεωρήσουμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί ἄς φέρουμε τίς διχοτόμους ΒΕ καί ΓΖ τῶν γωνιῶν του $\hat{B}$ καί $\hat{\Gamma}$. Οἱ δύο διχοτόμοι τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο Ι (γιατί εἶναι $E\hat{B}\Gamma + Z\hat{\Gamma}B = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2} < \hat{B}+\hat{\Gamma} < 180^o$) τό ὁποῖο ἰσαπέχει τόσο ἀπό τίς πλευρές τῆς γωνίας $\hat{B}$ ὅσο καί ἀπό τίς πλευρές τῆς γωνίας $\hat{\Gamma}$. Ἔτσι ἔχουμε τίς ἰσότητες ΙΘ = ΙΛ καί ΙΘ = ΙΝ, ἀπό τίς ὁποῖες βρίσκουμε ΙΛ = ΙΝ, δηλαδή βρίσκουμε ὅτι τό Ι ἰσαπέχει καί ἀπό τίς πλευρές τῆς γωνίας $\hat{A}$ καί συνεπῶς θά ἀνήκει καί στή διχοτόμο ΑΔ τῆς $\hat{A}$. Δείξαμε λοιπόν ὅτι :



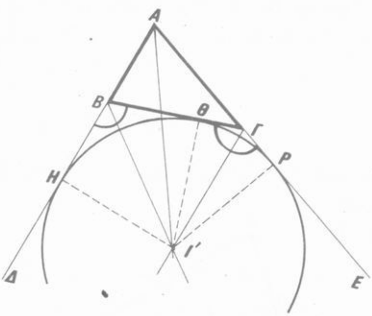
Οἱ δοχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνός τριγώνου διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

Τό σημεῖο Ι, ἀπό τό ὁποῖο διέρχονται οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, λέγεται **ἔγκεντρο** τοῦ τριγώνου αὐτοῦ. Ἐπειδή τό Ι ἰσαπέχει ἀπό τίς τρεῖς πλευρές τοῦ τριγώνου, ὁ κύκλος πού ἔχει κέντρο Ι καί ἀκτίνα τήν ἀπόστασή του ἀπό μία πλευρά ἐφάπτεται στίς τρεῖς πλευρές τοῦ τριγώνου καί λέγεται **ἐγγεγραμμένος κύκλος** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Τήν ἀκτίνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου θά τήν σημειώνουμε μέ ρ.

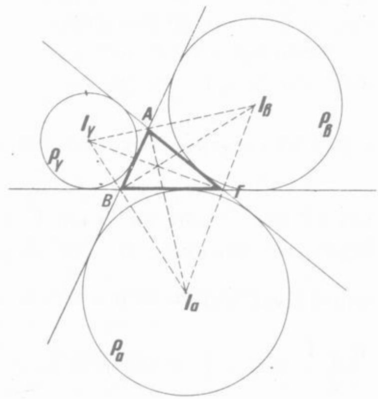
8.10. Τά παράκεντρα ἑνός τριγώνου.

Ἄς φέρουμε τώρα τίς διχοτόμους τῶν δύο ἐξωτερικῶν γωνιῶν $\Delta\hat{B}\Gamma$ καί $B\hat{\Gamma}E$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (βλ. σχ. 15). Οἱ δύο διχοτόμοι τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο Ι' (γιατί εἶναι $I'\hat{B}\Gamma + I'\hat{\Gamma}B = \frac{\hat{A}+\hat{\Gamma}}{2} + \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2} = \hat{A} + \frac{\hat{B}}{2} +$

$\frac{\hat{\Gamma}}{2} < 180^{o}$) τό ὁποῖο ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές τῶν γωνιῶν αὐτῶν. Ἔτσι ἔχουμε Ι′Η = Ι′Θ καί Ι′Θ = Ι′Ρ καί ἀπό τίς ἰσότητες αὐτές βρίσκουμε Ι′Η = Ι′Ρ, δηλαδή βρίσκουμε ὅτι τό Ι′ ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές τῆς γωνίας Α καί συνεπῶς θά ἀνήκει στή διχοτόμο της. Δείξαμε ὅτι λοιπόν:



Σχ. 15



Σχ. 16

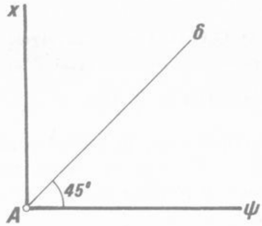
Σ' ἕνα τρίγωνο ἡ εὐθεία, πού διχοτομεῖ μία γωνία του, καί οἱ εὐθεῖες, πού διχοτομοῦν ἐξωτερικά τίς δύο ἄλλες γωνίες του, διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

Τό σημεῖο Ι′, στό ὁποῖο τέμνονται ἡ εὐθεία πού διχοτομεῖ τήν $\hat{A}$ καί οἱ εὐθεῖες πού διχοτομοῦν τίς ἐξωτερικές γωνίες του $\hat{B}$ καί $\hat{\Gamma}$, λέγεται **παράκεντρο** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἐπειδή τό παράκεντρο Ι′ ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές τῶν γωνιῶν $\hat{A}$, $\Delta\hat{B}\Gamma$, $B\hat{\Gamma}E$, ὁ κύκλος πού γράφεται μέ κέντρο τό Ι′ καί ἀκτίνα τήν ἀπόστασή του Ι′Θ ἀπό τή ΒΓ θά ἐφάπτεται στήν πλευρά ΒΓ καί στίς προεκτάσεις τῶν ΑΒ καί ΑΓ. Ὁ κύκλος αὐτός λέγεται **παρεγγεγραμμένος κύκλος** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Εἶναι φανερό ὅτι ἔχουμε τρεῖς παρεγγεγραμμένους κύκλους στό τρίγωνο ΑΒΓ, πού καθένας τους ἐφάπτεται σέ μιά πλευρά τοῦ τριγώνου καί στίς προεκτάσεις τῶν δύο ἄλλων (βλ. σχ. 16). Τά κέντρα τους (πού εἶναι παράκεντρα τοῦ τριγώνου) θά σημειώνονται μέ I_α, I_β, I_γ καί οἱ ἀκτίνες τους ἀντίστοιχα μέ ρ_α, ρ_β, ρ_γ.

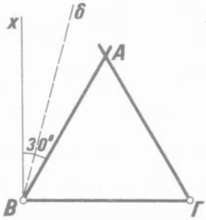
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 14-21

8.11. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



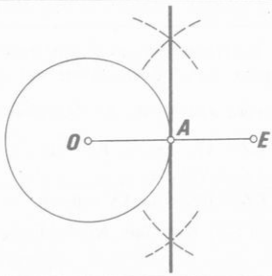
1. **Νά κατασκευασθεῖ γωνία ἴση μέ $45^o, 60^o, 30^o, 75^o$.**

Λύση : α) Γιά τή γωνία τῶν 45^o κατασκευάζουμε γωνία $X\hat{A}\Psi = 90^o$ καί τή διχοτομοῦμε. Τότε ἡ $\delta\hat{A}\Psi = 45^o$.



β) Γιά τίς ἄλλες γωνίες ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: Σχηματίζουμε ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο μέ πλευρά ἕνα ὁποιοδήποτε τμῆμα ΒΓ. Τότε : $A\hat{B}\Gamma = 60^o$. Στό Β ὑψώνουμε τήν κάθετη ΧΒ στή ΒΓ. Τότε : $X\hat{B}A = 30^o$. Τέλος ἄν φέρουμε τή διχοτόμο τῆς $X\hat{B}A$, τήν Βδ, τότε : $\delta\hat{B}\Gamma = 75^o$.

2. **Νά κατασκευαστεῖ ἡ ἐφαπτομένη ἑνός κύκλου (Ο,ρ) σ' ἕνα σημεῖο του Α.**

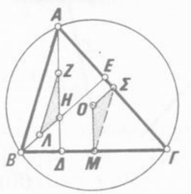


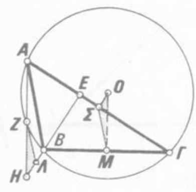
Λύση : Στήν προέκταση τῆς ἀκτίνας ΟΑ σημειώνουμε τό σημεῖο Ε, ὥστε νά εἶναι

$$AE = OA.$$

Στή συνέχεια φέρνουμε τή μεσοκάθετο τοῦ ΟΕ πού εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, γιατί εἶναι κάθετη στήν ἀκτίνα στό ἄκρο της Α.

3 **Τό περίκεντρο Ο ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ἀπέχει ἀπό κάθε πλευρά του τό μισό τῆς ἀποστάσεως τοῦ ὀρθοκέντρου Η ἀπό τήν ἀπέναντι κορυφή.**





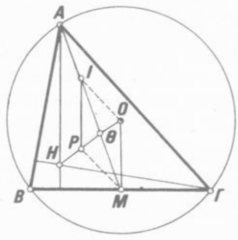
Λύση : Ἄν ΟΜ, ΟΣ εἶναι οἱ ἀποστάσεις τοῦ Ο ἀπό τίς πλευρές ΒΓ, ΑΓ καί Ζ,Λ εἶναι τά μέσα τῶν ΗΑ, ΗΒ, θά δείξουμε ὅτι ΟΜ = ΗΖ καί ΟΣ = ΗΛ.

Ἀπό τά τρίγωνα ΑΗΒ καί ΑΒΓ ἔχουμε $Z\Lambda \,//\!= \dfrac{AB}{2}$, $\Sigma M \,//\!= \dfrac{AB}{2} \Rightarrow Z\Lambda //\!= \Sigma M$.

Τά τρίγωνα ὅμως ΖΗΛ καί ΣΟΜ ἔχουν καί τίς ἄλλες πλευρές τους παράλληλες (γιατί $OM \perp B\Gamma$, $A\Delta \perp B\Gamma \Rightarrow OM \,//\, A\Delta$ καί $O\Sigma \perp A\Gamma$, $BE \perp A\Gamma \Rightarrow O\Sigma \,//\, BE$) καί συνεπῶς $O\hat{\Sigma}M = H\hat{\Lambda}Z$ καί $O\hat{M}\Sigma = H\hat{Z}\Lambda$. Ὥστε τριγΟΜΣ = τριγΗΖΛ καί ἄρα ΟΜ = ΗΖ = ΑΗ/2 καί ΟΣ = ΗΛ = ΗΒ/2.

4. Ἄν Ο,Θ,Η εἶναι ἀντιστοίχως τό περίκεντρο, τό κέντρο βάρους καί τό ὀρθόκεντρο ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, τό κέντρο βάρους Θ εἶναι σημεῖο τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΟΗ τέτοιο, ὥστε $H\Theta = \frac{2}{3} HO$.

Λύση : Θεωροῦμε τά δύο σημεῖα Ο καί Η καί τό μέσο Μ τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Ἄν καλέσουμε Θ τό σημεῖο τομῆς τῶν ΑΜ καί ΟΗ καί Ι, Ρ τά μέσα τῶν ΘΑ καί ΘΗ, θά ἔχουμε (βλ. ἄσκ. 3)



$$OM \,//=\, \frac{AH}{2}, \quad IP \,//=\, \frac{AH}{2} \Rightarrow OM //= IP.$$

Ὥστε τό ΙΡΜΟ εἶναι παραλληλόγραμμο καί συνεπῶς $\Theta M = \Theta I = IA \Rightarrow A\Theta = \frac{2}{3} AM \Rightarrow \Theta =$ κέντρο βάρους ΑΒΓ καί $O\Theta = \Theta P = PH \Rightarrow H\Theta = \frac{2}{3} HO$.

Ἡ εὐθεία στήν ὁποία ἀνήκουν τά σημεῖα Ο, Θ, Η λέγεται «εὐθεία τοῦ Euler».

---

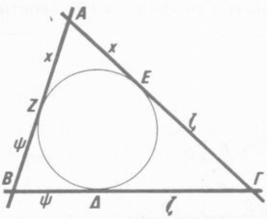
5. Ὁ ἐγγεγραμμένος κυκλ(Ι,ρ) τριγώνου ΑΒΓ ἐφάπτεται στίς πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ στά σημεῖα Δ,Ε,Ζ ἀντιστοίχως καί ὁ παρεγγεγραμμένος κυκλ(I_α, ρ_α) ἐφάπτεται στίς ἴδιες πλευρές στά Δ΄, Ε΄, Ζ΄. Ἄν εἶναι $\tau = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$, νά δείξετε ὅτι:

α) ΑΖ=ΑΕ =τ—α, ΒΔ=ΒΖ=τ—β, ΓΔ=ΓΕ=τ—γ.

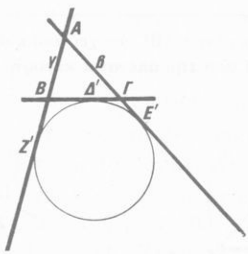
β) ΑΖ΄=ΑΕ΄=τ

γ) ΖΖ΄=ΕΕ΄=α, ΔΔ΄=β—γ.

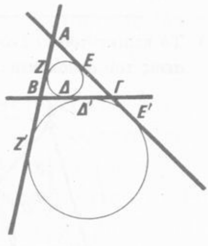
Λύση : α) Καλοῦμε ΑΖ=ΑΕ=χ, ΒΔ=ΒΖ=ψ, ΓΔ=ΓΕ=ζ. Τότε ἔχουμε (βλ. σχ. Ι).



(Ι)



(ΙΙ)



(ΙΙΙ)

(Ι) $\psi + \zeta = \alpha, \; \zeta + \chi = \beta, \; \chi + \psi = \gamma.$

Προσθέτοντας αὐτές βρίσκουμε $2\chi + 2\psi + 2\zeta = \alpha + \beta + \gamma = 2\tau \Rightarrow \chi + \psi + \zeta = \tau$. Ἄν τώρα ἀφαιρέσουμε ἀπό αὐτή κάθε μιά ἀπό τίς (Ι), ἔχουμε $\chi = \tau - \alpha$, $\psi = \tau - \beta$, $\zeta = \tau - \gamma$.

β) $AZ' + AE' = [AB + BZ'] + [A\Gamma + \Gamma E'] = [\gamma + B\Delta'] + [\beta + \Gamma\Delta'] = \alpha + \beta + \gamma = 2\tau$. Ἐπειδή ὅμως εἶναι $AZ' = AE'$, θά ἔχουμε $2AZ' = 2AE' = 2\tau \Rightarrow AZ' = AE' = \tau$.

γ) $ZZ' = AZ' - AZ = \tau - [\tau - \alpha] = \alpha$

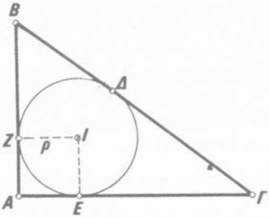
$\Delta\Delta' = B\Delta' - B\Delta = BZ' - [\tau - \beta] = [AZ' - AB] - [\tau - \beta] = [\tau - \gamma] - [\tau - \beta] = \beta - \gamma.$

---

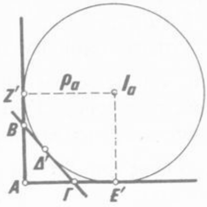
6. **Σέ κάθε ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A}=90^0$) γιά τίς ἀκτίνες τοῦ ἐγγεγραμμένου καί τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων ἰσχύουν οἱ ἰσότητες :**

$2\rho=\beta+\gamma-\alpha$, $2\rho_\alpha=\alpha+\beta+\gamma$, $2\rho_\beta=\alpha+\beta-\gamma$, $2\rho_\gamma=\alpha-\beta+\gamma$.

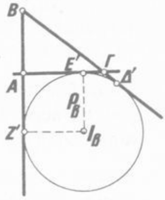
Λύση : α) Ἄν ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος ἐφάπτεται στίς πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ στά ση-



(I)



(II)



(III)

μεῖα Δ,Ε,Ζ (βλ. σχ. Ι), τό σχῆμα ΑΖΙΕ εἶναι τετράγωνο (ἀφοῦ τρεῖς γωνίες του εἶναι ὀρθές καί δύο διαδοχικές πλευρές του ἴσες) καί συνεπῶς ΑΕ=ΑΖ=ρ. Ἔχουμε λοιπόν

$$\left.\begin{aligned}\rho &= AE = A\Gamma - E\Gamma = \beta - \Gamma\Delta\\ \rho &= AB - BZ = \gamma - B\Delta\end{aligned}\right\} \Rightarrow 2\rho = \beta+\gamma-(\Gamma\Delta+B\Delta)=\beta+\gamma-\alpha.$$

β) Ἄν ὁ κύκλ(I_α,ρ_α) ἐφάπτεται στίς πλευρές ΒΓ,ΓΑ,ΑΒ στά σημεῖα Δ΄, Ε΄, Ζ΄ (βλ. σχ. ΙΙ), τό σχῆμα $AZ'I_\alpha E'$ εἶναι πάλι τετράγωνο καί ἔχουμε

$$\left.\begin{aligned}\rho_\alpha &= AE' = A\Gamma + \Gamma E' = \beta + \Gamma\Delta'\\ \rho_\alpha &= AZ' = AB + BZ' = \gamma + B\Delta'\end{aligned}\right\} \Rightarrow 2\rho_\alpha = \beta+\gamma+(\Gamma\Delta'+B\Delta')=\beta+\gamma+\alpha$$

γ) Ἄν ὁ κύκλ(I_β,ρ_β) ἐφάπτεται στίς πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΒΑ στά Δ΄, Ε΄, Ζ΄ (βλ. σχ. ΙΙΙ), τό σχῆμα $AZ'I_\beta E'$ εἶναι πάλι τετράγωνο καί ἔχουμε

$$\left.\begin{aligned}\rho_\beta &= AE' = A\Gamma - E'\Gamma = \beta-\Gamma\Delta'\\ \rho_\beta &= AZ' = BZ' - BA = B\Delta' - \gamma\end{aligned}\right\} \Rightarrow 2\rho_\beta = \beta-\gamma+[B\Delta'-\Gamma\Delta']=\beta-\gamma+\alpha.$$

Ὁμοίως δείχνουμε καί τήν ἰσότητα $2\rho_\gamma=\alpha-\beta+\gamma$.

8.12 ΑΣΚΗΣΕΙΣ *

1. Πάρτε δύο εὐθύγραμμα τμήματα κ καί λ καί κατασκευάστε μέ αὐτά : α) Ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ πού νά ἔχει βάση ΒΓ = κ καί ὕψος ΑΔ = λ, β) Ἰσοσκελές τρίγωνο πού νά ἔχει βάση ΒΓ = κ καί τίς ἄλλες πλευρές του ἴσες μέ λ, γ) Ἰσόπλευρο τρίγωνο πού νά ἔχει πλευρές ἴσες μέ κ.
2. Νά κατασκευάσετε ἰσοσκελές τραπέζιο πού νά ἔχει τίς βάσεις του πάνω σέ δύο δεδομένες παράλληλες εὐθεῖες καί ἴσες μέ δύο δεδομένα τμήματα κ καί λ.
3. Νά κατασκευάσετε (μέ κανόνα καί διαβήτη) τήν ἐφαπτομένη ἑνός κύκλ(Ο,ρ) ἀπό ἕνα σημεῖο Α ἐξωτερικό τοῦ κύκλου.
4. Νά κατασκευάσετε χορδή ἑνός κυκλ(Ο,ρ) ἡ ὁποία νά ἔχει δεδομένο σημεῖο Δ γιά μέσο της.
5. Θεωροῦμε τρίγωνο ΑΒΓ καί τίς ἐφαπτόμενες τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του στίς κορυφές του. Ἄν οἱ ἐφαπτόμενες αὐτές τέμνονται στά Κ,Λ,Μ, νά δείξετε ὅτι κάθε

γωνία τοῦ τριγώνου ΚΛΜ εἶναι παραπληρωματική τοῦ διπλάσιου μιᾶς γωνίας τοῦ ΑΒΓ.

6. Νά δείξετε ὅτι ἴσα τρίγωνα ἔχουν ἴσους περιγεγραμμένους κύκλους.

7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ καί φέρνουμε ἀπό τίς κορυφές Β καί Γ εὐθεῖες κάθετες στή διάμετρο ΑΕ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του. Ἄν οἱ κάθετες αὐτές τέμνουν τόν περιγεγραμμένο κύκλο στά Β′ καί Γ′, νά δείξετε ὅτι ἡ χορδή Β′Γ′ εἶναι ἴση μέ τήν πλευρά ΒΓ καί διέρχεται ἀπό τό σημεῖο τομῆς τῶν ΒΓ καί ΑΕ.

8. Θεωροῦμε τρίγωνο ΑΒΓ καί τίς χορδές ΒΒ′ καί ΓΓ′ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του, τίς παράλληλες πρός τίς πλευρές ΑΓ καί ΒΑ. Νά δείξετε ὅτι ἡ χορδή Β′Γ′ εἶναι παράλληλη πρός τήν ἐφαπτομένη τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου στό Α.

9. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, τό ὕψος του ΑΔ καί ἡ διάμετρος ΑΕ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του. Νά δείξετε ὅτι:

α) Οἱ γωνίες $\mathrm{E}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma$ καί $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta$ εἶναι ἴσες.

β) Ἡ γωνία $\Delta\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$ εἶναι ἴση μέ τή διαφορά τῶν γωνιῶν $\widehat{\mathrm{B}}$ καί $\widehat{\Gamma}$.

γ) Ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{\mathrm{A}}$ διχοτομεῖ καί τή γωνία $\Delta\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$.

10. Ἄν σ' ἕνα τρίγωνο δύο διάμεσοι εἶναι ἴσες, τό τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές.

11. Θεωροῦμε τρίγωνο ΑΒΓ καί τίς διαμέσους του ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ πού τέμνονται στό Θ. Ἄν Κ,Λ,Μ εἶναι τά μέσα ΘΑ, ΘΒ, ΘΓ, νά δείξετε ὅτι τό τρίγωνο ΚΛΜ εἶναι ἴσο μέ τό ΔΕΖ.

12. Στίς προεκτάσεις τῶν διαμέσων ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τμήματα ΔΚ = ΔΘ, ΕΛ = ΕΘ, ΖΜ = ΖΘ, ὅπου Θ εἶναι τό κέντρο βάρους του. Νά δείξετε ὅτι τό τρίγωνο ΚΛΜ εἶναι ἴσο μέ τό ΑΒΓ.

13. Νά δείξετε ὅτι, ἄν δύο τρίγωνα ἔχουν ἴσες μία πρός μία τίς διαμέσους τους, εἶναι ἴσα.

14. Ἄν ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ἐφάπτεται σέ μιά πλευρά του στό μέσο της, νά δείξετε ὅτι τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

15. Θεωροῦμε τρίγωνο ΑΒΓ ἐγγεγραμμένο σέ κυκλ(Ο,R) καί καλοῦμε Α′, Β′, Γ′ τά μέσα τῶν τόξων $\widehat{\mathrm{B}\Gamma}$, $\widehat{\Gamma\mathrm{A}}$, $\widehat{\mathrm{AB}}$ τοῦ κυκλ(Ο,R). Νά δείξετε ὅτι:

α) Οἱ εὐθεῖες ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ διέρχονται ἀπό ἕνα σημεῖο Ι.

β) Ἡ εὐθεία ΑΑ′ εἶναι κάθετη στή Β′Γ′.

γ) Τό Ι εἶναι ὀρθόκεντρο τοῦ Α′Β′Γ′.

16. Ὁ ἐγγεγραμμένος κυκλ(Ι,ρ) καί ὁ παρεγγεγραμμένος κυκλ(I_α, ρ_α) ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ἐφάπτονται σέ κάθε πλευρά του σέ σημεῖα συμμετρικά ὡς πρός τό μέσο τῆς πλευρᾶς.

17. Τό ἔγκεντρο Ι ἑνός τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ὀρθόκεντρο τοῦ τριγώνου $\mathrm{I}_\alpha \mathrm{I}_\beta \mathrm{I}_\gamma$, πού ἔχει κορυφές τά παράκεντρα τοῦ ΑΒΓ.

18. Ἀπό τό κέντρο βάρους Θ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε εὐθεία ε πού ἔχει πρός τό ἴδιο μέρος της τίς κορυφές Β καί Γ. Ἄν ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ εἶναι οἱ ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ἀπό τήν ε, νά δείξετε ὅτι ΒΒ′ + ΓΓ′ = ΑΑ′.

19. Ἄν Η εἶναι τό ὀρθόκεντρο ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, νά δείξετε ὅτι:

α) Ὅταν τό ΑΒΓ εἶναι ὀξυγώνιο, ἔχουμε $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{H}}\Gamma = 180^\circ - \widehat{\mathrm{A}}$.

β) Ὅταν τό ΑΒΓ εἶναι ἀμβλυγώνιο μέ $\widehat{\mathrm{A}} > 90^\circ$, ἔχουμε $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{H}}\Gamma = 180^\circ - \widehat{\mathrm{A}}$.

γ) Ὅταν τό ΑΒΓ εἶναι ἀμβλυγώνιο μέ $\widehat{\mathrm{B}} > 90^\circ$ ἤ $\widehat{\Gamma} > 90^\circ$, ἔχουμε $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{H}}\Gamma = \widehat{\mathrm{A}}$.

20. Θεωροῦμε τρίγωνο ΑΒΓ ἐγγεγραμμένο σέ κυκλ(Ο,R) καί τά ὕψη του ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ, τά ὁποῖα τέμνονται στό Η. Ἄν οἱ εὐθεῖες ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τέμνουν τόν κυκλ(Ο,R) στά σημεῖα Κ,Λ,Ρ ἀντιστοίχως, νά δείξετε ὅτι:

α) Τά Κ,Λ,Ρ εἶναι συμμετρικά τοῦ Η ὡς πρός τίς πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ.

β) Οἱ κορυφές Α,Β,Γ τοῦ τριγώνου εἶναι μέσα τῶν τόξων $\widehat{ΛΡ}$, $\widehat{ΡΚ}$, $\widehat{ΚΛ}$.

γ) Τά τρίγωνα ΚΒΓ, ΛΓΑ, ΡΑΒ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα μέ τά ΗΒΓ, ΗΓΑ, ΗΑΒ.

δ) Οἱ περιγεγραμμένοι κύκλοι στά τρίγωνα ΗΒΓ, ΗΓΑ, ΗΑΒ εἶναι ἴσοι μέ τόν κυκλ. (Ο,R) καί συνεπῶς ἴσοι καί μεταξύ τους.

21. Ἄν I, $I_α$, $I_β$, $I_γ$ εἶναι τό ἔγκεντρο καί τά παράκεντρα ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, νά δειχθεῖ ὅτι:

$$B\widehat{I}Γ = 90^o + \frac{\widehat{A}}{2},\ B\widehat{I_α}Γ = 90^o - \frac{\widehat{A}}{2},\ B\widehat{I_β}Γ = B\widehat{I_γ}Γ = \frac{\widehat{A}}{2}.$$

8.13 ΑΣΚΗΣΕΙΣ **

22. Δίνεται ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ ἐγγεγραμμένο σέ κυκλ(Ο,R) καί ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τοῦ τόξου $\widehat{ΒΓ}$. Νά δείξετε ὅτι ΜΑ = ΜΒ + ΜΓ.

23. Θεωροῦμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί τή διάμετρο ΡΜ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του τήν κάθετη στήν πλευρά ΒΓ (Ρ εἶναι τό μέσο τοῦ τόξου $\widehat{ΒΑΓ}$), Ἄν Ρ′ καί Μ′ εἶναι οἱ προβολές τῶν σημείων Ρ καί Μ στήν πλευρά ΑΒ, νά δείξετε ὅτι:

α) ΑΡ′ = ΒΜ′ β) ΑΜ′ — ΑΡ′ = ΑΒ γ) ΑΜ′ + ΑΡ′ = ΑΓ.

24. Θεωροῦμε τρίγωνο ΑΒΓ καί τά μέσα Δ,Ε,Ζ τῶν πλευρῶν του ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Στήν προέκταση τῆς ΖΕ πρός τό μέρος τοῦ Ε παίρνουμε τμῆμα ΕΚ = ΕΖ. Νά δείξετε ὅτι:

α) Τό τρίγωνο ΑΔΚ ἔχει πλευρές ἴσες μέ τίς διαμέσους τοῦ ΑΒΓ.

β) Τό σημεῖο Ε εἶναι κέντρο βάρους τοῦ ΑΔΚ.

γ) Οἱ διάμεσοι τοῦ ΑΔΚ εἶναι ἴσες μέ τά 3/4 τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓ.

25. Οἱ κορυφές ἑνός τριγώνου ΑΒΓ βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος μιᾶς εὐθείας ε. Ἄν Θ εἶναι τό κέντρο βάρους τοῦ ΑΒΓ καί ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′, ΘΘ′ οἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων Α,Β,Γ,Θ ἀπό τήν ε, νά δείξετε ὅτι ΑΑ′ + ΒΒ′ + ΓΓ′ = 3ΘΘ′

26. Θεωροῦμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί τή διάμετρο ΑΑ′ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του. Ἄν Η εἶναι τό ὀρθόκεντρο τοῦ τριγώνου καί Μ τό μέσο τῆς πλευρᾶς ΒΓ, νά δείξετε ὅτι:

α) Τά σημεῖα Η,Μ,Α εἶναι συνευθειακά.

β) Ἡ εὐθεία πού ἑνώνει τό Α′ μέ τό μέσο Λ τοῦ τμήματος ΗΑ διέρχεται ἀπό τό κέντρο βάρους τοῦ ΑΒΓ.

27. Θεωροῦμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, τίς διαμέτρους ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του καί τά μέσα Λ,Μ,Ρ τῶν ἀποστάσεων τοῦ ὀρθοκέντρου Η ἀπό τίς κορυφές Α,Β,Γ. Νά δειχθεῖ ὅτι οἱ εὐθεῖες Α′Λ, Β′Μ, Γ′Ρ διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

28. Ἄν Η εἶναι τό ὀρθόκεντρο ἑνός τριγώνου, Λ εἶναι τό μέσο τοῦ τμήματος ΗΑ καί Μ εἶναι τό μέσο τῆς πλευρᾶς ΒΓ, νά δειχθεῖ ὅτι $H\widehat{Λ}M = |\widehat{B} - \widehat{Γ}|$.

29. Δίνεται χορδή ΔΓ ἑνός κυκλ(Ο,ρ) καί ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Α τοῦ τόξου $\widehat{ΓΔ}$. Ἀπό τό Α φέρνουμε τμῆμα ΑΒ //= ΔΓ τέτοιο, ὥστε τό ΑΒΓΔ νά εἶναι παραλληλόγραμμο. Ἄν Δ′ εἶναι τό διαμετρικό τοῦ σημείου Δ, νά δείξετε ὅτι ΒΔ′ ⊥ ΑΓ.

30. Θεωροῦμε κυκλ(Ο,ρ), τίς ἐφαπτόμενές του ΑΔ καί ΑΕ ἀπό ἕνα σημεῖο Α καί ἕνα «κινητό» σημεῖο Μ τοῦ τόξου $\widehat{\Delta E}$. Ἄν ἡ ἐφαπτομένη στό Μ τέμνει τά τμήματα ΑΔ καί ΑΕ στά σημεῖα Β καί Γ, νά δείξετε ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι σταθερή.

31. Δίνεται ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ μέ κάθετες διαγωνίους, οἱ ὁποῖες τέμνονται στό Ε. Ἄν ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 εἶναι οἱ ἀκτίνες τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων στά τρίγωνα ΑΕΒ, ΒΕΓ, ΓΕΔ, ΔΕΑ, νά δείξετε ὅτι

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 = ΑΓ + ΒΔ - \frac{1}{2}(ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ).$$

8.14 ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 8

1. Μέ τόν ὅρο «γεωμετρική κατασκευή» ἐννοοῦμε τήν κατασκευή ἑνός γεωμετρικοῦ σχήματος μόνο μέ τόν κανόνα καί τό διαβήτη. Οἱ βασικές γεωμετρικές κατασκευές κατά τή σειρά πού τίς συναντήσαμε εἶναι:
   — Κατασκευή μιᾶς γωνίας πού εἶναι ἴση μέ δεδομένη (βλ. § 3.2).
   — Κατασκευή εὐθειας πού διέρχεται ἀπό σημεῖο Α καί εἶναι παράλληλη πρός δεδομένη εὐθεία (βλ. § 5.8).
   — Διαίρεση δεδομένου τμήματος σέ ν ἴσα μέρη (βλ. § 6.4).
   — Κατασκευή τῆς μεσοκαθέτου ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος (στήν ὁποία ἀνάγεται καί ἡ εὕρεση τοῦ μέσου ἑνός τμήματος).
   — Κατασκευή εὐθείας πού διέρχεται ἀπό σημεῖο καί εἶναι κάθετη σέ δεδομένη εὐθεία.
   — Εὕρεση τοῦ μέσου ἑνός τόξου (στήν ὁποία ἀνάγεται ἡ κατασκευή τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας).

2. Σέ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἴδαμε ὅτι **διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο**:
   — Οἱ μεσοκάθετοι τῶν τριῶν πλευρῶν του. Τό κοινό σημεῖο τους Ο λέγεται **περίκεντρο** τοῦ ΑΒΓ καί ὁ κυκλ(Ο,ΟΑ) λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος** τοῦ ΑΒΓ.
   — Οἱ διάμεσοι τῶν τριῶν πλευρῶν του. Τό κοινό σημεῖο τους Θ λέγεται **βαρύκεντρο** τοῦ ΑΒΓ καί ἔχει τήν ἰδιότητα νά ἀπέχει ἀπό κάθε κορυφή τοῦ τριγώνου τά 2/3 τῆς ἀντίστοιχης διαμέσου.
   Τά τρία ὕψη του. Τό κοινό σημεῖο τους Η λέγεται **ὀρθόκεντρο** τοῦ ΑΒΓ καί σέ ὀξυγώνιο τρίγωνο εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο του.
   — Οἱ διχοτόμοι τῶν τριῶν γωνιῶν του. Τό κοινό σημεῖο τους Ι λέγεται **ἔγκεντρο** τοῦ ΑΒΓ καί ὁ κύκλος πού ἔχει κέντρο τό Ι καί ἀκτίνα τήν ἀπόστασή του ἀπό μιά πλευρά λέγεται **ἐγγεγραμμένος κύκλος** τοῦ ΑΒΓ. Ὁ κύκλος αὐτός ἐφάπτεται σέ ὅλες τίς πλευρές τοῦ τριγώνου.
   — Ἡ εὐθεία πού διχοτομεῖ μία γωνία του καί οἱ δύο εὐθεῖες πού διχοτομοῦν ἐξωτερικά τίς δύο ἄλλες γωνίες του. Τό σημεῖο I_a ἀπό τό ὁποῖο διέρχεται ἡ διχοτόμος τῆς $\widehat{A}$ καί οἱ εὐθεῖες πού διχοτομοῦν ἐξωτερικά τίς $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$ λέγεται **παράκεντρο** τοῦ ΑΒΓ καί ὁ κύκλος πού ἔχει κέντρο τό Ια καί ἀκτίνα τήν ἀπόστασή του ἀπό τή ΒΓ λέγεται **παρεγγεγραμμένος κύκλος.** Κάθε παρεγγεγραμμένος κύκλος ἐφάπτεται στή μία πλευρά τοῦ τριγώνου καί στίς προεκτάσεις τῶν δύο ἄλλων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9ο

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

9.1. Ἡ ἔννοια τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου.

Κάθε σύνολο μπορεῖ νά ὁρισθεῖ, ὅπως ξέρουμε, ἤ μέ ἀναγραφή τῶν στοιχείων του ἤ μέ περιγραφή τῶν στοιχείων του. Ἕνα σημειοσύνολο G θά ὁρίζεται μέ περιγραφή τῶν στοιχείων του, ὅταν δίνεται μιά ἰδιότητα I τῶν σημείων του καί τότε γράφεται

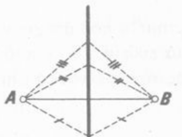
$$G = \{M : I(M)\}$$

ὅπου M εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο του καί I(M) εἶναι μιά πρόταση πού δηλώνει ὅτι τό M ἔχει τήν ἰδιότητα I. Ἔτσι π.χ. τό σημειοσύνολο

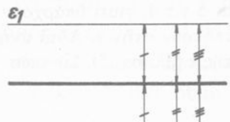
$$G = \{M : \underbrace{\text{Τό M ἰσαπέχει ἀπό τά σημεῖα A καί B}}_{I(M)}\}$$

παριστάνει τή μεσοκάθετο τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος AB.

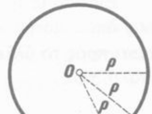
Κάθε σημειοσύνολο G πού ὁρίζεται ἀπό μιά ἰδιότητα I τῶν στοιχείων του θά λέγεται **«γεωμετρικός τόπος»**[1] τῶν σημείων πού ἔχουν τήν ἰδιότητα I καί θά σημειώνεται σύντομα γ.τ/I. Ἀπό τόν ὁρισμό αὐτό συμπεραίνουμε ἀμέσως ὅτι:



Σχ. 1



Σχ. 2



Σχ. 3

Ἡ μεσοκάθετος ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος AB εἶναι ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων πού ἰσαπέχουν ἀπό δύο σημεῖα A καί B (βλ. σχ. 1).

1. Οἱ γεωμετρικοί τόποι ἀναπτύχθηκαν πρῶτα στήν Ἀκαδημία τοῦ Πλάτωνα (430-347 π.Χ.) σέ συνδυασμό μέ τίς ἀναλυτικές καί συνθετικές μεθόδους. Ἀργότερα μέ τούς γεωμ. τόπους ἀσχολήθηκε ὁ **Ἀπολλώνιος** ὁ Περγαῖος ὁ ὁποῖος περί τό 247 π.Χ. ἔγραψε καί ἕνα βιβλίο μέ τίτλο «Ἐπίπεδος τόπος» πού δυστυχῶς δέ διασώθηκε.

- Ἡ μεσοπαράλληλος δύο παράλληλων εὐθειῶν ε_1 καί ε_2 εἶναι ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων πού ἰσαπέχουν ἀπό τίς ε_1 καί ε_2 (βλ. σχ. 2).
- Ὁ κύκλος μέ κέντρο Ο καί ἀκτίνα ρ εἶναι ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων πού ἀπέχουν ἀπό τό Ο ἀπόσταση ἴση μέ ρ (βλ. σχ. 3).

9.2. Ἡ χαρακτηριστική ἰδιότητα.

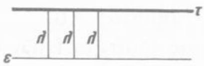
Ἡ ἔννοια τοῦ γεωμ. τόπου συνδέεται, ὅπως εἴπαμε, μέ μιά ὁρισμένη ἰδιότητα Ι. Ἕνα σημειοσύνολο G θά εἶναι ὁ γ.τ. τῶν σημείων πού ἔχουν μιά ἰδιότητα Ι, ὅταν ὅλα τά σημεῖα του καί μόνο αὐτά ἔχουν τήν ἰδιότητα Ι, δηλαδή ὅταν

I. Κάθε σημεῖο πού ἔχει τήν ἰδιότητα Ι ἀνήκει στό G.

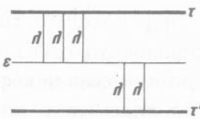
II. Κάθε σημεῖο πού ἀνήκει στό G ἔχει τήν ἰδιότητα Ι.

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι, ἄν ὅλα τά σημεῖα ἑνός σημειοσύνολου G* ἔχουν μιά ἰδιότητα Ι, αὐτό δέ σημαίνει ὅτι τό G* εἶναι ἀναγκαστικά ὁ γ. τ./Ι, γιατί μπορεῖ νά ὑπάρχουν καί ἄλλα σημεῖα πού ἔχουν τήν ἰδιότητα Ι καί δέν ἀνήκουν στό G* (καί τότε τό G* εἶναι ὑποσύνολο τοῦ γ.τ./Ι).

Πρδ. 1. Ἄν θεωρήσουμε μιά εὐθεία ε καί μία ἄλλη εὐθεία τ παράλληλη πρός τήν ε σέ ἀπόσταση λ (βλ. σχ. 4), ὅλα τά σημεῖα τῆς τ ἔχουν τήν ἰδιότητα Ι καί ἀπέχουν ἀπό τήν ε ἀπόσταση λ.



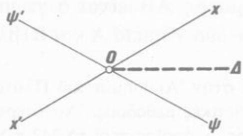
Σχ. 4



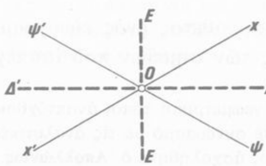
Σχ. 5

Ἐντούτοις ἡ τ δέν εἶναι ὁ γ.τ./Ι, γιατί ὑπάρχουν καί ἄλλα σημεῖα πού ἀπέχουν ἀπό τήν ε ἀπόσταση λ καί δέν ἀνήκουν στήν τ. Αὐτά ἀνήκουν σέ μιά εὐθεία τ′ / / ε πού βρίσκεται πρός τό ἄλλο μέρος τῆς ε (βλ. σχ. 5). Συνεπῶς γεωμετρικός τόπος εἶναι τό σημειοσύνολο $\tau \cup \tau'$.

Πρδ. 2. Ἄν θεωρήσουμε δύο εὐθεῖες χ′χ καί ψ′ψ πού τέμνονται στό Ο καί τή διχοτόμο ΟΔ τῆς γωνίας $\chi\hat{O}\psi$ (βλ. σχ. 6), ὅλα τά σημεῖα τῆς ΟΔ ἔχουν τήν ἰδιότητα Ι νά ἰσαπέχουν ἀπό τίς χ χ καί ψ′ψ.



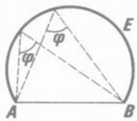
Σχ. 6



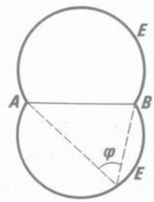
Σχ. 7

Ἐντούτοις ἡ ΟΔ δέν εἶναι ὁ γ.τ./Ι, γιατί ὑπάρχουν καί ἄλλα σημεῖα πού ἰσαπέχουν ἀπό τίς χ΄χ καί ψ΄ψ καί δέν ἀνήκουν στήν ΟΔ. Αὐτά ἀνήκουν στίς ἡμιευθεῖες ΟΔ΄, ΟΕ, ΟΕ΄ πού διχοτομοῦν τίς ἄλλες τρεῖς γωνίες (βλ. σχ. 7) καί συνεπῶς γεωμετρικός τόπος εἶναι τό σημειοσύνολο πού ἀποτελεῖται ἀπό τίς δύο κάθετες εὐθεῖες ΔΔ΄ καί ΕΕ΄.

Πρβ. 3. Ἄν ἔχουμε ἕνα ὁρισμένο τόξο $\overset{\frown}{AEB}$ ἑνός κυκλ(Ο,ρ), ὅλα τά σημεῖα τοῦ τόξου ἔχουν τήν ἰδιότητα Ι νά «βλέπουν» τή χορδή ΑΒ μέ μιά ὁρισμένη γωνία $\widehat{\varphi}$ (βλ. σχ. 8).



Σχ. 8



Σχ. 9

Ἐντούτοις τό τόξο $\overset{\frown}{AEB}$ δέν εἶναι ὁ γ,τ./Ι, γιατί ὑπάρχουν καί ἄλλα σημεῖα πού βλέπουν τό ΑΕΒ, ὑπό γωνία φ καί δέν ἀνήκουν στό $\overset{\frown}{AEB}$. Αὐτά ἀνήκουν σέ ἕνα ἄλλο τόξο $\overset{\frown}{AE'B}$ πού εἶναι συμμετρικό τοῦ $\overset{\frown}{AEB}$ ὡς πρός τήν εὐθεία ΑΒ (βλ. σχ. 9) καί συνεπῶς γεωμετρικός τόπος εἶναι τό σύνολο $G = \overset{\frown}{AEB} \cup \overset{\frown}{AE'B}$.

Στήν § 8.6 μάθαμε πῶς κατασκευάζεται καθένα ἀπό τά τόξα $\overset{\frown}{AEB}$ καί $\overset{\frown}{AE'B}$, ὅταν ξέρουμε τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ καί τή γωνία φ.

9.3. Θεμελιώδεις προτάσεις στούς γεωμετρικούς τόπους.

Πολλές φορές εἶναι χρήσιμο νά θεωροῦμε ὅτι τά σημεῖα ἑνός γεωμετρικοῦ τόπου G διαγράφονται (παράγονται) ἀπό ἕνα «κινητό» σημεῖο $M \in G$ καί τότε λέμε ὅτι τό σημειοσύνολο G εἶναι «ὁ γεωμετρικός τόπος τοῦ Μ».

Εἶναι φανερό ὅτι, ἄν τό κινητό σημεῖο Μ ἀνήκει σ' ἕνα γνωστό σημειοσύνολο G΄ τότε ὁ γεωμετρικός τόπος τοῦ Μ θά εἶναι γενικά ὑποσύνολο τοῦ G΄, δηλαδή θά «ἀνήκει» στό G΄. Συνδυάζοντας τήν παρατήρηση αὐτή μέ ὅσα εἴπαμε στά προηγούμενα, καταλαβαίνουμε ὅτι θά ἰσχύουν οἱ προτάσεις :

I. Ἄν ἕνα κινητό σημεῖο Μ ἀπέχει ἀπό ὁρισμένο σημεῖο Ο ὁρισμένη ἀπόσταση ρ, ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ ἀνήκει στόν κύκλ(Ο,ρ).

II. Ἄν ἕνα κινητό σημεῖο Μ ἀπέχει ἀπό ὁρισμένη εὐθεία ε ὁρισμένη ἀπόσταση λ, ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ ἀνήκει σέ δύο παράλληλες εὐθεῖες πρός τήν ε πού βρίσκονται ἑκατέρωθέν της σέ ἀπόσταση λ.

III. Ἄν ἕνα κινητό σημεῖο Μ ἰσαπέχει ἀπό δύο ὁρισμένα σημεῖα Α καί Β, ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ ἀνήκει στή μεσοκάθετο τοῦ ΑΒ.

IV. Ἄν ἕνα κινητό σημεῖο Μ ἰσαπέχει ἀπό δύο ὁρισμένες τεμνόμενες εὐθεῖες χ΄χ καί ψ΄ψ, ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ ἀνήκει στίς δύο κάθετες εὐθεῖες πού διχοτομοῦν τίς τέσσερις γωνίες τίς ὁποῖες σχηματίζουν οἱ χ΄χ καί ψ΄ψ.

V. Ἄν ἕνα κινητό σημεῖο Μ ἰσαπέχει ἀπό δύο ὁρισμένες παράλληλες εὐθεῖες, ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ ἀνήκει στή μεσοπαράλληλη εὐθεία τους.

VI. Ἄν ἕνα κινητό σημεῖο Μ βλέπει ἕνα ὁρισμένο τμῆμα ΑΒ μέ ὁρισμένη γωνία φ, ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ ἀνήκει σέ δύο ἴσα τόξα πού ἔχουν χορδή τήν ΑΒ καί δέχονται ἐγγεγραμμένη γωνία ἴση μέ τή φ.

Εἰδικότερα, ἄν ἕνα κινητό σημεῖο Μ βλέπει ἕνα ὁρισμένο τμῆμα ΑΒ μέ γωνία ὀρθή, ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ ἀνήκει στόν κύκλο πού ἔχει διάμετρο τήν ΑΒ.

Ὅταν λοιπόν τό κινητό σημεῖο Μ ἔχει μιά ἀπό τίς ἰδιότητες τῶν προτάσεων I-VI, ὁ γεωμ. τόπος τοῦ G θά εἶναι γενικά ἕνα ὑποσύνολο τοῦ σημειοσύνολου G΄ πού ἀναφέρεται στήν ἀντίστοιχη πρόταση. Συνεπῶς γιά νά βροῦμε τό γεωμ. τόπο G, ἀρκεῖ νά προσδιορίσουμε τά σημεῖα τοῦ G΄ πού μπορεῖ νά διαγράψει τό Μ.

9.4. Εὕρεση ἑνός γεωμετρικοῦ τόπου.

Τό βασικό μας πρόβλημα στούς γεωμετρικούς τόπους εἶναι νά δίνεται μιά ὁρισμένη ἰδιότητα Ι καί νά βρίσκουμε τόν ἀντίστοιχο γεωμ. τόπο της, δηλαδή νά προσδιορίζουμε τό σημειοσύνολο G πού ὅλα τά σημεῖα του καί μόνο αὐτά ἔχουν τήν ἰδιότητα Ι.

Γιά νά λύσουμε ἕνα τέτοιο πρόβλημα ἐργαζόμαστε συνήθως ὡς ἑξῆς:

— Θεωροῦμε ἕνα κινητό Μ πού ἔχει τήν ἰδιότητα Ι.

— Προσπαθοῦμε νά δείξουμε ὅτι γιά τό σημεῖο Μ ἰσχύει μιά ἀπό τίς ἰδιότητες πού ἀναφέρονται στίς προτάσεις I-VI τῆς § 9.3, ὁπότε ὁ γεωμ. τόπος G τοῦ σημείου Μ θά ἀνήκει στό σημειοσύνολο G΄ πού ἀναφέρεται στήν ἀντίστοιχη πρόταση.

— Κατασκευάζουμε τό σημειοσύνολο G΄ πού ἀναφέρεται στήν ἀντίστοιχη πρόταση τῆς § 9.3 καί ἐξετάζουμε ἄν ὅλα τά σημεῖα τοῦ G΄ ἔχουν τήν ἰδιότητα Ι.

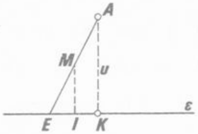
Ἄς δοῦμε μερικά παραδείγματα:

1. Δίνεται ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Α καί μιά ὁρισμένη εὐθεία ε. Νά βρεθεῖ ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων πού συνδέουν τό σημεῖο Α μέ τά σημεῖα τῆς ε.

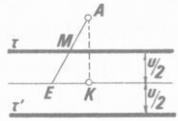
Λύση : Παίρνουμε ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Ε τῆς ε (σχ. 10) καί βρίσκουμε τό μέσο Μ τοῦ τμήματος ΑΕ. Ἄν φέρουμε τά τμήματα ΑΚ $\perp$ ε καί ΜΙ $\perp$ ε ὀνομάσουμε υ τήν ὁρισμένη ἀπόσταση ΑΚ, ἀπό τό τρίγωνο ΑΚΕ ἔχουμε

$$\mathrm{MI} = \frac{\mathrm{AK}}{2} = \frac{\upsilon}{2}.$$

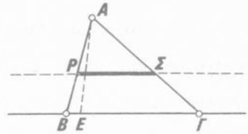
Βλέπουμε δηλαδή ὅτι τό Μ ἀπέχει ἀπό τή σταθερή εὐθεία ε σταθερή ἀπόσταση $\frac{\upsilon}{2}$ καί



Σχ. 10



Σχ. 11



Σχ. 12

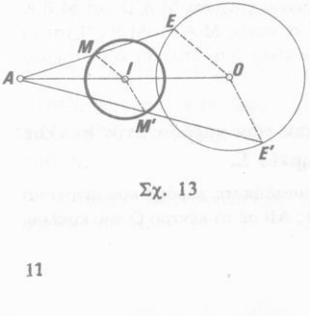
συνεπῶς ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ ἀνήκει (σύμφωνα μέ τήν πρόταση ΙΙ τῆς § 9.3) σέ δύο εὐθεῖες τ καί τ΄ παράλληλες πρός τήν ε σέ ἀπόσταση $\frac{\upsilon}{2}$ (σχ. 11). Εἶναι τώρα φανερό ὅτι ὁ γ.τ. τοῦ Μ θά ἀνήκει μόνο στήν τ, πού βρίσκεται πρός τό μέρος τοῦ Α, γιατί τά σημεῖα Α καί Μ βρίσκονται πάντα πρός τό ἴδιο μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρός τήν εὐθεία ε.

Ἄς πάρουμε τώρα ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ΄ τῆς τ καί ἄς ὀνομάσουμε Ε΄ τό σημεῖο στό ὁποῖο ἡ ΑΜ΄ τέμνει τήν ε. Ἀπό τήν ἰσότητα $\mathrm{M'I'} = \frac{\upsilon}{2}$ ἔχουμε $\mathrm{M'I'} /\!\!/ \!= \frac{\mathrm{AK}}{2}$ καί ἀπό αὐτήν καταλαβαίνουμε ὅτι τό Μ΄ εἶναι μέσο τῆς ΑΕ΄. Ἔτσι κάθε σημεῖο τῆς τ ἀνήκει στό γεωμ. τόπο G, ὁπότε G = τ.

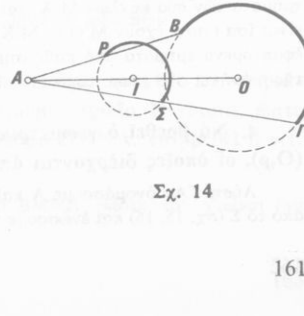
Εἶναι ἐπίσης φανερό ὅτι, ἄν τό Ε δέ διαγράφει ὁλόκληρη τήν εὐθεία ε ἀλλά μόνο ἕνα εὐθύγ. τμῆμα τῆς ΒΓ, ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ θά εἶναι τό εὐθυγ. τμῆμα ΡΣ πού συνδέει τά μέσα τῶν ΑΒ καί ΑΓ (σχ. 12).

2. Δίνεται ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Α καί ἕνας ὁρισμένος κύκλ(Ο,ρ). Νά βρεθεῖ ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν μέσων τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων πού συνδέουν τό σημεῖο Α μέ τά σημεῖα τοῦ κύκλου.

Λύση : Παίρνουμε ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Ε τοῦ κυκλ(Ο,ρ) καί βρίσκουμε τό μέσο



Σχ. 13



Σχ. 14

Μ τοῦ τμήματος ΑΕ (σχ. 13). Ἄν Ι εἶναι τό μέσο τοῦ τμήματος ΑΟ, ἀπό τό τρίγωνο ΑΕΟ ἔχουμε

$$IM = \frac{OE}{2} = \frac{\rho}{2}$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι τό Μ ἀπέχει ἀπό τό σταθερό σημεῖο Ι σταθερή ἀπόσταση $\frac{\rho}{2}$ καί συνεπῶς ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ θά ἀνήκει (σύμφωνα μέ τήν πρόταση Ι, τῆς § 9.3) στόν κύκλο $\left(I, \frac{\rho}{2}\right)$.

Ἄς πάρουμε τώρα ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ΄ τοῦ κυκλ $\left(I, \frac{\rho}{2}\right)$ καί ἄς προεκτείνουμε τήν ΑΜ΄ μέχρι ἕνα σημεῖο Ε΄ τέτοιο ὥστε Μ΄Ε΄ = ΑΜ΄. Ἀπό τό τρίγωνο ΑΟΕ΄ θά ἔχουμε $OE' = 2(IM') = 2 \cdot \frac{\rho}{2} = \rho$ καί συνεπῶς τό Ε΄ ἀνήκει στόν κυκλ(Ο,ρ). Ἔτσι κάθε σημεῖο Μ΄ τοῦ κυκλ $\left(I, \frac{\rho}{2}\right)$ εἶναι μέσο ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΑΕ΄ τό ὁποῖο συνδέει τό Α μέ ἕνα σημεῖο τοῦ κυκλ(Ο,ρ) καί ἑπομένως κάθε σημεῖο τοῦ κυκλ $\left(I, \frac{\rho}{2}\right)$ ἀνήκει στόν τόπο G, δηλαδή $G = \text{κυκλ}\left(I, \frac{\rho}{2}\right)$.

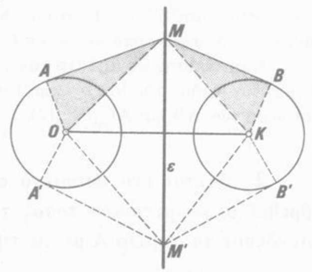
Εἶναι φανερό ὅτι, ἄν τό Ε δέ διαγράψει ὁλόκληρο τόν κυκλ(Ο,ρ) ἀλλά μόνο ἕνα τόξο του $\widehat{B\Gamma}$ (σχ. 14), ὁ γεωμετρικός τόπος τοῦ Μ θά εἶναι ἕνα τόξο $\widehat{P\Sigma}$ τοῦ κυκλ(Ι,ρ/₂) πού τά ἄκρα του εἶναι μέσα τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων ΑΒ καί ΑΓ.

3. Δίνονται δύο ἴσοι κύκλοι μέ κέντρα 0 καί Κ καί ἀκτίνα ρ. Νά βρεθεῖ ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων ἀπό τά ὁποῖα μποροῦμε νά φέρουμε ἴσα ἐφαπτόμενα τμήματα πρός τούς δύο κύκλους.

Λύση : Θεωροῦμε ἕνα σημεῖο Μ τέτοιο ὥστε, ἄν φέρουμε τά ἐφαπτόμενα τμήματα ΜΑ καί ΜΒ πρός τούς δύο κύκλους, νά ἔχουμε ΜΑ = ΜΒ. Παρατηροῦμε τώρα ὅτι τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΜΑΟ καί ΜΚΒ εἶναι ἴσα (γιατί ΜΑ = ΜΒ καί ΟΑ = ΚΒ) καί συνεπῶς

$$MO = MK$$

Βλέπουμε δηλαδή ὅτι τό Μ ἰσαπέχει ἀπό τά ἄκρα τοῦ ὁρισμένου τμήματος ΟΚ καί συνεπῶς ὁ γ.τ. τοῦ Μ θά ἀνήκει (σύμφωνα μέ τήν πρόταση ΙΙΙ τῆς § 9.3) στή μεσοκάθετο ε τῆς ΟΚ.

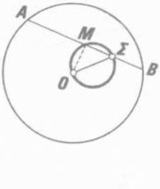


Ἄς πάρουμε τώρα ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ΄ τῆς ε καί ἄς φέρουμε τά ἐφαπτόμενα τμήματα τῶν δύο κύκλων Μ΄Α΄ καί Μ΄Β΄. Τότε τά ὀρθογώνια τρίγωνα Μ΄Α΄Ο καί Μ΄Β΄Κ εἶναι ἴσα (γιατί ἔχουν Μ΄Ο = Μ΄Κ καί ΟΑ΄ = ΚΒ΄) καί συνεπῶς Μ΄Α΄ = Μ΄Β΄. Ἔτσι τά ἐφαπτόμενα τμήματα ἀπό κάθε σημεῖο τῆς μεσοκαθέτου εἶναι ἴσα, δηλαδή κάθε σημεῖο τῆς ε ἀνήκει στό γεωμ. τόπο G καί συνεπῶς G = ε.

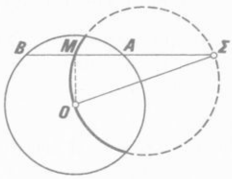
4. Νά βρεθεῖ ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν μέσων τῶν χορδῶν ἑνός κύκλου (Ο,ρ), οἱ ὁποῖες διέρχονται ἀπό ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Σ.

Λύση: Ἄν ὀνομάσουμε Α καί Β τά ἄκρα μιᾶς ὁποιασδήποτε χορδῆς πού διέρχεται ἀπό τό Σ (σχ. 15, 16) καί ἑνώσουμε τό μέσο Μ τῆς χορδῆς ΑΒ μέ τό κέντρο Ο τοῦ κύκλου, θά ἔχουμε $O\widehat{M}\Sigma = 1$ ὀρθή. Ἔτσι τό Μ βλέπει τό σταθερό τμῆμα ΟΣ μέ ὀρθή γωνία καί συνεπῶς ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ (σύμφωνα μέ τήν πρόταση VI, τῆς § 9.3) θά ἀνήκει στόν κύκλο πού ἔχει διάμετρο τήν ΟΣ.

Εὔκολα διακρίνουμε ὅτι, ἄν τό σταθερό σημεῖο Σ εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ κδισ (Ο,ρ), ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ εἶναι ὅλος ὁ κύκλος διαμέτρου ΟΣ (σχ. 15), ἐνῶ ἄν τό σημεῖο



Σχ. 15



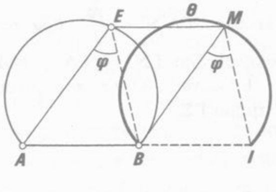
Σχ. 16

Σ βρίσκεται ἔξω ἀπό τόν κδισ(Ο,ρ), γεωμετρικός τόπος τοῦ Μ εἶναι μόνο τό τόξο πού ἀνήκει στόν κύκλο διαμέτρου ΟΣ καί βρίσκεται μέσα στόν κδισ(Ο,ρ).

5. Δίνεται ἕνα ὁρισμένο τόξο $\widehat{AB}$ ἑνός κυκλ(Ο,ρ) καί ἀπό σημεῖο Ε τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ φέρνουμε τμῆμα ΕΜ τέτοιο, ὥστε τό τετράπλευρο ΕΜΒΑ νά εἶναι παραλληλόγραμμο. Νά βρεθεῖ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ, ὅταν τό Ε διαγράφει τό τόξο $\widehat{AB}$.

Λύση : Παρατηροῦμε πρῶτα ὅτι ἡ γωνία $A\widehat{E}B$ εἶναι γνωστή (καί θά τή σημειώνουμε μέ φ) γιατί εἶναι ἐγγεγραμμένη σέ ὁρισμένο τόξο γνωστοῦ κύκλου.

Ἐπειδή τό ΕΜΒΑ εἶναι παραλληλόγραμμο, θά ἔχουμε ΕΜ //= ΑΒ. Ἔτσι, ἄν πάρουμε στήν προέκταση τῆς ΑΒ τμῆμα ΒΙ = ΒΑ, θά ἔχουμε ΕΜ //= ΒΙ καί συνεπῶς τό ΕΜΙΒ εἶναι ἐπίσης παραλληλόγραμμο. Εἶναι λοιπόν (ἀφοῦ ΜΒ // ΕΑ καί ΜΙ // ΕΒ),



Σχ. 17

$$B\widehat{M}I = A\widehat{E}B = \varphi.$$

Ἔτσι τό Μ βλέπει τό τμῆμα ΒΙ μέ γνωστή γωνία φ καί συνεπῶς ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ (σύμφωνα μέ τήν πρόταση VI τῆς § 9.3) θά ἀνήκει σέ δύο ἴσα τόξα πού ἔχουν χορδή τή ΒΙ καί δέχονται ἐγγεγραμμένη γωνία ἴση μέ φ.

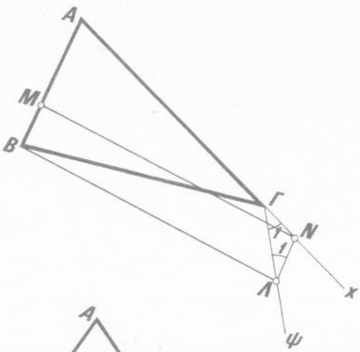
Εὔκολα διακρίνουμε ὅτι γεωμ. τόπος τοῦ Μ εἶναι μόνο τό τόξο $\widehat{B\Theta I}$.

6. Σημεῖο Μ κινεῖται στήν πλευρά ΑΒ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ. Στήν προέκταση τῆς ΑΓ καί πρός τό μέρος τοῦ Γ παίρνουμε σημεῖο Ν τέτοιο, ὥστε ΓΝ=ΒΜ. Ἄν σχηματίσουμε τό παραλληλόγραμμο ΒΜΝΛ, νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ Λ.

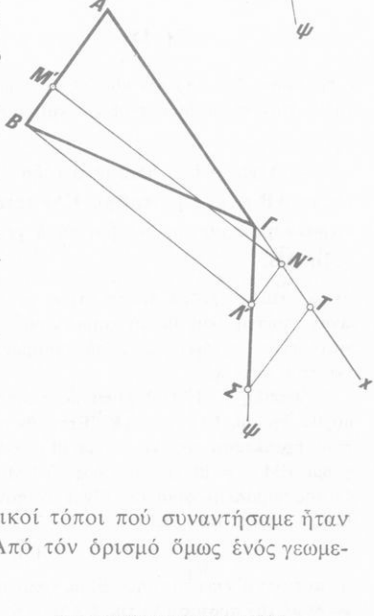
Λύση : Κατασκευάσαμε τό παραλληλόγραμμο ΒΜΝΛ. ὁπότε τό Λ εἶναι ἕνα σημεῖο τοῦ γ.τ.

Παρατηροῦμε ὅτι: $ΛΝ = ΒΜ = ΓΝ$ δηλ. τό τριγ$ΓΝΛ$ εἶναι ἰσοσκελές, ἄρα $\hat{Γ}_1 = \hat{Λ}_1$ (1).

Ἐπειδή $ΝΛ // ΑΒ$, ἕπεται: $Λ\hat{Ν}Χ = \hat{Α}$ καί ἐπειδή ἡ $Λ\hat{Ν}Χ$ εἶναι ἐξωτερική τοῦ τριγ. $ΝΓΛ$, θά ἔχουμε: $Χ\hat{Ν}Λ = Γ_1 + Λ_1 = 2\hat{Γ}_1$ ἄρα: $\hat{Α} = 2\hat{Γ}_1 \Rightarrow \hat{Γ}_1 = \frac{\hat{Α}}{2}$. Ἡ ἡμιευθεία $Γψ$ σχηματίζει μέ τήν $ΓΧ$ σταθερή γωνία, ἄρα ἡ $Γψ$ εἶνει σταθερή ἡμιευθεία. Τό $Λ$ λοιπόν ἀνήκει σέ σταθερή ἡμιευθεία, ἄρα καί ὅλα τά σημεῖα τοῦ γ.τ.



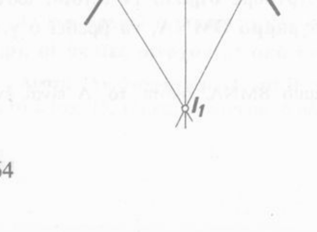
Παρατηροῦμε ὅτι, ὅταν τό $Μ$ ἔρθει στό $Β$, σημεῖο τοῦ τόπου εἶναι τό $Γ$. Ὅταν τό $Μ$ ἔρθει στό $Α$ καί πάρουμε $ΓΤ = ΑΒ$ καί φέρουμε $ΤΣ // ΑΒ$, τό $Σ$ θά εἶναι τό ἀκραῖο σημεῖο τοῦ γ.τ.

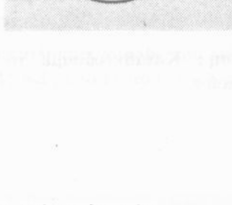


Ἄς πάρουμε τώρα ἕνα σημεῖο $Λ'$ τοῦ τμήματος $ΓΣ$. Πρέπει νά δείξουμε ὅτι εἶναι κορυφή ἑνός παραλληλογράμμου $Λ'Ν'Μ'Β$ ὅπου τό $Μ'$ ἀνήκει στήν $ΑΒ$, τό $Ν'$ στήν προέκταση τῆς $ΑΓ$ καί ἀκόμη $ΒΜ' = ΓΝ'$. Φέρνουμε $Λ'Ν' // ΑΒ$ καί $Ν'Μ' // ΒΛ'$, ὁπότε σχηματίστηκε τό παρ/μο. Ἐπειδή $Λ'Ν' // ΑΒ$, θά εἶναι $Λ'Ν'Τ = \hat{Α}$, καί ἐπειδή $Σ\hat{Γ}Τ = \frac{\hat{Α}}{2}$, θά ἔχουμε: $Γ\hat{Λ}'Ν' = \frac{\hat{Α}}{2}$, ἄρα τό τριγ. $ΓΝ'Λ'$ ἰσοσκελές, ἄρα $ΓΝ' = Ν'Λ' = ΒΜ'$.

Ἑπομένως: Ὁ γ.τ. πού ζητοῦμε εἶναι τό εὐθ. τμῆμα $ΓΣ$.

9.5. Σημείωση: Μέχρι τώρα οἱ γεωμετρικοί τόποι πού συναντήσαμε ἦταν τόξα, κύκλοι, εὐθεῖες ἤ μέρη εὐθειῶν. Ἀπό τόν ὁρισμό ὅμως ἑνός γεωμε-





τρικοῦ τόπου προκύπτει ὅτι ἕνας τόπος μπορεῖ νά εἶναι ἕνα σύνολο μεμονωμένων σημείων ἤ ἀκόμα καί ἕνα μέρος τοῦ ἐπιπέδου.

Ἔτσι ὁ γ.τ. τῶν σημείων πού ἰσαπέχουν ἀπό τρεῖς εὐθεῖες πού τέμνονται ἀνά δύο, εἶναι τέσσερα σημεῖα: τό ἔγκεντρο καί τά παράκεντρα τοῦ τριγώνου πού σχηματίζουν οἱ τρεῖς εὐθεῖες (σχ. 20).

Ἀκόμα ὁ γ.τ. τῶν σημείων P τά ὁποῖα ἀπέχουν ἀπό δεδομένο σημεῖο O ἀπόσταση μεγαλύτερη ἀπό ὁρισμένο τμῆμα α εἶναι τό ἐξωτερικό τοῦ κυκλικοῦ δίσκου (0,α).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1 - 13

9.6. Γεωμετρικές κατασκευές μέ ἀναλυτική καί συνθετική μέθοδο.

Στό κεφάλαιο 8 εἴδαμε ὅτι κάθε πρόταση, στήν ὁποία ζητεῖται νά κατασκευαστεῖ μέ τόν κανόνα καί τό διαβήτη ἕνα γεωμετρικό σχῆμα, λέγεται **γεωμετρική κατασκευή** καί μάθαμε τέτοιες ἁπλές γεωμετρικές κατασκευές.

Θά δοῦμε τώρα πῶς ἀντιμετωπίζουμε πιό σύνθετες γεωμετρικές κατασκευές χρησιμοποιώντας μιά γενική μέθοδο πού χαρακτηρίζεται ὡς **«ἀναλυτική καί συνθετική»**. Ἡ μέθοδος αὐτή στίς γεωμετρικές κατασκευές χωρίζεται στά ἑξῆς μέρη:

α) **Ἀνάλυση**: Ὑποθέτουμε ὅτι τό πρόβλημα μας λύνεται καί θεωροῦμε ἕνα σχῆμα πού ἱκανοποιεῖ ὅλα τά δεδομένα τοῦ προβλήματος αὐτοῦ. Μετά προσπαθοῦμε μέ διάφορες κατάλληλες παρατηρήσεις καί χαράξεις γραμμῶν (εὐθειῶν καί κύκλων) νά διακρίνουμε σχήματα πού μποροῦν νά κατασκευαστοῦν μέ ἁπλές γεωμετρικές κατασκευές πού ξέρουμε. Τέλος, συνδυάζοντας τίς διάφορες ἁπλές γεωμετρικές κατασκευές πού συναντοῦμε, διαδοχικά, προσπαθοῦμε νά φθάσουμε στό ζητούμενο σχῆμα.

Ἡ ἀνάλυση λοιπόν ἔχει σκοπό νά μᾶς ὑποδείξει τό «ξεκίνημα» καί γενικά τό δρόμο γιά τή λύση τοῦ προβλήματος.

β) **Σύνθεση (ἤ κατασκευή)**: Ἡ σύνθεση εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἀντίστροφη πορεία τῆς ἀναλύσεως καί οὐσιαστικά ἡ λύση τοῦ προβλήματος. Στή σύνθεση κατασκευάζουμε σταδιακά τά σχήματα πού συναντήσαμε στήν ἀνάλυση καί ὁδηγούμαστε ἔτσι βῆμα πρός βῆμα στό ζητούμενο σχῆμα.

γ) **Ἀπόδειξη**: Ἀφοῦ ὁλοκληρώσουμε τή σύνθεση, ἀποδεικνύουμε ὅτι τό σχῆμα πού κατασκευάσαμε ἔχει ὅλα τά στοιχεῖα πού μᾶς δόθηκαν καί ἱκανοποιεῖ ὅλες τίς συνθῆκες πού μᾶς τέθηκαν.

δ) **Διερεύνηση**: Μέ τά δεδομένα τοῦ προβλήματος εἶναι δυνατόν νά κατασκευάζονται περισσότερα ἀπό ἕνα σχήματα ἤ νά μήν κατασκευάζεται σχῆμα. Ἡ ἀναζήτηση τῶν συνθηκῶν πού πρέπει νά ἱκανοποιοῦν τά δεδομένα, γιά νά ὑπάρχει λύση, καί ἡ ἀνεύρεση ὅλων τῶν λύσεων ἀποτελοῦν τή «διερεύνηση» τοῦ προβλήματος.

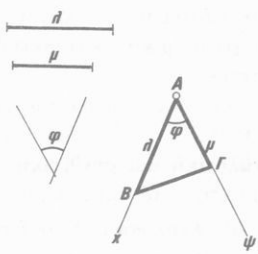
Ἄς ἐφαρμόσουμε τά παραπάνω σέ ἁπλές περιπτώσεις κατασκευῆς τριγώνων.

9.7. Ἁπλές περιπτώσεις κατασκευῆς τριγώνου.

1. Νά κατασκευαστεῖ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ πού νά ἔχει τίς δύο πλευρές του ΑΒ καί ΑΓ ἴσες μέ δεδομένα τμήματα λ καί μ ἀντίστοιχα καί τή γωνία του Α ἴση μέ δεδομένη γωνία $\widehat{\varphi}$.

Ἀνάλυση : Ἔστω ΑΒΓ τό τρίγωνο πού ζητᾶμε καί πού ἔχει : $AB = \lambda$, $A\Gamma = \mu$, $\widehat{A} = \widehat{\varphi}$.

Παρατηροῦμε ὅτι, ἄν πάρουμε πάνω στό ἐπίπεδο ἕνα σημεῖο Α καί μέ κορυφή αὐτό σχηματίσουμε γωνία $\chi\widehat{A}\psi = \widehat{\varphi}$, ἀρκεῖ στίς πλευρές της νά πάρουμε τώρα τμήματα $AB = \lambda$ καί $A\Gamma = \mu$.



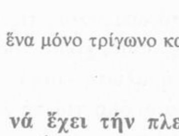
Σύνθεση : Μέ κορυφή ἕνα σημεῖο Α κατασκευάζουμε μία γωνία $\chi\widehat{A}\psi$ ἴση μέ τή $\widehat{\varphi}$. Μετά παίρνουμε στίς πλευρές της Αχ καί Βψ ἀντίστοιχα τμήματα $AB = \lambda$ καί $A\Gamma = \mu$, ὁπότε τό ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενο τρίγωνο.

Ἀπόδειξη : Ἁπλή.

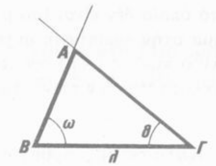
Διερεύνηση : Πρέπει νά εἶναι $\widehat{\varphi} < 2$ ὀρθ., ἀφοῦ ἡ $\widehat{\varphi}$ εἶναι γωνία τριγώνου. Εἶναι φανερό ὅτι, ὁπουδήποτε καί νά κατασκευάσουμε τή γωνία $\widehat{A}$, ὅλα τά τρίγωνα πού προκύπτουν μέ τόν τρόπο αὐτό εἶναι μεταξύ τους ἴσα. Γι' αὐτό λέμε ὅτι ἕνα μόνο τρίγωνο κατασκευάζεται μέ τά στοιχεῖα πού μᾶς δώσανε.

2. Νά κατασκευαστεῖ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ πού νά ἔχει τήν πλευρά του ΒΓ ἴση μέ δεδομένο τμῆμα λ καί τίς γωνίες του $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$ ἴσες ἀντιστοίχως μέ δεδομένες γωνίες $\widehat{\omega}$ καί $\widehat{\theta}$.

Ἀνάλυση : Ἔστω ΑΒΓ τό ζητούμενο τρίγωνο. Παρατηροῦμε ὅτι, ἄν στά ἄκρα ἑνός τμήματος $B\Gamma = \lambda$ σχηματίσουμε πρός τό ἴδιο ἡμιεπίπεδο γωνίες ἴσες μέ ω καί θ, ἐκεῖ πού θά τμηθοῦν οἱ ἄλλες πλευρές τῶν γωνιῶν θά ἔχουμε τήν κορυφή Α.



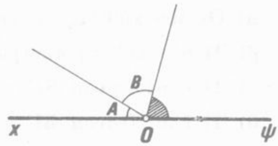
Σύνθεση : Παίρνουμε ἕνα τμῆμα ἴσο μέ τό λ καί ὀνομάζουμε τά ἄκρα του Β καί Γ. Μετά, μέ κορυφή τό Β καί πλευρά τήν ἡμιευθεία ΒΓ κατασκευάζουμε γωνία ἴση μέ τήν ω καί μέ κορυφή τό Γ καί πλευρά τήν ἡμιευθεία ΓΒ κατασκευάζουμε γωνία ἴση μέ τήν $\widehat{\theta}$ (στό ἴδιο ἡμιεπίπεδο ὡς πρός τή ΒΓ). Ἄν ὀνομάσουμε Α τό σημεῖο στό ὁποῖο τέμνονται οἱ ἄλλες πλευρές τῶν γωνιῶν αὐτῶν, τό ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενο τρίγωνο.



Ἀπόδειξη : Ἁπλή.

Διερεύνηση : Ἐπειδή οἱ γωνίες $\widehat{\omega}$ καί $\widehat{\theta}$ θά ἀνήκουν σέ τρίγωνο, πρέπει : $\widehat{\omega}+\widehat{\theta}<2$ ὀρθ. Κατά τά ἄλλα τό πρόβλημα ἔχει μία λύση.

Σημ. Ἄν ἑνός τριγ. ΑΒΓ γνωρίζουμε τίς δύο γωνίες του, τότε γνωρίζουμε καί τήν τρίτη. Εἶναι ἡ παραπληρωματική τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

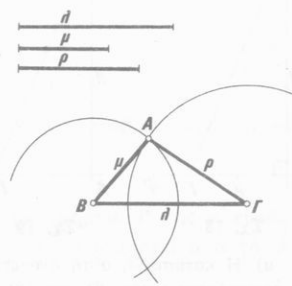


3. Νά κατασκευαστεῖ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ πού νά ἔχει τίς πλευρές του ΒΓ, ΑΒ, ΑΓ ἴσες ἀντιστοίχως μέ δεδομένα τμήματα λ,μ,ρ.

Λύση : Παίρνουμε ἕνα τμῆμα ἴσο μέ λ καί ὀνομάζουμε τά ἄκρα του Β καί Γ. Μετά γράφουμε τούς κύκλους (Β,μ) καί (Γ,ρ). Ἄν ὀνομάσουμε Α τό ἕνα σημεῖο τομῆς τους, τό ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενο τρίγωνο.

Γιά νά τέμνονται ὅμως οἱ δύο κύκλοι (δηλαδή γιά νά ἔχει λύση τό πρόβλημα) θά πρέπει τά τμήματα λ,μ,ρ, πού μᾶς δώσανε νά εἶναι τέτοια, ὥστε $\mu-\rho<\lambda<\mu+\rho$.

Στήν περίπτωση αὐτή, ὅπως εἶναι πάλι φανερό, ἔχουμε μιά καί μόνη λύση.

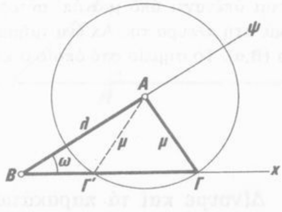


Μιά πολύ χρήσιμη περίπτωση κατασκευῆς τριγώνου εἶναι ἡ ἑξῆς :

4. Νά κατασκευαστεῖ τρίγωνο ΑΒΓ πού ἔχει τίς πλευρές του ΑΒ καί ΑΓ ἴσες ἀντιστοίχως μέ δεδομένα τμήματα λ καί μ καί τή γωνία του $\widehat{\text{Β}}$ ἴση μέ δεδομένη γωνία $\widehat{\omega}$.

Λύση : Παίρνουμε μιά γωνία ἴση μέ τήν $\widehat{\omega}$ καί ὀνομάζουμε Β τήν κορυφή της. Μετά, παίρνουμε στή μιά πλευρά της ΒΨ τμῆμα ΒΑ= λ καί μέ κορυφή τό Α καί ἀκτίνα μ γράφουμε κύκλο. Ἄν ὁ κύκλος τέμνει τήν ἄλλη πλευρά ΒΧ τῆς γωνίας σ' ἕνα σημεῖο Γ, τό ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενο τρίγωνο.

Ἄν ὁ κύκλος (Α, μ) τέμνει τήν πλευρά ΒΧ καί στό σημεῖο Γ', παρατηροῦμε ὅτι τό τρίγωνο



ΑΒΓ′ (τό ὁποῖο δέν εἶναι ἴσο μέ τό ΑΒΓ) εἶναι ἐπίσης λύση τοῦ προβλήματος, δηλ. τό πρόβλημα στήν περίπτωση αὐτή δέχεται δύο λύσεις.

Ἄν ὁ κύκλος (Α,μ) ἐφάπτεται στή ΒΧ, ἔχουμε μιά λύση (ὀρθογώνιο τρίγωνο), ἐνῶ ἄν ὁ κύκλος (Α,μ) δέν τέμνει τήν ΒΧ, τό πρόβλημα δέν ἔχει λύση.

5. Κατασκευές ὀρθογώνιου τριγώνου.

Νά κατασκευαστεῖ ὀρθογώνιο τρίγωνο τοῦ ὁποίου δίνονται :

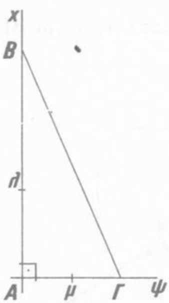
α) Οἱ δύο κάθετες πλευρές του ΑΒ = λ καί ΑΓ = μ.

β) Ἡ μία κάθετη πλευρά του ΑΒ = λ καί μία ὀξεία γωνία του.

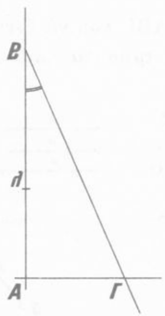
γ) Ἡ ὑποτείνουσα ΒΓ = α καί μία ὀξεία γωνία του.

δ) Ἡ ὑποτείνουσα ΒΓ = α καί μία κάθετη πλευρά του ΑΒ = λ.

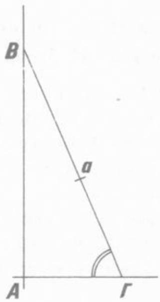
Λύση : Ἀπό τίς γενικές περιπτώσεις πού εἴπαμε στήν § 9.7 προκύπτουν ἀμέσως τά ἑξῆς :



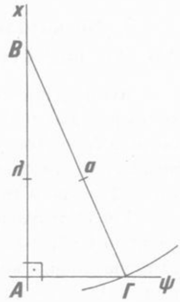
Σχ. 18



Σχ. 19



Σχ. 20



Σχ. 21

α) Ἡ κατασκευή αὐτή ἀνάγεται στήν κατασκευή τριγώνου ἀπό δύο πλευρές καί τήν περιεχόμενη γωνία (βλ. σχ. 18).

β) Ὁποιαδήποτε ὀξεία γωνία καί ἄν δόθηκε γνωρίζουμε ὅλες τίς γωνίες τοῦ τριγώνου. Ἔτσι ἡ κατασκευή ἀνάγεται στήν κατασκευή τριγώνου ἀπό μιά πλευρά καί τίς προσκείμενες γωνίες (βλ. σχ. 19).

γ) Ὅμοια ὅπως ἡ περίπτωση β). (βλ. σχ. 20).

δ) Στήν περίπτωση αὐτή γνωρίζουμε δύο πλευρές καί μία γωνία (τήν ὀρθή) πού βρίσκεται ἀπέναντι ἀπό μιά ἀπ' αὐτές. Τότε κατασκευάζουμε μιά ὀρθή γωνία $x\hat{A}\psi$, παίρνουμε στή πλευρά της Αx ἕνα τμῆμα ΑΒ ἴσο μέ τήν κάθετη πλευρά καί γράφουμε τόν κύκλο (Β,α). Τό σημεῖο στό ὁποῖο ὁ κύκλος αὐτός τέμνει τήν Αψ εἶναι τό Γ (βλ. σχ. 21).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 14 - 19

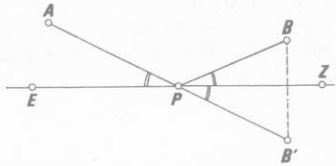
Δίνουμε καί τά παρακάτω παραδείγματα κατασκευῶν.

9.8. Παραδείγματα.

1. Δίνονται μία εὐθεία ΕΖ καί δύο σημεῖα Α καί Β στό ἴδιο ἡμιεπίπεδο ὡς πρός τήν ΕΖ. Νά βρεθεῖ σημεῖο Ρ τῆς ΕΖ ἔτσι, ὥστε $\widehat{APE}=\widehat{BPZ}$

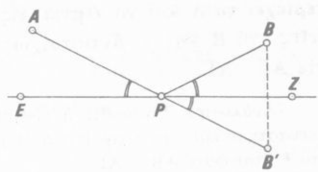
Ἀνάλυση: Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι τό ζητούμενο σημεῖο Ρ τῆς ΕΖ βρέθηκε καί ὅτι:

$$\widehat{APE} = \widehat{BPZ} \quad (1).$$



Παρατηροῦμε τά ἑξῆς: Ἄν σχηματίσουμε τό συμμετρικό Β′ τοῦ Β ὡς πρός τήν ΕΖ, τότε $\widehat{BPZ} = \widehat{ZPB'}$ (2) (λόγω τῆς συμμετρίας). Ἀπό τίς (1) καί (2) προκύπτει ὅτι $\widehat{APE} = \widehat{ZPB'}$, πού σημαίνει ὅτι τά Α,Ρ,Β′ εἶναι συνευθειακά, δηλαδή τό Ρ ἀνήκει καί στή γνωστή εὐθεία ΑΒ′.

Σύνθεση: Κατασκευάζουμε τό συμμετρικό Β′ τοῦ Β ὡς πρός τήν ΕΖ καί φέρνουμε τήν εὐθεία ΑΒ′. Τό σημεῖο πού τέμνονται οἱ ΕΖ καί ΑΒ′ εἶναι τό ζητούμενο σημεῖο Ρ.



Ἀπόδειξη: Ἐπειδή τά Β καί Β′ εἶναι συμμετρικά, θά εἶναι $\widehat{BPZ} = \widehat{ZPB'}$ (1) καί ἀκόμα· $\widehat{APE} = \widehat{ZPB'}$ (2) ὡς κατακορυφήν.

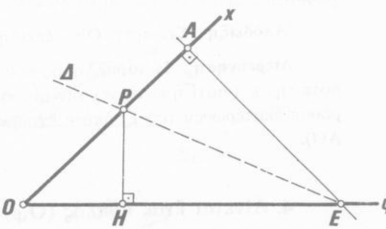
Ἀπό τίς (1), (2) προκύπτει : $\widehat{APE} = \widehat{BPZ}$. Δηλαδή τό Ρ εἶναι τό ζητούμενο.

Διερεύνηση: Ὅπως προκύπτει ἀπό τά παραπάνω, τό πρόβλημα ἔχει πάντοτε μία λύση καί μόνο μία.

2. Δίνεται μιά ὀξεία γωνία $\widehat{XOΨ}$ καί ἕνα σημεῖο Ρ τῆς πλευρᾶς της ΟΧ. Νά βρεθεῖ σημεῖο Ρ τῆς πλευρᾶς ΟΧ πού νά ἰσαπέχει ἀπό τό Α καί τήν ΟΨ.

Ἀνάλυση: Ἔστω ὅτι βρέθηκε τό σημεῖο Ρ ἔτσι ὥστε, ἄν ΡΗ $\perp$ ΟΨ, νά εἶναι ΡΗ = ΡΑ.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι, ἄν φέρουμε ΑΕ $\perp$ ΟΧ, τό σημεῖο Ρ ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές τῆς γωνίας πού σχηματίζουν οἱ εὐθεῖες ΑΕ καί ΟΨ, ἄρα τό Ρ ἀνήκει καί στή διχοτόμο τῆς γωνίας τῶν ΑΕ καί ΟΨ.

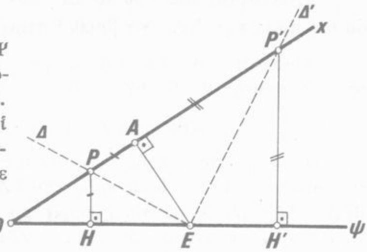


Σύνθεση: Φέρνουμε τήν κάθετο στήν ΟΧ στό Α καί ὀνομάζουμε Ε τό σημεῖο πού αὐτή τέμνει τήν ΟΨ. Στή συνέχεια κατασκευάζουμε τή διχοτόμο τῆς γωνίας ΑΕΟ, τήν ΕΔ, πού τέμνει τήν ΟΧ στό Ρ, πού εἶναι τό ζητούμενο σημεῖο.

Ἀπόδειξη: Ἐπειδή ἡ ΕΔ εἶναι διχοτόμος τῆς ΑÊΟ, θά εἶναι

$$PH = PA.$$

Διερεύνηση: Ἡ κάθετος στό Α καί ἡ ΟΨ σχηματίζουν δύο γωνίες μέ ἀντίστοιχες διχοτόμους ΕΔ καί ΕΔ΄. Ἐπειδή ΕΑ < ΕΟ (δηλ. τό τριγ. ΕΑΟ δέν εἶναι ἰσοσκελές στό Ε), οἱ διχοτόμοι αὐτοί θά τέμνουν τήν ΟΧ σέ δύο πάντοτε σημεῖα, ἄρα τό πρόβλημα ἔχει πάντοτε δύο λύσεις.



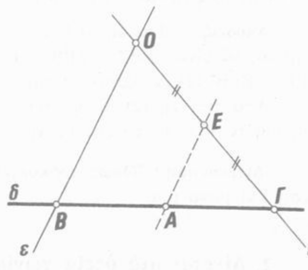
3. Δίνονται δύο εὐθεῖες ε καί ε΄ πού τέμνονται στό Ο καί ἕνα σημεῖο Α. Νά κατασκευαστεῖ εὐθεία δ πού νά περιέχει τό Α καί νά τέμνει τίς δύο εὐθεῖες στά Β καί Γ ἀντιστοίχως ἔτσι, ὥστε ΑΒ = ΑΓ.

Ἀνάλυση: Ἔστω ὅτι ἡ εὐθεία δ κατασκευάστηκε καί τέμνει τήν ε στό Β καί τήν ε΄ στό Γ ἔτσι ὥστε ΑΒ = ΑΓ.

Στό τρίγωνο ΟΒΓ πού σχηματίστηκε τό Α εἶναι μέσο τῆς πλευρᾶς ΒΓ καί ἄν φέρουμε ΑΕ // ΟΒ, τότε τό Ε εἶναι γνωστό σημεῖο καί

$$OE = E\Gamma,$$

ὁπότε καί τό Γ εἶναι γνωστό σημεῖο, ἄρα τῆς εὐθείας δ ἔχουμε δύο σημεῖα, τό Α καί τό Γ, ἑπομένως εἶναι γνωστή.



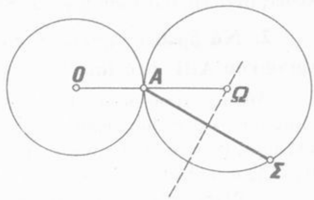
Σύνθεση: Φέρνουμε ἀπό τό Α εὐθεία παράλληλη πρός τήν ε (ἤ καί τήν ε΄) πού τέμνει τήν ε΄ στό Ε. Σημειώνουμε τό Γ στήν ε΄, ὥστε ΕΓ = ΟΕ καί ἡ εὐθεία ΓΑ εἶναι ἡ ζητούμενη.

Ἀπόδειξη: Στό τρίγ. ΟΒΓ ἐπειδή ΟΕ = ΕΓ καί ΕΑ // ΟΒ, θά εἶναι καί ΑΒ = ΑΓ.

Διερεύνηση: Ἡ παράλληλος πού φέρνουμε ἀπό τό Α πρός τήν ε θά τέμνει ὁπωσδήποτε τήν ε΄ (γιατί ἡ ε΄ τέμνει τήν μία παράλληλο ε). Τό τμῆμα ΕΓ εἶναι δυνατό νά τό πάρουμε ἑκατέρωθεν τοῦ Ε, ὁπότε ἔχουμε δύο λύσεις: τήν ΓΑ καί τήν ΑΟ (τότε: ΑΟ = ΑΟ).

4. Δίνεται ἕνας κύκλος (Ο,ρ) καί ἕνα ὁρισμένο σημεῖο του Α. Νά κατασκευαστεῖ κύκλος πού νά ἐφάπτεται στόν (Ο,ρ) στό Α καί νά διέρχεται ἀπό ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Σ.

Ἀνάλυση: Ἔστω (Ω) ὁ ζητούμενος κύκλος πού ἐφάπτεται στόν (Ο,ρ) στό Α καί διέρχεται ἀπό τό Σ. Παρατηροῦμε ὅτι τό κέντρο Ω ἀνήκει στήν εὐθεία ΟΑ καί στή μεσοκάθετο τοῦ τμήματος ΑΣ. Ἔτσι, ὅταν ἔχουμε τό κέντρο Ω, θά γράψουμε τόν κύκλο (Ω, ΩΑ).



Σύνθεση : Φέρουμε τήν εὐθεία ΟΑ καί τή μεσοκάθετο (§ 8.2) τοῦ ΑΣ. Τό σημεῖο τομῆς τους εἶναι τό Ω καί ὁ κύκλος (Ω,ΩΑ) εἶναι ὁ ζητούμενος.

Ἀπόδειξη : Ἐπειδή οἱ κύκλοι (Ο,ρ) καί (Ω,ΩΑ) ἔχουν ἕνα κοινό σημεῖο Α στή διάκεντρο, θά ἐφάπτονται (§ 7.6). Ἐπειδή τό Ω ἀνήκει καί στή μεσοκάθετο τοῦ ΑΣ, θά εἶναι ΩΣ = ΩΑ, δηλ. ὁ κύκλος (Ω,ΩΑ) θά διέρχεται ἀπό τό Σ.

Διερεύνηση : Τό πρόβλημα δέν ἔχει λύση, ὅταν ἡ μεσοκάθετος τοῦ ΑΣ δέν τέμνει τήν ΟΑ καί αὐτό γίνεται ὅταν τό Σ βρίσκεται στήν ἐφαπτομένη τοῦ (Ο,ρ) στό Α.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 20-24

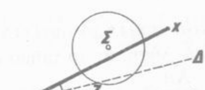
9.9. Λύση προβλημάτων μέ γεωμετρικούς τόπους.

Στά γεωμετρικά προβλήματα παρουσιάζεται πολλές φορές ἡ ἀνάγκη νά προσδιορίσουμε τή θέση ἑνός σημείου ὡς πρός ἄλλα γνωστά σημεῖα ἤ σχήματα. Γιά τόν προσδιορισμό τῆς θέσεως ἑνός τέτοιου σημείου Ζ θά πρέπει νά δίνονται ἤ νά βρίσκονται δύο ἰδιότητες τοῦ Ζ οἱ ὁποῖες νά ἐντοπίζουν δύο γεωμετρικούς τόπους G_1 καί G_2 στούς ὁποίους νά ἀνήκει τό Ζ. Ἔτσι τελικά τό Ζ θά εἶναι σημεῖο τοῦ συνόλου $G_1 \cap G_2$.

Ἄς δοῦμε μερικά παραδείγματα.

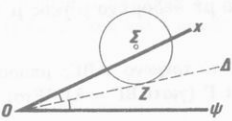
1. Νά βρεθεῖ σημεῖο Ζ τό ὁποῖο νά ἀπέχει ὁρισμένη ἀπόσταση λ ἀπό ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Σ καί νά ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές μιᾶς γωνίας.

Λύση : Ἡ πρώτη ἰδιότητα τοῦ Ζ, νά ἀπέχει ἀπό τό Σ ἀπόσταση λ, μᾶς ἐξασφαλίζει ὅτι τό Ζ θά ἀνήκει (σχ. 22) στόν κυκλ(Σ,λ). Ἡ δεύτερη ἰδιότητά του, νά ἰσαπέχει ἀπό τίς

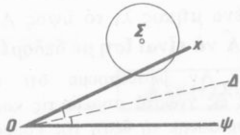


Σχ. 22

Σχ. 23



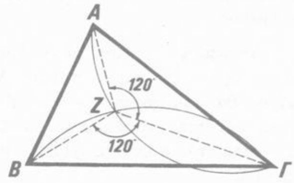
Σχ. 24



Σχ. 25

πλευρές τῆς γωνίας $X\hat{O}\Psi$, μᾶς ἐξασφαλίζει ὅτι τό Ζ βρίσκεται στήν ἡμιευθεία ΟΔ πού διχοτομεῖ τή γωνία $X\hat{O}\Psi$. Ἔτσι τό Ζ θά εἶναι ἡ τομή τοῦ κυκλ(Σ,λ) καί τῆς ἡμιευθείας ΟΔ. Ἀνάλογα μέ τή θέση πού ἔχει τό Σ ὡς πρός τή γωνία $X\hat{O}\Psi$, μπορεῖ νά ἔχουμε δύο λύσεις (σχ. 22), μιά λύση (σχ. 23, 24) καί καμιά λύση (σχ. 25).

2. Νά βρεθεῖ σημεῖο Ζ τό ὁποῖο νά βλέπει τίς πλευρές ἑνός ὁρισμένου τριγώνου ΑΒΓ ὑπό ἴσες γωνίες.



Λύση : Ἀφοῦ οἱ γωνίες $A\hat{Z}B$, $B\hat{Z}\Gamma$, $\Gamma\hat{Z}A$ εἶναι ἴσες καί ἔχουν ἄθροισμα 360°, κάθε μιά ἀπ' αὐτές θά εἶναι 120°. Ἔτσι, γιά τό Ζ ἔχουμε τίς ἑξῆς δύο ἰδιότητες :

— Βλέπει τήν πλευρά ΒΓ ὑπό γωνία 120° καί συνεπῶς ἀνήκει σέ γνωστό τόξο $\widehat{B\Gamma}$ πού ἔχει χορδή τή ΒΓ.

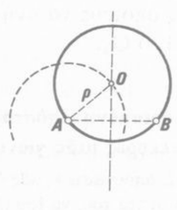
— Βλέπει τήν πλευρά ΓΑ ὑπό γωνία 120° καί συνεπῶς ἀνήκει σέ γνωστό τόξο $\widehat{A\Gamma}$ πού ἔχει χορδή τήν ΑΓ.

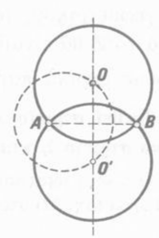
Τό Ζ λοιπόν θά εἶναι τό κοινό σημεῖο τῶν δύο τόξων $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{A\Gamma}$ καί εἶναι μοναδικό (γιατί τό ἄλλο κοινό σημεῖο τους εἶναι τό Γ).

Εἶναι φανερό ὅτι δέν ὑπάρχει ἐξωτερικό σημεῖο τοῦ τριγώνου πού νά ἔχει τήν ἰδιότητα αὐτή (γιατί ἄν π.χ. ὑπῆρχε τό Ζ΄ καί ἦταν μέσα στή γωνία $\hat{A}$ ἤ στήν κατακορυφήν της, θά εἴχαμε $B\hat{Z}'\Gamma = B\hat{Z}'A + A\hat{Z}'\Gamma \Rightarrow B\hat{Z}'\Gamma < B\hat{Z}'A$).

3. Νά κατασκευαστεῖ κύκλος ὁ ὁποῖος νά ἔχει γνωστή ἀκτίνα ρ καί νά διέρχεται ἀπό δύο ὁρισμένα σημεῖα Α καί Β.

Λύση : Γιά νά κατασκευάσουμε κυκλ(Ο,ρ) γνωστῆς ἀκτίνας, θά πρέπει νά προσδιορίσουμε τό κέντρο του Ο. Παρατηροῦμε ὅμως ὅτι τό σημεῖο Ο θά ἀνήκει στή μεσοκάθετο





τοῦ τμήματος ΑΒ, γιατί ΟΑ = ΟΒ (= ρ) καί ἐπίσης θά ἀνήκει στόν κυκλ(Α,ρ) γιατί ΟΑ = ρ.

Εἶναι φανερό ὅτι θά ἔχουμε δύο λύσεις, μιά λύση ἤ καμιά λύση, ἄν τό τμῆμα ρ εἶναι μεγαλύτερο, ἴσο ἤ μικρότερο ἀπό τό γνωστό τμῆμα $AI = \frac{AB}{2}$.

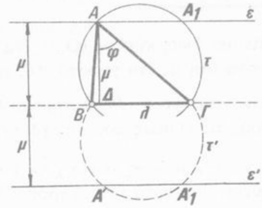
4. Νά κατασκευασθεῖ τρίγωνο ΑΒΓ στό ὁποῖο ἡ πλευρά ΒΓ νά εἶναι ἴση μέ δεδομένο μῆκος λ, τό ὕψος ΑΔ νά εἶναι ἴσο μέ δεδομένο μῆκος μ καί ἡ γωνία του $\hat{A}$ νά εἶναι ἴση μέ δεδομένη γωνία $\hat{\varphi}$.

Ἀνάλυση : Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι κατασκευάσαμε τό τρίγωνο ΑΒΓ, μποροῦμε νά θεωρήσουμε ὡς γνωστά σημεῖα τίς κορυφές του Β καί Γ (γιατί ΒΓ = λ). Ἔτσι ἀρκεῖ νά προσδιορίσουμε τή θέση τῆς κορυφῆς Α.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι:

—Ἐπειδή τό Α βλέπει τό τμῆμα ΒΓ ὑπό γνωστή γωνία ω, ἀνήκει (βλ. § 9.3,VI) στό γεωμ. τόπο G_1 ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπό δύο ἴσα τόξα τ καί τ΄ πού ἔχουν χορδή τή ΒΓ καί δέχονται ἐγγεγραμμένη γωνία $\hat{\varphi}$.

—Ἐπειδή τό Α ἀπέχει ἀπό τήν εὐθεία ΒΓ γνωστή ἀπόσταση μ, ἀνήκει (βλ. § 9.3,II) στό γεωμ. τόπο G_2 ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπό δύο εὐθεῖες ε καί ε΄ παράλληλες πρός τήν ε.



Συνεπῶς τό Α εἶναι ἕνα ἀπό τά σημεῖα τοῦ συνόλου $G_1 \cap G_2$.

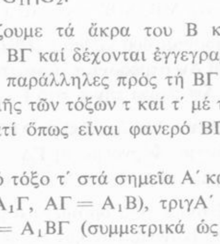
Κατασκευή: Παίρνουμε τμῆμα ἴσο μέ λ καί ὀνομάζουμε τά ἄκρα του Β καί Γ. Κατασκευάζουμε τά δύο τόξα τ καί τ΄ πού ἔχουν χορδή τή ΒΓ καί δέχονται ἐγγεγραμμένη γωνία $\hat{\varphi}$ (τόπος G_1) καί τίς δύο εὐθεῖες ε καί ε΄ πού εἶναι παράλληλες πρός τή ΒΓ σέ ἀπόσταση μ (τόπος G_2). Ἄν Α εἶναι ἕνα ἀπό τά σημεῖα τομῆς τῶν τόξων τ καί τ΄ μέ τίς εὐθεῖες ε καί ε΄, τό ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενο τρίγωνο (γιατί ὅπως εἶναι φανερό ΒΓ = λ, $B\hat{A}\Gamma = \hat{\varphi}$, ΑΔ = υ).

Ἄν ἡ ε τέμνει τό τόξο τ στά A, A_1 καί ἡ ε΄ τέμνει τό τόξο τ΄ στά σημεῖα Α΄ καί A'_1, ἔχουμε τριγ.$A_1B\Gamma$ = τρθγ.ΑΒΓ (γιατί ΒΓ = ΒΓ, ΑΒ = $A_1\Gamma$, ΑΓ = A_1B), τριγΑ΄ΒΓ = τριγΑΒΓ (συμμετρικά ὡς πρός τή ΒΓ) καί τριγ$A_1'B\Gamma$ = $A_1B\Gamma$ (συμμετρικά ὡς πρός τή ΒΓ). Ἔχουμε λοιπόν τό πολύ μιά λύση.

5. Νά κατασκευασθεῖ τετράπλευρο ΑΒΓΔ στό ὁποῖο οἱ πλευρές του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ νά εἶναι ἴσες μέ δεδομένα τμήματα λ, μ, ρ, σ ἀντιστοίχως καί οἱ δύο ἀπέναντι πλευρές του ΑΔ καί ΒΓ νά σχηματίζουν δεδομένη γωνία $\hat{\varphi}$.

Ἀνάλυση: Ὑποθέτουμε ὅτι κατασκευάσαμε τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ καί φέρνουμε ἀπό τό Β τό τμῆμα ΒΕ //= ΑΔ, ὁπότε

$E\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{I}\Gamma = \varphi$, ΑΒΕΔ = παραλληλόγραμμο.



Παρατηροῦμε ὅτι στό τρίγωνο ΕΒΓ ξέρουμε δύο πλευρές του (ΒΓ = μ, ΒΕ = σ) καί τήν περιεχόμενη γωνία τους. Δηλαδή τό ΕΒΓ εἶναι κατασκευάσιμο καί συνεπῶς μποροῦμε νά θεωρήσουμε ὡς γνωστά σημεῖα τά Ε,Β,Γ. Ἔτσι ἀρκεῖ νά ὁρίσουμε ὡς πρός τά σημεῖα αὐτά τίς δύο ἄλλες κορυφές Α καί Δ. Ἐπειδή ὅμως ΕΔ = λ καί ΓΔ = ρ, τό Δ θά εἶναι τομή τῶν δύο ἄλλων κύκλων (Ε,λ) καί (Γ,ρ). Τέλος γιά τόν προσδιορισμό τοῦ Α ἀρκεῖ νά φέρουμε ἀπό τό σημεῖο Β τμῆμα ΒΑ //= ΕΔ.

Ἡ κατασκευή καί ἡ ἀπόδειξη γίνονται τώρα εὔκολα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 25 - 31

9.10 ΑΣΚΗΣΕΙΣ *

1. Δίνεται ἕνας κύκλος (Ο,ρ). Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τῶν κέντρων τῶν κύκλων πού ἔχουν ἀκτίνα ἴση μέ ἕνα γνωστό εὐθ. τμῆμα α καί ἐφάπτονται ἐξωτερικά στόν κύκλο (Ο,ρ).

2. Δίνονται δύο σταθερά σημεῖα Α καί Ο. Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ συμμετρικοῦ τοῦ Α ὡς πρός τίς εὐθεῖες πού διέρχονται ἀπό τό 0.

3. Δίνεται μιά ὀρθή γωνία $\chi\hat{A}\psi$ καί δύο σημεῖα Β καί Γ πού κινοῦνται στίς πλευρές της ἀντίστοιχα κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε τό τμῆμα ΒΓ νά ἔχει ὁρισμένο μῆκος λ. Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ μέσου Μ τοῦ ΒΓ.

4. Δίδονται δύο ἴσοι κύκλοι (Κ,ρ) καί (Λ,ρ) .Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τῶν σημείων Μ πού ἔχουν τήν ἰδιότητα : ἄν φέρουμε τίς ἐφαπτόμενες ΜΑ, ΜΑ΄ πρός τόν (Κ,ρ) καί τίς ἐφαπτόμενες ΜΒ, ΜΒ΄ πρός τόν (Λ,ρ), νά εἶναι: $A\hat{M}A' = B\hat{M}B'$.

5. Δίδονται δύο κάθετες εὐθεῖες ε καί ε΄ καί ἕνα σταθερό σημεῖο Α. Δύο ἡμιευθεῖες Αχ καί Αψ στρέφονται γύρω στό Α ὥστε ἡ $\chi\hat{A}\psi = 90^{\circ}$. Ἄν ἡ Αχ τέμνει τήν ε στό Β καί ἡ Αψ τέμνει τήν ε΄ στό Γ, νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ μέσου Ν τοῦ ΒΓ.

6. Δίνεται ἕνα ἡμικύκλιο ΑΕΒ κύκλου (Ο,ρ) καί σημεῖο Γ, τό ὁποῖο κινεῖται στό ἡμικύκλιο. Φέρνουμε τή $ΓΔ \perp ΑΒ$. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος ἑνός σημείου Μ τῆς ΟΓ, ὅταν εἶναι : α) ΟΜ = ΓΔ ἤ β) ΟΜ = ΟΔ.

7. Δίνονται τρία ὁρισμένα σημεῖα Α,Β,Γ μέ ΑΒ < ΑΓ. Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τῶν σημείων Ρ πού ἱκανοποιοῦν καί τίς δύο συνθῆκες : ΡΒ = ΡΓ καί ΡΑ < ΑΓ.

8. Δίνονται δύο ὁρισμένα σημεῖα Α, Β. Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τῶν σημείων Ρ πού ἱκανοποιοῦν καί τίς δύο συνθῆκες : $ΑΡ \leq ΑΒ$ καί $ΡΑ \geq ΡΒ$.

9. Δίνεται ἕνας κύκλος (Ο,ρ) καί ἡ ἐφαπτομένη του σ' ἕνα ὁρισμένο σημεῖο του Β. Ἕνα σημεῖο Α κινεῖται στήν ε. Ἀπό τό Α φέρνουμε τήν ἄλλη ἐφαπτομένη ΑΓ τοῦ κύκλου. α) Ἄν Η τό ὀρθόκεντρο τοῦ τριγ. ΑΒΓ, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ΟΒΗΓ εἶναι ρόμβος. β) Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ Η. γ) Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ περικέντρου τοῦ τριγΑΒΓ, ἀφοῦ δειχθεῖ πρῶτα ὅτι τοῦτο εἶναι τό μέσο τοῦ ΑΟ. δ) Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ ἐγκέντρου τοῦ τριγ.ΑΒΓ.

10. Ἀπό ἕνα κινητό σημεῖο Ρ τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε εὐθεῖες παράλληλες πρός τίς πλευρές ΑΓ καί ΑΒ οἱ ὁποῖες τέμνουν τίς ΑΒ καί ΑΓ στά σημεῖα Δ καί Ε ἀντιστοίχως. Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ μέσου Μ τοῦ ΔΕ.

11. Δίνονται δύο ὁρισμένα σημεῖα Α,Β καί ἕνας κύκλος (Ο,ρ). Ἀπό ἕνα κινητό σημεῖο Γ τοῦ κύκλου φέρνουμε τμῆμα ΓΔ / / = ΑΒ. Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ Δ.

12. Δίνεται ἕνα ἡμικύκλιο κέντρου Ο καί διαμέτρου ΑΔ = 2ρ. Δύο σημεῖα Β,Γ κινοῦνται στό ἡμικύκλιο ἔτσι, ὥστε $B\hat{O}Γ = 90^{\circ}$. Ὀνομάζουμε Ν τό σημεῖο πού τέμνονται οἱ ΑΒ καί ΓΔ καί Μ τό σημεῖο πού τέμνονται οἱ ΑΓ, ΒΔ. α) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ γωνίες ΑΝΔ καί ΑΜΔ εἶναι σταθεροῦ μέτρου. β) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό Μ εἶναι τό ὀρθόκεντρο τοῦ τριγώνου ΑΝΔ. γ) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ ΜΝ εἶναι κάθετη στήν ΑΔ. δ) Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ Μ καί τοῦ Ν. ε) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ΜΝ ἔχει σταθερό μῆκος.

13. Δίνεται ἕνας κύκλος (Ο,ρ) καί ἕνα σταθερό σημεῖο του Α. Γωνία $\chi\hat{A}\psi$ ὁρισμένου μέτρου $\hat{\varphi}$ «στρέφεται» γύρω στό Α καί οἱ πλευρές της τέμνουν τόν κύκλο στά Β καί Γ. Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. α) Τοῦ μέσου Μ τοῦ τμήματος ΒΓ. β) Τῆς κορυφῆς Δ τοῦ παρ/μου ΑΒ ΔΓ. γ) Τοῦ περικέντρου Ω τοῦ τριγώνου ΒΓΔ.

14. Νά κατασκευαστεῖ τριγΑΒΓ τοῦ ὁποίου δίνονται τά στοιχεῖα:

α) Ἡ γωνία $\widehat{A} = \varphi$, ἡ πλευρά ΑΒ $= \lambda$ καί ἡ διχοτόμος ΑΔ $= \delta$.

β) Ἡ πλευρά ΒΓ $= \lambda$, ἡ πλευρά ΑΒ $= \mu$ καί ἡ διάμεσος ΑΜ $= \kappa$.

15. Νά κατασκευαστεῖ ἕνα τριγ.ΑΒΓ τοῦ ὁποίου δίνονται τά στοιχεῖα:

α) Οἱ πλευρές ΑΒ $= \lambda$, ΑΓ $= \mu$ καί ἡ διάμεσος ΑΜ $= \kappa$.

β) Οἱ τρεῖς διάμεσοί του.

16. Νά κατασκευαστεῖ ἕνα παρ/μο τοῦ ὁποίου δίδονται δύο διαδοχικές πλευρές καί μία διαγώνιός του.

17. Νά κατασκευαστεῖ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ τοῦ ὁποίου δίνονται:

α) Ἡ πλευρά ΒΓ $= \lambda$, ἡ γωνία $\widehat{A} = \widehat{\varphi}$ καί τό ἄθροισμα ΑΒ + ΑΓ $= \kappa$, ὅπου κ ἕνα δεδομένο τμῆμα.

β) Ἡ πλευρά ΒΓ $= \lambda$, ἡ γωνία $\widehat{A} = \widehat{\varphi}$ καί ἡ διαφορά ΑΒ — ΑΓ $= \mu$.

18. Νά κατασκευαστεῖ ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ τοῦ ὁποίου δίνονται:

α) Ἡ γωνία $\widehat{B} = \widehat{\varphi}$ καί τό ὕψος του ΒΒ′ $= \lambda$.

β) Ἡ πλευρά ΒΓ $= \lambda$ καί τό ὕψος του ΒΒ′ $= \lambda$.

19. Νά κατασκευαστεῖ ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1$ ὀρθ.) τοῦ ὁποίου δίνονται:

α) Ἡ διάμεσος ΑΜ $= \lambda$ καί μία κάθετη πλευρά.

β) Ἡ διάμεσος ΑΜ $= \lambda$ καί τό ὕψος του ΑΔ $= \mu$.

20. Δίνονται τρία σημεῖα Ρ,Α,Β. Νά χαράξετε ἀπό τό Ρ μιά εὐθεία πού νά ἰσαπέχει ἀπό τό Α καί Β.

21. Δίνεται ἕνα τριγ. ΑΒΓ. Στίς πλευρές ΑΒ καί ΑΓ ἀντίστοιχα νά βρεθοῦν τά σημεῖα Μ καί Ν, ὥστε ΑΜ $=$ ΜΝ $=$ ΝΓ.

22. Δίνονται δύο κύκλοι (Κ), (Λ) πού τέμνονται στά Α καί Β. Νά φέρετε ἀπό τό Α μιά εὐθεία πού νά τέμνει τούς κύκλους στά Ε καί Ζ, ὥστε ΑΕ + ΑΖ $= \lambda$, ὅπου λ ἕνα γνωστό τμῆμα.

23. Δίνονται ἕνας κύκλος (Ο,ρ) καί μία εὐθεία ε. Νά βρεθεῖ πάνω στήν ε ἕνα σημεῖο Α, ὥστε, ἄν φέρουμε τήν ἐφαπτομένη ΑΒ στόν (Ο,ρ). νά εἶναι ΑΒ $= \lambda$, ὅπου λ ἕνα γνωστό εὐθ. τμῆμα.

24. Δίνεται ἕνας κύκλος (Ο,ρ), ἕνα σημεῖο Α καί ἕνα σημεῖο Θ ἐσωτερικό τοῦ κδισκ (Ο,ρ). Νά φέρετε μιά χορδή ΒΓ, ὥστε τό τριγΑΒΓ νά ἔχει τό Θ γιά βαρύκεντρο.

25. Δίδονται δύο παρ/λες εὐθεῖες ε_1, ε_2, ἕνα σημεῖο Α τῆς ε_1 καί ἕνα σημεῖο Ο ἔξω ἀπό τή ζώνη τῶν ε_1, ε_2. Νά φέρετε ἀπό τό Ο μιά εὐθεία πού νά τέμνει τίς ε_1, ε_2 στά Β καί Γ, ὥστε νά εἶναι ΑΒ $=$ ΑΓ.

26. Νά κατασκευαστεῖ ἕνας κύκλος, πού νά ἔχει ἀκτίνα ἕνα δεδομένο τμῆμα λ καί νά ἐφάπτεται σέ μιά δεδομένη εὐθεία καί ἕνα δεδομένο κύκλο (Ο,ρ).

27. Νά κατασκευαστεῖ ἕνα τριγΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα:

α) Τήν πλευρά ΒΓ $= \mu$, τή γωνία $\widehat{A} = \widehat{\varphi}$ καί τή διάμεσο ΑΜ $= \lambda$.

β) Τήν πλευρά ΒΓ $= \mu$, τή γωνία $\widehat{A} = \widehat{\varphi}$ καί τή διάμεσο ΒΝ $= \lambda$.

γ) Τήν πλευρά ΒΓ $= \mu$, τή γωνία $\widehat{A} = \widehat{\varphi}$ καί τήν ἀκτίνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου του κύκλου.

28. Νά κατασκευαστεῖ ἕνα τριγΑΒΓ ἀπό τά στοιχεῖα :
α) Τό ὕψος ΑΔ = λ, τή διχοτόμο ΑΕ = μ καί τή διάμεσο ΑΜ = κ.
β) Τό ὕψος ΑΔ = λ, τή διχοτόμο ΑΕ = μ καί τήν ἀκτίνα R τοῦ περιγεγραμμένου του κύκλου (Ο).

29. Νά κατασκευαστεῖ ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ πού οἱ πλευρές του ΑΒ, ΒΓ,ΓΔ,ΔΑ νά εἶναι ἴσες μέ δεδομένα τμήματα λ,μ,ν,κ, ἀντιστοίχως καί ἡ γωνία του Α νά εἶναι ἴση μέ δεδομένη γωνία φ.

30. Δίδονται μία εὐθεία ε, ἕνα σημεῖο της Α καί ἕνας κύκλος (Κ,ρ). Νά κατασκευαστεῖ ἕνας κύκλος πού νά ἐφάπτεται στήν ε στό Α καί νά ἐφάπτεται στόν (Κ,ρ).

31. Νά κατασκευαστεῖ ἕνα τετράγωνο ΑΒΓΔ ἀπό τά στοιχεῖα :
α) Τό ἄθροισμα τῆς πλευρᾶς καί τῆς διαγωνίου.
β) Ἡ ἀπόσταση τοῦ μέσου μιᾶς πλευρᾶς ἀπό μία διαγώνιο νά εἶναι δεδομένη λ.

9.11 ΑΣΚΗΣΕΙΣ **

32. Τριγώνου ΑΒΓ οἱ κορυφές Β,Γ εἶναι δύο ὁρισμένα σημεῖα καί ἡ κορυφή Α κινεῖται, ὥστε ἡ διάμεσος ΒΝ νά εἶναι ἴση μέ ἕνα ὁρισμένο τμῆμα λ. Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τῆς κορυφῆς Α.

33. Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) καί χορδή του ΑΒ. Σημεῖο Γ γράφει τόν κύκλο καί σέ κάθε θέση του πάνω στήν ΑΓ παίρνουμε τό σημεῖο Ρ ἔτσι, ὥστε ΑΡ = ΓΒ. Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ Ρ.

34. Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) καί μία διάμετρός του ΑΒ. Σημεῖο Γ γράφει τόν κύκλο καί φέρνουμε ΓΔ ⊥ ΑΒ. Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ ἐγκέντρου Ι τοῦ τριγΟΓΔ.

35. Ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἔχει τίς κορυφές του Α,Β,Γ τρία ὁρισμένα σημεῖα. Ἡ κορυφή του Δ κινεῖται ἔτσι, ὥστε ἡ πλευρά ΓΔ νά εἶναι ἴση μέ ὁρισμένο τμῆμα λ. Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. α) Τοῦ μέσου τῆς διαγωνίου ΒΔ, β) τοῦ μέσου τοῦ εὐθ. τμήματος ΕΖ πού ἑνώνει τά μέσα τῶν διαγωνίων.

36. Μέ κέντρο τήν κορυφή Α ἑνός δεδομένου ἰσοσκελοῦς τριγΑΒΓ καί μεταβλητή ἀκτίνα γράφουμε κύκλο. Ἀπό τά Β καί Γ φέρνουμε τίς ἐφαπτόμενες αὐτοῦ τοῦ κύκλου. Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ σημείου πού τέμνονται οἱ ἐφαπτόμενες αὐτές.

37. Δίνεται ἕνα τριγ.ΑΒΓ. Σημεῖο Μ κινεῖται στήν πλευρά ΑΒ. Στήν προέκταση τῆς ΑΓ (πρός τό Γ) καί γιά κάθε θέση τοῦ Μ παίρνουμε σημεῖο Ν, ὥστε ΓΝ = ΒΜ. Σχηματίζουμε τό παραλληλόγραμμο ΜΒΝΛ. Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ Λ.

38. Δίνονται δύο ἴσοι κύκλοι (Κ,ρ) καί (Λ,ρ). Νά βρεθεῖ ὁ γ.τ. τοῦ μέσου Ν τῶν τμημάτων πού ἑνώνουν ἕνα σημεῖο Α τοῦ (Κ,ρ) καί ἕνα σημεῖο Β τοῦ (Λ,ρ), ὥστε ΚΑ // ΛΒ.

39. Δίνεται ἕνας κύκλος (Ο,ρ), μιά διάμετρός του ΑΒ καί δύο σημεῖα Γ,Δ τοῦ ἑνός ἡμικυκλίου. Νά βρεθεῖ ἕνα σημεῖο Ρ τοῦ ἄλλου ἡμικυκλίου, ὥστε ἄν οἱ ΡΓ καί ΡΔ τέμνουν τήν ΑΒ στά Μ καί Ν, νά εἶναι τό ΜΝ ἴσο μέ ἕνα γνωστό τμῆμα λ.

40. Νά κατασκευαστεῖ ἕνας κύκλος, πού νά ἐφάπτεται σ' ἕναν κύκλο (Ο,ρ) σέ σημεῖο τοῦ Α καί σέ μιά εὐθεία ε.

41. Δίνεται μιά γωνία $\widehat{xO\psi}$ καί ἕνα σημεῖο Α τῆς Οχ. Νά βρεθεῖ ἕνα σημεῖο Ρ τῆς Οχ τέτοιο, ὥστε ἄν φέρουμε τήν ΡΒ ⊥ ΟΨ, νά εἶναι ΟΒ = ΡΑ.

42. Δίνεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ. Νά βρεθεῖ ἕνα σημεῖο Ρ στό ἐσωτερικό τοῦ τριγώνου τέτοιο ὥστε: $\text{Ρ}\widehat{\text{Β}}\text{Γ} = \text{Ρ}\widehat{\text{Γ}}\text{Α} = \text{Ρ}\widehat{\text{Α}}\text{Β}$.

43. Νά κατασκευαστεῖ ἕνα τρίγωνο, ὅταν γνωρίζουμε στό ἐπίπεδο τά σημεῖα:

α) τήν κορυφή Α, τό βαρύκεντρο Θ καί τό περίκεντρο Ο.

β) τήν κορυφή Β, τό βαρύκεντρο Θ καί τό ὀρθόκεντρο Η.

9.12 ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 9

1. Στό κεφάλαιο αὐτό ὁρίσαμε τήν ἔννοια τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου: **Κάθε σημειοσύνολο G πού ὁρίζεται ἀπό μία ἰδιόνητα Ι τῶν στοιχείων του.**
   Ἕνα σύνολο G θά εἶναι γ.τ. τῶν σημείων πού ἔχουν τήν ἰδιότητα Ι, τότε καί μόνο τότε, ὅταν:
   — Κάθε σημεῖο πού ἔχει τήν ἰδιότητα Ι ἀνήκει στό G.
   — Κάθε σημεῖο πού ἀνήκει στό G ἔχει τήν ἰδιότητα Ι.

2. Βασικοί γεωμετρικοί τόποι εἶναι:
   — Ὁ κύκλος (Ο,ρ).
   — Δύο παράλληλες εὐθεῖες.
   — Ἡ μεσοκάθετος ἑνός τμήματος.
   — Ἡ διχοτόμος γωνίας.
   — Ἡ μεσοπαράλληλη δύο παραλλήλων.
   — Τό τόξο.

3. Γιά τήν εὕρεση ἑνός γεωμετρικοῦ τόπου: α) Θεωροῦμε ἕνα σημεῖο Μ μέ τήν ἰδιότητα Ι. β) Ἀνακαλύπτουμε γιά τό Μ μιά ἰδιότητα βασικοῦ γ.τ. γ) Κατασκευάζουμε αὐτή τή γραμμή.

4. Οἱ γεωμετρικοί τόποι χρειάζονται γιά τόν προσδιορισμό σημείων, πού βρίσκονται στή τομή δύο τόπων.

5. Γιά τή κατασκευή ἑνός σχήματος ἀκολουθοῦμε τά μέρη: Ἀνάλυση, κατασκευή, ἀπόδειξη καί διερεύνηση.

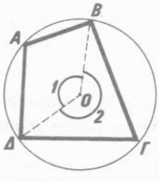
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10ο

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΚΑΙ ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

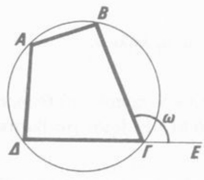
10.1. Τό ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο.

Ὁρισμός : Ἕνα τετράπλευρο πού οἱ κορυφές του εἶναι σημεῖα ἑνός κύκλου λέγεται ἐγγεγραμμένο στόν κύκλο αὐτό.

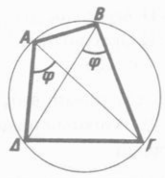
Ἄς θεωρήσουμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένο σέ κυκλ(Ο,ρ). Ἐπειδή οἱ ἀπέναντι γωνίες του εἶναι ἐγγεγραμμένες καί βαίνουν σέ δύο τό-



Σχ. 1



Σχ. 2



Σχ.3

ξα τῆς ἴδιας χορδῆς, ἔχουν ἄθροισμα 180° (γιατί π.χ. οἱ γωνίες $\hat{A}$ καί $\hat{\Gamma}$, βλ. σχ. 1, βαίνουν στά τόξα $\overset{\frown}{B\Gamma\Delta}$ καί $\overset{\frown}{BA\Delta}$ καί οἱ ἀντίστοιχες ἐπίκεντρες $\hat{O}_2$ καί $\hat{O}_1$ τῶν τόξων αὐτῶν ἔχουν ἄθροισμα 360°). Τότε κάθε ἐξωτερική γωνία τοῦ τετραπλεύρου θά εἶναι ἴση μέ τήν ἀπέναντί της ἐσωτερική, γιατί θά εἶναι καί οἱ δυό παραπληρωματικές τῆς ἴδιας γωνίας. Ἔτσι π.χ. θά ἔχουμε $B\hat{\Gamma}E = \hat{A}$, γιατί (βλ. σχ. 2) $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180°$ καί $\hat{\omega} + \hat{\Gamma} = 180° \Rightarrow \hat{A} = \hat{\omega}$. Δείξαμε λοιπόν ὅτι :

I. Οἱ ἀπέναντι γωνίες ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου εἶναι παραπληρωματικές.

II. Κάθε ἐξωτερική γωνία ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ἰσοῦται μέ τήν ἀπέναντί της ἐσωτερική γωνία του.

Τέλος δύο ὁποιεσδήποτε διαδοχικές κορυφές τοῦ τετραπλεύρου εἶναι καί κορυφές δύο ἴσων ἐγγεγραμμένων γωνιῶν πού βαίνουν στό τόξο, τό τό ὁποῖο ὁρίζει ἡ ἀπέναντι πλευρά τους. Ἔτσι π.χ. οἱ γωνίες $\Delta\hat{A}\Gamma$ καί $\Delta\hat{B}\Gamma$

εἶναι ἴσες (βλ. σχ, 3). γιατί εἶναι καί οἱ δύο ἐγγεγραμμένες στό τόξο $\widehat{\Delta\Gamma}$. Δείξαμε λοιπόν ὅτι :

III. Κάθε πλευρά τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου φαίνεται ἀπό τίς δύο ἀπέναντι κορυφές του ὑπό ἴσες γωνίες.

Οἱ προτάσεις I, II, III ἀποτελοῦν τίς βασικές ἰδιότητες ἑνός ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου.

10.2. Τετράπλευρο ἐγγράψιμο σέ κύκλο.

Στήν § 7.5 εἴδαμε ὅτι ἀπό τρία μή συνευθειακά σημεῖα διέρχεται πάντοτε ἕνας κύκλος. Δέ συμβαίνει ὅμως τό ἴδιο καί γιά τέσσερα (μή συνευθειακά ἀνά τρία) σημεῖα. Ἔτσι δέν ὑπάρχει πάντοτε κύκλος πού νά διέρχεται ἀπό τίς τέσσερις κορυφές τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, δηλαδή ἕνα τετράπλευρο δέν εἶναι ἀπαραίτητα «ἐγγράψιμο» σέ κύκλο. Ἔτσι π.χ. κάθε παραλληλόγραμμο, πού δέν εἶναι ὀρθογώνιο, δέν εἶναι ἐγγράψιμο σέ κύκλο. Θά δοῦμε τώρα ὅτι κάθε μία ἀπό τίς παραπάνω ἰδιότητες I, II, III, εἶναι καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά εἶναι ἕνα τετράπλευρο ἐγγράψιμο σέ κύκλο.

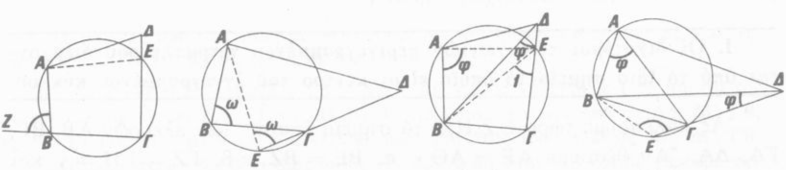
ΘΕΩΡΗΜΑ : Ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμο σέ κύκλο, ἄν ἀληθεύει μιά ἀπό τίς παρακάτω προτάσεις

I. Δύο ἀπέναντι γωνίες τοῦ τετραπλεύρου εἶναι παραπληρωματικές.

II. Μία ἐξωτερική γωνία τοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴση μέ τήν ἀπέναντί της ἐσωτερική.

III. Μία πλευρά τοῦ τετραπλεύρου φαίνεται ἀπό τίς δύο ἀπέναντι κορυφές της ὑπό ἴσες γωνίες.

Ἀπόδ. 1) Ὑποθέτοντας $\hat{B} + \hat{\Delta} = 180^o$ θά ἀποδείξουμε ὅτι ὑπάρχει κύκλος πού διέρχεται ἀπό τίς τέσσερις κορυφές τοῦ τετραπλεύρου. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ὁ κύκλος



Σχ. 4 Σχ. 5 Σχ. 6 Σχ. 7

πού διέρχεται ἀπό τά σημεῖα Α,Β,Γ δέ διέρχεται ἀπό τό Δ (βλ. σχ. 4). Ἄν καλέσουμε Ε τό σημεῖο τομῆς τοῦ κύκλου αὐτοῦ μέ τήν ἡμιευθεία ΓΔ, τό ΑΒΓΕ εἶναι ἐγγεγραμμένο καί ἄρα $\hat{B} + A\hat{E}\Gamma = 180^o$. Συγκρίνοντας αὐτή μέ τήν $\hat{B} + \hat{\Delta} = 180^o$ βρίσκουμε $A\hat{E}\Gamma = \hat{\Delta}$ δηλαδή μία ἐξωτερική γωνία τοῦ τριγώνου ΑΔΕ εἶναι ἴση μέ τήν ἀπέναντί της ἐξωτερική, πράγμα ἀδύνατο. Ἀπό τό σχῆμα 4 εἶναι φανερό ὅτι τό σημεῖο Ε δέ μπορεῖ νά βρίσκεται στήν ἡμιευθεία τήν ἀντικείμενη πρός τή ΓΔ, γιατί τότε θά εἴχαμε $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{E}}\Delta + \widehat{\Delta} = \widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\Delta} = 180^\circ$, δηλαδή τό ἄθροισμα δύο γωνιῶν τριγώνου ΑΕΔ θά ἦταν 180°, πράγμα ἀδύνατο.

II) Ὑποθέτουμε τώρα ὅτι $\mathrm{Z}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = \widehat{\Delta}$ (βλ. σχ. 4). Τότε ἡ φανερή ἀπό τό σχῆμα ἰσότητα $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} + \widehat{\mathrm{B}} = 180^\circ$ γράφεται $\widehat{\Delta} + \widehat{\mathrm{B}} = 180^\circ$. Ἔτσι τό παράπλευρο εἶναι ἐγγράψιμο γιατί ἔχει δύο ἀπέναντι γωνίες του παραπληρωματικές.

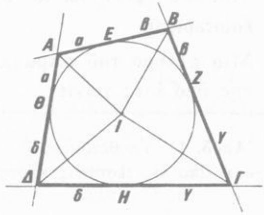
III) Ὑποθέτουμε ὅτι $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma = \mathrm{B}\widehat{\Delta}\Gamma$ καί ὅτι ὁ κύκλος πού διέρχεται ἀπό τά Α,Β,Γ δέ διέρχεται ἀπό τό σημεῖο Δ (βλ. σχ. 6). Ἄν καλέσουμε πάλι Ε τό σημεῖο τομῆς τοῦ κύκλου μέ τήν ἡμιευθεία ΓΔ, τό ΑΒΓΕ εἶναι ἐγγεγραμμένο καί ἄρα $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma = \mathrm{B}\widehat{\mathrm{E}}\Gamma$. Συγκρίνοντας αὐτή μέ τήν ὑπόθεσή μας βρίσκουμε $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{E}}\Gamma = \mathrm{B}\widehat{\Delta}\Gamma$, δηλαδή μία ἐξωτερική γωνία τοῦ ΒΕΔ εἶναι ἴση μέ τήν ἀπέναντί της ἐσωτερική, πράγμα ἀδύνατο. Ἀπό τό σχῆμα 7 εἶναι φανερό ὅτι τό σημεῖο Ε δέ μπορεῖ νά βρίσκεται στήν ἡμιευθεία τήν ἀντικείμενη πρός τή ΓΔ, γιατί τότε θά εἴχαμε $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{E}}\Gamma = 180^\circ - \widehat{\mathrm{A}} = 180^\circ - \widehat{\varphi}$ καί $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{E}}\Gamma + \widehat{\Delta} = 180^\circ$, δηλαδή τό ἄθροισμα δύο γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΒΕΔ θά ἦταν 180°, πράγμα ἀδύνατο.

Μέ τό θεώρημα αὐτό ἐργαζόμαστε συνήθως καί ὅταν θέλουμε ν' ἀποδείξουμε ὅτι τέσσερα σημεῖα εἶναι ὁμοκυκλικά.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Ι - ΙΙ

10.3. Ἰδιότητες περιγεγραμμένου τετραπλεύρου.

Ὁρισμός : Ἕνα τετράπλευρο πού ὅλες οἱ πλευρές του εἶναι ἐφαπτόμενες τοῦ ἴδιου κύκλου λέγεται **περιγεγραμμένο** στόν κύκλο αὐτό, ἐνῶ ὁ κύκλος λέγεται **ἐγγεγραμμένος** στό τετράπλευρο αὐτό.



Ἄν τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι περιγεγραμμένο στόν κυκλ(Ι,ρ), οἱ ἡμιευθεῖες ΑΙ, ΒΙ, ΓΙ, ΔΙ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{\mathrm{A}}$, $\widehat{\mathrm{B}}$, $\widehat{\Gamma}$, $\widehat{\Delta}$ ἀντιστοίχως, δηλαδή:

I. Οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν περιγεγραμμένου τετραπλεύρου διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο τό ὁποῖο εἶναι κέντρο τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Ἄς καλέσουμε τώρα Ε,Ζ,Η,Θ τά σημεῖα ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ. Ἄν θέσουμε $\mathrm{AE} = \mathrm{A\Theta} = \alpha$, $\mathrm{BE} = \mathrm{BZ} = \beta$, $\Gamma\mathrm{Z} = \Gamma\mathrm{H} = \gamma$ καί $\Delta\mathrm{H} = \Delta\Theta = \delta$, παρατηροῦμε ὅτι εἶναι

$$\mathrm{AB} + \Gamma\Delta = \mathrm{A}\Delta + \mathrm{B}\Gamma,$$

γιατί κάθε ἕνα ἀπό τά ἀθροίσματα αὐτά εἶναι ἴσο μέ $\alpha + \beta + \gamma + \delta$. Δείξαμε λοιπόν ὅτι :

II. Τά ἀθροίσματα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἑνός περιγεγραμμένου τετραπλεύρου εἶναι ἴσα.

Οἱ προτάσεις Ι καί ΙΙ ἀποτελοῦν τίς δύο βασικές ἰδιότητες τοῦ περιγεγραμμένου τετραπλεύρου.

10.4. Τετράπλευρο περιγράψιμο σέ κύκλο.

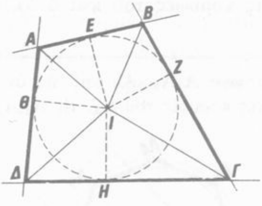
Ἄν δοθεῖ ἕνα τετράπλευρο, δέν ὑπάρχει ὑποχρεωτικά κύκλος πού νά ἐφάπτεται σέ ὅλες τίς πλευρές του, δηλαδή ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ δέν εἶναι ἀπαραίτητα «περιγράψιμο» σέ κύκλο. Ἔτσι π.χ. κάθε ὀρθογώνιο, πού δέν εἶναι τετράγωνο, δέν εἶναι περιγράψιμο σέ κύκλο. Θά ἀποδείξουμε ὅτι :

ΘΕΩΡΗΜΑ : Ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι περιγράψιμο σέ κύκλο, ἄν ἀληθεύει μία ἀπό τίς παρακάτω προτάσεις :

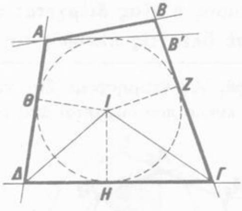
Ι. Οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

ΙΙ. Τά ἀθροίσματα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴσα.

Ἀπόδ. Ι) Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τέμνονται στό Ι (σχ. 8) καί ἄς καλέσουμε ΙΕ, ΙΖ, ΙΗ, ΙΘ τίς ἀποστάσεις τοῦ Ι ἀπό τίς πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ. Ἐπειδή τό Ι εἶναι σημεῖο τῆς κάθε διχοτόμου, ἔχουμε κατά σειρά τίς ἰσότητες ΙΕ = ΙΖ, ΙΖ = ΙΗ,



Σχ. 8



Σχ. 9

ΙΗ = ΙΘ, ΙΘ = ΙΕ ἀπό τίς ὁποῖες συμπεραίνουμε ὅτι τό Ι ἰσαπέχει ἀπό ὅλες τίς πλευρές. Ἔτσι ὁ κύκλος (Ι, ΙΕ) θά ἐφάπτεται σέ ὅλες τίς πλευρές.

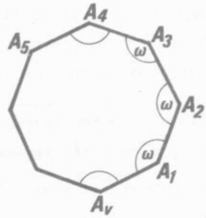
ΙΙ) Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ΑΒ + ΓΔ = ΑΔ + ΒΓ καί ἄς καλέσουμε Ι τό σημεῖο τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν $\hat{\Delta}$ καί $\hat{\Gamma}$ καί ΙΘ, ΙΗ, ΙΖ τίς ἀποστάσεις του ἀπό τίς ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ, (σχ. 9). Ἐπειδή ΙΘ = ΙΗ = ΙΖ, ὁ κυκλ(Ι,ΙΘ) ἐφάπτεται στίς τρεῖς πλευρές ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ. Ἄς ὑποθέσουμε ἀκόμη ὅτι ὁ κύκλος αὐτός δέν ἐφάπτεται στήν ΑΒ καί ἄς φέρουμε τήν ἐφαπτομένη ΑΒ′ ἀπό τό Α. Ἐπειδή τό ΑΒ′ΓΔ εἶναι περιγεγραμμένο, θά ἔχουμε καί ΑΒ′ + ΓΔ = ΑΔ + Β′Γ. Ἀφαιρώντας κατά μέλη αὐτή ἀπό τήν ἰσότητα τῆς ὑποθέσεως μας βρίσκουμε ΑΒ — ΑΒ′ = ΒΓ — Β′Γ ⇒ ΑΒ — ΑΒ′ = ΒΒ′ ⇒ ΑΒ = ΑΒ′ + ΒΒ′, πράγμα ἀδύνατο.

Εἴδαμε δηλαδή ὅτι κάθε μία ἀπό τίς ἰδιότητες Ι καί ΙΙ τῆς § 10.3, εἶναι καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά εἶναι ἕνα τετράπλευρο περιγράψιμο σέ κύκλο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 12 - 15

10.5. Κανονικά πολύγωνα.

Ὁρισμός. Ἕνα πολύγωνο πού ὅλες οἱ πλευρές του εἶναι ἴσες καί ὅλες οἱ γωνίες του εἶναι ἴσες λέγεται κανονικό πολύγωνο.



Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι, ἄν ἕνα κανονικό πολύγωνο $A_1A_2A_3...A_\nu$ ἔχει ν πλευρές, κάθε μιά ἀπό τίς γωνίες του θά εἶναι ἴση μέ

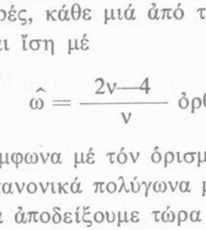
$$\hat{\omega} = \frac{2\nu-4}{\nu} \text{ ὀρθές}$$

Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό μας τό ἰσόπλευρο τρίγωνο καί τό τετράγωνο εἶναι κανονικά πολύγωνα μέ τρεῖς καί τέσσερις πλευρές ἀντιστοίχως.

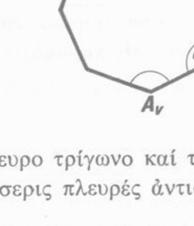
Θά ἀποδείξουμε τώρα τήν πρόταση :

Γιά κάθε κανονικό πολύγωνο ὑπάρχουν δύο ὁμόκεντροι κύκλοι ἀπό τούς ὁποίους ὁ ἕνας διέρχεται ἀπό ὅλες τίς κορυφές του καί ὁ ἄλλος ἐφάπτεται σέ ὅλες τίς πλευρές του.

Ἀπόδ. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα κανονικό πολύγωνο $A_1A_2...A_\nu$ καί ἄς ὀνομάσουμε (Ο,ρ) τόν κύκλο πού διέρχεται ἀπό τρεῖς διαδοχικές κορυφές του π.χ. τίς A_1,A_2,A_3 (σχ.



Σχ. 10



Σχ. 11

10). Θά δείξουμε ὅτι ὁ κύκλος αὐτός διέρχεται καί ἀπό τήν κορυφή A_4, δηλαδή ὅτι $OA_4 = \rho$. Τά τρίγωνα ὅμως A_1OA_2 καί A_3OA_4 εἶναι ἴσα γιατί ἔχουν $OA_2 = OA_3$, $A_1A_2 = A_3,A_4$ καί $A_1\hat{A}_2O = A_4\hat{A}_3O\left(= \frac{2\nu-4}{\nu} \text{ ορθ.} - \hat{\varphi}\right)$. Συνεπῶς $OA_4 = OA_1 = \rho$. Μέ τόν ἴδιο τρόπο δείχνεται ὅτι ὁ κυκλ(Ο,ρ) διέρχεται καί ἀπό τά σημεῖα $A_5,A_6...$.

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι οἱ πλευρές ἑνός κανονικοοῦ πολυγώνου εἶναι πάντοτε ἴσες χορδές ἑνός κυκλ(Ο,ρ). Τότε ὅμως τό Ο ἰσαπέχει ἀπ' αὐτές καί συνεπῶς, ἄν ὀνομάσουμε

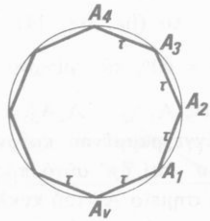
α τήν ἀπόσταση τοῦ Ο ἀπό τίς πλευρές, ὁ κύκλ.(Ο,α) ἐφάπτεται ὅλων τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου (σχ. 11).

Τό κέντρο τοῦ περιγεγραμμένου στό πολύγωνο κυκλ(Ο,ρ) λέγεται **κέντρο** τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου καί ἡ ἀκτίνα του ρ λέγεται **ἀκτίνα** τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου. Ἡ ἀκτίνα α τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου (δηλαδή ἡ ἀπόσταση τοῦ κεντρου Ο τοῦ πολυγώνου ἀπό τίς πλευρές του) λέγεται **ἀπόστημα** τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.

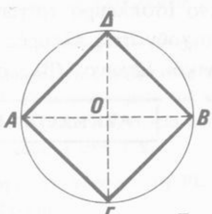
Εἶναι φανερό ὅτι τό κέντρο Ο ἑνός κανονικοῦ πολυγώνου βλέπει ὅλες τίς πλευρές του μέ τήν ἴδια γωνία. Ἡ γωνία αὐτή φ λέγεται **κεντρική γωνία** τοῦ πολυγώνου καί εἶναι ἴση μέ

$$\varphi = \frac{360^{\circ}}{\nu}$$

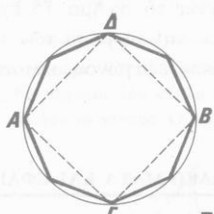
10.6. Ἄν ν σημεῖα χωρίζουν ἕνα κύκλο σέ ν ἴσα τόξα, τά σημεῖα αὐτά εἶναι κορυφές ἑνός κανονικοῦ πολυγώνου. Πραγματικά, ἄν τά σημεῖα A_1, $A_2,...,A_\nu$ χωρίζουν ἕνα κυκλ(Ο,ρ) σέ ν τόξα ἴσα μέ τ, ὅλες οἱ πλευρές τοῦ πολυγώνου A_1, $A_2,...,A_\nu$ εἶναι ἴσες (γιατί εἶναι χορδές ἴσων τόξων) καί ὅλες οἱ γωνίες του εἶναι ἴσες (γιατί κάθε μιά βαίνει σέ ν—2 τόξα ἴσα μέ τ).



Καταλαβαίνουμε λοιπόν ὅτι γιά νά κατασκευάσουμε ἕνα κανονικό πολύγωνο μέ ν πλευρές ἀρκεῖ νά χωρίσουμε ἕνα κύκλο σέ ν ἴσα μέρη[1]. Ἔτσι



Σχ. 12



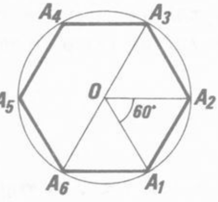
Σχ. 13

π.χ. γιά νά κατασκευάσουμε κανονικό τετράπλευρο (δηλαδή τετράγωνο) ἀρκεῖ νά χωρίσουμε τόν κύκλο σέ 4 ἴσα μέρη καί αὐτό γίνεται ἄν φέρουμε

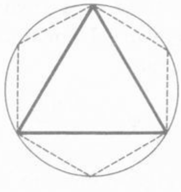
1. Ὁ χωρισμός ἑνός κύκλου σέ ν ἴσα μέρη μέ κανόνα καί διαβήτη δέν εἶναι δυνατός γιά ὁποιαδήποτε τιμή τοῦ ν. Ἔτσι π.χ. δέν μποροῦμε νά χωρίσουμε μέ κανόνα καί διαβήτη τόν κύκλο σέ 7 ἴσα μέρη, δηλαδή δέν κατασκευάζεται μέ κανόνα καί διαβήτη κανονικό ἑπτάγωνο.

δύο καθέτους διαμέτρους AB καί ΓΔ (βλ. σχ. 12). Ἄν πάρουμε τώρα καί τά μέσα τῶν τόξων πού ἀντιστοιχοῦν στίς πλευρές τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου κατασκευάζουμε κανονικό ὀκτάγωνο (βλ. σχ. 13). Συνεχίζοντας μέ τόν ἴδιο τρόπο μποροῦμε νά κατασκευάσουμε 16γωνο κ.ο.κ.

Θά δοῦμε τώρα πῶς μποροῦμε νά κατασκευάσουμε ἕνα κανονικό ἑξάγωνο, δηλαδή πῶς μποροῦμε νά χωρίσουμε ἕνα κύκλο σέ ἕξη ἴσα μέρη. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἔχουμε ἐγγράψει ἕνα κανονικό ἑξάγωνο $A_1, A_2, \dots, A_6$ σέ



Σχ. 14



Σχ. 15

Σχ. 16

ἕνα κύκλο (βλ. σχ. 14). Ἐπειδή ἡ κεντρική γωνία τοῦ ἑξαγώνου εἶναι $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, τά τρίγωνα $A_1OA_2, A_2OA_3, \dots, A_6OA_1$ εἶναι ἰσόπλευρα καί συνεπῶς $A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_6A_1 = \rho$. Βλέπουμε λοιπόν ὅτι **ἡ πλευρά ἑνός ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι ἴση μέ τήν ἀκτίνα τοῦ κύκλου** καί ἀπ' αὐτό προκύπτει ἡ ἑξῆς κατασκευή : Παίρνουμε ἕνα ὁρισμένο σημεῖο A_1 τοῦ κυκλ (O,ρ) καί γράφουμε κύκλο (A_1, ρ), ὀνομάζοντας A_2 τό σημεῖο στό ὁποῖο αὐτός τέμνει τόν (O,ρ). Μετά γράφουμε νέο κύκλο (A_2,ρ) ὀνομάζοντας A_3 τό σημεῖο στό ὁποῖο αὐτός τέμνει τόν (O,ρ),...κ.ο.κ. Ἑνώνοντας τίς μή διαδοχικές κορυφές τοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου ὅπως δείχνει τό σχῆμα 15 ἔχουμε ἐγγεγραμμένο ἰσόπλευρο τρίγωνο, ἐνῶ παίρνοντας καί τά μέσα τῶν τόξων πού ἀντιστοιχοῦν στίς πλευρές τοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου κατασκευάζουμε κανονικό 12γωνο (βλ. σχ. 16).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 16 - 18

10.7 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

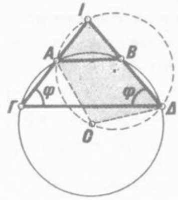
1. **Νά δειχθεῖ ὅτι κάθε ἐγγεγραμμένο παραλληλόγραμμο εἶναι ὀρθογώνιο.**

Λύση : Ἐπειδή τό ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο, θά ἔχουμε $\hat{A} = \hat{\Gamma} = \hat{\varphi}$, καί ἐπειδή εἶναι ἐγγεγραμμένο θά ἔχουμε, $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$. Ἄρα βρίσκουμε

$\hat{\varphi} + \hat{\varphi} = 180^\circ \Rightarrow 2\hat{\varphi} = 180^\circ \Rightarrow \hat{\varphi} = 90^\circ$.

δηλαδή τό παραλληλόγραμμό μας εἶναι ὀρθογώνιο, γιατί ἔχει μία γωνία του ὀρθή.

2. **Δίνονται δύο παράλληλες χορδές ΑΒ καί ΓΔ ἑνός κύκλ(Ο,ρ). Ἂν οἱ ΑΓ καί ΒΓ τέμνονται στό Ι, νά δείξετε ὅτι τά τέσσερα σημεῖα Α,Ο,Δ,Ι εἶναι ὁμοκυκλικά.**



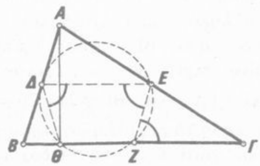
Λύση : Ἀρκεῖ ν' ἀποδείξουμε ὅτι τό τετράπλευρο ΑΟΔΙ εἶναι ἐγγράψιμο, δηλαδή ὅτι

$$\widehat{AI\Delta} + \widehat{AO\Delta} = 180^\circ.$$

Τό τραπέζιο ΑΒΔΓ εἶναι ἰσοσκελές (ἀφοῦ $\overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{B\Delta}$ καί ΑΓ = ΒΔ) καί ἄρα $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = \varphi$. Ἔτσι καί τό τρίγωνο ΓΙΔ εἶναι ἰσοσκελές καί συνεπῶς ἔχουμε $\hat{I} = 180^\circ - 2\hat{\varphi}$ (I). Ἡ γωνία $\widehat{AO\Delta}$ εἶναι ἐπίκεντρη τοῦ τόξου $\overset{\frown}{A\Delta}$ καί $\widehat{AO\Delta} = 2\widehat{A\Gamma\Delta} = 2\hat{\varphi}$ (II). Προσθέτοντας τίς (I) καί (II) βρίσκπυμε $\hat{I} + \widehat{AO\Delta} = 180^\circ$.

3. **Νά δειχθεῖ ὅτι ὁ κύκλος πού διέρχεται ἀπό τά μέσα τῶν τριῶν πλευρῶν ἑνός τριγώνου ΑΒΓ διέρχεται καί ἀπό τά ἴχνη τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου.**

Λύση : Θεωροῦμε τά μέσα Δ,Ε,Ζ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ καί τόν κύκλο πού διέρχεται ἀπό τά τρία σημεῖα αὐτά. Γιά νά δείξουμε ὅτι ὁ κύκλος αὐτός διέρχεται ἀπό τό ἴχνος ἑνός ὕψους, π.χ. ἀπό τό ἴχνος Θ τοῦ ὕψους ΑΘ, πρέπει ν' ἀποδείξουμε ὅτι τό τετράπλευρο ΔΕΖΘ εἶναι ἐγγράψιμο καί ἀρκεῖ γι' αὐτό νά δείξουμε π.χ. ὅτι



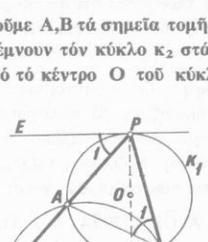
$$E\hat{Z}\Gamma = E\hat{\Delta}\Theta.$$

Ἐπειδή ΔΕ // ΒΓ, θά εἶναι $E\hat{Z}\Gamma = \Delta\hat{E}Z$ (I) Ἀκόμη, ἐπειδή τό τετράπλευρο ΔΕΖΘ εἶναι ἰσοσκελές τραπέζιο (βλ. ἄσκ. 8 § 6.13) θά εἶναι καί $E\hat{\Delta}\Theta = \Delta\hat{E}Z$ (II). Ἀπό τή σύγκριση τῶν (I) καί (II) προκύπτει ἡ ἰσότητα πού ζητοῦμε.

Ὁμοίως ἀποδεικνύουμε ὅτι ὁ κύκλος διέρχεται καί ἀπό τά ἴχνη τῶν ἄλλων δύο ὑψῶν.

4. **Θεωροῦμε δύο τεμνόμενους κύκλους κ_1 καί κ_2 καί καλοῦμε Α,Β τά σημεῖα τομῆς τους. Ἂν Ρ εἶναι ἕνα σημεῖο τοῦ κύκλου κ_1 καί οἱ ΡΑ, ΡΒ τέμνουν τόν κύκλο κ_2 στά Γ καί Δ, νά δειχθεῖ ὅτι ἡ εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τό Ρ καί ἀπό τό κέντρο Ο τοῦ κύκλου κ_1 εἶναι κάθετη στή ΓΔ.**

Λύση : Ἂν φέρουμε τή ΡΕ ἐφαπτομένη τοῦ κ_1, ἔχουμε



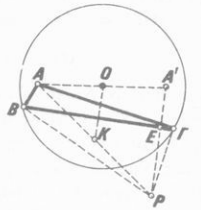
$$\hat{P}_1 = \hat{B}_1 \qquad \text{(I)}$$

Ἀπό τό ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΔΓ ἔχουμε καί

$$\hat{\Gamma} = \hat{B}_1 \qquad \text{(II)}$$

Συγκρίνοντας τίς (I) καί (II) βρίσκουμε ὅτι $\hat{P}_1 = \hat{\Gamma}$, δηλ. ΡΕ // ΓΔ. Ἀφοῦ λοιπόν ἡ ΡΟ εἶναι κάθετη στήν ἐφαπτομένη ΡΕ, θά εἶναι κάθετη καί στήν παράλληλη της ΓΔ.

5. Θεωροῦμε κυκλ(Ο,ρ), δύο σημεῖα του Β,Γ καί ἕνα σημεῖο Α ἐσωτερικό τοῦ κδισ(Ο,ρ), Στά σημεῖα Β καί Γ φέρνουμε εὐθεῖες κάθετες στίς ΑΒ καί ΑΓ, οἱ ὁποῖες τέμνονται στό Ρ καί ἀπό τό Ρ φέρνουμε στή χορδή ΒΓ εὐθεία κάθετη ἡ ὁποία τέμνει τήν ΑΟ στό Α΄. Νά δειχθεῖ ὅτι ΟΑ = ΟΑ΄.

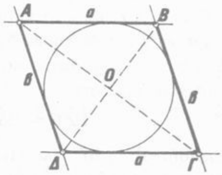


Λύση : Ἐπειδή $A\widehat{B}P + A\widehat{\Gamma}P = 90^o + 90^o = 180^o$, τό τετράπλευρο ΑΒΡΓ εἶναι ἐγγράψιμο καί κέντρο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του εἶναι τό μέσο Κ τῆς ΑΡ (γιατί $\Gamma K = \frac{AP}{2} = BK$). Ἔτσι ἡ ΟΚ εἶναι διάκεντρος δύο κύκλων πού ἔχουν κοινή χορδή τή ΒΓ καί ἄρα

$$OK \perp B\Gamma.$$

Στό τρίγωνο λοιπόν ΡΑΑ΄ ἡ ΚΟ διέρχεται ἀπό τό μέσο τῆς ΑΡ καί εἶναι παράλληλη πρός τή ΡΑ΄ $\Rightarrow$ ΟΑ = ΟΑ΄.

6. Νά δειχθεῖ ὅτι κάθε περιγεγραμμένο παραλληλόγραμμο εἶναι ρόμβος καί οἱ διαγώνιοί του διέρχονται ἀπό τό κέντρο τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.



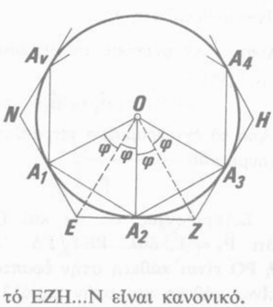
Λύση : Θεωροῦμε ἕνα περιγεγραμμένο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ καί θέτουμε ΑΒ = ΓΔ = α καί ΒΓ = ΑΔ = β. Ἐπειδή τό ΑΒΓΔ εἶναι περιγεγραμμένο, ἔχουμε

$AB + \Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma \Rightarrow 2\alpha = 2\beta \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow AB = B\Gamma$,

δηλαδή τό παραλληλόγραμμό μας εἶναι ρόμβος, γιατί ἔχει δύο διαδοχικές πλευρές του ἴσες.

Ἀφοῦ τό ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος, κάθε διαγώνιός του διχοτομεῖ τίς ἀπέναντι γωνίες του. Ἔτσι π.χ. ἡ ΒΔ διχοτομεῖ τίς γωνίες του $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Delta}$. Οἱ διχοτόμοι ὅμως τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Delta}$ διέρχονται ἀπό τό κέντρο Ο. Ἄρα ἡ ΒΔ διέρχεται ἀπό τό κέντρο Ο. Ὅμοια ἀπόδειξη γίνεται καί γιά τήν ΑΓ.

7. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἄν διαιρέσουμε ἕνα κύκλο σέ ν ἴσα μέρη μέ τά σημεῖα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ καί φέρουμε σ' αὐτά τίς ἐφαπτόμενες τοῦ κύκλου, σχηματίζεται κανονικό πολύγωνο (περιγεγραγμένο στόν κύκλο).



Λύση: Οἱ ἐφαπτόμενες στά $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ σχηματίζουν τό πολύγωνο ΕΖΗ...Ν πού θέλουμε νά ἀποδείξουμε ὅτι εἶναι κανονικό. Ἐπειδή $A_1\widehat{O}A_2 = A_2\widehat{O}A_3$ καί οἱ ΟΕ, ΟΖ εἶναι διχοτόμοι θά εἶναι :

$$A_1\widehat{O}E = E\widehat{O}A_2 = A_2\widehat{O}Z = Z\widehat{O}A_3 = \widehat{\varphi}$$

Τότε στό τρίγωνο ΕΟΖ ἡ OA_2 εἶναι διχοτόμος καί ὕψος ἄρα τό ΕΟΖ εἶναι ἰσοσκελές καί ἑπομένως : ΟΕ = ΟΖ. Ὅμοια : ΟΕ = ΟΖ = ΟΗ = ... = ΟΝ, ἄρα τό ΕΖΗ... Ν εἶναι ἐγγεγραμμένο. Καί ἀκόμα : $E\widehat{O}Z = Z\widehat{O}H = \ldots = 2\varphi$ δηλ. ΕΖ = ΖΗ = ... = ΝΕ ἄρα τό ΕΖΗ...Ν εἶναι κανονικό.

10.8 ΑΣΚΗΣΕΙΣ *

1. Κάθε ἐγγεγραμμένος ρόμβος εἶναι τετράγωνο.

2. Δύο κύκλοι τέμνονται στά σημεῖα Α καί Β. Ἀπό τά Α καί Β φέρνουμε εὐθεῖες πού τέμνουν τόν ἕναν κύκλο στά Γ καί Γ′ καί τόν ἄλλο στά Δ καί Δ′. Νά δειχθεῖ ὅτι ΓΓ′ // // ΔΔ′.

3. Δίνονται δύο κύκλοι πού τέμνονται στό Α καί Β. Φέρνουμε τήν εὐθεία ε πού διέρχεται ἀπό τό Β καί εἶναι κάθετη στήν ΑΒ καί ὀνομάζουμε Ε,Ζ τά σημεῖα, στά ὁποῖα ἡ ε τέμνει τούς κύκλους, καί Ρ τό μέσο τοῦ τμήματος ΕΖ. Φέρνουμε ἀκόμη μιά ὁποιαδήποτε εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τό Α καί ὀνομάζουμε Γ,Δ τά σημεῖα, στά ὁποῖα τέμνει τούς κύκλους. Ἄν Μ εἶναι τό μέσο τοῦ τμήματος ΓΔ, νά δείξετε ὅτι ΡΜ ⊥ ΓΔ.

4. Θεωροῦμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί δύο κύκλους πού διέρχονται ἀπό τίς κορυφές του Β καί Γ καί τέμνουν τίς πλευρές ΑΒ καί ΑΓ ὁ ἕνας στά σημεῖα Ε,Ζ καί ὁ ἄλλος στά σημεῖα Ε′, Ζ′. Νά δείξετε ὅτι ΕΖ // Ε′Ζ′.

5. Δίνεται ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένο σέ κύκλ(Ο,ρ) καί παίρνουμε τά σημεῖα Κ,Λ,Μ,Ρ συμμετρικά τοῦ κέντρου Ο ὡς πρός τίς πλευρές τοῦ ΑΒΓΔ. Νά δείξετε ὅτι τό ΚΛΜΡ εἶναι παραλληλόγραμμο.

6. Δίνεται μία γωνία $X\hat{O}\Psi$ καί ὁρισμένο σημεῖο Σ τῆς διχοτόμου της. Γράφουμε δύο κύκλους πού διέρχονται ἀπό τά σημεῖα Ο καί Σ καί τέμνουν τήν πλευρά ΟΧ στά σημεῖα Α καί Α′ καί τήν πλευρά ΟΨ στά σημεῖα Β καί Β′. Νά δείξετε ὅτι ΑΑ′ = ΒΒ′.

7. Ἀπό ἕνα σημεῖο Ι τοῦ ὕψους ΑΔ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε τά τμήματα ΙΚ καί ΙΛ κάθετα στίς πλευρές ΑΓ καί ΑΒ ἀντιστοίχως. Νά δείξετε ὅτι τό τετράπλευρο ΒΓ ΚΛ εἶναι ἐγγράψιμο σέ κύκλο.

8. Θεωροῦμε μία χορδή ΑΒ ἑνός κυκλ(Ο,ρ) καί τό μέσο Μ τοῦ κυρτογώνιπυ τόξου $\widehat{AB}$. Ἄν Γ καί Δ εἶναι δύο ὁποιαδήποτε σημεῖα τοῦ μή κυρτογώνιου τόξου $\widehat{AB}$ καί οἱ χορδές ΜΓ καί ΜΔ τέμνουν τήν ΑΒ στά σημεῖα Κ καί Λ, νά δείξετε ὅτι τό τετράπλευρο ΓΚΛΔ εἶναι ἐγγράψιμο.

9. Δίνεται μία διάμετρος ΑΒ ἑνός κύκλ(Ο,ρ) καί δύο χορδές ΑΓ καί ΑΔ τοῦ κύκλου ἑκατέρωθεν τῆς διαμέτρου ΑΒ. Ἄν ἡ ἐφαπτομένη στό Β τέμνει τίς προεκτάσεις τῶν ΑΓ καί ΑΔ στά σημεῖα Κ καί Λ, νά δείξετε ὅτι τά σημεῖα Γ,Δ,Κ,Λ εἶναι ὁμοκυκλικά.

10. Θεωροῦμε τά ὕψη ΒΔ καί ΓΕ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ. Ἀπό τό Ε φέρνουμε παράλληλη πρός τό ΒΔ, ἡ ὁποία τέμνει τήν ΑΓ στό Κ, καί ἀπὸ τό Δ φέρνουμε παράλληλη πρός τό ΓΕ, ἡ ὁποία τέμνει τήν ΑΒ στό Λ. Νά δείξετε ὅτι ΚΛ // ΒΓ.

11. Θεωροῦμε τρία ὁποιαδήποτε σημεῖα Δ,Ε,Ζ τῶν πλευρῶν ΒΓ,ΓΑ,ΑΒ ἐντός τριγώνου ΑΒΓ. Γράφουμε τόν κύκλο κ_1 πού διέρχεται ἀπό τά Α,Ζ,Ε, τόν κύκλο κ_2 πού διέρχεται ἀπό τά Ζ,Β,Δ καί τόν κύκλο κ_3 πού διέρχεται ἀπό τά Δ,Γ,Ε. Νά δείξετε ὅτι οἱ κύκλοι κ_1, κ_2, κ_3 διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

12. Σ' ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ περιγεγραμμένο στόν κύκλ(Ο,ρ) ἔχουμε πάντοτε $A\hat{O}B + \Gamma\hat{O}\Delta = 180^o$.

13. Θεωροῦμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ (μή περιγράψιμο) καί ὀνομάζουμε Κ,Λ,Μ,Ρ τά σημεῖα ὅπου τέμνονται οἱ διχοτόμοι τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν του. Νά δείξετε ὅτι τά σημεῖα αὐτά εἶναι ὁμοκυκλικά.

14. Ἡ διάμεσος περιγεγραμμένου τραπεζίου εἶναι ἴση μέ τό $\frac{1}{4}$ τῆς περιμέτρου του.

15. Σ' ἕνα ἰσοσκελές τραπέζιο ἡ διάμεσός του εἶναι ἴση μέ μία ἀπό τίς μή παράλληλες πλευρές του. Νά δείξετε ὅτι τό τραπέζιο εἶναι περιγράψιμο σέ κύκλο.

16. Σέ κύκλο (Ο,ρ) νά ἐγγραφεῖ κανονικό δωδεκάγωνο καί κανονικό εἰκοσιτετράγωνο.

17. Νά ὑπολογισθεῖ τό πλῆθος τῶν πλευρῶν ἑνός κανονικοῦ πολυγώνου τοῦ ὁποίου, ἡ γωνία εἶναι: α) 135^{o} β) 144^{o}.

18. Στίς πλευρές ἑνός κανονικοῦ ἑξαγώνου καί στό ἐξωτερικό του κατασκευάζουμε τετράγωνα. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ ἄλλες κορυφές τῶν τετραγώνων, σχηματίζουν κανονικό πολύγωνο.

10.9 ΑΣΚΗΣΕΙΣ **

19. Σ' ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένο στόν κυκλ(Ο,ρ) ὀνομάζουμε Θ τό σημεῖο στό ὁποῖο τέμνονται οἱ εὐθεῖες πού ἑνώνουν τά μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του. Ἄν εἶναι $K = \text{συμμ}_{\Theta}\, O$, νά δείξετε ὅτι:

α) Ἡ εὐθεία πού ἑνώνει τό μέσο μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τετραπλεύρου μέ τό Κ εἶναι κάθετη στήν ἀπέναντι πλευρά του.

β) Οἱ εὐθεῖες πού διέρχονται ἀπό τά μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου καί εἶναι κάθετες στίς ἀπέναντι πλευρές του διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

20. Θεωροῦμε κυκλ(Ο,ρ) καί δύο κάθετες χορδές του ΑΒ καί ΓΔ. Νά δείξετε ὅτι οἱ ἐφαπτόμενες τοῦ κύκλου στά Α,Β,Γ,Δ σχηματίζουν ἐγγράψιμο τετράπλευρο.

21. Ἡ ἐγγεγραμμένη περιφέρεια ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^{o}$) ἐφάπτεται στίς πλευρές του ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ στά σημεῖα Δ,Ε,Ζ. Ἄν Ι εἶναι ἡ προβολή τοῦ Ε στή ΔΖ, νά δείξετε ὅτι: α) Τό τρίγωνο ΕΙΔ εἶναι ἰσοσκελές β) Ἡ ΙΓ διχοτομεῖ τή γωνία $E\hat{I}\Delta$ γ) Ἡ γωνία $A\hat{I}\Gamma$ εἶναι ἴση μέ 90^{o}.

22. Δίνεται μία χορδή ΒΓ ἑνός κυκλ(Ο,ρ) καί οἱ ἐφαπτόμενες ε_1 καί ε_2 στά ἄκρα της, Ἀπό ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τῆς ΒΓ φέρνουμε κάθετη στήν ΟΜ, ἡ ὁποία τέμνει τίς ε_1 καί ε_2 στά σημεῖα Ε καί Ζ. Νά δείξετε ὅτι ΕΜ = ΜΖ.

23. Ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένο σέ κυκλ(Ο,ρ) ἔχει κάθετες διαγωνίους πού τέμνονται στό Ι. Ἄν Κ,Λ,Μ,Ρ εἶναι οἱ προβολές τοῦ Ι στίς πλευρές τοῦ ΑΒΓΔ, νά δείξετε ὅτι τό ΚΛΜΡ εἶναι ἐγγράψιμο καί περιγράψιμο.

24. Οἱ πλευρές ΑΒ καί ΓΔ ἑνός ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται στό Ε καί οἱ πλευρές του ΑΔ καί ΒΓ τέμνονται στό Ζ. Φέρνουμε τή διχοτόμο τῆς γωνίας $\hat{E}$ πού τέμνει τίς πλευρές ΒΓ,ΑΔ στά σημεῖα Κ,Μ καί τή διχοτόμο τῆς $\hat{Z}$ πού τέμνει τίς πλευρές ΓΔ καί ΑΒ στά σημεῖα Λ,Ρ. Νά δείξετε ὅτι:

α) Οἱ διχοτόμοι τῶν $\hat{E}$ καί $\hat{Z}$ τέμνονται καθέτως.

β) Τό τετράπλευρο ΚΛΜΡ εἶναι ρόμβος.

25. Θεωροῦμε ἕνα ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ καί γράφουμε τόξα πού ἔχουν χορδές τίς πλευρές του καί ἀνά δύο διαδοχικά τέμνονται σέ σημεῖα Κ,Λ,Μ,Ρ πού βρί-

σκονται ὅλα μέσα (ἤ ἔξω) στό τετράπλευρο. Νά δείξετε ὅτι τά σημεῖα αὐτά εἶναι ὁμοκυκλικά.

26. Θεωροῦμε γωνία $X\hat{O}\Psi$,τή διχοτόμο της ΟΔ καί ἕνα σημεῖο Ρ ἐσωτερικό τῆς γωνίας $\Delta\hat{O}\Psi$. Ἄν Α,Β,Γ εἶναι οἱ προβολές τοῦ Ρ στίς ἡμιευθεῖες ΟΔ,ΟΧ,ΟΨ, νά δείξετε ὅτι :

α) Τά σημεῖα Ο,Β,Α,Ρ,Γ εἶναι ὁμοκυκλικά.

β) Τά τμήματα ΑΒ καί ΑΓ εἶναι ἴσα.

27. Δύο κύκλοι κ_1 καί κ_2 μέ κέντρα Κ καί Λ τέμνονται στά Α καί Β. Ἄν οἱ ἀκτίνες ΚΑ καί ΛΑ τέμνουν τούς κύκλους κ_2 καί κ_1 στά σημεῖα Δ καί Γ, νά δείξετε ὅτι τά σημεῖα Γ,Κ,Β,Λ,Δ εἶναι ὁμοκυκλικά.

28. Νά δείξετε ὅτι τά ὕψη ἑνός τριγώνου ΑΒΓ διχοτομοῦν τίς γωνίες τοῦ ὀρθικοῦ τριγώνου του.

29. Δίνεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί οἱ ἐφαπτόμενες τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του στά Β καί Γ οἱ ὁποῖες τέμνονται στό Κ. Ἄν Δ,Ε,Ζ εἶναι οἱ προβολές τοῦ Κ στίς εὐθεῖες ΑΒ,ΒΓ,ΓΑ, νά δειχθεῖ ὅτι τό ΚΔΕΖ εἶναι παραλληλόγραμμο.

30. Θεωροῦμε μία εὐθεία ε καί δύο σημεῖα Α καί Β πρός τό ἴδιο μέρος της. Παίρνουμε τό σημεῖο $A' = \sigma\upsilon\mu\mu_\varepsilon A$ καί φέρνουμε τήν εὐθεία Α΄Β, πού τέμνει τήν ε στό Ν, καί τή μεσοκάθετο τοῦ τμήματος ΑΒ, πού τέμνει τήν ε στό Μ. Νά δείξετε ὅτι τά σημεῖα Α,Β,Μ,Ν εἶναι ὁμοκυκλικά.

31. Θεωροῦμε τά ὕψη ΑΑ΄,ΒΒ΄,ΓΓ΄ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ καί τά μέσα Ε,Ζ τῶν δύο ὑψῶν ΒΒ΄ καί ΓΓ΄. Νά δειχθεῖ ὅτι τό τρίγωνο Α΄ΕΖ εἶναι ἰσογώνιο μέ τό ΑΒΓ.

32. Θεωροῦμε ἕνα ἡμιεπίπεδο ἀκμῆς ε τρία (κυκλικά) τόξα τοῦ ἡμιεπιπέδου, πού διέρχονται ἀπό δύο ὁρισμένα σημεῖα Β καί Γ τῆς ε καί μία ἡμιευθεία ΒΧ τοῦ ἡμιεπιπέδου, πού τέμνει τά τόξα αὐτά στά σημεῖα Δ,Ε,Ζ. Ἄν οἱ ἐφαπτόμενες τῶν τόξων στά Δ,Ε,Ζ τέμνονται ἀνά δύο στά σημεῖα Κ,Λ.Ρ, νά δείξετε ὅτι τά σημεῖα Γ,Κ,Λ,Ρ εἶναι ὁμοκυκλικά.

33. Δίνεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο καί ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του. Νά δείξετε ὅτι οἱ προβολές τοῦ Μ στὶς πλευρές τοῦ τριγώνου βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία (εὐθεία τοῦ Simpson).

34. Δίνεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί ἕνα σημεῖο Μ τέτοιο ὥστε οἱ τρεῖς προβολές του στίς πλευρές τοῦ τριγώνου νά βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία. Νά δείξετε ὅτι τό Μ βρίσκεται στόν περιγεγραμμένο κύκλο τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

35. Νά δείξετε ὅτι σέ κάθε τρίγωνο τά μέσα τῶν τριῶν πλευρῶν του, τά ἴχνη τῶν τριῶν ὑψῶν του καί τά μέσα τῶν ἀποστάσεων τοῦ ὀρθόκεντρου ἀπό τίς κορυφάς του βρίσκονται στόν ἴδιο κύκλο (κύκλος τῶν 9 σημείων ἤ κύκλος τοῦ Euler). Νά δείξετε ἀκόμη ὅτι ὁ κύκλος αὐτός ἔχει κέντρο τό μέσο τοὺ εὐθύγραμμου τμήματος πού συνδέει τό ὀρθόκεντρο καί τό περίκεντρο τοῦ τριγώνου καί ἀκτίνα ἴση μέ τό μισό τῆς ἀκτίνας τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του.

36. Δίνεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, τό ὀρθόκεντρό του Η καί ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του. Νά δείξετε ὅτι, ὅταν τό Μ κινεῖται στόν περιγεγραμμένο κύκλο τοῦ ΑΒΓ, τό μέσο Ρ τοῦ τμήματος ΗΜ κινεῖται στόν κύκλο τοῦ Euler (βλ. ἄσκ. 35).

1. Ἕνα τετράπλευρο (ἤ γενικά ἕνα πολύγωνο) πού οἱ κορυφές του εἶναι σημεῖα ἑνός κυκλ. (O,ρ) λέγεται ἐγγεγραμμένο στόν κύκλο αὐτό. Σέ ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο ἔχουμε τίς ἰδιότητες :

   — **Οἱ ἀπέναντι γωνίες του εἶναι παραπληρωματικές.**

   — **Κάθε ἐξωτερική γωνία του εἶναι ἴση μέ τήν ἀπέναντί της ἐσωτερική γωνία του.**

   — **Κάθε πλευρά του φαίνεται ἀπό τίς δύο ἀπέναντί της κορυφές ὑπό ἴσες γωνίες.**

   Κάθε μία ἀπό τίς ἰδιότητες αὐτές εἶναι καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά εἶναι ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἐγγράψιμο σέ κύκλο.

2. Ἕνα τετράπλευρο (ἤ γενικά ἕνα πολύγωνο) πού οἱ πλευρές του ἐφάπτονται σέ ἕναν κύκλο (O,ρ) λέγεται **περιγεγραμμένο** στόν κύκλο αὐτό. Σέ ἕνα περιγεγραμμένο τετράπλευρο ἔχουμε τίς ἰδιότητες :

   — **Οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.**

   — **Τά ἀθροίσματα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του εἶναι ἴσα.**

   Κάθε μία ἀπό τίς ἰδιότητες αὐτές εἶναι καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά εἶναι ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ περιγράψιμο σέ κύκλο.

3. Ἕνα πολύγωνο πού ἔχει ὅλες τίς πλευρές του ἴσες καί ὅλες τίς γωνίες του ἴσες λέγεται **κανονικό.**

   Κάθε κανονικό πολύγωνο εἶναι ἐγγράψιμο σέ ἕνα κυκλ(O,ρ). Τό κέντρο καί ἡ ἀκτίνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου λέγονται ἀντίστοιχα **κέντρο** καί **ἀκτίνα** τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου. Ἐπίσης κάθε κανονικό πολύγωνο εἶναι καί περιγράψιμο σέ ἕνα ὁμόκεντρο κύκλο πού ἔχει ἀκτίνα τό **ἀπόστημά** του, δηλ. τήν ἀπόσταση τοῦ κέντρου Ο ἀπό τίς πλευρές.

   Ἡ κατασκευή ἑνός κανονικοῦ πολυγώνου μέ ν πλευρές ἀνάγεται στόν χωρισμό ἑνός κύκλου σέ ν ἴσα μέρη.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ I

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ [1]

Οἱ βασικές ἔννοιες τῆς Γεωμετρίας.

1. Ἡ Γεωμετρία θεμελιώνεται μέ τίς ἀρχικές ἔννοιες (ἔννοιες πού δεχόμαστε χωρίς ὁρισμό) καί τά ἀξιώματα (προτάσεις πού δεχόμαστε ὅτι ἀληθεύουν). Οἱ βασικές ἀρχικές ἔννοιες εἶναι:

— Τό σημεῖο.

— Ἡ εὐθεία.

— Τό ἐπίπεδο.

Τό σύνολο ὅλων τῶν σημείων λέγεται **«γεωμετρικός χῶρος»** καί τά ὑποσύνολά του λέγονται **«γεωμετρικά σχήματα»**.

Μέ τά ἀξιώματα πού δεχόμαστε γιά τήν εὐθεία Δ ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ εὐθεία ἔχει ἄπειρα σημεῖα. Κάθε σημεῖο Α μιᾶς εὐθείας ε ὁρίζει δύο **ἡμιευθεῖες μέ ἀρχή τό Α** (ἀντικείμενες ἡμιευθεῖες), ἐνῶ δύο σημεῖα Α καί Β τῆς εὐθείας ε ὁρίζουν ἕνα **εὐθύγραμμο τμῆμα μέ ἄκρα Α καί Β** πού ἔχει «φορέα» τήν ε.

Στά ἀξιώματα τοῦ ἐπιπέδου Δ δεχόμαστε ὅτι δύο σημεῖα του καθορίζουν μιά εὐθεία ε αὐτοῦ τοῦ ἐπιπέδου ἡ ὁποία ὁρίζει δύο **ἡμιεπίπεδα μέ ἀκμή ε.** Ἡ τομή δύο ἡμιεπιπέδων (τοῦ ἴδιου ἐπιπέδου), τά ὁποῖα ἔχουν διαφορετικές ἀκμές, λέγεται **κυρτή γωνία,** ἐνῶ ἡ ἕνωσή τους λέγεται **μή κυρτή γωνία.**

Τά ἐπίπεδα γεωματρικά σχήματα τά μελετᾶ ἡ «Ἐπιπεδομετρία».

2. Στήν Ἐπιπεδομετρία δεσπόζουν δύο γεωμετρικά σχήματα:

—Ἡ εὐθεία πού σχεδιάζεται μέ τόν κανόνα (χάρακα).

—Ὁ κύκλος*, πού σχεδιάζεται μέ τό διαβήτη.

Ἡ ἕνωση τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων, πού συνδέουν ν, διατετάγμένα καί μή συνευθειακά σημεῖα, λέγεται **τεθλασμένη γραμμή.** Μία τεθλασμένη γραμμή μπορεῖ νά εἶναι **κυρτή*** ἤ μή κυρτή.

Μιά κλειστή* τεθλασμένη γραμμή λέγεται καί **πολυγωνική γραμμή** καί μπορεῖ νά εἶναι ἐπίσης κυρτή ἤ μή κυρτή. Μέ τή βοήθεια μιᾶς κυρτῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς ὁρίζεται τό **κυρτό πολύγωνο*** καί ἡ πολυγωνική γραμμή, πού τό ὁρίζει, χωρίζει τά σημεῖα τοῦ πολυγώνου σέ ἐσωτερικά καί ἐξωτερικά. Ἕνα κυρτό πολύγωνο μέ ν κορυφές ἔχει ν πλευρές καί $\frac{\nu(\nu-3)}{2}$ διαγωνίους.

Μ ία γωνία πού ἔχει γιά κορυφή της τό κέντρο ἑνός κύκλου λέγεται **ἐπίκεντρη γω-**

---

1. Ὅταν ἐμφανίζεται σέ φράση ἤ λέξη τό σύμβολο Δ, νά ἀναφέρετε τά σχετικά θεωρήματα ἤ ἀξιώματα, ἐνῶ ὅταν ἐμφανίζεται τό σύμβολο * σέ ἕναν ὅρο, νά δίνετε τόν ὁρισμό του.

νία τοῦ κύκλου αὐτοῦ. Ἡ τομή τοῦ κύκλου μέ μιά ἐπίκεντρη γωνία του λέγεται **τόξο τοῦ κύκλου.** Δύο σημεῖα Α καί Β ἑνός κύκλου ὁρίζουν δύο τόξα $\widehat{AB}$, ἕνα **κυρτογώνιο τόξο*** καί ἕνα μή κυρτογώνιο.

Τό εὐθύγραμμο τμῆμα, πού συνδέει τά ἄκρα ἑνός τόξου, λέγεται **χορδή** καί κάθε χορδή πού διέρχεται ἀπό τό κέντρο λέγεται **διάμετρος** τοῦ κύκλου. Κάθε διάμετρος χωρίζει τόν κύκλο σέ δύο **ἡμικύκλια.**

Σέ κάθε κύκλο ἀντιστοιχεῖ ἕνας **κυκλικός δίσκος*** στόν ὁποῖο ἀνήκουν καί τά σημεῖα τοῦ κύκλου. Ὁ κύκλ(Ο,ρ) χωρίζει τά ἐσωτερικά καί τά ἐξωτερικά σημεῖα τοῦ κδισ(Ο,ρ).

Ἡ ἰσότητα στά γεωμετρικά σχήματα.

3. Ἡ ἰσότητα δύο εὐθύγραμμων τμημάτων ὁρίζεται ἀξιωματικά $^{\Delta}$ καί διαπιστώνεται μέ τό διαβήτη.

Στήν ἰσότητα τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων στηρίζεται οὐσιαστικά καί κάθε ἄλλη ἰσότητα στή Γεωμετρία. Ἔτσι ὁρίζουμε ὅτι :

— **Δύο κύκλοι** (ἤ κυκλικοί δίσκοι) **λέγονται ἴσοι, ἄν καί μόνο ἄν ἔχουν ἴσες ἀκτίνες.**

— **Δύο τόξα τοῦ ἴδιου κύκλου ἤ ἴσων κύκλων** λέγονται ἴσα, **ἄν καί μόνο ἄν ἔχουν ἴσες χορδές.**

— **Δύο γωνίες λέγονται ἴσες, ἄν καί μόνο ἄν, ὅταν γίνουν ἐπίκεντρες ἴσων κύκλων, βαίνουν σέ ἴσα τόξα.**

Παρατηροῦμε ὅτι δέν ὁρίζεται ἰσότητα εὐθειῶν ἤ ἡμιευθειῶν. Ἐπίσης δέν ὁρίζεται ἰσότητα γιά τόξα πού δέν ἀνήκουν στόν ἴδιο κύκλο ἤ σέ ἴσους κύκλους.

4. Δύο τρίγωνα λέγονται ἴσα, ἄν καί μόνο ἄν ἔχουν τίς πλευρές τους μία πρός μία ἴσες καί τίς ἀπέναντι ἀπό τίς ἴσες πλευρές γωνίες τους ἐπίσης ἴσες.

Σέ ὁρισμένες περιπτώσεις ἡ ἰσότητα δύο τριγώνων ἐξασφαλίζεται μέ τήν ἰσότητα τριῶν μόνο ἀντίστοιχων στοιχείων. Ὁ παρακάτω πίνακας δίνει τέτοιες ἀντιπροσωπευτικές περιπτώσεις[1] δύο τριγώνων ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄.

τριγ. ΑΒΓ = τριγ. Α΄Β΄Γ΄ $\longleftrightarrow$	$\alpha=\alpha'$	$\beta=\beta'$	$\gamma=\gamma'$	$\hat{A}=\hat{A}'$	$\hat{B}=\hat{B}'$	$\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}'$	
3 πλευρές ἴσες	●	●	●				
2 πλευρές ἴσες		●	●	●			
		●	●		●		ΟΞ/ΑΜ
		●	●			●	ΟΞ/ΑΜ
1 πλευρά	●				●	●	
	●			●	●		
	●			●		●	

Ἐπίσης, σέ ὁρισμένες περιπτώσεις ἡ ἰσότητα ὀρθογώνιων τριγώνων ἐξασφαλίζεται μέ τήν ἰσότητα δύο μόνο ἀντίστοιχων στοιχείων. Ὁ παρακάτω πίνακας δίνει τέτοιες

1. Οἱ περιπτώσεις στίς ὁποῖες ὑπάρχει τό σύμβολο ΟΞ/ΑΜ ἰσχύουν, ὅταν τά δύο τρίγωνα εἶναι ὀξυγώνια ἤ ὅταν τά δύο τρίγωνα εἶναι ἀμβλυγώνια μέ τίς ἀμβλεῖες γωνίες τους σέ ἀντίστοιχες κορυφές.

ἀντιπροσωπευτικές περιπτώσεις δύο ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ πού ἔχουν $\hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ$.

τριγ. ΑΒΓ = τριγ. Α΄Β΄Γ΄ ⟷		$\alpha=\alpha'$	$\beta=\beta'$	$\gamma=\gamma'$	$\hat{B}=\hat{B}'$	$\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}'$
2 πλευρές			●	●		
		●	●			
1 πλευρά		●			●	
			●		●	
			●			●

Παρατηροῦμε ὅτι **κάθε κριτήριο ἰσότητας δύο τριγώνων περιέχει ἀπαραίτητα μία τουλάχιστον ἰσότητα μεταξύ τῶν πλευρῶν τους.**

Γενικότερα, μποροῦμε νά ὁρίσουμε ἰσότητα μεταξύ δύο κυρτῶν πολυγώνων λέγοντας ὅτι δύο πολύγωνα εἶναι ἴσα, ἄν καί μόνο ἄν ἔχουν τίς πλευρές τους μία πρός μία ἴσες καί τίς γωνίες τους, πού περιέχονται ἀπό ἴσες πλευρές, ἐπίσης ἴσες.

5. Ἄς συγκεντρώσουμε τίς κυριότερες περιπτώσεις ἰσότητας εὐθύγρ. τμημάτων καί γωνιῶν.

Δύο εὐθύγραμμα τμήματα εἶναι ἴσα, ὅταν εἶναι :

— Οἱ ἴσες πλευρές ἰσοσκελοῦς τριγώνου.
— Πλευρές ἴσων τριγώνων πού βρίσκονται ἀπέναντι ἀπό ἴσες γωνίες.
— Πλάγια τμήματα, ἀπό τό ἴδιο σημεῖο πρός εὐθεία, πού τά ἴχνη τους ἰσαπέχουν ἀπό τό ἴχνος τοῦ κάθετου τμήματος.
— Χορδές ἴσων τόξων τοῦ ἴδιου κύκλου (ἤ ἴσων κύκλων).
— Ἀποστήματα ἴσων χορδῶν τοῦ ἴδιου κύκλου (ἤ ἴσων κύκλων).
— Ἀπέναντι πλευρές παραλληλογράμμου (ἤ ὁποιεσδήποτε πλευρές ρόμβου ἤ τετραγώνου).
— Προβολές ἴσων καί παράλληλων τμημάτων σ' εὐθεία (βλ. ἄσκ. 9 τῆς § 6.13).
— Συμμετρικά ὡς πρός κέντρο ἤ ἄξονα.

Δύο γωνίες εἶναι ἴσες, ὅταν εἶναι :

— Οἱ γωνίες ἰσοσκελοῦς τριγώνου πού βρίσκονται ἀπέναντι ἀπό τίς ἴσες πλευρές.
— Γωνίες ἴσων τριγώνων πού βρίσκονται ἀπέναντι ἀπό τίς ἴσες πλευρές.
— Συμπληρώματα ἤ παραπληρώματα ἴσων γωνιῶν.
— Κατακορυφήν γωνίες.
— Ἐντός ἐναλλάξ ἤ ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη παράλληλων εὐθειῶν.
— Ὀξεῖες (ἤ ἀμβλεῖες) πού ἔχουν παράλληλες ἤ κάθετες πλευρές.
— Ἀπέναντι γωνίες παραλληλογράμμου (ἤ ὁποιεσδήποτε γωνίες ὀρθογωνίου ἤ τετραγώνου).
— Ἐγγεγραμμένες (ἤ ἐπίκεντρες) τοῦ ἴδιου κύκλου (ἤ ἴσων κύκλων) πού βαίνουν σέ ἴσα τόξα.
— Οἱ γωνίες πού βλέπουν μιά πλευρά ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ἀπό τίς δύο ἀπέναντι κορυφές της.
— Ἡ μία γωνία ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου καί ἡ ἄλλη ἀπέναντί της ἐξωτερική.
— Συμμετρικές ὡς πρός κέντρο ἤ ἄξονα.

Σύγκριση γεωμετρικῶν σχημάτων.

6. Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ λέγεται μικρότερο ἀπό ἕνα ἄλλο ΓΔ (καί γράφουμε ΑΒ $<$ ΓΔ), ἄν καί μόνο ἄν τό ΑΒ εἶναι ἴσο μέ μέρος τοῦ ΓΔ. Τότε τό ΓΔ λέγεται μεγαλύτερο ἀπό τό ΑΒ (καί γράφουμε ΓΔ $>$ ΑΒ).

Δίνουμε τώρα μερικές χαρακτηριστικές περιπτώσεις πού ἕνα τμῆμα εἶναι μικρότερο ἀπό ἕνα ἄλλο:

Τό κάθετο τμῆμα ἀπό σημεῖο Α πρός εὐθεία ε εἶναι μικρότερο ἀπό κάθε πλάγιο τμῆμα ἀπό τό Α πρός τήν ε.

- Κάθε μία ἀπό τίς κάθετες πλευρές ὀρθογώνιου τριγώνου εἶναι μικρότερη ἀπό τήν ὑποτείνουσά του.
- Κάθε πλευρά τριγώνου εἶναι μικρότερη ἀπό τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων καί μεγαλύτερη ἀπό τή διαφορά τους, δηλαδή:

$$|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma.$$

- Κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα εἶναι μικρότερο ἀπό τήν περίμετρο* κάθε ἀνοικτῆς τεθλασμένης γραμμῆς πού ἔχει τά ἴδια ἄκρα.

7. Στήν παραπάνω ἀνισοτική σχέση τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων στηρίζεται οὐσιατικά κάθε ἄλλη σχέση τῆς Γεωμετρίας πού ὁρίζει ἕνα σχῆμα «**μικρότερο**» ἀπό ἕνα ἄλλο. Ἔτσι, ὁρίζουμε ὅτι:

- Ἕνας κυκλ(Ο,ρ) θά λέγεται «**μικρότερος**» ἀπό ἕναν ἄλλο κυκλ(Ο΄,ρ΄), ἄν καί μόνο ἄν $\rho < \rho'$.
- Ἕνα κυρτογώνιο τόξο $\widehat{AB}$ θά λέγεται «**μικρότερο**» ἀπό ἕνα ἄλλο κυρτογώνιο τόξο $\widehat{\Gamma\Delta}$ **τοῦ ἴδιου (ἤ ἴσου) κύκλου,** ἄν καί μόνο ἄν ΑΒ $<$ ΓΔ (σέ μή κυρτογώνια τόξα ὁρίζουμε ὅτι $\widehat{AB} < \widehat{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow AB > \Gamma\Delta$, ἐνῶ κάθε κυρτογώνιο τόξο ὁρίζουμε ὅτι εἶναι μικρότερο ἀπό κάθε μή κυρτογώνιο τόξο).
- Μία γωνία $\widehat{\varphi}$ θά λέγεται «μικρότερη» ἀπό μία ἄλλη γωνία $\widehat{\omega}$, ἄν καί μόνο ἄν, ὅταν γίνουν καί οἱ δύο ἐπίκεντρες ἴσων κύκλων, ἡ $\widehat{\varphi}$ βαίνει σέ μικρότερο τόξο.

Παρατηροῦμε ὅτι μποροῦμε πάντοτε νά συγκρίνουμε δύο εὐθύγραμμα τμήματα ἤ δύο γωνίες, ἐνῶ δέν μποροῦμε νά συγκρίνουμε δύο τόξα παρά μόνο ὅταν ἀνήκουν στόν ἴδιο κύκλο ἤ σέ ἴσους κύκλους.

8. Πολλές φορές ἀπό μία σχέση πού ἰσχύει γιά δύο σχήματα βρίσκουμε σχέση πού ἰσχύει γιά δύο ἄλλα ἀντίστοιχά τους σχήματα. Οἱ πιό συνηθισμένες ἀπό τίς περιπτώσεις αὐτές εἶναι:

- Ἡ σχέση πού ἰσχύει γιά δύο πλευρές (ἤ γωνίες) ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ἰσχύει καί γιά τίς ἀπέναντι γωνίες (ἤ πλευρές) του, δηλαδή:

$$\beta \underset{<}{\overset{\geq}{=}} \gamma \Leftrightarrow \widehat{B} \underset{<}{\overset{\geq}{=}} \widehat{\Gamma}$$

- Ἄν φέρουμε ἀπό σημεῖο Α τό κάθετο τμῆμα ΑΚ καί δύο πλάγια τμήματα ΑΒ καί ΑΓ πρός μία εὐθεία ε, ἡ σχέση πού ἰσχύει γιά τά πλάγια τμήματα ΑΒ καί ΑΓ ἰσχύει καί γιά τά τμήματα ΚΒ καί ΚΓ καί ἀντιστρόφως δηλαδή

$$AB \underset{<}{\overset{\geq}{=}} A\Gamma \Leftrightarrow KB \underset{<}{\overset{\geq}{=}} K\Gamma.$$

- Ἄν θεωρήσουμε δύο χορδές ΑΒ καί ΓΔ τοῦ ἴδιου κύκλου (ἤ ἴσων κύκλων), ἰσχύει ἡ πρόταση

$$AB \underset{<}{\overset{\geq}{=}} \Gamma\Delta \Leftrightarrow \text{ἀπόστημα } AB \underset{>}{\overset{\leq}{=}} \text{ἀπόστημα } \Gamma\Delta.$$

δηλαδή ἀπό τή σχέση πού ἰσχύει γιά τίς χορδές προκύπτει ἡ σχέση πού ἰσχύει γιά τά ἀποστήματά τους καί ἀντιστρόφως.

9. Ἄν ἔχουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄, μποροῦμε νά λέμε ὅτι εἶναι ἴσα ἤ ἄνισα, γιά ἄνισα ὅμως τρίγωνα δέν μποροῦμε νά λέμε ὅτι τό ἕνα εἶναι «μικρότερο» ἤ «μεγαλύτερο» ἀπό τό ἄλλο.

Ἐπίσης, ἀπό τή σχέση πού ἰσχύει γιά δύο πλευρές (ἤ γωνίες) ἀνίσων τριγώνων δέν προκύπτει σχέση γιά τίς ἀπέναντι γωνίες (ἤ πλευρές) τους, παρά μόνο στήν περίπτωση πού τά δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρές ἴσες. Ἔτσι **σέ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ μέ $\beta = \beta'$ καί $\gamma = \gamma'$ ἔχουμε τίς προτάσεις :**

$$\text{I.}\quad \widehat{A} \underset{<}{\geq} \widehat{A}' \Leftrightarrow B\Gamma \underset{<}{\geq} B'\Gamma'$$

$$\text{II.}\quad \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}' \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{B}' \text{ ἤ } \widehat{B} + \widehat{B}' = 180^{o}.$$

Πράξεις καί μέτρο γεωμετρικῶν σχημάτων.

10. Στή Γεωμετρία ὁρίζουμε πράξεις σέ τρία σύνολα: στό σύνολο $\mathscr{E}$ τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων, στό σύνολο $\mathscr{T}$ τῶν τόξων ἑνός κύκλου (ἤ ἴσων κύκλων) καί στό σύνολο $\mathscr{T}$ τῶν γωνιῶν. Ἄν σημειώνουμε λοιπόν μέ

$$\Theta = \{a, b, c, \ldots\}$$

στήν κάθε περίπτωση τό θεωρούμενο σύνολο (δηλαδή μέ Θ ἐννοοῦμε ἕνα ἀπό τά σύνολα $\mathscr{E}$, $\mathscr{T}$, $\mathscr{T}$, ἀνάλογα μέ τήν περίπτωση πού ἐξετάζουμε), στό Θ ὁρίζουμε πρόσθεση καί ἀφαίρεση, μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο :

—Ἄν $\Theta = \mathscr{E}$, καλοῦμε **ἄθροισμα a + b** τό τμῆμα πού προκύπτει, ἄν πάρουμε σέ μία εὐθεία δύο διαδοχικά τμήματα* ἴσα ἀντίστοιχα μέ τά a καί b.

—Ἄν $\Theta = \mathscr{T}$, καλοῦμε **ἄθροισαμ a + b** τό τόξο πτύ προκύπτει ἄν πάρουμε στόν ἴδιο (ἤ σέ ἴσο) κύκλο δύο διαδοχικά τόξα* ἴσα ἀντιστοίχως μέ a καί b.

—Ἄν $\Theta = \mathscr{T}$, καλοῦμε ἄθροισμα a+b μία γωνία πού εἶναι ἴση μέ τήν ἐπίκεντρη γωνία ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ στό ἄθροισμα τῶν τόξων, στά ὁποῖα βαίνουν οἱ γωνίες a καί b, ὅταν γίνουν ἐπίκεντρες ἴσων κύκλων.

—Ἄν $a > b$ καλοῦμε **διαφορά a — b** σέ κάθε περίπτωση ἕνα στοιχεῖο $d \in \Theta$ τέτοιο, ὥστε $d + b = a$. Ἔχουμε δηλαδή πάντοτε

$$a - b = d \Leftrightarrow a = b + d.$$

Ἡ διαφορά $a - a$, $\forall a \in \Theta$ εἶναι τό «μηδενικό στοιχεῖο» τοῦ Θ, τό ὁποῖο σημειώνεται ἁπλῶς μέ O καί εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο τῆς προσθέσεως.

11. Στό σύνολο Θ ὁρίζουμε καί μία ἄλλη πράξη : **τό γινόμενο στοιχείου τοῦ Θ ἐπί ἀριθμό.** Ἄν κ καί λ εἶναι φυσικοί ἀριθμοί, ἡ πράξη αὐτή ὁρίζεται ὡς ἑξῆς :

— Τό γινόμενο κa σημαίνει ἄθροισμα κ στοιχείων ἴσων μέ a.

— Τό γινόμενο $(1/\lambda)a$ σημαίνει τό ἕνα ἀπό τά στοιχεῖα πού βρίσκουμε, ἄν χωρίσουμε τό a σέ λ ἴσα μέρη.

— Τό γινόμενο $\frac{\kappa}{\lambda}a$ σημαίνει ἄθροισμα κ στοιχείων ἴσων μέ $\frac{1}{\lambda}a$.

Ἡ ἰσότητα λοιπόν $b = \frac{\kappa}{\lambda}$ a σημαίνει ὅτι τό b εἶναι ἴσο μέ κ τμήματα ἴσα μέ $\frac{1}{\lambda}a$, Τέτοια σχήματα εἶναι :

— Τό τμῆμα πού συνδέει τά μέσα δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι ἴσο (καί παράλληλο) μέ τό μισό τῆς τρίτης πλευρᾶς.

— Ἡ διάμεσος ὀρθογώνιου τριγώνου πού ἀντιστοιχεῖ στήν ὑποτείνουσά του εἶναι τό μισό τῆς ὑποτείνουσας.

— Τό τμῆμα πού ἔχει ἄκρα μία κορυφή τριγώνου καί τό κέντρο βάρους του εἶναι ἴσο μέ τά 2/3 τῆς ἀντίστοιχης διαμέσου.

— Ἡ διάμεσος* ἑνός τραπεζίου εἶναι ἴση μέ τό μισό τοῦ ἀθροίσματος τῶν βάσεών του.

— Τό τμῆμα πού ἑνώνει τά μέσα τῶν διαγωνίων ἑνός τραπεζίου εἶναι τό μισό τῆς διαφορᾶς τῶν βάσεών του.

— Ἡ ἀπόσταση τοῦ περίκεντρου ἑνός τριγώνου ἀπό μία πλευρά του εἶναι τό μισό τῆς ἀποστάσεως τοῦ ὀρθόκεντρου ἀπό τήν ἀπέναντι κορυφή του.

— Ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία σ' ἕνα τόξο ἑνός κύκλου εἶναι τό μισό τῆς ἀντίστοιχης ἐπίκεντρης γωνίας.

Ἄν ἔχουμε μία ἰσότητα τῆς μορφῆς $b = \frac{\kappa}{\lambda} a$, ὁ ἀριθμός $\frac{\kappa}{\lambda}$ λέγεται **λόγος τοῦ b πρός τό a** καί γράφεται $\frac{b}{a}$, δηλαδή εἶναι

$$\frac{b}{a} = \frac{\kappa}{\lambda} \Leftrightarrow b = \frac{\kappa}{\lambda} a.$$

Εἰδικά γιά τίς γωνίες ὁ λόγος δύο γωνιῶν ἰσοῦται πάντοτε μέ τό λόγο τῶν τόξων στά ὁποῖα βαίνουν, ὅταν γίνουν ἐπίκεντρες ἴσων κύκλων.

12. Ἄν πάρουμε ἕνα ὁρισμένο στοιχεῖο $\mu \in \Theta$ καί τό καλέσουμε «μονάδα μετρήσεως», ὁ λόγος $\frac{\theta}{\mu}$ γιά κάθε $\theta \in \Theta$ λέγεται **μέτρο τοῦ θ** ὡς πρός μονάδα τό μ καί σημειώνεται (θ), δηλ.

$$(\theta) = \frac{\theta}{\mu}.$$

Γιά τά μέτρα τῶν στοιχείων τοῦ Θ ἔχουμε τίς προτάσεις:

I. Ὁ λόγος δύο στοιχείων ἰσοῦται μέ τό λόγο τῶν μέτρων τους, δηλ. $\frac{a}{b} = \frac{(a)}{(b)}$.

II. Ἡ σχέση πού ἰσχύει γιά δύο στοιχεῖα ἰσχύει καί γιά τά μέτρα τους καί ἀντιστρόφως, δηλαδή

$$a \overset{\geq}{<} b \Leftrightarrow (a) \overset{\geq}{<} (b).$$

III. Τό μέτρο τοῦ ἀθροίσματος δύο στοιχείων ἰσοῦται μέ τό **ἄθροισμα τῶν μέτρων τους**, δηλαδή

$$(a + b) = (a) + (b).$$

Στό σύνολο τῶν τόξων παίρνουμε γιά μονάδα μετρήσεως τή **μοίρα***.
Στό σύνολο τῶν γωνιῶν παίρνουμε γιά μονάδα μετρήσεως τή γωνία, πού ὅταν γίνει ἐπίκεντρη, βαίνει σέ τόξο μιᾶς μοίρας. Ἡ γωνία αὐτή λέγεται ἐπίσης «**μοίρα**». Μία πεπλατυσμένη γωνία* ἔχει μέτρο 180^o, ἐνῶ μία πλήρης γωνία* ἔχει μέτρο 360^o.

Ὀρθή γωνία. Συμπληρωματικές καί παραπληρωματικές γωνίες.

13. Μία γωνία, πού εἶναι ἴση μέ τό μισό μιᾶς πεπλατυσμένης γωνίας λέγεται **ὀρθή γωνία.** Ὅλες οἱ ὀρθές γωνίες εἶναι ἴσες μεταξύ τους, γιατί κάθε μία ἔχει μέτρο 90^o. Γωνία πού εἶναι μεγαλύτερη ἤ μικρότερη ἀπό τήν ὀρθή λέγεται ἀντίστοιχα **ὀξεία** ἤ **ἀμβλεία.**

Ἐπειδή κάθε γωνία ἐγγεγραμμένη σέ κύκλο εἶναι τό μισό τῆς ἀντίστοιχης ἐπίκεντρης, συμπεραίνουμε ὅτι:

— Γωνία ἐγγεγραμμένη σέ ἡμικύκλιο εἶναι ὀρθή.

— Γωνία ἐγγεγραμμένη σέ κυρτογώνιο (ἤ μή κυρτογώνιο) τόξο εἶναι ὀξεία (ἤ ἀμβλεία).

Πολλές φορές χρησιμοποιοῦμε τήν ὀρθή γωνία γιά μονάδα μετρήσεως τῶν γωνιῶν. Τότε οἱ ὀξεῖες γωνίες ἔχουν μέτρο μικρότερο ἀπό 1 καί οἱ ἀμβλεῖες ἔχουν μέτρο μεγαλύτερο ἀπό 1.

14. Δύο ὀξεῖες γωνίες, πού ἔχουν ἄθροισμα 90° (δηλαδή μία ὀρθή γωνία), λέγονται **συμπληρωματικές γωνίες**. Ἔτσι π.χ. συμπληρωματικές εἶναι οἱ ὀξεῖες γωνίες ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου.

Δύο γωνίες πού ἔχουν ἄθροισμα 180° (δηλαδή δύο ὀρθές ἤ μία πεπλατυσμένη γωνία) λέγονται **παραπληρωματικές γωνίες**. Χαρακτηριστικά ζευγάρια παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι:

— Οἱ ἐφεξῆς* γωνίες πού οἱ μή κοινές πλευρές τους εἶναι ἀντικείμενες ἡμιευθεῖες.

— Οἱ ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη δύο παραλλήλων εὐθειῶν.

— Οἱ γωνίες πού ἔχουν τίς πλευρές τους παράλληλες (ἤ κάθετες) καί εἶναι ἡ μία ὀξεία καί ἡ ἄλλη ἀμβλεία.

— Δύο ὁποιεσδήποτε διαδοχικές γωνίες ἑνός παραλληλογράμμου.

— Οἱ διαδοχικές γωνίες ἑνός τραπεζίου πού ἔχουν τίς κορυφές τους στά ἄκρα μιᾶς ἀπό τίς μή παράλληλες πλευρές του.

— Οἱ ἀπέναντι γωνίες ἑνός ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου.

Ἡ ἐφεξῆς καί παραπληρωματική γωνία μιᾶς γωνίας τριγώνου (ἤ πολυγώνου) λέγεται **ἐξωτερική γωνία** του. Κάθε ἐξωτερική γωνία τριγώνου εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν τοῦ τριγώνου πού βρίσκονται ἀπέναντί της (καί συνεπῶς εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τήν κάθε μιά τους). Ἐπίσης ἡ ἐξωτερική γωνία ἑνός ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου εἶναι ἴση μέ τή γωνία τοῦ τετραπλεύρου πού βρίσκεται ἀπέναντί της.

15. Ἄς ἀναφέρουμε τέλος τά πιό χρήσιμα ἀθροίσματα γωνιῶν (μέ περισσότερους ἀπό δύο προσθετέους), πού εἶναι ἴσα μέ πολλαπλάσια τῆς ὀρθῆς γωνίας.

— Ἄν ἀπό ἕνα σημεῖο Α μιᾶς εὐθείας ε φέρουμε ἡμιευθεῖες σ' ἕνα ἡμιεπίπεδο ἀκμῆς ε, τό ἄθροισμα ὅλων τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν πού σχηματίζονται εἶναι ἴσο μέ 180°.

— Ἄν ἀπό ἕνα σημεῖο Α φέρουμε ὁποιεσδήποτε ἡμιευθεῖες, τό ἄθροισμα ὅλων τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν πού σχηματίζονται εἶναι ἴσο μέ 360°.

— Τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου εἶναι 180°.

— Τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου εἶναι 360°.

— Τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν πολυγώνου μέ ν πλευρές εἶναι 2ν—4 ὀρθές γωνίες.

— Τό ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν ὁποιουδήποτε πολυγώνου εἶναι 4 ὀρθές (βλ. ἄσκ. 15 § 5.14).

Σχέσεις εὐθειῶν.

16. Δύο εὐθεῖες πού ἔχουν δύο κοινά σημεῖα συμπίπτουν (ταυτίζονται). Ἔτσι δύο διαφορετικές εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου μας:

— ἤ ἔχουν ἕνα κοινό σημεῖο καί τότε λέγονται **τεμνόμενες**·

— ἤ δέν ἔχουν κοινό σημεῖο καί τότε λέγονται **παράλληλες**.

Οἱ τεμνόμενες εὐθεῖες σχηματίζουν τέσσερις διαδοχικές γωνίες ἀπό τίς ὁποῖες οἱ ἀπέναντι εἶναι κατακορυφήν καί ἴσες, ἐνῶ δύο ὁποιεσδήποτε συνεχόμενες εἶναι ἐφεξῆς καί παραπληρωματικές. Στήν περίπτωση πού οἱ τέσσερις αὐτές γωνίες εἶναι ἴσες (ὁπότε κάθε μία τους εἶναι ὀρθή), οἱ εὐθεῖες λέγονται **κάθετες.**

Ἄν ἔχουμε μία εὐθεία ε καί ἕνα σημεῖο Α πού δέν ἀνήκει στήν ε, ἰσχύουν οἱ προτάσεις :

— Ὑπάρχει μία μόνο εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τό Α καί εἶναι παράλληλη πρός τήν εὐθεία ε (ἀξίωμα Εὐκλείδη).

— Ὑπάρχει μία μόνο εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τό Α καί εἶναι κάθετη στήν ε. Ἄν ἡ κάθετη αὐτή τέμνει τήν ε στό Κ, τό τμῆμα ΑΚ λέγεται **ἀπόσταση τοῦ Α ἀπό τήν ε.**

Ἡ δεύτερη πρόταση ἰσχύει καί ὅταν τό σημεῖο Α ἀνήκει στήν εὐθεία ε. Ἄν τό Α εἶναι τό μέσο ἑνός εὐθυγράμμου τμήματος ΒΓ τῆς εὐθείας ε, τότε ἡ κάθετη στήν ε στό σημεῖο Α λέγεται **μεσοκάθετος τοῦ ΒΓ** καί κάθε σημεῖο της ἰσαπέχει ἀπό τά Β καί Γ.

17. Ἄν ἔχουμε δύο παράλληλες εὐθεῖες $ε_1$ καί $ε_2$, κάθε εὐθεία ε πού τέμνει τή μία σ' ἕνα σημεῖο της Α θά τέμνει καί τήν ἄλλη σ' ἕνα σημεῖο τῆς Β. Ἀπό τίς γωνίες πού σχηματίζονται στά Α καί Β :

— οἱ ἐντός ἐναλλάξ εἶναι ἴσες.

— οἱ ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη εἶναι ἴσες,

— οἱ ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη εἶναι παραπληρωματικές.

Ἄν ἐπιπλέον ἡ εὐθεία ε εἶναι κάθετη στή μία ἀπό τίς παράλληλες, τότε θά εἶναι κάθετη καί στήν ἄλλη.

Θά ἀναφερθοῦμε τώρα στίς κυριότερες περιπτώσεις παραλληλίας δύο εὐθειῶν. Δύο εὐθεῖς $ε_1$ καί $ε_2$ εἶναι παράλληλες, ὅταν :

— Εἶναι κάθετες στήν ἴδια εὐθεία.

— Κάθε μιά τους εἶναι παράλληλη πρός μία τρίτη εὐθεία.

— Τέμνονται ἀπό μία τρίτη εὐθεία καί οἱ ἐντός ἐναλλάξ γωνίες πού σχηματίζουν εἶναι ἴσες (ἤ οἱ ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίες πού σχηματίζουν εἶναι ἴσες ἤ οἱ ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίες πού σχηματίζουν εἶναι παραπληρωμαικές).

— Εἶναι συμμετρικές ὡς πρός κέντρο.

— Ἑνώνουν τά ἄκρα δύο ἴσων καί παράλληλων εὐθύγραμμων τμημάτων.

Ἐπίσης παράλληλα εὐθύγραμμα τμήματα εἶναι :

— Τό τμῆμα πού ἑνώνει τά μέσα δύο πλευρῶν ἑνός τριγώνου καί ἡ τρίτη πλευρά τοῦ τριγώνου.

— Οἱ ἀπέναντι πλευρές ἑνός παραλληλογράμμου.

— Οἱ βάσεις ἑνός τραπεζίου.

Ἄν ἔχουμε δύο παράλληλες εὐθεῖες $ε_1$ καί $ε_2$, ὅλα τά σημεῖα τῆς μιᾶς ἔχουν ἴσες ἀποστάσεις ἀπό τήν ἄλλη. Τό εὐθύγραμμο τμῆμα υ πού εἶναι ἴσο μέ ὅλες αὐτές τίς ἀποστάσεις λέγεται **ἀπόσταση τῶν δύο παράλληλων εὐθειῶν.** Εἶναι φανερό ὅτι ὑπάρχει μία εὐθεία ε παράλληλη πρός τίς $ε_1$ καί $ε_2$, ἡ ὁποία βρίσκεται μέσα στή ζώνη* τῶν παράλληλων αὐτῶν καί ἀπέχει ἀπό κάθε μιά τους ἀπόσταση $\frac{υ}{2}$. Ἡ εὐθεία αὐτή λέγεται **μεσοπαράλληλος τῶν $ε_1$ καί $ε_2$** καί ὅλα τά σημεῖα της ἰσαπέχουν ἀπό τίς δύο παράλληλες $ε_1$ καί $ε_2$.

18. Δύο μή παράλληλες εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου διέρχονται πάντοτε ἀπό ἕνα σημεῖο Τρεῖς ἤ περισσότερες εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου (μή παράλληλες ἀνά δύο) δέ διέρχονται ὑποχρεωτικά ἀπό τό ἴδιο σημεῖο. Χαρακτηριστικές περιπτώσεις εὐθειῶν περισσοτέρων ἀπό δύο πού διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο εἶναι :

— Οἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν ἑνός τριγώνου (διέρχονται ἀπό τό περίκεντρο* τοῦ τριγώνου).

— Οἱ εὐθεῖες πού περιέχουν τά ὕψη ἑνός τριγώνου (διέρχονται ἀπό τό ὀρθόκεντρο* τοῦ τριγώνου).
— Οἱ εὐθεῖες πού περιέχουν τίς διαμέσους ἑνός τριγώνου (διέρχονται ἀπό τό κέντρο βάρους* τοῦ τριγώνου τό ὁποῖο ἀπέχει ἀπό κάθε κορυφή τά $\frac{2}{3}$ τῆς ἀντίστοιχης διαμέσου).
— Οἱ εὐθεῖες πού διχοτομοῦν τίς γωνίες ἑνός τριγώνου (διέρχονται ἀπό τό ἔγκεντρο* τοῦ τριγώνου).
— Οἱ εὐθεῖες πού διχοτομοῦν ἐξωτερικά δύο γωνίες τοῦ τριγώνου καί ἡ εὐθεία πού διχοτομεῖ τήν τρίτη γωνία τοῦ τριγώνου (διέρχονται ἀπό ἕνα παράκεντρο* τοῦ τριγώνου).
— Οἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν ἑνός ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου (διέρχονται ἀπό τό κέντρο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του).
— Οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνός περιγεγραμμένου τετραπλεύρου (διέρχονται ἀπό τό κέντρο τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου του).
— Οἱ εὐθεῖες πού ἑνώνουν τά μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἑνός τετραπλεύρου καί ἡ εὐθεία πού ἑνώνει τά μέσα τῶν διαγωνίων των.

Σχέσεις εὐθείας καί κύκλου. Σχέσεις δύο κύκλων.

19. Μία εὐθεία καί ἕνας κύκλος ἔχουν δύο τό πολύ κοινά σημεῖα. Ἄν θεωρήσουμε μία εὐθεία ε καί ἕναν κυκλ(Ο,ρ) καί ὀνομάσουμε ΟΚ τήν ἀπόσταση τοῦ κέντρου Ο ἀπό τήν ε, θά ἔχουμε τίς περιπτώσεις :
— Ἡ εὐθεία ε δέν ἔχει κοινό σημεῖο μέ τόν κύκλο. Τότε λέμε ὅτι ἡ ε βρίσκεται «ἔξω» ἀπό τόν κύκλο καί ἔχουμε ΟΚ > ρ.
— Ἡ εὐθεία ε ἔχει ἕνα μόνο κοινό σημεῖο Ε μέ τόν κύκλο. Τότε λέμε ὅτι ἡ ε **ἐφάπτεται** στόν κύκλο στό σημεῖο Ε (ἤ ὅτι ἡ ε εἶναι «ἐφαπτομένη» τοῦ κύκλου) καί ἔχουμε ΟΚ = ρ.
— Ἡ εὐθεία ε ἔχει δύο κοινά σημεῖα Α καί Β μέ τόν κυκλο. Τότε λέμε ὅτι ἡ ε **τέμνει** τόν κύκλο καί ἔχουμε ΟΚ < ρ. Στήν περίπτωση αὐτή ἡ γωνία πού σχηματίζει ἡ ε μέ τήν ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου στό Α ἤ στό Β λέγεται **γωνία τῆς εὐθείας καί τοῦ κύκλου** καί ἰσοῦται μέ μιά ὁποιαδήποτε γωνία ἐγγεγραμμένη στό τόξο $\overset{\frown}{AB}$.

Σ' ἕνα σημεῖο Ε ἑνός κυκλ(Ο,ρ) μποροῦμε νά φέρουμε μόνο μία εὐθεία ε πού ἐφάπτεται στόν κύκλο. Ἡ εὐθεία αὐτή εἶναι κάθετη στήν ἀκτίνα ΟΕ.

Ἀπό ἕνα ἐξωτερικό σημεῖο Α τοῦ κδισ(Ο,ρ) μποροῦμε νά φέρουμε δύο ἐφαπτόμενες τοῦ κυκλ(Ο,ρ). Ἄν Ε καί Ε΄ εἶναι τά σημεῖα ἐπαφῆς τους, ἔχουμε τίς προτάσεις :
— Τά «ἐφαπτόμενα τμήματα» ΑΕ καί ΑΕ΄ εἶναι ἴσα.
— Ἡ εὐθεία ΑΟ διχοτομεῖ τή γωνία τῶν ἐφαπτομένων καί εἶναι μεσοκάθετος τῆς χορδῆς ΕΕ΄.

20. Δύο κύκλοι, πού ἔχουν τρία κοινά σημεῖα, συμπίπτουν (ταυτίζονται). Ἔτσι δύο διαφορετικοί κύκλοι μέ κέντρα Κ καί Λ :
— ἤ ἔχουν δύο κοινά σημεῖα καί τότε λέγονται **τεμνόμενοι,**
— ἤ ἔχουν ἕνα κοινό σημεῖο καί τότε λέγονται **ἐφαπτόμενοι,**
— ἤ δέν ἔχουν κοινό σημεῖο.

Τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΚΛ, πού ἔχει ἄκρα τά κέντρα τους, λέγεται **διάκεντρος** τῶν δύο κύκλων καί ἡ εὐθεία ΚΛ λέγεται **διακεντρική εὐθεία.**
Ἄν ἔχουμε δύο κύκλους πού δέν ἔχουν κοινό σημεῖο,
— ἤ ὁ ἕνας κύκλος βρίσκεται στό ἐξωτερικό τοῦ ἄλλου κυκλικοῦ δίσκου καί τότε ἔχουμε ΚΛ > R + ρ.

— ἤ ὁ ἕνας κύκλος βρίσκεται στό ἐσωτερικό τοῦ ἄλλου κυκλικοῦ δίσκου καί τότε ἔχουμε $ΚΛ < R - ρ$.

Ἄν ἔχουμε δύο κύκλους, τούς κυκλ(K,R) καί κυκλ(Λ,ρ), πού τέμνονται στά σημεῖα Α καί Β, τότε:

—Ἡ διακεντρική εὐθεία ΚΛ εἶναι μεσοκάθετος τῆς κοινῆς χορδῆς τους ΑΒ (δηλαδή τά Α καί Β εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τή διακεντρική εὐθεία).

—Ἰσχύον οἱ ἀνισότητες $|R - ρ| < ΚΛ < R + ρ$.

—Ἡ γωνία $\widehat{φ}$ πού σχηματίζουν οἱ ἐφαπτόμενες τῶν κύκλων στό Α ἤ τό Β λέγεται **γωνία τῶν δύο κύκλων** καί εἶναι ἴση μέ $\widehat{φ} = 180^{\circ} - Κ\widehat{Α}Λ = 180^{\circ} - Κ\widehat{Β}Λ$. Ἄν ἡ $\widehat{φ}$ εἶναι ὀρθή οἱ κύκλοι τέμνονται «ὀρθογωνίως».

Τέλος, ἄν ἔχουμε δύο κύκλους ἐφαπτόμενους στό Ε, τό σημεῖο ἐπαφῆς Ε βρίσκεται στή διακεντρική εὐθεία ΚΛ καί εἶναι φανερό ὅτι ἡ κάθετη στὴν ΚΛ στό Ε εἶναι «κοινή ἐφαπτομένη» τῶν δύο κύκλων. Στήν περίπτωση αὐτή:

— ἤ ὁ ἕνας κύκλος βρίσκεται στό ἐξωτερικό τοῦ ἄλλου κυκλικοῦ δίσκου καί τότε ἔχουμε $ΚΛ = R + ρ$.

— ἤ ὁ ἕνας κύκλος βρίσκεται στό ἐσωτερικό τοῦ ἄλλου κυκλικοῦ δίσκου καί τότε ἔχουμε $ΚΛ = R - ρ$.

21. Μία εὐθεία ε πού ἐφάπτεται σέ δύο κύκλους λέγεται **κοινή ἐφαπτομένη** τους. Ἡ ε λέγεται εἰδικότερα **κοινή ἐξωτερική ἐφαπτομένη** ἤ **κοινή ἐσωτερική ἐφαπτομένη**, ἄν οἱ κύκλοι βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος ἤ ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ε.

Δύο κύκλοι, ἀνάλογα μέ τή θέση τους, ἔχουν τό πολύ δύο κοινές ἐξωτερικές ἐφαπτόμενες καί τό πολύ δύο κοινές ἐσωτερικές ἐφαπτόμενες. Ἄν οἱ κύκλοι ἔχουν δύο κοινές ἐξωτερικές ἐφαπτόμενες (ἤ δύο κοινές ἐσωτερικές ἐφαπτόμενες) ἰσχύουν οἱ προτάσεις:

— Τά ἐφαπτόμενα τμήματα (δηλαδή τά τμήματα πού βρίσκονται στίς κοινές ἐφαπτόμενες καί ἔχουν ἄκρα τά σημεῖα ἐπαφῆς στούς δύο κύκλους) εἶναι ἴσα.

—Ἡ διακεντρική εὐθεία διέρχεται ἀπό τό σημεῖο τομῆς τῶν κοινῶν ἐφαπτομένων καί διχοτομεῖ τή γωνία τους.

Ἀποστάσεις σέ γεωμετρικά σχήματα.

22. Λέγοντας «ἀπόσταση» δύο γεωμετρικῶν σχημάτων (σημείων, εὐθειῶν, κύκλων) ἐννοοῦμε πάντοτε τό μικρότερο ἀπό ὅλα τά εὐθύγραμμα τμήματα πού συνδέουν ἕνα σημεῖο τοῦ ἑνός σχήματος μέ ἕνα σημεῖο τοῦ ἄλλου σχήματος. Ἔτσι:

—Ἡ ἀπόσταση δύο σημείων Α καί Β εἶναι τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ.

—Ἡ ἀπόσταση ἑνός σημείου Α ἀπό εὐθεία ε εἶναι τό κάθετο τμῆμα ΑΚ ἀπό τό Α στήν ε.

—Ἡ ἀπόσταση ἑνός σημείου Α ἀπό κυκλ(Ο,ρ) εἶναι τό τμῆμα $|ΟΑ - ρ|$ πού βρίσκεται στήν εὐθεία ΟΑ (βλ. ἄσκ. 2 τῆς § 2.11).

—Ἡ ἀπόσταση δύο παραλλήλων εὐθειῶν εἶναι ἡ ἀπόσταση ἑνός σημείου τῆς μιᾶς ἀπό τήν ἄλλη.

—Ἡ ἀπόσταση μιᾶς εὐθείας ε καί ἑνός κυκλ(Ο,ρ) πού δέν τέμνει τήν ε εἶναι τό εὐθύγραμμο τμῆμα $ΟΚ - ρ$ πού βρίσκεται στήν κάθετη ἀπό τό κέντρο Ο πρός τήν ε (ΟΚ εἶναι τό κάθετο τμῆμα ἀπό τό Ο πρός τήν ε).

—Ἡ ἀπόσταση δύο κύκλων, τῶν κυκλ(K,R) καί κυκλ(Λ,ρ) μέ $ΚΛ > R + ρ$, εἶναι τό εὐθύγραμμο τμῆμα $ΚΛ - R - ρ$ πού βρίσκεται στή διακεντρική εὐθεία.

Εἶναι φανερό ὅτι δύο σχήματα, πού ἔχουν κοινό σημεῖο, ἔχουν «μηδενική» ἀπόσταση.

23. Μποροῦμε νά ἐντοπίσουμε (προσδιορίσουμε) ὅλα τά σημεῖα πού ἔχουν ἀπό ἕνα

γεωμετρικό σχῆμα (σημεῖο, εὐθεία, κύκλο) ἀποστάσεις ἴσες μέ δεδομένο τμῆμα λ. Ἔτσι :

— Τά σημεῖα πού ἔχουν ἀποστάσεις ἴσες μέ λ ἀπό ὁρισμένο σημεῖο Ο βρίσκονται στόν κυκλ(Ο,ρ).
— Τά σημεῖα πού ἔχουν ἀποστάσεις ἴσες μέ λ ἀπό ὁρισμένη εὐθεία ε βρίσκονται σέ δύο εὐθεῖες παράλληλες πρός τήν ε, οἱ ὁποῖες βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς ε σέ ἀπόσταση λ.
— Τά σημεῖα πού ἔχουν ἀποστάσεις ἴσες μέ λ ἀπό ὁρισμένο κυκλ(Ο,ρ) βρίσκονται στούς δύο ὁμόκεντρους κύκλους πού ἔχουν ἀκτίνες $\rho + \lambda$ καί $\rho - \lambda$.

Εἶναι φανερό ὅτι τά σημεῖα πού ἔχουν ἀποστάσεις λ ἀπό δύο σχήματα (ἤ ἀπόσταση λ ἀπό τό ἕνα σχῆμα καί ἀπόσταση $\mu \neq \lambda$ ἀπό τό ἄλλο σχῆμα) θά βρίσκονται ὡς σημεῖα τομῆς γνωστῶν γεωμετρικῶν σχημάτων. Ἔτσι π.χ. ὑπάρχουν δύο τό πολύ σημεῖα πού ἔχουν ἀπόσταση λ ἀπό δύο σημεῖα Α καί Β (ὅσα δηλαδή εἶναι τά κοινά σημεῖα τῶν δύο κύκλων πού ἔχουν κέντρα τά Α,Β καί ἀκτίνα λ), ἐνῶ ὑπάρχουν 4 τό πολύ σημεῖα πού ἔχουν ἀπόσταση λ ἀπό ἕνα σημεῖο Α καί μία εὐθεία ε (ὅσα δηλαδή εἶναι τά κοινά σημεῖα τοῦ κυκλ(Α,λ) μέ τίς δύο παράλληλες πρός τήν ε εὐθεῖες πού ἀπέχουν ἀπό αὐτήν ἀπόσταση λ).

24. Μποροῦμε ἀκόμη νά ἐντοπίσουμε τά σημεῖα πού ἔχουν ἴσες ἀποστάσεις ἀπό σημεῖα ἤ δύο εὐθεῖες. Ἔτσι :

— Τά σημεῖα πού ἰσαπέχουν ἀπό δύο ὁρισμένα σημεῖα Α καί Β βρίσκονται στή μεσοκάθετο τοῦ ΑΒ. Τά σημεῖα λοιπόν τῆς μεσοκαθέτου τοῦ ΑΒ εἶναι τά κέντρα τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι διέρχονται ἀπό τά Α καί Β.
— Τά σημεῖα πού ἰσαπέχουν ἀπό τίς πλευρές μιᾶς γωνίας $X\hat{O}\Psi$ βρίσκονται στή διχοτόμο ΟΔ τῆς γωνίας. Τά σημεῖα λοιπόν τῆς διχοτόμου ΟΔ εἶναι τά κέντρα τῶν κύκλων οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται στίς πλευρές τῆς γωνίας.
— Τά σημεῖα πού ἰσαπέχουν ἀπό δύο τεμνόμενες εὐθεῖες ΧΧ′ καί ΨΨ′ βρίσκονται στίς δύο κάθετες εὐθεῖες, οἱ ὁποῖες διχοτομοῦν τίς κατακορυφήν γωνίες πού σχηματίζονται.
— Τά σημεῖα πού ἰσαπέχουν ἀπό δύο παράλληλες εὐθεῖες ε_1 καί ε_2 βρίσκονται στή μεσοπαράλληλο τῶν ε_1 καί ε_2.

Εἶναι φανερό ὅτι τά σημεῖα πού ἰσαπέχουν ἀπό τρία σημεῖα ἤ ἀπό τρεῖς εὐθεῖες θά βρίσκονται ὡς σημεῖα τομῆς γνωστῶν εὐθειῶν.

Συνευθειακά καί ὁμοκυκλικά σημεῖα.

25. Ὅταν λέμε «**συνευθειακά σημεῖα**» ἐννοοῦμε σημεῖα περισσότερα ἀπό δύο, πού ἀνήκουν στήν ἴδια εὐθεία. Χαρακτηριστικές περιπτώσεις συνευθειακῶν σημείων εἶναι :

— Τό κέντρο ἑνός κυκλ(Ο,ρ), τό μέσο μιᾶς χορδῆς του ΑΒ καί τά μέσα τῶν δύο τόξων (κυρτογώνιου καί μή κυρτογώνιου) πού ἔχουν ἄκρα τά Α καί Β.
— Οἱ δύο ἀπέναντι κορυφές ἑνός παραλληλογράμμου καί τό μέσο τῆς διαγωνίου του ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τίς δύο ἄλλες κορυφές.
— Τά μέσα τῶν μή παράλληλων πλευρῶν καί τά μέσα τῶν διαγωνίων ἑνός τραπεζίου.
— Τά μέσα ὅλων τῶν τμημάτων πού ἔχουν τά ἄκρα τους σέ ὁρισμένο σημεῖο Α καί τό ἄλλο ἄκρο τους σέ ὁρισμένη εὐθεία ε.
— Μία κορυφή ἑνός τριγώνου, τό ἔγκεντρό του καί ἕνα παράκεντρο (τό ἀντίστοιχο τῆς κορυφῆς, π.χ. τά σημεῖα Α,Ι,I_a).
— Τό περίκεντρο, τό κέντρο βάρους καί τό ὀρθόκεντρο ἑνός τριγώνου.

26. Ὅταν λέμε «**ὁμοκυκλικά σημεῖα**» ἐννοοῦμε σημεῖα περισσότερα ἀπό τρία, πού ἀνήκουν στόν ἴδιο κύκλο. Χαρακτηριστικές περιπτώσεις τέτοιων σημείων εἶναι :

— Οἱ κορυφές ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου.
— Οἱ κορυφές ὀρθογωνίου (ἤ τετραγώνου).
— Οἱ κορυφές ἰσοσκελοῦς τραπεζίου.
— Τά τρία μέσα τῶν πλευρῶν ἑνός τριγώνου καί τά τρία ἴχνη τῶν ὑψῶν του.
— Τά μέσα ὅλων τῶν τμημάτων πού ἔχουν τό ἕνα ἄκρο τους σέ ὁρισμένο σημεῖο Α′ καί τό ἄλλο ἄκρο τους σέ ὁρισμένο κυκλ(Ο,ρ).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ II

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1. α) Ἀπ. 45 β) Ἀπ. 180.
2. Σέ κάθε εὐθεῖα ὁρίζονται ν—1 σημεῖα.
3. α) Νά δείξετε ὅτι, ἄν ἡ ε διέρχεται ἀπό τό Α, τότε $\Gamma \equiv A$ καί $B \equiv A$. β) Ὁμοίως ἄν ἡ ΑΙ συμπίπτει μέ τήν ε_1, τότε $I \equiv B$. γ) Ὑπάρχουν τόσες ὅσα τά σημεῖα Ι.
4. α) Ἄν $A \in B\Gamma$, τότε τό Γ θά ἀνήκει στήν ε, β) Ὑπάρχουν τόσες ὅσες διέρχονται ἀπό τό Β.
5. Ἡ διάταξη τῶν σημείων εἶναι : Α — Γ — Β.
6. Χρησιμοποιεῖστε τήν πρόταση Ι τῆς § 1.10 καί τήν ἄσκηση 3 (§ 1.18).
7. Γράψτε τήν ὑπόθεση ὡς $AM = M\Delta$ καί $BM = M\Gamma$.
8. Γράψτε τό ΜΝ ὡς ἄθροισμα τῶν ΜΒ, ΒΓ, ΓΝ.
9. Γράψτε κάθε ἕνα ἀπό τά τμήματα ΣΜ καί ΡΜ σάν ἄθροισμα ἤ διαφορά ἄλλων τμημάτων.
10. Ἐργασθεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 4 τῆς § 1.18.
11. Νά ὑπολογίσετε τούς λόγους $\frac{AB}{AM}$ καί $\frac{AB}{A\Sigma}$ $\left(\text{π.χ. } \frac{AB}{AM} = \frac{AM + MB}{AM} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}\right)$.
12. α) Ἄν $\Delta \in AB$, τότε $\Delta \in q$. β) Ἄν τό q' συμπίπτει μέ τό q, τότε $\Delta \in q$. γ) Ἄν $E \in AB$, τότε ἔχουμε $E \in q$ καί $E \in q'$. δ) Ἄν τό Ε δέν ἦταν σημεῖο τῆς ΑΒ, τότε τό q καί q' θά εἶχαν τρία κοινά σημεῖα μή συνευθειακά.
13. Χρησιμοποιεῖστε τά ἀξιώματα τῆς § 1.11.
14. Ἐντοπίστε τά ἡπιεπίπεδα στά ὁποῖα βρίσκεται τό ΓΔ.
15. α) Ἐφαρμόστε τό ἀξίωμα τῆς § 1.11 β) Ἐντοπίστε τά ἡμιεπίπεδα στά ὁποῖα βρίσκεται κάθε σημεῖο τοῦ ΙΕ.
16. Ἐντοπίστε τά ἡμιεπίπεδα στά ὁποῖα ἀνήκει τό Ε΄ παρατηρῶντας ὅτι τό τμῆμα ΕΕ΄ τέμνει τίς ΑΑ΄ καί ΒΒ΄.
17. Παρατηρῆστε ὅτι τά Κ καί Ρ βρίσκονται ἑκατέρωθεν τοῦ φορέα τῆς ΓΔ πού διέρχεται ἀπό τό «μεσαῖο» σημεῖο Α.
18. Ἄν ἡ ε διέρχεται ἀπό κορυφή, π.χ. τήν Α, τότε ἡ ἀνοικτή τεθλ. γραμμή ΒΓ... ΚΛ ἔχει ἕνα ἀκόμη κοινό σημεῖο Α΄ στήν ε. Ἄν ἡ ε δέ διέρχεται ἀπό τήν Α, τότε τά Α καί Α΄ βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς ε καί κάθε μία ἀπό τίς δύο ἀνοικτές τεθλ. γραμμές μέ ἄκρα Α καί Α΄ τέμνει τήν ε σ' ἕνα σημεῖο.

19. Χρησιμοποιῆστε τήν τριγωνική ἀνισότητα στά τρίγωνα ΒΡΓ, ΓΡΑ, ΑΡΒ καί τήν ἄσκηση 7 τῆς § 1.18 γιά τίς τεθλασμένες ΒΡΓ, ΓΡΑ, ΑΡΒ.

20. α) Ἄν Ο τό σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων, ἐφαρμόστε τήν τριγωνική ἀνισότητα στά τρίγωνα ΑΟΒ καί ΔΟΓ. β) Ἐφαρμόστε ἐπίσης τήν τριγωνική ἀνισότητα στά τρίγωνα ΑΒΓ, ΓΒΔ καί στά ΑΒΓ, ΑΔΓ.

21. Ἄν Γ∈ΟΑ, Ζ∈ΟΒ′ καί ὑπῆρχε $\{Λ\} = ε \cap ΓΖ$, δεῖξτε ὅτι ἡ ἡμιευθεία ΟΕ ἤ ἡ ἀντικείμενή της θά βρισκόταν μέσα στήν $Α\hat{Ο}Β'$, β) Ἄν Δ∈ΟΒ, δεῖξτε ὅτι τά Γ καί Δ βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς ε (παρατηρώντας ὅτι τά Δ καί Ζ βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς ε).

22. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι τό Ρ βρίσκεται στήν προέκταση τῆς πλευρᾶς ΑΖ. Ἄν τό Ρ εἶναι σημεῖο π.χ. τῆς ΒΓ, τότε τά Β καί Γ βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ΑΖ. (ἀξίωμα τῆς § 1.11). Ἄν τό Ρ εἶναι κορυφή καί τό Ε βρίσκεται μεταξύ τῶν Ρ καί Ζ, τότε τά Ρ καί Ζ βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς ἄλλης πλευρᾶς πού διέρχεται ἀπό τό Ε.

23. α) Στήν ἀντίθετη περίπτωση δέ θά ἦταν κυρτή (βλ. ἄσκ. 17). β) Ἄν ὑπῆρχαν κορυφές ἑκατέρωθεν τῆς ΑΛ, ἡ ΑΛ θά εἶχε καί τρίτο κοινό σημεῖο μέ τήν πολυγ. γραμμή. γ) Ἡ εὐθεία ε ἤ θά διέρχεται ἀπό κορυφή ἤ θά ἔχει δύο διαδοχικές κορυφές ἑκατέρωθεν αὐτῆς.

24. Ἡ ε δέν τέμνει τό ΒΓ.

25. Ἄν σχηματίσουμε τά ζεύγη τῶν σημείων πού ὁρίζονται ἀπό τήν R, βλέπουμε ὅτι ἡ R εἶναι μόνο συμμετρική.

26. α) Ἄν Ο εἶναι τό μέσο τοῦ ΝΛ καί τό Ν εἶναι σημεῖο τοῦ ΑΛ, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι ΜΝ = ΛΡ. β) Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι ΓΝ = ΛΣΓ (Χρησιμοποιεῖστε ὅτι $ΑΛ = ΛΔ = \frac{ΑΔ}{2} = \frac{ΑΒ}{2} + \frac{ΒΓ}{2} + \frac{ΓΔ}{2}$).

27. Ἐφαρμόστε γιά κάθε τμῆμα ΑΕ, ΒΖ, ΓΔ τήν τριγωνική ἀνισότητα θεωρώντας π.χ. τό ΑΕ πλευρά τῶν τριγώνων ΑΒΕ καί ΑΓΕ.

28. Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι γιά ὁποιαδήποτε θέση τοῦ Ρ ἔχουμε $ΡΑ + ΡΒ + ΒΓ + ΡΔ > ΟΑ + ΟΒ + ΟΓ + ΟΔ$, δηλαδή $ΡΑ + ΡΒ + ΡΓ + ΡΔ > ΑΓ + ΒΔ$.

29. α) Ἐφαρμόστε γιά μιά ὁποιαδήποτε διαγώνιο τό ἀξίωμα τῆς § 1.15 β) Τό συμπέρασμα τῆς περιπτώσεως α ἐφαρμόστε το γιά ὅλες τίς διαγωνίους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

1. Χρησιμοποιῆστε τόν ὁρισμό τοῦ κύκλου κέντρου Α.
2. Τό κέντρο του Ο ἀπέχει ἀπό τό Α καί ἀπό τό Β ἀπόσταση 4 cm.
3. Χρησιμοποιῆστε τόν ὁρισμό τῶν ἐσωτερικῶν καί ἐξωτερικῶν σημείων κυκλικοῦ δίσκου μέ κέντρο Κ.
4. Εἶναι τομή δύο κυκλικῶν δίσκων.
5. Χρησιμοποιώντας τήν τριγ. ἀνισότητα, καί τήν § 2.2.
6. Ἀρκεῖ νά δείξετε ὅτι ἡ ΟΓ εἶναι ἐσωτερική ἡμιευθεία τῆς κυρτῆς γωνίας $Α\hat{Ο}Β$ (ἄσκ. 21 § 1.19) καί ὅτι ἡ ΟΔ εἶναι ἐξωτερική ἡμιευθεία της.
7. Ἐργασθεῖτε ὅπως στή λυμένη ἄσκηση 3 τῆς §. 1.18.
8. Χρησιμοποιεῖστε τίς ἰδιότητες τῆς § 2.9 καί τήν ἄσκηση 7.

9. Εἶναι διαφορές ἴσων τόξων.
10. Δεῖξτε ὅτι εἶναι χορδές ἴσων τόξων.
11. Ἐπειδή $\widehat{AB} > 2\widehat{A\Gamma} \Leftrightarrow \widehat{AB} - \widehat{A\Gamma} > \widehat{A\Gamma} \Leftrightarrow \widehat{B\Gamma} > \widehat{A\Gamma} \Leftrightarrow B\Gamma > A\Gamma$, θά πρέπει νά ἀποδείξετε τήν ἀνισότητα $B\Gamma > A\Gamma$.
12. Ἄν τό τόξο $\widehat{A\Gamma}$ εἶναι 2α, τότε τό $\widehat{\Gamma\Delta}$ εἶναι 3α καί τό $\widehat{\Delta A}$ εἶναι 4α.
13. Ἐργασθεῖτε ὅπως στή λυμένη ἄσκηση 2 τῆς § 2.11.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

1. Ἀρκεῖ νά δειχθεῖ ὅτι $\widehat{BA} = \widehat{A\Gamma}$.
2. Ἀρκεῖ νά δειχθεῖ ὅτι $\widehat{AA} = \widehat{BB}'$.
3. Νά κατασκευάστε τήν ἀντίστοιχη κυρτή.
4. Πάρτε τή γωνία τῶν διχοτόμων ὡς ἄθροισμα δύο γωνιῶν.
5. Ἐργασθεῖτε ὅπωε στήν ἄσκ. 4 τῆς § 1.18 γιά τά εὐθ. τμήματα.
6. Ἐργασθεῖτε ὅπωε στή λυμένη ἄσκηση 3 τῆς § 1.18.
7. Ἀπάντηση : $\Gamma\hat{O}\Delta = 20^o$.
8. Ἀρκεῖ νά δειχθεῖ ὅτι $A\hat{O}K = M\hat{O}\Gamma$ (δηλαδή ὅτι $\frac{A\hat{O}B}{2} = \frac{\Gamma\hat{O}\Delta}{2}$) καί ὅτι $B\hat{O}A = \Delta\hat{O}N$ (δηλαδή ὅτι $B\hat{O}\Gamma / 2 = A\hat{O}\Delta / 2$).
9. Ἀπάντηση : συμπλήρωμα $\hat{\varphi} = 18^o$, παραπλήκβμα $\hat{\varphi} = 108^o$.
10. Ἀπάντηση : $\hat{\varphi} = 72^o$, $\hat{\omega} = 40^o$.
11. Ἀπάντηση $\hat{\varphi} = 45^o$. Στή γενίκευση $\hat{\varphi} = \frac{\lambda}{\kappa + 2\lambda}\, 270^o$.
12. Ἀπάντηση : $\hat{\varphi} = 45^o$.
13. Ὑπολογίστε κάθε μία ἀπό τίς $E\hat{O}B$ καί $B\hat{O}Z$ μέ τίς $A\hat{O}\Gamma$ καί $A\hat{O}B$.
14. Ἄν εἶναι ΟΖ ἡ διχοτόμος τῆς $B\hat{O}\Gamma$, νά ὑπολογίσετε τίς γωνίες $B\hat{O}Z$ καί $A\hat{O}Z = A\hat{O}B + B\hat{O}Z$.
15. Θεωρῆστε τίς $A'\hat{O}B'$ καί $A\hat{O}B$ ὡς ἄθροισμα ἐφεξῆς γωνιῶν μέ κοινή πλευρά τήν ΟΡ.
16. Ἐργασθεῖτε ὅπως στή λυμένη ἄσκ. 4 τῆς § 3.16.
17. Ἄν πάρουμε χορδή $AE = 2A\Delta$, θά ἔχουμε (βλ. ἄσκ. 11 τῆς § 2.13) $\widehat{AE} > 2\widehat{A\Delta}$. Ἔχουμε ὅμως $AB = 2AE \Rightarrow \widehat{AB} > 2\widehat{AE} > 2.2\widehat{A\Delta} \Rightarrow \widehat{AB} > 4\widehat{A\Delta}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

1. Συγκρίνετε τά τρίγ. $B\Delta\hat{M}$ καί ΕΜΓ.
2. Συγκρίνατε τά τρίγ. ΑΒΕ καί ΑΓΖ.
3. Συγκρίνετε τά τρίγωνα ΟΜΑ καί ΟΜΒ καί κατόπι τά ΟΑΑ΄ καί ΟΒΒ΄.
4. Ἄν ἡ ΑΜ τέμνει τή Γ΄Β΄ στό Μ΄ νά δείξετε, μέ ἰσότητες τριγώνων, ὅτι Γ΄Μ΄ = ΜΓ καί Μ΄Β΄ = ΜΒ.
5. Συγκρίνετε τά τρίγωνα Β΄ΑΓ καί ΒΑΓ΄.
6. Συγκρίνετε ἀνά δύο τά τρίγωνα ΔΒΕ, ΕΖΓ, ΖΔΑ

7. Χρησιμοποιῆστε τό θεώρημα πού συγκρίνει στοιχεῖα δύο τριγώνων, ὅταν τά τρίγωνα αὐτά ἔχουν δύο πλευρές ἴσες.

8. Νά ἀποδείξετε, μέ σύγκριση δύο κατάλληλων τριγώνων. ὅτι τά τρίγωνα ΑΒΓ καί Α'Β'Γ' ἔχουν καί $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$.

9. Νά ἀποδείξετε μέ σύγκριση κατάλληλων τριγώνων, ὅτι τά τρίγωνα ΑΒΓ καί Α'Β'Γ' ἔχουν καί $\hat{A} = \hat{A}'$.

10. Σέ κάθε περίπτωση νά δείξετε ὅτι οἱ γωνίες πού βρίσκονται ἀπέναντι ἀπό τίς ἄλλες ἴσες πλευρές δέν μπορεῖ νά εἶναι παραπληρωματικές (βλ. θεώρημα § 4.8 Θ. ΙΙ).

11. Νά ἀποδείξετε σέ κάθε περίπτωση τήν ἰσότητα δύο τριγώνων πού ἔχουν γιά ἀντίστοιχες πλευρές τέ τμήματα πού θέλετε νά συγκρίνετε.

12. Γιά τίς προτάσεις Π_1, Π_2, Π_3 ὀνομάστε στήν κάθε περίπτωση ΒΔ καί ΓΕ τά τμήματα πού θέλετε νά συγκρίνετε καί ἀποδείξτε τήν ἰσότητα τῶν τριγώνων ΒΓΔ καί ΒΓΕ.Οἱ προτάσεις Π_4, Π_3, Π_6 εἶναι άπλές συνέπειες τῶν Π_1, Π_2, Π_3.

13. Ἀπό ἰσότητες ὀρθογώνιων τριγώνων, πού ἔχουν κάθετες πλευρές τά ἴσα ὕψη, νά ἐξασφαλίσετε στήν κάθε περίπτωση στοιχεῖα ἴσα γιά τά τρίγωνα ΑΒΓ καί Α'Β'Γ'.

14. Στή προέκταση τῆς ΒΑ πάρτε τμῆμα ΑΕ = ΑΓ.

15. Ἐργασθεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 6 τῆς § 4.10.

16. Συγκρίνετε τά τρίγωνα ΒΑΒ' καί ΓΑΓ'.

17. Γιά τήν πρώτη ἀνισότητα πάρτε στήν ΑΓ τμῆμα ΑΒ' = ΑΒ καί παρατηρῆστε ὅτι Μ'Β = ΜΒ, ἐνῶ τό Β'Γ εἶναι ἴσο μέ τή διαφορά τῶν πλευρῶν. Γιά τή δεύτερη ἀνισότητα πάρτε στήν προέκταση τῆς ΓΑ τμῆμα AB_1 = ΑΒ (ὅταν ἡ ἐξωτερική διχοτόμος διχοτομεῖ τή γωνία BAB_1) καί παρατηρῆστε ὅτι NB_1 = ΝΒ, ἐνῶ τό ΓB_1 εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν πλευρῶν.

18. Ἐφαρμόστε τήν τριγωνική ἀνισότητα (§ 1.17)) στά τρίγωνα ΑΔΒ καί ΑΔΓ.

19. **Νά προεκτείνετε τήν ἄλλη κάθετο ὅσο εἶναι ἡ ὑποτείνουσα.**

20. α) Μέ ἰσότητες τριγώνων δεῖξτε ὅτι $O\hat{B}A' = O\hat{B}'A$ καί ὅτι ΚΒ = ΚΒ', ὁπότε θά εἶναι τριγΟΒΑ' = τριγΟΒΑ'. β) Ἀποδεῖξτε ὅτι τριγΟΜΑ = τριγΟΝΑ'.

21. Παρατηρῆστε (ἀπό τήν ἄσκ. 20 τῆς § 4.12) ὅτι κάθε ἕνα ἀπό τά Κ,Λ,Μ, κεῖται στή διχοτόμο τῆς $X\hat{O}\Psi$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

1. Ἄν εἶναι $\{P\} = MA \cap \varepsilon$, ἐφαρμόστε τήν τριγωνική ἀνισότητα στό τρίγωνο ΜΡΒ.

2. Παρατηρῆστε ὅτι δύο σημεῖα τῆς ΟΔ ἰσαπέχουν ἀπό τά Α καί Β.

3. Ἀποδείξατε ὅτι καί τό Δ ἰσαπέχει ἀπό τά Α καί Γ.

4. Παρατηρῆστε ὅτι τό ΜΑ εἶναι ἴσο μέ τό $MB \perp O\Psi$.

5. Νά συγκρίνετε τό υ_α μέ κάθε μιά ἀπό τίς πλευρές β καί γ.

6. Ἄν $\hat{\omega}$ καί $\hat{\varphi}$ εἶναι οἱ ἐντός ἐναλλάξ τῶν ε_1 καί ε_2, οἱ γωνίες $\frac{\hat{\omega}}{2}$ καί $\frac{\hat{\varphi}}{2}$ εἶναι ἐντός ἐναλλάξ τῶν διχοτόμων τους ὅταν τέμνονται ἀπό τήν ε. Ἄν $\hat{\theta}$ καί $\hat{\varphi}$ οἱ ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη τῶν ε_1 καί ε_2, ἡ διχοτόμος τῆς $\hat{\theta}$ εἶναι κάθετη στή διχοτόμο τῆς $\hat{\omega}$.

7. α) Ἄν οἱ $\widehat{\varphi}$ καί $\widehat{\omega}$ εἶναι ἴσες καί ἔχουν πλευρές παράλληλες συγκρίνετε τίς ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίες τῶν διχοτόμων τους, ὅταν τέμνονται ἀπό μία πλευρά τῆς μιᾶς γωνίας.

β) Ἄν οἱ $\widehat{\theta}$ καί $\widehat{\varphi}$ εἶναι παραπληρωματικές καί ἔχουν πλευρές παράλληλες, παρατηρῆστε ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{\omega}$ πού εἶναι ἐφεξῆς καί παραπληρωματική τῆς $\widehat{\theta}$ καί ἡ διχοτόμος τῆς $\widehat{\varphi}$ εἶναι παράλληλες.

8. α) Ἄν οἱ $X\widehat{O}\Psi = \widehat{\omega}$, $X'\widehat{O}'\Psi' = \widehat{\varphi}$ ἔχουν πλευρές κάθετες καί εἶναι ἴσες, σχηματίστε γωνία $\widehat{\varphi}' = \widehat{\varphi}$ πού νά ἔχει κορυφή τό Ο καί πλευρές παράλληλες μέ τίς πλευρές τῆς $\widehat{\varphi}$. Ἀποδεῖξτε ὅτι οἱ διχοτόμοι τῶν $\widehat{\varphi}$ καί $\widehat{\omega}$ εἶναι κάθετες.

β) Ἄν οἱ γωνίες $\widehat{\theta}$ καί $\widehat{\varphi}$ εἶναι παραπληρωματικές καί ἔχουν κάθετες πλευρές παρατηρῆστε ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{\omega}$ πού εἶναι ἐφεξῆς καί παραπληρωματική τῆς $\widehat{\theta}$ καί ἡ διχοτόμος τῆς $\widehat{\varphi}$ εἶναι κάθετες.

9. Στό σχῆμα τῆς ἀσκήσεως 6 § 4.10 θά πρέπει νά δείξουμε π.χ. ὅτι $A\widehat{B}K = K\widehat{B}'A'$.

10. Ὑπολογίστε τήν $A\widehat{E}\Gamma$ ὡς ἐξωτερική τοῦ τριγώνου ΑΕΒ καί ἀντικαταστῆστε, στήν ἰσότητα πού προκύπτει, τήν $\widehat{A}$.

11. Ὑπολογίστε τίς γωνίες πού ζητᾶμε ἀπό τίς γωνίες τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΔ.

12. Ἐργασθεῖτε ὅπως στήν ἄσκ. 4 § 3.16.

13. Ἄν οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{\Gamma}$ καί $\widehat{\Delta}$ τέμνονται στό Ι, ὑπολογίζουμε τήν $\widehat{\omega}$ ἀπό τό τρίγωνο ΓΙΔ. Ἐπίσης ἄν οἱ διχοτόμοι τῶν $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Delta}$ τέμνονται στό Ε, ὑπολογίζουμε τή $B\widehat{E}\Delta = 180^o - \widehat{\varphi}$ ἀπό τό τετράπλευρο ΑΒΕΔ.

14. Παρατηρῆστε ὅτι κάθε γωνία τοῦ πολυγώνου μας εἶναι $\dfrac{2\nu-4}{\nu}$ ὀρθές.

15. Κάνετε χρήση τοῦ ὅτι κάθε γωνία τοῦ τετραπλεύρου καί ἡ ἀντίστοιχη ἐξωτερική της ἔχουν ἄθροισμα 180^o.

16. Ὑπολογίστε τίς γωνίες ἀπό τά τρίγωνα ΑΖΔ καί ΑΕΗ ἐκφράζοντας τίς δύο ἄλλες γωνίες κάθε τριγώνου ἀπό τίς γωνίες τοῦ ΑΒΓ.

17. Προεκτείνεται τή διάμεσο ΑΜ κατά τμῆμα ΜΕ = ΑΜ καί ἐφαρμόστε τήν τριγωνική ἀνισότητα.

18. Ι) Ἐκφράστε τίς $B\widehat{A}\Delta$ καί $\Gamma\widehat{A}\Delta$ ἀπό τίς γωνίες $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$ ἀντιστοίχως.

ΙΙ) Πριεκτείνεται τή διάμεσο ΑΜ κατά τμῆμα ΜΕ = ΜΑ καί συγκρίνετε στοιχεῖα τοῦ ΑΕΓ.

ΙΙΙ) Συνδυάζοντας τά δύο παραπάνω συμπεράσματα δεῖξτε ὅτι $B\widehat{A}\Delta < \widehat{A}/2$,καί $B\widehat{A}M > \widehat{A}/2$.

IV) Παρατηρῆστε ἀπό τό συμπέρασμα ΙΙΙ, ὅτι τά δ_α καί μ_α βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος τοῦ υ_α).

V) Χρησιμοποιῆστε τήν ἄσκηση 17.

19. Παρατηρεῖστε ὅτι ἡ ΒΕ καί ΒΓ εἶναι πλάγιες πρός τήν ΑΓ καί ὅμοια οἱ ΕΒ καί ΕΔ πλάγιες πρός τήν ΑΒ.

20. Νά συγκρίνετε τά τρίγωνα ΑΔΖ, ΒΕΔ, ΓΕΖ.

21. Ἄν εἶναι $\{E\} = A\Delta \cap B\Gamma$ καί ἡ διχοτόμος τῆς $\widehat{E}$ τέμνει τή διχοτόμο τῆς $\widehat{Z}$ στό Ι καί τήν πλευρά ΔΓ στό Θ, πάρτε τήν $E\widehat{I}Z$ ὡς ἐξωτερική τοῦ τριγώνου ΙΘΖ καί ὑπολογίστε τίς ἄλλες γωνίες τοῦ τριγώνου αὐτοῦ ἀπό τίς γωνίες τοῦ ΑΒΓΔ.

22. Μετατρέψτε τήν ὑπόθεση $AM > \dfrac{B\Gamma}{2} \left(\text{ἤ } AM = \dfrac{B\Gamma}{2} \text{ ἤ } AM < \dfrac{B\Gamma}{2} \right)$ σέ ἀνισότητες γωνιῶν τῶν δύο τριγώνων ΑΜΒ καί ΑΜΓ καὶ προσθέστε κατά μέλη τίς δύο ἀνισότητες πού προκύπτουν.

1. Ἄν οἱ διχοτόμοι τῶν $\hat{B}$ καί $\hat{\Delta}$ τέμνουν τίς ΔΑ καί ΓΒ στά Ε καί Ζ, συγκρίνετε τίς γωνίες $A\hat{E}B$ καί $A\hat{\Delta}Z$. Ἄν οἱ διχοτόμοι τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν $\hat{B}$ καί $\hat{A}$ τέμνονται στό Ι, ὑπολογίστε τή γωνία $A\hat{I}B$ ἀπό τό τρίγωνο ΑΙΒ. Ἐργασθεῖτε ὅμοια καί γιά τίς ἐξωτερικές διχοτόμους.
2. Παρατηρῆστε ὅτι τά τρίγωνα ΑΒΔ καί ΑΔΓ ἔχουν δύο πλευρές ἴσες.
3. Ἐπειδή τό ΜΔΑΕ εἶναι παραλληλόγραμμο, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι τό τρίγωνο ΜΕΒ εἶναι ἰσοσκελές.
4. α) Χρησιμοποιῆστε τό θεώρημα τῆς § 6.2 (περίπτωση δ) καί τήν ἄσκηση 1 τῆς § 6.13. β) Παρατηρῆστε ὅτι οἱ γωνίες εἶναι συμμετρικές ὡς πρός τό Ο.
5. α) Δεῖξτε μέ ἰσότητες τριγώνων ὅτι οἱ ἀπέναντι πλευρές του εἶναι ἴσες. β) Ἄν πάρουμε μία διαγώνιο τοῦ ἑνός καί μία διαγώνιο τοῦ ἄλλου, δεῖξτε ὅτι τό σημεῖο τομῆς τους εἶναι μέσο τῆς καθεμιᾶς.
6. Συγκρίνετε τά τρίγωνα ΑΕΖ καί ΓΗΘ.
7. Ἄν Μ τό μέσο τῆς ΒΓ, ἀρκεῖ νά δειχθεῖ ὅτι $EI \mathbin{/\!/}= \dfrac{\Delta M}{2}$.
8. Ἄν Ζ τό μέσο τοῦ ΕΓ, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι ΑΕ = ΕΖ = ΖΓ.
9. Παρατηρῆστε ὅτι ΔΕ // ΒΖ.
10. Παρατηρῆστε ὅτι τό τρίγωνο ΑΒΕ εἶναι ἰσοσκελές καί τό Δ μέσο τοῦ ΒΕ.
11. Παρατηρῆστε ὅτι καί στήν ἄσκ. 10.
12. α) Δεῖξτε ὅτι στό καθένα ἀπό τά τετράπλευρα αὐτά οἱ δύο ἀπέναντι πλευρές τους εἶναι ἴσες καί παράλληλες πρός τό μισό μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ΑΒΓΔ.
β) Παρατηρῆστε ὅτι κάθε μία ἀπό τίς ΖΘ καί ΛΚ περνάει ἀπό τό μέσο τῆς ΕΗ.
13. Χρησιμοποιῆστε τό ὅτι οἱ πλευρές τοῦ ΚΛΜΡ εἶναι παράλληλες καί ἴσες μέ τά μισά τῶν διαγωνίων τοῦ ΑΒΓΔ.
14. Μέ τήν ἄσκ. 1 ἐξασφαλίστε ὅτι οἱ διχοτόμοι σχηματίζουν ὀρθογώνιο. Μετά, ἄν Ε καί Ζ εἶναι τά σημεῖα τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν $\hat{B}$ καί $\hat{\Delta}$ μέ τίς πλευρές ΑΔ καί ΒΓ ἀντιστοίχως, δεῖξτε ὅτι οἱ δύο ἀπέναντι κορυφές τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι μέσα τῶν ΒΕ καί ΔΖ.
15. Ἐργασθεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 14.
16. Ἄν εἶναι $\{I\} = A'E \cap \Gamma'Z$, δεῖξτε ὅτι οἱ δύο ἄλλες γωνίες τοῦ Α΄ΙΓ΄ εἶναι ἴσες μέ τίς γωνίες στίς ὁποῖες χωρίζεται ἡ $\hat{B}$ ἀπό τή ΒΔ.
17. Παρατηρῆστε ὅτι $A\hat{M}H$ ἰσοῦται μέ τό διπλάσιο μιᾶς ὀξείας γωνίας τοῦ τριγώνου.
18. Φέρτε τή διάμεσο ΑΜ καί παρατηρῆστε ὅτι $A\hat{M}H = 30^o$.
19. Ἀποδεῖξτε ὅτι τό τρίγωνο ΒΛΔ εἶναι ἰσοσκελές.
20. Νά χρησιμοποιῆστε τήν ἰσότητα $P\hat{M}\Gamma = M\hat{P}H + P\hat{H}M$.
21. α) Παρατηρῆστε ὅτι τό ΑΚΒΛ ἔχει τρεῖς ὀρθές γωνίες.
β) Ἡ ΚΛ περνάει ἀπό τό μέσο τῆς ΑΒ καί εἶναι $\Lambda\hat{K}B = A\hat{B}K = K\hat{B}\Gamma$.
22. Ὀνομάστε ΑΚ καί ΑΛ τίς ἀποστάσεις τῆς κορυφῆς Α ἀπό τίς πλευρές ΒΓ καί ΔΓ καί συγκρίνετε τά τρίγωνα ΑΒΚ καί ΑΔΛ.
23. Πάρτε τίς ἀποστάσεις τῶν σημείων Σ καί Κ ἀπό τίς ἀπέναντι πλευρές τους καί συγκρίνετε τά τρίγωνα πού σχηματίζονται.

24. Ἐπειδή οἱ διχοτόμοι σχηματίζουν ὀριογώνιο (βλ. ἄσκ. 14), πρέπει νά δείξουμε ὅτι τό ὀρθογώτιο αὐτό ἔχει δύο διαδοχικές πλευρές του ἴσες.

25. Ἄν Ο εἶναι τό σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων, γράψτε τήν τριγωνική ἀνισότητα στά τρίγωνα ΑΟΒ καί ΔΟΓ.

26. Ἄν ἡ διχοτόμος τῆς $\hat{\Delta}$ τέμνει τήν ΑΒ στό Ε, δεῖξτε ὅτι ἡ ΓΕ εἶναι διχοτόμος τῆς $\hat{\Gamma}$ (Παρατηρώντας ὅτι ΑΕ = ΑΔ).

27. Ὑπολογίστε ἀπό τήν ΑΒ = α τή διάμεσο τοῦ τραπεζίου ἀπό τά δύο ἀκραῖα μέρη της.

28. Παρατηρῆστε ὅτι ΑΔΗΒ εἶναι ὀρθογώνιο καί δεῖξτε ὅτι τό τμῆμα ΝΡ ἑνώνει τά μέσα τῶν διαγωνίων.

29. Ἄν ἡ διχοτόμος τῆς $\hat{A}$ τέμνει τή ΒΓ στό Ε καί τή ΔΓ στό Ζ, δεῖξτε ὅτι ἡ ΔΕ εἶναι διχοτόμος τῆς $\hat{\Delta}$ (δείχνοντας ὅτι τό τρίγωνο ΑΔΖ εἶναι ἰσοσκελές).

30. Ἐξετάστε στήν κάθε περίπτωση τί εἶναι τό τμῆμα ΜΜ΄ γιά τό τραπέζιο πού ἔχει βάσεις ΑΑ΄ καί ΒΒ΄.

31. Ἄν Ε καί Ζ εἶναι τά μέσα τῶν ΑΔ καί ΒΓ, φέρνουμε τίς ΕΕ΄ ⊥ ΓΔ καί ΖΖ΄ ⊥ ΓΔ καί παρατηροῦμε ὅτι ἡ ΚΚ΄ εἶναι διάμεσος τοῦ ΕΕ΄Ζ΄Ζ.

32. Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι τό τρίγωνο ΑΜΔ εἶναι ὀρθογώνιο στό Μ, δηλαδή ὅτι ΔΜ ⊥ Β΄Γ΄.

33. Παρατηρῆστε ὅτι ἡ ΗΖ εἶναι διάμεσος τοῦ τραπεζίου ΕΒΓΔ.

34. Παρατηρῆστε ὅτι τό τμῆμα ΚΛ συνδέει τά μέσα τῶν διαγωνίων τοῦ τραπεζίου ΑΒΕΓ.

35. Ἄν οἱ ΑΗ καί ΒΚ τέμνουν τή ΓΔ στά Ε καί Ζ, παρατηρῆστε ὅτι τό Η καί Κ εἶναι μέσα τῶν ΑΕ καί ΒΖ.

36. Τά μέσα τῶν πλευρῶν του εἶναι κορυφές ρόμβου, ἄν καί μόνο ἄν οἱ διαγώνιοί του εἶναι ἴσες (βλ. ἄσκ. 13, β).

37. Ἐργασθεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 9 τῆς § 6.13.

38. Παρατηρῆστε ὅτι ἡ ΔΒ διέρχεται ἀπό τά μέσα δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΑ΄Γ.

39. Παρατηρῆστε ὅτι ΑΜ + ΜΒ ≥ Α΄Β.

40. Παρατηρῆστε ὅτι | ΑΜ — ΜΒ | ≤ Α΄Β.

41. Παρατηρῆστε ὅτι ΑΜ + ΜΝ + ΝΒ ≥ Α΄Β΄.

42. α) Ἐπειδή τά τρίγωνα ΒΑΒ΄ καί ΕΑΕ΄ εἶναι ἰσοσκελῆ, βρίσκουμε εὔκολα ὅτι Β΄Ε΄ = = ΒΕ. β) Παρατηρῆστε ὅτι τό Ε΄ εἶναι μέσο τοῦ Β΄Γ.

43. Ἀπό τήν ἄσκηση 21 καταλαβαίνουμε ὅτ κάθε ἕνα ἀπό τά σημεῖα αὐτά βρίσκεται στήν εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τά μέσα τῶν ΑΒ καί ΑΓ.

44. Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι $A\hat{B}\Delta = 2\Delta\hat{B}K$. Ἄν φέρουμε τή διάμεσο ΑΜ τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου ΔΑΖ, παρατηροῦμε ὅτι $A\hat{B}\Delta = A\hat{M}B$, ἐνῶ $A\hat{M}B = 2A\hat{\Delta}M$.

45. Παρατηρῆστε (πηγαίνοντας τό Μ στό Β) ὅτι ἡ διαφορά αὐτή πρέπει νά εἶναι ἴση μέ ΒΑ, ἐνῶ ἔχουμε ΜΔ = ΑΕ.

46. Πηγαίνοντας τό Μ στό Β βλέπουμε ὅτι ἡ διαφορά αὐτή πρέπει νά εἶναι ἴση μέ τό ὕψος ΒΖ. Ἄν λοιπόν φέρουμε ΒΙ ⊥ ΜΔ, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι ΜΕ = ΜΙ.

47. α) Πηγαίνοντας τό Μ στό μέσο Η τῆς ΒΓ βλέπουμε ὅτι τό ἄθροισμα αὐτό πρέπει νά εἶναι ἴσο μέ τό διπλάσιο τοῦ ὕψους ΑΗ. Ἔτσι, ἄν φέρουμε ΑΙ ⊥ ΔΕ, ἀρκεῖ νά ἐκφράσουμε καθένα ἀπό τά ΜΕ καί ΜΔ μέ τό ΜΙ = ΑΗ.
β) Ὁμοίως ἐργαζόμαστε καί γιά τό Μ΄.

48. Ἄν φέρουμε ἀπό τό Ρ παράλληλο πρός τήν ΟΨ, τό ἄθροισμα ΡΕ + ΡΖ εἶναι ἴσο μέ τό ὕψος τοῦ ἰσόπλευρου τριγώνου πού σχηματίζεται.

49. Νά συγκρίνετε μεταξύ τους τά τρίγωνα ΝΒΡ, ΡΓΣ, ΣΔΤ, ΤΑΝ καί μετά νά δείξετε ὅτι μία γωνία τοῦ ΝΡΣΤ εἶναι ὀρθή.

50. Πάρτε τά μέσα Ν καί Λ τῶν πλευρῶν ΑΓ μαί ΑΒ καί συγκρίνετε τά τρίγωνα ΜΝΣ καί ΜΛΡ $\left(\text{παρατηρώντας ὅτι } ΜΣ = \frac{ΑΗ}{2} \text{ καί } ΜΡ = \frac{ΓΕ}{2}\right)$.

51. Ἄν ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΔΔ΄ εἶναι οἱ θεωρούμενες ἀποστάσεις καί ΟΟ΄ εἶναι ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓΔ ἀπό τήν ε, συγκρίνετε κάθε ἕνα ἀπό τά τμήματα ΑΑ΄ καί ΒΒ΄ + ΓΓ΄ μέ τό τμῆμα ΟΟ΄.

52. Ἐργασθεῖτε ὅπως καί στήν ἄσκηση 51.

53. Ἄν ΕΜ εἶναι ἡ διάμεσος τοῦ τραπεζίου, παρατηρῆστε ὅτι $Β\hat{Α}Μ = Α\hat{Μ}Ε$ καί δεῖξτε ὅτι $Α\hat{Μ}Ε = Ε\hat{Μ}Δ = Δ\hat{Μ}Γ$.

54. Ἄν Ε καί Ζ εἶναι τά μέσα τῶν ΑΒ καί ΓΔ, παρατηρῆστε ὅτι τό τμῆμα ΚΚ΄ εἶναι διάμεσος τοῦ τραπεζίου πού ἔχει βάσεις τά τμήματα ΕΕ΄ $\perp$ ε καί ΖΖ΄ $\perp$ ε.

55. Παίρνουμε Α΄ = συμμοχΑ καί φέρνουμε τό τμῆμα Α΄Κ $\perp$ ΟΨ. Παρατηρῆστε τότε ὅτι ἔχουμε $ΑΜ + ΜΝ \geq Α΄Κ$.

56. Ἄν Ν τό μέσο τῆς ΑΒ, δεῖξτε ὅτι $ΜΝ = \frac{ΑΒ}{2}$.

57. α) Φέρτε τό ὕψος ΑΝ καί δεῖξτε ὅτι κάθε μία ἀπό τίς προβολές εἶναι ἴση μέ ΑΚ. β) Δεῖξτε ὅτι ἡ γωνία $Ε\hat{Α}Θ$ εἶναι 180°. γ) Πάρτε τό μέσο Λ τοῦ ΒΓ καί δεῖξτε ὅτι $ΜΛ = \frac{ΒΓ}{2}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

1. Συγκρίνετε τά τρίγωνα πού σχηματίζονται, ἄν φέρουμε τά ἀποστήματα τῶν χορδῶν.

2. Συγκρίνετε τά τρίγωνα ΟΑΓ καί ΟΔΒ. Γιά τό δεύτερο ἐρώτημα χρησιμοποιῆστε τήν ἄσκηση 18 ΙΙ τῆς § 5.15.

3. Πάρτε καί μιά ἄλλη ὁποιαδήποτε χορδή καί συγκρίνετε τά ἀποστήματα τῶν δύο χορδῶν.

4. Γιατί ἔχουν ἴσα ἀποστήματα.

5. Ἄν Μ τό κοινό μέσο, φέρτε τήν ΟΜ.

6. Νά συγκρίνετε τά ἀποστήματα τῶν δύο χορδῶν.

7. Ἄν φέρουμε τά τμήματα ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΟΟ΄ κάθετα στή ΓΔ, παρατηρῆστε ὅτι τό Ο΄ εἶναι κοινό μέσο τῶν Α΄Β΄ καί ΓΔ.

8. Ὑπολογίστε τό ἄθροισμα $Β\hat{Γ}Ο + Γ\hat{Β}Ο$.

9. Θεωρῆστε τήν $Ε\hat{Ο}Β$ ὡς ἐξωτερική τοῦ τριγώνου ΕΟΓ παρατηρώντας ὅτι οἱ γωνίες $Δ\hat{Ε}Ο$ καί $Ε\hat{Δ}Ο$ εἶναι ἴσες καί κάθε μιά τους εἶναι διπλάσια ἀπό τίς ἴσες γωνίες $Δ\hat{Γ}Ο$ καί $Δ\hat{Ο}Γ$.

10. Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι $Α\hat{Β}Γ + Α\hat{Β}Δ = 180°$.

11. Ἄν φέρουμε ἀπό τά κέντρα Κ καί Λ τά τμήματα ΚΖ$\perp$ΓΔ καί ΛΗ$\perp$ΓΔ, παρατηρῆστε ὅτι ΚΛ = ΖΗ.

12. Δεῖξτε ὅτι οἱ ἀκτίνες πού καταλήγουν στά Β καί Γ εἶναι παράλληλες.

13. Φέρτε τήν κοινή ἐσωτερική ἐφαπτομένη καί δεῖξτε ὅτι οἱ ἐντός ἐναλλάξ (ἤ οἱ ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη) γωνίες τῶν ΒΒ΄ καί ΓΓ΄ εἶναι ἴσες.

14. Ἄν ἡ κοινή ἐσωτερική ἐφαπτομένη τῶν δύο κύκλων τέμνει τή ΒΓ στό Μ, δεῖξτε ὅτι τό Μ εἶναι μέσο τῆς ΒΓ καί ΑΜ = ΒΓ / 2.

15. Ἀρκεῖ νά δείξετε ὅτι $B\hat{K}A + \Gamma\hat{\Lambda}A = 180^o$.

16. Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι τό ΚΒΓΛ εἶναι παραλληλόγραμμο δηλαδή ὅτι ΚΒ // = ΛΓ (βλ. ἄσκ. 15).

17. Ἄν οἱ ἐφαπτόμενες στά Α καί Γ τέμνονται στό Ε καί οἱ χορδές ΔΑ καί ΓΒ τείνονται στό Ζ, ὑπολογίστε τίς γωνίες $\hat{E}$ καί $\hat{Z}$ ἀπό τά ἰσοσκελή τρίγωνα ΑΕΓ καί ΔΖΓ.

18. Παρατηρῆστε ὅτι οἱ εὐθεῖες ΙΚ καί ΙΛ εἶναι διχοτόμοι ἐφεξῆς καί παραπληρωματικῶν γωνιῶν.

19. Ἄν Α καί Β εἶναι ὁποιαδήποτε σημεῖα τῶν κύκλων (Κ,R) καί (Λ,ρ) καί ΕΖ εἶναι τό μικρότερο τμῆμα πού ὁρίζουν οἱ κύκλοι στή διάκεντρο, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι $AB \geq EZ$. (Ἄν ὁ ἕνα κύκλος εἶναι ἔξω ἀπό τόν ἄλλο, χρησιμοποιῆστε τήν ἀνισότητα $\Lambda K \leq KA + AB + B\Lambda$, ἐνῶ ἄν ὁ κύκλος (Λ,ρ) εἶναι μέσα στόν (Κ,R), χρησιμοποιῆστε τήν ἀνισότητα $AK \leq AB + B\Lambda + K\Lambda$).

20. Παρατηρῆστε ὅτι τό τρίγωνο ΑΔΓ εἶναι ὀρθογώνιο καί ὅτι ΑΜ = ΜΔ.

21. Δεῖξτε ὅτι $\Sigma\hat{I}A = \Sigma\hat{A}I$ (παίρνοντας τή $\Sigma\hat{I}A$ ὡς ἐξωτερική τοῦ τριγώνου ΑΙΓ).

22. Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι τό τρίγωνο ΜΒΟ εἶναι ὀρθογώνιο στό Β. Τό τρίγωνο αὐτό νά τό συγκρίνετε μέ τό ΜΓΟ.

23. α) Ἄν ἡ ΜΙ τέμνει τή ΓΒ στό Ε, δεῖξτε ὅτι $\Gamma\hat{I}E + I\hat{\Gamma}E = 90^o$. β) Ἄν ἡ ΡΙ τέμνει τήν ΑΔ στό Ζ, ἐργασθεῖτε ὅπως στό ἐρώτημα Ι. γ) Παρατηρῆστε ὅτι τό ΙΜΟΡ εἶναι παραλληλόγραμμο καί ὅτι ΟΜ = ΡΙ. δ) Ἀπό τό παραλληλόγραμμο ΙΜΟΡ ἔχουμε καί ΟΡ = ΙΜ.

24. Ἄν οἱ χορδές ΑΒ, ΑΓ τέμνουν τό μικρότερο κύκλο στά Ε καί Ζ, ἔχουμε (βλ. ἄσκ. 13) ΕΖ // ΒΓ καί ἄρα $\widehat{E\Delta} = \widehat{\Delta Z}$.
β) Ἄν ἡ ΒΑ τέμνει τό μικρό κύκλο στό Ε, θεωρῆστε τή $\Delta\hat{A}E$ ὡς ἐξωτερική τοῦ τριγώνου ΔΑΒ καί τή $\Delta\hat{A}\Gamma$ ὡς ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν της πού ὁρίζονται ἀπό τήν κοινή ἐφαπτομένη τῶν δύο κύκλων.

25. α) Δεῖξτε ὅτι κάθε μιά ἀπό τίς γωνίες $\Delta\hat{I}E$ καί $I\hat{E}\Delta$ εἶναι ἴση μέ τήν $A\hat{B}E$. β) Ὀνομάστε Ι΄ τό σημεῖο στό ὁποῖο ἡ ΒΖ τέμνει τήν ε καί δεῖξτε ὅτι ΔΙ΄ = ΔΙ.

26. Πάρτε στή ΒΓ τμῆμα ΒΕ = ΒΑ καί δεῖξτε ὅτι τό τρίγωνο ΕΜΓ εἶναι ἰσοσκελές (ὁπότε τό Ι εἶναι μέσο τῆς ΕΓ).

27. Παρατηρῆστε ὅτι $ZE \perp \Delta E$, ὁπότε ἀρκεῖ νά δείξετε ὅτι ἡ ΔΖ εἶναι διχοτόμος τῆς $E\hat{\Delta}\Gamma$.

28. Παρατηρῆστε ὅτι οἱ εὐθεῖες ΑΒ καί Α΄Β΄ εἶναι συμμετρικές ὡς πρός τό Ο.

29. Ἄν εἶναι $\{P\} = \Gamma E \cap \Delta Z$, πάρτε τή $\hat{P}$ ἀπό τό τρίγωνο ΡΓΔ καί ἀντικαταστῆστε τίς δύο ἄλλες γωνίες του μέ ἴσες πρός αὐτές γωνίες οἱ ὁποῖες σχηματίζονται ἀπό τίς ἐφαπτόμενες στό Α.

30. Ἄν $\Sigma K \perp OX$ καί $\Sigma\Lambda \perp O\Psi$, παρατηρῆστε ὅτι ὁ κύκλος πού γράφεται μέ διάμετρο, τήν ΟΣ περνάει ἀπό τά Κ καί Σ. Ἄρα ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι ΟΑ + ΟΒ = ΟΚ + ΟΛ δημαδή ὅτι ΚΑ = ΛΒ.

31. Ἄν ἡ διχοτόμος τέμνει τόν κύκλο στό Σ, θά πρέπει νά δείξουμε ὅτι Σ = σταθερό.

Φέρνοντας τή $ΣΚ \perp ΟΧ$ καί τή $ΣΛ \perp ΟΨ$, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι τό Κ ἤ τό Λ εἶναι σταθερό. Αὐτό ὅμως εἶναι φανερό, γιατί στήν ἄσκ. 30 δείξαμε ὅτι $ΟΑ + ΟΒ = ΟΚ + ΟΛ$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

1. α) Πάρτε τό μέσο Δ ἑνός τμήματος $ΒΓ = κ$ καί στή μεσοκάθετο τῆς ΒΓ πάρτε τμῆμα $ΔΑ = λ$. β) Πάρτε τμῆμα $ΒΓ = κ$ καί γράψτε τούς κύκλους (Β, λ) καί (Γ, λ). γ) Κατασκευή ὅμοια μέ τή β.
2. Φέρνοντας μιά κοινή κάθετο ΚΛ τῶν δύο παραλλήλων παίρνουμε ἑκατέρωθεν τῶν Κ καί Λ τμήματα $λ/2$ καί $κ/2$ ἀντιστοίχως.
3. Ἀρκεῖ νά φέρουμε τόν κύκλο μέ διάμετρο ΑΟ.
4. Ἀρκεῖ νά φέρουμε κάθετο στό σημεῖο Δ τῆς εὐθείας ΟΔ.
5. Ἄν οἱ ἐφαπτόμενες στά Β καί Γ τέμνονται στό Κ, ὑπολογίστε τήν $\hat{Κ}$ ἀπό τό ἰσοσκελές τρίγωνο ΒΚΓ.
6. Ἄν Ο καί Ο′ εἶναι τά περίκεντρα τῶν ἴσων τριγώνων ΑΒΓ καί Α′Β′Γ′, ἀρκεῖ νά δείξουμε π.χ. ὅτι $ΟΒ = Ο'Β'$ (μέ σύγκριση τῶν τριγώνων ΒΟΓ καί Β′Ο′Γ′).
7. Παρατηρῆστε ὅτι $Β'Γ' =$ συμμΑΕΒΓ.
8. Ἀρκεῖ νά δείξετε ὅτι $\widehat{ΑΒ'} = \widehat{ΑΓ'}$.
9. α) Συγκρίνετε τίς γωνίες τῶν τριγώνων ΑΒΔ καί ΑΕΓ, β) Θεωρῆστε την ὡς διαφορά τῶν $Δ\hat{Α}Γ$ καί $Ε\hat{Α}Γ$ (ὑποθέτοντας ὅτι $\hat{Β} > \hat{Γ}$). γ) Ἁπλή συνέπεια τοῦ ἐρωτήματος α.
10. Ἄν ΒΕ καί ΓΖ οἱ ἴσες διάμεσοι καί Θ τό σημεῖο τομῆς τους, παρατηρῆστε ὅτι $ΒΘ = ΓΘ$ καί μετά συγκρίνετε τά τρίγωνα ΕΒΓ καί ΖΓΒ.
11. Παρατηρῆστε ὅτι $ΘΛ = ΘΕ$, $ΘΜ = ΘΖ$, $ΘΚ = ΘΔ$.
12. Παρατηρῆστε ὅτι $ΘΚ = ΘΑ$, $ΘΛ = ΘΒ$, $ΘΜ = ΘΓ$.
13. Ὀνομάστε Θ,Θ′ τά βαρύκεντρα δύο ἴσων τριγώνων ΑΒΓ, Α′Β′Γ′ καί πάρτε στίς προεκτάσεις τῶν διαμέσων τους ΑΜ καί Α′Μ′ τμήματα $ΜΕ = ΜΘ$ καί $Μ'Ε' = Μ'Θ'$. Μετά, ἀπό τή σύγκριση τῶν τριγώνων ΘΓΕ καί Θ′Γ′Ε′, νά ἐξασφαλίσετε ἴσα στοιχεῖα γιά τά ἀρχικά τρίγωνα.
14. Ἄν ἐφάπτεται στό μέσο Δ τῆς ΒΓ, ἐκφράστε (μέ τήν ἄσκ. 5 τῆς § 8.11) τά τμήματα ΒΔ καί ΓΔ μέ τίς πλευρές τοῦ ΑΒΓ.
15. α) Οἱ εὐθεῖες αὐτές διχοτομοῦν τίς γωνίες τοῦ ΑΒΓ. β) Ἄν ἡ ΑΑ′ τείνει τή Β′Γ′ στό Ν, ὑπολογίστε τίς γωνίες $Ν\hat{Β'}Ι$ καί $Ν\hat{Ι}Β'$ τοῦ τριγώνου ΙΝΒ′. γ) Ἁπλή συνέπεια τοῦ ἐρωτήματος β.
16. Θεωρῆστε τό μέσο Μ τῆς πλευρᾶς ΒΓ καί δεῖξτε στό σχῆμα τῆς ἄσκ. 5 τῆς § 8.11 ὅτι $ΒΔ = ΓΔ'$.
17. Ἀρκεῖ νά δείξετε π.χ. ὅτι $ΑΙ_α \perp Ι_β Ι_γ$.
18. Ἄν εἶναι Μ, Ρ τά μέσα τῶν ΒΓ,ΑΘ καί ΜΜ′, ΡΡ′ οἱ ἀποστάσεις τῶν Μ καί Ρ ἀπό τήν ε, συγκρίνετε τά τμήματα ΑΑ′ καί $ΒΒ' + ΓΓ'$ μέ τά ΡΡ′ καί ΜΜ′ ἀντιστοίχως.
19. α) Ἄν $ΒΕ \perp ΑΓ$ καί $ΓΖ \perp ΑΒ$, ὑπολογίστε τή γωνία $Β\hat{Η}Γ$ ἀπό τό τετράπλευρο ΑΕΗΖ. β) Ἐργασθεῖτε ὅπως στό προηγούμενο ἐρώτημα. γ) Συγκρίνετε κάθε μιά ἀπό τίς γωνίες $Β\hat{Η}Γ$ καί $\hat{Α}$ μέ τήν $Α\hat{Γ}Η$.
20. α) Ἀρκεῖ νά δείξετε π.χ. ὅτι τό τρίγωνο ΗΒΚ εἶναι ἰσοσκελές. β) Ἡ ἰσότητα π.χ.

$\widehat{\Lambda\Gamma} = \widehat{\Gamma K}$ εἶναι συνέπεια τῆς $H\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}K$. γ) Ἔχουν τίς πλευρές τους μία πρός μία ἴσες. δ) Ὁ περιγεγραμμένος κύκλος π.χ. στό ΒΓΗ εἶναι ἴσος μέ τόν περιγεγραμμένο κύκλο στό ΒΚΓ, δηλαδή μέ τόν (O,R).

21. Δεῖτε τήν ἄσκηση 3 τῆς β 5.13.

22. Πάρτε στή ΜΑ τμῆμα ΜΡ = ΜΒ καί δεῖξτε ὅτι ΡΑ = ΜΓ.

23. α) Ἄν $OI \perp AB$, δεῖξτε ὅτι τό Ι εἶναι καί μέσο τῆς Ρ′Μ′. β) Ἁπλή συνέπεια τοῦ προηγούμενου γ) Φέρτε τή $MZ \perp A\Gamma$ καί παρατηρῆστε ὅτι ΑΖ = ΑΜ′.

24. α) Δεῖξτε ὅτι τά ΕΚΔΒ καί ΑΚΓΖ εἶναι παραλληλόγραμμα. β) Δεῖξτε ὅτι τό σημεῖο τομῆς Ν τῶν ΑΕ καί ΔΚ εἶναι μέσο τῆς ΔΚ. γ) Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι τό Ν εἶναι τό μέσο τοῦ ΕΓ.

25. Θεωρῆστε τά μέσα Μ, Ν τῶν ΒΓ καί ΑΘ καί τίς ἀποστάσεις τους ΜΜ′ καί ΝΝ′ ἀπό τήν ε, καί ὑπολογίστε τά ἀθροίσματα ΒΒ′ + ΓΓ′ καί ΑΑ′ + ΘΘ′.

26. α) Παρατηρῆστε ὅτι τό ΒΗΓΑ′ εἶναι παραλληλόγραμμο. β) Τά τμήματα Α′Λ καί ΑΜ εἶναι διάμεσοι στό τρίγωνο ΑΗΑ′.

27. Χρησιμοποιῆστε τό ἐρώτημα β τῆς ἀσκήσεως 26 τῆς § 8.13.

28. Ἄν θεωρήσουμε τό περίκεντρο Ο, τό ΑΛΜΟ εἶναι παραλληλόγραμμο καί $H\hat{\Lambda}M = H\hat{A}O$, ὁπότε καταλήγουμε στήν ἄσκηση 9β τῆς § 8.12.

29. Παρατηρῆστε ὅτι τό Δ′ εἶναι ὀρθόκεντρο στό τρίγωνο ΑΒΓ.

30. Παρατηρῆστε ὅτι (κατά τήν ἄσκηση 5 τῆς § 8.11), τό τμῆμα ΑΔ εἶναι ἴσο μέ τήν ἡμιπερίμετρο τοῦ ΑΒΓ.

31. Νά ἐκφράσετε (ἀπό τήν ἄσκηση 6 § 8.11), τήν καθεμιά ἀκτίνα ἀπό τίς πλευρές τοῦ ἀντίστοιχου ὀρθογώνιου τριγώνου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

1. Ἄν Κ εἶναι τό κέντρο ἑνός τέτοιου κύκλου τότε ΟΚ = ρ + α.
2. Εἶναι κύκλος κέντρου Ο.
3. Φέρτε τή διάμεσο ΑΜ.
4. Ἐργασθεῖτε ὅπως στό παράδ. 3 τῆς § 9.4.
5. Χρησιμοποιῆστε τήν πρόταση ὅτι ἡ διάμεσος ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι τό μισό τῆς ὑποτείνουσας.
6. α) Φέρτε τήν $ON \perp AB$ β) Εἶναι τριγ. ΟΓΔ = ΟΜΒ.
7. Ἐξετάστε κάθε ἰδιότητα χωριστά.
8. Ἡ τομή ἑνός κυκλικοῦ δίσκου καί ἑνός ἡμιεπιπέδου.
9. α) Εἶναι ΒΗ // ΟΓ, β) Εἶναι ΒΗ = ρ γ) Τό περίκεντρο εἶναι στή μεσοκάθετο ΟΒ δ) Κεῖται στόν (Ο,ρ).
10. Ἀνάγεται στό παράδ. 1 τῆς § 9.4.
11. Φέρτε ΟΕ //= ΑΒ.
12. Ἡ γωνία $A\hat{M}\Delta$ ἤ $A\hat{N}\Delta$ εἶναι 45°. ε) Εἶναι ΜΝ = ΑΔ.
13. α) Τό τρίγ. ΟΜΓ εἶναι κατασκευάσιμο. β) Ἀνάγεται στό τόπο τοῦ παραδ. 2 τῆς § 9.4. γ) Εἶναι τριγΒΓΔ = τριγ.ΑΒΓ.

14. α) Ἀνάγεται στό παραδ. 1 τῆς § 9.7.
    β) Ἀνάγεται στό παραδ. 3 τῆς § 9.7.
15. α) Προεκτείνατε τή διάμεσο ΑΜ κατά τμῆμα ΜΕ = ΜΑ.
    β) Χρησιμοποιῆστε τό βαρύκεντρο Θ τοῦ τριγώνου.
16. Ἀνάγεται σέ βασική κατασκευή τριγώνου.
17. α) Στή προέκταση τῆς ΑΒ πάρτε τμῆμα ΑΕ = ΑΓ.
    β) Ἄν ΑΓ > ΑΒ, πάνω στήν ΑΓ πάρτε ἕνα τμῆμα ΑΕ = ΑΒ.
18. Ἀνάγονται σέ βασικές κατασκευές ὀρθογωνίου τριγώνου.
19. Ἁπλές.
20. Οἱ ἀποστάσεις εἶναι πλευρές παρ/μου (Δύο λύσεις).
21. Ἀπό τά ἰσοσκελῆ τρίγωνα προκύπτει: $A\hat{\Gamma}M = \frac{\hat{A}}{2}$.
22. Φέρτε ΚΜ ⊥ ΕΖ, ΛΝ ⊥ ΕΖ καί ΛΡ // ΕΖ.
23. Τό τρίγωνο ΑΒΟ εἶναι κατασκευάσιμο.
24. Στή προέκταση τῆς ΑΘ πάρτε $\Theta M = \frac{1}{2}(A\Theta)$, ὁπότε τό Μ εἶναι τό μέσο τοῦ ΒΓ.
25. Ἀρκεῖ νά προσδιορίσουμε τό μέσο Μ τοῦ ΒΓ.
26. Τό κέντρο βρίσκεται στή τομή μιᾶς εὐθείας καί ἑνός κύκλου.
27. α) Ξεκινώντας ἀπό τό ΒΓ τό Α ἀνήκει σέ δύο γ.τ.
    β) Φέρτε ἀπό τό Ν τήν ΝΕ // ΑΒ.
    γ) Ἄν Ι εἶναι τό ἔγκεντρο τοῦ τριγώνου, αὐτό βρίσκεται σέ δύο γ.τ.
28. α) Τό τρίγ. ΑΔΕ εἶναι κατασκευάσιμο.
    β) Χρησινοποιῆστε τήν παρατήρηση ὅτι : $\Delta\hat{A}E = E\hat{A}O$.
29. Τό τρίγ. ΒΑΔ εἶναι κατασκευάσιμο. Ὁπότε ἡ κορυφή Γ ἀνήκει σέ δύο τόπους.
30. Πάνω στή κάθετο στήν ε στό Α παίρνουμε τμῆμα ΑΕ = ρ.
31. α) Σχηματίστε τό ἄθροισμα.
    β) Ἄν Ν τό μέσο τῆς ΑΒ καί ΝΕ ⊥ ΒΔ, τότε $NE = \frac{A\Gamma}{4}$.
32. Φέρτε τήν ΑΕ // ΒΝ, τό Ε στή ΒΓ.
33. Φέρτε τήν ἐφαπτομένη τοῦ (Ο,ρ) στό Α.
34. Ἡ διχοτόμος τῆς $O\hat{\Gamma}\Delta$ διέρχεται ἀπό σταθερό σημεῖο.
35. Ἀνάγεται στό παράδ. 2 τῆς § 9.4.
36. Εἶναι ἡ μεσοκάθετος τῆς ΒΓ ἤ ὁ περιγεγραμμένος κύκλος στό τρίγωνο.
37. Ἡ ΓΛ σχηματίζει σταθερή γωνία μέ τήν ΑΓ.
38. Ἄν Ω τό μέσο τῆς διακέντρου τό ΝΩ = ρ.
39. Φέρτε ΕΣ //= ΜΝ, τότε τό Σ σταθερό.
40. Φέρτε τήν ἐφαπτομένη τοῦ (Ο,ρ) στό Α, πού τέμνει τήν ε στό Β.
41. Ἡ κάθετος στό Α στήν ΟΨ τέμνει τήν ΟΨ στό Β κ.λ.π.
42. Γράψτε τόν κύκλο πού διέρχεται ἀπό τό Β καί ἐφάπτεται τῆς ΑΓ στό Γ καί φέρτε ΓΕ // ΑΒ.
43. Χρησιμοποιῆστε τόν περιγεγραμμένο κύκλο τοῦ τριγώνου.
    β) Προσδιορίστε τό περίκεντρο τοῦ τριγώνου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

1. Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι μία γωνία του εἶναι ὀρθή.
2. Φέρτε τήν κοινή χορδή καί ἀποδεῖξτε ὅτι δύο ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μμέρη γωνίες εἶναι παραπληρωματικές.
3. Παρατηρῆστε ὅτι τό ΕΓΔΖ εἶναι τραπέζιο καί ἡ ΡΜ εἶναι διάμεσός του.
4. Δεῖξτε ὅτι δύο γωνίες ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη εἶναι ἴσες.
5. Ἄν οἱ ΟΚ, ΟΛ, ΟΜ, ΟΡ τέμνουν τίς πλευρές στά $Κ_1$, $Λ_1$, $Μ_1$, $Ρ_1$, παρατηρῆστε ὅτι τά σημεῖα αὐτά εἶναι μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου καί ὅτι $Κ_1Λ_1 // ΚΛ$, $Λ_1 Μ_1 // ΛΜ$,...
6. Συγκρίνετε τά τρίγωνα ΣΑΑ΄ καί ΣΒΒ΄.
7. Ἀρκεῖ νά δείξετε π.χ. ὅτι $Α\hat{Λ}Κ = \hat{Γ}$.
8. Ἀρκεῖ νά δείξετε π.χ. ὅτι $Μ\hat{Κ}Λ = \hat{Δ}$.
9. Ἀρκεῖ νά δείξετε π.χ. ὅτι ἡ $Α\hat{Γ}Δ$ (ἤ ἡ ἴση της $Α\hat{ΒΔ}$), εἶναι ἴση μέ τήν $Κ\hat{Λ}Δ$.
10. Ἀρκεῖ νά δείξετε ὅτι $Α\hat{Κ}Λ = \hat{Γ}$. (Φέρτε τήν ΕΔ καί παρατηρῆστε ὅτι κάθε μια ἀπό τίς γωνίες αὐτές εἶναι ἴση μέ τήν $Α\hat{Ε}Δ$).
11. Ἄν Ρ τό σημεῖο τομῆς τῶν κύκλων $κ_1$,$κ_2$, δεῖξτε ὅτι τό Ρ ἀνήκει καί στόν κύκλο $κ_3$, δηλαδή δεῖξτε ὅτι τό ΡΔΓΕ εἶναι ἐγγράψιμο.
12. Ὑπολογίστε τίς γωνίες $Α\hat{Ο}Β$ καί $Δ\hat{Ο}Γ$ ἀπό τά τρίγωνα ΑΟΒ καί ΓΔΟ.
13. Ἀποδείξτε (μέ τή βοήθεια τῆς ἀσκ. 13 τῆς § 5.14) ὅτι οἱ ἀπέναντι γωνίες πού σχηματίζομένου τετραπλεύρου εἶναι παραπληρωματικές.
14. Ἀρκεῖ νά δείξετε ὅτι τό ἡμιάθροισμα τῶν βάσεών του εἶναι ἴσο μέ τό 1/4 τῆς περιμέτρου του.
15. Ἀρκεῖ νά δείξετε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν βάσεων εἶναι διπλάσιο ἀπό μιά ἀπό τίς μή παράλληλες πλευρές του.
16. Ἁπλή.
17. α) 8 β) 10.
18. Ἔχει τίς πλευρές ἴσες καί τίς γωνίες ἴσες.
19. α) Ἄν Μ, Ν τά μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν, παρατηρῆστε ὅτι τό ΜΚΝΟ εἶναι τάραλληλόγραμμο, β) Διέρχονται ἀπό τό Κ.
20. Ἄν οἱ ἐφαπτόμενες στά Α καί Δ τέμνονται στό Κ καί οἱ δύο ἄλλες ἐφαπτόμενες τέμνονται στό Ρ, ὑπολογίστε τίς γωνίες $\hat{Κ}$ καί $\hat{Ρ}$ ἀπό τά τρίγωνα ΚΑΔ καί ΡΒΓ.
21. Παρατηρῆστε ὅτι $Ι\hat{Δ}Ε = Ζ\hat{Ε}Λ$, β) Συγκρίνετε τό τρίγωνο ΙΔΓ καί ΙΕΓ, γ) Παρατηρῆστε ὅτι κάθε μία ἀπό τίς $Α\hat{Ι}Ε$ καί $Ε\hat{Ι}Γ$ εἶναι 45°.
22. Ἀρκεῖ νά δείξετε ὅτι τό τρίγωνο ΟΕΖ εἶναι ἰσοσκελές.
23. Δεῖξτε ὅτι οἱ εὐθεῖες ΚΙ, ΛΙ, ΜΙ, ΡΙ διχοτομοῦν τίς γωνίες τοῦ ΚΛΜΡ. Κατόπι δεῖξτε ὅτι δύο ἀπέναντι γωνίες τοῦ ΚΛΜΡ εἶναι παραπληρωματικές.
24. α) Ἀπόδειξη ὅμοια μέ τήν ἄσκηση 21 τῆς § 5.15 β) Παρατηρῆστε ὅτι τά τρίγωνα ΛΕΡ καί ΚΖΜ εἶναι ἰσοσκελή καί συνεπῶς οἱ ΡΛ, ΚΜ τέμνονται κάθετα καί διχοτομοῦνται.
25. Δεῖξτε, μέ τά σχηματιζόμενα ἐγγεγραμμένα τετράπλευρα, ὅτι δύο ἀπέναντι γωνίες τοῦ ΚΛΜΡ εἶναι παραπληρωματικές.

26. α) Παρατηρῆστε ὅτι τά Α,Β,Γ βρίσκονται σέ κύκλο διαμέτρου ΟΡ. β) Συγκρίνετε τά τόξα τά όποῖα ἔχουν χορδές ΑΒ καί ΑΓ.

27. Δεῖξτε (ὑπολογίζοντας τό ἄθροισμα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν τους) ὅτι τά ΚΓΛΒ καί ΚΔΛΒ εἶναι ἐγγράψιμα.

28. Ἄν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ εἶναι τά ὕψη τοῦ ΑΒΓ καί τέμνονται στό Η, νά βρεῖτε μέ ἐγγράψιμα τετράπλευρα γωνίες ἴσες μέ τίς $\widehat{Z\Delta H}$ καί $\widehat{H\Delta E}$ καί νά τίς συγκρίνετε.

29. Ἀρκεῖ νά δείξετε (μέ τά ἐγγράψιμα τετράπλευρα ΒΕΚΔ καί ΕΚΖΓ) ὅτι $\Delta\hat{E}K = E\hat{K}Z$ καί ὅτι $Z\hat{E}K = E\hat{K}\Delta$.

30. Παρατηρῆστε ὅτι τό Μ εἶναι τό περίκεντρο τοῦ τριγώνου ΑΑ΄Β (ὁπότε $A\hat{M}B = 2\hat{A}$) καί δεῖξτε ὅτι $A\hat{M}B = A\hat{N}B$.

31. Ἄν Μ τό μέσο τῆς ΒΓ ἔχουμε ΜΖ / / ΒΑ, ΜΕ / / ΓΑ καί ἄρα $E\hat{M}Z = \hat{A}$. Παρατηρῆστε τώρα ὅτι ὁ κύκλος πού ἔχει διάμετρο ΗΜ διάρχεται ἀπό τά Ε,Α΄Ζ δηλαδή ὅτι τό Α΄ΕΗΖ εἶναι ἐγγράψιμο καί συνεπῶς $E\hat{A}'Z = E\hat{M}Z$.

32. Οἱ ΓΔ, ΓΕ, ΓΖ σχηματίζουν μέ τίς ἐφαπτόμενες στά Δ,Ε,Ζ γωνίες ἴσες μέ τή $X\hat{B}\Gamma$ καί ἀπό τά ἐγγράψιμα τετράπλευρα πού σχηματίζονται βλέπουμε ὅτι μία ἐξωτερική γωνία τοῦ ΚΛΡΓ εἶναι ἴση μέ τήν ἀπέναντι της ἐσωτερική.

33. Ἄν πάρουμε τό Μ στό $\overset{\frown}{A\Gamma}$ καί φέρουμε $M\Delta \perp B\Gamma$, $ME \perp A\Gamma$, $MZ \perp AB$, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι $A\hat{E}Z = \Gamma\hat{E}\Delta$. Αὐτό τό δείχνουμε μέ τά ἐγγράψιμα τετράπλευρα ΜΖΑΕ καί ΜΕΔΓ.

34. Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι τό ΑΒΓΜ εἶναι ἐγγράψιμο. Ἄν Δ,Ε,Ζ εἶναι οἱ προβολές τοῦ Μ στίς πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ, παρατηρῆστε ὅτι τώρα $A\hat{E}Z = \Gamma\hat{E}\Delta$, δηλ. ὅτι $A\hat{M}Z = \Delta\hat{M}\Gamma$, ὁπότε $A\hat{M}\Gamma = Z\hat{M}\Delta$.

35. Ὁ κύκλος κ πού διέρχεται ἀπό τά μέσα M_1, M_2, M_3 τῶν πλευρῶν α,β,γ διέρχεται καί ἀπό τά ἴχνη Θ_1, Θ_2, Θ_3 τῶν ὑψῶν υ_α, υ_β, υ_γ (βλ. ἄσκ. 3 τῆς § 10.7). Ἄν Η εἶναι τό ὀρθόκεντρο τοῦ ΑΒΓ καί Λ_1, Λ_2, Λ_3 τά μέσα τῶν ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ, δεῖξτε π.χ, ὅτι τό $M_3 M_1 \Lambda_1\Theta_1$ εἶναι ἐγγράψιμο, δηλαδή ὅτι $\Lambda_1 M_3 M_1 \hat{=} 90^o = \Lambda_1\Theta_1 M_1$. Γιά τόν προσδιορισμό τοῦ κέντρου καί τῆς ἀκτίνας τοῦ κ παρατηρῆστε ὅτι ἡ $\Lambda_1 M_1$ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου κ καί ὅτι (κατά τήν ἄσκ. 3 τῆς § 8.11) τά $H\Lambda_1$ OM_1 καί $A\Lambda_1 M_1 O$ εἶναι παραλληλόγραμμα (ὅπου Ο εἶναι τό περίκεντρο τοῦ ΑΒΓ).

36. Ἄν Λ_1, Λ_2, Λ_3 τά μέσα τῶν ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι τό $\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3$ Ρ εἶναι ἐγγράψιμο. Παρατηρῆστε ὅτι κάθε μία πλευρά τοῦ $\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3$Ρ εἶναι παράλληλη μέ μιά πλευρά τοῦ ΑΒΓΜ.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ III

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ [1]

1. Οἱ ἀριθμοί ἀναφέρονται σέ σελίδα τοῦ βιβλίου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1.

ΟΙ ΠΡΩΤΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Σελ.

Κεφάλαιο 2.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ

Κεφάλαιο 3.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΓΩΝΙΩΝ

Κεφάλαιο 6.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΑ

Κεφάλαιο 7.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ—ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

Κεφάλαιο 8.

ΑΠΛΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ
ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

1. Στή σελίδα 44 καί στήν ἄσκηση 12 στήν τρίτη γραμμή ἀντί $\widehat{\Delta A}$ νά γραφεῖ $\widehat{\Delta B}$.
2. Στή σελίδα 174 καί στήν ἄσκηση 9 στή πρώτη της γραμμή : ἡ ἐφαπτομένη τοῦ ε,

ΕΚΔΟΣΗ Ε΄ 1981 (IV) — ΑΝΤΙΤΥΠΑ 145.000 — ΣΥΜΒΑΣΗ 3571/12-3-81

ΕΚΤΥΠΩΣΗ - ΣΤΟΙΧΕΙΟΘΕΣΙΑ: «ΛΙΘΟΠΡΙΝΤ» - Λ. ΣΚΟΥΡΙΑΣ Ε.Π.Ε.
ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: Γ. ΜΠΕΤΣΩΡΗ καὶ Σία Ο.Ε.

ΟΕ
ΔΒ