ΠΕΤΡΟΥ Γ. ΤΟΓΚΑ
ΕΠΙΤΙΜΟΥ ΔΙΕΥΘΥΝΤΟΥ ΤΗΣ ΒΑΡΒΑΚΕΙΟΥ ΠΡΟΤΥΠΟΥ ΣΧΟΛΗΣ
ΤΟΥ ΔΙΔΑΣΚΑΛΕΙΟΥ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ
Τ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΕΥΕΛΠΙΔΩΝ

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

**ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ**

ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ, ΤΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΔΙΑ ΤΑΣ ΑΝΩΤΑΤΑΣ ΣΧΟΛΑΣ ΤΟΥ ΚΡΑΤΟΥΣ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

ΤΕΥΧΟΣ Β'

**ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΡΙΤΗ**

Περιέχει: Τὰς ἐκφωνήσεις καὶ τὰς λύσεις τῶν ὑπ' ἀριθ. 795 - 991 ἀσκήσεων τῆς Θεωρητικῆς Γεωμετρίας Π. Γ. Τόγκα (Γ' καὶ Δ' ἔκδοσις), αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς τὰ κάτωθι κεφάλαια: Ἰδιότητες τοῦ ὀρθοκέντρου. Εὐθεῖα τοῦ Simson. Εὐθεῖα καὶ κύκλος τοῦ Euler. Γωνία εὐθείας καὶ περιφερείας. Γωνία δύο τεμνομένων περιφερειῶν. Μεταφορά. Στροφή. Συμμετρία. Γεωμετρικοὶ τόποι καὶ Γεωμετρικαὶ κατασκευαί.

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
"ΠΕΤΡΟΣ Γ. ΤΟΓΚΑΣ Ο.Ε."
ΙΠΠΟΚΡΑΤΟΥΣ 6 - ΤΗΛ. 628.326
ΑΘΗΝΑΙ (143)

ΠΕΤΡΟΥ Γ. ΤΟΓΚΑ
ΕΠΙΤΙΜΟΥ ΔΙΕΥΘΥΝΤΟΥ ΤΗΣ ΒΑΡΒΑΚΕΙΟΥ ΠΡΟΤΥΠΟΥ ΣΧΟΛΗΣ
ΤΟΥ ΔΙΔΑΣΚΑΛΕΙΟΥ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ
Τ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΕΥΕΛΠΙΔΩΝ



# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ
# ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ, ΤΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΚΑΙ ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΔΙΑ ΤΑΣ ΑΝΩΤΑΤΑΣ ΣΧΟΛΑΣ ΤΟΥ ΚΡΑΤΟΥΣ

## ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

ΤΕΥΧΟΣ Β'.

**ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΡΙΤΗ**

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
"ΠΕΤΡΟΣ Γ. ΤΟΓΚΑΣ Ο.Ε."
ΙΠΠΟΚΡΑΤΟΥΣ 6 - ΤΗΛ. 628.326
ΑΘΗΝΑΙ (143)

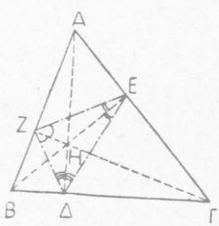
*Κάθε γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.*

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ
ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΚΑΙ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

## 1. Ἰδιότητες τοῦ ὀρθοκέντρου

*795. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ, *ἂν γνωρίζωμεν τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν του.*

Λύσις. Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τοὺς πόδας Δ, Ε, Ζ τῶν ὑψῶν του ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ. Γνωρίζομεν, ὅτι τὰ τρία ὕψη ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΔΕΖ, τοῦ ὁποίου κορυφαὶ εἶναι οἱ πόδες τῶν ὑψῶν τούτων.

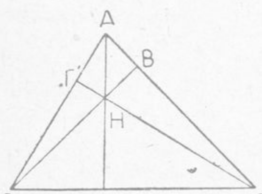


Σχ. 1

Κατασκευή. Κατασκευάζομεν λοιπὸν τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν Δ, Ε, Ζ, τοῦ τριγώνου ΔΕΖ καὶ ἐκ τῶν σημείων Δ, Ε, Ζ φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὰς διχοτόμους ταύτας. Αὗται τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ καὶ λαμβάνομεν οὕτω τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ.

*796. Αἱ κορυφαὶ* Α, Β, Γ *ἑνὸς τριγώνου* ΑΒΓ *καὶ τὸ ὀρθόκεντρόν του* Η *δύνανται νὰ θεωρηθοῦν, ὡς ὀρθόκεντρα τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν κορυφὰς τὰ τρία ἄλλα σημεῖα.*

*Ἀπ.* Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ κορυφὴ Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΗΒΓ.



Σχ. 2

Πράγματι, ἐπειδὴ ἡ ΒΗΒ′ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΒ′Α ἐξ ὑποθέσεως, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΓΒ′Α κάθετος ἐπὶ ΒΗΒ′· ὥστε ἡ ΓΒ′ εἶναι ἕνα ἀπὸ τὰ ὕψη τοῦ τριγώνου ΗΒΓ, τὸ ὁποῖον προεκτεινόμενον συναντᾷ τὸ ὕψος ΑΑ′ εἰς τὸ σημεῖον Α.

Ὁμοίως ἐπειδὴ ἡ ΓΗΓ′ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ′Α, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΒΓ′Α κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΗΓ′. Ὥστε ἡ ΒΓ′ εἶναι ὕψος τοῦ τριγώνου ΗΒΓ, τὸ ὁποῖον προεκτεινόμενον συναντᾷ τὸ ὕψος ΑΑ εἰς τὸ σημεῖον Α. Ὥστε τὰ τρία ὕψη τοῦ τριγώνου ΗΒΓ, δηλ. τὰ

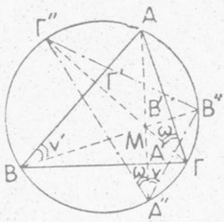
ΗΑ', ΓΒ', ΒΓ' διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Α. Ἡ κορυφὴ Α εἶναι λοιπὸν ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ κορυφὴ Β εἶναι ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΗΑΓ καὶ ἡ κορυφὴ Γ εἶναι ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΗΑΒ.

*Σημ.* Τὰ τέσσαρα αὐτὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Η σχηματίζουν μίαν *ὀρθοκεντρικὴν ὁμάδα.*

797. ***Αἱ προεκτάσεις τῶν ὑψῶν*** ΑΑ', ΒΒ' ΓΓ' ***ἑνὸς τριγώνου*** ΑΒΓ ***τέμνουν τὴν περιφέρειαν, τὴν περιγεγραμμένην περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὰ σημεῖα*** Α'', Β'', Γ''. ***Νὰ ἀποδειχθῇ : 1ον. Ὅτι αἱ*** ΑΑ'', ΒΒ'', ΓΓ'' ***εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου*** Α''Β''Γ''. ***2ον. Ὅτι τὰ ἓξ τόξα, τὰ ὁποῖα ὁρίζουν, ἐπὶ τῆς περιφερείας, αἱ τρεῖς κορυφαὶ*** Α, Β, Γ ***καὶ τὰ σημεῖα*** Α'', Β'', Γ'', ***εἶναι ἴσα ἀνὰ δύο.***

***Ἀπ. 1ον.*** Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΑΑ'' εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α'' τοῦ τριγώνου Α''Β''Γ''. Αἱ γωνίαι ν καὶ ν' εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΒ'', ἤτοι εἶναι ν=ν' (1).




Σχ. 3

Ὁμοίως αἱ γωνίαι ω καὶ ω' εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΓ'', ἤτοι εἶναι ω=ω'.

Ἀλλὰ αἱ γωνίαι ω' καὶ ν' εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους μίαν πρὸς μίαν· δηλ. ἔχουν τὴν ΒΒ'' κάθετον ἐπὶ τῆς ΑΓ καὶ τὴν ΒΑ κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΓ''· ἄρα καὶ αἱ ἴσαι πρὸς αὐτὰς γωνίαι ω καὶ ν θὰ εἶναι ἴσαι, ἤτοι θὰ εἶναι ω=ν· ὥστε ἡ ΑΑ'' εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α'' τοῦ τριγώνου Α''Β''Γ''.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι αἱ ΒΒ'' καὶ ΓΓ'' εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β'' καὶ Γ'' τοῦ τριγώνου Α''Β''Γ''.

*2ον.* Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ τόξα ΑΓ'', Γ''Β, ΒΑ'', Α''Γ, ΓΒ'', Β''Α εἶναι ἴσα ἀνὰ δύο.

Πράγματι· ἐδείχθη, ὅτι αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι ω' καὶ ν' εἶναι ἴσαι, ἄρα καὶ τὰ ἀντίστοιχα τόξα των ΑΓ'' καὶ ΑΒ'' θὰ εἶναι ἴσα. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι τοξ. ΒΓ''=τοξ. ΒΑ'' καὶ τοξ. ΓΑ''=τοξ. ΓΒ''.

*Σημ.* Ὅταν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἀμβλυγώνιον ἀποδεικνύομεν ὁμοίως, ὅτι τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ τμήματα ΑΑ'', ΒΒ'', ΓΓ'' εἶναι διχοτόμος μιᾶς ἐσωτερικῆς γωνίας τοῦ τριγώνου Α''Β''Γ'' καὶ τὰ δύο ἄλλα εἶναι διχοτόμοι τῶν δύο ἐξωτερικῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου αὐτοῦ.

798. ***Θεώρημα τοῦ*** Garnot. ***Οἱ κύκλοι οἱ περιγεγραμμένοι περὶ δοθὲν τρίγωνον καὶ περὶ τὰ τρία τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν κορυφὰς τὸ ὀρθόκεντρον καὶ δύο ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ δοθέντος τριγώνου εἶναι ἴσοι.***

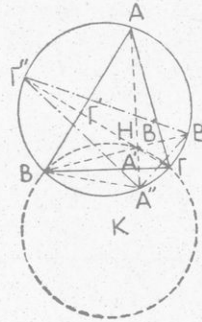
***Ἀπ.*** Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Ο καὶ Η τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' τοῦ τριγώνου. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ὁ κύκλος Ο καὶ οἱ κύκλοι, οἱ περιγεγραμμένοι περὶ τὰ τρίγωνα ΗΒΓ, ΗΓΑ καὶ ΗΑΒ εἶναι ἴσοι.

Προεκτείνομεν τὰ ὕψη ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' καὶ ἔστωσαν Α'', Β'', Γ'' τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῆς περιφερείας Ο καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν ὑψῶν αὐτῶν. Φέρομεν τὰς χορδὰς Α''Β καὶ Α''Γ.

Γνωρίζομεν, ὅτι τὰ σημεῖα Η καὶ Α'' εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ· ἄρα τὰ τρίγωνα ΒΗΓ καὶ ΒΑ''Γ εἶναι ἴσα.

Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΒΑ''Γ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Ο, ἄρα καὶ τὸ ἴσον αὐτοῦ τρίγωνον ΒΗΓ θὰ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Κ, ἴσον πρὸς τὸν κύκλον Ο. Ὥστε οἱ κύκλοι Ο καὶ Κ εἶναι ἴσοι.

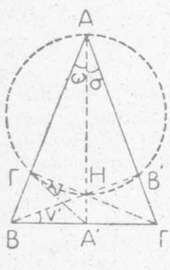
Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι οἱ κύκλοι, οἱ περιγεγραμμένοι περὶ τὰ τρίγωνα ΗΓΑ καὶ ΗΑΒ εἶναι ἴσοι μὲ τὸν κύκλον Ο.




Σχ. 4

*799. Εἰς ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον* ΑΒΓ, (ΑΒ=ΑΓ) *φέρομεν τὰ ὕψη* ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ', *τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον* Η. ***Νὰ ἀποδειχθῇ. 1ον.*** *ὅτι τὸ τετράπλευρον* ΑΓ'ΗΒ' *εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.* ***2ον.*** *ὅτι ἡ εὐθεῖα* Α'Γ' *εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας* ΑΓ'ΗΒ'.

***Ἀπ. 1ον.*** Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΗΒ'Α καὶ ΗΓ'Α εἶναι ὀρθαί, αἱ κορυφαί των Β' καὶ Γ' κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν ΑΗ. Ὥστε τὸ τετράπλευρον ΑΓ'ΗΒ' εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.




Σχ. 5

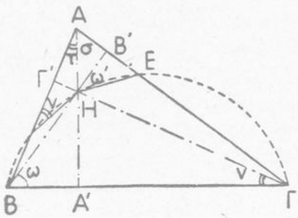
***2ον.*** Ἐπίσης τὸ τετράπλευρον ΗΓ'ΒΑ' εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, διότι αἱ δύο ἀπέναντι γωνίαι του Α' καὶ Γ' εἶναι παραπληρωματικαί, ὡς ὀρθαί. Αἱ γωνίαι ν καὶ ν' εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΗΑ'. Ἀλλὰ ἡ γωνία ν' εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν σ, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν συμπληρωματικὴν γωνίαν Γ, ἄρα καὶ ἡ ἴση της γωνία ν θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν σ, ἤτοι θὰ εἶναι ν=σ. Ἀλλὰ ω=σ, διότι τὸ ὕψος ΑΑ' εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας Α τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ, ἄρα θὰ εἶναι καὶ ν=ω.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ γωνία ω εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κύκλον ΑΓ'ΗΒ', καὶ βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου Γ'Η, ἡ δὲ γωνία ν ἔχει τὴν κορυφὴν της Γ' ἐπὶ τῆς περιφερείας, μία πλευρά της Γ'Η εἶναι χορδὴ τοῦ τόξου Γ'Η, ἡ δὲ ἄλλη πλευρά της Γ'Α' κεῖται ἐκτὸς τῆς περιφερείας· ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ν καὶ ω εἶναι ἴσαι, ἡ Γ'Α' θὰ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας ΑΓ'ΗΒ' εἰς τὸ σημεῖον Γ.

*800. Εἰς ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ *φέρομεν τὰ ὕψη* ΒΒ', ΓΓ', *τὰ ὁποία τέμ-*

*νονται εἰς τὸ Η καὶ λαμβάνομεν τὰ συμμετρικὰ Ε καὶ Ζ τῆς κορυφῆς Α ὡς πρὸς τὰ ὕψη ΒΒ' καὶ ΓΓ' ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ πέντε σημεῖα Β, Γ, Ε, Η, Ζ, κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.*

*'Απ.* Φέρομεν τὰς εὐθείας ΗΕ καὶ ΗΖ. Τὸ τετράπλευρον ΒΓΗΖ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, διότι αἱ γωνίαι ν καὶ ν' εἶναι ἴσαι, ὡς ἴσαι πρὸς τὴν γωνίαν τ· πράγματι αἱ γωνίαι ν καὶ τ εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν συμπληρωματικὴν γωνίαν Β τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.




Σχ. 6

'Επίσης αἱ γωνίαι ν' καὶ τ εἶναι ἴσαι, διότι τὰ τρίγωνα ΗΓ'Α καὶ ΗΓ'Ζ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν ΗΓ' καὶ ἑπομένως ἴσα.

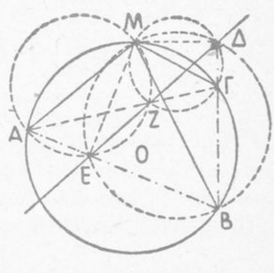
'Ομοίως τὸ τετράπλευρον ΒΓΕΗ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, διότι αἱ γωνίαι ΗΒΓ=ω καὶ Β'ΕΗ=ω' εἶναι ἴσαι, ὡς ἴσαι πρὸς τὴν γωνίαν σ· πράγματι αἱ μὲν γωνίαι ω καὶ σ εἶναι ἴσαι, ὡς συμπληρωματικαὶ τῆς γωνίας Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, αἱ δὲ ω' καὶ σ ἴσαι, ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων ΗΒ'Α καὶ ΗΒ'Ε. "Ωστε τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Β, Γ, Η. "Ωστε καὶ τὰ πέντε σημεῖα Β, Γ, Ε, Η, Ζ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

## 2. Εὐθεῖα καὶ κύκλος τοῦ Euler

***Α' 'Ομάς. 801. Θεώρημα τοῦ** Salmons.* ***Εἰς ἕνα κύκλον** Ο **φέρομεν τρεῖς χορδὰς** ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ. **Μὲ διαμέτρους τὰς χορδὰς αὐτὰς γράφομεν τρεῖς περιφερείας, αἱ ὁποῖαι τέμνονται, ἀνὰ δύο, εἰς τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ, ἐκτὸς τοῦ κοινοῦ των σημείου** Μ. **Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα** Δ, Ε, Ζ **κεῖνται ἐπ' εὐθείας.***

*'Απ.* Φέρομεν τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ καὶ σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Ο.

'Η κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Μ ἐπὶ τὴν ΑΒ πρέπει νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ΜΑ, καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ΜΒ· ἄρα ἡ κάθετος αὐτὴ εἶναι ἡ κοινὴ χορδὴ ΜΕ τῶν περιφερειῶν αὐτῶν.

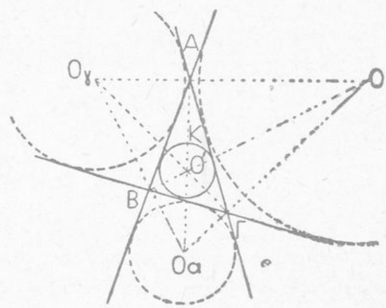



Σχ. 7

Τὸ σημεῖον Ε ὅπου αἱ περιφέρειαι αὐται τέμνονται κεῖται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ εἶναι: ὁ ποὺς τῆς καθέτου, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ ἕνα σημεῖον Μ τῆς περιφερείας Ο ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΑΒ τοῦ τριγώνου· τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰ σημεῖα Δ καὶ Ζ. Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Simson (§ 303) τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

*802. Τὰ τέσσαρα κέντρα τῶν κύκλων, ἐγγεγραμμένου καὶ παρεγγεγραμμένων εἰς ἕνα τρίγωνον, συνδεόμενα μὲ εὐθείας, δίδουν ἓξ εὐθύγραμμα τμήματα. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ μέσα τῶν ἓξ αὐτῶν εὐθυγράμμων τμημάτων κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας, τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον.*

*Ἀπ.* Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Ο, $Ο_α$, $Ο_β$, $Ο_γ$ τὰ κέντρα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου Ο καὶ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων εἰς τὸ τρίγωνον αὐτό.




Σχ. 8

Φέρομεν εὐθείας $ΟΟ_α$, $ΟΟ_β$, $ΟΟ_γ$, $Ο_α Ο_β$, $Ο_β Ο_γ$, $Ο_γ Ο_α$. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ περιφέρεια Κ, ἡ περιγεγραμμένη περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ διέρχεται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν εὐθειῶν $ΟΟ_α$, .... $Ο_γ Ο_α$.

Γνωρίζομεν ὅτι τὰ κέντρα Ο, $Ο_α$, $Ο_β$, $Ο_γ$ κεῖνται ἐπὶ τῶν διχοτόμων $ΑΟ_α$, $ΒΟ_β$, $ΓΟ_γ$ τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου καὶ ὅτι αἱ ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ἐξωτερικὰς διχοτόμους· ἤτοι ἡ $ΑΟ_α$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $Ο_γ Ο_β$, ἡ $ΒΟ_β$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $Ο_α Ο_γ$ καὶ $ΓΟ_γ$ κάθετος ἐπὶ τὴν $Ο_α Ο_β$. Αἱ $Ο_α Α$, $Ο_β Β$, $Ο_γ Γ$ εἶναι λοιπὸν ὕψη τοῦ τριγώνου $Ο_α Ο_β Ο_γ$.

Ἡ περιφέρεια λοιπὸν Κ, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τοὺς πόδας Α, Β, Γ, τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου $Ο_α Ο_β Ο_γ$ εἶναι ἡ περιφέρεια τοῦ Euler. Ἀλλὰ γνωρίζομεν, ὅτι ἡ περιφέρεια τοῦ Euler διέρχεται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου $Ο_α Ο_β Ο_γ$ καὶ ἀπὸ τὰ μέσα τῶν $ΟΟ_α$, $ΟΟ_β$, $ΟΟ_γ$, τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν τοῦ τριγωνου $Ο_α Ο_β Ο_γ$, ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν του.

*803. Δίδεται ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ, *ὁ περιγεγραμμένος περὶ τὸ τρίγωνον κύκλος* Ο *καὶ ὁ κύκλος* Κ *τοῦ Euler. Ἐὰν* Δ, Ε, Ζ *εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν* ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ *τοῦ τριγώνου,* Η *τὸ ὀρθόκεντρόν του, καὶ* Λ *τὸ σημεῖον τοῦ κύκλου τοῦ Euler, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ὕψους* ΑΑ΄, *νὰ ἀποδειχθῇ:*
*1ον. ὅτι αἱ εὐθεῖαι* ΖΛ *καὶ* ΟΕ *εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι· ἐπίσης αἱ* ΛΕ *καὶ* ΖΟ *εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.*

*2ον. ὅτι* $ΟΖ = \frac{1}{2} ΓΗ$, $ΟΕ = \frac{1}{2} ΒΗ$ *καὶ* $ΟΔ = \frac{1}{2} ΑΗ$.

*Ἀπ. 1ον.* Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΖΛ=ΟΕ καὶ παράλληλοι καὶ ΕΛ=ΟΖ καὶ παράλληλοι.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΗ, ἡ εὐθεῖα ΖΛ συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο πλευρῶν του, ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευράν του ΒΗ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς· ἤτοι εἶναι $ΖΛ = \frac{1}{2} ΒΗ$.

Φέρομεν τὴν ΟΕ· ἡ ΟΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ, διότι τὸ Ο εἶναι σημεῖον τῆς καθέτου ΕΟ εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΓ. Αἱ εὐθεῖαι ΒΒ′ καὶ ΟΕ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΓ.


Σχ. 9

Ὥστε αἱ ΖΛ καὶ ΟΕ εἶναι παράλληλοι μεταξύ των, ὡς παράλληλοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΒΗΒ′.

Ὁμοίως ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΗΓ εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ ΛΕ εἶναι παράλληλος καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΗΓ· ἤτοι εἶναι $ΛΕ = \frac{1}{2} ΓΗ$.

Αἱ εὐθεῖαι ΓΗΓ′ καὶ ΟΖ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Ὥστε αἱ ΛΕ καὶ ΖΟ εἶναι παράλληλοι, ὡς παράλληλοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΓΗΓ′

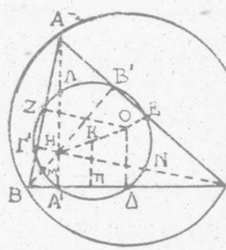
Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΛΖΟΕ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι $ΖΛ = ΟΕ$ καὶ $ΛΕ = ΖΟ$.

*2ον*. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $ΟΖ = \frac{1}{2} ΓΗ$ κλπ.

Ἐδείχθη ἀνωτέρω, ὅτι $ΟΖ = ΛΕ$ καὶ $ΛΕ = \frac{1}{2} ΓΗ$, ἄρα θὰ εἶναι $ΟΖ = \frac{1}{2} ΓΗ$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $ΟΕ = ΖΛ = \frac{1}{2} ΒΗ$ καὶ $ΟΔ = ΕΝ = \frac{1}{2} ΑΗ$.

***804. Θεώρημα τοῦ** Hamilton*. ***Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἕνα δοθὲν τρίγωνον*** **ΑΒΓ** ***καὶ τὰ τρία τρίγωνα*** **ΑΒΗ, ΒΓΗ, ΓΑΗ,** ***τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὸ ὀρθόκεντρον*** **Η** ***καὶ βάσεις, ἀντιστοίχως, τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου*** **ΑΒΓ**, ***ἔχουν κοινὸν τὸν κύκλον τοῦ*** *Euler*.

***Ἀπ.*** Ἔστω Κ ὁ κύκλος τοῦ Euler τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι καὶ τὰ τρίγωνα ΗΒΓ, ΗΓΑ καὶ ΗΑΒ ἔχουν τὸν αὐτὸν κύκλον Κ, ὡς κύκλον τοῦ Euler. Πράγματι ἂς λάβωμεν τὸ τρίγωνον ΗΒΓ. Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΒΗΓ εἶναι τὰ σημεῖα Μ, Δ, Ν. Ἀλλὰ ὁ κύκλος Κ διέρχεται διὰ τῶν σημείων αὐτῶν Μ, Δ, Ν, διότι τὸ Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως ΒΗ τῆς κορυφῆς Β ἀπὸ τὸ ὀρθόκεντρον Η, τὸ Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τὸ Ν εἶναι τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως ΓΗ τῆς κορυφῆς Γ ἀπὸ τὸ ὀρθόκεντρον Η.




Σχ. 10

Ὥστε ὁ κύκλος Κ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΗΒΓ.

Τὰ ὕψη τοῦ τριγώνου ΗΒΓ εἶναι τὰ ΗΑ′, ΒΓ′ καὶ ΓΒ′· ὥστε οἱ πόδες τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου ΗΒΓ εἶναι οἱ Α′, Β′, Γ′. Ἀλλὰ ὁ κύκλος Κ διέρχεται ἀπὸ τοὺς πόδας Α′, Γ′, Β′ τῶν ὑψῶν αὐτῶν, διότι τὰ Α′, Β′, Γ′, εἶναι καὶ οἱ πόδες τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Τὰ ὕψη ΗΑ′, ΒΓ′ καὶ ΓΒ′, προεκτεινόμενα τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Α. Ὥστε ἡ ΒΑ εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς Β τοῦ τριγώνου ΗΒΓ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν του. Τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως αὐτῆς ΒΑ εἶναι τὸ Ζ· ὁμοίως τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως τῆς κορυφῆς Γ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν εἶναι τὸ Ε, καὶ τὸ μέσον τῆς ΗΑ εἶναι τὸ Λ· ἀλλὰ διὰ τῶν σημείων αὐτῶν Ζ, Ε, Λ διέρχεται καὶ ὁ κύκλος Κ τοῦ Euler τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ὥστε ὁ κύκλος Κ τοῦ Euler τοῦ τριγώνου συμπίπτει μὲ τὸν κύκλον τοῦ Euler τοῦ τριγώνου ΗΒΓ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ὁ κύκλος Κ συμπίπτει μὲ τοὺς κύκλους τοῦ Euler τῶν τριγώνων ΗΓΑ καὶ ΗΑΒ.

*805. Δίδεται ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ *καὶ* Η *τὸ ὀρθόκεντρόν του. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον. ὅτι τὰ τέσσαρα τρίγωνα* ΑΒΓ, ΗΑΒ, ΗΒΓ, ΗΓΑ *ἔχουν κοινὸν τὸν κύκλον τοῦ Euler. 2ον. ὅτι αἱ τέσσαρες περιφέρειαι, αἱ περιγεγραμμέναι περὶ τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσαι. 3ον. ὅτι αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὸ ὀρθόκεντρον ἑκάστου τῶν τριγώνων μὲ τὸ κέντρον τοῦ ἀντιστοίχου περιγεγραμμένου κύκλου, διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ μέσον τῶν εὐθειῶν αὐτῶν.*

*Ἀπ. 1ον*. Βλέπε λύσιν ἀσκήσεως 804.

*2ον*. Γνωρίζομεν, ὅτι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τοῦ Euler εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΗΑΒ, ΗΒΓ, ΗΓΑ ἔχουν τὸν αὐτὸν κύκλον τοῦ Euler ἕπεται, ὅτι αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων, τῶν περιγεγραμμένων περὶ τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσαι, ὡς διπλάσιαι τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου τοῦ Euler.

*3ον* Γνωρίζομεν (§ 307), ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ Euler τυχόντος τριγώνου κεῖται εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία συνδέει τὸ ὀρθόκεντρον Η μὲ τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου.

Ἐπειδὴ ὁ κύκλος τοῦ Euler εἶναι κοινὸς καὶ διὰ τὰ τέσσαρα τρίγωνα, ἕπεται ὅτι τὸ κέντρον του θὰ κεῖται εἰς τὸ μέσον καθεμιᾶς ἀπὸ τὰς τέσσαρας αὐτὰς εὐθείας· ἄρα αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ Euler, δηλ. διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

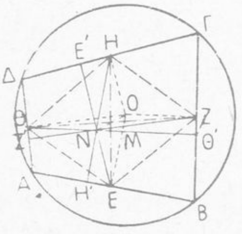
*806. Εἰς κάθε τετράπλευρον, ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, αἱ κάθετοι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰ μέσα ἑκάστης πλευρᾶς, ἐπὶ τὴν ἀπέναντι πλευράν, διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον.*

*Ἀπ.* Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Ο, καὶ Ε, Ζ, Η, Θ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

Ἀπὸ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ φέρομεν καθέτους ΕΕ', ΖΖ', ΗΗ', ΘΘ' ἐπὶ τὰς ἀπέναντι πλευράς· θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ κάθετοι αὐταὶ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Τὸ κέντρον Ο τοῦ κύκλου, τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν καθέτων εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του.

Τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ κορυφαί του εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ· ἄρα αἱ διαγώνιοί του ΕΗ καὶ ΖΘ διχοτομοῦνται εἰς τὸ Μ. Φέρομεν τὴν ΟΜ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα ΜΝ=ΟΜ. Φέρομεν τὰς ΗΝ, ΝΕ, ΕΟ, ΟΗ. Τὸ τετράπλευρον ΗΝΕΟ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοί του ΟΝ καὶ ΗΕ διχοτομοῦνται εἰς τὸ Μ· ἄρα αἱ ΝΕ καὶ ΟΗ εἶναι παράλληλοι, καθὼς καὶ αἱ ΗΝ καὶ ΟΕ. Ἐπειδὴ ἡ ΗΟ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ καὶ ἡ παράλληλός της ΕΝΕ' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ. Ὁμοίως ἡ ΗΝΗ' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, διότι καὶ ἡ παράλληλός της ΟΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.



Σχ. 11.

Αἱ ΕΕ' καὶ ΗΗ' τέμνονται εἰς τὸ Ν. Φέρομεν τὰς ΟΖ, ΟΘ, ΘΝΘ' καὶ ΖΝΖ'. Τὸ τετράπλευρον ΘΝΖΟ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοί του ΘΖ καὶ ΟΝ διχοτομοῦνται εἰς τὸ Μ.

Ἄρα αἱ ἀπέναντι πλευραί του εἶναι παράλληλοι· ἐπειδὴ ἡ ΟΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ ἡ παράλληλός της ΘΝΘ' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ. Ὁμοίως καὶ ἡ ΖΝΖ' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΑ.

Ὥστε αἱ ΕΕ', ΖΖ', ΗΗ', ΘΘ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ν.

*807. Θεώρημα τοῦ Maclaurin. Δίδεται μία γωνία* **xAy** *καὶ ἕνα σημεῖον* **B**, *τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου της. **Γράφομεν** τυχοῦσαν περιφέρειαν διερχομένην ἀπὸ τὰ σημεῖα* **A** *καὶ* **B**· *ἡ περιφέρεια αὐτὴ τέμνει τὴν* **Ax** *εἰς τὸ* **Γ** *καὶ τὴν* **Ay** *εἰς τὸ* **Δ**. ***Νὰ** ἀποδειχθῇ, ὅτι* **ΑΓ+ΑΔ**=*σταθερόν.*

*Ἀπ.* Ἀπὸ τὸ Β φέρομεν τὰς καθέτους ΒΕ καὶ ΒΖ ἐπὶ τὰς πλευρὰς Ax καὶ Ay τῆς γωνίας· ἐπειδὴ τὸ Β εἶναι σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας xAy, θὰ εἶναι ΒΕ=ΒΖ.

Αἱ γωνίαι ΑΕΒ καὶ ΑΖΒ εἶναι ὀρθαί· ἄρα αἱ κορυφαὶ των Ε καὶ Ζ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ΑΒ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΕΒ καὶ ΒΖΑ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας, τὴν ΑΒ κοινήν, καὶ τὰς καθέτους πλευρὰς ΒΕ καὶ ΒΖ ἴσας· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ΑΕ=ΑΖ. Φέρομεν τὰς χορδὰς ΓΔ, ΓΒ, ΒΔ.

Αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι $A_1$ καὶ $\Gamma_1$ εἶναι ἴσαι, διότι βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΒΔ.

Ἐπίσης αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι $A_2$ καὶ $\Delta_1$ εἶναι ἴσαι, διότι βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΓΒ. Ἐπειδὴ $Α_1=Α_2$, διότι ἡ ΑΒ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α, θὰ εἶναι $Γ_1=Δ_1$· ὥστε τὸ τρίγωνον ΓΒΔ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΒΔ=ΒΓ. (1)

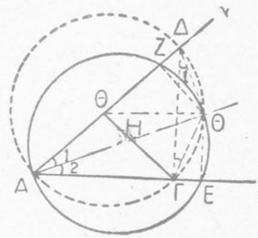
Φέρομεν τὴν ΓΗ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν ΑΔ εἰς τὸ Θ. Ἀπὸ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΓΘ λαμβάνομεν ΑΓ=ΑΘ. (2)

Φέρομεν τὴν ΘΒ. Ἐπειδὴ ἡ ΒΑ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΓΘ θὰ εἶναι ΒΘ=ΒΓ. (3)

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (3) λαμβάνομεν ΒΔ=ΒΘ. (4)

Ὥστε τὸ τρίγωνον ΘΒΔ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως τὸ ὕψος του ΒΖ διχοτομεῖ τὴν βάσιν του ΘΔ, ἤτοι εἶναι ΘΖ=ΖΔ. Θὰ εἶναι λοιπόν:

$$ΑΓ+ΑΔ=ΑΓ+ΑΘ+ΘΔ=ΑΘ+ΑΘ+2\cdot ΘΖ=$$
$$=2ΑΘ+2ΘΖ=2(ΑΘ+ΘΖ)=2ΑΖ.$$



Σχ. 12

Ἀλλὰ ἡ ΑΖ εἶναι σταθερά, διότι τὰ Α καὶ Ζ εἶναι σημεῖα τομῆς τῆς ΑΔ καὶ τῆς σταθερᾶς περιφερείας ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν ΑΒ. Ὥστε εἶναι ΑΓ+ΑΔ = σταθερόν.

*Παρατήρησις.* Ἡ ἄσκησις αὐτὴ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς: ***Ὅταν ἕνα τρίγωνον ΑΓΔ ἔχει μίαν γωνίαν Α σταθερὰν κατὰ τὸ μέγεθος καὶ τὴν θέσιν καὶ τὸ ἄθροισμα ΑΓ+ΑΔ τῶν δύο πλευρῶν του, ποὺ περιέχουν τὴν γωνίαν αὐτὴν εἶναι σταθερόν, ἡ περιφέρεια ἡ περιγεγραμμένη περὶ τὸ τρίγωνον αὐτὸ διέρχεται δι' ἑνὸς σημείου Β ὡρισμένου, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α.***

*808* ***Εἰς ἕνα τρίγωνον*** ΑΒΓ ***φέρομεν τὸ ὕψος*** ΑΗ, ***τὴν διχοτόμον*** ΑΔ ***τῆς γωνίας*** Α ***καὶ τὰς καθέτους*** ΒΕ ***καὶ*** ΓΖ ***ἐπὶ τὴν*** ΑΔ. ***Ἐὰν*** Μ ***καὶ*** Ν ***εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν*** ΒΓ ***καὶ*** ΑΒ, ***νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι τὸ τετράπλευρον*** ΗΖΜΕ ***εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. 2ον ὅτι*** $γων.ΗΖΜ=γων.Γ+γων.\frac{Α}{2}$. ***3ον ὅτι*** $γων.ΗΝΜ=Β-Γ$. ***4ον ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου*** ΕΗΖΜ ***κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τοῦ*** Euler ***τοῦ τριγώνου*** ΑΒΓ.

*Ἀπ.* Προεκτείνομεν τὰς ΒΕ καὶ ΓΖ μέχρις ὅτου συναντήσουν τὰς πλέυρὰς ΑΓ καὶ ΑΒ τοῦ τριγώνου εἰς τα σημεῖα Θ καὶ Κ ἀντιστοίχως.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΚΓ ἡ ΑΔΖ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς του Α καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΓΚ ἐκ κατασκευῆς· ἄρα τὸ τρίγωνον αὐτὸ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως τὸ Ζ εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΓΚ.

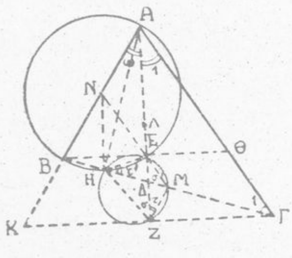
Εἰς τὸ τρίγωνον ΓΒΚ ἡ εὐθεῖα ΖΜ συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο πλευρῶν του· ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευράν του ΒΚ. Αἱ γωνίαι ω καὶ τ εἶναι ἴσαι ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΚ καὶ ΜΖ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΖ· ἤτοι εἶναι

$$γων.τ=γων.ω=γων.\frac{Α}{2} \quad (1).$$

Αἱ γωνίαι ΑΗΒ, ΑΕΒ εἶναι ὀρθαί· ἄρα αἱ κορυφαὶ των Η καὶ Ε κεῖνται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ΑΒ. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΑΒΗΕ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ ἐπομένως αἱ δύο ἀπέναντι γωνίαι του εἶναι παραπληρωματικαί, ἤτοι εἶναι γων.ω+γων.ΒΗΕ=2 ὀρθαὶ ἢ γων. $\frac{A}{2}$ +γων.ΒΗΕ=2 ὀρθ. (2).

Ἀλλὰ εἶναι καὶ γων.ΒΗΕ+γων.τ΄=2 ὀρθ. (3).

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (2) καὶ (3) συνάγομεν, ὅτι αἱ γωνίαι $\frac{A}{2}$ καὶ τ΄ εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν ΒΗΕ· ἤτοι εἶναι γων.τ΄=γων. $\frac{A}{2}$ (4).



Σχ. 13

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (4) συνάγομεν, ὅτι γων.τ=γων.τ΄.

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΕΜ φαίνεται ὑπὸ ἴσας γωνίας τ καὶ τ ἀπὸ τὰ σημεῖα Η καὶ Ζ· ἄρα τὰ σημεῖα Η, Ζ, Μ, Ε κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας καὶ ἐπομένως τὸ τετράπλευρον ΗΖΜΕ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

*2ον.* Τὸ τρίγωνον ΑΒΘ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἡ ΑΕ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς Α καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΘ ἐκ κατασκευῆς· ἄρα τὸ Ε εἶναι τὸ μέσον τῆς ΒΘ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΒΓΘ ἡ εὐθεῖα ΜΕ συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο πλευρῶν του ΒΓ καὶ ΒΘ, ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευράν του ΑΓ.

Αἱ γωνίαι σ καὶ $Γ_1$ εἶναι ἴσαι ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΑΓ καὶ ΕΜ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΓ, ἤτοι εἶναι γων.σ=γων.$Γ_1$ (5).

Αἱ γωνίαι σ καὶ σ΄ εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν κύκλον ΗΖΜΕ καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΗΕ· ἤτοι εἶναι γων.σ΄=γων.σ (6).

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (5) καὶ (6) συνάγομεν, ὅτι γων.$Γ_1$=γων.σ΄.

Ὥστε θὰ εἶναι γων.ΗΖΜ=γων.σ΄+γων.τ΄=γων.Γ+γων. $\frac{A}{2}$.

*3ον.* Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ εὐθεῖα ΜΝ, συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν του, ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην ΑΓ· ἐπομένως ἡ γων.ΒΜΝ=Γ (1).

Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΗΒ εἶναι ὀρθογώνιον, ἡ δὲ διάμεσός του ΗΝ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης ΑΒ, τὸ τρίγωνον ΝΒΗ εἶναι ἰσοσκελές, ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{BHN}=\widehat{B}$ (2).

Ἐπειδὴ ἡ γωνία $\widehat{BHN}$ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΗΝΜ θὰ εἶναι $\widehat{BHN}=\widehat{HNM}+\widehat{HMN}$ ἢ $\widehat{HNM}=\widehat{BHN}-\widehat{HMN}=\widehat{B}-Γ$.

4ον. Ἔστω Ο τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΕΗΖΜ. Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΗ, ΟΜ καὶ τὰς εὐθείας ΝΗ καὶ ΝΕ· θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ κέντρον Ο τοῦ κύκλου ΕΗΖΝ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τοῦ Euler τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, δηλ. τοῦ διερχομένου διὰ τῶν Ν, Η, Μ. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΝΗΟΜ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον.

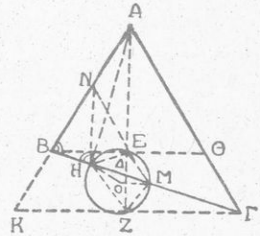
Ἡ ἐπίκεντρος γωνία ΗΟΜ εἶναι διπλασία τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας ΗΖΜ, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΗΕΜ, ἤτοι εἶναι

$$\text{γων.}HOM = 2\,\text{γων.}HZM.$$

Ἀλλὰ $\text{γων.}HZM = \Gamma + \frac{A}{2}$, ὡς ἐδείχθη εἰς τὴν περίπτωσιν 2ον· ἄρα θὰ εἶναι

$$\text{γων.}HOM = 2\left(\Gamma + \frac{A}{2}\right)$$

ἢ $\text{γων.}HOM = 2\Gamma + A$ (1).




Σχ. 14

Ἐδείξαμεν ἀνωτέρω (περίπτωσις 3η) ὅτι $\text{γων.}HNM = B - \Gamma$ (2).

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν $\widehat{HOM} + \text{γων.}HNM = \Gamma + A + B = 180^\circ$.

Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΝΗΟΜ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, διότι αἱ δύο ἀπέναντι γωνίαι του Ν καὶ Ο εἶναι παραπληρωματικαί.

Ὥστε ὁ κύκλος τοῦ Euler τοῦ τριγώνου ΑΒΓ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ κέντρου Ο τοῦ τετραπλεύρου ΕΗΖΜ.

*809. Σημεῖον τοῦ Miguel. Ἐὰν εἰς ἕνα τετράπλευρον* ΑΒΓΔ *προεκτείνωμεν τὰς ἀπέναντι πλευράς του* ΑΒ *καὶ* ΓΔ *μέχρι τῆς συναντήσεώς των εἰς τὸ σημεῖον* Ε *καὶ τὰς πλευρὰς* ΑΔ *καὶ* ΒΓ *μέχρι τῆς συναντήσεώς των εἰς τὸ* Ζ, *σχηματίζομεν ἕνα σχῆμα, τὸ ὁποῖον λέγεται πλῆρες τετράπλευρον. Αὐτὸ τὸ πλῆρες τετράπλευρον περιέχει τέσσαρα τρίγωνα* ΕΒΓ, ΕΑΔ, ΖΓΔ, ΖΑΒ. *Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι αἱ περιφέρειαι αἱ περιγεγραμμέναι περὶ τὰ τέσσαρα αὐτὰ τρίγωνα διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον. 2ον ὅτι τὰ κέντρα τῶν περιφερειῶν αὐτῶν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.*

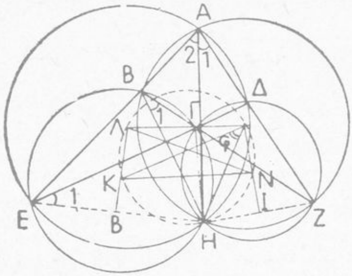
*Ἀπ. 1ον.* Περιγράφομεν περὶ τὰ τρίγωνα ΕΑΔ καὶ ΖΑΒ περιφερείας καὶ ἔστω Η τὸ δεύτερον σημεῖον τῆς τομῆς των.

Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ περιφέρειαι, αἱ περιγεγραμμέναι καὶ περὶ τὰ τρίγωνα ΕΒΓ καὶ ΖΔΓ διέρχονται ἀπὸ τὸ σημεῖον Η.

Φέρομεν τὴν κοινὴν χορδὴν ΑΗ τῶν περιφερειῶν, τῶν περιγεγραμμένων περὶ τὰ τρίγωνα ΕΑΔ καὶ ΖΑΒ. Ἐπίσης φέρομεν τὰς εὐθείας ΗΓ, ΗΒ, ΗΕ. Αἱ γωνίαι $A_1$ καὶ $B_1$ εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΗΖ, ἤτοι εἶναι $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ (1).

Ἀλλὰ ἡ γωνία $A_1$ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν $E_1$, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΗΔ, ἤτοι εἶναι $\widehat{A_1} = \widehat{E_1}$ (2).

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι αἱ γωνίαι $Β_1$ καὶ $Ε_1$ εἶναι ἴσαι. Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΓΗ φαίνεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Β καὶ Ε ὑπὸ ἴσας γωνίας $Β_1$ καὶ $Ε_1$· ἄρα τὰ σημεῖα Β, Ε, Γ, Η κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας· ὥστε τὸ σημεῖον Η εἶναι σημεῖον καὶ τῆς περιφερείας, τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον ΕΒΓ.




Σχ. 15

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὸ σημεῖον Η εἶναι σημεῖον καὶ τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον ΖΓΔ.

*2ον.* Ἔστωσαν Κ, Λ, Μ, Ν, τὰ κέντρα τῶν κύκλων τῶν περιγεγραμμένων περὶ τὰ τρίγωνα ΕΒΓ, ΕΑΔ, ΖΑΒ καὶ ΖΓΔ. Φέρομεν τὰς χορδὰς ΗΔ, ΗΖ, ΗΒ ΝΒ. Τὰ ἐγγεγραμμένα τετράπλευρα ΑΕΗΔ καὶ ΕΗΓΒ εἰς τοὺς κύκλους Λ καὶ Κ ἔχουν κοινὴν πλευρὰν τὴν ΕΗ, ἡ ὁποία εἶναι κοινὴ χορδὴ τῶν κύκλων Κ καὶ Λ· ἄρα τὰ κέντρα Κ καὶ Λ τῶν κύκλων αὐτῶν θὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς καθέτου ΘΚΛ εἰς τὸ μέσον Θ * τῆς ΕΗ.

Ὁμοίως τὰ τετράπλευρα ΑΒΗΖ καὶ ΔΓΗΖ ἔχουν κοινὴν πλευρὰν τὴν ΗΖ, ἡ ὁποία εἶναι κοινὴ χορδὴ τῶν κύκλων Μ καὶ Ν· ἄρα τὰ κέντρα Ν καὶ Μ κεῖνται ἐπὶ τῆς καθέτου ΙΝΜ εἰς τὸ μέσον Ι τῆς ΗΖ.

Ὁμοίως τὰ τετράπλευρα ΑΒΗΖ καὶ ΒΕΗΓ ἔχουν κοινὴν πλευρὰν τὴν κοινὴν χορδὴν ΒΗ τῶν κύκλων Κ καὶ Μ· ἄρα τὰ κέντρα Κ, Μ κεῖνται ἐπὶ τῆς καθέτου ΚΜ εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΗ.

Ὁμοίως τὰ τετράπλευρα ΑΕΗΔ καὶ ΔΓΗΖ ἔχουν κοινὴν πλευρὰν τὴν ΔΗ, ἡ ὁποία εἶναι κοινὴ χορδὴ τῶν κύκλων Λ καὶ Ν· ἄρα τὰ κέντρα Λ καὶ Ν κεῖνται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΔΗ.

Ἡ γωνία Α εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κύκλον Λ καὶ ἑπομένως ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ἀντιστοίχου τόξου της ΕΗΔ· ἤτοι εἶναι

γων.$Α = \frac{1}{2}$ τόξ ΕΗΔ (1).

Ἐπίσης ἡ γωνία Α εἶναι ἐγγεγραμμένη καὶ εἰς τὸν κύκλον Μ· ἄρα θὰ εἶναι γων.$Α = \frac{1}{2}$ τόξ.ΒΗΖ (2).

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) συνάγομεν ὅτι μέτρ. τοξ. ΕΗΔ= =μέτρ. τοξ. ΒΗΖ (3).

Αἱ γωνίαι ΚΜΝ καὶ ΒΗΖ ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους μίαν πρὸς μίαν, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω· ἄρα εἶναι παραπληρωματικαί, ἤτοι εἶναι γων.ΚΜΝ+γων.ΒΗΖ=$180^0$, ἄρα γων.ΚΜΝ=$180^0$—γων.ΒΗΖ (4).

Ἐπίσης αἱ γωνίαι ΚΛΝ καὶ ΕΗΔ ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους μίαν πρὸς μίαν· ἄρα εἶναι παραπληρωματικαί, ἤτοι εἶναι

* Εἰς τὸ σχῆμα 15 νὰ γραφῇ Θ ἀντὶ Β (μέσον τῆς ΕΗ). Ἐπίσης νὰ γραφῇ τὸ σημεῖον **Μ** καὶ νὰ ἀχθῇ ἡ χορδὴ ΗΔ.

γων.ΚΛΝ+γων.ΕΗΔ=180°, ἄρα γων.ΚΛΝ=180°−γων.ΕΗΔ (5).

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (3), (4), (5) συνάγομεν ὅτι γων.ΚΜΝ=γων.ΚΛΝ.

Φέρομεν τὰς εὐθείας ΚΝ καὶ ΛΜ. Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ πλευρὰ ΚΝ τοῦ τετραπλεύρου ΚΝΜΛ φαίνεται ὑπὸ ἴσας γωνίας ΚΜΝ καὶ ΚΛΝ ἀπὸ τὰς δύο ἀπέναντι κορυφάς του Λ καὶ Μ, ἄρα τὸ τετράπλευρον ΚΝΜΛ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

*810. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν* ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ *ἑνὸς τριγώνου* ΑΒΓ *λαμβάνομεν τὰ σημεῖα* Δ, Ε, Ζ *ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ : 1ον ὅτι αἱ περιφέρειαι αἱ περιγεγραμμέναι περὶ τὰ τρίγωνα* ΑΔΖ, ΒΕΔ *καὶ* ΓΖΕ *διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον* Ο. *2ον ὅτι* γων.ΑΟΒ=γων.Γ+γων.ΕΔΖ, γων.ΒΟΓ=γων.Α+γων.ΔΕΖ, γων.$\widehat{\text{ΑΟΓ}}$=γων.Β+γων.ΔΖΕ. *3ον. Ἀπὸ τὰς κορυφὰς* Α, Β, Γ *φέρομεν τρεῖς τυχούσας παραλλήλους,* ΑΗ, ΒΘ, ΓΚ, *αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς περιφερείας τῶν κύκλων* ΑΔΖ, ΒΕΔ, ΓΖΕ *εἰς τὰ σημεῖα* Η, Θ, Κ *ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα* Η, Θ, Κ *καὶ* Ο *κεῖνται ἐπ' εὐθείας.*

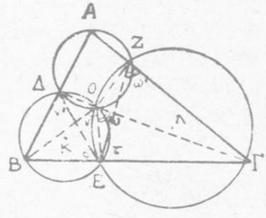
***Ἀπ. 1ον.*** Ἔστω Ο τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν περιφερειῶν ΑΔΖ καὶ ΒΕΔ. Φέρομεν τὰς χορδὰς ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ.

Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΑΔΟΖ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον λαμβάνομεν

γων.Α+γων.ΔΟΖ=2 ὀρθ. (1).

Ὁμοίως ἀπὸ τὸ τετράπλευρον ΒΕΟΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον λαμβάνομεν

γων.Β+γων.ΔΟΕ=2 ὀρθ. (2).




Σχ. 16

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

γων.Α+γων.Β+γων.ΕΟΔ+γων.ΔΟΖ=4 ὀρθ. (3).

Ἀλλὰ αἱ περὶ τὸ Ο γωνίαι ΔΟΖ, ΕΟΔ καὶ ΕΟΖ ἔχουν ἄθροισμα 4 ὀρθῶν γωνιῶν, ἤτοι εἶναι γων.ΔΟΖ+γων.ΕΟΔ+γων.ΕΟΖ=4 ὀρθ. (4).

Ἐπίσης εἶναι γων.Α+γων.Β+γων.Γ=2 ὀρθ. (5).

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (4) καὶ (5) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

γων.ΔΟΖ+γων.ΕΟΔ+γων.ΕΟΖ+γων.Α+γων.Β+γων.Γ=6 ὀρθ. (6)

Ἀφαιροῦμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (6) καὶ (3) καὶ λαμβάνομεν γων.ΕΟΖ+γων.Γ=2 ὀρθ.· ἤτοι αἱ δύο ἀπέναντι γωνίαι Ο καὶ Γ τοῦ τετραπλεύρου ΕΓΖΟ εἶναι παραπληρωματικαί· ἄρα τὸ τετράπλευρον ΕΓΖΟ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. Ἑπομένως ἡ περιφέρεια, ἡ περιγεγραμμένη περὶ τὸ τρίγωνον ΓΖΕ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ο τῆς τομῆς τῶν δύο ἄλλων περιφερειῶν.

*2ον.* Θὰ δείξωμεν, ὅτι γων.ΒΟΓ=γων.Α+γων.ΔΕΖ.

Φέρομεν τὰς χορδὰς ΟΔ, ΟΖ, ΕΔ, ΕΖ. Αἱ γωνίαι ν καὶ ν' εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΒΕ· ἤτοι εἶναι $\widehat{\nu}=\widehat{\nu'}$.

Ὁμοίως εἶναι $\widehat{\omega}=\widehat{\omega'}$, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΕΓ. Θὰ εἶναι λοιπὸν $B\widehat{O}\Gamma=\widehat{\nu}+\widehat{\omega}$ ἢ $B\widehat{O}\Gamma=\widehat{\nu'}+\widehat{\omega'}$. (7)

Ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΒΔΕ λαμβάνομεν

$$\widehat{\nu'}+\widehat{B}+\widehat{\sigma}=2 \text{ ὀρθ. ἢ } \widehat{\nu'}=2 \text{ ὀρθ.}-(\widehat{B}+\widehat{\sigma}) \quad (8).$$

Ὁμοίως ἀπὸ τρίγωνον ΕΓΖ λαμβάνομεν $\widehat{\omega'}=2$ ὀρθ. $-(\widehat{\Gamma}+\widehat{\tau})$ (9).

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (8) καὶ (9) κατὰ μέλη λαμβάνομεν $\widehat{\nu'}+\widehat{\omega'}=4$ ὀρθ.$-(\widehat{B}+\widehat{\Gamma}+\widehat{\sigma}+\widehat{\tau})$. (10)

Ἀλλὰ $\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=2$ ὀρθ. $-\widehat{A}$ καὶ $\widehat{\sigma}+\widehat{\tau}=2$ ὀρθ.$-\Delta\widehat{E}Z$.

Ἐπομένως, ἡ ἰσότης (10) γίνεται

$$\widehat{\nu'}+\widehat{\omega'}=4 \text{ ὀρθ.}-(4 \text{ ὀρθ.}-\widehat{A}-\Delta\widehat{E}Z) \text{ ἢ } \widehat{\nu'}+\widehat{\omega'}=\widehat{A}+\Delta\widehat{E}Z \quad (11).$$

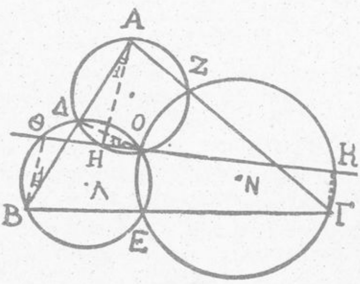
Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (7) καὶ (11) συνάγομεν, ὅτι $B\widehat{O}\Gamma=\widehat{A}+\Delta\widehat{E}Z$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι γων.ΑΟΒ=γων.Γ+γων.ΕΔΖ καὶ γων.ΑΟΓ=γων.Β+γων.ΔΖΕ.

3ον. Φέρομεν τὴν χορδὴν ΟΗ. Αἱ γωνίαι $A_1$ καὶ ΔΟΗ εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν κύκλον ΑΔΟΖ καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΔΗ (Σχ. 17).

Αἱ γωνίαι $A_1$ καὶ $B_1$ εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΗ καὶ ΒΘ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΒ· ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{B_1}=\Delta\widehat{O}H$ (1).

Φέρομεν τὴν χορδὴν ΟΘ. Αἱ γωνίαι $B_1$ καὶ ΘΟΔ εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν κύκλον ΒΕΟΔ καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ




Σχ. 17

τόξου ΘΔ, ἤτοι εἶναι $B_1=\Theta\widehat{O}\Delta$ (2)· ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) συνάγομεν ὅτι γων.ΔΟΗ=γων.ΘΟΔ.

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ γωνίαι ΔΟΗ καὶ ΘΟΔ εἶναι ἴσαι, ἔχουν κοινὴν κορυφὴν Ο, κοινὴν πλευρὰν ΟΔ καὶ αἱ ἄλλαι πλευραὶ των ΟΗ καὶ ΟΘ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κοινῆς πλευρᾶς ΟΔ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι αὐταὶ εἶναι ἴσαι, ἔπεται, ὅτι αἱ μὴ κοιναὶ πλευραί των ΟΗ καὶ ΟΘ συμπίπτουν. Ὥστε τὰ σημεῖα Ο, Η, Θ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Φέρομεν τὴν χορδὴν ΟΚ.

Τὸ τετράπλευρον ΟΕΓΚ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον ΓΕΖ καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $E\widehat{O}K+E\widehat{\Gamma}K=2$ ὀρθ. (3).

Ἐπίσης ἀπὸ τὸ ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον ΒΕΟΘ εἰς τὸν κύκλον ΒΕΔ λαμβάνομεν

$$\Theta BE+\text{γων.}EO\Theta=2 \text{ ὀρθ.} \quad (4)$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (3) καὶ (4) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$E\widehat{O}K+E\widehat{\Gamma}K+\Theta\widehat{B}E+E\widehat{O}\Theta=4 \text{ ὀρθ.} \quad (5)$$

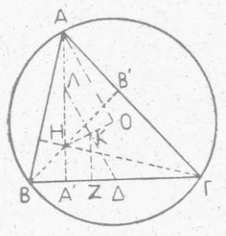
Ἀλλὰ γων.$\widehat{\Theta BE}+\widehat{E\Gamma K}=2$ ὀρθ. (6) ὡς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΒΘ καὶ ΓΚ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΓ.

Ἀφαιροῦντες τὰς ἰσότητας (5) καὶ (6) κατὰ μέλη λαμβάνομεν $\widehat{EOK}+\widehat{EO\Theta}=2$ ὀρθ. Ἐπειδὴ αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ΕΟΚ καὶ ΕΟΘ εἶναι παραπληρωματικαί, αἱ μὴ κοιναὶ πλευραί των ΟΘ καὶ ΟΚ κεῖνται ἐπὶ εὐθείας.

Ὥστε ἡ ΘΟΚ εἶναι εὐθεῖα. Τὰ σημεῖα λοιπὸν Θ, Η, Ο, Κ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

*Β' Ὁμάς. 811. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ, *ἂν γνωρίζωμεν τὴν κορυφὴν* Α, *τὸ ὀρθόκεντρον* Η *καὶ τὸ σημεῖον* Δ *τῆς τομῆς τῆς διαμέσου* ΑΔ *καὶ τῆς πλευρᾶς* ΒΓ.

*Λύσις.* Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν κορυφὴν Α, τὸ ὀρθόκεντρον Η καὶ τὸ σημεῖον Δ τῆς τομῆς τῆς διαμέσου ΑΔ καὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ.




Σχ. 17

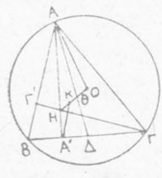
Ἐφ' ὅσον εἶναι γνωστὰ τὰ σημεῖα Α καὶ Δ εἶναι γνωστὸν καὶ τὸ μῆκος τῆς διαμέσου ΑΔ. Ἐπίσης εἶναι γνωστὴ καὶ ἡ διεύθυνσις τοῦ ὕψους ΑΑ'.

Ἔστω Λ τὸ μέσον τῆς ΑΗ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΛΔ, ἡ ὁποία εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου τῶν ἐννέα σημείων καὶ ἔστω Κ τὸ κέντρον της, μέσον τῆς ΛΔ. Φέρομεν τὴν ΗΚ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα ΚΟ=ΗΚ. Τὸ Ο εἶναι τὸ κέντρον τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἂν λοιπὸν γράψωμεν περιφέρειαν μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ΟΑ καὶ φέρωμεν τὴν ΔΑ' κάθετον ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΑΗ καὶ προεκτείνωμεν αὐτὴν ὁρίζομεν τὰς δύο ἄλλας κορυφὰς Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

*812. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ, *ἂν γνωρίζωμεν τὸ ὀρθόκεντρόν του* Η, *τὸ κέντρον βάρους του* Θ, *καὶ τὸν πόδα* Α' *τοῦ ὕψους* ΑΑ'.

*Λύσις.* Φέρομεν τὴν ΗΑ' καὶ ἀπὸ τὸ Α' κάθετον ἐπὶ τὴν ΗΑ', ἡ ὁποία ὁρίζει τὴν διεύθυνσιν τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΗΘ. Ἐπὶ τῆς εὐθείας ΗΘ προεκτεινομένης κεῖνται τὸ κέντρον Κ τοῦ κύκλου τῶν 9 σημείων καὶ τὸ κέντρον Ο τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Πρὸς τοῦτο προεκτείνομεν τὴν ΗΘ καὶ λαμβάνομεν $\Theta O=\frac{H\Theta}{2}$.

Τὸ μέσον Κ τῆς ΗΟ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τῶν 9 σημείων. Ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια τῶν 9 σημείων διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α' καὶ ἡ ἀκτίς της ΚΑ΄ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ συνάγομεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὴν περιφέρειαν Ο καὶ νὰ προσδιορίσωμεν ἔπειτα τὰς κορυφὰς Β, Γ, Α τοῦ ζητουμένου τριγώνου.



Σχ. 18

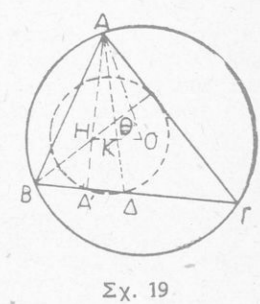
Κ α τ α σ κ ε υ ή. Φέρομεν τὴν ΗΘ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως της λαμβάνομεν τμῆμα ΘΟ, ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΘΗ. Εὑρίσκομεν τὸ μέσον Κ τῆς ΗΟ καὶ φέρομεν τὴν ΚΑ΄. Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα διπλασίαν τῆς ΚΑ΄ γράφομεν περιφέρειαν. Ἀπὸ τὸ Α΄ φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΗΑ΄, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Προεκτείνομεν τὴν Α΄Η ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Α. Τὰ σημεῖα Α, Β, Γ εἶναι αἱ κορυφαὶ τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

*813. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ, *ἂν γνωρίζωμεν τὴν κορυφήν του* Α, *τὸ ὀρθόκεντρόν του* Η *καὶ τὸ κέντρον βάρους του* Θ.

***Ἀνάλυσις.*** Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Φέρομεν τὴν ΗΘ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της λαμβάνομεν τμῆμα $ΘΟ = \frac{ΗΘ}{2}$.

Τὸ Ο εἶναι τὸ κέντρον τῆς περιφερείας, τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Τὸ μέσον Κ τῆς ΗΟ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τῶν 9 σημείων.

Φέρομεν τὴν ΑΗ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Α΄.



Σχ. 19

Γνωρίζομεν, ὅτι τὸ Α΄ εἶναι σημεῖον τῆς περιφερείας τῶν 9 σημείων. Ἄρα τὸ σημεῖον Α΄ εἶναι γνωστόν, διότι εἶναι σημεῖον τῆς τομῆς τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΗ καὶ τῆς περιφερείας τῶν 9 σημείων. Ἡ κάθετος ἐκ τοῦ Α΄ ἐπὶ τὴν ΑΗ ὁρίζει τὰς δύο ἄλλας κορυφὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Κ α τ α σ κ ε υ ή. Προεκτείνομεν τὴν ΗΘ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της λαμβάνομεν τμῆμα $ΘΟ = \frac{ΗΘ}{2}$.

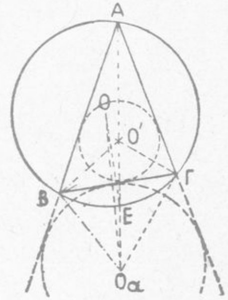
Εὑρίσκομεν τὸ μέσον Κ τῆς ΗΟ. Μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὰ ἥμισυ τῆς ΟΑ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΑΗ εἰς τὸ σημεῖον Α΄.

Ἀπὸ τὸ Α΄ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΗ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ΟΑ εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ.

Τὰ σημεῖα Α, Β, Γ εἶναι αἱ κορυφαὶ τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

*814. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὸ κέντρον Ο′ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου, τὸ κέντρον Ο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ τὸ κέντρον $Ο_α$ τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου.*

*Λύσις.* Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθοκεντρικὸν τοῦ τριγώνου $Ο_α Ο_β Ο_γ$, ποὺ ἔχει κορυφὰς τὰ κέντρα $Ο_α, Ο_β, Ο_γ$ τῶν τριῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων, διότι ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος ἑκάστης γωνίας τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἔστω τῆς Α, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς παραπληρωματικῆς τῆς Α. Ὁ περιγεγραμμένος περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ κύκλος Ο εἶναι ὁ κύκλος τῶν 9 σημείων τοῦ τριγώνου $Ο_α Ο_β Ο_γ$. Ἄρα τὸ μέσον Ε τῆς $Ο'Ο_α$ εἶναι σημεῖον τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.



Σχ. 20

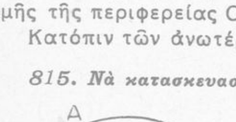
Γνωρίζοντες τὸ κέντρον Ο καὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΕ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὴν περιφέρειαν Ο.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία $Ο'ΓΟ_α$ εἶναι ὀρθή, τὸ Γ κεῖται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν $Ο'Ο_α$. Τὸ Γ εἶναι σημεῖον τῆς περιφερείας αὐτῆς καὶ τῆς περιφερείας (Ο, ΟΕ).

Ὁμοίως ἐπειδὴ $Ο'ΒΟ_α = 1$ ὀρθή, τὸ Β κεῖται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν $Ο'Ο_α$. Τὸ Β εἶναι σημεῖον τῆς περιφερείας αὐτῆς καὶ τῆς περιφερείας (Ο,ΟΕ). Ἡ κορυφὴ Α εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς περιφερείας Ο καὶ τῆς προεκτάσεως τῆς $Ο_α Ο'$.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ἡ κατασκευὴ εἶναι εὔκολος.

*815. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ὀρθόκεντρόν του Η, τὸν πόδα Α′ τοῦ ὕψους ΑΑ′ καὶ τὸ κέντρον Ο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.*



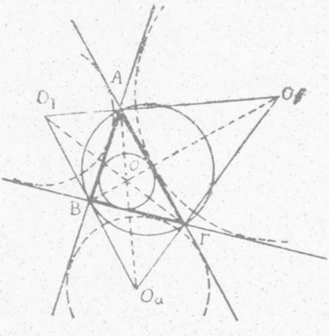
Σχ. 21

*Λύσις.* Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΗΑ′. Ἡ ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΗΑ′ εἰς τὸ Α′.

Ἐπίσης φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΗΟ. Τὸ μέσον αὐτῆς Κ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τῶν 9 σημείων. Φέρομεν τὴν ΚΑ′, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τῶν 9 σημείων. Γνωρίζοντες τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου τῶν 9 σημείων γνωρίζομεν καὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΑ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, διότι ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι διπλασία τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου τῶν 9 σημείων. Ἐὰν γράψωμεν τὴν περιφέρειαν Ο, ὁρίζομεν τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ αἱ ὁποῖαι εἶναι σημεῖα τῆς τομῆς τῆς περιφερείας Ο καὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΗΑ′ εἰς τὸ Α′. Ἡ κορυφὴ Α εἶναι σημεῖον τῆς περιφερείας Ο καὶ τῆς προεκτάσεως τῆς Α′Η. Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ἡ κατασκευὴ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι εὔκολος.

*816. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ, *ἂν γνωρίζωμεν τὸ κέντρον* Ο′ *τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τὰ κέντρα* $O_\alpha$, $O_\beta$ *τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων.*

*Λύσις.* Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον.



Σχ. 22

Τὸ τρίγωνον $O'O_\alpha O_\beta$ δύναται νὰ κατασκευασθῇ διότι γνωρίζομεν τὰς τρεῖς κορυφάς του Ο′, $O_\alpha$, $O_\beta$.

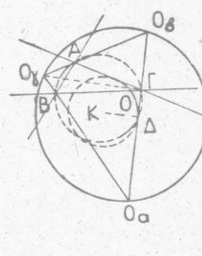
Ἔστω $O_\gamma$ τὸ κέντρον τοῦ τρίτου παρεγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Τὸ Ο′ εἶναι ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου $O_\alpha O_\beta O_\gamma$. Τοῦ τριγώνου $O_\alpha O_\beta O_\gamma$ γνωρίζομεν δύο κορυφάς του $O_\alpha$,$O_\beta$ καὶ τὸ ὀρθόκεντρόν του· ἄρα δυνάμεθα νὰ τὸ κατασκευάσωμεν. Πρὸς τοῦτο φέρομεν ἀπὸ τὰ $O_\alpha$ καὶ $O_\beta$ καθέτους ἐπὶ τὰς $O_\beta O'$ καὶ $O_\alpha O'$, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον $O_\gamma$.

Γνωρίζοντες ἤδη τὸ τρίγωνον $O_\alpha O_\beta O_\gamma$ ὁρίζομεν τὸ ὀρθοκεντρικὸν τρίγωνον αὐτοῦ καὶ ἔχομεν οὕτω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

*817. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ, *ἂν γνωρίζωμεν τὸ κέντρον* Ο *τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ τὰ κέντρα* $O_\alpha$, $O_\beta$ *τῶν παρεγεγραμμένων κύκλων.*

*Λύσις.* Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

Ἔστω Δ τὸ μέσον τῆς $O_\alpha O_\beta$. Τὸ Ο εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τῶν 9 σημείων τοῦ τριγώνου $O_\alpha O_\beta O_\gamma$. Ἐπειδὴ τὸ Δ εἶναι μέσον τῆς $O_\alpha O_\beta$, ἡ περιφέρεια τῶν 9 σημείων θὰ διέλθῃ δι' αὐτοῦ. Ὥστε ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τῶν 9 σημείων εἶναι ὡρισμένη, εἶναι ἡ ΟΔ. Ἡ περιφέρεια (Ο,ΟΔ) τῶν 9 σημείων τέμνει τὴν $O_\alpha O_\beta$ εἰς τὸ Γ.



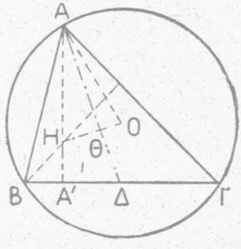
Σχ. 23

Ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν $O_\alpha O_\beta$. Ἐπὶ τῆς καθέτου αὐτῆς κεῖται τὸ $O_\gamma$. Ὁ κύκλος ὁ περιεγεγραμμένος περὶ τὸ τρίγωνον $O_\alpha O_\beta O_\gamma$ ἔχει ἀκτῖνα διπλασίαν τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου τῶν 9 σημείων, δηλ. ἔχει ἀκτῖνα ἴσην μὲ 2·ΟΔ. Τὸ κέντρον Κ τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον $O_\alpha O_\beta O_\gamma$ εἶναι σημεῖον τῆς τομῆς τῆς μεσοκαθέτου τῆς $O_\alpha O_\beta$ καὶ τοῦ τόξου τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ $O_\alpha$ καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ 2·ΟΔ. Ἡ περιφέρεια (Κ, 2ΟΔ) τέμνει τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν $O_\alpha O_\beta$ εἰς τὸ Γ εἰς τὸ σημεῖον $O_\gamma$. Οὕτω ὁρίζεται τὸ τρίγωνον $O_\alpha O_\beta O_\gamma$ καὶ ἑπομένως καὶ τὸ ὀρθοκεντρικόν του τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον.

*818. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ, *ἂν γνωρίζωμεν τὴν κορυφὴν τοῦ* Α, *τὸ κέντρον βάρους του* Θ *καὶ τὸ κέντρον* Ο *τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.*

*Λύσις.* Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

Ἡ περιφέρεια, ἡ περιγεγραμμένη περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι γνωστή, διότι γνωρίζομεν τὸ κέντρον της Ο καὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΑ.



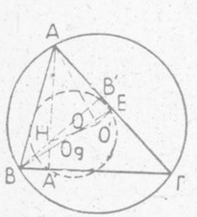
Σχ. 24

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΟΘ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της λαμβάνομεν τμῆμα ΘΗ=2ΟΘ.

Τὸ σημεῖον Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΘ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της λαμβάνομεν τμῆμα $ΘΔ = \frac{ΑΘ}{2}$. Οὕτω ὁρίζεται καὶ τὸ σημεῖον Δ.

Αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι σημεῖα τῆς τομῆς τῆς περιφερείας (Ο,ΟΑ) καὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΗ, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Δ.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ἡ κατασκευὴ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι εὔκολος.



Σχ. 25

*819. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ, *ἂν γνωρίζωμεν τὴν κορυφήν του* Β, *τὸ κέντρον* Ο *τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ τὸ κέντρον* $O_9$ *τοῦ κύκλου τοῦ* Euler.

*Λύσις.* Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον (Σχ. 25). Ἡ περιφέρεια, ἡ περιγεγραμμένη περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι γνωστή, διότι γνωρίζομεν τὸ κέντρον της Ο καὶ τὴν ἀκτῖνα της ΟΒ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν $OO_9$.

Τὸ κέντρον βάρους Θ κεῖται ἐπὶ τῆς $OO_9$ καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ O ἴσην μὲ τὰ $^2/_3$ τῆς $OO_3$. Φέρομεν τὴν ΒΘ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της λαμβάνομεν τμῆμα ΘΕ ἴσον μὲ τὸ $^1/_2$ τῆς ΒΘ. Φέρομεν τὴν ΟΕ. Ἡ ΑΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΕ εἰς τὸ σημεῖον Ε.

Αἱ κορυφαὶ Α καὶ Γ εἶναι τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῆς περιφερείας (Ο,ΟΒ) καὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΟΕ εἰς τὸ σημεῖον Ε.

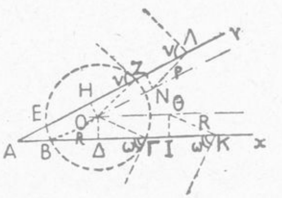
Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ἡ κατασκευὴ τοῦ ζητουμένου τριγώνου εἶναι εὔκολος.

## Γωνία εὐθείας καὶ περιφερείας. Γωνία δύο περιφερειῶν

*Ἀσκήσεις.* *820. Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα R, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ δοθεῖσαν εὐθεῖαν ὑπὸ γωνίαν ω καὶ ἄλλην εὐθεῖαν ὑπὸ γωνίαν ν.*

*Λύσις.* Ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὴν § 309 (Β' ἔκδοσις Γεωμετρίας) προβαίνομεν εἰς τὴν κάτωθι κατασκευήν.

Κατασκευή. Μὲ κορυφὴν τυχὸν σημεῖον Κ τῆς Αx καὶ πλευρὰν τὴν ΚΑ κατασκευάζομεν γωνίαν ΑΚΘ ἴσην μὲ τὴν συμπληρωματικὴν τῆς δοθείσης ω. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΚΘ λαμβάνομεν τμῆμα ΚΘ=R καὶ ἐκ τοῦ Θ φέρομεν τὴν ΘΟ παράλληλον τῆς Αx. Ὁμοίως μὲ κορυφὴν τυχὸν σημεῖον Λ τῆς Αy καὶ πλευρὰν τὴν ΛΑ κατασκευάζομεν γωνίαν ΑΛΝ ἴσην μὲ τὴν συμπληρωματικὴν τῆς δοθείσης γωνίας ν. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΛΝ λαμβάνομεν τμῆμα ΛΝ=ρ καὶ ἐκ τοῦ Ν φέρομεν τὴν ΝΟ παράλληλον πρὸς τὴν Αy. Ἡ ΝΟ προεκτεινομένη τέμνει τὴν ΘΟ εἰς τὸ Ο, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας. Ἂν μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν R γράψωμεν περιφέρειαν αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη.




Σχ. 26

*821. Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ κάθε πλευρὰν δοθέντος τριγώνου ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν ω.*

*Λύσις.* Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω Ο ἡ ζητουμένη περιφέρεια, ἡ ὁποία τέμνει τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ, Ζ, Θ, Κ, Δ', Ζ'.

Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΔΕ, ΖΕ, Δ'Ε', Ζ'Ε' τῆς περιφερείας εἰς τὰ σημεῖα Δ, Ζ, Δ', Ζ'. Αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι ω, ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων αὐτῶν καὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως ἴσαι, ἄρα θὰ εἶναι καὶ αἱ συμπληρωματικαὶ αὐτῶν γωνίαι ν ἴσαι.


Σχ. 27

Τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΟΔΖ καὶ ΟΔ'Ζ' εἶναι λοιπὸν ἴσα καὶ ἑπομένως εἶναι ΔΖ=Δ'Ζ'.

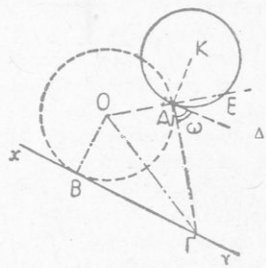
Ἐπειδὴ αἱ χορδαὶ ΔΖ, Δ'Ζ' εἶναι ἴσαι, τὸ κέντρον Ο ἀπέχει ἰσάκις ἀπὸ τὰς τρεῖς πλευρὰς καὶ ἑπομένως εἶναι σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἡ ἀκτὶς ΟΔ εἶναι εἶναι ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΗΔ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν ΟΗ καὶ τὴν γωνίαν ΗΟΔ, ἴσην μὲ ω, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν συμπληρωματικὴν γωνίαν ν. Ἡ κατασκευὴ κατόπιν τῶν ἀνωτέρω εἶναι εὔκολος.

Τὸ πρόβλημα ἔχει τέσσαρας λύσεις, διότι δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τὰ κέντρα τῶν τριῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων.

822. ***Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται δοθείσης εὐθείας*** xy ***καὶ ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ δοθεῖσαν περιφέρειαν*** K ***εἰς δοθὲν σημεῖον*** A ***αὐτῆς, ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν*** ω.

***Ἀνάλυσις.*** Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω Ο (σχ. 28) ἡ ζητουμένη περιφέρεια, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῆς xy εἰς τὸ Β καὶ τέμνει τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν Κ, ὑπὸ γωνίαν ΓΑΔ=ω. Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ καὶ ΚΑ. Αἱ πλευραὶ ΑΔ καὶ ΑΓ τῆς γωνίας ω εἶναι ἐφαπτόμεναι τῶν περιφερειῶν Κ καὶ Ο ἀντιστοίχως εἰς τὸ σημεῖον Α. Τὸ κέντρον Ο κεῖται λοιπὸν ἐπὶ τῆς καθέτου ΑΟ, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Α ἐπὶ τὴν ΑΓ. Ἡ ΑΓ προεκτεινομένη τέμνει τὴν xy εἰς τὸ Γ. Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΒ. Ἡ ΟΓ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΓΒ καὶ ἑπομένως τὸ Ο κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς διχοτόμου αὐτῆς.



Σχ. 28

Κ α τ α σ κ ε υ ή. Φέρομεν τὴν ΑΔ ἐφαπτομένην τῆς δοθείσης περιφερείας Κ εἰς τὸ σημεῖον Α. Μὲ κορυφὴν τὸ Α καὶ πλευρὰν τὴν ΑΔ κατασκευάζομεν γωνίαν ΔΑΓ=ω, τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ ΑΓ τέμνει τὴν xy εἰς τὸ σημεῖον Γ. Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΓΟ τῆς γωνίας ΑΓx. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὴν ΑΟ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν διχοτόμον ΓΟ εἰς τὸ Ο.

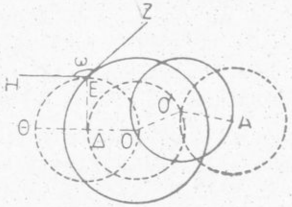
Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΑ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη.

823. ***Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα*** R, ***ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον*** A ***καὶ ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ δοθεῖσαν περιφέρειαν*** O ***ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν ω.***

***Λύσις.*** Ἂς ζητήσωμεν τὸν τόπον τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, ἀκτῖνος R, αἱ ὁποῖαι τέμνουν δοθεῖσαν περιφέρειαν, ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν ω. Φέρομεν τυχοῦσαν ἐφαπτομένην ΕΖ τῆς περιφερείας Ο καὶ σχηματίζομεν μὲ αὐτὴν τὴν γωνίαν ΖΕΗ, ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω.

Ἐκ τοῦ Ε φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΕΗ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς καθέτου αὐτῆς τμῆμα ΕΔ, ἴσον μὲ τὴν δοθεῖσαν ἀκτῖνα R.

Ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΔ, εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος.




Σχ. 29

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ἔχομεν τὴν κάτωθι κατασκευήν.

Κ α τ α σ κ ε υ ή. Γράφομεν ὁμόκεντρον περιφέρειαν τῆς δοθείσης Ο, μὲ ἀκτῖνα ΟΔ, ὁριζομένην ὡς ἀνωτέρω.

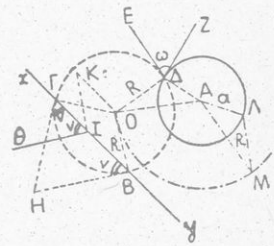
Μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν R γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν περιφέρειαν (Ο,ΟΔ) εἰς τὸ σημεῖον Ο′. Μὲ κέντρον τὸ Ο′ καὶ ἀκτῖνα Ο′Α=R γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη.

***824. Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα R, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ δοθεῖσαν περιφέρειαν Α καὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν xy ὑπὸ δοθείσας γωνίας ω καὶ ν.***

***Λύσις.*** Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω Ο ἡ ζητουμένη περιφέρεια, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Α ὑπὸ γωνίαν ω καὶ τὴν εὐθεῖαν xy ὑπὸ γωνίαν ΗΓΒ=ν.

Φέρομεν τὴν διάκεντρον ΑΟ καὶ τὰς ἀκτῖνας ΟΔ καὶ ΑΔ.

Τοῦ τριγώνου ΟΔΑ, γνωρίζομεν δύο πλευρὰς καὶ τὴν ὑπ᾿ αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν, ἤτοι τὴν ΟΔ=R, ΑΔ ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα α τοῦ δοθέντος κύκλου καὶ τὴν γωνίαν ΟΔΑ=180°−ω.




Σχ. 30

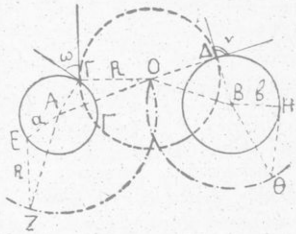
Ἄρα εἶναι γνωστὴ καὶ ἡ πλευρὰ ΑΟ. Τὸ Ο λοιπὸν κεῖται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν ΑΟ. Φέρομεν τὴν ΟΒ· ἡ γωνία ΟΒΓ εἶναι συμπληρωματικὴ τῆς δοθείσης ν.

Κ α τ α σ κ ε υ ή. Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΑΛΜ μὲ πλευρὰς ΑΛ=α καὶ ΛΜ=R καὶ περιεχομένην γωνίαν ΑΛΜ=180°−ω. Μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΜ γράφομεν τόξον περιφερείας. Μὲ κορυφὴν τυχὸν σημεῖον Ι τῆς xy καὶ πλευρὰν τὴν Ιx κατασκευάζομεν γωνίαν ΘΙx ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν ν. Ἐκ τοῦ Ι ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΘΙ καὶ λαμβάνομεν ἐπ᾿ αὐτῆς τμῆμα ΙΚ=R. Ἀπὸ τὸ Κ φέρομεν τὴν ΚΟ παράλληλον τῆς xy, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προηγουμένως γραφεῖσαν περιφέρειαν (Α, ΑΜ) εἰς τὸ σημεῖον Ο. Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ R γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη.

***825. Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα R, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ δύο δοθείσας περιφερείας Α καὶ Β ὑπὸ δοθείσας γωνίας ω καὶ ν.***

*Λύσις.* Ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὴν ἄσκησιν 824 προβαίνομεν εἰς τὴν ἀκόλουθον κατασκευήν.

Κ α τ α σ κ ε υ ή. Κατασκευάζομεν τρίγωνον ΑΕΖ ἔχον πλευρὰς ΑΕ ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα α τῆς δοθείσης περιφερείας, ΕΖ ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα R τῆς ζητουμένης καὶ περιεχομένην γωνίαν ΑΕΖ$=180^0-\omega$. Μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν τρίτην πλευρὰν ΑΖ τοῦ κατασκευασθέντος τριγώνου γράφομεν περιφέρειαν.



Σχ. 31

Ἐπίσης κατασκευάζομεν καὶ δεύτερον τρίγωνον ΒΗΘ, ἔχον ΒΗ$=\beta$, ΗΘ$=$R καὶ γωνίαν ΒΗΘ$=$ $=180^0-\nu$. Μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν πλευρὰν ΒΘ τοῦ κατασκευασθέντος τριγώνου, γράφομεν ἄλλην περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προηγουμένην (Α, ΑΖ) εἰς τὸ σημεῖον Ο. Ἂν μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα R, ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γράψωμεν περιφέρειαν, αὕτη θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη.

*826. Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα* R, *ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον* Α *καὶ τοιαύτη, ὥστε ἡ ἐφαπτομένη αὐτῆς, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον* Β, *νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος* λ.

*'Απ.* Βλέπε λύσιν ἀσκήσεως 789.

## 'Ασκήσεις πρὸς γενικὴν ἐπανάληψιν ἐπὶ τοῦ Β' βιβλίου καὶ ἐπὶ τοῦ συμπληρώματος τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου βιβλίου.

*Α' 'Ομάς. 827. Θεώρημα τοῦ Nagel. Αἱ ἀκτῖνες, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰς κορυφὰς ἑνὸς τριγώνου μὲ τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, εἶναι κάθετοι, ἀντιστοίχως, ἐπὶ τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι συνδέουν, ἀνὰ δύο, τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου.*

*'Απ.* Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Ο καὶ ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' τὰ τρία ὕψη του. Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΑ καὶ τὴν εὐθεῖαν Γ'Β'. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΟΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν Γ'Β'.

Σχ. 32

Τὸ τετράπλευρον ΒΓΒ'Γ' εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, διότι αἱ γωνίαι ΒΒ'Γ καὶ ΓΓ'Β εἶναι ὀρθαί· ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{B_1}=\widehat{B'_1}$. (1)

Φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΑΕ, ὁπότε θὰ εἶναι $\widehat{A_1}=\widehat{B_1}$. (2)

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν ὅτι $\widehat{A_1}=\widehat{B'_1}$ καὶ ἑπομένως ἡ Β'Γ' εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΕ. Ἡ ΟΑ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΕ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της Β'Γ'.

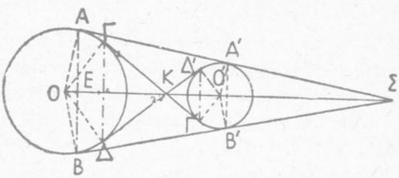
*828. Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' κεῖνται ἡ μία ἐκτὸς τῆς ἄλλης· φέρομεν τὰς κοινὰς ἐξωτερικὰς ἐφαπτομένας ΑΑ' καὶ ΒΒ', αἱ ὁποῖαι προεκτεινόμεναι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Σ καὶ τὰς κοινὰς ἐσωτερικὰς ἐφαπτομένας ΓΓ' καὶ ΔΔ', αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Κ. Νὰ ἀποδειχθῇ : 1ον ὅτι τὰ σημεῖα Σ καὶ Κ κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία συνδέει τὰ κέντρα των Ο καὶ Ο'· 2ον ὅτι αἱ χορδαὶ ΑΒ, ΓΔ, Δ'Γ', Α'Β' εἶναι παράλληλοι· 3ον ὅτι αἱ τέμνουσαι ΑΒ' καὶ Α'Β εἶναι ἴσαι καθὼς καὶ αἱ ΓΔ' καὶ ΔΓ'.*

*'Απ.* Ἔστωσαν αἱ περιφέρειαι Θ καὶ Ο' καὶ ΑΑ' καὶ ΒΒ' αἱ ἐξωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι προεκτεινόμεναι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Σ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ Σ κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς διακέντρου ΟΟ'.

Πράγματι, φέρομεν τὰς ἀκτῖνας Ο'Α' καὶ Ο'Β' εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς Α' καὶ Β'. Αἱ Ο'Α' καὶ Ο'Β' εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ΑΣ καὶ ΒΣ ὡς ἀκτῖνες ἀπολήγουσαι εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς, ἤτοι αἱ Ο'Α' καὶ Ο'Β' εἶναι ἀποστάσεις τῶν πλευρῶν ΑΣ καὶ ΒΣ τῆς γωνίας ΑΣΒ

Ἐπειδὴ αἱ ἀποστάσεις αὐταὶ εἶναι ἴσαι, ὡς ἀκτῖνες τοῦ κύκλου Ο', τὸ Ο' κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Σ, ἤτοι ἡ Ο'Σ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Σ.

Ὁμοίως ἐὰν φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ καὶ ΟΒ ἀποδεικνύομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὅτι τὸ Ο κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Σ.




Σχ. 33

Ὥστε τὰ σημεῖα Ο καὶ Ο εἶναι σημεῖα τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Σ καὶ ἑπομένως ἡ ΟΟ' προεκτεινομένη διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Σ, κορυφὴν τῆς γωνίας ΑΣΒ.

Ἔστωσαν ΓΓ' καὶ ΔΔ' αἱ ἐσωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι τῶν περιφερειῶν αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Κ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ Κ εἶναι σημεῖον τῆς διακέντρου ΟΟ'.

Πράγματι, φέρομεν τὰς ἀκτῖνας Ο'Γ' καὶ Ο'Δ' εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς. Αἱ Ο'Γ' καὶ Ο'Δ' εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ΔΔ' καὶ ΓΓ' καὶ ἴσαι, ὡς ἀκτῖνες τοῦ κύκλου Ο' · ἄρα τὸ Ο' εἶναι σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Γ'ΚΔ'.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι καὶ τὸ Ο εἶναι τὸ σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ΓΚΔ, ἡ ὁποία εἶναι κατὰ κορυφὴν τῆς γωνίας Γ'ΚΔ'.

Ἐπειδὴ αἱ διχοτόμοι τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας ἕπεται, ὅτι ἡ ΟΚΟ' εἶναι εὐθεῖα. Ὥστε τὸ Κ κεῖται ἐπὶ τῆς διακέντρου ΟΟ'.

*2ον.* Αἱ χορδαὶ ΑΒ, ΓΔ, Δ'Γ', Α'Β' εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, τὴν διάκεντρον ΟΟ'.

Πράγματι· αἱ ΣΑ καὶ ΣΒ εἶναι ἴσαι, ὡς ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας Ο, ἀγόμεναι ἐξ ἑνὸς σημείου Σ ἐκτὸς αὐτῆς. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΣΑΒ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἐπειδὴ ἡ ΣΟ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς Σ, θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΒ· ἤτοι ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΣ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ Α'Β' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΣ.

Ἀπὸ τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΚΓΔ καὶ ΚΔ'Γ' εὑρίσκομεν, ὅτι αἱ ΓΔ καὶ Δ'Γ' εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΟΣ. Ὥστε αἱ ΑΒ, ΓΔ, Δ'Γ', Α'Β', ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν ΣΟ, εἶναι παράλληλοι.

Ἐπειδὴ αἱ ΑΒ καὶ Α'Β' εἶναι παράλληλοι, τὸ τετράπλευρον ΒΒ'Α'Α εἶναι τραπέζιον· ἐπειδὴ δὲ αἱ μὴ παράλληλοι πλευραί του ΑΑ' καὶ ΒΒ' εἶναι ἴσαι, εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον.

Ἐπειδὴ ἡ ΣΟ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς βάσεις του ΑΒ καὶ Α'Β' εἰς τὸ μέσον αὐτῶν, τὸ τραπέζιον αὐτὸ εἶναι συμμετρικὸν καὶ ἑπομένως αἱ διαγώνιοί του ΑΒ' καὶ ΒΑ' εἶναι ἴσαι.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὸ τραπέζιον ΓΔΓ'Δ' εἶναι συμμετρικὸν καὶ ἑπομένως αἱ μὴ παράλληλοι πλευραί του ΓΔ' καὶ ΔΓ' εἶναι ἴσαι.

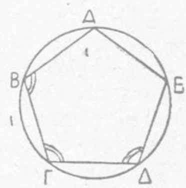
*829. Ἕνα πεντάγωνον ἔχει τέσσαρας πλευρὰς ἴσας,* ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ=ΔΕ, *αἱ ὁποῖαι περιέχουν τρεῖς γωνίας ἴσας* Β=Γ=Δ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πεντάγωνον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.***

***Ἀπ.*** Ἂν γράψωμεν περιφέρειαν κύκλου, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰς κορυφὰς Β, Γ, Δ λέγω, ὅτι ἡ περιφέρεια αὐτὴ θὰ διέλθῃ ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α καὶ Ε.

Πράγματι. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ περιφέρεια ΒΓΔ δὲν διέρχεται ἀπὸ τὰ Α καὶ Ε, ἀλλὰ τέμνει τὴν ΒΑ εἰς τὸ Α' καὶ τὴν ΔΕ εἰς τὸ Ε'.

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ἴσαι, τὰ τόξα ἐπὶ τῶν ὁποίων βαίνουν θὰ εἶναι ἴσα· ἤτοι θὰ εἶναι

τόξ.ΓΔΕ'Α'=τόξ.ΔΕ'Α'Β.



Σχ. 34

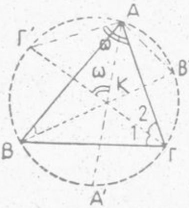
Ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὰ ἴσα αὐτὰ τόξα τὸ κοινὸν τόξον ΔΕ'Α', τὰ ἀπομένοντα τόξα ΓΔ καὶ ΒΑ' θὰ εἶναι ἴσα· ἄρα θὰ εἶναι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι χορδαί των ἴσαι, ἤτοι θὰ εἶναι ΓΔ=ΒΑ'.

Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΓΔ=ΒΑ· ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΒΑ'=ΒΑ, δηλ. τὸ σημεῖον Α' συμπίπτει μὲ τὸ Α.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ Ε' συμπίπτει μὲ τὸ Ε καὶ ἑπομένως τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

*830. Ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ *εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον* Ο· *φέρομεν τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν του* Β *καὶ* Γ, *αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον* Κ *καὶ προεκτεινόμεναι τέμνουν τὴν περιφέρειαν* Ο *εἰς τὰ σημεῖα* Β' *καὶ* Γ' *ἀντιστοίχως.* ***Νὰ ἀποδειχθῇ****: 1ον ὅτι* Γ'Α=Γ'Κ. *2ον ὅτι ἡ εὐθεῖα* Β'Γ' *εἶναι μεσοκάθετος τῆς* ΑΚ.

***Απ. 1ον.*** Φέρομεν καὶ τὴν διχοτόμον ΑΑ' τῆς γωνίας Α. Ἐπειδὴ ἡ Α'Α εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α θὰ εἶναι τόξ.ΒΑ'=τόξ. Α'Γ. Ὁμοίως, ἐπειδὴ ἡ ΓΓ' εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Γ, θὰ εἶναι τόξ.Γ'Α= =τόξ.Γ'Β.




Σχ. 35

Διὰ νὰ δείξωμεν, ὅτι Γ'Α=Γ'Κ ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον Γ'ΑΚ εἶναι ἰσοσκελὲς, ἤ, ὅτι $\widehat{\Gamma'AK}=\widehat{\Gamma'KA}$. Ἐδῶ εἶναι

$\widehat{\Gamma'AK}=\frac{1}{2}$ τόξ.Γ'ΒΑ' $=\frac{1}{2}$(τόξ.Γ'Β+τόξ.ΒΑ') (1).

Ἐπίσης εἶναι $\widehat{\Gamma'KA}=\frac{1}{2}$(τόξ.Γ'Α+τόξ.Α'Γ) (2).

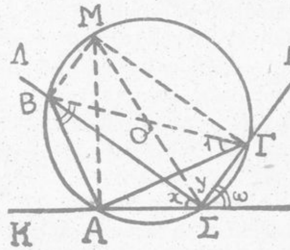
Ἀλλὰ τόξ.Α'Γ=τόξ.ΒΑ' καὶ τόξ.Γ'Α=τόξ.Γ'Β, ὁπότε ἡ (2) γράφεται $\widehat{\Gamma'KA}=\frac{1}{2}$(τόξ.Γ'Β+τόξ.ΒΑ') (2'). Ἀπὸ τὰς (1) καὶ (2') συνάγομεν, ὅτι $\widehat{\Gamma'AK}=\widehat{\Gamma'KA}$ ὁπότε καὶ Γ'Α=Γ'Κ.

***2ον.*** Φέρομεν τὴν χορδὴν ΑΒ' καὶ ἀποδεικνύομεν ὁμοίως, ὅτι Β'Α=Β'Κ, ὁπότε τὸ τρίγωνον Β'ΑΚ εἶναι ἰσοσκελές.

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα Γ'ΑΚ καὶ Β'ΑΚ ἔχουν κοινὴν βάσιν τὴν ΑΚ· ἄρα αἱ κορυφαὶ των Γ' καὶ Β' κεῖνται ἐπὶ εὐθείας καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως (ἄσκ. 87). Ἐπομένως ἡ Β'Γ' εἶναι μεσοκάθετος τῆς ΑΚ.

*831. Οἱ πόδες τῶν καθέτων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ ἐπὶ τρεῖς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Σ καὶ σχηματίζουν γωνίας x, y, ω, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, εἶναι κορυφαὶ τριγώνου τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας x, y, ω.*

***Απ.*** Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΣΚ, ΣΛ, ΣΝ, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ σημεῖον Σ καὶ τοιαῦται ὥστε νὰ εἶναι χ+ψ+ω=2 ὀρθ. Ἀπὸ τὸ Μ φέρομεν τὰς καθέτους ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ ἐπὶ τὰς ΣΚ, ΣΛ, ΣΝ ἀντιστοίχως. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ· θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας χ, ψ, ω.




Σχ. 36

Πράγματι φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΜΣ· ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΜΑΣ, ΜΓΣ, ΜΒΣ εἶναι ὀρθαί, αἱ κορυφαί των Α, Β, Γ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν ΜΣ. Γράφομεν τὴν περιφέρειαν αὐτὴν Ο, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῶν σημείων Α, Β, Μ, Γ καὶ Σ. Αἱ γωνίαι χ καὶ Γ εἶναι ἴσαι διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον Ο καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΒ. ἤτοι εἶναι Γ=χ.

Ὁμοίως αἱ γωνίαι ψ καὶ Α εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΒΜΓ, ἤτοι εἶναι Α=ψ.

Ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχομεν $Α+Β+Γ=2$ ὀρθ. (1). Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $χ+ψ+ω=2$ ὀρθ. (2). Ἐπειδὴ $Α=ψ$, $Γ=χ$ ἕπεται, ὅτι $Β=ω$.

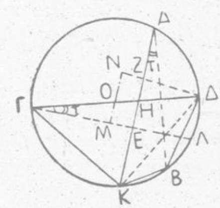
*832. Εἰς ἕνα κύκλον* Ο *φέρομεν μίαν χορδὴν* ΑΒ *καὶ μίαν διάμετρον* ΓΔ *κάθετον ἐπὶ τὴν χορδὴν αὐτήν. Συνδέομεν μὲ εὐθείας τυχὸν σημεῖον* Κ *τῆς περιφερείας μὲ τὰ σημεῖα* Α, Β, Γ, Δ. *Ἀπὸ τὰ σημεῖα* Γ *καὶ* Δ *φέρομεν καθέτους* ΓΕ *καὶ* ΔΖ *ἐπὶ τὴν* ΑΚ. *Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι τὰ σημεῖα* Ε *καὶ* Ζ *ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ τὸ μέσον* Η *τῆς χορδῆς* ΑΚ. *2ον ὅτι* $ΚΕ+ΚΖ=ΚΑ$. *3ον ὅτι* $ΚΖ-ΚΕ=ΚΒ$.

*Ἀπ. 1ον*. Βλέπε λύσιν ἀσκήσεως 448.

*2ον*. Ἐδείχθη, ὅτι $ΕΗ=ΗΖ$. Ἐὰν ἀπὸ τὰ ἴσα τμήματα ΚΗ καὶ ΗΑ ἀφαιρέσωμεν τὰ ἴσα τμήματα ΕΗ καὶ ΗΖ τὰ ἀπομένοντα τμήματα ΚΕ καὶ ΖΑ εἶναι ἴσα· ἤτοι εἶναι $ΚΕ=ΖΑ$.

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα εἶναι $ΚΑ=ΚΖ+ΖΑ$. Ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα αὐτὴν ἀντικαταστήσωμεν τὸ ΖΑ, διὰ τοῦ ἴσου του ΚΕ λαμβάνομεν $ΚΑ=ΚΖ+ΚΕ$.

*3ον*. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $ΚΖ-ΚΕ=ΚΒ$ ἢ $ΕΖ=ΚΒ$. Προεκτείνομεν τὴν ΓΕ μέχρις, ὅτου συναντήσει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Λ. Φέρομεν τὴν χορδὴν ΛΔ. Τὸ τετράπλευρον ΕΛΔΖ εἶναι ὀρθογώνιον, διότι αἱ τρεῖς γωνίαι του Ε, Ζ καὶ Λ εἶναι ὀρθαί, αἱ μὲν Ε καὶ Ζ ἐκ κατασκευῆς, ἡ δὲ Λ ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον· ἄρα θὰ εἶναι $ΛΔ=ΕΖ$.

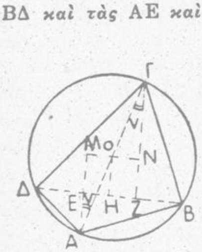



Σχ. 37

Ἀλλὰ αἱ γωνίαι τ καὶ τ' εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὰς πλευρὰς των καθέτους μίαν πρὸς μίαν, ἤτοι τὴν ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐξ ὑποθέσεως, τὴν ΓΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΚ.

Ἐπειδὴ αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι τ καὶ τ' εἶναι ἴσαι, τὰ ἀντίστοιχά των τόξα θὰ εἶναι ἴσα, ἤτοι εἶναι $ΚΒ=ΛΔ$. Ἀλλὰ $ΛΔ=ΕΖ$ ὡς ἐδείχθη· ἄρα θὰ εἶναι καὶ $ΚΒ=ΕΖ$, ἢ $ΚΒ=ΚΖ-ΚΕ$.

*833. Ἕνα τετράπλευρον* ΑΒΓΔ, *τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι γωνίαι* Β *καὶ* Δ *εἶναι ὀρθαί, εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Φέρομεν τὴν διαγώνιον* ΒΔ *καὶ τὰς* ΑΕ *καὶ* ΓΖ *καθέτους ἐπὶ τὴν* ΒΔ. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι* $ΔΕ=ΒΖ$ *καὶ* $ΔΖ=ΒΕ$.




Σχ. 38

*Ἀπ*. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Β καὶ Δ εἶναι ὀρθαί, ἡ διαγώνιος ΑΓ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου Ο. Ἀπὸ τὸ κέντρον Ο φέρομεν τὴν ΟΗ κάθετον ἐπὶ τὴν χορδὴν ΔΒ· τὸ Η εἶναι τὸ μέσον τῆς ΔΒ, ἄρα θὰ εἶναι $ΔΗ=ΗΒ$ (1). Ἀπὸ τὸ Ο φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΗ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΑΕ εἰς τὸ σημεῖον Μ καὶ τὴν ΓΖ εἰς τὸ Ν. Αἱ ΜΝ καὶ ΔΒ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΟΗ.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΜΟ καὶ ΓΝΟ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας καὶ μίαν γωνίαν ἴσην, ἤτοι ἔχουν $ΟΑ=ΟΓ$, ὡς ἀκτῖνας ἴσας καὶ γων.ν=γων.ν', ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΜ καὶ ΓΖ, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΓ· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ΜΟ=ΟΝ.

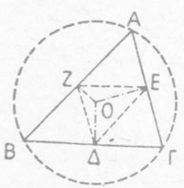
'Αλλὰ ΜΟ=ΕΗ, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ ὀρθογ ΕΗΟΜ καὶ ΟΝ=ΗΖ, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ ὀρθογ. ΗΖΝΟ· ἄρα θὰ εἶναι ΕΗ=ΗΖ. 'Εὰν ἀπὸ τὰ ἴσα τμήματα ΔΗ καὶ ΗΒ ἀφαιρέσωμεν τὰ ἴσα τμήματα ΕΗ καὶ ΗΖ ἀντιστοίχως, τὰ ἀπομένοντα τμήματα ΔΕ καὶ ΖΒ εἶναι ἴσα, ἤτοι εἶναι ΔΕ=ΖΒ (1).

'Εὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (1) τὸ αὐτὸ τμῆμα ΕΖ λαμβάνομεν ΔΕ+ΕΖ=ΖΒ+ΕΖ ἢ ΔΖ=ΕΒ.

*834. Δίδεται ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ *καὶ* Δ, Ε, Ζ, *τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του* ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι οἱ κύκλοι οἱ περιγεγραμμένοι περὶ τὰ τρίγωνα* ΑΖΕ, ΒΔΖ *καὶ* ΓΕΔ *εἶναι ἴσοι καὶ διέρχονται ἀπὸ τὸ κέντρον* Ο *τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον* ΑΒΓ.

*'Απ.* Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ εὐθεῖα ΖΕ συνδέει τὰ μέσα τῶν πλευρῶν· ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς, ἤτοι εἶναι $ΖΕ=\frac{ΒΓ}{2}$. 'Ομοίως εἶναι $ΖΔ=\frac{ΑΓ}{2}$, καὶ $ΔΕ=\frac{ΑΒ}{2}$.

Τὰ τρίγωνα ΑΖΕ, ΒΔΖ καὶ ΓΕΔ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας μίαν πρὸς μίαν, ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ ἑκάστου ἐξ αὐτῶν εἶναι ἴσαι μὲ τὰ ἡμίση τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ. Οἱ κύκλοι λοιπὸν οἱ περιγεγραμμένοι περὶ τὰ ἴσα αὐτὰ τρίγωνα εἶναι ἴσοι.




Σχ. 39

Αἱ κάθετοι ΔΟ, ΕΟ, ΖΟ, εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, διότι εἶναι ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ.

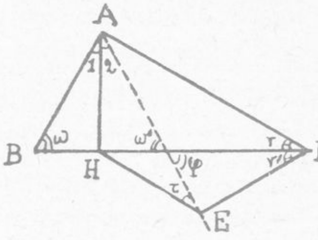
Τὸ τετράπλευρον ΒΔΟΖ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, διότι αἱ δύο ἀπέναντι γωνίαι του ΟΔΒ καὶ ΟΖΒ εἶναι ὀρθαί. 'Ομοίως καὶ τὰ τετράπλευρα ΟΔΓΕ καὶ ΟΕΑΖ εἶναι ἐγγράψιμα εἰς κύκλους διὰ τὸν αὐτὸν λόγον.

Ἤτοι κύκλοι οἱ περιγεγραμμένοι περὶ τὰ τετράπλευρα ΟΖΒΔ, ΟΔΓΕ, ΟΕΑΖ ἔχουν κοινὸν τὸ σημεῖον Ο, καὶ εἶναι οἱ αὐτοὶ κύκλοι, οἱ περιγεγραμμένοι περὶ τὰ τρίγωνα ΑΖΕ, ΒΔΖ, ΓΕΔ.

*835. Δίδεται ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ, *ὀρθογώνιον εἰς τὸ* Α, *εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι* ΑΒ<ΑΓ· *φέρομεν τὸ ὕψος* ΑΗ *καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης* ΒΓ *τμῆμα* ΗΔ=ΗΒ· *ἀπὸ τὸ* Γ *φέρομεν κάθετον* ΓΕ *ἐπὶ τὴν* ΑΔ. *Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ἡ* ΒΓ *εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας* ΑΓΕ. *2ον ὅτι τὰ σημεῖα* Α, Η, Ε, Γ *κεῖνται ἐπὶ περιφερείας· 3ον ὅτι* ΑΗ=ΗΕ.

*'Απ. 1ον.* Βλέπε λύσιν ἀσκήσεως 153.

*2ον* 'Η γωνία ΑΗΓ εἶναι ὀρθή, ἄρα ἡ κορυφὴ Η κεῖται ἐπὶ περιφερείας ἡ ὁποία γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ΑΓ. Ὁμοίως ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΕΓ εἶναι ὀρθή, ἡ κορυφὴ Ε κεῖται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ΑΓ. Ὥστε τὰ σημεῖα Α, Η, Ε, Γ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν ΑΓ.



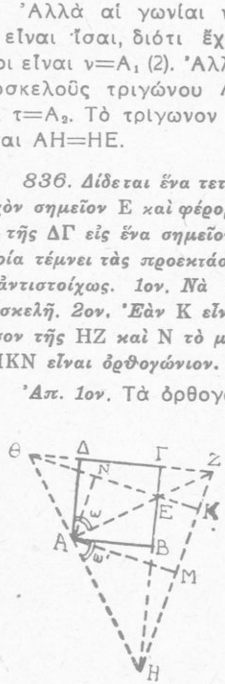
Σχ. 40

*3ον* Φέρομεν τὴν ΗΕ. Αἱ γωνίαι τ καὶ ν εἶναι ἴσαι, ὡς ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΗ, ἤτοι εἶναι τ=ν (1).

Ἀλλὰ αἱ γωνίαι ν καὶ $Α_1$ εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν συμπληρωματικὴν γωνίαν Β, ἤτοι εἶναι $ν=Α_1$ (2). Ἀλλὰ $Α_1=Α_2$ (3) διότι ἡ ΑΗ εἶναι διχοτόμος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΔ. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1), (2), (3) συνάγομεν ὅτι $τ=Α_2$. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΗΕ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἐπομένως εἶναι ΑΗ=ΗΕ.

*836. Δίδεται ἕνα τετράγωνον* ΑΒΓΔ. *ἐπὶ τῆς πλευρᾶς* ΒΓ *λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον* Ε *καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν* ΑΕ, *ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς* ΔΓ *εἰς ἕνα σημεῖον* Ζ. *Ἀπὸ τὸ* Α *φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν* ΑΕ, *ἡ ὁποία τέμνει τὰς προεκτάσεις τῶν πλευρῶν* ΓΒ *καὶ* ΓΔ *εἰς τὰ σημεῖα* Η *καὶ* Θ *ἀντιστοίχως. 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα* ΑΗΖ *καὶ* ΑΕΘ *εἶναι ἰσοσκελῆ. 2ον. Ἐὰν* Κ *εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν* ΗΖ *καὶ* ΘΕ, Μ *τὸ μέσον τῆς* ΗΖ *καὶ* Ν *τὸ μέσον τῆς* ΘΕ, *νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον* ΑΜΚΝ *εἶναι ὀρθογώνιον.*

*Ἀπ. 1ον.* Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΗΒΑ καὶ ΑΔΖ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς καθέτους πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΔ ἴσας, ὡς πλευρὰς τετραγώνου καὶ τὰς ὀξείας γωνίας ω καὶ ω' ἴσας, διότι αἱ πλευραί των εἶναι κάθετοι ἐκ κατασκευῆς, ἤτοι ἡ ΑΒ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ καὶ ἡ ΑΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΖ· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ΑΗ=ΑΖ. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΗΖ εἶναι ἰσοσκελές.



Σχ. 41

Ὁμοίως τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΔΘ εἶναι ἴσα, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον· ἄρα θὰ εἶναι ΑΕ=ΑΘ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΕΘ εἶναι ἰσοσκελές.

*2ον.* Εἰς τὸ τρίγωνον ΗΖΘ αἱ ΗΓ καὶ ΖΑ εἶναι ὕψη του, τὸ δὲ Ε εἶναι σημεῖον τῆς τομῆς τῶν δύο αὐτῶν ὑψῶν. Ἐπομένως ἡ ΘΕΚ εἶναι τὸ τρίτον ὕψος τοῦ τριγώνου ΗΖΘ. Ἡ γωνία λοιπὸν ΗΚΘ εἶναι ὀρθή.

Ἐπειδὴ τὸ Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς βάσεως ΗΖ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΗΖ ἕπεται, ὅτι ἡ ΑΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΗΖ καὶ ἑπομένως ἡ γωνία ΑΜΖ εἶναι ὀρθή.

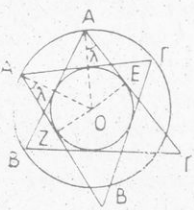
'Ομοίως ἡ ΑΝ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον Ν τῆς βάσεως ΕΘ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΕΘ.

Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΑΜΚΝ ἔχει τρεῖς γωνίας ὀρθάς, ἄρα καὶ ἡ τετάρτη γωνία του εἶναι ὀρθὴ καὶ ἑπομένως εἶναι ὀρθογώνιον.

*837. Ὅταν ἕνα τρίγωνον εἶναι περιγεγραμμένον περὶ ἕνα κύκλον καὶ ἔχῃ δύο γωνίας, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι σταθερόν, ἡ τρίτη κορυφή του κεῖται ἐπὶ περιφερείας ὁμοκέντρου πρὸς τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν.*

*'Απ.* Ἔστω ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμένον περὶ ἕνα κύκλον Ο, τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι Β καὶ καὶ Γ ἔχουν ἄθροισμα σταθερόν· θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ τρίτη κορυφὴ του Α κεῖται ἐπὶ περιφερείας ὁμοκέντρου τῆς Ο.

Πράγματι, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἔχουν ἄθροισμα σταθερὸν καὶ ἡ τρίτη γωνία τοῦ Α εἶναι σταθερά.




Σχ. 42

Ἔστω Α'Β'Γ' ἕνα ἄλλο τρίγωνον περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον Ο καὶ τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι Β' καὶ Γ' ἔχουν ἄθροισμα σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ· ἄρα ἡ τρίτη γωνία του Α' εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση μὲ τὴν Α· ἤτοι εἶναι $\widehat{A}=\widehat{A'}$.

Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΕ καὶ ΟΖ εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς Ε καὶ Ζ τῶν πλευρῶν ΑΓ καὶ Α'Β'.

'Επίσης φέρομεν τὰς ΟΑ, ΟΑ'. Ἡ ΟΑ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ ἐφαπτόμεναι ΑΓ καὶ ΑΒ τῆς περιφερείας Ο. 'Ομοίως ἡ ΟΑ' εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α'.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΕΑ καὶ ΟΖΑ' εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν μίαν κάθετον πλευράν των ἴσην καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην, ἤτοι ἔχουν ΟΕ=ΟΖ, ὡς ἀκτῖνας τοῦ αὐτοῦ κύκλου καὶ γων $A_1$=γων $A'_1$, ὡς ἡμίση τῶν ἴσων γωνιῶν Α καὶ Α'· ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΟΑ=ΟΑ'.

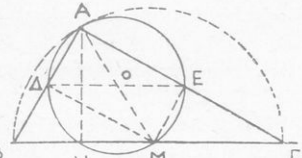
Ἡ κορυφὴ λοιπὸν Α ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον Ο ἀπόστασιν σταθεράν· ἄρα κεῖται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα ΟΑ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ἑνὸς ὀρθογ. τριγώνου, τοῦ ὁποίου μία κάθετος πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου Ο καὶ μιὰ ὀξεῖα γωνία εἶναι γνωστή.

*838. Δίδεται ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ, *ὀρθογώνιον εἰς τὸ* Α· *μὲ διάμετρον τὴν διάμεσον* ΑΜ *γράφομεν περιφέρειαν κύκλου* Ο, *ἡ ὁποία τέμνει τὴν* ΑΒ *εἰς τὸ* Δ *καὶ τὴν* ΑΓ *εἰς τὸ* Ε· *φέρομεν τὸ ὕψος* ΑΗ. *Νὰ ἀποδειχθῇ : 1ον. ὅτι τὸ* Η *κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας* Ο. *2ον, ὅτι τὰ σημεῖα* Δ *καὶ* Ε *εἶναι μέσα τῶν πλευρῶν* ΑΒ *καὶ* Α. *3ον. Τί σχῆμα ἔχει τὸ τετράπλευρον* ΑΔΜΕ ;

*4ον. Ὑποθέτομεν, ὅτι ἡ κορυφὴ Α κινεῖται ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας, διαμέτρου ΒΓ· νὰ εὑρεθῇ τί σχῆμα γράφουν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε; 5ον. Τί δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν διὰ τὸ μέγεθος τοῦ τμήματος ΔΕ κατὰ τὴν κίνησιν αὐτήν;*

*'Απ. 1ον.* Ἡ γωνία ΑΗΜ εἶναι ὀρθή· ἄρα ἡ κορυφὴ Η κεῖται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ΑΜ. Ὥστε τὸ Η κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο.

*2ον.* Φέρομεν τὰς ΔΜ καὶ ΜΕ. Τὰ Τρίγωνα ΑΜΒ καὶ ΑΜΓ εἶναι ἰσοσκελῆ, διότι ἡ διάμεσος ΑΜ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ χωρίζει αὐτὸ εἰς δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα.



Σχ. 43

Ἡ γωνία ΑΔΜ εἶναι ὀρθή, ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον· ἄρα ἡ ΜΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΜΒ ἡ ΜΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΒ, ἄρα διχοτομεῖ τὴν βάσιν, ἤτοι τὸ Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΒ.

Ὁμοίως ἡ γωνία ΜΕΑ εἶναι ὀρθὴ καὶ ἑπομένως ἡ ΜΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ. Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΜΓ, ἡ ΜΕ διχοτομεῖ τὴν βάσιν ΑΓ, ὡς κάθετος ἐπ' αὐτήν· ἄρα τὸ Ε εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΓ.

*3ον.* Τὸ τετράπλευρον ΑΔΜΕ ἔχει τὰς τρεῖς γωνίας του Α, Δ, Ε ὀρθάς· ἄρα καὶ ἡ τετάρτη γωνία του Μ θὰ εἶναι ὀρθὴ καὶ ἑπομένως εἶναι ὀρθογώνιον.

*4ον.* Ὅταν τὸ Α γράφῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΒΑΓ, τὸ Δ γράφει περιφέρειαν, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν ΒΜ, διότι ἡ γωνία ΒΔΜ εἶναι ὀρθή, ὡς παραπληρωματικὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας ΑΔΜ. Ὁμοίως τὸ Ε γράφει τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν ΜΓ.

*5ον.* Τὸ τμῆμα ΔΕ συνδέει πάντοτε τὰ μέσα τῶν δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἄρα εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς τρίτης πλευρᾶς τοῦ ΒΓ· ἤτοι εἶναι $ΔΕ = \frac{1}{2}$ ΒΓ.

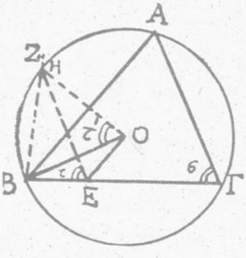
Ἐπειδὴ ἡ ΒΓ εἶναι σταθερὰ καὶ τὸ τμῆμα ΔΕ θὰ εἶναι σταθερόν.

*839. Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο· ἀπὸ τὸ κέντρον Ο φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ε. Ἐπίσης ἀπὸ τὸ Ο φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία συναντᾶ τὴν κάθετον, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Β ἐπὶ τὴν ΒΓ, εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον. ὅτι αἱ γωνίαι ΒΕΖ καὶ ΒΟΖ εἶναι ἴσαι. 2ον. ὅτι ἡ ΖΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ.*

*'Απ. 1ον.* Θὰ δείξωμεν, ὅτι γων.τ=γων.τ'. Ἡ ΟΖ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ· ἄρα θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΟΕ. Ὥστε ἡ γωνία ΕΟΖ εἶναι ὀρθή. Ἐπίσης ἡ γωνία ΖΒΕ εἶναι ὀρθή.

Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΖΒΕΟ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, διότι αἱ ἀπέναντι γωνίαι του Β καὶ Ο εἶναι παραπληρωματικαί, ὡς ὀρθαί.

Αἱ γωνίαι λοιπὸν τ καὶ τ' εἶναι ἴσαι, ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, τὸν περιγεγραμμένον περὶ τὸ τετράπλευρον ΖΒΕΟ καὶ βαίνουσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΖΒ.




Σχ. 44

*2ον.* Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΖΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ· ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ γωνίαι τ' καὶ σ εἶναι ἴσαι. Ἡ γωνία τ' εἶναι ἴση μὲ τὴν τ ὡς ἐδείχθη· ἀλλὰ ἡ γωνία τ εἶναι ἐπίκεντρος καὶ ἑπομένως ἔχει μέτρον τὸ τόξον ΒΗ, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν της ἤτοι εἶναι

γων.τ'=γων.τ=μέτρ.τόξ.ΒΗ (1).

Ἀλλὰ τὸ τόξον ΒΗ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΒ, διότι ἡ ΟΗ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΒ, διχοτομεῖ τὸ τόξον αὐτῆς.

Ὥστε ἡ ἰσότης (1) γράφεται γων.τ'=γων.τ= $\frac{1}{2}$ μέτρ.τόξ.ΑΒ (2).

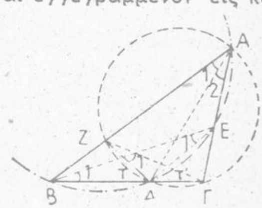
Ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία σ ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ μέτρου τοῦ τόξου ΑΒ· ἤτοι εἶναι γων.σ= $\frac{1}{2}$ μέτρ.τόξ.ΑΒ (1).

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (2) καὶ (3) συνάγομεν, ὅτι γων.τ=γων.σ.

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΖΕ καὶ ΑΓ, τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΒΓ σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας τ καὶ σ ἴσας· ἄρα αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ ΖΕ καὶ ΑΓ εἶναι παράλληλοι.

***840.** Εἰς ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ *φέρομεν τὴν διχοτόμον* ΑΔ *τῆς γωνίας* Α· *περιγράφομεν περὶ τὰ τρίγωνα* ΑΔΒ *καὶ* ΑΔΓ *δύο κύκλους ἐκ τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος τέμνει τὴν* ΑΓ *εἰς τὸ σημεῖον* Ε *καὶ ὁ δεύτερος τὴν* ΒΑ *εἰς τὸ* Ζ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ : 1ον.** ὅτι τὰ τρίγωνα* ΖΔΓ *καὶ* ΒΔΕ *εἶναι ἰσοσκελῆ. **2ον.** ὅτι* ΒΖ=ΓΕ.

***Ἀπ. 1ον.*** Τὸ τετράπλευρον ΑΖΔΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι $\widehat{A_1}=\widehat{\Gamma_1}$ καὶ $\widehat{A_2}=\widehat{Z_1}$· ἐπειδὴ $\widehat{A_1}=\widehat{A_2}$, διότι ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α, θὰ εἶναι καὶ $\widehat{\Gamma_1}=\widehat{Z_1}$ (1). Ὥστε τὸ τρίγωνον ΖΔΓ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΔΖ=ΔΓ.




Σχ. 45

Ἀπὸ τὸ τετράπλευρον ΑΒΔΕ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον ἔχομεν $\widehat{A_1}=\widehat{E_1}$ καὶ $\widehat{A_2}=\widehat{B_1}$. Ἐπειδὴ $\widehat{A_1}=\widehat{A_2}$, θὰ εἶναι καὶ $\widehat{B_1}=\widehat{E_1}$.

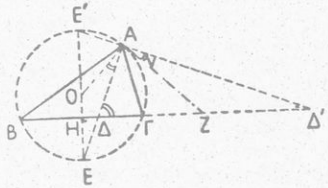
Ὥστε τὸ τρίγωνον ΒΔΕ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΒΔ=ΔΕ.

*2ον.* Θὰ δείξωμεν ὅτι ΓΕ=ΒΖ· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα ΒΔΖ καὶ ΔΓΕ εἶναι ἴσα.

'Εδείχθη ὅτι $\widehat{Z_1}=\widehat{\Gamma_1}=\widehat{A_1}=\widehat{A_2}=\widehat{B_1}=\widehat{E_1}$. Τὰ ἰσοσκελῆ λοιπὸν τρίγωνα ΖΔΓ καὶ ΒΔΕ ἔχουν τὰς παρὰ τὴν βάσιν των γωνίας ἴσας, ἄρα καὶ αἱ γωνίαι τῶν κορυφῶν των θὰ εἶναι ἴσαι, ἤτοι θὰ εἶναι $Z\widehat{\Delta}\Gamma=B\widehat{\Delta}E$· ἐὰν ἀπὸ τὰς ἴσας αὐτὰς γωνίας ἀφαιρέσωμεν τὴν κοινὴν γωνίαν ΖΔΕ, αἱ ἀπομένουσαι γωνίαι τ καὶ τ' εἶναι ἴσαι· ἤτοι τὰ τρίγωνα ΒΔΖ καὶ ΔΓΕ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, ἤτοι ἔχουν ΒΔ=ΔΕ, ΔΖ=ΔΓ καὶ γων.τ=γων.τ', ὡς ἐδείχθη· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ΒΖ=ΓΕ.

841. *Ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ *εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο· φέρομεν τὴν διχοτόμον* ΑΔ *τῆς γωνίας* Α, *ἡ ὁποία τέμνει τὴν* ΒΓ *εἰς τὸ* Δ *καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον* Ε· *ἐπίσης φέρομεν τὴν διχοτόμον* ΑΔ' *τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας* Α, *ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς* ΒΓ *εἰς τὸ* Δ' *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου* Ο *εἰς τὸ σημεῖον* Α *διχοτομεῖ τὴν* ΔΔ'.

*'Απ.* Ἔστω ΑΖ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου Ο εἰς τὸ σημεῖον Α· θὰ δείξωμεν, ὅτι ΔΖ=ΖΔ'.




Σχ. 46

'Επειδὴ ἡ ΑΔΕ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α, τὰ τόξα ΒΕ καὶ ΕΓ εἶναι ἴσα, ἤτοι τὸ Ε εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΒΕΓ.

'Η ἐξωτερικὴ διχοτόμος ΑΔ' τῆς γωνίας Α, προεκτεινομένη τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ σημεῖον Ε'.

'Επειδὴ αἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι κάθετοι μεταξύ των, ἡ γωνία ΕΑΕ' εἶναι ὀρθή, ὡς παραπληρωματικὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας ΔΑΔ' καὶ ἑπομένως ἡ ΕΕ' εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου Ο· ὥστε ἡ ΕΕ' διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Ο.

Αἱ γωνίαι Ε καὶ Δ' εἶναι ἴσαι, διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΕΑΕ' καὶ Ε'ΗΔ' ἔχουν τὴν αὐτὴν συμπληρωματικὴν γωνίαν Ε'· ἤτοι εἶναι Ε=Δ' (1).

Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΑ εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς. 'Η ΟΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΖ.

'Επίσης ἡ ΑΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ' ὡς ἐδείχθη· ἄρα αἱ γωνίαι ΖΑΔ'=ν καὶ ΟΑΕ=ν' εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους μίαν πρὸς μίαν· ἤτοι εἶναι $Z\widehat{A}\Delta'=\Delta\widehat{A}E$ (2). 'Αλλὰ $O\widehat{A}E=\widehat{E}$ (3), ὡς παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΟΕΑ.

'Εκ τῶν ἰσοτήτων (1), (2) καὶ (3) συνάγομεν, ὅτι ν=Δ'· ἄρα ΑΖ=ΖΔ' (4). Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΔΑΔ' εἶναι $\widehat{\Delta}+\widehat{\Delta'}=1$ ὀρθ. (5) καὶ $\Delta\widehat{A}Z+\widehat{\nu}=1$ ὀρθ. (6).

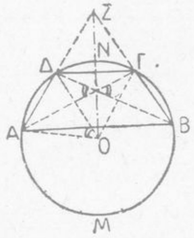
'Εκ τῶν ἰσοτήτων (5) καὶ (6) συνάγομεν, ὅτι $\widehat{\Delta}+\widehat{\Delta'}=\Delta\widehat{A}Z+\widehat{\nu}$.

Ἀφαιροῦμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τὰς ἴσας γωνίας ν καὶ Δ΄ καὶ ἔχομεν $\widehat{\Delta}=\widehat{\Delta AZ}$.

Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΔΑΖ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΑΖ=ΖΔ (7). Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (5) καὶ (7) συνάγομεν, ὅτι ΖΔ΄=ΖΔ.

*842. Ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο. Αἱ διαγώνιοί του ΑΓ καὶ ΒΔ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ε καὶ αἱ προεκτάσεις τῶν πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον. ὅτι τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Δ, Ο, Ε κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας. 2ον. ὅτι τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Ο, Γ, Ζ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.*

*Ἀπ. 1ον.* Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΔ καὶ ΟΑ· διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι τὰ σημεῖα Α, Δ, Ε, Ο κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι αἱ γωνίαι ΑΕΔ καὶ ΑΟΔ εἶναι ἴσαι.




Σχ. 47

Πράγματι· ἡ γωνία ΑΕΔ ἔχει τὴν κορυφήν της ἐντὸς τοῦ κύκλου Ο καὶ ἑπομένως εἶναι

$$\text{γων.ΑΕΔ}=\frac{1}{2}\ \text{μέτρ.(τόξ ΑΔ+τόξ.ΓΒ)} \quad (1).$$

Ἐπειδὴ τὰ τόξα ΑΔ καὶ ΓΒ εἶναι ἴσα, διότι περιέχονται μεταξὺ παραλλήλων χορδῶν, ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$\text{γων.ΑΕΔ}=\frac{1}{2}\ \text{μέτρ.(τόξ.ΑΔ+τόξ.ΑΔ)}$$

ἢ

$$\text{γων.ΑΕΔ=μέτρ.τόξ.ΑΔ} \quad (2)$$

Ἡ γωνία ΑΟΔ εἶναι ἐπίκεντρος, ἄρα ἔχει μέτρον ἴσον μὲ τὸ μέτρον τοῦ ἀντιστοίχου τόξου της ΑΔ, ἤτοι εἶναι

$$\text{γων.ΑΟΔ=μέτρ.τόξ ΑΔ} \quad (3).$$

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (2) καὶ (3) συνάγομεν, ὅτι γων.ΑΕΔ=γων.ΑΟΔ. Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΔ φαίνεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Ε καὶ Ο ὑπὸ ἴσας γωνίας ἕπεται, ὅτι αἱ κορυφαὶ Ε καὶ Ο κεῖνται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος τὸ ὁποῖον ἔχει χορδὴν τὴν ΑΔ. Ὥστε τὰ σημεῖα Α, Δ, Ε, Ο κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

*2ον.* Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ σημεῖα Α, Ο, Γ, Ζ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΟΓΖ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, δηλ. ὅτι αἱ ἀπέναντι γωνίαι ΑΟΓ καὶ Ζ εἶναι παραπληρωματικαί. Πράγματι ἔχομεν γων.ΑΟΓ=μέτρ.τόξ.ΑΔΓ (3)

$$\text{γων.Ζ}=\frac{1}{2}\ \text{μέτρ.(τόξ.ΑΜΒ−τόξ.ΑΝΓ)} \quad (4).$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (3) καὶ (4) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\text{γων.ΑΟΓ+γων.Ζ}=\frac{1}{2}\ \text{μέτρ (2 τόξ.ΑΔΓ+τόξ.ΑΜΒ−τόξ.ΔΝΓ)}=$$

$$=\frac{1}{2}\ \text{μέτρ.(2 τόξ.ΑΔ+2 τόξ.ΔΝΓ+τόξ.ΑΜΒ−τόξ.ΔΝΓ)}=$$

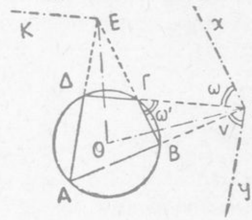
$$=\frac{1}{2}\ \text{μέτρ.(2 τόξ.ΑΔ+τόξ.ΔΝΓ+τόξ.ΑΜΒ)}=$$

$$=\frac{1}{2}\ \text{(τόξ.ΑΔ+τόξ.ΓΒ+τόξ.ΔΝΓ+τόξ.ΑΜΒ)}=\frac{1}{2}\ \text{περιφερείας=2 ὀρθάς.}$$

'Επειδὴ αἱ γωνίαι ΑΟΓ καὶ Ζ εἶναι παραπληρωματικαί, τὸ τετράπλευρον ΑΟΓΖ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

*843. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν δύο γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ἀπὸ τὰς προεκτάσεις τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἑνὸς τετραπλεύρου, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον τέμνονται καθέτως.*

*'Απ.* Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Ο καὶ ΕΗ, ΖΗ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ προεκτάσεις τῶν ἀπέναντι πλευρῶν· θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ΕΗ καὶ ΖΗ εἶναι κάθετοι μεταξύ των.



Σχ. 48

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ διχοτόμος ΕΚ τῆς παραπληρωματικῆς γωνίας ΑΕΘ τῆς γωνίας ΑΕΒ, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διχοτόμον ΖΗ.

Πράγματι, ἀπὸ τὸ Ζ φέρομεν τὴν Ζx παράλληλον τῆς ΒΕ καὶ τὴν Ζy παράλληλον πρὸς τὴν ΕΑ.

Αἱ γωνίαι ω καὶ ω' εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων Ζx καὶ ΒΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΓΖ· ἤτοι εἶναι ω'=ω (1).

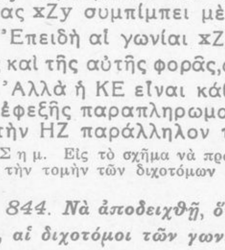
'Αλλὰ ω'=Α (2), διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν ΔΓΒ. 'Αλλὰ καὶ Α=ν, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΔ καὶ Ζy τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΖ· ἄρα θὰ εἶναι ω=ν. 'Η διχοτόμος τῆς γωνίας xΖy συμπίπτει μὲ τὴν διχοτόμον ΖΗ τῆς γωνίας ΒΖΓ.

'Επειδὴ αἱ γωνίαι xΖy καὶ ΘΕΑ ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς, αἱ διχοτόμοι των ΖΗ καὶ ΕΚ εἶναι παράλληλοι.

'Αλλὰ ἡ ΚΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτόμον ΕΗ, ὡς διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν· ἄρα ἡ ΕΗ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΗΖ παράλληλον τῆς ΕΚ.

Σημ. Εἰς τὸ σχῆμα νὰ προεκταθῇ ἡ ΒΕ μέχρι σημείου Θ. 'Επίσης νὰ τεθῇ τὸ σημεῖον Η εἰς τὴν τομὴν τῶν διχοτόμων ΖΗ καὶ ΕΗ.

*844. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τετράπλευρον, ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ὑπὸ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του προεκτεινομένων, εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ διαγώνιοί του.*



Σχ. 49

*'Απ.* Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ Ζ καὶ Ε αἱ γωνίαι, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ὑπὸ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του. Ἔστω Κ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ. 'Απὸ τὸ Κ φέρομεν τὰς ΘΚΛ καὶ ΜΚΝ παραλλήλους πρὸς τὰς διχοτόμους ΕΗ καὶ ΖΟ ἀντιστοίχως· θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ΘΚΛ καὶ ΜΚΝ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῶν διαγωνίων του.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία ν΄ ἔχει τὴν κορυφήν της ἐκτὸς κύκλου θὰ ἔχῃ μέτρον ἴσον μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν μέτρων τῶν τόξων, τῶν περιεχομένων μεταξὺ τῶν πλευρῶν της, ἤτοι εἶναι $\nu' = \frac{1}{2}$(τόξ.ΒΗ—τόξ.ΑΙ) (1).

Ἐπειδὴ αἱ ΘΛ καὶ ΙΗ εἶναι παράλληλοι, θὰ εἶναι τόξ.ΗΛ=τόξ.ΙΘ.

Ἐὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς τόξ.ΒΗ—τόξ.ΑΙ τὰ ἴσα τόξ.ΙΘ καὶ ΗΛ θὰ ἔχωμεν τόξ.ΒΗ—τόξ.ΑΙ=(τόξ.ΒΗ+τόξ.ΗΛ)—(τόξ.ΑΙ+τόξ.ΙΘ)=τόξ.ΒΛ—τόξ.ΑΘ.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὴν διαφορὰν τόξ.ΒΗ—τόξ.ΑΙ διὰ τῆς ἴσης της τόξ.ΒΛ—τόξ.ΑΘ, λαμβάνομεν

$$\nu' = \frac{1}{2}(\text{τόξ.ΒΛ} - \text{τόξ.ΑΘ}) \quad (2).$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $\nu = \frac{1}{2}$(τόξ.ΓΛ—τόξ.ΔΘ) (3).

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ν καὶ ν΄ εἶναι ἴσαι, διότι ἡ ΕΗ εἶναι διχοτόμος τῆς Ε, συνάγομεν, ἐκ τῶν ἰσοτήτων (2) καὶ (3), ὅτι

$$\frac{1}{2}(\text{τόξ.ΒΛ} - \text{τόξ.ΑΘ}) = \frac{1}{2}(\text{τόξ.ΓΛ} - \text{τόξ.ΔΘ})$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{1}{2}(\text{τόξ.ΒΛ} + \text{τόξ.ΔΘ}) = \frac{1}{2}\,\text{τόξ.ΑΘ} + \text{τόξ.ΓΛ}) \quad (4).$$

Ἀλλὰ τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος (4) παριστάνει τὸ μέτρον τῆς γωνίας ω΄, τὸ δὲ δεύτερον μέλος αὐτῆς παριστάνει τὸ μέτρον τῆς γωνίας ω.

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ω καὶ ω΄ ἔχουν ἴσα μέτρα ἕπεται, ὅτι αἱ γωνίαι αὐταὶ εἶναι ἴσαι, ἤτοι εἶναι ω=ω΄.

Ὥστε ἡ ΘΛ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΓΚΒ τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καὶ παράλληλος πρὸς τὴν διχοτόμον ΕΗ, ἐκ κατασκευῆς.

Σημ. Εἰς τὸ σχῆμα νὰ τεθῇ τὸ γράμμα Μ (τομὴ τῆς περιφερείας καὶ τῆς εὐθείαςΝΚΜ)

*845. Δίδεται μία περιφέρεια* Ο *καὶ μία εὐθεῖα* xy *ἐκτὸς αὐτῆς. Ἀπὸ τὸ κέντρον* Ο *φέρομεν τὴν* ΟΝ *κάθετον ἐπὶ τὴν* xy *καὶ ἀπὸ τὸ* Ν *μίαν τέμνουσαν* ΝΑΒ *τῆς περιφερείας* Ο, *ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα* Α *καὶ* Β· *φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας* Ο *εἰς τὰ σημεῖα* Α *καὶ* Β, *αἱ ὁποῖαι συναντοῦν τὴν* xy *εἰς τὰ σημεῖα* Α΄ *καὶ* Β΄ *ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ : 1ον. ὅτι τὰ τετράπλευρα* ΝΑΟΑ΄ *καὶ* ΝΟΒΒ΄ *εἶναι ἐγγράψιμα εἰς κύκλον. 2ον. ὅτι τὸ* Ν *εἶναι τὸ μέσον τῆς* Α΄Β΄.

*Ἀπ. 1ον.* Τὸ τετράπλευρον ΟΝΒ΄Β εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, διότι αἱ ἀπέναντι γωνίαι του Ν καὶ Β εἶναι παραπληρωματικαί, ὡς ὀρθαί

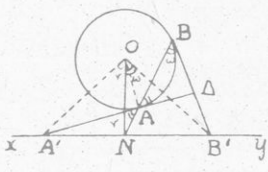
Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΟΝΑ΄ εἶναι ὀρθή, τὸ σημεῖον Ν κεῖται ἐπὶ ἡμιπεριφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ διάμετρον τὴν Α΄Ο.

Ὁμοίως ἐπειδὴ ἡ γωνία ΟΑΑ΄ εἶναι ὀρθή, τὸ σημεῖον Α κεῖται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ΟΑ΄. Τὰ σημεῖα λοιπὸν Ο, Α΄, Ν, Α κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας καὶ ἐπομένως τὸ τετράπλευρον ΝΑΟΑ΄ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

*2ον.* Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΟΝΒ΄Β εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύ-

..λον αἱ γωνίαι ω καὶ ω΄ εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν κύκλον αὐτὸν καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΝΒ΄· ἤτοι εἶναι ω=γων.ΝΟΒ΄ (1).

Ὁμοίως ἀπὸ τὸ τετράπλευρον ΟΑ΄ΝΑ συνάγομεν, ὅτι αἱ γωνίαι Α΄ΟΝ καὶ Α΄ΑΝ εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον διαμέτρου ΟΑ΄ καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου Α΄Ν· ἤτοι εἶναι γων.Α΄ΟΝ=γων.Α΄ΑΝ (2).



Σχ. 50

Ἀλλὰ αἱ γωνίαι ω καὶ ΒΑΔ εἶνα ἴσαι, διότι σχηματίζονται ὑπὸ τῆς χορδῆς ΑΒ καὶ τῶν ἐφαπτομένων ΒΔ καὶ ΑΔ εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς. Ἀλλὰ γων.ΒΑΔ=γων.Α΄ΑΝ ὡς κατὰ κορυφήν· ἑπομένως θὰ εἶναι ω=γων.Α΄ΑΝ ὁπότε ἐκ τῶν (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι αἱ γωνίαι Α΄ΟΝ καὶ ΝΟΒ΄ εἶναι ἴσαι. Τὸ τρίγωνον ΟΑ΄Β΄ εἶναι λοιπὸν ἰσοσκελές, διότι τὸ ὕψος ΟΝ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α΄ΟΒ΄.

Συνεπῶς τό ὕψος ΟΝ εἶναι καὶ διάμεσος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι Α΄Ν=ΝΒ΄.

Σ η μ. Εἰς τὸ σχῆμα νὰ ἀχθῇ ἡ ἀκτὶς ΟΒ.

*846. Δίδεται μία γωνία* xOy *καὶ ἕνα σημεῖον* Α, *τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς* ΟΖ. *Γράφομεν μίαν περιφέρειαν* Κ, *ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα* Ο *καὶ* Α *καὶ τέμνει τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς τὰ σημεῖα* Γ *καὶ* Δ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ**: 1ον ὅτι ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς* ΓΔ *διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον* Α. *2ον ὅτι, ἐὰν* Γ΄Δ΄ *εἶναι μία ἄλλη θέσις τῆς* ΓΔ, *ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ μίαν ἄλλην περιφέρειαν* Κ΄, *θὰ εἶναι* ΓΓ΄=ΔΔ΄.

*Ἀπ. 1ον.* Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Α κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΟΖ τῆς γωνίας xOy θὰ εἶναι γων.ω=γων.ω΄ καὶ ἑπομένως τὸ Α εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΓΑΔ· ἄρα θὰ εἶναι χορδ.ΑΓ=χορδ.ΑΔ.

Σχ. 51

Ἐὰν φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ΚΑ, αὐτὴ θὰ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΓΔ· ὥστε ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΓΔ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Α.

*2ον.* Ἔστω Κ΄ ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῶν Ο καὶ Α καὶ τέμνει τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας xOy εἰς τὰ σημεῖα Γ΄ καὶ Δ΄.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ΑΓ΄=ΑΔ΄. Τὰ τρίγωνα ΑΓΔ καὶ ΑΓ΄Δ΄ εἶναι ἰσοσκελῆ.

Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΓΟΔΑ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Κ, αἱ ἀπέναντι γωνίαι Ο καὶ ΓΑΔ εἶναι παραπληρωματικαί.

Ὁμοίως ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον Γ΄ΟΔ΄Α εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Κ΄, αἱ ἀπέναντι γωνίαι Ο καὶ Γ΄ΑΔ΄ εἶναι παραπληρωματικαί.

Αἱ γωνίαι λοιπὸν ΓΑΔ καὶ Γ΄ΑΔ΄ εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν Ο. Ἐὰν ἀπὸ τὰς ἴσας αὐτὰς γωνίας ἀφαιρέσωμεν τὴν κοινὴν γωνίαν Γ΄ΑΔ αἱ ἀπομένουσαι γωνίαι ΓΑΓ΄ καὶ ΔΑΔ΄ εἶναι ἴσαι.

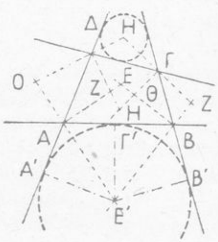
Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΓΓ΄ καὶ ΑΔΔ΄ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, ἤτοι ἔχουν ΑΓ=ΑΔ, ΑΓ΄=ΑΔ΄ καὶ γων.ΓΑΓ΄=γων.ΔΑΔ΄. Θὰ ἔχουν λοιπὸν καὶ τὰ ἄλλα στοιχεῖα των ἴσα, ἤτοι θὰ εἶναι ΓΓ΄=ΔΔ΄.

*847. Δίδεται ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ· φέρομεν τὰς διχοτόμους τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν του, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ καὶ τὰς διχοτόμους τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν του, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Ε΄, Ζ΄, Η΄, Θ΄. **Νὰ ἀποδειχθῇ**: 1ον. ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ ὅτι αἱ κορυφαὶ Ε, Ζ, Η, Θ εἶναι τὰ κέντρα τεσσάρων κύκλων, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἐφάπτεται ἐσωτερικῶς τριῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. 2ον. ὅτι τὸ τετράπλευρον Ε΄Ζ΄Η΄Θ΄ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ ὅτι αἱ κορυφαί του Ε΄, Ζ΄, Η΄, Θ΄ εἶναι τὰ κέντρα τῶν τεσσάρων κύκλων, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἐφάπτεται μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν δύο προσκειμένων εἰς αὐτὴν πλευρῶν του.*

***Ἀπ.** 1ον.* Γνωρίζομεν (ἄσκ. 169), ὅτι $E=\dfrac{\Gamma+\Delta}{2}$ καὶ $H=\dfrac{A+B}{2}$.

ἄρα $E+H=\dfrac{A+B+\Gamma+\Delta}{2}=\dfrac{4 \text{ ὀρθ.}}{2}=2$ ὀρθάς· ἄρα τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, διότι αἱ ἀπέναντι γωνίαι του Ε καὶ Η εἶναι παραπληρωματικαί.

Ἐπειδὴ τὸ Ε εἶναι σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Α καὶ Β τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, ὁ κύκλος, ὁ ὁποῖος γράφεται μὲ κέντρον τὸ Ε καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν τοῦ Ε ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας Α θὰ ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΔ καὶ ΒΓ.




Σχ. 52

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τὰς ἄλλας κορυφὰς Ζ, Η, Θ, ὅτι εἶναι κέντρα κύκλων, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται τριῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

*2ον* Γνωρίζομεν (ἄσκ. 172), ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ σχηματίζουν τετράπλευρον Ε΄Ζ΄Η΄Θ΄, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί· ἄρα τὸ τετράπλευρον αὐτὸ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. Ἡ κορυφὴ Ε΄, ὡς σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν Α΄ΑΒ καὶ ΑΒΒ΄ θὰ ἀπέχῃ ἰσάκις ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῶν γωνιῶν αὐτῶν, ἤτοι θὰ εἶναι Ε΄Α΄=Ε΄Γ΄=Ε΄Β΄.

Ἐὰν λοιπὸν γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ κέντρον τὸ Ε΄ καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν Ε΄Α΄, ἡ περιφέρεια αὐτὴ θὰ περάσῃ ἀπὸ τὰ σημεῖα Α΄, Γ΄, Β΄, καὶ θὰ εἶναι ἐφαπτομένη τῶν ΑΑ΄, ΑΒ καὶ ΒΒ΄, διότι αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι κάθετοι, ἐκ κατασκευῆς, εἰς τὰ ἄκρα τῶν ἀκτίνων Ε΄Α΄, Ε΄Γ΄, Ε΄Β΄.

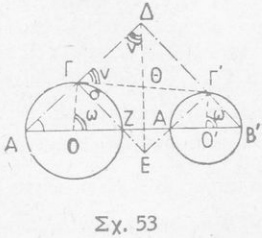
Ὥστε ἡ περιφέρεια (Ε΄, Ε΄Α) ἐφάπτεται τῆς πλευρᾶς ΑΒ καὶ τῶν προεκτάσεων ΑΑ΄ καὶ ΒΒ΄ τῶν προσκειμένων εἰς αὐτὴν πλευρῶν Δ καὶ ΒΓ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι καὶ τὰ σημεῖα Ζ΄, Η΄, Θ΄ εἶναι τὰ κέντρα τῶν περιφερειῶν, κάθε μία, τῶν ὁποίων ἐφάπτεται μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν δύο προσκειμένων εἰς αὐτὴν πλευρῶν.

Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον Ε΄Ζ΄Η΄Θ΄ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, τὰ κέντρα Ε΄, Ζ΄, Η΄, Θ΄ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τετράπλευρον Ε΄Ζ΄Η΄Θ΄.

*848.* ***Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας xy λαμβάνομεν, διαδοχικῶς, τὰ σημεῖα Α,Β,Α΄,Β΄. Μὲ διαμέτρους τὰς ΑΒ καὶ Α΄Β΄ γράφομεν περιφερείας καὶ φέρομεν τὴν κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην των ΓΓ΄. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΒΓ, Α΄Γ΄, Β΄Γ΄ σχηματίζουν ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ μία διαγώνιος εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον τῶν κύκλων.***

*Ἀπ.* Ἔστωσαν Ο καὶ Ο΄ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν διαμέτρους τὰς ΑΒ καὶ Α΄Β΄. Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΓ καὶ Ο΄Γ΄ εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς Γ καὶ Γ΄.



Σχ. 53

Αἱ ΟΓ καὶ Ο΄Γ΄ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΓΓ΄· ἄρα αἱ γωνίαι ω καὶ ω΄ εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντός, ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΟΓ καὶ Ο΄Γ΄ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΟΟ΄, ἤτοι εἶναι $\omega=\omega'$. Φέρομεν τὰς ΑΓ καὶ Β΄Γ΄, αἱ ὁποῖαι προεκτεινόμεναι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Δ.

Ἐπειδὴ γων.$A=\frac{\omega}{2}$ καὶ γων.$A'=\frac{\omega'}{2}$ ἕπεται, ὅτι γων.Α=γων.Α΄.

Ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ Α΄Γ΄ εἶναι παράλληλοι, διότι, τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΑΒ΄, σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας Α καὶ Α΄ ἴσας·

Φέρομεν τὰς ΓΒ καὶ Γ΄Α΄, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ε. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΓΒ καὶ Α΄Γ΄Β΄ εἶναι ὀρθαί, ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς ἡμικύκλια, αἱ ΒΓ καὶ Β΄Γ΄ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς παραλλήλους ΑΓ καὶ Α΄Γ΄· ἄρα αἱ ΒΓ καὶ Β΄Γ΄ εἶναι παράλληλοι· τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΔΓΕΓ΄ εἶναι ὀρθογώνιον. Θὰ δείξωμεν λοιπὸν τώρα, ὅτι ἡ διαγώνιος ΔΕ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν διάκεντρον ΟΟ΄ εἰς τὸ Ζ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον ΟΟ΄. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ γωνία ΑΖΔ εἶναι ὀρθή.

Ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι ἴσαι καὶ διχοτομοῦνται τὸ τρίγωνον ΘΓΔ εἶναι ἰσοσκελές· ἄρα γων.ν=γων.ν΄ (1).

Ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία Α καὶ ἡ γωνία σ, ἡ ὁποία σχηματίζεται ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν ὡς μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ τόξου ΓΒ, ἤτοι εἶναι $Α=σ$ (2).

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν $ν+Α=ν'+σ$ ἢ $ν+Α=1$ ὀρθ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΖΔ, αἱ δύο γωνίαι του Α καὶ Δ ἔχουν ἄθροισμα 1 ὀρθήν· ἄρα ἡ τρίτη γωνία του ΑΖΔ εἶναι ὀρθή.

Ὥστε ἡ ΔΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον ΟΟ'.

Σημ. Εἰς τὸ σχῆμα νὰ γραφῇ τὸ σημεῖον Β, ἄκρον τῆς διαμέτρου ΑΒ, καὶ νὰ τεθῇ τόνος εἰς τὸ Α', ἄκρον τῆς διαμέτρου Α'Β'.

*849. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Α τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου Ο φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην αὐτοῦ Αx καὶ ἐπὶ τῆς Αx λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Μ· ἀπὸ τὸ Μ φέρομεν τὴν δευτέραν ἐφαπτομένην ΜΒ τοῦ κύκλου Ο. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον ΜΑΒ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Ο, οἱαδήποτε καὶ ἐὰν εἶναι ἡ θέσις τοῦ σημείου Μ ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης Αx. 2ον ὅτι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου ΜΑΒ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου, ἴσου πρὸς τὸν δοθέντα καὶ ὁ ὁποῖος ἔχει κέντρον τὸ σημεῖον Α.*

*Ἀπ. 1ον.* Φέρομεν τὴν ΜΟ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Ν. Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ καὶ ΟΒ.

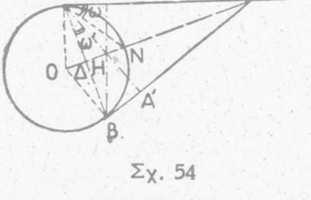
Ἡ ΜΟ διχοτομεῖ τὰς γωνίας ΑΜΒ καὶ ΑΟΒ· ἄρα τὸ Ν εἶναι μέσον τοῦ τόξου ΑΝΒ. Φέρομεν τὴν χορδὴν ΑΝ.

Ἡ γωνία ω σχηματίζεται ὑπὸ χορδῆς ΑΝ καὶ τῆς ἐφαπτομένης Αx· ἄρα ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ τόξου ΑΝ· ἤτοι εἶναι

$$\text{γων.}ω=\frac{1}{2}\,\text{μέτρ.τόξ.}ΑΝ \quad (1).$$

Ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΝΑΒ ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ τόξου ΒΝ, ἤτοι εἶναι $\text{γων.}ΝΑΒ=\frac{1}{2}\,\text{μέτρ.τόξ.}ΒΝ$.

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ω καὶ ΝΑΒ ἔχουν μέτρα τὸ ἥμισυ τῶν ἴσων τόξων ΑΝ καὶ ΝΒ, εἶναι ἴσαι, καὶ ἑπομένως ἡ ΑΝ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΜΑΒ.



Σχ. 54

Τὸ Ν ὡς σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων ΜΟ καὶ ΑΝ τῶν γωνιῶν Μ καὶ Α τοῦ τριγώνου ΜΑΒ εἶναι κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον ΜΑΒ.

Τὸ κέντρον λοιπὸν Ν τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον ΜΑΒ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Ο.

*2ον.* Ἡ ΜΟ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, διότι εἶναι διχοτόμος τῶν γωνιῶν Μ καὶ Ο τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ΜΑΒ καὶ ΟΑΒ· ἄρα ἡ ΜΔ εἶναι ἕνα ὕψος τοῦ τριγώνου ΜΑΒ.

Φέρομεν καὶ τὸ ὕψος ΒΒ', τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ὕψος ΜΔ εἰς τὸ σημεῖον Η· φέρομεν τὴν ΑΗ· θὰ δείξωμεν, ὅτι ΑΗ=ΑΟ.

Αἱ ΟΑ καὶ ΒΒ' εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν Αx.

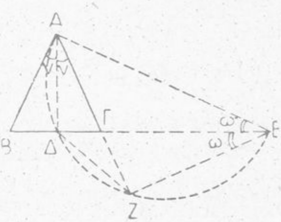
Ἐπίσης αἱ ΑΗ καὶ ΟΒ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΜΒ· τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΟΒΗΑ εἶναι παραλληλόγραμμον· εἰς τὸ παραλληλόγραμμον αὐτὸ αἱ δύο διαδοχικαὶ πλευραὶ του ΟΑ καὶ ΟΒ εἶναι ἴσαι, ὡς ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου· ἄρα τὸ παραλληλόγραμον ΟΒΗΑ εἶναι ρόμβος καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΟΑ=ΑΗ.

Τὸ σημεῖον λοιπὸν Η τῆς τομῆς τῶν ὕψῶν τοῦ τριγώνου ΜΑΒ ἀπέχει ἀπὸ τὸ Α ἀπόστασιν ΑΗ ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου Ο καὶ ἑπομένως κεῖται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς δοθείσης περιφερείας Ο.

*850. Δίδεται ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία Α τῆς κορυφῆς εἶναι ὀξεῖα. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ καὶ ἀπὸ τὸ Α τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν προέκτασιν τῆς βάσεως ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Ε. Ἐπίσης ἀπὸ τὸ Ε φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΑΓ εἰς τὸ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ : 1ον ὅτι τὰ σημεῖα Α, Δ, Ζ, Ε κεῖνται ἐπὶ περιφερείας. 2ον ὅτι ἡ ΕΓ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΕΖ. 3ον ὅτι ΑΔ=ΔΖ. 4ον. Νὰ ἐξετασθῇ, ἐὰν αἱ προηγούμεναι ἰδιότητες ὑφίστανται, ὅταν ἡ γωνία Α εἶναι ἀμβλεῖα ἢ ὀρθή.*

*Ἀπ. 1ον.* Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΔΕ εἶναι ὀρθή, ἡ κορυφὴ Δ κεῖται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν ΑΕ.

Ὁμοίως ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΖΕ εἶναι ὀρθή, ἡ κορυφὴ Ζ κεῖται ἐπὶ περιφερείας διαμέτρου ΑΕ. Τὰ σημεῖα λοιπὸν Α, Δ, Ζ, Ε κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν ΑΕ.



Σχ. 55

*2ον.* Αἱ γωνίαι ν καὶ ν' εἶναι ἴσαι, διότι τὸ ὕψος ΑΔ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς. Ἀλλὰ ἡ γωνία ν σχηματίζεται ὑπὸ χορδῆς ΑΔ καὶ ἐφαπτομένης ΑΒ εἰς τὸ ἄκρον Α τῆς χορδῆς, ἡ δὲ γωνία ν εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κύκλον διαμέτρου ΑΕ καὶ βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΔΖ.

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ν καὶ ν' εἶναι ἴσαι ἕπεται, ὅτι καὶ τὰ τόξα ΑΔ καὶ ΔΖ εἶναι ἴσα. Αἱ ἐγγεγραμμέναι λοιπὸν γωνίαι ω καὶ ω' εἶναι ἴσαι, διότι βαίνουν ἐπὶ τῶν ἴσων τόξων ΑΔ καὶ ΔΖ. Ὥστε ἡ ΕΓ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΕΖ.

*3ον.* Αἱ ΑΔ καὶ ΔΖ εἶναι ἴσαι, ὡς χορδαὶ τῶν ἴσων τόξων ΑΔ καὶ ΔΖ.

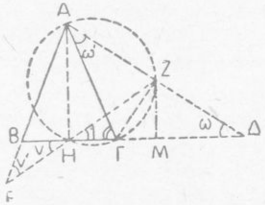
*4ον.* Ἐὰν ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἀμβλεῖα, τὰ σημεῖα Α, Δ, Ε, Ζ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας διαμέτρου ΑΕ.

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ν καὶ ν' εἶναι ἴσαι, τὸ Δ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΑΔΖ· ἄρα αἱ χορδαὶ ΑΔ καὶ ΔΖ εἶναι ἴσαι καὶ ἡ ΕΔ εἶναι διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Ε τοῦ τριγώνου ΑΕΖ.

Ἐὰν ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ὀρθή, τὸ Ε συμπίπτει μὲ τὸ Γ καὶ συνεπῶς καὶ μὲ τὸ Ζ. Ἀλλὰ ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΔΓ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς θὰ εἶναι ΑΔ=ΔΖ=ΔΓ. Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Γ, Ζ, Ε συμπίπτουν δὲν σχηματίζεται ἡ γωνία ΑΕΖ.

*851. Δίδεται ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον* ΑΒΓ, (ΑΒ=ΑΓ). *Προεκτείνομεν τὴν βάσιν* ΒΓ *καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα* ΓΔ=ΑΒ· *φέρομεν τὴν εὐθεῖαν* ΑΔ. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία* Δ *εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας* ΑΒΓ. *2ον. Φέρομεν τὸ ὕψος* ΑΗ· *προεκτείνομεν τὴν* ΑΒ *καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα* ΒΕ= $\frac{1}{2}$ ΒΓ· *φέρομεν τὴν εὐθεῖαν* ΕΗ, *ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν* ΑΔ *εἰς τὸ* Ζ· *νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον* ΗΖΔ *εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ὅτι τὸ* Ζ *εἶναι τὸ μέσον τῆς* ΑΔ *καὶ ὅτι* ΑΖ=ΖΔ=ΖΗ. *3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα* Α, Η, Γ, Ζ *κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας. 4ον. Ἐὰν ἡ γωνία* ΒΑΓ *εἶναι ἴση μὲ 58°, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι* Δ, Ε *καὶ* ΑΖΕ.

*Ἀπ. 1ον.* Τὸ τρίγωνον ΑΓΔ εἶναι ἰσόσκελές, διότι ἐκ κατασκευῆς εἶναι ΓΔ=ΑΒ=ΑΓ· ἄρα θὰ εἶναι ω=ω'.




Σχ. 56

Ἐπειδὴ ἡ ἐξωτερικὴ γωνία ΑΓΒ τοῦ τριγώνου ΑΓΔ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ω καὶ ω' θὰ εἶναι γων.ΒΓΑ=ω+ω' ἢ γων.ΒΓΑ=2ω ἢ

$$\omega = \frac{1}{2}\ \text{γων.ΒΓΑ} = \frac{1}{2}\ \text{γων.ΑΒΓ} \quad (1).$$

Τὸ ὕψος ΑΗ διχοτομεῖ τὴν βάσιν ΒΓ.

Ἐπειδὴ ΒΕ=ΒΗ= $\frac{\text{ΒΓ}}{2}$, τὸ τρίγωνον ΕΒΗ εἶναι ἰσοσκλελὲς καὶ ἑπομένως αἱ γωνίαι ν καὶ ν' εἶναι ἴσαι.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΕΒΗ, θὰ εἶναι γων.ΑΒΓ=2ν· ἄρα ν= $\frac{1}{2}$ γων.ΑΒΓ (2).

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι γων.ν=γων.ω. Ἀλλὰ γων.ν=γων.$Η_1$, ὡς κατὰ κορυφήν, ἄρα θὰ εἶναι καὶ γων.$Η_1$=γων.ω.

Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΗΖΔ εἶναι ἰσοσκελές, διότι αἱ παρὰ τὴν βάσιν του γωνίαι $Η_1$ καὶ ω εἶναι ἴσαι.

Τὸ Ζ λοιπὸν κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον Μ τῆς βάσεως ΗΔ.

Ἐπειδὴ ἡ ΜΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΗΑ, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, καὶ ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς πλευρᾶς ΗΔ τοῦ τριγώνου ΑΗΔ, θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ μέσου Ζ τῆς ΑΔ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΑΖ=ΖΔ=ΖΗ.

*3ον.* Ἐπειδὴ ΑΓ=ΓΔ, τὸ Γ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΔ. Ἡ ΖΓ εἶναι λοιπὸν κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ.

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΗΓ καὶ ΑΖΓ εἶναι ὀρθαί, αἱ κορυφαὶ των Η καὶ Ζ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας διαμέτρου ΑΓ.

Ὥστε τὰ σημεῖα Α, Η, Γ, Ζ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

*4ον.* Ἐπειδὴ ἡ γωνία τῆς κορυφῆς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι 58° ἕπεται, ὅτι αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι του Β καὶ Γ θὰ ἔχουν ἄθροισμα 180°—58=122°, καὶ ἑπομένως ἑκάστη θὰ εἶναι ἴση μὲ 61°.

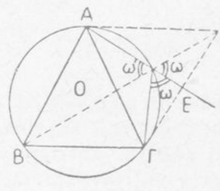
Ἐπειδὴ ἡ γωνία Δ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας Γ, θὰ εἶναι γων.Δ=30° 30'.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΖΕ εἶναι διπλασία τῆς γωνὶας Δ, ὡς ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΗΖΔ, θὰ εἶναι ἴση μὲ $61^{0}$.

*852. Ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον* ΑΒΓ, (ΑΒ=ΑΓ) *εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον* Ο· *φέρομεν τυχοῦσαν χορδὴν* ΑΔ *καὶ ἀπὸ τὸ* Γ *τὴν κάθετον* ΓΕ *ἐπὶ τὴν* ΑΔ, *ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς χορδῆς* ΒΔ, *εἰς τὸ σημεῖον* Μ. *Νὰ ἀποδειχθῇ : 1ον, ὅτι αἱ γωνίαι* ΓΔΕ *καὶ* ΕΔΜ *εἶναι ἴσαι. 2ον, ὅτι τὰ τρίγωνα* ΓΕΔ *καὶ* ΔΕΜ *εἶναι ἴσα· 3ον, ὅτι* ΑΓ=ΑΜ *καὶ νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου* Μ, *ὅταν ἡ χορδὴ* ΑΔ *στρέφεται περὶ τὸ* Α. *4ον, ὅτι ἡ γωνία* ΒΑΓ *εἶναι διπλασία τῆς γωνίας* ΒΜΓ.

*Ἀπ. 1ον.* Θὰ δείξωμεν ὅτι γων.ω=γων.ΓΔΕ. Αἱ γωνίαι ω καὶ ω′ εἶναι ἴσαι, ὡς κατὰ κορυφήν· ἀλλὰ γων.ω′$=\frac{1}{2}$ μέτρ.τόξ.ΑΒ. Ὥστε θὰ εἶναι γων.ω′=γων.ω$=\frac{1}{2}$ μέτρ.τόξ.ΑΒ (1).

Ἡ γωνία ΓΔΕ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας ΑΔΓ, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒΓ· ἄρα ἡ γων.ΓΔΕ ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΔΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ τόξον ΑΒ, ἤτοι εἶναι γων.ΓΔΕ$=\frac{1}{2}$ μέτρ.τόξ.ΑΒ (2).




Σχ. 57

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) συνάγομεν ὅτι γων.ω=γων.ΓΔΕ.

*2ον.* Τὰ τρίγωνα ΓΕΔ καὶ ΔΕΜ εἶναι ἴσα, διότι εἶναι ὀρθογώνια εἰς τὸ Ε καὶ ἔχουν τὴν κάθετον πλευρὰν ΔΕ κοινὴν καὶ τὰς ὀξείας γωνίας ω καὶ ω ἴσας· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ΓΕ=ΕΜ.

*3ον.* Ἐπειδὴ ἡ ΑΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΜ εἰς τὸ μέσον της Ε θὰ εἶναι ΑΓ=ΑΜ, ἤτοι τὸ Μ ἀπέχει ἀπὸ τὸ σταθερὸν σημεῖον Α ἀπόστασιν ΑΜ=ΑΓ=σταθεράν· ἄρα τὸ Μ κεῖται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΓ.

Ὅταν τὸ Δ κινῆται ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο, ἡ γωνία ΓΑΔ, ἡ ὁποία εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας ΓΑΜ, θὰ μεταβάλλεται ἀπὸ $0^{0}$ μέχρι $180^{0}$ καὶ ἑπομένως ἡ γωνία ΓΑΜ θὰ μεταβάλλεται ἀπὸ $0^{0}$ μέχρι $360^{0}$. Ὥστε τὸ σημεῖον Μ γράφει ὁλόκληρον περιφέρειαν (Α, ΑΓ).

*4ον.* Θὰ δείξωμεν, ὅτι γων.ΒΑΓ=2 γων.ΒΜΓ.

Ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ΒΔΓ, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΒΓ· ἤτοι εἶναι

γων.ΒΑΓ=γων.ΒΔΓ (3)

Ἀλλὰ ἡ γωνία ΒΔΓ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΓΔΜ· ἄρα θὰ εἶναι γων.ΒΔΓ=2 γων.ΔΜΓ (4).

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (3) καὶ (4) συνάγομεν, ὅτι γων.ΒΑΓ=2 γων.ΔΜΓ, δηλ. γων.ΒΑΓ=2 γων.ΒΜΓ.

Σημ. Εἰς τὸ σχῆμα νὰ σημειωθῇ τὸ γράμμα Δ.

*853. Ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον* ΑΒΓ *εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον* Ο. *Εὑρίσκομεν τὸ συμμετρικὸν σημεῖον* Μ *τοῦ κέντρου* Ο *πρὸς τὴν πλευρὰν*

*ΑΓ καὶ ἀπὸ τὸ Μ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι ἡ γωνία ΜΓΕ εἶναι ὀρθή 2ον ὅτι τὸ τετράπλευρον ΟΕΓΜ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. 3ον ὅτι ἡ γωνία ΜΟΕ εἶναι ὀρθή.*

*Ἀπ. 1ον.* Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΟΗ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ καὶ τὰς ΑΜ καὶ ΟΓ.

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Ο καὶ Μ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν ΑΓ, ἡ ΑΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΜ εἰς τὸ μέσον Ζ αὐτῆς. Ὥστε εἶναι ΟΖ=ΖΜ.

Σχ. 58

Ἡ ΟΖΜ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΓ διχοτομεῖ αὐτήν, ἤτοι εἶναι ΑΖ=ΖΓ. Τὸ τετράπλευρον ΑΟΓΜ εἶναι ρόμβος, διότι αἱ διαγώνιοί του ΟΜ καὶ ΑΓ διχοτομοῦνται καθέτως.

Ἡ διαγώνιος ΑΓ τοῦ ρόμβου διχοτομεῖ τὰς ἀπέναντι γωνίας Α καὶ Γ καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Α καὶ Γ εἶναι ἴσαι, ὡς ἀπέναντι γωνίαι παραλληλογράμμου καὶ τὰ ἡμίση αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσα.

Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΟ καὶ ΜΓ τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΑΓ σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ν καὶ ν′ ἴσας, ἄρα αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ εἶναι παράλληλοι, καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΟ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΒΓ καὶ ἡ παράλληλός της ΜΓ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ. Ὥστε ἡ γωνία ΜΓΕ εἶναι ὀρθή.

*2ον.* Φέρομεν τὴν διάμετρον ΓΟΘ, καὶ τὴν χορδὴν ΑΘ. Ἡ γωνία ΘΑΓ εἶναι ὀρθή, ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον· ἄρα ἡ ΑΘ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ.

Αἱ ΑΘ καὶ ΜΟ εἶναι λοιπὸν παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΓ. Αἱ γωνίαι λοιπὸν ΘΑΒ καὶ ΟΜΕ εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους, ἤτοι εἶναι γων.ΘΑΒ=γων.ΟΜΕ.

Ἀλλὰ γων.ΘΑΒ=γων.ΘΓΒ· διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΘΒ, ἄρα θὰ εἶναι γων.ΘΓΒ=γων.ΟΜΕ.

Ἐπειδὴ γων.ΘΓΒ=γων.ΟΜΕ ἕπεται, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΟΕΓΜ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

*3ον.* Εἰς τὸ τετράπλευρον ΟΕΓΜ ἡ γωνία Γ εἶναι ὀρθή, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω· ἄρα ἡ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία Ο, θὰ εἶναι ὀρθή, ὡς παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας Γ. Ὥστε εἶναι γων.ΜΟΕ=1 ὀρθή.

Σημ. Νὰ γραφῇ εἰς τὸ σχῆμα τὸ σημεῖον Ζ, σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ΑΓ καὶ ΟΜ.

**854.** *Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐντὸς κύκλου Ο φέρομεν δύο καθέτους χορδὰς ΑΜΒ καὶ ΓΜΔ. Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ, Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.*

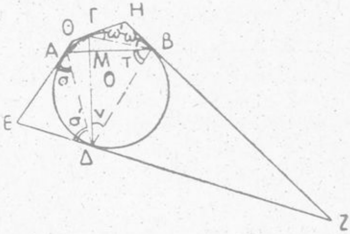
*Ἀπ.* Διὰ νὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι δύο ἀπέναντι γωνίαι του Η καὶ Ε εἶναι παραπληρωματικαί, ἤτοι ὅτι εἶναι Η+Ε=2 ὀρθαί. Φέρομεν τὰς χορδὰς ΑΔ, ΔΒ, ΒΓ καὶ ΓΑ.

Τὰ τρίγωνα ΗΓΒ καὶ ΕΔΑ εἶναι ἰσοσκελῆ, διότι ΗΓ=ΗΒ καὶ ΕΑ=ΕΔ, ὡς ἐφαπτόμεναι, ἀγόμενοι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

'Εὰν δείξωμεν, ὅτι αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι τῶν δύο ἰσοσκελῶν αὐτῶν τριγώνων ἔχουν ἄθροισμα 2 ὀρθῶν γωνιῶν, τότε αἱ γωνίαι Η καὶ Ε τῶν κορυφῶν του θὰ ἔχουν ἄθροισμα 2 ὀρθῶν.

Ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ν καὶ ἡ γωνία ω', ἡ ὁποία σχηματίζεται ὑπὸ χορδῆς ΓΒ καὶ ἐφαπτομένης ΓΗ, εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ αὐτοῦ τόξου ΓΒ, ἤτοι εἶναι $\widehat{\nu}=\widehat{\omega'}$



Σχ. 59

'Ομοίως εἶναι $\widehat{\tau}=\widehat{\sigma'}$ (2) διὰ τὸν αὐτὸν λόγον.

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν $\widehat{\nu}+\widehat{\tau}=\widehat{\omega'}+\widehat{\sigma'}$

'Αλλὰ ν+τ=1 ὀρθ., διότι εἶναι αἱ δύο ὀξεῖαι γωνίαι τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΔΜΒ· ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\widehat{\omega'}+\widehat{\sigma'}=1$ ὀρθ.

'Επειδὴ εἶναι ω=ω'. καὶ σ=σ' ἕπεται, ὅτι αἱ τέσσαρες παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι ω, ω', σ, σ' τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ΗΓΒ καὶ ΕΑΔ ἔχουν ἄθροισμα 2 ὀρθῶν γωνιῶν· ἄρα αἱ τρίται γωνίαι Η καὶ Ε τῶν δύο αὐτῶν τριγώνων θὰ ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ 2 ὀρθάς. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΕΖΗΘ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

*855. Δύο κύκλοι Ο καὶ Ο' ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α· φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΒ τοῦ κύκλου Ο, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν περιφέρειαν Ο' εἰς τὸ σημεῖον Γ καὶ ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς ΓΒ, φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ σημεῖον Ν· φέρομεν τὴν χορδὴν ΝΑ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο' εἰς τὸ σημεῖον Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι αἱ γωνίαι Ο'ΔΓ καὶ ΒΓΝ εἶναι ἴσαι. 2ον ὅτι ἡ ΜΔ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου Ο'. 3ον ὅτι ΜΝ=ΝΔ·*

*'Απ. 1ον.* Θὰ δείξωμεν ὅτι γων.ν==γων.ΒΓΝ. Τὸ τρίγωνον Ο'ΓΔ εἶναι ἰσοσκελές, διότι Ο'Γ=Ο'Δ, ὡς ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ἄρα θὰ εἶναι γων.ν=γων.σ (1). Φέρομεν τὴν χορδὴν ΝΒ.

Τὸ τρίγωνον ΝΓΒ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἡ ΝΜ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΓΒ· ἄρα θὰ εἶναι γων.ΒΓΝ=γων.Β (2).

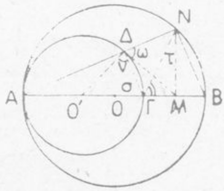
Αἱ γωνίαι ΑΔΓ καὶ ΑΝΒ εἶναι ὀρθαί, ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς ἡμικύκλια· ἄρα αἱ ΔΓ καὶ ΝΒ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΝ καὶ ἐπομένως παράλληλοι. Αἱ γωνίαι σ καὶ Β εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐντός, ἐκτὸς τῶν παραλλήλων ΔΓ καὶ ΝΒ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΒ, ἤτοι εἶναι γων.σ=γων.Β (3).

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1), (2), (3) συνάγομεν ὅτι γων.ν=γων.ΒΓΝ.

*2ον*. Διὰ νὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΜΔ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου Ο'· ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ γωνία Ο'ΔΜ εἶναι ὀρθή, ἤτοι

γων.ν+γων.ΓΔΜ=1 ὀρθή.

Εἰς τὸ τετράπλευρον ΔΓΜΝ αἱ δύο ἀπέναντι γωνίαι του ΓΔΝ καὶ Μ εἶναι ὀρθαί· ἡ μὲν πρώτη ὡς παραπληρωματικὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας ΑΔΓ, ἡ δὲ δευτέρα ἐκ κατασκευῆς· ἄρα τὸ τετράπλευρον αὐτὸ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι γων.τ=γων.ΓΔΜ, ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸ αὐτὸ τόξον ΓΜ.




Σχ. 60

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΝΜΓ αἱ ὀξεῖαι γωνίαι τ καὶ ΝΓΜ εἶναι συμπληρωματικαὶ ἤτοι εἶναι

γων.ΝΓΜ+γων.τ=1 ὀρθή.

Εἰς τὴν ἰσότητα αὐτὴν ἀντικαθιστῶμεν τὴν γωνίαν ΝΓΜ διὰ τῆς ἴσης της ν, ὡς ἐδείχθη εἰς τὴν 1ην περίπτωσιν καὶ τὴν γωνίαν τ διὰ τῆς ἴσης της ΓΔΜ καὶ ἔχομεν γων.ν+γων.ΓΔΜ=1 ὀρθ. ἢ γων.Ο'ΔΜ=1 ὀρθή.

Ὥστε ἡ ΜΔ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος Ο'Δ καὶ ἐπομένως εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου Ο.

*3ον*. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΜΝ=ΜΔ. Εἰς τὸ τετράπλευρον ΔΓΜΝ αἱ γωνίαι ω καὶ ΝΓΜ εἶναι ἴσαι, ὡς ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΜΝ τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τετράπλευρον.

Ἀλλὰ γων.ΝΓΜ=Β=γων.σ, ὡς ἐδείχθη, ἄρα θὰ εἶναι

γων.ω=γων.Β (4).

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΝΒ καὶ ΑΝΜ ἔχουν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν Α κοινήν, ἄρα αἱ ἄλλαι ὀξεῖαι γωνίαι των Β καὶ ΑΝΜ θὰ εἶναι ἴσαι, ἤτοι εἶναι γων.Β=γων.ΑΝΜ (5).

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (4) καὶ (5) συνάγομεν, ὅτι γων.ω=γων ΑΝΜ, ἤτοι τὸ τρίγωνον ΔΜΝ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι ΜΝ=ΜΔ.

***856.*** ***Εἰς ἕνα κύκλον Ο φέρομεν δύο διαμέτρους ΑΒ καὶ ΓΔ καθέτους μεταξύ των. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Β φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ Ε καὶ τὴν ΓΔ ἢ τὴν προέκτασίν της εἰς τὸ Ζ· φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΕΗ εἰς τὸ σημεῖον Ε, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΑΒ εἰς τὸ Η· ἀπὸ τὸ Η φέρομεν κάθετον ΗΘ ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν τέμνουσαν ΒΕ εἰς τὸ σημεῖον Θ καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ΑΕ εἰς τὸ Κ. Νὰ ἀποδειχθῇ : 1ον ὅτι ΑΘ=ΑΚ. 2ον ὅτι ἡ ΑΘ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΖ.***

*Ἀπ. 1ον*. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΚΘ εἶναι ἰσοσκελές.

Ἡ γωνία ΑΕΒ εἶναι ὀρθή, ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον· ἄρα καὶ ἡ παραπληρωματική της ΘΕΚ εἶναι ὀρθή· τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΘΕΚ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Ε· ὥστε θὰ εἶναι ν+σ=1 ὀρθή (1).

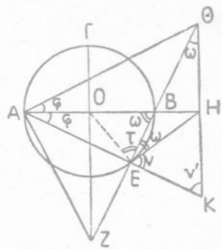
Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΕ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς Ε. Ἡ γωνία ΟΕΗ εἶναι ὀρθή· ἄρα θὰ εἶναι $\tau+\sigma=1$ ὀρθ. (2).

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι αἱ γωνίαι ν καὶ τ εἶναι ἴσαι διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν συμπληρωματικὴν γωνίαν σ· ἤτοι εἶναι $\tau=\nu$. (3).

Ἀλλὰ $\tau=\omega$ (4), ὡς παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΟΕΒ· ἄρα ἐκ τῶν ἰσοτήτων (3) καὶ (4) συνάγομεν, ὅτι $\nu=\omega$ (5).

Τὸ τετράπλευρον ΒΕΚΗ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, διότι αἱ δύο ἀπέναντι γωνίαι του Ε καὶ Η εἶναι ὀρθαί· ἄρα αἱ δύο ἄλλαι ἀπέναντι γωνίαι του ν' καὶ Β θὰ εἶναι παραπληρωματικαί, ἤτοι $B+\nu'=2$ ὀρθ. Ἀλλὰ εἶναι καὶ $B+\omega=2$ ὀρθ. ὡς ἐφεξῆς τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Αἱ γωνίαι ν' καὶ ω εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν, ἤτοι εἶναι $\omega=\nu'$. καὶ λόγῳ τῆς (5) εἶναι $\nu=\nu'$.



Σχ. 61

Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΗΕΚ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΗΕ=ΗΚ (6).

Ἀπὸ τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΘΕΚ συνάγομεν, ὅτι $\nu'+\sigma'=1$ ὀρθή· ἐδείξαμεν ἐπίσης ὅτι $\sigma+\nu=1$ ὀρθ.

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων αὐτῶν συνάγομεν ὅτι $\nu'+\sigma'=\sigma+\nu$, καί ἐπειδὴ $\nu'=\nu$ θὰ εἶναι καὶ $\sigma'=\sigma$, ἤτοι τὸ τρίγωνον ΕΗΘ εἶναι ἰσοσκελές· ἄρα θὰ εἶναι ΗΕ=ΗΘ (7).

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (6) καὶ (7) συνάγομεν ΗΚ=ΗΘ· ἤτοι τὸ Η εἶναι μέσον τῆς ΘΚ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΚΘ, ἡ ΑΗ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΘΚ· ἄρα τὸ τρίγωνον αὐτὸ εἶναι ἰσοσκελές.

*2ον*. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΘΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΖ· ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι $\varphi+BAZ=1$ ὀρθ. Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΘΑΚ ἡ ΑΗ εἶναι διάμεσος καὶ ὕψος αὐτοῦ· ἄρα εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς του Α, ἤτοι εἶναι $\varphi=\varphi'$. Ἀπὸ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΖΑΒ ἔχομεν ω=γων.ΖΑΒ.

Ἀλλὰ εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΗΚ εἶναι $\varphi'+\nu'=1$ ὀρθ. (8).

Ἀλλὰ $\varphi'=\varphi$, ὡς ἐδείχθη καὶ $\nu'=\omega=$γων.ΒΑΖ. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἰσότητα (8) τὰς γωνίας φ' καὶ ν' διὰ τῶν ἴσων των γωνιῶν φ καὶ ΒΑΖ λαμβάνομεν $\varphi+BAZ=1$ ὀρθ.

Ὥστε ἡ γωνία ΘΑΖ εἶναι ὀρθὴ καὶ ἑπομένως ἡ ΘΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΖ.

Σημ. Εἰς τὸ σχῆμα νὰ τεθῇ σ ἀντὶ ω εἰς τὴν γων.ΒΕΗ καὶ σ' εἰς τὴν γωνίαν ΒΘΗ.

**857.** ***Ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο. Φέρομεν τὰς διχοτόμους ΒΔ καὶ ΓΕ τῶν γωνιῶν του Β καὶ Γ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Μ καὶ τέμνουν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως· φέρομεν τὴν χορδὴν ΔΕ, ἡ ὁποία τέμνει τὸ ὕψος ΑΗ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Ν. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι ΕΝ=ΝΔ. 2ον ὅτι τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τὸ ὕψους ΑΗ. 3ον ὅτι ἡ ΕΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ. 4ον ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΕΜΔ εἶναι ρόμβος.***

*Ἀπ. 1ον.* Τὸ ὕψος ΑΗ, ὡς κάθετον εἰς τὸ μέσον Η τῆς βάσεως ΒΓ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, θὰ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου Ο. Ἡ ΑΟΘ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου Ο καὶ θὰ διχοτομεῖ τὰ τὰ τόξα ΒΘΓ καὶ ΒΑΓ, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν χορδὴν ΒΓ, ἤτοι εἶναι τόξ.ΒΕΑ=τόξ.ΑΔΓ.

Αἱ γωνίαι Β καὶ Γ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ἴσαι, ἄρα καὶ τὰ ἡμίση αὐτῶν ω καὶ ν εἶναι ἴσα, ἤτοι εἶναι γων.ω=γων.ν.

Ἐπειδὴ αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι ω καὶ ν εἶναι ἴσαι καὶ τὰ ἀντίστοιχα τόξα των εἶναι ἴσα, ἤτοι εἶναι τόξ.ΓΔ=τόξ.ΒΕ.

Ἐὰν ἀπὸ τὰ ἴσα ΒΕΑ καὶ ΑΔΓ ἀφαιρέσωμεν τὰ ἴσα τόξα ΒΕ καὶ ΓΔ, τὰ ἀπομένοντα τόξα ΕΑ καὶ ΑΔ εἶναι ἴσα, ἤτοι εἶναι τόξ.ΕΑ=τόξ.ΑΔ.


Σχ. 62

Ὥστε τὸ Α εἶναι μέσον τοῦ τόξου ΕΑΔ καὶ ἐπομένως ἡ διάμετρος ΘΟΑ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ἀντιστοίχου χορδῆς ΕΔ, ἤτοι εἶναι ΕΝ=ΝΔ.

*2ον.* Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΗ.

Ἐδείχθη ἀνωτέρω, ὅτι αἱ γωνίαι ω καὶ ν εἶναι ἴσαι, ἄρα τὸ τρίγωνον ΜΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἐπομένως ἡ κάθετος ΗΑ εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεώς του ΒΓ θὰ διέλθη διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ Μ. Ὥστε τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τοῦ ὕψους ΑΗ.

*3ον.* Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ΒΓ καὶ ΕΔ εἶναι παράλληλοι. Τὸ τρίγωνον ΜΔΕ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἡ ΜΝ εἶναι διάμεσος καὶ ὕψος αὐτοῦ. Τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΜΒΓ καὶ ΜΔΕ ἔχουν τὰς γωνίας τῆς κορυφῆς των Μ ἴσας, ὡς κατὰ κορυφήν· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ τὰς παρὰ τὰς βάσεις των γωνίας ἴσας, ἤτοι θὰ εἶναι γων.ω=γων.σ.

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΕΔ καὶ ΒΓ τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΒΔ σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ω καὶ σ ἴσας· ἄρα αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ ΕΔ καὶ ΒΓ εἶναι παράλληλοι.

*4ον.* Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΕΜΔ εἶναι ρόμβος. Φέρομεν τὰς χορδὰς ΑΕ καὶ ΑΔ. Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΚ κάθετον ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΕ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν χορδὴν ΒΔ εἰς τὸ σημεῖον Λ.

Ἐπειδὴ ἡ ΟΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΕ, διχοτομεῖ τὸ τόξον ΑΕ, ἤτοι εἶναι τόξ.ΕΚ=τόξ.ΚΑ.

Ἐὰν εἰς τὰ ἴσα αὐτὰ τόξα προσθέσωμεν τὰ ἴσα τόξα ΒΕ καὶ ΑΔ, τὰ προκύπτοντα τόξα ΒΕΚ καὶ ΚΑΔ εἶναι ἴσα, ἤτοι εἶναι τόξ.ΒΕΚ=τόξ.ΚΑΔ. (Εἶναι δὲ τὰ τόξα ΒΕ καὶ ΑΔ ἴσα, διότι αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι ω′ καὶ ν εἶναι ἴσαι, ὡς ἴσαι πρὸς τὴν ω).

Ἐπειδὴ ἡ ΚΟΛ διχοτομεῖ τὸ τόξον ΒΚΔ, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν χορδὴν ΒΔ, ἔπεται ὅτι θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΒΔ. Αἱ ΕΑ καὶ ΒΔ εἶναι λοιπὸν παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΚΟΛ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι αἱ ΑΔ καὶ ΕΓ εἶναι παράλληλοι. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΑΕΜΔ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἐπειδὴ αἱ δύο διαδοχικαὶ πλευραί του ΑΕ καὶ ΑΔ εἶναι ἴσαι, ὡς χορδαὶ τῶν ἴσων τόξων ΑΕ καὶ ΑΔ, ἕπεται ὅτι εἶναι ρόμβος.

Σημ. Εἰς τὸ σχῆμα νὰ τεθῇ τὸ γράμμα Μ εἰς τὴν τομὴν τῶν ΒΔ καὶ ΓΕ, ἀντὶ τοῦ Α

*858. Δίδεται ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ, *ὀρθογώνιον εἰς τὸ* Α· *ἀπὸ τὰ ἄκρα* Β *καὶ* Γ *τῆς ὑποτεινούσης* ΒΓ *φέρομεν τὰς καθέτους* Βx *καὶ* Γy *ἐπὶ τὴν* ΒΓ. *Ἀπὸ τὸ μέσον* Μ *τῆς* ΒΓ *φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν* ΑΓ, *ἡ ὁποία τέμνει τὴν* Γy *εἰς τὸ* Ε *καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν* ΑΒ, *ἡ ὁποία τέμνει τὴν* Βx *εἰς τὸ* Δ. *Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι τὰ σημεῖα* Δ, Α, Ε *κεῖνται ἐπ' εὐθείας. 2ον ὅτι τὰ τετράπλευρα* ΑΔΒΜ *καὶ* ΑΜΓΕ *εἶναι ἐγγράψιμα εἰς κύκλον· 3ον. ὅτι ἡ περιφέρεια ἡ περιγεγραμμένη περὶ τὸ τρίγωνον* ΔΜΕ *ἐφάπτεται τῆς* ΒΓ. *4ον. Αἱ ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας αὐτῆς εἰς τὰ σημεῖα* Δ *καὶ* Ε *τέμνουν τὴν* ΒΓ *εἰς τὰ σημεῖα* Ζ *καὶ* Η *ἀντιστοίχως. Ἐὰν* Κ *εἶναι τὸ μέσον τῆς* ΔΕ, *νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία* ΖΚΗ *εἶναι ὀρθή.*

*Ἀπ. 1ον.* Φέρομεν τὴν διάμεσον ΑΜ, ἡ ὁποία χωρίζει τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ εἰς δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΜΒ καὶ ΑΜΓ· ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{A_2}=\widehat{B_2}$ καὶ $\widehat{A_3}=\widehat{\Gamma_1}$. Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΜΒ ἡ ΜΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν του ΑΒ· ἄρα θὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ΑΒ.

Ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι ΔΑ=ΔΒ, διότι τὸ Δ εἶναι σημεῖον τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ.

Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΔΑΒ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως $\widehat{A_1}=\widehat{B_1}$·

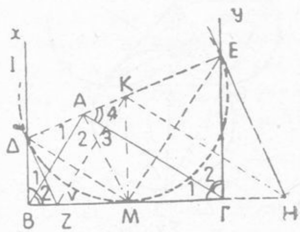
Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν. ὅτι $\widehat{A_4}=\widehat{\Gamma_2}$.

Ἐπειδὴ ἡ Βx εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ θὰ εἶναι $\widehat{B_1}+\widehat{B_2}=1$ ὀρθ. ἢ $\widehat{A_1}+\widehat{A_2}=1$ ὀρθ. Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $\widehat{A_3}+\widehat{A_4}=\widehat{\Gamma_1}+\widehat{\Gamma_2}=1$ ὀρθ.

Ἐπειδὴ $\Delta\widehat{A}M=M\widehat{A}E=(\widehat{A_1}+\widehat{A_2})+(\widehat{A_3}+\widehat{A_4})=1$ ὀρθ.$+1$ ὀρθ.$=2$ ὀρθ. ἡ ΔΑΕ εἶναι εὐθεῖα.

*2ον.* Τὸ τετράπλευρον ΑΔΒΜ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, διότι αἱ δύο ἀπέναντι γωνίαι του Α καὶ Β εἶναι παραπληρωματικαί.

Ὁμοίως καὶ τὸ τετράπλευρον ΑΜΓΕ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, διότι αἱ ἀπέναντι γωνίαι του Α καὶ Γ εἶναι παραπληρωματικαί.



Σχ. 63

*3ον.* Φέρομεν τὴν ΜΚ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΔΕ εἰς τὸ Κ. Εἰς τὸ τραπέζιον ΔΒΓΕ ἡ ΜΚ ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ΒΓ καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις του ΒΔ καὶ ΓΕ (αἱ ΔΕ, ΜΚ καὶ ΓΕ, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν ΒΓ, εἶναι παράλληλοι)· ἄρα ἡ ΜΚ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον Κ τῆς ΔΕ, ὥστε εἶναι ΚΔ=ΚΕ.

Αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΔΜΕ εἶναι ἴσαι, διότι αἱ πλευραί των εἶναι κάθετοι ἐκ κατασκευῆς.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ὀρθή, θὰ εἶναι ὀρθὴ καὶ ἡ ΔΜΕ.

Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΔΜΕ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Μ καὶ ἡ ΜΚ εἶναι διάμεσός του· ἄρα θὰ εἶναι ΚΜ=ΚΔ=ΚΕ.

Ἂν λοιπὸν γράψωμεν περιφέρειαν μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΔ=ΚΜ=ΚΕ, αὕτη θὰ διέλθῃ ἀπὸ τὰ σημεῖα Δ, Μ, Ε. Ἡ ΒΓ θὰ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον Μ, διότι ἡ ἀκτὶς ΚΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ ἐκ κατασκευῆς.

*4ον*. Αἱ ΖΔ καὶ ΖΜ εἶναι ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας Κ· ἄρα ἡ ΖΚ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΔΖΜ, ἤτοι εἶναι $\nu=\frac{1}{2}\cdot\widehat{\Delta Z M}$.

Ὁμοίως αἱ ΗΕ καὶ ΗΜ εἶναι ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας Κ· ἄρα ἡ ΚΗ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΜΗΕ, δηλ. εἶναι γων.ΜΗΚ$=\frac{1}{2}$ γων.ΜΗΕ.

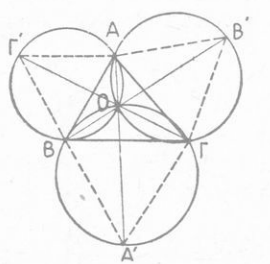
Αἱ ΔΖ καὶ ΕΗ εἶναι παράλληλοι ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν διάμετρον ΔΕ.

Αἱ γωνίαι λοιπὸν ΔΖΜ καὶ ΜΗΕ εἶναι παραπληρωματικαί, διότι εἶναι ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΔΖ καὶ ΕΗ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΗ.

Ἄρα τὰ μισὰ αὐτῶν τῶν γωνιῶν, δηλ. αἱ γωνίαι ν καὶ ΜΗΚ θὰ ἔχουν ἄθροισμα μίαν ὀρθήν· ἐπειδὴ αἱ ν καὶ ΜΗΚ ἔχουν ἄθροισμα 1 ὀρθὴν ἕπεται, ὅτι ἡ τρίτη γωνία τοῦ τριγώνου ΖΚΗ θὰ εἶναι ὀρθή.

*859. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου* ΑΒΓ *κατασκευάζομεν, ἐξωτερικῶς τοῦ τριγώνου, τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα* ΑΒΓ′, ΒΓΑ′, ΓΑΒ′. ***Νὰ ἀποδειχθῇ**. 1ον. ὅτι αἱ εὐθεῖαι* ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ *εἶναι ἴσαι καὶ ὅτι τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον* Ο. *2ον. ὅτι ἀπὸ τὸ* Ο *βλέπομεν ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου* ΑΒΓ. *(Πολυτεχνεῖον 1943).*

*Ἀπ. 1ον.* Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΑΑ′=ΒΒ′=ΓΓ′. Τὰ τρίγωνα ΑΒΑ′ καὶ Γ′ΒΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, ἤτοι ἔχουν ΑΒ=ΒΓ′, ὡς πλευρὰς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, ΑΒΓ′, ΒΑ′=ΒΓ, ὡς πλευρὰς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΒΓΑ′ καὶ γων.ΑΒΑ′=γων.Γ′ΒΓ, διότι ἑκάστη τούτων εἶναι ἄθροισμα μιᾶς γωνίας $60^0$ καὶ τῆς κοινῆς γωνίας ΑΒΓ· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ΑΑ′=ΓΓ′ (1).



Σχ. 64

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΓΑ′ καὶ Β′ΒΓ εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΑΑ′=ΒΒ′ (2).

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι ΑΑ′=ΒΒ′=ΓΓ′.

*2ον.* Περιγράφομεν περὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ′ καὶ ΒΓΑ′ δύο κύκλους, οἱ ὁποῖοι τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Ο. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία εἶναι περιγεγραμμένη περὶ τὸ τρίγωνον ΑΓΒ′ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ.

Τὸ τετράπλευρον Γ′ΒΟΑ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον ΑΓ′Β· ἄρα αἱ δύο ἀπέναντι γωνίαι του Γ′ καὶ Ο εἶναι παραπληρωματικαί· ἤτοι εἶναι γων.Γ′+γων.ΒΟΑ=$180^0$ καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία Γ′ εἶναι

60° ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΒΟΑ εἶναι 120°, ἤτοι εἶναι γων.ΒΟΑ=120°.

Ὁμοίως ἀπὸ τὸ ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον ΒΑ'ΓΟ εὑρίσκομεν, ὅτι γων.ΒΟΓ=120°.

Ἐπειδὴ αἱ περὶ τὸ Ο σχηματιζόμεναι τρεῖς γωνίαι ΒΟΑ, ΒΟΓ καὶ ΓΟΑ ἔχουν ἄθροισμα 360°, αἱ δὲ δύο γωνίαι ΒΟΑ καὶ ΒΟΓ εἶναι ἀπὸ 120° ἑκάστη ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΓΟΑ εἶναι 120°, ἤτοι γων.ΓΟΑ=120°.

Εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΟΓΒ', αἱ δύο ἀπέναντι γωνίαι του ΓΟΑ καὶ Β' ἔχουν ἄθροισμα 120°+60°=180°· ἄρα τὸ τετράπλευρον αὐτὸ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ ἑπομένως ἡ περιφέρεια, ἡ περιγεγραμμένη περὶ τὸ τρίγωνον ΑΓΒ' διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο.

Φέρομεν τώρα τὰς εὐθείας ΟΑ', ΟΒ', ΟΓ'. Αἱ γωνίαι Γ'ΒΑ καὶ Γ'ΟΑ εἶναι ἴσαι, ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον καὶ βαίνουσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου Γ'Α, ἤτοι εἶναι γων.Γ'ΟΑ=γων Γ'ΒΑ=60°.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΒΟΑ εἶναι 120°, ἡ δὲ γωνία Γ'ΟΑ=60° ἕπεται, ὅτι καὶ γων.ΒΟΓ'=60°, ἤτοι ἡ ΟΓ' εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΟΑ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι καὶ αἱ ΟΑ', ΟΒ' εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ΒΟΓ καὶ ΑΟΓ. Θὰ εἶναι λοιπὸν

γων ΑΟΒ+γων.ΒΟΑ'=120°+60°=180°.

Ἐπειδὴ αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΒΟΑ' εἶναι παραπληρωματικαί, αἱ μὴ κοιναὶ πλευραί των κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ἤτοι ἡ ΑΟΑ' εἶναι εὐθεῖα.

Ὁμοίως, ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ αἱ ΒΟΒ', ΓΟΓ' εἶναι εὐθεῖαι. Ὥστε αἱ ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο.

Ἐδείχθη, ὅτι γων.ΑΟΒ=γων.ΒΟΓ=γων.ΓΟΑ=120°. Ὥστε αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ φαίνονται ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν.

*860. Εἰς ἕνα κύκλον Ο δίδεται μία διάμετρος ΑΒ καὶ μία ἐφαπτομένη Γx παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς Γx φέρομεν δευτέραν ἐφαπτομένην ΜΔ τοῦ Ο· ἀπὸ τὸ Μ φέρομεν τὴν ΜΝ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν χορδὴν ΑΔ εἰς τὸ σημεῖον Ε· φέρομεν τὴν διάμετρον ΓΟΖ. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι τὰ σημεῖα Ε, Ν, Β, Δ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας. 2ον ὅτι τὸ τετράπλευρον ΟΖΝΜ εἶναι παραλληλόγραμμον. 3ον ὅτι τὰ σημεῖα Ζ, Ν, Δ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. 4ον ὅτι τὰ σημεῖα Γ, Ε, Β κεῖνται ἐπ' εὐθείας.*

*Ἀπ. 1ον.* Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ σημεῖα Ε, Ν, Β, Δ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας· ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΝΒΔ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

Πράγματι ἡ γωνία Ν τοῦ τετραπλεύρου ΕΝΒΔ εἶναι ὀρθή, διότι ἡ ΜΝ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐξ ὑποθέσεως. Ἐπίσης ἡ γωνία Δ αὐτοῦ εἶναι ὀρθή, ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον.

Ἐπειδὴ αἱ δύο ἀπέναντι γωνίαι Ν καὶ Δ τοῦ τετραπλεύρου ΕΝΒΔ εἶναι παραπληρωματικαὶ ἕπεται, ὅτι τὸ τετράπλευρον αὐτὸ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. Ὥστε τὰ σημεῖα Ε, Ν, Β, Δ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας, περιγεγραμμένης περὶ τὸ τετράπλευρον ΕΝΒΔ.

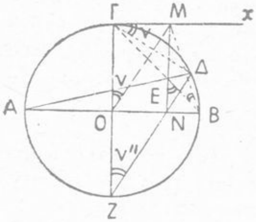
*2ον.* Φέρομεν τὴν ΟΜ καὶ ΖΝ· θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΟΖΝΜ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἡ διάμετρος ΖΟΓ καταλήγει εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Γ· ἄρα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην Γx καὶ ἑπομένως καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΑΒ. Αἱ ΓΖ καὶ ΜΝ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ.

Αἱ ΟΓ καὶ ΝΜ εἶναι ἴσαι, ὡς κάθετοι, περιεχόμεναι μεταξὺ παραλλήλων, ἤτοι εἶναι ΟΓ=ΝΜ, ἀλλὰ ΟΓ=ΟΖ ὡς ἀκτῖνες τοῦ κύκλου· ἄρα θὰ εἶναι ΝΜ=ΟΖ.

Τὸ τετράπλευρον ΟΖΝΜ εἶναι λοιπὸν παραλληλόγραμμον, διότι αἱ ἀπέναντι πλευραί του ΟΖ καὶ ΝΜ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

*3ον.* Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ σημεῖα Ζ, Ν, Δ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.



Σχ. 65

Αἱ γωνίαι ν'' καὶ ν' εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλ. ΖΝ καὶ ΟΜ τεμνομένων ὑπὸ τοῦ ΓΖ, ἤτοι εἶναι ν''=ν' (1).

Ἀλλὰ ν'=ν (2), διότι ἔχουν τὰς πλευρὰς των καθέτους μίαν πρὸς μίαν, ἤτοι ἔχουν τὴν ΟΓ κάθετον ἐπὶ τὴν Γx καὶ τὴν ΟΜ κάθετον ἐπὶ τὴν χορδὴν ΓΔ, διότι ἡ ΟΜ συνδέει τὸ κέντρον Ο μὲ τὸ σημεῖον Μ ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἄγονται αἱ ἐφαπτόμεναι ΜΓ καὶ ΜΔ.

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι ν''=ν.

Ἀλλὰ ἡ γωνία, ἡ ὁποία σχηματίζεται ὑπὸ χορδῆς ΓΔ καὶ ἐφαπτομένης Γx ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ τόξου ΓΔ, τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν της, ἤτοι εἶναι $\nu = \frac{1}{2}$ μέτρ.τόξ.ΓΔ· ἄρα καὶ ἡ ἴση πρὸς τὴν ν ἐγγεγραμμένη γωνία ν'', τῆ ὁποίας ἡ μία πλευρὰ ΓΖ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς θὰ ἔχῃ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΓΔ.

Ὥστε ἡ ΖΝ προεκτεινομένη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Δ. Τὰ σημεῖα λοιπὸν Ζ, Ν καὶ Δ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

*4ον.* Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ σημεῖα Γ, Ε, Β κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Φέρομεν τὴν χορδὴν ΓΒ. Τὸ τρίγωνον ΓΟΒ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές, ἄρα θὰ εἶναι γων.Β=45°.

Ἐδείξαμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΝΒΔ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. Φέρομεν τὴν ΕΒ.

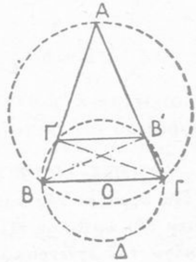
Αἱ γωνίαι ΝΕΒ καὶ ΝΔΒ εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ΕΝΒΔ καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΝΒ, ἤτοι εἶναι γων.ΝΕΒ=ΝΔΒ (3)· ἀλλὰ ΝΔΒ=45°, διότι εἶναι ἐγγραμμένη εἰς τὸν κύκλον Ο καὶ βαίνει ἐπὶ τοῦ τεταρτημορίου ΖΒ· ἄρα θὰ εἶναι γωνΝΕΒ=γων.ΝΔΒ=45°.

Ἐπειδὴ γων.ΝΕΒ=45, θὰ εἶναι καὶ γων.ΝΒΕ=45°. Ἀλλὰ ἐδείχθη ἀνωτέρω, ὅτι καὶ γων.ΟΒΓ=45°.

Αἱ γωνίαι ΟΒΓ καὶ ΝΒΕ εἶναι ἴσαι καὶ ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὸ Β καὶ κοινὴν πλευρὰν τὴν ΒΟ αἱ δὲ ἄλλαι πλευραί των ΒΓ καὶ ΒΕ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κοινῆς πλευρᾶς· ἄρα πρέπει νὰ συμπίπτουν, ἐφ' ὅσον εἶναι ἴσαι· ὥστε τὰ σημεῖα Β, Ε, Γ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

*861. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς ὅλα τὰ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ σταθερὰν τὴν γωνίαν Α τῆς κορυφῆς, τὸ μέσον Ο τῆς βάσεως ΒΓ ἀπέχει σταθερὰν ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς εὐθείας Β'Γ', ἡ ὁποία συνδέει τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν ΒΒ' καὶ ΓΓ' τοῦ τριγώνου, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς βάσεως.*

*Ἀπ.* Ἐπειδὴ ἡ γωνία Α εἶναι σταθερά, ἡ κορυφή της Α κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν ΒΓ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ τὴν Α.



Σχ. 66

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΒΒ'Γ καὶ ΓΓ'Β εἶναι ὀρθαί, ἐξ ὑποθέσεως, αἱ κορυφαὶ των Β' καὶ Γ' κεῖνται ἐπὶ περιφερείας κύκλου, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν ΒΓ. Οἱαδήποτε καὶ ἐὰν εἶναι ἡ θέσις τῆς κορυφῆς Α, ἡ περιφέρεια Ο, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν ΒΓ διέρχεται πάντοτε ἀπὸ τοὺς πόδας Β' καὶ Γ' τῶν ὑψῶν ΒΒ' καὶ ΓΓ'.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία Α ἔχει τὴν κορυφήν της ἐκτὸς τοῦ κύκλου Ο, ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς τῶν μέτρων τῶν τόξων ΒΔΓ καὶ Β'Γ', ἤτοι εἶναι

$$\text{γων.Α} = \frac{1}{2}\,(\text{μέτρ.τόξ.ΒΔΓ} - \text{μέτρ.τόξ Β'Γ'}).$$

Ἐπίσης σταθερὰ εἶναι καὶ ἡ ἡμιπεριφέρεια ΒΔΓ· ἄρα καὶ τὸ τόξον Β'Γ' θὰ εἶναι σταθερὸν καὶ ἑπομένως καὶ ἡ χορδή του Β'Γ' θὰ εἶναι σταθερά.

Ἐπειδὴ ἡ χορδὴ Β'Γ' εἶναι σταθερά, ἡ ἀπόστασίς της ἀπὸ τὸ κέντρον Ο θὰ εἶναι σταθερά.

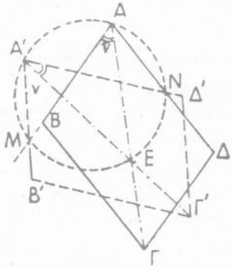
*862. Θεώρημα τοῦ* Transon. *Ὅταν ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι σταθερὸν κατὰ τὸ μέγεθος, μετατίθεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του οὕτως, ὥστε δύο διαδοχικαὶ πλευραί του ΑΒ καὶ ΑΔ νὰ διέρχωνται ἀπὸ δύο σταθερὰ σημεῖα Μ καὶ Ν, ἡ διαγώνιος ΑΓ διέρχεται ἐπίσης ἀπὸ ἕνα ὡρισμένον σημεῖον.*

*Ἀπ.* Ἐπειδὴ κατὰ τὴν μετάθεσιν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ μένει ἀμετάβλητον κατὰ τὸ μέγεθος, ἡ γωνία του Α εἶναι σταθερά.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ σταθερὰ κατὰ τὴν θέσιν της καὶ τὸ μέγεθος εὐθεῖα ΜΝ φαίνεται ἀπὸ τὸ Α ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν· ἄρα ἡ κορυφὴ Α κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν ΜΝ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ τὴν Α.

Κατασκευάζομεν τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει τὸ κυκλικὸν αὐτὸ τμῆμα. Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ σημεῖον Ε.

Ἐπειδὴ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι σταθερόν, ἡ γωνία ν, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ διαγώνιος ΑΓ μὲ τὴν πλευρὰν ΑΒ εἶναι σταθερά.



Σχ. 67

Ἐὰν λάβωμεν μίαν ἄλλην θέσιν τοῦ παραλληλογράμμου ἔστω τὴν Α'Β'Γ'Δ', πάλιν ἡ γωνία ν', ἡ ἴση μὲ τὴν ν, θὰ εἶναι σταθερά.

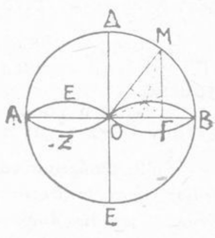
Ἀλλὰ αἱ γωνίαι ν καὶ ν' εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον Ο καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἴσαι καὶ τὰ τόξα ἐπὶ τῶν ὁποίων βαίνουν εἶναι ἴσα.

Ἀλλὰ ἡ μία ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΑΒ ἢ Α'Β' τῶν ἴσων γωνιῶν ν καὶ ν' διέρχεται πάντοτε ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Μ τῆς περιφερείας· ἄρα καὶ ἡ ἄλλη πλευρὰ ΑΓ ἢ Α'Γ' ἀναγκαστικῶς θὰ διέλθῃ ἀπὸ τὸ σημεῖον Ε· ὥστε ἡ διαγώνιος ΑΓ ἢ Α'Γ' τοῦ σταθεροῦ παραλληλογράμου διέρχεται πάντοτε ἀπὸ τὸ σημεῖον Ε.

***Β' Ὁμάς. 863. Δίδεται μία περιφέρεια*** **Ο** ***καὶ διάμετρος*** **ΑΒ.** ***Ἔστω*** **Μ** ***ἕνα σημεῖον τῆς περιφερείας. Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα*** **ΟΜ** ***καὶ ἀπὸ τὸ*** **Μ** ***φέρομεν τὴν κάθετον*** **ΜΓ** ***ἐπὶ τὴν*** **ΑΒ.** ***Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον*** **ΟΜΓ.**

***Λ υ σ ι ς.*** Φέρομεν τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΟΓΜ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο'. Τὸ Ο' εἶναι προφανῶς σημεῖον τοῦ τόπου.

Φέρομεν τὴν Ο'Β. Τὰ τρίγωνα ΟΟ'Β καὶ ΟΟ'Μ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὴν ΟΟ' κοινήν, τὴν ΟΒ=ΟΜ, ὡς ἀκτῖνας τοῦ αὐτοῦ κύκλου καὶ γων.Ο'ΟΒ=γων.Ο'ΟΜ, διότι ἡ ΟΟ' εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΜΟΒ. Ἄρα θὰ ἔχουν καὶ γων.ΟΟ'Β=ΟΟ'Μ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΟΟ'Μ εἶναι γων.ΟΟ'Μ=180°−($\widehat{O'OM}+\widehat{O'MO}$) (1).



Σχ. 68

Ἐπειδὴ εἰς τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΜΓΟ εἶναι γων.Ο+γων.Μ=90° ἕπεται, ὅτι

$$\widehat{O'OM}+\widehat{O'MO}=45^\circ,$$

ὁπότε ἡ (1) γίνεται γων.ΟΟ'Μ=180°−45°=135°=γων.ΟΟ'Β.

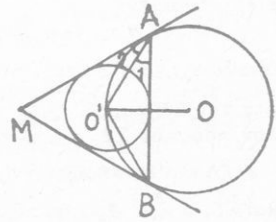
Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ΟΒ φαίνεται ἀπὸ τὸ Ο' ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν 135°· ἄρα τὸ Ο' κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν ΟΒ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ 135. Τὸ τόξον ΟΟ'Β εἶται ὁ ζητούμενος τόπος.

Ὅταν τὸ Μ κινῆται ἐπὶ τῶν τόξων ΔΑ, ΑΕ, ΕΒ εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι καὶ τὰ τόξα ΑΕΟ, ΑΖΟ, ΟΗΒ.

Σ η μ. Εἰς τὸ σχῆμα νὰ τεθῇ τὸ γράμμα Θ ἀντὶ Ε, τὸ γράμμα Ο' εἰς τὴν τομὴν τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΟΓΜ καὶ τὸ γράμμα Η εἰς τὸ τόξον ΟΒ.

*864. Ἕνα μεταβλητὸν σημεῖον Μ κεῖται ἐκτὸς ἑνὸς κύκλου Ο. Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΜΑ καὶ ΜΒ τοῦ κύκλου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον* ΜΑΒ.

*Λύσις.* Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΜΑΒ τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Ο΄. Τὸ Ο΄ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου. Ἡ ΑΟ΄, ὡς διχοτόμος τῆς γωνίας ΜΑΒ, διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ τόξου ΑΒ.




Σχ. 69

Πράγματι ἡ γωνία $Α_2$ εἶναι γωνία σχηματιζομένη ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένη, ἡ δὲ $Α_1$ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κύκλον Ο.

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἴσαι πρέπει καὶ τὰ τόξα ΑΟ΄ καὶ Ο΄Β νὰ εἶναι ἴσα.

Ὁμοίως ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Β διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ τόξου ΑΒ. Ὥστε τὸ κέντρον Ο΄ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον ΜΑΒ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Ο.

Ἀ ν τ ι σ τ ρ ό φ ω ς. Ἔστω Ο΄ ἕνα τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας Ο. Φέρομεν μίαν χορδὴν ΑΒ κάθετον ἐπὶ τὴν Ο΄Ο καὶ φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας Ο εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Μ.

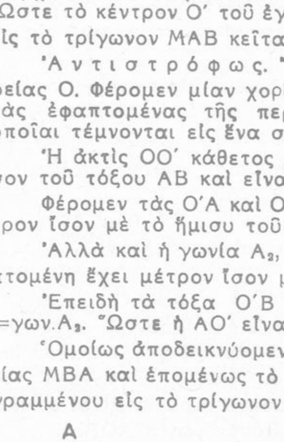
Ἡ ἀκτὶς ΟΟ΄ κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΒ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ τόξου ΑΒ καὶ εἶναι τόξ Ο΄Α=τόξ Ο΄Β.

Φέρομεν τὰς Ο΄Α καὶ Ο΄Β. Ἡ γωνία $Α_1$, ὡς ἐγγεγραμμένη, ἔχει μέτρον ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ τόξου Ο΄Β.

Ἀλλὰ καὶ ἡ γωνία $Α_2$, ὡς σχηματιζομένη ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένη ἔχει μέτρον ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ τόξου ΑΟ΄.

Ἐπειδὴ τὰ τόξα Ο΄Β καὶ Ο΄Α εἶναι ἴσα ἔπεται, ὅτι γων.$Α_1$= =γων.$Α_2$. Ὥστε ἡ ΑΟ΄ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΜΑΒ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι καὶ ἡ Ο΄Β εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΜΒΑ καὶ ἑπομένως τὸ Ο΄ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον ΜΑΒ. Ὥστε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ὁλόκληρος ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου Ο.




Σχ. 70

*865. Ἕνα μεταβλητὸν σημεῖον* Μ *κεῖται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς* ΑΒ *ἑνὸς τριγώνου* ΑΒΓ. *Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως* ΓΧ *τῆς* ΑΓ *λαμβάνομεν ἕνα τμῆμα* ΓΝ=ΒΜ. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῆς κορυφῆς* Σ *τοῦ παραλληλογράμμου* ΒΜΝΣ.

*Λύσις.* Ἔστω Σ ἡ τετάρτη κορυφὴ τοῦ παραλληλογράμμου ΒΜΝΣ. Τὸ Σ εἶναι προφανῶς σημεῖον τοῦ τόπου.

Φέρομεν τὴν ΓΣ. Ἐπειδὴ ΓΝ=ΒΜ καὶ ΒΜ=ΣΝ θὰ εἶναι ΓΝ=ΣΝ. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΓΝΣ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι

γων.$Γ_1$=γων.ΓΣ.Ν

'Αλλὰ ἡ ἐξωτερικὴ γωνία $N_1$ τοῦ τριγώνου ΓΝΣ εἶναι ἴση μὲ $\Gamma_1+\Sigma_1$ ἢ μὲ $2\Gamma_1$.

'Επειδὴ δὲ εἶναι γων.$N_1$=γων.Α ἕπεται ὅτι γων.$\Gamma_1=\frac{N_1}{2}=\frac{A}{2}$.

Ὥστε ἡ γωνία $\Gamma_1$ εἶναι σταθερὰ καὶ ἑπομένως ἡ διεύθυνσις τῆς ΓΣΥ εἶναι ὡρισμένη

'Α ν τ ι σ τ ρ ό φ ω ς. Ἔστω Σ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς ΓΥ, ἡ ὁποία σχηματίζει μὲ τὴν ΑΓΧ γωνίαν $\mathrm{Y\Gamma X}=\frac{A}{2}$. 'Απὸ τό Σ φέρομεν τὴν ΣΝ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΑ καὶ ἀπὸ τὸ Ν τὴν ΝΜ παράλληλον πρὸς τὴν ΣΒ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΝΓΣ ἡ ἐξωτερικὴ γωνία $N_1=\Gamma_1+\Sigma_1$.

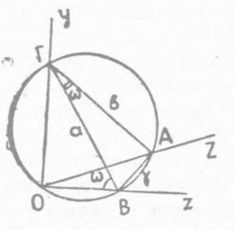
'Αλλὰ $\widehat{N_1}=\widehat{A}$, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη παραλλήλων, καὶ $\Gamma_1=\frac{A}{2}$· ἄρα θὰ εἶναι $\Sigma_1=\frac{A}{2}=\Gamma_1$. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΓΝΣ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως εἶναι ΓΝ=ΝΣ.

'Αλλὰ ΝΣ=ΒΜ, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ παραλληλογράμμου· ἄρα θὰ εἶναι ΣΝ=ΒΜ. Ὥστε τὸ Σ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Σ η μ. Εἰς τὸ σχῆμα νὰ τεθῇ τὸ γράμμα Ν.

*866. Τὰ ἄκρα τῆς ὑποτεινούσης ἑνὸς γνώμονος ὀλισθαίνουν ἐπὶ τῶν πλευρῶν μιᾶς ὀρθῆς γωνίας* xOy. ***Νὰ εὑρεθῇ** ὁ τόπος τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας.*

*Λύσις.* Ἔστω ΑΒΓ μία οἱαδήποτε θέσις τοῦ γνώμονος καὶ ΑΒ ἡ μικροτέρα πλευρὰ αὐτοῦ.




Σχ. 71

Τὸ τετράπλευρον ΟΒΑΓ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, διότι αἱ δύο ἀπέναντι γωνίαι Ο καὶ Α εἶναι ὀρθαί.

Φέρομεν τὴν ΟΑ· ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ΑΓΒ, διότι ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον εἰς τὸν κύκλον τὸν περιγεγραμμένον περὶ τὸ τετράπλευρον. 'Αλλὰ ἡ γωνία Γ τοῦ γνώμονος εἶναι σταθερά· ἄρα θὰ εἶναι σταθερὰ καὶ ἡ ἴση πρὸς αὐτὴν γωνία ΑΟΒ.

'Επειδὴ ὅμως ἡ Ox εἶναι σταθερὰ κατὰ τὴν θέσιν ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ πλευρὰ ΟΑ εἶναι σταθερὰ κατὰ τὴν θέσιν. Ἡ κορυφὴ λοιπὸν Α κεῖται ἐπὶ εὐθείας ΟΖ, ἡ ὁποία σχηματίζει μετὰ τὴν Ox γωνίαν ἴσην μὲ τὴν Γ. ('Εξετάζομεν τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὰ Ο καὶ Α εὑρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς ὑποτεινούσης).

'Α ν τ ι σ τ ρ ό φ ω ς. Ἔστω Α ἕνα τυχὸν σημεῖον τῆς ΟΖ. Μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν πλευρὰν β τοῦ γνώμονος γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν Oy εἰς τὸ σημεῖον Γ. 'Εκ τοῦ Α φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ καὶ ἔστω ὅτι αὕτη τέμνει τὴν Ox εἰς τὸ Β. Φέρομεν τὴν ΒΓ.

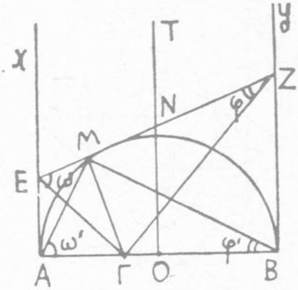
Τὸ τετράπλευρον ΟΒΑΓ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, διότι αἱ δύο ἀπέναντι γωνίαι Ο καὶ Α εἶναι ὀρθαί. Θὰ εἶναι λοιπὸν γων.ΑΓΒ=γων.ΑΟΒ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον μὲ το δοθὲν τρίγωνον τοῦ γνώμονος, διότι ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην, τὴν β, καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην.

Ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΟΖ.

*867. Δίδεται ἡμιπεριφέρεια Ο διαμέτρου ΑΒ καὶ ἕνα σημεῖον Γ τῆς ΑΒ. Συνδέομεν μὲ εὐθεῖαν τὸ σημεῖον Γ μὲ ἕνα τυχὸν σημεῖον Μ τῆς ἡμιπεριφερείας. Ἡ κάθετος εἰς τὸ Μ ἐπὶ τὴν ΓΜ τέμνει εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ τὰς ἐφαπτομένας τῆς ἡμιπεριφερείας εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι : 1ον τὰ τετράπλευρα ΑΓΜΕ καὶ ΒΓΜΖ εἶναι ἐγγράψιμα. 2ον ἡ γωνία ΕΓΖ εἶναι ὀρθή. 3ον νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου τῆς ΕΖ, ἐὰν τὸ Μ διαγράφῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν καὶ τὸ Γ μένῃ σταθερόν.*

*Λύσις 1ον.* Τὸ τετράπλευρον ΑΓΜΕ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον διότι αἱ ἀπέναντι γωνίαι του Α καὶ Μ εἶναι ὀρθαί.

Ὁμοίως καὶ τὸ τετράπλευρον ΒΓΜΖ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, διότι αἱ ἀπέναντι γωνίαι του Β καὶ Μ εἶναι ὀρθαί.



Σχ. 72

*2ον.* Φέρομεν τὰς ΜΑ καὶ ΜΒ. Αἱ γωνίαι ω καὶ ω' εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν κύκλον, τὸν περιγεγραμμένον περὶ τὸ τετράπλευρον ΑΓΜΕ καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΓΜ.

Ὁμοίως καὶ αἱ γωνίαι φ καὶ φ' εἶναι ἴσαι δι' ἀνάλογον λόγον.

Ἀλλὰ ω'+φ'=1 ὀρθή, διότι εἶναι αἱ ὀξεῖαι γωνίαι τοῦ ὀρθογ. τριγώνου ΑΜΒ· ἄρα θὰ εἶναι καὶ ω+φ=1 ὀρθή. Ἀλλὰ τότε εἰς τὸ τρίγωνον ΕΓΖ θὰ εἶναι γων.ΕΓΖ=1 ὀρθή, διότι αἱ ἄλλαι δύο γωνίαι του ω καὶ φ ἔχουν ἄθροισμα 1 ὀρθήν.

*3ον.* Ἔστω Ν τὸ μέσον τῆς ΕΖ. Τὸ Ν εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου. Ἀπὸ τὸ Ν φέρομεν τὴν ΝΟ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Ἐπειδὴ αἱ ΕΑ, ΝΟ, ΖΒ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΒ, θὰ εἶναι παράλληλοι μεταξύ των. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ΕΝ=ΝΖ, θὰ εἶναι καὶ ΑΟ=ΟΒ.

Ὥστε τὸ Ν κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ΟΓ ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ κέντρον Ο. Ἡ κάθετος αὐτὴ εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος.

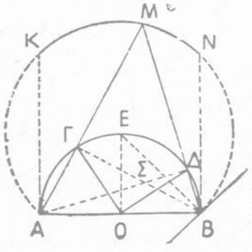
Προφανῶς ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι τὸ τμῆμα τῆς καθέτου ΟΤ τὸ κείμενον ἐκτὸς τοῦ ἡμικυκλίου ΑΜΒ.

*868. Εἰς ἡμιπεριφέρειαν Ο διαμέτρου ΑΒ φέρομεν δύο ἀκτῖνας ΟΓ καὶ ΟΔ καθέτους μεταξύ των. Αἱ ΑΔ καὶ ΒΓ τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ἡμικυκλίου. Αἱ ΑΓ καὶ ΒΔ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἡμικυκλίου. 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΓ=ΓΣ καὶ ΑΔ=ΔΜ. 2ον. Ἡ ἀκτὶς ΟΓ στρέφεται περὶ τὸ Ο ἀπὸ τὴν θέσιν ΟΑ μέχρι τῆς θέσεως, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου Σ. 3ον. Νὰ εὑρεθῇ ὑπὸ τοὺς αὐτοὺς ὅρους ὁ τόπος τοῦ Μ.*

*'Απ. 1ον.* Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΓΣ, ἡ γωνία ΑΓΣ εἶναι ὀρθή, ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον, ἡ δὲ γων. ΓΑΣ=45°, διότι εἶναι ἐγγεγραμμένη καὶ βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΓΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι 90°, διότι ἡ ἐπίκεντρος γωνία ΓΟΔ εἶναι ὀρθὴ ἐκ κατασκευῆς· ἄρα ἡ τρίτη γωνία του ΑΣΓ=45°.

Τὸ ὀρθογώνιον λοιπὸν τρίγωνον ΑΓΣ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως εἶναι ΓΑ=ΓΣ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΜ, ἡ γωνία ΑΔΜ=1 ὀρθή, ὡς παραπληρωματικὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας ΑΔΒ, καὶ ἡ γωνία ΜΑΔ=45°, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω· ἄρα θὰ εἶναι γων. Μ=45°, ὁπότε τὸ τρίγωνον ΑΔΜ εἶναι ἰσοσκελές. Ἑπομένως θὰ εἶναι ΑΔ=ΔΜ.




Σχ. 73

*2ον.* Τὸ Σ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου. Ἡ γωνία ΑΣΒ, ὡς ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΓΣ θὰ εἶναι ἴση μὲ

ΣΓΑ+γων ΓΑΣ=90°+45°=135°.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ΑΒ φαίνεται ἀπὸ τὸ Σ ὑπὸ γωνίαν 135°· ἄρα τὸ Σ κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν ΑΒ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ 135°. Ὥστε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι τὸ τόξον ΑΣΒ.

*3ον.* Ἐδείξαμεν, ὅτι γων. Μ=45°. Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ΑΒ φαίνεται ἀπὸ τὸ Μ ὑπὸ γωνίαν 45°· ἄρα τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν ΑΒ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ 45°.

Παρατηροῦμεν ὅμως, ὅτι ὅταν ἡ ΟΓ τείνῃ νὰ συμπέσῃ μετὰ τῆς ΟΑ, ἡ ΑΓ τείνει νὰ γίνῃ κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ (ἀκτῖνα) εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς Α, ἤτοι ἐφαπτομένη τῆς ἡμιπεριφερείας εἰς τὸ Α. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ μὲ τὴν ΒΔ, ὅταν ἡ ΟΓ τείνῃ νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ΟΕ (κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ), διότι τότε καὶ ἡ ΟΔ τείνει νὰ συμπέσῃ μετὰ τῆς ΟΒ. Ὁ τόπος λοιπὸν τοῦ Μ εἶναι μόνον τὸ τόξον ΚΜΝ μὲ πέρατα τὰ Κ, Ν, σημεῖα τομῆς τῶν ἐφαπτομένων τοῦ ἡμικυκλίου Ο εἰς τὰ Α, Β.

Εὐκόλως δὲ ἀποδεικνύεται καὶ τὸ ἀντίστροφον.

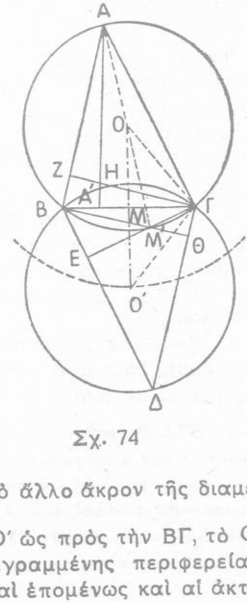
*869.* ***Μία γωνία*** ΒΑΓ, ***σταθεροῦ μεγέθους, στρέφεται περὶ τὴν κορυφήν της*** Α, ***ἡ ὁποία κεῖται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας. Αἱ πλευραί της τέμνουν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα*** Β ***καὶ*** Γ ***ἀντιστοίχως. 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ*** ΒΓ ***διατηρεῖ ἕνα σταθερὸν μῆκος. 2ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ μέσου τῆς*** ΒΓ. ***3ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τριγώνου*** ΑΒΓ. ***4ον. Χαράσσομεν τὸ παραλληλόγραμμον*** ΑΒΔΓ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου*** ΒΓΔ ***εἶναι ἕνα ὡρισμένον σημεῖον. 5ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας, τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον*** ΒΓΔ.

*Ἀπ. 1ον.* Ἐπειδὴ ἡ γωνία Α εἶναι σταθερά, θὰ εἶναι σταθερὸν καὶ τὸ τόξον ΒΓ, ἐπὶ τοῦ ὁποίου βαίνει καὶ συνεπῶς καὶ ἡ χορδὴ ΒΓ θὰ εἶναι σταθερά.

*2ον.* Ζητεῖται ὁ τόπος τῶν μέσων ἴσων χορδῶν τοῦ κύκλου Ο. Γνωρίζομεν (§ 289), ὅτι ὁ τόπος τῶν μέσων ἴσων χορδῶν εἶναι περιφέρεια κύκλου, ὁμόκεντρος τῆς Ο καὶ ἡ ὁποία ἔχει ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν τοῦ Ο ἀπὸ τὴν χορδήν.

*3ον.* Ἔστω Η τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Γνωρίζομεν (§ 205), ὅτι $ΟΜ = \frac{ΑΗ}{2}$ · ἄρα $ΑΗ = 2ΟΜ$.

Ἐπειδὴ ἡ ΟΜ εἶναι σταθερὰ κατὰ τὸ μέγεθός ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ΑΗ εἶναι σταθερά. Ἄρα ὁ τόπος τοῦ ὀρθοκέντρου Η εἶναι περιφέρεια κύκλου, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ 2ΟΜ.



Σχ. 74

*4ον.* Ἔστω ΒΘ ἕνα ὕψος τοῦ τριγώνου ΒΔΓ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ Η'.

Ἐπειδὴ ἡ ΒΘ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΑΒ. Ἄρα ἡ ΑΗ' εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου Ο. Φέρομεν ΓΗ', ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν ΒΔ εἰς τὸ Ε.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΓΗ' εἶναι ὀρθή, ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον ἡ ΓΗ'Ε θὰ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΒΔ. Ὥστε ἡ ΓΗ'Ε εἶναι ὕψος τοῦ τριγώνου ΒΔΓ καὶ τὸ Η' εἶναι τὸ ὀρθόκεντρόν του.

Ὥστε τὸ Η' εἶναι ἕνα σημεῖον τῆς περιφερείας Ο καὶ ὡρισμένον, διότι εἶναι τὸ ἄλλο ἄκρον τῆς διαμέτρου ΑΟΗ'.

*5ον.* Ἐὰν Ο' εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Ο' ὡς πρὸς τὴν ΒΓ, τὸ Ο' θὰ εἶναι τὸ κέντρον τῆς περὶ τὸ ΒΓΔ περιγεγραμμένης περιφερείας. Διότι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΒΓΔ εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως καὶ αἱ ἀκτῖνες τῶν περιγεγραμμένων περιφερειῶν θὰ εἶναι ἴσαι.

Τὸ Ο' ἑπομένως, ὡς κείμενον ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ καὶ ἀπέχον ἀπὸ τὸ Γ ἀπόστασιν Ο'Γ=ΟΓ θὰ μᾶς δώσῃ τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ ΒΓΔ περιφερείας.

Ἐπειδὴ δὲ ΟΜ=σταθ. θὰ εἶναι καὶ ΟΟ'=2.ΟΜ=σταθερόν· ἄρα τὸ Ο' θὰ κεῖται ἐπὶ ὁμοκέντρου περιφερείας τῆς Ο.

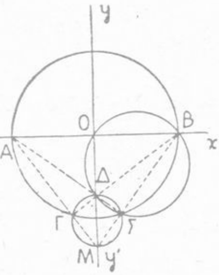
Σημ. Εἰς τὸ σχῆμα νὰ τεθῇ τὸ γράμμα Η' ἀντὶ τοῦ Μ'.

**870.** ***Δίδονται δύο ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι*** **Χ'ΟΧ** ***καὶ*** **Ψ'ΟΨ, Α** ***ἕνα ὡρισμένον σημεῖον τῆς*** **ΟΧ'** ***καὶ*** **Β** ***ἕνα ὡρισμένον σημεῖον τῆς*** **ΟΧ, Μ** ***ἕνα μεταβλητὸν σημεῖον τῆς*** **ΨΟΨ'**. ***Ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ*** **Β** ***ἐπὶ τὴν*** **ΑΜ** ***τέμνει τὴν*** **ΑΜ** ***εἰς τὸ*** **Γ** ***καὶ τὴν*** **ΨΟΨ'** ***εἰς τὸ*** **Δ.** ***Αἱ περιφέρειαι αἱ περι-***

*γεγραμμέναι περὶ τὰ τρίγωνα ΒΟΔ καὶ ΓΔΜ τέμνονται εἰς τὸ Σ. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι τὰ σημεῖα Μ,Σ, καὶ Β κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς. 2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Α, Σ καὶ Δ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. 3ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Σ ὅταν τὰ Μ γράφῃ τὴν ΨΟΨ′.*

*Ἀπ. 1ον.* Φέρομεν τὰς εὐθείας ΣΔ, ΣΜ καὶ ΣΒ. Ἐπειδὴ τὸ τετετράπλευρον ΓΜΣΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον θὰ εἶναι

γων.ΔΓΜ+γων.ΔΣΜ=2 ὀρθ.




Σχ. 75

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ γωνία ΔΓΜ εἶναι ὀρθή, ἐξ ὑποθέσεως, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ γωνία ΔΣΜ εἶναι ὀρθή.

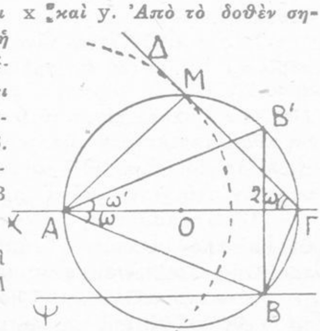
Ὁμοίως ἀπὸ τὸ τετράπλευρον ΟΔΣΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον συνάγομεν, ὅτι ἡ γωνία ΔΣΒ εἶναι ὀρθή.

Ὥστε εἶναι γων.ΔΣΜ+γων.ΔΣΒ=2 ὀρθαί· ἄρα ἡ ΜΣΒ εἶναι εὐθεῖα. Ὥστε τὰ σημεῖα Μ,Σ,Β κεῖνται ἐπ' εὐ-θείας γραμμῆς.

*2ον.* Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΜΒ, αἱ ΒΓ καὶ ΜΟ εἶναι ὕψη του, τὸ δὲ Δ εἶναι τὸ ὀρθόκεντρόν του. Ἡ ΣΔ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΜ καὶ διερχομένη ἀπὸ τὸ ὀρθόκεντρον Δ, θὰ διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α, ὡς τρίτον ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΜΒ. Ἄρα τὰ σημεῖα Α, Δ, Σ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

*3ον.* Ἐπειδὴ διὰ κάθε θέσιν τοῦ Μ ἐπὶ τῆς ΨΟΨ′ εἶναι γων.ΑΣΒ= =1 ὀρθή, ἕπεται, ὅτι τὸ Σ κεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου, ἡ ὁποία γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ΑΒ.

*871. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι* x *καὶ* y. *Ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον* Α *τῆς* x *φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν* y *εἰς τὸ* Β. *Ἀπὸ τὸ* Β *φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν* ΑΒ, *ἡ ὁποία τέμνει τὴν* x *εἰς τὸ* Γ. *Ἀπὸ τὸ* Γ *φέρομεν τὴν εὐθεῖαν* ΓΔ *οὕτως, ὥστε* γων ΑΓΔ=2 γων.ΓΑΒ. *Ἀπὸ τὸ* Α *φέρομεν τὴν* ΑΜ. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ* Μ, *ὅταν ἡ τέμνουσα* ΑΒ *στρέφεται περὶ τὸ* Α.




Σχ. 76

*Ἀπ.* Ἐπειδὴ γων.ΑΒΓ=1 ὀρθὴ καὶ γων.Μ=1 ὀρθή, τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΜ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

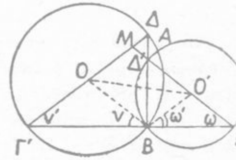
Ἔστω Β′ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Β, ὡς πρὸς τὴν x. Ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι τόξ.ΒΓ=τόξ.ΓΒ′, καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι γων.ω=γων.ω′. Ὥστε ἡ χορδὴ ΒΒ′ ἀντιστοιχεῖ εἰς τόξον γωνίας 2ω.

Ἀλλὰ καὶ ἡ χορδὴ ΑΜ ἀντιστοιχεῖ εἰς τόξον γωνίας ΑΓΔ=2ω. Ἄρα εἶναι χορδὴ ΑΜ=χορδὴ ΑΒ.

Τὸ Μ λοιπὸν ἀπέχει ἀπὸ τὸ Α ἀπόστασιν σταθερὰν καὶ ἴσην μὲ ΑΜ=ΒΒ'· ἄρα τὸ Μ κεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τό Α καὶ ἀκτῖνα τὴν ΒΒ'.

*872. Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. 'Από τὸ σημεῖον Β φέρομεν μίαν τυχοῦσαν τέμνουσαν ΓΒΓ', ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ Γ καὶ τὴν Ο' εἰς τὸ Γ'. 'Επίσης ἀπὸ τὸ Β φέρομεν μίαν ἄλλην τέμνουσαν ΒΔ'Δ κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΓ', ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ Δ καὶ τὴν Ο' εἰς τὸ Δ'. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΓΔ καὶ Γ'Δ', αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Μ, ὅταν αἱ τέμνουσαι ΓΒΓ' καὶ ΒΔ'Δ στρέφονται περὶ τὸ Β.*

*'Απ.* Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΒΟ καὶ ΒΟ'. Ἡ γωνία ΟΒΟ' εἶναι σταθερά, διότι τὰ σημεῖα Ο, Β, Ο' εἶναι ὡρισμένα. 'Επειδὴ δὲ εἶναι ν+γων.ΟΒΟ'+ω=2 ὀρθαί, θὰ εἶναι ν+ω'=2 ὀρθ.−γων.ΟΒΟ'=σταθερά. Ὥστε οἱαδήποτε καὶ ἐὰν εἶναι ἡ θέσις τῆς τεμνούσης ΓΒΓ' τὸ ἄθροισμα ν+ω' θὰ εἶναι σταθερόν.



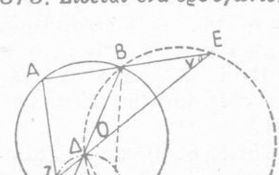
Σχ. 77

'Από τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΟΓΒ καὶ Ο'ΒΓ' συνάγομεν, ὅτι ν'=ν καὶ ω'=ω· ἄρα τὸ ἄθροισμα ν'+ω'=ν+ω=σταθερόν.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΓΜΓ' ἡ γωνία Μ εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση μὲ 2 ὀρθ.—(ν'+ω)=γων.ΟΒΟ'.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ διάκεντρος ΟΟ' φαίνεται ἀπὸ τὸ Μ ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν καὶ ἴσην μὲ ΟΒΟ'· ἄρα τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν ΟΟ' καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ ΟΒΟ'.

*873. Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ. 'Από τυχὸν σημεῖον Δ τῆς ὑποτεινούσης φέρομεν τυχουσαν τέμνουσαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ε καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ. Γράφομεν τὰς περιφερείας, ποὺ διέρχονται ἀπὸ τὰ σημεῖα Δ, Ε, Β καὶ Δ, Γ, Ζ καὶ αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἕνα δεύτερον σημεῖον Μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Μ, ὅταν ἡ τέμνουσα στρέφεται περὶ τὸ Δ.*



Σχ. 78

*Λύσις.* Φέρομεν τὴν κοινὴν χορδὴν τῶν περιφερειῶν, τῶν περιγεγραμμένων περὶ τὰ τρίγωνα ΔΒΕ καὶ ΔΒΕ.

Φέρομεν τὴν χορδὴν ΒΜ. Αἱ γωνίαι ν καὶ ν' εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΒΔ. Φέρομεν τὴν χορδὴν ΓΜ.

Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΔΖΓΜ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, αἱ γωνίαι ΔΜΓ καὶ ΑΖΕ εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν ΔΖΓ.

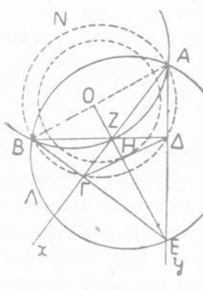
Θὰ εἶναι λοιπὸν γων.ν+γων.ΔΜΓ=γων.ν'+γωνΑΖΕ=1 ὀρθή, διότι τὸ τρίγωνον ΕΑΖ εἶναι ὀρθογώνιον. Εἰς τὸ τετράπελευρον ΑΓΜΒ εἶναι γων.Α=1 ὀρθὴ καὶ γων.ΒΜΓ=1 ὀρθή. Ἄρα τὸ τετράπλευρον αὐτὸ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ΒΓ φαίνεται ἀπὸ τὸ Μ ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν· ἄρα τὸ Μ κεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου, ἡ ὁποία γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ΒΓ.

Τὸ Μ δύναται νὰ κεῖται ἄνω ἢ κάτω τῆς ΒΓ καὶ ἐπὶ τῆς περιπεριφερείας αὐτῆς. Ἡ θέσις του ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν θέσιν τοῦ Δ ἐπὶ τῆς ΒΓ.

*874. Μία γωνία* xAy *ἀμετάβλητος, στρέφεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου της περὶ τὴν κορυφήν της* Α, *ἡ ὁποία εἶναι ὡρισμένη. Ἀπὸ ἕνα σημεῖον* Β, *τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου της φέρομεν τὰς καθέτους* ΒΓ *καὶ* ΒΔ *ἐπὶ τὰς* Ax *καὶ* Ay. *Αἱ κάθετοι αὐταὶ τέμνουν τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς δύο ἄλλα σημεῖα* Ε *καὶ* Ζ. *1ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν* Γ *καὶ* Δ. *2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ μῆκος* ΓΔ *εἶναι ἀμετάβλητον καὶ νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου του. 3ον. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμετρικοὶ τόποι τῶν σημείων* Ε *καὶ* Ζ.

*Λύσις. 1ον*. Φέρομεν τὴν ΑΒ· ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΒΓΑ καὶ ΒΔΑ εἶναι ὀρθαί, τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας Ο, ἡ ὁποία γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ΑΒ.



Σχ. 79

*2ον*. Τὸ τόξον ΓΔ τῆς περιφερείας αὐτῆς Ο εἶναι σταθερόν, διότι αἱ ΑΓ καὶ ΒΔ στρέφονται κατὰ γωνίας ἴσας, ἐφ' ὅσον ἡ γωνία xAy, κατὰ τὴν περιστροφήν της, μένει σταθερά, καὶ ἑπομένως ἡ χορδὴ ΓΔ εἶναι σταθερά. Τὸ μέσον Η τῆς ΓΔ γράφει τότε ὁμόκεντρον περιφέρειαν τῆς Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΟΗ.

*3ον*. Ἐπειδὴ αἱ ΒΓ καὶ ΑΓ, αἱ ὁποῖαι μένουν σταθερῶς κάθετοι, στρέφονται κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν καὶ κατ' ἴσας γωνίας, τότε καὶ ἡ ΒΖ, ἡ ὁποία σχηματίζει μίαν σταθερὰν γωνίαν μὲ τὴν ΒΓ, στρέφεται ἐπίσης κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν μὲ τὴν ΑΓ καὶ κατὰ γωνίας ἴσας. Τὸ σημεῖον Ζ γράφει λοιπὸν μίαν περιφέρειαν, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῶν Α καὶ Β.

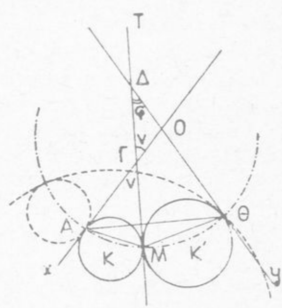
Ἐπίσης τὸ σημεῖον Ε γράφει περιφέρειαν, διερχομένην διὰ τῶν Α καὶ Β.

Ἐὰν θέσωμεν γων.ΓΑΔ=ω, τὸ σημεῖον Ζ γράφει, πρὸς τὸ ἕνα μέρος τῆς ΒΑ, τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ $90^0-\omega$ καὶ τὸ σημεῖον Ε γράφει ἕνα τόξον κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον δέχεται γων.$90^0+\omega$.

*875. Δίδεται μία γωνία* xOy. *'Επὶ τῆς πλευρᾶς* Ox *λαμβάνομεν τὸ σταθερὸν σημεῖον* Α, *ἐπὶ δὲ τῆς* Oy *τὸ σταθερὸν σημεῖον* Β. *Γράφομεν δύο περιφερείας* Κ *καὶ* Κ', *αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται μεταξύ των καὶ ἡ μὲν* Κ *ἐφάπτεται τῆς* Ox *εἰς τὸ* Α, *ἡ δὲ* Κ' *ἐφάπτεται τῆς* Oy *εἰς τὸ* Β. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου ἐπαφῆς τῶν περιφερειῶν, ὅταν αἱ ἀκτῖνες των μεταβάλλωνται.*

*Λύσις.* Ἔστω xOy=ω ἡ δοθεῖσα γωνία. Ἔστω Μ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῶν μεταβλητῶν περιφερειῶν Κ καὶ Κ'. Τὸ Μ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Φέρομεν τὰς εὐθείας ΜΑ καὶ ΜΒ καὶ τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην ΜΤ τῶν περιφερειῶν Κ καὶ Κ', ἡ ὁποία τέμνει τὴν Ox εἰς τὸ σημεῖον Γ καὶ τὴν Oy, προεκτεινομένην, εἰς τὸ σημεῖον Δ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΟΓΔ ἡ γωνία ΓΟΒ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία του· ἄρα θὰ εἶναι γων.ΓΟΒ=ν+φ (1).



Σχ. 80

'Επειδὴ ΓΑ=ΓΜ, ὡς ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας Κ, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ τρίγωνον ΓΑΜ εἶναι ἰσοσκελές· ἄρα θὰ εἶναι γων.ΓΜΑ= γων.ΓΑΜ 'Απὸ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΓΑΜ θὰ ἔχωμεν 2.γων.ΓΜΑ+ν=2 ὀρθ. ἢ γων.ΓΜΑ=1 ὀρθ.$-\frac{\nu}{2}$ (2). Ὁμοίως ἀπὸ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΔΜΒ ἔχομεν γων.ΔΜΒ=1 ὀρθ.$-\frac{\varphi}{2}$ (3).

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (2) καὶ (3) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\text{γων.ΓΜΑ}+\text{γων.ΔΜΒ}=2\ \text{ὀρθ.}-\frac{\nu+\varphi}{2}=2\ \text{ὀρθ.}-\frac{\widehat{\text{ΓΟΒ}}}{2}.$$

$$\text{ἢ γωνΑΜΒ}=2\ \text{ὀρθ.}-\frac{\widehat{\text{ΓΟΒ}}}{2}.$$

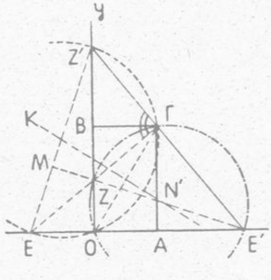
Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ σταθερὰ εὐθεῖα ΑΒ φαίνεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Μ ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν ΑΜΒ=2 ὀρθ.$-\frac{\text{ΓΟΒ}}{2}$· ἄρα τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν ΑΒ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ 2 ὀρθ.$-\frac{\widehat{\text{ΓΟΒ}}}{2}$.

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα, ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ περιφέρεια, ἡ διερχομένη ἀπὸ τὸ Α ἐφάπτεται ἐσωτερικῶς τῆς περιφερείας τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου Β.

Σημ. Εἰς τὸ σχῆμα νὰ τεθῇ τὸ γράμμα Β ἀντὶ Θ,

*876. Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον* ΟΑΓΒ, *τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι* ΟΑ=α, ΟΒ=β. *Περὶ τὴν κορυφὴν* Γ *στρέφομεν μίαν ὀρθὴν γωνίαν, τῆς ὁποίας ἡ μία ἐκ τῶν πλευρῶν τέμνει τὴν* ΟΑ *εἰς τὸ* Ε *καὶ τὴν* ΟΒ *εἰς τὸ* Ζ, *ἡ δὲ ἄλλη πλευρὰ τέμνει τὴν* ΟΑ *εἰς τὸ* Ε΄ *καὶ τὴν* ΟΒ *εἰς τὸ* Ζ΄. *Νὰ εὑρεθῇ: 1ον. ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων τῶν εὐθειῶν* ΕΖ΄ *καὶ* Ε΄Ζ. *2ον. ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ποδῶν τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου* Γ *ἐπὶ τὰς εὐθείας* ΕΖ΄ *καὶ* Ε΄Ζ. *3ον. ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς* Μ *τῶν εὐθειῶν* ΕΖ΄ *καὶ* Ε΄Ζ.

*Λύσις. 1ον.* Ἔστωσαν Ν καὶ Ν΄ τὰ μέσα τῶν ΕΖ΄ καὶ Ε΄Ζ. Τὸ μέσον Ν τῆς ΕΖ΄ εἶναι κέντρον μιᾶς περιφερείας, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῶν σημείων Ο καὶ Γ, διότι αἱ γωνίαι ΕΟΖ΄ καὶ ΕΓΖ΄ εἶναι ὀρθαί. Θὰ εἶναι λοιπὸν ΝΟ=ΝΓ.




Σχ. 81

Τὸ σημεῖον Ν κεῖται λοιπὸν ἐπὶ τῆς καθέτου Κ εἰς τὸ μέσον τῆς ΟΓ· Ἐπὶ τῆς εὐθείας Κ κεῖται καὶ τὸ μέσον Ν τῆς Ε΄Ζ.

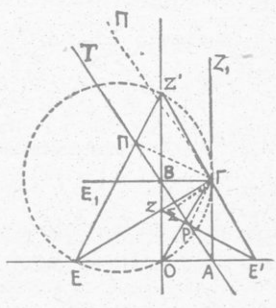
Ἀντιστρόφως. Ἔστω Ν ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου Κ εἰς τὸ μέσον τῆς ΟΓ. Ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ Ν καὶ ἀκτῖνα ΝΟ=ΝΓ τέμνει τὴν Ox εἰς τὸ Ε καὶ τὴν Oy εἰς τὸ Ζ΄.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΕΟΖ΄ εἶναι ὀρθή, ἡ ΕΖ΄ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου Ν καὶ ἑπομένως τὸ Ν εἶναι τὸ μέσον τῆς ΕΖ΄ καὶ ἡ γωνία ΕΓΖ΄ εἶναι ὀρθή.

Ἡ εὐθεῖα Κ εἶναι λοιπὸν ὁ τόπος τῶν μέσων τῶν εὐθειῶν ΕΖ΄ καὶ Ε΄Ζ.

*2ον.* Ἐὰν ἡ μία πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας Ο, ἡ ὁποία στρέφεται περὶ τὸ Γ συμπίπτει μὲ τὴν διαγώνιον ΟΓ τοῦ ὀρθογωνίου, αἱ προβολαὶ τῆς κορυφῆς Γ ἐπὶ τὰς εὐθείαν ΕΖ΄ καὶ Ε΄Ζ, θὰ εἶναι τὰ σημεῖα Β καὶ Α· ὥστε ὁ τόπος διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β.

Ἔστω τώρα μία τυχοῦσα θέσις ΕΓΖ΄ τῆς ὀρθῆς γωνίας Γ καὶ Π, ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς Γ ἐπὶ τὴν ΕΖ΄. Τὸ Π εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.




Σχ. 82

Τὸ τετράπλευρον ΕΟΓΖ΄ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, διότι ἡ ΕΖ΄ φαίνεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Ο καὶ Γ ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν.

Θεωροῦμεν τὸ τρίγωνον ΕΟΖ' τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον ΕΟΓΖ. Φέρομεν τὰς προβολὰς τοῦ σημείου Γ, τό ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας ΕΟΓΖ, ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΕΟΖ' καὶ ἔστωσαν Α, Β, Π αἱ προβολαὶ αὐταί. Γνωρίζομεν, ὅτι αἱ προβολαὶ Α, Β, Π κεῖνται ἐπ' εὐθείας (εὐθεῖα τοῦ Simson).

Τὸ τυχὸν λοιπὸν σημεῖον Π, δηλ. ἡ προβολὴ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΕΖ' κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒΠ, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὴν διαγώνιον ΑΒ τοῦ ὀρθογωνίου ΟΑΓΒ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ προβολὴ Ρ τοῦ Γ ἐπί τὴν ΖΕ' κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΒ, διότι τὸ ΖΟΕ'Γ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ ἡ ΑΡΒ εἶναι ἡ εὐθεῖα Simson τοῦ σημείου Γ διὰ τὸ τρίγωνον ΖΟΕ'.

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ σημεῖον Ζ εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου Ζ'ΕΕ', ὡς τομὴ τῶν δύο ὑψῶν του Ζ'Ο καὶ ΕΓ. Ὥστε ἡ Ε'Ζ, προεκτεινομένη, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΖ' καὶ συνεπῶς παράλληλος πρὸς τὴν ΓΠ. Ἐπίσης ἡ ΓΡ εἶναι παράλλήλος πρὸς τὴν ΕΖ' καὶ ἡ γωνία ΠΓΡ εἶναι ὀρθή.

Ὅταν ἡ γωνία ΕΓΖ' περιστρέφεται περὶ τὸ Γ, αἱ πλευραί της θὰ γίνουν παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ΒΟΑ· δηλ. ἡ ΓΕ θὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ΓΒ, ἡ δὲ ΓΖ θὰ γίνῃ προέκτασις τῆς ΑΓ. Ἀλλὰ τότε ἡ ΖΕ' θὰ ταυτισθῇ μὲ τὴν ΒΑ, τὸ Ρ θὰ συμπέσῃ μὲ τὸ Σ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ, τὸ δὲ Π, λόγῳ τοῦ ὅτι ἡ ΓΠ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΣ, θὰ ἀπομακρυνθῇ καὶ θὰ γίνῃ τὸ κατ' ἄπειρον σημεῖον τῆς ΑΒ.

Ὥστε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ὁλόκληρος ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β.

*3ον.* Ἔστω Μ (Σχ. 81) τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ΕΖ' καὶ Ε'Ζ προεκτεινομένης. Τὸ σημεῖον Μ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου. Αἱ εὐθεῖαι ΟΜ καὶ ΟΓ εἶναι συμμετρικαί, ὡς πρὸς τὴν Οy, διότι τὸ Ζ εἶναι σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου Ζ'ΕΕ' καὶ γνωρίζομεν, ὅτι τὰ ὕψη τοῦ τριγώνου Ζ'ΕΕ' εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου, ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν. Ὁ τόπος τοῦ Μ εἶναι λοιπὸν ἡ συμμετρικὴ εὐθεῖα Κ' τῆς ΟΓ, ὡς πρὸς τὴν Οx ἢ τὴν Οy.

Ἡ εὐθεῖα αὕτη Κ' εἶναι παράλληλος τῆς Κ.

*877. Κύκλος κυλίεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν μιᾶς περιφερείας, διπλασίας ἀκτῖνος. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος ἑνὸς σημείου τῆς κινητῆς περιφερείας.*

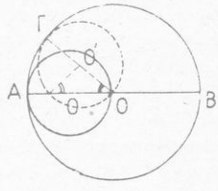
*Λύσις.* Ἔστω Ο' ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία κυλίεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς περιφερείας Ο καὶ Α ἕνα ὡρισμένον σημεῖον τῆς Ο'.

Ἂς λάβωμεν μίαν πρώτην θέσιν τῆς Ο', καθ' ἣν στιγμὴν τὸ Α κεῖται ἐπὶ τῆς μεγάλης περιφερείας καὶ μίαν δευτέραν θέσιν Ο'' αὐτῆς, ὁπότε τὸ Α θὰ ἔχῃ λάβῃ μίαν νέαν θέσιν εἰς τὸ Μ.

Ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια κυλίεται χωρὶς ὀλίσθησιν, πρέπει τὰ τόξα

ΓΑ καὶ ΓΜ νὰ εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ΓΟ΄΄Μ καὶ ΓΟΑ θὰ εἶναι κατ' ἀντίστροφον λόγον τῶν ἀκτίνων, ἤτοι θὰ εἶναι $\widehat{ΓΟ''Μ}=2\widehat{ΓΟΑ}$ (1).

Ἡ ἐξωτερικὴ γωνία ΓΟ΄΄Μ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΜΟ΄΄Ο εἶναι διπλασία τῆς ΓΟΜ· ἤτοι εἶναι $\widehat{ΓΟ''Μ}=2\widehat{ΓΟΜ}$ (2).



Σχ. 83

Ἀπὸ τὰς (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $\widehat{ΓΟΜ}=\widehat{ΓΟΑ}$ καὶ ἑπομένως τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ τῆς ΟΑ.

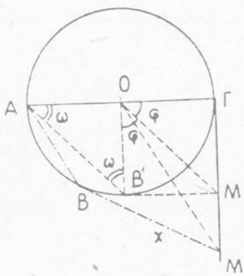
Τὸ σημεῖον Μ κεῖται σταθερῶς ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΒΑ, ἡ ὁποία διανύεται ὁλόκληρος ὑπ' αὐτοῦ, ὅταν ἡ κινητὴ περιφέρεια κυλίεται ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΓΒ. Ὁ ζητούμενος λοιπὸν τόπος εἶναι ἡ διάμετρος ΑΒ.

*Σημ.* Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι μία συνεχὴς κυκλικὴ κίνησις δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς εὐθύγραμμον καὶ ἀντιστρόφως.

Σ η μ. Νὰ γραφῇ εἰς τὸ σχῆμα τὸ σημεῖον Μ καὶ νὰ τεθοῦν τόνοι εἰς τὰ κέντρα Ο.

*878. Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α δοθείσης περιφερείας Ο φέρομεν μίαν μεταβλητὴν χορδὴν ΑΒ. Ἀπὸ τὸ κέντρον Ο φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον τῆς ΑΒ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει εἰς τὸ σημεῖον Μ τὴν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου Ο εἰς τὸ σημεῖον Β. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου Α.*

*Λύσις.* Ὅταν τὸ Β, κινούμενον ἐπὶ τῆς περιφερείας, φθάσῃ εἰς τὸ Α, τότε ἡ ΑΒ γίνεται ἐφαπτομένη τῆς Ο εἰς τὸ Α, καὶ τὸ Μ ἀπομακρύνεται ἀπείρως κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς καθέτου πρὸς τὴν ΑΟ.



Σχ. 84

Ὅταν τὸ Β ἔλθῃ εἰς τὸ μέσον Β΄ τοῦ τόξου ΑΒΓ, τότε ἡ εἰς τὸ Β΄ ἐφαπτομένη εἶναι παράλληλος τῆς ΑΓ, καὶ ἔστω Μ΄ τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Β΄, ἡ ἐκ τοῦ Ο ἀγομένη παράλληλος τῆς ΑΒ΄.

Φέρομεν τὴν ΟΒ΄. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΟΒ΄ εἶναι ἰσοσκελὲς ἔχομεν ω=ω΄.

Ἀλλὰ ω=φ, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς τῶν παραλλήλων ΑΒ΄ καὶ ΟΜ΄, καὶ ω΄=φ΄, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν αὐτῶν παραλλήλων· ἄρα θὰ εἶναι καὶ φ=φ΄.

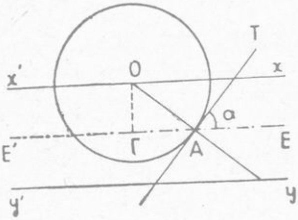
Ἂν φέραμεν τὴν Μ΄Γ, τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα ΟΒ΄Μ΄ καὶ ΟΓΜ΄ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας φ καὶ φ΄ ἴσας, καὶ ἐπειδὴ τὸ ΟΒ΄Μ΄ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Β΄ ἕπεται, ὅτι καὶ τὸ ΟΓΜ΄ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Γ. Ἡ Μ΄Γ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ Ο εἰς τὸ Γ.

Τὸ Μ΄ λοιπὸν κεῖται ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου, τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ Γ.

Ὁ ζητούμενος λοιπὸν τόπος εἶναι ἐφαπτομένη ΓΜ.

*879. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ τέμνουν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν α.*

***Λύσις.*** Ἔστω Ο μία τυχοῦσα θέσις τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ τέμνει τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν Ε΄Ε εἰς τὸ σημεῖον Α. Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΑ καὶ τὴν ἐφαπτομένην ΑΤ τῆς περιφερείας εἰς τὸ Α.



Σχ. 85

Ἡ γωνία ΤΑΕ=α εἶναι ἡ γωνία τῆς περιφερείας Ο καὶ τῆς τεμνούσης Ε΄Ε. Φέρομεν τὴν ΟΓ κάθετον ἐπὶ τὴν Ε΄Ε.

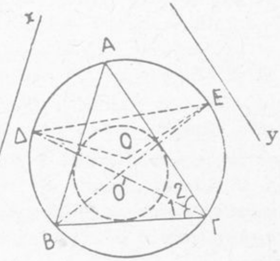
Τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΟΓΑ ἔχει τὴν ὑποτείνουσαν ΟΑ ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα ρ τῆς δοθείσης περιφερείας καὶ τὴν γωνίαν ΓΟΑ=α, διότι αἱ πλευραί των εἶναι κάθετοι μία πρὸς μίαν· ἄρα τὸ τρίγωνον αὐτὸ εἶναι ὡρισμένον καὶ ἑπομένως ἡ ΟΓ εἶναι σταθερὰ κατὰ τὸ μέγεθος.

Ὥστε τὸ Ο κεῖται ἐπὶ εὐθείας x΄x παραλλήλου πρὸς τὴν Ε΄Ε καὶ ἡ ὁποία ἀπέχει ἀπόστασιν σταθερὰν ἀπὸ τῆς Ε΄Ε.

Ὥστε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι δύο εὐθεῖαι x΄x καὶ y΄y παράλληλοι πρὸς τὴν Ε΄Ε, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται ἑκατέρωθεν αὐτῆς καὶ ἀπέχουν αὐτῆς ἀποστάσεις ἴσας μὲ τὴν ΟΓ.

*880. Δίδεται περιφέρεια* Ο. *Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον* Α *τῆς περιφερείας φέρομεν δύο χορδὰς* ΑΒ *καὶ* ΑΓ *παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς δύο δοθείσας εὐθείας* x *καὶ* y. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας, τῆς ἐγγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον* ΑΒΓ, *ὅταν τὸ σημεῖον* Α *κινῆται ἐπὶ τῆς περιφερείας* Ο.

***Λύσις.*** Ἀπὸ τὸ κέντρον Ο φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΔ καὶ ΟΕ καθέτους, ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς εὐθείας x καὶ y, αἱ ὁποῖαι θὰ εἶναι κάθετοι καὶ ἐπὶ τὰς χορδὰς ΑΒ καὶ ΑΓ.



Σχ. 86

Ἐπειδὴ ἡ ἀκτὶς ΟΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΒ, θὰ εἶναι τόξ.ΑΔ=τόξ.ΒΔ δηλ. τὸ Δ εἶναι μέσον τοῦ τόξου ΑΒ. Ὁμοίως τὸ Ε εἶναι μέσον τοῦ τόξου ΑΕΓ. Τὰ Δ καὶ Ε εἶναι σταθερὰ σημεῖα. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΓΔ καὶ ΒΕ.

Ἐπειδὴ τόξ.ΑΔ=τόξ.ΔΒ, θὰ εἶναι γωνία $\Gamma_1=\Gamma_2$· ἤτοι ἡ ΓΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Γ. Ὁμοίως ἡ ΒΕ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Β.

Τὸ δὲ σημεῖον Ο΄ τῆς τομῆς των εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ἐγγέγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Γνωρίζομεν (ἄσκ. 160), ὅτι

$$\text{γων.ΒΟ΄Γ}=1 \text{ ὀρθ.}+\frac{A}{2}=\text{γων.ΔΟ΄Ε.}$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ σταθερὰ εὐθεῖα ΔΕ φαίνεται ἀπὸ τὸ Ο΄ ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν καὶ ἴσην μὲ 1 ὀρθ.$+\frac{A}{2}$· ἄρα τὸ Ο΄ κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν ΔΕ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ 1 ὀρθὴν$+\frac{A}{2}$.

*Σημ.* Ἡ γωνία Α εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση μὲ τὴν γωνίαν, ποὺ σχηματίζουν αἱ εὐθεῖαι x καὶ y.

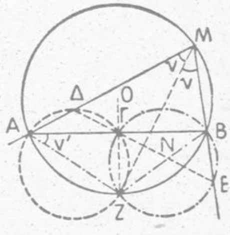
*881. Δίδεται μία περιφέρεια* Ο *καὶ μία χορδὴ αὐτῆς* ΑΒ, *ἡ ὁποία εἶναι σταθερὰ κατὰ τὴν θέσιν. Ἕνα μεταβλητὸν σημεῖον* Μ *κινεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας* Ο. *Ἀπὸ τὸ μέσον* Γ *τῆς χορδῆς* ΑΒ *φέρομεν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὰς* ΜΑ *καὶ* ΜΒ *ἢ τὰς προεκτάσεις των εἰς σημεῖα* Δ *καὶ* Ε *καὶ τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι* ΜΔ=ΜΕ. *1ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ μέσου* Ν *τῆς εὐθείας* ΔΕ· *2ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν* Δ *καὶ* Ε, *ὅταν τὸ* Μ *κινῆται ἐπὶ τῆς περιφερείας* Ο.

*Λύσις. 1ον.* Τὸ τρίγωνον ΜΔΕ εἶναι ἰσοσκελὲς ἐκ κατασκευῆς. Ἡ διχοτόμος ΜΝ τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς του Μ εἶναι ὕψος αὐτοῦ καὶ διάμεσός του. Ἡ ΜΝ προεκτεινομένη τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ σημεῖον Ζ.

Ἐπειδὴ ν=ν΄ ἕπεται, ὅτι

τόξ.ΑΖ=τόξ.ΖΒ.

Ὥστε τὸ σημεῖον Ζ εἶναι ὡρισμένον, ὡς μέσον τοῦ τόξον ΑΖΒ. Φέρομεν τὴν ΟΖ. Ἡ γωνία ΓΝΖ εἶναι ὀρθή. Ἑπομένως ὁ τόπος τοῦ Ν εἶναι περιφέρεια κύκλου, ἡ ὁποία γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ΓΖ.



Σχ. 87

*2ον.* Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΜΔΕ ἡ γωνία Μ=2ν εἶναι σταθερά, διότι βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΖΒ. Ἀπὸ τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΜΝΔ ἔχομεν γων.ΜΔΝ=1 ὀρθ.—ν, ὁπότε

$$\text{γων.ΑΔΓ}=2 \text{ ὀρθ.}-\text{γων.ΜΔΝ}=2 \text{ ὀρθ.}-(1 \text{ ὀρθ.}-ν)=1 \text{ ὀρθ.}+ν.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΓ φαίνεται ἀπὸ τὸ Δ ὑπὸ γωνίαν σταθερὰν καὶ ἴσην μὲ 1 ὀρθ.+ν· ἄρα τὸ Δ κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν ΑΓ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ 1 ὀρθ.+ν.

Ἡ ΓΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΒ, διότι τὸ Γ εἶναι μέσον τῆς χορδῆς ΑΒ, τὸ δὲ Ζ μέσον τοῦ τόξου ΑΖΒ· ἄρα ἡ γωνία ΑΓΖ εἶναι ὀρθή. Αἱ γωνίαι ν΄ καὶ ΖΜΒ εἶναι ἴσαι, ὡς ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΖΒ. Ἀπὸ τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΑΓΖ ἔχομεν γων.ΑΖΓ=1 ὀρθ.—ν΄ (1).

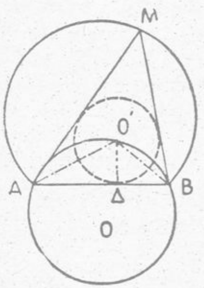
Ἀλλὰ εἴδομεν ἀνωτέρω, ὅτι καὶ γων.ΑΔΓ=1 ὀρθ.+ν (2).

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψει, ὅτι ν=ν' εὑρίσκομεν γων.ΑΖΓ+γων.ΑΔΓ=2 ὀρθαί. Τὸ τετράπλευρον ΑΖΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ ἑπομένως τὸ σημεῖον Δ κεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου, ἡ ὁποία γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ΑΖ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ σημεῖον Ε κεῖται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν ΒΖ.

*882. Δίδεται ἕνα κυκλικὸν τμῆμα χορδῆς ΑΒ. Μία μεταβλητὴ περιφέρεια ἐφάπτεται τῆς χορδῆς ΑΒ καὶ τὸ κέντρον της γράφει τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος. Ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β φέρομεν ἐφαπτομένας τῆς μεταβλητῆς περιφερείας, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Μ.*

*Λύσις.* Ἔστω Ο' μία θέσις τοῦ κέντρου τῆς μεταβλητῆς περιφερείας, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῆς χορδῆς ΑΒ τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΑΟ'Β. Τὸ Μ εἶναι ἕνα σημεῖον τοῦ τόπου. Φέρομεν τὰς Ο'Α καὶ Ο'Β, αἱ ὁποῖαι εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Α καὶ Β τοῦ τριγώνου ΑΜΒ. Γνωρίζομεν, ὅτι




Σχ. 88

$$\text{γων.}ΑΟ'Β = 1 \text{ ὀρθ.} + \frac{Μ}{2}\cdot$$

ἄρα γων.Μ=2 γων.ΑΟ'Β—2 ὀρθ.

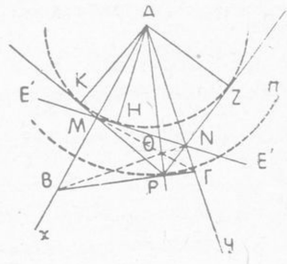
Ἀλλὰ ἡ γωνία ΑΟ'Β εἶναι σταθερά, διότι εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ δοθὲν κυκλικὸν τμῆμα ΑΟ'Β. Ἄρα καὶ ἡ γωνία Μ εἶναι σταθερά.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ φαίνεται ἀπὸ τὸ Μ ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν καὶ ἴσην μὲ 2 γων.ΑΟ'Β—2 ὀρθ. Ἄρα τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν ΑΒ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ (2 γων.ΑΟ'Β—2 ὀρθ.).

*883. Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α φέρομεν τὰς εὐθείας Αx καὶ Αy, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν σταθερὰν γωνίαν xΑy=ω καὶ αἱ ὁποῖαι τέμνουν δοθεῖσαν εὐθεῖσαν Ε'Ε εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν. Ἀπὸ τὸ Μ φέρομεν τὴν ΜΓ κάθετον ἐπὶ τὴν Αx, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Αy εἰς τὸ Γ καὶ ἀπὸ τὸ Ν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν Αy, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Αx εἰς τὸ Β. Αἱ ΜΓ καὶ ΝΒ τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Θ. Ἡ εὐθεῖα ΑΘ τέμνει τὴν εὐθεῖαν ΒΓ εἰς ἕνα σημεῖον Ρ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Ρ, ὅταν ἡ σταθερὰ γωνία xΑy στρέφεται περὶ τὴν κορυφήν της Α καὶ αἱ πλευραί της τέμνουν τὴν Ε'Ε.*

*Λύσις.* Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ αἱ ΒΝ καὶ ΓΜ εἶναι ὕψη του, τὸ δὲ σημεῖον Θ εἶναι τὸ ὀρθόκεντρόν του, τὸ δὲ τρίγωνον ΜΡΝ εἶναι τὸ ὀρθοκεντρικόν του τρίγωνον. Αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τοῦ ὀρθοκεντρικοῦ τριγώνου ΜΡΝ (§ 300).

'Επειδὴ ἡ ΡΑ εἶναι ἐσωτερικὴ διχοτόμος τῆς γωνίας Ρ, τὸ Α εἶναι κέντρον τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον ΜΝΡ, ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται ἐξωτερικῶς τῆς ΜΝ. Οὕτω αἱ ΡΜ καὶ ΡΝ δύνανται νὰ θεωρηθοῦν, ὡς ἐφαπτόμεναι τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου μὲ κέντρον τὸ Α.



Σχ. 89

"Εστωσαν Κ, Η, Ζ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου Α καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΜΡΝ. Φέρομεν τὰς ΑΚ, ΑΗ καὶ ΑΖ.

'Επειδὴ τὸ τετράπλευρον ΑΚΡΖ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, διότι αἱ ἀπέναντι γωνίαι του Κ καὶ Ζ εἶναι ὀρθαὶ θὰ εἶναι

γων.ΚΡΖ+γων.ΚΑΖ=2 ὀρθ.

ἄρα γων.ΚΡΖ=2 ὀρθ.−γων.ΚΑΖ (1).

'Αλλὰ γων.ΚΑΖ=2 γων.ΜΑΝ=2ω, διότι

$$\widehat{KAZ}=\widehat{KAM}+\widehat{MAH}+\widehat{HAN}+\widehat{NAZ} \quad (2).$$

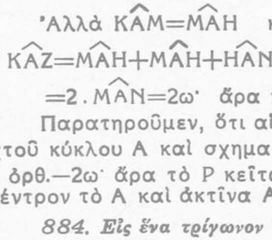
'Αλλὰ $\widehat{KAM}=\widehat{MAH}$ καὶ $\widehat{NAZ}=\widehat{HAN}$, ἄρα ἡ (2) γίνεται

$$\widehat{KAZ}=\widehat{MAH}+\widehat{MAH}+\widehat{HAN}+\widehat{HAN}=2.\widehat{MAH}+2\cdot\widehat{HAN}=2(\widehat{MAH}+\widehat{HAN})=$$

$=2.\widehat{MAN}=2\omega$· ἄρα ἡ (1) γίνεται γων.ΚΡΖ=2 ὀρθ.−2ω.

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ ΡΚ καὶ ΡΖ εἶναι ἐφαπτόμεναι τοῦ γνωστοῦ κύκλου Α καὶ σχηματίζουν γωνίαν ΚΡΖ σταθερὰν καὶ ἴσην μὲ 2 ὀρθ.—2ω· ἄρα τὸ Ρ κεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ΑΡ σταθεράν.

*884. Εἰς ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ *ἡ βάσις* ΒΓ *εἶναι ὡρισμένη κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του εἶναι σταθερά. 'Απὸ τὰς κορυφὰς* Β *καὶ* Γ *φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας* Α. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν ποδῶν τῶν καθέτων αὐτῶν.*



Σχ. 90

*Λύσις.* "Εστω ΑΒΓ μία τυχοῦσα θέσις τοῦ τριγώνου, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ ΒΓ καὶ ἡ διαφορὰ ΑΓ—ΑΒ=δ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του. "Εστωσαν Μ καὶ Ν οἱ πόδες τῶν καθέτων ΒΜ καὶ ΓΝ ἐπὶ τὴν διχοτόμον ΓΔ τῆς γωνίας Α.

Τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν εἶναι προφανῶς σημεῖα τοῦ τόπου. Προεκτείνομεν τὴν ΒΜ μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Ε.

Τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἡ ΑΜ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας του Α καὶ ὕψος του· ἄρα θὰ εἶναι ΑΒ=ΑΕ.

Θὰ εἶναι λοιπὸν ΕΓ=ΑΓ−ΑΕ=ΑΓ−ΑΒ=δ, ὅπου τὸ δ παριστάνει τὴν δοθεῖσαν διαφορὰν τῶν πλευρῶν ΑΓ καὶ ΑΒ.

Ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς ΒΕ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΕΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ μέσον Ζ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΒΕΓ, ἡ εὐθεῖα ΜΖ συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν του, ἄρα εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς τρίτης πλευρᾶς του ΕΒ· ἤτοι εἶναι $ZM=\frac{1}{2}\,E\Gamma=\frac{1}{2}\,.\,\delta$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ Μ ἀπέχει ἀπὸ τὸ σημεῖον Ζ, μέσον τῆς ΒΓ, ἀπόστασιν σταθερὰν καὶ ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης διαφορᾶς δ· ἄρα τὸ Μ κεῖται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ μέσον Ζ τῆς ΒΓ καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ $\frac{\delta}{2}$.

Ἀ ν τ ι σ τ ρ ό φ ω ς. Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας $\left(Z, \frac{\delta}{2}\right)$. Φέρομεν τὴν ΒΜ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν ΜΕ=ΒΜ. Ἀπὸ τὸ Μ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΕ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΓΕ εἰς τὸ σημεῖον Α. Φέρομεν τὴν ΑΒ.

Ἐπειδὴ ἡ ΑΜ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΕ θὰ εἶναι ΑΒ=ΑΕ. καὶ ἡ ΑΔ θὰ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΑΓ. Θὰ εἶναι δὲ

$$A\Gamma-AB=A\Gamma-AE=E\Gamma=2\,.\,ZM=2\,.\,\frac{\delta}{2}=\delta.$$

Τὸ Μ λοιπὸν εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου. Ὥστε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ἡ περιφέρεια $\left(Z, \frac{\delta}{2}\right)$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ τόπος τῶν ποδῶν Ν τῶν καθέτων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Γ ἐπὶ τὴν διχοτόμον ΑΔ εἶναι ἡ αὐτὴ περιφέρεια $\left(Z, \frac{\delta}{2}\right)$.

*885. Ἑνὸς τριγώνου* ΑΒΓ *δίδεται ἡ βάσις* ΒΓ=α *καὶ τὸ ἄθροισμα* ΑΒ+ΑΓ=λ *τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν* Β *φέρομεν τὴν κάθετον* ΒΜ *ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας* Α. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν ποδῶν τῶν καθέτων αὐτῶν, ὅταν ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας* Α *λαμβάνῃ τοιαύτας θέσεις, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῆς* ΑΒ+ΑΓ *νὰ εἶναι σταθερόν.*

*Λύσις.* Ἔστω ΑΒΓ μία τυχοῦσα θέσις τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι ΒΓ=α καὶ ΒΑ+ΑΓ=λ Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΕ τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας ΒΑΔ καὶ ἀπὸ τὸ Β τὴν κάθετον ΒΜ ἐπὶ τὴν ΑΕ. Το Μ εἶναι προφανῶς σημεῖον τοῦ τόπου.

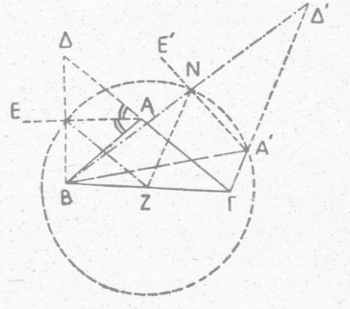
Προεκτείνομεν τὴν ΒΜ μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν ΓΑ εἰς τὸ Δ. Τὸ τρίγωνον ΔΑΒ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἡ ΑΜ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς του Α καὶ ὕψος αὐτοῦ. Ἄρα θὰ εἶναι ΑΔ=ΑΒ καὶ ΒΜ=ΜΔ. Ὥστε θὰ εἶναι ΓΔ=ΓΑ+ΑΔ ἢ ΓΔ=ΓΑ+ΑΒ=λ.

Ἀπὸ τὸ Μ φέρομεν τὴν παράλληλον ΜΖ πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ζ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΔΒΓ ἡ ΜΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΓ καὶ ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς πλευρᾶς ΔΒ· ἄρα θὰ εἶναι ΒΖ=ΖΓ καὶ

$ZM=\frac{Γ\Delta}{2}=\frac{\lambda}{2}$. Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ σημεῖον Μ ἀπέχει ἀπὸ τὸ μέσον Ζ τῆς σταθερᾶς εὐθείας ΒΓ ἀπόστασιν σταθερὰν καὶ ἴσην μὲ $ZM=\frac{\lambda}{2}$. Ἄρα τὸ Μ κεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ Ζ καὶ ἀκτῖνα $\frac{\lambda}{2}$.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω Ν ἕνα τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας $\left(Z, \frac{\lambda}{2}\right)$. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ Ν εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.



Σχ. 91

Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΖΝ καὶ τὴν ΓΔ΄ παράλληλον τῆς ΖΝ. Φέρομεν τὴν ΒΝ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν ΓΔ΄ εἰς τὸ Δ΄.

Εἰς τὸ τρίγωνον Δ΄ΒΓ ἡ ΖΝ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ΄ καὶ ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον Ζ τῆς ΒΓ· ἄρα θὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ΒΔ΄ καὶ θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΓΔ΄· ἤτοι θὰ εἶναι

$$BN=N\Delta' \text{ καὶ } ZN=\frac{Γ\Delta'}{2}$$

ἢ $\frac{\lambda}{2}=\frac{Γ\Delta'}{2}$ ἢ $Γ\Delta'=\lambda$. Ἀπὸ τὸ Ν φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΔ΄, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΓΔ΄ εἰς τὸ Α΄. Φέρομεν τὴν Α΄Β.

Ἐπειδὴ τὸ Α΄ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ΝΑ΄ εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΔ΄, θὰ εἶναι $A'\Delta=A'B$. Θὰ εἶναι λοιπὸν $ΓA'+A'B=ΓA'+A'\Delta'=Γ\Delta'=\lambda$. Ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου Α΄ΒΓ εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ λ.

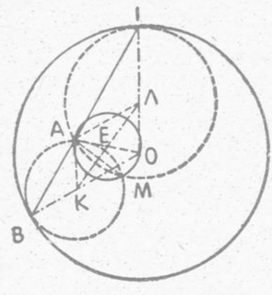
Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον Α΄ΒΔ΄ ἡ ΝΑ΄ εἶναι ὕψος του καὶ διάμεσός του· ἄρα ἡ Α΄Ν θὰ εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΑ΄Δ΄ τῆς κορυφῆς του. Ὥστε ἡ ΒΝ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτόμον Α΄ΝΕ΄ τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας ΒΑ΄Δ΄ τοῦ τριγώνου Α΄ΒΓ καὶ ἑπομένως τὸ σημεῖον Ν εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

*Σημ.* Ἡ περιφέρεια $\left(Z, \frac{\lambda}{2}\right)$ εἶναι τόπος καὶ τῶν ποδῶν τῶν καθέτων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Γ ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Σημ. Εἰς τὸ σχῆμα νὰ γραφῇ τὸ σημεῖον Μ, σημεῖον τῆς τομῆς τῆς ΑΕ καὶ ΒΔ.

***886. Δίδεται μία περιφέρεια Ο καὶ ἕνα ὡρισμένον σημεῖον Α ἐντὸς αὐτῆς. Διὰ τοῦ Α φέρομεν μίαν χορδὴν ΒΑΓ. Διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β καθὼς καὶ διὰ τῶν σημείων Α καὶ Γ γράφομεν δύο περιφερείας, αἱ ὁποῖαι νὰ ἐφάπτωνται τῆς Ο καὶ αἱ ὁποῖαι τέμνονται μεταξύ των εἰς ἕνα σημεῖον Μ. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ.***

*Λύσις.* Ἔστωσαν ( καὶ Λ αἱ δύο περιφέρειαι, αἱ διερχόμεναι διὰ τῶν Α, Β καὶ Α, Γ καὶ τεμνόμεναι εἰς τὸ Μ. Τὰ κέντρα Κ καὶ Λ κεῖνται ἐπὶ τῶν ἀκτίνων ΟΒ καὶ ΟΓ. Φέρομεν τὰς ΚΑ καὶ ΛΑ.




Σχ. 92

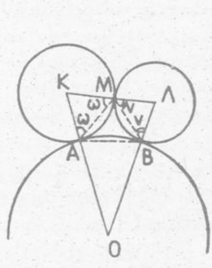
Τὰ τρίγωνα ΟΒΓ, ΚΑΒ, ΛΑΓ εἶναι ἰσοσκελῆ καὶ ἐπειδὴ ἔχουν τὰς παρὰ τὴν βάσιν των γωνίας ἴσας θὰ ἔχουν καὶ τὰς γωνίας τῆς κορυφῆς των ἴσας. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΟΚΑΛ εἶναι παραλληλόγραμμον. Αἱ διαγώνιοί του λοιπὸν ΑΟ καὶ ΚΛ διχοτομοῦνται εἰς τὸ Ε. Τὸ Ε εἶναι ὅμως ὡρισμένον ὡς μέσον τῆς ΑΟ.

Φέρομεν τὴν ΑΜ. Ἡ διάκεντρος ΚΛ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν κοινὴν χορδὴν ΑΜ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς. Ἐπειδὴ τὸ Ε κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΜ θὰ εἶναι ΕΑ=ΕΜ.

Ἐπειδὴ ἡ ΕΑ εἶναι σταθερὰ ἔπεται, ὅτι ἡ ΕΜ εἶναι σταθερά. Τὸ Μ λοιπόν, ὡς ἀπέχον σταθερὰν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ Ε, κεῖται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ Ε, τὸ μέσον τῆς ΑΟ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΕΑ. Ἡ περιφέρεια αὕτη εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος.

*887. **Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου ἐπαφῆς δύο περιφερειῶν Κ καὶ Λ, αἱ ὁποῖαι εφάπτονται μεταξύ των ἐξωτερικῶς καὶ αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται καὶ δοθείσης περιφερείας Ο εἰς δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β αὐτῆς.***

*Λύσις.* Ἔστω Μ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῶν περιφερειῶν Κ καὶ Λ, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ Κ ἐφάπτεται τῆς Ο εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ ἡ Λ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας Ο εἰς το Β. Τὸ σημεῖον Μ Μ εἶναι προφανῶς σημεῖον τοῦ τόπου. Φέρομεν τὰς διακέντρους ΟΚ, ΚΛ, ΛΟ.




Σχ. 93

Αἱ διάκεντροι αὐταὶ διέρχονται ἀπὸ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς Α, Μ, καὶ Β. Φέρομεν καὶ τὰς χορδὰς ΑΜ, ΜΒ, ΒΑ. Τὰ τρίγωνα ΚΑΜ καὶ ΛΜΒ εἶναι ἰσοσκελῆ· ἄρα αἱ παρὰ τὴν βάσιν των γωνίαι ω καὶ ν εἶναι ἴσαι.

Ἡ γωνία ΑΜΒ εἶναι παραπληρωματικὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν ω καὶ ν ἤτοι εἶναι γων.ΑΜΒ$=180^0-(\omega+\nu)$ (1).

Ἀλλὰ ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΚΜ ἔχομεν 2 γων.ω+γων.Κ=180 ἢ γων.ω$=90^0-\frac{\text{γων.Κ}}{2}$.

Ὁμοίως ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΛΜΒ εὑρίσκομεν γων.ν$=90^0-\frac{\text{γων.Λ}}{2}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰς γωνίας ω καὶ ν διὰ τῶν ἴσων των καὶ ἔχομεν γων.ΑΜΒ$=180^0-\left(90^0-\frac{K}{2}+90^0-\frac{\Lambda}{2}\right)$ ἢ

γων.ΑΜΒ$=\frac{K+\Lambda}{2}$ (2).

'Απὸ τὸ τρίγωνον ΚΟΛ ἔχομεν γων.Κ+γων.Λ+γων.Ο$=180^0$ ἢ γων.Κ+γων.Λ$=180^0-$γων.Ο ἢ $\frac{\text{γων.Κ}+\text{γων.Λ}}{2}=90^0-\frac{\text{γων.Ο}}{2}$.

'Αντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὴν $\frac{\text{γων.Κ}+\text{γων.Λ}}{2}$ διὰ τοῦ ἴσου της καὶ ἔχομεν γων.ΑΜΒ$=90^0-\frac{\text{γων Ο}}{2}$.

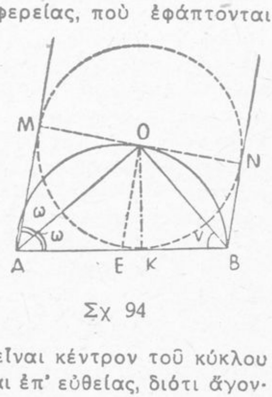
'Αλλὰ ἡ γωνία Ο εἶναι σταθερά, διότι τὰ σημεῖα Α καὶ Β εἶναι ὡρισμένα, ἄρα καὶ ἡ γωνία ΑΜΒ εἶναι σταθερά. Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ σταθερὰ εὐθεῖα ΑΒ φαίνεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Μ ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν καὶ ἴσην μὲ $90^0-\frac{O}{2}$· ἄρα τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν ΑΒ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ $90^0-\frac{O}{2}$.

"Ωστε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ αὐτοῦ τμήματος·

***888. Δίδεται μία εὐθεῖα ΑΒ καὶ λαμβάνομεν ὅλους τοὺς κύκλους, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται τῆς εὐθείας αὐτῆς καὶ τοιούτους, ὥστε αἱ ἐφαπτόμεναι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β πρὸς κάθε ἕνα ἀπὸ τοὺς κύκλους αὐτοὺς νὰ εἶναι παράλληλοι. Ἔστωσαν Μ καὶ Ν τὰ σημεῖα ἐπαφῆς μὲ τὰς ἐφαπτομένας αὐτὰς καὶ Κ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς μὲ τὴν ΑΒ. 1ον. Νὰ δεχθῇ, ὅτι ὁ τόπος τῶν κέντρων εἶναι ἕνας κύκλος. 2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΜΝ εἶναι ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου αὐτοῦ εἰς τὸ μέσον. 3ον. Διὰ ποίαν θέσιν τῶν ἐφαπτομένων τὸ τρίγωνον ΜΝΚ εἶναι ἰσοσκελές; 4ον. Διὰ ποίαν θέσιν τῶν ἐφαπτομένων ἡ ἀκτὶς τοῦ μεταβλητοῦ κύκλου εἶναι ἴση μὲ λ;***

***Λύσις. 1ον.*** Ἔστω Ο μία ἀπὸ τὰς περιφερείας, ποὺ ἐφάπτονται τῆς ΑΒ εἰς τὸ Κ. Φέρομεν τὰς ΟΑ καὶ ΟΒ, αἱ ὁποῖαι διχοτομοῦν τὰς γωνίας ΜΑΒ καὶ ΝΒΑ.

'Επειδὴ αἱ ΑΜ καὶ ΒΝ εἶναι παράλληλοι, αἱ γωνίαι ΜΑΒ καὶ ΝΒΑ εἶναι παραπληρωματικαί· ἄρα θὰ εἶναι ω+ν=1 ὀρθή. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΟΑΒ ἔχει δύο γωνίας ω καὶ ν, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ 1 ὀρθήν· ἄρα ἡ τρίτη γωνία του ΑΟΒ εἶναι ὀρθή. Ὁ τόπος λοιπὸν τοῦ Ο θὰ εἶναι περιφέρεια, ἡ ὁποία γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ΑΒ.




Σχ 94

***2ον.*** Ἔστω Ε τὸ μέσον τῆς ΑΒ· τὸ Ε εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου ΑΟΒ. Φέρομεν τὴν ΟΕ. Αἱ ΟΜ καὶ ΟΝ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, διότι ἄγονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο καὶ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς παραλλήλους εὐθείας ΑΜ καὶ ΒΝ.

Εἰς τὸ τραπέζιον ΑΜΝΒ, ἡ ΟΕ εἶναι διάμεσός του καὶ ἐπειδὴ αἱ βάσεις του ΑΜ καὶ ΒΝ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΜΝ θὰ εἶναι καὶ ἡ ΕΟ κάθετος ἐπὶ τὴν ΜΝ. Ἄρα ἡ ΜΝ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ΑΟΒ εἰς τὸ μέσον της Ο.

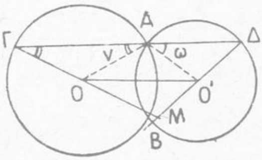
*3ον.* Τὸ τρίγωνον ΜΕΝ εἶναι πάντοτε ἰσοσκελές. Διὰ νὰ γίνῃ ἰσοσκελὲς καὶ τὸ τρίγωνον ΜΚΝ πρέπει τὸ Κ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΟΕ. Δηλ. ἡ ΟΕ πρέπει νὰ γίνῃ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, ὁπότε καὶ αἱ ΑΜ καὶ ΒΝ πρέπει νὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΒ.

*4ον.* Πρέπει ἡ ΟΚ νὰ γίνῃ ἴση μὲ λ, ὁπότε ΜΝ=2.ΟΚ=2λ, δηλ. ἡ μεταξὺ τῶν δύο παραλλήλων ἀπόστασις νὰ εἶναι ἴση μὲ 2λ. Πρὸς τοῦτο μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ 2λ γράφομεν περιφέρειαν.

Ἀπὸ τὸ Β φέρομεν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας αὐτῆς καὶ ἀπὸ τὸ Α τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ἐφαπτομένην αὐτήν. Οὕτω ὁρίζεται ἡ θέσις τῶν δύο μεταβλητῶν αὐτῶν παραλλήλων.

*889.* ***Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο΄ τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν ΓΑΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ Γ καὶ τὴν Ο΄ εἰς τὸ Δ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΓΟ καὶ ΔΟ΄, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ Μ, ὅταν ἡ τέμνουσα ΓΑΔ στρέφεται περὶ τὸ Α.***

*Λύσις.* Τὸ σημεῖον Μ εἶναι προφανῶς σημεῖον τοῦ τόπου




Σχ. 95

Ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΓΜΔ θὰ ἔχωμεν γων.Μ=180°—(γων.Γ+γων.Δ) (1).

Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ καὶ Ο΄Α. Τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα ΓΟΑ καὶ ΑΟ΄Δ εἶναι ἰσοσκελῆ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι γων.Γ=γων.ν καὶ γων.Δ=γων.ω. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰς γωνίας Γ καὶ Δ διὰ τῶν ἴσων των καὶ ἔχομεν γων.Μ=180°—(γων.ν+γων.ω) (2).

Ἀλλὰ καὶ γων.ΟΑΟ΄=180°—(γων.ν+γων ω) (3).

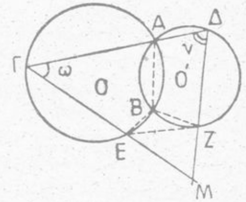
Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (2) καὶ (3) συνάγομεν ὅτι γων Μ=γων.ΟΑΟ΄.

Ἀλλὰ ἡ γωνία ΟΑΟ΄ εἶναι σταθερά· ἄρα καὶ ἡ ἴση μὲ αὐτὴν γων. Μ εἶναι σταθερά. Φέρομεν τὴν διάκεντρον ΟΟ΄.

Ἐπειδὴ ἡ σταθερὰ εὐθεῖα ΟΟ΄ φαίνεται ἀπὸ τὸ Μ ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν, ἕπεται ὅτι τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν διάκεντρον ΟΟ΄ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ τὴν γωνίαν ΟΑΟ΄· ἄρα ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι τὸ τόξον αὐτοῦ τοῦ κυκλικοῦ τμήματος.

*890.* ***Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο΄ τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Α, φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν ΓΑΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ σημεῖον Γ καὶ τὴν Ο΄ εἰς τὸ Δ. Μὲ κορυφὰς τὰ σημεῖα Γ*** *καὶ Δ καὶ πλευρὰν τὴν ΓΔ κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν* ΑΓΜ=ω *καὶ τὴν γωνίαν* ΑΔΜ=ν. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς τομῆς* Μ *τῶν πλευρῶν* ΓΜ *καὶ* ΔΜ *τῶν γωνιῶν αὐτῶν, ὅταν ἡ τέμνουσα* ΓΑΔ *στρέφεται περὶ τὸ* Α.

*Λύσις.* Τὸ σημεῖον Μ εἶναι προφανῶς σημεῖον τοῦ τόπου. Φέρομεν τὴν κοινὴν χορδὴν ΑΒ καὶ τὰς χορδὰς ΒΕ καὶ ΒΖ, ὅπου Ε καὶ Ζ εἶναι τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα αἱ πλευραὶ ΓΜ καὶ ΔΜ τέμνουν τὰς περιφερείας Ο καὶ Ο΄.



Σχ. 96

Τὸ τετράπλευρον ΑΓΕΒ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, ἑπομένως αἱ ἀπέναντι γωνίαι του Γ καὶ ΑΒΕ εἶναι παραπληρωματικαί.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία Γ εἶναι γνωστὴ καὶ ἴση μὲ ω, ἔπεται ὅτι καὶ ἡ παραπληρωματική της γωνία ΑΒΕ εἶναι γνωστὴ καὶ ἴση μὲ 2 ὀρθ.—ω.

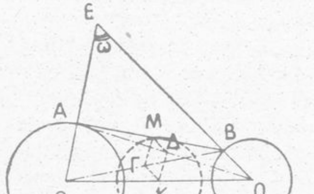
Ἐπειδὴ ἡ πλευρὰ ΑΒ τῆς γωνίας ΑΒΕ εἶναι σταθερὰ κατὰ τὴν θέσιν ἔπεται, ὅτι ἡ ἄλλη πλευρὰ ΒΕ διέρχεται ἀπὸ ὡρισμένον σημεῖον, ἀφοῦ ἡ γωνία ΑΒΕ εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση μὲ 2 ὀρθ.—ω. Τὸ σημεῖον λοιπὸν Ε εἶναι ὡρισμένον.

Ὁμοίως ἀπὸ τὸ τετράπλευρον ΑΒΖΔ συνάγομεν, ὅτι ἡ γωνία ΑΒΖ εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση μὲ 2 ὀρθ.—ν καὶ ὅτι τὸ σημεῖον Ζ εἶναι ὡρισμένον.

Ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΓΜΔ ἔχομεν γων.Μ=180°—(γων.ω+γων.ν)=σταθερά. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΖ. Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ σταθερὰ εὐθεῖα ΕΖ κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος φαίνεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Μ ὑπὸ γωνίαν σταθερὰν καὶ ἴσην μὲ 180°—(ω+ν)· ἄρα τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν ΕΖ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ 180°—(ω+ν).

Ὥστε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ αὐτοῦ τμήματος.

*891. Δίδονται δύο περιφέρειαι* Ο *καὶ* Ο΄, *αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἡ μία ἐκτὸς τῆς ἄλλης. Φέρομεν δ ο μεταβλητὰς ἀκτῖνας* ΟΑ *καὶ* Ο΄Β, *αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν μεταξύ των μίαν σταθερὰν γωνίαν* ω. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ μέσου* Μ *τῆς εὐθείας* ΑΒ, *ἡ ὁποία συνδέει τὰ ἄκρα τῶν ἀκτίνων.*



Σχ. 97

*Λύσις.* Φέρομεν τὴν διάκεντρον ΟΟ΄ καὶ τὰς εὐθείας ΟΒ καὶ Ο΄Α. Ἔστωσαν Κ τὸ μέσον τῆς διακέντρου ΟΟ΄, Γ τὸ μέσον τῆς ΟΒ καὶ Δ τὸ μέσον τῆς Ο΄Α. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΚΓ, ΓΜ, ΜΔ καὶ ΔΚ.

Τὸ τετράπλευρον ΜΓΚΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ κορυφαί του εἶναι τὰ μέσα τῶν δύο πλευρῶν καὶ τῶν δύο διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου ΟΑΒΟ'.

Αἱ πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΜΓΚΔ εἶναι σταθεραί, διότι εἶναι ἴσαι μὲ τὰ ἡμίση τῶν σταθερῶν ἀκτίνων ΟΑ καὶ Ο'Β.

'Επίσης ἡ γωνία ΓΜΔ τοῦ παραλληλογράμμου ΜΓΚΔ εἶναι σταθερά, διότι εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ω, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ ἀκτῖνες ΟΑ καὶ Ο'Β.

Τὸ παραλληλόγραμμον λοιπὸν ΜΓΚΔ εἶναι σταθερόν, διότι ἔχει τὰς πλευράς του καὶ τὰς γωνίας του σταθεράς· ἄρα καὶ ἡ διαγώνιός του ΚΜ εἶναι σταθερά.

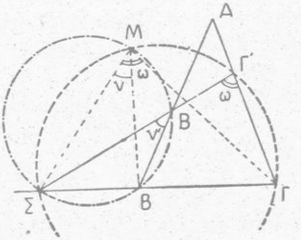
Τὸ σημεῖον λοιπὸν Μ ἀπέχει ἀπὸ τὸ σταθερὸν σημεῖον Κ ἀπόστασιν σταθεράν· ἄρα κεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ μέσον Κ τῆς διακέντρου ΟΟ' καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν διαγώνιον ΚΜ τοῦ σταθεροῦ παραλληλογράμμου ΜΓΚΔ.

"Ωστε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ἡ περιφέρεια (Κ, ΚΜ).

*892. Δίδεται ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ. *'Επὶ τῆς προεκτάσεως τῆς πλευρᾶς* ΓΒ *λαμβάνομεν ἕνα ὡρισμένον σημεῖον* Σ, *ἀπὸ τὸ ὁποῖον φέρομεν μίαν μεταβλητὴν τέμνουσαν* ΣΒ'Γ' *τοῦ τριγώνου* ΑΒΓ, *ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν* ΑΒ *εἰς τὸ* Β' *καὶ τὴν πλευρὰν* ΑΓ *εἰς τὸ* Γ'. *Γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα* Σ, Β, Β' *καὶ μίαν ἄλλην περιφέρειαν κύκλου, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα* Σ, Γ, Γ'. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ δευτέρου σημείου* Μ *τῆς τομῆς τῶν δύο αὐτῶν περιφερειῶν.*

*Λύσις.* Φέρομεν τὰς εὐθείας ΜΣ, ΜΒ, ΜΓ. 'Η γωνία ΒΜΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τῶν γωνιῶν ΣΜΓ καὶ ΣΜΒ, ἤτοι εἶναι

$$B\widehat{M}\Gamma=\Sigma\widehat{M}\Gamma-\Sigma\widehat{M}B \quad (1).$$




Σχ. 98

'Αλλὰ αἱ γωνίαι ΣΜΓ καὶ ΣΓ'Γ εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΣΝΓ' ἤτοι εἶναι $\Sigma\widehat{M}\Gamma=\Sigma\widehat{\Gamma'}\Gamma$.

'Ομοίως εἶναι $\Sigma\widehat{M}B=\Sigma\widehat{B'}B$, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΣΒ.

'Αντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰς γωνίας ΣΜΓ καὶ ΣΜΒ μὲ τὰς ἴσας των γωνίας ΣΓ'Γ καὶ ΣΒ'Β καὶ ἔχομεν $B\widehat{M}\Gamma=\Sigma\widehat{\Gamma'}\Gamma-\Sigma\widehat{B'}B$ ἢ $B\widehat{M}\Gamma=\Sigma\widehat{\Gamma'}\Gamma-A\widehat{B'}\Gamma$ (2).

'Αλλὰ ἡ γωνία ΣΓ'Γ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒ'Γ' καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι $\Sigma\widehat{\Gamma'}\Gamma=\widehat{A}+A\widehat{B'}\Gamma'$ ἢ $\Sigma\widehat{\Gamma'}\Gamma-A\widehat{B'}\Gamma'=\widehat{A}$.

'Αντικαθιστῶμεν τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος (2) μὲ τὸ ἴσον τοῦ Α καὶ ἔχομεν $B\widehat{M}\Gamma=\widehat{A}$.

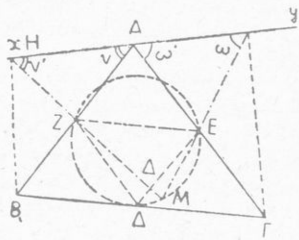
'Απὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ σταθερὰ εὐθεῖα

ΒΓ φαίνεται ἀπὸ τὸ Μ ὑπὸ γωνίαν ΒΜΓ σταθερὰν καὶ ἴσην μὲ Α· ἄρα τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν πλευρὰν ΒΓ τοῦ δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ καὶ δέχεται γωνίαν μὲ Α.

Ὥστε τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, δηλ. ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

*893. Δίδεται ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ *καὶ* Δ, Ε, Ζ *τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του* ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. *Ἀπὸ τὴν κορυφὴν* Α *φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν* xy *καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα* Β *καὶ* Γ *καθέτους* ΒΗ *καὶ* ΓΘ *ἐπὶ τὴν* xy. *Φέρομεν τὰς εὐθείας* ΗΖ *καὶ* ΘΕ, *αἱ ὁποῖαι προεκτεινόμεναι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον* Μ. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου* Μ, *ὅταν ἡ* xy *στρέφεται περὶ τὸ* Α.

*Λύσις.* Τὸ σημεῖον Μ τῆς τομῆς ΗΖ καὶ ΘΕ εἶναι προφανῶς σημεῖον τοῦ τόπου.



Σχ. 99

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΗΒ ἡ ΗΖ εἶναι διάμεσός του ἀγομένη ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας Η· ἄρα ἡ ΗΖ χωρίζει τὸ τρίγωνον αὐτὸ εἰς δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα· τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΗΖ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι γων.ν=γων.ν'.

Ὁμοίως διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὸ τρίγωνον ΑΕΘ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι

γων.ω=γων ω'.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΗΜΘ θὰ εἶναι γων.Μ=180°—(ω+ν)=180°—(ω'+ν') (1).

Ἀλλὰ ω'+ν'=180°—γων.Α· ἑπομένως ἡ ἰσότης (1) γράφεται

γων.Μ=180°—(180°—γων.Α), ἢ γων.Μ=γων.Α (2).

Φέρομεν τὰς εὐθείας ΔΖ καὶ ΔΕ· τὸ σχηματισθὲν τετράπλευρον ΑΖΔΕ εἶναι παραλληλόγραμμον κατὰ τὰ γνωστά· ἄρα αἱ ἀπέναντι γωνίαι του Α καὶ Δ εἶναι ἴσαι, ἤτοι εἶναι γων.Δ=γων.Α (3).

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (2) καὶ (3) συνάγομεν, ὅτι γων.Δ=γων.Μ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΖΕ. Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΕ φαίνεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Δ καὶ Μ ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν· ἄρα τὰ Δ καὶ Μ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου κυκλικοῦ τμήματος· ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι σταθερόν, ἑπομένως τὰ Δ καὶ Μ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

Ὁ ζητούμενος λοιπὸν τόπος εἶναι ἡ περιφέρεια ἡ περιγεγραμμένη περὶ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ.

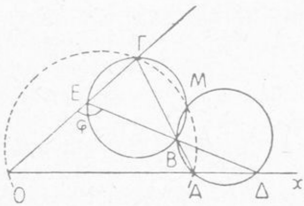
*894. Δίδεται μία γωνία* xOy *καὶ ἕνα σημεῖον* Β, *τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας αὐτῆς. Ἀπὸ τὸ* Β *φέρομεν μίαν σταθερὰν τέμνουσαν* ΑΒΓ, *ἡ ὁποία τέμνει τὰς πλευρὰς* Οx *καὶ* Οy *τῆς γωνίας εἰς τὰ σημεῖα* Α *καὶ* Γ *ἀντιστοίχως καὶ μίαν μεταβλητὴν τέμνουσαν* ΔΒΕ, *ἡ ὁποία τέμνει τὰς* Οx *καὶ* Οy *εἰς τὰ σημεῖα* Δ *καὶ* Ε *ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος* *τοῦ δευτέρου σημείου τῆς τομῆς τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι περιγεγραμμέναι περὶ τὰ τρίγωνα* ΒΑΔ *καὶ* ΒΓΕ.

*Λύσις.* Ἔστω Μ τὸ δεύτερον σημεῖον τῆς τομῆς τῶν περιφερειῶν τῶν περιγεγραμμένων περὶ τὰ τρίγωνα ΒΑΔ καὶ ΒΓΕ.

Τὸ Μ εἶναι προφανῶς ἕνα σημεῖον τοῦ τόπου. Φέρομεν τὴν κοινὴν χορδὴν ΒΜ καὶ τὰ χορδὰς ΜΑ καὶ ΜΓ.

Ἡ γωνία ΑΜΓ εἶναι ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΜΒ καὶ ΒΜΓ· ἤτοι εἶναι $\widehat{AM\Gamma}=\widehat{AMB}+\widehat{BM\Gamma}$ (1).

Ἀλλὰ $\widehat{AMB}=\widehat{\Delta}$, ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον καὶ βαίνουσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΒ.




Σχ. 100

Ἡ γωνία ΒΜΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν φ, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν Ε. Πράγματι εἶναι γων.ΒΜΓ+γων.Ε=2 ὀρθ., ὡς ἀπέναντι γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ΕΒΜΓ, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον καὶ

γων.φ+γων.Ε=2 ὀρθ.,

ὡς ἐφεξῆς τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας· ὥστε θὰ εἶναι γων.ΒΜΓ=γων.φ.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰς γωνίας ΑΜΒ καὶ ΒΜΓ διὰ τῶν ἴσων των γωνιῶν καὶ ἔχομεν

γων.ΑΜΓ=γων.Δ+γων.φ=2 ὀρθ.—γων.Ο ἢ γων.ΑΜΓ+γων.Ο=2 ὀρθ.

Τὸ τετράπλευρον ΟΑΜΓ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, διότι αἱ ἀπέναντι γωνίαι του Ο καὶ Μ εἶναι παραπληρωματικαί.

Τὸ Μ λοιπὸν κεῖται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῶν σταθερῶν σημείων Ο, Α, Γ, δηλ. κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον ΟΑΓ.

Ὥστε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ἡ περιφέρεια, ἡ περιγεγραμμένη περὶ τὸ τρίγωνον ΟΑΓ.

Σημ. Εἰς τὸ σχῆμα νὰ ἀχθοῦν αἱ χορδαὶ ΒΜ, ΜΑ, ΜΓ.

**Γ′ Ὁμάς. 895. *Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ, *ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν* Γ *καὶ τὰς διαμέσους* $\mu_\alpha$ *καὶ* $\mu_\beta$.**

***Ἀπ.*** Βλέπε λύσιν ἀσκήσεως $702/_2$.

**896. *Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ, *ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν* α, *τὴν γωνίαν* Α *καὶ τὴν διαφορὰν* Β—Γ=ω.**

***Λύσις.*** Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Ἡ κορυφὴ Α κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν ΒΓ=α καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν Α.

Ἔστω Μ τὸ μέσον τοῦ τόξου ΒΓ. Φέρομεν τὴν διάμετρον ΜΟΝ καὶ ἔστω Α′ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Α, ὡς πρὸς τὴν ΜΝ.

Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $B-\Gamma=\omega$ ἢ $\dfrac{\text{τοξ.}AN\Gamma-\text{τοξ.}AB}{2}=\omega$

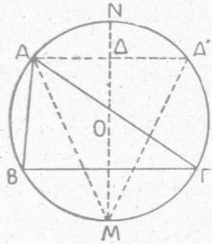
ἢ $\dfrac{\text{τοξ.}AA'+\text{τοξ.}A'\Gamma-\text{τοξ.}AB}{2}=\omega$ ἢ $\dfrac{\text{τοξ}\,AA'}{2}=\omega$.

Ἡ MN εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας AMA', ἡ ὁποία ἰσοῦται μὲ τὴν δοθεῖσαν διαφορὰν ω.

Κ α τ α σ κ ε υ ή. Μὲ χορδὴν τὴν ΒΓ=α γράφομεν τόξον κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον νὰ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν Α.

Ἔστω Ο τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ κυκλικὸν τοῦτο τμῆμα.

Ἀπὸ τὸ μέσον Μ τοῦ τόξου ΒΜΓ φέρομεν τὴν διάμετρον ΜΟΝ καὶ ἑκατέρωθεν αὐτῆς τὰς ΜΑ καὶ ΜΑ', οὕτως ὥστε $\widehat{AMN}=\widehat{NMA'}=\dfrac{\omega}{2}$.

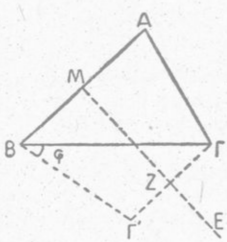


Σχ. 101

Ὥστε τὸ σημεῖον Α εἶναι ἡ τρίτη κορυφὴ τοῦ ζητουμένου τριγώνου ΑΒΓ.

*897. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ, *ἂν γνωρίζωμεν τὰς πλευρὰς α καὶ β καὶ τὴν διαφορὰν* Α—Β=ω.

*Λύσις.* Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς πλευρὰς ΒΓ=α, ΑΓ=β καὶ τὴν διαφορὰν Α—Β=ω. Ἐκ τοῦ μέσου Μ τῆς ΑΒ ὑψοῦμεν κάθετον ΜΕ ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἔστω Γ' τὸ συμμετρικὸν τοῦ Γ, ὡς πρὸς τὴν ΜΕ. Φέρομεν τὴν ΒΓ'.



Σχ. 102

Τὸ τετράπλευρον ΑΓΓ'Β εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον, διότι αἱ ΑΒ καὶ ΓΓ', ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΜΕ, εἶναι παράλληλοι, ἰσοσκελὲς δέ, διότι ἡ συνδέουσα τὰ μέσα τῶν δύο βάσεων εὐθεῖα ΜΖ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς βάσεις. Θὰ εἶναι λοιπὸν ΒΓ'=ΑΓ=β καὶ γων.Α=γων.ΑΒΓ' ἢ Α=Β+φ ἢ Α—Β=φ.

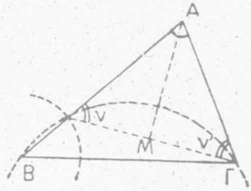
Ἡ γωνία λοιπὸν φ εἶναι ὡρισμένη, ὡς ἴση μὲ τὴν δοθεῖσαν διαφορὰν Α—Β=ω. Τοῦ τριγώνου ΓΒΓ' γνωρίζομεν δύο πλευρὰς ΒΓ=α καὶ ΒΓ'=β καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν φ=Α—Β.

Κ α τ α σ κ ε υ ή. Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΒΓΓ', τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν δύο πλευρὰς ΒΓ=α καὶ ΒΓ'=β καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν φ, ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν διαφορὰν ω.

Ἀπὸ τὸ μέσον Ζ τῆς πλευρᾶς ΓΓ' ὑψοῦμεν κάθετον ΖΜ ἐπ' αὐτήν. Ἀπὸ τὸ Β φέρομεν τὴν ΒΜ κάθετον ἐπὶ τὴν ΖΜ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς λαμβάνομεν ΜΑ=ΒΜ. Φέρομεν τὴν ΑΓ. Τὸ σχηματισθὲν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενον.

*898. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ, *ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν* α, *τὸ ἄθροισμα* Β+Γ=ω *τῶν γωνιῶν* Β *καὶ* Γ *καὶ τὴν διαφορὰν* γ—β=λ.

*Λύσις.* Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν ΒΓ=α, τὸ ἄθροισμα Β+Γ=ω τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ καὶ τὴν διαφορὰν ΑΒ—ΑΓ=δ. Ἡ γωνία Α=180°—(Β+Γ)=180°—ω.




Σχ. 103

Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται λοιπὸν εἰς τὸ κατωτέρω πρόβλημα: *νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν μίαν πλευράν, τὴν ἀπέναντι γωνίαν* Α *καὶ τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.*

*Λύσις.* Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν ΒΓ=α, τὴν γωνίαν Α καὶ τὴν διαφορὰν ΑΒ—ΑΓ=δ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

Ἐπὶ τῆς μεγαλειτέρας πλευρᾶς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα ΑΕ=ΑΓ, ὁπότε ΒΕ=ΑΒ—ΑΕ=ΑΒ—ΑΓ=δ. Φέρομεν τὴν ΓΕ καὶ σχηματίζεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΕΓ, ὁπότε γων.ν=γων.ν'.

Θὰ ἔχωμεν γων.ν+γων.ν'+Α=2 ὀρθ. ἢ γων.2ν=2 ὀρθ.—Α.

Ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν γων.ΒΕΓ+γων.ν=2 ὀρθ.

ἢ γων.ΒΕΓ=2 ὀρθ.—γων.ν=2 ὀρθ.— $\left(1 \text{ ὀρθ.} - \frac{A}{2}\right) = 1 \text{ ὀρθ} + \frac{A}{2}$.

Ἡ γωνία λοιπὸν ΒΕΓ εἶναι γνωστὴ καὶ ἡ κορυφή της Ε κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν ΒΓ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ 1 ὀρθ.$+\frac{A}{2}$.

Ἐπίσης ἡ κορυφὴ Ε, ὡς ἀπέχουσα τῆς Β ἀπόστασιν ΒΕ=δ, κεῖται καὶ ἐπὶ τόξου περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ ΒΕ=δ.

Τὸ Ε λοιπὸν εἶναι τομὴ τῶν δύο τούτων τόξων. Ἡ δὲ τρίτη κορυφὴ τοῦ τριγώνου θὰ προσδιορισθῇ, ἂν ὑψώσωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΕ ἀπὸ τὸ μέσον Μ αὐτῆς.

Κ α τ α σ κ ε υ ή. Λαμβάνομεν ἐπὶ τυχούσης εὐθείας εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΓ ἴσον μὲ τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν τοῦ τριγώνου. Μὲ χορδὴν τὴν ΒΓ γράφομεν τόξον κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ 1 ὀρθ.$+\frac{A}{2}$.

Μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν διαφορὰν λ τῶν δύο πλευρῶν τοῦ ζητουμένου τριγώνου, γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος εἰς τὸ Ε. Φέρομεν τὴν ΒΕ καὶ ΓΕ.

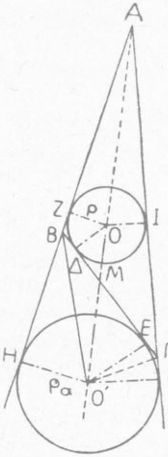
Ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς ΓΕ ὑψοῦμεν κάθετον, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΒΕ εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἂν φέρωμεν τὴν ΑΓ σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον.

Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν πρέπει $\alpha > \lambda$.

Σημ. Νὰ τεθῇ εἰς τὸ σχῆμα τὸ γράμμα Ε.

*899. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ, *ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὴν διαφορὰν $\beta-\gamma=\lambda$ καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.*

*Λύσις.* Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν ΒΓ=α, τὴν διαφορὰν ΑΓ—ΑΒ=δ καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου Ο, ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου εἰς τὰ σημεῖα Δ, Ι, Ζ.



Σχ. 104

Ἐγγράφομεν εἰς τὴν γωνίαν Α τὸν παρεγγεγραμμένον κύκλον Ο', ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῆς ΒΓ εἰς τὸ Ε καὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας Α εἰς τὰ Η καὶ Θ. Ἔχομεν

$$\delta = \text{ΑΓ}-\text{ΑΒ}=(\text{ΑΙ}+\text{ΙΓ})-(\text{ΑΖ}+\text{ΖΒ})=\text{ΙΓ}-\text{ΖΒ}=$$
$$=\text{ΓΔ}-\text{ΒΔ}\cdot \text{ ἄρα } \delta=\text{ΓΔ}-\text{ΒΔ} \quad (1).$$

Ἀλλὰ ΒΔ=ΕΓ, διότι ΖΗ=ΙΘ ἢ ΖΒ+ΒΗ=ΙΓ+ΓΘ ἢ ΒΔ+ΒΕ=ΓΔ+ΓΕ ἢ ΒΔ+ΒΔ+ΔΕ=ΓΕ+ΔΕ+ΓΕ ἢ 2ΒΔ=2ΓΕ καὶ ΒΔ=ΓΕ.

Θέτοντες εἰς τὴν (1), ἀντὶ τοῦ ΒΔ, τὸ ἴσον του ΓΕ, εὑρίσκομεν δ=ΔΕ.

Κατασκευή. Μὲ κέντρον τυχὸν σημεῖον Ο καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν ρ, γράφομεν περιφέρειαν κύκλου. Εἰς τυχὸν σημεῖον Δ τῆς περιφερείας Ο φέρομεν ἐφαπτομένην καὶ λαμβάνομεν ΔΕ=δ. Ἑκατέρωθεν τοῦ μέσου Μ τῆς ΔΕ λαμβάνομεν $\text{ΜΒ}=\text{ΜΓ}=\frac{\alpha}{2}$.

Ἐκ τῶν Β καὶ Γ φέρομεν ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου Ο, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Α. Τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

*900. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ, *ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι αἱ πλευραί του πρέπει νὰ διέρχωνται ἀπὸ τρία ὡρισμένα σημεῖα* Λ, Μ, Ν, *ὅτι αἱ κορυφαὶ* Β *καὶ* Γ *κεῖνται ἐπὶ μιᾶς ὡρισμένης περιφερείας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ* Λ *καὶ* Μ *καὶ ὅτι ἡ γωνία* Α *εἶναι δοθεῖσα.*

*Λύσις.* Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Ἡ γωνία Α ἔχει τὴν κορυφήν της ἐντὸς τοῦ κύκλου· ἄρα εἶναι $\text{Α}=\frac{\text{τόξ.ΓΒ}+\text{τόξ.ΛΜ}}{2}$ (1).

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ γωνία Α καὶ τὸ τόξον ΜΛ εἶναι ὡρισμένα, ἕπεται ἐκ τῆς (1), ὅτι καὶ τὸ τόξον ΓΒ, ἄρα καὶ ἡ χορδὴ ΓΒ, εἶναι ὡρισμένα.

Φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΕΛ τῆς δοθείσης περιφερείας εἰς τὸ Λ. Κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν Ε'ΛΔ, ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν Α. Θὰ εἶναι

$$\text{γων.Ε'ΛΔ}=\frac{\text{τοξ.ΛΜ}+\text{τοξ.ΔΜ}}{2}$$

καὶ ἐπειδὴ γων.Ε'ΛΔ=Α ἕπεται ἐκ τῆς (1)

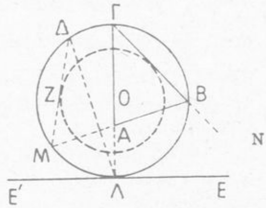
ὅτι $\frac{\text{τοξ.ΓΒ}+\text{τοξ.ΛΜ}}{2}=\frac{\text{τοξ.ΛΜ}+\text{τοξ.ΔΜ}}{2}$,

ἐκ τῆς ὁποίας συνάγομεν, ὅτι

τοξ.ΔΜ=τοξ.ΓΒ

καὶ ἑπομένως χορδὴ ΔΜ=χορδὴ ΓΒ.

Ἐπειδὴ ΔΜ=ΓΒ, ἕπεται ὅτι αἱ ἀποστάσεις των ἀπὸ τοῦ κέντρου Ο εἶναι ἴσαι καὶ ἑπομένως αἱ ΜΔ καὶ ΓΒ ἐφάπτονται ὁμοκέντρου περιφερείας τῆς δοθείσης.



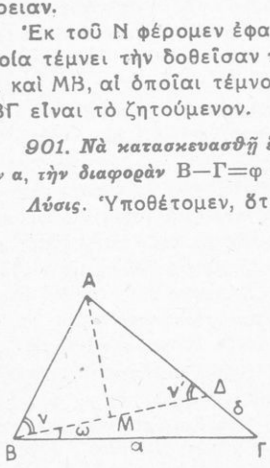

Σχ. 105

Κ α τ α σ κ ε υ ή. Φέρομεν ἐφαπτομένην Ε'ΛΕ τῆς δοθείσης περιφερείας εἰς τὸ σημεῖον Λ. Κατασκευάζομεν γωνίαν Ε'ΛΔ ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν Α. Φέρομεν τὴν χορδὴν ΔΜ. Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν ἀπόστασιν τῆς ΔΜ ἀπὸ τὸ Ο, γράφομεν ὁμόκεντρον περιφέρειαν.

Ἐκ τοῦ Ν φέρομεν ἐφαπτομένην τῆς βοηθητικῆς περιφερείας, ἡ ὁποία τέμνει τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν εἰς τὰ Β καὶ Γ. Φέρομεν τὰς ΓΛ καὶ ΜΒ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Α. Τὸ σχηματισθὲν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

*901. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ, *ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὴν διαφορὰν* Β—Γ=φ *καὶ* β—γ=λ.

*Λύσις*. Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν ΒΓ=α, τὴν διαφορὰν Β—Γ=ω καὶ τὴν διαφορὰν ΑΓ—ΑΒ=δ.




Σχ. 106

Ἐπὶ τῆς ΑΓ λαμβάνομεν ΑΔ=ΑΒ, ὁπότε ΔΓ=δ. Φέρομεν τὴν ΒΔ. Ἔχομεν Β=ν+ω ἢ ω=Β—ν (1).

Ἀλλὰ ἀπὸ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΔ ἔχομεν 2ν+Α=2 ὀρθ. ἢ

$$\text{ν}=1\text{ὀρθ.}-\frac{\text{Α}}{2}=\frac{\text{Α}}{2}+\frac{\text{Β}}{2}+\frac{\text{Γ}}{2}-\frac{\text{Α}}{2}=\frac{\text{Β}+\text{Γ}}{2}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὸ ν διὰ τοῦ ἴσου του ἔχομεν

$$\text{ω}=\text{Β}-\frac{\text{Β}+\text{Γ}}{2}=\frac{\text{Β}-\text{Γ}}{2}=\frac{\varphi}{2}.$$

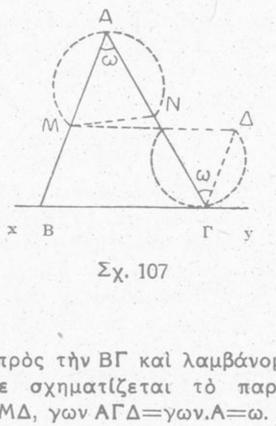
Τὸ τρίγωνον ΒΓΔ δύναται νὰ κατασκευασθῇ, διότι γνωρίζομεν δύο πλευρὰς ΒΓ=α, ΓΔ=δ καὶ μίαν γωνίαν $\text{ω}=\frac{\varphi}{2}$ κειμένην ἀπέναντι μιᾶς τῶν δοθεισῶν πλευρῶν. Ἡ κορυφὴ Α τοῦ ζητουμένου τριγώνου εἶναι σημεῖον τῆς τομῆς τῆς καθέτου ΜΑ ἐπὶ τὴν ΒΔ εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΔ καὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΓΔ.

Κατασκευή. Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΒΓΔ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν δύο πλευράς, τὰς ΒΓ=α καὶ ΓΔ=δ, καὶ μίαν γωνίαν $\omega = \frac{\varphi}{2}$, κειμένην ἀπέναντι τῆς ΓΔ. 'Εκ τοῦ μέσου Μ τῆς ΒΔ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΓΔ εἰς τὸ Δ. Φέρομεν τὴν ΑΒ καὶ τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Διερεύνησις. Διὰ νὰ ἔχῃ λύσιν τὸ πρόβλημα, πρέπει νὰ δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον ΒΓΔ. Αἱ περιπτώσεις τῆς κατασκευῆς ἢ μὴ ἑνὸς τοιούτου τριγώνου ἀναγράφονται εἰς ὅλας τὰς Στοιχειώδεις Γεωμετρίας.

902. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ, *ἂν γνωρίζωμεν τὴν βάσιν του, ἡ ὁποία κεῖται ἐπὶ δοθείσης εὐθείας* xy *τὴν ἀπέναντι γωνίαν* Α *καὶ ὅτι αἱ δύο ἄλλαι πλευραί του προεκτεινόμεναι, διέρχονται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα* Μ *καὶ* Ν.** ***(Πολυτεχνεῖον 1946).***

***Ἀνάλυσις.*** Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ΒΓ κεῖται ἐπὶ τῆς xy, ἡ πλευρὰ ΑΒ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Μ καὶ ἡ ΑΓ διέρχεται ἀπὸ τὸ Ν.



Σχ. 107

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν εἶναι ὡρισμένα, ἡ εὐθεῖα ΜΝ εἶναι σταθερὰ κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος

Ἐπειδὴ ΜΝ φαίνεται ἀπὸ τὸ Α ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν Α=ω, ἡ κορυφή της κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν ΜΝ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ ω.

Ἀπὸ τὸ Μ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ λαμβάνομεν τμῆμα ΜΔ=ΒΓ. Φέρομεν τὴν ΓΔ, ὁπότε σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΜΒΓΔ· ἄρα θὰ εἶναι ΒΓ=ΜΔ, γων ΑΓΔ=γων.Α=ω. Φέρομεν τὴν ΝΔ, ἡ ὁποία εἶναι σταθερὰ κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ΝΔ φαίνεται ἀπὸ τὸ Γ ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν καὶ ἴσην μὲ ω· ἄρα ἡ κορυφὴ Γ κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν ΝΔ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ Α=ω.

Ἡ κορυφὴ λοιπὸν Γ ὁρίζεται, ὡς τομὴ τῆς εὐθείας xy καὶ τοῦ τόξου αὐτοῦ. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι κατασκευήν:

Κατασκευή. Ἀπὸ τὸ Μ φέρομεν τὴν ΜΔ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ ἴσην μὲ αὐτήν. Φέρομεν τὴν χορδὴν ΝΔ. Μὲ χορδὴν τὴν

ΝΔ γράφομεν τόξον κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον νὰ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ ω. Τὸ τόξον ΝΓΔ τέμνει τὴν **xy** εἰς τὸ Γ.

Ἐπίσης μὲ χορδὴν τὴν ΜΝ γράφομεν τόξον κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον νὰ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ ω. Φέρομεν τὴν ΓΝ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὸ τόξον ΜΑΝ εἰς τὸ σημεῖον Α. Φέρομεν τὴν ΑΜ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν **xy** εἰς τὸ Β καὶ οὕτω λαμβάνομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἐπειδὴ εἶναι γων.ΝΓΔ=γων.ΝΑΜ=ω, ἕπεται ὅτι αἱ ΑΒ και ΓΔ εἶναι παράλληλοι. Ἀλλὰ ἐκ κατασκευῆς καὶ αἱ ΜΔ καὶ ΒΓ εἶναι παράλληλοι· ἄρα τὸ τετράπλευρον ΜΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, ὁπότε ΜΔ=ΒΓ=α.

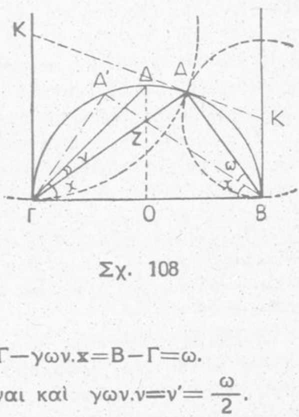
Σ η μ. Εἰς τὸ σχῆμα νὰ τεθοῦν τὰ γράμματα Β, Γ καὶ νὰ ἀχθῇ ἡ χορδὴ ΝΔ.

**903.** ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον*** ΑΒΓ, ***ἂν γνωρίζωμεν τὴν βάσιν*** ΒΓ=α, ***τὴν διαφορὰν*** Β—Γ=ω ***καὶ ὅτι ἡ κορυφὴ*** Α ***κεῖται ἐπὶ τοῦ τόπου τῶν σημείων ἐπαφῆς δύο μεταβλητῶν περιφερειῶν, ἐφαπτομένων τῆς βάσεως*** ΒΓ ***εἰς τὰ σημεῖα*** Β ***καὶ*** Γ ***ἀντιστοίχως.***

*Λύσις.* Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Γνωρίζομεν (ἄσκ. 656), ὅτι ὁ ζητούμενος τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν δύο μεταβλητῶν αὐτῶν περιφερειῶν, εἶναι περιφέρεια κύκλου Ο, ἡ ὁποία γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ΒΓ.

Ἡ κορυφὴ λοιπὸν Α κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο. Ἀλλὰ τότε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α.

Ἐκ τοῦ κέντρου Ο ὑψοῦμεν κάθετον ΟΔ ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Δ καὶ τὴν πλευρὰν ΑΓ εἰς τὸ Ζ. Φέρομεν τὴν ΒΖΑ'. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΒΖΓ εἶναι ἰσοσκελές, θὰ εἶναι γων.**x**=γων.**x'**.




Σχ. 108

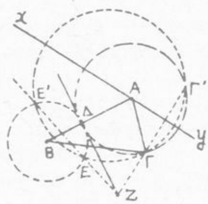
Θὰ εἶναι λοιπὸν γων.ΑΒΑ'=γων.ΑΒΓ—γων.**x**=Β—Γ=ω.

Ἐπειδὴ δὲ τόξ.ΑΔ=τόξ.Α'Δ, θὰ εἶναι καὶ γων.ν=ν'$=\frac{\omega}{2}$.

Κ α τ α σ κ ε υ ή. Ἐκ τοῦ μέσου Ο τῆς ΒΓ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει εἰς τὸ Δ τὴν περιφέρειαν, τὴν γραφομένην μὲ διάμετρον τὴν ΒΓ. Φέρομεν τὴν ΓΔ καὶ μὲ πλευρὰν αὐτὴν καὶ κορυφὴν τὸ Γ, κατασκευάζομεν γωνίαν ΔΓΑ$=\frac{\omega}{2}$. Φέρομεν τὴν ΑΒ καὶ τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

**904.** ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον*** ΑΒΓ, ***ἂν γνωρίζωμεν τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος τῆς πλευρᾶς*** α, ***μίαν εὐθεῖαν*** xy ***ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται ἡ κορυφὴ*** Α ***καὶ τὴν διαφορὰν*** β—γ=λ.

*Λύσις.* Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, ΒΓ ἡ δοθεῖσα βάσις καὶ Α ἡ κορυφή, ἡ ὁποία κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας xy. Μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν διαφορὰν δ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Δ.




Σχ. 109

Ἐπίσης μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΓ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῆς Β εἰς τὸ Δ.

Ἡ κορυφὴ Α λοιπὸν θὰ προσδιορισθῇ, ἂν προσδιορισθῇ τὸ κέντρον τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει τὸ κέντρον της ἐπὶ δοθείσης εὐθείας, διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου Γ καὶ ἐφάπτεται δοθείσης περιφερείας Β.

Ἡ περιφέρεια αὕτη γράφεται ὡς ἑξῆς:

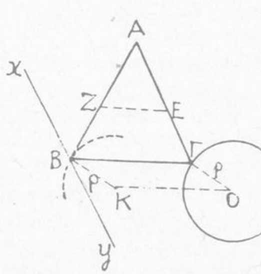
Ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια αὕτη θὰ διέρχεται διὰ τοῦ Γ, πρέπει νὰ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ Γ΄ τοῦ συμμετρικοῦ τοῦ Γ, ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν xy, ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται τὸ κέντρον της.

Διὰ τῶν σημείων Γ καὶ Γ΄ φέρομεν τυχοῦσαν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Β εἰς τὰ σημεῖα Ε, Ε΄. Διὰ τοῦ σημείου Ζ τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν ΓΓ΄ καὶ ΕΕ΄ φέρομεν ἐφαπτομένην ΖΔ εἰς τὴν περιφέρειαν Β. Ὁρίζεται τότε καὶ τρίτον σημεῖον Δ.

Ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῶν σημείων Γ, Γ΄, Δ εἶναι ἡ ζητουμένη. Προσδιορισθείσης αὐτῆς, προσδιορίζεται τὸ κέντρον της Α, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ κορυφὴ τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

***905.*** ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ, *ἂν γνωρίζωμεν τὰ μέσα δύο πλευρῶν του καὶ ὅτι αἱ δύο ἄλλαι κορυφαί του κεῖνται ἡ μὲν μία ἐπὶ δοθείσης εὐθείας, ἡ δὲ ἄλλη ἐπὶ δοθείσης περιφερείας.***

***Λύσις. 1η περίπτωσις.*** Ὑποθέτομεν, ὅτι ἐλύθη τὸ πρόβλημα καὶ ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰ μέσα Ζ καὶ Ε, τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ, καὶ ὅτι ἡ κορυφὴ Β κεῖται ἐπὶ εὐθείας xy, ἡ δὲ κορυφὴ Γ ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο. Φέρομεν τὴν ΖΕ.



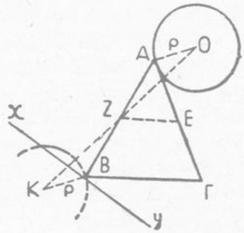

Σχ. 110

Ἐὰν θέσωμεν $ΖΕ=\frac{α}{2}$, τότε ΒΓ=α. Φέρομεν τὴν ΟΚ ἴσην καὶ παράλληλον τῆς ΒΓ.

Ἀπὸ τὸ σχηματιζόμενον παραλληλόγραμμον ΒΓΟΚ ἔχομεν ὅτι ΚΒ=ΟΓ=ρ.

Ἡ κορυφὴ λοιπὸν Β, εἶναι ἡ τομὴ τῆς δοθείσης εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα ΚΒ=ρ.

*2α περίπτωσις.* Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται τὰ μέσα Ζ καὶ Ε δύο πλευρῶν καὶ ὅτι ἡ κορυφὴ Β κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας xy, ἡ δὲ κορυφὴ Α ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο.



Σχ. 111

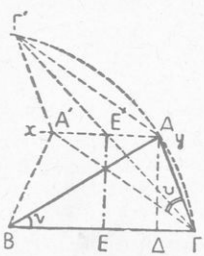
Φέρομεν τὴν ΟΖ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς ΖΚ=ΟΖ. Φέρομεν τὴν ΒΚ.

Ἀπὸ τὰ σχηματισθέντα ἴσα τρίγωνα ΟΑΖ καὶ ΖΒΚ συνάγομεν ὅτι ΚΒ=ΟΑ=ρ.

Ἡ κορυφὴ λοιπὸν Β ὁρίζεται, ὡς τομὴ τῆς xy καὶ τῆς περιφερείας (Κ, ρ).

***906. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ, *ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν* $\alpha$, *τὸ ὕψος* $\upsilon_\alpha$ *καὶ τὴν διαφορὰν* Γ—Β=ω.**

*Λύσις.* Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν ΒΓ=α, τὸ ὕψος ΑΔ=υ καὶ Γ—Β=ω.



Σχ. 112

Ἔστω Α′ΒΓ τὸ συμμετρικὸν τοῦ ΑΒΓ, ὡς πρὸς τὴν κάθετον ΕΕ′, εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ. Ἂν φέρωμεν τὴν ΑΑ′ τὸ σχηματιζόμενον τραπέζιον ΑΑ′ΒΓ εἶναι ἰσοσκελές. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$A\widehat{\Gamma}B - A\widehat{B}\Gamma = A\widehat{\Gamma}B - A'\widehat{\Gamma}B = A\widehat{\Gamma}A' = \omega.$$

Ἡ ΕΕ′ εἶναι τελείως ὡρισμένη, διότι εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον Ε τῆς γνωστῆς πλευρᾶς ΒΓ καὶ εἶναι ἴση μὲ ΑΔ=υ.

Ἀλλὰ τότε εἶναι γνωστὴ καὶ ἡ ΓΕ′. Προεκτείνομεν τὴν ΓΕ καὶ λαμβάνομεν Ε′Γ′=Ε′Γ. Φέρομεν τὰς ΑΓ′ καὶ Α′Γ′.

Τὸ σχηματισθὲν τετράπλευρον ΓΑΓ′Α′ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοί του Α′Α καὶ ΓΓ′ διχοτομοῦνται. Θὰ εἶναι δὲ

$$\Gamma'\widehat{A}\Gamma = 180^\circ - A\Gamma A' = 180^\circ - \omega.$$

Κ α τ α σ κ ε υ ή. Ἀπὸ τὸ μέσον Ε μιᾶς εὐθείας ΒΓ, ἴσης μὲ τὴν δοθεῖσαν πλευράν, ὑψοῦμεν κάθετον ΕΕ′ καὶ λαμβάνομεν ΕΕ′ ἴσον μὲ τὸ δοθὲν ὕψος υ. Ἐκ τοῦ Ε′ φέρομεν τὴν xΕ′y παράλληλον τῆς ΒΓ. Φέρομεν τὴν ΓΕ′ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν Ε′Γ′=Ε′Γ.

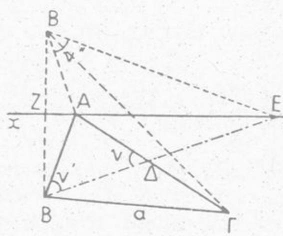
Μὲ χορδὴν τὴν ΓΓ' γράφομεν τόξον κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ $180^{\circ}-\omega$. Τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος, τέμνει τὴν $xy$ εἰς τὸ Α, ἡ ὁποία εἶναι ἡ τρίτη κορυφὴ τοῦ ζητουμένου τριγώνου ΑΒΓ.

Τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν καὶ μόνον λύσιν.

Ἐὰν γράψωμεν τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς ΓΓ', θὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον Α', ἀλλὰ τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον Α'ΒΓ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΑΒΓ.

*907. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ, *ἂν γνωρίζωμεν τὴν βάσιν* $ΒΓ=α$, *τὴν διαφορὰν* $Β-Γ=\omega$ *καὶ ὅτι ἡ κορυφὴ* Α *κεῖται ἐπὶ δοθείσης εὐθείας* $xy$. (Dompagnon).

*Λύσις.* Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν $ΒΓ=α$, τὴν διαφορὰν $Β-Γ=\omega$ καὶ ὅτι ἡ κορυφὴ Α κεῖται ἐπὶ τῆς $xy$.




Σχ. 113

Ἔστω Β' τὸ συμμετρικὸν τοῦ Β, ὡς πρὸς τὴν $xy$. Ἂν φέρωμεν τὴν ΑΒ' θὰ εἶναι $ΑΒ=ΑΒ'$. Ἐπὶ τῆς ΑΓ λαμβάνομεν $ΑΔ=ΑΒ$. Φέρομεν τὴν ΒΔ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν $xy$ εἰς τὸ Ε.

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ν καὶ ν' τοῦ τριγώνου ΑΒΔ, ἔχουν τὴν αὐτὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν Α, ἕπεται ὅτι $ν+ν'=Β+Γ$ ἢ $2ν=Β+Γ$ καὶ $ν=\frac{Β+Γ}{2}$. Ἡ γωνία $ΓΒΕ=Β-ν=Β-\frac{Β+Γ}{2}=\frac{Β-Γ}{2}=\frac{\omega}{2}$.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΒΔΕ, ἡ ὁποία σχηματίζει μετὰ τῆς βάσεως ΒΓ γωνίαν $ΓΒΕ=\frac{\omega}{2}$. Ἡ γωνία ΒΕΒ' εἶναι τότε τελείως ὡρισμένη. Εἶναι δὲ γωνία $ν''=ν=ν'$.

Τὸ τετράπλευρον ΑΔΕΒ' εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, διότι $ν''+Δ=ν'+Δ=2$ ὀρθ. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ γων $Β'ΑΔ+Β'ΕΔ=2$ ὀρθ. Ἡ γωνία Β'ΑΓ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς γνωστῆς γωνίας ΒΕΒ'.

Ἡ κορυφὴ λοιπὸν Α κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν ΓΒ' καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ τὴν παραπληρωματικὴν τῆς ΒΕΒ'.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ἡ κατασκευὴ εἶναι εὔκολος.

*908. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ, *ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν* α, *τὴν ἀπόστασιν* $ΑΗ=μ$ *τῆς κορυφῆς* Α *ἀπὸ τὸ ὀρθόκεντρον* Η *καὶ* *τὴν ἀπόστασιν ΑΟ=λ τῆς κορυφῆς Α ἀπὸ τὸ κέντρον Ο τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον κύκλου.*

*Λύσις.* Γνωρίζομεν ὅτι : *1ον. Ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς Α ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς Η τῶν ὑψῶν, εἶναι διπλασία τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου Ο, τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΒΓ.*

*2ον. Ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου Λ τοῦ τόξου ΒΓ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου (τὸ ὁποῖον κεῖται ἀπέναντι τῆς Α) ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου, εἶναι ἴση μὲ ΛΒ καὶ μὲ ΛΓ.*

Χρησιμοποιοῦντες τὰς δύο αὐτὰς ἰδιότητας, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν εὐκόλως τὸ τρίγωνον.

Σχ. 114

'Από τὸ μέσον Μ μιᾶς εὐθείας ΒΓ=α, ὑψοῦμεν κάθετον καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τμῆμα $ΜΟ=\frac{1}{2}ΑΗ=\frac{λ}{2}$.

'Ορίζομεν οὕτω τὸ κέντρον Ο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, καὶ τοῦ ὁποίου ἀκτὶς εἶναι ἡ ΟΒ. Ἡ κορυφὴ Α κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΕΓ.

'Επειδὴ ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος τῆς γωνίας Α διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Λ τοῦ τόξου ΒΛΓ, θὰ εἶναι κατὰ τὴν δευτέραν ἰδιότητα ΛΚ=ΛΒ=ΛΓ, τὰ ὁποῖα εἶναι γνωστὰ μήκη. Θὰ εἶναι λοιπὸν ΛΑ=ΛΚ+ΚΑ=ΛΒ+δ.

Ἡ κορυφὴ Α ἀπέχει λοιπὸν ἀπὸ τὸ Λ ἀπόστασιν σταθερὰν καὶ ἴσην μὲ ΛΒ+δ, ἄρα κεῖται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ Λ καὶ ἀκτῖνα ΛΒ+δ.

'Επειδὴ ὅμως τὸ Α κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο, ἕπεται ὅτι τὸ Α εἶναι σημεῖον τῆς τομῆς τῶν δύο αὐτῶν περιφερειῶν. Προσδιορίζοντες τὸ Α, φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ ἔχομεν, οὕτω τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

'Εὰν ΛΖ<ΛΕ, αἱ δύο περιφέρειαι τέμνονται εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Α' συμμετρικά, ὡς πρὸς τὴν ΛΟ, καὶ ἔχομεν δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰ αὐτὰ στοιχεῖα.

Σημ. Εἰς τὸ σχῆμα νὰ τεθῇ Β ἀντὶ Δ καὶ τὸ γράμμα Ζ, σημεῖον τῆς τομῆς τῆς ΛΕ καὶ τοῦ τόξου ΑΑ'.

**909.** ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον*** **ΑΒΓ,** ***ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν*** α, ***τὴν διαφορὰν*** Β—Γ=ω ***καὶ*** β+γ=λ.

*Λύσις.* Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓ (σχ. 115) τὸ ζητούμενον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν ΒΓ=α καὶ τὴν διαφορὰν Β—Γ=ω, τῶν προσκειμένων γωνιῶν Β καὶ Γ καὶ τὸ ἄθροισμα ΑΒ+ΑΓ=λ.

Προεκτείνομεν τὴν ΒΑ καὶ λαμβάνομεν ΑΔ=ΑΓ, ὁπότε ΒΔ=λ.

Ἡ ἐξωτερικὴ γωνία φ=ν+ν'=2ν, ἐξ οὗ $ν=\frac{φ}{2}$ (1).

'Αλλὰ ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχομεν Β+Γ+φ=2 ὀρθ. ἢ

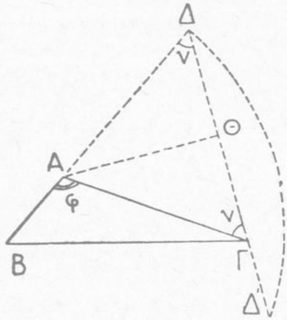
$\varphi=2$ ὀρθ.$-(B+\Gamma)$ ἢ $\frac{\varphi}{2}=1$ ὀρθ.$-\frac{B+\Gamma}{2}$ ἢ ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὴν (1)

$\nu=1$ ὀρθ.$-\frac{B+\Gamma}{2}$.

Ἡ γωνία $B\Gamma\Delta=\Gamma+\nu=\Gamma+1$ ὀρθ.$-\frac{B+\Gamma}{2}=\frac{2\Gamma}{2}+1$ὀρθ.$-\frac{B}{2}-\frac{\Gamma}{2}=$

$=1$ ὀρθ.$+\frac{\Gamma}{2}-\frac{B}{2}=1$ ὀρθ.$-\frac{B-\Gamma}{2}=1$ ὀρθ.$-\frac{\omega}{2}$.

Τὸ τρίγωνον ΒΓΔ δύναται νὰ κατασκευασθῇ, διότι γνωρίζομεν δύο πλευράς του $B\Gamma=\alpha$, $B\Delta=\lambda$ καὶ μίαν γωνίαν $B\Gamma\Delta=1$ ὀρθ.$-\frac{\omega}{2}$ κειμένην ἀπέναντι τῆς γνωστῆς πλευρᾶς ΒΔ.




Σχ. 115

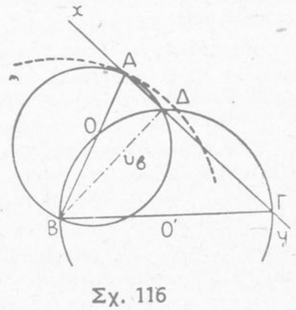
Ἐπειδὴ δὲ ΑΔ=ΑΓ, ἕπεται ὅτι ἡ κορυφὴ Α κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ΘΑ εἰς τὸ μέσον τῆς ΓΔ.

Κ α τ α σ κ ε υ ή. Κατασκευάζομεν γωνίαν $B\Gamma\Delta=1$ ὀρθ.$-\frac{\omega}{2}$. Λαμβάνομεν $\Gamma B=\alpha$ καὶ μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ λ γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΒΔ εἰς τὸ Δ. Φέρομεν τὴν ΒΔ. Ἀπὸ τὸ μέσον Θ τῆς ΓΔ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΔ εἰς τὸ Α. Ἂν φέρομεν τὴν ΑΓ, τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Δ ι ε ρ ε ύ ν η σ ι ς. Διὰ νὰ ἔχῃ λύσιν τὸ πρόβλημα πρέπει $\lambda>\alpha$.

***910. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος του $B\Delta=\upsilon_\beta$ καὶ τὰς ἀκτῖνας τῶν περιγεγραμμένων κύκλων περὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ.***

***Ἀνάλυσις.*** Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ ὕψος ΒΔ ἴσον μὲ τὸ δοθὲν ὕψος $\upsilon_\beta$· ἔστωσαν Ο καὶ Ο' οἱ κύκλοι, οἱ περιγεγραμμένοι περὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ καὶ τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες R καὶ $R_1$ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι μὲ τὰς δοθείσας ἀκτῖνας.




Σχ. 116

Ἐπειδὴ ἡ ΒΔ εἶναι ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τὰ τρίγωνα ΒΔΑ καὶ ΒΔΓ εἶναι ὀρθογώνια εἰς τὸ Δ καὶ ἐπομένως αἱ ὑποτείνουσαι αὐτῶν ΑΒ καὶ ΒΓ εἶναι διάμετροι τῶν κύκλων Ο καὶ Ο'.

Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΔΑ δύναται νὰ κατασκευασθῇ, διότι γνωρίζομεν τὴν κάθετον πλευράν του ΒΔ ἴσην μὲ τὸ δοθὲν ὕψος $υ_β$ καὶ τὴν ὑποτείνουσάν του ΒΑ ἴσην μὲ τὴν διάμετρον 2R τοῦ κύκλου Ο.

Ὁμοίως καὶ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΔΓ δύναται νὰ κατασκευασθῇ, διότι γνωρίζομεν τὴν κάθετον πλευρὰν $ΒΔ=υ_β$ καὶ τὴν ὑποτείνουσαν $ΒΓ=2R_1$. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι κατασκευήν.

Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Λαμβάνομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν xy καὶ ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Δ αὐτῆς ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν xy. Ἐπὶ τῆς καθέτου αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα ΔΒ ἴσον μὲ τὸ δοθὲν ὕψος $υ_β$. Μὲ κέντρον τὸ Β καὶ μὲ ἀκτῖνα διπλασίαν τῆς δοθείσης ἀκτῖνος R γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν Δx εἰς τὸ σημεῖον Α.

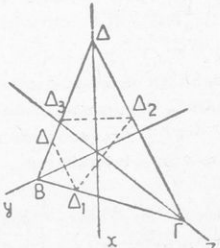
Μὲ κέντρον πάλιν τὸ Β καὶ μέ ἀκτῖνα διπλασίαν τῆς δοθείσης ἀκτῖνος $R_1$, γράφομεν δεύτερον τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν Δy εἰς σημεῖον Γ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΒΓ καὶ τὸ σχηματισθὲν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει ὕψος ΒΔ ἴσον μὲ τὸ δοθὲν ὕψος $υ_β$, ἐκ κατασκευῆς· τὸ τρίγωνον ΒΔΑ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Δ καὶ ἐπομένως εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον διαμέτρου ΑΒ ἴσην μὲ 2R. Ἄρα ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, εἶναι ἴση μὲ τὴν δοθεῖσαν ἀκτῖνα R.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ κύκλος Ο', ὁ περιγεγραμμένος περὶ τὸ τρίγωνον ΒΔΓ ἔχει ἀκτῖνα R'.

**911.** ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ, *ἐὰν γνωρίζωμεν τὰς θέσεις τῶν εὐθειῶν* x, y, z *ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του καὶ ἕνα σημεῖον* Δ *τῆς πλευρᾶς του* ΑΒ.**

***Λύσις. Ἀνάλυσις.*** Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Ἐπειδὴ ἡ διχοτόμος y εἶναι ἄξων συμμετρίας τῆς γωνίας ΑΒΓ, τὸ συμμετρικὸν $Δ_1$ τοῦ Δ, ὡς πρὸς τὴν y, εἶναι σημεῖον τῆς ΒΓ.

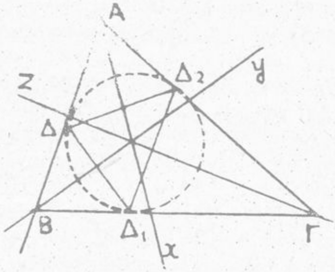


Σχ. 117

Δι' ὅμοιον λόγον τὸ συμμετρικὸν $Δ_2$ τοῦ $Δ_1$, ὡς πρὸς τὴν z εἶναι σημεῖον τῆς ΓΑ καὶ τὸ $Δ_3$ συμμετρικὸν τοῦ $Δ_2$, ὡς πρὸς τὴν x εἶναι σημεῖον τῆς ΑΒ. Οὕτω ἔχομεν δύο σημεῖα Α, $Δ_3$ τῆς ΑΒ, καὶ ἐπομένως ἡ θέσις αὐτῆς εἶναι τελείως ὡρισμένη.

Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Εὑρίσκομεν τὸ συμμετρικὸν $Δ_1$ τοῦ Δ, ὡς πρὸς τὴν y, τὸ συμμετρικὸν $Δ_2$ τοῦ Δ, ὡς πρὸς z καὶ τὸ συμμετρικὸν $Δ_3$ τοῦ $Δ_2$, ὡς πρὸς τὴν x. Φέρομεν τὴν $ΔΔ_3$, ἡ ὁποία τέμνει ἀντιστοίχως τὴν μὲν x εἰς τὸ Α, τὴν δὲ y εἰς τὸ Β' φέρομεν ἐπίσης τὴν $A\Delta_2$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν z εἰς τὸ Γ. Ἐὰν ἀχθῇ καὶ ἡ ΒΓ σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Πράγματι ἡ ΒΓ θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ $\Delta_1$ διότι ἄλλως θὰ ἔτεμνε τὴν $\Delta\Delta_1$ εἴς τι σημεῖον Δ΄, καὶ ἐπειδὴ ἡ y εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΒΓ, τὸ Δ΄, θὰ ἦτο συμμετρικὸν τοῦ Δ, ὡς πρὸς y· ἀλλὰ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Δ, ὡς πρὸς τὴν y εἶναι ἐκ κατασκευῆς τὸ $\Delta_1$, ἄρα τὸ $\Delta'_1$ συμπίπτει πρὸς τὸ $\Delta_1$.



Σχ. 118

Ἐπειδὴ τὰ $\Delta_1$, $\Delta_2$ εἶναι συμμετρικά, ὡς πρὸς τὴν z, ἡ z εἶναι διχοτόμος τῆς γων.ΒΓΑ.

Ἐπίσης καὶ ἡ x εἶναι διχοτόμος τῆς γων.ΓΑΒ, διότι τὰ $\Delta_2$ καὶ $\Delta_3$ εἶναι συμμετρικά, ὡς πρὸς τὴν x.

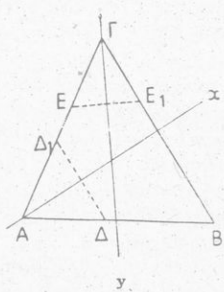
Π α ρ α τ ή ρ η σ ι ς. Ἐὰν τὸ σημεῖον $\Delta_3$ συμπέσῃ μετὰ τοῦ Δ (Σχ. 118), ἡ προηγουμένη κατασκευὴ δὲν εἶναι δυνατή.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λόγῳ τῆς συμμετρίας θὰ εἶναι $B\Delta = B\Delta_1$, $\Gamma\Delta_1 = \Gamma\Delta_2$, $A\Delta_2 = A\Delta_3$· ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ Δ συμπίπτει μετὰ τοῦ $\Delta_3$, θὰ εἶναι $A\Delta_3 = A\Delta$, ἑπομένως καὶ $B\Delta = B\Delta_1$, $\Gamma\Delta_1 = \Gamma\Delta_2$, $A\Delta_2 = A\Delta$.

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων τούτων συνάγομεν, ὅτι τὰ σημεῖα Δ, $\Delta_1$, $\Delta_2$ εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν τοῦ ζητουμένου τριγώνου καὶ τοῦ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Γράφομεν περιφέρειαν διερχομένην διὰ τῶν σημείων Δ, $\Delta_1$, $\Delta_2$ καὶ φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας εἰς τὰ σημεῖα αὐτά, αἱ ὁποῖαι τεμνόμεναι ἀνὰ δύο εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ σχηματίζουν τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ.

*912. **Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον** ΑΒΓ, **ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν διεύθυνσιν δύο διχοτόμων του, ἕνα σημεῖον** Δ **τῆς** ΑΒ **καὶ ἕνα σημεῖον** Ε **τῆς** ΑΓ.*



Σχ. 119

***Λύσις. Ἀνάλυσις.*** Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ x καὶ y αἱ διευθύνσεις τῶν δύο διχοτόμων.

Ἐπειδὴ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α, ἡ ὁποία κεῖται ἐπὶ τῆς x εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτῆς, τὸ σημεῖον $\Delta_1$, συμμετρικὸν τοῦ Δ, θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ. Θὰ εἶναι λοιπὸν γνωστὰ δύο σημεῖα $Δ_1$ καὶ Ε τῆς ΑΓ καὶ ἑπομένως ἡ θέσις τῆς ΑΓ εἶναι ὡρισμένη. Δι' ὅμοιον λόγον τὸ συμμετρικὸν τοῦ Ε, ὡς πρὸς τὴν y κεῖται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΓΒ.

Σύνθεσις. Ὁρίζομεν τὸ $Δ_1$ συμμετρικὸν τοῦ Δ, ὡς πρὸς τὴν x καὶ φέρομεν τὴν $Δ_1$Ε, ἡ ὁποία τέμνει τὴν μὲν x εἰς τὸ Α, τὴν δὲ y εἰς τὸ Γ.

Ὁρίζομεν ἔπειτα καὶ τὸ σημεῖον $Ε_1$ συμμετρικὸν τοῦ Ε, ὡς πρὸς τὴν y· φέρομεν ἔπειτα τὰς Γ$Ε_1$ καὶ ΑΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Β, καὶ οὕτω σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον.

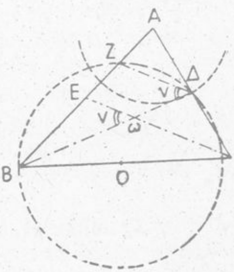
Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Δ καὶ $Δ_1$ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς x, ἡ x εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α. Ἐπίσης λόγῳ τῆς συμμετρίας τῶν Ε καὶ $Ε_1$ ὡς πρὸς τὴν y, αὕτη εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Γ.

*913. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ, *ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν* Α=ω, *ὅτι ἡ πλευρά του* ΒΓ=α *κεῖται ἐπὶ δοθείσης εὐθείας* x, *ἡ πλευρά του* ΑΒ *διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον* Μ *καὶ ἡ* ΑΓ *ἀπὸ δοθὲν σημεῖον* Ν.

*Λύσις.* Βλέπε λύσιν ἀσκήσεως 902.

*914. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον, ἐὰν γνωρίζωμεν δύο πλευράς του καὶ τὴν γωνίαν* ω *τῶν διαμέσων, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς δοθείσας πλευράς.*

***Ἀνάλυσις.*** Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς πλευρὰς ΑΒ=γ, ΑΓ=β καὶ τὴν γωνίαν ω τῶν διαμέσων ΒΔ καὶ ΓΕ.




Σχ. 120

Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν διάμεσον ΓΕ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Ζ, τὸ ὁποῖον εἶναι μέσον τῆς ΑΕ.

Αἱ γωνίαι ν καὶ ν' εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΓΕ καὶ ΔΖ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΔ· ἤτοι εἶναι γων.ν=γων.ν' (1). Ἀλλὰ γων.ν=180°—ω· ἄρα θὰ εἶναι καὶ γων.ν'=180°—ω.

Ἡ εὐθεῖα ΒΖ φαίνεται ἀπὸ τὸ Δ, ὑπὸ γωνίαν 180°—ω· ἄρα τὸ σημεῖον Δ κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν ΒΖ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ 180°—ω.

Ἐπίσης ἐπειδὴ ΑΔ=$\frac{1}{2}$ ΑΓ, τὸ Δ κεῖται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἄλλης δοθείσης πλευρᾶς ΑΓ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι κατασκευήν.

Κατασκευή. Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν τμῆμα ΑΒ ἴσον μὲ τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν γ. Εὑρίσκομεν τὸ μέσον Ε τῆς ΑΒ καὶ τὸ μέσον Ζ τῆς ΑΕ. Μὲ χορδὴν τὴν ΒΖ κατασκευάζομεν τόξον κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον νὰ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ $180^\circ - \omega$, δηλ. ἴσην μὲ τὴν παραπληρωματικὴν τῆς δοθείσης γωνίας ω.

Μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἄλλης πλευρᾶς γράφομεν τόξον περιφερείας, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ προηγούμενον τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος εἰς τὸ σημεῖον Δ.

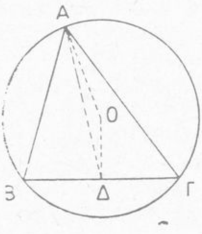
Φέρομεν τὴν ΑΔ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα ΔΓ=ΑΔ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΓ καὶ τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον.

Διερεύνησις. Ἐὰν τὰ δύο τόξα τέμνωνται εἰς δύο σημεῖα, τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις· ἐὰν ἐφάπτωνται ἔχει μίαν λύσιν καὶ ἐὰν δὲν τέμνωνται τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν.

Τὰ δύο τόξα θὰ τέμνωνται εἰς δύο σημεῖα, ἐὰν ἡ γωνία ν' εἶναι ὀξεῖα, δηλ. ἐὰν ἡ δοθεῖσα γωνία ω εἶναι ἀμβλεῖα.

**915.** ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν θέσιν τῆς κορυφῆς Α, τὸ σημεῖον Δ τῆς τομῆς τῆς πλευρᾶς ΒΓ καὶ τῆς διαμέσου ΑΔ καὶ τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον.***

*Λύσις.* Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΑ. Ἡ ἀκτὶς ΟΑ εἶναι γνωστή, διότι τὰ σημεῖα Ο καὶ Α εἶναι ὡρισμένα· ἄρα γνωρίζομεν καὶ τὴν περιφέρειαν, τὴν περιγεγραμμένην περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Φέρομεν τὴν ΟΔ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ ὡρισμένη, διότι γνωρίζομεν τὰ σημεῖα Ο καὶ Δ.




Σχ. 121

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι κατασκευήν:

Κατασκευή. Μὲ κέντρον τὸ δοθὲν σημεῖον Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΟΑ γράφομεν περιφέρειαν.

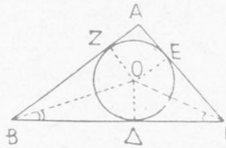
Φέρομεν τὴν ΟΔ καὶ εἰς τὸ ἄκρον της Δ φέρομεν κάθετον, ἐπ' αὐτήν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ.

Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

**916.** ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζομεν :***

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *1ον* | *τὴν πλευρὰν* | ΒΓ | *καὶ τὸ κέντρον* | | Ο' | *τοῦ ἐγγεγραμμένου* | *κύκλου.* |
| *2ον* | » | ΒΓ | » » | » | $Ο_α$ | » *παρεγγεγραμμένου* | » |
| *3ον* | » | ΒΓ | » » | » | $Ο_β$ | » » | » |
| *4ον* | » | ΒΓ | » » | » | $Ο_γ$ | » » | » |

*Λύσις.* Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Φέρομεν τὰς Ο'Β καὶ Ο'Γ, αἱ ὁποῖαι εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του Β καὶ Γ.

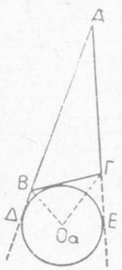


Σχ. 122

Κ α τ α σ κ ε υ ή. Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον Ο'ΒΓ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς τρεῖς κορυφάς του Ο', Β, Γ. Φέρομεν τὴν ΒΑ οὕτως, ὥστε $A\widehat{B}O'=O'\widehat{B}\Gamma$ καὶ τὴν ΓΑ οὕτως, ὥστε $O'\widehat{\Gamma}A=O'\widehat{\Gamma}B$.

Αἱ πλευραὶ ΒΓ καὶ ΓΑ τῶν γωνιῶν αὐτῶν τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ τρίτη κορυφὴ τοῦ τριγώνου.

*2ον.* Κ α τ α σ κ ε υ ή. Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον $O_\alpha$ΒΓ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς τὰς τρεῖς κορυφάς του $O_\alpha$, Β, Γ.

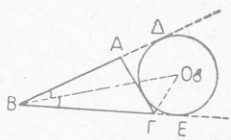


Σχ. 123

Φέορμεν τὴν ΒΔ οὕτως, ὥστε $\Delta\widehat{B}O_\alpha=O_\alpha\widehat{B}\Gamma$ καὶ τὴν ΓΕ οὕτως, ὥστε $O_\alpha\widehat{\Gamma}E=O_\alpha\widehat{\Gamma}B$.

Αἱ ΔΒ καὶ ΕΓ τεμνόμεναι εἰς τὸ σημεῖον Α ὁρίζουν τὴν τρίτην κορυφὴν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

*3ον.* Κ α τ α σ κ ε υ ή. Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον $O_\beta$ΒΓ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς τρεῖς κορυφάς του $O_\beta$, Β, Γ.

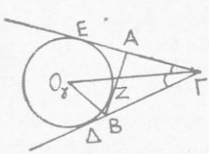


Σχ. 124

Μὲ κορυφὴν τὸ Β καὶ πλευρὰν τὴν $BO_\beta$ κατασκευάζομεν γωνίαν $O_\beta$ΒΔ ἴσην μὲ γων.$O_\beta$ΒΓ καὶ μὲ κορυφὴν τὴν Γ καὶ πλευρὰν τὴν $O_\beta$Γ κατασκευάζομεν γωνίαν $O_\beta$ΓΑ ἴσην μὲ τὴν $O_\beta$ΓΕ.

Αἱ πλευραὶ ΒΔ καὶ ΓΑ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ τρίτη κορυφὴ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

*4ον.* Κ α τ α σ κ ε υ ή. Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον $O_\gamma$ΒΓ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς τρεῖς κορυφάς του $O_\gamma$, Β, Γ.



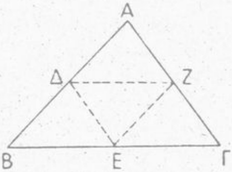
Σχ. 125

Μὲ κορυφὴν τὸ Β καὶ πλευρὰν τὴν $BO_\gamma$ κατασκευάζομεν γωνίαν $O_\gamma$ΒΑ= =γων.$O_\gamma$ΒΔ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ Γ καὶ πλευρὰν τὴν $\Gamma O_\gamma$ κατασκευάζομεν γωνίαν $O_\gamma$ΓΕ=γων.$O_\gamma$ΓΒ.

Αἱ πλευραὶ ΒΑ καὶ ΓΕ τῶν γωνιῶν αὐτῶν τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ τρίτη κορυφὴ τοῦ ζητουμένου τριγώνου ΑΒΓ.

*917. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ, *ἂν γνωρίζωμεν τὰ 3 σημεῖα τῆς τομῆς τῶν πλευρῶν του καὶ τῶν διαμέσων του.*

*Λύσις.* Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰ μέσα Δ, Ε, Ζ τῶν πλευρῶν του. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΔΕ, ΕΖ, ΖΔ.



Σχ. 126

Αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ εἶναι παράλληλοι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, διότι συνδέουν τὰ μέσα δύο πλευρῶν τριγώνου.

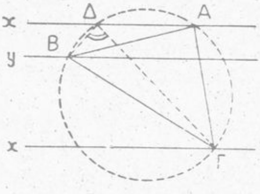
Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγογεν τὴν κάτωθι κατασκευήν:

Κ α τ α σ κ ε υ ή. Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς τρεῖς κορυφάς του Δ, Ε, Ζ. Ἀπὸ τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΔΕΖ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, τὰ ὁποῖα εἶναι αἱ κορυφαὶ τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

*918. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι αἱ κορυφαί του κεῖνται ἐπὶ τριῶν δοθεισῶν παραλλήλων εὐθειῶν.*

*Λύσις.* Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ κεῖνται ἐπὶ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν x, y, z.

Γράφομεν τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἡ περιφέρεια αὐτὴ τέμνει τὴν παράλληλον x εἰς ἕνα σημεῖον Δ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΔΒ καὶ ΔΓ.



Σχ. 127

Αἱ γωνίαι ΒΔΓ καὶ καὶ ΒΑΓ εἶναι ἴσαι, ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον καὶ βαίνουσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΒΓ· ἤτοι εἶναι γων.ΒΔΓ=γων.ΒΑΓ=60°.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι κατασκευήν.

Κ α τ α σ κ ε υ ή. Ἐπὶ τῆς παραλλήλου x λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Δ. Φέρομεν μίαν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΔΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν παράλληλον y εἰς τὸ σημεῖον Β. Μὲ κορυφὴν τὸ Δ καὶ πλευρὰν τὴν ΔΒ κατασκευάζομεν γωνίαν ΒΔΓ ἴσην μὲ 60°.

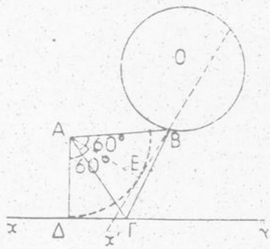
Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΔΓ τῆς γωνίας αὐτῆς μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν τρίτην παράλληλον z εἰς ἕνα σημεῖον Γ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΓ.

Περιγράφομεν περὶ τὸ τρίγωνον ΔΒΓ κύκλον, ὁ ὁποῖος τέμνει τὴν παράλληλον x εἰς τὸ σημεῖον Α. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Σ η μ. Εἰς τὸ σχῆμα ἡ τρίτη παράλληλος νὰ ὀνομασθῇ z καὶ ὄχι x.

*919. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον* ΑΒΓ, *ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν θέσιν τῆς κορυφῆς* Α *καὶ ὅτι ἡ κορυφὴ* Γ *κεῖται ἐπὶ δοθείσης εὐθείας* xy, *ἡ δὲ κορυφὴ* Β *κεῖται ἐπὶ δοθείσης περιφερείας* Ο.

***Ἀνάλυσις.*** Ἔστω ΑΒΓ (Σχ. 128) τὸ ζητούμενον ἰσόπλευρον τρίγωνον. Ἐὰν περιστραφῇ ἡ xy περὶ τὸ Α κατὰ 60°, αὕτη μὲν θὰ λάβῃ τὴν θέσιν x΄, ἡ δέ ΑΓ θὰ συμπέσῃ μετὰ τῆς ΑΒ, καὶ ἐπειδὴ ΑΓ=ΑΒ, ἡ κορυφὴ Γ θὰ συμπέσῃ μὲ τὴν κόρυφὴν Β.



Σχ. 128

Ἡ κορυφὴ Β εἶναι κοινὸν σημεῖον τῆς περιφερείας Ο καὶ τῆς x΄, ἡ ὁποία εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένη, ἐπειδὴ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ΑΕ=ΑΔ καὶ σχηματίζει μὲ τὴν ΑΔ γωνίαν 60°.

Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Φέρομεν τὴν ΑΔ κάθετον ἐπὶ τὴν xy καὶ σχηματίζομεν γωνίαν ΔΑΕ=60°. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΕ λαμβάνομεν τμῆμα ΑΕ=ΑΔ καὶ φέρομεν τὴν x΄ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΕ εἰς τὸ Ε, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ σημεῖον Β

Μὲ κορυφὴν τὸ Α καὶ πλευρὰν ΑΒ σχηματίζομεν γωνίαν ΒΑΓ=60°, τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ ΑΓ τέμνει τὴν xy εἰς τὸ Γ. Λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΑΕΒ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν, ἐκ κατασκευῆς, ΑΔ=ΑΕ καὶ γων.ΔΑΓ=γων.ΕΑΒ ὡς ὑπόλοιπα τῶν ἴσων γωνιῶν ΔΑΕ καὶ ΓΑΒ ἀπὸ τῶν ὁποίων ἀφῃρέθη ἡ κοινὴ γωνία ΓΑΕ· ἄρα θὰ εἶναι ΑΓ=ΑΒ. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΓΑΒ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἐπειδὴ ἔχει τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς Α=60°, ἐκ κατασκευῆς, ἕπεται ὅτι εἶναι ἰσόπλευρον.

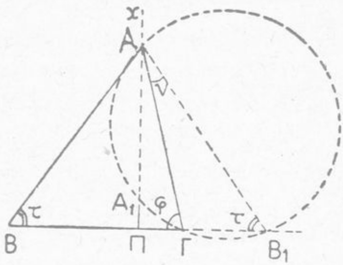
*920. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν βάσιν του* ΒΓ=α, *τὴν διαφορὰν* ω *τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν του καὶ τὸν πόδα* Π *τοῦ ὕψους τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν* **ΒΓ**.

***Ἀνάλυσις*** Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν ΒΓ=α, τὸν πόδα Π τοῦ ὕψους ΑΠ καὶ γων.Γ—γων.Β=ω.

Ἡ κορυφὴ Α ἔχει τόπον τὴν κάθετον Πx ἐπὶ τὴν ΒΓ εἰς τὸ δοθὲν σημεῖον Π.

Ἔστω $Β_1$ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Β, ὡς πρὸς τὸ Π, ὁπότε $ΠΒ=ΠΒ_1$ Ἐπειδὴ δὲ καὶ αἱ ΑΒ καὶ $ΑΒ_1$ εἶναι συμμετρικαί, ὡς πρὸς τὴν Πx θὰ εἶναι $ΑΒ=ΑΒ_1$, καὶ γων.$ΑΒΒ_1$=γων.$Α_1ΒΒ$=τ.

Ἀλλὰ ἐπειδὴ ἡ γωνία φ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου $ΓΑΒ_1$ θὰ εἶναι φ=τ+ν ἢ φ—τ=ν ἤ, ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι φ—τ=ω, ἕπεται ὅτι ν=ω. Τὸ τμῆμα λοιπὸν $ΓΒ_1$=2ΒΠ—ΠΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὡρισμένον, φαίνεται ἐκ τοῦ Α ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν ν=ω· ἄρα τὸ τὸ σημεῖον Α ἔχει τόπον τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν $ΓΒ_1$ καὶ δέχεται γωνίαν ω. Τὸ Α λοιπὸν ὁρίζεται ὡς τομὴ τοῦ τόξου τούτου καὶ τῆς Πx.




Σχ. 129

Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Ὁρίζομεν τὸ σημεῖον $B_1$ συμμετρικὸν τοῦ Β, ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Π. Μὲ χορδὴν τὴν $ΓΒ_1$ γράφομεν τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν ω. Ἀπὸ τὸ Π ὑψοῦμεν τὴν Αx κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος εἰς τά σημεῖα $A_1$ καὶ Α. Ἐὰν φέρωμεν τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἕνεκα τῆς συμμετρίας τῶν ΑΒ καὶ $AB_1$, ὡς πρὸς τὴν Αx ἔχομεν γων.$ABB_1$=γων.$AB_1B$=τ. ἀλλὰ φ=τ+ν ἢ φ−τ=ν ἢ Γ−Β=ν=ω.

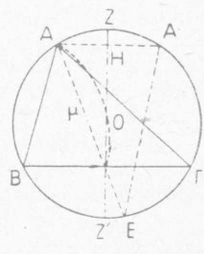
Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ τὸ $A_1$ λύει τὸ πρόβλημα.

*921. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ, *ἂν γνωρίζωμεν τὴν βάσιν του* ΒΓ=α, *τὴν διάμεσον* ΑΔ=μ *καὶ τὴν διαφορὰν* Β−Γ=ω *τῶν γωνιῶν* Β *καὶ* Γ.

***Λύσις.*** Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Προεκτείνομεν τὴν διάμεσον ΑΔ μέχρις ὅτου συναντήσῃ εἰς τὸ Ε, τὴν περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένην περιφέρειαν Ο.

Κατὰ γνωστὸν θεώρημα τοῦ Γ΄ βιβλίου τῆς Γεωμετρίας (§ 370) θὰ εἶναι ΑΔ.ΔΕ=ΒΔ.ΔΓ ἢ $μ.ΔΕ=\frac{α}{2}.\frac{α}{2}$ ἐκ τῆς ὁποίας ἐξάγομεν

$ΔΕ=\frac{α^2}{4μ}$.




Σχ. 130

Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν κάθετον ΔΟΗ ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἐκ τοῦ Α παράλληλον ΑΑ΄ τῆς ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Η. Ἔχομεν

$$γων.Β=\frac{τόξ.ΑΑ'Γ}{2}, \quad γων.Γ=\frac{τόξ.ΑΒ}{2}=\frac{τόξ.Α'Γ}{2}.$$

Ἀφαιροῦντες τὰς ἰσότητας κατὰ μέλη ἔχομεν

$$Β-Γ=\frac{τόξ.ΑΑ'}{2}=γων.ΑΕΑ' \quad ἢ \quad ω=γων.ΑΕΑ'=γων.ΑΟΗ,$$

ὁπότε γων.ΑΟΔ=180°−ω.

Τὸ κέντρον Ο κεῖται κεῖται λοιπὸν ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν ΑΔ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ $180^o - \omega$.

Κατασκευή. Μὲ χορδὴν την διάμεσον ΑΔ γράφομεν τόξον κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον νὰ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ $180^o - \omega$.

Προεκτείνομεν τὴν ΑΔ κατὰ μῆκος $ΑΕ = \frac{\alpha^2}{4\mu}$.

Ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ΑΕ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπ' αὐτήν, ἡ ὁποία τέμνει τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος εἰς τὸ Ο. Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΑ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου. Μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ $\frac{\alpha}{2}$ γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Φέρομεν τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ.

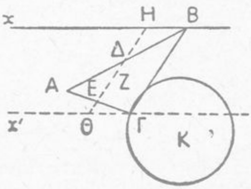
Τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον

Σημ. Εἰς τὸ σχῆμα νὰ τεθῇ τὸ γράμμα Δ καὶ νὰ ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΟ.

922. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον*** ΑΒΓ, ***ἂν γνωρίζωμεν τὰ μέσα*** Δ, Ε, ***τῶν πλευρῶν του*** ΑΒ ***καὶ*** ΑΓ ***καὶ ὅτι ἡ κορυφὴ*** Β ***κεῖται ἐπὶ δοθείσης εὐθείας*** x, ***ἡ δὲ κορυφὴ*** Γ ***ἐπὶ δοθείσης περιφερείας*** Κ.

***Ἀνάλυσις.*** Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως τὸ μὲν Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΒ, τὸ δὲ Ε τὸ μέσον τῆς ΑΓ, ἕπεται ὅτι ἡ πλευρὰ ΓΒ εἶναι παράλληλος καὶ διπλασία τῆς ΕΔ.

Προεκτείνομεν τὴν ΕΔ μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν x εἰς Η καὶ λαμβάνομεν ΗΘ=ΒΓ=2ΕΔ. Περιστρέφομεν τὴν x περὶ τὸ μέσον Ζ τῆς ΗΘ κατὰ $180^o$ καὶ ἔστω x΄ ἡ νέα θέσις αὐτῆς μετὰ τὴν περιστροφήν, ἡ ὁποία θὰ εἶναι παράλληλος τῆς x.



Σχ. 131

Λόγω τῆς περιστροφῆς ἡ ΗΒ θὰ συμπέσῃ πρὸς τὴν ΘΓ καὶ ἐπειδὴ ΘΓ=ΗΒ, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΗΘΓΒ, τὸ Β θὰ συμπέσῃ μετὰ τοῦ Γ. Τὸ Γ λοιπὸν ὁρίζεται, ὡς τομὴ τῆς περιφερείας Κ καὶ x΄.

Σύνθεσις. Προεκτείνομεν τὴν ΕΔ μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν x εἰς τι σημεῖον Η καὶ λαμβάνομεν ΗΘ=2ΕΔ. Ἐκ τοῦ Θ φέρομεν τὴν x΄ παράλληλον πρὸς τὴν x, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Κ εἰς τὸ Γ· ἐκ τοῦ Γ φέρομεν τὴν ΓΒ παράλληλον πρὸς τὴν ΘΗ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν x εἰς τὸ Β· φέρομεν ἔπειτα τὰς ΔΒ καὶ ΕΓ, αἱ ὁποῖαι προεκτεινόμεναι τέμνονται εἰς τὸ Α καὶ οὕτω σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀπόδειξις. Ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου ΗΒΓΘ ἔχομεν ΓΒ=ΘΗ=2ΕΔ, ἤτοι ἡ βάσις τοῦ τριγώνου τούτου εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΕΔ καὶ διπλασία ταύτης, ἑπομένως τὰ Δ καὶ Α εἶναι ἀντιστοίχως τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ.

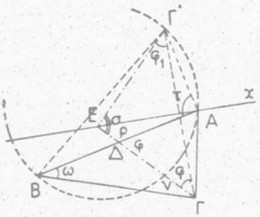
*923. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν ΒΓ, τὴν διαφορὰν Γ−Β=α τῶν προσκειμένων εἰς αὐτὴν γωνιῶν καὶ τὴν εὐθεῖαν x ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται ἡ τρίτη κορυφή του Α.*

*'Ανάλυσις.* Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

Ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς ΑΒ τμῆμα ΑΔ=ΑΓ καὶ φέρομεν τὴν ΓΔ σχηματίζεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΔΓ καὶ ἑπομένως εἶναι $\varphi=\varphi'$. Ἀλλὰ $\varphi'=\omega+\nu$, ὡς ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΔΒΓ· ἄρα καὶ $\varphi=\omega+\nu$ ἢ $\omega=\varphi-\nu$ (1).

Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως εἶναι Γ−Β=α ἢ $(\varphi+\nu)-\omega=\alpha$ ἤ, ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὴν (1) $(\varphi+\nu)-(\varphi-\nu)=\alpha$ ἢ $\varphi+\nu-\varphi+\nu=\alpha$ ἢ $2\nu=\alpha$· ἄρα $\nu=\frac{\alpha}{2}$.

Ἡ ΓΔ εἶναι λοιπὸν εὐθεῖα γνωστή, διότι σχηματίζει μὲ τὴν ΒΓ γωνίαν ν ἴσην μὲ $\frac{\alpha}{2}$. Ἡ ΓΔ προεκτεινομένη τέμνει τὴν x εἰς τὸ Ε.




Σχ. 132

Ἔστω Γ' τὸ συμμετρικὸν τοῦ Γ, ὡς πρὸς τὴν x· ἂν φέρωμεν τὰς ΑΓ' καὶ Γ'Ε, λόγῳ τῆς συμμετρίας θὰ εἶναι $\varphi=\varphi_1$.

Ἀλλὰ γων.$\rho=180^\circ-\varphi'=180^\circ-\varphi_1$· ἄρα $\rho+\varphi_1=180^\circ$.

Ἀφοῦ ὅμως δύο ἀπέναντι γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ΕΔΑΓ' εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ αἱ ἄλλαι δύο γωνίαι εἶναι ἐπίσης παραπληρωματικαί· ἤτοι $\sigma+\tau=180^\circ$ ἢ $\tau=180^\circ-\sigma$, ὅπου σ παριστᾷ τὴν γωνίαν τῶν ὡρισμένων κατὰ τὴν θέσιν εὐθειῶν ΕΓ καὶ ΕΓ'.

Ἀφοῦ ἡ γωνία σ εἶναι γνωστὴ γωνία, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ γωνία $\tau=180^\circ-\sigma$ εἶναι σταθερά· Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ σταθερὰ εὐθεῖα ΒΓ', φαίνεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α ὑπὸ γωνίαν σταθεράν· ἄρα ἡ κορυφὴ αὐτῆς Α ἔχει τόπον τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν εὐθεῖσαν ΒΓ' καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ $180^\circ-\sigma$. Ἡ κορυφὴ λοιπὸν Α ὁρίζεται, ὡς τομὴ τοῦ τόξου τοῦ τμήματος τούτου καὶ τῆς εὐθείας x.

Σύνθεσις. Μὲ πλευρὰν τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΒΓ σχηματίζομεν γωνίαν $ΒΓΔ=\nu=\frac{\alpha}{2}$, τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ ΓΔ τέμνει τὴν x εἰς τὸ σημεῖον Ε. Εὑρίσκομεν τὸ συμμετρικόν Γ' τοῦ σημείου Γ, ὡς πρὸς τὴν x καὶ φέρομεν τὰς ΕΓ' καὶ ΒΓ', ὁπότε σχηματίζεται ἡ γωνία ΓΕΓ'=σ. Μὲ χορδὴν τὴν ΒΓ' γράφομεν κυκλικὸν τμῆμα, τὸ ὁποῖον νὰ δέχεται γωνίαν ἴσην πρὸς $180-\sigma$.

Τὸ τόξον τοῦ τμήματος τούτου τέμνει τὴν x εἰς τὸ σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ τρίτη κορυφὴ τοῦ ζητουμένου τριγώνου ΑΒΓ

Ἀπόδειξις. Ἂν ἀχθῇ ἡ ΑΓ', λόγῳ τῆς συμμετρίας θὰ ἔχωμεν γων.$\varphi_1$=γων.φ. Εἰς τὸ τετράπλευρον ὅμως ΑΔΕΓ' εἶναι ἐκ κατασκευῆς $Α=180-\sigma$ καὶ $Ε=\sigma$· ἄρα $Ε+Α=180^\circ$.

Ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\rho+\varphi_1=180^0$, ἢ $\rho+\varphi=180$.

Ἀλλὰ καὶ $\rho+\varphi'=180^0$ ἄρα $\varphi'=\varphi$. Ἀλλὰ $\varphi=\Gamma-\nu=\Gamma-\frac{\alpha}{2}$ καὶ

$\varphi'=\omega+\nu=B+\frac{\alpha}{2}$ καὶ ἐπειδὴ $\varphi'=\varphi$ ἕπεται, ὅτι

$$\Gamma-\frac{\alpha}{2}=B+\frac{\alpha}{2} \text{ ἢ } \Gamma-B=\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}=\alpha$$

*Δ΄ Ὁμάς.* ***924.*** ***Νὰ εὑρεθῇ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν μιᾶς γωνίας ΑΒΓ ἕνα σημεῖον Μ, ἀπὸ τὸ ὁποῖον νὰ φαίνωνται ὑπὸ γωνίας ω καὶ ν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ.***

*Ἀπ.* Βλέπε λύσιν ἀσκήσεως 726.

***925. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος δοθείσης εὐθείας xy. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς xy ἕνα σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε***

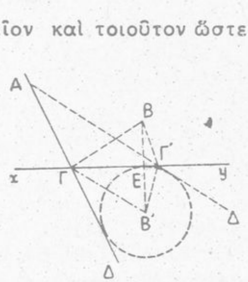
γων ΑΓx=2 γων.ΒΓy.

*Ἀνάλυσις.* Ἔστω Γ τὸ ζητούμενον σημεῖον καὶ τοιοῦτον ὥστε γων ΑΓx=2 γων.ΒΓy (1). Προεκτείνομεν τὴν ΑΓ μέχρι τοῦ Δ, ὁπότε σχηματίζεται γων.ΔΓy=γων.ΑΓx=2 γων.ΒΓy.

Ἔστω Β΄ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Β, ὡς πρὸς τὴν xy. Φέρομεν τὰς ΒΓ καὶ Β΄Γ, αἱ ὁποῖαι εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς xy καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν

γων.ΒΓy=γων.Β΄Γy·

ἄρα γων.ΔΓ΄y=2 γων.Β΄Γy, ἤτοι ἡ ΓΒ΄ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΔΓy.




Σχ. 133

Τὸ Β΄ λοιπὸν ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ΔΓy καὶ ἑπομένως ὁ κύκλος ὁ ὁποῖος ἔχει κέντρον τὸ Β΄ καὶ ἀκτῖνα Β΄Ε ἐφάπτεται τῆς xy καὶ ΑΔ.

Σύνθεσις. Εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον Β΄, συμμετρικὸν τοῦ Β, ὡς πρὸς τὴν xy καὶ μὲ κέντρον τὸ Β΄ καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν Β΄Ε τοῦ Β ἀπὸ τῆς xy, γράφομεν περιφέρειαν· φέρομεν ἔπειτα ἐκ τοῦ Α τὴν ἐφαπτομένην ΑΔ τῆς περιφερείας (Β΄, Β΄Ε), ἡ ὁποία τέμνει τὴν xy εἰς τὸ Γ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον.

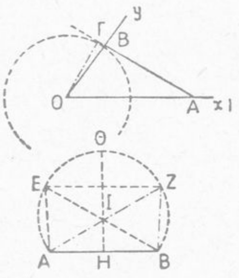
Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια (Β΄, Β΄Ε), ἐκ κατασκευῆς, ἐφάπτεται τῆς xy εἰς τὸ σημεῖον Ε, ἡ Β΄Γ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΔΓΕ, ἤτοι γων.ΔΓΕ=2 γων.Β΄ΓΕ, ἢ ἐπειδὴ γων.ΔΓΕ=γων.xΓΑ, γων.xΓΑ=2 γων.Β΄ΓΕ· ἕνεκα ὅμως τῆς συμμετρίας τῶν Β΄Γ καὶ ΒΓ, ὡς πρὸς τὴν xy, εἶναι γων.Β΄ΓΕ=γων.ΒΓy, ὅθεν καὶ γων.xΓΑ=2 γων.ΒΓy.

*Σημ.* Ἐὰν ἐκ τοῦ Α ἀχθῇ καὶ ἡ ἄλλη ἐφαπτομένη ΑΔ΄ τῆς περιφερείας (Β΄, Β΄Ε),αὕτη τέμνει τὴν εὐθεῖαν xy εἰς τὸ Γ΄, τὸ ὁποῖον λύει ἐπίσης τὸ πρόβλημα.

Διότι γων.ΑΓ΄y=γων.xΓ΄Δ΄ (1), ὡς κατὰ κορυφήν, καὶ ἐπειδὴ ἡ Β΄Γ΄ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας xΓ΄Δ΄, ἕπεται ὅτι γων.xΓ΄Δ΄=2 γων.Β΄Γ΄x, ὁπότε ἡ (1) γίνεται γων.ΑΓ΄y=2 γων.Β΄Γ΄x (2)· ἀλλ᾽ ἕνεκα τῆς συμμετρίας τῶν Γ'Β', καὶ Γ'Β ὡς πρὸς τὴν xy, εἶναι γων Β'Γ'x=γων.ΒΓ'x, ὁπότε ἀπὸ τὴν (2) ἔχομεν γων.ΑΓ'y=2 γων.ΒΓ'x.

*926. Δίδεται περιφέρεια Ο καὶ δύο εὐθεῖαι Οx καὶ Οy, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ κέντρον Ο καὶ σχηματίζουν γωνίαν ω=60°. Νὰ ἀχθῇ μία ἐφαπτομένη ΑΓ τῆς περιφερείας Ο εἰς τρόπον, ὥστε τὸ μέρος τῆς ἐφαπτομένης τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν δύο εὐθειῶν Οx καὶ Οy νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ.*

*Λύσις.* Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΟΑΒ τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ὁρίζει ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας Ο καὶ αἱ Οx καὶ Οy. Τοῦ τριγώνου ΟΑΒ γνωρίζομεν τὴν βάσιν ΑΒ=λ, τὸ ὕψος ΟΓ=R καὶ τὴν ἀπέναντι γωνίαν ΑΟΒ=ω.



Σχ. 134

Κ α τ α σ κ ε υ ή. Ἐπὶ τυχούσης εὐθείας λαμβάνομεν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ ἴσον μὲ τὸ δοθὲν μῆκος λ.

Μὲ χορδὴν τὴν ΑΒ γράφομεν τόξον κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον νὰ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ τὴν ω.

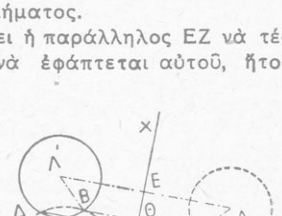
Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΖ παράλληλον τῆς ΑΒ καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῆς ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ δοθέντος κύκλου. Ἡ ΕΖ τέμνει τὸ τόξον εἰς δύο σημεῖα Ε καὶ Ζ.

Φέρομεν τὰς ΕΑ καὶ ΕΒ καὶ ἔχομεν οὕτω τὸ τρίγωνον ΕΑΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΟΑΒ. Λαμβάνομεν ἔπειτα ἐπὶ τῶν εὐθειῶν Οx καὶ Οy καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου Ο τμήματα ΟΑ καὶ ΟΒ ἴσα ἀντιστοίχως μὲ τὰς πλευρὰς ΕΒ καὶ ΕΑ τοῦ τριγώνου ΕΑΒ. Ἐὰν φέρωμεν τὴν ΑΒ, αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη.

Δ ι ε ρ ε ύ ν η σ ι ς. Ἔστω ΗΘ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς καὶ R ἡ ἀκτὶς τοῦ κυκλικοῦ τμήματος.

Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν πρέπει ἡ παράλληλος ΕΖ νὰ τέμνῃ τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ἢ νὰ ἐφάπτεται αὐτοῦ, ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι ΙΘ$\leqslant$ΗΘ ἢ R$\leqslant$ΗΘ (1).

*927. Μεταξὺ δύο περιφερειῶν Κ καὶ Λ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν x καὶ διοτομουμένη παρ' αὐτῆς.*



Σχ. 135

*Λύσις.* Εὑρίσκομεν τὸν συμμετρικὸν κύκλον Λ' τοῦ κύκλου Λ, ὡς πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν x. Ὁ Λ' τέμνει τὴν πεμνει τὴν περιφέρειαν Κ εἰς τὰ σημεῖα Β, Δ.

Ἐὰν φέρωμεν τὰς ΒΑ καὶ ΔΓ καθέτους ἐπὶ τὴν x, λέγω ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται ΒΑ καὶ ΔΓ ἀποτελοῦν λύσιν τοῦ προβλήματος.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἐὰν φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας ΛΑ καὶ Λ'Β, τὸ σχηματιζόμενον τετράπλευρον ΛΑΒΛ' εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον, διότι αἱ ΛΛ' καὶ ΑΒ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν καὶ ΛΑ=Λ'Β.

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ εὐθεῖα x, λόγῳ τῆς συμμετρίας, εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως Λ'Λ τοῦ ἰσοσκελοῦς τραπεζίου, θὰ εἶναι κάθετος καὶ εἰς τὸ μέσον Θ τῆς ἄλλης βάσεως ΒΑ αὐτοῦ, ἤτοι θὰ εἶναι ΑΘ=ΘΒ.

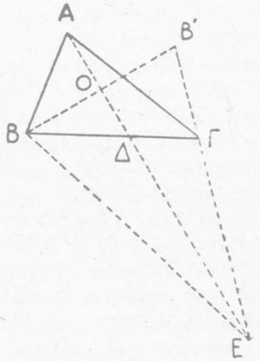
Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ εὐθεῖα ΔΓ ἀποτελεῖ λύσιν τοῦ προβλήματος.

*928. Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α τὸ ὁποῖον κεῖται μεταξὺ τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας xOy, νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΒΑΓ, περατουμένη εἰς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας καὶ τοιαύτη, ὥστε ΑΒ=ΓΑ.*

*Ἀπ.* Βλέπε λύσιν ἀσκήσεως 584.

*929. Ἐννοοῦμεν τὴν κορυφὴν Α τριγώνου ΑΒΓ μὲ ἕνα σημεῖον Δ τῆς βάσεώς του· νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ΑΔ ἕνα σημεῖον ἀπὸ τοῦ ὁποίου αἱ ΒΔ καὶ ΔΓ νὰ φαίνωνται ὑπὸ ἴσας γωνίας.*

*Ἀνάλυσις.* Ἔστω Ε τὸ ζητούμενον σημεῖον καὶ τοιοῦτον ὥστε γων.ΒΕΔ=γων.ΔΕΓ. Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι γων.ΒΕΔ=γων.ΔΕΓ ἕπεται, ὅτι ἡ ΑΕ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΕΓ καὶ ἑπομένως ἄξων συμμετρίας αὐτῆς.



Σχ. 136

Τὸ σημεῖον λοιπὸν Β', συμμετρικὸν τοῦ Β ὡς πρὸς τὴν ΕΑ, θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΕΓ, καὶ οὕτω γνωρίζομεν δύο σημεῖα αὐτῆς, τὰ Β' καὶ Γ. Τὸ Ε λοιπὸν ὁρίζεται, ὡς τομὴ τῆς Β'Γ καὶ τῆς ΑΔ.

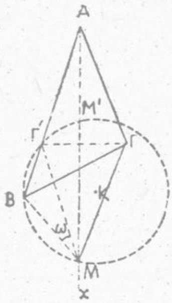
Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Ὁρίζομεν τὸ σημεῖον Β', συμμετρικὸν τοῦ Β, ὡς πρὸς τὴν ΑΔ καὶ φέρομεν τὴν Β'Γ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΔ προεκτεινομένην εἰς τὸ Ε, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Β καὶ Β' εἶναι συμμετρικά, ὡς πρὸς τὴν ΑΔ, ἕπεται ὅτι αὕτη εἶναι ἄξων συμμετρίας τῆς γωνίας ΒΕΒ', καὶ ἑπομένως γων.ΒΕΔ=γων.ΔΕΓ.

*930. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε γων.ΑΜΒ—γων.ΑΜΓ=ω.*

*Λύσις.* Εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον Γ' συμμετρικὸν τοῦ Γ, ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον Αx. Τὸ Γ' κεῖται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ, διότι ἡ Αx εἶναι ἄξων συμμετρίας τῆς γωνίας Α.

Μὲ χορδὴν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα Γ'Β, γράφομεν κυκλικὸν τμῆμα, τὸ ὁποῖον νὰ δέχεται γωνίαν ἴσην πρὸς ω.



Σχ. 137

Τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ αὐτοῦ τμήματος τέμνει τὴν Ax εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ', τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν λύσιν τοῦ προβλήματος.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἂν ἀχθοῦν αἱ ΜΒ, ΜΓ', ΜΓ, θὰ εἶναι γων.ΒΜΓ'=γων.ΑΜΒ—γων.ΑΜΓ'· ἀλλ' ἕνεκα τῆς συμμετρίας θὰ εἶναι γων.ΑΜΓ'=γων.ΑΜΓ· ὅθεν γων.ΒΜΓ'=γων.ΑΜΒ—γων.ΑΜΓ, καὶ ἐπειδὴ ἐκ κατασκευῆς εἶναι γων.ΒΜΓ'=ω ἕπεται ὅτι γων.ΑΜΒ—γων.ΑΜΓ=ω.

Δι' ὅμοιον λόγον καὶ τὸ Μ' ἀποτελεῖ λύσιν τοῦ προβλήματος.

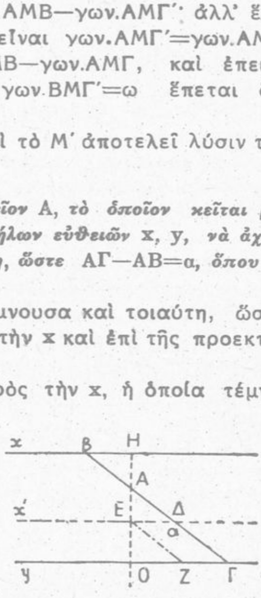
*931. Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται μεταξὺ δύο δοθεισῶν παραλλήλων εὐθειῶν x, y, νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΒΑΓ καὶ τοιαύτη, ὥστε ΑΓ—ΑΒ=α, ὅπου α δοθὲν μῆκος.*

*Λύσις.* Ἔστω ΒΑΓ ἡ ζητουμένη τέμνουσα καὶ τοιαύτη, ὥστε ΑΓ—ΑΒ=α. Φέρομεν τὴν ΑΗ κάθετον ἐπὶ τὴν x καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΗΑ λαμβάνομεν τμῆμα ΑΕ=ΑΗ.

Ἀπὸ τὸ Ε φέρομεν παράλληλον x' πρὸς τὴν x, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ. Ἀπὸ τὰ ἴσα ὀρθογ. τρίγωνα ΑΗΒ καὶ ΑΕΔ ἔχομεν ΒΑ=ΑΔ· ἄρα θὰ εἶναι

ΑΓ—ΒΑ=ΑΓ—ΑΔ=ΔΓ=α.

Ἀπὸ τὸ Ε φέρομεν τὴν ΕΖ παράλληλον τῆς ΒΓ· τὸ σχηματιζόμενον τετράπλευρον ΕΖΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΕΖ=ΔΓ=α.



Σχ. 138

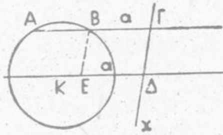
Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὴν ΗΑΟ κάθετον ἐπὶ τὰς παραλλήλους x, y καὶ λαμβάνομεν ΑΕ=ΑΗ· φέρομεν ἔπειτα ἐκ τοῦ Ε τὴν x', παράλληλον πρὸς τὰς x y, καὶ μὲ κέντρον τὸ Ε καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς α γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν y εἰς τὸ Ζ, ὁπότε θὰ εἶναι ΕΖ=α· ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὴν ΒΑΓ παράλληλον πρὸς τήν ΕΖ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη τέμνουσα.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΗΒ καὶ ΑΕΔ ἔχουν ἐκ κατασκευῆς ΑΗ καὶ ΑΕ ἴσας καὶ τὰς περὶ τὸ Α γωνίας ἴσας, ὡς κατὰ κορυφήν, εἶναι ἴσα, ἄρα θὰ εἶναι ΑΒ=ΑΔ· θὰ ἔχωμεν λοιπὸν ΑΓ—ΑΒ=ΑΓ—ΑΔ=ΔΓ· ἀλλὰ ἐπειδὴ ΔΓ=ΕΖ=α, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΕΔΓΖ, θὰ εἶναι ΑΓ—ΑΒ=α.

*932. Νὰ ἀχθῇ τέμνουσα δοθείσης περιφερείας Κ καὶ δοθείσης εὐθείας x καὶ τοιαύτη, ὥστε τὸ μεταξὺ τῆς εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας περιεχόμενον τμῆμα αὐτῆς νὰ ἔχῃ μῆκος α καὶ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΚΖ.*

*'Ανάλυσις*. Ἔστω ΑΒΓ ἡ ζητουμένη τέμνουσα, καὶ τοιαύτη ὥστε ΒΓ=α, καὶ ἔστω Δ ἡ τομὴ τῆς x καὶ τῆς ΚΖ. Ἐπὶ τῆς ΔΚ λαμβάνομεν τμῆμα ΔΕ=ΓΒ=α καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΕ.

Τὸ τετράπλευρον ΒΕΔΓ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι ΒΓ=ΕΔ=α καὶ παράλληλοι. Εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΒΕΔΓ, ἡ ΕΔ εἶναι ὡρισμένη κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος, ἡ δὲ ΕΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν x καὶ τέμνει τὴν περιφέρειαν Κ εἰς τὸ Β. Ἄρα δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὸ παραλληλόγραμμον ΒΕΔΓ.



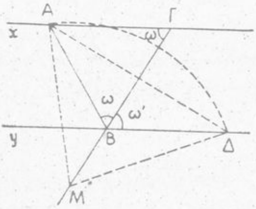
Σχ. 139

Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Ἐπὶ τῆς ΚΖ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν x εἰς τὸ Δ, λαμβάνομεν τμῆμα ΔΕ=α καὶ ἐκ τοῦ Ε φέρομεν τὴν ΕΒ παράλληλον πρὸς τὴν δοθεῖσαν διεύθυνσιν x, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Κ εἰς τὸ Β· ἐκ τοῦ Β φέρομεν τὴν ΑΒΓ παράλληλον πρὸς τὴν ΚΖ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη τέμνουσα.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΕΔΓΒ, ἔχει, ἐκ κατασκευῆς, τὰς ἀπέναντι πλευράς του παραλλήλους, εἶναι παραλληλόγραμμον, ἄρα ΒΓ=ΕΔ ἀλλ' ἐκ κατασκευῆς εἶναι ΕΔ=α, ὅθεν εἶναι καὶ ΒΓ=α.

*933 Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι* x, y *καὶ ἐπὶ τῆς* x *ἕνα σημεῖον* Α· *ζητεῖται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον* Μ, *τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῶν παραλλήλων, νὰ ἀχθῇ τέμνουσα* ΜΒΓ *τοιαύτη, ὥστε* ΑΒ=ΑΓ.

*'Ανάλυσις*. Ἔστω ΜΒΓ ἡ ζητουμένη τέμνουσα καὶ τοιαύτη, ὥστε ΑΒ=ΑΓ. Ἐπειδὴ ΑΒ=ΑΓ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως εἶναι γων.ΑΓΒ=γων.ΓΒΑ.



Σχ. 140

'Αλλὰ γων.ΑΓΒ=γων.ΓΒΔ, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων x, y· ἄρα θὰ εἶναι γων.ΓΒΑ=γων.ΓΒΔ. Ἡ ΜΓ εἶναι λοιπὸν διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΒΔ καὶ ἑπομένως ἄξων συμμετρίας αὐτῆς.

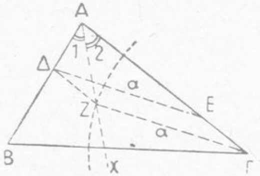
Τὸ συμμετρικὸν σημεῖον Δ τοῦ Α, ὡς πρὸς τὴν ΜΓ θὰ κεῖται λοιπὸν ἐπὶ τῆς y καὶ θὰ εἶναι ΜΑ=ΜΔ. Τὸ Δ λοιπὸν ὁρίζεται ὡς τομὴ τῆς y καὶ τῆς περιφερείας (Μ, ΜΑ).

Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Γράφομεν περιφέρειαν μὲ κέντρον τὸ δοθὲν σημεῖον Μ καὶ ἀκτῖνα ΜΑ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν y εἰς τὸ σημεῖον Δ φέρομεν τὴν ΑΔ καὶ τὴν κάθετον ΜΓ ἐπὶ τὴν ΑΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν μὲν y εἰς τὸ Β τὴν δὲ x εἰς τὸ Γ. Λέγω ὅτι ἡ ΜΒΓ εἶναι ἡ ζητουμένη τέμνουσα.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἡ ΜΓ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΔ, διέρχεται διὰ τοῦ μέσου αὐτῆς καὶ ἑπομένως τὰ σημεῖα Α καὶ Δ εἶναι συμμετρικά, ὡς πρὸς τὴν ΜΓ· λόγῳ τῆς συμμετρίας τούτων θὰ εἶναι ω=ω'· ἀλλὰ ω'=ω', ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων x, y, ἑπομένως ω=ω. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, καὶ ἑπομένως εἶναι ΑΒ=ΑΓ.

**934.** ***Δίδεται ἕνα τρίγωνον*** ΑΒΓ ***καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα μήκους*** α, ***ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὴν*** ΑΒ ***εἰς τὸ*** Δ, ***τὴν*** ΑΓ ***εἰς τὸ*** Ε, ***καὶ τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι*** ΑΔ=ΓΕ.

***Ἀνάλυσις.*** Ἔστω ΔΕ=α τὸ ζητούμενον εὐθύγραμμον τμῆμα. Ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν τὴν ΓΖ παράλληλον πρὸς τὴν ΕΔ καὶ ἴσην μὲ αὐτήν. Φέρομεν ΔΖ καὶ σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΔΖΓΕ· ἄρα θὰ εἶναι ΔΖ=ΕΓ· ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΑΔ=ΕΓ, ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΔΑ=ΔΖ.



Σχ. 141

Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΔΖ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι

γων.ΔΖΑ=γων.ΔΑΖ (1).

Ἀλλὰ γων.ΔΖΑ=γων.ΖΑΓ, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΔΖ καὶ ΑΓ· ἄρα θὰ εἶναι γων.ΖΑΓ$=\frac{A}{2}$· δηλ. ἡ ΑΖ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Σύνθεσις. Φέρομεν τὴν Αx διχοτόμον τῆς γωνίας Α καὶ μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Γ καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὸ δοθὲν μῆκος α γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Αx εἰς τὰ σημεῖα Ζ, Ζ'· φέρομεν τὴν ΖΔ παράλληλον πρὸς τὴν ΓΑ καὶ τὴν ΔΞ παράλληλον πρὸς τὴν ΖΓ· ἡ ΔΕ εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

Ἀπόδειξις. Ἕνεκα τοῦ παραλληλογράμμου ΔΖΓΕ ἔχομεν ΔΕ=ΖΓ=α καὶ ΖΔ=ΕΓ· ἀλλ' ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΖΔ καὶ ΓΑ ἔχομεν γων.ΔΖΑ=γων.xΑΓ$=\frac{A}{2}$· ἑπομένως τὸ τρίγωνον ΑΔΖ εἶναι ἰσοσκελές· ὅθεν ΖΔ=ΑΔ, ἄρα καὶ ΕΓ=ΑΔ.

**935.** ***Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν*** ΒΓ ***τριγώνου*** ΑΒΓ, ***τέμνουσα τὰς πλευρὰς*** ΑΒ ***καὶ*** ΑΓ ***ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα*** Δ ***καὶ*** Ε ***καὶ τοιαύτη, ὥστε*** ΑΔ=ΓΕ.

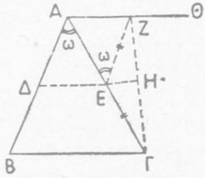
***Ἀνάλυσις.*** Ἔστω ΔΕ ἡ ζητουμένη παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ, καὶ τοιαύτη ἔστω ΑΔ=ΓΕ.

Ἀπὸ τὸ Ε φέρομεν τὴν ΕΖ ἴσην καὶ παράλληλον πρὸς τὴν ΔΑ. Φέρομεν τὴν ΑΖ καὶ τὸ σχηματιζόμενον τετράπλευρον ΑΔΕΖ εἶναι παραλληλόγραμμον· ἄρα θὰ εἶναι ΑΔ=ΕΖ.

Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι καὶ ΑΔ=ΕΓ· ἄρα θὰ εἶναι ΕΖ=ΕΓ. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΕΖΓ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως ἡ κορυφή του Ε κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ΗΕ ἐπὶ τὴν ΖΓ εἰς τὸ μέσον της.

Ἐπειδὴ αἱ ΑΔ καὶ ΕΖ εἶναι παράλληλοι, θὰ εἶναι γων.ω'=γων.ω, Ἀλλὰ ἡ γωνία ω εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΖΕΓ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι γων.ΔΑΕ=γων.ΑΕΖ=2 γων.ΕΓΖ, ὅθεν γων.ΕΓΖ$=\frac{1}{2}$ γων.ΔΑΕ.

Τὸ σημεῖον λοιπὸν Ζ ὁρίζεται ὡς τομὴ τῆς παραλλήλου τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ Α πρὸς τὴν ΒΓ καὶ τῆς εὐθείας ΓΖ, ἡ ὁποία σχηματίζει μὲ τὴν πλευρὰν ΑΓ τοῦ τριγώνου γωνίαν ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας Α αὐτοῦ.



Σχ. 142

Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Ἐκ τῆς κορυφῆς Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τὴν ΑΘ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ μὲ τὸ κορυφὴν Γ καὶ πλευρὰν ΑΓ κατασκευάζομεν γωνίαν ΑΓΖ$=\frac{A}{2}$, τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ ΓΖ τέμνει τὴν ΑΘ εἰς τὸ Ζ. Εἰς τὸ μέσον Η τῆς ΓΖ, φέρομεν κάθετον ΗΕ ἐπὶ τὴν ΓΖ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε· ἔπειτα φέρομεν τὴν ΕΔ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΖ καὶ ἡ ΕΔ εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος.

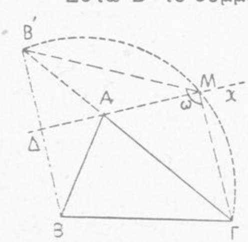
Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἕνεκα τοῦ παραλληλογράμμου ΑΔΕΖ ἔχομεν ΔΑ=ΕΖ· ἀλλὰ ΕΖ=ΕΓ, διότι τὸ Ε εἶναι σημεῖον τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΖΓ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς. Ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω ἰσότητας λαμβάνομεν ΔΑ=ΕΓ.

*936. Δίδεται ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ *καὶ ἡ διχοτόμος* Αx *τῆς ἐξωτερικῆς του γωνίας* Α· *νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς* Αx *ἕνα σημεῖον* Μ *τοιοῦτον, ὥστε* γων.ΑΜΒ+γων.ΑΜΓ=ω *καὶ νὰ δειχθῇ, ὅτι διὰ κάθε σημεῖον* Μ *τῆς* Αx *εἶναι* ΜΒ+ΜΓ$>$ΑΒ+ΑΓ.

***Ἀνάλυσις*** Ἔστω Μ τὸ ζητούμενον σημεῖον καὶ τοιοῦτον, ὥστε γων.ΑΜΒ+γων.ΑΜΓ=ω (1).

Ἔστω Β΄ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Β, ὡς πρὸς ἄξονα τὴν Αx. Λόγῳ τῆς συμμετρίας τῶν ΜΒ καὶ ΜΒ΄ θὰ εἶναι γων.ΒΜΑ=γων.ΑΜΒ΄, ὁπότε ἡ σχέσις (1) γράφεται

γων.ΑΜΒ΄+γων.ΑΜΓ=ω, ἢ γων.ΓΜΒ΄=ω.



Σχ. 143

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ὡρισμένον τμῆμα ΓΒ΄ φαίνεται ἐκ τοῦ Μ ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν ω· ἄρα τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν ΓΒ΄ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην πρὸς ω. Τὸ σημεῖον λοιπὸν Μ ὁρίζεται ὡς τομὴ τοῦ τόξου τοῦ τμήματος τούτου καὶ τῆς Αx.

Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον Β΄, συμμετρικὸν τοῦ Β, ὡς πρὸς ἄξονα τὴν διχοτόμον Αx τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου

ΑΒΓ. Τὸ Β' κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς πλευρᾶς ΑΓ, διότι ὁ ἄξων συμμετρίας διχοτομεῖ τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν Α.

Μὲ χορδὴν τὴν Β'Γ γράφομεν τμῆμα κύκλου, δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν ω. Τὸ τόξον τοῦ τμήματος τούτου τέμνει τὴν Ax εἰς τὸ Μ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον.

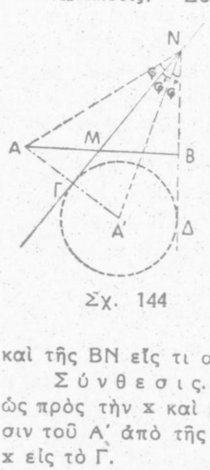
Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. α') Ἂν ἀχθοῦν αἱ ΜΒ', ΜΒ καὶ ΜΓ, θὰ εἶναι ἐκ κατασκευῆς γωνία Β'ΜΓ=ω· ἀλλὰ γων Β'ΜΓ=γων.Β'ΜΑ+γων.ΑΜΓ=ω (1)· ἕνεκα ὅμως τῆς συμμετρίας τῶν Β' καὶ Β, ὡς πρὸς Ax, θὰ εἶναι γων.Β'ΜΑ=γων.ΒΜΑ, ὁπότε ἡ (1) γίνεται γων.ΒΜΑ+γων ΑΜΓ=ω.

β') Ἐκ τοῦ τριγώνου Β'ΜΓ ἔχομεν Β'Γ<Β'Μ+ΜΓ· ἀλλ' ἕνεκα τῆς συμμετρίας εἶναι Β'Μ=ΒΜ, ὅθεν Β'Γ<ΒΜ+ΜΓ (1)· ἀλλὰ Β'Γ=Β'Α+ΑΓ=ΒΑ+ΑΓ, ὁπότε ἡ (1), γράφεται ΒΑ+ΑΓ<ΒΜ+ΜΓ.

Σ η μ. Εἰς τὸ σχῆμα νὰ ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΒΜ.

937. *Ἀπὸ τὸ μέσον* Μ *εὐθυγράμμου τμήματος* ΑΒ *ἄγεται εὐθεῖα* x, *ἡ ὁποία σχηματίζει μὲ τὴν* ΑΒ *δοθεῖσαν γωνίαν ω. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς* x *ἕνα σημεῖον* Ν *τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι* γων.ΜΝΒ=2 γων.ΑΝΜ.

*Ἀνάλυσις.* Ἔστω Ν τὸ ζητούμενον σημεῖον καὶ τοιοῦτον, ὥστε γων ΜΝΒ=2 γων.ΑΝΜ. Ἐὰν θέσωμεν γων.ΑΝΜ=φ, τότε γων.ΓΝΒ=2φ. Ὁρίζομεν τὸ σημεῖον Α' συμμετρικὸν τοῦ Α, ὡς πρὸς τὴν x καὶ φέρομεν τὴν Α'Ν.



Σχ. 144

Λόγῳ τῆς συμμετρίας τῶν Α καὶ Α', αἱ ΑΝ καὶ Α'Ν σχηματίζουν ἴσας γωνίας μὲ τὸν ἄξονα x, ἤτοι γων.ΑΝΜ=γων.ΜΝΑ'=φ· ἄρα καὶ γων.Α'ΝΒ=φ· ἤτοι ἡ Α'Ν εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΓΝΒ καὶ ἑπομένως τὸ σημεῖον αὐτῆς Α' ἀπέχει ἐξ ἴσου τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ταύτης. Ἂν λοιπὸν μὲ κέντρον τὸ Α' καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν Α'Γ τοῦ Α' ἀπὸ τῆς ΓΝ, γραφῇ περιφέρεια, αὕτη θὰ ἐφάπτεται καὶ τῆς ΒΝ εἴς τι σημεῖον Δ.

Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον Α', συμμετρικὸν τοῦ Α, ὡς πρὸς τὴν x καὶ μὲ κέντρον Α' καὶ ἀκτῖνα ΑΓ, δηλ. τὴν ἀπόστασιν τοῦ Α' ἀπὸ τῆς x, γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῆς x εἰς τὸ Γ.

Ἐκ τοῦ Β φέρομεν τὴν ΒΔ ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας (Α',Α'Γ), ἡ ὁποία τέμνει τὴν x εἰς τὸ σημεῖον Ν, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς Ἐπειδὴ ἡ Α'Ν ἑνώνει τὴν κορυφὴν Ν τῆς γωνίας ΓΝΔ, ποὺ σχηματίζουν αἱ ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερεία (Α', Α'Γ) μὲ τὸ κέντρον αὐτῆς, ἕπεται ὅτι ἡ Α'Ν διχοτομεῖ τὴν γωνίαν αὐτήν, καὶ θὰ εἶναι γων.ΜΝΒ=2 γων.ΓΝΑ' (1).

Ἐπειδὴ ὅμως καὶ τὰ σημεῖα Α καὶ Α' εἶναι συμμετρικά, ὡς πρὸς τὴν x, θὰ εἶναι γων.ΓΝΑ'=γων.ΑΝΜ (2).

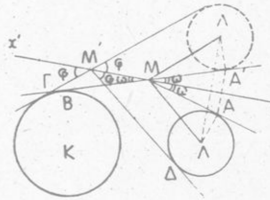
Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι γων.ΜΝΒ=2 γων.ΑΝΜ.

*938. Δίδεται εὐθεῖα x'x καὶ δύο περιφέρειαι Κ, Λ κείμεναι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς x'x. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἕνα σημεῖον ἐπὶ τῆς x, τοιοῦτον, ὥστε, αἱ ἐξ αὐτοῦ ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι τῶν δύο περιφερειῶν, νὰ σχηματίζουν μὲ τὴν x'x ἴσας γωνίας.*

*Ἀνάλυσις.* Ἔστω Μ τὸ ζητούμενον σημεῖον τῆς x, καὶ ΜΑ, ΜΒ αἱ ἐξ αὐτοῦ ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι ἀντιστοίχως τῶν περιφερειῶν Λ καὶ Κ καὶ τοιαῦται ὥστε

γων.x'ΜΒ=γων xΜΑ=ω

Εὑρίσκομεν τὸ συμμετρικὸν σχῆμα τῆς περιφερείας Λ, ὡς πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν x'x· τοῦτο εἶναι περιφέρεια ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν καὶ ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ συμμετρικὸν σημεῖον Λ' τοῦ σημείου Λ, ὡς πρὸς τὴν x'x.




Σχ 145

Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΛΑ εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς· τὸ συμμετρικὸν αὐτῆς εἶναι ἡ ἀκτὶς Λ'Α' τῆς Λ', ἡ ἀπολήγουσα εἰς τὸ σημεῖον Α' τῆς Λ', συμμετρικὸν τοῦ Α', ὡς πρὸς τὴν x'x, ὁπότε τὸ συμμετρικὸν τῆς ἐφαπτομένης ΜΑ, ὡς πρὸς τὴν x εἶναι ἡ ΜΑ'.

Ἐπειδὴ ὅμως τὸ συμμετρικὸν γωνίας, ὡς πρὸς ἄξονα εἶναι γωνία ἴση πρὸς αὐτήν, ἕπεται ὅτι γων.ΛΑΜ=γων.Λ'Α'Μ=1 ὀρθ., ἤτοι ἡ ΜΑ' εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας Λ'. Ἕνεκα δὲ τῆς συμμετρίας εἶναι γων.ΑΜx=γων.xΜΑ', καὶ ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως

γων.xΜΑ=γων.x'ΜΒ, ἕπεται ὅτι γων.xΜΑ=γων.x'ΜΒ.

Τὸ σημεῖα λοιπὸν Β, Μ, Α', κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ ἡ ΒΜΑ' εἶναι ἡ κοινὴ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη τῶν περιφερειῶν Κ, Λ'.

Σύνθεσις. Εὑρίσκομεν τὴν περιφέρειαν Λ', συμμετρικὴν τῆς Λ, ὡς πρὸς τὴν x'x καὶ φέρομεν τὴν κοινὴν ἐσωτερικὴν ἐφαπτομένην ΒΑ' τῶν περιφερειῶν Κ, Λ'. Αὕτη τέμνει τὴν x εἰς τὸ σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀπόδειξις. Αἱ γωνίαι x'ΜΒ καὶ xΜΑ' εἶναι ἴσαι ὡς κατὰ κορυφήν· ἀλλὰ ἕνεκα τῆς συμμετρίας εἶναι γων.xΜΑ=γων.xΜΑ', ἄρα θὰ εἶναι καὶ γων.xΜΑ=γων.x'ΜΒ.

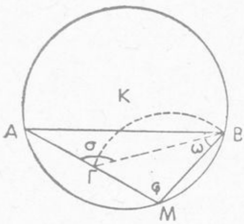
*939. Ἐπὶ δοθέντος τόξου ΑΒ περιφερείας Κ, νὰ προσδιορισθῇ ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε ἡ διαφορὰ ΜΑ—ΜΒ τῶν χορδῶν ΜΑ καὶ ΜΒ νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν μῆκος λ.*

*Ἀνάλυσις.* Ἔστω Μ τὸ ζητούμενον σημεῖον καὶ τοιοῦτον, ὥστε ΜΑ—ΜΒ=λ. Ἐπὶ τῆς ΜΑ λαμβάνομεν τμῆμα ΜΓ=ΜΒ καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΓ. Τὸ τρίγωνον ΜΓΒ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἐπομένως αἱ παρὰ τὴν βάσιν του γωνίαι εἶναι ἴσαι. Θὰ εἶναι δὲ ΜΑ—ΜΒ=ΜΑ—ΜΓ=ΑΓ=λ.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία σ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΜΓΒ, θὰ εἶναι σ=φ+ω.

Ἐπειδὴ $2\omega+\varphi=180^0$, θὰ εἶναι $\omega=90^0-\frac{\varphi}{2}$, ὁπότε $\sigma=90^0+\frac{\varphi}{2}$.

Τοῦ τριγώνου λοιπὸν ΑΓΒ γνωρίζομεν δύο πλευράς, τὴν ΑΒ καὶ ΑΓ=λ καὶ τὴν ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας τούτων γωνίαν σ· ἑπομένως τοῦτο κατασκευάζεται.



Σχ. 146

Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Μὲ πλευρὰς τὴν χορδὴν ΑΒ καὶ ΑΓ=λ καὶ γωνίαν ἀπέναντι τῆς ΑΒ ἴσην πρὸς $90^0+\frac{\varphi}{2}$ κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΑΓΒ. Ἐὰν προεκτείνωμεν τὴν πλευρὰν ΑΓ, αὕτη θὰ τμήσῃ τὸ τόξον ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἐκ κατασκευῆς εἶναι ΑΜ—ΓΜ=ΑΓ=λ. Ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΜΒ, σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΓΜΒ, ὁπότε θὰ ἔχωμεν γων.$\sigma=\varphi+$γων.ΓΒΜ. Ἀλλὰ ἐπειδὴ ἐκ κατασκευῆς εἶναι $\sigma=90^0+\frac{\varphi}{2}$, ἕπεται ὅτι $90^0+\frac{\varphi}{2}=\varphi+$γων.ΓΒΜ ἢ $180^0+\varphi=2\varphi+2$γων.ΓΒΜ, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\varphi+2$γων.ΓΒΜ$=180^0$ (1)· ἀλλὰ εἶναι καὶ $\varphi+$γων.ΒΓΜ$+$γων.ΓΒΜ$=180^0$ (2).

Ἀπὸ τὰς (1) καὶ (2) συνάγομεν ὅτι

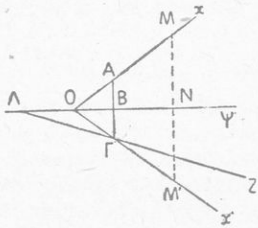
$$\varphi+2\text{γων.ΓΒΜ}=\varphi+\text{γων.ΒΓΜ}+\text{γων.ΓΒΜ}\cdot$$

ἀπὸ αὐτὴν εὑρίσκομεν γων.ΒΓΜ=γων.ΓΒΜ· ἑπομένως τὸ τρίγωνον ΓΒΜ εἶναι ἰσοσκελές, ἤτοι ΓΜ=ΜΓ· ἄρα ΑΜ—ΓΜ=ΑΜ—ΜΒ καὶ ἐπειδὴ ΑΜ—ΓΜ=λ, ἕπεται ὅτι ΑΜ—ΜΒ=λ.

940. *Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι* x, Ψ, Ζ, *αἱ ὁποῖαι δὲν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ εὐθύγραμμον τμῆμα, περατούμενον ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν* x, Ζ *καὶ τεμνόμενον δίχα καὶ καθέτως ὑπὸ τῆς* Ψ, *ἡ ὁποία κεῖται μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων.*

*Ἀνάλυσις.* Ἔστω ΑΓ τὸ ζητούμενον τμῆμα· τὰ σημεῖα Α καὶ Γ εἶναι συμμετρικά, ὡς πρὸς τὴν Ψ, διότι ἐξ ὑποθέσεως τὸ ΑΓ τέμνεται ὑπ᾽ αὐτῆς δίχα καὶ καθέτως.

Ἕνεκα τῆς συμμετρίας τῶν Α καὶ Γ, αἱ Οx καὶ Οx΄ εἶναι συμμετρικαί, ὡς πρὸς τὴν ΟΨ καὶ ἑπομένως ἡ Ψ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας xOx΄.



Σχ. 147

Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς x φέρομεν τὴν ΜΝ κάθετον ἐπὶ τὴν Ψ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν x΄ εἰς τὸ Μ΄, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Μ ὡς πρὸς Ψ. Ἡ εὐθεῖα Οx΄ εἶναι τελείως ὡρισμένη, διότι γνωρίζομεν δύο σημεῖα αὐτῆς, τὴν τομὴν Ο τῆς x καὶ Ψ καὶ τὸ συμμετρικὸν σημεῖον Μ΄ τυχόντος σημείου Μ τῆς x, ὡς πρὸς τὴν Ψ.

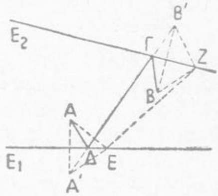
Τὸ δὲ σημεῖον Γ εἶναι ἡ τομὴ τῶν δύο ὡρισμένων εὐθειῶν ΟΖ καὶ Οx'.

Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Εὑρίσκομεν τὸ συμμετρικὸν Μ' τυχόντος σημείου Μ τῆς Οx, ὡς πρὸς τὴν y· φέρομεν τὴν ΟΜ', ὅπου Ο ἡ τομὴ τῆς x καὶ y, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Ζ εἰς τὸ Γ. 'Εκ τοῦ Γ φέρομεν τὴν ΓΑ παράλληλον πρὸς τὴν Μ'Μ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Οy εἰς τὸ Β καὶ τὴν Οx εἰς τὸ Α.

Τὸ ΓΑ εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον, διότι εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας xΟx' καὶ περατοῦται εἰς τὰς πλευρὰς αὐτῆς· ἄρα διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς Οy.

941. *Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β κείμενα μεταξὺ δύο εὐθειῶν $E_1$, $E_2$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἐλάχιστος δρόμος, ὁ ἐγγίζων τὰς δύο αὐτὰς εὐθείας καὶ συνδέων τὰ δύο σημεῖα.*

*'Ανάλυσις.* Ἔστω ΑΕΖΒ τυχὸν δρόμος, ὅστις ἄγει ἐκ τοῦ Α εἰς τὸ Β καὶ ἐγγίζει καὶ τὰς δύο εὐθείας, τὴν μὲν $E_1$ εἰς τὸ Ε, τὴν δὲ $E_2$ εἰς τὸ Ζ.



Σχ. 148

Ἔστωσαν Α' τὸ συμμετρικὸν τοῦ Α, ὡς πρὸς τὴν $E_1$. καὶ Β', τὸ συμμετρικὸν τοῦ Β, ὡς πρὸς τὴν $E_2$. Λόγῳ τῆς συμμετρίας θὰ εἶναι ΑΕ=Α'Ε καὶ ΒΖ=Β'Ζ· ἐπομένως

$$AE+EZ+ZB=A'E+EZ+ZB'.$$

Ἵνα τὸ ἄθροισμα ΑΕ+ΕΖ+ΖΒ εἶναι ἐλάχιστον ἀρκεῖ νὰ γίνῃ ἐλάχιστον τὸ Α'Ε+ΕΖ+ΖΒ' καὶ πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ τὰ σημεῖα Α', Ε, Ζ, Β', νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Ὁρίζομεν τὰ συμμετρικὰ Α', Β', ἀντιστοίχως τῶν Α καὶ Β, ὡς πρὸς τὰ $E_1$, $E_2$ καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν Α'Β', ἡ ὁποία τέμνει τὴν μὲν $E_1$ εἰς τὸ Δ, τὴν δὲ $E_2$ εἰς τὸ Γ. Φέρομεν τὰς ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ καὶ λέγομεν ὅτι ὁ ζητούμενος δρόμος εἶναι ὁ ΑΔ+ΔΓ+ΓΒ.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἕνεκα τῆς συμμετρίας τῶν Α, Α' καὶ Β, Β' εἶναι ΑΔ=Α'Δ καὶ ΓΒ=ΓΒ' ἐπομένως θὰ εἶναι

$$A\Delta+\Delta\Gamma+\Gamma B=A'\Delta+\Delta\Gamma+\Gamma B'=A'B'.$$

'Αλλὰ μεταξὺ ὅλων τῶν γραμμῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰ αὐτὰ πέρατα, ἐλαχίστη εἶναι ἡ εὐθεῖα· ἄρα ὁ δρόμος ΑΔΓΒ εἶναι ὁ ἐλάχιστος.

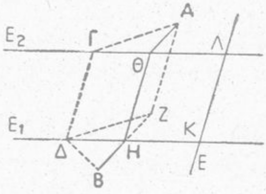
942. *Δίδονται δύο εὐθεῖαι παράλληλοι $E_1$ καὶ $E_2$ καὶ δύο σημεῖα Α, Β, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐκτὸς τῶν παραλλήλων τούτων καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ ἐλάχιστος δρόμος, ὁ συνδέων τὰ Α, Β καὶ τοῦ ὁποίου τὸ μεταξὺ τῶν $E_1$ καὶ $E_2$ περιλαμβανόμενον μέρος νὰ εἶναι παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν Ε.*

*Λύσις.* Ἔστω ΑΓΔΒ (Σχ. 149) τυχὸν δρόμος, συνδέων τὰ Α, Β καὶ τοῦ ὁποίου τὸ τμῆμα ΔΓ, τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν $E_1$, $E_2$, εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν Ε.

Αἱ ΓΔ καὶ ΛΚ εἶναι ἴσαι, ὡς παράλληλοι περιεχόμενοι μεταξὺ παραλλήλων εὐθειῶν. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον δρόμον ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον τοῦ ἀθροίσματος ΒΔ+ΔΓ+ΓΑ.

Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τὴν ΑΖ παράλληλον καὶ ἴσην μὲ τὴν ΓΔ. Φέρομεν τὴν ΔΖ καὶ σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓΔΖ· ἄρα θὰ εἶναι ΓΑ=ΔΖ. Θὰ εἶναι λοιπὸν ΒΔ+ΔΓ+ΓΑ=ΒΔ+ΖΑ+ΔΖ.

Ἀρκεῖ λοιπὸν πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος νὰ ζητήσωμεν τὸ ἐλάχιστον τοῦ ἀθροίσματος ΒΔ+ΖΑ+ΔΖ. Ἀλλ' ἵνα τοῦτο γίνῃ ἐλάχιστον, ἐπειδὴ ΖΑ=ΔΓ=ΚΛ=σταθερόν, ἀρκεῖ νὰ γίνῃ ἐλάχιστον τὸ ΒΔ+ΔΖ.



Σχ. 149

Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι ὁ δρόμος, ὁ συνδέων δύο σημεῖα Β καὶ Ζ· ἀλλὰ ὁ ἐλάχιστος δρόμος, ὁ συνδέων δύο σημεῖα εἶναι ἡ εὐθεῖα ΒΖ· ἄρα τὸ ἐλάχιστον τοῦ ΒΔ+ΔΓ+ΓΑ εἶναι τὸ ΒΖ+ΖΑ.

Τὸ ΒΖ τέμνει τὴν $Ε_1$ εἰς τὸ Η· ἂν ἀχθῇ ἡ ΗΘ παράλληλος πρὸς ΚΛ, θὰ εἶναι ΗΘ=ΚΛ=ΖΑ. Τὸ τετράπλευρον ΗΖΑΘ εἶναι λοιπὸν παραλληλόγραμμον, ἄρα ΗΖ=ΘΑ, ὅθεν

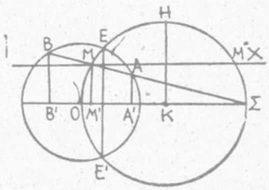
$$ΒΖ+ΖΑ=ΒΗ+ΗΖ+ΖΑ=ΒΗ+ΗΘ+ΘΑ$$

ἤτοι ὁ ζητούμενος ἐλάχιστος δρόμος εἶναι ΒΗ+ΗΘ+ΘΑ.

Κατασκευή. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὴν ΑΖ παράλληλον καὶ ἴσην μὲ ΛΚ· ἔπειτα φέρομεν τὴν ΒΖ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν $Ε_1$ εἰς τὸ Η· ἐκ τοῦ Η φέρομεν τὴν ΗΘ παράλληλον τῆς Ε καὶ τέλος φέρομεν τὴν ΘΑ καὶ οὕτω ἔχομεν τὸν ζητούμενον ἐλάχιστον δρόμον ΒΗ+ΗΘ+ΘΑ.

*943. Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς δοθείσης περιφερείας Ο, νὰ ἀχθῇ μία τέμνουσα ΣΑΒ τοιαύτη, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν σημείων τῆς τομῆς Α καὶ Β ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ΟΣ, νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ.*

*Λύσις.* Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΣΑΒ ἡ ζητουμένη τέμνουσα καὶ τοιαύτη ὥστε ΑΑ'+ΒΒ'=λ, ὅπου ΑΑ' καὶ ΒΒ' εἶναι αἱ ἀποστάσεις τῶν Α καὶ Β ἀπὸ τὴν ΟΣ.



Σχ. 150

Ἐὰν ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς ΑΒ φέρωμεν τὴν κάθετον ΜΜ' ἐπὶ τὴν ΟΣ, ἡ ΜΜ' θὰ εἶναι διάμεσος τοῦ τραπεζίου ΑΑ'Β'Β καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι

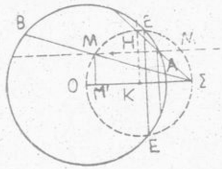
$$ΜΜ'=\frac{ΑΑ'+ΒΒ}{2}=\frac{λ}{2} \quad (1).$$

Τὸ σημεῖον Μ, ὡς ἀπέχον ἀπόστασιν $\frac{λ}{2}$ ἀπὸ τῆς ΟΣ, κεῖται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν ΟΣ εἰς ἀπόστασιν $\frac{λ}{2}$ ἀπ' αὐτῆς. Τὸ σημεῖον Μ ὅμως εἶναι καὶ μέσον τῆς χορδῆς ΑΒ, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Σ. Κεῖται λοιπὸν καὶ ἐπὶ τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου τῶν μέσων τῶν χορδῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ Σ, ὁ ὁποῖος τόπος εἶναι τὸ τόξον ΕΕ΄ τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ΟΣ.

Ἡ τομὴ τῆς παραλλήλου ΜΜ΄΄ καὶ τῆς περιφερείας ΟΣ ὁρίζει τὸ σημεῖον Μ καὶ ἑπομένως καὶ τὴν τέμνουσαν ΣΑΜΒ.

Διερεύνησις. Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΚΗ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΣ.

1η Περίπτωσις. *Ἐὰν τὸ Η κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου Ο.* Ἐὰν $\frac{\lambda}{2} <$ΗΚ, ἡ παράλληλος Χ συναντᾷ τὴν περιφέρειαν Κ εἰς δύο σημεῖα Μ καὶ Μ΄΄, συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν ΗΚ, ἐκ τῶν ὁποίων παραδεκτὸν εἶναι μόνον τὸ Μ. Διὰ νὰ εἶναι ὅμως καὶ τοῦτο παραδεκτόν, πρέπει $\frac{\lambda}{2} \leqslant$ΕΕ΄ ἢ $\lambda \leqslant 2$ΕΕ΄.




Σχ. 151

Τὸ μέγιστον τοῦ λ εἶναι λοιπὸν 2ΕΕ΄. Ἐὰν λ=2ΕΕ΄, τότε ἡ ΣΑΒ γίνεται ἐφαπτομένη τῆς Ο.

2α Περίπτωσις. *Ἐὰν τὸ Η κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου Ο.* (Σχ. 151). Πρέπει νὰ ἔχωμεν $\frac{\lambda}{2} \leqslant$ΗΚ.

Τὸ μέγιστον τοῦ λ εἶναι τότε 2ΗΚ ἢ ΟΣ. Διὰ λ=ΟΣ, τότε ἡ τέ-νουσα εἶναι ἡ ΣΗ. Ἐὰν ΗΚ$> \frac{\lambda}{2} \geqslant \frac{\text{ΕΕ΄}}{2}$ ὑπάρχουν δύο λύσεις· ἐὰν $\frac{\lambda}{2} < \frac{\text{ΕΕ΄}}{2}$ ὑπάρχει μία λύσις.

***944.*** ***Δίδεται διάμετρος ΓΔ περιφερείας Κ καὶ δύο σημεῖα Α, Β, κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἡμιπεριφερείας. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ἄλλης ἡμιπεριφερείας σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε τὸ τμῆμα τῆς διαμέτρου ΓΔ τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν χορδῶν ΜΑ καὶ ΜΒ νὰ ἔχῃ μῆκος α.***

***Ἀνάλυσις.*** Ἔστω Μ τὸ ζητούμενον σημεῖον καὶ ΗΖ, τὸ μεταξὺ τῶν χορδῶν ΜΑ καὶ ΜΒ περιεχόμενον τμῆμα τῆς διαμέτρου ΓΔ, τὸ ὁποῖον ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ἴσον πρὸς α· ἤτοι ΗΖ=α.


Σχ. 152

Ἀπὸ τό Α φέρομεν τὴν ΑΘ παράλληλον πρὸς τὴν ΗΖ καὶ ἴσην μὲ αὐτήν. Φέρομεν τὴν ΗΘ, ὁπότε σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΘΗΖΑ. Ἄρα θὰ εἶναι ΘΗ=ΑΖ καὶ αἱ ΘΗ καὶ ΑΖ παράλληλοι. Ἑπομένως θὰ εἶναι

γων.ΒΗΘ=γων.ΒΜΑ=γων.ν.

Ἀλλ' ἡ γωνία ΒΜΑ εἶναι γνωστή, ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κύκλον Κ καὶ βαίνουσα ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΝΒ, τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῶν δοθέντων σημείων Α, Β. Ἡ χορδὴ λοιπὸν ΒΘ φαίνεται ἀπὸ τὸ Η ὑπὸ γωνίαν γνωστήν· ἀλλὰ ἡ ΒΘ εἶναι σταθερά, θέσει καὶ μεγέθει, διότι τὰ πέρατα Β καὶ Θ αὐτῆς εἶναι τελείως ὡρισμένα· ἑπομένως ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου Η εἶναι τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν ΒΘ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην πρὸς τυχοῦσαν γωνίαν, ἐγγεγραμμένην εἰς τὸν κύκλον Κ καὶ βαίνουσαν ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΝΒ.

Ἑπομένως τὸ σημεῖον Η ὁρίζεται ὡς τομὴ τῆς διαμέτρου ΓΔ καὶ τοῦ τόξου τοῦ ἀνωτέρω κυκλικοῦ τμήματος.

Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Ἐκ τοῦ σημείου Α φέρομεν τὴν ΑΘ=α καὶ παράλληλον πρὸς τὴν διάμετρον ΓΔ. Μὲ χορδὴν τὴν ΒΘ γράφομεν τμῆμα κύκλου, τὸ ὁποῖον δέχεται γωνίαν ἴσην πρὸς ἐγγεγραμμένην εἰς τὸν κύκλον Κ καὶ ἔχουσαν μέτρον ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ τόξου ΑΒ, ἤτοι βαίνουσαν ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΝΒ.

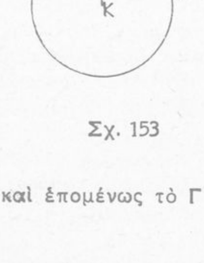
Τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ αὐτοῦ τμήματος τέμνει τὴν διάμετρον ΓΔ εἰς τὸ σημεῖον Η. Φέρομεν τὴν ΒΗ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν περιφέρειαν Κ εἰς τὸ Μ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Πράγματι; ἂν ἀχθοῦν αἱ ΗΘ καὶ ΜΑ σχηματίζονται αἱ γωνίαι ΒΗΘ καὶ ΒΜΑ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἐκ κατασκευῆς ἴσαι. Αἱ ΗΘ καὶ ΜΑ εἶναι λοιπὸν παράλληλοι καὶ ἑπομένως τὸ τετράπλευρον ΗΖΑΘ εἶναι παραλληλόγραμμον, ὁπότε ΖΗ=ΑΘ=α.

Τὸ μεταξὺ λοιπὸν τῶν χορδῶν ΜΑ καὶ ΜΒ τμῆμα ΗΖ τῆς διαμέτρου ΓΔ ἰσοῦται πρὸς α, ἄρα τὸ Μ εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον.

**945.** ***Ἐπὶ δοθέντος τόξου ΑΒ κύκλου Κ νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ, τοιοῦτον ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τῶν ἄκρων Α, Β τοῦ τόξου νὰ ἰσοῦται μὲ δοθὲν μῆκος α.***

*Ἀνάλυσις.* Ἔστω Μ τὸ ζητούμενον σημεῖον, καὶ τοιοῦτον ὥστε ΑΜ+ΜΒ=α. Ἔστω ω τὸ μέτρον τῆς γωνίας τῆς ἐγγραφομένης εἰς τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΑΜΒ. Φέρομεν τὴν ΒΜ καὶ τὴν ΑΜ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της λαμβάνομεν τμῆμα ΜΓ=ΜΒ. Ἄρα θὰ εἶναι ΑΜ+ΜΓ=ΑΜ+ΜΒ=α ἢ ΑΓ=α.




Σχ. 153

Τὸ Γ, ἐπειδὴ ἀπέχει ἀπὸ τὸ σταθερὸν σημεῖον Α σταθερὰν ἀπόστασιν καὶ ἴσην πρὸς α, κεῖται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς α.

Ἀπὸ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΓΜΒ ἔχομεν γων.ΒΓΜ=γων.$\frac{\text{ΑΜΒ}}{2}$, ἤτοι γων.ΒΓΜ=$\frac{\omega}{2}$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι σταθερὸν τμῆμα ΑΒ φαίνεται ἐκ τοῦ Γ ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν $\frac{\omega}{2}$ καὶ ἑπομένως τὸ Γ κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν ΑΒ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην πρὸς $\frac{\omega}{2}$, δηλ. ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἐγγραφομένης εἰς τὸ δοθὲν κυκλικὸν τμῆμα ΑΜΒ. Τὸ Γ λοιπὸν ὁρίζεται ὡς τομὴ τοῦ τόξου τούτου καὶ τῆς περιφερείας (Α, α).

Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Μὲ χορδὴν τὴν ΑΒ γράφομεν κυκλικὸν τμῆμα, τὸ ὁποῖον νὰ δέχεται γωνίαν ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἐγγραφομένης εἰς τὸ δοθὲν κυκλικὸν τμῆμα ΑΜΒ καὶ ἔστω ΑΓΒ τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τούτου τμήματος· ἔπειτα μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρός τὸ δοθὲν μῆκος α γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὸ τόξον ΑΓΒ εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ′.

Φέρομεν τὰς ΑΓ καὶ ΑΓ′, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὸ τόξον ΑΜΒ, εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν καὶ τὰ δύο λύσιν τοῦ προβλήματος.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Διότι, ἂν ἀχθοῦν αἱ ΜΒ καὶ ΒΓ σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΒΜΓ, τοῦ ὁποίου γων.ΒΜΓ=180°—γων.ΑΜΒ=180°—ω.

Ἐκ κατασκευῆς ὅμως ἔχομεν γων.ΜΓΒ=$\frac{\omega}{2}$, ὅθεν

$$\text{γων.ΜΒΓ}=180-(\text{γων.ΒΜΓ}+\text{γων.ΜΓΒ})=180^\circ-\left(180^\circ-\omega+\frac{\omega}{2}\right)=\frac{\omega}{2},$$

ἄρα τὸ τρίγωνον ΒΜΓ εἶναι ἰσοσκελές, καὶ ἑπομένως ΜΒ=ΜΓ· θὰ εἶναι λοιπὸν ΑΜ+ΜΒ=ΑΜ+ΜΓ=ΑΓ. Ἀλλὰ ἐκ κατασκευῆς ΑΓ=α, ὅθεν ΑΜ+ΜΒ=α.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ τὸ σημεῖον Μ′ ἀποτελεῖ λύσιν τοῦ προβλήματος.

Δ ι ε ρ ε ύ ν η σ ι ς. Ἐὰν ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΑΛΔ τοῦ κύκλου Λ, ἡ διερχομένη διὰ τοῦ σημείου Α καὶ ἀχθῇ καὶ ἡ χορδὴ ΓΔ σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΔ ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν ΑΔ>ΑΓ, ἤτοι ΑΔ>α.

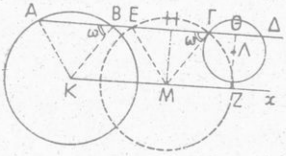
Ἑπομένως διὰ νὰ ὑπάρχουν δύο λύσεις πρέπει ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου Λ νὰ εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ δοθέντος μήκους α· ἂν εἶναι ἴση θὰ ὑπάρχῃ μία λύσις καὶ ἂν εἶναι μικροτέρα οὐδεμία λύσις ὑπάρχει.

*946. Δίδονται δύο περιφέρειαι* Κ, Λ, *κείμεναι ἐκτὸς ἀλλήλων καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ τέμνουσα* ΑΒΓΔ *τούτων, παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν* Κx *καὶ τοιαύτη, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν χορδῶν, τῶν ἀποτεμνομένων ἐπ' αὐτῆς ὑπὸ τῶν δύο περιφερειῶν νὰ ἰσοῦται πρὸς λ.*

*Ἀνάλυσις.* Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓΔ ἡ ζητουμένη τέμνουσα καὶ τοιαύτη, ὥστε ΑΒ+ΓΔ=λ. Ἐπὶ τῆς Κx λαμβάνομεν τμῆμα ΚΜ=ΒΓ. Φέρομεν τὰς ΚΒ καὶ ΜΓ. Τὸ τετράπλευρου ΒΚΜΓ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ ΚΜ καὶ ΒΓ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι· ἄρα θὰ εἶναι ΜΓ=ΚΒ.

Μὲ κέντρον τὸ Μ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΜΓ=ΚΒ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΔ εἰς τὸ Ε. Φέρομεν τὴν ΜΕ. Τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΚΑΒ καὶ ΜΕΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ΚΑ=ΚΒ=ΜΕ=ΜΓ. ὡς ὡς ἀκτῖνας ἴσων κύκλων καὶ τὰς παρὰ τὴν βάσιν γωνίας ω ἴσας, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς παραλλήλων. Ἄρα θὰ εἶναι ΑΒ=ΕΓ.

Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως, ΑΒ+ΒΓ=λ· ἑπομένως καὶ ΕΓ+ΓΔ=α, ἤτοι ΕΔ=λ. Ἐὰν ὅμως ἀχθοῦν αἱ ΜΗ καὶ ΘΛΖ ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ



Σχ. 154

τὴν ΕΔ, ἔχομεν $ΗΘ = \frac{ΕΔ}{2} = \frac{λ}{2}$, ὅθεν καὶ $ΜΖ = ΗΘ = \frac{λ}{2}$.

Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Ἐκ τοῦ Λ φέρομεν τὴν ΛΖ κάθετον ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν διεύθυνσιν Kx καὶ λαμβάνομεν $ΖΜ = \frac{λ}{2}$. Μὲ κέντρον τὸ Μ καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας Κ, γράφομεν τὴν περιφέρειαν Μ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Λ εἰς τὸ σημεῖον Γ. Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν τὴν ΑΒΓΔ παράλληλον πρὸς τὴν Kx, ἡ ὁποία λέγομεν ὅτι εἶναι ἡ ζητουμένη τέμνουσα.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Διότι αἱ κάθετοι ΖΛΘ καὶ ΜΗ ἐπὶ τὴν Kx, εἶναι κάθετοι καὶ ἐπὶ τὴν ΑΒΓΔ· εἶναι δὲ ΕΓ=2ΗΓ καὶ ΓΔ=2ΓΘ, ὅθεν ΕΓ+ΓΔ=2ΗΓ+2ΓΘ, ἤτοι ΕΓ+ΓΔ=2ΗΘ=2ΜΖ=λ.

Ἀλλὰ ΕΓ=ΑΒ, ὡς χορδαὶ ἴσων κύκλων ἀπέχουσαι ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, ἑπομένως εἶναι ΑΒ+ΓΔ=λ.

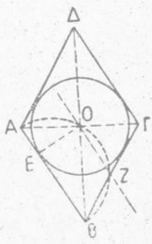
947. *Διὰ τῆς τομῆς* Α, *δύο περιφερειῶν* Κ, Λ *νὰ ἀχθῇ τέμνουσα* ΒΑΓ *αὐτῶν οὕτως, ὥστε τὸ μῆκος αὐτῆς νὰ ἰσοῦται πρὸς* α.

*Ἀπ.* Βλέπε λύσιν ἀσκήσεως 723.

948. *Νὰ κατασκευασθῇ ἕνας ῥόμβος, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευράν του* α *καὶ τὴν ἀκτῖνα* ρ *τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.*

*Ἀνάλυσις.* Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓΔ ὁ ζητούμενος ῥόμβος, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν ΑΒ=α καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου Ο.

Φέρομεν τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΒΔ, αἱ ὁποῖαι εἶναι κάθετοι μεταξύ των καὶ διχοτόμοι τῶν ἀπέναντι γωνιῶν του. Τὸ κέντρον Ο τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΕ εἰς τὸ σημεῖον Ε τῆς ἀφῆς τοῦ κύκλου μὲ τὴν πλευρὰν ΑΒ. Ἡ ΟΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἴση μὲ τὴν ρ.



Σχ. 155

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΟΒ γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΑΒ=α καὶ τὸ ἀντίστοιχον ὕψος ΟΕ=ρ· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΟΒ δύναται νὰ κατασκευασθῇ· ἐκ τοῦ τριγώνου αὐτοῦ κατασκευάζεται εὐκόλως ὁ ῥόμβος ΑΒΓΔ.

Κ α τ α σ κ ε υ ή. Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν τμῆμα ΑΒ ἴσον μὲ τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν α. Μὲ διάμετρον τὴν ΑΒ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν. Ἀπὸ τὸ Β ὑψοῦμεν κάθετον ΒΖ ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα ΒΖ=ρ. Ἀπὸ τὸ Ζ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Ο.

Φέρομεν τὴν ΑΟ καὶ ΟΒ καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεών των λαμβάνομεν τμήματα ΟΓ=ΑΟ καὶ ΟΔ=ΒΟ. Φέρομεν εὐθείας ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ καὶ τὸ σχηματισθὲν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ὁ ζητούμενος ρόμβος.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι ὀρθή, ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον, ἄρα αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι κάθετοι καὶ ἐπειδὴ διχοτομοῦνται ἐκ κατασκευῆς τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος. Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ΟΕ=ρ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῆς πλευρᾶς ΑΒ καὶ τὸ Ε.

Ὁ ρόμβος λοιπὸν ΑΒΓΔ εἶναι ὁ ζητούμενος, διότι ἔχει τὴν πλευρὰν ΑΒ=α καὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΕ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν ἀκτῖνα ρ.

Σ η μ. Εἰς τὸ σχῆμα νὰ γραφῇ ἡ κάθετος ΒΖ=ρ ἐπὶ τὴν ΑΒ.

*949. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνας ρόμβος, ἂν γνωρίζωμεν μίαν γωνίαν του καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.*

*Ἀνάλυσις.* Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓΔ ὁ ζητούμενος ρόμβος, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ γωνία Δ ἴση μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω καὶ ἡ ἀκτὶς ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου του Ο. Φέρομεν τὰς διαγωνίους του ΑΓ καὶ ΒΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Ο.

Σχ. 156

Ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου εἶναι διχοτόμοι τῶν ἀπέναντι γωνιῶν του, τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των Ο εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου. Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΕ εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Ε τῆς πλευρᾶς ΑΔ καὶ τοῦ κύκλου Ο.

Ἐπειδὴ ΟΕ=ρ, τὸ Ο κεῖται καὶ ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ καὶ ἡ ὁποία ἀπέχει αὐτῆς ἀπόστασιν ἴσην μὲ ρ. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι κατασκευήν.

Κ α τ α σ κ ε υ ή. Κατασκευάζομεν μίαν γωνίαν ΑΔΓ ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω. Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΔΒ τῆς γωνίας αὐτῆς. Ἀπὸ τὸ Δ ὑψοῦμεν κάθετον ΔΖ=ρ ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΔΑ. Ἀπὸ τὸ Ζ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΔΑ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν διχοτόμον ΔΒ εἰς τὸ σημεῖον Ο. Ἀπὸ τὸ Ο φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν διχοτόμον ΔΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ΑΔΓ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Γ.

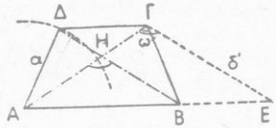
Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΔΟ λαμβάνομεν τμῆμα ΟΒ=ΔΟ· φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΒΓ καὶ τὸ σχηματισθὲν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ὁ ζητούμενος ρόμβος.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Τὸ τρίγωνον ΑΔΓ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἡ ΔΟ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Δ καὶ ὕψος· ἄρα θὰ εἶναι ΑΟ=ΟΓ. Ἐπίσης ἐκ κατασκευῆς εἶναι ΔΟ=ΟΒ.

Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοί του ΑΓ καὶ ΒΔ διχοτομοῦνται· εἶναι δὲ καὶ ρόμβος, διότι αἱ διαγώνιοί του εἶναι κάθετοι μεταξύ των· εἶναι δὲ ὁ ζητούμενος ρόμβος, διότι ἔχει γων.ΑΔΓ=ω καὶ ἡ ἀκτὶς ΟΕ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου Ο εἶναι ἴση μὲ ΔΖ=ρ.

*950. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τραπέζιον* ΑΒΓΔ, *ἂν γνωρίζωμεν τὰς διαγωνίους* ΑΓ, ΒΔ, *τὴν γωνίαν των* ω *καὶ τὴν μὴ παράλληλον πλευρὰν* ΑΔ.

*Ἀνάλυσις*. Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓΔ τὸ ζητούμενον τραπέζιον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς διαγωνίους ΑΓ=δ, ΒΔ=δ', τὴν γωνίαν ΑΗΒ=ω καὶ τὴν πλευραν ΑΔ=α.




Σχ. 157

Ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΔΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΑΒ εἰς τὸ Ε. Τὸ τετράπλευρον ΔΒΕΓ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι ΔΒ=ΓΕ=δ'.

Ἐπίσης εἶναι γων.ΑΗΒ=γων.ΑΓΕ. Τοῦ τριγώνου ΓΑΕ γνωρίζομεν τὰς πλευρὰς ΓΑ=δ, ΓΕ=δ' καὶ γων.ΑΓΕ=ω καὶ ἐπομένως δυνάμεθα νὰ τὸ κατασκευάσωμεν.

Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΑΓΕ, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰς ΑΓ καὶ ΓΕ ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰ δοθέντα τμήματα δ καὶ δ' καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην μὲ ω. Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν τὴν ΓΔ παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν ΑΕ τοῦ τριγώνου.

Μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα ΑΔ=α γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΓΔ εἰς τὸ Δ. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὴν ΔΒ παράλληλον πρὸς τὴν ΓΕ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΕ εἰς τὸ Β. Φέρομεν τὰς ΔΑ καὶ ΓΒ καὶ οὕτω σχηματίζεται τὸ ζητούμενον τραπέζιον ΑΒΓΔ.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ ἔχει ἐκ κατασκευῆς ΑΔ=α καὶ ΑΓ=δ· ἕνεκα δὲ τοῦ παραλληλογράμμου ΔΒΕΓ ἔχει ΔΒ=ΓΕ=δ'. Ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΔΒ καὶ ΓΕ, ἔχει καὶ γων.ΑΗΒ=γων.ΑΓΕ=ω, ἤτοι ἔχει ὅλα τὰ δοθέντα στοιχεῖα καὶ ἐπομένως εἶναι τὸ ζητούμενον.

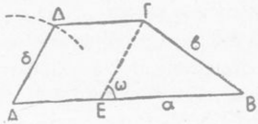
*951. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τραπέζιον* ΑΒΓΔ, *ἂν γνωρίζωμεν τὴν μεγάλην βάσιν* ΑΒ=α, *τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς* ΒΓ=β, ΑΔ=δ *καὶ τὴν γωνίαν* Α.

*Λύσις*. Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ ζητούμενον τραπέζιον. Ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν τὴν ΓΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΔΑ καὶ σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΕΓΔ· ἄρα θὰ εἶναι ΓΕ=ΔΑ=δ καὶ γων.ω=γων.Α.

Τοῦ τριγώνου ΓΕΒ γνωρίζομεν δύο πλευράς του ΕΓ=δ, ΒΓ=β καὶ τὴν γωνίαν ω, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς γνωστῆς πλευρᾶς ΒΓ· ἄρα τὸ τρίγωνον ΓΕΒ δύναται νὰ κατασκευασθῇ.

Κατασκευή. Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΓΕΒ, τὸ ὁποῖον ἔχει ΓΕ=δ, ΓΒ=β καὶ γων.ΓΕΒ=ω=Α. Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΒΕ καὶ λαμβάνομεν τμῆμα ΒΑ=α.

Μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ δ γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΑ, τὴν ἀγομένην ἐκ τοῦ Γ, εἰς τὸ σημεῖον Δ.



Σχ. 158

Φέρομεν τὴν ΔΑ καὶ τὸ σχηματιζόμενον τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον.

952. *Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τραπέζιον* ΑΒΓΔ, *ἂν γνωρίζωμεν τὰς διαγωνίους* $ΑΓ=δ_1$, $ΒΔ=δ_2$, *τὴν γωνίαν των* ω *καὶ τὴν διαφορὰν* ΑΒ—ΒΓ=λ

*Ἀνάλυσις*. Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ ζητούμενον τραπέζιον καὶ τοιοῦτον, ὥστε $ΑΓ=δ_1$, $ΒΔ=δ_2$, ΑΘΒ=ω καὶ ΑΒ—ΒΓ=λ.

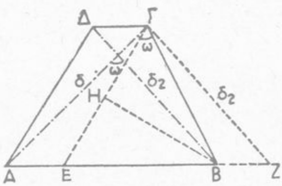
Ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΔΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΑΒ εἰς τὸ Ζ. Τὸ τετράπλευρον ΔΒΖΓ εἶναι παραλληλόγραμμον· ἄρα θὰ εἶναι $ΓΖ=ΔΒ=δ_2$.

Τὸ τρίγωνον ΓΑΖ δύναται νὰ κατασκευασθῇ· διότι γνωρίζομεν τὰς πλευρὰς $ΓΑ=δ_1$, $ΓΖ=δ_2$ καὶ τὴν γων.ΑΓΖ=γων.ΑΘΒ=ω.

Ἐπὶ τῆς ΒΑ λαμβάνομεν τμῆμα ΒΕ=ΒΓ, ὁπότε θὰ εἶναι

ΑΕ=ΑΒ—ΒΕ=ΑΒ—ΒΓ=λ.

Φέρομεν τὴν ΓΕ καὶ τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΒΓΕ εἶναι ἰσοσκελές. Ἑπομένως ἡ κάθετος ΗΒ εἰς τὸ μέσον Η τῆς βάσεώς του διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς του Β. Ἡ κορυφὴ Β ὁρίζεται λοιπόν, ὡς τομὴ τῆς καθέτου ΗΒ καὶ τῆς ΒΖ.



Σχ. 159

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τρίγωνον ΑΓΖ ἔχον πλευρὰς $ΑΓ=δ_1$, $ΓΖ=δ_2$ καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γων.ΑΓΖ=ω. Ἐπὶ τῆς βάσεως αὐτοῦ ΑΖ, μὲ ἀρχὴν τὸ Α, λαμβάνομεν τμῆμα ΑΕ=λ καὶ φέρομεν τὴν ΓΕ καὶ ἐκ τοῦ μέσου Η τῆς ΓΕ φέρομεν τὴν ΗΒ κάθετον ἐπ' αὐτήν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΖ εἰς τὸ Β.

Ἀπὸ τὸ Β φέρομεν τὴν ΒΔ παράλληλον καὶ ἴσην μὲ τὴν ΓΖ. Φέρομεν τὰς ΓΔ, ΔΑ καὶ ΓΒ καὶ σχηματίζεται τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον τραπέζιον.

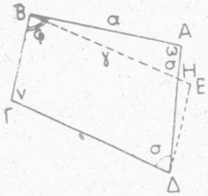
Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ αἱ ΓΖ καὶ ΔΒ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι ἐκ κατασκευῆς τὸ ΔΒΖΓ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἄρα ἡ ΔΓ θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΖ καὶ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΖ εἶναι τραπέζιον.

Τὸ τραπέζιον αὐτὸ ἔχει διαγωνίους $ΑΓ=δ_1$ ἐκ κατασκευῆς, $ΒΔ=ΖΓ=δ_2$ καὶ γων.ΑΘΒ=γων.ΑΓΖ=ω, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς παραλλήλων εὐθειῶν τεμνομένων ὑπὸ τρίτης. Ὡσαύτως ἔχει, ἐκ κατασκευῆς, ΕΑ=λ· ἀλλὰ ΕΑ=ΒΑ—ΒΕ, ἄρα ΒΑ—ΒΕ=λ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ὅμως ΕΒΓ ἡ κάθετος ΗΒ εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεώς του ΓΕ διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς του Β· ἄρα τοῦτο εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως εἶναι ΒΕ=ΒΓ· ὅθεν ΒΑ−ΒΕ=ΒΑ−ΒΓ=λ· ἤτοι δύο διαδοχικαὶ πλευραὶ τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ ἔχουν διαφορὰν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν· ἑπομένως τὸ τραπέζιον τοῦτο, πληροῦν ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος εἶναι τὸ ζητούμενον.

*953. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράπλευρον* ΑΒΓΔ, *ἂν γνωρίζωμεν τὰς δύο ἀπέναντι πλευράς του* ΑΒ=α, ΓΔ=γ *καὶ τὰς γωνίας του* Α, Β, Γ, Δ.

*Λύσις.* Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ ζητούμενον τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ΑΒ=α, ΓΔ=γ καὶ τὰς γωνίας Α=ω, Β=φ, Γ=ν, Δ=σ.



Σχ. 160

Ἀπὸ τὸ Β φέρομεν τὴν ΒΕ παράλληλον καὶ ἴσην μὲ τὴν ΓΔ=γ· φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΔ. Τὸ σχηματισθὲν τετράπλευρον ΒΓΔΕ εἶναι παραλληλόγραμμον. Αἱ γωνίαι σ καὶ σ′ εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς παραλλήλων, αἱ δὲ γωνίαι ν καὶ Ε εἶναι ἴσαι, ὡς ἀπέναντι γωνίαι παραλληλογράμμου.

Τὸ τρίγωνον ΑΒΗ δύναται νὰ κατασκευασθῇ διότι γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν ΑΒ=α καὶ δύο γωνίας του ω καὶ σ, ἄρα καὶ τὴν τρίτην γωνίαν του, ὡς παραπληρωματικὴν τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο γωνιῶν του ω καὶ σ.

Κ α τ α σ κ ε υ ή. Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΗ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν ΑΒ καὶ τὰς τρεῖς γωνίας του. Ἐπὶ τῆς ΒΗ λαμβάνομεν τμῆμα ΒΕ=γ καὶ μὲ πλευρὰν τὴν ΕΒ καὶ κορυφὴν τὴν Ε κατασκευάζομεν γωνίαν ΒΕΔ=ν. Προεκτείνομεν τὴν ΑΗ μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν ΕΔ εἰς τὸ Δ. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὴν ΔΓ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΕ καὶ ἴσην μὲ γ. Φέρομεν τὴν ΒΓ καὶ τὸ σχηματιζόμενον τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἔχει ἐκ κατασκευῆς ΒΑ=α καὶ γων.ΒΑΔ=ω, ΓΔ=ΒΕ=γ καὶ γων.ΒΕΔ=γων.ΒΓΔ=ν, ὡς καὶ γων.ΒΗΑ=γων.ΓΔΕ=σ. Ἀλλὰ ω+ν+σ+ΑΒΓ=4 ὀρθ., ὡς γωνίαι τετραπλεύρου.

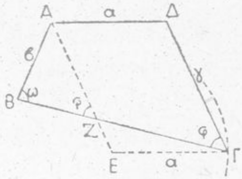
Ἐπίσης εἶναι καὶ ω+ν+σ+φ=4 ὀρθ., διότι εἶναι ἐξ ὑποθέσεως γωνίαι τετραπλεύρου. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι ω+ν+σ+ΑΒΓ=ω+ν+σ+φ, ὅθεν ΑΒΓ=φ.

Τὸ κατασκευασθὲν τετράπλευρον πληροῖ ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος καὶ ἑπομένως εἶναι τὸ ζητούμενον.

*954. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράπλευρον* ΑΒΓΔ, *ἂν γνωρίζωμεν τὰς πλευράς του* ΑΒ, ΑΔ, ΔΓ *καὶ τὰς γωνίας του* Β *καὶ* Γ.

*Λύσις.* Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ ζητούμενον τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰ πλευρὰς ΑΒ=β, ΑΔ=α, ΔΓ=γ καὶ τὰς γωνίας Β=ω καὶ Γ=φ.

Ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν τὴν ΓΕ παράλληλον καὶ ἴσην μὲ ΑΔ=α. Φέρομεν τὴν ΑΕ, ὁπότε σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΕΓΔ· ἄρα θὰ εἶναι ΑΕ=ΔΓ=γ. Ἡ ΑΕ τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ζ. Αἱ γωνίαι ΑΖΒ καὶ ΔΓΒ εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς παραλλήλων.




Σχ. 161

Τοῦ τριγώνου ΑΒΖ εἶναι γνωστὴ μία πλευρὰ αὐτοῦ ΑΒ=β, μία τῶν προσκειμένων εἰς αὐτὴν γωνιῶν ΑΒΖ=ω καὶ ἡ ἀντικειμένη πρὸς αὐτὴν γωνία ΒΖΑ=φ. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν τοῦτο κατασκευάζεται.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τρίγωνον ΑΒΖ ἔχον πλευρὰν ΑΒ=β, προσκειμένην γωνίαν ω καὶ ἀντικειμένην φ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΑΖ τμῆμα ΑΕ=γ.

Μὲ κέντρον Ε καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς α γράφομεν τόξον κύκλου, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΒΖ εἰς τὸ Γ. Φέρομεν τὴν ΓΔ παράλληλον πρὸς τὴν ΕΑ καὶ ἴσην μὴ γ. Φέρομεν τὴν ΑΔ καὶ σχηματίζεται τὸ ζητούμενον τετράπλευρον ΑΒΓΔ.

Ἀπόδειξις. Διότι ἐκ κατασκευῆς εἶναι ΑΒ=β, ΑΕ=γ, ΕΓ=α, γων.ΑΒΖ=ω, καὶ γων.ΑΖΒ=φ, ΔΓ=ΑΕ=γ καὶ ΑΔ=ΕΓ=α· ἐπίσης ἔχει καὶ γων.ΒΓΔ=γων.ΒΖΑ=φ. Ἑπομένως τὸ ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον τετράπλευρον.

955. *Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τραπέζιον* ΑΒΓΔ, *ἂν γνωρίζωμεν τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς του* ΑΒ=α, ΔΓ=γ, *τὴν βάσιν* ΒΓ=β *καὶ τὴν γωνίαν* ΑΒΓ=ω.

*Ἀπ.* Βλέπε λύσιν τῆς ἀσκήσεως 951.

956. *Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τραπέζιον* ΑΒΓΔ, *ἂν γνωρίζωμεν τὰς διαγωνίους του* $\delta_1$ *καὶ* $\delta_2$, *τὴν γωνίαν αὐτῶν* ω *καὶ μίαν τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του* α.

*Ἀπ.* Βλέπε λύσιν ἀσκήσεως 950.

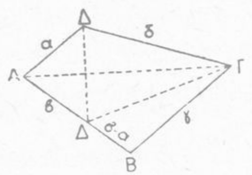
957. *Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράπλευρον* ΑΒΓΔ, *ἐὰν γνωρίζωμεν τὰς πλευράς του* ΑΒ=α, ΒΓ=β, ΓΔ=γ, ΔΑ=δ *καὶ ὅτι ἡ διαγώνιος* ΑΓ *διχοτομεῖ τὴν γωνίαν* Α.

*Ἀνάλυσις.* Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ ζητούμενον τετράπλευρον.

Ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α, ἕπεται ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι ἄξων συμμετρίας τῆς γωνίας Α καὶ ἑπομένως τὸ συμμετρικὸν σημεῖον Δ′ τῆς κορυφῆς Δ, ὡς πρὸς τὴν ΑΓ κεῖται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ. Ἕνεκα τῆς συμμετρίας αὐτῆς εἶναι ΑΔ′=ΑΔ=α καὶ ΓΔ′=ΓΔ=δ καὶ Δ′Β=ΑΒ−ΑΔ′=β−α.

Τὸ τρίγωνον λοιπὸν Δ'ΒΓ δύναται νὰ κατασκευασθῇ, διότι εἶναι γνωσταὶ καὶ αἱ τρεῖς πλευραί του.

Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Κατασκευάζομεν τρίγωνον Δ'ΒΓ ἔχον πλευρὰς Δ'Β=β—α, Δ'Γ=δ καὶ ΒΓ=γ. Προεκτείνομεν τὴν ΒΔ' καὶ λαμβάνομεν ΒΑ=β. 'Εκ τοῦ Α φέρομεν τὴν ΑΓ καὶ εὑρίσκομεν τὸ συμμετρικὸν σημεῖον Δ τοῦ Δ' ὡς πρὸς τὴν ΑΓ καὶ φέρομεν τὰς ΑΔ καὶ ΓΔ.



Σχ. 162

Οὕτω σχηματίζεται τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς. 'Επειδὴ τὰ σημεῖα Δ' καὶ Δ εἶναι συμμετρικά, ὡς πρὸς ΑΓ ἔπεται, ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι ἄξων συμμετρίας τῆς γωνίας Α καὶ ἑπομένως διχοτομεῖ ταύτην, καὶ εἶναι Δ'Α=ΑΔ· ἀλλὰ Δ'Α=ΒΑ—ΒΔ' ἢ Δ'Α=β—(β—α)=α, ἄρα ΑΔ=α. Δι' ὅμοιον λόγον εἶναι καὶ ΓΔ'=ΓΔ=δ.

*958. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράπλευρον* ΑΒΓΔ, *ἐὰν γνωρίζωμεν τὰς πλευράς του* ΑΒ=β, ΑΔ=α *καὶ* ΔΓ=γ *καὶ τὰς προσκειμένας γωνίας* Β=ω *καὶ* Γ=φ, *εἰς τὴν τετάρτην πλευρὰν* ΒΓ.

*'Απ.* Βλέπε λύσιν ἀσκήσεως 954.

*959. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράπλευρον* ΑΒΓΔ, *ἂν γνωρίζωμεν δύο ἀπέναντι πλευρὰς αὐτοῦ,* ΒΑ=α καὶ ΓΔ=γ *καὶ τὰς γωνίας του*

Α=ω, Β=φ, Γ=ν, Δ=σ.

*'Απ.* Βλέπε λύσιν ἀσκήσεως 653.

*960. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράπλευρον, ἐν γνωρίζωμεν τὰς τέσσαρας πλευράς του α, β, γ, δ καὶ τὴν γωνίαν* ω *τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν του α καὶ γ.*

*'Απ.* Βλέπε λύσιν ἀσκήσεως 629.

*961. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράγωνον* ΑΒΓΔ, *ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι αἱ ἀπέναντι κορυφαὶ* Α, Γ *κεῖνται ἐπὶ δοθείσης εὐθείας* Χ, *ἡ κορυφὴ* Β *ἐπὶ δοθείσης εὐθείας* Υ *καὶ ἡ κορυφὴ* Δ *ἐπὶ δοθείσης περιφερείας* Λ.

*'Ανάλυσις.* Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ ζητούμενον τετράγωνον. Φέρομεν τὰς διαγωνίους του ΑΓ καὶ ΒΔ.

Σχ. 163

'Επειδὴ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ τέμνονται δίχα καὶ κατέθως, αἱ κορυφαί των θὰ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ κέντρον αὐτοῦ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΔ. Αἱ κορυφαὶ Δ καὶ Β θὰ εἶναι συμμετρικαί, ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν Χ.

Ἔστω Λ' τὸ συμμετρικὸν τοῦ Λ ὡς πρὸς τὴν Χ· ἂν φέρωμεν τὰς ΛΔ καὶ Λ'Β σχηματίζεται τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΛΛ'ΒΔ, καὶ ἐπομένως τὸ Β κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας Λ', τῆς συμμετρικῆς τῆς Λ, ὡς πρὸς τὴν Χ. Ἡ κορυφὴ λοιπὸν Β ὁρίζεται, ὡς τομὴ τῆς περιφερείας Λ' καὶ τῆς εὐθείας Υ.

Σύνθεσις. Γράφομεν τὴν περιφέρειαν Λ', συμμετρικὴν τῆς δοθείσης περιφερείας Λ, ὡς πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν εὐθεῖαν Χ. Αὕτη τέμνει τὴν Υ εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Β'· εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον Δ συμμετρικὸν τοῦ Β, ὡς πρὸς ἄξονα τὴν Χ, τὸ ὁποῖον εἶναι σημεῖον τῆς περιφερείας Λ.

Μὲ κέντρον τὸ μέσον Κ τῆς ΒΔ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΔ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Χ εἰς τὰ σημεῖα Α, Γ. Τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ εἶναι τὸ ζητούμενον τετράγωνον.

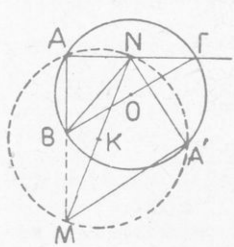
Ἀπόδειξις. Ἡ κορυφὴ Β ἐκ κατασκευῆς κεῖται ἐπὶ τῆς Υ· τὸ τραπέζιον ΛΔΒΛ' εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἡ διάμεσός του Χ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον καὶ τῶν δύο βάσεων, ἐκ κατασκευῆς, καὶ ἐπομένως εἶναι ΛΔ=Λ'Β· ἀλλὰ ἐπειδὴ ἡ Λ'Β ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου Λ, ἕνεκα τῆς συμμετρίας των, τὸ σημεῖον Δ εἶναι σημεῖον τῆς περιφερείας Λ.

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ κατασκευῆς, αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται δίχα καὶ καθέτως καὶ εἶναι ἴσαι, τὸ ΑΒΓΔ εἶναι τετράγωνον.

Καθ' ὅμοιον τρόπον καὶ τὸ σημεῖον Β' λύει τὸ πρόβλημα.

*962. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ κάθεται πλευραί, ἢ αἱ προεκτάσεις των, νὰ διέρχωνται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Μ καὶ Ν.*

***Ἀνάλυσις.*** Ὑποθέτομεν, ὅτι ἐλύθη τὸ πρόβλημα καὶ ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Ο καὶ τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΓ διέρχονται ἀντιστοίχως διὰ τῶν δοθένσημείων Μ καὶ Ν. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΜΝ.




Σχ. 164

Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΝΑΜ εἶναι ὀρθή, ἕπεται, ὅτι ἡ κορυφὴ Α κεῖται ἐπὶ ἡμιπεριφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ΜΝ.

Ἀλλὰ καὶ ἡ γωνία ΓΑΒ εἶναι ὀρθή, ἄρα ἡ κορυφὴ Α κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας Ο.

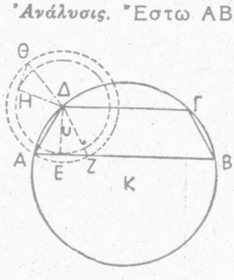
Ἡ κορυφὴ λοιπὸν Α εἶναι σημεῖον τῆς τομῆς τῆς περιφερείας διαμέτρου ΜΝ καὶ τῆς δοθείσης περιφερείας Ο.

Κατασκευή. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΜΝ. Μὲ διάμετρον τὴν ΜΝ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν δοθεῖσαν Ο εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Α'. Φέρομεν τὴν ΑΜ καὶ ΑΝ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ἀντιστοίχως. Ἐὰν φέρωμεν τὴν ΒΓ τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον. Ὁμοίως ἐὰν φέρωμεν τὴν Α'Μ καὶ Α'Ν λαμβάνομεν ἕνα δεύτερον τρίγωνον Α'ΒΓ'.

Διερεύνησις. Τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, ἐὰν αἱ περιριφέρειαι τέμνωνται, μίαν ἐὰν ἐφάπτωνται καὶ καμμίαν ἐὰν δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον.

*963. Εἰς δοθέντα κύκλον Κ νὰ ἐγγραφῇ ἕνα τραπέζιον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ ὕψος υ καὶ ἡ διαφορὰ τῶν βάσεών του νὰ εἶναι ἴση μὲ δοθὲν μῆκος δ.*

*Ἀνάλυσις.* Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ ζητούμενον τραπέζιον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὕψος ΔΕ=υ καὶ ΑΒ—ΓΔ=δ. Τὸ ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοσκελές, ὡς ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Φέρομεν τὴν ΔΖ παράλληλον πρὸς τὴν ΓΒ, ὁπότε σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΔΖΒΓ· ἄρα θὰ εἶναι ΔΖ=ΓΒ, ΔΓ=ΖΒ.




Σχ. 165

Ἡ ἰσότης λοιπὸν ΑΒ—ΓΔ=δ γίνεται ΑΒ—ΖΒ=δ ἢ ΑΖ=δ.

Ἐπειδὴ ΑΔ=ΒΓ=ΖΔ, τὸ τρίγωνον ΔΑΖ εἶναι ἰσοσκελές. Τοῦ τριγώνου αὐτοῦ γνωρίζομεν τὴν βάσιν ΑΖ=δ καὶ τὸ ὕψος ΕΔ=υ· ἄρα δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΕΔ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς δύο καθέτους πλευρὰς $ΑΕ=\frac{δ}{2}$ καὶ ΕΔ=υ.

Κατασκευή. Μὲ κέντρον τυχὸν σημεῖον Δ τῆς περιφερείας Κ καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην μὲ υ γράφομεν περιφέρειαν. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Η αὐτῆς φέρομεν ἐφαπτομένην ΗΘ αὐτῆς καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα $ΗΔ=\frac{δ}{2}$. Φέρομεν τὴν ΘΔ καὶ μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΔΘ γράφομεν περιφέρειαν ὁμόκεντρον, πρὸς τὴν (Δ, υ), ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Κ εἰς τὸ Α.

Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας (Δ, υ), ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Κ εἰς τὸ σημεῖον Β καὶ τὴν περιφέρειαν (Δ ΔΘ) εἰς τὸ Ζ.

Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὴν χορδὴν ΔΓ παράλληλον τῆς ΑΒ. Φέρομεν τὰς χορδὰς ΑΔ καὶ ΒΓ καὶ τὸ σχηματιζόμενον τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀπόδειξις. Τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ ἔχει ὕψος ΔΕ=υ=ἀκτῖνα τῆς περιφερείας (Δ, υ). Ἀπὸ τὰ ἴσα ὀρθογ. τρίγωνα ΘΗΔ καὶ ΔΕΑ ἔχομεν $ΑΕ=ΗΘ=\frac{δ}{2}$.

Ἀπὸ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΔΑΖ ἔχομεν ΑΖ=2.ΑΕ=δ καὶ γων.ΔΑΖ=γων.ΔΖΑ. Ἐπίσης ἀπὸ τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ θὰ εἶναι ΓΒ=ΔΑ=ΔΖ καὶ γων.ΔΑΖ=γων.ΓΒΖ· ἄρα θὰ εἶναι καὶ γων.ΔΖΑ=γων.ΓΒΖ. Ἄρα ἡ ΔΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΒ.

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ ΔΖ=ΔΑ=ΒΓ, τὸ τετράπλευρον ΔΖΒΓ εἶναι παραλληλόγραμμον, ὁπότε ΓΔ=ΒΖ. Θὰ εἶναι λοιπὸν

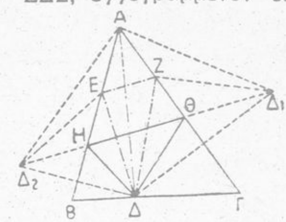
$$ΑΒ-ΓΔ=ΑΒ-ΒΖ=ΑΖ=δ.$$

Τὸ τραπέζιον λοιπὸν ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον.

*964. Εἰς δοθὲν τρίγωνον* ΑΒΓ, *νὰ ἐγγραφῇ ἕνα ἄλλο τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τὴν ἐλαχίστην περίμετρον καὶ τοῦ ὁποίου μία τῶν κορυφῶν του νὰ κεῖται εἰς δοθὲν σημεῖον* Δ *τῆς* ΒΓ.

***Ἀνάλυσις.*** Ἔστω τυχὸν τρίγωνον ΕΔΖ, ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ ΑΒΓ καὶ ἔχον μίαν τῶν κορυφῶν του εἰς τὸ Δ. Ἡ περίμετρος τοῦ ΔΕΖ εἶναι ἡ ΔΖ+ΖΕ+ΕΔ.

Ἔστωσαν $Δ_1$ καὶ $Δ_2$ τὰ συμμετρικὰ τοῦ Δ, ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΑΒ τοῦ δοθέντος τριγώνου· ἂν ἀχθοῦν αἱ $Δ_1Ζ$, $Δ_1Δ$ καὶ $Δ_2Ε$, $ΔΔ_2$ θὰ εἶναι, λόγῳ τῆς συμμετρίας $ΖΔ=ΖΔ_1$ καὶ $ΔΕ=ΕΔ_2$, ὁπότε $ΔΖ+ΖΕ+ΕΔ=Δ_1Ζ+ΖΕ+ΕΔ_2$.




Σχ. 166

Ἵνα λοιπὸν ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ΕΔΖ γίνῃ ἐλαχίστη, ἀρκεῖ νὰ λάβῃ τὴν ἐλαχίστην τιμήν της ἡ τεθλασμένη $Δ_1Ζ+ΖΕ+ΕΔ_2$. Ἀλλ' αὕτη λαμβάνει τὴν ἐλαχίστην τιμήν της, ὅταν καταστῇ εὐθεῖα γραμμή. Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ σύνθεσις τοῦ προβλήματος.

Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Εὑρίσκομεν τὰ συμμετρικὰ σημεῖα $Δ_1$, $Δ_2$. τῆς κορυφῆς Δ, ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΑΒ του δοθέντος τριγώνου καὶ φέρομεν τὴν $Δ_1Δ_2$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν μὲν ΑΒ εἰς τὸ Η, τὴν δὲ ΑΓ εἰς τὸ Θ. Ἐὰν ἀχθοῦν αἱ ΔΗ καὶ ΔΘ, σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΗΔΘ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον.

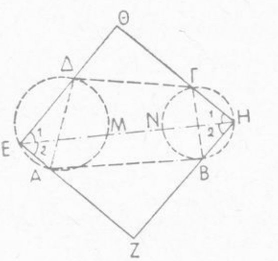
Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἕνεκα τῆς συμμετρίας τῶν Δ, $Δ_1$ καὶ Δ, $Δ_2$ ἔχομεν $ΔΘ+ΘΗ+ΗΔ=Δ_1Δ_2$, ἤτοι ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ΔΘΗ εἶναι ἴση μὲ τὸ εὐθύγρ. τμῆμα $Δ_1Δ_2$, τὸ ὁποῖον ὁρίζουν τὰ σημεῖα $Δ_1$ καὶ $Δ_2$ καὶ ἡ ὁποία εἶναι ἡ μικροτέρα ἀπὸ ὅλας τὰς γραμμάς, αἱ ὁποῖαι ἔχουν πέρατα τὰ σημεῖα ταῦτα.

Δ ι ε ρ ε ύ ν η σ ι ς. Διὰ νὰ ὑπάρχῃ λύσις πρέπει ἡ $Δ_1Δ_2$ νὰ τέμνει τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ δοθέντος τριγώνου· ἀλλ' ἕνεκα τῆς συμμετρίας τῶν Δ, $Δ_1$ καὶ Δ, $Δ_2$ ἔχομεν γων.$Δ_1ΑΓ$=γων.ΓΑΔ καὶ γων.$Δ_2ΑΒ$=γων.ΒΑΔ, ἑπομένως γων.$Δ_1ΑΓ$+γων.$Δ_2ΑΒ$=γων.ΓΑΒ· ὅθεν γων.$Δ_1ΑΔ_2$=2 γων.ΓΑΒ· ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι διὰ νὰ τέμνωνται αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ὑπὸ τῆς $Δ_1Δ_2$ πρέπει γων.ΓΑΒ<1 ὀρθ.

Διότι, ἐὰν γων.ΓΑΒ=1 ὀρθ., τότε γων.$Δ_1ΑΔ_2$=2 ὀρθ., ὁπότε τὰ τὰ σημεῖα $Δ_1$. Α, $Δ_2$ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ἤτοι καὶ αἱ δύο πλευραὶ τέμνονται ὑπὸ τῆς $Δ_1Δ_2$ εἰς τὸ Α καὶ τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν. Ἐὰν γων.ΓΑΒ>1 ὀρθ., τότε γων.$Δ_1ΑΔ_2$>2 ὀρθ., ὁπότε τὰ $Δ_1$, $Δ_2$ κεῖνται ὑπεράνω τοῦ Α καὶ ἐπομένως ἡ $Δ_1Δ_2$ δὲν τέμνει τὰς πλευρὰς τοῦ ΑΒΓ, καὶ τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν.

*965. Περὶ δοθὲν τετράπλευρον νὰ περιγραφῇ ἕνα τετράγωνον.*

*Λύσις*, Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΕΖΗΘ τὸ ζητούμενον τετράγωνον, τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ.



Σχ. 167

Ἐπειδὴ ἡ γωνίαι ΑΕΔ εἶναι ὀρθή, τὸ Ε κεῖται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ΑΔ· Ὁμοίως καὶ τὸ Η κεῖται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ΒΓ.

Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΕΗ τοῦ τετραγώνου. Ἡ διαγώνιος αὐτὴ διχοτομεῖ τὰς γωνίας Ε καὶ Η τοῦ τετραγώνου καὶ ἐπομένως διέρχεται ἀπὸ τὰ μέσα Μ καὶ Ν τῶν τόξων ΑΜΔ καὶ ΒΝΓ. Τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν εἶναι λοιπὸν γνωστά.

Κατασκευή. Μὲ διαμέτρους τὰς δύο ἀπέναντι πλευρὰς ΑΔ, ΒΓ τοῦ δοθέντος τετραπλεύρου γράφομεν περιφερείας. Εὑρίσκομεν τὰ μέσα Μ καὶ Ν τῶν τόξων ΑΜΔ καὶ ΒΝΔ.

Φέρομεν τὴν ΜΝ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη ἑκατέρωθεν τέμνει τὰς περιφερείας εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Η. Φέρομεν τὰς ΕΔ, ΕΑ καὶ ΗΒ, ΗΓ, αἱ ὁποῖαι προεκτεινόμεναι τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Ζ καὶ Θ.

Τὸ σχηματισθὲν τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι τὸ ζητούμενον τετράγωνον.

*966. Εἰς δοθὲν τρίγωνον* ΑΒΓ *νὰ ἐγγραφῇ ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνία νὰ ἰσοῦται μὲ δοθεῖσαν γωνίαν* ω *καὶ τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ νὰ εἶναι τὸ δοθὲν σημεῖον* Δ *τῆς* ΒΓ. *(Σχολὴ Εὐελπίδων).*

*Ἀνάλυσις.* Ἔστω ΔΕΖ τὸ ζητούμενον ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τοιοῦτον, ὥστε

γων.ΕΔΖ=ω.

Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὴν ΔΗ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ Δ καὶ πλευρὰν τὴν ΔΗ κατασκευάζομεν γωνίαν ΗΔΘ=ω.

Σχ. 168

Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΔΘ λαμβάνομεν τμῆμα ΔΘ=ΔΗ. Φέρομεν τὴν ΕΘ. Τὰ τρίγωνα ΔΗΖ καὶ ΔΘΕ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ΔΗ=ΔΘ ἐκ κατασκευῆς, ΔΖ=ΔΕ, ὡς πλευρὰς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΔΕΖκαὶ γων.ΘΔΗ=γων.ΕΔΖ=ω.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ τρίγωνον ΔΗΖ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Η, θὰ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ τὸ ἴσον του τρίγωνον ΔΘΕ. Ἄρα ἡ ΕΘ εἶναι

εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΘ εἰς τὸ Θ. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι κατασκευήν.

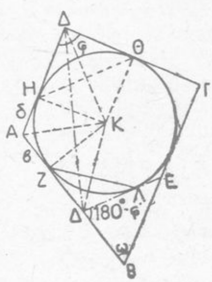
Κατασκευή. Ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον Δ φέρομεν τὴν ΔΗ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ καὶ σχηματίζομεν γωνίαν ΗΔΘ=ω· φέρομεν τὴν $Γ_1Α_1$ κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΘ εἰς τὸ Θ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΑ εἰς τὸ Ε. Μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα ΔΕ γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ· λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ, εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀπόδειξις. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΖΔΗ καὶ ΕΔΘ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ἐκ κατασκευῆς ΔΗ=ΔΘ καὶ ΔΖ=ΔΕ καὶ ἑπομένως εἶναι γων.ΕΔΘ=γων.ΖΔΗ ὁπότε καὶ

γων.ΕΔΘ+γων.ΘΔΖ=γων.ΘΔΖ+γων.ΖΔΗ, ἢ γων.ΕΔΖ=γων.ΘΔΗ=ω.

**967.** ***Περὶ δοθέντα κύκλον Κ νὰ περιγραφῇ ἕνα τετράπλευρον*** ΑΒΓΔ ***τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ πλευραὶ*** ΑΒ=β, ΑΔ=δ ***καὶ αἱ γωνίαι*** Β=ω ***καὶ*** Δ=φ.

***Ἀνάλυσις.*** Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ ζητούμενον τετράπλευρον. Ἔστω Δ' τὸ συμμετρικὸν τοῦ Δ, ὡς πρὸς τὴν ΑΚ.



Σχ. 169

Ἡ ΑΚ ὡς διχοτόμος τῆς γωνίας Α, ποὺ σχηματίζουν αἱ ἐφαπτόμεναι ΑΔ καὶ ΑΒ, εἶναι ὁ ἄξων συμμετρίας τῆς γωνίας αὐτῆς καὶ ἑπομένως τὸ Δ, ὡς συμμετρικὸν τοῦ Δ, ὡς πρὸς αὐτὴν θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ καὶ θὰ εἶναι ΑΔ=ΑΔ'. Θὰ εἶναι λοιπὸν

ΑΒ−ΑΔ'=ΑΒ−ΑΔ=β−δ

Ἐὰν Η, Ζ εἶναι ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα ἁφῆς τῶν ΑΔ, ΑΔ', θὰ εἶναι ΑΗ=ΑΖ, ὅθεν ΑΔ'−ΑΖ=ΑΔ−ΑΗ ἢ ΖΔ'=ΗΔ.

Φέρομεν τὰς χορδὰς ΗΘ καὶ ΖΛ τῶν σημείων ἐπαφῆς Η καὶ Θ, Ζ καὶ Λ, ὅπου Λ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς ἐκ τοῦ Δ' ἀγομένης ἐφαπτομένης τῆς περιφερείας Κ.

Ἐπίσης φέρομεν καὶ τὰς ΚΔ καὶ ΚΔ', αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀντιστοίχως διχοτόμοι, τῶν γωνιῶν ΗΔΘ καὶ ΖΔ'Λ. Ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΚΗΔ καὶ ΚΖΔ', τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ΚΗ=ΚΖ, ὡς ἀκτῖνας τοῦ αὐτοῦ κύκλου καὶ ΗΔ=ΖΔ', ὡς ἐδείχθη, λαμβάνομεν γων.ΗΔΚ=γων.ΚΔ'Ζ· ἀλλὰ γων.ΗΔΚ$=\frac{φ}{2}$, ὅθεν καὶ γων.ΚΔ'Ζ$=\frac{φ}{2}$, ἄρα γων.ΖΔ'Λ=φ, ὁπότε γων.ΕΔ'Β=180−φ.

Εἰς τὸ τρίγωνον λοιπὸν Δ'ΒΕ εἶναι γνωστὴ ἡ πλευρὰ Δ'Β=β−δ καὶ αἱ προσκείμεναι εἰς αὐτὴν γωνίαι Δ'=180−φ καὶ ω, καὶ ἑπομένως δυνάμεθα νὰ τὸ κατασκευάσωμεν.

Σύνθεσις. Μὲ πλευρὰν Δ'Β=β−δ καὶ προσκειμένας γωνίας Β=ω καὶ γων.Δ'=180−φ κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον Δ'ΕΒ· εἰς τὴν γωνίαν Β αὐτοῦ παρεγγράφομεν τὸν κύκλον Κ καὶ ἐπὶ τῆς ΒΔ' λαμβάνομεν ΒΑ=β. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΑΔ τοῦ κύκλου Κ, ἴσην μὲ δ καὶ ἐκ τοῦ Δ ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου Κ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΕ εἰς τὸ Γ, καὶ οὕτω σχηματίζεται τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον.

'Α π ό δ ε ι ξ ι ς. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἔχει γων.ΑΔ'Ε=φ, ὡς παραπλήρωμα τῆς ΕΔ'Β=180—φ, ἐκ κατασκευῆς, καὶ

$$ΑΔ'=ΑΒ-Δ'Β=β-(β-δ)=δ.$$

'Εὰν ἀχθοῦν αἱ ἀκτῖνες ΚΗ καὶ ΚΖ, αἱ ἀπολήγουσαι εἰς τὰ σημεῖα ἀφῆς καὶ αἱ ΚΔ καὶ ΚΔ', αἱ ὁποῖαι εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ΖΔ'Ε καὶ ΗΔΘ, σχηματίζονται τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΚΖΔ' καὶ ΚΗΔ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ΚΖ=ΚΗ καὶ ΖΔ'=ΖΔ, ὡς ὑπόλοιπα τῶν ἴσων τμημάτων ΑΔ' καὶ ΑΔ ἀπὸ τῶν ὁποίων ἀφῃρέθησαν τὰ ἴσα τμήματα ΑΖ καὶ ΑΗ. 'Εκ τῆς ἰσότητος τούτων λαμβάνομεν

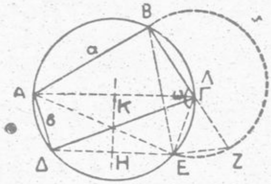
γων.ΖΔ'Κ=γων.ΗΔΚ=$\frac{φ}{2}$, ἄρα ΗΔΘ=φ.

Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΑΒΓΔ πληροῖ ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος καὶ ἑπομένως εἶναι τὸ ζητούμενον.

*968. Εἰς δοθέντα κύκλον Κ νὰ ἐγγραφῇ τετράπλευρον, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι δύο ἀπέναντι πλευραὶ ἔχουν ἀντιστοίχως μήκη α, β, καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν ἰσοῦται πρὸς μ.*

*'Ανάλυσις.* Ἔστω ΑΒΓΔ (Σχ. 170) τὸ ζητούμενον τετράπλευρον, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ΑΒ=α, ΔΓ=β καὶ ΑΔ+ΒΓ=μ.

Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΑΓ καὶ τὴν ΚΗ κάθετον ἐπὶ ταύτην καὶ ἔστω Ε τὸ συμμετρικὸν τοῦ Δ ὡς πρὸς ἄξονα τὴν ΚΗ. Λόγῳ τῆς συμμετρίας θὰ εἶναι ΓΕ=ΑΔ ὅθεν καὶ ΓΕ+ΒΓ=ΑΔ+ΒΓ=μ. 'Εκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τραπεζίου ΑΔΕΓ ἔχομεν καὶ ΑΕ=ΔΓ=β.



Σχ. 170

Οὕτω σχηματίζεται τὸ τετράπλευρον ΑΕΓΒ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰ μήκη α, β δύο διαδοχικῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΕ καὶ τὸ ἄθροισμα μ τῶν ἄλλων δύο διαδοχικῶν πλευρῶν ΒΓ καὶ ΓΕ, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ κατασκευασθῇ, διότι ἡ κορυφὴ αὐτοῦ Γ δύναται νὰ προσδιορισθῇ, ὡς σημεῖον τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰ ἄκρα γνωστῆς εὐθείας ΒΕ ἰσοῦται μὲ μ.

Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Μὲ κέντρον τυχὸν σημεῖον Α τῆς περιφερείας Κ καὶ ἀκτῖνας ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς α καὶ β γράφομεν τόξα κύκλου, τὰ ὁποῖα τέμνουν τὴν περιφέρειαν Κ εἰς τὰ σημεῖα Β, Ε, ὁπότε θὰ εἶναι ΑΒ=α καὶ ΑΕ=β.

Φέρομεν τὴν ΒΕ καὶ μὲ χορδὴν τὴν ΒΕ γράφομεν τμῆμα κύκλου ΒΘΕ, τὸ ὁποῖον δέχεται γωνίαν ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας ω, τῆς ἐγγραφομένης εἰς τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΒΓΕ τοῦ κύκλου Κ· μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς μ γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ τόξον ΒΘΕ εἰς τὸ σημεῖον Ζ· φέρομεν τὴν ΒΖ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Κ εἰς τὸ σημεῖον Γ.

Φέρομεν τὴν ΓΕ καὶ τὴν ΑΓ καὶ τὴν ἐκ τοῦ Κ κάθετον ΚΗ ἐπὶ ταύτην καὶ εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον Δ συμμετρικὸν τοῦ Ε, ὡς πρὸς τὸ ΚΗ. Τὸ τετράπλευρον, τὸ ἔχον κορυφὰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἐκ κατασκευῆς εἶναι ΒΖ=μ ἢ ΒΓ+ΓΖ=μ ἢ ΒΓ+ΓΕ=μ (1), διότι ΓΖ=ΓΕ, ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΓΕΖ εἶναι ἰσοσκελές. Λόγῳ τῆς συμμετρίας τῶν Ε καὶ Δ καὶ τῶν Α καὶ Γ, ὡς πρὸς τὴν ΚΗ, θὰ εἶναι ΓΕ=ΑΔ, ὁπότε ἡ (1) γίνεται ΒΓ+ΑΔ=μ· ἤτοι αἱ δύο ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ τὸ δοθὲν μῆκος μ.

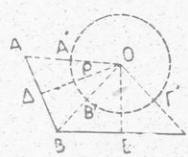
Ἐπίσης λόγῳ τῆς συμμετρίας τῶν αὐτῶν σημείων, ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα ἔχομεν ΓΔ=ΑΕ=β. Ἐπίσης ἐκ κατασκευῆς εἶναι ΑΒ=α. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΑΒΓΔ πληροῖ ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος καὶ ἑπομένως εἶναι τὸ ζητούμενον.

*969. Νὰ γραφῇ περιφέρεια, μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα, ἡ ὁποία νὰ ἀπέχῃ ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τρία δοθέντα σημεῖα* Α, Β, Γ, *τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας. (τρεῖς περιπτώσεις).*

*Λύσις.* Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις.

*1η Περίπτωσις.* Καὶ τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ (σχ. 171) κεῖνται ἐκτὸς τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω Ο ἡ ζητουμένη περιφέρεια ἀκτῖνος ρ. Φέρομεν τὰς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Α', Β', Γ' ἀντιστοίχως· ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΑΑ'=ΒΒ'=ΓΓ'· ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ.




Σχ. 171

Ἐπειδὴ τὸ Ο ἀπέχει ἰσάκις ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β, τὸ Ο κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ΔΟ εἰς τὸ μέσον Δ τῆς εὐθείας ΑΒ.

Ὁμοίως τὸ Ο κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου ΕΟ εἰς τὸ μέσον Ε τῆς ΒΓ. Τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν καθέτων τούτων εἶναι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας. Προσδιοριζομένου τοῦ κέντρου, εὐκόλως κατασκευάζεται ἡ ζητουμένη περιφέρεια. Ἐὰν ρ<ΟΑ, τὰ σημεῖα κεῖνται ἐκτὸς τῆς περιφερείας Ο. Ἐὰν ρ<ΟΑ, τὰ σημεῖα κεῖνται ἐντὸς τῆς περιφερείας.

*2α Περίπτωσις.* Τὰ δύο σημεῖα Α καὶ Β κεῖνται ἐντὸς τῆς ζητουμένης περιφερείας, τὸ δὲ Γ ἐκτὸς αὐτῆς.


Σχ. 172

Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω Ο τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφεφείας. Φέρομεν τὰς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Α', Β', Γ' ἀντιστοίχως. Ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν

ΑΑ'=ΒΒ'=ΓΓ' (1).

Ἐπειδὴ ΟΑ'=ΟΒ' καὶ ΑΑ'=ΒΒ', ἕπεται ὅτι ΟΑ=ΟΒ.

Τὸ Ο λοιπὸν κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον Δ τῆς εὐθείας ΑΒ. Ἐπίσης ἔχομεν

ΟΒ=ΟΒ'−ΒΒ'=ρ−ΒΒ' (1) ΟΓ=ΟΓ'+ΓΓ'=ρ+ΒΒ' (2).

Προσθέτοντες τὰς (1) καὶ (2) κατὰ μέλη ἔχομεν ΟΒ+ΟΓ=2ρ=σταθερόν.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἕνα σημεῖον Ο τῆς ΔΕ ἀπέχει ἀπὸ τὰ ὡρισμένα σημεῖα Β καὶ Γ ἀποστάσεις ΟΒ, ΟΓ, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι σταθερόν.

Τὸ Ο λοιπὸν κεῖται καὶ ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία ὁρίζεται καθὼς εἰς τὴν ἄσκησιν 1380.

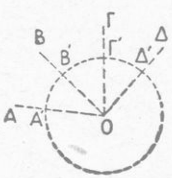
Ἡ τομὴ τῆς καθέτου ΔΕ καὶ τῆς περιφερείας αὐτῆς ὁρίζουν τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

*3η Περίπτωσις.* Τὰ δύο σημεῖα Α καὶ Β εὑρίσκονται ἐκτὸς τῆς περιφερείας, τὸ δὲ τρίτον Γ ἐντὸς αὐτῆς. Μὲ τοὺς αὐτοὺς συλλογισμοὺς ὁδηγούμεθα εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν,

***970. Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἀπέχῃ ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. (τρεῖς περιπτώσεις).***

***Λύσις. 1η Περίπτωσις. Τὰ τέσσαρα σημεῖα κεῖνται ἐκτὸς ἢ ἐντὸς τῆς ζητουμένης περιφερείας.***

Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω Ο ἡ ζητουμένη περιφέρεια. Φέρομεν τὰς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, καὶ ἔστωσαν Α', Β', Γ', Δ', τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα αὗται τέμνουν τὴν περιφέρειαν. Ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν ΑΑ'=ΒΒ'=ΓΓ'=ΔΔ' ἐξ οὗ



Σχ. 173

ΑΑ'+R=ΒΒ'+R=ΓΓ'+R=ΔΔ'+R

ἢ ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=ΟΔ

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα θὰ ἔχῃ λύσιν μόνον εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὑπάρχουν ἄπειροι λύσεις.

Εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα καταλήγομεν, ἐὰν τὰ τέσσαρα σημεῖα κεῖνται ἐντὸς τῆς ζητουμένης περιφερείας.

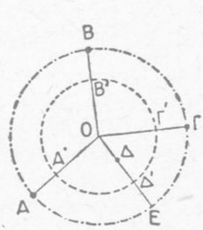
***2α Περίπτωσις. Τὰ τρία σημεῖα κεῖνται ἐκτὸς καὶ τὸ τέταρτον ἐντὸς τῆς περιφερείας.***

Ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν ΑΑ'=ΒΒ'=ΓΓ'=ΔΔ'

ἢ ΑΑ'+R=ΒΒ'+R=ΓΓ'+R=ΔΔ'+R

ἢ ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ

Τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας, συμπίπτει λοιπὸν μὲ τὸ κέντρον τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ. Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν καὶ ΔΔ=ΓΓ' καὶ ἑπομένως, ἐὰν Ε εἶναι τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ προέκτασις τῆς ΟΔ τέμνει τὴν περιφέρειαν, τὴν διερχομένην διὰ τῶν Α, Β, Γ, θὰ ἔχωμεν ΕΔ'=ΓΓ', ἄρα ΕΔ'=Δ'Δ καὶ ἑπομένως τὸ Δ' εἶναι τὸ μέσον τῆς ΔΕ.



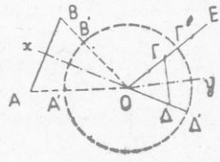
Σχ. 174

Κ α τ α σ κ ε υ ή. Γράφομεν περιφέρειαν Ο, διερχομένην διὰ τῶν

Α, Β, Γ. Φέρομεν τὴν ΟΔ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν Ο εἰς τὸ Ε. Εὑρίσκομεν τὸ μέσον Δ' τῆς ΔΕ. Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ΟΔ' γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη.

*3η Περίπτωσις. Δύο σημεῖα εὑρίσκονται ἐντὸς καὶ δύο ἐκτὸς τῆς περιφερείας.*

*Λύσις.* Ἔστω Ο ἡ περιφέρεια, ἡ ἀπέχουσα ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, ἐκ τῶν ὁποίων τὰ Α καὶ Β κεῖνται ἐκτὸς τῆς περιφερείας Ο, τὰ δὲ Γ καὶ Δ ἐντὸς αὐτῆς. Ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν ΑΑ'=ΒΒ'=ΓΓ'=ΔΔ' ἢ ΑΑ'+R=ΒΒ'+R καὶ R−ΓΓ'=R−ΔΔ' ἢ ΟΑ=ΟΒ καὶ ΟΓ=ΟΔ' τὸ κέντρον λοιπὸν Ο εἶναι σημεῖον τῆς τομῆς τῶν καθέτων εἰς τὰ μέσα τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ.



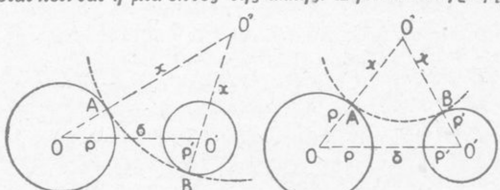
Σχ. 175

Προεκτείνομεν τὴν ΟΓ καὶ λαμβάνομεν ΟΕ=ΟΒ, ὁπότε τὸ Γ' θὰ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΓΕ. Ἡ ἀκτὶς τῆς ζητουμένης περιφερείας εἶναι ἡ ΟΓ'.

Κατασκευή. Φέρομεν τὰς καθέτους x καὶ y εἰς τὰ μέσα τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ ἔστω Ο τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των. Φέρομεν τὴν ΟΓ καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τμῆμα ΟΕ=ΟΒ καὶ ἔστω Γ' τὸ μέσον τῆς ΓΕ. Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ΟΓ' γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη περιφέρεια.

Διερεύνησις. Τὸ πρόβλημα ἔχει γενικῶς τρεῖς λύσεις, διότι τὰ σημεῖα δύνανται νὰ συνδυασθοῦν ὡς ἑξῆς: Α, Β καὶ Γ, Δ· Α, Γ καὶ Β, Δ· Α, Δ καὶ Β Γ. Μία ἐκ τῶν λύσεων τούτων δύναται νὰ ἐξαφανισθῇ, ἐὰν αἱ εὐθεῖαι x καὶ y εἶναι παράλληλοι καὶ κατὰ συνέπειαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι, δηλ. ἐὰν τὰ τέσσαρα σημεῖα σχηματίζουν τραπέζιον. Θὰ ὑπάρχῃ ἀπειρία λύσεων, ἐὰν αἱ x καὶ y συμπίπτουν, δηλ. ἐὰν τὸ τραπέζιον εἶναι ἰσοσκελές.

*971. Δίδονται δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' ἀκτίνων R καὶ R' ἀντιστοίχως, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἡ μία ἐκτὸς τῆς ἄλλης. Ζητεῖται νὰ γραφῇ μία τρίτη περιφέρεια Ο'', ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται τῶν δύο ἄλλων καὶ τοιαύτη, ὥστε ἡ γωνία ΟΟ''Ο' νὰ εἶναι ἴση μὲ 2ω. Ἡ ἀπόστασις ΟΟ' τῶν κέντρων εἶναι ἴση μὲ δ.*



Σχ. α 176 Σχ. β

*Λύσις.* Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω Ο'' ἡ ζητουμένη περιφέρεια, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῶν Ο καὶ Ο' εἰς τὰ σημεῖα

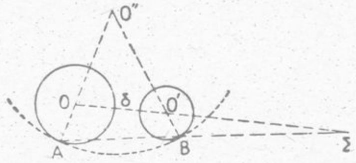
Α καὶ Β καὶ τοιαύτη, ὥστε γων.ΟΟ'Ο'=2ω. Ἔστω ὅτι ἐφάπτεται τῆς Ο ἐξωτερικῶς καὶ τῆς Ο' ἐσωτερικῶς (Σχ. α). Φέρομεν τὰς διακέντρους ΟΟ'' καὶ Ο'Ο''

Ἂν ὀνομάσωμεν x τὴν ἀκτῖνα τῆς ζητουμένης περιφερείας, θὰ ἔχωμεν Ο''Ο=x+ρ, Ο''Ο'=x−ρ'. Ἀφαιροῦντες τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη ἔχομεν ΟΟ''−Ο''Ο'=ρ+ρ'.

Ἐὰν ἐφάπτεται τῆς Ο ἐσωτερικῶς καὶ τῆς Ο' ἐξωτερικῶς εὑρίσκομεν πάλιν, ὅτι ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς διαφορᾶς Ο''Ο−Ο''Ο εἶναι πάλιν ρ+ρ'.

Ἐὰν ἡ Ο'' ἐφάπτεται ἐξωτερικῶς (Σχ. β) ἢ ἐσωτερικῶς (Σχ. γ) τῶν Ο καὶ Ο', εὑρίσκομεν ἐπίσης, ὅτι Ο''Ο−Ο''Ο'=ρ−ρ'.

Τὸ πρόβλημα λοιπὸν ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον ΟΟ''Ο', τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν μίαν πλευρὰν ΟΟ'=δ, τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν |ΟΟ''−Ο''Ο'|=ρ+ρ' ἢ ρ−ρ' καὶ μίαν γωνίαν ΟΟ''Ο'=2ω.




Σχ. γ

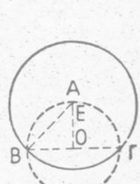
Ἡ κατασκευὴ τοῦ τριγώνου γίνεται κατὰ τὰ γνωστὰ (βλέπε ἄσκησιν 898). Μὲ χορδὴν τὴν ΟΟ' γράφομεν τόξον κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ 1 ὀρθ.+ω.

Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ ρ−ρ' ἢ ρ+ρ' γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος εἰς τὸ σημεῖον Ι. Φέρομεν τὴν ΟΙ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς Ο'Ι εἰς τὸ σημεῖον Ο'', τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου κύκλου.

***972. Μὲ κέντρον δοθὲν σημεῖον Α, νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ δοθεῖσαν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη.***

***Ἀνάλυσις.*** Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω Α ἡ ζητουμένη περιφέρεια, ἡ ὁποία τέμνει τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη ΒΔΓ καὶ ΒΕΓ.

Ἐπειδὴ τὰ τόξα ΒΔΓ καὶ ΒΕΓ εἶναι ἡμιπεριφέρειαι ἡ ΒΓ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου Ο. Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΑΒ καὶ τὴν διάκεντρον ΑΟ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν κοινὴν χορδὴν τῶν κύκλων Α καὶ Ο.




Σχ. 177

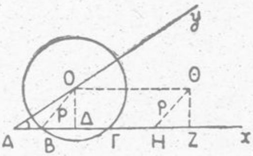
Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΟΒ ἔχει τὰς καθέτους πλευράς του γνωστάς, ἤτοι τὴν ΑΟ ἴσην μὲ τὴν ἀπόστασιν τοῦ δοθέντος σημείου Α ἀπὸ τὸ κέν· Ο τῆς δοθείσης περιφερείας καὶ τὴν ΟΒ ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ δοθέντος κύκλου Ο· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΟΒ δύναται νὰ κατασκευασθῇ καὶ ἐπομένως νὰ εὑρεθῇ ἡ ὑποτείνουσά του ΑΒ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς ζητουμένης περιφερείας,

Κατασκευή. Κατασκευάζομεν ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ καθέτους πλευρὰς ἴσας μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου Ο καὶ μὲ τὴν εὐθεῖαν ΑΟ, ἡ ὁποία συνδέει τὸ δοθὲν σημεῖον Α μὲ τὸ κέντρον Ο τῆς δοθείσης περιφερείας Ο.

Μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ τριγώνου γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη περιφέρεια.

*973. Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα ρ, ἔχουσα τὸ κέντρον της ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς δοθείσης γωνίας xAy καὶ ἀποτέμνουσα, ἀπὸ τῆς ἄλλης πλευρᾶς τῆς γωνίας, χορδὴν δοθέντος μήκους λ.*

*Λύσις.* Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω Ο ἡ ζητουμένη περιφέρεια, ἡ ὁποία ἀποτέμνει ἀπὸ τῆς πλευρᾶς Αx τῆς γωνίας xAy χορδὴν ΒΓ=λ. Φέρομεν τὴν ΟΒ καὶ τὴν κάθετον ΟΔ ἐπὶ τὴν χορδὴν ΒΓ.

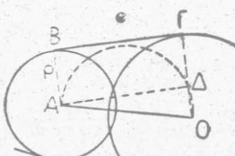


Σχ. 178

Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΔΒ δύναται νὰ κατασκευασθῇ, διότι γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΟΒ, ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν ἀκτῖνα ρ, καὶ τὴν κάθετον πλευρὰν $ΒΔ=\frac{λ}{2}$. Δυνάμεθα ἑπομένως νὰ προσδιορίσωμεν καὶ τὴν κάθετον πλευρὰν ΟΔ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου Ο ἀπὸ τὴν Αx.

Κατασκευή. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ζ τῆς Αx λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΖΑ τμῆμα $ΖΗ=\frac{λ}{2}$. Μὲ κέντρον τὸ Η καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ ρ γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ἐκ τοῦ Ζ ἀγομένην κάθετον ἐπὶ τὴν Αx, εἰς τὸ σημεῖον Θ.

Ἐκ τοῦ Θ φέρομεν παράλληλον ΘΟ πρὸς τὴν Αx, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν Αy τῆς γωνίας εἰς τὸ Ο. Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ ρ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη.



Σχ. 179

*975. Δίδεται περιφέρεια Α ἀκτῖνος ρ. Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἔχουσα, ὡς κέντρον δοθὲν σημεῖον Ο καὶ τοιαύτη, ὥστε αἱ δύο κοιναὶ ἐφαπτόμεναι νὰ σχηματίζουν γωνίαν ἴσην μὲ 2ω.*

*Λύσις.* Ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὴν ἄσκησιν 785 προβαίνομεν εἰς τὴν κάτωθι κατασκευήν:

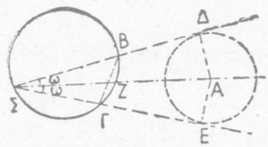
Κατασκευή. Μὲ διάμετρον τὴν ΑΟ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν. Μὲ κορυφὴν τὸ Α καὶ πλευρὰν τὴν ΑΟ κατασκευάζομεν γωνίαν ΟΑΔ=ω, τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ

ΑΔ τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ Δ. Φέρομεν τὴν ΟΔ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της λαμβάνομεν τμῆμα ΔΓ=ρ.

Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ΟΓ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη.

975. *Μὲ κέντρον δοθὲν σημεῖον Α, νὰ γραφῇ περιφέρεια, τοιαύτη, ὥστε αἱ ἐφαπτόμεναι, αἱ ἀγόμεναι πρὸς αὐτὴν ἐκ δύο ἄλλων δοθέντων σημείων Β καὶ Γ, νὰ σχηματίζουν δοθεῖσαν γωνίαν 2ω.*

*Λύσις.* 'Υποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω Α ἡ ζητουμένη περιφέρεια καὶ τοιαύτη, ὥστε αἱ ἐφαπτόμεναι ΒΔ καὶ ΓΕ νὰ σχηματίζουν γωνίαν ΔΣΕ=2ω.



Σχ. 180

Φέρομεν τὴν ΒΓ. 'Επειδὴ ἡ γωνία Σ εἶναι σταθερά, τὸ Σ κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν ΒΓ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ 2ω· Φέρομεν τὴν ΣΑ καὶ τὰς ἀκτῖνας ΑΔ καὶ ΑΕ εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς. 'Η ΣΑ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Σ καὶ ἑπομένως θὰ διχοτομῇ καὶ τὸ τόξον ΒΖΓ.

Κ α τ α σ κ ε υ ή. Μὲ χορδὴν τὴν ΒΓ γράφομεν τόξον κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον νὰ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ 2ω.

Ἔστω Ζ τὸ μέσον τοῦ τόξου ΒΖΓ. Φέρομεν τὴν ΑΖ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος εἰς τὸ Σ. Φέρομεν τὰς ΣΓ καὶ ΣΒ καὶ μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν ἀπόστασιν τοῦ Α ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ΓΣΒ, γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη.

976. *Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα R, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ δύο δοθείσας περιφερείας Α καὶ Β κατὰ διάμετρον.*

*'Απ.* Βλέπε λύσιν ἀσκήσεως 790.

977. *Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα R, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ τὸ κέντρον της ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς δοθείσης γωνίας καὶ ἡ ὁποία νὰ ἀποκόπτῃ ἀπὸ τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς γωνίας χορδὴν δοθέντος μήκους.*

*'Απ.* Βλέπε λύσιν ἀσκήσεως 973.

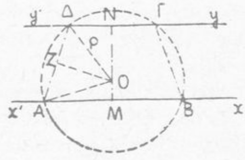
978. *Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα R, ἡ ὁποία νὰ ἀποκόπτῃ ἀπὸ δύο παραλλήλους εὐθείας, χορδὰς ἴσας μὲ δοθέντα μήκη k καὶ λ.*

*Λύσις.* 'Υποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω Ο ἡ ζητουμένη περιφέρεια, ἡ ὁποία ἀποτέμνει ἀπὸ τὰς παραλλήλους εὐθείας x'x καὶ y'y χορδὰς ΑΒ=k καὶ ΓΔ=λ.

'Εκ τοῦ Ο φέρομεν τὴν ΜΟΝ κάθετον ἐπὶ τὰς δοθείσας παραλλήλους. Τὰ Μ καὶ Ν εἶναι τὰ μέσα τῶν χορδῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ καὶ ΟΔ.

'Επειδὴ ΟΑ=ΟΔ, τὸ Ο κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ΖΟ εἰς τὸ μέσον Ζ τῆς ΑΔ.

Κ α τ α σ κ ε υ ή. Φέρομεν μίαν κοινὴν κάθετον ΜΝ ἐπὶ τὰς δοθείσας παραλλήλους. 'Εκατέρωθεν τοῦ Μ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς x'x τμήματα $MA=MB=\frac{k}{2}$.




Σχ. 181

'Επίσης λαμβάνομεν ἐπὶ y'y καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ Ν τμήματα $ΝΓ=ΝΔ=\frac{λ}{2}$.

Φέρομεν τὴν ΑΔ καὶ ἐκ τοῦ μέσου Ζ αὐτῆς ὑψοῦμεν κάθετον, ἡ ὁποία τέμνει τὴν κοινὴν κάθετον ΜΝ εἰς τὸ Ο.

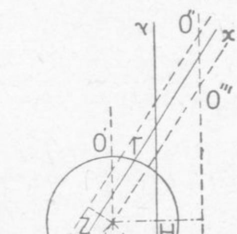
Τὸ Ο εἶναι τὸ ζητούμενον κέντρον, μόνον εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ΟΔ=R.

Δ ι ε ρ ε ύ ν η σ ι ς. Τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, διότι δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸ μῆκος ΑΒ ἐπὶ τῆς y'y, τὸ δὲ ΓΔ ἐπὶ τῆς x'x.

'Εὰν αἱ ἀποτεμνόμεναι χορδαὶ ἦσαν ἴσαι, τὸ πρόβλημα ἔχει μόνον μίαν λύσιν.

*979. Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα* R, *ἡ ὁποία νὰ ἀποκόπτῃ ἀπὸ δύο τεμνομένας εὐθείας χορδὰς ἴσας μὲ δοθέντα μήκη* k *καὶ* λ

*Λύσις.* 'Υποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω Ο τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας, ἡ ὁποία ἀποτέμνει ἀπὸ τὰς τεμνομένας εὐθείας x'x καὶ y'y χορδὰς ΒΓ=k καὶ ΔΕ=λ.




Σχ. 182

Φέρομεν τὴν ΟΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, καὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΒ. Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΖΒ γνωρίζομεν τὴν ΟΒ ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν ἀκτῖνα R, καὶ τὴν ΒΖ ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ δοθέντος μήκους k.

'Επομένως, ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ του ΟΖ εἶναι ὡρισμένη καὶ ἐπομένως τὸ Ο κεῖται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου τῆς x'x, ἡ ὁποία ἀπέχει αὐτῆς ἀπόστασιν ΟΖ ἴσην μὲ τὴν κάθετον πλευρὰν ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ὑποτείνουσα ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα R καὶ ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ δοθέντος μήκους.

'Ομοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ Ο κεῖται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου τῆς y'y, ἡ ὁποία ἀπέχει αὐτῆς, ἀπόστασιν ΗΟ, ἡ ὁποία ὁρίζεται, ὅπως ὡρίσθη ἡ ΟΖ. 'Η τομὴ τῶν δύο αὐτῶν παραλλήλων, ὁρίζει τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

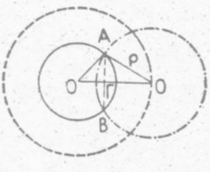
Δ ι ε ρ ε ύ ν η σ ι ς. 'Ο γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν δοθεῖσαν ἀπόστασιν ΟΖ ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθεῖαν x'x, εἶναι δύο παράλληλοι Θ καὶ Θ' πρὸς τὴν x'x, κείμεναι ἑκατέρωθεν αὐτῆς εἰς ἀπόστασιν ἴσην μὲ ΟΖ.

Ὁμοίως ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποία ἀπέχουν δοθεῖσαν ἀπόστασιν ΗΟ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν y'y, εἶναι δύο παράλληλοι Κ καὶ Κ', αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς y'y εἰς ἀπόστασιν ἴσην μὲ ΗΟ.

Αἱ τέσσαρες αὗται παράλληλοι τέμνονται εἰς τέσσαρα σημεῖα Ο, Ο', Ο'', Ο''', τὰ ὁποῖα εἶναι τὰ κέντρα τεσσάρων περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι αἱ ζητούμεναι.

*980. Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα R, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ δοθεῖσαν περιφέρειαν κατὰ χορδὴν ΑΒ=λ.*

*Λύσις.* Ἔστω Ο' ἡ ζητουμένη περιφέρεια, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Ο κατὰ χορδὴν ΑΒ=λ. φέρομεν τὰς ΟΟ', ΟΑ, Ο'Α. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΟ' δύναται νὰ κατασκευασθῇ, διότι δίδονται αἱ Ο'Α=R καὶ $ΓΑ=\frac{λ}{2}$, ἑπομένως εὑρίσκεται ἡ Ο'Γ.




Σχ. 183

Ὁμοίως ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΑΓ, εὑρίσκεται ἡ ΓΟ. Ἄρα δύναται νὰ ὁρισθῇ ἡ ΟΟ'.

Κατασκευή. Κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΑΟ' μὲ ὑποτείνουσαν τὴν R καὶ μὲ κάθετον πλευρὰν $\frac{λ}{2}$.

Ὁμοίως κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΑΟ, μὲ ὑποτείνουσαν τὴν ἀκτῖνα τοῦ Ο καὶ κάθετον $\frac{λ}{2}$.

Ἐκ τῶν δύο τούτων ὀρθογωνίων τριγώνων λαμβάνομεν τὰς δύο καθέτους ΓΟ' καὶ ΓΟ. Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ΟΟ' γράφομεν περιφέρειαν ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης. Μὲ κέντρον τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας (Ο, ΟΟ') καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν R γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη.

*981. Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα R, ἡ ὁποία νὰ ἀποκόπτῃ ἀπὸ δοθεῖσαν περιφέρειαν Α χορδὴν ΒΓ παράλληλον καὶ ἴσην μὲ δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα ΕΕ'=λ.*

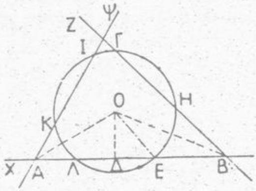
*'Απ.* Βλέπε λύσιν ἀσκήσεως 779·

*982. Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἀποκόπτῃ ἀπὸ τρεῖς δοθείσας εὐθείας Χ, Υ ,Ζ τὸ αὐτὸ δοθὲν μῆκος.*

*Λύσις.* Ἐπειδὴ αἱ ἀποτεμνόμεναι χορδαὶ εἶναι ἴσαι, τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας θὰ ἀπέχῃ ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰς χορδὰς αὐτὰς καὶ ἑπομένως :

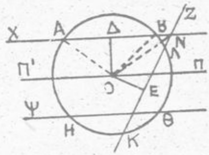
*1ον.* Ἐὰν αἱ Χ, Ψ, Ζ σ ηματίζουν ἕνα τρίγωνον, τὸ κέντρον της εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ πρόβλημα ἔχει 4 λύσεις (τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον καὶ τὰ κέντρα τῶν τριῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων).

*2ον.* Ἐὰν αἱ δύο εὐθεῖαι Χ καὶ Ψ εἶναι μόνον παράλληλοι, τότε




(α)

Σχ. 184




(β)

τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας εἶναι ἡ τομὴ τῆς εὐθείας ΠΠ΄ παραλλήλου πρὸς τὰς δοθείσας Χ καὶ Ψ καὶ ἀπεχούσης ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς Χ καὶ Ψ καὶ τῆς διχοτομούσης ΝΟ τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ τρίτη εὐθεῖα Ζ μὲ τὰς ἄλλας.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν δύο λύσεις. Προσδιορισθέντος τοῦ κέντρου, εὐκόλως προσδιορίζεται καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ ζητουμένου κύκλου.

*983. Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον* Α *καὶ νὰ ἀποκόπτῃ ἀπὸ δύο δοθείσας περιφερείας* Β *καὶ* Γ *χορδὰς παραλλήλους, ἀντιστοίχως, πρὸς δύο δοθείσας εὐθείας.*

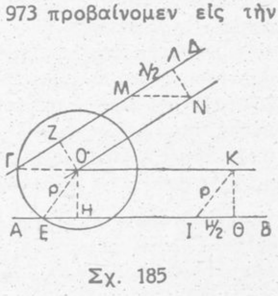
*Ἀπ.* Βλέπε λύσιν ἀσκήσεως 787.

*984. Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα ρ, ἡ ὁποία νὰ ἀποκόπτῃ, ἀπὸ δύο δοθείσας εὐθείας, χορδὰς ἴσας μὲ δοθέντα μήκη μ καὶ ν.*

*Λύσις.* Ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὴν ἄσκησιν 973 προβαίνομεν εἰς τὴν κάτωθι κατασκευήν.

Κ α τ α σ κ ε υ ή. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Θ τῆς ΑΒ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τμῆμα $ΘΙ=\frac{μ}{2}$.

Μὲ κέντρον τὸ Ι καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ ρ γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ἐκ τοῦ Θ ἀγομένην κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, εἰς τὸ σημεῖον Κ. Ἐκ τοῦ Κ φέρομεν τὴν ΚΟ παράλληλον τῆς ΑΒ.



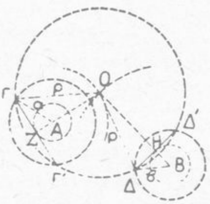

Σχ. 185

Ἐπίσης ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Λ τῆς ΓΔ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τμῆμα $ΛΜ=\frac{ν}{2}$. Μὲ κέντρον τὸ Μ καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ ρ γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει, τὴν ἐκ τοῦ Λ ἀγομένην κάθετον, ἐπὶ τὴν ΓΔ, εἰς τὸ σημεῖον Ν.

Ἐκ τοῦ Ν φέρομεν τὴν ΝΟ παράλληλον τῆς ΓΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προηγουμένως ἀχθεῖσαν παράλληλον ΚΟ εἰς τὸ Ο. Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν δοθεισαν ρ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη.

*985. Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα R, ἡ ὁποία νὰ ἀποκόπτῃ, ἀπὸ δύο δοθείσας περιφερείας Α καὶ Β, χορδὰς ἴσας μὲ δοθέντα μήκη λ καὶ μ.*

*Λύσις.* Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω Ο ἡ ζητουμένη περιφέρεια, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Α κατὰ χορδὴν ΓΓ'=λ καὶ τὴν Β κατὰ χορδὴν ΔΔ'=μ.




Σχ. 186

Φέρομεν τὰς ΟΖ καὶ ΟΗ καθέτους ἐπὶ τὰ χορδὰς ΓΓ' καὶ ΔΔ' ἀντιστοίχως. Αὗται θὰ διέλθουν ἀντιστοίχως διὰ τῶν κέντρων Α καὶ Β. Φέρομεν τὰς ΟΓ, ΑΓ, ΟΔ καὶ ΒΔ.

Τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΟΖΓ δύναται νὰ κατασκευασθῇ, διότι γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΟΓ=ρ καὶ τὴν κάθετον πλευρὰν $ΓΖ=\frac{λ}{2}$. Δύναται λοιπὸν νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ αὐτοῦ ΟΖ.

Ὁμοίως δύναται νὰ προσδιορισθῇ καὶ ἡ κάθετος πλευρὰ ΖΑ τοῦ ὀρθογ. τριγώνου ΑΖΓ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΑΓ=α καὶ τὴν κάθετον πλευρὰν $ΓΖ=\frac{λ}{2}$.

Ἡ ΟΑ εἶναι γνωστή, ὡς διαφορὰ τῶν γνωστῶν εὐθειῶν ΟΖ καὶ ΑΖ. Τὸ Ο λοιπὸν ἀπέχει τοῦ Α ἀπόστασιν ΑΟ=ΟΖ—ΑΖ καὶ ἐπομένως κεῖται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ ΟΖ—ΑΖ.

Σκεπτόμενοι ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ Ο κεῖται καὶ ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ ΟΗ+ΗΒ. Αἱ δύο αὗται περιφέρειαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο. Ἂν μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην μὲ ρ γράψωμεν περιφέρειαν αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη.

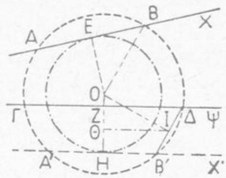
Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω, ἡ κατασκευὴ εἶναι προφανής.

*986. Δίδονται δύο εὐθεῖαι Χ καὶ Ψ καὶ ἕνα σημεῖον Ο. Μὲ κέντρον τὸ Ο νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἀποκόπτῃ ἀπὸ τὰς Χ καὶ Ψ χορδὰς τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι ἴσον μὲ 2λ.*

*Λύσις.* Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω Ο ἡ ζητουμένη περιφέρεια, ἡ ὁποία ἀποτέμνει ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν Χ χορδὴν ΑΒ καὶ ἀπὸ τὴν Ψ χορδὴν ΓΔ καὶ τοιαύτη, ὥστε ΑΒ+ΓΔ=2λ.

Φέρομεν τὴν χορδὴν Α'Β' ἴσην μὲ τὴν ΑΒ, ἀλλὰ παράλληλον τῆς ΓΔ. Φέρομεν τὴν ΟΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ΟΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Α΄Β΄ εἰς τὸ Η. Ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν $ΑΒ+ΓΔ=2λ$ ἢ $Α΄Β΄+ΓΔ=2λ$ ἢ $2.ΗΒ΄+2.ΖΔ=2λ$ ἢ $ΗΒ΄+ΖΔ=λ$. (1).

Ἐκ τοῦ μέσου Θ τῆς ΖΗ φέρομεν παράλληλον τῆς ΓΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΔΒ΄ εἰς τὸ σημεῖον Ι. Ἡ ΘΙ, ὡς διάμεσος τοῦ τραπεζίου ΗΒ΄ΔΖ, ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεών του, ἤτοι εἶναι $ΘΙ=\frac{ΗΒ΄+ΖΔ}{2}=\frac{λ}{2}$. Ἡ ΘΙ εἶναι λοιπὸν ὡρισμένη.



Σχ. 187

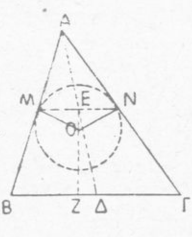
Κ α τ α σ κ ε υ ή. Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν ΟΕ τῆς Χ ἀπὸ τὸ Ο γράφομεν περιφέρειαν. Φέρομεν ἐφαπτομένην Χ΄ τῆς περιφερείας αὐτῆς, παράλληλον τῆς Ψ. Φέρομεν τὴν ΟΖΗ κάθετον ἐπὶ τὰς Ψ καὶ Χ΄, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Ψ εἰς τὸ Ζ καὶ τὴν Χ΄ εἰς τὸ Η.

Μὲ κέντρον τὸ Θ καὶ ἀκτῖνα $\frac{λ}{2}$ γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ἐκ τοῦ μέσου Θ τῆς ΖΗ ἀγομένην παράλληλον πρὸς τὴν Ψ, εἰς τὸ σημεῖον Ι. Φέρομεν τὴν ΟΙ καὶ ἐκ τοῦ Ι τὴν ΔΙΒ΄ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΙ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς παραλλήλους Ψ καὶ Χ΄ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Β΄ Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα $ΟΔ=ΟΒ΄$ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη.

Σ η μ ε ί ω σ ι ς. Ἀναλόγως ἐργαζόμεθα, ὅταν δοθῇ ἡ διαφορὰ τῶν ἀποτεμνομένων χορδῶν. Ἀλλὰ ἡ κάθετος ΔΒ΄ εἶναι τότε μία ἀπὸ τὰς διαγωνίους τοῦ τραπεζίου.

*987. Μὲ κέντρον δοθὲν σημεῖον Ο νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν εἰς τρόπον, ὥστε ἡ χορδὴ ΜΝ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν ΒΓ.*

*Λύσις.* Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη. Φέρομεν τὴν κάθετον ΟΕ ἐπὶ τὴν χορδὴν ΜΝ, ἡ ὁποία θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλον τῆς ΒΓ.



Σχ. 188

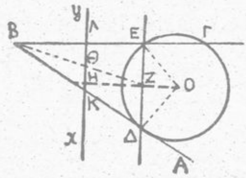
Τὸ Ε λοιπὸν κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ΟΖ, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον Ο, ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ. Φέρομεν τὴν ΑΕ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴ ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μέσον τῆς ΒΓ.

Τὸ Ε λοιπὸν κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς διαμέσου ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Κ α τ α σ κ ε υ ή. Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου Ο φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν διάμεσον ΑΔ τοῦ τριγώνου εἰς τὸ σημεῖον Ε. Ἐκ τοῦ Ε φέρομεν τὴν ΜΕΝ παράλληλον τῆς ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν. Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΜ=ΟΝ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη.

*988. Μὲ κέντρον δοθὲν σημεῖον Ο νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὰς πλευρὰς δοθείσης γωνίας ΑΒΓ εἰς τρόπον, ὥστε ἡ προκύπτουσα χορδὴ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν* xy.

*Λύσις.* 'Υποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω Ο ἡ ζητουμένη περιφέρεια, ἡ ὁποία τέμνει τὰς πλευρὰς ΒΑ καὶ ΒΓ τῆς γωνίας ΑΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε οὕτως, ὥστε ἡ ΔΕ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν xy.



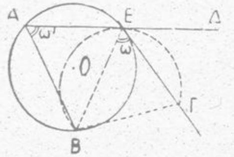

Σχ. 189

Φέρομεν τὴν ΟΖ κάθετον ἐπὶ τὴν χορδὴν ΕΔ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν xy εἰς τὸ σημεῖον Η. Τὸ Ζ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΔΕ. Φέρομεν τὴν ΒΖ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν xy εἰς τὸ Θ, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΚΛ τῆς xy, τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς δοθείσης γωνίας. Ἡ ΒΘΖ εἶναι λοιπὸν γνωστή.

Κατασκευή. Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου Ο φέρομεν τὴν ΟΗ κάθετον ἐπὶ τὴν xy. Φέρομεν τὴν διάμεσον ΒΘ τοῦ τριγώνου ΒΚΛ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν ΟΗ εἰς τὸ Ζ.

Ἐκ τοῦ Ζ φέρομεν παράλληλον τῆς xy, ἡ ὁποία τέμνει τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας, εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε. Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΕ=ΟΔ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη.

*989. Δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ μία εὐθεῖα ΑΔ, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ Α. Νὰ γραφῇ περιφέρεια κύκλου, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ τοιαύτη, ὥστε ἡ ἐφαπτομένη αὐτῆς, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Ε, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ περιφέρεια αὐτὴ τέμνει τὴν ΑΔ, νὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ.*




Σχ. 190

*Λύσις.* 'Υποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω Ο ἡ ζητουμένη περιφέρεια. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΒΕ, καὶ ΒΓ.

Αἱ γωνίαι ω καὶ ω' εἶναι ἴσαι, διότι ἡ μὲν ω εἶναι γωνία σχηματιζομένη ὑπὸ χορδῆς ΒΕ καὶ ἐφαπτομένης ΕΓ, ἡ δὲ ω εἶναι ἐγγεγραμμένη γωνία, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΕ, τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς πρώτης γωνίας ω' ἤτοι εἶναι $\widehat{\omega}=\widehat{\omega}$.

Ἀλλὰ ἡ γωνία ω΄ εἶναι σταθερά· ἄρα εἶναι σταθερὰ καὶ ἡ ω. Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ σταθερὰ εὐθεῖα ΒΓ φαίνεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Ε ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν· ἄρα τὸ Ε κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν ΒΓ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ τὴν γωνίαν Α.

Ἀλλὰ τὸ σημεῖον Ε κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΔ, ὥστε τὸ σημεῖον Ε εἶναι ἡ τομὴ τῆς εὐθείας ΑΔ καὶ τοῦ τόξου τοῦ κυκλικοῦ αὐτοῦ τμήματος καὶ ἑπομένως εἶναι ὡρισμένον.

Γνωρίζοντες ἤδη τὰ τρία σημεῖα Α, Β καὶ Ε δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ αὐτὰ τὰ σημεῖα.
Ἡ κατασκευὴ εἶναι εὔκολος.

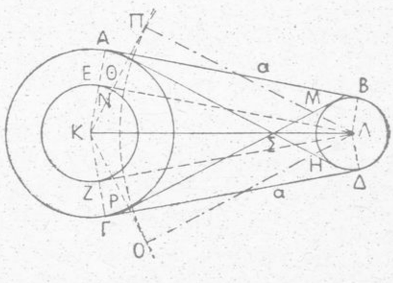
Τὸ πρόβλημα ἔχει δύο, μίαν ἢ καμμίαν λύσιν, καθόσον τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον γράφεται μὴ χορδὴν τὴν ΒΓ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ τὴν ΒΑΔ=ω΄, τέμνει τὴν ΑΔ εἰς δύο σημεῖα, ἐφάπτεται αὐτῆς ἢ δὲν ἔχει κανένα κοινὸν σημεῖον μὲ αὐτήν.

*990. Νὰ γραφοῦν δύο περιφέρειαι Κ καὶ Λ, ἂν γνωρίζωμεν τὸ μῆκος α τῶν κοινῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων καὶ τὸ μῆκος β τῶν ἐσωτερικῶν ἐφαπτομένων καὶ τὴν γωνίαν ω τῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων.*

*Ἀνάλυσις.* Ἔστωσαν Κ καὶ Λ αἱ ζητούμεναι περιφέρειαι, ΑΒ καὶ ΓΔ αἱ ἐξωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν καὶ τοιαῦται, ὥστε ΑΒ=ΓΔ=α, καὶ

γων.(ΑΒ, ΓΔ)=ω.

Ἔστωσαν ΘΗ καὶ ΡΜ αἱ ἐσωτερικαὶ αὐτῶν ἐφαπτόμεναι καὶ τοιαῦται, ὥστε ΘΗ=ΡΜ=β



Σχ. 191

Ἀπὸ τὸ Λ φέρομεν τὴν ΛΕ ἴσην καὶ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΑ καὶ τὴν ΛΖ ἴσην καὶ παράλληλον πρὸ τὴν ΔΓ. Φέρομεν τὰς ΛΒ καὶ ΕΑ, καὶ τὰς ΛΔ καὶ ΖΓ, ὁπότε σχηματίζονται τὰ ὀρθογώνια ΑΕΛΒ καὶ ΛΔΓΖ. Αἱ ΛΕ καὶ ΛΖ ἐφάπτονται τοῦ ὁμοκέντρου κύκλου Κ, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα ΚΕ=ΚΑ−ΛΒ=$R_1-R_2$, ἡ δὲ γωνία ΕΛΖ ἰσοῦται μὲ τὴν γων.(ΑΒ, ΓΔ) τῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων.

Τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΕΛ εἶναι γνωστὰ ἡ κάθετος πλευρὰ ΛΕ=α καὶ ἡ ὀξεῖα γωνία ΚΛΕ=$\frac{\omega}{2}$, διότι ἡ διάκεντρος ΚΛ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΕΛΖ· ἄρα τοῦτο κατασκευάζεται.

Ἀπὸ τὸ Λ φέρομεν τὴν ΛΠ ἴσην καὶ παράλληλον πρὸς τήν ΘΗ καὶ τὴν ΛΟ ἴσην καὶ παράλληλον πρὸς τὴν ΜΡ. Ἂν φέρωμεν τὰς ΛΗ, ΘΠ, ΛΜ, ΡΟ σχηματίζονται τὰ ὀρθογώνια ΛΗΘΠ καὶ ΛΜΡΟ.

Ἂν μὲ κέντρον Λ καὶ ἀκτῖνα β=ΛΠ=ΛΟ γραφῇ περιφέρεια αὕτη θὰ ἐφάπτεται τῆς ΚΠ καὶ ΚΟ εἰς τὸ Π καὶ Ο καὶ θὰ εἶναι δὲ ΚΟ=ΚΟ=$R_1+R_2$.

Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΚΕΛ, ἔχον κάθετον πλευρὰν ΕΛ=α καὶ γων.ΕΛΚ=$\frac{\omega}{2}$. Μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ἄλλην κάθετον πλευρὰν ΚΕ τοῦ τριγώνου τούτου γράφομεν περιφέρειαν καὶ ἐκ τοῦ Λ φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΛΖ.

Ἐπίσης μὲ κέντρον τὸ Λ καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς β γράφομεν περιφέρειαν καὶ φέρομεν ἐκ τοῦ Κ ἐφαπτομένας ΚΠ καὶ ΚΟ τῆς περιφερείας αὐτῆς· κατόπιν μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα $\frac{ΚΠ+ΚΕ}{2}$ γράφομεν περιφέρειαν καὶ μὲ κέντρον Λ καὶ ἀκτῖνα $\frac{ΚΠ-ΚΕ}{2}$ γράφομεν ἄλλην περιφέρειαν. Αἱ περιφέρειαι Κ καὶ Λ εἶναι αἱ ζητούμεναι.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Διότι ἂν ἀχθῇ ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη ΑΒ τῶν κύκλων (Κ, ΚΑ) καὶ Λ καὶ ἀχθοῦν αἱ ἀκτῖνες ΚΑ καὶ ΛΒ εἰς τὰ σημεῖα ἀφῆς, ἡ ΚΑ τέμνει τὴν ἐσωτερικὴν περιφέρεαν (Κ, ΚΕ) εἰς τὸ Ε καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΕΑ=ΚΑ−ΚΕ=$\frac{ΚΠ+ΚΕ}{2}$−ΚΕ=$\frac{ΚΠ-ΚΕ}{2}$

Ἀλλ' ἐκ κατασκευῆς εἶναι $\frac{ΚΠ-ΚΕ}{2}$=ΛΒ, ὅθεν ΕΑ=ΛΒ. Ἂν λοιπὸν ἀχθῇ ἡ ΛΕ, τὸ τετράπλευρον ΑΕΛΒ, ἔχον τὰς δύο ἀπέναντι πλευρὰς ΛΒ καὶ ΕΑ ἴσας, ὡς ἐδείχθη καὶ παραλλήλους, ὡς καθέτους πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, εἶναι ὀρθογώνιοι.

Ἕνεκα λοιπὸν τῆς ὀρθῆς γωνίας Ε, ἡ ΛΕ εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἐσωτερικῆς περιφερείας (Κ, ΚΕ), ἀγομένη ἐκ τοῦ κέντρου Λ. Ἐπίσης εἶναι ΛΕ=ΛΖ, ὡς ἐφαπτόμεναι τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ἀγόμεναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου· ἀλλ' ἐκ κατασκευῆς εἶναι ΛΖ=α, ὅθεν καὶ ΛΕ=α· ἑπομένως καὶ ΑΒ=α. Δι' ὅμοιον λόγον καὶ ΔΓ=α· ἐπειδὴ δὲ ἐκ κατασκευῆς γων.ΕΛΖ=ω, ἕπεται ὅτι καὶ γων.(ΑΒ, ΓΔ)=ω· ὡς ἔχουσα τὰς πλευράς της παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς γων.ΕΛΖ.

Ἂν φέρωμεν τὴν ἐφαπτομένην ΚΠ τοῦ κύκλου (Λ, β), αὔτη τέμνει τὴν ἐξωτερικὴν περιφέρειαν Κ εἰς τὸ Θ· ἂν ἀχθῇ δὲ ἡ ἀκτὶς ΛΠ εἰς τὸ σημεῖον ἀφῆς Π καὶ ἡ ἐπὶ ταύτην κάθετος ἀκτὶς ΛΗ τοῦ κύκλου Λ, αἱ ΚΠ καὶ ΛΗ, ἐπειδὴ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΛΠ, εἶναι παράλληλοι. Ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα ΘΠ=ΚΠ−ΚΘ ἀντικαταστήσωμεν τὸ ΚΘ διὰ τοῦ ἴσου του $\frac{ΚΠ+ΚΝ}{2}$ ἢ $\frac{ΚΠ+ΚΕ}{2}$, θὰ ἔχωμεν

$$ΘΠ=ΚΠ-\frac{ΚΠ+ΚΕ}{2}=\frac{ΚΠ-ΚΕ}{2}.$$

Ἀλλ' ἐκ κατασκευῆς $\frac{ΚΠ-ΚΕ}{2}$=ΛΗ, ὅθεν ΘΠ=ΛΗ. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΠΘΗΛ, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται, ἂν ἀχθῇ ἡ ΘΗ, εἶναι ὀρθογώνιον· ἑπομένως ἡ ΘΗ, ὡς κάθετος εἰς τὰ ἄκρα τῶν ἀκτίνων ΒΘ καὶ ΛΗ τῶν κύκλων Κ καὶ Λ, εἶναι ἡ κοινὴ ἐσωτερικὴ αὐτῶν ἐφαπτομένη καὶ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΛΠ, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ ὀρθογωνίου. Ἀλλ' ἐκ κατασκευῆς ΛΠ=β, ἄρα ΘΗ=β· ἑπομένως οἱ κύκλοι Κ καὶ Λ εἶναι οἱ ζητούμενοι.

# ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

## ΕΠΙ ΤΟΥ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΤΟΥ Α' ΚΑΙ Β' ΒΙΒΛΙΟΥ

---

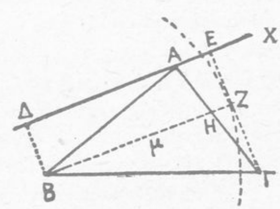
## (Περιεχόμενα εἰς τὴν Τρίτην ἔκδοσιν τῆς Γεωμετρίας)

*1.* (806) ***Διὰ τῆς κορυφῆς*** **Α** ***τριγώνου*** **ΑΒΓ** ***νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα*** **ΑΧ** ***τοιαύτη ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν προβολῶν τῶν πλευρῶν*** **ΑΒ** ***καὶ*** **ΑΓ** ***ἐπὶ τὴν*** **ΑΧ** ***νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν μῆκος μ.***

***Ἀνάλυσις.*** Ἔστω Χ ἡ ζητουμένη εὐθεῖα καὶ ΔΑ καὶ ΑΕ ἀντιστοίχως αἱ προβολαὶ τῶν ΑΒ καὶ ΓΑ ἐπὶ τὴν Χ.

Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΔΑ+ΑΕ=μ ἢ ΔΕ=μ,

Μεταθέτομεν τὸ εὐθ. τμῆμα $\overline{ΔΕ}$ κατὰ μεταφορὰν ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ εὐθ. τμήματος ΔΒ καὶ ἔστω ΒΖ, ἡ νέα θέσις τοῦ ΔΕ, ὁπότε θὰ εἶναι ΒΖ=ΔΕ=μ καὶ γων.ΔΕΖ=1 ὀρθ.




Σχ. 192

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ἄκρον Ζ τοῦ εὐθ. τμήματος ΒΖ ἀπέχει ἀπὸ τὸ σταθερὸν σημεῖον Β δοθεῖσαν ἀπόστασιν μ καὶ ἑπομένως κεῖται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα μ καὶ τῆς ὁποίας περιφερείας ἡ ΓΕ εἶναι ἡ ἐφαπτομένη ἐκ τοῦ Γ.

Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Β τοῦ δοθέντος τριγώνου καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς μ γράφομεν περιφέρειαν. Ἐκ τῆς κορυφῆς Γ τοῦ δοθέντος τριγώνου φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΓΖ τῆς προηγουμένης περιφερείας καὶ τὴν ἀκτῖνα ΒΖ τὴν ἀπολήγουσαν εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἁφῆς Ζ.

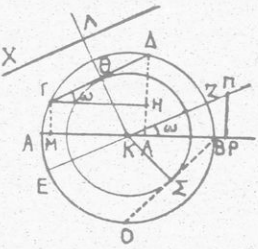
Ἐκ τῆς κορυφῆς Α φέρομεν τὴν ΔΑΧ παράλληλον πρὸς τὸ εὐθ. τμῆμα τὴν ΒΖ, ἡ ὁποία λέγω, ὅτι εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Διότι, ἐὰν θεωρήσωμεν τὰς προβολὰς ΑΔ καὶ

ΑΕ τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἐπὶ τὴν Χ σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον ΔΒΖΕ εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ΔΕ=ΒΖ=μ· ἀλλὰ ΔΕ=ΔΑ+ΑΖ· ὅθεν ΔΑ+ΑΕ=μ.

2. (807). *Εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν Κ νὰ ἀχθῇ χορδὴ παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν Χ καὶ τῆς ὁποίας ἡ προβολὴ ἐπὶ δοθείσης διαμέτρου ΑΒ τῆς Κ νὰ ἔχῃ μῆκος α.*

*Ἀνάλυσις.* Ἔστω ΓΔ ἡ ζητουμένη χορδή, παράλληλος πρὸς τὴν Χ καὶ τῆς ὁποίας ἡ προβολὴ ΜΝ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ, εἶναι ἴση μὲ α.




Σχ. 193

Ἂν ἀχθῇ ἡ ΚΛ κάθετος ἐπὶ τὴν Χ, αὕτη θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν χορδὴν ΓΔ, παράλληλον τῆς Χ καὶ θὰ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Θ αὐτῆς, διότι εἶναι κάθετος ἐκ τοῦ κέντρου Κ τοῦ κύκλου ἐπὶ χορδὴν αὐτοῦ. Ἂν φέρωμεν τὴν διάμετρον ΕΖ, κάθετον ἐπὶ τὴν ΚΛ, αὕτη θὰ εἶναι παράλληλος πρὸ τὴν Χ καὶ θὰ εἶναι γων.ΖΚΒ=γων.(Χ, ΑΒ), ἤτοι γνωστή.

Μεταθέτομεν τώρα τὸ εὐθ. τμῆμα ΜΝ=α κατὰ μεταφορὰν ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ ΜΓ καὶ ἔστω ΓΗ ἡ νέα θέσις αὐτοῦ, ὁπότε ΗΓ=ΜΝ=α. Οὕτω σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΔΗΓ, τοῦ ὁποίου εἶναι γνωστὴ ἡ κάθετος πλευρὰ ΓΗ=α καὶ ἡ ὀξεῖα γων.ΔΓΗ=γων.ΠΚΡ=(Χ, ΑΒ), ἑπομένως τὸ τρίγωνον τοῦτο κατασκευάζεται.

Σύνθεσις. Μὲ ἀρχὴν τὸ κέντρον Κ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς δοθείσης διαμέτρου ΑΒ εὐθ. τμῆμα ΚΡ=α καὶ φέρομεν τὴν ΡΠ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ρ· ὡσαύτως ἐκ τοῦ Κ φέρομεν τὴν διάμετρον ΕΖ παράλληλον πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν Χ καὶ ἔστω ὅτι αὕτη τέμνει τὴν ΡΠ εἰς τὸ σημεῖον Π.

Ἔπειτα λαμβάνομεν χορδὴν ΒΟ τῆς περιφερείας Κ ἴσην πρὸς ΚΠ καὶ γράφομεν ὁμόκεντρον κύκλον πρὸς τὸν Κ, μὲ ἀκτῖνα τὸ ἀπόστημα ΚΣ τῆς χορδῆς ΒΟ ἀπὸ τοῦ κέντρου. Ἐκ τοῦ Κ φέρομεν τὴν ΚΛ κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν Χ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν (Κ, ΚΣ) εἰς τὸ Θ.

Εἰς τὸ σημεῖον Θ φέρομεν τὴν ΓΔ ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας (Κ, ΚΣ) καὶ τὴν προεκτείνομεν ἕως ὅτου καταστῇ χορδὴ τοῦ δοθέντος κύκλου Κ. Λέγω ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι ἡ ζητουμένη χορδή.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΜΝ ἡ προβολὴ τῆς ΓΔ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ. Ἐὰν μετατεθῇ ἡ ΜΝ κατὰ μεταφορὰν ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ εὐθ. τμήματος ΜΓ, νὰ λάβῃ τὴν θέσιν ΓΗ, ὁπότε ἕνεκα τῆς μεταφορᾶς θὰ εἶναι ΜΝ=ΓΗ.

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον ὅμως τρίγωνον ΔΓΗ εἶναι γων.ΗΓΔ=γων.ΠΚΡ, διότι εἶναι ἀμφότεραι ὀξεῖαι καὶ ἔχουν τὰς πλευρὰς των ἀντιστοίχως παραλλήλους καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς· ὅθεν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΔΓΗ καὶ ΠΚΡ ἔχουν μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἴσην.

Ἐπίσης ἔχουν καὶ τὰς ὑποτεινούσας ΓΔ καὶ ΚΠ ἴσας, διότι ΟΒ=ΚΠ ἐκ κατασκευῆς· ἀλλὰ ΟΒ=ΓΔ, ὡς χορδαὶ τοῦ κύκλου Κ, ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου του, ἄρα ΟΒ=ΚΡ=ΓΔ.

Τὰ τρίγωνα λοιπὸν αὐτὰ εἶναι ἴσα· ἐκ τῆς ἰσότητος τούτων ἕπεται, ὅτι καὶ ΓΗ=ΚΡ=α· ἀλλὰ ΓΗ=ΜΝ, ὅθεν ΜΝ=α· ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ χορδὴ ΓΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν Χ, καὶ ἔχει προβολὴν ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν διάμετρον ΑΒ ἴσην μὲ μῆκος α, ἕπεται ὅτι εἶναι ἡ ζητουμένη χορδή.

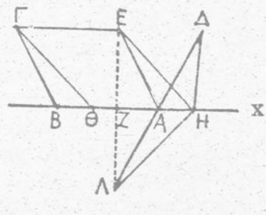
Σημ. Εἰς τὸ σχῆμα νὰ τεθῇ τὸ γράμμα Ν ἀντὶ τοῦ Λ.

*3.* (808). ***Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας* Χ *νὰ ὁρισθῇ τμῆμα* ΑΒ *ἔχον δοθὲν μῆκος α, οὕτως ὥστε τὰ ἄκρα αὐτοῦ* Α, Β *ἑνούμενα ἀντιστοίχως μὲ τὰ σημεῖα* Γ, Δ, *τὰ κείμενα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς* Χ, *νὰ δίδουν τὴν τεθλασμένην* ΓΒΑΔ, *ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ τὸ ἐλάχιστον μῆκος.***

***Ἀνάλυσις.*** Ἐπὶ τῆς Χ λαμβάνομεν τυχὸν εὐθ. τμῆμα ΘΗ=α καὶ φέρομεν τὰς ΘΓ καὶ ΗΔ. Μεταθέτομεν ἔπειτα τὸ εὐθ. τμῆμα ΘΗ κατὰ μεταφορὰν ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ ΘΓ καὶ ἔστω ΓΕ, ἡ νέα θέσις αὐτοῦ, ὁπότε θὰ εἶναι ΓΕ=ΘΗ=α. Ἕνεκα τῆς μεταφορᾶς θὰ ἔχωμεν ΘΓ=ΗΕ, ἑπομένως

ΓΘ+ΘΗ+ΗΔ=ΕΗ+ΘΗ+ΗΔ.

Ἵνα λοιπὸν καταστῇ ἐλάχιστον τὸ ΓΘ+ΘΗ+ΗΔ, ἀρκεῖ νὰ γίνῃ ἐλάχιστον τὸ ΕΗ+ΘΗ+ΗΔ· ἐπειδὴ ὅμως ΘΗ=α, ἤτοι σταθερόν, ἀρκεῖ νὰ γίνῃ ἐλάχιστον τὸ ΕΗ+ΗΔ.




Σχ. 194

Ἂν ὅμως θεωρήσωμεν τὸ σημεῖον Λ συμμετρικὸν τοῦ Ε, ὡς πρὸς τὴν Χ καὶ φέρωμεν τὴν ΗΛ, τότε ἕνεκα τῆς συμμετρίας εἶναι ΗΕ=ΛΗ· ἑπομένως ΕΗ+ΗΔ=ΗΛ+ΗΔ· ἤτοι ἵνα ἔχωμεν τὸ ζητούμενον ἐλάχιστον, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον τοῦ ΛΗ+ΗΔ.

Ἀλλὰ ἡ ΛΗ+ΗΔ εἶναι τεθλασμένη, ἡ ὁποία ἔχει πέρατα δύο δοθέντα σημεῖα Δ καὶ Λ. Διὰ νὰ ἔχωμεν τὸ ἐλάχιστον αὐτῆς πρέπει ἡ ΛΗ+ΗΔ νὰ γίνῃ εὐθεῖα· ἤτοι ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς ΔΗΛ εἶναι ἡ εὐθεῖα ΔΑΛ.

Σύνθεσις. Μὲ ἀρχὴν τὸ Γ φέρομεν εὐθ. τμῆμα ΓΕ παράλληλον πρὸς Χ καὶ ἴσον πρὸς α, ἤτοι ΓΕ=α· εὑρίσκομεν τὸ συμμετρικὸν σημεῖον Λ τοῦ σημείου Ε, ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν Χ καὶ φέρομεν τὴν ΔΛ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Χ εἰς τὸ Α. Λαμβάνομεν ἔπειτα ἐπὶ τῆς Χ τμῆμα ΑΒ ἔχον μῆκος α· λέγω ὅτι τὸ ΒΑ εἶναι τὸ ζητούμενον τμῆμα.

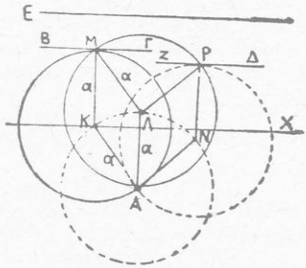
Ἀπόδειξις. Ἕνεκα τῶν συμμετρικῶν σημείων Ε, Λ ἔχομεν ΑΕ=ΑΛ=ΓΒ· ἑπομένως ΓΒ+ΒΑ+ΑΔ=ΑΕ+ΒΑ+ΑΔ=ΛΑ+ΒΑ+ΑΔ·

ἀλλὰ ΛΑ+ΑΔ=ΛΔ, διότι τὰ σημεῖα Λ, Α, Δ ἐκ κατασκευῆς κεῖνταί ἐπ' εὐθείας.

Ἐπειδὴ ἡ ΒΑ=α σταθερὰ ἕπεται, ὅτι ΛΑ+ΒΑ+ΑΔ εἶναι ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος τούτου, ἑπομένως καὶ ἡ ἴση της ΓΒ+ΒΑ+ΑΔ εἶναι ἡ ἐλαχίστη τεθλασμένη.

4. (809). ***Περιφέρεια Κ στρέφεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου της περὶ δοθὲν σημεῖον αὐτῆς Α. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων τῆς περιφερείας Κ καὶ παραλλήλων πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν Ε.***

*Λύσις.* Ἐκ τοῦ Κ φέρομεν τὴν ΚΧ παράλληλον τῆς Ε. Κατὰ τὴν περιστροφὴν τὸ κέντρον Κ θὰ ἀπέχῃ τοῦ Α ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα α τοῦ κύκλου Κ· ἄρα τὸ Κ θὰ γράφῃ περιφέρειαν ἴσην μὲ τὴν Κ καὶ ἔχουσαν κέντρον τὸ Α, ἤτοι τὴν (Α, α).




Σχ. 195

Ἔστω Μ τὸ σημεῖον ἀφῆς τῆς ἐφαπτομένης ΒΓ τοῦ κύκλου Κ καὶ παραλλήλου πρὸς τὴν Ε. Η ΒΓ θὰ εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὴν ΚΧ. Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΚΜ, ἡ ὁποία ὡς κάθετος ἐπι τὴν ΒΓ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΚΧ. Φέρομεν τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΛ ὁμορρόπως ἴσον πρὸς τὸ ΚΜ, ὁπότε θὰ εἶναι ΑΛ=ΚΜ=α.

Ἐπίσης τὸ ΑΛ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΚΧ· τὸ εὐθ. τμῆμα λοιπὸν ΑΛ, ἐπειδὴ ἄγεται ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον Α καὶ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ὡρισμένην κατὰ τὴν θέσιν εὐθεῖαν ΚΧ καὶ τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος δοθὲν α, εἶναι τελείως ὡρισμένον. Φέρομεν τὰ εὐθύγραμα τμήματα ΑΚ καὶ ΛΜ καὶ σχηματίζεται οὕτω ὁ ρόμβος ΚΑΛΜ.

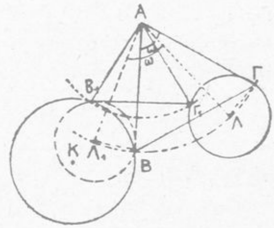
Ἐὰν μεταθέσωμεν τὴν περιφέρειαν Α κατὰ μεταφορὰν ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΛ=α, αὕτη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Μ. Λέγω δέ, ὅτι ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος εἶναι ἡ περιφέρεια (Λ, α).

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Διότι, ἂν μὲ κεντρον τυχὸν σημεῖον Ν τῆς περιφερείας Α γράψωμεν περιφέρειαν ἴσην πρὸς τὴν Κ, αὕτη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Α καὶ θὰ τέμνῃ τὴν περιφέρειαν Λ εἴς τι σημεῖον Ρ. Ἂν ἀχθῶσιν αἱ ΑΝ, ΝΡ, ΛΡ, σχηματίζεται τὸ τετράπλευρον ΑΝΡΛ, τὸ ὁποῖον εἶνε ρόμβος, διότι ΑΝ=ΝΡ=ΡΛ=ΛΑ=α, ὡς ἀκτῖνες ἀντιστοίχως τῶν ἴσων περιφερειῶν Α, Ν, Λ· τὰ εὐθύγραμμα τμήματα λοιπὸν ΑΛ καὶ ΝΡ εἶναι ὁμόρροπα.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ΑΛ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΚΧ, ἄρα καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της Ε καὶ ἡ ΝΡ εἶναι κάθετος ἐπὶ αὐτάς. Ἡ ἐφαπτομένη λοιπὸν ΖΔ τῆς περιφερείας Ν εἰς τὸ σημεῖον Ρ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν Ε, διότι ἀμφότεραι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΝΡ.

5. (813). ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνίαν ω, τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ νὰ εἶναι δεδομένον σημεῖον Α, καὶ ὅτι αἱ δύο ἄλλαι κορυφαὶ τοῦ τριγώνου κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ δύο δοθεισῶν περιφερειῶν Κ, Λ.***

*Ἀνάλυσις.* Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει ΑΒ=ΑΓ καὶ γων.ΒΑΓ=ω. Ἂν περιστρέψωμεν τὴν περιφέρειαν Λ περὶ τὸ Α κατὰ γωνίαν $ΛΑΛ_1=ω$, αὔτη θὰ λάβῃ τὴν θέσιν $Λ_1$ καὶ θὰ εἶναι $ΑΛ=ΑΛ_1$, τὸ δὲ σημεῖον Γ θὰ συμπέσῃ μετὰ τοῦ Β, τὸ ὁποῖον εἶναι ὡρισμένον, ὡς τομὴ τῶν περιφερειῶν Κ, $Λ_1$.



Σχ. 196

Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Μὲ κορυφὴν τὸ δοθὲν σημεῖον Α καὶ πλευρὰν ΑΛ σχηματίζομεν γωνίαν $ΛΑΛ_1=ω$ καὶ λαμβάνομεν $ΑΛ_1=ΑΛ$.

Μὲ κέντρον τὸ $Λ_1$ γράφομεν περιφέρειαν ἴσην πρὸς τὴν Λ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Κ εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ $Β_1$. Φέρομεν τὴν ΑΒ καὶ μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΒ γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν περιφέρειαν Λ εἰς τὸ σημεῖον Γ· φέρομεν τὴν ΒΓ, ὁπότε σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς ἐκ κατασκευῆς. Ἐὰν ἀχθοῦν αἱ ἀκτῖνες $Λ_1Β$ καὶ ΛΓ, τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα $ΑΛ_1Β$ καὶ ΑΛΓ, εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν $ΑΛ_1=ΑΛ$, ΑΒ=ΑΓ ἐκ κατασκευῆς καὶ $Λ_1Β=ΛΓ$, ὡς ἀκτῖνας ἴσων κύκλων· ἑπομένως θὰ εἶναι καὶ γων.$Λ_1ΑΒ$=γων.ΛΑΓ, ὅθεν καὶ

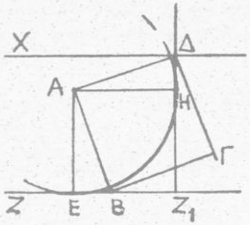
γων.$Λ_1ΑΒ$+γων.ΒΑΛ=γων.ΒΑΛ+γων.ΛΑΓ ἢ γων.$Λ_1ΑΛ$=γων.ΒΑΓ· ἀλλὰ ἐκ κατασκευῆς ἔχομεν γων.$Λ_1ΑΛ=ω$, ὅθεν καὶ γων.ΒΑΓ=ω. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΒΑΓ, πληροῦν τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ὁμοίως, ἂν μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν $ΑΒ_1$ γραφῇ τόξον κύκλου τοῦτο τέμνει τὴν περιφέρειαν Λ εἰς τὸ σημεῖον $Γ_1$. Ἐὰν ἀχθῇ ἡ $Β_1Γ_1$ σχηματίζεται τὸ τρίγωνον $ΑΒ_1Γ_1$, τὸ ὁποῖον ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἀποτελεῖ λύσιν τοῦ προβλήματος.

Ἐὰν ἡ περιφέρεια $Λ_1$ τέμνῃ τὴν Κ ἔχομεν δύο λύσεις, ἂν ἐφάπτεται αὐτῆς ἔχομεν μίαν μόνον λύσιν καὶ ἂν δὲν ἔχῃ κανὲν κοινὸν σημεῖον μὲ αὐτήν, δὲν ὑπάρχει λύσις.

6. (814). ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράγωνον, ἔχον μίαν μὲν τῶν κορυφῶν του εἰς δοθὲν σημεῖον Α, δύο δὲ τῶν ἄλλων, ἀντιστοίχως ἐπὶ δύο δοθεισῶν παραλλήλων εὐθειῶν Χ καὶ Ζ.***

*Ἀνάλυσις.* Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ ζητούμενον τετράγωνον. Ἐὰν περιστραφῇ ἡ Ζ περὶ τὸ Α κατὰ γωνίαν 90°, αὔτη θὰ λάβῃ τὴν θέσιν $Ζ_1$, κάθετον ἐπὶ τὴν Ζ καὶ θὰ τέμνῃ τὴν Χ εἰς τὸ σημεῖον Δ, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ συμπέσῃ ἡ κορυφὴ Β τοῦ τετραγώνου μετὰ τὴν περιστροφήν.



Σχ. 197

Τὸ σημεῖον λοιπὸν Δ ὁρίζεται ὡς τομὴ τῆς $Z_1$ καὶ τῆς Χ.

Ἐπίσης ἡ ΑΕ θὰ λάβῃ τὴν θέσιν ΑΗ, ὁπότε θὰ εἶναι ΑΗ=ΑΕ, καὶ ἡ $Z_1$ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ ταύτην εἰς τὸ σημεῖον Η.

Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὴν ΑΕ κάθετον ἐπὶ τὴν Ζ καὶ τὴν ΑΗ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΕ καὶ λαμβάνομεν ΑΗ=ΑΕ. Ἐκ τοῦ Η φέρομεν τὴν $HZ_1$ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΗ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Χ εἰς τὸ σημεῖον Δ.

Κατόπιν φέρομεν τὴν ΑΔ καὶ μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ΑΔ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Ζ εἰς τὸ Β. Φέρομεν τὴν ΑΒ καὶ τὰς ΒΓ καὶ ΔΓ ἀντιστοίχως καθέτους ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΑΔ καὶ οὕτω σχηματίζεται τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον τετράγωνον.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΕΒ καὶ ΑΗΔ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ἐκ κατασκευῆς ΑΕ=ΑΗ καὶ ΑΒ=ΑΔ· ἑπομένως θὰ ἔχουν καὶ γων.ΕΑΒ=γων.ΗΑΔ, ὁπότε καὶ
γων.ΕΑΒ+γων ΒΑΗ=γων.ΒΑΗ+γων.ΗΑΔ, ἢ γων.ΕΑΗ=γων ΒΑΔ.

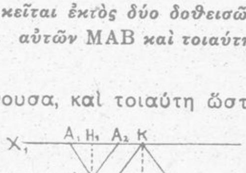
Ἀλλ' ἐκ κατασκευῆς γων.ΕΑΗ=$90^0$, ὅθεν καὶ γων.ΒΑΔ=$90^0$, ἤτοι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἔχει τρεῖς ἐκ τῶν γωνιῶν των, τὰς Α, Β, Δ ὀρθάς καὶ ἑπομένως εἶναι ὀρθογώνιον.

Ἐπειδὴ δὲ ἔχει καὶ ἐκ κατασκευῆς ΑΒ=ΑΔ, ἤτοι δύο διαδοχικὰς πλευρὰς του ἴσας, ἕπεται ὅτι εἶναι τετράγωνον.

*7.* (817). ***Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς δύο δοθεισῶν παραλλήλων εὐθειῶν Χ καὶ Υ, νὰ ἀχθῇ τέμνουσα αὐτῶν ΜΑΒ καὶ τοιαύτη, ὥστε ΜΑ+ΜΒ=α, ὅπου α δοθὲν μῆκος.***

***Ἀνάλυσις.*** Ἔστω ΜΑΒ ἡ ζητουμένη τέμνουσα, καὶ τοιαύτη ὥστε ΑΜ+ΜΒ=α (1).

Ἂν περιστραφῇ ἡ Χ περὶ τὸ Μ κατὰ γωνίαν $180^0$, αὕτη θὰ λάβῃ τὴν θέσιν $X_1$ παράλληλον πρὸς τὴν Χ, τὸ δὲ σημεῖον Α, κατὰ τὸ ὁποῖον ἡ ΜΒ τέμνει τὴν Χ, θὰ συμπέσῃ μετὰ τοῦ σημείου $A_1$ τῆς $X_1$, κατὰ τὸ ὁποῖον ἡ $X_1$ τέμνεται ὑπὸ τῆς ΜΒ καὶ θὰ εἶναι $MA=MA_1$· ἑπομένως $MA+MB=A_1M+MB$ καὶ συνεπῶς ἕνεκα τῆς (1), $A_1M+MB=α$, ἤτοι $A_1B=α$.



Σχ. 198

Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Περιστρέφομεν τὴν Χ περὶ τὸ Μ κατὰ γωνίαν $180^0$. Πρὸς τοῦτο φέρομεν τὴν ΜΗ κάθετον ἐπὶ τὴν Χ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΗΜ τμῆμα $MH_1=HM$. Ἐκ τοῦ $H_1$ φέρομεν τὴν $X_1$ παράλληλον πρὸς τὴν Χ.

Μὲ κέντρον τὸ τυχὸν σημεῖον Κ τῆς $X_1$ καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ α γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις τέμνει τὴν Υ εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Ἐκ τοῦ Μ φέρομεν παράλληλον ΜΒ πρὸς τὴν διεύθυνσιν ΚΓ, ἡ ὁποία εἶναι καὶ ἡ ζητουμένη τέμνουσα.

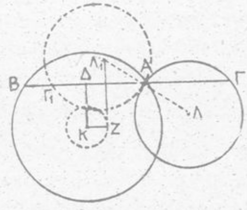
Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἐπειδὴ εἶναι $A_1B=K\Gamma$, ὡς παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων, ἕπεται ὅτι $A_1B=\alpha$. Ἀλλὰ $A_1B=A_1M+MB$, ἢ ἐπειδὴ εἶναι $A_1M=MA$, ἕνεκα τῆς συμμετρίας τῶν $A_1$ καὶ Α, ἔχομεν $A_1B=MA+MB=\alpha$.

Δ ι ε ρ ε ύ ν η σ ι ς. Ἐὰν ἀχθῇ ἡ $MB_1$ παράλληλος πρὸς τὴν ΚΔ, θὰ ἔχωμεν καὶ δευτέραν λύσιν.

Ἐκ τοῦ Κ φέρομεν τὴν ΚΠ κάθετον ἐπὶ τὴν Υ. Ἐὰν $K\Pi<K\Gamma$, ἤτοι, ἐὰν $K\Pi<\alpha$, δηλ. ἐὰν ἡ ἀπόστασις τῆς $X_1$ καὶ Υ εἶναι μικροτέρα τοῦ α, τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, ἐὰν εἶναι ἴση, τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν καὶ ἂν μεγαλυτέρα, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

8. (818). ***Διὰ τῆς τομῆς Α δύο δοθεισῶν περιφερειῶν Κ, Λ, νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΒΑΓ τοιαύτη, ὥστε ΑΒ—ΑΓ=μ, ὅπου μ δοθὲν μῆκος.***

***Ἀνάλυσις.*** Ἔστω ΒΑΓ ἡ ζητουμένη τέμνουσα καὶ τοιαύτη ὥστε $AB-A\Gamma=\mu$.




Σχ. 199

Ἐὰν περιστραφῇ ἡ περιφέρεια Λ περὶ τὸ Α κατὰ 180°, αὕτη θὰ λάβῃ τὴν θέσιν $\Lambda_1$, τὸ δὲ σημεῖον Γ θὰ συμπέσῃ μὲ τὸ $\Gamma_1$ τῆς τομῆς τῆς περιφερείας $\Lambda_1$ καὶ τῆς τεμνούσης ΒΑΓ· οὕτω θὰ ἔχωμεν $AB-A\Gamma=AB-A\Gamma_1$· ἀλλ᾽ ἐξ ὑποθέσεως $AB-A\Gamma=\mu$, ἄρα $AB-A\Gamma_1=\mu$.

Ἂν ἐκ τῶν Κ καὶ $\Lambda_1$ ἀχθοῦν αἱ κάθετοι ΚΔ καὶ $\Lambda_1E$ ἐπὶ τὰς χορδὰς ΑΒ καὶ $A\Gamma_1$, ἔχομεν

$AE=\frac{A\Gamma_1}{2}$ καὶ $A\Delta=\frac{AB}{2}$. ὅθεν $A\Delta-AE=\frac{AB-A\Gamma_1}{2}=\frac{\mu}{2}$, ἤτοι $\Delta E=\frac{\mu}{2}$. Ἐὰν ἐκ τοῦ Κ φέρωμεν τὴν ΚΖ κάθετον ἐπὶ τὴν $\Lambda_1E$, σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον ΔΚΖΕ, ὁπότε θὰ εἶναι $\Delta E=KZ=\frac{\mu}{2}$.

Ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Ζ, εἶναι λοιπὸν ὁμόκεντρος περιφέρεια πρὸς τὴν Κ, ἡ ὁποία ἔχει ἀκτῖνα $\frac{\mu}{2}$, καὶ ἡ ὁποία ἐφάπτεται $\Lambda_1Z$.

Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Περιστρέφομεν περὶ τὸ Α τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν Λ κατὰ 180°, καὶ ἔστω $\Lambda_1$ ἡ νέα θέσις της, ὁπότε τὰ κέντρα Λ, $\Lambda_1$ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ Α. Γράφομεν **ὁμόκεντρον** περιφέρειαν πρὸς τὴν Κ μὲ ἀκτῖνα $\frac{\mu}{2}$ καὶ ἐκ τοῦ $\Lambda_1$ φέρομεν τὴν $\Lambda_1Z$ ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας ταύτης· φέρομεν ἐπίσης τὴν ἀκτῖνα ΚΖ, τὴν ἀπολήγουσαν εἰς τὸ σημεῖον Ζ τῆς ἀφῆς. Ἐὰν ἐκ τοῦ Α φέρωμεν τὴν τέμνουσαν ΓΑΒ παράλληλον πρὸς τὴν ΚΖ, λέγω ὅτι αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη τέμνουσα.

Ἀπόδειξις. Ἡ τέμνουσα ΒΑΓ τέμνει τὴν περιφέρειαν $Λ_1$ εἰς τὸ σημεῖον $Γ_1$· ἐπομένως ἕνεκα τῆς περιστροφῆς θὰ εἶναι $ΑΓ=ΑΓ_1$, ὅθεν $ΑΒ-ΑΓ=ΑΒ-ΑΓ_1$ (1).

Ἐπειδὴ ἡ $Λ_1Ζ$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΖ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της $ΑΓ_1$· ἄρα ὁ ποῦς αὐτῆς Ε εἶναι τὸ μέσον τῆς $ΑΓ_1$, ἤτοι $ΑΓ_1=2ΑΕ$. Ἐκ τοῦ Κ φέρομεν τὴν ΚΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ὁπότε $ΑΒ=2ΑΔ$· ἄρα

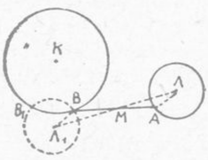
$$ΑΒ-ΑΓ_1=2ΑΔ-ΑΓ_1=2ΑΔ-2ΑΕ=2(ΑΔ-ΑΕ)=2ΔΕ\cdot$$

ἀλλὰ $ΔΕ=ΚΖ=\frac{μ}{2}$, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου ΔΚΖΕ· ὅθεν $ΑΒ-ΑΓ_1=μ$, ἢ λόγῳ τῆς (1) $ΑΒ-ΑΓ=μ$.

Σημ. Εἰς τὸ σχῆμα νὰ τεθῇ τὸ γράμμα Ε, (τομὴ τῆς ΒΓ καὶ $Λ_1Ζ$)

*9.* (819). ***Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον*** Μ ***νὰ ἀχθῇ εὐθύγραμμον τμῆμα*** ΑΜΒ, ***περατούμενον εἰς δύο δοθείσας περιφερείας*** Κ, Λ ***καὶ τοιοῦτον, ὥστε*** ΜΑ=ΜΒ.

***Ἀνάλυσις.*** Ἔστω ΑΜΒ τὸ ζητούμενον τμῆμα καὶ τοιοῦτον, ὥστε ΜΑ=ΜΒ. Ἐὰν περιστραφῇ ἡ περιφέρεια Λ περὶ τὸ Μ κατὰ 180°, αὕτη θὰ λάβῃ τὴν θέσιν $Λ_1$. Λόγῳ τῆς περιστροφῆς, θὰ εἶναι $ΜΛ=ΜΛ_1$ ἡ ΜΑ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΜΒ, τὸ σημεῖον Α θὰ συμπέσῃ μετὰ τοῦ Β, ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν ΜΑ καὶ ΜΒ, ἡ δὲ ἀκτὶς ΛΑ θὰ συμπέσῃ μετὰ τῆς $Λ_1Β$. Τὸ Β λοιπὸν ὁρίζεται ὡς τομὴ τῶν περιφερειῶν $Λ_1$ καὶ Κ.



Σχ. 200

Σύνθεσις. Φέρομεν τὴν ΜΛ καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τμῆμα $ΜΛ_1=ΜΛ$ καὶ μὲ κέντρον τὸ $Λ_1$ καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς Λ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Κ εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ $Β_1$.

Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα $Λ_1Β$ τῆς $Λ_1$, τὴν ἀπολήγουσαν εἰς τὸ σημεῖον Β τῆς τομῆς καὶ τὴν ἀκτῖνα ΛΑ τοῦ κύκλου Λ, τὴν παράλληλον πρὸς τὴν $Λ_1Β$ καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας ΜΑ καὶ ΜΒ. Λέγω ὅτι ἡ γραμμὴ ΑΜΒ εἶναι εὐθεῖα καὶ ὅτι τὸ ΑΜΒ εἶναι τὸ ζητούμενον τμῆμα.

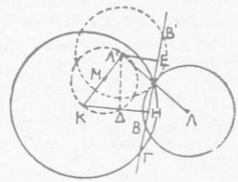
Ἀπόδειξις. Τὰ τρίγωνα $ΜΛ_1Β$ καὶ ΜΛΑ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ἐκ κατασκευῆς $ΜΛ=ΜΛ_1$ καὶ $ΛΑ=ΒΛ_1$ καὶ γων.ΜΛΑ=γων.$ΜΛ_1Β$, ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΛΑ καὶ $Λ_1Β$· ἄρα θὰ εἶναι ΜΑ=ΜΒ καὶ γων.ΛΜΑ=γων.$Λ_1ΜΒ$.

Ἐπειδὴ αἱ δύο αὐταὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ ἔχουν τὰς πλευρὰς ΜΛ καὶ $ΜΛ_1$ ἐπ' εὐθείας, τὰς δὲ ΜΑ καὶ ΜΒ ἑκατέρωθεν αὐτῆς ἕπεται, ὅτι εἶναι κατὰ κορυφὴν καὶ ἑπομένως τὰ τμήματα ΜΑ καὶ ΜΒ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ τὸ σημεῖον $Β_1$ δίδει ἄλλην λύσιν τοῦ προβλήματος.

Διερεύνησις. Ἐὰν Α καὶ α εἶναι ἀντιστοίχως αἱ ἀκτῖνες τῶν Κ καὶ Λ καὶ ἐὰν εἶναι $Λ_1Κ < Α + α$, τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις· ἐάν $Λ_1Κ = Α + α$ ἔχει μίαν λύσιν καὶ ἂν $Λ_1Κ > Α + α$ δὲν ἔχει καμμίαν λύσιν.

10. (820). ***Διὰ τῆς τομῆς Α δύο τεμνομένων περιφερειῶν Κ καὶ Λ νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΑΒΓ, τῆς ὁποίας τὰ σημεῖα Β καὶ Γ νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ Α καὶ τοιαύτη, ὥστε ΑΒ+ΑΓ=α, ὅπου α δοθὲν μῆκος.***

*Ἀνάλυσις.* Ἔστω ΑΒΓ ἡ ζητουμένη τέμνουσα, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Λ εἰς τὸ Β καὶ τὴν Κ εἰς τὸ Γ καὶ τοιαύτη ὥστε ΑΒ+ΑΓ=α.



Σχ. 201

Ἐὰν περιστραφῇ ἡ περιφέρεια Λ περὶ τὸ Α κατὰ γωνίαν 180°, αὕτη μὲν θὰ λάβῃ τὴν θέσιν Λ′, ἡ δὲ ΑΒ τὴν ΑΒ′ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ καὶ θὰ εἶναι Β′Α+ΑΓ=ΑΒ+ΑΓ=α, ἤτοι Β′Β=α. Ἐὰν ἀχθοῦν αἱ Λ′Ε καὶ ΚΗ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΓΒ′, θὰ εἶναι $ΕΑ = \frac{Β'Α}{2}$ καὶ $ΑΗ = \frac{ΑΓ}{2}$, ἑπομένως $ΕΑ + ΑΗ = \frac{Β'Α + ΑΓ}{2}$, ἢ $ΕΗ = \frac{α}{2}$.

Μὲ διάμετρον τὴν ΚΛ′ γράφομεν περιφέρειαν Μ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΚΗ εἰς τὸ Δ φέρομεν τὴν χορδὴν Λ′Δ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΗ· ἄρα θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΕΗ καὶ ἴση πρὸς αὐτὴν καὶ ἑπομένως $Λ'Δ = \frac{α}{2}$. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ἡ κατωτέρω σύνθεσις.

Σύνθεσις. Περιστρέφομεν τὴν περιφέρειαν Λ περὶ τὸ Α κατὰ γωνίαν 180°, ὁπότε αὕτη λαμβάνει τὴν θέσιν Λ′. Μὲ διάμετρον ΚΛ′ γράφομεν περιφέρειαν Μ καὶ μὲ ἀρχὴν τὸ Λ′ λαμβάνομεν χορδὴν Λ′Δ τοιαύτην, ὥστε $Λ'Δ = \frac{α}{2}$.

Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὴν ΑΒΓ παράλληλον πρὸς τὴν Λ′Δ, ἡ ὁποία εἶναι καὶ ἡ ζητουμένη τέμνουσα.

Ἀπόδειξις. Ἡ ΑΒΓ προεκτεινομένη τέμνει τὴν περιφέρειαν Λ′ εἰς τὸ Β′. Ἐὰν ἀχθοῦν αἱ Λ′Ε καὶ ΚΗ κάθετοι ἐπὶ τὴν Β′Γ θὰ εἶναι Β′Α=2ΕΑ καὶ ΑΓ=2ΑΗ, ὅθεν Β′Α+ΑΓ=2(ΕΑ+ΑΗ) ἢ Β′ΑΓ=2ΕΗ.

Ἀλλὰ ἐπειδὴ ΕΗ=Λ′Δ, ὡς κάθετοι μεταξὺ παραλλήλων, θὰ εἶναι $Λ'Δ = ΕΗ = \frac{α}{2}$, ὅθεν Β′ΑΓ=2ΕΗ=α.

Ἀλλὰ Β′Α=ΑΒ, διότι διὰ τῆς περιστροφῆς τῆς περιφερείας Λ κατὰ 180°, ἡ ΑΒ θὰ λάβῃ θέσιν ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της ΑΒ′, ἡ δὲ θέσις τοῦ Β θὰ εἶναι τὸ σημεῖον κατὰ τὸ ὁποῖον ἡ ΑΒ τέμνει τὴν περιφέρειαν Λ′, δηλ. τὸ σημεῖον Β′· ἑπομένως θὰ εἶναι

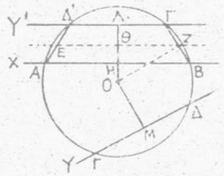
Β′ΑΓ=Β′Α+ΑΓ=ΑΒ+ΑΓ=α.

Εἶναι προφανὲς ὅτι, διὰ νὰ ὑπάρχῃ λύσις, πρέπει ἡ διάμετρος τῆς περιφερείας Μ, νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ $\frac{\alpha}{2}$.

Σημ. Εἰς τὸ σχῆμα νὰ τεθῇ τὸ γράμμα Α.

*11. (824). Δίδονται δύο εὐθεῖαι Χ καὶ Υ καὶ σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου των καὶ ζητεῖται νὰ γραφῇ, μὲ κέντρον τὸ Ο, περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἀποτέμνῃ ἀπὸ τὰς Χ καὶ Υ δύο χορδάς, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ ἰσοῦται μὲ δοθὲν μῆκος.*

*Ἀνάλυσις.* Ἔστω Ο ἡ ζητουμένη περιφέρεια, ἡ ὁποία ἀποτέμνει ἀπὸ τὰς εὐθείας Χ καὶ Υ ἀντιστοίχως τὰς χορδὰς ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ τοιαύτη, ὥστε ΑΒ+ΓΔ=α. Φέρομεν τὰς ἀποστάσεις ΟΗ καὶ ΟΜ τοῦ κέντρου αὐτῆς Ο ἀπὸ τὰς Χ καὶ Υ.



Σχ. 202

Ἡ γωνία ΗΟΜ τῶν ΟΗ καὶ ΟΜ εἶναι γνωστή, ὡς παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας τῶν εὐθειῶν Χ, Υ. Ἐὰν περιστραφῇ ἡ Υ περὶ τὸ Ο, κατὰ τὴν γωνίαν ΗΟΜ, αὕτη θὰ λάβῃ τὴν θέσιν Υ', παράλληλον πρὸς τὴν Χ, ἡ δὲ χορδὴ ΓΔ θὰ λάβῃ τὴν θέσιν Γ'Δ'. Θὰ εἶναι λοιπὸν ΑΒ+ΓΔ=ΑΒ+Γ'Δ', ἤτοι ΑΒ+Γ'Δ'=α. Ἂν ἀχθοῦν αἱ χορδαὶ ΒΓ' καὶ ΑΔ' σχηματίζεται τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓ'Δ' καὶ ἔστω ΕΖ ἡ διάμεσος αὐτοῦ· ὡς γνωστὸν $ΕΖ=\frac{ΑΒ+Γ'Δ'}{2}$, ὅθεν $ΕΖ=\frac{\alpha}{2}$.

Ἂν ἀχθῇ ἡ ἀκτὶς ΟΖ σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΘΖ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν κάθετον $ΘΖ=\frac{ΕΖ}{2}=\frac{\alpha}{4}$ καὶ τὴν κάθ· ΟΘ· πράγματι ἔχομεν ΟΘ=ΟΗ+ΗΘ (1) καὶ ΟΘ=ΟΛ−ΛΘ ἢ ἐπειδὴ ΟΛ=ΟΜ καὶ ΛΘ=ΗΘ, ΟΘ=ΟΜ−ΗΘ (2)· προσθέτοντες τὰς (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν 2ΟΘ=ΟΜ+ΟΗ καὶ $ΟΘ=\frac{ΟΜ+ΟΗ}{2}$· ἤτοι ἡ ΟΘ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἀποστάσεων τοῦ δοθέντος σημείου Ο ἀπὸ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν Χ, Υ. Τὸ ὀρθογώνιον λοιπὸν τρίγωνον ΟΘΖ κατασκευάζεται.

Σύνθεσις. Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Ο καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΘΖ, τὸ ὁποῖον ἔχει καθέτους πλευρὰς ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς $\frac{\alpha}{4}$ καὶ $\frac{ΟΜ+ΟΗ}{2}$, γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη.

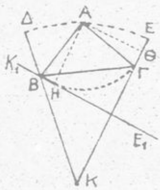
Ἀπόδειξις. Διότι, ἂν ληφθῇ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΟΘ εὐθ. τμῆμα ΘΛ=ΗΘ καὶ ἀχθῇ ἡ ἐκ τοῦ Θ παράλληλος τῆς Χ, καθὼς καὶ αἱ χορδαὶ ΒΓ' καὶ ΑΔ', ἡ ΕΖ εἶναι ἡ διάμεσος τοῦ ἰσοσκελοῦς τραπεζίου ΑΒΓ'Δ' καὶ ἑπομένως ΑΒ+Δ'Γ'=2ΕΖ=4ΘΖ.

Ἀλλ' ἐκ κατασκευῆς $ΘΖ=\frac{\alpha}{4}$, ἑπομένως ΑΒ+Δ'Γ'=α. Ἐπίσης ἐκ κατασκευῆς ἔχομεν $ΟΘ=\frac{ΟΗ+ΟΜ}{2}$, ἤτοι 2ΟΘ=ΟΗ+ΟΜ ἢ

$2(ΟΗ+ΗΘ)=ΟΗ+ΟΜ$ ἢ $2ΟΗ+2ΗΘ=ΟΗ+ΟΜ$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $ΟΗ+2ΗΘ=ΟΜ$, ἢ ἐπειδὴ $2ΗΘ=ΗΛ$, $ΟΗ+ΗΛ=ΟΜ$, ἢ $ΟΛ=ΟΜ$· ἄρα $Δ'Γ'=ΓΔ$, ὡς χορδαὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἰσάκις τοῦ κέντρου ἀπέχουσαι· ἑπομένως εἶναι $ΑΒ+ΓΔ=ΑΒ+Γ'Δ'=α$.

12. (826). ***Εἰς δοθέντα κυκλικὸν τομέα νὰ ἐγγραφῇ ἕνα ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι δοθὲν σημεῖον*** Α ***τοῦ τόξου*** ΔΕ ***τοῦ δοθέντος τομέως*** ΚΔΕ.

*Ἀνάλυσις.* Ἔστω ΒΑΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, καὶ τοιοῦτον, ὥστε γων.$ΒΑΓ=90^0$ καὶ $ΑΒ=ΑΓ$. Ἐὰν ἡ ΚΕ περιστραφῇ περὶ τὸ Α κατὰ $90^0$ αὕτη θὰ λάβῃ τὴν θέσιν $Κ_1Ε_1$, ἡ δὲ ΑΓ τὴν θέσιν ΑΒ καὶ τὸ Γ θὰ συμπέσῃ μετὰ τοῦ Β. Τὸ Β λοιπὸν ὁρίζεται, ὡς τομὴ τῆς ἀκτῖνος ΚΔ καὶ τῆς $Κ_1Ε_1$.



Σχ. 203

Σ ύ ν θ ε σ ι ς. Φέρομεν τὴν ΑΘ κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΚΕ καὶ σχηματίζομεν γωνίαν $ΘΑΗ=90^0$.

Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΗ λαμβάνομεν $ΑΗ=ΑΘ$ καὶ φέρομεν τὴν $Κ_1Ε_1$ κάθετον εἰς τὸ Η ἐπὶ τὴν ΑΗ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΚΔ εἰς τὸ Β.

Μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα ΑΒ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἀκτῖνα ΚΕ εἰς τὸ Γ. Λέγω ὅτι τὸ ζητούμενον τρίγωνον εἶναι τὸ ἔχον κορυφὰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΗΑΒ καὶ ΘΑΓ ἔχουν ἐκ κατασκευῆς $ΑΗ=ΑΘ$ καὶ $ΑΒ=ΑΓ$, εἶναι ἴσα, ὁπότε γων.ΗΑΒ=γων.ΘΑΓ· ἄρα καὶ γων.ΗΑΒ+γων.ΗΑΓ=γων.ΗΑΓ+γων.ΘΑΓ ἢ γων.ΗΑΘ=γων.ΒΑΓ· ἀλλ' ἐκ κατασκευῆς εἶναι γωνία $ΗΑΘ=90^0$, ὅθεν καὶ γων.$ΒΑΓ=90^0$.

# ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΙΔΙΟΥ

**'Απαραίτητα διὰ τοὺς μαθητὰς τῶν Γυμνασίων, Πρακτικῶν Λυκείων καὶ διὰ τοὺς ὑποψηφίους τῶν 'Ανωτάτων Σχολῶν**

---

1. **"Αλγεβρα καὶ Συμπλήρωμα αὐτῆς :** (Ε' ἔκδοσις). Σελ. 1056. Εἰς 2 τόμους. Α' τόμος δρχ. 75·— Β' τόμος δρχ. 75.—
2. **Θεωρητικὴ Γεωμετρία** (Δ' ἔκδοσις). Σελ. 832. Δρχ. 125.—
3. **Εὐθύγραμμος Τριγωνομετρία** (Δ' ἔκδοσις). Σελ. 336. » 50.—
4. **'Ασκήσεις καὶ Προβλήματα 'Αλγέβρας.** 'Υπὸ τὸν τίτλον αὐτὸν ἐξεδόθησαν καὶ κυκλοφοροῦν 9 τόμοι οἱ ὁποῖοι περιέχουν τὰς ἐκφωνήσεις καὶ τὰς λύσεις τῶν ἀσκήσεων τῆς *'Αλγέβρας καὶ Συμπληρώματος 'Αλγέβρας* ὑπὸ *Π. Γ. Τόγκα.* Οἱ τόμοι αὐτοὶ ἀντικαθιστοῦν πλήρως τοὺς ἐξαντληθέντας ἕξη τόμους τῶν *'Ασκήσεων καὶ Θεωρίας 'Αλγέβρας.* Τιμῶνται πρὸς Δρχ. 35 ἕκαστος πλὴν τοῦ VIII πρὸς 50 Δρχ.
5. **'Ασκήσεις τοῦ Συμπληρώματος 'Αλγέβρας.** Τόμοι VIII-IX Δρχ. 85.
6. **'Ασκήσεις καὶ Προβλήματα Τριγωνομετρίας** ὑπὸ *Π. Γ. Τόγκα.* Εἰς 4 τόμους: 'Ο Ι τιμᾶται 35 δρχ., ὁ ΙΙ 35 δρχ., ὁ ΙΙΙ 50 δρχ. καὶ ὁ IV 50 δρχ. 'Ολόκληρον δεμένον εἰς ἕνα τόμον πανόδετον δρχ. 190. Τὸ βιβλίον αὐτὸ εἶναι πολύτιμον βοήθημα διὰ τοὺς ὑποψηφίους τῶν 'Ανωτάτων Σχολῶν, διότι περιέχει λυμένας ὅλας τὰς ἀσκήσεις τῶν Ferval, Caronnet, 'Ιησουΐτῶν καὶ πολλὰ θέματα Τριγωνομετρίας, ποὺ ἐδόθησαν εἰς Σχολὰς διαφόρων Κρατῶν.
7. **Λύσεις τῶν ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων Γεωμετρίας** τῶν περιεχομένων εἰς τὴν Γ' καὶ Δ' ἔκδοσιν τῆς Θεωρητικῆς Γεωμετρίας. Κυκλοφοροῦν 9 τόμοι περιέχοντες τὰς λύσεις τῶν ἀσκήσεων τῶν 7 βιβλίων τῆς Θεωρητικῆς Γεωμετρίας. Τιμῶνται πρὸς δρχ. 35 ἕκαστος.
8. **Προβλήματα Γεωμετρικῶν τόπων καὶ κατασκευῶν** εἰς δύο τόμους. Αἱ ἀσκήσεις τῶν δύο αὐτῶν τόμων περιελήφθησαν εἰς τὴν *Θεωρητικὴν Γεωμετρίαν* (Γ' καὶ Δ' ἔκδοσις) καὶ ἑπομένως αἱ λύσεις των περιέχονται εἰς τοὺς Τόμους, τοὺς ἀναφερομένους ἀνωτέρω (7).
9. **'Ασκήσεις καὶ Προβλήματα Γεωμετρίας** (Συμπλήρωμα). Τὸ βιβλίον αὐτὸ περιέχει 397 ἀσκήσεις Γεωμετρίας λυμένας, αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς τὰς μεθόδους, ποὺ χρησιμοποιεῖ ἡ Γεωμετρία πρὸς ἀπόδειξιν γεωμ. θεωρημάτων καὶ τὴν λύσιν γεωμ. προβλημάτων. Τὸ βιβλίον αὐτὸ εἶναι ἰδιαιτέρως ἀπαραίτητον διὰ τοὺς ὑποψηφίους τοῦ Πολυτεχνείου. Τιμᾶται Δρχ. 50.-
10. **Νέοι Πίνακες Λογαρίθμων.** Νέα ἔκδοσις, νέον σχῆμα, νέα διάταξις, περισσότεροι πίνακες, πληρέστερον τυπολόγιον 'Αλγέβρας, Γεωμετρίας, Τριγωνομετρίας Σφαιρικῆς Τριγωνομετρίας, Φυσικῆς, 'Αναλύσεως, Κοσμογραφίας, Χημείας. Τιμῶνται Δρχ. 20.—
11. **Λύσεις τῶν ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων τῶν περιεχομένων εἰς τὴν ἐγκεκριμένην 'Αριθμητικὴν** τοῦ 'Οργανισμοῦ ἐκδ. Σχολικῶν Βιβλίων (Π. Τόγκα — Θ. Πασσᾶ — Ν. Νικολάου). Δρχ. 20.—