ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΜΕΛΕΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ
Ἀριθμὸς Δημοσιεύματος 24

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΠΡΩΤΗΝ ΒΑΘΜΙΔΑ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ II

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΤΑΞΕΩΣ

ΑΝΑΤΥΠΩΣΙΣ

ΑΘΗΝΑΙ 1964

17/100
09

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΜΕΛΕΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ
Ἀριθμὸς Δημοσιεύματος 24

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΠΡΩΤΗΝ ΒΑΘΜΙΔΑ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ II

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΤΑΞΕΩΣ

ΑΝΑΤΥΠΩΣΙΣ

ΑΘΗΝΑΙ 1964

'Επιτροπή Πειραματικής Μελέτης καί Διδασκαλίας τῶν Μαθηματικῶν είς τήν Μ. 'Εκπαίδευσιν.

1) Κ. Παπαϊωάννου , Καθηγ. Φυσικομαθ. Σχολῆς Παν/μίου 'Αθηνῶν καί τοῦ Ε.Μ.Πολυτεχνείου , 'Ακαδημαϊκός.
2) Δ. Κάππος, Καθηγ. τῶν Μαθηματικῶν τοῦ Παν/μίου 'Αθηνῶν,
3) Ν. Κριτικός , Καθηγ. τῶν Μαθηματικῶν Ε.Μ. Πολυτεχνείου.
4) Ν. Μιχαλόπουλος, Μαθηματικός,έπίτ. 'Εκπαιδευτικός Σύμβουλος.
5) Ν. Μπάρκας , Μαθηματικός, 'Εκπαιδευτικός Σύμβουλος
6) Ν. Σωτηράκης , Καθηγ. τῶν Μαθηματικῶν τοῦ Γυμνασίου Παλαιοῦ Φαλήρου
7) Νίκη Δενδρινοῦ - 'Αντωνακάκη , Τεχνικός Σύμβουλος 'Εκπαιδευτικῆς Διοικήσεως.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἡ Ἐπιτροπή Πειραματικῆς Μελέτης καί Διδασκαλίας τῶν Μαθηματικῶν εἰς τήν Μέσην Ἐκπαίδευσιν μετά τήν συλλογικήν συγγραφήν τοῦ Βιβλίου I, Μαθηματικῶν Α΄τάξεως, καί τήν ὀργάνωσιν κατά Σεπτέμβριον 1962 ἑνός σχετικοῦ Σεμιναρίου ἐν συνεργασίᾳ μέ τόν ἐμπειρογνώμονα τοῦ ΟΟΣΑ καθηγητήν κ. H. Fehr, ἠσχολήθη κατά τό λῆξαν σχολικόν ἔτος μέ τήν παρακολούθησιν τῆς πειραματικῆς διδασκαλίας εἰς τά δέκα ἐπιλεγέντα Γυμνάσια καί, παραλλήλως, μέ τήν συλλογικήν συγγραφήν τοῦ ἀνά χεῖρας Βιβλίου II, Μαθηματικῶν Β΄τάξεως. Τοῦτο ἀποτελεῖ τμῆμα σχετικοῦ προγράμματος τῆς Ὑπηρεσίας Μελετῶν καί Συντονισμοῦ τοῦ Ὑπουργείου Παιδείας διά τόν ἐκσυγχρονισμόν τῆς μαθηματικῆς ἐκπαιδεύσεως ἐν Ἑλλάδι μέ τήν βοήθειαν τῆς Ὑπηρεσίας Τεχνικῆς Βοηθείας τοῦ Ὑπουργείου Συντονισμοῦ καί τοῦ Ὀργανισμοῦ Οἰκονομικῆς Συνεργασίας καί Ἀναπτύξεως.

Αἱ εὐνοϊκαί ἀντιδράσεις τῶν μαθητῶν εἰς τό ὑπό πειραματισμόν νέον πρόγραμμα, αἱ καλαί ἐντυπώσεις τῆς Ἐπιτροπῆς ἀπό τήν παρακολούθησιν τοῦ πειράματος, ἡ ὁμόφωνος γνώμη τῶν διδασκόντων περί τῆς ἱκανοποιητικῆς ἀποδόσεως τοῦ ἔργου των καί τά ἀποτελέσματα τῶν γενομένων δύο γραπτῶν δοκιμασιῶν (tests) ἐπιτρέπουν εὐοίωνον πρόγνωσιν διά τήν τελικήν ἐπιτυχίαν τοῦ πειράματος εἰς τήν πρώτην βαθμίδα τῆς Μέσης Ἐκπαιδεύσεως.

Εἶναι ἀληθές ὅτι ἡ προβλεφθεῖσα διά τήν Α΄τάξιν καί περιληφθεῖσα εἰς τό Βιβλίον I ὕλη δέν κατέστη δυνατόν νά καλυφθῇ ἐξ ὁλοκλήρου κατά τό λῆξαν σχολικόν ἔτος. Τοῦτο ὀφείλεται ἀφ᾽ ἑνός εἰς τήν κάπως μεγάλην ἔκτασίν της (24 τυπογραφικά φύλλα) ἐν συγκρίσει μέ τάς διατιθεμένας 4 ὥρας ἑβδομαδιαίας διδασκαλίας καί ἀφ᾽ ἑτέρου εἰς τινας μή ὁμαλάς συνθήκας λειτουργίας τῶν Γυμνασίων κατά τό διαρρεῦσαν σχολικόν ἔτος. Οὕτω ἔμενεν ἀδίδακτον τό περισσότερον ἀπό τό τρίτον μέρος τοῦ βιβλίου I. Δι᾽αὐτόν ἀκριβῶς τόν λόγον τό ἀνά χεῖρας Βιβλίον II ἔχει περιορισθῆ εἰς 15 μόνον τυπογραφικά φύλλα μέ τήν πρόβλεψιν ὅτι κατά τό νέον σχολικόν ἔτος 1963 - 1964 θά καταστῇ δυνατή ἡ ὁλοκλήρωσις τῆς διδασκαλίας τοῦ ὑπολοίπου μέρους τοῦ Βιβλίου I καθώς καί ἡ διδασκαλία τοῦ παρόντος τόμου χάρις κυρίως εἰς τήν θέλησιν καί τόν ζῆλον τῶν συναδέλφων οἱ ὁποῖοι ἀνέλαβον τήν διεξαγωγήν τοῦ πειράματος καί ἀπέκτησαν ἤδη ἐπί τοῦ προκειμένου σχετικήν πεῖραν.

Ὅπως τό Βιβλίον I, οὕτω καί τό ἀνά χεῖρας ἔχει συνταχθῆ, τόσον κατά τό περιεχόμενόν του εἰς ὕλην ὅσον καί κατά τόν τρόπον τῆς ἐκθέσεώς της, σύμφωνα μέ τάς προγραμματικάς εἰσηγήσεις τοῦ Ὀργανισμοῦ Οἰκονομικῆς Συνεργασίας καί Ἀναπτύξεως. Κατά βάσιν ὁ τρόπος τῆς ἐκθέσεως στηρίζεται εἰς μίαν ἐνορατικήν παρουσίασιν καί μελέτην τῶν περιλαμβανομένων μαθηματικῶν θεμάτων, χωρίς ὅμως ἁπλουστεύσεις αἱ ὁποῖαι θά ἐζημίωναν τήν ἐπιστημονικήν ἀκρίβειαν καί αὐστηρότητα. Σχεδόν πάντοτε παρέχονται αἰτιολογήσεις τῶν διατυπουμένων προτάσεων μέ ἁπλοῦς συλλογισμούς χωρίς ὅμως τόν "φορμαλισμόν" τοῦ αὐστηροῦ παραγωγικοῦ συλλογισμοῦ. Δέν πρέπει φυσικά νά ἀναμείνωμεν καί νά ἀξιώσωμεν ἀπό τόν μαθητήν ὅπως ἐκθέσῃ ἐξεταζόμενος τάς διδομένας εἰς τό βιβλίον ἀποδεικτικάς αἰτιολογήσεις. Ἡ κατανόησις τῶν συλλογισμῶν οἱ ὁποῖοι τάς συγκρατοῦν πρέπει νά θεωρηθῇ ἐπαρκής. Εἰς ποῖον βαθμόν ἐπετεύχθη αὕτη θά φανῇ ἑκάστοτε ἀπό μίαν ζωντανήν συζήτησιν τοῦ διδάσκοντος μέ τήν τάξιν καί ἀπό τήν πραγμάτευσιν τῶν προσφορωτέρων ἀπό τάς πολλάς ἀσκήσεις αἱ ὁποῖαι συνοδεύουν τάς διδακτικάς ἑνότητας τοῦ βιβλίου. Οὕτω ἡ Ἐπιτροπή ἐλπίζει ὅτι θά διευκολυνθῇ καί θά ἐπιταχυνθῇ ἡ ὡρίμανσις τῆς μαθηματικῆς σκέψεως τοῦ μαθητοῦ ἡ τόσον ἀπαραίτητος διά νά παρακολουθήσῃ οὗτος ἀνέτως τά σύγχρονα Μαθηματικά κατά τήν μετέπειτα ἐκπαίδευσίν του.

Ἄς μᾶς ἐπιτραπῇ ἐν τέλει νά ἐπαναλάβωμεν ὅτι καί μέ τό ἀνά χεῖρας βιβλίον ἀπευθυνόμεθα περισσότερον εἰς τόν διδάσκοντα παρά εἰς τούς μαθητάς του καί ὅτι ἀναμένομεν ὅπως οὗτος μέ τήν ζωντανήν διδασκαλίαν του βοηθήσῃ τούς διδασκομένους εἰς τήν κατανόησιν τοῦ περιεχομένου τοῦ βιβλίου καί εἰς τήν ὑπερνίκησιν ἐνδεχομένων δυσχερειῶν πού ὀφείλονται εἴτε εἰς τήν ὑψηλήν στάθμην τῆς ὕλης μερικῶν τμημάτων εἴτε εἰς τήν πυκνότητα τῆς διατυπώσεως. Ἄς μή λησμονῶμεν ὅτι πρόκειται περί ἑνός πειράματος τό ὁποῖον ἀποσκοπεῖ εἰς τήν ἐπίτευξιν μιᾶς ἐνισχυμένης καί ἐκσυγχρονισμένης μαθηματικῆς παιδείας κρινομένης ἀπαραιτήτου διά τούς σκοπούς ἰδίᾳ τῆς τεχνικῆς καί οἰκονομικῆς προόδου ὅλων τῶν χωρῶν μελῶν τοῦ Ὀργανισμοῦ Οἰκονομικῆς Συνεργασίας καί Ἀναπτύξεως.

Σεπτέμβριος 1963 Ἡ Ἐπιτροπή

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

Σύνολα. Διμελεῖς σχέσεις καί γραφική των παράστασις 'Απεικονίσεις καί συναρτήσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

Ἀλγεβρικός λογισμός.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄

Ἀναλογίαι καί ἐφαρμογαί των

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

Σύνολα. Διμελεῖς σχέσεις καί γραφική των παράστασις. Ἀπεικονίσεις καί συναρτήσεις.

§ 1. Ἴσα σύνολα. Ἰσοδύναμα σύνολα.

1.1. Ἴσα σύνολα. Εἰς τήν σελίδα 45Α τοῦ Βιβλίου Ι ὡρίσαμεν τήν ἰσότητα (ἤ ταυτότητα) δύο συνόλων Α καί Β ὡς ἑξῆς: Τό σύνολον Α εἶναι ἴσον μέ τό σύνολον Β, ἄν τά στοιχεῖα του ταυτίζωνται ἕνα πρός ἕνα μέ τά στοιχεῖα τοῦ Β. Αὐτό ἐκφράζεται συμβολικῶς ὡς ἑξῆς:

$$A = B \iff (x \in A \Rightarrow x \in B \quad \text{καί} \quad x \in B \Rightarrow x \in A).$$

Χρησιμοποιοῦντες τήν ἔννοιαν τοῦ ὑποσυνόλου (Βιβλ. Ι, σελ. 40-42Α) ἠμποροῦμεν νά δώσωμεν εἰς τόν παραπάνω ὁρισμόν καί τήν ἀκόλουθον συμβολικήν διατύπωσιν:

$$A = B \iff (A \subseteq B \text{ καί } B \subseteq A).$$

Ὅταν λοιπόν ἕνα σύνολον δίδεται μέ ἀναγραφήν τῶν στοιχείων του κατά τινα σειράν (τάξιν), ἡ μεταβολή αὐτῆς τῆς σειρᾶς δίδει ἕνα σύνολον ἴσον μέ τό ἀρχικόν. Π.χ. ἄν Τ εἶναι τό σύνολον $\{A, B, \Gamma, AB, B\Gamma, \Gamma A\}$ τῶν κορυφῶν καί τῶν πλευρῶν ἑνός τριγώνου ΑΒΓ καί $T' = \{AB, B\Gamma, \Gamma A, A, B, \Gamma\}$ τό σύνολον τῶν πλευρῶν καί τῶν κορυφῶν τοῦ ἰδίου τριγώνου, τότε $T = T'$.

Ἰδού τώρα καί μερικά ἄλλα παραδείγματα ἰσότητος συνόλων.

1) $\left.\begin{array}{l} A = \{x \,/\, x \text{ ἄκρον πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου ΚΛΜΝ}\} \\ B = \{x \,/\, x \text{ ἄκρον διαγωνίου τοῦ τετραγών. ΚΛΜΝ}\} \end{array}\right\} \Rightarrow A = B$

2) $\left.\begin{array}{l} A = \{x \,/\, x \text{ διαιρέτης τοῦ } 12\} \\ B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \end{array}\right\} \Rightarrow A = B$

3) $\left.\begin{array}{l} A = \{x \,/\, x \text{ φυσικός ἀριθμός μέ δεκαδικήν παράστασιν λήγουσαν εἰς } 0, 2, 4, 6, 8\} \\ B = \{x \,/\, x \text{ φυσικός ἀριθμός ἄρτιος}\} \end{array}\right\} \Rightarrow A = B$

4) $\left.\begin{array}{l} A = \{x/x \text{ πολλαπλάσιον τοῦ } 5\} \\ B = \left\{x/x \begin{array}{l}\text{ἀκέραιος μέ δεκαδικήν παρά-} \\ \text{στασιν λήγουσαν εἰς 0 ἤ 5}\end{array}\right\} \end{array}\right\} \Longrightarrow A = B$

5) $\left.\begin{array}{l} A = \{x/x \text{ ἰσοσκελές τρίγωνον}\} \\ B = \{x/x \text{ τρίγωνον μέ δύο γωνίας ἴσας}\} \end{array}\right\} \Longrightarrow A = B$

1.2. 'Υπενθυμίζομεν ὅτι ἡ ἰσότης συνόλων ἔχει τάς ἀκολούθους ἰδιότητας:

1) τήν ἀνακλαστικήν : $A = A$,

2) τήν συμμετρικήν : $B = \Gamma \Longleftrightarrow \Gamma = B$

καί 3) τήν μεταβατικήν : $(A = B$ καί $B = \Gamma) \Longrightarrow A = \Gamma$.

1.3. 'Ισοδύναμα σύνολα. 'Εμάθαμεν (Βιβλ. Ι, σ. 46Α) ὅτι ἕνα σύνολον Α λέγεται ἰσοδύναμον μέ ἕνα ἄλλο Β , ἐάν εἰς κάθε στοιχεῖον τοῦ Α ἠμποροῦμεν νά ἀντιστοιχίσωμεν ἕνα στοιχεῖον τοῦ Β οὕτως ὥστε καί κάθε στοιχεῖον τοῦ Β νά εἶναι ἀντίστοιχον ἑνός καί μόνον στοιχείου τοῦ Α.

Μέ συντομωτέραν ἔκφρασιν, δύο σύνολα Α καί Β λέγονται ἰσοδύναμα μεταξύ των, ἐάν τά στοιχεῖα τοῦ ἑνός ἠμποροῦν νά ἀντιστοιχισθοῦν ἕνα πρός ἕνα εἰς τά στοιχεῖα τοῦ ἄλλου. Γράφομεν τότε:

$A \sim B$ (καί διαβάζομεν: Α ἰσοδύναμον Β).

Παραδείγματα: 1) $\left.\begin{array}{l} A = \{5,7,3\} \\ B = \{\kappa,\lambda,5\} \end{array}\right\} \Longrightarrow A \sim B$

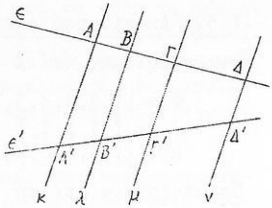
2) $\left.\begin{array}{l} A = \{x/x \text{ γράμμα τοῦ ἑλλην. ἀλφαβήτου}\} \\ B = \{x/x \text{ φυσικός ἀριθμός } \leqslant 24\} \end{array}\right\} \Longrightarrow A \sim B$

3) $\left.\begin{array}{l} A = \{x/x \text{ ἐποχή τοῦ ἔτους}\} \\ B = \{x/x \text{ κύριον σημεῖον τοῦ ὁρίζοντος}\} \end{array}\right\} \Longrightarrow A \sim B$

4) $\left.\begin{array}{l} A = \{x/x \text{ μαθητής τοῦ 'Ιησοῦ}\} \\ B = \{x/x \text{ μήν τοῦ ἔτους}\} \end{array}\right\} \Longrightarrow A \sim B$

5) $\left.\begin{array}{l} A = \{x/x \text{ κορυφή τριγώνου}\} \\ B = \{x/x \text{ πλευρά τριγώνου}\} \end{array}\right\} \Longrightarrow A \sim B$

6) Ἄς χαράξωμεν δύο τυχούσας εὐθείας ε καί ε΄ ἐπί ἑνός ἐπιπέδου καί ἄς τάς κόψωμεν μέ τάς εὐθείας κ, λ, μ, ν, παραλλήλους μεταξύ των. Παρατηροῦμεν ὅτι



(βλ. σχ. παραπλεύρως) εἰς τά τμήματα ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ, ΓΔ, πού ὁρίζονται ἐπάνω εἰς τήν ε ἀντιστοιχοῦν ἕνα πρός ἕνα κατά σειράν τά τμήματα Α΄Β΄, Α΄Γ΄, Α΄Δ΄, Β΄Γ΄, Β΄Δ΄, Γ΄Δ΄ τῆς εὐθείας ε΄. Ἐπομένως

{ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ, ΓΔ} ~ {Α΄Β΄, Α΄Γ΄, Α΄Δ΄, Β΄Γ΄, Β΄Δ΄, Γ΄Δ΄}

7) $\left.\begin{array}{l} A = \{x/x \text{ σημεῖον μιᾶς περιφερείας } (\Pi)\} \\ B = \{x/x \text{ ἀκτίς τῆς περιφερείας } (\Pi)\} \end{array}\right\} \Longrightarrow A \sim B.$

Πράγματι, εἰς κάθε σημεῖον τῆς (Π) ἠμποροῦμεν νά ἀντιστοιχίσωμεν τήν ἀκτῖνα πού καταλήγει εἰς τό σημεῖον αὐτό.

8) $\left.\begin{array}{l} A = \{x/x \text{ ἐπίκεντρος γωνία εἰς ἕνα κύκλον } K\} \\ B = \{x/x \text{ τόξον τοῦ κυκλου } K\} \end{array}\right\} \Longrightarrow A \sim B$

Πράγματι, αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι εἰς ἕνα κύκλον καί τά τόξα τοῦ ἰδίου κύκλου ἀντιστοιχοῦν ἕνα πρός ἕνα (Βιβλ.Ι, σ.98Α).

<u>1.4. Ἰδιότητες ἰσοδυνάμων συνόλων.</u> Ὑπενθυμίζομεν τάς ἀκολούθους ἰδιότητας τῶν ἰσοδυνάμων συνόλων:

1) $A \sim A$, ἀνακλαστικήν

2) $A \sim B \Longrightarrow B \sim A$, συμμετρικήν

3) $(A \sim B$ καί $B \sim \Gamma) \Longrightarrow A \sim \Gamma$, μεταβατικήν

4) $A = B \Longrightarrow A \sim B$

Τό ἀντίστροφον

$$A \sim B \Longrightarrow A = B$$

τῆς ἰδιότητος αὐτῆς <u>δέν</u> ἀληθεύει, ὅπως φαίνεται ἀπό τά δοθέντα παραδείγματα 1) ἕως 8).

5) Ἐάν ἕνα σύνολον Α εἶναι πεπερασμένον, τότε καί κάθε ἰσοδύναμον μέ αὐτό εἶναι πεπερασμένον καί ἔχει τόν ἴδιον πληθικόν ἀριθμόν μέ τό Α. Π.χ. τά δύο ἰσοδύναμα σύνολα τοῦ παραδείγματος 1) τοῦ ἐδαφίου 1.3 ἔχουν πληθικόν ἀριθμόν 3, τοῦ παραδείγματος 2) πληθικόν ἀριθμόν 24, τοῦ παραδείγματος 3) πληθικόν ἀριθμόν 4, τοῦ παραδείγματος 4) πληθικόν ἀριθμόν 12.

1.5. Ἀπαριθμητά ἀπειροσύνολα. Ἔστω Φ τό σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καί Α τό σύνολον τῶν ἀρτίων φυσικῶν ἀριθμῶν:

$$\begin{array}{l} \Phi = \{1,2,3,4,5,\ldots,\ \nu,\ \ldots\}, \\ \quad\ \ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow \qquad\ \ \updownarrow \\ A = \{2,4,6,8,10,\ldots,2\nu,\ \ldots\}. \end{array}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τά στοιχεῖα τῶν δύο συνόλων ἀντιστοιχοῦν ἕνα πρός ἕνα κατά τόν τρόπον πού ὑποδεικνύομεν μέ τά διπλᾶ βέλη· ἐπομένως τό σύνολον Α τῶν ἀρτίων εἶναι ἰσοδύναμον μέ τό σύνολον Φ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καί διά τοῦτο τό ὀνομάζομεν ἀπαριθμητόν. Μέ ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν:

$$\begin{array}{l} \Phi = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots,\ \nu,\ \ldots\}, \\ \quad\ \ \updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \updownarrow \qquad\ \updownarrow \\ T = \{1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ldots,\ \nu^2,\ \ldots\}. \end{array}$$

Ἐπομένως καί τό σύνολον Τ τῶν τετραγώνων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀπειροσύνολον ἀπαριθμητόν.

1.6. Μή ἀπαριθμητά σημειοσύνολα. Γνωρίζομεν (Βιβλ.Ι,σ,56Α) ὅτι ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα καί, γενικώτερον, μία γραμμή ἠμπορεῖ νά θεωρηθῇ ὡς ἕνα (μή πεπερασμένον) σύνολον σημείων. Τά σύνολα σημείων τά ὀνομάζομεν μονολεκτικῶς σημειοσύνολα. Τά ἀνωτέρω σημειοσύνολα καθώς καί ἄλλα, ὅπως τό σύνολον τῶν σημείων μιᾶς ἐπιφανείας, τό σύνολον τῶν σημείων ἑνός στερεοῦ κτλ., ἔχουν τήν ἰδιότητα νά εἶναι ἀπειροσύνολα μή ἀπαριθμητά, ὅπως θά μάθωμεν εἰς ἀνωτέραν τάξιν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά ἐξετάσετε ἄν τά δύο σύνολα

Α = {x/x τρίγωνον ἰσόπλευρον},

Β = {x/x τρίγωνον ἰσογώνιον}

εἶναι ἴσα.

2) Νά ἐξετάσετε ἄν τά δύο σύνολα

Α = {x/x παραλληλόγραμμον},

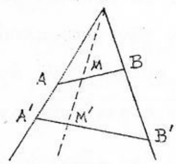
Β = {x/x τετράπλευρον μέ ἕνα κέντρον συμμετρίας}

εἶναι ἴσα.

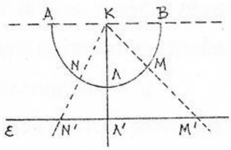
3) Αἱ συνηθέστεραι μονάδες εἶναι: διά τά μήκη τό μέτρον m καί αἱ ὑποδιαιρέσεις του dm , cm , mm , διά τάς ἐπιφανείας αἱ m^2, dm^2, cm^2, mm^2καί διά ὄγκους αἱ m^3, dm^3, cm^3, mm^3. Νά ἐξετάσετε ἄν τά τρία σύνολα πού ἀποτελοῦνται ἀντιστοίχως ἀπό τάς ἀνωτέρω μονάδας μήκους,ἐπιφανείας καί ὄγκου εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των.

4) Ἀπό τό κοινόν κέντρον δύο ὁμοκέντρων κύκλων χαράσσομεν τέσσαρας ἡμιευθείας πρός διαφόρους κατευθύνσεις. Νά ἐξετάσετε ἄν τά δύο σύνολα τῶν τόξων πού ὁρίζονται ἀπό τάς ἡμιευθείας αὐτάς ἐπί τῶν δύο περιφερειῶν εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των. Ἄραγε συμβαίνει τό ἴδιον καί μέ ὁσασδήποτε ἡμιευθείας μέ ἀρχήν τό κέντρον ;

5) Ἀπό τήν κοινήν κορυφήν δύο κατακορυφήν γωνιῶν χαράσσομεν εὐθείας κειμένας ἐντός τῶν γωνιῶν τούτων καί χωριζούσας αὐτάς εἰς διαδοχικάς γωνίας. Νά ἐξετάσετε ἐάν τά δύο σύνολα τῶν σχηματιζομένων διαδοχικῶν γωνιῶν εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των.



6) Νά ἐξηγήσετε διατί τά δύο σημειοσύνολα τῶν τμημάτων AB καί A΄B΄ τοῦ παραπλεύρως σχήματος εἶναι ἰσοδύναμα.



7) Νά ἐξηγήσετε διατί τό σημειοσύνολον τῆς ἡμιπεριφερείας χωρίς τά ἄκρα της A, B τοῦ παραπλεύρως σχήματος (εἰς τό ὁποῖον ἡ διάμετρος AB εἶναι // ε) εἶναι ἰσοδύναμον μέ τό σημειοσύνολον τῆς εὐθείας ε.

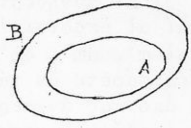
§ 2. Σχέσις ἐγκλεισμοῦ.

2.1. Ἐμάθαμεν (Βιβλ. I, σελ. 40Α) τί ὀνομάζεται ὑποσύνολον ἑνός συνόλου καί πῶς συμβολίζεται: ἕνα σύνολον A εἶναι ὑποσύνολον ἑνός συνόλου B, ἐάν καί μόνον ἐάν κάθε στοιχεῖον τοῦ A εἶναι στοιχεῖον καί τοῦ B. Συμβολικῶς γράφομεν:

$$A \subseteq B \iff (x \in A \Rightarrow x \in B) .$$

Ἀντί τῆς ἐκφράσεως: τό A εἶναι ὑποσύνολον τοῦ B χρησιμοποιοῦμεν καί τήν ἔκφρασιν: τό A ἐγκλείεται εἰς τό B.

Αὐτή ἡ σχέσις ἐγκλεισμοῦ παριστάνεται γραφικῶς μέ τά Βέννια διαγράμματα τοῦ παραπλεύρως σχήματος.



Παραδείγματα. 1ον. Τό σύνολον Π τῶν πτηνῶν ἐγκλείεται εἰς τό σύνολον Ζ τῶν ζώων.

2ον. Τό σύνολον Ρ τῶν ρόδων ἑνός ἀνθοκήπου ἐγκλείεται εἰς τό σύνολον Α τῶν ἀνθέων τοῦ ἰδίου ἀνθοκήπου.

3ον. Τό σύνολον τῶν ἀνωμάλων ρημάτων τῆς ἑλληνικῆς γλώσσης ἐγκλείεται εἰς τό σύνολον τῶν ρημάτων της.

4ον. Τό σύνολον τῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων ἐγκλείεται εἰς τό σύνολον τῶν ἰσογωνίων τριγώνων.

5ον. Τό σύνολον τῶν παραλληλογράμμων ἐγκλείεται εἰς τό σύνολον τῶν τετραπλεύρων.

Εἰς ποῖα ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων τό ἐγκλεισμένον σύνολον εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον καί εἰς ποῖα δέν εἶναι ;

2.2. Ἄς εἶναι Μ τό σύνολον τῶν μαθηματικῶν βιβλίων μιᾶς βιβλιοθήκης καί Β τό σύνολον τῶν βιβλίων τῆς βιβλιοθήκης αὐτῆς. Χαρακτηριστική ἰδιότης τῶν στοιχείων τοῦ Μ εἶναι:

μ = μαθηματικόν βιβλίον τῆς βιβλιοθήκης.

Χαρακτηριστική ἰδιότης τῶν στοιχείων τοῦ Β εἶναι:

β = βιβλίον τῆς βιβλιοθήκης.

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἐγκλεισμός $M \subseteq B$ ἔχει ὡς συνέπειαν τήν ἀκόλουθον λογικήν σχέσιν (συνεπαγωγήν) :

$$\mu \Longrightarrow \beta \, .$$

Γενικῶς, ἐάν $A \subseteq B$ καί α, β ἀντίστοιχοι χαρακτηριστικαί ἰδιότητες τῶν στοιχείων τῶν δύο συνόλων, τότε θά ἔχωμεν τήν συνεπαγωγήν

$$\alpha \Longrightarrow \beta \, .$$

Ἀντιστρόφως, ἐάν μία ἰδιότης α συνεπάγεται τήν ἰδιότητα β , τότε τό σύνολον Α τῶν στοιχείων πού χαρακτηρίζονται ἀπό τήν ἰδιότητα α ἐγκλείεται εἰς τό σύνολον Β τῶν στοιχείων πού ἔχουν χαρακτηριστικήν ἰδιότητα τήν β. Δηλαδή ἀληθεύει ἡ ἀκόλουθος λογική ἰσοδυναμία:

$$(A \subseteq B) \iff (\alpha \Rightarrow \beta).$$

<u>Παράδειγμα.</u> Ἄς παραστήσωμεν μέ ε τήν ἰδιότητα νά εἶναι ἕνα πολύγωνον κυρτόν ἑξάγωνον, μέ κ τήν ἰδιότητα νά εἶναι ἕνα πολύγωνον κυρτόν, μέ Ε τό σύνολον τῶν κυρτῶν ἑξαγώνων καί μέ Κ τό σύνολον τῶν κυρτῶν πολυγώνων. Θά ἔχωμεν τότε τήν λογικήν ἰσοδυναμίαν:

$$(\varepsilon \Rightarrow \kappa) \iff (E \subseteq K).$$

<u>2.3. Δυναμοσύνολον.</u> Ἀπό τό σύνολον $A = \{\alpha,\beta,\gamma\}$ ἠμποροῦμεν νά σχηματίσωμεν τά ἑξῆς $8 = 2^3$ ὑποσύνολά του:

$$\{\ \},\ \{\alpha\},\ \{\beta\},\ \{\gamma\},\ \{\alpha,\beta\},\ \{\alpha,\gamma\},\ \{\beta,\gamma\},\ \{\alpha,\beta,\gamma\}.$$

Τό σύνολον τῶν ὑποσυνόλων τούτων καλεῖται <u>δυναμοσύνολον</u> τοῦ συνόλου Α καί συμβολίζεται μέ τήν γραφήν $\mathcal{P}(A)$, ὅπου τό γράμμα $\mathcal{P}$ εἶναι τό καλλιγραφικόν λατινικόν πέ.
Εἶναι εὔκολον νά βεβαιωθῶμεν ὅτι ἐάν ἕνα πεπερασμένον σύνολον Α ἔχῃ 1, 2, 3, 4, 5, 6, κτλ. στοιχεῖα, τότε τό δυναμοσύνολόν του $\mathcal{P}(A)$ ἔχει ἀντιστοίχως $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, κ.τ.λ. στοιχεῖα.

<u>Ἐφαρμογή.</u> Μία εὐθεία δ θεωρουμένη ὡς σημειοσύνολον περιέχεται εἰς ἕνα ἐπίπεδον Π, θεωρούμενον καί τοῦτο ὡς σημειοσύνολον. Δυνάμεθα τότε νά γράφωμεν:

$$\delta \subseteq \Pi \quad \text{καθώς καί} \quad \delta \in \mathcal{P}(\Pi),$$

διότι ἡ εὐθεῖα δ εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Π, ἑπομένως στοιχεῖον τοῦ δυναμοσυνόλου $\mathcal{P}(\Pi)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Καλοῦμεν Α τό σύνολον τῶν ἀειθαλῶν δένδρων καί Δ τό σύνολον τῶν δένδρων. Νά γράφετε τήν σχέσιν ἐγκλεισμοῦ πού ἰσχύει διά τά δύο αὐτά σύνολα.

2) Ἔστω $A = \{x/x$ πτηνόν ἀποδημητικόν$\}$,
$\Pi = \{x/x$ πτηνόν$\}$.
Ποία σχέσις ἐγκλεισμοῦ ὑπάρχει μεταξύ Π καί Α καί ποία λογική σχέσις (συνεπαγωγή) ἀληθεύει μεταξύ τῶν χαρακτηριστικῶν ἰδιοτήτων τῶν δύο συνόλων ;

3) Ὅμοιον ζήτημα διά τά σύνολα:
$A = \{x/x$ ἐπίπεδον χωρίον$\}$,
$B = \{x/x$ κύκλος$\}$.

4) Ὅμοιον ζήτημα διά τά σύνολα·
$A = \{x/x$ πολλαπλάσιον τοῦ $3\}$,
$B = \{x/x$ πολλαπλάσιον τοῦ $9\}$.

5) Ἔστω $M = \{x/x$ μηλιά$\}$,
$O = \{x/x$ ὀπωροφόρον δένδρον$\}$,
$\Delta = \{x/x$ δένδρον$\}$.
Παρατηροῦμεν ὅτι
$M \subseteq O$, $O \subseteq \Delta$ καί $M \subseteq \Delta$.
Μέ ἄλλα λόγια, ἡ σχέσις ἐγκλεισμοῦ ἔχει τήν μεταβατικήν ἰδιότητα:
$(M \subseteq O$ καί $O \subseteq \Delta) \Longrightarrow M \subseteq \Delta$.
Δώσατε δύο ἄλλα παραδείγματα διά τήν μεταβατικότητα τῆς σχέσεως ἐγκλεισμοῦ.

6) Νά εὕρετε τό δυναμοσύνολον τοῦ συνόλου
$A = \{$Δημήτρης , Νίκος$\}$.

7) Νά εὕρετε τό δυναμοσύνολον $\mathcal{P}(A)$ τοῦ συνόλου
$A = \{x/x$ τόνος εἰς τήν ἑλληνικήν γλῶσσαν$\}$.

8) Νά εὕρετε τό $\mathcal{P}(A)$, ἄν
$A = \{x/x$ φυσικός ἀριθμός $\geqslant 3$ καί $< 7\}$.

§ 3. Τομή συνόλων καί σύζευξις ἰδιοτήτων.

3.1. Τομή συνόλων. Ἐμάθαμεν (Βιβλ. Ι, σ. 51Α) ὅτι τομή δύο ἤ περισσοτέρων συνόλων εἶναι ἕνα σύνολον πού ἀποτελεῖται ἀπό τά στοιχεῖα τά ὁποῖα εἶναι κοινά εἰς ὅλα τά δοθέντα σύνολα. Π.χ. διά τήν τομήν $A \cap B$ δύο συνόλων Α καί Β ἔχομεν:

$$x \in (A \cap B) \iff x \in A \quad \text{καί} \quad x \in B.$$

Θά δώσωμεν τώρα μερικά παραδείγματα πρός ἐπανάληψιν καί θά τά χρησιμοποιήσωμεν διά νά κάμωμε μερικάς προσθέτους παρατηρήσεις.

1) Ἔστω

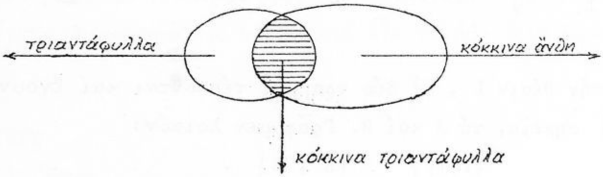
$A = \{x/x$ κόκκινον ἄνθος$\}$,

$B = \{x/x$ τριαντάφυλλον $\}$.

Ἡ τομή των εἶναι:

$A \cap B = \{x/x$ κόκκινον τριαντάφυλλον$\}$.

Ἰδού καί μία παράστασίς της μέ διάγραμμα τοῦ Venn :



2) Ἄς θεωρήσωμεν τά σύνολα

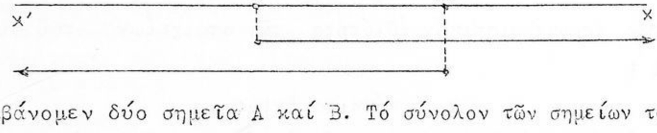
$A = \{x/x$ διαιρέτης τοῦ $18\} = \{1,2,3,6,9,18\}$,

$B = \{x/x$ διαιρέτης τοῦ $12\} = \{1,2,3,4,6,12\}$.

Ἡ τομή των εἶναι τό σύνολον τῶν κοινῶν διαιρετῶν τοῦ 18 καί τοῦ 12:

$A \cap B = \{1,2,3,6\}$.

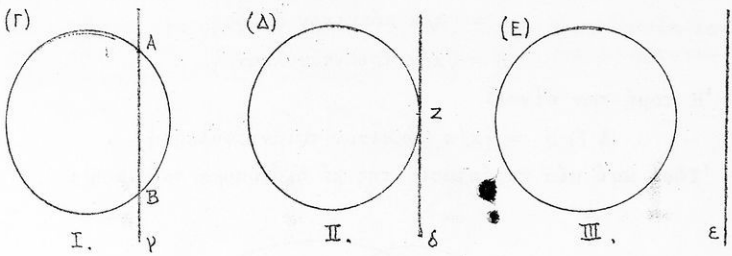
3) Ἐπάνω εἰς μίαν εὐθεῖαν $x'x$



λαμβάνομεν δύο σημεῖα A καί B. Τό σύνολον τῶν σημείων τοῦ τμήματος AB εἶναι ἡ τομή τῶν ἡμιευθειῶν Ax καί Bx΄ θεωρουμένων ὡς σημειοσυνόλων:

$(Ax \cap Bx') = \{x/x$ σημεῖον τοῦ τμήματος $AB\}$.

4) Ἄς θεωρήσωμεν μίαν περιφέρειαν καί μίαν εὐθεῖαν ἑνός ἐπιπέδου ὡς σημειοσύνολα. Τρεῖς εἶναι αἱ δυναταί σχετικαί θέσεις των, ὅπως φαίνεται εἰς τό ἀκόλουθον σχῆμα:



Εἰς τήν θέσιν I , αἱ δύο γραμμαί τέμνονται καί ἔχουν δύο κοινά σημεῖα, τά A καί B. Γράφομεν λοιπόν:

$$(\Gamma) \cap \gamma = \{A , B\} .$$

Εἰς τήν θέσιν II , αἱ γραμμαί ἐφάπτονται καί ἔχουν ἕνα κοινόν σημεῖον , τό Z . Γράφομεν λοιπόν :

$$(\Delta) \cap \delta = \{Z\} .$$

Εἰς τήν θέσιν III δέν ἔχουν κανένα κοινόν σημεῖον καί γράφομεν:

$$(E) \cap \varepsilon = \emptyset .$$

<u>3.2. Σύζευξις χαρακτηριστικῶν ἰδιοτήτων.</u> Ἄς ἐπανέλθωμεν εἰς τό 1ον ἀνωτέρω παράδειγμα καί ἄς παραστήσωμεν μέ α τήν χαρακτηριστικήν ἰδιότητα τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου A :

α = κόκκινο ἄνθος ,

καί μέ β τήν χαρακτηριστικήν ἰδιότητα τοῦ συνόλου B :

β = τριαντάφυλλον .

Παρατηροῦμεν ὅτι τά στοιχεῖα τῆς τομῆς $A \cap B$:

$A \cap B = \{x/x$ κόκκινο τριαντάφυλλον$\}$

ἔχουν ὡς χαρακτηριστικήν ἰδιότητα τήν διπλῆν ἰδιότητα α καί β. Αὐτό τό ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι ἡ χαρακτηριστική ἰδιότης τῆς τομῆς $A \cap B$ προκύπτει ἀπό τήν <u>σύζευξιν</u> τῶν χαρα-

κτηριστικῶν ἰδιοτήτων α καί β τῶν δύο συνόλων Α καί Β.
Ὁμοίως εἰς τό 3ον παράδειγμα παρατηροῦμεν τά ἑξῆς:
Ἡ χαρακτηριστική ἰδιότης τῆς τομῆς $(Ax \cap Bx')$ προέρχεται ἀπό τήν σύζευξιν τῶν ἀκολούθων χαρακτηριστικῶν ἰδιοτήτων α καί β τῶν σημειοσυνόλων Αx καί Βx':

α = τό σημεῖον x ἀνήκει εἰς τήν ἡμιευθεῖαν Αx ,

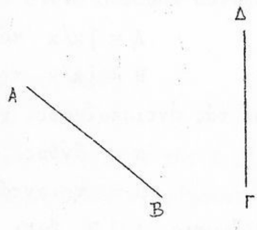
β = τό σημεῖον x ἀνήκει εἰς τήν ἡμιευθεῖαν Βx'.

Ἀναλόγους παρατηρήσεις νά κάμετε εἰς τά δύο ἄλλα παραδείγματα.

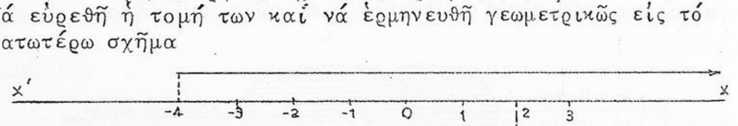
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ἔστω
$A = \{x/x$ φυσικός ἀριθμός < 50 καί πολλαπλάσιον τοῦ $5\}$,
$B = \{x/x$ φυσικός ἀριθμός < 50 καί πολλαπλάσιον τοῦ $6\}$.
Νά σχηματίσετε τήν τομήν $A \cap B$ μέ ἀναγραφήν τῶν στοιχείων της καί νά διατυπώσετε τήν χαρακτηριστικήν ἰδιότητά των μέ τήν σύζευξιν δύο χαρακτηριστικῶν ἰδιοτήτων.

2) Δίδονται δύο τμήματα μή παράλληλα:
ΑΒ $\nparallel$ ΓΔ
(βλ. σχ. παραπλεύρως). Νά χαράξετε τάς μεσοκαθέτους των ε καί ζ καί νά τάς θεωρήσετε ὡς σημειοσύνολα. Ποία εἶναι ἡ τομή των $\varepsilon \cap \zeta$ καί ποῖαι αἱ χαρακτηριστικαί ἰδιότητες τῶν τριῶν συνόλων ε, ζ καί $\varepsilon \cap \zeta$;



3) Δίδονται τά σύνολα
$A = \{x/x$ ρητός σχετικός ἀριθμός $\leq 2\}$,
$B = \{x/x$ ρητός σχετικός ἀριθμός $\geq -4\}$.
Νά εὑρεθῇ ἡ τομή των καί νά ἑρμηνευθῇ γεωμετρικῶς εἰς τό κατωτέρω σχῆμα



4) Συμβολίζομεν μέ (Κ,α) τόν κύκλον πού ἔχει κέντρον τό σημεῖον Κ καί ἀκτῖνα α. Τόν κύκλον αὐτόν ἠμποροῦμεν νά τόν θεωρήσωμεν ὡς ἕνα σύνολον σημείων τοῦ ἐπιπέδου μέ τήν

ἀκόλουθον χαρακτηριστικήν ἰδιότητα:
$(K,\alpha) = \{x/x$ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου μέ ἀπόστασιν ἀπό τό $K \leqslant \alpha\}$.
Νά σχεδιάσετε τώρα δύο κύκλους (K,α) καί (K',α') μέ $KK' = 3cm$, $\alpha = 2{,}5$ cm, $\alpha' = 1{,}5$ cm καί νά γραμμοσκιάσετε τήν τομήν τους. Ποία εἶναι ἡ χαρακτηριστική ἰδιότης αὐτῆς τῆς τομῆς;

§ 4. Ἕνωσις συνόλων. Διάζευξις ἰδιοτήτων.

4.1. Ἕνωσις συνόλων. Ἐμάθαμεν (Βιβλ. I, σ. 48-50A) ὅτι ἕνωσις δύο ἤ περισσοτέρων δοθέντων συνόλων εἶναι ἕνα σύνολον πού ἀποτελεῖται ἀπό τά στοιχεῖα τά ὁποῖα ἀνήκουν εἰς ἕνα τουλάχιστον ἀπό τά δοθέντα σύνολα. Π.χ. διά τήν ἕνωσιν $A \cup B$ δύο συνόλων A καί B ἔχομεν:

$$x \in (A\cup B) \iff \text{εἴτε } x \in A \quad \text{εἴτε } x \in B.$$

Θά ἐξετάσωμεν τώρα πῶς ἡ χαρακτηριστική ἰδιότης τῶν στοιχείων τῆς ἑνώσεως $A \cup B$ σχετίζεται μέ τάς χαρακτηριστικάς ἰδιότητας τῶν δύο συνόλων A καί B.

Διάζευξις ἰδιοτήτων. Ἄς πάρωμεν πάλιν τό παράδειγμα 1) τοῦ ἐδαφίου 3.1 :

$A = \{x/x$ κόκκινον ἄνθος$\}$,

$B = \{x/x$ τριαντάφυλλον$\}$

μέ τάς ἀντιστοίχους χαρακτηριστικάς ἰδιότητας

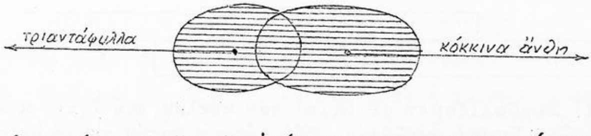
$\alpha =$ ἄνθος κόκκινο ,

$\beta =$ τριαντάφυλλον.

Ἡ ἕνωσις $A \cup B$ ἔχει ὡς στοιχεῖα κάθε κόκκινο ἄνθος καί κάθε τριαντάφυλλον :

$A \cup B = \{x/x$ εἴτε κόκκινο ἄνθος εἴτε τριαντάφυλλον$\}$,

παρίσταται δέ μέ τό ἀκόλουθον διάγραμμα τοῦ Venn :



Ἐπομένως τά στοιχεῖα τῆς ἑνώσεως $A \cup B$ χαρακτηρίζονται ἀπό τήν ἰδιότητα : ἕνα πρᾶγμα νά εἶναι εἴτε κόκκινο ἄνθος εἴτε τριαντάφυλλον. Αὐτή ἡ ἰδιότης λέγομεν ὅτι προκύπτει ἀπό τήν διάζευξιν τῶν δύο ἰδιοτήτων :

α = κόκκινο ἄνθος καί β = τριαντάφυλλον.

Ἡ διάζευξις αὐτή λέγεται μή ἀποκλειστική, ἐπειδή ἡ ἰδιότης α δέν ἀποκλείει τήν ἰδιότητα β · πράγματι ὑπάρχουν τά κόκκινα τριαντάφυλλα πού ἔχουν καί τάς δύο ἰδιότητας α καί β. Παρατηροῦμεν ὅτι αὐτή ἡ μή ἀποκλειστική διάζευξις ἰσοδυναμεῖ μέ τό νά μή εἶναι ξένα μεταξύ των τά δύο ἀντίστοιχα σύνολα A καί B.

2) Ἔστω τώρα

A = {x/x τρίγωνον} ,

B = {x/x τετράγωνον} .

Ἡ ἕνωσίς των εἶναι :

A∪B = {x/x εἴτε τρίγωνον εἴτε τετράγωνον} .

Ἐδῶ αἱ χαρακτηριστικαί ἰδιότητες τῶν στοιχείων τῶν συνόλων A καί B εἶναι ἀντιστοίχως :

α = ἕνα σχῆμα νά εἶναι τρίγωνον,

β = ἕνα σχῆμα νά εἶναι τετράγωνον .

Ἑπομένως ἡ χαρακτηριστική ἰδιότης τῶν στοιχείων τῆς A ∪ B εἶναι: ἕνα σχῆμα νά εἶναι εἴτε τρίγωνον εἴτε τετράγωνον καί προκύπτει ἀπό τήν διάζευξιν τῶν δύο ἰδιοτήτων α καί β. Ἡ διάζευξις ὅμως αὐτή λέγεται ἀποκλειστική, ἐπειδή ἕνα σχῆμα δέν ἠμπορεῖ νά εἶναι συγχρόνως καί τρίγωνον καί τετράγωνον· τά δύο σύνολα A καί B εἶναι τώρα ξένα μεταξύ των.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Μία τάξις T μικτοῦ Γυμνασίου ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα σύνολον A μαθητῶν καί ἕνα σύνολον K μαθητριῶν. Νά συμβολίσετε τά σύνολα A , K καί A∪K μέ τάς χαρακτηριστικάς ἰδιότητας τῶν στοιχείων των.

2) Ἔστω
A = {x/x φυσικός ἀριθμός < 20 καί διψήφιος ἄρτιος} ,
B = {x/x φυσικός < 20 καί διψήφιον πολλαπλάσιον τοῦ 3} .
Νά συμβολίσετε, μέ ἀναγραφήν τῶν στοιχείων των, τά δύο αὐτά σύνολα καθώς καί τήν ἕνωσίν των. Ἀκολούθως νά ἐξετάσετε, ἐάν ἡ διάζευξις τῶν χαρακτηριστικῶν ἰδιοτήτων τῶν A καί B εἶναι ἤ δέν εἶναι ἀποκλειστική.

3) Δύο συνεπίπεδοι εὐθεῖαι ε καί ε΄ ἤ τέμνονται ἤ εἶναι παράλληλοι ἤ συμπίπτουν. Θεωροῦντες αὐτάς ὡς σημειοσύνολα νά συμβολίσετε τήν ἕνωσίν των εἰς ἑκάστην περίπτωσιν καί νά ἐξετάσετε τό εἶδος τῆς διαζεύξεως τῶν ἀντιστοίχων χαρακτηριστικῶν ἰδιοτήτων τῶν στοιχείων των.

4) Ἕνας ὀπωρόκηπος Δ περιέχει ἕνα σύνολον δένδρων: μηλιές M , ροδακινιές P καί ἀχλαδιές A. Νά συμβολίσετε τά σύνολα M , P , A καί M ∪ P ∪ A μέ τάς χαρακτηριστικάς ἰδιότητας τῶν στοιχείων των καί νά καθορίσετε τό εἶδος τῆς διαζεύξεως αὐτῶν τῶν ἰδιοτήτων .

5) Νά δώσετε δύο παραδείγματα ἀποκλειστικῆς διαζεύξεως ἰδιοτήτων καί δύο μή ἀποκλειστικῆς διαζεύξεως.

§ 5. Καρτεσιανόν γινόμενον δύο συνόλων. Γραφική παράστασίς του.

5.1. Διατεταγμένα ζεύγη. Ἐμάθαμεν (Βιβλ. I , σ. 38A) τί εἶναι διατεταγμένον ζεῦγος (α,β) δύο στοιχείων α καί β , καί ὅτι, ἐάν $\alpha \neq \beta$, τότε

$$(\alpha , \beta) \neq (\beta , \alpha) ,$$

ἐνῶ

$$\{\alpha , \beta\} = \{\beta , \alpha\}$$

5.2. Καρτεσιανόν γινόμενον δύο συνόλων. Ἔστω

$$A = \{\alpha , \beta , \gamma\}$$

καί

$$B = \{0 , \square\} .$$

Τό καρτεσιανόν γινόμενον $A \times B$ τῶν δύο τούτων συνόλων ἀποτελεῖται ἀπό ὅλα τά διατεταγμένα ζεύγη πού ἔχουν ὡς πρῶτον στοιχεῖον ἕνα οἱονδήποτε στοιχεῖον τοῦ A καί ὡς δεύτερον στοιχεῖον ἕνα οἱονδήποτε τοῦ B , ἤτοι

$$A \times B = \{(\alpha,0),(\alpha,\square),(\beta,0), (\beta,\square), (\gamma,0) , (\gamma,\square)\} .$$

Παρατηροῦμεν ὅτι

$B \times A = \{(0,\alpha),(0,\beta),(0,\gamma),\ (\square,\alpha),\ (\square,\beta),\ (\square,\gamma\ )\}.$

Ἐπομένως

$$A \times B \neq B \times A\ .$$

Μέ ἄλλους λόγους εἰς τό καρτεσιανόν γινόμενον δέν ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετικότης.

Γενικῶς, ἐάν A καί B εἶναι δύο τυχόντα σύνολα τό καρτεσιανόν των γινόμενον $A \times B$ ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$A \times B = \{(x,y)\ |\ x \in A \ \text{ καί } \ y \in B\}.$$

Τά σύνολα A καί B δέν ἀποκλείεται νά εἶναι ἴσα (τά αὐτά), ὁπότε θά ἔχωμεν :

$$A \times A = \{(x,y)\ |\ x \in A \quad \text{καί} \quad y \in A\}\ .$$

Τό γινόμενον $A \times A$ συμβολίζεται συντόμως μέ A^2 :

$$A^2 = \{(x,y)\ |\ x \in A \quad \text{καί } y \in A\} \quad .$$

Ἐάν τά σύνολα A καί B εἶναι πεπερασμένα καί ἔχουν ἀντιστοίνους πληθικούς ἀριθμούς κ καί λ , τότε τό $A \times B$ εἶναι πεπερασμένον καί ἔχει πληθικόν ἀριθμόν τό γινόμενον κ.λ. Νά ἐπαληθεύσετε τοῦτο μέ κ = 3 καί λ = 4.

Μέ τάς ἰδίας ἀριθμητικάς τιμάς τοῦ κ καί τοῦ λ νά εὕρετε τούς πληθικούς ἀριθμούς τῶν καρτεσιανῶν γινομένων A^2 καί B^2.

5.3. Γραφική παράστασις καρτεσιανοῦ γινομένου.

Τό καρτεσιανόν γινόμενον $B \times A$, ὅπου

$$B = \{0, \square\} \qquad \text{καί} \quad A = \{\alpha\ ,\ \beta\ ,\ \gamma\}$$

ἠμπορεῖ νά παρασταθῇ γραφικῶς μέ τόν ἀκόλουθον πίνακα διπλῆς εἰσόδου:

B \ A	α	β	γ
0	(0,α)	(0,β)	(0,γ)
□	(□,α)	(□,β)	(□,γ)

Μέ ὅμοιον πίνακα ἠμποροῦμεν νά παραστήσωμεν κάθε καρτεσιανόν γινόμενον δύο συνόλων.

Εἰδικῶς, ὅταν τά σύνολα A καί B ἔχουν ὡς στοιχεῖα ρητούς σχετικούς ἀριθμούς , τότε τά καρτεσιανά γινόμενα $A \times B$ καί $B \times A$ ἔχουν ὡς στοιχεῖα διατεταγμένα ζεύγη ρητῶν σχετικῶν ἀριθμῶν. Τά ζεύγη αὐτά ἐμάθαμεν (Βιβλ. Ι, σ. 90 Γ καί ἑξῆς) νά τά παριστάνωμεν γεωμετρικῶς μέ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου χρησιμοποιοῦντες ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων.

Π.χ. ἐάν

$A = B = P =$ σύνολον τῶν ρητῶν σχετικῶν ἀριθμῶν ,

τότε τό $P^2 = P \times P$ ἀποτελεῖται ἀπό ὅλα τά διατεταγμένα ζεύγη (x,y), ὅπου x καί y ὁποιοιδήποτε ρητοί σχετικοί ἀριθμοί, ἤτοι συμβολικά:

$$P^2 = \{(x,y) \mid x \in P \quad \text{καί} \quad y \in P\} .$$

Ἐξ ἄλλου τό ζεῦγος (x ,y) παριστάνεται, ὅπως γνωρίζομεν, μέ ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου πού ἔχει τετμημένην x καί τεταγμένην y ὡς πρός τό σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων πού χρησιμοποιοῦμεν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά σχηματίσετε τό καρτεσιανόν γινόμενον $A \times B$ τῶν συνόλων

$$A = \{+\ ,\ =\ ,\ :\},$$
$$B = \{\Longrightarrow\ ,\ \sim\}$$

καί νά τό παραστήσετε μέ πίνακα διπλῆς εἰσόδου.

2) Δίδονται τά σύνολα

$$A = \left\{-2, 3\frac{1}{2}, 4\frac{2}{5}\right\} \quad \text{καί} \quad B = \left\{2, -4\frac{3}{5}, 5, -3\frac{1}{2}\right\}.$$

Νά παραστήσετε γεωμετρικῶς ἐπί τετραγωνισμένου χιλιοστομετρικοῦ χάρτου τά καρτεσιανά γινόμενα $A \times B$ καί $B \times A$ εἰς δύο χωριστά σχεδιάσματα.

Νά ἐξετάσετε, ἐάν ἰσχύει ἡ σχέσις ἰσοδυναμίας

$$(A \times B) \sim (B \times A).$$

3) Νά παραστήσετε γεωμετρικῶς ἐπί χιλιοστομετρικοῦ χάρ-

του τό καρτεσιανόν γινόμενον A^2, εάν

$$A = \left\{-3\ ,\ 5\ ,\ 2\frac{3}{5}\ ,-5\frac{1}{2}\right\}.$$

Νά χαράξετε τήν διχοτόμον τῶν γωνιῶν I καί III τοῦ συστήματος ὀρθογωνίων ἀξόνων (Βιβλ. Ι . σ. 105) καί νά ἐξετάσετε ἐάν εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σημειοσυνόλου πού ἀπεικονίζει τό A^2.

§ 6. Διαμερισμός συνόλου.

6.1. Διαμερισμός. Τό σύνολον Γ τῶν μαθητῶν τοῦ Γυμνασίου μας κατανέμεται εἰς τάς ἕξι τάξεις του T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 καί T_6 κατά τρόπον ὥστε:

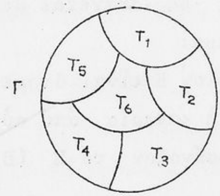
1ον. Καμμία τάξις νά μή εἶναι σύνολον κενόν·

2ον. Δύο τυχοῦσαι τάξεις νά εἶναι σύνολα ξένα μεταξύ των.

3ον. Ἡ ἕνωσις τῶν ἕξι τάξεων νά εἶναι σύνολον ἴσον μέ τό σύνολον Γ.

Ὁ διαχωρισμός ἑνός συνόλου εἰς ὑποσύνολα τά ὁποῖα ἔχουν τάς ἀνωτέρω τρεῖς ἰδιότητας ὀνομάζεται διαμερισμός τοῦ συνόλου εἰς κλάσεις.

Ὁ διαμερισμός τοῦ Γυμνασίου μας εἰς τάς ἕξι τάξεις του ἠμπορεῖ νά παρασταθῇ γραφικῶς μέ τόν ἀκόλουθον τρόπον:



Ἄλλα παραδείγματα:

1ον. Τό σύνολον τῶν κατοίκων τῆς Ἑλλάδος διαμερίζεται εἰς 51 κλάσεις, ὅσοι εἶναι αἱ 50 νομοί της πλέον ἡ περιοχή τοῦ Ἁγίου Ὄρους. Ἕνας ὁποιοσδήποτε κάτοικος τῆς Ἑλλάδος ἀνήκει εἰς μίαν καί μόνον κλάσιν (ὡς κάτοικος ἑνός καί μόνον νομοῦ ἤ τῆς περιοχῆς τοῦ Ἁγίου Ὄρους). Ἔτσι κάθε κάτοικος τῆς Ἑλλάδος προσδιορίζει μίαν ὡρισμένην κλάσιν καί ἠμπορεῖ νά θεωρηθῆ ὡς ἀντιπρόσωπός της. Π.χ. ἕνας Λέσβιος ἀντιπροσωπεύει τήν κλάσιν τῶν κατοίκων τοῦ νομοῦ Λέσβου.

2ον. Τό σύνολον τῶν σπονδυλωτῶν ζώων διαμερίζεται εἰς τάς κλάσεις τῶν θηλαστικῶν, τῶν βατραχωδῶν, τῶν ἑρπετῶν, τῶν πτηνῶν καί τῶν ἰχθύων.

3ον Τό σύνολον τῶν ἀκεραίων σχετικῶν ἀριθμῶν διαμερίζεται εἰς τάς ἑξῆς τρεῖς κλάσεις:

$\Phi = \{x/x$ φυσικός ἀριθμός$\} = \{x/x$ ἀκέραιος θετικός$\}$

$A = \{x/x$ ἀκέραιος ἀρνητικός$\} = \{-1,-2,-3,-4,\ldots\}$

$M = \{x/x$ μηδέν$\} = \{0\}$.

6.2. <u>Διαμερισμός εἰς δύο κλάσεις</u>. Ἔστω

$\Phi = \{x/x$ φυσικός ἀριθμός$\} = \{1,2,3,4,\ldots\}$.

Τό σύνολον αὐτό διαμερίζεται εἰς τάς δύο κλάσεις:

$A' = \{x/x$ φυσικός περιττός$\} = \{1,3,5,7,\ldots\}$

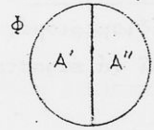
$A'' = \{x/x$ φυσικός ἄρτιος$\} = \{2,4,6,8,\ldots\}$.

Εἰς τόν διαμερισμόν αὐτόν ἰσχύουν αἱ λογικαί ἰσοδυναμίαι:

$$x \in A' \Longleftrightarrow x \notin A''$$

καί

$$x \in A'' \Longleftrightarrow x \notin A'.$$



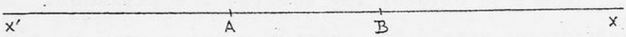
Γραφικῶς ὁ διαμερισμός παριστάνεται μέ τό παραπλεύρως διάγραμμα:

Γενικῶς, ὅταν ἕνα σύνολον Ε εἶναι διαμερισμένον εἰς δύο κλάσεις Ε′ καί Ε″, τότε ἡ καθεμία ἀπό αὐτάς εἶναι συμπλήρωμα τῆς ἄλλης ὡς πρός ὑπερσύνολον τό Ε (Βιβλ. Ι, σ. 52-53Α).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Μία ἀνθοδέσμη ἀποτελεῖται ἀπό χρυσάνθεμα λευκά, χρυσάνθεμα κόκκινα καί χρυσάνθεμα κίτρινα. Νά ἐξετάσετε, ἐάν τά τρία αὐτά ὑποσύνολα ἀποτελοῦν διαμερισμόν τοῦ συνόλου τῶν χρυσανθέμων τῆς ἀνθοδέσμης καί διατί.

2) Ἕνα τμῆμα ΑΒ λέγεται κλειστόν, ἄν εἰς τό σύνολον τῶν σημείων του περιλαμβάνωμεν τά δύο ἄκρα του Α καί Β, λέγεται ἀνοικτόν, ἄν δέν περιλαμβάνωμεν εἰς αὐτό οὔτε τό Α οὔτε τό Β.
Ὁμοίως μία ἡμιευθεῖα Ax λέγεται κλειστή ἤ ἀνοικτή ὅταν ἡ ἀρχή της Α συμπεριλαμβάνεται ἤ δέν συμπεριλαμβάνεται εἰς τό σύνολον τῶν σημείων της.
Νά λάβετε τώρα ἐπάνω εἰς τήν εὐθεῖαν x΄x



δύο σημεῖα Α καί Β καί νά ἐξετάσετε:
α) ἄν τό κλειστόν τμῆμα ΑΒ καί αἱ δύο ἀνοικταί ἡμιευθεῖαι Ax΄ καί Bx ἀποτελοῦν διαμερισμόν τοῦ σημειοσυνόλου τῆς εὐθείας·
β) ἄν ἡ κλειστή ἡμιευθεῖα Ax΄ καί ἡ ἀνοικτή Ax ἀποτελοῦν διαμερισμόν τῆς x΄x·
γ) ἄν αἱ ἀνοικταί ἡμιευθεῖαι Bx΄ καί Bx ἀποτελοῦν διαμερισμόν τῆς x΄x·
δ) ἄν αἱ κλεισταί ἡμιευθεῖαι Ax καί Bx΄ ἀποτελοῦν διαμερισμόν τῆς x΄x.

3) Ἔστω Γ τό σύνολον τῶν σχετικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Νά ἐξετάσετε, ἄν τά κατωτέρω ὑποσύνολά του ἀποτελοῦν διαμερισμόν τοῦ Γ εἰς κλάσεις εἰς ἑκάστην ἀπό τάς διδομένας τέσσαρας περιπτώσεις:
α) $A = \{x/x \leq 0\}$, $B = \{x/0 < x \leq 7\}$, $\Delta = \{x/x > 7\}$
β) $A = \{x/x \leq -3\}$, $B = \{x/x \geqslant 5\}$, $\Delta = \{x/x > 6\}$
γ) $A = \{x/-7 \leq x < 5\}$, $B = \{x/x \geqslant 5\}$, $\Delta = \{x/x < -7\}$
δ) $A = \{x/x \geqslant -5\}$, $B = \{x/x \leq 0\}$.

4) Πῶς διαμερίζει ἡ Γραμματική τῆς Ἑλληνικῆς γλώσσης τό σύνολον τῶν ὀνομάτων εἰς δύο κλάσεις;
Νά παραστήσετε μέ ἕνα διάγραμμα τόν διαμερισμόν αὐτόν.

§ 7. Διμελεῖς σχέσεις.

7.1. Διμελής σχέσις. 1) Ὅταν λέγωμεν: "ὁ μαθητής x εἶναι συμμαθητής τοῦ y εἰς τό τμῆμα A_1 τῆς 1ης τάξεως ἑνός Γυμνασίου" ἐκφράζομεν μίαν σχέσιν μεταξύ δύο μελῶν τοῦ συνόλου Γ τῶν μαθητῶν τοῦ Γυμνασίου. Διά τοῦτο ἡ σχέσις αὐτή λέγεται διμελής. Τά ζεύγη (x,y) διά τά ὁποῖα ἡ σχέσις ἀληθεύει, ἀποτελοῦν ἕνα σύνολον Α πού παριστάνομεν ὡς ἑξῆς:

$$A = \Big\{(x,y) \;\big|\; x \in \Gamma,\ y \in \Gamma \text{ καί } x \text{ συμμαθητής τοῦ } y \text{ εἰς τό } A_1\Big\}.$$

Τό σύνολον αὐτό εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου

$$\Gamma \times \Gamma = \Gamma^2 = \{(x,y) \mid x \in \Gamma \quad \text{καί} \quad y \in \Gamma\}$$

πού ἔχει ἐπί πλέον ὡς στοιχεῖα τά ζεύγη μαθητῶν (x,y) διά τά ὁποῖα ἡ ἀνωτέρω σχέσις δέν ἀληθεύει.

2) Ἔστω Ε τό σύνολον τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου. Ἡ σχέσις καθετότητος μεταξύ δύο εὐθειῶν x καί y τοῦ Ε εἶναι μία διμελής σχέσις πού παρεστήσαμεν μέ τόν συμβολισμόν $x \perp y$.

3) Μέ τήν ἀπεικόνισιν (Βιβλ. Ι. σ. 94Γ):

"y εἶναι νῆσος παραθερισμοῦ τοῦ x εἰς τάς Κυκλάδας" ὁρίζομεν μίαν διμελῆ σχέσιν μεταξύ τῶν στοιχείων x καί y τῶν δύο συνόλων

$$A = \{x/x \ \text{μαθητής τοῦ σχολείου μας}\},$$

$$B = \{y/y \ \text{νῆσος τῶν Κυκλάδων}\}.$$

4) Μέ τήν ἀριθμητικήν συνάρτησιν (Βιβλ. Ι, σ. 96-97Γ):

$$\sigma : x \xrightarrow{\sigma} 2x + 1 = y \qquad (x \in P \ , \ y \in P)$$

ὁρίζομεν μίαν διμελῆ σχέσιν μεταξύ δύο ρητῶν σχετικῶν ἀριθμῶν x καί y . Τά ζεύγη (x,y) διά τά ὁποῖα ἡ ἀνωτέρω σχέσις ἀληθεύει παριστάνονται , ὅπως εἴδαμεν, γεωμετρικῶς μέ σημεῖα μιᾶς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου.

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τά παραδείγματα 1), 2), καί 4) ἡ σχέσις συνδέει δύο στοιχεῖα τοῦ αὐτοῦ συνόλου, ἀντιθέτως εἰς τό παράδειγμα 3) ἡ σχέσις συνδέει δύο στοιχεῖα διαφορετικῶν συνόλων.

Ἐκτός τῶν διμελῶν σχέσεων ὑπάρχουν φυσικά καί σχέσεις μέ τρία ἤ περισσότερα μέλη, ὅπως π.χ. ἡ σχέσις: "τό σημεῖον x κεῖται μεταξύ τῶν σημείων y καί z μιᾶς εὐθείας ε" ἤ ἡ σχέσις: "ὁ μαθητής x ἦλθε πρῶτος μεταξύ τῶν συμμαθητῶν του εἰς τό διαγώνισμα."

Θά περιορίσωμεν ὅμως τήν μελέτην μας εἰς τήν ἀκόλουθον διμελῆ σχέσιν.

7.2. Σχέσις ἰσοδυναμίας. 1) Ἐμάθαμεν (Βιβλ. Ι, σ. 6Γ) ὅτι δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καί $\frac{\alpha'}{\beta'}$ λέγονται ἴσα (ἤ ἰσοδύναμα), ὅταν ἐφαρμοζόμενα ὡς ἐκτελεσταί εἰς τό ἴδιον εὐθύγραμμον τμῆμα δίδουν ἴσα τμήματα. Ἡ σχέσις αὐτή εἶναι μία διμελής σχέσις μεταξύ τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου τῶν κλασμάτων καί ἔχει τάς ἀκολούθους τρεῖς ἰδιότητας :

1) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$, ἀνακλαστικήν ,

2) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'} \Longrightarrow \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha}{\beta}$, συμμετρικήν ,

3) $\left(\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'}\right.$ καί $\left.\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha''}{\beta''}\right) \Longrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha''}{\beta''}$, μεταβατικήν.

Κάθε διμελής σχέσις μεταξύ τῶν στοιχείων ἑνός συνόλου ἡ ὁποία ἔχει τάς ἀνωτέρω τρεῖς ἰδιότητας λέγεται σχέσις ἰσοδυναμίας.

Ἡ ἀνωτέρω σχέσις μεταξύ κλασμάτων διαμερίζει τό σύνολον τῶν κλασμάτων εἰς κλάσεις ἴσων (ἤ ἰσοδυνάμων) κλασμάτων. Π.χ. τό σύνολον τῶν ἴσων κλασμάτων

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \ldots, \frac{2\nu}{3\nu}, \ldots \quad (\nu \in \Phi)$$

ἀποτελεῖ μίαν κλάσιν. Κάθε στοιχεῖον τῆς κλάσεως προσδιορίζει ὁλόκληρον τήν κλάσιν καί δύναται νά ληφθῆ ὡς ἀντιπρόσωπός της. Ἕνας εἰδικός ἀντιπρόσωπος εἶναι τό ἀνάγωγον κλάσμα της.

Γενικῶς, μία σχέσις ἰσοδυναμίας μεταξύ τῶν στοιχείων ἑνός συνόλου διαμερίζει τό σύνολον εἰς κλάσεις ἰσοδυνάμων στοιχείων αἱ ὁποῖαι καλοῦνται κλάσεις ἰσοδυναμίας.

Κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου ἀνήκει εἰς μίαν ὡρισμένην κλάσιν ἰσοδυναμίας καί ἑπομένως προσδιορίζει τήν κλάσιν του, δύναται δέ νά ληφθῆ ὡς ἀντιπρόσωπός της.

2) Ἡ ἰσότης μεταξύ δύο συνόλων (βλ. § 1.1-1.2) εἶναι μία διμελής σχέσις ἰσοδυναμίας.

3) Ἡ ἰσοδυναμία μεταξύ δύο συνόλων (βλ. 1.3-1.4) εἶναι μία διμελής σχέσις ἰσοδυναμίας. Τά ἀπαριθμητά ἀπειροσύνολα (§ 1.5) ἀποτελοῦν μίαν σημαντικωτάτην κλάσιν ἰσοδυναμίας αὐτῆς τῆς διμελοῦς σχέσεως· ὡς ἀντιπρόσωπος τῆς κλάσεως ἠμπορεῖ νά ληφθῆ τό σύνολον Φ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

4) Ἡ ἰσότης μεταξύ δύο τριγώνων (Βιβλ. Ι, σ. 102Γ κ.ἑ.) εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας, ἐπειδή ἔχει τάς ἰδιότητας:

α) τργ ΑΒΓ = τργ ΑΒΓ .

β) (τργ ΑΒΓ = τργ Α΄Β΄Γ΄) $\Longrightarrow$ (τργ Α΄Β΄Γ΄ = τργ ΑΒΓ),

γ) (τργ ΑΒΓ = τργ Α΄Β΄Γ΄ καί τργ Α΄Β΄Γ΄ = τργ Α″Β″Γ″) $\Longrightarrow$ (τργ ΑΒΓ = τργ Α″Β″Γ″).

5) Ἡ παραλληλία μεταξύ δύο εὐθειῶν, ὅπως τήν ὡρίσαμεν (Βιβλ. Ι, σ. 77Α), δέν εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας, ἐπειδή δέν ἔχει τήν ἀνακλαστικήν ἰδιότητα. Εἶναι ὅμως χρήσιμον νά εὐρύνωμεν τήν ἔννοιαν τῆς παραλληλίας κατά τόν ἀκόλουθον τρόπον, οὕτως ὥστε ἡ παραλληλία μεταξύ δύο εὐθειῶν νά γίνη σχέσις ἰσοδυναμίας :

<u>Ὁρισμός</u>. Δύο εὐθεῖαι α καί β λέγονται <u>παράλληλοι μεταξύ των μέ εὐρεῖαν σημασίαν</u>, ὅταν καί μόνον ὅταν 1ον εἶναι συνεπίπεδοι, δηλαδή κεῖνται μέσα εἰς ἕνα καί τό ἴδιον ἐπίπεδον, καί 2ον δέν ἔχουν κανένα κοινόν σημεῖον ἤ ἔχουν ὅλα τους τά σημεῖα κοινά (συμπίπτουν).

Εἰς τήν περίπτωσιν πού δέν ἔχουν κανένα κοινόν σημεῖον, αἱ εὐθεῖαι θά λέγωνται <u>παράλληλοι μέ στενήν σημασίαν</u>.

Τό σύμβολον ∥ θά συμβολίζη εἰς τό ἑξῆς παραλληλίαν μέ εὐρεῖαν σημασίαν.

Ἄς θεωρήσωμεν τώρα τό σύνολον Ε = {ε, ε΄, ε΄΄, ... } τῶν εὐθειῶν ἑνός ἐπιπέδου καί τήν σχέσιν παραλληλίας μέ εὐρεῖαν σημασίαν εἰς αὐτό τό σύνολον. Διά τήν σχέσιν αὐτήν ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες:

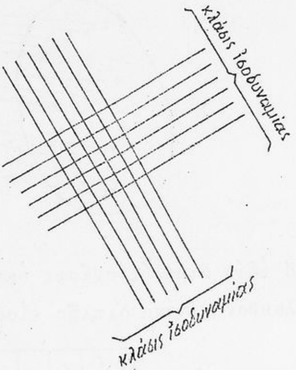
α) $\varepsilon \parallel \varepsilon$, ἀνακλαστική,

β) $\varepsilon \parallel \varepsilon' \Longrightarrow \varepsilon' \parallel \varepsilon$, συμμετρική ,

γ) $(\varepsilon \parallel \varepsilon'$ καί $\varepsilon' \parallel \varepsilon'') \Longrightarrow \varepsilon \parallel \varepsilon''$, μεταβατική .

Ἄρα ἡ παραλληλία μέ εὐρεῖαν σημασίαν εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας καί διαμερίζει τό σύνολον Ε τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου εἰς κλάσεις ἰσοδυναμίας.

Κάθε κλάσις ἀποτελεῖται ἀπό τάς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου πού εἶναι ἀνά δύο παράλληλοι μεταξύ των καί ὁρίζει <u>μίαν διεύθυνσιν</u> ἐντός τοῦ ἐπιπέδου. Δύο διαφορετικαί κλάσεις εἶναι ὑποσύνολα τοῦ Ε ξένα μεταξύ των καί ὁρίζουν δύο διαφορετικάς διευθύνσεις.



<u>7.3. Γραφική παράστασις διμελοῦς σχέσεως.</u> 1) Ἡ ποδοσφαιρική ὁμάς Π ἑνός Γυμνασίου Σ εἶναι ἕνα σύνολον ἕνδεκα μαθητῶν:

$$\Pi = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$$

οἱ ὁποῖοι ἀνήκουν εἰς τάς τάξεις τοῦ Γυμνασίου ὡς ἑξῆς:

οἱ	1,2,3,4,5	εἰς	τήν	ΣΤ΄	τάξιν
οἱ	6, 7, 8	"	"	Ε΄	"
οἱ	9 , 10	"	"	Δ΄	"
καί ὁ	11	"	"	Γ΄	"

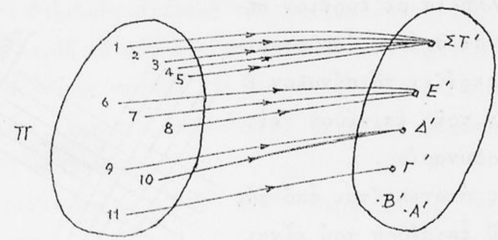
Ἡ σχέσις:

" x μέλος τῆς ὁμάδος Π ἀνήκει εἰς τήν τάξιν y τοῦ Σ "

εἶναι μία διμελής σχέσις μεταξύ τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου Π καί τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου

$$T = \{A', B', \Gamma', \Delta', E', \Sigma T'\}$$

τῶν τάξεων τοῦ Γυμνασίου. Ἠμποροῦμεν νά παραστήσωμεν γραφικῶς τήν σχέσιν μέ τά ἀκόλουθα διαγράμματα τοῦ Venn συμπληρωμένα μέ γραμμάς πού ξεκινοῦν ἀπό τά στοιχεῖα τοῦ Π καί καταλήγουν εἰς στοιχεῖα τοῦ Τ :



Ἡ ἰδία διμελής σχέσις ἠμπορεῖ νά παρασταθῇ καί μέ τόν ἀκόλουθον πίνακα διπλῆς εἰσόδου:

Τ \ Π	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Α'											
Β'											
Γ'											+
Δ'									+	+	
Ε'						+	+	+			
ΣΤ'	+	+	+	+	+						

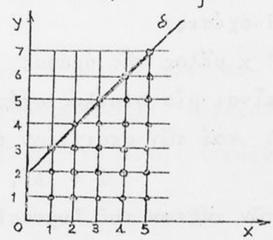
2) Ἔστω δεύτερον ἡ διμελής σχέσις

$y \leq x + 2$ ὅπου $x \in \Phi$ καί $y \in \Phi$. .

Τά διατεταγμένα ζεύγη (x,y) φυσικῶν ἀριθμῶν διά τά ὁποῖα ἡ σχέσις ἀληθεύει ἀποτελοῦν ἕνα ἀπειροσύνολον:

$$A = \left\{ (x,y) \mid x \in \Phi \;,\; y \in \Phi \quad \text{καί} \quad y \leq x + 2 \right\}.$$

Τό σύνολον αὐτό παριστάνεται γεωμετρικῶς μέ τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου πού ἔχουν ὡς πρός ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων τάς ἑξῆς συντεταγμένας:



x =	1	2	3	4	5	. . .
y φυσικός $\leqslant$	3	4	5	6	7	. . .

Εἰς τό προηγούμενον σχῆμα τά σημεῖα αὐτά εἶναι οἱ κόμβοι τοῦ τετραγωνισμένου χάρτου πού κεῖνται εἰς τό ἐσωτερικόν τῆς γωνίας $x\widehat{O}y$ καί ἐπάνω εἰς τήν εὐθεῖαν δ ἤ κάτωθεν αὐτῆς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά ἐξετάσετε ποῖαι ἀπό τάς παρακάτω σχέσεις εἶναι διμελεῖς καί ποῖαι δέν εἶναι καί νά ἀναφέρετε δι' ἑκάστην δύο συγκεκριμένας περιπτώσεις, μίαν εἰς τήν ὁποίαν ἡ σχέσις νά ἀληθεύη καί μίαν εἰς τήν ὁποίαν ἡ σχέσις νά μή ἀληθεύη:

1η. $x \in A$ (A τυχόν σύνολον , x τυχόν στοιχεῖον).
2α. ΑΚ = ΓΔ (ΑΚ καί ΓΔ τυχόντα εὐθύγραμμα τμήματα).
3η. Ἡ εὐθεῖα x εἶναι συνεπίπεδος μέ τήν εὐθεῖαν y.
4η. Ὁ ρητός σχετικός ἀριθμός x εἶναι ἄθροισμα τῶν ρητῶν σχετικῶν ἀριθμῶν y καί z.
5η. Ὁ x εἶναι ἐξάδελφος τοῦ y.
6η. $x + y + \omega = 10$ ($x \in \Phi$, $y \in \Phi$, $\omega \in \Phi$).
7η. $x = y + 5$ ($x \in \Phi$, $y \in \Phi$).

Νά σχηματίσετε καί ἰδικάς σας διμελεῖς σχέσεις.

2) Νά ἐξηγήσετε διατί ἡ σχέσις καθετότητος $x \perp y$ μεταξύ δύο εὐθειῶν ἑνός ἐπιπέδου δέν εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.

3) Ἡ σχέσις " ὁ φυσικός ἀριθμός x εἶναι διαιρέτης τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ y " εἶναι ἄραγε σχέσις ἰσοδυναμίας καί διατί ;

4) Ἔστω $\Delta = \{\vec{\delta}, \vec{\delta'}, \vec{\delta''}, \ldots\}$ τό σύνολον τῶν μή μηδενικῶν διανυσμάτων ἐπάνω εἰς μίαν εὐθεῖαν ε. Ἡ σχέσις

"$x \in \Delta$, $y \in \Delta$ καί x ἔχει τήν αὐτήν φοράν μέ τό y"

εἶναι ἄραγε σχέσις ἰσοδυναμίας καί, εἰς καταφατικήν περίπτωσιν, εἰς πόσας κλάσεις ἰσοδυναμίας διαμερίζει τό σύνολον Δ;

5) Δύο ἀδελφοί Α καί Β ἔχουν ὁ Α τρία παιδιά: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ καί ὁ Β δύο: β_1 , β_2 . Νά παραστήσετε μέ διαγράμματα τοῦ Venn καί καταλλήλους συνδετικάς γραμμάς τήν διμελῆ σχέσιν: $x \in \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $y \in \{\beta_1, \beta_2\}$ καί x ἐξάδελφος ἤ ἐξαδέλφη τοῦ y.

6) Νά παραστήσετε γεωμετρικῶς τάς διμελεῖς σχέσεις

$$y = x + 2 \qquad \text{καί} \qquad y = x - 3$$

ὅπου x καί y ἀκέραιοι σχετικοί ἀριθμοί.

7) Νά παραστήσετε γεωμετρικῶς τήν διμελῆ σχέσιν $x \leqslant y$ ὅπου x καί y ἀκέραιοι σχετικοί ἀριθμοί.

8) Νά παραστήσετε γεωμετρικῶς τήν σχέσιν $y \leqslant \frac{1}{2} x$ ὅπου x καί y ἀκέραιοι ἀριθμοί $\geqslant 0$.

§ 8. Ἀπεικονίσεις καί συναρτήσεις

8.1. Εἰς τό Βιβλ. Ι, σ. 94Γ κ.ἑ., ἔγινε ἤδη λόγος περί ἀπεικονίσεων καί συναρτήσεων. Θά δώσωμεν τώρα μερικά νέα παραδείγματα πρός ἐπανάληψιν καί θά προσθέσωμεν μερικάς συμπληρώσεις.

1) Ἄς ἐπανέλθωμεν εἰς τό παράδειγμα 1) τοῦ ἐδ. § 7.3. Ἡ διμελής σχέσις:

" x μέλος τῆς ὁμάδος Π ἀνήκει εἰς τήν τάξιν y τοῦ Σ "

ἀντιστοιχίζει εἰς κάθε ποδοσφαιριστήν τῆς ὁμάδος Π μίαν ὡρισμένην τάξιν τοῦ Γυμνασίου Σ. Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ τάξεις Α΄ καί Β΄ δέν ἀντιστοιχοῦν εἰς κανένα μέλος τῆς ὁμάδος Π , ἐνῶ ἡ καθεμία ἀπό τάς τάξεις Γ΄, Δ΄, Ε΄ καί ΣΤ΄ ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα τουλάχιστον μέλος τῆς ὁμάδος.
Δι'αὐτό λέγομεν ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἀντιστοιχία εἶναι μία ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου

$$\Pi = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$$

ἐντός τοῦ συνόλου

$$T = \{A', B', \Gamma', \Delta', E', \Sigma T'\}$$

καί ἐπί τοῦ ὑποσυνόλου τοῦ Τ:

$$T_1 = \{\Gamma', \Delta', E', \Sigma T'\}.$$

Ἡ ἰδία ἀντιστοιχία λέγεται καί συνάρτησις μέ πεδίον ὁρισμοῦ τό σύνολον Π καί πεδίον τιμῶν τό σύνολον T_1 , ὑποσύνολον τοῦ Τ. Οἱ ποδοσφαιρισταί τῆς ὁμάδος Π λέγονται ἀρχέτυπα τῆς ἀπεικονίσεως, αἱ τάξεις Γ΄, Δ΄, Ε΄ καί ΣΤ΄ λέγονται εἰκόνες τῶν ἀρχετύπων. Κάθε ἀρχέτυπον ἔχει μίαν καί μόνον εἰκόνα·π.χ. τό ἀρχέτυπον 1 ἔχει εἰκόνα τήν τάξιν ΣΤ΄καί τό 7 ἔχει εἰκόνα τήν τάξιν Ε΄. Δύο ἤ περισσότερα ἀρχέτυπα ἠμποροῦν νά ἔχουν <u>τήν αὐτήν εἰκόνα</u>· π.χ. τά ἀρχέτυπα 9 καί 10 ἔχουν τήν αὐτήν εἰκόνα Δ΄.

2) Ἔστω

$M = \{x \,/\, x$ μαθητής τοῦ Γυμνασίου $\Sigma\}$

καί $T = \{y \,/\, y$ τάξις τοῦ Γυμνασίου $\Sigma\}$.

Ἡ διμελής σχέσις

" x μαθητής τοῦ Γυμνασίου Σ ἀνήκει εἰς τήν τάξιν y τοῦ Σ"

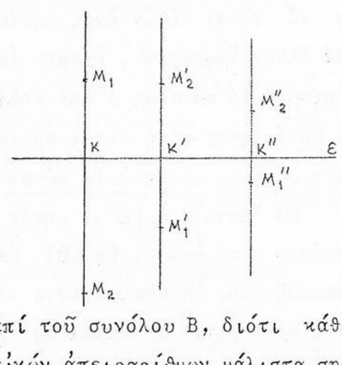
ἀπεικονίζει τώρα τό σύνολον M ἐπί τοῦ συνόλου T, διότι κάθε τάξις τοῦ Σ ἔχει μαθητάς καί ἐπομένως κάθε στοιχεῖον τοῦ T εἶναι εἰκών ἑνός τουλάχιστον στοιχείου τοῦ M.

3) Ἔστω

$A = \{x \,/\, x$ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου $p\}$

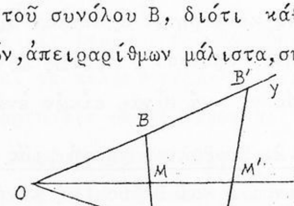
καί $B = \{y \,/\, y$ σημεῖον τῆς εὐθείας ε τοῦ ἐπιπέδου $p\}$.

Ἀπό κάθε σημεῖον M τοῦ ἐπιπέδου χαράσσομεν τήν κάθετον πρός τήν εὐθεῖαν ε καί ἔστω K τό σημεῖον τομῆς τῆς καθέτου μέ τήν ε.



Εἰς τό σημεῖον M τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχίζομεν τό σημεῖον K, ἴχνος τῆς καθέτου πρός τήν ε ἀπό τό σημεῖον M. Ἡ ἀντιστοιχία αὐτή εἶναι μία ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου A ἐπί τοῦ συνόλου B, διότι κάθε σημεῖον τῆς εὐθείας ε εἶναι εἰκών, ἀπειραρίθμων μάλιστα, σημείων τοῦ ἐπιπέδου p.

4) Ἄς εἶναι $x\widehat{O}y$ μία κυρτή γωνία (σχ. παραπλεύρως), AB καί A΄B΄ δύο τμήματα μέ ἄκρα ἐπάνω



είς τάς δύο πλευράς τῆς γωνίας. Ἔστω Μ τυχόν σημεῖον τοῦ (κλειστοῦ) τμήματος ΑΒ ($M \in AB$). Ἡ ἡμιευθεῖα ΟΜ θά κόψη τό τμῆμα Α΄Β΄ είς ἕνα σημεῖον , ἄς τό καλέσωμεν Μ΄ ($M' \in A'B'$). Ἐάν είς τό Μ ἀντιστοιχίσωμεν τό Μ΄, θά ἔχωμεν μίαν ἀπεικόνισιν τοῦ σημειοσυνόλου ΑΒ ἐπί τοῦ σημειοσυνόλου Α΄Β΄. Ἡ ἀπεικόνισις αὐτή ἔχει τήν ἀκόλουθον ἰδιότητα: ὄχι μόνον κάθε ἀρχέτυπον Μ ἔχει μίαν καί μόνον εἰκόνα Μ΄ ἀλλά καί , ἀντιστρόφως, κάθε εἰκών ἔχει ἕνα μόνον ἀρχέτυπον. Ἀπεικονίσεις καί συναρτήσεις μέ αὐτήν τήν ἰδιότητα λέγονται ἀμφιμονοσήμαντοι.

5) Ἔστω

$$A = \{x \,/\, x \text{ ἄρτιος φυσικός ἀριθμός}\}$$

καί $$\Phi = \{y \,/\, y \text{ φυσικός ἀριθμός}\}.$$

Ἡ διμελής σχέσις $y = \frac{1}{2}x$ ἀπεικονίζει τό σύνολον Α ἐπί τοῦ συνόλου Φ , διότι ἀντιστοιχίζει είς κάθε ἄρτιον φυσικόν x ἕνα φυσικόν ἀριθμόν y οὕτως ὥστε κάθε φυσικός ἀριθμός y νά εἶναι εἰκών ἑνός ἀρτίου φυσικοῦ, τοῦ $x = 2y$. Μέ ἄλλην ἔκφρασιν , ἔχομεν ἐδῶ μίαν συνάρτησιν μέ πεδίον ὁρισμοῦ τό σύνολον Α καί πεδίον τιμῶν τό σύνολον Φ. Ἡ συνάρτησις αὐτή εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος, ἐπειδή κάθε φυσικός y εἶναι εἰκών ἑνός μόνον ἀρτίου, τοῦ $x = 2y$.

6) Ἔστω $P = \{x/x$ ῥητός σχετικός ἀριθμός$\}$. Ἡ διμελής σχέσις $y = \frac{1}{3}x$, ($x \in P$), ἀπεικονίζει τό σύνολον Ρ ἐπί τοῦ ἑαυτοῦ του. Ἡ ἀπεικόνισις εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος, ἐπειδή είς κάθε ῥητόν σχετικόν ἀριθμόν x ἀντιστοιχίζει ἕνα ἐπίσης ῥητόν ἀριθμόν y οὕτως ὥστε καί κάθε ῥητός σχετικός ἀριθμός y νά εἶναι εἰκών ἑνός καί μόνον ῥητοῦ, τοῦ $x = 3y$.

8.2. Συμβολική γραφή μιᾶς ἀπεικονίσεως ἤ συναρτήσεως. Ἄς εἶναι Α καί Β δύο (μή κενά) σύνολα (δέν ἀποκλείομεν τήν περίπτωσιν $A = B$) καί ἄς παραστήσωμεν μέ x τυχόν στοιχεῖον τοῦ A , μέ y τυχόν στοιχεῖον τοῦ B. Τό A λέγεται πεδίον τῆς μεταβλητῆς x καί τό B πεδίον τῆς μεταβλητῆς y. Μία ἀπεικόνισις τοῦ A ἐντός (ἤ ἐπί) τοῦ B (μία συνάρτησις μέ πεδίον ὁρισμοῦ τό A καί πεδίον τιμῶν ἕνα ὑποσύνολον τοῦ B) παριστάνεται μέ τό γράμμα σ, ἀρχικόν τῆς λέξεως συνάρτησις καί μέ ἕνα βέλος κατευθυνόμενον ἀπό τό γράμμα A πρός τό γράμμα B ὡς ἑξῆς:

$$\sigma : \quad A \xrightarrow{\sigma} B .$$

Ὁ συμβολισμός αὐτός διαβάζεται ἔτσι: Τό σύνολον A ἀπεικονίζεται διά τῆς συναρτήσεως σ ἐντός (ἤ ἐπί) τοῦ συνόλου B. Ἀντί τοῦ σ χρησιμοποιεῖται καί τό γράμμα f, ἀρχικόν τῆς λέξεως functio = συνάρτησις. Ὅπως φαίνεται καί ἀπό τά παραδείγματα τοῦ προηγουμένου ἐδαφίου, ἡ ἀπεικόνισις αὐτή εἶναι μία εἰδική διμελής σχέσις: εἶναι μία ἀντιστοιχία στοιχείων τοῦ B εἰς τά στοιχεῖα τοῦ A , τοιαύτη ὥστε κάθε στοιχεῖον x τοῦ A νά ἔχῃ ἕνα καί μόνον ἀντίστοιχον στοιχεῖον y τοῦ B. Αὐτό συμβολίζεται μέ τόν ἀκόλουθον τρόπον:

$$\sigma : \quad x \xrightarrow{\sigma} \sigma(x) = y \qquad , (x \in A \ , \ y \in B).$$

Μέ ἄλλους λόγους, τό σύμβολον $\sigma(x)$ παριστάνει τήν εἰκόνα τοῦ στοιχείου x εἰς τήν θεωρουμένην ἀπεικόνισιν (ἤ συνάρτησιν) σ. Ὁ ἀνωτέρω συμβολισμός διαβάζεται ὡς ἑξῆς: "τό στοιχεῖον x τοῦ A ἔχει, εἰς τήν ἀπεικόνισιν σ, ἀντίστοιχον στοιχεῖον (ἤ εἰκόνα) τό σημεῖον $\sigma(x) = y$ τοῦ B" .

Π.χ. διά τήν συνάρτησιν τοῦ παραδείγματος 5) γράφομεν:

$$\sigma : \quad x \xrightarrow{\sigma} \frac{1}{2}x = y \qquad , \quad (x \in A \ , \ y \in \Phi).$$

Εἰς τήν συνάρτησιν αὐτήν, ὅπως καί εἰς ἐκείνην τοῦ παραδείγματος 6), καί τό πεδίον ὁρισμοῦ καί τό πεδίον τιμῶν εἶναι σύνολα ἀριθμῶν· διά τοῦτο αἱ συναρτήσεις αὐταί λέγονται ἀριθμητικαί . Διά τόν συμβολισμόν ἀριθμητικῶν συναρτήσεων συνηθίζεται καί ἁπλουστέρα γραφή. Π.χ. διά τήν συνάρτησιν τοῦ 5) γράφομεν ἁπλῶς :

$$y = \frac{1}{2}x \quad , \quad (x \in \{x/x \text{ ἄρτιος φυσικός}\})$$

καί διά τήν συνάρτησιν τοῦ 6):

$$y = \frac{1}{3}x \quad , \quad (x \in \{x/x \text{ ρητός σχετικός ἀριθμός}\})$$

<u>8.3. Γεωμετρική (ἤ γραφική) παράστασις ἀριθμητικῆς συναρτήσεως.</u> Ἔστω ἡ ἀριθμητική συνάρτησις

$$\sigma : \quad x \xrightarrow{\sigma} -2x = y \quad , \quad (x \in \Phi).$$

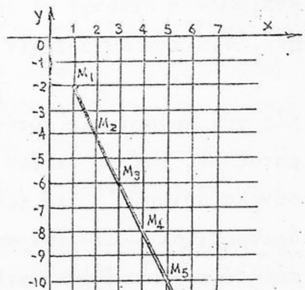
Εἰς κάθε φυσικόν ἀριθμ. x ἡ σ ἀντιστοιχίζει ἕναν ἀκέραιον ἀρνητικόν ἀριθμόν $y = -2x$. Τό διατεταγμένον ζεῦγος $(x, y = -2x)$ εἶναι ἕνα ζεῦγος ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν μεταβλητῶν x καί y εἰς τήν συνάρτησιν σ, λέγεται δέ συντόμως <u>ζεῦγος ἀντιστοίχων τιμῶν</u>. Τό σύνολον Σ τῶν ζευγῶν τούτων:

$$\Sigma = \{(x, y) \mid x \in \Phi \quad \text{καί} \quad y = -2x\}$$

ἀποτελεῖ οὐσιαστικά τήν συνάρτησιν σ. Ἐννοεῖται ὅτι δέν ἠμποροῦμεν νά ἀναγράφωμεν παρά ὀλίγα μόνον στοιχεῖα αὐτοῦ τοῦ ἀπειροσυνόλου Σ. Αὐτό γίνεται μέ ἕνα πίνακα πού ἔχει συνήθως τήν ἀκόλουθον ἁπλῆν διάταξιν:

x	1	2	3	4	5	6	7	...
y = −2x	−2	−4	−6	−8	−10	−12	−14	...

Ἄς θεωρήσωμεν τώρα τό ζεῦγος ἀντιστοίχων τιμῶν $(x, y = -2x)$ ὡς ζεῦγος συντεταγμένων ἑνός σημείου τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρός ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων. Τότε κάθε ζεῦγος τοῦ Σ παριστάνεται γεωμετρικά μέ ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου καί τό σύνολον Σ τῶν ζευγῶν ἀπεικονίζεται ἀμφιμονοσήμαντα ἐπί ἑνός σημειοσυνόλου Σ* τοῦ ἐπιπέδου. Τό σημειοσύνολον αὐτό Σ* λέγεται <u>γεωμετρική</u>



(ἤ γραφική) παράστασις τῆς συναρτήσεως σ. Εἰς τό θεωρούμενον παράδειγμα τό Σ* ἀποτελεῖται ἀπό τούς κόμβους $M_1, M_2, M_3, \ldots$ τοῦ προηγουμένου σχήματος οἱ ὁποῖοι κεῖνται ἐπάνω εἰς τήν ἡμιευθεῖαν πού ἔχει ἀρχήν τό σημεῖον $M_1(1, {}^{-}2)$ καί περνᾶ ἀπό τό σημεῖον $M_2(2, {}^{-}4)$.

Γενικῶς, ὅπως εἴπαμεν εἰς τό Βιβλ. I, σ. 99Γ, κάθε ἀριθμητική συνάρτησις τῆς μορφῆς $y = \alpha x + \beta$, ὅπου α καί β εἶναι δύο δεδομένοι ρητοί σχετικοί ἀριθμοί, παριστάνεται γεωμετρικῶς μέ ἕνα σύνολον σημείων πού ἀνήκουν εἰς μίαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

1) Τρεῖς ἀδελφοί Α, Β, Γ ἔχουν τέκνα, ὁ Α τά $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, ὁ Β τό β_1 καί ὁ Γ τά γ_1 καί γ_2. Συνδέομεν τά στοιχεῖα x τοῦ συνόλου $T = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \gamma_1, \gamma_2\}$ μέ τά στοιχεῖα y τοῦ συνόλου $\Pi = \{A, B, \Gamma\}$ διά τῆς διμελοῦς σχέσεως: "ὁ x ἔχει θεῖον τόν y". Νά παραστήσετε μέ διαγράμματα τοῦ Βέννη καί κατάλληλα συνδετικά βέλη καθώς καί μέ πίνακα διπλῆς εἰσόδου τήν ἀνωτέρω σχέσιν, νά ἐξηγήσετε δέ βάσει τῶν δύο αὐτῶν παραστάσεων, διατί ἡ σχέσις δέν ὁρίζει ἀπεικόνισιν τοῦ Τ ἐντός ἤ ἐπί τοῦ Π.

2) Νά ἐξετάσετε ἄν ὁρίζουν ἀπεικονίσεις (συναρτήσεις) αἱ ἀκόλουθοι διμελεῖς σχέσεις:
α) τό y εἶναι τόπος γεννήσεως τοῦ x
β) τό y εἶναι ἔτος γεννήσεως τοῦ x
γ) τό y εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ x σήμερα
δ) τό y εἶναι βάρος τοῦ κιβωτίου x
ε) τό y εἶναι ἀριθμός πενταπλάσιος τοῦ ἀριθμοῦ x.
Νά παραστήσετε τάς σχέσεις αὐτάς μέ Βέννεια διαγράμματα καθώς καί μέ πίνακας διπλῆς εἰσόδου λαμβάνοντες δύο <u>ὀλιγομελῆ</u> σύνολα Α καί Β ὡς πεδία τῶν μεταβλητῶν x καί y.

3) Ἄς εἶναι ε καί ε΄ δύο παράλληλοι μέ στενήν σημασίαν εὐθεῖαι καί Κ ἕνα σημεῖον εἰς τό ἐσωτερικόν τῆς ταινίας τήν ὁποίαν ὁρίζουν. Εἰς τό τυχόν σημεῖον Μ τῆς ε ἀντιστοιχίζομεν τό σημεῖον Μ΄ τῆς ε΄ τό ὁποῖον εἶναι τομή τῆς εὐθείας ΚΜ μέ τήν ε΄. Νά δείξετε ὅτι ἡ ἀντιστοιχία αὐτή εἶναι μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ σημειοσυνόλου τῆς ε ἐπί τοῦ σημειοσυνόλου τῆς ε΄.

4) Θεωροῦμεν μίαν περιφέρειαν (Π) καί μίαν ἐφαπτομένην

της δ ὡς σημειοσύνολα. Ἔστω Κ τό κέντρον τῆς περιφερείας. Χαράσσομεν τήν ἡμιευθεῖαν ΚΜ πού ἔχει ἀρχήν τό Κ καί περνᾶ ἀπό τό τυχόν σημεῖον Μ τῆς δ. Ἡ ἡμιευθεῖα αὐτή τέμνει τήν (Π) εἰς ἕνα σημεῖον Μ΄. Νά δείξετε ὅτι ἡ ἀντιστοιχία: Μ΄ἀντίστοιχον τοῦ $M \in \delta$ εἶναι μία ἀπεικόνισις τοῦ σημειοσυνόλου δ ἐντός τοῦ σημειοσυνόλου (Π). Ἐπί ποίου ὑποσυνόλου τοῦ (Π) ἀπεικονίζεται τό δ ;

4) Νά ἐξετάσετε, ἄν ἡ συμμετρία ὡς πρός σημεῖον εἰς τό ἐπίπεδον ἠμπορεῖ νά θεωρηθῇ ὡς ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ἐπί τοῦ ἑαυτοῦ του καί, εἰς καταφατικήν περίπτωσιν, ἄν ἡ ἀπεικόνισις εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος.

5) Ὅμοιον ζήτημα διά τήν συμμετρίαν ὡς πρός εὐθεῖαν εἰς τό ἐπίπεδον.

6) Ὅμοιον ζήτημα διά τήν παράλληλον μετατόπισιν κάθε σημείου τοῦ ἐπιπέδου κατά ἕνα διάνυσμα ἴσον πρός δοθέν διάνυσμα $\vec{\mu}$ τοῦ ἐπιπέδου.

7) Ὅμοιον ζήτημα διά τήν στροφήν τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου περί ἕνα δοθέν κέντρον Ο καί κατά μίαν δεδομένην γωνίαν α , π.χ. τήν $\measuredangle\ 60^{\circ}$.

8) Ἔστω $A = \{x/x$ ἀκέραιος σχετικός ἀριθμός$\}$. Θεωροῦμεν τήν συνάρτησιν

$$y = 2x - 1 , \quad (x \in A).$$

Νά καταρτίσετε ἕνα πίνακα ἀντιστοίχων τιμῶν διά $x = -3, -2, 1, 0, 1, 2, 3$ καί νά παραστήσετε γεωμετρικῶς τά προκύπτοντα διατεταγμένα ζεύγη (x,y).
Ποῖον εἶναι τό πεδίον τιμῶν τῆς συναρτήσεως καί εἶναι ἡ συνάρτησις ἀμφιμονοσήμαντος ;

9) Ὅμοιον ζήτημα διά τήν συνάρτησιν

$$\sigma : x \xrightarrow{\sigma} -x + 2 = y \quad , \quad (x \in A).$$

10) Ἔστω $P = \{x/x$ ῥητός σχετικός ἀριθμός$\}$. Νά παραστήσετε γεωμετρικῶς τήν συνάρτησιν

$$\sigma : x \xrightarrow{\sigma} \frac{5}{2} = y \quad , \quad (x \in P).$$

11) Ἡ συνάρτησις

$$y = x^2 \quad , \quad (x \in P)$$

ποῖον πεδίον τιμῶν ἔχει ; Νά δείξετε ὅτι δέν εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος. Νά καταρτίσετε ἕνα πίνακα ἀντιστοίχων τιμῶν διά $x = 0 , \pm\frac{1}{2} , \pm 1 , \pm\frac{3}{2} , \pm 2 , \pm\frac{5}{2}$ καί νά παραστήσετε γεωμετρικῶς τά προκύπτοντα διατεταγμένα ζεύγη (x,y), χρησιμοποιοῦντες χιλιοστομετρικόν χάρτην καί λαμβάνοντες τό 1 cm ὡς μονάδα μήκους ἐπί τῶν ἀξόνων συντεταγμένων.

12) Ἡ συνάρτησις

$$y = -x^2 \quad , \quad (x \in P)$$

ἐπί ποίου συνόλου ἀπεικονίζει τό P ; Εἶναι ἡ ἀπεικόνισις ἀμφιμονοσήμαντος ;

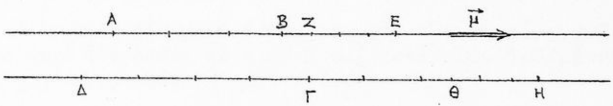
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

Ἀλγεβρικός λογισμός.

§ 1. Ἀνασκόπησις τῶν τεσσάρων βασικῶν πράξεων ἐπί σχετικῶν ἀριθμῶν.

1.1. Ὑπενθυμίζομεν πρῶτον τά ἀκόλουθα:

α) Δύο διανύσματα λέγονται συγγραμμικά, ὅταν αἱ εὐθεῖαι πού τά φέρουν εἶναι μεταξύ των παράλληλοι μέ εὐρεῖαν σημασίαν. Π.χ. τά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ (σχ. κατωτέρω) εἶναι συγγραμμικά μέ τό διάνυσμα $\overrightarrow{\mu}$



β) Ἕνας σχετικός ἀριθμός εἶναι ἕνας ἀριθμός τῆς Ἀριθμητικῆς ὁ ὁποῖος ἔχει ἐμπρός του τό σῆμα + ἤ τό σῆμα −. Ἀπόλυτος τιμή ἑνός σχετικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ὁ ἀριθμός τῆς Ἀριθμητικῆς ἀπό τόν ὁποῖον προκύπτει μέ τήν προσθήκην τοῦ προσήμου + ἤ −. Π.χ. $|^+3| = 3$, $|^-4| = 4$.

γ) Εἰς τήν δημιουργίαν τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν μᾶς ὡδήγησε ἡ μέτρησις τῶν διανυσμάτων, τά ὁποῖα εἶναι συγγραμμικά μέ ἕνα (μή μηδενικόν) διάνυσμα $\overrightarrow{\mu}$ πού ἐκλέγεται ὡς μονάς καί καλεῖται διάνυσμα ἀναφορᾶς. Τά συγγραμμικά αὐτά διανύσματα ὅταν δέν εἶναι μηδενικά, ἔχουν ἤ τήν ἰδίαν φοράν μέ τό $\overrightarrow{\mu}$ ἤ τήν ἀντίθετον. Ὅσα ἔχουν τήν ἰδίαν φοράν μετροῦνται ἀπό σχετικούς ἀριθμούς θετικούς, ὅσα ἔχουν τήν ἀντίθετον , ἀπό ἀρνητικούς. Π.χ. τά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ (σχ ἀνωτέρω) ἔχουν σχετικά μέτρα τούς ἀριθμούς $^+3$ καί $^-4$ ἀντιστοίχως. Τό μηδενικόν διάνυσμα ἔχει σχετικόν μέτρον τόν ἀριθμόν

$^{+}0 = {}^{-}0 = 0$.

δ) Διά νά παραστήσωμεν κατά γενικόν τρόπον σχετικούς ἀριθμούς χρησιμοποιοῦμεν μικρά ἑλληνικά γράμματα μέ τήν ἀκόλουθον συμφωνίαν: Ἐάν τό γράμμα α παριστάνη ἕνα σχετικόν ἀριθμόν, τότε ἡ γραφή $^{-}\alpha$ θά παριστάνη τόν σχετικόν ἀριθμόν τόν ἀντίθετον τοῦ α, δηλαδή ἐκεῖνον πού ἔχει τήν ἰδίαν ἀπόλυτον τιμήν μέ τόν α ἀλλά διαφορετικόν πρόσημον.

Π.χ. ἐάν $\alpha = {}^{-}3$, τότε $^{-}\alpha = {}^{+}3$. Δέν πρέπει λοιπόν νά παρασυρώμεθα ἀπό τήν παρουσίαν τοῦ προσήμου - ἐμπρός ἀπό ἕνα <u>γράμμα</u> καί νά νομίζωμεν ὅτι ὁ παριστανόμενος ἀριθμός εἶναι ἀρνητικός· ἠμπορεῖ νά εἶναι θετικός, ὅπως εἰς τό ἀνωτέρω παράδειγμα.

<u>1.2. Πρόσθεσις σχετικῶν ἀριθμῶν</u>. Ὅπως εἴδαμεν, εἰς κάθε διάνυσμα $\vec{\delta}$ συγγραμμικόν μέ τό $\vec{\mu}$ ἀντιστοιχεῖ ἕνας σχετικός ἀριθμός: τό σχετικόν μέτρον τοῦ $\vec{\delta}$ ὡς πρός τό διάνυσμα ἀναφορᾶς $\vec{\mu}$. Ἀντιστρόφως, εἰς κάθε σχετικόν ἀριθμόν α ἀντιστοιχοῦν διανύσματα συγγραμμικά μέ τό $\vec{\mu}$, τά ὁποῖα εἶναι ἴσα μεταξύ των, ἔχουν ὅλα τόν ἀριθμόν α ὡς σχετικόν μέτρον καί παριστάνονται ἀπό τό γινόμενον $\alpha\vec{\mu}$. Π.χ. εἰς τόν ἀριθμόν $\frac{^{-}3}{2}$ ἀντιστοιχεῖ τό διάνυσμα $\frac{^{-}3}{2}\vec{\mu} = \overrightarrow{EZ}$, καθώς καί κάθε ἴσον πρός αὐτό, π.χ. τό $\overrightarrow{H\Theta}$ (βλ. προηγούμενον σχῆμα).

Χρησιμοποιοῦντες αὐτήν τήν ἀντιστοιχίαν μεταξύ σχετικῶν ἀριθμῶν καί διανυσμάτων συγγραμμικῶν μέ τό $\vec{\mu}$, ὠδηγήθημεν ἀπό τήν πρόσθεσιν συγγραμμικῶν διανυσμάτων (Βιβλ. I, σ. 53Γ κ.ἑ.) διά νά ὁρίσωμεν τό ἄθροισμα δύο σχετικῶν ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς:

I) Τό ἄθροισμα δύο ὁμοσήμων σχετικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμός ὁμόσημος μέ αὐτούς καί ἔχει ἀπόλυτον τιμήν τό ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν προσθετέων. Π.χ.

$$^{+}5 + {}^{+}3 = {}^{+}8 \quad , \quad (|^{+}5| + |^{+}3| = 5 + 3 = 8)$$

$^{-}5 + {}^{-}3 = {}^{-}8$, $(|{}^{-}5| + |{}^{-}3| = 5 + 3 = 8)$

II) Τό ἄθροισμα δύο ἑτεροσήμων σχετικῶν ἀριθμῶν μέ ἀνίσους ἀπολύτους τιμάς ἔχει πρόσημον τό πρόσημον τοῦ προσθετέου μέ τήν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν καί ἀπόλυτον τιμήν τήν διαφοράν τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν προσθετέων. Π.χ.

$^{+}5 + {}^{-}3 = {}^{+}2$, $(|{}^{+}5| - |{}^{-}3| = 5 - 3 = 2)$

$^{-}5 + {}^{+}3 = {}^{-}2$, $(|{}^{-}5| - |{}^{+}3| = 5 - 3 = 2)$

III) Τό ἄθροισμα δύο ἀντιθέτων σχετικῶν ἀριθμῶν εἶναι τό μηδέν. Π.χ. $^{-}3 + {}^{+}3 = 0$.

IV) Τό ἄθροισμα ἑνός οἱουδήποτε σχετικοῦ ἀριθμοῦ α καί τοῦ 0 εἶναι ὁ ἀριθμός α. Π.χ. $^{-}3 + 0 = {}^{-}3$.

Τό ἄθροισμα τριῶν ἤ περισσοτέρων σχετικῶν ἀριθμῶν πού δίδονται μέ μίαν ὡρισμένην σειράν εὑρίσκεται μέ διαδοχικάς προσθέσεις δύο σχετικῶν ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς: προσθέτομεν τόν πρῶτον προσθετέον μέ τόν δεύτερον, τό προκῦπτον ἄθροισμα μέ τόν τρίτον προσθετέον κ.ο.κ. μέχρις ἐξαντλήσεως τῶν προσθετέων. Π.χ.

$^{-}3 + {}^{-}4 + {}^{+}2 = ({}^{-}3 + {}^{-}4) + {}^{+}2 = {}^{-}7 + {}^{+}2 = {}^{-}5$

$^{-}3 + {}^{-}4 + {}^{+}2 + {}^{-}10 = ({}^{-}3 + {}^{-}4 + {}^{+}2) + {}^{-}10 = {}^{-}5 + {}^{-}10 = {}^{-}15$.

1.3. Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως. Ὅπως εἴδαμεν (Βιβλ. I, σ. 62Γ κ.ἑ.), ἡ πρόσθεσις ἔχει τάς ἑξῆς ἰδιότητας·

1η $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, ἀντιμεταθετικότης.

2α $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$, προσεταιριστικότης.

Ἀπό τάς δύο αὐτάς ἰδιότητας καί ἀπό τόν ἀνωτέρω ὁρισμόν τοῦ ἀθροίσματος τριῶν ἤ περισσοτέρων σχετικῶν ἀριθμῶν ἕπονται γενικώτερον αἱ δύο ἀκόλουθοι ἰδιότητες:

I) Ἕνα ἄθροισμα σχετικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀνεξάρτητον ἀπό τήν σειράν μέ τήν ὁποίαν λαμβάνονται οἱ προσθετέοι· μέ ἄλλους λόγους, ἠμποροῦμεν εἰς ἕνα ἄθροισμα νά μεταβάλωμεν τήν σειράν τῶν προσθετέων χωρίς τό ἄθροισμα νά μεταβληθῆ.

Π.χ. $\alpha+\beta+\gamma+\delta = \beta+\alpha+\gamma+\delta = \gamma+\alpha+\delta+\beta = \ldots$

II) Ἕνα ἄθροισμα δέν μεταβάλλεται, ἄν ἀντικαταστήσωμεν δύο ἤ περισσοτέρους προσθετέους του μέ τό ἄθροισμά των.

Π.χ. $^-3+^-4+^+2+^-10 = ^-3+^-4+(^+2+^-10) = ^-3+^-4+^-8 = ^-15$.

Ἀντιστρόφως, ἕνα προσθετέον ἐπιτρέπεται νά τόν ἀντικαταστήσωμεν μέ δύο ἤ περισσοτέρους πού τόν ἔχουν ὡς ἄθροισμα.

3η. $\alpha+\gamma = \beta+\gamma \iff \alpha = \beta$, ἰδιότης τῆς διαγραφῆς.

4η. $(\alpha+\beta)\vec{\mu} = \alpha\vec{\mu} + \beta\vec{\mu}$,

ἤτοι ὁ πολλαπλασιασμός διανύσματος μέ σχετικούς ἀριθμούς εἶναι ἐπιμεριστικός ὡς πρός τήν πρόσθεσιν τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν.

1.4. Ἀφαίρεσις. Εἰς τήν ἀφαίρεσιν δίδονται δύο σχετικοί ἀριθμοί, ἕνας μειωτέος α καί ἕνας ἀφαιρετέος β, καί ζητεῖται ἕνας σχετικός ἀριθμός x ὁ ὁποῖος νά ἐπαληθεύῃ τήν ἐξίσωσιν

$$\beta + x = \alpha .$$

Διά νά τόν εὕρωμεν προσθέτομεν καί εἰς τά δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως τόν ἀριθμόν $^-\beta$ (ἀντίθετον τοῦ ἀφαιρετέου). Ἀπό τήν ἰσοδυναμίαν

$$\beta + x = \alpha \iff {}^-\beta + \beta + x = \alpha + {}^-\beta$$

καί ἀπό τάς ἰσότητας

$$^-\beta + \beta = 0 \quad , \quad 0 + x = x$$

προκύπτει ὅτι

$$x = \alpha + {}^-\beta .$$

Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμός x εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένος καί ἴσος μέ τό ἄθροισμα τοῦ μειωτέου α καί τοῦ ἀντιθέτου $^-\beta$ πρός τόν ἀφαιρετέον β , λέγεται δέ διαφορά ἤ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ β ἀπό τόν α καί σημειώνεται μέ τήν γραφήν $\alpha-\beta$.

Ἔχομεν λοιπόν:

$$\beta + x = \alpha \iff x = \alpha - \beta = \alpha + {}^-\beta .$$

Π.χ.

$^{+}3 - ^{+}5 = ^{+}3 + ^{-}5 = ^{-}2$, $^{+}3 - ^{-}5 = ^{+}3 + ^{+}5 = ^{+}8$

$0 - ^{+}6 = 0 + ^{-}6 = ^{-}6$, $0 - ^{-}2 = 0 + ^{+}2 = ^{+}2$,

$^{+}4 - ^{+}4 = ^{+}4 + ^{-}4 = 0$, $^{-}8 - ^{-}8 = ^{-}8 + ^{+}8 = 0$.

1.5. Ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως. Ὅπως γνωρίζομεν, ἡ πρᾶξις τῆς ἀφαιρέσεως ἐπί ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς τότε μόνον ἠμπορεῖ νά ἐκτελεσθῇ, ὅταν ὁ μειωτέος της εἶναι $\geqslant$ τοῦ ἀφαιρετέου της. Εἰς τούς σχετικούς ἀριθμούς, ὅπως προκύπτει ἀπό τά ἀνωτέρω, ἡ διαφορά ὑπάρχει πάντοτε, ὁποιοιδήποτε σχετικοί ἀριθμοί καί ἄν εἶναι οἱ δύο ὅροι τῆς ἀφαιρέσεως. Αὐτό ἔχει ὡς συνέπειαν νά ἰσχύουν χωρίς κανένα περιορισμόν αἱ ἰδιότητες I ἕως V πού διετυπώσαμεν εἰς τό Βιβλ. I, σ. 17-20Β. Τάς ἰδιότητας αὐτάς θά τάς διατυπώσωμεν τώρα συντόμως μέ τάς ἀκολούθους ἰσότητας, αἱ ὁποῖαι ἰσχύουν δι'ὁποιουσδήποτε σχετικούς ἀριθμούς:

I) $\alpha - \beta = (\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)$ καί $\alpha - \beta = (\alpha-\gamma)-(\beta-\gamma)$

II) $(\alpha+\beta+\gamma)-\delta = (\alpha-\delta)+\beta+\gamma = \alpha+(\beta-\delta)+\gamma = \alpha + \beta + (\gamma-\delta)$

III) $\alpha - (\beta+\gamma) = (\alpha-\beta)-\gamma = (\alpha-\gamma) - \beta$

IV) $\alpha + (\beta-\gamma) = (\alpha+\beta) - \gamma = (\alpha-\gamma) + \beta$

V) $\alpha - (\beta-\gamma) = (\alpha-\beta) + \gamma = (\alpha+\gamma) - \beta$.

1.6. Ἀριθμητικά πολυώνυμα. Ὅπως ἔχομεν μάθει (Βιβλ. I, σ. 68Γ), ἀριθμητικόν πολυώνυμον εἰς τήν Ἄλγεβραν λέγεται μία σειρά σχετικῶν ἀριθμῶν συνδεομένων μέ τά σύμβολα + καί - τῆς προσθέσεως καί ἀφαιρέσεως. Τιμή τοῦ ἀριθμητικοῦ πολυωνύμου εἶναι ὁ σχετικός ἀριθμός πού προκύπτει μετά τήν ἐκτέλεσιν τῶν σημειωμένων πράξεων. Π.χ.

$^{+}3-^{+}5-^{-}9+^{+}2 = \left[(^{+}3-^{+}5)-^{-}9\right] + ^{+}2 = \left[^{-}2-^{-}9\right] + ^{+}2 = ^{+}7+^{+}2 = ^{+}9$.

Ἕνα ἀριθμητικόν πολυώνυμον μετατρέπεται εἰς ἄθροισμα σχετικῶν ἀριθμῶν, ἄν ἀντικαταστήσωμεν κάθε παρουσιαζομένην ἀφαίρεσιν ἀριθμοῦ μέ τήν πρόσθεσιν τοῦ ἀντιθέτου ἀριθμοῦ. Π.χ.

$^{+}3 - ^{+}5 - ^{-}9 + ^{+}2 = ^{+}3 + ^{-}5 + ^{+}9 + ^{+}2$.

Οἱ προσθετέοι τοῦ προκύπτοντος ἀθροίσματος λέγονται ὅροι καί τοῦ ἀρχικοῦ πολυωνύμου. Π.χ. οἱ ἀριθμοί $^{+}3, ^{-}5, ^{+}9, ^{+}2$ εἶναι ὅροι καί τοῦ πολυωνύμου $^{+}3 - ^{+}5 - ^{-}9 + ^{+}2$.
Ἐπειδή ἕνα ἄθροισμα εἶναι ἀνεξάρτητον ἀπό τήν σειράν τῶν προσθετέων του, συμπεραίνομεν ὅτι καί ἡ τιμή ἑνός ἀριθμητικοῦ πολυωνύμου δέν μεταβάλλεται, ἄν ἀλλάξωμεν τήν σειράν τῶν ὅρων του. Π.χ.

$$^{+}3 - ^{+}5 - ^{-}9 + ^{+}2 = ^{+}3 - ^{-}9 + ^{+}2 - ^{+}5 = ^{+}9 \cdot$$

Δύο ἀριθμητικά πολυώνυμα λέγονται ἀντίθετα, ὅταν ἔχουν τούς ὅρους των ἀντιθέτους ἕνα πρός ἕνα. Π.χ. τά πολυώνυμα

$$^{+}3 - ^{+}5 - ^{-}9 + ^{+}2 \qquad \text{καί} \qquad ^{-}3 - ^{-}5 - ^{+}9 + ^{-}2$$

εἶναι ἀντίθετα. Τό ἄθροισμα δύο ἀντιθέτων πολυωνύμων εἶναι φυσικά μηδέν. Π.χ.

$$(^{+}3 - ^{+}5 - ^{-}9 + ^{+}2) + (^{-}3 - ^{-}5 - ^{+}9 + ^{-}2) = ^{+}9 + ^{-}9 = 0.$$

Διά νά συντομεύσωμεν τήν γλωσσικήν διατύπωσιν, λέγοντες πολυώνυμον δέν θά ἀποκλείωμεν εἰς τό ἑξῆς καί τήν καταχρηστικήν περίπτωσιν, τό πολυώνυμον νά ἀποτελῆται ἀπό ἕνα μόνον ὅρον, ἀφοῦ ἄλλωστε διά κάθε σχετικόν ἀριθμόν α ἔχομεν:

$$\alpha = \alpha + 0 = \alpha - 0 = \alpha + \beta + ^{-}\beta = \text{κτλ}.$$

Ἠμποροῦμεν τώρα νά διατυπώσωμεν γενικά τούς ἀκολούθους δύο κανόνας:

I) Διά νά προσθέσωμεν ἕνα ἀριθμητικόν πολυώνυμον εἰς ἕνα ἄλλο, τό γράφομεν χωρίς παρένθεσιν εἰς τήν συνέχειαν αὐτοῦ τοῦ ἄλλου. Π.χ.

$$^{+}7 - ^{+}2 + (^{+}8 + ^{-}5) = ^{+}7 - ^{+}2 + ^{+}8 + ^{-}5 = ^{+}8 .$$

II) Διά νά ἀφαιρέσωμεν ἕνα πολυώνυμον, προσθέτομεν τό ἀντίθετόν του. Π.χ.

$$^{+}7 - ^{+}2 - (^{+}8 + ^{-}5) = ^{+}7 - ^{+}2 + ^{-}8 + ^{+}5 = ^{+}2.$$

1.7. <u>Χρῆσις παρενθέσεων.</u> Ἀπό τάς δύο τελευταίας ἰσότητας συμπεραίνομεν τούς ἀκολούθους κανόνας διά τήν χρῆσιν παρενθέσεων.

1) Μία παρένθεσις ἡ ὁποία περιέχει ἀριθμητικόν πολυώνυμον καί ἔχει ἐμπρός της τό σημεῖον + τῆς προσθέσεως ἠμπορεῖ νά ἐξαλειφθῆ, χωρίς οἱ ὅροι τοῦ περιεχομένου πολυωνύμου νά πάθουν καμμίαν ἀλλαγήν· ἐάν ὅμως ἡ παρένθεσις ἔχη ἐμπρός της τό σημεῖον − τῆς ἀφαιρέσεως , τότε , διά νά τήν ἐξαλείφωμεν, πρέπει 1ον νά τρέψωμεν τό πρό αὐτῆς ἀφαιρετικόν σημεῖον − εἰς τό προσθετικόν σημεῖον + καί 2ον τούς ὅρους τοῦ περιεχομένου πολυωνύμου νά τούς ἀντικαταστήσωμεν μέ τούς ἀντιθέτους των. Π.χ.

$$^-3 + (^+9 - {}^-10) + {}^-8 = {}^-3 + {}^+9 - {}^-10 + {}^-8 = {}^+8$$

$$^-3 - (^+9 - {}^-10) + {}^-8 = {}^-3 + {}^-9 - {}^+10 + {}^-8 = {}^-30 \, .$$

2) Εἰς ἕνα ἀριθμητικόν πολυώνυμον ἠμποροῦμεν νά κλείσωμεν ὁσουσδήποτε ὅρους του μέσα εἰς μίαν παρένθεσιν γράφοντες ἐμπρός της τό σημεῖον + τῆς προσθέσεως· ἐάν ὅμως θέλωμεν νά ἔχωμεν ἐμπρός ἀπό τήν παρένθεσιν τό σημεῖον − τῆς ἀφαιρέσεως, τότε πρέπει νά ἀντικαταστήσωμεν μέ τούς ἀντιθέτους των τούς ὅρους πού θά κλείσωμεν μέσα εἰς τήν παρένθεσιν . Π.χ.

$$^-11 + {}^-7 - {}^+5 + {}^-4 - {}^+8 = {}^-11 + (^-7 + {}^-4 - {}^+8) - {}^+5 = {}^-11 - (^+7 + {}^+4 - {}^-8) - {}^+5.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά εὑρεθοῦν τά ἀκόλουθα ἀθροίσματα:

α) $^-3 + {}^+5$, $^-1 + {}^+7$, $^+3 + {}^-5$, $^-9 + {}^+11$, $^+9 + {}^+12$

β) $\frac{^-3}{4} + \frac{^+5}{4}$, $\frac{^-1}{6} + \frac{^-5}{6}$, $\frac{^+7}{9} + \frac{^-11}{9}$, $\frac{^+7}{12} + \frac{^+17}{12}$

γ) $^+2{,}35 + {}^-3{,}85$, $^-7{,}125 + {}^+8$, $^-18{,}375 + {}^+13{,}85$

δ) $\frac{^-5}{6} + \frac{^+7}{12}$, $\frac{^+3}{4} + \frac{^-5}{2}$, $^-0{,}75 + \frac{^+31}{10}$, $^-1{,}666\ldots + \frac{^-2}{3}$

ε) $\frac{^-1}{2} + \frac{^+3}{4} + \frac{^-5}{2} + \frac{^+2}{3}$, $\frac{^-1}{7} + \frac{^+2}{3} + \frac{^-1}{2}$

2) Εἰς τό ἄθροισμα $^{-}3+{}^{+}15+{}^{-}8$, χωρίς προηγουμένως νά ὑπολογισθῇ, νά προστεθῇ ὁ $^{+}8$ μέ ὅλους τούς δυνατούς τρόπους. Ποῖος εἶναι ὁ ἁπλούστερος;
Ὅμοιον ζήτημα εἰς τήν πρόσθεσιν $\left(\frac{^{-}5}{4}+\frac{^{+}5}{6}\right)+{}^{+}1,25$.

3) Νά ὑπολογισθοῦν μέ διαφόρους τρόπους τά ἀθροίσματα:
α) $(^{-}7+{}^{+}3+{}^{-}15+{}^{+}1)+(^{+}17+{}^{-}3+{}^{-}2+{}^{+}7)$

β) $\left(\frac{^{-}5}{6}+\frac{^{+}7}{2}+\frac{^{-}3}{4}\right)+\left(\frac{^{-}7}{6}+\frac{^{+}3}{4}\right)+\left(\frac{^{-}1}{2}+\frac{^{-}3}{2}\right)+\frac{^{+}1}{6}$

Ποῖον τρόπον εὑρίσκετε ἁπλούστερον ;

4) Ὁ ἀριθμός $^{-}3$ νά ἀναλυθῇ εἰς δύο προσθετέους ἀπό τούς ὁποίους ὁ ἕνας νά εἶναι τήν μίαν φοράν ὁ $^{+}4$ καί τήν ἄλλην φοράν ὁ $^{-}7$.

5) Ἀπό τόν τύπον $x = \alpha + \beta$ νά ὑπολογισθῇ ὁ x μέ τάς ἀκολούθους ἀντιστοίχους τιμάς τῶν α καί β:

$\alpha =$	$^{-}5$	$^{+}3$	$^{-}9$	$^{-}2\frac{1}{3}$	$^{+}3\frac{2}{5}$	$^{-}17\frac{1}{2}$	0
$\beta =$	$^{+}15$	$^{-}2\frac{2}{3}$	$^{+}8\frac{1}{4}$	$^{+}5\frac{1}{6}$	$^{-}13\frac{3}{4}$	$^{+}10,85$	$^{-}3,5$

6) Ἀπό τούς τέσσαρας ἀριθμούς $^{-}3$, $^{-}2$, $^{+}0,25$, 0 νά ἀφαιρεθῇ διαδοχικῶς ὁ καθένας ἐκ τῶν ἀριθμῶν $\frac{^{+}5}{4}$, $^{-}1,45$, $^{+}8,1$.

7) Εἰς τά κατωτέρω ἀριθμητικά πολυώνυμα νά τεθοῦν οἱ δύο τελευταῖοι ὅροι ἐντός παρενθέσεως 1ον μέ τό προσθετικόν σημεῖον + ἐμπρός ἀπό τήν παρένθεσιν καί 2ον μέ τό ἀφαιρετικόν − ἐμπρός ἀπ' αὐτήν :
α) $^{+}3-{}^{+}5+{}^{+}1-{}^{+}2$, β) $^{-}7+{}^{+}3-{}^{+}1-{}^{+}5$, γ) $\kappa-\lambda-\mu$,
δ) $\lambda+\mu-\kappa$, ε) $\nu-\mu-\lambda+\kappa$.

8) Νά ἐξαλείψετε τάς ἀγκύλας καί τάς παρενθέσεις ἀπό τάς ἀκολούθους ἀριθμητικάς παραστάσεις καί νά ὑπολογίσετε τάς τιμάς τῶν ἀριθμητικῶν πολυωνύμων πού προκύπτουν:
α) $^{-}3,5-(^{-}7,25+{}^{-}8+{}^{+}2,5)$

β) $0-\left[\left(^{+}3\frac{1}{2}+{}^{-}8\right)-(^{+}1-{}^{+}4+{}^{+}1,2)\right]$

γ) $^{-}3-\left[^{+}1-(^{-}2,5+{}^{+}3)+{}^{+}1\right]$.

9) Νά ἐξαλείψετε τάς ἀγκύλας καί τάς παρενθέσεις ἀπό τάς ἀκολούθους ἐγγραμμάτους παραστάσεις καί νά τάς γράψετε μέ τόν ἁπλούστερον δυνατόν τρόπον:
(Ι) $\alpha+(\beta-\gamma)-[\beta+\gamma-(1-\beta)]$

(ΙΙ) $[\alpha-(\beta+\gamma)]-[(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)]$.

1.8 <u>Πολλαπλασιασμός</u>. Χρησιμοποιοῦντες τούς σχετικούς ἀριθμούς ὡς πολλαπλασιαστάς διανυσμάτων τά ὁποῖα εἶναι συγγραμμικά μέ ἕνα διάνυσμα ἀναφορᾶς $\vec{\mu}$ (Βιβλ. Ι , σ. 74Γ κ.ἑ.) ἐφθάσαμεν εἰς τόν ἀκόλουθον ὁρισμόν τοῦ γινομένου δύο σχετικῶν ἀριθμῶν:

Ι) Τό γινόμενον δύο ὁμοσήμων σχετικῶν ἀριθμῶν εἶναι θετικός ἀριθμός καί ἔχει ἀπόλυτον τιμήν τό γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων. Π.χ.

$^{+}3\cdot{}^{+}5 = {}^{+}15 \quad , \quad (|{}^{+}3|\cdot|{}^{+}5| = 3\cdot5 = 15)$

$^{-}3\cdot{}^{-}5 = {}^{+}15 \quad , \quad (|{}^{-}3|\cdot|{}^{-}5| = 3\cdot5 = 15)$.

ΙΙ) Τό γινόμενον δύο ἑτεροσήμων σχετικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός καί ἔχει ἀπόλυτον τιμήν τό γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων . Π.χ.

$^{+}3\cdot{}^{-}5 = {}^{-}15 \quad , \quad (|{}^{+}3|\cdot|{}^{-}5| = 3\cdot5 = 15)$

$^{-}3\cdot{}^{+}5 = {}^{-}15 \quad , \quad (|{}^{-}3|\cdot|{}^{+}5| = 3\cdot5 = 15)$.

ΙΙΙ) Τό γινόμενον ἑνός οἱουδήποτε σχετικοῦ ἀριθμοῦ μέ τό μηδέν εἶναι ἴσον μέ μηδέν καί ἔχει ἑπομένως ἀπόλυτον τιμήν τό γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων. Π.χ.

$^{+}3\cdot0 = 0 \; , \; {}^{-}3\cdot0 = 0 \; , \; (|{}^{+}3|\cdot|0| = |{}^{-}3|\cdot|0| = 3\cdot0 = 0)$.

Τό γινόμενον τριῶν ἤ περισσοτέρων σχετικῶν ἀριθμῶν πού δίδονται μέ μίαν ὡρισμένην σειράν εὑρίσκεται μέ διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς δύο παραγόντων ὡς ἑξῆς: πολλαπλασιάζομεν τόν πρῶτον παράγοντα μέ τόν δεύτερον, τό προκῦπτον γινόμενον μέ τόν τρίτον παράγοντα κ.ο.κ. μέχρις ἐξαντλήσεως τῶν παραγόντων. Π.χ.

$^{-}4\cdot{}^{+}5\cdot{}^{-}2\cdot{}^{+}10 = {}^{-}20\cdot{}^{-}2\cdot{}^{+}10 = {}^{+}40\cdot{}^{+}10 = {}^{+}400$.

<u>1.9.</u> <u>Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.</u> Ὅπως ἐμάθαμεν (Βιβλ. Ι , σ. 76Γ κ.ἑ.), ὁ πολλαπλασιασμός ἔχει τάς ἑξῆς κυρίας ἰδιότητας:

1η. $\alpha\beta = \beta\alpha$, ἀντιμεταθετικότης.

2α. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$, προσεταιριστικότης.
Ἀπό τάς δύο αὐτάς ἕπονται γενικώτερον αἱ ἑξῆς δύο:

I) Ἕνα γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων δέν μεταβάλλεται ἄν ἀλλάξωμεν τήν σειράν (τήν διάταξιν) τῶν παραγόντων του. Π.χ. $\alpha\beta\gamma\delta = \alpha\gamma\beta\delta = \alpha\gamma\delta\beta = \alpha\delta\beta\gamma = \delta\gamma\beta\alpha = \ldots$

II) Εἰς ἕνα γινόμενον ἠμποροῦμεν νά ἀντικαταστήσωμεν δύο ἤ περισσοτέρους παράγοντας μέ τό γινόμενόν των· ἀντιστρόφως , ἠμποροῦμεν νά ἀντικαταστήσωμεν ἕνα παράγοντα μέ δύο ἤ περισσοτέρους πού τόν ἔχουν ὡς γινόμενον. Π.χ.
$^-3 \cdot {}^-4 \cdot {}^+2 \cdot {}^-10 = {}^-3 \cdot ({}^-4 \cdot {}^+2) \cdot {}^-10 = {}^-3 \cdot {}^-8 \cdot {}^-10 = {}^-240.$

3η. Ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι ἐπιμεριστικός ὡς πρός τήν πρόσθεσιν, ἄρα καί ὡς πρός τήν ἀφαίρεσιν, ἤτοι

$$(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma \qquad \text{καί} \qquad (\alpha-\beta)\gamma = \alpha\gamma - \beta\gamma.$$

Ἰδού δύο ἐφαρμογαί αὐτῆς τῆς ἰδιότητος καί τῶν προηγουμένων: $(\alpha+\beta)\cdot(\gamma+\delta) = \alpha(\gamma+\delta)+\beta(\gamma+\delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$,
$(\alpha-\beta)(\gamma-\delta) = \alpha(\gamma-\delta)-\beta(\gamma-\delta) = \alpha\gamma - \alpha\delta -(\beta\gamma-\beta\delta) = \alpha\gamma-\alpha\delta-\beta\gamma+\beta\delta.$
Καί ἕνα ἀριθμητικόν παράδειγμα:
$({}^-7+{}^+2)({}^-6+{}^-3) = {}^+42 + {}^+21 + {}^-12 + {}^-6 = {}^+45 = {}^-5 \cdot {}^-9$.

4η. Ἕνα γινόμενον εἶναι ἴσον μέ μηδέν, ὅταν καί μόνον ὅταν ἕνας τουλάχιστον παράγων του εἶναι μηδέν. Π.χ.

$$\alpha\beta\gamma = 0 \iff \text{εἴτε } \alpha \text{ εἴτε } \beta \text{ εἴτε } \gamma = 0.$$

5η. Ἡ θετική μονάς $^+1$ εἶναι οὐδέτερον στοιχεῖον εἰς τόν πολλαπλασιασμόν , ἤτοι διά κάθε σχετικόν ἀριθμόν α ἔχομεν:

$$\alpha \cdot {}^+1 = {}^+1 \cdot \alpha = \alpha.$$

6η. Εἰς κάθε σχετικόν ἀριθμόν $\alpha \neq 0$ ἀντιστοιχεῖ ἕνας ἀντίστροφος, δηλαδή ἕνας σχετικός ἀριθμός τοῦ ὁποίου τό γινόμενον μέ α εἶναι ἴσον μέ $^+1$. Π.χ. ὁ $^+7$ ἔχει ἀντίστροφον τόν $^+\frac{1}{7}$ καί ὁ $\frac{^-2}{3}$ τόν $\frac{^-3}{2}$. Ὁ ἀντίστροφος τοῦ ἀριθμοῦ $\alpha \neq 0$ παριστάνεται μέ $\frac{1}{\alpha}$, εἶναι ὁμόσημος μέ τόν α καί ἔχει ἀπόλυτον τιμήν τόν ἀντίστροφον τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ α:

$$\left|\frac{1}{\alpha}\right| = \frac{1}{|\alpha|} \cdot$$

Ὁ ἀριθμός 0 δέν ἔχει ἀντίστροφον, διότι τό γινόμενον τοῦ 0 μέ ὁποιονδήποτε σχετικόν ἀριθμόν ἰσοῦται μέ 0 καί ὄχι μέ $^+1$.

7η. Ἡ ἰσότης $\alpha = \beta$ ἔχει φυσικά ὡς συνέπειαν τήν ἰσότητα $\alpha\gamma = \beta\gamma$, ὁποιοσδήποτε καί ἄν εἶναι ὁ σχετικός ἀριθμός γ. Ἀντιστρόφως, ἀπό τήν ἰσότητα $\alpha\gamma = \beta\gamma$ δυνάμεθα νά συμπεράνωμεν τήν ἰσότητα $\alpha = \beta$, μόνον ὅταν γνωρίζωμεν ὅτι $\gamma \neq 0$. (Παράβαλε καί Βιβλ. I, σ. 35Β, § 3.12). Ἰσχύει ἑπομένως διά τούς σχετικούς ἀριθμούς ἡ λογική ἰσοδυναμία:

$$\alpha\gamma = \beta\gamma \quad \text{καί} \quad \gamma \neq 0 \iff \alpha = \beta.$$

<u>1.10.</u> <u>Διαίρεσις</u>. Εἰς τήν διαίρεσιν δίδονται δύο σχετικοί ἀριθμοί, ἕνας διαιρετέος β καί ἕνας διαιρέτης $\alpha \neq 0$, καί ζητεῖται ἕνας σχετικός ἀριθμός x ὁ ὁποῖος νά ἐπαληθεύη τήν ἐξίσωσιν:

$$\alpha x = \beta$$

Διά νά τόν εὕρωμεν πολλαπλασιάζομεν καί τά δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως μέ τόν ἀντίστροφον $\frac{1}{\alpha}$ τοῦ διαιρέτου α. Ἀπό τήν ἰσοδυναμίαν

$$\alpha x = \beta \iff \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha x = \beta \cdot \frac{1}{\alpha}$$

καί ἀπό τάς ἰσότητας

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = {}^+1 \qquad \text{καί} \quad {}^+1 \cdot x = x$$

προκύπτει ὅτι

$$x = \beta \cdot \frac{1}{\alpha}.$$

Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμός x εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένος καί ἴσος μέ τό γινόμενον τοῦ διαιρετέου β ἐπί τόν ἀντίστροφον τοῦ διαιρέτου α. Ὁ ἀριθμός αὐτός λέγεται (ἀκριβές) πηλίκον τοῦ β διά τοῦ α καί σημειώνεται μέ τήν γραφήν $\beta : \alpha$. Ἀπό τά ἀνωτέρω ἕπονται τώρα τά ἑξῆς: τό πηλίκον $\beta : \alpha = \beta \cdot \frac{1}{\alpha}$

εἶναι ἀριθμός θετικός, ὅταν οἱ β καί α εἶναι ὁμόσημοι, ἀρνητικός, ὅταν εἶναι ἑτερόσημοι καί μηδέν, ὅταν $\beta = 0$, ἡ δέ ἀπόλυτος τιμή του ἰσοῦται μέ τό πηλίκον τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ διαιρετέου β διά τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ διαιρέτου α : $|\beta : \alpha| = |\beta| : |\alpha|$.

Κατά ταῦτα ἰσχύει καί εἰς τήν διαίρεσιν σχετικῶν ἀριθμῶν ὁ κανών τῶν προσήμων τόν ὁποῖον ἐγνωρίσαμεν εἰς τόν πολλαπλασιασμόν.

Παραδείγματα: $^{+}2 : {}^{+}3 = {}^{+}2 \cdot \frac{^{+}1}{3} = \frac{^{+}2}{3}$, $^{-}2 : {}^{-}3 = {}^{-}2 \cdot \frac{^{-}1}{3} = \frac{^{+}2}{3}$, $^{-}2 : {}^{+}3 = {}^{-}2 \cdot \frac{^{+}1}{3} = \frac{^{-}2}{3}$, $^{+}2 : {}^{-}3 = {}^{+}2 \cdot \frac{^{-}1}{3} = \frac{^{-}2}{3}$, $\frac{^{-}3}{5} : \frac{^{-}4}{7} = \frac{^{+}21}{20}$.

1.10. Ἀλγεβρικά κλάσματα. Τό πηλίκον $\beta : \alpha = \beta \cdot \frac{1}{\alpha}$ γράφεται καί μέ τήν μορφήν τοῦ κλάσματος $\frac{\beta}{\alpha}$. Ἐπειδή οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος εἶναι τώρα σχετικοί ἀριθμοί, θά τό ὀνομάζωμεν ἀλγεβρικόν, διά νά τό διακρίνωμεν ἀπό τό ἀριθμητικόν κλάσμα πού ἔχει ὅρους ἀριθμούς τῆς Ἀριθμητικῆς. Διά τά ἀλγεβρικά κλάσματα ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος βασική ἰδιότης, ἀντίστοιχος πρός γνωστήν ἰδιότητα τῶν ἀριθμητικῶν κλασμάτων:

Ἡ τιμή ἑνός ἀλγεβρικοῦ κλάσματος δέν μεταβάλλεται ἄν πολλαπλασιάσωμεν ἤ διαιρέσωμεν τούς δύο ὅρους του μέ τόν αὐτόν, ὄχι μηδενικόν σχετικόν ἀριθμόν:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta \cdot \gamma}{\alpha \cdot \gamma} = \frac{\beta : \gamma}{\alpha : \gamma}, \quad \text{ὅπου } \gamma \neq 0.$$

Ἡ ἰδιότης αὐτή μᾶς ἐπιτρέπει νά τρέψωμεν ἕνα σύνθετον ἀλγεβρικόν κλάσμα εἰς ἁπλοῦν κλάσμα, πολλαπλασιάζοντες τούς δύο ὅρους του μέ κατάλληλον ἀριθμόν. Π.χ.

$$\frac{^{+}\frac{4}{5}}{^{-}\frac{2}{3}} = \frac{^{+}\frac{4}{5} \cdot {}^{+}5 \cdot {}^{+}3}{^{-}\frac{2}{3} \cdot {}^{+}5 \cdot {}^{+}3} = \frac{^{+}4 \cdot {}^{+}3}{^{-}2 \cdot {}^{+}5} = \frac{^{+}12}{^{-}10} = \frac{^{-}6}{5}.$$

1.11. Ἁπλοποίησις τῆς γραφῆς τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν. Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι αἱ τέσσαρες βασικαί πράξεις, ὅταν ἐκτελοῦνται ἐπί θετικῶν ἀριθμῶν, δέν διαφέρουν ἀπό τάς ὁμωνύμους των ἐπί τῶν ἀντιστοίχων ἀπολύτων τιμῶν παρά μόνον κατά τό πρόσημον + πού γράφομεν ἐμπρός ἀπό τάς ἀπολύτους τιμάς ἄνω ἀριστερά. Διά τοῦτο συμφωνοῦμεν νά παραλείπωμεν τό πρόσημον + τῶν θετικῶν ἀριθμῶν καί νά τούς γράφωμεν ὅπως τούς ἀριθμούς τῆς Ἀριθμητικῆς. Ἔτσι π.χ.

ἀντί	$^+5 + ^+3 = ^+8$	θά γράφωμεν	$5 + 3 = 8$
"	$^+5 - ^+3 = ^+2$	" "	$5 - 3 = 2$
"	$^+5 \cdot ^+3 = ^+15$	" "	$5 \cdot 3 = 15$
"	$^+5 : ^+3 = \frac{^+5}{3}$	" "	$5 : 3 = \frac{5}{3}$.

Δεύτερον, ἐπειδή ἡ πρόσθεσις ἑνός ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ, π.χ. τοῦ $^-3$, ἰσοδυναμεῖ μέ τήν ἀφαίρεσιν τοῦ ἀντιθέτου θετικοῦ $^+3$, συμφωνοῦμεν νά γράφωμεν τόν ἀρνητικόν ἀριθμόν $^-3$ ὡς ἑξῆς: (-3), παραλείποντες τήν παρένθεσιν, ὅταν ὁ ἀρνητικός ἀριθμός εὑρίσκεται εἰς τήν ἀρχήν μιᾶς ἀριθμητικῆς παραστάσεως. Διά τάς παρενθέσεις αὐτάς, πού περιέχουν ἕνα ἀρνητικόν ἀριθμόν, ἰσχύουν ὅσα εἴπαμεν εἰς τήν § 1.7 περί τῆς χρήσεως παρενθέσεων.

Θά ἀποσαφηνίσωμεν τά ἀνωτέρω εἰς τά ἀκόλουθα παραδείγματα μετατρέποντες τήν παλαιάν γραφήν τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν εἰς τήν νέαν καί ἐκτελοῦντες τάς σημειωμένας πράξεις:

$^-7 + ^-3 + ^+5 - ^+4 = -7 + (-3) + 5 - 4 = -7 - 3 + 5 - 4 = -9$

$^+5 - ^-2 + ^-6 + ^+7 = 5 - (-2) + (-6) + 7 = 5 + 2 - 6 + 7 = 8$

$(^-7 + ^-3) - (^-3 + ^+2) = -7 + (-3) - (-3 + 2) = -7 - 3 + 3 - 2 = -9$

$^-5 \cdot ^+3 = -5 \cdot 3 = -15$, $^-5 \cdot ^-3 = -5 \cdot (-3) = 15$

$^+5 \cdot ^-3 = 5 \cdot (-3) = -15$, $^-3 \cdot ^-1,5 = -3 \cdot (-1,5) = 4,5$

$^-4 : ^-2 = -4 : (-2) = 2$, $^-4 : ^+\frac{1}{2} = -4 : \frac{1}{2} = -4 \cdot 2 = -8$

$(^+6 - ^-3 + ^-7) \cdot ^-4 = \big(6 - (-3) + (-7)\big) \cdot (-4) = 6 \cdot (-4) - (-3)(-4) + (-7)(-4)$

$= -24 - 12 + 28 = -8$

<u>Παρατηρήσεις.</u> Ι) Τό σύμβολον · τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐμπρός

ἀπό ἕνα γράμμα ἤ μίαν παρένθεσιν παραλείπεται συνήθως. Π.χ.

$3\cdot\alpha\cdot\beta = 3\alpha\beta$, $3\cdot(5-7) = 3(5-7) = 3(-2) = -6$,

$(8-9)\cdot(2+3) = (8-9)\ (2+3) = -1\cdot5 = -5$.

II) Ὅταν εἰς μίαν ἀριθμητικήν παράστασιν εἶναι σημειωμέναι παρενθέσεις καί διάφοροι βασικαί πράξεις, ἡ σειρά πού πρέπει νά ἀκολουθῆται εἰς τούς ὑπολογισμούς εἶναι ἡ ἀκόλουθος: 1ον ὑπολογίζονται αἱ παρενθέσεις, 2ον ἐκτελοῦνται οἱ σημειωμένοι πολλαπλασιασμοί καί αἱ διαιρέσεις καί 3ον (δηλαδή τελευταῖαι) ἐκτελοῦνται αἱ προσθέσεις καί ἀφαιρέσεις. Π.χ.

$$\begin{aligned}(3-7)\cdot4 + \big(5\cdot(-6)-6:3\big)\cdot(-2) &= -4\cdot4 + (-30-2)\ (-2)\\ &= -4\cdot4 + (-32)\ (-2)\\ &= -16 + 64 = 48\ .\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά ὑπολογισθοῦν τά γινόμενα:

$-12\cdot(-6)$, $-7\cdot2$, $3\cdot(-5)\cdot(-2) = 3(-5)\ (-2)$,

$-8{,}7\cdot(-8{,}7)$, $-0{,}84\left(-\frac{1}{2}\right)5$, $-87\cdot\left(-\ 3\ \frac{1}{4}\right)\cdot93\cdot0$.

2) Ὁ ἀριθμός −60 νά τραπῆ εἰς γινόμενον α) τριῶν ἀρνητικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν καί β) δύο ἀκεραίων θετικῶν καί ἑνός ἀκεραίου ἀρνητικοῦ. Τί ἔχετε νά παρατηρήσετε ὡς πρός τό πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων ;

3) Ὁ ἀριθμός 60 νά τραπῆ εἰς γινόμενον α) τεσσάρων ἀκεραίων θετικῶν παραγόντων , β) δύο θετικῶν καί δύο ἀρνητικῶν παραγόντων καί γ) τεσσάρων ἀρνητικῶν παραγόντων. Τί ἔχετε νά παρατηρήσετε ὡς πρός τό πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων ;

4) Τά ἀκόλουθα γινόμενα νά ὑπολογισθοῦν κατά δύο τρόπους: 1ον σύμφωνα μέ τήν Παρατήρησιν II) τοῦ § 1.11 καί 2ον μέ ἐφαρμογήν τῆς ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ:

$-2\cdot(5-3+1-7)$, $\left(-3+2\ \frac{1}{3}-5\ \frac{1}{2}\right)\cdot12$,

$(1+2-3)\ (-5-7)$, $\left(\frac{4}{5}-8\right)\left(-\ \frac{3}{4}+1-\ \frac{1}{2}\right)$.

5) Εἰς τάς ἀκολούθους ἰσότητας νά ἀντικατασταθοῦν τά γράμματα μέ καταλλήλους ἀριθμούς, οὕτως ὥστε νά φανῆ ἡ ἐφαρ-

μογή τῆς ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ:
$-36+27=9(\alpha+\beta)$, $15-12-3=3(\delta+\varepsilon+\zeta)$, $-20-30-10 = 10(\varkappa+\lambda+\mu)$

6) Νά εὑρεθοῦν τά ἀκόλουθα πηλίκα καί νά γίνουν αἱ δοκιμαί σύμφωνα μέ τήν λογικήν ἰσοδυναμίαν $\beta:\alpha = \gamma \Longleftrightarrow \alpha\cdot\gamma = \beta$:
$-12:(-4)$, $36:(-9)$, $-198:22$, $-169:(-13)$,
$-18:\left(-\frac{3}{4}\right)$, $\frac{9}{10}:(-3)$, $-\frac{2}{3}:5\frac{1}{3}$.

7) Νά ἐπιλυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:
$-3x = 6$, $2x = -6$, $3x = 6$, $\frac{2}{3}x = -\frac{5}{6}$, $\frac{1}{5}x = 0$.

8) Ὁ ἀριθμός -12 νά τραπῇ εἰς γινόμενον δύο παραγόντων ἀπό τούς ὁποίους ὁ ἕνας νά εἶναι κατά σειράν ὁ ἑξῆς:
-3 , 3 , -1 , 6 , -12 , $-\frac{4}{5}$.
Ποίαν πρᾶξιν ἐκτελεῖτε διά νά εὕρετε κάθε φοράν τόν ζητούμενον δεύτερον παράγοντα;

9) Νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἀριθμοί N καί M ἀπό τούς τύπους $N = xy$ καί $M = x:y$ ἐάν:
α) $x = -\frac{7}{11}$, $y = 1{,}25$ καί β) $x = -3{,}5$, $y = -2{,}8$.

10) Νά εὑρεθοῦν αἱ ἀριθμητικαί τιμαί τῶν ἀκολούθων παραστάσεων, ἐάν $\alpha = -2$, $\beta = 3$, $\gamma = -5$;
$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha-\beta+\gamma}$, $\frac{\alpha-\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}$, $\frac{\alpha\beta-\gamma}{\alpha+\beta\gamma}$.

11) Νά ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαί τῶν ἀκολούθων παραστάσεων
$\frac{3x-y}{x+y}$, $\frac{x-2y}{3x-1}$, $\frac{4x-2y+3}{4x-y+1}$
ὅταν 1ον $x = -2$, $y = 6$ καί 2ον $x = \frac{5}{6}$, $y = -\frac{1}{2}$

§ 2. Δυνάμεις σχετικῶν ἀριθμῶν.

2.1. Ὅπως ἐμάθαμεν εἰς τό Βιβλίον Ι , σ. 83Γ , ἡ δύναμις α μέ βάσιν τόν σχετικόν ἀριθμόν α καί ἐκθέτην τόν ἀκέραιον $\mu \geqslant 2$ ὁρίζεται ὡς γινόμενον μ παραγόντων ἴσων μέ τόν α:

$$\alpha^{\mu} = \underbrace{\alpha\cdot\alpha\ \ldots\ \alpha}_{\mu\ \text{παράγοντες}}$$

Ἐκτός τούτου ὁρίζομεν ὅτι

$$\alpha^1 = \alpha.$$

Ἀπό τούς ὁρισμούς αὐτούς καί σύμφωνα μέ τόν κανόνα τῶν προσήμων εἰς τόν πολλαπλασισμόν συμπεραίνομεν τά ἀκόλουθα:

(α θετικός καί $\mu \in \Phi$) $\Longrightarrow$ α^{μ} θετικός ἀριθμός

(α ἀρνητικός καί $\mu = 2\nu$ μέ $\nu \in \Phi$) $\Longrightarrow \alpha^{\mu}$ θετικός ἀριθμός

(α ἀρνητικός καί $\mu = 2\nu - 1$ μέ $\nu \in \Phi$) $\Longrightarrow \alpha^{\mu}$ ἀρνητικός ἀριθμός

($\alpha = 0$ καί $\mu \in \Phi$) $\Longrightarrow$ $\alpha^{\mu} = 0$.

<u>Ἀριθμητικά παραδείγματα.</u>

$1^1 = 1^2 = 1^3 = \ldots = 1^{\mu} = 1 \qquad (\mu \in \Phi)$

$(-1)^1 = -1, (-1)^2 = 1, (-1)^3 = -1, \ldots, (-1)^{2\nu} = 1,\ (-1)^{2\nu-1} = -1$

$(-3)^1 = -3,\ (-3)^2 = 9,\ (-3)^3 = -27, \ldots, (-3)^{2\nu} = 3^{2\nu},\ (-3)^{2\nu-1} = -3^{2\nu-1}$

<u>Παρατήρησις.</u> Δέν πρέπει νά συγχέωμεν τήν γραφήν $(-3)^{\mu}$ μέ τήν -3^{μ} καί, γενικῶς, τήν $(-\alpha)^{\mu}$ μέ τήν $-\alpha^{\mu}$. Ἡ $(-\alpha)^{\mu}$ σημαίνει τήν μυοστήν δύναμιν τοῦ ἀριθμοῦ $-\alpha$, ἀντιθέτου τοῦ α, ἐνῶ ἡ $-\alpha^{\mu}$ σημαίνει τόν ἀριθμόν πού εἶναι ἀντίθετος τοῦ ἀριθμοῦ α^{μ}.

Π.χ. ἐάν $\alpha = 3$ καί $\mu = 4$, τότε

$(-\alpha)^4 = (-3)^4 = 81$ ἐνῶ $-\alpha^4 = -3^4 = -81$

καί ἐάν $\alpha = -3$ καί $\mu = 4$, τότε

$(-\alpha)^4 = 3^4 = 81$ ἐνῶ $-\alpha^4 = -(-3)^4 = -81$.

<u>2.2.</u> <u>Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων.</u> Σκεπτόμενοι ὅπως καί εἰς τήν Ἀριθμητικήν (Βιβλ. Ι, σ. 58 Β. κ.ἑ.) εὑρίσκομεν ὅτι καί διά τούς σχετικούς ἀριθμούς ἰσχύουν αἱ ἀκόλουθοι ἰδιότητες δυνάμεων μέ ἐκθέτας θετικούς ἀκεραίους:

I) $\alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa+\lambda}$; II) $(\alpha \cdot \beta)^{\kappa} = \alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa}$,

III) $(\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa\lambda}$, IV) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa} = \frac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}}$, ὅπου $\beta \neq 0$,

V) $\alpha^{\kappa} : \alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa-\lambda}$, ὅπου $\alpha \neq 0$ καί $k > \lambda$.

Παραδείγματα:

$(-4)^2 \cdot (-4)^3 = 16 \cdot (-64) = -1024 = (-4)^{2+3} = (-4)^5$

$(-3 \cdot 6)^2 = (-18)^2 = 324 = (-3)^2 \cdot 6^2 = 9 \cdot 36$

$[(-2)^3]^4 = [-8]^4 = 4096 = (-2)^{3 \cdot 4} = (-2)^{12}$

$\left(\frac{-2}{3}\right)^3 = \left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{(-2)^3}{3^3} = \frac{-8}{27} = -\frac{8}{27}$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^5 : \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{32} : \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{5-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

2.3. Δύναμις ἑνός μή μηδενικοῦ σχετικοῦ ἀριθμοῦ μέ ἐκθέτην τό 0 ἤ ἕνα ἀρνητικόν ἀκέραιον. Διά νά ἰσχύη ἡ ἰδιότης V) καί εἰς τήν περίπτωσιν $k \leqslant \lambda$ προχωροῦμεν εἰς τούς ἀκολούθους ὁρισμούς.

1ον Ἔστω α ἕνας σχετικός ἀριθμός $\neq 0$ καί $k = \lambda$, ἕνας ἀκέραιος θετικός. Τό πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος $\alpha^\kappa : \alpha^\lambda = \alpha^{\kappa-\lambda}$ εἶναι τότε πηλίκον ἑνός ἀριθμοῦ μή μηδενικοῦ διά τοῦ ἑαυτοῦ του, ἄρα ἰσοῦται μέ 1. Τό δεύτερον μέλος $\alpha^{\kappa-\lambda}$ λαμβάνει τήν τήν μορφήν α^0 πού δέν ἔχει πρός τό παρόν κανένα νόημα. Ἐάν λοιπόν συμφωνήσωμεν ἡ γραφή α^0 νά παριστάνη τήν θετικήν μονάδα 1, τότε ἡ ἰδιότης V) θά ἰσχύη καί εἰς τήν περίπτωσιν $k = \lambda =$ θετικός ἀκέραιος. Διά τοῦτο ὁρίζομεν:

$\alpha^0 = 1$ διά κάθε σχετικόν ἀριθμόν $\alpha \neq 0$.

Π.χ. $(-3)^0 = (-2)^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \left(-\frac{3}{4}\right)^0 = 1$.

2ον. Ἔστω $k = 3 < \lambda = 5$. Τό πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος $\alpha^\kappa : \alpha^\lambda = \alpha^{\kappa-\lambda}$ ἰσοῦται τώρα μέ τό κλάσμα

$$\frac{\alpha^3}{\alpha^5} = \frac{\alpha^3 : \alpha^3}{\alpha^5 : \alpha^3} = \frac{1}{\alpha^2},$$

ἐνῶ τό δεύτερον μέλος παίρνει τήν μορφήν α^{-2} πού δέν ἔχει πρός τό παρόν κανένα νόημα. Ἐάν ὅμως συμφωνήσωμεν ἡ γραφή α^{-2} νά παριστάνη τόν ἀριθμόν $\frac{1}{\alpha^2}$, τότε ἡ ἰδιότης V) θά ἰσχύη καί εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν $k = 3 < \lambda = 5$. Ὁρίζομεν λοιπόν:

$\alpha^{-2} = \frac{1}{\alpha^2}$ διά κάθε σχετικόν ἀριθμόν $\alpha \neq 0$.

Γενικῶς, ἔστω ν ἕνας θετικός ἀκέραιος ($\nu \in \Phi$)˙ ὁρίζομεν ὅτι

$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$ διά κάθε σχετικόν ἀριθμόν $\alpha \neq 0$.

Π.χ.

$$(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = \frac{1}{-27} = -\frac{1}{27}.$$

Ὥστε, δύναμις σχετικοῦ ἀριθμοῦ $\neq 0$ μέ ἐκθέτην ἀρνητικόν ἀκέραιον εἶναι ἴση μέ κλάσμα πού ἔχει ἀριθμητήν τήν θετικήν μονάδα 1 καί παρονομαστήν τήν δύναμιν τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ μέ ἐκθέτην τόν ἀντίθετον θετικόν ἀκέραιον.

2.4. Θά δείξωμεν τώρα μέ μερικά παραδείγματα ὅτι αἱ ἰδιότητες I) ἕως V) τῶν δυνάμεων ἐξακολουθοῦν νά ἰσχύουν καί μετά τούς νέους ὁρισμούς.

Ἄς παριστάνουν τά γράμματα α καί β σχετικούς ἀριθμούς $\neq 0$. Ἰσχύουν τότε τά ἀκόλουθα:

I) $\alpha^{-2}\cdot\alpha^{-3} = \frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{\alpha^3} = \frac{1}{\alpha^5} = \alpha^{-5} = \alpha^{-2-3}$,

$\alpha^{-3}\cdot\alpha^{5} = \frac{1}{\alpha^3}\cdot\alpha^5 = \alpha^2 = \alpha^{-3+5}$

II) $(\alpha\cdot\beta)^{-3} = \frac{1}{(\alpha\cdot\beta)^3} = \frac{1}{\alpha^3\cdot\beta^3} = \frac{1}{\alpha^3}\cdot\frac{1}{\beta^3} = \alpha^{-3}\cdot\beta^{-3}$

III) $(\alpha^{-3})^{-2} = \frac{1}{(\alpha^{-3})^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha^3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha^6}} = \alpha^6 = \alpha^{-3\cdot(-2)}$

IV) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3} = \frac{1}{\frac{\alpha^3}{\beta^3}} = \frac{\beta^3}{\alpha^3} = \frac{1}{\alpha^3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\beta^3}} = \alpha^{-3}\cdot\frac{1}{\beta^{-3}} = \frac{\alpha^{-3}}{\beta^{-3}}$

V) $\alpha^{-2}:\alpha^{-5} = \frac{1}{\alpha^2}:\frac{1}{\alpha^5} = \frac{1}{\alpha^2}\cdot\alpha^5 = \alpha^3 = \alpha^{-2-(-5)}$.

2.5. Μία ἐφαρμογή. Εἰς τάς φυσικάς καί τεχνικάς ἐπιστήμας γίνεται συχνά χρῆσις τῶν δυνάμεων τοῦ 10 μέ ἀρνητικούς ἐκθέτας πρός παράστασιν τῶν δεκαδικῶν κλασματικῶν μονάδων. Πράγματι ἔχομεν:

$0{,}1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$, $0{,}01 = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$, $0{,}001 = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$, κ.ο.κ.

Μέ τήν βοήθειαν αὐτῶν τῶν δυνάμεων ἠμποροῦμεν νά γράφωμεν συντόμως καί εὐκρινῶς μικρούς δεκαδικούς ἀριθμούς. Π.χ.

$0{,}000035 = 35\cdot10^{-6} = 3{,}5\cdot10^{-5}$

$0{,}000007 = 7\cdot10^{-6}$, $0{,}00000012 = 12\cdot10^{-8}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκόλουθοι δυνάμεις:
$(-1)^{30}$, $(-1)^{15}$, $(-2)^7$, 2^9, $(-5)^3$, $(-6)^4$, $(-2)^8$,
$\left(-\frac{2}{3}\right)^2$, $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$, $\left(\frac{1}{-2}\right)^4$, $\left(1\frac{1}{4}\right)^3$, $\left(-1\frac{1}{4}\right)^3$, $(-0{,}5)^3$, $(-0{,}5)^4$.

2) Εἰς τάς ἀκολούθους ἰσότητας νά ἀντικατασταθῇ ὁ x μέ τόν κατάλληλον ἀκέραιον κάθε φοράν:
$-8 = (-2)^x$, $16 = (-2)^x$, $81 = (-3)^x$, $-243 = (-3)^x$,
$-125 = (-5)^x$, $64 = [(-2)^3]^x$, $8^2 = (-2)^x$.

3) Νά ὑπολογισθοῦν αἱ δυνάμεις:
3^{-2}, 2^{-3}, $(-5)^{-3}$, $(-2)^{-4}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$, $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}$, $(0{,}5)^{-4}$.

4) Νά ἐκτελεσθοῦν μέ τόν συντομώτερον τρόπον αἱ ἀκόλουθοι πράξεις:
α) $(-2)^4\cdot(-2)^3\cdot(-2)^0$, β) $(-3^4)\cdot(-3)^{-4}\cdot(-3)^{-2}$
γ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, δ) $[(-2)^2]^{-3}:(2^3)^2$.

5) Εἰς τάς ἀκολούθους ἰσότητας νά ἀντικατασταθῇ ὁ x μέ τόν κατάλληλον ἀκέραιον κάθε φοράν:
$5^{-3} = 5^2\cdot 5^x$, $(-2)^2 = (-2)^6 : (-2)^x$, $4^3 = 4^x\cdot 4^5$.

6) Νά ἐκτελεσθοῦν μέ τόν ἁπλούστερον τρόπον αἱ ἀκόλουθοι πράξεις:
$37\cdot 10^{-2}$, $1{,}5\cdot 10^{-3}$, $0{,}85 : 10^{-3}$, $-\frac{3}{4} : 10^{-2}$.

7) Νά γράψετε μέ μορφήν γινομένου ἑνός ἀκεραίου ἐπί μίαν δύναμιν τοῦ 10 μέ ἀρνητικόν ἐκθέτην τούς δεκαδικούς ἀριθμούς:
0,0002 , 0,000003 , 0,125 , 13,075.

8) Νά γράψετε μέ μορφήν δεκαδικῶν ἀριθμῶν τά γινόμενα:
$3\cdot 10^{-2}$, $5\cdot 10^{-3}$, $-7\cdot 10^{-5}$, $375\cdot 10^{-4}$,
$2{,}7\cdot 10^{-3}$, $87\cdot 10^{-6}$, $4{,}5\cdot 10^{-5}$.

§ 3. Ἀνισότητες μεταξύ σχετικῶν ἀριθμῶν.

3.1. Συνοψίζομεν πρῶτον ὅσα ἐμάθαμεν εἰς τό Βιβλ. Ι , σ. 84Γ κ.ἑ.

Δύο σχετικοί ἀριθμοί α καί β εἶναι ἴσοι, ὅταν καί μόνον ὅταν ἡ διαφορά α − β εἶναι ἴση μέ μηδέν :

$$\alpha = \beta \iff \alpha - \beta = 0$$

αἱ ἀριθμοί ἔχουν τότε τήν αὐτήν ἀπόλυτον τιμήν καί, ἐάν δέν εἶναι μηδέν, τό αὐτό πρόσημον.

Διά δύο ἀνίσους σχετικούς ἀριθμούς α καί β θά ἔχωμεν ἐπομένως $\alpha - \beta \neq 0$, δύο δέ εἶναι τότε αἱ δυναταί περιπτώσεις:

ἤ $\alpha - \beta$ = θετικός ἀριθμός $\Longleftrightarrow \alpha > \beta \Longleftrightarrow \beta < \alpha$,

ἤ $\alpha - \beta$ = ἀρνητικός ἀριθμός $\Longleftrightarrow \alpha < \beta \Longleftrightarrow \beta > \alpha$.

<u>Συνέπειαι</u>: 1) Κάθε θετικός ἀριθμός θ εἶναι μεγαλύτερος καί ἀπό τό 0 καί ἀπό κάθε ἀρνητικόν ἀριθμόν α :

$$\vartheta > 0 \quad \text{καί} \quad \vartheta > \alpha ,$$

2) Κάθε ἀρνητικός ἀριθμός α εἶναι μικρότερος καί ἀπό τό 0 καί ἀπό κάθε θετικόν θ :

$$\alpha < 0 \quad \text{καί} \quad \alpha < \vartheta .$$

3) Ἀπό δύο ἀνίσους θετικούς ἀριθμούς ϑ_1 καί ϑ_2 μικρότερος εἶναι ἐκεῖνος πού ἔχει τήν μικροτέραν ἀπόλυτον τιμήν:

$$\vartheta_1 < \vartheta_2 \Longleftrightarrow |\vartheta_1| < |\vartheta_2|$$

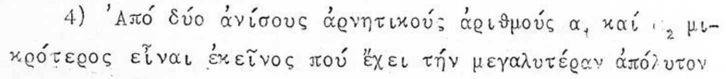
Π.χ. $3 < 5$, $1,5 < 1,75$ κ.ο.κ.

4) Ἀπό δύο ἀνίσους ἀρνητικούς ἀριθμούς α_1 καί α_2 μικρότερος εἶναι ἐκεῖνος πού ἔχει τήν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν :

$$\alpha_1 < \alpha_2 \Longleftrightarrow |\alpha_2| < |\alpha_1|$$

Π.χ. $-5 < -3$, $-15 < -0,75$ κ.ο.κ.

Αἱ ἀνωτέρω σχέσεις ἀνισότητος μεταξύ δύο σχετικῶν ἀριθμῶν ἀποκτοῦν μίαν πολύ ἐποπτικήν γεωμετρικήν ἑρμηνείαν, ὅταν θεωρήσωμεν τούς σχετικούς ἀριθμούς ὡς τετμημένας σημείων ἑνός ἄξονος μέ θετικήν φοράν ἐξ ἀριστερῶν πρός τά δεξιά : τό σημεῖον μέ τήν μικροτέραν τετμημένην κεῖται ἀριστερά τοῦ σημείου μέ τήν μεγαλυτέραν τετμημένην (σχ. κατωτέρω).



<u>3.2.</u> <u>Ἰδιότητες τῶν ἀνισοτήτων.</u> 1) Ἔστω ἡ ἀνισότης

$$-3 < -1,5$$

καί ἡ ἰσότης $\quad 0,5 = \frac{1}{2}$.

Αἱ δύο αὐταί σχέσεις ἔχουν ὡς συνέπειαν τήν ἀνισότητα

$$-3 + 0,5 < -1,5 + \frac{1}{2} \text{ δηλαδή τήν } -2,5 < -1 .$$

Γενικῶς ἔχομεν:

$$(\alpha < \beta \text{ καί } \gamma = \delta) \Longrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \delta .$$

Μέ ἄλλους λόγους, εἰς τά δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος ἠμποροῦμεν νά προσθέσωμεν τόν αὐτόν σχετικόν ἀριθμόν ἤ τά ἀντίστοιχα μέλη μιᾶς ἰσότητος· θά προκύψη ἀνισότης ὁμόστροφος (τῆς αὐτῆς φορᾶς).

2) Θεωροῦμεν δύο ὁμοστρόφους ἀνισότητας, π.χ. τάς

$$5 > -2$$
$$-3 > -4 .$$

Αἱ δύο αὐταί σχέσεις ἔχουν ὡς συνέπειαν τήν ἀνισότητα

$$5 + (-3) > -2 + (-4) \text{ δηλαδή τήν } 2 > -6 .$$

Γενικῶς ἔχομεν:

$$(\beta > \alpha \text{ καί } \delta > \gamma) \Longrightarrow \beta + \delta > \alpha + \gamma .$$

Μέ ἄλλους λόγους , ἠμποροῦμεν νά προσθέσωμεν κατά μέλη (δηλαδή πρῶτον μέλος μέ πρῶτον καί δεύτερον μέλος μέ δεύτερον) δύο ὁμοστρόφους ἀνισότητας· θά προκύψη ἀνισότης ὁμόστροφος.

3) Ἔστω ἡ ἀνισότης $-3 < -2$ καί ϑ ἕνας θετικός ἀριθμός. Θά ἰσχύη καί ἡ ἀνισότης

$$-3\vartheta < -2\vartheta .$$

Πράγματι

$$3\vartheta - (-2\vartheta) = \big(-3-(-2)\big)\cdot\vartheta = \text{ἀρνητ. ἐπί θετ.} < 0.$$

Ἐπειδή ἡ διαίρεσις μέ ἕνα θετικόν ἀριθμόν ϑ ἰσοδυναμεῖ μέ πολλαπλασιασμόν ἐπί τόν θετικόν ἀριθμόν $\frac{1}{\vartheta}$, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ἀνισότης $-3 < -2$ ἔχει ὡς συνέπειαν καί τήν

$$-3 : \vartheta < -2 : \vartheta \text{ δηλαδή τήν } -\frac{3}{\vartheta} < -\frac{2}{\vartheta} .$$

Γενικῶς ἔχομεν:

$$(\alpha < \beta \text{ καί } \vartheta > 0) \Longrightarrow \alpha\vartheta < \beta\vartheta$$

καί $$(\alpha < \beta \text{ καί } \vartheta > 0) \Longrightarrow \alpha : \vartheta < \beta : \vartheta .$$

Μέ ἄλλους λόγους, ἠμποροῦμεν νά πολλαπλασιάσωμεν (ἤ νά διαιρέσωμεν) καί τά δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος μέ τόν αὐτόν θετικόν ἀριθμόν· θά προκύψῃ ἀνισότης ὁμόστροφος.

4) Ἔστω πάλιν ἡ ἀνισότης $-3 < -2$ καί ϱ ἕνας ἀρνητικός ἀριθμός. Ἄν πολλαπλασιάσωμεν τά δύο μέλη τῆς ἀνισότητος μέ ϱ θά λάβωμεν τώρα τήν ἑτερόστροφον (ἀντιθέτου φορᾶς) ἀνισότητα

$$-3\varrho > -2\varrho .$$

Πράγματι

$$-3\varrho - (-2\varrho) = \big(-3-(-2)\big)\cdot \varrho = \text{ἀρνητ. ἐπί ἀρνητ.} > 0 .$$

Ἐπειδή ἡ διαίρεσις μέ ἕνα ἀρνητικόν ἀριθμόν ϱ ἰσοδυναμεῖ μέ πολλαπλασιασμόν ἐπί τόν ἀρνητικόν ἀριθμόν $\frac{1}{\varrho}$, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ἀνισότης $-3 < -2$ ἔχει ὡς συνέπειαν τήν ἑτερόστροφον ἀνισότητα

$$-3 : \varrho > -2 : \varrho \quad \text{δηλαδή τήν} \quad -\frac{3}{\varrho} > -\frac{2}{\varrho} .$$

Γενικῶς ἔχομεν:

$$(\alpha < \beta \text{ καί } \varrho < 0) \Longrightarrow \alpha\varrho > \beta\varrho$$

καί $$(\alpha < \beta \text{ καί } \varrho < 0) \Longrightarrow \alpha : \varrho > \beta : \varrho .$$

Μέ ἄλλους λόγους, ἐάν πολλαπλασιάσωμεν (ἤ διαιρέσωμεν) καί τά δύο μέλη ἀνισότητος μέ τόν ἴδιον ἀρνητικόν ἀριθμόν, θά λάβωμεν ἀνισότητα ἑτερόστροφον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά τεθῇ τό κατάλληλον σύμβολον ἰσότητος ἤ ἀνισότητος μεταξύ τῶν ἀριθμῶν:

α) -3 καί -1, $-0,75$ καί $-2\frac{1}{3}$, -17 καί 0, 3 καί $\frac{13}{4}$

β) -3 καί $-\frac{13}{4}$, $-2\frac{1}{2}$ καί $-2\frac{1}{3}$, $-1,333$ καί $0,1$.

γ) $(-2)^3$ καί $(-2)^2$, $(-3)^{-2}$ καί 3^{-2}, 2^2 καί $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

δ) 3^3 καί $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $(-5)^7$ καί $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-7}$, $-0,5$ καί $-0,498$

2) Εἰς τά δύο μέλη τῶν κατωτέρω ἀνισοτήτων νά προσθέσετε τά ἀντίστοιχα μέλη τῶν ἀπέναντί των ἰσοτήτων ἤ ὁμοστρόφων ἀνισοτήτων:

α) $-\frac{2}{3} < -\frac{5}{8}$, $\frac{3}{4} = 0,75$

β) $1\frac{1}{2} > -3$, $-\frac{3}{2} = -1,5$

γ) $-1 < \frac{6}{5}$, $4 < \frac{24}{5}$

δ) $2,5 > -0,5$, $1 > 0,5$.

3) Νά πολλαπλασιασθοῦν τά δύο μέλη κάθε μιᾶς ἀπό τάς ἀκολούθους ἀνισότητας διαδοχικῶς μέ τούς ἀριθμούς 6 καί -12 :

α) $-\frac{5}{6} > -\frac{11}{12}$, $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$, $\frac{7}{12} > \frac{11}{24}$

β) $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} > \frac{1}{2} - \frac{3}{4}$, $-1 + \frac{5}{6} < 1 - \frac{5}{6}$

γ) $\frac{\alpha}{4} - \frac{\alpha}{6} > \alpha$, $\frac{2x}{3} - \frac{3x}{4} > 1$.

4) Νά δείξετε ὅτι ἠμποροῦμεν νά ἀφαιρέσωμεν ἀπό τά δύο μέλη ἀνισότητος τόν ἴδιον σχετικόν ἀριθμόν, χωρίς ἡ ἀνισότης νά ἀλλάξῃ φοράν.

5) Ἔστω ὅτι μεταξύ τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν α καί β ἰσχύει ἡ ἀνισότης $\alpha > \beta$. Νά δείξετε ὅτι θά εἶναι τότε

$\alpha^2 > \beta^2$ ἐάν $\alpha + \beta > 0$
$\alpha^2 = \beta^2$ " $\alpha + \beta = 0$
$\alpha^2 < \beta^2$ " $\alpha + \beta < 0$

Νά δώσετε καί ἀριθμητικά παραδείγματα δι' ἑκάστην περίπτωσιν.

6) Νά ἐξηγήσετε διατί ἡ ἀνισότης $\alpha \cdot \beta > 0$ ἰσοδυναμεῖ μέ τήν πρότασιν: οἱ δύο σχετικοί ἀριθμοί α καί β εἶναι διάφοροι ἀπό τό μηδέν καί ὁμόσημοι.
Μέ ποίαν πρότασιν ἰσοδυναμεῖ ἡ ἀνισότης $\alpha \cdot \beta < 0$;

7) Μεταξύ τῶν (μή μηδενικῶν) σχετικῶν ῥητῶν ἀριθμῶν α καί β ἰσχύει ἡ ἀνισότης $\alpha > \beta$. Νά ἐξετάσετε, μέ παραδείγματα πρῶτον καί ἔπειτα γενικῶς, ποία ἀνισότης ἰσχύει μεταξύ τῶν ἀντιστρόφων των $1/\alpha$ καί $1/\beta$ ὅταν 1ον οἱ α καί β εἶναι ὁμόσημοι καί 2ον ὅταν εἶναι ἑτερόσημοι.

8) Νά δείξετε ὅτι $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$ καί $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0$.

§ 4. Προσεγγιστικοί ἀριθμοί.
Ἀπόλυτον καί σχετικόν σφάλμα.

4.1. Εἰς τό Βιβλ. Ι, σ. 38–39 Γ καί σ. 46Γ ἐμάθαμεν τί σημαίνει "προσεγγίζω ἕνα ἀριθμόν μέ ἕνα δεκαδικόν ἀριθμόν κατ'ἔλλειψιν ἤ καθ'ὑπεροχήν". Χάριν ἐπαναλήψεως ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι μετροῦμεν μέ ἕνα ὑποδεκάμετρον, διῃρημένον εἰς mm (χιλιοστά τοῦ μέτρου), τάς διαστάσεις μιᾶς σελίδος τοῦ βιβλίου μας καί ὅτι εὑρίσκομεν διά τήν μίαν 168 mm σύν κάτι μικρότερον τοῦ 1 mm καί διά τήν ἄλλην 240 mm μεῖον κάτι μικρότερον τοῦ 1 mm. Λέγομεν τότε ὅτι ἡ 1η διάστασις εἶναι περίπου ἴση πρός 168 mm μέ προσέγγισιν ἑνός mm κατ'ἔλλειψιν καί ἡ 2α περίπου ἴση πρός 240 mm μέ προσέγγισιν ἑνός mm καθ'ὑπεροχήν:

1η διάσταση $\simeq$ 168 mm κατ'ἔλλειψιν, 2α διάσταση $\simeq$ 240 mm καθ'ὑπεροχήν μέ προσέγγισιν ἑνός mm.

Γενικῶς καμμία μέτρησις ἑνός φυσικοῦ μεγέθους (ἑνός μήκους, ἑνός βάρους, μιᾶς θερμοκρασίας κτλ.) δέν ἠμπορεῖ νά δώσῃ ἐντελῶς ἀκριβές μέτρον τοῦ μεγέθους, διότι καί τά ὄργανα μετρήσεως πού χρησιμοποιοῦμεν παρουσιάζουν ἀτελείας καί αἱ ἀναγνώσεις πού κάμνομεν δέν ἠμποροῦν νά εἶναι ἐντελῶς ἀκριβεῖς. Διά τοῦτο εἰς τάς ἐφαρμογάς τῶν Μαθηματικῶν ἔχουν μεγάλην σπουδαιότητα τά ἀκόλουθα.

4.2. Σφάλμα προσεγγίσεως. Ἔστω $\frac{22}{7}$ ἕνα κοινόν κλάσμα. Ἄν τό τρέψωμεν εἰς δεκαδικόν ἀριθμόν, θά εὕρωμεν τόν περιοδικόν δεκαδικόν ἀριθμόν

$$\frac{22}{7} = 3,\overline{142857}142857\ldots$$

Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι χρειαζόμεθα μίαν προσεγγιστικήν τιμήν τοῦ $\frac{22}{7}$ μέ λάθος μικρότερον τοῦ ἑκατοστοῦ. Θά λάβωμεν $\frac{22}{7} \simeq 3,14$ κατ'ἔλλειψιν ἤ $\frac{22}{7} \simeq 3,15$ καθ'ὑπεροχήν.

Ἡ διαφορά:

ἀκριβής τιμή μεῖον προσεγγιστική τιμή $= \frac{22}{7} - 3,14 = 0,00287...$
καί
ἀκριβής τιμή μεῖον προσεγγιστική τιμή $= \frac{22}{7} - 3,15 = -0,00714...$
λέγεται <u>ἀπόλυτον σφάλμα</u> καί, συντόμως, <u>σφάλμα</u> τῆς προσεγγίσεως πού θεωροῦμεν. Τό σφάλμα αὐτό εἶναι θετικόν ὅταν χρησιμοποιοῦμεν προσέγγισιν κατ'ἔλλειψιν καί ἀρνητικόν ὅταν χρησιμοποιοῦμεν προσέγγισιν καθ'ὑπεροχήν.

Καί εἰς τάς δύο περιπτώσεις ἰσχύει ἡ σχέσις:

ἀκριβής τιμή = προσεγγιστική τιμή + σφάλμα της.

Εἰς τήν μέτρησιν τῶν διαστάσεων μιᾶς σελίδος τοῦ βιβλίου μας (§ 4.1), ἐπειδή δέν μᾶς εἶναι γνωσταί αἱ ἀκριβεῖς διαστάσεις, δέν γνωρίζομεν ἐπακριβῶς οὔτε τά σφάλματα· τό μόνον πού γνωρίζομεν εἶναι ὅτι τό σφάλμα διά τήν 1ην διάστασιν περιέχεται μεταξύ 0 καί 1 mm καί διά τήν 2αν, μεταξύ −1 mm καί 0:

1η διάστασις $\simeq$ 168 mm μέ σφάλμα η_1, ὅπου $0 < \eta_1 < 1$ mm
2α διάστασις $\simeq$ 240 mm μέ σφάλμα η_2, ὅπου -1 mm $< \eta_2 < 0$.

Συνήθως εἰς μίαν μέτρησιν μεγέθους ἐκεῖνο πού γνωρίζομεν εἶναι ὅτι τό σφάλμα τῆς προσεγγίσεως δέν ὑπερβαίνει κάποιον ἀριθμόν κατ'ἀπόλυτον τιμήν.

<u>4.3.</u> Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἕνας μαθητής ἐμέτρησε τό μῆκος τῆς αἰθούσης διδασκαλίας του μέ ἕνα μέτρον διῃρημένον εἰς cm (ἑκατοστά) καί ὅτι ηὗρε τόν ἀριθμόν 830 cm μέ ἕνα σφάλμα $\leqslant 5$ cm κατ'ἀπόλυτον τιμήν. Θά ἔχωμεν τότε

$$825 \text{ cm} = 830 - 5 \leqslant \text{μῆκος αἰθούσης} \leqslant 830 + 5 = 835 \text{ cm}.$$

Ἄς ὑποθέσωμεν ἀκόμη ὅτι ἕνας ἄλλος μαθητής ἐμέτρησε τό πλάτος τῆς ἰδίας αἰθούσης καί ὅτι ηὗρε 420 cm μέ ἕνα σφάλμα $\leqslant 5$ cm κατ'ἀπόλυτον τιμήν:

$$415 \text{ cm} = 420 - 5 \leqslant \text{πλάτος αἰθούσης} \leqslant 420 + 5 = 425 \text{ cm}.$$

Θέτομεν τώρα τό ἐρώτημα : Ποία ἀπό τάς δύο μετρήσεις εἶναι ποιοτικῶς καλυτέρα ; Προφανῶς ἡ πρώτη, διότι εἰς περίπου διπλάσιον μῆκος (εἰς 830 cm) τό σφάλμα ἠμπορεῖ νά εἶναι 5 cm ὅσον καί τό σφάλμα τῆς δευτέρας μετρήσεως εἰς τό ἥμισυ περίπου μῆκος (εἰς 420 cm). Ἄν τώρα θελήσωμεν νά προσδιορίσωμεν καί ποσοτικῶς πόσον καλυτέρα εἶναι ἡ πρώτη μέτρησις θά σχηματίσωμεν τούς δύο λόγους (τά δύο πηλίκα):

$$\frac{5}{830} \quad \text{καί} \quad \frac{5}{420}$$

καί θά τούς συγκρίνωμεν. Ἐπειδή ὁ πρῶτος λόγος εἶναι ἴσος περίπου μέ τό ἥμισυ τοῦ δευτέρου:

$$\frac{5}{830} \simeq \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{420} ,$$

θά λέγωμεν ὅτι ἡ πρώτη μέτρησις ἔχει <u>διπλάσιον βαθμόν ἀκριβείας</u> ἀπό τήν δευτέραν.

<u>4.4. Σχετικόν ἤ ἀναλογικόν σφάλμα.</u> Ὅπως παρατηροῦμεν, ἡ ἐκτίμησις τοῦ βαθμοῦ ἀκριβείας μιᾶς προσεγγίσεως γίνεται μέ τόν ὑπολογισμόν τοῦ λόγου:

$$\frac{\text{ὑποτιθέμενον σφάλμα}}{\text{ἀκριβής τιμή τοῦ ποσοῦ}} \simeq \frac{\text{ὑποτιθέμενον σφάλμα}}{\text{προσεγγιστική τιμή τοῦ ποσοῦ}} .$$

Π.χ. διά τήν προσεγγιστικήν τιμήν 3,14 τοῦ κλάσματος $\frac{22}{7}$ θά ἔχωμεν τόν λόγον:

$$\frac{\text{σφάλμα}}{22/7} \simeq \frac{0{,}003}{22/7} = \frac{0{,}021}{22} = \frac{1}{1000}\cdot\frac{21}{22} \simeq \frac{1}{1000} .$$

Ὁ λόγος αὐτός

$$\frac{\text{σφάλμα}}{\text{ἀκριβής τιμή}} \simeq \frac{\text{σφάλμα}}{\text{προσεγγιστική τιμή}}$$

λέγεται <u>σχετικόν</u> ἤ <u>ἀναλογικόν σφάλμα</u> τῆς προσεγγίσεως καί χρησιμεύει ὡς κριτήριον διά νά ἐκτιμήσωμεν τόν βαθμόν ἀκριβείας τῆς προσεγγίσεως. Π.χ. μία μέτρησις τῆς ἀποστάσεως μεταξύ Ἀθηνῶν καί Θεσσαλονίκης πού δίδει ὡς ἀποτέλεσμα 593 km μέ ἕνα σφάλμα $\leq \frac{1}{2}$ km κατ'ἀπόλυτον τιμήν, ἔχει τόν

ἴδιον περίπου βαθμόν ἀκριβείας μέ τήν ἀνωτέρω προσέγγισιν τοῦ κλάσματος $\frac{22}{7}$ διά τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 3,14.
Πράγματι τό ἀναλογικόν σφάλμα εἰς τήν μέτρησιν τῆς ἀποστάσεως εἶναι:

$$\frac{0,5}{593} = \frac{5}{5930} \simeq \frac{1}{1000}.$$

4.5. Ἔστω τώρα ὅτι θέλομεν νά ὑπολογίσωμεν τήν περίμετρον $2(\alpha+\beta)$ τοῦ ὀρθογωνίου δαπέδου τῆς αἰθούσης τοῦ § 4.3 μέ προσεγγιστικάς διαστάσεις: μῆκος $\alpha = 830$ cm καί πλάτος $\beta = 420$ cm. Ἐπειδή τό σφάλμα καί διά τάς δύο εἶναι $\leqslant 5$cm κατ'ἀπόλυτον τιμήν, ἔχομεν εὕρει (§ 4.3) ὅτι:

$$825 \text{ cm} \leqslant \alpha \leqslant 835 \text{ cm} \quad ,$$

$$415 \text{ cm} \leqslant \beta \leqslant 425 \text{ cm} .$$

Ἄρα

$$1240 \text{ cm} \leqslant \alpha + \beta \leqslant 1260 \text{ cm}$$

καί

$$2480 \leqslant 2(\alpha+\beta) \leqslant 2520 \text{ cm}.$$

Ὥστε ἠμποροῦμεν νά λέγωμεν ὅτι ἡ περίμετρος εἶναι περίπου ἴση μέ 2500 cm μέ ἕνα σφάλμα $\leqslant 20$ cm κατ'ἀπόλυτον τιμήν. Τό ἀναλογικόν σφάλμα εἶναι κατ'ἀπόλυτον τιμήν περίπου ἴσον μέ

$$\frac{20}{2500} = \frac{2}{250} = \frac{1}{125} < \frac{1}{100}.$$

Ἔστω δεύτερον ὅτι θέλομεν νά ὑπολογίσωμεν τό ἐμβαδόν $\alpha\cdot\beta$ τοῦ δαπέδου τῆς ἰδίας αἰθούσης. Θά ἔχωμεν

$$34,2375 \text{ m}^2 = 825 \times 415 \text{ cm}^2 \leqslant \alpha\cdot\beta \leqslant 835 \times 425 \text{ cm}^2 = 35,4875 \text{ m}^2.$$

Ὥστε ἠμποροῦμεν νά λέγωμεν ὅτι τό ἐμβαδόν τοῦ δαπέδου εἶναι περίπου ἴσον πρός 34,8 m^2 μέ ἕνα σφάλμα $< 0,7 \text{ m}^2$ κατ' ἀπόλυτον τιμήν. Τό ἀντίστοιχον ἀναλογικόν σφάλμα εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμήν περίπου ἴσον μέ

$$\frac{0,7}{35} = \frac{70}{350} = \frac{1}{50} = \frac{2}{100}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ποῖον εἶναι τό ἀπόλυτον καί ποῖον τό σχετικόν σφάλμα πού κάμνομεν, ἄν τά ἀκριβῆ ποσά:

235014 mm , 6056,7 km , 5189 gr

τά ἀντικαταστήσωμεν ἀντιστοίχως μέ τάς προσεγγίσεις:

235000 mm , 6060 km , 5200 gr ;

2) Τούς πολυψηφίους δεκαδικούς ἀριθμούς

5,4352 | 0,7589 | 0,02467

τούς στρογγυλεύομεν (τούς συντομεύομεν) είς τούς ὀλιγοψηφίους

5,4 | 0,76 | 0,025

ἀντιστοίχως. Ποῖον εἶναι τό ἀπόλυτον καί ποῖον τό σχετικόν σφάλμα πού κάμνομεν είς ἑκάστην περίπτωσιν ;

3) Ὁ λόγος τοῦ μήκους μιᾶς περιφερείας πρός τό μῆκος μιᾶς διαμέτρου της παριστάνεται , ὅπως εἶναι γνωστόν, μέ τό γράμμα π καί ἰσοῦται μέ

$$\pi = 1,141592...$$

Ἄν προσεγγίσωμεν τό π 1ον μέ 3,14 καί 2ον μέ 3,1416 ποῖον ἀπόλυτον καί ποῖον σχετικόν σφάλμα κάμνομεν κάθε φοράν ;

4) Αἱ πλευραί ἑνός ὁριζοντίου γηπέδου μέ σχῆμα τριγώνου ἐμετρήθησαν μέ τήν μετροταινίαν καί εὑρέθησαν περίπου ἴσαι πρός

52 m , 34,5 m καί 46,5 m

μέ σφάλμα $\leqslant \frac{1}{4}$ m κατ'ἀπόλυτον τιμήν δι'ἑκάστην πλευράν. Εὑρῆτε μίαν προσεγγιστικήν τιμήν διά τήν περίμετρον τοῦ γηπέδου καθώς καί τά ἀντίστοιχα ἀπόλυτον καί σχετικόν σφάλμα.

5) Αἱ διαστάσεις ἑνός ὀρθογωνίου εἶναι γνωσταί κατά προσέγγισιν μέ σφάλμα $\leqslant 1$ m κατ'ἀπόλυτον τιμήν : μῆκος $\alpha \simeq 235$ m , πλάτος $\beta \simeq 120$ m . Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν αβ τοῦ ὀρθογωνίου κατά προσέγγισιν καί νά ὑπολογισθοῦν τά ἀντίστοιχα ἀπόλυτον καί σχετικόν σφάλμα.

§ 5. Ἐξίσωσις $\alpha x + \beta = 0$ καί γραφική ἐπίλυσίς της.

5.1. Διά πρώτην φοράν λόγος περί ἐξισώσεων ἔγινε εἰς τό Βιβλ. Ι , σ. 6 Β . Εἴπαμεν τότε ὅτι ἐξίσωσις διά τό x εἶναι μία ἰσότης πού περιέχει τό γράμμα (τήν μεταβλητήν) x καί πού ἀληθεύει ὄχι δι'ὅλους τούς ἀριθμούς πού παριστάνει τό γράμμα τοῦτο ἀλλά τό πολύ δι'ὡρισμένους μόνον ἀπό αὐτούς.

Π.χ. ἡ ἐξίσωσις $x + 3 = 7$ ἀληθεύει μόνον διά $x = 4$. Αἱ ἐξισώσεις τάς ὁποίας ἔκτοτε ἐθεωρήσαμεν εἶχον τήν μορφήν

$$x + \beta = \alpha \quad ἤ \quad \alpha - x = \gamma \quad ἤ \quad x - \beta = \gamma \quad ἤ \quad \alpha x = \beta \;,$$

ὅπου α,β,γ δεδομένοι ἀριθμοί καί x ὁ ἄγνωστος πού πρέπει νά προσδιορίσωμεν οὕτως ὥστε νά ἀληθεύη ἡ ἐξίσωσις. Ὅλαι αὐταί αἱ μορφαί ἠμποροῦν νά ὑπαχθοῦν εἰς τήν γενικήν μορφήν $\alpha x + \beta = 0 \quad , \quad (\alpha \in P \;, \beta \in P)$

πού λέγεται <u>πρωτοβάθμιος</u> ἐξίσωσις μέ <u>συντελεστάς</u> τούς ρητούς σχετικούς ἀριθμούς α καί β . Π.χ. ἐπειδή

$$x + 3 = 7 \iff (x+3)-7 = 0 \iff 1\cdot x + (-4) = 0 \;;$$

ἡ ἐξίσωσις $x + 3 = 7$ ὑπάγεται εἰς τήν $\alpha x + \beta = 0$ μέ $\alpha = 1$ καί $\beta = -4$. Ὁμοίως , ἐπειδή

$$2x = -3 \iff 2x - (-3) = 0 \iff 2x + 3 = 0 \;,$$

ἡ ἐξίσωσις $2x = -3$ ὑπάγεται εἰς τήν $\alpha x + \beta = 0$ μέ $\alpha = 2$, $\beta = 3$.

5.2. <u>Διερεύνησις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x + \beta = 0$ μέ $\alpha \in P$, $\beta \in P$.</u>

Διερεύνησις σημαίνει νά ἐξετάσωμεν ποῖαι εἶναι αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως εἰς τάς διαφόρους περιπτώσεις πού ἠμποροῦν νά παρουσιασθοῦν.

<u>1η περίπτωσις</u>: $\alpha \neq 0$. Ἔστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $2x - 5 = 0$. Ὅπως γνωρίζομεν, ἰσχύει πρῶτον ἡ ἰσοδυναμία

$$2x - 5 = 0 \iff 2x = 5.$$

Δεύτερον, ἐπειδή $2 \neq 0$, ὑπάρχει ὁ ἀντίστροφος ἀριθμός $\frac{1}{2}$ καί δυνάμεθα νά πολλαπλασιάσωμεν τά δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως $2x = 5$ μέ $\frac{1}{2}$ · θά λάβωμεν

$$2x = 5 \iff \frac{1}{2}\cdot 2x = 5\cdot\frac{1}{2} \iff x = \frac{5}{2}\,.$$

Ὥστε ἡ ἐξίσωσις $2x - 5 = 0$ ἔχει μίαν μόνον λύσιν, τόν ἀριθμόν $\frac{5}{2}$. Ἰδού καί ἡ ἐπαλήθευσις:

$$2\cdot\frac{5}{2} - 5 = 5 - 5 = 0.$$

Γενικῶς, ὅταν $\alpha \neq 0$, ὑπάρχει ὁ ἀντίστροφος ἀριθμός $\frac{1}{\alpha}$ καί ἔχομεν τάς ἰσοδυναμίας:

$$\alpha x + \beta = 0 \iff \alpha x - (-\beta) = 0 \iff \alpha x = -\beta$$

καί

$$\alpha x = -\beta \iff \frac{1}{\alpha}\cdot\alpha\cdot x = -\beta\cdot\frac{1}{\alpha} \iff x = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Ὥστε ἡ ἐξίσωσις $\alpha x + \beta = 0$ μέ $\alpha \neq 0$ ἔχει μίαν μόνον λύσιν, τόν ἀριθμόν $-\frac{\beta}{\alpha}$. Μέ τόν συμβολισμόν τῶν συνόλων, αὐτό γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$\{x \mid \alpha x + \beta = 0\} = \left\{-\frac{\beta}{\alpha}\right\}.$$

Π.χ. ἡ ἐξίσωσις $\frac{3}{4}x - \frac{5}{2} = 0$ ἔχει ὡς μόνην λύσιν τήν

$$x = -\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{4}{3} = \frac{10}{3}$$ καί ἐπομένως

$$\left\{x \mid \frac{3}{4}x - \frac{5}{2} = 0\right\} = \left\{\frac{10}{3}\right\}.$$

<u>2α περίπτωσις</u>: $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$. Π.χ. $0\cdot x + 2 = 0$. Ἡ ἐξίσωσις αὐτή δέν ἔχει λύσιν, ἐπειδή ὁποιανδήποτε ἀριθμητικήν τιμήν καί ἄν δώσωμεν εἰς τόν x, θά ἔχωμεν

$$0\cdot x + 2 = 0 + 2 = 2 \neq 0 .$$

Γενικῶς, ἡ ἐξίσωσις $0\cdot x + \beta = 0$ μέ $\beta \neq 0$ δέν ἔχει λύσιν, ἐπειδή

$$0\cdot x + \beta = 0 + \beta = \beta \neq 0.$$

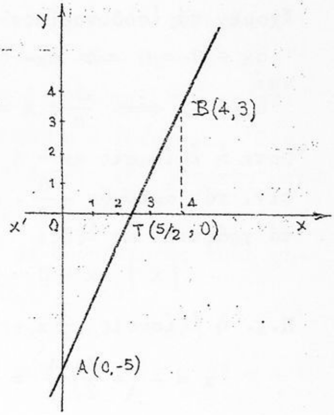
Ἡ ἐξίσωσις εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν λέγεται <u>ἀδύνατος</u> ἤ <u>μή ἐπιλύσιμος</u>.

<u>3η περίπτωσις</u>: $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Ἡ ἐξίσωσις $0\cdot x + 0 = 0$ ἀληθεύει τώρα ὁποιαδήποτε καί ἄν εἶναι ἡ τιμή τοῦ x, μέ ἄλλους λόγους κάθε ρητός σχετικός ἀριθμός εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως. Ἡ ἐξίσωσις εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν εἶναι οὐσιαστικά μία <u>ταυτότης</u> διά τό γράμμα x καί δέν τό προσδιορίζει. Διά τοῦτο ἡ περίπτωσις λέγεται <u>περίπτωσις ἀοριστίας</u>.

<u>5.3. Γραφική ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x + \beta = 0$.</u> Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $2x - 5 = 0$. Θεωροῦμεν τήν συνάρτησιν

$$\sigma : x \xrightarrow{\sigma} 2x - 5 = y \quad , \quad (x \in P)$$

καί τήν παριστάνομεν γραφικῶς εἰς ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων συντεταγμένων (σχ. παραπλεύρως). Ὅπως γνωρίζομεν, ἡ παράστασις αὐτή εἶναι μία εὐθεῖα, καί ἐπομένως προσδιορίζεται ἀπό δύο σημεῖα της, π.χ. τό A(x = 0 , y= −5) καί τό B (x = 4 , y = 3). Ἡ εὐθεῖα αὐτή τέμνει τόν ἄξονα x΄x τῶν τετμημένων εἰς ἕνα σημεῖον $T\left(x = \dfrac{5}{2}\ , y = 0\right)$, καί ἡ τετμημένη $x = \dfrac{5}{2}$ τοῦ σημείου αὐτοῦ εἶναι ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως $2x - 5 = 0$.



Γενικῶς, ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha x + \beta = 0$ μέ $\alpha \neq 0$. Θεωροῦμεν τήν γραφικήν παράστασιν τῆς συναρτήσεως

$$\sigma : x \xrightarrow{\sigma} \alpha x + \beta = y \quad , \quad (x \in P).$$

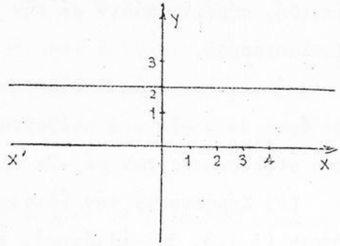
Ἡ παράστασις αὐτή εἶναι , ὅπως γνωρίζομεν, μία εὐθεῖα πού τέμνει τόν ἄξονα x΄x τῶν τετμημένων. Τό σημεῖον τομῆς ἔχει τεταγμένην $y = 0$ καί ἐπομένως ἡ τετμημένη του θά εἶναι ἡ λύσις $x = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ τῆς ἐξισώσεως. Ἔτσι ἡ λύσις τῆς $\alpha x+\beta = 0$ μέ $\alpha \neq 0$ παριστάνεται γεωμετρικῶς ἀπό τό κοινόν σημεῖον τοῦ ἄξονος x΄x καί τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς συναρτήσεως $y = \alpha x + \beta$, $(x \in P)$.

Ὥστε , διά νά ἐπιλύσωμεν γραφικῶς τήν ἐξίσωσιν $\alpha x + \beta = 0$ μέ $\alpha \neq 0$, χαράσσομεν τήν εὐθεῖαν πού παριστάνει τήν συνάρτησιν $y = \alpha x + \beta$ καί σημειώνομεν τό σημεῖον ὅπου ἡ εὐθεῖα αὐτή τέμνει τόν ἄξονα x΄x. Ἡ τετμημένη τοῦ σημείου αὐτοῦ εἶναι ἡ ζητουμένη λύσις τῆς $\alpha x + \beta = 0$.

Ἔστω δεύτερον ἡ ἐξίσωσις $0 \cdot x + 2 = 0$. Ἡ συνάρτησις

$$\sigma : x \xrightarrow{\sigma} 0\cdot x + 2 = 2 = y \quad , \quad (x \in P)$$

παριστάνεται ἀπό μίαν εὐθεῖαν παράλληλον (μέ στενήν σημασίαν) πρός τόν ἄξονα $x'x$ καί δέν ὑπάρχει κοινόν σημεῖον εὐθείας καί ἄξονος $x'x$. Ἡ ἐξίσωσις δέν ἔχει λύσιν (σχ. παραπλεύρως).



Ἔστω τρίτον ἡ περίπτωσις ἀοριστίας $0\cdot x + 0 = 0$. Ἡ συνάρτησις

$$\sigma : x \xrightarrow{\sigma} 0\cdot x + 0 = 0 = y$$

παριστάνεται τώρα γραφικῶς ἀπό μίαν εὐθεῖαν συμπίπτουσαν μέ τόν ἄξονα $x'x$. Κάθε σημεῖον $(x = \rho\ ,\ y = 0)$ τοῦ ἄξονος τούτου τό ὁποῖον ἔχει τετμημένην $\rho \in P$ παριστάνει γεωμετρικῶς μίαν λύσιν τῆς ἐξισώσεως $0 . x + 0 = 0$.

5.4. Ἰσοδύναμοι ἐξισώσεις. Δύο ἐξισώσεις μέ ἕνα ἄγνωστον λέγονται ἰσοδύναμοι, ὅταν κάθε τιμή τοῦ ἀγνώστου ἡ ὁποία ἐπαληθεύει μίαν ὁποιανδήποτε ἐξ αὐτῶν ἐπαληθεύει καί τήν ἄλλην, μέ ἄλλους λόγους, ὅταν αἱ δύο ἐξισώσεις ἔχουν τάς ἰδίας λύσεις. Π.χ. αἱ ἐξισώσεις $2x - 5 = 0$ καί $3x - \frac{15}{2} = 0$ εἶναι ἰσοδύναμοι, ἐπειδή ἔχουν καί αἱ δύο ὡς μόνην λύσιν τόν ἀριθμόν $\frac{5}{2} = \frac{15}{6}$. Ἰσχύουν τώρα τά ἀκόλουθα.

I) Ἄν εἰς μίαν ἐξίσωσιν μέ ἕνα ἄγνωστον ἐκτελέσωμεν βασικάς πράξεις ἐφαρμόζοντες γνωστάς ἰδιότητας τῶν πράξεων τούτων, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος μέ τήν ἀρχικήν. Π.χ.

$$3(2x+1) - 2x = 8-x \iff 6x + 3 - 2x = 8 - x \ ,$$

ἐπειδή, σύμφωνα μέ τήν ἐπιμεριστικήν ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, $3(2x+1) = 6x + 3$, ὅποιος καί ἄν εἶναι ὁ ἀριθμός τόν ὁποῖον παριστάνει ὁ x.

Ὁμοίως , εἶναι

$4x-7x+x-4 = 7 \iff (4-7+1)x - 4 = 7 \iff -2x - 4 = 7$,

ἐπειδή, σύμφωνα πάλιν μέ τήν ἐπιμεριστικήν ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ,

$4x - 7x + x = (4-7+1)x = -2x$.

Οἱ ὅροι $4x$, $-7x$, x λέγονται ὅμοιοι καί ἡ ἀντικατάστασις τοῦ ἀθροίσματός των μέ $-2x$ λέγεται ἀναγωγή ὁμοίων ὅρων.

II) Σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα τῆς διαγραφῆς εἰς τήν πρόσθεσιν (§ 1.3, 3η ἰδιότης), ἐάν εἰς τά δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως μέ ἄγνωστον τόν x προσθέσωμεν τήν αὐτήν ἀλγεβρικήν παράστασιν,π.χ. τήν $\gamma x + \delta$ (ὅπου $\gamma \in P$ καί $\delta \in P$), θά λάβωμεν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν. Π.χ. προσθέτοντες τήν παράστασιν $x - 3$ λαμβάνομεν:

$6x+3-2x = 8-x \iff 6x+3-2x+x-3 = 8-x+x-3 \iff 6x - 2x+x = 8-3$.

Ὅπως βλέπομεν, ὁ ὅρος $-x$ πού εὑρίσκετο εἰς τό δεξιόν μέλος τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως μετεφέρθη εἰς τό ἀριστερόν μέλος τῆς τελικῆς, ἀφοῦ ἔλαβε ἀντίθετον πρόσημον.

Ὁμοίως ὁ ὅρος $+3$ τοῦ ἀριστεροῦ μέλους τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως μετεφέρθη εἰς τό δεξιόν τῆς τελικῆς μέ ἀλλαγήν τοῦ προσήμου του.

Ἡ μεταφορά ὅρων ἀπό τό ἕνα μέλος ἐξισώσεως εἰς τό ἄλλο μᾶς ἐπιτρέπει νά συγκεντρώσωμεν εἰς τό ἕνα μέλος ὅλους τούς ὅρους πού περιέχουν τόν ἄγνωστον καί εἰς τό ἄλλο ὅλους ἐκείνους πού δέν τόν περιέχουν. Αὐτό ἔγινε εἰς τό προηγούμενον παράδειγμα. Ἰδού ἕνα ἄλλο:

$6x-7+3x = 4x-2+x \iff 6x+3x-4x-x = -2 + 7$.

III) Σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα

$(\alpha\gamma = \beta\gamma$ καί $\gamma \neq 0) \iff \alpha = \beta$

τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (βλ. § 1.9 , ἰδιότης 7η), ἐάν πολλαπλασιάσωμεν τά δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως μέ τόν ἴδιον μή μηδενικόν ἀριθμόν , θά λάβωμεν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν. Π.χ.

$$\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}=6 \iff 4\left(\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}\right)=4\cdot 6 \iff 3x+10=24.$$

Ἡ ἰδιότης αὐτή μᾶς ἐπιτρέπει μίαν ἐξίσωσιν μέ ρητούς κλασματικούς συντελεστάς νά τήν μετατρέψωμεν εἰς μίαν ἰσοδύναμον μέ ἀκεραίους συντελεστάς, πρᾶγμα πού εὐκολύνει συχνά τήν ἐπίλυσιν τῆς ἐξισώσεως.

5.5. Θά δείξωμεν τώρα πῶς ἠμποροῦμεν νά χρησιμοποιήσωμεν τά προηγούμενα, διά νά ἐπιλύσωμεν ἐξισώσεις πού εἶναι ἰσοδύναμοι μέ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $\alpha x+\beta=0$ καί πού δι'αὐτό λέγονται ἐπίσης πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις.

1ον Παράδειγμα. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $5(x-3)-2(2-x)=6-x$. Ἐφαρμόζοντες τά προηγούμενα εὑρίσκομεν διαδοχικῶς:

$$\begin{aligned} 5(x-3)-2(2-x)=6-x &\iff 5x-15-4+2x=6-x\\ &\iff 5x+2x+x=6+15+4\\ &\iff 8x=25\\ &\iff x=\frac{25}{8}. \end{aligned}$$

Ὥστε ἡ θεωρουμένη ἐξίσωσις ἔχει ὡς μόνην λύσιν τό $\frac{25}{8}$.

Ἐπαλήθευσις :

$$5\left(\frac{25}{8}-3\right)-2\left(2-\frac{25}{8}\right)=5\cdot\frac{1}{8}-2\left(-\frac{9}{8}\right)=\frac{5}{8}+\frac{18}{8}=\frac{23}{8}=6-\frac{25}{8}.$$

2ον Παράδειγμα. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{2x-1}{3}+\frac{3x+1}{4}=x-\frac{1}{2}.$$

Ἐξαλείφομεν πρῶτον τούς παρονομαστάς πολλαπλασιάζοντες τά δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπί 12 , ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν 3, 4, 2 · κατόπιν ἐργαζόμεθα ὅπως καί εἰς τό προηγούμενον παράδειγμα:

$$\begin{aligned} \frac{2x-1}{3}+\frac{3x+1}{4}=x-\frac{1}{2} &\iff 4(2x-1)+3(3x+1)=12\left(x-\frac{1}{2}\right)\\ &\iff 8x-4+9x+3=12x-6 \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow 8x + 9x - 12x = -6 + 4 - 3$$
$$\Longleftrightarrow 5x = -5$$
$$\Longleftrightarrow x = \frac{-5}{5} = -1 .$$

῞Ωστε λύσις τῆς ἐξισώσεως εἶναι ὁ ἀριθμός -1. ᾿Επαλήθευσις:

$$\frac{-2-1}{3} + \frac{-3+1}{4} = \frac{-3}{3} + \frac{-2}{4} = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} = -1 - \frac{1}{2} .$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) ᾿Επιλύσατε γραφικῶς τάς τρεῖς ἐξισώσεις
$-2x + 4 = 0$, $3x + 9 = 0$, $4x + 10 = 0$.

2) Νά ἐπιλυθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:
$11(x-3)+4(x-2) = 7$, $25(4x-1) + 2x = 5x - 8$,
$14(2x-1) - 17(2x-9) = 1-5x$, $8-[4x-(5x+15)] = x-(7-x)$,
$\frac{x}{2} - \frac{x}{5} = \frac{x}{10} + 2$, $\frac{3-x}{12} - \frac{x}{9} = 6 - x$,
$\frac{2x-5}{9} - \frac{2x-7}{12} = 1$, $\frac{1-x}{28} - \frac{x+15}{7} - 4 = 0$,
$\frac{5x-1}{14} - \frac{3x+2}{21} = \frac{3x-4}{28}$, $\frac{5(x+3)}{14} - \frac{4(x-1)}{2} + \frac{6(x-1)}{14} = 0$,
$\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = \frac{x}{12} + 1$, $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = x - \frac{x}{6}$.

§ 6. Προβλήματα πού ὁδηγοῦν εἰς πρωτοβαθμίους ἐξισώσεις.

6.1. ᾿Εξίσωσις προβλήματος. ῾Η ἐπίλυσις προβλημάτων διευκολύνεται πολύ μέ τήν χρησιμοποίησιν ἐξισώσεων. Εἰς ἕνα ἁπλοῦν πρόβλημα δίδονται μερικοί ἀριθμοί (τά δεδομένα τοῦ προβλήματος) καί ζητεῖται ἕνας ἀριθμός (ὁ ἄγνωστος τοῦ προβλήματος) ὁ ὁποῖος συνδέεται μέ τούς δεδομένους ἀριθμούς μέσω σχέσεων τάς ὁποίας μᾶς ὑποδεικνύει ἡ ἐκφώνησις τοῦ προβλήματος. ῾Η μαθηματική ἔκφρασις τῶν σχέσεων αὐτῶν ὁδηγεῖ εἰς μίαν ἐξίσωσιν διά τόν ἄγνωστον, τήν ὁποίαν ἐπιλύομεν καί ἔτσι εὑρίσκομεν τήν λύσιν τοῦ προβλήματος. Αἱ γενικαί αὐταί παρατηρήσεις θά ἀποσαφηνισθοῦν εἰς τά ἀκόλουθα παραδείγματα.

6.2. Πρόβλημα 1ον. Κατά τάς ἐξετάσεις τοῦ ᾿Ιουνίου προήχθησαν ἀπό μίαν τάξιν τά 5/8 τῶν μαθητῶν,παρεπέμφθησαν εἰς ἀνεξέτασιν τόν Σεπτέμβριον τό $\frac{1}{4}$ τῶν μαθητῶν καί ἀπερρίφθησαν 5 μαθηταί. Πόσους μαθητάς εἶχε ἡ τάξις ; Πόσοι προήχθησαν καί πόσοι παρεπέμφθησαν εἰς ἀνεξέτασιν ;

Ἐπίλυσις. Ἄν ὀνομάσωμεν x τόν ἀριθμόν τῶν μαθητῶν τῆς τάξεως, ὁ ἀριθμός τῶν προαγομένων θά εἶναι τότε $\frac{5x}{8}$ καί ὁ ἀριθμός τῶν ἐπανεξεταζομένων $\frac{x}{4}$. Ἐπειδή τώρα οἱ προαγόμενοι μαζί μέ τούς ἐπανεξεταζομένους καί τούς ἀπορριπτομένους ἀποτελοῦν τό σύνολον τῶν μαθητῶν τῆς τάξεως, θά ἔχωμεν τήν ἐξίσωσιν

$$\frac{5x}{8} + \frac{x}{4} + 5 = x\,.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτή ἔχει ὡς λύσιν τόν ἀριθμόν 40 ὁ ὁποῖος εἶναι ἀκέραιος θετικός, ὅπως ἔπρεπε νά εἶναι καί ἐπομένως γίνεται δεκτός ὡς λύσις τοῦ προβλήματος.
Κατόπιν αὐτοῦ ὁ ἀριθμός τῶν προαγομένων εἶναι $\frac{5\cdot 40}{8} = 25$ καί ὁ ἀριθμός τῶν ἐπανεξεταζομένων $\frac{40}{4} = 10$.

Πρόβλημα 2ον. Μεταξύ δύο σημείων Α καί Β, πού ἀπέχουν τό ἕνα ἀπό τό ἄλλο 35 cm , νά εὑρεθῆ ἐπάνω εἰς τήν εὐθεῖαν ΑΒ ἕνα σημεῖον Μ , ὥστε τό τμῆμα ΑΜ νά εἶναι ἴσον πρός τά $\frac{2}{3}$ τοῦ τμήματος ΜΒ :

Ἐπίλυσις. Ἄς παραστήσωμεν μέ x cm τό μῆκος τοῦ τμήματος ΑΜ . Τότε τό τμῆμα ΜΒ θά ἔχη μῆκος (35-x) cm. Σύμφωνα μέ τήν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος τό τμῆμα ΑΜ ἰσοῦται μέ τά 2/3 τοῦ τμήματος ΜΒ· ἄρα θά ἔχωμεν τήν ἐξίσωσιν

$$x = \frac{2}{3}(35-x)\,.$$

Ἡ λύσις της εἶναι x = 14 cm , δηλαδή ἕνας θετικός ἀριθμός <35, ὅπως ἔπρεπε νά εἶναι, καί ἐπομένως γίνεται δεκτή ὡς λύσις τοῦ προβλήματος.

Πρόβλημα 3ον. Ἀπό τά $\frac{5}{9}$ ἑνός σχετικοῦ ἀριθμοῦ ἀφαιροῦμεν τά $\frac{3}{4}$ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ καί ἀπομένει τό $\frac{1}{2}$ τοῦ ἀριθμοῦ ηὐξημένον κατά 11 μονάδας. Νά εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός.

'Επίλυσις. Ἄς ὀνομάσωμεν x τόν ζητούμενον ἀριθμόν. Σύμφωνα μέ τήν ἐκφώνησιν, πρέπει ἀπό τά $\frac{5x}{9}$ νά ἀφαιρέσωμεν τά $\frac{3x}{4}$. Τό ὑπόλοιπον $\frac{5x}{9} - \frac{3x}{4}$ θά ἰσοῦται μέ τό ἥμισυ $\frac{x}{2}$ τοῦ ἀριθμοῦ ηὐξημένον κατά 11, ἄρα τό πρόβλημα ὁδηγεῖ εἰς τήν ἀκόλουθον ἐξίσωσιν:

$$\frac{5x}{9} - \frac{3x}{4} = \frac{x}{2} + 11.$$

Τήν ἐπιλύομεν καί εὑρίσκομεν ὡς λύσιν

$$x = -\frac{396}{25} = -15\frac{21}{25}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ἀπό ἕνα φορτίον πορτοκάλια ἐπωλήθησαν τά μισά, ἐσάπισαν τό $\frac{1}{10}$ ὁλοκλήρου τοῦ φορτίου καί ἀπέμειναν 200. Πόσα πορτοκάλια εἶχε ὁλόκληρον τό φορτίον ;

2) Ποίαν ὥραν ἔχομεν, ὅταν ἡ χρονική διάρκεια πού ἔχει περάσει ἀπό τό μεσονύκτιον εἶναι ἴση μέ τά 5/3 τῆς χρονικῆς διαρκείας πού ἀπαιτεῖται διά νά συμπληρωθῇ τό εἰκοσιτετράωρον ;

3) Μοῦ λείπουν 3 δρχ διά νά ἀγοράσω ἕνα χαρτοφύλακα, ἐάν ὅμως μοῦ κάμουν ἔκπτωσιν τό 1/3 τῆς ἀξίας του, μοῦ περισσεύουν 16 δρχ. Νά εὑρεθῇ ἡ ἀξία τοῦ χαρτοφύλακος.

4) Ποῖος ἀριθμός ὑπερβαίνει τά τρία τέταρτά του κατά 144;

5) Ποίου ἀριθμοῦ τό $\frac{1}{3}$ καί τό $\frac{1}{4}$ διαφέρουν κατά 6 μονάδας ;

6) Ἡ διαφορά δύο σχετικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι 20, ἐνῶ τό 1/3 τοῦ μεγαλυτέρου εἶναι ἴσον μέ τόν ἀντίθετον τοῦ μικροτέρου. Νά εὑρεθοῦν οἱ δύο σχετικοί ἀριθμοί.

7) Ἕνας κτηνοτρόφος ἠγόρασε 24 πρόβατα καί ἄλλα τόσα γίδια, ἐπλήρωσε δέ συνολικῶς 11250 δρχ. Ἡ τιμή κάθε προβάτου ἦτο μεγαλυτέρα ἀπό τήν τιμήν κάθε γιδιοῦ κατά 80 δρχ. Νά εὑρεθῇ ἡ τιμή ἑκάστου ζώου.

8) Ἕνας πατέρας ἔχει πενταπλασίαν ἡλικίαν ἀπό τόν υἱόν του καί μετά 6 ἔτη θά ἔχῃ μόνον τριπλασίαν. Ποία ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ καί ποία ἡ ἡλικία τοῦ πατέρα ;

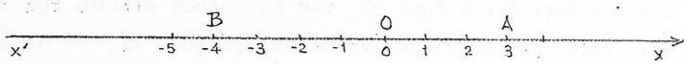
9) Ἕνας πατέρας ἔχει τριπλασίαν ἡλικίαν ἀπό τόν υἱόν του. Μετά πόσα ἔτη ἤ πρό πόσων ἐτῶν ἡ ἡλικία τοῦ πατέρα θά εἶναι ἤ ἦτο τετραπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ ;

10) Δύο σχετικοί ἀριθμοί ἔχουν διαφοράν -27. Τό $\frac{1}{4}$ τοῦ μεγαλυτέρου καί τό $\frac{1}{3}$ τοῦ μικροτέρου εἶναι ἀριθμοί ἀντίθετοι. Νά εὑρεθοῦν οἱ δύο σχετικοί ἀριθμοί.

11) Ἕνα δοχεῖον γεμᾶτο νερό ζυγίζει 12 kg. Ἐάν ἀδειάσωμεν τά 3/4 τοῦ περιεχομένου του, θά ζυγίζη μόνον 5 kg. Νά εὑρεθῆ τό βάρος τοῦ δοχείου κενοῦ.

12) Ὁ μεγαλύτερος ἀπό δύο σχετικούς ἀριθμούς ὑπερβαίνει τόν μικρότερον κατά 36 , καί τό 1/8 τοῦ μικροτέρου εἶναι ἴσον μέ τό ἥμισυ τοῦ μεγαλυτέρου. Νά εὑρεθοῦν οἱ δύο ἀριθμοί.

13) Ἐπί ἑνός ἄξονος $x'x$ εὑρίσκονται δύο σημεῖα Α καί Β μέ ἀντιστοίχους τετμημένας 3 καί -4 :



Ποία εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ σημείου Κ τοῦ ἄξονος διά τό ὁποῖον ἰσχύει ἡ σχέσις:
σχετικόν μέτρον τοῦ $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}$ τοῦ σχετικοῦ μέτρου τοῦ $\overrightarrow{KB}$;
Ὁμοίως, ποία εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ σημείου Μ τοῦ ἄξονος διά τό ὁποῖον ἔχομεν:
σχετικόν μέτρον $\overrightarrow{AM} = -\frac{5}{2}$ τοῦ σχετικοῦ μέτρου τοῦ $\overrightarrow{MB}$;
(βλ. Βιβλ. Ι , σ. 67-68 Γ).

§ 7. Ἀνισώσεις τῆς μορφῆς $\alpha x + \beta > 0$, $(\alpha \in P,\ \beta \in P)$, καί γεωμετρική παράστασις τῶν λύσεών των.

7.1. Ἔστω ὅτι μᾶς δίδεται ἡ σχέσις $3x + 5 > 0$ καί ὅτι ζητοῦνται αἱ ῥηταί τιμαί τοῦ γράμματος x διά τάς ὁποίας ἡ σχέσις ἀληθεύει. Λέγομεν τότε ὅτι ἔχομεν νά ἐπιλύσωμεν μίαν πρωτοβάθμιον ἀνισότητα μέ ἄγνωστον τόν x ἤ συντομώτερα, μίαν πρωτοβάθμιον ἀνίσωσιν. Αἱ τιμαί τοῦ x διά τάς ὁποίας ἡ σχέσις ἀληθεύει λέγονται λύσεις τῆς ἀνισώσεως.
Π.χ. ὁ ἀριθμός $x = -1$ εἶναι λύσις τῆς $3x + 5 > 0$, διότι $3\cdot(-1) + 5 = -3 + 5 = 2 > 0$.
Δύο ἀνισώσεις μέ ἕνα ἄγνωστον λέγονται ἰσοδύναμοι, ὅταν ἔχουν

τάς αὐτάς λύσεις. Ἀρκεῖ τότε νά ἐπιλύσωμεν τήν μίαν ἀπό αὐτάς , διά νά ἔχωμεν τάς λύσεις καί τῆς ἄλλης.

7.2. Ἐπίλυσις τῆς $3x+5>0$. Εἰς τήν § 3.2 , ἰδιότης 1), ἐμάθαμεν τό ἑξῆς: Ἄν εἰς τά δύο μέλη ἀνισότητος προσθέσωμεν τόν αὐτόν σχετικόν ἀριθμόν, θά προκύψη ὁμόστροφος ἀνισότης· ἄρα

$$3x+5>0 \Longrightarrow 3x+5-5>0-5 \quad \text{ἤτοι} \quad 3x>-5 .$$

Ἀντιστρόφως, ἀπό τήν ἀνισότητα $3x>-5$ ἔπεται ἡ

$$3x+5>-5+5 \quad \text{ἤ} \quad \text{ἡ} \quad 3x+5>0.$$

Ὥστε ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία

$$3x+5>0 \Longleftrightarrow 3x>-5. \qquad (1)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ὅρος +5 τοῦ ἀριστεροῦ μέλους τῆς πρώτης ἀνισότητος μετεφέρθη μέ ἀντίθετον πρόσημον εἰς τό δεξιόν μέλος τῆς δευτέρας ἀνισότητος.

Γνωρίζομεν τώρα τό ἑξῆς (§ 3.2, ἰδιότης3)) : ἄν πολλαπλασιάσωμεν τά δύο μέλη ἀνισότητος μέ τόν αὐτόν θετικόν ἀριθμόν , θά λάβωμεν ὁμόστροφον ἀνισότητα· ἄρα

$$3x>-5 \Longrightarrow \frac{1}{3}\cdot 3x>\frac{1}{3}\cdot(-5) \quad \text{ἤτοι} \quad x>-\frac{5}{3} .$$

Ἀντιστρόφως, ἀπό τήν ἀνισότητα $x>-\frac{5}{3}$ ἔπεται ἡ

$$3\cdot x>3\cdot\left(-\frac{5}{3}\right) \quad \text{ἤτοι} \quad \text{ἡ} \quad 3x>-5 .$$

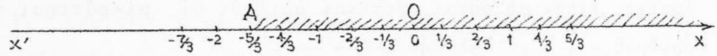
Ἔχομεν λοιπόν καί τήν ἰσοδυναμίαν

$$3x>-5 \Longleftrightarrow x>-\frac{5}{3}. \qquad (2)$$

Ἀπό τάς δύο ἰσοδυναμίας (1) καί (2) συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ἀνίσωσις $3x+5>0$ εἶναι ἰσοδύναμος μέ τήν $x>-\frac{5}{3}$· αὐτή ὅμως ἔχει προφανῶς ὡς λύσεις ὅλους τούς ρητούς σχετικούς ἀριθμούς πού εἶναι μεγαλύτεροι ἀπό τόν $-\frac{5}{3}$. Ὥστε ἡ ἀνίσωσις $3x+5>0$ ἔχει ἀπειραρίθμους λύσεις : ὅλους τούς ρητούς σχετικούς ἀριθμούς τούς μεγαλυτέρους ἀπό τόν $-\frac{5}{3}$. Μέ τόν συμβολισμόν τῶν συνόλων γράφομεν:

$$\{x \,/\, 3x + 5 > 0\} = \{x \,/\, x > -\frac{5}{3}\} \quad , \ (x \in P).$$

Αἱ λύσεις αὐταί ἠμποροῦν νά παρασταθοῦν γεωμετρικῶς ἀπό τά σημεῖα τοῦ ἄξονος x΄x τά ὁποῖα ἔχουν ρητήν τετμημένην καί εὑρίσκονται δεξιά τοῦ σημείου $A\left(-\frac{5}{3}\right)$:



<u>Παρατήρησις</u>. Μέ ὅμοιον τρόπον ἐπιλύεται κάθε ἀνίσωσις $\alpha x + \beta > 0$, ὅταν ὁ συντελεστής α εἶναι <u>θετικός</u> ἀριθμός˙ λύσεις εἶναι οἱ ρητοί σχετικοί ἀριθμοί οἱ μεγαλύτεροι τοῦ ἀριθμοῦ $-\frac{\beta}{\alpha}$, δηλ. $x > -\frac{\beta}{\alpha}$.

<u>7.3. Ἐπίλυσις τῆς ἀνισώσεως $-4x + 8 > 0$.</u> Ἔχομεν πρῶτον τήν ἰσοδυναμίαν

$$-4x + 8 > 0 \Longleftrightarrow -4x + 8 - 8 > 0 - 8 \quad \text{ἤτοι} \quad -4x > -8\,.$$

Ἐφαρμόζομεν τώρα τήν ἰδιότητα 4) τοῦ § 3.2 : ἄν πολλαπλασιάσωμεν τά δύο μέλη ἀνισότητος μέ τόν ἴδιον ἀρνητικόν ἀριθμόν, θά προκύψη ἀνισότης ἑτερόστροφος˙ ἄρα

$$-4x > -8 \Longrightarrow -\frac{1}{4}\cdot(-4x) < -\frac{1}{4}\cdot(-8) \qquad \text{ἤτοι} \quad x < 2.$$

Ἀντιστρόφως ἀπό τήν ἀνισότητα $x < 2$ ἕπεται ἡ

$$-4\cdot x > -4\cdot 2 \qquad \text{ἤτοι} \quad \text{ἡ} \ -4x > -8\,.$$

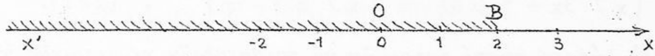
Ὥστε ἔχομεν τάς ἰσοδυναμίας

$$-4x + 8 > 0 \Longleftrightarrow -4x > -8 \Longleftrightarrow x < 2.$$

Ἡ τελευταία ἀνίσωσις $x < 2$ ἔχει ὅμως προφανῶς ὡς λύσεις τούς ρητούς σχετικούς ἀριθμούς τούς μικροτέρους ἀπό τόν 2. Ἐπομένως αἱ ζητούμεναι λύσεις τῆς $-4x + 8 > 0$ εἶναι ὅλοι οἱ ρητοί σχετικοί ἀριθμοί πού εἶναι μικρότεροι ἀπό τόν 2 :

$$\{x \,/\, -4x + 8 > 0\} = \{x \,/\, x < 2\}\,.$$

Αἱ λύσεις αὐταί παριστάνονται γεωμετρικῶς ἀπό τά σημεῖα τοῦ ἄξονος x΄x τά ὁποῖα ἔχουν ὡς τετμημένην ρητόν ἀριθμόν καί εὑρίσκονται ἀριστερά τοῦ σημείου Β(2):



<u>Παρατήρησις</u>. Μέ ὅμοιον τρόπον ἐπιλύεται κάθε ἀνίσωσις $\alpha x + \beta > 0$, ὅταν ὁ συντελεστής α εἶναι <u>ἀρνητικός</u> ἀριθμός· λύσεις εἶναι οἱ ρητοί σχετικοί ἀριθμοί οἱ μικρότεροι τοῦ ἀριθμοῦ $-\frac{\beta}{\alpha}$, δηλαδή $x < -\frac{\beta}{\alpha}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά ἐπιλυθοῦν αἱ ἀνισώσεις:

$2x - 7 > 0$, $\frac{1}{2}x + 4 > 0$, $5x + \frac{5}{3} > 0$,

$-4x + 3 > 0$, $-\frac{1}{3}x - 9 > 0$, $-6x + \frac{8}{5} > 0$

καί νά παρασταθοῦν γεωμετρικῶς αἱ λύσεις των.

2) Πολλαπλασιάζοντες τά δύο μέλη τῶν ἀνισώσεων

$6x - 5 < 0$, $\frac{3}{2}x - 7 < 0$, $-\frac{1}{2}x - 3 < 0$

ἐπί -1 νά τάς μετατρέψετε εἰς ἀνισώσεις τῆς μορφῆς $\alpha x + \beta > 0$ καί κατόπιν νά τάς ἐπιλύσετε.

3) Νά προσδιορίσετε τάς κοινάς λύσεις τῶν δύο ἀνισώσεων $5x + 15 > 0$ καί $-7x + 14 > 0$ καί νά τάς παραστήσετε γεωμετρικῶς ἐπί τοῦ ἄξονος $x'x$.

4) Ποῖαι εἶναι αἱ λύσεις τῆς ἀνισώσεως $0 \cdot x + \frac{3}{2} > 0$; Ἔχει ἡ ἀνίσωσις $0\,x - 6 > 0$ λύσεις ;

5) Ποίαν σχέσιν ἔχουν αἱ λύσεις τῆς ἀνισώσεως $3x + 5 > 0$ μέ τήν λύσιν τῆς ἐξισώσεως $3x + 5 = 0$; Ὁμοίως ποίαν σχέσιν ἔχουν αἱ λύσεις τῆς ἀνισώσεως $-2x + 6 > 0$ μέ τήν λύσιν τῆς ἐξισώσεως $-2x + 6 = 0$;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄

'Αναλογίαι καί ἐφαρμογαί των

§ 1. Κατ'εὐθεῖαν ἀνάλογα μεγέθη ἤ ποσά·

Γραφική παράστασις τῆς σχέσεως μεταξύ δύο ἀναλόγων ποσῶν.

<u>1.1.</u> 'Από τήν καθημερινήν πεῖραν μας γνωρίζομεν ζεύγη συμμεταβλητῶν ποσῶν, δηλαδή ποσῶν πού ἀλληλοεξαρτῶνται , κατά τρόπον ὥστε κάθε μεταβολή τῆς τιμῆς τοῦ ἑνός νά ἔχη ὡς συνέπειαν ἀντίστοιχον μεταβολήν τῆς τιμῆς τοῦ ἄλλου. Ἄν παραστήσωμεν μέ x καί y τά δύο συμμεταβλητά ποσά, ἡ ἀλληλεξάρτησίς των θά ἐκφρασθῆ μαθηματικῶς μέ μίαν συνάρτησιν

$$\sigma : x \xrightarrow{\sigma} \sigma(x) = y$$

πού ἀπεικονίζει τό πεδίον τιμῶν τῆς μεταβλητῆς x ἐπί τοῦ πεδίου τιμῶν τῆς μεταβλητῆς y. Εἰς τό παρόν Κεφάλαιον θά μελετήσωμεν τάς περιπτώσεις εἰς τάς ὁποίας ἡ συνάρτησις αὐτή ἔχει μίαν ἀπό τάς ἀκολούθους τρεῖς ἁπλᾶς μορφάς:

$$y = \alpha x \quad , \; y = \alpha x + \beta \quad , \quad y = \frac{\alpha}{x} \quad ,$$

ὅπου α καί β ρητοί ἀριθμοί $\neq 0$.

<u>1.2. Ποσά κατ'εὐθεῖαν ἀνάλογα.</u>

<u>1ον Παράδειγμα.</u> Ἕνα κιλό ρύζι κοστίζει 12,5 δραχμάς. 'Εάν παραστήσωμεν μέ y δραχμάς τήν τιμήν x κιλῶν ἀπό αὐτό τό ρύζι , τότε , ὅπως εἶναι γνωστόν, θά ἔχωμεν μεταξύ x καί y τήν σχέσιν:

$$y = 12,5\ x .$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐάν ἡ ποσότης x τοῦ ρυζιοῦ πολλαπλασιασθῆ μέ ἕνα ὁποιονδήποτε ρητόν (θετικόν) ἀριθμόν ρ $(\rho = 2,3,\ldots, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$, τότε καί ἡ ἀντίστοιχος χρηματική τιμή y τοῦ ρυζιοῦ πολλαπλασιάζεται μέ τόν ἴδιον ἀριθμόν ρ :

$$y \cdot \varrho = 12{,}5 \cdot x \cdot \varrho .$$

Δύο συμμεταβλητά ποσά ὅπως τἀνωτέρω x καί y λέγονται κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα καί, συντόμως, ἀνάλογα.

Γενικῶς, ἡ ποσότης x ἑνός ἐμπορεύματος καί ἡ ἀντίστοιχος χρηματική του ἀξία y εἶναι ποσά ἀνάλογα καί συνδέονται διά τῆς σχέσεως

$$y = \alpha x \quad ,$$

ὅπου α εἶναι ἡ λεγομένη τιμή μονάδος τοῦ ἐμπορεύματος.

2ον Παράδειγμα. Ἕνα κεφάλαιον k δραχμῶν τοκίζεται ἐπί 2 ἔτη μέ ἐπιτόκιον 5 %. Πόσον τόκον τ θά ἀποφέρη ;

Ὅπως γνωρίζομεν ἤδη ἀπό τό Δημοτικόν σχολεῖον, μεταξύ τῶν συμμεταβλητῶν ποσῶν k καί τ ἔχομεν τήν σχέσιν

$$\tau = \frac{2 \cdot 5 \cdot k}{100} = \frac{1}{10}\, k \ .$$

Καί ἐδῶ παρατηροῦμεν ὅτι ὁ πολλαπλασιασμός τοῦ κεφαλαίου k μέ ἕνα ὁποιονδήποτε ρητόν (θετικόν) ἀριθμόν ἔχει ὡς συνέπειαν πολλαπλασιασμόν τοῦ τόκου τ μέ τόν ἴδιον ἀριθμόν ϱ :

$$\tau \cdot \varrho = \frac{1}{10} \cdot k \cdot \varrho \ .$$

Τά ποσά k καί τ εἶναι λοιπόν κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα.

3ον Παράδειγμα. Ἕνα σημεῖον Μ κινεῖται ἰσοταχῶς ἐπάνω εἰς ἕνα ἄξονα x΄x , δηλαδή εἰς ἴσα χρονικά διαστήματα διανύει ἴσα διανύσματα.

Ὑποθέτομεν ἀκόμη τά ἑξῆς: τό σημεῖον Μ κινεῖται κατά τήν ἀρνητικήν φοράν τοῦ ἄξονος , διανύει 5 m εἰς 1 min καί εὑρίσκεται εἰς τήν ἀρχήν O τῶν τετμημένων κατά τήν χρονικήν στιγμήν t = 0 min, δηλαδή κατά τήν ἀρχήν τῶν χρόνων, ὅπως συνηθίζομεν νά λέγωμεν. Ζητεῖται ἡ τετμημένη x τοῦ Μ t min μετά τήν ἀρχήν τῶν χρόνων t = 0 ἤ t min πρό τῆς χρονικῆς αὐτῆς στιγμῆς.

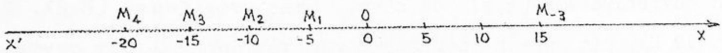
Ὡς μονάδα μήκους ἐπί τοῦ ἄξονος x΄x λαμβάνομεν τό 1 m· μέ ἄλλους λόγους, ὡς διάνυσμα ἀναφορᾶς ἐπάνω εἰς τόν ἄξονα λαμβάνομεν ἕνα διάνυσμα μήκους 1 m. Τότε αἱ θέσεις M_1, M_2, M_3, M_4 τοῦ κινητοῦ M

1 min , 2 min , 3 min , 4 min

μετά τήν ἀρχήν τῶν χρόνων $t = 0$, θά ἔχουν προφανῶς ἀντιστοίχους τετμημένας :

$-5 \cdot 1 = -5$, $-5 \cdot 2 = -10$, $-5 \cdot 3 = -15$, $-5 \cdot 4 = -20$.

(Βλ. τό κατωτέρω σχῆμα εἰς τό ὁποῖον τά 5 m = 500 cm παρεστάθησαν μέ 1 cm , δηλαδή ὑπό κλίμακα 1 πρός 500 , ὅπως λέγομεν).



Γενικῶς, ἡ τετμημένη x τοῦ σημείου M , t min μετά τήν ἀρχήν τῶν χρόνων $t = 0$, δίδεται ἀπό τήν σχέσιν

$$x = -5 \cdot t \, .$$

Ἡ ἰδία σχέσις μᾶς δίδει τήν τετμημένην τοῦ κινητοῦ M καί εἰς τάς χρονικάς στιγμάς πού προηγοῦνται ἀπό τήν ἀρχήν τῶν χρονων $t = 0$, ἀρκεῖ ἡ μεταβλητή t νά λάβῃ ἀντιστοίχους ἀρνητικάς τιμάς. Π.χ. διά τήν χρονικήν στιγμήν : 3 min πρό τῆς ἀρχῆς τῶν χρόνων $t = 0$, θά δώσωμεν εἰς τήν μεταβλητήν t τήν τιμήν -3 καί θά λάβωμεν ὡς τετμημένην τῆς ἀντιστοίχου θέσεως M_{-3} τοῦ κινητοῦ M τόν ἀριθμόν

$$x = -5 \cdot (-3) = 15.$$

Αὐτό εἶναι καί ἀπ' εὐθείας φανερόν, ἐπειδή τό κινητόν χρειάζεται 3 min διά νά διατρέξῃ τήν ἀπόστασιν τῶν 15 m ἡ ὁποία χωρίζει τό σημεῖον M_{-3} ἀπό τήν ἀρχήν 0 τῶν τετμημένων. Παρατηροῦμεν καί ἐδῶ ὅτι ὁ πολλαπλασιαμός τοῦ t μέ ἕνα ὁποιονδήποτε ρητόν σχετικόν ἀριθμόν ρ ἔχει ὡς συνέπειαν τόν πολλαπλασιασμόν τοῦ x μέ τόν ἴδιον ἀριθμόν ρ :

$$x \cdot \rho = -5 \cdot t \cdot \rho$$

Τά ποσά t καί x εἶναι λοιπόν κατ᾽εὐθεῖαν ἀνάλογα.

1.3. Γραφική παράστασις τῆς σχέσεως μεταξύ δύο κατ᾽εὐθεῖαν ἀναλόγων ποσῶν. Ὅπως φαίνεται ἀπό τά προηγούμενα παραδείγματα, ἡ σχέσις μεταξύ δύο κατ᾽εὐθεῖαν ἀναλόγων ποσῶν x καί y ἐκφράζεται μέ μίαν συνάρτησιν

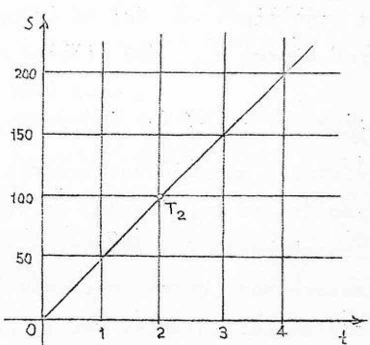
$$\sigma : x \xrightarrow{\sigma} \alpha x = y \quad ,$$

ὅπου α εἶναι ἕνας δεδομένος ρητός ἀριθμός $\neq 0$. Ἐπομένως ἡ γραφική παράστασις τῆς σχέσεως είς ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων συντεταγμένων (x,y) θά εἶναι, ὅπως γνωρίζομεν (Βιβλ. Ι, σ. 99 Γ), μία εὐθεῖα πού περνᾶ ἀπό τήν ἀρχήν O τῶν συντεταγμένων. Διά νά τήν χαράξωμεν ἀρκεῖ νά προσδιορίσωμεν ἕνα ἀκόμη σημεῖον της ἐκτός ἀπό τό O.

Παράδειγμα. Ἕνα τραῖνον ἔχει μέσην ταχύτητα 50 χιλιόμετρα ἀνά ὥραν (50 km/h). Τό διάστημα s km πού διατρέχει είς χρόνον t h (ὡρῶν) εἶναι, ὅπως εὔκολα προκύπτει, κατ᾽εὐθεῖαν ἀνάλογον πρός τόν χρόνον t καί δίδεται ἀπό τήν σχέσιν

$$s = 50 \cdot t \quad .$$

Ζητεῖται ἡ γραφική παράστασις τῆς σχέσεως. Παριστάνομεν ἐπί τοῦ ἄξονος τετμημένων Ot τάς ὥρας t μέ ἀντιστοιχίαν 1 cm πρός 1 h καί ἐπί τοῦ ἄξονος τεταγμένων Os τά διανυόμενα διαστήματα s μέ ἀντιστοιχίαν 1 cm πρός 50 km. Ἀπό τόν πίνακα ἀντιστοίχων τιμῶν



t	0	0,5	1	1,5	2	2,5 ...
s	0	25	50	75	100	125 ...

τῆς συναρτήσεως $s = 50\ t$ παίρνομεν τό ζεῦγος ($t = 2$, $s = 100$) καί σημειώνομεν ἐπάνω στό ἐπίπεδον τό σημεῖον T_2 μέ συντεταγμένας (2, 100). Κατόπιν χαράσσομεν τήν ἡμιευθεῖαν OT_2 πού ἔχει ἀρχήν τό σημεῖον O. Αὐτή ἡ ἡμιευθεῖα εἶναι ἡ ζητουμένη γραφική παράστασις (βλ. προηγούμενο σχῆμα).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ἀπό τά κατωτέρω ζεύγη συμμεταβλητῶν ποσῶν νά εὕρετε ποῖα περιλαμβάνουν κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα ποσά καί ποῖα ὄχι, δικαιολογοῦντες τήν ἀπάντησίν σας :
α) Χρόνος καί ἀντίστοιχος ποσότης ὑφάσματος πού ὑφαίνει μία μηχανή.
β) Ἀριθμός προβάτων καί ποσότης κτηνοτροφῶν διά τήν διατροφήν των κατά τόν χειμῶνα.
Ποσότης κτηνοτροφῶν καί διάρκεια τοῦ χειμῶνος εἰς ἡμέρας δι' ἕνα ὡρισμένον ποίμνιον.
γ) Χρονική διάρκεια (χρόνος) καί ἀντίστοιχος αὔξησις τοῦ ἀναστήματος (ἤ τοῦ βάρους) ἑνός παιδιοῦ.
δ) Τόξον περιφερείας καί χορδή τοῦ τόξου.
ε) Τόξον περιφερείας καί ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος γωνία.
στ) Ποσότης ἀλεύρου καί ἀντίστοιχος ποσότης παραγομένου ἄρτου.
Νά ἀναφέρετε καί ἰδικά σας παραδείγματα.

2) Νά δείξετε ὅτι τό μέτρον x εἰς μοίρας μιᾶς γωνίας καί τό μέτρον y εἰς βαθμούς τῆς ἰδίας γωνίας (Βιβλ. Ι, σ. 91 Α) εἶναι ποσά κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα. Ποία εἶναι ἡ σχέσις πού συνδέει τά ποσά x καί y ;

3) Νά παραστήσετε γραφικῶς ἐπί χιλιοστομετρικοῦ χάρτου τήν συνάρτησιν $y = 12{,}5\ x$ τοῦ 1ου Παραδείγματος (ἐδ. § 1.2), παριστάνοντες ἐπί τοῦ ἄξονος τετμημένων τά κιλά x μέ ἀντιστοιχίαν 1 cm πρός 1 κιλόν καί ἐπί τοῦ ἄξονος τεταγμένων τάς δραχμάς y μέ ἀντιστοιχίαν 1 cm πρός 10 δραχμάς. Χρησιμοποιοῦντες τήν γραφικήν παράστασιν νά εὕρετε πόσα κιλά ρύζι ἀγοράζει κανείς μέ 30 δρχ καί πόσα μέ 45 δρχ.

4) Νά παραστήσετε γραφικῶς ἐπί χιλιοστομετρικοῦ χάρτου

τήν συνάρτησιν $x = -5\ t$ τοῦ 3ου Παραδείγματος (ἐδ. § 1.2) λαμβάνοντες ἐπί τοῦ ἄξονος τετμημένων Ot τούς χρόνους t min μέ ἀντιστοιχίαν 1 cm πρός 10 min καί ἐπί τοῦ ἄξονος τεταγμένων Ox τάς τετμημένας x τοῦ κινητοῦ Μ μέ ἀντιστοιχίαν 1 cm πρός 50.

5) Νά παραστήσετε γραφικῶς τήν συνάρτησιν πού προέρχεται ἀπό τό παράδειγμα στ) τῆς 'Ασκήσεως 1), ἐάν εἶναι γνωστόν ὅτι μέ 10 kg ἀλεύρι παρασκευάζονται 14 kg ἄρτου (τά kg ἀλεύρι ἐπί τοῦ ἄξονος τετμημένων, τά kg ἄρτου ἐπί τοῦ ἄξονος τεταγμένων). Χρησιμοποιοῦντες τήν γραφικήν αὐτήν παράστασιν νά εὕρετε πόσα κιλά ἀλεύρι χρειάζονται διά 40 κιλά ἄρτου καί πόσα διά 60 κιλά ἄρτου.

6) 'Εάν εἰς τό παράδειγμα β) τῆς 'Ασκήσεως 1) διά κάθε πρόβατον ἀπαιτοῦνται 80 kg κτηνοτροφαί πρός διατροφήν του κατά τόν χειμῶνα, ποίαν μορφήν θά ἔχη ἡ γραφική παράστασις τῆς συναρτήσεως πού προκύπτει ἀπό τό παράδειγμα: θά εἶναι συνεχής εὐθεῖα ἤ μεμονωμένα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ἀνήκοντα εἰς μίαν εὐθεῖαν ;

§ 2. 'Αναλογίαι καί κύριαι ἰδιότητές των.

2.1. Εἰς τό Βιβλ. Ι , σ. 45 Γ ἐμάθαμεν τό ἑξῆς: λόγος ἑνός εὐθυγράμμου τμήματος Β πρός ἕνα (μή μηδενικόν) τμῆμα Α εἶναι ὁ ἀριθμός λ μέ τόν ὁποῖον πρέπει νά πολλαπλασιασθῇ τό τμῆμα Α διά νά προκύψη τό τμῆμα Β ὅπου $B = \lambda A$. Τόν λόγον αὐτόν τόν ἐσυμβολίσαμεν μέ τήν γραφήν $\frac{B}{A} = \lambda$ καί εἴδαμεν (Βιβλ. Ι, σ. 47 Γ) ὅτι ἰσοῦται μέ τό πηλίκον $\frac{\beta}{\alpha}$ τῶν ἀριθμῶν β καί α πού προκύπτουν , ὅταν μετρήσωμεν τά τμήματα Β καί Α μέ τήν αὐτήν μονάδα μήκους.

Τήν ἀνωτέρω ἔννοιαν τοῦ λόγου τήν ἐπεξετείναμεν καί εἰς τά συγγραμμικά διανύσματα (Βιβλ. Ι, σ. 57Γ). Εἴπαμεν ὅτι λόγος ἑνός διανύσματος $\vec{B}$ πρός ἕνα (μή μηδενικόν) συγγραμμικόν διάνυσμα $\vec{A}$ εἶναι ὁ σχετικός ἀριθμός ρ μέ τόν ὁποῖον πρέπει νά πολλαπλασιασθῇ τό διάνυσμα $\vec{A}$ διά νά προκύψη τό $\vec{B}$ ὅπου $\vec{B} = \rho\vec{A}$.

Καί ἐδῶ ἰσχύει ἡ ἰδιότης : ὁ λόγος

$$\frac{\vec{B}}{\vec{A}} = \rho$$

ἰσοῦται μέ τό πηλίκον $\frac{\beta}{\alpha}$ τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν β καί α πού προκύπτουν, ὅταν μετρήσωμεν τά διανύσματα $\vec{B}$ καί $\vec{A}$ μέ τό αὐτό <u>συγγραμμικόν</u> (μή μηδενικόν) διάνυσμα ἀναφορᾶς $\vec{M}$.

Ἀπό τά ἀνωτέρω ὁδηγούμεθα τώρα εἰς τόν ἀκόλουθον ὁρισμόν:

Λόγος ἑνός ρητοῦ σχετικοῦ ἀριθμοῦ β πρός ἕνα (μή μηδενικόν) ρητόν σχετικόν ἀριθμόν α καλεῖται τό πηλίκον

$$\beta : \alpha = \frac{\beta}{\alpha} .$$

Π.χ. εἰς τό 1ον Παράδειγμα τοῦ ἐδ. § 1.2 ὁ λόγος τῆς χρηματικῆς τιμῆς y δρχ πρός τό ἀντίστοιχον ποσόν x kg ρύζι εἶναι ἴσος μέ

$$\frac{y}{x} = 12,5 .$$

Εἰς τό 2ον Παράδειγμα τοῦ ἰδίου ἐδαφίου ὁ λόγος τοῦ τόκου τ πρός τό ἀντίστοιχον κεφάλαιον k εἶναι ἴσος μέ

$$\frac{\tau}{k} = \frac{1}{10} .$$

Τέλος, εἰς τό 3ον Παράδειγμα ὁ λόγος τῆς τετμημένης x τοῦ κινητοῦ σημείου M (εἰς θέσιν διάφορον ἀπό τήν ἀρχήν O τῶν τετμημένων) πρός τόν ἀντίστοιχον χρόνον t εἶναι ἴσος μέ

$$\frac{x}{t} = -5$$

<u>2.2.</u> <u>Ἀναλογίαι.</u> Ἄν εἰς τό 1ον Παράδειγμα δώσωμεν εἰς τό x τάς τιμάς

$$x_1 = 4,6 \text{ kg} \quad \text{καί } x_2 = 7 \text{ kg} ,$$

θά λάβωμεν ἀντιστοίχους τιμάς τοῦ y τάς:

$y_1 = 12,5 \cdot 4,6 = 57,5$ δρχ καί $y_2 = 12,5 \cdot 7 = 87,5$ δρχ.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἀληθεύει ἡ ἰσότης

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} ,$$

διότι

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{57,5}{4,6} = 12,5 \quad \text{καί} \quad \frac{y_2}{x_2} = \frac{87,5}{7} = 12,5 .$$

Ἡ ἰσότης δύο λόγων λέγεται <u>ἀναλογία</u>. Ὥστε ἡ ἰσότης

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \quad \text{ἤ} \quad y_1 : x_1 = y_2 : x_2$$

εἶναι μία ἀναλογία.

Ὁμοίως, ἄν εἰς τό 3ον Παράδειγμα δώσωμεν εἰς τό t δύο ὁποιασδήποτε τιμάς t_1 καί t_2 διαφόρους ἀπό τό 0, αἱ ἀντίστοιχοι τιμαί τοῦ x θά εἶναι

$$x_1 = -5t_1 \quad \text{καί} \quad x_2 = -5t_2 \,,$$

θά ἰσχύη δέ ἡ ἀναλογία

$$\frac{x_1}{t_1} = \frac{x_2}{t_2} \,,$$

διότι

$$\frac{x_1}{t_1} = \frac{-5t_1}{t_1} = -5 \quad \text{καί} \quad \frac{x_2}{t_2} = \frac{-5t_2}{t_2} = -5.$$

Μία ἀναλογία

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \quad \text{ἤ} \quad \alpha : \beta = \gamma : \delta \qquad (\beta \neq 0 \;,\; \delta \neq 0)$$

ἔχει τέσσαρας <u>ὅρους</u>, τούς ἀριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Οἱ ὅροι α καί δ λέγονται <u>ἄκροι</u>, οἱ β καί γ <u>μέσοι</u>.
Οἱ ὅροι α καί γ λέγονται <u>ἡγούμενοι</u> ἤ <u>ἀριθμηταί</u>, οἱ β καί δ ἀντίστοιχοι <u>ἑπόμενοι</u> ἤ <u>παρονομασταί</u>.
Ὁ τέταρτος ὅρος δ λέγεται <u>τέταρτος ἀνάλογος</u> τῶν τριῶν ἄλλων. Ἄν οἱ δύο μέσοι εἶναι ἴσοι, ὅπως π.χ. εἰς τήν ἀναλογίαν $2 : 4 = 4 : 8$, τότε ὁ ὅρος 4 (καί γενικῶς ὁ ὅρος β εἰς τήν ἀναλογίαν $\alpha : \beta = \beta : \varepsilon$) λέγεται <u>μέσος ἀνάλογος</u> τῶν δύο ἄλλων ὅρων 2 καί 8 (α καί ε).

<u>2.3.</u> <u>Ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν.</u> I) Ἔστω ἡ ἀναλογία

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \quad , \; (\beta \neq 0 \quad , \quad \delta \neq 0).$$

Τό γινόμενον $\beta\delta$ εἶναι ἀριθμός $\neq 0$. Ἑπομένως, σύμφωνα μέ τήν 7ην ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (βλ. § 1.9), θά ἔχωμεν τήν ἰσοδυναμίαν

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \frac{\alpha}{\beta}\cdot\beta\delta = \frac{\gamma}{\delta}\cdot\beta\delta$$

ἤτοι

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \alpha\delta = \beta\gamma .$$

Ὥστε, εἰς κάθε ἀναλογίαν τό γινόμενον τῶν δύο ἄκρων εἶναι ἴσον μέ τό γινόμενον τῶν δύο μέσων.

Ἀντιστρόφως, ἀπό μίαν ἰσότητα $\alpha\delta = \beta\gamma$ δύο γινομένων, ὅπου $\beta \neq 0$ καί $\delta \neq 0$, ἠμποροῦμεν νά συμπεράνωμεν τήν ἀναλογίαν

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \qquad \text{ἤ} \qquad \alpha : \beta = \gamma : \delta ,$$

εἰς τήν ὁποίαν ἄκροι ὅροι εἶναι οἱ παράγοντες τοῦ ἑνός γινομένου καί μέσοι, οἱ παράγοντες τοῦ ἄλλου γινομένου.

Π.χ. ἀπό τήν ἰσότητα $4\cdot 2{,}5 = 2\cdot 5$ ἕπεται ἡ ἀναλογία

$$\frac{4}{2} = \frac{5}{2{,}5}$$

καί ἀπό τήν $-3\cdot 15 = -2\cdot 22{,}5$ ἡ ἀναλογία

$$\frac{-3}{-2} = \frac{22{,}5}{15} .$$

II) Ἔστω ἡ ἀναλογία

(1) $\alpha : \beta = \gamma : \delta \quad ; \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0)$.

Ἀπό αὐτήν ἕπονται αἱ ἀναλογίαι

(2) $\alpha : \gamma = \beta : \delta$ (ἐναλλαγή τῶν δύο μέσων)

(3) $\delta : \beta = \gamma : \alpha$ (ἐναλλαγή τῶν δύο ἄκρων)

(4) $\beta : \alpha = \delta : \gamma$ (ἐναλλαγή τῶν μέσων μέ τούς ἄκρους).

Πράγματι, καί αἱ τέσσαρες αὐταί ἀναλογίαι εἶναι ἰσοδύναμοι μέ τήν ἰσότητα $\alpha\delta = \beta\gamma$ ἡ ὁποία γράφεται καί ὡς ἑξῆς:

$$\alpha\delta = \gamma\beta \quad , \quad \delta\alpha = \beta\gamma \quad , \quad \beta\gamma = \alpha\delta .$$

Π.χ. ἀπό τήν ἀναλογίαν

$$4 : 3 = 10 : 7{,}5$$

ἠμποροῦμεν νά συμπεράνωμεν τάς ἀναλογίας :

$$4 : 10 = 3 : 7{,}5 \; , \quad 7{,}5 : 3 = 10 : 4 \; , \quad 3 : 4 = 7{,}5 : 10 .$$

III) Ἔστω ἡ ἀναλογία

(5) $$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2},$$

ὅπου οἱ παρονομασταί β_1 καί β_2 εἶναι θετικοί ἀριθμοί. Αὐτό ἠμποροῦμεν πάντοτε νά τό προϋποθέσωμεν, διότι, ἄν ἕνας παρονομαστής εἶναι ἀρνητικός, τότε τόν μετατρέπομεν εἰς θετικόν ἀλλάζοντες τό πρόσημον καί αὐτοῦ καί τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμητοῦ.

Ἀπό τήν ἀναλογίαν αὐτήν ἕπεται ἡ ἀναλογία

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\beta_1+\beta_2} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \quad \text{ἐπομένως καί ἡ} \quad \frac{\alpha_1+\alpha_2}{\beta_1+\beta_2} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}.$$

Πράγματι, ἡ ἀναλογία (5) ἰσοδυναμεῖ μέ τήν ἰσότητα

$$\alpha_2\beta_1 = \beta_2\alpha_1,$$

καί αὐτή μέ τήν ἰσότητα

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_1 = \beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_1,$$

δηλαδή τήν

$$(\alpha_1+\alpha_2)\beta_1 = (\beta_1+\beta_2)\alpha_1.$$

Ἡ τελευταία ὅμως ἰσότης, σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα I) τῶν ἀναλογιῶν, ἔχει ὡς συνέπειαν τήν ἀναλογίαν:

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\beta_1+\beta_2} = \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Π.χ. ἀπό τήν ἀναλογίαν $7 : 15 = 14 : 30$ ἕπεται ἡ ἀναλογία $21 : 45 = 7 : 15$.

Ἡ ἰδιότης αὐτή ἐπεκτείνεται εὔκολα εἰς μίαν σειράν ἀπό τρεῖς ἤ περισσοτέρους ἴσους λόγους. Π.χ. ἀπό τήν σειράν τῶν ἴσων λόγων

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{21}{28}$$

συμπεραίνομεν τήν ἰσότητα

$$\frac{3+6+21}{4+8+28} = \frac{3}{4}, \quad \text{δηλαδή τήν} \quad \frac{30}{40} = \frac{3}{4}.$$

Πράγματι, ἐφαρμόζοντες ὅ,τι πρό ὀλίγου ἐδείξαμεν, ἔχομεν:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} \Longrightarrow \frac{3+6}{4+8} = \frac{21}{28} \Longrightarrow \frac{3+6+21}{4+8+28} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}.$$

Ὥστε, ὅταν μᾶς δοθοῦν δύο ἤ περισσότεροι ἴσοι λόγοι (μέ θετικούς παρονομαστάς):

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3} = \dots ,$$

τότε θά σχηματίσωμεν ἕνα νέον ἴσον πρός αὐτούς λόγον, ἄν λάβωμεν ὡς ἀριθμητήν τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν τῶν δοθέντων λόγων καί ὡς παρονομαστήν τό ἄθροισμα τῶν παρονομαστῶν των :

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\dots}{\beta_1+\beta_2+\beta_3+\dots} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \dots$$

IV) Εἰς τούς δύο ἴσους λόγους τῆς ἀναλογίας

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \qquad (\beta_1 , \beta_2 \neq 0)$$

ἅς προσθέσωμεν τήν μονάδα. Θά προκύψη τότε:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \iff \frac{\alpha_1}{\beta_1} + 1 = \frac{\alpha_2}{\beta_2} + 1 \iff \frac{\alpha_1+\beta_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2+\beta_2}{\beta_2} .$$

Ὥστε, ἐάν εἰς τούς ἀριθμητάς ἀναλογίας προσθέσωμεν τούς ἀντιστοίχους παρονομαστάς, θά λάβωμεν νέαν ἀναλογίαν. Π.χ.

$$\frac{-8}{30} = \frac{-4}{15} \iff \frac{22}{30} = \frac{11}{15} .$$

Μέ ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \iff \frac{\alpha_1}{\beta_1} - 1 = \frac{\alpha_2}{\beta_2} - 1 \iff \frac{\alpha_1-\beta_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2-\beta_2}{\beta_2}$$

Ὥστε, ἐάν ἀπό τούς ἀριθμητάς ἀναλογίας ἀφαιρέσωμεν τούς ἀντιστοίχους παρονομαστάς, θά λάβωμεν νέαν ἀναλογίαν. Π.χ.

$$\frac{-8}{30} = \frac{-4}{15} \iff \frac{-8-30}{30} = \frac{-4-15}{15} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{-38}{30} = \frac{-19}{15} .$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Εἰς ἕνα οἰκόπεδον 450 m² ἡ οἰκοδομή καλύπτει 230 m². Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ οἰκοπέδου 1ον πρός τήν οἰκοδομημένην ἐπιφάνειαν καί 2ον πρός ὁλόκληρον τήν ἐπιφάνειαν τοῦ οἰκοπέδου ;

2) Ἡ ἀπόστασις δύο σημείων Α΄ καί Β΄ ἐπάνω εἰς ἕνα τοπογραφικόν χάρτην εἶναι 15 cm καί ἡ ὁριζοντία ἀπόστασις τῶν ἀντιστοίχων σημείων Α καί Β ἐπάνω εἰς τό ἔδαφος 225 m. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῆς πρώτης πρός τήν δευτέραν ἀπόστασιν;

3) Νά ἁπλοποιήσετε τούς λόγους $\frac{5}{6}:\frac{2}{3}$ καί $0,25:\left(\frac{5}{4}-\frac{2}{4}\right)$.

4) Ἀπό τήν ἀναλογίαν $9:12=6:8$ νά σχηματίσετε τρεῖς νέας ἀναλογίας ἐφαρμόζοντες τήν ἰδιότητα II).

5) Ποῖαι ἰδιότητες ἐφηρμόσθησαν εἰς τήν ἀναλογίαν $\frac{9}{12}=\frac{6}{8}$ διά νά προκύψη κάθε μία ἀπό τάς ἀκολούθους ἀναλογίας:

α) $\frac{21}{12}=\frac{14}{8}$, β) $\frac{-3}{12}=\frac{-2}{8}$, γ) $\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$,

δ) $\frac{12}{9}=\frac{8}{6}$, ε) $\frac{9}{6}=\frac{12}{8}$, στ) $\frac{8}{12}=\frac{6}{9}$.

6) Νά προσδιορίσετε τό x εἰς κάθε μίαν ἀπό τάς ἀναλογίας: $\frac{5}{6}=\frac{15}{x}$, $\frac{x}{12}=\frac{6}{-4}$, $\frac{15}{x}=\frac{3}{4}$, $\frac{2}{x}=\frac{-1}{2}$

$\frac{0,25}{x}=\frac{5}{4}$, $\frac{3,5}{-x}=\frac{2,5}{5}$, $\frac{5}{x}=\frac{x}{20}$, $\frac{x}{-3}=\frac{-27}{x}$.

7) Μία φωτογραφική εἰκών σχήματος ὀρθογωνίου $4\frac{1}{2}$ cm×6cm ἐμεγεθύνθη οὕτως ὥστε ἡ 2α διάστασίς της νά γίνη 18cm. Πόση ἔγινε ἡ πρώτη της διάστασις ;

§ 3. Ποσά μέ μεταβολάς κατ'εὐθεῖαν ἀναλόγους. Γραφική παράστασις τῆς σχέσεως μεταξύ δύο ποσῶν μέ μεταβολάς ἀναλόγους.

3.1. Ὅπως εἶναι γνωστόν, εἰς τήν καθημερινήν ζωήν χρησιμοποιοῦνται διά τήν μέτρησιν τῆς θερμοκρασίας δύο διάφοροι κλίμακες: 1ον ἡ κλῖμαξ Κελσίου (Celsius) ἡ ὁποία ἀντιστοιχίζει εἰς τήν θερμοκρασίαν τοῦ τηκομένου πάγου τό $0^{o}C$ καί εἰς τήν θερμοκρασίαν τοῦ βράζοντος νεροῦ τό $100^{o}C$ καί 2ον ἡ κλῖμαξ Φαρενάϊτ (Fahrenheit) ἡ ὁποία ἀντιστοιχίζει εἰς τήν θερμοκρασίαν τοῦ τηκομένου πάγου τόν ἀριθμόν $32^{o}F$ καί εἰς τήν θερμοκρασίαν τοῦ βράζοντος νεροῦ τόν ἀριθμόν $212^{o}F$. Ἑπομένως εἰς τό διάστημα τῶν $100^{o}C$ τῆς θερμομετρικῆς κλίμακος Κελσίου ἀντιστοιχεῖ τό διάστημα $212-32=180^{o}F$ τῆς θερμομετρικῆςκλίμακος Φαρενάϊτ. Ἄρα ὅταν μία θερμοκρασία αὐξηθῇ ἀπό 0^0C εἰς t^0C, ἡ ἰδία αὔξησις εἰς βαθμούς Φαρενάϊτ θά εἶναι ἀπό 32^0 F εἰς t^0 F καί θά ἰσχύη ἡ ἀναλογία

$$\frac{t^0F-32^0F}{t^0C-0^0C} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5}.$$

Ὕστερα ἀπό αὐτήν τήν παρατήρησιν εὔκολα εὑρίσκομεν τό ἑξῆς: Ἄν μετρήσωμεν μίαν καί τήν αὐτήν θερμοκρασίαν 1ον εἰς βαθμούς F καί λάβωμεν τό ἀποτέλεσμα t^0F καί 2ον εἰς βαθμούς C καί λάβωμεν τό ἀποτέλεσμα t^0C, τότε μεταξύ τῶν ἀριθμῶν t^0F καί t^0C θά ἰσχύη ἡ ἰσότης:

$$t^0F = \frac{9}{5}t^0C + 32.$$

Ἡ ἰσότης αὐτή, ὅταν ἐπιλυθῇ ὡς πρός τήν μεταβλητήν t^0C, θά μᾶς δώση ἀντιστρόφως τό t^0C ἐκφρασμένον διά τοῦ t^0F:

$$t^0C = \frac{5}{9}t^0F - \frac{32\cdot 5}{9} = \frac{5}{9}t^0F - \frac{160}{9}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ μεταβλητή $y = t^0$ F εἶναι συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς t^0C ἔχουσα τήν μορφήν

$$y = \alpha x + \beta, \quad \text{ὅπου } \alpha = \frac{9}{5} \text{ καί } \beta = 32.$$

Τά δύο ποσά x καί y εἶναι συμμεταβλητά χωρίς νά εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα. Π.χ. εἶναι εὔκολον νά διαπιστώσωμεν ὅτι ὁ διπλασιασμός τοῦ x δέν ἔχει ὡς συνέπειαν διπλασιασμόν τοῦ y. Ἔχουν ὅμως τά ποσά x καί y μίαν ἄλλην χαρακτηριστικήν ἰδιότητα, τήν ἑξῆς: Ἄς δώσωμεν εἰς τό x μίαν σειράν ἀπό τυχούσας διαφορετικάς τιμάς:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu$$

καί ἄς προσδιορίσωμεν τάς ἀντιστοίχους τιμάς τοῦ y:

$$y_1 = \alpha x_1+\beta, \quad y_2 = \alpha x_2 + \beta, \quad y_3 = \alpha x_3+\beta, \ldots, y_\nu = \alpha x_\nu + \beta.$$

Εἰς τάς μεταβολάς (διαφοράς):

$$x_2 - x_1, \quad x_3 - x_1, \ldots, x_\nu - x_1$$

τοῦ ποσοῦ x ἀντιστοιχοῦν αἱ ἀκόλουθοι μεταβολαί (διαφοραί) τοῦ ποσοῦ y:

$y_2-y_1=\alpha(x_2-x_1)$, $y_3-y_1=\alpha(x_3-x_1),\dots,y_\nu-y_1=\alpha(x_\nu-x_1)$.
Ἑπομένως ἰσχύουν αἱ ἰσότητες:

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=\dots=\frac{y_\nu-y_1}{x_\nu-x_1}=\alpha .$$

Συμπεραίνομεν λοιπόν ὅτι αἱ μεταβολαί τοῦ ποσοῦ y εἶναι κατ'εὐθεῖαν ἀνάλογοι πρός τάς ἀντιστοίχους μεταβολάς τοῦ ποσοῦ x. Διά τοῦτο καλοῦμεν τά ποσά x καί y ποσά μέ μεταβολάς κατ'εὐθεῖαν ἀναλόγους. Ἔτσι τό μέτρον τῆς θερμοκρασίας εἰς βαθμούς F καί τό μέτρον τῆς ἰδίας θερμοκρασίας εἰς βαθμούς C εἶναι ποσά μέ μεταβολάς ἀναλόγους.

3.2. Ἰδού ἕνα 2ον παράδειγμα: Ἡ ἀξία τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας πού καταναλίσκει μία οἰκογένεια ἤ ἕνα κατάστημα ὑπολογίζεται ἀνάλογα μέ τήν ποσότητά της εἰς κιλοβαττώρας (kwh), σύμφωνα μέ τάς ἐνδείξεις τοῦ ἠλεκτρικοῦ γνώμονος (μετρητοῦ). Ἐκτός ὅμως ἀπό τήν ἀξίαν τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας ὁ καταναλωτής πληρώνει κάθε μῆνα καί ἕνα σταθερόν ποσόν (πάγιον τέλος) διά τό ἐνοίκιον τοῦ γνώμονος κτλ. Ἐάν λοιπόν μία οἰκογένεια καταναλώση ἐπί ἕνα μῆνα x kwh καί πληρώνη 0,70 δρχ/kwh (δρχ ἀνά κιλοβαττώραν) καθώς καί πάγιον τέλος 40 δρχ , τότε ὁ λογαριασμός τῆς Ἠλεκτρικῆς Ἑταιρίας τόν μῆνα ἐκεῖνον θά γράφη τό ποσόν τῶν δραχμῶν :

$$y = 0{,}70\cdot x + 40 .$$

Ἡ συνάρτησις y τοῦ x εἶναι καί ἐδῶ τῆς μορφῆς $y=\alpha x+\beta$ μέ $\alpha=0{,}70$ καί $\beta=40$. Τά ποσά x καί y ἔχουν ἀντιστοίχους μεταβολάς κατ'εὐθεῖαν ἀναλόγους: ὁ λόγος μιᾶς μεταβολῆς $y''-y'$ τοῦ y πρός τήν ἀντίστοιχον μεταβολήν $x''-x'$ τοῦ x εἶναι ἴσος μέ 0,70 :

$$\frac{y''-y'}{x''-x'}=0{,}70 .$$

3.3. Γραφική παράστασις τῆς σχέσεως μεταξύ δύο ποσῶν μέ μεταβολάς ἀναλόγους. Ὅπως εἴπαμεν, ἡ σχέσις μεταξύ , δύο ποσῶν x καί y ὄχι ἀναλόγων ἀλλά μέ μεταβολάς κατ'εὐθεῖαν ἀναλόγους δίδεται ἀπό μίαν συνάρτησιν τῆς μορφῆς

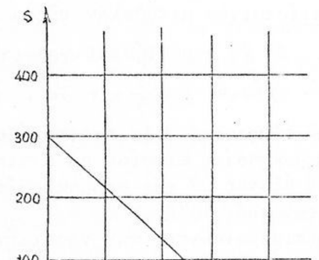
$$\sigma : x \xrightarrow{\sigma} \alpha x + \beta = y \quad , \text{ὅπου } \alpha \neq 0 \ , \quad \beta \neq 0.$$

Ἐπομένως ἡ γραφική παράστασις τῆς σχέσεως εἰς ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων συντεταγμένων (x, y) θά εἶναι μία εὐθεῖα ἡ ὁποία δέν περνᾶ ἀπό τήν ἀρχήν O τῶν συντεταγμένων, ἀλλά τέμνει τούς ἄξονας Ox καί Oy ἀντιστοίχως εἰς τά σημεῖα:

$$T_1\left(-\frac{\beta}{\alpha}\ , 0\right) \quad \text{καί} \quad T_2(0,\ \beta).$$

Παράδειγμα. Ἕνα τραῖνο ἀναχωρεῖ ἀπό τόν σταθμόν A πού ἀπέχει 300 km ἀπό τόν σταθμόν O καί κινεῖται πρός τόν σταθμόν O μέ μέσην ταχύτητα 80 km/h (χιλιόμετρα ἀνά ὥραν).

Ἀφοῦ εὑρεθῆ ἡ σχέσις πού συνδέει τήν ἀπόστασιν s km τοῦ τραίνου ἀπό τόν σταθμόν O μέ τόν χρόνον t h μετά τήν χρονικήν στιγμήν t =0h τῆς ἀναχωρήσεως, νά δοθῆ ἡ γραφική παράστασις τῆς σχέσεως.



Ἡ ἀπόστασις τοῦ τραίνου ἀπό τόν σταθμόν O ἐλαττώνεται κατά 80 km κάθε ὥραν. Ἐπομένως ἡ σχέσις μεταξύ s km καί t h θά δίδεται ἀπό τήν συνάρτησιν s = −80t + 300.

Διά τήν γραφικήν της παράστασιν ἀπεικονίζομεν τούς χρόνους t h ἐπί τοῦ ἄξονος τετμημένων Ot μέ ἀντιστοιχίαν 1 cm πρός

1 h καί τάς ἀποστάσεις s km ἐπί τοῦ ἄξονος τεταγμένων 0s μέ ἀντιστοιχίαν 1 cm πρός 100 km.

Θά προκύψη τότε ἡ ἀνωτέρω γραφική παράστασις.

Ὅπως φαίνεται ἀπ'αὐτήν, τό τραῖνο θά φθάση εἰς τόν σταθμόν 0 $3\frac{3}{4}$ h μετά τήν ἀναχώρησίν του.

Αὐτό ἠμποροῦμεν νά τό εὕρωμεν καί ἀπό τήν σχέσιν $s = -80t + 300$, ἄν λάβωμεν τό $s = 0$ καί ἐπιλύσωμεν τήν προκύπτουσαν ἐξίσωσιν $0 = -80t + 300$ ὡς πρός t.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Δίδεται ἡ συνάρτησις $y = 2{,}5 \cdot x - 4$. Νά καταρτίσετε ἕνα πίνακα ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν μεταβλητῶν x καί y διά τάς ἀκολούθους τιμάς τῆς x:
$x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 2$, $x_6 = 3$.
Νά ὑπολογίσετε κατόπιν τάς μεταβολάς (διαφοράς) τῆς y αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς μεταβολάς
$x_2 - x_1$, $x_3 - x_1$, $x_4 - x_1$, $x_5 - x_1$, $x_6 - x_1$
τῆς x. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος μιᾶς μεταβολῆς τῆς y πρός τήν ἀντίστοιχον μεταβολήν τῆς x ;

2) Νά παραστήσετε γραφικῶς ἐπί χιλιοστομετρικοῦ χάρτου τήν σχέσιν $y = \frac{9}{5}x + 32$, ὅπου $x = t^0C$, $y = t^0F$, τοῦ ἐδαφίου § 3.1, ἀπεικονίζοντες ἐπί τοῦ ἄξονος 0x τάς θερμοκρασίας Κελσίου μέ ἀντιστοιχίαν 1 cm πρός 10^0C καί ἐπί τοῦ ἄξονος 0Y τάς θερμοκρασίας Φαρενάϊτ μέ ἀντιστοιχίαν 1 cm πρός 10^0F.
Χρησιμοποιοῦντες τήν γραφικήν αὐτήν παράστασιν νά κάμετε τάς ἀκολούθους μετατροπάς θερμοκρασιῶν:
-10^0C εἰς t^0F, 15^0C εἰς t^0F, 25^0C εἰς t^0F,
5^0F εἰς t^0C, 23^0F εἰς t^0C, 50^0F εἰς t^0C,
καί ἔπειτα νά τάς ἐπαληθεύσετε μέ ὑπολογισμούς.

3) Νά παραστήσετε γραφικῶς ἐπί χιλιοστομετρικοῦ χάρτου τήν σχέσιν $y = 0{,}70x + 40$ τοῦ ἐδ. § 3.2, ἀπεικονίζοντες ἐπί τοῦ ἄξονος 0x τάς κιλοβαττώρας x μέ ἀντιστοιχίαν 1 cm πρός 20 kwh καί ἐπί τοῦ ἄξονος 0y τάς δραχμάς y μέ ἀντιστοιχίαν 1 cm πρός 40 δραχμάς. Χρησιμοποιοῦντες τήν γραφικήν αὐτήν παράστασιν, νά εὕρετε τί θά πληρώση ὁ καταναλωτής διά 30 kwh, 60 kwh, 120 kwh καί νά ἐπαληθεύσετε τά ἐξαγόμενά σας μέ ὑπολογισμούς.

'Επίσης νά εὕρετε γραφικῶς καί νά ἐπαληθεύσετε ὑπολογιστικῶς πόσαι kwh κατανάλωσις ἀντιστοιχοῦν εἰς ἕνα λογαριασμόν 96 δραχμῶν.

§ 4. 'Αντιστρόφως ἀνάλογα ποσά. Γραφική παράστασις τῆς σχέσεώς των.

4.1. <u>'Αντιστρόφως ἀνάλογα ποσά.</u> Ἕνα αὐτοκίνητον ἔχει νά διανύση μίαν ἀπόστασιν 225 km· ἐάν τό κάμη μέ μέσην ταχύτητα 50 km/h (χιλιόμετρα ἀνά ὥραν), θά χρειασθῆ χρόνον

$$t = \frac{225}{50} = 4,5 \text{ h} .$$

Γενικῶς, ἕνα αὐτοκίνητον διά νά διανύση μίαν ἀπόστασιν α km μέ μέσην ταχύτητα υ km/h , θά χρειασθῆ χρόνον

$$t = \frac{\alpha}{\upsilon} \text{ h} .$$

Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι διατηροῦμεν τήν ἀπόστασιν α σταθεράν καί ὅτι μεταβάλλομεν τήν ταχύτητα υ , π.χ. ὅτι

τήν διπλασιάζομεν, τήν τριπλασιάζομεν ,τήν τετραπλασιάζομεν.

Τότε ὁ ἀντίστοιχος χρόνος διανύσεως τῆς ἀποστάσεως α θά ἐλαττωθῆ καί θά γίνη

τό ἥμισυ , τό ἕνα τρίτον , τό ἕνα τέταρτον

τοῦ ἀρχικοῦ χρόνου.

Γενικῶς, ἐάν εἰς τήν ταχύτητα υ_1 ($\neq 0$) ἀντιστοιχῆ χρόνος διανύσεως

$$t_1 = \frac{\alpha}{\upsilon_1} ,$$

τότε εἰς τήν ταχύτητα $\upsilon = \upsilon_1 \cdot k$, ὅπου k τυχών ρητός (θετικός) ἀριθμός, θά ἀντιστοιχῆ χρόνος διανύσεως

$$t = \frac{\alpha}{\upsilon_1 \cdot k} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\alpha}{\upsilon_1} = \frac{1}{k} \cdot t_1 .$$

'Ομοίως , ἐάν ὁ χρόνος διανύσεως t_1 πολλαπλασιασθῆ μέ ἕνα τυχόντα ρητόν (θετικόν) ἀριθμόν λ , τότε ἡ ταχύτης θά γίνη

$$\upsilon = \frac{\alpha}{t_1 \lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\alpha}{t_1} = \frac{1}{\lambda} \cdot \upsilon_1 ,$$

δηλαδή θά πολλαπλασιαθῆ μέ τόν ἀντίστροφον $\frac{1}{\lambda}$ τοῦ ἀριθμοῦ λ. Παρατηροῦμεν λοιπόν τό ἑξῆς: Τά ποσά υ καί t συμμεταβάλλονται κατά τρόπον ὥστε, ἐάν ἡ τιμή τοῦ ἑνός πολλαπλασιασθῆ μέ ἕνα ὁποιονδήποτε ρητόν (θετικόν) ἀριθμόν ρ, τότε ἡ ἀντίστοιχος τιμή τοῦ ἄλλου πολλαπλασιάζεται μέ τόν ἀντίστροφον ἀριθμόν $\frac{1}{\varrho}$. Δύο συμμεταβλητά ποσά, ὅπως τά ἀνωτέρω, λέγονται <u>ἀντιστρόφως ἀνάλογα</u>.

Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνομεν ὅτι τό γινόμενον δύο ὁποιωνδήποτε ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν ποσῶν υ καί t εἶναι σταθερόν, δηλαδή τό ἴδιον δι'ὅλα τά ζεύγη ἀντιστοίχων τιμῶν (υ, t):

$$\upsilon\, t = \alpha = \upsilon_1 t_1 .$$

Ἡ ἰδιότης αὐτή εἶναι χαρακτηριστική διά δύο ἀντιστρόφως ἀνάλογα ποσά x καί y: Δύο ὁποιαιδήποτε ἀντίστοιχοι τιμαί τῶν (x, y) ἔχουν γινόμενον ἕνα ὡρισμένον ἀριθμόν $\alpha \neq 0$:

$$xy = \alpha \Longleftrightarrow y = \frac{\alpha}{x} \Longleftrightarrow x = \frac{\alpha}{y} .$$

Εἶναι χρήσιμον νά παραβάλωμεν τήν ἰδιότητα αὐτήν μέ τήν χαρακτηριστικήν ἰδιότητα δύο κατ'εὐθεῖαν ἀναλόγων ποσῶν x καί y, ἡ ὁποία, ὅπως εἴδαμεν, εἶναι ἡ ἑξῆς: δύο ὁποιαιδήποτε ἀντίστοιχοι τιμαί των (x,y) ἔχουν λόγον $\frac{y}{x}$ σταθερῶς ἴσον μέ ἕνα ὡρισμένον ἀριθμόν $\alpha \neq 0$:

$$\frac{y}{x} = \alpha \Longleftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{\alpha} \Longleftrightarrow y = \alpha x .$$

<u>4.2.</u> Ἰδού τώρα ἕνα δεύτερον παράδειγμα ἀντιστρόφως ἀναλόγων ποσῶν:

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἕνα ὑφαντουργεῖον διαθέτει ἕνα μεγάλον ἀριθμόν ἐργαλειῶν τοῦ αὐτοῦ τύπου καί ὅτι πρόκειται νά ὑφανθῆ μία ὡρισμένη ποσότης β ὑφάσματος. Ἐάν y_1 ἀργαλειοί χρειάζονται διά τήν ὕφανσιν αὐτήν χρόνον t_1, τότε

$$2y_1 \;,\; 3y_1 \;,\; 4y_1 \;,\; \ldots$$

ἀργαλειοί θά χρειασθοῦν ἀντιστοίχους χρόνους

$$\frac{1}{2}t_1 \;,\; \frac{1}{3}t_1 \;,\; \frac{1}{4}t_1, \ldots$$

Ὥστε τά ποσά : ἀριθμός y ἀργαλειῶν καί χρόνος t ὑφάνσεως τῆς αὐτῆς ποσότητος ὑφάσματος εἶναι ποσά ἀντιστρόφως ἀνάλογα. Ἡ σχέσις μεταξύ δύο ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν y καί t δίδεται ἀπό τήν ἰσότητα

$$yt = y_1 t_1 = \alpha \iff y = \frac{\alpha}{t} \iff t = \frac{\alpha}{y} \;.$$

<u>4.3. Γραφική παράστασις τῆς συναρτήσεως $y = \frac{\alpha}{x}$ $(\alpha \neq 0)$.</u>

Ὅπως εἴδαμεν, ἡ σχέσις μεταξύ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν x καί y δύο ἀντιστρόφως ἀναλόγων ποσῶν δίδεται ἀπό τήν συνάρτησιν

$$\sigma : x \xrightarrow{\sigma} \frac{\alpha}{x} = y \quad ,$$

ὅπου α εἶναι ἕνας δεδομένος ρητός ἀριθμός $\neq 0$. Πεδίον ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως σ εἶναι τό σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν $x \neq 0$, καί πεδίον τιμῶν τῆς συναρτήσεως τό ἴδιον σύνολον.

Ἡ γραφική παράστασις αὐτῆς τῆς συναρτήσεως εἰς ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων συντεταγμένων (x,y) δέν εἶναι εὐθεῖα, ὅπως εἰς τάς δύο περιπτώσεις πού ἐμελετήσαμεν εἰς τάς § 1 καί 3, ἀλλά μία καμπύλη γραμμή πού ὀνομάζεται <u>ὑπερβολή</u> καί πού θά μελετήσωμεν εἰς ἀνωτέραν τάξιν. Ἠμποροῦμεν ὅμως νά ἀποκτήσωμεν ἀπό τώρα μίαν ἰδέαν τῆς μορφῆς τῆς καμπύλης, ἐάν δώσωμεν π.χ. εἰς τό α τήν τιμήν 100 καί προσδιορίσωμεν μερικά σημεῖα τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς συναρτήσεως

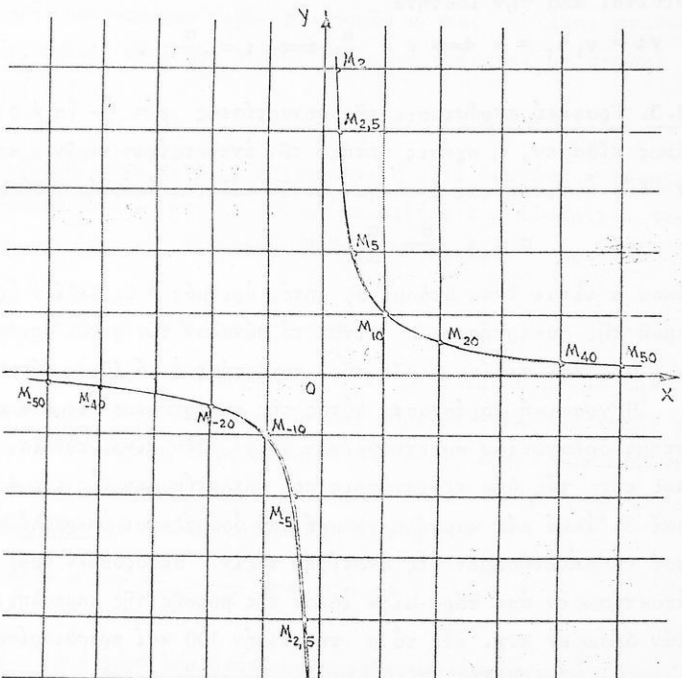
$$y = \frac{100}{x} \quad , \quad (x = \text{ρητός ἀριθμός} \neq 0).$$

Πρός τοῦτο καταρτίζομεν πρῶτα ἕνα πίνακα ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν μεταβλητῶν x καί y.

x	-50	-40	-20	-10	-5	-2,5	-2
y	-2	-2,5	-5	-10	-20	-40	-50

καί

x	2	2,5	5	10	20	40	50
y	50	40	20	10	5	2,5	2



Κατόπιν σημειώνομεν ἐπάνω εἰς χιλιοστομετρικόν χάρτην (λαμβάνοντες ὡς μονάδα μήκους τό 1 mm καί ἐπί τῶν δύο ἀξόνων συντεταγμένων Ox καί Oy) τά σημεῖα

$$M_{-50}\ , M_{-40}\ , M_{-20}\ , M_{-10}\ , M_{-5}\ , M_{-2,5}\ , M_{-2}$$

καί

$$M_{2}\ , M_{2,5}\ , M_{5}\ , M_{10}\ , M_{20}\ , M_{40}\ , M_{50}$$

πού ἔχουν ὡς συντεταγμένας κατά σειράν τά ἀνωτέρω ζεύγη ἀντιστοίχων τιμῶν (x,y) τῆς συναρτήσεως $y = \dfrac{100}{x}$. Τέλος ἑνώνομεν μέ μίαν κατά τό δυνατόν "ὁμαλήν" καμπύλην γραμμήν τά σημεῖα ταῦτα κατά σειράν. Θά προκύψη τό σχεδίασμα τῆς προηγουμένης σελίδος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά δείξετε ὅτι ὁ χρόνος t πού ἀπαιτεῖται διά τήν ἐκτέλεσιν ἑνός ἔργου, π.χ. διά τήν πλακόστρωσιν μιᾶς πλατείας, καί ὁ ἀριθμός x τῶν ἐργατῶν, πού ἐκτελοῦν τό ἔργον, εἶναι ποσά ἀντιστρόφως ἀνάλογα. (Προϋποθέτομεν φυσικά ὅτι ὅλοι οἱ ἐργάται ἔχουν τήν ἰδίαν ἀπόδοσιν ἐργασίας). Ποία σχέσις συνδέει τά συμμεταβλητά αὐτά ποσά t καί x, ἄν εἶναι γνωστόν ὅτι 40 ἐργάται χρειάζονται 15 ἡμέρας διά τήν ἐκτέλεσιν τοῦ ἔργου ;

2) Εἰς τήν ἰσοταχῆ κίνησιν τά διαστήματα s m τά ὁποῖα διανύει τό κινητόν εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα πρός τούς ἀντιστοίχους χρόνους διανύσεως t sec. Ὁ λόγος s : t εἶναι ἡ ταχύτης υ m/sec (μέτρα ἀνά δευτερόλεπτον) τοῦ κινητοῦ. Μεταξύ τῶν ποσῶν s , υ , t ἰσχύει λοιπόν ἡ σχέσις

$$\frac{s}{t} = \upsilon \iff s = \upsilon t .$$

Νά θεωρήσετε τώρα διαδοχικῶς ἕνα ἕκαστον ἀπό τά τρία ποσά s, t, υ ὡς σταθερόν καί νά εὕρετε τό εἶδος τῆς ἀλληλεξαρτήσεως τῶν ὑπολοίπων δύο συμμεταβλητῶν ποσῶν.

§ 5. Μέθοδοι τῶν τριῶν. Ποσοστά.

5.1. Ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν. Πρόβλημα 1ον. 25 kg ζάχαρη κοστίζουν 300 δρχ · πόσον κοστίζουν 70 kg ἀπό τήν ἰδίαν ζάχαρη ;

Ἄς εἶναι x δρχ. τό ζητούμενον κόστος τῶν 70 kg. Ἐπειδή ἡ ποσότης ἑνός ἐμπορεύματος καί ἡ ἀντίστοιχος ἀξία του εἶναι ποσά κατ'εὐθεῖαν ἀνάλογα, θά ἔχωμεν τήν ἀναλογίαν

$$\frac{25}{70} = \frac{300}{x}.$$

Ἡ ἀναλογία αὐτή εἶναι ἰσοδύναμος (βλ. ἐδ. § 2.3) μέ τήν ἰσότητα $25x = 70 \cdot 300$,

ἀπό τήν ὁποίαν συμπεραίνομεν ὅτι

$$x = \frac{70 \cdot 300}{25} = \frac{70 \cdot 12}{1} = 840 \text{ δρχ}.$$

Εἰς τήν ἀνωτέρω ἀναλογίαν ἐτοποθετήσαμεν ὡς ἀριθμητάς τάς πρώτας ἀντιστοίχους τιμάς

25 kg καί 300 δρχ

τῶν δύο κατ'εὐθεῖαν ἀναλόγων ποσῶν τοῦ προβλήματος καί ὡς ἀντιστοίχους παρονομαστάς τάς δευτέρας ἀντιστοίχους τιμάς

70 kg καί x δρχ

τῶν ποσῶν αὐτῶν.

Πρόβλημα 2ον. Ἕνας γεωργός ἐργαζόμενος 6 ὥρας ἡμερησίως (6 h/ἡμ.) σκάπτει ἕνα ἀγρόν εἰς 5 ἡμέρας. Ἐπί πόσας ὥρας τήν ἡμέρα θά πρέπει νά ἐργάζεται, ἐάν θέλῃ νά σκάφῃ τόν ἴδιον ἀγρόν εἰς 3 ἡμέρας;

Ἄς εἶναι x h/ἡμ. αἱ ζητούμεναι ὧραι σκαφῆς ἡμερησίως. Ἔχομεν τήν ἀντιστοιχίαν:

πρῶται ἀντίστοιχοι τιμαί :	6 h/ἡμ.	5 ἡμέραι
δεύτεραι " " :	x h/ἡμ.	3 ἡμέραι.

Ἐπειδή τά δύο συμμεταβλητά ποσά : 1ον αἱ ὧραι σκαφῆς ἡμερησίως καί 2ον αἱ ἡμέραι πού ἀπαιτοῦνται διά τήν σκαφήν τοῦ ἀγροῦ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, τό γινόμενον τῶν πρώτων ἀντιστοίχων τιμῶν θά εἶναι ἴσον μέ τό γινόμενον τῶν δευτέρων ἀντιστοίχων τιμῶν (βλ. ἐδ. § 4.1) :

$$6 \cdot 5 = 3x.$$

Ἀπό τήν ἐξίσωσιν αὐτήν διά τό ζητούμενον x εὑρίσκομεν:

$$x = \frac{6\cdot 5}{3} = 2\cdot 5 = 10 \text{ h/ἡμ.}$$

Τά ἀνωτέρω προβλήματα καί τά ὅμοιά των ἐπεκράτησε νά λέγωνται προβλήματα τῆς <u>ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.</u>

<u>5.2.</u> <u>Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν.</u> <u>Πρόβλημα 1ον.</u> 6 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 h/ἡμ. (ὥρας ἀνά ἡμέραν) σκάπτουν ἕνα ἀγρόν εἰς 7 ἡμέρας. Ἐάν 4 ἐργάται ἐργασθοῦν ἐπί 7 ὥρας ἡμερησίως, εἰς πόσας ἡμέρας θά σκάφουν τόν ἴδιον ἀγρόν ; (Προϋποτίθεται ὅτι ἡ ἀπόδοσις τῆς ἐργασίας τῶν ἐργατῶν εἶναι ἡ αὐτή δι'ὅλους).

Ἄς εἶναι x αἱ ζητούμεναι ἡμέραι πού ἀπαιτοῦνται διά τήν σκαφήν τοῦ ἀγροῦ. Ἔχομεν:

1αι ἀντίστοιχοι τιμαί:	6 ἐργ.	8 h/ἡμ.	7 ἡμέραι
2αι " " :	4 ἐργ.	7 h/ἡμ.	x ἡμέραι.

Τό πρόβλημα αὐτό ἀναλύεται εἰς δύο προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν ὡς ἑξῆς:

Κατά πρῶτον κρατοῦμεν ἀμεταβλήτους τάς 8 ὥρας ἡμερησίας ἐργασίας (8 h/ἡμ.) καί ἐξετάζομεν τήν ἀλληλεξάρτησιν τῶν δύο ἄλλων συμμεταβλητῶν ποσῶν : τοῦ ἀριθμοῦ ἐργατῶν ἀφ'ἑνός καί τῆς χρονικῆς διαρκείας τῆς σκαφῆς ἀφ'ἑτέρου. Ἔχομεν τότε, ἄν παραστήσωμεν μέ y ἡμέρας τό χρονικόν διάστημα πού χρειάζονται οἱ 4 ἐργάται διά νά σκάφουν τόν ἀγρόν :

1αι ἀντίστοιχοι τιμαί:	6 ἐργ.	7 ἡμέραι
2αι " " :	4 ἐργ.	y ἡμέραι.

Ἐπειδή τά δύο αὐτά συμμεταβλητά ποσά εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, θά ἔχωμεν διά τό y τήν ἐξίσωσιν

$$6\cdot 7 = 4y$$

Ἀπό αὐτήν εὑρίσκομεν:

$$y = \frac{6 \cdot 7}{4} = 10\frac{1}{2} \text{ ἡμέραι.}$$

Ὥστε 4 ἐργάται ἐργαζόμεν οι 8 h/ἡμ. χρειάζονται $\frac{6 \cdot 7}{4}$ ἡμέρας διά τήν σκαφήν τοῦ ἀγροῦ.

Κρατοῦμεν τώρα ἀμετάβλητον τόν ἀριθμόν 4 τῶν ἐργατῶν καί θεωροῦμεν τήν ἀλληλεξάρτησιν τῶν δύο ἄλλων συμμεταβλητῶν ποσῶν: τοῦ ἀριθμοῦ ὡρῶν ἡμερησίας ἐργασίας ἀφ'ἑνός καί τῆς χρονικῆς διαρκείας τῆς σκαφῆς ἀφ'ἑτέρου. Θά ἔχωμεν τήν ἀντιστοιχίαν:

1αι ἀντίστοιχοι τιμαί : 8 h/ἡμ. $\frac{6 \cdot 7}{4}$ ἡμέραι

2αι " " 7 h/ἡμ. x ἡμέραι.

Ἐπειδή τά δύο αὐτά συμμεταβλητά ποσά εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, θά ἔχωμεν διά τό ζητούμενον x τήν ἐξίσωσιν:

$$8 \cdot \frac{6 \cdot 7}{4} = 7x .$$

Τήν ἐπιλύομεν καί εὑρίσκομεν:

$$x = \frac{8 \cdot 6 \cdot 7}{4 \cdot 7} = 2 \cdot 6 = 12 \text{ ἡμέραι.}$$

<u>Πρόβλημα 2ον</u>. Ἕνα συνεργεῖον ἐργαζόμενον ἐπί 6 h/ἡμ. χρειάζεται 5 ἡμέρας διά νά πλακοστρώση μίαν πλατεῖαν 400 m^2. Ἐπί πόσας ὥρας ἡμερησίως πρέπει νά ἐργάζεται τό ἴδιον συνεργεῖον διά νά πλακοστρώση εἰς διάστημα 3 ἡμερῶν πλατεῖαν 300 m^2 ; Καί αὐτό τό πρόβλημα ἀναλύεται εἰς δύο προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν ὡς ἑξῆς:

Κρατοῦμεν πρῶτα ἀμετάβλητον τό ἐμβαδόν τῶν 400 m^2, πού ἐπρόκειτο νά πλακοστρωθῆ, καί ἐξετάζομεν τήν ἀλληλεξάρτησιν τῶν δύο ἄλλων συμμεταβλητῶν ποσῶν: 1ον τοῦ ἀριθμοῦ ὡρῶν ἡμερησίας ἐργασίας καί 2ον τῆς χρονικῆς διαρκείας τῆς πλακοστρώσεως. Ἄς εἶναι y h/ἡμ. αἱ ἀπαιτούμεναι τότε ὧραι ἡμερησίας ἐργασίας· θά ἔχωμεν τήν ἀντιστοιχίαν:

1αι ἀντίστοιχοι τιμαί : 6 h/ἡμ. 5 ἡμέραι
2αι " " y h/ἡμ. 3 ἡμέραι.

Τά δύο συμμεταβλητά ποσά εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ἄρα θά ἰσχύῃ διά τόν ἄγνωστον y ἡ ἐξίσωσις:

$$6 \cdot 5 = y \cdot 3 .$$

Τήν ἐπιλύομεν καί εὑρίσκομεν

$$y = \frac{6 \cdot 5}{3} = 10 \text{ h/ἡμ.}$$

Ὥστε τό συνεργεῖον, διά νά πλακοστρώσῃ εἰς 3 ἡμέρας τήν πλατεῖαν τῶν 400 m^2, πρέπει νά ἐργασθῇ 10 ὥρας ἡμερησίως (10 h/ἡμ.).

Κρατοῦμεν τώρα ἀμετάβλητον τήν χρονικήν διάρκειαν τῶν 3 ἡμερῶν διά τήν πλακόστρωσιν καί ἐξετάζομεν τήν ἀλληλεξάρτησιν τῶν δύο ἄλλων συμμεταβλητῶν ποσῶν:

1ον τοῦ ἀριθμοῦ ὡρῶν ἡμερησίας ἐργασίας καί 2ον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς πλατείας. Θά ἔχωμεν τώρα τήν ἀντιστοιχίαν:

1αι ἀντίστοιχοι τιμαί : 10 h/ἡμ. 400 m^2
2αι " " : x h/ἡμ. 300 m^2.

Ἐπειδή τά δύο συμμεταβλητά ποσά εἶναι κατ'εὐθεῖαν ἀνάλογα, θά λάβωμεν διά τό ζητούμενον x τήν ἐξίσωσιν:

$$\frac{10}{x} = \frac{400}{300} \Longleftrightarrow 4x = 30$$

Ἀπό αὐτήν προκύπτει:

$$x = \frac{30}{4} = 7\frac{1}{2} \text{ h/ἡμ.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Διά 5 m ὕφασμα ἐπληρώσαμεν 93,5 δρχ. Πόσον θά πληρώσωμεν διά 17 m ἀπό τό ἴδιον ὕφασμα;

2) 1557 kg σιδηρομετάλλευμα ἀποδίδουν 900 kg σίδηρον. Μέ πόσα kg μετάλλευμα θά λάβωμεν 1 τόννον (1000 kg) σίδηρον;

3) Ἕνα ζαχαρουργεῖον ἐχρησιμοποίησεν 436 t (τόννους) ζαχαρότευτλα διά νά παρασκευάσῃ 32294 kg ζάχαρη.

Ποίαν ποσότητα ζαχαροτεύτλων θά χρειασθῆ τό ζαχαρουργεῖον διά νά παρασκευάση 10 000 kg ζάχαρη ;

4) Ἕνα πλοῖον εἶχε πλήρωμα 18 ἀνδρῶν καί τροφάς διά 20 ἡμέρας ἀκόμη, ὅταν παρέλαβε 6 ναυαγούς. Διά πόσας ἡμέρας θά ἐπαρκέσουν τώρα τά τρόφιμα, ἐάν τό σιτηρέσιον διά τό πλήρωμα καί τούς ναυαγούς εἶναι τό ἴδιον μέ τό σιτηρέσιον πού ἐδίδετο εἰς τό πλήρωμα πρό τῆς παραλαβῆς τῶν ναυαγῶν ;

5) Ἕνα συνεργεῖον ἐχρειάσθη 25 ἡμέρας διά νά ἀσφαλτοστρώση ἕνα δρόμον 3 600 m μέ πλάτος 9 m. Ἐπί πόσας ἡμέρας πρέπει νά ἐργασθῆ τό ἴδιον συνεργεῖον διά νά ἀσφαλτοστρώση ὑπό τούς ἰδίους ὅρους ἕνα δρόμον 5 000 m μέ πλάτος 6 m ;

6) Ἀπό ἕνα βαρέλι γεμάτο κρασί ἐγεμίσαμεν 180 φιάλας τῶν 0,35 λίτρων (l) (βλ. Βιβλ. Ι, σ. 32-33 Α). Πόσας φιάλας τῶν 0,60 l θά ἐγεμίζαμεν ἀπό ἕνα βαρέλι τοῦ ἰδίου περιεχομένου μέ τό ἀνωτέρω ;

7) Ἐπληρώσαμεν 12 000 δρχ διά νά μεταφέρωμεν 30 τόννους (t) ἐμπόρευμα εἰς ἀπόστασιν 85 km. Πόσον θά πληρώσωμεν διά νά μεταφέρωμεν, ὑπό τούς ἰδίους ὅρους, 17 t ἐμπόρευμα εἰς ἀπόστασιν 97 km ;

8) Μία πλατεῖα ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιον μέ μῆκος 225 m καί πλάτος 150 m. Διά νά πλακοστρωθῆ εἰργάσθησαν 325 ἐργάται ἐπί 5 ὥρας ἡμερησίως (5 h/ἡμ.). Πόσοι ἐργάται ἐργαζόμενοι μέ τήν ἰδίαν ἀποδοτικότητα 6 h/ἡμ. θά πλακοστρώσουν μίαν ἄλλην ὀρθογώνιον πλατεῖαν μήκους 190 m καί πλάτους 120 m ;

9) Εἰς ἕνα φρούριον ἔχουν ἀποκλεισθῆ 300 στρατιῶται καί ἔχουν τροφάς διά 60 ἡμέρας μέ σιτηρέσιον 840 gr ἡμερησίως διά κάθε στρατιώτην. Μετά παρέλευσιν 15 ἡμερῶν ἡ φρουρά ἐνισχύθη μέ 50 ἀκόμη ἄνδρας χωρίς ὅμως τρόφιμα. Εἰς πόσα gr πρέπει νά περιορισθῆ τό ἡμερήσιον σιτηρέσιον διά νά ἐπαρκέσουν μέχρι τέλους τῶν 60 ἡμερῶν αἱ ὑπάρχουσαι τροφαί ;

5.3. Ποσοστόν ἐπί τοῖς ἑκατόν. Πρόβλημα 1ον. Ὁ εἰσπράκτωρ τῶν συνδρομῶν ἑνός ἀθλητικοῦ συλλόγου λαμβάνει ὡς ἀμοιβήν διά τήν ἐργασίαν του 25 δρχ διά κάθε εἴσπραξιν 100 δραχμῶν. Ποία θά εἶναι ἡ ἀμοιβή του, ἐάν εἰσπράξη συνολικῶς 2 400 δρχ ;

Εἶναι φανερόν ὅτι ἡ ἀμοιβή τοῦ εἰσπράκτορος εἶναι κατ'εὐθεῖαν ἀνάλογος πρός τήν εἴσπραξιν τήν ὁποίαν κάμνει. Ἐπομένως, ἄν παραστήσωμεν μέ x δρχ τό ζητούμενον, θά ἔχωμεν τήν ἀναλογίαν

$$\frac{x}{2400} = \frac{25}{100}$$

Ἀπό αὐτήν εὑρίσκομεν:

$$100x = 25 \cdot 2400$$

καί

$$x = \frac{25}{100} \cdot 2400 = 600 \text{ δρχ.}$$

Ὥστε ἡ ἀμοιβή τοῦ εἰσπράκτορος ἰσοῦται μέ τά $\frac{25}{100}$ τῆς συνολικῆς εἰσπράξεώς του. Τό κλάσμα $\frac{25}{100}$ λέγεται <u>ποσοστόν ἐπί τοῖς ἑκατόν</u> καί συμβολίζεται συνήθως μέ τήν γραφήν 25 %. Παρατηροῦμεν ὅτι

$$\frac{600}{2400} = \frac{25}{100}.$$

<u>Πρόβλημα 2ον</u>. Ἕνας πλανόδιος βιβλιοπώλης ἔλαβε ὡς ποσοστά 72 δρχ ἀπό πώλησιν βιβλίων ἀξίας 480 δρχ. Πόσον ἐπί τοῖς ἑκατόν ἦτο ἡ ἀμοιβή του;

Σύμφωνα μέ ὅσα παρετηρήσαμεν προηγουμένως, τό ζητούμενον κλάσμα $\frac{x}{100}$ ἰσοῦται μέ $\frac{72}{480}$. Ἀρκεῖ λοιπόν νά μετατρέψωμεν τό $\frac{72}{480}$ εἰς δεκαδικόν κλάσμα μέ παρονομαστήν τό 100 διά νά ἔχωμεν τό ζητούμενον. Ἔτσι λαμβάνομεν:

$$\frac{72}{480} = \frac{100 \cdot 72/480}{100} = \frac{7200:480}{100} = \frac{15}{100}.$$

Ὥστε τό ζητούμενον ποσοστόν εἶναι 15 %.

5.4. <u>Ποσοστόν ἐπί τοῖς χιλίοις</u>. Μέ ὅμοιον τρόπον λύομεν καί τό ἀκόλουθον πρόβλημα:

<u>Πρόβλημα 3ον</u>. Ἕνας ἔμπορος μετέφερεν ἀπό τό τελωνεῖον εἰς τήν ἀποθήκην του ἕνα ἐμπόρευμα 18,5 t (τόννων). Κατά τήν μεταφοράν τό ἐμπόρευμα ἔπαθε φύραν 74 kg. Νά ὑπολογι-

σθῆ τό ποσοστόν τῆς φύρας ἐπί τοῖς χιλίοις (‰).

Τό ζητούμενον κλάσμα $\frac{x}{1000}$ ἰσοῦται μέ τόν λόγον

$$\frac{74 \text{ kg}}{18,5 \text{ t}} = \frac{74}{18500} .$$

Διά νά τό εὕρωμεν, ἀρκεῖ λοιπόν νά μετατρέψωμεν τό $\frac{74}{18500}$ εἰς κλάσμα μέ παρονομαστήν τό 1 000. Ἔτσι λαμβάνομεν:

$$\frac{74}{18 \cdot 500} = \frac{1000 \cdot 74/18\ 500}{1000} = \frac{74\ 000 : 18\ 500}{1000} = \frac{4}{1000} .$$

Ὥστε τό ζητούμενον ποσοστόν ἐπί τοῖς χιλίοις εἶναι 4 ‰

Πρόβλημα 4ον. Ἕνας ἔμπορος ἐπώλησε ἕνα ἐμπόρευμα ἀντί 3500 δρχ. Τό ποσόν αὐτό ἀποτελεῖται ἀπό τήν τιμήν ἀγορᾶς τοῦ ἐμπορεύματος καί ἀπό ἕνα κέρδος 25 % ἐπί τῆς τιμῆς ἀγορᾶς. Νά εὑρεθῆ ἡ τιμή ἀγορᾶς.

Ἄν παραστήσωμεν μέ x δρχ τήν τιμήν ἀγορᾶς, θά ἔχωμεν διά τόν ἄγνωστον x τήν ἐξίσωσιν:

$$x + \frac{25}{100} x = 3\ 500 , \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{125}{100} x = 3\ 500 .$$

Τήν ἐπιλύομεν καί εὑρίσκομεν:

$$x = \frac{100}{125} \cdot 3\ 500 = \frac{4}{5} \cdot 3\ 500 = 2\ 800 \text{ δρχ.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ἕνας παλαιοπώλης ἠγόρασεν ἕνα ἔπιπλον μέ 360 δρχ καί τό ἐπώλησε μέ κέρδος 35 % . Πόσον τό ἐπώλησεν ;

2) Ἕνα ἐμπόρευμα ἠγοράσθη εἰς τόν τόπον τῆς παραγωγῆς του μέ 15 800 δρχ. Ἐστοίχισεν ὅμως ἐπί πλέον διά τήν μεταφοράν του 12 % καί ἔπαθε κατά τήν μεταφοράν 0,5 % φθοράν. Τέλος ἐπωλήθη μέ κέρδος 18 % ἐπί τοῦ συνολικοῦ κόστους (τιμή ἀγορᾶς+ἔξοδα μεταφορᾶς). Νά εὕρετε πόσον ἐστοίχισεν ἡ μεταφορά, πόσον ἦτο τό κέρδος καί τί ποσόν δραχμῶν ἀπό τήν τιμήν ἀγορᾶς ἀντιπροσωπεύει ἡ φθορά.

3) Εἰς τόν ἀέρα πού ἀναπνέομεν περιέχεται περίπου 78 % ἄζωτον , 21 % ὀξυγόνον καί 1 % διοξείδιον τοῦ ἄνθρακος. Μία αἴθουσα κινηματογράφου περιέχει 10 500 m³ ἀέρα· πόσα κυβικά μέτρα (m³) ὀξυγόνον , πόσα ἄζωτον καί πόσα διοξείδιον τοῦ

άνθρακος περιέχει ή αΐθουσα ;

4) Ένας παλαιοπώλης ήγόρασε μέ 500 δρχ ένα έπιπλον καί τό μετεπώλησε μέ κέρδος 18 %. Μέ τά χρήματα πού εισέπραξε ήγόρασε ένα άλλο έπιπλον καί τό μετεπώλησε μέ ζημίαν 18 %. Νά εύρετε, έάν έκέρδισεν ή έζημίωσεν άπό τάς δύο άγοραπωλησίας καί πόσον ;

5) Ένα έμπόρευμα ήγοράσθη άντί 2993 δρχ μέ έκπτωσιν 18 % έπί τοῦ κανονικοῦ τιμολογίου. Ποία ήτο ή άξία του είς τό κανονικόν τιμολόγιον, δηλ. χωρίς τήν έκπτωσιν ;

6) Ένας έμπορος έπώλησεν έμπόρευμα άντί 2000 δρχ μέ ζημίαν 20 % έπί τῆς τιμῆς άγορᾶς του. Πόσον εἶχεν άγοράσει τό έμπόρευμα ;

7) Άπό τό βάρος μιᾶς ποσότητος θαλασσίου ὕδατος 2,5 % περίπου άναλογεῖ είς τό περιεχόμενον μαγειρικόν άλας. Πόσα λίτρα (l) θαλάσσιον ὕδωρ πρέπει νά έξατμισθοῦν είς μίαν άλυκήν διά νά παραχθοῦν 400 kg μαγειρικόν άλας ; Όπως εἶναι γνωστόν, ένα λίτρον (1 l) θαλάσσιον ὕδωρ έχει βάρος 1,026 kg.

§ 6. Προβλήματα τόκου καί ύφαιρέσεως.

<u>6.1.</u> Όπως εἶναι γνωστόν, ό δανειζόμενος χρήματα ύποχρεοῦται, ὕστερα άπό ένα συμφωνημένον χρονικόν διάστημα, νά έπιστρέφη είς τόν δανειστήν του έκτός άπό τό χρηματικόν ποσόν πού έδανείσθη (τό κεφάλαιον) καί ένα έπί πλέον χρηματικόν ποσόν (τόν τόκον). Ό τόκος τ έξαρτᾶται άπό τό κεφάλαιον κ , άπό τήν χρονικήν διάρκειαν t τοῦ δανεισμοῦ καί άπό τό έπιτόκιον ε % , δηλαδή ένα συμφωνημένον ποσόν έτησίου τόκου ε διά κάθε 100 χρηματικάς μονάδας δάνειον.

Εὔκολα πιστοποιοῦμεν τά έξῆς:

1ον. Άπό τά τέσσαρα ποσά κ , t, ε , τ ό τόκος τ εἶναι κατ'εὐθεῖαν άνάλογος πρός τό καθένα άπό τά τρία κ, t, ε ὅταν τά ύπολειπόμενα δύο μένουν σταθερά.

2ον. Τά ποσά κ, t, ε λαμβανόμενα άνά δύο εἶναι μεταξύ των άντιστρόφως άνάλογα, ὅταν τό ύπολειπόμενον τρίτον καί ό τόκος τ μένουν σταθερά.

6.2. Εὕρεσις τοῦ τόκου. Πρόβλημα. Ἕνα κεφάλαιον κ = 8000 δρχ ἐτοκίσθη ἐπί t = 3 ἔτη μέ ἐπιτόκιον ε = 9 . Τί τόκον θά ἀποδώση ;

Ἔστω x δρχ ὁ ζητούμενος τόκος. Διά νά τόν εὕρωμεν, ἐφαρμόζομεν τήν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν πού ἐξηγήσαμεν εἰς τό ἐδ. § 5.2. Ἔχομεν:

	κ	t	τ
1αι ἀντίστοιχοι τιμαί :	100 δρχ	1 ἔτος	9 δρχ
2αι " "	8000 δρχ	3 ἔτη	x δρχ.

Κρατοῦμεν πρῶτα ἀμετάβλητον τό κεφάλαιον τῶν 100 δρχ καί ἔστω y δρχ ὁ τόκος τῶν 100 δρχ διά 3 ἔτη. Ἐπειδή τά δύο συμμεταβλητά ποσά t καί τ εἶναι κατ'εὐθεῖαν ἀνάλογα, θά ἰσχύη ἡ ἀναλογία :

$$\frac{1}{3} = \frac{9}{y} .$$

Ἀπό αὐτήν λαμβάνομεν:

$$1\cdot y = 9\cdot 3 \quad , \quad \text{ἤτοι} \quad y = 9\cdot 3 = 27 \text{ δρχ.}$$

Ὥστε ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν διά 3 ἔτη μέ ἐπιτόκιον 9 % εἶναι 9·3 δρχ.

Κρατοῦμεν τώρα ἀμετάβλητον τόν χρόνον τοκισμοῦ 3 ἔτη καί ἐξετάζομεν τήν ἀλληλεξάρτησιν τῶν δύο ἄλλων συμμεταβλητῶν ποσῶν : τοῦ κεφαλαίου καί τοῦ τόκου.

Ἔχομεν:

	κ	τ
1αι ἀντίστοιχοι τιμαί :	100 δρχ	9·3 δρχ
2αι ἀντίστοιχοι τιμαί :	8000 δρχ	x δρχ.

Ἐπειδή τά συμμεταβλητά ποσά κ καί τ εἶναι κατ'εὐθεῖαν ἀνάλογα, θά ἰσχύη ἡ ἀναλογία :

$$\frac{100}{8000} = \frac{9\cdot 3}{x} .$$

᾿Από αὐτήν προκύπτει ἡ ἀκόλουθος ἐξίσωσις διά τόν ζητούμενον τόκον x :

$$100 \cdot x = 8000 \cdot 9 \cdot 3 .$$

Τήν ἐπιλύομεν καί εὑρίσκομεν:

$$x = \frac{8000 \cdot 9 \cdot 3}{100} = 80 \cdot 9 \cdot 3 = 2160 \text{ δρχ.}$$

Γενικῶς ἔχομεν τόν ἀκόλουθον τύπον, τόν ὁποῖον θά ἐφαρμόζωμεν εἰς τά προβλήματα τόκου :

(I) $$\tau = \frac{\kappa \cdot \varepsilon \cdot t}{100} \quad , (t \text{ εἰς ἔτη}).$$

Κατά τήν ἐφαρμογήν ὅμως πρέπει νά προσέχωμεν εἰς τό ἑξῆς: Ὅταν ὁ χρόνος τοκισμοῦ δίδεται εἰς μῆνας (μ), θά ἀντικαθιστῶμεν τήν μεταβλητήν t ἔτη μέ τό κλάσμα $\frac{\mu}{12}$ (διότι τό ἔτος ἔχει 12 μῆνας), καί ὅταν χρόνος τοκισμοῦ δίδεται εἰς ἡμέρας (η) , τότε θά ἀντικαθιστῶμεν τό t μέ τό κλάσμα $\frac{\eta}{360}$ (διότι τό λεγόμενον ἐμπορικόν ἔτος ἔχει 360 ἡμέρας). Ἔτσι λαμβάνομεν εἰδικώτερα τούς ἀκολούθους δύο τύπους:

(II) $$\tau = \frac{\kappa \cdot \varepsilon \cdot \mu}{1200} \quad , (\text{χρόνος τοκισμοῦ εἰς μῆνας})$$

(III) $$\tau = \frac{\kappa \cdot \varepsilon \cdot \eta}{36000} \quad , (\text{χρόνος τοκισμοῦ εἰς ἡμέρας}).$$

6.3. Εὕρεσις τοῦ κεφαλαίου. Πρόβλημα. Ποῖον κεφάλαιον ἐτοκίσθη ἐπί 8 μῆνας πρός 7,5 % καί ἔδωσε τόκον 255 δρχ ; Εἰς τόν τύπον (II) γνωρίζομεν τά ποσά τ = 255 δρχ , ε = 7,5 καί μ = 8 , καί μένει ἄγνωστον τό ποσόν κ. Ἔχομεν λοιπόν διά τό κ τήν πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν

$$255 = \frac{7,5 \cdot 8}{1200} \cdot \kappa$$

τήν ὁποίαν ἐπιλύομεν καί εὑρίσκομεν:

$$\kappa = \frac{1200}{7,5 \cdot 8} \cdot 255 = \frac{150}{7,5} \cdot 255 = 20 \cdot 255 = 5100 \text{ δρχ.}$$

6.4. Εὕρεσις τοῦ χρόνου. Πρόβλημα. ᾿Επί πόσον χρόνον εἰς ἔτη ἐτοκίσθη κεφάλαιον 2500 δρχ πρός 8 % καί ἔφερε τόκον 300 δρχ ;

Εἰς τόν τύπον (I) γνωρίζομεν τά ποσά $\tau = 300$ δρχ , $\varepsilon = 8$ καί $\kappa = 2500$ δρχ καί μένει ἄγνωστον τό ποσόν t. Ἔχομεν λοιπόν διά τό t τήν πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν

$$300 = \frac{2500 \cdot 8}{100} \cdot t \, .$$

Τήν ἐπιλύομεν καί εὑρίσκομεν:

$$t = \frac{100}{2500 \cdot 8} \cdot 300 = \frac{300}{25 \cdot 8} = \frac{300}{200} = \frac{3}{2} \text{ ἔτη.}$$

Ὁ ζητούμενος χρόνος ἰσοῦται λοιπόν μέ $1\frac{1}{2}$ ἔτος = 18 μῆνες.

Παρατήρησις. Ἐάν ὁ χρόνος τοκισμοῦ ἐζητεῖτο εἰς μῆνας θά ἐχρησιμοποιοῦμεν τόν τύπον (II) μέ $\tau = 300$, $\varepsilon = 8$ καί $\kappa = 2500$, θά εὑρίσκαμεν δέ φυσικά τήν ἰδίαν χρονικήν διάρκειαν τοκισμοῦ:

$$\text{χρόνος τοκισμοῦ εἰς μῆνας} = \frac{1200}{2500 \cdot 8} \cdot 300 = \frac{12 \cdot 3}{2} = 18 \text{ μῆνες.}$$

6.5. Εὕρεσις τοῦ ἐπιτοκίου. Μέ ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθησαν ἐπί 15 μῆνας καί 20 ἡμέρας 5 000 δραχμαί καί ἔφεραν τόκον 705 δρχ ;

Ὁ χρόνος τοκισμοῦ εἰς ἡμέρας εἶναι:

$$360 + 90 + 20 = 470 \text{ ἡμέραι.}$$

Ἐπομένως εἰς τόν τύπον (III) εἶναι γνωστά τά ποσά $\tau = 705$ δρχ , $\kappa = 5\,000$ δρχ , $\eta = 470$ ἡμέραι καί μένει ὡς ἄγνωστος τό ζητούμενον ποσόν ε. Ἔχομεν λοιπόν διά τό ε τήν πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν

$$705 = \frac{5\,000 \cdot 470}{36\,000} \varepsilon \, .$$

Τήν ἐπιλύομεν καί εὑρίσκομεν:

$$\varepsilon = \frac{36\,000}{5000 \cdot 470} 705 = \frac{36 \cdot 705}{5 \cdot 470} = \frac{36 \cdot 141}{470} = 10{,}8 \ \% \, .$$

6.6. Ὑφαίρεσις. Ἡ ἀγοραπωλησία ἑνός ἐμπορεύματος ἠμπορεῖ νά γίνη κατά δύο τρόπους:

1ον <u>τοῖς μετρητοῖς</u> , δηλαδή μέ ἄμεσον πληρωμήν τῆς ἀξίας τοῦ ἐμπορεύματος,

ἤ 2ον <u>ἐπί πιστώσει</u> , δηλαδή μέ προθεσμίαν διά τήν πληρωμήν εἴτε ὁλοκλήρου τῆς ἀξίας τοῦ ἐμπορεύματος εἴτε ἑνός μέρους αὐτῆς τό ὁποῖον δέν ἐπληρώθη τοῖς μετρητοῖς.

Ἡ προθεσμία τῆς ἐξοφλήσεως δέν ὑπερβαίνει συνήθως τούς ὀλίγους μῆνας. Ἀντιστοίχως οἱ ἔμποροι χρησιμοποιοῦν δύο διάφορα τιμολόγια: <u>τιμολόγια τοῖς μετρητοῖς</u>, πού εἶναι καί τά εὐθηνότερα, καί <u>τιμολόγια ἐπί πιστώσει</u>, πού εἶναι ἀκριβότερα, διότι ὁ ἔμπορος συνυπολογίζει καί ἕνα τόκον τῆς ἀξίας τοῦ ἐμπορεύματος διά τόν χρόνον τῆς προθεσμίας τῆς πληρωμῆς.

Ὁ ἀγοραστής, πού ἀγοράζει μέ πίστωσιν, ὑπογράφει ἕνα "<u>γραμμάτιον</u>", μέ τό ὁποῖον ἀναλαμβάνει τήν ὑποχρέωσιν νά πληρώση εἰς τόν <u>πιστωτήν</u> του κατά τήν συμφωνημένην ἡμερομηνίαν (<u>λῆξιν</u> τοῦ γραμματίου) τό ποσόν πού ὑπολείπεται πρός πληρωμήν ἀπό τήν ἀξίαν τοῦ ἐμπορεύματος, μαζί μέ τόν τόκον του. Τό συνολικόν αὐτό ποσόν ἀναγράφεται εἰς τό γραμμάτιον καί λέγεται <u>ὀνομαστική ἀξία</u> του. Τό γραμμάτιον παραδίδεται εἰς τόν πιστωτήν.

Συχνά, ἀντί τοῦ γραμματίου, πού τό "ἐκδίδει" ὁ ὀφειλέτης καί τό παραδίδει εἰς τόν πιστωτήν, γίνεται χρῆσις μιᾶς "<u>συναλλαγματικῆς</u>", πού τήν "ἐκδίδει" ὁ πιστωτής καί τήν "ἀποδέχεται" ὁ ὀφειλέτης, μέ τήν ὑπογραφήν του εἰς τό κάτω μέρος τῆς συναλλαγματικῆς ὅπου ἀναγράφεται ἡ λέξις "<u>δεκτή</u>".

Ἡ συναλλαγματική ὅπως καί τό γραμμάτιον μένει εἰς χεῖρας τοῦ πιστωτοῦ.

Ἐάν ὁ κάτοχος ("<u>κομιστής</u>") τοῦ γραμματίου ἤ τῆς συναλλαγματικῆς ἔχη ἀνάγκην ἀπό χρήματα πρό τῆς λήξεώς των , τότε ἠμπορεῖ νά "προεξοφλήση", δηλαδή νά ἐξαργυρώση, τό γραμμάτιον ἤ τήν συναλλαγματικήν πρίν ἀπό τήν λῆξιν των. Αὐτό γίνεται ὡς ἑξῆς:

Ὁ κομιστής τοῦ γραμματίου ἤ τῆς συναλλαγματικῆς τά "ὀπισθογράφει" καί ἔτσι τά μεταβιβάζει εἴτε εἰς μίαν Τράπεζαν εἴτε εἰς ἕνα τρίτον πρόσωπον , εἰσπράττει δέ τήν ὀνομαστικήν ἀξίαν των μειωμένην κατά τόν τόκον της δι'ὅσας ἡμέρας μεσολαβοῦν μεταξύ τῆς προεξοφλήσεως καί τῆς λήξεως, βάσει ἑνός συμφωνημένου ἐπιτοκίου. Ὁ τόκος αὐτός, τόν ὁποῖον κρατεῖ ἀπό τήν ὀνομαστικήν ἀξίαν εἴτε ἡ Τράπεζα εἴτε τό τρίτον πρόσωπον, λέγεται ἐξωτερική ὑφαίρεσις καί, συντόμως, ὑφαίρεσις. Ἡ διαφορά μεταξύ ὀνομαστικῆς ἀξίας ($A_{ον}$) καί ὑφαιρέσεως (Υ) λέγεται παροῦσα ἀξία ($A_{πρ}$) τοῦ γραμματίου ἤ τῆς συναλλαγματικῆς:

$$A_{ον} - Y = A_{πρ} \Longleftrightarrow A_{ον} = A_{πρ} + Y .$$

Καταστήματα πού πωλοῦν ἐμπορεύματα μέ "δόσεις", πληρώνονται ἕνα μέρος τῆς ἀξίας των τοῖς μετρητοῖς καί τό ὑπόλοιπον μέ μηνιαίας ἤ δεκαπενθημέρους δόσεις βάσει συναλλαγματικῶν ἤ γραμματίων.

Παράδειγμα. Γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 2 800 δρχ προεξοφλεῖται 96 ἡμέρας πρός τῆς λήξεώς του μέ ἐπιτόκιον 12 %. Νά εὑρεθῆ ἡ παροῦσα ἀξία του.

Ὁ τόκος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας 2800 δρχ διά 96 ἡμέρας μέ ἐπιτόκιον 12 % ἰσοῦται μέ

$$Y = \frac{2800 \cdot 12 \cdot 96}{36\,000} = \frac{28 \cdot 12 \cdot 96}{360} = \frac{28 \cdot 96}{30} = \frac{28 \cdot 32}{10} = 89,60 \text{ δρχ}.$$

Ὥστε ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου εἶναι:

$$A_{πρ} = 2800 - 89,60 = 2710,40 \text{ δρχ}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Πόσον τόκον φέρουν 8550 δρχ , ἐάν τοκισθοῦν ἐπί 1 ἔτος καί 6 μῆνας πρός 12 % ;

2) Ποῖον κεφάλαιον ἐτοκίσθη ἐπί 17 μῆνας πρός 9 % καί ἔφερε τόκον 459 δρχ ;

3) Μέ ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη κεφάλαιον 5700 δρχ ἐπί 108 ἡμέρας καί ἔφερε τόκον 102,60 δρχ ;

4) Ἐπί πόσον χρόνον ἐτοκίσθη κεφάλαιον 15000 δρχ πρός 7,5 % καί ἔφερε τόκον 1875 δρχ ;

5) Ποῖον κεφάλαιον ἐτοκίσθη πρός 11 % ἐπί 1 ἔτος καί ἔγινε μαζί μέ τούς τόκους του 7 795 δρχ ;

Ὑπόδειξις διά τήν λύσιν. Νά παραστήσετε μέ x δρχ τό ζητούμενον κεφάλαιον, ὁπότε ὁ τόκος του θά εἶναι

$$\frac{x \cdot 11 \cdot 1}{100} \text{ δρχ },$$

καί, ἀφοῦ γράψετε τήν ἐξίσωσιν διά τό x σύμφωνα μέ τήν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος, νά τήν ἐπιλύσετε.

6) Ποία εἶναι ἡ παροῦσα ἀξία ἑνός γραμματίου ὀνομαστικῆς ἀξίας 3 750 δρχ , τό ὁποῖον προεξοφλεῖται 102 ἡμέρας πρό τῆς λήξεώς του μέ ἐπιτόκιον 8 % ;

7) Ποία εἶναι ἡ ὀνομαστική ἀξία ἑνός γραμματίου πληρωτέου μετά 45 ἡμέρας, ἐάν τοῦτο προεξωφλήθη σήμερον μέ ὑφαίρεσιν 64 δρχ καί ἐπιτόκιον 6 % ;

8) Ἕνα γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 5 800 δρχ πληρωτέον μετά 15 μῆνας προεξοφλεῖται σήμερον ἀντί 5 147,5 δρχ. Νά εὑρεθῇ τό ἐπιτόκιον προεξοφλήσεως.

§ 7. Ἀριθμητικός μέσος ὅρος

7.1 Πρόβλημα 1ον. Ἕνας μαθητής εἶχε τήν παραπλεύρως βαθμολογίαν εἰς τό ἐνδεικτικόν προαγωγῆς του ἀπό τήν Α΄ τάξιν εἰς τήν Β΄ τοῦ γυμνασίου. Νά εὑρεθῇ ὁ ἀριθμητικός μέσος ὅρος (ἀ.μ.ὅ.) τῆς βαθμολογίας του.

Θρησκευτικά	17
Ἀρχαῖα Ἑλλ.	16
Νέα Ἑλλην.	18
Μαθηματικά	15
Φυσικά	17
Γεωγραφία	19
Ἱστορία	18
Γαλλικά	16
Γυμναστική	18
Ἰχνογραφία	18
Ὠδική	19
Ἄθροισμα	191

Ὅταν λέγωμεν ἀριθμητικός μέσος ὅρος τῆς βαθμολογίας , ἐννοοῦμεν τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν βαθμῶν ὅλων τῶν μαθημάτων διά τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μαθημάτων.

Ἐπομένως ὁ ζητούμενος ἀριθμητικός μέσος ὅρος εἶναι:

$$191 : 11 = 17\frac{4}{11}.$$

Πρόβλημα 2ον. Τά ὕψη τῆς βροχῆς εἰς χιλιοστόμετρα (mm) κατά τήν διάρκειαν ἑνός ὁλοκλήρου ἔτους ἦσαν εἰς ἕνα τόπον τά ἀκόλουθα ἐπί μίαν πενταετίαν :

Ἔτος	1952	1953	1954	1955	1956
Ὕψος βροχῆς	545	474	686	495	685

Νά εὑρεθῆ τό μέσον ἐτήσιον ὕψος τῆς βροχῆς εἰς τόν τόπον αὐτόν κατά τήν ἀναφερομένην πενταετίαν.

Ὅταν λέγωμεν ὕψος τῆς βροχῆς εἰς ἕνα τόπον κατά τήν διάρκειαν ἑνός ἔτους, ἐννοοῦμεν τό ὕψος εἰς τό ὁποῖον θά ἀνήρχετο ἡ πεσοῦσα βροχή μέσα εἰς ἕνα δοχεῖον μέ ὁριζόντιον βάσιν καί κατακόρυφα πλευρικά τοιχώματα, ἐάν τό συγκεντρούμενον ὕδωρ δέν ἐξητμίζετο.

Προσθέτοντες τά δοθέντα ὕψη καί διαιροῦντες τό ἄθροισμα διά τοῦ ἀριθμοῦ 5 τῶν ἐτῶν εὑρίσκομεν:

$$2885 : 5 = 577 \text{ mm}.$$

Ὥστε τό μέσον ἐτήσιον ὕψος τῆς βροχῆς εἰς τόν τόπον τοῦ προβλήματος κατά τήν πενταετίαν 1952 ἕως 1956 ἦτο 577 mm = = 0,577 m.

Ἀπό τά παραπάνω παραδείγματα συμπεραίνομεν ὅτι ὁ ἀ.μ.ὅ ἀνταποκρίνεται εἰς τό ἀκόλουθον γενικόν πρόβλημα:

Μᾶς δίδονται ν ἀριθμητικαί τιμαί

$$x_1, x_2, \ldots, x_\nu \qquad (\nu \in \Phi)$$

μιᾶς μεταβλητῆς x καί ζητεῖται μία τιμή x_μ τῆς ὁποίας τό γινόμενον μέ τόν ἀριθμόν ν τῶν τιμῶν νά ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν πού ἐδόθησαν:

$$\nu \cdot x_\mu = x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu .$$

Ἀπό τήν σχέσιν αὐτήν προκύπτει ὅτι:

$$x_\mu = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu}{\nu}.$$

Ἡ τιμή x_μ λέγεται <u>ἀριθμητικός μέσος</u> ὅρος τῶν τιμῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, διότι ἔχει τήν ἰδιότητα νά εἶναι μία ἐνδιάμεσος τιμή (νά κεῖται) μεταξύ τῆς μικροτέρας καί τῆς μεγαλυτέρας ἀπό τάς τιμάς $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ πού ἐδόθησαν.

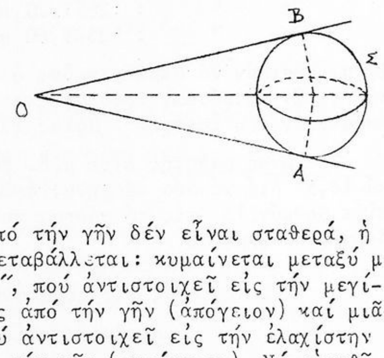
Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἀριθμητικός μέσος ὅρος δύο τιμῶν α καί β ἰσοῦται μέ τό ἡμιάθροισμα $\frac{\alpha+\beta}{2}$ καί ὅτι

$$\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha = \beta - \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ἕνας δρομεύς ἐχρονομετρήθη μέ 4 χρονόμετρα εἰς μίαν διαδρομήν 100 m. Τό πρῶτον χρονόμετρον ἐσημείωσε χρόνον 10,8 sec, τό δεύτερον 11 sec, τό τρίτον 10,9 sec καί τό τέταρτον 10,7 sec. Νά εὑρεθῆ ἡ μέση ἀριθμητική τιμή τῶν ἐνδείξεων τῶν 4 χρονομέτρων.

2) Ἡ γωνία ∢(OA , OB) (βλ. σχῆμα παραπλεύρως) ὑπό τήν ὁποίαν ὁ ὀφθαλμός μας O βλέπει τήν σελήνην (καί γενικῶς, ἕνα σφαιρικόν οὐράνιον σῶμα) λέγεται <u>φαινομένη διάμετρος</u> τῆς σελήνης (καί, γενικῶς, τοῦ οὐρανίου σώματος). Ἐπειδή ἡ ἀπόστασις τῆς σελήνης ἀπό τήν γῆν δέν εἶναι σταθερά, ἡ φαινομένη διάμετρός της μεταβάλλεται: κυμαίνεται μεταξύ μιᾶς ἐλαχίστης τιμῆς 29′ 24″, πού ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν μεγίστην ἀπόστασιν τῆς σελήνης ἀπό τήν γῆν (ἀπόγειον) καί μιᾶς μεγίστης τιμῆς 33′28″, πού ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν ἐλαχίστην ἀπόστασιν τῆς σελήνης ἀπό τήν γῆν (περίγειον). Νά εὑρεθῆ ἡ μέση φαινομένη διάμετρος τῆς σελήνης.



3) Ἕνας τεχνητός δορυφόρος τῆς γῆς ἔχει περίγειον (δηλαδή ἐλαχίστην ἀπόστασιν ἀπό τήν ἐπιφάνειαν τῆς γῆς 185) km καί ἀπόγειον (δηλ. μεγίστην ἀπόστασιν ἀπό τήν ἐπιφάνειαν τῆς γῆς) 227 km. Νά εὑρεθῆ ἡ μέση ἀπόστασίς του ἀπό τό κέντρον τῆς γῆς.

4) Μία τάξις ἔχει 40 μαθητάς μέ τά ἀκόλουθα ἀναστήματα εἰς μέτρα (m) :

5 μαθηταί ἔχουν ἀνάστημα 1,52

4	μαθηταί	ἔχουν	ἀνάστημα	1,56
8	"	"	"	1,53
7	"	"	"	1,50
3	"	"	"	1,60
9	"	"	"	1,55
3	"	"	"	1,49
1	μαθητής	ἔχει	"	1,63

Νά εὑρεθῆ τό μέσον ἀνάστημα τῶν μαθητῶν τῆς τάξεως.

5) Ἕνας γεωργός ἔχει τήν ἀκόλουθον ἀπόδοσιν εἰς σῖτον ἀπό τούς τρεῖς ἀγρούς του:

Ἀγρός	Α	ἐκτάσεως	3 στρεμμάτων	, ἀπόδοσις	360 kg
"	Β	"	5 "	, "	750 kg
"	Γ	"	4 "	, "	380 kg

Ποία εἶναι ἡ κατά στρέμμα μέση ἀπόδοσις τῶν τριῶν ἀγρῶν ;

6) Διά τήν χάραξιν ἑνός τοπογραφικοῦ χάρτου ἔγιναν τρεῖς μετρήσεις μέ ὄργανα ἀκριβείας διά νά προσδιορισθῆ ἡ ὁριζόντιος ἀπόστασις δύο σημείων Α καί Β τοῦ ἐδάφους. Τά ἀποτελέσματα τῶν μετρήσεων ἦσαν :

1η μέτρησις : 2850,80 m
2α " : 2851,20 m
3η " : 2847,60 m.

Εἶναι φυσικόν νά δεχθῶμεν ὅτι ὁ α.μ.ὅ. τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν τριῶν μετρήσεων προσεγγίζει καλύτερα τήν πραγματικήν ἀπόστασιν πού ἐμετρήθη. Ποῖος εἶναι αὐτός ;

7) Ἕνας μαθητής εἶχε μ.ὅ. βαθμολογίας εἰς τά Μαθηματικά 14,5 διά τά δύο ἑξάμηνα, ἐνῶ κατά τό πρῶτον ἑξάμηνον εἶχε βαθμόν 13 εἰς τό μάθημα τοῦτο. Νά εὑρεθῆ ὁ βαθμός τοῦ δευτέρου ἑξαμήνου.

§ 8. Μερισμός εἰς μέρη ἀνάλογα πρός δοθέντας ἀριθμούς καί ἐφαρμογαί.

<u>8.1. Πρόβλημα 1ον.</u> Διά τήν ἐκτέλεσιν ἑνός ἔργου εἰργάσθησαν μέ τούς αὐτούς ὅρους τρεῖς ἐργάται ὡς ἑξῆς: Ὁ Α ἐπί 5 ὥρας, ὁ Β ἐπί 6,5 ὥρας καί ὁ Γ ἐπί 7,5 ὥρας. Δι'ὁλόκληρον τήν ἐργασίαν ἔλαβαν οἱ τρεῖς μαζί 323 δρχ. Τί ποσόν ἀναλογεῖ εἰς ἕκαστον ;

Ὅπως εὔκολα ἀντιλαμβανόμεθα, διά νά εἶναι δικαία ἡ διανομή τοῦ ὁλικοῦ ποσοῦ, πρέπει τά μερίδια τῶν τριῶν ἐργατῶν νά εἶναι κατ'εὐθεῖαν ἀνάλογα πρός τούς ἀντιστοίχους χρόνους ἐργασίας των. Ἄν λοιπόν παραστήσωμεν μέ α δρχ, β δρχ καί γ δρχ τά μερίδια τῶν Α, Ε καί Γ ἀντιστοίχως, θά ἔχωμεν τούς τρεῖς ἴσους λόγους:

$$\frac{\alpha}{5} = \frac{\beta}{6,5} = \frac{\gamma}{7,5}\ .$$

Σύμφωνα ὅμως μέ τήν ἰδιότητα III) τῶν ἀναλογιῶν (βλ. τέλος ἐδ. § 2.3), ἀπό τήν ἰσότητα τῶν τριῶν αὐτῶν λόγων ἕπεται ὅτι:

$$\frac{\alpha}{5} = \frac{\beta}{6,5} = \frac{\gamma}{7,5} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{5+6,5+7,5} = \frac{323}{19} = 17.$$

Συνεπῶς:

$$\frac{\alpha}{5} = 17 \iff \alpha = 5\cdot 17 = 85{,}00 \text{ δρχ}$$

$$\frac{\beta}{6,5} = 17 \iff \beta = 6{,}5\cdot 17 = 110{,}50 \text{ δρχ}$$

$$\frac{\gamma}{7,5} = 17 \iff \gamma = 7{,}5\cdot 17 = \underline{127{,}50 \text{ δρχ}}$$

Ἄθροισμα μεριδίων=323 δρχ.

Διά τήν λύσιν αὐτοῦ τοῦ προβλήματος λέγομεν ὅτι ἐκάμαμεν μερισμόν τοῦ ποσοῦ 323 δρχ εἰς μέρη ἀνάλογα πρός τούς ἀριθμούς 5, 6,5 καί 7,5.

Πρόβλημα 2ον. Τρεῖς αὐτοκινητισταί μετέφεραν: Ὁ Α 3,5t (τόννους) ἐμπόρευμα εἰς ἀπόστασιν 18 km , ὁ Β 4 t ἐμπόρευμα εἰς ἀπόστασιν 15 km , καί ὁ Γ 2,5 t ἐμπόρευμα εἰς ἀπόστασιν 20 km .

Διά τάς τρεῖς μεταφοράς ἐπληρώθη τό ποσόν 6920 δρχ. Τί ποσόν ἀναλογεῖ εἰς ἕκαστον αὐτοκινητιστήν ;

Εδῶ ἡ ἀμοιβή διά τόν κάθε αὐτοκινητιστήν πρέπει νά εἶναι κατ'εὐθεῖαν ἀνάλογος πρός τήν ποσότητα τοῦ φορτίου πού μετέφερε, ἄν ἡ ἀπόστασις ἦτο ἡ ἰδία δι'ὅλους, καί πρός τήν ἀπόστασιν τῆς μεταφορᾶς, ἄν τό μεταφερθέν φορτίον ἦτο τό ἴδιον δι'ὅλους. Ἔτσι ἡ μεταφορά 3,5 t εἰς ἀπόστασιν 18 km πρέπει νά θεωρηθῆ ἰσοδύναμος μέ τήν μεταφοράν 1 t εἰς ἀπόστασιν $18 \cdot 3{,}5 = 63$ km ἤ 63 t εἰς ἀπόστασιν 1 km. Ἡ μεταφορά 1 t εἰς ἀπόστασιν 1 km λέγεται χιλιομετρικός τόννος. Εἶναι λοιπόν ὡς ἐάν μετέφεραν :

ὁ Α $3{,}5 \cdot 18 = 63$ χιλιομετρικούς τόννους ,

ὁ Β $4 \cdot 15 = 60$ " " ,

ὁ Γ $2{,}5 \cdot 20 = 50$ " " .

Διά τοῦτο θά κάμωμεν μερισμόν τοῦ ποσοῦ 6920 δρχ εἰς μέρη ἀνάλογα πρός τούς χιλιομετρικούς τόννους (kmt) πού ἀντιστοιχοῦν εἰς κάθε αὐτοκινητιστήν. Ἄς παραστήσωμεν μέ α δρχ, β δρχ καί γ δρχ τά μερίδια τῶν Α, Β καί Γ ἀντιστοίχως. Θά ἔχωμεν

$$\frac{\alpha}{63} = \frac{\beta}{60} = \frac{\gamma}{50} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{63+60+50} = \frac{6920}{173} = 40 .$$

Ἑπομένως :

$$\frac{\alpha}{63} = 40 \iff \alpha = 63 \cdot 40 = 2520 \text{ δρχ}$$

$$\frac{\beta}{60} = 40 \iff \beta = 60 \cdot 40 = 2400 \text{ δρχ}$$

$$\frac{\gamma}{50} = 40 \iff \gamma = 50 \cdot 40 = 2000 \text{ δρχ}$$

Ἄθροισμα μεριδίων = 6920 δρχ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Μία κληρονομία 500 000 δρχ πρόκειται νά μοιρασθῆ εἰς τρεῖς κληρονόμους. Ποῖα θά εἶναι τά μερίδιά των, ἄν αὐτά εἶναι ἀνάλογα πρός τάς ἡλικίας των : 13 ἔτη, 18 ἔτη καί 23 ἔτη ;

2) Δύο βοσκοί ἐνοικίασαν ἕνα βοσκότοπον ἀντί 4 000 δρχ δι' ἕν ἔτος μέ τήν συμφωνίαν νά πληρώση ἕκαστος μερίδιον κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογον πρός τόν ἀριθμόν τῶν προβάτων του κατά τήν ἔναρξιν τῆς ἐνοικιάσεως. Ὁ Α εἶχε 80 πρόβατα καί ὁ Β 64. Τί ποσόν θά πληρώση ἕκαστος ;

3) Τρεῖς συνεταῖροι κατέβαλαν διά μίαν κοινήν ἐπιχείρησιν: ὁ Α 50 000 δρχ, ὁ Β 65 000 δρχ καί ὁ Γ 30 000 δρχ. Ἀπό τήν ἐπιχείρησιν ἀπεκόμισαν κέρδος 75 000 δρχ καί τό ἐμοιράσθησαν κατ' ἀναλογίαν τῶν κεφαλαίων πού κατέβαλαν. Ποῖα ἤ-

σαν τά μερίδιά των ;

4) Ένας έπιχειρηματίας ήρχισε έπιχείρησιν μέ ένα κεφάλαιον 95 000 δρχ. Τρεῖς μῆνας ὕστερα προσέλαβεν ένα συνεταῖρον, ὁ ὁποῖος κατέθεσε διά τήν ἐπέκτασιν τῆς ἐπιχειρήσεως κεφάλαιον 80 000 δρχ. Δύο έτη μετά τήν έναρξιν τῆς ἐπιχειρήσεως ἐμοιράσθησαν οἱ δύο ένα κέρδος 120 000 δρχ κατ' ἀναλογίαν καί πρός τά κεφάλαια πού διέθεσαν καί πρός τά χρονικά διαστήματα κατά τά ὁποῖα τά κεφάλαια αὐτά ἐχρησιμοποιήθησαν. Ποῖα ἦσαν τά μερίδιά των ; (Παράβ. Πρόβλημα 2ον τῆς παραγράφου).

5) Νά μερισθῆ ὁ ἀριθμός 6 390 είς μέρη ἀνάλογα πρός τούς ἀριθμούς 2 , 3 , 4 καί 6.

6) Νά μερισθῆ ὁ ἀριθμός 124 000 είς μέρη ἀνάλογα πρός τούς ἀριθμούς $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ καί $\frac{1}{5}$. (Ὁ μερισμός αὐτός λέγεται καί "μερισμός τοῦ ἀριθμοῦ 124 000 είς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρός τούς ἀριθμούς 2, 3 καί 5").

§ 9. Μείγματα καί κράματα.

9.1. Πρόβλημα 1ον. Ένας οἰνοπώλης ἀνέμειξε 36 kg κρασί τῶν 3,20 δρχ/kg μέ 54 kg κρασί τῶν 4 δρχ/kg. Πόσον τοῦ κοστίζει τό 1 kg τοῦ μείγματος ;

Λύσις. Μετά τήν ἀνάμειξιν θά έχη 36 + 54 = 90 kg κρασί πού θά κοστίζη ἐν ὅλω

$$3,20 \cdot 36 + 4 \cdot 54 = 115,20 + 216 = 331,20 \text{ δρχ.}$$

Ἐπομένως 1 kg τοῦ μείγματος τοῦ κοστίζει

$$331,20 : 90 = 3,68 \text{ δρχ.}$$

Ἡ τιμή 3,68 δρχ/kg εἶναι ἡ τιμή μονάδος τοῦ μείγματος καί λέγεται ἀπό μερικούς μέση τιμή τοῦ μείγματος.

Πρόβλημα 2ον. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος μιᾶς ποσότητος α kg ἐλαιολάδου τῶν 25 δρχ/kg πρός τήν ποσότητα σπορελαίου τῶν 15 δρχ/kg τήν ὁποίαν πρέπει νά ἀναμείξωμεν μέ τήν ποσότητα τοῦ ἐλαιολάδου, διά νά ἐπιτύχωμεν τιμήν μονάδος τοῦ μείγματος 23 δρχ / kg ;

Λύσις. Έστω x kg ἡ ποσότης τοῦ σπορελαίου πού πρέπει νά ἀναμείξωμεν διά νά ἐπιτύχωμεν τό ζητούμενον. Τό μεῖγμα θά ἔχη βάρος

$$(\alpha+x)\ \text{kg}$$

καί συνολικήν ἀξίαν

$$(25\alpha+15x)\ \text{δρχ.}$$

Ἡ τιμή μονάδος τοῦ μείγματος θά εἶναι ἐπομένως:

$$\frac{25\alpha+15x}{\alpha+x}\ \text{δρχ/kg}\,.$$

Αὐτή θέλομεν νά ἰσοῦται μέ 23 δρχ/kg. Ὥστε θά ἔχωμεν διά τόν ἄγνωστον x τήν ἐξίσωσιν

$$\frac{25\alpha+15x}{\alpha+x} = 23.$$

Τήν ἐπιλύομεν μέ τήν γνωστήν μέθοδον (βλ. Κεφ. Β΄, § 5.4–§ 5.5) :

$$\begin{aligned} \frac{25\alpha+15x}{\alpha+x} = 23 &\iff 25\alpha + 15x = 23\,(\alpha+x) \\ &\iff 25\alpha + 15x = 23\alpha + 23x \\ &\iff 25\alpha - 23\alpha = 23x - 15x \\ &\iff 2\alpha = 8x \\ &\iff x = \frac{2\alpha}{8} = \frac{\alpha}{4}\ \text{kg} \end{aligned}$$

Ὥστε ὁ ζητούμενος λόγος εἶναι

$$\alpha : x = \alpha : \frac{\alpha}{4} = 4\alpha : \alpha = 4 : 1.$$

Πρέπει λοιπόν νά ἀναμείξωμεν 4 μέρη βάρους ἐλαιολάδου τῶν 25 δρχ/kg μέ 1 μέρος βάρους σπορελαίου τῶν 15 δρχ/kg διά νά ἐπιτύχωμεν τιμήν μονάδος τοῦ μείγματος 23 δρχ/kg.

Τά δύο ἀνωτέρω προβλήματα λέγονται προβλήματα ἀναμείξεως.

9.2. Κράματα. Κράματα ὀνομάζομεν τά σώματα πού προέρχονται ἀπό τήν συγχώνευσιν ἤ σύντηξιν δύο ἤ περισσοτέρων μετάλλων. Ὅταν εἰς ἕνα κρᾶμα εἰσέρχεται πολύτιμον μέταλλον ὅπως χρυσός, λευκόχρυσος (πλατίνα) ἤ ἄργυρος, τότε, διά νά ἐκτιμήσωμεν τήν άξίαν τοῦ κράματος, χρησιμοποιοῦμεν τόν λόγον τῆς ποσότητος τοῦ εἰσερχομένου πολυτίμου μετάλλου πρός τήν ποσότητα τοῦ ὅλου κράματος. Ὁ λόγος αὐτός ἐκφράζεται εἰς ποσοστόν ἐπί τοῖς χιλίοις (εἰς χιλιοστά) καί λέγεται τίτλος τοῦ κράματος. Ἔτσι, ὅταν λέγωμεν ὅτι ἕνα ἀργυροῦν νόμισμα ἔχει τίτλον 0,835, ἐννοῦμεν ὅτι εἰς 1000 gr τοῦ κράματος, ἀπό τό ὁποῖον κατεσκευάσθη τό νόμισμα, τά 835 gr εἶναι καθαρός ἄργυρος καί τά ὑπόλοιπα 1000 − 835 = 165 gr εἶναι εὐτελῆ (εὐθηνά) μέταλλα. Τά προβλήματα ἐπί τῶν κραμάτων εἶναι ὅμοια μέ τά προβλήματα ἐπί τῶν μειγμάτων.

Πρόβλημα 1ον. Συνεχωνεύσαμεν 175 gr χρυσόν τίτλου 0,920 μέ 100 gr χρυσόν τίτλου 0,900. Νά εὑρεθῆ ὁ τίτλος τοῦ νέου κράματος.

Λύσις. Τά 175 gr τίτλου 0,920 περιέχουν καθαρόν χρυσόν

$$0,920 \cdot 175 = 161 \text{ gr}$$

καί τά 100 gr τίτλου 0,900 περιέχουν καθαρόν χρυσόν

$$0,900 \cdot 100 = 90 \text{ gr.}$$

Τό κρᾶμα πού θά προκύψη ἀπό τήν συγχώνευσιν θά ἔχη βάρος

$$175 + 100 = 275 \text{ gr}$$

καί θά περιέχη καθαρόν χρυσόν

$$161 + 90 = 251 \text{ gr.}$$

Ὥστε ὁ τίτλος τοῦ νέου κράματος θά εἶναι:

$$\frac{\text{βάρος χρυσοῦ}}{\text{βάρος κράματος}} = \frac{251}{275} \simeq 0,913 \left(\begin{matrix}\text{μέ προσέγγισιν ἑνός}\\ \text{μισοῦ χιλιοστοῦ}\end{matrix}\right)$$

Πρόβλημα 2ον. Κατά ποῖον λόγον ποσοτήτων πρέπει νά συγχωνεύσωμεν ἄργυρον τίτλου 0,950 μέ ἄλλον ἄργυρον τίτλου 0,800, διά νά ἐπιτύχωμεν νέον κρᾶμα τίτλου 0,835 ;

Λύσις. Ἄς εἶναι α gr μία δεδομένη ποσότης ἀπό τόν ἄργυρον τίτλου 0,950 καί x gr ἡ ἄγνωστος ποσότης ἀπό τόν ἄργυρον τίτλου 0,800 τήν ὁποίαν πρέπει νά συγχωνεύσωμεν μέ τήν δεδομένην πρώτην ποσότητα, διά νά ἐπιτύχωμεν νέον κρᾶμα τίτλου 0,835. Τό βάρος τοῦ νέου κράματος εἶναι

$$(\alpha+x)\ gr$$

καί ἡ περιεκτικότης του είς καθαρόν ἄργυρον :

$$(0,950\alpha + 0,800x)\ gr.$$

Ἄρα ὁ τίτλος τοῦ νέου κράματος εἶναι:

$$\frac{0,950\alpha+0,800x}{\alpha+x}\ .$$

Αὐτός θέλομεν νά ἰσοῦται μέ 0,835˙ ὥστε διά τόν ἄγνωστον x θά ἔχωμεν τήν ἐξίσωσιν:

$$\frac{0,950\alpha+0,800x}{\alpha+x} = 0,835$$

Τήν ἐπιλύομεν κατά τά γνωστά:

$$\frac{0,950\alpha+0,800x}{\alpha+x} = 0,835 \Leftrightarrow 0,950\alpha+0,800x = 0,835(\alpha+x)$$

$$\Longleftrightarrow 0,950\alpha + 0,800x = 0,835\alpha + 0,835x$$

$$\Longleftrightarrow 0,950\alpha - 0,835\alpha = 0,835x - 0,800x$$

$$\Longleftrightarrow 0,115\alpha = 0,035x$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{0,115}{0,035}\alpha = \frac{23}{7}\alpha\ .$$

Ὥστε ὁ ζητούμενος λόγος τῶν ποσοτήτων, τάς ὁποίας πρέπει νά ἀναμείξωμεν ἀπό τά δύο κράματα ἀργύρου , εἶναι

$$\alpha : x = \alpha : \frac{23}{7}\alpha = 7\alpha : 23\alpha = 7 : 23.$$

Μέ ἄλλας λέξεις, πρέπει νά ἀναμείξωμεν 7 μέρη βάρους ἀπό τόν ἄργυρον τίτλου 0,950 μέ 23 μέρη βάρους ἀπό τόν ἄργυρον τίτλου 0,800 , διά νά ἐπιτύχωμεν νέον κρᾶμα τίτλου 0,835.

Πρόβλημα 3ον. Ἀπό τό νέον κρᾶμα τοῦ προηγουμένου προβλήματος κατεσκευάσθη ἕνα κόσμημα πού ζυγίζει 300 gr. Πόσα γραμμάρια περιέχει τό κόσμημα ἀπό τόν ἄργυρον τίτλου 0,950 καί πόσα ἀπό τόν ἄργυρον τίτλου 0,800 ;

Λύσις. Ἄς περιέχη τό κόσμημα α gr ἀπό τό πρῶτον κρᾶμα ἀργύρου καί β gr ἀπό τό δεύτερον.

Σύμφωνα μέ ὅ,τι ηὕραμεν διά τήν σύνθεσιν τοῦ νέου κράματος, θά ἔχωμεν τούς ἴσους λόγους :

$$\frac{\alpha}{7} = \frac{\beta}{23} = \frac{\alpha+\beta}{7+23} = \frac{300}{30} = 10.$$

Ἑπομένως:

$$\frac{\alpha}{7} = 10 \iff \alpha = 7\cdot 10 = 70 \text{ gr}$$

$$\frac{\beta}{23} = 10 \iff \beta = 23\cdot 10 = 230 \text{ gr}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ἕνας οἰνοπώλης ἀνέμειξε 75 kg κρασί τῶν 3,80 δρχ/kg μέ 95 kg τῶν 4,20 δρχ/kg καί 25 kg κρασί τῶν 4,80 δρχ/kg. Νά εὑρεθῇ ἡ τιμή μονάδος τοῦ μείγματος.

2) Κατά ποίαν ἀναλογίαν (δηλαδή, μέ ἀκριβεστέραν μαθηματικήν ἔκφρασιν: κατά ποῖον λόγον ποσοτήτων) πρέπει νά ἀναμείξωμεν ἐλαιόλαδον τῶν 27 δρχ/kg μέ σπορέλαιον τῶν 13 δρχ/kg διά νά ἐπιτύχωμεν μεῖγμα μέ τιμήν μονάδος 22 δρχ/kg;

3) Ἕνας λαδέμπορος ἔχει δύο εἴδη ἐλαιόλαδον: Α καί Β. Ἡ ποιότης Α ἔχει τιμήν 25,50 δρχ/kg καί ἡ Β 23,50 δρχ/kg. Πόσα kg ἀπό κάθε ποιότητα πρέπει νά ἀναμείξῃ ὁ λαδέμπορος, διά νά ἐκτελέσῃ μίαν παραγγελίαν διά 100 kg ἐλαιόλαδον τῶν 25 δρχ/kg ;

4) Ἕνας καφεπώλης ἔχει δύο ποιότητας καφέ : Α τῶν 46 δρχ/kg καί Β τῶν 42 δρχ/kg. Ἀπό τάς δύο αὐτάς ποιότητας ἔκαμε ἕνα μεῖγμα 15 kg τῶν 43 δρχ/kg. Πόσα kg ἀπό κάθε ποιότητα ἀνέμειξε ;

5) Ἕνα βαρέλι ἔχει χωρητικότητα 255 l (λίτρα). Τό γεμίζομεν κατά τά 3/4 μέ κρασί τῶν 3,5 δρχ/kg καί κατά τό 1/4 μέ κρασί τῶν 4,5 δρχ/kg. Πόσον πρέπει νά πωλοῦμεν τό 1 kg τοῦ μείγματος διά νά ἔχωμεν κέρδος 15 % ;

6) Πόσα kg καθαρός χρυσός καί πόσα kg καθαρός χαλκός περιέχονται εἰς ἕνα κρᾶμα ἀπό χρυσόν καί χαλκόν τό ὁποῖον ἔχει τίτλον 0,750 καί ζυγίζει 34,4 kg ;

7) Ἀπό τρία κράματα χρυσοῦ Α, Β, Γ μέ ἀντίστοιχα βάρη 800 gr , 450 gr , 1200 gr καί ἀντιστοίχους τίτλους 0,850 ; 0,630 , 0,720 κατεσκευάσθη μέ σύντηξιν ἕνα νέον κρᾶμα. Νά εὑρεθῇ ὁ τίτλος του.

8) Ἕνας χρυσοχόος συνέτηξε δύο κράματα χρυσοῦ Α καί Β κατ' ἀναλογίαν 7 μερῶν βάρους ἀπό τό Α

πρός 3 μέρη βάρους ἀπό τό Β. Τό Α εἶχε τίτλον 0,835 καί τό Β 0,950. Νά εὑρεθῇ ὁ τίτλος τοῦ νέου κράματος.

9) Ἔχομεν ἕνα κρᾶμα, βάρους 3,6 kg , ἀπό μόλυβδον καί κασσίτερον (καλάϊ) κατά τήν ἀναλογίαν: 5 μέρη βάρους μόλυβδος πρός 7 μέρη βάρους κασσίτερος. Πόσα kg μόλυβδον πρέπει νά συγχωνεύσωμεν μέ αὐτό τό κρᾶμα διά νά ἐπιτύχωμεν ἐκεῖνο πού χρησιμοποιοῦν οἱ ὑδραυλικοί διά τάς συγκολλήσεις εἰς τάς ὑδραυλικάς ἐγκαταστάσεις ; (Τοῦτο τό κρᾶμα ἀποτελεῖται ἀπό ἴσα μέρη βάρους μολύβδου καί κασσιτέρου).

10) Πόσα gr χαλκοῦ πρέπει νά συγχωνεύσωμεν μέ 14,67 gr καθαρόν ἄργυρον διά νά ἐπιτύχωμεν κρᾶμα μέ τίτλον 0,835;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄

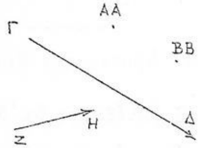
Διανύσματα εἰς τό ἐπίπεδον.

§ 1. Ἐφαρμοστά διανύσματα. Ἐλεύθερα διανύσματα.

1.1. Εἰς αὐτό τό κεφάλαιον θά μελετήσωμεν τά διανύσματα εἰς τό ἐπίπεδον, ἀφοῦ ἐπαναλάβωμεν, κάπως συστηματικώτερα, ἐκεῖνα πού εἴπαμεν περί διανυσμάτων εἰς τό Βιβλ. I, σελ.50Γ κ.ἑ.

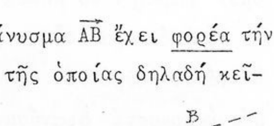
Θεωροῦμεν τό ἐπίπεδον ὡς ἕνα σύνολον Ε σημείων Μ. Τό καρτεσιανόν γινόμενον $E \times E$ ἀποτελεῖται ἀπό τά διατεταγμένα ζεύγη (M_1, M_2) σημείων τοῦ Ε. Ἕκαστον διατεταγμένον ζεῦγος (M_1, M_2) ὁρίζει ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{M_1M_2}$, μέ ἀρχήν τό σημεῖον M_1 καί πέρας τό σημεῖον M_2. Τό διάνυσμα αὐτό θά τό λέγωμεν ἐφαρμοστόν, διά νά τό διακρίνωμεν ἀπό τό ἐλεύθερον διάνυσμα πού θά ὁρίσωμεν παρακάτω.

Διακρίνομεν τά μηδενικά ἐφαρμοστά διανύσματα πού ἔχουν ἀρχήν καί πέρας ταυτιζόμενα (συμπίπτοντα), ὅπως π.χ. τά $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$ τοῦ παραπλεύρως σχήματος, καί τά μή μηδενικά πού ἔχουν ἀρχήν διάφορον ἀπό τό πέρας, ὅπως π.χ. τά $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ καί $\overrightarrow{ZH}$.



Ἕνα μή μηδενικόν ἐφαρμοστόν διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ἔχει φορέα τήν εὐθεῖαν ΑΒ ἡ ὁποία τό "φέρει", ἐπί τῆς ὁποίας δηλαδή κεῖται τό διάνυσμα.

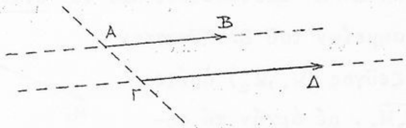
Ἡ διεύθυνσις (βλ. Κεφ.Α΄, τέλος τοῦ § 7.2) τῆς εὐθείας ΑΒ λέγε~~ται καί~~ διεύθυνσις ~~τοῦ δια~~νύσμα-



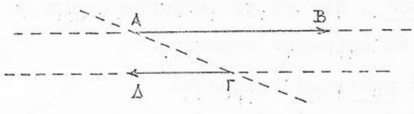
τος $\overrightarrow{AB}$. Δύο μή μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ (βλ. τό ἀνωτέρω σχῆμα) πού ἔχουν τήν ἰδίαν διεύθυνσιν, πού ἐπομένως κεῖνται ἐπάνω εἰς εὐθείας παραλλήλους μέ εὐρεῖαν σημασίαν, λέγονται παράλληλα ἤ συγγραμμικά.

Ἕνα μηδενικόν διάνυσμα, π.χ. τό AA, δέν ἔχει ὡρισμένον φορέα καί διεύθυνσιν, διά τοῦτο θεωρεῖται συγγραμμικόν μέ κάθε ἄλλο διάνυσμα.

Δύο μή μηδενικά συγγραμμικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ἤ ἔχουν τήν ἰδίαν φοράν (κατεύθυνσιν) καί λέγονται ὁμόρροπα:

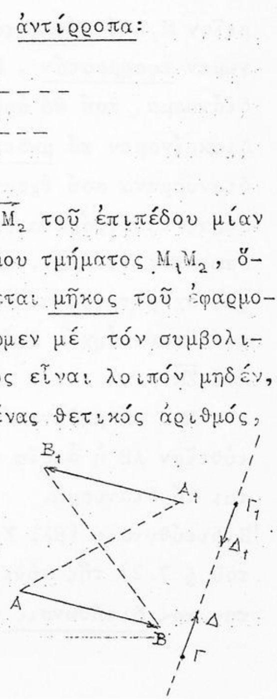


ἤ ἔχουν ἀντιθέτους φοράς καί λέγονται ἀντίρροπα:



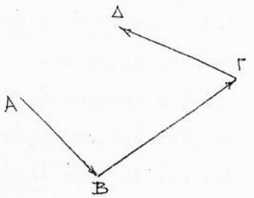
Ἀφοῦ ἐκλέξωμεν δι'ὅλα τά διανύσματα $\overrightarrow{M_1M_2}$ τοῦ ἐπιπέδου μίαν μονάδα μήκους, τό μέτρον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος M_1M_2, ὅταν μετρηθῇ μέ αὐτήν τήν μονάδα, λέγεται μῆκος τοῦ ἐφαρμοστοῦ διανύσματος $\overrightarrow{M_1M_2}$ θά τό παριστάνωμεν μέ τόν συμβολισμόν $|\overrightarrow{M_1M_2}|$. Τό μῆκος ἑνός διανύσματος εἶναι λοιπόν μηδέν, ἄν τό διάνυσμα εἶναι μηδενικόν, καί ἕνας θετικός ἀριθμός, ἄν τό διάνυσμα δέν εἶναι μηδενικόν.

Δύο ἐφαρμοστά διανύσματα λέγονται ἀντίθετα, ὅταν ἔχουν τήν αὐτήν διεύθυνσιν καί τό αὐτό μῆκος, ἀλλά φοράς ἀντιθέτους. Π.χ. τά



διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{BA}$ εἶναι ἀντίθετα· ἐπίσης τά $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{A_1B_1}$ ἤ τά $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ καί $\overrightarrow{\Gamma_1\Delta_1}$ τοῦ προηγουμένου σχήματος.

Δύο ἤ περισσότερα ἐφαρμοστά διανύσματα πού δίδονται μέ μίαν ὡρισμένην σειράν, λέγονται <u>διαδοχικά</u>, ὅταν συμπίπτη τό πέρας τοῦ 1ου μέ τήν ἀρχήν τοῦ 2ου, τό πέρας τοῦ 2ου μέ ἀρχήν τοῦ 3ου, τό πέρας τοῦ 3ου μέ τήν ἀρχήν τοῦ 4ου κ.ο.κ. Π.χ. τά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ μέ αὐτήν τήν σειράν εἶναι διαδοχικά.



<u>1.2.</u> <u>Ἴσα ἐφαρμοστά διανύσματα.</u> Δύο μή μηδενικά ἐφαρμοστά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται <u>ἴσα</u>:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta},$$

ὅταν ἔχουν:

1ον τήν ἰδίαν διεύθυνσιν : εὐθ. $AB \parallel$ εὐθ. $\Gamma\Delta$,

2ον τήν ἰδίαν φοράν,

3ον τό ἴδιον μῆκος : $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{\Gamma\Delta}|$.

Τά μηδενικά διανύσματα εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ ἴσα μεταξύ των ἀνά δύο:

$$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}, \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Αὐτή ἡ διμελής σχέσις ἰσότητος μεταξύ ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας (βλ. Κεφ. Α΄, § 7.2)· πράγματι ἔχει τάς τρεῖς ἰδιότητας:

1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$, ἀνακλαστικήν ,

2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Longrightarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AB}$, συμμετρικήν ,

3) $(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{ZH}) \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ZH}$, μεταβατικήν .

Ἑπομένως ἡ σχέσις αὐτή διαμερίζει τό σύνολον τῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου εἰς <u>κλάσεις</u> <u>ἰσοδυναμίας</u> (βλ. Κεφ. Α΄, § 7.2). Κάθε ἐφαρμοστόν διάνυσμα ἀνήκει εἰς μίαν ὡρισμένην κλάσιν: ἐκείνην πού ἀποτελεῖται ἀπό τά ἐφαρμοστά διανύσματα τά ἴσα με τό θεωρούμενον διάνυσμα. Δύο ἄνισα ἐφαρμοστά διανύσματα ἀνήκουν εἰς διαφορετικάς κλάσεις, αἱ ὁποῖαι εἶναι σύνολα ξένα μεταξύ των. Τά μηδενικά διανύσματα ἀποτελοῦν μίαν κλάσιν ἰσοδυναμίας.

1.3. Ἐλεύθερα διανύσματα. Προχωροῦμεν τώρα εἰς τούς ἀκολούθους ὁρισμούς.

Δύο ἴσα ἐφαρμοστά διανύσματα λέγομεν ὅτι ὁρίζουν ἤ ἀντιπροσωπεύουν ἕνα καί τό αὐτό ἐλεύθερον διάνυσμα.

Πέντε ἐφαρμοστά διανύσματα ἀντιπροσωπευτικά ἑνός ἐλευθέρου διανύσματος.

Ὥστε ὅλα τά διανύσματα μιᾶς κλάσεως ἰσοδυναμίας ὁρίζουν ἤ ἀντιπροσωπεύουν τό ἴδιον ἐλεύθερον διάνυσμα. Τά ἐλεύθερα διανύσματα θά τά συμβολίζωμεν μέ μικρά Ἑλληνικά γράμματα ἐπιγραμμισμένα μέ ἕνα βέλος:

$$\vec{\alpha}\,,\ \vec{\beta}\,,\ \vec{\gamma}\,,\ \text{κ.ο.κ.}$$

Εἰδικῶς τό μηδενικόν ἐλεύθερον διάνυσμα, δηλαδή ἐκεῖνο πού ἀντιπροσωπεύεται ἀπό τήν κλάσιν τῶν μηδενικῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων, θά τό συμβολίζωμεν μέ $\overline{O}$.

Διά νά δηλώσωμεν ὅτι τό ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ὁρίζεται ἤ ἀντιπροσωπεύεται ἀπό τό ἐφαρμοστόν $\overline{AB}$, θά γράφωμεν :

$$\vec{\alpha} = \overrightarrow{AB} \qquad \text{ἤ} \qquad \overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}\,.$$

Δύο ἐλεύθερα διανύσματα $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ εἶναι ἴσα:

$$\vec{\alpha} = \vec{\beta}\,,$$

ὅταν καί μόνον ὅταν ἀντιπροσωπεύωνται ἀπό τήν ἰδίαν κλάσιν ἰσοδυναμίας, μέ ἄλλους λόγους ἀπό δύο ἴσα μεταξύ των ἐφαρμοστά διανύσματα.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἕνα ἐλεύθερον διάνυσμα δέν ἔχει οὔτε ὡρισμένον φορέα οὔτε ὡρισμένην ἀρχήν ἤ πέρας· ἐάν ὅμως δέν εἶναι τό $\vec{0}$, τότε ἔχει ὡρισμένην διεύθυνσιν, φοράν καί μῆκος : τήν κοινήν διεύθυνσιν, τήν κοινήν φοράν καί τό κοινόν μῆκος τῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τά ὁποῖα τό ἀντιπροσωπεύουν. Μέ ἄλλους λόγους ἐάν

$$\vec{\alpha} \neq \vec{0} \quad \text{καί} \quad \vec{\alpha} = \overrightarrow{AB} ,$$

τότε:

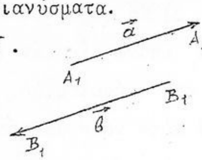
διεύθυνσις τοῦ $\vec{\alpha}$ = διεύθυνσις τοῦ $\overrightarrow{AB}$,

φορά τοῦ $\vec{\alpha}$ = φορά τοῦ $\overrightarrow{AB}$

καί μῆκος $|\vec{\alpha}|$ τοῦ $\vec{\alpha}$ = $|\overrightarrow{AB}|$.

Δύο ἐλεύθερα διανύσματα λέγονται <u>ἀντίθετα</u> , ὅταν ἀντιπροσωπεύωνται ἀπό δύο ἀντίθετα ἐφαρμοστά διανύσματα.

Τό ἀντίθετον τοῦ $\vec{\alpha}$ παριστάνεται μέ $-\vec{\alpha}$.

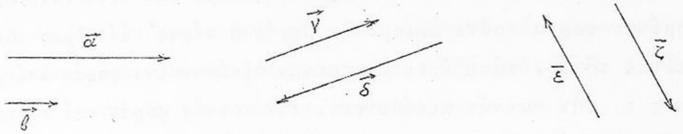


Δύο ἐλεύθερα διανύσματα $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$, πού ἀντιπροσωπεύονται ἀντιστοίχως ἀπό τά ἐφαρμοστά $\overrightarrow{A_1A_2}$ καί $\overrightarrow{B_1B_2}$, λέγονται <u>συγγραμμικά</u>, ὅταν τά $\overrightarrow{A_1A_2}$ καί $\overrightarrow{B_1B_2}$ εἶναι συγγραμμικά.

Λόγος $\dfrac{\vec{\alpha}}{\vec{\beta}}$ ἑνός ἐλευθέρου διανύσματος $\vec{\alpha}$ πρός ἕνα συγγραμμικόν του $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ ὁ λόγος $\dfrac{\overrightarrow{A_1A_2}}{\overrightarrow{B_1B_2}}$ δύο ἀντιστοίχων ἀντιπροσωπευτικῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων. Ὁ λόγος αὐτός εἶναι ἕνας σχετικός ἀριθμός πού ἔχει ἀπόλυτον τιμήν τό πηλίκον

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| : |\overrightarrow{B_1B_2}|$$

τῶν μηκῶν τῶν $\overrightarrow{A_1A_2}$ καί $\overrightarrow{B_1B_2}$ (μηκῶν πού μετρήθηκαν μέ τήν ἰδίαν μονάδα μήκους) καί πρόσημον τό + , ἐάν τά $\overrightarrow{A_1A_2}$ καί $\overrightarrow{B_1B_2}$ εἶναι ὁμόρροπα, τό − , ἐάν τά $\overrightarrow{A_1A_2}$ καί $\overrightarrow{B_1B_2}$ εἶναι ἀντίρροπα.



Π.χ. είς τό ἀνωτέρω σχῆμα ἔχομεν:

$$\frac{\vec{\alpha}}{\vec{\beta}} = +3 \quad , \quad \frac{\vec{\gamma}}{\vec{\delta}} = -\frac{2}{3} \quad , \quad \frac{\vec{\varepsilon}}{\vec{\zeta}} = -1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά δείξετε ὅτι διά δύο ὁποιαδήποτε ἐφαρμοστά διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου ἰσχύει ἡ λογική ἰσοδυναμία:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB}$ ἀντίθετον τοῦ $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

2) Νά χαράξετε δύο <u>ἀντίθετα</u> ἐφαρμοστά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{A_1B_1}$ ἐπάνω είς τόν ἴδιον φορέα καί νά δείξετε ὅτι τό μέσον 0 τοῦ τμήματος AA_1 συμπίπτει μέ τό μέσον τοῦ τμήματος BB_1. Ἀπό αὐτό νά συμπεράνετε ὅτι τό σχῆμα πού ἀποτελεῖται ἀπό τά δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{A_1B_1}$ ἔχει κέντρον συμμετρίας τό 0.

3) Νά χαράξετε δύο <u>ἀντίθετα</u> διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{A_1B_1}$ μέ διαφορετικούς φορεῖς καί νά ἐπαληθεύσετε ὅτι τό σημεῖον A εἶναι συμμετρικόν τοῦ A_1 καί τό B συμμετρικόν τοῦ B_1 ὡς πρός τό σημεῖον τομῆς 0 τῶν τμημάτων AA_1 καί BB_1. Πῶς ἕπεται ἡ ἰδιότης αὐτή εἴτε ἀπό ὅσα ἐμάθατε περί συμμετρίας ὡς πρός σημεῖον (Βιβλ. Ι , σελ. 96-100Β) εἴτε ἀπό ὅσα γνωρίζετε περί παραλλήλων εὐθειῶν (Βιβλ. Ι, σελ. 97-98 Α) καί περί ἰσότητος τριγώνων (Βιβλ. Ι , σ. 104 Γ) ;

4) Ἀπό τάς ἀσκήσεις 2) καί 3) νά συμπεράνετε τό ἑξῆς: Ἐάν $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{A_1B_1}$ εἶναι ἀντίθετα διανύσματα , τότε μία στροφή τοῦ $\overrightarrow{AB}$ περί τό σημεῖον 0 κατά γωνίαν 180^0 (Βιβλ. Ι, σ. 121Γ) θά φέρῃ τό $\overrightarrow{AB}$ είς σύμπτωσιν μέ τό $\overrightarrow{A_1B_1}$.

5) Νά χαράξετε δύο ἴσα ἐφαρμοστά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$

ἐπάνω εἰς τόν ἴδιον φορέα καί νά δείξετε ὅτι:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Longleftrightarrow \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta} .$$

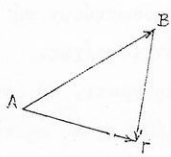
6) Νά χαράξετε δύο ἴσα ἐφαρμοστά διανύματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ μέ διαφορετικούς φορεῖς καί νά ἐπαληθεύσετε ὅτι τότε $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$. Πῶς ἕπεται ἡ ἰδιότης αὐτή εἴτε ἀπό ὅσα γνωρίζετε περί παραλληλογράμμων (Βιβλ. Ι , σελ. 100 Β) εἴτε ἀπό ὅσα ἐμάθατε περί παραλλήλων εὐθειῶν καί περί ἰσότητος τριγώνων ;

7) Ἀπό τάς ἀσκήσεις 5) καί 6) νά συμπεράνετε τό ἑξῆς: Ἐάν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε μία παράλληλος μετατόπισις (Βιβλ. Ι , σ. 118Γ) τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ κατά τό διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ θά φέρῃ τό $\overrightarrow{AB}$ εἰς σύμπτωσιν μέ τό $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

8) Δύο διάφορα σημεῖα Α καί Α′ εἶναι συμμετρικά μεταξύ των ὡς πρός τό σημεῖον Ο. Νά εὕρετε τούς λόγους:

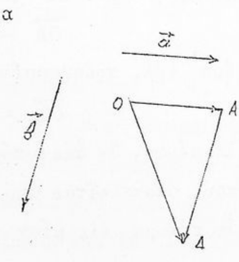
$$\frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}} , \quad \frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{AA'}} , \quad \frac{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{OA'}} , \quad \frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{AO}}$$

§ 2. Πρόσθεσις διανυσμάτων.



2.1. Πρόσθεσις δύο ἐλευθέρων διανυσμάτων.

Ἄθροισμα δύο διαδοχικῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{B\Gamma}$ λέγεται τό διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ πού ἔχει ἀρχήν τήν ἀρχήν τοῦ 1ου διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ καί πέρας τό πέρας τοῦ 2ου διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ καί πέρας τό πέρας τοῦ 2ου $\overrightarrow{B\Gamma}$. (Παραβ. Βιβλ. Ι, σ. 52 Γ). Ἀπό τόν ὁρισμόν αὐτόν προχωροῦμεν τώρα εἰς τόν ἀκόλουθυν .



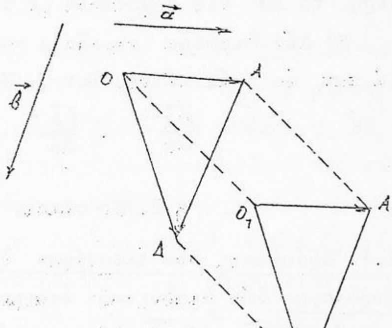
Ἄς εἶναι $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ δύο ἐλεύθερα διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου (σχῆμα παραπλεύρως). Μέ ἀρχήν ἕνα σημεῖον Ο τοῦ ἐπιπέδου κατασκευάζομεν τό ἐφαρμοστόν διάνυσμα

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\alpha}$, ἀκολούθως μέ ἀρχήν τό πέρας Α τοῦ $\overrightarrow{OA}$ κατασκευάζομεν τό ἐφαρμοστόν διάνυσμα $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{\beta}$. Τό διάνυσμα $\overrightarrow{O\Delta}$, πού εἶναι ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ καί $\overrightarrow{A\Delta}$, ὁρίζει ἕνα ἐλεύθερον διάνυσμα $\overrightarrow{\delta}$. Αὐτό τό $\overrightarrow{\delta}$ εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ τό <u>ἄθροισμα</u> τοῦ $\overrightarrow{\alpha}$ μέ τό $\overrightarrow{\beta}$ · γράφομεν συμβολικῶς:

$$\overrightarrow{\delta} = \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} .$$

Ὥστε, ἄθροισμα δύο ἐλευθέρων διανυσμάτων $\overrightarrow{\alpha}$ καί $\overrightarrow{\beta}$ εἶναι τό ἐλεύθερον διάνυσμα πού ὁρίζεται ἀπό τό ἄθροισμα δύο διαδοχικῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τά ὁποῖα ἀντιπροσωπεύουν ἀντιστοίχως τά $\overrightarrow{\alpha}$ καί $\overrightarrow{\beta}$.

<u>Παρατήρησις 1</u>. Εἶναι εὔκολον νά βεβαιωθῶμεν ὅτι τό ἄθροισμα $\overrightarrow{\delta} = \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$ δέν μεταβάλλεται, ἄν ἀλλάξωμεν τό σημεῖον Ο ἀπό τό ὁποῖον ἀναχωροῦμεν, διά νά χαράξωμεν τά διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ καί $\overrightarrow{A\Delta}$ πού ἀντιπροσωπεύουν τά $\overrightarrow{\alpha}$ καί $\overrightarrow{\beta}$ ἀντιστοίχως.



Πράγματι, ἄν ἀντί τοῦ Ο λάβωμεν ὡς ἀφετηρίαν ἕνα ἄλλο σημεῖον O_1 (σχῆμα παραπλεύρως), θά ἔχωμεν νά χαράξωμεν τά διανύσματα $\overrightarrow{O_1A_1} = \overrightarrow{\alpha}$ καί $\overrightarrow{A_1\Delta_1} = \overrightarrow{\beta}$. Θά ἰσχύουν λοιπόν αἱ ἰσότητες:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O_1A_1} \quad , \quad \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{A_1\Delta_1}$$

ἄρα (βλ. προηγουμένας Ἀσκήσεις 5) ἕως 7)) καί αἱ :

$$\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{\Delta\Delta_1} .$$

Ἑπομένως, ἄν ἀποτυπώσωμεν ἐπί διαφανοῦς χάρτου τό σχῆμα πού ἀποτελεῖται ἀπό τά $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{A\Delta}$ καί $\overrightarrow{O\Delta}$ καί ὑποβάλωμεν τό ἀποτύπωμα εἰς μίαν παράλληλον μετατόπισιν (βιβλ. Ι, σ.

118-120 Γ) κατά τό διάνυσμα OO_1, τότε τό ἀποτύπωμα αὐτό θά ἔλθῃ νά συμπέσῃ μέ τό σχῆμα πού ἀποτελεῖται ἀπό τά $\overrightarrow{O_1A_1}$, $\overrightarrow{A_1\Delta_1}$ καί $\overrightarrow{O_1\Delta_1}$.

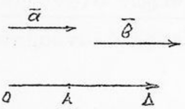
Συνεπῶς ἰσχύει ἡ ἰσότης

$$\overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{O_1\Delta_1}\cdot$$

ἀπό αὐτήν ὅμως ἕπεται ὅτι τό ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\delta}$, πού ὁρίζεται ἀπό τό ἐφαρμοστόν $\overrightarrow{O\Delta}$, εἶναι τό ἴδιον μέ ἐκεῖνο πού ὁρίζεται ἀπό τό $\overrightarrow{O_1\Delta_1}$.

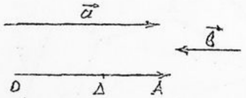
<u>Παρατήρησις 2.</u> Ὁ προηγούμενος ὁρισμός τοῦ ἀθροίσματος δύο ἐλευθέρων διανυσμάτων εἶναι γενικός· ἰσχύει καί εἰς τήν περίπτωσιν πού τά δύο ἐλεύθερα διανύσματα $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ εἶναι συγγραμμικά (ἔχουν τήν ἰδίαν διεύθυνσιν). Παρουσιάζονται τότε αἱ ἀκόλουθοι δύο ὑποπεριπτώσεις:

1η. Τά $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ ἔχουν τήν ἰδίαν φοράν:



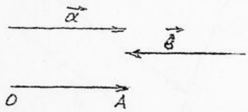
$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}, \quad \overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta} \\ \overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{A\Delta}\end{array}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{O\Delta} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

2α. Τά $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ ἔχουν ἀντιθέτους φοράς:



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}, \quad \overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta} \\ \overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{A\Delta}\end{array}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{O\Delta} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

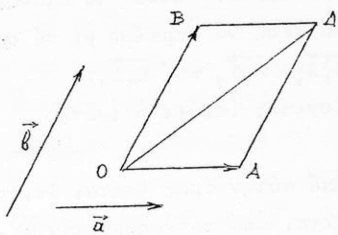
Εἰδικῶς, ἄν τά $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ εἶναι ἀντίθετα, τότε:



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}, \quad \overrightarrow{AO} = \vec{\beta} \\ \overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AO}\end{array}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{OO} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{0}.$$

<u>Παρατήρησις 3.</u> Τά ἐλεύθερα διανύσματα $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ ἄς εἶναι μή συγγραμμικά. Τό ἄθροισμά των $\vec{\delta} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ ἀντιπροσωπεύεται ἀπό τό ἐφαρμοστόν διάνυσμα $\overrightarrow{O\Delta}$ πού εἶναι ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ καί $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}$. Ἐάν ἀπό τό σημεῖον O ὡς ἀρχήν χαράξωμεν καί τό διάνυσμα

$\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$, θά παρατηρήσωμεν ὅτι σχηματίζεται ἕνα παραλληλόγραμμον ΟΑΔΒ. Αὐτοῦ τοῦ παραλληλογράμμου ἡ διαγώνιος $\overrightarrow{O\Delta}$ πού ἀναχωρεῖ ἀπό τήν κοινήν ἀρχήν Ο τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ καί $\overrightarrow{OB}$ συμπίπτει μέ τό ἄθροισμα $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{A\Delta}$.



Ὥστε μέ τήν χάραξιν αὐτῆς τῆς διαγωνίου ἔχομεν ἕνα δεύτερον τρόπον νά εὑρίσκωμεν τό ἄθροισμα δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ (ὅταν $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$). Ὁ τρόπος αὐτός λέγεται <u>κανών τοῦ παραλληλογράμμου</u> καί συμβολίζεται μέ τήν γραφήν:

$$\overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} .$$

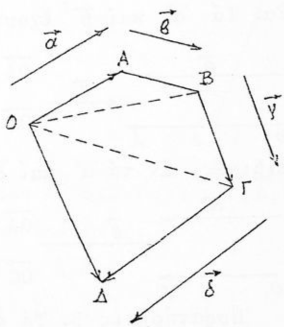
2.2. Ἄθροισμα τριῶν ἤ περισσοτέρων ἐλευθέρων διανυσμάτων.

Ἔστω ὅτι δίδονται εἰς τό ἐπίπεδον τά ἐλεύθερα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{\delta}$. Ὀνομάζομεν ἄθροισμά των

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta}$$

τό ἐλεύθερον διάνυσμα πού προκύπτει ἀπό τάς ἀκολούθους τρεῖς προσθέσεις δύο διανυσμάτων κάθε φοράν:

Προσθέτομεν εἰς τό 1ον διάνυσμα $\vec{\alpha}$ τό 2ον $\vec{\beta}$, εἰς τό ἄθροισμά των $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$ τό 3ον διάνυσμα $\vec{\gamma}$ καί εἰς τό προκῦπτον νέον ἄθροισμα τό 4ον $\vec{\delta}$:



$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta} = [(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma}] + \vec{\delta} .$$

Διά νά κατασκευάσωμεν αὐτό τό ἄθροισμα, λαμβάνομεν, ὅπως φαίνεται εἰς τό ἀνωτέρω σχῆμα:

$$\overline{OA} = \vec{\alpha} \quad , \quad \overline{AB} = \vec{\beta} \quad , \quad \overline{B\Gamma} = \vec{\gamma} \quad , \quad \overline{\Gamma\Delta} = \vec{\delta}$$

καί εὑρίσκομεν:

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

$$(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{O\Gamma}$$

$$[(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}\,] + \vec{\delta} = \overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{O\Delta}$$

Ἄρα

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta} = \overrightarrow{O\Delta}\,.$$

Διά νά προσθέσωμεν λοιπόν τρία ἤ περισσότερα ἐλεύθερα διανύσματα πού δίδονται μέ μίαν ὡρισμένην σειράν κατασκευάζομεν μίαν ἀντίστοιχον σειράν ἀπό διαδοχικά ἐφαρμοστά διανύσματα ἀντιπροσωπευτικά τῶν δοθέντων ἐλευθέρων. Τό ἐφαρμοστόν διάνυσμα, πού ἔχει ἀρχήν τήν ἀρχήν τοῦ πρώτου ἐφαρμοστοῦ καί πέρας τό πέρας τοῦ τελευταίου ἐφαρμοστοῦ, ἀντιπροσωπεύει τότε τό ζητούμενον ἄθροισμα.

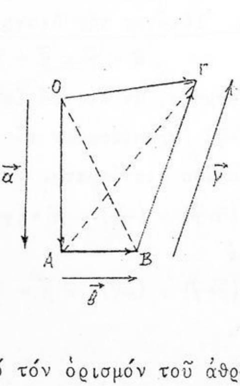
2.3. Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως.

1η. $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$, ἀντιμεταθετικότης.

Ἡ ἰδιότης αὐτή ἕπεται ἀμέσως ἀπό τόν κανόνα τοῦ παραλληλογράμμου (§ 2.1, Παρατήρ. 3).

2α. $(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta}+\vec{\gamma})$, προσεταιριστικότης.

Πράγματι, ὅπως φαίνεται εἰς τό παρακείμενον σχῆμα ἔχομεν:



$$\begin{aligned}(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) + \vec{\gamma} &= (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{B\Gamma}\\ &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{B\Gamma}\\ &= \overrightarrow{O\Gamma}\end{aligned}$$

καί

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} + (\vec{\beta}+\vec{\gamma}) &= \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma})\\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{A\Gamma}\\ &= \overrightarrow{O\Gamma}.\end{aligned}$$

Ἀπό τάς δύο αὐτάς ἰδιότητας καί ἀπό τόν ὁρισμόν τοῦ ἀθροίσματος τριῶν ἤ περισσοτέρων ἐλευθέρων διανυσμάτων ἕπονται γενικώτερον αἱ ἀκόλουθοι δύο ἰδιότητες:

I) Ἕνα ἄθροισμα ἐλευθέρων διανυσμάτων δέν μεταβάλλεται, ἄν ἀλλάξωμεν τήν σειράν τῶν προσθετέων διανυσμάτων. Π.χ.

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha} + \vec{\delta} + \vec{\gamma} = \vec{\gamma} + \vec{\alpha} + \vec{\delta} + \vec{\beta}.$$

II) Ἕνα ἄθροισμα ἐλευθέρων διανυσμάτων δέν μεταβάλλεται, ἄν ἀντικαταστήσωμεν δύο ἤ περισσότερα διανύσματα μέ τό ἄθροισμά των. Ἀντιστρόφως, ἠμποροῦμεν νά ἀντικαταστήσωμεν ἕνα προσθετέον διάνυσμα μέ δύο ἤ περισσότερα διανύσματα πού τό ἔχουν ὡς ἄθροισμα.

Π.χ.

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\delta}) + \vec{\gamma}$$

καί

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2, \text{ ἐάν } \vec{\beta} = \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2.$$

3η. <u>Τό μηδενικόν ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{0}$ εἶναι οὐδέτερον στοιχεῖον εἰς τήν πρόσθεσιν ἐλευθέρων διανυσμάτων:</u>

$$\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha} = \vec{0} + \vec{\alpha}.$$

Πράγματι, ἔστω $\vec{\alpha} = \overrightarrow{OA}$. Ὡς ἀντιπροσωπευτικόν ἐφαρμοστόν διάνυσμα διά τό $\vec{0}$ ἠμποροῦμεν νά λάβωμεν τό $\overrightarrow{AA}$. Θά ἔχωμεν τότε

$$\vec{\alpha} + \vec{0} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}.$$

4η <u>Ἰδιότης τῆς διαγραφῆς:</u>

$$\vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\gamma} \Longrightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}.$$

Πράγματι, ἄν εἰς τά ἴσα ἐξ ὑποθέσεως διανύσματα $(\vec{\alpha}+\vec{\gamma})$ καί $(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ προσθέσωμεν τό $-\vec{\gamma}$, ἀντίθετον τοῦ $\vec{\gamma}$, θά λάβωμεν δύο νέα ἴσα διανύσματα. Εἶναι ὅμως:

$$(\vec{\alpha}+\vec{\gamma}) + (-\vec{\gamma}) = \vec{\alpha} + [\gamma + (-\vec{\gamma})] = \vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$$

καί

$$(\vec{\beta}+\vec{\gamma}) + (-\vec{\gamma}) = \vec{\beta} + [\vec{\gamma} + (-\vec{\gamma})] = \vec{\beta} + \vec{0} = \vec{\beta}.$$

Ἄρα

$$\vec{\alpha} = \vec{\beta}.$$

<u>Παρατήρησις</u>. Ἄν συνδυάσωμεν τήν ἀνωτέρω λογικήν σχέσιν μέ τήν:

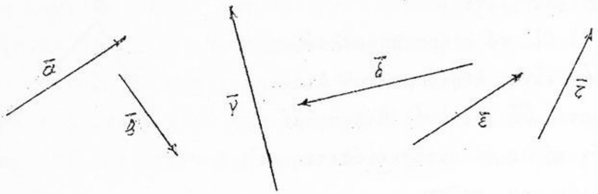
$$\vec{\alpha} = \vec{\beta} \implies \vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\gamma},$$

θά λάβωμεν τήν ἰσοδυναμίαν:

$$\vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\gamma} \iff \vec{\alpha} = \vec{\beta}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

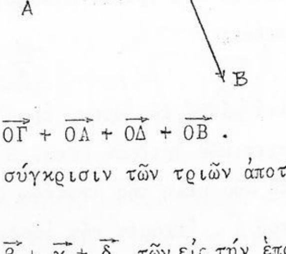
1) Δίδονται τά κατωτέρω ἐλεύθερα διανύσματα:



Ἀφοῦ τά ἀποτυπώσετε ὅλα μαζύ ἐπάνω εἰς τό ἴδιον διαφανές, νά εὕρετε ἐπάνω εἰς αὐτό τά ἀκόλουθα ἀθροίσματα:

$\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\vec{\alpha} + \vec{\gamma}$, $\vec{\beta} + \vec{\delta}$, $\vec{\gamma} + \vec{\varepsilon} + \vec{\zeta}$, $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\zeta} + \vec{\delta}$.

2) Νά εὕρετε μέ τόν κανόνα τοῦ παραλληλογράμμου τό ἄθροισμα τῶν τεσσάρων διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O\Gamma}$, $\overrightarrow{O\Delta}$ τοῦ παρακειμένου σχήματος.



(Θά ἀποτυπώσετε τό σχῆμα ἐπάνω εἰς διαφανές καί θά τό μεταφέρετε εἰς τό τετράδιόν σας).

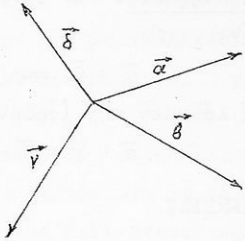
Μέ τόν ἴδιον τρόπον νά εὕρετε τά ἀθροίσματα:

1ον $\overrightarrow{O\Delta} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}$, 2ον $\overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Delta} + \overrightarrow{OB}$.

Τί ἔχετε νά παρατηρήσετε ἀπό τήν σύγκρισιν τῶν τριῶν ἀποτελεσμάτων;

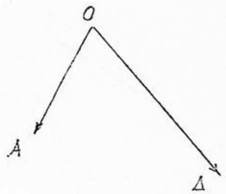
3) Νά εὕρετε τό ἄθροισμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta}$ τῶν εἰς τήν ἑπομένην σελίδα διανυσμάτων μέ τόν κανόνα πού διετυπώθη εἰς τό

τέλος τοῦ § 2.2.
(Νά κάμετε πάλιν ἀποτύπωσιν τοῦ σχήματος ἐπάνω εἰς διαφανές).



Ἡ πρόσθεσις τῶν διανυσμάτων νά γίνῃ καί μέ διαφορετικήν σειράν τῶν προσθετέων, π.χ. μέ τήν : $\vec{\alpha} + \vec{\delta} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$
Τί παρατηρεῖτε ;

4) Εἰς τό σχῆμα παραπλεύρως τό $\overrightarrow{O\Delta}$ εἶναι ἄθροισμα τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OA}$ καί ἑνός ἄλλου μέ ἀρχήν τό O. Νά κατασκευάσετε τό διάνυσμα τοῦτο.



5) Δύο ἐφαρμοστά διανύσμτα $\overrightarrow{OA}$ καί $\overrightarrow{OB}$ ἔχουν ἴσα μήκη. Νά δείξετε ὅτι τό διάνυσμα $\overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ ἔχει φορέα τήν διχοτόμον τῆς γωνίας $\sphericalangle$ (OA, OB).

§ 3. Ἀφαίρεσις διανυσμάτων.

<u>3.1. Διαφορά δύο ἐλευθέρων διανυσμάτων</u>. Εἰς τήν ἀφαίρεσιν δίδονται δύο ἐλεύθερα διανύσματα: ἕνα πρῶτον $\vec{\alpha}$ (μειωτέον διάνυσμα) καί ἕνα δεύτερον $\vec{\beta}$ (ἀφαιρετέον διάνυσμα), ζητεῖται δέ ἕνα τρίτον διάνυσμα $\vec{x}$ διά τό ὁποῖον νά ἀληθεύῃ ἡ σχέσις :

$$\vec{\beta} + \vec{x} = \vec{\alpha}.$$

Διά νά τό εὕρωμεν, ἐργαζόμεθα ὅπως καί εἰς τήν ἀφαίρεσιν σχετικῶν ἀριθμῶν (Κεφ. Β΄, § 1.4.) : προσθέτομεν καί εἰς τά δύο μέλη τῆς ἀνωτέρω σχέσεως τό διάνυσμα $-\vec{\beta}$, ἀντίθετον τοῦ $\vec{\beta}$. Ἔχομεν τήν ἰσοδυναμίαν (βλ. Παρατήρησιν εἰς τό τέλος τῆς § 2) :

$$\vec{\beta} + \vec{x} = \vec{\alpha} \iff (-\vec{\beta}) + \vec{\beta} + \vec{x} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta}).$$

Εἶναι ὅμως

$$(-\vec{\beta}) + \vec{\beta} = \vec{0} \qquad \text{καί} \qquad \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}.$$

Ἄρα

$$\vec{\beta} + \vec{x} = \vec{\alpha} \iff \vec{x} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta}).$$

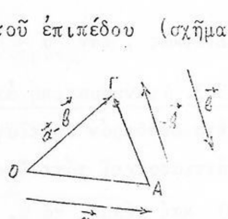
Ὥστε τό ζητούμενον διάνυσμα $\vec{x}$ εἶναι ἄθροισμα τοῦ μειωτέου διανύσματος $\vec{\alpha}$ μέ τό ἀντίθετον $-\vec{\beta}$ τοῦ ἀφαιρετέου διανύσματος $\vec{\beta}$. Τό διάνυσμα αὐτό $\vec{x}$ λέγεται <u>διαφορά</u> τοῦ διατεταγμένου ζεύγους $(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ τῶν δοθέντων διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$, συμβολίζεται δέ μέ τήν γραφήν $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$. Ἔχομεν:

$$\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta}).$$

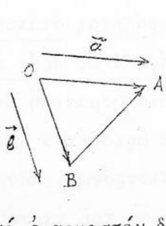
Διά νά εὕρωμεν λοιπόν τήν διαφοράν δύο διανυσμάτων προσθέτομεν εἰς τό μειωτέον διάνυσμα τό ἀντίθετον τοῦ ἀφαιρετέου διανύσματος.

3.2. <u>Κατασκευή ἑνός ἐφαρμοστοῦ διανύσματος ἀντιπροσωπευτικοῦ τῆς διαφορᾶς $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.</u>

<u>1ος τρόπος.</u> Μέ ἀρχήν ἕνα σημεῖον O τοῦ ἐπιπέδου (σχῆμα παραπλεύρως) κατασκευάζομεν τό ἐφαρμοστόν διάνυσμα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$. Ἀκολούθως, μέ ἀρχήν τό πέρας A τοῦ $\overrightarrow{OA}$ κατασκευάζομεν τό ἐφαρμοστόν διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma} = -\vec{\beta}$. Τό διάνυσμα $\overrightarrow{O\Gamma}$ εἶναι ἀντιπροσωπευτικόν τῆς διαφορᾶς $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.



<u>2ος τρόπος.</u> Κατασκευάζομεν δύο ἐφαρμοστά διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ καί $\overrightarrow{OB}$, μέ κοινήν ἀρχήν (σχ. παραπλεύρως), ἀντιπροσωπευτικά τῶν δοθέντων ἐλευθέρων διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$. Κατόπιν χαράσσομεν τό ἐφαρμοστόν διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$. Τό διάνυσμα αὐτό ἀντιπροσωπεύει τήν ζητουμένην διαφοράν $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$. Πράγματι, ἐπειδή



$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} \qquad \text{καί} \qquad \overrightarrow{BO} = -\vec{\beta}\,,$$

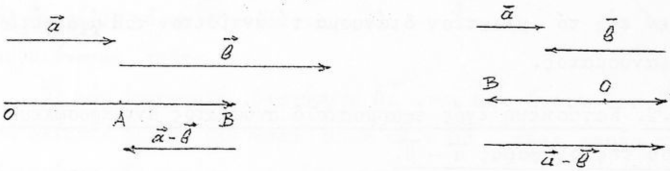
τό διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$ ἀντιπροσωπεύει τό ἄθροισμα $-\vec{\beta} + \vec{\alpha}$ πού εἶναι ἴσον μέ $\vec{\alpha} + (-\vec{\beta}) = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

Διά τόν 2ον αὐτόν τρόπον κατασκευῆς τῆς διαφορᾶς $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ γράφομεν :

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$$

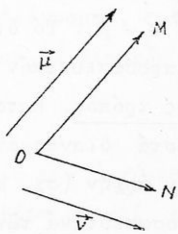
καί λέγομεν ὅτι τό $\overrightarrow{BA}$ εἶναι διαφορά τῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ καί $\overrightarrow{OB}$.

Παρατήρησις. Ὁ ὁρισμός τῆς διαφορᾶς $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ καί αἱ ἀνωτέρω δύο κατασκευαί ἰσχύουν φυσικά καί εἰς τήν περίπτωσιν πού τά δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ εἶναι συγγραμμικά. Π.χ. μέ τήν δευτέραν κατασκευήν εὑρίσκομεν:



Εἰδικῶς , ἐάν $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{0}$.

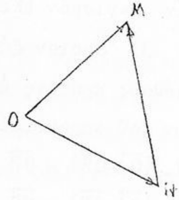
3.3. Διανυσματική ἀκτίς. Ἄς λάβωμεν ἐπάνω εἰς τό ἐπίπεδον ἕνα σταθερόν σημεῖον O. Εἰς κάθε σημεῖον M τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχεῖ τότε ἕνα ὡρισμένον ἐφαρμοστόν διάνυσμα μέ ἀρχήν O καί πέρας τό M. Τό διάνυσμα αὐτό ὀνομάζεται διανυσματική ἀκτίς τοῦ σημείου M ὡς πρός ἀρχήν τό σημεῖον O.



Ἡ διανυσματική ἀκτίς ἀντιπροσωπεύει ἕνα ὡρισμένον ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\mu}$. Ἀντιστρόφως, κάθε ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\nu}$ τοῦ ἐπιπέδου ἀντιπροσωπεύεται ἀπό μίαν ὡρισμένην διανυσματικήν ἀκτῖνα $\overrightarrow{ON}$ καί εἰς αὐτήν ἀντιστοιχεῖ τό ὡρισμένον N τοῦ ἐπιπέδου.

Παρατηροῦμεν λοιπόν ὅτι, μέσω τῶν διανυσματικῶν ἀκτίνων ὡς πρός ἀρχήν τό O, τό σύνολον τῶν ἐλευθέρων διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου ἀπεικονίζεται ἐπί τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου. Ἡ ἀπεικόνισις εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος.

3.4. Παράστασις ἐφαρμοστοῦ διανύσματος μέ τήν διαφοράν δύο διανυσματικῶν ἀκτίνων. Ἔστω $\overrightarrow{NM}$ τυχόν ἐφαρμοστόν διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου καί $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OM}$ αἱ διανυσματικαί ἀκτῖνες τῶν ἄκρων του. Σύμφωνα μέ ὅσα εἴπαμεν εἰς τό ἐδάφιον § 3.2., ἔχομεν



$\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OM}$ καί $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}$.

Ὥστε , κάθε ἐφαρμοστόν διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου εἶναι διαφορά τῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος τοῦ πέρατός του καί τῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος τῆς ἀρχῆς του.

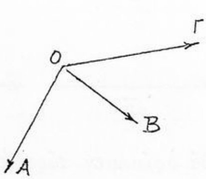
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Δίδονται τά ἀκόλουθα ἐλεύθερα διανύσματα:

Ἀφοῦ τά ἀποτυπώσετε ἐπάνω εἰς τό ἴδιον διαφανές , νά εὕρετε ἐπάνω εἰς αὐτό τάς διαφοράς:

$\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$, $\vec{\gamma} - \vec{\delta}$, $\vec{\varepsilon} - \vec{\gamma}$, $\vec{\delta} - \vec{\varepsilon}$, $\vec{\alpha} - \vec{\varepsilon}$.

2) Ἀφοῦ ἀποτυπώσετε ἐπάνω εἰς διαφανές τά ἐφαρμοστά διανύσματα τοῦ σχήματος παραπλεύρως, νά ἐκτελέσετε τάς ἀκολούθους πράξεις εἰς τρία χωριστά σχεδιάσματα:

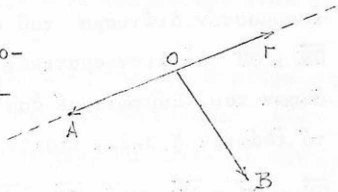


α) $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) - \overrightarrow{O\Gamma}$

β) $\overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{O\Gamma})$

γ) $(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{O\Gamma}) + \overrightarrow{OB}$.

'Εάν ἡ σχεδίασίς σας εἶναι ἀρκετά ἀκριβής, θά πιστοποιήσετε ὅτι τά ἀποτελέσματα εἶναι τρία ἴσα ἐφαρμοστά διανύσματα. Ποίας ἀντιστοίχους ἰσότητας συνηντήσατε εἰς τόν ἀλγεβρικόν λογισμόν (Κεφ. Β΄) ;



3) Ὅμοιον ζήτημα διά τάς ἀκολούθους πράξεις ἐπί τῶν διανυσμάτων τοῦ παρακειμένου σχήματος:

α) $(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) - \overrightarrow{O\Gamma}$

β) $(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{O\Gamma}) - \overrightarrow{OB}$

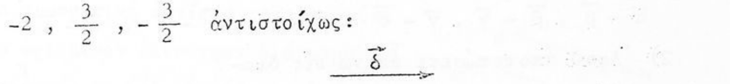
γ) $\overrightarrow{OA} - (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma})$.

4) Νά ἐπαληθεύσετε μέ κατάλληλον σχεδίασιν ὅτι διά τά ἐλεύθερα διανύσματα τοῦ παραπλεύρως σχήματος ἰσχύει ἡ σχέσις:

$\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (\vec{\alpha} + \vec{\gamma}) - (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$.

§ 4. Πολλαπλασιασμός ἑνός ἐλευθέρου διανύσματος μέ σχετικόν ἀριθμόν.

4.1. Εἰς τό Βιβλ. Ι, σ. 58 Γ ἐμάθαμεν πῶς εὑρίσκεται τό γινόμενον ἑνός διανύσματος $\vec{\delta}$ μέ ἕνα ρητόν σχετικόν ἀριθμόν λ. Πρός ὑπενθύμισιν κατασκευάζομεν κατωτέρω ἀντιπροσωπευτικά διανύσματα τεσσάρων γινομένων δι'ἕνα δεδομένον $\vec{\delta}$ καί λ $=2$, -2 , $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}$ ἀντιστοίχως:



Θά ὁρίσωμεν τώρα ἐπακριβῶς αὐτήν τήν πρᾶξιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἑνός ἐλευθέρου διανύσματος μέ ἕνα ρητόν σχετικόν ἀριθμόν καί θά ἐξετάσωμεν μερικάς ἰδιότητάς της.

4.2. Ὁρισμός. Ἔστω πρῶτον $\vec{\delta} \neq \vec{0}$ ἕνα ἐλεύθερον διάνυσμα καί $\lambda \neq 0$ ἕνας ρητός σχετικός ἀριθμός. Τό γινόμενον $\lambda\vec{\delta}$ εἶναι ἕνα ἐλεύθερον διάνυσμα μέ τάς ἀκολούθους τρεῖς ἰδιότητας :

1η. Τό $\lambda\vec{\delta}$ ἔχει μῆκος ἴσον μέ $|\lambda|\cdot|\vec{\delta}|$:

$$|\lambda\vec{\delta}| = |\lambda|\cdot|\vec{\delta}|$$

2α. Τό $\lambda\vec{\delta}$ ἔχει τήν ἰδίαν διεύθυνσιν (εἶναι συγγραμμικόν) μέ τό $\vec{\delta}$. Μέ ἄλλους λόγους, ἄν $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἕνα ἐφαρμοστόν διάνυσμα ἀντιπροσωπευτικόν τοῦ $\vec{\delta}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ἕνα διάνυσμα ἀντιπροσωπευτικόν τοῦ $\lambda\vec{\delta}$, τότε ἔχομεν (μέ εὐρεῖαν σημασίαν):

$$\text{εὐθεῖα } AB \parallel \text{εὐθεῖα } \Gamma\Delta \ .$$

3η. Τό $\lambda\vec{\delta}$ ἔχει τήν ἰδίαν φοράν μέ τό $\vec{\delta}$, ἄν $\lambda > 0$, τήν ἀντίθετον φοράν, ἄν $\lambda < 0$.

Αἱ τρεῖς αὐταί ἰδιότητες προσδιορίζουν ἐντελῶς τό διάνυσμα $\lambda\vec{\delta}$ εἰς τήν θεωρουμένην γενικήν περίπτωσιν $\lambda \neq 0$ καί $\vec{\delta} \neq \vec{0}$.

Ἀπομένει νά εἴπωμεν ποῖον εἶναι τό $\lambda\vec{\delta}$, ὅταν ἔχωμεν εἴτε $\lambda = 0$ εἴτε $\vec{\delta} = \vec{0}$.

Εἶναι φυσικόν, ἀποβλέποντες εἰς τήν 1ην ἰδιότητα, νά ὁρίσωμεν ὅτι τότε τό $\lambda\vec{\delta}$ εἶναι τό μηδενικόν διάνυσμα $\vec{0}$:

$$\lambda\vec{\delta} = \vec{0}, \text{ὅταν εἴτε } \lambda=0 \text{ εἴτε } \vec{\delta} = \vec{0} \ .$$

Ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμόν φθάνομεν ἀμέσως εἰς τά ἀκόλουθα συμπεράσματα:

I) $1\cdot\vec{\delta} = \vec{\delta}$, $2\vec{\delta} = \vec{\delta} + \vec{\delta}$, $3\vec{\delta} = \vec{\delta} + \vec{\delta} + \vec{\delta}$, κ.ο.κ.

II) $(-1)\vec{\delta}$ = ἀντίθετον τοῦ $\vec{\delta} = -\vec{\delta}$

III) $(-\lambda)\vec{\delta}$ = ἀντίθετον τοῦ $\lambda\vec{\delta}$

IV) Ἔστω $\vec{\delta} \neq \vec{0}$ καί $\vec{\delta}' = \lambda\vec{\delta}$. Ἐπειδή τό $\vec{\delta}'$ εἶναι συγγραμμικόν μέ τό $\vec{\delta}$, ἠμποροῦμεν νά σχηματίσωμεν τόν λόγον $\frac{\vec{\delta}'}{\vec{\delta}}$. Εὑρίσκομεν τότε:

$$\frac{\vec{\delta}'}{\vec{\delta}} = \lambda$$

Π.χ., ἐάν $\vec{\delta}' = 2\vec{\delta}$, τότε $\dfrac{\vec{\delta}'}{\vec{\delta}} = 2$.

Ἀντιστρόφως, ἐάν $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, $\vec{\alpha}'$ συγγραμμικόν μέ τό $\vec{\alpha}$ καί $\dfrac{\vec{\alpha}'}{\vec{\alpha}} = \kappa$, τότε

$$\vec{\alpha}' = \kappa\,\vec{\alpha}.$$

Ὥστε ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία :

$$\vec{\delta}' = \lambda\vec{\delta} \Longleftrightarrow \frac{\vec{\delta}'}{\vec{\delta}} = \lambda \qquad (\mu\acute{\varepsilon}\ \vec{\delta} \neq \vec{0}).$$

4.3. Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐλευθέρου διανύσματος μέ σχετικόν ἀριθμόν.

1ον. Βάσει τοῦ ὁρισμοῦ εὑρίσκομεν εὔκολα ὅτι

$$(-2)\cdot(3\vec{\delta}) = (-2\cdot 3)\vec{\delta} = -6\vec{\delta}\ .$$

(Παράβ. καί Βιβλ. Ι , σ. 76 Γ). Γενικῶς ἔχομεν :

$$\lambda_2(\lambda_1\vec{\delta}) = (\lambda_2\lambda_1)\vec{\delta}\ , \quad (\lambda_1 \in P\ ,\ \lambda_2 \in P)\ .$$

Ὥστε ἰσχύει προσεταιριστικότης ὡς πρός τούς ἀριθμητικούς πολλαπλασιαστάς.

2ον. Βάσει τοῦ ὁρισμοῦ εὑρίσκομεν εὔκολα ὅτι

$$3\vec{\delta} = (-2+5)\vec{\delta} = -2\vec{\delta} + 5\vec{\delta}$$

(Παράβ. καί Βιβλ. Ι, σ. 59 Γ). Γενικῶς ἔχομεν:

$$(\lambda_1+\lambda_2)\vec{\delta} = \lambda_1\vec{\delta} + \lambda_2\vec{\delta}\ , \quad (\lambda_1 \in P\ ,\ \lambda_2 \in P\ ).$$

Ὥστε ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι ἐπιμεριστικός ὡς πρός τήν πρόσθεσιν τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν.

3ον. Ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι ἐπιμεριστικός καί ὡς πρός τήν πρόσθεσιν τῶν διανυσμάτων, δηλαδή

$$\lambda(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}\ .$$

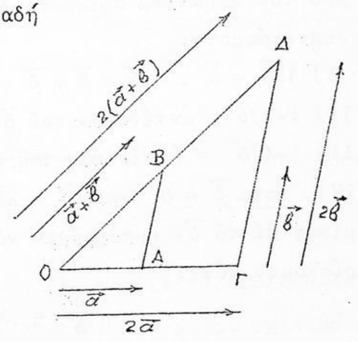
Π.χ. εἶναι εὔκολον νά ἐπαληθεύσωμεν ὅτι

$$2(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = 2\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}\ ,$$

βάσει τοῦ παραπλεύρως σχήματος εἰς τό ὁποῖον εἶναι:

$\vec{OA} = \vec{\alpha}$, $\vec{AB} = \vec{\beta}$, ἄρα

$\vec{OB} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\vec{O\Gamma} = 2\vec{\alpha}$,



$\overrightarrow{\Gamma\Delta} = 2\vec{\beta}$, ἄρα $\overrightarrow{O\Delta} = 2\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ καί $\overrightarrow{O\Delta} = 2\overrightarrow{OB} = 2(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$.

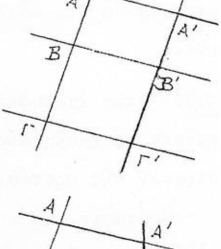
4.4. Θεώρημα τοῦ Θαλῆ. Ἔτσι ὀνομάζεται μία πολύ σημαντική γεωμετρική πρότασις πού ὀφείλεται εἰς τόν Ἕλληνα μαθηματικόν Θαλῆν τόν Μιλήσιον (640-546 π.Χ.), ἕνα ἀπό τούς ἑπτά "σοφούς" τῆς Ἀρχαίας Ἑλλάδος. Εἰς τήν πρότασιν αὐτήν ἠμποροῦμεν νά δώσωμεν τώρα τήν ἀκόλουθον διατύπωσιν χρησιμοποιοῦντες αὐτά πού εἴπαμεν περί διανυσμάτων.

Πρότασις. Ἄς εἶναι α, β, γ, ... τρεῖς ἤ περισσότεραι παράλληλοι εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου καί αὐταί ἄς τέμνουν δύο τυχούσας εὐθείας ε καί ε΄ εἰς τά σημεῖα Α, Β, Γ, ... καί Α΄, Β΄, Γ΄, ... ἀντιστοίχως.

Θά ἰσχύουν τότε αἱ ἰσότητες:

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{B\Gamma}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{B'\Gamma'}}, \quad \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{A\Gamma}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{A'\Gamma'}}, \quad \frac{\overrightarrow{B\Gamma}}{\overrightarrow{A\Gamma}} = \frac{\overrightarrow{B'\Gamma'}}{\overrightarrow{A'\Gamma'}}, \quad \text{κ.ο.κ.}$$

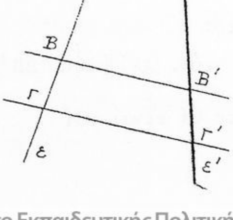
Μέ ἄλλους λόγους, δύο ὁποιαδήποτε διανύσματα πού αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ἀποκόπτουν ἐπί τῆς μιᾶς εὐθείας ε ἔχουν τόν ἴδιον λόγον μέ τά ἀντίστοιχα διανύσματα πού αἱ ἴδιαι παράλληλοι ἀποκόπτουν ἐπί τῆς ἄλλης εὐθείας ε΄.



Ἡ ἀλήθεια τῆς προτάσεως ἕπεται ἀμέσως ἀπό τά προηγούμενα, ὅταν ε || ε΄ (σχ. παραπλεύρως). Πράγματι, τότε ἔχομεν:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{B'\Gamma'}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A'\Gamma'}$,

κ.ο.κ.



Εἰς τήν περίπτωσιν ε $\nparallel$ ε΄ εἶναι εὔκολον νά ἐπαληθεύσωμεν τήν πρότασιν, λαμβάνοντες

π.χ. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{B\Gamma}$

(σχ. παραπλεύρως), ὁπότε

$\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{B\Gamma} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{A\Gamma}$.

Μέ μετρήσεις επάνω εις τό σχήμα ευρίσκομεν ότι ισχύουν αντιστοίχως αι σχέσεις:

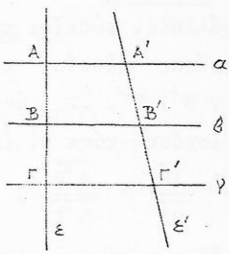
$$\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{B'\Gamma'} \ , \quad \overrightarrow{A'B'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A'\Gamma'} \ , \quad \overrightarrow{B'\Gamma'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'\Gamma'}$$

Άρα

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{B\Gamma}} = 2 = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{B'\Gamma'}} \ , \quad \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{A\Gamma}} = \frac{2}{3} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{A'\Gamma'}} \ , \quad \frac{\overrightarrow{B\Gamma}}{\overrightarrow{A\Gamma}} = \frac{1}{3} = \frac{\overrightarrow{B'\Gamma'}}{\overrightarrow{A'\Gamma'}}$$

Μία συνέπεια. Άς είναι ή ευθεία ε κάθετος πρός τάς παραλλήλους α , β , γ καί

$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{B\Gamma}} = 1$ ήτοι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B\Gamma}$.



Αί δύο ταινίαι πού ορίζονται από τά ζεύγη παραλλήλων ευθειών $\{\alpha,\beta\}$ καί $\{\beta,\gamma\}$ έχουν τότε ίσον πλάτος. Σύμφωνα όμως μέ τό θεώρημα τού Θαλή είναι :

$\dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{B'\Gamma'}} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{B\Gamma}} = 1$, άρα $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{B'\Gamma'}$.

Επομένως, δύο (ή περισσότεραι) παράλληλοι ταινίαι τού επιπέδου, πού έχουν ίσον πλάτος, αποκόπτουν ίσα ευθύγραμμα τμήματα επάνω εις πάσαν ευθείαν τού επιπέδου ή οποία τάς τέμνει.

4.5. Όπως επαληθεύσαμεν τήν πρότασιν τού Θαλή, έτσι ημπορούμεν νά επαληθεύσωμεν καί τήν ακόλουθον πρότασιν (αντίστροφον τής προτάσεως τού Θαλή):

Πρότασις. Εάν διά τά σημεία Α, Β, Γ καί Α΄, Β΄, Γ΄ τών ευθειών ε καί αντιστοίχως ε΄ τού επιπέδου αληθεύουν αί σχέσεις:

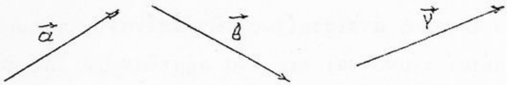
ευθ. ΑΑ΄ ∥ ευθ. ΒΒ΄ καί $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{A\Gamma}} = \dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{A'\Gamma'}}$,

τότε θά είναι καί

εὐθ. ΓΓ΄ $\parallel$ εὐθ. ΒΒ΄ , ἄρα καί εὐθ. ΓΓ΄ $\parallel$ εὐθ. ΑΑ΄.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ἀπό τά κατωτέρω ἐλεύθερα διανύσματα



νά κατασκευασθοῦν τά ἀκόλουθα:

$$\frac{5}{4}\vec{\alpha} \quad , \quad -\frac{2}{3}\vec{\beta} \quad , \quad -\frac{1}{2}\vec{\gamma} \quad , \quad \frac{3}{4}\vec{\gamma} \quad ,$$

$$\vec{\alpha}-\frac{2}{3}\vec{\gamma} \quad , \quad \frac{2}{3}\vec{\gamma}-\frac{5}{4}\vec{\alpha} \quad , \quad \vec{\alpha}+\vec{\beta}-2\vec{\gamma}.$$

2) Ἄς εἶναι ΑΒ ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ αἱ διανυσματικαί ἀκτῖνες τῶν ἄκρων του καί Μ τό μέσον του. Νά δείξετε ὅτι διά τήν διανυσματικήν ἀκτῖνα $\overrightarrow{OM}$ τοῦ μέσου τοῦ τμήματος ἰσχύει ἡ σχέσις.

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) .$$

3) Εἰς ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καλοῦμεν Ε τό μέσον τῆς πλευρᾶς ΓΔ. Νά εὕρετε τόν ἀριθμόν x διά τόν ὁποῖον ἀληθεύει ἡ σχέσις $\overrightarrow{AB} = x\,.\overrightarrow{E\Delta}$.

4) Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εὑρίσκομεν τό σημεῖον Α΄ συμμετρικόν τοῦ Α ὡς πρός τό μέσον Μ τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Νά δείξετε ὅτι $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma} = 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA'}$.

5) Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ καί ἄς εἶναι Δ καί Ε τά μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καί ΑΓ ἀντιστοίχως. Νά δείξετε ὅτι $\overrightarrow{\Delta E} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B\Gamma}$.

<u>Ὑπόδειξις.</u> Νά προεκτείνετε τό διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta E}$ κατά τό διάνυσμα $\overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{\Delta E}$ καί νά δείξετε ὅτι τά τετράπλευρα ΑΔΓΖ καί ΒΓΖΔ εἶναι παραλληλόγραμμα χρησιμοποιοῦντες γνωστάς ἰδιότητας τῶν παραλληλογράμμων ἤ ὅσα εἴπαμεν εἰς τάς § 3.3 καί 3.4.

6) Εἰς τό Βιβλ. Ι , σ. 125 Β ἐμάθαμεν πῶς νά χωρίζωμεν ἕνα τμῆμα ΑΒ εἰς ν ἴσα μέρη ($\nu \in \Phi$).

Νά δικαιολογήσετε τώρα τήν σχετικήν κατασκευήν στηριζόμενοι είς τό Θεώρημα τοῦ Θαλῆ.

7) Είς τρίγωνον ΑΒΓ νά χαράξετε τάς διαμέσους του ΒΕ καί ΓΔ, δηλ. τά τμήματα πού ἑνώνουν τάς κορυφάς Β καί Γ μέ τά μέσα Ε καί Δ ἀντιστοίχως τῶν ἀπέναντι πλευρῶν. Αἱ διάμεσοι αὐταί τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Ο. Ἄς εἶναι Ζ καί Η τά μέσα τῶν τμημάτων ΒΟ καί ΓΟ ἀντιστοίχως. Νά δείξετε ὅτι $\overrightarrow{ΔΕ}=\overrightarrow{ΖΗ}$ καί νά συμπεράνετε ἐξ αὐτοῦ ὅτι τό τετράπλευρον ΖΗΕΔ εἶναι παραλληλόγραμμον. Κατόπιν, χρησιμοποιοῦντες γνωστήν ἰδιότητα τοῦ παραλληλογράμμου, νά δείξετε ὅτι $\overrightarrow{ΒΟ}=2\overrightarrow{ΟΕ}$ καί $\overrightarrow{ΓΟ} = 2\overrightarrow{ΟΔ}$.

8) Ἀπό τήν προηγουμένην Ἄσκησιν νά συμπεράνετε ὅτι αἱ τρεῖς διάμεσοι τριγώνου τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον πού ἀπέχει ἀπό ἑκάστην κορυφήν ἀπόστασιν ἴσην μέ τά $\frac{2}{3}$ τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου.

9) Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ὁρίζομεν τά μέσα Α΄καί Β΄τῶν πλευρῶν ΒΓ καί ΓΑ ἀντιστοίχως. Ἀπό τό σημεῖον Β΄φέρομεν τήν παράλληλον πρός τήν εὐθεῖαν ΑΑ΄καί ἔστω Δ τό σημεῖον ὅπου ἡ παράλληλος αὐτή τέμνει τήν πλευράν ΒΓ. Νά δείξετε ὅτι

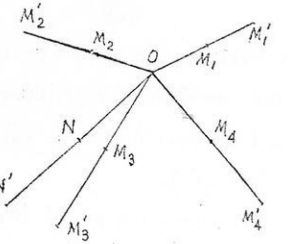
$$\overrightarrow{ΒΔ} + 3\overrightarrow{ΓΔ} = \overrightarrow{0}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄

Ὁμοθεσία καί ὁμοιότης εἰς τό ἐπίπεδον

§ 1. Ὁμοθεσία εἰς τό ἐπίπεδον.

1.1. Ὁμοθεσία. Ἔστω O ἕνα ὡρισμένον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου καί λ ἕνας ὡρισμένος θετικός ἀριθμός, π.χ. λ = 2. Εἰς τό τυχόν σημεῖον M τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχίζομεν τό σημεῖον M΄ διά τό ὁποῖον ἔχομεν:



$\overrightarrow{OM}' = 2\overrightarrow{OM} \Longrightarrow |\overrightarrow{OM}'| = 2\,|\overrightarrow{OM}|$.

Μέ ἄλλους λόγους εἰς τό σημεῖον O ἀντιστοιχίζομεν τό ἴδιον τό O καί εἰς ἕνα σημεῖον M τοῦ ἐπιπέδου, διάφορον ἀπό τό O, ἀντιστοιχίζομεν τό σημεῖον M΄ πού κεῖται ἐπάνω εἰς τήν ἡμιευθεῖαν OM (μέ ἀρχήν τό O) εἰς ἀπόστασιν OM΄ διπλασίαν τῆς ἀποστάσεως OM. Κατ'αὐτόν τόν τρόπον εἰς κάθε σημεῖον M τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχεῖ ἕνα καί μόνον σημεῖον M΄ τοῦ ἐπιπέδου. Ἀντιστρόφως κάθε σημεῖον N΄ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἀντίστοιχον ἑνός καί μόνον σημείου N, ἐκείνου διά τό ὁποῖον ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{ON}' .$$

Ἐδημιουργήσαμεν λοιπόν μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ ἐπιπέδου ἐπί τοῦ ἑαυτοῦ του· ἡ ἀπεικόνισις αὐτή καλεῖται ὁμοθεσία μέ κέντρον τό σημεῖον O καί λόγον τόν ἀριθμόν 2. Τό σημεῖον M΄ λέγεται ὁμόθετον τοῦ M εἰς τήν ἀνωτέρω ἀπεικόνισιν.

Γενικῶς, ἀφοῦ δοθοῦν ἕνα ὡρισμένον σημεῖον O τοῦ ἐπιπέδου καί ἕνας ὡρισμένος θετικός ἀριθμός λ, ἡ σχέσις

$$\overrightarrow{OM}' = \lambda \cdot \overrightarrow{OM} \implies |\overrightarrow{OM}'| = \lambda\, |\overrightarrow{OM}|$$

ἀντιστοιχίζει εἰς κάθε σημεῖον M τοῦ ἐπιπέδου ἕνα καί μόνον σημεῖον M΄ ὡς ἑξῆς: εἰς τό O ἀντιστοιχεῖ τό ἴδιον σημεῖον O· εἰς κάθε ἄλλο σημεῖον M τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχεῖ ἐκεῖνο τό σημεῖον M΄ τῆς ἡμιευθείας OM (μέ ἀρχήν τό O), τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις OM΄ ἀπό τό O ἔχει λόγον πρός τήν ἀπόστασιν OM ἴσον μέ λ :

$$\frac{|\overrightarrow{OM}'|}{|\overrightarrow{OM}|} = \lambda \iff |\overrightarrow{OM}'| = \lambda \cdot |\overrightarrow{OM}|$$

Ἡ ἀντιστοιχία αὐτή εἶναι μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ἐπί τοῦ ἑαυτοῦ του καί λέγεται ὁμοθεσία εἰς τό ἐπίπεδον μέ κέντρον τό O καί λόγον τό λ.

Ἡ ὁμοθεσία μέ τό ἴδιον κέντρον O καί μέ λόγον τόν ἀντίστροφον ἀριθμόν $\frac{1}{\lambda}$:

$$\overrightarrow{OM}' = \frac{1}{\lambda} \cdot \overrightarrow{OM}$$

εἶναι ἀπεικόνισις ἀντίστροφος τῆς προηγουμένης· μέ ἄλλους λόγους, ἐάν εἰς τήν πρώτην τό σημεῖον M ἔχει εἰκόνα τό M΄, τότε εἰς τήν δευτέραν τό σημεῖον M΄ ἔχει εἰκόνα τό σημεῖον M .

Μία εἰδική περίπτωσις ὁμοθεσίας εἶναι ἐκείνη διά τήν ὁποίαν ὁ λόγος λ ἰσοῦται μέ 1 (τό κέντρον ὁμοθεσίας O ἠμπορεῖ νά εἶναι ὁποιονδήποτε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου)· εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν κάθε ἀρχέτυπον ταυτίζεται μέ τήν εἰκόνα του. Πράγματι ἀπό τήν σχέσιν

$$\overrightarrow{OM}' = 1 \cdot \overrightarrow{OM} \iff \overrightarrow{OM}' = \overrightarrow{OM}$$

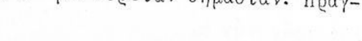
ἕπεται ὅτι τό σημεῖον M΄ ταυτίζεται μέ τό M. Μία τοιαύτη ἀπεικόνισις λέγεται ταυτοτική.

Προφανῶς, ὅταν ὁ λόγος ὁμοθεσίας λ εἶναι $\neq 1$, ἡ ὁμοθετική ἀπεικόνισις δέν εἶναι ταυτοτική.

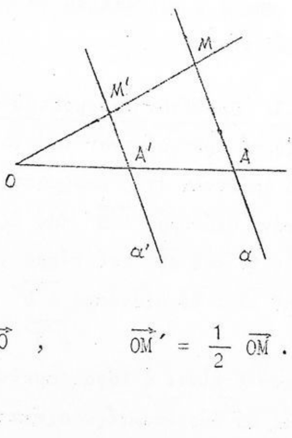
Παρατήρησις. Ὁ ὁρισμός πού ἐδώσαμεν διά τήν ὁμοθεσίαν καί αἱ ἰδιότητές της πού θά ἐκθέσωμεν παρακάτω ἐπεκτείνονται εἰς τήν περίπτωσιν πού ὁ λόγος ὁμοθεσίας λ εἶναι ἕνας ἀρνητικός ἀριθμός. Ἡμεῖς ὅμως διά τό ἁπλούστερον θά περιορισθῶμεν εἰς θετικάς τιμάς τοῦ λόγου λ.

1.2. Ὁμόθετον εὐθείας. Ἔστω O τό κέντρον ὁμοθεσίας καί $\lambda = \frac{1}{2}$ ὁ λόγος της. Μία εὐθεῖα α τοῦ ἐπιπέδου ἠμπορεῖ νά θεωρηθῇ ὡς ἕνα σύνολον σημείων M. Ἐάν αὐτῶν τῶν σημείων λάβωμεν τά ὁμόθετα M΄ , τό σύνολον τούτων θά ἀποτελῇ μίαν εὐθεῖαν α΄ παράλληλον πρός τήν α μέ εὐρεῖαν σημασίαν. Πράγματι:

1η περίπτωσις: ἡ εὐθεῖα α διέρχεται ἀπό τό κέντρον ὁμοθεσίας O. Τότε κάθε σημεῖον M τῆς α, διάφορον ἀπό τό O, ἔχει ὡς ὁμόθετον ἕνα σημεῖον τῆς ἰδίας εὐθείας α. Ἐπομένως ἡ εὐθεῖα α΄ συμπίπτει μέ τήν α καί εἶναι παράλληλος πρός αὐτήν μέ εὐρεῖαν σημασίαν.



2α περίπτωσις: ἡ εὐθεῖα α δέν διέρχεται ἀπό τό O (σχῆμα παραπλεύρως). Ἔστω A ἕνα ὡρισμένον σημεῖον τῆς α καί A΄ τό ὁμόθετόν του, ἐπίσης ἔστω M τυχόν ἄλλο σημεῖον τῆς α καί M΄ τό ὁμόθετόν του. Ἰσχύουν τότε τά ἑξῆς:



$$\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \iff \overrightarrow{A'O} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AO} \quad , \qquad \overrightarrow{OM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OM} .$$

Ἐπομένως:

$$\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OM'} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AO} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{OM}$$

$$= \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM})$$

σύμφωνα μέ τήν ἐπιμεριστικήν ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἑνός ἀθροίσματος διανυσμάτων μέ ἕνα ἀριθμόν (§ 4.3΄, 3η ἰδιότης). Συνεπῶς ἰσχύει ἡ σχέσις

$$\overrightarrow{A'M'} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AM}\ ,$$

ἀπό τήν ὁποίαν συμπεραίνομεν (§ 4.1. καί 4.2) ὅτι

εὐθ. A΄M΄ ∥ εὐθ. AM .

Ὥστε τά ὁμόθετα M΄ τῶν σημείων M τῆς α κεῖνται ὅλα ἐπάνω εἰς τήν εὐθεῖαν α΄ πού περνᾶ ἀπό τό A΄ καί εἶναι παράλληλος πρός τήν α.

Γενικῶς, τό ὁμόθετον μιᾶς εὐθείας α, ὡς πρός κέντρον τό τυχόν σημεῖον O τοῦ ἐπιπέδου καί μέ λόγον τόν τυχόντα ἀριθμόν $\lambda > 0$, εἶναι μία εὐθεῖα α΄ παράλληλος πρός τήν α (μέ στενήν σημασίαν, ἄν ἡ α δέν περνᾶ ἀπό τό O, μέ εὐρεῖαν σημασίαν, ἄν περνᾶ). Διά νά χαράξωμεν λοιπόν τήν α΄, ἀρκεῖ νά προσδιορίσωμεν ἕνα σημεῖον της A΄, ὁμόθετον ἑνός σημείου A τῆς α , καί ἔπειτα νά φέρωμεν ἀπό τό A΄ τήν παράλληλον πρός τήν α.

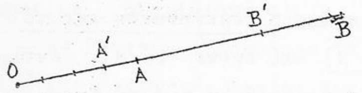
1.3. <u>Ὁμόθετον ἐφαρμοστοῦ διανύσματος.</u> Ἀπό ὅσα ἀνεπτύξαμεν εἰς τό προηγούμενον ἐδάφιον ἕπονται ἀμέσως τά ἑξῆς:

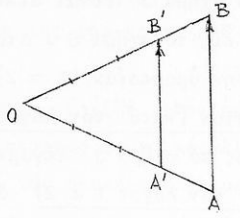
Τό ὁμόθετον ἑνός ἐφαρμοστοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ εἶναι τό ἐφαρμοστόν διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$ πού ἔχει ἀρχήν , A΄, τό ὁμόθετον τῆς ἀρχῆς A τοῦ $\overrightarrow{AB}$ καί πέρας , B΄, τό ὁμόθετον τοῦ πέρατος B τοῦ $\overrightarrow{AB}$. Τό διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$ εἶναι συγγραμμικόν μέ τό $\overrightarrow{AB}$ καί

$$\overrightarrow{A'B'} = \lambda\cdot\overrightarrow{AB}\ ,$$

ὅπου λ εἶναι ὁ λόγος ὁμοθεσίας.

Εἰς τά δύο κατωτέρω σχήματα κατασκευάζομεν τό ὁμόθετον αὐτό διάνυσμα διά $\lambda = \frac{3}{4}$, διακρίνοντες τάς δύο περιπτώσεις πού ἠμποροῦν νά παρουσιασθοῦν:





Ὁ φορεύς τοῦ $\overrightarrow{AB}$ διέρχεται ἀπό τό κέντρον ὁμοθεσίας O

Ὁ φορεύς τοῦ $\overrightarrow{AB}$ δέν περνᾶ ἀπό τό O.

1.4. <u>Ὁμόθετον ἐπιπέδου σχήματος.</u> Ἠμποροῦμεν τώρα νά γενικεύσωμεν τά ἀνωτέρω ὡς ἑξῆς:

Ἕνα σχῆμα S τοῦ ἐπιπέδου ἠμπορεῖ νά θεωρηθῆ ὡς ἕνα σύνολον σημείων $\{A, B, \Gamma, \ldots\}$ τοῦ ἐπιπέδου.

Ἄν τῶν διαφόρων αὐτῶν σημείων τοῦ S λάβωμεν τά ὁμόθετα ὡς πρός ἕνα κέντρον O καί μέ ἕνα δεδομένον λόγον λ (> 0), τότε θά προκύψη ἕνα σύνολον σημείων $\{A', B', \Gamma', \ldots\}$· τό σύνολον αὐτό ἀποτελεῖ ἕνα σχῆμα S΄ πού λέγεται <u>ὁμόθετον τοῦ S μέ κέντρον ὁμοθεσίας τό O καί λόγον τό λ.</u> Μέ ἄλλους λόγους ἡ θεωρουμένη ὁμοθεσία ἀπεικονίζει τό σχῆμα $S = \{A, B, \Gamma, \ldots\}$ ἐπί τοῦ σχήματος $S' = \{A', B', \Gamma', \ldots\}$ καί τά σημεῖα τῶν δύο σχημάτων ἀντιστοιχοῦν ἕνα πρός ἕνα (ἡ ἀπεικόνισις εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος). Δύο ἀντίστοιχα σημεῖα, ὅπως π.χ. τά A καί A΄, λέγονται καί <u>ὁμόλογα.</u>

Ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα AB, πού ἑνώνει δύο ὁποιαδήποτε σημεῖα A καί B τοῦ S, καί τό εὐθύγραμμον τμῆμα A΄B΄, πού ἑνώνει τά ἀντίστοιχα σημεῖα A΄ καί B΄ τοῦ S΄, λέγονται <u>ὁμόλογα</u> τμήματα. Δι' αὐτά ἰσχύουν τά ἑξῆς:

$\overrightarrow{A'B'} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$, ἄρα $A'B' \parallel AB$ καί $|\overrightarrow{A'B'}| = \lambda \cdot |\overrightarrow{AB}|$.

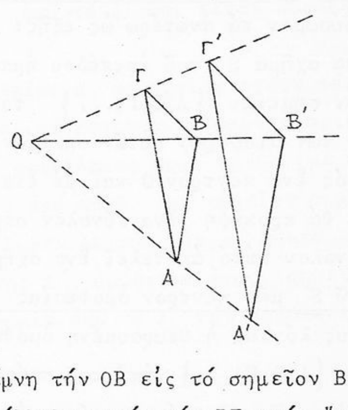
Ἐπομένως , ἄν π.χ. $\lambda = 2$, τότε κάθε ἀπόστασις Γ΄Δ΄ ἐπάνω εἰς τό σχῆμα S΄ εἶναι διπλασία τῆς ὁμολόγου ἀποστάσεως ΓΔ ἐπάνω εἰς τό σχῆμα S . Διά τοῦτο λέγομεν ὅτι μέ τήν θεωρουμένην ὁμοθεσίαν ($\lambda = 2$) τό σχῆμα S <u>ἐμεγεθύνθη εἰς τό διπλάσιον (κατά τόν λόγον 2 : 1)</u> καί ἔγινε τό S΄. Ἀντιστρόφως τό σχῆμα S΄ λέγομεν ὅτι <u>ἐσμικρύνθη εἰς τό ἥμισυ (κατά τόν λόγον 1 : 2)</u> διά νά μᾶς δώση τό S.

Ἄς ἐφαρμόσωμεν τώρα τά ἀνωτέρω εἰς μερικά εἰδικά σχήματα.

<u>1.5.</u> <u>Ὁμόθετον τριγώνου.</u> Νά κατασκευασθῆ τό ὁμόθετον ἑνός τριγώνου ΑΒΓ μέ κέντρον ὁμοθεσίας τό Ο καί λόγον $\lambda = \frac{3}{2}$.

Χαράσσομεν (σχ. παραπλεύρως) τάς ἡμιευθείας ΟΑ,ΟΒ, ΟΓ μέ ἀρχήν τό Ο. Κατόπιν προσδιορίζομεν ἐπάνω εἰς τήν ΟΑ τό σημεῖον Α΄ διά τό ὁποῖον εἶναι

$$\overrightarrow{OA'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA} .$$



Ἀπό τό Α΄ χαράσσομεν τήν παράλληλον πρός τήν εὐθεῖαν ΑΒ˙ἡ παράλληλος αὐτή ἄς τέμνη τήν ΟΒ εἰς τό σημεῖον Β΄. Ἀπό τό Β΄ χαράσσομεν τήν παράλληλον πρός τήν ΒΓ καί ἔστω Γ΄ τό σημεῖον τομῆς αὐτῆς τῆς παραλλήλου μέ τήν ΟΓ. Σύμφωνα μέ ὅσα εἴπαμεν προηγουμένως, τό τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ εἶναι τό ζητούμενον ὁμόθετον τοῦ ΑΒΓ.

<u>Παρατηρήσεις.</u> 1) Ἡ τρίτη πλευρά Γ΄Α΄ τοῦ τριγώνου Α΄Β΄Γ΄ εἶναι παράλληλος πρός τήν ΓΑ (διατί ;).

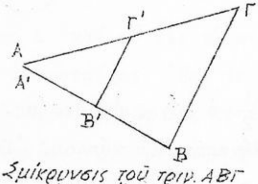
2) Αἱ γωνίαι τῶν δύο τριγώνων αἱ ὁποῖαι ἔχουν κορυφάς ὁμολόγους εἶναι ἴσαι : $\measuredangle A = \measuredangle A'$, $\measuredangle B = \measuredangle B'$, $\measuredangle \Gamma = \measuredangle \Gamma'$ (διατί ;).

3) Αἱ πλευραί $A'B'$, $B'\Gamma'$ καί $\Gamma'A'$ εἶναι ἀνάλογοι πρός τάς ὁμολόγους των ΑΒ , ΒΓ , ΓΑ καί ὁ λόγος μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τριγ. $A'B'\Gamma'$ πρός τήν ὁμόλογόν της τοῦ τριγ. ΑΒΓ εἶναι ἴσος μέ $\frac{3}{2}$ (διατί ;).

4) Γενικῶς ἠμποροῦμεν νά λέγωμεν τό ἑξῆς : Δύο ὁμόθετα τρίγωνα ἔχουν τάς γωνίας των ἀντιστοίχως ἴσας (μέ ἄλλην ἔκφρασιν : ἴσας μίαν πρός μίαν) καί τάς ὁμολόγους πλευράς των παραλλήλους καί ἀναλόγους.

5) Ἐάν ἀντί τοῦ κέντρου Ο λάβωμεν ἕνα ἄλλο κέντρον ὁμοθεσίας O_1 καί κατασκευάσωμεν τό ὁμόθετον $A_1B_1\Gamma_1$ τοῦ ἰδίου τριγώνου ΑΒΓ μέ τόν ἴδιον λόγον ὁμοθεσίας, τότε τό τρίγωνον τοῦτο $A_1B_1\Gamma_1$ θά εἶναι κατ'εὐθεῖαν ἴσον (βλ. Βιβλ. Ι , σ. 116 Β) μέ τό $A'B'\Gamma'$ (διατί ;).

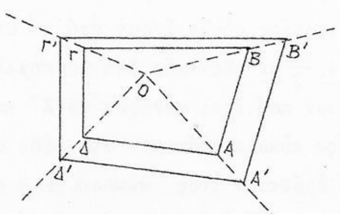
Συνεπῶς, ἄν θέλωμεν νά μεγεθύνωμεν (ἤ νά σμικρύνωμεν) ἕνα τρίγωνον κατά ἕνα δεδομένον λόγον λ : 1 , εἶναι ἀδιάφορον ποῖον κέντρον ὁμοθεσίας θά πάρωμεν. Συμφέρει, τό κέντρον αὐτό νά συμπέσῃ μέ μίαν κορυφήν τοῦ τριγώνου, διότι τότε τό ὁμόθετον αὐτῆς τῆς κορυφῆς εἶναι αὐτή ἡ ἰδία κορυφή.



Σμίκρυνσις τοῦ τριγ. ΑΒΓ εἰς τό ἥμισυ

1.6. Ὁμόθετον πολυγώνου.

Ἡ κατασκευή αὐτή εἶναι ὁμοία μέ τήν προηγουμένην. Ἔστω π.χ. τό τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. παραπλεύρως), Ο τό κέντρον καί $\lambda = \frac{4}{3}$ ὁ λόγος ὁμοθεσίας. Χαράσσομεν πρῶτα τάς ἡμιευθείας ΟΑ,ΟΒ,

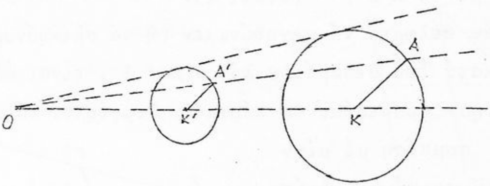


ΟΓ , ΟΔ μέ ἀρχήν τό σημεῖον Ο. Ἔπειτα προσδιορίζομεν τό ὁμόθετον μιᾶς κορυφῆς τοῦ τετραπλεύρου, π.χ. τῆς Α :

$$\overrightarrow{OA'} = \frac{4}{3}\,\overrightarrow{OA} \Longrightarrow OA' = \frac{4}{3}OA .$$

Ἀναχωροῦντες ἀπό τό Α΄ χαράσσομεν διαδοχικῶς τά τμήματα Α΄Β΄ , Β΄Γ΄ καί Γ΄Δ΄ παράλληλα ἀντιστοίχως πρός τά ΑΒ,ΒΓ καί ΓΔ. Ἄν ἡ σχεδίασίς μας εἶναι ἀρκετά ἀκριβής, τότε τό τμῆμα Δ΄Α΄ θά εἶναι ∥ ΔΑ. Αὐτό μᾶς παρέχει καί ἕνα ἔλεγχον διά τήν ἀκρίβειαν τῶν χαράξεών μας. Τό τετράπλευρον Α΄Β΄Γ΄Δ΄ εἶναι τό ζητούμενον ὁμόθετον τοῦ ΑΒΓΔ.

1.7. Ὁμόθετον κύκλου. Ἔστω Κ τό κέντρον τοῦ κύκλου καί α ἡ ἀκτίς του (σχῆμα κατωτέρω). Ἄς εἶναι Ο τό κέντρον καί



$\lambda = \frac{1}{2}$ ὁ λόγος ὁμοθεσίας. Κατασκευάζομεν τό ὁμόθετον Κ΄ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. Ἐάν Α εἶναι τυχόν σημεῖον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου (Κ,α) καί Α΄ τό ὁμόθετόν του, θά ἔχωμεν:

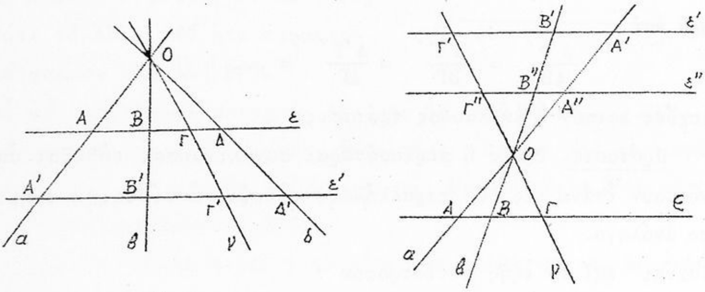
$$\overrightarrow{K'A'} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{KA} \Longrightarrow K'A' = \frac{1}{2}\,KA = \frac{1}{2}\alpha.$$

Ἑπομένως, ὅλα τά ὁμόθετα Α΄ τῶν διαφόρων σημείων Α τῆς περιφερείας αὐτῆς ἔχουν ἀπό τό σημεῖον Κ΄ τήν ἰδίαν ἀπόστασιν $\frac{1}{2}\alpha$. Συνεπῶς ὅλα τά σημεῖα Α΄ἀνήκουν εἰς τήν περιφέρειαν πού ἔχει κέντρον τό Κ΄ καί ἀκτῖνα $\frac{1}{2}\alpha$. Ἀπό τά ἀνωτέρω εὔκολα φθάνομεν στό ἑξῆς συμπέρασμα:

Τό ὁμόθετον ἑνός κύκλου (Κ , α) εἶναι ὁ κύκλος πού ἔχει κέντρον τό ὁμόθετον Κ΄ τοῦ κέντρου τοῦ δοθέντος κύκλου καί ἀκτῖνα λα , ὅπου λ εἶναι ὁ λόγος ὁμοθεσίας.

1.8. <u>Συγκλίνουσαι εὐθεῖαι</u>. Διά νά ἔχωμεν μίαν σύντομον ἔκφρασιν, θά καλέσωμεν τρεῖς ἤ περισσοτέρας εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου <u>συγκλινούσας</u>, ὅταν διέρχωνται ἀπό ἕνα καί τό αὐτό σημεῖον.

Θεωροῦμεν τώρα τρεῖς ἤ περισσοτέρας συγκλινούσας εὐθείας α, β, γ, ... (σχ. κατωτέρω), καί αὐταί



1η περίπτωσις 2α περίπτωσις

ἄς τέμνουν δύο παραλλήλους εὐθείας ε καί ε΄ εἰς τά σημεῖα Α, Β, Γ,... καί Α΄, Β΄, Γ΄,... ἀντιστοίχως. Ἐάν τό κοινόν σημεῖον Ο τῶν συγκλινουσῶν εὐθειῶν κεῖται εἰς τό ἐξωτερικόν τῆς ταινίας (ε, ε΄), τήν ὁποίαν ὁρίζουν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ε καί ε΄ (1η περίπτωσις), τότε, σύμφωνα μέ ὅσα εἴπαμεν προηγουμένως, τά σημεῖα Α΄, Β΄, Γ΄, ... θά εἶναι ὁμόθετα τῶν Α, Β, Γ,... μέ κέντρον ὁμοθεσίας τό Ο καί λόγον τόν $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}}$ (εἰς τό ἀνωτέρω σχῆμα λ = 2). Ἐπομένως θά ἰσχύουν αἱ ἰσότητες

$$\frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{B'\Gamma'}}{\overrightarrow{B\Gamma}} = \frac{\overrightarrow{A'\Gamma'}}{\overrightarrow{A\Gamma}} = \dots ,$$

ἄρα καί αἱ

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma} = \dots$$

Αἱ ἰσότητες αὐταί ἰσχύουν καί εἰς τήν περίπτωσιν πού τό σημεῖον O κεῖται εἰς τό ἐσωτερικόν τῆς ταινίας $(\varepsilon, \varepsilon')$ (2α περίπτωσις). Διά νά τό ἴδωμεν, ἀρκεῖ νά θεωρήσωμεν τό συμμετρικόν ε'' τῆς ε ὡς πρός τό σημεῖον O· θά ἔχωμεν τότε:

$$AB = A''B'' \quad , \quad B\Gamma = B''\Gamma'' \quad , \quad A\Gamma = A''\Gamma'' \quad , \ldots$$

καί, σύμφωνα μέ τήν 1ην περίπτωσιν :

$$\frac{A'B'}{A''B''} = \frac{B'\Gamma'}{B''\Gamma''} = \frac{A'\Gamma'}{A''\Gamma''} = \ldots$$

ἄρα καί

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma} = \ldots$$

Ἰσχύει λοιπόν ἡ ἀκόλουθος πρότασις:

<u>Πρότασις</u>. Τρεῖς ἤ περισσότεραι συγκλίνουσαι εὐθεῖαι ἀποκόπτουν ἐπάνω εἰς δύο παραλλήλους εὐθείας ἀντίστοιχα τμήματα ἀνάλογα.

Ἰσχύει καί τό ἑξῆς ἀντίστροφον :

<u>Ἀντίστροφος πρότασις</u>. Ἐάν τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ ἀποκόπτουν ἐπάνω εἰς δύο παραλλήλους εὐθείας ε καί ε' ἀντιστοίχως διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ καί $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'\Gamma'}$ διά τά ὁποῖα νά ἀληθεύουν αἱ σχέσεις

$$\frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{B'\Gamma'}}{\overrightarrow{B\Gamma}} \quad \text{καί} \quad \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}} \neq 1 ,$$

τότε αἱ εὐθεῖαι α, β, γ εἶναι συγκλίνουσαι.

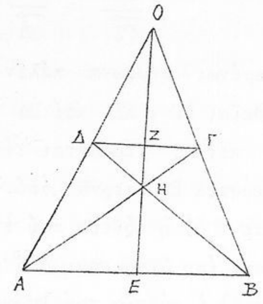
<u>Παρατήρησις</u>. Ἡ περίπτωσις

$$\frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{B'\Gamma'}}{\overrightarrow{B\Gamma}} \quad \text{καί} \quad \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}} = 1$$

ἐξηρέθη, διότι ἔχει ὡς συνέπειαν, αἱ εὐθεῖαι α, β, γ νά εἶναι παράλληλοι μεταξύ των.

<u>1.9. Μία ἐφαρμογή εἰς τό τραπέζιον</u>. Καλοῦμεν τραπέζιον κάθε κυρτόν τετράπλευρον πού ἔχει δύο πλευράς παραλλήλους καί

τάς δύο ἄλλας πλευράς μή παραλλήλους.Π.χ.τό τετράπλευρον ΑΒΓΔ τοῦ σχήματος παραπλεύρως, εἰς τό ὁποῖον ΑΒ $\parallel$ ΔΓ καί ΑΔ $\nparallel$ ΒΓ , εἶναι ἕνα τραπέζιον.



Αἱ παράλληλοι πλευραί ΑΒ καί ΔΓ λέγονται <u>βάσεις</u> τοῦ τραπεζίου καί εἶναι ἄνισα τμήματα: ΑΒ $\neq$ ΔΓ · (διότι , ἄν ΑΒ = ΔΓ, τότε τό ΑΒΓΔ θά ἦτο παραλληλόγραμμον καί ΑΔ $\parallel$ ΒΓ).

Αἱ μή παράλληλοι πλευραί ΑΔ καί ΒΓ τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον, ἔστω τό Ο. Ὁμοίως καί αἱ διαγώνιοί του ΑΓ καί ΒΔ τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον, ἔστω τό Η. Παρατηροῦμεν τώρα τά ἑξῆς:

Ι) Ἄς εἶναι Ε καί Ζ τά μέσα τῶν βάσεων ΑΒ καί ΔΓ ἀντιστοίχως. Θά ἔχωμεν τότε

$$\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{\Delta Z}} = \frac{\overrightarrow{EB}}{\overrightarrow{Z\Gamma}} = \frac{\frac{1}{2}AB}{\frac{1}{2}\Delta\Gamma} \neq 1.$$

Ἄρα , σύμφωνα μέ τήν προηγουμένην ἀντίστροφον πρότασιν, αἱ εὐθεῖαι ΑΔ , ΕΖ καί ΒΓ εἶναι συγκλίνουσαι.

Ὥστε ἡ εὐθεῖα πού ἑνώνει τά μέσα τῶν δύο βάσεων ἑνός τραπεζίου διέρχεται ἀπό τό σημεῖον τομῆς τῶν μή παραλλήλων πλευρῶν του.

ΙΙ) Αἱ εὐθεῖαι ΑΓ , ΕΖ καί ΒΔ ἀποκόπτουν ἐπί τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ΑΒ καί ΔΓ ἀντιστοίχως τά διανύσματα $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma Z}$, $\overrightarrow{Z\Delta}$.

Διά τά διανύσματα αὐτά ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{\Gamma Z}} = -\frac{\frac{1}{2}AB}{\frac{1}{2}\Delta\Gamma} \neq 1 \quad \text{καί} \quad \frac{\overrightarrow{EB}}{\overrightarrow{Z\Delta}} = -\frac{\frac{1}{2}AB}{\frac{1}{2}\Delta\Gamma}$$

ἤτοι αἱ

$$\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{\Gamma Z}} = \frac{\overrightarrow{EB}}{\overrightarrow{Z\Delta}} \neq 1 \ .$$

Ἑπομένως, σύμφωνα πάλιν μέ τήν ἀντίστροφον πρότασιν, αἱ εὐθεῖαι ΑΓ , ΕΖ καί ΒΔ εἶναι συγκλίνουσαι. Καί ἐπειδή αἱ ΑΓ καί ΒΔ τέμνονται εἰς τό σημεῖον Η , συμπεραίνομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΖ περνᾶ ἀπό τό Η.

Ὥστε : α) ἡ εὐθεῖα πού ἑνώνει τά μέσα τῶν δύο βάσεων ἑνός τραπεζίου διέρχεται ἀπό τό σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων του καί β) ἡ εὐθεῖα πού ἑνώνει τό σημεῖον τομῆς τῶν μή παραλλήλων πλευρῶν ἑνός τραπεζίου μέ τό σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων του διχοτομεῖ τάς δύο βάσεις τοῦ τραπεζίου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά χαράξετε ἕνα τμῆμα ΑΒ μήκους 40 mm καί νά κατασκευάσετε τό ὁμόθετόν του μέ λόγον ὁμοθεσίας $\lambda = \frac{5}{2}$ καί κέντρον :

α) ἕνα σημεῖον Ο ἔξω ἀπό τήν εὐθεῖαν ΑΒ ,

β) ἕνα σημεῖον Ο ἐπάνω εἰς τήν εὐθεῖαν ΑΒ μεταξύ Α καί Β,

γ) ἕνα σημεῖον Ο ἐπάνω εἰς τήν εὐθεῖαν ΑΒ καί ἔξω ἀπό τό τμῆμα ΑΒ ,

δ) τό σημεῖον Α.

Ποῖον εἶναι τό μῆκος αὐτοῦ τοῦ ὁμοθέτου τοῦ ΑΒ εἰς τάς τέσσαρας περιπτώσεις ;

2) Νά κατασκευάσετε ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ μέ μήκη πλευρῶν ΒΓ = 4,5 cm , ΓΑ = 0,039 m καί ΑΒ = 57 mm .
Ἀκολούθως μέ κέντρον ὁμοθεσίας τήν κορυφήν Α καί λόγον $\frac{5}{3}$ νά κατασκευάσετε τό ὁμόθετον Α΄Β΄Γ΄ τοῦ τριγ. ΑΒΓ. Ποῖα εἶναι τά μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ Α΄Β΄Γ΄ ;

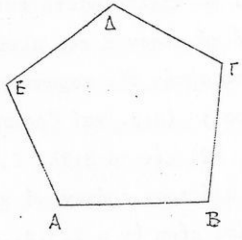
3) Νά κατασκευάσετε ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ ($AB \parallel \Gamma\Delta$)

ἀπό τά στοιχεῖα του : $\sphericalangle A = 60^0$, $AB = 8$ cm καί $A\Delta = 4{,}8$ cm. Ἀκολούθως μέ κέντρον ὁμοθεσίας τήν τομήν Ο τῶν διαγωνίων του καί μέ λόγον $\frac{3}{2}$ νά κατασκευάσετε τό ὁμόθετόν του Α΄Β΄Γ΄Δ΄. Ποῖα εἶναι τά μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ Α΄Β΄Γ΄Δ΄ ;

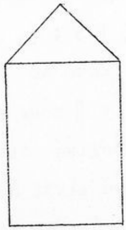
4) Νά ἐπαναλάβετε τήν κατασκευήν τοῦ προηγουμένου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ (χωρίς τάς διαγωνίους του) καί νά χαράξετε τό ὁμόθετόν του μέ λόγον $\frac{5}{4}$ καί κέντρον ὁμοθεσίας 1ον τήν κορυφήν Α καί 2ον τήν κορυφήν Β. Νά συγκρίνετε τά δύο νέα παραλληλόγραμμα πού προκύπτουν καί νά εὕρετε ποῖος γνωστός σας γεωμετρικός μετασχηματισμός (Βιβλ. Ι ,Κεφ.ΙΔ΄) μετασχηματίζει τό ἕνα ἐξ αὐτῶν εἰς τό ἄλλο.

5) Νά ἐπαναλάβετε τήν κατασκευήν τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως μέ τόν ἴδιον λόγον ὁμοθεσίας $\frac{5}{4}$ ἀλλά μέ κέντρα ὁμοθεσίας 1ον τήν κορυφήν Α καί 2ον τήν κορυφήν Γ. Νά συγκρίνετε πάλιν τά δύο νέα παραλληλόγραμμα πού προκύπτουν καί νά εὕρετε ποῖοι γνωστοί σας γεωμετρικοί μετασχηματισμοί μετασχηματίζουν τό ἕνα ἐξ αὐτῶν εἰς τό ἄλλο ;

6) Νά ἀποτυπώσετε ἐπάνω εἰς διαφανές τό πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ τοῦ παραπλεύρως σχήματος καί μέ κέντρον ὁμοθεσίας τήν κορυφήν του Α νά κατασκευάσετε τό ὁμόθετόν του παίρνοντες τόν λόγον ὁμοθεσίας ἴσον μέ $\frac{2}{3}$.



7) Νά μεταφέρετε εἰς τό τετράδιόν σας μέ διαφανές τό παραπλεύρως σχῆμα καί νά τό μεγεθύνετε εἰς τό διπλάσιον ἐκλέγοντες ἕνα κατάλληλον κέντρον ὁμοθεσίας ἔξω ἀπό τό σχῆ-



μα, οὕτως ὥστε τά δύο ὁμόθετα σχήματα νά μή ἔχουν κανένα κοινόν σημεῖον.

8) Νά σμικρύνετε τό σχῆμα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως εἰς τά $\frac{2}{3}$ του (κατά τόν λόγον $\frac{2}{3} : 1 = 2 : 3$), παίρνοντες τό κέντρον ὁμοθεσίας εἰς τό ἐσωτερικόν τοῦ σχήματος.

9) Νά κατασκευάσετε εἰς τό τετράδιόν σας ἕνα σχέδιον τῆς ἐκλογῆς σας καί νά τό μεγεθύνετε κατά τόν λόγον 3 : 2, ἐκλέγοντες ἕνα κατάλληλον κέντρον ὁμοθεσίας οὕτως ὥστε τά δύο ὁμόθετα σχήματα νά μή ἔχουν κανένα κοινόν σημεῖον.

10) Νά δείξετε ὅτι τό ὁμόθετον παντός τετραγώνου εἶναι ἐπίσης τετράγωνον, ὁποιαδήποτε καί ἄν εἶναι τό κέντρον καί ὁ λόγος ὁμοθεσίας.

Ὑπόδειξις. Βασιζόμενοι εἰς τό ἐδ. 1.4 νά δείξετε ὅτι τό ὁμόθετον εἶναι ἕνα τετράπλευρον μέ τέσσαρας πλευράς ἴσας καί τέσσαρας γωνίας ὀρθάς.

11) Ἀφοῦ σχεδιάσετε ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ νά χαράξετε ἀπό τό μέσον Δ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τήν παράλληλον πρός τήν πλευράν ΒΓ. Νά ἐπαληθεύσετε ἔπειτα ὅτι ἡ παράλληλος αὐτή διέρχεται ἀπό τό μέσον Ε τῆς πλευρᾶς ΑΓ. Πῶς ἠμπορεῖτε νά δικαιολογήσετε αὐτήν τήν παρατήρησιν στηριζόμενοι εἰς ὅσα γνωρίζετε τώρα ; (Πρβ. καί Ἄσκησιν 5 τοῦ προηγουμένου Κεφ. , § 4).

12) Εἰς τό Βιβλ. Ι, σ. 127 Β , Ἄσκησις 7) ἐμάθαμεν ἕνα δεύτερον τρόπον νά χωρίζωμεν ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα εἰς ν ἴσα μέρη (ν = 2,3,4,...). Πῶς ἠμπορεῖτε νά δικαιολογήσετε τώρα αὐτήν τήν κατασκευήν χρησιμοποιοῦντες ὅσα ἐλέχθησαν εἰς τό § 1.8 ;

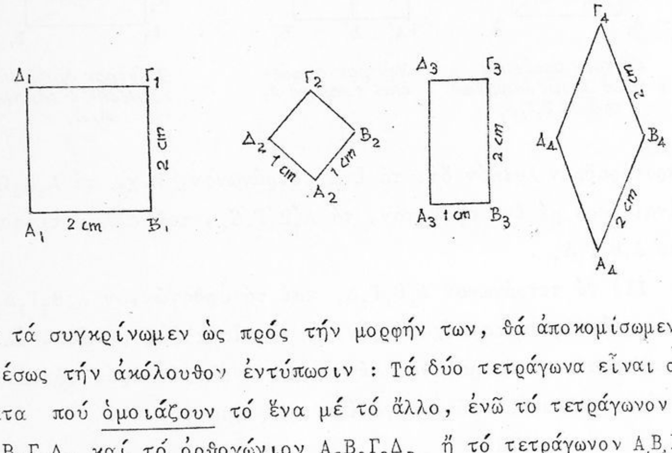
13) Ἔστω ΑΒ ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα. Χαράσσομεν μίαν εὐθεῖαν ε ∥ εὐθ. ΑΒ καί λαμβάνομεν ἐπάνω εἰς τήν ε ν = 3 ἴσα διαδοχικά διανύσματα $\overrightarrow{Α'Γ'} = \overrightarrow{Γ'Δ'} = \overrightarrow{Δ'Β'}$ τοιαῦτα ὥστε τό $\overrightarrow{Α'Β'}$ νά εἶναι ὁμόρροπον μέ τό $\overrightarrow{ΑΒ}$ ἀλλά ὄχι καί ἴσον πρός αὐτό. Αἱ εὐθεῖαι ΑΑ΄ καί ΒΒ΄ τέμνονται τότε (διατί ;)˙ ἔστω

Ο τό σημεῖον τομῆς. Φέρομεν τάς εὐθείας Γ΄Ο καί Δ΄Ο. Νά δείξετε ὅτι αὐταί χωρίζουν τό τμῆμα ΑΒ εἰς 3 ἴσα μέρη.

Νά ἐπαναλάβετε τήν κατασκευήν μέ $\nu = 5$.

§ 2. Ὁμοιότης ἐπιπέδων σχημάτων.

2.1. Κατωτέρω ἐσχεδιάσαμεν τέσσαρα τετράπλευρα: δύο τετράγωνα, ἕνα ὀρθογώνιον καί ἕνα ρόμβον (δηλ. ἕνα παραλληλόγραμμον μέ τέσσαρας ἴσας πλευράς).



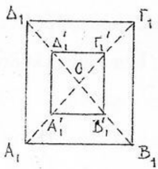
Ἄν τά συγκρίνωμεν ὡς πρός τήν μορφήν των, θά ἀποκομίσωμεν ἀμέσως τήν ἀκόλουθον ἐντύπωσιν : Τά δύο τετράγωνα εἶναι σχήματα πού ὁμοιάζουν τό ἕνα μέ τό ἄλλο, ἐνῶ τό τετράγωνον $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ καί τό ὀρθογώνιον $Α_3Β_3Γ_3Δ_3$ ἤ τό τετράγωνον $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ καί ὁ ρόμβος $Α_4Β_4Γ_4Δ_4$ εἶναι σχήματα ἀνόμοια. Εἴμεθα τώρα εἰς θέσιν, μέ ὅσα ἐμάθαμεν , νά ἀνακαλύψωμεν τήν αἰτίαν αὐτῆς τῆς ἐντυπώσεως.

Ἄς ἀντιστοιχίσωμεν μεταξύ των τά στοιχεῖα τῶν τεσσάρων τετραπλεύρων τά σημειωμένα μέ τά ἴδια γράμματα, δηλαδή ἀφ'ἑνός τήν $\sphericalangle Α_1$ μέ τάς $\sphericalangle Α_2$, $\sphericalangle Α_3$, $\sphericalangle Α_4$ κ.ο.κ. καί ἀφ'ἑτέρου τήν πλευράν $Α_1Β_1$ μέ τάς $Α_2Β_2$, $Α_3Β_3$, $Α_4Β_4$ κ.ο.κ. Θά παρατηρήσωμεν τότε τά ἑξῆς :

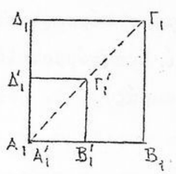
I) Αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι τῶν δύο τετραγώνων εἶναι ἴσαι (ὡς ὀρθαί), αἱ δέ πλευραί τοῦ ἑνός τετραγώνου εἶναι ἀνάλογοι πρός τάς ἀντιστοίχους πλευράς τοῦ ἄλλου :

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1\Gamma_1}{B_2\Gamma_2} = \frac{\Gamma_1\Delta_1}{\Gamma_2\Delta_2} = \frac{\Delta_1A_1}{\Delta_2A_2} = 2.$$

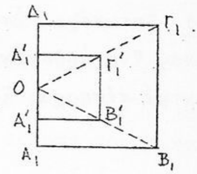
Αὐτό μᾶς ἐπιτρέπει νά καταστήσωμεν τά δύο τετράγωνα ὁμόθετα τό ἕνα τοῦ ἄλλου μετακινοῦντες αὐτά καταλλήλως:



Κέντρον ὁμοθεσίας ἡ τομή O τῶν διαγωνίων τοῦ $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$



Κέντρον ὁμοθεσίας ἡ κορυφή A_1



Κέντρον ὁμοθεσίας τό μέσον O τῆς πλευρᾶς $A_1\Delta_1$

Παρατηροῦμεν λοιπόν ὅτι τό ἕνα τετράγωνον, π.χ. τό $A_2B_2\Gamma_2\Delta_2$, εἶναι ἴσον μέ ἕνα ὁμόθετον, τό $A_1'B_1'\Gamma_1'\Delta_1'$, τοῦ ἄλλου τετραγώνου $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$.

II) Τό τετράγωνον $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ καί τό ὀρθογώνιον $A_3B_3\Gamma_3\Delta_3$ ἔχουν μέν τάς ἀντιστοίχους γωνίας των ἴσας (ὡς ὀρθάς), ἀλλά αἱ πλευραί τοῦ τετραγώνου δέν εἶναι ἀνάλογοι πρός τάς ἀντιστοίχους πλευράς τοῦ ὀρθογωνίου . Πράγματι

$$\frac{A_1B_1}{A_3B_3} = 2 \qquad \text{ἐνῶ} \qquad \frac{B_1\Gamma_1}{B_3\Gamma_3} = 1 \ .$$

Ἐξ ἄλλου τό τετράγωνον καί τό ὀρθογώνιον δέν ἠμποροῦν, μέ κατάλληλον μετακίνησιν , νά γίνουν ὁμόθετα σχήματα, διότι, ὅπως γνωρίζομεν , τό ὁμόθετον παντός τετραγώνου εἶναι τετράγωνον (βλ. "Ασκησιν 10) τῆς προηγουμένης §).

"Ετσι τό ὀρθογώνιον $A_3B_3\Gamma_3\Delta_3$ δέν εἶναι ἴσον μέ κανένα ὁμόθετον τοῦ τετραγώνου $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$.

III) Τό τετράγωνον $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ καί ὁ ρόμβος $A_4B_4\Gamma_4\Delta_4$ ἔχουν μέν τάς ἀντιστοίχους πλευράς των ἀναλόγους:

$$\frac{A_1B_1}{A_4B_4} = \frac{B_1\Gamma_1}{B_4\Gamma_4} = \frac{\Gamma_1\Delta_1}{\Gamma_4\Delta_4} = \frac{\Delta_1A_1}{\Delta_4A_4} = 1 \quad ,$$

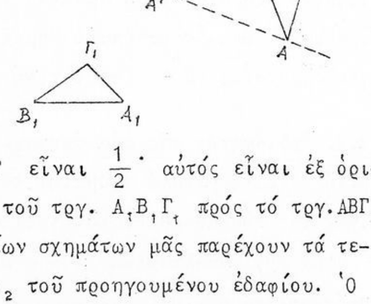
ἀλλά αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι των δέν εἶναι ἴσαι· π.χ.

$$\sphericalangle A_1 = \text{ὀρθή} \neq \sphericalangle A_4 = \text{ὀξεῖα}.$$

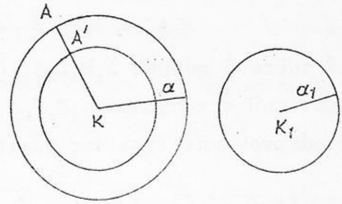
Διά τοῦτο ὁ ρόμβος $A_4B_4\Gamma_4\Delta_4$ δέν εἶναι ἴσος μέ κανένα ὁμόθετον τοῦ τετραγώνου $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$· πράγματι τό ὁμόθετον αὐτό εἶναι τετράγωνον καί ἔχει τάς γωνίας του ὀρθάς.

2.2. Ἀπό τά ἀνωτέρω ὁδηγούμεθα εἰς τούς ἀκολούθους ὁρισμούς. Δύο ἐπίπεδα σχήματα S_1 καί S λέγονται ὅμοια, ἐάν εἴτε εἶναι ὁμόθετα εἴτε ἠμποροῦν νά γίνουν ὁμόθετα μέ κατάλληλον μετακίνησιν, δηλαδή τοποθέτησιν τοῦ ἑνός ὡς πρός τό ἄλλο.

Ὁ ὁρισμός αὐτός εἶναι ἰσοδύναμος μέ τόν ἑξῆς: Ἕνα ἐπίπεδον σχῆμα S_1 εἶναι ὅμοιον πρός ἕνα ἐπίπεδον σχῆμα S, ἐάν εἶναι ἴσον μέ ἕνα ἀπό τά ὁμόθετα τοῦ S, δηλαδή ἐάν δύναται νά ἐφαρμόση εἰς κάποιο ὁμόθετον S' τοῦ S. Ὁ λόγος ὁμοθεσίας τοῦ S' πρός τό S καλεῖται τότε καί λόγος ὁμοιότητος τοῦ S_1 πρός τό S.



Π.χ. τό τργ $A_1B_1\Gamma_1$ (σχ. παραπλεύρως) εἶναι ὅμοιον πρός τό τρίγωνον ΑΒΓ, ἐπειδή εἶναι ἴσον μέ τό ὁμόθετον $A'B'\Gamma'$ τοῦ τργ ΑΒΓ· πράγματι εἶναι $A_1B_1 = A'B'$, $B_1\Gamma_1 = B'\Gamma'$ καί $\Gamma_1A_1 = \Gamma'A'$. Ὁ λόγος ὁμοθεσίας τοῦ τργ $A'B'\Gamma'$ πρός τό τργ Α Β Γ εἶναι $\frac{1}{2}$· αὐτός εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ καί ὁ λόγος ὁμοιότητος τοῦ τργ. $A_1B_1\Gamma_1$ πρός τό τργ.ΑΒΓ. Ἕνα δεύτερον παράδειγμα ὁμοίων σχημάτων μᾶς παρέχουν τά τετράγωνα $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ καί $A_2B_2\Gamma_2\Delta_2$ τοῦ προηγουμένου ἐδαφίου. Ὁ λόγος ὁμοιότητος τοῦ $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ πρός τό $A_2B_2\Gamma_2\Delta_2$ εἶναι $= 2$ καί ὁ λόγος ὁμοιότητος τοῦ $A_2B_2\Gamma_2\Delta_2$ πρός τό $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ εἶναι $= \frac{1}{2}$.



Ἰδού τέλος ἕνα τρίτον παράδειγμα : τυχών κύκλος (K_1, α_1) εἶναι ὅμοιος πρός τυχόντα κύκλον (K, α) (σχ. παραπλεύρως). Πράγματι, ἄν μετακινήσωμεν τόν κύκλον (K_1, α_1) οὕτως ὥστε νά γίνη ὁμόκεντρος μέ τόν κύκλον (K,α) , τότε οἱ δύο κύκλοι θά ἔχουν καταστῆ ὁμόθετοι μέ κέντρον ὁμοθεσίας τό κοινόν τώρα κέντρον των. Ὁ λόγος ὁμοιότητος τοῦ (K_1, α_1) πρός τόν (K,α) ἰσοῦται μέ τόν λόγον $\frac{\alpha_1}{\alpha}$ τῶν ἀκτίνων των.

Ἡ ὁμοιότης ἑνός σχήματος S_1 πρός ἕνα σχῆμα S σημειώνεται μέ τόν συμβολισμόν

$S_1 \sim S$ (διαβάζομεν : S_1 ὅμοιον πρός S).

<u>Παρατήρησις.</u> Ἡ ἰσότης μεταξύ ἐπιπέδων σχημάτων εἶναι μία μερική περίπτωσις τῆς ὁμοιότητος. Πράγματι, ἄν τό σχῆμα S_1 εἶναι ἴσον μέ τό σχῆμα S , τότε εἶναι δυνατόν, μέ κατάλληλον μετακίνησιν, νά τό κάμωμεν νά ἐφαρμόση εἰς τό S , μέ ἄλλας λέξεις : νά ταυτισθῆ μέ τό S. Δύο ὅμως ταυτισμένα σχήματα εἶναι ὁμόθετα τό ἕνα τοῦ ἄλλου μέ κέντρον ὁμοθεσίας ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου καί μέ λόγον ὁμοθεσίας τό 1 (ταυτοτική ὁμοθεσία).

<u>2.3.</u> <u>Ἰδιότητες τῆς ὁμοιότητος.</u> Ἡ ὁμοιότης εἶναι μία διμελής σχέσις μεταξύ σχημάτων τοῦ ἐπιπέδου ἡ ὁποία ἔχει τάς ἀκολούθους ἰδιότητας:

I) Τήν ἀνακλαστικήν : $S \sim S$.

Πράγματι τό S εἶναι ὁμόθετον τοῦ ἑαυτοῦ του μέ λόγον ὁμοθεσίας τό 1 καί κέντρον ὁμοθεσίας ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου (ταυτοτική ὁμοθεσία, § 1.1).

II) Τήν συμμετρικήν : $S_1 \sim S \Longrightarrow S \sim S_1$.
Αὐτό ἕπεται ἀμέσως ἀπό τούς ὁρισμούς τῆς ὁμοθεσίας (2.2).

III) Τήν μεταβατικήν :

$$(S \sim S_1 \text{ καί } S_1 \sim S_2) \Longrightarrow S \sim S_2 .$$

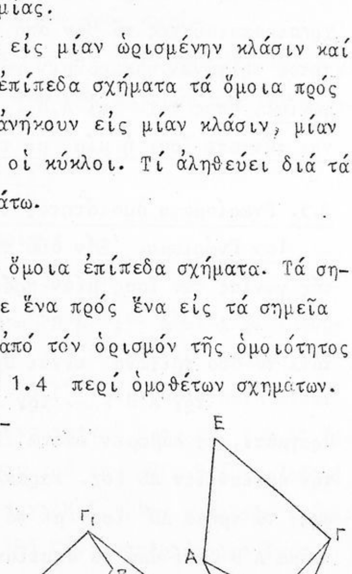
Αὐτό ἕπεται ἀπό ὅσα εἴπαμεν προηγουμένως, ὅταν τά τρία σχήματα S , S_1 , S_2 εἶναι τετράγωνα ἤ ὅταν εἶναι καί τά τρία κύκλοι. Θά φανῆ παρακάτω ὅτι ἀληθεύει καί εἰς τήν περίπτωσιν πού τά τρία σχήματα εἶναι τρίγωνα. Φυσικά ἠμπορεῖ νά δειχθῆ καί γενικῶς.

Ἡ ὁμοιότης εἶναι λοιπόν μία σχέσις ἰσοδυναμίας (Κεφ. Α΄, § 7.2) καί ἐπομένως διαμερίζει τό σύνολον τῶν σχημάτων τοῦ ἐπιπέδου εἰς κλάσεις ἰσοδυναμίας.

Κάθε ἐπίπεδον σχῆμα S ἀνήκει εἰς μίαν ὡρισμένην κλάσιν καί αὐτή ἀποτελεῖται ἀπό ὅλα τά ἐπίπεδα σχήματα τά ὅμοια πρός τό S. Π.χ. ὅλα τά τετράγωνα ἀνήκουν εἰς μίαν κλάσιν, μίαν ἄλλην κλάσιν ἀποτελοῦν ὅλοι οἱ κύκλοι. Τί ἀληθεύει διά τά τρίγωνα , αὐτό θά φανῆ παρακάτω.

<u>2.4.</u> Ἄς εἶναι S καί S_1 δύο ὅμοια ἐπίπεδα σχήματα. Τά σημεῖα τοῦ S ἀντιστοιχοῦν τότε ἕνα πρός ἕνα εἰς τά σημεῖα τοῦ S_1· αὐτό ἕπεται εὔκολα ἀπό τόν ὁρισμόν τῆς ὁμοιότητος καί ἀπό ὅσα εἴπαμεν εἰς τό § 1.4 περί ὁμοθέτων σχημάτων.

Ἄν λοιπόν τό S εἶναι ἕνα σύνολον $\{Α,Β,Γ,Δ,\ldots\}$ σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τότε τό S_1 θά εἶναι ἕνα σύνολον $\{Α_1,Β_1,Γ_1,Δ_1,\ldots\}$ ἀντιστοίχων σημείων. Δύο ἀντίστοιχα σημεῖα, π.χ. τά $Α$ καί $Α_1$, τά $Β$ καί $Β_1$ κ.ο.κ. λέγονται καί <u>ὁμόλογα</u> σημεῖα.



Τό τμῆμα A_1B_1 λέγεται <u>ὁμόλογον</u> τοῦ τμήματος ΑΒ, κ.ο.κ. Τέλος μία γωνία $\widehat{A_1B_1\Gamma_1}$ λέγεται ὁμόλογος τῆς γωνίας $\widehat{AB\Gamma}$, κ.ο.κ. Ἀπό ὅσα εἴπαμεν περί ὁμοθεσίας (§ 1.4) καί ἀπό τόν ὁρισμόν τῆς ὁμοιότητος συμπεραίνομεν εὔκολα τό ἑξῆς: Ἐάν ὁ λόγος ὁμοιότητος τοῦ S_1 πρός τό S εἶναι = λ , τότε

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1\Gamma_1}{B\Gamma} = \frac{A_1\Gamma_1}{A\Gamma} = \ldots = \lambda .$$

Ὥστε ὁ λόγος ἑνός ὁποιουδήποτε εὐθυγράμμου τμήματος τοῦ σχήματος S_1 πρός τό ὁμόλογον εὐθύγραμμον τμῆμα τοῦ ὁμοίου σχήματος S εἶναι πάντοτε ἴσος μέ τόν λόγον ὁμοιότητος λ τοῦ S_1 πρός τό S.

Ἀπό τήν ἀνωτέρω ἰδιότητα δύο ὁμοίων σχημάτων S_1 καί S, χρησιμοποιοῦντες τό 3ον ἀπό τά κατωτέρω γνωρίσματα ὁμοιότητος τριγώνων, ἠμποροῦμεν νά συμπεράνωμεν ὅτι <u>δύο ὁμόλογοι γωνίαι</u>, ὅπως π.χ. αἱ $\widehat{A_1B_1\Gamma_1}$ καί $\widehat{AB\Gamma}$ (σχῆμα ἀνωτέρω), <u>εἶναι πάντοτε ἴσαι ἡ μία μέ τήν ἄλλην.</u>

2.5. Γνωρίσματα ὁμοιότητος τριγώνων.

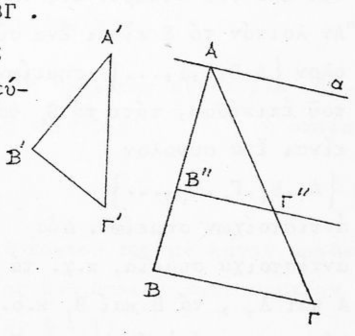
<u>1ον Γνώρισμα.</u> Ἐάν δύο τρίγωνα Α΄Β΄Γ΄ καί ΑΒΓ ἔχουν τάς γωνίας των ἴσας μίαν πρός μίαν :

$$\measuredangle A' = A \quad , \quad \measuredangle B' = B \qquad \measuredangle \Gamma' = \Gamma \quad ,$$

τότε τά δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια :

$$\text{τργ } A'B'\Gamma' \sim \text{τργ } AB\Gamma .$$

Πράγματι, ἄς λάβωμεν ἐπάνω εἰς τήν ἡμιευθεῖαν ΑΒ (σχ. παραπλεύρως) τό τμῆμα ΑΒ″ ἴσον μέ τό τμῆμα Α΄Β΄ καί ἀπό τό σημεῖον Β″ ἄς φέρωμεν τήν εὐθεῖαν Β″ Γ″ ∥ εὐθ. ΒΓ .



Ἄς χαράξωμεν ἀκόμη καί τήν εὐθεῖαν α πού περνᾶ ἀπό τό σημεῖον A καί εἶναι $\parallel$ εὐθ. ΒΓ. Σύμφωνα μέ τό θεώρημα τοῦ Θαλῆ (κεφ. Δ΄, § 4.4) θά ἔχωμεν τότε τήν ἀναλογίαν

$$\frac{AB''}{AB} = \frac{A\Gamma''}{A\Gamma} .$$

Ἄρα τό τργ ΑΒ″Γ″ θά εἶναι ὁμόθετον τοῦ τργ ΑΒΓ μέ κέντρον ὁμοθεσίας τό Α καί λόγον τόν $\frac{AB''}{AB} = \frac{A'B'}{AB}$ (εἰς τό σχῆμα ὁ λόγος αὐτός εἶναι $\simeq \frac{3}{5}$). Τό τργ ΑΒ″Γ″ εἶναι ὅμως ἴσον μέ τό τργ Α΄Β΄Γ΄ (1ον γνώρισμα ἰσότητος τριγώνων, Βιβλ. Ι, σ. 104 Γ), διότι

$AB'' = A'B'$, $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B'' = \sphericalangle B = \sphericalangle B'$, $\sphericalangle \Gamma'' = \sphericalangle \Gamma = \sphericalangle \Gamma'$.

Ἐπομένως τό τργ Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ἴσον μέ ἕνα ὁμόθετον τοῦ τργ ΑΒΓ καί συνεπῶς εἶναι ὅμοιον πρός αὐτό.

<u>2ον Γνώρισμα.</u> Ἐάν δύο τρίγωνα Α΄Β΄Γ΄ καί ΑΒΓ ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην : $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ καί τάς πλευράς πού τήν περιέχουν ἀναλόγους:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma} ,$$

τότε τά δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια :

$$\text{τργ } A'B'\Gamma' \sim \text{τργ } AB\Gamma .$$

Λαμβάνομεν τώρα ἐπάνω εἰς τάς ἡμιευθείας ΑΒ καί ΑΓ (προηγούμενον σχῆμα) τά τμήματα $AB'' = A'B'$ καί $A\Gamma'' = A'\Gamma'$. Ἔπειτα χαράσσομεν τήν εὐθεῖαν Β″Γ″. Ἡ εὐθεῖα αὐτή εἶναι $\parallel$ εὐθ ΒΓ , σύμφωνα μέ τήν Πρότασιν τοῦ Κεφ. Δ΄, § 4.5. Ἄρα τό τργ ΑΒ″Γ″ εἶναι ὁμόθετον τοῦ τργ ΑΒΓ. Καί ἐπειδή τό τργ Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ἴσον μέ τό τργ ΑΒ″Γ″ (2ον γνώρισμα ἰσότητος τριγώνων , Βιβλ. Ι , σ. 105 Γ), συμπεραίνομεν ὅτι

$$\text{τργ } A'B'\Gamma' \sim \text{τργ } AB\Gamma .$$

<u>3ον Γνώρισμα.</u> Ἐάν δύο τρίγωνα Α΄Β΄Γ καί ΑΒΓ ἔχουν ἀντιστοίχους πλευράς ἀναλόγους:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{\Gamma'A'}{\Gamma A} = \lambda ,$$

τότε τά δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια :

τργ $A'B'\Gamma' \sim$ τργ $AB\Gamma$.

Διά νά πεισθῶμεν, ἐργαζόμεθα ὅπως καί διά τό 2ον γνώρισμα ὁμοιότητος : κατασκευάζομεν τό τργ $AB''\Gamma''$, ὁμόθετον τοῦ $AB\Gamma$ μέ κέντρον ὁμοθεσίας τό A καί λόγον λ· παρατηροῦμεν ὅτι τό τργ $A'B'\Gamma'$ ἔχει τότε τάς πλευράς του ἀντιστοίχως ἴσας μέ τάς πλευράς τοῦ τργ $AB''\Gamma''$:

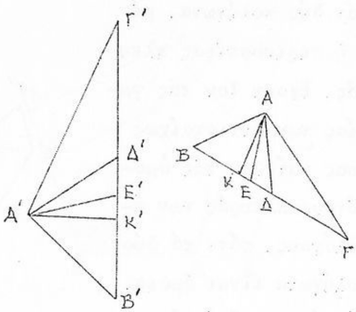
$$A'B' = AB'' \;,\; A'\Gamma' = A\Gamma'' \quad , \quad B'\Gamma' = B''\Gamma'' \;.$$

Ἄρα, σύμφωνα τώρα μέ τό τρίτον γνώρισμα ἰσότητος τριγώνων (Βιβλ. Ι, σ. 105 Γ - 106Γ), τό τργ $A'B'\Gamma'$ εἶναι ἴσον μέ τό τργ $AB''\Gamma''$ καί ἐπομένως ὅμοιον πρός τό $AB\Gamma$.

Παρατηρήσεις. 1) Διά νά ἐφαρμόσωμεν εἰς δύο τρίγωνα τό 1ον γνώρισμα ὁμοιότητος, ἀρκεῖ νά γνωρίζωμεν ὅτι ἔχουν δύο γωνίας των ἀντιστοίχως ἴσας· πράγματι τότε καί αἱ τρίται γωνίαι των εἶναι ἴσαι.(Βλ. Κεφ. ΣΤ΄, § 1.5).

2) Τά γνωρίσματα ὁμοιότητος 2ον καί 3ον ἀντιστοιχοῦν πρός τά γνωρίσματα ἰσότητος 2ον καί 3ον. Ἰδού μία συμβολική γραφή τῶν σχετικῶν προτάσεων:

Γνωρίσματα ὁμοιότητος τριγώνων	Γνωρίσματα ἰσότητος τριγώνων
I	I
$\left.\begin{array}{l}\hat{A}'=\hat{A}\\ \hat{B}'=\hat{B}\\ \hat{\Gamma}'=\hat{\Gamma}\end{array}\right\}\Longrightarrow$ τργ $A'B'\Gamma' \sim$ τργ $AB\Gamma$	Διά τήν ἰσότητα δύο τριγώνων δέν ἀρκεῖ αἱ γωνίαι των νά εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι· χρειάζεται ἐπί πλέον νά εἶναι ἴσαι δύο ἀντίστοιχοι πλευραί.
II	II
$\left.\begin{array}{l}\hat{A}'=\hat{A}\\ \dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{A'\Gamma'}{A\Gamma}\end{array}\right\}\Rightarrow$ τργ $A'B'\Gamma' \sim$ τργ $AB\Gamma$	$\left.\begin{array}{l}\hat{A}'=\hat{A}\\ A'B'=AB\\ A'\Gamma'=A\Gamma\end{array}\right\}\Longrightarrow$ τργ $A'B'\Gamma' =$ τργ $AB\Gamma$
III	III
$\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{B'\Gamma'}{B\Gamma}=\dfrac{\Gamma'A'}{\Gamma A}$ $\Longrightarrow$ τργ $A'B'\Gamma' \sim$ τργ $AB\Gamma$	$\left.\begin{array}{l}A'B'=AB\\ B'\Gamma'=B\Gamma\\ \Gamma'A'=\Gamma A\end{array}\right\}\Longrightarrow$ τργ $A'B'\Gamma' =$ τργ $AB\Gamma$



2.6. <u>Ὁμόλογα τμήματα εἰς ὅμοια τρίγωνα.</u> Ἄς εἶναι

τργ Α΄Β΄Γ $\sim$ τργ ΑΒΓ

καί ὁ λόγος ὁμοιότητος

$$\frac{Α΄Β΄}{ΑΒ} = λ .$$

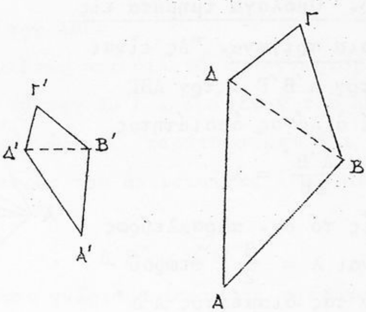
(Εἰς τό σχ. παραπλεύρως εἶναι $λ = \frac{3}{2}$) Θεωροῦμεν τάς διαμέσους Α΄Δ΄ καί ΑΔ, τάς διχοτόμους Α΄Ε΄ καί ΑΕ καθώς καί τά ὕψη Α΄Κ΄ καί ΑΚ πού ἀναχωροῦν ἀπό δύο ὁμολόγους κορυφάς Α΄ καί Α τῶν δύο τριγώνων. Ἀπό ὅσα εἴπαμεν ἕως τώρα, ἕπεται εὔκολα τό ἑξῆς:

Τά εὐθύγραμμα τμήματα Α΄Δ΄ καί ΑΔ , Α΄Ε΄ καί ΑΕ καθώς καί τά Α΄Κ΄ καί ΑΚ εἶναι ὁμόλογα τμήματα εἰς τήν σχέσιν ὁμοιότητος μεταξύ τῶν δύο τριγώνων. Συνεπῶς θά ἰσχύουν αἱ ἰσότητες:

$$\frac{Α΄Δ΄}{ΑΔ} = \frac{Α΄Ε΄}{ΑΕ} = \frac{Α΄Κ΄}{ΑΚ} = \frac{Α΄Β΄}{ΑΒ} = λ .$$

2.7. <u>Γνώρισμα ὁμοιότητος πολυγώνων.</u> Ἀντίθετα πρός ὅ,τι ἀληθεύει διά τά τρίγωνα, δύο πολύγωνα μέ <u>τέσσαρας ἤ περισσοτέρας πλευράς</u> ἠμποροῦν νά ἔχουν τάς γωνίας των ἀντιστοίχως ἴσας χωρίς νά εἶναι ὅμοια (παράδειγμα τό τετράγωνον $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ καί τό ὀρθογώνιον $Α_3Β_3Γ_3Δ_3$ τοῦ § 2.1)· ἐπίσης ἠμποροῦν νά ἔχουν ἀντιστοίχους πλευράς ἀναλόγους, χωρίς νά εἶναι ὅμοια (παράδειγμα τό τετράγωνον $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ καί ὁ ῥόμβος $Α_4Β_4Γ_4Δ_4$ τῆς § 2.1). Ἐάν ὅμως συμβαίνη νά ἔχουν καί τάς γωνίας των ἀντιστοίχως ἴσας καί τάς ἀντιστοίχους πλευράς των ἀναλόγους, τότε τά δύο πολύγωνα εἶναι ὅμοια. Ὥστε γνώρισμα ὁμοιότητος εἰς τά πολύγωνα μέ τέσσαρας ἤ περισσοτέρας πλευράς εἶναι τό ἑξῆς:

'Εάν δύο πολύγωνα, μέ 4 ἤ περισσοτέρας πλευράς, ἔχουν 1ον τάς γωνίας των ἀντιστοίχως ἴσας καί 2ον τάς ὁμολόγους πλευράς των ἀναλόγους, τότε τά δύο πολύγωνα εἶναι ὅμοια. ('Ομόλογοι ἤ ἀντίστοιχοι πλευραί εἶναι ἐκεῖναι πού συνδέουν κορυφάς ἴσων γωνιῶν).



$$\hat{A}' = \hat{A}\ ,\quad \hat{B}' = \hat{B}\ ,\quad \hat{\Gamma}' = \hat{\Gamma}\ ,\quad \hat{\Delta}' = \hat{\Delta}\ ,$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta} = \frac{\Delta'A'}{\Delta A} \simeq \frac{1}{2}$$

<u>Παρατήρησις</u>. 'Εάν εἰς δύο ὅμοια κυρτά πολύγωνα χαράξωμεν τάς διαγωνίους πού ξεκινοῦν ἀπό 2 ὁμολόγους κορυφάς ,τότε τά 2 πολύγωνα χωρίζονται εἰς ἰσάριθμα τρίγωνα πού εἶναι ἀντιστοίχως ὅμοια καί ὁμοίως κείμενα *) Π.χ. ἐάν εἰς τά ὅμοια τετράπλευρα τοῦ προηγουμένου σχήματος χαράξωμεν τάς ὁμολόγους διαγωνίους ΒΔ καί Β΄Δ΄, ἕκαστον τετράπλευρον θά χωρισθῆ εἰς δύο τρίγωνα ὅμοια καί ὁμοίως κείμενα:

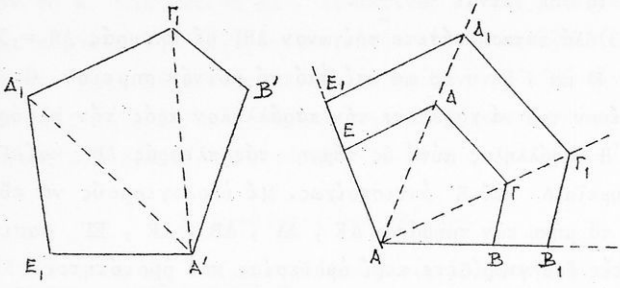
τργ $A'B'\Delta' \sim$ τργ $AB\Delta$ καί τργ $\Delta'B'\Gamma' \sim$ τργ $\Delta B\Gamma$.

2.8. <u>Πρόβλημα.</u> Νά κατασκευασθῆ πολύγωνον πού νά εἶναι ὅμοιον πρός δοθέν ΑΒΓΔΕ καί πού νά ἔχη ὡς πλευράν ὁμόλογον τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἕνα τμῆμα Α΄Β΄ τό ὁποῖον δίδεται κατά θέσιν καί μέγεθος.

<u>Κατασκευή</u>. 'Επάνω εἰς τήν ἡμιευθεῖαν ΑΒ λαμβάνομεν τό τμῆμα $AB_1 = A'B'$ (σχ. ἐπομένης σελίδος). Χαράσσοντες ἔπειτα τάς παραλλήλους

$B_1\Gamma_1 \parallel B\Gamma$, $\Gamma_1\Delta_1 \parallel \Gamma\Delta$, $\Delta_1E_1 \parallel \Delta E$

*) δηλ. τοποθετημένα μέ τήν αὐτήν διάταξιν εἰς τά 2 πολύγωνα.



κατασκευάζομεν τό ὁμόθετον $ΑΒ_1Γ_1Δ_1Ε_1$ τοῦ ΑΒΓΔΕ (μέ κέντρον ὁμοθεσίας τό Α καί λόγον $\frac{ΑΒ_1}{ΑΒ} = \frac{Α'Β'}{ΑΒ}$)

Τό ὁμόθετον αὐτό τό ἀποτυπώνομεν ἐπάνω εἰς διαφανές καί μεταφέρομεν τό ἀποτύπωμα κατά τρόπον ὥστε ἡ πλευρά του $ΑΒ_1$ νά ταυτισθῇ μέ τήν ἴσην της Α΄Β΄ ἡ ὁποία ἔχει δοθῆ κατά θέσιν καί μέγεθος. Τό προκῦπτον πολύγωνον $Α'Β'Γ_1Δ_1Ε_1$ εἶναι τό ζητούμενον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά κατασκευάσετε ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ καί ἀκολούθως τό τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ πού ἔχει κορυφάς τά μέσα Α΄, Β΄, Γ΄ τῶν πλευρῶν ΒΓ , ΓΑ , ΑΒ ἀντιστοίχως. Νά δείξετε ὅτι τργ Α΄Β΄Γ΄ $\sim$ τργ ΑΒΓ. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος ὁμοιότητος τοῦ τργ Α΄Β΄Γ΄ πρός τό τργ ΑΒΓ ;

2) Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ νά χαράξετε τάς διαμέσους ΑΑ΄, ΒΒ΄ καί ΓΓ΄. Κατόπιν νά δείξετε τά ἑξῆς :

α) τό τετράπλευρον ΒΓΒ΄Γ΄ εἶναι τραπέζιον·

β) αἱ τρεῖς διάμεσοι τοῦ τριγώνου διέρχονται ἀπό ἕνα καί τό αὐτό σημεῖον (διά νά τό δείξετε, χρησιμοποιῆστε τάς ἰδιότητας τοῦ τραπεζίου , § 1.9)·

γ) Ἔστω Ο τό κοινόν σημεῖον τῶν διαμέσων· τά τρίγωνα ΟΒ΄Γ΄ καί ΟΒΓ εἶναι ὅμοια καί ὁ λόγος ὁμοιότητος τοῦ ΟΒ΄Γ΄

πρός τό ΟΒΓ εἶναι $= \frac{1}{2}$.

3) Νά κατασκευάσετε τρίγωνον ΑΒΓ μέ πλευράς ΑΒ = 54 mm, ΒΓ = 40 mm , ΓΑ = 48 mm καί ἀπό τό κοινόν σημεῖον Ο τῶν διαμέσων του νά χαράξετε τήν παράλληλον πρός τήν πλευράν ΒΓ. Ἡ παράλληλος αὐτή ἄς τέμνη τάς πλευράς ΑΒ καί ΑΓ εἰς τά σημεῖα Δ καί Ε ἀντιστοίχως. Μέ ὑπολογισμούς νά εὕρετε τώρα τά μήκη τῶν τμημάτων ΔΕ , ΑΔ , ΔΒ , ΑΕ , ΕΓ βασιζόμενοι εἰς ὅσα γνωρίζετε περί ὁμοθεσίας καί ὁμοιότητος. Κατόπιν νά ἐπαληθεύσετε τά ἐξαγόμενά σας μέ μετρήσεις ἐπάνω εἰς τό σχέδιον.

4) Νά ἐξηγήσετε διατί τά ἰσόπλευρα τρίγωνα εἶναι μεταξύ των ὅμοια ἀνά δύο· ἐπίσης διατί ὅλα τά ἰσοσκελῆ τρίγωνα πού ἔχουν εἰς τήν κορυφήν των γωνίαν δεδομένου μεγέθους (π.χ. γωνίαν 45^{0}) εἶναι μεταξύ των ὅμοια ἀνά δύο.

5) Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ μέ ὁμολόγους κορυφάς τάς Α καί Α΄, Β καί Β΄ , Γ καί Γ΄ εἶναι ὅμοια καί ὁ λόγος ὁμοιότητος τοῦ πρώτου πρός τό δεύτερον εἶναι $= \frac{3}{5}$. Ἐάν τό ὕψος ΑΚ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἔχει μῆκος 48 mm , πόσον εἶναι τό μῆκος τοῦ ὁμολόγου ὕψους Α΄Κ΄ ;

6) Ἀπό τάς κορυφάς τριγώνου ΑΒΓ νά χαράξετε τάς παραλλήλους πρός τάς ἀπέναντι πλευράς του. Σχηματίζεται ἔτσι ἕνα νέον τρίγωνον. Νά ἐξετάσετε ἐάν τό νέον αὐτό τρίγωνον εἶναι ὅμοιον πρός τό ἀρχικόν, καί ἐάν εἶναι, νά εὕρετε ποῖος εἶναι ὁ λόγος ὁμοιότητός του πρός αὐτό τό ἀρχικόν.

7) Δύο ὀρθογώνια εἶναι ὅμοια. Τό ἕνα ἐξ αὐτῶν ἔχει μῆκος 52 mm καί πλάτος 39 mm. Τό ἄλλο ἔχει μῆκος 208 mm· πόσον εἶναι τό πλάτος του ;

8) Νά ἐγγράψετε εἰς ἕνα κύκλον (Κ , 18 mm) ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Νά προεκτείνετε τήν ἀκτῖνα ΚΑ πέραν ἀπό τό Α κατά ἕνα μῆκος ΑΑ΄ $= \frac{2}{3}$ ΚΑ καί νά χαράξετε τήν περιφέρειαν πού ἔχει

κέντρον τό Κ καί ἀκτῖνα ΚΑ΄. Αἱ ἀκτῖνες ΚΒ καί ΚΓ προεκτεινόμεναι τέμνουν τήν περιφέρειαν αὐτήν εἰς τά σημεῖα Β΄καί Γ΄ ἀντιστοίχως. Νά ἐξετάσετε ἐάν τό τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ὅμοιον πρός τό ΑΒΓ καί, ἐάν εἶναι, νά εὕρετε τόν λόγον ὁμοιότητός τοῦ Α΄Β΄Γ΄ πρός τό ΑΒΓ.

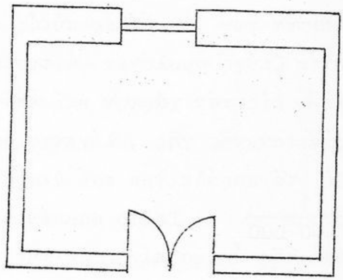
§ 3. Σχεδίασις ὑπό κλίμακα

3.1. Ἡ ἔννοια τῆς κλίμακος. Ἐπάνω εἰς ἕνα γεωγραφικόν χάρτην τῆς Ἑλλάδος ἐμετρήσαμεν μέ τό ὑποδεκάμετρον τήν ἀπόστασιν ἀπό τόν λιμένα τῆς Κύμης εἰς τήν Εὔβοιαν ἕως τόν λιμένα τῶν Ψαρῶν καί τήν εὑρήκαμεν = 9,6 cm = 0,096 m . Διά νά ὑπολογίσωμεν τήν πραγματικήν ἀπόστασιν μεταξύ τῶν δύο αὐτῶν λιμένων, ἀρκεῖ νά γνωρίζωμεν τόν λόγον τῆς ἀποστάσεώς των ἐπάνω εἰς τόν χάρτην πρός τήν πραγματικήν ἀπόστασίν των. Ὁ λόγος αὐτός εἶναι πάντοτε ὁ ἴδιος, ὁποιαδήποτε ζεύγη ὁμολόγων (ἀντιστοίχων)σημείων καί ἄν λάβωμεν ἐπάνω εἰς τόν χάρτην καί ἐπάνω εἰς τήν ἀπεικονιζομένην ἐπιφάνειαν τῆς γῆς , λέγεται δέ κλῖμαξ τοῦ γεωγραφικοῦ χάρτου. Εἰς τό παράδειγμα πού θεωροῦμεν ὁ λόγος αὐτός ἰσοῦται μέ $\frac{1}{1\,250\,000}$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι μία πραγματική ἀπόστασις ἐπί τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς εἶναι 1 250 000 φοράς μεγαλυτέρα ἀπό τήν ὁμόλογόν της ἐπάνω εἰς τόν χάρτην. Διά νά ὑπολογίσωμεν λοιπόν τήν πραγματικήν ἀπόστασιν Κύμης - Ψαρῶν, πρέπει νά πολλαπλασιάσωμεν τήν ἀπόστασιν 0,096 m , που ἐμετρήσαμεν ἐπάνω εἰς τόν χάρτην, ἐπί 1 250 000,ὁπότε εὑρίσκομεν: 120 000 m = 120 km $\approx$ 75 μίλια ἀγγλοσαξονικά $\approx$ 64,3 μίλια ναυτικά μέ προσέγγισιν μισοῦ μιλίου καθ᾽ ὑπεροχήν. (Ὅπως εἶναι γνωστόν , Βιβλ. Ι, σ. 26Α , τό ἀγγλοσαξωνικόν μίλιον ἰσοῦται μέ 1609 m καί τό ναυτικόν μίλιον μέ 1852 m.

Γενικῶς ἡ κλῖμαξ ἑνός χάρτου εἶναι ἕνα κλάσμα μέ ἀριθμητήν τήν μονάδα καί παρονομαστήν ἕνα στρογγυλόν ἀριθμόν: 50 000, 100 000 , 200 000 , 1 000 000 κ.ο.κ.

3.2. Σχέδιον ὑπό κλίμακα. Ὅταν θέλωμεν νά σχεδιάσωμεν τό ἔδαφος μιᾶς πόλεως μέ τούς δρόμους, τάς πλατείας καί τά οἰκοδομικά της τετράγωνα, πρέπει νά τό κάμωμεν ὑπό κλίμακα, δηλαδή κατά τρόπον ὥστε ἡ ἀπόστασις κάθε ζεύγους σημείων ἐπάνω εἰς τό σχέδιον νά ἔχη πάντοτε τόν ἴδιον λόγον πρός τήν ἀντίστοιχον ἀπόστασιν ἐπάνω εἰς τό ἔδαφος. Δύο σχέδια τῆς ἰδίας πόλεως μέ διαφορετικάς κλίμακας εἶναι ὅμοια μεταξύ των , διότι τό καθένα ἀπό αὐτά εἶναι ὅμοιον μέ τό ἀπεικονιζόμενον ἔδαφος (μεταβατική ἰδιότης τῆς σχέσεως ὁμοιότητος , § 2.3).

Ὑπό κλίμακα ἐπίσης σχεδιάζουν οἱ ἀρχιτέκτονες καί οἱ μηχανικοί τάς οἰκοδομάς πού πρόκειται νά κατασκευάσουν. Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν χρησιμοποιοῦνται συνήθως κλίμακες 1 : 50 , 1 : 100 , 1:200 κτλ. Ἔτσι εἰς τό σχῆμα παραπλεύρως δίδεται τό σχέδιον ὑπό κλίμακα 1 : 100 ἑνός δωματίου μέ μίαν θύραν καί ἕνα παράθυρον. Ἀπό τό σχέδιον αὐτό μέ μετρήσεις ἠμποροῦμεν νά συμπεράνωμεν τάς ἀκολούθους λεπτομερείας:



Τό δωμάτιον ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιον μέ ἐσωτερικάς διαστάσεις:

$$50 \text{ mm} \times 100 = 5 \text{ m} \quad \text{καί} \quad 34 \text{ mm} \times 100 = 3{,}40 \text{ m}.$$

Ὁ ἐξωτερικός τοῖχος ἔχει πάχος :

$$6 \text{ mm} \times 10 = 0{,}60 \text{ m} .$$

Οἱ ἐσωτερικοί τοῖχοι ἔχουν πάχος

$$2{,}5 \text{ mm} \times 100 = 0{,}25 \text{ m} .$$

Ἡ θύρα εἶναι δίφυλλος καί ἔχει ἄνοιγμα

14 mm × 10 = 1,40 m .

Τό (δίφυλλον) παράθυρον ἔχει ἄνοιγμα

12 mm × 100 = 1,20 m .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Τό δάπεδον ἑνός δωματίου ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιον μέ πραγματικάς διαστάσεις

3,80 m × 4,20 m .

Νά τό σχεδιάσετε ὑπό κλίμακα 1ον 1 : 100 καί 2ον 1 : 125. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος ὁμοιότητος τοῦ πρώτου σχεδίου πρός τό δεύτερον ; Τοῦ δευτέρου πρός τό πρῶτον ;
Ἀπό μετρήσεις εἰς τό πρῶτον σχέδιον νά εὕρετε τό πραγματικόν μῆκος τῶν διαγωνίων τοῦ δαπέδου τοῦ δωματίου.

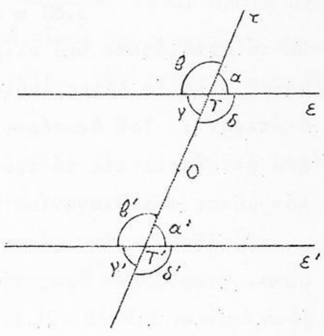
2) Ἔχομεν ἕνα χάρτην τοῦ ὁποίου δέν γνωρίζομεν τήν κλίμακα, γνωρίζομεν ὅμως τήν πραγματικήν ἀπόστασιν 2 ἀπεικονιζομένων λιμένων Α,Β: ΑΒ = 21,25 km. Μετροῦμεν μέ τό ὑποδεκάμετρον τήν ὁμόλογον (ἀντίστοιχον) ἀπόστασιν ἐπάνω εἰς τόν χάρτην καί τήν εὑρίσκομεν ἴσην μέ 85 mm . Νά ὑπολογίσετε τήν κλίμακα τοῦ χάρτου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ΄

Ἀπό τήν Ἐπιπεδομετρίαν.

§ 1. Ἀνασκόπησις καί συμπλήρωσις μερικῶν γεωμετρικῶν γνώσεων.

1.1.Παράλληλοι εὐθεῖαι. Εἰς τό Βιβλ. Ι , σ. 97-98 Α καί σ. 99 - 100 Β ἐμάθαμεν τά ἑξῆς:



Ἄς εἶναι ε καί ε΄δύο μέ στενήν σημασίαν παράλληλοι εὐθεῖαι καί ἡ εὐθεῖα τ ἄς τάς τέμνη εἰς τά σημεῖα Τ καί Τ΄. Τότε μεταξύ τῶν γωνιῶν α, β, γ , δ καί α΄, β΄, γ΄, δ΄ , πού σχηματίζονται γύρω εἰς τά σημεῖα τομῆς Τ καί Τ΄ ἀντιστοίχως, ἰσχύουν αἱ ἀκόλουθοι σχέσεις:

1ον Δύο ἐντός ἐναλλάξ γωνίαι εἶναι ἴσαι:

$$\gamma = \alpha' \quad , \quad \delta = \beta' .$$

2ον. Δύο ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίαι εἶναι ἴσαι:

$$\alpha = \alpha' \; , \; \beta = \beta' \; , \; \gamma = \gamma' \; , \; \delta = \delta' \; .$$

3ον. Δύο ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη (ἤ δύο ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη) γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί

$$\gamma + \beta' = \delta + \alpha' = 180^0 \quad (\alpha + \delta' = \beta + \gamma' = 180^0).$$

Ἡ αἰτιολογία τῶν τριῶν αὐτῶν προτάσεων βασίζεται εἰς τήν παρατήρησιν ὅτι τό σχῆμα πού ἀποτελεῖται ἀπό τάς τρεῖς εὐθείας ε , ε΄ καί τ ἔχει κέντρον συμμετρίας τό μέσον Ο τοῦ τμήματος ΤΤ΄ (Βιβλ. Ι , σ. 98 - 100 Β).

Τῶν ἀνωτέρω τριῶν προτάσεων ἰσχύουν καί αἱ ἀντίστροφοι, ὡς ἑξῆς :

Ἐάν δύο εὐθεῖαι ζ καί ζ΄ τοῦ ἐπιπέδου τέμνωνται ἀπό μίαν τρίτην τ καί ἐάν αἱ σχηματιζόμεναι γύρω εἰς τά σημεῖα τομῆς ὀκτώ γωνίαι ἐπαληθεύουν μίαν ἀπό τάς ἀκολούθους τρεῖς συνθήκας:

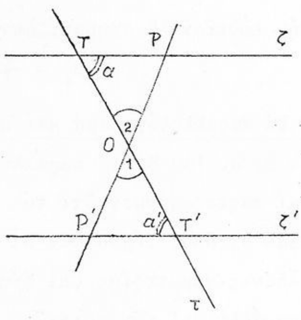
1ον δύο ἐντός ἐναλλάξ γωνίαι εἶναι ἴσαι ,

2ον δύο ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίαι εἶναι ἴσαι,

3ον δύο ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίαι (ἤ δύο ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίαι) εἶναι παραπληρωματικαί ,

τότε αἱ δύο εὐθεῖαι ζ καί ζ΄ εἶναι παράλληλοι.

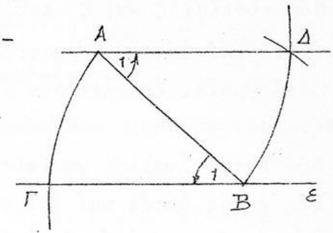
Ἀρκεῖ νά δείξωμεν τό 1ον.



Εἰς τό σχῆμα παραπλεύρως ὑποθέτομεν ὅτι αἱ ἐντός ἐναλλάξ γωνίαι α καί α΄ εἶναι ἴσαι: α = α΄. Ἔστω O τό μέσον τοῦ τμήματος TT΄ καί P τυχόν σημεῖον τῆς ζ διάφορον ἀπό τό T. Ἡ εὐθεῖα PO θά τέμνη τότε τήν ζ΄ εἰς ἕνα σημεῖον P΄ καί τά σχηματιζόμενα τρίγωνα OPT καί OP΄T΄θά εἶναι ἴσα (διότι TO = OT΄, α = α΄ καί $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$). Ἑπομένως PO = OP΄ καί συνεπῶς τό P΄ εἶναι συμμετρικόν τοῦ P ὡς πρός O. Ἄρα ἡ ζ΄ εἶναι συμμετρική τῆς ζ ὡς πρός O καί ἑπομένως παράλληλος πρός τήν ζ (Βιβλ. I , σ. 98 B , II)).

<u>1.2.</u> <u>Ἐφαρμογή.</u> Ἔχομεν μάθει (Βιβλ. I, σ. 77-78 A) πῶς μέ παράλληλον μετατόπισιν (σ. 118 Γ) τοῦ ταῦ ἤ τοῦ γνώμονος ἠμποροῦμεν νά χαράξωμεν παραλλήλους πρός μίαν εὐθεῖαν ἀπό διάφορα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου.

Εἴμεθα τώρα εἰς θέσιν νά δικαιολογήσωμεν ἕνα τρίτον τρόπον χαράξεως παραλλήλου, μέ χρῆσιν τοῦ κανόνος καί τοῦ διαβήτου. Ἔστω ὅτι ζητεῖται νά χαράξωμεν ἀπό τό σημεῖον Α τήν παράλληλον πρός τήν εὐθεῖαν ε (σχ. παραπλεύρως). Συνδέομεν τό σημεῖον Α μέ ἕνα τυχόν σημεῖον Β τῆς ε καί κατασκευάζομεν μέ κανόνα καί διαβήτην, κατά γνωστόν τρόπον (Βιβλ. Ι, σ. 103 Α), τήν γωνίαν

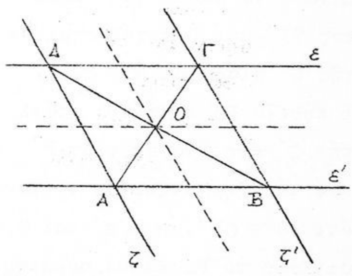


$$\measuredangle(\text{ΑΒ}, \text{ΑΔ}) = \measuredangle(\text{ΒΑ}, \text{ΒΓ}).$$

Αἱ εὐθεῖαι ε καί ΑΔ εἶναι παράλληλοι, διότι τεμνόμεναι ἀπό τήν εὐθεῖαν ΑΒ σχηματίζουν δύο ἐντός ἐναλλάξ γωνίας ἴσας:

$$\measuredangle \text{Β}_1 = \measuredangle \text{Α}_1 .$$

<u>1.3. Τά παραλληλόγραμμα καί αἱ ἰδιότητές των.</u> Ὡρίσαμεν (Βιβλίον Ι, σ. 100 Β) τό παραλληλόγραμμον ὡς τομήν δύο ταινιῶν καί παρετηρήσαμεν ὅτι τό σημεῖον Ο, ὅπου τέμνονται οἱ δύο ἄξονες συμμετρίας (αἱ δύο μεσοπαράλληλοι) τῶν ταινιῶν, εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ παραλληλογράμμου.



Ἀπό τήν παρατήρησιν αὐτήν συμπεράναμεν τά ἑξῆς:

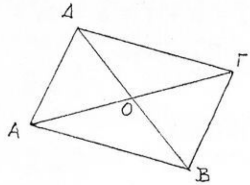
Ι) Αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου διχοτομοῦν ἡ μία τήν ἄλλην εἰς τό σημεῖον Ο.

ΙΙ) Αἱ ἀπέναντι πλευραί παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι (ὡς τμήματα συμμετρικά τό ἕνα τοῦ ἄλλου ὡς πρός τό σημεῖον Ο).

ΙΙΙ) Αἱ ἀπέναντι γωνίαι παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι (ὡς σχήματα συμμετρικά τό ἕνα τοῦ ἄλλου ὡς πρός τό σημεῖον Ο).

Τῶν ἀνωτέρω τριῶν προτάσεων ἰσχύουν καί αἱ ἀντίστροφοι, ὡς ἑξῆς:

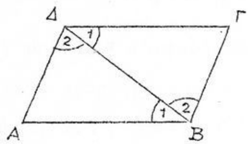
I΄) Ἐάν αἱ διαγώνιοι τετραπλεύρου διχοτομοῦν ἡ μία τήν ἄλλην, τότε τό τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον.



$\Delta O = OB \ , \quad AO = O\Gamma$

Διότι τότε τό σημεῖον τομῆς O τῶν διαγωνίων εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ τετραπλεύρου καί ἑπομένως αἱ ἀπέναντι πλευραί του εἶναι τμήματα παραλλήλων εὐθειῶν.

II΄) Ἐάν αἱ ἀπέναντι πλευραί κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴσαι, τότε τό τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον.

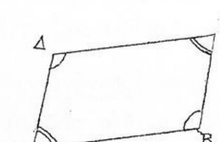


$AB = \Delta\Gamma \ , \quad B\Gamma = A\Delta$

Πράγματι, τότε μία διαγώνιος χωρίζει τό τετράπλευρον εἰς δύο τρίγωνα πού ἔχουν τάς πλευράς των ἀντιστοίχως ἴσας, πού ἑπομένως εἶναι ἴσα.
Π.χ. εἰς τό ἀνωτέρω σχῆμα ἔχομεν τργ $AB\Delta$ = τργ $\Gamma\Delta B$, ἐπειδή ἀφ' ἑνός $AB = \Gamma\Delta$ καί $\Delta A = B\Gamma$ ἐξ ὑποθέσεως καί ἀφ' ἑτέρου $B\Delta = \Delta B$. Ἄρα

$$\sphericalangle B_1 = \sphericalangle \Delta_1 \Longrightarrow AB \parallel \Delta\Gamma \quad \text{καί} \quad \sphericalangle \Delta_2 = \sphericalangle B_2 \Longrightarrow A\Delta \parallel B\Gamma .$$

III΄) Ἐάν αἱ ἀπέναντι γωνίαι κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴσαι, τότε τό τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον.



$\sphericalangle A = \sphericalangle \Gamma \ , \quad \sphericalangle B = \sphericalangle \Delta .$

Πράγματι, ὅπως θά ἴδωμεν παρακάτω στό § 1.6. , τό ἄθροισμα τῶν 4 γωνιῶν κυρτοῦ τετραπλεύρου ἰσοῦται μέ 4 ὀρθάς. Ἄρα (βλ. τελευταῖον σχῆμα) θά ἔχωμεν:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 2\hat{A} + 2\hat{B} = 2(\hat{A}+\hat{B}) = 4$ ὀρθαί

καί ἐπομένως

$$\hat{A} + \hat{B} = 2 \text{ ὀρθαί} \Longrightarrow A\Delta \parallel B\Gamma .$$

Ἐπίσης:

$$\hat{A} + \hat{\Delta} = 2 \text{ ὀρθαί} \Longrightarrow AB \parallel \Delta\Gamma .$$

Ὥστε διά κάθε κυρτόν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἰσχύουν αἱ ἀκόλουθοι λογικαί ἰσοδυναμίαι, εἰς τάς ὁποίας τό γράμμα Ο παριστάνει τό σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων :

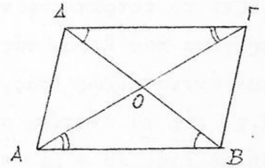
1ον. $(AB \parallel \Delta\Gamma$ καί $B\Gamma \parallel A\Delta) \Longleftrightarrow (AO = O\Gamma$ καί $BO = O\Delta)$.

2ον. $(AB \parallel \Delta\Gamma$ καί $B\Gamma \parallel A\Delta) \Longleftrightarrow (AB = \Delta\Gamma$ καί $A\Delta = B\Gamma)$

3ον. $(AB \parallel \Delta\Gamma$ καί $B\Gamma \parallel A\Delta) \Longleftrightarrow (\sphericalangle A = \sphericalangle \Gamma$ καί $\sphericalangle B = \sphericalangle \Delta)$.

Βασιζόμενοι εἰς ὅσα γνωρίζομεν περί παραλλήλων, εἰς τό 1ον γνώρισμα ἰσότητος τριγώνων (Βιβλ. Ι, σ. 104 Γ) καί εἰς τήν Ι΄) βλέπομεν ὅτι ἰσχύει καί ἡ ἑξῆς πρότασις:

IV΄) Ἐάν δύο ἀπέναντι πλευραί κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι ὄχι μόνον παράλληλοι ἀλλά καί ἴσαι, τότε τό τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον.



$AB \parallel \Delta\Gamma$, $AB = \Delta\Gamma$

Ὥστε ἰσχύει καί ἡ ἀκόλουθος ἰσοδυναμία:

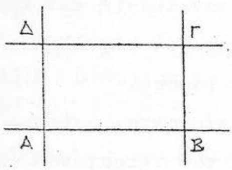
4ον. $(AB \parallel \Delta\Gamma$ καί $B\Gamma \parallel A\Delta) \Longleftrightarrow (AB \parallel \Delta\Gamma$ καί $AB = \Delta\Gamma$.

1.4. Τό ὀρθογώνιον, ὁ ρόμβος καί τό τετράγωνον.

Ὅταν αἱ δύο ταινίαι πού ἔχουν ὡς τομήν τό παραλληλόγραμμον τέμνωνται καθέτως (βλ. σχῆμα κατωτέρω), τότε τό παραλληλόγραμμον εἶναι εἰδικῶς ὀρθογώνιον, δηλαδή τετράπλευρον μέ τέσσαρας ὀρθάς γωνίας.

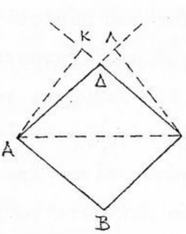
Όταν αἱ δύο ταινίαι πού ἔχουν ὡς τομήν τό παραλληλόγραμμον ἔχουν τό ἴδιον πλάτος (εἶναι ἴσαι), τότε τό παραλληλόγραμμον εἶναι εἰδικά <u>ρόμβος</u>, δηλαδή κυρτόν τετράπλευρον μέ τέσσαρας πλευράς ἴσας.

Όταν αἱ δύο ταινίαι πού ἔχουν ὡς τομήν τό παραλληλόγραμμον τέμνωνται καθέτως καί εἶναι ἴσαι, τότε τό παραλληλόγραμμον εἶναι εἰδικῶς τετράγωνον, δηλαδή τετράπλευρον μέ 4 ἴσας πλευράς καί 4 ὀρθάς γωνίας.



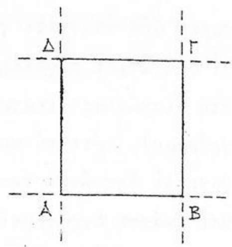
ὀρθογώνιον

(εὐθ. ΑΔ $\perp$ εὐθ. ΑΒ)



ρόμβος

(ΑΚ = ΓΛ)



τετράγωνον

(ΑΔ $\perp$ ΑΒ , ΑΔ = ΓΔ)

Ἐάν

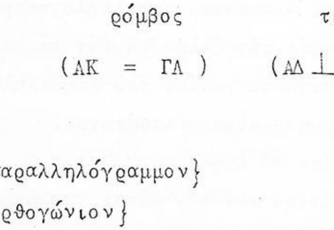
Π = { x / x παραλληλόγραμμον }

Ο = { x / x ὀρθογώνιον }

Ρ = { x / x ρόμβος }

Τ = { x / x τετράγωνον } ,

τότε μέ διαγράμματα τοῦ Venn θά ἔχωμεν τήν ἀκόλουθον γραφικήν παράστασιν τῶν σχέσεων μεταξύ τῶν τεσσάρων αὐτῶν συνόλων:



Νά ἐξηγήσετε καί νά δικαιολογήσετε τήν γραφικήν αὐτήν παράστασιν.

Ἰδιότητες. Διά τά ἀνωτέρω ειδικά παραλληλόγραμμα ἰσχύουν τά ἀκόλουθα:

1ον. Αἱ διαγώνιοι ὀρθογωνίου εἶναι ἴσαι. Ἀντιστρόφως, ἐάν αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι, τότε τό παραλληλόγραμμον εἶναι ὀρθογώνιον.

2ον. Αἱ διαγώνιοι ρόμβου τέμνονται καθέτως καί ἑκάστη διχοτομεῖ δύο ἀπέναντι γωνίας τοῦ ρόμβου. Ἀντιστρόφως, ἐάν αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου τέμνωνται καθέτως (ἤ ἐάν ἑκάστη διαγώνιος διχοτομῆ δύο ἀπέναντι γωνίας τοῦ παραλληλογράμμου), τότε τό παραλληλόγραμμον εἶναι ρόμβος.

3ον. Αἱ διαγώνιοι τετραγώνου εἶναι ἴσαι, τέμνονται καθέτως καί ἑκάστη διχοτομεῖ δύο ἀπέναντι γωνίας τοῦ τετραγώνου. Ἀντιστρόφως, ἐάν αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι καί κάθετοι ἡ μία πρός τήν ἄλλην (ἤ ἐάν εἶναι ἴσαι καί ἑκάστη διχοτομῆ δύο ἀπέναντι γωνίας τοῦ παραλληλογράμμου), τότε τό παραλληλόγραμμον εἶναι τετράγωνον.

Παρατηροῦμεν τέλος τά ἑξῆς:

1ον. Ἕνα ὀρθογώνιον πού δέν εἶναι τετράγωνον ἔχει δύο ἄξονας συμμετρίας. (Ποίους καί διατί) ;

2ον. Ἕνας ρόμβος πού δέν εἶναι τετράγωνον ἔχει δύο ἄξονας συμμετρίας. (Ποίους καί διατί) ;

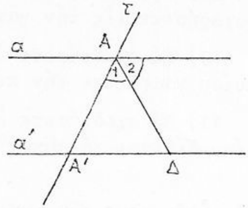
3ον. Τό τετράγωνον ἔχει τέσσαρας ἄξονας συμμετρίας. (Ποίους καί διατί ;) .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά χαράξετε τάς διχοτόμους δύο ἐντός ἐναλλάξ γωνιῶν πού σχηματίζονται ἀπό δύο παραλλήλους εὐθείας καί μίαν τέμνουσαν καί νά δείξετε ὅτι αἱ διχοτόμοι αὐταί εἶναι παράλληλοι.
Νά κάμετε τό ἴδιον καί διά δύο γωνίας ἐντός ἐκτός καί ἐπί

τά αὐτά μέρη.

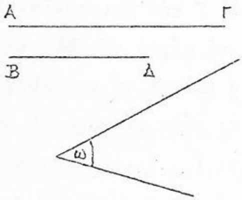
2) Εἰς τό παραπλεύρως σχῆμα ἔχομεν $\alpha \parallel \alpha'$ καί $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$. Τί εἴδους τρίγωνον εἶναι τό $A'\Delta A$;



3) Νά κατασκευάσετε μέ τόν ἁπλούστερον δυνατόν τρόπον παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἰς τό ὁποῖον $\sphericalangle A = 45^0$, ΑΒ = 6,5 cm καί ΑΔ = 4,5 cm . Νά αἰτιολογήσετε τήν κατασκευήν.

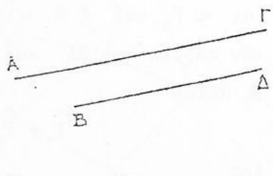
4) Νά κατασκευάσετε παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ μέ τά ἑξῆς δεδομένα: πλευρά ΑΒ = 68 mm , πλευρά ΑΔ = 53 mm καί διαγώνιος ΒΔ = 59 mm. Νά αἰτιολογήσετε τήν κατασκευήν.

5) Ἑνός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ δίδονται παραπλεύρως τά μεγέθη τῶν διαγωνίων του ΑΓ καί ΒΔ καθώς καί τῆς γωνίας των ω. Νά κατασκευασθῆ τό παραλληλόγραμμον καί νά αἰτιολογηθῆ ἡ κατασκευή.



6) Νά κατασκευσθῆ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ .
α) ἀπό τήν πλευράν του ΑΒ = 65 mm καί τήν διαγώνιόν του ΑΓ = 74 mm ;
β) ἀπό τήν διαγώνιόν του ΑΓ = 78 mm καί ἀπό τήν γωνίαν τῶν διαγωνίων του $\sphericalangle \omega = 60^0$.

7) Νά κατασκευάσετε ρόμβον ΑΒΓΔ
α) ἀπό τήν πλευράν του ΑΒ = 0,05 m καί τήν διαγώνιόν του ΒΔ = 0,038 m ,
β) ἀπό τά παραπλεύρως διδόμενα μεγέθη τῶν διαγωνίων του
γ) ἀπό τήν πλευράν του ΑΒ = 5,8 cm καί τήν γωνίαν του $\sphericalangle A = 73^0$,
δ) ἀπό τήν διαγώνιόν του ΑΓ = 62 mm καί τήν γωνίαν του $\sphericalangle A = 68^0$.



8) Νά κατασκευάσετε ρόμβον ἀπό τάς διαγωνίους του τῶν ὁποίων δίδονται τά μήκη 66 mm καί 44 mm.

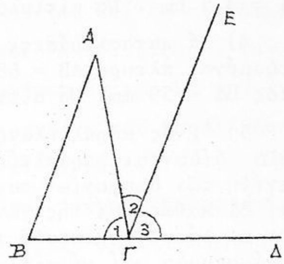
9) Νά σχεδιάσετε ὑπό κλίμακα 1:100 ἕνα ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ περίμετρος 200 m καί ὁ λόγος 3:2 δύο συνεχομένων πλευρῶν του.

Ὑπόδειξις. Νά παραστήσετε μέ x m τό μῆκος τῆς μικροτέρας πλευρᾶς καί νά τό προσδιορίσετε ἐπιλύοντες τήν ἐξίσωσιν πού προκύπτει διά τό x από τά δεδομένα. Κατόπιν νά προχωρήσετε είς τήν κατασκευήν.

10) Νά σχεδιάσετε ὑπό κλίμακα 1:1000 τετράγωνον τοῦ ὁποίου γνωρίζετε τήν περίμετρον 280 m.

11) Νά σχεδιάσετε ὑπό κλίμακα 1:500 τετράγωνον τοῦ ὁποίου δίδεται τό μῆκος 30 m μιᾶς διαγωνίου του.

1.5. <u>Ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τριγώνου.</u> Ἔστω ΑΒΓ τυχόν τρίγωνον. Προεκτείνομεν τήν πλευράν του ΒΓ πέραν ἀπό τό Γ κατά τήν ἡμιευθεῖαν ΓΔ καί χαράσσομεν ἀπό τό Γ τήν ἡμιευθεῖαν ΓΕ ∥ ΒΑ, πρός τό μέρος τῆς ΒΔ είς τό ὁποῖον κεῖται τό τργ ΑΒΓ. Σχηματίζονται τότε μέ κορυφήν τό Γ τρεῖς γωνίαι $Γ_1$, $Γ_2$, $Γ_3$, ἀντιστοίχως ἴσαι μέ τάς γωνίας τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Πράγματι:



$\sphericalangle Γ_1 = \sphericalangle Γ$ γωνία τργ ΑΒΓ ,

$\sphericalangle Γ_2 = \sphericalangle Α$ " " "

(αἱ $\sphericalangle Γ_2$ καί $\sphericalangle Α$ εἶναι ἐντός ἐναλλάξ τῶν παραλλήλων ΒΑ καί ΓΕ τεμνομένων ἀπό τήν ΓΑ) ,

$\sphericalangle Γ_3 = \sphericalangle Β$

(αἱ $\sphericalangle Γ_3$ καί $\sphericalangle Β$ εἶναι ἐκτός ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη τῶν παραλλήλων ΒΑ καί ΓΕ μέ τέμνουσαν τήν ΒΔ).

Ἐξ ἄλλου

$$\hat{Γ}_1 + \hat{Γ}_2 + \hat{Γ}_3 = 2 \text{ ὀρθαί.}$$

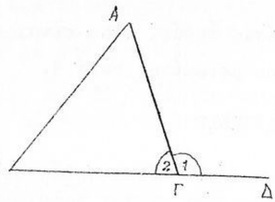
Ἄρα

$$\hat{Γ}_1 + \hat{Γ}_2 + \hat{Γ}_3 = \hat{Γ} + \hat{Α} + \hat{Β} = 2 \text{ ὀρθαί.}$$

Ὥστε, τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντός τριγώνου εἶναι ἴσον μέ 2 ὀρθάς.

<u>Ἐξωτερική γωνία τριγώνου.</u> Ἐάν είς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ προεκτείνωμεν μίαν πλευράν, π.χ. τήν ΒΓ πέραν ἀπό τήν κορυ-

φήν Γ κατά τήν ἡμιευθεῖαν ΓΔ, ἡ σχηματιζομένη κυρτή γωνία ∢ (ΓΔ, ΓΑ) λέγεται <u>ἐξωτερική γωνία</u> τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Κάθε τρίγωνον ἔχει λοιπόν ἕξι ἐξωτερικάς γωνίας πού ἀποτελοῦν τρία ζεύγη κατακορυφήν γωνιῶν. (Νά τάς διακρίνετε εἰς ἕνα τρίγωνον).



Ἀπό τάς ἰσότητας (βλ. ἀνωτέρω σχῆμα)

$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle \Gamma_2 = 2$ ὀρθάς καί $\sphericalangle \Gamma_1 + \sphericalangle \Gamma_2 = 2$ ὀρθ.

συμπεραίνομεν ὅτι

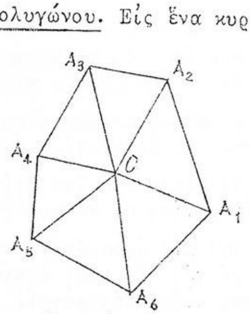
$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle \Gamma_2 = \sphericalangle \Gamma_1 + \sphericalangle \Gamma_2 \Longrightarrow \sphericalangle \Gamma_1 = \sphericalangle A + \sphericalangle B$.

Ὥστε, <u>κάθε ἐξωτερική γωνία τριγώνου εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν δύο (ἐσωτερικῶν) ἀπέναντι γωνιῶν τοῦ τριγώνου.</u>

<u>Συμπέρασμα</u> : Κάθε ἐξωτερική γωνία τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα ἀπό ἑκάστην ἀπέναντί της ἐσωτερικήν.

(Εἰς τό ἀνωτέρω σχῆμα: $\sphericalangle \Gamma_1 > \sphericalangle A$ καί $\sphericalangle \Gamma_1 > \sphericalangle B$).

<u>1.6. Ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κυρτοῦ πολυγώνου.</u> Εἰς ἕνα κυρτόν πολύγωνον μέ ν πλευράς (εἰς τό παραπλεύρως σχῆμα ν = 6) συνδέομεν ἕνα ἐσωτερικόν του σημεῖον Ο μέ τάς κορυφάς $A_1, A_2, \dots, A_\nu$. Θά σχηματισθοῦν τότε ν τρίγωνα $OA_1A_2, \dots, OA_\nu A_1$ μέ συνολικόν ἄθροισμα γωνιῶν 2ν ὀρθ. (διατί ;)



Ἐάν ἀπό τό ἄθροισμα αὐτό ἀφαιρέσωμεν τάς 4 ὀρθάς τοῦ ἀθροίσματος τῶν ν διαδοχικῶν γωνιῶν γύρω ἀπό τό σημεῖον Ο, θά λάβωμεν τό ἄθροισμα τῶν ν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου:

$\sphericalangle A_1 + \sphericalangle A_2 + \dots + \sphericalangle A_\nu = (2\nu - 4)$ ὀρθ.

Ὥστε, τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κυρτοῦ πολυγώνου εἶναι ἴσον μέ τόσας ὀρθάς, ὅσος εἶναι ὁ διπλάσιος ἀριθμός τῶν πλευρῶν του μειωμένος κατά 4.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Μέ πόσας ὀρθάς ἰσοῦται τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν ἀκολούθων κυρτῶν πολυγώνων:
τετραπλεύρου , πενταγώνου , ἑξαγώνου , ἑπταγώνου;
Μέ πόσας μοίρας ἰσοῦται τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνός δεκαγώνου ;

2) Πόσας πλευράς ἔχει τό κυρτόν πολύγωνον μέ ἄθροισμα γωνιῶν α) 12 ὀρθ. καί β) 720^0 ;
Ὑπόδειξις. Νά καλέσετε x τό ζητούμενον καί νά ἐπιλύσετε τήν ἐξίσωσιν πού τό προσδιορίζει.

3) Είς τργ ΑΒΓ ἔχομεν : $\sphericalangle A = 72^0 25'$, $\sphericalangle B = 53^0\ 47'$
Νά εὑρεθῇ ἡ γωνία $\sphericalangle \Gamma$.

4) Είς τργ ΑΒΓ ἔχομεν: $\sphericalangle A = 87^0 35' 25''$, $\sphericalangle \Gamma = 56^0 0' 43''$
Νά εὑρεθῇ ἡ $\sphericalangle B$.

5) Είς τργ ΑΒΓ ἔχομεν: $\sphericalangle B = \frac{2}{3} \sphericalangle A$ καί $\sphericalangle \Gamma = 60^0$
Νά εὑρεθοῦν αἱ $\sphericalangle A$ καί $\sphericalangle B$.

6) Είς τργ ΑΒΓ ἔχομεν: $\sphericalangle B = 58^0 20'$, $\sphericalangle \Gamma = 63^0\ 40'$.
Νά εὑρεθοῦν αἱ δύο γωνίαι τάς ὁποίας σχηματίζουν αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\sphericalangle B$ καί $\sphericalangle \Gamma$ τοῦ τριγώνου.

7) Πόσων μοιρῶν εἶναι κάθε μία ἀπό τάς γωνίας ἰσοπλεύρου τριγώνου ; Νά κατασκευάσετε γωνίαν 60^0 μέ κανόνα καί διαβήτην. Ἀκολούθως νά κατασκευάσετε γωνίαν 30^0 καί 15^0.

8) Πόσων μοιρῶν εἶναι κάθε μία ἀπό τάς ὀξείας γωνίας ἰσοσκελοῦς ὀρθογωνίου τριγώνου ;

9) Διατί είς ἕνα τρίγωνον μέ μίαν ἀμβλεῖαν ἤ μέ μίαν ὀρθήν γωνίαν αἱ ἄλλαι δύο γωνίαι εἶναι πάντοτε ὀξεῖαι ;

10) Είς ὀρθογώνιον τργ ΑΒΓ ἡ ὀξεῖα γωνία $\sphericalangle B$ εἶναι ἴση μέ τά 2/3 τῆς ὀξείας γωνίας $\sphericalangle \Gamma$, Νά εὑρεθοῦν είς μοίρας αἱ γωνίαι αὐταί.

11) Ἡ γωνία $\sphericalangle B$ τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τργ ΑΒΓ εἶναι διπλασία ἀπό τήν γωνίαν $\sphericalangle A$ τῆς κορυφῆς. Νά εὑρεθοῦν είς μέρη ὀρθῆς αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου.

12) Είς ἰσοσκελές τργ ΑΒΓ μέ βάσιν τήν ΒΓ διχοτομοῦμεν τάς ἐξωτερικάς γωνίας τῆς κορυφῆς Α. Νά δείξετε ὅτι ἡ διχοτόμος αὐτή εἶναι $\parallel$ ΒΓ . Νά ἐξετάσετε ἐάν ἀληθεύει καί

τό ἀντίστροφον : ἐάν ἡ διχοτόμος τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν εἰς μίαν κορυφήν Α τργ ΑΒΓ εἶναι παράλληλος πρός τήν πλευράν ΒΓ , τότε τό τργ ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές μέ βάσιν τήν ΒΓ.

13) Εἰς ἰσοσκελές τργ ΑΒΓ, μέ βάσιν τήν ΒΓ, μία ἐξωτερική ∢ Β εἶναι $= \frac{4}{3}$ ὀρθ. Νά εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου. Τί εἴδους τρίγωνον εἶναι αὐτό ;

14) Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ χαράσσομεν τήν διάμεσον ΑΔ πού ἀναχωρεῖ ἀπό τήν κορυφήν Α τῆς ὀρθῆς γωνίας καί τήν προεκτείνομεν πέραν ἀπό τό Δ κατά ἕνα τμῆμα ΔΕ = ΑΔ. Τί εἴδους τετράπλευρον εἶναι τό ΑΒΕΓ καί διατί ; Τί συμπεραίνετε συγκρίνοντες τήν διάμεσον ΑΔ μέ τήν ὑποτείνουσαν ;

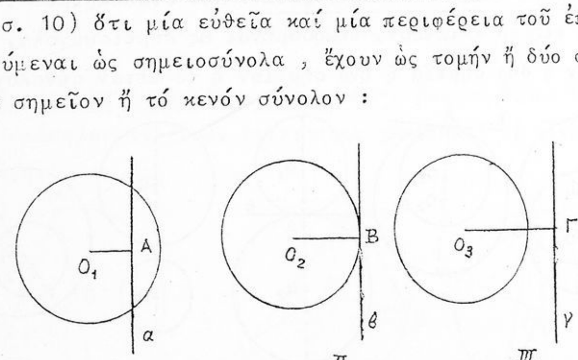
15) Εἰς ἰσοσκελές τργ ΑΒΓ μέ βάσιν τήν ΒΓ προεκτείνομεν τήν μίαν ἀπό τάς ἴσας πλευράς, ἔστω τήν ΒΑ, πέραν ἀπό τήν κορυφήν Α κατά ἕνα τμῆμα ΑΔ = ΒΑ. Τί εἴδους τρίγωνον εἶναι τό ΒΓΔ καί διατί ;

16) Τί εἴδους κυρτόν τετράπλευρον εἶναι ἐκεῖνο πού ἔχει κορυφάς τά μέσα τῶν πλευρῶν τυχόντος κυρτοῦ τετραπλεύρου καί διατί ;

Ὑπόδειξις. Νά χαράξετε πρῶτα μίαν διαγώνιον τοῦ θεωρουμένου τυχόντος τετραπλεύρου καί κατόπιν νά χρησιμοποιήσετε τήν ἰδιότητα IV΄ § 1.3 τῶν παραλληλογράμμων.

17) Τί εἴδους κυρτόν τετράπλευρον εἶναι ἐκεῖνο πού ἔχει κορυφάς τά μέσα τῶν πλευρῶν ἑνός ὀρθογωνίου ; ἑνός ρόμβου; ἑνός τετραγώνου ;

<u>1.7. Σχετική θέσις εὐθείας καί περιφερείας.</u> Εἴδαμεν (Βιβλ. ΙΙ , σ. 10) ὅτι μία εὐθεῖα καί μία περιφέρεια τοῦ ἐπιπέδου, θεωρούμεναι ὡς σημειοσύνολα , ἔχουν ὡς τομήν ἤ δύο σημεῖα ἤ ἕνα σημεῖον ἤ τό κενόν σύνολον :



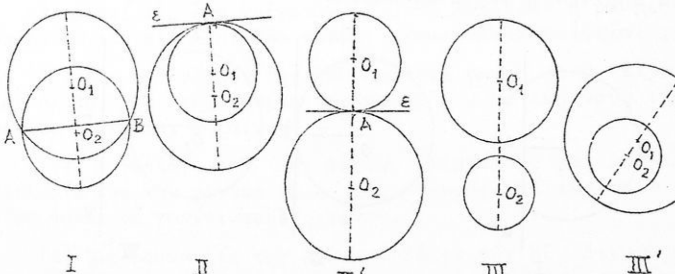
Εἰς τήν περίπτωσιν I ἡ ἀπόστασις O_1A τοῦ κέντρου O_1 τῆς περιφερείας ἀπό τήν εὐθεῖαν α εἶναι μικροτέρα ἀπό τήν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας· λέγομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα καί ἡ περιφέρεια τέμνονται ἤ ὅτι ἡ εὐθεῖα τέμνει τήν περιφέρειαν.

Εἰς τήν περίπτωσιν II ἡ ἀπόστασις O_2B τοῦ κέντρου O_2 ἀπό τήν εὐθεῖαν β εἶναι ἴση μέ τήν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας· λέγομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα καί ἡ περιφέρεια ἐφάπτονται εἰς τό σημεῖον Β. Τό ἴδιον ἐννοοῦμεν λέγοντες ὅτι ἡ εὐθεῖα β εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας εἰς τό σημεῖον Β ἤ ὅτι ἡ περιφέρεια ἐφάπτεται μέ τήν εὐθεῖαν εἰς τό σημεῖον Β (Βλ. καί Βιβλ.I, σ. 113 Β , Ἄσκ. 5).

Διά νά χαράξωμεν λοιπόν τήν ἐφαπτομένην περιφερείας εἰς ἕνα σημεῖον της Μ , ἀρκεῖ νά κατασκευάσωμεν τήν κάθετον πρός τήν ἀκτῖνα ΟΜ εἰς τό ἄκρον της Μ.

Εἰς τήν περίπτωσιν III ἡ ἀπόστασις $O_3\Gamma$ τοῦ κέντρου O_3 ἀπό τήν εὐθεῖαν γ εἶναι μεγαλυτέρα ἀπό τήν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας· λέγομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα γ εἶναι ἐξωτερική ὡς πρός τήν περιφέρειαν ἤ ὅτι κεῖται ἔξω ἀπό τήν περιφέρειαν.

1.8. Σχετική θέσις δύο περιφερειῶν. Δύο διακεκριμέναι περιφέρειαι εἰς τό ἐπίπεδον, θεωρούμεναι ὡς σημειοσύνολα, ἔχουν ὡς τομήν ἤ δύο σημεῖα ἤ ἕνα σημεῖον ἤ τό κενόν σύνολον :



I II II′ III III′

Είς τήν περίπτωσιν Ι αἱ δύο περιφέρειαι (O_1) καί (O_2) ἔχουν δύο κοινά σημεῖα, τά Α καί Β :

$$(O_1) \cap (O_2) = \{A, B\}.$$

Λέγομεν ὅτι αἱ δύο περιφέρειαι τέμνονται. Τό τμῆμα ΑΒ λέγεται κοινή χορδή τῶν δύο περιφερειῶν.

Είς τάς περιπτώσεις ΙΙ καί ΙΙ΄ αἱ δύο περιφέρειαι (O_1) καί (O_2) ἔχουν ἕνα κοινόν σημεῖον, τό Α :

$$(O_1) \cap (O_2) = \{A\}.$$

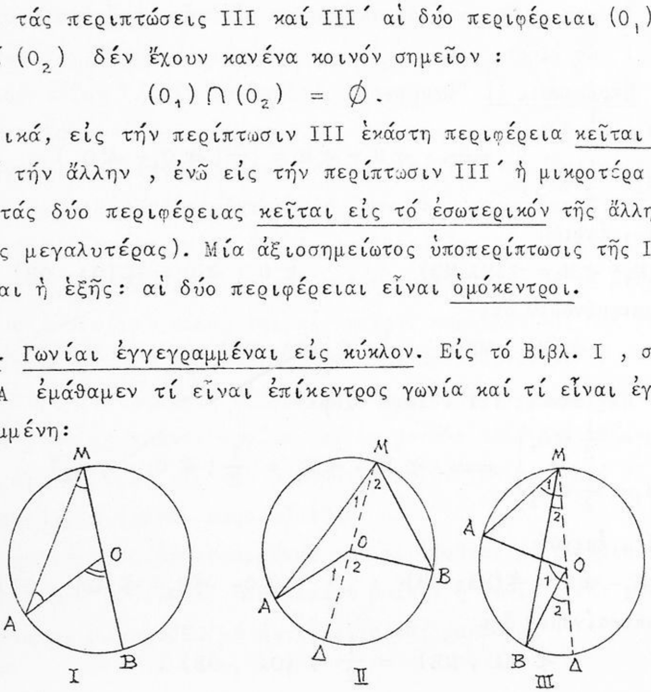
Λέγομεν τότε ὅτι αἱ δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται μεταξύ των είς τό σημεῖον Α. Είς τό σημεῖον αὐτό αἱ δύο περιφέρειαι ἔχουν κοινήν ἐφαπτομένην, τήν ε. Ἡ ἐπαφή τῶν δύο περιφερειῶν εἶναι ἤ ἐσωτερική (περίπτωσις ΙΙ) ἤ ἐξωτερική (περίπτωσις ΙΙ΄).

Είς τάς περιπτώσεις ΙΙΙ καί ΙΙΙ΄ αἱ δύο περιφέρειαι (O_1) καί (O_2) δέν ἔχουν κανένα κοινόν σημεῖον :

$$(O_1) \cap (O_2) = \emptyset.$$

Είδικά, είς τήν περίπτωσιν ΙΙΙ ἑκάστη περιφέρεια κεῖται ἔξω ἀπό τήν ἄλλην, ἐνῷ είς τήν περίπτωσιν ΙΙΙ΄ ἡ μικροτέρα ἀπό τάς δύο περιφέρειας κεῖται είς τό ἐσωτερικόν τῆς ἄλλης (τῆς μεγαλυτέρας). Μία ἀξιοσημείωτος ὑποπερίπτωσις τῆς ΙΙΙ΄ εἶναι ἡ ἑξῆς: αἱ δύο περιφέρειαι εἶναι ὁμόκεντροι.

1.8. Γωνίαι ἐγγεγραμμέναι είς κύκλον. Είς τό Βιβλ. Ι, σ. 98 Α ἐμάθαμεν τί εἶναι ἐπίκεντρος γωνία καί τί εἶναι ἐγγεγραμμένη:



α) Ἄς ἐξετάσωμεν πρῶτα τήν περίπτωσιν τοῦ Σχ. I ὅπου ἡ μία πλευρά τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας $\sphericalangle M$ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου. Τό τργ OAM εἶναι ἰσοσκελές $(OA = OM)$ καί ἐπομένως αἱ παρά τήν βάσιν MA γωνίαι εἶναι ἴσαι :

$$\sphericalangle M = \sphericalangle A .$$

Ἡ ἐπίκεντρος γωνία $\sphericalangle(OA\ ,\ OB)$ εἶναι ἐξωτερική τοῦ τριγώνου OAM , ἐπομένως (§ 1.5).

$$\sphericalangle(OA,\ OB) = \sphericalangle M + \sphericalangle A = 2\sphericalangle M$$

καί συνεπῶς

$$\sphericalangle M = \frac{1}{2}\sphericalangle(OA,\ OB) .$$

Ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι λοιπόν ἴση μέ τό ἥμισυ τῆς ἀντιστοίχου ἐπικέντρου.

β) Εἰς τάς περιπτώσεις τῶν Σχ. II καί III χαράσσομεν τήν διάμετρον ΜΔ καί μεταπίπτομεν εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ Σχ. I ὡς ἑξῆς:

<u>Περίπτωσις II</u> Ἔχομεν:

$$\left.\begin{aligned}\sphericalangle M_1 &= \frac{1}{2}\sphericalangle O_1\\ \sphericalangle M_2 &= \frac{1}{2}\sphericalangle O_2\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \sphericalangle M_1 + \sphericalangle M_2 = \frac{1}{2}(\sphericalangle O_1 + \sphericalangle O_2)$$

καί , ἐπειδή

$$\sphericalangle M_1 + \sphericalangle M_2 = \sphericalangle(MA,MB) \quad , \quad \sphericalangle O_1 + \sphericalangle O_2 = \sphericalangle(OA,\ OB) ,$$

συμπεραίνομεν ὅτι

$$\sphericalangle(MA\ ,\ MB) = \frac{1}{2}\sphericalangle(OA,\ OB) .$$

Περίπτωσις III . Τώρα ἔχομεν

$$\left.\begin{aligned}\sphericalangle M_1 &= \frac{1}{2}\sphericalangle O_1\\ \sphericalangle M_2 &= \frac{1}{2}\sphericalangle O_2\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \sphericalangle M_1 - \sphericalangle M_2 = \frac{1}{2}(\sphericalangle O_1 - \sphericalangle O_2)$$

καί , ἐπειδή

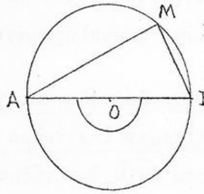
$$\sphericalangle M_1 - \sphericalangle M_2 = \sphericalangle(MA,\ MB) \quad , \quad \sphericalangle O_1 - \sphericalangle O_2 = \sphericalangle(OA\ ,\ OB) ,$$

συμπεραίνομεν ὅτι

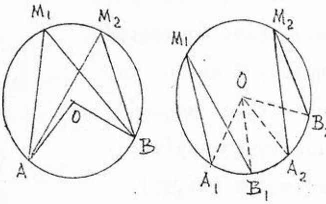
$$\sphericalangle(MA\ ,\ MB) = \frac{1}{2}\sphericalangle(OA\ ,\ OB) .$$

Ὥστε καί εἰς τάς περιπτώσεις ΙΙ καί ΙΙΙ ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι ἴση μέ τό ἥμισυ τῆς ἀντιστοίχου ἐπικέντρου. Ἰσχύει λοιπόν ἡ ἀκόλουθος πρότασις :

Κάθε γωνία ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον ἰσοῦται μέ τό ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου πού ἔχει ἀντίστοιχον τόξον τό τόξον ἐπί τοῦ ὁποίου βαίνει ἡ ἐγγεγραμμένη.



<u>Συμπεράσματα.</u> 1ον . Γωνία ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον εἶναι ὀρθή. Πράγματι, ἡ ἀντίστοιχος εἰς αὐτήν ἐπίκεντρος γωνία εἶναι ἀποπλατυσμένη. Ἡ πρότασις αὐτή ὀφείλεται εἰς τόν Θαλῆ.

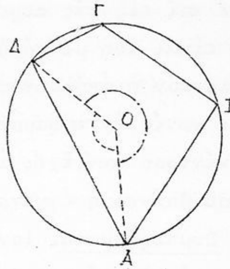


2ον. Εἰς τόν ἴδιον κύκλον (ἤ εἰς ἴσους κύκλους) γωνίαι ἐγγεγραμμέναι εἰς τό ἴδιον τόξον (ἤ εἰς ἴσα τόξα) εἶναι ἴσαι.

Πράγματι, αἱ ἐγγεγραμμέναι αὐταί γωνίαι εἶναι ἴσαι μέ τό ἥμισυ τῆς αὐτῆς ἐπικέντρου (ἤ ἴσων ἐπικέντρων γωνιῶν).

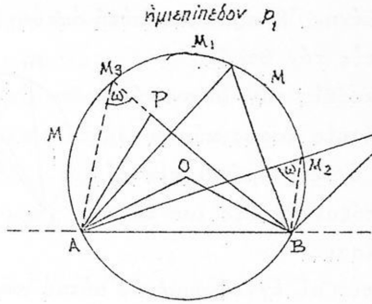
3ον. Ἐμάθαμεν (Βιβλ. Ι, σ. 101Α) ὅτι τό μέτρον μιᾶς ἐπικέντρου γωνίας εἰς μοίρας γωνίας εἶναι ἴσον μέ τό μέτρον τοῦ ἀντιστοίχου τόξου της εἰς μοίρας περιφερείας. Καί γενικῶς : τό μέτρον μιᾶς ἐπικέντρου γωνίας ἰσοῦται μέ τό μέτρον τοῦ ἀντιστοίχου τόξου της, ὅταν λάβωμεν ὡς μονάδα γωνιῶν μίαν ὡρισμένην γωνίαν καί ὡς μονάδα τόξων τό τόξον πού ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν ὡρισμένην αὐτήν γωνίαν. Ἀπό τά προηγούμενα ἕπεται τώρα τό ἑξῆς:

Τό μέτρον μιᾶς ἐγγεγραμμένης γωνίας ἰσοῦται μέ τό ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ τόξου ἐπί τοῦ ὁποίου βαίνει ἡ γωνία , ἐάν γωνία καί τόξον μετρηθοῦν μέ ἀντιστοιχούσας μονάδας.



Μία ἐφαρμογή. Ἔστω ΑΒΓΔ κυρτόν τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (δηλ. μέ κορυφάς κειμένας ἐπάνω εἰς τήν περιφέρειαν τοῦ κύκλου). Νά δείξετε ὅτι αἱ ἀπέναντι γωνίαι του $\hat{A}$ μέ $\hat{\Gamma}$ καί $\hat{B}$ μέ $\hat{\Delta}$ εἶναι παραπληρωματικαί.

1.10. Τό τόξον ὡς γεωμετρικός τύπος σημείων ἀπό τά ὁποῖα βλέπομεν ἕνα τμῆμα ὑπό σταθεράν γωνίαν.



Ἔστω $\widehat{AM_1B}$ ἕνα τόξον κύκλου (σχ. παραπλεύρως). Κάθε ἐσωτερικόν σημεῖον Μ αὐτοῦ τοῦ τόξου εἶναι κορυφή μιᾶς ἐγγεγραμμένης γωνίας $\sphericalangle$ (ΜΑ,ΜΒ). Ἡ γωνία αὐτή εἶναι $= \frac{1}{2} \sphericalangle(OA, OB)$, ὅπως εἴδαμεν , ἄρα τό μέγεθός της ω παραμένει σταθερόν, ὅταν ἡ κορυφή της Μ ἀλλάξη θέσιν ἐπάνω εἰς τό τόξον $\widehat{AM_1B}$. Μέ ἄλλους λόγους, τά (ἐσωτερικά) σημεῖα Μ τοῦ τόξου $\widehat{AM_1B}$ ἔχουν τήν ἑξῆς ἰδιότητα: 1ον κεῖνται ὅλα εἰς τό ἕνα ἀπό τά δύο ἡμιεπίπεδα τά ὁποῖα ὁρίζει (χωρίζει) ἡ εὐθεῖα ΑΒ , εἰς τό ἡμιεπίπεδον p_1 , 2ον ἀπό τό καθένα των Μ βλέπομεν τό τμῆμα ΑΒ ὑπό γωνίαν $\sphericalangle$ (ΜΑ, ΜΒ) σταθεροῦ μεγέθους ω.

Εἶναι εὔκολον ἐξ ἄλλου νά ἴδωμεν ὅτι τά σημεῖα αὐτά Μ εἶναι τά μόνα σημεῖα τοῦ ἡμιεπιπέδου p_1 πού ἔχουν τήν ἀνωτέρω ἰδιότητα. Πράγματι , ἄν πάρωμεν ἕνα σημεῖον Ν τοῦ p_1 ἔξω ἀπό τόν κύκλον , τότε , ὅπως φαίνεται εἰς τό σχῆμα , θά ἔχωμεν

$$\sphericalangle(NA\ ,\ NB) < \sphericalangle(M_2A\ ,\ M_2B) = \omega\ .$$

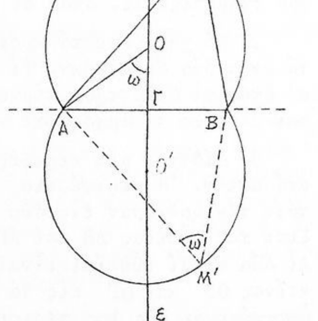
Καί ἐάν πάρωμεν ἕνα σημεῖον P τοῦ p_1 ἐντός τοῦ κύκλου θά ἔχωμεν

$$\sphericalangle(PA\ ,\ PB) > \sphericalangle(M_3A,\ M_3B) = \omega\ .$$

Ὥστε , τό σύνολον τῶν σημείων τοῦ ἡμιεπιπέδου p_1 ἀπό τά ὁποῖα τό τμῆμα AB , τό ὡρισμένον κατά μέγεθος καί θέσιν, φαίνεται ὑπό γωνίαν σταθεροῦ μεγέθους ω, ταυτίζεται μέ τό σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AM_1B}$.

Ἡ πρότασις αὐτή διατυπώνεται καί ὡς ἑξῆς, ἄν χρησιμοποιήσωμεν τόν ἀρχαῖον ἑλληνικόν ὅρον "γεωμετρικός τόπος σημείων" τόν ὁποῖον ἐγνωρίσαμεν εἰς τό Βιβλ. I, σ. 109 B καί σ.122B: Ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων τοῦ ἡμιεπιπέδου p_1 ἀπό τά ὁποῖα τό τμῆμα AB φαίνεται ὑπό γωνίαν σταθεροῦ μεγέθους ω, εἶναι τό τόξον $\overset{\frown}{AM_1B}$ (χωρίς τά ἄκρα του).

Πρόβλημα. Δίδεται εἰς τό ἐπίπεδον ἕνα τμῆμα AB, κατά μέγεθος καί θέσιν, καί ζητεῖται νά κατασκευασθῆ τόξον κύκλου τό ὁποῖον νά ἔχῃ χορδήν τό AB καί νά δέχεται ἐγγεγραμμένην γωνίαν ἴσην μέ δοθεῖσαν γωνίαν ω ($< 180^\circ$).



Ἐπίλυσις. Εἶναι φανερόν ὅτι τό κέντρον O τῆς περιφερείας εἰς τήν ὁποίαν θά ἀνήκῃ τό ζητούμενον τόξον , θά κεῖται ἐπάνω εἰς τήν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος AB. Χαράσσομεν λοιπόν τήν μεσοκάθετον αὐτήν ε. Σκεπτόμεθα ἀκολούθως ὅτι κάθε γωνία ἐγγεγραμμένη εἰς τό κατασκευαστέον τόξον εἶναι ἴση μέ τό ἥμισυ τῆς ἀντιστοίχου ἐπικέντρου ∢(ΟΑ, ΟΒ) , ἄρα ἴση μέ τήν γωνίαν ∢ (ΟΑ, ΟΓ), ὅπου Γ εἶναι τό μέσον τοῦ τμήματος ΑΒ. Κατασκευάζομεν λοιπόν , μέ κορυφήν τυχόν σημεῖον Κ τῆς μεσοκαθέτου ε, τήν γωνίαν

∢ (ΚΓ , Κx) ἴσην μέ τήν δοθεῖσαν ∢ ω ,

καί ἀπό τό σημεῖον Α φέρομεν τήν παράλληλον πρός τήν εὐθεῖαν Κx . Ἡ παράλληλος αὐτή τέμνει τήν ε εἰς ἕνα σημεῖον Ο πού εἶναι ἀκριβῶς τό κέντρον τοῦ ζητουμένου κυκλικοῦ τόξου. (Νά ἐξηγήσετε διατί). Ἐπομένως μία λύσις τοῦ τεθέντος προβλήματος εἶναι τό τόξον $\overset{\frown}{AMB}$ πού γράφεται μέ κέντρον τό Ο καί ἀκτῖνα ΟΑ = ΟΒ πρός τό μέρος τῆς ΑΒ ὅπου καί τό Ο. Μία δευτέρα λύσις τοῦ προβλήματος εἶναι τό τόξον $\overset{\frown}{AM'B}$ πού εἶναι συμμετρικόν τοῦ $\overset{\frown}{AMB}$ ὡς πρός ἄξονα τήν εὐθεῖαν ΑΒ. (Διατί ;).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Εἰς ἕνα κύκλον νά χαράξετε δύο διαμέτρους καθέτους μεταξύ των καί τάς τέσσαρας ἐφαπτομένας εἰς τά ἄκρα των. Τί εἴδους τετράπλευρον σχηματίζεται ; Τί εἴδους τετράπλευρον σχηματίζεται, ὅταν αἱ δύο διάμετροι τέμνωνται πλαγίως ;

2) Νά χαράξετε τό κυρτόν τετράπλευρον πού ἔχει κορυφάς τά ἄκρα δύο διαμέτρων. Τί εἴδους τετράπλευρον προκύπτει, α) ὅταν αἱ διάμετροι τέμνωνται καθέτως καί β) ὅταν τέμνονται πλαγίως ; Ἠμπορεῖτε νά ἐξηγήσετε διατί ;

3) Δίδεται μία περιφέρεια(Ο, ρ) καί ἕνα σημεῖον Α ἔξω ἀπό αὐτήν. Ἡ περιφέρεια μέ διάμετρον τό τμῆμα ΟΑ τέμνει τότε τήν δοθεῖσαν εἰς δύο σημεῖα, ἔστω τά Β καί Γ. Νά χαράξετε τάς εὐθείας ΑΒ καί ΑΓ.
Αἱ δύο αὐταί εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι ἀντιστοίχως πρός τάς ἀκτῖνας ΟΒ καί ΟΓ εἰς τά ἄκρα των (διατί ;), ἐπομένως εἶναι ἐφαπτόμεναι τῆς 1ης περιφερείας. Νά δείξετε ὅτι τά τμήματα ΑΒ καί ΑΓ εἶναι ἴσα : ΑΒ = ΑΓ.

4) Δίδεται μία περιφέρεια μέ κέντρον τό σημεῖον Ο καί

μία τυχοῦσα εὐθεῖα ε εἰς τό ἐπίπεδον. Ζητεῖται νά χαράξωμεν τάς δύο ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας τάς παραλλήλους πρός τήν ε.

Ὑπόδειξις. Τά σημεῖα ἐπαφῆς πρέπει νά κεῖνται ἐπάνω εἰς τήν κάθετον πρός τήν ε ἀπό τό κέντρον Ο (διατί ;).

5) Δύο περιφέρειαι (Ο,ϱ) καί (Ο΄,ϱ΄) κεῖνται ἡ καθεμία ἔξω ἀπό τήν ἄλλην. Νά συγκρίνετε ἀπό ἄποψιν μεγέθους τό τμῆμα ΟΟ΄ (τήν διάκεντρον) μέ τό ἄθροισμα ϱ + ϱ΄ τῶν ἀκτίνων.

6) Ὅμοιον ζήτημα μέ τό προηγούμενον εἰς τήν περίπτωσιν ἐξωτερικῆς ἐπαφῆς τῶν δύο περιφερειῶν.

7) Δύο περιφέρειαι (Ο,ϱ) καί (Ο΄,ϱ΄) μέ $ϱ \geqq ϱ'$ τέμνονται εἰς τά σημεῖα Α καί Β. Ποία σχέσις μεγέθους (ποία ἀνισότης) συνδέει τήν διάκεντρον ΟΟ΄ ἀφ' ἑνός μέ τό ἄθροισμα ϱ+ϱ΄ καί ἀφ' ἑτέρου μέ τήν διαφοράν ϱ−ϱ΄ τῶν ἀκτίνων ;

Ὑπόδειξις. Νά χρησιμοποιήσετε τήν ἀνισότητα πού συνδέει τό μῆκος ἑνός εὐθυγράμμου τμήματος μέ τό μῆκος μιᾶς τεθλασμένης γραμμῆς πού ἔχει τά ἴδια ἄκρα μέ τό τμῆμα (Βιβλ. Ι, σ. 7Α).

8) Δύο περιφέρειαι (Ο,ϱ) καί (Ο΄,ϱ΄) ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς ἕνα σημεῖον Α. Νά συγκρίνετε ἀπό ἄποψιν μεγέθους τήν διάκεντρον ΟΟ΄ μέ τήν διαφοράν ϱ−ϱ΄ τῶν ἀκτίνων. (Ὑποθέτομεν ὅτι $ϱ > ϱ'$. Διατί ἐξαιροῦμεν τήν περίπτωσιν $ϱ = ϱ'$;)

9) Ἐκ δύο διακεκριμένων (διαφόρων) περιφερειῶν ἡ μία κεῖται εἰς τό ἐσωτερικόν τῆς ἄλλης. Νά συγκρίνετε ἀπό ἄποψιν μεγέθους τήν διάκεντρόν των μέ τήν διαφοράν τῶν ἀκτίνων των. Τί συμβαίνει εἰς τήν εἰδικήν περίπτωσιν πού αἱ δύο περιφέρειαι εἶναι ὁμόκεντροι ;

10) Νά συγκεντρώσετε εἰς ἕνα πίνακα τάς σχέσεις πού ηὕρατε εἰς τάς προηγουμένας Ἀσκήσεις 5) ἕως 9).

11) Δύο σημεῖα Α καί Β ἔχουν ἀπόστασιν ΑΒ = 24 mm. Νά γράψετε περιφερείας αἱ ὁποῖαι νά περνοῦν ἀπό τά δύο σημεῖα Α καί Β καί νά ἔχουν ἀντιστοίχως ἀκτῖνας: 25 mm , 15 mm , 12 mm . Πόσαι τέτοιαι περιφέρειαι ὑπάρχουν ; Ποῦ κεῖνται τά κέντρα των ; Γενικῶς, ποῦ κεῖται τό κέντρον μιᾶς περιφερείας πού περνᾶ ἀπό τά δύο σημεῖα Α , Β καί διατί ; Τό σύνολον τῶν δύο περιφερειῶν πού περνοῦν ἀπό τά σημεῖα Α καί Β εἶναι πεπερασμένον ἤ μή πεπερασμένον ;

12) Δίδεται μία εὐθεῖα ε καί ζητεῖται νά γράψετε μερικάς περιφερείας μέ τήν ἰδίαν ἀκτῖνα ϱ αἱ ὁποῖαι νά ἐφάπτωνται μέ τήν ε εἰς διάφορα σημεῖα της. Τί ἔχετε νά παρατηρήσετε σχετικῶς μέ τά κέντρα τῶν περιφερειῶν αὐτῶν καί , γενι-

κῶς, μέ τό σύνολον τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν ἀκτῖνος ρ αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται μέ τήν ε ;

13) Δίδεται μία περιφέρεια (Ο,ρ) καί ζητεῖται νά χαράξωμεν μίαν ἄλλην (Ο΄, ρ΄) ἡ ὁποία νά ἐφάπτεται μέ τήν πρώτην ἐξωτερικῶς ἤ ἐσωτερικῶς εἰς ἕνα ὡρισμένον σημεῖον της Α καί νά ἔχη δοθεῖσαν ἀκτῖνα. Πῶς θά ἐργασθῶμεν ;

14) Δίδονται δύο μέ στενήν σημασίαν παράλληλοι εὐθεῖαι καί ζητεῖται νά γράψωμεν περιφέρειαν πού νά ἐφάπτεται καί μέ τάς δύο εὐθείας. Πόσαι τέτοιαι περιφέρειαι ὑπάρχουν; Τί ἔχετε νά παρατηρήσετε σχετικῶς μέ τό σύνολον τῶν κέντρων των ;

15) Πῶς θά γραφῆ περιφέρεια ἡ ὁποία νά ἔχη δοθεῖσαν ἀκτῖνα καί νά ἐφάπτεται μέ τάς πλευράς δοθείσης κυρτῆς γωνίας ;

16) Μία γωνία ∢ (ΜΑ , ΜΒ) εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τόξον $\overparen{AMB}$ 215^0 26΄. Νά ὑπολογίσετε τό μέτρον τῆς γωνίας.

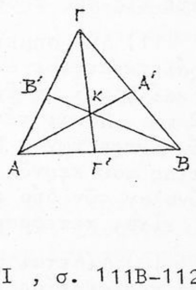
17) Διατί τό τραπέζιον τό ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον εἶναι ἰσοσκελές (ἔχει δηλαδή τάς μή παραλλήλους πλευράς του ἴσας);

18) Τόξον $\overparen{AB}$ περιφερείας (Ο,ρ) εἶναι 120^0 μοιρῶν ($120^0 = 180^0 - 60^0$). Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τά σημεῖα Α καί Β τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Τ. Νά εὕρετε τό μέτρον : 1ον τῆς γωνίας ∢ (ΤΑ, ΤΒ) καί 2ον τῆς ∢ (ΑΒ , ΑΤ).

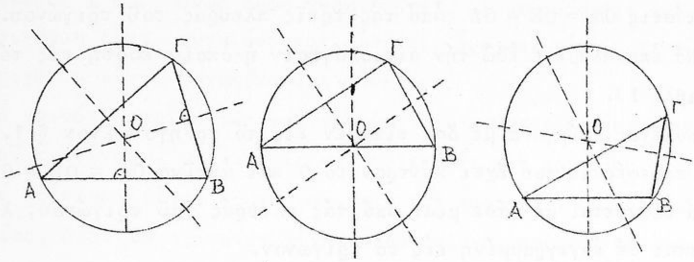
1.11. Συγκλίνουσαι εὐθεῖαι εἰς τό τρίγωνον.

α) Διάμεσοι τριγώνου. Εἴδαμεν εἰς τό τέλος τοῦ Κεφαλαίου Δ΄, "Ασκ. 7) καί 8) ὅτι:

Αἱ τρεῖς διάμεσοι τριγώνου ἔχουν ἕνα κοινόν σημεῖον πού ἀπέχει ἀπό κάθε κορυφήν ἀπόστασιν ἴσην μέ τά $\frac{2}{3}$ τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου. "Αρα αἱ τρεῖς διάμεσοι τριγώνου εἶναι τρία συγκλίνοντα εὐθύγραμμα τμήματα. Τό κοινόν σημεῖον λέγεται κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου διά λόγους πού θά γνωρίσωμεν εἰς τήν Φυσικήν.



β) Μεσοκάθετοι τριγώνου. Εἰς τό Βιβλ. Ι , σ. 111Β-112Β παρατηρήσαμεν ὅτι αἱ τρεῖς μεσοκάθετοι τριγώνου ἔχουν ἕνα κοινόν σημεῖον (εἶναι συγκλίνουσαι εὐθεῖαι).

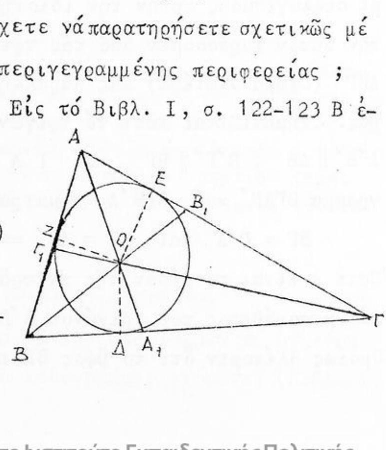


Νά αἰτιολογήσετε τώρα αὐτήν τήν παρατήρησιν βασιζόμενοι εἰς τήν ἀκόλουθον πρότασιν τοῦ Βιβλ. Ι , σ. 108-109Β :
Ἡ μεσοκάθετος ἑνός εὐθυγράμμου τμήματος εἶναι ὁ γεωμετρικός τόπος (τό σύνολον) τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου τά ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπό τά δύο ἄκρα τοῦ τμήματος.

Κατά ταῦτα, ἄν καλέσωμεν Ο τό κοινόν σημεῖον τῶν τριῶν μεσοκαθέτων ἑνός τριγώνου ΑΒΓ , τότε θά εἶναι ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ καί ἑπομένως τό Ο εἶναι κέντρον μιᾶς περιφερείας ἡ ὁποία περνᾶ ἀπό τάς τρεῖς κορυφάς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἡ περιφέρεια αὐτή λέγεται περιγεγραμμένη εἰς τό τρίγωνον.

Ἐρώτησις. Εἰς τό προηγούμενον σχῆμα ἐσχεδιάσαμεν χωριστά τήν περίπτωσιν τοῦ ὀξυγωνίου, τοῦ ὀρθογωνίου καί τοῦ ἀμβλυγωνίου τριγώνου. Τί ἔχετε νά παρατηρήσετε σχετικῶς μέ τήν θέσιν τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας ;

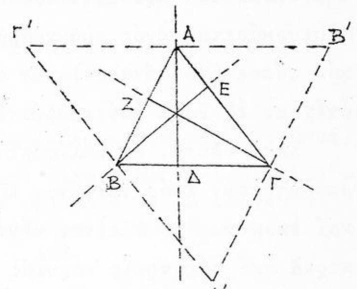
γ) Διχοτόμοι τριγώνου. Εἰς τό Βιβλ. Ι, σ. 122-123 Β ἐμάθαμεν ὅτι αἱ τρεῖς διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνός τριγώνου ΑΒΓ (σχ. παραπλεύρως) ἔχουν ἕνα κοινόν σημεῖον , εἶναι λοιπόν καί αὐταί συγκλίνοντα εὐθύγραμμα τμήμα-



τα. Τό κοινόν των σημεῖον Ο ἔχει, ὅπως εἴδαμεν, ἴσας ἀποστάσεις ΟΔ = ΟΕ = ΟΖ ἀπό τάς τρεῖς πλευράς τοῦ τριγώνου. (Νά ἐπαναλάβετε ἐδῶ τήν αἰτιολόγησιν ἡ ὁποία ἐδόθη εἰς τό Βιβλ. Ι).

Ἐπομένως, σύμφωνα μέ ὅσα εἴπαμεν εἰς τό προηγούμενον § 1.7, ἡ περιφέρεια πού ἔχει κέντρον τό Ο καί ἀκτῖνα ΟΔ = ΟΕ = ΟΖ θά ἐφάπτεται μέ κάθε μίαν ἀπό τάς πλευράς τοῦ τριγώνου, λέγεται δέ <u>ἐγγεγραμμένη εἰς τό τρίγωνον</u>.

δ) <u>Ὕψη τριγώνου</u>. Εἰς τό Βιβλ. Ι , σ. 107-108 Β ἐκαλέσαμεν <u>ὕψος</u> ἑνός τριγώνου ΑΒΓ 1ον τήν ἀπεριόριστον εὐθεῖαν πού περνᾶ ἀπό μίαν κορυφήν τοῦ τριγώνου καί εἶναι κάθετος πρός τήν ἀπέναντι πλευράν καί 2ον τό τμῆμα αὐτῆς τῆς εὐθείας τό ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξύ τῆς κορυφῆς καί τῆς πλευρᾶς. Παρετηρήσαμεν ἀκολούθως ὅτι μία προσεκτική χάραξις



μᾶς κάμνει νά πιστεύσωμεν ὅτι τά τρία ὕψη ἑνός τριγώνου εἶναι συγκλίνουσαι εὐθεῖαι. Εἴμεθα τώρα εἰς θέσιν νά δείξωμεν μέ συλλογισμούς αὐτήν τήν ἰδιότητα τῶν ὑψῶν. Πρός τόν σκοπόν αὐτόν χαράσσομεν ἀπό τάς τρεῖς κορυφάς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχῆμα ἀνωτέρω) τάς παραλλήλους πρός τάς ἀπέναντι πλευράς. Σχηματίζεται τότε τό τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ μέ τάς πλευράς $A'B' \parallel AB$, $B'\Gamma' \parallel B\Gamma$ καί $\Gamma'A' \parallel \Gamma A$. Ἀπό τά παραλληλόγραμμα ΒΓΑΓ΄ καί ΒΓΒ΄Α συμπεραίνομεν ὅτι

$$B\Gamma = \Gamma'A \text{ καί } B\Gamma = AB' \Longrightarrow \Gamma'A = AB'.$$

Ὥστε Α εἶναι τό μέσον τῆς πλευρᾶς Β΄Γ΄ καί ἐπομένως τό ὕψος ΑΔ μεσοκάθετος τοῦ τριγώνου Α΄Β΄Γ΄.

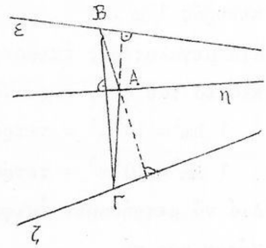
Ὁμοίως βλέπομεν ὅτι τό ὕψος ΒΕ εἶναι μεσοκάθετος τῆς πλευρᾶς Γ΄Α΄ τοῦ τργ Α΄Β΄Γ΄, καί τό ὕψος ΓΖ μεσοκάθετος τῆς πλευρᾶς Α΄Β΄. Ὅπως ὅμως γνωρίζομεν , αἱ μεσοκάθετοι παντός τριγώνου εἶναι συγκλίνουσαι εὐθεῖαι, ἄρα καί τά ὕψη παντός τριγώνου εἶναι συγκλίνουσαι εὐθεῖαι.

Τό κοινόν σημεῖον τῶν τριῶν ὑψῶν, πού λέγεται ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου , κεῖται εἰς τό ἐσωτερικόν τοῦ τριγώνου, ὅταν τό τρίγωνον εἶναι ὀξυγώνιον, εἰς τήν κορυφήν τῆς ὀρθῆς γωνίας, ὅταν τό τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον , καί εἰς τό ἐξωτερικόν τοῦ τριγώνου, ὅταν τοῦτο εἶναι ἀμβλυγώνιον. Νά σχεδιάσετε χωριστά τήν κάθε μίαν ἀπό τάς τρεῖς αὐτάς περιπτώσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά σχεδιάσετε ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον μέ μῆκος πλευρῶν 3 cm καί κατόπιν νά χαράξετε εἰς αὐτό τήν ἐγγεγραμμένην περιφέρειαν καθώς καί τήν περιγεγραμμένην.

2) Νά αἰτιολογήσετε τήν ἀκόλουθον κατασκευήν:
Δίδονται δύο εὐθεῖαι ε καί ζ , πού τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον ἔξω ἀπό τό φύλλον σχεδιάσεως, καί ἕνα σημεῖον Α ἐπάνω εἰς τό φύλλον σχεδιάσεως. Ζητεῖται νά χαραχθῆ ἡ εὐθεῖα η πού περνᾶ ἀπό τό Α καί ἀπό τό ἀπρόσιτον σημεῖον τομῆς τῶν εὐθειῶν ε καί ζ.



Πρός τοῦτο χαράσσομεν ἀπό τό Α τήν κάθετον πρός τήν ζ καί προσδιορίζομεν τό σημεῖον Β τῆς τομῆς της μέ τήν ε. Χαράσσομεν ἐπίσης ἀπό τό Α τήν κάθετον πρός τήν ε καί προσδιορίζομεν τό σημεῖον Γ τῆς τομῆς της μέ τήν ζ. Ἡ εὐθεῖα η πού περνᾶ ἀπό τό Α καί εἶναι κάθετος πρός τήν εὐθεῖαν ΒΓ εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα η (δηλαδή ἡ εὐθεῖα πού ὁρίζεται ἀπό τό Α καί ἀπό τό ἀπρόσιτον σημεῖον τομῆς τῶν ε καί ζ). Ὑπόδειξις. Νά δείξετε ὅτι αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ε, ζ, η εἶναι συγκλίνουσαι.

§ 2. Ἐμβαδά ἐπιπέδων σχημάτων.

2.1. Μονάδες ἐπιφανειῶν. Διά νά προσδιορίσωμεν τό μέγεθος τῆς ἐπιφανείας ἑνός ἐπιπέδου εὐθυγράμμου σχήματος (Βιβλ. Ι, σ. 79 Α), τήν συγκρίνομεν μέ μίαν επίπεδον επιφάνειαν πού λαμβάνομεν ώς μονάδα επιφανειών καί ευρίσκομεν από πόσας μονάδας ή πόσα μέρη μονάδος αποτελεΐται ή θεωρουμένη επιφάνεια. Ή σύγκρισις αυτή λέγεται μέτρησις της επιφανείας καί ό αριθμός πού προκύπτει από τήν μέτρησιν λέγεται εμβαδόν της επιφανείας.

Όπως είναι γνωστόν (βλ. καί Βιβλ. Ι, σ. 29 Α κ.έ.), βασική μονάς επιφανείας είναι τό m^2. Υπενθυμίζομεν εδώ τήν σχέσιν του m^2 πρός τάς δεκαδικάς υποδιαιρέσεις του.

$$1\ m^2 = 10^2\ dm^2 = 10^4\ cm^2 = 10^6\ mm^2$$
$$1\ dm^2 = 10^2\ cm^2 = 10^4\ mm^2$$
$$1\ cm^2 = 10^2\ mm^2.$$

Τάς υποδιαιρέσεις αυτάς ήμπορούμεν νά τάς διακρίνωμεν σαφώς εις ένα τετραγωνικόν φύλλον χιλιοστομετρικού χάρτου μέ πλευράς 1 m .

Διά μεγαλυτέρας επιφανείας χρησιμοποιούμεν δεκαδικά πολλαπλάσια του m^2, π.χ. τά

$1\ hm^2 = 10^4 m^2$ = τετραγωνικόν εκατόμμετρον ,

$1\ km^2 = 10^6 m^2$ = τετραγωνικόν χιλιόμετρον.

Διά νά μετρήσωμεν επιφανείας αγρών χρησιμοποιούμεν εις τήν χώραν μας τό

στρέμμα = 1 000 m^2

καί τό εκτάριον :

1 ha = 10 000 m^2 = 10 στρέμματα

Τέλος , διά τήν μέτρησιν οικοπέδων χρησιμοποιεΐται συχνά καί ό τετραγωνικός τεκτονικός πήχυς :

$$1\ \pi\chi^2 = \frac{9}{16}\ m^2 = 0,5625\ m^2$$

Αλλαγαί μονάδος. Αί ανωτέρω σχέσεις μεταξύ διαφορετικών μονάδων μάς επιτρέπουν νά μεταβαίνωμεν εύκολα από εμβαδά εκφρασμένα μέ μίαν από αυτάς τάς μονάδας εις εμβαδά εκφρασμένα μέ μιά ἄλλην μονάδα. Π.χ.

$87,375\ m^2 = 8737,5\ dm^2 = 873\ 750\ cm^2$

$37,065\ dm^2 = 3706,5\ cm^2 = 370\ 650\ mm^2$

$368506\ mm^2 = 3685,06\ cm^2 = 36,8506\ dm^2 = 0,368506\ m^2$

$17,25\ km^2 = 17250000\ m^2$

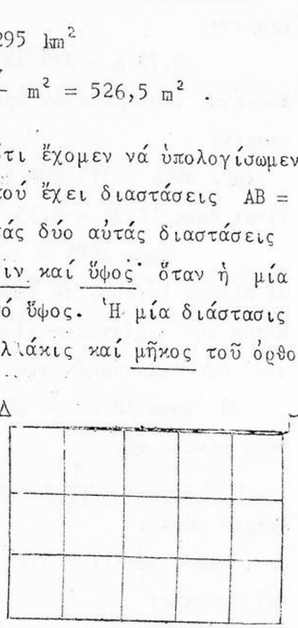
$29\ 500\ ha = 295\ 000$ στρέμμ. $= 295\ km^2$

$936\ \pi x^2 = \frac{9}{16} \cdot 936\ m^2 = \frac{9 \cdot 117}{2}\ m^2 = 526,5\ m^2$.

2.2. Ἐμβαδόν ὀρθογωνίου. Ἔστω ὅτι ἔχομεν νά ὑπολογίσωμεν τό ἐμβαδόν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ πού ἔχει διαστάσεις ΑΒ = 5 cm καί ΑΔ = 3 cm. Πολύ συχνά τάς δύο αὐτάς διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου τάς ὀνομάζομεν βάσιν καί ὕψος· ὅταν ἡ μία ληφθῇ ὡς βάσις, ἡ ἄλλη θά εἶναι τό ὕψος. Ἡ μία διάστασις (συνήθως ἡ μεγαλυτέρα) λέγεται πολλάκις καί μῆκος τοῦ ὀρθογωνίου καί ἡ ἄλλη πλάτος.

Ἄς διαιρέσωμεν τώρα τήν διάστασιν ΑΒ εἰς 5 ἴσα μέρη καί ἄς φέρωμεν ἀπό τά σημεῖα διαιρέσεως τάς παραλλήλους πρός τήν ἄλλην διάστασιν ΑΔ. Τό ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ χωρίζεται εἰς 5 ἴσα ὀρθογώνια μέ διαστάσεις 1 cm καί 3 cm. Ἄν διαιρέσωμεν καί τήν διάστασιν ΑΔ εἰς 3 ἴσα μέρη καί ἀπό τά σημεῖα διαιρέσεως φέρωμεν τάς παραλλήλους πρός τήν ΑΒ , τότε κάθε ἕνα ἀπό τά 5 ἴσα ὀρθογώνια τῆς προηγουμένης διαιρέσεως θά χωρισθῇ εἰς 3 τετραγωνικά ἑκατοστόμετρα (cm^2).

Δ



Α

Ἔτσι ὁλόκληρον τό ὀρθογώνιον θά χωρισθῇ εἰς

$$3 \cdot 5 = 15\ cm^2 .$$

Ὥστε τό παραπάνω ὀρθογώνιον ἔχει ἐμβαδόν 15 cm^2.

Ἐάν τά μήκη τῶν δύο διαστάσεων τοῦ ὀρθογωνίου δέν εἶναι ἀκέραιοι ἀλλά κλασματικοί ἀριθμοί (δεκαδικοί ἤ κοινοί), τότε τά μετατρέπομεν εἰς ἀκεραίους ἀριθμούς ἀλλάσσοντες κατάλληλα τάς μονάδας μήκους.

Παραδείγματα. 1) Ἔστω ΑΒ = 3,75 m καί ΑΔ = 4,36 m.

Ἔχομεν:

$$3{,}75\ \text{m} = 375\ \text{cm} \quad \text{καί} \quad 4{,}36 = 436\ \text{cm}\ .$$

Ἑπομένως, μέ μέθοδον ὁμοίαν πρός τήν προηγουμένην, εὑρίσκομεν:

$$\text{ἐμβ. ΑΒΓΔ} = 375\cdot 436\ \text{cm}^2 = 163500\ \text{cm}^2 = 16{,}35\ \text{m}^2\ .$$

Εἶναι ὅμως $16{,}35 = 3{,}75\cdot 4{,}36$. Ἄρα

$$\text{ἐμβ. ΑΒΓΔ} = 3{,}75\cdot 4{,}36\ \text{m}^2\ .$$

Μέ ἄλλους λόγους, τό ἐμβαδόν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ καί εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν εἶναι ἴσον μέ τό γινόμενον τῶν μηκῶν τῶν δύο διαστάσεών του.

2) Ἔστω $\text{ΑΒ} = \frac{3}{7}$ m καί $\text{ΑΔ} = \frac{5}{11}$ m. Λαμβάνομεν ὡς μονάδα μήκους τήν

$$\mu = \frac{1}{7\cdot 11}\ \text{m} = \frac{1}{77}\ \text{m}\ ,\ \text{ὁπότε}\ \text{m} = 77\ \mu \quad \text{καί}\ \text{m}^2 = 77^2\mu^2.$$

Ἔχομεν τότε :

$$\text{ΑΒ} = \frac{3}{7}\cdot 77 = 3\cdot 11\ \mu \qquad \text{καί} \qquad \text{ΑΔ} = \frac{5}{11}\cdot 77 = 5\cdot 7\ \mu$$

καί συνεπῶς:

$$\text{ἐμβ. ΑΒΓΔ} = (3.11)\cdot(5.7)\ \mu^2 = \frac{3\cdot 11\cdot 5\cdot 7}{77^2}\ \text{m}^2 = \frac{3}{7}\cdot\frac{5}{11}\ \text{m}^2.$$

Ὥστε τό ἐμβαδόν τοῦ ὀρθογωνίου ἰσοῦται πάλιν μέ τό γινόμενον τῶν μηκῶν τῶν δύο διαστάσεών του.

Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ πρότασις αὐτή ἰσχύει γενικά, καί εἰς τήν περίπτωσιν ἀκόμη πού τά μήκη τῶν δύο διαστάσεων δέν εἶναι ρητοί ἀλλά ἀσύμμετροι ἀριθμοί (Βιβλ. Ι , σ. 46-47Γ).

Ἀπό τήν πρότασιν προκύπτει ὁ γνωστός κανών: Διά νά εὕρωμεν τό ἐμβαδόν ἑνός ὀρθογωνίου πολλαπλασιάζομεν τά μήκη τῶν δύο διαστάσεών του. Πρέπει ὅμως νά προσέχωμεν ὥστε καί αἱ δύο διαστάσεις νά ἔχουν μετρηθῆ μέ τήν ἰδίαν μονάδα μήκους· τό ἐμβαδόν ἐκφράζεται τότε εἰς τετραγωνικάς μονάδας ἀντιστοίχους πρός αὐτήν τήν μονάδα μήκους. Π.χ. ἐάν ΑΒ = 5,6 m καί ΑΔ = 3,2 dm , τότε διά νά εὕρωμεν τό ἐμβαδόν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ ἤ θά τρέψωμεν τά 5,6 m εἰς 56 dm καί τό ἐμβαδόν θά ἐκφρασθῆ εἰς dm^2:

$$\text{ἐμβ. } ΑΒΓΔ = 56 \cdot 3,2 = 179,2 \ dm^2$$

ἤ θά μετρήσωμεν καί τήν διάστασιν ΑΔ εἰς m , ὁπότε τό ἐμβαδόν θά ἐκφρασθῆ εἰς m^2:

$$\text{ἐμβ. } ΑΒΓΔ = 5,6 \cdot 0,32 \ m^2 = 1,792 \ m^2.$$

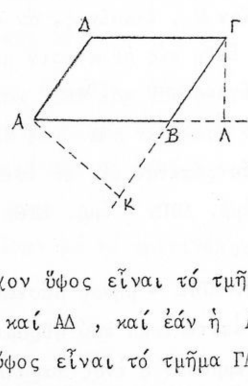
Ἐννοεῖται ὅτι

$$179,2 \ dm^2 = 1,792 \ m^2.$$

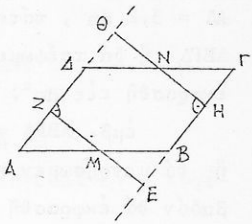
Ἐμβαδόν τετραγώνου. Τό τετράγωνον εἶναι ἕνα ὀρθογώνιον μέ ἴσας διαστάσεις. Ἄρα ἐάν τό κοινόν μῆκος τῶν διαστάσεων του εἶναι α m , τότε τό ἐμβαδόν του εἶναι

$\alpha \cdot \alpha \ m^2 = \alpha^2 \ m^2 = 100 \ \alpha^2 \ cm^2 = 10^4 \alpha^2 mm^2$ κ.ο.κ.

2.3. Ἐμβαδόν παραλληλογράμμου. Ἔστω ΑΒΓΔ ἕνα (μή ὀρθογώνιον) παραλληλόγραμμον. Κάθε πλευρά του ἠμπορεῖ νά ληφθῆ ὡς βάσις, ὁπότε ἀντίστοιχον ὕψος καλεῖται ἡ ἀπόστασις αὐτῆς τῆς πλευρᾶς ἀπό τήν παράλληλόν της (μέ ἄλλους λόγους, τό πλάτος τῆς ταινίας ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπό τήν πλευράν αὐτήν καί τήν παράλληλόν της). Π.χ. ἐάν ἡ ΒΓ ληφθῆ ὡς βάσις, τότε ἀντίστοιχον ὕψος εἶναι τό τμῆμα ΑΚ τό κάθετον πρός τάς εὐθείας ΒΓ καί ΑΔ , καί ἐάν ἡ ΑΒ ληφθῆ ὡς βάσις, τότε ἀντίστοιχον ὕψος εἶναι τό τμῆμα ΓΛ τό κάθετον πρός τάς εὐθείας ΑΒ καί ΔΓ.



Διά νά εὕρωμεν τώρα τό ἐμβαδόν τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ , μετατρέπομεν τό παραλληλόγραμμον εἰς ἕνα ὀρθογώνιον ἴσου ἐμβαδοῦ (ἰσεμβαδικόν, ὅπως θά λέγωμεν) μέ τόν ἀκόλουθον τρόπον:



Ἀπό τά μέσα N καί M τῶν πλευρῶν ΔΓ καί AB (σχ. παραπλεύρως) χαράσσομεν τά τμήματα ΘH καί ZE πού εἶναι κάθετα πρός τάς εὐθείας BΓ καί AΔ καί ἑπομένως ἴσα μέ τό ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου ABΓΔ τό ἀντίστοιχον εἰς τήν βάσιν BΓ. Σχηματίζονται τότε τέσσαρα ὀρθογώνια τρίγωνα, ἴσα μεταξύ των (διατί ;) :

τργ AMZ = τργ BME = τργ ΓNH = τργ ΔNΘ .

Ἑπομένως

EH = EB + BH = BH + HΓ = BΓ = βάσις παραλλ. ABΓΔ .

Ἐξ ἄλλου τό τργ NHΓ εἶναι συμμετρικόν τοῦ τργ NΘΔ ὡς πρός τό σημεῖον N· ἄρα , ἄν τό στρέφωμεν περί τό σημεῖον N κατά γωνίαν 180°, θά τό φέρωμεν εἰς σύμπτωσιν μέ τό NΘΔ. Ὁμοίως τό τργ MZA εἶναι συμμετρικόν τοῦ τργ MEB ὡς πρός τό σημεῖον M , ἑπομένως, ἄν στραφῆ περί τό M κατά γωνίαν 180°, θά ἔλθη εἰς σύμπτωσιν μέ τό MEB. Ἐάν ὅμως ἀποκόψωμεν τά τρίγωνα NHΓ καί MAZ καί τά μετακινήσωμεν εἰς τάς θέσεις τῶν ἴσων των NΘΔ καί MBE , τότε τό παραλληλόγραμμον ABΓΔ μετατρέπεται εἰς τό ἰσεμβαδικόν ὀρθογώνιον EHΘZ. Ἑπομένως:

ἐμβ. ABΓΔ = ἐμβ. EHΘZ = μῆκος EH ἐπί μῆκος HΘ ,

ἤτοι

ἐμβ. ABΓΔ = μῆκος βάσεως BΓ ἐπί μῆκος ἀντιστοίχου ὕψους .

Τό ἀποτέλεσμα πού ηὕραμεν διατυπώνεται συνήθως ὡς ἑξῆς: Τό ἐμβαδόν S ἑνός παραλληλογράμμου εἶναι ἴσον μέ τό γινόμενον τῆς βάσεώς του β ἐπί τό ὕψος του υ :

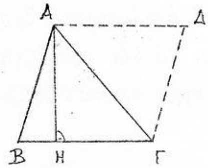
$$S = \beta \cdot \upsilon .$$

Εἰς τήν σύντομον αὐτήν διατύπωσιν ὑπονοοῦνται τά ἑξῆς: Τό β καί τό υ εἶναι οἱ ἀριθμοί πού προκύπτουν, ὅταν μετρήσωμεν μίαν βάσιν τοῦ παραλληλογράμμου καί τό ἀντίστοιχον εἰς αὐτήν ὕψος μέ τήν ἰδίαν μονάδα μήκους, τό δέ ἐμβαδόν ἐκφράζεται εἰς τετραγωνικάς μονάδας πού ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτήν τήν μονάδα μήκους. Π.χ. εἰς τό προηγούμενον σχῆμα ἔχομεν:

μῆκος ΒΓ $= \beta = 17\,\mathrm{mm}$, $\upsilon = 20\,\mathrm{mm}$, $S = 17\cdot 20 = 340\,\mathrm{mm}^2$

μῆκος ΑΒ $= \beta = 25\,\mathrm{mm}$, $\upsilon = 13{,}6\,\mathrm{mm}$, $S = 25\cdot 13{,}6 = 340\,\mathrm{mm}^2$

2.4. Ἐμβαδόν τριγώνου. Ἔστω τό τργ ΑΒΓ. Ἐκλέγομεν τήν πλευράν ΒΓ ὡς βάσιν, ὁπότε ἀντίστοιχον ὕψος εἶναι τό τμῆ- ΑΗ (σχ. παραπλεύρως).



Χαράσσομεν τήν ΑΔ ∥ ΒΓ καί τήν ΓΔ ∥ ΒΑ. Σχηματίζεται ἔτσι τό παραλληλόγραμμον ΒΓΔΑ πού χωρίζεται ἀπό τήν ΑΓ εἰς δύο ἴσα τρίγωνα ΒΓΑ καί ΔΑΓ. Ἑπομένως

ἐμβ. τργ ΑΒΓ $= \frac{1}{2}$ ἐμβ. παραλληλογράμμου ΒΓΔΑ

$= \frac{1}{2}$ (μῆκος ΒΓ · μῆκος ΑΗ).

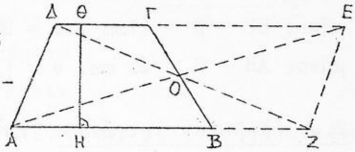
Ἐννοεῖται ὅτι θά εὑρίσκαμεν τό ἴδιον ἐμβαδόν, ἐάν ἐλαμβάναμεν μίαν ἄλλην πλευράν τοῦ τριγώνου ὡς βάσιν καί τό ἀντίστοιχον εἰς αὐτήν ὕψος. Τό ἀποτέλεσμα εἰς τό ὁποῖον ἐφθάσαμεν διατυπώνεται συνήθως ὡς ἑξῆς:

Τό ἐμβαδόν S ἑνός τριγώνου εἶναι ἴσον μέ τό ἡμιγινόμενον τῆς βάσεως ἐπί τό ὕψος του:

$$S = \frac{1}{2}\cdot\beta\cdot\upsilon \quad ,$$

ὅπου β σημαίνει τό μῆκος μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου καί υ τό μῆκος τοῦ ἀντιστοίχου ὕψους μετρουμένου μέ τήν ἰδίαν μονάδα μήκους ὅπως καί ἡ πλευρά. Τό ἐμβαδόν ἐκφράζεται τότε εἰς τετραγωνικάς μονάδας πού ἀντιστοιχοῦν εἰς τήν χρησιμοποιουμένην μονάδα μήκους, ὅπως ἐτονίσαμεν καί εἰς τό τέλος τοῦ προηγουμένου ἐδαφίου.

2.5. Ἐμβαδόν τραπεζίου. Ἄς σχηματίσωμεν τό συμμετρικόν τοῦ παραπλεύρως τραπεζίου ΑΒΓΔ ὡς πρός τό μέσον Ο μιᾶς ἀπό τάς μή παραλλήλους πλευράς του, ἔστω τῆς ΒΓ. Ἡ ἕνωσις τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ καί τοῦ συμμετρικοῦ του ΕΓΒΖ εἶναι τό παραλληλόγραμμον ΑΖΕΔ, πού ἔχει βάσιν



$$ΑΖ = ΑΒ + ΒΖ = ΑΒ + ΔΓ \qquad (\text{διότι } ΒΖ = ΓΔ)$$

καί ἀντίστοιχον ὕψος τό ΗΘ πού εἶναι καί ὕψος τοῦ τραπεζίου. Τά δύο τραπέζια εἶναι ἴσα, ἄρα

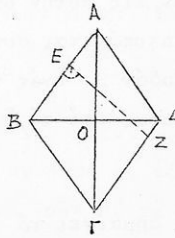
$$\text{ἐμβ. τραπεζ. } ΑΒΓΔ = \frac{1}{2} \text{ ἐμβ. παραλλ. } ΑΖΕΔ$$
$$= \frac{1}{2} \text{ μῆκος } (ΑΒ+ΔΓ) \text{ ἐπί μῆκος } ΗΘ.$$

Ὥστε, τό ἐμβαδόν S ἑνός τραπεζίου εἶναι ἴσον μέ τό ἡμιγινόμενον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο βάσεων ἐπί τό ὕψος.

$$S = \frac{1}{2}(β+β')\cdot υ \quad .$$

Διά τήν σύντομον αὐτήν διατύπωσιν τοῦ ἀποτελέσματος τό ὁποῖον ηὕραμεν, ἰσχύει ἡ παρατήρησις πού ἐκάμαμεν εἰς τό τέλος τοῦ § 2.3 καθώς καί τοῦ § 2.4.

2.6. Ἐμβαδόν ρόμβου. Ὁ ρόμβος εἶναι παραλληλόγραμμον· ἄρα τό ἐμβαδόν του ἠμπορεῖ νά ὑπολογισθῆ ἀπό τό (κοινόν) μῆκος τῶν πλευρῶν του καί ἀπό τό (κοινόν) πλάτος τῶν δύο ταινιῶν τῶν ὁποίων εἶναι τομή:



ἐμβ. ΑΒΓΔ = μῆκος ΑΒ · μῆκος ΕΖ .

Ἐάν ὅμως γνωρίζωμεν τά μήκη τῶν δύο διαγωνίων του, ἠμποροῦμεν νά ὑπολογίσωμεν τό ἐμβαδόν του καί ὡς ἑξῆς:

Ἡ διαγώνιος ΑΓ χωρίζει τόν ρόμβον εἰς δύο ἴσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΓΒ καί ΑΓΔ μέ κοινήν βάσιν ΑΓ καί ἴσα ὕψη ΒΟ = ΟΔ = $= \frac{1}{2}$ ΒΔ . Ἐπομένως

ἐμβ. ΑΒΓΔ = 2 ἐμβ. τργ ΑΓΒ = $2 \cdot \frac{1}{2}$ μῆκος ΑΓ · μῆκος ΒΟ

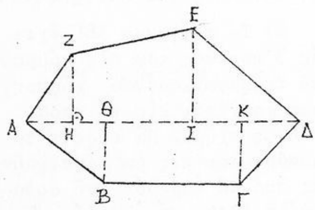
$= \frac{1}{2}$ μῆκος ΑΓ·μῆκος ΒΔ .

Ὥστε , τό ἐμβαδόν S τοῦ ρόμβου εἶναι ἴσον μέ τό ἡμιγινόμενον τῶν δύο διαγωνίων του:

$$S = \frac{1}{2}\delta\delta' ,$$

ὅπου δ καί δ΄ εἶναι τά μήκη τῶν διαγωνίων τοῦ ρόμβου.

2.7. Ἐμβαδόν πολυγώνου. Τό ἐμβαδόν ἑνός πολυγώνου ὑπολογίζεται μέ τόν τρόπον πού ὑποδεικνύομεν εἰς τό παραπλεύρως σχῆμα: Χωρίζομεν τό πολύγωνον εἰς τρίγωνα, τραπέζια καί παραλληλόγραμμα, ὑπολογίζομεν τά ἐμβαδά των καί ἔπειτα τά προσθέτομεν.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ἕνα συνεργεῖον ἀσφαλτοστρώνει εἰς μίαν ἡμέραν ἐπιφάνειαν 54 m^2 . Τό συνεργεῖον αὐτό ἀνέλαβε νά ἀσφαλτοστρώση ἕνα εὐθύγραμμον δρόμον πλάτους 9 m . Πόσον μῆκος τοῦ δρόμου αὐτοῦ θά ἀσφαλτοστρώση εἰς 12 ἡμέρας ;
Εἰς πόσας ἡμέρας τό ἴδιον συνεργεῖον θά ἀσφαλτοστρώση ἕνα ἄλλον εὐθύγραμμον δρόμον μήκους 540 m καί πλάτους 7,5 m ;

2) Ἕνα ὀρθογώνιον ἔχει βάσιν β = 8,5 m καί ὕψος υ = 6,4 m . Πόσον ὕψος ἔχει ἕνα ἰσεμβαδικόν ὀρθογώνιον μέ βάσιν 8 m ;

3) Ένας ὀρθογώνιος κῆπος ἔχει περίμετρον 99 m . Νά εὐρεθῆ τό ἐμβαδόν του , ἐάν ἡ μικροτέρα διάστασις ἔχει λόγον πρός τήν μεγαλυτέραν ἴσον μέ 4 : 5.
Ὑπόδειξις. Νά παραστήσετε μέ x m τό μῆκος τῆς μεγαλυτέρας διαστάσεως καί νά τό προσδιορίσετε ἐπιλύοντες μίαν ἐξίσωσιν.

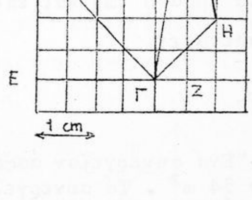
4) Ἕνα τραπέζιον ἔχει ἐμβαδόν 11,2 m^2. Ἡ μία βάσις του του ἔχει μῆκος 4,5 m καί τό ὕψος του 2,8 m. Νά ὑπολογίσετε τήν ἄλλην βάσιν του.
Ὑπόδειξις. Ὅπως καί προηγουμένως, νά παραστήσετε μέ x m τό μῆκος τῆς ζητουμένης βάσεως καί νά τό προσδιορίσετε ἐπιλύοντες μίαν ἐξίσωσιν.

5) Νά εὑρεθῆ τό ἐμβαδόν ρόμβου εἰς τόν ὁποῖον ἡ μία διαγώνιος ἔχει μῆκος 12,5 καί ἡ ἄλλη εἶναι ἴση μέ τά 4/5 αὐτῆς τῆς διαγωνίου.

6) Ἕνας ρόμβος ἔχει ἐμβαδόν 127,75 m^2 καί ἡ μία διαγώνιός του ἔχει μῆκος 17,5 m . Νά προσδιορισθῆ τό μῆκος τῆς ἄλλης.

7) Ἕνα ὀρθογώνιον οἰκόπεδον ἔχει ἐμβαδόν 792 $πχ^2$ καί ἡ μία πλευρά του ἔχει μῆκος 21,60 m. Πόσα τρέχοντα μέτρα δικτυωτόν σύρμα θά χρειασθοῦν γιά νά περιφραχθῆ τό οἰκόπεδον καθ'ὅλας τάς πλευράς του ;

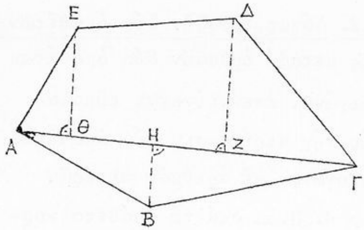
8) Τό τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει τάς 3 κορυφάς του εἰς κόμβους τοῦ τετραγωνισμένου χάρτου, ὅπως φαίνεται εἰς τό παραπλεύρως σχῆμα. Νά εὕρετε τό ἐμβαδόν του εἰς cm^2, ἀφαιροῦντες ἀπό τό ἐμβαδόν τοῦ ὀρθογωνίου ΕΖΑΔ τά ἐμβαδά τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΒΕΓ , ΔΒΑ καί ΑΓΖ.
Νά προσδιορίσετε μέ ὅμοιον τρόπον τό ἐμβαδόν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΗ εἰς τό προηγούμενον σχῆμα.



9) Νά εὑρεθῆ πρῶτα εἰς mm^2 καί ἔπειτα εἰς cm^2 τό ἐμβαδόν τοῦ πενταγώνου τῆς ἐπομένης σελίδος, ἐάν εἶναι

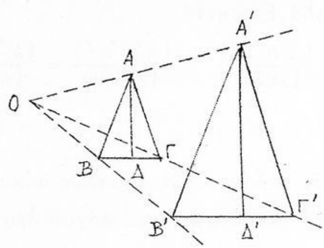
ΑΓ = 62 mm , ΑΘ = 10 mm ,
ΖΓ = 24 mm , ΕΘ = 18 mm ,
ΔΖ = 22 mm καί ΒΗ = 10 mm .

10) Χωρίζομεν τήν πλευράν ΒΓ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ εἰς τρία ἴσα μέρη διά τῶν σημείων Δ καί Ε. Νά δείξετε ὅτι τά τρίγωνα ΑΒΔ , ΑΔΕ καί ΑΕΓ εἶναι ἰσεμβαδικά.



§ 3. Σχέσις μεταξύ ἐμβαδῶν ὁμοίων εὐθυγράμμων σχημάτων.

3.1. Λόγος ἐμβαδῶν δύο ὁμοθέτων τριγώνων. Ἄς εἶναι τά δύο παραπλεύρως τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ ὁμόθετα μέ λόγον ὁμοθεσίας $\frac{Α'Β'}{ΑΒ} = λ$ (εἰς τό σχ. $λ = 2$). Ἄς εἶναι ἀκόμη ΑΔ καί Α΄Δ΄ δύο ὁμόλογα ὕψη των. Γνωρίζομεν ὅτι



$$\frac{Β'Γ'}{ΒΓ} = \frac{Α'Δ'}{ΑΔ} = λ \Longleftrightarrow Β'Γ' = λ\cdot ΒΓ \quad καί \quad Α'Δ' = λ\cdot ΑΔ \ .$$

Ἐάν παραστήσωμεν μέ (ΒΓ) , (ΑΔ) , (Β΄Γ΄) , (Α΄Δ΄) τά μήκη ἀντιστοίχως τῶν τμημάτων ΒΓ , ΑΔ , Β΄Γ΄, Α΄Δ΄ μετρημένων φυσικά μέ τήν ἰδίαν μονάδα , τότε θά ἔχωμεν :

$$2 ἐμβ.\ ΑΒΓ = (ΒΓ)\cdot(ΑΔ) \quad , \quad 2\ ἐμβ.\ Α'Β'Γ' = (Β'Γ')\cdot(Α'Δ')$$

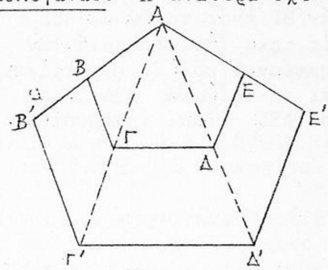
ἐπομένως

$$\frac{ἐμβ.\ Α'Β'Γ'}{ἐμβ.\ ΑΒΓ} = \frac{(Β'Γ')\cdot(Α'Δ')}{(ΒΓ)\cdot(ΑΔ)} = \frac{Β'Γ'}{ΒΓ}\cdot\frac{Α'Δ'}{ΑΔ} = λ\cdot λ = λ^2 .$$

Ὥστε , ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοθέτων τριγώνων εἶναι ἴσος μέ τό τετράγωνον τοῦ λόγου ὁμοθεσίας των.

(Εἰς τό σχῆμα τό ἐμβαδόν τοῦ τρ Α΄Β΄Γ΄ εἶναι 4 πλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγ ΑΒΓ).

3.2. Λόγος ἐμβαδῶν δύο ὁμοθέτων πολυγώνων. Ἡ ἀνωτέρω σχέσις μεταξύ ἐμβαδῶν δύο ὁμοθέτων τριγώνων ἐπεκτείνεται εὔκολα εἰς τήν περίπτωσιν δύο ὁμοθέτων πολυγώνων μέ ἀριθμόν πλευρῶν $\nu \geqslant 4$. Π.χ. διά τά ὁμόθετα κυρτά πεντάγωνα τοῦ σχήματος παραπλεύρως, παριστάνοντες χάριν



συντομίας μέ (ΑΒΓ) , (Α΄Β΄Γ΄),..., (ΑΒΓΔΕ), (Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄) ἐμβαδά, ἔχομεν:

$$\lambda^2 = \frac{(Α'Β'Γ')}{(ΑΒΓ)} = \frac{(Α'Γ'Δ')}{(ΑΓΔ)} = \frac{(Α'Δ'Ε')}{(ΑΔΕ)} = \frac{(Α'Β'Γ')+(Α'Γ'Δ')+(Α'Δ'Ε')}{(ΑΒΓ)+(ΑΓΔ)+(ΑΔΕ)}$$

$$= \frac{(Α'Β'Γ'Δ'Ε')}{(ΑΒΓΔΕ)} .$$

Ὥστε, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοθέτων πολυγώνων εἶναι ἴσος μέ τό τετράγωνον τοῦ λόγου ὁμοθεσίας των.

3.3. Λόγος ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων. Ὅπως γνωρίζομεν (βλ. Κεφ. Ε΄, § 2), δύο ὅμοια πολύγωνα (ειδικῶς τρίγωνα) ἠμποροῦν μέ κατάλληλον μετακίνησιν νά γίνουν ὁμόθετα μέ λόγον ὁμοθεσίας τόν λόγον ὁμοιότητός των λ. Ἐπομένως: Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων εἶναι ἴσος μέ τό τετράγωνον τοῦ λόγου ὁμοιότητός των.

3.4. Ἐφαρμογαί. α) Ἔχομεν δύο ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄. Τό ΑΒΓ ἔχει ἐμβαδόν 36 m . Ἡ πλευρά ΑΒ ἔχει μῆκος 9 m καί ἡ ὁμόλογός της Α΄Β΄ 6 m. Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν τοῦ τργ Α΄Β΄Γ΄.

Ἔχομεν:

$$\frac{Α'Β'}{ΑΒ} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} = \lambda = \text{λόγος ὁμοιότητος τοῦ } Α'Β'Γ' \text{ πρός τό } ΑΒΓ$$

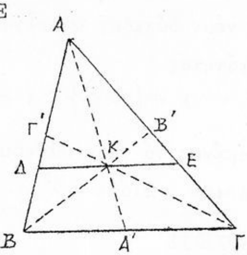
καί ἐπομένως διά τά ἐμβαδά (Α΄Β΄Γ΄) καί (ΑΒΓ) τῶν τριγώνων:

$$\frac{(Α΄Β΄Γ΄)}{(ΑΒΓ)} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \Longrightarrow (Α΄Β΄Γ΄) = \frac{4}{9}(ΑΒΓ).$$

Ἄρα

$$(Α΄Β΄Γ΄) = \frac{4}{9} \cdot 36 \text{ m}^2 = 16 \text{ m}^2.$$

β) Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει ἐμβαδόν 27 m^2. Ἀπό τό κέντρον βάρους του Κ χαράσσομεν τήν ΔΕ παράλληλον πρός μίαν πλευράν του, ἔστω τήν ΒΓ. Νά εὑρεθοῦν τά ἐμβαδά τῶν δύο σχημάτων εἰς τά ὁποῖα χωρίζεται τό τρίγωνον.



Ὁ λόγος ὁμοθεσίας τοῦ τργ ΑΔΕ πρός τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ΑΚ : ΑΑ΄ = 2 : 3 (διατί ;)

Ἐπομένως:

$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \Longleftrightarrow (ΑΔΕ) = \frac{4}{9}(ΑΒΓ)$$

καί συνεπῶς:

$$(ΑΔΕ) = \frac{4}{9} \cdot 27 \text{ m}^2 = 12 \text{ m}^2 .$$

Τό τραπέζιον ΒΓΕΔ ἔχει ἐμβαδόν ἴσον μέ

$$\left(1 - \frac{4}{9}\right) \cdot (ΑΒΓ) = \frac{5}{9} \cdot 27 = 15 \text{ m}^2.$$

Ἐπαλήθευσις: 12 m^2 + 15 m^2 = 27 m^2 .

γ) Ἐπάνω εἰς ἕνα τοπογραφικόν σχεδιάγραμμα ὑπό κλίμακα $\frac{1}{500}$ ἡ εἰκών ἑνός γηπέδου πολυγωνικοῦ σχήματος ἔχει ἐπιφάνειαν 2800 cm^2.

Ποία εἶναι ἡ πραγματική ἐπιφάνεια τοῦ γηπέδου ἐπάνω εἰς τό ἔδαφος ;

Ὁ λόγος ὁμοιότητος τῆς εἰκόνος τοῦ γηπέδου πρός τό πραγματικόν γήπεδον εἶναι 1 : 500. Ἄρα ὁ λόγος ὁμοιότητος τοῦ πραγματικοῦ γηπέδου πρός τήν εἰκόνα του ἐπάνω εἰς τό σχεδιάγραμμα εἶναι 500 : 1. Ἐπομένως τό ἐμβαδόν S τοῦ πραγματικοῦ γηπέδου εἶναι :

$S = 2800 \cdot 250\ 000\ cm^2 = 70\ 000\ m^2 = 70$ στρέμματα.

δ) Τί μεταβολήν θά πάθη ἡ ὀρθογώνιος ἐπιφάνεια τοῦ δαπέδου ἑνός δωματίου , ἐάν κάθε μία ἀπό τάς διαστάσεις της αὐξηθῆ κατά τά δύο τρίτα της ;

Τό νέον δάπεδον θά εἶναι ὅμοιον πρός τό παλαιόν μέ λόγον ὁμοιότητος

$$\lambda = \left(1+\frac{2}{3}\right) : 1 = \frac{5}{3} : 1 = 5 : 3 .$$

Ἐπομένως τό νέον δάπεδον θά ἔχη ἐμβαδόν ἴσον μέ τά $\frac{25}{9}$ τοῦ παλαιοῦ , διότι $\lambda^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἔχομεν ΑΒ = 36 mm . Ἐπάνω εἰς τήν πλευράν αὐτήν ΑΒ λαμβάνομεν ΑΔ = 24 mm , καί ἀπό τό Δ χαράσσομεν τάς ΔΕ || ΑΓ καί ΔΖ || ΒΓ , ὅπου τό μέν Ε εἶναι σημεῖον τῆς πλευρᾶς ΒΓ , τό δέ Ζ σημεῖον τῆς πλευρᾶς ΑΓ. Νά εὕρετε τά ἐμβαδά τῶν τριγώνων ΑΔΖ καί ΒΔΕ καθώς καί τοῦ παραλληλογράμμου ΕΓΖΔ, ἐάν βάσις ΒΓ = 45 mm καί ἀντίστοιχον ὕψος ΑΗ = 32 mm.

2) Τί παθαίνει τό ἐμβαδόν ἑνός τετραγώνου, καί διατί, ὅταν ἡ πλευρά του πολλαπλασιασθῆ μέ ἕνα φυσικόν ἀριθμόν ν; μέ ἕνα θετικόν ρητόν ἀριθμόν ρ;

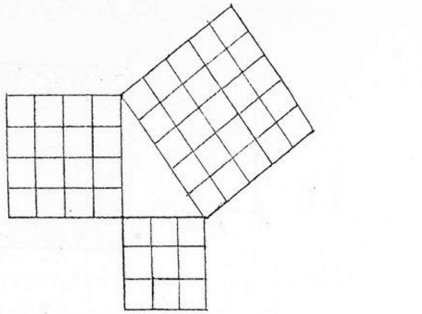
3) Αἱ πλευραί ἑνός ἰσοπλεύρου τριγώνου ἠλαττώθησαν κατά τά 3/5 των. Τό ἐμβαδόν τοῦ ἀρχικοῦ τριγώνου ἦτο 50 cm^2. Πόσον εἶναι τό ἐμβαδόν τοῦ νέου τριγώνου ;

4) Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ χαράσσομεν ἀπό τό κέντρον βάρους του Κ τάς παραλλήλους πρός τάς πλευράς του. Κάθε φοράν ἀποκόπτεται ἔτσι ἀπό τό τργ. ΑΒΓ ἕνα τρίγωνον. Πῶς ἕπεται ἀπό τήν προηγουμένην ἐφαρμογήν β) ὅτι τά τρία ἀποκοπτόμενα τρίγωνα εἶναι ἰσεμβαδικά ;

§ 4. Πυθαγόρειον θεώρημα.

4.1. Πυθαγόρειον Θεώρημα. Ἔτσι καλεῖται μία σπουδαιοτάτη πρότασις , πού ἀναφέρεται εἰς τό ὀρθογώνιον τρίγωνον, διότι ἡ ἀνακάλυψις καί ἡ ἀπόδειξίς της ἀποδίδονται εἰς τήν

Σχολήν τοῦ Ἕλληνος φιλοσόφου καί μαθηματικοῦ Πυθαγόρα. Ὁ Πυθαγόρας κατήγετο ἀπό τήν Σάμον, ἔδρασε ὅμως ὡς ἀρχηγός Σχολῆς εἰς τάς ἑλληνικάς ἀποικίας τῆς Νοτίου Ἰταλίας μεταξύ 550 καί 510 π.Χ.



Μία ειδική περίπτωσις τοῦ Θεωρήματος, ἡ ὁποία ἀναφέρεται εἰς τό ὀρθογώνιον τρίγωνον μέ μήκη καθέτων πλευρῶν 3 καί 4 μονάδας ἀντιστοίχως, ἴσως νά ἦτο καί προγενέστέρα γνωστή εἰς τούς ἀνατολικούς λαούς τῆς Αἰγύπτου καί τῆς Μεσοποταμίας.

Εἰς τήν εἰδικήν αὐτήν περίπτωσιν , πού ἀπεικονίζεται εἰς τό παρακείμενον σχῆμα, ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογ. τριγώνου ἔχει μῆκος 5 μονάδας. Ἐπομένως, τό ἐμβαδόν τοῦ τετραγώνου μέ πλευράν τήν ὑποτείνουσαν εἶναι ἴσον μέ τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τετραγώνων πού ἔχουν πλευράς τάς δύο καθέτους πλευράς τοῦ τριγώνου :

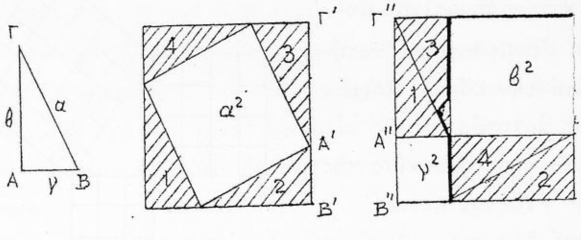
$$5^2 = 25 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 \cdot$$

Ἡ πρότασις αὐτή τοῦ Πυθαγόρα διατυπώνεται συνήθως μέ σύντομον τρόπον ὡς ἑξῆς:

Τό τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσον μέ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο καθέτων πλευρῶν του.

Ἰδού τώρα μία ὡραία ἀπόδειξις τῆς προτάσεως:

Ἔστω ΓΑΒ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ($\sphericalangle$ Α = 90°). Σχεδιάζομεν δύο τετράγωνα Ι καί ΙΙ μέ πλευράν τό ἄθροισμα ΓΑ + ΑΒ (Βλ. σχ. κατωτέρω).



I II

Ἀπό ἕνα καρτόνι ἀποκόπτομεν τέσσαρα ὀρθογώνια τρίγωνα ἴσα μέ τό ΓΑΒ , πού ἑπομένως ἔχουν καθέτους πλευράς ἴσας μέ ΓΑ καί ΑΒ. Τά τέσσαρα αὐτά τρίγωνα τά τοποθετοῦμεν 1ον ἐπάνω εἰς τό τετράγωνον Ι , 2ον ἐπάνω εἰς τό τετράγωνον ΙΙ κατά τούς δύο τρόπους πού φαίνονται εἰς τό ἀνωτέρω σχῆμα. Παρατηροῦμεν ὅτι τήν πρώτην φοράν ἀπομένει ἀπό τό Ι ἀκάλυπτον μέρος ἕνα τετράγωνον μέ πλευράν τήν ὑποτείνουσαν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐνῶ τήν δευτέραν φοράν ἀπομένει ἀπό τό ΙΙ ἀκάλυπτον ἕνα μέρος πού ἀποτελεῖται ἀπό δύο τετράγωνα μέ πλευράς τάς δύο καθέτους πλευράς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου. Τά δύο αὐτά ἀκάλυπτα μέρη ἔχουν ὅμως τό ἴδιον ἐμβαδόν $(\beta+\gamma)^2 - 4$ ἐμβ. τργ. ΓΑΒ . Ἄρα

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 .$$

<u>Παρατήρησις</u>. Εἰς ἀνωτέραν τάξιν θά μάθωμεν ὅτι, ἀντιστρόφως , ἐάν εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ μέ μήκη πλευρῶν $(\mathrm{B\Gamma}) = \alpha$, $(\Gamma\mathrm{A}) = \beta$, $(\mathrm{AB}) = \gamma$ ἀληθεύῃ ἡ σχέσις

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 ,$$

τότε τό τρίγωνον αὐτό εἶναι ὀρθογώνιον μέ ὀρθήν τήν γωνίαν ∢ Α. Ὥστε τό Πυθαγόρειον θεώρημα ἐκφράζει μίαν χαρακτηριστικήν ἰδιότητα τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων.

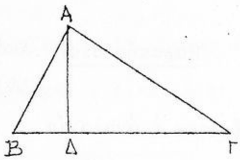
Μέ ἄλλους λόγους , ἰσχύει διά τά τρίγωνα ΑΒΓ ἡ λογική ἰσοδυναμία:

$$(\mathrm{AB} \perp \mathrm{A\Gamma}) \iff (\mathrm{B\Gamma})^2 = (\mathrm{AB})^2 + (\mathrm{A\Gamma})^2.$$

§ 5. Ἐφαρμογαί τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος.

5.1. Τό Πυθαγόρειον θεώρημα ἔχει πλείστας ἐφαρμογάς . Ἰδού μερικαί ἐξ αὐτῶν.

1η) Ἔστω ΒΑΓ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ($\sphericalangle \mathrm{A} = 90^\circ$) καί ΑΔ τό ὕψος τό ἀντίστοιχον εἰς τήν ὑποτείνουσαν ΒΓ (σχῆμα παραπλεύρως). Τό ἴχνος Δ τοῦ ὕψους χωρίζει τήν ὑποτείνουσαν εἰς δύο μέρη :



$$\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{B\Delta} + \Delta\Gamma$$

Ἔχομεν ἀφ' ἑνός

$$(\mathrm{B\Gamma})^2 = (\mathrm{AB})^2 + (\mathrm{A\Gamma})^2$$

καί ἀφ' ἑτέρου

$$(\mathrm{B\Gamma})^2 = [(\mathrm{B\Delta}) + (\Delta\Gamma)]^2 = (\mathrm{B\Delta})^2 + (\Delta\Gamma)^2 + 2(\mathrm{B\Delta})\cdot(\Delta\Gamma).$$

Ἄρα

$$(\mathrm{AB})^2 + (\mathrm{A\Gamma})^2 = (\mathrm{B\Delta})^2 + (\Delta\Gamma)^2 + 2(\mathrm{B\Delta})\cdot(\Delta\Gamma).$$

Ἡ σχέσις αὐτή εἶναι ἰσοδύναμος μέ τήν

$$(1) \qquad (\mathrm{AB})^2 - (\mathrm{B\Delta})^2 + (\mathrm{A\Gamma})^2 - (\Delta\Gamma)^2 = 2(\mathrm{B\Delta})\cdot(\Delta\Gamma).$$

Ἐξ ἄλλου τά δύο τρίγωνα ΑΔΒ καί ΑΔΓ εἶναι ὀρθογώνια εἰς τό Δ · ἄρα

$$(\mathrm{AB})^2 = (\mathrm{B\Delta})^2 + (\mathrm{A\Delta})^2 \iff (\mathrm{AB})^2 - (\mathrm{B\Delta})^2 = (\mathrm{A\Delta})^2$$

καί

$$(\mathrm{A\Gamma})^2 = (\Delta\Gamma)^2 + (\mathrm{A\Delta})^2 \iff (\mathrm{A\Gamma})^2 - (\Delta\Gamma)^2 = (\mathrm{A\Delta})^2.$$

Συνεπῶς

$$(2) \qquad (\mathrm{AB})^2 - (\mathrm{B\Delta})^2 + (\mathrm{A\Gamma})^2 - (\Delta\Gamma)^2 = 2(\mathrm{A\Delta})^2.$$

Ἡ παραβολή τῶν δύο σχέσεων (1) καί (2) μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τό συμπέρασμα:

$$2(BΔ)\cdot(ΔΓ) = 2(AΔ)^2 \Longleftrightarrow (AΔ)^2 = (BΔ)(ΔΓ) .$$

Ὥστε , τό τετράγωνον μέ πλευράν τό ὕψος πού ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν ὑποτείνουσαν ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἰσεμβαδικόν μέ τό ὀρθογώνιον πού ἔχει διαστάσεις τά δύο τμήματα εἰς τά ὁποῖα τό ὕψος τοῦτο χωρίζει τήν ὑποτείνουσαν.

Γραφική ἐπαλήθευσις. Μέ μετρήσεις ἐπάνω εἰς τό προηγούμενον σχῆμα εὑρίσκομεν:

$AΔ = 17,3$ mm , $BΔ = 10$ mm , $ΔΓ = 30$ mm

$(AΔ)^2 = 299,29$, $(BΔ)\cdot(ΔΓ) = 300$

$299,29 \simeq 300$.

Παρατήρησις. Ἀπό τήν ἀνωτέρω ἰσότητα

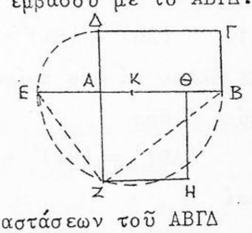
$$(AΔ)\cdot(AΔ) = (BΔ)\cdot(ΔΓ)$$

ἕπεται ἡ ἀναλογία

$$\frac{(BΔ)}{(AΔ)} = \frac{(AΔ)}{(ΔΓ)} \Longleftrightarrow \frac{BΔ}{AΔ} = \frac{AΔ}{ΔΓ} .$$

Ὥστε , τό ὕψος AΔ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν δύο τμημάτων εἰς τά ὁποῖα τό ὕψος τοῦτο χωρίζει τήν ὑποτείνουσαν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.

5.2. 2α) Πρόβλημα. Ἔστω ΑΒΓΔ ἕνα ὀρθογώνιον. Ζητεῖται νά κατασκευάσωμεν ἕνα τετράγωνον ἴσου ἐμβαδοῦ μέ τό ΑΒΓΔ.



Στηριζόμενοι εἰς τήν προηγουμένην πρότασιν κατασκευάζομεν τό ζητούμενον ὡς ἑξῆς (σχ. παραπλεύρως)/:
Μέ διάμετρον τό τμῆμα

$EB = EA + AB = AΔ + AB$ = ἄθροισμα διαστάσεων τοῦ ΑΒΓΔ

γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν. Ἄς εἶναι Ζ τό σημεῖον ὅπου ἡ κάθετος πρός τήν ΕΒ ἀπό τό Α τέμνει αὐτήν τήν ἡμιπεριφέρειαν. Τό τργ ΕΖΒ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τό Ζ (διατί ;).
Ἐπομένως

$(AZ)^2 = (EA)\cdot(AB) = (\Delta A)\cdot(AB)$ = ἐμβ. ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ.

Συνεπῶς τό τετράγωνον ΑΖΗΘ μέ πλευράν τό τμῆμα ΑΖ εἶναι τό ζητούμενον.

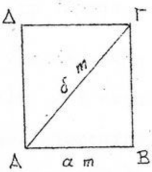
Παρατήρησις. Ἡ παραπάνω κατασκευή μᾶς δίδει τήν λύσιν καί τοῦ ἀκολούθου προβλήματος :

Δίδονται δύο τμήματα ΑΒ καί ΑΔ˙ ζητεῖται νά κατασκευασθῆ ἕνα τμῆμα μέσον ἀνάλογον τῶν τμημάτων ΑΒ καί ΑΔ.

Τό ζητούμενον τμῆμα εἶναι τό ΑΖ τῆς προηγουμένης κατασκευῆς, ἐπειδή

$$\frac{AB}{AZ} = \frac{AZ}{A\Delta} \iff \frac{(AB)}{(AZ)} = \frac{(AZ)}{(A\Delta)} \iff (AZ)^2 = (AB)\cdot(A\Delta).$$

5.3. 3η. Ἔστω ΑΒΓΔ ἕνα τετράγωνον μέ πλευράν ΑΒ μήκους α m. Αἱ διαγώνιοί του , πού , ὅπως γνωρίζομεν , εἶναι ἴσαι , ἄς ἔχουν μῆκος δ m.



Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διαγώνιος ΑΓ εἶναι ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΒΓ). Ἄρα , σύμφωνα μέ τό Πυθαγόρειον θεώρημα ,

$$\delta^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2.$$

Ὥστε τό τετράγωνον μέ πλευράν τήν διαγώνιον ἑνός τετραγώνου ἔχει ἐμβαδόν διπλάσιον ἀπό αὐτό τό τετράγωνον.

Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι τό μῆκος α τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ εἶναι 1 m. Τό ἐμβαδόν τοῦ τετραγώνου μέ πλευράν τήν διαγώνιον ΑΓ θά εἶναι τότε ἴσον μέ $2\cdot 1^2 = 2\ m^2$ καί ,συνεπῶς, τό μῆκος δ εἰς m τῆς διαγωνίου θά πρέπει νά εἶναι ἕνας ἀριθμός τοῦ ὁποίου τό τετράγωνον νά ἰσοῦται μέ 2:

$$\delta^2 = 2 .$$

Ἕνας τέτοιος ἀριθμός δέν ἠμπορεῖ ὅμως νά εἶναι ρητός,διότι, ὅπως ἀνεκάλυψε καί ἀπέδειξε ἡ Πυθαγόρειος Σχολή, τό τετράγωνον παντός ρητοῦ ἀριθμοῦ εἶναι $\neq 2$. Π.χ. τό τετράγωνον παντός ἀκεραίου εἶναι $\neq 2$, διότι

$1^2 = 1 < 2$ καί $2^2 = 4 > 2$, ἄρα καί $\nu^2 > 2$ ὅταν $\nu \geqq 3$·

τό τετράγωνον παντός κλασματικοῦ ἀριθμοῦ μέ παρονομαστήν τό 2 εἶναι $\neq 2$, διότι

$$\left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1 < 2 \text{ καί } \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2, \text{ ἄρα καί } \left(\frac{\nu}{2}\right)^2 > 2 \text{ ὅταν } \nu \geqq 4 \cdot$$

τό τετράγωνον παντός κλασματικοῦ ἀριθμοῦ μέ παρονομαστήν τό 3 εἶναι $\neq 2$, διότι

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} < 2 \quad \text{καί} \quad \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} > 2, \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Αἱ τρεῖς ἀνωτέρω διαπιστώσεις δέν ἀποτελοῦν φυσικά ἀπόδειξιν τῆς ἀνακαλύψεως τῶν Πυθαγορείων, ἁπλῶς τήν ἐπαληθεύουν εἰς τάς τρεῖς εἰδικάς περιπτώσεις πού ὁ ρητός ἀριθμός ἔχει τήν μορφήν $\frac{\nu}{1}$ ἤ $\frac{\nu}{2}$ ἤ $\frac{\nu}{3}$ $(\nu \in \Phi)$.

Τό μῆκος λοιπόν δ m τῆς διαγωνίου εἰς ἕνα τετράγωνον μέ πλευράν 1 m εἶναι ἕνας μή ρητός ἀριθμός καί, διά νά τόν παραστήσωμεν, μᾶς χρειάζεται ἕνα νέον ἀριθμητικόν σύμβολον. Τό σύμβολον αὐτό εἶναι τό

$\sqrt{2}$, πού διαβάζεται: <u>τετραγωνική ρίζα</u> τοῦ 2.

Διά τό ἀριθμητικόν αὐτό σύμβολον ἰσχύουν ἐξ ὁρισμοῦ τά ἑξῆς:

1ον) διαγώνιος ἑνός τετραγώνου $= \sqrt{2} \cdot$ πλευράν τοῦ τετραγώνου

ἄρα

λόγος διαγωνίου ἑνός τετραγώνου πρός τήν πλευράν του $= \sqrt{2}$·

2ον) τό τετράγωνον $(\sqrt{2})^2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ τοῦ $\sqrt{2}$ εἶναι ἴσον μέ 2.

Ἐξ ἄλλου ὁ μή ρητός ἀριθμός $\sqrt{2}$ λέγεται <u>ἀσύμμετρος</u> διά τόν ἑξῆς λόγον:

Τά δύο τμήματα: διαγώνιος ΑΓ καί πλευρά ΑΒ ἑνός τετραγώνου ΑΒΓΔ δέν ἔχουν κοινόν ὑποπολλαπλάσιον (<u>κοινόν μέτρον</u> κατά τήν ἀρχαίαν ἑλληνικήν ἔκφρασιν). Πράγματι, ἐάν ἕνα τμῆμα τ ἦτο κοινόν ὑποπολλαπλάσιόν των, θά εἴχαμεν:

$$ΑΓ = λ \cdot τ \qquad καί \qquad ΑΒ = μ \cdot τ \ ;$$

ὅπου λ καί μ θά ἦσαν δύο κατάλληλοι φυσικοί ἀριθμοί.
Ἀλλά τότε τό μῆκος τῆς διαγωνίου ΑΓ μέ μονάδα τήν πλευράν ΑΒ θά ἦτο ὁ ρητός ἀριθμός $\frac{λ}{μ}$, πρᾶγμα πού ἀποκλείεται, ὅπως εἴπαμεν. Διά τοῦτο οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες μαθηματικοί ὠνόμασαν τό τμῆμα ΑΓ μή σύμμετρον (ἤ ἀσύμμετρον) πρός τό τμῆμα ΑΒ. Ὡς ἐκ τούτου ἡμεῖς οἱ νεώτεροι καλοῦμεν ἀσύμμετρον τόν ἀριθμόν $\sqrt{2}$ πού μετρᾶ τό ΑΓ, ὅταν ὡς μονάς ληφθῆ τό ΒΓ. (Παράβ. καί Βιβλ. Ι , σ. 46-47Γ).

Ἰδού τέλος μεριkαί προσεγγιστικαί τιμαί τῆς $\sqrt{2}$:

Ἐπειδή

$$1,4^2 = 1,96 < 2 < 2,25 = 1,5^2,$$

συμπεραίνομεν ὅτι $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$, ἄρα

$\sqrt{2} \simeq 1,4$ ἤ $1,5$ μέ προσέγγισιν ἑνός δεκάτου.

Ἐπειδή

$$1,41^2 = 1,9881 < 2 < 2,0164 = 1,42^2 ,$$

συμπεραίνομεν ὅτι $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$, ἄρα

$\sqrt{2} \simeq 1,41$ ἤ $1,42$ μέ προσέγγισιν ἑνός ἑκατοστοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Τί εἴδους τρίγωνον εἶναι τό ΑΒΓ (καί διατί), ἐάν ΑΒ = 4,5 m , ΑΓ = 6 m καί ΒΓ = 7,5 m ; Νά τό σχεδιάσετε ὑπό κλίμακα 1 : 100 .

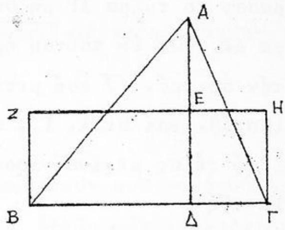
2) Τί εἴδους τρίγωνον εἶναι τό τρίγωνον πού ἔχει πλευράς 2,5 m , 6 m καί 6,5 m καί διατί ; Νά τό σχεδιάσετε ὑπό κλίμακα 1 : 100.

3) Ἔστω α = 2 cm τό μῆκος τῆς πλευρᾶς τετραγώνου. Νά κατασκευάσετε τήν πλευράν τοῦ τετραγώνου πού ἔχει διπλάσιον ἐμβαδόν ($2α^2$ cm^2) καί ἀκολούθως τήν πλευράν τοῦ τετραγώνου πού ἔχει τριπλάσιον ἐμβαδόν ($3α^2 cm^2$).

4) Νά σχεδιάσετε ἕνα τετράγωνον καί κατόπιν ἕνα ἄλλο μέ διπλασίαν πλευράν. Τό δεύτερον αὐτό τετράγωνον ἔχει ἐμβαδόν τετραπλάσιον ἀπό τό πρῶτον (διατί ;) καί ἠμπορεῖ νά χρησι-

μοποιηθῆ διά τήν κατασκευήν ἑνός τετραγώνου μέ ἐμβαδόν πενταπλάσιον ἀπό τό πρῶτον. Πῶς ;

5) Νά σχεδιάσετε ὑπό κλίμακα 1 : 50 ἕνα ὀρθογώνιον (Π) πού ἔχει διαστάσεις 3,50 m × 2,80 m καί νά κατασκευάσετε ἕνα τετράγωνον ἴσου ἐμβαδοῦ μέ τό σχέδιον πού ἐκάματε. Ἀπό τό μῆκος τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ τοῦ τετραγώνου νά εὕρετε τό μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου πού εἶναι ἰσεμβαδικόν μέ τό (Π).



6) Εἰς τό παραπλεύρως τρίγωνον ΑΒΓ τό τμῆμα ΑΔ εἶναι τό ὕψος τό ἀντίστοιχον εἰς τήν βάσιν ΒΓ καί ΑΕ = ΕΔ. Νά ἐξηγήσετε διατί τό ὀρθογώνιον ΒΓΗΖ εἶναι ἰσεμβαδικόν μέ τό τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀκολούθως νά κατασκευάσετε τετράγωνον ἰσεμβαδικόν μέ τό τρίγωνον ΑΒΓ.

7) Νά εὕρετε μέ ὑπολογισμόν τήν διαγώνιον τοῦ ὀρθογωνίου πού ἔχει διαστάσεις ΑΒ = 12 m καί ΑΔ = 5 m.

8) Νά εὕρετε μέ ὑπολογισμόν τό μῆκος τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἑνός ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ εἰς τό ὁποῖον ἡ πλευρά ΑΔ ἔχει μῆκος 2,5 m καί ἡ διαγώνιος ΑΓ 6,5 m.

9) Νά κατασκευάσετε τετράγωνον ἴσου ἐμβαδοῦ μέ ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 12 m ὑπό κλίμακα 1 : 200.

10) Δίδονται δύο τμήματα: $\alpha = 2,5$ cm καί $\beta = 1,5$ cm. Νά κατασκευάσετε τμῆμα μ τό ὁποῖον νά εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν α καί β.

§ 6. Τετραγωνική ρίζα θετικοῦ ρητοῦ ἀριθμοῦ.

<u>6.1. Πρόβλημα.</u> Δίδεται τό ἐμβαδόν ϑ ἑνός τετραγώνου ἐκφρασμένον εἰς τετραγωνικάς μονάδας μέ πλευράν ἕνα τμῆμα τ. Ζητεῖται τό μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου ἐκφρασμένον μέ μονάδα μήκους τό τμῆμα τ.

<u>Λύσις</u>. Ἄν καλέσωμεν x τό ζητούμενον μῆκος, θά ἔχωμεν διά τό x τήν ἐξίσωσιν

$$x^2 = \vartheta \quad \text{μέ τόν περιορισμόν} \quad x > 0.$$

Διακρίνομεν τάς ἀκολούθους τρεῖς περιπτώσεις:

I) Τό ϑ εἶναι τετράγωνον φυσικοῦ ἀριθμοῦ :

$$\vartheta = 1^2\ ,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ 6^2,\ \ldots$$

Τό ζητούμενον εἶναι τότε ἀντιστοίχως:

$$x = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ 6\ ,\ \ldots$$

Λέγομεν ὅτι τό x εἶναι ἡ θετική τετραγωνική ρίζα τοῦ ϑ καί γράφομεν:

$$x = \sqrt{\vartheta}\ .$$

Π.χ.

$$\sqrt{1} = 1\ ,\ \sqrt{4} = 2\ ,\ \sqrt{9} = 3\ ,\ \sqrt{16} = 4\ ,\ldots$$

II) Ὁ ἀριθμός ϑ εἶναι ἴσος μέ ἕνα <u>ἀνάγωγον</u> κλάσμα τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι τετράγωνα φυσικῶν ἀριθμῶν.

Π.χ. ἔστω πρῶτον:

$$\vartheta = \frac{1^2}{2^2}\ ,\ \frac{3^2}{2^2}\ ,\ \frac{5^2}{2^2}\ ,\ \frac{7^2}{2^2}\ ,\ \frac{9^2}{2^2}\ ,\ \ldots$$

Τότε τό ζητούμενον x εἶναι ἀντιστοίχως:

$$x = \frac{1}{2}\ ,\ \frac{3}{2}\ ,\ \frac{5}{2}\ ,\ \frac{7}{2}\ ,\ \frac{9}{2}\ ,\ \ldots$$

Ἔστω δεύτερον

$$\vartheta = \frac{1}{3^2},\ \frac{2^2}{3^2}\ ,\ \frac{4^2}{3^2}\ ,\ \frac{5^2}{3^2}\ ,\ \frac{7^2}{2^2}\ ,\ \ldots$$

Τό ζητούμενον x εἶναι τότε ἀντιστοίχως :

$$x = \frac{1}{3}\ ,\ \frac{2}{3}\ ,\ \frac{4}{3}\ ,\ \frac{5}{3}\ ,\ \frac{7}{3}\ ,\ \ldots$$

Γενικῶς ἔστω

$$\vartheta = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\ ,$$

ὅπου α καί β φυσικοί ἀριθμοί πρῶτοι μεταξύ των (δηλαδή μέ μέγιστον κοινόν διαιρέτην τό 1). Τότε τό ζητούμενον x εἶναι ἴσον μέ $\frac{\alpha}{\beta}$. Λέγομεν πάλιν ὅτι τό $x = \frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἡ θετική ρίζα τοῦ $\vartheta = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$ καί γράφομεν $x = \sqrt{\vartheta}$.

III) ὁ ἀριθμός ϑ εἶναι ἕνας θετικός ρητός ἀριθμός πού, ὅταν γραφῆ μέ μορφήν <u>ἀναγώγου</u> κλάσματος $\frac{\mu}{\nu}$, δέν ἔχει τήν ἰδιότητα: καί οἱ δύο ὅροι του νά εἶναι τετράγωνα φυσικῶν ἀριθμῶν· μέ ἄλλους λόγους εἶναι:

$\vartheta = \frac{\mu}{\nu}$, ὅπου εἴτε μ εἴτε ν δέν εἶναι τετράγωνον ἀκεραίου.

Π.χ.

$\vartheta = \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \ldots$ ἤτοι $\vartheta = 2, 3, 5, 6, \ldots$

$\vartheta = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \ldots$

$\vartheta = \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \ldots$ κ.ο.κ.

Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἀποδεικνύεται ὅτι τό ζητούμενον μῆκος x τῆς πλευρᾶς ἑνός τετραγώνου μέ ἐμβαδόν θ εἶναι ἕνας μή ρητός (ἕνας ἀσύμμετρος) ἀριθμός.
Τόν ἀριθμόν αὐτόν τόν ὀνομάζομεν πάλιν θετικήν τετραγωνικήν ρίζαν τοῦ θ καί τόν παριστάνομεν μέ τό σύμβολον $\sqrt{\vartheta}$.

6.2. Ἀπό τόν ὁρισμόν αὐτόν τῆς τετραγωνικῆς ρίζης $\sqrt{\vartheta}$ ἑνός θετικοῦ ρητοῦ ἀριθμοῦ θ ἕπεται , καί εἰς τάς τρεῖς ἀνωτέρω περιπτώσεις, ὅτι ἡ $\sqrt{\vartheta}$ εἶναι ἕνας θετικός ἀριθμός (ρητός ἤ μή ρητός) τοῦ ὁποίου τό τετράγωνον ἰσοῦται μέ θ:

$$(\sqrt{\vartheta})^2 = \vartheta .$$

Ἐννοεῖται ὅτι καί ὁ ἀντίθετος ἀριθμός $-\sqrt{\vartheta}$ ἔχει τήν ἰδιότητα: τό τετράγωνόν του νά ἰσοῦται μέ θ :

$$(-\sqrt{\vartheta})^2 = \vartheta .$$

Ὥστε ἡ ἐξίσωσις

$$x^2 = \vartheta \ , \quad \text{ὅπου } \vartheta = \text{θετικός ρητός ἀριθμός},$$

ἔχει δύο λύσεις : τήν $x = \sqrt{\vartheta}$ καί τήν $x = -\sqrt{\vartheta}$.

Π.χ. ἡ $x = 4$ ἔχει τάς λύσεις $x = \sqrt{4} = 2$ καί $x = -2$,

ἡ $x^2 = 3$ ἔχει τάς λύσεις $x = \sqrt{3}$ καί $x = -\sqrt{3}$,

ἡ $x^2 = \frac{1}{4}$ " " " $x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ καί $x = -\frac{1}{2}$,

ἡ $x^2 = \frac{1}{3}$ " " " $x = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ καί $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ἡ ἐξίσωσις

$$x^2 = 0$$

ἔχει μίαν μόνον λύσιν, τήν $x = 0$, Ὥστε $\sqrt{0} = 0$.
Τέλος ἡ ἐξίσωσις

$$x^2 = \alpha \quad , \text{ ὅπου } \alpha = \text{ἀρνητικός ρητός ἀριθμός},$$

δέν ἔχει καμμίαν λύσιν εἰς τό σύστημα τῶν σχετικῶν (ρητῶν ἤ μή ρητῶν) ἀριθμῶν πού θεωροῦμεν , διότι τό τετράγωνον παντός σχετικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἀριθμός θετικός ἤ τό 0.
Τό σύμβολον $\sqrt{\ }$ εἰς τόν συμβολισμόν $\sqrt{\vartheta}$ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης λέγεται ριζικόν καί ὁ ἀριθμός ϑ ὑπόρριζον τῆς ρίζης.

6.3. Μία ἰδιότης τῆς τετραγωνικῆς ρίζης. Ἔστω α ἕνας σχετικός ἀριθμός. Παρατηροῦμεν ὅτι

$$(10\alpha)^2 = 10^2 \cdot \alpha^2 , \quad (10^2\alpha)^2 = 10^4 \cdot \alpha^2 , \quad (10^3\alpha)^2 = 10^6 \cdot \alpha^2 , \ldots$$

Ἄρα, ἀντιστρόφως, ἐάν ϑ εἶναι ἕνας ρητός θετικός ἀριθμός θά ἔχωμεν:

$$\sqrt{10^2 \cdot \vartheta} = 10\sqrt{\vartheta} \quad , \quad \sqrt{10^4 \cdot \vartheta} = 10^2\sqrt{\vartheta} \quad , \quad \sqrt{10^6 \cdot \vartheta} = 10^3\sqrt{\vartheta} \ , \ldots$$

καί

$$\sqrt{\vartheta : 10^2} = \sqrt{\vartheta} : 10 \quad , \quad \sqrt{\vartheta : 10^4} = \sqrt{\vartheta} : 10^2 \ , \quad \sqrt{\vartheta : 10^6} = \sqrt{\vartheta} : 10^3 \ , \ldots$$

Ὥστε , ἄν ἕνας ρητός θετικός ἀριθμός ϑ πολλαπλασιασθῇ (ἤ διαιρεθῇ) μέ

$$10^2 = 100 \quad , \quad 10^4 = 10\ 000 \quad , \quad 10^6 = 1\ 000\ 000 \ , \ldots ,$$

ἡ θετική τετραγωνική του ρίζα $\sqrt{\vartheta}$ πολλαπλασιάζεται (ἤ διαιρεῖται) ἀντιστοίχως μέ

$$10 \quad , \quad 10^2 = 100 \quad , \quad 10^3 = 1000 \ , \ldots$$

Π.χ.

$$\sqrt{4 \cdot 100} = 10\sqrt{4} = 10 \cdot 2 = 20 \quad , \quad \sqrt{25 \cdot 10\ 000} = 100\sqrt{25} = 100 \cdot 5 = 500$$

$$\sqrt{49 : 100} = \sqrt{49} : 10 = 7 : 10 = 0{,}7 \ , \quad \sqrt{81 : 10\ 000} = \sqrt{81} : 100 = 9 : 100 = 0{,}09$$

$$\sqrt{5 \cdot 10^6} = 10^3 \cdot \sqrt{5} \ , \quad \sqrt{625 : 10^6} = \sqrt{625} : 10^3 = 25 : 10^3 = 0{,}025 \ .$$

6.4. Ὑπολογισμός τῆς τετραγωνικῆς ρίζης. Ὁ ὑπολογισμός αὐτός λέγεται καί ἐξαγωγή τῆς τετραγωνικῆς ρίζης. Ὅπως εἴπαμεν εἰς τό § 6.1, ἄν ὁ ρητός θετικός ἀριθμός ϑ εἶναι ἴσος μέ τό τετράγωνον ἑνός φυσικοῦ ἀριθμοῦ α ἤ , γενικώτερα, ἑνός ἀναγώγου κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ (α καί β εἶναι φυσικοί ἀριθμοί μέ μέγ. κ. διαιρέτην τό 1), τότε ἡ $\sqrt{\vartheta}$ εἶναι ἀκριβῶς ἴση μέ ἕνα ρητόν ἀριθμόν:

$$\vartheta = \alpha^2 \Longleftrightarrow \sqrt{\vartheta} = \alpha$$

$$\vartheta = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \Longleftrightarrow \sqrt{\vartheta} = \frac{\alpha}{\beta} \quad , \quad (\alpha \in \Phi \ , \ \beta \in \Phi) \ .$$

Εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν ἡ $\sqrt{\vartheta}$ εἶναι ἕνας μή ρητός ἀριθμός καί εἶναι μόνον κατά προσέγγισιν ἴση μέ ρητούς ἀριθμούς. Ἠμποροῦμεν ὅμως νά εὕρωμεν ρητούς ἀριθμούς πού νά προσεγγίζουν τήν $\sqrt{\vartheta}$ μέ σφάλμα ὅσον θέλομεν μικρόν. Π.χ. διά νά εὕρωμεν τήν τιμήν τῆς $\sqrt{3}$ κατά προσέγγισιν μονάδος , παρατηροῦμεν ὅτι

$$1^2 < 3 < 2^2$$

καί, ἐπομένως ,

$$1 < \sqrt{3} < 2 \ .$$

Συνεπῶς

$$\sqrt{3} \simeq 1 \quad \text{ἤ} \quad 2 \text{ κατά προσέγγισιν μονάδος,}$$

δηλαδή μέ σφάλμα < 1 κατ'ἀπόλυτον τιμήν:

$$0 < \sqrt{3} - 1 < 1 \quad \text{καί} \quad 0 < 2 - \sqrt{3} < 1.$$

Διά νά εὕρωμεν τήν $\sqrt{3}$ κατά προσέγγισιν ἑνός δεκάτου , τετραγωνίζομεν τούς δεκαδικούς ἀριθμούς

1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9

καί παρατηροῦμεν ὅτι

$$1{,}7^2 = 2{,}89 < 3 < 3{,}24 = 1{,}8^2 \ .$$

Ἄρα

$$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$$

καί συνεπῶς

$$\sqrt{3} \simeq 1{,}7 \quad \text{ἤ} \quad 1{,}8 \quad \text{κατά προσέγγισιν ἑνός } \frac{1}{10} \ .$$

Διά νά εὕρωμεν τήν $\sqrt{3}$ κατά προσέγγισιν ἑνός $\frac{1}{100}$, τετραγωνίζομεν τούς δεκαδικούς ἀριθμούς

1,71 | 1,72 | 1,73 | 1,74 | . . . | 1,78 | 1,79

καί εὑρίσκομεν ὅτι

$1,73^2 = 2,9929 < 3 < 3,0276 = 1,74^2$.

Ἄρα

$\sqrt{3} \simeq 1,73$ ἤ $1,74$ κατά προσέγγισιν ἑνός $\frac{1}{100}$.

Συνεχίζοντες εὑρίσκομεν ὅτι

$1,732^2 < 3 < 1,733^2$.

Ἄρα

$\sqrt{3} \simeq 1,732$ ἤ $1,733$ κατά προσέγγισιν ἑνός $\frac{1}{1000}$,

κ. ο. κ.

Ὅπως βλέπομεν , ἡ παραπάνω μέθοδος μᾶς ἐπιτρέπει νά ὑπολογίσωμεν διαδοχικῶς δεκαδικούς ἀριθμούς πού νά προσεγγίζουν μίαν τετραγωνικήν ρίζαν μέ σφάλμα ὅσον θέλομεν μικρόν, εἶναι ὅμως κοπιώδης καί ὄχι ἀρκετά ταχεῖα.

Διά τοῦτο θά ἐκθέσωμεν τώρα δύο ἄλλους τρόπους ὑπολογισμοῦ τετραγωνικῶν ριζῶν κατά προσέγγισιν.

6.5. Ὑπολογισμός τετραγωνικῆς ρίζης μέ τήν βοήθειαν πινάκων. Εἰς τό τέλος τοῦ βιβλίου δίδομεν ἕνα πίνακα τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν τῶν ἀκεραίων 1 ἕως 100 κατά προσέγγισιν μισοῦ χιλιοστοῦ. Μέ τήν βοήθειαν αὐτοῦ τοῦ πίνακος εὑρίσκομεν τήν τετραγωνικήν ρίζαν ἑνός ἀκεραίου ἤ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ κατά προσέγγισιν ὡς ἑξῆς, ἀφοῦ τόν τρέψωμεν εἰς δεκαδικόν :

1ον. Ὁ ἀριθμός εἶναι ἀκέραιος καί εὑρίσκεται μεταξύ 1 καί 100. Ὁ πίναξ μᾶς δίδει τότε ἀμέσως τήν τετραγωνικήν του ρίζαν κατά προσέγγισιν ἑνός μισοῦ χιλιοστοῦ.

Π.χ. $\sqrt{53} \simeq 7,280$, $\sqrt{69} \simeq 0,307$.

2ον. Ὁ ἀριθμός κεῖται μεταξύ $100 = 10^2$ καί $10\,000 = 10^4$. Τόν διαιροῦμεν τότε μέ 100 , εὑρίσκομεν τήν τετραγωνικήν ρίζαν τοῦ πηλίκου κατά προσέγγισιν μέ τήν βοήθειαν τοῦ πίνακος καί τήν πολλαπλασιάζομεν μέ 10 . Π.χ.

$\sqrt{3594,7} = 10\sqrt{35,947} \simeq 10\sqrt{36} = 10\cdot 6 = 60$

$\sqrt{840,25} = 10\sqrt{8,4025} \simeq 10\sqrt{8} = 10\cdot 2,828 = 28,28$.

3ον. Ὁ ἀριθμός κεῖται μεταξύ 10^4 καί 10^6. Τόν διαιροῦμεν τότε μέ 10^4, εὑρίσκομεν τήν τετραγωνικήν ρίζαν τοῦ πηλίκου κατά προσέγγισιν μέ τήν βοήθειαν τοῦ πίνακος καί τήν πολλαπλασιάζομεν μέ $10^2 = 100$. Π.χ.

$\sqrt{53193} = 100\sqrt{5,3193} \simeq 100\sqrt{5} = 100\cdot 2,236 = 223,6$

$\sqrt{409673,4} = 100\sqrt{40,96734} \simeq 100\sqrt{41} = 100\cdot 6,403 = 640,3$.

4ον. Ὁ ἀριθμός εἶναι μικρότερος ἀπό τήν μονάδα. Τόν τρέπομεν εἰς δεκαδικόν, ἐάν δέν ἔχῃ δοθῇ μέ μορφήν δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, κατόπιν ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Π.χ. ἔστω ὅτι ἔχομεν νά ὑπολογίσωμεν κατά προσέγγισιν τήν $\sqrt{0,0723}$. Κάμνομεν ἀκέραιον τό ὑπόρριζον 0,0723 πολλαπλασιάζοντες αὐτό μέ $10^4 = 10\ 000$, εὑρίσκομεν μέ τήν βοήθειαν τοῦ πίνακος τήν τετραγωνικήν ρίζαν τοῦ γινομένου καί κατόπιν τήν διαιροῦμεν μέ $10^2 = 100$:

$$\sqrt{0,0723} = \frac{1}{100}\sqrt{723} = \frac{10}{100}\sqrt{7,23} \simeq \frac{1}{10}\sqrt{7} \simeq \frac{1}{10}\cdot 2,646 = 0,2646$$

Μέ ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν:

$$\sqrt{0,558} = \frac{1}{100}\sqrt{5580} = \frac{10}{100}\sqrt{55,80} \simeq \frac{1}{10}\sqrt{56} \simeq \frac{7,483}{10} = 0,7483$$

$$\sqrt{0,00372} = \frac{1}{10^3}\sqrt{3720} = \frac{10}{10^3}\sqrt{37,20} \simeq \frac{1}{10^2}\sqrt{37} \simeq \frac{6,083}{100} = 0,0683$$

6.6. <u>Ὑπολογισμός τετραγωνικῆς ρίζης χωρίς τήν βοήθειαν πινάκων</u>. Ἡ τετραγωνική ρίζα κατά προσέγγισιν μονάδος ἑνός ρητοῦ (θετικοῦ) ἀριθμοῦ πού περιέχεται μεταξύ 1 καί 100 εὑρίσκεται εὔκολα, ὅταν τρέφωμεν τόν ἀριθμόν εἰς δεκαδικόν καί ἔχωμεν εἰς τήν μνήμην μας τά τετράγωνα

1 4 9 16 25 36 49 64 81

τῶν ἀκεραίων

1 2 3 4 5 6 7 8 9 .

Π.χ.

$\sqrt{7} \simeq 2$ κατ'ἔλλειψιν ἤ $\sqrt{7} \simeq 3$ καθ'ὑπεροχήν ,

διότι $2^2 < 7 < 3^2$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν:

$\sqrt{48} \simeq 6$ ἤ 7 , διότι $6^2 < 48 < 7^2$

$\sqrt{74,5} \simeq 8$ ἤ 9 , διότι $8^2 < 74,5 < 9^2$

$\sqrt{92,34} \simeq 9$ ἤ 10 , διότι $9^2 < 92,34 < 10^2$.

Ὅταν τό ὑπόρριζον εἶναι > 100, διά νά ὑπολογίσωμεν τήν τετραγωνικήν ρίζαν χρησιμοποιοῦμεν μίαν εἰδικήν μέθοδον (ἕνα <u>ἀλγόριθμον</u>) τῆς ὁποίας τόν μηχανισμόν ἐκθέτομεν μέ παραδείγματα κατωτέρω.

6.7 Ἐξαγωγή τῆς $\sqrt{78543}$ κατά προσέγγισιν μονάδος.

Παρατηροῦμεν πρῶτα ὅτι ὁ ἀριθμός 78543 περιέχεται μεταξύ $10^4 = 10\ 000$ καί $10^6 = 1\ 000\ 000$. Ἀλλά

$$10^4 < 78\ 543 < 10^6 \iff 10^2 < \sqrt{78\ 543} < 10^3 ,$$

ἄρα ἡ $\sqrt{78\ 543}$ κατά προσέγγισιν μονάδος εἶναι ἕνας <u>τριψήφιος</u> ἀκέραιος.

<u>1ον. Εὕρεσις τοῦ πρώτου (ἀπό ἀριστερά) ψηφίου τῆς ρίζης.</u>

Χωρίζομεν τό ὑπόρριζον εἰς <u>διψήφια</u> τμήματα ἀπό τά δεξιά πρός τά ἀριστερά. Ἔτσι τό τελευταῖον τμῆμα πρός τά ἀριστερά ἠμπορεῖ νά εἶναι καί <u>μονοψήφιον</u>, ὅπως συμβαίνει εἰς τό παράδειγμά μας. Τό πρῶτον ψηφίον τῆς ζητουμένης ρίζης εἶναι ἡ τετραγωνική ρίζα τοῦ πρώτου ἀπό ἀριστερά τμήματος μέ προσέγγισιν μονάδος <u>κατ'ἔλλειψιν</u>. Τό ψηφίον αὐτό, πού εἶναι τό 2 εἰς τό παράδειγμά μας, τό γράφομεν δεξιά ἀπό τόν ἀριθμόν, ὅπως ὑποδεικνύομεν εἰς τήν παρακειμένην διάταξιν τῆς πράξεως.

7 85 43	2
−4	
385	

Τό τετράγωνον τοῦ 1ου αὐτοῦ ψηφίου τό ἀφαιροῦμεν ἀπό τό 1ον τμῆμα (τό 7 εἰς τό παράδειγμά μας) καί δεξιά ἀπό τό ὑπόλοιπον $7-2^2=7-4=3$ κατεβάζομεν τό 2ον διψήφιον τμῆμα τοῦ ὑπορρίζου. Σχηματίζεται ἔτσι ὁ ἀριθμός 385 , ὅπως ὑποδεικνύομεν ἀνωτέρω.

2ον. Εὕρεσις τοῦ δευτέρου ψηφίου τῆς ρίζης.

Ξεχωρίζομεν, ὅπως φαίνεται παραπλεύρως, τάς 38 δεκάδας τοῦ 385 καί τάς διαιροῦμεν μέ τό διπλάσιον 4 τοῦ ψηφίου τῆς ρίζης τό ὁποῖον ηὕραμεν, γράφομεν δέ αὐτό τό διπλάσιον δεξιά, κάτω ἀπό τήν θέσιν πού χρησιμοποιεῖται διά τά ψηφία τῆς ρίζης. Τό ἀκέραιον μέρος 9 τοῦ πηλίκου 38 : 4 τό γράφομεν δεξιά ἀπό τό διπλάσιον 4 καί πολλαπλασιάζομεν τόν ἀριθμόν 49 , πού προκύπτει, μέ 9. Διά νά εἶναι τό 9 2ον ψηφίον τῆς ρίζης πρέπει καί ἀρκεῖ τό γινόμενον 49×9 νά εἶναι $\leqslant 385$.

7 85 34	28	
−4	49	48
	×9	×8
38.5	441	384
−38 4		
1		

Ἐπειδή αὐτό δέν συμβαίνει ($49\times9=441>385$), δοκιμάζομεν μέ ὅμοιον τρόπον τό κατά μονάδα μικρότερον ψηφίον 8. Ἐπειδή τώρα εἶναι $48\times8=384\leqslant385$, συμπεραίνομεν ὅτι τό ζητούμενον 2ον ψηφίον τῆς ρίζης εἶναι τό 8. Τό γράφομεν δεξιά ἀπό τό πρῶτον καί σχηματίζομεν ἔτσι τόν ἀριθμόν 28 ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπό τά δύο πρῶτα ψηφία τῆς ρίζης.

3ον. Εὕρεσις τοῦ τρίτου ψηφίου τῆς ρίζης.

Ἀφαιροῦμεν ἀπό τό 385 τό 384 καί δεξιά τοῦ ὑπολοίπου 1 κατεβάζομεν τό τρίτον διψήφιον τμῆμα τοῦ ὑπορρίζου. Προκύπτει ἔτσι ὁ ἀριθμός 143 τοῦ ὁποίου ξεχωρίζομεν τάς 14 δεκάδας , ὅπως φαίνεται παραπλεύρως. Τάς δεκάδας αὐτάς τάς διαιροῦμεν μέ τό διπλάσιον 56 τοῦ διψηφίου μέρους

7 85 43	280	
−4	48	560
3 85	×8	×0
−3 84	384	0
14.3		
− 0		
143		

τῆς ρίζης τό ὁποῖον ηὕραμεν ἤδη. Τό ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου 14 : 53 εἶναι τό 0· τό γράφομεν δεξιά τοῦ διπλασίου 56 καί τόν ἀριθμόν 560, πού προκύπτει, τόν πολλαπλασιάζομεν μέ 0. Τό γινόμενον $560\times 0 = 0$ εἶναι $\leqslant 143$· ἄρα τό ζητούμενον τρίτον ψηφίον τῆς ρίζης εἶναι τό 0 καί τό ἀναγράφομεν δεξιά τῶν δύο πρώτων ψηφίων πού ηὕραμεν ἤδη. Ὁ ἀριθμός 280 πού σχηματίζεται ἔτσι, εἶναι ἡ τετραγωνική ρίζα τοῦ 78543 μέ προσέγγισιν μονάδος κατ'ἔλλειψιν. Πράγματι

$$280^2 = 78\ 400 < 78\ 543 < 78\ 961 = 281^2$$

καί ἑπομένως

$$280 < \sqrt{78543} < 281 .$$

Τό ὑπόλοιπον

$$143 - 560\times 0 = 143 - 0 = 143$$

λέγεται <u>ὑπόλοιπον</u> τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ ἀριθμοῦ 78543 κατά προσέγγισιν μονάδος ἐκ τῶν κάτω. Διά νά ἐλέγξωμεν τήν ὀρθότητα τῆς πράξεως πού ἐκάμαμεν, ἔχομεν τήν σχέσιν:

$$280^2 + 143 = 78\ 400 + 143 = 78\ 543.$$

<u>Παρατήρησις</u>. Ὅταν τό ὑπόρριζον εἶναι ἀκέραιος μέ περισσότερα ἀπό 6 ψηφία , τά διψήφια τμήματα εἰς τά ὁποῖα τόν χωρίζομεν ἀπό δεξιά πρός τά ἀριστερά εἶναι περισσότεραἀπό τρία καί ἡ τετραγωνική ρίζα κατά προσέγγισιν μονάδος εἶναι ἕνας ἀκέραιος μέ τοσα ψηφία ὅσα εἶναι τά διψήφια τμήματα τοῦ ὑπορρίζου.

Τά ψηφία αὐτά τά εὑρίσκομεν διαδοχικῶς μέ τόν ἴδιον τρόπον ὅπως καί ἀνωτέρω. Ἰδού ἕνα σχετικόν παράδειγμα.

Ἐξαγωγή τῆς $\sqrt{32558436}$:

32 55 84 36	5706		
−25	107	1140	11406
75.5	× 7	× 0	× 6
−74 9	749	0	68436
68.4			
− 0			
6843.6			
−6843 6			
0			

Ἄρα $\sqrt{32558436} = 5706$

Ἐπαλήθευσις:

$5706^2 + 0 = 32558436$.

6.8 Ἐξαγωγή τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἀκεραίου ἀριθμοῦ μέ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{10^3}$, ... κατ' ἔλλειψιν.

Ὁ κανών πού προκύπτει ἀπό τήν παρατήρησιν τοῦ § 6.3 εἶναι ὁ ἑξῆς: Πολλαπλασιάζομεν τό ὑπόρριζον μέ 10^2 , 10^4, 10^6 ,... καί ὑπολογίζομεν τήν τετραγωνικήν ρίζαν τοῦ γινομένου κατά προσέγγισιν μονάδος ἐκ τῶν κάτω, ὅπως εἰς τό προηγούμενον ἐδάφιον· κατόπιν διαιροῦμεν τό ἐξαγόμενον μέ 10 , 10^2 , 10^3 ,... Π.χ. διά νά εὕρωμεν τήν τετραγωνικήν ρίζαν τοῦ 1000 κατά προσέγγισιν $\frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$, πολλαπλασιάζομεν τό 1000 μέ $10^4 = 10\,000$ καί ὑπολογίζομεν πρῶτα τήν $\sqrt{10\,000\,000}$ κατά προσέγγισιν μονάδος ἐκ τῶν κάτω, κατόπιν διαιροῦμεν τό ἐξαγόμενον μέ 100:

10 00 00 00	3162		
−9	61	626	6322
10.0	×1	× 6	× 2
−6 1	61	3756	12644
390.0			
− 375 6			
1440.0			
− 1264 4			
1756			

Ἐπαλήθευσις:

$3162^2 + 1756 = 10\,000\,000$

'Επομένως ή τετραγων. ρίζα τοῦ 1000 μέ προσέγγισιν ένός $\frac{1}{100}$ κατ'ἔλλειψιν εἶναι:

$$\sqrt{10\ 000\ 000} \simeq 31,62$$

Τήν ἐξαγωγήν αὐτῆς τῆς ρίζης ἀπαιτεῖ τό ἑξῆς πρόβλημα: Νά εὑρεθῆ κατά προσέγγισιν ἑνός cm ἐκ τῶν κάτω ἡ πλευρά ἑνός <u>τετραγωνικοῦ</u> ἀγροῦ πού ἔχει ἐπιφάνειαν ἕνα στρέμμα (1 000 m). Διατί ;

<u>6.9. Τετραγωνική ρίζα δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἤ ἑνός κοινοῦ κλάσματος.</u>

α) Εὕρεσις τῆς $\sqrt{3,125}$ κατά προσέγγισιν $\frac{1}{100}$ ἐκ τῶν κάτω.

Πολλαπλασιάζομεν τό ὑπόρριζον μέ 10^4, ὑπολογίζομεν τήν τετραγωνικήν ρίζαν τοῦ γινομένου μέ προσέγγισιν μονάδος κατ' ἔλλειψιν καί διαιροῦμεν τό ἐξαγόμενον μέ $10^2 = 100$:

3 12 50	176				
−1	29	28	27	347	346
21.2	× 9	× 8	× 7	× 7	× 6
−189	261	224	189	2429	2076
235.0	>212	>212	⩽212	> 2350	⩽ 2350
2076					
274					

'Επαλήθευσις:

$$176^2 + 274 = 31250 .$$

Ἄρα

$$\sqrt{3,125} \simeq 1,76 \text{ κατά προσέγγισιν } \frac{1}{100} \text{ ἐκ τῶν κάτω.}$$

β) Εὕρεσις τῆς $\sqrt{\frac{7}{12}}$ κατά προσέγγισιν $\frac{1}{10}$.

Τρέπομεν τό κλάσμα $\frac{7}{12}$ εἰς δεκαδικόν ἀριθμόν κατά προσέγγισιν $\frac{1}{100}$, ἤτοι μέ δύο δεκαδικά ψηφία, πολλαπλασιάζομεν τόν δεκαδικόν ἀριθμόν μέ 10^2 καί τοῦ γινομένου ὑπολογίζομεν τήν τετραγωνικήν ρίζαν κατά προσέγγισιν μονάδος ἐκ τῶν κάτω· τέλος διαιροῦμεν τό ἐξαγόμενον μέ 10 :

$\frac{7}{12} \simeq 0{,}58$, $0{,}58 \times 100 = 58$

$\sqrt{58} \simeq 7$ κατά προσέγγισιν μονάδος ἐκ τῶν κάτω .

Ἄρα

$$\sqrt{\frac{7}{12}} \simeq 0{,}7 \text{ κατά προσέγγισιν } \frac{1}{10} \text{ ἐκ τῶν κάτω .}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά εὑρεθῆ κατά προσέγγισιν μονάδος τό μῆκος τῆς διαγωνίου ΑΓ ἑνός ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ μέ διαστάσεις ΑΒ = 47 m καί ΑΔ = 39 m .

Ὑπόδειξις. Κατά τό Πυθαγόρειον θεώρημα ἔχομεν $(ΑΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΑΔ)^2 = (47^2 + 39^2)\ m^2$. Ἐπομένως . . .

2) Ἡ διαγώνιος ἑνός ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ εἶναι ΑΓ = 52 m καί ἡ μία πλευρά του ΑΒ = 48 m. Νά εὑρεθῆ τό μῆκος τῆς ἄλλης πλευρᾶς.

3) Νά ὑπολογίσετε κατά προσέγγισιν $\frac{1}{100}$ ἐκ τῶν κάτω τάς ἀκολούθους τετραγωνικάς ρίζας:

$$\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{3}\ ,\ \sqrt{5}\ ,\ \sqrt{10}\ .$$

Νά παραβάλετε τά ἐξαγόμενά σας μέ τάς τιμάς πού ἀναγράφονται εἰς τόν διδόμενον πίνακα τετραγωνικῶν ριζῶν τῶν ἀκεραίων 1 - 100 κατά προσέγγισιν μισοῦ χιλιοστοῦ.

4) Νά εὕρετε κατά προσέγγισιν 1/100 ἐκ τῶν κάτω τό μῆκος τῆς διαγωνίου ἑνός τετραγώνου μέ πλευράν 8,5 m.

5) Νά εὕρετε κατά προσέγγισιν 1/100 ἐκ τῶν κάτω τό μῆκος τῆς πλευρᾶς ἑνός ρόμβου πού ἔχει διαγωνίους μέ μήκη 5,50 m καί 4,80 m ἀντιστοίχως.

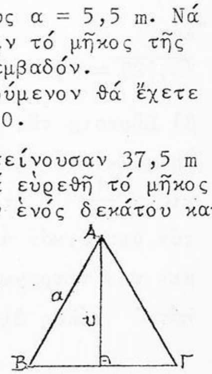
6) Ἕνα τετράγωνον ἔχει πλευράν μήκους α = 5,5 m. Νά εὕρετε μέ προσέγγισιν 1/100 κατ'ἔλλειψιν τό μῆκος τῆς πλευρᾶς ἑνός τετραγώνου μέ τριπλάσιον ἐμβαδόν.

Ὑπόδειξις. Ἐάν καλέσετε x m τό ζητούμενον θά ἔχετε διά τό x τήν ἐξίσωσιν $x^2 = 3 \cdot α^2$ μέ $x > 0$.

7) Ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει ὑποτείνουσαν 37,5 m καί τήν μίαν κάθετον πλευράν του 30 m. Νά εὑρεθῆ τό μῆκος τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς μέ προσέγγισιν ἑνός δεκάτου κατ' ἔλλειψιν.

8) Εἰς τό παραπλεύρως ἰσόπλευρον τρίγωνον, τό ὕψος υ εἶναι

$$υ = \sqrt{α^2 - \frac{α^2}{4}} = \sqrt{\frac{3α^2}{4}} = \frac{α\sqrt{3}}{2}$$

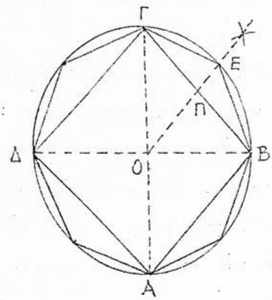


Νά εὕρετε τό διατί. Κατόπιν νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου μέ προσέγγισιν ἑνός 0,01 κατ'ἔλλειψιν βάσει τοῦ τύπου

$$S = \frac{1}{2}\cdot\alpha\upsilon = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} \quad , \text{ ὅταν } \alpha = 7{,}5 \text{ m} \ .$$

§ 7. Κανονικά πολύγωνα

<u>7.1. Κανονικόν τετράγωνον , ὀκτάγωνον , δεκαεξάγωνον κτλ.</u>



Εἰς ἕνα κύκλον (σχ. παραπλεύρως) χαράσσομεν δύο καθέτους διαμέτρους ΑΓ ⊥ ΒΔ· αὐταί διαιροῦν τήν περιφέρειαν εἰς τέσσαρα ἴσα τόξα. Ἄν ἑνώσωμεν τά τέσσαρα διαδοχικά σημεῖα διαιρέσεως μέ τά εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ , ΒΓ , ΓΔ , ΔΑ , θά προκύψῃ ἕνα κυρτόν τετράπλευρον ΑΒΓΔ πού εἶναι ἕνα τετράγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (διατί;). Τό τετράγωνον λέγεται <u>κανονικόν πολύγωνον μέ τέσσαρας πλευράς</u>, διότι ὅλαι αἱ πλευραί του εἶναι ἴσαι καθώς καί ὅλαι αἱ γωνίαι του.

Ἡ ἀκτίς ΟΑ = R τοῦ κύκλου λέγεται καί <u>ἀκτίς</u> τοῦ τετραγώνου. Ἡ ἀπόστασις ΟΠ τοῦ κέντρου ἀπό μίαν πλευράν τοῦ τετραγώνου λέγεται <u>ἀπόστημα</u> ἤ <u>ἀπόθημα</u> τοῦ τετραγώνου. Ἡ πλευρά ΑΒ = β_4 τοῦ τετραγώνου συνδέεται μέ τήν ἀκτῖνα R διά τῆς σχέσεως

$$\beta_4 = R\sqrt{2} \qquad (\beta\lambda.\ \S\ 5.3).$$

Ἄς διχοτομήσωμεν τώρα κατά γνωστόν τρόπον ἕνα ἀπό τά τέσσαρα ἴσα τόξα τῆς ἀνωτέρω περιφερείας, τό $\widehat{\text{ΒΓ}}$, καί ἔστω Ε τό μέσον τοῦ τόξου· θά ἔχωμεν

$$\widehat{\text{ΒΕ}} = \frac{1}{2}\ \widehat{\text{ΒΓ}} = \frac{1}{8} \text{ τῆς περιφερείας.}$$

Ἐπομένως, ἐάν λάβωμεν ἐπάνω εἰς τήν περιφέρειαν, χρησιμοποιοῦντες τήν χορδήν ΒΕ ὡς ἄνοιγμα διαβήτου , ὀκτώ διαδοχικά τόξα ἴσα μέ τό $\overparen{BE}$, τότε θά ἔχωμεν διαιρέσει τήν περιφέρειαν εἰς 8 ἴσα μέρη. Ἑνώνοντες κάθε δύο διαδοχικά σημεῖα διαιρέσεως μέ ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα σχηματίζομεν ἕνα κυρτόν ὀκτάγωνον μέ ἴσας πλευράς καί ἴσας γωνίας (κάθε γωνία ἔχει μέγεθος 135° , διατί ;). Διά τοῦτο τό ὀκτάγωνον αὐτό λέγεται κανονικόν , εἶναι δέ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον.

Ἀπό τό κανονικόν ὀκτάγωνον ἠμποροῦμεν νά σχηματίσωμεν κανονικόν δεκαεξάγωνον (πῶς ;) καί ἀπό τοῦτο κανονικόν πολύγωνον μέ 32 πλευράς κ.ο.κ.

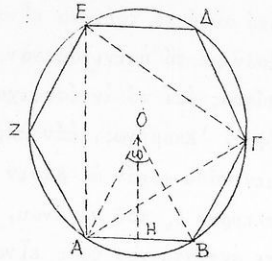
Γενικῶς, ἐάν κατά κάποιον τρόπον διαιρέσωμεν περιφέρειαν εἰς ν ἴσα μέρη , τότε τό κυρτόν πολύγωνον, πού ἔχει κορυφάς τά διαδοχικά σημεῖα διαιρέσεως, λέγεται κανονικόν ν-γωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον , ἐπειδή ἔχει ὅλας τάς πλευράς του ἴσας καθώς καί ὅλας τάς γωνίας του ἴσας,εἶναι δέ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Εὔκολα βλέπει κανείς ὅτι, ἀντιστρόφως, ἕνα κυρτόν πολύγωνον , πού ἔχει ὅλας τάς πλευράς καί ὅλας τάς γωνίας του ἴσας, εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. Κέντρον ἑνός κανονικοῦ πολυγώνου λέγεται τό κέντρον τοῦ κύκλου εἰς τό ὁποῖον τό πολύγωνον ἠμπορεῖ νά ἐγγραφῇ. Ἀκτίς κανονικοῦ πολυγώνου λέγεται ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου τούτου πού εἶναι περιγεγραμμένος εἰς τό πολύγωνον.

Κεντρική γωνία κανονικοῦ πολυγώνου λέγεται ἡ ἐπίκεντρος γωνία τῆς ὁποίας αἱ πλευραί διέρχονται ἀπό τά ἄκρα μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου.

Ἀπόθημα ἤ ἀπόστημα κανονικοῦ πολυγώνου λέγεται ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπό μίαν πλευράν τοῦ πολυγώνου.

Περίμετρος κανονικοῦ πολυγώνου λέγεται τό μῆκος τοῦ "περιγράμματος" τοῦ πολυγώνου, δηλαδή τῆς κλειστῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς ἡ ὁποία τό περικλείει.

7.2. Κανονικόν ἑξάγωνον , δωδεκάγωνον , εἰκοσιτετράγωνον κτλ. Ὅπως εἶναι φανερόν ἀπό τό παρακείμενον σχῆμα, ἡ κεντρική γωνία ω ἑνός κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι ἴση μέ $\frac{1}{6}\cdot 360^0 = 60^0$. Ἄρα τό ἰσοσκελές τρίγωνον ΟΑΒ εἶναι ἰσόπλευρον καί, συνεπῶς , ἡ πλευρά ΑΒ εἶναι ἴση μέ τήν ἀκτῖνα ΟΑ = R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.



Ὥστε ἡ πλευρά β_6 ἑνός κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι ἴση μέ τήν ἀκτῖνα R τοῦ κύκλου εἰς τόν ὁποῖον τό ἑξάγωνον ἐγγράφεται:

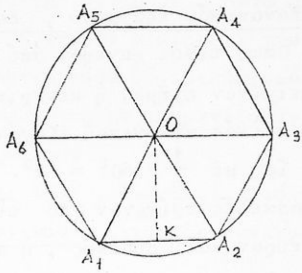
$$\beta_6 = R \, .$$

Τό ἀπόθημα α_6 = ΟΗ τοῦ ἑξαγώνου εἶναι ἴσον μέ τό ὕψος τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΟΑΒ μέ πλευράν ΑΒ = R , ἄρα

$$\alpha_6 = R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \, .$$

Ὅπως ἀπό τό κανονικόν τετράγωνον ἐσχηματίσαμεν κανονικόν ὀκτάγωνον,δεκαεξάγωνον κτλ.,ἔτσι ἀπό τό κανονικόν ἑξάγωνον ἠμποροῦμεν νά σχηματίσωμεν κανονικόν δωδεκάγωνον, εἰκοσιτετράγωνον κτλ. μέ ἀλλεπαλλήλους διχοτομήσεις τόξων. Ἐπίσης ἀπό τό ἐγγεγραμμένον κανονικόν ἑξάγωνον ἠμποροῦμεν νά σχηματίσωμεν ἐγγεγραμμένον εἰς τόν κύκλον ἰσόπλευρον τρίγωνον, ὅπως π.χ. τό τργ ΑΓΕ εἰς τό προηγούμενον σχῆμα, χρησιμοποιοῦντες τήν διαίρεσιν τῆς περιφερείας εἰς τρία ἴσα μέρη πού προκύπτει ἀπό τήν διαίρεσίν της εἰς ἕξι ἴσα μέρη.

7.3. Ἐμβαδόν κανονικοῦ πολυγώνου. Ἐάν εἰς ἕνα κανονικόν ν-γωνον , ὅπως π.χ. εἰς τό παραπλεύρως ἑξάγωνον, χαράξωμεν τάς ἀκτῖνας πού καταλήγουν εἰς τάς ν κορυφάς του, τότε τό πολύγωνον χωρίζεται εἰς ν ἴσα μεταξύ των ἰσοσκελῆ



τρίγωνα.
Τώρα τό ἐμβαδόν τοῦ καθενός ἀπό αὐτά τά τρίγωνα εἶναι ἴσον μέ τό ἡμιγινόμενον τῆς βάσεως ἐπί τό ἀντίστοιχον ὕψος. Ἑπομένως, ἐάν πάρωμεν κάθε φοράν ὡς βάσιν τήν πλευράν β_ν τοῦ ν-γώνου, ὁπότε ἀντίστοιχον ὕψος εἶναι τό ἀπόθημα α_ν, θά ἔχωμεν διά τά ἐμβαδά τῶν τριγώνων

$$(OA_1A_2)=\frac{1}{2}(A_1A_2)\alpha_\nu,(OA_2A_3)=\frac{1}{2}(A_2A_3)\alpha_\nu,\ldots,(OA_\nu A_1)=\frac{1}{2}(A_\nu A_1)\alpha_\nu.$$

Συνεπῶς διά τό ἐμβαδόν S_ν τοῦ κανονικοῦ ν-γωνου προκύπτει ὅτι

$$\begin{aligned} S_\nu &= \frac{1}{2}(A_1A_2)\alpha_\nu+\frac{1}{2}(A_2A_3)\alpha_\nu+\ldots+\frac{1}{2}(A_\nu A_1)\alpha_\nu \\ &= \frac{1}{2}\left[(A_1A_2)+(A_2A_3)+\ldots+(A_\nu A_1)\right]\alpha_\nu \\ &= \frac{1}{2}\nu\cdot\beta_\nu\cdot\alpha_\nu = \frac{1}{2}p_\nu\alpha_\nu , \end{aligned}$$

ὅπου μέ τό γράμμα p_ν παρεστήσαμεν τήν περίμετρόν τοῦ κανονικοῦ ν-γώνου.

Ὥστε τό ἐμβαδόν κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι ἴσον μέ τό ἡμιγινόμενον τῆς περιμέτρου του ἐπί τό ἀπόθημα.

<u>7.4.</u> <u>I) Ἐμβαδόν τετραγώνου ἀκτῖνος R.</u> Ὅπως εἴδαμεν εἰς τό § 7.1. , ἡ πλευρά β_4 τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴση μέ $R\sqrt{2}$, ἄρα διά τό ἐμβαδόν θά ἔχωμεν :

$$S_4 = (R\sqrt{2})^2 = 2R^2.$$

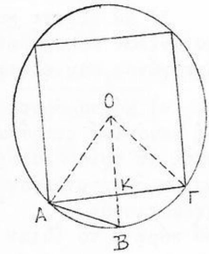
Ἐννοεῖται ὅτι θά εὑρίσκαμεν τό ἴδιον ἐμβαδόν , ἐάν ἐφηρμόζαμεν τόν προηγούμενον τύπον διά $\nu = 4$· πράγματι, τό ἀπόθημα α_4 εἶναι $= \frac{1}{2}\beta_4 = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$, ὅπως εὔκολα φαίνεται ἀπό τό ἑπόμενον σχῆμα , καί συνεπῶς

$$S_4 = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot R\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot R\sqrt{2} = R^2(\sqrt{2})^2 = 2R^2 .$$

II) Ἐμβαδόν κανονικοῦ ἑξαγώνου ἀκτῖνος R. Ὅπως εἴδαμεν εἰς τό § 7.2 , ἡ πλευρά τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου ἀκτῖνος R ἰσοῦται μέ τήν ἀκτῖνα καί τό ἀπόθημα α εἶναι ἴσον μέ $R\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ἄρα διά τό ἐμβαδόν θά ἔχωμεν :

$$S_6 = \frac{1}{2}\cdot 6R\cdot R\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2} .$$

III) Ἐμβαδόν κανονικοῦ ὀκταγώνου ἀκτῖνος R. Ἡ ἐφαρμογή τοῦ γενικοῦ τύπου προϋποθέτει ὅτι γνωρίζομεν τήν σχέσιν πού συνδέει τήν ἀκτῖνα R μέ τήν πλευράν β_8 καθώς καί μέ τό ἀπόθημα α_8 τοῦ ὀκταγώνου. Ἐπειδή ὅμως αἱ δύο αὐταί σχέσεις δέν ἐδόθησαν εἰς τό § 7.1 , θά εὕρωμεν τό ἐμβαδόν μέ τόν ἀκόλουθον ἄλλον τρόπον (σχ. παραπλεύρως):



Ὑπολογίζομεν τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου ΟΑΒ , πού εἶναι τό $\frac{1}{8}$ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀκταγώνου, λαμβάνοντες ὡς βάσιν τήν ἀκτῖνα ΟΒ = R , ὁπότε ἀντίστοιχον ὕψος εἶναι τό

$$AK = \frac{1}{2}A\Gamma = \frac{1}{2}\cdot \text{πλευρά ἐγγεγρ. τετραγώνου}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot R\sqrt{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2} .$$

Ἔχομεν λοιπόν :

$$(OAB) = \frac{1}{2}R\cdot\frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{R^2\sqrt{2}}{4}$$

καί ἑπομένως

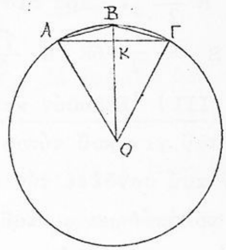
$$S_8 = 8\cdot\frac{R^2\sqrt{2}}{4} = 2R^2\sqrt{2} .$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά εὕρετε τό ἐμβαδόν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἀκτῖνος R (τοῦ ἐγγεγραμμένου δηλαδή εἰς κύκλον ἀκτῖνος R).

Ὑπόδειξις. Νά παρατηρήσετε βάσει ἀντιστοίχου σχήματος ὅτι ἡ μέν πλευρά β_3 τοῦ τριγώνου εἶναι ἴση μέ τό διπλάσιον τοῦ ἀποθήματος α_6 τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τόν ἴδιον κύκλον κανονικοῦ ἑξαγώνου, τό δέ ἀπόθημά του α_3 ἴσον μέ $\frac{1}{2}\cdot R$.

2) Νά εὕρετε τό ἐμβαδόν τοῦ κανονικοῦ 12-γώνου ἀκτῖνος R.



Ὑπόδειξις. Θά ὑπολογίσετε πρῶτα τό ἐμβαδόν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΟΑΒ πού ἔχει βάσιν τήν πλευράν ΑΒ τοῦ δωδεκαγώνου. Διά τόν ὑπολογισμόν αὐτόν νά πάρετε ὡς βάσιν τήν ἀκτῖνα ΟΒ = R, ὁπότε τό ἀντίστοιχον ὕψος ΑΚ εἶναι ἴσον μέ $\frac{1}{2}$R (διατί ;)

3) Νά εὕρετε κατά προσέγγισιν ἑνός cm^2 τά ἐμβαδά τῶν κανονικῶν πολυγώνων: τριγώνου , τετραγώνου , ἑξαγώνου καί ὀκταγώνου πού εἶναι ἐγγεγραμμένα εἰς κύκλον ἀκτῖνος 3 cm.

4) Νά καλύψετε ἕνα μέρος μιᾶς σελίδος τοῦ τετραδίου σας μέ κανονικά τετράγωνα πλευρᾶς 1 cm. Κατόπιν νά τά χρωματίσετε μέ τρία διαφορετικά χρώματα , οὕτως ὥστε δύο τετράγωνα πού ἔχουν μίαν πλευράν κοινήν νά μή ἔχουν τόν ἴδιον χρωματισμόν.

Νά κάμετε τό ἴδιον μέ κανονικά ἑξάγωνα πλευρᾶς 1 cm.

5) Νά ὑπολογίσετε εἰς μοίρας τήν γωνίαν τοῦ κανονικοῦ ν-γώνου διά ν = 3, 4 , 5 , 6 , 7 , 8.

Ὑπόδειξις. Ὅπως εἶναι γνωστόν , τό ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν ἑνός κυρτοῦ ν-γώνου εἶναι ἴσον μέ (2ν-4) ὀρθάς.

6) Διά νά καλύψωμεν μίαν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν μέ πλάκας τοῦ αὐτοῦ κανονικοῦ πολυγωνικοῦ σχήματος, χωρίς νά μένουν κενά μεταξύ τῶν πλακῶν, κατάλληλον κανονικόν πολυγωνικόν σχῆμα εἶναι μόνον τό τριγωνικόν , τό τετραγωνικόν καί τό ἑξαγωνικόν.

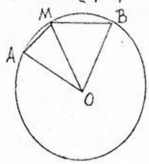
Προσπαθήσατε νά εὕρετε τό διατί , χρησιμοποιοῦντες τά ἀποτελέσματα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.

7) Ἡ γωνία καί ἡ κεντρική γωνία ἑνός κανονικοῦ πολυγώνου ἔχουν ἄθροισμα 180^0. Διατί ;

8) Νά εὕρετε ποῖα κέντρα συμμετρίας καί ποίους ἄξονας συμμετρίας ἔχουν τά κανονικά πολύγωνα μέ 3, 4, 6 καί 8 πλευράς.

§ 8. Μῆκος περιφερείας καί ἐμβαδόν κύκλου.

8.1. Μῆκος περιφερείας καί ὁ ἀριθμός π. Μία περιφέρεια κύκλου εἶναι καμπύλη γραμμή, δηλαδή κανένα μέρος της $\widehat{AB}$, ὁσονδήποτε μικρόν καί ἄν εἶναι, δέν ἠμπορεῖ νά θεωρηθῆ εὐθύγραμμον τμῆμα μέ μαθηματικήν ἀκρίβειαν.



Πράγματι, ἐάν λάβωμεν ἐπάνω εἰς τό τόξον $\widehat{AB}$ (σχ. παραπλεύρως) ἕνα οἱονδήποτε τρίτον σημεῖον M, θά ἔχωμεν:

$\sphericalangle(MA, MO) < 90^0$ καί $\sphericalangle(MO, MB) < 90^0$ (διατί ;).

Ἄρα

$$\sphericalangle(MA, MB) = \sphericalangle(MA, MO) + \sphericalangle(MO, MB) < 180^0 .$$

Ἑπομένως τά τρία σημεῖα A, M, B δέν κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Δέν εἶναι λοιπόν δυνατόν νά ὁρίσωμεν τό μαθηματικόν μῆκος μιᾶς περιφερείας μέ τόν τρόπον πού ὁρίζομεν τό μῆκος μιᾶς τεθλασμένης γραμμῆς, δηλαδή ὡς τό ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων πού ἀποτελοῦν τήν τεθλασμένην γραμμήν.

Χρειαζόμεθα μίαν νέαν μέθοδον ἐργασίας πού δέν εἶναι δυνατόν νά ἐκθέσωμεν συντόμως καί πού θά μάθωμεν εἰς ἀνωτέραν τάξιν. Ἐν τῷ μεταξύ ἠμποροῦμεν ὅμως νά ἀποκτήσωμεν ἐμπειρικῶς μίαν ἰδέαν αὐτοῦ τοῦ μαθηματικοῦ μήκους μιᾶς περιφερείας ὡς ἑξῆς: Παίρνομεν μερικά κυκλικά σώματα, ὅπως π.χ. τροχούς, δίσκους, στεφάνια, καί μετροῦμεν μέ μίαν μετροταινίαν τάς περιφερείας των. Ἐάν τό μῆκος πού λαμβάνομεν κάθε φοράν, τό διαιρέσωμεν μέ τό μῆκος τῆς ἀντιστοίχου διαμέτρου, θά εὕρωμεν πάντοτε τό ἴδιον περίπου πηλίκον, τό 3,14.

Δεχόμεθα λοιπόν τώρα ὅτι τό μῆκος γ μιᾶς περιφερείας, ὅπως

θά τό ὁρίσωμεν, ἔχει λόγον πρός . τό μῆκος 2R τῆς διαμέτρου τῆς περιφερείας ἕναν ὡρισμένον (θετικόν) ἀριθμόν.
Ὁ ἀριθμός αὐτός παριστάνεται σήμερα διεθνῶς μέ τό μικρόν ἑλληνικόν γράμμα π καί εἶναι

$\pi \simeq 3{,}14$ μέ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ κατ'ἔλλειψιν

καί

$\pi \simeq 3{,}1416$ μέ προσέγγισιν δεκάκις χιλιοστοῦ καθ'ὑπεροχήν.

Ἔχομεν λοιπόν

$$\frac{\gamma}{2R} = \pi \Longleftrightarrow \gamma = 2\pi R .$$

Ὥστε τό μῆκος μιᾶς περιφερείας εἶναι ἴσον μέ τό γινόμενον τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου της ἐπί τόν ἀριθμόν π.
Ὁ ἀριθμός π, ὅπως ἀπεδείχθη εἰς νεωτέρους χρόνους (1761), εἶναι ἀσύμμετρος. Ὁ μεγάλος Ἕλλην μαθηματικός τῆς ἀρχαιότητος Ἀρχιμήδης εἶχεν ἀποδείξει ὅτι εἶναι

$$\pi \simeq \frac{22}{7} = 3\,\frac{1}{7} .$$

Παρατήρησις. Ἀπό τά ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι τό μῆκος περιφερείας εἶναι μέγεθος κατ'εὐθεῖαν ἀνάλογον πρός τό μῆκος τῆς διαμέτρου (ἄρα καί τῆς ἀκτῖνος) τῆς περιφερείας.

8.2. Ἐμβαδόν κύκλου . Ὅπως διά τό μῆκος μιᾶς περιφερείας ἔτσι καί διά τό ἐμβαδόν ἑνός κύκλου θά δώσωμεν εἰς ἀνωτέραν τάξιν ἀκριβῆ μαθηματικόν ὁρισμόν. Θά φανῆ τότε ὅτι τό ἐμβαδόν ἑνός κύκλου μέ ἀκτῖνα R μονάδας μήκους εἶναι ἴσον μέ $\pi \cdot R^2$ ἀντιστοίχους τετραγωνικάς μονάδας.
Τό ἀποτέλεσμα αὐτό ἠμποροῦμεν νά τό δικαιολογήσωμεν ἀπό τώρα ὡς ἑξῆς:
Εἰς ἕνα κύκλον (O,R) ἐγγράφομεν ἕνα κανονικόν ἑξάγωνον. Ἀπό τό ἑξάγωνον ἐμάθαμεν νά κατασκευάζωμεν ἕνα κανονικόν 12-γωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τόν ἴδιον κύκλον, ἀπό τό 12-γωνον, ἕνα 24-γωνον , ἀπό τό 24-γωνον ἕνα 48-γωνον κ.ο.κ. Αὐτήν

τήν κατασκευήν ἠμποροῦμεν θεωρητικῶς νά τήν συνεχίσωμεν ἀπεριόριστα, ἐπειδή κάθε τόξον κύκλου, ὁσονδήποτε μικρόν καί ἄν εἶναι, ἐπιδέχεται νοερῶς διχοτόμησιν. Πρακτικῶς ὅμως εἰς τό σχέδιον ἡ πρᾶξις αὐτή τῆς διχοτομήσεως παύει νά εἶναι δυνατή ἀπό τινος καί ἔπειτα, π.χ. ὅταν εἰς ἕνα κύκλον ἀκτῖνος ≥ 1 cm , ὕστερα ἀπό ἐπανειλημμένας διχοτομήσεις τοῦ ἀρχικοῦ τόξου τῶν 60° , ἡ χορδή τοῦ προκύπτοντος τόξου γίνη < 2 mm. (Πράγματι , τό τόξον δέν διακρίνεται τότε αἰσθητῶς ἀπό τήν χορδήν του).

Ἀπό τά ἀνωτέρω συμπεραίνομεν τά ἑξῆς : Τό ἐμβαδόν ἑνός κύκλου (O, R) , ὅπως θά τό ὁρίσωμεν , θά πρέπει νά εἶναι κατά προσέγγισιν ἴσον μέ τό ἐμβαδόν ἑνός κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου , ἀρκεῖ ὁ ἀριθμός τῶν πλευρῶν τούτου νά εἶναι ἀρκετά μεγάλος. Εἶναι λοιπόν εὔλογον νά δεχθῶμεν τώρα ὅτι τό ἐμβαδόν τοῦ κύκλου θά πρέπει νά προκύπτη ἀπό τό μῆκος $2\pi R$ τῆς περιφερείας καί τήν ἀκτῖνα της R μέ τόν ἴδιον ἀκριβῶς τρόπον ὅπως τό ἐμβαδόν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου προκύπτει ἀπό τήν περίμετρόν του p καί τό ἀπόθημα του α (βλ. 7.3).

Ὥστε εἶναι εὔλογον νά δεχθῶμεν τώρα ὅτι τό ἐμβαδόν τοῦ κύκλου (O,R) εἶναι ἴσον μέ

$$S = \frac{1}{2}\cdot 2\pi R\cdot R = \pi R^2 .$$

8.3. Ἐφαρμογαί. α) Νά εὑρεθῆ τό ἐμβαδόν κύκλου ἀκτῖνος 5cm.

Ἔχομεν:

$$S = \pi\cdot 5^2\, cm^2 = 25\pi\, cm^2 \simeq 25\cdot 3{,}1416\, cm^2 = 78{,}54\, cm^2 .$$

β) Τό ἐμβαδόν ἑνός κύκλου εἶναι $0{,}38465\ m^2$. Νά εὑρεθῆ ἡ ἀκτίς του κατά προσέγγισιν ἑκατοστοῦ.

Παρατηροῦμεν ὅτι

$$0{,}38465\ m^2 = 3846{,}50\ cm^2 .$$

Ἑπομένως

$$\pi R^2 cm^2 = 3846{,}50\ cm^2 \iff R \simeq \sqrt{\frac{3846{,}50}{3{,}1416}} \simeq \sqrt{1224{,}3} \simeq 35$$

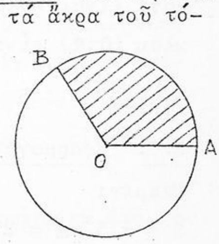
Ἄρα

$$R = 35\ cm = 0{,}35\ m.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ἐπάνω εἰς χιλιοστομετρικόν χάρτην νά χαράξετε μέ κέντρον ἕνα ἑκατοστομετρικόν κόμβον, περιφέρειαν ἀκτῖνος 3 cm, ἔπειτα νά εὕρετε τό ἐμβαδόν τοῦ ἀντιστοίχου κύκλου μέ ὑπολογισμούς βάσει τοῦ δοθέντος τύπου κατά προσέγγισιν 1ον ἑνός cm^2 καί 2ον ἑνός mm^2.
Τό ἴδιον ἐμβαδόν νά τό εὕρετε καί μέ τήν ἀκόλουθον γραφικήν μέθοδον: Νά μετρήσετε πόσαι εἶναι αἱ τετραγωνικαί διαιρέσεις τοῦ χάρτου πού ἔχουν πλευράς 0,5 cm καί κεῖνται ἐξ ὁλοκλήρου εἰς τό ἐσωτερικόν τοῦ κύκλου.
Ἀκολούθως νά μετρήσετε πόσαι εἶναι αἱ τετραγωνικαί διαιρέσεις τοῦ χάρτου, μέ τήν ἰδίαν πλευράν 0,5 cm, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἕνα ἤ περισσότερα κοινά σημεῖα μέ τήν περιφέρειαν τοῦ κύκλου καί νά πάρετε τό ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν διαιρέσεων τούτων. Τέλος νά προσθέσετε τά ἐμβαδά εἰς mm^2 τῶν τετραγωνικῶν διαιρέσεων πού καταμετρήθησαν τοιουτοτρόπως.
Τό ἄθροισμα δίδει τό ἐμβαδόν τοῦ κύκλου εἰς mm^2 κατά προσέγγισιν· νά τό παραβάλετε μέ τά ἐξαγόμενα πού ἔδωσαν οἱ δύο προηγούμενοι ὑπολογισμοί.

2) Κυκλικός τομεύς λέγεται ἕνα μέρος κύκλου τό ὁποῖον περιορίζεται ἀπό ἕνα τόξον τοῦ κύκλου (τήν βάσιν τοῦ τομέως) καί ἀπό τάς δύο ἀκτῖνας πού καταλήγουν εἰς τά ἄκρα τοῦ τόξου. Προφανῶς τό μέγεθος τοῦ κυκλικοῦ τομέως, εἰς ἕνα καί τόν ἴδιον κύκλον, καθορίζεται ἀπό τήν βάσιν του (ἄρα καί ἀπό τήν ἀντίστοιχον εἰς αὐτήν ἐπίκεντρον γωνίαν).

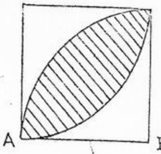


Νά ὑπολογίσετε τώρα 1ον τό ἐμβαδόν ἑνός κυκλικοῦ τομέως μέ βάσιν 120^0 εἰς κύκλον ἀκτῖνος 4 cm, 2ον τό μῆκος τῆς βάσεώς του.
Τέλος νά ἐπαληθεύσετε ὅτι

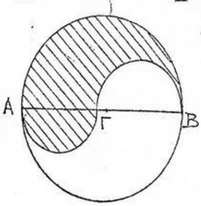
$$\frac{\text{ἐμβαδόν τομέως}}{\text{μῆκος βάσεώς του}} \simeq \frac{1}{2}\cdot 4 \quad (\text{δηλ. ἥμισυ ἀκτῖνος}).$$

3) Μία κυκλική ἐξέδρα ἔχει ἀκτῖνα 5 m. Θέλομεν νά τήν ἐπιστρώσωμεν μέ κανονικάς ἑξαγωνικάς πλάκας πού ἔ-

χουν πλευράν 8 cm. Πόσαι τουλάχιστον πλάκες θά χρειασθοῦν;



4) Είς τό τετράγωνον παραπλεύρως εἶναι AB = 3 cm. Νά ὑπολογίσετε τό εμβαδόν τῆς γραμμοσκιασμένης ἐπιφανείας κατά προσέγγισιν ἑνός mm².



5) Είς τόν κύκλον παραπλεύρως εἶναι ΑΓ = 15 mm καί AB = 38 mm. Νά ὑπολογίσετε κατά προσέγγισιν ἑνός mm² τήν γραμμοσκιασμένην ἐπιφάνειαν.

Πίνακας τῶν τετραγώνων
καὶ τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν τῶν ἀριθμῶν 1 ὡς 100.

ΑΡΙΘΜΟΙ	ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ	ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ	ΑΡΙΘΜΟΙ	ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ	ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ
1	1	1,000	51	2 601	7,141
2	4	1,414	52	2 704	7,211
3	9	1,732	53	2 809	7,280
4	16	2,000	54	2 916	7,349
5	25	2,236	55	3 025	7,416
6	36	2,450	56	3 136	7,483
7	49	2,646	57	3 249	7,550
8	64	2,828	58	3 364	7,616
9	81	3.000	59	3 481	7,681
10	100	3,162	60	3 600	7,746
11	121	3,317	61	3 721	7,810
12	144	3,464	62	3 844	7,874
13	169	3,606	63	3 969	7,937
14	196	3,742	64	4 096	8,000
15	225	3,873	65	4 225	8,062
16	256	4,000	66	4 356	8,124
17	289	4,123	67	4 489	8,185
18	324	4,243	68	4 624	8,246
19	361	4,359	69	4 761	8,307
20	400	4,472	70	4 900	8,367
21	441	4,583	71	5 041	8,426
22	484	4,690	72	5 184	8,485
23	529	4,796	73	5 329	8,544
24	576	4,899	74	5 476	8,602
25	625	5,000	75	5 625	8,660
26	676	5,099	76	5 776	8,718
27	729	5,196	77	5 929	8,775
28	784	5,292	78	6 084	8,832
29	841	5,385	79	6 241	8,888
30	900	5,477	80	6 400	8,944
31	961	5,568	81	6 561	9,000
32	1 024	5,657	82	6 724	9,055
33	1 089	5,745	83	6 889	9,110
34	1 156	5,831	84	7 056	9,165
35	1 225	5,916	85	7 225	9,220
36	1 296	6,000	86	7 396	9,274
37	1 369	6,083	87	7 569	9,327
38	1 444	6.164	88	7 744	9,381
39	1 521	6,245	89	7 921	9,434
40	1 600	6,325	90	8 100	9,487
41	1 681	6,403	91	8 281	9,539
42	1 764	6.481	92	8 464	9,592
43	1 849	6,557	93	8 649	9.644
44	1 936	6,633	94	8 836	9,695
45	2 025	6,708	95	9 025	9,747
46	2 116	6,782	96	9 216	9,798
47	2 209	6,856	97	9 409	9,849
48	2 304	6,928	98	9 604	9.900
49	2 401	7,000	99	9 801	9,950
50	2 500	7,071	100	10 000	10,000

Κύρια Παροράματα

(Παράκλησις νά διορθωθοῦν πρίν χρησιμοποιηθῆ τό βιβλίον)

σελ.44 στ. 3 ἀπό ἐπάνω, μετά τό ἰσοῦται γράφε: μέ
" 90 " 18 " κάτω, ἀντί $y = \frac{5}{9}x + 32$ γράφε: $y = \frac{9}{5}x + 32$
" 111 " 6 " " , " κέντρον " : ἐπιφάνειαν
" 111 " 7 " " , " κέντρον " : ἐπιφάνειαν
" 127 " εἰς τό σχῆμα κάτω , τό μῆκος τοῦ διανύσματος $\vec{\beta}$ νά ἐξισωσθῆ μέ τό μῆκος τοῦ τμήματος ΑΔ
" 140 " 5 ἀπό κάτω , ἀντί $\vec{B}$ γράφε: $\vec{\beta}$
" 163 " 13 " " , " S καί S_1 γράφε: S καί S_1
" 163 " 11 " " , " S γράφε : S_1
" 169 " 2 " ἐπάνω, " $\frac{AB}{AB}$ " : $\frac{AB_1}{AB}$
" 171 " 3 " κάτω, μετά τό 1609 m πρόσθεσε:
καί τό ναυτικόν μίλιον μέ 1852 m
" 171 " 6 " κάτω , μετά τό μίλια πρόσθεσε:
ἀγγλοσαξωνικά ≃ 64,3 μίλια ναυτικά
" 188 " 12 " κάτω, ἀντί $\measuredangle M$ γράφε : $\measuredangle M_2$
" 188 " 13 " " , " $\measuredangle M$ γράφε : $\measuredangle M_1$
" 223 " 11 " ἐπάνω, " παρακάτω γράφε: παραπάνω .
" 223 " 12 " κάτω , " 10 " : 1
" 232 " 10 " κάτω, " τόξων " : τού-
" 238 " 5 " πάνω , " δεκάτου " : ἑκατοστοῦ