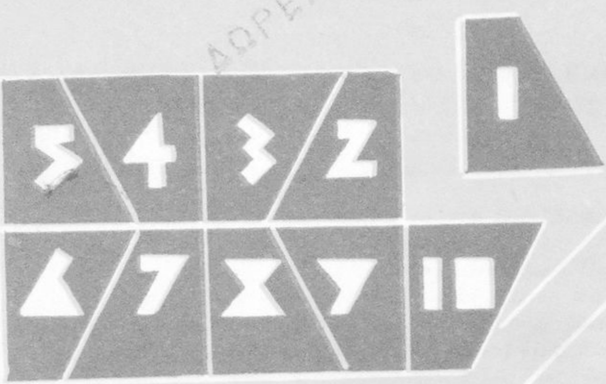
ΓΕΩΡΓ. Δ. ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ

Πρακτική Ἀριθμητική

ΔΩΡΕΑΝ



Ε΄ & ΣΤ΄ Δημοτικοῦ

Ἐκδόσεις
ΓΕΩΡΓ. ΔΗΜ. ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ Ο. Ε.
ΑΘΗΝΑΙ 1966

ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΔΗΜ. ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

Ε΄ ΚΑΙ ΣΤ΄ ΤΑΞΕΩΝ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΑΠΟ ΤΟ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΜΕ ΤΗΝ ΥΠ' ΑΡΙΘ. 61452/12-6-1952 ΑΠΟΦΑΣΗ

Ἀπόσπασμα ἐκ τῆς ἐκθέσεως τοῦ Σοῦ Ἐκπαιδ. Συμβουλίου

«. . . Περιέχει τὴν ὑπὸ τοῦ Ἐπισήμου Ἀναλυτικοῦ Προγράμματος προβλεπομένην ὕλην. Εἰς τὸ πρῶτον ἥμισυ τοῦ βιβλίου γίνεται κατὰ ἀριστουργηματικὸν πράγματι τρόπον ἡ μεθοδικὴ διαπραγμάτευσις τῆς ἀναφερομένης εἰς τὰ κλάσματα (πλὴν τῶν πράξεων) ὕλης. Εἶναι τόσον ἐπιτυχὴς ἀπὸ μεθοδολογικῆς ἀπόψεως ἡ διαπραγμάτευσις τῆς ὕλης, ὥστε τὸ βιβλίον δύναται ἄριστα νὰ χρησιμοποιηθῇ ὑπὸ τῶν δημ/λων διὰ τὴν ὑπόδειξιν τῆς πορείας, τὴν ὁποίαν δέον ν' ἀκολουθῇ ἡ διδ/λία τῶν κλασμάτων. Μετὰ ἑκάστην μικρὰν ἢ μεγάλην ἑνότητα ἀκολουθοῦσιν ἀσκήσεις, αἵτινες συμβάλλουσιν εἰς τὴν ἐμπέδωσιν τῶν διδαχθέντων.

Εἰς τὸ δεύτερον μέρος τοῦ βιβλίου γίνεται ἡ ἐπεξεργασία τοῦ ὑπολοίπου τμήματος τῆς ὕλης, ἥτις ἀκολουθεῖ τὴν αὐτὴν ἐπιτυχῆ πορείαν. Τὰ ἀρκετὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα ἕπονται ἑκάστης ἑνότητος, ἔχουσι διατυπωθῇ μὲ ὅλους τοὺς κανόνας τῆς εἰδικῆς διδακτικῆς, αἱ δὲ τιμαὶ εἶναι ἀπολύτως συγχρονισμέναι. Κατὰ ταῦτα ἀπὸ μεθοδολογικῆς πλευρᾶς τὸ ἐν λόγῳ βιβλίον ἐγγίζει τὰ ὅρια τῆς ἀρτιότητος . . .».

Ἐκδόσεις : ΓΕΩΡΓ. ΔΗΜ. ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ Ο.Ε.

ΑΘΗΝΑΙ 1966

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝ. ΠΑΙΔΕΙΑΣ
Δ)σις Διδακτ. Βιβλίων
Ἀριθ. Πρωτ. 61330

Ἀθῆναι τῇ 20 - 6 - 1952

Πρὸς
τὸν κ. Γεώργ. Παπαϊωάννου
Ὁδὸς Σταδίου 44α

Ἐνταῦθα

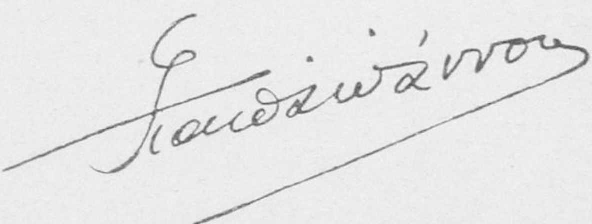
Ἀνακοινοῦμεν ὑμῖν, ὅτι διὰ τῆς ὑπ' ἀριθ. 61452]12-6-52 ἀποφάσεως τοῦ Ὑπουργείου, μετὰ σύμφωνον γνωμοδότησιν τοῦ Κεντρικοῦ Γνωμοδοτικοῦ καὶ Διοικητικοῦ Συμβουλίου τῆς Ἐκπαιδεύσεως, ἐνεκρίθη τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον ***«Ἀριθμητικὴ»*** βιβλίον σας ὡς βοηθητικὸν τοῦ μαθήματος τῆς ***Ἀριθμητικῆς*** διὰ τοὺς μαθητὰς τῶν Ε' καὶ ΣΤ' τάξεων τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου ἐπὶ μίαν τριετίαν ἀρχομένην ἀπὸ 1-3-52.

Παρακαλοῦμεν ὅθεν, ὅπως μεριμνήσητε διὰ τὴν ἔγκαιρον ἐκτύπωσιν τοῦ βιβλίου τούτου, συμμορφούμενοι πρὸς τὰς ὑποδείξεις τοῦ Ἐκπαιδευτικοῦ Συμβουλίου καὶ τὸν κανονισμὸν ἐκδόσεως βοηθητικῶν βιβλίων τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου.

Κοινοποίησις
Κ.Γ.Δ.Σ.Ε.

Ἐντολῇ Ὑπουργοῦ
Ὁ Διευθυντὴς
Χ. Μούστρης

Κάθε γνήσιο ἀντίτυπο φέρει τὴν ἰδιόχειρη ὑπογραφὴ τοῦ συγγραφέα.



ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α΄.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ

1. Ἐπανάληψη ἀκεραίων καὶ δεκαδικῶν

Ἀσκήσεις ἀκεραίων.

1. Νὰ γράψτε μὲ ψηφία τοὺς παρακάτω ἀριθμούς:
Ὀκτακόσια ἑξήντα ἑπτά. — Πέντε χιλιάδες τριακόσια εἴκοσι δύο. — Ἑξακόσια τέσσερα. — Τρεῖς χιλιάδες εἴκοσι ὀκτώ. — Τετρακόσιες εἴκοσι χιλιάδες ἑπτακόσια τριάντα. — Ὀκτακόσιες ἕξι χιλιάδες ἑπτακόσια πέντε. — Σαράντα πέντε χιλιάδες τέσσερα. — Πέντε ἑκατομμύρια ἑξακόσιες ἑβδομήντα ὀκτὼ χιλιάδες πεντακόσια εἴκοσι τρία. — Ἕξι ἑκατομμύρια τετρακόσιες δύο χιλιάδες πεντακόσια ὀγδόντα.

2. Νὰ διαβάστε τοὺς παρακάτω ἀριθμούς: 585, 640, 2675, 3520, 4302, 5028, 7000, 8001, 105302, 120025, 203004, 104250, 2523442, 3040200, 4002001, 600250, 7000002.

3. Νὰ σχηματίστε μὲ τὰ ψηφία 5, 3, 9, 1 τὸ μεγαλύτερο καὶ τὸ μικρότερο τετραψήφιο ἀριθμό.

4. Πόσες δεκάδες λείπουν ὁπὸ τὶς 8 ἑκατοντάδες γιὰ νὰ γίνουν 1000;

Προβλήματα ἀκεραίων.

1. Τὰ παιδιὰ ἑνὸς σχολείου ἔκαμαν ἔρανο γιὰ τὴ «Φανέλλα τοῦ στρατιώτη» καὶ μάζεψαν τὰ παρακάτω ποσά. Ἀπὸ τὴν Α΄ τάξη 85 δραχμές, ἀπὸ τὴ Β΄ 78 δραχμές, ἀπὸ τὴν Γ΄ 80 δραχμές, ἀπὸ τὴν Δ΄ 93 δραχμές, ἀπὸ τὴν Ε΄ 162 δραχμὲς καὶ ἀπὸ τὴν ΣΤ΄ 202 δραχμές. Πόσες δραχμὲς μάζεψαν ἀπὸ ὅλες τὶς τάξεις;

2. Σ' ἕνα σχολεῖο φοιτοῦν 415 ἀγόρια καὶ κορίτσια. Τὰ ἀγόρια εἶναι 229. Πόσα εἶναι τὰ κορίτσια;

3. Ἕνα βαρέλι γεμάτο λάδι ζυγίζει 102 κιλά. Ἄδειο ζυγίζει 15 [illegible] Πόσα κιλὰ λάδι περιέχει τὸ βαρέλι αὐτό; [illegible] μειωτέος εἶναι 3945. Ποιὸς

4. Ἡ διαφορὰ [illegible]

[illegible] ἄθροισμα δυὸ ἀριθμῶν εἶναι 6739. Ὁ ἕνας ἀπ' αὐτοὺς τοὺς ἀριθμοὺς εἶναι ὁ 2654. Ποιὸς εἶναι ὁ ἄλλος;

6. Ἀντικαταστῆστε τὰ ἐρωτηματικὰ μὲ τὰ ψηφία, ποὺ πρέπει, στὶς παρακάτω ἀφαιρέσεις:

3542	6734	; ; ; ;
2816	; ; ; ;	6237
; ; ; ;	3125	2145

7. Ἡ Καίτη γεννήθηκε τὸ 1956, ὁ Δημήτρης τὸ 1959. Πόσων ἐτῶν θὰ εἶναι καθένα ἀπὸ τὰ παιδιὰ αὐτὰ στὰ 1968;

8. Νὰ βρῆτε ὁ καθένας ἀπὸ σᾶς πόσων ἐτῶν εἶσθε φέτος. Τί θὰ κάνετε; Τί πρέπει νὰ ξέρετε γιὰ νὰ βρῆτε τὴν ἡλικία ἑνὸς ἀνθρώπου;

9. Ἡ Ἑλληνικὴ Ἐπανάσταση ἔγινε τὸ 1821. Πόσα χρόνια πέρασαν ἀπὸ τότε ὡς σήμερα;

10. Σὲ μιὰ ἀποθήκη ἔχουν 2565 κιλὰ σιτάρι. Σὲ μιὰ ἄλλη 895 κιλὰ λιγότερο ἀπὸ τὴν πρώτη. Πόσα κιλὰ σιτάρι ἔχουν στὴ δεύτερη ἀποθήκη; Πόσα καὶ στὶς δυὸ μαζί;

11. Σὲ μιὰ πόλη λειτουργοῦν 3 σχολεῖα. Στὸ πρῶτο φοιτοῦν 325 μαθητές, στὸ δεύτερο 38 μαθητὲς λιγότεροι ἀπὸ τὸ πρῶτο καὶ στὸ τρίτο 56 μαθητὲς περισσότεροι ἀπὸ τὸ δεύτερο. Πόσοι μαθητὲς φοιτοῦν σὲ κάθε σχολεῖο; Καὶ πόσοι καὶ στὰ τρία μαζὶ τὰ σχολεῖα;

12. Ἕνα ἐργοστάσιο ὑποκαμίσων κατασκευάζει τὴν ἡμέρα 100 ὑποκάμισα. Πόσα ὑποκάμισα κατασκευάζει σὲ μιὰ ἑβδομάδα; Σ' ἕνα μήνα;

13. Ἕνας ὑαλοπώλης, ἀνοίγοντας ἕνα κιβώτιο μὲ ποτήρια, βρίσκει ὅτι ἔχουν σπάσει 16 ποτήρια. Πουλάει κατόπιν 3 δωδεκάδες ποτήρια, ἔπειτα 56 μονὰ ποτήρια καὶ τέλος 4 δωδεκάδες. Πόσα ποτήρια συνολικὰ ὑπῆρχαν μέσα στὸ κιβώτιο;

14. Ἕνα ἀτμόπλοιο φεύγει ἀπὸ τὸν Πειραιὰ γιὰ τὴ Θεσσαλονίκη μὲ 35 ἐπιβάτες στὴν α΄ θέση, 58 στὴ β΄ καὶ 325 στὴν γ΄. Τὸ εἰσιτήριο τῆς α΄ θέσεως εἶναι 242 δραχμές, τῆς β΄ 162 καὶ τῆς γ΄ 107 δραχμές. Πόσες δραχμὲς πλήρωσαν γιὰ εἰσιτήρια ὅλοι οἱ ἐπιβάτες τοῦ ἀτμοπλοίου αὐτοῦ;

15. Ἕνα βιβλίο ἔχει 128 σελίδες. Κάθε σελίδα ἔχει 32 ἀράδες καὶ κάθε ἀράδα 43 γράμματα. Πόσα γράμματα ἔχει ὅλο τὸ βιβλίο;

16. Ὁ Μίμης ἔχει 325 δόλους καὶ θέλει νὰ τοὺς μοιράση ἐξίσου σὲ 5 φίλους του. Πόσους δόλους θὰ δώση στὸν καθένα;

17. Ἕνα τραῖνο διατρέχει τὴν ἀπόσταση Ἀθηνῶν—Θεσσαλονίκης, ποὺ εἶναι 600 χιλιόμετρα, σὲ 10 ὧρες. Πόσα χιλιόμετρα τὴν ὥρα τρέχει τὸ τραῖνο αὐτό;

18. Ἕνα τόπι ὕφασμα 75 μέτρων, πουλήθηκε 4725 δραχμές. Πόσες δραχμὲς πουλήθηκε τὸ μέτρο;

19. Σ' ἕνα ἐργοστάσιο δουλεύουν 245 ἐργάτες, ποὺ ὅλοι μαζὶ παίρνουν τὴν ἡμέρα 14700 δραχμές. Πόσο ἡμερομίσθιο κατὰ μέσο ὅρο παίρνει κάθε ἐργάτης;

20. Πόσες φορὲς πρέπει νὰ ἐπαναλάδωμε τὸν ἀριθμὸ 515, γιὰ νὰ δροῦμε τὸν ἀριθμὸ 6180;

21. Νὰ δρῆτε τοὺς διαιρετέους στὰ παρακάτω:

α΄. Διαιρέτης	45	πηλίκο	18	ὑπόλοιπο	5
δ΄. »	278	»	123	»	18
γ΄. »	370	»	627	»	315
δ΄. »	1545	»	35	»	0

22. Οἱ 352 μαθητὲς ἑνὸς σχολείου ἔκαμαν ἔρανο μεταξύ τους γιὰ τὸ σχολικὸ ταμεῖο. Κάθε μαθητὴς πρόσφερε 7 δραχμές. Ἀπὸ τὰ χρήματα, ποὺ μάζεψαν, ἔδωσαν 375 δραχμὲς στὴν καθαρίστρια, 289 δραχμὲς καὶ ἀγόρασαν διδλία καὶ εἰκόνες γιὰ τὸ σχολεῖο καὶ τὰ ὑπόλοιπα τὰ μοίρασαν σὲ 25 ἄπορα παιδιὰ τοῦ σχολείου. Πόσα χρήματα μάζεψαν ἀπὸ τὸν ἔρανο καὶ πόσα πῆρε κάθε ἄπορο παιδί;

23. Ἕνας ὀρνιθοπώλης ἀγόρασε 352 κοτόπουλα πρὸς 27 δραχμὲς τὸ ἕνα. Πλήρωσε γιὰ τὴ μεταφορά τους ἀπὸ τὸ χωριὸ στὴν πόλη 171 δραχμές. Κατὰ τὴ μεταφορὰ ψόφησαν 15 κοτόπουλα. Πόσα κοτόπουλα τοῦ ἔμειναν καὶ πόσες δραχμὲς πρέπει νὰ πουλήση τὸ ἕνα γιὰ νὰ μὴ ζημιώση;

24. Ἕνας παντοπώλης ἔχει 3 σάκκους μὲ φακή. Ὁ πρῶτος σάκκος περιέχει 40 κιλά, ὁ δεύτερος 68 κιλὰ καὶ ὁ τρίτος 75 κιλά. Ἀδειάζει τὸ περιεχόμενο τοῦ πρώτου σάκκου στοὺς ἄλλους δυό. Ὁ δεύτερος σάκκος περιέχει τώρα 96 κιλά. Πόσα κιλὰ φακὴ θὰ περιέχη ὁ τρίτος σάκκος;

25. Ὁ Νίκος εἶναι 12 ἐτῶν καὶ ὁ Κώστας 11. Ἡ ἡλικία τοῦ πατέρα τους εἶναι τριπλάσια ἀπὸ τὴν ἡλικία τοῦ Νίκου. Ἡ ἡλικία τοῦ πάππου τους εἶναι ἑξαπλάσια ἀπὸ τὴν ἡλικία τοῦ Κώστα. Πόση εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς ἡλικίας τοῦ πατέρα καὶ τοῦ πάππου;

26. Ἕνα οἰκόπεδο ἀγοράσθηκε 95000 δρχ. Κατόπιν διαιρέθηκε σὲ 3 τμήματα καὶ πουλήθηκαν τὸ α΄. 38250 δρχ., τὸ δ΄. 40075 δρχ., τὸ γ΄. 57940 δρχ. Πόσο κέρδος προέκυψε ἀπὸ τὴν ἀγοραπωλησία αὐτή;

27. Ἕνας γαλακτοπώλης ἀγοράζει γιὰ τὸ κατάστημά του 275 κιλὰ γάλα

τὴν ἡμέρα. Πόσα κιλὰ γάλα θὰ ἀγοράση ἀπὸ 1 Ἰανουαρίου ὡς τὶς 30 Ἰουνίου;

28. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 60 σάκκους καφὲ τῶν 50 κιλῶν πρὸς 3000 δρχ. τὸ σάκκο. Στὸ μεταξὺ ἡ τιμὴ τοῦ καφὲ ἔπεσε καὶ ὁ ἔμπορος ἀναγκάσθηκε νὰ τὸν πουλήση πρὸς 42 δρχ. τὸ κιλό. Βρῆτε πόσο ζημίωσε ὁ ἔμπορος αὐτός;

29. Γράψε ἕνα μηδενικὸ στὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ 3245. Κατὰ πόσο ὁ νέος ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν πρῶτο;

30. Σβῦσε ἀπὸ τὸ τέλος τοῦ ἀριθμοῦ 42000 δύο μηδενικά. Κατὰ πόσο ὁ νέος ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν πρῶτο;

31. Τὸ τριπλάσιο ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι 5232. Ποιός ἀριθμὸς εἶναι τὸ τετραπλάσιο τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ;

32. Ἕνας οἰνοπώλης ἀγόρασε 8 βαρέλια κρασὶ τῶν 60 κιλῶν τὸ καθένα. Θέλει νὰ ἀδειάση τὸ κρασὶ αὐτὸ σὲ μπουκάλες τῶν 250 γραμμαρίων. Πόσες μπουκάλες θὰ γεμίση;

33. Μιὰ δεξαμενὴ περιέχει 90000 κιλὰ νερό. Ἀπὸ ἕνα κρουνὸ χύνονται μέσα στὴ δεξαμενὴ αὐτὴ 40 κιλὰ νερὸ σὲ κάθε λεπτό. Ἂν ἀνοίξωμε τὸ σωλῆνα, ποὺ βρίσκεται στὸν πυθμένα τῆς δεξαμενῆς, ἀπὸ τὸν ὁποῖο χύνονται σὲ κάθε λεπτὸ 190 κιλὰ νερό, σὲ πόσες ὧρες θὰ ἀδειάση ἡ δεξαμενή;

34. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 40 σάκκους φασόλια, ἀντὶ 16000 δρχ. Κάθε σάκκος εἶχε 50 κιλὰ φασόλια. Μετὰ πούλησε τὰ φασόλια αὐτὰ καὶ κέρδισε 2000 δρχ. Πόσο πούλησε τὸ κιλό;

35. Ἕνας γεωργὸς μοίρασε ἐξ ἴσου στὰ 3 παιδιά του τὴν περιουσία του ἀξίας 190000 δρχ., καθὼς καὶ τὰ 4 βόδια του ἀξίας 5000 δρχ. τὸ καθένα. Σ' ἕνα ἀπὸ τὰ παιδιά του ἔδωσε 2 βόδια καὶ στὰ ἄλλα δυὸ ἀπὸ ἕνα. Πόσες δραχμὲς ἀναλογοῦν στὸν καθένα ἀπὸ τοὺς τρεῖς ἀδελφούς, ὥστε καὶ οἱ τρεῖς νὰ πάρουν ἴσο μερίδιο;

Ἀσκήσεις δεκαδικῶν.

1. Γράψτε μὲ δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς τὰ παρακάτω:

4 μέτρα καὶ 8 δάκτυλοι — 8 μέτρα καὶ 25 χιλιοστὰ — 3 ἀκέραιοι καὶ 50 ἑκατοστὰ — 5 δέκατα — 3 ἑκατοστὰ — 75 χιλιοστὰ — 5 χιλιοστά.

2. Νὰ διαβάστε τοὺς παρακάτω δεκαδικοὺς ἀριθμούς, μὲ ὅλους τοὺς τρόπους:

4,5	0,75	35,205	0,001
2,32	16,483	28,157	6,15
4,08	8,095	0,775	7,02

3. Βάλτε ἕνα μηδὲν στὰ δεξιὰ τῶν παρακάτω δεκαδικῶν ἀριθμῶν. Ἄλλαξε ἡ ἀξία τους;

4,2	6,5	0,8	5,50	6,35

4. Βρῆτε ποιός δεκαδικὸς ἀριθμός, σὲ κάθε σειρά, εἶναι ὁ μεγαλύτερος.

α΄. σειρὰ	3,5	3,50	3,500
β΄. »	26,2	26,20	26,200
γ΄. »	8,50	8,500	8,5
δ΄. »	19,90	19,9	19,900

Προβλήματα δεκαδικῶν.

1. Ὁ κ. Δημητριάδης, ὁ ράφτης, ἔκοψε αὐτὴ τὴ βδομάδα ἀπὸ ἕνα τόπι ὕφασμα τὰ παρακάτω: Γιὰ ἕνα ἀνδρικὸ κοστούμι 3,10 μέτρα ὕφασμα, γιὰ ἕνα παντελόνι 1,15 μέτρα, γιὰ 4 ἀνδρικὰ παλτὰ 17,80 μέτρα καὶ γιὰ ἕνα παιδικὸ κοστούμι 2,5 μέτρα. Πόσα μέτρα ὕφασμα ἔκοψε ὁ κ. Δημητριάδης ἀπὸ τὸ τόπι αὐτὴ τὴ βδομάδα;

2. Τὸ ταμεῖο ἑνὸς καταστήματος εἶχε τὸ πρωΐ, ποὺ ἄνοιξε, 367,5 δραχμὲς καὶ τὸ βράδυ, ποὺ ἔκλεισε, 1678 δραχμές. Πόσες δραχμὲς ἦταν ἡ εἴσπραξη τῆς ἡμέρας αὐτῆς;

3. Ἕνας δρόμος 8,5 χιλιομέτρων στρώνεται μὲ χαλίκι. Μέχρι σήμερα στρώθηκαν τὰ 5,75 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα μένουν ἀκόμα νὰ στρωθοῦν;

4. Γιὰ νὰ καπλαντίσωμε ἕνα τετράδιο χρειαζόμαστε 0,35 μέτρα χρωματιστὸ χαρτί. Πόσο χαρτὶ θὰ χρειασθοῦμε γιὰ 25 τετράδια ἴσου μεγέθους;

5. Πρὸ τοῦ πολέμου, ποὺ τὰ πράγματα ἦταν φθηνότερα, ἀγοράζαμε μὲ 9,5 δραχμὲς 4 μέτρα χασέ. Πόσες δραχμὲς θὰ πληρώναμε τότε γιὰ 5,75 μέτρα;

6. Ἕνα ἀνδρικὸ κοστούμι γίνεται μὲ 2,80 μέτρα ὕφασμα. Πόσα κοστούμια γίνονται μὲ 19,60 μέτρα;

7. Τὸ σχολικὸ συσσίτιο μοίρασε σήμερα 50 κιλὰ μαρμελάδα ἀπὸ 0,25 κιλὰ τὴ μερίδα. Πόσες μερίδες μαρμελάδα μοίρασε σήμερα τὸ σχολικὸ συσσίτιο;

8. Ἕνας οἰνοπώλης ἔχει 600 κιλὰ κρασί. Κάθε κιλὸ ἀξίζει 3,5 δραχμές. Τὸ κρασὶ αὐτὸ θέλει νὰ τὸ φυλάξῃ σὲ μπουκάλες, ποὺ κάθε μιὰ χωράει 0,75 κιλὰ κρασί. Ἡ ἀξία κάθε μπουκάλας μὲ τὰ ἔξοδα γεμίσματος εἶναι 2,5 δραχμές. Πόσο θὰ στοιχίζῃ στὸν οἰνοπώλη κάθε μπουκάλα γεμάτη κρασί;

2. Ἐπανάληψη συμμιγῶν ἀριθμῶν

Συμμιγὴς λέγεται, ὁ ἀριθμὸς ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἄλλους ἀριθμούς, ποὺ οἱ μονάδες τους εἶναι μὲν τῆς ἴδιας οἰκογένειας, ἀλλ' ὁ καθένας ἔχει ἰδιαίτερο ὄνομα καὶ εἶναι ὑποδιαίρεση ἢ πολλαπλάσιο τῆς ἀρχικῆς μονάδας.

Παράδειγμα: *3 ἔτη, 8 μῆνες. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ δυὸ ἀριθμούς, ποὺ οἱ μονάδες τους εἶναι τῆς ἴδιας οἰκογένειας, ἔχουν ὅμως* *ἰδιαίτερο ὄνομα (ἔτη — μῆνες) καὶ εἶναι ὁ πρῶτος (ἔτη) πολλαπλάσιο τοῦ δεύτερου (μῆνες) καὶ ὁ δεύτερος (μῆνες) ὑποδιαίρεση τοῦ πρώτου.*

Συμμιγεῖς ἀριθμοὶ εἶναι οἱ μονάδες μετρήσεως βάρους, μήκους, χρόνου, ἐπιφάνειας, ὄγκου, καθὼς καὶ οἱ μονάδες νομισμάτων.

Μονάδες μετρήσεως βάρους.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ βάρος ἑνὸς πράγματος τὸ ζυγίζομε στὴ ζυγαριὰ μὲ ὁρισμένα βάρη. Τὰ βάρη αὐτὰ λέγονται σταθμὰ ἢ ζύγια.

Ἀρχικὴ μονάδα μετρήσεως βάρους εἶναι τὸ χιλιόγραμμο ἢ κιλό. Ὑποδιαίρεση τοῦ χιλιόγραμμου εἶναι τὸ γραμμάριο. Τὸ χιλιόγραμμο ἢ κιλὸ διαιρεῖται σὲ 1000 γραμμάρια. Πολλαπλάσιο τοῦ χιλιόγραμμου ἢ κιλοῦ εἶναι ὁ τόννος. 1000 χιλιόγραμμα (κιλὰ) ἀποτελοῦν ἕνα τόννο.

Ὥστε : *1 τόννος = 1000 χιλιόγραμμα ἢ κιλὰ*
1 χιλιόγραμμο ἢ κιλὸ = 1000 γραμμάρια.

Τὸ χιλιόγραμμο ἢ κιλὸ ὡς μονάδα μετρήσεως βάρους τέθηκε σὲ ἐφαρμογὴ στὴν πατρίδα μας ἀπὸ τὸ ἔτος 1959. Μέχρι τότε ἴσχυε ὡς μονάδα μετρήσεως βάρους ἡ ὀκά, ποὺ διαιρεῖται σὲ 400 δράμια. Ἡ ὀκὰ εἶναι ἴση μὲ 1280 γραμμάρια, τὸ δὲ χιλιόγραμμο (κιλὸ) εἶναι ἴσο μὲ 312,5 δράμια.

Μονάδες μετρήσεως μήκους.

Τὰ περισσότερα κράτη μεταχειρίζονται ὡς ἀρχικὴ μονάδα μετρήσεως μήκους τὸ μέτρο. Τὸ μέτρο διαιρεῖται σὲ 10 δέκατα ἢ παλάμες. Κάθε δέκατο ἢ παλάμη διαιρεῖται σὲ 10 ἑκατοστὰ ἢ δακτύλους. Καὶ κάθε δάκτυλος ἢ ἑκατοστὸ σὲ 10 χιλιοστὰ ἢ γραμμές. Οἱ παλάμες (δέκατα), οἱ δάκτυλοι (ἑκατοστὰ) καὶ οἱ γραμμὲς (χιλιοστὰ) εἶναι ὑποδιαιρέσεις τοῦ μέτρου (ἀρχικῆς μονάδας) καὶ χρησιμεύουν γιὰ τὴ μέτρηση μήκους, μικρότερου τοῦ ἑνὸς μέτρου.

Γιὰ τὴ μέτρηση μεγάλων ἀποστάσεων χρησιμοποιεῖται τὸ χιλιόμετρο, ποὺ ἔχει 1000 μέτρα καὶ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ μέτρου (ἀρχικῆς μονάδας).

Μονάδα ἐπίσης μετρήσεως χρησιμοποιεῖται καὶ ὁ τεκτονικὸς πήχης, ποὺ εἶναι ἴσος μὲ 0,75 τοῦ μέτρου.

Γιὰ μεγάλες ἐπίσης ἀποστάσεις, κυρίως θαλάσσιες, χρησιμοποιεῖται τὸ ναυτικὸ μίλι, ποὺ εἶναι ἴσο μὲ 1852 μέτρα.

Τέλος μέχρι τοῦ 1959 ὡς μονάδα μετρήσεως μήκους ἴσχυε ὁ ἐμπορικὸς πήχης, ποὺ διαιρεῖται σὲ 8 ρούπια καὶ εἶναι ἴσος μὲ 0,64 τοῦ μέτρου.

Στὴν Ἀγγλία ὡς ἀρχικὴ μονάδα μετρήσεως μήκους χρησιμοποιεῖται ἡ γυάρδα. Μιὰ γυάρδα ἔχει 3 πόδια καὶ 1 πόδι 12 ἴντζες, (δακτύλους). Ἡ γυάρδα εἶναι ἴση μὲ 0,914 τοῦ μέτρου.

Ὥστε : *1 μέτρο = 10 παλάμες ἢ 100 δάκτυλοι ἢ 1000 γραμμές...*
1 χιλιόμετρο 1000 μέτρα
1 τεκτονικὸς πήχης = 0,75 »
1 ναυτικὸ μίλιο = 1852 »
1 ἐμπορικὸς πήχης = 0,64 »
1 γυάρδα = 0,914 »

Μονάδες μετρήσεως χρόνου.

Ἀρχικὴ μονάδα μετρήσεως χρόνου εἶναι τὸ ἡμερονύκτιο ἢ ἡμέρα. Τὸ ἡμερονύκτιο διαιρεῖται σὲ 24 ὧρες. Κάθε ὥρα διαιρεῖται σὲ 60 πρῶτα λεπτά, ποὺ σημειώνονται μὲ ἕνα π. Καὶ κάθε πρῶτο λεπτὸ σὲ 60 δευτερόλεπτα, ποὺ σημειώνονται μὲ ἕνα δ. Ἡ ὥρα, τὰ πρῶτα λεπτὰ καὶ τὰ δευτερόλεπτα εἶναι ὑποδιαιρέσεις τοῦ ἡμερονυκτίου (ἀρχικῆς μονάδας).

Πολλαπλάσια τοῦ ἡμερονυκτίου (ἀρχικῆς μονάδας) εἶναι ὁ μήνας, ποὺ ἔχει 30 ἡμερονύκτια, τὸ ἔτος (χρόνος), ποὺ ἔχει 12 μῆνες, ὁ αἰώνας ποὺ ἔχει 100 ἔτη (χρόνια) καὶ ἡ χιλιετηρίδα, ποὺ ἔχει 10 αἰῶνες (χίλια χρόνια).

Ὥστε : *1 ἡμερονύκτιο = 24 ὧρες, 1 ὥρα = 60 π., 1 π = 60 δ.*
1 μήνας = 30 ἡμερονύκτια
1 ἔτος (χρόνος) = 12 μῆνες
1 αἰώνας = 100 ἔτη
1 χιλιετηρίδα = 10 αἰῶνες ἢ 1000 ἔτη.

Μονάδες μετρήσεως ἐπιφανειῶν.

Ἀρχικὴ μονάδα μετρήσεως ἐπιφανειῶν χρησιμοποιεῖται τὸ τετραγωνικὸ μέτρο. Τὸ τετραγ. μέτρο εἶναι ἕνα τετράγωνο, ποὺ ἡ κάθε πλευρά του ἔχει μῆκος 1 μέτρο.

Τὸ τετραγωνικὸ μέτρο διαιρεῖται σὲ 100 τετραγωνικὲς παλάμες. Κάθε τετραγωνικὴ παλάμη διαιρεῖται σὲ 100 τετραγωνικοὺς δακτύλους. Καὶ κάθε τετραγωνικὸς δάκτυλος σὲ 100 τετραγωνικὲς γραμμές.

Γιὰ μεγάλες ἐκτάσεις (ἀγρούς, δάση κλπ.), χρησιμοποιεῖται τὸ στρέμμα, ποὺ ἔχει 1000 τετραγωνικὰ μέτρα. Καὶ τέλος γιὰ τὴ μέτρηση τῆς ἐκτάσεως χωρῶν, κρατῶν κλπ. χρησιμοποιεῖται τὸ τετραγωνικὸ χιλιόμετρο, ποὺ ἔχει 1.000.000 τεραγωνικὰ μέτρα (κάθε πλευρὰ τοῦ τετραγωνικοῦ χιλιομέτρου εἶναι ἴση μὲ 1000 μέτρα).

Ὥστε : *1 τετραγωνικὸ μέτρο = 100 τετραγωνικὲς παλάμες ἢ*

10.000 τετραγ. δακτύλους ἢ 1.000.000 τετρ. γραμμές.
1 στρέμμα = 1000 τετρ. μέτρα
1 τετρ. χιλιόμετρο = 1.000.000 τετραγ. μέτρα.

Μέτρα μετρήσεως ὄγκου.

Ἀρχικὴ μονάδα μετρήσεως ὄγκου τῶν σωμάτων χρησιμοποιεῖται τὸ κυβικὸ μέτρο, ποὺ εἶναι ἕνας κύβος, τοῦ ὁποίου κάθε ἕδρα ἔχει ἕνα τετραγωνικὸ μέτρο.

Τὸ κυβικὸ μέτρο διαιρεῖται σὲ 1000 κυβικὲς παλάμες καὶ κάθε κυβικὴ παλάμη σὲ 1000 κυβικοὺς δακτύλους.

Ὥστε : *1 κυβικὸ μέτρο = 1000 κυβικὲς παλάμες ἢ 1.000.000 κυβικοὺς δάκτυλους.*

Μονάδες νομισμάτων.

Κάθε κράτος ἔχει δική του μονάδα νομίσματος. Νομίσματα ἔχουν ὅλα τὰ κράτη. Στὸν παρακάτω πίνακα ἀναφέρονται τὰ κυριώτερα νομίσματα.

Ἡ Ἑλλάδα ἔχει τὴ δραχμή, ποὺ διαιρεῖται σὲ 100 λεπτά.
Ἡ Γαλλία ἔχει τὸ φράγκο, ποὺ διαιρεῖται σὲ 100 σαντίμ.
Ἡ Γερμανία ἔχει τὸ μάρκο, ποὺ διαιρεῖται σὲ 100 πφένιχ.
Ἡ Ἰταλία ἔχει τὴ λιρέττα, ποὺ διαιρεῖται σὲ 100 τσεντέσιμα.
Ἡ Ἀμερικὴ ἔχει τὸ δολλάριο, ποὺ διαιρεῖται σὲ 100 σέντς.
Ἡ Ρωσία ἔχει τὸ ρούβλιο, ποὺ διαιρεῖται σὲ 100 καπίκια.
Ἡ Βουλγαρία ἔχει τὸ λέβι, ποὺ διαιρεῖται σὲ 100 καπίκια.
Ἡ Γιουγκοσλαυΐα ἔχει τὸ δηνάριο, ποὺ διαιρεῖται σὲ 100 πάρα.
Ἡ Τουρκία ἔχει τὴ λίρα, ποὺ διαιρεῖται σὲ 100 γρόσια.
Ἡ Ἀγγλία ἔχει τὴ στερλίνα (λίρα), ποὺ διαιρεῖται σὲ 20 σελλίνια, 1 σελλίνι ἔχει 12 πέννες καὶ 1 πέννα 4 φαρδίνια.

Ἡ ἀξία σὲ δραχμὲς τῶν διαφόρων νομισμάτων στὴν πατρίδα μας κανονίζεται ἀπὸ τὸ χρηματιστήριο καὶ δὲν εἶναι σταθερή. Ἡ στερλίνα π.χ. ἰσοῦται σήμερα μὲ 315 δραχμές. Αὔριο ὅμως μπορεῖ ν' ἀξίζῃ λιγότερο ἢ περισσότερο.

Ἀσκήσεις συμμιγῶν.

1. Τρέψτε σὲ μονάδες τελευταίας τάξεως τοὺς παρακάτω συμμιγεῖς ἀριθμούς:

2 τόννοι, 650 γραμμάρια — 5 μέτρα, 7 δέκατα — 2 αἰῶνες, 28 ἔτη, 275 ἡμέρες — 3 ὧρες, 15 π., 23 δ. — 1 τόννος, 25 χιλιόγραμμα, 850 γραμμάρια.

2. Τρέψτε σὲ συμμιγεῖς ἀριθμοὺς τοὺς παρακάτω συγκεκριμένους ἀκεραίους:

2185 γραμμ. — 6705 δευτερόλεπτα — 3225 ἡμέρες — 2525 γραμμάρια.

3. Τρέψτε σὲ ὀκάδες 10 χιλιόγραμμα (κιλὰ) καὶ 240 γραμμάρια.

4. Πόσες ὀκάδες ἔχει 1 τόννος; 4 τόννοι; Πόσα κιλὰ κάμνουν οἱ 10 ὀκάδες;

5. Τρέψτε: 22,85 μέτρα σὲ γυάρδες, 37,50 μέτρα σὲ τεκτ. πήσεις, 38,40 μέτρα σὲ ἐμπορικοὺς πήχεις, 130 γυάρδες σὲ μέτρα, 10 τεκτ. πήχεις σὲ μέτρα καὶ 20 ἐμπορ. πήχεις σὲ μέτρα.

6. Τρέψτε: 12 ἡμερονύκτια σὲ ὧρες, 5 ὧρες σὲ πρῶτα λεπτὰ καὶ 7 πρῶτα λεπτὰ σὲ δευτερόλεπτα, 1 ἡμερονύκτιο σὲ πρῶτα λεπτά, 360 ἡμερονύκτια σὲ μῆνες καὶ 48 μῆνες σὲ ἔτη.

7. Τρέψτε: 310 τετρ. μέτρα σὲ τετραγ. τεκ. πήχεις, 8.000 μέτρα σὲ στρέμματα, 2 τετρ. χιλιόμετρα σὲ τετρ. μέτρα.

Προβλήματα συμμιγῶν.

1. Ὁ Γεωργάκης εἶναι 9 ἐτῶν, 2 μηνῶν καὶ 25 ἡμερῶν. Ὁ ἀδελφός του εἶναι μεγαλύτερος κατὰ 1 ἔτος, 6 μῆνες καὶ 22 ἡμέρες. Πόσων ἐτῶν εἶναι ὁ ἀδελφὸς τοῦ Γεωργάκη;

2. Ὁ παντοπώλης τῆς συνοικίας μας πώλησε χθὲς 4 κιλὰ καὶ 875 γραμμ. ζάχαρη καὶ σήμερα 3 κιλὰ καὶ 350 γραμμ. Πόσα κιλὰ ζάχαρη πούλησε στὶς δυὸ μέρες;

3. Ὁ Κώστας εἶναι σήμερα 10 ἐτῶν, 3 μηνῶν καὶ 15 ἡμερῶν. Ὁ Δημητράκης εἶναι 9 ἐτῶν, 14 μηνῶν καὶ 26 ἡμερῶν. Πόσο μεγαλύτερος εἶναι ὁ Κώστας ἀπὸ τὸ Δημητράκη;

4. Ἀπὸ ἕνα ἀτμόπλοιο, ποὺ ἦταν φορτωμένο μὲ 4 τόννους καὶ 550 κιλὰ σιτάρι, ξεφορτώθηκαν 3 τόννοι καὶ 755 κιλά. Πόσο σιτάρι ἔμεινε τώρα στὸ ἀτμόπλοιο;

5. Ὁ Γιαννάκης γεννήθηκε στὶς 15 Μαΐου τοῦ 1939. Ποιά εἶναι ἡ ἡλικία του στὶς 11 Ἰουνίου τοῦ 1950; Πόσων ἐτῶν εἶναι σήμερα;

6. Βρῆτε ὅλοι σας πόσων ἐτῶν, μηνῶν καὶ ἡμερῶν εἶσθε σήμερα. Τί πρέπει νὰ ξέρετε;

7. Νὰ κάμετε τοὺς παρακάτω πολλαπλασιασμούς:

α΄. 3 κιλὰ καὶ 250 γραμμ. ἐπὶ 4. — β΄. 8 μέτρα 6 δέκατα ἐπὶ 9. — γ΄. 3 ὧρες 35π 40δ ἐπὶ 12.

8. Νὰ κάμετε τὶς παρακάτω διαιρέσεις:

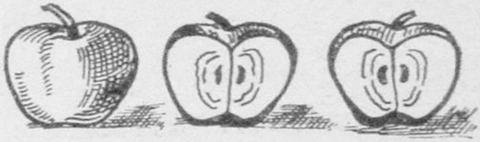
α΄. 8 τόννοι, 250 κιλὰ καὶ 800 γραμμ. διὰ 5. — β΄. 9 μέτρα, 4 δέκατα διὰ 4. — γ΄. 7 ὧρες, 8π 30δ διὰ 6. — δ΄. 17 στερλ. 9 σελλίνια διὰ 3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β΄.

ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

1. Τὸ ἕνα δεύτερο (μισὸ)

Ἕνα ὁλόκληρο μῆλο εἶναι μιὰ ἀκέραια μονάδα. Ἕνα ὁλόκληρο ψωμὶ εἶναι μιὰ ἀκέραια μονάδα. Ἀκέραιες μονάδες εἶναι ἐπίσης ἕνα ὁλόκληρο γλύκισμα, ἕνα μολύβι, ἕνα θρανίο, ἕνας μαθητής, ἕνα δέντρο, ἕνα αὐτοκίνητο κ. ἄ. Γενικὰ ἀκέραια μονάδα, ἢ ἁπλὰ μονάδα, εἶναι τὸ καθένα ἀπὸ τὸ πλῆθος τῶν ὁμοίων πραγμάτων.



1 μῆλο = 2 δεύτερα τοῦ μήλου

Ἂν κόψωμε ἕνα μῆλο σὲ δυὸ ἴσα κομμάτια, τὸ καθένα ἀπ' αὐτὰ θὰ εἶναι τὸ μισὸ ἢ τὸ ἕνα δεύτερο τοῦ μήλου. Τὸ μισὸ ἢ τὸ ἕνα δεύτερο τοῦ μήλου εἶναι κλάσμα (μέρος) τοῦ μήλου, δύο φορὲς μικρότερο ἀπὸ τὸ ὁλόκληρο (ἀκέραια μονάδα).

Ἂν κόψωμε ἕνα ὁλόκληρο γλύκισμα σὲ δύο ἴσα κομμάτια, τὸ καθένα ἀπὸ αὐτὰ θὰ εἶναι τὸ μισὸ ἢ τὸ ἕνα δεύτερο τοῦ γλυκίσματος. Τὸ μισὸ ἢ τὸ ἕνα δεύτερο τοῦ γλυκίσματος εἶναι κλάσμα (μέρος) τοῦ γλυκίσματος, δυὸ φορὲς μικρότερο ἀπὸ τὸ ὁλόκληρο γλύκισμα (ἀκέραια μονάδα).

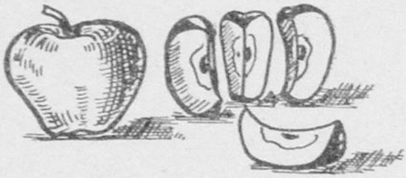
1 γλύκισμα = 2 δεύτερα τοῦ γλυκίσμ.

Γενικά, ἂν διαιρέσωμε μιὰ ἀκέραια μονάδα σὲ δυὸ ἴσα μέρη (κομμάτια), τὸ καθένα ἀπ' αὐτὰ θὰ εἶναι τὸ μισὸ ἢ ἕνα δεύτερο τῆς ἀκέραιας μονάδας. Τὸ ἕνα δεύτερο εἶναι κλάσμα (μέρος) τῆς ἀκέραιας μονάδας, δυὸ φορὲς μικρότερο ἀπ' αὐτή. Μιὰ ἀκέραια μονάδα ἀποτελεῖται ἀπὸ δυὸ δεύτερα (δυὸ μισά).

Τὸ ἕνα δεύτερο (μισὸ) τὸ γράφομε ἔτσι : $\frac{1}{2}$, τὰ δύο δεύτερα τὰ γράφομε ἔτσι : $\frac{2}{2}$.

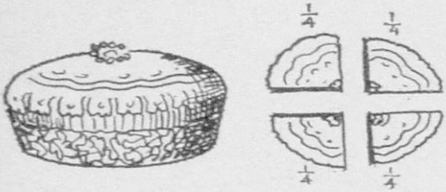
2. Τὸ τέταρτο

Ἂν κόψωμε ἕνα μῆλο σὲ τέσσερα ἴσα κομμάτια, τὸ καθένα ἀπ' αὐτὰ τὸ λέμε ἕνα τέταρτο τοῦ μήλου. Τὸ τέταρτο τοῦ μήλου εἶναι κλάσμα (μέρος) τοῦ μήλου, τέσσερες φορὲς μικρότερο ἀπὸ τὸ ὁλόκληρο μῆλο (ἀκέραια μονάδα).



1 μῆλο = 4 τέταρτα τοῦ μήλου

Ἂν κόψωμε ἕνα ὁλόκληρο γλύκισμα σὲ τέσσερα ἴσα κομάτια, τὸ καθένα ἀπὸ αὐτὰ τὸ λέμε ἕνα τέταρτο τοῦ γλυκίσματος. Τὸ τέταρτο τοῦ γλυκίσματος εἶναι κλάσμα (μέρος) τοῦ γλυκίσματος, τέσσερες φορὲς μικρότερο ἀπὸ τὸ ὁλόκληρο γλύκισμα (ἀκέρια μονάδα)



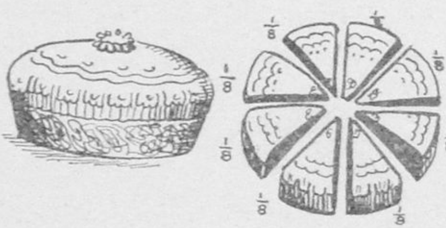
1 γλύκισμα = 4 τέταρτα τοῦ γλυκίσμ.

Γενικά, ἂν διαιρέσωμε μιὰ ἀκέραια μονάδα σὲ τέσσερα ἴσα μέρη (κομμάτια), τὸ καθένα ἀπ' αὐτὰ τὸ λέμε ἕνα τέταρτο. Τὸ τέταρτο εἶναι κλάσμα (μέρος) τῆς ἀκέραιας μονάδας, τέσσερες φορὲς μικρότερο ἀπ' αὐτή. Μιὰ ἀκέραια μονάδα ἀποτελεῖται ἀπὸ 4 τέταρτα.

Τὸ ἕνα τέταρτο γράφεται ἔτσι: $\frac{1}{4}$, 2 τέταρτα ἔτσι: $\frac{2}{4}$, τὰ 3 τέταρτα ἔτσι: $\frac{3}{4}$ καὶ τὰ 4 τέταρτα ἔτσι: $\frac{4}{4}$.

3. Τὸ ὄγδοο

Ἂν κόψωμε ἕνα γλύκισμα σὲ ὀκτὼ ἴσα κομμάτια, τὸ καθένα ἀπὸ αὐτὰ τὸ λέμε ἕνα ὄγδοο τοῦ γλυκίσματος. Τὸ ὄγδοο τοῦ γλυκίσματος εἶναι κλάσμα (μέρος) τοῦ γλυκίσματος, ὀκτὼ φορὲς μικρότερο ἀπὸ τὸ ὁλόκληρο γλύκισμα (ἀκέραια μονάδα).



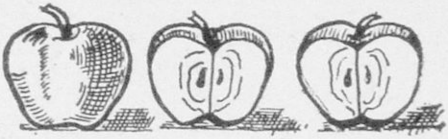
1 γλύκισμ. = 8 ὄγδοα τοῦ γλυκίσμ.

Γενικά, ἂν διαιρέσωμε μιὰ ἀκέραια μονάδα σὲ ὀκτὼ ἴσα μέρη τὸ καθένα ἀπὸ αὐτὰ τὸ λέμε ἕ ν α ὄ γ δ ο ο. Τὸ ὄγδοο εἶναι κλάσμα τῆς ἀκέραιας μονάδας, ὀκτὼ φορὲς μικρότερο ἀπ᾽ αὐτή. Μιὰ ἀκέραια μονάδα ἀποτελεῖται ἀπὸ 8 ὄγδοα. Τὸ ἕνα ὄγδοο τὸ γράφομε ἔτσι:

$\frac{1}{8}$, τὰ δύο ὄγδοα: $\frac{2}{8}$, τὰ 3 ὄγδοα: $\frac{3}{8}$, τὰ 4 ὄγδοα: $\frac{4}{8}$, τὰ 5 ὄγδοα: $\frac{5}{8}$, τὰ 6 ὄγδοα: $\frac{6}{8}$, τὰ 7 ὄγδοα: $\frac{7}{8}$, τὰ 8 ὄγδοα: $\frac{8}{8}$.

4. Παρατηρήσεις

Παρατηρῆστε τώρα τὰ κομμάτια, στὰ ὁποῖα χωρίσαμε τὴν ἀκέραια μονάδα.



1 μῆλο = 2 δεύτερα τοῦ μήλαυ

1 μῆλο = 4 τέταρτα τοῦ μήλου

1 μῆλο = 8 ὄγδοα [τοῦ μήλου

Τὰ 2 δεύτερα κάμνουν ἕνα μῆλο

Τὰ 4 τέταρτα κάμνουν ἕνα (τὸ ἴδιο) μῆλο

Τὰ 8 ὄγδοα πάλι κάμνουν ἕνα (τὸ ἴδιο) μῆλο.

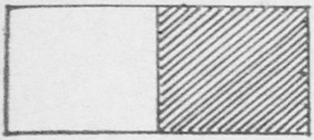
Δηλαδὴ ἢ 2 δεύτερα τοῦ μήλου ποῦμε, ἢ 4 τέταρτα, ἢ 8 ὄγδοα, εἶναι πάντα ἕνα ὁλόκληρο μῆλο. Καὶ πάλι ἢ ποῦμε 1 δεύτερο ἢ 2 τέταρτα ἢ 4 ὄγδοα τοῦ μήλου, εἶναι πάντα μισὸ μηλό.

Τὸ 1 δεύτερο τοῦ μήλου (μισὸ μῆλο) εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ 1 τέταρτο τοῦ ἴδιου μήλου. Τὸ 1 τέταρτο τοῦ μήλου εἶναι μέρος μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ 1 ὄγδοο τοῦ ἴδιου μήλου. Γενικά, ὅσο λιγότερα εἶναι τὰ ἴσα μέρη, στὰ ὁποῖα εἶναι διαιρεμένη ἡ ἀκέραια μονάδα, τόσο μεγαλύτερα εἶναι τὰ κλάσματα (κομμάτια) καὶ ἀντίθετα ὅσο περισσότερα εἶναι τὰ μέρη, στὰ ὁποῖα εἶναι διαιρεμένη ἡ ἀκέραια μονάδα, τόσο μικρότερα εἶναι τὰ κλάσματα (κομμάτια).

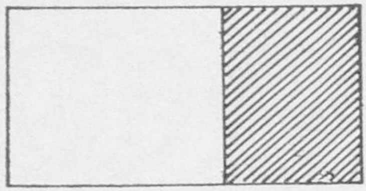
Ἀσκήσεις (προφορικά).

1. Ἀπὸ πόσα δεύτερα (μισὰ) ἀποτελεῖται ἡ ἀκέραια μονάδα;

Πόσα δεύτερα ἔχουν 2 ἀκέραιες μονάδες; Πόσα τέταρτα, πόσα ὄγδοα;



2. Ποιό κλάσμα τῆς ἀκέραιας μονάδας παριστάνει στὴ διπλανὴ εἰκόνα τὸ μέρος μὲ τὶς γραμμιές; Καὶ τὸ λευκὸ μέρος; Τὸ ἕνα μέρος εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ ἄλλο;



3. Τὰ δύο μέρη, ποὺ βλέπετε στὴ διπλανὴ εἰκόνα, εἶναι τὰ 2 δεύτερα (μισὰ) τῆς ἀκέραιας μονάδας; Ἂν δὲν εἶναι, ἐξηγῆστε γιατί δὲν εἶναι;

4. Πόσα δεύτερα κάμνουν τὰ δυὸ τέταρτα τῆς ἀκέραιας μονάδας; Πόσα ὄγδοα; Ἡ μισὴ ἀκέραια μονάδα πόσα δεύτερα ἔχει; Πόσα τέταρτα; Πόσα ὄγδοα;

5. Τὰ ὀκτὼ ὄγδοα τῆς ἀκέραιας μονάδας πόσα τέταρτα κάμνουν; Πόσα δεύτερα; Πόσες ἀκέραιες μονάδες;

6. Ἡ Ἐλισάβετ ἀγόρασε 1 δεύτερο τοῦ μέτρου ὕφασμα, ἡ Καίτη 1 τέταρτο καὶ ἡ Ἀσπασία 1 δέκατο τοῦ μέτρου. Ποιά ἀπὸ τὶς τρεῖς ἀγόρασε περισσότερο ὕφασμα;

7. Γράψτε μὲ ἀριθμοὺς ἕνα δεύτερο, δυὸ δεύτερα, ἕνα τέταρτο, τρία τέταρτα, ἕνα ὄγδοο, δύο ὄγδοα, τέσσερα ὄγδοα, ἑπτὰ ὄγδοα, ὀκτὼ ὄγδοα.

8. Διαβάστε τὰ κλάσματα

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{2}{8} \quad \frac{4}{4} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{7}{8} \quad \frac{6}{8}$$

9. Ἡ Καίτη ἀγόρασε τρία τέταρτα τοῦ μέτρου ὕφασμα. Πῶς γράφεται; Νὰ γράψτε τὸ μέρος, ποὺ λείπει γιὰ νὰ συμπληρωθῆ ἕνα μέτρο.

10. Ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{7}$ καὶ $\frac{1}{15}$ ποιὸ εἶναι μεγαλύτερο καὶ γιατί;

11. Ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$ ποιὸ εἶναι τὸ μικρότερο καὶ γιατί;

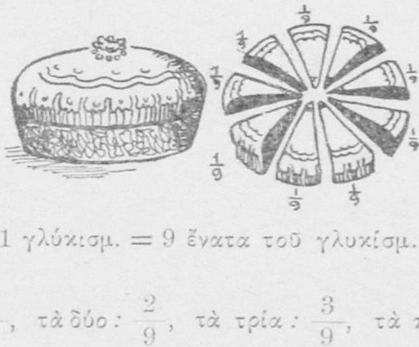
5. Ἄλλα κλάσματα

Ἂν ἡ ἀκέραια μονάδα εἶναι διαιρεμένη σὲ 3 ἴσα μέρη, τὸ καθένα ἀπ᾽ αὐτὰ τὸ λέμε ἕνα τρίτο. Τὸ τρίτο εἶναι κλάσμα (μέρος) τῆς ἀκέραιας μονάδας, τρεῖς φορὲς μικρότερο ἀπ᾽ αὐτή. Τὸ ἕνα τρίτο τὸ γράφομε ἔτσι: $\frac{1}{3}$ τὰ 2 τρίτα: $\frac{2}{3}$ καὶ τὰ τρία τρίτα: $\frac{3}{3}$.

1 μῆλο = 3 τρίτα τοῦ μήλου

Ἂν ἡ ἀκέραια μονάδα εἶναι διαιρεμένη σὲ 6 ἴσα μέρη, τὸ καθένα ἀπ᾽ αὐτὰ τὸ λέμε ἕνα ἕκτο. Τὸ ἕκτο εἶναι κλάσμα τῆς ἀκέραιας μονάδας, ἕξι φορὲς μικρότερο ἀπ᾽ αὐτή. Τὸ ἕνα ἕκτο τὸ γράφομε: $\frac{1}{6}$ τὰ δύο: $\frac{2}{6}$, τὰ τρία: $\frac{3}{6}$ τὰ τέσσερα: $\frac{4}{6}$ κλπ.

1 μῆλο = 6 ἕκτα τοῦ μήλου

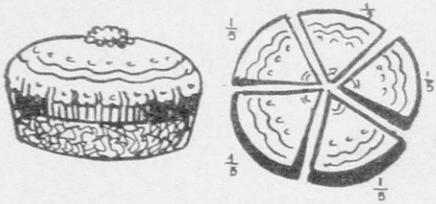


1 γλύκισμ. = 9 ἕνατα τοῦ γλυκίσμ.

Ἂν ἡ ἀκέραια μονάδα εἶναι διαιρεμένη σὲ 9 ἴσα μέρη, τὸ καθένα ἀπὸ αὐτὰ τὸ λέμε ἕνα ἕνατο. Τὸ ἕνατο εἶναι κλάσμα τῆς ἀκέραιας μονάδας, ἐννέα φορὲς μικρότερο ἀπ᾽ αὐτή. Τὸ ἕνα ἕνατο τὸ γράφομε:

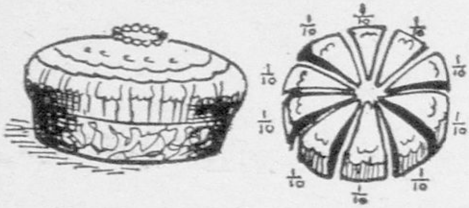
$\frac{1}{9}$, τὰ δύο: $\frac{2}{9}$, τὰ τρία: $\frac{3}{9}$, τὰ πέντε: $\frac{5}{9}$, τὰ ἐννέα: $\frac{9}{9}$.

Ἂν ἡ ἀκέραια μονάδα εἶναι διαιρεμένη σὲ 5 ἴσα μέρη, τὸ καθένα ἀπὸ αὐτὰ τὸ λέμε ἕνα πέμπτο. Τὸ πέμπτο εἶναι κλάσμα τῆς ἀκέραιας μονάδας, πέντε φορὲς μικρότερο ἀπ' αὐτή. Τὸ ἕνα πέμπτο τὸ γράφομε $\frac{1}{5}$, τὰ δύο $\frac{2}{5}$, τὰ τρία $\frac{3}{5}$, τὰ πέντε $\frac{5}{5}$.



1 γλύκισμα = 5 πέμπτα τοῦ γλυκίσμ.

Ἂν ἡ ἀκέραια μονάδα εἶναι διαιρεμένη σὲ 10 ἴσα μέρη, τὸ καθένα ἀπὸ αὐτὰ τὸ λέμε ἕνα δέκατο. Τὸ δέκατο εἶναι κλάσμα τῆς ἀκέραιας μονάδας, δέκα φορὲς μικρότερο ἀπ' αὐτή. Τὸ ἕνα δέκατο τὸ γράφομε: $\frac{1}{10}$, τὰ δύο $\frac{2}{10}$, τὰ τρία $\frac{3}{10}$, τὰ ἑπτὰ $\frac{7}{10}$, τὰ ὀκτὼ $\frac{8}{10}$ κλπ.



1 γλύκισμα = 10 δέκατα τοῦ γλυκίσμ.

Ἂν ἡ ἀκέραια μονάδα εἶναι διαιρεμένη σὲ ἑπτὰ ἴσα μέρη, τὸ καθένα ἀπ' αὐτὰ τὸ λέμε ἕνα ἕβδομο. Τὸ ἕβδομο εἶναι κλάσμα τῆς ἀκέραιας μονάδας, ἑπτὰ φορὲς μικρότερο ἀπ' αὐτή. Τὸ ἕνα ἕβδομο τὸ γράφομε $\frac{1}{7}$, τὰ δύο $\frac{2}{7}$, τὰ τρία $\frac{3}{7}$, τὰ τέσσερα $\frac{4}{7}$, τὰ πέντε $\frac{5}{7}$, κλπ.

1 γλύκισμα = 7 ἕβδομα τοῦ γλυκίσμ.

Γενικὰ κάθε ἀκέραια μονάδα μποροῦμε νὰ τὴ διαιρέσωμε σὲ ἴσα μέρη (κομμάτια). Τότε τὸ καθένα ἀπὸ αὐτὰ εἶναι κλάσμα (μέρος) τῆς ἀκέραιας μονάδας.

Παραδείγματα.

α′. Ένα έτος είναι διαιρεμένο σὲ 12 μῆνες

$\frac{1}{2}$ τοῦ ἔτους εἶναι 6 μῆνες (12 : 2 = 6)

$\frac{1}{3}$ » » » 4 » (12 : 3 = 4)

$\frac{1}{4}$ » » » 3 » (12 : 4 = 3)

$\frac{1}{6}$ » » » 2 » (12 : 6 = 2)

$\frac{1}{12}$ » » » 1 » (12 : 12 = 1)

β′. Ένα δεκάδραχμο εἶναι διαιρεμένο σὲ 10 δραχμὲς

$\frac{1}{2}$ τοῦ δεκάδραχμου εἶναι 5 δραχμὲς (10 : 2 = 5)

$\frac{1}{5}$ » » » 2 » (10 : 5 = 2)

$\frac{1}{10}$ » » » 1 » (10 : 10 = 1)

γ′. Μιὰ βδομάδα εἶναι διαιρεμένη σὲ 7 μέρες

$\frac{1}{7}$ τῆς βδομάδας εἶναι 1 μέρα (7 : 7 = 1)

δ′. Μιὰ ὥρα εἶναι διαιρεμένη σὲ 60 π. (πρῶτα λεπτὰ)

$\frac{1}{2}$ τῆς ὥρας εἶναι 30 π. (60 : 2 = 30)

$\frac{1}{4}$ « » » 15 π. (60 : 4 = 15)

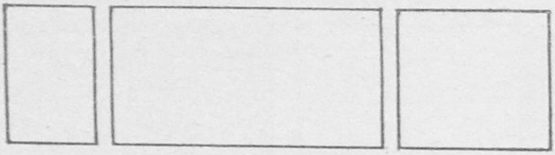
$\frac{1}{6}$ » » » 10 π. (60 : 6 = 10)

$\frac{1}{60}$ » » » 1 π. (60 : 60 = 1)

Ἀσκήσεις (προφορικά)

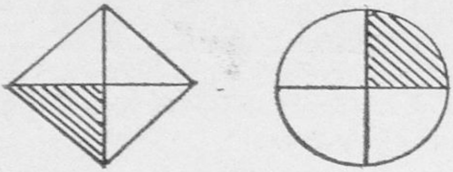
1. Τί πρέπει νὰ προσθέσω στὰ $\frac{2}{3}$ γιὰ νὰ ἔχω μιὰ ἀκέραια μονάδα; Τί πρέπει νὰ προσθέσω στὰ $\frac{2}{4}$ γιὰ νὰ ἔχω μιὰ ἀκέραια μονάδα; Στὰ $\frac{4}{5}$; στὰ $\frac{6}{9}$; στὰ $\frac{3}{7}$;

2. Στὴν παρακάτω εἰκόνα βλέπετε μιὰ ἀκέραια μονάδα διαιρεμένη σὲ 3



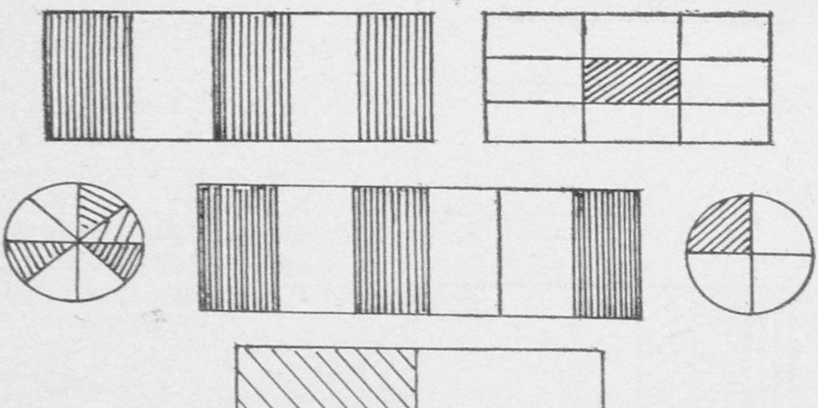
μέρη. Τὰ τρία αὐτὰ μέρη εἶναι τρίτα τῆς ἀκέραιας μονάδας; Ἂν δὲν εἶναι, πῆτε γιατί δὲν εἶναι;

3. Τί κλάσμα τῆς ἀκέραιας μονάδας εἶναι τὸ μέρος, ποὺ σημειώνεται μὲ



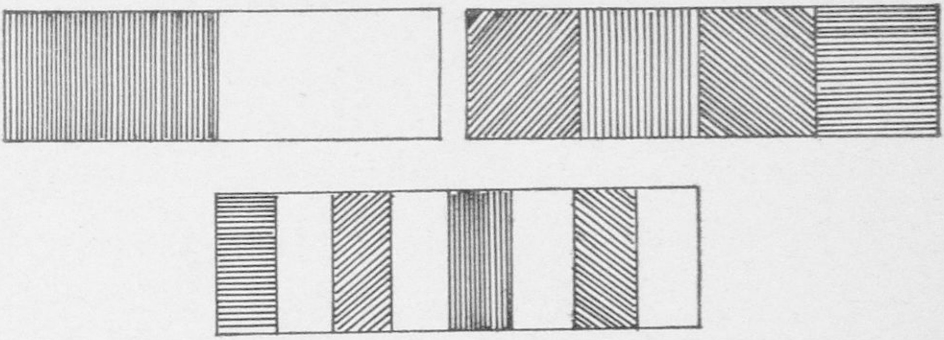
τὶς γραμμές; Τὰ λευκὰ μέρη τί κλάσμα τῆς ἀκέραιας μονάδας εἶναι;

4. Ποιό κλάσμα τῆς ἀκέραιας μονάδας παριστάνουν σὲ κάθε μιὰ ἀπὸ τὶς

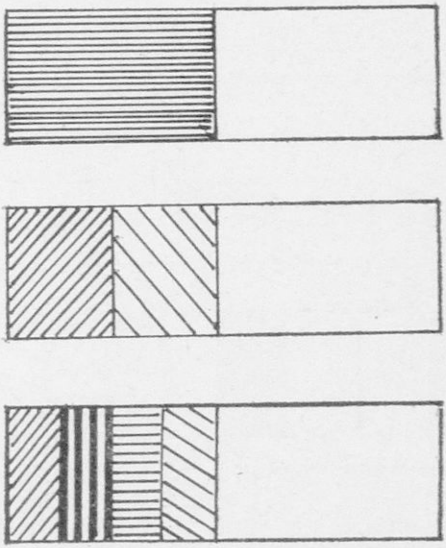


εἰκόνες, ποὺ βλέπετε, τὰ μέρη ποὺ σημειώνονται μὲ τὶς γραμμές; Ποιό κλάσμα τῆς ἀκέραιας μονάδας παριστάνουν τὰ λευκὰ μέρη κάθε εἰκόνας;

5. Οἱ εἰκόνες μας παριστάνουν τρεῖς ἴσες ἀκέραιες μονάδες. Σὲ



κάθε μιὰ ἀπ᾽ αὐτὲς πάρτε ἕνα ἀπὸ τὰ κλάσματά της καὶ ὀνομάστε το. Ποιό εἶναι τὸ μεγαλύτερο καὶ ποιό τὸ μικρότερο;



6. Τί εἶναι σὲ κάθε μιὰ ἀπὸ τὶς διπλανὲς εἰκόνες τὰ κλάσματα, ποὺ σημειώνονται μὲ γραμμές; Ἕνα μισὸ πόσα τέταρτα ἔχει; Ἕνα τέταρτο πόσα ὄγδοα;

7. Τί μέρος τοῦ μέτρου εἶναι ἡ 1 παλάμη; οἱ 3; οἱ 4; οἱ 6; οἱ 8;

8. Τί μέρος τοῦ μέτρου εἶναι ὁ 1 δάκτυλος; οἱ 10; οἱ 25; οἱ 40; οἱ 50; οἱ 75; οἱ 80 δάκτυλοι;

9. Τί μέρος τῆς ὥρας εἶναι τὸ 1 π. (πρῶτο λεπτό); τὰ 5; τὰ 10; τὰ 15; τὰ 30; τὰ 50;

10. Τί μέρος τῆς ἑβδομάδας εἶναι ἡ 1 μέρα; οἱ 3; οἱ 6 μέρες;

11. Τί μέρος τοῦ ἔτους εἶναι οἱ 3 μῆνες; οἱ 4; οἱ 6; οἱ 8 μῆνες; Τί μέρος τοῦ μήνα εἶναι ἡ 1 μέρα; οἱ 10 μέρες; οἱ 15; οἱ 20;

12. Νὰ ἀποδεῖξτε, γιατὶ τὸ $\frac{1}{3}$ εἶναι ἴσο μὲ τὰ $\frac{2}{6}$ καὶ αὐτὰ πάλι μὲ τὰ $\frac{4}{12}$.

13. Πόσες δραχμὲς εἶναι τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ δεκάδραχμου; τὰ $\frac{6}{10}$; τὰ $\frac{4}{5}$; Τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ δεκάδραχμου πόσα δέκατα ἔχει; Πόσες δραχμές;

14. Νὰ κάμετε 3 δωδεκάδες μὲ ξυλαράκια ἢ ὀδοντογλυφίδες καὶ νὰ χωρίστε τὴν πρώτη δωδεκάδα σὲ τρίτα, τὴ δεύτερη σὲ τέταρτα καὶ τὴν τρίτη σὲ ἕκτα. Πόσα ξυλαράκια ἔχει τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς δωδεκάδας, πόσα τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ πόσα τὸ $\frac{1}{6}$; Ποιὸ κλάσμα τῆς δωδεκάδας ἀπ' αὐτὰ ἔχει τὰ περισσότερα ξυλαράκια καὶ ποιὸ τὰ λιγότερα;

9. Κλάσματα ἀριθμῶν

Γιὰ νὰ βρῶ τὸ δεύτερο (μισό), τὸ τρίτο, τὸ τέταρτο, τὸ πέμπτο κλπ. ἑνὸς ἀριθμοῦ, διαιρῶ τὸν ἀριθμὸ διὰ 2, διὰ 3, διὰ 4, διὰ 5 κλπ.

Παράδειγμα: Τὸ μισὸ τοῦ 54 μῆλα εἶναι $54 : 2 = 27$. Τὸ τρίτο τῶν 117 δρχ. εἶναι $117 : 3 = 39$. Τὸ τέταρτο τῶν 216 μαθητῶν εἶναι $216 : 4 = 54$. Τὸ πέμπτο τοῦ 200 εἶναι $200 : 5 = 40$ κλπ.

Ἀσκήσεις.

1, Ποιὰ εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ $\frac{1}{3}$ καὶ τοῦ $\frac{1}{4}$ τοῦ ἀριθμοῦ 312;

2. Μιὰ κληρονομιὰ ἀνέρχεται σὲ 24810 δρχ. Τὸ $\frac{1}{3}$ ἀπ' αὐτὴ δόθηκε γιὰ φιλανθρωπικοὺς σκοπούς. Τί ποσὸ ἔμεινε γιὰ τοὺς κληρονόμους;

3. Ἕνας ζωέμπορος ἀγόρασε ἕνα ἄλογο ἀντὶ 2520 δρχ. Τὸ μεταπούλησε

καὶ κέρδισε τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ποσοῦ, ποὺ ἔδωσε γιὰ τὴν ἀγορά. Πόσες δραχμὲς τὸ πούλησε;

4. Ἕνας ἐργολάβος γιὰ νὰ πληρώση τοὺς ἐργάτες του ἀποσύρει ἀπὸ τὴν Τράπεζα 1800 δρχ. Ζητάει νὰ τοῦ δώσουν τὸ μισὸ τοῦ ποσοῦ αὐτοῦ σὲ πεντάδραχμα καὶ τὸ ἄλλο μισὸ σὲ δίδραχμα. Πόσα πεντάδραχμα καὶ πόσα δίδραχμα θὰ τοῦ δώσουν;

5. Ἕνα ποσὸ μοιράσθηκε σὲ δυὸ ἀνθρώπους. Ὁ ἕνας πῆρε τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ποσοῦ, ἀνερχόμενο σὲ 4200 δρχ. Ποιὸ εἶναι τὸ μερίδιο τοῦ ἄλλου;

6. Ποιὰ εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ $\frac{1}{3}$ καὶ τοῦ $\frac{1}{4}$ τοῦ ἀριθμοῦ 30048; Ποιὰ εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ τριπλάσιου καὶ τοῦ τετραπλάσιου τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ:

7, Ποιὰ εἶνα ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ τριπλάσιου καὶ τοῦ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ 375;

8. Τὸ διπλάσιο ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι 74148. Ποιό εἶναι τὸ τριπλάσιο τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ;

9. Ἕνας γεωργὸς κράτησε γιὰ δική του χρήση τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς συγκομιδῆς τῶν γεωμήλων του, ἀνερχόμενο σὲ 1800 κιλά. Πουλάει τὸ ὑπόλοιπο πρὸς 2,5 δρχ. τὸ κιλό. Πόσα εἰσέπραξε ἀπὸ τὴν πούληση αὐτή;

10. Δυὸ ποδηλατιστὲς φεύγουν τὴν ἴδια ὥρα ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο πρὸς τὴν ἴδια κατεύθυνση. Ὁ πρῶτος κάμνει τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς διαδρομῆς, ποὺ εἶναι 24400 μέτρα, ἐνῶ ὁ δεύτερος κάμνει τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς ἴδιας διαδρομῆς στὸν ἴδιο χρόνο. Ποιός ἀπὸ τοὺς δυὸ προχώρησε περισσότερο καὶ πόσα μέτρα περισσότερο προχώρησε;

11. Τρεῖς ἄνθρωποι μοιράζονται ἕνα ποσό. Ὁ πρῶτος παίρνει 7500 δρχ. Ὁ δεύτερος τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ μερίδιου τοῦ πρώτου καὶ ὁ τρίτος $\frac{1}{4}$ τοῦ μερίδιου τοῦ δεύτερου. Ποιὰ εἶναι τὰ μερίδια τοῦ δεύτερου καὶ τοῦ τρίτου. Ποιὸ ἦταν τὸ ποσὸ ποὺ μοιράσθηκαν;

7. Κλασματική μονάδα

Ἀκέραια μονάδα, ὅπως μάθαμε, λέγεται τὸ καθένα ἀπὸ τὸ πλῆθος τῶν ὅμοιων πραγμάτων. Π.χ. 1 μῆλο, 1 μαθητής, 1 θρανίο, 1 τετράδιο κλπ. Ἀπὸ τὴν ἕνωση τῶν ἀκεραίων μονάδων γίνονται οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί. Π.χ. $1+1=2$, $1+1+1=3$, $1+1+1+1=4$, $1+1+1+1+1=5$ κλπ. Οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 4, 5 κλπ. λέγονται ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Ὅπως ἔχομε ἀκέραια μονάδα, ἔχομε καὶ κλασματικὴ μονάδα. Κλασματικὴ μονάδα εἶναι τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη, στὰ ὁποῖα εἶναι διαιρεμένη ἡ ἀκέραια μονάδα. Ἔτσι ἂν ἡ ἀκέραια μονάδα εἶναι διαιρεμένη σὲ 2 ἢ 3 ἢ 4 ἢ 5 ἢ 10 ἢ 20 κλπ. ἴσα μέρη καὶ κάθε φορὰ πάρωμε ἕνα μόνο μέρος ἀπ᾿ αὐτά, θὰ ἔχωμε $\frac{1}{2}$ ἢ $\frac{1}{3}$ ἢ $\frac{1}{4}$ ἢ $\frac{1}{5}$ ἢ $\frac{1}{10}$ ἢ $\frac{1}{20}$ κλπ. ποὺ εἶναι κλασματικὲς μονάδες.

Ἀπὸ τὴν ἕνωση πολλῶν κλασματικῶν μονάδων σχηματίζονται οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοί.

Παράδειγμα. Οἱ κλασματικὲς μονάδες $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ κάμνουν τὸν κλασματικὸ ἀριθμὸ $\frac{4}{5}$. Γιὰ νὰ γίνη ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς $\frac{3}{6}$ πρέπει νὰ ἑνώσωμε τὶς κλασματικὲς μονάδες $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}$ κλπ.

Οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοί, γιὰ συντομία λέγονται ἁπλῶς κλάσματα.

Ἀσκήσεις

1. Σχηματίστε κλασματικοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τὶς παρακάτω ὁμάδες κλασματικῶν μονάδων.

α΄. $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ β΄. $\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$ γ΄. $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$

δ΄. $\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}$

ε΄. $\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}$

στ΄. $\frac{1}{25}+\frac{1}{25}+\frac{1}{25}+\frac{1}{25}+\frac{1}{25}+\frac{1}{25}+\frac{1}{25}$

ζ΄. $\frac{1}{50}+\frac{1}{50}+\frac{1}{50}+\frac{1}{50}+\frac{1}{50}+\frac{1}{50}+\frac{1}{50}+\frac{1}{50}$

2. Γράψτε στὸ τετράδιο μόνοι σας δέκα κλασματικοὺς ἀριθμούς.

3. Γράψτε μὲ κλασματικοὺς ἀριθμοὺς τὰ παρακάτω:

Δυὸ τέταρτα, πέντε ὄγδοα, 4 μέρες τῆς ἑβδομάδας, δέκα ἑπτὰ μέρες τοῦ μήνα, δυὸ τρίτα τῆς δωδεκάδας, 15 π. (πρῶτα λεπτὰ), 3 μῆνες τοῦ ἔτους, 3 σελλίνια (τῆς στερλίνας), 2 πόδια (τῆς γυάρδας).

3. Ὅροι τοῦ κλάσματος

Τὸ κλάσμα, ὅπως εἴδαμε, γράφεται μὲ δυὸ ἀριθμούς, ποὺ ὁ ἕνας γράφεται κάτω ἀπὸ τὸν ἄλλο καὶ χωρίζονται μὲ μιὰ μικρὴ ὁριζόντια γραμμή. Ἡ γραμμὴ αὐτὴ λέγεται κλασματικὴ γραμμή. Ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτούς, ἐκεῖνος ποὺ εἶναι γραμμένος πάνω ἀπὸ τὴν κλασματικὴ γραμμή, φανερώνει πόσα ἴσα μέρη παίρνομε ἀπὸ τὴν ἀκέραια μονάδα καὶ λέγεται ἀριθμητής. Ὁ ἄλλος, ποὺ εἶναι γραμμένος κάτω ἀπὸ τὴν κλασματικὴ γραμμή, φανερώνει σὲ πόσα ἴσα μέρη εἶναι διαιρεμένη ἡ ἀκέραια μονάδα καὶ λέγεται παρονομαστής.

Ὁ παρονομαστὴς δίνει στὸ κλάσμα τὸ ὄνομά του. Ἔτσι στὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ τοῦ μήλου, ὁ ἀριθμὸς 3 φανερώνει τὰ μέρη, ποὺ πήραμε ἀπὸ τὴν ἀκέραια μονάδα (τὸ μῆλο) καὶ ὁ ἀριθμὸς 4 σὲ πόσα ἴσα κομμάτια κόψαμε τὴν ἀκέραια μονάδα (τὸ μῆλο). Ὁ ἀριθμὸς 3 εἶναι ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος καὶ ὁ ἀριθμὸς 4 ὁ παρονομαστής του.

Ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς μαζὶ λέγονται ὅροι τοῦ κλάσματος.

9. Σύγκριση τοῦ κλάσματος μὲ τὴν ἀκέραια μονάδα

Ἔχομε κλάσματα ποὺ εἶναι:

Μικρότερα ἀπὸ τὴν ἀκέραια μονάδα.

Ἴσα μὲ τὴν ἀκέραια μονάδα καὶ

Μεγαλύτερα ἀπὸ τὴν ἀκέραια μονάδα.

— Μικρότερα ἀπὸ τὴν ἀκέραια μονάδα εἶναι τὰ κλάσματα ποὺ ἔχουν ἀριθμητὴ μικρότερο ἀπὸ τὸν παρονομαστή. Π.χ. Τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὴν ἀκέραια μονάδα, γιατί ἐνῶ ἡ ἀκέραια μονάδα εἶναι διαιρεμένη σὲ 4 ἴσα μέρη, παίρνομε μόνο τὰ 3 ἀπ' αὐτά. Συνεπῶς παίρνομε λιγότερο ἀπὸ τὴν ἀκέραια μονάδα. Ἐπίσης στὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$, ἐνῶ ἡ ἀκέραια μονάδα εἶναι διαιρεμένη σὲ 2 ἴσα μέρη, παίρνομε μόνο τὸ 1, δηλ. λιγότερο ἀπὸ τὴν ἀκέραια μονάδα. Τὰ κλάσματα αὐτὰ λέγονται γνήσια.

— Ἴσα μὲ τὴν ἀκέραια μονάδα εἶναι τὰ κλάσματα, ποὺ ἔχουν ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ τὸν ἴδιο ἀ ρ ι θ μ ό. Π.χ. $\frac{2}{2}$ τοῦ μήλου, $\frac{4}{4}$ τῆς ὥρας.

Τὸ κλάσμα $\frac{2}{2}$ τοῦ μήλου εἶναι ἴσο μὲ ἕνα ὁλόκληρο μῆλο (μιὰ ἀκέραια μονάδα), γιατὶ παίρνομε καὶ τὰ δυὸ ἴσα μέρη, στὰ ὁποῖα εἶναι κομμένο τὸ μῆλο, δηλ. ὁλόκληρο τὸ μῆλο. Ἐπίσης καὶ τὸ κλάσμα $\frac{4}{4}$ τῆς ὥρας εἶναι ἴσο μὲ 1 ὥρα, δηλ. μιὰ ἀκέραια μονάδα, γιατὶ ἡ ὥρα ἔχει 4 τέταρτα.

— Μ ε γ α λ ύ τ ε ρ α ἀπὸ τὴν ἀκέραια μονάδα εἶναι τὰ κλάσματα ποὺ ἔχουν τὸν ἀριθμητὴ μεγαλύτερο ἀπὸ τὸν παρονομαστή.

Π.χ. τὸ κλάσμα $\frac{5}{4}$ τῆς ὥρας εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ μιὰ ὥρα (ἀκέραια μονάδα), γιατί, ἐνῶ ἡ ὥρα (ἀκέραια μονάδα) ἔχει 4 τέταρτα, παίρνομε 5 τέταρτα, δηλ. $\frac{1}{4}$ παραπάνω ἀπὸ τὴν ἀκέραια μονάδα (ὥρα). Συνεπῶς τὸ κλάσμα $\frac{5}{4}$ εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὴν ἀκέραια μονάδα (περιέχει 1 ἀκέραια μονάδα καὶ $\frac{1}{4}$ ἀκόμη). Τὰ κλάσματα αὐτὰ λέγονται κ α τ α χ ρ η σ τ ι κ ά.

Ἀνακεφαλαίωση

α'. Τὸ κλάσμα εἶναι μ ι κ ρ ό τ ε ρ ο ἀπὸ τὴν ἀκέραια μονάδα, ὅταν ὁ ἀριθμητής του εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν παρονομαστή. Τὰ κλάσματα αὐτὰ λέγονται γ ν ή σ ι α. Π. χ. $\frac{2}{5}$ *τοῦ μέτρου,* $\frac{3}{4}$ *τῆς ὥρας,* $\frac{4}{7}$ *τῆς βδομάδας.*

β'. Τὸ κλάσμα εἶναι ἴ σ ο μὲ τὴν ἀκέραια μονάδα, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς του εἶναι ἴ σ ο ς μὲ τὸν παρονομαστή. Π.χ. $\frac{4}{4}$ *τῆς ὥρας,* $\frac{12}{12}$ *τῆς δωδεκάδας,* $\frac{7}{7}$ *τῆς βδομάδας.*

γ'. Τὸ κλάσμα εἶναι μ ε γ α λ ύ τ ε ρ ο ἀπὸ τὴν ἀκέραια μονάδα, ὅταν ὁ ἀριθμητής του εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν παρονομαστή. Τὰ κλάσματα αὐτὰ λέγονται κ α τ α χ ρ α σ τ ι κ ά. Π.χ. $\frac{5}{4}$ *τῆς ὥρας,* $\frac{12}{10}$ *τοῦ μέτρου,* $\frac{9}{7}$ *τῆς βδομάδας,* $\frac{8}{5}$ *τοῦ μήλου.*

Ἀσκήσεις

1. Νὰ γράψτε 5 γνήσια κλάσματα τοῦ μήνα, τῆς ἑβδομάδας, τῆς ὥρας, τοῦ μέτρου κλπ. Ἐξηγῆστε, γιατί τὰ κλάσματα αὐτὰ ποὺ γράψατε, εἶναι μικρότερα ἀπὸ τὴν ἀκέραια μονάδα.

2. Νὰ γράψτε 5 κλάσματα ἴσα μὲ τὴν ἀκέραια μονάδα. Ἐξηγῆστε, γιατί τὰ κλάσματα ποὺ γράψατε εἶναι ἴσα μὲ τὴν ἀκέραια μονάδα.

3. Νὰ γράψτε 5 καταχρηστικὰ κλάσματα καὶ νὰ ἐξηγῆστε, γιατί τὰ κλάσματα αὐτὰ εἶναι μεγαλύτερα ἀπὸ τὴν ἀκέραια μονάδα.

4. Ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{6}{5}$ $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{8}{8}$, ποιὰ εἶναι γνήσια, ποιὰ καταχρηστικὰ καὶ ποιὰ ἴσα μὲ τὴν ἀκέραια μονάδα;

10. Μικτὸς ἀριθμὸς

Παράδειγμα: Οἱ μαθητὲς ἑνὸς σχολείου ἀγόρασαν ὕφασμα γιὰ νὰ κάμουν κουρτίνες στὰ παράθυρα τῆς αἴθουσάς τους. Γιὰ τὸ πρῶτο παράθυρο χρειάσθηκαν 1 μέτρο καὶ $\frac{8}{10}$ τοῦ μέτρου ὕφασμα καὶ τὸ δεύτερο 2 μέτρα καὶ $\frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου.

Ἕνας μαθητὴς ἔγραψε στὸν πίνακα αὐτοὺς τοὺς ἀριθμούς:

α΄. Παράθυρο 1 μέτρο καὶ $\frac{8}{10}$ τοῦ μέτρου

β΄. » 2 » » $\frac{1}{10}$ » »

Τότε ὁ δάσκαλος τοὺς εἶπε, ὅτι αὐτοὶ οἱ ἀριθμοὶ γράφονται γιὰ συντομία ἔτσι:

$1\frac{8}{10}$ μέτρα $\qquad 2\frac{1}{10}$ μέτρα.

Ὅπως βλέπετε οἱ παραπάνω ἀριθμοὶ ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἕναν ἀκέραιο ἀριθμὸ καὶ ἕνα κλάσμα. Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ λέγονται μικτοὶ ἀριθμοί.

Μικτὸς λέγεται ὁ ἀριθμός, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀκέραιο καὶ κλάσμα.

11. Πῶς τρέπεται ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς σὲ κλάσμα

Παράδειγμα. Ὁ Κώστας ἔχει 3 μῆλα καὶ θέλει νὰ τὰ κάμη τέταρτα. Πόσα τέταρτα θὰ γίνουν τὰ 3 μῆλα;

Σκεπτόμαστε ἔτσι: Ἀφοῦ τὸ 1 μῆλο ἔχει 4 τέταρτα, τὰ 2 μῆλα θὰ ἔχουν $2 \times 4 = 8$ τέταρτα καὶ τὰ 3 μῆλα $3 \times 4 = 12$ τέταρτα, δηλαδὴ $\frac{12}{4}$. Ὥστε 3 μῆλα $= \frac{12}{4}$ τοῦ μήλου.

Στὸ παράδειγμά μας γιὰ νὰ τρέψωμε τὸν ἀκέραιο ἀριθμὸ 3 μῆλα σὲ τέταρτα, τὸν πολλαπλασιάσαμε ἐπὶ 4, ποὺ εἶναι ὁ παρονομαστὴς (τέταρτα) καὶ τὸ γινόμενο 12 τὸ βάλαμε ἀριθμητή, παρονομαστὴ δὲ ἀφήσαμε τὸν ἴδιο 4 (τέταρτα).

Ὥστε γιὰ νὰ τρέψωμε ἕναν ἀκέραιο ἀριθμὸ σὲ κλάσμα, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀκέραιο ἐπὶ τὸν παρονομαστή, ποὺ μᾶς δίνεται, τὸ γινόμενο τὸ βάνομε ἀριθμητὴ καὶ παρονομοστὴ βάνομε τὸν ἀριθμὸ ποὺ μᾶς δόθηκε.

Σημ. Γιὰ τὴν τροπὴ ἀκεραίου σὲ κλάσμα πρέπει νὰ μᾶς δοθῆ ὁ παρονομαστής. Ἐπίσης ἕναν ἀκέραιο ἀριθμὸ τὸν παριστάνομε ὡς κλάσμα, ἂν γράψωμε τὸν ἀκέραιο ὡς ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ τὴ μονάδα. Π.χ.

$$2 = \frac{2}{1}, \quad \text{διότι} \quad \frac{2 \times 1}{1} = \frac{2}{1}$$

12. Πῶς τρέπεται ὁ μικτὸς ἀριθμὸς σὲ κλάσμα

Παράδειγμα. Νὰ τραπῆ ὁ μικτὸς ἀριθμὸς $2\frac{3}{4}$ μέτρα σὲ ἰσοδύναμο κλάσμα. Φυσικὰ τὸ κλάσμα αὐτὸ θὰ εἶναι καταχρηστικὸ μὲ παρονομαστὴ 4.

Θὰ ἐργασθοῦμε ἔτσι: Τρέπομε πρῶτα τὸν ἀκέραιο 2 σὲ τέταρτα, ἤτοι $2 = \frac{8}{4}$. Ἔχομε ὅμως ἀκόμα καὶ $\frac{3}{4}$ τὰ προσθέτομε καὶ αὐτὰ στὰ $\frac{8}{4}$. Ἔτσι ἔχομε τώρα $8 + 3$ τέταρτα $= \frac{11}{4}$. Ὥστε ὁ μικτὸς ἀριθμὸς $2\frac{3}{4}$ μέτρα $= \frac{11}{4}$ μέτρ.

Γιὰ νὰ φτάσωμε στὸ ἀποτέλεσμα αὐτό, πολλαπλασιάσαμε τὸν ἀκέραιο 2 μέτρα ἐπὶ τὸν παρονομαστὴ 4 καὶ στὸ γινόμενο 8 προσθέσαμε καὶ τὸ 3, ποὺ εἶναι ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος. Τὸ ἄθροισμα (8+3=11) τὸ γράψαμε ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ ἀφήσαμε τὸν ἴδιο (4).

Ὥστε: *Γιὰ νὰ τρέψωμε ἕνα μικτὸ ἀριθμὸ σὲ καταχρηστικὸ κλάσμα, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀκέραιο ἐπὶ τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος καὶ στὸ γινόμενο προσθέτομε καὶ τὸν ἀριθμητή. Τὸ ἄθροισμα τὸ βάνομε ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ ἀφήνομε τὸν ἴδιο.*

Ἀσκήσεις

1. Νὰ τραποῦν σὲ τέταρτα οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ 2 μῆλα, 3 ψωμιά, 5 γλυκίσματα.

2. Νὰ τραποῦν σὲ κλάσματα μὲ παρονομαστὴ 60 οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ 6, 9 καὶ 10 ὧρες.

3. Νὰ τραποῦν σὲ κλάσματα οἱ παρακάτω μικτοὶ ἀριθμοί:

$4\frac{2}{10}$ μέτρα, $3\frac{1}{7}$ ἑβδομ. $8\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας, $10\frac{3}{8}$.

4. Νὰ τρέψτε τὸν ἀκέραιο ἀριθμὸ 7 σὲ δωδέκατα, σὲ ἔνατα, σὲ ἕκτα καὶ σὲ εἰκοστά

5. Νὰ τραποῦν σὲ καταχρηστικὰ κλάσματα $2\frac{8}{10}$ μέτρ., $5\frac{6}{30}$ μῆνες, $3\frac{1}{2}$ ὧρες.

6. Νὰ τρέψτε τοὺς παρακάτω μικτοὺς σὲ καταχρηστικὰ κλάσματα:

$4\frac{2}{5}$, $8\frac{7}{9}$, $16\frac{7}{8}$, $23\frac{5}{6}$, $43\frac{3}{7}$, $68\frac{9}{12}$.

7. Νὰ τραποῦν οἱ ἀριθμοὶ 4, 7, 9 σὲ κλάσματα μὲ παρονομαστὴ τὸ 5. Τί εἴδους κλάσματα ἔγιναν; Γιατί;

8. Τὰ $6\frac{3}{4}$ κιλὰ πόσα τέταρτα γίνονται;

9. Νὰ βρῆτε πόσα ὄγδοα συνολικὰ ἔχει ὁ ἀριθμὸς $5\frac{3}{8}$.

10. Πόσα πέμπτα διαφέρει ὁ ἀριθμὸς 3 ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ 2;

11. Ποιὰ ἡ διαφορὰ σὲ ὄγδοα τῶν ἀριθμῶν $4\frac{1}{8}$ καὶ 6;

12. Πόσα περισσότερα τρίτα ἔχει ὁ ἀριθμὸς 2 ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ 4;

13. Πῶς βγάζομε ἀπὸ τὰ καταχρηστικὰ κλάσματα τὶς ἀκέραιες μονάδες.

Παράδειγμα 1. Τὸ κλάσμα $\frac{8}{4}$ κιλὰ εἶναι καταχρηστικὸ κλάσμα, γιατὶ περιέχει ἀκέραιες μονάδες.

Ἡ μιὰ ἀκέραια μονάδα ἔχει $\frac{4}{4}$, ὡς τὰ $\frac{8}{4}$ εἶναι ἄλλα $\frac{4}{4}$, δηλ. ἄλλη μιὰ ἀκέραια μονάδα. Ἑπομένως τὰ $\frac{8}{4} = 2$ ἀκέραιες μονάδες.

Μὲ ἄλλα λόγια, εἶναι τόσες ἀκέραιες μονάδες μέσα στὸ κλάσμα $\frac{8}{4}$, ὅσες φορὲς χωράει ὁ παρονομαστὴς 4 στὸν ἀριθμητὴ 8 $(8 : 4 = 2)$.

Παράδειγμα 2. Τὸ κλάσμα $\frac{12}{8}$ μέτρα εἶναι καταχρηστικό, γιατὶ περιέχει περισσότερο ἀπὸ μιὰ ἀκέραια μονάδα.

Ἡ μιὰ ἀκέραια μονάδα ἔχει $\frac{8}{8}$, ὡς τὰ $\frac{12}{8}$ εἶναι ἄλλα $\frac{4}{8}$.

Ἑπομένως τὰ $\frac{12}{8} = 1$ ἀκέραια μονάδα καὶ $\frac{4}{8}$, ποὺ δὲν φτάνουν γιὰ ἄλλη μιά. Δηλαδὴ $\frac{12}{8}$ μέτρα $= 1\frac{4}{8}$ μέτρα.

Καὶ στὸ κλάσμα αὐτὸ εἶναι τόσες ἀκέραιες μονάδες, ὅσες φορὲς χωράει ὁ παρονομαστὴς 8, στὸν ἀριθμητὴ 12 $(12:8=1$ καὶ μένουν $4)$.

Ὅπως βλέπετε στὰ δυὸ αὐτὰ παραδείγματα, γιὰ νὰ βγάλωμε τὶς ἀκέραιες μονάδες, ποὺ περιέχουν τὰ καταχρηστικὰ κλάσματα, βρήκαμε πόσες φορὲς χωράει ὁ παρονομαστὴς στὸν ἀριθμητή, δηλαδὴ διαιρέσαμε τὸν ἀριθμητὴ διὰ τοῦ παρονομαστῆ, ὅ,τι βρήκαμε εἶναι ἀκέραιες μονάδες καὶ ὅ,τι μένει εἶναι κλάσμα.

Ὥστε: *Γιὰ νὰ βγάλωμε ἀπὸ τὰ καταχρηστικὰ κλάσματα τὶς ἀκέραιες μονάδες, διαιροῦμε τὸν ἀριθμητὴ διὰ τοῦ παρονομαστῆ. Τὸ πηλίκο εἶναι ὁ ἀκέραιος. Ἂν μένῃ ὑπόλοιπο, τὸ γράφομε ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ ἀφήνομε τὸν ἴδιο.*

Ἀσκήσεις

1. Πόσες ὧρες εἶναι τά: $\frac{3}{2}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{8}{2}$, $\frac{5}{4}$ τῆς ὥρας;

2. Πόσα μέτρα εἶναι τά: $\frac{14}{8}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{16}{4}$ μέτρα;

3. Βγάλτε τὶς ἀκέραιες μονάδες ἀπὸ τὰ παρακάτω χαρακτηριστικὰ κλάσματα:

$\frac{30}{6}$, $\frac{27}{7}$, $\frac{18}{6}$, $\frac{24}{9}$, $\frac{42}{3}$, $\frac{45}{9}$, $\frac{68}{8}$, $\frac{45}{6}$, $\frac{75}{8}$, $\frac{35}{7}$, $\frac{21}{5}$, $\frac{31}{6}$,

4. Βγάλτε ἀπὸ 10 καταχρηστικὰ κλάσματα δικά σας τὶς ἀκέραιες μονάδες.

14. Ἰδιότητες τῶν κλασμάτων

α΄. Πότε μεγαλώνει ἡ ἀξία ἑνὸς κλάσματος

Παράδειγμα 1. Ἔχομε τὸ κλάσμα $\frac{4}{8}$ τοῦ μέτρου. Πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμητὴ 4 ἐπὶ τὸ 2. Τὸ κλάσμα θὰ γίνη $\frac{8}{8}$ μέτρα. Τὸ κλάσμα $\frac{8}{8}$ μέτρα εἶναι δυὸ φορὲς μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ $\frac{4}{8}$ μέτρα, γιατὶ τὸ $\frac{8}{8}$ μέτρα, εἶναι ἕνα ὁλόκληρο μέτρο, ἐνῶ τὸ $\frac{4}{8}$ μέτρα εἶναι μόνο μισὸ μέτρο.

Ὥστε τὸ κλάσμα $\frac{4}{8}$ ἔγινε 2 φορὲς μεγαλύτερο, γιατὶ πολλαπλασιάσαμε τὸν ἀριθμητή του 4 ἐπὶ 2, δηλ. ἔτσι: $\frac{4 \times 2}{8} = \frac{8}{8}$.

Παράδειγμα 2. Ἔχομε τὸ κλάσμα $\frac{2}{12}$ τῆς δωδεκάδας. Πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμητή του 2 ἐπὶ 4. Θὰ γίνη τὸ κλάσμα $\frac{8}{12}$ τῆς δωδεκάδας. Βλέπομε πάλι καθαρά, ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{8}{12}$ τῆς δωδεκάδας, εἶναι 4 φορὲς μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ $\frac{2}{12}$ τῆς δωδεκάδας, γιατί:

$$\frac{2}{12} + \frac{2}{12} + \frac{2}{12} + \frac{2}{12} = \frac{8}{12}.$$

Ὥστε καὶ τὸ κλάσμα $\frac{2}{12}$ τῆς δωδεκάδας, ἔγινε 4 φορὲς μεγαλύτερο, γιατὶ πολλαπλασιάσαμε τὸν ἀριθμητή του ἐπὶ 4, δηλ. ἔτσι:

$$\frac{2 \times 4}{12} = \frac{8}{12}.$$

Συμπέρασμα: *Ἡ ἀξία ἑνὸς κλάσματος μεγαλώνει τόσες φορές, ὅσες φορὲς πολλαπλασιάζεται ὁ ἀριθμητής του.*

Παράδειγμα 3. Ἔχομε τὸ κλάσμα $\frac{8}{8}$ μέτρα. Διαιροῦμε τὸν παρονομαστή του 8 διὰ 2. Τὸ κλάσμα θὰ γίνῃ $\frac{8}{4}$ μέτρα. Τὸ κλάσμα $\frac{8}{4}$ μέτρα εἶναι δυὸ φορὲς μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{8}{8}$ μέτρα. Γιατὶ ἐνῶ εἴχαμε 8 ὄγδοα τοῦ μέτρου, δηλ. ἕνα μέτρο, τώρα ἔχομε 8 τέταρτα τοῦ μέτρου, δηλ. 2 μέτρα.

Ὥστε τὸ κλάσμα $\frac{8}{8}$ ἔγινε 2 φορὲς μεγαλύτερο, γιατὶ διαιρέσαμε τὸν παρονομαστή του 8 διὰ τοῦ 2, δηλ. ἔτσι:

$$\frac{8}{8:2} = \frac{8}{4}.$$

Παράδειγμα 4. Ἔχομε τὸ κλάσμα $\frac{6}{6}$ τῆς δωδεκάδας. Διαιροῦμε τὸν παρονομαστή του 6 διὰ 3. Τὸ κλάσμα θὰ γίνῃ $\frac{6}{2}$. Τὸ κλάσμα $\frac{6}{2}$ ἔγινε τρεῖς φορὲς μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{6}{6}$, γιατὶ ἐνῶ εἴχαμε μόνο 6 ἕκτα τῆς δωδεκάδας, δηλαδὴ μιὰ δωδεκάδα, τώρα ἔχομε 6 δεύτερα τῆς δωδεκάδας, δηλαδὴ 3 δωδεκάδες.

Ὥστε: τὸ κλάσμα $\frac{6}{6}$ ἔγινε 3 φορὲς μεγαλύτερο $\left(\frac{6}{2}\right)$, γιατὶ διαιρέσαμε τὸν παρονομαστή του 6 διὰ τοῦ 3. Δηλαδὴ ἔτσι:

$$\frac{6}{6:3} = \frac{6}{2}.$$

Συμπέρασμα. *Ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος μεγαλώνει τόσες φορές, ὅσες φορὲς διαιρεῖται ὁ παρονομαστής του.*

Γενικὸ συμπέρασμα. *Ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος μεγαλώνει τόσες φο-*

ρές, ὅσες φορὲς πολλαπλασιάζεται ὁ ἀριθμητής του ἢ διαιρεῖται ὁ παρονομαστής του.

Ἀσκήσεις

1. Μεγαλῶστε τὰ παρακάτω κλάσματα ἀπὸ τὸν ἀριθμητή τους 2, 3, 4, 5 φορές. $\frac{1}{2}$ μέτρα, $\frac{3}{6}$ κιλά, $\frac{2}{4}$ ὧρες, $\frac{2}{7}$ ἑβδομάδες, $\frac{9}{30}$ μῆνες.

2. Μεγαλῶστε τὰ παρακάτω κλάσματα ἀπὸ τὸν παρονομαστή τους 2, 4 φορές. $\frac{2}{8}$ μέτρα, $\frac{4}{16}$ κιλά, $\frac{15}{60}$ ὧρες, $\frac{10}{100}$ μέτρα, $\frac{3}{12}$ δωδεκ.

3. Ἐξηγῆστε, πῶς μεγαλώσατε τὰ κλάσματα αὐτά.

4. Γράψτε στὸ τετράδιό σας ποιὸ εἶναι μεγαλύτερο σὲ κάθε ὁμάδα ἀπὸ τὰ παρακάτω κλάσματα καὶ γιατί:

α) $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{2}{6}$ δωδεκ. β) $\frac{3}{8}$ καὶ $\frac{6}{8}$ μέτρα καὶ γ) $\frac{2}{4}$ καὶ $\frac{2}{8}$ κιλά.

β΄. Πότε μικραίνει ἡ ἀξία ἑνὸς κλάσματος.

Παράδειγμα 1. Ἔχομε τὸ κλάσμα $\frac{4}{8}$ μέτρα. Διαιροῦμε τὸν ἀριθμητή του 4 διὰ 2. Τώρα τὸ κλάσμα θὰ γίνη $\frac{2}{8}$ μέτρα. Φυσικὰ τὸ κλάσμα $\frac{2}{8}$ μέτρα εἶναι 2 φορὲς μικρότερο ἀπὸ τὸ $\frac{4}{8}$ μέτρα, γιατὶ τὰ $\frac{2}{8}$ εἶναι ἕνα τέταρτο τοῦ μέτρου, ἐνῶ τὰ $\frac{4}{8}$ εἶναι μισὸ μέτρο.

Ὥστε τὸ κλάσμα $\frac{4}{8}$ ἔγινε 2 φορὲς μικρότερο $\left(\frac{2}{8}\right)$, γιατὶ διαιρέσαμε τὸν ἀριθμητή του διὰ τοῦ 2. Δηλ. ἔτσι: $\frac{4:2}{8} = \frac{2}{8}$.

Συμπέρασμα. *Ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος μικραίνει τόσες φορές, ὅσες φορὲς διαιρεῖται ὁ ἀριθμητής του.*

Παράδειγμα 2. Ἔχομε τὸ κλάσμα $\frac{2}{2}$ κιλά. Μὲ ἄλλα λόγια ἔχομε ἕνα κιλό, γιατὶ μοιράσαμε τὸ κιλὸ σὲ 2 ἴσα μέρη καὶ πήραμε καὶ τὰ 2 μέρη.

Πολλαπλασιάζομε τὸν παρονομαστὴ 2 ἐπὶ 4. Τώρα τὸ κλάσμα θὰ γίνη

$\frac{2}{8}$. Φυσικὰ τὸ κλάσμα $\frac{2}{8}$ κιλὰ εἶναι 4 φορὲς μικρότερο ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{2}{2}$ κιλά, γιατὶ $\frac{2}{2}$ κιλὰ εἶναι ἕνα κιλὸ (1000 γραμμ.), ἐνῶ $\frac{2}{8}$ κιλὰ εἶναι 250 γραμμάρια.

Ὥστε τὸ κλάσμα $\frac{2}{2}$ κιλὰ ἔγινε 4 φορὲς μικρότερο $\left(\frac{2}{8}\right)$, γιατὶ πολλαπλασιάσαμε τὸν παρονομαστὴ 2 ἐπὶ 4, δηλ. ἔτσι:

$$\frac{2}{2 \times 4} = \frac{2}{8}.$$

Συμπέρασμα. *Ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος μικραίνει τόσες φορές, ὅσες φορὲς πολλαπλασιάζεται ὁ παρονομαστής του.*

Γενικὸ συμπέρασμα. *Ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος μικραίνει τόσες φορές, ὅσες φορὲς πολλαπλασιάζεται ὁ παρονομαστής του ἢ διαιρεῖται ὁ ἀριθμητής του.*

Ἀσκήσεις

1. Κάμετε τὰ παρακάτω κλάσματα 2 καὶ ἔπειτα 4 φορὲς μικρότερα ἀπὸ τὸν ἀριθμητή τους.

$\frac{8}{8}$ μέτρα, $\frac{20}{100}$ μέτρ., $\frac{12}{30}$ μῆν., $\frac{16}{16}$ κιλά.

2. Κάμε τὰ παρακάτω κλάσματα 2, 3, 4 φορὲς μικρότερα ἀπὸ τὸν παρονομαστή τους.

$\frac{1}{2}$ μέτρα, $\frac{3}{8}$ κιλά, $\frac{2}{4}$ ὥρ., $\frac{3}{7}$ ἑβδ., $\frac{4}{30}$ μῆν.

3. Ἐξηγῆστε στὸ τετράδιό σας πῶς μίκραιναν τὰ κλάσματα αὐτά.

γ'. Πότε δὲν ἀλλάζει ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος.

Ἕνα μέτρο ἔχει $\frac{2}{2}$ ἢ $\frac{4}{4}$ ἢ $\frac{8}{8}$. Δηλαδὴ ἢ $\frac{2}{2}$ μέτρ. ποῦμε ἢ $\frac{4}{4}$ ἢ $\frac{8}{8}$ πάντα ἔχομε ἕνα ὁλόκληρο μέτρο. Τὰ κλάσματα $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{4}$ καὶ $\frac{8}{8}$ εἶναι ἰσοδύναμα (ἴσα), ἂν καὶ οἱ ὅροι τους εἶναι διάφοροι.

Οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος $\frac{8}{8}$ εἶναι 2 φορὲς μεγαλύτεροι ἀπὸ τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{4}{4}$ καὶ 4 φορὲς μεγαλύτεροι ἀπὸ τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{2}{2}$. Καὶ οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος $\frac{4}{4}$ εἶναι 2 φορὲς μεγαλύτεροι ἀπὸ τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{2}{2}$. Ὅλα ὅμως τὰ κλάσματα αὐτὰ ἔχουν τὴν ἴδια ἀξία.

Παίρνομε τώρα τὸ κλάσμα $\frac{2}{2}$ καὶ πολλαπλασιάζομε καὶ τοὺς δυὸ ὅρους του ἐπὶ 4. Τὸ κλάσμα θὰ γίνη $\frac{2 \times 4 = 8}{2 \times 4 = 8}$.

Παίρνομε τὸ κλάσμα $\frac{4}{4}$ καὶ πολλαπλασιάζομε καὶ τοὺς δυὸ ὅρους ἐπὶ 2. Τὸ κλάσμα θὰ γίνη $\frac{4 \times 2 = 8}{4 \times 2 = 8}$.

Τὰ κλάσματα $\frac{2}{2}$ καὶ $\frac{4}{4}$ καὶ ὕστερα ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμὸ καὶ τῶν δυὸ ὅρων τους μὲ τὸν ἴ δ ι ο ἀριθμό, δὲν ἄλλαξαν τὴν ἀξία τους. Γιατὶ ὅσες φορὲς τὸ κλάσμα γίνεται μεγαλύτερο μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸ τοῦ ἀριθμητῆ του, ἀμέσως ὕστερα γίνεται 4 φορὲς μικρότερο μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸ τοῦ παρονομαστῆ του.

Τὸ ἴδιο γίνεται καὶ ὅταν διαιρέσωμε καὶ τοὺς δυὸ ὅρους τοῦ κλάσματος μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό. Π. χ. Ἔχομε τὸ κλάσμα $\frac{16}{16}$ κιλά, δηλ. ἕνα κιλό. Διαιροῦμε καὶ τοὺς δυὸ ὅρους διὰ 4.

Τὸ κλάσμα θὰ γίνη $\frac{16 : 4 = 4}{16 : 4 = 4}$, δηλαδὴ ἔχομε πάλι ἕνα κιλό.

Ὥστε ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν ἀλλάζει, ὅταν πολλαπλασιάζωνται ἢ διαιροῦνται καὶ οἱ δύο ὅροι του μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό.

Σημ. Τὰ κλάσματα ποὺ ἔχουν τὴν ἴδια ἀξία (δύναμη), ἂν καὶ ἔχουν διάφορους ὅρους, λέγονται ἰ σ ο δ ύ ν α μ α (ἴσα).

Ἀσκήσεις

1. Πολλαπλασιάστε καὶ τοὺς δυὸ ὅρους ἀπὸ τὰ παρακάτω κλάσματα ἐπὶ 5.

$$\frac{2}{3},\quad \frac{5}{6},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{4}{8},\quad \frac{3}{12},\quad \frac{1}{7},\quad \frac{4}{10},\quad \frac{6}{12},\quad \frac{7}{14},\quad \frac{8}{16},$$

2. Ἄλλαξε ἡ ἀξία τους; Γιατί;

3. Διαιρέστε καὶ τοὺς δυὸ ὅρους ἀπὸ τὰ παρακάτω κλάσματα διὰ 2.

$$\frac{2}{2},\quad \frac{4}{4},\quad \frac{4}{8},\quad \frac{6}{12},\quad \frac{8}{10},\quad \frac{12}{12}.$$

4. Ἄλλαξε ἡ ἀξία τους; Γιατί;

5. Νὰ βρεθοῦν τὰ ἰσοδύναμα τῶν παρακάτω κλασμάτων μὲ ὅρους 2 φορὲς μεγαλύτερους.

$$\frac{1}{2},\quad \frac{2}{4},\quad \frac{4}{8},\quad \frac{6}{12}.$$

6. Νὰ βρεθοῦν τὰ ἰσοδύναμα τῶν παρακάτω κλασμάτων μὲ ὅρους 4 φορὲς μεγαλύτερους.

$$\frac{4}{6},\quad \frac{8}{12},\quad \frac{16}{16},\quad \frac{4}{4},\quad \frac{8}{8}.$$

7. Γράψτε 5 κλάσματα ἴσα (ἰσοδύναμα) μὲ τὸ $\frac{2}{3}$.

8. Νὰ βρῆτε ποιό ἀπὸ τὰ παρακάτω κλάσματα εἶναι μικρότερο:

$$\frac{2}{4},\quad \frac{4}{8},\quad \frac{5}{10},\quad \frac{16}{32}.$$

9. Νὰ βρῆτε ποιό κλάσμα ἀνὰ δύο ἀπὸ τὰ παρακάτω εἶναι μεγαλύτερο καὶ πόσο; α΄. $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{6}$, β΄. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, γ΄. $\frac{4}{10}$, $\frac{4}{5}$, δ΄. $\frac{3}{20}$, $\frac{3}{10}$.

10. Πόσες φορὲς μεγαλύτερο εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{1}{4}$ ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{1}{20}$;

11. Νὰ κάμετε τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{3}{7}$, 5 φορὲς μεγαλύτερα ἀπὸ τὸν ἀριθμητή τους.

12. Νὰ κάμετε τὰ κλάσματα $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{8}{12}$, 2 φορὲς μεγαλύτερα καὶ μὲ τοὺς δυὸ τρόπους.

13. Νὰ κάμετε τὰ κλάσματα $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{12}{16}$, $\frac{16}{20}$, 4 φορὲς μικρότερα καὶ μὲ τοὺς δυὸ τρόπους.

14. Πόσες φορὲς τὸ κλάσμα $\frac{3}{16}$ εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{9}{16}$;

15. Ἁπλοποίηση τῶν κλασμάτων

Σύμφωνα μὲ τὰ παραπάνω μποροῦμε νὰ μικρύνωμε τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος, χωρὶς ν' ἀλλάξῃ ἡ ἀξία του, ἂν διαιρέσωμε ἀκριβῶς καὶ τοὺς δυὸ ὅρους του μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό. Μ' αὐτὸ τὸν τρόπο βρίσκομε τὸ ἰσοδύναμο κλάσμα μὲ μικρότερους ὅρους.

Παράδειγμα. Νὰ βρεθῇ τὸ ἰσοδύναμο τοῦ κλάσματος $\frac{16}{32}$ κιλὰ μὲ μικρότερους ὅρους. Πρῶτα θὰ βροῦμε ποιὸς ἀριθμὸς διαιρεῖ ἀκριβῶς καὶ τοὺς δυὸ ὅρους. Στὸ κλάσμα αὐτὸ διαιροῦνται ἀκριβῶς καὶ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 4.

Ἔχομε λοιπὸν $\frac{16:4}{32:4}=\frac{4}{8}$. Τὸ κλάσμα $\frac{4}{8}$ εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ $\frac{16}{32}$ $\left(\frac{16}{32}=\frac{4}{8}\right)$.

Οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος $\frac{4}{8}$ διαιροῦνται πάλι διὰ 4.

Ἔτσι ἔχομε $\frac{4:4}{8:4}=\frac{1}{2}$. Τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$ εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ $\frac{4}{8}$ καὶ μὲ τὸ $\frac{16}{32}$. Γιατί;

Γιατὶ $\frac{1}{2}$ κιλὰ $=500$ γραμμάρια (μισὸ κιλὸ)

$\frac{4}{8}$ κιλὰ $=500$ γραμμάρια (μισὸ κιλὸ)

$\frac{16}{32}$ κιλὰ $=500$ γραμμάρια (μισὸ κιλὸ)

Ἑπομένως τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{16}{32}$ εἶναι ἰσοδύναμα, ἂν καὶ ἔχουν διαφορετικοὺς ὅρους.

Αὐτὸ λέγεται ἁπλοποίηση τῶν κλασμάτων. Μὲ τὴν ἁπλοποίηση εὐκολυνόμαστε στὴν ἐκτέλεση τῶν πράξεων τῶν κλασμάτων, γιατὶ ἔχομε μικρότερους ἀριθμούς (ὅρους).

Συμπέρασμα. *Γιὰ νὰ ἁπλοποιήσωμε ἕνα κλάσμα, βρίσκομε τὸν ἀριθμό, ποὺ διαιρεῖ ἀκριβῶς καὶ τοὺς δυὸ ὅρους τοῦ κλάσματος. Ἂν οἱ ὅροι τοῦ νέου κλάσματος διαιροῦνται καὶ πάλι ἀκριβῶς μὲ ἄλλον ἀριθμό, ἐξακολουθοῦμε τὴν ἁπλοποίηση.*

Σ η μ: Τὸ κλάσμα, ποὺ δὲν μπορεῖ νὰ ἁπλοποιηθῆ, λέγεται ἀ ν ά γ ω γ ο.

16. Κανόνες διαιρετότητας

Γιὰ νὰ βρίσκωμε μὲ εὐκολία ποιοί ἀριθμοὶ διαιροῦνται ἀκριβῶς, δηλ. χωρὶς νὰ ἀφήνουν ὑπόλοιπο, ἔχομε τοὺς παρακάτω κανόνες, ποὺ τοὺς λέμε κ α ν ό ν ε ς δ ι α ι ρ ε τ ό τ η τ α ς.

1. Διὰ τοῦ 2 διαιροῦνται ἀκριβῶς ὅλοι οἱ ἀριθμοί, ποὺ τὸ τελευταῖο τους ψηφίο διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 2.

Π.χ. 12 : 2=6   58 : 2=29   374 : 2=187.

2. Διὰ τοῦ 3 διαιροῦνται ἀκριβῶς, ὅλοι οἱ ἀριθμοί, ποὺ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τους, κάνουν ἀριθμό, ποὺ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 3.

Π.χ. ὁ ἀριθμὸς 2034 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 3, γιατὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του 2+3+4 κάμνει τὸν ἀριθμὸ 9, ποὺ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 3. Ἔτσι 2034 : 3=678.

3. Διὰ τοῦ 4 διαιροῦνται ἀκριβῶς ὅλοι οἱ ἀριθμοί, ποὺ τὰ δ υ ὸ τ ε λ ε υ τ α ῖ α τ ο υ ς ψ η φ ί α σ χ η μ α τ ί ζ ο υ ν ἀ ρ ι θ μ ό, ποὺ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 4.

Π.χ. ὁ ἀριθμὸς 2616 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 4, γιατὶ τὰ δυὸ τελευταῖα του ψηφία σχηματίζουν τὸν ἀριθμὸ 16, ποὺ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 4. Ἔτσι 2616 : 4=654.

4. Διὰ τοῦ 5 διαιροῦνται ἀκριβῶς ὅλοι οἱ ἀριθμοί, ποὺ τελειώνουν σὲ 0 ἢ σὲ 5.

Π.χ.   250 : 5=50   3135 : 5=627.

5. Διὰ τοῦ 9 διαιροῦνται ἀκριβῶς ὅλοι οἱ ἀριθμοί, ποὺ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τους διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 9.

Π.χ. ὁ ἀριθμὸς 783 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 9, γιατὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του 7+8+3 κάμνει τὸν ἀριθμὸ 18, ποὺ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 9. Ἔτσι 783 : 9=87.

6. Διὰ τοῦ 10 διαιροῦνται ἀκριβῶς ὅλοι οἱ ἀριθμοί, ποὺ τελειώνουν σ' ἕνα τουλάχιστο μηδενικό, διὰ τοῦ 100, ὅλοι ὅσοι τελειώνουν σὲ 2 τουλάχιστο μηδενικά, διὰ τοῦ 1000 ὅλοι ὅσοι τελειώνουν σὲ 3 τουλάχιστο μηδενικὰ κλπ.

Π.χ. 90 : 10=9 300 : 100=3 5000 : 1000=5.

7. Διὰ τοῦ 25 διαιροῦνται ἀκριβῶς ὅλοι οἱ ἀριθμοί, ποὺ τὰ δυὸ τελευταῖα ψηφία τους σχηματίζουν ἀριθμό, ποὺ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 25.

Π.χ. ὁ ἀριθμὸς 3275 : 25 = 131.

Ἀσκήσεις

1 Βρῆτε μὲ ποιούς ἀριθμοὺς διαιροῦνται ἀκριβῶς οἱ παρακάτω ἀριθμοὶ καὶ διαιρέστε τους.

1)	8	22	132	2187
2)	51	315	423	4248
3)	12	316	628	4932
4)	25	145	250	6000
5)	15	325	414	3123
6)	80	750	800	9300
7)	275	3475	3423	8250

2. Βρῆτε ἀνὰ 5 ἀριθμούς, ποὺ νὰ διαιροῦνται ἀκριβῶς μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 2, 8, 4, 5, 9, 10, 100, 25.

3. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ παρακάτω κλάσματα καὶ νὰ βρεθοῦν τὰ ἰσοδύναμά τους.

$\frac{30}{60}$ τῆς ὥρας, $\frac{25}{30}$ τοῦ μήνα, $\frac{325}{1000}$ τοῦ κιλοῦ, $\frac{10}{24}$ τοῦ ἡμερονυκτ.

4. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ παρακάτω κλάσματα:

$$\frac{8}{24}, \frac{142}{2186}, \frac{324}{4239}, \frac{54}{315}, \frac{12}{316}, \frac{628}{4932}, \frac{25}{145}, \frac{80}{750}, \frac{800}{9320}, \frac{273}{3475}.$$

17 Γενικὴ ἀνακεφαλαίωση

1. Τί λέγεται ἀκέραια καὶ τί κλασματικὴ μονάδα;
2. Τί λέγεται ἀκέραιος καὶ τί κλασματικὸς ἀριθμός;

3. Πῶς γράφομε καὶ πῶς διαβάζομε τὰ κλάσματα;

4. Πῶς λέγονται ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς μὲ ἕνα ὄνομα;

5. Ποιά κλάσματα λέγονται γνήσια, ποιά ἴσα μὲ τὴν ἀκέραια μονάδα καὶ ποιά καταχρηστικά;

6. Ποιός ἀριθμὸς λέγεται μικτός;

7. Πῶς τρέπεται ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς σὲ ἰσοδύναμο κλάσμα;

8. Πῶς τρέπεται ὁ μικτὸς ἀριθμὸς σὲ κλάσμα;

9. Πῶς ἐξάγονται οἱ ἀκέραιες μονάδες ἀπὸ τὰ καταχρηστικὰ κλάσματα;

10. Πότε μεγαλώνει ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος;

11. Πότε μικραίνει ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος;

12. Πότε δὲν ἀλλάζει ἡ ἀξία του, ἂν καὶ μεγαλώνουν ἢ μικραίνουν οἱ ὅροι του;

13. Τί λέγεται ἁπλοποίηση τῶν κλασμάτων;

14. Γιατί γίνεται ἡ ἁπλοποίηση τῶν κλασμάτων;

15. Πότε ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 2; διὰ τοῦ 3; διὰ τοῦ 4; διὰ τοῦ 5; διὰ τοῦ 9; διὰ τοῦ 10; διὰ τοῦ 100; διὰ τοῦ 1000; διὰ τοῦ 25;

18. Ὁμώνυμα καὶ ἑτερώνυμα κλάσματα

Παράδειγμα

α΄. $\frac{2}{5}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{4}{5},$ γ΄. $\frac{1}{3}, \quad \frac{2}{7}, \quad \frac{5}{6}$

β΄. $\frac{5}{8}, \quad \frac{6}{8}, \quad \frac{3}{8},$ δ΄. $\frac{3}{10}, \quad \frac{4}{9}, \quad \frac{8}{16}$

Τὰ κλάσματα τῶν δυὸ πρώτων ὁμάδων (α΄. καὶ β΄.) ἔχουν τὸν ἴδιο παρονομαστὴ καὶ γι᾿ αὐτὸ λέγονται ὁ μ ώ ν υ μ α.

Τὰ κλάσματα τῶν δυὸ ἄλλων ὁμάδων (γ΄. καὶ δ΄.) δὲν ἔχουν τὸν ἴδιο παρονομαστὴ καὶ γι᾿ αὐτὸ λέγονται ἑ τ ε ρ ώ ν υ μ α.

Ὥστε: *Ὁμώνυμα λέγονται τὰ κλάσματα, ποὺ ἔχουν τὸν ἴδιο παρονομαστὴ καὶ ἑτερώνυμα ἐκεῖνα, ποὺ ἔχουν διάφορο (ὄχι τὸν ἴδιο) παρονομαστή.*

19. Τροπὴ δυὸ ἑτερωνύμων κλασμάτων σέ ὁμώνυμα

Σὲ πολλὲς περιπτώσεις εἴμαστε ἀναγκασμένοι νὰ τρέπωμε τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα σὲ ὁμώνυμα.

Παράδειγμα. Ἡ Καίτη ἀγόρασε $\frac{2}{5}$ τοῦ μέτρου κορδέλλα καὶ ἡ φίλη της Ἑλένη $\frac{4}{7}$. Ποιὰ ἀπὸ τὶς δυὸ φίλες πῆρε περισσότερη κορδέλλα;

Γιὰ νὰ τὸ βροῦμε, πρέπει νὰ τρέψωμε τὰ κλάσματα $\frac{2}{5}$ καὶ $\frac{4}{7}$ σὲ ὁμώνυμα. Γιὰ νὰ γίνη αὐτὸ [πολλαπλασιάζομε τοὺς δυὸ ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος $\left(\frac{2}{5}\right)$ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴ 7 τοῦ δευτέρου κλάσματος καὶ βρίσκομε τὸ κλάσμα $\left(\frac{2\times7}{5\times7}\right) = \frac{14}{35}$. Τὸ κλάσμα $\frac{14}{35}$ εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ $\frac{2}{5}$ γιατί, ὅπως εἴπαμε, δὲν ἀλλάζει ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος, ὅταν πολλαπλασιάζωμε καὶ τοὺς δυὸ ὅρους τοῦ κλάσματος μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό.

Κατόπιν πολλαπλασιάζομε τοὺς δυὸ ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος $\frac{4}{7}$ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴ 5 τοῦ πρώτου κλάσματος καὶ βρίσκομε τὸ κλάσμα $\left(\frac{4\times5}{7\times5}\right) = \frac{20}{35}$. Ἔτσι ἔχομε τώρα τὰ κλάσματα $\frac{14}{35}$ καὶ $\frac{20}{35}$ ποὺ εἶναι ἰσοδύναμα μὲ τὰ κλάσματα $\frac{2}{5}$ καὶ $\frac{4}{7}$ καὶ ὁμώνυμα. Φυσικὰ ἡ φίλη τῆς Καίτης ἀγόρασε τὴν περισσότερη κορδέλλα.

Ὥστε: *Ὅταν ἔχωμε νὰ τρέψωμε σὲ ὁμώνυμα δυὸ ἑτερώνυμα κλάσματα, πολλαπλασιάζομε τοὺς δυὸ ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστὴ τοῦ δευτέρου κλάσματος καὶ τοὺς δυὸ ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστὴ τοῦ πρώτου κλάσματος.*

20. Τροπὴ τριῶν ἢ περισσοτέρων ἑτερωνύμων κλασμάτων σὲ ὁμώνυμα

Παράδειγμα. Ἔχομε τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$. Πῶς θὰ τὰ τρέψωμε σὲ ὁμώνυμα; Στὸ παράδειγμά μας τὰ κλάσματα εἶναι 3. Πρέπει νὰ βροῦμε ἕναν ἀριθμὸ γιὰ κάθε κλάσμα καὶ μ' αὐτὸν νὰ πολλαπλασιάσωμε καὶ τοὺς δυὸ ὅρους του. Ὡς τέτοιον ἀριθμὸ παίρνομε τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν τῶν δυὸ ἄλλων κλασμάτων. Δηλαδή:

Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος $\frac{1}{2}$, παίρνομε τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν τῶν δυὸ ἄλλων κλασμάτων, δηλ. $3 \times 4 = 12$.

Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος $\frac{2}{3}$, παίρνομε τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν τῶν δυὸ ἄλλων κλασμάτων., δηλ. $2 \times 4 = 8$.

Καὶ γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε τοὺς ὅρους τοῦ τρίτου κλάσματος $\frac{3}{4}$, παίρνομε τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν τῶν δυὸ ἄλλων κλασμάτων, δηλ. $2 \times 3 = 6$.

Τὰ γράφομε ἔτσι:

$$\overset{12}{\frown}\frac{1}{2} \quad \overset{8}{\frown}\frac{2}{3} \quad \overset{6}{\frown}\frac{3}{4} = \frac{12}{24}, \frac{16}{24}, \frac{18}{24}.$$

Τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{3}{4}$ ἔγιναν ὁμώνυμα $\frac{12}{24}$, $\frac{16}{24}$, $\frac{18}{24}$, χωρὶς νὰ ἀλλάξη ἡ ἀξία τους, γιατὶ πολλαπλασιάσθηκαν καὶ οἱ δυὸ ὅροι τους μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο γίνονται ὁμώνυμα καὶ περισσότερα ἀπὸ τρία ἑτερώνυμα κλάσματα.

Ὥστε: *Γιὰ νὰ τρέψωμε σὲ ὁμώνυμα τρία ἢ περισσότερα ἑτερώνυμα κλάσματα πολλαπλασιάζομε τοὺς ὅρους κάθε κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων.*

21 Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων σὲ ὁμώνυμα μὲ τὸ ἐλάχιστο κοινὸ πολλαπλάσιο (Ε. Κ. Π.)

α΄. Τί εἶναι ἐλάχιστο κοινὸ πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.)

Ὁ ἀριθμὸς 20 εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 10, γιατὶ γίνεται ἀπ᾽ αὐτόν, ὅταν τὸν πολλαπλασιάσωμε ἐπὶ 2 ($10 \times 2 = 20$). Ἐπίσης καὶ οἱ ἀριθμοὶ 30, 40, 50 κλπ. εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 10, γιατὶ γίνονται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ αὐτὸν (10), ὅταν τὸν πολλαπλασιάσωμε ἐπὶ 3, 4, 5 κλπ. ($10 \times 3 = 30$, $10 \times 4 = 40$, $10 \times 5 = 50$ κλπ.

Πολλαπλάσια ἐπίσης τοῦ ἀριθμοῦ 4 εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 8, 12, 16, 20 κλπ., γιατὶ γίνονται ἀπ' αὐτόν, ὅταν τὸν πολλαπλασιάσωμε ἐπὶ 2 ($4 \times 2 = 8$), ἐπὶ 3 ($4 \times 3 = 12$), ἐπὶ 4 ($4 \times 4 = 16$), ἐπὶ 5 ($4 \times 5 = 20$).

Πολλὲς φορὲς πάλι ἕνας ἀριθμὸς εἶναι κοινὸ πολλαπλάσιο πολλῶν ἀριθμῶν. Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 16 εἶναι κοινὸ πολλαπλάσιο τῶν ἀριθμῶν 2, 4, 8, ($2 \times 8 = 16$, $4 \times 4 = 16$, $8 \times 2 = 16$).

Ἐπίσης οἱ ἀριθμοὶ 16, 24, 32, 40 κλπ., εἶναι κοινὰ πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν 2, 4, 8. Ἀπὸ τὰ κοινὰ αὐτὰ πολλαπλάσια ὁ ἀριθμὸς 16, ποὺ εἶναι ὁ μικρότερος (ἐλάχιστος) λέγεται στὴν ἀριθμητικὴ ἐλάχιστο κοινὸ πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) τῶν ἀριθμῶν 2, 4, 8.

Ὥστε: *Ἐλάχιστο κοινὸ πολλαπλάσιο δυὸ ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται τὸ μικρότερο ἀπὸ τὰ κοινὰ πολλαπλάσιά τους.*

β'. Πῶς βρίσκομε τὸ Ε. Κ. Π.

Ε.Κ.Π. δυὸ ἢ περισσότερων ἀριθμῶν εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀπ' αὐτούς, ἂν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τῶν ἄλλων. Στὴν περίπτωση ποὺ δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τῶν ἄλλων ὁ μεγαλύτερος ἀπ' αὐτούς, τότε τὸν διπλασιάζομε, τὸν τριπλασιάζομε, κλπ. ὥσπου νὰ βροῦμε ἕναν ἀριθμό, ποὺ νὰ διαιρεῖται ἀκριβῶς ἀπὸ ὅλους. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν.

Παράδειγμα 1. Ποιό εἶναι τὸ Ε. Κ. Π. τῶν ἀριθμῶν 2, 4, 8;

Ὁ ἀριθμὸς 8 (ὁ μεγαλύτερος) διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τῶν ἄλλων ἀριθμῶν (2 καὶ 4), συνεπῶς Ε. Κ. Π. τῶν ἀριθμῶν 2, 4, 8 εἶναι ὁ ἀριθμὸς 8.

Παράδειγμα 2. Ποιό εἶναι τὸ Ε. Κ. Π. τῶν ἀριθμῶν 2, 4, 6;

Ὁ ἀριθμὸς 6, ποὺ εἶναι ὁ μεγαλύτερος, δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τῶν ἄλλων δύο. Τὸν διπλασιάζομε καὶ γίνεται 12.

Ὁ ἀριθμὸς 12 διαιρεῖται ἀκριβῶς ἀπὸ ὅλους (2, 4, 6). Συνεπῶς Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν 2, 4, 6 εἶναι ὁ ἀριθμὸς 12.

Μὲ τὴ βοήθεια τοῦ Ε.Κ.Π. μποροῦμε νὰ τρέψωμε σὲ ὁμώνυμα δυὸ ἢ περισσότερα κλάσματα.

Παράδειγμα: Νὰ τραποῦν μὲ τὸ Ε. Κ. Π. σὲ ὁμώνυμα τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{6}$. Βρίσκομε πρῶτα τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν τῶν κλασμάτων, ποὺ μᾶς δόθηκαν, δηλ. τῶν ἀριθμῶν 2, 4, 6. Παίρνομε τὸ μεγαλύτερο ἀπὸ τοὺς παρονομαστές, δηλαδὴ τὸν 6, ποὺ δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς ἀπὸ τοὺς ἄλλους δυό. Τὸ διπλασιάζομε καὶ γίνεται 12. Ὁ ἀριθμὸς 12 διαιρεῖται ἀκριβῶς ἀπὸ ὅλους (2, 4, 6) καὶ εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. αὐτῶν. Διαιροῦμε κατόπιν τὸν 12 διὰ τῶν παρονομαστῶν (2, 4, 6) καὶ βρίσκομε τὰ πηλίκα 6, 3, 2, ποὺ γράφομε τὸ καθένα ἐπάνω ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχο κλάσμα ἔτσι:

$$\overbrace{\frac{1}{2}}^{6}, \quad \overbrace{\frac{3}{4}}^{3}, \quad \overbrace{\frac{4}{6}}^{2}.$$

Τέλος πολλαπλασιάζομε καὶ τοὺς δυὸ ὅρους κάθε κλάσματος ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχο πηλίκον καὶ τὰ κλάσματα γίνονται ὁμώνυμα.

Ἡ πράξη γίνεται ἔτσι: **Ε. Κ. Π. 12.**

$$\overbrace{\frac{1}{2}}^{6}, \quad \overbrace{\frac{3}{4}}^{3}, \quad \overbrace{\frac{4}{6}}^{2} = \frac{6}{12}, \frac{9}{12}, \frac{8}{12}.$$

Ἀσκήσεις.

1. Νὰ τρέψτε σὲ ὁμώνυμα τὰ παρακάτω κλάσματα:

α΄. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4},$ β΄. $\frac{5}{6}, \frac{2}{7},$ γ΄. $\frac{7}{8}, \frac{3}{10},$

2. Ἐπίσης νὰ τρέψτε σὲ ὁμώνυμα τὰ παρακάτω κλάσματα:

α΄. $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2},$ β΄. $\frac{5}{8}, \frac{7}{9}, \frac{2}{6},$ γ΄. $\frac{3}{7}, \frac{4}{5}, \frac{2}{6},$

δ΄. $\frac{1}{5}, \frac{4}{6}, \frac{3}{8},$ ε΄. $\frac{1}{3}, \frac{4}{6}, \frac{3}{8}, \frac{3}{5},$

3. Νὰ τρέψτε σὲ ὁμώνυμα τὰ παρακάτω κλάσματα μὲ τὸ Ε.Κ.Π.

α΄. $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2},$ β΄. $\frac{4}{5}, \frac{2}{6}, \frac{1}{3},$ γ΄. $\frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{4}{10},$

4. Νὰ τραποῦν σὲ ὁμώνυμα καὶ μὲ τοὺς δυὸ τρόπους τὰ παρακάτω κλάσματα:

α΄. $\frac{2}{3}, \frac{3}{8}, \frac{1}{6},$ β΄. $\frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{3}{8},$

γ΄. $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{6}{10},$ δ΄. $\frac{3}{4}, \frac{2}{6}, \frac{1}{3}.$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ΄.

ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

1. Πρόσθεση τῶν κλασμάτων

α΄. Πρόσθεση ὁμωνύμων κλασμάτων

Παράδειγμα 1. Ἕνας μικροπωλητὴς ἔπιασε νὰ βρῆ πόσα μέτρα κορδέλλα πούλησε σήμερα. Ἔγραψε $\frac{2}{10}$ μέτρα στὴν Καίτη, $\frac{4}{10}$ μέτρα στὴν κυρὰ-Λένη καὶ $\frac{3}{10}$ μέτρα στὴν Ἄννα.

Ὕστερα λογάριασε δυὸ δέκατα καὶ τέσσερα δέκατα καὶ τρία δέκατα κάνουν ἐννέα δέκατα.

Βρῆκε λοιπόν, ὅτι πούλησε σήμερα $\frac{9}{10}$ μέτρα κορδέλλα. Πῶς ἔκαμε τὸ λογαριασμό του ὁ μικροπωλητής;

Πρόσθεσε τοὺς ἀριθμοὺς $2+4+3$, δηλ. πρόσθεσε τοὺς ἀριθμητὲς τῶν κλασμάτων $\frac{2}{10}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{3}{10}$, τὸ ἄθροισμά τους τὸ ἔβαλε ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ ἄφησε τὸν ἴδιο (10). Τὰ κλάσματα στὸ παράδειγμα αὐτὸ εἶναι ὁ μ ώ ν υ μ α. Νὰ πῶς ἔγινε ἡ πράξη:

$$\frac{2}{10}+\frac{4}{10}+\frac{3}{10}=\frac{9}{10} \text{ μέτρα.}$$

Παράδειγμα 2. Στὸ πρωϊνὸ συσσίτιο τοῦ σχολείου τὴ μιὰ μέρα χρειάσθηκαν γιὰ τὸ γάλα $\frac{7}{25}$ κιλὰ σοκολάτα, τὴν ἄλλη $\frac{8}{25}$ κιλὰ καὶ τὴν τρίτη $\frac{6}{25}$ κιλά. Πόσα κιλὰ σοκολάτα χρειάσθηκαν γιὰ τὶς 3 μέρες;

Γιὰ νὰ τὸ βροῦμε προσθέτομε τὰ $7+8+6$ εἰκοστὰ πέμπτα τοῦ κιλοῦ καὶ βρίσκομε $\frac{21}{25}$ κιλὰ σοκολάτα.

Καὶ στὸ πρόβλημα αὐτὸ προσθέσαμε τοὺς ἀριθμητὲς τῶν κλασμάτων

$\frac{7}{25}+\frac{8}{25}+\frac{6}{25}$, τὸ ἄθροισμά τους τὸ βάλαμε ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ ἀφήσαμε τὸν ἴδιο (25). Καὶ στὸ πρόβλημα αὐτὸ τὰ κλάσματα εἶναι ὁ μ ώ ν υ μ α.

Ὥστε: *Γιὰ νὰ προσθέσωμε ὁμώνυμα κλάσματα, προσθέτομε τοὺς ἀριθμητές, τὸ ἄθροισμά τους βάνομε ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ ἀφήνομε τὸν ἴδιο.*

Προβλήματα.

1. Ἡ Τούλα εἶχε $\frac{2}{10}$ τοῦ δεκάδραχμου. Ὁ πατέρας τῆς ἔδωσε ἄλλα $\frac{4}{10}$ τοῦ δεκάδραχμου καὶ ἡ μητέρα της $\frac{3}{10}$ τοῦ δεκάδραχμου. Πόσα δέκατα τοῦ δεκάδραχμου ἔχει τώρα ἡ Τούλα; Πόσες δραχμὲς κάνουν;

2. Ὁ Κώστας εἶχε $\frac{1}{2}$ τῆς δωδεκάδ. μολύβια, τοῦ χάρισε καὶ ὁ φίλος του $\frac{3}{2}$ τῆς δωδεκάδ. Πόσα δεύτερα τῆς δωδεκάδας ἔχει τώρα; Πόσα μολύβια κάνουν;

3. Μιὰ μητέρα ἔδωσε στὸ ἕνα παιδί της $\frac{4}{10}$ τοῦ δεκάδραχμου, στὸ ἄλλο $\frac{3}{10}$ τοῦ δεκάδραχμου καὶ στὸ τρίτο $\frac{2}{10}$ τοῦ δεκάδραχμου. Πόσες δραχμὲς ἔδωσε στὰ τρία παιδιά της;

4. Μιὰ πλάκα σοκολάτα εἶναι χωρισμένη σὲ δωδέκατα. Ὁ Κώστας ἔφαγε $\frac{5}{12}$ τῆς σοκολάτας, ἡ Καίτη $\frac{3}{12}$ τῆς σοκολάτας καὶ ὁ Θοδωράκης $\frac{4}{12}$ τῆς σοκολάτας. Πόσα δωδέκατα τῆς σοκολάτας ἔφαγαν καὶ οἱ τρεῖς μαζί;

5. Ἀπὸ ἕνα μέτρο κορδέλλα ἡ Ἑλένη πῆρε $\frac{3}{10}$ μέτρ., ἡ Πόπη $\frac{4}{10}$ μέτρ. καὶ ἡ Ἕλλη $\frac{2}{10}$ μέτρ. Πόσα δέκατα τοῦ μέτρου πῆραν καὶ οἱ τρεῖς μαζί;

'Ασκήσεις.

Προσθέστε τὰ παρακάτω κλάσματα:

α) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = ;$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = ;$

$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = ;$

$\frac{4}{9} + \frac{4}{9} = ;$

β) $\frac{4}{8} + \frac{3}{8} + \frac{7}{8} = ;$ μέτρα

$\frac{11}{12} + \frac{8}{12} + \frac{7}{12} = ;$ χρόνια

$\frac{9}{24} + \frac{13}{24} + \frac{8}{24} = ;$ ἡμερον.

$\frac{3}{7} + \frac{5}{7} + \frac{4}{7} = ;$ ἑβδομάδ.

Κάντε καὶ σεῖς ὅμοια προβλήματα μὲ ὁμώνυμα κλάσματα.

β'. Πρόσθεση ἑτερωνύμων κλασμάτων

Παράδειγμα. Μιὰ μαθήτρια ἀγόρασε $\frac{1}{2}$ μέτρ. ὕφασμα. Μιὰ ἄλλη $\frac{3}{4}$ μέτρ. ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα καὶ τρίτη $\frac{7}{8}$ μέτρ. Πόσα μέτρα ὕφασμα ἀγόρασαν καὶ οἱ τρεῖς μαθήτριες;

Γιὰ νὰ βροῦμε πόσα μέτρα ὕφασμα ἀγόρασαν, θὰ κάνωμε πρόσθεση. Θὰ προσθέσωμε τὰ κλάσματα

$$\frac{1}{2}\text{ μέτρ.} + \frac{3}{4}\text{ μέτρ.} + \frac{7}{8}\text{ μέτρ.}$$

Τὰ κλάσματα αὐτὰ εἶναι ἑτερώνυμα. Θὰ τὰ κάνωμε πρῶτα ὁμώνυμα.

Σύμφωνα μὲ ὅσα μάθαμε, θὰ βροῦμε τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν τῶν δυὸ ἄλλων κλασμάτων καὶ θὰ πολλαπλασιάσωμε μ' αὐτὸ τοὺς ὅρους κάθε κλάσματος. Ἡ διάταξη γίνεται ἔτσι:

$$4 \times 8 = 32 \qquad 2 \times 8 = 16 \qquad 2 \times 4 = 8$$

$$\overset{32}{\frown}\!\!\frac{1}{2}\text{ μέτ.} + \overset{16}{\frown}\!\!\frac{3}{4}\text{ μέτ.} + \overset{8}{\frown}\!\!\frac{7}{8}\text{ μέτ.} = \frac{32}{64}\text{ μέτ.} + \frac{48}{64}\text{ μέτ.} + \frac{56}{64}\text{ μέτ.} = \frac{136}{64}\text{ μέτ.}$$

'Αφοῦ τὰ κλάσματα ἔγιναν ὁμώνυμα, προσθέσαμε τοὺς ἀριθμητὲς καὶ βρήκαμε 136, αὐτὸ τὸ βάλαμε ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ ἀφήσαμε τὸν ἴδιο (64).

Σημ. 'Επειδὴ τὸ κλάσμα αὐτὸ εἶναι καταχρηστικό, βγάζομε τὶς ἀκέραιες μονάδες, διαιρώντας τὸν ἀριθμητὴ μὲ τὸν παρονομαστή, δηλαδή:

$\frac{136}{64}$ μέτρ. $= 2\frac{8}{64}$ μέτρ. $= 2\frac{1}{8}$ μέτρα ὕφασμα ἀγόρασαν καὶ οἱ τρεῖς μαθήτριες.

᾿Ασκήσεις

Νὰ προστεθοῦν τὰ παρακάτω κλάσματα κατὰ ὁμάδες.

α΄. $\frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5}$, β΄. $\frac{5}{6} + \frac{2}{7} + \frac{3}{5}$

γ΄. $\frac{2}{6} + \frac{3}{8} + \frac{3}{7}$, δ΄. $\frac{4}{5} + \frac{3}{6} + \frac{1}{8}$

ε΄. $\frac{5}{7} + \frac{7}{9} + \frac{3}{4}$, στ΄. $\frac{4}{8} + \frac{3}{9} + \frac{5}{6}$.

Προβλήματα.

1. Ἕνας ἔμπορος πούλησε σ᾿ ἕνα πελάτη $\frac{1}{2}$ μέτρ. ὕφασμα σὲ ἄλλον $\frac{3}{4}$ μέτρ. καὶ σὲ τρίτον $\frac{5}{2}$ μέτρ. Πόσα μέτρα ὕφασμα πούλησε στοὺς 3 πελάτες ;

2. Ἕνας παντοπώλης πούλησε σήμερα $\frac{3}{4}$ κιλὰ καὶ $\frac{5}{8}$ κιλὰ καὶ $\frac{9}{16}$ κιλὰ ζάχαρη. Πόσα κιλὰ ζάχαρη πούλησε σήμερα ;

3. Ἕνας ἐργάτης ξοδεύει τὴ μέρα γιὰ ἐνοίκιο $\frac{3}{5}$ τοῦ δεκάδραχμου, γιὰ τροφὴ $\frac{9}{5}$ τοῦ δεκάδρ. καὶ γιὰ ἄλλα ἔξοδα $\frac{2}{5}$ τοῦ δεκάδραχ. Πόσες δραχμὲς ξοδεύει ὁ ἐργάτης αὐτὸς τὴν ἡμέρα ;

γ΄. Πρόσθεση μικτῶν ἀριθμῶν

Πρῶτος τρόπος.

Παράδειγμα. Ὁ ὑφασματοπώλης τῆς γειτονιᾶς μας πούλησε σήμερα $8\frac{3}{4}$ μέτρα ὕφασμα στὴν κυρὰ Κούλα, $9\frac{1}{2}$ μέτρα στὴν κυρὰ Χριστίνα καὶ $5\frac{2}{8}$ μέτρα στὴν κυρὰ Παρασκευή. Πόσα μέτρα ὕφασμα πούλησε σήμερα ;

Γιὰ νὰ τὸ βροῦμε, θὰ κάνωμε βέβαια πρόσθεση. Θὰ προσθέσωμε τὰ $8\frac{3}{4} + 9\frac{1}{2} + 5\frac{2}{8}$ μέτρα.

Ἐδῶ ἔχομε νὰ προσθέσωμε μικτοὺς ἀριθμούς. Ἡ πρόσθεση τῶν μικτῶν ἀριθμῶν γίνεται μὲ δυὸ τρόπους.

Μὲ τὸν πρῶτο τρόπο θὰ προσθέσωμε χωριστὰ τοὺς ἀκέραιους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα:

$$8 \text{ μέτρ.} + 9 \text{ μέτρ.} + 5 \text{ μέτρ. καὶ } \frac{3}{4} \text{ μέτρ.} + \frac{1}{2} \text{ μέτρ.} + \frac{2}{8} \text{ μέτρ.}$$

Κάμνομε μ' ἄλλα λόγια δυὸ προθέσεις. Προσθέτομε πρῶτα τοὺς ἀκέραιους καὶ ἔπειτα τὰ κλάσματα, ὅπως μάθαμε. Γιὰ νὰ μὴ κάνωμε δὲ λάθος, χωρίζομε κάθε πράξη, ποὺ θὰ κάνωμε, μὲ παρένθεση

$$\text{μ έτρ.} + 9 \text{ μέτρ.} + 5 \text{ μέτρ.}) + \left(\frac{3}{4} \text{ μέτρ.} + \frac{1}{2} \text{ μέτρ.} + \frac{2}{8} \text{ μέτρ.}\right)$$

Πρῶτα προσθέτομε τοὺς ἀκέραιους. Τὰ 8 μέτρ.+9μέτρ.+5μέτρ. κάμνουν 22 μέτρ. Κατόπιν προσθέτομε τὰ κλάσματα

$$\left(\frac{3}{4} \text{ μέτρ.} + \frac{1}{2} \text{ μέτρ.} + \frac{2}{8} \text{ μέτρ.}\right)$$

Τὰ κάμνομε πρῶτα ὁ μ ώ ν υ μ α καὶ ἔπειτα τὰ προσθέτομε

$$\frac{\overset{16}{\frown}\!\!3}{4} + \frac{\overset{32}{\frown}\!\!1}{2} + \frac{\overset{8}{\frown}\!\!2}{8} = \frac{48}{64} + \frac{32}{64} + \frac{16}{64} = \frac{96}{64} = 1\frac{4}{8} \text{ μέτρ.}$$

Ὅπως βλέπετε, βρήκαμε δυὸ ἀθροίσματα, 22 μέτρ. καὶ $1\frac{4}{8}$ μέτρα.

Γιὰ νὰ βροῦμε πόσο ὕφασμα ἐπώλησε, πρέπει νὰ ἑνώσωμε τὰ δυὸ ἀθροίσματα. Ἔχομε ὅμως ἕνα ἀκέραιο (22) καὶ ἕνα μικτὸ $\left(1\frac{4}{8}\right)$ Προσθέτομε τοὺς δυὸ ἀκέραιους καὶ στὸ ἄθροισμα γράφομε καὶ τὸ κλάσμα. Ἡ πρόσθεση γίνεται ἔτσι:

$$22 \text{ μέτρα} + 1\frac{4}{8} \text{ μέτρ.} = 23\frac{4}{8} \text{ μέτρα}$$

ὕφασμα πούλησε σήμερα ὁ ὑφασματοπώλης.

Ὥστε: *Γιὰ νὰ προσθέσωμε μικτοὺς ἀριθμούς, προσθέτομε χωριστὰ τοὺς ἀκέραιους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἔπειτα ἑνώνομε τὰ δυὸ ἀθροίσματα.*

Δεύτερος τρόπος.

Τρέπομε τοὺς μικτοὺς σὲ κλάσματα καὶ κατόπιν κάμνομε τὴν πρόσθεση.

Παράδειγμα. Τὸ ἴδιο πρόβλημα.

$$8\frac{3}{4}\text{ μέτρ.}+9\frac{1}{2}\text{ μέτρ.}+5\frac{2}{8}\text{ μέτρ.}=\overset{16}{\frac{35}{4}}\text{ μέτρ.}+\overset{32}{\frac{19}{2}}\text{ μέτρ.}+\overset{8}{\frac{42}{8}}\text{ μέτρ.}$$

$$=\frac{560}{64}\text{ μέτρ.}+\frac{608}{64}\text{ μέτρ.}+\frac{336}{64}\text{ μέτρ.}$$

$$=\frac{1504}{64}\text{ μέτρ.}=23\frac{32}{64}\text{ μέτρ.}=23\frac{4}{8}\text{ μέτρ.}$$

δηλ. βρήκαμε τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα $\left(23\frac{4}{8}\text{ μέτρ.}\right)$, ποὺ βρήκαμε καὶ μὲ τὸν πρῶτο τρόπο.

Ὥστε: *Γιὰ νὰ προσθέσωμε μικτοὺς ἀριθμούς, τοὺς τρέπομε σὲ κλάσματα καὶ κατόπιν προσθέτομε, ὅπως γνωρίζομε.*

Γενικὸ συμπέρασμα.

Γιὰ νὰ προσθέσωμε μικτοὺς ἀριθμούς, προσθέτομε χωριστὰ τοὺς ἀκέραιους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ κατόπιν ἑνώνομε τὰ δυὸ ἀθροίσματα ἢ τρέπομε τοὺς μικτοὺς σὲ κλάσματα καὶ ὕστερα προσθέτομε.

Ἀσκήσεις

1. Προσθέστε τοὺς παρακάτω μικτοὺς ἀριθμούς.

α) $3\frac{1}{3}+6\frac{2}{9}=$ β) $16\frac{4}{5}+7\frac{5}{9}=$ γ) $8\frac{6}{7}+12\frac{4}{5}=$

$4\frac{3}{4}+5\frac{1}{6}$ $25\frac{4}{9}+12\frac{3}{4}=$ $16\frac{4}{10}+8\frac{6}{9}=$

2. Νὰ προσθέστε τοὺς παρακάτω μικτούς:

α) $11\frac{5}{8}$ κιλ. $+ 20\frac{2}{4}$ κιλ. $+ 7\frac{4}{5}$ κιλ. $=$

β) $8\frac{3}{4}$ ὥρ. $+ 6\frac{1}{2}$ ὥρ. $+ 8\frac{2}{4}$ ὥρ. $=$

γ) $36\frac{1}{6}+22\frac{2}{3}+3\frac{1}{6}=$ $37\frac{2}{3}+6\frac{2}{8}+26\frac{4}{6}=$

Προβλήματα.

1. Στὴν ἀποθήκη τοῦ συσσιτίου βρίσκονται δυὸ τσουβάλια μακαρόνια.

Στὸ ἕνα ἔχει $15\frac{3}{4}$ κιλὰ μακαρόνια καὶ στὸ ἄλλο $8\frac{1}{2}$ κιλά. Πόσα κιλὰ μακαρόνια ἔχει στὴν ἀποθήκη τοῦ συσσιτίου ;

2. Ἕνας ὑφασματοπώλης ἀγόρασε ὕφασμα μὲ $62\frac{1}{2}$ δρχ. τὸ μέτρο. Πόσο πρέπει νὰ πουλῇ τὸ μέτρο γιὰ νὰ κερδίζῃ $21\frac{3}{4}$ δρχ. σὲ κάθε μέτρο ;

3. Τρεῖς ἐργάτες σκαψαν μαζὶ ἕνα ἀμπέλι. Ὁ ἕνας ἔσκαψε $23\frac{1}{2}$ τ. μέτρ., ὁ ἄλλος $18\frac{3}{4}$ τ. μέτρ. καὶ ὁ τρίτος $17\frac{75}{100}$ τ. μέτρ. Πόσα τ. μέτρα ἔσκαψαν ὅλοι μαζί ;

4. Ἀπὸ ἕνα τσουβάλι ρύζι πουλήθηκαν $5\frac{3}{4}$ κιλὰ καὶ $7\frac{1}{2}$ κιλά. Ἔμειναν μέσα στὸ τσουβάλι $11\frac{12}{16}$ κιλά. Πόσα κιλὰ ρύζι εἶχε ὅλο τὸ τσουβάλι ;

5. Τὸ Νοέμβριο ὁ πατέρας πλήρωσε γιὰ φῶς $27\frac{3}{4}$ δραχμ., τὸ Δεκέμβριο πλήρωσε $6\frac{1}{5}$ δραχμ. περισσότερα ἀπὸ τὸ Νοέμβριο. Πόσα πλήρωσε τὸ Δεκέμβριο καὶ πόσα καὶ τοὺς δυὸ μῆνες μαζί ;

6. Νὰ κάνετε καὶ σεῖς ὅμοια προβλήματα.

2. Ἡ ἀφαίρεση τῶν κλασμάτων

Ἀφαίρεση ὁμωνύμων κλασμάτων

Παράδειγμα 1. Ἕνας ἔμπορος πούλησε $\frac{9}{10}$ μέτρα κορδέλλα. Ὁλόκληρο τὸ τόπι εἶχε $\frac{25}{10}$ μέτρα κορδέλλα. Πόσα μέτρα κορδέλλα ἔμειναν ἀκόμα στὸ τόπι ;

Θὰ κάμωμε ἀφαίρεση. Ἀπὸ τὰ $\frac{25}{10}$ μέτρα θὰ ἀφαιρέσωμε τὰ $\frac{9}{10}$ μέτρα. Θὰ ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴ 25 τὸν ἀριθμητὴ 9, τὸ ὑπόλοιπο 16 θὰ τὸ γράψωμε ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ θὰ ἀφήσωμε τὸν ἴδιο (10), δηλ. $\frac{25}{10} - \frac{9}{10} = \frac{16}{10}$.

῞Ωστε : *Γιὰ νὰ ἀφαιρέσωμε ὁμώνυμα κλάσματα, ἀφαιροῦμε τὸν ἀριθμητὴ τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴ τοῦ μειωτέου. Τὸ ὑπόλοιπο ποὺ βρίσκομε, τὸ βάνομε ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ ἀφήνομε τὸν ἴδιο.*

Προβλήματα.

1. Ἡ Ἑλένη ἀγόρασε $\frac{7}{10}$ μέτρα κορδέλλα. Ἔδωσε στὴν ἀδελφή της τὰ $\frac{4}{10}$. Πόση κορδέλλα ἔμεινε σ' αὐτή;

2. Ὁ Μίμης εἶχε $\frac{6}{10}$ τοῦ δεκάδραχμου. Πόσο πρέπει νὰ ζητήση ἀκόμα ἀπὸ τὸν πατέρα του γιὰ νὰ ἔχη ἕνα ὁλόκληρο δεκάδραχμο;

3. Ὁ Νίκος ἔχει ἀνάστημα $\frac{115}{100}$ μέτρ., ἡ Ἀνθὴ $\frac{98}{100}$ μέτρ. Πόσα ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου ψηλότερος εἶναι ὁ Νίκος ἀπὸ τὴν Ἀνθή;

4. Ἔχουν περάσει τὰ $\frac{4}{7}$ τῆς ἑβδομάδας. Πόσες μέρες ὑπολείπονται γιὰ νὰ συμπληρωθῆ μιὰ ἑβδομάδα;

5. Σὲ ἕνα σακουλάκι εἶχα $\frac{12}{25}$ κιλὰ ζάχαρη. Ξόδεψα γιὰ τὸ τσάϊ μου $\frac{8}{25}$ κιλά. Πόση ζάχαρη μένει ἀκόμα στὸ σακουλάκι.

Ἀσκήσεις

α'. $\frac{6}{7} - \frac{4}{7} =$	β'. $\frac{16}{20} - \frac{6}{20} =$	γ'. $\frac{28}{16} - \frac{19}{16}$
$\frac{8}{12} - \frac{3}{12} =$	$\frac{24}{30} - \frac{13}{30} =$	$\frac{32}{24} - \frac{18}{24}$

Ἀφαίρεση ἑτερωνύμων κλασμάτων.

Παράδειγμα. Ἕνας μαθητὴς εἶχε $\frac{4}{5}$ τοῦ δεκάδραχμου. Ἀπ' αὐτὰ ξόδεψε τὰ $\frac{6}{10}$ τοῦ δεκάδραχμου. Πόσα τοῦ ἔμειναν;

Γιὰ νὰ τὸ βροῦμε θὰ ἀφαιρέσωμε τὸ κλάσμα $\frac{6}{10}$ τοῦ δεκάδραχ. ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$ τοῦ δεκάδραχμου. Ἐπειδὴ δὲ τὰ κλάσματα εἶναι ἑτερώνυμα, θὰ τὰ τρέψωμε, μὲ τὸ γνωστό μας τρόπο, σὲ ὁμώνυμα καὶ ἔπειτα θὰ κάμωμε τὴν ἀφαίρεση, ὅπως κάμνομε τὴν ἀφαίρεση τῶν ὁμωνύμων κλασμάτων.

$\frac{4}{5} - \frac{6}{10} = \frac{40}{50} = \frac{30}{50} = \frac{10}{50}$ ἢ $\frac{1}{5}$ τοῦ δεκάδραχμου τοῦ ἔμειναν.

Ὥστε: *Ἡ ἀφαίρεση τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων γίνεται, ἀφοῦ πρῶτα τρέψωμε τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα σὲ ὁμώνυμα. Ἔπειτα ἀφαιροῦμε τοὺς ἀριθμητὲς καὶ ἐκεῖνο ποὺ βρίσκομε τὸ βάνομε ἀριθμητή, παρονομαστὴ δὲ ἀφήνομε τὸν ἴδιο.*

Ἀσκήσεις.

Ποιό ἀπὸ τὰ παρακάτω κλάσματα (ἀνὰ δυὸ) εἶναι μικρότερο καὶ πόσο μικρότερο εἶναι;

$$\frac{3}{6} \text{ καὶ } \frac{4}{7}, \quad \frac{2}{4} \text{ καὶ } \frac{3}{8}, \quad \frac{5}{4} \text{ καὶ } \frac{1}{2},$$

$$\frac{7}{8} \text{ καὶ } \frac{5}{6}, \quad \frac{1}{3} \text{ καὶ } \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{5} \text{ καὶ } \frac{5}{7}.$$

1. Ἕνας ὑπάλληλος ξοδεύει τὰ $\frac{2}{10}$ τοῦ μισθοῦ γιὰ ἐνοίκιο, τὸ $\frac{1}{5}$ γιὰ ροῦχα, τὰ $\frac{3}{40}$ γιὰ φωτισμὸ καὶ θέρμανση καὶ τὰ $\frac{10}{20}$ γιὰ τὰ ὑπόλοιπα ἔξοδά του. Τί μέρος τοῦ μισθοῦ του ξοδεύει συνολικὰ ὁ ὑπάλληλος αὐτός;

2. Ἕνας ἐργάτης ἐκτελεῖ τὰ $\frac{5}{8}$ ἑνὸς ἔργου. Ἕνας ἄλλος ἐργάτης ἐκτελεῖ τὸ ὑπόλοιπο. Πόσο μέρος τοῦ ἔργου ἐκτελεῖ ὁ δεύτερος ἐργάτης;

3. Ὁ πατέρας μου χρεωστοῦσε στὸν παντοπώλη ἕνα ποσό. Τοῦ ἔδωκε χθὲς $\frac{1}{3}$ τοῦ ποσοῦ αὐτοῦ καὶ σήμερα τὰ $\frac{2}{5}$. Τί μέρος τοῦ ποσοῦ χρωστάει ἀκόμα;

4. Ἕνας σάκκος ἄδειος ζυγίζει $\frac{3}{4}$ κιλά. Γεμάτος μὲ ἀλεύρι ζυγίζει $\frac{88}{8}$ κιλά. Πόσο καθαρὸ ἀλεύρι χωρεῖ ὁ σάκκος αὐτός.

5. Ἀπὸ μισὸ κιλὸ καφὲ ξοδέψαμε τὰ $\frac{2}{8}$ τοῦ κιλοῦ. Τί μένει;

6. Ἡ Ἔλλη τέλειωσε τὸ ἐργόχειρό της σὲ 3 μέρες. Τὴν πρώτη μέρα δούλεψε ἐπὶ $\frac{3}{4}$ τῆς μέρας, τὴ δεύτερη ἐπὶ $\frac{6}{8}$ τῆς μέρας καὶ τὴν τρίτη ἐπὶ $\frac{7}{12}$ τῆς μέρας. Πόσες ὧρες δούλεψε καὶ τὶς 3 μέρες μαζί;

7. Ἂν ἀπὸ τὰ $\frac{3}{4}$ ἑνὸς ὑφάσματος κόψωμε τὰ $\frac{2}{5}$ τί μένει;

8. Κάνετε καὶ σεῖς ὅμοια προβλήματα.

Ἀφαίρεση κλάσματος ἀπὸ ἀκέραιο

— Παιδιά, εἶπε σήμερα ὁ δάσκαλος, εἶδα τὸν ἔμπορο τῆς γειτονιᾶς μας καὶ τὸν ρώτησα, ἂν ἔχῃ καὶ ἄλλο ὕφασμα ἀπὸ κεῖνο, ποὺ ἀγοράσαμε προχθές.

— Καὶ βέβαια ἔχω, μοῦ εἶπε. Πῆρα καινούργιο τόπι, σωστὰ 50 μέτρα καὶ τώρα μόλις πούλησα $\frac{5}{8}$ μέτρα.

Μπορεῖτε νὰ βρῆτε πόσα μέτρα ὕφασμα ἔχει τώρα ὁ ἐμποράκος μας;

Ὅλα τὰ παιδιὰ κατάλαβαν, πὼς ἔπρεπε νὰ κάμουν ἀφαίρεση. Νὰ ἀφαιρέσουν τὰ $\frac{5}{8}$ μέτρα ποὺ πουλήθηκαν, ἀπὸ τὰ 50 μέτρα. Δηλ. 50 μέτρα — $\frac{5}{8}$ μέτρα. Τὰ 50 μ. ὅμως εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς καὶ τὸ $\frac{5}{8}$ κλάσμα καὶ δὲν μπορεῖ νὰ γίνῃ ἀφαίρεση. Πρέπει νὰ ἔχωμε μειωτέο κλάσμα.

Τὰ παιδιὰ σκέφθηκαν. Ἕνα παιδὶ εἶπε νὰ πάρωμε ἀπὸ τὰ 50 μέτρα ἕνα μέτρο, νὰ τὸ τρέψωμε σὲ ὄγδοα καὶ νὰ τὸ γράψωμε ἔτσι: $49\frac{8}{8}$ μέτρα εἶναι πάλι 50 μέτρα, γιατὶ 8 ὄγδοα εἶναι ἕνα μέτρο καὶ 49 μέτρα = 50 μέτρα.

Βγῆκε λοιπὸν στὸν πίνακα κι ἔγραψε ἔτσι τὸ πρόβλημα:

$49\frac{8}{8}$ μέτρα — $\frac{5}{8}$ μέτρα = $49\frac{3}{8}$ μέτρα ἔμειναν ὑπόλοιπο ὕφασμα στὸν ἔμπορο.

— Μάλιστα, τοὺς εἶπε τότε ὁ δάσκαλος, ἔτσι κάνομε, ὅταν ἔχωμε νὰ ἀφαιρέσωμε κλάσμα ἀπὸ ἀκέραιο.

Ὥστε : *Ὅταν ἔχωμε νὰ ἀφαιρέσωμε κλάσμα ἀπὸ ἀκέραιο, παίρνομε ἀπὸ τὸν ἀκέραιο μιὰ μονάδα καὶ τὴν τρέπομε σὲ κλάσμα μὲ παρονομαστὴ τὸν ἴδιο, ποὺ ἔχει τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου. Ἀφαιροῦμε ὕστερα κλάσμα ἀπὸ κλάσμα, ὅπως μάθαμε. Στὸ ὑπόλοιπο γράφομε τὸν ἀκέραιο, ποὺ μᾶς ἔμεινε καὶ τὸ κλάσμα, ποὺ βρήκαμε.*

Ἀσκήσεις

1. Κάμετε τὶς παρακάτω ἀφαιρέσεις:

α) $10 - \frac{2}{3} =$	β) $46 - \frac{6}{9} =$	γ) $54 - \frac{2}{3} =$
$8 - \frac{4}{6} =$	$38 - \frac{2}{5} =$	$67 - \frac{6}{8} =$
$14 - \frac{8}{9} =$	$42 - \frac{1}{6} =$	$74 - \frac{4}{9} =$

Προβλήματα.

1. Ἀπὸ 3 κιλὰ ζάχαρη ξοδέψαμε τὰ $\frac{8}{16}$ κιλά. Πόση ζάχαρη μᾶς ἔμεινε ;

2. Εἴχαμε στὸ σχολεῖο 32 κιλὰ σοκολατίνη. Ρίξαμε στὸ πρωϊνὸ γάλα $\frac{3}{4}$ κιλά. Πόση σοκολατίνη μᾶς ἔμεινε ;

3. Ἂν τὰ $\frac{10}{60}$ τῆς ὥρας τὰ διαθέτομε γιὰ τὸ διάλειμμα, πόσα λεπτὰ τῆς ὥρας διαρκεῖ τὸ μάθημα ;

4. Βρῆτε καὶ σεῖς παρόμοια προβλήματα καὶ λύστε τα.

δ'. Ἀφαίρεση μικτοῦ ἀπὸ μικτὸ

Πρῶτος τρόπος

Παράδειγμα 1. Ἀπὸ ἕνα τόπι $32\frac{5}{8}$ μέτρ. ὕφασμα πουλήθηκαν $13\frac{3}{8}$ μέτρ. Πόσα μέτρα ὕφασμα ἔμειναν ;

Γιὰ νὰ βροῦμε πόσο ὕφασμα ἔμεινε, θὰ κάνωμε βέβαια ἀφαίρεση. Θὰ ἀφαιρέσωμε τοὺς $13\frac{3}{8}$ μέτρ. ποὺ πουλήθηκαν, ἀπὸ τοὺς $32\frac{5}{8}$ μέτρα.

Στὸ παράδειγμά μας ἔχομε νὰ ἀφαιρέσωμε μικτὸν ἀπὸ μικτό. Ἡ ἀφαίρεση τῶν μικτῶν ἀριθμῶν γίνεται μὲ δυὸ τρόπους.

Μὲ τὸν π ρ ῶ τ ο τρόπο, ἀφαιροῦμε χωριστὰ τοὺς ἀκέραιους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἑνώνομε τὰ ὑπόλοιπα.

Ἡ κατάταξη καὶ ἡ ἐκτέλεση τῆς πράξεως γίνεται ἔτσι:

$$32\frac{5}{8}\text{ μέτ.} - 13\frac{3}{8}\text{ μέτρ.} = (32\text{ μέτρ.} - 13\text{ μέτ.}) + \left(\frac{5}{8}\text{μέτ.} - \frac{3}{8}\text{ μ.}\right) =$$

$= 19\frac{2}{8}$ μέτρ. ὕφασμα ἔμειναν.

Παράδειγμα 2. Ἀπὸ τοὺς $19\frac{2}{8}$ μέτρ. ὕφασμα, ποὺ ἔμειναν, πουλήθηκαν τὴν ἄλλη μέρα $8\frac{7}{8}$ μέτρα. Πόσα μέτρα ὕφασμα ἔμειναν τώρα;

Καὶ ἐδῶ θὰ ἀφαιρέσωμε χωριστὰ τοὺς ἀκέραιους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα:

$$19\frac{2}{8}\text{ μέτρ.} - 8\frac{7}{8}\ (19\text{ μέτ.} - 8\text{ μέτρ.}) + \left(\frac{2}{8}\text{ μέτ.} - \frac{7}{8}\text{ μέτ.}\right) = ;$$

Προσέξτε ὅμως τὰ κλάσματα. Τὸ κλάσμα $\frac{7}{8}$ δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{2}{8}$, γιατὶ εἶναι μεγαλύτερο.

Στὴν περίπτωση αὐτὴ θὰ πάρωμε ἀπὸ τὸ μειωτέο 19 μιὰ ἀκέραια μονάδα καὶ θὰ τὴν τρέψωμε σὲ ὄγδοα. Τώρα ὁ μειωτέος 19, θὰ γίνη 18 καὶ ἡ μονάδα, ποὺ πήραμε $\frac{8}{8}$. Στὰ $\frac{8}{8}$ μέτρ. θὰ προσθέσωμε καὶ τὰ $\frac{2}{8}$ μέτρ., δηλ. $\frac{8}{8}$ μέτρ. $+ \frac{2}{8}$ μέτρ. $= \frac{10}{8}$.

Τώρα ὁ μειωτέος ἔγινε $18\frac{10}{8}$ μέτρ. καὶ μποροῦμε εὔκολα νὰ κάμωμε τὴν ἀφαίρεση: $18\frac{10}{8}$ μέτρ. $- 8\frac{7}{8}$ μέτρ. (18 μέτρ. $-$ 8 μέτρ.)

$$+\left(\frac{10}{8} - \frac{7}{8}\right) = 10\frac{3}{8}\text{ μέτρ. ἔμειναν.}$$

Ἂν τὰ κλάσματα εἶναι ἑτερώνυμα, τὰ τρέπομε πρῶτα σὲ ὁμώνυμα.

Συμπέρασμα. *Γιὰ νὰ ἀφαιρέσωμε μικτὸν ἀριθμὸ ἀπὸ μικτό, ἀφαι-*

ροῦμε χωριστὰ τοὺς ἀκέραιους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἔπειτα ἑνώνομε τὰ ὑπόλοιπα.

Σημ: Ὅταν τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου, παίρνομε μιὰ μονάδα τοῦ μειωτέου, τὴν τρέπομε σὲ κλάσμα μὲ παρονομαστὴ τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματός του, προσθέτομε σ' αὐτὸ καὶ τὸ κλάσμα ποὺ ἔχει ὁ μειωτέος, καὶ ὕστερα κάνομε τὴν ἀφαίρεση.

Δεύτερος τρόπος.

Μὲ τὸ δεύτερο τρόπο ἡ ἀφαίρεση τῶν μικτῶν γίνεται, ἀφοῦ τρέψωμε τοὺς μικτοὺς σὲ κλάσματα.

Παράδειγμα. Παίρνομε τὸ προηγούμενο πρόβλημα ;

$$19\frac{2}{8} \text{ μέτρ.} - 8\frac{7}{8} \text{ μέτρ.} = \frac{154}{8} \text{ μέτρ.} = \frac{71}{8} \text{ μέτρ.} = \frac{83}{8} \text{ μέτρ.} = 10\frac{3}{8} \text{ μέτρ.}$$

Ἂν τὰ κλάσματα εἶναι ἑτερώνυμα, τὰ τρέπομε σὲ ὁμώνυμα.

Γενικὸ συμπέρασμα. *Γιὰ νὰ ἀφαιρέσωμε μικτὸν ἀπὸ μικτό, ἀφαιροῦμε χωριστὰ τοὺς ἀκέραιους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἔπειτα ἑνώνομε τὰ μερικὰ ὑπόλοιπα ἢ τρέπομε τοὺς μικτοὺς σὲ κλάσματα καὶ ἀφαιροῦμε, ὅπως μάθαμε.*

Ἀσκήσεις

1. Νὰ γίνουν οἱ παρακάτω ἀφαιρέσεις:

α) $3\frac{5}{6} - 2\frac{4}{6} = ;$ $8\frac{6}{8} - 7\frac{3}{8} = ;$ $5\frac{7}{12} - 1\frac{4}{12} = ;$ $8\frac{3}{4} - 6\frac{2}{4} = ;$

β) $4\frac{2}{4} - 2\frac{3}{4} = ;$ $7\frac{3}{8} - 5\frac{5}{8} = ;$ $12\frac{1}{6} - 11\frac{4}{6} = ;$ $16\frac{2}{5} - 7\frac{3}{5} = ;$

γ($6\frac{2}{6} - 5\frac{1}{5} = ;$ $9\frac{4}{8} - 7\frac{1}{6} = ;$ $13\frac{5}{10} - 10\frac{2}{5} = ;$ $14\frac{6}{7} - 6\frac{2}{3} = ;$

δ) $12\frac{1}{7} - 8\frac{3}{4} = ;$ $5\frac{2}{8} - 3\frac{1}{2} = ;$ $9\frac{3}{9} - 7\frac{5}{6} = ;$ $28\frac{1}{6} - 13\frac{1}{2} = ;$

2. Κάντε καὶ σεῖς μόνοι σας ὅμοιες ἀσκήσεις.

ε'. Ἀφαίρεση μικροῦ ἀπὸ ἀκέραιο.

Παράδειγμα 1. Ὁ Νίκος εἶχε 12 δραχ. ξόδεψε τὰ $3\frac{1}{2}$ δραχ. Πόσες δραχμὲς τοῦ ἔμειναν ;

Καὶ ἐδῶ θὰ κάμωμε ἀφαίρεση. Θὰ ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὶς 12 δραχμές, ποὺ εἶχε ὁ Νίκος, τὰ $3\frac{1}{2}$ δραχμές, ποὺ ξόδεψε. Δηλ. ἀπὸ τὸν ἀκέραιο ἀριθμὸ 12, θὰ ἀφαιρέσωμε τὸ μικτὸ ἀριθμὸ $3\frac{1}{2}$, $\left(12 - 3\frac{1}{2}\right)$.

Γιὰ νὰ γίνῃ ἡ ἀφαίρεση αὐτή, κάνομε καὶ τὸν ἀκέραιο 12 μικτό. Παίρνομε μιὰ μονάδα του καὶ τὴν τρέπομε σὲ κλάσμα μὲ παρονομαστὴ 2, ποὺ εἶναι καὶ ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος τοῦ ἀφαιρετέου. Ὁ ἀκέραιος 12, ἔγινε τώρα $11\frac{2}{2}$, ποὺ ἔχει τὴν ἴδια ἀξία μὲ τὸ 12.

Τώρα ἡ ἀφαίρεση γίνεται εὔκολα, γιατὶ ἔχομε νὰ ἀφαιρέσωμε μικτὸν ἀπὸ μικτό.

$$11\frac{2}{2} \text{ δρχ.} - 3\frac{1}{2} \text{ δραχ.} = (11 - 3 = 8) + \left(\frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\right) =$$

$8 + \frac{1}{2} = 8\frac{1}{2}$ δρχ. ἔμειναν.

Ὥστε: *Γιὰ νὰ ἀφαιρέσωμε μικτὸν ἀπὸ ἀκέραιο, τρέπομε καὶ τὸν ἀκέραιο σὲ μικτὸ καὶ ἀφαιροῦμε μικτὸν ἀπὸ μικτό.*

Ἀσκήσεις

Νὰ γίνουν οἱ παρακάτω ἀφαιρέσεις :

α $9 - 4\frac{1}{5} =$; $8 - 7\frac{1}{4} =$; $15 - 5\frac{1}{2} =$; $22 - 6\frac{3}{8} =$;

α) $75 - 74\frac{2}{3} =$; $82 - 9\frac{8}{9} =$; $42 - 2\frac{1}{5} =$; $18 - 8\frac{5}{6} =$;

Προβλήματα

1. Ἀγόρασα ἕνα κιλὸ κρέας ἀντὶ $28\frac{1}{5}$ δραχ. καὶ ἔδωσα ἕνα πενηντάρικο. Πόσα ρέστα θὰ πάρω ;

2. Ἀπὸ ἕνα τόπι 25 μέτρα ὕφασμα, πουλήθηκαν $3\frac{5}{8}$ μέτρα. Πόσα μέτρα ἔμειναν ;

3. Ἕνας ἐργάτης ἔχει νὰ σκάψῃ ἕνα ἀμπέλι 90 τετρ. μέτρ. Ἔσκαψε τὰ $29\frac{3}{4}$ τετρ. μέτρ. Πόσα μέτρα μένουν ἀκόμα νὰ σκάψῃ ;

4. Στὸ ἡμερονύκτιο ἡ Μαρία κοιμᾶται $10\frac{1}{4}$ ὧρες. Πόσες ὧρες μένει ξυπνητὴ τὸ ἡμερονύκτιο ἡ Μαρία;

5. Κάμετε καὶ σεῖς ὅμοια προβλήματα.

Ἀφαίρεση κλάσματος ἀπὸ μικτὸν ἀριθμό.

Παράδειγμα 1. Ἀπὸ $10\frac{7}{8}$ μέτρα ὕφασμα κόψαμε $\frac{4}{8}$ μέτρα. Πόσα μέτρα ὕφασμα ἔμειναν;

Γιὰ νὰ βροῦμε πόσα μέτρα ὕφασμα ἔμειναν, θὰ ἀφαιρέσωμε τὸ κλάσμα $\frac{4}{8}$ ἀπὸ τὸ μικτὸ $10\frac{7}{8}$.

Δηλ. $10\frac{7}{8}$ μέτρ. $-\frac{4}{8}$ μέτρ. $=10\frac{3}{8}$ μέτρα ἔμειναν.

Μὲ ἄλλα λόγια ἀφαιρέσαμε ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου $\frac{7}{8}$, τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου $\frac{4}{8}$. **Ὁ** ἀκέραιος ἔμεινε ὁ ἴδιος.

Παράδειγμα 2. Ἀπὸ $8\frac{3}{8}$ μέτρ. ὕφασμα κόψαμε $\frac{5}{8}$ μέτρ. Πόσα μέτρα ὕφασμα ἔμεινε;

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου.

Γι' αὐτὸ θὰ πάρωμε μιὰ μονάδα ἀπὸ τὸν ἀκέραιο, θὰ τὴν τρέψωμε σὲ κλάσμα καὶ ὕστερα θὰ κάνωμε τὴν ἀφαίρεση. Δηλ. $\frac{8}{8}+\frac{3}{8}$, ποὺ εἶναι κλάσμα τοῦ μειωτέου, θὰ γίνουν $\frac{11}{8}$ μέτρα.

Ἔτσι ἔχομε: $7\frac{11}{8}$ μέτρ. $-\frac{5}{8}$ μέτρ. $=7\frac{6}{8}$ μέτρ. ἔμειναν, ἢ

$8\frac{3}{8}$ μέτρ. $-\frac{5}{8}$ μέτρ. $=\frac{67}{8}$ μέτρ. $-\frac{5}{8}$ μέτρ. $=\frac{62}{8}$ μέτρ. $=7\frac{6}{8}$ μέτρ.

Δηλ. τρέψαμε τὸ μικτὸ σὲ κλάσμα καὶ κατόπιν ἀφαιρέσαμε κλάσμα ἀπὸ κλάσμα.

Ὥστε: *Γιὰ νὰ ἀφαιρέσωμε κλάσμα ἀπὸ μικτὸν ἀφαιροῦμε κλάσμα ἀπὸ κλάσμα καὶ στὸ ὑπόλοιπο γράφομε καὶ τὸν ἀκέραιο. Ἂν τὸ κλάσμα* τοῦ μειωτέου εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου, παίρνομε μιὰ μονάδα ἀπὸ τὸν ἀκέραιο, τὴν τρέπομε σὲ κλάσμα καὶ ὕστερα κάνομε τὴν ἀφαίρεση ἢ τρέπομε τὸ μικτὸ σὲ κλάσμα καὶ ἀφαιροῦμε κλάσμα ἀπὸ κλάσμα.

Ἀσκήσεις

1. Νὰ γίνουν οἱ παρακάτω ἀφαιρέσεις:

α) $5\frac{3}{4} - \frac{2}{4} =;$ $\quad 6\frac{5}{8} - \frac{4}{8} =;$ $\quad 12\frac{6}{7} - \frac{5}{7} =;$ $\quad 11\frac{4}{5} - \frac{3}{5} =;$

β) $8\frac{1}{3} - \frac{2}{3} =;$ $\quad 10\frac{1}{7} - \frac{6}{7} =;$ $\quad 8\frac{2}{5} - \frac{4}{5} =;$ $\quad 9\frac{3}{6} - \frac{5}{6} =;$

Προβλήματα προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως

1. Στὸ συσσίτιο τοῦ σχολείου μας εἴχαμε 45 κιλὰ μακαρόνια. Ξοδέψαμε τὴν πρώτη βδομάδα $15\frac{3}{4}$ κιλά, τὴ δεύτερη $12\frac{6}{8}$ κιλὰ καὶ τὴν τρίτη $9\frac{1}{2}$ κιλά. Πόσα κιλὰ μακαρόνια μένουν ἀκόμα;

2. Ἡ ἀπόσταση ἀπὸ τὴ Θεσσαλονίκη ὡς τὴν Ἀθήνα εἶναι $596\frac{1}{2}$ χιλιόμ. καὶ ἀπὸ τὴν Ἀθήνα ὡς τὴ Λάρισα $326\frac{3}{4}$ χιλιόμ. Πόσα χιλιόμετρα εἶναι ἡ ἀπόσταση ἀπὸ τὴ Λάρισα ὡς τὴ Θεσσαλονίκη;

3. Μιὰ βρύση γεμίζει σὲ μιὰ ὥρα τὸ $\frac{1}{8}$ τῆς δεξαμενῆς, μιὰ ἄλλη τὰ $\frac{2}{10}$ καὶ μιὰ τρίτη τὸ $\frac{1}{12}$. Πόσο μέρος τῆς δεξαμενῆς γεμίζουν καὶ οἱ τρεῖς βρύσες μαζὶ σὲ μιὰ ὥρα;

4. Ἀπὸ ἕνα τόπι ὕφασμα $28\frac{1}{2}$ μέτρα πουλήθηκαν τὴν πρώτη μέρα $6\frac{3}{4}$ μέτρα, τὴ δεύτερη $\frac{7}{8}$ μέτρα καὶ τὴν τρίτη $10\frac{1}{2}$ μέτρα. Πόσα μέτρα ὕφασμα ἔμειναν στὸ τόπι;

5. Ἕνας παντοπώλης εἶχε $50\frac{1}{4}$ κιλὰ ρύζι. Πούλησε σὲ δυὸ πελάτες

ἀπὸ $1\frac{1}{2}$ κιλὰ στὸν καθένα καὶ σὲ ἕνα τρίτο $3\frac{3}{8}$ κιλά. Πόσα κιλὰ ρύζι τοῦ μένουν ἀκόμα;

6. Κάποιος οἰκογενειάρχης χρωστάει στὸν μπακάλη $16\frac{1}{2}$ δρχ. καὶ στὸν ἀρτοποιὸ $8\frac{3}{4}$ δρχ. Ἔδωσε στὸ γιό του 3 δεκάρικα γιὰ νὰ πληρώση τὰ χρέη του καὶ νὰ τοῦ φέρη τὰ ὑπόλοιπα. Πόσα εἶναι τὰ ὑπόλοιπα;

7. Ἀπὸ ἕνα κιβώτιο σαπουνιοῦ, ποὺ ζυγίζει $72\frac{1}{2}$ κιλὰ πήραμε τὴ μιὰ $23\frac{2}{3}$ κιλὰ καὶ τὴν ἄλλη $38\frac{7}{8}$ κιλά. Τὸ κιβώτιο ἄδειο ζυγίζει $2\frac{1}{2}$ κιλά. Πόσα κιλὰ καθαρὸ σαπούνι ἔμειναν στὸ κιβώτιο;

8. Ὁ Γιῶργος πηδάει σὲ μῆκος $3\frac{1}{2}$ μέτρα, ὁ Κώστας $2\frac{9}{10}$ μέτρα καὶ ὁ Μίμης $3\frac{3}{4}$ μέτρα. Πόσο πιὸ περισσότερο πηδάει ὁ ἕνας ἀπὸ τὸν ἄλλο;

9. Τρία παιδιὰ μοίρασαν 50 βώλους. Τὸ πρῶτο πῆρε τὰ $\frac{2}{10}$ τῶν βώλων, τὸ δεύτερο τὰ $\frac{3}{7}$ καὶ τὸ τρίτο τὰ ὑπόλοιπα. Τί μέρος τῶν βώλων πῆρε τὸ τρίτο παιδί;

10. Κάνετε καὶ σεῖς ὅμοια προβλήματα, ποὺ νὰ λύνονται μὲ μιὰ πρόσθεση καὶ μιὰ ἀφαίρεση.

3. Ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν κλασμάτων

Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιο

Παράδειγμα. Πέντε κορίτσια τῆς τάξεως χρειάσθηκαν κορδέλλα γιὰ τὰ μαλλιά τους. Γιὰ κάθε κορίτσι χρειαζόταν $\frac{3}{10}$ μέτρα κορδέλλα. Πόση κορδέλλα χρειάσθηκε γιὰ ὅλα τὰ κορίτσια;

Γιὰ νὰ βροῦμε πόση κορδέλλα χρειάσθηκε, θὰ σκεφθοῦμε ἔτσι: Ἀφοῦ γιὰ τὸ ἕνα κορίτσι χρειάζεται $\frac{3}{10}$ μέτρα κορδέλλα, γιὰ τὰ δυὸ θὰ χρειασθοῦν 2 φορὲς τὰ $\frac{3}{10}$ μέτρα, γιὰ τὰ τρία 3 φορὲς τὰ $\frac{3}{10}$ μέτρα καὶ γιὰ τὰ πέντε κορίτσια θὰ χρειασθοῦν 5 φορὲς τὰ $\frac{3}{10}$ μέτρα κορδέλλα.

Δηλ. $\frac{3}{10}+\frac{3}{10}+\frac{3}{10}+\frac{3}{10}+\frac{3}{10}=\frac{15}{10}$ μέτρα.

Ἀλλὰ γιὰ νὰ ἐπαναλάβωμε τὸ $\frac{3}{10}$ πέντε φορὲς καὶ νὰ βροῦμε $\frac{15}{10}$ πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμητὴ 3 ἐπὶ τὸ 5, ἔτσι:
$\frac{3}{10}\times 5=\frac{3\times 5}{5}=\frac{15}{10}=1\frac{5}{10}$ μέτρα κορδέλλα χρειάζεται γιὰ τὰ 5 κορίτσια.

Τί κάναμε; Μεγαλώσαμε τὸ κλάσμα $\frac{3}{10}$ πέντε φορές, πολλαπλασιάζοντας τὸν ἀριθμητή του 3 ἐπὶ τὸ 5 καὶ παρονομαστὴ ἀφήσαμε τὸν ἴδιο.

Ὥστε: *Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιο ἢ ἀκέραιο ἐπὶ κλάσμα πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιο. Τὸ γινόμενο τὸ βάζομε ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ ἀφήνομε τὸν ἴδιο.*

Πολλαπλασιασμὸς μικτοῦ ἐπὶ ἀκέραιο

Παράδειγμα. Ἡ σχολικὴ ἐργασία τῆς πέμπτης τάξεως διαρκεῖ $5\frac{3}{4}$ ὧρες τὴν ἡμέρα. Πόσες ὧρες ἐργάζεται ἡ πέμπτη τάξη στὶς 6 ἐργάσιμες μέρες τῆς ἑβδομάδας.

Γιὰ νὰ βροῦμε πόσες ὧρες ἐργάζεται ἡ πέμπτη τάξη στὶς 6 μέρες, θὰ πολλαπλασιάσωμε τὶς $5\frac{3}{4}$ ὧρες ἐπὶ 6. Ἐδῶ ἔχομε νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ μικτὸ $5\frac{3}{4}$ ἐπὶ τὸν ἀκέραιο 6.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς μικτοῦ ἐπὶ ἀκέραιο γίνεται μὲ δύο τρόπους. Ἢ τρέπομε τὸ μικτὸ σὲ κλάσμα καὶ κατόπιν πολλαπλασιάζομε κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιο ἢ πολλαπλασιάζομε χωριστὰ τὸν ἀκέραιο καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα καὶ ὕστερα ἑνώνομε τὰ μερικὰ γινόμενα.

Πρῶτος τρόπος

$$5\frac{3}{4} \times 6 = \frac{23}{4} \times 6 = \frac{138}{4} = 34\frac{2}{4} \text{ ὧρες.}$$

Δεύτερος τρόπος.

$$5\frac{3}{4} \times 6 \left(5 \times 6 = 30 \left(\frac{3}{4} \times 6 = 4\frac{2}{4}\right) 30 + 4\frac{2}{4} = 34\frac{2}{4} \text{ ὧρες.}\right.$$

Ὥστε: *Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε μικτὸν ἐπὶ ἀκέραιο τρέπομε τὸ μικτὸ σὲ κλάσμα καὶ πολλαπλασιάζομε κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιο, ὅπως μάθαμε· ἢ πολλαπλασιάζομε χωριστὰ τὸν ἀκέραιο καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα ἐπὶ τὸν ἀκέραιο καὶ ὕστερα ἑνώνομε τὰ μερικὰ γινόμενα.*

Ἀσκήσεις.

α) $\frac{3}{5} \times 8 = ;\ \frac{2}{4} \times 5 = ;\ \frac{6}{8} \times 7 = ;\ \frac{1}{2} \times 18 = ;\ \frac{4}{5} \times 9 = ;$

β) $3 \times \frac{6}{10} = ;\ 8 \times \frac{9}{12} = ;\ 15 \times \frac{8}{16} = ;\ 9 \times \frac{4}{7} = ;\ 7 \times \frac{5}{8} = ;$

γ) $6\frac{2}{4} \times 8 = ;\ 3\frac{1}{2} \times 5 = ;\ 12\frac{6}{8} \times 10 = ;\ 9\frac{3}{6} \times 7 = ;\ 7\frac{4}{5} \times 5 = ;$

δ) $15 \times 3\frac{3}{4} = ;\ 9 \times 6\frac{1}{3} = ;\ 8 \times 5\frac{2}{6} = ;\ 12 \times 4\frac{2}{10} = ;\ 14 \times 7\frac{4}{12} = ;$

Προβλήματα.

1. Στὸ πρωϊνὸ γάλα τοῦ σχολείου μᾶς χρειάζονται $2\frac{7}{8}$ κιλὰ ζάχαρη. Πόση ζάχαρη θὰ χρειασθῆ γιὰ 6 πρωϊνὰ τοῦ σισσιτίου;

2. Γιὰ δέσιμο ἑνὸς βιβλίου χρειάσθηκαν $\frac{3}{10}$ μέτρα ὕφασμα. Πόσα μέτρα ὕφασμα θὰ χρειασθῆ γιὰ 25 βιβλία;

3. Ἕνα μολύβι ἀξίζει $\frac{2}{4}$ τῆς δραχμῆς. Πόσο στοιχίζει ἡ δωδεκάδα;

4. Ἕνα κιλὸ κρέας κοστίζει $28\frac{1}{2}$ δρχ. Πόσο κοστίζουν τὰ 13 κιλά;

5. Τὸ μέτρο ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει 87 δραχμές. Πόσες δραχμὲς θὰ πληρώσωμε γιὰ $6\frac{5}{8}$ μέτρα;

Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ κλάσμα

Παράδειγμα. Ἕνα κιλὸ φασόλια πουλιέται $\frac{8}{10}$ τοῦ δεκάδραχμου. Πόσο ἀξίζουν $\frac{2}{4}$ τοῦ κιλοῦ φασόλια;

Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα αὐτὸ σκεφτόμαστε ἔτσι: Τὸ ἕνα κιλὸ φασόλια, δηλ. $\frac{4}{4}$ τοῦ κιλοῦ, ἀξίζουν $\frac{8}{10}$ τοῦ δεκάδραχ. Τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ κιλοῦ, θὰ ἀξίζῃ 4 φορὲς λιγότερο. Τὰ $\frac{8}{10}$ τοῦ δεκάδρ. λοιπὸν πρέπει νὰ γίνουν 4 φορὲς λιγότερα. Γιὰ νὰ γίνῃ ὅμως ἕνα κλάσμα μικρότερο, ὅσες φορὲς θέλομε μεγαλώνομε τὸν παρονομαστή του τόσες φορές. Λοιπὸν γιὰ νὰ κάνωμε τὸ κλάσμα $\frac{8}{10}$ τέσσερες φορὲς μικρότερο, θὰ μεγαλώσωμε τὸν παρονομαστή του 4 φορές, δηλ. $\frac{8}{10 \times 4}$.

Ἀφοῦ τώρα τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ κίλοῦ ἀξίζει $\frac{8}{10 \times 4}$ τοῦ δεκάδρ., τὰ $\frac{2}{4}$ τοῦ κιλοῦ, ποὺ εἶναι δυὸ φορὲς περισσότερο ἀπὸ τὸ $\frac{1}{4}$ θὰ ἀξίζουν δυὸ φορὲς περισσότερο ἀπὸ τὸ $\frac{8}{10 \times 4}$ τοῦ δεκάδρ. Δηλ. $\frac{8 \times 2}{10 \times 4} = \frac{16}{40} = \frac{4}{10}$ τοῦ δεκάδρ. ἀξίζουν τὰ $\frac{2}{4}$ τοῦ κιλοῦ φασόλια.

Ἡ κατάταξη γίνεται ἔτσι:

$\frac{4}{4}$ κιλὰ ἀξίζουν $\frac{8}{10}$ δεκάδρ.

$\frac{1}{4}$ κιλὰ ἀξίζουν $\frac{8}{10 \times 4}$ δεκάδρ.

$\frac{2}{4}$ κιλὰ ἀξίζουν $\frac{8 \times 2}{10 \times 4} = \frac{16}{40}$ δεκάδρ. $= \frac{4}{10}$.

Προσέξτε τὴ λύση τοῦ προβλήματος. Θὰ ἰδῆτε, ὅτι γιὰ νὰ βροῦμε τὰ $\frac{4}{10}$ δεκάδρ. πολλαπλασιάσαμε τὸ 8×2, ποὺ εἶναι ἀριθμητὲς τῶν κλασμάτων καὶ τὸ 10×4, ποὺ εἶναι παρονομαστὲς τῶν κλασμάτων.

Ὥστε : *Ὅταν ἔχωμε νὰ πολλαπλασιάσωμε κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομε ἀριθμητὴ ἐπὶ ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ ἐπὶ παρονομαστή. Τὸ γινόμενο τῶν ἀριθμητῶν τὸ βάνομε ἀριθμητὴ καὶ τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν παρονομαστή.*

Ἀσκήσεις.

Νὰ γίνουν οἱ παρακάτω πολλαπλασιασμοί :

α) $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} =$; $\frac{3}{5} \times \frac{5}{6} =$; $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} =$; $\frac{2}{3} \times \frac{4}{8} =$: $\frac{6}{7} \times \frac{7}{9} =$;

β) $\frac{8}{10} \times \frac{3}{3} =$; $\frac{5}{9} \times \frac{6}{7} =$; $\frac{4}{8} \times \frac{5}{6} =$; $\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} =$; $\frac{4}{8} \times \frac{6}{10} =$;

γ) $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} =$; $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{6} =$; $\frac{3}{5} \times \frac{4}{8} \times \frac{2}{7} =$;

δ) $3 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} =$; $6 + 2 \times \frac{2}{4} =$; $\frac{5}{7} \times 8 \times \frac{3}{7} =$;

Προβλήματα.

1. Ἕνα κιλὸ κρέας ἀξίζει $\frac{5}{4}$ τοῦ εἰκοσαδρ. Πόσο ἀξίζουν τὰ $\frac{6}{8}$ τοῦ κιλοῦ ;

2. Ἕνα μέτρο κορδέλλα ἀξίζει $\frac{3}{5}$ τοῦ πενηντάρικου. Πόσο ἀξίζουν τὰ $\frac{2}{4}$ τοῦ μέτρου ;

3. Πόσο ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{10}$ μέτρ. ἀπὸ ἕνα ὕφασμα, ἂν τὸ μέτρο ἀξίζῃ $\frac{3}{4}$ τοῦ πετηντάρικου ;

4. Ἕνα μέτρο χαρτὶ ἀξίζει $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς. Ποσόσο ἀξίζουν τὰ $\frac{6}{10}$ μέτ.

5. Κάντε καὶ σεῖς ὅμοια προβλήματα.

Πολλαπλασιασμὸς μικτοῦ ἐπὶ μικτό.

Παράδειγμα. Ἕνα κιλὸ ἄσπρο ψωμὶ ἀξίζει $5\frac{1}{2}$ δραχ. Πόσο ἀξίζουν τὰ $12\frac{3}{4}$ κιλά;

Γιὰ νὰ βροῦμε πόσο ἀξίζουν τὰ $12\frac{3}{4}$ κιλ., θὰ κάμωμε πολλαπλασιασμό. Ἐδῶ ἔχομε νὰ πολλαπλασιάσωμε μικτὸν ἐπὶ μικτό. Θὰ τρέψωμε τοὺς μικτοὺς $5\frac{1}{2}$ καὶ $12\frac{3}{4}$ σὲ κλάσμα καὶ ἔπειτα θὰ κάμωμε τὸν πολλαπλασιασμὸ κλάσματος ἐπὶ κλάσμα, ὅπως μάθαμε. Δηλ.:

$$5\frac{1}{2} \text{ δραχ.} \times 12\frac{3}{4} \text{ κιλ.} = \frac{11}{2} \text{ δρχ.} \times \frac{51}{4} \text{ κιλ.} = \frac{11 \times 51}{2 \times 4} = \frac{561}{8} \text{ δρχ.} =$$

$$= 70\frac{1}{8} \text{ δραχ. ἀξίζουν τὰ } 12\frac{3}{4} \text{ κιλ. ψωμί.}$$

Ὥστε: *Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσωμε μικτὸν ἐπὶ μικτό, τρέπομε τοὺς μικτοὺς σὲ κλάσματα καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομε κλάσμα ἐπὶ κλάσμα.*

Ἀσκήσεις

Νὰ γίνουν οἱ παρακάτω πολλαπλασμοί:

α) $4\frac{1}{8} \times 7 =$; $1\frac{6}{7} \times 10 =$; $3\frac{3}{5} \times 12 =$; $2\frac{1}{5} \times 15 =$; $6\frac{2}{4} \times 2 =$;

β) $2 \times 1\frac{3}{4} =$; $5 \times 1\frac{6}{7} =$; $8 \times 2\frac{2}{5} =$; $9 \times 4\frac{2}{3} =$; $3 \times 2\frac{2}{6} =$;

γ) $\frac{4}{5} \times 2\frac{2}{3} =$; $\frac{3}{5} \times 1\frac{1}{2} =$; $\frac{2}{6} \times 6\frac{1}{4} =$; $\frac{8}{10} \times 2\frac{3}{5} =$; $\frac{3}{4} \times 6\frac{2}{6} =$;

δ) $2\frac{1}{4} \times \frac{7}{8} =$ $6\frac{2}{3} \times \frac{2}{4} =$ · $6\frac{3}{4} \times \frac{6}{8} =$; $8\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} =$; $1\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} =$;

ε) $2\frac{3}{4} \times 6\frac{4}{5} =$; $2\frac{4}{9} \times 9\frac{2}{4} =$; $4\frac{4}{5} \times 3\frac{6}{7} =$; $2\frac{2}{3} \times 3\frac{1}{6} =$; $7\frac{2}{3} \times 3\frac{1}{2} =$;

στ) $\frac{2}{3} \times 8 \times 4\frac{1}{2} =$; $9\frac{3}{7} \times 5\frac{1}{6} \times 5 =$; $5 \times \frac{1}{2} \times 4\frac{2}{6} =$;

ζ) $\frac{1}{5} \times 2\frac{1}{2} =$; $5\frac{1}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{5} =$; $7\frac{1}{5} \times 3\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{4}{8} =$;

Διάφορα προβλήματα

Ἕνας ἐργάτης παίρνει τὴν ἡμέρα $85 \frac{1}{2}$ δραχ. ἡμερομίσθιο. Πόσα παίρνει τὴν ἑβδομάδα ; Πόσα τὸ μῆνα ;

2. Ἕνα κιλὸ καφὲ ἀξίζει $88 \frac{2}{4}$ δρχ. Πόσο ἀξίζουν $7 \frac{1}{2}$ κιλὰ καφέ ;

3. Τὸ μέτρο ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει $185 \frac{1}{2}$ δραχμές. Πόσο ἀξίζουν τὰ $2 \frac{8}{10}$ μέτρα ὕφασμα.

4. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε ἕνα τόπι 50 μέτρ. ὕφασμα μὲ $210 \frac{2}{10}$ δραχ. τὸ μέτρο. Τὸ πούλησε μὲ $525 \frac{1}{2}$ δρχ. τὸ μέτρο. Πόσα κέρδισε ;

5. Ἀγόρασα $36 \frac{1}{2}$ κιλ. λάδι. Κράτησα γιὰ τὸ σπίτι μου $12 \frac{3}{4}$ κιλὰ καὶ τὸ ὑπόλοιπο τὸ πούλησα πρὸς $28 \frac{2}{4}$ δρχ. τὸ κιλό. Πόσα χρήματα πῆρα ;

6. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 3 τόπια ὕφασμα. Κάθε τόπι εἶχε $40 \frac{4}{8}$ μέτρ. Πόσα μέτρα ἦταν ὅλο τὸ ὕφασμα. Πόσα χρήματα θὰ εἰσπράξῃ, ἂν πουλήσῃ τὸ μέτρο πρὸς $187 \frac{1}{2}$ δραχμ ;

7. Πόσο κοστίζουν $3 \frac{5}{8}$ κιλὰ πατάτες, ἂν τὸ κιλὸ πουλιέται $3 \frac{1}{2}$ δραχ. ;

8. Γιὰ μιὰ ἀνδρικὴ φορεσιὰ χρειάζονται $1 \frac{1}{4}$ μέτρα ὕφασμα γιὰ τὸ πανταλόνι, $\frac{1}{2}$ μέτρα γιὰ τὸ γελέκι καὶ $1 \frac{2}{5}$ μέτρα γιὰ τὸ σακκάκι. Πόσα μέτρα ὕφασμα χρειάζονται γιὰ ὁλόκληρη τὴ φορεσιά ; Πόσα γιὰ 5 φορεσιές ; Καὶ πόσο θὰ στοιχίσουν οἱ 5 φορεσιές, ἂν τὸ ὕφασμα πουλιέται $285 \frac{1}{2}$ δρχ. τὸ μέτρο ;

9. Μιὰ ὑφάντρια ὑφαίνει σὲ μιὰ ὥρα $1 \frac{2}{3}$ μέτρ. ὕφασμα. Σὲ $5 \frac{1}{4}$ ὧρες πόσα μέτρα θὰ ὑφάνῃ ;

10. Κάμετε καὶ σεῖς ὅμοια προβλήματα.

4. Ἡ διαίρεση τῶν κλασμάτων

Διαίρεση κλάσματος δι' ἀκεραίου

Παράδειγμα. Γιὰ 3 κορδελλίτσες μᾶς χρειάζονται $\frac{3}{10}$ μέτρα ὕφασμα. Πόσα μέτρα ὕφασμα μᾶς χρειάζεται γιὰ μιὰ κορδελλίτσα;

Ἂν σκεφθοῦμε, θὰ τὸ βροῦμε μὲ τὸ νοῦ μας εὔκολα. Ἀφοῦ γιὰ τὶς 3 κορδελλίτσες χρειαζόμαστε $\frac{3}{10}$ μέτρ. ὕφασμα, γιὰ τὴ μιὰ κορδελλίτσα θὰ χρειαστοῦμε τρεῖς φορὲς λιγότερο, δηλ. $\frac{1}{10}$ μέτρ. ὕφασμα. Ξέρομε δὲ ὅτι γιὰ νὰ κάμωμε ἕνα κλάσμα τρεῖς φορὲς μικρότερο, διαιροῦμε τὸν ἀριθμητή του διὰ 3, ἂν διαιρεῖται ἀκριβῶς ἢ πολλαπλασιάζωμε τὸν παρονομαστή του ἐπὶ 3.

Δηλ. $\frac{3}{10} : 3 = \frac{3:3}{10} = \frac{1}{10}$ μέτρ. ὕφασμα χρειάζεται γιὰ κάθε κορδελλίτσα.

Μποροῦμε ὅμως νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν παρονομαστή, ἀντὶ νὰ διαιρέσωμε τὸν ἀριθμητή. Ἔτσι:

$\frac{3}{10} : 3 = \frac{3}{10 \times 3} = \frac{3}{30}$ μέτρ. ὕφασμα χρειάζεται γιὰ κάθε κορδελλίτσα. Ἀλλὰ τὰ κλάσματα $\frac{1}{10}$ μέτρ. καὶ $\frac{3}{30}$ μέτρ. εἶναι ἰσοδύναμα κλάσματα. Κάμετε τὴν ἁπλοποίηση καὶ θὰ τὸ ἰδῆτε.

Ὥστε: *Γιὰ νὰ διαιρέσωμε κλάσμα δι' ἀκεραίου, διαιροῦμε τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ ἀκεραίου, ἂν διαιρεῖται ἀκριβῶς, ἢ πολλαπλασιάζομε τὸν παρονομαστή του ἐπὶ τὸν ἀκέραιο.*

Διαίρεση μικτοῦ δι' ἀκεραίου

Ὅταν ἔχωμε νὰ διαιρέσωμε μικτὸ δι' ἀκεραίου, τρέπομε τὸ μικτὸ σὲ κλάσμα καὶ διαιροῦμε, ὅπως μάθαμε.

Δηλ. $3\frac{1}{4} : 5 = \frac{13}{4} : 5 = \frac{13}{4 \times 5} = \frac{13}{20}$.

Ἀσκήσεις

1. Νὰ κάμετε τὸ κλάσμα $\frac{6}{8}$ 4 φορὲς μικρότερο.

Νὰ κάνετε τὸ κλάσμα $\frac{9}{12}$, 3 φορὲς μικρότερο.

2. Νὰ κάνετε τὰ κλάσματα $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{2}{5}$, 2 φορὲς μικρότερα.

3. Νὰ κάνετε τὰ κλάσματα $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{7}{12}$ 3 φορὲς μικρότερα,

4. Κάντε τὶς παρακάτω διαιρέσεις:

α) $\frac{3}{5} : 3 =$; $\frac{6}{7} : 4 =$; $\frac{5}{9} : 7 =$; $\frac{4}{8} : 2 =$; $\frac{8}{10} : 5 =$;

β) $2\frac{5}{7} : 7 =$; $8\frac{8}{9} : 4 =$; $5\frac{7}{8} : 3 =$; $3\frac{6}{7} : 5 =$;

Προβλήματα

1. Ἕνα αὐτοκίνητο ἔκαμε τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ δρόμου σὲ 3 ὧρες ; Πόσο μέρος τοῦ δρόμου ἔκαμε σὲ μιὰ ὥρα ;

2. Μοιρᾶστε $\frac{3}{5}$ τοῦ δεκάδρ. σὲ δυὸ παιδιά. Πόσες δραχμὲς θὰ πάρῃ τὸ καθένα ;

3. Μὲ $11\frac{1}{2}$ μέτρα ὕφασμα κάμαμε 3 ἐνδυμασίες. Πόσα μέτρα ὕφασμα χρειάζεται γιὰ μιὰ ἐνδυμασία ;

4. Ἕξι κιλὰ φασόλια στοιχίζουν $12\frac{1}{4}$ δραχμές. Πόσο στοιχίζει τὸ κιλό;

5. Κάντε ὅμοια προβλήματα καὶ λύστε τα.

Διαίρεση ἀκέραιου διὰ κλάσματος

Παράδειγμα. Τὰ $\frac{6}{8}$ κιλὰ κρέας κάνουν 27 δραχμές. Πόσο κάνει τὸ ἕνα κιλό ;

Θὰ σκεφθοῦμε ἔτσι:

Ἀφοῦ τὰ $\frac{6}{8}$ τοῦ κιλοῦ κάνουν 27 δραχμες, τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ κιλοῦ, ποὺ εἶναι 6 φορὲς μικρότερο ἀπὸ τὸ $\frac{6}{8}$ τοῦ κιλοῦ, θὰ κάνῃ 6 φορὲς λιγότερο, δηλ. $\frac{27}{6}$ δρχ. Καὶ ὅλο τὸ κιλό, ποὺ εἶναι $\frac{8}{8}$, δηλ. 8 φορὲς περισσότερο ἀπὸ τὸ $\frac{1}{8}$, θὰ κάνη 8 φορὲς περισσότερο ἀπὸ τὴν τιμὴ τοῦ $\frac{1}{8}$, δηλ. $\frac{27}{6} \times 8 = \frac{27 \times 8}{6} = \frac{216}{6} = 36$ δρχ. θὰ κάνη τὸ ἕνα κιλό.

Κατάταξη : $\frac{6}{8}$ κιλὰ ἀξίζουν 27 δραχμὲς

$\frac{1}{8}$ κιλὰ ἀξίζουν $\frac{27}{6}$ δραχμὲς

$\frac{8}{8}$ κιλὰ ἀξίζουν $\frac{27 \times 8}{6} = \frac{216}{7} = 36$ δραχμὲς.

Γιὰ νὰ διαιρεθῆ λοιπὸν τὸ $27 : \frac{6}{8}$ πολλαπλασιάσαμε τὸ $27 \times \frac{6}{8}$. Μὲ ἄλλα λόγια ἀντιστρέψαμε τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος (τὸν ἀριθμητὴ τὸν κάναμε παρονομαστὴ καὶ τὸν παρονομαστὴ ἀριθμητὴ) καὶ ἀντὶ διαιρέσεως κάναμε πολλαπλασιασμό.

Ἄλλο παράδειγμα : $5 : \frac{3}{6} = 5 \times \frac{6}{3} = \frac{5 \times 6}{3} = \frac{30}{3} = 10.$

Ὥστε : *Γιὰ νὰ διαιρέσωμε ἀκέραιο διὰ κλάσματος ἀντιστρέφομε τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος καὶ ἀντὶ διαιρέσεως κάμνομε πολλαπλασιασμό.*

Ἀσκήσεις

Νὰ γίνουν οἱ παρακάτω διαιρέσεις:

α) $25 : \frac{5}{7} = ;$ $18 : \frac{3}{4} = ;$ $45 : \frac{5}{8} = ;$ $17 : \frac{3}{6} = ;$

β) $5 : \frac{8}{9} = ;$ $3 : \frac{5}{6} = ;$ $2 : \frac{4}{7} = ;$ $1 : \frac{3}{4} = ;$

Παράδειγμα

1. Μὲ 185 δραχμὲς ἀγοράζω $\frac{9}{10}$ μέτρ. ὕφασμα. Πόσο ἀξίζει τὸ μέτρο;

2. Ἀγόρασα $\frac{6}{8}$ κιλὰ μῆλα καὶ ἔδωσα 9 δραχμές. Πόσο ἀξίζει τὸ κιλό;

3. Ἕνας ἐργάτης δουλεύει τὰ $\frac{3}{7}$ τῆς ἑβδομάδας καὶ παίρνει 270 δραχμές. Πόσες δραχμὲς θὰ πάρη, ἂν δουλέψη ὁλόκληρη τὴν ἑβδομάδα;

4. Κάντε καὶ σεῖς παρόμοια προβλήματα.

Διαίρεση κλάσματος διὰ κλάσματος

Παράδειγμα. Τὰ $\frac{2}{4}$ κιλὰ πατάτες ἀξίζουν $\frac{2}{5}$ τοῦ τάλληρου. Πόσο ἀξίζει τὸ κιλό;

Γιὰ νὰ βροῦμε πόσο ἀξίζει τὸ κιλό, θὰ κάμωμε διαίρεση. Στὰ προβλήματα αὐτά, εἶναι ἀνάγκη νὰ ξέρωμε ποιό κλάσμα θὰ διαιρεθῆ, δηλ. ποιό κλάσμα εἶναι ὁ διαιρετέος.

Αὐτὸ τὸ βρίσκομε εὔκολα, ἐξετάζοντες τί ζητάει τὸ πρόβλημα. Τὸ πρόβλημα ἐδῶ ζητάει, πόσο ἀξίζει τὸ κιλό, δηλαδὴ χρήματα. Τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$ ταλλήρ. φανερώνει χρήματα. Ἑπομένως διαιρετέος εἶναι τὸ $\frac{2}{5}$ ταλλήρ.

Ἔτσι ἔχομε νὰ διαιρέσωμε τὸ $\frac{2}{5}:\frac{2}{4}$.

Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα αὐτὸ θὰ σκεφθοῦμε ἔτσι:

Τὰ $\frac{2}{4}$ κιλὰ ἀξίζουν $\frac{2}{5}$ ταλήρ. Τὸ $\frac{1}{4}$, ποὺ εἶναι 2 φορὲς μικρότερο ἀπὸ τὸ $\frac{2}{4}$, θὰ ἀξίζη δυὸ φορὲς λιγότερο, ἀπὸ ὅσα ἀξίζει αὐτό, δηλ. $\frac{2}{5}:2=\frac{2}{5\times 2}$. Καὶ τὰ $\frac{4}{4}$ κιλ., ποὺ εἶναι 4 φορὲς περισσότερο ἀπὸ τὸ $\frac{1}{4}$, θὰ ἀξίζουν 4 φορὲς περισσότερο, ἀπὸ ὅσα ἀξίζει αὐτό, δηλ. $\frac{2}{5\times 2}\times 4=$

$=\frac{2\times 4}{5\times 2}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$ ταλλήρ. ἀξίζει τὸ κιλό.

Κατάταξη: $\frac{2}{4}$ κιλὰ ἀξίζουν $\frac{2}{5}$ ταλλήρ.

$\frac{1}{4}$ κιλὰ ἀξίζουν $\frac{2}{5\times 2}$ ταλλήρ. (2 φορὲς λιγότερο).

$\frac{4}{4}$ κιλὰ ἀξίζουν $\frac{2\times 4}{5\times 2}$ ταλήρ. $=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$ ταλλήρ.

Ἂν προσέξτε τώρα τὶς πράξεις ποὺ κάναμε, θὰ ἰδῆτε ὅτι γιὰ νὰ διαιρέσωμε τὸ $\frac{2}{5} : \frac{2}{4}$, ἀντιστρέψαμε τοὺς ὅρους τοῦ διαιρέτη $\left(\text{τὸ } \frac{2}{4} \text{ ἔγινε } \frac{4}{2}\right)$ καὶ ἀντὶ διαιρέσεως, κάναμε πολλαπλασιασμὸ κλάσματος ἐπὶ κλάσμα, ὅπως μάθαμε.

Ὥστε: *Γιὰ νὰ διαιρέσωμε κλάσμα διὰ κλάσματος, ἀντιστρέφομε τοὺς ὅρους τοῦ διαιρέτη καὶ ἀντὶ διαιρέσεως κάμνομε πολλαπλασιασμὸ κλάσματος ἐπὶ κλάσμα.*

Ἀσκήσεις

Νὰ γίνουν οἱ παρακάτω διαιρέσεις:

α) $\frac{3}{5} : \frac{5}{9} = ;$ $\quad \frac{1}{5} : \frac{1}{4} = ;$ $\quad \frac{2}{3} : \frac{3}{4} = ;$ $\quad \frac{5}{7} : \frac{3}{6} = ;$

β) $\frac{6}{8} : \frac{2}{3} = ;$ $\quad \frac{5}{9} : \frac{4}{7} = ;$ $\quad \frac{1}{8} : \frac{1}{2} = ;$ $\quad \frac{3}{6} : \frac{4}{8} = ;$

Προβλήματα.

1. Τὰ $\frac{2}{4}$ κιλὰ ρεβύθια ἀξίζουν $\frac{3}{10}$ δρχ. Πόσο ἀξίζει τὸ ἕνα κιλό;

2. Τὰ $\frac{5}{6}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι $\frac{2}{3}$. Ποιὸς εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός;

$\left(\text{Διαιρετέος εἶναι τὸ μέρος τοῦ ἀριθμοῦ, δηλ. τὰ } \frac{2}{3}\right)$.

3. Μὲ $\frac{9}{10}$ τοῦ δεκάδραχμου ἀγοράζω $\frac{6}{8}$ κιλὰ μῆλα. Πόσο ἀξίζει τὸ κιλό;

4. Μὲ $\frac{4}{5}$ τοῦ πεντάδραχμου ἀγοράζω $\frac{4}{8}$ κιλὰ καρύδια. Πόσο ἀξίζει τὸ κιλό;

5. Κάντε παρόμοια προβλήματα.

Διαίρεση μικτοῦ διὰ μικτοῦ.

Παράδειγμα. Οἱ $6\frac{7}{8}$ κιλὰ μῆλα κάνουν $82\frac{1}{2}$ δραχ. Πόσο ἀξίζει τὸ κιλό;

Διαιρετέος είναι τὸ $82\frac{1}{2}$. Ἔτσι ἔχομε νὰ διαιρέσωμε τοὺς μικτούς: $83\frac{1}{2} : 6\frac{7}{8}$.

Στὸ πρόβλημά μας ὁ διαιρέτης καὶ ὁ διαιρετέος εἶναι μικτοὶ ἀριθμοί. Τοὺς τρέπομε πρῶτα σὲ καταχρηστικὰ κλάσματα καὶ ἔπειτα κάμνομε τὴ διαίρεση, ὅπως ξέρομε.

Δηλαδή:

$82\frac{1}{2}$ δρχ. : $6\frac{7}{8}$ κιλ. $= \frac{165}{2} : \frac{55}{8} = \frac{165}{2} \times \frac{8}{55} = \frac{1320}{110} = 12$ δρχ. ἀξίζει τὸ κιλό.

Ὥστε: *Ὅταν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι μικτοὶ ἀριθμοί, τοὺς τρέπομε σὲ κλάσματα καὶ κατόπιν κάμνομε διαιρεση κλάσματος διὰ κλάσματος.*

Ἀσκήσεις.

1. Νὰ γίνουν οἱ παρακάτω διαιρέσεις:

α) $3\frac{3}{4} : 2\frac{5}{6} =$; $\quad 5\frac{1}{3} : 2\frac{2}{4} =$; $\quad 7\frac{3}{5} : 3\frac{2}{6} =$;

β) $2\frac{3}{5} : \frac{8}{9} =$; $\quad 3\frac{1}{3} : \frac{5}{7} =$; $\quad 4\frac{2}{7} : \frac{4}{5} =$;

γ) $6 : 3\frac{2}{3} =$; $\quad 4 : 2\frac{1}{2} =$; $\quad 5 : 7\frac{1}{6} =$; $\quad 6 : 4\frac{3}{7} =$;

δ) $\frac{3}{4} : 3 =$; $\quad \frac{7}{8} : 6 =$; $\quad \frac{6}{12} : 4 =$; $\quad \frac{8}{16} : 2 =$;

ε) $3 : \frac{2}{4} =$; $\quad 5 : \frac{7}{8} =$; $\quad 3 : \frac{8}{10} =$; $\quad 1 : \frac{7}{14} =$;

στ) $\frac{2}{3} : \frac{1}{4} =$; $\quad \frac{6}{5} : \frac{7}{8} =$; $\quad \frac{2}{8} : \frac{7}{10} =$; $\quad \frac{1}{2} : \frac{6}{16} =$;

2. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε $4\frac{2}{8}$ μέτρα ὕφασμα καὶ ἔδωσε $361\frac{1}{4}$ δρχ. Πόσο ἀξίζει τὸ μέτρο;

3. Τὰ $2\frac{4}{8}$ κιλ. φασόλια ἀξίζουν $26\frac{1}{2}$ δρχ. Πόσο ἀξίζει τὸ κιλό;

4. Οἱ $3\frac{7}{8}$ κιλ. τυρὶ ἀξίζουν $135\frac{1}{2}$ δρ. Πόσο ἀξίζει τὸ κιλό;

5. Ἀνακεφαλαίωση

Πρόσθεση κλασμάτων

α΄. Ὁμώνυμα κλάσματα: Προσθέτομε τοὺς ἀριθμητές. Τὸ ἄθροισμα τὸ βάνομε ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ ἀφήνομε τὸν ἴδιο: Π.χ.

$$\frac{2}{6}+\frac{1}{6}+\frac{3}{6}=\frac{6}{6}.$$

β΄. Ἑτερώνυμα κλάσματα: Τὰ κάμνομε ὁμώνυμα καὶ ἔπειτα τὰ προσθέτομε. Π.χ.

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{2}+\frac{2}{6}=\overset{12}{\frac{3}{5}}+\overset{30}{\frac{1}{2}}+\overset{10}{\frac{2}{6}}=\frac{36}{60}+\frac{30}{60}+\frac{20}{60}=\frac{86}{60}=1\frac{26}{60}.$$

γ΄. Μικτοὺς ἀριθμούς: Προσθέτομε χωριστὰ τοὺς ἀκέραιους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἔπειτα ἑνώνομε τὰ δυὸ ἀθροίσματα ἢ τρέπομε τοὺς μικτοὺς σὲ κλάσματα καὶ ἔπειτα προσθέτομε, ὅπως προσθέτομε κλάσμα μὲ κλάσμα. Π.χ.

$$3\frac{1}{2}+5=\left(3\times5\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)=8\frac{4}{8}+\frac{6}{8}=8\frac{10}{8}=9\frac{2}{8}$$

ἢ

$$3\frac{1}{2}+5\frac{3}{4}=\frac{7}{2}+\frac{23}{4}=\frac{28}{8}+\frac{46}{8}=\frac{74}{8}=9\frac{2}{8}.$$

Ἀφαίρεση κλασμάτων

α΄. Ὁμώνυμα κλάσματα: Ἀφαιροῦμε τὸν ἀριθμητὴ τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴ τοῦ μειωτέου. Τὸ ὑπόλοιπο τὸ βάνομε ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ ἀφήνομε τὸν ἴδιο. Π. χ. $\frac{8}{9}-\frac{5}{9}=\frac{3}{9}$ $\frac{20}{24}-\frac{10}{24}=\frac{10}{24}.$

β΄. Ἑτερώνυμα κλάσματα: Τὰ τρέπομε σὲ ὁμώνυμα καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμε, ὅπως μάθαμε.

Π. χ. $\frac{4}{5}-\frac{5}{10}=\frac{40}{50}-\frac{25}{50}=\frac{15}{50}.$

γ΄. Ἀφαίρεση κλάσματος ἀπὸ ἀκέραιο: Παίρνομε ἀπὸ τὸν ἀκέραιο μιὰ μονάδα καὶ τὴν τρέπομε σὲ κλάσμα, ποὺ ἔχει ἴδιο παρονομαστὴ μὲ τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου. Κατόπιν ἀφαιροῦμε κλάσμα ἀπὸ κλάσμα καὶ ἑνώνομε τὰ δυὸ ὑπόλοιπα.

$$\text{Π. χ.} \quad 30 - \frac{3}{5} = 29\frac{5}{5} - \frac{3}{5} = 29\frac{2}{5}.$$

δ΄. Ἀφαίρεση μικτοῦ ἀπὸ μικτό: Ἀφαιροῦμε ἀκέραιο ἀπὸ ἀκέραιο καὶ κλάσμα ἀπὸ κλάσμα καὶ ἑνώνομε τὰ δυὸ ὑπόλοιπα, ἢ τρέπομε καὶ τοὺς δυὸ μικτοὺς σὲ καταχρηστικὰ κλάσματα καὶ ἀφαιροῦμε κλάσμα ἀπὸ κλάσμα. Π. χ.

$$5\frac{2}{3} - 3\frac{1}{2} = 5\frac{4}{6} - 3\frac{3}{6} = (5-3) + \left(\frac{4}{6} - \frac{3}{6}\right) = 2\frac{1}{6}$$

$$\text{ἢ} \quad 5\frac{2}{3} - 3\frac{1}{2} = \frac{17}{3} - \frac{7}{2} = \frac{34}{6} - \frac{21}{6} = \frac{13}{6} = 2\frac{1}{6}.$$

ε΄. Ἀφαίρεση μικτοῦ ἀπὸ ἀκέραιο: Κάμνομε καὶ τὸν ἀκέραιο κλάσμα μὲ παρονομαστὴ τὸν ἴδιο τοῦ ἀφαιρετέου καὶ ἔτσι ἔχομε ἀφαίρεση κλάσματος ἀπὸ κλάσμα.

$$\text{Π. χ.} \quad 8 - 3\frac{2}{4} = \frac{32}{4} - \frac{14}{4} = \frac{18}{4} = 4\frac{2}{4}.$$

στ΄. Ἀφαίρεση κλάσματος ἀπὸ μικτό: Ἂν τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου, παίρνομε ἀπὸ τὸν ἀκέραιο τοῦ μειωτέου μιὰ μονάδα, τὴν τρέπομε σὲ κλάσμα κι ἔπειτα κάμνομε τὴν ἀφαίρεση, ὅπως μάθαμε ἢ τρέπομε τὸ μικτὸ σὲ κλάσμα καὶ ἀφαιροῦμε κλάσμα ἀπὸ κλάσμα.

$$\text{Π. χ.} \quad 13\frac{1}{4} - \frac{2}{3} = 12\frac{5}{4} - \frac{2}{3} = 12\frac{15}{12} - \frac{8}{12} = 12\frac{7}{12}$$

$$\text{ἢ} \quad 13\frac{1}{4} - \frac{2}{3} = \frac{53}{4} - \frac{2}{3} = \frac{159}{12} - \frac{8}{12} = \frac{151}{12} = 12\frac{7}{12}.$$

Πολλαπλασιασμὸς κλασμάτων

Πολλαπλασιασμὸ κάμνομε:

1. Ὅταν γνωρίζωμε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας καὶ ζητοῦμε τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν ἢ ἑνὸς κομματιοῦ τῆς μονάδας.

2. Ὅταν θέλωμε νὰ βροῦμε τὸ μέρος ἑνὸς ἀριθμοῦ.

α΄. Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιο ἢ ἀκεραίου ἐπὶ κλάσμα: Πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλ σματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιο, τὸ γινόμενο τὸ βάνομε ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ ἀφήνομε τὸν ἴδιο.

$$\text{Π. χ.} \quad \frac{3}{8} \times 5 = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}.$$

β΄. Πολλαπλασιασμὸς μικτοῦ ἐπὶ ἀκέραιο: Τρέπομε τὸ μικτὸ σὲ κλάσμα καὶ πολλαπλασιάζομε κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιο.

$$\text{Π. χ.} \quad 4\frac{2}{3} \times 5 = \frac{14}{3} \times 5 = \frac{14 \times 5}{3} = \frac{70}{3} = 23\frac{1}{3}.$$

γ΄. Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ κλάσμα: Πολλαπλασιάζομε ἀριθμητὴ ἐπὶ ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ ἐπὶ παρονομαστή. Τὸ γινόμενο τῶν ἀριθμητῶν τὸ βάνομε ἀριθμητὴ καὶ τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν παρονομαστή.

$$\text{Π. χ.} \quad \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}.$$

δ΄. Πολλαπλασιασμὸς μικτῶν ἀριθμῶν: Τρέπομε τοὺς μικτοὺς σὲ κλάσματα καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομε κλάσμα ἐπὶ κλάσμα.

$$\text{Π. χ.} \quad 7\frac{2}{5} \times 3\frac{1}{3} = \frac{37}{5} \times \frac{10}{3} = \frac{37 \times 10}{5 \times 3} = \frac{370}{15} = 24\frac{10}{15}.$$

Διαίρεση κλασμάτων

Διαίρεση κάμνομε:

1. Ὅταν γνωρίζωμε τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων ἢ κομματιῶν τῆς μονάδας καὶ ζητοῦμε νὰ βροῦμε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας.
2. Ὅταν γνωρίζωμε τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας καὶ τὴν τιμὴ πολλῶν μονάδων ἢ κομματιῶν τῆς μονάδας καὶ ζητοῦμε νὰ βροῦμε τὸ πλῆθος τῶν μονάδων.
3. Ὅταν γνωρίζωμε τὸ μέρος ἑνὸς ἀριθμοῦ καὶ ζητοῦμε νὰ βροῦμε ὁλόκληρο τὸν ἀριθμό.

α΄. Διαίρεση κλάσματος δι᾽ ἀκεραίου: Διαιροῦμε τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ ἀκεραίου, ἂν διαιρεῖται ἀκριβῶς ἢ πολλαπλασιάζομε τὸν παρονομαστὴ ἐπὶ τὸν ἀκέραιο.

Π. χ. $\frac{4}{5} : 2 = \frac{4:2}{5} = \frac{2}{5}$ ἢ $\frac{4}{5} : 2 = \frac{4}{5 \times 2} = \frac{4}{10}$. Τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι τὸ ἴδιο, διότι $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$.

β΄. Διαίρεση μικτοῦ δι᾽ ἀκεραίου: Κάμνομε τὸ μικτὸ κλάσμα καὶ διαιροῦμε κλάσμα δι᾽ ἀκεραίου.

Π.χ. $3\frac{1}{4}:5=\frac{13}{4}:5=\frac{13}{4\times5}=\frac{13}{20}$.

γ΄. Διαίρεση ἀκεραίου διὰ κλάσματος: Ἀντιστρέφομε τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος καὶ κάμνομε πολλαπλασιασμό, ἀντὶ διαιρέσεως.

Π.χ. $6:\frac{5}{7}=\times 6\frac{7}{5}=\frac{42}{5}=8\frac{2}{5}$.

δ΄. Διαίρεση κλάσματος διὰ κλάσματος: Ἀντιστρέφομε τοὺς ὅρους τοῦ διαιρέτη καὶ κάμνομε πολλαπλασιασμὸ κλάσματος ἐπὶ κλάσμα.

Π.χ. $\frac{3}{5}:\frac{2}{4}=\frac{3}{5}\times\frac{4}{2}=\frac{3\times4}{5\times2}=\frac{12}{10}=1\frac{2}{10}$.

ε΄. Διαίρεση μικτοῦ διὰ μικτοῦ: Τρέπομε πρῶτα τοὺς μικτοὺς σὲ κλάσματα καὶ κάμνομε διαίρεση, ὅπως κάμνομε στὴν περίπτωση κλάσματος διὰ κλάσματος.

Π.χ. $3\frac{4}{5}:2\frac{5}{6}=\frac{19}{5}:\frac{17}{6}=\frac{19}{5}\times\frac{6}{17}=\frac{19\times6}{5\times17}=\frac{114}{85}=1\frac{29}{85}$.

Ἀπαραίτητες παρατηρήσεις

1. Στὴν πρόσθεση καὶ τὴν ἀφαίρεση πρέπει πάντοτε τὰ κλάσματα νὰ γίνωνται ὁμώνυμα.

2. Στὸ τέλος κάθε πράξεως, ἂν τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι καταχρηστικὸ κλάσμα, βγάζομε πάντοτε τὶς ἀκέραιες μονάδες.

3. Οἱ πράξεις τῶν κλασμάτων γίνονται ὁριζόντια μὲ τὰ σημεῖα τους. Ὅλες τὶς πράξεις, ποὺ πρέπει νὰ κάμωμε, τὶς γράφομε.

4. Ὅπου γίνονται ἁπλοποιήσεις πρέπει νὰ τὶς κάμνωμε.

5. Πρέπει νὰ προσέχωμε στὴ γραφὴ τῶν πράξεων, ὥστε τὰ σημεῖα τους ($+$, $-$, $\times$, $:$, $=$) νὰ εἶναι ἀκριβῶς μεταξὺ τῶν κλασμάτων, κοντὰ στὴν κλασματικὴ γραμμή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ΄.

ΔΕΚΑΔΙΚΑ ΚΑΙ ΚΟΙΝΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

1. Πῶς τρέπεται ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς σὲ κοινὸ κλάσμα

Τὰ κλάσματα γιὰ νὰ τὰ ξεχωρίζωμε ἀπὸ τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς, ποὺ εἶναι καὶ αὐτοὶ κλάσματα, τὰ λέμε κοινὰ κλάσματα. Ἔχομε λοιπὸν δυὸ εἰδῶν κλάσματα, τὰ κοινὰ καὶ τὰ δεκαδικά, ποὺ λέγονται ἁπλῶς καὶ δεκαδικοὶ ἀριθμοί.

Παράδειγμα. Ἔχομε τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς 0,5 μέτρα, 0,25 μέτρα, 2,35 μέτρα καὶ θέλομε νὰ τοὺς τρέψωμε σὲ κοινὰ κλάσματα.

Ἂς πάρωμε τὸ δεκαδικὸ 0,5 μέτρα. Τί θὰ πῆ πέντε δέκατα τοῦ μέτρου; Θὰ πῆ ὅτι χωρίσαμε τὸ μέτρο σὲ δέκα ἴσα μέρη καὶ πήραμε τὰ πέντε. Μποροῦμε λοιπὸν τὸ δεκαδικὸ ἀριθμὸ 0,5 μ. νὰ τὸν γράψωμε καὶ σὰν κοινὸ κλάσμα, ἔτσι: $\frac{5}{10}$ μέτρα, γιατὶ καὶ τὸ κλάσμα $\frac{5}{10}$ μέτρα φανερώνει ὅτι χωρίσαμε τὸ μέτρο σὲ δέκα ἴσα μέρη καὶ πήραμε τὰ πέντε. Ὥστε 0,5 μέτρ. $= \frac{5}{10}$ μέτρ.

Ἂς πάρωμε τὸ δεκαδικὸ 0,25 μ. Τί θὰ πῆ εἴκοσι πέντε ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου; Θὰ πῆ, ὅτι χωρίσαμε τὸ μέτρο σὲ ἑκατὸ ἴσα μέρη καὶ πήραμε τὰ εἴκοσι πέντε.

Μποροῦμε λοιπὸν τὸ δεκαδικὸ ἀριθμὸ 0,25 μ. νὰ τὸν γράψωμε καὶ σὰν κοινὸ κλάσμα ἔτσι: $\frac{25}{100}$ μέτρα, γιατὶ καὶ τὸ κλάσμα $\frac{25}{100}$ μέτρα, μᾶς φανερώνει τὸ ἴδιο, ὅτι δηλ. χωρίσαμε τὸ μέτρο σὲ ἑκατὸ ἴσα μέρη καὶ πήραμε τὰ 25.

Μὲ ἄλλα λόγια 0,25 μ. $= \frac{25}{100}$ μ.

Ἂς πάρωμε τὸ δεκαδικὸ 2,35 μ. Τί θὰ πῆ δυὸ μέτρα καὶ τριάντα πέντε ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου; Θὰ πῆ, ὅτι ἔχομε δυὸ ὁλόκληρα μέτρα καὶ τριάντα πέντε ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου. Ἂν κάνωμε τὰ δυὸ μέτρα ἑκατοστὰ καὶ προσθέσωμε καὶ τὰ τριάντα πέντε, ποὺ ἔχομε, θὰ γίνουν ὅλα 235 ἑκατοστά.

᾿Αλλὰ τὰ 235 ἑκατοστὰ μποροῦμε νὰ τὰ γράψωμε σὰν κοινὸ κλάσμα, ἔτσι: $\frac{235}{100}$. ῾Επομένως: 0,5 μ. $= \frac{5}{10}$ μ., 0,25 μ. $= \frac{25}{100}$ μ., 2,35 μ. $= \frac{235}{100}$.

Οἱ δεκαδ. ἀριθμοὶ 0,5, 0,25, καὶ 2,35 ἔγιναν ἰσοδύναμα κοινὰ κλάσματα $\frac{5}{10}$, $\frac{25}{100}$ καὶ $\frac{235}{100}$ (μποροῦμε νὰ ἁπλοποιήσωμε

$$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \quad \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \text{ κλπ.}).$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἀπὸ τοὺς δεκαδικοὺς σβύσαμε τὴν ὑποδιαστολὴ καὶ τοὺς ἀκέραιους, ποὺ ἔγιναν τώρα (5, 25, 235), τοὺς βάλαμε ἀριθμητές, παρονομαστὴ δὲ βάλαμε στὸ πρῶτο κλάσμα τὸ 10, στὸ δεύτερο καὶ τρίτο τὸ 100, δηλ. παρονομαστὴ βάλαμε στὸ καθένα τὴ μονάδα μὲ τόσα μηδενικά, ὅσα δεκαδικὰ ψηφία, εἶχε ὁ δεκαδικὸς ἀριθμός.

῞Ωστε: *Γιὰ νὰ τρέψωμε ἕνα δεκαδικὸ ἀριθμὸ σὲ κοινὸ κλάσμα, σβύνομε τὴν ὑποδιαστολή του καὶ τὸν ἀκέραιο, ποὺ θὰ γίνῃ τότε, τὸν γράφομε ὡς ἀριθμητή, παρονομαστὴ δὲ τοῦ κλάσματος γράφομε τὸ 1 (τὴ μονάδα) μὲ τόσα μηδενικά, ὅσα δεκαδικὰ ψηφία ἔχει ὁ δεκαδικὸς ἀριθμός.*

᾿Ασκήσεις.

Νὰ γίνουν κοινὰ κλάσματα οἱ παρακάτω δεκαδικοί:

α´.	3,1	0,42	5,15	0,001	0,1	2,03
β´.	25,1	1,5	3,25	47,005	0,5	

2. Πῶς τρέπεται τὸ κοινὸ κλάσμα σὲ δεκαδικὸ ἀριθμὸ

Παράδειγμα. ῎Εχομε τὰ κοινὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$ μ., $\frac{3}{4}$ μ., $\frac{2}{5}$ μ. καὶ θέλομε νὰ τὰ τρέψωμε σὲ δεκαδικούς.

῎Ας πάρωμε τὸ κοινὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$ μ. Τί θὰ πῆ ἕνα δεύτερο τοῦ μέτρου; Θὰ πῆ, ὅτι χωρίσαμε τὸ μέτρο σὲ 2 ἴσα μέρη καὶ πήραμε τὸ ἕνα μέρος, δηλ. τὸ μισὸ μέτρο.

῎Αν χωρίζαμε τὸ μέτρο σὲ δέκα ἴσα μέρη καὶ παίρναμε τὰ πέντε, δὲν θὰ παίρναμε πάλι μισὸ μέτρο;

Λοιπόν, ἢ $\frac{1}{2}$ μ. ποῦμε ἢ $\frac{5}{10}$ μ. εἶναι πάντα τὸ ἴδιο, μισὸ μέτρο.

Ἀλλὰ τὸ κλάσμα $\frac{5}{10}$ μποροῦμε νὰ τὸ γράψωμε σὰν δεκαδικὸ ἀριθ-
ό, ἔτσι: 0,5 μ.

Ὥστε $\frac{1}{2}$ μ. $=$ 0,5 μ.

Ἄς πάρωμε τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ μ. Τί θὰ πῆ τρία τέταρτα τοῦ μέτρου; Θὰ
τῆ ὅτι χωρίσαμε τὸ μέτρο σὲ τέσσερα ἴσα μέρη καὶ πήραμε τὰ τρία, δηλ. πή-
αμε τὰ τρία τέταρτα τοῦ μέτρου. Ἂν χωρίζαμε τὸ μέτρο σὲ 100 ἴσα μέρη,
ιὰ νὰ πάρωμε τὰ τρία τέταρτά του, θὰ ἔπρεπε βέβαια νὰ πάρωμε 75 κομμάτια
πὸ τὰ ἑκατό, γιατὶ 25+25+25=100. Ἡ $\frac{3}{4}$ μ. λοιπὸν ποῦμε, ἢ $\frac{75}{100}$ μ.
ἶναι τὸ ἴδιο πάντα τρία τέταρτα τοῦ μέτρου.

Ἀλλὰ τὸ κλάσμα $\frac{75}{100}$ μ., μποροῦμε νὰ τὸ γράψωμε σὰν δεκαδικὸ
ριθμὸ ἔτσι: 0,75.

Ὥστε $\frac{3}{4}$ μ. $=$ 0,75 μ.

Ἄς πάρωμε τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$ μ. Τί θὰ πῆ δυὸ πέμπτα τοῦ μέτρου; Θὰ
πῆ, ὅτι χωρίσαμε τὸ μέτρο σὲ πέντε ἴσα κομμάτια καὶ πήραμε τὰ 2. Ἂν χω-
ρίζαμε τὸ μέτρο σὲ δέκα ἴσα μέρη καὶ πέρναμε τὰ 4, εἶναι πάλι τὸ ἴδιο.

Ἀλλὰ τὸ κλάσμα $\frac{4}{10}$ μποροῦμε νὰ τὸ γράψωμε καὶ σὰν δεκαδικὸ
ἀριθμὸ ἔτσι: 0,4 μ.

Ὥστε $\frac{2}{5}$ μ. $=$ 0,4 μ.

Φθάνομε ὅμως στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα, ἂν διαιρέσωμε τὸν ἀριθμητὴ κάθε
κλάσματος διὰ τοῦ παρονομαστῆ. Νά ἔτσι:

$$\left(\frac{1}{2}\right)\ \begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 0{,}5 \end{array} \qquad \left(\frac{3}{4}\right)\ \begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & 0{,}75 \\ 0 & \end{array} \qquad \left(\frac{2}{5}\right)\ \begin{array}{r|l} 20 & 5 \\ \cline{2-2} 0 & 0{,}4 \end{array}$$

Ὥστε: *Γιὰ νὰ τρέψωμε ἕνα κοινὸ κλάσμα σὲ δεκαδικὸ ἀριθμό, διαι-
ροῦμε τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ παρονομαστῆ.*

Ἀσκήσεις

1. Νὰ γίνουν δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ τὰ παρακάτω κοινὰ κλάσματα:

$$\frac{2}{5} \quad \frac{4}{16} \quad \frac{3}{6} \quad \frac{5}{15} \quad \frac{25}{4} \quad \frac{8}{5} \quad \frac{48}{8}.$$

2. Νὰ γίνουν κοινὰ κλάσματα οἱ παρακάτω δεκαδικοί:

0,5	0,25	0,275	6,3	4,01
1,1	4,25	3,001	2,282	6,347

3. Μικτὰ προβλήματα ἀκεραίων δεκαδικῶν καὶ κλασματικῶν ἀριθμῶν

1. Μιὰ τετραμελὴς οἰκογένεια ταξίδεψε ἀπὸ μιὰ πόλη σὲ ἄλλη καὶ πλή-ρωσε γιὰ τὰ εἰσιτήριά της δρχ. 900. Ὁ πατέρας κατέβαλε $\frac{1}{4}$ τοῦ εἰσιτηρίου, ἡ μητέρα πλήρωσε ὁλόκληρο εἰσιτήριο καὶ τὰ 2 παιδιὰ ὡς ἀνήλικα $\frac{1}{2}$ τοῦ εἰσιτηρίου τὸ καθένα. Ποιά ἦταν ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς εἰσιτηρίου καὶ πόσα χιλιό-μετρα ἀπεῖχαν οἱ δυὸ πόλεις, ἂν ἡ τιμὴ ἑνὸς εἰσιτηρίου γιὰ κάθε χιλιόμετρο εἶναι 2 δραχμές;

2. Σὲ μιὰ δημοπρασία ἕνα ἔπιπλο πουλήθηκε 8.200 δρχ. Ὁ ἀγοραστὴς ὀφείλει νὰ πληρώση ἐπὶ πλέον καὶ $\frac{1}{10}$ τῆς ἀξίας τοῦ ἐπίπλου γιὰ διάφορα ἔξοδα καὶ $\frac{3}{20}$ γιὰ ἔξοδα μεταφορᾶς. Πόσο συνολικὰ κόστισε ἡ ἀγορὰ αὐτή;

3. Ἕνας ἔμπορος ἀγοράζει 950 δρχ. τὴ χιλιάδα τὰ αὐγὰ καὶ τὰ πουλεῖ 19,20 δρχ. τὴ δωδεκάδα. Τί θὰ κερδίση, ἂν πουλήση 15.000 αὐγά;

4. Ἀπὸ ἕνα τόπι ὕφασμα ἔκοψαν 26 κομμάτια μήκους 1,05 μέτρ. τὸ καθένα. Ἂν τὸ τόπι αὐτὸ εἶχε ἀκόμα 0,35 μέτρ. ὕφασμα, θὰ μποροῦσαν νὰ κόψουν ἕνα ἀκόμα κομμάτι τοῦ ἴδιου μήκους (1,05 μέτρ.). Πόσα μέτρα ὕφα-σμα εἶχε τὸ τόπι αὐτό;

5. Ἡ κυρὰ - Λένη ἀγόρασε 5,50 μ. τσίτι πρὸς 4,70 δρχ. τὸ μέτρο καὶ 4,50 μ. πανί. Πλήρωσε μὲ ἕνα χαρτονόμισμα τῶν 50 δρχ. καὶ τῆς ἔδωσαν ρέστα 1,65 δρχ. Ἡ κυρὰ - Λένη δὲν θυμᾶται τὴν τιμὴ τοῦ μέτρου τοῦ πανιοῦ. Μπο-ρεῖτε νὰ τὴ βρῆτε σεῖς;

6. Γιὰ νὰ ζυγισθῆ ἕνα ἀντικείμενο χρειάσθηκε νὰ βάλουν βάρος 2 κιλῶν

στὸ δίσκο τῶν βαρῶν καὶ βάρος 250 γραμμαρίων στὸ δίσκο τοῦ ἀντικείμενου. Πόσο ζυγίζει τὸ ἀντικείμενο αὐτό;

7. Ποιὰ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ μέτρου ἑνὸς ὑφάσματος, ὅταν τὰ $\frac{7}{10}$ μέτρ. στοιχίζουν 24,50 δρχ.

8. Νὰ βρῆτε τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ 3, τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ 2, τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ 4 καὶ τὸ $\frac{1}{10}$ τῶν $\frac{3}{10}$.

9. Πέντε ἴσα ποσὰ μᾶς δίνουν τὸ ἄθροισμα 847,25. Βρῆτε ποιά εἶναι τὰ ποσὰ αὐτά;

10. Ἕνας ἀγρὸς ἔβγαλε 2.400 κιλὰ σιτάρι καὶ 3.800 κιλὰ ἄχυρο. Πουλήθηκε τὸ σιτάρι πρὸς 3,10 δρχ. τὸ κιλὸ καὶ τὸ ἄχυρο πρὸς 0,25 δρχ. τὸ κιλό. Πόση εἶναι ὁλόκληρη ἡ ἀξία τῆς συγκομιδῆς;

11. Θέλουν νὰ μεταφέρουν 20 τόννους ξύλα μ' ἕνα φορτηγὸ αὐτοκίνητο, ποὺ μεταφέρει κάθε φορὰ φορτίο 800 κιλῶν. Πόσα ταξίδια πρέπει νὰ κάμη τὸ αὐτοκίνητο γιὰ νὰ μεταφέρη τοὺς 20 τόννους;

12. Ἕνα κουβαράκι μαλλὶ βάρους 50 γραμμαρίων στοιχίζει 6,10 δρχ. Ποιά εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ 1 κιλοῦ;

13. Γιὰ νὰ γίνη 1 κιλὸ ψωμὶ χρειάζονται 800 γραμμάρια ἀλεύρι. Πόσα κιλὰ ψωμὶ θὰ κάμωμε μὲ 96 κιλὰ ἀλεύρι;

14. Νὰ βρῆτε τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν 25380 μέτρ., τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν 17230 χιλιογράμμων καὶ τὰ $\frac{5}{4}$ τῆς ὥρας σὲ πρῶτα λεπτά.

15. Δυὸ ἀτμόπλοια ξεκινοῦν στὶς 6 τὸ πρωΐ ἀπὸ τὸ λιμάνι τῆς Θεσσαλονίκης γιὰ τὸ λιμάνι τοῦ Ἡρακλείου. Τὸ ἕνα ἔχει ταχύτητα $14\frac{3}{4}$ μίλλια τὴν ὥρα καὶ τὸ ἄλλο $16\frac{1}{2}$ μίλλια. Ὕστερα ἀπὸ $13\frac{1}{2}$ ὧρες ποιὰ θὰ εἶναι ἡ μεταξὺ τῶν δυὸ πλοίων ἀπόσταση;

16. Ἕνας ἐλαιοπαραγωγὸς πούλησε 12 δοχεῖα λάδι πρὸς 20,25 δρχ. τὸ κιλό. Κάθε δοχεῖο περιεῖχε $13\frac{1}{3}$ κιλὰ καθαρὸ λάδι. Εἰσέπραξε καὶ ἀπὸ τὰ κενὰ δοχεῖα 15 δρχ. γιὰ τὸ καθένα. Πόσες δραχμὲς εἰσέπραξε τὸ ὅλον;

17. Ἕνα σῶμα στερεὸ βυθιζόμενο στὸ νερὸ χάνει τὰ $\frac{6}{10}$ τοῦ βάρους του. Τὸ βάρος του ἔξω ἀπὸ τὸ νερὸ εἶναι 575 γραμμάρια. Πόσο θὰ ζυγίζη τὸ σῶμα αὐτό, ὅταν εἶναι βυθισμένο σὲ νερό;

18. Ἕνας ἐμπορορράπτης ἔρραψε ἀπὸ ἕνα τόπι ὑφάσματος $75\frac{3}{4}$ μέτρ. 3 ἀνδρικὲς φορεσιές. Γιὰ κάθε φορεσιὰ χρειάζεται 2,80 μέτρα. Πόσα μέτρα ὕφασμα χρειάσθηκε γιὰ τὶς 3 φορεσιὲς καὶ πόσο ὕφασμα ἔμεινε στὸ τόπι;

19. Μία ὑφάντρα ὑφαίνει $3\frac{2}{4}$ μ. ὕφασμα τὴν ὥρα. Πόσα μέτρα ὕφασμα θὰ ὑφάνη ἡ ὑφάντρα αὐτὴ σὲ $7\frac{1}{4}$ ὧρες;

20. Ἡ μητέρα μου ἀγόρασε $24\frac{3}{10}$ μέτρ. ὕφασμα γιὰ κουρτίνες πρὸς 18,50 δρχ. τὸ μέτρο καὶ συμφώνησε νὰ ξεπληρώση τὴν ἀξία του μὲ δόσεις, δίνοντας κάθε ἑβδομάδα 50 δρχ. Σὲ πόσες ἑβδομάδες θὰ ἐξοφλήση τὸ χρέος της;

21. Ὁ κὺρ Πέτρος ἀγόρασε ἕνα χωράφι καὶ ἔδωσε ὡς προκαταβολὴ 600 δραχ. Ὕστερα ἀπὸ λίγο καιρὸ ἔδωσε τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ὅλης ἀξίας τοῦ χωραφιοῦ καὶ τέλος μετὰ ἀπὸ λίγο καιρὸ ἐξόφλησε τὸ χρέος του, καταβάλλοντας τὸ ὑπόλοιπο, ποὺ ἦταν ἴσο μὲ τὰ $\frac{2}{4}$ τῆς ἀξίας τοῦ χωραφιοῦ. Πόσο ἀγόρασε τὸ χωράφι αὐτὸ ὁ κὺρ Πέτρος;

22. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε $4\frac{2}{2}$ μέτρα καὶ ἔδωσε $361\frac{1}{4}$ δραχ. Μεταπούλησε τὸ ὕφασμα καὶ κέρδισε 15 δρχ. σὲ κάθε μέτρο. Πόσο ἀγόρασε τὸ μέτρο καὶ πόσο τὸ μεταπούλησε;

23. Ἕνας παντοπώλης ἀγόρασε ἕνα σάκκο φασόλια $50\frac{1}{2}$ κιλῶν ἀντὶ 429,25 δρχ. Ἀπὸ τὴ μεταπούλησή τους κέρδισε 75,75 δρχ. Πόσες δραχμὲς ἀγόρασε τὸ κιλὸ καὶ πόσες τὸ μεταπούλησε;

24. Ποιό εἶναι τὸ ὕψος ἑνὸς πύργου, στὴν κορυφὴ τοῦ ὁποίου ἀνεβαίνει κάποιος ἀπὸ μιὰ σκάλα, ποὺ ἔχει 285 σκαλοπάτια ὕψους $\frac{2}{10}$ μέτρ. τὸ καθένα;

25. Ὁ Παῦλος εἶχε 19 δρχ. Ξόδεψε τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ποσοῦ αὐτοῦ καὶ ἔδωσε καὶ στὸν ἀδελφό του 5,25 δρχ. Πόσα τοῦ ἔμειναν;

26. Μιὰ ποσότητα τυριοῦ ἀγοράσθηκε ἀντὶ 545,60 δρχ. καὶ ζυγίζει $24\frac{4}{5}$ κιλά. Δὲν θυμοῦνται τὴν τιμὴ τοῦ ἑνὸς κιλοῦ. Μπορεῖτε νὰ τὴν βρῆτε;

27. Ἕνας ἔμπορος ὑφασμάτων πούλησε 240 μέτρ. ὕφασμα ἔτσι: Πούλησε πρῶτα τὸ $\frac{1}{4}$ ἀντὶ 8.400 δραχμῶν καὶ τὸ ὑπόλοιπο πρὸς 170 δρχ. τὸ μέτρο. Κέρδισε συνολικὰ 3.000 δρχ. Νὰ βρῆτε τὴν τιμὴ τῆς ἀγορᾶς τοῦ ἑνὸς μέτρου.

28. Ἕνας ὑπάλληλος κερδίζει 54.000 δρχ. τὸ χρόνο. Ἐπιθυμεῖ νὰ ἀποταμιεύσῃ τὸ $\frac{1}{8}$ τῆς ἀμοιβῆς του κάθε χρόνο. Πόσα πρέπει νὰ ξοδεύῃ μηνιαίως γιὰ νὰ ἀποταμιεύσῃ τὸ ποσὸ αὐτό;

29. Πόσες ράγες τῶν 18 μέτρων χρειάζονται γιὰ νὰ ἐγκαταστήσουν μιὰ γραμμὴ τροχιοδρόμου 4.680 μέτρων;

30. Νὰ βρῆτε τὸ διαιρετέο, ὅταν διαιρέτης εἶναι τὸ 9, πηλίκο 14 καὶ ὑπόλοιπο τὸ μεγαλύτερο, ποὺ μπορεῖ νὰ μείνῃ στὴ διαίρεση αὐτή.

31. Πολλαπλασιάζοντας δυὸ ἀριθμούς, ἀπὸ τοὺς ὁποίους ὁ ἕνας, ὁ πολλαπλασιαστής, εἶναι ὁ ἀριθμὸς 15, βρίσκω γινόμενο τὸν ἀριθμὸ 375. Ποιός εἶναι ὁ πολλαπλασιαστέος;

32. Μιὰ ράπτρια ἀγόρασε μιὰ ραπτομηχανή. Πλήρωσε ἀμέσως τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ἀξίας της. Ὕστερα ἀπὸ ἕνα μῆνα κατέβαλε 800 δρχ. καὶ μετὰ 2 μῆνες τὸ ὑπόλοιπο, ποὺ ἦταν 1200 δρχ. Ποιά ἦταν ἡ τιμὴ τῆς μηχανῆς;

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α΄.

ΠΟΣΑ

1. Ποσὸν

Γύρω μας ὑπάρχουν πλῆθος ἀπὸ διάφορα πράγματα: Δένδρα, σπίτια, ἄνθρωποι, ζῶα, αὐτοκίνητα.

Μεταξὺ αὐτῶν τῶν διαφόρων πραγμάτων ὑπάρχουν βέβαια καὶ ὅμοια. Ὑπάρχουν π.χ. πλῆθος ἀπὸ δένδρα, πλῆθος ἀπὸ σπίτια, πλῆθος ἀπὸ ζῶα, πλῆθος ἀπὸ δραχμές. Τὸ πλῆθος αὐτὸ τῶν ὁμοίων πραγμάτων, εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ πολλὰ ἢ ἀπὸ λίγα ὅμοια πράγματα. Ἕνας σωρὸς π.χ. ἀπὸ βώλους εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ πολλοὺς ἢ λίγους βώλους. Τὸ μῆκος ἑνὸς δρόμου μπορεῖ νὰ εἶναι μεγάλο ἢ μικρό. Τὰ χρήματα, ποὺ ἔχει ἢ ποὺ ξοδεύει ἕνας ἄνθρωπος, μπορεῖ νὰ εἶναι πολλὰ ἢ λίγα.

Παρατηροῦμε δηλ. ὅτι τὸ πλῆθος τῶν πραγμάτων μπορεῖ νὰ αὐξηθῇ ἢ νὰ ἐλαττωθῇ.

Κάθε πρᾶγμα, ποὺ μπορεῖ ν' αὐξηθῇ ἢ νὰ ἐλαττωθῇ λέγεται ποσόν.

Ὥστε ἕνας σωρός, μεγάλος ἢ μικρός, ἀπὸ βώλους, τὸ μῆκος, μικρὸ ἢ μεγάλο, ἑνὸς ὑφάσματος, τὰ πολλὰ ἢ ὀλίγα χρήματα, εἶναι ποσά.

2. Ὁμοειδῆ ποσὰ

Δυὸ σωροὶ ἀπὸ ὅμοια πράγματα εἶναι ποσά, ποὺ ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὸ ἴδιο εἶδος πραγμάτων. Δυὸ σωροὶ π.χ. ἀπὸ καρύδια εἶναι δυὸ ποσά, ποὺ ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὸ ἴδιο εἶδος.

Τὰ ποσὰ αὐτὰ λέγονται ὁμοειδῆ ποσά.

Ὥστε : *Δυὸ ποσὰ λέγονται ὁμοειδῆ, ὅταν ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὸ ἴδιο εἶδος πραγμάτων.*

3. Ἑτεροειδῆ ποσὰ

Δυὸ σωροὶ ἀπὸ διάφορα πράγματα εἶναι βέβαια ποσά, ἀλλὰ δὲν ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὸ ἴδιο εἶδος πραγμάτων. Ἕνας σωρὸς π.χ. ἀπὸ καρύδια καὶ ἕνας σωρὸς ἀπὸ μῆλα εἶναι δυὸ ποσά, ποὺ δὲν ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὸ ἴδιο εἶδος. Τὰ ποσὰ αὐτὰ λέγονται ἑτεροειδῆ ποσά.

Ὥστε: *Δυὸ ποσὰ λέγονται ἑτεροειδῆ, ὅταν δὲν ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὸ ἴδιο εἶδος πραγμάτων.*

4. Ἀνάλογα καὶ ἀντίστροφα ποσὰ

α΄. Ἀνάλογα ἢ εὐθέως ἀνάλογα ποσὰ

Παράδειγμα.

1 μέτρο ἀπὸ ἕνα ὕφασμα ἀξίζει	16 δραχμὲς
2 μέτρα ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα ἀξίζουν	32 »
3 » » » » » »	48 »
4 » » » » » »	64 »

....

....

1 μέτρο ἀπὸ ἕνα ὕφασμα ἀξίζει	16 δραχμὲς
$\frac{1}{2}$ μέτρα ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα ἀξίζει	8 »
$\frac{1}{4}$ » » » » » »	4 »

....

....

Στὸ παράδειγμά μας αὐτὸ βλέπομε, ὅτι τὰ ποσὰ μῆκος τοῦ ὑφάσματος καὶ τιμή του σὲ δραχμὲς ἔχουν τέτοια σχέση μεταξύ τους, ὥστε ὅταν πολλαπλασιάζεται ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἐπὶ 2, 3, 4 κλπ., πολλαπλασιάζεται ἐπίσης καὶ ἡ τιμὴ τοῦ ἄλλου ἐπὶ 2, 3, 4 κλπ. ἤ, ὅταν διαιρεῖται ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ διὰ τοῦ 2, 4 κλπ. διαιρεῖται καὶ ἡ τιμὴ τοῦ ἄλλου διὰ τοῦ 2, 4 κλπ.

Τὰ ποσά, ποὺ ἔχουν τέτοια σχέση μεταξύ τους, λέγονται ἀνάλογα ἢ εὐθέως ἀνάλογα ποσά.

Συμπέρασμα. *Δυὸ ποσὰ λέγονται ἀνάλογα ἢ εὐθέως ἀνάλογα, ἄν, ὅταν πολλαπλασιάζεται ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ ἐπὶ ἕνα ἀριθμό, πολλαπλα-*

σιάζεται καὶ ἡ ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ ἐπὶ τὸν ἴδιο ἀριθμό, ἢ ὅταν διαιρεῖται ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ, διαιρεῖται ἐπίσης καὶ ἡ ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ διὰ τοῦ ἴδιου ἀριθμοῦ.

β'. Ἀντίστροφα ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα ποσὰ

Παράδειγμα.

4	ἐργάτες σκάβουν ἕνα ἀμπέλι σὲ	8 ἡμέρες
8	» » τὸ ἴδιο ἀμπέλι σὲ	4 »
16	» » » » » »	2 »

....

....

4	ἐργάτες σκάβουν ἕνα ἀμπέλι σὲ	8 ἡμέρες
2	ἐργάτες σκάβουν τὸ ἴδιο ἀμπέλι σὲ	16 »
1	ἐργάτης σκάβει τὸ ἴδιο ἀμπέλι σὲ	32 »

....

....

Στὸ παράδειγμά μας αὐτὸ βλέπομε, ὅτι τὰ ποσὰ ἐργάτες καὶ ἡμέρες ἐργασίας τους ἔχουν τέτοια σχέση μεταξύ τους, ὥστε ὅταν πολλαπλασιάζεται ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἐπὶ 2, 4 κλπ., διαιρεῖται καὶ ἡ ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ ἄλλου διὰ τοῦ 2, 4 κλπ. καὶ ἀντίθετα, ὅταν διαιρεῖται ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ, πολλαπλασιάζεται καὶ ἡ ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ ἄλλου ἐπὶ τὸν ἴδιο ἀριθμό.

Τὰ ποσά, ποὺ ἔχουν τέτοια σχέση μεταξύ τους, λέγονται ἀντίστροφα ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα ποσά.

Συμπέρασμα. *Δυὸ ποσὰ λέγονται ἀντίστροφα ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα ἄν, ὅταν πολλαπλασιάζεται ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἐπὶ ἕνα ἀριθμό, διαιρεῖται καὶ ἡ ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ ἤ, ὅταν διαιρεῖται ἡ τιμὴ ἑνὸς ποσοῦ δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ, πολλαπλασιάζεται ἐπίσης καὶ ἡ ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ ἐπὶ τὸν ἴδιο ἀριθμό.*

Σημ. Ὅταν λέμε τιμὴ ἑνὸς ποσοῦ, δὲν σημαίνει ὅτι πρέπει τὸ ποσὸν αὐτὸ νὰ φανερώνη πάντοτε χρήματα. Ὅταν λέμε π.χ. 4 ἐργάτες σκάβουν ἕνα ἀμπέλι σὲ 8 ἡμέρες, τιμὴ τοῦ ποσοῦ ἐργάτες εἶναι τὸ 4 καὶ τιμὴ τοῦ ποσοῦ ἡμέρες εἶναι τὸ 8. Οἱ 8 δὲ ἡμέρες εἶναι ἀντίστοιχη τιμὴ τῶν 4 ἐργατῶν καὶ ἀντίστροφα οἱ 4 ἐργάτες εἶναι ἡ ἀντίστοιχη τιμὴ τῶν 8 ἡμερῶν.

'Ασκήσεις

1. Ἡ Καίτη ἀγόρασε 2 μέτρα κορδέλλα καὶ ἔδωκε 8 δραχμές. Ἂν ἀγόραζε διπλάσια μέτρα κορδέλλα, πόσες δραχμὲς θὰ ἔδινε;

Ἂν ἀγόραζε 1 μέτρο κορδέλλα, πόσες δραχμὲς θὰ ἔδινε;

Τί παθαίνει ἡ τιμὴ τοῦ ποσοῦ δραχμές, ὅταν διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κλπ. ἡ τιμὴ τοῦ ποσοῦ μέτρα;

Πόσες φορὲς διαιρεῖται ἡ τιμὴ τοῦ ποσοῦ τῶν χρημάτων, ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ ποσοῦ τῶν μέτρων διαιρεθῆ δι ἀτοῦ δυό;

Πῶς λέγονται αὐτὰ τὰ ποσά; Γιατί λέγονται ἔτσι;

Ποιές εἶναι στὸ πρόβλημα αὐτὸ οἱ ἀντίστοιχες τιμές;

2. Γιὰ νὰ κτισθῆ ἕνας τοῖχος χρειάσθηκαν 8 ἐργάτες, ποὺ δούλεψαν 12 ἡμέρες.

Ἂν διπλασιασθοῦν οἱ ἐργάτες, σὲ πόσες ἡμέρες θὰ κτισθῆ ὁ τοῖχος;

Ἂν δουλέψουν μόνο 4 ἐργάτες, σὲ πόσες ἡμέρες θὰ κτισθῆ ὁ τοῖχος;

Τί παθαίνει ἡ τιμὴ τοῦ ποσοῦ ἡμέρες ἐργασίας, ὅταν διπλασιασθοῦν οἱ ἐργάτες; Ὅταν λιγοστέψουν;

Πῶς λέγονται τὰ ποσὰ αὐτά; Γιατί λέγονται ἔτσι;

Ποιὲς εἶναι οἱ ἀντίστοιχες τιμὲς τῶν ποσῶν;

3. Νὰ συγκρίνετε τὰ ποσὰ τῶν παρακάτω προβλημάτων καὶ νὰ βρῆτε τί εἴδους εἶναι.

α΄. Ἕνας ἀρτοποιὸς μὲ 50 κιλὰ ἀλεύρι βγάζει 65 κιλὰ ψωμί. Ἂν διπλασιασθῆ τὸ ἀλεύρι πόσα κιλὰ ψωμὶ θὰ βγάλη;

β΄. Σ' ἕνα φρούριο βρίσκονται 250 στρατιῶτες καὶ ἔχουν τρόφιμα γιὰ 20 ἡμέρες. Ἂν φύγουν οἱ μισοὶ στρατιῶτες, πόσες ἡμέρες θὰ φθάσουν τὰ τρόφιμα γιὰ τοὺς ὑπόλοιπους;

Ἂν ἔλθουν ἄλλοι 250 στρατιῶτες στὸ φρούριο, γιὰ πόσες ἡμέρες θὰ φθάσουν τὰ τρόφιμα;

4. Νὰ κάνετε καὶ σεῖς προβλήματα μὲ ποσὰ ἀνάλογα καὶ ἄλλα μὲ ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β΄.

ΜΕΘΟΔΟΙ

1. Μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς στὴ μονάδα

Τὰ ποσὰ εἶναι, ὅπως εἴδαμε, εὐθέως ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

Ἡ σχέση αὐτὴ τῶν ποσῶν μᾶς βοηθάει στὴ λύση τῶν προβλημάτων μὲ τὴ μέθοδο τῆς ἀναγωγῆς στὴ μονάδα.

Παράδειγμα 1. Τὰ 8 αὐγὰ ἔχουν σήμερα στὴν ἀγορὰ 16 δραχμές. Πόσο ἔχουν τὰ 20 αὐγά;

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ξέρομε τὴν τιμὴ τῶν 8 αὐγῶν, δηλ. τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων, καὶ ζητοῦμε νὰ μάθωμε τὴν τιμὴ τῶν 20 αὐγῶν, δηλ. πάλι τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν τιμὴ τῶν 20 αὐγῶν, δηλ. τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων, πρέπει νὰ βροῦμε πρῶτα τὴν τιμὴ τοῦ ἑνὸς αὐγοῦ, δηλ. τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν τιμὴ τοῦ ἑνὸς αὐγοῦ, θὰ σκεφθοῦμε ἔτσι:

Ἀφοῦ τὰ 8 αὐγὰ ἀξίζουν 16 δραχμές, τὸ 1 αὐγό, ποὺ εἶναι 8 φορὲς λιγότερο ἀπὸ τὰ 8 αὐγά, ἀξίζει ἀσφαλῶς 8 φορὲς λιγότερο, ἀπὸ ὅσα ἀξίζουν τὰ 8 αὐγά. Μὲ ἄλλα λόγια 16 δραχμὲς διὰ 8.

Τὴ διαίρεση αὐτὴ στὴν ἀριθμητικὴ τὴ γράφομε ἔτσι: $\frac{16}{8}$, δηλ. ἢ γράψομε 16 : 8 ἢ $\frac{16}{8}$ εἶναι τὸ ἴδιο.

Τὸ 1 αὐγὸ λοιπὸν ἀξίζει $\frac{16}{8}$ δρχ.

Ἀφοῦ ξέρομε τὴν τιμὴ τοῦ ἑνὸς αὐγοῦ, εὔκολο εἶναι νὰ βροῦμε τὴν τιμὴ τῶν 20 αὐγῶν. Σκεφτόμαστε ἔτσι:

Τὸ ἕνα αὐγὸ ἀξίζει $\frac{16}{8}$ δραχμές, τὰ 20 αὐγά, ποὺ εἶναι 20 φορὲς περισσότερο ἀπὸ τὸ ἕνα αὐγό, θὰ ἀξίζουν βέβαια 20 φορὲς περισσότερο ἀπὸ ὅσα ἀξίζει τὸ 1 αὐγό.

Μὲ ἄλλα λόγια $\frac{16}{8} \times 20$.

Κάνομε τώρα τὴν κατάταξη ὅλων αὐτῶν, ποὺ εἴπαμε.

Κατάταξη

Τὰ 8 αὐγὰ ἀξίζουν 16 δραχμές.

Τὸ 1 αὐγὸ ἀξίζει $\frac{16}{8}$ δραχμές.

Τὰ 20 αὐγὰ ἀξίζουν $\frac{16}{8} \times 20 = 40$ δραχμές

Ὥστε τὰ 20 αὐγὰ ἀξίζουν 40 δραχμές.

Παράδειγμα 2. Τρεῖς ἐργάτες σκάβουν ἕνα κῆπο σὲ 12 μέρες. Σὲ πόσες μέρες θὰ σκάψουν τὸν ἴδιο κῆπο 9 ἐργάτες;

Γιὰ νὰ βροῦμε σὲ πόσες μέρες θὰ σκάψουν τὸν ἴδιο κῆπο οἱ 9 ἐργάτες θὰ σκεφθοῦμε:

Ἀφοῦ οἱ 3 ἐργάτες χρειάζονται 12 ἡμέρες γιὰ νὰ σκάψουν τὸν κῆπο, ὁ 1 ἐργάτης, ποὺ κάνει δουλειὰ 3 φορὲς λιγότερη ἀπὸ ὅση κάνουν οἱ 3 ἐργάτες, θὰ χρειασθῆ, γιὰ νὰ σκάψη τὸν ἴδιο κῆπο, 3 φορὲς περισσότερες ἡμέρες, ἀπὸ ὅσες χρειάζονται οἱ 3 ἐργάτες. Μὲ ἄλλα λόγια ὁ ἕνας ἐργάτης θὰ χρειασθῆ 12×3 ἡμέρες.

Καὶ οἱ 9 ἐργάτες, ποὺ κάνουν δουλειὰ 9 φορὲς περισσότερη ἀπὸ ὅση κάνει ὁ 1 ἐργάτης, θὰ χρειασθοῦν γιὰ τὴν ἴδια δουλειὰ 9 φορὲς λιγότερες ἀπὸ κεῖνες ποὺ χρειάζεται ὁ 1 ἐργάτης.

Μὲ ἄλλα λόγια οἱ 9 ἐργάτες θὰ χρειασθοῦν $\frac{12 \times 3}{9}$.

Ἡ κατάταξη αὐτῶν, ποὺ εἴπαμε, γίνεται ἔτσι:

Κατάταξη

Οἱ 3 ἐργάτες σκάβουν ἕνα κῆπο σὲ 12 μέρες.

Ὁ 1 ἐργάτης θὰ σκάψη τὸν ἴδιο κῆπο σὲ 12×4 μέρες.

Οἱ 9 ἐργάτες θὰ σκάψουν τὸν ἴδιο κῆπο σὲ $\frac{12 \times 3}{9} = 4$ μέρες.

Ὥστε οἱ 9 ἐργάτες θὰ σκάψουν τὸν ἴδιο κῆπο σὲ 4 μέρες.

Παράδειγμα 3. Πόσο εἶναι τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ἀριθμοῦ 50;

Γιὰ νὰ βροῦμε πόσο εἶναι τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ἀριθμοῦ 50, θὰ σκεφθοῦμε ἔτσι:

Ἀφοῦ ὅλος ὁ ἀριθμός, δηλ. τὰ $\frac{5}{5}$, εἶναι 50, τὸ $\frac{1}{5}$, ποὺ εἶναι 5 φορὲς λιγότερο ἀπὸ τὰ $\frac{5}{5}$, θὰ εἶναι 5 φορὲς λιγότερο, δηλ. $\frac{50}{5}$. Καὶ τὰ $\frac{3}{5}$, ποὺ εἶναι 3 φορὲς περισσότερο ἀπὸ τὸ $\frac{1}{5}$, θὰ εἶναι 3 φορὲς περισσότερο, δηλ. $\frac{50}{5} \times 3 = \frac{150}{5} = 30$.

Κατάταξη

Τὰ $\frac{5}{5}$ εἶναι 50.

Τὸ $\frac{1}{5}$ θὰ εἶναι $\frac{50}{5}$.

Τὰ $\frac{3}{5}$ θὰ εἶναι $\frac{50}{5} \times 3 = 30$.

Ὥστε τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ἀριθμοῦ 50 εἶναι 30.

Ἡ μέθοδος μὲ τὴν ὁποία λύσαμε ὅλα τὰ παραπάνω προβλήματα, στηρίζεται, ὅπως εἴδαμε, στὴ σχέση ποὺ ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ποσῶν καὶ λέγεται μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς στὴ μονάδα. Λέγεται μέθοδος τῆς ἀναγωγῆς στὴ μονάδα, γιατὶ βρίσκομε πρῶτα τὴν τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας καὶ κατόπιν τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων.

Ἀσκήσεις

1. Τὰ 8 μέτρα ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζουν 448 δραχμές. Πόσο ἀξίζει τὸ 1 μέτρο; Γιατί ἀξίζει τόσο τὸ 1 μέτρο; Πόσο ἀξίζουν τὰ 5 μέτρα; Γιατί ἀξίζουν τόσο τὰ 5 μέτρα; Κάντε τὴν κατάταξη αὐτῶν, ποὺ εἴπατε.

Τί εἶναι τὰ ποσὰ μέτρα καὶ τιμή τους σὲ δραχμές; Γιατί εἶναι τέτοια;

2. Οἱ 5 ἐργάτες σκάβουν ἕνα ἀμπέλι σὲ 15 μέρες. Σὲ πόσες μέρες θὰ σκάψουν τὸ ἴδιο ἀμπέλι οἱ 10 ἐργάτες; Γιατί θὰ χρειασθοῦν τόσες μέρες; Νὰ κάνετε τὴν κατάταξη αὐτῶν, ποὺ εἴπαμε. Τί εἶναι τὰ ποσὰ ἐργάτες καὶ μέρες ἐργασίας των;

3. Πόσο εἶναι τὰ $\frac{8}{8}$ τοῦ ἀριθμοῦ 80; Πόσο εἶναι τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ ἀριθμοῦ 80; Γιατὶ εἶναι τόσο τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ ἀριθμοῦ 80; Πόσο εἶναι τὰ $\frac{6}{8}$ τοῦ ἀριθμοῦ 80; Γιατὶ εἶναι τόσο; Κάντε τὴν κατάταξη αὐτῶν, ποὺ εἴπατε.

4. Πῶς λέγεται ἡ μέθοδος, μὲ τὴν ὁποία λύσατε τὰ παραπάνω προβλήματα; Γιατί λέγεται ἔτσι;

Προβλήματα

1. Μὲ 20 κιλὰ ἀλεύρι κάμνομε 32 κιλὰ ψωμί. Πόσα κιλὰ ψωμὶ κάμνομε μὲ 5 κιλὰ ἀλεύρι; ('Απ. 8 κιλά)

2. Γιὰ νὰ κτισθῇ ἕνας τοῖχος, πρέπει νὰ ἐργασθοῦν 12 κτίστες ἐπὶ 9 μέρες. Πόσες μέρες πρέπει νὰ ἐργασθοῦν 18 κτίστες γιὰ νὰ κτίσουν τὸν ἴδιο τοῖχο; ('Απ. 6 ἡμέρες)

3. Ἕνας ἐργάτης πληρώνεται γιὰ 5 ἡμερομίσθια 200 δραχμές. Πόσες δραχμὲς θὰ πληρωθῇ γιὰ 25 ἡμερομίσθια; ('Απ. 1000 δρχ.)

4. Ἕνα ἀτμόπλοιο, ποὺ ἔχει ταχύτητα 8 μιλίων τὴν ὥρα, φθάνει ἀπὸ τὴ Θεσσαλονίκη στὸν Πειραιὰ σὲ 32 ὧρες. Σὲ πόσες ὧρες θὰ φθάση ἄλλο ἀτμόπλοιο, ποὺ ἔχει ταχύτητα 12 μιλίων τὴν ὥρα; ('Απ. $21\frac{1}{3}$ ὧρ.)

5. Ἕνα αὐτοκίνητο, ποὺ τρέχει $36\frac{1}{2}$ χιλιόμετρα τὴν ὥρα, φθάνει ἀπὸ τὴν 'Αθήνα στὸ Μενίδι σὲ $\frac{1}{4}$ ὧρες. Πόσα χιλιόμετρα ἀπέχει τὸ Μενίδι ἀπὸ τὴν 'Αθήνα; ('Απ. $12\frac{1}{6}$ χλμ.)

6. Μιὰ ὑφάντρα ὑφαίνει σὲ 2 ὧρες $3\frac{1}{4}$ μέτρα ὕφασμα. Πόσα μέτρα ὑφαίνει σὲ $6\frac{2}{8}$ ὧρες; ('Απ. $10\frac{10}{64}$ μ.)

7. Πόσο εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀριθμοῦ 40; ('Απ. 30)

8. Πόσο εἶναι τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ κλάσματος $\frac{4}{5}$; (Απ. $\frac{1}{2}$)

2. Ἁπλὴ μέθοδος τῶν τριῶν

α΄. Τί εἶναι ἁπλὴ μέθοδος τῶν τριῶν

Παράδειγμα 1. Μὲ 8 δραχμὲς ἀγοράζω 5 πορτοκάλια. Μὲ πόσες δραχμὲς θὰ ἀγοράσω 15 πορτοκάλια;

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ μποροῦμε βέβαια νὰ τὸ λύσωμε, ὅπως μάθαμε, μὲ τὴ μέθοδο τῆς ἀναγωγῆς στὴ μονάδα, ἔτσι:

Λ ύ σ η

Τὰ 5 πορτοκάλια ἀξίζουν 8 δραχμὲς

Τὸ 1 πορτοκάλι ἀξίζει $\frac{8}{5}$ »

καὶ τὰ 15 πορτοκάλια ἀξίζουν $\frac{8}{5} \times 15$ δραχμές.

Ὥστε τὰ 15 πορτοκάλια ἀξίζουν $\frac{8 \times 15}{5} = \frac{120}{5} = 24$ δραχμές.

Τὰ π ο σ ὰ στὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι ἀ ν ά λ ο γ α.

Παράδειγμα 2. 4 ἐργάτες σκάβουν ἕνα χαντάκι σὲ 9 ὧρες. Σὲ πόσες ὧρες θὰ σκάψουν τὸ ἴδιο χαντάκι 6 ἐργάτες;

Καὶ τὸ πρόβλημα αὐτὸ λύνεται μὲ τὴ μέθοδο τῆς ἀναγωγῆς στὴ μονάδα, ἔτσι:

Λ ύ σ η

Οἱ 4 ἐργάτες σκάβουν ἕνα χαντάκι σὲ 9 ὧρες.

Ὁ 1 ἐργάτης σκάβει τὸ ἴδιο χαντάκι σὲ 9×4 ὧρες.

Καὶ οἱ 6 ἐργάτες θὰ σκάψουν τὸ ἴδια χαντάκι σὲ $\frac{9 \times 4}{6}$ ὧρες.

Ὥσττε οἱ 6 ἐργάτες θὰ σκάψουν τὸ ἴδιο χαντάκι σὲ $\frac{9 \times 4}{6} = 6$ ὧρες.

Τὰ π ο σ ὰ στὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι ἀ ν τ ι σ τ ρ ό φ ω ς ἀ ν ά λ ο γ α.

Στὰ παραπάνω προβλήματα παρατηροῦμε, ὅτι μᾶς δίνονται οἱ ἀ ν τ ί σ τ ο ι χ ε ς τ ι μ ὲ ς δ υ ὸ π ο σ ῶ ν, ποὺ εἶναι ἀ ν ά λ ο γ α ἢ ἀ ν τ ι σ τ ρ ό φ ω ς ἀ ν ά λ ο γ α (5 πορτοκάλια καὶ 8 δραχμὲς στὸ πρῶτο καὶ 4 ἐργάτες καὶ 9 ὧρες στὸ δεύτερο), καθὼς καὶ μ ι ὰ ἄ λ λ η τ ι μ ὴ τοῦ ἑνὸς ἀπὸ τὰ δυὸ αὐτὰ (15 πορτοκάλια στὸ πρῶτο καὶ 9 ἐργάτες στὸ δεύτερο) καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ, ποὺ ἀντιστοιχεῖ σ' αὐτή.

Τὰ προβλήματα αὐτά, καθὼς καὶ ὅλα τὰ ὅμοιά τους, ποὺ λύνονται μὲ τὴ μ έ θ ο δ ο τ ῆ ς ἀ ν α γ ω γ ῆ ς σ τ ὴ μ ο ν ά δ α, μποροῦμε νὰ τὰ λύσωμε σ υ ν τ ο μ ώ τ ε ρ α μὲ μιὰ ἄλλη μέθοδο, ποὺ λέγεται ἁ π λ ὴ μ έ θ ο δ ο ς τ ῶ ν τ ρ ι ῶ ν. Λέγεται ἁπλὴ μέθοδος τῶν τ ρ ι ῶ ν, γιατὶ στὰ προβλήματα αὐτὰ μᾶς δίνονται τ ρ ε ῖ ς ἀ ρ ι θ μ ο ὶ καὶ ζητεῖται τ έ τ α ρ τ ο ς, ποὺ εἶναι ἄγνωστος.

β'. Λύση τῶν προβλημάτων μὲ τὴν ἁπλὴ μέθοδο τῶν τριῶν, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα

Παράδειγμα. Τὰ 4 μέτρα ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζουν 104 δραχμές. Πόσες δραχμὲς ἀξίζουν τὰ 7 μέτρα;

Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα αὐτὸ μὲ τὴν ἁπλὴ μέθοδο τῶν τριῶν θὰ κάμωμε πρῶτα τὴν κατάταξη τῶν ποσῶν. Θὰ γράψωμε σὲ μιὰ σειρὰ τὶς δυὸ ἀντίστοιχες τιμὲς τῶν δοθέντων ποσῶν, ποὺ εἶναι γνωστές, δηλ. 4 μέτρα 104 δραχμὲς καὶ στὴν ἄλλη σειρὰ τὴν ἄλλη τιμὴ καὶ τὴν ἀντίστοιχη σ' αὐτή, ποὺ εἶναι ἄγνωστη, δηλ. 7 μέτρα καὶ τὴν ἄγνωστη, ποὺ τὴν παριστάνομε μὲ τὸ γράμμα X.

Κατάταξη

4 μέτρα	104 δραχμὲς
7 μέτρα	X ;

Ὅταν κάμνωμε τὴν κατάταξη, προσέχομε νὰ γράφωμε τοὺς ἀριθμούς, ποὺ φανερώνουν ὁμοειδῆ ποσά, στὴν ἴδια στήλη. Ἔπειτα σύρομε μεταξύ τους μιὰ ὁριζόντια γραμμή, ἔτσι:

4 μέτρα	104 δραχμὲς
7 μέτρα	X ;

Μετὰ τὴν κατάταξη κάμνομε τὴ σύγκριση τῶν ποσῶν, γιὰ νὰ βροῦμε, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

Ἡ σύγκριση γίνεται ἔτσι:

4 μέτρα ὕφασμα ἀξίζουν 104 δραχμές· διπλάσια μέτρα ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα ἀξίζουν διπλάσιες δραχμές. Ὥστε τὰ ποσὰ ἐδῶ εἶναι ἀνάλογα.

Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα αὐτό, ποὺ τὰ ποσά του εἶναι ἀνάλογα, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμὸ 104, ποὺ εἶναι πάνω ἀπὸ τὸν X ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{4}{7}$ ἀντεστραμμένο, δηλ. $\frac{7}{4}$.

Ὥστε $X = 104 \times \frac{7}{4} = \frac{104 \times 7}{4} = \frac{728}{4} = 182$ δραχμὲς ἀξίζουν τὰ 7 μέτρα.

Φθάνομε μὲ ἄλλα λόγια στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα, ποὺ φθάνομε, ἂν λύσωμε τὸ πρόβλημα μὲ τὴ μέθοδο τῆς ἀναγωγῆς στὴ μονάδα.

Προσέξτε

Μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα:

Τὰ 4 μέτρα ἀξίζουν 104 δρχ.

Τὸ 1 μέτρο ἀξίζει $\frac{104}{4}$ δρχ.

Τὰ 7 μέτρα ἀξίζουν $\frac{104}{4} \times 7 =$

$\frac{104 \times 7}{7} = \frac{728}{4} = 182$ δραχμὲς ἀξίζουν τὰ 7 μέτρα.

Μὲ τὴν ἁπλὴ μέθοδο τῶν τριῶν:

$\frac{4}{7}$ μέτρα $\frac{104}{\times}$ δραχμὲς / δραχμὲς

$X = 104 \times \frac{7}{4} = \frac{104 \times 7}{4} = \frac{728}{4}$

$= 182$ δραχμὲς ἀξίζουν τὰ 7 μέτρα.

Συμπέρασμα. *Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν ἄγνωστη τιμὴ σ' ἕνα πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμό, ποὺ εἶναι πάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο (X), ἐπὶ τὸ κλάσμα ποὺ σχηματίζουν οἱ δυὸ τιμὲς τοῦ ἄλλου ποσοῦ ἀντεστραμμένο.*

γ'. Λύση τῶν προβλημάτων μὲ τὴν ἁπλὴ μέθοδο τῶν τριῶν, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

Παράδειγμα. Γιὰ νὰ κτισθῆ ἕνας τοῖχος, δούλεψαν 6 κτίστες ἐπὶ 8 μέρες. Πόσες μέρες θὰ χρειαστοῦν 4 κτίστες γιὰ νὰ κτίσουν τὸν ἴδιο τοῖχο;

Μὲ τὴ μέθοδο τῆς ἀναγωγῆς στὴ μονάδα τὸ πρόβλημα αὐτὸ θὰ τὸ λύσωμε ἔτσι:

Οἱ 6 κτίστες γιὰ νὰ κτίσουν ἕνα τοῖχο, δουλεύουν 8 μέρες. Ὁ 1 κτίστης γιὰ νὰ κτίση τὸν ἴδιο τοῖχο, θὰ δουλέψη βέβαια 6 φορὲς περισσότερες μέρες, ἀπὸ ὅσες οἱ 6 κτίστες, δηλ. 8×6 μέρες. Καὶ οἱ 4 κτίστες, ποὺ εἶναι 4 φορὲς περισσότεροι ἀπὸ τὸν 1 κτίστη, θὰ δουλέψουν γιὰ νὰ κτίσουν τὸν ἴδιο τοῖχο ἀσφαλῶς 4 φορὲς λιγότερες μέρες ἀπὸ ὅσες δουλεύει ὁ 1 κτίστης, δηλ.

$\frac{8 \times 6}{4} = \frac{48}{4} = 12$ μέρες.

Μὲ τὴν ἁπλὴ μέθοδο τῶν τριῶν θὰ λύσωμε τὸ ἴδιο πρόβλημα ἔτσι:

Κατάταξη

$\frac{6}{4}$ κτίστες / » $\qquad \frac{8}{\times}$ μέρες / »

Σύγκριση τῶν ποσῶν

Οἱ 6 κτίστες κτίζουν ἕνα τοῖχο σὲ 8 μέρες. Ἂν διπλασιασθοῦν οἱ κτίστες, οἱ μέρες, ποὺ θὰ δουλέψουν τώρα γιὰ νὰ κτίσουν τὸν ἴδιο τοῖχο, θὰ γίνουν μισές. Παρατηροῦμε δηλ. ὅτι, ὅταν διπλασιάζεται ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ, ἡ τιμὴ τοῦ ἄλλου διαιρεῖται διὰ τοῦ 2.

Συνεπῶς τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

Στὴν περίπτωση αὐτή, γιὰ νὰ βροῦμε τὴν ἄγνωστη τιμή, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμὸ 8, ποὺ εἶναι πάνω ἀπὸ τὸ X, ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{6}{4}$, ὅπως εἶναι.

Δηλαδή: $\frac{6}{4}$ κτίστες $\frac{8}{X}$ ἡμέρες. $X = 8 \times \frac{6}{4} = \frac{48}{4} = 12$ μέρες.

Βρίσκομε δηλαδὴ τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα, ποὺ βρήκαμε καὶ μὲ τὴ μέθοδο τῆς ἀναγωγῆς στὴ μονάδα.

Συμπέρασμα. *Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν ἄγνωστη τιμὴ σ' ἕνα πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμό, ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο (X), ἐπὶ τὸ κλάσμα, ποὺ σχηματίζουν οἱ δυὸ τιμὲς τοῦ ἄλλου ποσοῦ, ὅπως εἶναι.*

Σημ. Ἡ ἁπλὴ μέθοδος τῶν τριῶν εἶναι συντόμευση τῆς μεθόδου τῆς ἀναγωγῆς στὴ μονάδα.

δ'. Παραδείγματα λύσεως προβλημάτων μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα καὶ τὴν ἁπλὴ μέθοδο τῶν τριῶν

Παράδειγμα 1. Γιὰ 6 φορέματα χρειάζονται 36 μέτρα ὕφασμα. Πόσα μέτρα ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα χρειάζονται γιὰ 14 φορέματα;

Κατάταξη

$\frac{6}{14}$ φορέματα » $\qquad$ $\frac{36}{X}$ μέτρα ;

Σύγκριση τῶν ποσῶν

Γιὰ 6 φορέματα χρειάζονται 36 μέτρα ὕφασμα. Γιὰ διπλάσια φορέματα χρειάζονται διπλάσια μέτρα ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα. Συνεπῶς τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα.

Λύση

Μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα:

Γιὰ 6 φορέμ. χρειάζ. 36 μέτρα

Γιὰ 1 φόρεμ. χρειάζ. $\frac{36}{6}$ »

Γιὰ 14 φορ. χρειάζ. $\frac{36}{6} \times 14$ μ. $=$

$\frac{36 \times 14}{6} = \frac{504}{6} = 84$ μ. ὕφασμα

Μὲ τὴν ἁπλὴ μέθοδο τῶν τριῶν:

$\frac{6}{14}$ φορέματα » $\frac{36}{X;}$ μέτρα »

$X = 36 \times \frac{14}{6} = \frac{36 \times 14}{6} = \frac{504}{6} = 84$

μέτρα ὕφασμα χρειάζονται γιὰ 14 φορέματα.

Παράδειγμα 2. Ἕνα ἀτμόπλοιο μὲ ταχύτητα 8 μιλίων τὴν ὥρα φθάνει σὲ 23 ὧρες ἀπὸ τὴ Θεσσαλονίκη στὸν Πειραιά. Σὲ πόσες ὧρες θὰ φθάσῃ ἄλλο ἀτμόπλοιο, ποὺ ἔχει ταχύτητα 12 μιλίων τὴν ὥρα;

Κατάταξη

$\frac{8}{12}$ μίλια » $\frac{23}{X;}$ ὧρες »

Σύγκριση τῶν ποσῶν

Ἀφοῦ τὸ ἀτμόπλοιο μὲ ταχύτητα 8 μιλίων τὴν ὥρα διατρέχει μιὰ ἀπόσταση σὲ 23 ὧρες, μὲ διπλάσια ταχύτητα θὰ χρειασθῇ τὶς μισὲς ὧρες γιὰ νὰ διατρέξῃ τὴν ἴδια ἀπόσταση. Συνεπῶς τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

Λύση

Μὲ τὴν ἀναγωγὴ στὴ μονάδα

Μὲ ταχ. 8 μιλ. χρειάζ. 23 ὧρες

Μὲ ταχ. 1 μιλ. χρειάζ. 23×8

Μὲ ταχ. 12 μιλ. χρειάζ. $\frac{23 \times 8}{12}$

$\frac{23 \times 8}{12} = \frac{184}{12} = 15\frac{1}{3}$ ὧρες θὰ χρειασθῇ.

Μὲ τὴν ἁπλὴ μέθοδο τῶν τριῶν:

$\frac{8}{12}$ μίλια » $\frac{23}{X;}$ ὧρες »

$23 \times \frac{8}{12} = \frac{23 \times 8}{12} = \frac{184}{12} =$

$15\frac{1}{3}$ ὧρες θὰ χρειασθῇ γιὰ νὰ φθάσῃ ἀπὸ τὴ Θεσσαλονίκη στὸν Πειραιά.

Προβλήματα

Λύστε τὰ παρακάτω προβλήματα σύμφωνα μὲ τὰ παραδείγματά μας.

1. Ἀπὸ 48 κιλὰ σταφύλια βγαίνει 12 κιλὰ κρασί. Πόσα κιλὰ κρασὶ βγαίνει ἀπὸ 360 κιλὰ σταφύλια; (Ἀπ. 90 κιλά)

2. Τὰ 6 μέτρα ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζουν 312 δραχμές. Πόσες δραχμὲς ἀξίζουν τὰ 17 μέτρα ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα; (Ἀπ. 884 δρχ.)

3. Ἀπὸ ἕνα ὕφασμα, ποὺ ἔχει πλάτος 6 παλάμες, χρειαζόμαστε γιὰ μιὰ ἐνδυμασία 5 μέτρα. Πόσα μέτρα θὰ χρειασθοῦμε γιὰ τὴν ἴδια ἐνδυμασία, ἂν τὸ ὕφασμα ἔχει 8 παλάμες πλάτος; (Ἀπ. 3,75)

4. Γιὰ νὰ στρωθῇ ἕνα δωμάτιο χρειάζονται 30 μέτρα ὕφασμα, ποὺ ἔχει πλάτος 1,5 μέτρα. Πόσα μέτρα θὰ χρειασθοῦν γιὰ τὸ ἴδιο δωμάτιο, ἂν τὸ ὕφασμα ἔχῃ πλάτος 2 μέτρα; (Ἀπ. 22,5 μ.)

5. Μὲ 30 κιλὰ ἀλεύρι γίνεται 42 κιλὰ ψωμί. Πόσα κιλὰ ψωμὶ γίνεται μὲ 75 κιλὰ ἀλεύρι; (Ἀπ. 105 κιλὰ)

6. 8 ἐργάτες σκάβουν ἕνα ἀμπέλι 160 τετραγωνικῶν μέτρων σὲ μιὰ μέρα. Πόσοι ἐργάτες θὰ χρειασθοῦν γιὰ νὰ σκάψουν ἕνα ἄλλο ἀμπέλι 280 τετραγωνικῶν μέτρων σὲ μιὰ μέρα; (Ἀπ. 14 ἐργ.)

7. Ὁ σιδηρόδρομος, ὅταν ἔχει ταχύτητα 20 χιλιομέτρων τὴν ὥρα, φθάνει ἀπὸ τὴ Θεσσαλονίκη στὴ Λάρισα σὲ 8,5 ὧρες. Σὲ πόσες ὧρες θὰ ἔφθανε ὁ ἴδιος σιδηρόδρομος, ἂν εἶχε ταχύτητα 30 χλμ. τὴν ὥρα; (Ἀπ. $5\frac{2}{3}$ ὧρες).

8. Τὰ 2,50 μέτρα ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζουν 100 δραχμές. Πόσες δραχμὲς ἀξίζουν τὰ 14,75 μέτρα; (Ἀπ. 590 δρχ.)

9. Ἕνας ἐργάτης σὲ $2\frac{1}{2}$ σκάβει ἕνα χαντάκι μήκους 4,50 μέτρα. Πόσο μῆκος ἀπὸ τὸ ἴδιο χαντάκι θὰ σκάψῃ σὲ $1\frac{1}{4}$ ὧρες; (Ἀπ. 2,25 μ.)

10. Οἱ 6 ἐργάτες θερίζουν ἕνα χωράφι σὲ 12 μέρες. Σὲ πόσες μέρες θὰ θερίσουν τὸ ἴδιο χωράφι οἱ 18 ἐργάτες; (Ἀπ. 4 ἡμέρες)

11. 4 ἐργάτες σκάβουν ἕνα ἀμπέλι σὲ 9 μέρες. Γιὰ νὰ σκαφτῇ τὸ ἴδιο ἀμπέλι σὲ 3 μέρες, πόσοι ἐργάτες πρέπει νὰ προστεθοῦν ἀκόμα;
(Ἀπ. Ἀκόμη 8 ἐργ. Δηλ. ὅλοι - ὅλοι 12)

12. Μιὰ μαθήτρια ἐργάζεται 3 ὧρες τὴ μέρα καὶ τελειώνει ἕνα κέντημα σὲ 12 μέρες. Ἂν ἐργασθῇ 4 ὧρες τὴ μέρα, σὲ πόσες μέρες θὰ τελειώσῃ τὸ ἴδιο κέντημα; (Ἀπ. 9 ἡμ.)

13. Μιὰ κυρία ἀγόρασε 4,50 μέτρα ὕφασμα καὶ ἔδωκε 1125 δραχμές. Ὁ ἔμπορος ὅμως κατὰ λάθος τῆς ἔδωσε 0,25 μέτρα λιγότερο ὕφασμα. Πόσα χρήματα πρέπει νὰ τῆς ἐπιστρέψῃ; (Ἀπ. 62,5 δρχ.)

14. Ἕνα δένδρο ρίχνει σκιὰ μήκους 15 μέτρων. Τὴν ἴδια στιγμὴ ἕνας πάσσαλος μπηγμένος κάθετα κοντὰ στὸ δένδρο ὕψους 3 μέτρων ρίχνει σκιὰ 2,5 μέτρων. Πόσο εἶναι τὸ ὕψος τοῦ δένδρου; ('Απ. 18 μ.)

15. Οἱ 100 βαθμοὶ τοῦ θερμομέτρου τοῦ Κελσίου ἰσοδυναμοῦν μὲ 80 βαθμοὺς Ρεωμύρου. Μὲ πόσους βαθμοὺς Κελσίου ἰσοδυναμοῦν 60 βαθμοὶ Ρεωμύρου; ('Απ. 45° Κ.)

16. Μιὰ ὑφάντρια ὑφαίνει σὲ μιὰ βδομάδα 45 μέτρα ὕφασμα, ποὺ ἔχει πλάτος $\frac{7}{8}$ μέτρα. Πόσο μέτρα θὰ ὑφάνῃ στὸν ἴδιο χρόνο, ἂν τὸ ὕφασμα ἔχῃ πλάτος $\frac{5}{8}$ μέτρα; ('Απ. 63 μ.)

17. Τὰ 600 γραμμάρια βούτυρο ἀξίζουν 22 δραχ. Πόσο ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ κιλοῦ; ('Απ. 13,75 δρχ.)

18. Μὲ 2 λίρες καὶ 2 σελλίνια ἀγοράζομε 7 μέτρα ὕφασμα. Πόσα μέτρα ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα θὰ ἀγοράσωμε μὲ 3 λίρες καὶ 12 σελλίνια; (Νὰ τρέψτε πρῶτα τὶς λίρες σὲ σελλίνια). ('Απ. 12 μέτρα)

19. Ἕνας ἐργολάβος γιὰ νὰ τελειώσῃ μιὰ οἰκοδομὴ χρειάζεται 25 ἐργάτες, ποὺ νὰ ἐργάζωνται 8 ὧρες τὴν ἡμέρα. Πόσους ἐργάτες θὰ χρειασθῇ γιὰ τὴν ἴδια ἐργασία, ἂν οἱ ἐργάτες ἐργάζωνται 5 ὧρες τὴν ἡμέρα; ('Απ. 40 ἐργ.)

20. Ἕνας ποδηλάτης, ὅταν τρέχῃ μὲ ταχύτητα 12 χιλιομέτρων τὴν ὥρα, χρειάζεται 15 ὧρες γιὰ νὰ διατρέξῃ μιὰ ἀπόσταση. Πόσα χιλιόμετρα πρέπει νὰ τρέχῃ τὴν ὥρα, γιὰ νὰ διατρέξῃ τὴν ἴδια ἀπόσταση σὲ 10 ὧρες; ('Απ. 18 χλμ.)

21. Κάποιος ἀγόρασε 25 μέτρα ὕφασμα μὲ 80 δραχμὲς τὸ μέτρο. Ἂν διέθετε 6500 δραχμές, πόσα μέτρα ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα θὰ ἀγόραζε; ('Απ. 81,25 μ.)

22. Μιὰ βρύση, ἀπὸ τὴν ὁποία τρέχει σὲ κάθε πρῶτο λεπτὸ τῆς ὥρας 50 κιλὰ νερό, γεμίζει μιὰ δεξαμενὴ σὲ 15 ὧρες. Σὲ πόσες ὧρες θὰ γεμίσῃ ἡ ἴδια δεξαμενή, ἂν ἔτρεχε ἀπὸ τὴ βρύση 40 κιλὰ νερὸ σὲ κάθε πρῶτο λεπτό; ('Απ. $18\frac{3}{4}$ ὡρ.)

23. Μὲ 10 κιλὰ ἀλεύρι γίνονται 13,5 κιλὰ ψωμί. Πόσα κιλὰ ψωμὶ γίνονται μὲ 275 κιλὰ ἀλεύρι; ('Απ. 371,25 κιλά)

24. Ἀγόρασα 35 κιλὰ λάδι. Ἂν ξοδεύω τὴ βδομάδα 3500 γραμμάρια, γιὰ πόσες μέρες θὰ μοῦ φθάσῃ τὸ λάδι αὐτό; ('Απ. 70 μέρες)

25. Σ' ἕνα φρούριο ὑπηρετοῦν 200 στρατιῶτες καὶ ἔχουν τροφὲς γιὰ

50 μέρες. Ἔφυγαν ἀπὸ τὸ φρούριο 40 στρατιῶτες. Γιὰ πόσες μέρες θὰ ἔχουν τώρα τροφὴ οἱ ὑπόλοιποι στρατιῶτες; ('Απ. 50 μέρες)

26. Ἕνα φιλόπτωχο ταμεῖο ἤθελε νὰ μοιράση ἕνα χρηματικὸ ποσὸ σὲ 25 φτωχὲς οἰκογένειες δίνοντας στὴν κάθε οἰκογένεια 500 δραχμές. Τὴν ὥρα τῆς διανομῆς παρουσιάσθηκαν μόνο 16 φτωχὲς οἰκογένειες. Ἀπὸ πόσες δραχμὲς θὰ δώση τώρα σὲ κάθε οἰκογένεια, ἂν θέλη νὰ μοιράση πάλι τὸ ἴδιο χρηματικὸ ποσό; ('Απ. 781,25 δρχ.)

27. Ἕνα καλοριφὲρ χρειάζεται 40 κιλὰ πετρέλαιο, ὅταν καίη 10 ὧρες τὴ μέρα. Ἂν καίη $15\frac{1}{2}$ ὧρες τὴ μέρα πόσα κιλὰ πετρέλαιο χρειάζεται τὴ μέρα; Πόσα τὸ μήνα; ('Απ.: 62 κ. τὴ μέρα, 1860 κ. τὸ μήνα)

28. Ἕνα αὐτοκίνητο ποὺ τρέχει 60 χιλιόμετρα τὴν ὥρα φθάνει ἀπὸ τὴν Ἀθήνα στὸ Ἄργος σὲ $2\frac{1}{2}$ ὧρες. Σὲ πόσες ὧρες θὰ φθάση ἄλλο αὐτοκίνητο, ποὺ τρέχει 40 χιλιόμετρα; ('Απ. $3\frac{3}{4}$ ὡρ.)

29. Σὲ ἕνα φρούριο βρίσκονται 80 στρατιῶτες καὶ ἔχουν τρόφιμα γιὰ 30 μέρες. Σήμερα ἔφτασαν στὸ φρούριο ἄλλοι 20 στρατιῶτες. Γιὰ πόσες μέρες θὰ ἔχουν τρόφιμα τώρα οἱ στρατιῶτες; ('Απ. 24 ἡμ.)

30. Τὰ 250 κιλὰ λάδι βγαίνουν ἀπὸ 1250 κιλὰ ἐλιές. Πόσα κιλὰ λάδι βγαίνουν ἀπὸ 800 κιλὰ ἐλιές; ('Απ.: 160 κιλά)

31. Ἕνας κρεοπώλης κέρδισε ἀπὸ τὴν πούληση 25 κιλῶν κρέατος 312,5 δραχ. Πόσες δραχμὲς θὰ κερδίση, ἂν πουλήση 54 κιλὰ κρέας; ('Α. 675 δρχ.)

32. Μιὰ κεντήτρια ἐργαζόμενη 7 ὧρες τὴ μέρα τελειώνει ἕνα κέντημα σὲ 8 μέρες. Σὲ πόσες μέρες θὰ τελειώση τὸ ἴδιο κέντημα, ἂν ἐργασθῇ 4 ὧρες τὴ μέρα; ('Απ. 14 μέρες)

33. Ἕνα ἀμπέλι 4 στρεμμάτων τὸ σκάβουν 3 ἐργάτες σὲ 5 μέρες. Σὲ πόσες μέρες θὰ σκάψουν τὸ ἴδιο ἀμπέλι 6 ἐργάτες; ('Απ. 2,5 μέρες)

34. Ἀπὸ 20 κιλὰ σταφύλια βγαίνει 15 κιλὰ μοῦστος. Πόσα κιλὰ μοῦστος βγαίνει ἀπὸ 1600 κιλὰ σταφύλια; ('Απ. 1200 κιλά)

35. Ἕνας ποδηλάτης, μὲ ταχύτητα 20 χιλιόμετρα τὴν ὥρα, χρειάζεται 8 ὧρες γιὰ νὰ διατρέξη μιὰ ἀπόσταση. Πόσα χιλιόμετρα πρέπει νὰ τρέχη τὴν ὥρα, γιὰ νὰ διατρέξη τὴν ἴδια ἀπόσταση σὲ 5 ὧρες; ('Απ. 32 χλμ.)

3. Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν

α'. Τί εἶναι καὶ πῶς λύνονται τὰ προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.

Παράδειγμα 1. 5 ἐργάτες σκάβουν σὲ 6 μέρες ἕνα χαντάκι μήκους 45 μέτρων. Ἂν δουλέψουν 9 ἐργάτες, 8 μέρες, πόσα μέτρα θὰ σκάψουν;

Κατάταξη

$$\frac{5}{9}\ \text{ἐργάτες}\ \text{»} \qquad \frac{6}{8}\ \text{ἡμέρ.}\ \text{»} \qquad \frac{45}{X;}\ \text{μέτρα}\ \text{»}$$

Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα αὐτὸ θὰ σκεφθοῦμε ἔτσι:

Θὰ βροῦμε πρῶτα πόσα μέτρα χαντάκι σκάβουν οἱ 9 ἐργάτες σὲ 6 μέρες (ὅσες δηλαδὴ μέρες ἐργάζονται καὶ οἱ 5 ἐργάτες).

Γιὰ νὰ βροῦμε αὐτὸ θὰ λύσωμε τὸ παρακάτω πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Οἱ 5 ἐργάτες σκάβουν ἕνα χαντάκι 45 μέτρων σὲ 6 μέρες. Πόσα μέτρα χαντάκι θὰ σκάψουν οἱ 9 ἐργάτες, ἐργαζόμενοι τὶς ἴδιες μέρες;

Κατάταξη

$$\frac{5}{9}\ \text{ἐράτες}\ \text{»} \qquad \frac{45}{X;}\ \text{μέτρα}\ \text{»}$$

Λύση

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα θὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα ἔτσι:

$$X = 45 \times \frac{9}{5}.$$

Ὥστε οἱ 9 ἐργάτες ἐργαζόμενοι 6 μέρες θὰ σκάψουν ἕνα χαντάκι

$$\frac{45 \times 9}{5}\ \text{μέτρων.}$$

Ἐμεῖς ὅμως στὸ πρόβλημά μας ζητοῦμε νὰ μάθωμε πόσα μέτρα θὰ σκάψουν οἱ 9 ἐργάτες, ἂν δουλέψουν 8 μέρες καὶ ὄχι 6.

Μποροῦμε εὔκολα νὰ τὸ βροῦμε, ἀφοῦ τώρα ξέρομε πόσα μέτρα χαντάκι σκάβουν οἱ 9 ἐργάτες σὲ 6 μέρες. Θὰ λύσωμε γι' αὐτὸ τὸ παρακάτω πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Οἱ ἐργάτες αὐτοὶ (οἱ 9 ἐργάτες) σκάβουν σὲ 6 μέρες ἕνα χαντάκι $\frac{45 \times 9}{5}$ μέτρων. Πόσων μέτρων χαντάκι θὰ σκάψουν σὲ 8 μέρες;

Κατάταξη

$$\frac{6\ \text{μέρες} \qquad \frac{45 \times 9}{5}\ \text{μέτρα}}{8\ \text{»} \qquad \times\ \text{»}}$$

Ἐπειδὴ καὶ ἐδῶ τὰ ποσὰ εἶναι ἀ ν ά λ ο γ α, θὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα ἔτσι:

$$X = \frac{45 \times 9}{5} \times \frac{8}{6} = \frac{45 \times 9 \times 8}{5 \times 6} = \frac{3240}{30} = 108 \text{ μέτρα.}$$

Ὥστε οἱ 9 ἐργάτες σὲ 8 μέρες θὰ σκάψουν ἕνα χαντάκι μήκους 108 μέτρων.

Στὸ παραπάνω πρόβλημα μᾶς δίνονται τ ρ ε ῖ ς ἀ ν τ ί σ τ ο ι χ ε ς τ ι μ ὲ ς τ ρ ι ῶ ν π ο σ ῶ ν (5 ἐργάτες, 6 μέρες καὶ 45 μέτρα), καθὼς καὶ δ υ ὸ ἄ λ λ ε ς τ ι μ ὲ ς τῶν δυὸ ποσῶν ἀπὸ τὰ τρία (9 ἐργάτες καὶ 8 μέρες) καὶ ζητεῖται ἡ τ ι μ ὴ τ ο ῦ τ ρ ί τ ο υ π ο σ ο ῦ (μέτρα), ποὺ εἶναι ἀντίστοιχη σ' αὐτὲς τὶς δυό.

Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα αὐτό, τ ὸ ἀ ν α λ ύ σ α μ ε, ὅπως εἴδαμε, σὲ δ υ ὸ προβλήματα τῆς ἁ π λ ῆ ς μ ε θ ό δ ο υ τ ῶ ν τ ρ ι ῶ ν. Καὶ ἐπειδὴ τὸ πρόβλημα αὐτὸ περιλαμβάνει δ υ ὸ προβλήμταα τῆς ἁ π λ ῆ ς μεθόδου, γι' αὐτὸ εἶναι πρόβλημα τῆς σ υ ν θ έ τ ο υ μ ε θ ό δ ο υ τ ῶ ν τ ρ ι ῶ ν.

Ὅπως εἴδαμε, τὰ ποσὰ στὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι ἀ ν ά λ ο γ α.

Ἂν τώρα προσέξωμε τὶς πράξεις, ποὺ κάναμε γιὰ νὰ βροῦμε τὴν ἄγνωστη τιμή, θὰ ἰδοῦμε, ὅτι πολλαπλασιάσαμε τὸν ἀριθμὸ 45, ποὺ εἶναι πάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο (X) ἐπὶ τὰ κλάσματα $\frac{5}{9}$ καὶ $\frac{6}{8}$, ποὺ σχηματίζουν οἱ δοσμένες τιμὲς τῶν δύο ἄλλων ποσῶν, ἀ ν τ ε σ τ ρ α μ μ έ ν α, δηλ. ἔτσι:

$$45 \times \frac{9}{5} \times \frac{8}{6}.$$

Παράδειγμα 2. 5 μαθήτριες ἐργάζονται 2 ὧρες τὴ μέρα καὶ τελειώνουν ἕνα ἐργόχειρο σὲ 12 μέρες. Σὲ πόσες μέρες θὰ τελειώσουν τὸ ἴδιο ἐργόχειρο 10 μαθήτριες, ἂν ἐργάζωνται 4 ὧρες τὴ μέρα;

Κατάταξη

$\frac{5}{10}$	μαθήτριες	$\frac{2}{4}$	ὧρες	12	μέρες
	»			X;	

Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα αὐτὸ θὰ σκεφθοῦμε ἔτσι:

Θὰ βροῦμε πρῶτα σὲ πόσες μέρες τελειώνουν τὸ ἐργόχειρο αὐτὸ οἱ 10 μαθήτριες, ἂν ἐργάζωνται 2 ὧ ρ ε ς τὴ μέρα (ὅσες ὧρες δηλ. ἐργάζονται καὶ οἱ 5 μαθήτριες). Γιὰ νὰ τὸ βροῦμε θὰ λύσωμε τὸ παρακάτω πρόβλημα τῆς ἁ π λ ῆ ς μ ε θ ό δ ο υ τ ῶ ν τ ρ ι ῶ ν.

5 μαθήτριες ἐργαζόμενες δυὸ ὧρες τὴ μέρα τελειώνουν ἕνα ἐργόχειρο σὲ 12 μέρες. Σὲ πόσες μέρες τελειώνουν τὸ ἴδιο ἐργόχειρο 10 μαθήτριες ἐργαζόμενες τὶς ἴδιες ὧρες τὴν ἡμέρα;

Κατάταξη

$$\frac{5 \text{ μαθήτριες}}{10 \quad »} \qquad \frac{12 \text{ μέρες}}{X; \quad »}$$

Λύση

Φυσικὰ ἐδῶ τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, γιατί, ὅταν διπλασιάζωνται οἱ ἐργαζόμενες μαθήτριες, χρειάζεται ὁ μισὸς χρόνος γιὰ νὰ τελειώση τὸ ἐργόχειρο.

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, θὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα ἔτσι: $X = 12 \times \frac{5}{10}$.

Ὥστε οἱ 10 μαθήτριες θὰ τελειώσουν τὸ ἐργόχειρο, ἐργαζόμενες τὶς ἴδιες ὧρες τὴν μέρα, σὲ $\frac{12 \times 5}{10}$ μέρες.

Ἐμεῖς ὅμως ζητοῦμε νὰ μάθωμε σὲ πόσες μέρες τελειώνουν τὸ ἐργόχειρο οἱ 10 μαθήτριες, ἂν ἐργάζωνται 4 ὧρες τὴν ἡμέρα (καὶ ὄχι 2).

Μποροῦμε εὔκολα τώρα νὰ βροῦμε τὸ ζητούμενο, ἀφοῦ ξέρομε σὲ πόσες μέρες τελειώνουν οἱ 10 μαθήτριες τὸ ἐργόχειρο, ἐργαζόμενες 2 ὧρες τὴ μέρα. Θὰ λύσωμε γι᾽ αὐτὸ τὸ παρακάτω πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Οἱ μαθήτριες αὐτὲς (οἱ 10 μαθήτριες) ἐργαζόμενες 2 ὧρες τὴ μέρα τελειώνουν ἕνα ἐργόχειρο σὲ $\frac{12 \times 5}{10}$ ἡμέρες.

Σὲ πόσες μέρες τελειώνουν οἱ ἴδιες μαθήτριες τὸ ἐργόχειρο αὐτό, ἂν ἐργάζωνται 4 ὧρες τὴν ἡμέρα;

Κατάταξη

$$\frac{2 \text{ ὧρες} \qquad \frac{12 \times 5}{10} \text{ ἡμέρες}}{4 \quad » \qquad X;}$$

Λύση

Ἐπειδὴ καὶ ἐδῶ τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, θὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα ἔτσι:

$$X = \frac{12 \times 5}{10} \times \frac{2}{4} = \frac{12 \times 5 \times 2}{10 \times 4} = \frac{120}{40} = 3 \text{ ἡμέρες.}$$

Ὥστε οἱ 10 μαθήτριες, ἐργαζόμενες 4 ὧρες τὴν ἡμέρα, θὰ τελειώσουν τὸ ἴδιο ἐργόχειρο σὲ 3 μέρες.

Καὶ στὸ πρόβλημα αὐτὸ μᾶς δίδονται τρεῖς ἀντίστοιχες τιμὲς τριῶν ποσῶν (5 μαθήτριες, 2 ὧρες καὶ 12 ἡμέρες), καθὼς καὶ δυὸ ἄλλες τιμὲς τῶν δυὸ ποσῶν ἀπὸ τὰ τρία (10 μαθήτριες καὶ 4 ὧρες) καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ τρίτου ποσοῦ (ἡμέρες), ποὺ εἶναι ἀντίστοιχη σ᾽ αὐτὲς τὶς δυό.

Γιὰ νὰ λύσωμε αὐτὸ τὸ πρόβλημα, ὅπως εἴδαμε, τὸ ἀναλύσαμε σὲ δυὸ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν. Καὶ ἐπειδὴ τὸ πρόβλημα αὐτὸ περιλαμβάνει δυὸ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου, γι᾽ αὐτὸ εἶναι καὶ αὐτὸ πρόβλημα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν. Ὅπως εἴδαμε, τὰ ποσὰ στὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

Ἂν τώρα προσέξωμε τὶς πράξεις, ποὺ κάναμε γιὰ νὰ βροῦμε τὴν ἄγνωστη τιμή, θὰ ἰδοῦμε ὅτι πολλαπλασιάσαμε τὸν ἀριθμὸ 12, ποὺ εἶναι πάνω ἀπὸ τὸν Χ ἐπὶ τὰ κλάσματα $\frac{5}{10}$ καὶ $\frac{2}{4}$, ποὺ σχηματίζουν οἱ δοσμένες τιμὲς τῶν δυὸ ἄλλων ποσῶν, ὅπως εἶναι, δηλ. ἔτσι: $X = 12 \times \frac{5}{10} \times \frac{2}{4}$.

Συμπέρασμα. *Ἡ σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν περιλαμβάνει τόσα προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ὅσα εἶναι τὰ ποσά, ποὺ μᾶς δίνονται στὸ πρόβλημα, ἐκτὸς ἀπὸ ἕνα.*

Στὰ προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν μᾶς δίνονται τρία ἢ περισσότερα ποσὰ καὶ ζητεῖται μιὰ ἄγνωστη τιμὴ ἑνὸς ἀπ᾽ αὐτά.

Τὰ προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν λύνονται, ὅπως καὶ τῆς ἁπλῆς μεθόδου. Πολλαπλασιάζομε τὸν ἀριθμό, ποὺ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο (Χ), ἐπὶ τὸ κλάσμα, ποὺ σχηματίζουν οἱ δοσμένες τιμὲς κάθε ποσοῦ, ἀντεστραμμένο μέν, ἂν τὸ ποσὸ αὐτὸ εἶναι εὐθέως ἀνάλογο συγκρινόμενο μὲ τὸ ποσὸ τοῦ ἀγνώστου, ὅπως εἶναι δέ, ἂν τὸ ποσὸ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογο συγκρινόμενο μὲ τὸ ποσὸ τοῦ ἀγνώστου.

β'. Λύση προβλήματος μὲ τὴ σύνθετο μέθοδο τῶν τριῶν.

Παράδειγμα. 10 ἐργάτες σκάβουν ἕνα χωράφι 12 στρεμμάτων σὲ 15 μέρες, ἂν ἐργάζωνται 8 ὧρες τὴν ἡμέρα. Σὲ πόσες μέρες 8 ἐργάτες θὰ σκάψουν ἕνα χωράφι 9 στρεμμάτων, ἂν ἐργάζωνται 6 ὧρες τὴν ἡμέρα;

Κατάταξη

$$\frac{10}{8}\ \text{ἐργάτες} \qquad \frac{12}{9}\ \text{στρέμ.} \qquad \frac{8}{6}\ \text{ὧρες} \qquad \frac{15}{X;}\ \text{ἡμέρες}$$

Σύγκριση ποσῶν

Θὰ συγκρίνωμε κάθε ποσὸ μὲ τὸ ποσὸ τοῦ ἀγνώστου. Κατὰ τὴ σύγκριση πρέπει νὰ θεωροῦμε, ὅτι δὲν ὑπάρχουν τὰ ἄλλα ποσά.

α΄. Ἐργάτες καὶ ἡμέρες ἐργασίας

Οἱ 10 ἐργάτες σκάβουν ἕνα χωράφι σὲ 15 μέρες. Διπλάσιοι ἐργάτες θὰ σκάψουν τὸ ἴδιο χωράφι στὶς μισὲς μέρες. Ἄρα τὰ ποσὰ ἐργάτες καὶ ἡμέρες ἐργασίας εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

β΄. Στρέμματα καὶ ἡμέρες ἐργασίας

Τὰ 12 στρέμματα ἑνὸς χωραφιοῦ τὰ σκάβουν ὁρισμένοι ἐργάτες σὲ 16 μέρες. Διπλάσια στρέμματα θὰ τὰ σκάψουν βέβαια οἱ ἴδιοι ἐργάτες σὲ διπλάσιες μέρες. Συνεπῶς τὰ ποσὰ στρέμματα καὶ ἡμέρες ἐργασίας εἶναι ἀνάλογα.

γ΄. Ὧρες καὶ ἡμέρες ἐργασίας

Ὅταν ἐργάζωνται 8 ὧρες τὴν ἡμέρα, χρειάζονται 15 μέρες, γιὰ νὰ σκάψουν ἕνα χωράφι. Ἂν ἐργασθοῦν διπλάσιες ὧρες τὴν ἡμέρα, θὰ χρειασθοῦν βέβαια τὶς μισὲς μέρες γιὰ νὰ σκάψουν τὸ ἴδιο χωράφι. Ἄρα τὰ ποσὰ ὧρες καὶ ἡμέρες ἐργασίας εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

Ἑπομένως σύμφωνα μὲ τὸν κανόνα θὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα ἔτσι:

Λύση

$$X = 15 \times \frac{10}{8} \times \frac{9}{12} \times \frac{8}{6} = \frac{15 \times 10 \times 9 \times 8}{8 \times 12 \times 6} = \frac{10800}{576} = 18\frac{3}{4}\ \text{ἡμ.}$$

Ὥστε οἱ 8 ἐργάτες θὰ χρειασθοῦν $18\frac{3}{4}$ μέρες γιὰ νὰ σκάψουν 9 στρέμματα, ἂν ἐργάζωνται 6 ὧρες τὴν ἡμέρα.

Ἀσκήσεις

1. Νὰ κάνετε 3 προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν καὶ νὰ τὰ ἀναλύσετε σὲ ὅσα πρέπει προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου.

2. Νὰ λύσετε τὰ προβλήματα αὐτὰ σύμφωνα μὲ τὸ παράδειγμά μας.

Προβλήματα

1. Γιὰ νὰ στρωθοῦν 4 δωμάτια, ποὺ ἔχουν ἴδιο μέγεθος, μὲ μουσαμά, χρειάζονται 120 μέτρα μουσαμά, ποὺ ἔχει πλάτος 1,5 μέτρα. Πόσα μέτρα μουσαμὰ θὰ χρειασθοῦν γιὰ νὰ στρωθοῦν 5 δωμάτια μὲ τὸ ἴδιο μέγεθος, ἂν ὁ μουσαμὰς ἔχει πλάτος 2,5 μέτρα; (Ἀπ. 90 μ.)

2. Ἕνα αὐτοκίνητο παίρνει 2250 δραχμὲς ἀγώγι γιὰ νὰ μεταφέρη 1500 κιλὰ φορτίο σὲ ἀπόσταση 50 χιλιομέτρων. Πόσες δραχμὲς ἀγώγι θὰ πάρη γιὰ νὰ μεταφέρη 2000 κιλὰ φορτίο σὲ ἀπόσταση 80 χιλιομέτρων; (Ἀπ. 4800 δρχ.)

3. 30 ἄνθρωποι τρώγουν 45 κιλὰ ψωμὶ σὲ 3 μέρες. 75 ἄνθρωποι πόσα κιλὰ ψωμὶ θὰ φάγουν σὲ 15 μέρες; (Ἀπ. 500 κιλά)

4. Μιὰ μοδίστρα, ποὺ ἐργάζεται 8 ὧρες τὴν ἡμέρα, βγάζει σὲ 5 μέρες 6 φορέματα. Ἂν ἐργάζεται 10 ὧρες τὴν ἡμέρα, σὲ 8 μέρες πόσα φορέματα θὰ βγάλη; (Ἀπ. 12 φορέματα)

5. Μιὰ ὑφάντρια ἐργάζεται 8 ὧρες τὴν ἡμέρα καὶ ὑφαίνει σὲ 12 μέρες 40 μέτρα ὕφασμα. Πόσες ὧρες πρέπει νὰ ἐργάζεται τὴν ἡμέρα γιὰ νὰ ὑφάνη σὲ 10 μέρες 30 μέτρα ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα; (Ἀπ. $7\frac{1}{5}$ ὡρ.)

6. Γιὰ νὰ γίνουν 20 μαθητικὲς ποδιὲς χρειάσθηκαν 140 μέτρα ὕφασμα, πλάτους 7 δέκατα. Πόσα μέτρα ὕφασμα θὰ χρειασθῆ γιὰ νὰ γίνουν 35 ἴσου μεγέθους ποδιές, ἂν τὸ πλάτος τοῦ ὑφάσματος εἶναι 6 δέκατα.

(Ἀπ. $285\frac{5}{8}$ μ.)

7. Μὲ 30 κιλὰ νῆμα ὑφαίνουν ὕφασμα μήκους 20 μέτρ. καὶ πλάτους 1,5 μέτρων. Πόσα κιλὰ νῆμα θὰ χρειασθῆ, γιὰ νὰ ὑφάνουν ὕφασμα μήκους 40 μέτρων καὶ πλάτους 2 μέτρων; (Ἀπ. 80 κιλά)

8. Ἕνας ἐργάτης, ἂν ἐργασθῆ 6 ὧρες τὴν ἡμέρα, σκάβει σὲ 10 μέρες ἕνα κῆπο 12 μέτρων μήκους καὶ 9 μέτρων πλάτους. Πόσες μέρες πρέπει νὰ ἐργασθῆ ὁ ἴδιος ἐργάτης, γιὰ νὰ σκάψη ἕνα ἄλλο κῆπο, ποὺ ἔχει μῆκος 48 μέτρα καὶ πλάτος 36 μέτρα, ἂν ἐργάζεται 8 ὧρες τὴν ἡμέρα; (Ἀπ. 120 ἡμ.)

9. Γιὰ νὰ στρώσουν ἕνα δρόμο 300 μέτρων μήκους καὶ 16 μέτρων πλάτους χρειάσθηκαν 400 κυβικὰ μέτρα χαλίκια. Πόσο κυβικὰ χαλίκια θὰ χρειασθοῦν γιὰ νὰ στρώσουν ἕνα ἄλλο δρόμο μήκους 500 μέτρων καὶ πλάτους 12 μέτρων; (Ἀπ. 500 κ. μ.).

10. Τὰ 6 μέτρα ἑνὸς ὑφάσματος, ποὺ ἔχει πλάτος 5 δέκατα ἀξίζουν 1200

δραχμές. Πόσες δραχμὲς ἀξίζουν τὰ 17 μέτρα ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα, ἂν ἔχη πλάτος 6 δέκατα; ('Απ. 4080 δρχ.).

11. 8 ἐργάτες ἐργαζόμενοι 5 ὧρες τὴν ἡμέρα τελειώνουν ἕνα ἔργο σὲ 14 μέρες. Πόσοι ἐργάτες θὰ χρειασθοῦν, γιὰ νὰ τελειώσουν τὸ ἔργο αὐτὸ σὲ 10 ἡμέρες, ἂν ἐργάζωνται 7 ὧρες τὴν ἡμέρα; ('Απ. 8 ἐργ.).

12. Οἱ 3000 στρατιῶτες χρειάζονται 33224 κουραμάνες γιὰ 40 μέρες. Πόσες κουραμάνες θὰ χρειασθοῦν 2000 στρατιῶτες γιὰ 15 μέρες;

('Απ. 8306 κουρ.).

13. 20 ἐργάτες ἂν ἐργασθοῦν 9 ὧρες τὴν ἡμέρα, σκάβουν ἕνα χωράφι σὲ 15 μέρες. Σὲ πόσες μέρες 40 ἐργάτες θὰ σκάψουν τὸ ἴδιο χωράφι, ἂν ἐργασθοῦν 5 ὧρες τὴν ἡμέρα; ('Απ.: 13,5 ἡμ.).

14. Ἕνας κρουνὸς γεμίζει μὲ νερὸ σὲ 6 ὧρες μιὰ δεξαμενὴ μήκους 5 μέτρων, πλάτους 4 μέτρ. καὶ βάθους 3 μέτρων. Σὲ πόσες ὧρες ὁ ἴδιος κρουνὸς θὰ γεμίση ἄλλη δεξαμενὴ μήκους 4 μέτρ., πλάτους 2 μέτρ. καὶ βάθους 1,50 μέτρ.;

('Απ. $1\frac{1}{5}$ ὡρ.)

15. 8 ἐργάτες θερίζουν ἕνα χωράφι σὲ 6 μέρες, ἐργαζόμενοι 5 ὧρες τὴν ἡμέρα. Σὲ πόσες μέρες 10 ἐργάτες θερίζουν τὸ ἴδιο χωράφι, ἂν ἐργάζωνται 8 ὧρες τὴν ἡμέρα. ('Απ. 3 ἡμ.).

16. Μὲ 1400 δρχ. ἀγοράζομε 7 μέτρα ὕφασμα πλάτους 0,50 μ. Μὲ πόσες δραχμὲς θὰ ἀγοράσωμε 18 μέτρα ὕφασμα πλάτους 0,75 μέτρ.;

('Απ.: 5400 δρχ.).

17. Γιὰ νὰ στρωθῆ μιὰ αἴθουσα 9 μέτρων μήκους καὶ 5 μέτρων πλάτους χρειάζονται 30 μέτρ. μουσαμά, πλάτους 1,50 μ. Πόσα μέτρα μουσαμὰς θὰ χρειασθῆ, ἂν ἡ αἴθουσα ποὺ ἔχομε νὰ στρώσωμε εἶχε διπλάσιο μῆκος καὶ πλάτος καὶ ὁ μουσαμὰς τὸ μισὸ πλάτος; ('Απ.: 240 μ.).

18. Μὲ 9 μέτρα ὕφασμα πλάτους 0,75 μ., μιὰ ράπτρια κατασκευάζει 2 φορέματα. Πόσα ἴδια φορέματα θὰ κατασκευάση μὲ 13,5 μ. ὕφασμα, πλάτους 1,50 μ.; ('Απ. 6 φορ.)

19. Ἕνας ἐργάτης ἐργαζόμενος 8 ὧρες τὴν ἡμέρα ἀνοίγει ἕνα χαντάκι 20 μ. μῆκος, 1 μ. πλάτος καὶ 2 μ. βάθος σὲ 5 μέρες. Ἂν τὸ χαντάκι αὐτὸ εἶχε μῆκος 12 μέτρ., πλάτος 0,50 μ. καὶ βάθος 3 μέτρων καὶ ὁ ἐργάτης ἐργαζόταν 6 ὧρες τὴν ἡμέρα, σὲ πόσες μέρες θὰ τὸ ἄνοιγε; ('Απ. 3 ἡμ.)

20. Τὰ 8 μετρ. ἀπὸ ἕνα ὕφασμα πλάτους 1,60 ἀξίζουν 3200 δρχ. Πόσο θὰ ἀξίζουν τὰ 10 μ. ἀπὸ τὸ ἴδιο ὕφασμα, ἀλλὰ πλάτους 1,20 μέτρ.;

('Απ. 3000 δρχ.).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΣΟΣΤΩΝ

1. Κέρδος - Ζημία

α΄. Κέρδος

Οἱ ἔμποροι, ὅπως εἶναι γνωστό, ἀγοράζουν τὰ ἐμπορεύματα ἀπὸ τοὺς παραγωγοὺς ἢ ἀπὸ ἄλλους ἐμπόρους καὶ τὰ μεταπουλοῦν. Δὲν τὰ μεταπουλοῦν ὅμως, ὅσο ἀκριβῶς τὰ ἀγόρασαν. Διότι γιὰ νὰ τὰ μεταφέρουν ἀπὸ τὸν τόπο τῆς ἀγορᾶς στὰ καταστήματά τους, ξοδεύουν γιὰ μεταφορικά, φόρους κλπ.

Ξοδεύουν ἐπίσης γιὰ ἐνοίκια καὶ ἄλλα ἔξοδα τοῦ καταστήματος, γιὰ μισθοὺς ὑπαλλήλων, φωτισμὸ κλπ.

Ὑπολογίζουν λοιπὸν ὅλα αὐτὰ τὰ ἔξοδα, τὰ προσθέτουν στὴν ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος, προσθέτουν ἀκόμα καὶ κάτι ἐπὶ πλέον, ποὺ θέλουν νὰ κερδίσουν ἀπὸ τὸ ἐμπόρευμά τους γιὰ τὸν κόπο τους, καὶ κανονίζουν τὴν τιμή, μὲ τὴν ὁποία τὰ μεταπουλοῦν στοὺς πελάτες τους.

Αὐτὸ τὸ ἐπιπλέον, ποὺ προσθέτουν, λέγεται στὸ ἐμπόριο κέρδος.

β΄. Ζημία

Κάποτε ὅμως συμβαίνει νὰ πάθῃ τὸ ἐμπόρευμα κάποια βλάβη ἀπὸ διάφορες αἰτίες καὶ νὰ μὴ μπορῇ νὰ πουληθῇ τόσο, ὅσο κόστισε. Τότε ὄχι μονάχα δὲν ἔχει κέρδος ὁ ἔμπορος ἀπὸ τὴν πούληση αὐτοῦ τοῦ ἐμπορεύματος, ἀλλὰ χάνει καὶ ἕνα μέρος ἀπὸ τὰ χρήματά του. Πολλὲς μάλιστα φορὲς χάνει καὶ ὅλα τὰ χρήματά του.

Τὸ μέρος αὐτὸ τῶν χρημάτων, ποὺ χάνεται, λέγεται στὸ ἐμπόριο ζημία.

2. Πῶς ὑπολογίζεται τὸ κέρδος καὶ ἡ ζημία

Ὅταν λέμε ὅτι ὁ ἔμπορος πουλάει τὰ ἐμπορεύματά του μὲ κέρδος 20 τοῖς ἑκατόν, καταλαβαίνομε ὅτι ὁ ἔμπορος αὐτός, ὅταν πουλάει ἐμπορεύματα ἀξίας 100 δραχμῶν, εἰσπράττει 120 δραχμές, δηλ. κερδίζει 20 δραχμὲς στὶς 100.

Ὅταν λέμε, ὅτι ὁ ἔμπορος πουλάει τὰ ἐμπορεύματά του μὲ ζημία 10 τοῖς ἑκατόν, καταλαβαίνομε, ὅτι ὁ ἔμπορος αὐτός, ὅταν πουλάῃ ἐμπορεύματα ἀξίας 100 δραχμῶν, εἰσπράττει 90 δραχμές, δηλ. χάνει 10 δραχμὲς στὶς 100.

Τὸ κέρδος λοιπὸν ἢ ἡ ζημία στὸ ἐμπόριο ὑπολογίζεται συνήθως στὶς 100 μονάδες. Πολλὲς φορὲς ὅμως ὑπολογίζεται καὶ στὶς 1000 μονάδες. Τὸ ποσὸ πάνω στὸ ὁποῖο κανονίζεται τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία λέγεται ἀρχικὸ ποσό.

Τὸ κέρδος, ἡ ζημία, ἡ ἔκπτωση κλπ., ποὺ ἀναλογεῖ στὸ ἀρχικὸ ποσό, λέγεται ποσοστό.

3. Πῶς γράφεται τὸ ποσοστὸ

Ὅταν λέμε ὅτι ὁ ἔμπορος κερδίζει 25 στὰ 100, τὸ γράφομε στὴν ἀριθμητική, γιὰ συντομία, ἔτσι: 25% καὶ τὸ διαβάζομε 25 τοῖς ἑκατὸν ἢ 25 στὰ ἑκατό.

Ἂν τὸ κέρδος εἶναι 25 στὰ 1000 τὸ γράφομε ἔτσι: 25‰ καὶ τὸ διαβάζομε 25 τοῖς χιλίοις ἢ 25 στὰ χίλια.

Τὸ ποσοστὸ τοῦ τόσο τοῖς 100 (%) ἢ τοῦ τόσο τοῖς 100 (‰) χρησιμοποιεῖται ὄχι μόνο γιὰ τὸ κέρδος ἢ τὴ ζημία τοῦ ἐμπορίου, ἀλλὰ καὶ σὲ ἄλλες περιπτώσεις. Χρησιμοποιεῖται:

Στὶς ἐκπτώσεις τῶν τιμῶν τῶν ἐμπορευμάτων. Λέμε π.χ. τὸ κατάστημα αὐτὸ κάμνει ἔκπτωση 5%.

Στὶς αὐξήσεις τῶν μισθῶν καὶ ἡμερομισθίων. Λέμε π.χ. αὐξάνονται οἱ μισθοὶ 50%.

Στὶς προμήθειες, ποὺ δικαιοῦνται οἱ μεσίτες, οἱ τράπεζες, οἱ ἐργολάβοι, οἱ παραγγελιοδόχοι κλπ. Λέμε π.χ. ὁ μεσίτης παίρνει προμήθεια 2%.

Στὰ ἀσφάλιστρα, ποὺ πληρώνονται στὶς ἀσφαλιστικὲς ἑταιρίες γιὰ τὴν ἀσφάλιση σπιτιῶν, καταστημάτων, πλοίων κλπ. Τὰ τελευταῖα αὐτὰ ὑπολογίζονται ἐπὶ τοῖς χιλίοις (‰]. Λέμε π.χ. πληρώνω γιὰ τὸ σπίτι μου ἀσφάλιστρα 1‰. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι σὲ κάθε 1000 δραχμὲς τῆς ἀξίας τοῦ σπιτιοῦ μου, πληρώνω ἀσφάλιστρα 1 δραχμὴ κλπ.

Τὰ προβλήματα, στὰ ὁποῖα ζητεῖται τὸ ποσοστὸ ἢ ἄλλο ποσό, ὅταν μᾶς δίνεται τὸ τόσο τοῖς ἑκατό, λέγονται προβλήματα ποσοστῶν.

4. Πῶς λύνονται τὰ προβλήματα τῶν ποσοστῶν

Τὰ προβλήματα τῶν ποσοστῶν εἶναι προβλήματα μεθόδου τῶν τριῶν καὶ συνεπῶς λύνονται, ὅπως καὶ αὐτά. Πρέπει ὅμως νὰ προσέχωμε κατὰ τὴν κατάταξη νὰ βάνωμε τὰ ὁμοειδῆ ποσὰ στὴν ἴδια κατακόρυφη στήλη.

Παράδειγμα. Ἕνας ἔμπορος πουλάει τὰ ἐμπορεύματά του μὲ κέρδος 20%. Πόσο θὰ κερδίση, ἂν πουλήση ἐμπορεύματα ἀξίας 600 δραχμῶν;

Κατάταξη

Γιὰ ἐμπορεύματα ἀξίας 100 δραχ. κερδίζει 20 δραχ.

Γιὰ ἐμπορεύματα ἀξίας 600 δραχ. κερδίζει X; »

Λύση

Τὰ ποσὰ ἀξία ἐμπορεύματος καὶ κέρδος εἶναι ἀνάλογα. Γι' αὐτὸ θὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα ἔτσι:

$$X = 20 \times \frac{600}{100} = \frac{20 \times 600}{100} = 120$$ δραχμὲς θὰ κερδίση, ὅταν πουλήση ἐμπορεύματα ἀξίας 600. δραχ.

Παράδειγμα 2. Ἕνας ἔμπορος πουλάει τὰ ἐμπορεύματά του μὲ ἔκπτωση 25%. Πόσα θὰ πληρώσωμε, ἂν ἀγοράσωμε ἐμπορεύματα ἀξίας 800 δραχμῶν;

Θὰ σκεφθοῦμε ἔτσι: Ἂν ἀγοράσω ἐμπορεύματα ἀξίας 100 δραχ. θὰ πληρώσω 25 δραχ. λιγότερο ἀπὸ τὴν πραγματική τους ἀξία, δηλ. 75 δραχμές. Τώρα, ποὺ ἀγοράζω ἐμπορεύματα ἀξίας 800 δραχμῶν, πόσα πρέπει νὰ πληρώσω; Θὰ κάμω λοιπὸν τὴν κατάταξη ἔτσι:

Κατάταξη

Γιὰ ἐμπορεύματα ἀξίας 100 δραχ. πληρώνομε 75 δραχ.

Γιὰ ἐμπορεύματα ἀξίας 800 δραχ. πληρώνομε X; δραχ.

Λύση

Ἐπειδὴ καὶ στὸ πρόβλημα αὐτὸ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, θὰ ἔχωμε:

$$X = 75 \times \frac{800}{100} = \frac{75 \times 800}{100} = \frac{60000}{100} = 600$$ δρχ. θὰ πληρώσωμε.

Παράδειγμα 3. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε ἐμπορεύματα ἀξίας 6000 δραχμῶν. Κέρδισε ἀπὸ τὴν πούλησή τους 1200 δραχμές. Πόσα τοῖς ἑκατὸ κέρδισε;

Κατάταξη

Ἀπὸ τὴν πούληση ἐμπορεύμ. ἀξίας 6000 δραχ. κερδίζει 1200 δραχ.

Ἀπὸ τὴν πούληση ἐμπορεύμ. ἀξίας 100 δραχ. κερδίζει X; »

Λύση

Ἐπειδὴ καὶ στὸ πρόβλημα αὐτὸ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, θὰ ἔχωμε:

$$X = 1200 \times \frac{100}{6000} = \frac{120000}{6000} = 20 \text{ δραχ. κερδίζει στὰ } 100 \text{ ἢ } 20\ \%.$$

Παράδειγμα 4. Πληρώνω γιὰ τὸ σπίτι μου ἀσφάλιστρα 2% κάθε χρόνο. Τὸ σπίτι μου ἔχει ἀξία 150.000 δρχ. Πόσα ἀσφάλιστρα πληρώνω τὸ χρόνο;

Κατάταξη

Γιὰ ἀξία 1000 δραχμῶν πληρώνω ἀσφάλιστρα 2 δραχ.

Γιὰ ἀξία 150000 δραχμῶν πληρώνω ἀσφάλιστρα X ; δραχ.

Λύση

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, θὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα ἔτσι:

$$X = 2 \times \frac{150000}{1000} = \frac{2 \times 150000}{1000} = \frac{300000}{1000} = 300 \text{ δραχ.}$$

θὰ πληρώσω γιὰ ἀσφάλιστρα τοῦ σπιτιοῦ μου τὸ χρόνο.

Προβλήματα.

1. Ἕνας ἔμπορος κερδίζει ἀπὸ τὴν πούληση τῶν ἐμπορευμάτων του 30%. Πόσο θὰ κερδίση, ἂν πουλήση ἐμπορεύματα ἀξίας 1800 δραχ.; (Ἀπ. 540 δρχ.)

2. Ὁ κὺρ - Κώστας ὁ μανάβης ὑπολογίζει ὅτι θὰ χάση σήμερα ἀπὸ τὰ σταφύλια, ποὺ ἀγόρασε 15%, γιατὶ πολλὰ ἦταν σάπια. Τὰ σταφύλια του ἀξίζουν 500 δραχ. Πόσα θὰ χάση ὁ κὺρ - Κώστας; (Ἀπ. 75 δρχ.)

3. Ἀγοράζω 15 κιλὰ φασόλια πρὸς 8 δραχ. τὸ κιλό. Ὁ ἔμπορος μοῦ κάνει ἔκπτωση 5%. Πόσα θὰ πληρώσω; (Ἀπ. 114 δρχ.)

4. Ἕνας ὑπάλληλος ἔπαιρνε μισθὸ 1650 δραχμὲς τὸ μῆνα. Γίνεται αὔξηση τοῦ μισθοῦ του 20%. Πόσα θὰ παίρνη τώρα; (Ἀπ. 1980 δρχ.)

5. Ἕνας μανάβης ἀγόρασε λαχανικὰ ἀξίας 500 δραχμῶν. Πόσο πρέπει νὰ τὰ πουλήση γιὰ νὰ κερδίση 15%; (Ἀπ. 575 δρχ.)

6. Ἕνας παραγγελιοδόχος παίρνει ὡς προμήθεια 2% ἐπὶ τῆς ἀξίας τῶν ἐμπορευμάτων, ποὺ προμηθεύει στοὺς ἐμπόρους. Σήμερα ἐκτέλεσε παραγγελία ἀξίας 1250 δραχ. Πόση προμήθεια θὰ πάρη; (Ἀπ. 25 δρχ.)

7. Ὁ φόρος στὰ ἐνοίκια τῶν σπιτιῶν εἶναι 20%. Πόσο φόρο θὰ πληρώσω γιὰ τὸ σπίτι μου, ἀπὸ τὸ ὁποῖο παίρνω ἐνοίκιο 3.500 δραχ.; (Ἀπ. 700 δρχ.)

8. Ὁ ἀτμοσφαιρικὸς ἀέρας ἔχει 21% ὀξυγόνο. Πόσο ὀξυγόνο ἔχει ἡ αἴθουσά σας, ἂν ἔχῃ 200 κυβικὰ μέτρα ἀέρα; (Ἀπ. 42 κ. μ.)

9. Ὅταν ἀλέθωμε σιτάρι παίρνομε 76% ἀλεύρι καὶ 24% πίτουρα. Πόσα κιλὰ ἀλεύρι καὶ πόσα πίτουρα θὰ πάρωμε, ἂν ἀλέσωμε 400 κιλὰ σιτάρι; (Ἀπ. 304 κιλὰ ἀλεύρι καὶ 96 κιλὰ πίτουρα)

10. Ἕνας ἔμπορος πουλάει τὰ ἐμπορεύματά του μὲ ἔκπτωση 12%. Ἂν πουλήσῃ ἐμπορεύματα ἀξίας 2500 δραχμῶν, πόση ἔκπτωση θὰ κάμῃ καὶ πόσα χρήματα θὰ εἰσπράξῃ; (Ἀπ.: Ἔκπτ. 300 δρχ. καὶ εἴσπραξη 2200)

11. Ἀπὸ τὰ σταφύλια βγαίνει 65% κρασί. Πόσα κιλὰ κρασὶ βγαίνει ἀπὸ 5280 κιλὰ σταφύλια; (Ἀπ. 3432 κιλὰ κρασί)

12. Ἕνας σερβιτόρος ἑστιατορίου εἰσέπραξε μιὰ μέρα 750 δραχμές. Ἀπὸ τὴν εἴσπραξη αὐτὴ δικαιοῦται 10%. Πόσα χρήματα θὰ πάρῃ ὁ σερβιτόρος τὴν ἡμέρα αὐτή; (Ἀπ. 75 δρχ.)

13. Στὴ χονδρικὴ πούληση τῶν βιβλίων γίνεται ἔκπτωση 25%. Ἂν ἀγοράσω βιβλία ἀξίας 350 δρχ. πόση ἔκπτωση θὰ μοῦ κάμουν; (Ἀπ. 87,5 δρχ.)

14. Τὸ βιβλίο τῆς ἀριθμητικῆς πουλιέται ἀπὸ τὸ βιβλιοπώλη τῆς συνοικίας 16 δρχ. Ὁ ἴδιος τὸ ἀγόρασε ἀπὸ τὸν ἐκδότη 12 δρχ. Πόσο τοῖς % ἔκπτωση τοῦ ἔγινε; (Ἀπ. 25%)

15. Σὲ μιὰ τάξη φοιτοῦν 60 μαθητές. Ἀπὸ αὐτοὺς 24 εἶναι ἀγόρια καὶ τὰ ὑπόλοιπα κορίτσια. Πόσο τοῖς % εἶναι τὰ ἀγόρια καὶ πόσο τὰ κορίτσια; (Ἀπ.: Ἀγόρια 40% καὶ κορ. 60%)

16. Ἕνας ἔμπορος πουλάει ἐμπορεύματα ἀξίας 8750 δρχ. ἀντὶ 10937,5 δραχ. Πόσα τοῖς % κέρδισε; (Ἀπ. 25%)

17. Ὁ πατέρας μου παίρνει μισθὸ 3850 δρχ. τὸ μῆνα. Ἀπὸ αὐτὰ πληρώνει γιὰ ἐνοίκιο 13860 δρχ. τὸ χρόνο. Πόσο τοῖς % τοῦ μηνιαίου μισθοῦ του πληρώνει γιὰ ἐνοίκιο; (Ἀπ. 30%)

18. Οἱ μεσίτες παίρνουν μεσιτεία 3% ἀπὸ τὶς ἀγοραπωλησίες. Ἕνας μεσίτης πῆρε ἀπὸ τὴν πούληση ἑνὸς σπιτιοῦ μεσιτεία 7500 δρχ. Πόσο πουλήθηκε τὸ σπίτι αὐτό; (Ἀπ. 250.000)

19. Ἕνα κατάστημα κάμνει ἔκπτωση 20% στὰ ἐμπορεύματά του. Ἀγόρασα εἴδη ἀξίας 1800 δρχ. Πόση ἔκπτωση θὰ μοῦ γίνῃ; (Ἀπ. 360 δρχ.)

20. Ἡ Ἑλλάδα κατὰ τὴν ἀπογραφὴ τοῦ 1951 εἶχε πληθυσμὸ 7.033.000 κατ. Κατὰ τὴν ἀπογραφὴ τοῦ 1940 εἶχε πληθυσμὸ 6.500.000 κατ. Πόσο τοῖς % αὐξήθηκε ὁ πληθυσμὸς ἀνάμεσα στὶς δυὸ ἀπογραφές; (Ἀπ. 8,2%)

21. Ἕνας οἰνοπώλης πουλάει τὸ κρασὶ 4,20 δρχ. τὸ κιλὸ καὶ κερδίζει 20% ἐπὶ τῆς τιμῆς τῆς ἀγορᾶς του. Πόσο ἀγόρασε τὸ κιλό; (Ἀπ. 3,36 δρχ.)

22. Ἕνας ἐργάτης ποὺ παίρνει ἡμερομίσθιο 85 δρχ. τοῦ γίνεται κράτηση γιὰ τὶς κοινωνικὲς ἀσφαλίσεις (Ι.Κ.Α.) 3,40 δρχ. Πόσο τοῖς % κράτηση τοῦ γίνεται; (Ἀπ. 4%)

23. Τὸ γάλα κατὰ τὸ φθινόπωρο, ποὺ εἶναι ξηρὲς οἱ ζωοτροφές, περιέχει 8% βούτυρο. Ἕνας γαλακτοπώλης ἔβγαλε μιὰ ἡμέρα 15 κιλὰ βούτυρο. Ἀπὸ πόσο γάλα, βγῆκε τὸ βούτυρο αὐτό; (Ἀπ. 185,5 κιλὰ)

24. Ἀπὸ τοὺς 350 μαθητὲς ἑνὸς σχολείου παίρνουν συσσίτιο οἱ 63 μαθητές. Πόσοι τοῖς % παίρνουν συσσίτιο; (Ἀπ. 18%)

25. Τὰ 2% τῶν καθαρῶν ἐσόδων μιᾶς ἐπιχειρήσεως, ποὺ ἀνέρχονται σὲ 1.500.000 δρχ. ξοδεύονται γιὰ διαφήμιση. Σὲ τί ποσὸ ἀνέρχονται τὰ ἔξοδα αὐτά; (Ἀπ. 30.000)

26. Στὸ μισθὸ ἑνὸς δημοσίου ὑπαλλήλου, ποὺ ἀνέρχεται σὲ 4.600 δρχ. γίνονται οἱ ἑξῆς κρατήσεις:

2% γιὰ τὸ Μετοχικὸ Ταμεῖο,
2% γιὰ τὸ Ταμεῖο Ἀρωγῆς,
0,50% γιὰ τὸ Ταμεῖο Ὑγείας καὶ
6% γιὰ τὴν ἐξόφληση ἑνὸς δανείου.

Νὰ βρῆτε πόσα παίρνει καθαρὰ τὸ μήνα ὁ ὑπάλληλος αὐτὸς καὶ πόση κράτηση τοῦ γίνεται γιὰ κάθε ταμεῖο χωριστά;

(Ἀπ. Καθαρὰ 4.117, Μ.Τ. 92, Τ.Α. 92, Τ.Υ. 23, Δ. 276)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ'.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ

1. Τί εἶναι τόκος

Οἱ ἄνθρωποι πολλὲς φορὲς δανείζονται χρήματα. Ἐκεῖνος ποὺ δανείζει χρήματα, λέγεται δανειστὴς καὶ ἐκεῖνος ποὺ δανείζεται, δανειζόμενος ἢ χρεώστης. Ἄλλοτε πάλι οἱ ἄνθρωποι καταθέτουν τὰ χρήματα, ποὺ τοὺς περισσεύουν, στὶς τράπεζες ἢ τὰ ταμιευτήρια.

Ὅταν κάποιος δανείζῃ ἢ καταθέτῃ χρήματα, παίρνει ὕστερα ἀπὸ ὁρισμένο χρονικὸ διάστημα, ἐκτὸς ἀπὸ τὰ χρήματά του καὶ κάποιο ποσὸ ἐπὶ πλέον, ὡς κέρδος τῶν χρημάτων του. Τὸ κέρδος αὐτό, ποὺ προέρχεται ἀπὸ τὰ δανειζόμενα ἢ κατατιθέμενα χρήματα, λέγεται τόκος.

Ὥστε: *Τόκος λέγεται τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖο φέρνουν τὰ χρήματα, ποὺ δανείζομε ἢ καταθέτομε στὶς τράπεζες.*

Ὁ τόκος γιὰ συντομία γράφεται στὴν ἀριθμητικὴ μὲ τὸ ἀρχικὸ γράμμα του κεφαλαῖο, ἔτσι: *Τόκος*$=T$.

2. Τί εἶναι κεφάλαιο

Τὸ χρηματικὸ ποσό, ποὺ δανείζομε σὲ κάποιον ἢ καταθέτομε στὴν τράπεζα, λέγεται κεφάλαιο. Σημειώνεται στὴν ἀριθμητικὴ μὲ τὸ ἀρχικό του γράμμα κεφαλαῖο, ἔτσι: *Κεφάλαιο*$=K$.

3. Τί εἶναι χρόνος

Ὁ δανειζόμενος εἶναι ὑποχρεωμένος νὰ ἐπιστρέψῃ τὸ κεφάλαιο, ποὺ δανείσθηκε, σὲ ὁρισμένο χρόνο. Ἡ χρονικὴ διάρκεια τοῦ δανείου λέγεται χρόνος καὶ σημειώνεται γιὰ συντομία μὲ τὸ ἀρχικό του γράμμα κεφαλαῖο, ἔτσι: *Χρόνος*$=X$.

Τί εἶναι ἐπιτόκιο

Ὅταν λέμε ὅτι θὰ πληρωθῇ τόκος γιὰ τὸ δάνειο 8%, θὰ πῇ ὅτι γιὰ κάθε

100 δραχμὲς καὶ γιὰ χρονικὸ διάστημα ἑ ν ὸ ς ἔ τ ο υ ς, θὰ πληρώνετε τόκος 8 δ ρ α χ μ έ ς. Ὁ τόκος αὐτὸς ὁρίζεται στὰ δάνεια μὲ ἰδιαίτερη συμφωνία, μεταξὺ δανειστῆ καὶ δανειζόμενου καὶ λέγεται ἐ π ι τ ό κ ι ο. Τὸ ἐπιτόκιο γιὰ συντομία σημειώνεται μὲ τὸ ἀρχικό του κεφαλαῖο, ἔτσι: *Ἐπιτόκιο=Ε.*

Ὥστε: *Ἐπιτόκιο λέγεται ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν γιὰ ἕνα χρόνο.*

Σημ. Τὸ ἀνώτερο ὅριο τοῦ ἐπιτοκίου εἶναι ὁρισμένο ἀπὸ τὸ νόμο. Ὁ δανεισμὸς μὲ ἐπιτόκιο μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ νόμιμο εἶναι παράνομος, λέγεται τ ο κ ο γ λ υ φ ί α καὶ ὁ δανειστὴς τ ο κ ο γ λ ύ φ ο ς. Ἡ τοκογλυφία τιμωρεῖται.

5. Λύση προβλημάτων τοῦ τόκου

Στὰ προβλήματα τοῦ τόκου παρουσιάζονται τ έ σ σ ε ρ α π ο σ ά. Τὰ ποσὰ αὐτὰ εἶναι:

Ὁ τ ό κ ο ς (Τ), τὸ κ ε φ ά λ α ι ο (Κ), ὁ χ ρ ό ν ο ς (Χ), καὶ τὸ ἐ π ι τ ό κ ο (Ε). Ἐπειδὴ στὰ προβλήματα αὐτὰ μᾶς δίνονται συνήθως τ ρ ί α π ο σ ὰ καὶ ζητεῖται τὸ τ έ τ α ρ τ ο, γι' αὐτὸ ἔχομε 4 εἴδη προβλημάτων τόκου, δηλ. προβλήματα στὰ ὁποῖα ζ η τ ε ῖ τ α ι ὁ τ ό κ ο ς, προβλήματα στὰ ὁποῖα ζ η τ ε ῖ τ α ι τὸ κ ε φ ά λ α ι ο, προβλήματα στὰ ὁποῖα ζ η τ ε ῖ τ α ι ὁ χ ρ ό ν ο ς καὶ προβλήματα στὰ ὁποῖα ζ η τ ε ῖ τ α ι τὸ ἐ π ι τ ό κ ι ο.

Α'. Προβλήματα στὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ τόκος (Τ)

Ὅταν ὁ χρόνος στὸ πρόβλημα εἶναι δοσμένος σὲ ἔτη

Παράδειγμα. Πόσο τόκο φέρνουν 350 δραχμὲς σὲ 4 χρόνια τοκιζόμενες πρὸς 6%.

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι πρόβλημα συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν. Μποροῦμε λοιπὸν νὰ τὸ λύσωμε μὲ τὴ μέθοδο αὐτή.

Ὅταν τὸ πρόβλημα λέγει, ὅτι τὰ χρήματα τοκίσθηκαν π ρ ὸ ς 6%, σημαίνει ὅτι οἱ 100 δραχμὲς σὲ 1 χ ρ ό ν ο φ έ ρ ν ο υ ν τ ό κ ο 6 δ ρ α χ μ έ ς.

Κατάταξη

100	δραχμὲς	σὲ	1	ἔτος	φέρνουν	6	δραχμὲς	τόκο
350	»	»	4	ἔτη	»	Χ;	»	»

Σύγκριση τῶν ποσῶν

Κ ε φ ά λ α ι ο καὶ τ ό κ ο ς εἶναι ποσὰ ἀνάλογα, γιατὶ διπλάσιο κεφάλαιο στὸν ἴδιο χρόνο φέρνει διπλάσιο τόκο. Ἀνάλογα ἐπίσης εἶναι καὶ τὰ ποσὰ χ ρ ό ν ο ς καὶ τ ό κ ο ς, γιατὶ ὁρισμένο κεφάλαιο σὲ διπλάσιο χρόνο φέρνει διπλάσιο τόκο. Ἐπομένως γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ζητούμενο, θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν ἀριθμό, ποὺ εἶναι πάνω ἀπὸ τὸν ἄγνωστο μὲ τὰ κλάσματα, ποὺ σχηματίζουν οἱ τιμὲς τῶν ἄλλων ποσῶν, ἀ ν τ ε σ τ ρ α μ μ έ ν α.

Λύση

$$X = 6 \times \frac{350}{100} \times \frac{4}{1} = \frac{6 \times 350 \times 4}{100} = \frac{8400}{100} = 84 \text{ δρχ. τόκο.}$$

Ἂν προσέξωμε τώρα τὴ λύση τοῦ προβλήματος αὐτοῦ, θὰ ἰδοῦμε, ὅτι πολλαπλασιάσαμε τὸ ἐπιτόκιο (6), ἐπὶ τὸ κεφάλαιο (350), ἐπὶ τὸ χρόνο (4) καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιρέσαμε διὰ τοῦ 100.

Ὥστε: *Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν τόκο, ὅταν ὁ χρόνος στὸ πρόβλημα εἶναι δοσμένος σὲ ἔτη, πολλαπλασιάζομε τὸ κεφάλαιο (Κ), ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο (Ε) καὶ ἐπὶ τὸ χρόνο (Χ) καὶ διαιροῦμε τὸ γινόμενό τους διὰ 100.*

Συντομώτερα αὐτὸ μποροῦμε νὰ τὸ γράψωμε ἔτσι:

$$T = \frac{K.E.X.}{100}$$

Ἡ παράσταση αὐτὴ λέγεται στὴν ἀριθμητικὴ τ ύ π ο ς. Ὁ τύπος αὐτὸς βγαίνει ἀπὸ τὴ λύση μὲ τὴ σύνθετη μέθοδο τῶν τριῶν, τῶν προβλημάτων, στὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ τ ό κ ο ς, ὅταν ὁ χρόνος στὸ πρόβλημα εἶναι σὲ ἔτη.

Ὅταν ὁ χρόνος στὸ πρόβλημα εἶναι δοσμένος σὲ μῆνες

Παράδειγμα. Πόσο τόκο φέρνουν 350 δραχμὲς σὲ 4 μῆνες τοκιζόμενες πρὸς 6%.

Καὶ στὸ πρόβλημα αὐτό, ὅπως καὶ στὸ προηγούμενο, μᾶς δίνονται τρία ποσά, κεφάλαιο (350 δρχ.), χρόνος (4 μῆνες) καὶ ἐπιτόκιο (6 δραχ.) καὶ ζητεῖται ὁ τ ό κ ο ς. Ἡ διαφορὰ εἶναι ὅτι στὸ προηγούμενο πρόβλημα ὁ χρόνος εἶναι δοσμένος σὲ ἔ τ η, ἐνῶ ἐδῶ εἶναι σὲ μ ῆ ν ε ς.

Γι' αὐτὸ κατὰ τὴν κατάταξη τῶν ποσῶν, ἀντὶ νὰ ποῦμε οἱ 100 δραχμὲς σὲ ἕ ν α χ ρ ό ν ο φέρνουν τόκο 6 δραχμές, λέμε οἱ 100 δραχμὲς σὲ 12 μ ῆ ν ε ς φέρνουν τόκο 6 δραχμές. Δηλαδὴ ἀντὶ νὰ γράψωμε 1 χ ρ ό ν ο, γράφομε 12 μ ῆ ν ε ς, ποὺ φυσικὰ εἶναι πάλι ἕ ν α ς χ ρ ό ν ο ς.

Ὥστε ἡ κατάταξη τοῦ προβλήματος αὐτοῦ θὰ γίνῃ ἔτσι:

Κατάταξη

100	δραχμὲς	σὲ	12	μῆνες	φέρνουν	6	δραχμὲς τόκο
350	»	»	4	»	»	Χ:	

Λύση

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ κεφάλαιο καὶ χρόνος συγκρινόμενα πρὸς τὸ ποσὸ τόκος εἶναι ἀνάλογα, θὰ ἔχωμε:

$$X = 6 \times \frac{350}{100} \times \frac{4}{12} = \frac{6\times350\times4}{100\times12} = \frac{8400}{1200} = 7 \text{ δραχ. εἶναι ὁ τόκος.}$$

Ἂν προσέξωμε πάλι τὴ λύση τοῦ προβλήματος αὐτοῦ, θὰ ἰδοῦμε, ὅτι πολλαπλασιάσαμε τὸ ἐπιτόκιο (6), ἐπὶ τὸ κεφάλαιο (350) ἐπὶ τὸ χρόνο (4) καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιρέσαμε διὰ τοῦ 1200, ποὺ εἶναι γινόμενο τοῦ 100×12 μῆνες.

Ὥστε: *Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν τόκο, ὅταν ὁ χρόνος στὸ πρόβλημα εἶναι δοσμένος σὲ μῆνες, πολλαπλασιάζομε τὸ κεφάλαιο (Κ) ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο (Ε) καὶ ἐπὶ τὸ χρόνο (Χ) καὶ διαιροῦμε τὸ γινόμενο διὰ τοῦ 1200.*

Ἔχομε λοιπὸν τὸν τύπο: $T = \frac{K.E.X.}{1200}$.

Ὅταν ὁ χρόνος στὸ πρόβλημα εἶναι δοσμένος σὲ μέρες

Παράδειγμα. Πόσο τόκο φέρνουν 800 δραχμὲς σὲ 15 ἡμέρες τοκιζόμενες πρὸς 8%.

Ἡ διαφορὰ τοῦ προβλήματος αὐτοῦ ἀπὸ τὰ δυὸ προηγούμενα εἶναι ὅτι σ' αὐτὸ ὁ χρόνος εἶναι δοσμένος σὲ ἡμέρες. Γιὰ τὸ λόγο αὐτὸν κατὰ τὴν κατάταξη τῶν ποσῶν, ἀντὶ νὰ γράψωμε 1 ἔτος, γράφομε 360 ἡμέρες, ποὺ ἔχει τὸ ἐμπορικὸ ἔτος.

Σημ. Ὁ χρόνος στὸ ἐμπόριο θεωρεῖται ὅτι ἔχει 360 μέρες γιὰ εὐκολία καὶ ὄχι 365, ποὺ εἶναι τὸ σωστό.

Ἡ κατάταξη λοιπὸν αὐτοῦ τοῦ προβλήματος θὰ γίνη ἔτσι:

Κατάταξη

100	δραχμὲς	σὲ	360	μέρες	φέρνουν	8	δραχμὲς	τόκο
800	»	»	15	»	»	Χ;	»	»

Λύση

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ κεφάλαιο καὶ χρόνος, συγκρινόμενα πρὸς τὸ ποσὸ τόκος, εἶναι ἀνάλογα, θὰ ἔχωμε:

$$X = 8 \times \frac{800}{100} \times \frac{15}{360} = \frac{8\times800\times15}{100\times360} = \frac{96000}{36000} = 2\frac{2}{3} \text{ δρχ. εἶναι ὁ τόκ.}$$

Ἂν προσέξωμε καὶ ἐδῶ τὴ λύση τοῦ προβλήματος, θὰ ἰδοῦμε ὅτι πολλαπλασιάσαμε τὸ ἐπιτόκιο (8), ἐπὶ τὸ κεφάλαιο (800), ἐπὶ τὸ χρόνο (15) καὶ τὸ γινόμενό τους τὸ διαιρέσαμε διὰ τοῦ 36000, ποὺ εἶναι τὸ γινόμενο τοῦ 100×360 ἡμέρες.

Ὥστε: *Γιὰ νὰ βροῦμε τόκο, ὅταν ὁ χρόνος στὸ πρόβλημα εἶναι δοσμένος σὲ μέρες, πολλαπλασιάζομε τὸ κεφάλαιο (Κ), ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο (Ε) καὶ ἐπὶ τὸ χρόνο (Χ) καὶ διαιροῦμε τὸ γινόμενό τους διὰ τοῦ 36.000*

Ἔχομε λοιπὸν καὶ ἐδῶ τὸν τύπο: $T = \frac{K.E.X.}{36000}$.

δ΄. Πῶς βρίσκομε τὸν τόκο μὲ τὸν τοκάριθμο

Ὁ τόκος ἀπὸ τὶς καταθέσεις, τὰ δάνεια κλπ., βρίσκεται εὐκολώτερα καὶ συντομώτερα μὲ τὸν τοκάριθμο καὶ τὸ σταθερὸ διαιρέτη, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι δοσμένος σὲ ἡμέρες.

Παράδειγμα. Πόσο τόκο φέρνουν 800 δραχμὲς τοκιζόμενες πρὸς 9% σὲ 20 ἡμέρες;

Λύση μὲ τὸν τύπο

$$T = \frac{K.E.X.}{36000} = \frac{800 \times 9 \times 20}{36000} = \frac{144000}{36000} = 4 \text{ δραχμὲς εἶναι ὁ τόκος.}$$

Προσέξτε τώρα: Διαιροῦμε καὶ τοὺς δυὸ ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{800 \times 9 \times 20}{36000}$ διὰ τοῦ ἐπιτοκίου 9, δηλ. ἁπλοποιοῦμε τὸ κλάσμα αὐτὸ μὲ τὸ (Ε) 9. Θὰ ἔχωμε τὸ κλάσμα $\frac{800 \times 20}{4000} = \frac{16000}{4000} = 4$ δραχ. εἶναι ὁ τόκος, δηλ. βρήκαμε τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα.

Ἂν ἀντικαταστήσωμε τώρα τοὺς ἀριθμούς, μ᾽ ἐκεῖνο ποὺ φανερώνουν, θὰ ἰδοῦμε ὅτι βρήκαμε τὸ ζητούμενο τόκο στὸ πρόβλημα αὐτό, ἀφοῦ πολλαπλασιάσαμε τὸ κεφάλαιο (800 δρχ.) ἐπὶ τὸ χρόνο (20 ἡμ.) καὶ διαιρέσαμε τὸ γινόμενό τους διὰ 4000, ποὺ εἶναι πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ 36000 διὰ τοῦ ἐπιτοκίου 9 $(36000 : 9 = 4000)$.

Τὸ γινόμενο τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸ χρόνο λέγεται τοκάριθμος.

Τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ 36000 διὰ τοῦ ἐπιτοκίου, λέγεται σταθερὸς διαιρέτης.

Ὥστε ὁ τόκος βρίσκεται συντομώτερα, ὅταν ὁ χρόνος στὸ πρόβλημα εἶναι δοσμένος σὲ ἡμέρες, ἂν διαιρέσωμε τὸν τοκάριθμο διὰ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτη.

$$\text{Τύπος:} \quad T = \frac{\text{τοκάριθμος}}{\text{σταθερὸς διαιρέτης}}.$$

Ἀνακεφαλαίωση

Πῶς βρίσκεται ὁ τόκος

α΄. Ὅταν ὁ χρόνος στὸ πρόβλημα εἶναι δοσμένος σὲ ἔτη: $T = \frac{K.E.X.}{100}$.

β΄. Ὅταν ὁ χρόνος στὸ πρόβλημα εἶναι δοσμένος σὲ μῆνες: $T = \frac{K.E.X.}{1200}$.

γ΄. Ὅταν ὁ χρόνος στὸ πρόβλημα εἶναι δοσμένος σὲ μέρες: $T = \frac{K.E.X.}{36000}$.

δ΄. Ὅταν ὁ χρόνος εἶναι δοσμένος σὲ ἡμέρες μὲ τὸν τοκάριθμο: $T = \frac{\text{τεκάριθμος}}{\text{σταθερὸς διαιρέτης}}$.

Μὲ τοὺς τύπους αὐτοὺς λύνομε κάθε πρόβλημα, στὸ ὁποῖο ζητεῖται ὁ τόκος, ἀρκεῖ νὰ ἀντικαταστήσωμε τὰ γράμματα Κ.Ε.Χ. μὲ τὶς ἀντίστοιχες τιμὲς καὶ νὰ κάνωμε τὶς πράξεις.

Γενικὸ συμπέρασμα. *Ἀπὸ τὴ λύση τῶν παραπάνω προβλημάτων μποροῦμε νὰ βγάλωμε τὸ γενικὸ συμπέρασμα.*

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν τόκο πολλαπλασιάζομε τὶς τιμὲς τῶν τριῶν δοσμένων ποσῶν, δηλ. κεφαλαίου, ἐπιτοκίου καὶ χρόνου, καὶ διαιροῦμε τὸ γινόμενό τους διὰ τοῦ 100, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι δοσμένος σὲ ἔτη, διὰ τοῦ 1200, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι δοσμένος σὲ μῆνες, διὰ τοῦ 36000, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι δοσμένος σὲ μέρες.

Σημ. Γιὰ νὰ εὐκολυνώμαστε στὶς πράξεις, πρέπει νὰ μὴ παραλείπωμε νὰ κάμνωμε ἁπλοποίηση τῶν κλασμάτων, ὅπου εἶναι δυνατή. Ἔτσι θὰ ἔχωμε μικροὺς ἀριθμοὺς καὶ δὲν θὰ κάμνωμε λάθη στὶς πράξεις.

Προβλήματα

1. Δανείσθηκα ἀπὸ τὴν Τράπεζα 450 δραχμὲς πρὸς 8% γιὰ 3 ἔτη. Πόσο τόκο θὰ πληρώσω; (108 δρχ.).

2. Κατέθεσα στὸ ταμιευτήριο 1500 δραχμὲς πρὸς 6% γιὰ 3 ἔτη. Πόσο τόκο θὰ πάρω; (270 δρχ.).

3. Πόσο τόκο φέρνουν 1.450 δραχμές, τοκιζόμενες πρὸς 6% σὲ 3, 6, 7 καὶ 9 μῆνες; (21,75 — 43,50 — 50,75 — 62,25)

4. Κατέθεσα στὴν Ἐθνικὴ Τράπεζα τὰ παρακάτω ποσὰ πρὸς 6%.

Στὶς	2	Μαρτίου	3000	δραχμὲς
»	2	Ἀπριλίου	3000	»
»	10	Μαΐου	6000	»
»	8	Αὐγούστου	9000	»

Πόσο τόκο θὰ πάρω στὸ τέλος τοῦ ἔτους; (Σύν. τόκων 726 δρχ.)

5. Κάποιος τοκίζει 2720 δραχμὲς πρὸς 6% τὴν 1 Ἀπριλίου. Πόσο τόκο θὰ πάρη στὶς 30 Δεκεμβρίου τοῦ ἰδίου ἔτους; (122,40 δρχ.)

6. Κεφάλαιο 600 δραχμῶν τοκίσθηκε μὲ 9% γιὰ 4 ἔτη. Πόσο τόκο θὰ φέρουν; (216 δρχ.)

7. Νὰ βρεθῆ ὁ τόκος τῶν 650 δραχμῶν πρὸς 8% γιὰ 2, 3, 4, 5 καὶ 8 ἔτη. (104—156—208—260—416).

8. Νὰ βρῆτε τὸν τόκο τῶν 4800 δραχμῶν πρὸς 6% σὲ 10, 15 καὶ 25 ἡμέρες. (8—12—20 δρχ.).

9. Ἂν καταθέσω σήμερα 3000 δραχμὲς στὴν Τράπεζα πρὸς 5%, πόσο τόκο θὰ μοῦ φέρουν α) σὲ 11 μῆνες, β) σὲ 7 μῆνες καὶ γ) σὲ 3 μῆνες; (137,50 — 87,50 — 37,50 δρχ.)

10. Κατέθεσα στὴν Ἐθνικὴ Τράπεζα 800 δραχμὲς γιὰ 5 ἔτη πρὸς 4%. Πόσο τόκο θὰ πάρω ὕστερα ἀπὸ 2 ἔτη; (64).

11. Κάποιος δάνεισε σήμερα 2000 δραχμὲς πρὸς 3,5%. Πόσο τόκο θὰ πάρη σὲ 2 χρόνια καὶ 3 μῆνες; (157,50)

12. Δανείσθηκα 27.000 δραχμὲς γιὰ 25 μέρες πρὸς 10%. Πόσο τόκο θὰ πληρώσω; (187,5).

13. Κατέθεσα στὸ Ταμιευτήριο 360 δραχ. Τὰ $\frac{4}{9}$ ἀπ' αὐτὰ τὰ κατέθεσα πρὸς 5 %, τὰ $\frac{3}{9}$ πρὸς 3,5 % καὶ τὰ ὑπόλοιπα πρὸς 4 %. Πόσο τόκο θὰ μᾶς φέρουν σὲ 5 ἔτη; (77 δρχ.).

14. Δάνεισα 850 δραχμὲς πρὸς 6% καὶ ἄλλες 450 δραχμὲς πρὸς 8%. Πόσες δραχμὲς θὰ πάρω κεφάλαια καὶ τόκους μαζὶ ὕστερα ἀπὸ 3 ἔτη; (1561).

15. Ἕνας γεωργὸς δανείσθηκε ἀπὸ τὴν Ἀγροτικὴ Τράπεζα 16500 δραχ. πρὸς 9%. Τὸ δάνειο ἔγινε στὶς 20 Ἀπριλίου καὶ ἐξοφλήθηκε στὶς 22 Αὐγούστου. Πόσο τόκο πλήρωσε ὁ γεωργὸς αὐτός; (503,25).

16. Δανείσθηκα ἀπὸ τὴν Ἐθνικὴ Τράπεζα 3800 δραχμὲς πρὸς 8%. Πόσο τόκο θὰ πληρώσω γιὰ 1 χρόνο καὶ 3 μῆνες; (380).

17. Κάποιος τοκίζει τὰ $\frac{2}{10}$ τῶν χρημάτων του πρὸς 8 %, τὸ $\frac{1}{5}$ πρὸς 6 % καὶ τὰ ὑπόλοιπα, ποὺ εἶναι 9.000 δραχμές, πρὸς 5%. Πόσα χρήματα τοκίζει καὶ πόσο τόκο θὰ πάρῃ ὕστερα ἀπὸ 2 ἔτη; (15000, τόκος 1740).

18. Κάντε καὶ σεῖς ὅμοια προβλήματα.

19. Λύστε τὰ παραπάνω προβλήματα μὲ χρόνο σὲ ἡμέρες καὶ μὲ τὸν τοκάριθμο.

Β΄. Προβλήματα στὰ ὁποῖα ζητεῖται τὸ κεφάλαιο (Κ)

Ὅταν ὁ χρόνος εἶναι δοσμένος σὲ ἔτη.

Παράδειγμα. Ποιό κεφάλαιο τοκιζόμενο πρὸς 6% σὲ 4 ἔτη δίνει τόκο 84 δραχμές;

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι τὸ ἴδιο, ἂν τὸ διατυπώσωμε ἔτσι:

Κεφάλαιο 100 δραχμῶν σὲ 1 ἔτος δίνει τόκο 6 δραχμές. Ποιό κεφάλαιο σὲ 4 ἔτη δίνει τόκο 84 δραχμές;

Θὰ τὸ λύσωμε μὲ τὴ σύνθετο μέθοδο τῶν τριῶν.

Κατάταξη

100	δραχμὲς	1	ἔτος	6	δραχμὲς	τόκο
Χ;	»	4	ἔτη	84	»	»

Σύγκριση τῶν ποσῶν

Διπλάσιο κεφάλαιο φέρνει τὸν ἴδιο τόκο σὲ μισὸ χρόνο, δηλ. τὰ ποσὰ κεφάλαιο καὶ χρόνος εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα. Ἀντίθετα ὁ τόκος καὶ τὸ κεφάλαιο εἶναι ποσὰ ἀνάλογα, γιατί, ἂν διπλασιασθῇ τὸ κεφάλαιο, θὰ διπλασιασθῇ καὶ ὁ τόκος.

Λύση

$$X = 100 \times \frac{1}{4} \times \frac{84}{6} = \frac{100 \times 84}{4 \times 6} = \frac{8400}{24} = 350$$ δραχμὲς εἶναι τὸ ζητούμενο κεφάλαιο.

Ἂν προσέξωμε τὴ λύση τοῦ προβλήματος αὐτοῦ, θὰ ἰδοῦμε ὅτι πολλαπλασιάσαμε τὸν τόκο (84) ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιρέσαμε διὰ τοῦ χρόνου (4) ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο (6).

Ὥστε: *Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ κεφάλαιο, ὅταν ὁ χρόνος στὸ πρόβλημα εἶναι δοσμένος σὲ ἔτη, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο (Τ) ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τοῦ χρόνου (Χ) ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο (Ε).*

Ἀπὸ τὸν παραπάνω κανόνα βγαίνει ὁ τύπος τοῦ κεφαλαίου, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι δοσμένος σὲ ἔτη:

$$K = \frac{T.\ 100}{X.E.}$$

Ὅταν ὁ χρόνος στὸ πρόβλημα εἶναι δοσμένος σὲ μῆνες.

Παράδειγμα. Ποιό κεφάλαιο τοκιζόμενο πρὸς 8% σὲ 6 μῆνες δίνει τόκο 40 δραχμές;

Καὶ τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι τὸ ἴδιο, ἂν τὸ διατυπώσωμε ἔτσι: Κεφάλαιο 100 δρχ. σὲ 12 μῆνες (1 ἔτος) δίνει τόκο 8 δρχ. Ποιό κεφάλαιο σὲ 6 μῆνες δίνει τόκο 40 δραχμές;

Μὲ τὴ σύνθετο μέθοδο τῶν τριῶν θὰ τὸ λύσωμε ἔτσι:

Κατάταξη

100	δραχμὲς	σὲ	12	μῆνες	φέρνουν	8	δραχμὲς	τόκο
Χ;	»	»	6	»	»	40	»	»

Ἐπειδὴ τὸ κεφάλαιο εἶναι ποσὰ ἀνάλογο πρὸς τὸν τόκο καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογο πρὸς τὸ χρόνο θὰ ἔχωμε:

$$X = 100 \times \frac{12}{6} \times \frac{40}{8} = \frac{100 \times 12 \times 40}{6 \times 8} = \frac{1200 \times 40}{48} = \frac{48000}{48} = 1000$$

δραχμὲς εἶναι τὸ ζητούμενο κεφάλαιο.

Ἂν προσέξωμε τὶς πράξεις, θὰ ἰδοῦμε ὅτι πολλαπλασιάσαμε τὸν τόκο (40) ἐπὶ 1200 (100×12) καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιρέσαμε διὰ τοῦ γινομένου τοῦ χρόνου (6) ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο (8).

Ὥστε: ***Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ κεφάλαιο, ὅταν ὁ χρόνος στὸ πρόβλημα εἶναι δοσμένος σὲ μῆνες, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο (Τ) ἐπὶ 1200 καὶ διαιροῦμε τὸ γινόμενο διὰ τοῦ γινομένου τοῦ χρόνου (Χ) ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο (Ε).***

Ἔτσι ἔχομε τὸν τύπο, ὅταν ὁ χρόνος στὸ πρόβλημα εἶναι σὲ μῆνες:

$$K = \frac{T.\ 1200}{X.\ E.}$$

Ὅταν ὁ χρόνος στὸ πρόβλημα εἶναι δοσμένος σὲ ἡμέρες

Εἶναι φανερὸ πλέον ὅτι στὸν παραπάνω τύπο πρέπει ἀντὶ τοῦ 1200 νὰ θέτωμε τὸ 36000 (100×360 ἡμέρες), ὅταν ὁ χρόνος στὸ πρόβλημα εἶναι δοσμένος σὲ ἡμέρες.

Ὥστε: *Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ κεφάλαιο, ὅταν ὁ χρόνος στὸ πρόβλημα εἶναι δοσμένος σὲ μέρες, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο (Τ) ἐπὶ 36000 καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τοῦ χρόνου (Χ) ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο (Ε).*

Ἔτσι ἔχομε τὸν τύπο, ὅταν ὁ χρόνος στὸ πρόβλημα εἶναι δοσμένος σὲ ἡμέρες:

$$K = \frac{T .\ 36000}{X .\ E}.$$

Ἀνακεφαλαίωση

Πῶς βρίσκεται τὸ κεφάλαιο

α΄. Ὅταν ὁ χρόνος στὸ πρόβλημα εἶναι δοσμένος σὲ ἔτη:

$$K = \frac{T .\ 100}{X .\ E}.$$

β΄. Ὅταν ὁ χρόνος στὸ πρόβλημα εἶναι δοσμένος σὲ μῆνες:

$$K = \frac{T .\ 1200}{X .\ E}.$$

γ΄. Ὅταν ὁ χρόνος στὸ πρόβλημα εἶναι δοσμένος σὲ μέρες:

$$K = \frac{T .\ 36000}{X .\ E}.$$

Μὲ τοὺς τύπους αὐτοὺς λύνομε κάθε πρόβλημα, στὸ ὁποῖο ζητεῖται κεφάλαιο, ἀρκεῖ ν' ἀντικαταστήσωμε τὰ γράμματα Τ.Χ.Ε. μὲ τὶς τιμές τους καὶ νὰ κάνωμε τὶς πράξεις:

Γενικὸ συμπέρασμα. *Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ κεφάλαιο πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 100, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι δοσμένος σὲ ἔτη ἢ ἐπὶ 1200, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι δοσμένος σὲ μῆνες ἢ ἐπὶ 36000, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι δοσμένος σὲ μέρες καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τῶν τιμῶν τῶν δυὸ ἄλλων γνωστῶν ποσῶν.*

Προβλήματα

1. Ποιό κεφάλαιο τοκιζόμενο πρὸς 8% σὲ 2 ἔτη φέρνει τόκο 80 δραχμές; (500).

2. Ποιό κεφάλαιο δίνει σὲ 8 μῆνες 25 δραχμὲς τόκο, τοκιζόμενο πρὸς 6%; (625).

3. Ποιό κεφάλαιο τοκιζόμενο πρὸς 7% σὲ 20 ἡμέρες δίνει τόκο 700 δρχ.; (180.000).

4. Ἐπῆρα ἀπὸ τὸ Ταχυδρ. Ταμιευτήριο γιὰ τόκους 5 ἐτῶν πρὸς 6% 120 δραχμές. Πόσες δραχμὲς ἔχω καταθέσει; (400).

5. Ἕνας κτηματίας παίρνει ἀπὸ ἐνοίκια 2000 δραχμὲς τὸ μήνα. Ποιό κεφάλαιο τοκιζόμενο πρὸς 12% δίνει τὰ ἐνοίκια 5 μηνῶν; (200.000).

6. Ἂν παίρνῃ κάποιος τόκο 300 δραχμὲς σὲ 10 μέρες μὲ ἐπιτόκιο 8%, πόσο κεφάλαιο ἔχει δανείσει; (135.000).

7. Ποιό κεφάλαιο σὲ 1 ἔτος, 2 μῆνες καὶ 10 μέρες τοκιζόμενο πρὸς 6% φέρνει τόκο 1376 δραχμές; (10.200).

8. Ὁ κὺρ Γιώργης ὁ κηπουρὸς πῆρε δάνειο ἀπὸ τὴν Ἀγροτ. Τράπεζα γιὰ 4 ἔτη μὲ 7% καὶ πλήρωσε τόκους 224 δραχμές. Πόσες δραχμὲς δανείσθηκε; (800).

9. Κατέθεσα στὴν Τράπεζα τὴν 1 Ἰουνίου ἕνα ποσὸ μὲ ἐπιτόκιο 8%. Στὶς 10 Σεπτεμβρίου τοῦ ἰδίου ἔτους εἰσέπραξα τόκο 80 δραχμές. Πόσο κεφάλαιο κατέθεσα; (3600).

10. Κάποιος κατέθεσε σὲ μιὰ τράπεζα κεφάλαιο μὲ 4% καὶ παίρνει κάθε μήνα 75 δραχμές. Πόσο εἶναι τὸ κεφάλαιο, ποὺ κατέθεσε; (22.500).

11. Ποιά εἶναι ἡ ἀξία μιᾶς οἰκίας, ποὺ δίνει τὸ χρόνο εἰσόδημα 2800 δραχμές, ἂν τὸ ἐπιτόκιο λογαριασθῇ πρὸς 5%; (56.000).

12. Ποιό κεφάλαιο τοκιζόμενο πρὸς 5% σὲ 2 ἔτη δίνει τόκο 400 δραχμές; (4000).

13. Ἕνας γεωργὸς πῆρε δάνειο ἀπὸ τὴν Ἀγροτικὴ Τράπεζα μὲ 9%. Ὕστερα ἀπὸ 1 χρόνο, 3 μῆνες καὶ 15 ἡμέρες πλήρωσε τόκο 3720 δραχμές. Πόσα χρήματα δανείσθηκε; (32.000).

14. Κάποιος ἔκαμε μιὰ ἐνδυμασία μὲ πίστωση 125 ἡμερῶν καὶ μὲ τόκο πρὸς 12%. Ἔτσι ἡ τιμὴ τῆς ἐνδυμασίας του αὐξήθηκε κατὰ 100 δραχμές. Πόσο κόστισε αὐτὴ ἡ ἐνδυμασία; (2.400 δρχ.)

15. Κάποιος εἰσέπραξε ἀπὸ τὴν Ἀγροτικὴ Τράπεζα, ὅπου εἶχε καταθέσεις μὲ 4%, γιὰ τόκο 3 χρόνων, 300 δραχμές. Πόσα χρήματα εἶχε καταθέσει; (2500).

16. Πόσο κεφάλαιο τοκιζόμενο:

α΄. Πρὸς 4% φέρνει τόκο σὲ 10 ἡμέρες 120 δραχμὲς (108.000).

β΄. Πρὸς 6% φέρνει τόκο σὲ 20 ἡμέρες 500 δραχμὲς (150.000).

γ΄. Πρὸς 3% φέρνει τόκο σὲ 45 ἡμέρες 600 δραχμὲς (160.000).

17. Νὰ βρεθῇ τὸ κεφάλαιο, ποὺ δίνει τόκο 400 δραχμῶν σὲ 4, 6, 8 καὶ 10 μῆνες μὲ 5%; (24.000 — 16.000 — 12.000 — 9.600).

Γ'. Προβλήματα στὰ ὁποῖα ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιο

α'. Ὅταν ὁ χρόνος εἶναι δοσμένος σὲ ἔτη :

Παράδειγμα. Μὲ πόσο τοῖς ἑκατὸ τοκίζονται 600 δραχμές, ποὺ σὲ 4 ἔτη φέρνουν τόκο 144 δραχμές;

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιο, δηλ. πόσο τόκο φέρνουν οἱ 100 δραχμὲς σ' ἕνα χρόνο. Μποροῦμε λοιπὸν νὰ διατυπώσωμε τὸ πρόβλημα ἔτσι:

Οἱ 600 δραχμὲς σὲ 4 ἔτη φέρνουν τόκο 144 δραχμές. Οἱ 100 δραχμὲς σὲ 1 ἔτος πόσο τόκο φέρνουν;

Μὲ τὴ σύνθετο μέθοδο τῶν τριῶν θὰ τὸ λύσωμε ὡς ἑξῆς:

Κατάταξη

600	δραχμὲς	4	ἔτη	144	δραχμὲς
100	»	1	»	Χ;	»

Σύγκριση τῶν ποσῶν

Ἂν συγκρίνωμε τὰ ποσά, θὰ βροῦμε ὅτι τὸ ἐπιτόκιο εἶναι εὐθέως ἀνάλογο πρὸς τὸ κεφάλαιο καὶ τὸ χρόνο: Ἑπομένως θὰ ἔχωμε:

Λύση

$$X = 144 \times \frac{100}{600} \times \frac{1}{4} = \frac{144 \times 100 \times 1}{600 \times 4} = \frac{14400}{2400} = 6$$ δραχμὲς στὶς ἑκατό. Ὥστε τὸ ἐπιτόκιο εἶναι 6 %.

Ἀπὸ τὴ λύση τοῦ προβλήματος αὐτοῦ βλέπομε, ὅτι γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐπιτόκιο, πολλαπλασιάσαμε τὸν τόκο (144) ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιρέσαμε διὰ τοῦ γινομένου τοῦ κεφαλαίου (600) ἐπὶ τὸ χρόνο (4).

Ὥστε : *Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐπιτόκιο, ὅταν ὁ χρόνος στὸ πρόβλημα εἶναι δοσμένος σὲ ἔτη, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο (Τ) ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ κεφαλαίου (Κ) ἐπὶ τὸ χρόνο (Χ).*

Ἀπὸ τὸ ἀνωτέρω βγαίνει ὁ τύπος τοῦ ἐπιτοκίου, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι σὲ ἔτη :

$$E = \frac{T.\ 100}{K.\ X.}$$

Εἶναι φανερό, ὅτι στὸν παραπάνω τύπο πρέπει νὰ θέτωμε, ἀντὶ τοῦ 100, τὸ 1200, ὅταν ὁ χρόνος στὸ πρόβλημα εἶναι δοσμένος σὲ μῆνες καὶ τὸ 36.000, ὅταν ὁ χρόνος στὸ πρόβλημα εἶναι σὲ ἡμέρες.

Ἔτσι ἔχομε τοὺς τύπους:

α΄. Ὅταν ὁ χρόνος εἶναι σὲ μῆνες: $E = \frac{T. 1200}{K. X.}$.

β΄. Ὅταν ὁ χρόνος εἶναι σὲ ἡμέρες: $E = \frac{T. 36000}{K. X.}$.

Παράδειγμα 1. Μὲ πόσο στὰ ἑκατὸ τοκίσθηκαν 800 δραχμές, ποὺ σὲ 6 μῆνες τόκο 40 δραχμές;

Λύση

Τύπος $E = \frac{T. 1200}{K. X.}$.

$T = 40, \quad K = 800, \quad X = 6$ μῆνες.

Ὥστε $E = \frac{40 \times 1200}{800 \times 6} = \frac{48000}{4800} = 10$ δραχμές

Ὥστε τὸ ἐπιτόκιο εἶναι 10 %.

Παράδειγμα 2. Μὲ πόσο τοῖς ἑκατὸ τοκίσθηκαν 600 δραχμές, οἱ ὁποῖες σὲ 20 ἡμέρες ἔφεραν τόκο 3 δραχμές;

Λύση

Τύπος $E = \frac{T. 36000}{K. X.}$.

$T = 3, \quad K = 600, \quad X = 20$ ἡμέρες.

Ὥστε $E = \frac{3 \times 36000}{600 \times 20} = \frac{108000}{12000} = 9$ δραχμές.

Ὥστε τὸ ἐπιτόκιο εἶναι 9%.

Ἀνακεφαλαίωση

Πῶς βρίσκεται τὸ ἐπιτόκιο.

α΄. Ὅταν ὁ χρόνος στὸ πρόβλημα εἶναι δοσμένος σὲ ἔτη :

$$E = \frac{T. 100}{K. X.}.$$

β΄. Ὅταν ὁ χρόνος στὸ πρόβλημα εἶναι δοσμένος σὲ μῆνες :

$$E = \frac{T. 1200}{K. X.}.$$

γ΄. Ὅταν ὁ χρόνος στὸ πρόβλημα εἶναι δοσμένος σὲ ἡμέρες :

$$\text{Ε} = \frac{\text{Τ. } 36000}{\text{Κ. Χ.}}$$

Μὲ τὸν τύπο τοῦ ἐπιτοκίου λύνομε κάθε πρόβλημα, στὸ ὁποῖο ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιο, ἀρκεῖ νὰ ἀντικαταστήσωμε τὰ γράμματα Τ.Κ.Χ. μὲ τὶς ἀντίστοιχες τιμὲς καὶ νὰ κάνωμε τὶς πράξεις.

Γενικὸ συμπέρασμα. *Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐπιτόκιο πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 100, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι δοσμένος σὲ ἔτη ἢ ἐπὶ 1200, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι δοσμένος σὲ μῆνες ἢ ἐπὶ 36000, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι δοσμένος σὲ ἡμέρες καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τῶν τιμῶν τῶν δύο ἄλλων γνωστῶν ποσῶν.*

Προβλήματα

1. Μὲ ποιό τόκο τοκίσθηκε κεφάλαιο 30000 δραχμῶν, ποὺ σὲ 5 ἔτη ἔφερε τόκο 6000 δραχμές; (4%).
2. Νὰ βρῆτε πρὸς πόσα τοῖς ἑκατὸ τοκίσθηκαν τὰ ἑξῆς κεφάλαια:
α΄) 9000 δραχ. ποὺ σὲ 3 μῆνες ἔφεραν τόκο 216 δραχμὲς (9,6%)
β΄) 8000 δραχ. ποὺ σὲ 5 μῆνες ἔφεραν τόκο 400 δραχμὲς (12%)
γ΄) 5000 δραχ. ποὺ σὲ 3 μῆνες ἔφεραν τόκο 350 δραμχὲς (12%)
3. Μὲ ποιό ἐπιτόκιο τοκίσθηκαν 500.000 δραχμές, ποὺ σὲ δυὸ χρόνια ἔφεραν τόκο 120.000 δραχμές; (12%).
4. Μὲ ποιό ἐπιτόκιο εἶναι τοκισμένα τὰ παρακάτω κεφάλαια:
α΄) 500 δραχμὲς ποὺ μέρνουν τόκο 48 δρχ. σὲ 8 μῆνες (14,4%)
β΄) 800 δραχμὲς ποὺ φέρνουν τόκο 120 δρχ. σὲ 10 μῆνες (18%)
γ΄) 900 δραχμὲς ποὺ φέρνουν τόκο 45 δρχ. σὲ 6 μῆνες (10%)
δ΄) 685 δραχμὲς ποὺ φέρνουν τόκο 35 δρχ. σὲ 4 μῆνες (17%)
5. Πρὸς πόσα τοῖς ἑκατὸ τοκίσθηκαν τὰ ἑξῆς κεφάλαια:
α΄) 600 δραχ. ποὺ σὲ 2 χρόνια ἔφεραν τόκο 180 δρχ. (15%)
β΄) 750 δραχ. ποὺ σὲ 4 χρόνια ἔφεραν τόκο 300 δρχ. (10%)
γ΄) 1500 δρχ. ποὺ σὲ 6 χρόνια ἔφεραν τόκο 360 δρχ. (4,8%)
6. Στὴ Θεσσαλονίκη ἐνοικιάζεται ἕνα σπίτι ἀξίας 600.000 δραχμῶν ὡς ἑξῆς: Τὸ πρῶτο πάτωμα ἐνοικιάζεται 200 δραχμὲς τὸ μῆνα, τὸ δεύτερο 1600 δραχμὲς καὶ τὸ τρίτο 1400 δραχμές. Μὲ πόσο στὰ ἑκατὸ τοκίζεται ἡ ἀξία τοῦ σπιτιοῦ; (10%)
7. Μὲ ποιό ἐπιτόκιο πρέπει νὰ τοκισθοῦν 500 δραχμὲς γιὰ νὰ διπλασιασθοῦν σὲ 10 ἔτη καὶ 400 δραχμὲς γιὰ νὰ διπλασιασθοῦν σὲ 8 ἔτη;
(α) 10% καὶ β) 12,5%)

8. Μὲ ποιό ἐπιτόκιο εἶναι τοκισμένα τὰ παρακάτω κεφάλαια;

α΄) 6000 δρχ. ποὺ σὲ 10 ἡμέρες φέρνουν τόκο 10 δρχ. (6%)

β΄) 8000 δρχ. ποὺ σὲ 9 ἡμέρες μέρνουν τόκο 15 δρχ. (7,5%)

γ΄) 5000 δρχ. ποὺ σὲ 18 ἡμέρες φέρνουν τόκο 8 δρχ. (3,2%)

δ΄) 4000 δρχ. ποὺ σὲ 20 ἡμέρες φέρνουν τόκο 9 δρχ. (3,05%)

9. Μὲ ποιό ἐπιτόκιο πρέπει νὰ τοκίσωμε κεφάλαιο 68400 δρχ. γιὰ νὰ πάρωμε 12.540 δραχμὲς τόκο σὲ 3 ἔτη καὶ 8 μῆνες; (5%)

10. Μὲ ποιό ἐπιτόκιο πρέπει νὰ τοκίσωμε 320.000 δραχμές, γιὰ νὰ πάρωμε τόκο 32.000 δραχμὲς σὲ 1 ἔτος, 1 μῆνα καὶ 10 μέρες; (9%)

11. Ἐδάνεισα σὲ κάποιον 75.000 δραχμὲς καὶ ἔλαβα ὕστερα ἀπὸ 3 ἔτη καὶ 6 μῆνες 101.250 δραχμὲς κεφάλαιο καὶ τόκο μαζί. Μὲ πόσα τοῖς ἑκατὸ ἔγινε τὸ δάνειο; (10%)

12. Μὲ ποιό ἐπιτόκιο 2500 δραχμὲς τοκιζόμενες γιὰ 3 ἔτη γίνονται 2860 δραχμές; (4,8%)

Δ΄. Προβλήματα στὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ χρόνος (Χ)

Παράδειγμα. Σὲ πόσο χρόνο 350.000 δραχμὲς τοκιζόμενες πρὸς 6% δίνουν τόκο 42.000 δραχμές;

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ζητεῖται ὁ χρόνος. Μὲ τὴ σύνθετο μέθοδο τῶν τριῶν θὰ τὸ λύσωμε ἔτσι:

Κατάταξη

100	δραχμὲς	σὲ	1	ἔτος	φέρνουν	τόκο	6
350000	»	»	Χ;	»	»	»	42000

Λύση

Ἐπειδὴ ὁ χρόνος καὶ τὸ κεφάλαιο εἶναι ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα καὶ ὁ χρόνος καὶ ὁ τόκος ποσὰ ἀνάλογα, θὰ ἔχωμε:

$$X = 1 \times \frac{100}{350000} \times \frac{42000}{6} = \frac{100 \times 42000}{350000 \times 6} = \frac{4200000}{2100000} = \frac{42}{21} = 2 \text{ ἔτη}.$$

Ὥστε ζητούμενος χρόνος εἶναι 2 ἔτη.

Γιὰ νὰ βροῦμε στὸ πρόβλημα αὐτὸ τὸ χρόνο, πολλαπλασιάσαμε τὸν τόκο (42000) ἐπὶ τὸ 100 καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιρέσαμε διὰ τοῦ γινομένου τοῦ κεφαλαίου (350000) ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο (6).

Ὥστε: *Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ χρόνο, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο (Τ) ἐπὶ τὸ 100 καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τοῦ κεφαλαίου (Κ) ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιο (Ε).*

Ἀπὸ τὸ παραπάνω συμπέρασμα βγαίνει ὁ τύπος τοῦ χρόνου:

$$X = \frac{T. \ 100}{K. \ E.}.$$

Ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου

Παράδειγμα. 1. Πόσο χρόνο τοκίσθηκαν 200.000 δραχμὲς πρὸς 6% γιὰ νὰ φέρουν τόκο 8.000 δραχμές;

Λύση

Ἂν στὸν τύπο $X = \frac{T. \ 100}{K. \ E.}$ ἀντικατκστήσωμε τὸν Τ. μὲ τὸ 8000, τὸ Κ μὲ τὸ 200000 καὶ τὸ Ε μὲ τὸ 6, θὰ ἔχωμε :

$X = \frac{8000 \times 100}{200000 \times 6} = \frac{800000}{1200000} = \frac{8}{12}$ = 8 μῆνες εἶναι ὁ ζητούμενος χρόνος.

Βρήκαμε, ὅπως βλέπετε, 8 μῆνες καὶ ὄχι ἔτη. Πῶς ἔγινε αὐτό; Νὰ πῶς ἔγινε :

Ὅταν φθάσαμε στὴ διαίρεση 8 : 12 εἴδαμε ὅτι τὸ 12 δὲν χωρεῖ στὸ 8, συνεπῶς στὸ πηλίκο δὲν θὰ ἔχωμε ἔτη. Τρέπομε τότε τὰ 8 ἔτη σὲ μῆνες, ἀφοῦ τὰ πολλαπλασιάσωμε ἐπὶ 12, γιατὶ 12 μῆνες ἔχει τὸ ἔτος, καὶ προχωροῦμε στὴ διαίρεση. Ἔτσι στὸ πηλίκο βρήκαμε μῆνες.

ἔτη	8	12
X	12	0 ἔτη 8 μῆνες
μῆνες	96	

Παράδειγμα 2. Πόσο χρόνο τοκίσθηκαν 900.000 δραχμὲς πρὸς 6%, γιὰ νὰ φέρουν τόκο 3.000 δραχμές;

Λύση

Ἂν στὸν τύπο $X = \frac{T. \ 100}{K. \ E.}$ ἀντικατκστήσωμε τὸν Τ. μὲ τὸ 3000, τὸ Κ. μὲ 900000 καὶ τὸ Ε. μὲ τὸ 6 θὰ ἔχωμε :

$X = \frac{3000 \times 100}{900000 \times 6} = \frac{300000}{5400000} = \frac{3}{54}$ = 20 ἡμ. εἶναι ὁ ζητούμενος χρόνος.

Βρήκαμε, ὅπως βλέπετε, 20 ἡμέρες καὶ ὄχι ἔτη ἢ μῆνες. Νά πῶς ἔγινε αὐτό:

Ὅταν φθάσαμε στὴ διαίρεση 3 : 54, εἴδαμε ὅτι τὸ 54 δὲν χωρεῖ στὸ 3,

ἔτη 3	54
× 12	0 ἔτη 0 μῆνες 20 ἡμέρες
μῆνες 36	
× 30	
ἡμέρες 1080	
000	

συνεπῶς στὸ πηλίκο δὲν θὰ ἔχωμε ἔτη. Τρέπομε τότε τὰ ἔτη σὲ μῆνες, δηλαδή: $3 \times 12 = 36$ μῆνες.

Καὶ πάλι ὅμως τὸ 54 δὲν χωρεῖ στὸ 36. Συνεπῶς στὸ πηλίκο δὲν θὰ ἔχωμε μῆνες. Τρέπομε τότε τοὺς μῆνες σὲ ἡμέρες, δηλαδὴ $36 \times 30 = 1080$ ἡμέρες. Τώρα κάνομε τὴ διαίρεση καὶ βρίσκομε πηλίκο 20 ἡμέρες.

Προβλήματα

1. Σὲ πόσο χρόνο κεφάλαιο 400.000 δραχμῶν τοκιζόμενο πρὸς 4% δίνει 32.000 δραχμὲς τόκο; (Ἀπ. 2 ἔτη)

2. Πόσο χρόνο πρέπει νὰ μείνη τοκισμένο κεφάλαιο 350.000 δραχμῶν πρὸς 6% γιὰ νὰ φέρη τόκο 24.500 δραχμές; (Ἀπ. 1 ἔτος καὶ 2 μ.)

3. Σὲ πόσο χρόνο κεφάλαιο 200.000 δραχμῶν τοκιζόμενο πρὸς 7% δίνει τόκο 70.000 δραχμές; (Ἀπ. 5 ἔτη)

4. Ἕνας γεωργὸς πούλησε 2.000 κιλὰ σιτάρι πρὸς 4 δρχ. τὸ κιλό. Τὰ χρήματα ποὺ πῆρε, τὰ τόκισε πρὸς 7%. Σὲ πόσο χρόνο θὰ τοῦ δώσουν 700 δρχ. τόκο; (Ἀπ. 1 ἔτος καὶ 3 μῆνες)

5. Ὕστερα ἀπὸ πόσο χρόνο 150.000 δρχ. τοκιζόμενες πρὸς 8% θά γίνουν μαζὶ μὲ τὸν τόκο 270.000 δρχ.; (Ἀπ. 10 ἔτη)

6. Ἐπί πόσο χρόνο πρέπει νὰ τοκίσωμε:

α΄. 190.000 δρχ. πρὸς 8% γιὰ νὰ πάρωμε τόκο 30.400 δρχ. (2 ἔτη)

β΄. 350.000 δρχ. πρὸς 5% γιὰ νὰ πάρωμε τόκο 17.500 δρχ. (1 ἔτος)

γ΄. 800.000 δρχ. πρὸς 4,5% γιὰ νὰ πάρωμε τόκο 155.000 δρχ. (4 ἔτη 3 μῆνες 20 ἡμ.)

7. Ἕνας γεωργὸς πῆρε γεωργικὸ δάνειο 900.000 δρχ. πρὸς 6% καὶ ὅταν τὸ ἐξώφλησε πλήρωσε κεφάλαιο καὶ τόκους μαζὶ 984.000 δρχ. Γιὰ πόσο χρόνο ἔγινε τὸ δάνειο; (1 ἔτος, 6 μῆνες καὶ 20 ἡμ.)

8. Νὰ κάνετε καὶ σεῖς ὅμοια προβλήματα.

Γενικὴ ἀνακεφαλαίωση

1. Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν τόκο πολλαπλασιάζομε τὸ Κ ἐπὶ τὸ Ε καὶ ἐπὶ τὸ Χ καὶ διαιροῦμε τὸ γινόμενο διὰ τοῦ 100 (ἔτη) ἢ 1200 (μῆνες) ἢ 36000 (ἡμέρες).

Τύπος: $$T = \frac{K.\ E.\ X.}{100 \text{ ἢ } 1200 \text{ ἢ } 36000}$$

2. Γιὰ νὰ βροῦμε ἕνα ἀπὸ τὰ ἄλλα ποσά, κεφάλαιο ἢ χρόνο ἢ ἐπιτόκιο, πολλαπλασιάζομε τὸν τόκο ἐπὶ 100 ἢ 1200 ἢ 36000 καὶ διαιροῦμε διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων γνωστῶν ποσῶν.

Τύποι:

$$K = \frac{T.\ 100 \text{ ἢ } 1200 \text{ ἢ } 36000}{E.\ X.}$$

$$X = \frac{T.\ 100}{K.\ E.} \qquad E = \frac{T.\ 130 \text{ ἢ } 1200 \text{ ἢ } 36000}{K.\ X.}$$

Διάφορα προβλήματα τοῦ τόκου

Σημ. Πρὶν ἀρχίσωμε τὴ λύση ἑνὸς προβλήματος τόκου, πρέπει πάντοτε νὰ ἐξετάζωμε, ἂν μᾶς δίνωνται τὰ τρία ποσά, ὅταν μᾶς ζητεῖται τὸ τέταρτο. Ὅταν π.χ. μᾶς ζητεῖται ὁ τόκος, γιὰ νὰ τὸν βροῦμε, πρέπει νὰ ξέρωμε τὰ τρία ἄλλα ποσά, δηλ. τὸ κεφάλαιο, τὸ ἐπιτόκιο καὶ τὸ χρόνο.

Εἶναι ὅμως δυνατὸν κάποτε, νὰ μὴ μᾶς δίνεται ἀμέσως στὸ πρόβλημα ἕνα ἀπὸ τὰ ποσὰ αὐτά. Στὴν περίπτωση αὐτὴ πρέπει ὁπωσδήποτε νὰ τὸ βροῦμε καὶ ἔπειτα νὰ ἐφαρμόσωμε τὸν τύπο, ποὺ πρέπει.

1. Ἕνας γεωργὸς πούλησε 850 κιλὰ καλαμπόκι πρὸς 5 δρχ. τὸ κιλό. Τὰ χρήματα, ποὺ πῆρε τὰ δάνεισε πρὸς 9% γιὰ 2 ἔτη. Νὰ βρεθῆ πόσο τόκο θὰ πάρη, ὅταν λήξη ἡ προθεσμία τοῦ δανείου. (765 δρχ.)

2. Γιὰ πόσο χρόνο πρέπει νὰ καταθέσωμε 2.800 δρχ. πρὸς 8%, γιὰ νὰ πάρωμε τόκο καὶ κεφάλαιο μαζὶ 3.248 δρχ.; (2 ἔτη)

3. Μὲ ποιό ἐπιτόκιο τοκίζεται κεφάλαιο 300.000 δρχ., τὸ ὁποῖο φέρνει σὲ 4 χρόνια 36.000 δρχ. τόκο; (3%)

4. Ποιό κεφάλαιο τοκιζόμενο πρὸς 8% φέρνει τόκο 800.000 δρχ. σὲ 2 χρόνια; (500.000 δρχ.)

5. Ἔχω ἕνα σπίτι, ποὺ ἀξίζει 500.000 δραχμές. Ἀπὸ τὸ σπίτι αὐτὸ ἔχω ἐτήσιο εἰσόδημα ἀπὸ ἐνοίκια 36.000 δραχμές. Νὰ βρεθῆ τί εἶναι προτιμότερο.

Νὰ πουλήσω τὸ σπίτι καὶ νὰ καταθέσω τὰ χρήματα στὴν Ἐθνικὴ Τράπεζα πρὸς 6% ἢ νὰ τὸ ἀφήσω ἐνοικιασμένο;

(Νὰ μείνη ἐνοικιασμένο, γιατὶ οἱ τόκοι εἶναι μόνο 30.000 δρχ.).

6. Ποιό κεφάλαιο πρέπει νὰ καταθέσωμε σὲ μιὰ Τράπεζα πρὸς 6,5% γιὰ νὰ πάρωμε σὲ 1 χρόνο καὶ 3 μῆνες 1625 δραχμές; (20.000 δρχ.)

7. Ἕνας κτηνοτρόφος πούλησε 50 ἀρνιὰ πρὸς 200 δραχμὲς τὸ ἕνα. Τὰ χρήματα, ποὺ πῆρε, τὰ τόκισε πρὸς 10%. Λογαριάζει μὲ τὰ χρήματα, ποὺ θὰ πάρη ἀπὸ τοὺς τόκους νὰ ἀγοράση ἕνα ἄλογο ἀξίας 1.500 δραχμῶν. Πόσο χρόνο πρέπει νὰ μείνουν τὰ χρήματά του τοκισμένα, γιὰ νὰ ἀγοράση τὸ ἄλογο; (1 ἔτος καὶ 6 μῆνες)

8. Δάνεισα 200.000 δρχ. καὶ ὕστερα ἀπὸ 5 χρόνια πῆρα τόκο καὶ κεφάλαιο μαζὶ 300.000 δρχ. Μὲ ποιό ἐπιτόκιο δάνεισα τὰ χρήματά μου; (10%)

9. Στὶς 5 Ἀπριλίου 1952 δανείσθηκα 3.000.000 δραχ. Στὶς 25 τοῦ ἰδίου μηνὸς ξώφλησα τὸ δάνειό μου μὲ 3.020.000 δρχ. Μὲ πόσα τὰ ἑκατὸ δανείσθηκα τὰ χρήματα αὐτά; (12%)

10. Κάθε χρόνο παίρνω ἀπὸ τὸ Ταχυδρομικὸ Ταμιευτήριο τόκο 4.500 δρχ. ἀπὸ καταθέσεις μου πρὸς 8%. Πόσα χρήματα ἔχω κατατεθειμένα; (56.250 δρχ.)

11. Ἕνας ἰδιοκτήτης εἰσπράττει ἀπὸ ἐνοίκια τὸ μῆνα 1.300 δραχμές. Ποιό κεφάλαιο τοκιζόμενο πρὸς 12% θὰ τοῦ ἔδινε τὸ ἴδιο εἰσόδημα; (130.000 δρχ.)

12. Ἕνας ἔμπορος δανείσθηκε γιὰ ἕνα χρόνο 50.000 δρχ. μὲ 9%, ὕστερα ἀπὸ ἕνα ἑξάμηνο ἐπέστρεψε στὸ δανειστή του 20.000 δρχ. Πόσα πρέπει νὰ πληρώση στὸ τέλος τοῦ χρόνου γιὰ νὰ ἐξοφλήση τὸ χρέος του; (κεφάλαιο καὶ τόκους μαζί). (Ἀπ. Τ + Κ = 33.600)

13. Ἕνας ἰδιοκτήτης ἐνοικιάζει ἕνα σπίτι ἀξίας 180.000 δραχ. καὶ παίρνει ἐνοίκιο 16.200 δραχ. τὸ χρόνο. Πόσο στὰ % τοῦ δίνουν τὰ χρήματά του; (9%)

14. Εἶχα 17.000 δραχμές, μὲ τὶς ὁποῖες ἀγόρασα σιτάρι μὲ 3,40 τὸ κιλό. Μετὰ 6 μῆνες πούλησα τὸ σιτάρι μὲ 4,20 δραχ. τὸ κιλό. Θὰ κέρδιζα περισσότερα ἢ λιγότερα, ἂν τόκιζα τὰ χρήματά μου γιὰ τὸ ἴδιο χρονικὸ διάστημα μὲ 9%; (Ἀπ. Λιγότερα, 3.235 δρχ.).

15. Ἕνας γεωργὸς πούλησε 1.350 κιλὰ βαμβάκι πρὸς 6,5 δραχ. τὸ κιλὸ καὶ 3.400 κιλὰ σιτάρι πρὸς 3,75 δραχ. τὸ κιλό. Τὰ χρήματα ποὺ πῆρε τὰ κατέθεσε στὸ Ταχ. Ταμιευτήριο πρὸς 8%. Πόσα θὰ πάρη κεφάλαιο καὶ τόκους μαζὶ ὕστερα ἀπὸ 1 χρόνο καὶ 6 μῆνες; (24.108 δρχ.)

16. Ἀπὸ ἕνα κεφάλαιο ποὺ ἔχω τοκίσει μὲ 6% παίρνω τόκο τὸ χρόνο 3.150 δραχ. Μὲ τὰ 4/5 τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ ἀγοράζω 280 μέτρα ὕφασμα. Νὰ βρῆτε πόσο ἀγόρασα τὸ ἕνα μέτρο τοῦ ὑφάσματος. (150 δρχ.)

17. Ἕνας κτηματίας ἔχει κατατεθειμένο στὴν Τράπεζα ἕνα κεφάλαιο μὲ 9%. Μὲ τὸν τόκο ποὺ παίρνει σὲ 2 χρόνια, ἀγοράζει ἕνα ἄλογο ἀξίας 6.360 δραχ. καὶ 3 μέτρα ὑφάσματος πρὸς 400 δραχ. τὸ μέτρο. Ποιό εἶναι τὸ κεφάλαιο ποὺ ἔχει κατατεθειμένο στὴν Τράπεζα ὁ κτηματίας αὐτός; (42.000 δρχ.)

18. Ἔχω 32.000 δραχμές. Καταθέτω τὰ 3/4 τοῦ ποσοῦ αὐτοῦ στὸ Ταχ. Ταμιευτήριο μὲ 6,5% καὶ τὸ ὑπόλοιπο στὴν Ἐθνικὴ Τράπεζα μὲ 5%. Πόσα θὰ εἰσπράξω ὕστερα ἀπὸ ἕνα χρόνο; (τόκους καὶ κεφάλαιο). (Κ+Τ=33.960)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε΄.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΥΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

1. Γραμμάτιο

Συνήθως στὸ ἐμπόριο χονδρικῆς πωλήσεως ἡ ἀξία τῶν ἐμπορευμάτων δὲν καταβάλλεται ὁλόκληρη ἀμέσως. Ὁ πωλητὴς δίνει στὸν ἀγοραστὴ μιὰ μικρὴ προθεσμία γιὰ τὴν ἐξόφληση τοῦ χρέους του καὶ ὁ ἀγοραστὴς ὑπόσχεται νὰ πληρώση στὴν ὁρισμένη προθεσμία τὴν ἀξία τῶν ἐμπορευμάτων, ποὺ πῆρε. Στὴν περίπτωση αὐτὴ ὁ πωλητὴς ζητεῖ καὶ παίρνει ἀπὸ τὸν ἀγοραστὴ μιὰ ἔγγραφη ὑπόσχεση, ὅτι στὴν ὁρισμένη προθεσμία θὰ πληρώση τὸ χρέος του.

Ἡ ἔγγραφη αὐτὴ ὑπόσχεση τοῦ ἀγοραστῆ πρὸς τὸν πωλητὴ λέγεται γραμμάτιο εἰς διαταγὴν ἢ ἁπλῶς γραμμάτιο.

Παράδειγμα. Ὁ ἔμπορος Δ. Ἰωαννίδης πουλάει στὶς 20 Σεπτεμβρίου στὸν ἔμπορο Μ. Ἀποστόλου ἐμπορεύματα ἀξίας 5.000 δραχμῶν μὲ τὴ συμφωνία νὰ πληρώση τὴν ἀξία τους ὕστερα ἀπὸ δυὸ μῆνες.

Ὁ Δ. Ἰωαννίδης παίρνει ἀπὸ τὸν Μ. Ἀποστόλου τὸ παρακάτω γραμμάτιο:

Γραμμάτιον δραχμῶν 5000

Τὴν 20 Νοεμβρίου ἐ.ἔ. ὑπόσχομαι νὰ πληρώσω εἰς διαταγὴν τοῦ κ. Δ. Ἰωαννίδου τὸ ἄνω ποσὸν τῶν πέντε χιλιάδων δραχμῶν, τὰς ὁποίας ἔλαβον παρ' αὐτοῦ εἰς ἐμπορεύματα.

Ἀθῆναι 20 Σεπτεμβρίου 1966

Μ. ΑΠΟΣΤΟΛΟΥ

2. Συναλλαγματική

Ἀντὶ γραμματίου ὁ πωλητὴς μπορεῖ νὰ ζητήσῃ ἀπὸ τὸν ἀγοραστὴ νὰ ὑπογράψῃ μιὰ συναλλαγματική.

Ἡ συναλλαγματικὴ εἶναι ἕνα ἔγγραφο, μὲ τὸ ὁποῖο ἐκεῖνος ποὺ δανείζει χρήματα ἢ δίνει ἐμπορεύματα μὲ πίστωση, διατάζει τὸ χρεώστη του νὰ πληρώσῃ σὲ τρίτο πρόσωπο καὶ σὲ ὁρισμένη χρονικὴ προθεσμία τὸ χρηματικὸ ποσό, ποὺ ἀναφέρεται σ᾿ αὐτό.

Ἡ συναλλαγματικὴ συντάσσεται ἀπὸ τὸ δανειστὴ καὶ ὑπογράφεται ἀπὸ τὸν ὀφειλέτη.

Παράδειγμα. Τὸ παραπάνω γραμμάτιο μπορεῖ νὰ γίνῃ συναλλαγματικὴ ἔτσι:

Συναλλαγματικὴ διὰ δραχ. 5000

Τὴν 20 Νοεμβρίου ἐ.ἔ. πληρώσατε διὰ τῆς παρούσης συναλλαγματικῆς τῇ διαταγῇ ἐμοῦ τοῦ ἰδίου, εἰς τὸ ἐν Ἀθήναις κατάστημα τῆς Ἐθνικῆς Τραπέζης [*] τὰς ἄνω δραχμὰς πέντε χιλιάδας ἀξίαν ληφθεῖσαν εἰς ἐμπορεύματα.

Δ. ΙΩΑΝΝΙΔΗΣ

Πρὸς τὸν
κ. Μ. ΑΠΟΣΤΟΛΟΥ
ἔμπορον
εἰς Θεσσαλονίκην

Δεκτὴ
Μ. ΑΠΟΣΤΟΛΟΥ
ἔμπορος εἰς Θεσσαλονίκην

3. Προεξόφληση — Ὑφαίρεση

Ὁ δανειστὴς ἢ ὁ πωλητὴς ἔμπορος μπορεῖ νὰ πουλήσῃ τὸ γραμμάτιο ἢ τὴ συναλλαγματικὴ σὲ μία Τράπεζα ἢ σὲ ἄλλον ἔμπορο, πρὸ τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας της. Στὴν περίπτωση αὐτὴ ὑπογράφει πίσω ἀπὸ τὸ γραμμάτιο ἢ τὴ συναλλαγματικὴ (ὀπισθογράφηση) καὶ ἔτσι μεταβιβάζει τὰ δικαιώματά του στὴν Τράπεζα. Ἡ πράξη αὐτὴ λέγεται προεξόφληση τοῦ γραμματίου ἢ τῆς συναλλαγματικῆς.

Ἡ Τράπεζα πάλι, ποὺ θὰ προεξοφλήσῃ τὴ συναλλαγματική, δὲν θὰ δώσῃ βέβαια στὸ δανειστὴ ὁλόκληρο τὸ ποσό, ποὺ ἀναφέρεται σ᾿ αὐτή, ἀλλὰ θὰ κρα-

(*) ἢ σὲ ὁποιαδήποτε ἄλλη Τράπεζα.

τήση ἀπ' αὐτὸ τὸν τόκο, ποὺ ἀναλογεῖ γιὰ τὸ χρόνο ἀπὸ τὴν ἡμέρα τῆς προεξοφλήσεως ὡς τὴν ἡμέρα τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου ἢ τῆς συναλλαγματικῆς, μὲ ἐπιτόκιο ποὺ θὰ συμφωνήσουν μεταξύ τους γιὰ τὸ ἀναγραφόμενο κεφάλαιο.

Γίνεται μὲ ἄλλα λόγια αὐτό: Συμφωνοῦν γιὰ τὸ ἐπιτόκιο, μὲ τὸ ὁποῖο θὰ γίνη ἡ προεξόφληση. Βρίσκουν τὸν τόκο, ποὺ ἀναλογεῖ στὸ ποσό, ποὺ ἀναφέρεται στὸ γραμμάτιο, γιὰ τὸ χρόνο ἀπὸ τὴν ἡμέρα τῆς προεξοφλήσεως ὡς τὴν ἡμέρα τῆς λήξεως καὶ τὸν ἀφαιροῦν ἀπὸ τὸ ποσό, ποὺ ἀναγράφεται στὸ προεξοφλούμενο γραμμάτιο ἢ τὴ συναλλαγματική.

Ὁ τόκος αὐτός, ποὺ ἀφαιρεῖται (ἐκπίπτεται) ἀπὸ τὸ ποσὸ τοῦ γραμματίου κατὰ τὴν προεξόφληση, λέγεται ὑφαίρεση.

4. Ὀνομαστικὴ καὶ πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου

Ὅταν τὸ γραμμάτιο ἐξοφλεῖται πρὶν ἀπὸ τὴ λῆξη του, δὲν πληρώνεται, ὅπως εἴπαμε, ὅσο γράφει, γιατὶ δὲν ἀξίζει τόσο. Θὰ ἀξίζη ὅσο γράφει ὅταν λήξη ἡ προθεσμία του. Ἔτσι ἡ ἀξία κάθε γραμματίου ἢ συναλλαγματικῆς δὲν εἶναι πραγματικὴ πρὶν ἀπὸ τὴ λήξη τους. Εἶναι, ὅπως τὴ λέμε, ὀνομαστική. Θὰ γίνη πραγματικὴ τὴν ἡμέρα τῆς λήξεως. Ἡ πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ἢ τῆς συναλλαγματικῆς αὐξάνει κάθε μέρα, ὅσο πλησιάζει ἡ λήξη του καὶ φυσικὰ τὴν ἡμέρα τῆς λήξεώς του, ὅλο τὸ ποσόν, ποὺ ἀναγράφεται σ' αὐτὸ εἶναι πραγματικὴ ἀξία.

Κάθε γραμμάτιο ἢ συναλλαγματικὴ λοιπὸν ἔχει ὀνομαστικὴ καὶ πραγματικὴ ἀξία.

Ὀνομαστικὴ ἀξία εἶναι τὸ χρηματικὸ ποσό, ποὺ ἀναγράφεται στὸ γραμμάτιο ἢ στὴ συναλλαγματική.

Πραγματικὴ ἀξία εἶναι τὸ χρηματικὸ ποσό, ποὺ μένει, ὅταν κατὰ τὴν προεξόφληση ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ἢ τῆς συναλλαγματικῆς τὴν ὑφαίρεση.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν πραγματικὴ ἀξία ἑνὸς γραμματίου ἢ συναλλαγματικῆς ἀφαιροῦμε τὴν ὑφαίρεση ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία.

Ὥστε ὀνομαστικὴ ἀξία=ὑφαίρεση+πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου καὶ ἀντίθετα πραγματικὴ ἀξία+ὑφαίρεση=ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου.

Ἀνακεφαλαίωση

1. Ὀνομαστικὴ ἀξία εἶναι τὸ χρηματικὸ ποσό, ποὺ ἀναγράφεται στὸ γραμμάτιο ἢ τὴ συναλλαγματική.

2. Χρόνος προεξοφλήσεως εἶναι τὸ χρονικὸ διάστημα ἀπὸ τὴν ἡμέρα τῆς προεξοφλήσεως ὡς τὴν ἡμέρα τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου.

3. Ἐπιτόκιο προεξοφλήσεως εἶναι τὸ συμφωνούμενο ἐπιτόκιο γιὰ τὴν προεξόφληση.

4. Ὑφαίρεση εἶναι ὁ τόκος τοῦ ποσοῦ, ποὺ ἀναγράφεται στὸ γραμμάτιο, γιὰ τὸ χρόνο τῆς προεξοφλήσεως καὶ ποὺ ἐκπίπτεται ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου κατὰ τὴν προεξόφλησή του (*).

5. Πραγματικὴ ἀξία εἶναι τὸ χρηματικὸ ποσό, ποὺ μένει, ὅταν ἀφαιρέσωμε ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴ τοῦ γραμματίου τὴν ὑφαίρεση.

5. Λύση προβλημάτων ὑφαιρέσεως

Ἐπειδὴ τὰ προβλήματα τῆς ὑφαιρέσεως εἶναι, ὅπως εἴδαμε, ἁπλὰ προβλήματα τόκου, ἐφαρμόζομε κατὰ τὴ λύση τους τοὺς τύπους, ποὺ μάθαμε στὰ προβλήματα τοῦ τόκου.

α΄. Πῶς βρίσκομε τὴν ὑφαίρεση καὶ τὴν πραγματικὴ ἀξία

Παράδειγμα 1. Ἕνα γραμμάτιο 400.000 δραχμῶν προεξοφλεῖται 6 μῆνες πρὶν ἀπὸ τὴ λήξη του πρὸς 8%. Πόση εἶναι ἡ ὑφαίρεσή του;

Λύση

Ἡ ὑφαίρεση τοῦ γραμματίου αὐτοῦ εἶναι ὁ τόκος τῶν 400 χιλιάδων δραχμῶν γιὰ 6 μῆνες πρὸς 8%.

Γιὰ νὰ τὴ βροῦμε συνεπῶς, θὰ ἐφαρμόσωμε τὸν τύπο τοῦ τόκου:

$$\left(T = \frac{K.E.X.}{1200}\right).$$

$$T = \frac{400000 \times 8 \times 6}{1200} = \frac{19200000}{1200} = \frac{192000}{12} = 16000$$ δραχμὲς εἶναι ἡ ὑφαίρεση.

Ἡ πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου αὐτοῦ θὰ εἶναι:

Ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου	400.000	δρχ.
Ὑφαίρεση	— 16.000	»
Πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου	384.000	»

(*) Ἡ ὑφαίρεση αὐτὴ λέγεται ἐξωτερικὴ ὑφαίρεση.

β'. Πῶς βρίσκομε τὸ χρόνο τῆς προεξοφλήσεως

Παράδειγμα 2. Ἕνα γραμμάτιο 498.000 δραχμῶν προεξοφλεῖται πρὸς 9% μὲ ὑφαίρεση 22.410 δραχμῶν. Πόσο χρόνο πρὶν ἀπὸ τὴ λήξη του ἔγινε ἡ προεξόφληση;

Λύση

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ζητεῖται ὁ χρόνος τῆς προεξοφλήσεως. Μὲ ἄλλα λόγια ζητοῦμε νὰ βροῦμε σὲ πόσο χρόνο κεφάλαιο 498.000 δρχ. πρὸς 9% δίνει τόκο 22.410 δρχ.

Συνεπῶς γιὰ νὰ τὸ βροῦμε, θὰ ἐφαρμόσωμε τὸν τύπο τοῦ χρόνου:

$$\left(X = \frac{T.\ 100}{K.\ E.}\right).$$

Χρόνος προεξοφλ. $= \dfrac{22410 \times 100}{498000 \times 9} = \dfrac{2241000}{4482000} = \dfrac{2241}{4482} = 6$ μῆνες πρὶν ἀπὸ τὴ λήξη του.

γ'. Πῶς βρίσκομε τὸ ἐπιτόκιο προεξοφλήσεως

Παράδειγμα 3. Ἕνα γραμμάτιο 360.000 δραχμῶν προεξοφλήθηκε 5 μῆνες πρὶν ἀπὸ τὴ λήξη του μὲ ὑφαίρεση 14.000 δραχμῶν. Μὲ ποιό ἐπιτόκιο ἔγινε ἡ προεξόφληση;

Λύση

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιο τῆς προεξοφλήσεως. Μὲ ἄλλα λόγια ζητοῦμε νὰ βροῦμε μὲ ποιό ἐπιτόκιο οἱ 360.000 δρχ. τοκιζόμενες φέρνουν σὲ 5 μῆνες τόκο 14.000 δρχ.

Συνεπῶς γιὰ νὰ τὸ βροῦμε θὰ ἐφαρμόσωμε τὸν τύπο τοῦ ἐπιτοκίου:

$$\left(E = \frac{T.\ 1200}{K.\ X.}\right).$$

Ἐπιτόκ. προεξ. $= \dfrac{14000 \times 1200}{360000 \times 5} = \dfrac{14 \times 1200}{360 \times 5} = \dfrac{16800}{1800} = \dfrac{168}{18} = 9\ \dfrac{1}{3}$ δρχ. εἶναι τὸ ἐπιτόκιο τῆς προεξοφλήσεως.

Προβλήματα

1. Ἕνα γραμμάτιο 480.000 δραχμῶν προεξοφλεῖται 50 ἡμέρες πρὶν ἀπὸ τὴ λήξη του πρὸς 9%. Πόση εἶναι ἡ ὑφαίρεση καὶ πραγματική του ἀξία;

2. Μιὰ συναλλαγματικὴ 600.000 δραχμῶν, ποὺ ἔπρεπε νὰ πληρωθῆ στὶς 10 Αὐγούστου, προεξοφλήθηκε στὶς 20 Μαΐου πρὸς 6%. Ποιὰ εἶναι ἡ πραγματική της ἀξία; (Πόσο προεξοφλήθηκε;) (592.000).

3. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε ἐμπόρευμα ἀξίας 800.000 δραχμῶν, τὶς ὁποῖες πρέπει νὰ πληρώση ὕστερα ἀπὸ 8 μῆνες. Ἂν πληρώση ἀμέσως τοῦ γίνεται ἔκπτωση 6%. Ποιά εἶναι ἡ ἔκπτωση (ὑφαίρεση), ποὺ θὰ τοῦ γίνη καὶ πόσα θὰ πληρώση; (32.000 Πρ. ἀξ. 768.000).

4. Ἕνα γραμμάτιο 2.450 δραχμῶν προεξοφλήθηκε γιὰ 2.425,5 δρχ. πρὸς 9%. Πόσο χρόνο πρὶν ἀπὸ τὴ λήξη του ἔγινε ἡ προεξόφλησή του; (1 μ. 10 ἡμ.).

5. Ἕνας γεωργὸς ἀγόρασε ἐμπορεύματα ἀξίας 3500 δραχμῶν, τὶς ὁποῖες πρέπει νὰ πληρώση μετὰ 6 μῆνες. Μετὰ 4 μῆνες ὅμως ἀπὸ τὴν ἀγορὰ θέλει νὰ πληρώση τὸ ποσό, ποὺ χρεωστεῖ, μὲ ἔκπτωση 9%. Πόσα θὰ πληρώση; (3447,5)

6. Μιὰ συναλλαγματικὴ 2500 δραχμῶν προεξοφλήθηκε 50 ἡμέρες πρὶν ἀπὸ τὴ λήξη της μὲ ὑφαίρεση 25 δραχμῶν. Μὲ ποιό ἐπιτόκιο ἔγινε ἡ προεξόφληση; (7,2%).

7. Κάποιος χρεωστοῦσε ἕνα γραμμάτιο 25.000 δραχμῶν, ποὺ ἔπρεπε νὰ τὸ ἐξοφλήση μετὰ 2 ἔτη. Συμφώνησε νὰ τὸ ἐξοφλήση σήμερα μὲ 2000 δραχμές. Μὲ ποιό ἐπιτόκιο ἔκαμε τὴν ἐξόφληση; (10%).

8. Ποιά εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία ἑνὸς γραμματίου, ποὺ προεξοφλήθηκε 6 μῆνες πρὶν ἀπὸ τὴ λήξη του μὲ ὑφαίρεση 1.500 δρχ. πρὸς 6%; (50.000)

9. Ἕνα γραμμάτιο 5450 δραχμῶν, τὸ ὁποῖο λήγει στὶς 30 Δεκεμβρίου προεξοφλήθηκε στὶς 30 Μαΐου τοῦ ἴδιου χρόνου πρὸς 6%. Μὲ ποιά ὑφαίρεση προεξοφλήθηκε τὸ γραμμάτιο αὐτὸ καὶ ποιά εἶναι ἡ πραγματική του ἀξία; (190,75. Πρ. ἀξ. 5259,25).

10. Ἕνα γραμμάτιο 3.500 δραχμῶν προεξοφλήθηκε μὲ ὑφαίρεση 70 δρχ. πρὸς 6%. Πόσο χρόνο πρὶν ἀπὸ τὴ λήξη του ἔγινε ἡ προεξόφληση; (4 μῆν.)

11. Μιὰ συναλλαγματικὴ προεξοφλήθηκε 8 μῆνες πρὶν ἀπὸ τὴ λήξη της μὲ 5% καὶ μὲ ὑφαίρεση 800 δρχ. Ποιά εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία της; (24.000)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΣΤ΄

ΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΕ ΜΕΡΗ ΑΝΑΛΟΓΑ

1. Προβλήματα μερισμοῦ

Παράδειγμα. Σὲ μιὰ δουλειὰ ἐργάσθηκαν 3 ἐργάτες. Ὁ α΄ ἐργάσθηκε 4 ὧρες, ὁ β΄ 6 ὧρες καὶ ὁ γ΄ 8 ὧρες. Οἱ τρεῖς μαζὶ πληρώθηκαν 180 δραχμές. Πόσες δραχμὲς θὰ πάρῃ ὁ καθένας ἀπὸ τοὺς ἐργάτες αὐτούς;

Λύση

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ζητεῖται νὰ βροῦμε, πῶς θὰ μοιρασθοῦν τὶς 180 δραχμὲς οἱ τρεῖς αὐτοὶ ἐργάτες.

Εὔκολα καταλαβαίνομε, πὼς δὲν εἶναι δίκαιο νὰ μοιρασθοῦν οἱ τρεῖς ἐργάτες ἐξ ἴσου τὶς 180 δρχμές, γιατὶ δὲν δούλεψαν ὅλοι τὶς ἴδιες ὧρες. Δίκιο εἶναι νὰ μοιρασθοῦν τὰ χρήματα αὐτὰ ἀνάλογα μὲ τὶς ὧρες, ποὺ δούλεψε ὁ καθένας. Ὁ α΄ πρέπει νὰ πάρῃ ἀμοιβὴ γιὰ δουλειὰ 4 ὡρῶν, ὁ β΄ γιὰ δουλειὰ 6 ὡρῶν καὶ ὁ γ΄ γιὰ δουλειὰ 8 ὡρῶν. Μὲ ἄλλα λόγια τὶς 180 δραχμὲς θὰ τὶς μοιράσωμε ἀνάλογα μὲ τὶς 4, 5 καὶ 8 ὧρες, ποὺ δούλεψε κάθε ἐργάτης.

Πῶς ὅμως θὰ γνίῃ τὸ μοίρασμα αὐτό;

Σκεπτόμαστε ἔτσι: Ἂν ἕνας ἐργάτης δούλευε τόσες ὧρες, ὅσες δούλεψαν καὶ οἱ 3 ἐργάτες μαζί, δηλ. 4+6+8=18 ὧρες θὰ ἔπαιρνε γιὰ ἀμοιβή του ὁλόκληρο τὸ ποσό, δηλ. τὶς 180 δραχμές.

Τώρα ὅμως, ποὺ ὁ α΄ δούλεψε μόνο 3 ὧρες, πόσα θὰ πάρῃ; Τὸ ἴδιο σκεπτόμαστε καὶ γιὰ τὸ β΄, ποὺ δούλεψε 6 ὧρες, καὶ γιὰ τὸν γ΄ ποὺ δούλεψε 8 ὧρες. Μὲ ἄλλα λόγια μποροῦμε νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα αὐτὸ μὲ τὴν ἁπλὴ μέθοδο τῶν τριῶν.

Ἔτσι ἔχομε:

Ὁ πρῶτος θὰ πάρῃ $\dfrac{18 \text{ ὧρες } 180 \text{ δραχμὲς}}{4 \quad » \quad X;}$

$$X = 180 \times \frac{4}{18} = \frac{180 \times 4}{18} = \frac{720}{18} = 40 \text{ δραχμὲς}$$

Ὁ δεύτερος θὰ πάρη $\begin{array}{llll} 18 & \text{ὧρες} & 180 & \text{δραχμὲς} \\ \hline 6 & » & X\,; & » \end{array}$

$$X = 180 \times \frac{6}{18} = \frac{180 \times 6}{18} = \frac{1080}{18} = 60 \text{ δραχμὲς}$$

Ὁ τρίτος θὰ πάρη $\begin{array}{llll} 18 & \text{ὧρες} & 180 & \text{δραχμὲς} \\ \hline 8 & » & X\,; & » \end{array}$

$$X = 180 \times \frac{8}{18} = \frac{180 \times 8}{18} = \frac{1443}{18} = 80 \text{ δραχμές}$$

Ὥστε θὰ πάρουν:

Ὁ πρῶτος	ἐργάτης	40 δραχμὲς
Ὁ δεύτερος	ἐργάτης	60 δραχμὲς
Ὁ τρίτος	ἐργάτης	80 δραχμές.
Σύνολο		180 δραχμές.

Ἔτσι ὁ ἀριθμὸς 180 μοιράσθηκε σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 3, 6 καὶ 8.

Ὁ τρόπος αὐτὸς τοῦ μερισμοῦ λέγεται μ ε ρ ι σ μ ὸ ς σ ὲ μ έ ρ η ἀ ν ά λ ο γ α. Ὁ ἀριθμός, ποὺ μοιράζεται, λέγεται μ ε ρ ι σ τ έ ο ς.

Ἂν προσέξωμε τὶς πράξεις, ποὺ κάναμε στὸ παραπάνω πρόβλημα θὰ ἰδοῦμε ὅτι:

Γιὰ νὰ μοιράσωμε ἕναν ἀριθμὸ σὲ μέρη ἀνάλογα ἄλλων ἀριθμῶν, ποὺ μᾶς δίνονται, πολλαπλασιάζομε τὸ μεριστέο ἀριθμὸ ἐπὶ καθένα ἀπὸ τοὺς δοσμένους ἀριθμοὺς χωριστὰ καὶ διαιροῦμε τὸ γινόμενο διὰ τοῦ ἀθροίσματός των.

Προβλήματα

1. Νὰ μοιρασθοῦν 450 δραχμὲς σὲ 3 οἰκογένειες ἀνάλογα μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 3, 4 καὶ 8. Πόσες δραχμὲς θὰ πάρη κάθε οἰκογένεια;

Λ ύ σ η

Σύμφωνα μὲ τὸν κανόνα, ποὺ μάθαμε, οἱ 450 δραχμὲς θὰ μοιρασθοῦν ἀνάλογα μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 3, 4 καὶ 8.

Ἔτσι ἡ πρώτη οἰκογένεια θὰ πάρη:

$$\frac{450 \times 3}{15} = \frac{1350}{15} = 90 \text{ δραχμὲς}$$

ἡ δεύτερη θὰ πάρη $\dfrac{450 \times 4}{15} = \dfrac{1800}{15} = 120$ δραχμὲς ἡ τρίτη θὰ πάρη $\frac{450 \times 8}{15} = \frac{3600}{15} = 240$ δραχμές.

2. Τρεῖς κτηνοτρόφοι νοίκιασαν ἕνα βοσκότοπο γιὰ τὰ πρόβατά τους καὶ πλήρωσαν 9000 δραχμές. Πόσα θὰ πληρώση ὁ καθένας τους, ἂν ὁ α΄ ἔχη 150 πρόβατα, ὁ β΄ 200 πρόβατα καὶ ὁ γ΄ 250 πρόβατα; (2250, 3000, 3750).

3. Ἕνα φιλόπτωχο ταμεῖο μοίρασε σὲ 3 ἄπορες οἰκογένειες 620 κιλὰ ἀλεύρι ἀνάλογα μὲ τὰ μέλη, ποὺ ἔχει κάθε οἰκογένεια. Ἡ πρώτη ἔχει 4 ἄτομα, ἡ δεύτερη 3 καὶ ἡ τρίτη 1 ἄτομο. Πόσα κιλὰ ἀλεύρι θὰ πάρη κάθε οἰκογένεια; (260, 195, 65).

4. Τὸ σχολικὸ συσσίτιο μοίρασε σήμερα 500 σοκολάτες στὶς τάξεις ἀνάλογα μὲ τοὺς μαθητές, ποὺ ἔχει κάθε τάξη. Ἡ πρώτη τάξη ἔχει 54 μαθητές, ἡ δεύτερη 56, ἡ τρίτη 48, ἡ τετάρτη 33, ἡ πέμπτη 31 καὶ ἡ ἕκτη 28. Πόσες σοκολάτες θὰ πάρη κάθε τάξη; (108, 112, 96, 66, 62, 56).

2. Προβλήματα ἑταιρείας

Πολλὲς φορὲς δυὸ ἢ περισσότεροι ἔμποροι βάζουν κεφάλαια καὶ κάνουν μαζὶ ἐμπορικὴ ἐπιχείρηση. Ἡ πράξη αὐτὴ στὴν ἐμπορικὴ γλώσσα λέγεται συνεταιρισμὸς ἢ ἑταιρεία καὶ ἐκεῖνοι ποὺ τὴν ἀποτελοῦν συνέταιροι.

Οἱ συνέταιροι σὲ ὁρισμένο χρονικὸ διάστημα μοιράζουν τὰ κέρδη ἢ τὴ ζημία τῆς ἑταιρείας ἀνάλογα μὲ τὰ κεφάλαια, ποὺ κατέθεσε ὁ καθένας καὶ μὲ τὸ χρόνο, ποὺ ἔμειναν τὰ χρήματά του στὴν ἑταιρεία.

Ἔτσι τὰ προβλήματα ἑταιρείας εἶναι προβλήματα μερισμοῦ σὲ μέρη ἀνάλογα.

α΄. Κεφάλαια διάφορα

Προβλήματα

Τρεῖς ἔμποροι ἔκαμαν ἑταιρεία. Ὁ α΄ κατέθεσε 2500 δραχμές, ὁ β΄ 3500 δραχμὲς καὶ ὁ γ΄ 4000 δραχμές. Κέρδισαν στὸ τέλος τοῦ χρόνου 5000 δραχμές. Πόσα θὰ πάρη ὁ καθένας;

Λύση

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ἔχομε νὰ μοιράσωμε τὸ κέρδος τῆς ἑταιρείας 5000 δραχμὲς στοὺς 3 συνεταίρους ἀνάλογα μὲ τὰ κεφάλαια, ποὺ κατέθεσε ὁ καθένας, δηλ. 2500 δραχμές, 3500 δραχμὲς καὶ 4000 δραχμές.

Μὲ ἄλλα λόγια ἔχομε ἕνα πρόβλημα μερισμοῦ σὲ μέρη ἀνάλογα. Σύμφωνα μὲ ὅσα μάθαμε θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ μ ε ρ ι σ τ έ ο ἀριθμὸ 5000 μὲ καθένα ἀπὸ τὰ κεφάλαια καὶ τὸ γινόμενο θὰ τὸ διαιρέσωμε διὰ τοῦ ἀθροίσματός των.

Ἔτσι ἔχομε: $2500+3500+4000=10.000$ δραχμές.

Ὁ α΄ θὰ πάρη $\frac{5000 \times 2500}{10000} = \frac{12500000}{10000} = 1250$ δραχμὲς

Ὁ β΄ θὰ πάρη $\frac{5000 \times 3500}{10000} = \frac{17500000}{10000} = 1750$ δραχνὲς

Ὁ γ΄ θὰ πάρη $\frac{5000 \times 4000}{10000} = \frac{20000000}{10000} = 2000$ δραχμὲς

$1250 + 1750 + 2000 = 5000$ δραχμὲς σύνολον κέρδους.

Στὸ παράδειγμά μας αὐτὸ τὸ κέρδος μοιράσθηκε ἀνάλογα μὲ τὰ κεφάλαια ποὺ κατέθεσε κάθε συνέταιρος στὴν ἑταιρεία.

β΄. Χρόνος διάφορος

Παράδειγμα:

Δυὸ ἔμποροι κατέθεσαν ἀπὸ ἴσο χρηματικὸ ποσὸ καὶ ἔκαμαν μιὰ ἑταιρεία. Τοῦ πρώτου ἐμπόρου τὰ χρήματα ἔμειναν στὴν ἑταιρεία 2 χρόνια καὶ τοῦ δεύτερου 3 χρόνια. Στὸ τέλος βρέθηκε ὅτι ζημιώθηκαν 750 δραχμές. Πόση ζημία ἀναλογεῖ στὸν καθένα;

Λύση

Ἡ ζημία θὰ μοιρασθῇ στοὺς δυὸ συνεταίρους ἀνάλογα μὲ τὸ χ ρ ό ν ο, ποὺ τὰ κεφάλαιά τους ἔμειναν στὴν ἑταιρεία, δηλ. ἡ ζημία τῶν 750 δραχμῶν θὰ μοιρασθῇ ἀνάλογα μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 2 καὶ 3, ποὺ φανερώνουν τὰ χρόνια, ποὺ ἔμειναν τὰ κεφάλαια τοῦ καθενὸς στὴν ἑταιρεία.

Ἔχομε δηλ. καὶ ἐδῶ πρόβλημα μερισμοῦ ἤτοι:

Ἄθροισμα ἐτῶν $2+3=5$ ἔτη.

Ὁ α΄ $\frac{750 \times 2}{5} = \frac{1500}{5} = 300$ δραχμὲς

Ὁ β΄ $\frac{750 \times 3}{5} = \frac{22{:}0}{5} = 450$ δραχμὲς

Σύνολον ζημίας 750 δραχμές

Στὸ παράδειγμά μας αὐτὸ ἡ ζημία μοιράσθηκε ἀνάλογα μὲ τὸ χρόνο, ποὺ ἔμειναν τὰ χρήματα τῶν συνεταίρων στὴν ἑταιρεία, γιατὶ τὰ κεφάλαια δὲν ἔμειναν ἐπὶ ἴσο χ ρ ο ν ι κ ὸ δ ι ά σ τ η μ α.

γ'. Κεφάλαια καὶ χρόνος διάφορα

Παράδειγμα. Ἕνας ἔμπορος ἄρχισε μιὰ ἐπιχείρηση μὲ 3500 δραχμές. Ὕστερα ἀπὸ 2 μῆνες πῆρε συνέταιρο, ποὺ κατέθεσε 4500 δραχμές. Ἡ ἑταιρεία διαλύθηκε μετὰ 8 μῆνες ἀπὸ τότε ποὺ ἔγινε καὶ βρέθηκε κέρδος 4000 δραχμῶν. Πόσο κέρδος θὰ πάρῃ κάθε συνέταιρος;

Λύση

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ βλέπομε, πὼς οἱ δυὸ συνέταιροι οὔτε ἴσα κεφάλαια κατέθεσαν στὴν ἑταιρεία, οὔτε καὶ ἴσο χρόνο ἔμειναν τὰ κεφάλαιά τους σ' αὐτή. Δηλ. καὶ ὁ χρόνος καὶ τὰ κεφάλαια εἶναι διάφορα. Ἔτσι ὁ πρῶτος κατέθεσε στὴν ἑταιρεία 3500 δραχμές, ποὺ ἔμειναν σ' αὐτὴ 8 μῆνες καὶ ὁ δεύτερος 4500 δραχμές, ποὺ ἔμειναν στὴν ἑταιρεία 6 μῆνες.

Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα αὐτὸ θὰ σκεφθοῦμε ὡς ἑξῆς:

Γιὰ νὰ πάρῃ ὁ πρῶτος, ποὺ κατέθεσε 3500 δραχμὲς σὲ 1 μῆνα τὸ κέρδος, ποὺ θὰ ἔπαιρνε σὲ 8 μῆνες, ὅσο δηλ. ἔμειναν τὰ χρήματά του στὴν ἑταιρεία, πρέπει νὰ καταθέσῃ 8 φορὲς περισσότερο κεφάλαιο, ἀπὸ ὅσο κατέθεσε, δηλ.:

$$3500 \times 8 = 28000 \text{ δραχμές.}$$

Γιὰ νὰ πάρῃ ὁ δεύτερος, ποὺ κατέθεσε 4500 δραχμὲς σὲ 1 μῆνα τὸ κέρδος, ποὺ θὰ ἔπαιρνε σὲ 6 μῆνες, ὅσο δηλ. ἔμειναν τὰ χρήματά του στὴν ἑταιρεία, θὰ πρέπει νὰ καταθέσει 6 φορὲς περισσότερο κεφάλαιο, ἀπὸ ὅσο κατέθεσε, δηλ.:

$$4500 \times 6 = 27.000 \text{ δραχμές.}$$

Πρέπει λοιπὸν νὰ μοιράσωμε τὸ κέρδος 4000 δραχμὲς σὲ μέρη ἀνάλογα τοὺς ἀριθμοὺς 28.000 καὶ 27.000, δηλ. σὲ μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰ γινόμενα τῶν κεφαλαίων, ποὺ κατέθεσαν οἱ συνέταιροι ἐπὶ τὸ χρόνο, ποὺ ἔμειναν τὰ κεφάλαια τοῦ καθενὸς στὴν ἑταιρεία.

Μὲ ἄλλα λόγια:

Ὁ πρῶτος θὰ πάρῃ:

$$\frac{4000 \times 28000}{55000} = \frac{4000 \times 28}{55} = \frac{112000}{55} = 2036\ \frac{20}{55} \text{ δραχμές.}$$

Ὁ δεύτερος θὰ πάρῃ:

$$\frac{4000 \times 27000}{55000} = \frac{4000 \times 27}{55} = \frac{108000}{55} = 1963\ \frac{35}{55} \text{ δραχμές.}$$

Συμπέρασμα. *Ἀπὸ τὰ τρία παραπάνω παραδείγματα βγαίνει τὸ συμπέρασμα, ὅτι τὸ κέρδος ἢ ζημία μιᾶς ἑταιρείας μοιράζεται:*

α'. Σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν κεφαλαίων, ὅταν τὰ κεφάλαια ἔμειναν ἴσο χρόνο στὴν ἑταιρεία.

β'. Σὲ μέρη ἀνάλογα τοῦ χρόνου, ποὺ τὰ κεφάλαια ἔμειναν στὴν ἑταιρεία, ὅταν τὰ κεφάλαια, ποὺ κατέθεσαν, εἶναι ἴσα.

γ'. Σὲ μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰ γινόμενα τῶν κεφαλαίων ἐπὶ τὸ χρόνο, ὅταν ὁ χρόνος καὶ τὰ κεφάλαια εἶναι διάφορα.

Προβλήματα.

1. Τρεῖς ἔμποροι ἔκαμαν ἑταιρεία γιὰ μιὰ ἐμπορικὴ ἐπιχείρηση καὶ κατέθεσαν τὰ ἑξῆς ποσά: Ὁ α' 40.000 δραχμές, ὁ β' 60.000 δρχ., καὶ ὁ γ' 80.000 δρχ. Κέρδισαν ἀπὸ τὴν ἐπιχείρησή τους 36.000 δρχ. Πόσο θὰ πάρη ὁ καθένας; (8.000, 12.000, 16.000).

2. Δυὸ ἔμποροι κέρδισαν ἀπὸ μιὰ ἐπιχείρηση 30.000 δρχ. Ὁ α' κατέθεσε 50.000 δρχ. καὶ ὁ β' 75.000 δρχ. Πόσο κέρδος ἀναλογεῖ στὸν καθένα; (12.000, 18.000).

3. Τρεῖς ἔμποροι ἔκαμαν μιὰ ἐπιχείρηση. Τοῦ πρώτου τὰ χρήματα ἔμειναν στὴν ἑταιρεία 6 μῆνες, τοῦ δευτέρου 3 μῆνες καὶ τοῦ τρίτου 2 μῆνες. Ἀπὸ τὴν ἐπιχείρηση αὐτὴ κέρδισαν 440.000 δρχ. Πόσο κέρδος θὰ πάρη ὁ καθένας; (240.00, 120.000, 80.000)'

4. Τρεῖς συνέταιροι κατέθεσαν γιὰ μιὰ ἐμπορικὴ ἐπιχείρηση: Ὁ α' 30.000δρχ., ὁ β' 20.000 δρχ. καὶ ὁ γ' 40.000 δρχ. Στὸ τέλος τοῦ ἔτους βρῆκαν ζημία 45.000 δρχ. Πόσο ζημιώθηκε ὁ καθένας; (15.000, 10.000, 20.000).

5. Ἀπὸ μιὰ ἐπιχείρηση δυὸ ἔμποροι, ποὺ ὁ καθένας κατέθεσε 50.000 δρχ. καὶ ὁ ἄλλος 75.000 δρχ., ζημιώθηκαν 25.000 δρχ. Πόση ζημία ἀναλογεῖ στὸν καθένα; (10.000, 15.000).

6. Δυὸ ἔμποροι ἔκαμαν μιὰ ἑταιρεία. Ὁ α' κατέθεσε 4000 δρχ. γιὰ 6 μῆνες καὶ ὁ β' 3500 δραχμὲς γιὰ 4 μῆνες. Ἡ ἑταιρεία κέρδισε 2052 δραχμές. Πόσο κέρδος θὰ πάρη ὁ καθένας; (1296, 756).

7. Ἕνας ἔμπορος ἄρχισε μιὰ ἐπιχείρηση στὶς 20 Ἰανουαρίου. Στὶς 20 Μαΐου τοῦ ἴδιου χρόνου πῆρε συνέταιρο. Στὸ τέλος τοῦ χρόνου βρέθηκε ζημία 280.000 δρχ. Πόση ζημία ἀναλογεῖ στὸν καθένα; (170.000, 110.000).

8. Σ' ἕνα σπίτι μένουν 3 οἰκογένειες, οἱ ὁποῖες πληρώνουν γιὰ νερὸ 45 δρχ. τὸ μήνα. Ἡ α' οἰκογένεια ἔχει 5 ἄτομα, ἡ β' 6 ἄτομα καὶ ἡ γ' 4 ἄτομα. Πόσο θὰ πληρώση κάθε οἰκογένεια γιὰ νερὸ τὸ μήνα; (15, 18, 12).

9. Δυὸ κτηνοτρόφοι νοίκιασαν ἕνα λιβάδι καὶ πλήρωσαν 5000 δραχμές. Ὁ α' ἔχει 200 πρόβατα καὶ β' 100 πρόβατα περισσότερα ἀπὸ τὸν πρῶτο. Τὸ ἐνοίκιο πληρώνεται ἀνάλογα μὲ τὸν ἀριθμὸ τῶν προβάτων ποὺ ἔχει ὁ καθένας. Πόσο ἐνοίκιο θὰ πληρώση κάθε κτηνοτρόφος; (2.000, 3.000).

10. Τρεῖς συνέταιροι κέρδισαν ἀπὸ μιὰ ἐπιχείρησ 7500 δραχμές. Καὶ οἱ

τρεῖς κατέθεσαν τὸ ἴδιο κεφάλαιο, ἀλλὰ τὰ χρήματα τοῦ α΄ ἔμειναν στὴν ἑταιρεία 11 μῆνες, τοῦ β΄ 9 μῆνες καὶ τοῦ γ΄ 5 μῆνες. Πόσο κέρδος θὰ πάρη ὁ καθένας; (3.300, 2.700, 1.500).

11. Ἕνας ἔμπορος ἄρχισε μιὰ ἐπιχείρηση μὲ 35.000 δραχμές. Ὕστερα ἀπὸ 3 μῆνες πῆρε συνέταιρο, ποὺ κατέθεσε 55.000 δραχμές. Στὸ τέλος τοῦ χρόνου ὅμως βρῆκαν, πὼς ζημιώθηκαν 14640 δραχμές. Πόση ζημία ἀναλογεῖ στὸν καθένα; (6.720, 7.910).

12. Τρεῖς ἔμποροι κατέθεσαν γιὰ μιὰ ἐπιχείρηση 150.000 δρχ. Στὸ τέλος τοῦ χρόνου μοίρασαν τὸ κέρδος καὶ πῆραν: ὁ α΄ 5500 δραχμές, ὁ β΄ 6000 δρχ. καὶ ὁ γ΄ 3500 δραχμές. Πόσο κεφάλαιο κατέθεσε ὁ καθένας; (55.000, 60.000, 35.000).

13. Ἕνας ἔμπορος ἄρχισε μιὰ ἐπιχείρηση. Ὕστερα ἀπὸ 8 μῆνες πῆρε συνέταιρο, ὁ ὁποῖος κατέθεσε καὶ αὐτὸς τὸ ἴδιο ποσό. Δυὸ χρόνια ὕστερα ἀπὸ τὴν ἔναρξη τῆς ἐπιχειρήσεως βρῆκαν ὅτι ζημιώθηκαν 2550 δραχμές. Πόση ζημία ἀναλογεῖ στὸν καθένα; (1224, 816, 510).

14. Ἕνας ἔμπορος ἄρχισε μιὰ ἐπιχείρηση μὲ 65.000 δραχμὲς κεφάλαιο. Ὕστερα ἀπὸ 14 μῆνες πῆρε συνέταιρο, ὁ ὁποῖος κατέθεσε 80.000 δρχ. καὶ 1 χρόνο κατόπιν ἄλλο συνέταιρο, ὁ ὁποῖος κατέθεσε 100.000 δρχ. Ὕστερα ἀπὸ 5 χρόνια διέλυσαν τὴν ἑταιρεία καὶ βρῆκαν ὅτι κέρδισαν 95.030 δρχ. Πόσο κέρδος ἀναλογεῖ στὸν καθένα; (33.150, 31.280, 30.600).

15. Δυὸ ἔμποροι ἔκαμαν μιὰ ἑταιρεία μὲ κεφάλαιο 60.000 δρχ., τὸ ὁποῖο κατέθεσαν ἐξ ἴσου. Ὕστερα ἀπὸ δυὸ χρόνια ὁ α΄ ἔμπορος κατέθεσε ἀκόμα 50.000 δρχ. καὶ μετὰ 4 χρόνια ἀπὸ τὴν ἵδρυση τῆς ἑταιρείας κατέθεσε καὶ ὁ β΄ ἔμπορος 100.000 δρχ. Ἡ ἑταιρεία ἐργάσθηκε 10 χρόνια καὶ ἔφερε κέρδος 500.000 δρχ. Πόσο κέρδος ἀναλογεῖ στὸν καθένα; (200.000, 300.000).

16. Τρεῖς ἔμποροι κατέθεσαν συνολικὰ 500.000 δρχ. γιὰ μιὰ ἐπιχείρηση. Ὅταν μοίρασαν τὰ κέρδη, ὁ α΄ πῆρε 40.000 δρχ., ὁ β΄ 55.000 δρχ. καὶ ὁ γ΄ 30.000 δρχ. Τί κεφάλαιο κατέθεσε ὁ καθένας ἀνάλογα μὲ τὸ κέρδος, ποὺ πῆρε; (160.000, 220.000, 120.000).

17. Δέκα ἐργάτες ἀνέλαβαν νὰ σκάψουν ἕνα ἀγρό. 5 ἡμέρες μετὰ τὴν ἔναρξη τῆς ἐργασίας προστέθηκαν ἀκόμη 8 ἐργάτες. Ἡ ἐργασία βάσταξε 20 ἡμέρες καὶ πληρώθηκαν ὅλοι μαζὶ οἱ ἐργάτες μὲ τὸ ποσὸ τῶν 16.000 δρχ. Πόσες δραχμὲς πρέπει νὰ πάρουν οἱ 10 καὶ πόσες οἱ 8 ἐργάτες; (10.000, 6000).

2. Προβλήματα μέσου ὅρου

Παράδειγμα. Ἕνας οἰκογενειάρχης ξόδεψε γιὰ τὴν διατροφὴ τῆς οἰκογενείας του τὴ Δευτέρα 128 δραχμές, τὴν Τρίτη 135 δραχμὲς καὶ τὴν Τετάρτη 127 δραχμές. Πόσα ἔξοδα ἀναλογοῦν σὲ κάθε μέρα;

Λύση

Στὶς τρεῖς ἡμέρες ξόδεψε συνολικά:

128+135+127=390 δραχμές.

Συνεπῶς σὲ μιὰ ἡμέρα ἀναλογοῦν:

390: 3=130 δραχμὲς ἀκριβῶς.

Τὸ ἀποτέλεσμα αὐτό, ποὺ βρήκαμε, λέγεται μέσος ὅρος τῶν ἀριθμῶν 128, 135 καὶ 127.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μέσο ὅρο δυὸ ἢ περισσοτέρων ὁμοειδῶν ἀριθμῶν τοὺς προσθέτομε καὶ διαιροῦμε τὸ ἄθροισμά τους διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ποὺ μᾶς φανερώνει τὸ πλῆθος των (πόσοι εἶναι οἱ ἀριθμοί).

Συμπέρασμα. *Μέσος ὅρος δυὸ ἢ περισσοτέρων ὁμοειδῶν ἀριθμῶν λέγεται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματός των διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ποὺ φανερώνει τὸ πλῆθος των.*

Προβλήματα

1. Ἕνας ἐργάτης πῆρε ἡμερομίσθιο τὴ μιὰ μέρα 22 δρχ., τὴν ἄλλη 28 δρχ. καὶ τὴν τρίτη 25 δρχ. Ποιός εἶναι ὁ μέσος ὅρος τοῦ ἡμερομισθίου τοῦ ἐργάτη αὐτοῦ; (25).

2. Ἕνας μαθητὴς πῆρε στὰ Ἑλληνικὰ 8, στὰ Θρησκευτικὰ 9, στὰ Μαθηματικὰ 10, στὴν Ὠδικὴ 9 καὶ στὴ Γυμναστικὴ 9. Ποιός εἶναι ὁ γενικός του βαθμὸς (μέσος ὅρος); (9).

3. Ἡ κατώτερη θερμοκρασία μιᾶς ἡμέρας ἦταν 5,8° καὶ ἡ ἀνώτερη 10,4° Πόσος ἦταν ὁ μέσος ὅρος τῆς θερμοκρασίας τῆς ἡμέρας αὐτῆς; (8,1°).

4. Προβλήματα μείξεως

α'. Ἀνάμειξη — Μεῖγμα.

Συμβαίνει πολλὲς φορὲς οἱ ἔμποροι εἰδῶν διατροφῆς νὰ ἔχουν διάφορες ποιότητες τροφίμων ἀπὸ τὸ ἴδιο ἐμπόρευμα, π.χ. διάφορες ποιότητες λαδιοῦ, βουτύρου κλπ.

Ἐπειδὴ δὲν μποροῦν ἢ δὲν θέλουν νὰ πουλήσουν χωριστὰ κάθε ποιότητα, εἴτε γιατὶ ἡ τιμὴ πωλήσεως δὲν τοὺς συμφέρει, εἴτε γιατὶ ἡ ποιότητα εἶναι κατώτερη καὶ δὲν πουλιέται, ἀναμειγνύουν τὶς διάφορες ποιότητες καὶ κάνουν ἔτσι ἕνα μεῖγμα, ποὺ μποροῦν εὐκολώτερα νὰ τὸ πωλήσουν.

Τὸ μεῖγμα αὐτὸ φυσικὰ πουλιέται σὲ τέτοια τιμή, ὥστε ὁ ἔμπορος νὰ πάρη πάλι τόσα, ὅσα θὰ ἔπαιρνε, ἂν πουλοῦσε τὶς ποιότητες αὐτὲς χωριστά.

Ἡ πράξη αὐτὴ στὸ ἐμπόριο λέγεται ἀνάμειξη καὶ τὸ προβλήματά της προβλήματα μείξεως.

β'. Προβλήματα μείξεως α' εἴδους

Προβλήματα. Ἕνας οἰνοπώλης ἀνέμειξε 50 κιλὰ κρασὶ ἀξίας 3 δρχ. τὸ κιλὸ μὲ ἄλλα 30 κιλὰ ἀξίας 4 δρχ. τὸ κιλό. Πόσο ἀξίζει τὸ κιλὸ τοῦ μείγματος;

Λύση

Ἂν ὁ οἰνοπώλης αὐτὸς πουλοῦσε τὸ κρασὶ κάθε ποιότητας χωριστά, θὰ ἔπαιρνε ἀπὸ τὰ 50 κιλὰ τῆς α' ποιότητας πρὸς 3 δρχ. τὸ κιλὸ 150 δρχ. (50×3 =150) καὶ ἀπὸ τὰ 30 κιλὰ τῆς β' ποιότητας πρὸς 4 δρχ. τὸ κιλὸ 120 δρχ. (30×4=120).

Ἔτσι ἂν πουλοῦσε τὸ κρασὶ καὶ τῶν δυὸ ποιοτήτων ποὺ εἶχε, δηλ. 80 κιλὰ (50+30=80) μὲ τὴν τιμή τους χωριστά, θὰ ἔπαιρνε 150+120=270 δρχ.

Ἀφοῦ λοιπὸν τὰ 80 κιλὰ κρασιοῦ, ποὺ εἶναι ὅλο τὸ μεῖγμα, ἀξίζουν 270 δρχ., τὸ 1 κιλὸ τοῦ μείγματος θὰ ἀξίζη 80 φορὲς λιγότερο, δηλ. 270:80=3,35 δρχ.

Ἡ κατάταξη αὐτῶν, ποὺ εἴπαμε, θὰ γίνη ὡς ἑξῆς:

Α' ποιότης κρασιοῦ κιλὰ	50 × 3	ἀξίζουν δρχ.	= 150	δρχ.
Β' » » »	30 × 4	» »	= 120	»
Σύνολον μείγματος κιλὰ	80	» »	270	»

Τὸ 1 κιλὸ μείγματος ἀξίζει 270 : 80 = 3,35 δρχ.

Συμπέρασμα. *Προβλήματα α'. εἴδους μείξεως εἶναι τὰ προβλήματα στὰ ὁποῖα δίνονται:*

α'. Τὸ ποσὸ τῶν μονάδων, ποὺ ἀναμιγνύονται ἀπὸ κάθε εἶδος.

β'. Ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας ἀπὸ κάθε εἶδος καὶ

γ'. Ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας τοῦ μείγματος.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν τιμὴ τῆς μονάδας τοῦ μείγματος, διαιροῦμε τὴν τιμὴ τοῦ μείγματος διὰ τοῦ πλήθους τῶν μονάδων τοῦ μείγματος.

Προβλήματα

1. Ἀνέμειξα 60 κιλὰ ἀλεύρι τῶν 3,90 δρχ. τὸ κιλὸ μὲ 40 κιλὰ δευτέρας ποιότητας τῶν 3,10 δρχ. τὸ κιλό. Πόσο ἀξίζει τὸ ἕνα κιλὸ τοῦ μείγματος αὐτοῦ; (3,58).

2. Ἕνας ἔμπορος ἀνέμειξε 52 κιλὰ λάδι, ποὺ τὸ κιλό του ζυγίζει 24 δρχ. μὲ 78 κιλὰ ἄλλου λαδιοῦ, ποὺ τὸ κιλό του ἀξίζει 28 δρχ. Πόσο ἀξίζει τὸ κιλὸ τοῦ μείγματος; (26,4).

3. Ἀνέμειξε κάποιος 40 κιλὰ ξύδι, ποὺ ἄξιζε 3 δρχ. μὲ 20 κιλὰ νερό. Πόσο κοστίζει ἡ ὀκὰ τοῦ μείγματος αὐτοῦ; (2 δρχ.).

4. Ἕνας ἔμπορος ἀνέμειξε 50 κιλὰ λάδι τῶν 25 δρχ. κατὰ κιλὸ μὲ 30 κιλὰ ἄλλου λαδιοῦ τῶν 23 δρχ. κατὰ κιλό. Πόσο θὰ κερδίζη, ἂν πωλῆ τὸ κιλὸ τοῦ μείγματος αὐτοῦ 26 δρχ.; (1,75 στὸ κιλό.).

5. Ἕνας τυροκόμος ἀνέμειξε 160 κιλὰ ἁγνὸ βούτυρο, ποὺ τὸ κιλό του κοστίζει 44 δρχ. μὲ 40 κιλὰ λίπος, ποὺ τὸ κιλό του κοστίζει 20 δρχ. Πόσο πρέπει νὰ πουλῆ τὸ κιλὸ τοῦ μείγματος, γιὰ νὰ κερδίζη 6 δρχ. σὲ κάθε κιλό; (45,20)

6. Ἕνας παντοπώλης ἀνέμειξε 40 κιλὰ λάδι, ποὺ τὸ κιλό του ἀξίζει 22 δρχ. μὲ 20 κιλὰ ἄλλης ποιότητας λαδιοῦ. Τὸ κιλὸ τοῦ μείγματος αὐτοῦ ἀξίζει 23 δρχ. Πόσο ἀξίζει κάθε κιλὸ τοῦ λαδιοῦ τῆς ποιότητας τῶν 20 κιλῶν; (25).

7. Ἕνας καφεπώλης ἀνέμειξε 10 κιλὰ καφέ, ποὺ τὸ ἕνα κιλὸ ἀξίζει 90 δρχ. μὲ 6 κιλὰ ἄλλου καφέ, ποὺ τὸ κιλό του ἀξίζει 80 δρχ. Στὸ μεῖγμα αὐτὸ ἔβαλε καὶ 4 κιλὰ ρεβίθι, ποὺ τὸ κιλό του ἀξίζει 3,25 δρχ. Ὅλο τὸ μεῖγμα καβουρδίσθηκε καὶ ἔχασε τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ βάρους του. Πόσο κοστίζει τὸ κιλὸ τοῦ μείγματος αὐτοῦ; (79,6).

8. Ἀνέμειξε κάποιος 120 κιλὰ λαδιοῦ, ποὺ ἡ ὀκά του ἀξίζει 24 δρχ. μὲ 80 κιλὰ ἄλλης ποιότητας λαδιοῦ, ποὺ τὸ κιλό του ἀξίζει 22,5 δρχ. Πούλησε τὸ κιλὸ τοῦ μείγματος πρὸς 26 δρχ. Νὰ βρῆτε πόσο τοῖς ἑκατὸ κέρδισε; (10%).

9. Ἕνας ἔμπορος ἀνέμειξε 140 κιλὰ οἰνόπνευμα τῶν 60°, 200 κιλὰ τῶν 33,5° καὶ 320 κιλὰ τῶν 25°. Πόσους βαθμοὺς θὰ ἔχη τὸ κιλὸ τοῦ μείγματος αὐτοῦ; (35°).

10. Ἕνας ἔμπορος ἔχει 500 κιλὰ οἰνόπνευμα τῶν 65 βαθμῶν. Πόσα κιλὸ νερὸ πρέπει νὰ ἀναμείξη σ' αὐτό, ὥστε τὸ μεῖγμα νὰ ἔχη 40 βαθμούς; (337,5 κιλὰ νερό).

β' Προβλήματα μείξεως β' εἴδους

Παράδειγμα. Ἕνας ἔμπορος ἔχει δυὸ ποιότητες λαδιοῦ. Τοῦ ἑνὸς τὸ κιλὸ ἀξίζει 25 δραχμὲς καὶ τοῦ ἄλλου 22 δραχμές. Πόσα κιλὰ πρέπει νὰ πάρη ἀπὸ κάθε ποιότητα γιὰ νὰ σχηματίση μεῖγμα 60 κιλά, ποὺ τὸ κιλὸ νὰ ἀξίζη 23 δραχμές;

Λύση

Γιὰ νὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα αὐτὸ σκεπτόμαστε ἔτσι:

Ἡ ἀνάμειξη τῶν δυὸ ποιοτήτων τοῦ λαδιοῦ πρέπει νὰ γίνη κατὰ τέτοιο τρόπο, ὥστε τὸ κέρδος, ποὺ θὰ ἔχωμε ἀπὸ τὴν κατώτερη ποιότητα, νὰ εἶναι ἴσο μὲ τὴ ζημία, ποὺ θὰ ἔχωμε ἀπὸ τὴν καλύτερη ποιότητα τοῦ λαδιοῦ.

Μὲ ἄλλα λόγια πρέπει νὰ βροῦμε πόσα κιλὰ λάδι θὰ πάρωμε ἀπὸ κάθε ποιότητα, γιὰ νὰ σχηματίσωμε μεῖγμα 60 κιλῶν, ποὺ τὸ κιλὸ νὰ κοστίζη 23 δρχ., χωρὶς νὰ χάνωμε, οὔτε καὶ νὰ κερδίζωμε.

Τὸ ἕνα κιλὸ τῆς πρώτης ποιότητας ἀξίζει 25 δρχ. Ὅταν τὸ βάλωμε στὸ μεῖγμα, θὰ πουλιέται 23 δρχ. Συνεπῶς θὰ ἔχωμε ζημία ἀπὸ κάθε κιλὸ 2 δραχμές.

Τὸ ἕνα κιλὸ τῆς δευτέρας ποιότητας ἀξίζει 22 δρχ. Ὅταν τὴ βάλουμε στὸ μεῖγμα, θὰ πουλιέται 23 δρχ. Συνεπῶς θὰ ἔχωμε κέρδος ἀπὸ κάθε κιλὸ 1 δραχμή.

Ἂν πάρωμε λοιπὸν ἀπὸ τὴν πρώτη ποιότητα τοῦ λαδιοῦ 1 κιλὸ (δηλ. τόσα κιλά, ὅσες δραχμὲς κερδίζει ἀπὸ τὴ δεύτερη ποιότητα), θὰ χάσωμε 2 δραχμὲς (1 κιλὸ $\times$ 2 = 2 δρχ.). Ἂν πάρωμε ἀπὸ τὴ δεύτερη ποιότητα τοῦ λαδιοῦ 2 κιλά, (δηλ. τόσα κιλά, ὅσες δραχμὲς χάνει ἀπὸ τὴν πρώτη ποιότητα) θὰ κερδίσωμε 2 δραχμὲς (2 κιλὰ $\times$ 1 = 2 δραχ.).

Ὥστε ἂν πάρωμε ἕνα κιλὸ ἀπὸ τὴν πρώτη ποιότητα καὶ 2 κιλὰ ἀπὸ τὴ δεύτερη καὶ κάνωμε μεῖγμα 3 κιλῶν, οὔτε χάνομε, οὔτε κερδίζομε.

Συνεπῶς ἡ ἀνάμειξη πρέπει νὰ γίνῃ μὲ τὴν ἀναλογία αὐτή, δηλ. γιὰ κάθε 3 κιλὰ μείγματος θὰ παίρνωμε 1 κιλὸ ἀπὸ τὴν πρώτη ποιότητα καὶ 2 κιλὰ ἀπὸ τὴ δεύτερη.

Μὲ ἄλλα λόγια γιὰ νὰ βροῦμε πόσα κιλὰ θὰ πάρωμε ἀπὸ τὴν πρώτη ποιότητα καὶ πόσα ἀπὸ τὴ δεύτερη γιὰ νὰ κάνομε μεῖγμα 60 κιλῶν πρέπει νὰ μοιράσωμε τὸν ἀριθμὸ 60 σὲ μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 2.

Ἤτοι: Ἀπὸ τὴν α΄ ποιότητα $\frac{60 \times 1}{3} = \frac{60}{3} = 20$ κιλὰ

Ἀπὸ τὴν β΄ ποιότητα $\frac{60 \times 2}{3} = \frac{120}{3} = 40$ κιλὰ

60 κιλά.

Ἡ κατάταξη θὰ γίνῃ ὡς ἑξῆς:

α΄ ποιότης 25 δραχ. ↘ μεῖγμα 23 δραχ. ↗ 1 διαφορὰ τοῦ 23 ἀπὸ τὸ 22

β΄ ποιότης 22 δραχ. ↗ μεῖγμα 23 δραχ. ↘ 2 διαφορὰ τοῦ 23 ἀπὸ τὸ 25

3 κιλὰ μείγματος.

Συμπέρασμα. *Προβλήματα β΄. εἴδους μείξεως εἶναι ἐκεῖνα, στὰ ὁποῖα δίνονται :*

α΄. Ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδας κάθε ποιότητας, ποὺ θὰ ἀναμείξωμε.

β΄. Ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδας τοῦ μείγματος

γ΄. Τὸ ποσὸ τοῦ μείγματος.

Καὶ ζητεῖται νὰ βροῦμε πόσες μονάδες πρέπει νὰ πάρωμε ἀπὸ κάθε εἶδος, γιὰ νὰ κάμωμε τὸ μεῖγμα αὐτό, χωρὶς νὰ χάνωμε, οὔτε καὶ νὰ κερδίζωμε.

Προβλήματα

Α΄. Ὁμάδα

Σημ: Νὰ λύσετε τὰ παρακάτω προβλήματα σύμφωνα μὲ τὸ παράδειγμά μας

1. Ἕνας τυροκόμος εἶχε δυὸ ποιότητες βουτύρου. Τὸ κιλὸ τῆς μιᾶς ποιότητας ἀξίζει 34 δραχμὲς καὶ τῆς ἄλλης 43 δραχμές. Θέλει νὰ κάμη μεῖγμα 40 κιλῶν, ποὺ νὰ κοστίζη 39 δραχμὲς τὸ κιλό. Πόσα κιλὰ πρέπει νὰ ἀναμείξη ἀπὸ κάθε ποιότητα;

Κατάταξη

α΄ ποιότητα 34 δραχ. ↘ μεῖγμα 39 δραχ. 4 ↗ 4
β΄ ποιότητα 43 δραχ. ↗ ↘ 5

9 κιλὰ μείγματος

Ἂν πάρη 4 κιλὰ ἀπὸ τὴν πρώτη ποιότητα κ ε ρ δ ί ζ ε ι

$4 \times 5 = 20$ δραχμὲς

Καὶ ἂν πάρη 5 κιλὰ ἀπὸ τὴ δεύτερη ποιότητα χ ά ν ε ι

$5 \times 4 = 20$ δραχμές.

Συνεπῶς οὔτε κερδίζει, οὔτε χάνει, ἂν κάμη μεῖγμα 9 κιλῶν καὶ πάρη 4 κιλὰ ἀπὸ τὴν πρώτη ποιότητα καὶ 5 κιλὰ ἀπὸ τὴ δεύτερη.

Συνεπῶς θὰ μοιράσωμε τὸν ἀριθμὸ 40 σὲ μέρη ἀνάλογα μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 4 καὶ 5.

Λύση

Ἀπὸ τὴν α΄ ποιότητα $\frac{40 \times 4}{9} = \frac{160}{9} = 17\frac{7}{9}$ κιλά.

Ἀπὸ τὴν β΄ ποιότητα $\frac{40 \times 5}{9} = \frac{200}{9} = 22\frac{2}{9}$ κιλά.

2. Ἕνας παντοπώλης ἀνέμειξε δυὸ εἰδῶν λάδι. Τοῦ ἑνὸς τὸ κιλὸ ἄξιζε 22 δραχμὲς καὶ τοῦ ἄλλου 17 δραχμές. Ἔκαμε μεῖγμα 100 κιλῶν, ποὺ κοστίζει 20 δραχμές τὸ κιλό. Πόσα κιλὰ ἀνέμειξε ἀπὸ κάθε εἶδος; (60, 40).

3. Θέλω νὰ ἀναμείξω βούτυρο τῶν 54 δραχμῶν τὸ κιλὸ μὲ λίπος τῶν 40 δραχμῶν τὸ κιλὸ καὶ νὰ κάνω μεῖγμα 28 κιλῶν, ποὺ νὰ ἀξίζη 48 δραχμὲς τὸ κιλό. Πόσα κιλὰ θὰ ἀναμείξω ἀπὸ τὸ κάθε εἶδος; (16, 12).

4. Ἕνας ποτοποιὸς ἀνέμειξε οἰνόπνευμα 80° μὲ ἄλλο οἰνόπνευμα τῶν 70°. Πόσα κιλὰ πρέπει νὰ πάρη ἀπὸ τὸ κάθε εἶδος γιὰ νὰ κάμη μεῖγμα 50 κιλῶν, τὸ ὁποῖο νὰ ἔχη 77°; (35, 15).

Β΄. Ὁμάδα

1. Ἀνέμειξε κάποιος 40 κιλὰ λίπος τῶν 14 δραχμῶν τὸ κιλὸ μὲ 15 κιλὰ

βούτυρο καὶ ἔκανε μεῖγμα, ποὺ τὸ κιλὸ ἀξίζει 25 δρχ. Πόσο ἀξίζει τὸ κιλὸ τοῦ βουτύρου; $(54 \frac{1}{3}$ δρχ.).

2. Ἕνας οἰνοπώλης ἀνέμειξε 120 κιλὰ κρασιοῦ τῶν 3 δρχ. τὸ κιλὸ μὲ 100 κιλὰ ἄλλου κρασιοῦ. Μέσα στὸ μεῖγμα αὐτὸ ἔρριξε καὶ 30 κιλὰ νερό. Τὸ μεῖγμα τοῦ κοστίζει τώρα 2.50 δρχ. τὸ κιλό. Πόσο κοστίζει τὸ κιλὸ τοῦ κρασιοῦ τοῦ δευτέρου εἴδους; (2,65 δρχ.).

3. Ἕνας ἀρτοποιὸς ἀνέμειξε δυὸ ποιότητες ἀλευριοῦ καὶ ἔκανε μεῖγμα, ποὺ τὸ κιλό του κοστίζει 4,80 δραχμές. Τὸ κιλὸ τῆς μιᾶς ποιότητας ἀξίζει 4 δραχμές. Ἀπ' αὐτὴ πῆρε 60 κιλά. Τὸ κιλὸ τῆς ἄλλης ποιότητας ἀξίζει 6 δρχ. Πόσα κιλὰ πῆρε ἀπὸ τὴν ποιότητα αὐτή; (40 κιλά).

4. Ἕνας παντοπώλης ἀνέμειξε βούτυρο τῶν 42 δρχ. τὸ κιλὸ μὲ λίπος τῶν 14 δραχμῶν τὸ κιλό. Μὲ ποιὰ ἀναλογία πρέπει νὰ ἀναμείξη τὰ δυὸ εἴδη γιὰ νὰ κάμη μεῖγμα, τὸ ὁποῖο νὰ κοστίζη 38 δρχ. τὸ κιλό; (24 πρὸς 4).

5. Προβλήματα κραμάτων

α'. Κράμα

Οἱ χρυσοχόοι συγχωνεύουν πολλὲς φορὲς διάφορα πολύτιμα μέταλλα μὲ ἄλλα μὴ πολύτιμα, γιὰ νὰ κατασκευάσουν τὰ κοσμήματα. Ἡ συγχώνευση γίνεται μὲ τὴν τήξη τῶν μετάλλων. Τὸ σῶμα, ποὺ γίνεται μὲ τὴ συγχώνευση, λέγεται κράμα.

Τὸ ποσὸ τοῦ πολύτιμου μετάλλου (χρυσάφι, ἄργυρος κλπ.), ποὺ ὑπάρχει σὲ μιὰ μονάδα κράματος, λέγεται τίτλος ἢ βαθμὸς καθαρότητας. Ὁ τίτλος τοῦ κράματος συνήθως ἐκφράζεται σὲ χιλιοστά. Λέμε π.χ. ὅτι ἕνα κόσμημα ἔχει τίτλο 0,850. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ κόσμημα αὐτὸ περιέχει σὲ κάθε 1000 γραμμάρια τοῦ βάρους του 850 γραμμάρια καθαρὸ χρυσάφι καὶ τὰ ἄλλα 150 γραμμάρια εἶναι μέταλλα, μὴ πολύτιμα, ὅπως ὁ χαλκὸς κλπ.

Ὁ τίτλος τῶν χρυσῶν κοσμημάτων ἐκφράζεται καὶ σὲ καράτια. Ἕνα κόσμημα ἀπὸ καθαρὸ χρυσάφι εἶναι 24 καρατιῶν. Ἂν τώρα ποῦμε ὅτι ἕνα κόσμημα εἶναι 18 καρατιῶν, σημαίνει ὅτι τὸ κόσμημα αὐτὸ ἔχει 18 μέρη καθαρὸ χρυσάφι καὶ ἄλλα 6 μέρη εἶναι ἀπὸ ἄλλο μέταλλο.

β'. Προβλήματα κραμάτων

Τὰ προβλήματα τῶν κραμάτων λύνονται, ὅπως καὶ τὰ προβλήματα μείξεως.

Παράδειγμα 1. Ἕνας χρυσοχόος ἔκαμε κράμα μὲ 20 γραμμάρια χρυσιαφιοῦ, ποὺ εἶχε τίτλο, 0,800 καὶ μὲ 30 γραμμάρια ἄλλου χρυσαφιοῦ, ποὺ εἶχε τίτλο

0,700. Ποιός εἶναι ὁ τίτλος αὐτοῦ τοῦ κράμματος; (δηλ. τί βαθμὸ καθαρότητας ἔχει αὐτὸ τὸ κράμα;)

Λύση

Τὰ 20 γραμμάρια τῆς α΄ ποιότητας τοῦ χρυσοῦ ἔχουν

$0,800 \times 20 = 16$ γραμμάρ. καθ. χρυσό.

Τὰ 30 γραμμάρια τῆς β΄ ποιότητας τοῦ χρυσοῦ ἔχουν

$0,70 \times 30 = 21$ γραμμ. καθ. χρυσό.

Τὰ 50 γραμμάρια τοῦ κράματος ἔχουν 37 γραμμ. καθ. χρυσό.

Τὸ 1 γραμμάριο θὰ ἔχῃ $37 : 50 = 0,740$ γραμμ. καθ. χρυσό. Συνεπῶς ὁ βαθμὸς καθαρότητας τοῦ κράματος αὐτοῦ εἶναι 0,740.

Παράδειγμα 2. Ἕνας χρυσοχόος ἔχει δυὸ εἴδη χρυσοῦ. Τοῦ ἑνὸς εἴδους ὁ τίτλος εἶναι 0,900 καὶ τοῦ ἄλλου 0,650. Θέλει νὰ κάνῃ κράμα 50 γραμμαρίων μὲ βαθμὸ καθαρότητας 0,750. Πόσα γραμμάρια πρέπει νὰ πάρῃ ἀπὸ τὸ κάθε εἶδος;

Λύση

Τίτλος τοῦ α΄ εἴδους 0,900 ↘   ↗ 0,100 — 10
τίτλος μὲ κράμ. 0,750
Τίτλος τοῦ β΄ εἴδους 0,650 ↗   ↘ 0,150 — 15

25

Ἀπὸ τὸ α΄ εἶδος θὰ πάρῃ $\frac{50 \times 10}{25} = \frac{500}{25} = 20$ γραμμάρια.

Ἀπὸ τὸ β΄ εἶδος θὰ πάρῃ $\frac{50 \times 15}{25} = \frac{750}{25} = 30$ γραμμάρια.

50

Προβλήματα

1. Ἕνας χρυσοχόος ἔκαμε κράμα 40 γραμμαρίων ἀπὸ δυὸ εἴδη χρυσοῦ. Ἀπὸ τὸ πρῶτο εἶδος, ποὺ εἶχε τίτλο 0,800, ἔβαλε 30 γραμμ. καὶ ἀπὸ τὸ δεύτερο, ποὺ εἶχε τίτλο 0,900 ἔβαλε 10 γραμμ. Ποιός εἶναι ὁ βαθμὸς καθαρότητας αὐτοῦ τοῦ κράματος; (0,825).

2. Ἕνας χρυσοχόος ἔχει δυὸ εἴδη ἀργύρου. Τὸ α΄ ἔχει τίτλο 0,850 τὸ β΄ 0,700. Θέλει νὰ κάμῃ νέο κράμα 80 γραμμαρίων μὲ τίτλο 0,790. Πόσα γραμμάρια θὰ πάρῃ ἀπὸ κάθε εἶδος; (48, 32).

4. Ἕνα χρυσὸ κόσμημα ἔχει 100 γραμμ. καθαρὸ χρυσάφι καὶ 30 γραμμ. χαλκό. Πόσος εἶναι ὁ τίτλος αὐτοῦ τοῦ κοσμήματος; (0,800).

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ