12

Γ. ΚΑΦΕΝΤΖΗ

«Ένωσις Συγγραφέων Σχολικών Βιβλίων
„Ο ΕΡΜΗΣ"»

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Νέα ἔκδοση μεταγλωττισμένη στὴ Δημοτικὴ σύμφωνα μὲ τὴν ὑπ' ἀριθ. 76794/65 ἀπόφαση τοῦ Ὑπουργ. Παιδείας

ΕΚΔΟΣΙΣ: ΔΙΟΝ. & ΒΑΣ. ΛΟΥΚΟΠΟΥΛΟΥ ΑΘΗΝΑΙ
ΣΤΑΔΙΟΥ 38 (Στοά Νικολούδη 10)

Γ. ΚΑΦΕΝΤΖΗ

Ἰωάννης Καλατζῆς Τάξις Στ΄

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΓΙΑ ΤΗΝ Ε΄ ΚΑΙ ΣΤ΄ ΤΑΞΗ ΤΩΝ ΔΗΜΟΤΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

Νέα ἔκδοση μεταγλωττισμένη στὴ Δημοτικὴ σύμφωνα μὲ τὴν ὑπ' ἀριθ. 76.794/12.6.65 ἀπόφαση τοῦ Ὑπουργείου Παιδείας.

ΕΚΔΟΣΗ ΔΙΟΝ. & ΒΑΣ. ΛΟΥΚΟΠΟΥΛΟΥ ΑΘΗΝΑΙ
ΣΤΟΑ ΝΙΚΟΛΟΥΔΗ 10

Κάθε γνήσιο ἀντίτυπο φέρει τὴν ὑπογραφὴ τοῦ συγγραφέα

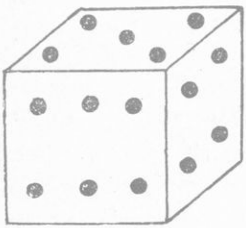
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΜΕΡΟΣ Α′

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α

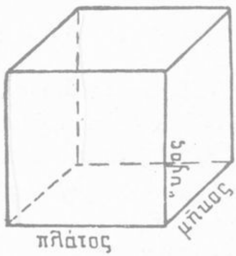
ΚΥΒΟΣ

Ἔχουμε μπρός μας ἕνα στερεὸ σῶμα, ὅμοιο μὲ τὸ ζάρι



ζάρι

Σχ. 1



ΚΥΒΟΣ

Σχ. 2

(σχ. 1). Τὸ στερεὸ αὐτὸ σῶμα λέγεται **κύβος** (σχ. 2).

1. Ἐπιφάνεια τοῦ κύβου

Τὸ ἐξωτερικὸ μέρος τοῦ κύβου, τὸ ὁποῖο βλέπουμε καὶ πιάνουμε, δηλαδὴ ὅλα μαζὶ τὰ ἄκρα του, λέγονται **ἐπιφάνεια αὐτοῦ.**

Ὥστε, **ἐπιφάνεια ἑνὸς σώματος λέγεται τὸ ἐξωτερικὸ μέρος αὐτοῦ, τὸ ὁποῖο βλέπουμε ἢ πιάνουμε.**

Ὁλόκληρος ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 ἄλλες μικρότερες.

Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια. Ἂν πάρουμε τὸν **κανόνα** (χάρακα) καὶ τὸν τοποθετήσουμε ἐπάνω σὲ μιά, ὁποιαδήποτε, ἀπὸ τὶς 6 ἐπιφάνειες τοῦ κύβου, θὰ ἰδοῦμε, ὅτι ὅλα τὰ μέρη τοῦ κανόνος ἐφαρμόζουν ἀκριβῶς ἐπάνω της. Ὁπωσδήποτε δὲ καὶ ἂν τὸν μετακινήσουμε στὴν ἴδια ἐπιφάνεια, ἢ καὶ σὲ ὁποιαδήποτε ἀπὸ τὶς ἄλλες, θὰ ἰδοῦμε ὅτι τὸ ἴδιο θὰ συμβῇ.

Κάθε μία λοιπὸν ἀπὸ τὶς 6 ἐπιφάνειες τοῦ κύβου, ἀλλὰ καὶ ὁποιαδήποτε ἄλλη ἐπιφάνεια, ὅταν ὅλα τὰ μέρη της ἀκουμποῦν στὸν κανόνα, ὁπωσδήποτε καὶ ἂν τὸν τοποθετήσουμε ἐπάνω της, λέγεται **ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἢ ἐπίπεδον.**

Ὥστε, **ὁ κύβος ἔχει 6 ἐπίπεδες ἐπιφάνειες.**

Τεθλασμένη. Ἂν προσέξουμε ὅμως τὸν κύβο, θὰ δοῦμε ὅτι, ἐνῶ ἀποτελεῖται ἀπὸ 5 ἐπίπεδες ἐπιφάνειες, ὁλόκληρος ἡ ἐπιφάνειά του δὲν εἶναι ἐπίπεδος. Ἡ ἐπιφάνεια ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἄλλες ἐπίπεδες, χωρὶς ὅλη νὰ εἶναι ἐπίπεδος, λέγεται **τεθλασμένη.**

Ὥστε, **ὁ κύβος ἔχει ἐπιφάνεια τεθλασμένη.**

Ἀσκήσεις

1. Πότε μία ἐπιφάνεια λέγεται ἐπίπεδος;
2. Πότε μία ἐπιφάνεια λέγεται τεθλασμένη;
3. Πόσες ἐπίπεδες ἐπιφάνειες ἔχει ὁ κύβος;
4. Τί ἐπιφάνεια εἶναι ὁλόκληρος ἡ ἐπιφάνειά του;
5. Νὰ δείξουν οἱ μαθηταὶ ἐπιφάνειες ἐπίπεδες.
6. Νὰ ὀνομάσουν σώματα μὲ ἐπιφάνειες ἐπίπεδες καὶ σώματα μὲ ἐπιφάνεια τεθλασμένη.

2. Ἕδρες, ἀκμὲς καὶ κορυφὲς τοῦ κύβου

Κάθε μία ἀπὸ τὶς ἐπίπεδες ἐπιφάνειες τοῦ κύβου λέγεται **ἕδρα.** Τὰ σώματα ποὺ ἔχουν πολλὲς ἕδρες λέγονται **πολύεδρα,** ἀνάλογα δὲ μὲ τὸν ἀριθμὸ τῶν ἑδρῶν των, λέγονται ἑξάεδρα, πεντάεδρα, τετράεδρα κ.λ.π.

Ὁ κύβος εἶναι **ἑξάεδρο σῶμα.**

Ἂν παρατηρήσουμε τὶς ἕδρες τοῦ κύβου, θὰ δοῦμε ὅτι, κάθε δύο ἀπ' αὐτές, συναντῶνται. Τὸ μέρος ὅπου συναντῶνται λέγεται **ἀκμὴ** (κόχη). Θὰ δοῦμε ἐπίσης ὅτι σὲ ὡρισμένα σημεῖα τοῦ κύβου συναντῶνται 3 ἕδρες του. Τὰ σημεῖα αὐτὰ λέγονται **κορυφὲς** τοῦ κύβου.

Ἂν τώρα μετρήσουμε τὶς ἀκμὲς τοῦ κύβου θὰ δοῦμε, ὅτι εἶναι 12 καὶ ἂν κάνουμε τὸ ἴδιο καὶ στὶς κορυφές του θὰ ἰδοῦμε, ὅτι εἶναι 8.

Ὥστε, **ὁ κύβος ἔχει 6 ἕδρες, 12 ἀκμὲς παὶ 8 κορυφές.**

Ἀσκήσεις

1. Νὰ δείξουν καὶ ἀπαριθμήσουν οἱ μαθηταὶ τὶς ἕδρες, τὶς ἀκμὲς καὶ τὶς κορυφὲς τοῦ κύβου.

2. Νὰ δείξουν καὶ ἀπαριθμήσουν τὶς ἕδρες, τὶς ἀκμὲς καὶ τὶς κορυφὲς ἄλλων πολυέδρων σωμάτων.

3. Θέσεις τῶν ἑδρῶν καὶ τῶν ἀκμῶν τοῦ κύβου

Ἂν τοποθετήσουμε τὸν κύβο ἐμπρός μας, ἐπάνω στὸ τραπέζι, θὰ παρατηρήσουμε, ὅτι οἱ ἕδρες του δὲν ἔχουν ὅλες τὴν ἴδια διεύθυνση. Οἱ 4 ἀπ᾽αὐτές, ἡ ἐμπροσθία καὶ ἡ ὀπισθία, ἡ δεξιὰ καὶ ἡ ἀριστερά, ὑψώνονταί ἴσα καὶ ἀκριβῶς ἀπὸ κάτω πρὸς τὰ ἐπάνω, ἐνῶ οἱ ἄλλες 2, ἡ κάτω καὶ ἡ ἐπάνω, ἔχουν διεύθυνση ἀπὸ ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιά.

Ἡ διεύθυνση ποὺ ἔχουν οἱ 4 ἕδρες τοῦ κύβου, αὐτὲς ποὺ ὑψώνονται ἴσα καὶ ἀκριβῶς ἀπὸ κάτω πρὸς τὰ ἐπάνω, λέγεται **κατακόρυφος.** Τὴν ἰδία διεύθυνση ἔχουν καὶ οἱ ἀκμὲς των.

Ὥστε, οἱ **4 ἕδρες τοῦ κύβου καὶ οἱ ἀκμές των ἔχουν διεύθυνση κατακόρυφο.**

Σχ. 3.

Πολλὰ σώματα ἔχουν ἕδρες μὲ κατακόρυφο διεύθυνση π.χ. οἱ ἐπιφάνειες τῶν τοίχων τῶν σπιτιῶν, οἱ ἐπιφάνειες τῶν παραθύρων, οἱ κολῶνες τῶν Ἐκκλησιῶν κλπ.

Νῆμα τῆς στάθμης. Οἱ κτίστες, γιὰ νὰ ἐξακριβώσουν ἂν οἱ τοῖχοι ποὺ κτίζουν εἶναι κατακόρυφοι, χρησιμοποιοῦν ἕνα πολὺ ἁπλὸ ὄργανο, τὸ ὁποῖο λέγεται **νῆμα τῆς στάθμης ἢ βαρίδι** (σχ.3.)Αὐτὸ εἶναι ἕνα σχοινί, στὴν ἄκρη τοῦ ὁποίου εἶναι δεμένο ἕνα βάρος, π.χ. μιὰ πέτρα. Ἂν τὸ σχοινὶ αὐτὸ τὸ κρατήσουμε ἀπὸ τὴν ἐλεύθερη ἄκρη του, θὰ κρεμασθῇ καὶ θὰ τεντώσῃ κατακορύφως (ἴσα πρὸς σὰ κάτω) ἀπὸ τὸ βάρος τῆς πέτρας.

Ἡ διεύθυνση αὐτή, λέγεται **κατακόρυφος**

Ὥστε, **κάθε ἐπιφάνεια ποὺ ἔχει τὴν διεύθυνση τοῦ νήματος τῆς στάθμης λέγεται κατακόρυφος.**

Ὁρίζόντιες. Οἱ ἄλλες 2 ἕδρες τοῦ κύβου, εἴδαμε ὅτι ἔχουν διεύθυνση ἀπὸ ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιά, ἡ ὁποία ὁμοιάζει μὲ τὴν διεύθυνση τοῦ ἥσυχου νεροῦ.

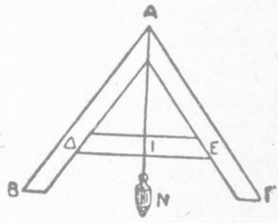
Ἡ διεύθυνση αὐτὴ λέγεται **ὁριζοντία.**

Ὥστε, **οἱ 2 ἕδρες τοῦ κύβου καὶ οἱ ἀκμές των ἔχουν διεύθυνση ὁριζοντία.**

Πολλὰ σώματα ἔχουν ἕδρες μὲ ὁριζοντία διεύθυνση, π.χ. ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πατώματος, ἡ ἐπάνω ἐπιφάνεια τοῦ τραπεζιοῦ, ἡ ἐπιφάνεια τῶν ὑγρῶν ποὺ εἶναι σὲ δοχεῖα, ἡ ἐπιφάνεια τῆς λίμνης καὶ τῆς θαλάσσης, ὅταν εἶναι ἤρεμη κλπ.

Ὥστε, **κάθε ἐπιφάνεια ποὺ ἔχει τὴ διεύθυνση τοῦ ἤρεμου νεροῦ, λέγεται ὁριζοντία.**

Ἀλφάδι. Οἱ τεχνῖτες. γιὰ νὰ ἐξακριβώσουν ἂν μία ἐπιφάνεια εἶναι ὁριζοντία, μεταχειρίζονται τὸ ἀλφάδι (σχ. 4). Τὸ ἀλφάδι εἶναι ἕνα ἁπλὸ ὄργανο ἀπὸ ξύλο, τὸ ὁποῖο ἔχει σχῆμα Α κεφαλαίου, ἀπὸ τὴν κορυφὴ τοῦ ὁποίου κρέμαται μὲ σχοινὶ ἕνα μικρὸ βάρος.



Σχ. 4.

Τὰ ἄκρα τῶν σκελῶν του τ' ἀκουμποῦν ἐπάνω στὴν ἐπιφάνεια, ποὺ θέλουν νὰ ἐξακριβώσουν ἂν εἶναι ὁριζόντία. Ἂν ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ὁριζοντία, τὸ σχοινὶ περνᾶ μέσα ἀπὸ τὴ σχισμὴ ποὺ εἶναι χαραγμένη στὸ μέσο ἀκριβῶς τοῦ ξύλου, ποὺ ἑνώνει τὰ 2 σκέλη τοῦ ἀλφαδιοῦ, ἂν δὲν εἶναι ὁριζοντία, τὸ σχοινὶ ξεφεύγει δεξιὰ ἢ ἀριστερὰ τῆς σχισμῆς, ἀνάλογα μὲ τὴν κλίση ποὺ ἔχει ἡ ἐπιφάνεια.

Παράλληλες. Ἂν μπορούσαμε νὰ μεγαλώσουμε δύο ἀπὸ τὶς ἀπέναντι ἕδρες τοῦ κύβου θὰ παρατηρούσαμε ὅτι, ὁσονδήποτε καὶ ἂν τὶς μεγαλώσουμε, δὲν θὰ συναντηθοῦν. Οἱ ἕδρες αὐτὲς λέγονται **παράλληλες.**

Ὥστε, **οἱ ἀπέναντι ἕδρες τοῦ κύβου εἶναι παράλληλες.**

Ἐπίσης παράλληλες εἶναι καὶ οἱ ἀπέναντι ἀκμὲς τοῦ κύβου, διότι ὅσο καὶ ἂν προεκταθοῦν δὲν συναντῶνται.

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς Α'. 1. Πότε μία ἐπιφάνεια λέγεται κατακόρυφος καὶ πότε ὁριζοντία;

2. Νὰ βάλουν οἱ μαθηταὶ τὸ βιβλίο των κατακορύφως καὶ ὁριζοντίως.

3. Νὰ δείξουν τὶς κατακόρυφες καὶ ὁριζόντιες ἐπιφάνειες τῆς αἰθούσης.

4. Μὲ ποιὸ ὄργανο βρίσκουμε ἂν μιὰ ἐπιφάνεια εἶναι κατακόρυφος;

5. Νὰ φτιάξουν οἱ μαθηταὶ νῆμα τῆς στάθμης καὶ νὰ ἐξακριβώσουν ἂν οἱ τοῖχοι τῆς αἰθούσης των εἶναι κατακόρυφοι.

Ὁμὰς Β΄. 6. Πῶς ἐξακριβώνουμε ἂν μία ἐπιφάνεια εἶναι ὁριζοντία;

7. Νὰ φτιάξουν οἱ μαθηταί, τὴν ὥρα τῆς χειροτεχνίας ἀλφάδι καὶ νὰ ἐξακριβώσουν ἂν τὸ πάτωμα τῆς αἰθούσης των εἶναι ἐπιφάνεια ὁριζοντία.

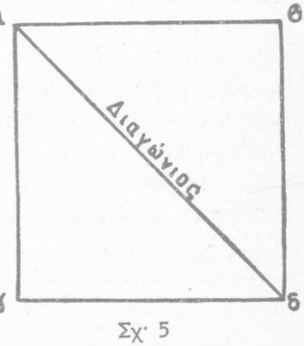
8. Πότε δύο ἐπίπεδα λέγονται παράλληλα ;

9. Νὰ δείξουν οἱ μαθηταὶ τὶς παράλληλες ἕδρες καὶ παράλληλες ἀκμὲς τοῦ κύβου καὶ τοὺς παραλλήλους τοίχους τῆς αἰθούσης των.

10. Τὸ πάτωμα καὶ ἡ ὀροφὴ τῆς ἰδίας αἰθούσης τί ἐπιφάνειες εἶναι;

4. Σχῆμα τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου καὶ σχέσις μεταξύ των

Ἂν ἀκουμπήσουμε τὸν κύβο ἐπάνω σ᾽ ἕνα φύλλο χαρτὶ καὶ σύρουμε μὲ τὸ μολύβι γύρω του γραμμές, ἀκολουθῶντας τὶς ἀκμὲς τῆς ἕδρας ποὺ ἀκουμπᾶ στὸ χαρτί, σηκώσουμε δὲ ἔπειτα τὸν κύβο, θὰ ἰδοῦμε ὅτι ἐπάνω στὸ χαρτί, ἔγινε ἕνα σχῆμα ἴσο μὲ τὸ σχῆμα τῆς ἕδρας τοῦ κύβου. Ἂν κάνουμε τὸ ἴδιο καὶ μὲ τὶς ἄλλες ἕδρες του, μία - μία χωριστά, θὰ παρατηρήσουμε ὅτι, ἀπὸ ὅλες, θὰ σχηματισθῆ τὸ ἴδιο ἀκριβῶς σχῆμα. Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται **τετράγωνο** (σχ. 5).



Σχ. 5

Κάθε μία λοιπὸν ἀπὸ τὶς ἕδρες τοῦ κύβου ἔχει σχῆμα τετραγώνου. Ἀφοῦ δέ, κάθε μία χωριστά, σχημάτισε στὸ χαρτὶ τὸ ἴδιο ἀκριβῶς τετράγωνο σχῆμα, καταλαβαίνουμε, ὅτι ὅλες εἶναι ἴσες μεταξύ των.

Ὥστε, **οἱ ἕδρες τοῦ κύβου ἔχουν σχῆμα τετραγώνου καὶ ὅλες εἶναι ἴσες μεταξύ των.**

5. Πλευρὲς τοῦ τετραγώνου - σχέσις μεταξύ των

Ἂν παρατηρήσουμε τὸ τετράγωνο θὰ ἰδοῦμε, ὅτι παρουσιάζει τὰ ἑξῆς γνωρίσματα :

1. Εἶναι μία ἐπίπεδος ἐπιφάνεια.
2. Περικλείεται μέσα σὲ 4 γραμμές, οἱ ὁποῖες λέγονται **πλευρές**. Εἶναι λοιπὸν τὸ τετράγωνο, σχῆμα **τετράπλευρο**.
3. Ἂν μὲ κλωστὴ μετρήσουμε κάθε μία ἀπὸ τὶς 4 πλευρές του, θὰ ἰδοῦμε ὅτι ὅλες εἶναι ἴσες, καὶ
4. Οἱ ἀπέναντι πλευρές του εἶναι παράλληλες.

Περίμετρος τοῦ τετραγώνου. Τὸ ἄθροισμα τοῦ μήκους τῶν 4 πλευρῶν τοῦ τετραγώνου ἀποτελεῖ τὴν **περίμετρο** αὐτοῦ.

Ἀφοῦ ὅλες οἱ πλευρὲς τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσες, μποροῦμε νὰ βροῦμε τὴν περίμετρό του, ἂν μετρήσουμε μόνον μία πλευρά του καὶ πολλαπλασιάσουμε ἐκεῖνο ποὺ θὰ βροῦμε ἐπὶ 4.

Ἀσκήσεις

1. Τί σχῆμα ἔχουν οἱ ἕδρες τοῦ κύβου;
2. Τί σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου;
3. Τί σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου;
4. Τί λέγεται περίμετρος τετραγώνου; πῶς βρίσκεται;
5. Ἂν μία πλευρὰ τετραγώνου εἶναι 5 μέτρα, πόση εἶναι ἡ περίμετρός του;
6. Ἂν ἡ περίμετρος ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 16 μέτρα, πόση εἶναι ἡ πλευρά του;

6. Περὶ γραμμῶν

Ἂν προσέξουμε μία, ὁποιαδήποτε, ἀπὸ τὶς ἕδρες τοῦ κύβου, θὰ ἰδοῦμε ὅτι στὰ ἄκρα της σχηματίζονται **γραμμές.** Τὸ ἴδιο παρατηροῦμε καὶ στὰ ἄκρα τῆς ἐπιφανείας ὁποιουδήποτε ἄλλου σώματος ἢ σχήματος.

Ὥστε, **τὰ ἄκρα τῶο ἐπιφανειῶν λέγονται γραμμές.**

α———————————β

Σχ. 6

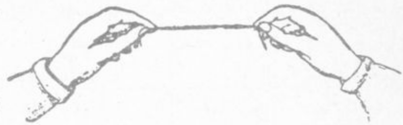
Μιὰ γραμμὴ χωρίζει δύο ἐπιφάνειες συνεχόμενες, ἢ εἶναι τὸ μέρος ὅπου συναντῶνται δύο ἐπιφάνειες τοῦ ἰδίου σώματος. Οἱ γραμμὲς σημειώνονται μὲ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, τὰ ὁποῖα γράφονται στὰ ἄκρα των. Π.χ. ἡ γραμμὴ αβ (σχ. 6).

Εὐθεῖα γραμμή. Ἂν πάρουμε μία κλωστή, τὴν κρατήσουμε ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα της καὶ τὴν τεντώσουμε, τὸ σχῆμα ποὺ θὰ πάρῃ λέγεται **εὐθεῖα γραμμή** (σχ. 7).

Ὥστε, **εὐθεῖα λέγεται ἡ γραμμὴ ποὺ ἔχει τὸ σχῆμα τεντωμένης κλωστῆς.**

Εὐθεῖες γραμμὲς χαράζουμε μὲ τὸν κανόνα.

Οἱ γραμμές, μέσα στὶς ὁποῖες περικλείονται οἱ ἕδρες τοῦ κύβου εἶναι εὐθεῖες. Κάθε ἐπίπεδος ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία περικλείεται σὲ εὐθεῖες γραμμές, λέγεται **εὐθύγραμμος.** Ὥστε τὸ τετράγωνο, διότι περικλείεται ἀπὸ εὐθεῖες γραμμές, εἶναι σχῆμα **εὐθύγραμμο.**



Σχ. 7

Τεθλασμένη Πολλές εὐθεῖες ἑνωμένες, χωρὶς ν' ἀποτελοῦν μιὰ εὐθεῖα, σχηματίζουν μιὰ γραμμή, ἡ ὁποῖα λέγεται **τεθλασμένη**. Π. χ. ἡ γραμμὴ αβ (σχ. 8) λέγεται **τεθλασμένη**, διότι ἀποτελεῖται ἀπὸ πολλὲς εὐθεῖες χωρὶς νὰ εἶναι εὐθεῖα, ἐνῶ εἶναι μία γραμμή.

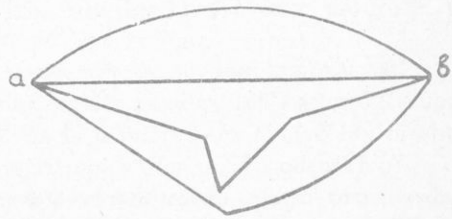
Σχ. 8

Κατακόρυφος. Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ὑψώνεται ἀπὸ κάτω πρὸς τὰ ἐπάνω καὶ ἔχει τὴν διεύθυνση τοῦ νήματος τῆς στάθμης, λέγεται **κατακόρυφος** (σχ. 3).

Ὁριζοντία. Ὅταν ἡ εὐθεῖα ἔχῃ τὴν διεύθυνση τοῦ ἠρεμίου νεροῦ λέγεται **ὁριζοντία**. Π.χ. ἡ εὐθεῖα αβ (σχ. 6).

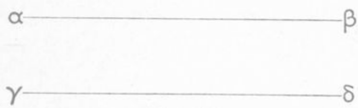
Ἰδιότητες εὐθειῶν.

α) Ἀπὸ ἕνα σημεῖο σὲ ἄλλο, μόνον μία εὐθεῖα μποροῦμε νὰ φέρουμε. Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει δύο σημεῖα, λέγεται **ἀπόστασις**. β) Τὰ ἄκρα μιᾶς εὐθείας μποροῦμε νὰ τὰ αὐξήσουμε ὅσο θέλουμε.



Σχ. 9.

γ) Κάθε εὐθεῖα εἶναι συντομώτερη ἀπὸ κάθε ἄλλη γραμμή, ποὺ ἀρχίζει καὶ τελειώνει στὸ ἴδιο σημεῖο μὲ τὴν εὐθεῖα (σχ. 9). δ) Ὅταν δύο εὐθεῖες, οἱ ὁποῖες εὑρίσκονται στὸ ἴδιο ἐπίπεδο (ἡ μία δίπλα στὴν ἄλλη) δὲν συναντηθοῦν, ὁσονδήποτε καὶ ἂν αὐξήσουμε τὰ ἄκρα των, οἱ εὐθεῖες αὐτὲς λέγονται **παράλληλες**. Π. χ. Οἱ εὐθεῖες αβ καὶ γδ (σχ. 10) εἶναι παράλληλες.



Σχ. 10

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

Ὁμάς Α΄. 1. Τί λέγονται γραμμές;

2. Ποιὰ γραμμὴ λέγεται εὐθεῖα καὶ ποιὰ τεθλασμένη;

3. Τί λέγεται ἀπόσταση;

4. Νὰ γράψουν οἱ μαθηταὶ μὲ τὸν κανόνα εὐθεῖες καὶ τεθλασμένες γραμμές.

5. Νὰ ἀσκηθοῦν στὴ γραφὴ εὐθειῶν χωρὶς κανόνα.

Ὁμὰς Β΄. 6. Νὰ δείξουν οἱ μαθηταὶ τὶς κατακόρυφες καὶ ὁριζόντιες ἀκμὲς τοῦ κύβου, τοῦ κουτιοῦ τῆς κιμωλίας καὶ τῶν τοίχων τῆς αἰθούσης.

7. Νὰ γράψουν σὲ κατακόρυφο πίνακα, εὐθεῖες κατακόρυφες καὶ ὁριζόντιες καὶ νὰ βάλουν τὸ μολύβι των κατακορύφως καὶ ὁριζοντίως.

8. Νὰ χαρακώσουν στὴν αὐλὴ τοῦ σχολείου των, ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο, μία εὐθεῖα καὶ μία τεθλασμένη καὶ νὰ προσέξουν νὰ ἰδοῦν ποιὰ εἶναι συντομώτερη.

9. Πότε δύο εὐθεῖες εἶναι παράλληλες;

10. Νὰ βροῦν τί εὐθεῖες εἶναι οἱ ἀπέναντι ἀκμὲς τοῦ κύβου, οἱ ἀπέναντι πλευρὲς τοῦ τετραγώνου, οἱ πλευρὲς τῶν ἀπέναντι τοίχων τῆς αἰθούσης των, οἱ ἀπέναντι πλευρὲς τοῦ πίνακος, τοῦ Χάρτου, οἱ γραμμὲς τοῦ τράμ, τοῦ σιδηροδρόμου κλπ.

7. Γωνίες τοῦ τετραγώνου καὶ σχέσις μεταξύ των

Ἂν παρατηρήσουμε τὸ τετράγωνο θὰ ἰδοῦμε, ὅτι οἱ πλευρές του, οἱ ὁποῖες εἶναι γραμμὲς εὐθεῖες, συναντῶνται ἀνὰ δύο, σὲ ἕνα σημεῖο καὶ ὅτι, ἂν συναντῶνται δὲ κάνουν μία εὐθεῖα.

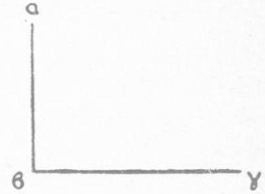
Τὸ ἐπίπεδο σχῆμα ποὺ σχηματίζεται στὸ σημεῖο τοῦ τετραγώνου, στὸ ὁποῖο συναντῶνται δύο πλευρές του λέγεται **γωνία**.

Ὥστε, **γωνία λέγεται τὸ ἐπίπεδο σχῆμα ποὺ σχηματίζουν δύο εὐθεῖες, ποὺ ἀρχίζουν ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο, χωρὶς ν' ἀποτελοῦν εὐθεῖα.**

Τὸ σημεῖο, ἀπὸ τὸ ὁποῖο ξεκινοῦν οἱ εὐθεῖες ποὺ σχηματίζουν τὴ γωνία, λέγεται **κορυφὴ** τῆς γωνίας, οἱ δὲ εὐθεῖες ποὺ τὴ σχηματίζουν λέγονται **πλευρὲς** ἢ **σκέλη**.

Οἱ γωνίες ὀνομάζονται μὲ γράμματα ποὺ, γράφονται στὰ ἄκρα τῶν πλευρῶν των. Π. χ. ἡ γωνία αβγ (σχ. 11).

Τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς διαβάζεται πάντοτε εἰς τὸ μέσον.



Σχ. 11

Ὀρθὲς γωνίες τοῦ τετραγώνου,

Ἂν γράψουμε στὸν πίνακα ἕνα τετράγωνο θὰ ἰδοῦμε ὅτι, δύο ἀπὸ τὶς πλευρές του εἶναι κατακόρυφες, οἱ ἄλλες δύο δὲ εἶναι ὁριζόντιες. Ὅταν μία εὐθεῖα κατακόρυφος συναντηθῆ μὲ μία ὁριζοντία, οἱ εὐθεῖες αὐτὲς λέγονται **κάθετες** μεταξύ των.

Ὥστε, **οἱ πλευρὲς τοῦ τετραγώνου, ἀνά δύο, εἶναι κάθετες ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης.**

Οἱ γωνίες ποὺ σχηματίζονται στὰ σημεῖα ποὺ συναντῶνται οἱ πλευρὲς τοῦ τετραγώνου, λέγονται **ὀρθές,** διότι σχηματίζονται ἀπὸ πλευρὲς κάθετες.

Ὥστε, **ὀρθὴ γωνία λέγεται ἡ γωνία, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ δύο εὐθεῖες κάθετες μεταξύ των.**

Ὅλες οἱ ὀρθὲς γωνίες εἶναι ἴσες μεταξύ των, ἑπομένως καὶ οἱ γωνίες τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσες. Ὕστερα ἀπὸ ὅσα μάθαμε μποροῦμε νὰ ὁλοκληρώσουμε τὸν **ὁρισμὸ** (τὸ ὄνομα) τοῦ τετραγώνου ὡς ἑξῆς:

Τετράγωνο λέγεται τὸ εὐθύγραμμο σχῆμα, τὸ ὁποῖο περικλείεται σὲ 4 πλευρὲς ἴσες καὶ ἀνὰ δύο κάθετες μεταξύ των καὶ τὸ ὁποῖο ἔχει τὶς ἀπέναντι πλευρὲς παράλληλες καὶ τὶς γωνίες του ὀρθές.

Κάθε ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία ἔχει σχῆμα τετραγώνου λέγεται **τετραγωνική.** Τὸ τετράγωνο, ἀλλὰ καὶ κάθε ἄλλο σχῆμα, τοῦ ὁποίου ὅλες οἱ πλευρὲς καὶ ὅλες οἱ γωνίες εἶναι ἴσες, λέγεται **κανονικὸ σχῆμα.**

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς Α΄. 1. Ποιὸ σχῆμα λέγεται γωνία;

2. Τί λέγεται κορυφὴ καὶ τί πλευρὲς τῆς γωνίας;

3. Πότε μία εὐθεῖα λέγεται κάθετος ἐπὶ ἄλλης εὐθείας;

4. Νὰ δείξουν οἱ μαθηταὶ τὶς κάθετες ἀκμὲς τοῦ κύβου, τὶς κάθετες πλευρὲς τοῦ Χάρτου, τοῦ πίνακος κλπ.

5. Ποιὰ γωνία λέγεται ὀρθή;

Ὁμὰς Β΄ 6. Νὰ δείξουν οἱ μαθηταὶ τὶς ὀρθὲς γωνίες τοῦ βιβλίου των, τοῦ Χάρτου, τοῦ πίνακος κλπ.

7. Πόσες ὀρθὲς γωνίες ἔχει τὸ τετράγωνο καὶ τί σχέση ἔχουν μεταξύ των ;

8. Μερικοὶ μαθηταί, τὴν ὥρα τῆς χειροτεχνίας, νὰ κάμουν ὀρθὲς γωνίες μὲ χαρτόνι. Ἄλλοι μαθηταὶ νὰ κάμουν ὀρθὲς γωνίες, καρφώνοντας 2 πήχεις, ἀλλὰ μὲ μεγαλύτερα σκέλη ἀπὸ τὶς γωνίες τοῦ χαρτονιοῦ.

9. Τὴν ὥρα τῆς ἰχνογραφίας νὰ ἰχνογραφήσουν οἱ μαθηταί, σὲ χαρτόνι, σχήματα τετράγωνα, ἄλλα μεγαλύτερα καὶ ἄλλα μικρότερα, νὰ κόψουν μὲ ψαλίδι τὶς πλευρὲς των καὶ νὰ τὰ χρωματίσουν.

8. Ἀριθμὸς ὀρθῶν γωνιῶν τοῦ κύβου

Μάθαμε, ὅτι οἱ ἕδρες τοῦ κύβου ἔχουν σχῆμα τετραγώνου καὶ ὅτι τὸ τετράγωνο ἔχει ὀρθὲς γωνίες. Ἑπομένως, ἀφοῦ ὁ κύβος ἔχει 6 ἕδρες τετραγωνικὲς καὶ κάθε ἕδρα του ἔχει 4 ὀρθὲς γωνίες, θὰ ἔχῃ 24 ὀρθὲς γωνίες.

9. Δίεδρες καὶ στερεὲς γωνίες τοῦ κύβου

Μάθαμε, ὅτι σὲ κάθε ἀκμὴ τοῦ κύβου συναντῶνται δύο ἕδρες του. Τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖο σχηματίζουν δύο συναντώμενες ἕδρες τοῦ κύβου, λέγεται **δίεδρος γωνία**. Ἂν μετρήσουμε τὶς δίεδρες γωνίες τοῦ κύβου θὰ ἰδοῦμε, ὅτι εἶναι ὅσες καὶ οἱ ἀκμές του, δηλ. 12.

Ὥστε, **ὁ κύβος ἔχει 12 δίεδρες γωνίες.**

Μάθαμε ἐπίσης ὅτι, σὲ ὡρισμένα σημεῖα τοῦ κύβου, τὰ ὁποῖα λέγονται κορυφές, συναντῶνται 3 ἕδρες του. Τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖο σχηματίζεται σὲ κάθε κορυφὴ τοῦ κύβου, ὅπου συναντῶνται 3 ἕδρες του, λέγεται **τρίεδος γωνία ἢ στερεά.** Ἂν μετρήσουμε τὶς στερεὲς γωνίες τοῦ κύβου θὰ ἰδοῦμε ὅτι εἶναι, ὅσες καὶ οἱ κορυφές του, δηλαδὴ 8.

Ὥστε, **ὁ κύβος ἔχει 8 τριέδρους ἢ στερεὲς γωνίες.**

10. Διαστάσεις κύβου - τετραγώνου

Ἂν τοποθετήσουμε τὸν κύβο ἐμπρός μας καὶ τὸν παρατηρήσουμε θὰ ἰδοῦμε ὅτι : α) ἐκτείνεται ἀπὸ ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιά, ἔχει δηλαδὴ **μῆκος**, β) ἐκτείνεται ἀπὸ ἐμπρὸς πρὸς τὰ πίσω, ἔχει δηλαδὴ **πλάτος** καὶ γ) ὑψώνεται ἀπὸ κάτω πρὸς τὰ ἐπάνω ἔχει δηλ. ὕψος (σχ. 2). Αἱ ἀποστάσεις αὐτὲς λέγονται **διαστάσεις**. Ἂν μὲ κλωστὴ μετρήσουμε καὶ τὶς 3 διαστάσεις τοῦ κύβου, θὰ ἰδοῦμε, ὅτι ὅλες εἶναι ἴσες μεταξύ των.

Ὥστε **ὁ κύβος ἔχει τὰς διαστάσεις τους ἴσες**.

Ὅλα τὰ στερεὰ σώματα ἔχουν 3 διαστάσεις, μῆκος, πλάτος, ὕψος. Οἱ ἐπιφάνειες ἔχουν 2, μῆκος καὶ πλάτος.

Στὸ τετράγωνο, μῆκος καὶ πλάτος εἶναι ἴσα, διότι ὅλες οἱ πλευρές του εἶναι ἴσες. Στὶς ἐπιφάνειες τὸ μῆκος λέγεται **βάση**, τὸ δὲ πλάτος λέγεται **ὕψος**.

11. Βάσεις καὶ παράπλευρες ἕδρες τοῦ κύβου

Ἂν τοποθετήσουμε τὸν κύβο ἐμπρός μας, ἐπάνω στὸ τραπέζι, ἡ ἕδρα του, ποὺ ἀκουμπᾶ στὸ τραπέζι ἔχει διεύθυνση ὁριζοντία καὶ λέγεται **βάση**. Ὡς βάση στὸν κύβο μποροῦμε νὰ πάρουμε ὁποιαδήποτε ἕδρα του. Βάση λέγεται ἐπίσης καὶ ἡ ἐπάνω ἕδρα του, δηλ. ἡ ἀπέναντι, ποὺ εἶναι παράλληλος μ' αὐτὴ ποὺ ἀκουμπᾶ στὸ τραπέζι. Οἱ ἄλλες 4 ἕδρες του, εἶναι κάθετες πρὸς τὴ βάση καὶ λέγονται **παράπλευρες ἕδρες**. Ὅλες αὐτὲς μαζὶ ἀποτελοῦν τὴν **παράπλευρο ἐπιφάνεια** τοῦ κύβου.

Ὅσα στερεὰ σώματα ἔχουν σχῆμα κύβου λέγονται **κυβικά**. Π.χ. τὰ ζάρια, ὡρισμένα κιβώτια, κουτιὰ κλπ.

Ἀσκήσεις

1. Πόσες ὀρθὲς γωνίες ἔχει ὁ κύβος ; (νὰ τὶς δείξουν).
2. Πόσες δίεδρες καὶ πόσες τρίεδρες ; (νὰ τὶς δείξουν).
3. Τί λέγονται διαστάσεις ἑνὸς σώματος ;
4. Νὰ δείξουν οἱ μθηταὶ τὶς διαστάσεις τοῦ κύβου καὶ τὶς διαστάσεις μιᾶς ἕδρας του.
5. Γιατὶ καὶ οἱ τρεῖς διαστάσεις τοῦ κύβου εἶναι ἴσες ;
6. Νὰ δείξουν οἱ μαθηταὶ διάφορα κυβικὰ σώματα.
7. Νὰ ἰχνογραφήσουν κύβους σὲ διάφορα μεγέθη.

12. Εὕρεση τοῦ μήκους τῆς γραμμῆς τοῦ τετραγώνου

Οἱ πλευρὲς τοῦ τετραγώνου εἶναι γραμμὲς εὐθεῖες. Γιὰ νὰ μετρήσουμε μία εὐθεῖα γραμμή, πρέπει νὰ ἔχουμε ὡς μονάδα μία ἄλλη εὐθεῖα **ὡρισμένη**, πρὸς τὴν ὁποία νὰ τὴν συγκρίνουμε, γιὰ νὰ βροῦμε ἀπὸ πόσες τέτοιες μονάδες ἢ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται ἡ εὐθεῖα, ποὺ θέλουμε νὰ μετρήσουμε. Ἡ σύγκριση αὐτὴ λέγεται

μέτρηση, ὁ ἀριθμὸς δέ, ὁ ὁποῖος προκύπτει ἀπὸ τὴν μέτρηση λέγεται **μῆκος**.

Ὥστε, **μῆκος λέγεται τὸ ἀποτέλεσμα τῆς μετρήσεως μιᾶς εὐθείας γραμμῆς.**

13. Μέτρα μήκους

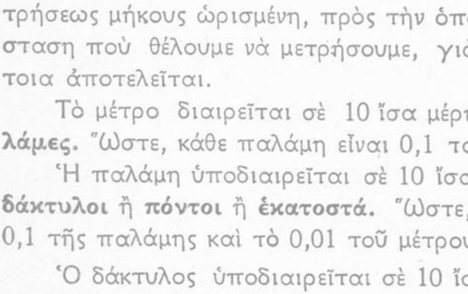
Ὡς μονάδα μετρήσεως τοῦ μήκους χρησιμοποιοῦμε τὸ **γαλλικὸ μέτρο** ἢ **μέτρο** ἢ **πασέτο**. Τὸ γαλλικὸ μέτρο εἶναι μονὰς μετρήσεως μήκους ὡρισμένη, πρὸς τὴν ὁποία συγκρίνουμε τὴν ἀπόσταση ποὺ θέλουμε νὰ μετρήσουμε, γιὰ νὰ ἰδοῦμε ἀπὸ πόσα τέτοια ἀποτελεῖται.

Τὸ μέτρο διαιρεῖται σὲ 10 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται **παλάμες**. Ὥστε, κάθε παλάμη εἶναι 0,1 τοῦ μέτρου.

Ἡ παλάμη ὑποδιαιρεῖται σὲ 10 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται **δάκτυλοι** ἢ **πόντοι** ἢ **ἑκατοστά**. Ὥστε, κάθε δάκτυλος εἶναι τὸ 0,1 τῆς παλάμης καὶ τὸ 0,01 τοῦ μέτρου.

Ὁ δάκτυλος ὑποδιαιρεῖται σὲ 10 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται **γραμμὲς** ἢ **χιλιοστά**. Ὥστε ἡ γραμμὴ εἶναι τὸ 0,1 τοῦ δακτύλου, τὸ 0,01 τῆς παλάμης καὶ τὸ 0,001 τοῦ μέτρου.

Μὲ ἄλλα λόγια, **τὸ μέτρο ἀποτελεῖται ἀπὸ 10 παλάμες ἢ 100 δακτύλους ἢ 1000 γραμμές.**



Κορδέλλα

Τὶς μεγάλες ἀποστάσεις τὶς ὑπολογίζουν σὲ χιλιόμετρα (1 χιλιόμετρο =1000 μ.) καὶ τὶς μετροῦν μὲ τὴν **κορδέλλα**.

Οἱ ἔμποροι γιὰ νὰ μετροῦν τὸ μῆκος τῶν ὑφασμάτων, μετεχειρίζοντο πρῶτα τὸν **ἐμπορικὸ πῆχυ**, ὁ ὁποῖος εἶναι ἴσος μὲ τὰ 0,64 τοῦ μέτρου καὶ διαιρεῖται σὲ 8 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται **ὄγδοα** ἢ **ρούπια**.

Τώρα οἱ ἔμποροι μεταχειρίζονται τὸ μέτρο.

Οἱ κτίστες γιὰ νὰ μετροῦν τοὺς τοίχους, μεταχειρίζονται τὸ **τεκτονικὸ μέτρο,** ὁ ὁποῖος εἶναι ἴσος μὲ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου δηλ. τὰ 0,75 μ.

Ἀσκήσεις καὶ Προβλήματα

Ὁμὰς Α΄. 1. Ποιὰ εἶναι τὰ μέτρα μήκους;

2. Ποιές εἶναι οἱ ὑποδιαιρέσεις τοῦ μέτρου; Νὰ τὶς δείξουν οἱ μαθηταὶ ἐπάνω στὸ μέτρο.

3. Νὰ μετρήσουν οἱ μαθηταὶ τὶς διαστάσεις διαφόρων σωμάτων, τὶς διαστάσεις τῆς αἰθούσης των, τὶς διαστάσεις τῆς αὐλῆς των, τὸ πλάτος τοῦ δρόμου, τὸ μῆκος καὶ πλάτος τοῦ πεζοδρομίου κλπ., ὥστε νὰ συνηθίσουν νὰ ἐκτιμοῦν (μὲ τὸ μάτι καὶ χωρὶς μέτρο) διάφορες ἀποστάσεις. Αὐτὸ θὰ τὸ ἐπιτύχουν ἂν κάνουν προσπάθειες χωρὶς μετρο, τὶς ὁποῖες ἐπαληθεύουν ἔπειτα μὲ τὸ μέτρο.

4. Νὰ ἀσκηθοῦν εἰς τὸ νὰ ἐκτιμοῦν μὲ τὸ μάτι καὶ χωρὶς μέτρο, ἀποστάσεις 1 μ., 5 μ., 100 μ., 500 μ. καὶ 1000 μέτρων.

Ὁμὰς Β΄. 5. Νὰ ἀσκηθοῦν εἰς τὸ νὰ ἐκτιμοῦν διάφορα ὕψη π. χ. τὸ ὕψος ἑνὸς δένδρου, ἑνὸς σπιτιοῦ, ἑνὸς κωδωνοστασίου κλπ.

6. Πόσα μέτρα σύρμα θὰ χρειασθοῦν γιὰ νὰ περιφράξουμε ἕνα κῆπο τετραγωνικό, μὲ πλευρὰ μήκους 35 μέτρα;

7. Πόσους πήχεις δαντέλλα χειάζεται μιὰ νοικοκυρὰ γιὰ νὰ βάλη στὸ τετραγωνικὸ τραπεζομάνδηλό της, τὸ ὁποῖο ἔχει πλευρὰ μήκους 1,50 μ. καὶ πόσο θὰ στοιχίση ἂν ἡ δαντέλλα ἔχη 25 δρχ. τὸ μέτρο.

8. Ἕνας ἐμάνδρωσε τὸ τετραγωνικὸ οἰκόπεδό του μὲ τοῖχο 160 μέτρων. Πόση εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ οἰκοπέδου καὶ πόση ἡ πλευρὰ καὶ πόσο ἐστοίχισε τὸ μάνδρωμα, ἂν γιὰ κάθε τρέχον μέτρο ἔδωσε 145 δραχμές;

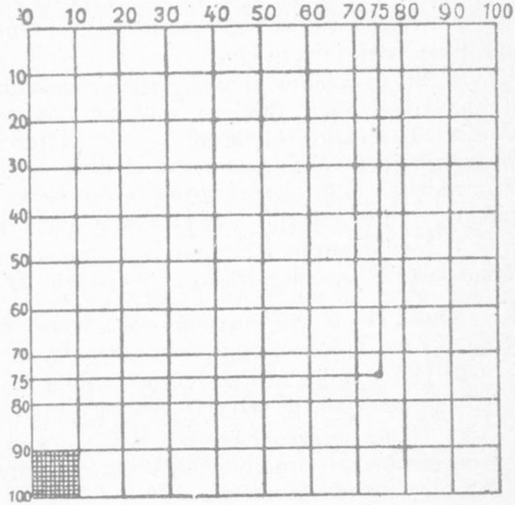
14. Μέτρα ἐπιφανείας

Γιὰ νὰ μετρήσουμε τὶς ἐπιφάνειες τῶν διαφόρων σωμάτων, παίρνουμε ὡς μέτρο μιὰ ἄλλη ἐπιφάνεια **ὡρισμένη**, τὴν ὁποία χρησιμοποιοῦμε ὡς μονάδα μετρήσεως. Μ' αὐτὴ συγκρίνουμε τὴν ἐπιφάνεια ποὺ θέλουμε νὰ μετρήσουμε, γιὰ νὰ βροῦμε ἀπὸ πόσες τέτοιες μονάδες ἀποτελεῖται. Ἡ μονὰς αὐτὴ λέγεται **τετραγωνικὸ μέτρο,** τὸ δὲ ἀποτέλεσμα τῆς μετρήσεως **ἐμβαδόν.**

Ὥστε, **μονὰς μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν εἶναι τὸ** τετρα**γωνικὸ μέτρο.**

Τὸ τετραγωνικὸ μέτρο (σχ. 12) εἶναι τετράγωνο, τοῦ ὁποίου κάθε πλευρὰ ἔχει μῆκος ἑνὸς μέτρου. Πολλὲς φορὲς εἶναι ἀνάγκη νὰ μετρήσουμε ἐπιφάνειες, οἱ ὁποῖες εἶναι μικρότερες ἀπὸ 1 τ. μ., γι'αὐτὸ τὸ τ. μ. διαιρεῖται σὲ 100 μικρὰ τετράγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ καθένα πλευρὰ μιᾶς παλάμης καὶ λέγονται **τετραγω-**

νικὲς παλάμες. Κάθε τ. π. διαιρεῖται καὶ αὐτὴ σὲ 100 μικρότερα τετράγωνα μὲ πλευρὰ 1 δακτύλου, τὰ ὁποῖα λέγονται **τετραγωνικοὶ δάκτυλοι** καὶ κάθε τ. δ. διαιρεῖται καὶ αὐτὸς σὲ 100 ἴσα μέρη τὰ ὁποῖα λέγονται **τετραγωνικὲς γραμμὲς ἢ τετραγωνικὰ χιλιοστά.**



Σχ. 12

Ὥστε, **1 τ. μέτρο εἶναι ἴσο μὲ 100 τ. παλάμες ἢ 10.000 τ. δακτύλους ἢ 1.0000.000 τ. γραμμές.**

Οἱ μεγάλες ἐκτάσεις (χωράφια δάση) ὑπολογίζονται σὲ **στρέμματα.** Ἕνα στρέμμα εἶναι ἴσο μὲ 1000 τ. μ.

Γιὰ τὴ μέτρηση οἰκοπέδων χρησιμοποιεῖται ὁ **τετραγωνικὸς τεκτονικὸς πῆχυς**. Ὅταν π. χ. λέμε ὅτι, τὸ Α οἰκόπεδο εἶναι 350 πήχεις, ἐννοοῦμε 350 τετραγωνικοὺς τεκτονικοὺς πήχεις.

Ὁ τ. τ. π. εἶναι ἕνα τετράγωνο, τοῦ ὁποίου κάθε πλευρὰ ἔχει μῆκος 0,75 μ. ὅσο δηλαδὴ εἶναι τὸ μῆκος ἑνὸς ἁπλοῦ τεκτονικοῦ πήχεως. Ἀφοῦ λοιπὸν ὁ ἁπλοῦς τ. π. εἶναι τὸ 0,75 τοῦ μ., ὁ τ. τ. π. θὰ εἶναι $0{,}75 \times 0{,}75 = 0{,}5625$ τοῦ τ. μ., ἤτοι 56 τ. π. καὶ 25 τ. δ., ἢ ἀφοῦ ὁ ἁπλοῦς τ. π. εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μ.. ὁ τ. τ. π. θὰ εἶναι $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ τοῦ τ. μ. Ἂν ὑποτεθῇ δηλ. ὅτι τὸ τ. μ., τὸ ὁποῖο ἀποτελεῖται ἀπὸ 100 τ. π. ἢ 10.000 τ. δ., εἶναι ἴσο μὲ $\frac{16}{16}$, ὁ τ. τ. π. ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπὸ 56 τ. π. καὶ 25 τ. δ. ἢ 5625 τ. δ., εἶναι ἴσος μὲ τὰ $\frac{9}{16}$ τοῦ τ. μ.

Ὥστε, **ἕνας τ.τ.π. = 5625 τ. δ. ἢ τὰ $\frac{9}{16}$ τοῦ τ. μ.**

᾿Αντιθέτως, τὸ τ. μ. εἶναι τὰ $\frac{16}{9}$ τοῦ τ. τ. π. Οἱ τ. τ. π. τρέπονται σὲ τ. μ. ἂν τοὺς πολλαπλασιάσουμε ἐπὶ 9 καὶ διαιρέσουμε τὸ γινόμενο διὰ 16.

π.χ. ὁ 1 τ. τ. π. $= \frac{9}{16}$ τοῦ τ.μ.

οἱ 15 τ. τ. π. $=$ Χ τ. μ.

ἤτοι $\frac{9}{16} \times 15 = \frac{135}{16} = 8$ καὶ $\frac{7}{16}$ τ. μ.

Τὰ τ.μ. τρέπονται σὲ τ.τ.π. ἂν τὰ πολλαπλασιάσουμε ἐπὶ 16 καὶ διαιρέσουμε τὸ γινόμενο διὰ 9.

π.χ. Τὸ 1 τ. μ. $= \frac{16}{9} =$ τ.τ.π.

τὰ 15 τ.μ. $=$ Χ τ.τ.π.

ἤτοι $\frac{16}{9} \times 15 = \frac{240}{9} = 26$ καὶ $\frac{6}{9}$ τ.μ.

Τὰ μέτρα αὐτὰ τῆς μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν δὲν ὑπάρχουν στὴν πραγματικότητα, ἀλλὰ εἶναι νοητά. Εἶναι τὸ ἀποτέλεσμα τῆς μετρήσεως τῶν διαστάσεων τῶν ἐπιφανειῶν, εἶναι δηλ. τὸ ἐξαγόμενο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ μήκους ἐπὶ τὸ πλάτος. Ἂν π.χ. μὲ ἕνα ἁπλὸ μέτρο μετρήσουμε τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος καὶ τὰ πολλαπλασιάσουμε, τὸ ἀποτέλεσμα ποὺ θὰ προκύψη λέγεται ἐμβαδὸν καὶ ὑπολογίζεται σὲ τετραγωνικὰ μέτρα ἢ σὲ τετρ. τεκτ. πήχεις.

15. Εὕρεση τῆς ἐπιφανείας τετραγώνου καὶ κύβου

᾿Εμβαδὸν τετραγώνου. Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγωνικοῦ οἰκοπέδου, μετρᾶμε τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος του καὶ τὰ πολλαπλασιάζουμε. Τὸ γινόμενο ποὺ θὰ βροῦμε εἶναι τὸ ἐμβαδόν του σὲ τ.μ. ᾿Επειδὴ ὅμως μῆκος καὶ πλάτος τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσα, μετρᾶμε μόνον τὴν μία πλευρὰ τοῦ οἰκοπέδου καὶ τὴν πολλαπλασιάζουμε ἐπὶ τὸν ἑαυτό της.

Ἂν π.χ. τὸ μῆκος τοῦ οἰκοπέδου αὐτοῦ εἶναι 10 μ., 10 μ. θὰ εἶναι καὶ τὸ πλάτος του, τὸ δὲ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι $10 \times 10 = 100$ τ. μ.

Ὥστε: **τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσουμε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς του ἐπὶ τὸν ἑαυτό της.**

Κατὰ τὴ μέτρηση οἰκοπέδων τὸ μῆκος λέγεται **βάθος** καὶ τὸ πλάτος **πρόσοψη.**

Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας κύβου. Οἱ ἕδρες τοῦ κύβου ἔχουν σχῆμα τετραγώνου καὶ εἶναι ὅλες ἴσες. Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας του θὰ εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας μιᾶς ἕδρας του, ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ τῶν ἑδρῶν του, δηλ. ἐπὶ 6. Π. χ. ἂν ὑποτεθῆ, ὅτι ἡ ἀκμὴ ἑνὸς κυβικοῦ κιβωτίου εἶναι 3 μ. ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἕδρας του θὰ εἶναι $3 \times 3 = 9$ τ. μ., τὸ δὲ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυβικοῦ κιβωτίου, θὰ εἶναι $3 \times 3 \times 6 = 54$ τ. μ.

Ἀσκήσεις καὶ Προβλήματα

Ὁμὰς Α΄. Τί λέγεται ἐμβαδόν ;

2. Τί λέγεται τ.μ. κοὶ τί τ.τ.π. καὶ τί σχέση ὑπάρχει μεταξύ των;

3. Πῶς τρέπουμε τὰ τ.μ. σὲ τ.τ.π. καὶ ἀντιθέτως ;

Ὁμὰς Β΄. 4. Νὰ χαρακώσουν οἱ μαθηταὶ στὴν αὐλὴ τοῦ σχολείου των μιὰ τετραγ. ἐπιφάνεια, μὲ πλευρὰ ἑνὸς μέτρου καὶ νὰ τὴν χωρίσουν σὲ τετρ. παλ. Νὰ χωρίσουν ἐπίσης μιὰ τ π. σὲ τ.δ. Ἔπειτα νὰ μετρήσουν 0,75 μ. σὲ δύο ἀπὸ τὶς συνεχόμενες πλευρὲς καὶ νὰ τὶς ἑνώσουν μὲ κάθετες εὐθεῖες, ὁπότε θὰ σχηματισθῆ ἕνας τ.τ.π. Νὰ βροῦν οἱ μαθηταὶ ἀπὸ πόσες τ.π. καὶ πόσους τ.δ. ἔγινε ὁ τ.τ.π.

5. Δύο τετραγων. ἐπιφάνειες ἔχουν πλευρά, ἡ μία 1 μ. καὶ ἡ ἄλλη 0,75. Νὰ εὑρεθῆ ἡ διαφορὰ τῶν 2 αὐτῶν ἐπιφανειῶν σὲ τ.δ.

6. Νὰ χαρακώσουν οἱ μαθηταί, στὴν αὐλὴ τοῦ σχολείου των, ἕνα τετράγωνο μὲ πλευρὰ 5 μ.καὶ νὰ βροῦν τὴν περίμετρό του καὶ τὸ ἐμβαδόν του.

7. Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν τετραγ. οἰκοπέδου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 20 μέτρα.

8. Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰδίου οἰκοπέδου σὲ τ.τ.π.

Ὁμὰς Γ΄. 9. Ἕνα τετραγ. οἰκόπεδο ἔχει περίμετρο 240 μ. Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδόν του καὶ ἡ ἀξία του πρὸς 250 δραχμὲς τὸ τ.μ.

10. Οἰκόπεδο σχήματος τετραγ. ἔχει πλευρὰ 15 μέτρα. Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδόν του σὲ τ.μ. καὶ ἀξία του πρὸς 150 δρχ. τὸ τ.μ.

11. Δάπεδο τετραγ. μὲ πλευρὰ 8 μέτρων πρόκειται νὰ στρωθῆ μὲ τετραγ. πλάκες, ποὺ ἔχουν πλευρὰ 0,25 μ. Πόσες πλάκες θὰ χρειασθοῦν;

Ὁμὰς Δ΄. 12. Ἕνα τετραγ. οἰκόπεδο ἐπωλήθη πρὸς 300 δρχ. τὸν τ.τ. πῆχυ. Ἡ πρόσοψή του ἦταν 17,50 μ. Πόσες δραχμὲς εἰσέπραξε ὁ ἰδιοκτήτης του ;

13. Ἕνα χωράφι 6,5 στρεμμάτων ἐπωλήθη πρὸς 53,50 δρχ. τὸ τ.μ. Πόση εἶναι ἡ ἀξία του ;

14. Δύο κυβικὰ κιβώτια ἔχουν ἀκμή, τὸ ἕνα ἑνὸς μέτρου καὶ τὸ

ἄλλο 0,75 μ. Νὰ εὑρεθῆ ἡ διαφορὰ τῶν ἐπιφανειῶν, τῶν δύο αὐτῶν κιβωτίων, σὲ τ. παλάμες.

15. Πόσα τ.μ. εἶναι ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς κυβικοῦ κιβωτίου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ εἶναι 2,5 μ. ;

Ὁμὰς Ε'. 16. Τὸ γραφεῖο τοῦ σχολείου μας ἔχει σχῆμα κύβου μὲ ἀκμὴ 4,50 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας του;

17. Αἴθουσα κυβικὴ μὲ ἀκμὴ 5 μ. πρόκειται νὰ ὑδροχρωματισθῆ. Πόσο θὰ στοιχίση ὁ ὑδροχρωματισμός της, ἂν ὁ τεχνίτης πληρωθῆ πρὸς 2,5 δρχ. τὸ τ.μ ,

18. Πόσες δραχμὲς θὰ στοιχίση κατὰ τ.μ. ὁ ἐξωτερικὸς ὑδροχρωματισμὸς τοῦ σχολείου μας, τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα κύβου μὲ ἀκμὲς 10 μ., ἂν ὁ τεχνίτης πάρη 38 000 δραχ. ;

16. Μέτρα ὄγκου

Ὄγκος. Ὅλα τὰ στερεὰ σώματα, ἑπομένως καὶ ὁ κύβος, κατέχουν τὸ καθένα κἄποιον χῶρο. Ὁ χῶρος αὐτὸς λέγεται **ὄγκος** ἢ **μέγεθος** τοῦ σώματος. Ὁ ὄγκος τῶν δοχείων, κιβωτίων κ.λ.π.. λέγεται **χωρητικότης.** Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο ἢ τὴν χωρητικότητα ἑνὸς σώματος, πρέπει νὰ τὸ συγκρίνουμε μὲ μία **ὡρισμένη μονάδα** μετρήσεως τοῦ ὄγκου ἢ τῆς χωρητικότητος. Ἡ ὡρισμένη αὐτὴ μονὰς λέγεται **κυβικὸ μέτρο.**

Ὥστε: **κυβικὸ μέτρο εἶναι τὸ μέτρο, μὲ τὸ ὁποῖο μετρᾶμε τὸν χῶρο, ποὺ καταλαμβάνουν τὰ διάφορα σώματα.**

Τὸ κυβικὸ μέτρο εἶναι ἕνας μεγάλος κύβος, τοῦ ὁποίου κάθε ἀκμὴ εἶναι ἴση μ' ἕνα μέτρο, ἑπομένως κάθε ἕδρα του θὰ εἶναι ἴση μ' ἕνα τετραγωνικὸ μέτρο. Τὸ κυβικὸ μέτρο ὑποδιαιρεῖται σὲ 1000 **κυβικὲς παλάμες** = κ. π. Ἑπομένως ἡ κ. π. εἶναι τὸ ἕνα χιλιοστὸ (0,001) τοῦ κ. μ. Ἡ κ. π. εἶναι κύβος, τοῦ ὁποίου κάθε ἕδρα εἶναι 1 τ. π. καὶ ὑποδιαιρεῖται σὲ 1000 **κυβικοὺς δακτύλους** = κ. δ. Ὁ κ. δ. εἶναι κύβος, τοῦ ὁποίου κάθε ἕδρα εἶναι 1 τ. δ. Ἀφοῦ τὸ κυβικὸ μέτρο ὑποδιαιρεῖται σὲ 1000 κ. π. καὶ κάθε κ. π. ὑποδιαιρεῖται σὲ 1000 κ. δ., ὁλόκληρο τὸ κ. μ. θὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ 1.000.000 κ. δ.

Ὥστε: **τὸ κ. μ. ἀποτελεῖται ἀπὸ 1000 κ. π. ἢ 1.000.000 κυβ. δακτύλους.**

17. Εὕρεση τοῦ ὄγκου τοῦ κύβου

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο ἑνὸς σώματος, πολλαπλασιάζουμε τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος του, ὁπότε βρίσκουμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του τὸ πολλαπλασιάζουμε ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ σώματος, ἐκεῖνο δὲ ποὺ θὰ βροῦμε εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἰς κ. μ.

Ὥστε: **Ὁ ὄγκος ἑνὸς σώματος εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενο τοῦ μήκους, ἐπὶ τὸ πλάτος, καὶ ἐπὶ τὸ ὕψος του.**

Ἂν π. χ. τὸ μῆκος ἑνὸς κιβωτίου εἶναι 5 μ., τὸ πλάτος 2 μ. καὶ τὸ ὕψος του 3 μ., ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι $5 \times 2 \times 3 = 30$ κυβ. μέτρα.

Σύμφωνα μὲ τ' ἀνωτέρω, ὁ ὄγκος τοῦ κύβου εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος, ἢ μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μήκους ἐπὶ τὸ πλάτος καὶ ἐπὶ τὸ ὕψος του. Ἐπειδὴ ὅμως οἱ ἀκμὲς ποὺ δείχνουν τὶς 3 διαστάσεις του εἶναι ἴσες, ὁ ὄγκος τοῦ κύβου εὑρίσκεται ἂν πολλαπλασιάσουμε τὶς 3 ἴσες διαστάσεις αὐτοῦ. Ἂν π. χ. ὑποτεθῆ, ὅτι τὸ μῆκος ἑνὸς κυβικοῦ κυβωτίου εἶναι 5 μ., 5 εἶναι καὶ τὸ πλάτος, 5 ἐπίσης μέτρα εἶναι καὶ τὸ ὕψος του, ὁ δὲ ὄγκος του θὰ εἶναι $5 \times 5 \times 5 = 125$ κ. μ.

Ὥστε: **Ὁ ὄγκος τοῦ κύβου εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενο τῶν τριῶν ἀκμῶν των.**

Ἀσκήσεις καὶ Προβλήματα

Ὁμὰς Α'. 1. Τί λέγεται ὄγκος τοῦ σώματος;

2. Τί λέγεται κυβικὸ μέτρο καὶ σὲ τί διαιρεῖται;

3. Πῶς εὑρίσκεται ὁ ὄγκος τοῦ κύβου;

4. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος κύβου ποὺ ἔχει ἀκμὴ 0,50 μ.;

Ὁμὰς Β'. 5. Πόσα κ.μ. νερὸ χωρεῖ κυβικὸ τεπόζιτο μὲ ἀκμὴ 4 μ.;

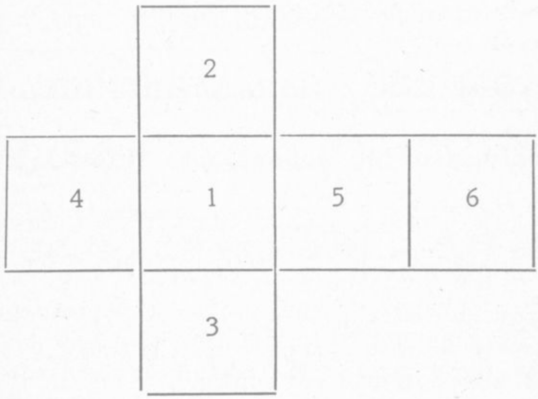
6. Πόσα κ μ νερὸ χωρεῖ κυβικὴ δεξαμενὴ βάθους 3,50 μ.;

7. Σ' ἕνα οἰκόπεδο ἐκτίσθηκε μία κυβικὴ οἰκοδομὴ μὲ πλευρὰ 12,75 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα εἶναι ὁ χῶρος της;

8. Σ' ἕνα κυβικὸ κιβώτιο, μὲ ἀκμὴ 1,25 μ. πρόκειται νὰ βάλουμε κυβικὲς πλάκες σαπούνι, ποὺ ἔχουν ὄγκο 2 κ.π. Πόσες τέτοιες πλάκες θὰ χωρέσουν;

18. Κατασκευὴ κύβου

Ἀσκήσεις. 1) Νὰ χωρισθοῦν οἱ μαθηταὶ σὲ ὁμάδες καὶ κάθε ὁμάς, τὴν ὥρα τῆς χειροτεχνίας, νὰ ἰχνογραφήση σὲ χαρτόνι 6 τετράγωνα ἴσα. Τὰ τετράγωνα ὅμως τῆς μιᾶς ὁμάδος νὰ μὴ εἶναι ἴσα μὲ τὰ τετράγωνα τῆς ἄλλης. Νὰ κόψουν μὲ τὸ ψαλίδι τὶς πλευρὲς τῶν τετραγώνων καὶ νὰ τὰ χρωματίσουν μὲ ὅ,τι χρῶμα θέλει ἡ κάθε ὁμάς. Ἔπειτα ἡ κάθε ὁμὰς νὰ ἑνώση τὰ τετράγωνά της, πλευρὰ μὲ πλευρά, ὥστε νὰ σχηματισθῆ κύβος. Νὰ κολλήσουν μὲ γόμα τὶς ἀκμὲς τοῦ κύβου, 2) Νὰ ξεχωρίσουν ἔπειτα τὶς ἕδρες, κατὰ τέτοιο τρόπο, ὥστε μία πλευρὰ μιᾶς ἕδρας νὰ μείνη ἑνωμένη μὲ μιὰ πλευρὰ ἄλλης καὶ νὰ τὶς ἁπλώσουν ἐπάνω στὸ τραπέζι, γιὰ νὰ ἰδοῦν τὸ **ἀνάπτυγμα** τοῦ κύβου (σχ. 13). 3) Κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο, ὅπως καὶ στὴν ἄσκηση 1, νὰ κά-



Σχ. 13

μουν κύβο μὲ κόντρα πλακὲ καὶ νὰ καρφώσουν τὶς ἀκμὲς μὲ ψηλὰ καρφάκια. 4) Νὰ κάμουν κύβους σὲ διάφορα μεγέθη μὲ σύρμα, πηλὸ ἢ ξύλο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β'

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟ

19. Γνωρίσματα τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Ἂν τοποθετήσουμε ἐμπρός μας ἐπάνω σ' ἕνα τραπέζι, ἕνα κουτὶ κιμωλίας καὶ τὸ παρατηρήσουμε, θὰ ἰδοῦμε, ὅτι ἐξωτερικῶς παρουσιάζει τὰ ἑξῆς γνωρίσματα:

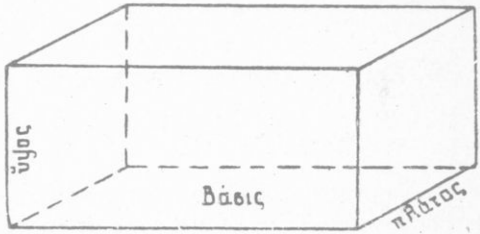
Ἐπιφάνεια. Ὁλόκληρος ἡ ἐπιφάνειά του ἀποτελεῖται ἀπὸ ἄλλες ἐπιφάνειες μικρότερες καὶ ἐπίπεδες. Ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τοῦ κουτιοῦ τῆς κιμωλίας εἶναι τεθλασμένη.

Ἕδρες - ἀκμὲς - κορυφές. Περικλείεται σὲ 6 ἐπίπεδες καὶ εὐθύγραμμες ἕδρες. Εἶναι δηλ. σῶμα **πολύεδρο.** Οἱ ἀπέναντι ἕδρες του καὶ οἱ ἀπέναντι ἀκμές των εἶναι ἴσες. Ἔχει 12 ἀκμὲς καὶ 12 δίεδρες γωνίες. Ἔχει ἐπίσης 8 κορυφὲς καὶ 8 τρίεδες γωνίες. Σὲ κάθε ἕδρα του σχηματίζονται 4 ὀρθὲς γωνίες, ἑπομένως τὸ σῶμα αὐτὸ ἔχει συνολικῶς 24 ὀρθὲς γωνίες.

Θέσις τῶν ἑδρῶν καὶ τῶν ἀκμῶν. Ἡ κάτω ἕδρα του, αὐτὴ μὲ τὴν ὁποία στηρίζεται στὸ τραπέζι καὶ ἡ ἀπέναντί της, ἡ ἐπάνω, λέγονται **βάσεις** καὶ εἶναι ὁριζόντιες. Ὁριζόντιες ἐπίσης εἶναι καὶ οἱ ἀκμές των. Οἱ ἄλλες ἕδρες του, οἱ παράπλευρες, οἱ ὁποῖες ἑνώνουν τὶς δύο βάσεις καὶ οἱ ἀκμές των εἶναι κατακόρυφες. Ὅλες οἱ ἕδρες τοῦ σώματος αὐτοῦ καὶ οἱ ἀκμές των, ἀνὰ δύο, εἶναι κάθετες ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης. Ἐπίσης οἱ ἀπέναντι ἕδρες του καὶ οἱ ἀκμές των εἶναι παράλληλες.

Σύγκριση ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ κύβου. Τὰ ἴδια γνωρίσματα, ἐκτὸς ἀπὸ ἕνα, εἴδαμε ὅτι ἔχει καὶ ὁ κύβος. Μοιάζει λοιπὸν τὸ κουτὶ τῆς κιμωλίας μὲ τὸν κύβο. Δὲν εἶναι ὅμως κύβος, διότι οἱ ἕδρες του δὲν εἶναι ὅλες ἴσες, ἀλλὰ μόνον οἱ ἀπέναντι. Σ' αὐτὸ διαφέρει ἀπὸ τὸν κύβο.

Ὁρισμὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Τὸ σῶμα ποὺ ἔχει τὰ παραπάνω γνωρίσματα λέγεται **ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο** (σχ. 14). Λέγεται ὀρθογώνιο, διότι ὅλες οἱ γωνίες του εἶναι ὀρθὲς καὶ παραλληλεπίπεδο, διότι ὅλες οἱ ἕδρες τοῦ εἶναι ἐπίπεδες καὶ οἱ ἀπέναντι ἴσες καὶ παράλληλες.



Σχ. 14

Ὥστε: **Ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο λέγεται τὸ ἑξάεδρο στερεὸ σῶμα, τοῦ ὁποίου οἱ ἀπέναντι ἕδρες εἶναι ἴσες καὶ παράλληλες καὶ ὅλες οἱ γωνίες του εἶναι ὀρθές.**

Διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Στὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο μποροῦμε νὰ πάρουμε ὡς βάσεις, δύο, ὁποιεσδήποτε, ἀπό τὶς ἀπέναντι ἕδρες του. Ἡ μία, ἀπὸ τὶς μεγαλύτερες ἀκμὲς τῆς βάσεώς του, δείχνει τὸ **μῆκος** του, ἡ δὲ ἀκμὴ ποὺ ἑνώνει τὶς δύο ἀπέναντι καὶ κάθετες πρὸς τὴ βάση ἕδρες του, δείχνει τὸ **πλάτος** καὶ ἡ ἀκμὴ ποὺ ἑνώνει τὶς δύο βάσεις του δείχνει τὸ **ὕψος** (σχ. 14).

Σώματα σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Πολλὰ σώματα ἔχουν σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, π.χ. τὸ κλειστὸ βιβλίο, ἡ κασετίνα, πολλὰ κουτιά, τὰ κουτιὰ τῶν σπίρτων καὶ τῶν τσιγάρων, οἱ πλάκες τοῦ σαπουνιοῦ τῆς μπουγάδας, τὰ κυβώτια τοῦ πετρελαίου κλπ.

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς Α'. 1. Νὰ δείξουν καὶ ν' ἀπαριθμήσουν αἱ μαθηταὶ τὶς ἕδρες, τὶς ἀκμές τὶς δίεδρες γωνίες, τὶς κορυφὲς καὶ τὶς τρίεδρες γωνίες τοῦ ὀρθογωνίου παραλλληλεπιπέδου.

2. Πόσες ὀρθὲς γωνίες ἔχει τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο;

3. Νὰ δείξουν οἱ μαθηταὶ τὶς ἀπέναντι ἴσες καὶ παράλληλες ἕδρες του.

4. Νὰ δείξουν τὶς βάσεις καὶ τὶς παράπλευρες ἕδρες του.

5. Νὰ δείξουν τὶς τρεῖς διαστάσεις του.

Ὁμὰς β'. 6. Τὶ ἐπιφάνεια εἶναι ὁλόκληρος ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου;

7. Ποιὸ σῶμα λέγεται ὀρθογ. παραλληλεπίπεδο;

8. Σὲ τί μοιάζει τὸ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδο μὲ τὸν κύβο καὶ σὲ τί διαφέρει;

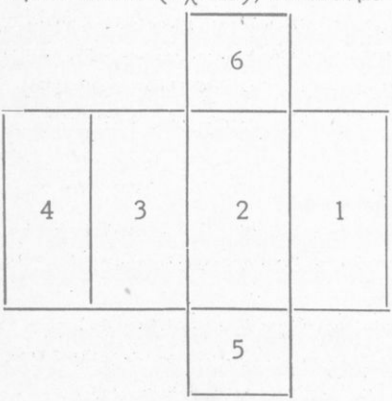
9. Νὰ εὕρουν οἱ μαθηταὶ σώματα μὲ σχῆμα ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου.

10. Τὴν ὥρα τῆς ἰχνογραφίας νὰ ἰχνογραφήσουν ὀρθόγ. παραλληλεπίπεδα σὲ διάφορα μεγέθη.

20. Σχῆμα ἑδρῶν ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Σχέσις μεταξὺ των

Ἀνάπτυγμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Ἂν πάρουμε ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, τὸ τοποθετήσουμε ἐπάνω σ' ἕνα φύλλο χαρτὶ καὶ σύρουμε μὲ τὸ μολύβι γύρω του γραμμές, ἀκολουθῶντας τὶς ἀκμὲς τῆς βάσεώς του, κάνουμε δὲ τὸ ἴδο συνέχεια μὲ ὅλες τὶς ἕδρες του, κάθε μία χωριστά, θὰ σχηματισθῆ ἕνα σχῆμα, τὸ ὁποῖο μᾶς δείχνει τὸ σχῆμα πού θὰ εἶχαν ὅλες μαζὶ οἱ ἕδρες του, ἂν μπορούσαμε νὰ τὶς ξεχωρίσουμε καὶ νὰ τὶς ἁπλώσουμε ἐπάνω στὸ τραπέζι, τὴν μιὰ δίπλα στὴν ἄλλη. Μᾶς δείχνει ἐπίσης τὸ σχῆμα κάθε μιᾶς ἕδρας του χωριστά. Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται **ἀνάπτυγμα** τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

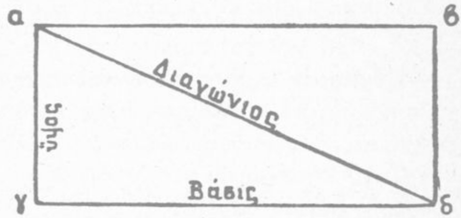
Ἂν παρατηρήσουμε τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου (σχ. 15), θὰ ἰδοῦμε ὅτι, τὰ σχήματα ποὺ ἔγιναν ἀπὸ κάθε ἕδρα του εἶναι ὅλα τετράπλευρα, εὐθύγραμμα μὲ γωνίες ὀρθές, δὲν εἶναι ὅμως ὅλα ἴσα. Ἴσα εἶναι μόνον ἐκεῖνα ποὺ ἔγιναν ἀπὸ τὶς ἀπέναντι ἕδρες του. Ἀπ' αὐτὸ καταλαβαίνουμε ὅτι, μόνον οἱ ἀπέναντι ἕδρες τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσες.



Σχ. 15

Ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο. Ἂν ἀπὸ τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ξεχωρίσουμε μία, ὁποιαδήποτε, ἕδρα του, π.χ. τὴν ὑπ' ἀριθ. 4 (σχ. 15), αὐτὴ θὰ μᾶς παρουσιάση τὸ σχῆμα α β γ δ (σχ. 16).

Ἂν τώρα παρατηρήσουμε τὸ σχῆμα αὐτό, θὰ ἰδοῦμε, ὅτι εἶναι σχῆμα εὐθύγραμμο. Οἱ ἀπέναντι πλευρές του α—β καὶ γ—δ, εἶναι ἴσες καὶ παράλληλες. Ἐπίσης ἴσες μεταξύ των καὶ παράλληλες εἶναι οἱ πλευρές του α — γ καὶ β — δ. Θὰ ἰδοῦμε ἐπίσης ὅτι, καὶ οἱ 4 γωνίες τοῦ σχήματος αὐτοῦ εἶναι ὀρθές, διότι σχηματίζονται ἀπὸ πλευρὲς κάθετες μεταξύ των. Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται **ὀρθογώνιο παραλλόγραμμο.**



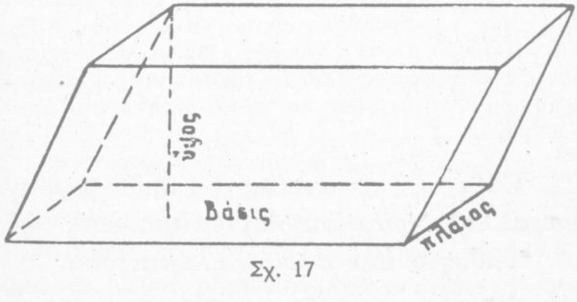
Σχ. 16

Ὥστε: **Ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο ἢ ἁπλῶς ὀρθογώνιο λέγεται τὸ τετράπλευρο εὐθύγραμμο σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τὶς ἀπέναντι πλευρὲς ἴσες καὶ παράλληλες καὶ τὶς γωνίες του ὀρθὲς** (σχ. 16).

Ἑπομένως, οἱ ἕδρες τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου ἔχουν σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου.

Διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλλογράμμου. Τὸ ὀρθογώνο παραλληλόγραμμο ἔχει δύο μόνο διαστάσεις, μῆκος καὶ πλάτος. Στὸ ὀρθογώνιο, ὡς βάση παίρνουμε μία ἀπὸ τὶς μεγαλύτερες πλευρές του καὶ ὡς ὕψος τὴν κάθετο πρὸς τὴ βάση του πλευρά.

Περίμετρος ττῦ ὀρθογωνίου. Τὸ ἄθροισμα τοῦ μήκους τῶν πλευρῶν παντὸς εὐθυγράμμου σχήματος, ἑπομένως καὶ τοῦ ὀρθογωνίου, λέγεται **περίμετρος** αὐτοῦ. Ἐπειδὴ ὅμως οἱ πλευρὲς τοῦ ὀρθογωνίου, ἀνὰ δύο ἀπέναντι, εἶναι ἴσες, ἡ περίμετρός του εὑρίσκεται ἂν διπλασιάσουμε τὸ μῆκος μιᾶς μικρῆς πλευρᾶς του καὶ μιᾶς μεγάλης καὶ τὰ προσθέσουμε.



Σχ. 17

Διαγώνιος. Ἂν ἀπὸ τὴν κορυφὴ α (σχ. 16) φέρουμε εὐθεῖα πρὸς τὴν ἀπέναντι κορυφὴ δ, βλέπουμε, ὅτι ἡ εὐθεῖα αὐτὴ συνδέει τὶς κορυφὲς τῶν 2 ἀπέναντι γωνιῶν τοῦ ὀρθογωνίου, χωρὶς νὰ εἶναι πλευρὰ αὐτοῦ καὶ τὸ χωρίζει σὲ δύο ἴσα μέρη. Ἡ εὐθεῖα αὐτὴ λέγεται **διαγώνιος.**

Σύγκριση ὀρθογωνίου καὶ τετραγώνου. Ἂν τὸ ὀρθογώνιο τὸ συγκρίνουμε μὲ τὸ τετράγωνο, θὰ ἰδοῦμε ὅτι, τὰ δύο αὐτὰ σχήματα, ἐνῷ μοιάζουν σὲ ὅλα μεταξύ των, διαφέρουν στὶς πλευρές. Τοῦ τετραγώνου οἱ πλευρὲς εἶναι ὅλες ἴσες, ἐνῷ οἱ πλευρὲς τοῦ ὀρθογωνίου δὲν εἶναι ὅλες ἴσες, ἀλλὰ μόνον οἱ ἀπέναντι.

Ἐπιφάνειες σχήματος ὀρθογωνίου. Πολλὲς ἐπιφάνειες ἔχουν σχῆμα ὀρθογωνίου. Π. χ. Οἱ ἕδρες παντὸς στερεοῦ ποὺ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πίνακος, ἡ ἐπιφάνεια διαφόρων χαρτῶν, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ βιβλίου, οἱ κόλλες τοῦ διαγωνισμοῦ κλπ.

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς Α΄. 1. Ποῖα εἶναι τὰ γνωρίσματα τοῦ ὀρθογωνίου;

2. Τί σχῆμα ἔχουν οἱ ἕδρες τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου;

3. Νὰ δείξουν οἱ μαθηταὶ τὶς διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου.

4. Πῶς εὑρίσκεται ἡ περίμετρος τοῦ ὀρθογωνίου;

5. Τί λέγεται διαγώνιος;

Ὁμὰς Β΄. 6. Νὰ κάμουν οἱ μαθηταὶ δύο σχήματα, ἕνα τετράγωνο καὶ ἕνα ὀρθογώνιο, νὰ τὰ συγκρίνουν καὶ νὰ βροῦν τὶς ὁμοιότητες καὶ τὶς διαφορές των.

7. Νὰ δείξουν οἱ μαθηταὶ ἐπιφάνειες σχήματος ὀρθογωνίου.

8. Νὰ ἰχνογραφήσουν οἱ μαθηταὶ σὲ χαρτόνι ὀρθογώνια, νὰ κόψουν ἔπειτα μὲ ψαλίδι τὶς πλευρές των καὶ νὰ τὰ χρωματίσουν.

9. Νὰ χωρισθοῦν οἱ μαθηταὶ σὲ 3 ὁμάδες, τὴν ὥρα τῆς ἰχνογραφίας καὶ νὰ κάμουν ὀρθογώνια. Ἡ α΄ ὁμὰς νὰ κάμη ὀρθογώνιο, τοῦ ὁποίου ἡ μιὰ μικρὴ πλευρὰ νὰ ἔχη μῆκος 0,10 μ. καὶ ἡ μία μεγάλη 0,25 μ., ἡ β΄ ὁμὰς νὰ κάμη ὀρθογώνιο μὲ μικρὴ πλευρὰ μήκους 0,05 μ. καὶ μὲ μεγάλη 0,15 μ. Ἡ γ΄ ὁμὰς νὰ κάμη ὀρθογώνιο μὲ μῆκος τῆς μιᾶς μικρῆς πλευρᾶς του 0,50 μ. καὶ τῆς μιᾶς μεγάλης 0,75 μ.

10. Κάθε ὁμὰς νὰ μετρήση καὶ νὰ εὕρη τὴν περίμετρο τοῦ ὀρθογωνίου ποὺ ἔκαμε.

21. Εὕρεση ἐπιφανείας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου καὶ ἐπιφανείας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

α΄) **Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας ὀρθογωνίου παραλληλο-**

γράμμου. Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου πρέπει νὰ μετρήσουμε μία ἀπὸ τὶς μεγαλύτερες πλευρές του, ποὺ φανερώνει τὸ μῆκος καὶ τὴν ὁποία ὠνομάσαμε βάση (σχ. 17) καὶ μία ἀπὸ τὶς μικρότερες, ποὺ φανερώνει τὸ πλάτος του καὶ τὴν ὁποίαν ὠνομάσαμε ὕψος (σχ. 17), καὶ νὰ πολλαπλασιάσουμε τὰ ἀποτελέσματα τῆς μετρήσεως. Τὸ γινόμενο ποὺ θὰ βροῦμε εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου σὲ τ. μ.

Ἂν ὑποτεθῆ π. χ. ὅτι τὸ μῆκος (ἡ βάση) τοῦ πατώματος τῆς αἰθούσης μας, τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου εἶναι 8 μ. καὶ τὸ πλάτος (ὕψος) εἶναι 5 μ., τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι $8 \times 5 = 40$ τ. μ.

Ὥστε, **γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, πολλαπλασιάζουμε τὴ βάση ἐπὶ τὸ ὕψος του.**

Ἀσκήσεις καὶ Προβλήματα

Ὁμὰς Α. 1. Τὸ πάτωμα τῆς αἰθούσης μας ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ μεγάλη πλευρὰ ἔχει μῆκος 18 μ. καὶ ἡ μικρὴ τὸ τρίτον τῆς μεγάλης. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ περίμετρός του ;

2. Γιὰ νὰ περιφράξουμε ἕνα γήπεδο σχήματος ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ μία μικρὴ πλευρὰ εἶναι 65 μ. καὶ ἡ μία μεγάλη 85 μ., ἀγοράσαμε δικτυωτὸ σύρμα, γιὰ τὸ ὁποῖο δώσαμε 15.000 δραχ. Πόσα μέτρα σύρμα ἀγοράσαμε καὶ πόσο μᾶς στοίχισε τὸ μέτρο ;

3. Τὸ πάτωμα τῆς τάξεώς μας ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου μὲ μῆκος 10 μ. καὶ πλάτος 6 μ. Ἂν ἀφήσουμε ἐλεύθερα 10 τ.μ., πόσα θρανία θὰ χωρέσουν στὰ ὑπόλοιπα, ἂν τὸ κάθε θρανίο καταλαμβάνη χῶρο 2,50 τ.μ. καὶ πόσοι μαθηταὶ θὰ χωρέσουν, ἂν καθήσουν ἀπὸ δύο σὲ κάθε θρανίο ;

4. Η αὐλὴ τοῦ σχολείου μας, σχήματος ὀρθογωνίου, ἔχει πλάτος 12,50 μ. καὶ μῆκος τριπλάσιο. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν της ;

5. Ἕνα χωράφι σχήματος ὀρθογωνίου ἔχει μῆκος 275 μ. καὶ πλάτος 80 μ. Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδόν του εἰς στρέμματα καὶ ἡ ἀξία του πρὸς 1.250 δραχ. τὸ στρέμμα.

Ὁμὰς Β΄. 6. Ἡ αὐλὴ ἑνὸς σχολείου, σχήματος ὀρθογωνίου, ἔχει μῆκος 25,5 μ. καὶ πλάτος 10 μ. Πρόκειται νὰ στρωθῆ μὲ πλακάκια τετραγωνικὰ μὲ πλευρὰ 0,35 μ. Πόσα πλακάκια θὰ χρειασθοῦν καὶ πόσο θὰ στοιχίσουν, ἂν τὸ ἕνα ἔχη 2,75 δραχμές ;

7. Ἕνα οἰκόπεδο, σχήματος ὀρθογωνίου, μὲ πρόσοψη 27,5 μ. καὶ βάθος διπλάσιο, ἐπωλήθη 85 δρχ. τὸν τ.τ.π. Πόσες δραχμὲς ἐπωλήθη;

8. Τὸ πάτωμα τοῦ δωματίου μας, σχήματος ὀρθογωνίου μὲ μῆκος 8,5 μ. καὶ πλάτος $4\frac{3}{4}$ μ. πρόκειται νὰ τὸ στρώσω μὲ σανίδες μήκους 2,6 μ. καὶ πλάτους 0,08 μ. Πόσες σανίδες θὰ χρειασθοῦν ;

9. Σ' ἕνα ὀρθογώνιο κτῆμα μὲ μῆκος 125 μ. καὶ πλάτος 32,5 μ. πρόκειται νὰ φυτέψουμε ἐληές. Πόσες ἐληὲς θὰ φυτέψουμε, ἂν γιὰ κάθε μιὰ χρειάζωνται $5\frac{1}{2}$ τ.μ.;

10. Ἕνα ὀρθογώνιο οἰκόπεδο μὲ πρόσοψη 32 μ. καὶ βάθος $56\frac{1}{2}$ μ. ἐπωλήθη ἀντὶ 35.000 δραχμῶν. Πόσον στοιχίζει τὸ τ.μ. καὶ πόσον ὁ τ.τ.π.;

22. Περὶ κλίμακος

Σχέδιο ἢ σχεδιάγραμμα. Ἂν θελήσουμε νὰ παραστήσουμε στὸν πίνακα τὸ σχῆμα μιᾶς ἐπιπέδου ἐπιφανείας, π.χ. τοῦ δαπέδου τῆς αἰθούσης τῆς τάξεώς μας, ἢ τῆς αὐλῆς τοῦ σχολείου μας κλπ., τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον θὰ ἀπεικονίσουμε λέγεται **σχέδιο** ἢ **διάγραμμα** ἢ **σχεδιάγραμμα.**

Τὸ ἴδιο μποροῦμε νὰ κάνουμε, ὄχι μόνο στὸν πίνακα, ἀλλὰ καὶ σ' ἕνα φύλλο χαρτὶ γιὰ ὁποιαδήποτε ἐπιφάνεια μεγάλη ἢ μικρή.

Ὥστε: **σχέδιο λέγεται ἡ ἀπεικόνιση τοῦ σχήματος μιᾶς ἐπιπέδου ἐπιφανείας δι' ὁμοίου ἐπὶ τοῦ πίνακος ἢ τοῦ χάρτου.**

Σμίκρυνση. Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι θέλουμε νὰ κάνουμε τὸ σχέδιο, π.χ. τῆς αὐλῆς τοῦ σχολείου μας, σχήματος τετραγώνου μὲ πλευρὰ 100 μ.

Εἶναι φανερὸν ὅτι, οἱ πλευρὲς τοῦ σχεδίου πρέπει νὰ εἶναι ὄχι μόνον μικρότερες ἀπὸ τὶς **ὁμόλογες** (ἀντίστοιχες - πραγματικὲς) πλευρὲς τῆς αὐλῆς, ἀλλὰ καὶ κατὰ τὴν ἴδια ἀναλογία, ὅσες δηλαδὴ φορὲς μικρότερη γίνη ἡ μία, τόσες φορὲς μικρότερες πρέπει νὰ γίνουν καὶ οἱ ἄλλες. Ἐπίσης, οἱ γωνίες τοῦ σχεδίου πρέπει νὰ εἶναι ἴσες μὲ τὶς ὁμόλογες γωνίες τοῦ σχήματος τῆς αὐλῆς, νὰ ἔχουν δηλαδὴ τὸ ἴδιο ἄνοιγμα.

Ἂν τώρα κάθε πλευρὰ τοῦ σχεδίου γίνη ἕνα μέτρο, θὰ εἶναι 100 φορὲς μικρότερη ἀπὸ τὴν ὁμόλογη πλευρὰ τῆς αὐλῆς.
Ἂν γίνη 0,10 μ., θὰ εἶναι 1000 φορὲς μικρότερη καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἡ ἐργασία αὐτὴ λέγεται **σμίκρυνση.**

Ἡ σμίκρυνση τῶν πλευρῶν ἑνὸς σχήματος μπορεῖ νὰ γίνη ὄχι μόνον 100 φορές, ἀλλὰ καὶ 500 ἢ 1000 ἢ 10.000. φορὲς καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Μπορεῖ ἐπίσης νὰ γίνη καὶ λιγώτερες φορὲς ἀπὸ 100, δηλ. 50 φορὲς 10 φορές, κλπ. Ὅσο λιγώτερες φορὲς γίνη ἡ σμίκρυνση ἑνὸς σχήματος, τόσον λεπτομερέστατα ἀπεικονίζεται στὸ σχέδιο μιὰ περιοχὴ τοῦ ἐδάφους.

Ἡ σμίκρυνση τῶν σχημάτων εἶναι ἀπαραίτητος, διότι ἔτσι εἶδαι δυνατὸν νὰ ἀπεικονισθοῦν ἐπάνω στὸ χαρτὶ μεγάλες ἐκτάσεις τοῦ ἐδάφους.

Ἀριθμητικὴ κλῖμαξ

Ἡ σχέση ποὺ ὑπάρχει μεταξὺ τῶν πλευρῶν ἑνὸς σχεδίου πρὸς τὶς ὁμόλογες πλευρὲς τοῦ πραγματικοῦ σχήματος, λέγεται **ἀριθμητικὴ κλῖμαξ.**

Ἡ ἀριθμητικὴ κλῖμαξ παριστάνεται μὲ κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς φανερώνει, πόσες φορὲς εἶναι μικρότερες οἱ πλευρὲς ἑνὸς σχεδίου, ἀπὸ τὶς ὁμόλογες πλευρὲς τοῦ πραγματικοῦ σχήματος.

Ἂν π. χ. ἕνα σχέδιο ἔγινε μέ κλίμακα 1/1000, σημαίνει ὅτι οἱ πλευρές του εἶναι 1000 φορὲς μικρότερες ἀπὸ τὶς ὁμόλογες πλευρὲς τοῦ σχήματος ποὺ ἀπεικονίζει.

Ὥστε, κάθε σχέδιο παριστᾶ σὲ μικρογραφία μεγάλη ἔκταση ἐδάφους, ἡ δὲ κλῖμαξ δείχνει τὴ σχέση, ποὺ ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ μήκους ἐπὶ τοῦ σχεδίου καὶ τοῦ πραγματικοῦ μήκους ἐπὶ τοῦ ἐδάφους.

Χρῆσις τῆς ἀριθμητικῆς κλίμακος. Θέλουμε νὰ κάνουμε ὑπὸ κλίμακα, π. χ. 1/1000 τὸ σχέδιο ἑνὸς οἰκοπέδου, σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι 70×50. Αὐτὸ σημαίνει, ὅτι αἱ διαστάσεις τοῦ σχεδίου πρέπει νὰ εἶναι 1000 φορὲς μικρότερες ἀπὸ τὶς ὁμόλογες διαστάσεις τοῦ οἰκοπέδου.

Γιὰ νὰ τὸ ἐπιτύχουμε ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

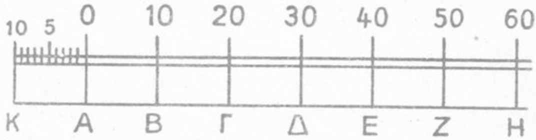
Διαιροῦμε τὸν ἀριθμὸ 70 : 1000 = 0,07 καὶ τὸν ἀριθμὸ 50 : 1000 = 0,05. Οἱ διαστάσεις δηλαδὴ τοῦ σχεδίου πρέπει νὰ εἶναι 0,07×0,05, διότι 0,07×1000 = 70 καὶ 0,05×1000 = 50.

Ὥστε: **γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μῆκος μιᾶς γραμμῆς ἑνὸς σχεδίου, διαιροῦμε τὸ πραγματικὸ μῆκος τῆς ὁμολόγου γραμμῆς τοῦ σχήματος, διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τῆς ἀριθμητικῆς κλίμακος.**

Γραφικὴ Κλῖμαξ

Σὲ μιὰ ἀπὸ τὶς γωνίες τῶν διαφόρων σχεδίων καὶ ὅλων σχεδὸν τῶν γεωγραφικῶν χαρτῶν, ὑπάρχει ἀριθμητικὴ κλῖμαξ. Π. χ. 1/1000. Δίπλα της ὑπάρχει μία εὐθεῖα διηρημένη σὲ ἴσα μέρη, ἡ ὁποία φανερώνει τὴ σμίκρυνση ποὺ ἔγινε στὶς γραμμὲς τοῦ σχεδίου ἢ τοῦ χάρτου. Ἡ εὐθεῖα αὐτὴ λέγεται **γραφικὴ κλῖμαξ** (σχ. 18).

Κλῖμαξ $\frac{1}{1000}$



Σχ. 18

Στὴν ἀνωτέρω γραφικὴ κλίμακα, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ μὲ ἀριθμητικὴ κλίμακα 1/1000, παρατηροῦμε ὅτι τὰ τμήματά της, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ κλπ., ἔχουν τὸ καθένα μῆκος 0,01 μ.. τὸ ὁποῖο ἀντιστοιχεῖ μὲ 10 μέτρα πραγματικοῦ μήκους, διότι $0{,}01 \times 1000 = 10$. Γι' αὐτὸ στὸ τέλος κάθε τμήματος εἶναι σημειωμένοι οἱ ἀριθμοὶ 10, 20, 30 κλπ. Τὸ τμῆμα ΚΑ, στὸ ἀριστερὸ μέρος τῆς κλίμακος, ἔχει κι' αὐτὸ μῆκος 0,01 μ. καὶ εἶναι διηρημένο σὲ δέκα χιλιοστά, διότι $0{,}01 : 10 = 0{,}001$, καθένα ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχεῖ μὲ 1 μέτρο πραγματικοῦ μήκους.

Ἂν ἡ ἀριθμητικὴ κλῖμαξ εἶναι 1/10000, τὰ τμήματα ΑΒ, ΒΓ κλπ., τῆς γραφικῆς κλίμακος, θὰ ἀντιστοιχοῦν μὲ 100 μέτρα πραγματικοῦ μήκους.

Χρῆσις τῆς γραφικῆς κλίμακος. Σ' ἕνα χάρτη ὑπὸ κλίμακα, π. χ. 1/10000, θέλουμε νὰ βροῦμε πόσο ἀπέχει ἡ θέση Α ἀπὸ τὴ θέση Β. κατ' εὐθεῖα γραμμή.

Γιὰ νὰ τὸ βροῦμε ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς.

Παίρνουμε ἕνα διαβήτη καὶ τοποθετοῦμε τὸ ἕνα σκέλος του στὴ θέση Α τοῦ χάρτου καὶ τὸν ἀνοίγουμε ἕως ὅτου τὸ ἄλλο σκέλος του ἀκουμπήση στὴ θέση Β.

Ἔπειτα, καθὼς εἶναι ὁ διαβήτης, τοποθετοῦμε τὸ ἕνα σκέλος του στὸ 0 τῆς κλίμακος καὶ προσέχουμε νὰ ἰδοῦμε, σὲ ποιὰ διαίρεση αὐτῆς, δεξιὰ τοῦ 0, θὰ ἀκουμπήση τὸ ἄλλο. Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι ἀκούμπησε στὴν διαίρεση, ἐπάνω ἀπὸ τὴν ὁποία εἶναι γραμμένος ὁ ἀριθμὸς 40. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ πραγματικὴ ἀπόσταση τῶν θέσεων ΑΒ τοῦ χάρτου, κατ' εὐθεῖα γραμμή, εἶναι 400 μέτρα. Ἂν ὅμως τὸ ἄλλο σκέλος πέση μεταξὺ τοῦ 400 καὶ 500, τότε τοποθετοῦμε τὸ δεξιὸ στὸ 400 καὶ προσέχουμε σὲ ποιὰ ὑποδιαίρεση, ἀριστερὰ τοῦ 0, θὰ πέση τὸ ἀριστερό, ἂν δὲ ὑποτεθῆ ὅτι ἔπεσε στὴν ἕκτη ὑποδιαίρεση ἀριστερὰ τοῦ 0, σημαίνει ὅτι ἡ πραγματικὴ ἀπόσταση μεταξὺ τῶν θέσεων Α καὶ Β τοῦ χάρτου, κατ' εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι 460 μέτρα.

Ἀσκήσεις

1. Τί λέγεται σχέδιο καὶ τί σμίκρυνση;
2. Τί λέγεται ἀριθμητικὴ καὶ τί γραφικὴ κλῖμαξ;
3. Τί φανερώνει ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος τῆς ἀριθμητικῆς κλίματος;
4. Μεταξὺ δύο ἀριθμητικῶν κλιμάκων ποὺ δὲν ἔχουν τὸν ἴδιο παρονομαστή, ποιὰ εἶναι μεγαλύτερη;
5. Ἡ αὐλὴ τοῦ σχολείου μας, σχήματος τετραγώνου, μὲ πλευρὰ 50 μ. νὰ ἀπεικονισθῇ σὲ σχέδιο ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1000}$.
6. Μὲ πόσα μέτρα πραγματικοῦ μήκους ἀντιστοιχοῦν, τὰ τμήματα ΑΒ, ΓΔ κλπ. γραφικῆς κλίμακος, ὅταν ἡ ἀριθμητικὴ κλῖμαξ εἶναι $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ ἢ $\frac{1}{100000}$;

β) Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μποροῦμε νὰ βροῦμε κατὰ δύο τρόπους: α) Εὑρίσκουμε χωριστὰ τὸ ἐμβαδὸν κάθε μιᾶς ἕδρας καὶ προσθέτουμε τὰ ἐμβαδὰ τῶν 6 ἑδρῶν. β) Εὑρίσκουμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του, πολλαπλασιάζοντας τὴν περίμετρο τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του καὶ προσθέτουμε σ' αὐτὸ τὸ διπλάσιο τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

1. Τύλιξε τὸ κουτὶ τῆς κιμωλίας μὲ χαρτί, ἀκριβῶς. Ξετύλιξέ το ἔπειτα καὶ νὰ βρῆς τὸ ἐμβαδόν του μετρώντας τὶς διαστάσεις τοῦ χαρτιοῦ. Κάμε τὸ ἴδιο στὴν κασετίνα σου καὶ σὲ ἕνα κουτὶ σπίρτα.
2. Νὰ βρῆς τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας τῆς αἰθούσης τῆς τάξεώς σας, ἂν ἔχη σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, μετρώντας μόνος σου.
3. Ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας κιβωτίου σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, μὲ ἴσες τὶς 4 ἕδρες, ἀπὸ τὶς ὁποῖες ἡ μία εἶναι 1,25 τ.μ. καὶ ἡ μία ἀπὸ τὶς μικρὲς 0,75 τ.μ ;
4. Ἡ βάση ἑνὸς κιβωτίου, σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

εἶναι 1,20 τ.μ., ἡ περίμετρός της 1,4μ., καὶ τὸ ὕψος τοῦ κιβωτ. 0,9 μ. Πόσα τ.μ. εἶναι ὅλη ἡ ἐπιφάνεια ;

5. Πόσο θὰ στοιχίση ὁ ὑδροχρωματισμὸς μιᾶς αἰθούσης, ἐκτὸς τοῦ πατώματος, σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος εἶναι 12 μ., τὸ πλάτος 6 μ. καὶ τὸ ὕψος 5,25, ἂν πληρώσουμε 2,30 δραχ. γιὰ κάθε τ.μ. ;

23. Εὕρεσή τοῦ ὄγκου ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Θέλουμε νὰ εὕρουμε τὴν χωρητικότητα (ὄγκο) ἑνὸς δωματίου σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Γιὰ νὰ τὴ βροῦμε ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς :

Μετροῦμε τὶς διαστάσεις τῆς βάσεώς του, δηλαδὴ τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος της καὶ πολλαπλασιάζουμε τὰ δύο αὐτὰ δεδομένα.

Ἐκεῖνο ποὺ θὰ βροῦμε, εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ δωματίου.

Ἂν π.χ. ὑποθέσουμε ὅτι τὸ μῆκος εἶναι 6 μ. τὸ δὲ πλάτος 5 μ. τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ δωματίου θὰ εἶναι $5 \times 6 = 30$ τ.μ.

Ἂν τώρα ἐπάνω σὲ κάθε τ.μ. τῆς βάσεως, τοποθετήσουμε ἕνα κυβικὸ μέτρο, θὰ ἔχουμε στρῶμα ἀπὸ 30 κ.μ.

Ἂν τὸ ὕψος τοῦ δωματίου εἶναι 4 μ. θὰ χρειασθοῦν τέσσαρα τέτοια στρώματα κυβικῶν μέτρων, ἀνὰ 30 κ.μ. τὸ κάθε ἕνα, ἤτοι ἐν συνόλῳ θὰ χρειασθοῦν 120 κ.μ.

Ἐπειδὴ ὅμως τοῦτο δὲν εἶναι εὔκολο νὰ γίνεται κάθε φορὰ ποὺ θέλουμε νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο στερεοῦ, σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, πολλαπλασιάζουμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος.

Ὥστε : **Ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εὑρίσκεται ἂν πολλαπλασιάσουμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος.**

Ὥστε : **Ὁ ὄγκος παντὸς σώματος, ποὺ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσουμε τὶς τρεῖς διαστάσεις αὐτοῦ.** (Μῆκος × πλάτος × ὕψος).

Οἱ ἀκμὲς τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου ποὺ φανερώνουν τὸ μῆκος, τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ, συναντῶνται σὲ μία κορυφὴ τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου. Μποροῦμε λοιπόν, εὐκολώτερα, νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο του ἂν πολλαπλασιάσουμε τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ φανερώνουν τὰ μήκη τῶν 3 ἀκμῶν του ποὺ συναντῶνται στὴν ἴδια κορυφή.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

1. Ἡ αἴθουσα τῆς τάξεώς μας ἔχει μῆκος 7,40 μ. ὕψος 5,75 μ. καὶ πλάτος 4,25 μ. Πόσο κ.μ. εἶναι ὁ ὄγκος της ;

2. Πόσοι μαθηταὶ πρέπει νὰ μείνουν σὲ μιὰ αἴθουσα μήκους 10 μ.. πλάτους 5 μ. καὶ ὕψους 4 μ., ὅταν γιὰ κάθε μαθητὴ χρειάζονται 4 κ.μ. καθαροῦ ἀέρος ;

3. Μία δεξαμενὴ ἔχει ἄνοιγμα μὲ πλευρὰ μήκους 5 μ. καὶ πλάτους 2,75 μ. καὶ τὸ βάθος της εἶναι 4,25 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα νερὸ χωρεῖ;

4. Πόσα τοῦβλα θὰ χρειασθοῦν γιὰ νὰ κτισθῆ ἕνας τοῖχος μήκους 15 μ., πλάτους 0,65 μ. καὶ ὕψους 4,5 μ., ἂν κάθε τοῦβλο ἔχη ὄγκο μιᾶς κυβικῆς παλάμης ;

5. Πόσες πλάκες σαπούνι θὰ χωρέση ἕνα κιβώτιο, σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ποὺ ἔχει μῆκος 1,5 μ., πλάτος 0,6 μ. καὶ ὕψος 0,90 μ., ἂν κάθε πλάκα σαπούνι ἔχη μῆκος 0,10 μ., πλάτος 0,7 μ. καὶ ὕψος 0,5 μέτρου ;

6. Ἕνα κιβώτιο, σχήματος ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου, ἔχει μῆαος 3,60 μ., πλάτος τὸ ἥμισυ τοῦ μήκους καὶ ὕψος τὸ τρίτο τοῦ μήκους του. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του ;

24. Κατασκευὴ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Α'. Τρόπος. Ἐπάνω σ' ἕνα χαρτόνι κάνουμε 6 ὀρθογώνια συνεχόμενα (σχ. 15). Ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια αὐτὰ τὸ 1 καὶ τὸ 3, πρέπει νὰ εἶναι ἴσα μεταξύ των. Ἐπίσης ἴσα μεταξύ των πρέπει νὰ εἶναι καὶ τὰ ὀρθογώνια 2 καὶ 4, τὸ ἴδιο καὶ τὰ 5 καὶ 6. Ὕστερα μὲ ἕνα μαχαιράκι χαράζουμε ὅλες τὶς πλευρὲς τῶν ὀρθογωνίων 2 καὶ 3 καὶ τὶς διπλώνουμε μέχρις ὅτου ἑνωθοῦν, ὁπότε σχηματίζεται ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Κολλᾶμε ἔπειτα μὲ γόμα τὶς πλευρὲς στὰ μέρη ποὺ συναντήθησαν καὶ σχημάτισαν ἀκμές.

Β'. Τρόπος. Παίρνομε ἕνα σανίδι μὲ ἀρκετὸ πάχος καὶ ἐπάνω στὴν πλατειὰ ἐπιφάνειά του χαράζουμε ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο, κόβουμε ἔπειτα μὲ πριόνι τὸ σανίδι στὶς πλευρὲς τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ποὺ χαράξαμε. Τὸ σῶμα ποὺ θὰ σχηματισθῆ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Ἀσκήσεις

1. Νὰ χωρισθοῦν οἱ μαθηταὶ σὲ 3 ὁμάδες τὴν ὥρα τῆς χειροτεχνίας καὶ νὰ κατασκευάσουν ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα, σὲ διάφορο μέγεθος ἡ κάθε ὁμάδα, ἐργαζομένη σύμφωνα μὲ τὸν πρῶτο τρόπο, καὶ νὰ χρωματίσουν μὲ ὅ,τι χρῶμα θέλει κάθε ὁμάδα.
2. Νὰ κάμουν ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα μὲ χονδρὸ σανίδι, κατὰ τὸν δεύτερο τρόπο.
3. Νὰ κάμουν καὶ ἕνα κύβο καὶ νὰ τὸν συγκρίνουν μὲ ἕνα ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα ποὺ θὰ κάμουν, γιὰ νὰ ἰδοῦν τὶς ὁμοιότητες καὶ τὶς διαφορές των.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ΄

ΠΛΑΓΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟ

25. Γνωρίσματα τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου

Ἂν πάρουμε ἕνα στερεὸ σῶμα, τὸ ὁποῖο θὰ ἔχη σχῆμα ὅμοιο μὲ τὸ σχῆμα 17 καὶ τὸ παρατηρήσουμε, θὰ ἰδοῦμε ὅτι εἶναι παραλληλεπίπεδο, διότι περικλείεται σὲ 6 ἐπίπεδες ἕδρες, οἱ ὁποῖες ἀνὰ δύο ἀπέναντι εἶναι ἴσες καὶ παράλληλες.

Τὸ σῶμα ὅμως αὐτὸ δὲν εἶναι ὀρθογώνιο παραλληλεπιπέδο, διότι δύο ἀπὸ τὶς ἕδρες του, οἱ ἀπέναντι. δὲν ἔχουν σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου. Κάθε στερεὸ σῶμα ποὺ ἔχει τέτοιο σχῆμα λέγεται **πλάγιο παραλληλεπίπεδο** (σχ. 17).

Ἐπιφάνεια - ἕδρες - ἀκμὲς - κορυφές. Ἂν παρατηρήσουμε τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο θὰ ἰδοῦμε ὅτι, ὁλοκληρος ἡ ἐπιφάνειά του ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 ἕδρες εὐθύγραμμες καὶ ἐπίπεδες, ἀπὸ τὶς ὁποῖες οἱ ἀπέναντι, καθὼς καὶ οἱ ἀκμές των, εἶναι ἴσες καὶ παράλληλες.

Ὥστε: **τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο εἶναι πολύεδρο σῶμα μὲ ἐπιφάνεια τεθλασμένη.**

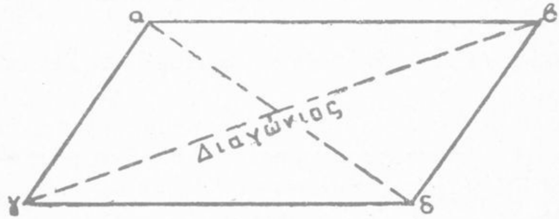
Ἂν μετρήσουμε τίς ἀκμὲς καὶ τὶς κορυφές του θὰ ἰδοῦμε, ὅτι ἔχει 12 ἀκμὲς καὶ 8 κορυφές.

Θέσις τῶν ἑδρῶν καὶ ἀκμῶν. Ἂν τοποθετήσουμε τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο ἐπάνω στὸ ὁριζόντιο τραπέζι, κατὰ τρόπο, ὥστε βάση του νὰ εἶναι μία ἀπὸ τὶς ὀρθογώνιες ἕδρες του, θὰ ἰδοῦμε, ὅτι ἡ βάση καὶ ἡ ἀπέναντί της ἕδρα καὶ οἱ ἀκμές των, εἶναι ὁριζόντιες. Ἀπὸ τὶς ἕδρες ὅμως τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του, οἱ δύο ἀπέναντι (ἡ δεξιὰ καὶ ἡ ἀριστερὰ) καὶ οἱ ἀκμές των δὲν εἶναι κατακόρυφες καὶ κάθετες πρὸς τὴ βάση, ἀλλὰ **πλάγιες.**

Πλαγία ἢ κεκλιμένη λέγεται ἡ ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία δὲν εἶναι οὔτε ὁριζοντία, οὔτε κατακόρυφος.

26. Σχῆμα τῶν ἑδρῶν τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου καὶ σχέσις μεταξύ των

Πλάγιο παραλληλόγραμμο Ἂν μία ἀπὸ τὶς ἕδρες τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου, ποὺ δὲν εἶναι ὀρθογώνιες, τὴν τοποθετήσουμε ἐπάνω σὲ φύλλο χαρτὶ καὶ μὲ τὸ μολύβι σύρουμε γύρω της γραμμές, ἀκολουθώντας τὶς ἀκμές της, θὰ μᾶς δώση τὸ εὐθύγραμμο τετράπλευρο σχῆμα α β γ δ (σχ. 19).



Σχ. 19.

Ἂν παρατηρήσουμ τὸ σχῆμα αὐτό, θὰ ἰδοῦμε ὅτι ἔχει τὰ ἑξῆς γνωρίσματα: 1) Οἱ ἀπέναντι πλευρές του εἶναι ἴσες καὶ παράλληλες. 2) Οἱ πλευρές του δὲν εἶναι κάθετες μεταξύ των, ἀλλὰ **πλάγιες**, διότι δὲν σχηματίζουν ὀρθὲς γωνίες εἰς τὰ σημεῖα ποὺ συναντῶνται. Μία εὐθεῖα λέγεται **πλαγία** πρὸς ἄλλην, ὅταν τὴν συναντᾶ καὶ δὲν σχηματίζει μὲ αὐτὴν ὀρθὴν γωνία. 3) Καμμία ἀπὸ τὶς 4 γωνίες του δὲν εἶναι ὀρθή, διότι δὲν σχηματίζονται ἀπὸ εὐθεῖες κάθετες μεταξύ των. Οἱ δύο ἀπέναντι εἶναι μικρότερες ἀπὸ τὴν ὀρθὴ καὶ ἴσες μεταξύ των, οἱ δὲ ἄλλες δύο, πάλι οἱ ἀπέναντι, εἶναι μεγαλύτερες ἀπὸ τὴν ὀρθὴ καὶ ἴσες μεταξύ των. Τὸ σχῆμα αὐτὸ εἶναι βέβαια παραλληλόγραμμο, ὄχι ὅμως ὀρθογώνιο, ἀλλὰ **πλάγιο παραλληλὸγραμο**, (σχ. 19).

Ὥστε: **πλάγιο παραλληλόγραμμο, λέγεται τὸ τετράπλευρο σχῆμα, τοῦ ὁποίου οἱ συνεχόμενες πλευρές, ἀνὰ δύο, εἶναι πλάγιες μεταξύ των καὶ οἱ ἀπέναντι ἴσες καὶ παράλληλες καὶ τὸ ὁποῖο ἔχει μόνο τὶς ἀπέναντι γωνίες ἴσες.**

Περίμετρος. Τό ἄθροισμα τοῦ μήκους καὶ τῶν 4 πλευρῶν τοῦ παραλληλολογράμμου λέγεται **περίμετρος** αὐτοῦ, εὑρίσκεται δὲ ἂν στὸ μῆκος μιᾶς πλευρᾶς του προσθέσουμε τὸ μῆκος τῆς γειτονικῆς της πλευρᾶς καὶ διπλασιάσουμε τὸ ἄθροισμα.

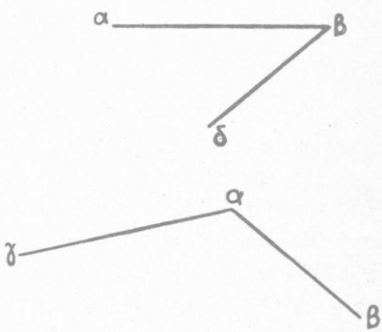
Διαγώνιος. Ἡ εὐθεῖα ποὺ ἑνώνει τὶς κορυφὲς δύο ἀπέναντι γωνιῶν τοῦ παραλληλογράμμου, χωρὶς νὰ εἶναι πλευρά, λέγεται **διαγώνιος** (σχ. 19).

27. Γωνίες τοῦ παραλληλεπιπέδου καὶ σχέσις μεταξύ των

Εἴδαμε ὅτι ἀπὸ τὶς 4 γωνίες τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου καμμία δὲν εἶναι ὀρθή, διότι σχηματίζονται ἀπὸ εὐθεῖες πλάγιες.

Ὀξεῖα γωνία. Δύο ἀπ' αὐτὲς οἱ ἀπέναντι, ἡ αβδ καὶ αγδ (σχ. 19), εἶναι μικρότερες ἀπὸ τὴν ὀρθή. Κάθε γωνία μικρότερη ἀπὸ τὴν ὀρθὴ λέγεται **ὀξεῖα** (σχ. 20).

Ἀμβλεῖα γωνία. Οἱ ἄλλες 2, γαβ καὶ γδβ (σχ. 19) εἶναι μεγαλύτερες ἀπὸ τὴν ὀρθή. Κάθε δὲ γωνία μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ὀρθὴ λέγεται **ἀμβλεῖα** (σχ. 20). Ὥστε, ἀπὸ τὶς γωνίες τοῦ παραλληλογράμμου, οἱ δύο ἀπέναντι, εἶναι ἀμβλεῖες.



Σχ. 20

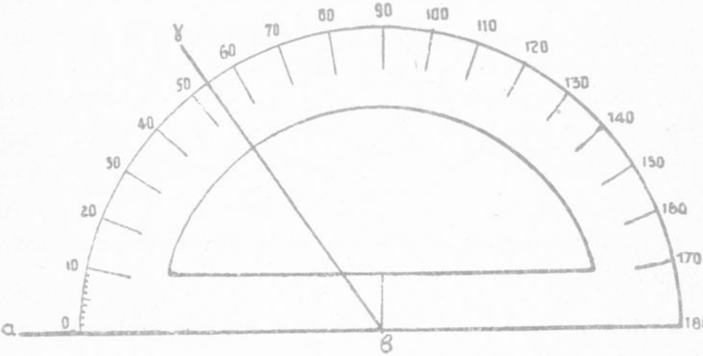
Μέτρηση γωνιῶν. Μάθαμε, ὅτι οἱ εὐθεῖες ποὺ σχηματίζουν κάθε γωνία, λέγονται πλευρὲς ἢ σκέλη τῆς γωνίας.

Μετρῶ μία γωνία, σημαίνει, ὅτι τὴν συγκρίνω μὲ μία ἄλλη γωνία **ὡρισμένη,** τὴν ὁποίαν λαμβάνω ὡς μονάδα μετρήσεως. Τέτοια μονάδα εἶναι **ὀρθὴ γωνία.**

Μ' αὐτὴ συγκρίνομε κάθε ἄλλη γωνία, ποὺ θέλουμε νὰ μετρήσουμε γιὰ νὰ ἰδοῦμε τί εἶναι.

Ἡ ὀρθὴ γωνία διαιρεῖται σὲ 90 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται **μοῖρες**. Οἱ μοῖρες σημειώνονται μὲ τὸ °. Κάθε μοῖρα ὑποδιαιρεῖται σὲ 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται **πρῶτα λεπτά** καὶ τὰ ὁποῖα σημειώνονται μὲ μίαν ὀξεῖα ('), κάθε δὲ πρῶτο λεπτὸ ὑποδιαιρεῖται σὲ 60 **δεύτερα λεπτά**, τὰ ὁποῖα σημειώνονται μὲ δύο ὀξεῖες ('').

Μοιρογνωμόνιο. Γιὰ τὴν μέτρηση τῶν γωνιῶν χρησιμοποιοῦμε τὸ **μοιρογνωμόνιο** (σχ. 21), τὸ ὁποῖο ἔχει σχῆμα μισοῦ κύκλου. Ἡ βάση του εἶναι εὐθεῖα, εἰς τὸ μέσον δὲ τῆς εὐθείας αὐτῆς φέρεται κάθετος, ἡ ὁποία σχηματίζει μὲ αὐτὴν 2 ὀρθὲς γω-



Μοιρογνωμονιο
Σχ. 21

νίες. Ἀφοῦ δὲ κάθε ὀρθὴ γωνία διαιρεῖται σὲ 90°, ἐπάνω στὸ μοιρογνωμόνιο εἶναι χαραγμένες 180°.

Γιὰ νὰ μετρήσουμε μιὰ γωνία ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: Βάζουμε τὴν κορυφὴ β τοῦ μοιρογνωμονίου ἐπὶ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας ποὺ θέλουμε νὰ μετρήσουμε, τὴν δὲ πλευρὰ τοῦ μοιρογνωμονίου, ἡ ὁποία φέρει τὴν διαίρεση 0, ἐπάνω στὴ μία πλευρὰ τῆς γωνίας. Τότε ἡ ἄλλη πλευρὰ τῆς γωνίας θὰ πέση σὲ μιὰ διαίρεση τοῦ μοιρογνωμονίου τὴν 53 π.χ. (σχ. 21). Ἑπομένως ἡ γωνία αὐτὴ εἶναι 53°.

Ὁρισμὸς πλαγίου παραλληλεπιπέδου. Ὕστερα ἀπὸ ὅσα μάθαμε, μποροῦμε νὰ δώσουμε τὸν ὁρισμὸ τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου, ὡς ἑξῆς:

Πλάγιο παραλληλεπίπεδο, λέγεται τὸ ἑξάεδρο στερεὸ σῶμα, τοῦ ὁποίου οἱ ἕδρες εἶναι πλάγια παραλληλόγραμμα καὶ κάθε 2 ἀπέναντι εἶναι ἴσες καὶ παράλληλες.

Ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἑνώνει τὶς δύο βάσεις τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου λέγεται **ὕψος** αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς Α΄. 1. Ποιά ἐπιφάνεια καὶ ποιὰ γραμμὴ λέγεται πλαγία; Βάλε τὸ βιβλίο καὶ τὸ μολύβι σου πλαγίως.

2. Πόσες πλάγιες ἕδρες ἔχει τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο ;

3. Ποιὰ γωνία λέγεται ὀξεῖα καὶ ποιὰ ἀμβλεῖα ;

4. Τί γωνίες εἶναι οἱ γωνίες τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου ;

5. Πόσες ὀρθές, πόσες ὀξεῖες καὶ πόσες ἀμβλεῖες γωνίες ἔχει τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο ; (νὰ τὶς δείξουν).

6. Τί θὰ εἰπῆ μετρῶ μιὰ γωνία ;

Ὁμὰς Β΄. 7. Νὰ συγκρίνουν οἱ μαθηταὶ ἕνα ὀρθογώνιο καὶ ἕνα πλάγιο παραλληλόγραμμο καὶ νὰ βροῦν τὰ κοινὰ καὶ τὰ διαφορετικὰ γνωρίσματα τῶν δύο αὐτῶν σχημάτων.

8. Νὰ συγκρίνουν ἕνα ὀρθογώνιο καὶ ἕνα πλάγιο παραλληλεπίπεδο καὶ νὰ βροῦν τὰ κοινὰ καὶ τὰ διαφορετικὰ γνωρίσματα τῶν δύο αὐτῶν σωμάτων.

9. Νὰ ἰχνογραφήσουν οἱ μαθηταὶ παραλληλόγραμμα καὶ παραλληλεπίπεδα σὲ διάφορα μεγέθη καὶ νὰ τὰ χρωματίσουν.

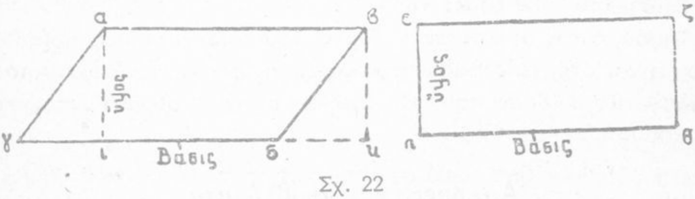
10. Νὰ κάμουν οἱ μαθηταὶ πλάγια παραλληλεπίπεδα μὲ χαρτόνι ἢ ξύλο σὲ διάφορα μεγέθη, κατὰ τὸν τρόπο ποὺ ἔφτιαξαν ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα.

11. Νὰ δείξουν τὶς βάσεις καὶ τὴν παράπλευρο ἐπιφάνεια τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου ποὺ ἔκαμαν.

12. Νὰ δείξουν τὶς ὀρθές, τὶς ὀξεῖες καὶ ἀμβλεῖες γωνίες του καὶ νὰ τίς μετρήσουν.

28. Εὕρεση τῆς ἐπιφανείας τοῦ παραλληλογράμμου καὶ ἐπιφανείας τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου

α) **Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας παραλληλογράμμου.** Ἂν προσέξουμε τὰ σχήματα αβγδ καὶ εζηθ (σχ. 22) θὰ ἰδοῦμε ὅτι καὶ τὰ δύο εἶναι παραλληλόγραμμα, τὸ ἕνα ὅμως εἶναι πλάγιο καὶ τὸ



Σχ. 22

ἄλλο ὀρθογώνιο. Ἂν ἡ πλευρὰ αβ τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴση μὲ τὴν εζ τοῦ ὀρθογωνίου καὶ ἡ ἀπόσταση μεταξὺ τῶν πλευρῶν αβ καὶ γδ τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀπόσταση μεταξὺ τῶν πλευρῶν εζ καὶ ηθ τοῦ ὀρθογωνίου, τὰ σχήματα αὐτὰ ἔχουν ἴσα ἐμβαδά. Μποροῦμε λοιπὸν νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου, ἂν κάνουμε ὅ,τι κάναμε γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου. Ἂν δηλαδὴ πολλαπλασιάσουμε τὴν βάση ἐπὶ τὸ ὕψος του, διότι τὸ ἐμβαδὸν παντὸς πλαγίου παραλληλογράμμου εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἐμβαδὸν παντὸς ὀρθογωνίου, μὲ τὸ ὁποῖο ἔχει τὴν αὐτὴ βάση καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Αὐτὸ τὸ καταλαβαίνουμε ἂν κάμουμε τὴν ἑξῆς ἐργασία : Ἂν ἀπὸ τὴν κορυφὴ α τοῦ παραλληλογράμμου (σχ. 22) φέρουμε μία κάθετο πρὸς τὴν ἀπέναντι πλευρὰ γδ, θὰ σχηματισθῆ τὸ σχῆμα αιγ. Ἂν δέ, ἀπὸ τὴν κορυφὴ β φέρουμε ἄλλη κάθετο, ἡ ὁποία νὰ συναντήση τὴν προέκταση τῆς πλευρᾶς γδ, θὰ σχηματισθῆ τὸ σχῆμα βκδ. Τὰ δύο αὐτὰ σχήματα εἶναι ἴσα μεταξύ των, διότι αἱ εὐθεῖες αι καὶ βκ εἶναι ἴσες. Ἴσες ἐπίσης εἶναι καὶ οἱ γι καὶ δκ.

Ἂν τώρα κόψουνε μὲ ψαλίδι τὸ ἀριστερό μέρος τοῦ παραλληλογράμμου καὶ τὸ τοποθετήσουμε στὸ δεξιὸ μέρος, θὰ ἰδοῦμε ὅτι ἐσχηματίσθη τὸ ὀρθογώνιο αβικ (σχ. 22). Ἀπ' αὐτὸ γἶνεται φανερὸν ὅτι, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου εὑρίσκεται, ὅπως καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου.

Ὥστε: **γιὰ νὰ εὕρουμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου πολλαπλασιάζουμε τὴν βάση ἐπὶ τὸ ὕψος του.**

β) **Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας πλαγίου παραλληλεπιπέδου.** Γιὰ νὰ εὕρουμε τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου, εὑρίσκουμε τὸ ἐμβαδὸν κάθε μιᾶς ἕδρας του καὶ ἀθροίζουμε τὰ ἐμβαδὰ ὅλων τῶν ἑδρῶν του.

Ὥστε: **τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῶν 6 παραλληλογράμμων, ποὺ ἀποτελοῦν τὶς ἕδρες του.**

Ἀφοῦ ὅμως οἱ ἀπέναντι ἕδρες τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσες, τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι ἴσο μὲ τὸ διπλάσιο τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν 3 ἑδρῶν του, τῶν ὁποίων οἱ ἀκμὲς συναντῶνται στὴν ἰδία κορυφή.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

Ὁμὰς Α΄. 1. Τί σχέση ὑπάρχει μεταξὺ ὀρθογωνίου καὶ παραλληλογράμμου, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ἴδια βάση καὶ τὸ ἴδιο ὕψος ;

2. Νὰ κάμουν οἱ μαθηταὶ παραλληλόγραμμο. Νὰ φέρουν κάθετο ἀπὸ τὴν ἀπέναντι κορυφὴ πρὸς τὴ βάση καὶ νὰ κόψουν τὸ παραλληλόγραμμο μὲ τὸ ψαλίδι στὸ μέρος αὐτό. Νὰ τοποθετήσουν τὸ κομμένο μέρος στὴν ἀπέναντι πλευρά, γιὰ νὰ ἰδοῦν τί σχῆμα σχηματίζεται.

3. Πόσα μέτρα σύρμα ἀγκαθωτὸ θὰ χρειασθοῦν γιὰ νὰ περιφρά-

ξουμε ἕνα οἰκόπεδο σχήματος παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ εἶναι 56 μ. καὶ ἡ ἄλλη 16,40 μ. καὶ πόσο θὰ στοιχίση, ἂν τὸ σύρμα ἔχη 16,75 δραχμὲς τὸ μέτρο;

Ὁμὰς Β'. 4. Ἕνα οἰκόπεδο, σχήματος παραλληλογράμμου, μὲ βάση 20 μ. καὶ ὕψος $9\frac{3}{4}$ μ. ἐπωλήθη πρὸς 315 δραχ. τὸ τετραγ. μ. Πόσες δραχμὲς πῆρε ὁ πωλητής;

5. Σ' ἕνα κτῆμα, σχήματος παραλληλογράμμου, πρόκειται νὰ φυτέψουμε ὀπωροφόρα δένδρα. Τὸ κτῆμα ἔχει διαστάσεις $45\frac{3}{4}$ μ. καὶ 70 μ. Πόσα δένδρα θὰ φυτέψουμε, ἂν γιὰ τὸ κάθε δένδρο χρειάζεται 3,5 τ.μ. τόπος;

6. Ἕνα οἰκόπεδο, σχήματος παραλληλογράμμου, μὲ πρόσοψη 20 μ. καὶ βάθος τριπλάσιο, ἐπωλήθη ἀντὶ 30.000 δραχμῶν. Πόσες δραχμὲς ἔχει τὸ τ.μ.;

7. Ἄλλο οἰκόπεδο, μὲ τὸ ἴδιο σχῆμα καὶ μὲ διαστάσεις 26 μ. καὶ 45 μ. ἐπωλήθη ἀντὶ 25.000 δραχμῶν. Πόσες δρχ. στοιχίζει ὁ τ.τ.π.;

29. Εὕρεση ὄγκου τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου

Ἂν φτιάξουμε, μὲ χαρτόνι ἢ κόντρα πλακέ, δύο παραλληλεπίπεδα, ἕνα ὀρθογώνιο καὶ ἕνα πλάγιο, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν ἴσες βάσεις καὶ ἴσα ὕψη καὶ τὰ γεμίσουμε π.χ. μὲ ἄμμο, θὰ ἰδοῦμε ὅτι καὶ τὰ δύο χωροῦν ἴση ποσότητα, ἔχουν δηλαδὴ τὴν ἴδια χωρητικότητα.

Ὥστε: **κάθε πλάγιο παραλληλεπίπεδο εἶναι ἴσον μὲ κάθε ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, μὲ τὸ ὁποῖον ἔχει ἴσην βάση καὶ ἴσο ὕψος.**

Γιὰ νὰ εὕρουμε λοιπὸν τὸν ὄγκο τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου, κάνουμε τὸ ἴδιο ποὺ κάναμε γιὰ νὰ εὕρουμε τὸν ὄγκο τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, δηλ. πολλαπλασιάζουμε τὸ μῆκος, ἐπὶ τὸ πλάτος, καὶ ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου.

Ἀσκήσεις καὶ Προβλήματα

1. Κατὰ τὸ μάθημα τῆς χειροτεχνίας νὰ κάμουν οἱ μαθηταὶ 2 παραλληλεπίπεδα ἀπὸ χαρτόνι μὲ τὶς ἴδιες διαστάσεις, τὸ ἕνα ὀρθογώνιο καὶ τὸ ἄλλο πλάγιο καὶ νὰ τὰ γεμίσουν μὲ ἄμμο. Νὰ εἰποῦν τί θὰ παρατηρήσουν καὶ τί συμπέρασμα βγάζουν.

2. Ένα κιβώτιο, σχήματος πλαγίου παραλληλεπιπέδου, ἔχει ἐμβαδὸν βάσεως 6 τ. μ. καὶ ὕψος $2\frac{3}{4}$ μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

3. Ένα τεπόζιτο, σχήματος πλαγίου ποραλληλεπιπέδου, ἔχει βάση $3{,}6 \times 2{,}4$ μ. καὶ ὕψος $1\frac{1}{2}$ μ. Πόσα κ.μ. νερὸ χωρεῖ ;

4. Ένα μάρμαρο, σχήματος πλαγίου παραλληλεπιπέδου, ἔχει βάση $2{,}5 \times 1{,}6$ μ. καὶ ὕψος 4,80 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του ;

5. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος κιβωτίου σχήματος πλαγίου παραλληλεπιπέδου, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι 2,40 μ., τὸ πλάτος τὸ ἥμισυ τοῦ μήκους καὶ τὸ ὕψος τριπλάσιο τοῦ πλάτους ;

ΠΡΙΣΜΑΤΑ

Μιλήσαμε ἕως τώρα γιὰ τὰ ἑξῆς τρία στερεὰ σώματα· γιὰ τὸν κύβο, τὸ ὀρθογ. καὶ πλάγιο παραλληλεπίπεδο καὶ εἴδαμε ὅτι ἔχουν τὰ ἑξῆς κοινὰ γνωρίσματα: α) Καὶ τὰ 3 εἶναι σώματα πολύεδρα (ἑξάεδρα). β) Ὅτι καὶ τὰ 3 ἔχουν τὶς ἀπέναντι ἕδρες των ἴσες καὶ παράλληλες, καὶ γ) ὅτι ὅλες οἱ ἕδρες των, εἴτε κάθετες εἶναι μεταξύ των, εἴτε πλάγιες, ἔχουν σχῆμα παραλληλογράμμου.

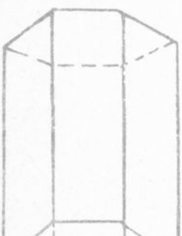
Σχ. 23

Καὶ τὰ τρία αὐτὰ σώματα λέγονται **πρίσματα.**

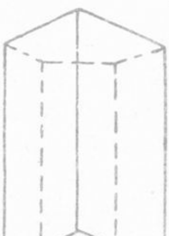
Ὥστε: **πρίσματα λέγονται τὰ πολύεδρα στερεὰ σώματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὶς 2 ἕδρες των ἴσες καὶ παράλληλες καὶ τὶς ἄλλες παραλληλόγραμμα.**

Τὰ πρίσματα αὐτά, κύβος καὶ παραλληλεπίπεδα, λέγονται **τετραγωνικὰ πρίσματα,** διότι οἱ βάσεις των εἶναι τετράπλευρα. Ἐκτὸς ἀπὸ τὰ τετραγωνικὰ πρίσματα ὑπάρχουν πρίσματα ποὺ ἔχουν βάση μὲ 3 γωνίες καὶ λέγονται **τριγωνικὰ** (σχ. 23).

Ὁ ὄγκος τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος. Ὑπάρχουν ἐπίσης πρίσματα ποὺ ἔχουν βάση μὲ 5 ἢ 6 κλπ. γωνίες καὶ λέγονται πενταγωνικά, ἑξαγωνικὰ κ.λ.π. Ὅλα δὲ μαζί, λέγονται **πολυγωνικὰ** (σχ. 24, 25). Οἱ βάσεις τῶν πολυγωνικῶν πρισμάτων μπορεῖ νὰ εἶναι ὁποιοδήποτε εὐθύγραμμο σχῆμα, οἱ παράπλευρες ὅμως ἕδρες των εἶναι παραλληλόγραμμα.



Σχ. 24



Σχ. 25

Σχῆμα τριγωνικῶν πρισμάτων ἔχουν τὰ κρύσταλλα ποὺ κρέμονται στοὺς πολυελαίους τῶν Ἐκκλησιῶν καὶ πολυγωνικῶν ὡρισμένα μολύβια κ. λ. π.

Ἀσκήσεις

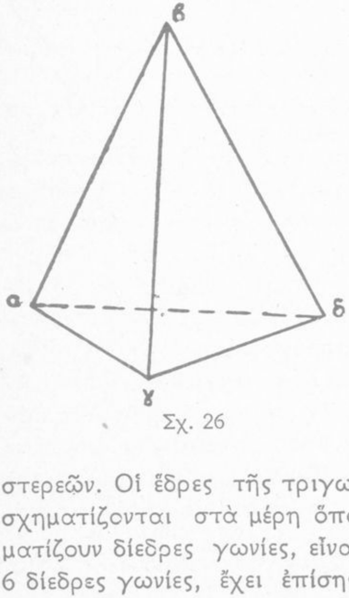
1. Ποιὰ σώματα λέγονται πρίσματα;
2. Πόσων εἰδῶν πρίσματα ὑπάρχουν καὶ ποιὲς εἶναι οἱ διαφορές των;
3. Νὰ ἰχνογραφήσουν οἱ μαθηταὶ πρίσματα τριγωνικά, τετραγωνικά, ἑξαγωνικά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε΄.

ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΠΥΡΑΜΙΣ

30. Γνωρίσματα τῆς Τριγωνικῆς Πυραμίδας

Ἂν ἐπάνω σὲ ἕνα χαρτόνι κάνουμε 4 σχήματα συνεχόμενα καὶ ὅμοια μὲ τὸ σχῆμα τῆς βάσεως ἑνὸς τριγωνικοῦ πρίσματος, τὰ κόψουμε μὲ τὸ ψαλίδι καὶ τὰ ἑνώσουμε πλευρὰ μὲ πλευρά, θὰ ἰδοῦμε ὅτι σχηματίζεται ἕνα στερεὸ σῶμα, ὅμοιο μὲ τὸ σχῆμα 26. Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται **τριγωνικὴ πυραμίς.**



Σχ. 26

Ἐπιφάνειαι τριγων. πυραμίδας. Ὁλόκληρος ἡ ἐπιφάνεια τῆς τριγ. πυραμίδος ἀποτελεῖται ἀπὸ 4 ἄλλες μικρότερες καὶ ἐπίπεδες· εἶναι δηλ. **ἐπιφάνεια τεθλασμένη.**

Ἕδρες, ἀκμές, κορυφές. Οἱ ἕδρες τῆς τριγων. πυραμίδος εἶναι βέβαια ἐπέπεδες καὶ εὐθύγραμμες, ὅπως καὶ οἱ ἕδρες τῶν ἄλλων γεωμετρικῶν σωμάτων, γιὰ τὰ ὁποῖα μιλήσαμε, διαφέρουν ὅμως στὸ σχῆμα ἀπὸ ἐκεῖνες καὶ δίδουν στὴν τριγ. πυραμίδα σχῆμα πολὺ διαφορετικὸ ἀπὸ τὸ σχῆμα τῶν ἄλλων στερεῶν. Οἱ ἕδρες τῆς τριγων. πυραμίδος εἶναι 4. Οἱ ἀκμὲς ποὺ σχηματίζονται στὰ μέρη ὅπου, ἀνὰ δύο, συναντῶνται καὶ σχηματίζουν δίεδρες γωνίες, εἶναι 6. Ἑπομένως ἡ τριγ. πυραμὶς ἔχει 6 δίεδρες γωνίες, ἔχει ἐπίσης 4 κορυφὲς καὶ 4 τρίεδρες γωνίες. Ἂν τὴν τριγων. πυραμίδα τὴν τοποθετήσουμε στὸ τραπέζι, θὰ παρατηρήσουμε ὅτι ἡ ἕδρα ποὺ στηρίζεται ἔχει διεύθυνση ὁριζοντία καὶ λέγεται **βάση** τῆς πυραμίδος.

Οἱ ἄλλες 3, ποὺ ἀποτελοῦν τὴν παράπλευρο ἐπιφάνεια αὐτῆς, εἶναι πλάγιες πρὸς τὴ βάση καὶ συναντῶνται πρὸς τὰ ἐπάνω, σὲ ἕνα καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖο τοῦ σώματος, τὸ ὁποῖο εὑρίσκεται ἔξω ἀπὸ τὴν βάση του καὶ λέγεται **κορυφὴ** τῆς πυραμίδας. Ἂν ἀπὸ τὴν κορυφὴ τῆς πυραμίδας φαντασθοῦμε κάθετο πρὸς τὴ βάση της καὶ ἀκριβῶς στὸ κέντρο της, ἡ κάθετος αὐτὴ δείχνει τὸ **ὕψος** τῆς πυραμίδας καὶ λέγεται **ἄξων** αὐτῆς.

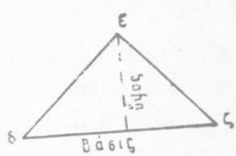
Τὸ ἄθροισμα τοῦ μήκους τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδας μᾶς δείχνει τὴν **περίμετρο** τῆς βάσεώς της.

Σχῆμα ἑδρῶν τῆς τριγ. πυραμίδας. Ἂν μιά, ὁποιαδήποτε, ἀπὸ τὶς ἕδρες τῆς τριγ. πυραμίδας, τὴν τοποθετήσουμε σὲ φύλλο χαρτὶ καὶ μὲ τὸ μολύβι σύρουμε γύρω της γραμμὲς ἀκολουθῶντας τὶς ἀκμές της, θὰ παρατηρήσουμε, ὅτι ἐσχηματίσθη ἕνα σχῆμα εὐθύγραμμο μὲ 3 πλευρὲς καὶ 3 γωνίες, ὅμοιο μὲ τὸ σχῆμα 26. Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται **τρίγωνο** καὶ κάθε ἐπιφάνεια ποὺ ἔχει σχῆμα τριγώνου λέγεται **τριγωνική.**

Ὥστε: **οἱ ἕδρες τῆς τριγωνικῆς πυραμίδας ἔχουν σχῆμα τριγώνου.**

Τὰ τρίγωνα ἔχουν δύο διαστάσεις, μῆκος καὶ πλάτος, καὶ τὸ μῆκος ὅμως λέγεται **βάση**, τὸ δὲ πλάτος **ὕψος.** Ὡς βάση τοῦ τριγώνου μπορεῖ νὰ χρησιμεύσῃ ὁποιαδήποτε ἀπὸ τὶς πλευρές του καὶ ὡς ὕψος ἡ κάθετος ποὺ φέρεται ἀπὸ τὴν κορυφὴ τῆς ἀπέναντι γωνίας πρὸς τὴν βάση (σχ. 27).

Ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ μήκους τῶν τριῶν πλευρῶν του.



Σχ. 27

Ὁρισμὸς τριγων. πυραμίδας. Ὕστερα ἀπὸ ὅσα ἀνωτέρω εἴπαμε, μποροῦμε νὰ δώσουμε τὸν ὁρισμὸ τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος, ὡς ἑξῆς:

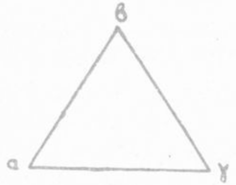
Τριγωνικὴ πυραμὶς λέγεται τὸ στερεὸ σῶμα ποὺ ἔχει βάση τριγωνική, καὶ 3 ἄλλες ἕδρες ἐπίσης τριγωνικές, οἱ ὁποῖες εἶναι πλάγιες πρὸς τὴ βάση καὶ ἑνώνονται στὴν κορυφὴ τῆς πυραμίδας (σχ. 26).

Ἀσκήσεις

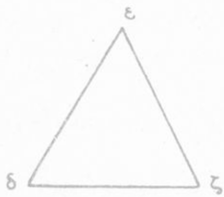
1. Πόσες ἕδρες, ἀκμὲς καὶ κορυφὲς ἔχει ἡ τριγωνικὴ πυραμίς;
2. Τί λέγεται βάση τῆς πυραμίδας καὶ τί κορυφή;
3. Τί σχῆμα ἔχει κάθε μία ἀπὸ τὶς ἕδρες της;

31. Εἴδη τριγώνων

Α΄. Ἂν παρατηρήσουμε τὶς πλευρὲς 3 διαφόρων τριγώνων, θὰ παρατηρήσουμε ὅτι μπορεῖ: α) Σ' ἕνα τρίγωνο οἱ πλευρὲς νὰ εἶναι ὅλες ἴσες μεταξύ των (σχ. 28). β) Σὲ ἄλλο νὰ εἶναι ἴσες μεταξύ των μόνο οἱ δύο πλευρὲς (σχ. 29) καὶ γ) Σὲ τρίτο καμμία πλευρὰ νὰ μὴν εἶναι ἴση μὲ τὴν ἄλλη (σχ. 30). Τὸ πρῶτο τρίγωνο λέγεται **ἰσόπλευρο,** διότι καὶ οἱ 3 πλευρές του εἶναι ἴσες μεταξύ των. Ἀλλὰ καὶ οἱ γωνίες τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι ἴσες μεταξύ των, ἑπομένως τὸ ἰσόπλευρο τρίγωνο εἶναι σχῆμα **κανονικό.** Τὸ δεύτερο λέγεται **ἰσοσκελές,** διότι μόνον 2 ἀπὸ τὶς πλευρές του (τὰ σκέλη) εἶναι ἴσες μεταξύ των, ἡ δὲ τρίτη εἶναι, ἢ μικρότερη ἀπὸ τὶς δύο ἄλλες, ἢ μεγαλύτερη, τὴν ὁποία παίρνουμε πάντοτε ὡς βάση. Ἐπίσης μόνον οἱ 2 γωνίες του, αὐτὲς ποὺ σχηματίζονται στὴ βάση, εἶναι ἴσες. Τὸ τρίτον τρίγωνον λέγεται **σκαληνόν,** διότι καμμία πλευρά του δὲν εἶναι ἴση μὲ τὴν ἄλλη. Ἐπίσης καὶ οἱ γωνίες του δὲν εἶναι ἴσες μεταξύ των.



Σχ. 28 α,



Σχ. 29 β΄

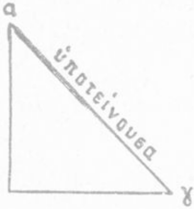
Σχ. 30 γ΄

Ὥστε: **τὰ τρίγωνα, ἀνάλογα μὲ τὸ μῆκος ποὺ ἔχουν κάθε μία ἀπὸ τὶς πλευρές του, διακρίνονται σὲ ἰσόπλευρα, σὲ ἰσοσκελῆ καὶ σὲ σκαληνά.**

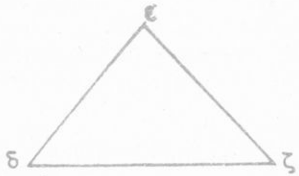
Β΄. Τὰ τρίγωνα ἀνάλογα μὲ τὸ ἄνοιγμα τῶν γωνιῶν των διακρίνονται σὲ ὀρθογώνια, ὀξυγώνια καὶ ἀμβλυγώνια.

1. **Ὀρθογώνιο** λέγεται τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴ μιὰ γωνία του ὀρθή. Π.χ. τὸ τρίγωνον αβγ (σχ. 31) λέγεται ὀρθογώνιο, διότι ἡ πλευρὰ αβ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν πλευρὰ βγ καὶ σχηματίζουν μαζὶ στὸ σημεῖο β ὀρθὴ γωνία. Ὡς **βάση** τοῦ ὀρθογ. τριγώνου λαμβάνεται μία ἀπὸ τὶς πλευρὲς τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ ὡς **ὕψος,** ἡ πλευρὰ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν βάση τοῦ

ὀρθογ. τριγώνου. Π. χ. ἂν στὸ ὀρθογ. τρίγωνο αβγ (σχ. 31) πάρουμε ὡς βάση τὴν βγ, ὕψος τοῦ τριγώνου θὰ εἶναι ἡ αβ.



Σχ. 31



Σχ. 32

Σχ. 33

Ἡ πλευρὰ τοῦ ὀρθογ. τριγώνου ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας, λέγεται **ὑποτείνουσα.** Στὸ τρίγωνο αβγ (σχ. 31) ὑποτείνουσα εἶναι ἡ πλευρὰ αγ.

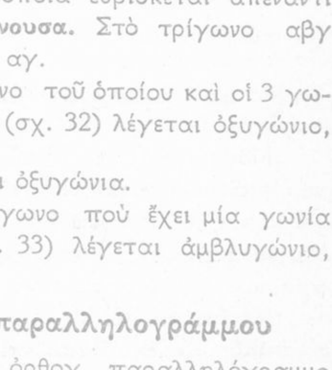
2. **Ὀξυγώνιο** λέγεται τὸ τρίγωνο τοῦ ὁποίου καὶ οἱ 3 γωνίες εἶναι ὀξεῖες. Π. χ. τὸ τρίγωνο δεζ (σχ. 32) λέγεται ὀξυγώνιο, διότι οἱ γωνίες του εἶναι ὀξεῖες.

Ὅλα τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα εἶναι ὀξυγώνια.

3. **Ἀμβλυγώνιο** λέγεται τὸ τρίγωνο ποὺ ἔχει μία γωνία ἀμβλεῖα. Π. χ. τὸ τρίγωνο ηθι (σχ. 33) λέγεται ἀμβλυγώνιο, διότι ἔχει τὴ γωνία θ ἀμβλεῖα.

32. Σχέση τριγώνου καὶ παραλληλογράμμου

Ἂν κάνουμε σὲ φύλλο χαρτὶ ἕνα ὀρθογ. παραλληλόγραμμο (σχ. 34) καὶ φέρουμε διαγώνιο, θὰ παρατηρήσουμε ὅτι τὸ ὀρθογ. χωρίζεται σὲ 2 τρίγωνα ἴσα μεταξύ των. Ἡ βάσις γδ τοῦ ὀρθογων. παραλληλογράμμου αβγδ εἶναι καὶ βάση τοῦ τριγώνου γδβ καὶ τὸ ὕψος δβ τοῦ ἰδίου παραλληλογράμμου εἶναι καὶ τὸ ὕψος τοῦ ἰδίου τριγώνου γδβ (σχ. 34). Ἂν ὡς βάση τοῦ ὀρθογ. παραλληλογράμμου, πάρουμε τὴν πλευρά του αβ, αὐτὴ εἶναι καὶ βάση τοῦ τριγώνου γαβ καὶ ἂν ὡς ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου πάρουμε τὴν αγ αὐτὴ εἶναι καὶ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου γαβ.



Σχ. 34

Ὥστε: **τὸ τρίγωνο εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου, μὲ τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴ βάση καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.**

Ἀσκήσεις καὶ Προβλήματα

1. Νὰ φτιάξουν σὲ χαρτόνι τρίγωνα, ἕνα ἀπὸ κάθε εἶδος, νὰ τὰ κόψουν μὲ ψαλίδι καὶ νὰ τὰ χρωματίσουν.

2. Σὰ ἰχνογραφήσουν οἱ μαθηταὶ τετράγωνα καὶ παραλληλόγραμμα καὶ φέροντες διαγωνίους νὰ τὰ χωρίσουν σὲ τρίγωνα, νὰ τὰ κόψουν μὲ ψαλίδι στὰς διαγωνίους, ὥστε νὰ ἰδοῦν τί μέρος τοῦ τετραγώνου ἢ τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι τὸ τρίγωνο.

3. Πόση εἶναι ἡ περίμετρος ἰσοπλεύρου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ εἶναι $4\frac{3}{4}$ μ. ;

4. Πόση εἶναι ἡ περίμετρος ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τὸ ὁποῖο ἔχει βάση μήκους 5 μ. καὶ σκέλος μήκους $6\frac{1}{2}$ μ. ;

5. Ἡ περίμετρος ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι $18\frac{3}{4}$ μ. Πόση εἶναι ἡ πλευρά του;

33. Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας τοῦ τριγώνου

Μάθαμε, ὅτι γιὰ νὰ εὕρουμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου, πολλαπλασιάζουμε τὴν βάση ἐπὶ τὸ ὕψος του. Τὸ ἴδιο κάνουμε καὶ γιὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, ἀλλὰ διαιροῦμε τὸ γινόμενο διὰ 2, διότι κάθε τρίγωνο εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου, μὲ τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἴδια βάση καὶ τὸ ἴδιο ὕψος.

Ὥστε: **γιὰ νὰ εὕρουμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου πολλαπλασιάζουμε τὴν βάση ἐπὶ τὸ ὕψος του καὶ διαιροῦμε τὸ γινόμενο διὰ 2** (ε = β × υ : 2).

Ἀσκήσεις καὶ Προβλήματα

1. Ἕνα τρίγωνο ἔχει βάση 0,75 μ. καὶ ὕψος 0,58 μ. Ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

2. Ἕνα οἰκόπεδο σχήματος ὀρθογ. τριγώνου ἔχει βάθος (ὕψος) 15,3 μ. καὶ πρόσοψη (βάση) 8,70 μ. Πόσα τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

3. Πόσοι τ.τ.π. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τριγων. οἰκοπέδου, τὸ ὁποῖον ἔχει πρόσοψη 27 μ. καὶ βάθος 14 μ. ;

4. Ἕνα χωράφι τριγωνικὸ ἔχει βάση 80,40 μ. καὶ ὕψος 25,6 μ. Πόσες δραχμὲς στοιχίζει τὸ τ.μ. ἂν πληρωθῆ ἀντὶ 10.029 δραχμῶν ;

5. Ἕνα κτῆμα σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μὲ διαστάσεις 105 μ. καὶ 86 μ. χωρίστηκε σὲ δύο μικρότερα ἴσα τριγωνικὰ κτήματα. Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς σὲ τ.μ. ταὶ τοῦ ἄλλου σὲ τ.τ.π.

34· Εὕρεση τῆς ἐπιφανείας τριγωνικῆς πυραμίδος

Ἀφοῦ ὅλες οἱ ἕδρες τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι τρίγωνα, μποροῦμε νὰ εὕρουμε τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας της, ἂν εὕρουμε τὸ ἐμβαδὸν κάθε μιᾶς τριγωνικῆς ἕδρας της χωριστὰ καὶ ἀθροίσουμε τὰ ἐμβαδὰ ὅλων τῶν ἑδρῶν. Ὅταν ὅμως ἡ βάση τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι τρίγωνον ἰσόπλευρον, δηλαδὴ σχῆμα κανονικό, τὸ δὲ ὕψος της πέφτει ἀκριβῶς στὸ κέντρο τῆς βάσεως, τότε οἱ παράπλευρες ἕδρες της θὰ εἶναι ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἴσα μεταξύ των. Ἡ πυραμὶς αὐτὴ λέγεται **κανονική.**

Ἐμβαδὸν τῆς περαπλεύρου ἐπιφανείας κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος. Γιὰ νὰ εὕρουμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος εὑρίσκουμε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τῶν τριγώνων της καὶ τὸ πολλαπλασιάζουμε ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ τῶν τριγώνων τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας. Ἀλλὰ τὸ ἴδιο ἐξαγόμενο θὰ εὕρουμε, ἂν πολλαπλασιάσουμε τὴν περίμετρο τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος, τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦν οἱ βάσεις τῶν 3 παραπλεύρων τριγώνων της ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους ἑνὸς τῶν τριγώνων αὐτῶν.

Ὥστε: **γιὰ νὰ εὕρουμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος πολλαπλασιάζουμε τὴν περίμετρο τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους ἑνὸς τῶν παραπλεύρων τριγώνων της.**

Ἂν στὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας προσθέσουμε καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως, ἔχουμε τό ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τῆς κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος.

Ἀσκήσεις καὶ Προβλήματα

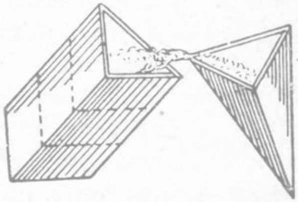
1. Ἡ περίμετρος τῆς βάσεως μιᾶς κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι 12 μ. καὶ τὸ ὕψος μιᾶς τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν της 4.50 μ. Πὸσα τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της;

2. Ἡ βάση μιᾶς κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι 6 τ.μ. καί τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν της ἐπίσης 6 τ.μ. Πόσα τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας της;

3. Ἡ βάση μιᾶς κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος ἔχει πλευρὰ 4 μ. καὶ ὕψος 5,50 μ. Τὸ ὕψος μιᾶς τῶν παραπλεύρων τριγωνικῶν ἑδρῶν της εἶναι 6,40 μ. Πόσα τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος αὐτῆς;

35. Σχέση πυραμίδας καὶ πρίσματος

Ἂν ἔχουμε δύο τενεκεδένια δοχεῖα, ποὺ τὸ ἕνα νὰ ἔχῃ σχῆμα τριγωνικοῦ πρίσματος καὶ τὸ ἄλλο τριγωνικῆς πυραμίδας καὶ τὰ 2 ὅμως μὲ ἴσες βάσεις καὶ ἴσα ὕψη (σχ. 35) καὶ τὰ γεμίσουμε νερό, θὰ ἰδοῦμε τὰ ἑξῆς: Γιὰ νὰ γεμίσῃ τὸ πρισματικὸ δοχεῖο πρέπει νὰ ἀδειάσουμε μέσα του 3 φορὲς τὸ πυραμιδικὸ δοχεῖο τελείως γεμᾶτο. Ἀπ' αὐτὸ καταλαβαίνουμε, ὅτι ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς εἶναι 3 φορὲς μικρότερη ἀπὸ τὸ τριγωνικὸ πρῖσμα, μὲ τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴ βάση καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.


Σχ. 35

36. Εὕρεση τοῦ ὄγκου πυραμίδας

Ἀφοῦ λοιπὸν ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς εἶναι 3 φορὲς μικρότερη ἀπὸ τὸ τριγωνικὸ πρῖσμα, μὲ τὸ ὁποῖο ἔχει τὴν ἴδια βάση καὶ τὸ ἴδιο ὕψος, ἑπομένως καὶ ὁ ὄγκος της θὰ εἶναι 3 φορὲς μικρότερος ἀπὸ τὸν ὄγκο τριγωνικοῦ πρίσματος, μὲ τὴ διαφορά, ὅτι διαιροῦμε τὸ γινόμενο διὰ 3, διότι ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τριγωνικοῦ πρίσματος τῶν ἰδίων διαστάσεων.

Ὥστε: **γιὰ νὰ εὕρουμε τὸν ὄγκο τῆς τριγωνικῆς πυραμίδας, πολλαπλασιάζουμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ὕψος της καὶ τὸ γινόμενο διαιροῦμε διὰ 3.**

Ἂν τὸν ὄγκο τῆς πυραμίδας τὸν διαιρέσουμε διὰ τοῦ ὕψους της καὶ τὸ πηλίκον τὸ πολλαπλασιάσουμε ἐπὶ 3, εὑρίσκουμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της. Ἂν δὲ τὸν διαιρέσουμε διὰ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς της καὶ πολλαπλασιάσουμε ἐπὶ 3, εὑρίσκουμε τὸ ὕψος της.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

1. Μία τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει βάση μὲ διαστάσεις 3,4 μ. καὶ 2,7 μ. καὶ ὕψος 6,5 μ. Πόσα κ.μ. εἶναι ὁ ὄγκος της;
2. Μία τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει βάση μὲ ἐμβαδὸν 5 τ.μ. καὶ ὕψος 12 μ. Πόσα κ.μ. εἶναι ὁ ὄγκος της;

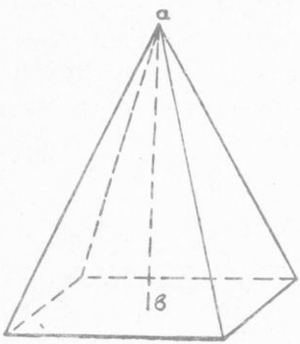
3. Μία τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει ὄγκο 18 κ.μ. Τὸ ὕψος της εἶναι 1,60 μ. Πόσα τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως;

4. Μία τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει ὄγκο 30,4 κ.μ. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της εἶναι 15,2 τ.μ. Πόσα μέτρα εἶναι τὸ ὕψος της;

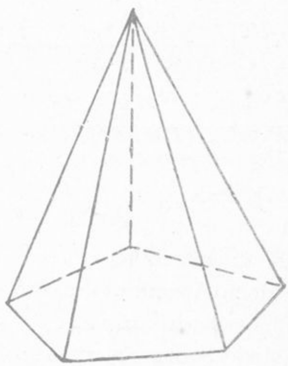
5. Πόσα τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἑνὸς σωροῦ ἀπὸ πέτρες, σχήματος τριγωνικῆς πυραμίδας, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶναι 28 κ.μ. καὶ τὸ ὕψος 7 μ.;

37. Εἴδη πυραμίδων

Ἐκτὸς ἀπὸ τὶς τριγωνικὲς πυραμίδες ὑπάρχουν πυραμίδες, οἱ ὁποῖες ἔχουν βάση τετράγωνο, ἄλλες ποὺ ἔχουν βάση πεντάγωνο, ἑξάγωνο κλπ. Οἱ πυραμίδες αὐτές, ποὺ ἔχουν βάση μὲ περισσότερες ἀπὸ 3 πλευρές, λέγονται τετραγωνικές, πενταγωνικές, ἑξαγωνικὲς κλπ. ἀνάλογα μὲ τὸν ἀριθμὸ τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς των. Ὅλες δὲ μαζὶ λέγονται **πολυγωνικές**, (σχ. 36 — 37). Εἶναι φανερό, ὅτι οἱ παράπλευρες ἕδρες τῶν πυραμίδων αὐτῶν θὰ



Σχ. 36



Σχ. 37

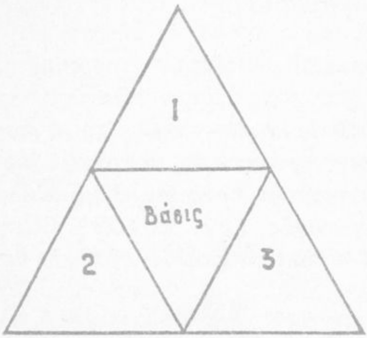
εἶναι τόσες, ὅσες εἶναι οἱ πλευρὲς τῶν βάσεών των. Μποροῦμε λοιπὸν νὰ συμπληρώσουμε τὸν **ὁρισμὸ** τῆς πυραμίδας ὡς ἑξῆς:

Πυραμὶς λέγεται τὸ πολύεδρο στερεὸ σῶμα, τοῦ ὁποίου ἡ μία ἕδρα, ἡ βάση του, ἔχει ὁποιοδήποτε εὐθύγραμμο σχῆμα, οἱ δὲ παράπλευρες ἕδρες του εἶναι τρίγωνα, τόσα ὅσες οἱ πλευρὲς τῆς βάσεώς της, πλάγια πρὸς τὴν βάση, τῶν ὁποίων οἱ κορυφὲς ἑνοῦνται στὴν κορυφὴ τῆς πυραμίδας.

Ἀντικείμενα πυραμιδοειδῆ. Τὸ σχῆμα πολυγωνικῶν πυραμίδων, ἰδίως τετραγωνικῶν, τὸ βλέπουμε σὲ κωδωνοστάσια Ἐκκλησιῶν, σὲ στέγες πύργων, ἢ διαφόρων οἰκοδομῶν γιὰ στολισμὸ κλπ.

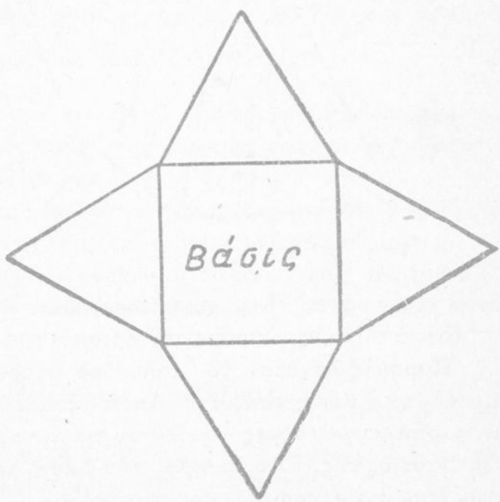
38. Κατασκευὴ πυραμίδων

α) **Κανονικῆς τριγωνικῆς**. Σ᾽ ἕνα χαρτόνι γράφουμε ἰσόπλευρο τρίγωνο καὶ μὲ εὐθεῖες ἑνώνουμε τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του, ὁπότε βλέπουμε, ὅτι τὸ τρίγωνο διαιρέθηκε σὲ 4 ἴσα ἰσόπλευρα τρίγωνα (σχ. 38). Χαράσουμε κατόπιν μὲ μαχαίρι τὶς πλευρὲς τοῦ μεσαίου τριγώνου καὶ διπλώνουμε τὰ ἄλλα τρίγωνα στὶς χαραχθεῖσες πλευρές, μέχρις ὅτου οἱ κορυφές των συναντηθοῦν καὶ σχηματίσουν τὴν κορυφὴ τῆς πυραμίδος. Κολλᾶμε ἔπειτα μὲ γόμα τὶς ἀκμές, ὁπότε βλέπουμε, ὅτι ἐσχηματίσθη μία κανονικὴ τριγωνικὴ πυραμίς. Ἂν ξεχωρίσουμε τὶς πλευρὲς καὶ τὶς ἁπλώσουμε, ἔχουμε τὸ **ἀνάπτυγμα** τῆς κανονονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος (σχ. 38), ἤτοι τὸ ἀνάπτυγμα κανονικοῦ τετραέδρου.



Σχ. 38

β) **Κανονικῆς τετραγωνικῆς**. Κάνουμε σ᾽ ἕνα χαρτόνι ἕνα τετράγωνο καὶ σὲ κάθε πλευρά του ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο, τοῦ ὁποίου βάση νὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου (σχ. 39). Χαράσσουμε ἔπειτα μὲ μαχαίρι τὶς πλευρὲς τοῦ τετραγώνου καὶ δι-



Σχ. 39

πλώνουμε πρὸς τὰ μέσα τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα, ἕως ὅτου ἑνωθοῦν οἱ κορυφές των, ὁπότε σχηματίζεται κανονικὴ τετραγωνικὴ πυραμίς. Τὸ ὕψος ὅμως τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων πρέπει νὰ εἶναι μεγαλύτερο τοῦ ἡμίσεος τοῦ μήκους τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

1. Νὰ ἰχνογραφήσουν οἱ μαθηταὶ σὲ χαρτόνι ἀνάπτυγμα κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος (σχ. 38), νὰ χαράξουν μὲ μαχαίρι τὶς πλευρές του καὶ νὰ κάμουν κανονικὴ τριγωνικὴ πυραμίδα. Νὰ κάμουν κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο, τετραγωνικὴ πυραμίδα παρατηρώντας τὸ (σχ. 39).

2. Τὴν ὥρα τῆς χειροτεχνίας νὰ κάμουν μὲ χαρτόνι ἢ ξύλο ἢ πηλό, πυραμίδες.

3. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας ἡ περίμετρος τῆς βάσεως εἶναι 18 μ. καὶ τὸ ὕψος ἑνὸς τριγώνου τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας 3,40 μ.

4. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος, μὲ πλευρὰ βάσεως 5 μ. καὶ ἐμβαδὸν 12,5 τ.μ. καὶ ὕψος ἑνὸς τριγώνου τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας 6,40 μ.

5. Ἡ πλευρὰ τῆς βάσεως κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος ἔχει μῆκος 4,80 μ., τὸ δὲ ὕψος ἑνὸς τριγώνου τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας εἶναι 5,60 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της.

6. Ἡ περίμετρος κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος εἶναι 16,40 μ. τὸ δὲ ὕψος ἑνὸς τῶν τριγώνων τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της 2,15 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας της.

7. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος εἶναι 25 τ.μ., τὸ δὲ ὕψος ἑνὸς τῶν τριγώνων τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της εἶναι 5 μ. Πόσα τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας της;

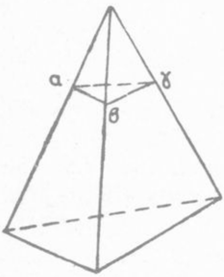
τετράγωνον
παραλληλόγρ.
τρίγωνον
ορθόγωνον
τραπέζιον

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΣΤ′

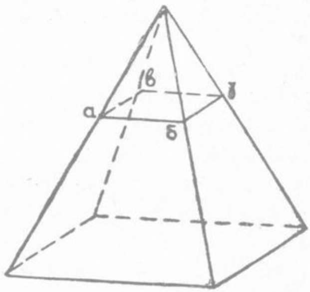
ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΠΥΡΑΜΙΣ

39. Γνωρίσματα τῆς κολούρου πυραμίδος

῎Αν μιὰ πυραμίδα, τριγωνικὴ ἢ τετραγωνική, τοποθετημένη σὲ ὁριζόντιο ἐπίπεδο, τὴν κόψουμε ὁριζοντίως λίγο πιὸ κάτω ἀπὸ τὴν κορυφή της, π.χ. στὴ θέση **αβγ** ἢ **αβγδ** (σχ. 40–41) θὰ

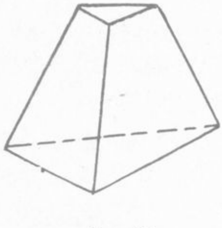


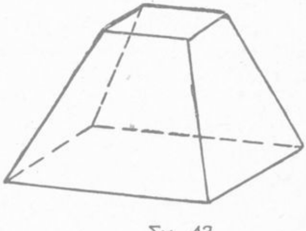
Σχ. 40



Σχ. 41

σχηματισθοῦν σώματα **νέα,** ὅμοια μὲ τὰ σώματα τῶν σχημάτων 42 καὶ 43. Τὰ νέα αὐτὰ σώματα, ποὺ ἐσχηματίσθησαν διὰ τῆς


Σχ. 42


Σχ. 43

ὁριζοντίας ἐπιπέδου τομῆς τριγωνικῶν ἢ τετραγωνικῶν πυραμίδων δὲν ἔχουν κορυφή, ὅπως οἱ ἄλλες πυραμίδες, ἀλλὰ ἀντὶ κορυφῆς ἔχουν μία ἐπίπεδη ἕδρα, ἡ ὁποία ἐσχηματίσθη εἰς τὸ μέρος τῆς τομῆς. ῎Αν ἡ ἀρχικὴ πυραμὶς εἶναι τριγωνική, ἡ ἕδρα αὐτὴ θὰ εἶναι τριγωνική, ἂν εἶναι τετραγωνική, ἡ ἕδρα θὰ εἶναι τετραγωνική.

Τὰ σώματα αὐτὰ λέγονται **κόλουροι πυραμίδες** (σχ. 42-43).

Ἂν προσέξουμε μιὰ κόλουρο πυραμίδα θὰ ἰδοῦμε, ὅτι ἔχει τὰ ἑξῆς γνωρίσματα:

Ἐπιφάνεια. Ὁλόκληρη ἡ ἐπιφάνειά της ἀποτελεῖται ἀπὸ ἄλλες μικρότερες ἐπίπεδες καὶ εὐθύγραμμες ἐπιφάνειες. Εἶναι δηλ. ἡ κόλουρος πυραμὶς σῶμα **πολύεδρο** μὲ ἐπιφάνεια τεθλασμένη.

Ἕδρες, ἀκμές, κορυφές. Ἂν ἡ κόλουρος πυραμὶς εἶναι τριγωνική, οἱ ἕδρες της εἶναι 5, ἂν εἶναι τετραγωνικὴ οἱ ἕδρες της εἶναι 6 καὶ οὕτω καθ᾽ ἑξῆς.

Ἡ τριγωνικὴ κόλουρος πυραμὶς ἔχει 9 ἀκμὲς καὶ 9 δίεδρες γωνίες. Ἐπίσης ἔχει 6 κορυφὲς καὶ 6 τρίεδρες γωνίες. Ἡ τετραγωνικὴ ἔχει 12 ἀκμές, 12 δίεδρες γωνίες, 8 κορυφὲς καὶ 8 τρίεδρες γωνίες.

Ἡ ἕδρα ποὺ στηρίζεται στὸ τραπέζι λέγεται **βάση** τῆς κολούρου πυραμίδας, ἀλλὰ καὶ ἡ ἀπέναντί της ἕδρα λέγεται καὶ ἐκείνη βάση. Οἱ βάσεις τῆς κολούρου πυραμίδας καὶ οἱ ἀκμές των δὲν εἶναι ἴσες μεταξύ των, ἔχουν ὅμως διεύθυνση ὁριζοντία καὶ εἶναι παράλληλες.

Οἱ παράπλευρες ἕδρες της εἶναι πλάγιες πρὸς τὴν βάση καὶ δὲν ἔχουν πλέον σχῆμα τριγώνου, ἀλλὰ εἶναι τετράπλευρες.

Ὥστε : **κόλουρος λέγεται ἡ πυραμίς, ἡ ὁποία δὲν ἔχει κορυφή, ἀλλὰ 2 ἄνισες καὶ παράλληλες βάσεις, τὶς δὲ ἕδρες τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της τετράπλευρες καὶ πλάγιες πρὸς τὴν βάση της.**

Σχῆμα κολούρου πυραμίδας (τετραγωνικῆς) ἔχουν οἱ βάσεις διαφόρων στύλων, τὰ βάθρα τῶν ἀγαλμάτων, διάφορα μνημεῖα, ὡρισμένα κιβώτια, οἱ σκάφες πλυσίματος καὶ ἄλλα.

Ἀσκήσεις

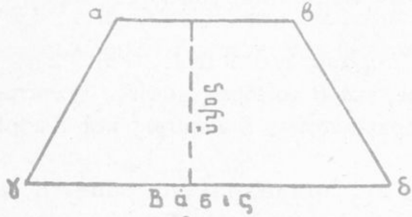
1. Ποιὰ εἶναι τὰ γνωμίσματα τῆς κολούρου πυραμίδας ;
2. Ποιὰ εἶναι τὰ κοινὰ γνωρίσματα καὶ ποῖαι αἱ διαφοραὶ τριγωνικῆς πυραμίδας καὶ κολούρου τριγωνικῆς πύραμίδας ;
3. Τὴν ὥρα τῆς ἰχνογραφίας νὰ ἰχνογραφήσουν οἱ μαθηταὶ κόλουρες πυραμίδες τριγωνικὲς καὶ τετραγωνικές.
4. Ἐπίσης νὰ κάμουν μὲ χαρτόνι τετραγωνικὴ πυραμίδα, νὰ κάμουν ὁριζοντίως ἐπίπεδες τομές, λίγο κάτω ἀπὸ τὴν κορυφή της καὶ

νὰ μετρήσουν τὶς ἕδρες, τὶς ἀκμὲς καὶ τὶς κορυφὲς τῆς τετραγωνικῆς κολούρου πυραμίδος ποὺ ἐσχηματίσθη.

5. Νὰ κάμουν πυραμίδες μὲ πηλό, τὴν ὥρα τῆς χειροτεχνίας, νὰ κάμουν ἔπειτα ἐπίπεδες τομὲς ὁριζοντίως καὶ νὰ τὶς μεταβάλλουν σὲ κόλουρες πυραμίδες.

40. Σχῆμα τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν κολούρου πυραμίδος

Ἂν πάρουμε μιὰ κόλουρο πυραμίδα καὶ τοποθετήσουμε μιὰ ἀπὸ τὶς παράπλευρες ἕδρες της ἐπάνω στὸν πίνακα καὶ σύρουμε μὲ κιμωλία γύρω της γραμμές, ἀκολουθώντας τὶς γραμμές της, βλέπουμε ὅτι σχηματίζεται ἕνα τετράπλευρο εὐθύγραμμο σχῆμα, ὅμοιο μὲ τὸ σχῆμα **αβγδ** (σχ. 44). Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται **τραπέζιο**.



Σχ. 44

Ὥστε: **οἱ παράπλευρες ἕδρες τῆς κολούρου πυραμίδος ἔχουν σχῆμα τραπεζίου.**

41. Πλευρὲς τοῦ τραπεζίου καὶ σχέσις μεταξύ των

Ἂν παρατηρήσουμε τὸ σχῆμα αὐτὸ (σχ. 44), θὰ ἰδοῦμε ὅτι οἱ πλευρές του **αβ** καὶ **γδ** ἔχουν ὁριζοντία διεύθυνση, εἶναι παράλληλες μεταξύ των καὶ δὲν εἶναι ἴσες. Οἱ πλευρὲς αὐτὲς λέγονται **βάσεις** τοῦ τραπεζίου.

Οἱ ἄλλες 2 πλευρές του, ἡ **αγ** καὶ **βδ,** εἶναι πλάγιες πρὸς τὴν βάση. Ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἑνώνει τὶς 2 βάσεις λέγεται **ὕψος** τοῦ τραπεζίου. Τὸ ἄθροισμα τοῦ μήκους καὶ τῶν 4 πλευρῶν τοῦ τραπεζίου μᾶς δίδει τὴν **περίμετρο** αὐτοῦ.

Ὥστε: **τραπέζιο λέγεται τὸ τετράπλευρο εὐθύγραμμο σχῆμα τοῦ ὁποίου μόνο οἱ 2 ἀπέναντι πλευρὲς (οἱ βάσεις) εἶναι παράλληλες καὶ ἄνισες.**

Σύγκριση τραπεζίου - παραλληλογράμμου. Τὸ τραπέζιο μοιάζει μὲ τὸ παραλληλόγραμμο, διότι εἶναι σχῆμα εὐθύγραμμο καὶ τετράπλευρο. Διαφέρει ὅμως ἀπὸ τὸ παραλληλόγραμμο διότι μόνον οἱ δύο βάσεις του εἶναι παράλληλες μεταξύ των, χωρὶς νὰ εἶναι καὶ ἴσες, ἐνῶ στὰ ἄλλα τετράπλευρα οἱ ἀπέναντι πλευρὲς εἶναι ἴσες καὶ παράλληλες.

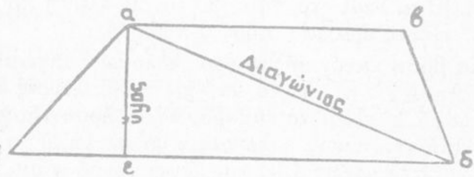
Ἀσκήσεις

1. Νὰ ἰχνογραφήσουν οἱ μαθηταὶ τραπέζια σὲ διάφορα μεγέθη, νὰ κόψουν μὲ ψαλίδι τὶς πλευρές των καὶ νὰ τὰ χρωματίσουν. Νὰ δείξουν τὶς βάσεις καὶ τὸ ὕψος των.

2. Νὰ ἰχνογραφήσουν ἕνα τραπέζιο καὶ ἕνα ὀρθογώνιο καὶ νὰ τὰ συγκρίνουν, γιὰ νὰ ἰδοῦν τὶς διαφορές των.

42. Εὕρεση τῆς ἐπιφανείας τοῦ τραπεζίου καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς κανονικῆς κολούρου πυραμίδος

α) **Ἐμβαδὸν τραπεζίου.** Ὅταν σὲ ἕνα τραπέζιο φέρουμε διαγώνιο, θὰ ἰδοῦμε ὅτι χωρίζεται σὲ 2 τρίγωνα. Π. χ. στὸ τραπέζιο **αβγδ** (σχ. 45) ἡ διαγώνιος **αδ** τὸ χωρίζει σὲ 2 τρίγωνα,



Σχ. 45

τὸ **αβδ** καὶ τὸ **αγδ**. Ἀφοῦ λοιπὸν ἡ διαγώνιος χωρίζει τὸ τραπέζιο σὲ 2 τρίγωνα, τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῶν 2 αὐτῶν τριγώνων, Καὶ ἀφοῦ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εἶναι ἴσο μὲ **β.υ** : 2, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου θά εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν 2 βασεὼν του ἐπὶ τὸ ὕψος του. Ἂν ὑποτεθῆ π. χ. ὅτι τὸ μῆκος τῆς μιᾶς βάσεως ἑνὸς τραπεζίου εἶναι 3 μ. καὶ τῆς ἄλλης 5 μ., τὸ δὲ ὕψος του 4 μ., τὸ ἐμβαδὸν του θὰ εἶναι $3+5 \times 4 : 2 = 16$ τ. μ.

Ὥστε: **γιὰ νὰ εὕρουμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου, πολλαπλασιάζουμε τὸ ἄθροισμα τῶν 2 βάσεών του ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ διαιροῦμε τὸ γινόμενο διὰ 2.**

β) **Ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας κανονικῆς κολούρου πυραμίδος.** Ὅταν οἱ βάσεις τῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι σχήματα κανονικά, οἱ παράπλευρες ἕδρες της θὰ εἶναι τραπέζια ἴσα μεταξύ των. Ἡ κόλουρος αὐτὴ πυραμὶς λέγεται **κανο-**

νική. Γιὰ νὰ εὕρουμε τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας της, εὑρίσκουμε τὸ ἐμβαδὸν κάθε βάσεώς της χωριστὰ καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν προσθέτουμε τὸ ἐμβαδὸν τῶν τραπεζίων τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της.

Προβλήματα

1. Ἕνα χωράφι, σχήματος τραπεζίου, ἔχει βάσεις μὲ μῆκος 73μ. καὶ 80 μ. καὶ ὕψος 110,40 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδόν του.

2. Ἕνα οἰκόπεδο, σχήματος τραπεζίου, ἔχει τὶς παράλληλες πλευρές του μὲ μῆκος 36,40 μ. καὶ 19,20 μ. Τὸ ὕψος του εἶναι 10 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὴ ἐμβαδόν του σὲ τ.τ.π.

3. Ἡ αὐλὴ τοῦ σχολείου μας, σχήματος τραπεζίου, μὲ παράλληλες πλευρὲς 22 μ. καὶ 18,5 μ. καὶ ὕψος 14 μ. πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ πλακάκια τετραγωνικά, τὰ ὁποῖα ἔχουν πλευρὰ 0,15 μ. Πόσα πλακάκια θὰ χρειασθοῦν ;

4. Οἰκόπεδο σχήματος τραπεζίου. τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ εἶναι 20 μ., ἡ ἄλλη 40 μ. καὶ τὸ ὕψος 25 μ., ἐπωλήθη πρὸς 63,50 δραχμὲς τὸν τ.τ.π. Πόσες δραχμὲς πῆρε ὁ πωλητής;

5. Ἡ μία βάση κανονικῆς τριγων. κολούρου πυραμίδος εἶναι 15,6 τ.μ., καὶ ἡ ἄλλη 4,4 τ.μ., ἡ μία ἀπὸ τὶς παράπλευρες ἕδρες της εἶναι 12,30 τ.μ. Πόσα τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας της;

6. Κανονικὴ τετραγων. κόλουρος πυραμὶς ἔχει πλευρὰ τῆς μιᾶς βάσεως 5 μ. καὶ τῆς ἄλλης 3 μ. καὶ ὕψος ἑνὸς τῶν τραπεζίων τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της 4 μ. Πόσα τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας της ;

ΜΕΡΟΣ Β΄

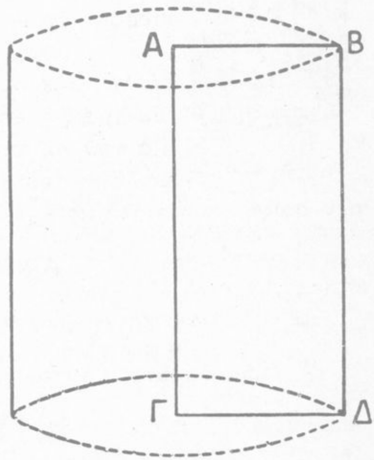
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΤ΄ ΤΑΞΕΩΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α΄

ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

1. Πῶς γεννᾶται ἕνας κύλινδρος

Κάνουμε μὲ χαρτόνι ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο π.χ. τὸ ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (σχ. 1) καὶ τὸ τοποθετοῦμε ἐπάνω στὸ τραπέζι κατὰ τρόπον, ὥστε ἡ πλευρά του ΓΔ νὰ στηρίζεται ἐπάνω στὸ τραπέζι, οἱ δὲ πλευρές του ΑΓ καὶ ΒΔ νὰ εἶναι κάθετες πρὸς αὐτό. Κρατοῦμε ἔπειτα τὴν πλευρὰ ΑΓ ἀκίνητο καὶ στρέφουμε γύρω της τὸ ὀρθογώνιον, ἕως ὅτου ἐπανέλθη στὴν ἀρχική του θέση. Ὅλες μαζὶ οἱ θέσεις, ἀπὸ τὶς ὁποῖες θὰ περάση κατὰ τὴν περιστροφή του τὸ ὀρθογώνιο αὐτό, σχηματίζουν σῶμα στερεό, τὸ ὁποῖον λέγεται **κύλινδρος**.



Σχ. 1

2. Γνωρίσματα τοῦ κυλίνδρου

Κυρτὴ καὶ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια. Ἡ ἀκίνητος πλευρὰ ΑΓ τοῦ ὀρθογωνίου λέγεται **ἄξων** τοῦ κυλίνδρου, καὶ δείχνει τὸ **ὕψος** αὐτοῦ. Ἡ πλευρὰ ΒΔ γράφει ἐπιφάνεια, τῆς ὁποίας κανένα μέρος της δὲν εἶναι ἐπίπεδο. Ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ λέγεται **καμπύλη**. Ἡ καμπύλη ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου λέγεται **κυρτή,** ἡ δὲ πλευρὰ ΑΒ, ἡ ὁποία τὴν γράφει, λέγεται **γεννέτειρα** αὐτῆς.

Οἱ πλευρὲς ΑΒ καὶ ΓΔ, κατὰ τὴν περιστροφὴ τοῦ ὀρθογωνίου γράφουν, ἡ κάθε μία, ἐπιφάνεια ἐπίπεδο, ἡ ὁποία περικλείεται ἀπὸ γραμμή, τῆς ὁποίας κανένα μέρος της δὲν εἶναι εὐθεῖα. Ἡ γραμμὴ αὐτὴ λέγεται **καμπύλη**. Ὁλόκληρος λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἀποτελεῖται ἀπὸ 2 ἐπίπεδες, ἴσες καὶ καμπυλόγραμμες ἐπιφάνειες, οἱ ὁποῖες λέγονται **βάσεις** τοῦ κυλίνδρου καὶ μία κυρτή, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τὴν **παράπλευρο** ἐπιφάνεια αὐτοῦ. Ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ λέγεται **μικτή**.

Ὥστε: **κύλινδρος λέγεται τὸ στερεὸ σῶμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐπιφάνεια μικτή. Οἱ 2 καμπυλόγραμμες βάσεις του εἶναι ἐπίπεδα ἴσια καὶ παράλληλα καὶ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνειά του κυρτὴ** (σχ. 2).

Σχ. 2

Σώματα κυλινδρικά: Ὅσα σώματα ἔχουν σχῆμα κυλίνδρου, λέγονται **κυλινδρικά.** Πολλὰ σώματα ἔχουν σχῆμα κυλινδρικό. Π.χ. ὡρισμένα μολύβια σωληνάρια τοῦ κινίνου καὶ ἄλλων φαρμάκων, οἱ κορμοὶ πολλῶν δένδρων, οἱ κολῶνες τῶν Ἐκκλησιῶν, ὡρισμένα δοχεῖα καὶ καζάνια, τὰ κουτιὰ τοῦ γάλακτος, οἱ καπνοδόχοι τῶν πλοίων, οἱ σωλῆνες τοῦ νεροῦ κλπ. Ἡ ἐσωτερικὴ ἐπιφάνεια τῶν σωλήνων λέγεται **κοίλη**.

Ἀσκήσεις

1. Ποιὰ εἶναι τὰ γνωρίσματα τοῦ κυλίνδρου;
2. Τί λέγεται κύλινδρος;
3. Ποιὰ σώματα λέγονται κυλινδρικά; ὀνομάσατε μερικά.

3. Κύκλος

Ἂν τοποθετήσουμε τὴ βάση ἑνὸς κυλινδρικοῦ σώματος ἐπάνω σὲ φύλλο χαρτὶ καὶ σύρουμε μὲ τὸ μολύβι γύρω της γραμμή, θὰ παρατηρήσουμε ὅτι μᾶς δίδει ἕνα σχῆμα ὅμοιο μὲ τὸ σχῆμα 3. Τὸ σχῆμα αὐτὸ εἶναι μία ἐπίπεδος ἐπιφάνεια κλεισμένη μέσα σὲ γραμμὴ καμπύλη καὶ λέγεται **κύκλος** (σχ. 3). Οἱ βάσεις λοιπὸν κάθε κυλινδρικοῦ σώματος ἔχουν σχῆμα κύκλου.

Περιφέρεια. Ἡ καμπύλη γραμμή, ἡ ὁποία περιβάλλει τὸν κύκλο, λέγεται **περιφέρεια**.

Κέντρον. Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ἀπέχουν ἐξ ἴσου (τὸ ἴδιο) ἀπὸ ἕνα σημεῖο, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἀκριβῶς εἰς τὸ μέσον καὶ λέγεται **κέντρο** τοῦ κύκλου.

Σχ. 3

Ὥστε, **κύκλος λέγεται ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία περικλείεται ἀπὸ καμπύλη γραμμή, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ ἕνα σημεῖο ποὺ εὑρίσκεται ἀκριβῶς εἰς τὸ μέσον της καὶ λέγεται κέντρο**

Ἀκτίς. Ἂν ἀπὸ τὸ κέντρο ἑνὸς κύκλου φέρουμε εὐθεῖα πρὸς ἕνα, ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς περιφερείας του, ἡ εὐθεῖα αὐτὴ λέγεται **ἀκτίς.** Π.χ. ἡ ἀκτὶς **κα** (σχ. 4). Ἀκτῖνες μποροῦμε νὰ φέρουμε ἄπειρες στὸν ἴδιο κύκλο, ὅλες δὲ εἶναι ἴσες μεταξύ των καὶ ἑνώνουν τὸ κέντρο· μὲ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖα τῆς περιφερείας του.

Σχ. 4

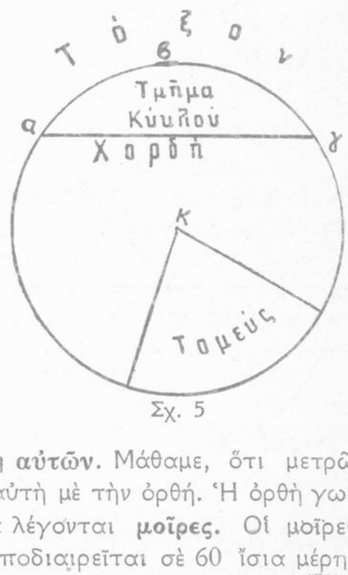
Διάμετρος. Κάθε εὐθεῖα ποὺ ξεκινᾶ ἀπὸ ἕνα, ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου, περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρον του καὶ τελειώνει στὸ ἀπέναντι σημεῖο αὐτῆς, λέγεται **διάμετρος**. Π. χ. ἡ εὐθεῖα **δγ** (σχ. 4). Ἡ διάμετρος εἶναι διπλασία τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἰδίου κύκλου **δ=2α**. Καὶ διαμέτρους μποροῦμε νὰ φέρουμε ἄπειρες στὸν ἴδιο κύκλο, ὅλες δὲ εἶναι ἴσες μεταξύ των. Κάθε διάμετρος χωρίζει τὸν κύκλο σὲ 2 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται **ἡμικύκλια** (μισοὶ κύκλοι) (σχ. 4). Ἐπίσης κάθε διάμετρος χωρίζει τὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου σὲ 2 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται **ἡμιπεριφέρειες** (σχ. 4).

Τόξο Ἕνα ὁποιοδήποτε μέρος τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου λέγεται **τόξο** Π. χ. τὸ τόξο **αβγ** τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου (σχ. 5).

Χορδή. Ἡ εὐθεῖα αγ, ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ 2 ἄκρα τοῦ τόξου λέγεται **χορδή**. Ἡ χορδὴ μοιάζει μὲ τὴν διάμετρο, διότι ἑνώνει 2 σημεῖα τῆς περιφερείας, δὲν εἶναι ὅμως διάμετρος, διότι δὲν περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρο τοῦ κύκλου. Χορδὲς μποροῦμε νὰ φέρουμε πολλὲς στὸν ἴδιο κύκλο. Κάθε χορδὴ εἶναι μικρότερη ἀπὸ κάθε διάμετρο τοῦ ἰδίου κύκλου. Ὅταν 2 ἢ περισσότερες χορδὲς ἑνὸς κύκλου εἶναι ἴσες μεταξύ των, ἴσα εἶναι καὶ τὰ τόξα ποὺ ἑνώνουν καὶ ἀντιθέτως, ὅταν δύο ἢ περισσότερα τόξα εἶναι ἴσα μεταξύ των, ἴσες εἶναι καὶ οἱ χορδές των.

Τμῆμα κύκλου. Τμῆμα κύκλου λέγεται τὸ μέρος τοῦ κύκλου, πού περιλαμβάνεται μεταξὺ τόξου καὶ χορδῆς (σχ. 5).

Τομεύς. Τὸ μέρος τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξὺ 2 ἀκτίνων καὶ τοῦ τόξου αὐτῶν λέγεται **τομεὺς** (σχ. 5).



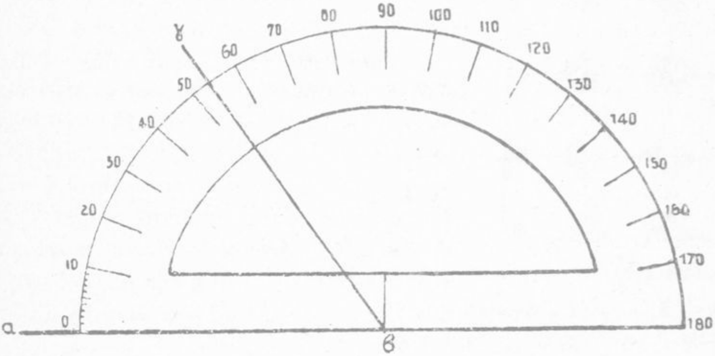
Σχ. 5

Ἐπιφάνειες σχήματος κύκλου. Πολλῶν σωμάτων οἱ ἐπιφάνειες ἔχουν σχῆμα κύκλου, Π.χ. ἡ βάση τῶν ποτηριῶν καὶ τῶν φλυτζανιῶν, οἱ σφραγῖδες τῶν διαφόρων ὑπηρεσιῶν, τὰ μεταλλικὰ νομίσματα, οἱ διάφοροι τροχοί, οἱ πλάκες τῶν ὡρολογίων, οἱ δίσκοι τῶν γραμμοφώνων, τὰ δακτυλίδια καὶ ἄλλα.

Διαίρεση γωνιῶν — Μέτρηση αὐτῶν. Μάθαμε, ὅτι μετρῶ μία γωνία σημαίνει, ὅτι συγκρίνω αὐτὴ μὲ τὴν ὀρθή. Ἡ ὀρθὴ γωνία διαιρεῖται σὲ 90 μέρη, τά ὁποῖα λέγονται **μοῖρες.** Οἱ μοῖρες σημειώνονται μὲ τὸ °. Κάθε μοῖρα ὑποδιαιρεῖται σὲ 60 ἴσια μέρη τὰ ὁποῖα λέγονται **πρῶτα λεπτὰ** καὶ τὰ ὁποῖα σημειώνονται μὲ μίαν ὀξεῖα (′), κάθε δὲ πρῶτο λεπτὸ ὑποδιαιρεῖται σὲ 60 **δεύτερα λεπτά,** τὰ ὁποῖα σημειώνονται μὲ δύο ὀξεῖες (″).

Μοιρογνωμόνιο. Γιὰ τὴ μέτρηση τῶν γωνιῶν χρὴσιμοποιοῦμε τὸ **μοιρογνωμόνιο** (σχ. 6), τὸ ὁποῖο ἔχει σχῆμα μισοῦ κύκλου. Ἡ βάση του εἶναι εὐθεῖα, εἰς τὸ μέσον δὲ τῆς εὐθείας αὐτῆς φέρεται κάθετος, ἡ ὁποία σχηματίζει μὲ αὐτὴν 2 ὀρθὲς γωνίες. Ἀφοῦ δὲ κάθε ὀρθὴ γωνία διαιρεῖται σὲ 90°, ἐπάνω στὸ μοιρογνωμόνιο εἶναι χαραγμένες 180°.

Γιὰ νὰ μετρήσουμε μιὰ γωνία ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: Βάζουμε



Μοιρογνωμονιον
Σχ. 6

τὴν κορυφὴ τοῦ μοιρογνωμονίου ἐπὶ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας, ποὺ θέλουμε νὰ μετρήσουμε, τὴν δὲ πλευρὰ τοῦ μοιρογνωμονίου, ἡ ὁποία φέρει τὴν διαίρεση 0, ἐπάνω στὴ μιὰ πλευρὰ τῆς γωνίας· τότε ἡ ἄλλη πλευρὰ τῆς γωνίας θὰ πέση σὲ μιὰ διαίρεση τοῦ μοιρογνωμονίου π.χ. τὴν 53 (σχ. 6). Ἑπομένως ἡ γωνία αὐτὴ εἶναι 53°.

Ἀσκήσεις

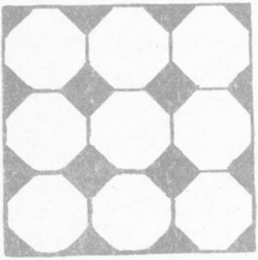
1. Τί λέγεται κύκλος;
2. Τί λέγεται περιφέρεια καὶ τί κέντρο τοῦ κύκλου;
3. Τί λέγεται ἀκτὶς καὶ τί διάμετρος τοῦ κύκλου; Τί σχέση ἔχουν μεταξύ των;
4. Τί λέγεται τόξο καὶ τί χορδή;
5. Τί λέγεται τμῆμα κύκλου καὶ τί τομεύς;
6. Νὰ ὀνομάσουν οἱ μαθηταὶ ἐπιφάνειες κυκλικές.
7. Μὲ ποιὸ ὄργανο μετρῶνται οἱ γωνίες καὶ ποιὲς εἶναι οἱ ὑποδιαιρέσεις του; (Νὰ κάμουν οἱ μαθηταὶ τὴν ὥρα τῆς χειροτεχνιας, μοιρογνωμόνιο μὲ χαρτόνι καὶ νὰ μετρήσουν διάφορες γωνίες).

ΠΟΛΥΓΩΝΑ

Μερικὲς πλάκες ποὺ χρησιμοποιοῦν γιὰ τὸ στρώσιμο τῶν δαπέδων τῶν Ἐκκλησιῶν, τῶν καταστημάτων, τῶν διαδρόμων κλπ.

ἔχουν ἐπιφάνεια ἐπίπεδο, ἡ ὁποία περικλείεται ἀπὸ πολλὲς πλευρές, πέντε, ἓξ κλπ. (σχ. 7).

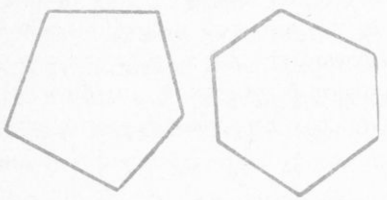
Οἱ πλευρὲς αὐτὲς εἶναι εὐθεῖες ἑνωμένες, χωρὶς νὰ ἀποτελοῦν μιὰ εὐθεῖα, ἀλλὰ ἀποτελοῦν μιὰ τεθλασμένη γραμμή, κλειστή.



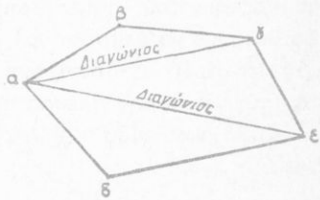
Σχ. 7

Ἂν προσέξουμε τὰ σχήματα ποὺ ἔχουν οἱ πλάκες αὐτές, θὰ ἰδοῦμε ὅτι ὅσες εἶναι οἱ πλευρές των τόσες εἶναι καὶ οἱ γωνίες των. Τὰ σχήματα αὐτὰ παίρνουν τὸ ὄνομά των, ὄχι ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ τῶν πλευρῶν των, ἀλλὰ ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ τῶν γωνιῶν ποὺ ἔχουν καὶ λέγονται **πεντάγωνα** ὅταν ἔχουν 5 γωνίες, **ἑξάγωνα** ὅταν ἔχουν 6, **ἑπτάγωνα** ὅταν ἔχουν 7 κλπ., ὅλα δὲ μαζὶ μὲ ἕνα ὄνομα λέγονται **πολύγωνα.** (σχ. 8).

Ὥστε: **πολύγωνα λέγονται τὰ ἐπίπεδα σχήματα, τὰ ὁποῖα περικλείονται σὲ τεθλασμένη γραμμὴ κλειστή.**



Σχ. 8



Σχ. 9

Περίμετρος. Περίμετρος τοῦ πολυγώνου εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ μήκους ὅλων τῶν πλευρῶν του.

Κορυφές. Κορυφὲς τοῦ πολυγώνου λέγονται οἱ κορυφὲς τῶν γωνιῶν του.

Διαγώνιος. Διαγώνιος τοῦ πολυγώνου λέγεται κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει 2 ἀπέναντι κορυφές του χωρὶς νὰ εἶναι πλευρὰ (σχ. 9).

Πολύγωνο κανονικό. Κανονικὸ λέγεται τὸ πολύγωνο, τοῦ ὁποίου ὅλες οἱ γωνίες εἶναι ἴσες.

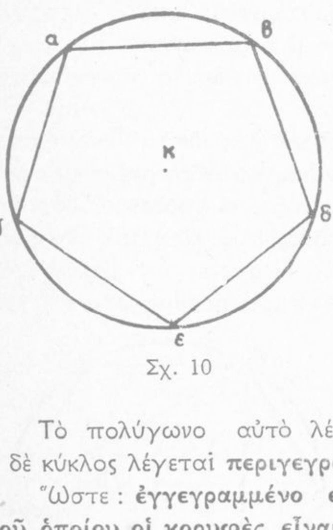
Ἀκανόνιστο Ἀκανόνιστο λέγεται τὸ πολύγωνο, ποὺ ἔχει τὶς πλευρὲς ἄνισες καὶ τὶς γωνίες ἄνισες (σχ. 9).

Ἀσκήσεις

1. Ποιὰ σχήματα λέγονται πολύγωνα ;
2. Τί λέγεται περίμετρος τοῦ πολυγώνου, τί κορυφὲς καὶ τί διαγώνιος αὐτοῦ ;
3. Πότε ἕνα πολύγωνο λέγεται κανονικὸ καὶ πότε ἀκανόνιστο ;
4. Νὰ εὕρουν οἱ μαθηταὶ ἐπιφάνειες πολυγωνικές.
5. Τὴν ὥρα τῆς ἰχνογραφίας, νὰ ἰχνογραφήσουν σὲ χαρτόνι διάφορα πολύγωνα σὲ διάφορα μεγέθη, νὰ κόψουν μὲ ψαλίδι τὶς πλευρές των καὶ νὰ τὰ χρωματίσουν.

4. Πολύγωνο ἐγγεγραμμένο εἰς κύκλο

Ἂν στὸν κύκλο **κ** (σχ. 10) φέρουμε τὶς χορδὲς ποὺ εἰκονίζονται στὸ σχῆμα, θὰ παρατηρήσουμε ὅτι ἡ χορδὴ **αβ** ἑνώνεται στὸ σημεῖο **β** μὲ τὴ χορδὴ **βδ**, καὶ ἡ χορδὴ **βδ** ἑνώνεται στὸ σημεῖο **β** μὲ τὴ χορδὴ **αβ**, αὐτὴ δὲ πάλι ἑνώνεται στὸ σημεῖο **γ** μὲ τὴ χορδὴ **γα**. Ἐσχηματίσθη δηλ. στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ κύκλου αὐτοῦ, μὲ τὴν ἕνωση τῶν χορδῶν του, ἕνα πολύγωνο (πεντάγωνο), τὸ πολύγωνο **αβδεγ** (σχ. 10), τοῦ ὁποίου πλευρὲς εἶναι οἱ χορδὲς τῶν τόξων τοῦ κύκλου, οἱ δὲ κορυφές του εἶναι ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.



Σχ. 10

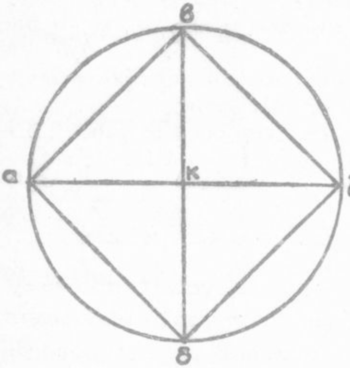
Τὸ πολύγωνο αὐτὸ λέγεται **ἐγγεγραμμένο εἰς κύκλο**, ὁ δὲ κύκλος λέγεται **περιγεγραμμένος εἰς πολύγωνο**.

Ὥστε: **ἐγγεγραμμένο εἰς κύκλο λέγεται τὸ πολύγωνο, τοῦ ὁποίου οἱ κορυφὲς εἶναι ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου καὶ οἱ πλευρές του εἶναι χορδὲς τοῦ κύκλου.**

Κέντρο τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι τὸ κέντρο τοῦ κύκλου στὸν ὁποῖο εἶναι ἐγγεγραμμένο. Ὅταν οἱ χορδὲς τοῦ κύκλου, εἶναι ἴσες μεταξύ των, καὶ οἱ γωνίες τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου θὰ εἶναι ἴσες, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένο πολύγωνο εἶναι **κανονικό**.

5. Ἐγγραφὴ κανονικῶν πολυγώνων εἰς κύκλο

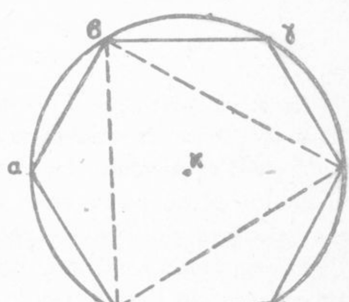
α) **Τετραγώνου.** Γιὰ νὰ ἐγγράψουμε εἰς κύκλο τετράγωνο φέρουμε 3 διαμέτρους, τὴν μία κάθετο στὴν ἄλλη π.χ. τὴν **αγ** καὶ τὴ **βδ** (σχ. 11). Οἱ διάμετροι αὐταὶ χωρίζουν τὴν περιφέρεια σὲ 4 ἴσα τόξα. Ἂν τώρα ἑνώσουμε τὰ ἄκρα τῶν ἴσων αὐτῶν τόξων μὲ χορδές, σχηματίζεται τετράγωνο, τοῦ ὁποίου πλευρὲς εἶναι οἱ ἴσες χορδὲς τῶν τόξων. Τὸ σχῆμα αὐτὸ εἶναι κανονικό, διότι ἀφοῦ τὰ 4 τόξα εἶναι ἴσα μεταξύ των, ἴσες θὰ εἶναι καὶ οἱ χορδές των, οἱ ὁποῖες εἶναι πλευρὲς τοῦ τετραγώνου **αβγδ**, οἱ δὲ γωνίες του εἶναι ὀρθές, διότι σχηματίζονται ἀπὸ πλευρὲς κάθετες μεταξύ των.



Σχ. 11.

β) **Ἑξαγώνου.** Γιὰ τὰ ἐγγράψουμε εἰς κύκλο κανονικὸ ἑξάγωνο ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

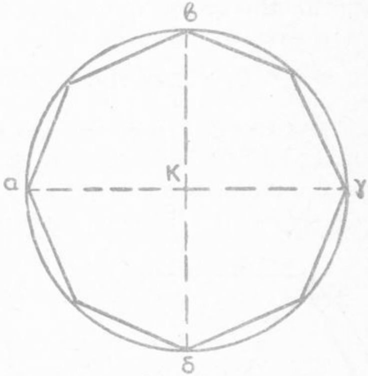
Ἀνοίγουμε τὰ σκέλη τοῦ διαβήτου μας ὅσο εἶναι ἡ ἀκτῖνα τοῦ κύκλου. Ἔπειτα ἀρχίζοντας ἀπὸ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς περιφερείας, τὴ χωρίζουμε σὲ 6 ἴσα τόξα, οἱ χορδὲς τῶν ὁποίων ἔχουν μῆκος ἴσο μὲ τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου. Ἑνώνουμε τώρα τὰ ἄκρα τῶν τόξων μὲ χορδές, οἱ ὁποῖες ὡς χορδὲς ἴσων τόξων εἶναι ἴσες μεταξύ των, ὁπότε παρατηροῦμε ὅτι ἐσχηματίσθη **κανονικὸ ἑξάγωνο** ἐγγεγραμμένο εἰς κύκλον, τὸ ἑξάγωνο **αβγδζε** (σχ. 12), τοῦ ὁποίου πλευρὲς εἶναι οἱ χορδὲς τῶν τόξων τοῦ κύκλου **κ**. Ἐπίσης παρατηροῦμε, ὅτι καὶ οἱ γωνίες ποὺ ἐσχημάτισαν οἱ χορδές, εἶναι ἴσες μεταξύ των. Γιὰ τὴν ἐγγραφὴ εἰς κύκλο κανονικοῦ ἑξαγώνου χωρίσαμε τὴν περιφέρεια σὲ 6 ἴσα τόξα, ποὺ τὸ καθένα ἔχει τὸ ἴδιο μῆκος μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου.



Σχ. 12

Ἀπ' αὐτὸ καταλαβαίνουμε, ὅτι ἡ περιφέρεια κάθε κύκλου εἶναι ἑξαπλασία περίπου τῆς ἀκτῖνος του.

γ) **Ὀκταγώνου**. Γιὰ νὰ ἐγγράψουμε εἰς κύκλο ὀκτάγωνο ἐγγράφουμε πρῶτα μὲ τὸν τρόπο ποὺ μάθαμε, τετράγωνο. Φέρουμε δηλαδὴ 2 διαμέτρους, τὴν μία κάθετο στὴν ἄλλη, ὁπότε ἡ περιφέρεια χωρίζεται σὲ 4 ἴσα τόξα, τὰ τόξα **αβ**, **βγ**, **γδ** καὶ **δα** (σχ. 13). Διαιροῦμε τώρα κάθε τόξο σὲ 2 ἴσα μέρη καὶ ἑνώνουμε τὰ ἄκρα των μὲ χορδές. Τὸ σχῆμα ποὺ ἐσχηματίσθη εἶναι κανονικὸ ὀκτάγωνο (σχ. 13). Κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο μποροῦμε νὰ διαιρέσουμε τὴν περιφέρεια ἑνὸς κύκλου σὲ 16 ἴσα μέρη, ὁπότε ἐγγράφουμε κανονικὸ δεκαεξάγωνο, σὲ 32 ἴσα μέρη, ὁπότε ἐγγράφουμε κανονικὸ πολύγωνο μὲ 32 γωνίες καὶ οὕτω καθεξῆς. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἴσων χορδῶν μᾶς δίδει τὸ κανονικὸ πολύγωνο ποὺ θέλουμε νὰ ἐγγράψουμε.



Σχ. 13

Ὥστε: **γιὰ νὰ ἐγγράψουμε εἰς κύκλο κανονικὸ πολύγωνο μὲ 4, 6, 8 κλπ. πλευρές, διαιροῦμε τὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου σὲ 4, 6, 8 κλπ. ἴσα τόξα καὶ ἑνώνουμε τὰ ἄκρα των μὲ χορδές.**

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς Α'. 1. Πότε ἕνα πολύγωνο λέγεται ἐγγεγραμμένο εἰς κύκλον;

2. Πῶς γίνεται ἐγγραφὴ εἰς κύκλον κανονικοῦ πολυγώνου: α) τετραγώνου, β) ἑξαγώνου καὶ γ) ὀκταγώνου;

3. Τί σχέση ὑπάρχει μεταξὺ ἀκτῖνος καὶ περιφερείας τοῦ ἰδίου κύκλου, στὸν ὁποῖο ἐγγράψαμε κανονικὸ ἑξάγωνο;

4. Πῶς ἐγγράφεται εἰς κύκλον κανονικὸ πολύγωνο μὲ πολλὲς πλευρές;

Ὁμὰς β'. 5. Κατὰ τὸ μάθημα τῆς ἰχνογραφίας νὰ χωρισθῆ ἡ τάξη σὲ 4 ὁμάδες καὶ κάθε ὁμὰς νὰ κάμη σὲ χαρτόνι κύκλους διαφόρους καὶ νὰ ἐγγράψουν, ἡ α' ὁμὰς τετράγωνα, ἡ β' ὁμὰς κανονικὰ ἑξάγωνα, ἡ γ' ὁμὰς κανονικὰ ὀκτάγωνα καὶ ἡ δ' ἀφοῦ ἐγγράψη κανονικὰ ὀκτάγωνα, νὰ κάμη πολύγωνα μὲ πολλὲς πλευρές. Νὰ κόψη κάθε ὁμὰς τὶς πλευρὲς τῶν πολυγώνων της καὶ νὰ τὰ χρωματίση.

6. Κάθε ὁμὰς νὰ φτιάξη, κατὰ τὸ μάθημα τῆς χειροτεχνίας, χαρταετοὺς μὲ σχῆμα κανονικοῦ πενταγώνου, ἑξαγώνου καὶ ὀκταγώνου.

7. Σὲ κύκλο μὲ ἀκτῖνα 0,05 μ. νὰ ἐγγραφῆ τετράγωνο καὶ κανονικὸ ὀκτάγωνο.

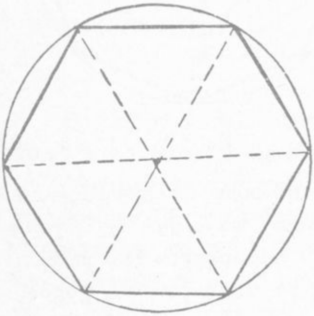
8. Σὲ κύκλο μὲ ἀκτῖνα 0,06 μ. νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸ ἑξάγωνο καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ περίμετρός του.

9. Πόση εἶναι ἡ περίμετρος κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλο, μὲ χορδὴ 0,08 μ.;

10. Πόση εἶναι ἡ περίμετρος κανονικοῦ ὀκταγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλο, μὲ χορδὴ 0,03 μ.;

6. Ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου

Γιὰ νὰ εὕρουμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, ἑνώνουμε μὲ εὐθεῖες τὶς ἀπέναντι κορυφές του, ὁπότε σχηματίζονται τόσα τρίγωνα ἴσα μεταξύ των, ὅσες εἶναι οἱ πλευρὲς τοῦ πολυγώνου (σχ. 14). Εὑρίσκομεν ἔπειτα τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου καὶ τὸ πολλαπλασιάζουμε ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου. Τὸ γινόμενο μᾶς δίδει τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.



Σχ. 14

Μποροῦμε ὅμως καὶ μὲ ἄλλο τρόπο, εὐκολώτερο, νὰ εὕρουμε τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου, ὡς ἑξῆς:

Εὑρίσκουμε τὴν ἀπόσταση μιᾶς τῶν πλευρῶν του ἀπὸ τὸ κέντρο του. Ἡ ἀπόσταση αὐτὴ λέγεται **ἀπόστημα.**

Εὑρίσκουμε ἔπειτα τὴν περίμετρο τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ τὸ μῆκος μιᾶς πλευρᾶς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου καὶ πολλαπλασιάζουμε τὰ 2 αὐτὰ δεδομένα, διαιροῦμε δὲ τὸ γινόμενο διὰ 2.

Ὥστε: **γιὰ νὰ εὕρουμε τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου πολλαπλασιάζουμε τὴν περίμετρό του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀποστάσεως μιᾶς τῶν πλευρῶν του ἀπὸ τὸ κέντρο.**

Ἀσκήσεις

1. Πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου;

2. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ πενταγώνου, τὸ ὁποῖο ἔχει πλευρὰ 0,06 μ., καὶ ἀπόστημα 0,05 μ.;

7. Σχέση περιφερείας κύκλου καὶ περιμέτρου τοῦ εἰς τὸν αὐτὸ κύκλο ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου

Ἂν τὴν περιφέρεια ἑνὸς κύκλου τὴν χωρίσουμε σὲ ἴσα τόξα, περισσότερα ἀπὸ 8, π.χ. σὲ 16 ἢ σὲ 32 ἢ σὲ 64 ἢ σὲ 128 καὶ ἑνώσουμε τὰ ἄκρα των μὲ χορδές, θὰ παρατηρήσουμε ὅτι τὰ τόξα αὐτὰ εἶναι τόσο μικρά, ὥστε συμπίπτουν μὲ τὶς χορδές των.

Ἡ περίμετρος τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ποὺ θὰ σχηματισθῆ μὲ πλευρὲς τὶς χορδὲς τῶν ἀπείρων αὐτῶν τόξων, συμπίπτει μὲ τὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου.

Τὸ ἴδιο θὰ παρατηρήσουμε, ἂν αὐξήσουμε, ὅσο μποροῦμε τὸν ἀριθμὸ τῶν πλευρῶν κανονικοῦ πολυγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον. Θὰ ἔλθη δηλαδὴ στιγμὴ ποὺ οἱ ἄπειρες πλευρὲς τοῦ πολυγώνου θὰ συμπέσουν μὲ τὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου, εἰς τὸν ὁποῖο εἶναι ἐγγεγραμμένες.

Ἀπ' αὐτὸ συμπεραίνουμε, ὅτι κάθε πολύγωνο ὅσο περισσότερες πλευρὲς ἔχει, τόσο περισσότερον μοιάζει μὲ κύκλο.

Ὥστε: **ὁ κύκλος εἶναι ἕνα πολύγωνο μὲ πολλὲς πλευρές.**

8. Σχέση κυλίνδρου καὶ πρίσματος

Τὸ ἴδιο ἀκριβῶς συμβαίνει καὶ μὲ τὸ πρῖσμα, τοῦ ὁποίου αὐξάνεται διαρκῶς ὁ ἀριθμὸς τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν.

Ἂν δηλ. αὐξάνουμε διαρκῶς τὸν ἀριθμὸ τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν ἑνὸς πολυγωνικοῦ πρίσματος, θὰ φθάσουμε στὸ σημεῖο, ὥστε, οἱ ἕδρες τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του νὰ συμπέσουν μὲ τὴν κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου, οἱ δὲ βάσεις του μὲ τὶς βάσεις τοῦ κυλίνδρου.

Ἀπ' αὐτὸ βγάζουμε τὸ συμπέρασμα ὅτι, ὁ **κύλινδρος εἶναι ἕνα πολυγωνικὸ πρῖσμα μὲ πολλὲς ἕδρες**.

Ἀσκήσεις

1. Τί παθαίνει τὸ κανονικὸ πολύγωνο ἂν αὐξήσουμε ὅσο μποροῦμε τὸν ἀριθμὸ τῶν πλευρῶν του;

2. Τί σχέση ὑπάρχει μεταξὺ περιφερείας κύκλου καὶ περιμέτρου κανονικοῦ πολυγώνου μὲ ἄπειρες πλευρές, ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλο αὐτό. ;

3. Τί παθαίνει τὸ πολυγωνικὸ πρῖσμα, ἂν αὐξήσουμε ὅσο μποροῦμε τὸν ἀριθμὸ τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν του;

4. Τί σχέση ὑπάρχει μεταξὺ κυλίνδρου καὶ πρίσματος μὲ ἄπειρες παράπλευρες ἕδρες ;

9. Σχέση περιφερείας πρὸς τὴ διάμετρο

Ἂν ἁπλώσουμε μιὰ κλωστὴ γύρω στὴν περιφέρεια ἑνὸς σώματος κυκλικοῦ, π. χ. ἑνὸς τροχοῦ καὶ ἔπειτα τὴν τεντώσουμε καὶ τὴν μετρήσουμε, τὸ **ἀνάπτυγμά** της (τὸ μάκρος της), ἐκεῖνο δηλ. ποὺ θά εὕρουμε, εἶναι τὸ **μῆκος** τῆς περιφερείας τοῦ τροχοῦ. Δὲν εἶναι ὅμως εὔκολο κάθε φορὰ ποὺ θὰ θέλουμε νὰ εὕρουμε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἑνὸς σχήματος κυκλικοῦ, νὰ κάνουμε τὸ ἴδιο. Ὑπάρχει ἄλλος τρόπος, εὐκολώτερος, γιὰ νὰ εὑρίσκουμε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἑνὸς κυκλικοῦ σχήματος. Ὁ τρόπος αὐτὸς εἶναι ὁ ἑξῆς:

Μέτρησαν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου, μέτρησαν καὶ τὴ διάμετρό του, διαίρεσαν ἔπειτα τὸ μῆκος τῆς περιφερείας μὲ τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου καὶ εὑρῆκαν ὡς πηλίκον τὸν δεκαδικὸ ἀριθμὸ 3,14. Ἔκαναν τὸ ἴδιο καὶ σὲ ἄλλους κύκλους μικρότερους καὶ μεγαλύτερους καὶ εὑρῆκαν τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα. Ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 3,14 εἶναι **σταθερὸς** καὶ δὲν ἀλλάζει, ὁσονδήποτε μικρὸς ἢ μεγάλος εἶναι ὁ κύκλος, φανερώνει δὲ τὴ σχέση ποὺ ὑπάρχει μεταξὺ περιφερείας καὶ διαμέτρου τοῦ ἰδίου κύκλου καὶ σημειώνεται μὲ τὸ γράμμα (π), ἤτοι 3,14=π.

Μὲ ἄλλα λόγια ἡ περιφέρεια κάθε κύκλου εἶναι 3,14 φορὲς μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν διάμετρο τοῦ ἰδίου κύκλου.

Εὕρεση περιφερείας κύκλου. Μποροῦμε λοιπὸν νὰ εὕρουμε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου, ἂν πολλαπλασιάσουμε τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου του ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ 3,14. Ἂν ὑποτεθῇ π.χ. ὅτι ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου εἶναι 3 μ. ἡ περιφέρειά του θὰ εἶναι 2×3×3,14=18,84 μέτρα. Ἂν τώρα τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς τούς ἀντικαταστήσουμε μὲ γράμματα, ἔχουμε τὸν τύπο **Π=2α×π.**

Ὥστε: **γιὰ νὰ εὕρουμε τὴν περιφέρεια ἑνὸς κύκλου, πολλαπλασιάζουμε τὴν διάμετρό του ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ 3,14.**

Εὕρεση διεμέτρου Μὲ ἀντίθετο τρόπο εὑρίσκουμε τὴν διάμετρο ἑνὸς κύκλου. Ἂν δηλαδὴ γνωρίζουμε τὴν περιφερεία τοῦ κύκλου, καὶ τὴ διαιρέσουμε διὰ τοῦ 3,14, θὰ εὕρουμε τὴν διάμετρο, διότι ἀφοῦ ἡ περιφέρεια εἶναι 3,14 φορὲς μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ διάμετρο τοῦ ἰδίου κύκλου, ἡ διάμετρος θὰ εἶναι 3,14 φορὲς μικρότερη ἀπὸ τὴν περιφέρειά του. Ἂν ὑποθέσουμε π.χ. ὅτι ἡ περιφέρεια ἑνὸς κύκλου εἶναι 37,68 μ., ἡ διάμετρός του θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ 37,68 : 3,14=12 μ. Ἂν τώρα ἀντικαταστήσουμε τοὺς ἀριθμοὺς μὲ γράμματα, ἔχουμε τὸν τύπο, **δ=Π : π.**

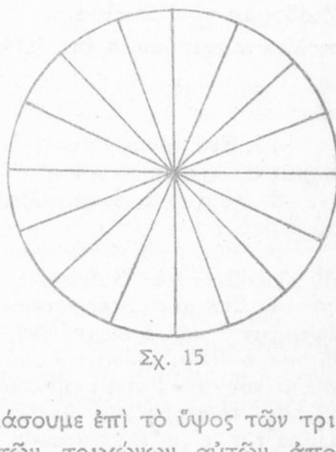
Ὥστε: **γιὰ νὰ εὕρουμε τὴν διάμετρο ἑνὸς κύκλου, διαιροῦμε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 3,14.**

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

1. Πῶς εὑρίσκεται τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου, ὅταν ξέρουμε τὴ διάμετρό του;
2. Πῶς εὑρίσκουμε τὴ διάμετρο, ἢ τὴν ἀκτῖνα ἑνὸς κύκλου ὅταν ξέρουμε τὴν περιφέρειά του;
3. Ὁ τροχὸς ἑνὸς ποδηλάτου ἔχει ἀκτῖνα 0,35 μ. Πόση εἶναι ἡ περιφέρειά του;
4. Ἡ διάμετρος τῶν τροχῶν τοῦ κάρρου εἶναι 1,25 μ. Πόση εἶναι ἡ περιφέρεια καθενὸς τροχοῦ;
5. Πόσο μεγαλύτερη εἶναι ἡ περιφέρεια τῶν ὀπισθίων τροχῶν τετρατρόχου ἁμάξης, ποὺ ἔχουν ἀκτῖνα 0,75 μ., ἀπὸ τὴν περιφέρεια τῶν ἐμπροσθίων τροχῶν, ποὺ ἔχουν ἀκτῖνα 0,45;
6. Μιὰ κυλινδρικὴ κολώνα ἔχει περιφέρεια 4,30 μ. Πόση εἶναι ἡ διάμετρός της;
7. Πόση εἶναι ἡ διάμετρος καὶ πόση ἡ ἀκτὶς ἑνὸς τροχοῦ ποὺ ἔχει περιφέρεια 3,76 μ.;
8. Ἕνα ἁλῶνι ἔχει περιφέρεια 50,24 μ. Πόση εἶναι ἡ διάμετρος καὶ πόση ἡ ἀκτίς του;

10· Εὕρεση τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύκλου

Ἂν σ' ἕνα κύκλο φέρουμε πολλὲς ἀκτῖνες, θὰ σχηματισθοῦν πολλοὶ μικροὶ τομεῖς (σχ. 15). Τὰ τόξα τῶν τομέων αὐτῶν εἶναι τόσον μικρά, ὥστε μποροῦν νὰ ἐξομοιωθοῦν μὲ εὐθεῖες, ἑπομένως καὶ οἱ τομεῖς μποροῦν νὰ ἐξομοιωθοῦν μὲ ἰσοσκελῆ τρίγωνα, τῶν ὁποίων βάσεις εἶναι μέρη (τόξα), τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, καὶ ὕψος οἱ ἀκτῖνες τοῦ κύκλου. Τὸ ἐμβαδὸν ὅλων αὐτῶν τῶν τριγώνων μαζὶ μᾶς δίδει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου. Γιὰ νὰ εὕρουμε λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, πρέπει νὰ ἀθροίσουμε τὸ μῆκος τῶν βάσεων ὅλων τῶν τριγώνων καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος νὰ τὸ πολλαπλασιάσουμε ἐπὶ τὸ ὕψος τῶν τριγώνων. Ἀλλὰ ὅλες μαζὶ οἱ βάσεις τῶν τριγώνων αὐτῶν ἀπο-



Σχ. 15

τελοῦν τὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου, ὕψος των δὲ εἶναι οἱ ἀκτῖνες τοῦ κύκλου.

Ὥστε: **μποροῦμε νὰ εὕρουμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, ἂν πολλαπλασιάσουμε τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα του.**

Μὲ γράμματα ἔχουμε τὸν τύπο: $Ε = \frac{1}{2} Π \times α$.

Μάθαμε ὅμως, ὅτι ἡ περιφέρεια κάθε κύκλου εἶναι ἴση μὲ 2 ἀκτῖνες, ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ 3,14 ($Π = 2α \times π$). Μποροῦμε λοιπὸν νὰ εὕρουμε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου, ὅταν γνωρίζουμε μόνο τὴν ἀκτῖνα του. Ἂν ὑποτεθῇ π.χ. ὅτι ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου εἶναι 3 μ., ἡ περιφέρειά του θὰ εἶναι $3 + 3 \times 3{,}14 = 18{,}84$ μ. Σύμφωνα μὲ τὸν ἀνωτέρω κανόνα, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου αὐτοῦ θὰ εἶναι $3 \times 18{,}84 : 2 = 28{,}26$ τ.μ.

Ἂν ἀντικαταστήσουμε μὲ γράμματα τοὺς ἀνωτέρω ἀριθμούς, ἔχουμε τὸν τύπο: $\mathbf{Ε = α \times Π : 2}$. Καὶ ἀφοῦ ἡ $Π = 2α \times π$, μποροῦμε νὰ εἰποῦμε ὅτι, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εἶναι ἴσο μὲ τὸ γινόμενο τῆς διαμέτρου του, ἐπὶ 3,14, ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα του, διὰ 2. Σύμφωνα μ' αὐτὰ ἔχουμε τὸν ἑξῆς τύπο: $Ε = \frac{2α \times π \times α}{2}$

Ἂν τώρα ἁπλοποιήσωμε τὸ κλάσμα τοῦ ἀνωτέρω τύπου διαγράφοντας τὸ 2 τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τὸ 2 τοῦ παρονομαστοῦ, ἔχουμε τὸν τύπο: $\mathbf{Ε = α \times α \times π}$. Ἂν π.χ. ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου εἶναι 3 μ., τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι $3 \times 3 \times 3{,}14 = 28{,}26$ τ.μ.

Ὥστε: **γιὰ νὰ εὕρουμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου πολλαπλασιάζουμε τὴν ἀκτῖνα ἐπὶ τὸν ἑαυτό της καὶ τὸ γινόμενο τὸ πολλαπλασιάζουμε ἐπὶ 3,14**

Προβλήματα

1. Ἕνα τραπέζι κυκλικὸ ἔχει διάμετρο 1,20 μ. Πόσα τ.μ. μουσαμᾶς θὰ χρειασθῇ γιὰ νὰ στρωθῇ;

2. Ὁ τροχὸς ἑνὸς ποδηλάτου ἔχει ἀκτῖνα 0,45 μ Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν καὶ τῶν δύο τροχῶν του;

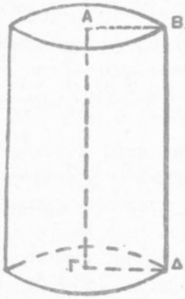
3. Ἕνα ἀλῶνι ἔχει περιφέρεια 142,60 μ. Πόση εἶναι ἡ ἀξία του, ἂν πωληθῇ πρὸς 13 δραχμὲς τὸ τ. μ.;

4. Στὴ μέση μιᾶς τετραγωνικῆς πλατείας, μὲ περίμετρο 160 μ., ἔφτιαξαν 2 παρτέρια κυκλικά, τὸ ἕνα μὲ ἀκτῖνα 5 μ. καὶ τὸ ἄλλο μὲ διάμετρο 10 μ. Πόσα τ.μ. θὰ πιάσουν τὰ 2 παρτέρια καὶ πόσα τ.μ. θὰ μείνουν ἐλεύθερα στὴν πλατεῖα;

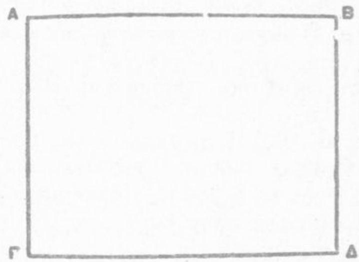
5) Ἡ περιφέρεια μιᾶς τεχνιτῆς κυκλικῆς λίμνης εἶναι 288,40 μ. Πόσα τ.μ. εἶναι ἡ ἐπιφάνειά της;

11. Εὕρεση τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου

Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας. Ἂν μὲ χαρτὶ σκεπάσουμε τὴν κυρτὴ ἐπιφάνεια κυλίνδρου, κόψουμε ἔπειτα τὸ χαρτὶ κατὰ τὴν διεύθυνση ποὺ δείχνει ἡ πλευρὰ ΒΔ (σχ. 16) καὶ τὸ ἁπλώσουμε, θὰ μᾶς παρουσιάση τὸ ὀρθογώνιο σχῆμα ΑΒΓΔ. σχ. 17). Τὸ **ἀνάπτυγμα** δηλαδὴ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου



Σχ. 16



Σχ. 17

ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου τοῦ ὁποίου οἱ πλευρὲς ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι κάθε μία ἴση μὲ κάθε μία ἀπὸ τὶς περιφέρειες τῶν δύο βάσεων τοῦ κυλίνδρου, τὸ δὲ ὕψος ΓΑ τοῦ ὀρθογωνίου, εἶναι ἴσο μὲ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου.

Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου εὑρίσκεται, ὅπως εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου. Ἂν π.χ. ὑποθέσουμε, ὅτι ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι 3 μ. καὶ τὸ ὕψος του 2 μ., τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του θὰ εἶναι $3 \times 2 = 6$ τ. μ.

Ὥστε : **γιὰ νὰ εὕρουμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου πολλάπλασιάζουμε τὴν περιφέρεια τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος.**

Ἂν σ' αὐτὸ προσθέσουμε καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῶν 2 κυκλικῶν βάσεών του, ἔχουμε τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας του.

Ἂν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, τὸ διαιρέσουμε διὰ τοῦ μήκους τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του, εὑρίσκουμε τὸ ὕψος του καὶ ἂν τὸ διαιρέσουμε διὰ τοῦ ὕψους του εὑρίσκουμε τὴν περιφέρεια τῆς βάσεώς του.

Ἀσκήσεις καὶ Προβλήματα

Ὁμὰς Α'. 1. Τύλιξε μὲ χαρτὶ τὴν κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κυλινδρικοῦ σώματος, ἅπλωσε ἔπειτα τὸ χαρτὶ γιὰ νὰ ἰδῆς τί σχῆμα παρουσιάζει.

2. Πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν: α) τῆς κυρτῆς καὶ β) ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου;

3. Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος 2,80 μ. καὶ περιφ. βάσεως 3,10 μ,;

4. Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κυλινδρικοῦ καζανιοῦ εἶναι 0,35 μ. καὶ τὸ ὕψος 1,40 μ. Πόσα τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του;

5. Ἡ διάμετρος ἑνὸς κυλινδρικοῦ μαρμάρου εἶναι 1,10 μ. καὶ τὸ ὕψος του τριπλάσιο. Πόσα τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας του;

Ὁμὰς Β'. 6. Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἑνὸς κυλινδρικοῦ καζανιοῦ εἶναι 3,60 μ. καὶ τὸ ὕψος του τὸ τρίτον τῆς περιφερείας του. Πόσα τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας του;

7. Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια μιᾶς μαρμαρίνης κυλινδρικῆς κολώνας εἶναι 9 τ.μ. καὶ ἡ περιφέρεια τῆς βάσεώς της 4,5 μ. Πόσο εἶναι τὸ ὕψος του;

8. Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια μιᾶς κυλινδρικῆς καπνοδόχου εἶναι 9,40 τ.μ. καὶ τὸ ὕψος της 3,2 μ. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ περιφέρεια τῆς βάσεώς της;

9. Πόσα τ.μ. τσίγκος χρειάζονται γιὰ νὰ φτιάξουμε κυλινδρικὴ καπνοδόχο, μὲ διάμετρο 1,35 μ. καὶ ὕψος 10πλάσιο;

10. Πόσα τ.μ. τσίγκος θὰ χρειασθοῦν γιὰ νὰ φτιάξουμε κυλινδρικὸ τεπόζιτο νεροῦ, χωρὶς σκέπασμα, μὲ ἀκτῖνα βάσεως 0,45 μ. καὶ ὕψος 3πλάσιο τῆς ἀκτῖνος του;

12. Εὕρεση τοῦ ὄγκου κυλίνδρου

Ἂν φτιάξουμε ἀπὸ τενεκὲ 2 δοχεῖα, ἕνα κυλινδρικὸ καὶ ἕνα σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου (πρίσματος), τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν τὸ ἴδιο ἐμβαδὸν βάσεως καὶ τὸ ἴδιο ὕψος καὶ τὰ γεμίσουμε νερὸ θὰ ἰδοῦμε, ὅτι ὅσο νερὸ χωρεῖ τὸ πρισματικὸ δοχεῖο, τόσο ἀκριβῶς χωρεῖ καὶ τὸ κυλινδρικό. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὰ 2 αὐτὰ δοχεῖα, διότι ἔχουν τὶς ἴδιες διαστάσεις, ἔχουν τὴν ἴδια χωρητικότητα, ἂς εἶναι τὸ ἕνα κυλινδρικὸ καὶ τὸ ἄλλο πρισματικὸ καὶ τοῦτο διότι, ὅπως μάθαμε, ὁ κύλινδρος εἶναι πρῖσμα μὲ ἄπειρες ἕδρες. Ὅπως λοιπὸν εὑρίσκουμε τὸν ὄγκο τοῦ πρίσματος, ἔτσι εὑρίσκουμε καὶ τὸν ὄγκο τοῦ κυλίνδρου.

Ἂν π.χ. ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως, μιᾶς κυλινδρικῆς δεξαμενῆς εἶναι 2 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος της 5 μέτρα. ὁ ὄγκος της θὰ εἶναι $2 \times 2 \times 3{,}14 \times 5 = 62{,}8$ κ.μ.

Ὥστε: **διὰ νὰ εὕρουμε τὸν ὄγκο τοῦ κυλίνδρου πολλαπλασιά-**

ζουμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος Ο=α×α×π×υ.
Ἂν τὸν ὄγκο τοῦ κυλίνδρου, τὸν διαιρέσουμε διὰ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του, εὑρίσκουμε τὸ ὕψος του καὶ ἂν τὸ διαιρέσουμε διὰ τοῦ ὕψους του, εὑρίσκουμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς ταυ.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

√1. Πόσα κ.μ. νερὸ χωρεῖ κυλινδρικὸ τεπόζιτο, τοῦ ὁποίου ἡ βάση εἶναι 1,05 τ.μ. καὶ τὸ ὕψος 4,2 μ.;

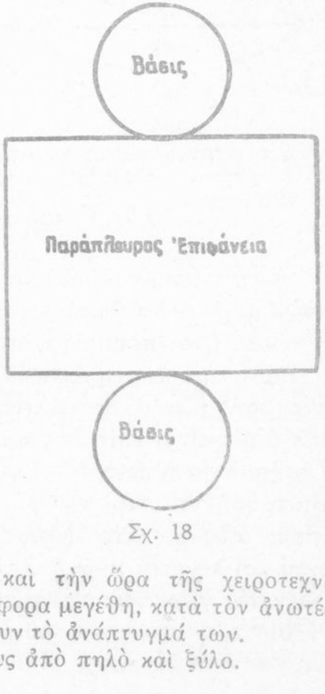
√2. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος κυλινδρικης μαρμαρίνης κολώνας ὕψους 7,2 μ., τῆς ὁποίας ἡ περιφέρεια εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὕψους;

√3. Πόσα κ.μ. νερὸ ὑπάρχουν μέσα σ' ἕνα πηγάδι, τελείως γεμᾶτο βάθους 16 μ. καὶ τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος εἶναι τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ βάθους;

√4. Σ' ἕνα καζάνι ὕψους $1\frac{1}{2}$ μ. βάλαμε $4\frac{1}{2}$ κ.μ. νερό. Πόσα τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του;

√5. Πόσο ὕψος πρέπει νὰ ἔχῃ ἕνα κυλινδρικὸ τεπόζιτο, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς βάσεως εἶναι 0,45 γιὰ νὰ χωρέσῃ 5 κ.μ. νερό;

Κατασκευὴ κυλίνδρου. Παίρνουμε ἕνα φύλλο χαρτί, σχήματος ὀρθογωνίου καὶ ἑνώνουμε τὶς 2 ἀπέναντι πλευρές του, κατὰ τρόπον, ὥστε, οἱ ἄλλες 2 νὰ σχηματίζουν κύκλους καὶ κολλᾶμε μὲ γόμα τὶς πλευρὲς στὰ σημεῖα ποὺ ἑνώθηκαν, ὁπότε ἔχουμε τὴν κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου. Ἔπειτα, σ' ἄλλο φύλλο χαρτιοῦ, κάνουμε 2 κύκλους ἴσους μὲ τοὺς κύκλους τῶν βάσεων τοῦ κυλίνδρου καὶ μὲ γόμα τοὺς κολλᾶμε στὶς βάσεις τοῦ κυλίνδρου. Ἀντίθετη ἐργασία μᾶς παρουσιάζει σχῆμα ὅμοιο μὲ τὸ σχῆμα 18, τὸ ὁποῖο λέγεται **ἀνάπτυγμα** τοῦ κυλίνδρου.



Σχ. 18

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

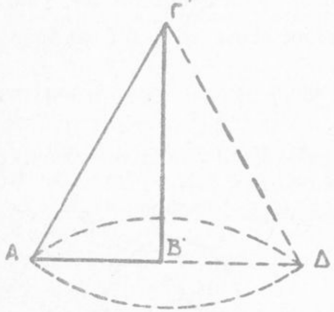
1. Νὰ χωρισθῇ ἡ τάξη σὲ ὁμάδες καὶ τὴν ὥρα τῆς χειροτεχνίας νὰ κάμῃ κάθε ὁμὰς κυλίνδρους σὲ διάφορα μεγέθη, κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπο. Μ' ἀντίθετη ἐργασία νὰ κάμουν τὸ ἀνάπτυγμά των.
2. Κάθε ὁμὰς νὰ κάμῃ κυλίνδρους ἀπὸ πηλὸ καὶ ξύλο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β'

ΚΩΝΟΣ

13. Πῶς γεννᾶται ἕνας κῶνος

Κάνουμε μὲ χαρτόνι ἢ κόντρα πλακέ, ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο, π.χ. ΑΒΓ (σχ. 19) καὶ τὸ στηρίζουμε στὸ τραπέζι κατὰ τρόπον, ὥστε ἡ μία πλευρά, ΑΒ, τῆς ὀρθῆς γωνίας, νὰ στηρίζεται στὸ τραπέζι, ἡ δὲ ἄλλη, ἡ ΒΓ, νὰ εἶναι κάθετος πρὸς αὐτό. Ἔπειτα κρατοῦμε τὴ ΒΓ ἀκίνητο καὶ περιστρέφουμε γύρω της τὸ τρίγωνο, ἕως ὅτου ἐπανέλθη στὴν ἀρχική του θέση. Ὅλες μαζὶ οἱ θέσεις, ἀπὸ τὶς ὁποῖες θὰ περάση, κατὰ τὴν περιστροφή του τὸ τρίγωνο, σχηματίζουν ἕνα στερεὸ σῶμα, τὸ ὁποῖον λέγεται **κῶνος**.



Σχ. 19

14. Γνωρίσματα τοῦ κώνου

Ἂν παρατηρήσουμε τὸν κῶνο, θὰ ἰδοῦμε ὅτι, ἐξωτερικῶς δὲν μοιάζει μὲ τ' ἄλλα γεωμετρικὰ σώματα, γιὰ τὰ ὁποῖα μιλήσαμε ἕως τώρα, ἤτοι πρίσματα, πυραμίδες καὶ κυλίνδρους.

Βάση καὶ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου. Ὁλόκληρος ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἀποτελεῖται ἀπὸ 2 ἄλλες διαφορετικές. Ἀπ' αὐτὲς ἡ μία εἶναι ἐπίπεδος κυκλική, ποὺ λέγεται **βάση** τοῦ κώνου καὶ ἐσχηματίσθη ἀπὸ τὴν πλευρὰ ΑΒ τοῦ τριγώνου, κατὰ τὴν περιστροφή του περὶ τὴν ΒΓ, ἡ δὲ ἄλλη εἶναι καμπύλη καὶ ἐσχηματίσθη ἀπὸ τὴν ὑποτείνουσα ΑΓ κατὰ τὴν περιστροφὴ τοῦ τριγώνου καὶ λέγεται **κυρτὴ** ἐπιφάνεια τοῦ κώνου. Ἡ ὑποτείνουσα ΑΓ λέγεται **γεννέτειρα** τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.

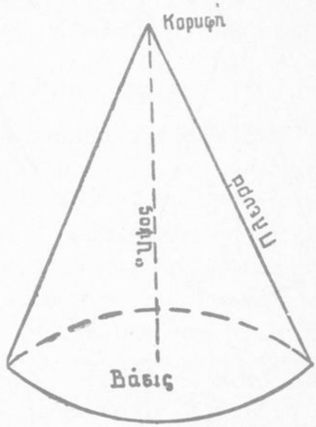
Ὥστε, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου εἶναι ἐπιφάνεια **μικτή.**

Ὕψος καὶ κορυφὴ τοῦ κώνου. Ἡ ἀκίνητος πλευρὰ ΑΓ τοῦ τοῦ τριγώνου λέγεται **ἄξων** τοῦ κώνου καὶ δείχνει τὸ **ὕψος** αὐτοῦ, τὸ δὲ ἄκρον Γ τοῦ ἄξονος λέγεται **κορυφὴ** τοῦ κώνου (σχ. 20).

Ἡ κορυφὴ τοῦ κώνου εὑρίσκεται ἀκριβῶς ἀπέναντι τοῦ κέντρου τῆς βάσεώς του, ἑνώνονται δὲ σ' αὐτὴν ὅλα τὰ σημεῖα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του.

Πλευρὰ τοῦ κώνου. Κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει τὴν κορυφὴ τοῦ κώνου μ' ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του, λέγεται **πλευρὰ** τοῦ κώνου (σχ. 20).

Ὅλες οἱ εὐθεῖες αὐτὲς τοῦ ἰδίου κώνου εἶναι ἴσες μεταξύ των, διότι δείχνουν τὴν ὑποτείνουσα ΑΓ τοῦ τριγώνου, ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἐσχηματίσθη ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ.



Σχ. 20

Ὥστε: **κῶνος λέγεται τὸ στερεὸ σῶμα, τὸ ὁποῖο ἔχει 2 ἕδρες διαφορετικές, τὴ μία ἐπίπεδο κυκλικὴ καὶ τὴν ἄλλη κυρτὴ καὶ καταλήγουσα σὲ κορυφὴ** (σχ. 20)

Σώματα κωνικά. Ὅσα σώματα ἔχουν σχῆμα κώνου λέγονται **κωνικά.** Τέτοια εἶναι οἱ κωνικὲς σκηνές, ὡρισμένες ἐξοχικὲς καλύβες, στέγες ἐξοχικῶν πύργων, οἱ σβοῦρες ποὺ παίζουν τὰ παιδιά, τὰ χωνιὰ ποὺ φτιάχνουν οἱ μπακάληδες μὲ χαρτὶ κλπ.

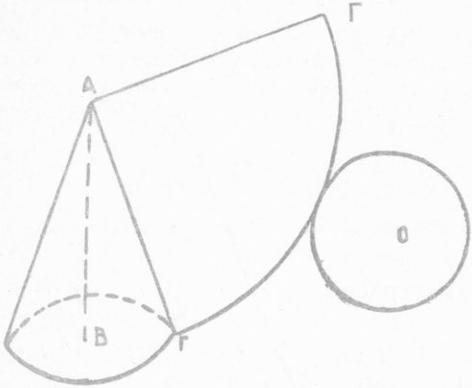
Ἀσκήσεις

1. Νὰ ἰχνογραφήσουν οἱ μαθηταὶ κώνους σὲ διάφορα μεγέθη.
2. Νὰ κάμουν ὀρθογώνιο τρίγωνο ἀπὸ χαρτόνι καὶ περιστρέφοντάς το νὰ σχηματίσουν νοερῶς κῶνο.
3. Νὰ ὀνομάσουν οἱ μαθηταὶ μερικὰ κωνικὰ σώματα.

15. Εὕρεση τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου

Κυρτῆς ἐπιφανείας. Ἂν σκεπάσουμε μὲ χαρτὶ τὴν κυρτὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κώνου, ξετυλίξουμε ἔπειτα τὸ χαρτὶ καὶ τὸ ἁπλώσουμε, θὰ μᾶς παρουσιάση σχῆμα ΑΓΓ' (σχ. 21), δηλαδὴ τὸ

ἀνάπτυγμα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. Ἂν προσέξουμε **τὸ** ἀνάπτυγμα αὐτό, θὰ ἰδοῦμε ὅτι ἔχει σχῆμα κυκλικοῦ τομέως,



Σχ. 21

τοῦ ὁποίου τὸ τόξον ΓΓ′ ἔχει τὸ ἴδιο μῆκος μὲ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς κυκλικῆς βάσεως τοῦ κώνου, ἡ δὲ ἀκτίς του ΑΓ εἶναι πλευρὰ τοῦ κώνου. Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου εὑρίσκεται κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο ποὺ εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως (μῆκος τόξου Χ ἀκτῖνα : 2 δηλ. ὅπως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου).

Ἂν π.χ. ὑποθέσουμε, ὅτι ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου εἶναι 20 μ., ἡ δὲ πλευρά του 10 μ., τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του θὰ εἶναι $20 \times 10 : 2 = 100$ τ.μ.

Ὥστε: **γιὰ νὰ εὕρουμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, πολλαπλασιάζουμε τὴν περιφέρεια τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς του.**

Ἂν σ' αὐτὸ προσθέσουμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυκλικῆς βάσεώς του, ἔχουμε τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.

Ἂν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, τὸ διαιρέσουμε μὲ τὴν περιφέρεια τῆς βάσεώς του, εὑρίσκουμε τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς του καὶ ἂν τὸ διαιρέσουμε μὲ τὴν πλευρά του, εὑρίσκουμε τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

1. Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας μιᾶς κωνικῆς σκηνῆς, τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ εἶναι 4,5 μ. καὶ ἡ βάση ἔχει περιφέρεια μήκους 27 μ.

2 Πόσα τ.μ. χονδρὸ ὕφασμα θὰ χρειασθοῦν γιὰ μιὰ κωνικὴ σκηνή, πλευρὰς 4,5 μ. καὶ μὲ ἀκτῖνα βάσεως τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς πλευρᾶς ;

3. Πόση εἶναι ἡ πλευρὰ κωνικῆς σκηνῆς, τῆς ὁποίας ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια εἶναι 24,80 τ.μ, καὶ ἡ περιφέρεια τῆς βάσεώς της 4. μ ;

4. Πόση εἶναι ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου, τοῦ ὁποίου ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια εἶναι 27,9 τ.μ. καὶ ἡ πλευρὰ 3 μέτρα ;

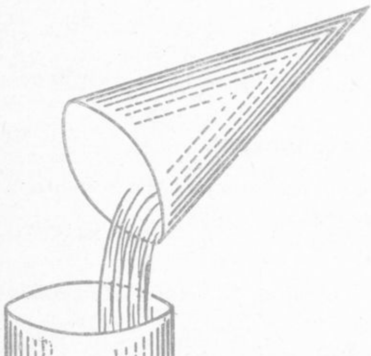
5. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου εἶναι 5,60 τ.μ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του τριπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως. Πόσα τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας του ;

6. Ἕνας κῶνος ἔχει περιφέρεια βάσεως 9,50 μ. καὶ πλευρᾶς τὸ τετραπλάσιον τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεώς του. Πόσα τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας του ;

16. Σχέση κώνου καὶ πυραμίδας

Ἂν πάρουμε μιὰ πολυγωνικὴ πυραμίδα καὶ ἕναν κῶνο, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν τὴν ἴδια βάση καὶ τὸ ἴδιο ὕψος καὶ αὐξάνουμε διαρκῶς τὸν ἀριθμὸ τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν τῆς πυραμίδας, θὰ παρατηρήσουμε ὅτι θὰ ἔλθη στιγμή, ποὺ ἡ περίμετρος τῆς βάσεως τῆς πολυγωνικῆς πυραμίδας, θὰ γίνη περιφέρεια κύκλου, ἡ ὁποία θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν περιφέρεια τῆς βάσεως τοῦ κώνου, ἡ δὲ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδας, ἀπὸ τεθλασμένη θὰ μεταβληθῆ σὲ κυρτὴ καὶ θὰ συμπέση μὲ τὴν κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου.

Ὥστε: **ὁ κῶνος εἶναι μιὰ πυραμὶς μὲ πολλὲς ἕδρες.**



Σχ. 22

17. Εὕρεση τοῦ ὄγκου τοῦ κώνου

Ἂν κάμουμε δύο δοχεῖα ἀπὸ τσίγκο, τὸ ἕνα κυλινδρικὸ καὶ τὸ ἄλλο κωνικό, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν τὴν ἴδια βάση καὶ τὸ ἴδια ὕψος καὶ τὰ γεμίσουμε νερό, θὰ παρατηρήσουμε ὅτι, γιὰ νὰ γεμίση τὸ κυλινδρικὸ δοχεῖο, πρέπει νὰ ἀδειάσουμε μέσα σ' αὐτὸ 3 φορὲς τὸ κωνικὸ δοχεῖο τελείως γεμᾶτο (σχ. 22). Βλέπουμε δηλ. ὅτι τὸ κωνικὸ δοχεῖο ἔχει χωρητικότητα 3 φορὲς μικρότερη ἀπὸ τὴν χωρητικότητα τοῦ κυλίνδρου. Ἀπ' αὐτὸ καταλαβαίνουμε, ὅτι ὁ κῶνος εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ κυλίνδρου, μὲ τὸν ὁποῖον ἔχει τὴν ἴδια βάση καὶ τὸ ἴδιο ὕψος. Ἑπομένως, γιὰ νὰ εὕρουμε τὸν ὄγκο τοῦ κώνου, κάνουμε τὸ ἴδιο ποὺ κάναμε γιὰ νὰ εὕρουμε τόν ὄγκο τοῦ κυλίνδρου, ἀλλὰ διαιροῦμε τὸ ἀποτέλεσμα διὰ 3, διότι ὁ κῶνος εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ κυλίδρου τῶν αὐτῶν διαστάσεων. Ἂν π.χ. ὑποθέσουμε, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου εἶναι 10,5 τ.μ. καὶ τὸ ὕψος του 8 μ., ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι $10,8 \times 8 : 3 = 28$ κ.μ.

Μάθαμε ὅτι ὁ κῶνος εἶναι μία πολυγωνικὴ πυραμὶς μὲ ἄπειρες ἕδρες, ἑπομένως ὁ ὄγκος του θὰ εὑρίσκεται ὅπως καὶ ὁ ὄγκος τῆς πολυγωνικῆς πυραμίδας, ἡ ὁποία εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ ἑνὸς πολυγωνικοῦ πρίσματος, τῶν αὐτῶν διαστάσεων.

Ὥστε: **γιὰ νὰ εὕρουμε τὸν ὄγκο τοῦ κώνου, πολλαπλασιάζουμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ διαιροῦμε τὸ γινόμενον διὰ 3** ($Ο = α \times α \times π \times υ : 3$).

Ἂν τὸν ὄγκο τοῦ κώνου τὸν διαιρέσουμε διὰ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του, εὑρίσκουμε τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὕψους του καὶ ἂν τὸν διαιρέσουμε διὰ τοῦ ὕψους του, εὑρίσκουμε τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς βάσεώς του.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

√1. Τί σχέση ὑπάρχει μεταξὺ κώνου καὶ πολυγωνικῆς πυραμίδας, τῆς ὁποίας αὐξάνουμε διαρκῶς τὶς παράπλευρες ἕδρες ;

√2. Τί σχέση ὑπάρχει μεταξὺ κυλίνδρου καὶ κώνου ποὺ ἔχουν τὶς ἴδιες διαστάσεις ;

√3. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος κωνικοῦ δοχείου, τὸ ὁποῖο ἔχει ἐμβαδὸν βάσεως 2,35 τ.μ. καὶ ὕψος 1,10 μ. ;

√4. Ἡ διάμετρος τῆς βάσεως κώνου εἶναι 0,80 μ. καὶ τὸ ὕψος 3πλάσιον. Πόσα κ.μ. εἶναι ὁ ὄγκος του;

√5 Πόσα κ.μ. εἶναι ὁ ὄγκος ἑνὸς κώνου μὲ περιφέρεια βάσεως 30,30 μ. καὶ ὕψος 6 μ. ;

√6. Ὁ ὄγκος ἑνὸς κώνου εἶναι 30,6 κ.μ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του 10,20 τ.μ. Πόσο εἶναι τὸ ὕψος του ;

√7. Πόσα τ.μ. τόπο θὰ καταλάβη μιὰ κωνικὴ σκηνή, ἂν ἔχη ὕψος $2\frac{1}{2}$ μ. καὶ χωρητικότητα 25 κ.μ. ;

18. Κατασκευὴ κώνου

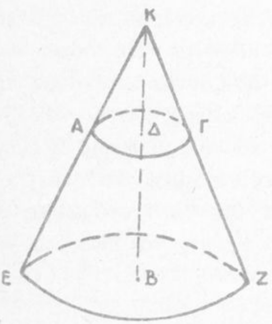
Γιὰ νὰ κατασκευάσαυμε κῶνο ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς :

Γράφουμε ἐπάνω σὲ χαρτί, κυκλικὸ τομέα π.χ. τὸν ΑΓΓ' (σχ. 21) κι' ἕνα κύκλο Ο, ἐφαπτόμενον στὸ τόξο τοῦ τομέως. Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου Ο, πρέπει νὰ ἔχῃ μῆκος ἴσον μὲ τὸ μῆκος τοῦ τόξου ΓΓ'. Κόβουμε ἔπειτα μὲ ψαλίδι τὶς πλευρὲς τοῦ τομέως καὶ τὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου καὶ ἑνώνουμε τὴν ΑΓ μὲ τὴν ΑΓ', ὁπότε τὸ σημεῖο Γ θὰ συμπέσῃ μὲ τὸ σημεῖο Γ' Τὸ σημεῖο Α θὰ εἶναι ἡ κορυφὴ τοῦ κώνου καὶ ὁ κύκλος Ο, ἡ βάση τοῦ κώνου (σχ. 21). Ἀντίθετη ἐργασία μᾶς παρουσιάζει τὸ **ἀνάπτυγμα**, ΑΓΓ' τοῦ κώνου (σχ. 21, σελ. 78).

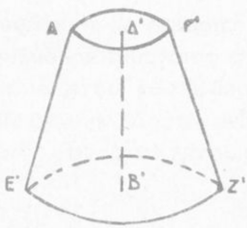
Ἄσκησις. Τὴν ὥρα τοῦ μαθήματος τῆς χειροτεχνίας νὰ χωρισθῆ ἡ τάξη σὲ ὁμάδες καὶ κάθε ὁμὰς νὰ κάμῃ κώνους μὲ χαρτόνι, πηλὸ ἢ ξύλο, σὲ διάφορα μεγέθη.

19. Κόλουρος κῶνος

Γνωρίσματα τοῦ κολούρου κώνου. Ἂν σ' ἕνα κῶνο κάνουμε ὁριζοντίως ἐπίπεδο τομή, λίγο κάτω ἀπὸ τὴν κορυφή του, στὰ σημεῖα ΑΓ (σχ. 23) θὰ σχηματισθῆ κύκλος μικρότερος ἀπὸ τὸν κύκλο τῆς βάσεώς του. Τὸ ἐπάνω μέρος τοῦ κώνου ποὺ κόψαμε, τὸ ΑΚΓ ἐξακολουθεῖ νὰ εἶναι κῶνος, ἀλλὰ μικρότερος ἀπὸ τὸν ἀρ-



Σχ. 23



Σχ. 24


Σχ. 25

χικό. Τὸ κάτω ὅμως μέρος, τὸ ΑΓΕΖ, ποὺ ἀπέμεινε μετὰ τὴν ὁριζοντία ἐπίπεδο τομή, παρουσιάζει νέο σῶμα, διάφορο τοῦ ἀρχικοῦ, τὸ ὁποῖον λέγεται **κόλουρος κῶνος** (σχ. 24). Ἂν παρατηρήσουμε τὸν κόλουρο αὐτὸ κῶνο θὰ ἰδοῦμε, ὅτι ἔχει τὰ ἑξῆς γνωρίσματα :

α) Δὲν ἔχει κορυφή, ὅπως ὁ ἀρχικὸς κῶνος.

β) Ἔχει 2 ἕδρες καὶ μιὰ κυρτὴ ἐπιφάνεια. Ἀπ' αὐτὲς οἱ 2 εἶναι ἐπίπεδες, κυκλικές, ἄνισες καὶ παράλληλες καὶ λέγονται βάσεις τοῦ κολούρου κώνου. Ἡ τρίτη, ἡ παράπλευρος δηλαδὴ ἐπιφάνειά του, εἶναι **κυρτή**.

γ) Ὁλόκληρη ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου εἶναι ἐπιφάνεια **μικτή**.

Ἡ κάθετος Δ' Β' (σχ. 24), ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ κέντρα τῶν δύο κυκλικῶν βάσεών του λεγεται **ὕψος** αὐτοῦ.

Πλευρὰ τοῦ κολούρου κώνου λέγεται τὸ μέρος τῆς πλευρᾶς τοῦ ἀρχικοῦ κώνου, ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο κυκλικῶν βάσεών του. Π. χ. Α' Ε' ἢ Γ' Ζ' (σχ. 24.)

Ὥστε: **κόλουρος κῶνος λέγεται τὸ στερεὸν σῶμα ποὺ ἔχει 2 ἄνισες κυκλικὲς καὶ ἐπίπεδες βάσεις καὶ τὴν παράπλευρο ἐπιφάνειά του κυρτή.**

Σώματα μὲ σχῆμα κολούρου κώνου. Σχῆμα κολούρου κώνου ἔχουν πολλὰ σώματα. Π.χ. Οἱ διάφορες γλάστρες ἀνθέων, ὡρισμένα ποτήρια, οἱ δακτυλῆθρες τῶν ραπτῶν, ὡρισμένοι κάδοι καὶ κουβάδες, οἱ φελλοὶ ποῦ βουλώνουν τὶς μπουκάλες, τὰ ἀμπαζοὺρ ποὺ βάζουν στὶς λάμπες γιὰ νὰ συγκεντρώνεται τὸ φῶς καὶ νὰ πέφτη πρὸς τὰ κάτω (σχ. 25).

Κατασκευὴ κολούρου κώνου. Γιὰ νὰ κατασκευάσουμε κόλουρο κῶνο μὲ χαρτί, κάνουμε ἕναν ἁπλὸ κῶνο μὲ τὸν τρόπο ποὺ μάθαμε, κάνουμε ἔπειτα στὴν κορυφή του ὁριζοντίως ἐπίπεδο τομή· τὸ σῶμα ποὺ ἀπομένει εἶναι κόλουρος κῶνος. Κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο μποροῦμε νὰ φτιάξουμε κολούρους κώνους μὲ πηλὸ ἢ ξύλο. Πρέπει ὅμως νὰ προσέξουμε ὥστε, οἱ τομὲς νὰ εἶναι ἐπίπεδες καὶ οἱ βάσεις των νὰ εἶναι παράλληλες· αὐτὸ θὰ τὸ πετύχουμε ἂν κάθε πλευρὰ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας των ἀπέχη τὸ ἴδιο ἀπὸ τὶς βάσεις των.

Ἀσκήσεις

1. Τί παθαίνει ὁ κῶνος ἂν τοῦ κάνουμε ὁριζοντίως ἐπίπεδο τομή;
2. Ποιὰ εἶναι τὰ γνωρίσματα τοῦ κολούρου κώνου;
3. Νὰ βροῦν οἱ μαθηταὶ σώματα μὲ σχῆμα κολούρου κώνου.
4. Νὰ ἰχνογραφήσουν κολούρους κώνους σὲ διάφορα μεγέθη καὶ νὰ κάμουν κολούρους κώνους μὲ χαρτόνι, πηλὸ ἢ ξύλο.

Σ Φ Α Ι Ρ Α

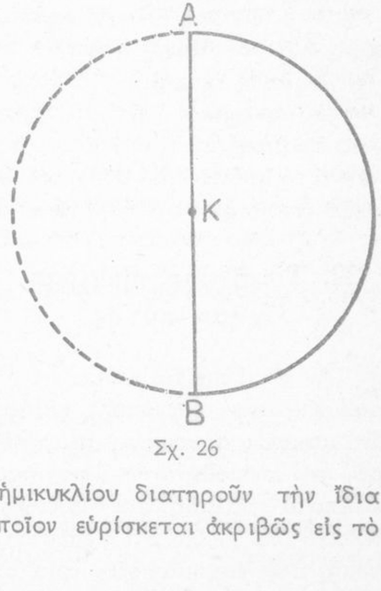
20. Πῶς γεννᾶται μία σφαῖρα

Ἂν πάρουμε τὸ μοιρογνωμόνιό μας, ἢ ἕνα ἡμικύκλιο ἀπὸ χαρτόνι καὶ τὸ τοποθετήσουμε ἐπάνω στὸ τραπέζι, κατὰ τρόπον, ὥστε ἡ εὐθεῖα πλευρά του ΑΒ (σχ 26) νὰ εἶναι κάθετος πρὸς αὐτὸ καὶ ἀκίνητος καὶ τὸ περιστρέψουμε γύρω ἀπὸ τὴν ἀκίνητο αὐτὴ πλευρά, μέχρις ὅτου ἐπανέλθη στὴν ἀρχική του θέση, ὅλες μαζὶ οἱ θέσεις, ἀπὸ τὶς ὁποῖες θὰ περάση, κατὰ τὴν περιστροφή του τὸ ἡμικύκλιο, σχηματίζουν ἕνα στερεὸ σῶμα, τὸ ὁποῖον λέγεται **σφαῖρα.**

21. Γνωρίσματα τῆς σφαίρας

Ἂν παρατηρήσουμε τὴ σφαῖρα θὰ ἰδοῦμε, ὅτι ἐξωτερικῶς παρουσιάζει τὰ ἑξῆς γνωρίσματα:

Ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας. Ἡ σφαῖρα περικλείεται ἀπὸ μιὰ καὶ μόνο ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία γράφεται ἀπὸ τὴν καμπύλη πλευρὰ τοῦ ἡμικυκλίου, κατὰ τὴν περιστροφή του γύρω ἀπὸ τὴν εὐθεῖα πλευρά του ΑΓ (σχ. 26). Ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ εἶναι **καμπύλη,** διότι κανένα μέρος της δὲν εἶναι ἐπίπεδο καὶ πουθενὰ δὲν παρουσιάζει γωνία.



Σχ. 26

Ὥστε, ἕνα ἡμικύκλιο περιστρεφόμενο γράφει σφαῖρα, ἡ δὲ ἡμιπεριφέρειά του γράφει τὴν καμπύλη ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας.

Κέντρο τῆς σφαίρας. Κατὰ τὴν περιστροφὴ αὐτή, ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἡμιπεριφερείας τοῦ ἡμικυκλίου διατηροῦν τὴν ἴδια ἀπόσταση ἀπὸ ἕνα σημεῖο, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἀκριβῶς εἰς τὸ μέσον (τὸ κ. τῆς διαμέτρου, σχ. 26 καὶ λέγεται **κέντρο** . Ἑπομένως ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἀκριβῶς εἰς τὸ μέσον αὐτῆς καὶ λέγεται **κέντρο** τῆς σφαίρας.

Ὥστε : **σφαῖρα λέγεται τὸ στερεὸ σῶμα, τὸ ὁποῖο περικλείεται ἀπὸ μία μόνο ἐπιφάνεια,** καμπύλη, **τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ κέντρο** της.

Ἀκτὶς τῆς σφαίρας. Κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει τὸ κέντρο τῆς σφαίρας μὲ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς ἐπιφανείας της, λέγεται **ἀκτὶς** τῆς σφαίρας. Ἀκτῖνες μποροῦμε νὰ φέρουμε ἄπειρες στὴν ἴδια σφαῖρα, ὅλες δὲ εἶναι ἴσες μεταξύ των.

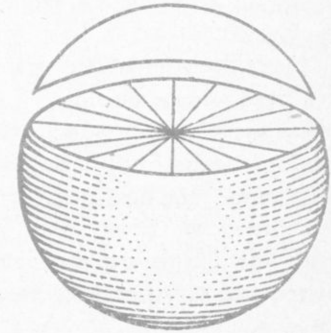
Διάμετρος τῆς σφαίρας. Ἡ πλευρὰ ΑΒ (σχ. 26) τοῦ ἡμικυκλίου, γύρω ἀπὸ τὴν ὁποία περιεστράφη τὸ ἡμικύκλιο καὶ ἐσχημάτισε τὴν σφαῖρα, λέγεται **διάμετρος** αὐτῆς.

Ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρο αὐτῆς καὶ ἑνώνει 2 ἀπέναντι σημεῖα τῆς ἐπιφανείας της. Διαμέτρους μποροῦμε νὰ φέρουμε ἄπειρες στὴν ἴδια σφαῖρα, ὅλες δὲ εἶναι ἴσες μεταξύ των.

Ἡ διάμετρος ΑΒ τῆς σφαίρας λέγεται καὶ **ἄξων** αὐτῆς, τὰ δὲ ἄκρα Α,Β τοῦ ἄξονος λέγονται **πόλοι** αὐτῆς (σχ. 26).

Σώματα σφαιρικά, Ὅσα σώματα ἔχουν σχῆμα σφαίρας λέγονται **σφαιρικά.** Τέτοια εἶναι π.χ. τὸ τόπι, τὰ πορτοκάλια, μερικὰ καρπούζια καὶ ὡρισμένοι ἄλλοι καρποί, οἱ βῶλοι, τὰ μπαλόνια, οἱ μπίλιες τοῦ μπιλιάρδου, ἡ Γῆ ἐπάνω στὴν ὁποία ζοῦμε καὶ ἡ ὁποία λέγεται **ὑδρόγειος σφαῖρα** καὶ ἄλλα.

22. Τομὴ τῆς σφαίρας. Σχῆμα αὐτῆς

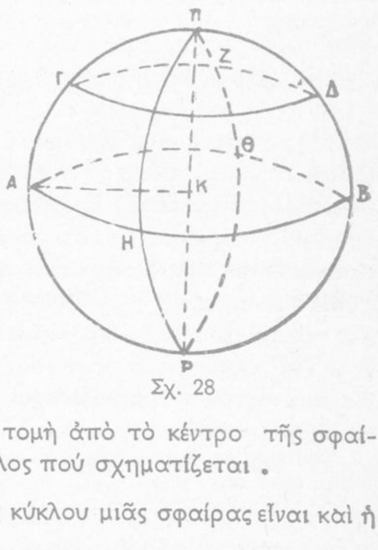

Σχ. 27

Ἂν πάρουμε ἕνα σῶμα σφαιρικὸ π.χ. ἕνα πορτοκάλι καὶ μὲ ἕνα μαχαίρι τὸ κόψουμε πέρα πέρα, σὲ ὁποιοδήποτε μέρος του καὶ κατὰ ὁποιαδήποτε διεύθυνση θέλουμε, θὰ ἰδοῦμε ὅτι ἡ ἐπίπεδος τομή, ποὺ ἐσχηματίσθη ἀπὸ τὸ κόψιμο, ἔχει σχῆμα κύκλου (σχ. 27). Τέτοιες τομές, μποροῦμε νὰ κάνουμε ἄπειρες στὴν ἴδια σφαῖρα.

Ὥστε: **ὁποιαδήποτε ἐπίπεδος τομὴ τῆς σφαίρας ἔχει σχῆμα κύκλου.**

23. Μέγιστοι καὶ μικροὶ κύκλοι τῆς σφαίρας

Ὅταν ἡ ἐπίπεδος τομή, ἡ ὁποία γίνεται σὲ μία σφαῖρα, γίνῃ ἀκριβῶς εἰς τὸ κέντρο αὐτῆς, σχηματίζεται κύκλος, ὁ ὁποῖος εἶναι μεγαλύτερος ἀπ' ὅλους τούς κύκλους ποὺ σχηματίζονται ἀπὸ τομές, πού θὰ γίνουν σὲ ὁποιοδήποτε ἄλλο μέρος τῆς ἴδιας σφαίρας. Ὁ μεγαλύτερος αὐτὸς κύκλος λέγεται **μέγιστος κύκλος** τῆς σφαίρας π. χ. ὁ ΑΘΒΗ (σχ. 28). Ὅλοι οἱ ἄλλοι λέγονται **μικροὶ κύκλοι** αὐτῆς, διότι οἱ τομὲς ποὺ τούς ἐσχημάτισαν δὲν ἔγιναν στὸ κέντρον τῆς σφαίρας π. χ. ὁ ΓΖΔ (σχ. 28).



Σχ. 28

Μεγίστους κύλους μποροῦμε νὰ κάμουμε ἀπείρους στὴν ἴδια σφαῖρα, ὅλων δὲ τὰ κέντρα εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῆς σφαίρας καὶ ὅλοι εἶναι ἴσοι μεταξὺ των.

Ἐπίσης καὶ μικροὺς κύκλους μποροῦμε νὰ κάμουμε ἀπείρους στὴν ἴδια σφαῖρα, οἱ ὁποῖοι ὅμως δὲν εἶναι ὅλοι ἴσοι μεταξὺ των, διότι ὅσο περισσότερο ἀπέχει ἡ τομὴ ἀπὸ τὸ κέντρο τῆς σφαίρας, τόσον μικρότερος εἶναι ὁ κύκλος πού σχηματίζεται.

Ἡ **περιφέρεια** τοῦ μεγίστου κύκλου μιᾶς σφαίρας εἶναι καὶ ἡ περιφέρεια αὐτῆς.

Κέντρο τοῦ μεγὶστου κύκλου μιᾶς σφαίρας εἶναι τὸ κέντρο αὐτῆς. Π. χ. τὸ κέντρο Κ (σχ. 28).

Ἀκτὶς τοῦ μεγίστου κύκλου μιᾶς σφαίρας εἶναι ἡ ἀκτὶς αὐτῆς. Π.χ. ἡ ΚΑ (σχ. 28).

Διάμετρος τοῦ μεγίστου κύκλου μιᾶς σφαίρας εἶναι ἐπίσης ἡ διάμετρος τῆς ἰδίας σφαίρας. Π.χ. ἡ ΠΡ (σχ. 28). Κάθε μέγιστος κύκλος μιᾶς σφαὶρας διαιρεῖ αὐτὴν εἰς 2 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται **ἡμισφαίρια** (μισὲς σφαῖρες).

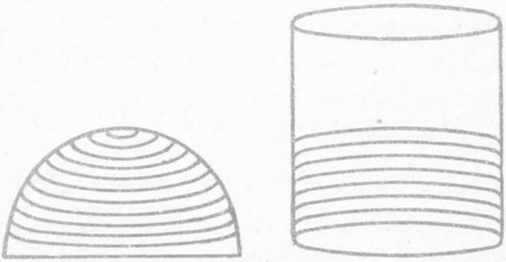
Ἀσκήσεις

1. Τί λέγεται σφαῖρα, τὶ λέγεται κέντρον τῆς σφαίρας, τὶ ἀκτίς, τί διάμετρος, τί ἄξων καὶ τί πόλοι αὐτῆς;
2. Νὰ ὀνομάσουν οἱ μαθηταὶ σώματα σφαιρικά.
3. Τί σχήματα παρουσιάζουν οἱ ἐπίπεδες τομὲς μιᾶς σφαίρας;
4. Ποῖοι κύκλοι λέγονται μέγιστοι καὶ ποῖοι μικροί;
5. Νὰ κάμουν οἱ μαθηταὶ σὲ πορτοκάλι ἐπίπεδες τομές, ὥστε νὰ σχηματισθοῦν μικροὶ καὶ μέγιστοι κύκλοι.
6. Νὰ κάμουν σὲ ἄλλο πορτοκάλι ἐπίπεδο τομή, ἡ ὁποία νὰ δημιουργῆ μέγιστον κύκλο καὶ νὰ δείξουν τὴν περιφέρεια, τὸ κέντρον, τὶς ἀκτῖνες καὶ τὴν διάμετρό του.
7. Νὰ ἰχνογραφήσουν οἱ μαθηταὶ σφαῖρες καὶ νὰ κάμουν σφαῖρες μὲ πηλό.

24. Εὕρεση τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας

Ἂν πάρουμε μιὰ σφαῖρα, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ διάμετρο. π.χ. 0,15 μ. καὶ ἕνα κύλινδρο, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος νὰ εἶναι 0,15 μ. καὶ ἡ διάμετρος τῆς βάσεώς του ἐπίσης 0,15 μ. καὶ τυλίξουμε γύρω στὴν ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας καὶ στὴν κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου σπάγγο τοῦ αὐτοῦ πάχους, ὅπως ἀκριβῶς τυλίγουμε τὸν σπάγγο γύρω στὴ σβούρα (σχ. 29), ξυτυλίξουμε ἔπειτα τοὺς σπάγγους καὶ τοὺς μετρήσουμε, θὰ ἰδοῦμε ὅτι καὶ οἱ 2 ἔχουν τὸ ἴδιο μῆκος.

Ἀπ' αὐτὸ καταλαβαίνουμε, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, εἶναι ἴση μὲ τὴν κυρτὴ ἐπιφάνεια κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος καὶ καὶ διάμετρον βάσεως ἴσα μὲ τὴν διάμετρο τῆς σφαίρας. Ὅπως λοιπὸν εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου



Σχ. 29

(περιφέρεια βάσεως X ὕψος) ἔτσι πρέπει νὰ εὑρίσκεται καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφάνειας τῆς σφαίρας.

Περιφέρεια τῆς σφαίρας εἶναι ἡ περιφέρεια τοῦ μεγίστου κύκλου της, ὕψος δὲ ἡ διάμετρος αὐτῆς.

Ὥστε: **τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἶναι ἴσο μὲ τὸ γινόμενο τῆς περιφερείας τοῦ μεγίστου κύκλου της ἐπὶ τὴν διάμετρο αὐτῆς.**

Ἀλλὰ ἀφοῦ ἡ περιφέρεια τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τὴ διάμετρό της ἐπὶ 3,14, ὕψος δὲ τῆς σφαίρας εἶναι ἡ διάμετρος αὐτῆς, **μποροῦμε νὰ εὕρουμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ἂν πολλαπλασιάσουμε τὴν διάμετρο ἐπὶ τὸν ἑαυτό της καὶ τὸ γινόμενο ἐπὶ 3,14** ($E = \delta \times \delta \times \pi$).

Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς ἀνωτέρω σφαίρας εἶναι $0,15 \times 0,15 \times 3,14 = 706,5$ τ.δ.

Μποροῦμε ὅμως καὶ μ' ἄλλο τρόπο νὰ εὕρουμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Ἡ ἐπιφάνεια κάθε σφαίρας εἶναι 4πλασία τῆς ἐπιφανείας τοῦ μεγίστου κύκλου αὐτῆς. Ἂν π.χ. ἡ ἀκτὶς μιᾶς σφαίρας εἶναι 0,5 μ., τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεγίστου κύκλου της εἶναι $0,5$ μ. $\times 0,5 \times 3,14 = 0,785$ τ.μ. ($\alpha \times \alpha \times \pi$), τὸ δὲ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἶναι $0,785 \times 4 = 3,140$ τ.μ. ($\alpha \times \alpha \times \pi \times 4$).

Ὥστε: **γιὰ νὰ εὕρουμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας, πολλαπλασιάζουμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεγίστου κύκλου αὐτῆς ἐπὶ 4.**

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

1. Πῶς εὑρίσκεται ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ὅταν ξέρουμε: α) τὴν διάμετρό της, β) τὴν περιφέρεια τοῦ μεγίστου κύκλου της, καὶ γ) τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεγίστου κύκλου της;

2. Ἡ περιφέρεια τοῦ μεγίστου κύκλου μιᾶς σφαίρας εἶναι $6\frac{1}{2}$ μ. Πόσα τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδόν της;

3. Ἡ διάμετρος μιᾶς σφαίρας εἶναι 5 μ. Πόσα τ.μ. εἶναι ὁλόκληρος ἡ ἐπιφάνειά της;

4. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεγίστου κύκλου μιᾶς σφαίρας εἶναι $3\frac{1}{2}$ τ. μ. Πόσα τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας της;

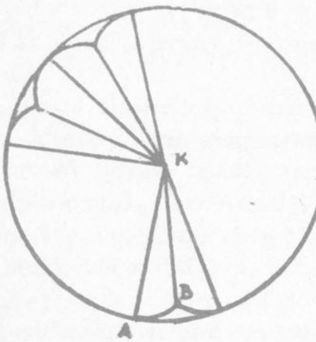
5. Πόσον δέρμα θὰ χρειασθῇ, γιὰ τὸ περικάλυμμα μιᾶς μπάλας, ποὺ ἔχει διάμετρο 0,35 μ.;

6. Μιὰ σφαῖρα ἔχει ἀκτῖνα 0,25 μ. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνειά της;

7. Πόσα τ.μ. ὕφασμα θὰ χρειασθοῦν γιὰ ἕνα σφαιρικὸ ἀερόστατο, ποὺ ἔχει ἀκτῖνα 10 μ.;

25. Εὕρεση τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας

Ἂν στὴν ἐπιφάνεια ἑνὸς σφαιρικοῦ καρπουζιοῦ κάνουμε ἰσόπλευρο τρίγωνο καὶ στὶς πλευρές του βυθίσουμε ἕνα λεπτὸ μαχαιράκι (περίπου ὅπως τὰ βουλώνουν οἱ μανάβηδες) καὶ βγάλουμε ἔξω τὸ κομμένο μέρος, θὰ ἰδοῦμε ὅτι, τὸ κομμάτι ἔχει σχῆμα κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδας, τῆς ὁποίας βάση εἶναι μέρος τῆς ἐπιφανείας τοῦ καρπουζιοῦ, κορυφὴ τὸ κέντρο τοῦ καρπουζιοῦ καὶ ὕψος ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ (σχ. 30). Ἔτσι μποροῦμε νὰ χωρίσουμε τὸ καρποῦζι σὲ ἄπειρες μικρὲς κανονικὲς τριγωνικὲς πυραμίδες, τῶν ὁποίων βάσεις εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ καρπουζιοῦ, ὕψος οἱ ἀκτῖνες του καὶ κοινὴ καρυφή, τὸ κέντρον αὐτοῦ (σχ. 30). Ἑπομένος ὁ ὄγκος τοῦ καρπουζιοῦ αὐτοῦ πρέπει νὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν ὄγκο ὅλων μαζὶ τῶν κανονικῶν τριγωνικῶν πυραμίδων στὶς ὁποῖες ἐχωρίσθη.



Σχ. 30

Ὅπως λοιπὸν εὑρίσκουμε τὸν ὄγκο τῆς κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδας (ἐμβαδὸν βάσεως $\times$ ὕψος), ἔτσι εὑρίσκουμε καὶ τὸν ὄγκο τῆς σφαίρας.

Ἂν π.χ. ὑποθέσουμε, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας εἶναι 2,30 τ.μ. καὶ ἡ ἀκτίς της 0,45 μ., ὁ ὄγκος της θὰ εἶναι $2{,}30 \times 0{,}45 : 3 = 0{,}345$ κ.μ.

Ὥστε : **γιὰ νὰ εὕρουμε τὸν ὄγκο τῆς σφαίρας πολλαπλασιάζουμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα της καὶ τὸ γινόμενο διαιροῦμε διὰ 3.**

Ἀσκήσεις

1. Ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας εἶναι 36 τ. μ. καὶ ἡ ἀκτίς της 5 μ. πόσος εἶναι ὁ ὄγκος;
2. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος σφαίρας, τῆς ὁποίας τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 72 τ.μ. καὶ ἡ διάμετρος 22 μέτρα;
3. Πόση εἶναι ἡ χωρητικότης ὑαλίνης σφαίρας, ἡ ὁποία ἔχει ἀκτῖνα 0,25 μ.;

4. Ἡ περιφέρεια τοῦ μεγίστου κύκλου μιᾶς σφαίρας εἶναι 18,84 μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος της.

5. Πόσα κ. μ. εἶναι ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ ἀεροστάτου, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος εἶναι 20 μ.;

6. Ἕνα τόπι ἔχει διάμετρο 0,20 μ. Πόσος εἶναι ὄγκος του ;

7. Πόσα κ.μ. εἶναι ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ ἀεροστάτου, τοῦ ὁποίου ὁ μέγιστος κύκλος ἔχει διάμετρο 1,40 μ.;

Διάφορα προβλήματα

1. Ἕνα τετράγωνικὸ χωράφι μὲ πλευρὰ 150 μέτρων, ἐπωλήθη ἀντὶ 45.000 δραχμῶν. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδόν του εἰς στρέμματα καὶ ἡ ἀξία του κατὰ τ.μ.

2. Οἰκόπεδο τετραγωνικὸ μὲ περίμετρο 160 μ. ἐπωλήθη ἀντὶ 72.845 δραχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδόν του εἰς τ.τ.π. καὶ ἡ ἀξία τὸυ κατὰ τ.τ.π.

3. Σὲ κυβικὴ δεξαμενὴ μὲ ἀκμὴ 7,30 μ., ἔγινε ἐσωτερικῶς ἐπάλειψις μὲ τσιμέντο. Πόσο θὰ στοιχίσῃ ἡ ἐπάλειψις ἂν ὁ τεχνίτης πληρωθῇ 6,50 δρχ. τὸ τ.μ.;

4. Πόσα κ.μ. νερὸ θὰ χωρέσουν στὴν ἀνωτέρω δεξαμενή ;

5. Ἡ πρόσοψη ἑνὸς οἰκοπέδου, σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, εἶναι $23\frac{1}{2}$ μ. καὶ τὸ βάθος του 36 μ. Πόσα τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδόν του καὶ ποία ἡ ἀξία του ἂν πληρωθῇ πρὸς 207 δραχ. τὸ τ.μ.;

6. Ποία ἡ ἀξία ἑνὸς οἰκοπέδου σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον ἐπωλήθη πρὸς 165 δρχ. τὸν τ.τ.π. καὶ τοῦ ὁποίου ἡ πρόσοψη εἶναι $17\frac{1}{2}$ μ. καὶ τὸ βάθος διπλάσιο ;

7. Πόσο δέρμα θὰ χρειασθῇ γιὰ τὸ κάλυμμα μιᾶς βαλίτσας σχήματος ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος εἶναι 1,20 μ., τὸ πλάτος τὸ ἥμισυ τοῦ μήκους καὶ τὸ ὕψος τὸ ἥμισυ τοῦ πλάτους ;

8. Πόσα κ.μ. νερὸ χωρεῖ ἡ δεξαμενή, τῆς ὁποίας οἱ διαστάσεις εἶναι 10 μ., 6μ. καὶ 12,40 μ, ;

9. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος ἑνὸς τοίχου, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι 45 μ. τὸ πλάτος 0,75 μ. καὶ τὸ ὕψος 8,5 μέτρα ;

10. Ἕνα οἰκόπεδο σχήματος ὀρθογ. παραλληλογράμμου μὲ πρόσοψη 40 μ. καὶ βάθος διπλάσιο, ἐχωρίσθη σὲ δύο μικρότερα ἴσα τριγωνικὰ οἰκόπεδα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδόν, τοῦ ἑνὸς σὲ τ.μ. καὶ τοῦ ἄλλου σὲ τ.τ.π.

11. Πόσες δραχμὲς ἀξίζει ἕνα τριγωνικὸ οἰκόπεδο μὲ βάση 21,5 μ. καὶ ὕψος 27,4 μ., τὸ ὁποῖο ἐπωλήθη πρὸς 27,50 δρχ. τὸ τ.μ.;

12. Πόσα τ.μ. εἶναι ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας ἡ βάση ἔχει περίμετρο 9 μ. καὶ τὸ ὕψος μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας της εἶναι $2\frac{1}{2}$ μ. ;

13. Πόσα τ.μ. τσίγκος θὰ χρειασθοῦν γιὰ τὴν κατασκευὴ τῆς στέγης ἑνὸς κωδωνοστασίου, σχήματος κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος μὲ πλευρὰ βάσεως 4μ. καὶ ὕψος μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας της 6,30 μ. ;

14. Πόσα κ.μ. εἶναι ὁ ὄγκος ἑνὸς σωροῦ ἀπὸ πέτρες σχήματος κανονικῆς τετραγώνικῆς πυραμίδος μὲ περίμετρον βάσεως 36 μ. καὶ ὕψός 4,20 μ.;

15. Οἰκόπεδο σχήματος τραπεζίου, τοῦ ὁποίου οἱ παράλληλες πλευρὲς εἶναι $20\frac{1}{2}$ μ. καὶ 27,5 μ. καὶ ἡ μεταξύ των ἀπόσταση 30 μ., ἐπωλήθη πρὸς 128 δρχ. τὸ τ.μ. Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδόν του καὶ ἡ ἀξία του.

16. Ἕνα ἁλῶνι μὲ διάμετρο 40 μ. ἐπωλήθη ἀντὶ 2.512.000 δραχ. Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδόν του καὶ ἡ ἀξία του κατὰ τ.μ.

17. Ἕνα κτῆμα σχήματος κανονικοῦ ἑξαγώνου ἔχει πλευρὰ 50 μ. καὶ ἀπόστημα 42,50 μ. Πόσα στρέμματα εἶναι καὶ πόση εἶναι ἡ ἀξία του ἂν πληρωθῆ πρὸς 48 δραχ. τὸ τ.μ.;

18. Πόσο θὰ στοιχίση ὁ χρωματισμὸς κυλινδρικῆς, καπνοδόχου, τῆς ὁποίας ἡ περιφέρεια εἶναι 3,5 μ. καὶ τὸ ὕψος $4\frac{1}{2}$ μ. ἂν ὁ τεχνίτης πληρωθῆ 24 δρχ. τὸ τ.μ.;

19. Πόσα τ.μ. τσίγκος θὰ χρειασθοῦν γιὰ νὰ φτιάξουμε κυλινδρικὸ τεπόζιτο νεροῦ, μὲ ἐμβαδὸν βάσεως 2,8 τ.μ. καὶ ὕψος 1,60 μ. καὶ πόσο θὰ στοιχίση ἂν ὁ τσίγκος ἔχη 45 δραχμὲς τὸ τ.μ,, τὰ δὲ ἐργατικὰ εἶναι 175 δραχμές ;

20. Πόσα τ.μ. τενεκὲς θὰ χρειασθοῦν γιὰ νὰ φτιάξουμε 500 κυλινδρικὰ κουτιὰ γάλακτος, μὲ περιφέρεια βάσεως 0,25 καὶ ὕψος 0,10 μ.;

21. Μιὰ μαρμάρινη κυλινδρικὴ κολώνα ἔχει περιφέρεια βάσεως 4,40 μ. καὶ ὕψος διπλάσιο. Πόσα κ.μ. εἶναι ὁ ὄγκος της ;

22. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ βάση ἑνὸς κυλινδρικοῦ τεπόζιτου, τὸ ὁποῖον ἔχει ὕψος 1,5 μ. καὶ χωρεῖ 6 κ.μ. νερό ;

23. Πόσα τ.μ. χοντρὸ ὕφασμα χρειάζονται γιὰ μιὰ κωνικὴ σκηνὴ μὲ πλευρὰ 5 μ. καὶ περιφέρεια βάσεως 12 μέτρα ;

24. Πόσα τ.μ. εἶναι ὁ χῶρος μιᾶς κωνικῆς σκηνῆς ὕψους 5,3 μ., ἡ ὁποία ἔχει ἐμβαδὸν βάσεως 15,7 τ.μ. ;

25. Πόσα τ.μ. τόπο κατέχει μία κωνικὴ σκηνὴ χωρητικότητος 48 κ.μ. καὶ ὕψους $3\frac{1}{2}$ μ.;

26. Πόσο εἶναι τὸ ὕψος κωνικοῦ δοχείου, τοῦ ὁποίου ἡ χωρητικότης εἶναι 0,032 τοῦ κ.μ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του, 0,202 τοῦ τ.μ ;

27. Ἕνα τόπι ἔχει διάμετρο 0,5 μ. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια καὶ πόσος ὁ ὄγκος του ;

28. Ἡ γεωγραφικὴ σφαῖρα τοῦ σχολείου μας, ἔχει ἀκτῖνα 0,20 μ. Νὰ εὑρεθῆ ἡ ἐπιφάνειά της καὶ ὁ ὄγκος της.

29. Ἡ περιφέρεια τοῦ μεγίστου κύκλου τῆς Γῆς εἶναι 40.000 χιλιόμετρα. Πόσα τ. χιλμ. εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῆς Γῆς ;

30. Ἡ αἴθουσα τῆς τάξεώς μας ἔχει μῆκος 8 μ. καὶ πλάτος 6 μ. Ἂν τὸ σχέδιό της γίνῃ ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{100}$, πόσο πρέπει νὰ εἶναι τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν ἐπὶ τοῦ σχεδίου ;

31. Ἡ αὐλὴ τοῦ σχολείου μας ἔχει μῆκος 100 μ. καὶ πλάτος 70 μ. Ὑπὸ ποίαν κλίμακα πρέπει νὰ γίνῃ τὸ σχέδιό της, ἐὰν οἱ πλευρές του ἔχουν μῆκος 0,10 μ. καὶ 0,07 μ. ;

32. Πόσο εἶναι τὸ μῆκος τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τοῦ σχολικοῦ κήπου τας, τοῦ ὁποίου τὸ σχέδιο ἔχει πλευρές 0,015 μ, καὶ 0,025 μ. καὶ ἔγινε ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1000}$;

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α΄.

Σελ.

Κύβος . . . . 3—21

1. Ἐπιφάνεια —2. Ἕδρες, ἀκμὲς καὶ κορυφὲς κύβου.—3. Θέσεις.—4 Σχῆμα τῶν ἑδρῶν καὶ σχέσις μεταξύ των.—5. Πλευρὲς τετραγώνου καὶ σχέση μεταξύ των.—6. Περὶ γραμμῶν —7. Γωνίες τετραγώνου—σχέσις μεταξύ των.—8. Ἀριθμὸς ὀρθῶν γωνιῶν τοῦ κύβου.—9. Δίεδρες καὶ στερεὲς γωνίες. 10. Διαστάσεις κύβου καὶ τετραγ.—11. Βάσεις καὶ παράπλευρες ἕδρες τοῦ κύβου. 12. Εὕρεση μήκους γραμμῆς τετραγώνου 13. Μέτρα μήκους.—14. Μέτρα ἐπιφανείας.— 15. Εὕρεση ἐπιφανείας τετραγώνου-κύβου.—16. Μέτρα ὄγκου.—17. Εὕρεση ὄγκου κύβου. —18. Κατασκευὴ κύβου.—Ἀσκήσεις—Προβλήματα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β΄.

Ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο . . . . 22—34

19. Γνωρίσμαπα ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου—20. Σχῆμα ἑδρῶν ὀρθογ, παραλλ/δου. Σχέσις μεταξύ των.—21. Εὕρεση ἐπιφανείας ὀρθογ. παραλληλογράμμου καὶ ὀρθογ. παραλλ/δου.— 22. Περὶ κλίμακος. Ἀριθμητική. Γραφικὴ κλῖμαξ. Ἀσκήσεις. Προβλήματα.—23. Εὕρεση ὄγκου ὀρθογωνίου παραλλ/δου.— 24 Κατασκευὴ ὀρθογ. παραλλ/δου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ΄.

Πλάγιο παραλληλεπίπεδο . . . . 35—42

25 Γνωρίσματα πλαγίου παραλληλεπιπέδου.— 26. Σχῆμα ἑδρῶν πλαγίου παραλλ/δου. Σχέσις μεταξύ των.— 27. Γωνίες παραλληλεπιπέδου. Σχέσις μεταξύ των. Μοιρογνωμόνιον.— 28. Εὕρεση ἐπιφανείας παραλληλογράμμου καὶ πλαγίου παραλλ/δου. 29. Εὕρεση ὄγκου πλαγίου παραλληλεπιπέδου. Ἀσκήσεις Προβλήματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ΄.

Πρίσματα 43

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε΄.

Τριγωνικὴ πυραμὶς . . . . 44—53

30. Γνωρίσματα τριγωνικῆς πυραμίδος.—31. Εἴδη τριγώνων— 32. Σχέσις τριγώνου—παραλληλογράμμου.—33. Ἐμβαδὸν ἐπι-

φανείας τριγώνου. Ἀσκήσεις—Προβλήματα—34. Εὕρεση ἐπιφανείας τριγων. πυραμίδας.—35, Σχέση πυραμίδας - πρίσματος—36 Εὕρεση ὄγκου πυραμίδας.—37. Εἴδη πυραμίδων.—38. Κατασκευὴ πυραμίδων Ἀσκήσεις Προβλήματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΣΤ΄.

Κόλουρος πυραμὶς . . . . 54—58

39. Γνωρίσματα κολούρου πυραμίδας.—40. Σχῆμα παραπλεύρων ἑδρῶν κολ. πυραμίδας.—41. Πλευρὲς τραπεζίου.—42. Εὕρευη ἐπιφανείας τραπεζίου καὶ κολούρου πυραμίδας.

ΜΕΡΟΣ Β΄.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΤ΄ ΤΑΞΕΩΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α.

Κύλινδρος . . . . 59—75

1.Πῶς γεννᾶται ἕνας κύλινδρος. -2.Γνωρίσματα κυλίνδρου.—3. Κύλινδρος.— Πολύγωνα.— 4. Πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον.—5.Ἐγγραφὴ καν. πολυγώνου εἰς κύκλον.—6. Ἐμβαδὸν κανον. πολυγώνου.—7. Σχέση περιφερείας κύκλου καὶ περιμέτρου κύκλου ἐγγεγραμμένου εἰς κανον. πολύγωνον.—8. Σχέση κυλίνδρου—Πρίσματος.—9. Σχέση περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρο.—10. Εὕρεση ἐπιφανείας κύκλου·—11.Εὕρεση ἐπιφανείας κυλίνδρου.—12. Εὕρεση ὄγκου κυλίνδρου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β΄.

Κῶνος . . . . 76—82

13. Πῶς γεννᾶται ἕνας κῶνος.—14. Γνωρίσματα κώνου. 15—Εὕρεση ἐπιφανείας κώνου —16. Σχέση κώνου καὶ πυραμίδος 17. Εὕρεση ὄγκου κώνου.—18. Κατασκευὴ κώνου.— 19. Κόλουρος κῶνος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ΄

Σφαῖρα . . . . 83—89

20. Πῶς γεννᾶται μία σφαῖρα—21. Γνωρίσματα σφαίρας.—22. Τομὴ σφαίρας. Σχῆμα αὐτῆς.— 23. Μέγιστοι καὶ μικροὶ κύκλοι σφαίρας.—24. Εὕρεση ἐπιφανείας σφαίρας. 25 Εὕρεση ὄγκου σφαίρας.

Διάφορα προβλήματα . . . . 90—92

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΙΑΣ
Δ)ΝΣΙΣ Διδ. βιβλίων

Ἐν Ἀθήναις τῇ 29 - 8 1952

Ἀριθ. Πρωτ. 85435

Γ.Κ.

ΠΡΟΣ

Τὸν κ. Γ. ΚΑΦΕΝΤΖΗΝ

ΕΝΤΑΥΘΑ

Ἀνακοινοῦμεν ὑμῖν ὅτι διὰ τῆς ὑπ' ἀριθ. 85435)29-8-52 ἀποφάσεως τοῦ Ὑπουργείου μετὰ σύμφωνον γνωμοδότησιν τοῦ Κεντρικοῦ Γνωμοδοτικοῦ καὶ Διοικητικοῦ Συμβουλίου τῆς Ἐκπαιδεύσεως, ἐνεκρίθη τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον ΠΡ. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ βιβλίον σας ὡς βοηθητικὸν τοῦ μαθήματος τῆς γεωμετρίας διὰ τοὺς μαθητὰς τῆς Ε' & ΣΤ' Τάξεως τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου ἐπὶ μίαν τριετίαν ἀρχομένη ἀπὸ 1 - 9 - 52.

Παρακαλοῦμεν ὅθεν, ὅπως μεριμνήσητε διὰ τὴν ἔγκαιρον ἐκτύπωσιν τοῦ βιβλίου τούτου συμμορφούμενος πρὸς τὰς ὑποδείξεις τοῦ Ἐκπαιδευτικοῦ Συμβουλίου καὶ τὸν κανονισμὸν ἐκδόσεως βοηθητικῶν βιβλίων τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου.

Ἐ. Ὑ.
Ὁ Διευθυντὴς
Χ. ΜΟΥΣΤΡΗΣ

Κοινοποίησις
Κ.Γ.Δ.Σ.Ε.