ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΣ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΕΝΑΤΗ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΤΥΠΟΙΣ Π. Δ. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ

1920

ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΣ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΕΝΑΤΗ

Τιμᾶται δρχ. 2,30

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΤΥΠΟΙΣ Π. Δ. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
1920

Πᾶν ἀντίτυπον, μὴ φέρον τὴν ὑπογραφήν μου, θεωρεῖται ἐκ τυποκλοπίας προερχόμενον.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἐπιθυμῶν νὰ καταστῇ δυνατὴ ἡ ἐν τοῖς ἡμετέροις γυμνασίοις διδασκαλία τῆς τριγωνομετρίας, ἔγραψα τὸ παρὸν βιβλίον. Ἐφρόντισα δὲ ὅπως ἀποβῇ ἁπλούστερον τῶν ὑπαρχόντων καὶ ἁρμοδιώτερον, παραλείψας ὅσα, μόνον εἰς τὴν ἀνωτέραν μαθηματικὴν χρησιμεύοντα, οὐδαμῶς ἀναγκαιοῦσι πρὸς τὴν ἐπίλυσιν τῶν τριγώνων καὶ πρὸς τὰς ἐφαρμογὰς τῆς τριγωνομετρίας, εἰς τὰς ὁποίας ἀποβλέπει ἡ γυμνασιακὴ ἐκπαίδευσις. Διὰ τοῦτο δὲν ἐθεώρησα τόξα ἀρνητικά, οὐδὲ ὑπερβαίνοντα τὰς 360^0· ἀνέπτυξα δὲ πρῶτον τὴν θεωρίαν τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου· διότι αὐταὶ εἶναι αἱ πρωτεύουσαι τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ καί, ἴσην ἔχουσαι σημασίαν καὶ σπουδαιότητα, ἀποτελοῦσι τὴν βάσιν τῆς τριγωνομετρίας· μετὰ δὲ ταῦτα ὥρισα τὰς ἐφαπτομένας καὶ τὰς συνεφαπτομένας ὡς πηλίκα τῶν δύο πρώτων τριγωνομετρικῶν γραμμῶν· διότι κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον καὶ τὰ σημεῖα αὐτῶν ἁπλούστατα ἐξηγοῦνται καὶ ἡ σπουδὴ αὐτῶν καθίσταται ἁπλουστέρα. Τὰς δὲ τεμνούσας καὶ συνδιατεμνούσας παρέλειψα· διότι αὗται κατήντησαν ἤδη ἄχρηστοι καὶ ἀντικαθίστανται συνήθως ὑπὸ τῶν πηλίκων $\frac{1}{συντ}$ καὶ $\frac{1}{ημτ}$, ἀναγόμεναι οὕτως εἰς τὰς δύο πρωτευούσας γραμμάς.

Ὅσα ἐσημειώθησαν δι᾽ ἀστερίσκων (ὡς ἡ κατασκευὴ τῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων καί τινα ἄλλα), δύνανται νὰ παραλείπωνται, ἐὰν ὁ χρόνος δὲν συγχωρῇ τὴν διδασκαλίαν αὐτῶν·

Ι. Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τὸ τρίγωνον εἶναι τὸ ἁπλούστατον τῶν σχημάτων· αἱ ἰδιότητες πάντων τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων ἀνάγονται εἰς ἰδιότητας τοῦ τριγώνου καὶ διὰ τῆς βοηθείας τοῦ τριγώνου ἀποδεικνύονται· καὶ αὐτοῦ τοῦ κύκλου, καίπερ διαφορωτάτου κατὰ τὸ σχῆμα, αἱ ἰδιότητες διὰ τῶν τριγώνων ἀποδεικνύονται· ἀλλὰ καὶ ἡ μέτρησις πάντων τῶν σχημάτων ἀνάγεται εἰς τὴν μέτρησιν τριγώνων, ὡς ἐν τοῖς στοιχείοις τῆς γεωμετρίας ἐμάθομεν· καὶ ἐν ἑνὶ λόγῳ, τὸ τρίγωνον καὶ ἐν τῇ θεωρητικῇ γεωμετρίᾳ καὶ ἐν ταῖς ποικίλαις ἐφαρμογαῖς αὐτῆς (ὡς ἐν τῇ γεωδαισίᾳ, τῇ ἀστρονομίᾳ, τῇ ναυτικῇ κτλ.) ἔχει τὸ μέγιστον μέρος.

Αἱ πλεῖσται τῶν ἐφαρμογῶν τῆς γεωμετρίας ἄγουσιν εἰς τὴν μέτρησιν ἑνὸς ἢ πολλῶν ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ τριγώνου (λέγω δὲ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου τὰς γωνίας καὶ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ). Ἀλλ' ἐκ τῆς γεωμετρίας εἶναι γνωστόν, ὅτι, ὅταν ἐκ τῶν ἓξ στοιχείων τριγώνου δοθῶσιν

ἢ 1) μία πλευρὰ καὶ δύο γωνίαι,

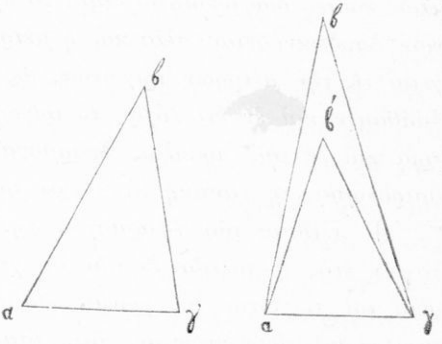
ἢ 2) δύο πλευραὶ καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία,

ἢ 3) δύο πλευραὶ καὶ ἡ ἀπέναντι τῆς μεγαλητέρας γωνία,

ἢ 4) αἱ τρεῖς πλευραί,

καὶ τὰ λοιπὰ τοῦ τριγώνου στοιχεῖα, καίτοι ἄγνωστα, εἶναι ὅμως ἐντελῶς ὡρισμένα καὶ δύνανται νὰ εὑρεθῶσι διὰ γεωμετρικῆς κατασκευῆς. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ τῆς γεωμετρίας χορηγούμεναι κατασκευαί, ἂν καὶ θεωρητικῶς εἶναι ἀκριβεῖς, ἐν τῇ ἐφαρμογῇ ὅμως οὐ μόνον ὑπόκεινται εἰς λάθη, ἕνεκα τῆς ἀτελείας τῶν ὀργάνων ἡμῶν, ἀλλὰ καὶ ἀκατόρθωτοι εἶναι, ὅταν αἱ δεδομέναι γραμμαί, ὡς συμβαίνει συνήθως, ἕνεκα τοῦ μεγέθους αὐτῶν, δὲν δύνανται νὰ περιληφθῶσιν ἐντὸς τοῦ σχεδίου, ἐφ' οὗ ἐργαζόμεθα. Καὶ δυνατὸν μὲν εἶναι τότε νὰ σμικρύνωμεν πάσας τὰς δεδομένας γραμμὰς κατά τινα ἀναλογίαν (π. χ. ἀντὶ 10000 *μέτρων νὰ λάβωμεν 1), ὥστε νὰ δύναται ἡ κατασκευὴ νὰ συμπεριληφθῇ ἐντὸς τοῦ σχεδίου· διότι τότε τὸ ἐν τῷ σχεδίῳ κατασκευασθὲν τρίγωνον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ζητούμενον καὶ ἐκ τῶν γραμμῶν αὐτοῦ, ἐὰν μεγεθυνθῶσι κατὰ τὴν τεθεῖσαν ἀναλογίαν, εὑρίσκονται αἱ γραμμαὶ τοῦ ζητουμένου· ἀλλὰ τότε τὰ λάθη ἀποβαίνουσι μεγάλα· διότι, ἂν εἴς τινα γραμμὴν τοῦ σχεδίου συμβῇ λάθος $\frac{1}{1000}$ τοῦ μέτρου, ἐπειδὴ θὰ πολλαπλασιασθῇ αὕτη ἐπὶ τὸν 10000, ἵνα δώσῃ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν γραμμὴν τοῦ ζητουμένου τριγώνου, θὰ συμβῇ ἐπὶ τῆς ἀληθοῦς γραμμῆς λάθος 10 μέτρων. Ἀλλ᾽ ἔτι περισσότερον βλάπτουσι τὰ ἐπὶ τῶν γωνιῶν συμβαίνοντα λάθη, ὡς γίνεται δῆλον ἐκ τοῦ ἑπομένου παραδείγματος.*

Ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις δύο σημείων Α καὶ Β. Ἐὰν ἐμπόδιόν τι ἐμποδίζῃ τὴν ἄμεσον μέτρησιν, θὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις διὰ τριγώνου· πρὸς τοῦτο, μετρεῖται ἐκ τοῦ σημείου Α μετὰ πάσης δυνατῆς ἀκριβείας, γραμμή τις εὐθεῖα, ἡ ΑΓ, ἥτις λέγεται βάσις. Ὡσαύτως μετροῦνται ὅσον τὸ δυνατὸν ἀκριβῶς αἱ γωνίαι ΓΑΒ καὶ ΑΓΒ· ἔστω π. χ.:



Σχῆμα 1.

$$ΑΓ = 2000 \text{ μέτρα}. \qquad Α = 79^0\ 18' \qquad Γ = 82^0\ 25'\cdot$$

ἔπειτα ὁρίζεται ἡ σμίκρυνσις, ἔστω $\frac{1}{10000}$, καὶ κατασκευάζονται ἐπὶ τοῦ σχεδίου ἡ εὐθεῖα αγ ἴση πρὸς τὰ $\frac{2}{10}$ τοῦ μέτρου καὶ αἱ γωνίαι α καὶ γ ἴσαι πρὸς τὰς μετρηθείσας Α καὶ Γ καὶ γίνεται οὕτω τὸ τρίγωνον αβγ ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ· τέλος μετρεῖται ἡ αβ καὶ ἐξ αὐτῆς, πολλαπλασιαζομένης ἐπὶ 10000, εὑρίσκεται ἡ ζητουμένη ἀπόστασις ΑΒ.

Ἀλλ᾽ ἐκ τοῦ τρόπου τούτου βλέπει τις ἀμέσως, ὅτι λάθος τι (ἔστω καὶ ὀλίγων λεπτῶν) συμβὰν περὶ τὴν χάραξιν τῶν γωνιῶν α καὶ γ, ἢ περὶ τὴν μέτρησιν τῶν Α καὶ Γ, προξενεῖ λάθος ἐπὶ τῆς αβ, τὸ ὁποῖον, ὅταν ἡ γωνία β εἶναι ἱκανῶς μικρὰ (ἤτοι τὸ ἄθροισμα α+γ πλησιάζῃ πρὸς τὰς δύο ὀρθάς), δύναται νὰ ὑπερβῇ καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς· δυνατὸν μάλιστα μηδὲ ὅλως νὰ τέμνωνται ἐντὸς τοῦ σχεδίου αἱ εὐθεῖαι αβ καὶ γβ, ὅταν ἡ γωνία β εἶναι λίαν μικρά.

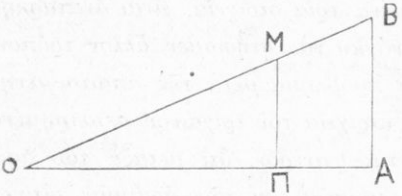
Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν, ὅτι ἡ διὰ γεωμετρικῶν κατασκευῶν εὕρεσις τριγώνου, οὗτινος ἐδόθησαν τὰ εἰρημένα τρία στοιχεῖα, εἶναι ἀνεπαρκὴς ἐν τῇ πράξει· καὶ ἑπομένως εἶναι ἀνάγκη νὰ ζητήσωμεν ἄλλον τρόπον, διὰ τοῦ ὁποίου νὰ λύεται τὸ ρηθὲν πρόβλημα μετὰ τῆς ἀπαιτουμένης ἀκριβείας. Ἐὰν νοήσωμεν πάντα τὰ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου μεμετρημένα καὶ ἐκπεφρασμένα δι᾽ ἀριθμῶν, γίνεται φανερόν, ὅτι μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες μετροῦσι τὰ δεδομένα στοιχεῖα, καὶ τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες μετροῦσι τὰ ζητούμενα, ἐξ ἀνάγκης ὑπάρχουσι σχέσεις τινὲς ἀριθμητικαί· διότι οἱ δεύτεροι οὗτοι ἀριθμοὶ εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένοι, ὅταν δοθῶσιν οἱ πρῶτοι. Ἐκ τῶν ἀριθμητικῶν τούτων σχέσεων, ὅταν εὑρεθῶσι, θὰ καταστῇ δυνατὸν νὰ εὑρίσκωμεν τὰ ζητούμενα τοῦ τριγώνου στοιχεῖα διὰ τῶν ἀριθμητικῶν μεθόδων, αἵτινες ὑπερέχουσι τῶν γεωμετρικῶν κατὰ τοῦτο, ὅτι, οὖσαι αὐτοτελῆ τῆς διανοίας ἔργα, οὐδαμῶς παραβλάπτονται ἐκ τῆς ἀτελείας τῶν ὀργάνων ἡμῶν, ὥστε, ὅταν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι ἀκριβεῖς, δύνανται οἱ ἐξ αὐτῶν εὑρισκόμενοι διὰ τῶν ἀριθμητικῶν μεθόδων, νὰ προσδιορισθῶσι μεθ᾽ ὅσης θέλωμεν προσεγγίσεως.

Ἡ ἔρευνα τῶν ἀριθμητικῶν σχέσεων, αἵτινες ὑπάρχουσι μεταξὺ τῶν στοιχείων παντὸς τριγώνου, εἶναι ἔργον τῆς τριγωνομετρίας· σκοπὸς δὲ αὐτῆς εἶναι, ὅταν δοθῶσι τρία ἐκ τῶν στοιχείων τούτων (οὐχὶ αἱ τρεῖς γωνίαι), ἡ διὰ τῶν ἀριθμῶν εὕρεσις τῶν λοιπῶν.

Τὸ ἔργον τῆς τριγωνομετρίας καθιστᾷ ἁπλούστερον ἡ ἀνάλυσις παντὸς τριγώνου εἰς δύο ὀρθογώνια τρίγωνα· ἐὰν τῷ ὄντι, ἀπὸ τῆς μεγαλητέρας τῶν γωνιῶν καταβιβασθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ἀπέναντι πλευράν, διαιρεῖ τὸ τρίγωνον εἰς δύο ὀρθογώνια τρίγωνα. Ὥστε ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἀριθμητικαὶ σχέσεις τῶν στοιχείων τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου· διότι εἰς τοῦτο ἀνάγονται καὶ τὰ ἄλλα.

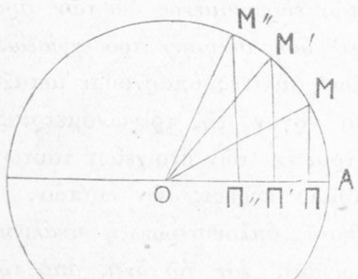
Ἀλλὰ καὶ ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ἀρκεῖ νὰ θεωρηθῶσι μόνον ἐκεῖνα, ὧν ἡ ὑποτείνουσα εἶναι ἴση τῇ μονάδι τοῦ μήκους καὶ παρίσταται ἑπομένως διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 1· διότι, πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὡς τὸ OAB, εἶναι ὅμοιον πρὸς ἓν τοιοῦτον· ἐὰν τῷ ὄντι ληφθῇ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης τὸ τμῆμα OM ἴσον τῇ μονάδι τοῦ μήκους καὶ ἐκ τοῦ M ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν OA ἡ $M\Pi$, γίνεται ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὸ $OM\Pi$, ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν καὶ ἔχον ὑποτείνουσαν ἴσην τῇ μονάδι.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τῶν ὁποίων ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 1, ὑπολείπονται τέσσαρα στοιχεῖα ἄγνωστα, αἱ δύο ὀξεῖαι γωνίαι καὶ αἱ δύο κάθετοι πλευραί· ἀλλὰ καὶ μεταξὺ τῶν γωνιῶν τούτων ὑπάρχει ἡ σχέσις $M + O =$ μιᾷ ὀρθῇ $= 90^0$· ὥστε ἔχομεν τρία μόνον ἄγνωστα, τὴν γωνίαν O καὶ τὰς δύο πλευρὰς $OΠ$ καὶ $MΠ$. Ὅτι δὲ πρὸς ἑκάστην τιμὴν τῆς γωνίας O ἀντιστοιχοῦσιν ὡρισμέναι τιμαὶ τῶν πλευρῶν $OΠ$ καὶ $ΠM$, εἶναι φανερόν· ἂν λοιπὸν εἴχομεν πίνακα περιέχοντα τὰς τιμὰς τῆς γωνίας O καὶ ἀπέναντι ἑκάστης ἐξ αὐτῶν τὰς ἀντιστοιχούσας τιμὰς τῶν δύο καθέτων πλευρῶν, διὰ τοῦ τοιούτου πίνακος θὰ ἠδυνάμεθα νὰ λύσωμεν ἀριθμητικῶς πάντα τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος προβλήματα τοῦ τριγώνου.



Σχῆμα 2.

Ἐὰν ἡ γωνία O τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $OΠM$ λαμβάνῃ διαφόρους τιμάς, μενούσης ἀκινήτου τῆς πλευρᾶς αὐτῆς OA καὶ διατηρούσης τῆς ὑποτεινούσης OM τὸ ἑαυτῆς μῆκος 1, ἡ κορυφὴ M κινεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, ὅστις ἔχει κέντρον τὸ σημεῖον O καὶ ἀκτῖνα τὴν μονάδα 1, αἱ δὲ τιμαὶ τῆς γωνίας O, ὡς AOM, AOM', AOM''..., θὰ μετρῶνται ὑπὸ τῶν κυκλικῶν τόξων AM, AM' AM''..., ἅτινα ἄρχονται ἐκ τοῦ σημείου A· ἀπὸ τῶν τόξων δὲ τούτων θὰ ἐξαρτῶνται αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ τοῦ τριγώνου, περὶ ὧν γίνεται ὁ λόγος· ἀλλὰ τότε ἡ μὲν μία ἐμφανίζεται ὡς κάθετος, καταβιβαζομένη ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου τοῦ τόξου (ὅπερ μετρεῖ τὴν γωνίαν O) ἐπὶ τὴν διὰ τοῦ ἑτέρου διερχομένην διάμετρον, ἡ δὲ ἄλλη ὡς ἀπόστασις τῆς πλευρᾶς ταύτης ἀπὸ τοῦ κέντρου. Αἱ δύο αὗται γραμμαὶ ἐκφραζόμεναι δι' ἀριθμῶν, ἀποτελοῦσι τὴν βάσιν τῆς τριγωνομετρίας καὶ περὶ τούτων θὰ διαλάβωμεν ἐν τοῖς ἑπομένοις.



Σχῆμα 3.

ΤΡΙ … ΡΙΑΣ

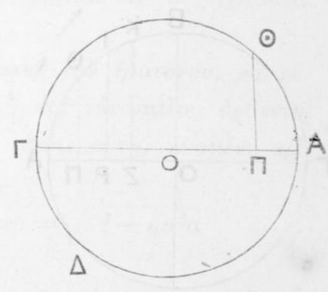
ΤΡΙΓ … ΡΙΘΜΟΙ

Β …

1. *Πᾶσα περιφέρεια … εἶναι διῃρημένη εἰς 360 ἴσα μέρη, ὧν ἕκαστον λέγεται μοῖρα· ἑκάστη δὲ μοῖρα εἰς 60 ἴσα μέρη, ἅτινα λέγονται πρῶτα λεπτά· καὶ ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 δεύτερα.*

2. *Ἐν κύκλῳ ἔχοντι ἀκτῖνα τὴν μονάδα τοῦ μήκους καλεῖται ἡμίτονον τοῦ τυχόντος τόξου ἡ εὐθεῖα, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ ἑνὸς πέρατος τοῦ τόξου κάθετος ἐπὶ τὴν διὰ τοῦ ἑτέρου πέρατος διερχομένην διάμετρον.*

Συνημίτονον δὲ τόξου λέγεται ἡ ἀπόστασις τοῦ ἡμιτόνου αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.



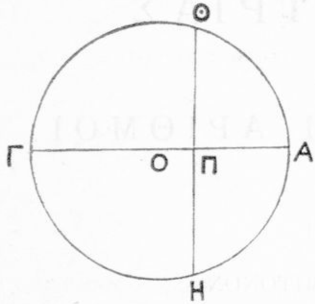
Σχῆμα 4.

Κατὰ ταῦτα, ἐν τῷ κύκλῳ ΑΘΓΔ (σχ. 4), (οὗτινος ἡ ἀκτὶς ΟΑ ὑποτίθεται 1) τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου ΑΘ εἶναι ἡ εὐθεῖα ΘΠ, ἥτις ἐκ τοῦ πέρατος Θ τοῦ τόξου ἤχθη κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΓ, τὴν διὰ τοῦ ἑτέρου πέρατος Α διερχομένην· τὸ δὲ συνημίτονον τοῦ αὐτοῦ τόξου εἶναι ἡ ΟΠ· τουτέστιν ἡ ἀπόστασις τοῦ ἡμιτόνου ΘΠ ἀπὸ τοῦ κέντρου.

3. *Ἐὰν τὸ τόξον ΑΘ δὲν ὑπερβαίνῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν (ἤτοι τὰς 180°) καὶ ἐκβληθῇ τὸ ἡμίτονον αὐτοῦ ΘΠ πέραν τῆς διαμέτρου, ἐφ' ἣν*

εἶναι κάθετον, μέχρι τῆς περιφερείας, γίνεται ΠΗ = ΘΠ καὶ τόξον ΑΗ = τόξ. ΑΘ· ὅθεν συνάγεται, ὅτι δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὸ ἡμίτονον καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἡμίτονον παντὸς τόξου εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς χορδῆς τοῦ διπλασίου τόξου· συνημίτονον δὲ ἡ ἀπόστασις τῆς αὐτῆς χορδῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου.

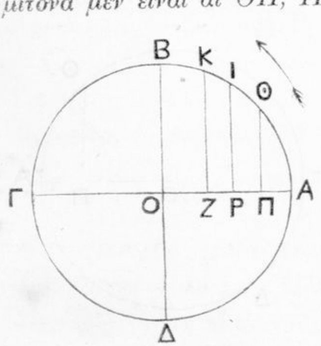


Σχῆμα 5.

Τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου α παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου ημα, τὸ δὲ συνημίτονον διὰ τοῦ συνα· ὑποτίθενται δὲ ἀμφότερα μεμετρημένα διὰ τῆς μονάδος ΟΑ καὶ ἐκπεφρασμένα δι' ἀριθμῶν.

4. Ὅταν συγκρίνωμεν τὰ ἡμίτονα καὶ τὰ συνημίτονα πολλῶν τόξων πρὸς ἄλληλα, ἵνα κατασταθῇ ἡ σύγκρισις αὐτῶν εὐκολωτέρα, λαμβάνομεν πάντα τὰ τόξα οὕτως, ὥστε νὰ ἄρχωνται ἐξ ἑνὸς σημείου τῆς περιφερείας, ὅπερ διὰ τοῦτο λέγεται ἀρχὴ τῶν τόξων· *τότε τὰ μὲν ἡμίτονα γίνονται κάθετα ἐπὶ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον (τὴν διὰ τῆς κοινῆς ἀρχῆς τῶν τόξων διερχομένην), τὰ δὲ συνημίτονα κεῖνται πάντα ἐπὶ τῆς διαμέτρου ταύτης.*

Τοῦτο φαίνεται ἐκ τοῦ σχήματος 6· διότι τῶν τόξων ΑΘ, ΑΙ, ΑΚ, ἡμίτονα μὲν εἶναι αἱ ΘΠ, ΙΡ, ΚΖ, κάθετοι ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΓ· συνημίτονα δὲ αἱ εὐθεῖαι ΟΠ, ΟΡ, ΟΖ, αἵτινες κεῖνται πᾶσαι ἐπὶ τῆς ΑΓ.



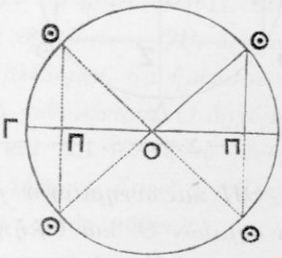
Σχῆμα 6.

5. Ἐὰν κινητὸν ἀναχωρήσῃ ἐκ τοῦ Α, δύναται νὰ διατρέξῃ τὴν περιφέρειαν κατὰ δύο ἀντιθέτους φοράς· ἤτοι τὴν ΑΘΙΚΒΓΔΑ καὶ τὴν ΑΔΓΒΚΙΘΑ· ἡ πρώτη, ἣν δεικνύει τὸ παρακείμενον βέλος, ἂς λέγεται θετικὴ φορά, ἡ δὲ δευτέρα ἀρνητική. Πάντα τὰ τόξα νοοῦνται ἐνταῦθα ὡς ἀρχόμενα ἐκ τοῦ Α καὶ ἔχοντα θετικὴν φοράν. Διὰ τῆς συνθήκης ταύτης ὁρίζεται ἐντελῶς τὸ τόξον, ὅταν δοθῇ τὸ πέρας αὐτοῦ. Οὕτω π. χ. τὸ τόξον, οὗτινος πέρας εἶναι τὸ Κ, εἶναι τὸ ΑΘΙΚ, τὸ περατούμενον εἰς τὸ Γ εἶναι τὸ ΑΘΙΚΒΓ καὶ τὸ περατούμενον εἰς τὸ Δ εἶναι τὸ ΑΘΙΚΒΓΔ (καὶ ὄχι τὸ ΑΔ).

Ἐὰν τὸ πέρας τόξου, ἔστω τοῦ ΑΘ, ὀπισθοχωροῦν πέσῃ ἐπὶ τὴν ἀρχὴν Α, τὸ τόξον καταντᾷ 0· ἐὰν δὲ τοὐναντίον προχωροῦν γράψῃ ὅλην τὴν περιφέρειαν καὶ ἐπιστρέψῃ εἰς τὸ Α, τὸ τόξον καταντᾷ 360°· ὥστε πᾶν τόξον περιλαμβάνεται μεταξὺ 0^0 καὶ 360^0.

Σχέσεις μεταξὺ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου παντὸς τόξου.

6. Ἔστω τυχὸν τόξον τὸ ΑΘ (σχ. 7), ὅπερ παριστῶμεν διὰ τοῦ γράμματος α· ἐὰν εἰς τὸ πέρας αὐτοῦ Θ φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ΟΘ, βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον αὐτοῦ εἶναι αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΘΠ, οὗτινος ἡ ὑποτείνουσα ὑπετέθη ἴση τῇ μονάδι· ἐκ τούτου ἕπεται κατὰ τὸ πυθαγόρειον θεώρημα



Σχῆμα 7.

$$(1) \qquad (\eta\mu\alpha)^2+(\sigma\upsilon\nu\alpha)^2=1\cdot$$

τουτέστι, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου παντὸς τόξου ἰσοῦται τῇ μονάδι 1.

Ἡ ἐξίσωσις (1), ἡ τὸ ἡμίτονον πρὸς τὸ συνημίτονον τοῦ τυχόντος τόξου συνδέουσα, δεικνύει, ὅτι, ὅταν τὸ ἡμίτονον αὐξηθῇ, τὸ συνημίτονον ἐλαττοῦται καὶ ἀντιστρόφως. *Τοῦτο δὲ καὶ ἐκ τοῦ σχήματος συνάγεται ἀμέσως.*

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) δυνάμεθα, δοθέντος τοῦ ἡμιτόνου, νὰ εὕρωμεν τὸ συνημίτονον (τοῦ αὐτοῦ τόξου)· ἢ καὶ τἀνάπαλιν, δοθέντος τοῦ συνημιτόνου, νὰ εὕρωμεν τὸ ἡμίτονον· διότι αὕτη, λυομένη μὲν πρὸς τὸ συνημίτονον, γίνεται

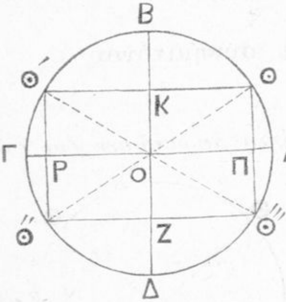
$$(2) \qquad \sigma\upsilon\nu^2\alpha=1-\eta\mu^2\alpha \quad \text{καὶ} \quad \sigma\upsilon\nu\alpha=\sqrt{1-\eta\mu^2\alpha}\cdot$$

λυομένη δὲ πρὸς τὸ ἡμίτονον γίνεται

$$(3) \qquad \eta\mu^2\alpha=1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha \quad \text{καὶ} \quad \eta\mu\alpha=\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha}.$$

Διάκρισις τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων εἰς θετικὰ καὶ εἰς ἀρνητικά.

7. Ἔστω τυχὸν τόξον μικρότερον τοῦ τεταρτημορίου ΑΒ, τὸ ΑΘ· ἐὰν ἐκ τοῦ πέρατος αὐτοῦ ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΘΘ΄΄ καὶ ἡ Θ΄ Θ΄΄΄ οὕτως *ὥστε νὰ σχηματίζῃ τὴν γωνίαν $ΓΟΘ'$, ἴσην τῇ γωνίᾳ $ΑΟΘ$, καὶ ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι $ΘΘ'$, $Θ'Θ''$, $Θ''Θ'''$, $Θ'''Θ$, γίνεται ὀρθογώνιον τὸ σχῆμα $ΘΘ'Θ''Θ'''$· διότι αἱ γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ὀρθαί, ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς ἡμικύκλια. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τούτου γίνεται νῦν φανερόν, ὅτι τὰ 4 τόξα, τὰ εἰς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ καταλήγοντα, ἔχουσι καὶ ἡμίτονα ἴσα (διότι εἶναι $ΘΠ = Θ'Ρ = Θ''Ρ = Θ'''Π$) καὶ συνημίτονα ἴσα (διότι εἶναι $ΟΠ = ΟΡ$). Ἀλλὰ πᾶν ἄλλο τόξον ἔχει ἡμίτονον διαφέρον τοῦ $ΘΠ$ καὶ συνημίτονον διαφέρον τοῦ $ΟΠ$· διότι, ἂν μὲν καταλήγῃ μεταξὺ τῶν σημείων $Θ$ καὶ $Θ'$, ἢ μεταξὺ τῶν $Θ''$ καὶ $Θ'''$, ἔχει ἡμίτονον μεγαλήτερον*



Σχῆμα 8.

τοῦ $ΘΠ$ καὶ συνημίτονον μικρότερον τοῦ $ΟΠ$, ἂν δὲ καταλήγῃ μεταξὺ τῶν σημείων $Θ'''$ καὶ $Θ$, ἢ μεταξὺ τῶν $Θ''$ καὶ $Θ'$, ἔχει ἡμίτονον μικρότερον τοῦ $ΘΠ$ καὶ συνημίτονον μεγαλήτερον τοῦ $ΟΠ$. Διὰ νὰ διακρίνωνται καὶ τὰ τέσσαρα ταῦτα τόξα ἀπ᾽ ἀλλήλων ἐκ τῶν ἡμιτόνων καὶ ἐκ τῶν συνημιτόνων αὐτῶν, συνεφωνήθη νὰ διακριθῶσι τὰ ἡμίτονα καὶ τὰ συνημίτονα εἰς θετικὰ καὶ εἰς ἀρνητικά· *καὶ ἑπομένως νὰ παριστῶνται τὰ μὲν θετικὰ ὑπὸ θετικῶν ἀριθμῶν, τὰ δὲ ἀρνητικὰ ὑπὸ ἀρνητικῶν. Θεωροῦνται δὲ θετικὰ μὲν ἡμίτονα, ὅσα εὑρίσκονται ἄνω τῆς διαμέτρου $ΑΓ$, ἀρνητικὰ δέ, ὅσα ὑποκάτω αὐτῆς. Ὡσαύτως θετικὰ μὲν συνημίτονα, ὅσα κεῖνται ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος $ΟΑ$, ἀρνητικὰ δέ, ὅσα ἐπὶ τῆς ἀντιθέτου $ΟΓ$.*

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον καὶ τῶν τεσσάρων τόξων $ΑΘ$, $ΑΘ'$, $ΑΘ''$, $ΑΘ'''$, τὰ ἡμίτονα καὶ τὰ συνημίτονα διαφέρουσι· διότι

τοῦ μὲν $ΑΘ$ εἶναι ἡμίτονον $= + ΘΠ$, συνημίτονον $= + ΟΠ$
τοῦ δὲ $ΑΘ'$ » ἡμίτονον $= + ΘΠ$, συνημίτονον $= - ΟΠ$
τοῦ δὲ $ΑΘ''$ » ἡμίτονον $= - ΘΠ$, συνημίτονον $= - ΟΠ$
τοῦ δὲ $ΑΘ'''$ » ἡμίτονον $= - ΘΠ$, συνημίτονον $= + ΟΠ$

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι τόξου περατουμένου ἐν τῷ πρώτῳ τεταρτημορίῳ ἀμφότερα, καὶ τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον εἶναι θετικά· ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ, εἶναι θετικὸν μὲν τὸ ἡμίτονον, ἀρνητικὸν δὲ τὸ συνημίτονον· ἐν τῷ τρίτῳ, ἀμφότερα εἶναι ἀρνητικὰ καὶ ἐν τῷ τετάρτῳ *(τοὐναντίον ἢ ἐν τῷ δευτέρῳ)*, τὸ μὲν ἡμίτονον εἶναι ἀρνητικόν, τὸ δὲ συνημίτονον θετικόν.

Σημ. Ἐκ τῆς διακρίσεως ταύτης τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων εἰς θετικὰ καὶ εἰς ἀρνητικά, ἡ μεταξὺ αὐτῶν σχέσις, ἡ διὰ τῆς ἐξισώσεως (1) ἐκφραζομένη, οὐδαμῶς ἀλλοιοῦται· διότι περιέχει μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν, ἅτινα εἶναι θετικὰ πάντοτε καὶ οὐδόλως βλάπτονται, εἴτε θετικῶς ληφθῇ εἴτε ἀρνητικῶς ἕκαστον.

Παρατήρησις. Καὶ τὰ ἡμίτονα δύνανται νὰ ἀναχθῶσι πάντα ἐπὶ μιᾶς διαμέτρου· διότι ἂν ἐκ τοῦ πέρατος τοῦ τόξου $ΑΘ$ ἀχθῇ παράλληλος τῇ διαμέτρῳ $ΑΓ$, ἡ $ΘΚ$, αὕτη τέμνει ἐπὶ τῆς καθέτου διαμέτρου $ΔΟΒ$ τμῆμά τι $ΟΚ$, ὅπερ εἶναι ἴσον καὶ παράλληλον τῷ ἡμιτόνῳ $ΘΠ$. Ὥστε, θετικὰ μὲν εἶναι τὰ ἡμίτονα, ὅσα κεῖνται ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος $ΟΒ$, ἀρνητικὰ δέ, ὅσα ἐπὶ τῆς ἀντιθέτου $ΟΔ$. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τόξου οἱουδήποτε, εἶναι τὰ ἀπὸ τοῦ κέντρου $Ο$ ἀρχόμενα τμήματα τῶν δύο καθέτων διαμέτρων $ΑΓ$ καὶ $ΒΔ$ (ὧν ἡ τὸ συνημίτονον ἔχουσα διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν τόξων), ἅτινα χωρίζουσιν αἱ ἀπὸ τοῦ πέρατος τοῦ τόξου ἀγόμεναι ἐπ' αὐτὰς κάθετοι.

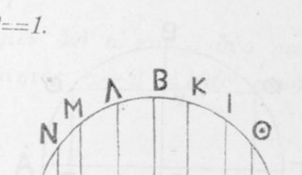
Περὶ τῆς μεταβολῆς τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου, ὅταν τὸ τόξον αὐξάνῃ ἀπὸ 0^0 μέχρι 360^0.

8. Ἔστω τυχὸν τόξον μικρότερον τῶν 90^0, τὸ $ΑΘ$. Ἐὰν τὸ τόξον τοῦτο ἐλαττούμενον καταντήσῃ 0, τὸ πέρας αὐτοῦ $Θ$ ὀπισθοχωροῦν θὰ πέσῃ εἰς τὸ $Α$, καὶ τὸ μὲν ἡμίτονον αὐτοῦ ἐλαττούμενον θὰ μηδενισθῇ, τὸ δὲ συνημίτονον αὐτοῦ αὐξανόμενον θὰ καταντήσῃ ἴσον τῇ ἀκτῖνι 1· ὅθεν συνάγεται ὅτι εἶναι

$$ημ0^0 = 0, \qquad συν0^0 = 1.$$

Ἐὰν τὸ τόξον αὐξάνῃ ἀπὸ τοῦ 0^0 μέχρι τῶν 90^0 (ἤτοι ἐν τῷ πρώτῳ τεταρτημορίῳ), τὸ μὲν ἡμίτονον αὐτοῦ προδήλως αὐξάνεται ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ 1, τὸ δὲ συνημίτονον αὐτοῦ ἐλαττοῦται ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 0· ὥστε εἶναι

$$ημ90^0 = 1, \qquad συν90^0 = 0.$$



Σχῆμα 9.

Αὐξανομένου τοῦ τόξου ἀπὸ τῶν 90^0 μέχρι τῶν 180^0, τὸ μὲν ἡμίτονον ἐλαττοῦται ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 0, τὸ δὲ συνημίτονον αὐξάνεται μὲν κατὰ τὸ μέγεθος, γίνεται ὅμως ἀρνητικὸν καὶ διατρέχει *τὰς τιμὰς ἀπὸ 0 μέχρι —1. Διὰ τὸ τόξον ΑΓ τῶν* 180^0 *ἔχομεν*

$$\eta\mu\ 180^0 = 0, \qquad \sigma\upsilon\nu\ 180^0 = -1.$$

Αὐξανομένου δὲ τοῦ τόξου ἀπὸ τῶν 180^0 *μέχρι τῶν* 270^0, *τὸ πέρας αὐτοῦ διατρέχει τὸ τρίτον τεταρτημόριον ΓΔ καὶ τὸ μὲν ἡμίτονον αὐτοῦ αὐξάνει, ἀρνητικὸν ὄν, καὶ διατρέχει τὰς τιμὰς* $0 \ldots -1$, *τὸ δὲ συνημίτονον ἐλαττοῦται, ἀρνητικὸν ὡσαύτως διαμένον, καὶ διατρέχει τὰς τιμὰς ἀπὸ — 1 μέχρι τοῦ 0· ὥστε εἶναι*

$$\eta\mu\ 270^0 = -1 \qquad \sigma\upsilon\nu\ 270^0 = 0.$$

Ἐὰν τέλος τὸ τόξον αὐξάνῃ ἀπὸ 270^0 *μέχρι τῶν* 360^0, *τὸ πέρας αὐτοῦ διατρέχει τὸ τέταρτον τεταρτημόριον ΔΑ· καὶ τὸ μὲν ἡμίτονον αὐτοῦ ἐλαττοῦται, ἀρνητικὸν διαμένον, καὶ διατρέχει τὰς τιμὰς* $-1 \ldots 0$· *τὸ δὲ συνημίτονον, θετικὸν γινόμενον, αὐξάνεται ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ 1· ὥστε*

$$\eta\mu\ 360^0 = 0 = \eta\mu\ 0^0$$
$$\sigma\upsilon\nu\ 360^0 = 1 = \sigma\upsilon\nu\ 0^0.$$

Ἐκ τῶν εἰρημένων συνάγεται, ὅτι τὸ ἡμίτονον λαμβάνει πάσας τὰς μὴ ὑπερβαινούσας τὴν μονάδα τιμὰς καὶ θετικῶς καὶ ἀρνητικῶς· ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ συνημίτονον.

Ἁπλαῖ σχέσεις μεταξὺ δύο τόξων καὶ ἀντιστοιχοῦσαι σχέσεις μεταξὺ τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων αὐτῶν.

1) Τόξα συμπληρωματικά.

Σχῆμα 10.

9. Δύο τόξα λέγονται συμπληρωματικά, ὅταν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι ἴσον τῷ τεταρτημορίῳ· τοιαῦτα εἶναι τὰ τόξα ΑΘ καὶ ΘΒ (σχ. 10).

Δύο συμπληρωματικὰ τόξα ἔχουσι τὰ αὐτὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα ἀλλ᾽ ἀντιστρόφως, ἤτοι τὸ ἡμίτονον τοῦ ἑνὸς εἶναι συνημίτονον τοῦ ἄλλου.

Τοῦτο φαίνεται ἀμέσως ἐκ τοῦ σχήματος· διότι ἐξ αὐτοῦ βλέπομεν, ὅτι εἶναι

$$\eta\mu\ A\Theta = \Theta\Pi = OK \qquad \eta\mu\ \Theta B = \Theta K = O\Pi$$
$$\sigma\upsilon\nu\ A\Theta = O\Pi \qquad \sigma\upsilon\nu\ \Theta B = OK\cdot$$

ὥστε
$$\eta\mu\ A\Theta = \sigma\upsilon\nu\ \Theta B$$
καὶ
$$\sigma\upsilon\nu\ A\Theta = \eta\mu\ \Theta B.$$

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τῶν γραμμάτων α καὶ β δύο τόξα συμπληρωματικά, τουτέστι συνδεόμενα διὰ τῆς ἰσότητος
$$\alpha+\beta=90^0,$$
θὰ ἔχωμεν κατὰ ταῦτα
$$\eta\mu\alpha = \sigma\upsilon\nu\beta$$
$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \eta\mu\beta\cdot$$
καὶ ἐπειδὴ τὸ ἕτερον τῶν τόξων, ἔστω τὸ β, ἰσοῦται τῇ ὑπεροχῇ τῶν 90^0 ὑπὲρ τὸ ἄλλο, ἤτοι $\beta = 90^0 - \alpha$, αἱ ἰσότητες αὗται γράφονται καὶ ὡς ἕπεται
$$\eta\mu\,(90^0-\alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha$$
$$\sigma\upsilon\nu\,(90^0-\alpha) = \eta\mu\alpha \qquad (1)$$

2) Τόξα παραπληρωματικά.

10. Δύο τόξα λέγονται παραπληρωματικά, ὅταν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι ἴσον τῇ ἡμιπεριφερείᾳ· τοιαῦτα εἶναι τὰ τόξα $A\Theta$ καὶ $\Theta\Gamma$ ἢ $A\Theta'$ (σχ. 10).

Δύο τόξα παραπληρωματικὰ ἔχουσιν ἡμίτονα μὲν ἴσα, συνημίτονα δὲ ἀντίθετα.

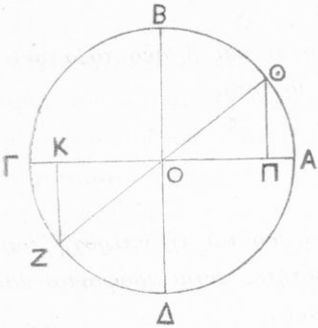
Καὶ ὄντως ἐκ τοῦ σχήματος βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι εἶναι
$$\eta\mu\ A\Theta = \Theta\Pi = OK \qquad \eta\mu\ \Theta\Gamma = \eta\mu\ A\Theta' = OK$$
$$\sigma\upsilon\nu\ A\Theta = O\Pi \qquad \sigma\upsilon\nu\ \Theta\Gamma = \sigma\upsilon\nu\ A\Theta' = -O\Pi\cdot$$
ὅθεν ἕπεται
$$\eta\mu\ A\Theta = \eta\mu\ \Theta\Gamma$$
$$\sigma\upsilon\nu\ A\Theta = -\sigma\upsilon\nu\ \Theta\Gamma.$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι, ἂν παραστήσωμεν διὰ α καὶ β δύο παραπληρωματικὰ τόξα, τουτέστι διὰ τῆς ἰσότητος $\alpha+\beta=180^0$ συνδεόμενα, θὰ εἶναι
$$\eta\mu\alpha = \eta\mu\beta$$
$$\sigma\upsilon\nu\alpha = -\sigma\upsilon\nu\beta\cdot$$
καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\beta = 180^0 - \alpha$, αἱ αὐταὶ ἰσότητες γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς
$$\eta\mu\,(180^0-\alpha) = \eta\mu\alpha$$
$$\sigma\upsilon\nu\,(180^0-\alpha) = -\sigma\upsilon\nu\alpha \qquad (2)$$

3) Τόξα διαφέροντα ἀπ᾿ ἀλλήλων κατὰ ἡμιπεριφέρειαν.

11. Ἐὰν δύο τόξα διαφέρωσι κατὰ 180^0, τὸ μεγαλήτερον ὑπερβαίνει τὰς 180^0· ἔστω τοιοῦτον τὸ ΑΒΓΖ (σχ. 11)· ἐὰν ἐκ τοῦ πέ-

ρατος αὐτοῦ Ζ ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΖΟΘ, προσδιορίζεται τὸ τόξον ΑΘ, ὅπερ διαφέρει τοῦ ΑΒΓΖ κατὰ 180^0. Ἐκ δὲ τοῦ σχήματος φαίνεται ἀμέσως, ὅτι τὰ δύο τόξα ΑΘ καὶ ΑΒΓΖ ἔχουσι καὶ ἡμίτονα ἀντίθετα καὶ συνημίτονα ἀντίθετα· (διότι τὰ τρίγωνα ΟΘΠ καὶ ΟΚΖ εἶναι ἴσα, τὰ δὲ πέρατα τῶν τόξων εὑρίσκονται ἐν ἀντιθέτοις τεταρτημορίοις)· ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ α τὸ μικρότερον τόξον ἤτοι τὸ ΑΘ, θὰ εἶναι



Σχῆμα 11.

$$\begin{aligned} \eta\mu\,(180^0+\alpha) &= -\,\eta\mu\alpha \\ \sigma\upsilon\nu\,(180^0+\alpha) &= -\,\sigma\upsilon\nu\alpha \end{aligned} \qquad (3)$$

4) Τόξα ἀποτελοῦντα μίαν ὁλόκληρον περιφέρειαν.

12. Ἔστωσαν δύο ἄνισα τόξα, α καὶ β, ἀποτελοῦντα ὁλόκληρον περιφέρειαν· ἐπειδὴ τὸ μεγαλήτερον ἐξ αὐτῶν θὰ ὑπερβαίνῃ τὰς 180^0, ἔστω δὲ τοῦτο τὸ β, δύναται νὰ τεθῇ $\beta=180^0+\gamma$, καὶ ἑπομένως, κατὰ τὰ προηγουμένως ἀποδειχθέντα:

$$\begin{aligned} \eta\mu\beta &= -\,\eta\mu\gamma \\ \sigma\upsilon\nu\beta &= -\,\sigma\upsilon\nu\gamma\cdot \end{aligned}$$

ἐπειδὴ δὲ ὑπετέθη $\alpha+\beta=360^0$, ἔπεται $\alpha+180^0+\gamma=360^0$, ἤτοι $\alpha+\gamma=180^0$· τουτέστι τὰ τόξα α καὶ γ εἶναι παραπληρωματικά· ὥστε εἶναι

$$\begin{aligned} \eta\mu\gamma &= \eta\mu\alpha \\ \sigma\upsilon\nu\gamma &= -\,\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot \end{aligned}$$

παραβάλλοντες δὲ τὰς ἰσότητας ταύτας πρὸς τὰς προηγουμένας συμπεραίνομεν, ὅτι εἶναι

$$\begin{aligned} \eta\mu\beta &= -\,\eta\mu\alpha \\ \sigma\upsilon\nu\beta &= \sigma\upsilon\nu\alpha\cdot \end{aligned} \qquad (4)$$

τουτέστιν, ὅτι δύο τόξα, ἀποτελοῦντα τὴν περιφέρειαν, ἔχουσιν ἡμίτονα μὲν ἀντίθετα, συνημίτονα δὲ ἴσα.

Παρατήρησις. *Τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον παντὸς τόξου δύνανται νὰ ἀναχθῶσιν εἰς ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τόξου, μικροτέρου τῶν 90^0· διότι, ἂν μὲν εἶναι μεταξὺ 90^0 καὶ 180^0, τὸ παραπληρωματικὸν αὐτοῦ εἶναι μεταξὺ 0^0 καὶ 90^0 καὶ ἔχουσιν ἴσα μὲν ἡμίτονα, ἀντίθετα* *δὲ συνημίτονα, ἂν δὲ εἶναι μεταξὺ 180^0 καὶ 270^0, ἀφαιροῦμεν ἀπ' αὐτοῦ 180^0, ὅτε μένει τόξον μικρότερον τῶν 90^0· ἔχουσι δὲ τὰ τόξα ταῦτα ἀντίθετα ἡμίτονα καὶ ἀντίθετα συνημίτονα· ἂν δὲ τέλος εἶναι μεταξὺ 270^0 καὶ 360^0, τὸ λεῖπον τόξον, ἵνα ἀποτελεσθῇ ἡ περιφέρεια, θὰ εἶναι μεταξὺ 0^0 καὶ 90^0· ἔχουσι δὲ τὰ τόξα ταῦτα ἡμίτονα μὲν ἀντίθετα, συνημίτονα δὲ ἴσα.*

Ἐκ τούτων συνάγεται ὅτι ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τῶν τόξων ἀπὸ 0^0 μέχρις 90^0· διότι εἰς ταῦτα ἀνάγομεν καὶ τὰ τῶν ἄλλων.

Παραδείγματα

1) 137^0· τούτου παραπληρωματικὸν εἶναι τὸ τόξον 43^0·

ὅθεν $$\eta\mu\, 137^0 = \eta\mu\, 43^0$$
$$\sigma\upsilon\nu\, 137^0 = -\sigma\upsilon\nu\, 43^0.$$

2) 252^0· τοῦτο διαφέρει τοῦ 180^0 κατὰ 72^0·

ὅθεν $$\eta\mu\, 252^0 = -\eta\mu\, 72^0$$
$$\sigma\upsilon\nu\, 252^0 = -\sigma\upsilon\nu\, 72^0.$$

3) 336^0· τοῦτο ἀποτελεῖ τὴν περιφέρειαν μετὰ τοῦ τόξου 24^0·

ὅθεν $$\eta\mu\, 336^0 = -\eta\mu\, 24^0$$
$$\sigma\upsilon\nu\, 336^0 = \sigma\upsilon\nu\, 24^0.$$

Ἀλλὰ καὶ τὰ ἡμίτονα καὶ τὰ συνημίτονα τῶν μεταξὺ 45^0 καὶ 90^0 περιλαμβανομένων τόξων ἀνάγονται εἰς συνημίτονα καὶ ἡμίτονα τῶν μεταξὺ 0^0 καὶ 45^0 περιλαμβανομένων, διότι, ἂν τὸ β περιέχηται μεταξὺ 45^0 καὶ 90^0, τὸ συμπλήρωμα αὐτοῦ α, ἢ $90^0-\beta$, περιέχεται μεταξὺ 0^0 καὶ 45^0 εἶναι δὲ (ἐδ. 9)

$$\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu\,(90^0-\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha$$
$$\sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu\,(90^0-\beta) = \eta\mu\alpha.$$

Ὥστε ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν τὰ ἡμίτονα καὶ τὰ συνημίτονα τῶν τόξων, ἅτινα περιέχονται μεταξὺ 0^0 καὶ 45^0.

5) Τόξα ὧν τὸ ἓν εἶναι διπλάσιον τοῦ ἄλλου.

13. Ἔστω ΑΘ τυχὸν τόξον μικρότερον τῶν 180^0 καὶ ΘΠ τὸ ἡμίτονον αὐτοῦ· ἐὰν ἀχθῶσιν εἰς τὰ πέρατα τῆς διαμέτρου ΑΓ, αἱ ΘΑ καὶ ΘΓ εὐθεῖαι (σχ. 12), γίνεται ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΘΓ, ἐξ οὗ, κατὰ γνωστὸν γεωμετρικὸν θεώρημα, ἔχομεν

$$(\Theta A)^2 = A\Gamma \,.\, \Pi A,$$
καὶ $$(\Theta\Gamma)^2 = A\Gamma \,.\, \Gamma\Pi. \qquad (\iota)$$

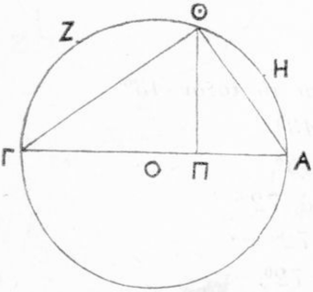
Ἀλλ' ἂν παραστήσωμεν τὸ τόξον ΑΘ διὰ τοῦ α, τὸ τόξον ΘΓ *ἰσοῦται τῷ* $180^0 - \alpha$ *καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ* ΘZ *ἰσοῦται τῷ* $90^0 - \frac{\alpha}{2}$· *εἶναι δὲ (ἐδ. 3).*

$$\Theta A = 2\ \eta\mu \left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\Gamma\Theta = 2\ \eta\mu\ \Theta Z = 2\ \eta\mu \left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\ \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Πρὸς τούτοις εἶναι $\Pi A = OA \quad O\Pi = 1 - \sigma\upsilon\nu\alpha$

$$\Gamma\Pi = \Gamma O + O\Pi = 1 + \sigma\upsilon\nu\alpha.$$



Σχῆμα 12.

Ὥστε αἱ ἰσότητες (ι) γίνονται

$$4\ \eta\mu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\ (1 - \sigma\upsilon\nu\alpha)$$

καὶ $$4\ \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\ (1 + \sigma\upsilon\nu\alpha)\cdot$$

ἤτοι $$1 - \sigma\upsilon\nu\alpha = 2\ \eta\mu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

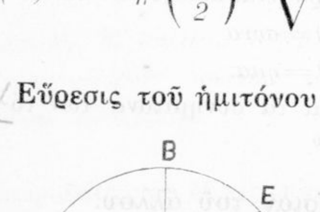
$$1 + \sigma\upsilon\nu\alpha = 2\ \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right). \qquad (5)$$

Διὰ τῶν τύπων τούτων δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ ἡμίσεως τοῦ τυχόντος τόξου, ὅταν ἔχωμεν τὸ συνημίτονον αὐτοῦ τοῦ τόξου, διότι οὗτοι, λυόμενοι πρὸς τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ $\frac{\alpha}{2}$, *γίνονται*

$$(5') \qquad \eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}{2}}, \qquad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{2}}.$$

Εὕρεσις τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου τόξων τινῶν.

Τόξον 45^0.



Σχῆμα 13.

14. *Ἔστω τὸ τόξον* AE *ἴσον τῷ 8ῳ τῆς περιφερείας, ἤτοι* 45^0 *(σχ. 13)· τὸ ἡμίτονον αὐτοῦ* $E\Pi$ *καὶ τὸ συνημίτονον* $O\Pi$ *καὶ ἡ ἀκτὶς* OE *συνιστῶσιν ὀρθογώνιον τρίγωνον· ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία αὐτοῦ* O *εἶναι* 45^0, *καὶ ἡ γωνία* E *εἶναι ὡσαύτως* 45^0· *ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσοσκελές· καὶ διὰ τοῦτο εἶναι*

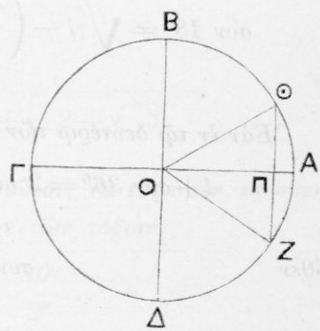
$$(E\Pi)^2+(E\Pi)^2=1, \quad \text{ἤτοι} \quad (E\Pi)^2=\frac{1}{2}=(O\Pi)^2.$$

$$\text{ὅθεν} \qquad \eta\mu\ 45^0=\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Σημ. *Τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα δίδουσι καὶ οἱ τύποι (5), ἂν ἐν αὐτοῖς τεθῇ* $\alpha=90^0$.

Τόξον 30^0.

15. *Ἔστω* 30^0 *τὸ τόξον* $A\Theta$ *(σχ. 14)· ἐὰν τὸ ἡμίτονον αὐτοῦ* $\Theta\Pi$ *προσεκβληθῇ ὑποκάτω τῆς διαμέτρου* $A\Gamma$ *μέχρι τῆς περιφερείας, ἀχθῶσι δὲ καὶ αἱ ἀκτῖνες* $O\Theta$ *καὶ* OZ, *γίνεται τρίγωνον τὸ* $O\Theta Z$, *ὅπερ εἶναι ἰσόπλευρον· διότι τὸ τόξον* $Z\Theta$ *εἶναι* 60^0 *καὶ ἡ χορδὴ αὐτοῦ εἶναι διὰ τοῦτο πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου, ἥτις, ὡς ἐκ τῶν στοιχείων ἐνθυμούμεθα, ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου (τοῦτο δεικνύεται ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριῶν γωνιῶν* O, Θ, Z *τοῦ τριγώνου), ὥστε εἶναι*



Σχῆμα 14.

$$\Theta Z=1 \quad \text{καὶ} \quad \Theta\Pi=\frac{1}{2}\cdot \text{ τουτέστιν}$$

$$\eta\mu\ 30^0=\frac{1}{2}.$$

ἔχοντες τὸ ἡμίτονον, εὑρίσκομεν καὶ τὸ συνημίτονον ἐκ τῆς ἐξισώσεως 2 τοῦ ἐδ. 6

$$\sigma\upsilon\nu\ 30^0=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Τόξον 60^0.

16. *Τὸ τόξον* 60^0 *εἶναι συμπλήρωμα τοῦ τόξου τῶν* 30^0· *ὅθεν*

$$\eta\mu\ 60^0=\sigma\upsilon\nu\ 30^0=\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

$$\sigma\upsilon\nu\ 60^0=\eta\mu\ 30^0=\frac{1}{2}.$$

* Τόξον 18^0.

Τὸ ἡμίτονον αὐτοῦ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς χορδῆς τοῦ τόξου τῶν 36^0, *ἡ δὲ χορδὴ αὕτη εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκα-*

γώνου, ἥτις (ὡς ἐκ τῶν στοιχείων εἶναι γνωστόν), ἰσοῦται πρὸς τὸ μεγαλήτερον μέρος τῆς ἀκτῖνος 1, διαιρεθείσης μέσον καὶ ἄκρον λόγον· τοῦτο δὲ εἶναι (Στοιχεῖα Ἀλγέβρας, σελ. 169)

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

ὅθεν
$$\eta\mu\ 18^0=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

καὶ ἑπομένως

$$\sigma\upsilon\nu\ 18^0=\sqrt{1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

* Τόξον 36^0.

Ἐὰν ἐν τῷ δευτέρῳ τῶν τύπων (5) ὑποθέσωμεν $\alpha=36^0$, εὑρίσκομεν

$$1+\sigma\upsilon\nu\ 36^0=2\ \sigma\upsilon\nu^2\ 18^0=2\,.\frac{1}{16}.(10+2\sqrt{5}).$$

ὅθεν
$$\sigma\upsilon\nu\ 36^0=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

καὶ ἑπομένως
$$\eta\mu\ 36^0=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Σημ. *Ἐπειδὴ τὸ ημ 36^0 εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου, ἐκ τῶν τιμῶν τῶν πλευρῶν τοῦ πενταγώνου Π, τοῦ ἑξαγώνου E καὶ τοῦ δεκαγώνου Δ εὑρίσκεται ἡ σχέσις $\Delta^2+E^2=\Pi^2$.*

Παρατήρησις.

17. Ἐὰν εἰς τοὺς τύπους (5′) τοῦ ἐδαφίου 13 θέσωμεν $\alpha=45^0$ καὶ ἀντικαταστήσωμεν τὸ συν 45^0 διὰ τῆς γνωστῆς τιμῆς αὐτοῦ, εὑρίσκομεν

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{45^0}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$$

ἢ
$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{90^0}{4}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Ἐὰν δὲ εἰς τοὺς αὐτοὺς τύπους θέσωμεν $\alpha=\frac{90^0}{4}$ καὶ ἀντικαταστήσωμεν τὸ συνημίτονον τοῦ $\frac{90^0}{4}$ ὑπὸ τῆς εὑρεθείσης τιμῆς αὐτοῦ, εὑρίσκομεν ὁμοίως
$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{90^0}{8}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

ὁμοίως εὑρίσκεται καὶ

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{90^0}{16}\right)=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δύναταί τις νὰ εὕρῃ τὸ συνημίτονον (ἑπομένως, καὶ τὸ ἡμίτονον) πάντων τῶν τόξων $\frac{90^0}{4}, \frac{90^0}{8}, \frac{90^0}{16}, \frac{90^0}{32} \cdots \frac{90^0}{2^\nu} \cdots$ ὧν ἕκαστον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ προηγουμένου αὐτοῦ.

Ἐκ τῶν αὐτῶν τύπων εὑρίσκομεν, ὑποθέτοντες $\alpha=30^0$:

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{30^0}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

ὁμοίως $$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{30^0}{4}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

καὶ γενικῶς δυνάμεθα, κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον, νὰ εὕρωμεν τὰ συνημίτονα (ἑπομένως καὶ τὰ ἡμίτονα) πάντων τῶν τόξων

$$\frac{30^0}{2}, \frac{30^0}{4}, \frac{30^0}{8} \cdots \frac{30^0}{2^\nu} \cdots$$

18. Πρὸς εὐκολωτέραν ἐπιθεώρησιν τῶν προηγουμένων τύπων, παραθέτομεν αὐτοὺς ἐνταῦθα

$\eta\mu\ 0^0=0$	$\sigma\upsilon\nu\ 0^0=1$	$\eta\mu\ (90^0-\alpha)=\sigma\upsilon\nu\alpha$ $\sigma\upsilon\nu\ (90^0-\alpha)=\eta\mu\alpha$	(1)
$\eta\mu\ 30^0=\frac{1}{2}$	$\sigma\upsilon\nu\ 30^0=\frac{1}{2}\sqrt{3}$		
$\eta\mu\ 45^0=\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\sigma\upsilon\nu\ 45^0=\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\eta\mu\ (180^0-\alpha)=\eta\mu\alpha$ $\sigma\upsilon\nu\ (180^0-\alpha)=-\sigma\upsilon\nu\alpha$	(2)
$\eta\mu\ 60^0=\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\sigma\upsilon\nu\ 60^0=\frac{1}{2}$		
$\eta\mu\ 90^0=1$	$\sigma\upsilon\nu\ 90^0=0$	$\eta\mu\ (180^0+\alpha)=-\eta\mu\alpha$ $\sigma\upsilon\nu\ (180^0+\alpha)=-\sigma\upsilon\nu\alpha$	(3)
$\eta\mu\ 180^0=0$	$\sigma\upsilon\nu\ 180^0=-1$		
$\eta\mu\ 270^0=-1$	$\sigma\upsilon\nu\ 270^0=0$	$\eta\mu\ (360^0-\alpha)=-\eta\mu\alpha$ $\sigma\upsilon\nu\ (360^0-\alpha)=\sigma\upsilon\nu\alpha$	(4)
$\eta\mu\ 360^0=0$	$\sigma\upsilon\nu\ 360^0=1$		

$$1+\sigma\upsilon\nu\alpha=2\ \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

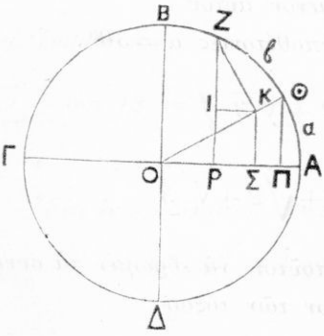
$$\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1$$

$$1-\sigma\upsilon\nu\alpha=2\ \eta\mu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

* Θεμελιώδης ἰδιότης τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων.

19. Ἐκ τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων δύο τόξων α καὶ β δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν $\alpha+\beta$.

Ἔστωσαν δύο τόξα α καὶ β, ὧν τὸ ἄθροισμα δὲν ὑπερβαίνει τὰς 90°· ἂς ληφθῇ (σχ. 15) τὸ τόξον $A\Theta=\alpha$ καὶ τὸ τόξον $\Theta Z=\beta$ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΘΠ, ΖΡ, κάθετοι ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΓ, ἔτι δὲ καὶ ἡ ἀκτὶς ΟΘ καὶ ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἡ ΖΚ· τέλος, ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ Κ, ἡ ΚΙ παράλληλος τῇ ΑΓ καὶ ἡ ΚΣ κάθετος ἐπ' αὐτήν· κατὰ τοὺς ὁρισμοὺς τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων, εἶναι



Σχῆμα 15.

$$\eta\mu\alpha=\Theta\Pi \qquad \sigma\upsilon\nu\alpha=O\Pi$$
$$\eta\mu\beta=ZK \qquad \sigma\upsilon\nu\beta=OK$$

$$(\iota)\qquad \begin{aligned} \eta\mu\,(\alpha+\beta)&=ZP=ZI+IP=ZI+K\Sigma\\ \sigma\upsilon\nu\,(\alpha+\beta)&=OP=O\Sigma-P\Sigma=O\Sigma-KI.\end{aligned}$$

Ἀλλ' ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΚΣ καὶ ΟΘΠ εὑρίσκομεν

$$\frac{K\Sigma}{\Theta\Pi}=\frac{O\Sigma}{O\Pi}=\frac{OK}{O\Theta}$$

ἤτοι $$\frac{K\Sigma}{\eta\mu\alpha}=\frac{O\Sigma}{\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{\sigma\upsilon\nu\beta}{1}.$$

ἐξ ὧν ἕπεται $K\Sigma=\eta\mu\alpha\,.\,\sigma\upsilon\nu\beta$ *καὶ* $O\Sigma=\sigma\upsilon\nu\alpha\,.\,\sigma\upsilon\nu\beta.$

Ἀλλὰ καὶ τὰ τρίγωνα ΖΚΙ καὶ ΘΟΜ εἶναι ὅμοια (διότι αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἶναι κάθετοι ἀνὰ δύο) καὶ ἐξ αὐτῶν εὑρίσκομεν

$$\frac{ZI}{O\Pi}=\frac{IK}{\Pi\Theta}=\frac{KZ}{O\Theta}$$

ἤτοι $$\frac{ZI}{\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{IK}{\eta\mu\alpha}=\frac{\eta\mu\beta}{1},$$

ἐξ ὧν ἕπεται $ZI=\sigma\upsilon\nu\alpha\,.\,\eta\mu\beta$ *καὶ* $IK=\eta\mu\alpha\,.\,\eta\mu\beta.$

Ἀντικαθιστῶντες νῦν εἰς τὰς ἰσότητας (ι) τὰς γραμμὰς ὑπὸ τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν αὐτῶν, εὑρίσκομεν τοὺς τύπους

$$\left.\begin{aligned} \eta\mu\,(\alpha+\beta) &= \eta\mu\alpha\,.\,\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta\,.\,\sigma\upsilon\nu\alpha \\ \sigma\upsilon\nu\,(\alpha+\beta) &= \sigma\upsilon\nu\alpha\,.\,\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\,.\,\eta\mu\beta \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

διὰ τῶν ὁποίων εὑρίσκεται τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta$, ὅταν εἶναι γνωστὰ τὰ ἡμίτονα καὶ τὰ συνημίτονα τῶν δύο τόξων α καὶ β.

20. Ἐκ τῶν αὐτῶν δεδομένων δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τῆς διαφορᾶς τῶν τόξων, ἤτοι τὰ $\eta\mu\,(\alpha-\beta)$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\,(\alpha-\beta)$.

Διότι τὸ τόξον α εἶναι ἄθροισμα τῶν δύο τόξων β καὶ $(\alpha-\beta)$ (ὑποτίθεται $\alpha>\beta$)· ἐφαρμόζοντες λοιπὸν ἐπ' αὐτῶν τοὺς εὑρεθέντας τύπους (6) εὑρίσκομεν:

$$\begin{aligned} \eta\mu\alpha &= \sigma\upsilon\nu\beta\,.\,\eta\mu\,(\alpha-\beta)+\eta\mu\beta\,.\,\sigma\upsilon\nu\,(\alpha-\beta) \\ \sigma\upsilon\nu\alpha &= \sigma\upsilon\nu\beta\,.\,\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)-\eta\mu\beta\,.\,\eta\mu\,(\alpha-\beta). \end{aligned}$$

Ἐκ τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων, αἵτινες περιέχουσι τὰ δύο ζητούμενα $\eta\mu\,(\alpha-\beta)$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\,(\alpha-\beta)$, προσδιορίζονται ταῦτα ὡς ἑξῆς.

Ἐὰν ἡ πρώτη πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\sigma\upsilon\nu\beta$, ἡ δὲ δευτέρα ἐπὶ $-\eta\mu\beta$, καὶ προστεθῶσι κατὰ μέλη, προκύπτει

$$\eta\mu\alpha\,.\,\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\beta\,.\,\sigma\upsilon\nu\alpha=\eta\mu\,(\alpha-\beta)\,.\,(\eta\mu^2\beta+\sigma\upsilon\nu^2\beta)\cdot$$

ἐὰν δὲ ἡ μὲν πρώτη πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\eta\mu\beta$, ἡ δὲ δευτέρα ἐπὶ $\sigma\upsilon\nu\beta$, καὶ προστεθῶσι κατὰ μέλη, προκύπτει

$$\sigma\upsilon\nu\alpha\,.\,\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\,.\,\eta\mu\beta=\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)\,.\,(\eta\mu^2\beta+\sigma\upsilon\nu^2\beta),$$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\eta\mu^2\beta+\sigma\upsilon\nu^2\beta=1$, αἱ ἰσότητες αὗται γράφονται ὡς ἕπεται

$$(6') \quad \left\{\begin{aligned} \eta\mu(\alpha-\beta) &= \eta\mu\alpha\,.\,\sigma\upsilon\nu\,\beta-\eta\mu\beta\,.\,\sigma\upsilon\nu\alpha \\ \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) &= \sigma\upsilon\nu\alpha\,.\,\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\,.\,\eta\mu\beta. \end{aligned}\right.$$

Οὗτοι δὲ εἶναι οἱ τύποι, δι' ὧν εὑρίσκεται τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τῆς διαφορᾶς $\alpha-\beta$ δύο τόξων ἐκ τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων αὐτῶν.

Σημ. Ἐν τῇ ἀποδείξει τῶν τύπων (6) ὑπετέθη, ὅτι τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$ δὲν ὑπερβαίνει τὰς 90^0· ἀποδεικνύεται ὅμως, ὅτι ἀληθεύουσιν οὗτοι δι' οἱαδήποτε τόξα.

Παρατήρησις. Ἐκ τῶν τύπων (6) καὶ (6΄) πηγάζουσιν ἅπαντες οἱ προηγουμένως εὑρεθέντες τύποι· ἐάν, παραδείγματος χάριν, ὑποθέσωμεν ἐν τοῖς δευτέροις $\alpha=\beta$, εὑρίσκομεν

$$\eta\mu 0^0=0 \qquad \sigma\upsilon\nu 0^0=1.$$

ἐὰν δὲ $\alpha = 90^0$, *εὑρίσκομεν*

$$\eta\mu\,(90^0 - \beta) = \sigma\upsilon\nu\,\beta, \qquad \sigma\upsilon\nu\,(90^0 - \beta) = \eta\mu\,\beta.$$

Ἐπίσης δυνάμεθα διὰ μερικῶν ὑποθέσεων νὰ εὕρωμεν ἐξ αὐτῶν πάντας τοὺς προηγουμένους τύπους.

Εὕρεσις τοῦ ημ 2α καὶ τοῦ συν 2α ἐκ τῶν ημα καὶ συνα.

21. Ἐὰν ἐν τοῖς τύποις (6) ὑποτεθῇ $\alpha = \beta$, *προκύπτουσιν οἱ ἑπόμενοι τύποι*

$$\left.\begin{aligned} \eta\mu\,2\alpha &= 2\eta\mu\alpha\,.\,\sigma\upsilon\nu\alpha \\ \sigma\upsilon\nu\,2\alpha &= \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

δι᾿ ὧν εὑρίσκομεν τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ διπλασίου τόξου, ὅταν ἔχωμεν τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ τόξου.

Παρατήρησις. *Ἐὰν ἐν τῷ δευτέρῳ τῶν τύπων (7) τεθῇ* $2\alpha = \delta$, *προκύπτει*

$$\sigma\upsilon\nu\delta = \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\delta}{2}\right) - \eta\mu^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι
$$1 = \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\delta}{2}\right) + \eta\mu^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

ἕπεται
$$1 + \sigma\upsilon\nu\delta = 2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

καὶ
$$1 - \sigma\upsilon\nu\delta = 2\eta\mu^2\left(\frac{\delta}{2}\right)\cdot$$

οὗτοι δὲ εἶναι οἱ τύποι τοῦ ἐδαφίου 13.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑΙ ΚΑΙ ΣΥΝΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑΙ

22. Ἐφαπτομένη τοῦ τόξου α λέγεται τὸ πηλίκον $\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$, *ὅπερ παρίσταται πρὸς συντομίαν διὰ τοῦ συμβόλου εφα.*

Συνεφαπτομένη δὲ τοῦ τόξου α λέγεται τὸ πηλίκον $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$, *ὅπερ παρίσταται πρὸς συντομίαν διὰ τοῦ συμβόλου σφα.*

Ὥστε, κατὰ τὸν ὁρισμόν, ἔχομεν

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$$

$$\sigma\varphi\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} \qquad (8)$$

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων τούτων ἕπεται ἀμέσως ἡ ἑξῆς

$$\varepsilon\varphi\alpha \,.\, \sigma\varphi\alpha = 1$$

τουτέστι, τὸ γινόμενον τῆς ἐφαπτομένης τοῦ τυχόντος τόξου ἐπὶ τὴν συνεφαπτομένην αὐτοῦ ἰσοῦται τῇ μονάδι 1.

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ συνεφαπτομένη ἔχουσι πάντοτε τὸ αὐτὸ σημεῖον.

23. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων, δι' ὧν ὁρίζονται ἡ ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη, φαίνεται ἀμέσως, ὅτι εἶναι θετικαὶ μὲν ἀμφότεραι, ὅταν τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον εἶναι ὁμοειδῆ, ὅπερ συμβαίνει ἐν τῷ πρώτῳ καὶ ἐν τῷ τρίτῳ τεταρτημορίῳ· ἀρνητικαὶ δὲ ἀμφότεραι, ὅταν ταῦτα εἶναι ἑτεροειδῆ, ὅπερ συμβαίνει ἐν τῷ δευτέρῳ καὶ ἐν τῷ τετάρτῳ

Γεωμετρικὴ παράστασις τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῶν συνεφαπτομένων.

24. Τὰ πηλίκα $\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$ *καὶ* $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$ *δύνανται νὰ παρασταθῶσι γεωμετρικῶς δι' εὐθειῶν ἐφαπτομένων τοῦ κύκλου, ἐν τῷ ὁποίῳ παρίστανται καὶ τὰ ἡμίτονα καὶ τὰ συνημίτονα· ἐκ ταύτης δὲ τῆς παραστάσεως ἔλαβον καὶ τὰ ὀνόματα.*

Ἔστω τυχὸν τόξον μικρότερον τῶν 90^0, *ὡς τὸ* $A\Theta$ (*σχ.* 16),

Σχῆμα 16.

$\Theta\Pi$ *τὸ ἡμίτονον καὶ* $O\Pi$ *ἢ* ΘK *τὸ συνημίτονον αὐτοῦ· ἐὰν ἐκ τῶν ἄκρων* A *καὶ* B *τοῦ τεταρτημορίου* AB *ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου, ἡ ἀκτὶς* $O\Theta$ *προσεκβαλλομένη τέμνει τὴν μὲν πρώτην κατὰ τὸ* E, *τὴν δὲ δευτέραν κατὰ τὸ* Σ, *καὶ γίνεται τὸ μὲν τρίγωνον* OAE *ὅμοιον τῷ* $O\Theta\Pi$, *τὸ δὲ τρίγωνον* $OB\Sigma$ *ὅμοιον πρὸς τὸ* $OK\Theta$. *Ἐκ τῶν δύο πρώτων εὑρίσκομεν*

$$\frac{AE}{\Pi\Theta}=\frac{OA}{O\Pi}$$

ἤτοι $\frac{AE}{\eta\mu\alpha}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$ *ὅθεν* $AE=\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}=\varepsilon\varphi\alpha.$

Ἐκ δὲ τῶν δύο δευτέρων συνάγεται ἡ ἰσότης

$$\frac{B\Sigma}{K\Theta}=\frac{OB}{OK}$$

$$\frac{B\Sigma}{\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{1}{\eta\mu\alpha} \quad \text{ὅθεν} \quad B\Sigma=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}=\sigma\varphi\alpha.$$

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι ἡ μὲν ἐφαπτομένη εἶναι τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν τόξων A, *ἡ δὲ συνεφαπτομένη τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου εἰς τὸ* B (*πέρας τοῦ τεταρτημορίου*)· *περατοῦνται δὲ τὰ τμήματα ταῦτα ἀμφότερα ὑπὸ τῆς διαμέτρου, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ πέρατος τοῦ τόξου.*

Σχῆμα 17.

Ἐθεωρήσαμεν τόξα μικρότερα τῶν 90^0· *ἀλλ᾿ οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ τόξον, ἤτοι εἰς οἱονδήποτε τεταρτημόριον καὶ ἂν καταλήγῃ, ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ συνεφαπτομένη αὐτοῦ ἰσοῦνται* (*κατὰ τὸ μέγεθος*) *πρὸς τὰ τμήματα τῶν εἰρημένων δύο ἐφαπτομένων τοῦ κύκλου τὰ περατούμενα ὑπὸ τῆς διαμέτρου, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ πέρατος τοῦ τόξου.*

Ἐὰν τῷ ὄντι, τὸ τόξον καταλήγῃ εἰς τὸ δεύτερον τεταρτημόριον, ὡς τὸ $ΑΘ'$ (σχ. 17), ἡ διὰ τοῦ πέρατος αὐτοῦ διερχομένη διάμετρος $Θ'ΟΘ'''$ ὁρίζει ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ $Α$ ἐφαπτομένης τὸ τμῆμα $ΔΕ'$, ἐπὶ δὲ τῆς κατὰ τὸ $Β$ τὸ τμῆμα $ΒΣ'$· καὶ ἂν ἐκ τοῦ $Θ'$ ἀχθῇ ἡ $Θ'Κ$, παράλληλος τῇ διαμέτρῳ $ΑΓ$ καὶ ἡ $Θ'Π'$ κάθετος ἐπ' αὐτήν, γίνεται τὸ τρίγωνον $Θ'Π'Ο$ ὅμοιον τῷ $ΟΑΕ'$, καὶ τὸ τρίγωνον $Θ'ΚΟ$ ὅμοιον τῷ $ΟΒΣ'$. Ἐκ τούτων εὑρίσκονται καὶ πάλιν αἱ ἰσότητες.

$$\frac{ΑΕ'}{Π'Θ'}=\frac{ΟΑ}{ΟΠ'} \quad καὶ \quad \frac{ΒΣ'}{ΚΘ'}=\frac{ΟΒ}{ΟΚ}$$

ἐξ ὧν ἕπεται

$$ΑΕ'=\frac{Π'Θ'}{ΟΠ'} \quad καὶ \quad ΒΣ'=\frac{ΚΘ'}{ΟΚ}.$$

τουτέστιν ἰσοῦται ἡ $ΑΕ'$ πρὸς τὸ θετικῶς λαμβανόμενον πηλίκον τοῦ ἡμιτόνου, διαιρουμένου διὰ τοῦ συνημιτόνου, ἡ δὲ $ΒΣ'$ πρὸς τὸ ἀντίστροφον πηλίκον.

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις, καὶ ὅταν τὸ τόξον καταλήγῃ εἰς τὸ τρίτον τεταρτημόριον, ὡς τὸ $ΑΘ''$, ἢ καὶ εἰς τὸ τέταρτον, ὡς τὸ $ΑΘ'''$.

Ἄξιον παρατηρήσεως εἶναι, ὅτι αἱ θετικαὶ ἐφαπτόμεναι (ἐδ. 23) κεῖνται ἐπὶ τοῦ μέρους $ΑΕ$ τῆς κατὰ τὸ $Α$ ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου, αἱ δὲ ἀρνητικαὶ ἐπὶ τοῦ ἀντιθέτου $ΑΕ'$· ὁμοίως αἱ θετικαὶ συνεφαπτόμεναι κεῖνται ἐπὶ τοῦ μέρους $ΒΣ$ τῆς εἰς τὸ $Β$ ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου, αἱ δὲ ἀρνητικαὶ ἐπὶ τοῦ ἀντιθέτου $ΒΣ'$.

Περὶ τῆς μεταβολῆς τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς συνεφαπτομένης, ὅταν τὸ τόξον μεταβάλληται.

25. Ἡ ἁπλῆ ὄψις τοῦ σχήματος δεικνύει, ὅτι, αὐξανομένου τοῦ τόξου ἀπὸ 0^0 μέχρις 90^0, αὐξάνεται ἡ ἐφαπτομένη· ἀλλὰ τοῦτο φαίνεται καὶ ἐκ τῆς ἰσότητος (8), ἐξ ἧς ὁρίζεται ἡ ἐφαπτομένη· διότι, αὐξανομένου τοῦ τόξου ἀπὸ 0^0 μέχρις 90^0, αὐξάνεται μὲν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος $\frac{ημα}{συνα}$, ἐλαττοῦται δὲ ὁ παρονομαστής, καὶ δι' ἀμφότερα ταῦτα αὐξάνεται τὸ πηλίκον.

Παρατήρησις. *Τὰ τόξα τῶν 90^0 καὶ τῶν 270^0 δὲν ἔχουσιν ἐφαπτομένην, διότι καὶ τὸ κλάσμα $\frac{ημα}{συνα}$ γίνεται τότε $\frac{1}{0}$ ἢ $\frac{-1}{0}$, ὥστε* πρὸς οὐδένα ἀριθμὸν εἶναι ἴσον (Στοιχ. Ἀλγ. ἐδ. 54)· ἀλλὰ καὶ ἡ γεωμετρικὴ κατασκευὴ οὐδὲν δίδει δι᾿ αὐτὰ τμῆμα, διότι ἡ ἀκτὶς ΟΘ γίνεται τότε παράλληλος τῇ ΑΕ, ἑπομένως οὐδὲν τμῆμα προσδιορίζει ἐπ᾿ αὐτῆς· ἀλλὰ πᾶν ἄλλο τόξον (μεταξὺ 0^0 καὶ 360^0) ἔχει ἐφαπτομένην· διότι ὁ παρονομαστὴς συνα μόνον διὰ τὰ τόξα 90^0 καὶ 270^0 γίνεται 0· ὅσον δὲ ἡ διαφορὰ τοῦ τόξου ἀπὸ τῶν 90^0 ἢ ἀπὸ τῶν 270^0 ἐλαττοῦται, ἡ ἐφαπτομένη αὐτοῦ αὐξάνεται (θετικὴ οὖσα ἢ ἀρνητική) καὶ δύναται νὰ ὑπερβῇ πᾶν δοθὲν μέγεθος, ὡς ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται· τοῦτο δὲ ἐννοοῦμεν, ὅταν λέγομεν συντόμως, ἡ ἐφαπτομένη γίνεται ἄπειρος, ὅταν τὸ τόξον γίνῃ 90^0 ἢ 270^0· τὸ αὐτὸ δὲ καὶ ἀλγεβρικῶς ἐκφράζουσι διὰ τῆς παραστάσεως

$$\text{εφ } 90^0 = \infty, \qquad \text{εφ } 270^0 = \infty\cdot$$

ἡ δὲ συνεφαπτομένη τῶν τόξων τούτων εἶναι προδήλως 0.

Ὁμοίως ἡ συνεφαπτομένη γίνεται ἄπειρος, ὅταν τὸ τόξον γίνῃ 0^0 ἢ 180^0, ἤτοι σφ $0^0 = \infty$ σφ $180^0 = \infty\cdot$

ἡ δὲ ἐφαπτομένη τῶν τόξων τούτων εἶναι 0.

Αὐξανομένου τοῦ τόξου ἀπὸ τῶν 90^0 μέχρι τῶν 180^0, ἡ ἐφαπτομένη αὐτοῦ ἐλαττοῦται (ἀρνητικὴ οὖσα) καὶ καταντᾷ 0· διότι ὅσῳ τὸ πέρας τοῦ τόξου, τὸ Θ΄, πλησιάζει πρὸς τὸ Γ (σχ. 17), τόσῳ ἀνέρχεται τὸ σημεῖον Ε΄ καὶ πλησιάζει πρὸς τὸ Α.

Αὐξανομένου δὲ τοῦ τόξου ἀπὸ τῶν 180^0 μέχρι τῶν 270^0, ἡ ἐφαπτομένη γίνεται θετικὴ καὶ αὐξάνεται ἀπὸ 0 εἰς ἄπειρον· λαμβάνει δὲ τὰς αὐτὰς τιμάς, ἅς τινας ἔλαβεν ἐν τῷ πρώτῳ τεταρτημορίῳ.

Ἂν τέλος, τὸ τόξον αὐξάνηται ἀπὸ 270^0 μέχρι 360^0, ἡ ἐφαπτομένη αὐτοῦ ἐλαττοῦται (ἀρνητικὴ οὖσα) καὶ καταντᾷ 0· λαμβάνει δὲ τὰς αὐτὰς τιμάς, ἅς τινας ἔλαβεν ἐν τῷ δευτέρῳ τεταρτημορίῳ.

Ἡ συνεφαπτομένη μεταβάλλεται ἀντιθέτως τῇ ἐφαπτομένῃ ἤτοι αὐξάνεται μέν, ὅταν ἡ ἐφαπτομένη ἐλαττῶται, ἐλαττοῦται δέ, ὅταν ἡ ἐφαπτομένη αὐξάνηται.

Τοῦτο φαίνεται μὲν ἐκ τοῦ σχήματος, δεικνύεται δὲ καὶ ἐκ τῆς ἰσότητος

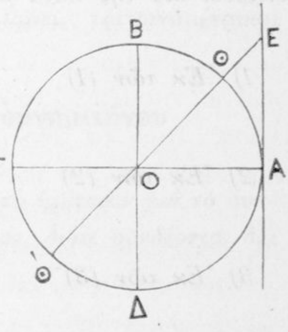
$$\text{εφα} \,.\, \text{σφα} = 1,$$

δι᾿ ἧς αἱ δύο αὗται ποσότητες συνδέονται πρὸς ἀλλήλας.

Παρατήρησις.

26. Ἐκ τῶν προειρημένων γίνεται δῆλον, ὅτι τὸ τόξον δὲν δύναται νὰ ὁρισθῇ ἐντελῶς διὰ τῆς ἐφαπτομένης αὐτοῦ, ἐκτὸς ἂν γνωρίζομεν

εἰς ποῖον τεταρτημόριον καταλήγῃ· διότι, δοθείσης ἐφαπτομένης οἱασδήποτε, ὑπάρχουσι δύο τόξα ἀντιστοιχοῦντα πρὸς αὐτήν· καί, ἂν μὲν ἡ δοθεῖσα ἐφαπτομένη εἶναι θετική, τὰ πρὸς αὐτὴν ἀντιστοιχοῦντα δύο τόξα εἶναι, ἓν μεταξὺ 0^0 καὶ 90^0 καὶ ἕτερον μεταξὺ 180^0 καὶ 270^0· ἂν δὲ ἡ δοθεῖσα ἐφαπτομένη εἶναι ἀρνητική, τὰ πρὸς αὐτὴν ἀντιστοιχοῦντα δύο τόξα εἶναι, ἓν μεταξὺ 90^0 καὶ 180^0 καὶ ἕτερον μεταξὺ 270^0 καὶ 360^0· Τὰ τόξα ταῦτα εὑρίσκονται γεωμετρικῶς, ἂν ληφθῇ ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου τμῆμα ἴσον τῇ δοθείσῃ ἐφαπτομένῃ ἀρχόμενον ἐκ τοῦ Α (πρὸς τὰ ἄνω μέν, ἂν εἶναι θετική, πρὸς τὰ κάτω δέ, ἂν ἀρνητική) καὶ ἐκ τοῦ πέρατος αὐτῆς Ε ἀχθῇ διάμετρος τοῦ κύκλου· τὰ σημεῖα Θ, Θ', καθ' ἃ τέμνει τὴν περιφέρειαν ἡ διάμετρος αὕτη εἶναι τὰ πέρατα τῶν δύο ἀντιστοιχούντων τόξων ΑΘ, ΑΘ' (σχ. 18).



Σχῆμα 18.

Τὸ πρὸς δοθεῖσαν ἐφαπτομένην ἀντιστοιχοῦν τόξον ὁρίζεται ἐντελῶς ὅταν θεωρῶνται μόνον τὰ μεταξὺ 0^0 καὶ 180^0 περιλαμβανόμενα τόξα.

Ἐφαπτόμεναι καὶ συνεφαπτόμεναι τόξων τινῶν·

27. Ἐπειδὴ γνωρίζομεν τὰ ἡμίτονα καὶ τὰ συνημίτονα τόξων τινῶν (ἐδ. 14), δυνάμεθα ἐξ αὐτῶν νὰ εὕρωμεν καὶ τὰς ἐφαπτομένας καὶ τὰς συνεφαπτομένας τῶν αὐτῶν τόξων.

Ἐκ τῶν ἐν τῷ ἐδαφίῳ 18 δεδομένων εὑρίσκομεν

$$\begin{array}{ll}
\varepsilon\varphi\ 0^0 = 0, & \sigma\varphi\ 0^0 = \infty \\
\varepsilon\varphi\ 30^0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, & \sigma\varphi\ 30^0 = \sqrt{3} \\
\varepsilon\varphi\ 45^0 = 1, & \sigma\varphi\ 45^0 = 1 \\
\varepsilon\varphi\ 60^0 = \sqrt{3}, & \sigma\varphi\ 60^0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\
\varepsilon\varphi\ 90^0 = \infty & \sigma\varphi\ 90^0 = 0 \\
\varepsilon\varphi\ 180^0 = 0 & \sigma\varphi\ 180^0 = \infty \\
\varepsilon\varphi\ 270^0 = \infty & \sigma\varphi\ 270^0 = 0 \\
\varepsilon\varphi\ 360^0 = 0 & \sigma\varphi\ 360^0 = \infty .
\end{array}$$

Ἁπλαῖ τινες σχέσεις μεταξὺ δύο τόξων καὶ ἀντιστοιχοῦσαι σχέσεις μεταξὺ τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῶν συνεφαπτομένων αὐτῶν.

28. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1), (2), (3), (4), (5) τοῦ ἐδαφίου 18 προκύπτουσι διὰ τῆς κατὰ μέλη διαιρέσεως αἱ ἑπόμεναι·

1) Ἐκ τῶν (1)
$$\begin{aligned} εφ\,(90^0 - α) &= σφα \\ σφ\,(90^0 - α) &= εφα \end{aligned} \qquad (1')$$

2) Ἐκ τῶν (2)
$$\begin{aligned} εφ\,(180^0 - α) &= -\,εφα \\ σφ\,(180^0 - α) &= -\,σφα \end{aligned} \qquad (2')$$

3) Ἐκ τῶν (3)
$$\begin{aligned} εφ\,(180^0 + α) &= εφα \\ σφ\,(180^0 + α) &= σφα \end{aligned} \qquad (3')$$

4) Ἐκ τῶν (4)
$$\begin{aligned} εφ\,(360^0 - α) &= -\,εφα \\ σφ\,(360^0 - α) &= -\,σφα \end{aligned} \qquad (4')$$

5) Ἐκ τῶν (5)
$$\begin{aligned} εφ^2\left(\frac{α}{2}\right) &= \frac{1 - συνα}{1 + συνα} \\ σφ^2\left(\frac{α}{2}\right) &= \frac{1 + συνα}{1 - συνα}. \end{aligned} \qquad (5')$$

Ἐκφράζουσι δὲ αἱ ἰσότητες αὗται τὰς ἑπομένας προτάσεις.

1) Ἐὰν δύο τόξα εἶναι συμπληρώματα ἀλλήλων, ἡ ἐφαπτομένη τοῦ ἑτέρου ἐξ αὐτῶν εἶναι συνεφαπτομένη τοῦ ἄλλου.

2) Ἐὰν δύο τόξα εἶναι παραπληρώματα ἀλλήλων, ἢ συναποτελῶσι τὴν περιφέρειαν, καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν εἶναι ἀντίθετοι καὶ αἱ συνεφαπτόμεναι ὁμοίως.

3) Ἐὰν δύο τόξα διαφέρωσι κατὰ 180^0, καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν εἶναι ἴσαι καὶ αἱ συνεφαπτόμεναι αὐτῶν ὡσαύτως ἴσαι.

Διὰ τῶν τύπων (5΄) εὑρίσκομεν τὴν ἐφαπτομένην καὶ τὴν συνεφαπτομένην τοῦ τόξου $\frac{α}{2}$ *ἐκ τοῦ συνημιτόνου τοῦ διπλασίου τόξου α.*

Οὕτω π. χ. εἶναι $συν\,45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. *Ἐντεῦθεν ἕπεται*

$$εφ\left(\frac{45^0}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}.$$

Σημ. *Τὸ ἡμίτονον, τὸ συνημίτονον, ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ συνεφαπτομένη τόξου οἱουδήποτε λέγονται, ἑνὶ ὀνόματι, τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου τούτου.*

Εὕρεσις τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου ἐκ τῆς ἐφαπτομένης.

29. Ὅταν ἡ ἐφαπτομένη τόξου δοθῇ, καὶ τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον αὐτοῦ εἶναι ὡρισμένα κατὰ τὸ μέγεθος, διότι συνδέονται διὰ τῶν ἐξισώσεων

$$ημ^2α + συν^2α = 1$$

$$\frac{ημα}{συνα} = εφα.$$

Ἵνα ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων εὕρωμεν τὰς τιμὰς τῶν ημα καὶ συνα (ὑποθέτοντες γνωστὴν τὴν εφα), ἀπαλλάσσομεν τὴν δευτέραν ἀπὸ τοῦ παρονομαστοῦ, ὅτε γίνεται $ημα = συνα\,.\,εφα$, *καὶ ἀντικαθιστῶμεν τὴν τιμὴν τοῦ ημα εἰς τὴν πρώτην· οὕτω προκύπτει*

$$(εφα\,.\,συνα)^2 + συν^2α = 1$$

ἢ

$$εφ^2α\,.\,συν^2α + συν^2α = 1$$

ἐξ ἧς

$$(1 + εφ^2α)\,συν^2α = 1$$

ὅθεν $συν^2α = \frac{1}{1+εφ^2α}$ *καὶ* $συνα = \pm\frac{1}{\sqrt{1+εφ^2α}}$

ἐπειδὴ δὲ $ημα = συνα\,.\,εφα$, *ἕπεται* $ημα = \pm\frac{εφα}{\sqrt{1+εφ^2α}}$. $\quad(ε)$

Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα δύναται νὰ ληφθῇ καὶ θετικῶς καὶ ἀρνητικῶς, ἀλλ᾽ ἐν ἀμφοτέροις τοῖς τύποις δέον νὰ ληφθῇ μετὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, διότι ἐξ αὐτῶν διαιρουμένων πρέπει νὰ προκύπτῃ ἡ σχέσις $\frac{ημα}{συνα} = εφα$.

Ὅτι δὲ τὸ σημεῖον τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου δὲν δύναται νὰ ὁρισθῇ ἐκ τῆς ἐφαπτομένης, γίνεται φανερὸν ἐκ τούτου, ὅτι πρὸς ἑκάστην δοθεῖσαν ἐφαπτομένην ἀντιστοιχοῦσι δύο τόξα περατούμενα εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου καὶ ἔχοντα διὰ τοῦτο ἀντίθετα ἡμίτονα καὶ ἀντίθετα συνημίτονα· οἱ δὲ τύποι (ε) πρέπει νὰ δίδωσιν ἀμφοτέρων τῶν τόξων τούτων τὰ ἡμίτονα καὶ τὰ συνημίτονα.

Τὸ σημεῖον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ὁρίζομεν, ἐὰν ἠξεύρωμεν εἰς ποῖον τεταρτημόριον περατοῦται τὸ τόξον· διὰ τόξα, λόγου χάριν, μικρότερα τῶν 90⁰, ἡ ῥίζα πρέπει νὰ λαμβάνηται θετικῶς, διότι ταῦτα ἔχουσι θετικὸν συνημίτονον.

Παρατήρησις.

30. Οἱ τέσσαρες τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ παντὸς τόξου συνδέονται διὰ τῶν τριῶν ἑπομένων ἐξισώσεων

$$\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1$$

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} \quad \kappa\alpha\iota \quad \sigma\varphi\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} \qquad (\varepsilon)$$

ὥστε δοθέντος τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, προσδιορίζονται ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων καὶ οἱ τρεῖς ἄλλοι (κατὰ τὸ μέγεθος)· πᾶσα δὲ ἄλλη ἐξίσωσις τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ τυχόντος τόξου α συνδέουσα, πρέπει ἢ νὰ καταντᾷ ταυτότης ἢ νὰ δίδῃ τὴν πρώτην $\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1$, ὅταν ἐν αὐτῇ ἀντικατασταθῶσιν αἱ ἐφαπτόμεναι καὶ αἱ συνεφαπτόμεναι ὑπὸ τῶν τιμῶν αὐτῶν· διότι μεταξὺ τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου τοῦ τυχόντος τόξου αὐτὴ μόνη ἡ ἐξίσωσις ὑπάρχει. Εὑρίσκομεν δὲ ἐξισώσεις τοιαύτας ὅσας δήποτε, ἐὰν πολλαχῶς συνδυάσωμεν τὰς τρεῖς ἀρχικὰς ἐξισώσεις (ε)· ἀναγράφομεν δὲ ἐνταῦθα μόνον τὰς πρωτευούσας ἐξ αὐτῶν:

$$\varepsilon\varphi\alpha\,.\,\sigma\varphi\alpha = 1$$

$$1 + \varepsilon\varphi^2\alpha = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$$

$$1 + \sigma\varphi^2\alpha = \frac{1}{\eta\mu^2\alpha}$$

$$\varepsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha = \frac{1}{\eta\mu\alpha\,.\,\sigma\upsilon\nu\alpha},$$

τῶν ὁποίων ἡ ἀλήθεια εὐκόλως ἀποδεικνύεται διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως τῶν εφα καὶ σφα ὑπὸ τῶν τιμῶν αὐτῶν.

* Εὕρεσις τῆς ἐφαπτομένης τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς δύο τόξων ἐκ τῶν ἐφαπτομένων τῶν δύο τόξων.

31. Ἐὰν οἱ τύποι 6 τοῦ ἐδαφίου 19 διαιρεθῶσι κατὰ μέλη, προκύπτει

$$\frac{\eta\mu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)} = \frac{\eta\mu\alpha\,.\,\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\,.\,\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha\,.\,\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\,.\,\eta\mu\beta}.$$

καὶ ἂν τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος ταύτης διαιρέσωμεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν διὰ τοῦ συνα . συνβ, προκύπτει

$$\frac{\eta\mu\,(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu\,(\alpha+\beta)}=\frac{\dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}+\dfrac{\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta}}{1-\dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}\cdot\dfrac{\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta}}.$$

καὶ ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὰ πηλίκα ὑπὸ τῶν ἴσων αὐτοῖς ἐφαπτομένων, εὑρίσκομεν τὸν τύπον

$$\varepsilon\varphi\,(\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\,.\,\varepsilon\varphi\beta}, \tag{9}$$

διὰ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τὴν ἐφαπτομένην τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta$ τῶν δύο τόξων α καὶ β, ὅταν ἔχωμεν τὰς ἐφαπτομένας αὐτῶν.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν ἐκ τῶν τύπων (6΄) τοῦ ἐδ. 20, τὸν ἑπόμενον τύπον

$$\varepsilon\varphi\,(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\,.\,\varepsilon\varphi\beta}, \tag{9'}$$

διὰ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τὴν ἐφαπτομένην τῆς διαφορᾶς $\alpha-\beta$ τῶν δύο τόξων α καὶ β, ὅταν ἔχωμεν τὰς ἐφαπτομένας αὐτῶν.

Τέλος, εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ τύπου (9), ὑποθέτοντες $\alpha=\beta$,

$$\varepsilon\varphi\,2\alpha=\frac{2\varepsilon\varphi\,\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}. \tag{10}$$

διὰ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκομεν ἐκ τῆς ἐφαπτομένης τόξου τὴν ἐφαπτομένην τοῦ διπλασίου τόξου.

Σημ. Ἐκ τῶν θεωρηθέντων ὁμοίων τριγώνων τοῦ σχήματος 16 εὑρίσκεται εὐκόλως, ὅτι τὰ πηλίκα $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$ καὶ $\frac{1}{\eta\mu\alpha}$ παρίστανται ὑπὸ τῶν γραμμῶν ΟΕ καὶ ΟΣ, αἵτινες ἄγονται ἐκ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς συνεφαπτομένης· τὰς γραμμὰς ταύτας καλοῦσι, τὴν μὲν ΟΕ τέμνουσαν τοῦ τόξου α ($\alpha=A\Theta$), τὴν δὲ ΟΣ συνδιατέμνουσαν τοῦ αὐτοῦ τόξου· ἀλλ᾽ οἱ παριστῶντες αὐτὰς ἀριθμοὶ κατήντησαν ἤδη ἄχρηστοι ὡς ἴδιοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοί, διότι ἀνάγονται εἰς τὰ ἀντίστροφα τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων· καὶ ἀντὶ τεμν α καὶ συνδ α, προτιμῶσι νὰ γράφωσι σήμερον τὰ πηλίκα

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\,\alpha} \quad \text{καὶ} \quad \frac{1}{\eta\mu\,\alpha}$$

* Τύποι, δι᾽ ὧν τρέπεται τὸ ἄθροισμα καὶ ἡ διαφορὰ δύο ἡμιτόνων ἢ δύο συνημιτόνων εἰς γινόμενον.

32. Ἐκ τῶν θεμελιωδῶν τύπων (6) καὶ (6′) τῶν ἐδαφίων 19 καὶ 20, εὑρίσκομεν εὐκόλως τοὺς ἑξῆς τύπους, διὰ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως:

$$\eta\mu(\alpha+\beta)+\eta\mu(\alpha-\beta)=2\,\eta\mu\alpha\,.\,\sigma\upsilon\nu\beta$$
$$\eta\mu(\alpha+\beta)-\eta\mu(\alpha-\beta)=2\,\sigma\upsilon\nu\alpha\,.\,\eta\mu\beta$$
$$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=2\,\sigma\upsilon\nu\alpha\,.\,\sigma\upsilon\nu\beta$$
$$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=2\,\eta\mu\alpha\,.\,\eta\mu\beta$$

καὶ ἂν παραστήσωμεν τὰ δύο τόξα $\alpha+\beta$ καὶ $\alpha-\beta$ διὰ A καὶ B, ἤτοι ἂν θέσωμεν

$$\alpha+\beta=A, \qquad \alpha-\beta=B,$$

προκύπτει $$\alpha=\frac{1}{2}(A+B) \qquad \beta=\frac{1}{2}(A-B),$$

καὶ οἱ προηγούμενοι τύποι γίνονται

$$\eta\mu A+\eta\mu B=2\,\eta\mu\,\frac{1}{2}(A+B)\,.\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{1}{2}(A-B)$$
$$\eta\mu A-\eta\mu B=2\,\eta\mu\,\frac{1}{2}(A-B)\,.\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{1}{2}(A+B)$$
$$\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B=2\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{1}{2}(A+B)\,.\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{1}{2}(A-B)$$
$$\sigma\upsilon\nu B-\sigma\upsilon\nu A=2\,\eta\mu\,\frac{1}{2}(A+B)\,.\,\eta\mu\,\frac{1}{2}(A-B)$$

διὰ τῶν τύπων τούτων τρέπεται τὸ ἄθροισμα καὶ ἡ διαφορὰ δύο ἡμιτόνων ἢ δύο συνημιτόνων εἰς γινόμενον.

Ἐκ τῶν δύο πρώτων προκύπτει ὁ ἑξῆς τύπος διὰ διαιρέσεως:

$$\frac{\eta\mu A-\eta\mu B}{\eta\mu A+\eta\mu B}=\frac{2\,\eta\mu\,\frac{1}{2}(A-B)\,.\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{1}{2}(A+B)}{2\,\eta\mu\,\frac{1}{2}(A+B)\,.\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{\varepsilon\varphi\,\frac{1}{2}(A-B)}{\varepsilon\varphi\,\frac{1}{2}(A+B)} \quad (1)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

* Κατασκευὴ τῶν πινάκων.

33. Πίναξ, περιέχων τὰς χορδὰς τῶν τόξων (τουτέστι τὰ ἡμίτονα διπλᾶ) ἀπὸ μοίρας εἰς μοῖραν προχωρούντων, εὑρίσκεται ἤδη ἐν τῇ Μαθηματικῇ Συντάξει τοῦ ἕλληνος ἀστρονόμου Πτολεμαίου.

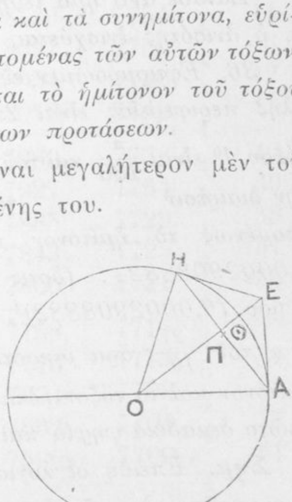
Οἱ σήμερον ἐν χρήσει τελειότεροι πίνακες εἶναι οἱ τοῦ Λαλάνδου, ἐν οἷς τὰ τόξα προχωροῦσι κατὰ λεπτόν, καὶ οἱ τοῦ Καλλέτου, ἐν οἷς προχωροῦσι κατὰ 10″.

Ὁ λογισμὸς τῶν τοιούτων πινάκων στηρίζεται ἐπὶ τῆς θεμελιώδους ἰδιότητος τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων (ἐδ. 19)· ἐάν, τῷ ὄντι, εὑρεθῇ τὸ ημ 1′, ἐξ αὐτοῦ εὑρίσκεται ἀμέσως καὶ τὸ συνημίτονον αὐτοῦ, ἐκ δὲ τούτων διὰ τῶν θεμελιωδῶν τύπων (6) τοῦ ἐδαφίου 19 εὑρίσκεται τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ τόξου τῶν 2′· ἐκ τούτων πάλιν διὰ τῶν αὐτῶν τύπων εὑρίσκεται τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ ἀθροίσματος $2'+1'$ ἤτοι τοῦ 3′· ἔπειτα τοῦ ἀθροίσματος $3'+1'$ καὶ οὕτω καθεξῆς, ἐφ᾽ ὅσον θέλομεν. Ἔχοντες οὕτω τὰ ἡμίτονα καὶ τὰ συνημίτονα, εὑρίσκομεν καὶ τὰς ἐφαπτομένας καὶ τὰς συνεφαπτομένας τῶν αὐτῶν τόξων.

Μένει λοιπὸν νὰ δείξωμεν πῶς εὑρίσκεται τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου 1′· πρὸς τοῦτο ἔχομεν ἀνάγκην τῶν ἑπομένων προτάσεων.

34. Πᾶν τόξον μικρότερον τῶν 90^0 εἶναι μεγαλήτερον μὲν τοῦ ἡμιτόνου του, μικρότερον δὲ τῆς ἐφαπτομένης του.

Ἔστω τόξον μικρότερον τῶν 90^0 τὸ ΑΘ, καὶ ἐφαπτομένη αὐτοῦ ἡ ΑΕ. Ἐὰν ἐκ τοῦ πέρατος Ε τῆς ἐφαπτομένης ἀχθῇ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, ἡ ΕΗ, καὶ ἐπιζευχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΟΘ, ΟΗ καὶ ἡ χορδὴ ΑΗ, τὰ δύο τόξα ΑΘ καὶ ΘΗ θὰ εἶναι ἴσα· διότι αἱ γωνίαι ΑΟΘ καὶ ΘΟΗ, αἱ ἐπ᾽ αὐτῶν βαίνουσαι, εἶναι ἴσαι (διότι τὰ τρίγωνα ΟΑΕ καὶ ΟΗΕ εἶναι ἴσα, ὡς ὀρθογώνια καὶ ἔχοντα τὴν ὑποτείνουσαν ἴσην



Σχῆμα 19.

καὶ μίαν ἄλλην πλευρὰν ἴσην). Τούτου τεθέντος, παρατηροῦμεν, ὅτι πᾶν τόξον εἶναι μεγαλήτερον μὲν πάσης εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένης γραμμῆς, μικρότερον δὲ πάσης περιγεγραμμένης (Στ. Γεωμ. ἐδ. 274)· ἄρα

$$\chi o \rho \delta.\ AH < \tau \acute{o} \xi o \upsilon\ A\Theta H < AE + EH\cdot$$

καὶ ἂν διά τοῦ α παραστήσωμεν τὸν ἀριθμόν, ὅστις ἐκφράζει τὸ μῆκος τοῦ τόξου ΑΘ (ἀναμνηστέον, ὅτι ἐλήφθη ΟΑ = 1), αἱ ἀνισότητες αὗται γράφονται καὶ ὡς ἕπεται:

$$2\,\eta\mu\alpha < 2\alpha < 2\,\varepsilon\varphi\alpha$$

ἢ $$\eta\mu\alpha < \alpha < \varepsilon\varphi\alpha \qquad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

35. Ἡ διαφορὰ τοῦ ἡμιτόνου ἀπὸ τοῦ τόξου εἶναι μικροτέρα τοῦ κύβου τοῦ τόξου *(τουτέστι τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ἐκφράζει τὸ τόξον, ὅταν ἡ ἀκτὶς ληφθῇ ὡς μονάς).*

Ἐκ τῆς ἀνισότητος $\varepsilon\varphi\,\alpha > \alpha$ *ἢ* $\dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} > \alpha$

πορίζόμεθα τὴν ἑπομένην $\eta\mu\alpha > \alpha\,.\,\sigma\upsilon\nu\alpha.$

Ἡ δὲ ἀνισότης αὕτη ἐνισχύεται, ἐὰν τὸ μικρότερον πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ συν α· διότι τότε καθίσταται ἔτι μικρότερον· ὥστε εἶναι

$$\eta\mu\alpha > \alpha\,.\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha \quad \text{ἢ} \quad \eta\mu\alpha > \alpha\,(1 - \eta\mu^2\alpha)$$

ἐξ ἧς καὶ $$\alpha - \eta\mu\alpha < \alpha\,.\,\eta\mu^2\alpha.$$

Ἐὰν δὲ ἀντὶ ημα τεθῇ εἰς τὸ δεύτερον μέλος τὸ μεγαλήτερον αὐτοῦ α, ἡ ἀνισότης ἐνισχύεται, ὥστε προκύπτει $\alpha - \eta\mu\,\alpha < \alpha^3.$ *ὅ. ἔ. δ.*

36. Ἐφαρμόσωμεν νῦν τοῦτο εἰς τὸ τόξον 1΄· ἐπειδὴ τὸ μῆκος τῆς ὅλης περιφερείας εἶναι 2π $(\pi = 3{,}1415926535\ldots)$, *τὸ μῆκος τοῦ τόξου* 1^0 *εἶναι* $\frac{\pi}{180}$ *καὶ τοῦ τόξου 1΄ τὸ μῆκος εἶναι* $\frac{\pi}{10800}$*· τουτέστι, μετὰ τὴν διαίρεσιν* $\tau \acute{o} \xi.\ 1' = 0{,}0002908882\ldots$

ἑπομένως τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου τούτου διαφέρει τοῦ ἀριθμοῦ $0{,}0002908882\ldots$ *(ὅστις ἐκφράζει τὸ τόξον) διαφορὰν μικροτέραν τοῦ κύβου* $(0{,}0002908882)^3$, *ἑπομένως μικροτέραν καὶ τοῦ* $(0{,}0003)^3$, *ἤτοι τοῦ* $\frac{27}{10^{12}}$*· ἄρα μικροτέραν καὶ τοῦ* $\frac{1}{10^{10}}$*· Ἐντεῦθεν βλέπομεν, ὅτι τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ τόξον (ἐκπεφρασμένα δι᾿ ἀριθμῶν) ἔχουσι κοινὰ τὰ 10 πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία· καὶ διὰ τοῦτο εἶναι* $\eta\mu\ 1' = 0{,}0002908882\ldots$

Σημ. *Ἐπειδὴ οἱ λογισμοὶ γίνονται συνήθως διὰ τῶν λογαρίθμων, ἀναγκαιοῦσιν ἐν ταῖς ἐφαρμογαῖς σπανιώτατα οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ αὐτοί, συχνότατα δὲ οἱ λογάριθμοι αὐτῶν· διὰ τοῦτο, οἱ πίνακες περιέχουσιν ἀμέσως τοὺς λογαρίθμους τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.*

Διάταξις τῶν πινάκων τοῦ Λαλάνδου.

37. Αὕτη φαίνεται ἐκ τοῦ ἑπομένου πίνακος.

18°

43	
1"	0,72
2	1,43
3	2,15
4	2,87
5	3,58
6	4,30
7	5,02
8	5,73
9	6,45

42	
1	0,7
2	1,4
3	2,1
4	2,8
5	3,5
6	4,2
7	4,9
8	5,6
9	6,3

39	
1	0,65
2	1,30
3	1,95
4	2,60
5	3,25
6	3,90
7	4,55
8	5,20
9	5,85

38	
1	0,63
2	1,27
3	1,90
4	2,53
5	3,17
6	3,80
7	4,43
8	5,07
9	5,70

	Sin	D	Tang.	D	Cotg.	Cos.	D	
0	1,48998	39	1,51178	43	0,48822	1,97821	4	60
1	9037	39	1221	43	8779	7817	5	59
2	9076	39	1264	42	8736	7812	4	58
3	9115	38	1306	43	8694	7808	4	57
4	9153	39	1349	43	8651	7804	4	56
5	9192	39	1392	43	8608	7800	4	55
6	9231	38	1435	43	8565	7796	4	54
7	9269	39	1478	42	8522	7792	4	53
8	9308	39	1520	43	8480	7788	4	52
9	9347	38	1563	43	8437	7784	5	51
10	9385	39	1606	42	8394	7779	4	50
11	9424	38	1648	43	8352	7775	4	49
12	9462	38	1691	43	8309	7771	4	48
13	9500	39	1734	42	8266	7767	4	47
14	9539	38	1776	43	8224	7763	4	46
15	9577	38	1819	42	8181	7759	5	45
16	9615	39	1861	42	8139	7754	4	44
17	9654	38	1903	43	8097	7750	4	43
18	9692	38	1946	42	8054	7746	4	42
19	9730	38	1988	43	8012	7742	4	41
20	9768	38	2031	42	7969	7738	4	40
21	9806	38	2073	42	7927	7734	5	39
22	9844	38	2115	42	7885	7729	4	38
23	9882	38	2157	43	7843	7725	4	37
24	9920	38	2200	42	7800	7721	4	36
25	9958	38	2242	42	7758	7717	4	35
26	1,49996	38	2284	42	7716	7713	5	34
27	1,50034	38	2326	42	7674	7708	4	33
28	0072	38	2368	42	7632	7704	4	32
29	0110	38	2410	42	7590	7700	4	31
30	1,50148		1,52452		0,47548	1,97996		30
	Cos.		Cotg.		Tang.	Sin.		

Αἱ μοῖραι τῶν τόξων, τῶν μικροτέρων τῶν 45^0, εἶναι γεγραμμέναι εἰς τὸ ἄνω μέρος τῆς σελίδος, τὰ δὲ πρῶτα λεπτὰ ἐν τῇ πρώτῃ πρὸς τ' ἀριστερὰ στήλῃ, ἐν ᾗ ταῦτα προχωροῦσι πρὸς τὰ κάτω αὐξανόμενα· φέρει δὲ ἡ στήλη αὕτη ἐπὶ κεφαλῆς τὸ σημεῖον ′. Ὁ δὲ λογάριθμος ἑκάστου τῶν τεσσάρων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν δοθέντος τόξου, εὑρίσκεται γεγραμμένος ἐν τῷ τόπῳ, ἔνθα ἡ τὰ πρῶτα λεπτὰ τοῦ δοθέντος τόξου ἔχουσα ὁριζοντία σειρά, διασταυροῦται μετὰ τῆς στήλης, ἐφ' ἧς εὑρίσκεται ἐπιγεγραμμένον τὸ ὄνομα τοῦ ἀριθμοῦ. Ἡ τοὺς λογαρίθμους τῶν ἡμιτόνων ἔχουσα στήλη φέρει ἐπὶ κεφαλῆς τὰ γράμματα sin (= sinus)· ἡ δὲ τοὺς τῶν ἐφαπτομένων τὰ γράμματα tang (=tangentes), ἡ τοὺς τῶν συνεφαπτομένων τὰ cotg (=cotangentes), καὶ ἡ τοὺς τῶν συνημιτόνων τὰ cos (=cosinus). Ἐπειδὴ δὲ πολλοὶ ἐφεξῆς λογάριθμοι ἔχουσι κοινὰ τὰ δύο πρῶτα ψηφία (τὸ χαρακτηριστικὸν καὶ τὰ δέκατα), γράφονται ταῦτα ἅπαξ καὶ νοοῦνται ἐπαναλαμβανόμενα τὰ αὐτὰ μέχρις οὗ ἀλλαχθῶσιν. Ἐπαναλαμβάνονται ὅμως, πρὸς εὐκολίαν τῆς εὑρέσεως αὐτῶν, εἰς τὴν ἀρχὴν καὶ εἰς τὸ τέλος ἑκάστης σελίδος. Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον, βλέπομεν, ὅτι εἶναι

$$\begin{aligned} \text{λογ ημ } (18^0\ 10') &= \overline{1},49385 \\ \text{λογ εφ } (18^0\ 13') &= \overline{1},51734 \\ \text{λογ σφ } (18^0\ \ 0') &= 0,48822 \\ \text{λογ συν } (18^0\ 30') &= \overline{1},97696. \end{aligned}$$

Τῶν τόξων τῶν μεγαλητέρων τῶν 45^0, αἱ μὲν μοῖραι εὑρίσκονται εἰς τὸ κάτω μέρος τῆς σελίδος, τὰ δὲ πρῶτα λεπτὰ αὐτῶν εἰς τὴν τελευταίαν στήλην πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ προχωροῦσι πρὸς τὰ ἄνω αὐξανόμενα· ἐγράφησαν δὲ οὕτω τὰ τόξα ταῦτα, ὥστε ἕκαστον νὰ εὑρίσκηται μετὰ τοῦ συμπληρώματος αὐτοῦ εἰς τὴν αὐτὴν σελίδα, καὶ οἱ λογάριθμοι τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἀμφοτέρων τῶν συμπληρωματικῶν τόξων νὰ εὑρίσκωνται ἐν μιᾷ καὶ τῇ αὐτῇ ὁριζοντίᾳ σειρᾷ. Τὸ εἶδος τοῦ ἀριθμοῦ διὰ τὰ τόξα ταῦτα ἐγράφη ὑποκάτω τῶν στηλῶν· ἐγράφη δὲ cos ὑπὸ τὴν στήλην τῶν sin καὶ sin ὑπὸ τὴν στήλην τῶν cos· διότι τὸ ἡμίτονον τοῦ ἑτέρου τῶν συμπληρωματικῶν τόξων ἰσοῦται πρὸς τὸ συνημίτονον τοῦ ἄλλου· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ἐγράφη cotg ὑπὸ τὴν στήλην τῶν tang καὶ τἀνάπαλιν tang ὑπὸ τὴν στήλην τῶν cotg.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον, βλέπομεν, ὅτι εἶναι

$$\begin{aligned} \text{λογ συν } (71^0\ 50') &= \overline{1},49385 = \text{λογ ημ } (18^0\ 10') \\ \text{λογ σφ } (71^0\ 47') &= \overline{1},51734 = \text{λογ εφ } (18^0\ 13') \\ \text{λογ εφ } (71^0\ 60') &= 0,48822 = \text{λογ σφ } (18^0\ \ 0') \\ \text{λογ ημ } (71^0\ 30') &= \overline{1},97696 = \text{λογ συν } (18^0\ 30'). \end{aligned}$$

38. Οἱ λογάριθμοι τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων εἶναι ἀρνητικοὶ ἀριθμοί· διότι ταῦτα εἶναι μικρότερα τῆς μονάδος· ἐν τοῖς πίναξιν ἐτράπησαν εἰς ἄλλους ἔχοντας μόνον τὸ χαρακτηριστικὸν ἀρνητικὸν (Στοιχεῖα Ἀλγέβρας, ἐδ. 237).

***Σημ.** Εἰς τοὺς πίνακας τοῦ Καλλέτου προσετέθησαν 10 θετικαὶ μονάδες εἰς ἕκαστον τῶν ἀρνητικῶν λογαρίθμων, ἵνα κατασταθῶσι θετικοί· τοῦτο ὅμως βλάπτει μᾶλλον ἢ ὠφελεῖ εἰς τὰς ἐφαρμογάς.*

39. Πρὸς τὰ δεξιὰ ἑκάστης στήλης λογαρίθμων ὑπάρχει ἄλλη, στενωτέρα, ἐπὶ τῆς κορυφῆς τῆς ὁποίας ὑπάρχει τὸ γράμμα D (Differences)· ἐν αὐτῇ εὑρίσκονται γεγραμμέναι αἱ διαφοραὶ δύο ἐφεξῆς λογαρίθμων, τουτέστιν ἡ αὔξησις ἢ ἐλάττωσις ἑκάστου λογαρίθμου, ἡ πρὸς τὴν αὔξησιν τοῦ τόξου κατὰ 1΄ ἀντιστοιχοῦσα. Τὴν χρῆσιν τῶν διαφορῶν τούτων θὰ ἴδωμεν παρακατιόντες.

40. Οἱ λογάριθμοι τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῶν συνεφαπτομένων ἔχουσι τὰς αὐτὰς διαφοράς· καὶ ὄντως, ἐκ τῆς ἰσότητος $εφα \cdot σφα = 1$, *ἕπεται*

$$λογ\ εφα + λογ\ σφα = 0 \quad ἢ \quad λογ\ σφα = -\ λογ\ εφα\text{·}$$

τουτέστιν, οἱ λογάριθμοι τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς συνεφαπτομένης τοῦ αὐτοῦ τόξου εἶναι πάντοτε ἀντίθετοι ἀριθμοί· ἑπομένως ἐὰν αὐξηθῇ ὁ ἕτερος αὐτῶν κατὰ δ, ὁ ἄλλος θὰ ἐλαττωθῇ κατὰ δ.

Χρῆσις τῶν πινάκων.

41. Ἡ χρῆσις τῶν λογαριθμικῶν πινάκων τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν ἑπομένων δύο προβλημάτων.

1ον) Δοθέντος τόξου, εὑρεῖν τὸν λογάριθμον ἑνὸς τῶν τριγωνομετρικῶν αὐτοῦ ἀριθμῶν.

2ον) Δοθέντος τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν, εὑρεῖν τὸ ἀντιστοιχοῦν τόξον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1ον.

42. Δοθέντος τόξου, εὑρεῖν τὸν λογάριθμον ἑνὸς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν αὐτοῦ.

Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τούτου περιλαμβάνει δύο περιπτώσεις.

α΄) Ἂν τὸ δοθὲν τόξον περιέχῃ μόνον μοίρας καὶ πρῶτα λεπτά, ὁ ζητούμενος λογάριθμος εὑρίσκεται ἀμέσως ἐν τοῖς πίναξιν.

Οὕτως εὑρίσκεται

$$λογ\ ημ\ (75^0\ 18΄) = \bar{1},98555.$$
$$λογ\ συν\ (83^0\ 15΄) = \bar{1},07018.$$
$$λογ\ εφ\ (14^0\ 16΄) = \bar{1},40531.$$
$$λογ\ σφ\ (87^0\ 14΄) = \bar{2},68417.$$

β') Ἂν τὸ δοθὲν τόξον ἔχῃ καὶ μέρη τοῦ πρώτου λεπτοῦ.

Ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ζητεῖται ὁ λογάριθμος τοῦ ἡμιτόνου τοῦ τόξου $44^0\ 17'\ 22''$· *ἐπειδὴ τὸ τόξον τοῦτο περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν* $44^0\ 17'$ *καὶ* $44^0\ 18'$, *καὶ τὸ ἡμίτονον αὐτοῦ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν ἡμιτόνων τῶν τόξων τούτων, καὶ ὁ λογάριθμος τοῦ ἡμιτόνου του ὡσαύτως· εἶναι δὲ*

$$\text{λογ ημ}\ (44^0\ 17') = \overline{1},84398$$

$$\text{λογ ημ}\ (44^0\ 18') = \overline{1},84411\cdot$$

ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων τούτων εἶναι 13 (μονάδες τῆς τελευταίας τάξεως), ἀλλὰ καὶ ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἑπομένων εἶναι πάλιν 13, καὶ ἡ διαφορὰ αὕτη δύο ἐφεξῆς λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων ἐπὶ πολὺ διατηρεῖται· ὥστε δυνάμεθα νὰ παραδεχθῶμεν, ὅτι ἡ αὔξησις τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀνάλογος τῆς αὐξήσεως τῶν τόξων· *ὅτε σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.*

Δι' αὔξησιν ἑνὸς λεπτοῦ ἀπὸ τοῦ τόξου $44^0\ 17'$ *εἰς τὸ τόξον* $44^0\ 18'$, *ηὐξήθη ὁ λογάριθμος τοῦ ἡμιτόνου κατὰ 13 (ἑκατοντάκις χιλιοστά)· δι' αὔξησιν* $22''$, *ἤτοι* $\frac{22}{60}$ *τοῦ πρώτου λεπτοῦ, ἀπὸ τοῦ τόξου* $44^0\ 17'$ *εἰς τὸ δοθὲν τόξον* $44^0\ 17'.22''$, *ὁ εἰρημένος λογάριθμος θὰ αὐξηθῇ κατὰ* $\frac{22}{60}.13$, *ἤτοι κατὰ 5 (ὡς ἔγγιστα)· ὥστε πρέπει νὰ προσθέσωμεν 5 μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως εἰς τὸν λογ ημ* $(44^0\ 17')$ *ἵνα εὕρωμεν τὸν λογ ημ* $(44^0\ 17'\ 22'')$· *ἑπομένως εἶναι*

$$\text{λογ ημ}\ (44^0\ 17'\ 22'') = \overline{1},84403.$$

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον εὑρίσκονται καὶ οἱ ἑπόμενοι λογάριθμοι:

1) λογ εφ $(14^0\ 38'\ 40'')$

ἔχομεν	$\text{λογ εφ}\ (14^0\ 38') = 1,41681$	*διαφορὰ 52*
διὰ $40''$ *προστίθεται*	$\frac{40}{60}.52 = \quad 35$	
ὅθεν	$\text{λογ εφ}\ (14^0\ 38'\ 40'') = 1,41716.$	

2) λογ σφ $(8^0\ 9'\ 10'')$

ἔχομεν	$\text{λογ σφ}\ (8^0\ 9') = 0,84402$	*διαφορὰ 90*
διὰ $10''$ *ἀφαιροῦνται*	$\frac{10}{60}.90 = \quad 15$	
ὅθεν	$\text{λογ σφ}\ (8^0\ 9'\ 10'') = 0,84387.$	

3) λογ συν $(69^0\ 14'\ 25'')$

ἔχομεν	$\text{λογ συν}\ (69^0\ 14') = \overline{1},54969$	*διαφορὰ 33*
διὰ $25''$ *ἀφαιροῦνται*	$\frac{25}{60}.33 = \quad 14$	
ὅθεν	$\text{λογ συν}\ (69^0\ 14'\ 25'') = \overline{1},54955.$	

Παρατήρησις. *Τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν ἐφαπτομένων οἱ λογάριθμοι προβαίνουσιν ἐν τοῖς πίναξιν αὐξανόμενοι, τῶν δὲ συνημιτόνων καὶ τῶν συνεφαπτομένων ἐλαττούμενοι.*

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2ον

43. Δοθέντος τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν, εὑρεῖν τὸ ἀντιστοιχοῦν τόξον (τὸ τόξον τοῦτο ὑποτίθεται πάντοτε μικρότερον τῶν 90^0).

Ἂν ὁ δοθεὶς λογάριθμος περιέχηται ἐν τοῖς πίναξιν, ἐν τῇ οἰκείᾳ στήλῃ, τὸ τόξον εὑρίσκεται ἀμέσως· ἄν, παραδείγματος χάριν, δοθῇ

$$\text{λογ συν } \alpha = \overline{1},97615,$$

εὑρίσκομεν ἐκ τῶν πινάκων ἀμέσως $\alpha = 18^0\,49'$.

Ὁμοίως, ἂν δοθῇ $\text{λογ εφ } \chi = 0{,}03060$,

εὑρίσκομεν ἐκ τῶν πινάκων $\chi = 47^0\,1'$.

Ἂν δὲ ὁ δοθεὶς λογάριθμος δὲν ὑπάρχῃ ἐν τοῖς πίναξι, θὰ περιλαμβάνηται μεταξὺ δύο ἐφεξῆς λογαρίθμων τοῦ ῥηθέντος ἀριθμοῦ, καὶ ἑπομένως τὸ ζητούμενον τόξον θὰ περιλαμβάνηται μεταξὺ τῶν πρὸς αὐτοὺς ἀντιστοιχούντων δύο τόξων, ὧν ἡ διαφορὰ εἶναι $1'$.

Ἂν π. χ. δοθῇ $\text{λογ ημ } \alpha = \overline{1},40891$,

εὑρίσκομεν ἐν τῇ στήλῃ τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων

$$\overline{1},40873 = \text{λογ ημ } (14^0\,51')$$
$$\overline{1},40921 = \text{λογ ημ } (14^0\,52')\cdot$$

ὁ δοθεὶς λογάριθμος $\overline{1},40891$ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τούτων, οἵτινες διαφέρουσι κατὰ 48· παραδεχόμενοι δέ, ὡς καὶ πρίν, ὅτι ἡ αὔξησις τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀνάλογος τῆς αὐξήσεως τῶν τόξων, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς· ἂν ὁ λογάριθμος τοῦ ημ $(14^0\,51')$, ὅστις εἶναι $\overline{1},40873$, αὐξηθῇ κατὰ 48 (μονάδας τῆς κατωτάτης τάξεως), τὸ τόξον αὐξάνεται κατὰ $1'$ ἤτοι $60''$· ἂν δὲ ὁ αὐτὸς λογάριθμος αὐξηθῇ μόνον κατὰ 18 (ὅτε γίνεται ἴσος τῷ δοθέντι), τὸ τόξον θὰ αὐξηθῇ κατὰ $60''.\frac{18}{48}$, ἤτοι κατὰ $23''$ ὡς ἔγγιστα· ὥστε εἶναι $\alpha = 14^0\,51'\,23''$.

Ὁμοίως ἂν δοθῇ $\text{λογ συν } \beta = \overline{1},89885$,

εὑρίσκομεν $\overline{1},89888 = \text{λογ συν } (37^0\,36')$

καὶ $\overline{1},89879 = \text{λογ συν } (37^0\,37')\cdot$

ἐπειδὴ δὲ ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων τούτων εἶναι 9, ὁ δὲ δοθεὶς διαφέρει τοῦ πρώτου κατὰ 3, ἕπεται, ὅτι πρέπει νὰ αὐξηθῇ τὸ τόξον

$(37^0\ 36')$ κατὰ τὰ $\frac{3}{9}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ, ἤτοι κατὰ $20''$, ἵνα γίνῃ ἴσον τῷ τόξῳ β· ὥστε εἶναι $\beta = 37^0\ 36'\ 20''$.

Ὁμοίως, ἂν δοθῇ $\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ \chi = 1{,}25849$,

εὑρίσκομεν
$$1{,}25708 = \lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ (86^0\ 50')$$
$$1{,}25937 = \lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ (86^0\ 51').$$

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι ἂν ὁ λογάριθμος 1,25708 αὐξηθῇ κατὰ 229 (ὅτε γίνεται 1,25937), τὸ ἀντιστοιχοῦν τόξον $86^0\ 50'$ αὐξάνεται κατὰ $1'$· ὥστε ἂν ὁ αὐτὸς λογάριθμος αὐξηθῇ μόνον κατὰ 141 (ὅτε γίνεται ἴσος τῷ δοθέντι), θὰ αὐξηθῇ τὸ τόξον κατὰ $60''.\frac{141}{229}$, ἤτοι κατὰ $37''$ περίπου· ὥστε εἶναι $\chi = 86^0\ 50'\ 37''$.

Ἔστω, πρὸς τούτοις, $\lambda o\gamma\ \sigma\varphi\ \omega = 0{,}11101$

ἔχομεν $0{,}11110 = \lambda o\gamma\ \sigma\varphi\ (37^0\ 45')$ διαφορὰ 26

διὰ διαφορὰν 9 (ἐπὶ ἔλαττον), πρέπει νὰ αὐξηθῇ τὸ τόξον κατὰ $60''.\frac{9}{26}$ ἤτοι κατὰ $21''$ περίπου· ὥστε εἶναι $\omega = 37^0\ 45'\ 21''$.

* Παρατήρησις.

44. Ἐνίοτε, ἀντὶ νὰ δοθῇ ὁ λογάριθμος τριγωνομετρικοῦ τινὸς ἀριθμοῦ, δίδεται αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς καὶ ζητεῖται τὸ ἀντιστοιχοῦν τόξον· τότε διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

1η) Ἂν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι θετικός, εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον αὐτοῦ (ἐκ τοῦ πίνακος, ὅστις περιέχει τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν) καὶ ἐξ αὐτοῦ τὸ τόξον.

Ἂν, παραδείγματος χάριν, ζητῆται τὸ τόξον χ, διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι
$$\eta\mu\ \chi = \frac{1}{5},$$
ἔχομεν $\lambda o\gamma\ \eta\mu\ \chi = \lambda o\gamma\left(\frac{1}{5}\right) = -\lambda o\gamma\ 5 = \bar{1},30103$·

ὅθεν, κατὰ τὰ προηγούμενα, εὑρίσκομεν
$$\chi = 11^0\ 32'\ 13''.$$

Ὁμοίως, ἂν ζητῆται τὸ τόξον φ, διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι
$$\varepsilon\varphi\ \varphi = \frac{8}{\sqrt{45}},$$
θὰ ἔχωμεν $\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ \varphi = \lambda o\gamma\ 8 - \frac{1}{2}\lambda o\gamma\ 45$

$$\lambda o\gamma\ 8 = 0{,}90309$$

$\lambda o\gamma\ 45 = 1{,}65321$ $\qquad \frac{1}{2}\lambda o\gamma\ 45 = 0{,}82660$

ὅθεν $\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ \varphi = 0{,}07649$

καὶ κατὰ τὰ προηγουμένως ἐκτεθέντα, εὑρίσκομεν ἐκ τῶν πινάκων

$$\varphi = 50^0 \quad 1' \quad 12''.$$

2α) Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι ἀρνητικός, τότε, ἀντὶ τοῦ ζητουμένου τόξου, εὑρίσκομεν τὸ παραπλήρωμα αὐτοῦ, ἂν ὁ ἀριθμὸς εἶναι συνημίτονον ἢ ἐφαπτομένη ἢ συνεφαπτομένη· διότι τὸ παραπλήρωμα θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν θετικόν· εὑρεθέντος δὲ τοῦ παραπληρώματος αὐτοῦ, εὑρίσκεται ἀμέσως τὸ ζητούμενον τόξον.

Ἐάν, λόγου χάριν, δοθῇ $\quad \varepsilon\varphi\omega = -4,$

παριστῶντες τὸ παραπλήρωμα τοῦ ω διὰ φ, θὰ ἔχωμεν

$$\varepsilon\varphi\ \varphi = \varepsilon\varphi\ (180 - \omega) = 4\cdot$$

ὅθεν $\quad \lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ \varphi = \lambda o\gamma\ 4 = 0{,}60206$

καὶ $\quad \varphi = \ 75^0 \quad 57' \quad 50''$

ἑπομένως $\quad \omega = 104^0 \quad 2' \quad 10''.$

Ἐὰν δὲ ὁ δοθεὶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς εἶναι ἡμίτονον, τὸ ἀντιστοιχοῦν πρὸς αὐτὸν τόξον θὰ ὑπερβαίνῃ τὰς 180^0 καὶ ἀφαιροῦντες ἀπ᾽ αὐτοῦ τὰς 180^0, θὰ ἔχωμεν τόξον, οὗτινος τὸ ἡμίτονον θὰ εἶναι (ἐδ. 11) θετικὸν καὶ ἴσον τῷ δοθέντι. Εὑρόντες δὲ τὸ τόξον τοῦτο, προσθέτομεν εἰς αὐτὸ τὰς 180^0 καὶ ἔχομεν τὸ ζητούμενον.

Ἐὰν π. χ. δοθῇ $\quad \eta\mu\ \chi = -\dfrac{1}{8}$

θέτομεν $\quad \chi = 180 + \omega\cdot \quad$ ὅτε ἔχομεν $\quad \omega = \chi - 180$

καὶ $\quad \eta\mu\ \omega = \eta\mu\ (\chi - 180) = \dfrac{1}{8}\cdot$

ὅθεν $\quad \lambda o\gamma\ \eta\mu\omega = \lambda o\gamma \left(\dfrac{1}{8}\right) = -\lambda o\gamma.\ 8,$

ἤτοι $\quad \lambda o\gamma\ \eta\mu\omega = \overline{1}{,}09691$

ὅθεν $\quad \omega = \ 7^0 \quad 10' \quad 51''$

καὶ $\quad \chi = 187^0 \quad 10' \quad 51''$

Σημ. Πρὸς ἑκάστην τιμὴν ἑνὸς οἱουδήποτε τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἀντιστοιχοῦσι δύο τόξα μικρότερα περιφερείας· ἐκ τούτων, τὸ μικρότερον εὑρίσκεται κατὰ τὴν προηγουμένως ἐκτεθεῖσαν μέθοδον· ἐκ δὲ τούτου εὑρίσκεται καὶ τὸ ἄλλο εὐκόλως διὰ τῶν γνωστῶν ἰδιοτήτων τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν (ἐδ. 10, 11, 12 καὶ 23).

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΜΕΤΡΗΣΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

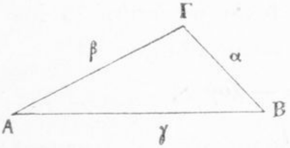
ΑΙ ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΣΥΝΔΕΟΥΣΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ

Ὁρισμοί.

45. *Δοθείσης γωνίας, ἐὰν γραφῇ κύκλος ἔχων κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας καὶ ἀκτῖνα τὴν μονάδα τοῦ μήκους, τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ἀπολαμβανόμενον τόξον τοῦ κύκλου λέγεται μέ*τρον τῆς γωνίας ἢ ὅτι μετρεῖ τὴν γωνίαν. *Παρίστανται δὲ ἀμφότερα, καὶ ἡ γωνία καὶ τὸ τόξον, ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

46. *Ἡμίτονον καὶ συνημίτονον γωνίας λέγεται τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ μετροῦντος αὐτὴν τόξου· ὡσαύτως λέγεται καὶ ἐφαπτομένη γωνίας καὶ συνεφαπτομένη γωνίας.*

Σημ. *Τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου θὰ παριστῶμεν ἐν τοῖς ἑπομένοις διὰ τῶν γραμμάτων Α, Β, Γ, τὰς δὲ πλευρὰς διὰ τῶν α, β, γ· διὰ τοῦ α τὴν ἀπέναντι τῆς γωνίας Α, διὰ τοῦ β τὴν ἀπέναντι τῆς Β καὶ διὰ τοῦ γ τὴν ἀπέναντι τῆς Γ (σχ. 20).*



Σχῆμα 20.

Σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων ὀρθογωνίου τριγώνου.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄

47. Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἑκατέρα τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἰσοῦται τῇ ὑποτεινούσῃ πολλαπλασιασθείσῃ ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι γωνίας ἢ ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς προσκειμένης.

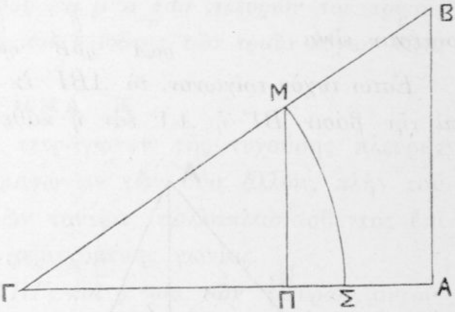
Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ (σχ. 20), ὀρθὴν ἔχον τὴν γωνίαν Α. Ἐὰν γραφῇ κύκλος, κέντρον μὲν ἔχων τὴν κορυφὴν Γ, ἀκτῖνα δὲ τὴν μονάδα, τὸ τόξον ΜΣ τοῦ κύκλου, ὅπερ περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας Γ, μετρεῖ τὴν γωνίαν ταύτην· καὶ ἂν ἐκ τοῦ M ἀχθῇ ἡ κάθετος $M\Pi$ ἐπὶ τὴν ΓA, ἡ μὲν $M\Pi$ θὰ εἶναι ἡμίτονον τοῦ τόξου $M\Sigma$, ἡ δὲ $\Gamma\Pi$ συνημίτονον αὐτοῦ. Ἀλλ᾽ ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων $\Gamma\Pi M$ καὶ ΓAB ἕπεται

$$\frac{AB}{M\Pi}=\frac{A\Gamma}{\Gamma\Pi}=\frac{B\Gamma}{\Gamma M}.$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\Gamma M = 1$,
$M\Pi = \eta\mu\, \Gamma$, $\Gamma\Pi = \sigma\upsilon\nu\, \Gamma$,
αἱ ἰσότητες αὗται γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}=\frac{\beta}{\sigma\upsilon\nu \Gamma}=\alpha\cdot$$

ἐξ ὧν ἕπεται
$$\left.\begin{aligned}\beta &= \alpha\ \sigma\upsilon\nu\ \Gamma\\ \gamma &= \alpha\ \eta\mu\ \Gamma.\end{aligned}\right\}\ (1)$$



Σχῆμα 21.

Ἀντικαθιστῶντες δὲ τὴν γωνίαν Γ ὑπὸ τοῦ ἴσου αὐτῇ $90^0 - B$ (διότι $B + \Gamma = 90^0$), εὑρίσκομεν ἐκ τούτων τὰς δύο ἑπομένας ἰσότητας

$$\left.\begin{aligned}\beta &= \alpha\ \eta\mu B\\ \gamma &= \alpha\ \sigma\upsilon\nu B\end{aligned}\right\}\ (1')$$

αἵτινες θὰ εὑρίσκοντο καὶ ἀμέσως, ἂν ὁ κύκλος ἐγράφετο περὶ τὴν κορυφὴν B ὡς κέντρον.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄

48. Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἑκατέρα τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἰσοῦται τῇ ἄλλῃ πολλαπλασιασθείσῃ ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἀπέναντι γωνίας ἢ ἐπὶ τὴν συνεφαπτομένην τῆς προσκειμένης.

Ἐὰν αἱ ἰσότητες (1) διαιρεθῶσι κατὰ μέλη, προκύπτει

$$\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\sigma\upsilon\nu \Gamma}{\eta\mu \Gamma} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\gamma}{\beta}=\frac{\eta\mu \Gamma}{\sigma\upsilon\nu \Gamma}$$

ὅθεν
$$\beta = \gamma\ \sigma\varphi\, \Gamma \quad \text{καὶ} \quad \gamma = \beta\ \varepsilon\varphi\, \Gamma. \qquad (2)$$

Ὁμοίως εὑρίσκεται ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1΄)

$$\beta = \gamma\ \varepsilon\varphi\ B \quad \text{καὶ} \quad \gamma = \beta\ \sigma\varphi\ B \qquad (2')$$

Παρατήρησις. Ἐὰν αἱ ἰσότητες (1) ὑψωθῶσιν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ προστεθῶσιν ἔπειτα κατὰ μέλη, προκύπτει

$$\beta^2+\gamma^2=\alpha^2(\eta\mu^2\Gamma+\sigma\upsilon\nu^2\Gamma)$$

ἤτοι
$$\beta^2+\gamma^2=\alpha^2\cdot$$

ἡ γνωστὴ σχέσις τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.

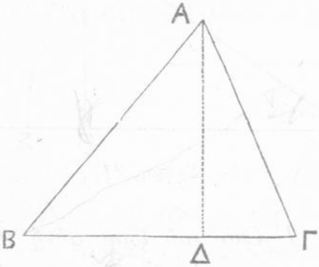
Σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων παντὸς τριγώνου.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄

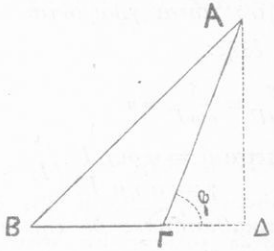
49. Ἐν παντὶ τριγώνῳ αἱ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἡμίτονα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν·

τουτέστιν εἶναι $$\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}.$$

Ἔστω τυχὸν τρίγωνον, τὸ ΑΒΓ· ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἔστω κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ ἡ ΑΔ· ἐὰν ἡ κάθετος αὕτη πέσῃ ἐντὸς τοῦ τρι-



Σχῆμα 22.



Σχῆμα 23.

γώνου (σχ. 22) (ὅπερ συμβαίνει, ὅταν ἀμφότεραι αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ὀξεῖαι), θὰ διαιρέσῃ τὸ τρίγωνον εἰς δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, τὰ ΑΒΔ καὶ ΑΓΔ, ἐξ ὧν εὑρίσκομεν (46)

$$A\Delta=\gamma\ \eta\mu B \quad \kappa\alpha\grave{\iota} \quad A\Delta=\beta\ \eta\mu\Gamma$$

ὅθεν ἕπεται $$\gamma\ \eta\mu B=\beta\ \eta\mu\Gamma$$

καὶ $$\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}=\frac{\beta}{\eta\mu B}. \tag{3}$$

Ἐὰν δὲ ἡ κάθετος πέσῃ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου (σχ. 23), εἶναι πάλιν

$$A\Delta=\gamma\ \eta\mu B \quad \kappa\alpha\grave{\iota} \quad A\Delta=\beta\ \eta\mu\varphi.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία φ καὶ ἡ γωνία Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι παραπληρωματικαί, ἔχουσιν ἴσα ἡμίτονα· ἑπομένως αἱ ἰσότητες αὗται γίνονται πάλιν $A\Delta=\gamma\ \eta\mu B$ *καὶ* $A\Delta=\beta\ \eta\mu\Gamma$,

ἐξ ὧν ἕπεται πάλιν ἡ ἰσότης (3).

Ἐὰν ἡ κάθετος ἀχθῇ ἐκ τῆς κορυφῆς Β, εὑρίσκομεν ὁμοίως

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$$

ἐὰν δὲ ἐκ τῆς Γ, εὑρίσκεται ἡ ἰσότης

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}.$$

Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι, ἐν παντὶ τριγώνῳ, οἱ τρεῖς λόγοι

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} \qquad \frac{\beta}{\eta\mu B} \qquad \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$$ *εἶναι ἴσοι·*

τουτέστιν $$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}. \qquad (4)$$

Σημ. *Ἂν ἡ κάθετος ἐφαρμόσῃ ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἡ ἰσότης τῶν τριῶν λόγων εἶναι ἤδη ἀποδεδειγμένη.*

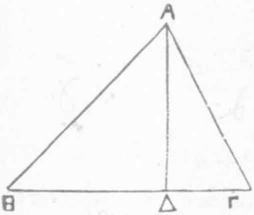
ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄

50. Ἐν παντὶ τριγώνῳ τὸ τετράγωνον τῆς τυχούσης πλευρᾶς ἰσοῦται τὸ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων, πλὴν τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν πλευρῶν τούτων, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.

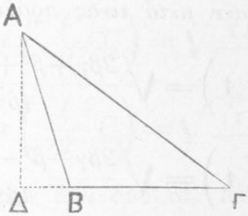
Ἔστω τυχὸν τρίγωνον, τὸ $AB\Gamma$, καὶ γ μία τῶν πλευρῶν αὐτοῦ· λέγω ὅτι εἶναι $$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta .\ \text{συν}\ \Gamma.$$

Ἐκ τῆς κορυφῆς A ἔστω κάθετος ἡ $A\Delta$ ἐπὶ τὴν βάσιν $B\Gamma$.

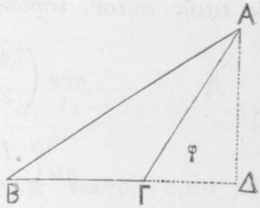
Ἐὰν ἡ γωνία Γ εἶναι ὀξεῖα (σχ. 24 καὶ 25), κατά τι θεώρημα τῆς γεωμετρίας εἶναι: $$(AB)^2 = (B\Gamma)^2 + (A\Gamma)^2 - 2\,(B\Gamma).(\Delta\Gamma).$$



Σχῆμα 24.



Σχῆμα 25.



Σχῆμα 26.

Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $A\Delta\Gamma$ εὑρίσκεται

$$\Delta\Gamma = A\Gamma\ \text{συν}\ \Gamma\cdot$$

ὅθεν ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ πρώτῃ ἰσότητι τὴν $\Delta\Gamma$ ὑπὸ τοῦ ἴσου αὐτῆς εὑρίσκομεν $$(AB)^2 = (B\Gamma)^2 + (A\Gamma)^2 - 2\,(B\Gamma).(A\Gamma)\ \text{συν}\ \Gamma$$

ἤτοι $$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta .\ \text{συν}\ \Gamma.$$

Ἐὰν δὲ ἡ γωνία Γ εἶναι ἀμβλεῖα, ἡ κάθετος $A\Delta$ πίπτει ἐκτὸς τοῦ τριγώνου (σχ. 26) καὶ τότε ἔχομεν ἐκ τῶν στοιχείων τῆς γεωμετρίας τὴν ἰσότητα $$(AB)^2 = (B\Gamma)^2 + (A\Gamma)^2 + 2\,(B\Gamma).(\Gamma\Delta). \qquad (\iota)$$

Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $A\Gamma\Delta$ ἕπεται $\Gamma\Delta = A\Gamma$ συνφ· καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία φ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς Γ, εἶναι συνφ $= -$συν Γ· ἑπομένως $$\Gamma\Delta = A\Gamma.\,(-\ \text{συν}\ \Gamma) = -\ A\Gamma.\ \text{συν}\ \Gamma\cdot$$

καὶ ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὴν τιμὴν ταύτην τῆς $\Gamma\Delta$ *εἰς τὴν ἰσότητα* (ι) *εὑρίσκομεν πάλιν* $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\,\alpha\beta\;\text{συν}\;\Gamma.$

Ἐπειδὴ ἡ πρότασις ἐφαρμόζεται ἐπὶ ἑκάστης ιῶν πλευρῶν, ἕπεται ὅτι εἶναι

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\;\text{συν}\;A \\ \beta^2 &= \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\;\text{συν}\;B \\ \gamma^2 &= \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\;\text{συν}\;\Gamma. \end{aligned} \tag{5}$$

Τοὺς τύπους τούτους δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ὑπὸ μορφὴν καταλληλοτέραν πρὸς τὴν χρῆσιν τῶν λογαρίθμων. Πρὸς τοῦτο, λύομεν τὸν πρῶτον πρὸς τὸ συν A, *ὅτε εὑρίσκομεν*

$$\text{συν}\;A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}$$

ἀλλ' εἶναι (ἐδ. 13)

$$\text{συν}\left(\frac{1}{2}A\right) = \sqrt{\frac{1 + \text{συν}\;A}{2}}, \quad \text{ημ}\left(\frac{1}{2}A\right) = \sqrt{\frac{1 - \text{συν}\;A}{2}}.$$

Ἐὰν δὲ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὰς ἰσότητας ταύτας τὸ συν A *ὑπὸ τῆς τιμῆς αὐτοῦ, εὑρίσκομεν μετά τινας πράξεις*

$$\text{συν}\left(\frac{1}{2}A\right) = \sqrt{\frac{2\beta\gamma + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{4\beta\gamma}}$$

$$\text{ημ}\left(\frac{1}{2}A\right) = \sqrt{\frac{2\beta\gamma - \beta^2 - \gamma^2 + \alpha^2}{4\beta\gamma}}.$$

ἐπειδὴ δὲ εἶναι

$$2\beta\gamma + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 = (\beta+\gamma)^2 - \alpha^2 = (\alpha+\beta+\gamma)\,.\,(-\alpha+\beta+\gamma)$$
$$2\beta\gamma - \beta^2 - \gamma^2 + \alpha^2 = \alpha^2 - (\beta-\gamma)^2 = (\alpha+\beta-\gamma)\,.\,(\alpha-\beta+\gamma),$$

ἕπεται
$$\text{συν}\left(\frac{1}{2}A\right) = \sqrt{\frac{(\alpha+\beta+\gamma)\cdot(-\alpha+\beta+\gamma)}{4\beta\gamma}}$$

$$\text{ημ}\left(\frac{1}{2}A\right) = \sqrt{\frac{(\alpha-\beta+\gamma)\,.\,(\alpha+\beta-\gamma)}{4\beta\gamma}}. \tag{6}$$

Ἐὰν δὲ πρὸς συντομίαν θέσωμεν $\alpha+\beta+\gamma = 2\tau$, *(ὅτε* τ *σημαίνει τὴν ἡμίσειαν περίμετρον τοῦ τριγώνου) καὶ ἀφαιρέσωμεν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς τεθείσης ἰσότητος, πρῶτον τὸ* 2α, *εἶτα τὸ* 2β *καὶ τέλος τὸ* 2γ, *εὑρίσκομεν*

$$\left.\begin{aligned} -\alpha+\beta+\gamma &= 2(\tau-\alpha) \\ \alpha-\beta+\gamma &= 2(\tau-\beta) \\ \alpha+\beta-\gamma &= 2(\tau-\gamma) \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

καὶ διὰ τῆς βοηθείας τῶν ἰσοτήτων τούτων οἱ τύποι (6) γράφονται ὡς ἑξῆς:

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}A\right)=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}$$

$$\eta\mu\left(\frac{1}{2}A\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}. \quad (8)$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ἐκ τῆς δευτέρας τῶν ἰσοτήτων (5)

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}B\right)=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)}{\gamma\alpha}}$$

$$\eta\mu\left(\frac{1}{2}B\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}{\gamma\alpha}} \quad (8)$$

καὶ ἐκ τῆς τρίτης

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\gamma)}{\alpha\beta}}$$

$$\eta\mu\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\alpha\beta}}. \quad (8)$$

Ἐὰν νῦν διαιρέσωμεν ἀνὰ δύο τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}A\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}$$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}B\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{\tau(\tau-\beta)}} \quad (9)$$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\tau(\tau-\gamma)}}.$$

Αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι πρέπει ἐν τοῖς τύποις τούτοις νὰ λαμβάνωνται θετικῶς· διότι τὰ ἡμίση τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου, ἤτοι αἱ γωνίαι $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}\Gamma$, εἶναι μικρότεραι τῶν 90^0· ἑπομένως, οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ αὐτῶν εἶναι πάντες θετικοί.

Σημ. Ἐὰν ἐν τριγώνῳ τρέψωμεν τὰ γράμματα τῶν κορυφῶν ἀπὸ A, B, Γ εἰς B, Γ, A (τὸ A εἰς B, τὸ B εἰς Γ καὶ τὸ Γ εἰς A), θὰ τραπῶσιν ὁμοίως καὶ τὰ γράμματα τῶν πλευρῶν ἀπὸ α, β, γ εἰς β, γ, α, ἀλλ' οἱ εὑρεθέντες γενικοὶ τύποι (4), (5), (6), (9) οἱ ἐπὶ τοῦ τυχόντος τριγώνου ἰσχύοντες, πρέπει προφανῶς νὰ ἀληθεύωσι καὶ μετὰ τὴν τροπὴν ταύτην· τρέποντες ἄρα τὰ γράμματα ὡς εἴπομεν δυνάμεθα ἐξ ἑνὸς τῶν τύπων τούτων νὰ εὕρωμεν τοὺς ὁμοίους του.

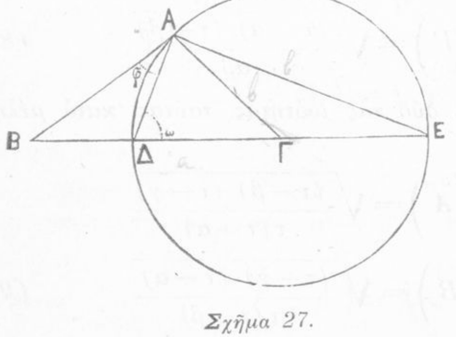
ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'

51. Ἐν παντὶ τριγώνῳ, ἡ διαφορὰ δύο πλευρῶν ἔχει λόγον πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, ὃν ἔχει καὶ ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν ἀπέναντι γωνιῶν πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τοῦ ἡμιαθροίσματος αὐτῶν.

Τουτέστιν εἶναι

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\varepsilon\varphi\,\frac{1}{2}(A-B)}{\varepsilon\varphi\,\frac{1}{2}(A+B)} \tag{10}$$

Ἔστω τυχὸν τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$ καὶ ἐκ τῶν δύο πλευρῶν α καὶ β, τῶν περιεχουσῶν τὴν γωνίαν Γ, ἔστω μεγαλητέρα ἡ α (ὅτε καὶ ἡ γωνία A θὰ εἶναι μεγαλητέρα τῆς B)· μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα τὴν μικροτέραν πλευρὰν $A\Gamma$, ἂς γραφῇ περιφέρεια κύκλου, ἡ $A\Delta EA$, ἥτις τέμνει τὴν $B\Gamma$ κατὰ τὸ σημεῖον Δ καὶ τὴν προσεκβολὴν αὐτῆς κατὰ τὸ E· τότε θὰ εἶναι (σχ. 27)



Σχῆμα 27.

$$B\Delta=B\Gamma-\Gamma\Delta=\alpha-\beta$$
$$BE=B\Gamma+\Gamma E=\alpha+\beta.$$

Τὸ τρίγωνον $B\Delta A$ ἔχει τὰς πλευρὰς $B\Delta\ (=\alpha-\beta)$ καὶ $BA\ (=\gamma)$, ἀπέναντι δ' αὐτῶν τὰς γωνίας φ καὶ $180-\omega$· ἑπομένως εἶναι (ἐδ. 48).

$$\frac{\alpha-\beta}{\eta\mu\varphi}=\frac{\gamma}{\eta\mu\omega} \quad \text{ἢ} \quad \alpha-\beta=\gamma\cdot\frac{\eta\mu\varphi}{\eta\mu\omega}.$$

Καὶ τὸ τρίγωνον BAE ἔχει τὰς πλευρὰς $BE\ (=\alpha+\beta)$ καὶ $AB\ (=\gamma)$, ἀπέναντι δ' αὐτῶν τὰς γωνίας $\varphi+90^0$ (διότι ἡ ΔAE εἶναι ὀρθὴ) καὶ $E\ (=90-\omega)$· ἑπομένως εἶναι

$$\frac{\alpha+\beta}{\eta\mu\,(90+\varphi)}=\frac{\gamma}{\eta\mu\,(90-\omega)}.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία $90^0+\varphi$ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς $90^0-\varphi$, ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται (ἰδὲ ἐδ. 10 καὶ 9)

$$\frac{\alpha+\beta}{\sigma\upsilon\nu\varphi}=\frac{\gamma}{\sigma\upsilon\nu\omega}\quad \text{ἢ}\quad \alpha+\beta=\gamma.\frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\omega}.$$

Ἐκ δὲ ταύτης καὶ ἐκ τῆς προηγουμένως εὑρεθείσης ἕπεται νῦν ἡ ἰσότης

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\eta\mu\varphi}{\eta\mu\omega}.\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\sigma\upsilon\nu\varphi}=\frac{\varepsilon\varphi\varphi}{\varepsilon\varphi\omega}. \qquad (\iota)$$

Ἀλλ᾽ ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται ἀμέσως ὅτι εἶναι

$$\omega=\frac{1}{2}\cdot A\Gamma E=\frac{1}{2}(A+B)\quad \text{καὶ}\quad \omega=\varphi+B\cdot$$

ὥστε $\qquad \varphi=\omega-B=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B-B=\frac{1}{2}(A-B)\cdot$

καὶ διὰ ταῦτα ἡ ἰσότης (ι) γίνεται

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(A-B)}{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(A+B)}. \qquad (10)$$

Σημ. *Ὑπετέθησαν αἱ πλευραὶ α καὶ β ἄνισοι· ἂν εἶναι $\alpha=\beta$, θὰ εἶναι καὶ $A=B$ καὶ ἡ ἰσότης (10) πάλιν ἀληθεύει.*

* *Ἡ ἰσότης (10) εὑρίσκεται εὐκολώτερον διὰ τῆς βοηθείας τοῦ τύπου (1) τοῦ ἐδαφίου 31.*

Πρὸς τοῦτο, γράφομεν τὴν ἰσότητα

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}$$

καὶ παριστῶμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἑτέρου τῶν ἴσων λόγων διὰ τοῦ λ, ὅτε ἔχομεν

$$\alpha=\lambda.\eta\mu A$$
$$\beta=\lambda.\eta\mu B.$$

Ἐκ τούτων ἕπεται $\quad \alpha-\beta=\lambda.(\eta\mu A-\eta\mu B)$

$$\alpha+\beta=\lambda.(\eta\mu A+\eta\mu B)$$

ὅθεν

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\eta\mu A-\eta\mu B}{\eta\mu A+\eta\mu B}$$

καὶ κατὰ τὸν εἰρημένον τύπον

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(A-B)}{\varepsilon\varphi\frac{1}{2}(A+B)}.$$

Παρατήρησις.

52. Τὰ ἓξ στοιχεῖα παντὸς τριγώνου συνδέονται διὰ τῶν ἑπομένων τριῶν ἐξισώσεων

$$A + B + \Gamma = 180^0$$

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}. \qquad (\varepsilon)$$

Πᾶσα δὲ ἄλλη ἐξίσωσις, τὰ ἓξ ταῦτα στοιχεῖα συνδέουσα, πρέπει νὰ καταντᾷ ταὐτότης, ὅταν ἐν αὐτῇ ἀντικατασταθῶσι τὰ Γ, α, β, ὑπὸ τῶν τιμῶν αὐτῶν

$$\Gamma = 180^0 - A - B. \qquad \alpha = \frac{\gamma\, \eta\mu A}{\eta\mu(A+B)}, \quad \beta = \frac{\gamma\, \eta\mu B}{\eta\mu(A+B)},$$

ἃς παρέχουσιν αἱ ἐξισώσεις (ε)· διότι, ἂν μὴ ἐγίνετο ταὐτότης, θὰ συνέδεε τὰ ἐν αὐτῇ περιεχόμενα γ, Α, Β, ὅπερ ἄτοπον· διότι ταῦτα οὐδαμῶς συνδέονται πρὸς ἄλληλα καὶ δύνανται νὰ μεταβάλλωνται κατὰ τὸ δοκοῦν.

Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι πᾶσα ἄλλη ἐξίσωσις, τὰ ἓξ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου συνδέουσα, πρέπει νὰ εἶναι ἀκολούθημα τῶν ἐξισώσεων (ε), τουτέστι νὰ προκύπτῃ ἐξ αὐτῶν ἁρμοδίως συνδυαζομένων καὶ τοῦ τριγώνου μηδαμῶς παρεμβαίνοντος· διότι, ἂν εἰς τὴν ταὐτότητα, τὴν ὁποίαν δίδει, ὅταν τεθῶσιν ἐν αὐτῇ αἱ τιμαὶ τῶν Γ, α, β, ἀντικαταστήσωμεν πάλιν τὰς τιμὰς ταύτας ὑπὸ τῶν γραμμάτων Γ, α, β, θὰ εὕρωμεν προφανῶς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν.

Ἂν καὶ ἐκ τῶν ἐξισώσεων (ε) δύνανται νὰ εὑρεθῶσιν αἱ λοιπαί, ἀπεδείξαμεν ἐν τούτοις τὰς ἐξισώσεις (5), (9) καὶ (10), ἀνεξαρτήτως τῶν (ε), καὶ ἀμέσως ἐκ τοῦ σχήματος· διότι τοῦτο ἐφάνη ἡμῖν εὐκολώτερον.

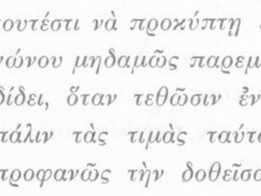
Ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

53. Ἔστω τυχὸν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ ἐκ τῆς κορυφῆς Α κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ ἡ ΑΔ· ἐὰν παραστήσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου διὰ τοῦ Ε, θὰ εἶναι (σχ. 28)

$$E = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma . A\Delta = \frac{1}{2}\, \alpha . A\Delta.$$

Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ εὑρίσκομεν $A\Delta = A\Gamma . \eta\mu\Gamma = \beta . \eta\mu\Gamma$·

ὅθεν ἕπεται $$E = \frac{1}{2}\, \alpha\beta . \eta\mu\Gamma. \qquad (11)$$



Σχῆμα 28

Τουτέστι, τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται τῷ ἡμίσει τοῦ γινομένου δύο τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπ᾿ αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.

Ἐπειδὴ εἶναι (ἐδ. 21), $\eta\mu\Gamma = 2\ \eta\mu\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)$,

ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὰ $\eta\mu\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)$, $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)$ ὑπὸ τῶν τιμῶν αὐτῶν (8), εὑρίσκομεν

$$\eta\mu\Gamma = \frac{2}{\alpha\beta}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

καὶ ἂν ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ $\eta\mu\Gamma$ τεθῇ εἰς τὴν ἰσότητα (11), προκύπτει

$$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} \qquad (12)$$

διὰ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

Σημ. Ἐὰν τυχὸν τετράπλευρον διαιρεθῇ εἰς τρίγωνα διὰ τῶν διαγωνίων αὐτοῦ καὶ ἐφαρμοσθῇ ἐπ᾿ αὐτῶν ὁ τύπος (11), εὑρίσκεται ἡ ἑξῆς πρότασις.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου ἰσοῦται τῷ ἡμίσει τοῦ γινομένου τῶν διαγωνίων αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπ᾿ αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.

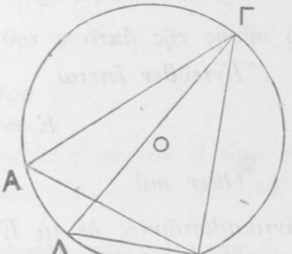
* Ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

54. Ἔστω τυχὸν τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$ καὶ εἰς αὐτὸ περιγεγραμμένος κύκλος ὁ $A\Delta B\Gamma A$· ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς Γ ἀχθῇ ἡ διάμετρος $\Gamma O\Delta$, ἥντινα παριστῶμεν διὰ δ, καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ ΔB, γίνεται ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ $B\Delta\Gamma$, ἐξ οὗ εὑρίσκομεν

$$B\Gamma = \Gamma\Delta\,.\,\eta\mu\Delta\cdot$$

ἀλλ᾿ ἡ γωνία Δ εἶναι ἴση τῇ A (ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα)· ὅθεν

$$\alpha = \delta\,.\,\eta\mu A$$



Σχῆμα 29.

καὶ ἑπομένως $$\delta = \frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} \qquad (13)$$

τουτέστιν, ἡ διάμετρος τοῦ εἰς τρίγωνον περιγεγραμμένου κύκλου ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῆς τυχούσης αὐτοῦ πλευρᾶς πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι γωνίας.

Ἐκ τῆς ἰσότητος $\delta = \frac{\alpha}{\eta\mu A}$ *ἕπεται καὶ*

$$\delta = \frac{\alpha.\beta.\gamma}{\beta.\gamma.\eta\mu A}.$$

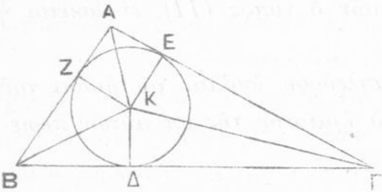
καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\beta\gamma\eta\mu A = 2.E$, *συνάγεται*

$$2.E.\delta = \alpha.\beta.\gamma \quad \text{ἢ} \quad E = \frac{\alpha.\beta.\gamma}{2\delta}.$$

ἤτοι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν τριῶν αὐτοῦ πλευρῶν, διαιρεθέντι διὰ τοῦ διπλασίου τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

* Ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

55. *Ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου Κ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου, ἀχθῶσιν, ἐπὶ τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου αἱ εὐθεῖαι ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, διαιρεῖται τὸ τρίγωνον εἰς τρία, ἔχοντα βάσεις μὲν τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου, ὕψη δὲ τὰς ἀκτῖνας ΚΔ, ΚΕ, ΚΖ τοῦ κύκλου (αἵτινες εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας)· ἐπομένως τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν εἶναι*



Σχῆμα 30.

$$\frac{1}{2}\alpha.\varrho, \quad \frac{1}{2}\beta.\varrho, \quad \frac{1}{2}\gamma.\varrho,$$

ϱ οὔσης τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου.

Ἐντεῦθεν ἕπεται

$$E = \frac{1}{2}\varrho(\alpha+\beta+\gamma) = \varrho.\tau.$$

Ὅθεν καὶ $\varrho = \frac{E}{\tau}.$

ἀντικαθιστῶντες δὲ τὸ Ε ὑπὸ τῆς τιμῆς αὐτοῦ (12) εὑρίσκομεν

$$\varrho = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)\ (\tau-\beta)\ (\tau-\gamma)}{\tau}} \qquad (14)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Ἐπίλυσις *τριγώνου λέγεται ἡ διὰ τῶν ἀριθμῶν εὕρεσις τῶν στοιχείων αὐτοῦ, ὅταν δοθῶσιν ἀρκετὰ ἐξ αὐτῶν (ἰδὲ εἰσαγωγήν).*

Ἐπίλυσις τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων.

56. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ὁρίζεται ἐντελῶς, ὅταν δοθῶσιν ἢ μία πλευρὰ αὐτοῦ (ἡ ὑποτείνουσα ἢ μία τῶν καθέτων) καὶ μία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, ἢ δύο πλευραὶ αὐτοῦ (αἵτινες δυνατὸν νὰ εἶναι ἢ αἱ δύο κάθετοι, ἢ μία κάθετος καὶ ἡ ὑποτείνουσα). Διὰ τοῦτο, ἐν τῇ ἐπιλύσει τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων διακρίνομεν τὰς ἑπομένας τέσσαρας περιπτώσεις.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 1η

57. Δοθείσης τῆς ὑποτεινούσης α ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ μιᾶς τῶν ὀξειῶν αὐτοῦ γωνιῶν, ἔστω τῆς Β, εὑρεῖν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.

Πρὸς εὕρεσιν τῶν ζητουμένων, ἔχομεν τοὺς τύπους (1΄) τοῦ ἐδ. 46.

$$\Gamma = 90^0 - B, \qquad \beta = \alpha\ \eta\mu\ B, \qquad \gamma = \alpha\ \sigma\upsilon\nu\ B.$$

Ἐκ τοῦ πρώτου εὑρίσκομεν ἀμέσως τὴν γωνίαν Γ, ἐκ δὲ τῶν ἄλλων, λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν ἴσων, εὑρίσκομεν

$$\lambda o\gamma\ \beta = \lambda o\gamma\ \alpha + \lambda o\gamma\ \eta\mu\ B \qquad \lambda o\gamma\ \gamma = \lambda o\gamma\ \alpha + \lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu\ B\cdot$$

ἐξ ὧν λογιζόμεθα τὰς πλευρὰς β καὶ γ τῇ βοηθείᾳ τῶν λογαρίθμων.

Παραδείγματα.

1ον) Ἔστωσαν δεδομένα α = 1598 μέτρα
καὶ $B = 32^0\ 18'\ 30''$.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς Γ, ἀφαιροῦμεν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν Β ἀπὸ $89^0\ 59'\ 60''$ (τουτέστιν ἀπὸ 90^0) καὶ εὑρίσκομεν $\Gamma = 57^0\ 41'\ 30''$.

Λογισμὸς τῆς πλευρᾶς β.		***Λογισμὸς τῆς πλευρᾶς γ.***	
	$\beta = \alpha\ \eta\mu\ B$		$\gamma = \alpha\ \sigma\upsilon\nu\ B$
λογ α =	3,20358	λογ α =	3,20358
λογ ημ Β =	$\bar{1},72793$	λογ συν Β =	$\bar{1},92695$
λογ β =	2,93151	λογ γ =	3,13053
καὶ β =	854,1	καὶ γ =	1350,6.

Σημ. *Ἕκαστος τῶν λογαρίθμων, τοὺς ὁποίους λαμβάνομεν ἀμέσως* *ἐκ τῶν πινάκων, δύναται νὰ διαφέρῃ τοῦ ἀληθοῦς τὸ πολὺ κατὰ ἡμίσειαν μονάδα τῆς τελευταίας τάξεως· διὰ τοῦτο, ὁ λογ β, ὁ ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ δύο τοιούτων λογαρίθμων εὑρεθείς, δύναται νὰ διαφέρῃ τοῦ ἀληθοῦς τὸ πολὺ κατὰ μίαν μονάδα τῆς ῥηθείσης τάξεως· τοιαύτη δὲ διαφορὰ προξενεῖ (ὡς ἐκ τῶν πινάκων βλέπομεν) λάθος ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ β τὸ πολὺ* $\frac{1}{5}$ *τοῦ τελευταίου ψηφίου 1 (ὅπερ σημαίνει δέκατα)· ὥστε τὸ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς β συμβαῖνον λάθος δὲν ὑπερβαίνει τὰ* $\frac{2}{100}$ *τοῦ μέτρου. Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς γ συμβαῖνον λάθος δὲν εἶναι μεγαλήτερον τῶν* $\frac{3}{100}$ *τοῦ μέτρου.*

2ον) Ἔστωσαν δεδομένα $\alpha = 3955{,}8$ *μ. καὶ* $B = 76^0\,40'\,25''$.

$$\begin{array}{rrr} 89^0 & 59' & 60'' \\ 76^0 & 40' & 25'' \\ \hline \Gamma = 13^0, & 19' & 35''. \end{array}$$

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς β.		*Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ.*	
λογ α =	$\overline{3},59724$	λογ α =	$\overline{3},59724$
λογ ημ Β =	$\overline{1},98814$	λογ συν Β =	$\overline{1},36267$
λογ β =	3,58538	λογ γ =	2,95991
καὶ β =	3849,3	καὶ γ =	911,82
κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου.		κατὰ προσέγγισιν $\frac{2}{100}$ τοῦ μέτρου.	

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 2α

58. Δοθείσης μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, ἔστω τῆς β, καὶ μιᾶς τῶν ὀξειῶν αὐτοῦ γωνιῶν, εὑρεῖν τὰ λοιπὰ αὐτοῦ στοιχεῖα.

Ἐκ τῆς δοθείσης ὀξείας γωνίας εὑρίσκεται ἀμέσως καὶ ἡ ἄλλη· ἑπομένως ἀμφότεραι αἱ ὀξεῖαι γωνίαι δύνανται νὰ ὑποτεθῶσι γνωσταί.

Αἱ ἄγνωστοι πλευραί, α καὶ γ, θὰ εὑρεθῶσιν ἐκ τῶν τύπων

$$\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B} \qquad \text{καὶ} \qquad \gamma = \beta\ \sigma\varphi\ B = \frac{\beta}{\varepsilon\varphi\ B},$$

οἵτινες δίδουσι

$$\lambda o\gamma\ \alpha = \lambda o\gamma\ \beta - \lambda o\gamma\ \eta\mu\ B, \qquad \lambda o\gamma\ \gamma = \lambda o\gamma\ \beta + \lambda o\gamma\ \sigma\varphi\ B.$$

Παραδείγματα.

1ον) Ἔστωσαν δεδομένα $\beta = 895{,}5\,\mu.$ καὶ $\Gamma = 43^0\ 18'\ 20''$

$$\begin{array}{r} 89^0\ \ 59'\ \ 60'' \\ 43^0\ \ 18'\ \ 20'' \\ \hline B = 46^0\ \ 41'\ \ 40''. \end{array}$$

Εὕρεσις τῆς ὑποτεινούσης α.

$$\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B}$$

$$\begin{array}{lll} \lambda o\gamma\ \beta & = & 2{,}95207 \\ \lambda o\gamma\ \eta\mu\ B & = & \bar{1}{,}86196 \\ \hline \lambda o\gamma\ \alpha & = & 3{,}09011 \\ \text{καὶ}\ \alpha & = & 1230{,}57 \end{array}$$

κατὰ προσέγγισιν $\frac{3}{100}$ τοῦ μέτρου.

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ.

$$\gamma = \beta\ \sigma\varphi\ B$$

$$\begin{array}{lll} \lambda o\gamma\ \beta & = & 2{,}95207 \\ \lambda o\gamma\ \sigma\varphi\ B & = & \bar{1}{,}97430 \\ \hline \lambda o\gamma\ \gamma & = & 2{,}92637 \\ \text{καὶ}\ \gamma & = & 844{,}06 \end{array}$$

κατὰ προσέγγισιν $\frac{2}{100}$ τοῦ μέτρου.

2ον) Ἔστωσαν δεδομένα $\beta = 8530{,}4\,\mu.$ καὶ $B = 32^0\ 15'$

$$\begin{array}{r} 89^0\ \ 60' \\ 32^0\ \ 15' \\ \hline \Gamma = 57^0\ \ 45'. \end{array}$$

Εὕρεσις τῆς ὑποτεινούσης α.

$$\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B}$$

$$\begin{array}{lll} \lambda o\gamma\ \beta & = & 3{,}93097 \\ \lambda o\gamma\ \eta\mu\ B & = & \bar{1}{,}72723 \\ \hline \lambda o\gamma\ \alpha & = & 4{,}20374 \\ \text{καὶ}\ \alpha & = & 15986 \end{array}$$

κατὰ προσέγγισιν $\frac{4}{10}$ τοῦ μέτρου.

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ.

$$\gamma = \beta\ \sigma\varphi\ B$$

$$\begin{array}{lll} \lambda o\gamma\ \beta & = & 3{,}93097 \\ \lambda o\gamma\ \sigma\varphi\ B & = & 0{,}20000 \\ \hline \lambda o\gamma\ \gamma & = & 4{,}13097 \\ \text{καὶ}\ \gamma & = & 13520 \end{array}$$

κατὰ προσέγγισιν $\frac{3}{10}$ τοῦ μέτρου.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 3η

59. Δοθεισῶν τῶν δύο καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου εὑρεῖν τὴν ὑποτείνουσαν καὶ τὰς δύο ὀξείας αὐτοῦ γωνίας.

Πρὸς εὕρεσιν τῶν ζητουμένων ἔχομεν τοὺς τύπους

$$\varepsilon\varphi\ B = \frac{\beta}{\gamma}, \qquad \Gamma = 90^0 - B, \qquad \text{καὶ}\ \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2.$$

Ἐκ τοῦ πρώτου ἕπεται

$$\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ B = \lambda o\gamma\ \beta - \lambda o\gamma\ \gamma.$$

Ἐκ δὲ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκομεν διὰ τῶν λογαρίθμων τὴν γωνίαν Β, ἐξ ἧς καὶ τὴν Γ.

Ὁ τὴν ὑποτείνουσαν δίδων τύπος $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ *δὲν εἶναι κατάλληλος πρὸς τὴν χρῆσιν τῶν λογαρίθμων· διὰ τοῦτο, ἀφοῦ εὑρεθῇ ἡ γωνία Β, προσδιορίζεται καὶ ἡ ὑποτείνουσα α ἐκ τοῦ τύπου*

$$\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B}$$

ὅστις δίδει $\lambda o\gamma\ \alpha = \lambda o\gamma\ \beta - \lambda o\gamma\ \eta\mu\ B.$

Παραδείγματα.

1ον) Ἔστωσαν δεδομένα $\beta = 1593{,}8\ \mu.,\ \gamma = 8907{,}3\ \mu.$

Εὕρεσις τῆς γωνίας Β.

$$\varepsilon\varphi\ B = \frac{\beta}{\gamma}$$

$$\begin{array}{lrl} \lambda o\gamma\ \beta & = & 3{,}20244 \\ \lambda o\gamma\ \gamma & = & 3{,}94974 \\ \hline \lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ B & = & \bar{1}{,}25270 \\ \text{καὶ}\quad B & = & 10^0\ 8'\ 42'' \\ \text{ὅθεν καὶ}\quad \Gamma & = & 79^0\ 51'\ 18'' \end{array}$$

Εὕρεσις τῆς ὑποτεινούσης.

$$\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B}$$

$$\begin{array}{lrl} \lambda o\gamma\ \beta & = & 3{,}20244 \\ \lambda o\gamma\ \eta\mu\ B & = & \bar{1}{,}24585 \\ \hline \lambda o\gamma\ \alpha & = & 3{,}95659 \\ \text{ὅθεν καὶ}\ \alpha & = & 9048{,}8\ \mu. \end{array}$$

κατὰ προσέγγισιν $\frac{2}{10}$ *τοῦ μέτρου.*

2ον) Ἔστωσαν δεδομένα $\beta = 450{,}8\ \mu.$ *καὶ* $\gamma = 854{,}6\ \mu.$

Εὕρεσις τῆς γωνίας Β.

$$\varepsilon\varphi\ B = \frac{\beta}{\gamma}$$

$$\begin{array}{lrl} \lambda o\gamma\ \beta & = & 2{,}65398 \\ \lambda o\gamma\ \gamma & = & 2{,}93176 \\ \hline \lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ B & = & \bar{1}{,}72222 \\ \text{καὶ}\quad B & = & 27^0\ 48'\ 42'' \\ \text{ὅθεν καὶ}\quad \Gamma & = & 62^0\ 11'\ 18''. \end{array}$$

Εὕρεσις τῆς ὑποτεινούσης.

$$\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B}$$

$$\lambda o\gamma\, \beta \quad = \quad 2{,}65398$$
$$\lambda o\gamma\, \eta\mu\, B = \bar{1}{,}66892$$
$$\lambda o\gamma\, \alpha = \quad 2{,}98506$$
$$\kappa\alpha\grave{\iota}\ \alpha \quad = \quad 966{,}18\,\mu.$$

κατὰ προσέγγισιν $\frac{2}{100}$ *τοῦ μέτρου.*

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 4η

60. Δοθείσης τῆς ὑποτεινούσης α καὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας, ἔστω τῆς β, εὑρεῖν τὴν ἄλλην πλευρὰν καὶ τὰς δύο ὀξείας γωνίας.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς πλευρᾶς γ, ἔχομεν τὸν τύπον

$$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)\ (\alpha-\beta)$$

ὅθεν $$2\,.\,\lambda o\gamma\ \gamma = \lambda o\gamma\ (\alpha+\beta) + \lambda o\gamma\ (\alpha-\beta)$$

καὶ $$\lambda o\gamma\ \gamma = \frac{1}{2}\left(\lambda o\gamma\ (\alpha+\beta) + \lambda o\gamma\ (\alpha-\beta)\right).$$

Πρὸς εὕρεσιν τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ, δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν τὸν τύπον (ἐδ. 46)

$$\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha} \quad \check{\eta} \quad \sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\beta}{\alpha}\,.$$

ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν Γ καὶ ὡς ἑξῆς·

ἐπειδὴ εἶναι (ἐδ. 13)

$$\eta\mu\left(\frac{1}{2}\,\Gamma\right) = \sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\,\Gamma}{2}} \quad \kappa\alpha\grave{\iota} \quad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}\,\Gamma\right) = \sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\Gamma}{2}},$$

ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν τοῦ συν Γ εἰς τοὺς τύπους τούτους, λαμβάνομεν

$$\eta\mu\left(\frac{1}{2}\,\Gamma\right) = \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{2\alpha}}, \qquad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}\,\Gamma\right) = \sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}},$$

ὅθεν καὶ $$\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}\,\Gamma\right) = \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$$

καὶ $$\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}\,\Gamma\right) = \frac{1}{2}\left(\lambda o\gamma\ (\alpha-\beta) - \lambda o\gamma\ (\alpha+\beta)\right).$$

Διὰ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν $\frac{1}{2}\,\Gamma$, *ὅθεν καὶ τὴν Γ (χρειαζόμεθα δὲ πρὸς τοῦτο τοὺς αὐτοὺς λογαρίθμους τοὺς ὁποίους* *μετεχειρίσθημεν πρὸς εὕρεσιν τῆς πλευρᾶς γ)· εὑρεθείσης δὲ τῆς Γ, εὑρίσκεται καὶ ἡ Β ἀμέσως.*

* Παρατήρησις.

Ἐκ τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς προσδιορίζεται ἀκριβέστερον ἡ γωνία ἢ ἐκ τοῦ ἡμιτόνου καὶ ἐκ τοῦ συνημιτόνου αὐτῆς· διότι μικρόν τι σφάλμα περὶ τὴν ἐφαπτομένην συμβὰν προξενεῖ μικρὸν λάθος ἐπὶ τῆς γωνίας· τοὐναντίον, μικρὸν σφάλμα συμβὰν περὶ τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας (μάλιστα, ἂν ἡ γωνία ὀλίγον διαφέρῃ τῶν 90⁰), ἢ περὶ τὸ συνημίτονον (μάλιστα, ἂν ἡ γωνία εἶναι μικρὰ) δύναται νὰ προξενήσῃ μέγα λάθος ἐπὶ τῆς γωνίας. Ὅπως πεισθῇ τις περὶ τούτου, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσῃ ἐν τοῖς πίναξιν ὅτι ἡ διαφορὰ Δ δύο ἐφεξῆς λογαρίθμων τῶν ἐφαπτομένων ὑπερβαίνει πάντοτε τὰς διαφορὰς δ καὶ θ, δύο ἐφεξῆς λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων τοῦ αὐτοῦ τόξου. Ἐὰν λοιπὸν ὁ δοθεὶς λογάριθμος τῆς ἐφαπτομένης ἔχῃ σφάλμα ἴσον πρὸς μίαν μονάδα τῆς τελευταίας τάξεως, τὸ ἐπὶ τῆς γωνίας προξενούμενον λάθος θὰ εἶναι $\frac{60''}{\Delta}$ *περίπου (διότι εἰς λάθος Δ μονάδων τῆς εἰρημένης τάξεως ἀντιστοιχεῖ λάθος 60'' ἐπὶ τῆς γωνίας)· ἐνῷ τὸ αὐτὸ σφάλμα, εἰς τὸν λογάριθμον τοῦ ἡμιτόνου συμβάν, θὰ προξενήσῃ ἐπὶ τῆς γωνίας λάθος* $\frac{60''}{\delta}$ *περίπου· εἰς δὲ τὸν λογάριθμον τοῦ συνημιτόνου συμβάν, θὰ προξενήσῃ λάθος ἐπὶ τῆς γωνίας* $\frac{60}{\vartheta}$ *περίπου, ταῦτα δὲ εἶναι μεγαλήτερα· διότι, ὡς εἴπομεν, εἶναι* $\delta < \Delta$ *καὶ* $\theta < \Delta$.

Ὁ δὲ λόγος, δι᾽ ὃν αἱ διαφοραὶ Δ τῶν λογαρίθμων τῶν ἐφαπτομένων ὑπερβαίνουσι τὰς διαφορὰς τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων, εἶναι ὁ ἀκόλουθος.

Ἐπειδὴ εἶναι $$\varepsilon\varphi\ \varphi = \frac{\eta\mu\ \varphi}{\sigma\upsilon\nu\ \varphi}$$

ἕπεται $$\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ \varphi = \lambda o\gamma\ \eta\mu\ \varphi - \lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu\ \varphi.$$

Ἐὰν δὲ ἡ γωνία αὐξηθῇ κατὰ 1', ὁ λογάριθμος τοῦ ἡμιτόνου της θὰ αὐξηθῇ κατὰ δ, τοῦ δὲ συνημιτόνου θὰ ἐλαττωθῇ κατὰ θ· ἐπομένως ὁ λογάριθμος τῆς ἐφαπτομένης (ὅστις εἶναι πάντοτε ἴσος τῇ διαφορᾷ τῶν δύο πρώτων), θὰ αὐξηθῇ κατὰ $\delta + \theta$· *εἶναι λοιπὸν* $\Delta = \delta + \theta$.

Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι πρέπει πάντοτε, ὅταν πρόκειται νὰ εὑρεθῇ γωνία τις ἐκ τῶν τριγωνομετρικῶν αὐτῆς ἀριθμῶν, νὰ μεταχειριζώμεθα εἰ δυνατὸν τὴν ἐφαπτομένην.

Παραδείγματα.

1ον) Ἔστωσαν δεδομένα $\alpha = 7450{,}6\ \mu.$ $\beta = 2971{,}8\ \mu.$

$$\alpha + \beta = 10422{,}4$$
$$\alpha - \beta = 4478{,}8.$$

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ.

$$\gamma = \sqrt{(\alpha+\beta).(\alpha-\beta)}$$
$$\lambda o\gamma\ (\alpha - \beta) = 3{,}65116$$
$$\lambda o\gamma\ (\alpha + \beta) = \underline{4{,}01797}$$
$$\text{ἄθροισμα}\quad 7{,}66913$$
$$\lambda o\gamma\ \gamma = 3{,}83456$$
$$\gamma = 6832{,}2$$

κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου.

Εὕρεσις τῆς γωνίας Γ.

$$\varepsilon\varphi \frac{1}{2}\,\Gamma = \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$$
$$\lambda o\gamma\ (\alpha - \beta) = 3{,}65116$$
$$\lambda o\gamma\ (\alpha + \beta) = \underline{4{,}01797}$$
$$\text{διαφορὰ}\quad 1{,}63319$$
$$\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi \left(\frac{1}{2}\,\Gamma\right) = \bar{1}{,}81659$$
$$\text{καὶ } \frac{1}{2}\,\Gamma = 33^0 14' 45''\cdot \text{ προσέγ. } \frac{1''}{28}$$
$$\text{ὅθεν } \Gamma = 66^0 29' 30''\cdot \text{ προσέγ. } \frac{1''}{14}$$
$$\text{καὶ } B = 23^0\ \ 30'\ \ 30''.$$

2ον) Ἔστωσαν δεδομένα $\alpha = 487\ \mu.$ $\beta = 408{,}5\ \mu.$

$$\alpha + \beta = 895{,}5$$
$$\alpha - \beta = 78{,}5$$

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ.

$$\lambda o\gamma\ (\alpha - \beta) = 1{,}89487$$
$$\lambda o\gamma\ (\alpha + \beta) = \underline{2{,}95207}$$
$$\text{ἄθροισμα}\quad 4{,}84694$$
$$\lambda o\gamma\ \gamma = 2{,}42347$$
$$\text{ὅθεν } \gamma = 265{,}14$$

κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$ τοῦ μέτρου.

Εὕρεσις τῆς γωνίας Γ.

$$\lambda o\gamma\ (\alpha - \beta) = 1{,}89487$$
$$\lambda o\gamma\ (\alpha + \beta) = \underline{2{,}95207}$$
$$\text{διαφορὰ}\quad \bar{2}{,}94280$$
$$\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi \left(\frac{1}{2}\,\Gamma\right) = \bar{1}{,}47140$$
$$\text{ὅθεν } \frac{1}{2}\,\Gamma = 16^0\ 29'\ 34''$$
$$\left(\text{προσέγ. } 1''\,\frac{1}{2}\right)$$
$$\text{καὶ } \Gamma = 32^0\ 59'\ 8''\ (\text{προσέγ. } 3'')\cdot$$
$$\text{ὅθεν καὶ } B = 57^0\ \ 0'\ \ 52''.$$

Ἐπίλυσις τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων ἐν γένει.

61. Τὸ εὐθύγραμμον τρίγωνον ὁρίζεται ἐντελῶς, ὅταν δοθῶσιν ἢ μία πλευρὰ αὐτοῦ καὶ δύο γωνίαι (καὶ ἡ πρὸς τὴν πλευρὰν θέσις αὐτῶν), ἢ δύο πλευραὶ καὶ μία γωνία (ἥτις δύναται νὰ εἶναι ἢ ἡ ὑπὸ τῶν δύο πλευρῶν περιεχομένη ἢ ἡ ἀντικειμένη εἰς τὴν μεγαλητέραν ἐξ αὐτῶν), ἢ αἱ τρεῖς πλευραὶ αὐτοῦ.

Διὰ ταῦτα, ἐν τῇ ἐπιλύσει τῶν τριγώνων διακρίνομεν τὰς ἑπομένας τέσσαρας περιπτώσεις.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 1η

62. Δοθείσης μιᾶς πλευρᾶς α καὶ δύο γωνιῶν τοῦ τριγώνου εὑρεῖν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.

Ἡ τρίτη γωνία εὑρίσκεται ἀμέσως ἐκ τῆς ἰσότητος

$$A + B + \Gamma = 180^0,$$

αἱ δὲ ζητούμεναι πλευραὶ β καὶ γ δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων (4) τοῦ ἐδ. 48·

$$\beta = \frac{\alpha\, \eta\mu\, B}{\eta\mu\, A} \qquad \gamma = \frac{\alpha\, \eta\mu\, \Gamma}{\eta\mu\, A},$$

ἐξ ὧν λαμβάνομεν τοὺς πρὸς τὴν χρῆσιν τῶν λογαρίθμων καταλλήλους τύπους

$$\lambda o\gamma\, \beta = \lambda o\gamma\, \alpha + \lambda o\gamma\, \eta\mu\, B - \lambda o\gamma\, \eta\mu\, A$$
$$\lambda o\gamma\, \gamma = \lambda o\gamma\, \alpha + \lambda o\gamma\, \eta\mu\, \Gamma - \lambda o\gamma\, \eta\mu\, A.$$

Παράδειγμα.

Ἔστωσαν δεδομένα

$$\alpha = 752{,}8\ \mu. \qquad B = 67^0\ \ 33'\ \ 10'' \qquad \Gamma = 79^0\ \ 40'\cdot$$

ζητοῦνται δὲ αἱ πλευραὶ β, γ καὶ ἡ γωνία Α καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

Ἐν πρώτοις, εἶναι

$$B + \Gamma = 147^0\ \ 13'\ \ 10''$$

ὅθεν $$A = 32^0\ \ 36'\ \ 50''.$$

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς β.

$$\beta = \frac{\alpha\ \eta\mu\ B}{\eta\mu\ A}$$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\ \alpha &= 2{,}87668 \\ \lambda o\gamma\ \eta\mu\ B &= \bar{1}{,}96578 \\ \ddot{\alpha}\theta\rho o\iota\sigma\mu\alpha\ & \ \ 2{,}84246 \\ \lambda o\gamma\ \eta\mu\ A &= \bar{1}{,}73354 \\ \lambda o\gamma\ \beta &= 3{,}10892 \\ \kappa\alpha\grave{\iota}\ \beta &= 1285{,}06 \end{aligned}$$

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ.

$$\gamma = \frac{\alpha\ \eta\mu\ \Gamma}{\eta\mu\ A}$$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\ \alpha &= 2{,}87668 \\ \lambda o\gamma\ \eta\mu\ \Gamma &= \bar{1}{,}99290 \\ \ddot{\alpha}\theta\rho o\iota\sigma\mu\alpha\ & \ \ 2{,}86958 \\ \lambda o\gamma\ \eta\mu\ A &= \bar{1}{,}73354 \\ \lambda o\gamma\ \gamma &= 3{,}13604 \\ \kappa\alpha\grave{\iota}\ \gamma &= 1367{,}84 \end{aligned}$$

κατὰ προσέγγισιν $\frac{3}{100}$ *τοῦ μέτρου.*

Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ.

$$E = \frac{1}{2}\alpha\beta\ \eta\mu\Gamma.$$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\ \alpha &= 2{,}87668 \\ \lambda o\gamma\ \beta &= 3{,}10892 \\ \lambda o\gamma\ \eta\mu\ \Gamma &= \bar{1}{,}99290 \\ \lambda o\gamma\ (2E) &= 5{,}97850 \\ \kappa\alpha\grave{\iota}\quad 2E &= 951700\ \tau\varepsilon\tau\rho.\ \mu\acute{\varepsilon}\tau\rho\alpha. \\ \ddot{o}\theta\varepsilon\nu\quad E &= 475850\ \tau\varepsilon\tau\rho.\ \mu\acute{\varepsilon}\tau\rho\alpha. \end{aligned}$$

Σημ. *Ὁ λογ (2E) δύναται νὰ διαφέρῃ τοῦ ἀληθοῦς (ἐδ. 56, Σημ.) τὸ πολὺ κατὰ* $2\frac{1}{2}$ *μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως. Ἐπειδὴ δὲ (ὡς ἐκ τῶν πινάκων βλέπομεν), ἂν αὐξηθῇ ὁ λογάριθμος οὗτος κατὰ 5 μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως, ὁ ἀριθμὸς 2E αὐξάνει κατὰ 100, ἕπεται ὅτι τὸ ἐπὶ τοῦ 2E συμβαῖνον λάθος εἶναι μικρότερον τῶν 50 τ. μ. καὶ ἑπομένως τὸ ἐπὶ τοῦ E συμβαῖνον λάθος εἶναι μικρότερον τῶν 25 τετρ. μέτρων.*

Παρατήρησις.

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον $E = \frac{1}{2}\alpha\beta\ \eta\mu\Gamma$, *ἀντικαταστήσωμεν τὸ β ὑπὸ τῆς τιμῆς αὐτοῦ* $\beta = \frac{\alpha\ \eta\mu B}{\eta\mu A}$, *εὑρίσκομεν*

$$E = \frac{1}{2}\alpha^2\frac{\eta\mu\ B.\eta\mu\ \Gamma}{\eta\mu\ A}.$$

τὸν δὲ τύπον τοῦτον μεταχειριζόμεθα, ὅταν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν E ἀμέσως ἐκ τῶν δεδομένων καὶ πρὶν εὕρωμεν τὰς πλευρὰς β καὶ γ.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 2α

63. Δοθεισῶν δύο πλευρῶν α, β τοῦ τριγώνου καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας Γ, εὑρεῖν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.

Πρὸς εὕρεσιν τῶν ζητουμένων, μεταχειριζόμεθα τὸν τύπον τοῦ ἐδ. 50.

$$\frac{\varepsilon\varphi \frac{1}{2}(A-B)}{\varepsilon\varphi \frac{1}{2}(A+B)} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}.$$

ἐπειδὴ ἐδόθη ἡ γωνία Γ, εἶναι δὲ $A+B+\Gamma=180^0$,

ἕπεται $$A+B=180^0-\Gamma$$

καὶ $$\frac{1}{2}(A+B)=90^0-\frac{1}{2}\Gamma\cdot$$

ὥστε ὁ προκείμενος τύπος γίνεται

$$\varepsilon\varphi \frac{1}{2}(A-B)=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\cdot\sigma\varphi\frac{1}{2}\Gamma\cdot$$

ὅθεν $\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi \frac{1}{2}(A-B)=\lambda o\gamma\ (\alpha-\beta)+\lambda o\gamma\ \sigma\varphi \frac{1}{2}\Gamma-\lambda o\gamma\ (\alpha+\beta).$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκομεν τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν γωνιῶν Α καὶ Β· παριστῶντες δὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν ταύτην διὰ Δ, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{2}(A-B)=\Delta$$

ἀλλὰ καὶ $$\frac{1}{2}(A+B)=90^0-\frac{1}{2}\Gamma\cdot$$

ὅθεν $$A=90^0-\frac{1}{2}\Gamma+\Delta$$

καὶ $$B=90^0-\frac{1}{2}\Gamma-\Delta.$$

Μετὰ τὴν εὕρεσιν τῶν γωνιῶν Α καὶ Β εὑρίσκομεν καὶ τὴν πλευρὰν γ ἐκ τοῦ τύπου $\gamma=\frac{\alpha\ \eta\mu\ \Gamma}{\eta\mu\ A}$.

Σημ. *Ὑπεθέσαμεν ὅτι αἱ δεδομέναι πλευραὶ α,β εἶναι ἄνισοι· ἂν εἶναι ἴσαι, τὸ πρόβλημα λύεται ἁπλούστατα· διότι εἶναι* $A=B=90^0-\frac{1}{2}\Gamma$,

καὶ $$\gamma=2\,\alpha\,\eta\mu\frac{1}{2}\Gamma.$$

Παράδειγμα.

Ἔστωσαν δεδομένα $\alpha=5897{,}2$ μ., $\beta=1409{,}8$ μ., $\Gamma=39^0\,15'$.

$$\alpha+\beta=7307$$
$$\alpha-\beta=4487{,}4$$
$$\frac{1}{2}\Gamma=19^0\,37'\,30''.$$

Εὕρεσις τῶν γωνιῶν Α καὶ Β.

$$\varepsilon\varphi\,\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\cdot\sigma\varphi\,\frac{1}{2}\varGamma$$

$$\lambda o\gamma\ (\alpha-\beta)=3{,}65200$$
$$\lambda o\gamma\ \sigma\varphi\,\frac{1}{2}\varGamma=0{,}44785$$
$$\text{ἄθροισμα}\quad 4{,}09985$$
$$\lambda o\gamma\ (\alpha+\beta)=3{,}86374$$
$$\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\,\frac{1}{2}(A-B)=0{,}23611\cdot$$

ἐξ οὗ $\quad \frac{1}{2}(A-B)=59^0\ \ 51'\ \ 35''$ (προσέγγισις $4''$)·

ἐπειδὴ δὲ $\frac{1}{2}(A+B)=70^0\ \ 22'\ \ 30''=90^0-\frac{1}{2}\varGamma,$

εὑρίσκομεν
$$A=130^0\ \ 14'\ \ 5''$$
$$B=\ 10^0\ \ 30'\ \ 55''.$$

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ.

$$\gamma=\alpha\,\frac{\eta\mu\,\varGamma}{\eta\mu\,A}$$

$$\lambda o\gamma\ \alpha=3{,}77064$$
$$\lambda o\gamma\ \eta\mu\,\varGamma=\overline{1},80120$$
$$\text{ἄθροισμα}\quad 3{,}57184$$
$$\lambda o\gamma\ \eta\mu\,A=\overline{1},88275$$
$$\lambda o\gamma\ \gamma=3{,}68909$$
$$\text{καὶ}\ \gamma=4887{,}56$$

Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ Ε.

$$2E=\alpha\beta\,\eta\mu\,\varGamma$$

$$\lambda o\gamma\,\alpha=3{,}77064$$
$$\lambda o\gamma\,\beta=3{,}14916$$
$$\lambda o\gamma\,\eta\mu\,\varGamma=\overline{1},80120$$
$$\lambda o\gamma\,(2E)=6{,}72100$$
$$2E=5260120\ \text{τ. μ.}$$

$E=2630060$ τ. μ.· $\quad$ προσέγγισις 94 τ. μέτρα·

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 3η

64. Δοθεισῶν δύο πλευρῶν α καὶ β τοῦ τριγώνου καὶ τῆς γωνίας Α, ἥτις εἶναι ἀπέναντι μιᾶς τῶν πλευρῶν τούτων, εὑρεῖν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου.

Πρὸς εὕρεσιν τῶν ζητουμένων, ἔχομεν τοὺς τύπους:

$$\eta\mu\, B = \frac{\beta\, \eta\mu\, A}{\alpha}, \qquad A + B + \Gamma = 180^0, \qquad \gamma = \frac{\alpha\, \eta\mu\, \Gamma}{\eta\mu\, A}.$$

Ἐκ τοῦ πρώτου εὑρίσκεται ἡ γωνία Β, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου ἡ Γ καὶ ἐκ τοῦ τρίτου, μετὰ τὴν εὕρεσιν τῆς Γ, εὑρίσκεται ἡ πλευρὰ γ.

Ἵνα τὸ πρόβλημα ᾖ δυνατόν, πρέπει ἡ τιμὴ τοῦ ημ Β νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὴν μονάδα· τουτέστι νὰ εἶναι $\frac{\beta\, \eta\mu\, A}{\alpha} \leqq 1$,

$$\text{ἤτοι} \quad \beta\, \eta\mu\, A \leqq \alpha \cdot \qquad (\theta)$$

τούτου δὲ συμβαίνοντος, ἂν παραστήσωμεν διὰ Δ τὴν μικροτέραν τῶν 90⁰ γωνίαν, τὴν ἔχουσαν ἡμίτονον τὸ $\frac{\beta\, \eta\mu\, A}{\alpha}$, *πρέπει νὰ λάβωμεν (διότι μόνον τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας Β ἐδόθη)*

$$\text{ἢ} \quad B = \Delta \quad \text{καὶ ἑπομένως} \quad \Gamma = 180^0 - A - \Delta$$

$$\text{ἢ} \quad B = 180^0 - \Delta \quad \text{καὶ ἑπομένως} \quad \Gamma = \Delta - A.$$

Ἀλλ' ἂν μὲν εἶναι $\beta < \alpha$, *θὰ εἶναι καὶ* $\beta\, \eta\mu\, A < \alpha$· *διότι τὸ* $\beta\, \eta\mu\, A$ *δὲν ὑπερβαίνει τὸ β, ἑπομένως τὸ πρόβλημα εἶναι τότε δυνατόν· ἔχει ὅμως μίαν μόνην λύσιν· διότι ἐκ τῆς ἰσότητος*

$$\eta\mu\, \Delta = \frac{\beta\, \eta\mu\, A}{\alpha}$$

ἕπεται (ἐπειδὴ $\beta < \alpha$*)* $\qquad \eta\mu\, \Delta < \eta\mu\, A$·

ἐξ οὗ βλέπομεν ὅτι ἡ ὀξεῖα γωνία Δ εἶναι τότε μικροτέρα τῆς Α· δὲν δυνάμεθα λοιπὸν νὰ λάβωμεν τὴν δευτέραν τιμὴν τῆς Β, ἥτις θὰ παρεῖχεν ἀρνητικὴν τιμὴν τῆς Γ· ὥστε ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ θὰ λάβωμεν

$$B = \text{τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ } \Delta$$

$$\Gamma = 180^0 - A - \Delta.$$

Ὅτι δὲ ἡ τιμὴ αὕτη τῆς Γ εἶναι θετική, καὶ ὅταν ἡ Α εἶναι ἀμβλεῖα, φαίνεται ἐκ τῆς ἀνισότητος (θ), ἥτις δεικνύει, ὅτι ἡ ὀξεῖα γωνία $180^0 - A$ *εἶναι μεγαλητέρα τῆς Δ.*

Ἐὰν εἶναι $\beta = \alpha$, *θὰ εἶναι καὶ* $B = A$· *ὅθεν* $\Gamma = 180^0 - 2A$, *ἡ δὲ λύσις αὕτη εἶναι παραδεκτή, ἐὰν ἡ δοθεῖσα γωνία Α εἶναι ὀξεῖα.*

Ἐὰν τέλος εἶναι $\beta > \alpha$, ἀνάγκη νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἀνισότης:

$$\beta \ \eta\mu \ A \leqq \alpha\cdot$$

τούτου δὲ συμβαίνοντος, αἱ τιμαὶ τῶν γωνιῶν B καὶ Γ εἶναι

ἢ $B =$ τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ Δ καὶ ἑπομένως $\Gamma = 180^0 - A - \Delta$

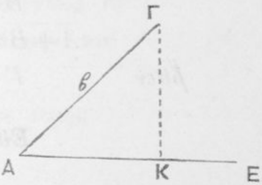
ἢ $B = 180^0 - \Delta$ καὶ ἑπομένως $\Gamma = \Delta - A\cdot$

εἶναι δὲ ἀμφότεραι αἱ λύσεις αὗται παραδεκταί, ἐὰν ἡ δοθεῖσα γωνία Α εἶναι ὀξεῖα· διότι τότε εἶναι μικροτέρα τῆς ὀξείας Δ (ἐπειδὴ $\eta\mu\ \Delta > \eta\mu\ A$), ἑπομένως αἱ τιμαὶ ἀμφοτέρων τῶν γωνιῶν B καὶ Γ περιλαμβάνονται, ὡς πρέπει, μεταξὺ 0^0 καὶ 180^0.

Παρατηρητέον δέ, ὅτι αἱ δύο αὗται λύσεις καταντῶσιν εἰς μίαν, ἐὰν εἶναι $\beta\ \eta\mu\ A = \alpha$· διότι τότε ἡ γωνία Δ γίνεται ὀρθή, ὥστε αἱ δύο τιμαὶ τῆς B (ἑπομένως καὶ τῆς Γ) γίνονται ἴσαι.

Ὁ περιοριορισμός, ὁ ἀπαιτούμενος, ἵνα τὸ πρόβλημα λυθῇ, δύναται νὰ ἑρμηνευθῇ γεωμετρικῶς ὡς ἕπεται.

Ἔστω ἡ γωνία $\Gamma A E$ ἴση τῇ δοθείσῃ A καὶ ἡ $A\Gamma$ ἴση τῇ β· καὶ ἐκ τοῦ Γ κάθετος ἐπὶ τὴν AE ἡ ΓK· ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $A\Gamma K$ εὑρίσκομεν



Σχῆμα 31.

$$\Gamma K = A\Gamma \ \eta\mu \ A = \beta \ \eta\mu \ A\cdot$$

ὥστε ὁ ῥηθεὶς περιορισμὸς εἶναι $\Gamma K \leqq \alpha$·

τουτέστιν ἡ πλευρὰ α, ἡ εἰς τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ὑποτείνουσα, πρέπει νὰ μὴ εἶναι μικροτέρα τῆς καθέτου ἥτις καταβιβάζεται ἐκ τοῦ πέρατος τῆς μιᾶς πλευρᾶς, ἥτις ἐλήφθη ἴση τῇ β, ἐπὶ τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς δοθείσης γωνίας.

Τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα εἶναι γνωστὰ καὶ ἐκ τῶν στοιχείων τῆς γεωμετρίας.

Παραδείγματα.

1ον

Ἔστωσαν δεδομένα: $\alpha = 893{,}8$ μέτρ. $\beta = 697{,}4$ μέτρ.

$$A = 58^0 \ \ 13' \ \ 20''\cdot$$

ζητοῦνται δὲ αἱ γωνίαι B, Γ καὶ ἡ πλευρὰ γ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

Ἐπειδὴ εἶναι $\alpha > \beta$, τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐπιδέχεται μίαν καὶ μόνον μίαν λύσιν.

Εὕρεσις τῆς γωνίας Β.

$$\eta\mu\ B = \frac{\beta\ \eta\mu A}{\alpha}$$

$$\begin{array}{rl}
\lambda o\gamma\ \beta = & 2,84348 \\
\lambda o\gamma\ \eta\mu\ A = & \overline{1},92947 \\
\hline
\breve{\alpha}\theta\rho o\iota\sigma\mu\alpha & 2,77295 \\
\lambda o\gamma\ \alpha = & 2,95124 \\
\hline
\lambda o\gamma\ \eta\mu\ B = & \overline{1},82171
\end{array}$$

καὶ $B = 41^0\ \ 33'\ \ 8''$. προσέγγισις $6''$.

Εὕρεσις τῆς γωνίας Γ.

$$\begin{array}{rlll}
A = & 58^0 & 13' & 20'' \\
B = & 41^0 & 33' & 8'' \\
\hline
A+B = & 99^0 & 46' & 28''
\end{array}$$

ὅθεν $\Gamma = 80^0\ \ 13'\ \ 32''$.

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ.

$$\gamma = \frac{\alpha\ \eta\mu\ \Gamma}{\eta\mu\ A}$$

$$\begin{array}{rl}
\lambda o\gamma\ \alpha = & 2,95124 \\
\lambda o\gamma\ \eta\mu\ \Gamma = & \overline{1},99365 \\
\hline
\breve{\alpha}\theta\rho o\iota\sigma\mu\alpha & 2,94489 \\
\lambda o\gamma\ \eta\mu\ A = & \overline{1},92947 \\
\hline
\lambda o\gamma\ \gamma = & 3,01542
\end{array}$$

καὶ $\gamma = 1036,14\ \mu.$ προσέγγισις $\frac{4}{100}$.

Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ Ε.

$$2\,E = \beta\,\gamma\,\eta\mu\ A$$

$$\begin{array}{rl}
\lambda o\gamma\ \beta = & 2,84348 \\
\lambda o\gamma\ \gamma = & 3,01542 \\
\lambda o\gamma\ \eta\mu\ A = & \overline{1},92947 \\
\hline
\lambda o\gamma\ (2\,E) = & 5,78837
\end{array}$$

καὶ $2\,E = 614286$. προσέγγισις 36 τ. μ.

ὅθεν $E = 307143$. προσέγγισις 18 τ. μ.

$2^{ον}$

Ἔστωσαν δεδομένα:

$$\alpha = 1873{,}5 \ \mu. \qquad \beta = 2954 \ \mu.$$
$$A = 35^0 \ 12' \ 40'.$$

Εὕρεσις τῆς γωνίας Β.

$$\eta\mu\, B = \frac{\beta\, \eta\mu\, A}{\alpha}$$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\, \beta &= 3{,}47041 \\ \lambda o\gamma\, \eta\mu\, A &= \overline{1}{,}76087 \\ \text{ἄθροισμα}\quad & 3{,}23128 \\ \lambda o\gamma\, \alpha &= 3{,}27265 \\ \lambda o\gamma\, \eta\mu\, B &= \overline{1}{,}95863 \end{aligned}$$

ὅθεν $B = 65^0 \ 23' \ 10''$ προσέγγισις $15''$:

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\beta > \alpha$, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν καὶ

$$B = 114^0 \ 36' \ 50'',$$

ἤτοι τὴν παραπληρωματικὴν τῆς προηγουμένης τιμῆς· ὥστε ἔχομεν δύο λύσεις:

$1^η$ Λύσις.

$$\begin{aligned} B &= 65^0 \ 23' \ 10'' \\ A &= 35^0 \ 12' \ 40'' \\ A + B &= 100^0 \ 35' \ 50'' \end{aligned}$$

ὅθεν $\Gamma = 79^0 \ 24' \ 10''$.

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ.

$$\gamma = \frac{\alpha\, \eta\mu\, \Gamma}{\eta\mu\, A}$$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\, \alpha &= 3{,}27265 \\ \lambda o\gamma\, \eta\mu\, \Gamma &= \overline{1}{,}99253 \\ \text{ἄθροισμα}\quad & 3{,}26518 \\ \lambda o\gamma\, \eta\mu\, A &= \overline{1}{,}76087 \\ \lambda o\gamma\, \gamma &= 3{,}50431 \end{aligned}$$

καὶ $\gamma = 3193{,}9$

$2^α$ Λύσις.

$$\begin{aligned} B &= 114^0 \ 36' \ 50'' \\ A &= 35^0 \ 12' \ 40'' \\ A + B &= 149^0 \ 49' \ 30'' \end{aligned}$$

ὅθεν $\Gamma = 30^0 \ 10' \ 40''$

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ.

$$\gamma = \frac{\alpha\, \eta\mu\, \Gamma}{\eta\mu\, A}$$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\, \alpha &= 3{,}27265 \\ \lambda o\gamma\, \eta\mu\, \Gamma &= \overline{1}{,}70126 \\ \text{ἄθροισμα}\quad & 2{,}97391 \\ \lambda o\gamma\, \eta\mu\, A &= \overline{1}{,}76087 \\ \lambda o\gamma\, \gamma &= 3{,}21304 \end{aligned}$$

καὶ $\gamma = 1633{,}2$

$3^{ον}$

Ἔστωσαν δεδομένα:

$$\alpha = 397{,}5 \ \mu. \qquad \beta = 2549 \ \mu. \qquad A = 58^0 \ 12'.$$

Εὕρεσις τῆς γωνίας Β.

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\, \beta &= 3{,}40637 \\ \lambda o\gamma\, \eta\mu\, A &= \overline{1}{,}92936 \\ \text{ἄθροισμα} &\quad 3{,}33573 \\ \lambda o\gamma\, \alpha &= 2{,}59939 \\ \lambda o\gamma\, \eta\mu\, B &= 0{,}73634 \cdot \end{aligned}$$

ἐπειδὴ ὁ εὑρεθεὶς λογάριθμος τοῦ ἡμιτόνου τῆς Β εἶναι θετικὸς (ὅπερ σημαίνει, ὅτι ἡ παράστασις $\frac{\beta\, \eta\mu\, A}{\alpha}$, *ἤτοι τὸ* $\eta\mu\, B$, *ὑπερβαίνει τὴν μονάδα), ἡ γωνία Β δὲν ὑπάρχει καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.*

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 4η

65. Δοθεισῶν τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, εὑρεῖν τὰς γωνίας αὐτοῦ.

Πρὸς εὕρεσιν τῶν ζητουμένων, μεταχειριζόμεθα τοὺς ἀκολούθους τύπους :

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}A\right) = \sqrt{\frac{(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}{\tau\,(\tau-\alpha)}}$$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}B\right) = \sqrt{\frac{(\tau-\gamma)\,(\tau-\alpha)}{\tau\,(\tau-\beta)}}$$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}\Gamma\right) = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)\,(\tau-\beta)}{\tau(\tau-\gamma)}} \cdot$$

οἵτινες δίδουσι τοὺς πρὸς χρῆσιν τῶν λογαρίθμων καταλλήλους τύπους :

$$\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}A\right) = \frac{1}{2}\left\{ \lambda o\gamma\,(\tau-\beta) + \lambda o\gamma\,(\tau-\gamma) - \lambda o\gamma\, \tau - \lambda o\gamma\,(\tau-\alpha) \right\}$$

$$\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}B\right) = \frac{1}{2}\left\{ \lambda o\gamma\,(\tau-\gamma) + \lambda o\gamma\,(\tau-\alpha) - \lambda o\gamma\, \tau - \lambda o\gamma\,(\tau-\beta) \right\}$$

$$\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}\Gamma\right) = \frac{1}{2}\left\{ \lambda o\gamma\,(\tau-\alpha) + \lambda o\gamma\,(\tau-\beta) - \lambda o\gamma\, \tau + \lambda o\gamma\,(\tau-\gamma) \right\}$$

Παρατηρητέον δ' ὅτι, ἵνα τὸ πρόβλημα ᾖ δυνατόν, ἀνάγκη καὶ τὰ τρία ὑπόρριζα νὰ εἶναι θετικά· ἐπειδὴ δὲ εἶναι (σελ. 48)

$$\tau = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$$

$$\tau-\alpha = \frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)$$

$$\tau-\beta = \frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)$$

$$\tau-\gamma = \frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma),$$

ἐὰν ἐκ τῶν δοθεισῶν πλευρῶν ἡ α μηδετέρας τῶν ἄλλων εἶναι μικροτέρα, οἱ παράγοντες $(\tau-\beta)$, $(\tau-\gamma)$ καὶ ὁ τ θὰ εἶναι θετικοί, καὶ τὰ ὑπόρριζα θὰ ἔχωσιν ἑπομένως τὸ σημεῖον τοῦ παράγοντος $\tau-\alpha$, ὅστις, διὰ τοῦτο, ἀνάγκη νὰ εἶναι θετικός, ἤτοι $\alpha<\beta+\gamma$· ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι, ἵνα τὸ πρόβλημα λυθῇ, πρέπει μηδεμία τῶν δοθεισῶν πλευρῶν νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων· τούτου δὲ συμβαίνοντος, ἐμάθομεν ἐν τοῖς στοιχείοις τῆς γεωμετρίας, ὅτι τὸ τρίγωνον πάντοτε ὑπάρχει.

Παράδειγμα.

Ἔστωσαν δεδομένα

$\alpha = 597{,}8$ μ. $\quad \beta = 398{,}1$ μ. $\quad \gamma = 206$ μ.

Ἐν πρώτοις εἶναι

$$\alpha+\beta+\gamma = 1201{,}9\cdot$$

ὅθεν

$$\tau = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) = 600{,}95$$

$$\tau-\alpha = 3{,}15$$

$$\tau-\beta = 202{,}85$$

$$\tau-\gamma = 394{,}95$$

καὶ

$$\lambda o\gamma\ \tau = 2{,}77883$$

$$\lambda o\gamma\ (\tau-\alpha) = 0{,}49831$$

$$\lambda o\gamma\ (\tau-\beta) = 2{,}30718$$

$$\lambda o\gamma\ (\tau-\gamma) = 2{,}59654.$$

Εὕρεσις τῆς γωνίας Α.

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}A\right) = \sqrt{\frac{(\tau-\beta)\ (\tau-\gamma)}{\tau\,(\tau-\alpha)}}.$$

$$\lambda o\gamma\ (\tau-\beta) = 2{,}30718 \qquad \lambda o\gamma\ \tau = 2{,}77883$$
$$\lambda o\gamma\ (\tau-\gamma) = 2{,}59654 \qquad \lambda o\gamma\ (\tau-\alpha) = 0{,}49831$$
$$\text{ἄθροισμα}\quad 4{,}90372 \qquad \text{ἄθροισμα}\quad 3{,}27714$$

$$4{,}90372$$
$$3{,}27714$$
$$\text{διαφορὰ}\quad 1{,}62658$$
$$\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}A\right) = 0{,}81329$$

$$\text{καὶ}\quad \frac{1}{2}A = 81^0\ 15'\ 40'',7\cdot \quad \text{προσέγγισις}\ \frac{3''}{4}.$$
$$\text{καὶ}\quad A = 162^0\ 31'\ 21'',4\cdot \quad \text{προσέγγισις}\ 1''\frac{1}{2}.$$

Εὕρεσις τῆς γωνίας Β.

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}B\right) = \sqrt{\frac{(\tau-\gamma)\ (\tau-\alpha)}{\tau\ (\tau-\beta)}}$$

$$\lambda o\gamma\ (\tau-\gamma) = 2{,}59654 \qquad \lambda o\gamma\ \tau = 2{,}77883$$
$$\lambda o\gamma\ (\tau-\alpha) = 0{,}49831 \qquad \lambda o\gamma\ (\tau-\beta) = 2{,}30718$$
$$\text{ἄθροισμα}\quad 3{,}09485 \qquad \text{ἄθροισμα}\quad 5{,}08601$$

$$3{,}09485$$
$$5{,}08601$$
$$\text{διαφορὰ}\quad \bar{2}{,}00885$$
$$\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}B\right) = \bar{1}{,}00442$$

$$\text{καὶ}\quad \frac{1}{2}B = 5^0\ 46'\ 7''\cdot \quad \text{προσέγγισις}\ \frac{1''}{2}.$$
$$\text{καὶ}\quad B = 11^0\ 32'\ 14''\cdot \quad \text{προσέγγισις}\ 1''.$$

Εὕρεσις τῆς γωνίας Γ.

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}\Gamma\right) = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)\ (\tau-\beta)}{\tau\ (\tau-\gamma)}}$$

$$\lambda o\gamma\ (\tau-\alpha) = 0{,}49831 \qquad \lambda o\gamma\ \tau = 2{,}77883$$
$$\lambda o\gamma\ (\tau-\beta) = 2{,}30718 \qquad \lambda o\gamma\ (\tau-\gamma) = 2{,}59654$$
$$\text{ἄθροισμα}\quad 2{,}80549 \qquad \text{ἄθροισμα}\quad 5{,}37537$$

$$\begin{array}{r} \bar{2},80549 \\ \underline{5,37537} \\ \text{διαφορὰ} \quad \bar{3},43012 \end{array}$$

$$\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi \left(\frac{1}{2} \Gamma\right) = \bar{2},71506$$

καὶ $\frac{1}{2}\Gamma = 2^0 \quad 58' \quad 13''$. προσέγγισις $\frac{1''}{3}$

$\Gamma = 5^0 \quad 56' \quad 26''$. προσέγγισις $\frac{2''}{3}$.

Σημ. *Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν πρέπει νὰ εἶναι ἴσον μὲ 180⁰, δυνάμεθα νὰ βασανίσωμεν τὰς προηγουμένας πράξεις, ἀθροίζοντες τὰς εὑρεθείσας τιμὰς αὐτῶν καὶ παρατηροῦντες τὴν διαφορὰν τοῦ ἀθροίσματος ἀπὸ τῶν 180⁰.*

$$\begin{array}{rl} A = & 162^0 \quad 31' \quad 21'',4 \\ B = & 11^0 \quad 32' \quad 14'' \\ \Gamma = & 5^0 \quad 56' \quad 26'' \\ \hline A+B+\Gamma = & 180^0 \quad 0' \quad 1'',4. \end{array}$$

Τὸ κατὰ τὴν εὕρεσιν τῆς A συμβὰν λάθος ἦτο μικρότερον τοῦ $1''\,{}^1/_2$, τὸ δὲ κατὰ τὴν εὕρεσιν τῆς B μικρότερον τοῦ $1''$, τὸ δὲ κατὰ τὴν εὕρεσιν τῆς Γ μικρότερον τοῦ $\frac{2''}{3}$· ὥστε τὸ εἰς τὸ ἄθροισμα $A+B+\Gamma$ ὑπάρχον λάθος δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὰ $3''\ \frac{1}{6}$· ὅπερ ἀληθῶς συμβαίνει.

Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ Ε.

$$\mathrm{E} = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

$$\begin{array}{rl} \lambda o\gamma\,\tau = & 2,77883 \\ \lambda o\gamma\,(\tau-\alpha) = & 0,49831 \\ \lambda o\gamma\,(\tau-\beta) = & 2,30718 \\ \lambda o\gamma\,(\tau-\gamma) = & \underline{2,59654} \\ \text{ἄθροισμα} & 8,18086 \\ \lambda o\gamma\, E = & 4,09043 \end{array}$$

καὶ $E = 12314,8$ τ. μ.· προσέγγισις $\frac{3}{10}$ τοῦ τετρ. μέτρου.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 188 μ., μία δὲ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν εἶναι $18^0\ 14'$· *νὰ εὑρεθῶσι τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ· ἔτι δὲ τὸ ἐμβαδὸν καὶ ἡ περίμετρος αὐτοῦ.*

2) Ὀρθογωνίου τριγώνου μία τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι 1592,8μ., ἡ δὲ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία εἶναι τὰ $\frac{7}{10}$ *τῆς ὀρθῆς· νὰ εὑρεθῶσι τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου.*

3) Ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι 5497 μέτρα ἡ μία, καὶ 57,8 μ. ἡ ἄλλη· νὰ εὑρεθῶσιν αἱ γωνίαι καὶ ἡ ὑποτείνουσα.

4) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι διπλασία μιᾶς τῶν ἄλλων πλευρῶν· νὰ εὑρεθῶσιν αἱ γωνίαι αὐτοῦ.

5) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 404 μέτρα, ἡ δὲ ἑτέρα τῶν καθέτων πλευρῶν 125 μ.· νὰ εὑρεθῶσι τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου τούτου.

6) Τρίγωνόν τι ἔχει μίαν πλευρὰν ἴσην μὲ 12,5 μ., αἱ δὲ δύο προσκείμεναι γωνίαι εἶναι 18^0 *ἡ μία, καὶ* $98^0\ 12'$ *ἡ ἄλλη· νὰ εὑρεθῶσι τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.*

7) Ἰσοσκελές τι τρίγωνον ἔχει τὴν βάσιν του ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ ἑκατέρας τῶν ἄλλων πλευρῶν· νὰ εὑρεθῶσιν αἱ γωνίαι αὐτοῦ.

8) Ἰσοσκελοῦς τινος τριγώνου ἡ βάσις εἶναι 4890 μέτρα, ἡ δὲ γωνία τῆς κορυφῆς εἶναι 18^0· *νὰ εὑρεθῶσι τὰ λοιπὰ στοιχεῖα καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.*

9) Τριγώνου τινὸς μία γωνία εἶναι 45^0, *αἱ δὲ περιέχουσαι αὐτὴν πλευραὶ εἶναι, ἡ μία 104 μέτρα, ἡ δὲ ἄλλη 892· νὰ εὑρεθῶσι τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ καὶ ἡ περίμετρος.*

10) Τριγώνου τινὸς μία πλευρὰ εἶναι 1204 μέτρα, ἡ δὲ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία εἶναι $12^0\ 16'$· *νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου.*

11) Τριγώνου τινὸς δίδονται αἱ δύο πλευραὶ

$$\alpha = 1542{,}7 \ \mu. \qquad\qquad \beta = 894{,}3 \ \mu.$$

καὶ ἡ γωνία, ἡ ἀπέναντι μιᾶς ἐξ αὐτῶν

$$A = 118^0\ 42'\cdot$$

νὰ εὑρεθῶσι τὰ λοιπὰ στοιχεῖα.

12) Τριγώνου τινὸς αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι

15 μ. 12 μ. 20 μ.

νὰ εὑρεθῶσιν αἱ γωνίαι αὐτοῦ καὶ αἱ ἀκτῖνες τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

13) Τετραπλεύρου τινὸς αἱ δύο διαγώνιοι εἶναι ἡ μία 840 μέτρα ἡ δὲ ἄλλη 895 μέτρα· ἡ δὲ ἑτέρα τῶν ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένων γωνιῶν εἶναι 87^0· νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου τούτου.

14) Τριγώνου τινὸς τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 15489 τ. μ., ἡ δὲ περίμετρος 48455· νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου.

15) Ἐκ τῶν τριῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου καὶ ἐκ τῆς περιμέτρου αὐτοῦ νὰ εὑρεθῶσιν αἱ πλευραὶ καὶ τὸ ἐμβαδόν.

*16) Νὰ δειχθῇ, ὅτι παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν

$$\varepsilon\varphi\, A \,.\, \varepsilon\varphi\, B \,.\, \varepsilon\varphi\, \Gamma = \varepsilon\varphi\, A + \varepsilon\varphi\, B + \varepsilon\varphi\, \Gamma.$$

17) Δίδονται τριγώνου τινὸς τὸ ἐμβαδὸν E, μία τῶν γωνιῶν A καὶ ἡ ἑτέρα τῶν περιεχουσῶν αὐτὴν πλευρῶν, ἡ β· νὰ εὑρεθῶσι τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου τούτου.

18) Τριγώνου τινὸς μία πλευρὰ α εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ μιᾶς ἄλλης β καὶ ἡ τρίτη γ εἶναι τὰ $\frac{5}{6}$ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς β· νὰ εὑρεθῶσιν αἱ γωνίαι αὐτοῦ.

19) Τετραπλεύρου τινὸς εἶναι γνωσταὶ αἱ τέσσαρες πλευραὶ καὶ μία γωνία· νὰ εὑρεθῶσιν αἱ λοιπαὶ γωνίαι αὐτοῦ καὶ τὸ ἐμβαδόν του.

20) Τετραπλεύρου τινὸς δίδονται αἱ τέσσαρες γωνίαι καὶ δύο ἐκ τῶν πλευρῶν· νὰ εὑρεθῶσιν αἱ λοιπαὶ πλευραὶ καὶ τὸ ἐμβαδόν.

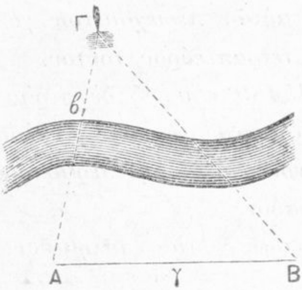
21) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ἀκτὶς παντὸς κύκλου καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου δεκαγώνου καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου συνιστῶσιν ὀρθογώνιον τρίγωνον (σελ. 20).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1ον

66. Εὑρεῖν τὴν ἀπόστασιν σημείου προσιτοῦ ἀπό τινος ἀπροσίτου ἀλλ᾽ ὁρατοῦ.

Ἔστω A τὸ προσιτὸν σημεῖον καὶ Γ τὸ ἀπρόσιτον καὶ AΓ ἡ ζητουμένη ἀπόστασις (σχ. 32).



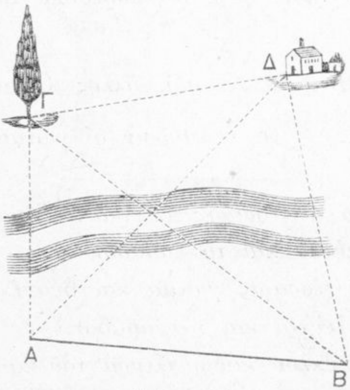
Σχῆμα 32.

Ἐκ τοῦ σημείου A μετροῦμεν, ὅσον ἐνδέχεται ἀκριβέστερον, γραμμήν τινα AB ἐπὶ ὁμαλοῦ ἐδάφους· ἔπειτα μετροῦμεν διὰ γωνιομετρικοῦ ὀργάνου τὰς γωνίας ΓAB καὶ ΓBA. Ἔχοντες τότε τοῦ τριγώνου ABΓ μίαν πλευρὰν γ καὶ τὰς προσκειμένας γωνίας A καὶ B, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ τἆλλα στοιχεῖα αὐτοῦ· διὰ τὴν AΓ ἔχομεν τὸν τύπον*

(ἐδ. 48) $$A\Gamma = AB\,\frac{\eta\mu\, B}{\eta\mu\, (A+B)}.$$

2ον

67. Εὑρεῖν τὴν ἀπόστασιν δύο σημείων Γ καὶ Δ, ἀπροσίτων ἀλλ᾽ ὁρατῶν.



Σχῆμα 33.

Ἐκ τοῦ σημείου A, ἐφ᾽ οὗ ἱστάμεθα, μετροῦμεν πάλιν εὐθεῖάν τινα AB ἐπὶ ὁμαλοῦ ἐδάφους, καὶ ὅσον ἐνδέχεται ἀκριβέστερον· ἔπειτα μετροῦμεν τὰς πέντε γωνίας ΔBA, ΓBA, ΓAB, ΔAB καὶ ΓAΔ· ἔχοντες τότε ἑκατέρου τῶν τριγώνων ΔAB καὶ ΓAB μίαν πλευρὰν AB καὶ τὰς προσκειμένας αὐτῇ γωνίας, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς πλευρὰς AΔ καὶ AΓ· ἐκ δὲ τούτων καὶ ἐκ τῆς γωνίας ΓAΔ ὁρίζεται τὸ τρίγωνον AΓΔ ἐντελῶς καὶ εὑρίσκεται ἡ ζητουμένη ἀπόστασις ΓΔ.

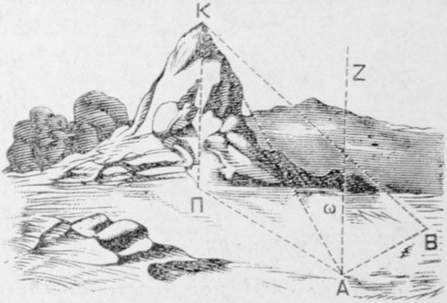
Παρατήρησις. *Ἐὰν τὰ τέσσαρα σημεῖα A, B, Γ, Δ, κεῖνται ἐφ᾽ ἑνὸς ἐπιπέδου, ἀλλὰ μόνον τότε, ἡ γωνία ΓAΔ ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν γωνιῶν ΓAB καὶ ΔAB· ἑπομένως εἶναι περιττὸν νὰ μετρηθῇ διὰ τοῦ γωνιομετρικοῦ ὀργάνου.*

* *Τὴν περιγραφὴν τῶν γεωμετρικῶν ὀργάνων καὶ τὴν ἐξήγησιν τῆς χρήσεως αὐτῶν παραλείπομεν.*

3ον

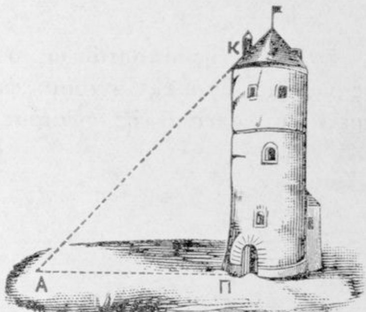
68. Εὑρεῖν τὸ ὕψος βουνοῦ. *Τουτέστι τὴν ἀπόστασιν τῆς κορυφῆς αὐτοῦ Κ ἀπὸ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ἐφ᾽ οὗ ἱστάμεθα.*

Ἐπὶ ἐδάφους ὁμαλοῦ, ἐξ οὗ φαίνεται ἡ κορυφὴ τοῦ βουνοῦ, μετροῦμεν βάσιν τινά, ἔστω τὴν ΑΒ, καὶ τὰς γωνίας ΚΑΒ καὶ ΚΒΑ καὶ εὑρίσκομεν ἐξ αὐτῶν τὴν ἀπόστασιν ΑΚ. Ἔπειτα μετροῦμεν τὴν γωνίαν ΖΑΚ, ἣν σχηματίζει ἡ ΑΚ πρὸς τὴν κατακόρυφον τοῦ τόπου Α, ἔστω δὲ ἡ γωνία αὕτη ω. Ἐὰν τότε νοήσωμεν ἐκ τῆς κορυφῆς Κ τὴν κάθετον ΚΠ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ Α, ἐφ᾽ οὗ ἵσταται κάθετος καὶ ἡ ΑΖ, φανερὸν εἶναι, ὅτι αἱ ΑΖ καὶ ΚΠ θὰ εἶναι παράλληλοι καὶ διὰ τοῦτο, ἂν νοήσωμεν καὶ τὴν ΑΠ, ἔχωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὸ ΚΠΑ, οὗτινος γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΑΚ καὶ τὰς γωνίας ΑΚΠ = ω καὶ ΚΑΠ = $90^0 - \omega$· ὥστε δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ΚΠ, ἥτις εἶναι τὸ ὕψος τοῦ βουνοῦ ὑπεράνω τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ὅπερ διέρχεται διὰ τοῦ Α.



Σχῆμα 34.

Παρατήρησις. *Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ὕψος οἱουδήποτε ἀντικειμένου. Ἀλλ᾽ ἂν τὸ μετρητέον ὕψος ΚΠ φαίνηται, ὡς π. χ. εἰς τὸν πύργον (σχ. 35), εἶναι δὲ καὶ τὸ ἔδαφος ὁμαλὸν καὶ ὁριζόντιον, ἀρκεῖ νὰ μετρηθῇ ἡ ἀπόστασις ΑΠ καὶ ἡ γωνία ΠΑΚ· διότι ἐκ τούτων προσδιορίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΚΠΑ, οὗ πλευρὰ εἶναι τὸ ζητούμενον ὕψος.*



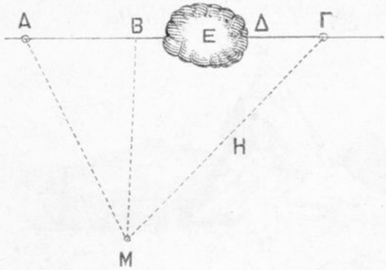
Σχῆμα 35.

4ον

69. Ἐπὶ ἐδάφους ἐπιπέδου εὑρεῖν τὴν προσεκβολὴν εὐθείας πέραν ἀντικειμένου οἱουδήποτε, ὅπερ ἐμποδίζει νὰ βλέπωμεν τὴν συνέχειαν τῆς εὐθείας.

Ἔστω ΑΒ ἡ εὐθεῖα, τῆς ὁποίας πρέπει νὰ εὑρεθῇ ἡ προσεκβολὴ ὄπισθεν τοῦ ἐμποδίου Ε. Μετροῦμεν τὸ μῆκος ΑΒ, ἔπειτα ἐκλέγομεν ὡς σταθμὸν σημεῖόν τι Μ, ἐξ οὗ νὰ φαίνηται καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ ὁ ὄπι-

σθεν τοῦ ἐμποδίου τόπος, εἰς ὃν θὰ εὑρίσκηται ἡ προσεκβολὴ τῆς εὐθείας. Μετὰ ταῦτα μετροῦμεν τὰς γωνίας Α καὶ Β τοῦ τριγώνου ΑΒΜ,

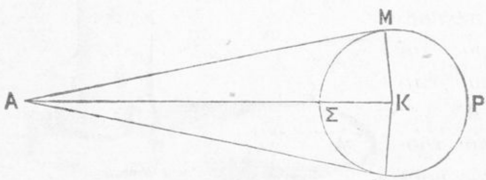


Σχῆμα 36.

καὶ ἐκ τούτων καὶ ἐκ τῆς ΑΒ προσδιορίζομεν τὴν πλευρὰν ΑΜ. Σύρομεν ἔπειτα ἐπὶ τοῦ ἐδάφους γραμμὴν ἐκ τοῦ Μ πρὸς τὸ μέρος τῆς προσεκβολῆς, ἔστω τὴν ΗΜ, καὶ μετροῦμεν τὴν γωνίαν αὐτῆς πρὸς τὴν ΜΑ, ἤτοι τὴν ΗΜΑ. Ἐὰν τότε νοήσωμεν τὴν τομὴν Γ τῆς προσεκβολῆς καὶ τῆς γραμμῆς ΜΗ, ἔχομεν τοῦ τριγώνου ΓΑΜ μίαν πλευρὰν ΑΜ καὶ τὰς προσκειμένας αὐτῇ γωνίας· ὥστε δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος ΜΓ, ἐξ οὗ καὶ τὸ σημεῖον Γ προσδιορίζεται· τέλος ἐκ τοῦ Γ σύρομεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους τὴν γραμμὴν ΓΔ, ἥτις σχηματίζει μετὰ τῆς ΓΜ γωνίαν ἴσην τῇ τοῦ τριγώνου ΑΓΜ, καὶ ἔχομεν τὴν προσεκβολὴν τῆς ΑΒ.

5ον

70. Ἐκ τῆς ἀποστάσεως δοθέντος σημείου ἀπὸ σφαίρας καὶ ἐκ τῆς γωνίας, ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ἡ σφαῖρα ἀπὸ τοῦ σημείου, εὑρεῖν τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.



Σχῆμα 37.

Ἐὰν διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ διὰ τοῦ σημείου Α νοήσωμεν τυχὸν ἐπίπεδον, τοῦτο τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ μέγιστον αὐτῆς κύκλον, ἔστω τὸν ΜΣΝΡ· ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ κύκλου τούτου ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι ἐκ τοῦ Α, αἱ ΑΜ καὶ ΑΝ καὶ αἱ ἀκτῖνες ΚΝ καὶ ΚΜ, γίνεται ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΚΜΑ, οὗτινος ἔχομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΑΚ καὶ τὴν γωνίαν ΚΑΜ, ἥτις εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης ΜΑΝ ($=\omega$), ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ἡ σφαῖρα ἐκ τοῦ Α.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τούτου τριγώνου εὑρίσκομεν νῦν

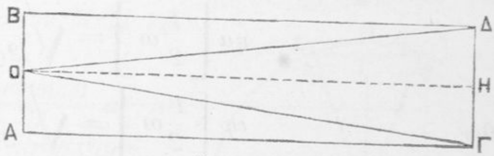
$$KM = AK \,.\, \eta\mu\left(\frac{1}{2}\,\omega\right).$$

Σημ. *Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης εὑρίσκομεν καὶ τοὐναντίον τὴν ἀπόστασιν ΑΚ τῆς σφαίρας ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὅταν ἔχωμεν τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας καὶ τὴν γωνίαν ω, ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ἐκ τοῦ σημείου Α.*

6ον

71. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος μιᾶς λεωφόρου, ἧς τὸ πλάτος εἶναι γνωστὸν καὶ ἡ γωνία, ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται τὸ πέρας αὐτῆς ἐκ τῆς ἀρχῆς της.

Ἐὰν ΑΒ εἶναι ἡ ἀρχὴ καὶ ΓΔ τὸ πέρας τῆς λεωφόρου καὶ Ο τὸ μέσον τῆς ΑΒ, ἔχομεν γνωστά, τὴν ΓΔ (=ΑΒ) καὶ τὴν γωνίαν ΔΟΓ· ἐὰν δὲ ἀχθῇ



Σχῆμα 38.

καὶ ὁ ἄξων ΟΗ τῆς ὁδοῦ, ἔχομεν ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΔΗ

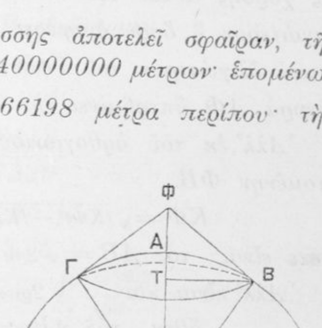
$$ΟΗ = ΔΗ \,.\, σφ\,\frac{1}{2}\,(ΔΟΓ).$$

7ον

72. Γνωστοῦ ὄντος τοῦ ὕψους φάρου ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης, εὑρεῖν ἐπ᾽ αὐτῆς τὴν μεγίστην ἀπόστασιν, ἀπὸ τῆς ὁποίας φαίνεται τὸ φῶς αὐτοῦ.

Γνωστόν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς θαλάσσης ἀποτελεῖ σφαῖραν, τῆς ὁποίας ὁ μέγιστος κύκλος ἔχει περιφέρειαν 40000000 μέτρων· ἐπομένως ἀκτῖνα ἔχει ἴσην τῷ $\frac{40000000}{2\pi}$, ἤτοι 6366198 μέτρα περίπου· τὴν ἀκτῖνα δὲ ταύτην παριστῶμεν διὰ ϱ.

Ἔστω Κ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ταύτης καὶ Φ τὸ φῶς καὶ ΦΑ (=υ) τὸ ὕψος αὐτοῦ εἰς μέτρα ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. Ἐὰν διὰ τῆς ἀκτῖνος ΚΑ νοηθῇ τυχὸν ἐπίπεδον θὰ τέμνῃ τὴν σφαῖραν κατὰ μέγιστον κύκλον, ἔστω τὸν ΑΒΜ· καὶ ἂν ἀχθῇ ἐκ τοῦ Φ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου τούτου ἡ ΒΦ καὶ περιστραφῇ ἔπειτα ὁ μέγιστος κύκλος περὶ τὴν ΚΦ, φανερὸν εἶναι, ὅτι ἡ ὑπὸ τοῦ τόξου ΑΒ γραφομένη ζώνη περιέχει πάντα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ἀφ᾽ ὧν τὸ φῶς φαίνεται· ὥστε ἡ μεγίστη ἀπόστασις, ἀπὸ τῆς ὁποίας τὸ φῶς φαίνεται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, εἶναι ἡ ΑΒ.



Σχῆμα 39.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόξου ΑΒ, ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ ἡ κεντρικὴ γωνία ω, διότι εἶναι

$$\frac{τοξ\ ΑΒ}{40000000} = \frac{ω}{360}. \qquad (ι)$$

Ἀλλ᾽ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΦΚΒ εὑρίσκομεν: ΚΒ = ΚΦ . συνω· ὅθεν

$$συνω = \frac{ΚΒ}{ΚΦ} = \frac{ϱ}{ϱ+υ}.$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης ἕπεται

$$συν\left[\frac{1}{2}\omega\right]=\sqrt{\frac{2\varrho+\upsilon}{2\varrho+2\upsilon}}$$

$$ημ\left[\frac{1}{2}\omega\right]=\sqrt{\frac{\upsilon}{2\varrho+2\upsilon}}$$

ὅθεν

$$εφ\left[\frac{1}{2}\omega\right]=\sqrt{\frac{\upsilon}{2\varrho+\upsilon}}$$

Διὰ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν $\frac{1}{2}\omega$, ὅθεν καὶ τὴν ω· ταύτης δὲ εὑρεθείσης, εὑρίσκομεν καὶ τὸ τόξον ΑΒ ἐκ τῆς ἰσότητος (ι).

* *Ἐπειδὴ τὸ ὕψος υ εἶναι συνήθως ἐλάχιστον πρὸς τὴν ἀκτῖνα ϱ, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ τόξον ΑΒ εὐκολώτερον ὡς ἑξῆς.*

Τὸ τόξον ΑΒ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης ΦΒ καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ ΑΒ· ἐπομένως διαφέρει ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ΦΒ ὀλιγώτερον ἢ ὅσον διαφέρει ἡ χορδή· ἤτοι ὀλιγώτερον ἢ ΦΒ—ΒΑ· ἢ καὶ ὀλιγώτερον τοῦ ὕψους υ· (διότι ἐν τῷ τριγώνῳ ΦΑΒ ἡ μία πλευρὰ ΑΦ ὑπερβαίνει τὴν διαφορὰν τῶν ἄλλων).

Ἀλλ᾽ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΒΦ εὑρίσκομεν τὴν ἐφαπτομένην ΦΒ.

$$Κ\Phi=\sqrt{(Κ\Phi)^2-(ΚΒ)^2}=\sqrt{(\varrho+\upsilon)^2-\varrho^2}=\sqrt{2\varrho\upsilon+\upsilon^2}\cdot$$

ὥστε εἶναι $τόξ.\ ΑΒ=\sqrt{2\varrho\upsilon+\upsilon^2}-\mu\upsilon\cdot$ *ἔνθα* $0<\mu<1$.

Ἀλλ᾽ εἶναι καὶ $\sqrt{2\varrho\upsilon+\upsilon^2}=\sqrt{2\varrho\upsilon}+\mu'\upsilon\cdot$ *ἔνθα* $0<\mu'<1$

ὅθεν $τόξ.\ ΑΒ=\sqrt{2\varrho\upsilon}+(\mu'-\mu)\upsilon\cdot$

ἐπομένως, ἐὰν θέσωμεν $τόξ.\ ΑΒ=\sqrt{2\varrho\upsilon}$,

ποιοῦμεν λάθος μικρότερον τοῦ ὕψους υ.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ἡ μεγίστη ἀπόστασις, ἀπὸ τῆς ὁποίας φαίνεται τὸ φῶς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης, εἶναι περίπου ἀνάλογος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ὕψους αὐτοῦ ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης.

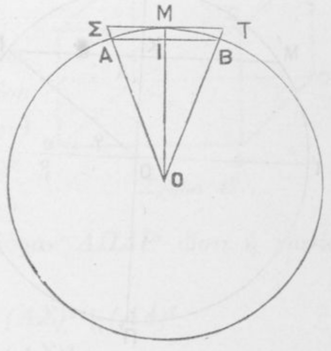
Διὰ υ = 1 μέτρον, εὑρίσκομεν τόξον ΑΒ = 3568 μέτρα περίπου.

Σημ. *Ἐν τῇ λύσει τοῦ προβλήματος τούτου δὲν ἐλήφθη ὑπ᾽ ὄψιν ἡ διάθλασις τοῦ φωτὸς ἐν τῷ ἀέρι.*

8ον

73. Γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἡ γῆ εἶναι σφαῖρα, τῆς ὁποίας ὁ μέγιστος κύκλος ἔχει περιφέρειαν 40000000 μέτρα, εὑρεῖν τὸ μῆκος τοῦ τόξου μιᾶς μοίρας καὶ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς αὐτοῦ καὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ μέσον αὐτοῦ.

Ἔστω AB ἡ χορδὴ καὶ ΣT ἡ ἐφαπτομένη τοῦ εἰρημένου τόξου. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου MOT ἔχομεν ἐν πρώτοις



Σχῆμα 40.

$$MT = \varrho . \text{εφ } 30' = \frac{40000000}{2\pi} \text{ εφ } 30'$$

$$\begin{aligned} \text{λογ } 40000000 &= 7{,}6020599^{*} \\ \text{λογ } 2\pi &= 0{,}7981798 \\ \hline \text{λογ } \varrho &= 6{,}8038801 \\ \text{λογ εφ } 30' &= \bar{3}{,}9408584 \\ \hline \text{λογ } MT &= 4{,}7447385 \\ \text{ὅθεν} \quad MT &= 55556{,}96 \text{ μ.} \\ \text{ὅθεν} \quad \Sigma T &= 111113{,}92 \text{ μ.} \end{aligned}$$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου IOB εὑρίσκομεν

$$IB = \varrho . \text{ημ } 30'$$

$$\begin{aligned} \text{λογ } \varrho &= 6{,}8038801 \\ \text{λογ ημ } 30' &= \bar{3}{,}9408419 \\ \hline \text{λογ } IB &= 4{,}7447220 \\ \text{ὅθεν} \quad IB &= 55554{,}85 \text{ μ.} \\ \text{ὅθεν} \quad AB &= 111109{,}70 \text{ μ.} \end{aligned}$$

Τὸ τόξον AB τῆς μιᾶς μοίρας εἶναι $\dfrac{40000000}{360} = 111111{,}11.$

Ἐντεῦθεν ἕπεται $\quad \text{τόξ. } AB - AB = 1{,}41$

καὶ $\quad \Sigma T - \text{τόξ. } AB = 2{,}81\cdot$

ὥστε τὸ τόξον τῆς μιᾶς μοίρας, τῆς μὲν χορδῆς αὐτοῦ ὑπερέχει κατὰ 1 μέτρον καὶ $\frac{41}{100}$ τοῦ μέτρου περίπου, τῆς δὲ ἐφαπτομένης αὐτοῦ εἶναί μικρότερον κατὰ 2,81 περίπου μέτρα.

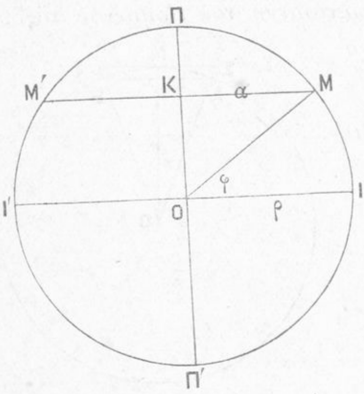
9ον

74. Εὑρεῖν τὴν ἀκτῖνα τοῦ παραλλήλου κύκλου τῆς γηίνης σφαίρας, οὗτινος τὸ γεωγραφικὸν πλάτος εἶναι γνωστόν.

(Εὑρεῖν τοῦ αὐτοῦ κύκλου τὸ μῆκος τοῦ τόξου μιᾶς μοίρας).

** Ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ μετεχειρίσθημεν τοὺς ἑπταψηφίους λογαρίθμους τοῦ Καλλέτου διὰ τὴν μεγαλητέραν ἀκρίβειαν αὐτῶν.*

Ἐὰν διὰ τοῦ ἄξονος τῆς γῆς ΠΠ′ νοήσωμεν ἐπίπεδον, τοῦτο θὰ τέμνῃ τὴν μὲν γῆν κατὰ μέγιστον κύκλον αὐτῆς, τὸ δὲ ἐπίπεδον τοῦ ἰσημερινοῦ κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΙΙ′, τὸ δὲ ἐπίπεδον τοῦ παραλλήλου κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΜΜ′, παράλληλον τῇ ΙΙ′· θὰ εἶναι δὲ ἡ γωνία ΜΟΙ ἴση τῷ δοθέντι πλάτει φ καὶ ἡ ζητουμένη ἀκτὶς τοῦ παραλλήλου κύκλου εἶναι ἡ ΜΚ = α. Ἐὰν δὲ ἀχθῇ ἡ ἀκτὶς ΟΜ, γίνεται ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΟΚΜ, ἐξ οὗ εὑρίσκομεν



Σχῆμα 41.

$$KM = \alpha = \varrho \text{ συν}\varphi.$$

Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου τούτου εἶναι

$$2\pi . \varrho . \text{συν}\varphi$$

καὶ τὸ τόξον μιᾶς μοίρας τοῦ παραλλήλου τούτου ἔχει μῆκος

$$\frac{2\pi.\varrho}{360}\text{ συν}\varphi^{\cdot} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{40000000}{360}\text{ συν}\varphi \quad \text{ἢ} \quad 111111{,}11 . \text{συν}\varphi.$$

Ὡς παράδειγμα ἔστω $\varphi = 38^0$.

Διὰ τὴν ἀκτῖνα α ἔχομεν $\alpha = \varrho \text{ συν } 38^0$

$$\text{λογ } \varrho = 6{,}80388 \quad (\text{ἰδὲ προηγ. πρόβλημα})$$
$$\text{λογ συν } 38^0 = \overline{1}{,}89653$$
$$\text{λογ } \alpha = 6{,}70041$$
$$\text{καὶ} \quad \alpha = 5016625 \text{ μέτρα.}$$

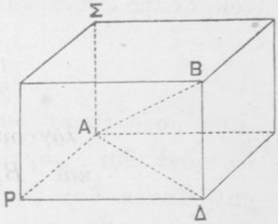
Διὰ τὸ μῆκος τοῦ τόξου 1^0 *ἔχομεν*

$$\text{μῆκος τόξου } 1^0 = \frac{40000000}{360}\text{ συν}\varphi.$$

$$\text{λογ } 40000000 = 7{,}60206$$
$$\text{λογ } 360 = 2{,}55630$$
$$\text{διαφορὰ} \quad 5{,}04576$$
$$\text{λογ συν } 38^0 = \overline{1}{,}89653$$
$$4{,}94229$$

10ον

75. Ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, οὗτινος εἶναι γνωσταὶ αἱ τρεῖς ἀκμαὶ ΑΠ, ΑΡ, ΑΣ, εὑρεῖν τὴν διαγώνιον ΑΒ καὶ τὰς γωνίας αὐτῆς πρὸς τὰς ἀκμάς.



Σχῆμα 42.

Ἐὰν νοήσωμεν τὴν διαγώνιον $A\Delta$ *τῆς ἕδρας* $A\Pi\Delta P$, *εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου* $A\Delta\Pi$ *(διότι ἡ ἕδρα εἶναι ὀρθογώνιον)*

$$(A\Delta)^2=(A\Pi)^2+(\Pi\Delta)^2=(A\Pi)^2+(AP)^2\cdot$$

ἀλλὰ καὶ τὸ τρίγωνον $BA\Delta$ *εἶναι ὀρθογώνιον, διότι ἡ* $B\Delta$ *εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν* $A\Pi\Delta P$· *ὥστε ἡ γωνία* $B\Delta A$ *εἶναι ὀρθή· ἑπομένως εἶναι*

$$(AB)^2=(B\Delta)^2+(A\Delta)^2=(A\Sigma)^2+(A\Delta)^2$$

ὅθεν $$(AB)^2=(A\Pi)^2+(AP)^2+(A\Sigma)^2,$$

ἐξ οὗ $$AB=\sqrt{(A\Pi)^2+(AP)^2+(A\Sigma)^2}.$$

Ἐκ τοῦ αὐτοῦ τριγώνου $AB\Delta$ *εὑρίσκομεν*

$$B\Delta=AB\,.\,\sigma\upsilon\nu\,(AB\Delta)$$

καὶ ἐπειδὴ $B\Delta=A\Sigma$ *καὶ* $\gamma\omega\nu.\ AB\Delta=\gamma\omega\nu.\ BA\Sigma$,

ἔχομεν $$A\Sigma=AB\,.\,\sigma\upsilon\nu\,(BA\Sigma),$$

ὅθεν $$\sigma\upsilon\nu\,(BA\Sigma)=\frac{A\Sigma}{AB}\cdot$$

ἐκ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκεται ἡ γωνία τῆς διαγωνίου AB *πρὸς τὴν ἀκμὴν* $A\Sigma$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$\sigma\upsilon\nu\,(BA\Pi)=\frac{A\Pi}{AB}\quad \kappa\alpha\grave{\iota}\quad \sigma\upsilon\nu\,(BAP)=\frac{AP}{AB}\cdot$$

Ἔστω, παραδείγματος χάριν,

$$A\Pi=3,\qquad AP=1,\qquad A\Sigma=2,$$

τότε εἶναι $$AB=\sqrt{3^2+1^2+2^2}=\sqrt{14}\cdot$$

ὅθεν (Dupuis, σελ. 147), $AB=3{,}74165$.

Εὕρεσις τῆς γωνίας ΒΑΠ.

$$\sigma\upsilon\nu\,(BA\Pi)=\frac{A\Pi}{AB}=\frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$\lambda o\gamma\ 3=0{,}47712$$

$\lambda o\gamma\ 14=1{,}14613,$ $\qquad {}^1/_2\ \lambda o\gamma\ 14=0{,}57306$

$$\lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu\,(BA\Pi)=\overline{1}{,}90406\cdot$$

Εὕρεσις τῆς γωνίας ΒΑΡ.

$$\sigma\upsilon\nu\ (BAP) = \frac{AP}{AB} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\lambda o\gamma\ 1 = 0$$

$$\frac{1}{2}\ \lambda o\gamma\ \ 14 = 0{,}57306$$

$$\lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu\ (BAP) = \overline{1}{,}42694$$

$$\kappa\alpha\grave{\iota}\quad BAP = 74^0\ \ 29'\ \ 55''.$$

Εὕρεσις τῆς γωνίας ΒΑΣ.

$$\sigma\upsilon\nu\ (BA\Sigma) = \frac{A\Sigma}{AB} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\lambda o\gamma\ 2 = 0{,}30103$$

$${}^1/_2\ \lambda o\gamma\ 14 = 0{,}57306$$

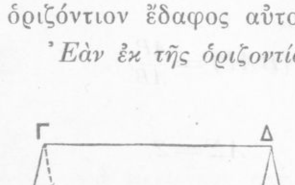
$$\lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu\ (BA\Sigma) = \overline{1}{,}72797$$

$$\kappa\alpha\grave{\iota}\quad BA\Sigma = 57^0\ \ 41'\ \ 18''.$$

11ον

76. Οἰκόπεδον ἐπὶ τῆς πλευρᾶς λόφου κείμενον, ἔχει ὀρθογώνιον σχῆμα καὶ βάσιν ὁριζοντίαν. Ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι β πήχεις, τὸ δὲ ὕψος υ, ἡ δὲ κλίσις τοῦ ἐδάφους πρὸς τὸν ὁρίζοντα εἶναι φ μοιρῶν. Ζητεῖται πόσων τετραγωνικῶν πήχεων θὰ εἶναι τὸ ὁριζόντιον ἔδαφος αὐτοῦ.

Ἐὰν ἐκ τῆς ὁριζοντίας βάσεως ΑΒ (σχ. 43) νοήσωμεν ὁριζόντιον ἐπίπεδον καὶ καταβιβάσωμεν ἐπ᾽ αὐτὸ τὰς καθέτους ΓΕ καὶ ΔΖ ἀπὸ τῶν κορυφῶν τοῦ ὀρθογωνίου, φανερὸν εἶναι, ὅτι τὸ ὁριζόντιον ἔδαφος τοῦ οἰκοπέδου εἶναι τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΕΖ, τουτέστιν ἡ προβολὴ αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον· τὸ δὲ ἐμβαδὸν τῆς προβολῆς ταύτης εἶναι ἴσον τῷ ΑΒ . ΑΕ, ἤτοι β . ΑΕ· ἀλλ᾽ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΕΓ ἔχομεν



Σχῆμα 43.

$$AE = A\Gamma\,.\,\sigma\upsilon\nu\ \varphi = \upsilon\ \sigma\upsilon\nu\varphi$$

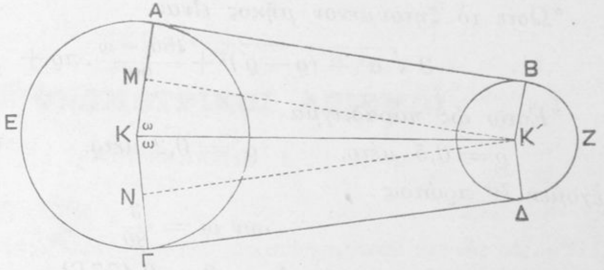
(διότι ἡ γωνία ΓΑΕ ἰσοῦται τῇ γωνίᾳ τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΒΓΔ καὶ ΑΒΕΖ, τουτέστι τῇ φ).

Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου $ABEZ$ εἶναι $\beta.\upsilon.\sigma\upsilon\nu\varphi$, ἤτοι ἡ προβολὴ τοῦ ὀρθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ ἐπὶ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον ἰσοῦται τῷ ὀρθογωνίῳ τούτῳ, πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας αὐτοῦ πρὸς τὸν ὁρίζοντα.

12ον

77. Δύο τροχοὶ τῶν ὁποίων οἱ ἄξονες εἶναι παράλληλοι, πρόκειται νὰ περιβληθῶσι δι' ἱμάντος, ὥστε ἡ κίνησις τοῦ ἑνὸς νὰ μεταδίδηται καὶ εἰς τὸν ἄλλον. Ζητεῖται τὸ μῆκος τοῦ καταλλήλου πρὸς τοῦτο ἱμάντος· εἶναι δὲ γνωσταὶ αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο τροχῶν ϱ καὶ ϱ' καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν ἀξόνων αὐτῶν α.

Νοήσωμεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τοὺς ἄξονας τῶν τροχῶν· τοῦτο θὰ τέμνῃ αὐτοὺς κατὰ δύο κύκλους $AE\Gamma$ καὶ $BZ\Delta$, ὧν τινων εἶναι γνωσταὶ αἱ ἀκτῖνες καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων· τὸν δὲ ἱμάντα θὰ τέμνῃ κατὰ γραμμήν, ἥτις ἀποτελεῖται ἐκ τῶν δύο κοινῶν ἐφαπτομένων AB, $\Gamma\Delta$ τῶν κύκλων καὶ ἐκ τῶν τόξων $AE\Gamma$ καὶ $BZ\Delta$ (διότι ὁ ἱμὰς εἶναι τεταμένος, ὥστε εἰς τὰ μέρη ἔνθα χωρίζεται ἀφ' ἑκατέρου τῶν τροχῶν ἐφάπτεται αὐτοῦ). Πρόκειται λοιπὸν νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος



Σχῆμα 44.

$$\tau\acute{o}\xi.\ AE\Gamma + \tau\acute{o}\xi.\ BZ\Delta + AB + \Gamma\Delta.$$

Ἐκ τῶν κέντρων K καὶ K' ἂς ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες KA, $K\Gamma$ καὶ $K'B$, $K'\Delta$ καὶ ἐκ τοῦ K', κέντρου τοῦ μικροτέρου κύκλου, ἡ $K'M$, παράλληλος τῇ BA, καὶ $K'N$ τῇ $\Delta\Gamma$. Ἐπειδὴ τὸ σχῆμα $ABMK'$ εἶναι ὀρθογώνιον (ὡς ἔχον ὀρθὰς τὰς γωνίας αὐτοῦ), εἶναι $AM = K'B = \varrho'$· ὥστε $KM = \varrho - \varrho'$, καὶ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $K'KM$ εὑρίσκομεν

$$\sigma\upsilon\nu\ \omega = \frac{\varrho - \varrho'}{\alpha}$$

ἐξ οὗ εὑρίσκεται ἡ γωνία ω.

Τῆς γωνίας ω εὑρεθείσης, εὑρίσκομεν τὸ τόξον $AE\Gamma$ ἐκ τῆς ἰσότητος

$$\frac{2\pi\varrho}{360} = \frac{\tau\acute{o}\xi.\ AE\Gamma}{360 - 2\omega}.$$

διότι τὰ τόξα παντὸς κύκλου εἶναι ἀνάλογα τῶν ἐπικέντρων γωνιῶν καὶ εἰς τὸ τόξον ΑΕΓ ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρος γωνία ἡ $360^0 - 2\omega$.

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης εὑρίσκομεν

$$\text{τόξ. } AE\Gamma = \frac{180-\omega}{90}.\pi\varrho.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν (διότι ἡ γωνία $BK'\Delta$ *εἶναι ἴση τῇ* $AK\Gamma$*)*

$$\text{τόξ. } BZ\Delta = \frac{\omega}{90}\ \pi\varrho'.$$

Ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου MKK' *εὑρίσκομεν*

$$K'M = \sqrt{\alpha^2 - (\varrho-\varrho')^2}$$

εἶναι δὲ $\quad K'M = AB = \Gamma\Delta.$

Ὥστε τὸ ζητούμενον μῆκος εἶναι

$$2\sqrt{\alpha^2-(\varrho-\varrho')^2} + \frac{180-\omega}{90}.\pi\varrho + \frac{\omega}{90}.\pi\varrho'.$$

Ἔστω ὡς παράδειγμα

$\varrho = 0{,}5$ *μέτρ.* $\qquad \varrho' = 0{,}2$ *μέτρ.* $\qquad \alpha = 8$ *μέτρ.*

ἔχομεν ἐν πρώτοις

$$\text{συν } \omega = \frac{3}{80}$$

$$\text{λογ } 3 = 0{,}47712$$

$$\text{λογ } 80 = 1{,}90309$$

$$\text{λογ συν } \omega = \overline{2}{,}57403$$

καὶ $\quad \omega = 87^0\ \ 51' \quad$ *καὶ* $\quad 180^0 - \omega = 92^0\ \ 9'$

$$\text{τόξ. } AE\Gamma = \frac{92+\frac{9}{60}}{90}\ \pi\,.\,0{,}5 = 1{,}608$$

$$\text{τόξ. } BZ\Delta = \frac{87+\frac{51}{60}}{90}\ \pi\,.\,0{,}2 = 0{,}613$$

$$\sqrt{8^2 - \left(\frac{3}{10}\right)^2} = \frac{1}{10}\sqrt{6400-9} = \frac{1}{10}\sqrt{6391} = 7{,}994$$

ὥστε τὸ ζητούμενον μῆκος τοῦ ἱμάντος θὰ εἶναι:

$$1{,}608 = \text{τόξ. } AE\Gamma$$

$$0{,}613 = \text{τόξ. } BZ\Delta$$

$$15{,}988 = AB + \Gamma\Delta$$

Τὸ ὅλον $\quad 18{,}209.$

ΤΕΛΟΣ

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

488
———
16ος

ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΣ

Ἐκ τῆς στοιχειώδους μαθηματικῆς

---

1) Ἀριθμητικὴ Ἑλληνικῶν Σχολείων
2) Προβλήματα Ἀριθμητικῆς
3) Γεωμετρία Ἑλληνικῶν Σχολείων
4) Γεωμετρία Γυμνασίων
5) Θεωρητικὴ Ἀριθμητικὴ Γυμνασίων
6) Ἄλγεβρα
7) Τριγωνομετρία
