9

ΙΩΑΝΝΟΥ Ι. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΜΟΝΗ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ

ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΑΣ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

Ἀδείᾳ τοῦ Αὐτοκρατορικοῦ Ὑπουργείου τῆς Παιδείας.

ΕΚΔΟΣΙΣ ΕΚΤΗ

ΕΝ ΣΜΥΡΝΗι
ΕΚ ΤΟΥ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ «ΑΜΑΛΘΕΙΑΣ»
1899.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Πρῶται ἔννοιαι.

1. Πάντες ἔχομεν ἔννοιαν τοῦ *ἑνὸς* καὶ τῶν *πολλῶν* ἢ *τοῦ πλήθους*.

Ὅταν συγκρίνωμεν πλῆθος συγκείμενον ἐκ πραγμάτων ὁμοίων (ἢ τῶν ὁποίων τὰς διαφορὰς παραβλέπομεν) πρὸς ἓν τῶν πραγμάτων τούτων σχηματίζομεν τὴν ἔννοιαν τοῦ *ἀριθμοῦ*.

Ἀριθμὸς εἶνε ἡ ἔννοια, δι' ἧς ὁρίζομεν τὸ πλῆθος, ἤτοι ἐκφράζομεν πόσα εἶνε τὰ πράγματα, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ πλῆθος.

Παραδείγματος χάριν, ὅταν λέγωμεν πέντε ἄνθρωποι, τρία πρόβατα, αἱ λέξεις *πέντε*, *τρία* ἐκφράζουσιν ἀριθμούς.

Τὸ ἓν τῶν πραγμάτων, πρὸς ὃ συγκρίνεται τὸ πλῆθος, λέγεται *μονάς*.

Ἀριθμητικὴ λέγεται ἡ ἐπιστήμη ἡ πραγματευομένη *περὶ τῶν ἀριθμῶν*.

Ἀρίθμησις.

2. *Ἀρίθμησις* πλήθους τινὸς λέγεται ἡ εὕρεσις τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ὁρίζει αὐτό. Λέγεται ὅμως ἀρίθμησις καὶ ἡ διδασκαλία περὶ τῆς ὀνομασίας τῶν ἀριθμῶν καὶ τῆς γραφῆς αὐτῶν.

Ὀνοματολογία τῶν ἀριθμῶν καὶ γραφὴ αὐτῶν δι' ἰδιαιτέρων σημείων.

3. Ἡ μονάς, ὅταν θεωρεῖται ὡς ἀριθμός, λέγεται ἓν καὶ γράφεται διὰ τοῦ σημείου 1.

Ἐὰν εἰς τὴν μονάδα προστεθῇ καὶ ἄλλη μονάς, σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς *δύο*, ὅστις γράφεται διὰ τοῦ σημείου 2.

Ἐὰν δὲ εἰς τὸν δύο προστεθῇ καὶ ἄλλη μονάς, σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς *τρία*, ὅστις γράφεται διὰ τοῦ 3.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον (δηλαδὴ προσθέτοντες τὴν μονάδα) σχηματίζομεν τοὺς ἀριθμοὺς *τέσσαρα* (4), *πέντε* (5), *ἓξ* (6), *ἑπτὰ* (7), *ὀκτὼ* (8), *ἐννέα* (9) *καὶ* *δέκα* (10).

Εἶνε δὲ φανερόν, ὅτι δυνάμεθα νὰ προχωρήσωμεν οὕτως, ἐφ' ὅσον θέλωμεν, σχηματίζοντες ἐξ ἑκάστου ἀριθμοῦ ἄλλον ἔχοντα μίαν μονάδα περισσότερον.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον πᾶς ἀριθμὸς ἐμφανίζεται ὡς συγκείμενος ἐκ μονάδων, ἤτοι ὡς πλῆθος μονάδων.

—**4.** Ἀλλ' ἐὰν εἰς ἕκαστον ἀριθμὸν ἐδίδομεν ἴδιον ὄνομα (ὡς ἐκάμαμεν διὰ τοὺς ἀριθμοὺς ἕν, δύο,... μέχρι τοῦ δέκα), θὰ ἦτο ἀδύνατον νὰ ἐνθυμώμεθα τόσα ὀνόματα. Διὰ τοῦτο οἱ ἄνθρωποι ἐπενόησαν τρόπον νὰ ἐκφράζωσι τοὺς ἀριθμοὺς δι' ὀλίγων διαφόρων λέξεων καὶ νὰ γράφωσιν αὐτοὺς δι' ὀλίγων σημείων ἢ ψηφίων· γίνεται δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς:

Ἀριθμοί τινες λαμβάνονται ὡς νέαι μονάδες καὶ ἐξ αὐτῶν συντίθενται οἱ ἄλλοι.

Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι, ἢ αἱ νέαι αὗται μονάδες, σχηματίζονται ὡς ἑξῆς·

Τὸν ἀριθμὸν δέκα, θεωροῦμεν ὡς νέαν μονάδα, ἣν καλοῦμεν *δεκάδα*, ἔπειτα τὸν ἐκ δέκα δεκάδων συγκείμενον ἀριθμόν, ἤτοι τὸν *ἑκατόν*, θεωροῦμεν πάλιν ὡς νέαν μονάδα, καὶ καλοῦμεν αὐτὴν *ἑκατοντάδα*· ἔπειτα τὸν ἐκ δέκα ἑκατοντάδων συγκείμενον ἀριθμόν, ἤτοι τὸν *χίλια*, θεωροῦμεν ὡς νέαν μονάδα, καὶ καλοῦμεν *χιλιάδα*.

Οὕτω δὲ ἐξακολουθοῦμεν σχηματίζοντες ἐκ δέκα μονάδων μίαν νέαν μονάδα καὶ ἔχομεν τὰς ἑξῆς μονάδας·

μονὰς (ἁπλῆ)
δεκὰς
ἑκατοντὰς
χιλιὰς
δεκὰς χιλιάδων ἢ μυριὰς
ἑκατοντὰς χιλιάδων
μονὰς ἑκατομμυρίου
δεκὰς ἑκατομμυρίου
ἑκατοντὰς ἑκατομμυρίου
μονὰς δισεκατομμυρίου
δεκὰς δισεκατομμυρίου
ἑκατοντὰς δισεκατομμυρίου
μονὰς τρισεκατομμυρίου
κτλ. κτλ.

—**5.** Ἡ ἁπλῆ μονὰς λέγεται μονὰς *πρώτης τάξεως*, ἡ δεκὰς λέγεται μονὰς *δευτέρας τάξεως*, ἡ ἑκατοντὰς *τρίτης*, ἡ χιλιὰς *τετάρτης*, καὶ οὕτω καθεξῆς.

—**6.** Δυνάμεθα, ἤδη, νὰ δείξωμεν, ὅτι *πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ σχηματισθῇ ἐκ τῶν μονάδων τούτων καὶ ἐξ ἑκάστης νὰ μὴ ἔχῃ περισσοτέρας τῶν ἐννέα.*

Διότι ἂς φαντασθῇ τις οἱονδήποτε θέλῃ ἀριθμὸν (παραδείγματος χάριν τὸν ἀριθμὸν τῶν εἴς τινα σάκκον περιεχομένων κόκκων σίτου)· ἐὰν ἑνώσωμεν δέκα μονάδας τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, θὰ σχηματίσωμεν ἐξ αὐτῶν μίαν δεκάδα· ἐὰν ἔπειτα ἑνώσωμεν ἄλλας δέκα μονάδας, θὰ σχηματίσωμεν μίαν νέαν δεκάδα καὶ ἐὰν οὕτως ἐξακολουθῶμεν, θὰ χωρίσωμεν τὸν ἀριθμὸν εἰς δεκάδας· θὰ περισσεύσουν δὲ καὶ μονάδες ἁπλαῖ (ἂν περισσεύσουν), ἀλλ' ὄχι περισσότεραι τῶν ἐννέα· διότι, ἂν ἔμενον δέκα, θὰ ἐγίνετο ἐξ αὐτῶν ἄλλη μία δεκάς.

Ἐὰν ἔπειτα κάμωμεν εἰς τὰς δεκάδας ὅ,τι ἐκάμαμεν εἰς τὰς ἁπλᾶς μονάδας, ἐὰν δηλονότι ἑνώσωμεν αὐτὰς ἀνὰ δέκα, θὰ σχηματίσωμεν ἐξ αὐτῶν ἑκατοντάδας τινὰς καὶ θὰ μείνωσιν (ἂν μείνωσι) καί τινες δεκάδες, ἀλλ' ὄχι περισσότεραι τῶν ἐννέα.

Ἐὰν ἔπειτα ἑνώσωμεν ὁμοίως καὶ τὰς ἑκατοντάδας θὰ σχηματίσωμεν ἐξ αὐτῶν χιλιάδας τινάς, ἐνδέχεται δὲ νὰ μείνωσι καί τινες ἑκατοντάδες, ἀλλ' ὄχι περισσότεραι τῶν ἐννέα.

Ἐξακολουθοῦντες τοιουτοτρόπως θὰ φθάσωμεν ἀναγκαίως εἰς τάξιν τινὰ μονάδων, ἥτις δὲν θὰ ἔχῃ περισσοτέρας τῶν ἐννέα καὶ ἑπομένως δὲν θὰ εἶνε δυνατὸν νὰ σχηματισθῇ ἐξ αὐτῶν μονὰς ἀνωτέρας τάξεως (θὰ συμβῇ δὲ τοῦτο· διότι εἰς ἑκάστην τάξιν, ὅσον προχωροῦμεν, τόσον αἱ μονάδες γίνονται ὀλιγώτεραι). Τότε ὁ ἀριθμὸς θὰ εἶνε ἀναλελυμένος εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων καὶ εἰς ἑκάστην τάξιν θὰ εἶνε μονάδες ὄχι περισσότεραι τῶν ἐννέα. Ὥστε πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ ἀποτελεσθῇ ἐκ τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων χωρὶς νὰ ληφθῶσιν ἐκ μηδεμιᾶς περισσότεραι τῶν ἐννέα.

7. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, ἵνα ἐκφράσωμεν ἀριθμόν τινα, ἀρκεῖ νὰ δηλώσωμεν πόσας μονάδας ἑκάστης τάξεως περιέχει.

Παραδείγματος χάριν, ἀριθμός τις εἶνε ἐντελῶς εἰς ἡμᾶς γνωστὸς καὶ ὡρισμένος, ὅταν εἰξεύρωμεν ὅτι σύγκειται ἐκ

πέντε χιλιάδων, ὀκτὼ ἑκατοντάδων, ἑπτὰ δεκάδων καὶ ἓξ μονάδων.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον δυνάμεθα δι' ὀλίγων διαφόρων λέξεων νὰ ὀνομάσωμεν μέγα πλῆθος ἀριθμῶν· διότι ἀρκοῦσι τὰ ὀνόματα τῶν ἐννέα πρώτων ἀριθμῶν καὶ τὰ ὀνόματα τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων·

8. Ὁ σχηματισμὸς τῶν ἀριθμῶν ἐκ μονάδων διαφόρων τάξεων ὁδηγεῖ καὶ εἰς τὴν γραφὴν αὐτῶν διὰ τῶν σημείων ἢ ψηφίων.

Ἐὰν τῷ ὄντι γράφωμεν διὰ τῶν ἐννέα ψηφίων τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων ἑκάστης τάξεως (ὅστις ἀριθμὸς δὲν ὑπερβαίνει τὸν ἐννέα) καὶ προσαρτῶμεν εἰς ἕκαστον ψηφίον τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, ἃς παριστᾷ, δηλοῦται ἐπαρκῶς πᾶς ἀριθμός· οἷον·

6 δεκάδες καὶ 7 μονάδες
5 ἑκατοντάδες 3 δεκάδες καὶ 9 μονάδες
3 χιλιάδες 2 ἑκατοντάδες 8 δεκάδες καὶ 4 μονάδες.

'Αλλ' ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, ἃς παριστᾷ ἕκαστον ψηφίον, εἶνε περιττὸν νὰ γράφηται· διότι τοῦτο γίνεται δῆλον ἐκ τῆς θέσεως τοῦ ψηφίου, ὅταν τὰ ψηφία γραφῶσι κατὰ σειράν· οἷον

ἀντὶ : 6 δεκάδες καὶ 7 μονάδες, γράφεται 67

ἀντὶ : 5 ἑκατοντ. 3 δεκάδες καὶ 9 μονάδες, γράφεται 539

ἀντὶ : 3 χιλ. 2 ἑκατοντ. 8 δεκάδες καὶ 4 μονάδες, γράφεται 3284· κάμνομεν δηλαδὴ τὴν ἑξῆς συνθήκην· *Ἕκαστον ψηφίον γεγραμμένον ὄπισθεν ἄλλου* (πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ) *δηλοῖ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως ἢ τὸ ἄλλο ψηφίον*· ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον δηλοῖ ἁπλᾶς μονάδας ἢ πρώτης τάξεως, τὸ προτελευταῖον δηλοῖ δεκάδας ἢ μονάδας δευτέρας τάξεως, τὸ πρὸ αὐτοῦ δηλοῖ ἑκατοντάδας ἢ μονάδας τρίτης τάξεως, τὸ πρὸ τούτου δὲ χιλιάδας, καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε ἡ σημασία ἑκάστου ψηφίου ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θέσεώς του.

9. Ὅταν ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον γράφομεν διὰ ψηφίων, δὲν ἔχῃ μονάδας τάξεώς τινος, ἡ θέσις τῶν μονάδων τῆς τάξεως ταύτης δὲν πρέπει νὰ μένῃ κενή· διότι τότε τὰ προηγούμενα ψηφία χάνουσι τὴν θέσιν των καὶ ὑποβιβάζονται.

Παραδείγματος χάριν, ἂν ὁ ἀριθμὸς

5 ἑκατοντάδες καὶ 7 μονάδες γραφῇ ὡς ἑξῆς : 57,

τὸ ψηφίον 5 κατὰ τὴν ἀνωτέρω γενομένην συνθήκην δηλοῖ 5 δεκάδας καὶ ὄχι ἑκατοντάδας, πρέπει λοιπὸν νὰ γραφῇ σημεῖόν τι εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων, διὰ νὰ τεθῇ τὸ 5 εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατοντάδων· διὰ τοῦτο ἐπενοήθη τὸ σημεῖον 0 (μηδὲν ἢ μηδενικόν), ὅπερ αὐτὸ καθ' ἑαυτὸ δὲν ἔχει ἀξίαν, χρησιμεύει δὲ μόνον εἰς τὸ νὰ κατέχῃ τὴν θέσιν τῶν μονάδων, αἵτινες λείπουσιν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ· (τὰ λοιπὰ ψηφία ὡς ἔχοντα ἀξίαν λέγονται πρὸς διάκρισιν *σημαντικὰ* ψηφία[1].

Παραδείγματος χάριν ὁ ἀριθμὸς

5 ἑκατοντάδες καὶ 7 μονάδες γράφεται 507

ὁ ἀριθμὸς 8 χιλιάδες καὶ 5 δεκάδες γράφεται 8050

ὁ δὲ ἀριθμὸς 4 ἑκατομμύρια τέσσαρες χιλιάδες γράφεται 4004000 ἐπίσης 5870 σημαίνει

5 χιλιάδας 8 ἑκατοντάδας καὶ 7 δεκάδας.

τὸ δὲ 13870 σημαίνει

1 μυριάδα 3 χιλιάδας 8 ἑκατοντάδας καὶ 7 δεκάδας.

---

(1) Τὰ ψηφία ταῦτα λέγονται καὶ ἀραβικοὶ χαρακτῆρες· διότι ἡμεῖς ἐμάθομεν αὐτὰ παρὰ τῶν Ἀράβων (περὶ τὸν 12ον αἰῶνα μ. Χ.). Ἡ ἐφεύρεσις ὅμως αὐτῶν καὶ ἡ μέθοδος τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν εἶνε ἐπινόησις τῶν Ἰνδῶν, παρὰ τῶν ὁποίων ἔμαθον αὐτὴν οἱ Ἄραβες.

Σημείωσις. Αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων γράφονται ὡς ἑξῆς·

1 10 100, 1000, 10000 κτλ.

10. Ἡ διὰ τῶν ψηφίων γραφὴ τῶν ἀριθμῶν εἶναι μία ἐκ τῶν εὐφυεστάτων ἐπινοήσεων τοῦ ἀνθρώπου· διότι καὶ σύντομος εἶνε καὶ δέκα μόνον σημεῖα χρειάζεται (διὰ τοῦτο δὲ καὶ τὰς πράξεις τῶν ἀριθμῶν καθιστᾷ εὐκολωτέρας), ἐν ᾧ ἡ διὰ λέξεων γραφὴ αὐτῶν καὶ μακροτέρα εἶνε καὶ μέγα πλῆθος λέξεων ἀπαιτεῖ. Στηρίζεται δὲ ἡ διὰ τῶν ψηφίων γραφή, ὡς εἴδομεν, πρῶτον μὲν ἐπὶ τοῦ σχηματισμοῦ τῶν ἀριθμῶν ἐκ μονάδων διαφόρων τάξεων καὶ δεύτερον ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω εἰρημένης συνθήκης (ἐδ. 8).

Σημείωσις.

Ἡ ὀνοματολογία τῶν ἀριθμῶν, ὡς ἐξετέθη ἐν τοῖς προηγουμένοις, εἶνε θεωρητικῶς τελεία· ἀλλ' ἐν ἑκάστῃ γλώσσῃ γίνονται τροποποιήσεις τινὲς εἰς τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν· μένουσι λοιπὸν λεπτομέρειαί τινες πρὸς συμπλήρωσιν τῶν περὶ ὀνοματολογίας εἰρημένων.

Οἱ ἀριθμοὶ τῶν δεκάδων ἐκφράζονται διὰ τῶν ἑξῆς λέξεων: *δέκα, εἴκοσι, τριάκοντα, τεσσαράκοντα, πεντήκοντα, ἑξήκοντα, ἑβδομήκοντα, ὀγδοήκοντα, ἐνενήκοντα*.

Οἱ δὲ ἀριθμοὶ τῶν ἑκατοντάδων ἐκφράζονται διὰ τῶν ἑξῆς· *ἑκατὸν, διακόσια, τριακόσια, τετρακόσια, πεντακόσια, ἑξακόσια, ἑπτακόσια, ὀκτακόσια, ἐνεακόσια*.

Οἱ ἀριθμοὶ οἱ μικρότεροι τοῦ χίλια δύνανται νὰ περιέχωσιν ἑκατοντάδας, δεκάδας καὶ μονάδας ἁπλᾶς, τὸ δὲ ὄνομα ἑκάστου ἐξ αὐτῶν ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ ὀνόματος τῶν ἑκατοντάδων του καὶ ἐκ τοῦ ὀνόματος τῶν δεκάδων του καὶ ἐκ τοῦ ὀνόματος τῶν ἁπλῶν μονάδων του· παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει δύο δεκάδας καὶ ὀκτὼ μονάδας, ἀπαγγέλλεται *εἴκοσιν ὀκτώ*· ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις ἔχει πέντε ἑκατοντάδας καὶ τρεῖς δεκάδας καὶ ἑπτὰ μονάδας, ἀπαγγέλλεται *πεντακόσια τριάκοντα ἑπτά*· καὶ ἀριθμός, ὅστις ἔχει πέντε ἑκατοντάδας καὶ δύο δεκάδας, ἀπαγγέλλεται *πεντακόσια εἴκοσι*.

Ἀντί: δέκα ἕν, δέκα δύο, λέγομεν ἕνδεκα, δώδεκα.

Οἱ μεταξὺ τοῦ χίλια καὶ τοῦ ἑνὸς ἑκατομμυρίου περιεχόμενοι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ ἔχωσιν ἑκατοντάδας χιλιάδος, δεκάδας χιλιάδος καὶ μονάδας χιλιάδος, ἔτι δὲ καὶ ἑκατοντάδας, δεκάδας καὶ μονάδας ἁπλᾶς, τουτέστι σύγκεινται ἔκ τινων χιλιάδων (αἱ ὁποῖαι θὰ εἶνε ὀλιγώτεραι τῶν χιλίων· διότι χίλιαι χιλιάδες ἀποτελοῦσιν ἓν ἑκατομμύριον) καὶ ἔκ τινος ἀριθμοῦ μικροτέρου τοῦ χίλια (τὸ δεύτερον τοῦτο μέρος δύναται καὶ νὰ λείπῃ) καὶ τὸ ὄνομα ἑκάστου ἐξ αὐτῶν σύγκειται ἐκ τῶν ὀνομάτων τῶν δύο μερῶν του, οἷον ὁ ἀριθμὸς 215873 ἀπαγγέλλεται διακόσιαι δέκα πέντε χιλιάδες καὶ ὀκτακόσια ἑβδομήκοντα τρία.

ὁ δὲ ἀριθμὸς 610307 ἀπαγγέλλεται ἑξακόσια δέκα χιλιάδες καὶ τριακόσια ἑπτὰ κτλ. ὁ δὲ ἀριθμὸς 67000 ἀπαγγέλλεται ἑξήκοντα ἑπτὰ χιλιάδες.

Οἱ μεταξὺ τοῦ ἑνὸς ἑκατομμυρίου καὶ τοῦ ἑνὸς δισεκατομμυρίου ὑπάρχοντες ἀριθμοὶ σύγκεινται ἔκ τινος ἀριθμοῦ ἑκατομμυρίου (ὅστις θὰ εἶνε μικρότερος τοῦ χίλια) καὶ ἔκ τινος ἀριθμοῦ χιλιάδων (ὅστις θὰ εἶνε μικρότερος τοῦ χίλια καὶ δύναται καὶ ὅλως νὰ λείπῃ) καὶ ἔκ τινος ἀριθμοῦ μικροτέρου τοῦ χίλια (ὅστις δύναται καὶ νὰ λείπῃ) καὶ τὸ ὄνομα ἑκάστου ἐξ αὐτῶν σύγκειται ἐκ τῶν τριῶν ὀνομάτων τῶν τριῶν μερῶν του· οἷον ὁ ἀριθμὸς 315897504 ἀπαγγέλλεται, τριακόσια δέκα πέντε ἑκατομμύρια, ὀκτακόσιαι ἐνενήκοντα ἑπτὰ χιλιάδες καὶ πεντακόσια τέσσαρα· ὁ δὲ ἀριθμὸς 58004310 ἀπαγγέλλεται πεντήκοντα ὀκτὼ ἑκατομμύρια, τέσσαρες χιλιάδες καὶ τριακόσια δέκα.

Ὁμοίως σχηματίζομεν τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν τῶν μεταξὺ τοῦ ἑνὸς δισεκατομμυρίου καὶ ἑνὸς τρισεκατομμυρίου περιεχομένων καὶ οὕτω καθεξῆς.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον τῆς ὀνομασίας τῶν ἀριθμῶν θεωροῦμεν αὐτοὺς ὡς συγκειμένους ἐκ μερῶν, τὰ ὁποῖα εἶνε μονάδες, χιλιάδες, ἑκατομμύρια, δισεκατομμύρια κτλ. Αἱ μονάδες αὗται, ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ *ἕν, χίλια, ἑκατομμύριον*, κτλ. λέγονται *πρωτεύουσαι*, καὶ ἑκάστη ἐξ αὐτῶν ἀποτελεῖται ἐκ χιλίων μονάδων τῆς ἀμέσως προηγουμένης τάξεως.

Περὶ διαφόρων συστημάτων ἀριθμήσεως.

— **11.** Αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων, τὰς ὁποίας ἐσχηματίσαμεν ἐν ἀρχῇ καὶ ἐκ τῶν ὁποίων συντίθενται οἱ ἀριθμοί, προχωροῦσιν οὕτως, ὥστε ἑκάστη ἐξ αὐτῶν εἶνε δεκαπλασία τῆς ἀμέσως προηγουμένης· δηλαδὴ ἑκάστη περιέχει δεκάκις τὴν ἀμέσως προηγουμένην. Ἐκφράζομεν δὲ ἕκαστον ἀριθμὸν δεικνύοντες πόσας μονάδας ἑκάστης τάξεως ὁ ἀριθμὸς οὗτος περιέχει. Εἰς δὲ τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν διὰ σημείων, ἐπειδὴ πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ σχηματισθῇ ἐκ μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων χωρὶς νὰ ληφθῶσιν ἔκ τινος τάξεως περισσότεραι τῶν ἐννέα, παραδεχόμεθα ἐννέα σημεῖα ἢ ψηφία πρὸς παράστασιν τῶν ἐννέα πρώτων ἀριθμῶν καὶ κάμνομεν τὴν συνθήκην, ὅτι τὸ αὐτὸ ψηφίον θὰ παριστᾷ μονάδας διαφόρων τάξεων κατὰ τὴν θέσιν αὐτοῦ· ἤτοι ἁπλᾶς μὲν μονάδας, ἐὰν κατέχῃ τὴν πρώτην ἐκ δεξιῶν θέσιν, δεκάδας δέ, ἐὰν ἔχῃ τὴν δευτέραν θέσιν, ἑκατοντάδας, ἐὰν τὴν τρίτην, καὶ οὕτω καθεξῆς. Στηριζόμενοι δὲ εἰς τὴν συνθήκην ταύτην (καὶ εἰς τὸν σχηματισμὸν τῶν ἀριθμῶν ἐκ μονάδων διαφόρων τάξεων (δυνάμεθα νὰ γράψωμεν πάντα ἀριθμὸν διὰ ψηφίων· διότι ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ γράψωμεν πρῶτον τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τάξεως, κατόπιν αὐτοῦ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ἀμέσως ἑπομένης τάξεως, καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τοῦ ψηφίου τῶν ἁπλῶν μονάδων. Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι δυνατὸν μονάδες τάξεώς τινος νὰ μὴ ὑπάρχωσιν ἐν τῷ ἀριθμῷ, διὰ τοῦτο χρειάζεται καὶ δέκατον σημεῖον τὸ 0, τὸ ὁποῖον γράφεται εἰς τὴν θέσιν τῶν ἐλλειπουσῶν μονάδων.

—**12.** Ἀλλ' εἶνε φανερόν, ὅτι αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων ἠδύναντο καὶ ἄλλως νὰ σχηματισθῶσιν· ἠδυνάμεθα π. χ. ἀντὶ νὰ λάβωμεν κατὰ προτίμησιν τὸν 10, νὰ λάβωμεν οἱονδήποτε ἄλλον ἀριθμόν, οἷον τὸν 8, καὶ νὰ σχηματίσωμεν τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων οὕτως, ὥστε ἑκάστη νὰ εἶνε ὀκταπλασία τῆς ἀμέσως προηγουμένης, δηλαδὴ νὰ περιέχῃ αὐτὴν ὀκτάκις· τότε μονὰς δευτέρας τάξεως θὰ ἦτο ὁ ἀριθμὸς ὀκτὼ (ἢ ἡ ὀκτάς), μονὰς τρίτης τάξεως ὁ ὀκτάκις ὀκτώ· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τότε δέ, ἵνα ἐκφράσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς διὰ λέξεων, πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς τὰς διαφόρους ταύτας μονάδας ἴδια ὀνόματα· καὶ νὰ δεικνύωμεν δι' ἕκαστον ἀριθμὸν πόσας μονάδας ἐξ ἑκάστης τάξεως περιέχει· θὰ περιέχῃ δὲ τότε πᾶς ἀριθμὸς ὀλιγωτέρας τῶν ὀκτὼ μονάδων ἐξ ἑκάστης τάξεως· (ἄλλως θὰ ἐσχηματίζετο ἐξ αὐτῶν μία ἀκόμη μονὰς τῆς ἀμέσως μεγαλητέρας). Διὰ δὲ τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν, ἐὰν παραδεχθῶμεν τὴν αὐτὴν συνθήκην (ὅτι δηλαδὴ τὸ αὐτὸ ψηφίον παριστᾷ μονάδας διαφόρων τάξεων κατὰ τὴν θέσιν του), θὰ ἐχρειάζοντο τότε μόνον ὀκτὼ σημεῖα· τουτέστι τὰ ἑπτὰ πρῶτα σημαντικὰ ψηφία καὶ τὸ 0.

Παραδείγματος χάριν, ἐν τῷ συστήματι τούτῳ ὁ ἀριθμὸς ὀκτὼ θὰ γράφηται ὡς ἑξῆς· 10, ὁ ἐννέα 11, ὁ δέκα 12, κτλ. ὁ ὀκτάκις ὀκτὼ 100· ὁ δὲ ἑκατὸν ὡς ἑξῆς 144, κτλ.

Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν, ὅτι εἶνε δυνατὸν νὰ σχηματισθῶσιν ἄπειρα συστήματα ἀριθμήσεως διακρινόμενα ἀπ' ἀλλήλων ἐκ τῆς βάσεως, ἤτοι ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δεικνύει πόσαι μονάδες ἑκάστης τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν τῆς ἀκολούθου.

Εἰς πᾶν δὲ σύστημα ἀριθμήσεως πάντες οἱ ἀριθμοὶ γράφονται διὰ τόσων ψηφίων, ὅσαι εἶνε αἱ μονάδες τῆς βάσεως.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Νὰ τραπῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 12, 17, 40 εἰς τὸ ὀκταδικὸν σύστημα (Ἀπ. 14, 21, 50).

2) Νὰ τραπῶσιν οἱ ἑξῆς ἀριθμοὶ τοῦ ὀκταδικοῦ συστήματος 70, 107, 43 εἰς ἀριθμοὺς τοῦ δεκαδικοῦ (Ἀπ. 56, 71, 35).

3) Νὰ τραπῇ ὁ ἀριθμὸς χίλια εἰς τὸ δυαδικὸν σύστημα

(Ἀπ. 111101000).

4) Νὰ τραπῇ ὁ ἀριθμὸς 101010 τοῦ δυαδικοῦ συστήματος εἰς ἀριθμὸν τοῦ δεκαδικοῦ (Ἀπ. 42).

5) Ἐὰν εἰς ἀριθμὸν ἔχοντα δύο ἢ περισσότερα ψηφία παραλείψωμεν τὸ τελευταῖον ψηφίον, προκύπτει ἄλλος ἀριθμός, ὅστις δεικνύει πόσας δεκάδας περιέχει ἐν συνόλῳ ὁ πρῶτος· ἤτοι πόσας δεκάδας ἀποτελοῦσι πᾶσαι αἱ μονάδες του ἑνούμεναι ἀνὰ δέκα.

Ἐὰν δὲ παραλείψωμεν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία, ὁ προκύπτων νέος ἀριθμὸς δεικνύει πόσας ἑκατοντάδας περιέχει ἐν συνόλῳ ὁ δοθεὶς ἀριθμός.

Ἐὰν δὲ παραλείψωμεν τὰ τρία τελευταῖα, ὁ προκύπτων ἀριθμὸς δεικνύει πόσας χιλιάδας περιέχει ὁ δοθείς· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς 58709 περιέχει ἐν συνόλῳ δεκάδας μὲν 5870 ἑκατοντάδας δὲ 587, χιλιάδας δὲ 58, μυριάδας δὲ 5.

Περὶ τῆς ἰσότητος καὶ ἀνισότητος.

13. *Ἴσοι* λέγονται δύο ἀριθμοί, ὅταν ἑκάστη μονὰς τοῦ ἑνὸς ἔχῃ μίαν τοῦ ἄλλου ἀντίστοιχον καὶ τἀνάπαλιν.

Παραδείγματος χάριν εἰς πλῆθός τι ἀρτιμελῶν ἀνθρώπων, ὁ ἀριθμὸς τῶν δεξιῶν χειρῶν καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀριστερῶν εἶνε ἴσοι.

14. *Ἄνισοι* δὲ λέγονται, ὅταν μονάδες τινὲς τοῦ ἑνὸς δὲν ἔχωσιν ἀντιστοίχους εἰς τὸν ἄλλον· τότε ὁ πρῶτος, ὁ τὰς περισσοτέρας μονάδας ἔχων, λέγεται *μεγαλήτερος* τοῦ δευτέρου, ὁ δὲ δεύτερος *μικρότερος* τοῦ πρώτου.

Παραδείγματος χάριν, ὁ 10 εἶνε μεγαλήτερος τοῦ 9, ὡς ἔχων μίαν μονάδα περισσοτέραν.

Σημεῖον τῆς ἰσότητος εἶνε τὸ ἑξῆς $=$ γράφεται δὲ μεταξὺ τῶν δύο ἴσων ἀριθμῶν οἷον $8=8$.

Σημεῖον τῆς ἀνισότητος εἶνε τὸ ἑξῆς $<$· γράφεται δὲ ὁ μικρότερος ἀριθμὸς πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας· οἷον·

$8<9$. $12<40$. $8>3$.

15. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἰσότητος τῶν ἀριθμῶν γίνονται φανεραὶ ἀμέσως αἱ ἑξῆς ἰδιότητες αὐτῆς·

α′) *Οἱ τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ ἴσοι εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλους ἴσοι.*

β′) *Ἐὰν εἰς ἴσους ἀριθμοὺς προστεθῶσιν ἴσοι, οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ εἶνε ἴσοι.*

Ἐκ τῆς ἰδιότητος δὲ ταύτης ἕπεται ἀμέσως ἡ ἑξῆς·

Οἱ διπλάσιοι τῶν ἴσων εἶνε ἴσοι καὶ οἱ τριπλάσιοι τῶν ἴσων εἶνε ἴσοι· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐὰν δηλαδὴ λάβωμεν ἑκάτερον τῶν ἴσων δύο φοράς, προκύπτουσιν ἐξ αὐτῶν ἀριθμοὶ ἴσοι· καὶ ἂν λάβωμεν ἑκάτερον τῶν ἴσων τρεῖς φοράς, προκύπτουσιν ἐξ αὐτῶν ἀριθμοὶ ἴσοι· καὶ οὕτω καθεξῆς.

(Καὶ ἡ ἀνισότης ἔχει τὰς ἑξῆς ἰδιότητας, αἵτινες εἶνε πρόδηλοι.

Ἐὰν εἰς ἀνίσους ἀριθμοὺς προστεθῶσιν ἴσοι, οἱ ἀριθμοὶ μένουσιν ἄνισοι.

Οἱ διπλάσιοι τῶν ἀνίσων εἶνε ὁμοίως ἄνισοι, καὶ οἱ τριπλάσιοι τῶν ἀνίσων εἶνε ὁμοίως ἄνισοι, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐὰν δηλαδὴ λάβωμεν ἑκάτερον τῶν ἀνίσων δύο φοράς, προκύπτουσιν ἐξ αὐτῶν ἀριθμοὶ ἄνισοι (ἐκ τοῦ μεγαλειτέρου ὁ μεγαλείτερος)· καὶ ἂν λάβωμεν ἑκάτερον τῶν ἀνίσων τρεῖς φοράς, προκύπτουσιν ὁμοίως ἄνισοι καὶ οὕτω καθεξῆς.)

Ὁρισμοί.

Ἀξίωμα λέγεται πρότασις ἀφ' ἑαυτῆς φανερά.

Ἀξίωμα, λόγου χάριν, εἶνε ἡ ἑξῆς πρότασις·

Καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν ἑνωθῇ πλῆθός τι μονάδων, πάντοτε ἀποτελεῖται ὁ αὐτὸς ἀριθμός.

ἢ καὶ ἡ ἑξῆς·

Παντὸς ἀριθμοῦ ὑπάρχει μεγαλείτερος.

Ἀπόδειξις λέγεται συλλογισμὸς (ἢ πολλοὶ συλλογισμοί), δι' οὗ πειθόμεθα ὅτι πρότασίς τις εἶνε ἀληθής.

Θεώρημα δὲ λέγεται ἡ πρότασις, τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια γίνεται φανερὰ διὰ τῆς ἀποδείξεως.

Θεώρημα, λόγου χάριν, εἶνε ἡ ἑξῆς πρότασις·

Πᾶς ἀριθμὸς δύναται ν' ἀναλυθῇ εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων καὶ εἰς ἑκάστην τάξιν νὰ μὴ εἶνε περισσότεραι τῶν ἐννέα· (τὴν ἀπόδειξιν ἰδὲ εἰς τὸ ἐδ. 6).

Πόρισμα δὲ λέγεται πρότασις στηριζομένη ἀμέσως ἐπὶ μιᾶς ἢ περισσοτέρων ἀληθῶν προτάσεων.

Πάντα τα μηχανήματα άπαντα παρουσιάζονται
εις τον νουν όταν θεωρή τα αντικείμενα
των έργων του ανθ. ανάγονται εις τέσσαρα στοιχειώδη
μηχανήματα πρόσθεσιν αφαίρεσιν πολλ/σιν
διαίρεσιν

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄.

ΑΙ ΤΕΣΣΑΡΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΥΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

16. *Ἡ πρόσθεσις εἶνε πρᾶξις, δι' ἧς σχηματίζομεν ἕνα ἀριθμὸν πασῶν τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας ἔχουσι δύο ἢ περισσότεροι δοθέντες ἀριθμοί.*

Οἱ εἰς πρόσθεσιν δοθέντες ἀριθμοὶ λέγονται *προσθετέοι*· τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως λέγεται *κεφάλαιον* ἢ *ἄθροισμα*.

Τὸ ἄθροισμα σημειοῦται, ἐὰν γραφῶσιν οἱ προσθετέοι ἀριθμοὶ κατὰ σειρὰν καὶ τεθῇ μεταξὺ ἑκάστου αὐτῶν καὶ τοῦ ἑπομένου τὸ σημεῖον τῆς προσθέσεως, ἤτοι τὸ $+$ (ὅπερ ἀναγινώσκεται *σύν*).

Παραδείγματος χάριν, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 8 παρίσταται ὡς ἑξῆς $5+8$, ἀναγινώσκεται δὲ πέντε σὺν ὀκτώ.

17. Τὸ ἄθροισμα δεδομένων ἀριθμῶν εἶνε ἀριθμὸς ἐντελῶς ὡρισμένος· διότι εἶνε δεδομέναι πᾶσαι αἱ μονάδες, αἵτινες θ' ἀποτελέσωσιν αὐτόν. *Εἶνε λοιπὸν ἀδιάφορον κατὰ ποῖον τρόπον θὰ ἑνωθῶσιν αἱ μονάδες αὗται· ἀρκεῖ νὰ ληφθῶσι πᾶσαι.*

Σημείωσις. Οἱ προσθετέοι ἀριθμοὶ ὑποτίθεται ὅτι παριστῶσιν ὁμοειδῆ ποσὰ καὶ τὸ ἄθροισμα εἶνε ὁμοειδὲς πρὸς αὐτούς, ἀλλὰ τὰ πράγματα, τὰ ὁποῖα παριστῶσιν οἱ ἀριθμοί, εἶνε ἀδιάφορα ὡς πρὸς τὰς πράξεις, τὰς ὁποίας κάμνομεν ἐπ' αὐτῶν, καὶ ὡς πρὸς τὰς σχέσεις αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους· καθώς, λόγου χάριν, δύο πρόβατα καὶ δύο πρόβατα κάμνουν τέσσαρα πρόβατα, οὕτω καὶ δύο μῆλα καὶ δύο μῆλα κάμνουν τέσσαρα μῆλα καὶ οὕτω καθεξῆς· πάντοτε δύο καὶ δύο κάμνουν τέσσαρα, ἀρκεῖ νὰ εἶνε ὁμοειδῆ. Διὰ τοῦτο ἐν τῇ ἀριθμητικῇ θεωροῦμεν συνήθως τοὺς ἀριθμοὺς ὡς *ἀφῃρημένους*, δηλαδὴ ὡς ἀριθμοὺς ἁπλῶς, χωρὶς νὰ ὁρίζωμεν καὶ τὸ πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον οἱ ἀριθμοὶ παριστῶσιν, οἷον ὀκτώ, δύο, δέκα κτλ. Ὅταν δὲ ὁρίζωμεν καὶ τὸ πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον οἱ ἀριθμοὶ παριστῶσι, τότε οἱ ἀριθμοὶ λέγονται συγκεκριμένοι· οἷον: ὀκτὼ ἄνθρωποι, τρία ἔτη, πέντε ὀκάδες, κ. τ. λ.

Πρόσθεσις
κατὰ τὰς ἁπλουστάτας περιπτώσεις.

18. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν δύο μονοψηφίους ἀριθμούς, οἷον τοὺς 7 καὶ 3. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα, προςθέτομεν εἰς τὸν 7 τὰς μονάδας τοῦ 3, τὴν μίαν μετὰ τὴν ἄλλην· ἤτοι λέγομεν 7 καὶ 1 κάμνουν 8, καὶ 1 κάμνουν 9, καὶ 1 κάμνουν 10.

Ἀντὶ νὰ πρσθέσωμεν εἰς τὸν 7 τὰς μονάδας τοῦ 3 δυνάμεθα νὰ προθέσωμεν εἰς τὸν 3 τὰς μονάδας τοῦ 7, εἶνε δὲ προφανές, ὅτι θὰ εὕρωμεν ὡς ἄθροισμα πάλιν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 10· διότι τὸ ἄθροισμα σχηματίζεται ἐξ 7 μονάδων καὶ ἐκ 3 μονάδων· εἶνε δὲ ἀδιάφορον κατὰ ποῖον τρόπον θὰ ἑνωθῶσιν αἱ μονάδες αὗται.

Σημείωσις. Τὴν πρόσθεσιν δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν ἐκτελοῦμεν ἀμέσως ἀπὸ μνήμης· διότι εὐκόλως μανθάνομεν νὰ ἐνθυμώμεθα τὸ ἄθροισμα δύο οἱωνδήποτε μονοψηφίων ἀριθμῶν.

19. Διὰ νὰ προσθέσωμεν πολλοὺς μονοψηφίους ἀριθμούς, προςθέτομεν δύο ἐξ αὐτῶν· ἔπειτα εἰς τὸ ἄθροισμα τούτων προσθέτομεν ἕνα ἄλλον· εἰς τὸ νέον ἄθροισμα ἕνα ἄλλον· καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ λάβωμεν πάντας τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 6, 8, 2, 5, 6, 9, λέγομεν 6 καὶ 8 κάμνουν 14· 14 καὶ 2 κάμνουν 16· 16 καὶ 5 κάμνουν 21· 21 καὶ 6 κάμνουν 27· καὶ τέλος 27 καὶ 9 κάμνουν 36· (τὰς διαδοχικὰς ταύτας προσθέσεις ἐκτελοῦμεν ἢ ἀπὸ μνήμης ἢ προσθέτοντες εἰς τὸν πολυψήφιον τὰς μονάδας τοῦ μονοψηφίου μίαν μετ' ἄλλην) ἑπομένως τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶνε 36.

Σημειωτέον δέ, ὅτι καὶ κατ' ἄλλην τάξιν οἱανδήποτε ἂν λάβωμεν καὶ προσθέσωμεν τοὺς δοθέντας ἀριθμούς, πάλιν τὸ αὐτὸ ἄθρισμα θὰ εὕρωμεν, διότι τὸ ἄθροισμα ἀποτελεῖται ἐκ πασῶν τῶν μονάδων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν· εἶνε δὲ ἀδιάφορον πῶς θὰ ἑνωθῶσιν αἱ μονάδες αὗται· λόγου χάριν ἠδυνάμεθα νὰ ἑνώσωμεν αὐτὰς ὡς ἑξῆς· λαμβάνομεν μίαν μονάδα τοῦ 6 καὶ προσθέτομεν αὐτὴν εἰς τὸν 9, ὅτε τοῦτο γίνεται 10, τὸ δὲ 6 γίνεται 5· τότε τὰ δύο 5 κάμνουν καὶ ἄλλο 10· καὶ τὸ 8 καὶ 2 κάμνουν ἄλλο 10· ἔχομεν λοιπὸν 30· τοῦτο μετὰ τοῦ ἄλλου 6 ἀποτελεῖ τέλος τὸν 36.

Προσθέσεις ὁσωνδήποτε καὶ οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.

20. Πᾶσα πρόσθεσις ἀνάγεται εἰς τὴν ἁπλῆν πρόσθεσιν μονοψηφίων ἀριθμῶν· διότι εἶνε φανερὸν ὅτι, ἵνα προσθέσωμεν ὁσουσδήποτε ἀριθμούς, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν χωριστὰ τὰς μονάδας αὐτῶν, χωριστὰ τὰς δεκάδας, τὰς ἑκατοντάδας κτλ., καὶ νὰ ἑνώσωμεν ἔπειτα πάντα ταῦτα τὰ ἀθροίσματα· διότι τότε ἑνοῦνται πᾶσαι αἱ μονάδες τῶν δοθέντων ἀριθμῶν καὶ σχηματίζουσιν ἕνα μόνον, ὅστις θὰ εἶνε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς

2955 408 1296

Ἡ πρᾶξις, χάριν εὐκολίας, διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r} 2955 \\ 408 \\ 1296 \\ \hline 4659 \end{array}$$

Γράφομεν δηλονότι τοὺς ἀριθμοὺς τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην· ἔπειτα ἄγομεν ὑπ' αὐτοὺς ὁριζοντίαν γραμμὴν καὶ ὑποκάτω τῆς γραμμῆς ταύτης γράφομεν τὰ ψηφία τοῦ ἀθροίσματος, καθ' ὅσον εὑρίσκωμεν αὐτά.

Κατὰ πρῶτον προσθέτομεν τὰς ἁπλᾶς μονάδας λέγοντες 6 καὶ 8 κάμνουν 14 καὶ 5 κάμνουν 19· τὸ ἄθροισμα τῶν ἁπλῶν μονάδων εἶνε λοιπὸν 19 μονάδες· ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἔχει μίαν δεκάδα καὶ 9 μονάδας, γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν ἁπλῶν μονάδων μόνον τὸ ψηφίον 9 τῶν μονάδων καὶ *κρατοῦμεν* τὴν μίαν δεκάδα διὰ νὰ τὴν ἑνώσωμεν μετὰ τῶν δεκάδων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Μεταβαίνοντες ἔπειτα εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων λέγομεν 1 τὸ *κρατούμενον* καὶ 9 κάμνουν 10 καὶ 5 κάμνουν 15· τὸ ἄθροισμα τῶν δεκάδων εἶνε λοιπὸν 15 δεκάδες, ἤτοι 1 ἑκατοντὰς καὶ 5 δεκάδες· καὶ τὸ μὲν ψηφίον 5 τῶν δεκάδων γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων, τὴν δὲ ἑκατοντάδα κρατοῦμεν διὰ νὰ τὴν ἑνώσωμεν μετὰ τῶν ἑκατοντάδων τῶν προσθετέων ἀριθμῶν.

Μεταβαίνοντες ἔπειτα εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων λέγομεν 1 τὸ κρατούμενον καὶ 2 κάμνουν 3 καὶ 4 κάμνουν 7 καὶ 9 κάμνουν 16· τὸ ἄθροισμα τῶν ἑκατοντάδων εἶνε λοιπὸν 16 ἑκατοντάδες· τουτέστι 1 χιλιὰς καὶ 6 ἑκατοντάδες καὶ τὸ μὲν ψηφίον 6 τῶν ἑκατοντάδων γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων, τὴν δὲ μίαν χιλιάδα κρατοῦμεν διὰ νὰ ἑνώσωμεν μετὰ τῶν χιλιάδων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Μεταβαίνοντες τέλος εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων, λέγομεν 1 τὸ κρατούμενον καὶ 1 κάμνουν 2 καὶ 2 κάμνουν 4· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν χιλιάδων εἶνε 4 χιλιάδες καὶ τὸ ψηφίον 4 τῶν χιλιάδων γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων.

Ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶνε 4659.

Κανὼν τῆς προσθέσεως.

21. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὁ ἑξῆς κανὼν τῆς προσθέσεως·

Ἵνα προσθέσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους ἀριθμούς, γράφομεν αὐτοὺς τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες ἑκάστης τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην καὶ ἄγομεν ὑπ' αὐτοὺς ὁριζοντίαν γραμμήν. Ἔπειτα προσθέτομεν χωριστὰ τὰ ψηφία ἑκάστης στήλης ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς στήλης τῶν ἁπλῶν μονάδων· καὶ ὅταν μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων μιᾶς στήλης δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν 9, γράφομεν αὐτὸ ὑποκάτω τῆς αὐτῆς στήλης ἐὰν ὅμως ὑπερβαίνῃ τὸν 9, γράφομεν μόνον τὰς μονάδας τοῦ ἀθροίσματος ὑποκάτω τῆς στήλης, τὰς δὲ δεκάδας αὐτοῦ προσθέτομεν εἰς τὴν ἀκόλουθον πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλην, καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τῆς τελευταίας στήλης.

Σημείωσις. Ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἰς ἑκάστην στήλην δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν 9, εἶνε ἀδιάφορον, ἂν ἀρχίζωμεν τὴν πρᾶξιν ἀπὸ τῆς προσθέσεως τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ προχωρῶμεν πρὸς τὰ ἀριστερά, ἢ ἂν ἀρχίζωμεν ἀπὸ τῆς προσθέσεως τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τάξεως καὶ προχωρῶμεν πρὸς τὰ δεξιά. Τοῦτο συμβαίνει π. χ. εἰς τὴν ἑξῆς πρόσθεσιν·

$$\begin{array}{r} 542 \\ 114 \\ 321 \\ 12 \\ \hline 989 \end{array}$$

Ἀλλ' ὅταν τὸ ἄθροισμα μιᾶς στήλης (ἢ καὶ περισσοτέρων) ὑπερβαίνῃ τὸν 9, ἐὰν ἠρχίζαμεν τὴν πρόσθεσιν ἀπὸ τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τάξεως, θὰ ἤμεθα ἠναγκασμένοι νὰ ἀλλάζωμεν τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον ἐγράψαμεν π. χ. εἰς τὴν ἑξῆς πρόσθεσιν·

$$\begin{array}{r} 4854 \\ 897 \\ 1568 \\ \hline 5 \\ 71 \\ \ldots \\ 7319 \end{array}$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν μυριάδων εἶνε 5· ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν χιλιάδων λαμβάνομεν προσέτι 2 μυριάδας· ὥστε τὸ πρῶτον ψηφίον 5 πρέπει νὰ γίνῃ 7. Ὁμοίως τὸ δεύτερον ψηφίον ἀπὸ 1 πρέπει νὰ γίνῃ 3 κτλ. Διὰ τοῦτο ἀρχόμεθα πάντοτε ἀπὸ τῆς στήλης τῶν ἁπλῶν μονάδων.

Βάσανος τῆς προσθέσεως.

22. *Βάσανος ἢ δοκιμὴ πράξεώς τινος λέγεται ἄλλη τις πρᾶξις, δι' ἧς ἐξελέγχομεν, ἂν ἡ πρώτη ἐγένετο ἄνευ λάθους.*

Ἡ βάσανος τῆς προσθέσεως γίνεται ὡς ἑξῆς:

Ἐπαναλαμβάνομεν τὴν πρᾶξιν προσθέτοντες τὰ ψηφία ἑκάστης στήλης κατ' ἄλλην τάξιν· ἤτοι ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, ἂν προηγουμένως προεβαίνομεν ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω· ἢ καὶ ὅλως ἀτάκτως. Ἐὰν καὶ πάλιν εὕρωμεν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα, τοῦτο εἶνε ἔνδειξις, ὅτι ἡ πρόσθεσις ἐγένετο ἄνευ λάθους.

Γενικαὶ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως.

23. Ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τῆς προσθέσεως, ἐξ ἧς πᾶσαι αἱ ἄλλαι αὐτῆς ἰδιότητες πηγάζουσιν, εἶνε ἡ ἑξῆς·

Τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἀριθμῶν μένει τὸ αὐτό, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προστεθῶσι.

Διότι, ὡς καὶ προηγουμένως παρετηρήσαμεν (ἐδ. 17), τὸ ἄθροισμα θὰ ἀποτελεσθῇ ἐκ τῆς ἑνώσεως τῶν μονάδων τῶν δεδομένων ἀριθμῶν· πᾶς δὲ ἀριθμὸς εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένος, ὅταν δοθῶσιν αἱ μονάδες, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦσιν αὐτόν.

Ἐκ τῆς θεμελιώδους ταύτης ἰδιότητος ἕπονται αἱ ἑξῆς·

1) ***Δυνάμεθα εἰς πᾶν ἄθροισμα νὰ ἀντικαταστήσωμεν προσθετέους τινὰς διὰ τοῦ εὑρεθέντος ἀθροίσματος αὐτῶν·***
δυνάμεθα δηλονότι νὰ συμπτύξωμεν προσθετέους τινὰς εἰς ἕνα μόνον.

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ., ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἑξῆς ἀριθμούς· 8, 12, 10, 4, 25.

λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα θὰ μείνῃ τὸ αὐτό, καὶ ὅταν ἀντὶ τῶν προσθετέων 10 καὶ 4 λάβωμεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 14· ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ 8, 12, 14, 25 θὰ δώσωσι τὸ αὐτὸ ἄθροισμα ὡς καὶ οἱ δοθέντες ἀριθμοί.

Ἀπόδειξις. Διότι κατὰ τὴν προειρημένην θεμελιώδη ἰδιότητα δύναμαι νὰ προσθέσω τοὺς δοθέντας ἀριθμούς, καθ' οἱανδήποτε τάξιν θέλω· ἂν λοιπὸν ἀρχίσω τὴν πρόσθεσιν ἀπὸ τῶν 10 καὶ 4, θὰ εὕρω τὸ ἄθροισμα 14 καὶ θὰ ἔχω ἔπειτα νὰ προσθέσω τοὺς ἀριθμοὺς 14, 8, 12, 25· ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τούτων καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων εἶνε εἷς καὶ ὁ αὐτὸς ἀριθμός.

Ἡ ἰδιότης αὕτη δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς·

Εἰς πᾶν ἄθροισμα δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν οἱονδήποτε προσθετέον δι' ἄλλων ἀριθμῶν ἐχόντων αὐτὸν ἄθροισμα·

τουτέστι δυνάμεθα νὰ ἀναλύσωμεν ἕνα προσθετέον εἰς πολλοὺς ἄλλους.

Παραδείγματος χάριν, εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν

14, 8, 12, 25

δύναμαι πάλιν νὰ ἀντικαταστήσω τὸν 14 διὰ τῶν ἀριθμῶν 10 καὶ 4, οἵτινες ἔχουσιν αὐτὸν ἄθροισμα.

2) *Ἵνα προσθέσωμεν ἀριθμὸν εἰς ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν αὐτὸν εἰς ἕνα ἐκ τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος.*

Ἀπόδειξις. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 8 εἰς τὸ ἑξῆς ἄθροισμα·

$$4 + 7 + 10 + 12\cdot$$

ἵνα γίνῃ τοῦτο, πρέπει νὰ εὕρωμεν πρῶτον τὸ ἄθροισμα, δηλ. προσθέσωμεν πρῶτον τοὺς ἀριθμοὺς 4, 7, 10, 12, καὶ ἔπειτα εἰς τὸ εὑρεθὲν ἄθροισμα νὰ προσθέσωμεν τὸν 8· ἀλλὰ τότε προφανῶς εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 4, 7, 10, 12, 8·
ἢ καὶ τῶν ἑξῆς· 4, 15, 10, 12. (ἰδιότης 1).

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ 8 προσετέθη εἰς ἕνα τῶν προσθετέων (τὸν 7) καὶ οὕτω προσετέθη εἰς τὸ ὅλον ἄθροισμα.

3) *Ἵνα προσθέσωμεν δύο ἀθροίσματα, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν ὁμοῦ πάντας τοὺς προσθετέους ἀμφοτέρων τῶν ἀθροισμάτων.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τὰ δύο ἀθροίσματα

$$5 + 12 + 8 \text{ καὶ } 7 + 22\cdot$$

λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θὰ εὑρεθῇ, ἐὰν προστεθῶσιν ὁμοῦ πάντες οἱ προσθετέοι, δηλαδὴ ἂν προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 5, 12, 8 καὶ 7, 22.

Ἀπόδειξις. Ἂν εἰς τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἀντικαταστήσωμεν τοὺς προσθετέους 5, 12 καὶ 8 διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν 5 + 12 + 8, ἔτι δὲ καὶ τοὺς προσθετέους 7 καὶ 22, διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν 7 + 22, θὰ ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς

$$5 + 12 + 8 \text{ καὶ } 7 + 22$$

τουτέστι τὰ δύο ἀθροίσματα· ὥστε τὸ ἄθροισμα τούτων καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 5, 12, 8, 7, 22, εἶνε ἓν καὶ τὸ αὐτό.

Σημείωσις. Τὰς ἰδιότητας ταύτας μετεχειρίσθημεν ἤδη προηγουμένως, ἵνα ἀναγάγωμεν τὴν πρόσθεσιν οἱωνδήποτε ἀριθμῶν εἰς τὴν πρόσθεσιν μονοψηφίων· πρὸς τοῦτο ἐθεωρήσαμεν ἕκαστον ἀριθμὸν ὡς ἄθροισμα μονάδων διαφόρων τάξεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

24. *Ἡ ἀφαίρεσις εἶνε πρᾶξις, δι' ἧς ἐλαττοῦμεν δοθέντα ἀριθμὸν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ἄλλος τις δοθεὶς ἀριθμός.*

Ὁ πρῶτος ἀριθμός, ὅστις πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ λέγεται *μειωτέος*, ὁ δὲ δεύτερος *ἀφαιρετέος*· ὁ δὲ ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως προκύπτων ἀριθμὸς λέγεται *ὑπόλοιπον* ἢ *ὑπεροχὴ* ἢ *διαφορά*.

Ὁ μειωτέος εἶνε ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τῆς διαφορᾶς.

Διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως, τὸ ὑπόλοιπον μένει, ἀφοῦ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ μειωτέου πάσας τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου· ἐὰν λοιπὸν τὰς προσθέσωμεν πάλιν εἰς τὸ ὑπόλοιπον, θὰ εὕρωμεν προφανῶς τὸν μειωτέον.

Διὰ τοῦτο ἡ ἀφαίρεσις δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ ὡς ἑξῆς·

Ἡ ἀφαίρεσις εἶνε πρᾶξις, δι' ἧς δοθέντων δύο ἀριθμῶν, εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν δεύτερον δίδει ἄθροισμα τὸν πρῶτον.

Ἡ ἀφαίρεσις σημειοῦται διὰ τοῦ σημείου —, τὸ ὁποῖον γράφεται μεταξὺ μειωτέου καὶ ἀφαιρετέου (γράφεται δὲ πρῶτος ὁ μειωτέος) καὶ ἀναγινώσκεται *πλήν* οἷον· 8—6 σημαίνει, ὅτι ἀπὸ τοῦ 8 πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ 6 καὶ ἀναγινώσκεται ὀκτὼ πλὴν ἕξ.

Σημείωσις. Καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν οἱ ἀριθμοὶ πρέπει νὰ εἶνε ὁμοειδεῖς, ὡς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν, καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἶνε ὁμοειδὲς πρὸς αὐτούς.

Ἀφαίρεσις μονοψηφίου ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄλλου.

25. Διὰ ν' ἀφαιρέσωμεν μονοψήφιον ἀριθμὸν ἀπὸ ἄλλου οἱουδήποτε, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τούτου τὰς μονάδας τοῦ μονοψηφίου, τὴν μίαν μετὰ τὴν ἄλλην, ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις μένει, ὅταν ἀφαιρεθῇ καὶ ἡ τελευταία μονὰς τοῦ ἀφαιρετέου, εἶνε τὸ ὑπόλοιπον.

Παραδείγματος χάριν, διὰ ν' ἀφαιρέσω 5 ἀπὸ 14, λέγω 14 πλὴν 1 μένουν 13· 13 πλὴν 1 μένουν 12· 12 πλὴν 1 μένουν 11· 11 πλὴν 1 μένουν 10· 10 πλὴν 1 μένουν 9· ἄρα τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον εἶνε 9.

Διὰ ν' ἀφαιρέσω τὸν 6 ἀπὸ τοῦ 147, ἀφαιρῶ αὐτὸν μόνον ἀπὸ τῶν 7 μονάδων τοῦ 147 καὶ εὑρίσκω τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον 141.

Ὅταν ὁ μειωτέος δὲν εἶνε μέγας ἀριθμός, αἱ ἀφαιρέσεις αὗται γίνονται ἀμέσως ἀπὸ μνήμης· ὥστε λέγομεν ἀμέσως 9 ἀπὸ 15 μένουν 6· 8 ἀπὸ 17 μένουν 9· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Σημείωσις. Ὅταν ἔχω ν' ἀφαιρέσω 9, ἀφαιρῶ 10 καὶ ἔπειτα προσθέτω 1· οἷον: 9 ἀπὸ 537 μένουν 528. Ὁμοίως, ὅταν ἔχω νὰ προσθέσω 9, προσθέτω 10 καὶ ἔπειτα ἀφαιρῶ 1· οἷον: 165 καὶ 9 κάμνουν 174.

Ἀφαίρεσις πολυψηφίου ἀπὸ ἄλλου.

26. Πᾶς ἀριθμὸς δύναται ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἄλλου κατὰ τὸν ἀνωτέρω εἰρημένον τρόπον· ὁ τρόπος οὗτος διὰ τὴν ἀφαίρεσιν μεγάλων ἀριθμῶν θὰ ἦτο λίαν ἐπίπονος· ἀλλ' εὐκόλως εὑρίσκομεν ἄλλον, δι' οὗ γίνεται ἡ ἀφαίρεσις συντόμως καὶ εὐκόλως· ὁ τρόπος οὗτος στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἑξῆς δύο ἰδιοτήτων, ὧν ἡ ἀλήθεια εἶνε προφανής.

1) *Ἐὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ διαφορὰ αὐτῶν δὲν μεταβάλλεται.*

2) *Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα ἀπὸ ἄλλου, ἀρκεῖ ν' ἀφαιρέσωμεν ἀλλεπαλλήλως τὰς μονάδας του, τὰς δεκάδας του, τὰς ἑκατοντάδας του κτλ.,* ἤγουν *ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα, ἀρκεῖ ν' ἀφαιρέσωμεν πάντα τὰ μέρη του.*

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ἔχω ν' ἀφαιρέσω τὸν 12 ἀπὸ ἄλλου ἀριθμοῦ, ἔστω ἀπὸ τοῦ 47, δύναμαι ν' ἀφαιρέσω πρῶτον τὰς 2 μονάδας (ὅτε μένουν 45) καὶ ἔπειτα ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 45, ὅστις μένει, ν' ἀφαιρέσω τὴν 1 δεκάδα (ὅτε μένουν 35).

Στηριζόμενοι ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τούτων δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν οἱανδήποτε ἀφαίρεσιν ἀνάγοντες αὐτὴν εἰς ἄλλας μερικὰς ἀφαιρέσεις, ἐν ἑκάστῃ τῶν ὁποίων ὁ ἀφαιρετέος δὲν ὑπερβαίνει τὸν 10. Πρὸς τοῦτο γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑποκάτω τοῦ μειωτέου, ὡς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν· ἔπειτα κάμνομεν, ὡς φαίνεται εἰς τὰ ἑξῆς παραδείγματα;

Παράδειγμα Α'. Ν' ἀφαιρεθῇ ὁ 512 ἀπὸ τοῦ 945.

$$\begin{array}{r} 945 \\ 512 \\ \hline 433 \end{array}$$

Κατὰ πρῶτον ἀφαιροῦμεν τὰς 2 μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τῶν 5 μονάδων τοῦ μειωτέου (λέγοντες 2 ἀπὸ 5 μένουν 3) καὶ γράφομεν τὰς 3 μονάδας, αἱ ὁποῖαι μένουν εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων· ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὴν 1 δεκάδα τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς 4 δεκάδας τοῦ μειωτέου (λέγοντες 1 ἀπὸ 4 μένουν 3) καὶ γράφομεν τὰς 3 δεκάδας, αἵτινες ἔμειναν, εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων· τέλος ἀφαιροῦμεν τὰς 5 ἑκατοντάδας ἀπὸ τῶν 9 ἑκατοντάδων καὶ γράφομεν εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατοντάδων τὰς 4 ἑκατοντάδας, αἱ ὁποῖαι ἔμειναν· ὥστε τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον εἶνε 433· διότι τοῦτο εὑρήκαμεν ἀφαιρέσαντες ἀπὸ τοῦ μειωτέου 945 πάντα τὰ μέρη τοῦ ἀφαιρετέου 512.

Σημείωσις. Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο ἠδυνάμεθα ν' ἀρχίσωμεν τὴν πρᾶξιν ἀπὸ τῆς ἀφαιρέσεως τῶν ἑκατοντάδων καὶ ἔπειτα νὰ κάμωμεν τὴν ἀφαίρεσιν τῶν δεκάδων καὶ ἔπειτα τῶν μονάδων.

Παράδειγμα Β'. Ν' ἀφαιρεθῇ ὁ 8472 ἀπὸ τοῦ 29548.

$$\begin{array}{r} 29548 \\ 8472 \\ \hline 21076 \end{array}$$

Λέγομεν 2 μονάδες ἀπὸ 8 μονάδων μένουν 6 μονάδες· 7 δεκάδες ἀπὸ 4 δεκάδων *δὲν ἀφαιροῦνται*· διὰ νὰ δυνηθῶμεν ν' ἀφαιρέσωμεν, προσθέτομεν εἰς τὸν μειωτέον 10 δεκάδας, ὥστε αἱ 4 δεκάδες του γίνονται 14, καὶ ἔπειτα λέγομεν 7 ἀπὸ 14 μένουν 7· ἀλλὰ τώρα πρέπει νὰ προσθέσωμεν καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον 10 δεκάδας (διὰ νὰ μὴ μεταβληθῇ ἡ διαφορά), ἢ ἀντ' αὐτῶν μίαν ἑκατοντάδα· λέγομεν λοιπὸν 1 τὸ κρατούμενον καὶ 4 κάμνουν 5 ἀπὸ 5 μένει 0· ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὰς 8 χιλιάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τῶν 9 χιλιάδων τοῦ μειωτέου καὶ εὑρίσκομεν 1 χιλιάδα· τέλος γράφομεν καὶ τὰς 2 μυριάδας τοῦ μειωτέου, ἀπὸ τῶν ὁποίων δὲν ἔχομεν ν' ἀφαιρέσωμέν τι· ὥστε τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον εἶνε 21076.

Καὶ ἡ ἀφαίρεσις μονοψηφίου ἀπὸ πολυψηφίου δύναται νὰ γίνῃ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν ἑξῆς παραδειγμάτων·

$$\begin{array}{r} 128 \\ 5 \\ \hline 123 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 251 \\ 8 \\ \hline 243 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1001 \\ 7 \\ \hline 994 \end{array}$$

Κανὼν τῆς ἀφαιρέσεως.

27. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανὼν τῆς ἀφαιρέσεως :

Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα ἀπὸ ἄλλου ἀριθμοῦ, γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑποκάτω τοῦ μειωτέου, ὡς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν· ἔπειτα ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰς ἁπλᾶς μονάδας, ἀφαιροῦμεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου ψηφίου τοῦ μειωτέου. Ἐὰν δὲ ψηφίον τι τοῦ μειωτέου εἶνε μικρότερον τοῦ ἀντιστοίχου ψηφίου τοῦ ἀφαιρετέου, προσθέτομεν εἰς αὐτὸ 10 (ἵνα καταστήσωμεν δυνατὴν τὴν μερικὴν ταύτην ἀφαίρεσιν), *ἀλλ' ἔπειτα ἐρχόμενοι εἰς τὸ ἀκόλουθον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου, αὐξάνομεν αὐτὸ κατὰ μίαν μονάδα, πρὶν τὸ ἀφαιρέσωμεν. Τὰ ὑπόλοιπα τῶν μερικῶν τούτων ἀφαιρέσεων εἶνε τὰ ψηφία τοῦ ζητουμένου ὑπολοίπου.*

Σημείωσις. Τὴν ἀφαίρεσιν ἀρχίζομεν ἐκ δεξιῶν διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, δι' ὃν καὶ τὴν πρόσθεσιν.

Βάσανος τῆς ἀφαιρέσεως.

28. Ἵνα ἐξελέγξωμεν, ἂν ἀφαίρεσίς τις ἔγινεν ἄνευ λάθους, προσθέτομεν τὸν ἀφαιρετέον καὶ τὸ ὑπόλοιπον· ἐὰν ὡς ἄθροισμα εὑρεθῇ ὁ μειωτέος, τοῦτο εἶνε ἔνδειξις, ὅτι εἰς τὴν ἀφαίρεσιν δὲν ἔγινε λάθος· (ἐδ. 24).

Γενικαὶ ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως.

29. Αἱ ἰδιότητες, ἐφ' ὧν ἐστηρίξαμεν τὴν ἐκτέλεσιν τῆς ἀφαιρέσεως οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄλλου, γενικεύονται εὐκόλως καὶ ἐκφράζονται ὡς ἑξῆς·

1) *Ἐὰν προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς εἰς τὸν ἀφαιρετέον καὶ εἰς τὸν μειωτέον, ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται.*

2) *Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀριθμὸν ἀπὸ ἀθροίσματος ἄλλων, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν αὐτὸν ἀφ' ἑνὸς τῶν προσθετέων.*

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ἔχω νὰ ἀφαιρέσω τὸν 12 ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος

$$15+6+20+9$$

δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω αὐτὸν ἀπὸ τοῦ 20 (ὅτε τὸ 20 γίνεται 8) καὶ τὸ προκύπτον ἄθροισμα $15+6+8+9$ θὰ εἶνε τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον.

Διότι, κατὰ τὴν δευτέραν ἰδιότητα τῆς προσθέσεως (ἐδ. 23), ἐὰν προσθεθῇ εἰς αὐτὸ ὁ ἀφαιρετέος 12, προκύπτει ὁ μειωτέος.

3) *Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τούτου πάντας τοὺς προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος τὸν ἕνα μετὰ τὸν ἄλλον.*

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ἔχω νὰ ἀφαιρέσω τὸ ἄθροισμα

$$3+9+12$$

ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 30, φανερὸν εἶνε, ὅτι ἀντὶ νὰ ἀφαιρέσω διὰ μιᾶς τὰς 24 μονάδας, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἄθροισμα, δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω πρῶτον τὰς 3 μονάδας, ἔπειτα τὰς 9 καὶ τέλος τὰς 12 μονάδας· ἤτοι ἀντὶ νὰ ἀφαιρέσω διὰ μιᾶς ὅλον τὸ ἄθροισμα, δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω τὰ μέρη του τὸ ἓν μετὰ τὸ ἄλλο· ἀφαιρῶ λοιπὸν τὸν 3 ἀπὸ τοῦ μειωτέου 30 καὶ μένουν 27· ἔπειτα ἀπὸ τοῦ 27, ὅπερ ἔμεινεν, ἀφαιρῶ τὸν 9 καὶ μένουν 18· τέλος ἀπὸ τοῦ 18 ἀφαιρῶ τὸν 12 καὶ μένουν 6· τοῦτο εἶνε τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον.

30. Ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τούτων συνάγεται καὶ ἡ ἑξῆς·

Ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀπ' ἀριθμοῦ τὴν διαφορὰν δύο ἄλλων, χωρὶς προηγουμένως νὰ εὕρωμεν αὐτήν, προσθέτομεν εἰς αὐτὸν τὸν ἀφαιρετέον τῆς δοθείσης διαφορᾶς καὶ ἀπὸ τοῦ ἐξαγομένου ἀφαιροῦμεν τὸν μειωτέον αὐτῆς.

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὴν διαφορὰν 12—8 ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 18.

Κατὰ τὴν πρώτην ἰδιότητα τῆς ἀφαιρέσεως ἡ ζητουμένη διαφορὰ δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν προστεθῇ καὶ εἰς τοὺς δύο ἀριθμοὺς ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς 8, ἀλλὰ τότε ὁ μὲν μειωτέος 18 γίνεται 18+8, ὁ δὲ ἀφαιρετέος 12—8 γίνεται 12—8+8· ἤτοι 12.
ὥστε ἔχομεν τώρα ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος 18+8, νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 12, τοῦτο δὲ καθιστᾷ φανερὰν τὴν προκειμένην ἰδιότητα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ′.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

31. *Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶνε πρᾶξις, δι' ἧς ἐπαναλαμβάνομεν ἕνα ἀριθμὸν πολλάκις καὶ σχηματίζομεν ἐξ αὐτοῦ ἄλλον ἀριθμόν.*

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ἐπαναλάβω τὸν 9 τρεῖς φοράς, 9 καὶ 9, καὶ 9, σχηματίζω ἐξ αὐτοῦ τὸν ἀριθμὸν 27· τοῦτο δὲ εἶνε πολλαπλασιασμός.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶνε *πρόσθεσις ἀλλεπάλληλος ἑνὸς ἀριθμοῦ εἰς τὸν ἑαυτόν του.*

Εἰς ἕκαστον πολλαπλασιασμὸν δίδονται δύο ἀριθμοί· ἐκ τούτων ὁ μὲν εἷς πρέπει νὰ ἐπαναληφθῇ, ἤτοι νὰ πολλαπλασιασθῇ, καὶ λέγεται διὰ τοῦτο *πολλαπλασιαστέος*· ὁ δὲ ἄλλος δεικνύει πόσας φορὰς θὰ ἐπαναληφθῇ ὁ πρῶτος καὶ λέγεται *πολλαπλασιαστής.*

Ὁ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ προκύπτων ἀριθμὸς λέγεται *γινόμενον.*

Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα, πολλαπλασιαστέος εἶνε ὁ 9, πολλαπλασιαστὴς ὁ 3 καὶ γινόμενον ὁ 27.

Ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς λέγονται καὶ μὲ ἓν ὄνομα *παράγοντες* τοῦ γινομένου.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς σημειοῦται διὰ τοῦ σημείου ×, τὸ ὁποῖον ἀναγινώσκεται *ἐπί*· οἷον· 5×7 σημαίνει ὅτι ὁ 5 πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν 7, ἤτοι νὰ ἐπαναληφθῇ ἑπτάκις· ἀναγινώσκεται δὲ *πέντε ἐπὶ ἑπτά.*

Σημείωσις. Τὸ γινόμενον εἶνε ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον· διότι γίνεται ἐκ τούτου πολλάκις προστεθέντος εἰς ἑαυτόν. Ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς θεωρεῖται πάντοτε ὡς ἀφῃρημένος ἀριθμός· διότι σημαίνει μόνον ποσάκις θὰ ληφθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος.

Πολλαπλασιασμὸς

ἀριθμοῦ μονοψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον.

32. Ὁ πολλαπλασιασμὸς μονοψηφίου ἀριθμοῦ ἐπὶ μονοψήφιον γίνεται εὐκόλως διὰ τῆς προσθέσεως συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ἐὰν ἔχω, λόγου χάριν, νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 6 ἐπὶ 5, ἤτοι νὰ εὕρω τὸ ἄθροισμα

$$6+6+6+6+6 \quad -$$

λέγω· 6 καὶ 6 κάμνουν 12, καὶ 6 κάμνουν 18, καὶ 6 κάμνουν 24, καὶ 6 γίνονται 30· λοιπὸν τὸ γινόμενον τοῦ 6 ἐπὶ 5, (ἤτοι τὸ 6×5), εἶνε 30.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε μονοψηφίων ἀριθμῶν. Εἶνε δὲ τὰ γινόμενα ταῦτα κατατεταγμένα εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα, ὅστις λέγεται πυθαγόρειος· διότι, ὡς λέγουσιν, ὁ Πυθαγόρας ἐπενόησεν αὐτόν.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Ἡ πρώτη ὁριζοντία σειρὰ περιέχει τοὺς ἐννέα πρώτους ἀριθμούς. Ἡ δευτέρα περιέχει τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ 2, ἤτοι τὰ διπλάσια αὐτῶν, ἡ τρίτη τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ 3, ἤτοι τὰ τριπλάσια αὐτῶν· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἵνα δὲ εὕρωμεν εἰς τὸν πίνακα τοῦτον, τὸ γινόμενον δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν, ζητοῦμεν τὸν πολλαπλασιαστέον εἰς τὴν πρώτην ὁριζοντίαν σειράν, τὸν δὲ πολλαπλασιαστὴν εἰς τὴν πρώτην κατακόρυφον· τὸ γινόμενον αὐτῶν εὑρίσκεται ἐκεῖ ἔνθα συναντῶνται αἱ δύο σειραί, αἵτινες ἄρχονται ἀπὸ τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Παραδείγματος χάριν, τὸ γινόμενον 35, τοῦ 5 ἐπὶ 7, εὑρίσκεται ἐκεῖ, ἔνθα συναντῶνται ἡ πέμπτη κατακόρυφος σειρὰ καὶ ἡ ἑβδόμη ὁριζοντία.

Σημείωσις. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε 1, τὸ γινόμενον εἶνε ὁ πολλαπλασιαστέος ἅπαξ μόνον λαμβανόμενος· ἤτοι 5×1 εἶνε 5· 8×1 εἶνε 8· κτλ.

Παρατήρησις.

Πᾶς πολλαπλασιασμός, ὡς θὰ ἴδωμεν ἀκολούθως, ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν μονοψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον· διὰ τοῦτο πρέπει νὰ *εἰξεύρωμεν ἐκ στήθους* τὰ εἰς τὸν πίνακα τοῦτον περιεχόμενα γινόμενα.

Θεωρήματα, ἐφ' ὧν στηρίζεται ἡ ἐκτέλεσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Διὰ νὰ ἀναγάγωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν οἱωνδήποτε ἀριθμῶν εἰς πολλαπλασιασμοὺς μονοψηφίων ἀριθμῶν, εἶνε ἀνάγκη νὰ μάθωμεν ἰδιότητάς τινας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τὰς ὁποίας ἐκφράζουσι τὰ ἑξῆς θεωρήματα :

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'.

33. *Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, ἂν ἀλλαχθῇ ἡ τάξις τῶν παραγόντων· ἤτοι ἂν γίνῃ ὁ πολλαπλασιαστέος πολλαπλασιαστὴς καὶ τἀνάπαλιν.*

Λέγω, παραδείγματος χάριν, ὅτι εἴτε τὸν 5 πολλαπλασιάσω ἐπὶ 7, εἴτε τὸν 7 ἐπὶ 5, τὸ αὐτὸ γινόμενον θὰ εὕρω.

Ἀπόδειξις. Διὰ νὰ δείξω τοῦτο, ἀναλύω τὸν 7 εἰς τὰς μονάδας του καὶ γράφω αὐτὰς εἰς μίαν σειράν, ἐπαναλαμβάνω δὲ τὴν σειρὰν ταύτην πέντε φοράς, ὡς ἑξῆς·

1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Ἐὰν τώρα θέλω νὰ εὕρω πόσαι εἶνε αἱ μονάδες αὗται, δύναμαι νὰ ἀριθμήσω αὐτὰς ὡς ἑξῆς· ἡ πρώτη ὁριζοντία σειρὰ ἔχει 7 μονάδας καὶ ἡ δευτέρα ἄλλας 7, ἡ τρίτη ἄλλας 7 καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε αἱ μονάδες αὗται εἶνε $7+7+7+7+7$, ἤτοι 7×5.

Ἀλλὰ δύναμαι καὶ ἄλλως ν' ἀριθμήσω τὰς αὐτὰς μονάδας, ὡς ἑξῆς· ἡ πρώτη κατακόρυφος στήλη ἔχει 5 μονάδας, ἡ δευτέρα ἄλλας 5 κτλ., ἄρα αἱ μονάδες αὗται εἶνε

$$5+5+5+5+5+5+5, \text{ ἤτοι } 5\times7.$$

Ἀλλ' εἶνε φανερόν, ὅτι, ὁπωσδήποτε καὶ ἂν ἑνώσωμεν τὰς μονάδας ταύτας, πάντοτε ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν θὰ εὕρωμεν· ἄρα θὰ εἶνε τὰ δύο γινόμενα 7×5 καὶ 5×7 εἷς καὶ ὁ αὐτὸς ἀριθμός· τουτέστιν

$$7\times5=5\times7.$$

Σημείωσις. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι ὡς πρὸς τὸ γινόμενον δὲν ὑπάρχει διάκρισις μεταξὺ πολλαπλασιαστοῦ καὶ πολλαπλασιαστέου· δι' ὃ καὶ ἀμφότεροι λέγονται μὲ ἓν ὄνομα *παράγοντες* τοῦ γινομένου.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'.

34. *Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἐὰν ἕκαστος τῶν προσθετέων πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ προστεθῶσι πάντα τὰ προκύπτοντα γινόμενα.*

Λέγω, παραδείγματος χάριν, ὅτι διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸ ἄθροισμα $12+8+6$ ἐπὶ τὸν 3 (χωρὶς νὰ εὕρω τὸ ἄθροισμα), ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσω τοὺς προσθετέους 12, 8, 6 ἐπὶ τὸν 3 καὶ τὰ τρία γινόμενα 12×3, 8×3, 6×3 νὰ προσθέσω, ἀφοῦ τὰ εὕρω.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸ ἄθροισμα $12+8+6$ ἐπὶ 3, πρέπει νὰ λάβω αὐτὸ τρίς, ἤτοι νὰ εὕρω τὸ ἑξῆς ἄθροισμα·

$$\begin{array}{c}12+8+6\\12+8+6\\12+8+6\\ \hline\end{array}$$

δηλονότι τὸ ἑξῆς· (ἐδ. 23)

$$12+12+12+8+8+8+6+6+6,$$

ἤ $$(12\times3)+(8\times3)+(6\times3).$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι, διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέρη του.

Σημείωσις. Τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος $12+8+6$ ἐπὶ 3 παρίσταται ὡς ἑξῆς: $(12+8+6)\times3$· ὥστε τὸ ἀποδειχθὲν θεώρημα ἐκφράζεται διὰ τῆς ἰσότητος:

$$(12+8+6)\times3=(12\times3)+(8\times3)+(6\times3).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'.

35. *Ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄθροισμα, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἕκαστον τῶν προσθετέων καὶ προστεθῶσι πάντα τὰ προκύπτοντα γινόμενα.*

Λέγω, παραδείγματος χάριν, ὅτι διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν ἀριθμὸν 8 ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $5+7+20$(χωρὶς νὰ τὸ εὕρω), ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 8 ἐπὶ ἕνα ἕκαστον τῶν προσθετέων καὶ τὰ γινόμενα 8×5, 8×7 καὶ 8×20 νὰ προσθέσω, ἀφοῦ τὰ εὕρω.

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸ πρῶτον θεώρημα, ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 8 ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $5+7+20$, δύναμαι νὰ πολλαπλασιάσω τὸ ἄθροισμα $5+7+20$ ἐπὶ τὸν 8 καὶ θὰ εὕρω τὸ αὐτὸ γινόμενον· ἀλλὰ τότε εὑρίσκω (κατὰ τὸ Β' θεώρημα):

$$(5\times8)+(7\times8)+(20\times8)$$

ἤ $$(8\times5)+(8\times7)+(8\times20)$$ (κατὰ τὸ Α' θεώρημα).

Τοῦτο λοιπὸν εἶνε τὸ γινόμενον τοῦ 8 ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $5+7+20$.

Σημείωσις. Τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ 8 ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $5+7+20$ παρίσταται ὡς ἑξῆς: $8\times(5+7+20)$· ὥστε τὸ ἀποδειχθὲν θεώρημα ἐκφράζεται διὰ τῆς ἰσότητος:

$$8\times(5+7+20)=(8\times5)+(8\times7)+(8\times20).$$

+

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'.

36. *Ὅταν εἷς ἐκ τῶν παραγόντων λήγῃ εἰς μηδενικά, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν χωρὶς τὰ μηδενικὰ καὶ δεξιὰ τοῦ γενομένου γράφομεν τὰ παραλειφθέντα μηδενικά.*

Λέγω, παραδείγματος χάριν, ὅτι διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τοὺς ἀριθμοὺς 8500 καὶ 37 (τὸν ἕνα ἐπὶ τὸν ἄλλον), ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσω τοὺς 85 καὶ 37 καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου νὰ γράψω τὰ δύο μηδενικά, τὰ ὁποῖα παρέλειψα.

Ἀπόδειξις. Λαμβάνω ὡς πολλαπλασιαστέον τὸν ἀριθμὸν 8500 καὶ ὡς πολλαπλασιαστὴν τὸν 37 (τοῦτο ἐπιτρέπεται κατὰ τὸ Α'. θεώρημα).

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 8500 ἐπὶ 37, ἀρκεῖ νὰ εὕρω τὸ ἑξῆς ἄθροισμα (ὅπερ ἔχει 37 προσθετέους).

8500
8500
8500
. . . .
. . . .
8500

Διὰ νὰ εὕρω τὸ ἄθροιτμα τοῦτο ἀρκεῖ προφανῶς νὰ εὕρω τὸ ἑξῆς

85
85
85
. .
. .
85

καὶ δεξιὰ αὐτοῦ νὰ γράψω δύο μηδενικά.

Ἀλλὰ τὸ δεύτερον τοῦτο ἄθροισμα εἶνε τὸ γινόμενον τοῦ 85 ἐπὶ 37. ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τοῦτο καὶ δεξιὰ αὐτοῦ νὰ γραφῶσι τὰ δύο μηδενικά. Ὁ οὕτω προκύπτων ἀριθμὸς θὰ εἶνε τὸ ζητούμενον γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 8500 καὶ 37.

+

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

37. *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ 10, ἢ ἐπὶ 100. ἢ ἐπὶ 1000, κτλ. ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ ἓν μηδενικὸν (διὰ τὸ 10), δύο (διὰ τὸ 100), τρία (διὰ τὸ 1000), κτλ.*

Διότι παραλείποντες τὰ μηδενικὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, θὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 1 καὶ ἑπομένως θὰ εὕρωμεν ὡς γινόμενον τὸν πολλαπλασιαστέον, δεξιὰ τοῦ ὁποίου πρέπει νὰ γράψωμεν τὰ παραλειφθέντα μηδενικά.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

38. *Ὅταν ἀμφότεροι οἱ παράγοντες λήγωσιν εἰς μηδενικά, παραλείπομεν αὐτά, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς χωρὶς τὰ μηδενικὰ καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου γράφομεν τὰ παραλειφθέντα μηδενικά.*

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσω, παραδείγματος χάριν, τὸν ἀριθμὸν 1800 ἐπὶ 4000, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 18 ἐπὶ 4 καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου 72 νὰ γράψω τὰ παραλειφθέντα πέντε μηδενικά.

Διότι διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 1800 ἐπὶ 4000, ἀρκεῖ (κατὰ τὸ Δ΄ θεώρημα) νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 18 ἐπὶ 4000 καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου νὰ γράψω δύο μηδενικά. Ἀλλὰ πάλιν διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 4000 ἐπὶ 18, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 4 ἐπὶ 18 καὶ νὰ γράψω δεξιὰ τοῦ γινομένου τρία μηδενικά. Θὰ ἔχω λοιπὸν νὰ γράψω δεξιὰ τοῦ γινομένου 72 τὸ ὅλον πέντε μηδενικά.

Πολλαπλασιασμὸς
πολυψηφίου ἀριθμοῦ ἐπὶ μονοψήφιον.

39. Πᾶς πολυψήφιος ἀριθμὸς εἶνε ἄθροισμα μονάδων διαφόρων τάξεων· οἷον ὁ 7548 εἶνε ἄθροισμα 8 ἁπλῶν μονάδων καὶ 4 δεκάδων καὶ 5 ἑκατοντάδων καὶ 7 χιλιάδων· ἑπομένως (θεώρημα Β΄) *ἵνα πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ ἄλλον ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέρη του* (τὰς μονάδας του, τὰς δεκάδας κτλ.) *καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 3078 ἐπὶ τὸν 6.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συντομίας χάριν ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r} 3078 \\ 6 \\ \hline 18468 \end{array}$$

Πολλαπλασιάζομεν κατὰ πρῶτον τὰς 8 μονάδας ἐπὶ τὸν 6 λέγοντες: 6 ἐπὶ 8 γίνονται 48, ἐπειδὴ δὲ αἱ 48 μονάδες κάμνουν 4 δεκάδας καὶ 8 μονάδας, γράφομεν μόνον τὰς 8 μονάδας εἰς τὴν θέσιν τῶν μονάδων τοῦ γινομένου καὶ κρατοῦμεν τὰς 4 δεκάδας, διὰ νὰ τὰς προσθέσωμεν εἰς τὰς δεκάδας, τὰς ὁποίας θὰ δώσῃ ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν 7 δεκάδων τοῦ ἀριθμοῦ.

Πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα τὰς 7 δεκάδας ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν 6· λέγοντες 6 ἐπὶ 7 γίνονται 42 δεκάδες καὶ 4 αἱ κρατούμεναι γίνονται 46, ἐπειδὴ δὲ 46 δεκάδες κάμνουν 6 δεκάδας καὶ 4 ἑκατοντάδας, γράφομεν τὰς 6 δεκάδας εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων τοῦ γινομένου καὶ κρατοῦμεν τὰς 4 ἑκατοντάδας.

Τὰς 4 ταύτας ἑκατοντάδας γράφομεν ἀμέσως εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατοντάδων τοῦ γινομένου· διότι ὁ πολλαπλασιαζόμενος ἀριθμὸς δὲν ἔχει ἑκατοντάδας καὶ ἑπομένως δὲν θὰ ἔχωμεν γινόμενον ἑκατοντάδων.

Τέλος πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰς 3 χιλιάδας ἐπὶ τὸν 6 καὶ εὑρίσκομεν 18 χιλιάδας· καὶ τὰ ψηφία ταῦτα γράφομεν ὄπισθεν τῶν ἄλλων ψηφίων τοῦ γινομένου.

Τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶνε λοιπὸν 18468.

40. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών·

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν πολυψήφιον ἀριθμὸν ἐπὶ μονοψήφιον, γράφομεν τὸν μονοψήφιον ὑποκάτω τοῦ πολυψηφίου καὶ ἄγομεν ὑπ' αὐτοὺς ὁριζοντίαν γραμμήν· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ ψηφίου τῶν ἁπλῶν μονάδων. Καὶ ἂν μὲν γινόμενόν τι εἶνε μονοψήφιον, γράφομεν αὐτὸ ὑποκάτω τῆς γραμμῆς καὶ εἰς τὴν στήλην τοῦ ψηφίου, τὸ ὁποῖον ἐπολλαπλασιάσαμεν· ἂν δὲ εἶνε διψήφιον, γράφομεν ἐκεῖ μόνον τὰς μονάδας του, τὰς δὲ δεκάδας ἑνώνομεν μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἀκολούθου πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίου· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Σημείωσις. Ὁ λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον ἀρχίζομεν ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων, ἐδόθη ἤδη εἰς τὴν πρόσθεσιν.

Πολλαπλασιασμὸς
δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.

41. Ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν μονοψηφίων κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον·

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 3722 ἐπὶ 782. Ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς 782 ἀναλυθῇ κατὰ τὴν ἀξίαν τῶν ψηφίων του, εἶνε ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 700 καὶ 80 καὶ 2, ἤτοι εἶνε $700+80+2$. Ἑπομένως κατὰ τὸ θεώρημα Γ'. ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 3722 ἐπὶ τὸν 782, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ 700 καὶ ἐπὶ 80 καὶ ἐπὶ 2, καὶ νὰ ἑνώσωμεν τὰ τρία μερικὰ γινόμενα.

Οἱ μερικοὶ οὗτοι πολλαπλασιασμοὶ

3722	3722	3722
700	80	2
2605400	297760	7444

ἐὰν παραλειφθῶσι τὰ μηδενικά, εἰς ἃ λήγουσιν οἱ πολλαπλασιασταὶ 700 καὶ 80 (κατὰ τὸ Δ'. θεώρημα), καταντῶσι πολλαπλασιασμοὶ πολυψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον· οἵτινες ἐκτελοῦνται, ὡς ἐμάθομεν ἤδη (καὶ ἀνάγονται εἰς πολλαπλασιασμοὺς μονοψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον).

Συντομίας χάριν διατάσσεται ἡ πρᾶξις ὡς ἑξῆς :

3722 πολλαπλασιαστέος
782 πολλαπλασιαστὴς

7444 μερικὸν γινόμενον τοῦ 2
297760 μερικὸν γινόμενον τοῦ 80
2605400 μερικὸν γινόμενον τοῦ 700

2910604 ἄθροισμα τῶν μερ. γινομένων, ἤτοι τὸ ὁλικὸν γινόμενον.

Τὰ μηδενικά, τὰ ὁποῖα γράφομεν δεξιὰ τῶν μερικῶν γινομένων (τοῦ 700 καὶ 80), δὲν λαμβάνουσι μέρος εἰς τὴν πρόσθεσιν· διὰ τοῦτο παραλείπομεν αὐτά· ἀφίνομεν ὅμως κενὸν τὸν τόπον αὐτῶν, ἵνα διατηρηθῇ ἡ ἀξία τῶν ἄλλων ψηφίων. Τότε δὲ ἡ πρᾶξις ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ πολλαπλασιάζωμεν διαδοχικῶς τὸν πολλαπλασιαστέον 3722 ἐφ' ἕκαστον τῶν σημαντικῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, πρῶτον ἐπὶ 2, ἔπειτα ἐπὶ 8 καὶ ἔπειτα ἐπὶ 7, νὰ γράφωμεν δὲ τὰ μερικὰ γινόμενα τὸ ἓν ὑπὸ τὸ ἄλλο οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον ἑκάστου μερικοῦ γινομένου νὰ εἶνε ὑποκάτω τοῦ ψηφίου, ἐπὶ τὸ ὁποῖον ἐπολλαπλασιάσαμεν.

42. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ῥηθέντων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανὼν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν οἱονδήποτε ἀριθμὸν ἐπὶ ἄλλον, γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ ὑποκάτω ἄγομεν ὁριζοντίαν γραμμήν, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον χωριστὰ ἐφ' ἕκαστον σημαντικὸν ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἀρχίζοντες ἐκ δεξιῶν καὶ γράφομεν ἕκαστον μερικὸν γινόμενον οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον του νὰ εἶνε ὑποκάτω τοῦ ψηφίου, ἐφ' ὃ ἐπολλαπλασιάσαμεν· μετὰ ταῦτα ἄγομεν γραμμὴν καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα· τὸ προκύπτον ἄθροισμα εἶνε τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Παραδείγματα.

```
  47082          1438         250004
     33           801          30023
 ------         -----       --------
 141246          1438         750012
141246         11504         500008
-------        -------     750012
1553706        1151838     ----------
                           7505870092
```

Βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

43. Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, ἐπαναλαμβάνομεν αὐτὸν λαμβάνοντες τὸν πολλαπλασιαστέον ὡς πολλαπλασιαστὴν καὶ τἀνάπαλιν. Ἐὰν καὶ πάλιν εὕρωμεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, τοῦτο εἶνε ἔνδειξις, ὅτι ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους.

Ὁ κανὼν οὗτος στηρίζεται ἐπὶ τῆς πρώτης ἰδιότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (θεώρημα Α'.)

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

44. *Γινόμενον πολλῶν δεδομένων ἀριθμῶν* λέγεται τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τὸν πρῶτον ἐπὶ τὸν δεύτερον, τὸ γινόμενον τούτων ἐπὶ τὸν τρίτον, τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ τὸν τέταρτον καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ λάβωμεν πάντας τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.

Παραδείγματος χάριν, διὰ νὰ εὕρω τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν

$$5, \quad 6, \quad 7, \quad 12,$$

τὸ ὁποῖον σημειοῦται ὡς ἑξῆς $5\times6\times7\times12$, πολλαπλασιάζω τὸν 5 ἐπὶ τὸν 6 καὶ εὑρίσκω 30· ἔπειτα πολλαπλασιάζω τὸν 30 ἐπὶ τὸν 7 καὶ εὑρίσκω 210, τέλος πολλαπλασιάζω τὸν 210 ἐπὶ 12 καὶ εὑρίσκω 2520, τοῦτο δὲ εἶνε τὸ ζητούμενον γινόμενον τῶν τεσσάρων δοθέντων ἀριθμῶν.

Γενικαὶ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

45. Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἔχει τὰς ἑξῆς δύο θεμελιώδεις ἰδιότητας, ἀπὸ τῶν ὁποίων πηγάζουσι πᾶσαι αἱ ἄλλαι ἰδιότητες αὐτοῦ.

1). *Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν πολλαπλασιασθῶσιν.*

2). *Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἐὰν ἕκαστος τῶν προσθετέων πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ προστεθῶσι πάντα τὰ προκύπτοντα γινόμενα.*

Ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τούτων τὴν μὲν δευτέραν ἀπεδείξαμεν ἤδη (θεώρημα Β'), τὴν δὲ πρώτην ἀπεδείξαμεν διὰ δύο μόνον παράγοντας (θεώρημα Α'). Ἵνα δὲ ἀποδείξωμεν καὶ ταύτην γενικῶς, ὁσοιδήποτε καὶ ἂν εἶνε οἱ παράγοντες, ἔχομεν ἀνάγκην βοηθητικῶν τινων θεωρημάτων, τουτέστι τῶν ἑξῆς·

ΘΕΩΡΗΜΑ

46. *Ἐὰν ἀριθμὸς πολλαπλασιασθῇ ἀλλεπαλλήλως ἐπὶ δύο ἄλλους, εἶνε τὸ αὐτὸ ὡς νὰ πολλαπλασιασθῇ διὰ μιᾶς ἐπὶ τὸ γινόμενόν των.*

Λέγω, παραδείγματος χάριν, ὅτι, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς 8 πολλαπλασιασθῇ ἀλλεπαλλήλως ἐπὶ τοὺς ἀριθμοὺς 4 καὶ 3 (ἤτοι πρῶτον ἐπὶ τὸν 4, ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν γινόμενον ἐπὶ 3), εἶνε τὸ αὐτὸ ὡς νὰ πολλαπλασιασθῇ διὰ μιᾶς ἐπὶ τὸ γινόμενόν των 4×3, ἤτοι ἐπὶ 12.

Ἀπόδειξις. Ὅταν πολλαπλασιάσω τὸν 8 ἐπὶ 4, εὑρίσκω γινόμενον τὸ ἑξῆς·

$$8+8+8+8.$$

ὅταν δὲ καὶ τοῦτο πολλαπλασιάσω ἐπὶ 3, εὑρίσκω γινόμενον τὸ ἑξῆς:

$$\begin{array}{c}8+8+8+8\\8+8+8+8\\8+8+8+8,\end{array}$$

ἀλλὰ τοῦτο σύγκειται ἐκ τοῦ 8 ληφθέντος 12 φορὰς καὶ διὰ τοῦτο εἶνε τὸ γινόμενον τοῦ 8 ἐπὶ τὸν 12.

ΘΕΩΡΗΜΑ

47. *Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν ἀνταλλαχθῶσι δύο ἐφεξῆς παράγοντες.*

Λέγω, παραδείγματος χάριν, ὅτι τὸ γινόμενον

$$8\times15\times2\times7\times9$$

δὲν βλάπτεται, ἐὰν ἀνταλλάξω τοὺς δύο ἐφεξῆς παράγοντας 2 καὶ 7· δηλαδή, ὅτι τὸ γινόμενον τοῦτο εἶνε ἴσον μὲ τὸ ἑξῆς $8\times15\times7\times2\times9$.

Ἀπόδειξις. Διὰ νὰ ἐκτελέσω τὸν πολλαπλασιασμὸν $8\times15\times2\times7\times9$ κατὰ τὴν δεδομένην τάξιν πρέπει, ἀφοῦ εὕρω τὸ γινόμενον 8×15 ἤτοι 20, νὰ πολλαπλασιάσω αὐτὸ πρῶτον ἐπὶ 2 καὶ ἔπειτα ἐπὶ 7. Ἀλλ' ἀντὶ τούτων δύναμαι κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα νὰ πολλαπλασιάσω αὐτὸ διὰ μιᾶς ἐπὶ τὸ γινόμενον 2×7, ἢ ἐπὶ τὸ ἴσον του 7×2. Καὶ πάλιν κατὰ τὸ αὐτὸ θεώρημα, ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσω τὸ 120 ἐπὶ τὸ γινόμενον 7×2, δύναμαι νὰ πολλαπλασιάσω αὐτὸ πρῶτον ἐπὶ 7 καὶ ἔπειτα ἐπὶ 2. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ἡ ἀνταλλαγὴ τῶν δύο ἐφεξῆς παραγόντων 2 καὶ 7 δὲν βλάπτει τὸ γινόμενον.

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου συνάγεται ἡ πρώτη θεμελιώδης ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς ἑξῆς :

ΘΕΩΡΗΜΑ

48. *Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν πολλαπλασιασθῶσιν.*

Ἀπόδειξις. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 4, 5, 8, 12, 6 κατὰ τὴν ἑξῆς τάξιν $4\times5\times8\times12\times6$ καὶ θέλομεν νὰ μετατρέψωμεν αὐτὴν εἰς ἄλλην οἱανδήποτε, οἷον εἰς τὴν ἑξῆς· $8\times5\times4\times6\times12$. Διὰ νὰ φέρωμεν τὸν 8 εἰς τὴν πρώτην θέσιν, ἀνταλλάσσομεν αὐτὸν μετὰ τοῦ ἀμέσως προηγουμένου του (ὅτε ἔρχεται ὁ 8 μίαν θέσιν πρὸς τὰ ἐμπρὸς) καὶ ἐξακολουθοῦμεν ἀνταλλάσσοντες αὐτὸν μετὰ τοῦ ἑκάστοτε προηγουμένου του, μέχρις οὗ γίνῃ πρῶτος· ὁμοίως φέρομεν καὶ τὸν 5 εἰς τὴν δευτέραν θέσιν καὶ τὸν 4 εἰς τὴν τρίτην (ἐὰν εἶνε ἀνάγκη), καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἰδοὺ αἱ ἀπαιτούμεναι ἀνταλλαγαί.

$$4\times5\times8\times12\times6$$
$$4\times8\times5\times12\times6$$
$$8\times4\times5\times12\times6$$
$$8\times5\times4\times12\times6$$
$$8\times5\times4\times6\times12$$

Ἐπειδὴ εἰς ἑκάστην τῶν ἀνταλλαγῶν τούτων δὲν βλάπτεται τὸ γινόμενον, συμπεραίνομεν, ὅτι εἴτε κατὰ τὴν δοθεῖσαν τάξιν ἐκτελεσθῇ ὁ πολλαπλασιασμὸς εἴτε κατ' ἄλλην οἱανδήποτε, πάντοτε τὸ αὐτὸ θὰ προκύψῃ γινόμενον.

Σημείωσις. Ἐκ τῆς ἀποδείξεως ταύτης γίνεται φανερόν, ὅτι, ἐὰν εἰς σειρὰν πολλῶν πραγμάτων ἐπιτρέπηται ἡ ἀνταλλαγὴ δύο ἐφεξῆς, ἡ σειρὰ τῶν πραγμάτων τούτων δύναται νὰ λάβῃ οἱανδήποτε τάξιν θέλωμεν.

49. Ἐκ τῆς θεμελιώδους ταύτης ἰδιότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἕπονται αἱ ἑξῆς:

1) *Δυνάμεθα εἰς πᾶν γινόμενον νὰ ἀντικαταστήσωμεν παράγοντάς τινας διὰ τοῦ εὑρεθέντος γινομένου αὐτῶν.* Δυνάμεθα δηλονότι νὰ συμπτύξωμεν παράγοντάς τινας εἰς ἕνα μόνον.

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς

$$8,\quad 12,\quad 10,\quad 4,\quad 25$$

λέγω, ὅτι τὸ γινόμενον θὰ μείνῃ τὸ αὐτό, καὶ ὅταν ἀντὶ τῶν παραγόντων 10 καὶ 4 λάβωμεν τὸ γινόμενον αὐτῶν 40· ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ 8, 12, 40, 25, θὰ δώσωσι τὸ αὐτὸ γινόμενον ὡς καὶ οἱ δοθέντες.

Ἀπόδειξις. Διότι κατὰ τὴν προειρημένην θεμελιώδη ἰδιότητα, δύναμαι νὰ πολλαπλασιάσω τοὺς δοθέντας ἀριθμούς, καθ' οἱανδήποτε τάξιν θέλω· ἂν λοιπὸν ἀρχίσω τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀπὸ τῶν 10 καὶ 4, θὰ εὕρω τὸ γινόμενον 40 καὶ θὰ ἔχω ἔπειτα νὰ πολλαπλασιάσω τοὺς ἀριθμοὺς 40, 8, 12, 25· ἐπομένως τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν τούτων καὶ τὸ γινόμενον τῶν δοθέντων εἶνε εἷς καὶ ὁ αὐτὸς ἀριθμός.

(Ἡ αὐτὴ ἰδιότης δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

Εἰς πᾶν γινόμενον δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν οἱονδήποτε παράγοντα δι' ἄλλων ἀριθμῶν ἐχόντων αὐτὸν γινόμενον· τουτέστι νὰ ἀναλύσωμεν ἕνα παράγοντα εἰς πολλοὺς ἄλλους.

Παραδείγματος χάριν, εἰς τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν.

$$40, \quad 8, \quad 12, \quad 25,$$

δύναμαι πάλιν νὰ ἀντικαταστήσω τὸν 40 διὰ τῶν ἀριθμῶν 10 καὶ 4, οἵτινες ἔχουσιν αὐτὸν γινόμενον.)

2) *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπ' αὐτὸν ἕνα τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου.*

Ἀπόδειξις. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ γινόμενον $4\times7\times10\times12$ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 8. Ἵνα γίνῃ τοῦτο, πρέπει νὰ εὕρωμεν πρῶτον τὸ γινόμενον· δηλαδὴ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πρῶτον τοὺς ἀριθμοὺς 4, 7, 10, 12 καὶ ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν γινόμενον νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 8· ἀλλὰ τότε προφανῶς εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν

$$4, \quad 7, \quad 10, \quad 12, \quad 8,$$

ἢ καὶ τῶν ἑξῆς $\quad 4, \quad 56, \quad 10, \quad 12, \qquad$ (ἰδιότης 1)

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ 8 ἐπολλαπλασίασεν ἕνα τῶν παραγόντων (τὸν 7) καὶ τοιουτοτρόπως ἐπολλαπλασίασε τὸ ὅλον γινόμενον.

3) *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν δύο γινόμενα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ὁμοῦ πάντας τοὺς παράγοντας ἀμφοτέρων τῶν γινομένων.*

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο γινόμενα

$$5\times12\times8 \quad \text{καὶ} \quad 7\times22.$$

Λέγω, ὅτι τὸ γινόμενον αὐτῶν θὰ εὑρεθῇ, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ὁμοῦ πάντες οἱ ἀριθμοὶ 5, 12, 8, 7, 22.

Ἀπόδειξις. Ἂν εἰς τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν τούτων, ἤτοι εἰς τὸ $5\times12\times8\times7\times22$, ἀντικαταστήσωμεν τοὺς παράγοντας 5, 12 καὶ 8 διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν $5\times12\times8$, ἔτι δὲ καὶ τοὺς παράγοντας 7, 22 διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 7×22, θὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς

$$5\times12\times8 \quad \text{καὶ} \quad 7\times22.$$

τουτέστι τὰ δύο γινόμενα· ὥστε τὸ γινόμενον τούτων καὶ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 5, 12, 8, 7, 22, εἶνε ἓν καὶ τὸ αὐτό.

Σημείωσις. Ἡ ὁμοιότης τῶν ἰδιοτήτων τούτων πρὸς τὰς ἰδιότητας τῆς προσθέσεως (ἰδὲ ἐδ. 23) εἶνε καταφανής. Ἐννοοῦμεν δὲ τοῦτο εὐκόλως ἐὰν ἐνθυμηθῶμεν, ὅτι αἱ ἰδιότητες, περὶ ὧν ὁ λόγος, εἶνε ἀπόρροια τῆς αὐτῆς θεμελιώδους ἰδιότητος, τὴν ὁποίαν αἱ δύο αὗται πράξεις ἔχουσι· τουτέστι τῆς ἀδιαφορίας πρὸς τὴν τάξιν τῶν ἀριθμῶν, ἐφ' ὧν ἐκτελοῦνται.

50. Ἐκ τῆς δευτέρας θεμελιώδους ἰδιότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἕπεται ἡ ἑξῆς :

Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄλλο ἄθροισμα** (χωρὶς νὰ εὑρεθῶσιν), **ἐὰν ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ πρώτου πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ δευτέρου καὶ προστεθῶσι τὰ προκύπτοντα γινόμενα.

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο ἀθροίσματα

$3+5+10$ ἐπὶ $8+9$ (πρὶν ἢ εὕρωμεν αὐτά)

λέγω, ὅτι τὸ ζητούμενον γινόμενον θὰ εὑρεθῇ, ἂν προσθέσωμεν τὰ ἑξῆς γινόμενα

$$\begin{array}{cc} 3\times8 & 3\times9 \\ 5\times8 & 5\times9 \\ 10\times8 & 10\times9 \end{array}$$

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸ θεώρημα Γ' τοῦ ἐδ. 35 διὰ νὰ πολλασιάσω τὸν ἀριθμὸν $3+5+10$ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $8+9$ (χωρὶς νὰ τὸ εὕρω), πρέπει νὰ πολλαπλασιάσω αὐτὸν χωριστὰ ἐπὶ 8 καὶ ἐπὶ 9 καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ δύο γινόμενα· τὰ δύο ταῦτα γινόμενα εἶνε τὰ ἑξῆς :

$$(3+5+10)\times8 \quad \text{καὶ} \quad (3+5+10)\times9.$$

Ἀλλὰ διὰ νὰ εὕρω τὰ γινόμενα ταῦτα, ἔχω νὰ πολλαπλασιάσω ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμόν· ἄρα κατὰ τὸ θεώρημα Β' τοῦ ἐδ. 34, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσω ἕκαστον ἐκ τῶν προσθετέων ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ νὰ ἑνώσω τὰ μερικὰ γινόμενα· οὕτως εὑρίσκω, ὅτι τὸ γινόμενον $(3+5+10)\times8$ ἀποτελεῖται ἐκ τῶν ἑξῆς τριῶν γινομένων

$$3\times8 \text{ καὶ } 5\times8 \text{ καὶ } 10\times8.$$

Τὸ δὲ γινόμενον $(3+5+10)\times9$ ἀποτελεῖται ἐκ τῶν ἑξῆς τριῶν

$$3+9 \text{ καὶ } 5\times9 \text{ καὶ } 10\times9$$

Ἑπομένως τὰ ἓξ ταῦτα γινόμενα ὁμοῦ ἀποτελοῦσι τὸ ζητούμενον γινόμενον τῶν ἀθροισμάτων.

Πολλαπλασιασμὸς διαφορᾶς ἐπὶ ἀριθμόν.

51. Διαφορὰ πολλαπλασιάζεται (χωρὶς νὰ εὑρεθῇ προηγουμένως) κατὰ τὸ ἑξῆς θεώρημα :

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Διαφορὰ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι καὶ ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος αὐτῆς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου γινομένου ἀφαιρεθῇ τὸ δεύτερον.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν διαφορὰν 18—6 ἐπὶ τὸν 3 (χωρὶς νὰ εὕρωμεν αὐτήν), λέγω, ὅτι τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶνε $(18\times3)-(6\times3)$.

Ἀπόδειξις. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὴν διαφορὰν ἐπὶ 3, πρέπει νὰ ἐπαναλάβω αὐτὴν τρίς· τότε εὑρίσκω

$$(18-6)+(18-6)+(18-6).$$

Διὰ νὰ εὕρω τὸ ἄθροισμα τοῦτο, ἔχω νὰ προσθέσω τὸν 18 τρεῖς φορὰς καὶ ἀπὸ τοῦ προκύπτοντος ἀριθμοῦ, ὅστις εἶνε 18×3, νὰ ἀφαιρέσωμεν τρεῖς φορὰς τὸν 6, ἤτοι τὸ 6×3· ὥστε τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶνε $(18\times3)-(6\times3)$.

Περὶ τῶν δυνάμεων.

52. Ὅταν πάντες οἱ παράγοντες γινομένου τινὸς εἶνε ἴσοι, τὸ γινόμενον τοῦτο λέγεται *δύναμις* τοῦ ἑνὸς τῶν παραγόντων. Καὶ ἂν μὲν οἱ παράγοντες εἶνε δύο, τὸ γινόμενον λέγεται *δευτέρα δύναμις* ἢ *τετράγωνον*· ἂν δὲ τρεῖς *τρίτη δύναμις* ἢ *κῦβος*, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Παραδείγματος χάριν, τὸ γινόμενον $5\times5\times5\times5$ λέγεται τετάρτη δύναμις τοῦ 5· τὸ δὲ γινόμενον 3×3 λέγεται δευτέρα δύναμις ἢ τετράγωνον) τοῦ 3, καὶ τὸ γινόμενον $8\times8\times8$ λέγεται τρίτη δύναμις (ἢ κύβος) τοῦ 8.

Τὰς δυνάμεις παριστῶμεν συντόμως ὡς ἑξῆς· γράφομεν μόνον τὸν ἕνα παράγοντα, πρὸς τὰ δεξιὰ δὲ αὐτοῦ καὶ ὑψηλότερα γράφομεν τὸν ἀρθμὸν ὅστις δεικνύει τὸ πλῆθος τῶν ἴσων παραγόντων· καλεῖται δὲ ὁ ἀριθμὸς οὗτος *ἐκθέτης*.

Παραδείγματος χάριν, ἀντὶ : $8\times8\times8$ γράφομεν 8^3
ἀντὶ : $5\times5\times5\times5$ » 5^4
ἀντὶ : 3×3 » 3^2
καὶ 7^5 σημαίνει $7\times7\times7\times7\times7$.

Σημείωσις. Αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος αἱ μεγαλήτεραι τοῦ 10, ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ 100, 1000, 10000 κτλ. εἶνε αἱ διάφοροι δυνάμεις τῆς βάσεως 10.

Διότι εἶνε $10^2 = 10\times 10 = 100$

$10 = {}^{3}10\times 10\times 10 = 1000$

καὶ οὕτω καθεξῆς.

Θεμελιώδης ἰδιότης τῶν δυνάμεων.

Ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις εἶναι γινόμενα, αἱ ἰδιότητες αὐτῶν θὰ εὑρίσκωνται ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· εἶνε δὲ θεμελιώδης ἰδιότης τῶν δυνάμεων ἡ ἑξῆς·

53. *Τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶνε πάλιν δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἐκθέτην δὲ ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐκθετῶν.*

Ἀπόδειξις. Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς δύο δυνάμεις. 7^3. 7^5.

Ἡ πρώτη ἐκ τούτων εἶνε τὸ γινόμενον $7\times 7\times 7$, ἡ δὲ δευτέρα εἶναι $7\times 7\times 7\times 7\times 7$· ἔχομεν λοιπὸν νὰ πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον ἐπὶ γινόμενον· καὶ κατὰ τὴν ἰδιότητα 3 (ἐδ. 49) τὸ ζητούμενον γινόμενον θὰ ἔχῃ 8 παράγοντας καὶ ἴσους τῷ 7, ἤτοι θὰ εἶνε

$$7\times 7\times 7\times 7\times 7\times 7\times 7\times 7$$

ἢ συντομώτερον 7^8

Ἄρα ἀπεδείχθη, ὅτι $7^3\times 7^5 = 7^{3+5} = 7^8$

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἔχει τόσα ψηφία, ὅσα ἔχουσιν ὁμοῦ οἱ δύο παράγοντες, ἢ ἓν ὀλιγώτερον.

Ἄν, λόγου χάριν, ὁ εἷς ἔχῃ 3 ψηφία ὁ δὲ ἄλλος 5, τὸ γινόμενόν των θὰ ἔχῃ 8 ψηφία ἢ 7.

Διότι τὸ γινόμενον θὰ εἶνε μεγαλήτερον μὲν τοῦ 100×10000, ἤτοι τοῦ 1000000 (ἢ τοὐλάχιστον ἴσον πρὸς τοῦτο), μικρότερον δὲ τοῦ 1000×100000 ἤτοι τοῦ 100000000· ἄρα θὰ ἔχῃ τοὐλάχιστον 7 ψηφία· δὲν δύναται ὅμως νὰ ἔχῃ 9.

2) Ἐκ τοῦ πίνακος, δι' οὗ ἀποδεικνύεται, ὅτι $5\times 6 = 6\times 5$ (ἰδὲ ἐδ. 33), ἀποδεικνύεται προσέτι, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν.

$1+2+3+4+5$ εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου 6×5

Νὰ ἀποδειχθῇ γενικῶς, ὅτι τὸ ἄθροισμα $1+2+3+\ldots+\nu$ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου $\nu(\nu+1)$· οἱοσδήποτε ἀριθμὸς καὶ ἂν εἶνε ὁ ν.

3) Πόσον μεταβάλλεται τὸ γινόμενον, ὅταν εἰς ἕνα παράγοντα προστεθῇ μία μονάς, ἢ καὶ περισσότεραι ;

4) Εἰς γινόμενόν τι πρόκειται νὰ αὐξηθῇ εἷς παράγων κατὰ μονάδα, ποῖον παράγοντα πρέπει νὰ αὐξήσωμεν, ὥστε ἡ αὔξησις τοῦ γινομένου νὰ εἶναι μεγίστη;

5) Τὸ ἄθροισμα δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἐπὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν πολλαπλασιασθὲν δίδει ὡς γινόμενον τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων αὐτῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

54. *Ἡ Διαίρεσις εἶνε πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας μερίζομεν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς ἴσα μέρη.*

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν θέλωμεν νὰ μοιράσωμεν 18 δραχμὰς εἰς 3 ἀνθρώπους ἐξ ἴσου, ἡ πρᾶξις τὴν ὁποίαν θὰ κάμωμεν εἶνε διαίρεσις.

Ὁ ἀριθμός, ὅστις πρέπει νὰ μερισθῇ, λέγεται **διαιρετέος**, ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις δεικνύει εἰς πόσα μέρη θὰ μερισθῇ λέγεται **διαιρέτης**· τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς διαιρέσεως λέγεται πηλίκον.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα διαιρετέος εἶνε ὁ 18, διαιρέτης δὲ ὁ 3 καὶ πηλίκον ὁ 6.

Ὁ μερισμὸς δὲν γίνεται πάντοτε ἀκριβῶς· ἀλλὰ περισσεύει πολλάκις ἀριθμός τις· ὁ ἀριθμὸς οὗτος λέγεται ὑπόλοιπον.

Ἐὰν παραδείγματος χάριν, θέλω νὰ μοιράσω 16 δραχμὰς εἰς 3 ἀνθρώπους ἐξ ἴσου, βλέπω εὐκόλως, ὅτι ἕκαστος ἄνθρωπος θὰ λάβῃ 5 δραχμὰς καὶ θὰ περισσεύσῃ καὶ μία δραχμή· εἰς τὴν διαίρεσιν ταύτην διαιρετέος εἶνε ὁ 16, διαιρέτης ὁ 3, πηλίκον ὁ 5 καὶ ὑπόλοιπον 1.

Σημεῖον τῆς διαιρέσεως εἶνε τὸ ἑξῆς: (ὅπερ ἀπαγγέλλεται *διά*). γράφεται δὲ τὸ σημεῖον τοῦτο κατόπιν τοῦ διαιρέτου καὶ μετ' αὐτὸ γράφεται ὁ διαιρέτης· οἷον 15 : 3 σημαίνει ὅτι ὁ 15 πρέπει νὰ διαιρεθῇ εἰς 3 ἴσα μέρη, ἤτοι νὰ διαιρεθῇ διὰ 3· ἀπαγγέλλεται δὲ 15 *διαιρούμενος διὰ* 3, ἢ συντομώτερον 15 *διὰ* 3.

55. Ἡ διαίρεσις δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν (ὅπως ὁ πολλαπλασιασμὸς εἰς τὴν πρόθεσιν).

Διότι, ἂν ἔχωμεν π.χ. νὰ μοιράσωμεν 45 δραχμὰς εἰς 8 ἀνθρώπους δυνάμεθα νὰ δώσωμεν κατὰ πρῶτον ἀνὰ μίαν δραχμ. εἰς ἕκαστον τότε θὰ μείνωσι 45—8, ἤτοι 37 δραχμαί· ἔπειτα· ἐκ τῶν 37 δραχμῶν(αἱ

---

* Ἐν τῷ τρίτῳ βιβλίῳ θὰ μάθωμεν, ὅτι πᾶσα διαίρεσις γίνεται ἀκριβῶς τῇ βοηθείᾳ τῶν κλασμάτων.

ὁποῖαι ἔμειναν) νὰ δώσωμεν πάλιν εἰς ἕκαστον ἀνὰ μίαν δραχμὴν τότε θὰ μείνωσι 37—8, ἤτοι 29 δραχμαί· καὶ ἐκ τούτων πάλιν νὰ δώσωμεν ἀνὰ μίαν εἰς καθένα· καὶ οὕτω καθεξῆς· εἰς τὸ τέλος, ἢ δὲν θὰ μείνῃ τίποτε, ἢ θὰ μείνῃ ἀριθμός τις δραχμῶν μικρότερος τοῦ 8. Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον τῆς διαιρέσεως γίνεται φανερόν, ὅτι ἕκαστος θὰ λάβῃ τόσας δραχμάς, ὅσας φορὰς ἀφῃρέσαμεν τὸν 8· δηλαδὴ ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 45 τὸν 8.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ δώσωμεν καὶ τὸν ἑξῆς ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως.

56. Ἡ διαίρεσις εἶναι *πρᾶξις, δι' ἧς εὑρίσκομεν ποσάκις χωρεῖ εἰς ἀριθμὸς ἄλλον ἀριθμόν.*

Σημείωσις. Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶνε ἡ μονάς, τὸ πηλίκον εἶνε ἴσον πρὸς τὸν διαιρετέον ὅταν δὲ ὁ διαιρέτης εἶνε ἴσος πρὸς τὸν διαιρετέον, τὸ πηλίκον εἶνε 1.

Τελεία διαίρεσις.

57. Ἡ διαίρεσις λέγεται *τελεία*, ὅταν ὁ διαιρετέος μερίζηται εἰς ἴσα μέρη χωρὶς νὰ μένῃ ὑπόλοιπον.

Παραδείγματος χάριν, ἡ διαίρεσις 18 : 3 εἶνε τελεία καὶ πηλίκον αὐτῆς εἶνε ὁ 6· διότι $18=6+6+6$.

Εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος ἀναλύεται εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ διαιρέτης καὶ ἕκαστον μέρος εἶναι ἴσον μὲ τὸ πηλίκον· τὰ μέρη δὲ ταῦτα, ὅταν ἑνωθῶσι πάλιν, θὰ ἀποτελέσωσι τὸν διαιρετέον· ἄρα *εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος εἶνε γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου.*

Ἀτελὴς διαίρεσις.

58. *Ἀτελὴς* λέγεται ἡ διαίρεσις, ἐὰν ἀφίνῃ ὑπόλοιπον. Παραδείγματος χάριν, ἡ διαίρεσις 17 : 3 εἶνε ἀτελής· διότι ἀφαιροῦντες τὸν 3 ἀπὸ τοῦ 17, ὅσας φορὰς εἶνε δυνατὸν (5 φοράς), εὑρίσκομεν, ὅτι μένει ὑπόλοιπον 2· ὥστε ἡ διαίρεσις 17 : 3 δίδει πηλίκον 5 καὶ ὑπόλοιπον 2.

Ἐπειδὴ εἰς τὴν διαίρεσιν 17 : 3 ἀφῃρέσαμεν τὸν 3 πέντε φορὰς ἀπὸ τοῦ 17 καὶ ἔμεινε 2, τοῦτο σημαίνει, ὅτι ὁ 17 σύγκειται ἐκ τοῦ 3, λαμβανομένου 5 φοράς, καὶ ἐκ τοῦ 2, ἤτοι εἶνε

$$17=(3+3+3+3+3)+2$$

ἢ

$$17=(3\times5)+2.$$

59. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι

Εἰς πᾶσαν ἀτελῆ διαίρεσιν, ὁ διαιρετέος εἶνε ἴσος μὲ τὸ γινό-

μενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου, ὅταν εἰς τὸ γινόμενον τοῦτο προστεθῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον.

Σημείωσις. Ἡ πρότασις αὕτη ἀληθεύει καὶ περὶ πάσης διαιρέσεως ἀρκεῖ ὡς ὑπόλοιπον τῆς τελείας διαιρέσεως νὰ θεωρηθῇ τὸ 0.

Κατὰ τὰ προηγουμένως λεχθέντα (ἐδ. 55) τὸ ὑπόλοιπον εἶνε πάντοτε μικρότερον τοῦ διαιρέτου.

Παρατήρησεις.

60. Ἡ διαίρεσις δύναται νὰ γίνῃ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς ἑξῆς·

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν τὸν 53 διὰ τοῦ 9.

Πολλαπλασιάζω τὸν διαιρέτην 9 ἐπὶ 1, ἐπὶ 2, ἐπὶ 3 κτλ. κατὰ σειρὰν καὶ εὑρίσκω.

$$9\times1=9 \quad 9\times2=18, \quad 9\times3-27, \quad 9\times4=36,$$
$$9\times5=45, \quad 9\times6-54.$$

Ἐκ τούτων βλέπω, ὅτι ὁ 9 χωρεῖ εἰς τὸν 53 μόνον 5 φορὰς (διότι 9×5 εἶνε 45, ἀλλὰ 9×6 εἶνε 54· μεγαλήτερον δηλονότι τοῦ 53)· ὥστε τὸ πηλίκον εἶνε 5, τὸ δὲ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον μένει, ὅταν ἀπὸ τοῦ 53 ἀφαιρέσω τὸν 9 πέντε φοράς, εἶναι 8.

Ἀλλὰ καὶ ὁ τρόπος οὗτος ὡς καὶ ὁ ἄλλος, ὅστις ἀπαιτεῖ ἀλλεπαλλήλους ἀφαιρέσεις, δὲν εἶνε κατάλληλος, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶνε μεγάλοι, διότι καὶ χρόνον ἀπαιτοῦσι καὶ κόπον πολύν. Διὰ τοῦτο ἐπενόησαν ἄλλον τρόπον συντομώτερον, καθ' ὃν ἐκτελεῖται ἡ διαίρεσις, καὶ τὸν ὁποῖον θὰ μάθωμεν ἐν τοῖς ἑπομένοις.

Ἀριθμὸς τῶν ψηφέων τοῦ πηλίκου.

61. Ἄν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν, πρὶν ἀκόμη ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, πόσα ψηφία θὰ ἔχῃ τὸ πηλίκον, κάμνομεν ὡς ἑξῆς.

Γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου τόσα μηδενικά, ὅσα χρειάζονται διὰ νὰ γίνῃ ὁ διαιρέτης μεγαλήτερος τοῦ διαιρετέου· ὅσα μηδενικὰ χρειάζονται διὰ νὰ γίνῃ τοῦτο, τόσα ψηφία θὰ ἔχῃ τὸ πηλίκον.

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ διαίρεσις 175 : 18

Ἐὰν γράψω δεξιὰ τοῦ 18 ἓν μηδενικὸν (δηλαδὴ ἂν τὸν πολλαπλασιάσω ἐπὶ 10) γίνεται 180 καὶ ὑπερβαίνει τὸν διαιρετέον 175· ἐκ τούτου βλέπω, ὅτι τὸ δεκαπλάσιον τοῦ διαιρέτου 18 ὑπερβαίνει τὸν διαιρετέον 175· τοῦτο σημαίνει, ὅτι δὲν ἐμπεριέχεται ὁ διαιρέτης 18 εἰς τὸν διαιρετέον 10 φοράς, ἀλλ' ὀλιγώτερον· ἄρα τὸ πηλίκον δὲν εἶνε 10, ἀλλὰ μικρότερον τοῦ 10 καὶ διὰ τοῦτο εἶνε μονοψήφιον.

Ἔστω καὶ ἡ διαίρεσις 5892 : 65.

Διὰ νὰ γίνῃ ὁ διαιρέτης 65 μεγαλήτερος τοῦ διαιρετέου 5892, χρειάζονται δύο μηδενικά· διότι ὁ 6500 ὑπερβαίνει τὸν διαιρετέον ἀλλ' ὁ 650 εἶνε μικρότερος αὐτοῦ. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι ὁ διαιρετέος 5892 περιέχει τὸν διαιρέτην 10 φοράς, ὄχι ὅμως 100 φοράς ἄρα τὸ πηλίκον εἶνε μεγαλήτερον τοῦ 10, ἀλλὰ μικρότερον τοῦ 100, ἑπομένως θὰ ἔχῃ δύο ψηφία.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ συλλογισμοῦ εὑρίσκω, ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 185421 : 12 ἔχει 5 ψηφία, τὸ δὲ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 89004: 905 ἔχει δύο ψηφία καὶ οὕτω καθεξῆς.

Περὶ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν γίνεται ἡ διαίρεσις.

62. Διὰ νὰ ἐξηγήσωμεν τὸν τρόπον, καθ' ὃν ἐκτελεῖται συντόμως ἡ διαίρεσις, διακρίνομεν τὰς ἑξῆς δύο περιπτώσεις·

1) ὅταν τὸ πηλίκον εἶνε μονοψήφιον.
2) ὅταν τὸ πηλίκον εἶνε πολυψήφιον.

Διαίρεσις, ὅταν τὸ πηλίκον εἶνε μονοψήφιον.

63.) Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἂν εἶνε καὶ ὁ διαιρέτης μονοψήφιος, ἡ διαίρεσις γίνεται ἀπὸ μνήμης· διότι ἐκ τοῦ Πυθαγορείου πίνακος ἐνθυμούμεθα ἀμέσως τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου, τὸ ὁποῖον ἐμπεριέχεται εἰς τὸν διαιρετέον.

Ἂν παραδείγματος χάριν, πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν 75 διὰ 8, ἐνθυμούμεθα ἀμέσως, ὅτι εἶνε $8\times9=72$· ἀλλὰ $8\times10=80$, ἄρα πηλίκον εἶνε ὁ 9· τὸ δὲ ὑπόλοιπον εὑρίσκομεν ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ διαιρετέου 75 τὸ γινόμενον 72· εἶνε δὲ 3.

64. Ἂν δὲ ὁ διαιρέτης εἶνε πολυψήφιος, μεταχειριζόμεθα τὸν ἑξῆς τρόπον.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 3858 διὰ τοῦ 525· ἤτοι νὰ εὕρωμεν πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ 525 εἰς τὸν 3858.

Διὰ νὰ εὕρω τὸ πηλίκον, σκέπτομαι ὡς ἑξῆς.

Αἱ 5 ἑκατοντάδες τοῦ διαιρέτου δὲν περιέχονται εἰς τὰς μονάδας οὐδὲ εἰς τὰς δεκάδας τοῦ διαιρετέου, ἀλλὰ μόνον εἰς τὰς 38 ἑκατοντάδας αὐτοῦ· περιέχονται δὲ 7 φορὰς μόνον (διότι τὸ 5 εἰς τὸ 38 περιέχεται 7 φοράς). Ἐκ τούτου συμπεραίνω, ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι μεγαλείτερον τοῦ 7, ἀλλ' εἶνε ἢ 7 ἢ μικρότερον τοῦ 7. (διότι αἱ 5 ἑκατοντάδες, ἤτοι ὁ 500, περιέχονται εἰς τὸν διαιρετέον 7 φορὰς ἀλλὰ ὁ 525, ὡς μεγαλήτερος τοῦ 500, δυνατὸν νὰ μὴ περιέχηται εἰς αὐτὸν 7 φοράς).

Διὰ νὰ δοκιμάσω τὸ 7, πολλαπλασιάζω αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 525 καὶ εὑρίσκω γινόμενον 3675, ἤτοι μικρότερον τοῦ διαιρετέου. Ἐκ τούτου βλέπω, ὅτι τὸ πηλίκον εἶνε 7· ἀφαιρῶν δὲ ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τὸ γινόμενον 3675 (τοῦ πηλίκου 7 ἐπὶ τὸν διαιρέτην 525), εὑρίσκω 183 τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

Ὡς δεύτερον παράδειγμα ἔστω ἡ διαίρεσις

$$8569 : 2854$$

Τὸ πηλίκον εἶνε μονοψήφιον (διότι 2854×10 εἶνε 28540, ἤτοι μεγαλείτερον τοῦ διαιρετέου) καὶ διὰ νὰ τὸ εὕρω, παρατηρῶ, ὅτι αἱ δύο χιλιάδες τοῦ διαιρέτου περιέχονται εἰς τὸν διαιρετέον (δηλαδὴ εἰς τὰς 8 χιλιάδας του) 4 φορὰς μόνον· ὥστε καὶ ὅλος ὁ διαιρέτης 2854 δὲν περιέχεται εἰς τὸν διαιρετέον περισσότερον ἀπὸ 4 φοράς· ἑπομένως τὸ πηλίκον εἶνε ἢ 4 ἢ μικρότερον τοῦ 4. Διὰ νὰ δοκιμάσω τὸ 4 πολλαπλασιάζω αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 2854 καὶ εὑρίσκω γινόμενον 11416, ὅπερ εἶνε μεγαλείτερον τοῦ διαιρετέου· ὥστε τὸ πηλίκον εἶνε μικρότερον τοῦ 4. Διὰ νὰ δοκιμάσω τὸ 3, πολλαπλασιάζω αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ εὑρίσκω γινόμενον 8562 μικρότερον τοῦ διαιρετέου, λοιπὸν τὸ πηλίκον εἶνε 3.

Διὰ νὰ εὕρω τὸ ὑπόλοιπον, ἀφαιρῶ ἀπὸ τοῦ διαιρετέου 8569 τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου, ἤτοι τὸ 8562, καὶ εὑρίσκω τὸ ὑπόλοιπον 7· ὥστε ἐξετελέσθη ἡ διαίρεσις.

65. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών·

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν, ὅταν εἶνε μονοψήφιον, λαμβάνομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ διαιρέτου καὶ δι' αὐτοῦ διαιροῦμεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ διαιρετέου ἢ τὰ δύο πρῶτα ψηφία αὐτοῦ (ἂν τὸ πρῶτον μόνον του δὲν διαιρεῖται) *τὸ πηλίκον ὅπερ εὑρίσκομεν θὰ εἶνε ἴσον ἢ μεγαλείτερον τοῦ ζητουμένου.*

Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν δὲ τὸ εὑρεθὲν ψηφίον, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπ' αὐτό, καὶ ἐὰν μὲν τὸ προκύπτον γινόμενον χωρῇ εἰς τὸν διαιρετέον τότε τὸ ψηφίον τοῦτο εἶνε τὸ ζητούμενον πηλίκον, εἰ δὲ μὴ δοκιμάζωμεν τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον καὶ οὕτω καθεξῆς, ἕως οὗ εὕρωμεν ἓν ψηφίον, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον νὰ περιέχηται εἰς τὸν διαιρετέον.

Συνήθως ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς φαίνεται.

$$\begin{array}{r|l} 6083 & 703 \\ \hline 5624 & 8 \\ \hline 459 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 50379 & 6902 \\ \hline 48314 & 7 \\ \hline 2065 & \end{array}$$

Σημείωσις. Ὅταν τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ διαιρέτου εἶνε μεγαλήτερον τοῦ 5, εἶνε προτιμώτερον νὰ αὐξάνωμεν τὸ πρῶτον ψηφίον κατὰ μονάδα, πρὶν διαιρέσωμεν δι' αὐτοῦ τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ διαιρετέου (ἢ τὰ δύο πρῶτα)· διότι τοιουτοτρόπως εὑρίσκομεν ταχύτερον τὸ πηλίκον. Ἂν ἔχωμεν π. χ. νὰ διαιρέσωμεν 8381 διὰ τοῦ 2954, κατὰ τὸν ἀνωτέρω τεθέντα κανόνα θὰ διαιρέσωμεν τὸν 8 διὰ τοῦ 2· καὶ ἐπειδὴ τὸ 2 εἰς τὸ 8 περιέχεται 4 φοράς, θὰ συμπεράνωμεν, ὅτι τὸ πηλίκον εἶνε ἢ 4 ἢ μικρότερον τοῦ 4· δοκιμάζοντες δὲ εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ πηλίκον εἶνε 2· τοῦτο θὰ εὑρίσκομεν ταχύτερον, ἐὰν ἐσκεπτόμεθα ὅτι ὁ διαιρέτης ἔχει σχεδὸν 3 χιλιάδας καὶ ὅτι αἱ 3 χιλιάδες χωροῦσιν εἰς τὰς 8 χιλιάδας 2 μόνον φοράς· ἐκ τούτου συμπεραίνομεν, ὅτι τὸ πηλίκον θὰ εἶνε ἢ 2 ἢ μεγαλήτερον τοῦ 2· (διότι ὁ διαιρέτης 2954, ὡς μικρότερος τοῦ 3000, ἐνδέχεται νὰ χωρῇ περισσοτέρας φορὰς εἰς τὸν διαιρετέον.

Διαίρεσις,
ὅταν τὸ πηλίκον εἶνε πολυψήφιον.

66. Ὅταν τὸ πηλίκον εἶνε πολυψήφιον, ἡ διαίρεσις ἀναλύεται εἰς ἄλλας, ἐξ ὧν ἑκάστη ἔχει πηλίκον μονοψήφιον· γίνεται δὲ τοῦτο ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ ἑξῆς παραδείγματος·

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν.

$$52629 : 24$$

ἤτοι νὰ μοιράσωμεν 52629 δραχμὰς ἐξ ἴσου εἰς 24 ἀνθρώπους·

Λαμβάνομεν τόσα μόνον ψηφία τοῦ διαιρετέου ἀπ' ἀρχῆς, ὅσα χρειάζονται, διὰ νὰ ἔχωμεν πηλίκον μονοψήφιον.

Ἐνταῦθα λαμβάνομεν τὰς 52 χιλιάδας καὶ μοιράζομεν αὐτὰς εἰς τοὺς 24 ἀνθρώπους.

$$\begin{array}{r|l} 52'629 & 24 \\ \cline{2-2} 48 & 2 \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}$$

Εἰς τὴν πρώτην ταύτην μερικὴν διαίρεσιν διαιρετέος εἶνε 52 (χιλιάδες) διαιρέτης ὁ 24 πηλίκον 2 (χιλιάδες) καὶ ὑπόλοιπον 4 (χιλ).

Αἱ 4 χιλιάδες, αἱ ὁποῖαι ἔμειναν, ὁμοῦ μὲ τὰς 629 μονάδας, τὰς ὁποίας ἀφήκαμεν ἐξ ἀρχῆς, ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 4629, ὅστις μένει ἀκόμη νὰ μοιρασθῇ εἰς 24 ἀνθρώπους.

Καὶ εἰς τὴν νέαν ταύτην διαίρεσιν (ὡς καὶ εἰς τὴν πρώτην) λαμβάνομεν τόσα μόνον ψηφία τοῦ διαιρετέου ἀπ' ἀρχῆς αὐτοῦ ὅσα χρειάζονται διὰ νὰ ἔχωμεν πηλίκον μονοψήφιον· λαμβάνομεν λοιπὸν τὰς 46 ἑκατοντάδας· καὶ ταύτας μοιράζομεν εἰς τοὺς 24 ἀνθρώπους.

46′29 | 24
24   1
22

εὑρίσκομεν δὲ πηλίκον 1 ἑκατοντάδα καὶ ὑπόλοιπον 22 ἑκατοντάδας.

Αἱ 22 ἑκατοντάδες, αἵτινες ἔμειναν ἑνωθεῖσαι μετὰ τῶν 29 μονάδων, τὰς ὁποίας ἀφήκαμεν, ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 2229, τὸν ὁποῖον πρέπει ἀκόμη νὰ μοιράσωμεν εἰς τοὺς 24 ἀνθρώπους.

Καὶ εἰς τὴν νέαν ταύτην διαίρεσιν λαμβάνομεν τόσα μόνον ψηφία τοῦ διαιρετέου (ἀπ' ἀρχῆς), ὅσα χρειάζονται, διὰ νὰ ἔχωμεν πηλίκον μονοψήφιον· λαμβάνομεν λοιπὸν τὰς 222 δεκάδας καὶ ταύτας μοιράζομεν εἰς τοὺς 24 ἀνθρώπους.

222′9 | 24
216   9
6

εὑρίσκομεν δὲ πηλίκον 9 μονάδας καὶ ὑπόλοιπον 6 δεκάδας.

Αἱ 6 δεκάδες, αἵτινες ἔμειναν καὶ αἱ 9 μονάδες, τὰς ὁποίας ἀφήκαμεν, ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 69, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ μοιράσωμεν ἀκόμη εἰς τοὺς 24 ἀνθρώπους.

69 | 24
48   2
21

Ἡ διαίρεσις αὕτη δίδει πηλίκον μονοψήφιον, τὸ 2, καὶ κατάλοιπον τὸ 21.

Ὥστε ἡ διαίρεσις ἐξετελέσθη καὶ πηλίκον μὲν εὑρήκαμεν 2 χιλιάδας 1 ἑκατοντάδα, 9 δεκάδας καὶ 2 μονάδας, ἤτοι τὸν ἀριθμὸν 2192, ὑπόλοιπον δὲ 21.

Ἡ πρᾶξις δύναται νὰ διαταχθῇ ὡς ἕπεται·

52′629 | 24
48   2000
46′29   100
24   90
222′9   2
216
69′
48
21

Παρατηρήσεις
περὶ τῆς διατάξεως τῆς διαιρέσεως.

1) Δεξιὰ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου 4 δὲν εἶνε ἀνάγκη νὰ καταβιβάζωμεν πάντα τὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου, ὅσα ἀφήκαμεν εἰς τὴν πρώτην μερικὴν διαίρεσιν, ἤτοι τὰ 629, ἀλλὰ μόνον τὸ πρῶτον ἐξ αὐτῶν, ἤτοι τὰ 6, διότι αὐτὸ μόνον χρειάζεται εἰς τὴν δευτέραν μερικὴν διαίρεσιν· διότι εἰς αὐτὴν μόνον τὸ 46 διαιροῦμεν, τὰ δὲ ἄλλα ψηφία τοῦ μερικοῦ διαιρετέου 4629 τὰ ἀφίνομεν. Ἐπίσης δεξιὰ τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου 22 δυνάμεθα νὰ καταβιβάζωμεν μόνον τὸ πρῶτον ἐκ τῶν παραλειφθέντων ψηφίων, ἤτοι τὸ 2, διότι τὰ ἄλλα δὲν χρειάζονται εἰς τὴν τρίτην διαίρεσιν. Διὰ ταῦτα εἰς ἑκάστην μερικὴν διαίρεσιν καταβιβάζομεν ἀπὸ ἓν ψηφίον τοῦ διαιρετέου κατὰ σειράν.

2) Καὶ τὰ μηδενικά, τὰ ὁποῖα ἐγράψαμεν δεξιὰ τοῦ ψηφίου 2, ἵνα σημαίνῃ 2 χιλιάδας, καὶ δεξιὰ τοῦ ψηφίου 1, ἵνα σημαίνῃ μίαν ἑκατοντάδα καὶ δεξιὰ τοῦ ψηφίου 9, διὰ νὰ σημαίνῃ 9 δεκάδας, τὰ μηεενικὰ λέγω ταῦτα δύνανται νὰ παραλείπωνται· ἀρκεῖ νὰ γράφωμεν τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου εἰς μίαν σειρὰν κατὰ τὴν τάξιν, καθ' ἣν εὑρίσκονται, ἤτοι 2192· διότι τότε τὸ 2 σημαίνει χιλιάδας καὶ τὸ 1 σημαίνει ἑκατοντάδας καὶ τὸ 9 δεκάδας. Ἡ πρᾶξις τότε διατάσσεται συντομώτερον ὡς ἑξῆς·

```
52'629 | 24
48       2192
------
 46
 24
 ----
 222
 216
 ----
  69
  48
  ---
  21
```

Ἀλλ' ὅταν διατάσσωμεν τὴν πρᾶξιν κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον, πρέπει νὰ προσθέσωμεν καὶ τὸ ἑξῆς·

Ἂν εἰς μερικήν τινα διαίρεσιν, ἀφοῦ καταβιβάσωμεν ἓν ψηφίον τοῦ διαιρετέου δὲν εὕρωμεν πηλίκον (ἂν δηλαδὴ ὁ διαιρέτης δὲν χωρεῖ εἰς τὸν προκύπτοντα τότε ἀριθμόν), *τότε πρέπει νὰ γράφωμεν ἓν μηδενικὸν δεξιὰ τῶν εὑρεθέντων ψηφίων τοῦ πηλίκου· τοῦτο δέ, ἵνα διατηρῆται ἡ ἀξία αὐτῶν.* Τοῦτο συμβαίνει λ. χ. εἰς τὸ ἑξῆς παράδειγμα·

```
355'68 | 171
342      208
----
1368
1368
----
   0
```

Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης δὲν ἔχει δεκάδας· ἐγράψαμεν λοιπὸν 0 εἰς τὴν θέσιν των· ἄλλως τὸ ψηφίον 2 δὲν θὰ ἐσήμαινεν ἑκατοντάδας.

3) Ἐὰν ὁ διαιρέτης εἶνε μονοψήφιος, ἀφαιροῦμεν τὰ γινόμενα αὐτοῦ χωρὶς νὰ τὰ γράφωμεν· ἡ πρᾶξις τότε λαμβάνει τὴν ἑξῆς διάταξιν·

```
58'74 | 8        21'014 | 7
27      734      0014     3002
 34                 0
  2
```

Κανὼν τῆς διαιρέσεως.

67. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑξῆς γενικὸς κανὼν τῆς διαιρέσεως.

Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμὸν δι' ἄλλου, χωρίζομεν ἀπ' ἀρχῆς τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα χρειάζονται διὰ νὰ ἔχωμεν πηλίκον μονοψήφιον· πρὸς τοῦτο χωρίζομεν ἢ τόσα ψηφία, ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης, ἢ ἓν περισσότερον)· *διαιροῦμεν τὸ χωρισθὲν μέρος διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ εὑρίσκομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου. Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ ψηφίον τοῦτο καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ μέρους, τὸ ὁποῖον διῃρέσαμεν, δεξιὰ δὲ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ ἀμέσως ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρέτου.*

Τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ εὑρίσκομεν τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου, ὅπερ γράφομεν δεξιὰ τοῦ πρώτου. Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον διῃρέσαμεν, δεξιὰ δὲ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου Τὸν προκύπτοντα τότε ἀριθμὸν διαιροῦμεν πάλιν διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ ἐξακολουθοῦμεν τοιουτοτρόπως, μέχρις οὗ καταβιβάσωμεν πάντα τὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου.

Ἐὰν δὲ εἴς μερικήν τινα διαίρεσιν, ἀφοῦ καταβιβάσωμεν τὸ ἁρμόδιον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, δὲν διαιρῆται ὁ προκύπτων ἀρι-

θμὸς διὰ τοῦ διαιρέτου, γράφομεν 0 εἰς τὸ πηλίκον, καταβιβάζομεν καὶ τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρέτου καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν.

Συντομίαι.

1η)

Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι 10, ἡ διαίρεσις γίνεται τάχιστα ὡς ἑξῆς· *Χωρίζομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ διαιρετέου* τότε τὰ ἄλλα ψηφία αὐτοῦ ἀποτελοῦσι τὸ πηλίκον, τὸ δὲ χωρισθὲν ψηφίον εἶνε τὸ ὑπόλοιπον.

Οἷον ἡ διαίρεσις 15489 : 10 δίδει πηλίκον 1548 καὶ ὑπόλοιπον 9, ἡ δὲ διαίρεσις 8750 : 10 δίδει πηλίκον 875 καὶ ὑπόλοιπον 0.

Ὁ λόγος τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς.

Διὰ νὰ διαιρέσω τὸν 15489 διὰ τοῦ 10, πρέπει νὰ εὕρω πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ 10 εἰς τὸν 15489, ἤτοι πόσας δεκάδας ἔχει ὁ ἀριθμὸς 15489, ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἔχει τὸ ὅλον 1548 δεκάδας καὶ 9 μονάδας· ἄρα τὸ πηλίκον εἶναι 1548, τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶνε αἱ 9 μονάδες.

Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶνε 100 ἡ διαίρεσις γίνεται τάχιστα ὡς ἑξῆς· *Χωρίζομεν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία τοῦ διαιρετέου*, τότε τὰ ἄλλα ψηφία αὐτοῦ ἀποτελοῦσι τὸ πηλίκον, τὰ δὲ χωρισθέντα εἶνε τὸ ὑπόλοιπον.

Οἷον ἡ διαίρεσις 5897 : 100 δίδει πηλίκον 58 καὶ ὑπόλοιπον 97.

Διότι τὸ πηλίκον δεικνύει πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ 100 εἰς τὸν 5897 ἤτοι πόσας ἑκατοντάδας τὸ ὅλον ἔχει ὁ ἀριθμὸς 5897· ἔχει δὲ ὁ ἀριθμὸς οὗτος 58 ἑκατοντάδας (διότι αἱ 5 χιλιάδες ἀποτελοῦσι 50 ἑκατοντάδας).

Καὶ γενικῶς. *Ὅταν ὁ διαιρέτης ἀποτελῆται ἐκ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ὑπὸ μηδενικῶν, χωρίζομεν εἰς τὸ τέλος τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ διαιρέτης·* τότε τὰ ἄλλα ψηφία τοῦ διαιρετέου ἀποτελοῦσι τὸ πηλίκον, τὰ δὲ χωρισθέντα τὸ ὑπόλοιπον.

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ κανόνος τούτου γίνεται ὡς καὶ τῶν δύο προηγουμένων.

2α)

Ὅταν ὁ διαιρέτης ἔχῃ εἰς τὸ τέλος μηδενικά, παραλείπομεν αὐτά, παραλείπομεν δὲ καὶ ἴσον ἀριθμὸν ψηφίων εἰς τὸ τέλος τοῦ διαιρετέου· τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον τότε εὑρίσκομεν, εἶνε τὸ ζητούμενον· ἀλλὰ διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἀληθὲς ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως, πρέπει δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς συντομευθείσης διαιρέσεως νὰ γράψωμεν καὶ τὰ παραλειφθέντα ψηφία τοῦ διαιρετέου μὲ τὴν σειράν των.

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 759431 διὰ τοῦ 18000. Διὰ νὰ εὕρω τὸ πηλίκον, πρέπει νὰ ἀφαιρέσω τὰς 18 χιλιάδας ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 759431, ὅσας φορὰς δύναμαι. Ἐπειδὴ ὅμως αἱ χιλιάδες δὲν δύνανται νὰ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ μονάδων, οὔτε ἀπὸ δεκάδων, οὔτε ἀπὸ ἑκατοντάδων, πρέπει νὰ ἀφαιρέσω τὰς 18 χιλιάδας ἀπὸ τῶν 759 χιλιάδων τοῦ διαιρετέου ὅσας φορὰ δύναμαι τουτέστι πρέπει νὰ διαιρέσω τὸν ἀριθμὸν 759 διὰ τοῦ 18, διὰ νὰ εὕρω τὸ πηλίκον· τὸ δὲ ὑπόλοιπον θὰ ἀπαρτίζηται ἐκ τῶν χιλιάδων, αἵτινες ἐνδέχεται νὰ μείνωσι καὶ ἐκ τῶν 431 μονάδων, τὰς ὁποίας παραλείψαμεν.

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως φαίνεται ἐκ τῶν ἑπομένων παραδειγμάτων.

```
875(4 ]25(0        487(08 [4(00
 75     35            8     121
----               -------
 125                  7
 125               -------
----                308
 04
```

Σημείωσις Εἰς τὴν συντομίαν ταύτην ὑπάγεται προδήλως καὶ ἡ πρώτη· ἀναφέρομεν δ' αὐτὴν ἰδιαιτέρως χάριν μείζονος σαφηνείας.

3η)

Ὅταν τὰ ψηφία τοῦ διαιρέτου εἶναι πάντα 9, ἡ διαίρεσις συντομεύεται ὡς ἀκολούθως·

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθ. 589875421 διὰ τοῦ 999.
τουτέστι νὰ μοιράσωμεν 589875421 δραχ. εἰς 999 ἀνθρώπους.

Διὰ νὰ εὐκολύνω τὴν διαίρεσιν παραδέχομαι ἀκόμη ἕνα ἄνθρωπον καὶ γίνονται 1000· τότε (κατὰ τὴν 1ην συντομίαν) θὰ λάβῃ ἕκαστος 589875 δραχ. καὶ θὰ περισσεύσωσι 421.

Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ εἷς ἄνθρωπος δὲν ὑπάρχει, τὸ μερίδιόν του, ἤτοι αἱ 589875 δραχ. ἔμεινε, τοῦτο δὲ ἑνούμενον μετὰ τοῦ ὑπολοίπου 421 δίδει 590296 δραχ., αἱ ὁποῖαι πρέπει ἀκόμη νὰ μοιρασθῶσιν εἰς τοὺς 999 ἀνθρώπους· γίνεται δὲ τοῦτο διὰ νέας διαιρέσεως 590296 : 999.

Καὶ εἰς τὴν νέαν ταύτην διαίρεσιν κάμνω τὴν αὐτὴν συντομίαν καὶ εὑρίσκω, ὅτι θὰ λάβῃ ἕκαστος τῶν 999 ἀνθρώπων 590 καὶ θὰ μείνωσι καὶ 886 δραχμαί.

Ὥστε ἡ διαίρεσις ἐξετελέσθη καὶ ἔδωκε πηλίκον μὲν 589875+590, ἤτοι 590465, κατάλοιπον δὲ 886.

Ἡ πρᾶξις δύναται νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς·

589507 | 9999
9507 58
9565

175603 | 99
3 1756
1759 17
59 1773 πηλίκον
76

Δι' ὁμοίου τρόπου ἐσυντομεύθη καὶ ἡ ἑπομένη διαίρεσις (εἰς τὴν ὁποίαν παρεδέχθην δύο ἀνθρώπους)

21508954 | 998
21508 21508
954 43
43970 1
43 21552 πηλίκον
970
1056
1
56
58 ὑπόλοιπον

Σημείωσις. Ὅταν τὸ πηλίκον μέλλῃ νὰ ἔχῃ πολλὰ ψηφία, εἶνέ δὲ καὶ ὁ διαιρέτης πολυψήφιος, σχηματίζομεν κατὰ πρῶτον πίνακα περιέχοντα τὰ γινόμενα τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοὺς ἐννέα μονοψηφίους ἀριθμοὺς κατὰ σειράν· τότε δι' ἁπλῆς ἐπόψεως τοῦ πίνακος τούτου εὑρίσκομεν ἀμέσως εἰς ἑκάστην μερικὴν διαίρεσιν τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου τὸ περιεχόμενον εἰς τὸν διαιρετέον καὶ ἑπομένως εὑρίσκομεν τὸ ψηφίον τοῦ πηλίκου· ὥστε ἡ διαίρεσις καὶ συντομώτερον ἐκτελεῖται καὶ ἀσφαλέστερον.

Τὸ αὐτὸ δὲ πρέπει νὰ κάμνωμεν, καὶ ὅταν δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου ἔχωμεν νὰ ἐκτελέσωμεν πολλὰς διαιρέσεις· διότι τότε ὁ πίναξ, τὸν ὁποῖον ἅπαξ ἐσχηματίσαμεν, χρησιμεύει εἰς ἁπάσας τὰς διαιρέσεις ταύτας.

Βάσανος τῆς διαιρέσεως.

68. *Ἀφοῦ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, ἂν θέλωμεν νὰ κάμωμεν τὴν δοκιμὴν αὐτῆς, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸ ὑπόλοιπον* (ἐὰν

4

ὑπάρχῃ), ἐὰν τότε εὑρεθῇ ὁ διαιρετέος, τοῦτο εἶνε ἔνδειξις, ὅτι ἡ διαίρεσις ἐγένετο ἄνευ λάθους ('Ιδὲ ἐδ. 59).

Ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως.

Αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως ἐκφράζονται διὰ τῶν ἑπομένων θεωρημάτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'.

69. *'Εὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην, ἐφ' ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ μὲν πηλίκον δὲν βλάπτεται, τὸ ὑπόλοιπον ὅμως πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

῎Εστω ἡ διαίρεσις 58 : 9, ἥτις δίδει πηλίκον 6 καὶ ὑπόλοιπον 4· λέγω, ὅτι, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι καὶ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἐφ' ἕνα οἱονδήποτε ἀριθμόν, ἔστω ἐπὶ τὸν 5, τὸ μὲν πηλίκον μένει πάλιν 6, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 4 γίνεται 4×5.

'Απόδειξις. ῞Οσας φορὰς δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω τὴν 9 ἀπὸ τοῦ 58 τόσας φορὰς δύναμαι νὰ ἀφαιρέσω καὶ τὸ 9+9+9+9+9 ἀπὸ τοῦ 58+58+58+58+58· διότι ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρῶ ἕκαστον 9 ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου 58 (τὸ πρῶτον 9 ἀπὸ τοῦ πρώτου 58, τὸ δεύτερον ἀπὸ τοῦ δευτέρου, καὶ οὕτω καθεξῆς) ὡς ἑξῆς φαίνεται.

$$\begin{array}{r} 58+58+58+58+58 \\ 9+\ 9+\ 9+\ 9+\ 9 \\ \hline 49+49+49+49+49 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

'Αλλ' ὅταν ἀφαιρέσω 6 φορὰς τὸ 9 ἀπὸ τοῦ 58, μένει ὑπόλοιπον 4· ἄρα, ὅταν ἀφαιρέσω 6 φορὰς τὸ 9+9+9+9+9 ἀπὸ τοῦ 58+58+58+58+58, θὰ μείνῃ ὑπόλοιπον 4+4+4+4+4.

'Εκ τούτου βλέπω, ὅτι τὸ γινόμενον 9×5 περιέχεται 6 φορὰς εἰς τὸ γινόμενον 58×5, μένει δὲ ὑπόλοιπον 4×5.

'Εὰν ἡ διαίρεσις εἶνε τελεία, βλέπομεν, ὅτι θὰ μείνῃ τελεία καὶ μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου ἐφ' ἕνα οἱονδήποτε ἀριθμόν· ὅθεν ἕπεται ἡ πρότασις.

'Εὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην τελείας διαιρέσεως ἐφ' ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ πηλίκον δὲν βλάπτεται καὶ ἡ διαίρεσις μένει πάλιν τελεία.

Τὴν ἰδιότητα ταύτην τῆς τελείας διαιρέσεως δυνάμεθα νὰ δείξωμεν καὶ ὡς ἑξῆς·

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ διαίρεσις 36 : 4, ἥτις δίδει πηλίκον 9. Κατὰ τὴν ἰδιότητα πάσης τελείας διαιρέσεως (ἐδ. 57) θὰ εἶνε $36 = 4\times 9$· ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ἴσους ἀριθμοὺς (τὸν 36 καὶ τὸν 4×9) ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμόν, ἔστω ἐπὶ τὸν 5, πάλιν μένουσιν ἴσοι.

ὅθεν ἕπεται $36\times 5=(4\times 9)\times 5$

ἢ $36\times 5=(4\times 5)\times 9$ (ἐδ. 49 ἰδιότ. 2)

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης γίνεται φανερόν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 36×5 σύγκειται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ 4×5 ἐννεάκις ληφθέντος· ἤτοι περιέχει αὐτὸν ἐννέα φοράς· ἐπομένως ὁ 36×5 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 4×5 καὶ δίδει πηλίκον 9.

Σημείωσις. Δι' ὁμοίου τρόπου δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἐκ τῆς γενικῆς ἰδιότητος τῆς διαιρέσεως (ἐδ. 59), ἀλλ' ἡ τοιαύτη ἀπόδειξις εἶνε δυσκολωτέρα.

Ἵνα δώσωμεν ἐφαρμογήν τινα τῆς ἰδιότητος ταύτης, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ 5, ἔστω τὸν 857505· ἐὰν διπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους, τὸ πηλίκον δὲν βλάπτεται, ἀλλ' ὁ διαιρέτης γίνεται 10 καὶ ἡ διαίρεσις ἐκτελεῖται ἁπλούστατα· οὕτως εὑρίσκομεν πηλίκον 171501. Ὁμοίως, ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ 25, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ 4 καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενον δι' 100.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'.

70. *Ἵνα διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα τῶν παραγόντων αὐτοῦ* (ἐὰν διαιρεῖται ἀκριβῶς).

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ γινόμενον

$$5\times 12\times 8\times 7,$$

καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 4· λέγω, ὅτι ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα παράγοντα αὐτοῦ, οἷον τὸν 12 διὰ τοῦ 4· ἤτοι, ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον θὰ εἶνε

$$5\times 3\times 8\times 7$$

Ἀπόδειξις. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος τετράκις ληφθεὶς δίδει τὸν διαιρετέον.

Τῷ ὄντι κατὰ τὴν δευτέραν ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἐδ. 49) εἶνε $(5\times 3\times 8\times 7)\times 4=5\times(3\times 4)\times 8\times 7=$

$$=5\times 12\times 8\times 7.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

71. *Ἵνα διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα τοῦτον.*

Διότι, ἄν, λόγου χάριν, πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον $18\times4\times12\times9\times7$ διὰ τοῦ 9, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν παράγοντα 9 διὰ τοῦ διαιρέτου 9, ὥστε τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶνε

$$18\times4\times12\times1\times7$$
$$18\times4\times12\times7$$

διότι ἡ μονὰς 1 ὡς παράγων δύναται νὰ παραλείπηται.

ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'.

72. *Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ τοῦ γινομένου πολλῶν ἄλλων ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν ἀλληλαλλήλως διὰ πάντων τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου* (τουτέστι πρῶτον διὰ τοῦ πρώτου παράγοντος, ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διὰ τοῦ δευτέρου, τὸ νέον πηλίκον διὰ τοῦ τρίτου καὶ οὕτω καθεξῆς).

Αἱ διαιρέσεις ὑποτίθεται, ὅτι γίνονται πᾶσαι ἀκριβῶς.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 360 διὰ τοῦ γινομένου $2\times3\times5$· ἐὰν πρῶτον εὕρω τὸ γινόμενον τοῦτο (ὅπερ εἶνε 30) καὶ ἔπειτα ἐκτελέσω τὴν διαίρεσιν, εὑρίσκω πηλίκον 12· λέγω δέ, ὅτι τὸ αὐτὸ πηλίκον θὰ εὕρω καὶ ἂν διαιρέσω τὸν 360 πρῶτον διὰ 2, ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διαιρέσω διὰ 3 καὶ ἔπειτα τὸ νέον πηλίκον διὰ 5.

Ἀπόδειξις. Ὁ διαιρετέος 360 εἶνε ἴσος τῷ γινομένῳ τοῦ διαιρέτου $2\times3\times5$, ἐπὶ τὸ πηλίκον 12

ἤτοι $$360=(2\times3\times5)\times12$$
ἢ $$360=2\times3\times5\times12$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης βλέπομεν ὅτι, ἂν διαιρέσωμεν τὸν 860 (ἢ τὸ ἴσον αὐτοῦ γινόμενον) διὰ 2, θὰ εὕρωμεν πηλίκον (ἐδ 71) τὸ ἑξῆς $3\times5\times12$, ἐὰν δὲ τὸ πηλίκον τοῦτο διαιρέσωμεν διὰ 3, θὰ εὕρωμεν πηλίκον τὸ 5×12, ἐὰν δὲ τὸ νέον τοῦτο πηλίκον διαιρέσωμεν διὰ 5, θὰ εὕρωμεν πηλίκον 12, τουτέστι τὸ αὐτὸ πηλίκον, ὅπερ εὕρομεν διαιρέσαντες τὸν 360 διὰ μιᾶς διὰ τοῦ γινομένου $2\times3\times5$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'.

73. *Ἄθροισμα διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ ἐὰν διαιρεθῇ ἕκαστος τῶν προσθετέων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ προστεθῶσι τὰ προκύπτοντα πηλίκα.*

Αἱ διαιρέσεις ὑποτίθεται, ὅτι γίνονται πᾶσαι ἀκριβῶς.

Ἄς ὑποθέσωμεν, λόγου χάριν, ὅτι πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα·

$$12+20+40$$ διὰ τοῦ 4· (χωρὶς νὰ εὕρωμεν αὐτὸ)

ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν προσθετέον 12 διὰ τοῦ 4, εὑρίσκομεν πηλίκον 3, ἐὰν δὲ τὸν 20 εὑρίσκομεν πηλίκον 5, καὶ τέλος ὁ 40 δίδει πηλίκον 10· λέγω δέ, ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶνε

$$3+5+10.$$

Ἀπόδειξις. Διότι ὁ ἀριθμὸς οὗτος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει (ἐδ. 34).

$$(3+5+10)\times4=3\times4+5\times4+10\times4$$
$$=12+20+40$$ · τουτέστι τὸν διαιρετέον.

Παρατήρησις.

74. Ἡ διαίρεσις, ὡς ἐξ ἀρχῆς εἴδομεν, δύναται νὰ ὁρισθῇ, ἢ ὡς ***μερισμὸς ἀριθμοῦ εἰς μέρη ἴσα***, ἢ ὡς ***εὕρεσις τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δεικνύει πόσας φορὰς χωρεῖ ἀριθμός τις ἄλλον***. Διὰ τοῦτο ἡ διαίρεσις ἐμφανίζεται ὑπὸ δύο διαφόρους ὄψεις, αἵτινες, ὡς πρὸς τὸν τρόπον, καθ' ὃν ἐκτελεῖται ἡ διαίρεσις καὶ ὡς πρὸς τὸ ἐξαγόμενον αὐτῆς εἶνε ἐντελῶς ἀδιάφοροι, διακρίνονται ὅμως σαφέστατα ἀπ' ἀλλήλων ἐν τοῖς προβλήμασιν. Ἵνα δείξωμεν τοῦτο, ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὰ ἑξῆς δύο προβλήματα.

1) ***Πόσον ἀξίζει εἷς πῆχυς ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου 15 πήχεις ἀξίζουν 75 δραχμάς.***

Φανερὸν εἶνε ὅτι πρέπει νὰ μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν δραχμῶν εἰς 15 ἴσα μέρη καὶ ἕκαστον μέρος θὰ εἶνε ἡ ἀξία τοῦ ἑνὸς πήχεως.

Ἐν τῇ πράξει ταύτῃ ὁ διαιρετέος 75 δραχμαὶ εἶνε συγκεκριμένος ἀριθμός, ὁ δὲ διαιρέτης 15 εἶνε ἀφῃρημένος τὸ δὲ πηλίκον, ὡς μέρος τοῦ 75, εἶνε ὁμοειδὲς πρὸς τὸν διαιρετέον.

2) ***Μὲ 75 δραχμὰς πόσους πήχεις δύναμαι νὰ ἀγοράσω ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου ὁ πῆχυς πωλεῖται 15 δραχμάς;***

Διὰ νὰ ἀγοράσω 1 πῆχυν, πρέπει νὰ δώσω 15 δραχμάς, τότε μοὶ μένουν 75—15, ἤτοι 60 δραχμαί· διὰ νὰ ἀγοράσω καὶ ἄλλον, πρέπει ἐκ τῶν 60 δραχμῶν νὰ δώσω πάλιν 15, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐντεῦθεν βλέπω, ὅτι τόσους πήχεις θὰ ἀγοράσω, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 75 τὸν 15· ὥστε πάλιν θὰ διαιρέσω τὸν 75 διὰ 15. Ἐν τῇ πράξει ταύτῃ ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ 75 καὶ 15 θεωροῦνται ὡς ἀφῃρημένοι καὶ τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως εἶνε ἐπίσης ἀφῃρημένος ἀριθμὸς καὶ δύν ται νὰ ἔχῃ οἱανδήποτε σημασίαν· ἡ δὲ σημασία αὐτοῦ ὁρίζεται ἐκ τοῦ προβλήματος.

Ὅταν θέλω νὰ διακρίνω τὰς δύο ταύτας πράξεις ἀπ' ἀλλήλων, θὰ λέγω τὴν μὲν πρώτην *μερισμὸν* καὶ τὸ ἐξαγόμενον αὐτῆς *μερίδιον*, τὴν δὲ δευτέραν *μέτρησιν* καὶ τὸ ἐξαγόμενον αὐτῆς *λόγον*.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου εἶνε τόσα ὅσα ἔχει ὁ διαιρετέος περισσότερα τοῦ διαιρέτου ἢ ἀκόμη ἕν.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιάζων τὸν ἀριθμὸν 21 νὰ δίδῃ γινόμενον, τοῦ ὁποίου πάντα τὰ ψηφία νὰ εἶνε ὅμοια· λόγου χάριν 5.

(Ἀπ. Ὑπάρχουσιν ἄπειροι τοιοῦτοι ἀριθμοί· ὁ ἐλάχιστος ἐξ αὐτῶν εἶνε ὁ 5291×5.)

3) Πότε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δὲν βλάπτεται, ἂν προστεθῇ εἰς τὸν διαιρετέον μία μονὰς ἢ καὶ περισσότεραι; καὶ πόσας μονάδας πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν διαιρετέον, διὰ νὰ αὐξήσῃ τὸ πηλίκον κατὰ μίαν μονάδα;

4) Ἐὰν ὁ διαιρετέος πολλαπλασιασθῇ ἐπί τινα ἀριθμόν, ὁ δὲ διαιρέτης μείνῃ ὁ αὐτός, ποίαν μεταβολὴν πάσχουσι τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον;

5) Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν διαιρέσεώς τινος ἃς ὑποθέσωμεν, ὅτι διαιροῦμεν τὸν διαιρετέον διὰ τοῦ εὑρεθέντος πηλίκου νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ πηλίκον τῆς νέας ταύτης διαιρέσεως θὰ εἶνε ἢ ἴσον ἢ μεγαλήτερον τοῦ διαιρέτου τῆς πρώτης διαιρέσεως· καὶ ἴσον μὲν θὰ εἶνε, ἂν τὸ ὑπόλοιπον τῆς πρώτης διαιρέσεως εἶναι μικρότερον τοῦ πηλίκου αὐτῆς· μεγαλήτερον δέ, ἂν τοὐναντίον.

6) Νὰ τραπῇ ὁ ἀριθμὸς 853 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος εἰς ἀριθμὸν τοῦ ὀκταδικοῦ.

Αἱ 853 ἁπλαῖ μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ ἀπαρτίζουσι τόσας μονάδας τῆς δευτέρας τάξεως (ἤτοι ὀκτάδας), ὅσας φορὰς χωρεῖ τὸν 8 ὁ 853· διότι 8 μονάδες ἑκάστης τάξεως ἀπαρτίζουσι μίαν τῆς ἑπομένης· διαιροῦμεν λοιπὸν τὸν 853 διὰ τοῦ 8 καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι ἀπαρτίζονται 106 μονάδες δευτέρας τάξεως, καὶ μένουσιν ἁπλαῖ μονάδες 5.

Αἱ 106 μονάδες τῆς δευτέρας τάξεως, ἀπαρτίζουσιν ὁμοίως τόσας μονάδας τῆς τρίτης τάξεως, ὅσας φορὰς χωρεῖ τὸν 8 ὁ 106, ἤτοι 13· μένουσι δὲ καὶ 2 μονάδες τῆς δευτέρας τάξεως.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ 13 μονάδες τῆς τρίτης τάξεως ἀπαρτίζουσι μίαν τῆς τετάρτης τάξεως καὶ περισσεύουν καὶ 5 μονάδες τῆς τρίτης τάξεως, συνάγεται, ὅτι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 853 θὰ γράφηται εἰς τὸ ὀκταδικὸν σύστημα ὡς ἑξῆς· 1525.

Ἡ πρᾶξις δύναται νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς·

853	8		
53	106	8	
5	26	13	8
	2	5	1

Ἐπειδὴ δὲ αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων ἐν τῷ ὀκταδικῷ συστήματι εἶνε αἱ ἑξῆς·

$1, \quad 8, \quad 8\times8, \quad 8\times8\times8, \quad 8\times8\times8+8,$ κτλ.

ἢ $1, \quad 8, \quad 8^2, \quad 8^3, \quad 8^4,$ κτλ.

ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς παρίσταται εἰς τὸ ὀκταδικὸν σύστημα ὡς ἄθροισμα τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν·

$$5+8\times2+8^2\times5+8^3\times1$$

εἰς δὲ τὸ δεκαδικὸν σύστημα παρίσταται ὡς ἄθροισμα τῶν ἑξῆς·

$$3+10\times5+10^2\times8$$

7) Νὰ τραπῇ ὁ εἰς τὸ τριαδικὸν σύστημα γεγραμμένος ἀριθμὸς 1202 εἰς τὸ κοινὸν σύστημα.

Ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶνε ἄθροισμα τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν·

$$2+3^2\times2+3^3\times1, \text{ ἤτοι τῶν } 2+18+27$$

καὶ ἑπομένως εἶνε ὁ 47.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΝ Β'.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΟΣ

Ὁρισμός.

75. *Διαιρετὸς* λέγεται ἀριθμός τις δι' ἄλλου ἐὰν διαιρεῖται δι' αὐτοῦ ἀκριβῶς (ἤτοι χωρὶς νὰ μένῃ ὑπόλοιπον). Οἷον ὁ 15 εἶνε διαιρετὸς διὰ 5, ὁ 20 εἶνε διαιρετὸς διὰ 4, κτλ. Ὁ δὲ διαιρῶν ἀκριβῶς ἀριθμόν τινα λέγεται *διαιρέτης* αὐτοῦ παραδείγματος χάριν, ὁ 5 εἶνε διαιρέτης τοῦ 15, ὁ δὲ 4 εἶνε διαιρέτης τοῦ 20 κτλ.

Ἀριθμός τις λέγεται *πολλαπλάσιον* ἄλλου ἀριθμοῦ, ἐὰν γίνηται ἐξ αὐτοῦ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· οἷον ὁ 15 εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ 5 (διότι $15=5\times3$), ὁ 24 εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ 6 (διότι $24=6\times4$), κτλ. Ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος παράγει ἄλλον, λέγεται *παράγων* αὐτοῦ· οἷον ὁ 5 εἶνε παράγων τοῦ 15, ὁ 6 εἶνε παράγων τοῦ 24 κτλ.

Πᾶς ἀριθμὸς διαιρεῖ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ καὶ ταῦτα μόνα.

Οἱ διαιρέται παντὸς ἀριθμοῦ καὶ οἱ παράγοντες αὐτοῦ εἶνε οἱ αὐτοὶ ἀριθμοί.

Σημείωσις. Ὅταν λέγωμεν ὅτι ἀριθμός τις διαιρῇ ἄλλον, ἐννοοῦμεν ὅτι διαιρεῖ αὐτὸν ἀκριβῶς.

Θεωρήματα περὶ τῆς διαιρετότητος.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'.

76. *Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἢ περισσοτέρους ἀριθμούς, διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.*

Παραδείγματος χάριν, ὁ 5 διαιρεῖ τοὺς ἀριθμοὺς 10 καὶ 25 καὶ 30· λέγω ὅτι διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $10+25+30$.

'Απόδειξις. Διότι ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν 10, 25 καὶ 30 εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ 5, ἤτοι σύγκειται ἐκ πολλῶν 5·

καὶ ὁ μὲν 10 εἶνε $5+5$

ὁ δὲ 25 εἶνε $5+5+5+5+5$

ὁ δὲ 30 εἶνε $5+5+5+5+5+5$

ἄρα τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $10+25+30$ εἶνε

$$5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5$$

ἤτοι σύγκειται καὶ αὐτὸ ἐκ πολλῶν 5· ὥστε εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ 5.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

77. *'Εὰν ἀριθμὸς διαιρῇ ἄλλον, διαιρεῖ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ.*

Παραδείγματος χάριν, ὁ 9 διαιρεῖ τὸν 27· λέγω, ὅτι θὰ διαιρῇ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ, ἤτοι

27×2, 27×3, 27×4, ...

Διότι τὸ 27×2, εἶνε $27+27$

τὸ 27×3, εἶνε $27+27+27$, κτλ.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'.

78. *'Εὰν ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἄλλους, διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.*

Παραδείγματος χάριν, ὁ 3 διαιρεῖ τοὺς ἀριθμοὺς 21 καὶ 12· λέγω, ὅτι θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν $21-12$.

'Απόδειξις. Διότι ὁ 21 εἶνε $3+3+3+3+3+3+3$·

ὁ δὲ 12 εἶνε $3+3+3+3$·

ἄρα ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶνε $3+3+3$

ἤτοι σύγκειται καὶ αὐτὴ ἐκ πολλῶν 3· ὥστε εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ 3.

Σημείωσις. Τὸ θεώρημα τοῦτο δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ἄλλως, ὡς ἑξῆς.

79. *'Εὰν ἀριθμὸς διαιρῇ τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων καὶ τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν ἄλλον.*

Διότι ὁ δεύτερος οὗτος ἀριθμὸς εἶνε ἡ διαφορά, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀφαιροῦντες ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τὸν πρῶτον.

ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'.

80. *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν προστεθῇ εἰς τὸν διαιρετέον ἢ ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτοῦ οἱονδήποτε πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου.*

'Απόδειξις. Διότι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως εὑρίσκεται, ὅταν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἀφαιρεθῇ ὁ διαιρέτης, ὅσας φορὰς εἶνε δυνατόν. Ἂν λοιπὸν προσθέσωμεν εἰς τὸν διαιρετέον πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου, μετά τινας ἀφαιρέσεις θὰ εὕρωμεν πάλιν τὸν πρῶτον διαιρετέον, ἐπομένως καὶ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον. Ἂν δὲ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου, ἡ ἀφαίρεσις αὕτη εἶνε μέρος τῆς ἐργασίας, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ κάμωμεν διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον· καὶ διὰ τοῦτο δὲν βλάπτει αὐτό.

Ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 2 καὶ 5, 4 καὶ 25, 8 καὶ 125, 3 καὶ 9 καὶ 11. Χαρακτηριστικὰ διαιρετότητος δι' αὐτῶν.

Πολλάκις εἶνε ὠφέλιμον νὰ εἰξεύρωμεν, ἂν ἀριθμός τις εἶνε διαιρετὸς δι' ἄλλου, χωρὶς νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν (μάλιστα δὲ διὰ τοὺς ἀνωτέρω μικροὺς ἀριθμούς), καὶ ἐὰν δὲν εἶνε διαιρετὸς νὰ εὑρίσκωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως. Εἰς τοῦτο χρησιμεύουσι τὰ ἑξῆς θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ (διὰ τὸ 2 καὶ 5.)

81. *Το ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως οἱουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ 2 ἢ διὰ 5 εἶνε τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ τελευταίου ψηφίου του.*

Ἔστω ὡς παράδειγμα ὁ τυχὼν ἀριθμὸς 9438· λέγω, ὅτι ἂν διαιρεθῇ διὰ 2 ἢ διὰ 5, θὰ ἀφήσῃ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ἀφίνει καὶ τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον 8· ἐπομένως ἂν διὰ 5 διαιρεθῇ, θὰ ἀφήσῃ ὑπόλοιπον 3, ἂν δὲ διὰ 2 θὰ ἀφήσῃ 0.

'Απόδειξις. Ἑκάστη δεκὰς εἶνε πολλαπλάσιον καὶ τοῦ 2 καὶ τοῦ 5 (διότι εἶνε $10=2\times5$)· ὥστε ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ πάσας τὰς δεκάδας του ἀνὰ μίαν, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 2 ἢ διὰ 5 δὲν βλάπτεται (ἐδ. 80). Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς οὗτος περιέχει 943 δεκάδας καὶ 8 μονάδας· ἂν λοιπὸν παραλείψωμεν τὰς δεκάδας του ἀνὰ μίαν, θὰ ἔχωμεν μόνον τὰς 8 μονάδας· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον αὐτοῦ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῶν 8 μονάδων του εἶνε ἓν καὶ τὸ αὐτό.

ΠΟΡΙΣΜΑ

1) Οἱ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ τελευταῖον ψηφίον εἶνε

0 ἢ 2 ἢ 4 ἢ 6 ἢ 8,

διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 2· λέγονται δὲ οἱ διὰ τοῦ 2 διαιρετοὶ ἀριθμοὶ ἄρτιοι.

Οἱ δὲ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ τελευταῖον ψηφίον εἶνε

1 ἢ 3 ἢ 5 ἢ 7 ἢ 9

δὲν εἶνε διαιρετοὶ διὰ τοῦ 2, (ἀλλ' ἀφίνουσιν ὑπόλοιπον 1)· λέγονται δὲ οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ *περιττοί*.

2) *Ἀριθμός τις εἶνε διαιρετὸς διὰ* 5, *ἐὰν τὸ τελευταῖον ψηφίον του εἶνε ἢ 0 ἢ 5.*

ΘΕΩΡΗΜΑ (διὰ τὸ 4 καὶ 25)

+**82** *Το ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως οἱουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ 4 ἢ διὰ 25 εἶνε τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ δύο τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ.*

Ἔστω τυχὼν ἀριθμὸς ὁ 459386· λέγω, ὅτι εἴτε τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ὅλον διαιρέσωμεν διὰ 4, εἴτε μόνον τὸν 86 (ὃν ἀποτελοῦσι τὰ δύο τελευταῖα ψηφία του κατὰ τὴν τάξιν αὐτῶν), ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον θὰ εὕρωμεν. Ὅμοιον δὲ θὰ συμβαίνῃ ἂν διαιρέσωμεν διὰ 25.

Ἀπόδειξις Ἑκάστη ἑκατοντὰς εἶνε πολλαπλάσιον καὶ τοῦ 4 καὶ τοῦ 25 (διότι $100=4\times25$)· ὥστε, ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ πάσας τὰς ἑκατοντάδας του ἑνὰ μίαν, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 4 ἢ διὰ 25 δὲν βλάπτεται (ἐδ. 80). Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἔχει 4593 ἑκατοντάδας καὶ 86 μονάδας· ἂν λοιπὸν παραλείψωμεν τὰς ἑκατοντάδας του ἀπὸ μίαν μίαν, θὰ ἔχωμεν μόνον τὰς 86 μονάδας· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῶν 86 μονάδων του εἶνε ἓν καὶ τὸ αὐτό.

ΠΟΡΙΣΜΑ

+**83**. *Ἀριθμός τις εἶνε διαιρετὸς (διὰ 4 ἢ διὰ 25), ἐὰν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4 (ἢ διὰ 52)*

ΘΕΩΡΗΜΑ (διὰ τὸ 8 καὶ 125).

+**84**. *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως οἱουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 8 ἢ διὰ τοῦ 125 εἶνε τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ τρία τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ.*

Ἔστω τυχὼν ἀριθμός, ὁ 75429804· λέγω, ὅτι εἴτε τοῦτον ὅλον διαιρέσωμεν διὰ 8, εἴτε μόνον τὸ 884 (τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσι τὰ τρία τελευταῖα ψηφία του κατὰ τὴν τάξιν των), ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον θὰ εὕρωμεν. Τὸ αὐτὸ δὲ λέγω καὶ περὶ τῆς διαιρέσεως αὐτῶν διὰ τοῦ 125.

Ἀπόδειξις. Ἑκάστη χιλιὰς εἶνε πολλαπλάσιον καὶ τοῦ 8 καὶ τοῦ 125 (διότι $1000=8\times125$)· ὥστε, ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ πάσας τὰς χιλιάδας του ἀπὸ μίαν μίαν, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ 8 ἢ διὰ 125 δὲν βλάπτεται. Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἔχει 75429 χιλιάδας καὶ 804 μονάδας· ἂν λοιπὸν παραλείψωμεν τὰς χιλιάδας του ἀπὸ μίαν μίαν, θὰ ἔχωμεν μόνον τὰς 804 μονάδας· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τοῦ 804 εἶνε ἓν καὶ τὸ αὐτό.

ΠΟΡΙΣΜΑ

85. *Ἀριθμός τις εἶνε διαιρετὸς διὰ 8 (ἢ διὰ 125), ἐὰν τὰ τρία τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 8 (ἢ διὰ 125).*

ΘΕΩΡΗΜΑ (διὰ τὸ 9 καὶ 3).

86. *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως οἱουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ 9 ἢ διὰ 3 εἶνε τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ, διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου.*

Ἔστω τυχὼν ἀριθμός, ὁ 4758· λέγω, ὅτι, εἴτε τοῦτον διαιρέσωμεν διὰ 9, εἴτε τὸ ἄθροισμα 4+7+5+8 (ἤτοι 24), ἓν καὶ καὶ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον θὰ εὕρωμεν. Τὸ αὐτὸ δὲ λέγω καὶ περὶ τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ 3.

Ἀπόδειξις. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος σύγκειται ἐκ 475 δεκάδων καὶ ἐξ 8 ἁπλῶν μονάδων, ἂν ἐκ μιᾶς δεκάδος (ἤτοι ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ 10) ἀφαιρέσωμεν τὸ 9, μένει ὑπόλοιπον μία μονάς, ἤτοι ἡ δεκὰς γίνεται μονὰς ἁπλῆ· ἂν λοιπὸν ἐκ τῶν 475 δεκάδων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἀφαιρέσωμεν ἐξ ἑκάστης τὸ 9, θὰ μείνωσιν εἰς τὸν ἀριθμὸν 475 μονάδες καὶ 8 μονάδες· ἤτοι θὰ μείνῃ ὁ ἀριθμὸς 475+8. Ἐὰν δὲ πάλιν ἐξ ἑκάστης τῶν 7 δεκάδων τοῦ 475 ἀφαιρέσωμεν τὸ 9, θὰ μείνῃ ὁ ἀριθμὸς 47+5+8. Ἐὰν δὲ τέλος, ἐξ ἑκάστης τῶν 4 δεκάδων τοῦ 47 ἀφαιρέσωμεν τὸ 9, θὰ μείνῃ ὁ ἀριθμὸς

4+7+5+8, ἤτοι ὁ 24.

Τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εὕρομεν ἀφαιρέσαντες ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ πολλάκις τὸ 9· ἄρα τὸ ὑπόλοιπον τοῦ δοθέντος καὶ τὸ ὑπόλοιπον τούτου εἶνε ἓν καὶ τὸ αὐτὸ (ὅταν διαιρεθῶσι διὰ 9).

Τὸ αὐτὸ δὲ ἀληθεύει, καὶ ὅταν διαιρέσωμεν διὰ 3· διότι ὁ ἀφαιρεθεὶς ἀριθμὸς ὡς συγκείμενος ἐκ πολλῶν 9 εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ 3.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

87 *Ἀριθμός τις εἶνε διαιρετὸς διὰ 9, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ εἶνε διαιρετὸν διὰ τοῦ 9· τὸ αὐτὸ δὲ ἀληθεύει καὶ περὶ τοῦ 3.*

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς 849408 διαιρεῖται διὰ 3· διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶνε 33 καὶ εἶνε διαιρετὸν διὰ 3· διὰ τοῦ 9 δὲ διαιρούμενος θὰ ἀφήσῃ ὑπόλοιπον 6 (ὅσον ἀφίνει καὶ ὁ 33).

Ὁ δὲ ἀριθμὸς 8941608 διαιρεῖται διὰ τοῦ 9 (ἑπομένως καὶ διὰ τοῦ 3 κατὰ τὸ πόρισμα 77)· διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶνε 36, δηλαδὴ διαιρετὸν διὰ 9.

Σημείωσις. Καὶ εἰς τὸν ἀριθμόν, ὅστις προκύπτει ἐκ τῆς ἀθροίσεως τῶν ψηφίων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ αὐτὸ θεώρημα πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ 9 (ἢ διὰ τοῦ 3)· δυνάμεθα δὲ νὰ ἐξακολουθήσωμεν οὕτω ἐφαρμόζοντες τὸ αὐτὸ θεώρημα, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς ἀριθμὸν ἔχοντα ἓν ψηφίον, ὅτε τὸ ὑπόλοιπον εὑρίσκεται ἀμέσως. Παραδείγματος χάριν, τοῦ ἀριθμοῦ 598432803 τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶνε 42· τούτου δὲ πάλιν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶνε 6· ὥστε 6 εἶνε τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 9· διὰ δὲ τοῦ 3 διαιρεῖται ἀκριβῶς.

Παρατηρητέον δέ, ὅτι ἀθροίζοντες τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ, δυνάμεθα νὰ παραλείπωμεν τὰ 9, ἢ καὶ τὰ πολλαπλάσια τοῦ 9· διότι ἡ παράλειψις αὐτῶν δὲν βλάπτει τὸ ὑπόλοιπον· ὥστε διὰ τὸν ἀνωτέρω δοθέντα ἀριθμὸν ἐργαζόμεθα συντομώτερον ὡς ἑξῆς·

5 καὶ 8 κάμνουν 13 (ἔξω τὰ 9) 4· 4 καὶ 4... 8, 8 καὶ 3... 11 (ἔξω τὰ 9) 2· 2 καὶ 2... 4, 4 καὶ 8... 12 (ἔξω τὰ 9) 3· 3 καὶ 3...6.

ΘΕΩΡΗΜΑ (διὰ τὸ 11).

88. *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως οἱουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 11 εἶνε τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ἀριθμοῦ τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν ἀναλύοντες τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εἰς διψήφια τμήματα (ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων) καὶ προσθέτοντες τὰ τμήματα ταῦτα.*

Τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα δύναται νὰ ἔχῃ καὶ ἓν μόνον ψηφίον.

Ἔστω τυχὼν ἀριθμός, ὁ 6574158· ἐὰν ἀναλύσωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εἰς τὰ τμήματα 58, 41, 57 καὶ 6, λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τμημάτων τούτων, ἤτοι τὸ 6+57+41+58, διαιρούμενον διὰ 11 δίδει τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον θὰ δώσῃ καὶ ὅλος ὁ ἀριθμός.

Ἀπόδειξις. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος σύγκειται ἐξ 65741 ἑκατοντάδων καὶ ἐκ 58 μονάδων· ἂν ἐκ μιᾶς ἑκατοντάδος (ἢ ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 100) ἀφαιρέσωμεν τὸν 11 ἐννέα φορὰς (ἤτοι ἂν ἀφαιρέσωμεν 11×9 ἤτοι 99) μένει ὑπόλοιπον μία μονάς, ἤτοι ἡ ἑκατοντὰς γίνεται μονὰς ἁπλῆ. Ἂν λοιπὸν ἐξ ἑκάστης τῶν 65741 ἑκατοντάδων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἀφαιρέσωμεν τὸν 11 ἐννέα φοράς, θὰ μείνωσιν εἰς τὸν ἀριθμὸν 65741 μονάδες καὶ 58 μονάδες, τουτέστι θὰ μείνῃ ὁ ἀριθμὸς 65741+58.

'Εὰν δὲ πάλιν ἐξ ἑκάστης τῶν 657 ἑκατοντάδων τοῦ ἀριθμοῦ 65741 ἀφαιρέσωμεν τὸν 11 ἐννέα φοράς, θὰ μείνῃ ὁ ἀριθμὸς

$$657+41+58.$$

'Εὰν δὲ τέλος ἐξ ἑκάστης τῶν 6 ἑκατοντάδων τοῦ 657 ἀφαιρέσωμεν τὸν 11 ἐννέα φοράς, μένει ὁ ἀριθμὸς

$$6+57+41+58.$$

Τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εὑρήκαμεν ἀφαιρέσαντες πολλάκις τὸν 11 ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ· ἄρα (ἐδ. 80) τὸ ὑπόλοιπον τοῦ δοθέντος καὶ τὸ ὑπόλοιπον τούτου εἶνε ἓν καὶ τὸ αὐτό, ὅταν διαιρεθῶσι διὰ τοῦ 11.

Σημείωσις. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀληθεύει καὶ διὰ τοὺς διαιρέτας 33 καὶ 99. Διότι ὁ ἀφαιρούμενος ἀριθμὸς εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ 99 καὶ κατ' ἀκολουθίαν πολλαπλάσιον τοῦ 33.

'Εὰν εἰς τὸ ἄθροισμα 6+57+41+58 παραλείψωμεν ἐξ ἑκάστου μέρους τὰ πολλαπλάσια τοῦ 11, τὸ ὑπόλοιπον δὲν βλάπτεται, εὑρίσκομεν δὲ ἄθροισμα τὸ 6+2+8+3, ἤτοι 19· ἐπειδὴ δὲ τοῦτο διαιρούμενον διὰ 11 δίδει ὑπόλοιπον 8, συμπεραίνομεν ὅτι καὶ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς θὰ δώσῃ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον 8.

ΠΟΡΙΣΜΑ

89. *'Αριθμός τις εἶνε διαιρετὸς δι' 11, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν διψηφίων τμημάτων, εἰς τὰ ὁποία ἀναλύεται* (ἐκ δεξιῶν), *εἶνε διαιρετὸν διὰ 11.*

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς 859584 ἀναλύεται εἰς τὰ τμήματα 84, 95 καὶ 85 καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶνε 85+95+84, ἤτοι 264.

'Εὰν δὲ ἐφαρμόσωμεν τὸ αὐτὸ θεώρημα καὶ εἰς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον 264, εὑρίσκομεν τὰ τμήματα 64 καὶ 2, ἅτινα δίδουσιν ἄθροισμα 66· ἐπειδὴ δὲ τοῦτο εἶνε διαιρετὸν διὰ τοῦ 11, συμπεραίνομεν, ὅτι καὶ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ 11.

'Ο δὲ ἀριθμὸς 358970412 ἀναλύεται εἰς τὰ τμήματα 12, 04, 97, 58 καὶ 3, ταῦτα δὲ ἔχουσιν ἄθροισμα

$$3+58+97+4+12.$$

καὶ παραλειπομένων τῶν πολλαπλασίων τοῦ 11, τὸ ἄθροισμα τοῦτο γίνεται

$$3+3+9+4+1, \text{ ἤτοι } 20.$$

ἐπειδὴ δὲ τὸ 20 ἀφίνει ὑπόλοιπον 9, συμπεραίνομεν ὅτι καὶ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς διαιρούμενος διὰ 11, θὰ ἀφήσῃ ὑπόλοιπον 9.

*Βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ
καὶ τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ 9 καὶ διὰ τοῦ 11.

Ἡ βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως δύναται νὰ γίνῃ καὶ διὰ τῶν ὑπολοίπων· στηρίζεται δὲ ἐπὶ τῶν ἑπομένων θεωρημάτων περὶ τῶν ὑπολοίπων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

90. *Τὸ ὑπόλοιπον ἀθροίσματος, ὡς πρὸς οἱονδήποτε διαιρέτην δὲν βλάπτεται ἂν ἀντικαταστήσωμεν ἕκαστον προσθετέον διὰ τοῦ ὑπολοίπου του* (ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν διαιρέτην).

Ἔστω τυχὸν ἄθροισμα τὸ $12+25+32$· λέγω, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸν διαιρέτην 7 δὲν βλάπτεται, ἂν θέσωμεν ἀντὶ τοῦ 12 τὸ ὑπόλοιπόν του (ἤτοι τὸ 5) καὶ ἀντὶ τοῦ 25 τὸ ὑπόλοιπόν του 4 καὶ ἀντὶ τοῦ 32 τὸ ὑπόλοιπόν του 4· λέγω δηλαδή, ὅτι εἴτε τὸ δοθὲν ἄθροισμα $12+25+32$ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 7, εἴτε τὸ $5+4+4$, ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον θὰ εὕρωμεν.

Ἀπόδειξις. Διότι ἀφῃρέσαμεν ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀθροίσματος πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου 7, τοῦτο δὲ δὲν βλάπτει τὸ ὑπόλοιπον (ἐδ. 80).

ΘΕΩΡΗΜΑ

91. *Τὸ ὑπόλοιπον γινομένου ὡς πρὸς οἱονδήποτε διαιρέτην δὲν βλάπτεται, ἂν ἀντικαταστήσωμεν ἕκαστον παράγοντα διὰ τοῦ ὑπολοίπου του* (ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν διαιρέτην).

Ἔστω τυχὸν γινόμενον τὸ 52×684· λέγω, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸν διαιρέτην 11 δὲν βλάπτεται, ἂν θέσωμεν ἀντὶ τοῦ παράγοντος 52 τὸ ὑπόλοιπόν του 8 καὶ ἀντὶ τοῦ παράγοντος 684 τὸ ὑπόλοιπόν του 2.

Ἀπόδειξις. Τὸ γινόμενον 52×684 εἶνε τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἄθροισμα $52+52+52\ \ldots\ldots+52$ (οὗτινος οἱ προσθετέοι εἶνε ἑξακόσιοι ὀγδοήκοντα τέσσαρες)· ἐὰν δὲ εἰς τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἀντὶ ἑκάστου προσθετέου θέσωμεν τὸ ὑπόλοιπόν του (ἤτοι τὸ 8), δὲν βλάπτεται το ὑπόλοιπον τοῦ ἀθροίσματος καὶ θὰ ἔχωμεν τὸ ἄθροισμα

$$8+8+8+\ \ldots\ldots+8,\ \text{ἤτοι τὸ}\ 8\times684.$$

Καὶ πάλιν τὸ γινόμενον 8×684 εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα $684+684+\ldots\ldots+684$ (ὅπερ ἔχει 8 προσθετέους)· καὶ ἂν ἐφαρμόσωμεν πάλιν τὸ προηγούμενον θεώρημα εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα $2+2+\ \ldots\ +2$, ἤτοι τὸ 2×8, χωρὶς νὰ βλάψωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως δι' 11.

Ἐκ τούτου γίνεται φανερὰ ἡ ὀρθότης τοῦ ἑπομένου κανόνος·

Διὰ νὰ κάμωμεν τὴν βάσανον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ὡς πρὸς οἱονδήποτε διαιρέτην, εὑρίσκομεν τὰ ὑπόλοιπα τῶν δύο παραγόντων ὡς πρὸς τὸν διαιρέτην τοῦτον καὶ πολλαπλασιάζομεν αὐτά· τότε δὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο ὑπολοίπων καὶ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀριθμῶν πρέπει νὰ ἔχωσιν ἴσα ὑπόλοιπα.

Ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὸν ἑξῆς πολλαπλασιασμόν, τὸν ὁποῖον δοκιμάζομεν διὰ τοῦ 9.

```
   5207
    331
  -----
   5207          5 | 7
 15621          -------
15621            8 | 8
-------
1723517
```

Ἡ δοκιμὴ γίνεται ὡς ἑξῆς· ἀφ' οὗ γράψωμεν δύο εὐθείας τεμνομένας ἐν σχήματι σταυροῦ, σημειοῦμεν εἰς τὰς δύο ἄνω γωνίας τὰ ὑπόλοιπα, 5 καὶ 7 τῶν δύο παραγόντων, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὰ ὑπόλοιπα ταῦτα, 5×7, καὶ γράφομεν τὸ ὑπόλοιπον τοῦ γινομένου 35, ἤτοι τὸ 8, εἰς μίαν τῶν ὑποκάτω γωνιῶν· τέλος εὑρίσκομεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον τοῦ γινομένου 1723517, τὸ ὁποῖον πρέπει (ἂν δὲν ἔγινε λάθος) νὰ εἶνε καὶ αὐτὸ 8, καὶ γράφομεν αὐτὸ εἰς τὴν τελευταίαν γωνίαν.

Ὁμοία δοκιμὴ γίνεται καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν. *Λαμβάνομεν τὰ ὑπόλοιπα τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου, πολλαπλασιάζομεν τὰ ὑπόλοιπα ταῦτα καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως, ὁ οὕτω προκύπτων ἀριθμὸς πρέπει* (ἂν δὲν ἔγινε λάθος τι) *νὰ δίδῃ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ δίδει καὶ ὁ διαιρετέος.*

Ὁ κανὼν οὗτος στηρίζεται ἐπὶ τῶν θεωρημάτων 90 καὶ 91, ἔτι δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ θεωρήματος τοῦ ἐδαφ. 59. Τὴν ἀπόδειξιν αὐτοῦ παραλείπομεν ὡς εὐκόλως εὑρισκομένην.

Σημείωσις. Ἡ διὰ τῶν ὑπολοίπων δοκιμὴ μικρὰν ἔχει ἀξίαν· διότι καὶ ὅταν ἐπιτυγχάνῃ, δὲν δυνάμεθα μετὰ βεβαιότητος νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ἡ πρᾶξις ἔγινε χωρὶς λάθος· ἂν λόγου χάριν ἔγινε λάθος τι καὶ εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ 9, ἡ διὰ τοῦ 9 δοκιμὴ δὲν δύναται νὰ ἐξελέγξῃ αὐτὸ (ὡς λόγου χάριν, ὅταν τὰ ψηφία τοῦ γινομένου μείνωσι μὲν τὰ αὐτά, ἀλλάξωσιν ὅμως θέσιν)· διότι παραλείπει τὰ πολλαπλάσια τοῦ 9.

Αἱ ἄλλαι δοκιμαὶ (ἐδ. 43 καὶ 68) εἶνε ἀσφαλέστεραι, ἀλλὰ καὶ εἰς αὐτὰς ἐνδέχεται νὰ ὑποπέσῃ τις εἰς νέα λάθη. Διὰ τοῦτο νομίζομεν, ὅτι ἡ ἀρίστη δοκιμὴ ἑκάστης ἀριθμητικῆς πράξεως εἶνε ἡ μετὰ προσοχῆς ἐπανάληψις αὐτῆς.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι διὰ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, δίδουσιν ὑπόλοιπα ἴσα.

Διότι διαφέρουσι κατὰ τὸν διαιρέτην (ἰδὲ ἐδ. 80).

2) Ἀριθμός τις εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ 4, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων αὐτοῦ εἶνε διαιρετὸν διὰ 4.

Ἡ ἀπόδειξις τούτου στηρίζεται εἰς τὸ ἑξῆς· ἂν ἀπὸ μιᾶς δεκάδος ἀφαιρέσωμεν τὸ 4 δίς, ἡ δεκὰς γίνεται 2.

3) Ἀριθμός τις εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ 8, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων καὶ τοῦ τετραπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων εἶνε διαιρετὸν διὰ τοῦ 8.

4) Ἀριθμὸς οἱοσδήποτε εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ 6, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ τετραπλασίου ἑκάστου τῶν ἄλλων ψηφίων εἶνε διαιρετὸν διὰ 6.

Ἡ ἀπόδειξις στηρίζεται εἰς τοῦτο, ὅτι πάντες οἱ ἀριθμοὶ 10, 100, 1000... διαιρούμενοι διὰ 6 δίδουσιν ὑπόλοιπον 4.

5) Ἀριθμὸς οἱοσδήποτε εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ 11, ἐὰν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων τάξεως περιττῆς (ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων) ὑπὲρ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τάξεως ἀρτίας εἶνε 0, ἢ πολλαπλάσιον τοῦ 11.

Εἰς τὴν πρότασιν ταύτην φθάνομεν, ἐάν, ἀφοῦ ἀναλύσωμεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τμήματα διψήφια (ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων), προσθέσωμεν εἰς ἕκαστον τμῆμα τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει αὐτὸ δεκάδας, συνάμα δὲ ἀφαιρέσωμεν τὰς προστεθείσας μονάδας (ἂν λόγου χάριν τὸ τμῆμα εἶνε 68, θὰ γράψωμεν $66+8-6$).

6) Ἀριθμὸς οἱοσδήποτε εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ 7, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ τριπλασίου τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων του εἶνε διαιρετὸν διὰ 7.

Ἡ ἀπόδειξις στηρίζεται εἰς τοῦτο, ὅτι ἑκάστη δεκὰς γίνεται 3, ὅταν ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτῆς ὁ 7.

7) Ἀριθμὸς οἱοσδήποτε εἶνε διαιρετὸς διὰ 37, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν τριψηφίων τμημάτων, εἰς ἃ ἀναλύεται (ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων), εἶνε διαιρετὸν διὰ τοῦ 37 (τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα δύναται νὰ ἔχῃ δύο μόνον ψηφία, ἢ καὶ ἓν μόνον).

Ἡ ἀπόδειξις στηρίζεται εἰς τοῦτο, ὅτι ἑκάστη χιλιὰς (ἤτοι ὁ 1000) γίνεται ἁπλῆ μονάς, ὅταν ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτῆς πολλαπλάσιόν τι τοῦ 37 $(999=37\times27)$.

8) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν δὲν δύναται νὰ εἶνε διαιρετὸν διὰ τοῦ 7, ἐὰν ἑκάτερος τῶν ἀριθμῶν τούτων δὲν εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ 7.

Ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως ταύτης στηρίζεται ἐπὶ τῶν θεωρημάτων 90 καὶ 91 καὶ ἐπὶ τούτου, ὅτι δὲν ὑπάρχουσι δύο ἀριθμοὶ μικρότεροι τοῦ 7, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα προστιθέμενα νὰ ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ τοῦ 7.

9) Τὸ γινόμενον τριῶν ἐφεξῆς ἀριθμῶν εἶνε πάντοτε διαιρετὸν διὰ τοῦ 6.

10) Τὸ γινόμενον δύο ἐφεξῆς ἀριθμῶν καὶ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν εἶνε πάντοτε διαιρετὸν διὰ τοῦ 6.

11) Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἄλλους, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΟΥ

Ὁρισμοί.

93. *Κοινὸς διαιρέτης* δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται ἀριθμός τις ἐὰν διαιρῇ αὐτοὺς πάντας ἀκριβῶς.

Παραδείγματος χάριν, τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν·

16, 24, 36, 20

κοινὸς διαιρέτης εἶνε ὁ 2· διότι διαιρεῖ αὐτοὺς πάντας· τῶν αὐτῶν δὲ ἀριθμῶν κοινὸς διαιρέτης εἶνε καὶ ὁ 4.

94. *Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης* δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται (ὡς δεικνύει καὶ τὸ ὄνομά του) ὁ μέγιστος ἐκ τῶν κοινῶν διαιρετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχουσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

Παραδείγματος χάριν, οἱ ἀριθμοὶ 16, 24, 40 ἔχουσι τοὺς ἑξῆς κοινοὺς διαιρέτας· 1, 2, 4, 8· καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν εἶνε ὁ 8.

Ἐὰν ἀριθμοί τινες δὲν ἔχωσιν ἄλλον κοινὸν διαιρέτην πλὴν τῆς μονάδος, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι λέγονται *πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους*.

Τοιοῦτοι εἶνε οἱ ἀριθμοὶ 3, 5 καὶ 9.

Θεωρήματα περὶ τῶν κοινῶν διαιρετῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

95. *Οἱ κοινοὶ διαιρέται ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν βλάπτονται, ἂν ἐξ ἑνὸς τῶν ἀριθμῶν τούτων ἀφαιρεθῇ ἄλλος.*

Ἄς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τοὺς τυχόντας ἀριθμοὺς

40 128 320 72

λέγω, ὅτι οἱ κοινοὶ αὐτῶν διαιρέται δὲν βλάπτονται, ἂν λόγου χάριν ἀπὸ τοῦ 320 ἀφαιρέσω τὸν 72·
λέγω δηλαδή, ὅτι οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν

	40,	128,	320,	72.
καὶ οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν	40,	128,	248,	72.

εἶνε ο αὐτοὶ ἀριθμοί.

Ἀπόδειξις. Διότι πᾶς κοινὸς διαιρέτης τῆς πρώτης σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν, ὡς διαιρῶν τοὺς ἀριθμοὺς 320 καὶ 72, θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν 248 (ἴδε ἐδ. 78)· ἑπομένως θὰ εἶνε κοινὸς διαιρέτης καὶ τῆς δευτέρας σειρᾶς. Καὶ πάλιν, πᾶς κοινὸς διαιρέτης τῆς δευτέρας σειρᾶς, ὡς διαιρῶν τοὺς ἀριθμοὺς 248 καὶ 72, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 320 (ἐδ. 76)· ἑπομένως θὰ εἶνε κοινὸς διαιρέτης καὶ τῆς πρώτης σειρᾶς.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι καὶ αἱ δύο σειραὶ τῶν ἀριθμῶν ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας.

ΠΟΡΙΣΜΑ

96. *Οἱ κοινοὶ διαιρέται ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν βλάπτονται, ἂν ἀντικαταστήσωμεν ἕνα τῶν ἀριθμῶν τούτων διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεώς του δι' ἄλλου μικροτέρου.*

Διότι, ἂν ἀφαιρέτωμεν τὸν μικρότερον ἀπὸ τοῦ μεγαλητέρου ὅσας φορὰς εἶνε δυνατόν, θὰ ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν τοῦ μεγαλητέρου τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεώς του διὰ τοῦ μικροτέρου· δὲν θὰ βλαφθῶσι δὲ οἱ κοινοὶ διαιρέται· διότι εἰς ἑκάστην τῶν ἀφαιρέσεων τούτων δὲν βλάπτονται.

Παραδείγματος χάριν, χωρὶς νὰ βλάψω τοὺς κοινοὺς διαιρέτας, δύναμαι ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν

	40	128	320	72,	νὰ λάβω
τοὺς ἑξῆς	40	128	248	72,	καὶ ἀντὶ τούτων
τοὺς ἑξῆς	40	128	176	72,	καὶ ἀντὶ τούτων
τοὺς ἑξῆς	40	128	104	72,	καὶ τέλος ἀντὶ τούτων
τους ἑξῆς	40	128	32	72,	

εἶνε δὲ ὁ 32 τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 320 διὰ 72.

Σημείωσις. Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον εἶνε 0, παραλείπεται.

Παραδείγματος χάριν, οἱ ἀριθμοὶ	120	40	32
καὶ οἱ	80	40	32
καὶ οἱ	40	40	32
ἤτοι οἱ		40	32

ἔχουσι προδήλως τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας.

ΘΕΩΡΗΜΑ

97. *Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν εἶνε ὁ ἐλάχιστος ἐξ αὐτῶν, ἐὰν διαιρῇ πάντας τοὺς ἄλλους.*

Ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τοὺς ἀριθμοὺς 40, 80, 120, 8, ἐξ ὧν ὁ μικρότερος (ὁ 8) διαιρεῖ πάντας τοὺς ἄλλους· λέγω, ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν εἶνε ὁ 8.

Ἀπόδειξις. Ὁ 8 εἶνε κοινὸς διαιρέτης· διότι διαιρεῖ ἑαυτὸν (καὶ δίδει πηλίκον 1), διαιρεῖ δὲ καὶ τοὺς ἄλλους πάντας· ἄλλος ὅμως ἀριθμὸς μεγαλήτερος τοῦ 8 δὲν δύναται νὰ εἶνε κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 40, 80, 120, 8· διότι δὲν θὰ διαιρῇ τὸν 8 ὡς μικρότερόν του·
ἄρα ὁ 8 εἶνε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 40, 80, 120, 8.

Εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν.

98. Στηριζόμενοι ἐπὶ τῶν προηγουμένων προτάσεων δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν. Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν τὸν μεγαλήτερον διὰ τοῦ μικροτέρου καὶ ἐὰν μὲν δὲν μείνῃ ὑπόλοιπον, ὁ μικρότερος εἶνε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης (κατὰ τὸ θεώρημα 97). Ἐὰν δὲ μείνῃ ὑπόλοιπον, λαμβάνομεν αὐτὸ ἀντὶ τοῦ μεγαλητέρου καὶ οὕτως ἔχομεν δύο ἄλλους ἀριθμούς· τουτέστι τὸ ῥηθὲν ὑπόλοιπον καὶ τὸν μικρότερον ἐκ τῶν δύο δοθέντων ἀριθμῶν. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας, οὓς ἔχουσι καὶ οἱ δύο δοθέντες (Πόρισμα 9)· ἑπομένως ἔχουσι καὶ τὸν αὐτὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην.

Καὶ ἐπὶ τούτων ποιοῦμεν τὰ αὐτὰ καὶ ἐξακολουθοῦμεν τοιουτοτρόπως ἀλλάσσοντες τοὺς ἀριθμούς, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς δύο ἀριθμούς, ἐξ ὧν ὁ μεγαλήτερος νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ μικροτέρου ἀκριβῶς· τότε ὁ μικρότερος οὗτος θὰ εἶνε ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἔστωσαν ὡς παράδειγμα οἱ ἑξῆς ἀριθμοὶ 72 καὶ 414.

Διαιροῦντες τὸν 414 διὰ 72 εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 54· ὥστε ἀντ' αὐτῶν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τοὺς ἑξῆς δύο 72 καὶ 4.

Διαιροῦντες τὸν 72 διὰ τοῦ 54 εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 18· ὥστε ἀντὶ τούτων δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τοὺς ἑξῆς δύο 18 καὶ 54.

Διαιροῦντες τὸν 54 διὰ 18, εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 0· ὥστε ὁ 18 εἶνε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν 414 καὶ 72.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συντομίας χάριν ὡς ἑξῆς·

	5	1	3
414	72	54	18
54	18	0	

Αἱ διαιρέσεις εἶνε διατεταγμέναι κατὰ τὸν συνήθη τρόπον· μὲ μόνην τὴν διαφοράν, ὅτι τὸ πηλίκον ἑκάστης γράφεται ὑπεράνω τοῦ διαιρέτου αὐτῆς, ἡ δὲ ὑποκάτω τοῦ διαιρέτου θέσις φυλάσσεται διὰ τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἑπομένης διαιρέσεως.

Ἐὰν εὑρεθῇ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ἡ μονάς, τοῦτο σημαίνει, ὅτι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Παράδειγμα.

	19	1	1	7	2
625	32	17	15	2	1
32	15	2	1	0	
305					
288					
17					

Κανών.

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών·

(**99.** *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο ἀριθμῶν, διαιροῦμεν τὸν μεγαλήτερον διὰ τοῦ μικροτέρου· ἔπειτα, ἂν μείνῃ ὑπόλοιπον, διαιροῦμεν τὸν μικρότερον διὰ τοῦ ὑπολοίπου τούτου, καὶ ἐξακολουθοῦμεν τοιουτοτρόπως διαιροῦντες ἕκαστον διαιρέτην διὰ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος πρὸς αὐτὸν ὑπολοίπου, μέχρις οὗ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0· ὁ διαιρέτης τῆς τελευταίας ταύτης διαιρέσεως εἶνε ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.*

Παρατήρησις. Ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα τοῦτον εἰς δύο οἱουσδήποτε ἀριθμούς, θὰ εὕρωμεν ἐξ ἅπαντος μετά τινας διαιρέσεις ὑπόλοιπον 0· διότι τὰ ὑπόλοιπα τῶν ἀλλεπαλλήλων διαιρέσεων τὰς ὁποίας κάμνομεν, προβαίνουσιν ἐλαττούμενα· ὅταν δὲ ἀριθμός τις ἐξακολουθῇ νὰ ἐλαττῶται, ἐπὶ τέλους καταντᾷ μηδέν, καὶ κατὰ μίαν μονάδα ἂν γίνηται ἡ ἐλάττωσις.)

Εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν.

100. Στηριζόμενοι ἐπὶ τῶν αὐτῶν προτάσεων (ἐδαφ. 95—97) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν. Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν πάντας τοὺς ἄλλους διὰ τοῦ ἐλαχίστου ἐξ αὐτῶν· καὶ ἂν μὲν πάντα τὰ ὑπόλοιπα εἶνε 0, ὁ ἀριθμός, δι' οὗ διῃρέσαμεν, εἶνε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης (κατὰ τὸ θεώρ. 97), εἰ δὲ μή, ἀντικαθιστῶμεν τοὺς ἀριθμούς, ὧν τὰ ὑπόλοιπα δὲν εἶνε 0, ἕκαστον διὰ τοῦ ὑπολοίπου του· καὶ ἔχομεν οὕτω νέαν σειρὰν ἀριθμῶν, οἵτινες (κατὰ τὸ πόρισμα 96) ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας, οὓς ἔχουσι καὶ οἱ δοθέντες· ἑπομένως ἔχουσι καὶ τὸν αὐτὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην. Ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν τούτων ἐργαζόμεθα ὡς καὶ ἐπὶ τῶν πρώτων· καὶ ἐξακολουθοῦμεν κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς ἀριθμόν τινα, ὅστις νὰ διαιρῇ πάντας τοὺς ἄλλους ἀκριβῶς, ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶνε ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται, ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ ἑξῆς παραδείγματος· (Αἱ διαιρέσεις ἐκτελοῦνται χωριστά)

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ	432	504	324	60
διὰ 60	12	24	24	60
διὰ 12	12	0	0	0

ὥστε ὁ 12 εἶνε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἔστωσαν πρὸς τούτοις οἱ ἑξῆς ἀριθμοί.

	36	40	48	56	24
διὰ 24	12	16	0	8	24
διὰ 8	4	0	0	8	0
διὰ 4	4	0	0	0	0

ὥστε ὁ 4 εἶνε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

(**101.** Ἡ εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου ἀριθμῶν περισσοτέρων τῶν δύο ἐπιδέχεται μεγάλην ἐλευθερίαν περὶ τὴν τάξιν τῶν πράξεων· διότι εἰς ἑκάστην ἀντικατάστασιν δυνάμεθα, οἱονδήποτε θέλωμεν ἐκ τῶν ἀριθμῶν, νὰ ἀντικαταστήσωμεν διὰ τοῦ ὑπολοίπου, τὸ ὁποῖον ἀφίνει διαιρούμενος δι' ἄλλου (τοὺς δὲ λοιποὺς νὰ ἀφήσωμεν ὡς εἶνε). Οὕτω προκύπτουσι πολλοὶ τρόποι τῆς εὑρέσεως τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου, ὧν τινες δυνατὸν νὰ εἶνε εὐκολώτεροι τῶν ἄλλων, ἂν καὶ πάντες φέρουσι προφανῶς εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον.

Ἄξιος ἰδιαιτέρας προσοχῆς εἶνε ὁ ἑξῆς τρόπος·

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸ πόρισμα 96 εἰς δύο μόνον ἀριθμούς, διατηρῶμεν δὲ τοὺς ἄλλους ἀμεταβλήτους, φθάνομεν ἐπὶ τέλους εἰς τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν, ὅστις ἑπομένως δύναται νὰ ἀντικαταστήσῃ αὐτούς, χωρὶς νὰ βλαφθῶσιν οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν δοθέντων ἀριθμῶν· ἄρα οὐδὲ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν.

Ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τοὺς αὐτοὺς καὶ προηγουμένως ἀ-

ριθμοὺς	432	504	324	60·	ἀντὶ τούτων
λαμβάνω τοὺς ἑξῆς	432	72	324	60·	καὶ ἀντὶ τούτων
τοὺς ἑξῆς	0	72	324	60·	

εἶνε δὲ ὁ 72 ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο ἀριθμῶν 432 καὶ 504.

Ἐντεῦθεν συνάγομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν·

102. *Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν βλάπτεται, ἂν ἀντικαταστήσωμεν δύο οἱουσδήποσε ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.*

Οὐ μόνον δὲ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης, ἀλλὰ καὶ πάντες οἱ κοινοὶ διαιρέται διατηροῦνται ἀμετάβλητοι εἰς τὴν ἀντικατάστασιν ταύτην.

103. Δυνάμεθα κατ' ἀκολουθίαν νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην πολλῶν ἀριθμῶν, εὑρίσκοντες πρῶτον τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο ἐξ αὐτῶν· ἔπειτα τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τούτου καὶ ἑνὸς ἄλλου, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ λάβωμεν πάντας τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς (ὡς καὶ εἰς τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων)· ὁ τελευταῖος εὑρισκόμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εἶνε ὁ ζητούμενος.

Ἀλλ' ὁ τρόπος οὗτος ἀπαιτεῖ συνήθως περισσοτέρας πράξεις ἢ ὁ ἀνωτέρω ἐκτεθείς.

Σημείωσις. Δι' ὁμοίου τρόπου ἀποδεικνύεται καὶ ἡ ἑξῆς πρότασις. *Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης πολλῶν ἀριθμῶν δὲν βλάπτεται, ἂν ἀντικατασταθῶσιν ὁσοιδήποτε ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.)*

Ἰδιότητες τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

104. *Κοινοὶ διαιρέται δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εἶνε μόνον οἱ διαιρέται τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.*

Ἔστωσαν τυχόντες ἀριθμοὶ οἱ ἑξῆς 336, 168, 144, 96, τῶν ὁποίων μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εἶνε ὁ 24, ὡς ἑξῆς φαίνεται·

336	168	144	96
48	72	48	96
48	24	0	0
0	24	0	0

Λέγω, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι δὲν ἔχουσιν ἄλλους κοινοὺς διαιρέτας ἢ μόνον τοὺς διαιρέτας τοῦ 24.

Ἀπόδειξις. Διότι, ἵνα εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην 24, ἀντικατεστήσαμεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς διὰ τῶν 48, 72, 96. τοῦτο δὲ δὲν ἔβλαψε τοὺς κοινοὺς διαιρέτας αὐτῶν (Πόρισμα 96)· ἔπειτα πάλιν ἀντικατεστήσαμεν καὶ τούτους διὰ τῶν 48, 24, ὅπερ καὶ τοῦτο δὲν ἔβλαψε τοὺς κοινοὺς διαιρέτας· ἐπομένως οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶνε διαιρέται τοῦ 24.

Καὶ πάντες δὲ οἱ διαιρέται τοῦ 24 εἶνε κοινοὶ διαιρέται τῶν δοθέντων ἀριθμῶν· διότι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶνε πολλαπλάσια τοῦ 24.

ΘΕΩΡΗΜΑ

105. *Ἐὰν δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ πολλαπλασιασθῶσιν ἐφ'* *ἕνα ἀριθμόν, καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

Ἔστωσαν δύο τυχόντες ἀριθμοί, οἱ 60 καὶ 204, τῶν ὁποίων μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εἶνε ὁ 12, ὡς ἑξῆς φαίνεται·

204	60
24	60
24	12
0	12

λέγω, ὅτι, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμόν, ἔστω ἐπὶ τὸν 8, τὰ γινόμενα αὐτῶν 204×8 καὶ 60×8 θὰ ἔχωσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸν 12×8, καὶ αἱ πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ ἀπαιτούμεναι ἀντικαταστάσεις εἶνε αἱ ἑξῆς,

204×8	60×8
24×8	60×8
24×8	12×8
0	12×8

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδ 69, ὅταν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιασθῶσιν ἐφ' ἕνα ἀριθμόν, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Διὰ τοῦτο, ἂν διαιρέσωμεν τὸν 284×8 διὰ τοῦ 60×8, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον τὸ 24×8· (ὁ 24 εἶνε τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 204 διὰ τοῦ 60) καὶ ἂν ἔπειτα διαιρέσωμεν τὸ 60×8 διὰ τοῦ 24×8, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον τὸ 12×8 (12 εἶνε τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 60 διὰ 24)· καὶ τέλος ἂν διαιρέσωμεν τὸ 24×8 διὰ τοῦ 12×8 θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0· ὥστε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο ἀριθμῶν 804×8 καὶ 60×8 εἶνε 12×8

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ διὰ περισσοτέρους ἀριθμούς.

ΘΕΩΡΗΜΑ

106. *Ἐὰν δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ, καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

Ἂς λάβωμεν τοὺς τυχόντας ἀριθμούς, οἷον τοὺς

42 70 182

οἵτινες ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸν 14. Λέγω, ὅτι, ἂν διαιρέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν διαιρέτου 7, τὰ πηλίκα, τὰ ὁποῖα θὰ λάβωμεν, ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ 6, 10, 26, θὰ ἔχωσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸ πηλίκον τοῦ 14 διὰ 7, ἤτοι τὸν 2.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τῶν ἀριθμῶν 6, 10, 26 μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ὁ μ.
τότε τῶν ἀριθμῶν 6×7, $10+7$, 26×7 μέγιστος κοινὸς διαιρέτης θὰ εἶνε ὁ $\mu\times7$ (ἐδ. 105)· ἀλλ' οἱ ἀριθμοὶ 6×7, 10×7, 26×7, εἶνε αὐτοὶ οἱ ληφθέντες 42, 70, 182 (διότι 6, 10 καὶ 26 εἶνε τὰ πηλίκα αὐτῶν διαιρουμένων δι' 7) καὶ ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸν 14· ὥστε θὰ εἶνε $\mu\times7=14$.

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης γίνεται φανερόν, ὅτι ὁ μ εἶνε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 14 διὰ 7 τοῦτο δὲ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

Σημείωσις. Διὰ τοῦ θεωρήματος τούτου δύναται ἐνίοτε νὰ συντομευθῇ ἡ εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου. Διότι, ἂν εἰξεύρωμεν, ὅτι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ ἔχουσι κοινόν τινα διαιρέτην δ, διαιροῦμεν αὐτοὺς διὰ τούτου, καὶ ζητοῦμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν εὑρεθέντων πηλίκων· ἀφοῦ δὲ εὕρωμεν αὐτόν, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν δ καὶ ἔχομεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἐὰν π. χ. ἔχωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν 1500, 1800, 7500 (οἵτινες διαιροῦνται πάντες δι' 100), εὑρίσκομεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν

15, 18, 75, ὅστις εἶνε 3

καὶ τοῦτον πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα ἐπὶ 100· ὁ προκύπτων ἀριθμὸς 300 θὰ εἶνε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

107. *Ἐὰν διαιρεθῶσιν ἀριθμοὶ διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν, τὰ πηλίκα θὰ εἶνε ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.*

Ἂς παραστήσωμεν τρεῖς τυχόντας ἀριθμοὺς διὰ τῶν γραμμάτων Α, Β, Γ, καὶ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν διὰ τοῦ Μ, τὰ δὲ πηλίκα αὐτῶν (ὅταν διαιρεθῶσι διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν Μ) διὰ α, β, γ λέγω, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, διηρέθησαν διὰ Μ, καὶ ὁ μέγιστος αὐτῶν κοινὸς διαιρέτης Μ διηρέθη διὰ Μ καὶ ἐπομένως ἔγινεν 1. Ἄρα οἱ ἐκ τῆς διαιρέσεως προκύψαντες ἀριθμοὶ α, β, γ ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὴν μονάδα· ἤτοι εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Παρατήρησις.

Διὰ τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου παριστῶμεν τοὺς ἀριθμούς, ἐφ' ὧν σκεπτόμεθα, ὅταν οἱ συλλογισμοί, τοὺς ὁποίους κάμνομεν πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος, μένουσιν οἱ αὐτοί, οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶνε οἱ ἀριθμοί. Ἡ παράστασις αὕτη τῶν ἀριθμῶν καθιστᾷ σαφεστέραν τὴν γενικότητα τῶν ἀποδείξεων, ἐν ᾧ, ὅταν λαμβάνωμεν ὡρισμένους ἀριθμούς, ἡ ἀπόδειξις φαίνεται, ὡς ἂν ἐγίνετο μόνον διὰ τοὺς ἀριθμοὺς τούτους. Ἐπίσης παριστῶμεν διὰ τῶν γραμμάτων τοὺς ἀριθμούς, ὅταν εἶναι ἄγνωστοι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

108. *Ἐὰν ἀριθμοὶ διαιρούμενοι διὰ κοινοῦ τινος αὐτῶν διαιρέτου δίδωσι πηλίκα πρῶτα πρὸς ἄλληλα, ὁ διαιρέτης οὗτος εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν.*

Ἔστωσαν Α, Β, Γ τυχόντες ἀριθμοί, δ κοινός τις αὐτῶν διαιρέτης καὶ α, ϐ, γ τὰ πηλίκα τῶν Α, Β, Γ διαιρεθέντων διὰ δ· λέγω, ὅτι ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α ϐ, γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὁ διαιρέτης δ εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ.

Ἀπόδειξις. Οἱ ἀριθμοὶ α, ϐ, γ ἔχουσιν ἐξ ὑποθέσεως μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὴν μονάδα 1· ἄρα οἱ ἀριθμοὶ $α\times δ$, $ϐ\times δ$, $γ\times δ$, τουτέστιν οἱ Α, Β, Γ, θὰ ἔχωσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην $1\times δ$, ἤτοι δ. (ἐδ. 105)· τοῦτο δὲ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

Σημείωσις. Εἰς ἕκαστον θεώρημα διακρίνομεν *ὑπόθεσιν* καὶ *συμπέρασμα*. Τοῦ θεωρήματος τούτου ὑπόθεσις εἶναι, *ὅτι τὰ πηλίκα α, ϐ, γ, ἅτινα ἔδωκαν οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ διαιρεθέντες διὰ δ, εἶνε πρῶτα πρὸς ἄλληλα*, συμπέρασμα δὲ εἶνε *ὅτι ὁ διαιρέτης δ ὁ τοὺς ἀριθμοὺς Α, Β, Γ διαιρέσας εἶνε ὁ μέγιστος αὐτῶν κοινὸς διαιρέτης.* Τὸ προηγούμενον θεώρημα ἔχει ὑπόθεσιν μέν, ὅτι ὁ διαιρέτης δ, ὁ τοὺς ἀριθμοὺς Α, Β, Γ διαιρέσας, εἶνε ὁ μέγιστος αὐτῶν κοινὸς διαιρέτης, συμπέρασμα δέ, ὅτι τὰ πηλίκα α, ϐ, γ, ἅτινα ἔδωκαν οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, διαιρεθέντες διὰ δ, εἶνε πρῶτα πρὸς ἄλληλα. Ὅταν δύο θεωρήματα εἶνε τοιαῦτα, ὥστε ἡ ὑπόθεσις τοῦ ἑνὸς νὰ εἶνε **συμπέρασμα** τοῦ ἄλλου, καὶ τἀνάπαλιν, τὰ θεωρήματα ταῦτα λέγονται *ἀντίστροφα* πρὸς ἄλληλα. Τοιαῦτα εἶνε τὰ δύο τελευταῖα θεωρήματα.

Θεμελιῶδες θεώρημα.

Περὶ τῶν διαιρετῶν τοῦ γινομένου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

109. *Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῶν τὸ γινόμενον δύο παραγόντων εἶνε πρῶτος πρὸς τὸν ἕνα, διαιρεῖ τὸν ἄλλον*

Ἔστω τὸ τυχὸν γινόμενον $Α\times Β$ καὶ ἂς διαιρῇ αὐτὸ ὁ ἀριθμὸς Δ· ἂς εἶνε δὲ ὁ Δ πρῶτος πρὸς τὸν Α· λέγω, ὅτι ὁ Δ θὰ διαιρῇ τὸν Β.

Ἀπόδειξις. Οἱ ἀριθμοὶ Δ καὶ Α ἔχουσιν ἐξ ὑποθέσεως μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὴν μονάδα 1· ἄρα οἱ ἀριθμοὶ $Δ\times Β$ καὶ $Α\times Β$ θὰ ἔχωσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸ $1\times Β$, ἤτοι τὸ Β. (ἐδ. 105).

Ἐπειδὴ δὲ ὁ Δ διαιρεῖ τοὺς ἀριθμοὺς $\Delta \times B$, $A \times B$ (τὸν μὲν πρῶτον ὡς πολλαπλάσιον αὐτοῦ, τὸν δὲ δεύτερον ἐξ ὑποθέσεως), θὰ διαιρῇ (ἐδ. 104) καὶ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν, τουτέστι τὸν Β· τοῦτο δὲ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

Σημείωσις. Ἀριθμός τις δύναται νὰ διαιρῇ τὸ γινόμενον δύο ἄλλων, χωρὶς νὰ διαιρῇ μήτε τὸν ἕνα μήτε τὸν ἄλλον· οἷον ὁ 8 διαιρεῖ τὸ γινόμενον 6×4· ἐνῷ δὲν διαιρεῖ οὔτε τὸν 6 οὔτε τὸν 4.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ οἱ διαιρέται αὐτῶν θὰ εἶνε ἐπίσης πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

2) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ Α, Β εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $A + B$ καὶ ἡ διαφορὰ $A - B$ ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην ἢ 1 ἢ 2.

3) Ἐὰν ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν Α, Β καὶ ὁ τῶν Γ, Δ πολλαπλασιασθῶσι, τὸ προκύπτον γινόμενον εἶνε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν $A \times \Gamma$, $A \times \Delta$, $B \times \Gamma$, $B \times \Delta$.

4) Νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸν 5, ἄθροισμα δὲ τὸν 90. (Ἀπ. (5, 85) ἢ (25, 65) ἢ (35, 55).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΡΩΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ὁρισμοί.

110. *Πρῶτος ἀριθμὸς* λέγεται ὁ μὴ ἔχων ἄλλους διαιρέτας ἢ ἑαυτὸν καὶ τὴν μονάδα.

Παραδείγματος χάριν. οἱ ἀριθμοί, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, εἶνε πρῶτοι ἀριθμοί.

Σύνθετος δὲ λέγεται ὁ μὴ πρῶτος.

Σημείωσις. Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ εἶνε πρῶτοι *πρὸς ἀλλήλους*, χωρὶς νὰ εἶνε *πρῶτοι* καθ' ἑαυτούς· οἷον οἱ ἀριθμοὶ 6, 25, 49 εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἀλλ' οὐδεὶς ἐξ αὐτῶν εἶνε πρῶτος.

Θεμελιώδης ἰδιότης τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

111 **111.** *Πᾶς ἀριθμὸς εἶνε γινόμενον παραγόντων πρώτων.*

Ἔστω σύνθετος ἀριθμὸς ὁ Μ· λέγω, ὅτι ὁ Μ εἶνε γινόμενον παραγόντων πρώτων.

Ἀπόδειξις. Διότι ὁ Μ ὡς σύνθετος θὰ διαιρῆται ὑπὸ ἀριθμοῦ τινος μικροτέρου του (ἐκτὸς τῆς μονάδος)· ἄρα θὰ εἶνε γινόμενον δύο ἀριθμῶν μικροτέρων του (μεγαλητέρων ὅμως τοῦ 1)· καὶ ἂν μὲν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶνε πρῶτοι, τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη· ἂν δέ τις ἐξ αὐτῶν εἶνε σύνθετος, ἀναλύεται καὶ αὐτὸς ἐπίσης εἰς γινόμενον δύο ἄλλων ἀριθμῶν μικροτέρων του (μεγαλητέρων ὅμως τοῦ 1)· καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐπειδὴ δέ, ὅσον προχωροῦμεν εἰς τὴν ἀνάλυσιν ταύτην, οἱ παράγοντες, ἐξ ὧν γίνεται ὁ Μ, γίνονται μικρότεροι, ἀλλ' ὄχι μικρότεροι τοῦ 2 (διότι πάντοτε ὑπερβαίνουσι τὴν μονάδα), ἕπεται, ὅτι θὰ φθάσωμεν ἐπὶ τέλους εἰς παράγοντας μὴ δυναμένους πλέον νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς γινόμενα ἀριθμῶν μικροτέρων των καὶ οἵτινες διὰ τοῦτο θὰ εἶνε πρῶτοι.

Παραδείγματος χάριν, ὁ 6 ἀναλύεται εἰς τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 3, οἵτινες εἶνε πρῶτοι ἤτοι $6=2\times 3$.

Ὁ 24 ἀναλύεται εἰς τὸ γινόμενον 4×6· καὶ ὁ μὲν 4 ἀναλύεται πάλιν εἰς τὸ γινόμενον 2×2, ὁ δὲ 6 εἰς τὸ 2×3· ὥστε εἶνε

$$24=4\times 6=2\times 2\times 2\times 3$$

$$\text{ἢ καὶ } 24=2^3\times 3$$

Διὰ τὸν ἀριθμὸν 56 ἔχομεν

$$56=7\times 8=7\times 2\times 4=7\times 2\times 2\times 2$$

$$\text{ἢ καὶ } 56=2^3\times 7.$$

Σημείωσις. Ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ μάθωμεν γενικήν τινα μέθοδον τῆς ἀναλύσεως ταύτης τῶν συνθέτων ἀριθμῶν εἰς πρώτους παράγοντας.

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου γίνεται φανερόν, ὅτι οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ εἶνε τὰ ἁπλούστατα στοιχεῖα, ἐξ ὧν γίνονται πάντες οἱ ἀριθμοὶ διὰ πολλαπλασιασμοῦ. Διὰ τοῦτο οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι καὶ αἱ ἰδιότητες αὐτῶν ἔχουσι τὴν μεγίστην ῥοπὴν εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀριθμῶν. Πρὶν ὅμως προβῶμεν εἰς τὴν σπουδὴν αὐτῶν, πρέπει νὰ μάθωμεν πῶς εὑρίσκονται.

Εὕρεσις τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

Κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους.

112. Ἡ ἑξῆς μέθοδος, διὰ τῆς ὁποίας δυνάμεθα νὰ ἀποχωρίσωμεν τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς ἀπὸ τῶν ἄλλων, λέγεται ***κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους***.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι θέλομεν νὰ ἀποχωρίσωμεν τοὺς πρώτους ἀριθμούς, οἵτινες περιλαμβάνονται μεταξὺ τοῦ 1 καὶ τοῦ 1000.

Γράφομεν πρῶτον τοὺς ἀριθμοὺς κατὰ τὴν φυσικὴν αὐτῶν τάξιν·

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.... 1000· καὶ ἔπειτα εὑρίσκομεν καὶ διαγράφομεν πάντας τοὺς μὴ πρώτους ἀριθμούς, σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς·

Ὁ 2 εἶνε προφανῶς πρῶτος ἀριθμός. Ἀλλὰ τὰ πολλαπλάσια τοῦ 2 δὲν εἶνε πρῶτοι ἀριθμοί· ὅθεν διαγράφομεν αὐτά· πρὸς τοῦτο ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ ἑπομένου ἀριθμοῦ 3 ἀριθμοῦμεν ἀνὰ δύο καὶ διαγράφομεν πάντοτε τὸν δεύτερον ἀριθμόν, ἤτοι τοὺς ἀριθμοὺς 4, 6, 8, 10...

Ὁ μετὰ τὸν 2 ἐρχόμενος ἀριθμός, ὁ 3, εἶνε πρῶτος, ὡς μὴ πολλαπλάσιον τοῦ 2. Ἵνα δὲ διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια τοῦ 3, ἀρχίζομεν ἀπὸ τοῦ τριπλασίου 3×3, ἤτοι ἀπὸ τοῦ 9· (διότι τὸ διπλάσιον τοῦ 3, ἤτοι 3×2, εἶνε ἤδη διαγεγραμμένον ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 2) καὶ διαγράφομεν ἀπὸ τοῦ 9 καὶ ἐφεξῆς πάντα τρίτον ἀριθμόν· οὕτω διαγράφονται οἱ ἀριθμοὶ 12, 15, 18 κτλ., ἤτοι τὰ πολλαπλάσια τοῦ 3.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον θὰ διαγράφωνται ἐκ δευτέρου καί τινες ἤδη διαγεγραμμένοι ἀριθμοί· τοῦτο ὅμως δὲν βλάπτει.

Ὁ ἀριθμὸς 4 διεγράφη ἤδη ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 2· διεγράφησαν δὲ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ ὡς πολλαπλάσια τοῦ 2. Τὸ αὐτὸ δὲ ἀληθεύει καὶ περὶ τῶν πολλαπλασίων παντὸς συνθέτου ἀριθμοῦ· διότι ταῦτα εἶνε πολλαπλάσια τῶν πρώτων ἀριθμῶν, ἐξ ὧν γίνεται ὁ σύνθετος· ὥστε ἀρκεῖ νὰ διαγράφωμεν μόνον τὰ πολλαπλάσια τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

Ὁ μετὰ τὸν 3 ἀμέσως ἐρχόμενος μὴ διαγεγραμμένος ἀριθμός, ὁ 5, εἶνε πρῶτος ἀριθμός· διότι δὲν εἶνε πολλαπλάσιον οὐδενὸς τῶν μικροτέρων του. Ἵνα δὲ διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ, ἀρχίζομεν ἀπὸ τοῦ 5×5, ἤτοι ἀπὸ τοῦ 25, (διότι τὰ μικρότερα πολλαπλάσια τοῦ 5, ἤτοι 5×2, 5×3, 5×4, εἶνε ἤδη διαγεγραμμένα ὡς πολλαπλάσια ἀριθμῶν μικροτέρων τοῦ 5) καὶ διαγράφομεν ἀπὸ τούτου καὶ ἐφεξῆς πάντα πέμπτον ἀριθμόν· οὕτω διαγράφονται οἱ ἀριθμοὶ 25, 30, 35, 40...., ἤτοι πάντα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 5 (ὧν τινα εἶνε ἤδη διαγεγραμμένα).

Ὁ μετὰ τὸν 5 ἀμέσως ἐρχόμενος μὴ διαγεγραμμένος ἀριθμός, ὁ 7, εἶνε πρῶτος ἀριθμός· διότι δὲν εἶνε πολλαπλάσιον οὐδενὸς τῶν μικροτέρων του. Ἵνα δὲ διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ, ἀρχίζομεν ἀπὸ τοῦ 7×7 ἤτοι ἀπὸ τοῦ 49· (διότι τὰ μικρότερα πολλαπλάσια τοῦ 7, ἤτοι τὰ 7×2, 7×3, 7×4, 7×5, 7×6, εἶνε ἤδη διαγεγραμμένα ὡς πολλαπλάσια ἀριθμῶν μικροτέρων τοῦ 7) καὶ διαγράφομεν ἀπὸ τούτου καὶ ἐφεξῆς πάντα ἕβδομον ἀριθμόν.

Παρατηρητέον δὲ ἐν γένει, ὅτι, ὅταν μέλλωμεν νὰ διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια οἱουδήποτε πρώτου ἀριθμοῦ, τὸ πρῶτον πολλαπλάσιον αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον θὰ ἀπαντήσωμεν εἶνε τὸ τετράγωνόν του· διότι τὰ μικρότερα θὰ εἶνε ἤδη διαγεγραμμένα ὡς πολλαπλάσια ἀριθμῶν μικροτέρων· Ὅταν π. χ. ἔλθωμεν εἰς τὸν 11 καὶ θέλωμεν νὰ διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ, τὰ πολλαπλάσια 11×2, 11×3 ... 11×10 θὰ εἶνε ἤδη διαγεγραμμένα, ὡς πολλαπλάσια ἀριθμῶν μικροτέρων τοῦ 11· ὥστε πρῶτον θὰ ἀπαντήσωμεν καὶ θὰ διαγράψωμεν τὸ 11×11, ἤτοι τὸ 121. Ὁμοίως ὅταν ἔλθωμεν εἰς τὸν πρῶτον ἀριθμὸν 13, θὰ ἀρχίσωμεν νὰ διαγράφωμεν τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ 13×13, ἤτοι ἀπὸ τοῦ 169· διότι τὰ μικρότερα πολλαπλάσια αὐτοῦ θὰ εἶνε ἤδη διαγεγραμμένα.

Ἐκ τῆς παρατηρήσεως ταύτης συνάγεται, ὅτι ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν πάντας τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς τοὺς ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 1000 περιλαμβανομένους, ἀρκεῖ κατὰ τὸν προειρημένον τρόπον νὰ διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια πάντων τῶν πρώτων ἀριθμῶν μέχρι τοῦ 37 (τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον 1369 εἶνε μεγαλήτερον τοῦ 1000. Διότι τότε οἱ ἀπομείναντες ἀριθμοὶ δὲν θὰ διαγραφῶσιν, ὅσον καὶ ἂν προχωρήσωμεν, καὶ ἑπομένως δὲν εἶνε πολλαπλάσια οὐδενὸς ἀριθμοῦ· ἄρα εἶνε πρῶτοι.

Ἐργαζόμενοι κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην εὑρίσκομεν, ὅτι οἱ μεταξὺ 1 καὶ 1000 περιεχόμενοι πρῶτοι ἀριθμοὶ εἶνε γεγραμμένοι ἐν τῷ ἑξῆς πίνακι.

1	59	139	233	337	439	557	653	769	883
2	61	149	239	347	443	563	659	773	887
3	67	151	241	349	449	569	661	787	907
5	71	157	251	353	457	571	673	797	911
7	73	163	257	359	461	577	677	809	919
11	79	167	263	367	463	587	683	811	929
13	83	173	269	373	467	593	691	821	937
17	89	179	271	379	479	599	701	823	941
19	97	181	277	383	487	601	709	827	947
23	101	191	281	389	491	607	719	829	953
29	103	193	283	397	499	613	727	839	967
31	107	197	293	401	503	617	733	853	971
37	109	199	307	409	509	619	739	857	977
41	113	211	311	419	521	631	743	859	983
43	127	223	313	421	523	641	751	863	991
47	131	227	317	431	541	643	757	877	997
53	137	229	331	433	547	647	761	881	

Περὶ τοῦ πλήθους τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

113. *Τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶνε ἄπειρον·*

λέγω δηλαδή, ὅτι ὅσους καὶ ἂν εὕρῃ τις πρώτους ἀριθμούς, πάντοτε ὑπάρχουσι καὶ ἄλλοι.

Ἀπόδειξις. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι εὑρήκαμεν πρώτους ἀριθμοὺς τοὺς ἑξῆς.

$$A,\quad B,\quad \Gamma,\quad \Delta,\ldots\Pi\cdot$$

ἐὰν σχηματίσωμεν τὸ γινόμενόν των $A\times B\times\Gamma\times\Delta\ldots\ldots\times\Pi$ καὶ εἰς αὐτὸ προσθέσωμεν μίαν μονάδα, προκύπτει ἀριθμός τις

$$\text{ὁ } (A\times B\times\Gamma\times\Delta\ldots\times\Pi)+1,$$

ὃν παριστῶ διὰ τοῦ Ω.

Ὁ ἀριθμὸς οὗτος Ω θὰ διαιρῆται διά τινος πρώτου ἀριθμοῦ (δι' ἑαυτοῦ, ἂν εἶνε πρῶτος, δι' ἄλλου δὲ μικροτέρου, ἂν εἶνε σύνθετος). ἀλλ' οὐδεὶς ἐκ τῶν δοθέντων πρώτων ἀριθμῶν Α, Β, Γ, Δ...Π δύναται νὰ διαιρῇ τὸν Ω. Διότι ἕκαστος ἐξ αὐτῶν διαιρεῖ τὸ γινόμενον $A\times B\times\Gamma\times\Delta\ldots\times\Pi$ (ὡς πολλαπλάσιον αὐτοῦ)· ἂν λοιπὸν διήρει καὶ τὸν Ω, θὰ διήρει καὶ τὴν διαφοράν των, ἤτοι τὴν μονάδα, ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα ὑπάρχει καὶ ἄλλος τις πρῶτος ἀριθμὸς ἐκτὸς τῶν δοθέντων, δηλαδὴ ἐκεῖνος, ὅστις διαιρεῖ τὸν Ω.

Ἰδιότητες τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

114. *Πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς εἶνε πρῶτος πρὸς πάντα ἀριθμὸν μὴ διαιρούμενον δι' αὐτοῦ.*

Ἂς λάβωμεν τὸν τυχόντα πρῶτον ἀριθμόν, ἔστω τὸν 7, καὶ ἄλλον οἱονδήποτε ἀριθμὸν Α μὴ διαιρετὸν δι' αὐτοῦ· λέγω, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 7 καὶ Α, εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἀπόδειξις. Ὁ ἀριθμὸς 7, ὡς πρῶτος, δὲν ἔχει ἄλλους διαιρέτας ἢ 1 καὶ 7· ἑπομένως οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν δύο ἀριθμῶν 7 καὶ Α δὲν δύνανται νὰ εἶνε ἄλλοι ἢ 1 καὶ 7. Ἀλλ' ὁ 7 δὲν εἶνε κοινὸς διαιρέτης· διότι ἐξ ὑποθέσεως δὲν διαιρεῖ τὸν Α· ἄρα ὁ μόνος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο ἀριθμῶν εἶνε ἡ μονάς· ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ 7 καὶ Α εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

ΘΕΩΡΗΜΑ

115. *Ἐὰν ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῇ γινόμενόν τι θὰ διαιρῇ τοὐλάχιστον ἕνα παράγοντα τοῦ γινομένου.*

Ἔστω τὸ γινόμενον $A\times B$ καὶ ἂς διαιρῇ αὐτὸ ὁ πρῶτος ἀριθμὸς Π. Λέγω, ὅτι ὁ Π θὰ διαιρῇ τοὐλάχιστον τὸν ἕτερον τῶν παραγόντων Α, Β.

Ἀπόδειξις. Διότι ἂν μὲν ὁ Π διαιρῇ τὸν Α, τὸ θεώρημα εἶνε ἀποδεδειγμένον· ἂν δὲν διαιρῇ τὸν Α, θὰ εἶνε πρῶτος πρὸς αὐτὸν (ἐδ. 114) καὶ διὰ τοῦτο θὰ διαιρῇ τὸν Β (ἐδ. 109).

Τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη διὰ δύο παράγοντας, μένει δ' ἔτι νὰ ἀποδειχθῇ καὶ διὰ περισσοτέρους.

Ἂς διαιρῇ ὁ πρῶτος ἀριθμὸς Π τὸ γινόμενον $Α\times Β\times Γ$ τῶν τριῶν παραγόντων Α, Β, Γ. λέγω ὅτι ὁ Π θὰ διαιρῇ τοὐλάχιστον ἕνα ἐκ τῶν παραγόντων Α, Β, Γ.

Ἀπόδειξις. Τὸ γινόμενον $Α\times Β\times Γ$ θὰ τραπῇ εἰς γινόμενον δύο μόνον παραγόντων.

$$(Α\times Β) \text{ καὶ } Γ,$$

ἂν ἀντικαταστήσωμεν τοὺς δύο παράγοντας Α, Β διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν (ἐδ. 49)· ἐπομένως ὁ Π θὰ διαιρῇ ἢ τὸν Γ, ἢ τὸν ἀριθμὸν $Α\times Β$. Ἀλλ' ἐὰν διαιρῇ τὸ γινόμενον $Α\times Β$, θὰ διαιρῇ τοὐλάχιστον ἕνα ἐκ τῶν παραγόντων Α, Β.

Ἄρα ὁ Π διαιρεῖ τοὐλάχιστον ἕνα ἐκ τῶν παραγόντων Α, Β, Γ.

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ διὰ περισσοτέρους παράγοντας.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον.

116. *Ἐὰν ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῇ δύναμιν ἀριθμοῦ τινος, θὰ διαιρῇ καὶ αὐτὸν τὸν ἀριθμόν.*

Ἂς διαιρῇ ὁ πρῶτος ἀριθμὸς Π τὴν πέμπτην δύναμιν τοῦ Α, ἤτοι τὸ $Α^5$. λέγω, ὅτι ὁ Π θὰ διαιρῇ καὶ τὸν Α.

Διότι τὸ $Α^5$ εἶνε $Α\times Α\times Α\times Α\times Α$· ὁ δὲ Π, ὡς διαιρῶν τὸ γινόμενον τοῦτο, θὰ διαιρῇ καὶ ἕνα παράγοντα αὐτοῦ, ἤτοι τὸν Α.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον.

117. *Ἐὰν ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῇ γινόμενον παραγόντων πρώτων, θὰ εἶνε ἴσος πρὸς ἕνα ἐκ τῶν παραγόντων.*

Διότι ὡς διαιρῶν τὸ γινόμενον, θὰ διαιρῇ ἕνα τοὐλάχιστον ἐκ τῶν παραγόντων· ἄρα θὰ εἶνε ἴσος μὲ ἐκεῖνον, τὸν ὁποῖον διαιρεῖ· διότι πρῶτος ἀριθμὸς μόνον δι' ἑαυτοῦ διαιρεῖται. (Ἡ μονὰς δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

118. *Ἐὰν δύο γινόμενα παραγόντων πρώτων εἶνε ἴσα, οἱ παράγοντες ἀμφοτέρων εἶνε οἱ αὐτοί· καὶ ἕκαστος περιέχεται εἰς ἀμφότερα ἰσάκις.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ἓν ἐκ τῶν δύο ἴσων γινομένων ἔχει τὸν παράγοντα 7· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ἄλλο θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν παράγοντα καὶ ὅσους παράγοντας 7 ἔχει τὸ ἕν, τόσους θὰ ἔχῃ καὶ τὸ ἄλλο.

Ἀπόδειξις. Διότι ὁ 7 ὡς παράγων τοῦ πρώτου γινομένου θὰ διαιρῇ αὐτό· ἄρα θὰ διαιρῇ καὶ τὸ δεύτερον ὡς ἴσον τῷ πρώτῳ. Ἀλλ' ὅταν ἀριθμὸς πρῶτος (ὡς ὁ 7) διαιρῇ τὸ γινόμενον παραγόντων πρώτων, εἶνε ἴσος τινὶ ἐξ αὐτῶν (ἐδ. 117) ἄρα καὶ τὸ δεύτερον γινόμενον θὰ ἔχῃ τὸν παράγοντα 7.

Καὶ ὅσους παράγοντας ἴσους τῷ 7 ἔχει τὸ ἓν γινόμενον, τόσους θὰ ἔχῃ καὶ τὸ ἄλλο. Διότι ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ἓν ἔχει τρεῖς παράγοντας 7, τὸ δὲ ἄλλο δύο μόνον. Ἐὰν τότε διαιρέσωμεν τὰ ἴσα γινόμενα διὰ τοῦ 6 δὶς (ὅπερ γίνεται ἂν ἀπ' ἀμφοτέρων ἐξαλείψωμεν δύο παράγοντας 7), πρέπει νὰ εὕρωμεν γινόμενα ἴσα. Ἀλλ' ἡ ἰσότης τῶν νέων τούτων γινομένων εἶνε ἀδύνατος· διότι τὸ μὲν ἓν θὰ ἔχῃ τὸν παράγοντας 7 ἅπαξ, τὸ δὲ ἄλλο δὲν θὰ ἔχῃ αὐτόν. Ἄρα ὅσους παράγοντα 7 ἔχει τὸ ἓν γινόμενον, τόσους ἔχει καὶ τὸ ἄλλο.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι ἐὰν δύο γινόμενα παραγόντων πρώτων εἶνε ἴσα, οἱ παράγοντες ἀμφοτέρων εἶνε οἱ αὐτοί, καὶ μόνον κατὰ τὴν τάξιν δύνανται νὰ διαφέρωσι.

ΠΟΡΙΣΜΑ

119. *Καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν ἀναλύσωμεν ἀριθμὸν εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας πάντοτε τοὺς αὐτοὺς παράγοντας θὰ εὕρωμεν.*

Πῶς ἐκτελεῖται ἡ ἀνάλυσις τῶν συνθέτων ἀριθμῶν εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας.

120. Ἡ μέθοδος, δι' ἧς ἐκτελοῦμεν συνήθως τὴν ἀνάλυσιν τῶν συνθέτων ἀριθμῶν εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας, φαίνεται ἐκ τοῦ ἑπομένου παραδείγματος.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἐδόθη πρὸς ἀνάλυσιν ὁ ἀριθμὸς 504.

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρεῖται διὰ τοῦ 2· ἐκτελοῦντες δὲ τὴν διαίρεσιν εὑρίσκομεν πηλίκον 252· ὅθεν εἶνε

$$504 = 2 \times 252 -$$

καὶ ὁ ἀριθμὸς 252 διαιρεῖται διὰ 2 καὶ δίδει πηλίκον 126·

ὥστε εἶνε $252 = 2 \times 126$

καὶ διὰ τοῦτο εἶνε $504 = 2 \times 2 \times 126$ (ἐδ. 49)·

ὁ ἀριθμὸς 126 διαιρεῖται πάλιν διὰ 2 καὶ δίδει πηλίκον 63· ὥστε εἶνε

$$126 = 2 \times 63 \cdot$$

ἄρα $504 = 2 \times 2 \times 2 \times 63 \cdot$ (ἐδ. 49).

Ὁ ἀριθμὸς 63 δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 2· διαιρεῖται ὅμως διὰ τοῦ 3 (ἐδ. 87) καὶ δίδει πηλίκον 21·

ὥστε εἶνε $63=3\times21$·

καὶ διὰ τοῦτο εἶνε $504=2\times2\times2\times3\times21$·

ὁ 21 διαιρεῖται πάλιν διὰ 3 καὶ δίδει πηλίκον 7·

ὥστε εἶνε $504=2\times2\times2\times3\times3\times7$·

ἐπειδὴ δὲ ὁ 7 εἶνε πρῶτος ἀριθμός, ἡ ἀνάλυσις ἐτελείωσεν.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συνήθως ὡς ἑξῆς·

504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

$$504=2^3\times3^2\times7.$$

Ἂς λάβωμεν ὡς δεύτερον παράδειγμα τὸν ἀριθμὸν 186984· δι' αὐτὸν εὑρίσκομεν ἐργαζόμενοι ὁμοίως·

186984	2
93492	2
46746	2
23373	3
7791	3
2597	7
371	7
53	53
1	

$$186984=2^3\times3^2\times7^2\times53.$$

***Παρατηρήσεις.**

1) Ὡς διαιρέτας δοκιμάζομεν τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς κατὰ τὴν φυσικὴν τάξιν των ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ 2· δοκιμάζομεν δὲ ἕκαστον ἐπανειλημμένως, μέχρις οὗ παύσῃ νὰ εἶνε διαιρέτης· ἔκτοτε πλέον δὲν δοκιμάζομεν αὐτὸν εἰς τὰ ἑπόμενα πηλίκα· διότι, ἂν διῄρει ἓν ἐξ αὐτῶν (οἷον τὸ 2597), θὰ διῄρει καὶ πάντα τὰ προηγούμενα πηλίκα ὡς πολλαπλάσια τούτου (τοῦ 2597).

2) Ἐὰν ὁ πρὸς ἀνάλυσιν δοθεὶς ἀριθμὸς εἶνε γινόμενον γνωστῶν παραγόντων, ἢ φαίνηται ἐκ πρώτης ὄψεως ὡς τοιοῦτος, συντομεύομεν

τὴν πρᾶξιν ἀναλύοντες χωριστὰ ἕκαστον τῶν παραγόντων τοῦ ἀριθμοῦ εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, πρόκειται νὰ ἀναλυθῇ ὁ ἀριθμὸς 100000, ἐπειδὴ εἶνε

$$100000=10\times10\times10\times10\times10,$$

ἀρκεῖ νὰ ἀναλύσωμεν ἕκαστον τῶν παραγόντων 10 εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας· καὶ ἐπειδὴ $10=2\times5$, ἕπεται

$$100000=2\times5\times2\times5\times2\times5\times2\times5\times2\times5$$

ἢ $$100000=2\times2\times2\times2\times2\times5\times5\times5\times5\times5$$

ἢ καὶ $$100000=2^5\times5^5$$

Ὁμοίως, ἂν δοθῇ πρὸς ἀνάλυσιν ὁ ἀριθμὸς 84000, παρατηροῦμεν ὅτι οὗτος ἀναλύεται εἰς τὸ 84×1000·

ἐπειδὴ δὲ εἶνε $84=2^2\times3\times7$

καὶ $1000=2^3\times5^3$, ἕπεται

$$84000=2^2\times3\times7\times2^3\times5^3=2^2\times2^3\times3\times7\times5^3$$

ἢ $$84000=2^5\times3\times5^3\times7. \qquad \text{(ἐδ. 53).}$$

3) Ὁ πίναξ τῆς σελίδος 86 χρησιμεύει εἰς τὸ νὰ διακρίνωμεν ἀμέσως, ἂν ἀριθμός τις μικρότερος τοῦ 1000 εἶνε πρῶτος ἢ μή· καὶ δι' αὐτοῦ ἀποφεύγομεν ματαίας δοκιμάς.

Ὑπάρχουσι δὲ πίνακες τῶν πρώτων ἀριθμῶν πολὺ μεγαλήτεροι (ἐν τοῖς λογαριθμικοῖς πίναξι τοῦ Dupuis σελίσιν 138—141 εὑρίσκονται οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ ἀπὸ 1 μέχρι 10000).

Ἐφαρμογαὶ τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς πρώτους παράγοντας.

Ἡ ἀνάλυσις τῶν ἀριθμῶν εἰς πρώτους παράγοντας δεικνύει σαφέστερον τὰς ἰδιότητας αὐτῶν καὶ καθιστᾷ ἁπλουστάτην τὴν λύσιν πολλῶν ἀριθμητικῶν ζητημάτων· μάλιστα δὲ τῶν ζητημάτων τῆς διαιρετότητος.

Α'. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

121. Ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς πρώτους παράγοντας ἐκτελεῖται κατὰ τὰς γενικὰς ἰδιότητας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἐδ. 49) καὶ τὸ γινόμενον προκύπτει καὶ αὐτὸ ἀναλελυμένον εἰς πρώτους παράγοντας.

Παράδειγμα. Ἀναλύοντες τοὺς ἀριθμοὺς 360 καὶ 336, εὑρίσκομεν

$$360=2^3\times3^2\times5$$
$$336=2^4\times3\times7,$$

ὅθεν $$360\times336=2^3\times3^2\times5\times2^4\times3\times7.$$

καὶ ἐπειδὴ δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τοὺς παράγοντας 2^3, 2^4 διὰ τοῦ γινομένου 2^7 (ἐδ. 53), καὶ τοὺς παράγοντας 3^2, 3 διὰ τοῦ γινομένου των 3^3, θὰ ἔχωμεν

$$360\times 336 = 2^7\times 3^3\times 5\times 7.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

122. *Ἀριθμὸς ἀναλελυμένος ὑψοῦται εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν* (ἤτοι εἰς τὸ τετράγωνον), *ἐὰν διπλασιασθῶσιν οἱ ἐκθέται πάντων τῶν παραγόντων του· εἰς τὴν τρίτην, ἂν τριπλασιασθῶσι καὶ ἐν γένει εἰς τὴν μυοστὴν ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ μ.*

Σημείωσις. Ἐὰν παράγων τις δὲν ἔχῃ ἐκθέτην, ἵνα ἀληθεύῃ ἡ πρότασις αὕτη, πρέπει νὰ θεωρῆται ἐκθέτης αὐτοῦ ἡ μονὰς 1. Τὸ αὐτὸ δὲ ἰσχύει καὶ διὰ πάσας τὰς ἑπομένας προτάσεις, ἐν αἷς γίνεται λόγος περὶ ἐκθετῶν.

Ἀπόδειξις. Ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὸν ἀριθμὸν 308. Ἀναλύοντες αὐτὸν εἰς πρώτους παράγοντας εὑρίσκομεν

$$308 = 2^2\times 7\times 11 \qquad \text{ὅθεν}$$

$$308\times 308 = 2^2\times 7\times 11\times 2^2\times 7\times 11 = 2^2\times 2^2\times 7\times 7\times 11\times 11$$

$$\text{ἢ}\ 308^2 = 2^4\times 7^2\times 11^2.$$

Ὁμοίως εἶνε

$$308\times 308\times 308 = 2^2\times 7\times 11\times 2^2\times 7\times 11\times 2^2\times 7\times 11 =$$
$$2^2\times 2^2\times 2^2\times 7\times 7\times 7\times 11\times 11\times 11,$$

ἤτοι
$$308^3 = 2^6\times 7^3\times 11^3.$$

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις διὰ πάντα ἐκθέτην.

ΘΕΩΡΗΜΑ

123. *Ἀριθμὸς εἶνε τετράγωνον ἐὰν οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ διαιρῶνται πάντες διὰ τοῦ 2· καὶ τότε μόνον· κύβος δέ, ἐὰν οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων του διαιρῶνται πάντες διὰ τοῦ 3· καὶ τότε μόνον.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τυχὼν ἀριθμὸς ὁ $2^6\times 3^2\times 7^4\times 13^2$, τοῦ ὁποίου πάντες οἱ πρῶτοι παράγοντες ἔχουσιν ἐκθέτας ἀρτίους. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶνε τετράγωνον τοῦ ἑξῆς ἀριθμοῦ $2^3\times 3\times 7^2\times 13$, (ὃν εὑρίσκομεν διαιροῦντες τοὺς ἐκθέτας πάντας διὰ 2). Διότι τὸ τετράγωνον τούτου κατὰ τὰ προηγούμενα θὰ εὑρεθῇ, ἂν διπλασιασθῶσιν οἱ ἐκθέται τῶν παραγόντων του· τότε δὲ προκύπτει ὁ $2^6\times 3^2\times 7^4\times 13^2$, ἤτοι ὁ δοθεὶς ἀριθμός.

Ἔστω πάλιν τυχὼν ἀριθμός, ὁ $5^3\times 7^2\times 11^2$, τοῦ ὁποίου οἱ πρῶτοι παράγοντες δὲν ἔχουσι πάντας τοὺς ἐκθέτας ἀρτίους· (ὁ 5 ἔχει ἐκθέτην μὴ ἄρτιον).

Ὁ ἀριθμὸς οὗτος δὲν εἶνε τετράγωνον ἄλλου· διότι παντὸς τετραγώνου οἱ πρῶτοι παράγοντες ἔχουσι τοὺς ἐκθέτας πάντας ἀρτίους ὡς προκύπτοντας ἐξ ἄλλων ἐκθετῶν διὰ τοῦ διπλασιασμοῦ.

Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι ὁ ἀριθμὸς $3^6 \times 5^3 \times 7^9 \times 11^3$, οὗτινος οἱ παράγοντες ἔχουσι πάντας τοὺς ἐκθέτας διαιρετοὺς διὰ 3, εἶνε κύβος· εἶνε δὲ κύβος τοῦ ἀριθμοῦ $3^2 \times 5 \times 7^3 \times 11$, ὃν εὑρίσκομεν διαιροῦντες τοὺς ἐκθέτας αὐτοῦ πάντας διὰ τοῦ 3.

Ὁ δὲ ἀριθμὸς $2^5 \times 3^8 \times 7^6$ δὲν εἶνε κύβος οὐδενὸς ἀριθμοῦ· διότι οἱ ἐκθέται αὐτοῦ δὲν εἶνε πάντες διαιρετοὶ διὰ 3, ἀλλ' οἱ ἐκθέται παντὸς κύβου εἶνε πάντες διαιρετοὶ διὰ 3· διότι προκύπτουσιν ἐξ ἄλλων ἐκθετῶν διὰ τοῦ τριπλασιασμοῦ.

Σημείωσις. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀληθεύει καὶ διὰ πᾶσαν δύναμιν καὶ ἀποδεικνύεται ὁμοίως.

Β'. ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

Πότε ἀριθμὸς εἶνε διαιρετὸς δι' ἄλλου.

Ἔχοντες δύο ἀριθμοὺς ἀναλελυμένους εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας, δυνάμεθα ἀμέσως νὰ διακρίνωμεν, ἂν ὁ εἷς εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ ἄλλου· τὸ δὲ γνώρισμα τῆς διαιρετότητος μανθάνομεν ἐκ τοῦ ἑξῆς θεμελιώδους θεωρήματος·

ΘΕΩΡΗΜΑ

124. *Διὰ νὰ εἶνε ἀριθμός τις διαιρετὸς δι' ἄλλου, πρέπει ὁ διαιρετέος νὰ περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ διαιρέτου καὶ ἕκαστον ἐξ αὐτῶν τοσάκις τοὐλάχιστον, ὁσάκις περιέχει αὐτὸν ὁ διαιρέτης· τοῦτο δὲ καὶ ἀρκεῖ.*

Ἀπόδειξις. Ὅταν ἡ διαίρεσις γίνηται ἀκριβῶς, ὁ διαιρετέος εἶνε γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου· ἤτοι (ἐδ. 49 ἰδιότ. 3) εἶνε τὸ γινόμενον πάντων τῶν παραγόντων τοῦ διαιρέτου καὶ πάντων τῶν παραγόντων τοῦ πηλίκου· ἄρα ὁ διαιρετέος θὰ περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ διαιρέτου καὶ ἕκαστον τοὐλάχιστον τοσάκις, ὁσάκις περιέχει αὐτὸν ὁ διαιρέτης. (Δύναται δὲ καὶ ἄλλους παράγοντας νὰ περιέχῃ μὴ ὑπάρχοντας ἐν τῷ διαιρέτῃ, ἢ νὰ περιέχῃ παράγοντά τινα περισσοτέρας φορὰς ἢ ὁ διαιρέτης. Οἱ τοιοῦτοι θὰ εἶνε παράγοντες τοῦ πηλίκου). Τοῦτο δὲ ἀρκεῖ· λέγω δηλαδή, ὅτι, ἐὰν ὁ διαιρετέος περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ διαιρέτου καὶ ἕκαστον ὄχι ὀλιγώτερον ἢ ὁ διαιρέτης, ἡ διαίρεσις γίνεται ἀκριβῶς. Διότι, ἂν ἀπὸ τῶν παραγόντων τοῦ διαιρετέου ἐξαλείψωμεν πάντας, ὅσους ἔχει καὶ ὁ διαιρέτης, καὶ ἰσάκις ἕκαστον, οἱ μένοντες παράγοντες τοῦ διαιρετέου θ' ἀποτελῶσι τὸ πηλίκον.

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς $2^4\times3^2\times5\times11^3\times17$
εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $2^2\times3\times5\times11^3$
(διότι ὁ πρῶτος περιέχει πάντας τοὺς παράγοντας τοῦ δευτέρου καὶ ἕκαστον ὄχι ὀλιγώτερον ἢ ὁ δεύτερος).

Τὸ δὲ πηλίκον ἀποτελεῖται ἐκ τῶν ἑξῆς παραγόντων· ἐκ τοῦ 2 δίς, ἐκ τοῦ 3 ἅπαξ καὶ ἐκ τοῦ 17· εἶνε λοιπὸν $2^2\times3\times17$.

Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς $3^5\times7^2\times11\times13^2$
εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $7^2\times11\times13$
καὶ τὸ πηλίκον εἶνε $3^5\times13$.

Ὁ δὲ ἀριθμὸς $2^2\times3^4\times5\times7^2$ δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ $2^2\times3\times5^2$· διότι ἔχει τὸν πρῶτον παράγοντα 5 ἅπαξ μόνον, ἐφ' ὁ διαιρέτης ἔχει αὐτὸν δίς.

*Εὕρεσις πάντων τῶν διαιρετῶν δοθέντος ἀριθμοῦ.

125. Στηριζόμενοι εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν πάντας τοὺς διαιρέτας δοθέντος ἀριθμοῦ, ἀφοῦ ἀναλύσωμεν αὐτὸν εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας.

Ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὸν ἀριθμὸν 1008· ἀναλύοντες αὐτὸν εὑρίσκομεν $1008=2^4\times3^2\times7$.

Διὰ νὰ εὕρω πάντας τοὺς διαιρέτας τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, σκέπτομαι ὡς ἑξῆς·

Ἕκαστος διαιρέτης τοῦ 1008 δὲν δύναται νὰ περιέχῃ ἄλλους πρώτους παράγοντας ἢ τοὺς 2, 3 καὶ 7· καὶ τὸν μὲν 2 δύναται νὰ περιέχῃ ἢ οὐδόλως ἢ ἅπαξ ἢ δὶς ἢ τρὶς ἢ τετράκις· ὥστε ἕκαστος διαιρέτης τοῦ 1008 ἐξ ἅπαντος θὰ περιέχῃ ἕνα ἐκ τῶν ἑξῆς παραγόντων

$$1,\quad 2,\quad 2^2,\quad 2^3,\quad 2^4.$$

διότι, ὅταν μηδόλως περιέχῃ τὸν 2, δύναμαι νὰ γράψω εἰς τὴν θέσιν αὐτοῦ τὴν μονάδα ὡς παράγοντα· τὸν δὲ 3 θὰ περιέχῃ ἢ οὐδόλως ἢ ἅπαξ ἢ δίς· ὥστε ἐξ ἅπαντος θὰ περιέχῃ καὶ ἕνα ἐκ τῶν ἑξῆς παραγόντων·

$$1,\quad 3,\quad 3^2.$$

τὸν δὲ 7 θὰ περιέχῃ ἢ οὐδόλως ἢ ἅπαξ μόνον· ὥστε θὰ περιέχῃ καὶ ἕνα ἐκ τῶν ἑξῆς παραγόντων 1, 7.

Ἐκ τούτων γίνεται φανερόν, ὅτι ἕκαστος διαιρέτης τοῦ 1008 θὰ εἶνε γινόμενον τριῶν παραγόντων, ἐξ ὧν

ὁ μὲν πρῶτος εἶνε εἷς ἐκ τῶν ἀριθμῶν $1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,$
ὁ δὲ δεύτερος εἷς ἐκ τῶν $1,\ 3,\ 3^2,$
ὁ δὲ τρίτος εἷς ἐκ τῶν $1,\ 7.$

Διὰ νὰ εὕρω λοιπὸν ἕνα διαιρέτην τοῦ 1008, ἀρκεῖ νὰ λάβω ἕνα οἱονδήποτε ἀριθμὸν τῆς πρώτης σειρᾶς καὶ ἕνα οἱονδήποτε ἐκ τῆς δευτέρας καὶ ἕνα οἱονδήποτε ἐκ τῆς τρίτης· ἔπειτα νὰ σχηματίσω τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ληφθέντων ἀριθμῶν· τὸ γινόμενον τοῦτο θὰ εἶνε διαιρέτης τοῦ 1008· διότι ὁ 1008 περιέχει πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας αὐτοῦ καὶ ἕκαστον ἐξ ἴσου ἢ καὶ περισσότερον. Καὶ διὰ νὰ εὕρω πάντας τοὺς διαιρέτας τοῦ 1008, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσω ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς πρώτης σειρᾶς ἐφ' ἕκαστον τῆς δευτέρας, ἔπειτα πάλιν ἕκαστον τῶν προκυπτόντων γινομένων ἐφ' ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς τρίτης σειρᾶς· τὰ τελευταῖα ταῦτα γινόμενα θὰ εἶνε πάντες οἱ διαιρέται τοῦ 1008.

Πολλαπλασιάζων ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς πρώτης σειρᾶς ἐφ' ἕκαστον τῆς δευτέρας, εὑρίσκω τὰ ἑξῆς γινόμενα·

1,	2,	2^2,	2^3,	2^4,
3,	2×3	$2^2\times3$	$2^3\times3$	$2^4\times3$
3^2	2×3^2	$2^2\times3^2$	$2^3\times3^2$	$2^4\times3^2$

Πολλαπλασιάζων δὲ ἕκαστον τῶν γινομένων τούτων ἐφ' ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς τρίτης σειρᾶς εὑρίσκω τὰ ἑξῆς γινόμενα.

1	2	2^2	2^3	2^4
3	2×3	$2^2\times3$	$2^3\times3$	$2^4\times3$
3^2	2×3^2	$2^2\times3^2$	$2^3\times3^2$	$2^4\times3^2$
7	2×7	$2^2\times7$	$2^3\times7$	$2^4\times7$
3×7	$2\times3\times7$	$2^2\times3\times7$	$2^3\times3\times7$	$2\ \times3\times7$
$3^2\times7$	$2\times3^2\times7$	$2^2\times3^2\times7$	$2^3\times3^2\times7$	$2^4\times3^2\times7$

ταῦτα δὲ εἶνε πάντες οἱ διαιρέται τοῦ 1008·

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τοὺς σεσημειωμένους πολλαπλασιασμούς, εὑρίσκομεν

1	2	4	8	16
3	6	12	24	48
9	18	36	72	144
7	14	28	56	112
21	42	84	168	336
63	126	252	504	1008

126. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών·

Διὰ νὰ εὕρωμεν πάντας τοὺς διαιρέτας δοθέντος ἀριθμοῦ, ἀναλύομεν αὐτὸν εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας καὶ σχηματίζομεν πίνακα συγκείμενον ἐκ τόσων ὁριζοντίων σειρῶν, ὅσοι εἶνε οἱ διάφοροι πρῶτοι παράγοντες τοῦ ἀριθμοῦ. Ἑκάστη δὲ τῶν σειρῶν τούτων περιέχει πρώτην τὴν μονάδα· ἔπειτα ἕνα πρῶτον *παράγοντα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ καὶ τὰς δυνάμεις αὐτοῦ κατὰ σειρὰν μέχρι τῆς ἐν τῷ δοθέντι ἀριθμῷ περιεχομένης.*

Μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς πρώτης σειρᾶς ἐφ' ἕκαστον τῆς δευτέρας· ἔπειτα ἕκαστον τῶν γινομένων τούτων ἐφ' ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς τρίτης, καὶ οὕτω καθεξῆς. Τὰ τελευταῖα γινόμενα, τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς τελευταίας σειρᾶς, εἶνε πάντες οἱ διαιρέται τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

Σημείωσις. Ὁ ἀριθμὸς τῶν διαιρετῶν τοῦ 1008 εἶνε $5\times3\times2$, ἤτοι τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ἀριθμῶν, οἵτινες ἐκφράζουσι πόσους ἀριθμοὺς ἔχει ἑκάστη σειρά. Τοῦτο ἀληθεύει γενικῶς περὶ παντὸς ἀριθμοῦ.

Γ'. ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΟΥΣ ΠΡΩΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ἐκ τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος τῆς διαιρετότητος (ἐδ. 124) ἀποδεικνύονται εὐκολώτατα τὰ ἑξῆς θεωρήματα περὶ τῶν πρὸς ἀλλήλους πρώτων ἀριθμῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ον.

127. *Οἱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ οὐδένα ἔχουσι πρῶτον παράγοντα κοινὸν καὶ ἀντιστρόφως· οἱ μηδένα ἔχοντες πρῶτον παράγοντα κοινὸν εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.*

Παραδείγματος χάριν, οἱ ἀριθμοὶ $2\times3\times5^2$, $2^2\times7$, $11^3\times7$ εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· διότι οὐδένα δύνανται νὰ ἔχωσι κοινὸν διαιρέτην.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ον

128. *Ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους καὶ αἱ δυνάμεις εἶνε ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.*

Διότι, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ δὲν ἔχωσι κανένα πρῶτον παράγοντα κοινόν, οὐδὲ αἱ δυνάμεις αὐτῶν θὰ ἔχωσι τοιοῦτον.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3ον.

129. *Ἐὰν ἀριθμός τις διαιρῆται δι' ἄλλων ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.*

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἀριθμός τις Α διαιρεῖται δι' ἑνὸς ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν $2^3\times7$, $3\times5^2\times11$ 13×17^2, οἵτινες, ὡς πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, ἔχουσιν ὅλως διαφόρους παράγοντας (ὁ αὐτὸς δηλαδὴ πρῶτος παράγων δὲν εὑρίσκεται εἰς δύο ἀριθμούς), λέγω ὅτι ὁ ἀριθμὸς Α θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Διότι ὁ Α πρέπει νὰ περιέχῃ (ἐδ. 124) πάντας τοὺς παράγοντας 2^3, 3^2, 5, 7, 11, 13, 17, τουτέστι πάντας τοὺς παράγοντας τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμῶν, καὶ κατ' ἀκολουθίαν εἶνε διαιρετὸς διὰ τοῦ γινομένου τούτου.

Σημείωσις. Ὅταν ἀριθμὸς διαιρῆται διὰ δύο ἄλλων, μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους (ἢ διὰ πολλῶν ἄλλων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο), δυνατὸν νὰ μὴ διαιρῆται διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.

Παραδείγματος χάριν, ὁ 72 διαιρεῖται διὰ τοῦ 24 καὶ διὰ τοῦ 12, ἀλλὰ δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 288.

Παρατήρησις. Τὸ θεώρημα τοῦτο εὐκολύνει τὴν εὕρεσιν τῶν γνωρισμάτων τῆς διαιρετότητος, ὅταν ὁ διαιρέτης εἶνε σύνθετος· παραδείγματος χάριν, διὰ νὰ διαιρῆται ἀριθμός τις διὰ τοῦ 6, ἤτοι διὰ 2×3, ἀνάγκη νὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ 2 καὶ διὰ τοῦ 3, τοῦτο δὲ καὶ ἀρκεῖ. (Διότι οἱ 2 καὶ 3 εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους).

Ἐπίσης διὰ τοῦ 12 διαιρεῖται πᾶς ἀριθμός, ἐὰν διαιρῆται διὰ τοῦ 3 καὶ διὰ τοῦ 4· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Δ'. ΕΥΡΕΣΙΣ
ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΟΥ ΑΡΙΘΜΩΝ
ΑΝΑΛΕΛΥΜΕΝΩΝ ΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ

Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας εὑρίσκεται κατὰ τὸ ἑπόμενον θεώρημα·

ΘΕΩΡΗΜΑ

130. *Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν εἶνε γινόμενον περιέχον μόνον τοὺς κοινοὺς αὐτῶν πρώτους παράγοντας, ἕκαστον δὲ μὲ τὸν ἐλάχιστον ἐκθέτην του.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν·

$$360, \quad 900, \quad 672.$$

Ἀναλύοντες αὐτοὺς εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας, εὑρίσκομεν

$$360=2^3\times3^2\times5$$
$$900=2^2\times3^2\times5^2$$
$$672=2^5\times3\times7$$

Οἱ κοινοὶ πρῶτοι παράγοντες τῶν ἀριθμῶν εἶνε ὁ 2 (δὶς) καὶ ὁ 3 (ἅπαξ) λέγω, ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶνε τὸ γινόμενον $2^2\times3$, ἤτοι ὁ 12.

Ἀπόδειξις. Ὅτι ὁ ἀριθμὸς $2^2\times3$ εἶνε κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, εἶνε πρόδηλον· διότι πάντες οἱ πρῶτοι παράγοντες αὐτοῦ περιέχονται εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν καὶ ἢ ἰσάκις ἢ περισσάκις. Ὅτι δὲ εἶνε καὶ ὁ μέγιστος, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς·

Διὰ νὰ εἶνε ἀριθμός τις κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, δὲν πρέπει νὰ περιέχῃ ἄλλους πρώτους παράγοντας ἢ τοὺς εἰς πάντας κοινούς· τουτέστι τὸν 2 καὶ τὸν 3 (διότι ἂν περιέχῃ οἱονδήποτε ἄλλον πρῶτον παράγοντα, δὲν θὰ διαιρῇ πάντας τοὺς δοθέντας ἀριθμούς· ἂν λόγου χάριν περιέχῃ τὸν 5, δὲν θὰ διαιρῇ τὸν 672, ἂν δὲ περιέχῃ τὸν 7, δὲν θὰ διαιρῇ τὸν 360 οὐδὲ τὸν 900· ἂν δὲ περιέχῃ τὸν 11, δὲν θὰ διαιρῇ κανένα) καὶ τὸν μὲν 2 δὲν δύναται νὰ περιέχῃ περισσότερον ἢ δίς, τὸν δὲ 3 μόνον ἅπαξ (διότι, ἂν περιέχῃ τὸν τρίς, δὲν θὰ διαιρῇ τὸν 900, ἂν δὲ περιέχῃ τὸν 3 δίς, δὲν θὰ διαιρῇ τὸν 672). Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ κοινὸς διαιρέτης $2^2 \times 3$ περιέχει πάντας τοὺς δυνατοὺς παράγοντας καὶ οὐδεμίαν πλέον αὔξησιν ἐπιδέχεται, χωρὶς νὰ παύσῃ νὰ εἶνε κοινὸς διαιρέτης· ἄρα εἶνε ὁ μέγιστος τῶν κοινῶν διαιρετῶν.

Σημείωσις. Ἐὰν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ δὲν ἔχωσι πρώτους παράγοντας κοινούς, ὑποτίθεται, ὅτι ἔχουσι τὴν μονάδα. Οἱ ἀριθμοὶ τότε εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ε'. ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΥ ΕΥΡΕΣΙΣ ΑΥΤΟΥ ΔΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ ΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ

Ὁρισμοί.

131. *Κοινὸν πολλαπλάσιον* δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται πᾶς ἀριθμός, ὅστις διαιρεῖται ἀκριβῶς δι' ἑκάστου ἐξ αὐτῶν.

Παραδείγματος χάριν, ὁ 24 εἶνε κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 2, 4, 6· διότι διαιρεῖται δι' ἑκάστου τούτων ἀκριβῶς.

Κοινὰ πολλαπλάσια δοθέντων ἀριθμῶν, οἷον τῶν 3, 5, 8, ὑπάρχουσιν ἄπειρα· διότι τὸ γινόμενον αὐτῶν $3 \times 5 \times 8$ ἢ 120 εἶνε κοινὸν πολλαπλάσιον· καὶ πᾶν πολλαπλάσιον τούτου εἶνε πολλαπλάσιον κοινὸν τῶν 3, 5, 8 (ἐδ. 77).

Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται (ὡς καὶ τὸ ὄνομα δεικνύει) τὸ μικρότερον ἐξ ὅλων τῶν κοινῶν πολλαπλασίων τῶν ἀριθμῶν τούτων

Παραδείγματος χάριν, τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4 ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον εἶνε τὸ 12· διότι οὐδεὶς μικρότερος τοῦ 12 ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ πάντων τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4.

Οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶνε οἱ δοθέντες ἀριθμοί, ἔχουσι πάντοτε ἐλάχιστον τι κοινὸν πολλαπλάσιον· διότι οὐδὲν κοινὸν πολλαπλάσιον δύναται νὰ εἶνε μικρότερον τοῦ μεγίστου ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἡ εὕρεσις τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς πρώτους παράγοντας γίνεται κατὰ τὸ ἑξῆς θεώρημα·

ΘΕΩΡΗΜΑ

132. *Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δσωνδήποτε ἀριθμῶν εἶνε γινόμενον περιέχον πάντας τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας* (κοινοὺς καὶ μὴ κοινούς)· *καὶ ἕκαστον μὲ τὸν μέγιστον ἐκθέτην του.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν·

$$720, \quad 240, \quad 462.$$

Ἀναλύοντες τοὺς ἀριθμοὺς τούτους εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας, εὑρίσκομεν, ὅτι εἶνε

$$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$$
$$240 = 2^4 \times 3 \times 5$$
$$462 = 2 \times 3 \times 7 \times 11.$$

Οἱ πρῶτοι παράγοντες τῶν ἀριθμῶν τούτων εἶνε οἱ ἑξῆς 2, 3, 5, 7, 11. Καὶ μέγιστος ἐκθέτης τοῦ μὲν 2 εἶνε ὁ 4, τοῦ δὲ 3 εἶνε ὁ 2, τῶν δὲ 5, 7, 11 ἡ μονὰς (ἐδ. 122 Σημ.)· λέγω δέ, ὅτι τὸ γινόμενον

$$2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11$$

εἶνε τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἀπόδειξις. Ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶνε κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, εἶνε προφανές· διότι περιέχει πάντας τοὺς παράγοντας ἑκάστου καὶ ὄχι ὀλιγώτερον (ἐδ 124)· ὅτι δὲ εἶνε καὶ τὸ ἐλάχιστον, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς·

Πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ἐξ ἅπαντος θὰ περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας αὐτῶν (διότι, ἂν λόγου χάριν δὲν περιέχῃ τὸν 11, δὲν θὰ διαιρῆται διὰ τοῦ 462· καὶ ἂν δὲν περιέχῃ τὸν 2, δὲν θὰ διαιρῆται δι' οὐδενὸς) καὶ θὰ περιέχῃ ἕκαστον μὲν ἐκθέτην ὄχι μικρότερον ἢ οὗτοι (διότι, ἂν λόγου χάριν ἔχῃ τὸν 2 τρὶς μόνον, ἤτοι ἂν ἔχῃ τὸν 2^3, δὲν θὰ διαιρῆται διὰ τῶν 720 καὶ 240, ἂν δὲ ἔχῃ τὸν 3 ἅπαξ μόνον, δὲν θὰ διαιρῆται διὰ τοῦ 720)· ὥστε ἕκαστον κοινὸν πολλαπλάσιον ἐξ ἅπαντος θὰ περιέχῃ τοὺς ἑξῆς παράγοντας, 2^4, 3^2, 5, 7, 11.

Ἄρα τὸ κοινὸν πολλαπλάσιον $2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11$, ὅπερ ἔχει μόνους τούτους τοὺς παράγοντας, τοὺς ἀναγκαίως ὑπάρχοντας εἰς πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον, εἶνε τὸ ἐλάχιστον.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον.

133. *Κοινὰ πολλαπλάσια δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εἶνε μόνα τὰ πολλαπλάσια τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου αὐτῶν.*

Διότι κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον Π θὰ περιέχῃ τοὺς παράγοντας, ἐξ ὧν γίνεται τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον Ε, ἑπομένως τὸ Π θὰ διαιρῆται διὰ τοῦ Ε· ἤτοι θὰ εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ Ε. Ὅτι δὲ καὶ ἀντιστρόφως πᾶν πολλαπλάσιον τοῦ Ε εἶνε κοινὸν πολλαπλάσιον, εἶνε προφανές.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον.

134. *Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο εἶνε τὸ γινόμενον αὐτῶν.*

Διότι οὐδεὶς πρῶτος παράγων εἶνε κοινὸς εἰς δύο ἐκ τῶν ἀριθμῶν τούτων· ὥστε τὸ ἐλάχιστον αὐτῶν κοινὸν πολλαπλάσιον θὰ περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν. Ἐὰν λοιπὸν ἀντικαταστήσωμεν τοὺς παράγοντας ἑκάστου ἀριθμοῦ διὰ τοῦ εὑρεθέντος γινομένου αὐτῶν, τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον θὰ μετασχηματισθῇ εἰς τὸ γινόμενον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Παραδείγματος χάριν, τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν

$$3\times5^2\times7,\quad 2^3\times11^2,\quad 13\times17^2$$

εἶνε κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα

$$3\times5^2\times7\times2^2\times11^2\times13\times17^2$$

ἤτοι τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν.

Σημείωσις. Ὅταν οἱ ἀριθμοὶ δὲν εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν εἶνε μικρότερον τοῦ γινομένου των.

* ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

(Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εὑρίσκεται καὶ ἄνευ τῆς ἀναλύσεως αὐτῶν εἰς πρώτους παράγοντας, στηρίζεται δὲ ἡ εὕρεσις αὐτοῦ ἐπὶ τῶν ἑξῆς θεωρημάτων·)

ΘΕΩΡΗΜΑ

135. *Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἀριθμῶν καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν πολλαπλασιαζόμενοι δίδουσι τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀριθμῶν.*

Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο τυχόντες ἀριθμοί, Δ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν καὶ Ε τὸ ἐλάχιστον αὐτῶν κοινὸν πολλαπλάσιον· λέγω, ὅτι εἶνε

$$\mathrm{E}\times\Delta=\mathrm{A}\times\mathrm{B}.$$

Ἀπόδειξις. Διότι, ἂν ἀναλύσωμεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς Α καὶ Β εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας καὶ σχηματίσωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην Δ καὶ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν Ε κατὰ τὰ προηγούμενα θεωρήματα (ἐδ. 130 καὶ 132), εἰς μὲν τὸν Ε θὰ περιέχωνται οἱ μὴ κοινοὶ παράγοντες καὶ οἱ κοινοὶ μὲ τὸν μεγαλήτερον ἐκθέτην αὐτῶν· εἰς δὲ τὸν Δ θὰ περιέχωνται οἱ ἐπίλοιποι παράγοντες, τουτέστιν οἱ κοινοὶ μὲ τὸν μικρότερον ἐκθέτην των· ὥστε ἐκ τῶν παραγόντων τῶν δύο ἀριθμῶν Α, Β τινὲς μὲν ἀπαρτίζουσι τὸν Ε, οἱ δὲ λοιποὶ τὸν Δ· ἑπομένως εἶνε $\Delta \times E = A \times B$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

136. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἀριθμῶν, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον αὐτῶν διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.***

Διότι τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀριθμῶν εἶνε $A \times B$ ἢ καὶ $\Delta \times E$, ἐὰν δὲ τοῦτο διαιρεθῇ διὰ Δ, θὰ δώσῃ πηλίκον τὸ Ε.

ΘΕΩΡΗΜΑ

137. ***Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀντικαταστήσωμεν δύο ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου αὐτῶν.***

Ἔστωσαν τυχόντες ἀριθμοὶ οἱ ἑξῆς·

Α, Β, Γ, Δ

καὶ Ε τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν Α καὶ Β· λέγω, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ

Α Β, Γ, Δ

καὶ οἱ Ε, Γ, Δ

ἔχουσιν ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον.

Ἀπόδειξις. Διότι πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ, Δ ὡς κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν Α καὶ Β θὰ εἶνε πολλαπλάσιον καὶ τοῦ Ε (ἐδ. 133) ἄρα θὰ εἶνε κοινὸν πολλαπλάσιον καὶ τῶν ἀριθμῶν Ε, Γ, Δ. Καὶ ἀντιστρόφως· πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν Ε, Γ, Δ, ὡς πολλαπλάσιον τοῦ Ε, θὰ εἶνε πολλαπλάσιον καὶ τῶν Α καὶ Β (ἐδ. 77)· ἄρα θὰ εἶνε κοινὸν πολλαπλάσιον καὶ τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ, Δ

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι καὶ αἱ δύο σειραὶ τῶν ἀριθμῶν ἔχουσι τὰ αὐτὰ κοινὰ πολλαπλάσια· ἄρα ἔχουσι καὶ τὸ αὐτὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον.

Στηριζόμενοι εἰς τὸ θεώρημα τοῦτο, δυνάμεθα νὰ ἀναγάγωμεν τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου πολλῶν ἀριθμῶν εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου δύο ἀριθμῶν (ὡς καὶ τὴν εὕρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου πολλῶν ἀριθμῶν). Πρὸς τοῦτο δοθέντων τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ, Δ, εὑρίσκομεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον Ε τῶν Α, Β· ἔπειτα τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον Ζ τῶν Ε, Γ· καὶ τέλος τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον Η τῶν Ζ Θ. Τὸ Η θὰ εἶνε τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.)

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ μικρότεροι τοῦ 20 ἀριθμοὶ οἱ πρῶτοι πρὸς αὐτόν.

2) Νὰ εὑρεθῶσι πάντες οἱ κοινοὶ διαιρέται δύο ἀριθμῶν (ἢ καὶ περισσοτέρων).

Ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ ὁ μέγιστος ἐξ αὐτῶν (ἐδ. 104).

3) Νὰ διακρίνωμεν, ἂν ἀριθμός τις εἶνε διαιρετὸς διὰ 45 ἢ διὰ 18 (ἐδ. 129 Παρατήρησις).

4) Τὸ διπλάσιον τετραγώνου δὲν εἶνε τετράγωνον, οὐδὲ τὸ τριπλάσιον· καὶ γενικῶς τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ μὴ τετραγώνου ἐπὶ ἄλλον ὅστις εἶνε τετράγωνον, δὲν δύναται νὰ εἶνε τετράγωνον (ἐδ. 123).

5) Νὰ ἀποδειχθῶσιν αἱ ἰδιότητες τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου (ἐδ. 104, 105, 106, 107, 108)· διὰ τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς πρώτους παράγοντας.

6) Νὰ δειχθῇ ἡ ἑξῆς πρότασις «Ἀριθμὸς πρῶτος πρὸς ἕκαστον τῶν παραγόντων γινομένου εἶνε πρῶτος καὶ πρὸς τὸ γινόμενον»· καὶ ἀντιστρόφως «ἀριθμὸς πρῶτος πρὸς γινόμενον εἶνε πρῶτος καὶ πρὸς ἕκαστον παράγοντα τοῦ γινομένου» (ἐδ. 127).

7) Ἐκ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν καὶ ἐκ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου αὐτῶν νὰ εὕρωμεν τοὺς ἀριθμούς.

Τὸ δοθὲν ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον Ε ὀφείλει νὰ περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου Δ καὶ ἕκαστον μὲ ἐκθέτην ἴσον ἢ μεγαλήτερον (ἐδ. 132)· τουτέστιν ὀφείλει νὰ εἶνε Ε διαιρετὸν διὰ Δ. Τὸ δὲ πρόβλημα ἐπιδέχεται ἐν γένει πολλὰς λύσεις· ἂν λόγου χάριν δοθῇ $Δ=2^2\times 3$ καὶ $Ε=2^5\times 3^2\times 7$, ἑκάτερος τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν θὰ περιέχῃ ὡς παράγοντα τὸν Δ (ἤτοι τὸν 12), θὰ περιέχῃ δὲ καὶ τὸν ἕνα τῶν ἀριθμῶν ἑκάστης τῶν ἑξῆς σειρῶν.

$$\begin{array}{ll} 1, & 2^3 \\ 1, & 3 \\ 1, & 7 \end{array}$$

ὥστε αἱ λύσεις εἶνε αἱ ἑξῆς τέσσαρες·

$A=12=\Delta$	$A=12\times 3$	$A=12\times 8$	$A=12\times 24$
$B=12\times 168=E$	$B=12\times 56$	$B=12\times 21$	$B=12\times 7$

8) Ἐὰν πάντες οἱ διαιρέται ἀριθμοῦ γραφῶσιν εἰς μίαν σειρὰν κατὰ τάξιν μεγέθους, τὸ γινόμενον δύο διαιρετῶν ἐξ ἴσου ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων θὰ εἶνε πάντοτε ἴσον τῷ ἀριθμῷ.

9) Ἐὰν ἀριθμός τις δὲν εἶνε διαιρετὸς δι' οὐδενὸς ἐκ τῶν πρώτων ἀριθμῶν, ὧν τὰ τετράγωνα περιέχει, ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶνε πρῶτος (ἐδ. 112).

Ἔστω τοιοῦτος ἀριθμὸς ὁ Α, ἐὰν δὲν εἶνε πρῶτος, θ' ἀναλύηται εἰς γινόμενον δύο ἄλλων ἀριθμῶν· ἂς ὑποτεθῇ, ὅτι εἶνε $A=\Pi\times\Pi'$, τότε

$$A^2=\Pi^2\times\Pi'^2.$$

Ἀλλ' ἡ ἰσότης αὕτη εἶνε ἀδύνατος· διότι ἑκάτερον τῶν τετραγώνων Π^2 Π'^2, ὑπερβαίνει τὸν Α· ἄρα τὸ δεύτερον μέρος ὑπερβαίνει τὸ $A\times A$ ἤτοι τὸ A^2.

1905

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΝ Γ'.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Πρῶται ἔννοιαι

138. Ἐὰν τὸ πρᾶγμα, ὅπερ παριστᾷ ἡ μονὰς 1, μοιρασθῇ εἰς ἴσα μέρη, ἕκαστον ἐκ τῶν μερῶν τούτων ἐν σχέσει πρὸς τὸ ὅλον θεωρούμενον, πρέπει νὰ παρασταθῇ διὰ νέου ἀριθμοῦ. Καὶ ἂν μὲν τὸ πρᾶγμα μοιρασθῇ εἰς δύο ἴσα, ἑκάτερον ἐκ τούτων λέγεται *ἥμισυ* καὶ παρίσταται ὡς ἑξῆς $\frac{1}{2}$, ἂν δὲ εἰς τρία ἴσα μοιρασθῇ ἕκαστον λέγεται ἓν *τρίτον* καὶ γράφεται ($\frac{1}{3}$,) ἂν δὲ εἰς τέσσαρα, ἕκαστον λέγεται ἓν *τέταρτον* ($\frac{1}{4}$), καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τὰ δύο ἡμίση ἑκάστου πράγματος συναποτελοῦσιν (ὅταν ἑνωθῶσι) τὸ ὅλον πρᾶγμα· ὥστε εἶνε $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

Καὶ τὰ τρία τρίτα ἑκάστου πράγματος συναποτελοῦσι τὸ ὅλον πρᾶγμα· ὥστε εἶνε $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$.

Ὁμοίως εἶνε $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$, κτλ.

Ὥστε οἱ νέοι ἀριθμοὶ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... εἶνε μέρη τέλεια τῆς μονάδος 1· ἤτοι προκύπτουσιν ἐξ αὐτῆς ἂν διαιρεθῇ εἰς ἴσα μέρη.

Ἐκ τούτων ὁδηγούμενοι δίδομεν τοὺς ἑξῆς ὁρισμούς.

Ὁρισμοί.

139. *Κλασματικὴ μονὰς* λέγεται πᾶν μέρος τέλειον τῆς μονάδος 1· τουτέστι πᾶν μέρος αὐτῆς, ὅπερ πολλάκις ληφθὲν δίδει αὐτήν· αὐτὴ δὲ ἡ μονὰς 1 λέγεται *ἀκεραία*.

140. *Ἀκέραιοι ἀριθμοί*, λέγονται οἱ ἐκ τῆς ἀκεραίας μονάδος 1 διὰ τῆς ἐπαναλήψεως γινόμενοι, ὡς $1+1$ ἢ 2, $1+1+1$ ἢ 3, κτλ., ἔτι δὲ καὶ αὐτὴ ἡ μονὰς 1.

Κλασματικοὶ ἀριθμοί, ἢ ἁπλῶς *κλάσματα*, λέγονται οἱ γινόμενοι ἐκ μιᾶς κλασματικῆς μονάδος δι' ἐπαναλήψεως· οἷον $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ (δύο τρίτα). $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ (τρία πέμπτα)· ἔτι δὲ καὶ αὐταὶ αἱ κλασματικαὶ μονάδες.

Ὥστε *πᾶς ἀριθμὸς εἶνε ἄθροισμα μονάδων ἢ καὶ μία μονάς*.

Γραφὴ τῶν κλασμάτων.

141. Ἕκαστον κλάσμα γράφεται διὰ δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν· καὶ ὁ μὲν πρῶτος δεικνύει πόσας μονάδας (κλασματικὰς) ἔχει τὸ κλάσμα· ὁ δὲ δεύτερος δηλοῖ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τούτων, ἤτοι δεικνύει εἰς πόσα μέρη διηρέθη ἡ ἀκεραία μονὰς καὶ ἔδωκε τὴν κλασματικήν.

Καὶ ὁ μὲν πρῶτος λέγεται *ἀριθμητής*, ὁ δὲ δεύτερος (ὁ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων δηλῶν) λέγεται *παρονομαστής*· οἱ δύο δὲ ὁμοῦ λέγονται *ὅροι* τοῦ κλάσματος. Γράφεται δὲ ὁ παρονομαστὴς ὑποκάτω τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ χωρίζεται ἀπ' αὐτοῦ διὰ γραμμῆς, οἷον·

τὸ ἓν πέμπτον γράφεται (ὡς καὶ ἀνωτέρω εἴπομεν) $\frac{1}{5}$

ὁ ἀριθμὸς δύο τρίτα, ἤτοι $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ γράφεται $\frac{2}{3}$

ὁ ἀριθμὸς τρία δεύτερα, ἤτοι $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ γράφεται $\frac{3}{2}$

κτλ. κτλ.

Σημείωσις. Ὅταν ἀπαγγέλλωμεν τὸ κλάσμα, τὸν μὲν ἀριθμητὴν ἀπαγγέλλομεν ὡς ἀριθμητικὸν ἀπόλυτον ὄνομα, τὸν δὲ παρονομαστὴν ὡς τακτικόν· οἷον τρία ὄγδοα $\left(\frac{3}{8}\right)$ πέντε ἕβδομα $\left(\frac{5}{7}\right)$ κτλ.

Παρατήρησις.

142. Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος εἶνε ἴσοι, ὡς $\frac{5}{5}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, τὸ κλάσμα εἶνε ἴσον μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα· διότι $\frac{2}{2}$ εἶνε $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, $\frac{3}{3}$ εἶνε $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$· ταῦτα δέ, ὡς ἐμάθομεν ἐξ ἀρχῆς, ἀποτελοῦσι τὴν μονάδα 1.

Ὅταν δὲ ὁ ἀριθμητὴς εἶνε μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα εἶνε μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος. Διότι π. χ. τὸ $\frac{3}{5}$ εἶνε $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ χρειάζεται λοιπὸν ἀκόμη δύο πέμπτα $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ διὰ νὰ γίνῃ ἴσον μὲ τὴν μονάδα 1.

Ὅταν δὲ ὁ ἀριθμητὴς εἶνε μεγαλήτερος τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα εἶνε μεγαλήτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος.

Διότι π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{7}{6}$ σύγκειται ἐξ 6 ἕκτων (ἅτινα ἀποτελοῦσιν 1) καὶ ἐξ ἑνὸς ἕκτου· ὥστε ὑπερβαίνει τὴν μονάδα 1.

Τροπὴ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἰς κλάσματα.

143. Ἡ ἀκεραία μονὰς 1 δύναται, ὡς ἀνωτέρω εἴδομεν, νὰ παρασταθῇ ὡς κλάσμα ἔχον ἴσους ὅρους· ὡς $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$, κτλ.

Καὶ πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς κλάσμα, ἐὰν αἱ μονάδες αὐτοῦ τραπῶσιν εἰς κλάσματα.

Ἐὰν παραδείγματος χάριν, θέλωμεν νὰ τρέψωμεν τὸν ἀριθμὸν 8 εἰς πέμπτα (ἤτοι εἰς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὸν 5), ἀρκεῖ νὰ ἐνθυμηθῶμεν, ὅτι ἑκάστη ἀκεραία μονὰς ἔχει 5 πέμπτα· ἄρα αἱ 8 μονάδες θὰ ἔχωσιν 8 φορὰς 5 πέμπτα, ἤτοι 5×8 πέμπτα· ὥστε εἶνε

$$8=\frac{5\times8}{5}=\frac{40}{5}$$

Ἐκ τούτων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών·

Διὰ νὰ τρέψωμεν ἀκέραιον εἰς κλάσμα ἔχον δοθέντα παρονομαστήν, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν δοθέντα παρονομαστὴν καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον γράφομεν παρονομαστὴν τὸν δοθέντα.

Περὶ τῶν μικτῶν ἀριθμῶν.

Τροπὴ αὐτῶν εἰς κλάσματα.

144. *Μικτὸς ἀριθμὸς* λέγεται ὁ συγκείμενος ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος· οἷον $2\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{6}$ κτλ.

Ὁ μικτὸς ἀριθμὸς τρέπεται εἰς κλασματικόν· διότι τὸ ἀκέραιον μέρος του τρέπεται εἰς κλάσμα.

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, ὁ μικτὸς ἀριθμὸς $5\frac{3}{4}$. διὰ νὰ τρέψω αὐτὸν εἰς κλάσμα, ἀρκεῖ νὰ τρέψω τὸ ἀκέραιον μέρος 5 εἰς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν 4 (διότι καὶ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ ἔχει παρονομαστὴν 4). Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ῥηθέντα ὁ ἀκέραιος 5 τρεπόμενος εἰς τέταρτα γίνεται $\frac{5\times4}{4}$ ἢ $\frac{20}{4}$.

ὥστε ὁ μικτὸς $5\frac{3}{4}$ γίνεται $\frac{20}{4}$ καὶ $\frac{3}{4}$,

ἀλλὰ 20 τέταρτα καὶ 3 τέταρτα ἀποτελοῦσιν 23 τέταρτα (καθὼς 20 μῆνες καὶ 3 μῆνες ἀποτελοῦσιν 23 μῆνας, 20 δραχμαὶ καὶ 3 δραχμαὶ ἀποτελοῦσιν 23 δραχμὰς κτλ.)· ὥστε εἶνε

$$5\frac{3}{4}=\frac{23}{4}.$$

Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

Διὰ νὰ τρέψωμεν μικτὸν ἀριθμὸν εἰς κλασματικόν, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιόν του ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος, εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸν ἀριθμητὴν καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα γράφομεν τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

Ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων τοῦ κλάσματος.

145. Ἐὰν κλάσμα τι περιέχῃ ἀκεραίας μονάδας (ὅτε ὁ ἀριθμητὴς εἶνε μεγαλήτερος τοῦ παρονομαστοῦ), δυνάμεθα νὰ ἀποχωρίσωμεν αὐτάς.

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, τὸ κλάσμα $\frac{12}{5}$, ὅπερ περιέχει ἀκεραίας μονάδας· διότι ὁ ἀριθμητὴς 12 ὑπερβαίνει τὸν παρονομαστὴν 5.

Ἐπειδὴ πέντε πέμπτα ἑνούμενα ἀποτελοῦσι μίαν ἀκεραίαν μονάδα, ἂν ἀπὸ τῶν 12 πέμπτων λάβωμεν τὰ 5, σχηματίζομεν ἐξ αὐτῶν μίαν ἀκεραίαν μονάδα, μένουσι δὲ ἀκόμη 12—5, ἤτοι 7 πέμπτα· ἐὰν δὲ καὶ ἐκ τῶν 7 τούτων πέμπτων λάβωμεν τὰ 5, σχηματίζομεν ἄλλην μίαν ἀκεραίαν μονάδα καὶ μένουν ἀκόμη 2 πέμπτα (τὰ ὁποῖα δὲν ἀποτελοῦσιν ἀκεραίαν μονάδα)· ὥστε ὁ ἀριθμὸς $\frac{12}{5}$ ἀνελύθη εἰς 2 ἀκέραια καὶ $\frac{2}{3}$. ἤτοι εἶνε

$$\frac{12}{5}=2+\frac{2}{5}, \text{ ἢ } 2\frac{2}{5}.$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι τόσαι ἀκέραιαι μονάδες σχηματίζονται ἐκ τοῦ δοθέντος κλάσματος, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ ἀριθμητής του τὸν παρονομαστήν του· ὥστε τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ δοθέντος κλάσματος εὑρίσκεται, ἐὰν διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητὴς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.

Ἐντεῦθεν συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών·

Διὰ νὰ ἀποχωρίσωμεν τὸν εἰς κλάσμα τι περιεχόμενον ἀκέραιον, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· καὶ τὸ μὲν εὑρεθὲν πηλίκον εἶνε ὁ ἐν τῷ κλάσματι περιεχόμενος ἀκέραιος, τὸ δὲ ὑπόλοιπον (ἂν μείνῃ) *εἶνε ὁ ἀριθμητὴς τοῦ μένοντος κλάσματος* (ὅπερ θὰ ἔχῃ παρονομαστὴν τὸν τοῦ δοθέντος κλάσματος).

Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα εἶνε ἴσον μὲ ἀκέραιον ἀριθμὸν (ἰδὲ ἐδ. 143).

Θεμελιώδης ἰδιότης τῶν κλασμάτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

146. *Πᾶν κλάσμα πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του δίδει γινόμενον τὸν ἀριθμητήν του.*

Ἔστω τυχὸν κλάσμα τὸ $\frac{3}{5}$· λέγω, ὅτι, ἂν τὸ κλάσμα τοῦτο πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 5 (ἤτοι ἐπαναληφθῇ πέντε φοράς), θὰ δώσῃ γινόμενον 3.

Ἀπόδειξις. Τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$ εἶνε $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ καὶ ἐπαναληφθὲν 5 φορὰς δίδει.

$$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)+$$
$$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)$$

Ἕκαστον μέρος τοῦ $\frac{3}{5}$ λαμβάνεται πεντάκις· ὥστε γίνεται 1 ἀκέραιον·

ἄρα τὸ $\frac{3}{5}$ θὰ γίνῃ 3 ἀκέραια.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι εἶνε $\frac{3}{5}\times 5=3$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

147. *Πᾶν κλάσμα εἶνε πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του.*

Παραδείγματος χάριν, τὸ $\frac{5}{6}$ εἶνε τὸ πηλίκον τῆςδιαιρέσεως τοῦ 5 διὰ τοῦ 6.

Διότι τὸ $\frac{5}{6}$ ἑξάκις ληφθὲν γίνεται 5· ἤτοι

$$\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{5}{6}=5$$

ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ 5 ἐμοιράσθη εἰς 6 ἴσα μέρη καὶ ἕκαστον ἐκ τούτου εἶνε $\frac{5}{6}$.

Σημείωσις. Εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα φθάνομεν καὶ ὡς ἑξῆς· Ἂν πρόκειται νὰ μοιράσωμεν τὸν 5 εἰς 6 ἴσα μέρη, φανερὸν εἶνε, ὅτι δυνάμεθα νὰ μοιράσωμεν ἑκάστην μονάδα αὐτοῦ εἰς 6 ἴσα μέρη καὶ νὰ ἑνώσωμεν ἔπειτα τὰ πέντε πηλίκα· ἐπειδὴ δὲ ἐξ ἑκάστης μονάδος προκύπτει πηλίκον $\frac{1}{6}$, θὰ ἔχωμεν πηλίκον $\frac{5}{6}$.

Παρατήρησις.

148. Ἡ διαίρεσις τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν γίνεται νῦν τελεία διὰ τῶν κλασμάτων· καὶ τὸ πηλίκον παρίσταται ὡς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν διαιρετέον, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην· ὥστε, ἂν μὲν ὁ διαιρετέος εἶνε μικρότερος τοῦ διαιρέτου, τὸ πηλίκον εἶνε κλάσμα μὴ περιέχον ἀκεραίας μονάδας· ἂν δὲ τοὐναντίον ὁ διαιρετέος εἶνε μεγαλήτερος τοῦ διαιρέτου, τὸ πηλίκον ἔχει ἀκεραίας μονάδας καὶ θὰ εἶνε ἀκέραιον μέν, ἂν ἡ διαίρεσις (ἐκτελουμένη ὡς ἐν τῷ Α'. Βιβλίῳ ἐμάθομεν) δὲν ἀφίνῃ ὑπόλοιπον, μικτὸν δέ, ἂν τοὐναντίον.

Παραδείγματος χάριν, τὸ πηλίκον τοῦ 8 διὰ 10 εἶνε $\frac{8}{10}$.

Τὸ πηλίκον τοῦ 24 διὰ 3 εἶνε $\frac{24}{3}$, ἤτοι 8 ἀκέραια· τὸ δὲ πηλίκον τοῦ 25 διὰ 8 εἶνε $\frac{25}{8}$, ἤτοι $3\,\frac{1}{8}$.

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι, ὅταν ἡ διαίρεσις τῶν ἀκεραίων (ἣν ἐμάθομεν ἐν τῷ Α′ Βιβλίῳ) ἀφίνῃ ὑπόλοιπον, τὸ ἀκριβὲς πηλίκον σύγκειται ἐκ τοῦ διὰ τῆς πράξεως εὑρισκομένου ἀκεραίου πηλίκου καὶ ἐκ τοῦ κλάσματος, ὅπερ ἔχει ἀριθμητὴν μὲν τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην.)

Περὶ τῆς ἰσότητος τῶν κλασμάτων.

Ὁρισμοί.

149. *Ἴσα* λέγονται δύο κλάσματα, ἐὰν ἰσάκις λαμβανόμενα (τουτέστιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον πολλαπλασιαζόμενα) γίνονται ἀκέραιοι ἴσοι.

Ἄνισα δὲ λέγονται, ἐὰν γίνωνται ἀκέραιοι ἄνισοι· καὶ μεγαλήτερον λέγεται τὸ παράγον τὸν μεγαλήτερον ἀκέραιον, μικρότερον δὲ τὸ παράγον τὸν μικρότερον.

Ἔστωσαν ὡς παράδειγμα τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{2}{4}$ ἢ $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, ἐὰν λάβωμεν ἑκάτερον τούτων δὶς (ἤτοι ἂν διπλασιάσωμεν αὐτά), γίνονται

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4},$$

ἤτοι γίνονται ἀμφότερα 1·

ἄρα ἑκάτερον τῶν κλασμάτων $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{2}{4}$ εἶνε τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος 1· διότι διπλασιασθὲν ἔδωκε τὴν μονάδα 1· ἀνάγκη λοιπὸν νὰ δεχθῶμεν αὐτὰ ὡς ἴσα (ἄλλως θὰ εἶχεν ἡ μονὰς 1 δύο διάφορα ἡμίση).

Τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ εἶνε μεγαλήτερον τοῦ $\frac{1}{2}$, διότι λαμβανόμενα ἑξάκις γίνονται ἀμφότερα ἀκέραια· καὶ τὸ μὲν $\frac{2}{3}$ γίνεται 4, τὸ δὲ $\frac{1}{2}$ γίνεται 3

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ἀνάγεται ἡ ἰσότης καὶ ἡ ἀνισότης τῶν κλασμάτων εἰς τὴν ἰσότητα καὶ ἀνισότητα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Σημείωσις. Ἐὰν τὰ κλάσματα ἔχωσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ὡς $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, ἡ ἰσότης ἢ ἡ ἀνισότης αὐτῶν γίνεται φανερὰ ἐκ τῶν ἀριθμητῶν αὐτῶν.

Θερμησιακαζις

Ἰδιότητες τῶν κλασμάτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'.

+ **150.** *Ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος πολλαπλασιασθῶσιν ἐφ' ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, προκύπτει κλάσμα ἴσον· ἐπίσης καὶ ἂν διαιρεθῶσιν ἀμφότεροι δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

Ἔστω τυχὸν κλάσμα τὸ $\frac{2}{5}$ καὶ ἂς πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι του ἐπὶ οἱονδήποτε ἀριθμόν, οἷον τὸν 3· τότε ἐκ τοῦ $\frac{2}{5}$ προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{6}{15}$, λέγω δέ, ὅτι εἶνε $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$·

Ἀπόδειξις. Ἂν λάβωμεν τὸ κλάσμα $\frac{6}{15}$ 15 φορὰς (ἤτοι ἂν πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸ ἐπὶ 15), θὰ προκύψῃ ὁ ἀκέραιος 6· ἀλλὰ καὶ τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$ ἰσάκις ληφθὲν δίδει 6· διότι·

ἂν ληφθῇ πέντε φοράς, δίδει	2·
ἂν δέκα φοράς, δίδει	2×2 ἢ 4·
ἂν δέκα πέντε φοράς, δίδει	2×3 ἢ 6.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι εἶνε $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$·

Ἔστω ἐπίσης τυχὸν κλάσμα, οὗτινος ἀμφότεροι οἱ ὅροι ἔχουσι κοινόν τινα διαιρέτην· οἷον τὸ $\frac{8}{10}$· λέγω ὅτι, ἂν διαιρεθῶσιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτοῦ διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν διαιρέτου 2, τὸ προκύπτον κλάσμα $\frac{4}{5}$ εἶνε ἴσον τῷ $\frac{8}{10}$·

Ἀπόδειξις. Διότι τὸ $\frac{8}{10}$ προκύπτει ἐκ τοῦ $\frac{4}{5}$, ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τούτου πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 2· ἄρα $\frac{4}{5}=\frac{8}{10}$·

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'.

151. *Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἀριθμόν, καὶ τὸ ὅλον κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν· καὶ ἂν ὁ ἀριθμητὴς διαιρεθῇ καὶ τὸ ὅλον κλάσμα διαιρεῖται*

Λέγω δηλαδή, ὅτι ἐὰν διπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητής, καὶ τὸ κλάσμα διπλασιάζεται, ἂν τριπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητὴς καὶ τὸ κλάσμα τριπλασιάζεται καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τυχὸν κλάσμα τὸ $\frac{3}{8}$. ἂν διαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητής του γίνεται $\frac{6}{8}$, φανερὸν δὲ εἶνε, ὅτι τὰ 6 ὄγδοα εἶνε διπλάσια τῶν 3 ὀγδόων· ὁμοίως τὸ $\frac{9}{8}$ εἶνε τριπλάσιον τοῦ $\frac{3}{8}$· διότι ἐτριπλασιάσθη ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων του (ἀπὸ 3 ἔγινεν 9).

Ἔστω καὶ τὸ κλάσμα $\frac{6}{7}$· ἂν διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητής του διὰ 3 γίνεται $\frac{2}{7}$· εἶνε δὲ τὸ $\frac{2}{7}$ τὸ τρίτον τοῦ $\frac{6}{7}$· διότι τὸ $\frac{6}{7}$ εἶνε τριπλάσιον τοῦ $\frac{2}{7}$.

Σημείωσις. Ἐν γένει, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς αὐξάνῃ καὶ τὸ κλάσμα αὐξάνει.

ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'.

152. *Ἐὰν ὁ παρανομαστὴς τοῦ κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἀριθμόν, τὸ ὅλον κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ· καὶ ἂν ὁ παρονομαστὴς διαιρεθῇ, τὸ ὅλον κλάσμα πολλαπλασιάζεται.*

Λέγω δηλαδή, ὅτι ἂν ὁ παρονομαστὴς διπλασιασθῇ, τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ 2, ἤτοι γίνεται τὸ ἥμισυ τοῦ πρίν· ἐὰν ὁ παρονομαστὴς τριπλασιασθῇ, τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ 3, ἤτοι γίνεται τὸ τρίτον τοῦ πρίν· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἔστω τυχὸν κλάσμα τὸ $\frac{2}{5}$ καὶ ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ 5 ἐπὶ οἱονδήποτε ἀριθμόν, οἷον τὸν 8· τότε προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{2}{5\times8}$ ἢ $\frac{2}{40}$· λέγω, ὅτι τὸ $\frac{2}{5\times8}$ εἶνε τὸ 8ον τοῦ $\frac{2}{5}$· ἤτοι, ἂν ληφθῇ 8 φοράς, θὰ δώσῃ τὸ $\frac{2}{5}$.

Ἀπόδειξις. Τὸ κλάσμα $\frac{2}{5\times8}$ λαμβανόμενον 8 φοράς, ἤτοι πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ 8, γίνεται (ἐδ. 151) $\frac{2\times8}{5\times8}$· τοῦτο δὲ (κατὰ τὸ Α´ Θεώρημα) εἶνε ἴσον τῷ $\frac{2}{5}$· ἄρα τὸ $\frac{2}{5\times8}$ εἶνε τὸ ὄγδοον τοῦ $\frac{2}{5}$.

Ἔστω πρὸς τούτοις τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς διαιρεῖται διὰ 4· λέγω, ὅτι, ἂν διαιρεθῇ ὁ παρονομαστὴς 8 διὰ τοῦ 4, τὸ προκύπτον κλάσμα $\frac{3}{2}$ θὰ εἶνε τετραπλάσιον τοῦ δοθέντος $\frac{3}{8}$, ἤτοι $\frac{3}{8}\times 4=\frac{3}{2}$.

Ἀπόδειξις. Διότι τὸ $\frac{3}{8}$ ἐπὶ 4 πολλαπλασιαζόμενον δίδει (ἐδ. 151) $\frac{3\times4}{8}$ ἤτοι $\frac{3\times4}{2\times4}$ ἤτοι $\frac{3}{2}$.

Σημείωσις. Ἐν γένει, ὅταν ὁ παρονομαστὴς αὐξάνῃ, τὸ κλάσμα ἐλαττοῦται· διότι αἱ μονάδες του γίνονται μικρότεραι.

Ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων.

Ἁπλοποίησις τοῦ κλάσματος λέγεται ἡ πρᾶξις, δι' ἧς εὑρίσκομεν ἄλλο κλάσμα ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν καὶ ἔχον ὅρους μικροτέρους.

Ἡ ἁπλοποίησις γίνεται, ὅταν οἱ ὅροι τοῦ δοθέντος κλάσματος ἔχωσι κοινόν τινα διαιρέτην· διότι διαιροῦντες δι' αὐτοῦ καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος, εὑρίσκομεν ἄλλο κλάσμα ἔχον ὅρους μικροτέρους καὶ ἴσον πρὸς τὸ δοθέν.

Παραδείγματος χάριν, τὸ κλάσμα $\frac{15}{20}$ ἁπλοποιεῖται, ἂν διαιρεθῶσιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι του διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν παράγοντος 5· γίνεται δὲ $\frac{3}{4}$.

Διὰ τῆς ἁπλοποιήσεως ἀποκτῶμεν σαφεστέραν ἰδέαν τῶν κλασμάτων· διότι π. χ. σαφεστέραν ἰδέαν ἔχομεν τοῦ $\frac{3}{4}$ ἢ τοῦ ἴσου τοῦ $\frac{45}{60}$· ἢ τοῦ $\frac{39}{52}$.

Σημείωσις. Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ (ὡς $\frac{6}{3}$, $\frac{10}{2}$ κτλ.) ἁπλοποιοῦντες τὸ κλάσμα λαμβάνομεν παρονομαστὴν τὴν μονάδα ($\frac{2}{1}$, $\frac{5}{1}$) κτλ. ἀλλὰ τότε τὸ κλάσμα παριστᾷ ἀκέραιον ἀριθμὸν (ἐδ. 143). Ἐντεῦθεν βλέπομεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν τοὺς ἀκεραίους καὶ ὡς κλάσματα ἔχοντα παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1.

Ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν, προκύπτει κλάσμα, οὗτινος οἱ ὅροι εἶνε ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (ἐδ. 107)· τὸ τοιοῦτον δὲ κλάσμα λέγεται, ὅτι εἶνε *ἀνηγμένον εἰς τοὺς ἐλαχίστους ὅρους* ἢ ὅτι εἶνε *ἀνάγωγον*· διότι δὲν ὑπάρχει ἄλλο ἴσον αὐτῷ καὶ ἔχον μικροτέρους ὅρους· ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ ἑξῆς θεωρήματος·

ΘΕΩΡΗΜΑ

153. *Ἐὰν οἱ ὅροι κλάσματός τινος εἶνε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τὸ κλάσμα τοῦτο εἶνε ἀνάγωγον· τουτέστι δὲν ὑπάρχει ἄλλο κλάσμα ἴσον πρὸς αὐτὸ καὶ ἔχον μικροτέρους ὅρους.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω τυχὸν κλάσμα ἔχον ὅρους πρώτους πρὸς ἀλλήλους, οἷον τὸ $\frac{5}{8}$ καὶ ἄλλο οἱονδήποτε κλάσμα ἴσον πρὸς αὐτό, τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$.

Ἔστω δηλαδὴ
$$\frac{5}{8}=\frac{\alpha}{\beta}$$

ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου ἐπὶ β καὶ ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου ἐπὶ 8, τὰ προκύπτοντα κλάσματα θὰ εἶνε ἐπίσης ἴσα, ὡς ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα· ὅθεν ἔπεται

$$\frac{5\times\beta}{8\times\beta}=\frac{\alpha\times8}{\beta\times8}$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ κλάσματα ταῦτα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, δὲν δύνανται νὰ εἶνε ἴσα, ἂν δὲν ἔχωσιν ἀριθμητὰς ἴσους· ἄρα εἶνε

$$5\times\beta=\alpha\times8\cdot$$

ἐπειδὴ δὲ ὁ 8 διαιρεῖ τὸ γινόμενον $\alpha\times8$, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ πρὸς αὐτὸ ἴσον $5\times\beta$· καὶ ἐπειδὴ εἶνε πρῶτος πρὸς τὸν παράγοντα 5, θὰ διαιρῇ τὸν ἄλλον παράγοντα β (ἐδ. 109)· ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ π τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ β διὰ 8, θὰ ἔχωμεν

$$\beta=8\times\pi\cdot$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἰσότητα $5\times\beta=\alpha\times8$ τὸν β διὰ τοῦ γινομένου $8\times\pi$, λαμβάνομεν τὴν ἰσότητα

$$5\times8\times\pi=8\times\alpha\cdot$$

καὶ διαιροῦντες τοὺς ἴσους τούτους ἀριθμοὺς διὰ τοῦ 8, εὑρίσκομεν

$$\alpha=5\times\pi.$$

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι οἱ ὅροι α, β παντὸς κλάσματος ἴσου πρὸς τὸ $\frac{5}{8}$ εἶνε ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν ὅρων τοῦ $\frac{5}{8}$. ἄρα δὲν δύνανται νὰ εἶνε μικρότεροι· ἑπομένως οὐδὲν ὑπάρχει κλάσμα ἴσον τῷ $\frac{5}{8}$ καὶ ἔχον ὅρους μικροτέρους.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

154. *Ἐὰν δύο ἀνάγωγα κλάσματα εἶνε ἴσα, καὶ οἱ ἀριθμηταὶ αὐτῶν θὰ εἶνε ἴσοι καὶ οἱ παρονομασταὶ ὡσαύτως ἴσοι.*

Διότι, ἂν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶνε ἴσον μὲ τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{5}{8}$ θὰ εἶνε $\alpha=5\times\pi\cdot$ καὶ $\beta=8\times\pi$, διὰ νὰ εἶνε δὲ καὶ τοῦτο ἀνάγωγον, ἀνάγκη ὁ π (ὅστις εἶνε κοινὸς διαιρέτης τῶν ὅρων του α καὶ β) νὰ εἶνε 1· ἀλλὰ τότε εἶνε $\alpha=5$ καὶ $\beta=8$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον.

155. *Πάντα τὰ ἴσα ἀλλήλοις κλάσματα προκύπτουσιν ἐξ ἑνὸς ἀναγώγου κλάσματος, (ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτοῦ πολλαπλασιασθῶσιν ἐφ' ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4...)*

Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

156. *Ὁμώνυμα* λέγονται, ὅσα κλάσματα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, τουτέστιν, ὅσα γίνονται ἐκ τῆς αὐτῆς κλασματικῆς μονάδος· οἷον $\frac{5}{6}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{1}{6}$ κτλ.

Ἑτερώνυμα δὲ λέγονται, τὰ ἔχοντα διαφόρους παρονομαστάς· τουτέστιν, ὅσα γίνονται ἐκ διαφόρων κλασματικῶν μονάδων, οἷον· $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{9}$ κλπ.

157. Ἔχοντες ἑτερώνυμα κλάσματα, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἄλλα ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα (ἓν πρὸς ἓν) καὶ ὁμώνυμα τοῦτο δὲ λέγεται *τροπὴ τῶν ἑτερωνύμων εἰς ὁμώνυμα ἢ ἀναγωγὴ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.*

Ἡ τροπὴ αὕτη στηρίζεται ἐπὶ τοῦ θεωρήματος τοῦ ἐδ. 150 καὶ γίνεται καὶ κατὰ τοὺς ἑξῆς κανόνας·

1ος) Διὰ νὰ τρέψωμεν δύο ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους ἑκατέρου ἐξ αὐτῶν ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν τοῦ ἄλλου.

Διότι τὰ οὕτω προκύπτοντα κλάσματα εἶνε ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα, ἕκαστον πρὸς τὸ ἐξ οὗ προέκυψεν (ἐδ. 150)· ἔχουσι δὲ καὶ τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, τουτέστι τὸ γινόμενον τῶν δύο παρονομαστῶν τῶν δοθέντων κλασμάτων.

Ἔστωσαν ὡς παράδειγμα τὰ κλάσματα $\frac{2}{5}$ καὶ $\frac{3}{8}$, ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν προηγούμενον κανόνα, εὑρίσκομεν

$$\frac{2}{5}=\frac{2\times 8}{5\times 8}=\frac{16}{40}$$
$$\frac{3}{8}=\frac{3\times 5}{8\times 5}=\frac{15}{40}$$

2ος) Διὰ νὰ τρέψωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, ὁσαδήποτε καὶ ἂν εἶνε, πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν πάντων τῶν λοιπῶν.

Διότι διὰ τοῦ τρόπου τούτου ἐξ ἑκάστου κλάσματος προκύπτει ἄλλο ἴσον, ἔχουσι δὲ τὰ νέα κλάσματα πάντα τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, τουτέστι τὸ γινόμενον πάντων τῶν δοθέντων παρονομαστῶν.

Ἔστωσαν ὡς παράδειγμα, τὰ κλάσματα $\frac{4}{5}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{1}{8}$

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα, εὑρίσκομεν

$$\frac{4}{5}=\frac{4\times 7\times 8}{5\times 7\times 8}=\frac{224}{280}$$
$$\frac{3}{7}=\frac{3\times 5\times 8}{7\times 5\times 8}=\frac{120}{280}$$
$$\frac{1}{8}=\frac{1\times 5\times 7}{8\times 5\times 7}=\frac{35}{280}$$

3ος) Ἐὰν ἔχωμεν κοινόν τι πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων παρονομαστῶν, δυνάμεθα νὰ καταστήσωμεν αὐτὸ κοινὸν παρονομαστήν. Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν αὐτὸ δι' ἑνὸς ἑκάστου ἐκ τῶν παρονομαστῶν καὶ ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος, ὅπερ ἔχει τὸν παρονομαστὴν τοῦτον.

Ἔστωσαν, ὡς παράδειγμα, τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{9}$ $\frac{7}{12}$.

Ὁ ἀριθμὸς 36 εἶνε κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν, 2, 3, 9 καὶ 12· ἐφαρμόζοντες λοιπὸν τὸν κανόνα τοῦτον εὑρίσκομεν

$$36 : 2 = 18 \quad \frac{1}{2} = \frac{1 \times 18}{2 \times 18} = \frac{18}{36}$$

$$36 : 3 = 12 \quad \frac{2}{3} = \frac{2 \times 12}{3 \times 12} = \frac{24}{36}$$

$$36 : 9 = 4 \quad \frac{5}{9} = \frac{5 \times 4}{9 \times 4} = \frac{20}{36}$$

$$36 : 12 = 3 \quad \frac{7}{12} = \frac{7 \times 3}{12 \times 3} = \frac{21}{36}$$

Συμβαίνει δὲ νὰ ἔχωσι πάντα τὰ νέα κλάσματα τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν 36· διότι ἕκαστος ἐκ τῶν δοθέντων παρονομαστῶν ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως, τῆς ὁποίας αὐτὸς εἶνε διαιρέτης, διαιρετέος δὲ ὁ 36 (ἐδ. 57).

Ὅταν εἷς ἐκ τῶν δοθέντων παρονομαστῶν εἶνε διαιρετὸς διὰ τῶν λοιπῶν καθιστῶμεν αὐτὸν κοινὸν παρονομαστὴν κατὰ τὸν ἀνωτέρω εἰρημένον τρόπον.

Ἔστωσαν, ὡς παράδειγμα, τὰ κλάσματα $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{15}$.

Ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς 15 εἶνε κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν 5 καὶ 15, ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα καὶ εὑρίσκομεν

$$15 : 5 = 3 \qquad \frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{9}{15}$$

$$\frac{2}{15} = \frac{2}{15}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὰ κλάσματα $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{24}$

τρέπονται εἰς εἰκοστὰ τέταρτα $\frac{4}{24}$, $\frac{16}{24}$, $\frac{6}{24}$, $\frac{5}{24}$

Σημείωσις. Εἰς τὸν κανόνα τοῦτον περιλαμβάνονται καὶ οἱ δύο προηγούμενοι. Διότι τὸ γινόμενον πάντων τῶν παρονομαστῶν εἶνε προφανῶς κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν· τοῦτο δὲ γίνεται κοινὸς παρονομαστὴς κατὰ τὸν πρῶτον καὶ κατὰ τὸν δεύτερον κανόνα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

158. *Ἐὰν τὰ δοθέντα κλάσματα εἶνε ἀνάγωγα, ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστής, τὸν ὁποῖον δύνανται νὰ ἀποκτήσωσιν, εἶνε τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν.*

Ἔστωσαν τὰ κλάσματα $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{18}$, ἅτινα εἶνε ἀνάγωγα καὶ τῶν ὁποίων οἱ παρονομασταὶ 5, 8, 12, 18 ἔχουν ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τὸ 360· λέγω, ὅτι δὲν δύνανται νὰ γίνωσιν ὁμώνυμα μὲ παρονομαστὴν μικρότερον τοῦ 360.

Ἀπόδειξις. Διότι πᾶν κλάσμα ἴσον μὲ τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{1}{5}$ θὰ ἔχῃ παρονομαστὴν πολλαπλάσιόν τι τοῦ 5 (ἐδ. 155)· ὁμοίως πᾶν κλάσμα ἴσον τῷ ἀναγώγῳ $\frac{3}{8}$ θὰ ἔχῃ παρονομαστὴν πολλαπλάσιόν τι τοῦ 8, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ὥστε ὁ κοινὸς παρονομαστής, τὸν ὁποῖον θὰ ἔχωσι τὰ ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα κλάσματα θὰ εἶνε ἐξ ἀνάγκης κοινόν τι πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων παρονομαστῶν 5, 8, 12, 18· ἐὰν λοιπὸν θέλωμεν τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστήν, θὰ λάβωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον 360.

Παρατήρησις.

Ἡ τροπὴ τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα χρησιμεύει 1) εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν αὐτῶν, ὡς ἀμέσως θὰ ἴδωμεν καὶ 2) εἰς τὸ νὰ διακρίνωμεν εὐκόλως τὴν ἰσότητα ἢ τὴν ἀνισότητα αὐτῶν· διότι ἐκ δύο κλασμάτων ἐχόντων τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν μεγαλήτερον εἶνε τὸ ἔχον τὸν μεγαλήτερον ἀριθμητήν.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Α'. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

Ὁρισμοί.

159. *Ἡ πρόσθεσις εἶνε πρᾶξις, δι' ἧς σχηματίζομεν ἕνα ἀριθμὸν ἐκ πασῶν τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας ἔχουσι δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοί.*

Αἱ μονάδες, τὰς ὁποίας ἔχουσιν οἱ ἀριθμοί, δύνανται νὰ εἶνε ἢ ἀκέραιαι ἢ κλασματικαί.

Ἄθροισμα ἢ κεφάλαιον λέγεται καὶ πάλιν τὸ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως· οἱ δὲ εἰς πρόσθεσιν δοθέντες ἀριθμοὶ λέγονται **προσθετέοι**.

Διὰ νὰ προστεθῶσι δύο ἢ περισσότερα κλάσματα πρέπει νὰ εἶνε ὁμώνυμα· ἤτοι νὰ γίνωνται πάντα ἐκ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς κλασματικῆς μονάδος. Διὰ τοῦτο ὅταν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν κλάσματα, *ἐὰν δὲν εἶνε ὁμώνυμα, τρέπωμεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα.*

Ἡ πρόσθεσις τῶν κλασμάτων ἐκτελεῖται τότε κατὰ τὸν ἑξῆς κανόνα·

160. *Διὰ νὰ* ***προσθέσωμεν*** *κλάσματα ὁμώνυμα,* ***προσθέτομεν*** *μόνον τοὺς ἀριθμητάς των, καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα γράφομεν τὸν κοινὸν παρονομαστήν.*

Ἂς ὑποθέσωμεν παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τὰ κλάσματα $\frac{1}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{5}{8}$ εἶνε φανερόν, ὅτι 1 ὄγδοον καὶ 3 ὄγδοα καὶ 5 ὄγδοα κάμνουν $1+3+5$, ἤτοι 9 ὄγδοα (καθὼς 1 βιβλίον καὶ 3 βιβλία καὶ 5 βιβλία κάμνουν 9 βιβλία)· ὥστε $\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=\frac{9}{8}=1+\frac{1}{8}$ (ἐδ. 145).

Παραδείγματα.

1) Νὰ προστεθῶσι τὰ δύο κλάσματα $\frac{1}{5}$ καὶ $\frac{1}{6}$·

τρέπω αὐτὰ πρῶτον εἰς ὁμώνυμα καὶ εὑρίσκω

$$\frac{1}{5}=\frac{6}{30}$$
$$\frac{1}{6}=\frac{5}{30}$$

καὶ προσθέτων εὑρίσκω $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{11}{30}$

2) Νὰ προστεθῶσι τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$,

τρέπω αὐτὰ πρῶτον εἰς ὁμώνυμα καὶ εὑρίσκω

$$\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$$

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$$

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

ὅθεν προθέτων εὑρίσκω $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1.$

Σημείωσις. Τὸ ἄθροισμα ἀκεραίου καὶ κλάσματος εἶνε μικτὸς ἀριθμός· οἷον $1+\frac{1}{2}$ γράφεται ὡς ἑξῆς $1\frac{1}{2}$.

Πρόσθεσις μικτῶν.

161. *Διὰ νὰ προσθέσωμεν μικτοὺς ἀριθμοὺς προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἔπειτα ἑνώνομεν τὰ δύο ἀθροίσματα.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς μικτοὺς ἀριθμοὺς

$$3\frac{5}{8},\quad 10\frac{2}{9}.$$

Οἱ ἀκέραιοι χωριστὰ προστιθέμενοι δίδουσι 13· τὰ δὲ κλάσματα γίνονται κατὰ πρῶτον ὁμώνυμα

$$\frac{5}{8}=\frac{45}{72},\quad \frac{2}{9}=\frac{16}{72}$$

ἔπειτα προστιθέμενα δίδουσιν ἄθροισμα $\frac{61}{72}$.

ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων μικτῶν εἶνε $13\frac{61}{72}$.

διότι τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἐσχηματίσαμεν ἑνώσαντες τὰς μονάδας των.

Ὁμοίως, ἂν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς μικτοὺς

$$2\frac{1}{2} \text{ καὶ } 5\frac{5}{6},$$

τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων εἶνε 7,
τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων εἶνε $\frac{8}{6}=1\frac{2}{6}=1\frac{1}{3}$

ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων μικτῶν εἶνε $7+1+\frac{1}{3}=8\frac{1}{3}$.

Ὁμοίως εὑρίσκεται, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν μικτῶν

$$5\frac{1}{2} \text{ καὶ } 6\frac{2}{3} \text{ καὶ } 15\frac{5}{6} \text{ εἶνε} = 28$$

Σημείωσις. Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀκέραιον καὶ μικτόν, προσθέτομεν τὸν ἀκέραιον εἰς τὸν ἀκέραιον τοῦ μικτοῦ.

οἷον, $$5\frac{1}{6}+2=7\frac{1}{6}.$$

Διὰ νὰ προσθέσωμεν κλάσμα καὶ μικτόν, προσθέτομεν τὸ κλάσμα εἰς τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ·

οἷον $$5\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=5+1=6, \qquad 3\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=3\frac{1}{2}.$$

Παρατήρησις.

Ἡ πρόσθεσις ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν εἴτε ἀκεραίων εἴτε κλασματικῶν ἀνάγεται πάντοτε εἰς πρόσθεσιν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Διότι πάντες οἱ προσθετέοι δύνανται νὰ γίνωσι κλάσματα καὶ μάλιστα ὁμώνυμα· τότε δὲ ἡ πρόσθεσις αὐτῶν καταντᾷ πρόσθεσις τῶν ἀριθμῶν των. Διὰ τοῦτο ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τῆς προσθέσεως τῶν ἀκεραίων (ἐδ. 23) μένει ἀληθής, οἱοιδήποτε ἀριθμοὶ καὶ ἂν εἶνε οἱ προσθετέοι· ἐπομένως μένουσιν ἀληθεῖς καὶ πᾶσαι αἱ ἐξ αὐτῆς πηγάζουσαι ἰδιότητες καὶ ἀποδεικνύονται ἐξ αὐτῆς ἀπαραλλάκτως (ἐδ. 23).

Β΄. ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

Ὁρισμοί.

162. *Ἡ ἀφαίρεσις εἶνε πρᾶξις, δι' ἧς ἐλαττοῦμεν δοθέντα ἀριθμὸν κατὰ τὰς μονάδας, ὅσας ἔχει ἄλλας δοθεὶς ἀριθμός.*

Αἱ μονάδες δυνατὸν νὰ εἶνε ἢ ἀκέραιαι ἢ κλασματικαί.

Ὁ πρῶτος τῶν δεδομένων ἀριθμῶν λέγεται καὶ πάλιν μειωτέος ὁ δὲ δεύτερος ἀφαιρετέος· τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς ἀφαιρέσεως λέγεται ὑπόλοιπον ἢ διαφορά.

Ἐὰν ἑνώσωμεν τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου καὶ το ὑπολοίπου, θὰ ἀποτελέσωμεν προδήλως τὸν μειωτέον· ὅθεν ὁ *μειωτέος εἶνε ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τοῦ ὑπολοίπου.*

Διὰ τοῦτο ἡ ἀφαίρεσις δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ ὡς ἑξῆς·

163. *Ἡ ἀφαίρεσις εἶνε πρᾶξις, δι' ἧς δοθέντων δύο ἀριθμῶν, εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν δεύτερον δίδει ὡς ἄθροισμα τὸν πρῶτον.*

Ἀφαίρεσις δύο κλασμάτων.

Διὰ νὰ ἀφαιρεθῇ κλάσμα ἀπὸ ἄλλου πρέπει νὰ εἶνε ὁμώνυμον πρὸς αὐτό. Διὰ τοῦτο, ὅταν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσματα, ἐὰν δὲν εἶνε ὁμώνυμα, τρέπομεν πρῶτον αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα.

Ἡ ἀφαίρεσις γίνεται τότε κατὰ τὸν ἑξῆς κανόνα·

164. *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσμα ἀπὸ ἄλλου ὁμωνύμου ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν του, ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ μειωτέου καὶ ὑπὸ τὴν διαφορὰν γράφομεν τὸν κοινὸν παρονομαστήν.*

Ἄς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν $\frac{5}{12}$ ἀπὸ $\frac{7}{12}$. φανερὸν εἶνε, ὅτι, ἐὰν ἀπὸ 7 δωδέκατα ἀφαιρέσωμεν 5 δωδέκατα, θὰ μείνωσι 2 δωδέκατα (καθώς, ἐὰν ἀπὸ 7 μῆνας ἀφαιρέσωμεν 5 μῆνας, μένουσι 2 μῆνες).

ἄρα
$$\frac{7}{12}-\frac{5}{12}=\frac{2}{12} \text{ ἢ } =\frac{1}{6}$$

Ἄς ὑποθέσωμεν δεύτερον, ὅτι ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν $\frac{1}{6}$ ἀπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{1}{5}$.

Ἐπειδὴ τὰ κλάσματα ταῦτα εἶνε ἑτερώνυμα, τρέπομεν αὐτὰ πρῶτον εἰς ὁμώνυμα· καὶ ὁ μὲν ἀφαιρετέος $\frac{1}{6}$ γίνεται $\frac{5}{30}$, ὁ δὲ μειωτέος $\frac{1}{5}$ γίνεται $\frac{6}{30}$. ὥστε ἡ διαφορὰ εἶνε $\frac{1}{30}$.

$$\text{ἤτοι } \frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{6}{30}-\frac{5}{30}=\frac{1}{30}$$

Ἀφαίρεσις μικτῶν.

165. *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μικτὸν ἀπὸ μικτοῦ, ἀφαιροῦμεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἔπειτα ἑνοῦμεν τὰς δύο διαφοράς.*

Παραδείγματος χάριν, ἂν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν μικτὸν $2\frac{1}{3}$ ἀπὸ τοῦ μικτοῦ $7\frac{2}{5}$, ἀφαιροῦμεν τοὺς ἀκεραίους χωριστὰ $7-2=5$· ἔπειτα τὰ κλάσματα $\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{6}{15}-\frac{5}{15}=\frac{1}{15}$. ὥστε ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶνε $5\frac{1}{15}$.

166. Ἐὰν τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου εἶνε μεγαλήτερον τοῦ κλάσματος τοῦ μειωτέου, ἡ ἀφαίρεσις τῶν κλασμάτων δὲν γίνεται. Ἵνα ἄρωμεν τὸ ἐμπόδιον τοῦτο, *λαμβάνομεν μίαν ἀκεραίαν μονάδα τοῦ μειωτέου καὶ τὴν ἑνώνομεν μὲ τὸ κλάσμα αὐτοῦ, ἀφοῦ τρέψωμεν αὐτὴν εἰς κλάσμα ὁμώνυμον.*

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν $3\frac{1}{5}$ ἀπὸ $8\frac{2}{15}$ καὶ τρέψωμεν τὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, θὰ ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν $3\frac{3}{15}$ ἀπὸ $8\frac{2}{15}$. καὶ ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{3}{15}$ (τοῦ ἀφαιρετέου) δὲν δύναται ν' ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ $\frac{2}{15}$ (τοῦ μειωτέου), λαμβάνομεν μίαν ἀκεραίαν μονάδα τοῦ μειωτέου καὶ τρέπομεν αὐτὴν εἰς δέκατα πέμπτα· τότε θὰ ἔχωμεν ν' ἀφαιρέσωμεν τὸν μικτὸν $3\frac{3}{15}$ ἀπὸ τοῦ $7+\frac{15}{15}+\frac{2}{15}$ ἤτοι ἀπὸ τοῦ $7\frac{17}{15}$. Ἀφαιροῦντες τότε κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον $4\frac{14}{15}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$8\frac{1}{3}-4\frac{4}{5}=3\frac{8}{15}$$

$$12\frac{1}{2}-8\frac{2}{3}=3\frac{5}{6}.$$

Τὸ αὐτὸ κάμνομεν, καὶ ὅταν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν μικτὸν ἀπὸ ἀκεραίου (ἢ καὶ κλάσμα ἀπὸ ἀκεραίου)· οἷον $5-2\frac{1}{3}=4+\frac{3}{3}-$

$$2\frac{1}{3}=2\frac{2}{3}\quad 8-\frac{2}{7}=7+\frac{7}{7}-\frac{2}{7}=7\frac{5}{7}.$$

Σημείωσις. Ἐὰν ἀπὸ μικτοῦ ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀκέραιον, ἀφαιροῦμεν τοῦτον ἀπὸ τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ μικτοῦ, οἷον

$$5\frac{1}{3}-2=3\frac{1}{3}.\quad 8\frac{2}{5}-8=\frac{2}{5}$$

Ἐὰν δὲ ἀπὸ μικτοῦ ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσμα, ἀφαιροῦμεν αὐτὸ ἀπὸ τοῦ κλάσματος τοῦ μικτοῦ.

οἷον $$2\frac{1}{5}-\frac{1}{8}=2\frac{8}{40}-\frac{5}{40}=2\frac{3}{40}.$$

Ὁμοίως $$4\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=3+\frac{6}{6}+\frac{1}{6}-\frac{2}{6}=3\frac{5}{6}.$$

Παρατήρησις.

Καὶ ἡ ἀφαίρεσις οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἀνάγεται, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἀκεραίων. Διὰ τοῦτο αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως τῶν ἀκεραίων (ἐδ. 29) ἀληθεύουσι καὶ περὶ πάσης ἀφαιρέσεως.

Γενίκευσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

167. Μέχρι τοῦδε ὁ μὲν πολλαπλασιασμὸς ἐσήμαινε τὴν *ἐπανάληψιν ἑνὸς ἀριθμοῦ*, ἡ δὲ διαίρεσις *τὸν μερισμὸν ἑνὸς ἀριθμοῦ εἰς ἴσα μέρη*, αὗται δὲ εἶνε αἱ πρῶται, αἱ φυσικαὶ τῶν πράξεων τούτων ἔννοιαι.

Ἀλλ' ἐκ τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων ὁδηγούμενοι οἱ ἄνθρωποι ἔφθασαν εἰς τὴν ἰδέαν νὰ γενικεύωσι τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, δηλαδὴ νὰ δώσωσιν εἰς τὸ ὄνομα πολλαπλασιασμὸς ἄλλην σημασίαν γενικωτέραν ἐκείνης, τὴν ὁποίαν εἶχε πρίν.

Εἰς τὴν γενίκευσιν ταύτην φθάνομεν ὡς ἑξῆς· ἂν ἔχωμεν νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα· Πόσον ἀξίζουν 5 ὀκάδες ἐξ ἑνὸς πράγματος τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 12 δραχμάς; φανερὸν εἶνε, ὅτι θὰ ἐπαναλάβωμεν τὸν 12 πέντε φοράς· τουτέστι πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος θὰ κάμωμεν πολλαπλασιασμὸν 12×5. Ἀλλ' ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων ἀπὸ 5 γίνῃ $5\frac{1}{2}$ ἢ $\frac{5}{8}$ πάλιν θέλομεν ἡ πρᾶξις, δι' ἧς λύεται τὸ πρόβλημα, νὰ λέγηται πολλαπλασιασμός, διὰ νὰ ἔχωμεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

Ὅταν εἰξεύρωμεν τὴν ἀξίαν μιᾶς μονάδος ἑνὸς πράγματος, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν ὁσωνδήποτε μονάδων τοῦ αὐτοῦ πράγματος, *πρέπει νὰ κάμωμεν πολλαπλασιασμόν*· (τουτέστι νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς μονάδος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων).

Διὰ νὰ εὕρω πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς, σκέπτομαι ὡς ἐξῆς·

Ἀφοῦ ὅλη ἡ ὀκᾶ ἀξίζῃ 12 δραχμὰς τὸ $\frac{1}{8}$ αὐτῆς θὰ ἀξίζῃ τὸ ὄγδοον τῶν 12 δραχ. ἤτοι $\frac{12}{8}$ τῆς δραχμ. (κατὰ τὸ ἐδ ἐδ. 148).

καὶ ἑπομένως τὰ 5 ὄγδοα αὐτῆς θὰ ἀξίζουν $\frac{12}{8}\times 5$ ἢ $\frac{12\times 5}{8}$ δρ. (κατὰ τὸ ἐδ. 151).

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος ἔγιναν τώρα δύο πράξεις· πρῶτον μὲν ἐμερίσθη ὁ ἀριθμὸς 12 εἰς ὀκτὼ ἴσα μέρη· ἔπειτα δὲ ἐλήφθη τὸ ἓν μέρος πέντε φοράς, ἤτοι ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ 5. Αἱ δύο δὲ αὗται πράξεις ὁμοῦ πρέπει νὰ ὀνομασθῶσι τώρα πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἀριθμοῦ 12 ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$ (κατὰ τὴν νέαν, τὴν γενικὴν σημασίαν τῆς λέξεως), διὰ νὰ ἀληθεύῃ ὁ ἀνωτέρω εἰρημένος κανών, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων εἶνε κλασματικός.

168. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα πρέπει νὰ ὁρισθῇ ὡς ἐξῆς·

Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα εἶνε ἐπανάληψις μέρους τινὸς τοῦ ἀριθμοῦ.

Ποῖον μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου θὰ ἐπαναληφθῇ, δεικνύει ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος ποσάκις δὲ θὰ ἐπαναληφθῇ δεικνύει ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ.

Ὥστε γενικῶς ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄλλον οἱονδήποτε (ἀκέραιον ἢ κλασματικὸν) πρέπει νὰ ὁρισθῇ ὡς ἐξῆς·

169. *Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶνε πρᾶξις, δι' ἧς ἐπαναλαμβάνομεν ἕνα ἀριθμὸν ἢ μέρος τι αὐτοῦ, καὶ σχηματίζομεν ἐξ αὐτοῦ ἄλλον ἀριθμόν.*

Ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου μέρος ἢ τὸ ὅλον θὰ ἐπαναλάβωμεν, λέγεται *πολλαπλασιαστέος*· ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις μᾶς δεικνύει ποῖα καὶ πόσα μέρη τοῦ πολλαπλασιαστέου θὰ λάβωμεν, διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ ἐξαγόμενον λέγεται *πολλαπλασιαστής*· τὸ δὲ ἐξαγόμενον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ λέγεται *γινόμενον*.

Σχηματίζομεν δὲ τὸ γινόμενον, ὅταν δοθῶσιν οἱ ἀριθμοί, κατὰ τὸν ἐξῆς κανόνα·

170. *Δι' ἑκάστην ἀκεραίαν μονάδα τοῦ πολλαπλασιαστοῦ λαμβάνομεν ὅλον τὸν πολλαπλασιαστέον, δι' ἑκάστην δὲ κλασματικὴν λαμβάνομεν τὸ ὁμώνυμον μέρος αὐτοῦ.*

οἷον $\alpha\times 4$ σημαίνει $\alpha+\alpha+\alpha+\alpha$· διότι $4=1+1+1+1$

$\alpha\times\frac{2}{3}$ σημαίνει $\frac{\alpha}{3}+\frac{\alpha}{3}$· διότι $\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$.

ἔνθα α εἶνε οἱοσδήποτε ἀριθμὸς καὶ $\frac{\alpha}{3}$ τὸ τρίτον αὐτοῦ.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς καταντᾷ μερισμός, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε μία κλασματικὴ μονάς.

Διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν εἶνε $12+\frac{1}{4}=\frac{12}{4}=3$.

Σημείωσις. Τὸ γινόμενον εἶνε πάντοτε ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον· διότι σύγκειται ἐξ αὐτοῦ ἢ ἔκ τινος μέρους αὐτοῦ. Ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς θεωρεῖται ὡς ἀφῃρημένος ἀριθμός.

Παρατήρησις.

Κατὰ τὸν νέον τοῦτον πολλαπλασιασμὸν ὁ ἀριθμὸς ὅστις πολλασιάζεται αὐξάνει μέν, ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε μεγαλήτερος τῆς μονάδος 1, ἐλαττοῦται δέ, ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶνε μικρότερος αὐτῆς (μένει δὲ ὁ αὐτός, ἂν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 1).

Καὶ τῷ ὄντι· διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν 8 ἐπὶ $\frac{5}{3}$ πρέπει νὰ λάβω τὸ τρίτον τοῦ 8 (ἤτοι τὸ $\frac{8}{3}$) πέντε φοράς· ἀλλὰ τὸ τρίτον τοῦ 8 ὅταν ληφθῇ τρεῖς φοράς, δίδει τὸν 8· ἄρα ὅταν ληφθῇ 5 φοράς, θὰ δώσῃ περισσότερον τοῦ 8. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσω δὲ τὸν 8 ἐπὶ $\frac{3}{5}$ πρέπει νὰ λάβω τρεῖς φορὰς τὸ πέμπτον τοῦ 8· ἀλλὰ τὸ πέμπτον τοῦ 8 πρέπει νὰ ληφθῇ πέντε φορὰς διὰ νὰ δώσῃ τὸν 8· ἄρα, ὅταν ληφθῇ 3 φορὰς μόνον, θὰ δώσῃ ὀλιγώτερον τοῦ 8.

Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου ἐπὶ κλάσμα.

171. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον γράφομεν παρονομαστὴν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀκέραιον 20 ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ ὄγδοον τοῦ 20 καὶ νὰ λάβωμεν αὐτὸ τρίς.

Ἀλλὰ τὸ ὄγδοον τοῦ 20 εἶνε $\frac{20}{8}$ (ἐδ. 148).

καὶ τὸ τριπλάσιον τοῦ $\frac{20}{8}$ εἶνε $\frac{20\times 3}{8}$ (ἐδ. 151).

ὅθεν $20\times\frac{3}{8}=\frac{20\times 3}{8}$ ἢ $\frac{60}{8}$ ἤτοι $7\frac{4}{8}$ ἢ $7\ \frac{1}{2}$.

Σημείωσις. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ 20 καὶ τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ τριπλασίου τοῦ 20 εἶνε εἷς καὶ ὁ αὐτὸς ἀριθμός· τοῦτο δὲ ἀληθεύει γενικῶς περὶ παντὸς ἀριθμοῦ.

Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ κλάσμα.

172. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν ἐπὶ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ παρονομαστήν, καὶ τὸ μὲν γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν θέτομεν ἀριθμητήν, τὸ δὲ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν παρονομαστήν.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$ ἐπὶ $\frac{3}{7}$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ ἕβδομον τοῦ $\frac{4}{5}$ καὶ νὰ λάβωμεν αὐτὸ τρίς.

Τὸ ἕβδομον τοῦ $\frac{4}{5}$ εἶνε $\frac{4}{5\times 7}$ (ἐδ. 152).

τὸ δὲ τριπλάσιον τοῦ $\frac{4}{5\times 7}$ εἶνε $\frac{4\times 3}{5\times 7}$ (ἐδ. 151).

ἄρα εἶνε $\frac{4}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{4\times 3}{5\times 7}$ ἤτοι $\frac{12}{35}$

Παρατήρησις. Ἐκ τοῦ ἐξαγομένου τούτου γίνεται ἀμέσως φανερόν, ὅτι εἶνε $\frac{4}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{3}{7}\times\frac{6}{5}$.

ὡσαύτως εἶνε $$20\times\frac{3}{8}=\frac{3}{8}\times 20.$$

ὥστε καὶ ὁ νέος πολλαπλασιασμὸς ἔχει τὴν ἀρχικὴν ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀκεραίων.

(Σημείωσις. Εἰς τὸν κανόνα τοῦτον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν κλασμάτων περιλαμβάνονται καὶ οἱ κανόνες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιον (ἐδ. 151) καὶ ἀκεραίου ἐπὶ κλάσμα (ἐδ. 171). Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ παριστῶνται οἱ ἀκέραιοι ὡς κλάσματα ἔχοντα παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1.

Καὶ τῷ ὄντι εἶνε $$5\times\frac{7}{9}=\frac{5}{1}\times\frac{7}{9}=\frac{5\times 7}{1\times 9}=\frac{5\times 7}{9}.$$

$$\frac{8}{15}\times 3=\frac{8}{15}\times\frac{3}{1}=\frac{8\times 3}{15\times 1}=\frac{8\times 3}{15}.)$$

Πολλαπλασιασμὸς μικτοῦ.

173. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἐπὶ οἱονδήποτε ἀριθμόν, πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ τὸ ἀκέραιον μέρος του καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα του καὶ ἔπειτα ἑνοῦμεν τὰ δύο γινόμενα.*

Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς δύναται νὰ εἶνε ἢ ἀκέραιος ἢ κλασματικός, διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

1) Ἄς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν μικτὸν $7\frac{5}{8}$ ἐπὶ τὴν ἀκέραιον 4· τὸ γινόμενον θὰ εἶνε

$$(7\frac{5}{8})+(7\frac{5}{8})+(7\frac{5}{8})+(7\frac{5}{8})$$

ἢ $$7+7+7+7+\frac{5}{8}+\frac{5}{8}+\frac{5}{8}+\frac{5}{8}$$

ἤτοι $$7\times 4+\frac{5}{8}\times 4.$$

2) Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν μικτὸν $7\frac{5}{8}$ ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$

Κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ τρίτον τοῦ μικτοῦ $7\frac{5}{8}$ καὶ νὰ λάβωμεν τοῦτο δίς.

Ἀλλὰ τὸ τρίτον τοῦ μικτοῦ $7\frac{5}{8}$ εἶνε $\frac{7}{3}+\frac{5}{8\times3}$ διότι τοῦτο τρεῖς φορὰς λαμβανόμενον, ἤτοι ἐπὶ 3 πολλαπλασιαζόμενον, κατὰ τὰ ἀνωτέρω δίδει τὸν μικτὸν $7+\frac{5}{8}$. Τὸ δὲ διπλάσιον τοῦ $\frac{7}{3}+\frac{5}{8\times3}$ εἶνε $\frac{7\times2}{3}+\frac{5\times2}{8\times3}$ τοῦτο δὲ εἶνε τὸ γινόμενον τοῦ ἀκεραίου μέρους 7 καὶ τὸ γινόμενον τοῦ κλασματικοῦ μέρους $\frac{5}{8}$ ἐπὶ τὸ $\frac{2}{3}$. ἄρα ἔχομεν

$$(7\frac{5}{8}\times\frac{2}{3}=7\times\frac{2}{3}+\frac{5}{8}\times\frac{2}{3}$$

Παρατήρησις.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ ἡ ἑξῆς γενικωτέρα πρότασις.

174. *Ἄθροισμα οἱονδήποτε πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἐὰν ἕκαστος τῶν προσθετέων πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ προστεθῶσι τὰ προκύπτοντα γινόμενα* (παράβαλ. ἐδ. 45, 2).

Παραδείγματος χάριν, εἶνε

$$(3+\frac{1}{8}+\frac{2}{7}+\frac{3}{10})\times8=24+1+\frac{16}{7}+\frac{24}{10}=29+\frac{24}{35}.$$

$$(5+\frac{2}{3}+\frac{4}{9})\times\frac{7}{8}=\frac{5\times7}{8}+\frac{2}{3}\times\frac{7}{8}\times\frac{4}{9}\times\frac{7}{8}$$

Πολλαπλασιασμὸς μικτοῦ ἐπὶ μικτόν.

175. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο μικτούς, πολλαπλασιάζομεν*

1) τοὺς δύο ἀκεραίους,

2) τὰ δύο κλάσματα,

3) τὸν ἀκέραιον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ δευτέρου,

4) τὸν ἀκέραιον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ πρώτου· καὶ ἔπειτα ἑνοῦμεν τὰ τέσσαρα ταῦτα γινόμενα.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο μικτοὺς

$$(4\frac{2}{5}) + (8\frac{7}{10})$$

Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς δύναται νὰ γίνῃ κλάσμα, θὰ ἔχωμεν πολλαπλασιασμὸν μικτοῦ ἐπὶ κλασματικόν, καὶ διὰ τοῦτο θὰ εἶνε

$$(4\frac{2}{5}) \times (8\frac{7}{10}) = 4 \times (8\frac{7}{10}) + \frac{2}{5} \times (8\frac{7}{10})$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ τάξις τῶν παραγόντων εἶνε ἀδιάφορος ὡς πρὸς τὸ γινόμενον (ἐδ. 172. Παρ.), θὰ εἶνε

$$(8\frac{2}{5}) \times (8\frac{7}{10}) = (8\frac{7}{10}) \times 4 + (8\frac{7}{10}) \times \frac{2}{5}.$$

καὶ ἑπομένως $(4\frac{2}{5}) \times (8\frac{7}{10}) = 8 \times 4 + \frac{7}{10} \times 4 + 8 \times \frac{2}{5} +$

$$\frac{7}{10} \times \frac{2}{5}$$

Τὰ τέσσαρα μερικὰ γινόμενα εἶνε

$$32, \frac{28}{10} \text{ ἢ } 2\frac{8}{10}, \quad \frac{16}{5} \text{ ἢ } 3\frac{1}{5}, \quad \frac{14}{50}$$

ἄρα τὸ γινόμενον τῶν μικτῶν εἶνε $37 + \frac{8}{10} + \frac{1}{5} + \frac{14}{50}$. ἤτοι

$$37 + \frac{40}{50} + \frac{10}{50} + \frac{14}{50}, \text{ ἢ } 38\frac{14}{50} \text{ ἢ } 30\frac{7}{25}$$

Σημείωσις. Ἐπειδὴ οἱ μικτοὶ τρέπονται εἰς κλάσματα, δύναταί τις ν' ἀποφύγῃ τὰς πράξεις τῶν μικτῶν, ἐὰν τρέπῃ αὐτοὺςπρὶν εἰς κλάσματα καὶ ἔπειτα ἐκτελῇ τὰς πράξεις· ἀλλὰ τοῦτο εἶνε δυσκολώτερον· ὅθεν προτιμότερον νὰ ἐκτελῶνται αἱ πράξεις τῶν μικτῶν ὡς ἀνωτέρω διελάβομεν.

Παρατήρησις.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ ἡ ἑξῆς γενικωτέρα πρότασις.

176. *Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄλλο ἄθροισμα* (χωρὶς νὰ εὑρεθῶσιν), *ἐὰν ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ πρώτου πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ δευτέρου καὶ προστεθῶσι τὰ προκύπτοντα γινόμενα* (παράβαλε ἐδ. 50).

Παραδείγματος χάριν εἶνε

$$\left(\frac{2}{5}+6+\frac{7}{10}\right)\times\left(10+\frac{5}{7}\right)=$$

$$\frac{2}{5}\times10+6\times10+\frac{7}{10}\times10+\frac{2}{5}\times\frac{5}{7}+6\times\frac{5}{7}+\frac{7}{10}\times\frac{5}{7}=$$

$$4+60+7+\frac{2}{7}+\frac{30}{7}+\frac{1}{2}=76\frac{1}{14}.$$

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

177. Τὸ γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν, ἐξ ὧν τινες ἢ καὶ πάντες εἶνε κλασματικοί, ὁρίζεται ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους (ἐδ. 44) καὶ σημειοῦται ὁμοίως.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν· $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{10}$ $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{7}$.

τὸ γινόμενον τῶν δύο πρώτων εἶνε $\frac{2\times3}{3\times10}$

τὸ δὲ γινόμενον τούτου καὶ τοῦ τρίτου εἶνε $\frac{2\times3\times7}{3\times10\times8}$

καὶ τὸ γινόμενον τούτου ἐπὶ τὸν τέταρτον εἶνε $\frac{2\times3\times7\times1}{3\times10\times8\times7}$

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι

Τὸ γινόμενον πολλῶν κλασμάτων παρίσταται ὡς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν, παρονομαστὴν δὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.

Τοῦτο ἀληθεύει, καὶ ὅταν τινὲς τῶν παραγόντων εἶνε ἀκέραιοι ἀριθμοί· ἀρκεῖ νὰ γράφωνται ὡς κλάσματα ἔχοντα παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1.

Σημείωσις. Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων συμβαίνουσιν ἐνίοτε ἁπλοποιήσεις, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ κάμνωμεν.

Παραδείγματος χάριν, εἰς τὸ ἀνωτέρω εὑρεθὲν γινόμενον, ἤτοι εἰς κλάσμα

$$\frac{2\times3\times7\times1}{3\times10\times8\times7}$$

δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους διὰ 3, ἔπειτα διὰ 7 καὶ εὑρίσκομεν οὕτω τὸ ἁπλούστερον κλάσμα

$$\frac{2\times 1}{10\times 8}$$

ἐὰν δὲ καὶ τούτου τοὺς ὅρους διαιρέσωμεν διὰ 2, εὑρίσκομεν τὸ ἔτι ἁπλούστερον $\dfrac{1}{10\times 4}$ ἢ $\dfrac{1}{40}$,

τοῦτο δὲ εἶνε τὸ γινόμενον τῶν δοθέντων κλασμάτων.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἕνα ἀριθμητὴν καὶ ἕνα παρονομαστὴν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, χωρὶς νὰ βλάψωμεν τὸ γινόμενον· ἂν λοιπὸν ἀριθμός τις εἶνε καὶ ἀριθμητὴς καὶ παρονομαστής, παραλείπεται·

Γενικαὶ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς οἱωνδήποτε ἀριθμῶν διατηρεῖ πάσας τὰς γενικὰς ἰδιότητας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν· διότι ἔχει τὰς δύο θεμελιώδεις ἰδιότητας αὐτοῦ (ἐδ. 45). Ἐκ τούτων τὴν μὲν δευτέραν εὕρομεν ἤδη (ἐδ. 174)· ἡ δὲ πρώτη ἀποδεικνύεται ἐν τῷ ἑξῆς θεωρήματι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

178. *Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν πολλαπλασιασθῶσιν.*

Ἂν πάντες οἱ παράγοντες εἶνε ἀκέραιοι, τὸ θεώρημα εἶνε ἀποδεδειγμένον (ἐδ. 48), εἰ δὲ μή, ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς·

Ἀπόδειξις. Τὸ γινόμενον ἔχει ἀριθμητὴν μὲν τὸ γινόμενον πάντων τῶν ἀριθμητῶν, παρονομαστὴν δὲ τὸ γινόμενον πάντων τῶν παρονομαστῶν (οἱ τυχὸν ὑπάρχοντες ἀκέραιοι παράγοντες ὑποτίθενται ἔχοντες παρονομαστὴν τὸ 1), τὰ δύο δὲ ταῦτα γινόμενα, ὡς γινόμενα ἀκεραίων ἀριθμῶν, δὲν ἀλλάσσουσι καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἀριθμοί. Ὥστε τὸ γινόμενον θὰ ἔχῃ πάντοτε τὸν αὐτὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

179. Ἐκ τῆς θεμελιώδους ταύτης ἰδιότητος ἕπονται αἱ ἑξῆς (αἵτινες ἀποδεικνύονται ἀπαράλλακτα ὡς ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν).

1) *Δυνάμεθα εἰς πᾶν γινόμενον νὰ ἀντικαταστήσωμεν παράγοντάς τινας διὰ τοῦ εὑρεθέντος γινομένου αὐτῶν·* ἢ καὶ τοὐναντίον· *δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν οἱονδήποτε παράγοντα δι' ἄλλων ἀριθμῶν ἐχόντων αὐτὸν γινόμενον·* δυνάμεθα δηλονότι νὰ συμπτύ-

ξωμεν παράγοντάς τινας εἰς ἕνα μόνον, ἢ καὶ τοὐναντίον ν'ἀναλύσωμεν ἕνα παράγοντα εἰς πολλοὺς ἄλλους.

Παραδείγματος χάριν, εἰς τὸ γινόμενον

$$\frac{2}{3}\times5\times\frac{3}{2}\times8\times\frac{5}{8}$$

δύναμαι ν' ἀντικαταστήσω τοὺς δύο παράγοντας $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{2}$ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 1, καὶ τοὺς 8, $\frac{5}{8}$ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 5· οὕτως εὑρίσκω 5×5, ἤτοι 25.

2) *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπ' αὐτὸν ἕνα παράγοντα τοῦ γινομένου.*

Π. χ. ἵνα πολλαπλασιάσω τὸ γινόμενον $\frac{1}{5}\times\frac{2}{7}\times\frac{4}{9}$ ἐπὶ 7, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν παράγοντα $\frac{2}{7}$ ἐπὶ 7, οὕτως εὑρίσκω

$$\frac{1}{5}\times2\times\frac{4}{9}.$$

3) *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν δύο γινόμενα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πάντας τοὺς παράγοντας ἀμφοτέρων τῶν γινομένων.*

Παραδείγματος χάριν, τὸ γινόμενον τῶν δύο γινομένων

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{7}{9} \qquad \frac{8}{9}\times\frac{5}{7}$$

εἶνε $\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{7}{9}\times\frac{8}{9}\times\frac{5}{7}$ ἢ $\frac{3\times8}{2\times9\times9}$ ἢ $\frac{4}{3\times9}$ ἤτοι $\frac{4}{27}$.

Πολλαπλασιασμὸς διαφορᾶς ἐπὶ ἀριθμόν.

180. *Διαφορὰ πολλαπλασιάζεται ἐπ' ἀριθμόν, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι καὶ ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος αὐτῆς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου γινομένου ἀφαιρεθῇ τὸ δεύτερον.*

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν διαφορὰν

$$\frac{7}{8}-\frac{4}{9} \text{ ἐπὶ } \frac{2}{3}.$$

Ἡ διαφορὰ αὕτη, ἐὰν τὰ κλάσματα γίνωσιν ὁμώνυμα, γίνεται

$$\frac{7\times9}{8\times9}-\frac{4\times8}{9\times8} \text{ ἢ } \frac{7\times4-4\times8}{8\times9}$$

Τὸ κλάσμα τοῦτο πολλαπλασιάζεται ἐπὶ $\frac{2}{3}$ κατὰ τὸν γενικὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν κλασμάτων· ἵνα δὲ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 2 ὁ ἀριθμητής, ὅστις εἶνε διαφορὰ δύο ἀκεραίων ἐφαρμόζομεν τὴν πρότασιν τοῦ ἐδ. 51· οὕτως εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον

$$\frac{7\times9\times2-8\times4\times2}{8\times9\times3}$$

τοῦτο δὲ εἶνε διαφορὰ τῶν δύο κλασμάτων

$$\frac{7\times9\times2}{8\times9\times3}-\frac{8\times4\times2}{8\times9\times3} \text{ ἤτοι τῶν } \frac{7\times2}{8\times3}-\frac{4\times2}{9\times3}$$

ὅθεν ἔχομεν

$$\left(\frac{7}{8}-\frac{4}{9}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{7\times2}{8\times3}-\frac{4\times2}{9\times3}=\frac{7}{8}\times\frac{2}{3}-\frac{4}{9}\times\frac{2}{3}$$

Δυνάμεις τῶν κλασμάτων.

Αἱ δυνάμεις τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ὁρίζονται ὡς καὶ αἱ τῶν ἀκεραίων (ἐδ. 52) καὶ σημειοῦνται ὁμοίως·

181. *Ἵνα ὑψώσωμεν κλάσμα εἰς δύναμιν, ὑψοῦμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους του εἰς τὴν δύναμιν ταύτην.*

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι πρόκειται νὰ εὑρεθῇ τετράγωνον τοῦ κλάσματος $\frac{3}{5}$ ἤτοι τὸ γινόμενον $\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}$.

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶνε

$$\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{3\times3}{5\times5}=\frac{3^2}{5^2}.$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον τοῦ κλάσματος $\frac{3}{5}$ σημειοῦται ὡς ἑξῆς $\left(\frac{3}{5}\right)^2$, ἔπεται

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{3^2}{5^2}.$$

Παρατήρησις. Ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τῶν δυνάμεων ἀληθεύει καὶ περὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν καὶ ἀποδεικνύεται ἀπαραλλάκτως (ἐδ. 53)

Παραδείγματος χάριν, εἶνε

$$\left(\frac{3}{8}\right)^2 \times \left(\frac{3}{8}\right)^4 = \left(\frac{3}{8}\right)^6$$

Ἰδιότης τῆς ἰσότητος.

182. *Ἴσοι ἀριθμοὶ ἐπὶ ἴσους πολλαπλασιαζόμενοι δίδουσι γινόμενα ἴσα.*

Ἔστω $\alpha = \beta$ καὶ $\gamma = \delta$· λέγω, ὅτι θὰ εἶνε καὶ $\alpha \times \gamma = \beta \times \delta$.

Ἀπόδειξις. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι οἱ ἴσοι ἀριθμοὶ α καὶ β ἑπταπλασιαζόμενοι γίνονται ἀμφότεροι 4 (ἴδε ἐδ. 149), οἱ δὲ ἴσοι γ καὶ δ δεκαπλασιαζόμενοι γίνονται ἀμφότεροι 12. Ἐὰν τότε πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο γινόμενα $\alpha \times \gamma$ καὶ $\beta \times \delta$ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 7×10, εὑρίσκομεν (κατὰ τὰς γενικὰς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἰδιότητας) ὅτι ἀμφότερα γίνονται 4×12, τουτέστιν ἀκέραιοι ἴσοι· ἄρα τὰ γινόμενα ταῦτα εἶνε ἴσα.

(Ὁμοίως δεικνύεται καὶ ὅτι *ἄνισοι ἐπὶ ἴσους πολλαπλασιαζόμενοι μένουσιν ἄνισοι.*)

Γενίκευσις τῆς διαιρέσεως.

Τὴν διαίρεσιν ὁρίζομεν γενικῶς διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς ἑξῆς·

183. *Ἡ διαίρεσις εἶνε πρᾶξις, δι' ἧς δοθέντων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον δίδει τὸν πρῶτον.*

Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς λέγεται *πηλίκον*. Ἐκ δὲ τῶν δοθέντων ὁ μὲν πρῶτος λέγεται *διαιρετέος*, ὁ δὲ δεύτερος *διαιρέτης*.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον τῆς διαιρέσεως *ὁ διαιρετέος εἶνε γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου.*

Παραδείγματα.

Ἡ διαίρεσις 12 : 3 σημαίνει νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 3 νὰ δίδῃ γινόμενον 12, φανερὸν δὲ εἶνε, ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος εὑρίσκεται, ἂν μερισθῇ ὁ 12 εἰς τρία ἴσα μέρη.

Ἡ δὲ διαίρεσις $5 : \frac{1}{3}$ σημαίνει νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ $\frac{1}{3}$ νὰ δίδῃ γινόμενον τὸν 5· ὁ δὲ ἀριθμὸς οὗτος εἶνε ὁ 15· διότι

$$15 \times \frac{1}{3} = 5.$$

Κανὼν γενικὸς τῆς διαιρέσεως.

184. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ κλάσματος, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν $\frac{4}{9}$ διὰ τοῦ $\frac{3}{5}$ τουτέστι νὰ εὕρωμεν ἀριθμόν, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ $\frac{3}{5}$ νὰ δίδῃ γινόμενον τὸν $\frac{4}{9}$.

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ $\frac{3}{5}$, πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ πέμπτον αὐτοῦ τρεῖς φοράς· ἤτοι τὰ τρία πέμπτα αὐτοῦ· ἄρα τὰ τρία πέμπτα τοῦ ζητουμένου πηλίκου θὰ εἶνε $\frac{4}{9}$. ἑπομένως τὸ ἓν πέμπτον αὐτοῦ θὰ εἶνε $\frac{4}{9\times3}$ (ἤτοι τὸ τρίτον τοῦ $\frac{4}{9}$ καὶ τὰ πέντε πέμπτα τοῦ πηλίκου, ἤτοι τὸ ὅλον πηλίκον θὰ εἶνε πενταπλάσιον $\frac{4}{9\times3}$ ἤτοι $\frac{4\times5}{9\times3}$. τὸ πηλίκον λοιπὸν τοῦ $\frac{4}{9}$ διὰ $\frac{3}{5}$ εἶνε $\frac{4\times5}{9\times4}$ ἢ $\frac{4}{9}\times\frac{5}{3}$.

Ὅτι δὲ ἀληθῶς τοῦτο εἶνε τὸ πηλίκον, ἐξελέγχεται εὐκόλως· διότι τὸ γινόμενόν του ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{3}{5}$ εἶνε $\frac{4}{9}\times\frac{5}{3}\times\frac{3}{5}$ ἤτοι $\frac{4}{9}$ τουτέστιν ὁ διαιρετέος.

Παραδείγματα.

$$\frac{1}{3} : \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\times\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$12 : \frac{2}{3} = 12\times\frac{3}{2} = 18$$

$$3\frac{1}{4} : \frac{5}{6} = (3+\frac{1}{4})\times\frac{6}{5} = 3\times\frac{6}{5} + \frac{1}{4}\times\frac{6}{5} =$$

$$\frac{18}{5}+\frac{3}{10}=\frac{39}{10}=3\ \frac{9}{10}$$

Ἐκ τούτων γίνεται φανερόν, ὅτι τῆς γενικεύσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἡ διαίρεσις ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν.

Σημείωσις. Ὁ ἀνωτέρω ἀποδειχθεὶς κανὼν ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν δι' ἀκεραίου· ἀρκεῖ ὁ ἀκέραιος διαιρέτης νὰ παρασταθῇ ὡς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1.

Π.χ. $\frac{5}{7}: 8=\frac{5}{7}:\frac{8}{1}=\frac{5}{7}\times\frac{1}{8}=\frac{5}{7\times 8}$

Παρατήρησις.

185. *Διὰ μικτοῦ διαιρέτου δὲν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἄλλως ἢ τρέποντες αὐτὸν εἰς κλάσμα.*

Π. χ. $2:(3+\frac{1}{8})=2:\frac{25}{8}=2\times\frac{8}{25}=\frac{16.}{25}$

$3\frac{1}{2}: 2\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}:\frac{5}{2}=(3+\frac{1}{2})\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}+\frac{1}{5}=\frac{7}{5}=1\frac{2}{5}.$

Γενικαὶ ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως.

Αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῆς τελείας διαιρέσεως τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν διατηροῦνται καὶ ἐπὶ οἱονδήποτε ἀριθμῶν· ἀποδεικνύονται δὲ ἀπαράλλακτα ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων· διὰ τοῦτο ἀναγράφομεν αὐτὰς ἐνταῦθα παραλείποντες τὰς ἀποδείξεις ὡςεὐκόλως εὑρισκομένας.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'.

186. *Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην ἐφ' ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ πηλίκον δὲν βλάπτεται.*

Παραδείγματος χάριν, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\frac{2}{5}:\frac{3}{8}$ δὲνβλάπτεται, ἂν πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότεροι διαιρετέος καὶ διαιρέτης ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 5×8· τότε ὁ διαιρετέος γίνεται 2×8, ὁ δὲ διαιρέτης 3×5· ἑπομένως τὸ πηλίκον εἶνε $\frac{2\times 8}{3\times 5}.$

Ὁμοίως,ἂν ἔχω νὰ διαιρέσω $3:2\frac{1}{2}$ πολλαπλασιάζω διαιρετέονκαὶ διαιρέτην ἐπὶ 2 καὶ γίνονται 6:5· ὥστε τὸ πηλίκον εἶνε $\frac{6}{5}$ ἢ $1\frac{1}{5}.$

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'.

187. *Ἵνα διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαι-*
ρέσωμεν ἕνα τῶν παραγόντων αὐτοῦ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ.

Π. χ. λόγου χάριν, ἔχω νὰ διαιρέσω τὸ γινόμενον $8\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}$ διὰ

τοῦ 4, διαιρῶ τὸν παράγοντα 8 καὶ εὑρίσκω τὸ πηλίκον $2\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

188. Ἵνα διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων του,
ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα τοῦτον.

Π. χ. τὸ πηλίκον τοῦ

$$\frac{3}{5}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{20} \text{ διὰ } \frac{8}{9} \text{ εἶνε } \frac{3}{5}\times\frac{1}{20}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'.

189. *Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ τοῦ γινομένου πολλῶν ἄλ-*
λων, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν ἀλληλεπαλλήλως διὰ πάντων τῶν πα-
ραγόντων τοῦ γινομένου (τουτέστι πρῶτον διὰ τοῦ πρώτου παράγον-
τος, ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διὰ τοῦ δευτέρου, τὸ νέον πηλίκον
διὰ τοῦ τρίτου, καὶ οὕτω καθεξῆς).

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'.

190. *Ἄθροισμα διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, ἐὰν διαιρεθῇ ἕκαστος*
τῶν προσθετέων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ προστεθῶσι τὰ προ-
κύπτοντα πηλίκα.

Σημείωσις. Ἐπειδὴ ἡ διαίρεσις ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασια-
σμόν, δύνανται τὰ θεωρήματα ταῦτα νὰ ἀποδειχθῶσι καὶ διὰ τῶν
θεωρημάτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Διὰ τοῦ αὐτοῦ δὲ τρόπου δύναται
νὰ ἀποδειχθῇ καὶ ἡ πρότασις.

191. Διαφορὰ διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, ἐὰν διαιρεθῇ ὁ μειωτέος
αὐτῆς καὶ ὁ ἀφαιρετέος χωριστὰ καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου πηλίκου ἀφαι-
ρεθῇ τὸ δεύτερον.

*Περὶ κλασμάτων ἐχόντων ὅρους οἱουσδήποτε ἀριθμούς.

192. Διὰ τὴν θεμελιώδη ἰδιότητα τῶν κλασμάτων, τὸ πηλίκον
δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν

μὲν τὸν διαιρετέον, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην· οἷον τὸ πηλίκον τοῦ 12 διὰ τοῦ 8 παρίσταται ὡς ἑξῆς $\frac{12}{8}$.

Ἐάν, χάριν τῆς γενικότητος, μεταχειρισθῶμεν τὴν παράστασιν ταύτην τοῦ πηλίκου δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, φθάνομεν εἰς παραστάσεις τοιαύτας

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}} \qquad \frac{4}{\frac{2}{5}} \qquad \frac{\frac{5}{6}}{8} \qquad \frac{2^1/_2}{3}$$

ἀντὶ $\frac{2}{5} : \frac{3}{7}$, $4 : \frac{2}{3}$, $\frac{5}{6} : 8$, $2\frac{1}{2} : 3$.

Αἱ παραστάσεις αὗται λέγονται **κλάσματα σύνθετα**· ἐκλήθησαν δὲ κλάσματα, διότι ἔχουσι πάσας τὰς γενικὰς ἰδιότητας τῶν ἁπλῶν κλασμάτων, ὡς ἀμέσως θὰ δειχθῇ.

Πρέπει ὅμως νὰ ἐνθυμώμεθα, ὅτι ταῦτα οὐδὲν ἄλλο σημαίνουσιν ἢ τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν.

193. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα ἡ παράστασις $\frac{\alpha}{\beta}$ οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶνε οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β, λέγεται κλάσμα· σημαίνει δὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ α διὰ β.

194. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἕπεται ἀμέσως, ὅτι εἶνε $\frac{\alpha}{\beta} \times \beta = \alpha$· τοῦτο δὲ εἶνε ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τῶν κλασμάτων (ἐδ. 146).

195. Ἐκ τοῦ Α΄. θεωρήματος (ἐδ. 186) τῆς διαιρέσεως συνάγεται ἀμέσως $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \times \gamma}{\beta \times \gamma}$ οἱουδήποτε ὄντος τοῦ γ·

οὗ γίνεται φανερόν, ὅτι ἡ ἐν τῷ ἐδ. 150 ἀποδειχθεῖσα γενικὴ ἰδιότης τῶν ἁπλῶν κλασμάτων ἀληθεύει περὶ πάντων.

Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης ἕπεται, ὅτι δυνάμεθα νὰ φέρωμεν καὶ τὰ σύνθετα κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν ὡς καὶ τὰ ἁπλᾶ κατὰ τοὺς κανόνας 1ον καὶ 2ον).

Ἂν δηλαδὴ ἔχωμεν τὰ $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$, θὰ εἶνε

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \times \delta}{\beta \times \delta} \qquad \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma \times \beta}{\delta \times \beta}.$$

196. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν κλασμάτων τούτων γίνεται ὡς καὶ τῶν ἁπλῶν, ἀφοῦ ἀναχθῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

Δηλαδὴ εἶνε $\frac{\alpha}{\delta}+\frac{\beta}{\delta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\delta}$ (κατὰ τὸ θεώρ. τοῦ ἐδ. 200)

$$\frac{\alpha}{\delta}-\frac{\beta}{\delta}=\frac{\alpha-\beta}{\delta}$$ (κατὰ τὸ ἐδ. 201).

197. Καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐκτελεῖται κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα τῶν ἁπλῶν κλασμάτων,

Διότι ἔστωσαν τὰ τυχόντα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν $\alpha : \beta$, θὰ εὕρωμεν πηλίκον τι π (ἀκέραιον ἢ κλασματικόν)· ἐπίσης, ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν $\gamma : \delta$, θὰ εὕρωμεν ὡς πηλίκον ἀριθμόν τινα ρ. Διὰ ταῦτα θὰ εἶνε

$$\alpha=\beta\times\pi, \qquad \gamma=\delta\times\rho,$$

ἄρα (ἐδ. 182) $\quad \alpha\times\gamma=\beta\times\pi\times\delta\times\rho=(\beta\times\delta)\times(\pi\times\rho),$

καὶ ἐπομένως $\quad \frac{\alpha\times\gamma}{\beta\times\delta}=\pi\times\rho=(\frac{\alpha}{\beta})\times(\frac{\gamma}{\delta})$

Ἀφ' οὗ ἀπεδείχθη ὁ κανὼν διὰ δύο κλάσματα, ἀποδεικνύεται δι' ὅσα δήποτε (κατὰ τὸν συνήθη τρόπον).

Σημείωσις. Ὑποθέτοντες $\delta=1$, εὑρίσκομεν

$$\frac{\alpha}{\beta}\times\gamma=\frac{\alpha\times\gamma}{\beta}$$ (παράβαλε ἐδ. 151).

198. Καὶ ἡ διαίρεσις δύο οἱωνδήποτε κλασμάτων ἐκτελεῖται κατὰ τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως τῶν ἁπλῶν κλασμάτων (ἐδ. 184)· λέγω δηλαδή, ὅτι τὸ πηλίκον τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ διαιρεθέντος διὰ $\frac{\gamma}{\delta}$ θὰ εἶνε $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\delta}{\gamma}$, διότι τοῦτο πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{\gamma}{\delta}$ δίδει $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\delta}{\gamma}\times\frac{\gamma}{\delta}$ ἤτοι $\frac{\alpha\times\delta\times\gamma}{\beta\times\gamma\times\delta}$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta}$, τουτέστι τὸν διαιρετέον.

Ὥστε ἐδείχθη, ὅτι εἶνε $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\times\delta}{\beta\times\gamma}$

Σημείωσις. Ἐὰν ὑποτεθῇ $\delta=1$, προκύπτει

$\frac{\alpha}{\beta} : \gamma=\frac{\alpha}{\beta\times\gamma}$ (παράβαλε ἐδ. 152).

Θεώρημα περὶ τῶν ἴσων κλασμάτων.

199. *Ἐὰν ἴσων κλασμάτων προστεθῶσιν οἱ ὁμώνυμοι ὅροι, προκύπτει κλάσμα ἴσον.*

Ἔστωσαν ἴσα τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{A}$, $\frac{\beta}{B}$, $\frac{\gamma}{\Gamma}$, $\frac{\delta}{\Delta}$. Ἐὰν διαιρέσω τὸ α διὰ τοῦ Α, θὰ εὕρω πηλίκον ἀριθμόν τινα ἀκέραιον ἢ κλασματικόν, ὅν τινα παριστῶ διὰ τοῦ ρ· τὸ αὐτὸ δὲ πηλίκον θὰ εὕρωμεν ἐξ ὑποθέσεως καὶ ἐκ τῶν διαιρέσεων β διὰ Β, γ διὰ Γ, δ διὰ Δ· καὶ θὰ εἶνε $\alpha=A\times\rho$, $\beta=B\times\rho$, $\gamma=\Gamma\times\rho$, $\delta=\Delta\times\rho$

ὅθεν καὶ $\alpha+\beta+\gamma+\delta=A\times\rho+B\times\rho+\Gamma\times\rho+\Delta\times\rho$.

ἢ $$\alpha+\beta+\gamma+\delta=(A+B+\Gamma+\Delta)\times\rho. \quad (\text{ἐδ. } 174)$$

ἄρα $$\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{A+B+\Gamma+\Delta}=\rho \text{ ἤτοι } = \frac{\alpha}{A}.$$

Προβλήματα
λυόμενα δι' ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ.

1) *Νὰ ἐπαναλάβωμεν ἀριθμὸν πολλάκις.*

2) *Νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν ὁσωνδήποτε μονάδων ἐξ ἑνὸς πράγματος, ὅταν εἰξεύρωμεν τὴν ἀξίαν μιᾶς μονάδος αὐτοῦ.*

Οἷον νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχ., ὅταν εἷς πῆχ. ἀξίζῃ $12\frac{1}{2}$ δραχμάς. Κατὰ τὸν νέον ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἵνα εὕρωμεν τὸ ζητούμενον ἀρκεῖ νὰ *πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἀξίαν τῆς μονάδος ἐπὶ τὸν δοθέντα ἀριθμὸν τῶν μονάδων.*

Ὥστε ἡ ἀξία τῶν $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχ. εἶνε $(12\frac{1}{2})\times\frac{7}{8}$ ἤτοι $10\frac{15}{16}$ δρ.

3) *Νὰ εὑρεθῇ μέρος τι ὡρισμένον δοθέντος ἀριθμοῦ·* οἷον νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ 40.

Τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ 40 εἶνε $\frac{40}{3}+\frac{40}{3}$ ἤτοι $\frac{40\times2}{3}$ ἢ $40\times\frac{2}{3}$.

ἤτοι τὰ 2 τρίτα τοῦ 40 εἶνε τὸ γινόμενόν του ἐπὶ $\frac{2}{3}$.

Σημείωσις. Ἐὰν ζητῆται μέρος τι τέλειον τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ. οἷον τὸ $\frac{1}{5}$, ἡ πρᾶξις, δι' ἧς εὑρίσκεται τοῦτο, εἶνε κυρίως διαίρεσις.

4) Νὰ τρέψωμεν ἀριθμόν τινα συγκεκριμένον εἰς ἄλλον κατωτέρας τάξεως καὶ ὁμοειδῆ.

Οἷον νὰ τρέψωμεν $8\frac{2}{5}$ ὀκάδας εἰς δράμια.

Αἱ 8 ὀκάδες ἔχουσι δρ. 400×8 καὶ τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς ὀκᾶς ἔχουσι δράμια $400\times\frac{2}{5}$(διότι τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς ὀκᾶς ἔχει δράμ. $400\times\frac{1}{5}$)· ἄρα αἱ $8\frac{2}{5}$ ὀκάδ. ἔχουσι δράμια $400\times8+400\times\frac{2}{5}$ ἤτοι $400\times\left(8\frac{1}{5}\right)$ ἢ 3360 δράμια.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι, ἵνα τρέψωμεν ἀριθμὸν συγκεκριμένον εἰς ἄλλον ὁμοειδῆ καὶ κατωτέρας τάξεως πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, ὅστις δεικνύει πόσας μονάδας τῆς κατωτέρας τάξεως ἔχει μία μονὰς τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο περιλαμβάνεται εἰς τὸ ἑξῆς γενικώτερον.

5) Νὰ τραπῇ ἀριθμὸς εἰς κλάσμα ἔχον δοθέντα παρονομαστήν· οἷον, νὰ τραπῇ ὁ $8\frac{2}{5}$ εἰς τετρακοσιοστά, ἢ ὁ $\frac{5}{7}$ εἰς δωδέκατα.

Πρόδηλον εἶναι, ὅτι $8\frac{2}{5}=\frac{8\frac{2}{5}\times400}{400}=\frac{8\times400+\frac{2}{5}\times400}{400}=\frac{3360}{400}$

ὥστε ὁ $8\frac{2}{5}$ εἶναι ἴσος μὲ 3360 τετρακοσιοστά.

Ὡσαύτως εἶναι $\frac{5}{7}=\frac{\frac{5}{7}\times12}{12}=\frac{\frac{60}{7}}{12}=\frac{8\frac{4}{7}}{12}$

Ὥστε $\frac{5}{7}$ εἶναι ἴσον μὲ 8 δωδέκατα καὶ $\frac{4}{7}$ τοῦ δωδεκάτου, ἢ κατὰ προσέγγισιν ἴσον μὲ 8 δωδέκατα.

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι, ἵνα τρέψωμεν ἀριθμὸν εἰς κλάσμα ἔχον δοθέντα παρονομαστὴν (ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν), πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν δοθέντα παρονομαστὴν καὶ ἐξάγομεν τὰς ἀκεραίας μονάδας τοῦ γινομένου.

Σημείωσις. Σκοπὸς τῆς τοιαύτης τροπῆς εἶνε νὰ ἀποκτήσωμεν σαφεστέραν ἰδέαν τινῶν κλασμάτων ἐκφράζοντες αὐτὰ δι' ἄλλων γνωστοτέρων· π. χ. ἀντὶ $\frac{5}{7}$ τοῦ ἔτους σαφέστερον καὶ εὐκολώτερον εἰς τὴν ἀντίληψιν ἡμῶν εἶνε 8 μῆνες $\left(=\frac{8}{12}\right)$ καὶ ἀντὶ $8\frac{2}{5}$ τῆς ὀκᾶς σαφέστερον εἶνε 8 ὀκάδες καὶ 160 δράμια.

Προβλήματα λυόμενα διὰ μιᾶς διαιρέσεως.

1) Νὰ μερίσωμεν ἀριθμὸν εἰς ἴσα μέρη.

2) Νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν μιᾶς μονάδος πράγματός τινος, ὅταν εἰξεύρωμεν τὴν ἀξίαν ὁσωνδήποτε μονάδων του·

οἷον νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν τῆς ὀκᾶς, ὅταν $15\frac{1}{2}$ ὀκ. ἀξίζουν $72\frac{2}{5}$ δραχμάς.

Ἡ ζητουμένη ἀξία τῆς ὀκᾶς, πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ $15\frac{1}{2}$ πρέπει νὰ δίδῃ γινόμενον τὸν ἀριθμὸν $72\frac{2}{5}$. ἑπομένως εἶνε τὸ πηλίκον τοῦ $72\frac{2}{5}$ διὰ $15\frac{1}{2}$. (πολλαπλασιάζοντες ἀμφοτέρους ἐπὶ 10 εὑρίσκομεν πηλίκον $\frac{724}{155}$.

3) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς ἐκ δοθέντος μέρους αὐτοῦ·

οἷον νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{3}{5}$ εἶνε 60·

τὸ ἓν πέμπτον αὐτοῦ θὰ εἶνε $\frac{60}{3}$, καὶ τὰ 5 πέμπτα, ἤτοι ὅλος ὁ ἀριθμός, θὰ εἶνε $\frac{60}{3}\times 5$ ἤτοι $60 : \frac{3}{5}$

4) Νὰ τραπῇ ἀριθμὸς συγκεκριμένος εἰς ἄλλον ἀνωτέρας τάξεως

οἷον νὰ τραπῶσιν $615\frac{1}{2}$ μῆνες εἰς ἔτη·

ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ἐτῶν, ἐὰν πολλαπλασιάσῃ τὸν 12 (διότι 1 ἔτος ἔχει 12 μῆνας), θὰ δώσῃ τοὺς $615\frac{1}{2}$ μῆνας· ὥστε εἶνε τὸ πηλίκον $615\frac{1}{2}:12$, ἢ 51 ἔτη καὶ $\frac{3}{12}$ καὶ $\frac{1}{24}$ τοῦ ἔτους, ἤτοι 51 ἐτ. $\frac{7}{24}$ τοῦ ἔτους.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο περιλαμβάνεται εἰς τὸ ἑξῆς γενικώτερον.

5) *Δοθέντων δύο ἀριθμῶν, νὰ εὑρεθῇ πῶς ἀποτελεῖται ὁ πρῶτος ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ.*

οἷον νὰ εὑρεθῇ πῶς ἀποτελεῖται ὁ 35 ἐκ τοῦ $\frac{2}{5}$ καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ· ἤγουν ποσάκις πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ $\frac{2}{5}$ καὶ πόσα μέρη αὐτοῦ, ἵνα ἀποτελέσωμεν τὸν 35.

Διαιροῦντες τὸν 35 διὰ τοῦ $\frac{2}{5}$ εὑρίσκομεν, ὅτι εἶνε $35=\frac{2}{5}\times\left(87\frac{1}{2}\right)$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι τὸ $\frac{2}{5}$, ἂν ληφθῇ 87 φοράς, καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ ἅπαξ ληφθέν, ἀποτελοῦσι τὸν 35· ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶνε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 35 διὰ τοῦ $\frac{2}{5}$

Ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς λέγεται *λόγος* τοῦ 35 πρὸς τὸ $\frac{2}{5}$ (παραβλ. ἐδ. 74).

Προβλήματα διάφορα.

1) $18\frac{1}{2}$ πήχεις ὑφάσματός τινος ἀξίζουσιν 70 δραχμάς, πόσον ἀξίζουν 10 πήχεις καὶ $\frac{2}{5}$ ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;

Λύσις. Ὁ εἷς πῆχυς ἀξίζει $\frac{70}{18\frac{1}{2}}$ ἢ $\frac{140}{37}$ τῆς δραχμῆς καὶ ἑπομένως οἱ $10\frac{2}{5}$ ἀξίζουν $\frac{140}{37}\left(10\frac{2}{5}\right)$ ἤτοι $\frac{140\times52}{5\times37}$ ἢ $\frac{28\times52}{37}$

2) Μὲ $12\frac{1}{2}$ δραχμὰς ἀγοράζει τις 8 ὀκάδας ἔξ ἑνὸς πράγματος,

πόσας ὀκάδας ἀγοράζει μὲ $40\frac{1}{5}$ δραχμάς;

Λύσις. Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζει $\frac{8}{12\frac{1}{2}}$ τῆς ὀκᾶς καὶ μὲ $40\frac{1}{5}$ ἀγοράζει $8\times\frac{40\frac{1}{2}}{12\frac{1}{2}}$ ἢ $8\times\frac{402}{125}$.

3) τίνος ἀριθμοῦ τὸ τρίτον αὐξηθὲν κατὰ 8 γίνεται 14.

Λύσις. Τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶνε 6 καὶ ὁ ὅλος ἀριθμὸς 18.

4) Πατήρ τις διέταξεν ἐν τῇ διαθήκῃ του νὰ λάβῃ ὁ υἱός του τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς περιουσίας του, ἡ δὲ θυγάτηρ του τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτῆς καὶ ὅ,τι περισσεύσει νὰ λάβῃ ἡ σύζυγός του. Ἡ σύζυγός του ἔλαβεν 9000 δρ. πόσας ἔλαβον τὰ τέκνα καὶ πόση ἦτο ἡ περιουσία ;

Λύσις. Τὰ δύο τέκνα ἔλαβον ὁμοῦ τὰ $\frac{2}{5}+\frac{3}{8}$ τῆς περιουσίας ἤτοι τὰ $\frac{31}{40}$ αὐτῆς· ἄρα ἡ σύζυγος ἔλαβε τὰ λείποντα $\frac{9}{40}$· ταῦτα δὲ ἦσαν 9000· ἄρα ἡ περιουσία ἦτο $\frac{9000\times40}{9}$ ἤτοι 40000 δραχμαί· καὶ ὁ μὲν υἱὸς ἔλαβε 15000, ἡ δὲ θυγάτηρ 16000.

5) Δεξαμενή τις πληροῦται ὑπὸ μιᾶς κρήνης εἰς 12 ὥρας καὶ ὑπὸ ἄλλης χωριστὰ εἰς 15 ὥρας· ἐὰν ῥέωσι καὶ αἱ δύο συγχρόνως εἰς πόσας ὥρας θὰ πληρώσωσι τὴν δεξαμενήν;

Λύσις. Εἰς μίαν ὥραν πληροῖ ἡ πρώτη κρήνη τὸ $\frac{1}{12}$ τῆς δεξαμενῆς, ἡ δὲ δευτέρα τὸ $\frac{1}{15}$. Ἄρα ὁμοῦ πληροῦσιν εἰς μίαν ὥραν τὰ $\frac{1}{12}+\frac{1}{15}$ τῆς δεξαμενῆς ἤτοι τὰ $\frac{9}{60}$ ἢ $\frac{3}{20}$ τῆς δεξαμενῆς· Ἐπειδὴ τὰ $\frac{3}{20}$ χρειάζονται μίαν ὥραν ἵνα πληρωθῶσι, τὸ $\frac{1}{20}$ χρειάζεται $\frac{1}{3}$

τῆς ὥρας καὶ τὰ $\frac{20}{20}$, ἤτοι ὅλη ἡ δεξαμενή, χρειάζεται $\frac{20}{3}$ τῆς ὥρας, ἤτοι 6 ὥρας καὶ $\frac{2}{3}$ τῆς ὥρας, ἢ 6 ὥρας καὶ 40 λεπτὰ πρῶτα.

6) Ἐργάτης τις ἐξετέλεσε τὰ $\frac{3}{5}$ ἔργου τινὸς εἰς 8 ἡμέρας· ἄλλος ἐργάτης ἐξετέλεσε τὰ $\frac{2}{9}$ αὐτοῦ εἰς 5 ἡμέρας· εἰς πόσας ἡμέρας, οἱ δύο οὗτοι ἐργάται ὁμοῦ θὰ ἐκτελέσωσι τὸ ἐπίλοιπον ἔργον.

Λύσις. Ὁ πρῶτος ἐπειδὴ εἰς 8 ἡμέρας ἐκτελεῖ τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ἔργου, θὰ ἐκτελέσῃ εἰς μίαν ἡμέραν τὰ $\frac{3}{40}$ αὐτοῦ. Ὁ δεύτερος ἐπειδὴ ἐκτελεῖ εἰς 5 ἡμέρας τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ ἔργου, θὰ ἐκτελέσῃ εἰς μίαν ἡμέραν τὰ $\frac{2}{45}$ αὐτοῦ.

Ἂν λοιπὸν εἰργάζοντο ὁμοῦ, θὰ ἐξετέλουν εἰς μίαν ἡμέραν τὰ $\frac{3}{40}+\frac{2}{45}$ ἤτοι τὰ $\frac{43}{360}$ τοῦ ἔργου· καὶ ἐπομένως τὸ ὅλον ἔργον εἰς $\frac{360}{43}$ τῆς ἡμέρας (ἰδὲ προηγούμενον πρόβλημα).

Ἀλλ' ἐπειδὴ ἔχουσιν ἐκτελεσθῆ τὰ $\frac{2}{9}+\frac{3}{5}$ τοῦ ἔργου, ἤτοι τὰ $\frac{37}{45}$ αὐτοῦ, μένουσι πρὸς ἐκτέλεσιν τὰ $\frac{8}{45}$ τοῦ ἔργου· ἐπομένως οἱ δύο ἐργάται χρειάζονται πρὸς τοῦτο ἡμέρας

$$\frac{360}{43}\times\frac{8}{45} \text{ ἢ } \frac{64}{43} \text{ ἢ } 1\frac{21}{43}.$$

7) Πεζὸς διανύων 17 στάδια εἰς δύο ὥρας διώκεται ὑπὸ ἱππέως, ὅστις ἀνεχώρησε 10 ὥρας μετ' αὐτὸν καὶ διανύει 28 στάδια εἰς 3 ὥρας· μετὰ πόσας ὥρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς του ὁ ἱππεὺς θὰ φθάσῃ τὸν πεζόν;

Λύσις. Τὴν στιγμήν, καθ' ἣν ἐξεκίνησεν ὁ ἱππεύς, ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ πεζοῦ ἦτο 85 στάδια (διότι τόσα διατρέχει ὁ πεζὸς εἰς 10 ὥρας)· ἐπειδὴ δὲ καθ' ἑκάστην ὥραν ἡ ἀπόστασις αὕτη ἐλαττοῦται κατὰ $\frac{28}{3}-\frac{17}{2}$. (διότι ὁ μὲν ἱππεὺς διανύει $\frac{28}{3}$ στάδια τὴν ὥραν, ὁ δὲ πεζὸς

$\frac{17}{2}$), ἤτοι κατὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ σταδίου, ἔπεται, ὅτι τόσαι ὧραι θὰ περάσουν, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ $\frac{5}{6}$ εἰς τὸν 85, ἤτοι $85 : \frac{5}{6}$ ἢ $85 \times \frac{5}{6}$ ἤτοι 17×6 ἢ 102 ὧραι.

8) Ἐλαστικὴ σφαῖρα ἀναπηδᾷ εἰς τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ ὕψους, ἐξ οὗ πίπτει· πεσοῦσα δὲ ἀπό τινος ὕψους καὶ ἀναπηδήσασα τρίς, ὑψώθη κατὰ τὴν τρίτην ἀναπήδησιν ὕψος $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχεως. Ἐκ πόσου ὕψους ἔπεσε τὸ πρῶτον ;

Λύσις. Τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ ὕψους, εἰς ὃ ὑψώθη κατὰ τὴν δευτέραν ἀναπήδησιν, εἶνε $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχεως· ἄρα τὸ ῥηθὲν ὕψος εἶνε $\frac{1}{8} \times \frac{9}{2}$ τὸ δὲ ὕψος τοῦτο εἶνε τὰ $\frac{2}{}$ τοῦ ὕψους, εἰς ὃ ὑψώθη κατὰ τὴν πρώτην ἀναπήδησιν· ἄρα τὸ ὕψος τῆς πρώτης ἀναπηδήσεως εἶνε $\frac{1}{8} \times \frac{9}{2} \times \frac{9}{2}$. τέλος τὸ ὕψος τοῦτο εἶνε τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ ὕψους, ἐξ οὗ ἔπεσε κατὰ πρῶτον ἡ σφαῖρα· ἄρα τὸ ἀρχικὸν ὕψος εἶνε $\frac{1}{8} \times \frac{9}{2} \times \frac{9}{2} \times \frac{9}{2}$, ἤτοι $11\frac{25}{64}$ πήχεις.

9) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{2}{5}$ καὶ τὸ $\frac{1}{8}$ αὐξανόμενα κατὰ 9 νὰ δίδωσι τὸν ἀριθμὸν 30. (Ἀπ. 40).

10) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{3}{8}$ καὶ τὸ $\frac{1}{9}$ αὐξανόμενα κατὰ 1 δίδουσι τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ. (Ἀπ. 72).

11) Δεξαμενὴ δύναται νὰ πληρωθῇ ὑπὸ τριῶν κρηνῶν· καὶ ἡ μὲν πρώτη μόνη πληροῖ αὐτὴν εἰς 40 ὥρας, ἡ δὲ δευτέρα μόνη εἰς 30 ὥρας, καὶ ἡ τρίτη εἰς 20· εἰς πόσας ὥρας καὶ αἱ τρεῖς συγχρόνως ῥέουσαι θὰ πληρώσωσι τὴν δεξαμενήν ; (Ἀπ. $9\frac{3}{13}$).

12) Ἐκ πίθου περιέχοντος 100 ὀκάδας οἴνου ἀφαιροῦνται 20 ὀκά-

δες καὶ ἀναπληροῦνται δι' ὕδατος· ἐκ τοῦ κράματος ἀφαιροῦνται πάλιν 20 ὀκάδες καὶ ἀναπληροῦνται δι' ὕδατος· τὸ αὐτὸ γίνεται καὶ τρίτην φοράν· πόσος οἶνος θὰ περιέχηται τότε ἐν τῷ κράματι;

Εἰς ἑκάστην ἀφαίρεσιν ἀφαιροῦνται τὰ $\frac{20}{100}$ ἢ τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἐν τῷ πίθῳ ὑπάρχοντος οἴνου (διότι ἐκ τῶν 100 ὀκάδων τοῦ ἐν τῷ πίθῳ ὑπάρχοντος ὑγροῦ ἀφαιροῦνται αἱ 20) ὥστε κατὰ μὲν τὴν πρώτην ἀφαίρεσιν ἦτο οὗτος 100 ὀκάδες καὶ ἀφῃρέθη τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ, ἄρα ἔμειναν τὰ $\frac{4}{5}$ αὐτοῦ, ἤτοι ἔμεινεν $100\times\frac{4}{5}$· εἰς τὴν δευτέραν ἀφαίρεσιν ἀφῃρέθη τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ $100\times\frac{4}{5}$ ὥστε ἔμειναν τὰ $\frac{4}{5}$ αὐτοῦ, ἤτοι $100\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}$. ὁμοίως ἔμειναν μετὰ τὴν τρίτην ἀφαίρεσιν $100\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}$ τουτέστιν ὀκ. $51\frac{1}{5}$

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐὰν δύο ἢ περισσοτέρων κλασμάτων προσθέσωμεν τοὺς ὁμωνύμους ὅρους, προκύπτει κλάσμα, ὅπερ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ἐξ αὐτῶν.

Ἔστωσαν τὰ τυχόντα κλάσματα

$$\frac{\alpha}{A} \qquad \frac{\beta}{B} \qquad \frac{\gamma}{\Gamma} \qquad \frac{\delta}{\Delta}$$

καὶ ἐξ αὐτῶν μέγιστον μὲν ἔστω τὸ $\frac{\alpha}{A}$, ἐλάχιστον δὲ τὸ $\frac{\delta}{\Delta}$.

Ἐὰν αὐξήσωμεν τοὺς ἀριθμητὰς τῶν ἄλλων, ὥστε νὰ γίνωσιν ἴσα πρὸς τὸ πρῶτον (ἂς γίνωσι δὲ τότε οἱ ἀριθμηταὶ β', γ', δ') καὶ ἔπειτα ἐφαρμόσωμεν τὴν πρότασιν τοῦ ἐδ. 199, εὑρίσκομεν

$$\frac{\alpha}{A}=\frac{\alpha+\beta'+\gamma'+\delta'}{A+B+\Gamma+\Delta}$$

ἄρα εἶνε

$$\frac{\alpha}{A}>\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{A+B+\Gamma+\Delta}$$

ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ τὸ δεύτερον μέρος τῆς προτάσεως.

2) Ἐὰν προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος, τὸ κλάσμα αὐξάνει μέν, ἐὰν εἶνε μικρότερον τῆς μονάδος, ἐλαττοῦται δέ, ἐὰν εἶνε μεγαλήτερον αὐτῆς.

Τοῦτο εἶνε ἄμεσον ἀκολούθημα τοῦ προηγουμένου.

3) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀναγώγων κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$, ὧν οἱ παρονομασταὶ διαφέρουσι, δὲν δύναται νὰ εἶνε ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ (ἅτινα ὑποτίθενται ἀνάγωγα) εἶνε ἴσον τῷ ἀκεραίῳ Μ, θὰ εἶνε

$$\frac{\alpha}{\beta} = M - \frac{\gamma}{\delta} = \frac{M\delta - \gamma}{\delta} \qquad (\iota)$$

τὸ δεύτερον δὲ τοῦτο κλάσμα ὑποδεικνύεται εὐκόλως, ὅτι εἶνε ἀνάγωγον, ἐξ οὗ συνάγεται τὸ ἀδύνατον τῆς ἰσότητος (ι)· διότι β καὶ δ εἶνε διάφορα (ἐδ. 154).

Καὶ ἡ διαφορὰ δύο ἀναγώγων κλασμάτων ἐχόντων διαφόρους παρονομαστὰς δὲν δύναται νὰ εἶνε ἀκέραιος.

4) Τὸ γινόμενον δύο ἀναγώγων κλασμάτων δὲν δύναται νὰ εἶνε ἀκέραιος ἀριθμός, ἐκτὸς ἂν ὁ παρονομαστὴς ἑκατέρου ἐξ αὐτῶν διαιρῇ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἄλλου.

5) Ἐὰν ἔχωμεν νὰ μοιράσωμεν μίαν δραχμὴν εἰς 9 ἀνθρώπους καὶ παραδεχθῶμεν ἀκόμη ἕνα ἄνθρωπον (κατὰ τὴν μέθοδον τῆς σελίδος 52), ἕκαστος θὰ λάβῃ $\frac{1}{10}$ τῆς δραχμῆς καὶ θὰ περισεύσῃ καὶ τὸ μερίδιον τοῦ προσθέτου ἀνθρώπου, ἤτοι $\frac{1}{10}$. Ἐὰν δὲ καὶ εἰς τὸν νέον μερισμὸν τοῦ $\frac{1}{10}$ τούτου κάμνωμεν τὸ αὐτό, εὑρίσκομεν ὅτι θὰ λάβῃ ἕκαστος $\frac{1}{10} + \frac{1}{100}$ καὶ θὰ περισσεύσῃ καὶ $\frac{1}{100}$ πρὸς νέαν διανομήν.

Ἐξακολουθοῦντες οὕτως, ἐφ' ὅσον θέλωμεν, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μερίδιον ἑκάστου θὰ εἶνε

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots + \frac{1}{10^\nu}$$

θὰ περισσεύσῃ δὲ πρὸς διανομὴν $\frac{1}{10^\nu}$.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἰσότης

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots + \frac{1}{10^\nu} \times \frac{1}{9^\nu}.$$

Νὰ δειχθῇ διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἡ ἰσότης·

$$\frac{\alpha}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha\gamma}{\beta^2}+\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^3}\cdots+\frac{\alpha\gamma^{\nu-1}}{\beta^\nu}+\frac{\alpha\gamma^\nu}{\beta^\nu}\times\frac{1}{\beta-\gamma}.$$

ἐν ᾗ β καὶ γ εἶνε ἀκέραιοι ἀριθμοὶ καὶ $\beta>\gamma$.

6) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ θεώρημα τοῦ ἐδ. 72 ἀληθεύει καὶ ὅταν αἱ διαιρέσεις δὲν γίνωνται ἀκριβῶς.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς α διαιρούμενος διὰ τοῦ γινομένου τῶν ἀκεραίων $\beta\times\gamma\times\delta$ δίδει πηλίκον π καὶ ὑπόλοιπον υ. τότε θὰ εἶνε

$$\alpha=(\beta\times\gamma\times\delta)\times\pi+\upsilon \qquad \upsilon>\beta\times\gamma\times\delta.$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης βλέπομεν ὅτι, ἂν διαιρέσωμεν τὸν α διὰ τοῦ πρώτου παράγοντος β, τὸ πηλίκον θὰ εἶνε $\gamma\times\delta\times\pi+\frac{\upsilon}{\beta}$ καὶ ἑπομένως τὸ ἀκέραιον μέρος θὰ εἶνε $\gamma\times\delta\times\pi+\varepsilon$ (ὅπου ε σημαίνει τὸν ἐν τῷ κλάσματι $\frac{\upsilon}{\beta}$ περιεχόμενον μέγιστον ἀκέραιον, ὅστις θὰ εἶνε μικρότερος τοῦ $\gamma\times\delta$· (διότι $\upsilon<\beta\times\gamma\times\delta$).

Ἐὰν δὲ καὶ τὸ ἀκέραιον τοῦτο πηλίκον διαιρεθῇ διὰ τοῦ δευτέρου παράγοντος γ, τὸ πηλίκον θὰ εἶνε $\pi\times\delta+\frac{\varepsilon}{\gamma}$ καὶ τὸ ἀκέραιον αὐτοῦ μέρος θὰ εἶνε $\pi\times\delta+\theta$ (ὅπου θ σημαίνει τὸ μέγιστον ἀκέραιον τὸν ἐν τῷ κλάσματι $\frac{\varepsilon}{\gamma}$ περιεχόμενον, ὅστις θὰ εἶνε μικρότερος τοῦ δ (διότι $\varepsilon<\gamma\times\delta$). Τέλος, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ ἀκέραιον τοῦτο πηλίκον διὰ τοῦ τελευταίου παράγοντος δ, θὰ εὕρωμεν πηλίκον τὸ $\pi+\frac{\theta}{\delta}$, ὅπερ θὰ ἔχῃ ἀκέραιον μέρος τὸ π (διότι $\theta<\delta$).

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΝ Δ'.

ΠΕΡΙ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

Ὁρισμοί.

200. Ἐκ τῶν κλασματικῶν μονάδων ὅσαι ἔχουσι παρονομαστὴν 10 ἢ 100 ἢ 1000 κτλ. ὅσαι δηλαδὴ προκύπτουσιν, ὅταν ἡ ἀκεραία μονὰς 1 διαιρεθῇ εἰς 10 ἢ 100 ἢ 1000 κτλ. ἴσα μέρη, λέγονται *δεκαδικαὶ μονάδες*.

Αἱ κλασματικαὶ δεκαδικαὶ μονάδες εἶνε κατὰ σειρὰν αἱ ἑξῆς·

$$\frac{1}{10},\qquad \frac{1}{100},\qquad \frac{1}{1000},\qquad \frac{1}{10000}\ \ldots\ \text{κτλ.}$$

εἶνε δὲ ἑκάστη ἐξ αὐτῶν δεκαπλασία τῆς ἀκολούθου.

201. *Δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ* λέγονται οἱ ἐκ μιᾶς δεκαδικῆς μονάδος γινόμενοι διὰ τῆς ἐπαναλήψεως· οἷον 3 δέκατα $\left(\frac{3}{10}\right)$, 145 ἑκατ. $\left(\frac{145}{100}\right)$ κτλ. εἶνε δεκαδικοὶ ἀριθμοί.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ ὑπάγονται εἰς τὰ κλάσματα, καὶ ἑπομένως, ὅσα ἐμάθομεν περὶ τῶν κλασμάτων ἀληθεύουσι καὶ περὶ τῶν δεκαδικῶν. Ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ παρονομασταὶ τῶν κλασμάτων τούτων εἶνε ἢ 10, ἢ 100, ἢ 1000 κτλ. (ἤτοι ἡ μονὰς 1 ἀκολουθουμένη ὑπὸ μηδενικῶν), αἱ πράξεις αὐτῶν γίνονται εὐκολώτερον ἢ αἱ πράξεις τῶν ἄλλων κλασμάτων (τὰ ὁποῖα πρὸς διάκρισιν λέγονται κοινά). Διὰ τοῦτο διαλαμβάνομεν περὶ αὐτῶν ἰδιαιτέρως.

Γραφὴ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

202. Ἂν φαντασθῶμεν εἰς μίαν σειρὰν τὰς ἀκεραίας μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων, τὰς ὁποίας ἐσχηματίσαμεν ἐν τῇ ἀριθμήσει, καὶ τὰς δεκαδικὰς κλασματικὰς μονάδας ὡς ἑξῆς·

$$\ldots 1000,\ 100,\ 10,\ 1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000}\cdots$$

ἑκάστη ἐκ τῶν μονάδων τούτων εἶνε δεκαπλασία τῆς ἀμέσως ἑπομένης. Διὰ τοῦτο πᾶς ἀριθμὸς ἐκ μιᾶς τῶν μονάδων τούτων σχηματιζόμενος δύναται νὰ σχηματισθῇ ἐκ τῶν μονάδων τούτων καὶ ἐξ ἑκάστης νὰ μὴ ἔχῃ περισσοτέρας τῶν 9 (ἰδὲ ἐδ. 6)· παραδείγματος χάριν ὁ ἀριθμὸς $\frac{123}{1000}$, ἀναλύεται εἰς $\frac{3}{1000}$, $\frac{2}{100}$ καὶ $\frac{1}{10}$. Ἐὰν δὲ παραδεχθῶμεν καὶ τὴν ἀρχήν, ὅτι ***πᾶν ψηφίον γραφόμενον κατόπιν ἄλλου σημαίνει μονάδας τῆς ἀμέσως ἑπομένης τάξεως***, δυνάμεθα νὰ γράφωμεν τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς, ὡς καὶ τοὺς ἀκεραίους. Κατὰ τὴν ἀρχὴν ταύτην κατόπιν τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων γράφομεν τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων (τὰ ὁποῖα δὲν θὰ εἶνε περισσότερα τῶν 9, ἄλλως θὰ ἐσχηματίζετο ἐξ αὐτῶν μία ἀκεραία μονάς), κατόπιν τούτου γράφομεν τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοστῶν (τὰ ὁποῖα ὁμοίως δὲν θὰ εἶνε περισσότερα τῶν 9), κατόπιν τὸ ψηφίον τῶν χιλιοστῶν, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Εἶνε ὅμως ἀνάγκη νὰ διακρίνωμεν τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ πρὸς τοῦτο γράφομεν ἀμέσως κατόπιν αὐτοῦ ὑποδιαστολήν· ὥστε ἡ ὑποδιαστολὴ χωρίζει τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ τοῦ δεκαδικοῦ μέρους.

Παραδείγματα

Ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει 4 δεκάδας, 7 μονάδας (ἢ 47 ἀκεραίας μονάδας) καὶ 3 δέκατα, γράφεται κατὰ τὰ προειρημένα ὡς ἑξῆς· 47,3 ἀντὶ $47\frac{3}{10}$.

Ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις ἔχει 2 μονάδας, 5 δέκατα καὶ 8 ἑκατοστά, γράφεται ὡς ἑξῆς 2,58 ἀντὶ $2\frac{5}{10}\frac{8}{100}$ ἢ $2\frac{58}{100}$

Ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις ἔχει 32 ἀκεραίας μονάδας καὶ 2 ἑκατ. καὶ 5 χιλιοστά, γράφεται ὡς ἑξῆς 32,025 ἀντὶ τοῦ $32\frac{2}{100}\frac{5}{1000}$ ἢ $32\frac{25}{1000}$

Ἐγράψαμεν 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάτων· διότι ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχει δέκατα· κάμνομεν δηλαδὴ ὅ,τι κάμνομεν καὶ εἰς τὴν γραφὴν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (οἷον 80, 704, 2003 κτλ.).

Ὅταν ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχει ἀκέραιον μέρος, γράφομεν 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν ἀκεραίων μονάδων καὶ κατόπιν αὐτοῦ θέτομεν τὴν ὑποδιαστολήν.

Οἷον ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει 6 δέκατα, γράφεται ὡς ἑξῆς· 0,6 ἀντὶ $^6/_{10}$· ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις ἔχει 3 δέκατα καὶ 5 δεκάκις χιλιοστὰ (ἢ μυριοστά), γράφεται ὡς ἑξῆς 0,3005 ἀντὶ $\frac{3}{10}+\frac{5}{10000}$ ἢ $\frac{3005}{10000}$.

Δεκαδικὰ ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ λέγονται, ὅσα εἶνε κατόπιν τῆς ὑποδιαστολῆς.

Πῶς ἀπαγγέλλεται δεκαδικὸς ἀριθμὸς γεγραμμένος ὡς ἀκέραιος.

203. Δεκαδικὸν ἀριθμὸν δυνάμεθα νὰ ἀπαγγείλωμεν κατὰ τοὺς ἑξῆς τρόπους.

1) Ἀπαγγέλλομεν χωριστὰ ἕκαστον ψηφίον καὶ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων αὐτοῦ·

οἷον 5,82 ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς· 5 ἀκέραια 8 δέκατα καὶ 2 ἑκατοστά.

2) Ἀπαγγέλλομεν τὰ ψηφία, ὡς ἐὰν ἐσχημάτιζον ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν (ἤτοι χωρὶς νὰ προσέξωμεν εἰς τὴν ὑποδιαστολήν), προσαρτῶμεν ὅμως κατόπιν τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου.

Οἷον 3,12 ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς· 312 ἑκατοστά.

Διότι ὁ ἀριθμὸς 3,12 σύγκειται ἐκ τῶν ἑξῆς·

$$3+\frac{1}{10}+\frac{2}{100}, \text{ἢ } \frac{300}{100}+\frac{10}{100}+\frac{2}{100}.$$

ἐπομένως ἔχει 312 ἑκατοστά.

Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς 0,605 ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς· 605 χιλιοστά.

$$\text{Διότι } \frac{6}{10}+\frac{5}{1000} \text{ γίνονται } \frac{600}{1000}+\frac{5}{1000} \text{ ἤτοι } \frac{605}{1000}.$$

Σημείωσις. Οἱ δύο οὗτοι τρόποι εἶνε χρήσιμοι, μόνον ὅταν τὰ ψηφία εἶνε ὀλίγα· ὅταν δὲ εἶνε πολλὰ ἀκολουθοῦμεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

3) *Ἀναλύομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς ὅσα θέλομεν τμήματα καὶ ἀπαγγέλλομεν αὐτὰ κατὰ σειράν, ἕκαστον χωριστά, ὡς ἂν ἦτο ἀκέραιος ἀριθμός· προσαρτῶμεν ὅμως κατόπιν τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου τοῦ τμήματος.*

Οἷον 87,108349 ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς·
87 ἀκέραια, 108 χιλιοστὰ καὶ 349 ἑκατομμυριοστά.

$$\text{Διότι } \frac{1}{10}+\frac{8}{1000} \text{ κάμνουν 108 χιλιοστὰ καὶ } \frac{3}{10000}+\frac{4}{100000}+\frac{9}{1000000} \text{ κάμνουν 349 ἑκατομμυριοστά.}$$

Ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἀπαγγέλλεται καὶ ὡς ἑξῆς·

87 ἀκέραια, 10 ἑκατοστά, 83 μυριοστὰ καὶ 49 ἑκατομμυριοστά, ἢ καὶ ὡς ἑξῆς· 87 ἀκέραια καὶ 108349 ἑκατομμυριοστά.

Σημείωσις. Συνήθως χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς δύο τμήματα τὸ ἀκέραιον καὶ τὸ δεκαδικὸν καὶ ἀπαγγέλλομεν ἕκαστον χωριστά· οἷον 78,759 ἀπαγγέλλεται, 78 ἀκέραια καὶ 759 χιλιοστά.

Πῶς γράφονται οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ ὡς κοινὰ κλάσματα.

204. Ἐπειδὴ οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ εἶνε κλάσματα, δυνάμεθα νὰ γράφωμεν αὐτοὺς καὶ μὲ παρονομαστήν, ὡς καὶ τὰ ἄλλα κλάσματα· πρὸς τοῦτο ἀκολουθοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

Διὰ νὰ γράψωμεν δοθὲν δεκαδικὸν κλάσμα ὡς κοινόν, παραλείπομεν τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ γράφομεν τὸν τότε προκύπτοντα ἀκέραιον ὡς ἀριθμητήν, ὑπ' αὐτὸν δὲ γράφομεν παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1 ἀκολουθουμένην ὑπὸ τόσων μηδενικῶν, ὅσα εἶνε τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

Παραδείγματος χάριν, ἀντὶ 25,607 δύναμαι νὰ γράψω $\frac{25607}{1000}$.

Διότι ὁ ἀριθμὸς 25,607 σύγκειται ἐκ τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν·

$$25+\frac{6}{10}+\frac{7}{1000} \text{ ἢ } \frac{25000}{1000}+\frac{600}{1000}+\frac{7}{1000}$$

καὶ ἑπομένως ἔχει 25607 χιλιοστά.

205. Καὶ ἀντιστρόφως. Ἐὰν δοθῇ κοινὸν κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὴν μονάδα 1 ἀκολουθουμένην ὑπὸ μηδενικῶν, τὸ κλάσμα τοῦτο εἶνε δεκαδικὸς ἀριθμός· ἵνα δὲ γράψωμεν αὐτὸ ὡς δεκαδικόν, γράφομεν τὸν ἀριθμητὴν χωριστὰ καὶ ἔπειτα χωρίζομεν πρὸς τὸ τέλος αὐτοῦ διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς τόσα ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ δοθεὶς παρονομαστής.

Παραδείγματος χάριν, τὸ κλάσμα $\frac{17}{10}$ γράφεται 1,7· τὸ δὲ κλάσμα $\frac{378}{100}$ γράφεται 3,78.

Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς δὲν ἔχῃ ἀρκετὰ ψηφία, γράφομεν μηδενικὰ εἰς τὴν ἀρχὴν αὐτοῦ (ὅπερ δὲν βλάπτει αὐτόν)· οἷον τὸ κλάσμα $\frac{12}{1000}$ γράφεται $\frac{0012}{1000}$ ἤτοι 0,012.

Ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'.

206. *Ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς δὲν βλάπτεται, ἐὰν γραφῶσιν ὁσαδήποτε μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ.*

Διότι ἡ ἀξία ἑκάστου ψηφίου ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θέσεως, τὴν ὁποίαν ἔχει ὡς πρὸς τὴν ὑποδιαστολὴν (ἐδ. 202)· ἡ δὲ θέσις αὐτὴ δὲν ἀλλάσσει διὰ τῆς γραφῆς τῶν μηδενικῶν· ὥστε ἕκαστον ψηφίον διατηρεῖ τὴν ἀξίαν αὐτοῦ.

Παραδείγματος χάριν εἶνε 1,5=1,50=1,500=1,5000 κτλ. διότι ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν τούτων ἔχει μίαν ἀκεραίαν μονάδα καὶ 5 δέκατα.

Ὁμοίως ἀντὶ τοῦ ἀκεραίου 7 δυνάμεθα νὰ γράφωμεν 7,0 ἢ 7,00 κτλ.

Σημείωσις. Ἡ ἰδιότης αὕτη τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν συνάγεται καὶ ἐκ τῆς γενικῆς ἰδιότητος τῶν κλασμάτων (ἐδ. 150). φαίνεται δὲ τοῦτο ἀμέσως, ἐὰν γραφῶσιν οἱ δεκαδικοὶ ὡς κλάσματα κοινά.

Διότι $\frac{15}{10}=\frac{150}{100}=\frac{1500}{1000}$ κτλ.

Ὁμοίως εἶνε $7=\frac{70}{10}=\frac{700}{100}$ κτλ.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'.

207. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000 κτλ. ἀρκεῖ νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ ἐμπρὸς μίαν θέσιν (διὰ τὸ 10) δύο (διὰ τὸ 100), τρεῖς (διὰ τὸ 1000) κτλ.*

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δὲ δεκαδικὸν ἀριθμὸν διὰ 10, 100, 1000 κτλ. ἀρκεῖ νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ ὀπίσω μίαν θέσιν (διὰ τὸ 10), δύο (διὰ τὸ 100), τρεῖς (διὰ τὸ 1000) κτλ.

Λέγω, παραδείγματος χάριν, ὅτι εἶνε

$$2,75\times 10=27,5$$
$$65,92\times 100=6592$$
καὶ
$$13,503 : 10=1,3503.$$

Ἀπόδειξις. Ὅταν εἰς τὸν ἀριθμὸν 2,75 μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολὴ μίαν θέσιν πρὸς τὰ ἐμπρός, προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 27,5· καὶ αἱ μὲν δύο μονάδες γίνονται 2 δεκάδες (ἤτοι δεκαπλασιάζονται), τὰ δὲ 7 δέκατα γίνονται 7 ἀκέραια (ἤτοι δεκαπλασιάζονται, διότι 1 ἀκέραιον=10 δέκατα), τὰ δὲ 5 ἑκατοστὰ γίνονται 5 δέκατα· ὥστε πάντα τὰ μέρη τοῦ ἀριθμοῦ 2,75 ἐδεκαπλασιάσθησαν· ἄρα καὶ ὁ ὅλος ἀριθμὸς ἐδεκαπλασιάσθη.

Ὁμοίως εἰς τὸν ἀριθμὸν 65,92, ὅταν μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολὴ δύο θέσεις πρὸς τὰ ἐμπρὸς, ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ ἑκατονταπλασιάζεται· ἄρα καὶ ὁ ὅλος ἀριθμὸς ἑκατονταπλασιάζεται.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τὴν διαίρεσιν.

Σημείωσις. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ ἀρκετὰ ψηφία πρὸς μετάθεσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, γράφομεν μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ ἢ εἰς τὴν ἀρχήν του (ὅπου χρειάζονται), τοῦτο δὲ δὲν βλάπτει τὸν δεκαδικὸν ἀριθμόν.

Π. χ., ἂν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 2,5 ἐπὶ 1000 πρέπει νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν τρεῖς θέσεις πρὸς τὰ ἐμπρός· ἀλλὰ δὲν δυνάμεθα, διότι εἶνε ἐμπρὸς ἓν μόνον ψηφίον (τὸ 5). Ἐὰν ὅμως γράψωμεν τὸν ἀριθμὸν 2,5 ὡς ἑξῆς 2,500, μετατίθεται ἡ ὑποδιαστολὴ καὶ εὑρίσκομεν γινόμενον 2500.

Ὁμοίως ἂν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν 0,32 : 100, γράφομεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ὡς ἑξῆς· 000,32 (ὅπερ οὐδόλως βλάπτει αὐτόν)· ἔπειτα μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν δύο θέσεις πρὸς τὰ ὀπίσω καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 0,0032.

Πράξεις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ.

208. *Διὰ νὰ προσθέσωμεν δεκαδικοὺς ἀριθμούς, κάμνομεν πρῶτον νὰ ἔχωσιν ἴσον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων· (γίνεται δὲ τοῦτο ἂν γράψωμεν εἰς τὸ τέλος τινῶν ἐξ αὐτῶν ἓν ἢ περισσότερα μηδενικά). Ἔπειτα προσθέτομεν αὐτοὺς ὡς καὶ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς· εἰς δὲ τὸ ἄθροισμα θέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν ἀμέσως μετὰ τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν ἁπλῶν μονάδων τῶν ἀριθμῶν.*

Παράδειγμα.

Νὰ προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ
42,951, 6,0032, 0,3

$$\begin{array}{lr} & 42,9510 \\ & 6,0032 \\ & 0,3000 \\ \hline \text{ἄθροισμα} & 49,2542 \end{array}$$

Ἡ ὀρθότης τοῦ κανόνος τούτου δεικνύεται ὡς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (ἐδ. 20)· στηρίζεται δὲ ἐπὶ τούτου, ὅτι δέκα μονάδες ἑκάστης τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως προηγουμένης.

Σημείωσις. Ἡ γραφὴ τῶν μηδενικῶν εἰς τὸ τέλος τῶν προσθετέων ἀριθμῶν εἶνε περιττή· διότι ταῦτα εἰς τὴν πρόσθεσιν δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν. Ἀρκεῖ νὰ γράφωμεν τοὺς ἀριθμοὺς οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην· ἔπειτα προσθέτομεν ὡς καὶ πρίν.

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως γίνεται τότε ὡς ἑξῆς φαίνεται·

```
          5,408
          0,3
         15,08
          0,0001
         -------
ἄθροισμα 20,7881
```

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

209. *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἀπὸ ἄλλου, κάμνομεν πρῶτον νὰ ἔχωσιν ἴσον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων. Ἔπειτα ἀφαιροῦμεν, ὡς ἂν ἦσαν ἀκέραιοι· εἰς δὲ τὸ ὑπόλοιπον θέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν ἀμέσως μετὰ τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον δίδει ἡ ἀφαίρεσις τῶν ἁπλῶν μονάδων.*

Παραδείγματα.

1) Νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 8,1256 ἀπὸ τοῦ 20,75

```
           20,7500
            8,1256
           -------
ὑπόλοιπον  12,6244
```

2) Νὰ ἀφαιρεθῇ ἀριθμὸς 16,36 ἀπὸ τοῦ 27

```
           27,00
           16,36
           -----
ὑπόλοιπον  10,64
```

3) Νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 7 ἀπὸ τοῦ 8,598

```
           8,598
           7
           -----
           1,598
```

Σημείωσις. Καὶ ἐνταῦθα δυνάμεθα νὰ μὴ γράφωμεν τὰ μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος τῶν ἀριθμῶν, ἀλλὰ νὰ νοῶμεν μόνον αὐτά.

Ἡ ὀρθότης τοῦ κανόνος τούτου τῆς ἀφαιρέσεως τῶν δεκαδικῶν ἀποδεικνύεται, ὡς καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, στηρίζεται δὲ ἐπὶ τῶν αὐτῶν ἀρχῶν.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

210. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο δεκαδικοὺς ἀριθμούς, σχηματίζομεν τὸ γινόμενον αὐτῶν, ὡς ἂν μὴ ὑπῆρχον αἱ ὑποδιαστολαί, ἔπειτα χωρίζομεν δι' ὑποδιαστολῆς εἰς τὸ γινόμενον τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχουσιν οἱ δύο παράγοντες ὁμοῦ.*

Ἂς ὑποθέσωμεν, π. χ., ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 8,5 καὶ 15,35.

$$\begin{array}{r} 15{,}35 \\ 8{,}5 \\ \hline 7675 \\ 12280 \\ \hline 130{,}475 \end{array}$$

λέγω, ὅτι τὸ γινόμενονον αὐτῶν θὰ εἶνε 130,475.

Διὰ νὰ πεισθῶμεν περὶ τούτου, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς ὡς κοινὰ κλάσματα· τότε ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν

$$\frac{1535}{100}\times\frac{85}{10} \text{ ἄρα τὸ γινόμενον εἶνε } \frac{1535\times85}{1000}$$

πρὸς εὕρεσιν λοιπὸν αὐτοῦ πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ἀκεραίους 1535 καὶ 85 (τοῦτο δὲ ἐγένετο, διότι ἐπολλαπλασιάσαμεν χωρὶς νὰ λαμβάνωμεν ὑπ' ὄψιν τὰς ὑποδιαστολάς), καὶ ἔπειτα νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον διὰ 1000· τοῦτο δὲ γίνεται, ἐὰν χωρίσωμεν δι' ὑποδιαστολῆς τὰ τρία τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ, ὅσα δηλαδὴ ἔχουσιν οἱ δύο παράγοντες ὁμοῦ.

Σημείωσις. Ἐὰν τὸ γινόμενον δὲν ἔχῃ ἀρκετὰ ψηφία, ὅσα δηλαδὴ μέλλομεν νὰ χωρίσωμεν, γράφομεν εἰς τὴν ἀρχὴν αὐτοῦ, ὅσα μηδενικὰ χρειάζονται·

οἷον
$$\begin{array}{r} 0{,}28 \\ 0{,}03 \\ \hline 00{,}084 \end{array}$$

Παρατήρησις. Ὁ κανὼν ἐφαρμόζεται προφανῶς, καὶ ὅταν εἷς ἐκ τῶν παραγόντων εἶνε ἀκέραιος ἀριθμός.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

1) Διαίρεσις δεκαδικοῦ δι' ἀκεραίου.

211. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 32,568 διὰ τοῦ ἀκεραίου 12.

Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν ταύτην, στηριζόμεθα εἰς τὴν γενικὴν ἰδιότητα τῆς διαιρέσεως, καθ' ἣν ἔχοντες νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὰ μέρη του καὶ νὰ ἑνώσωμεν ἔπειτα τὰ πηλίκα (ἐδ. 190).

Διαιροῦμεν λοιπὸν πρῶτον τὸ ἀκέραιον μέρος 32 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον 8.

$$\begin{array}{r|l} 32{,}568 & 12 \\ \cline{2-2} 24\phantom{{,}568} & 2{,}714 \\ \cline{1-1} 8{,}5 & \\ 8\,4 & \\ \cline{1-1} 16 & \\ 12 & \\ \cline{1-1} 48 & \\ 48 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Τὸ ἀκέραιον ὑπόλοιπον 8, ὅπερ πλέον δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 12, τρέπομεν εἰς δέκατα (1 ἀκέραιον=10 δέκατα) καὶ γίνεται 80 δέκατα· ταῦτα δὲ ἑνούμενα μετὰ τῶν 5 δεκάτων τοῦ διαιρετέου ἀποτελοῦσιν 85 δέκατα (τὸν ἀριθμὸν τοῦτον τῶν 85 δεκάτων σχηματίζομεν ἀμέσως καταβιβάζοντες τὸ ψηφίον 5 δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 8). Διαιροῦντες καὶ τὰ 85 δέκατα διὰ τοῦ 12 εὑρίσκομεν πηλίκον 7 δέκατα καὶ ὑπόλοιπον 1 δέκατον· τοῦτο δὲ (ὅπερ εἶνε=10 ἑκατοστὰ) ἑνούμενον μὲ τὰ 6 ἑκατοστὰ τοῦ διαιρετέου ἀποτελεῖ 16 ἑκατοστά· διαιροῦντες καὶ ταῦτα διὰ τοῦ 12, εὑρίσκομεν πηλίκον 1 ἑκατοστὸν καὶ ὑπόλοιπον 4 ἑκατοστὰ (=40 χιλιοστά), ταῦτα δὲ ἑνούμενα τέλος μετὰ τῶν 8 χιλιοστῶν τοῦ διαιρετέου ἀποτελοῦσι 48 χιλιοστά, τὰ ὁποῖα διαιρούμενα διὰ 12 δίδουσι πηλίκον 4 χιλιοστὰ καὶ ὑπόλοιπον 0· ὥστε ἡ διαίρεσις ἐτελείωσε καὶ εὑρέθη πηλίκον 2,714.

212. Ἐκ τούτων συνάγεται ὁ ἑπόμενος κανών·

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν δι' ἀκεραίου, ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν, ὡς ἂν μὴ ὑπῆρχεν ἡ ὑποδιασταλή, ἤτοι ὡς ἂν ἦτο ὁ διαιρετέος ἀκέραιος· καὶ ὅσα μὲν ψηφία τοῦ πηλίκου προέρχονται ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ διαιρετέου εἶνε ἀκέραια. τὰ δὲ λοιπὰ δεκαδικά.

Σημείωσις. Ἐὰν ἡ διαίρεσις ἀφήσῃ ὑπόλοιπον, δυνάμεθα νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν τρέποντες αὐτὸ εἰς δεκαδικὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἑπομένης τάξεως (ὅπερ γίνεται γραφομένου ἑνὸς μηδενικοῦ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ). Ἐξακολουθοῦντες δὲ τοιουτοτρόπως ἢ θὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον ἀκριβῶς (ἂν μείνῃ ὑπόλοιπον 0), ἢ θὰ εὕρωμεν αὐτό, μεθ' ὅσης ἂν θέλωμεν προσεγγίσεως.

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ διαίρεσις

$$\begin{array}{r|l} 0,37 & 3 \\ \hline 07 & 0,1233... \\ 10 & \\ 10 & \end{array}$$

Φανερὸν εἶνε, ὅτι ὅσον καὶ ἂν προχωρήσωμεν διαιροῦντες, οὐδέποτε θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0 (τοῦτο δὲ σημαίνει, ὅτι τὸ πηλίκον δὲν εἶνε δυνατὸν νὰ ἐκφρασθῇ ἀκριβῶς διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, τὴν δὲ αἰτίαν τούτου θὰ μάθωμεν παρακατιόντες). Δυνάμεθα ὅμως νὰ προσεγγίσωμεν διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ εἰς τὸ ἀκριβὲς πηλίκον, ὅσον θέλομεν. Διότι τὸ ἀκριβὲς πηλίκον εἶνε

0,123 καὶ $^1/_3$ τοῦ χιλιοστοῦ
ἢ 0,1233 καὶ $^1/_3$ τοῦ μυριοστοῦ
ἢ 0,12333 καὶ $^1/_3$ τοῦ ἑκατοντάκις χιλιοστοῦ
ἢ 0,123333 καὶ $^1/_3$ τοῦ ἑκατομμυριοστοῦ

καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐὰν δηλαδὴ διακόψωμέν που τὴν διαίρεσιν, τὸ εὑρεθὲν δεκαδικὸν πηλίκον διαφέρει τοῦ ἀκριβοῦς κατὰ $^1/_3$ μιᾶς μονάδος τῆς τελευταίας τάξεως τοῦ πηλίκου. Δυνάμεθα ἑπομένως νὰ εὕρωμεν δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς διαφέροντας ἀπὸ τοῦ ἀκριβοῦς πηλίκου ὀλιγώτερον παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ· ἂν λόγου χάριν, προστάξῃ τις νὰ εὕρωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν διαφέροντα τοῦ ἀκριβοῦς πηλίου ὀλιγώτερον ἑνὸς ἑκατομμυριοστοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν μέχρι τῶν ἑκατομμυριοστῶν, ὅτε εὑρίσκομεν 0,123333.

Ὁμοίως, ἂν ζητῆται νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον 3,12 : 7 μὲ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ, διαιροῦμεν μέχρις οὗ εὕρωμεν τὰ χιλιοστὰ τοῦ πηλίκου καὶ εὑρίσκομεν 0,445. (Τὸ ἀκριβὲς πηλίκον εἶνε 0,445 καὶ $^5/_7$ τοῦ χιλιοστοῦ).

Ὅταν δὲ τὸ κλάσμα δι' οὗ συμπληροῦται τὸ δεκαδικὸν πηλίκον, ὑπερβαίνῃ τὸ ἥμισυ (ὅταν δηλονότι τὸ ὑπόλοιπον εἶνε μεγαλήτερον τοῦ ἡμίσεως τοῦ διαιρέτου), ἐὰν κάμωμεν αὐτὸ ἕν, προσεγγίζομεν περισσότερον εἰς τὸ ἀκριβὲς πηλίκον.

Οὕτω π.χ. εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα τὸ ἀκριβὲς πηλίκον εἶνε 0,445 καὶ $^5/_7$ ἑνὸς χιλιοστοῦ, ἐπειδὴ δὲ τὰ $^5/_7$ τοῦ χιλιοστοῦ ὑπερβαίνουσι τὸ $^1/_2$ αὐτοῦ, γράφομεν ἀντ' αὐτῶν ἓν χιλιοστὸν καὶ οὕτως εὑρίσκομεν 0,446, ὅπερ πλησιάζει πρὸς τὴν ἀλήθειαν περισσότερον ἢ τὸ 0,445· διότι τὸ 0,446 διαφέρει τοῦ ἀκριβοῦς πηλίκου κατὰ $^2/_7$ τοῦ χιλιοστοῦ, ἐνῷ τὸ 0,445 διαφέρει κατὰ $^5/_7$ χιλιοστοῦ, καὶ τὸ μὲν 0,446 εἶνε μεγαλήτερον τοῦ ἀληθοῦς, τὸ δὲ 0,445 μικρότερον.

Παρατήρησις.

213. Καὶ ἀκέραιος δι' ἀκεραίου διαιρεῖται κατὰ τὸν προειρημένον τρόπον· διότι ὁ ἀκέραιος διαιρετέος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς δεκαδικός, τοῦ ὁποίου τὰ δεκαδικὰ ψηφία εἶνε μηδενικά.

Παραδείγματα.

```
35   | 20            2  | 3
     |______           |________
150    1,75           20   0,666...
 100                   20
   0                    20
                       ...
```

Τὸ μὲν πηλίκον τοῦ 35 διὰ 20 ἐκφράζεται ἀκριβῶς διὰ δεκαδικοῦ καὶ εἶνε 1,75, τὸ δὲ πηλίκον του 2 διὰ 3 δὲν ἐκφράζεται ἀκριβῶς διὰ δεκαδικοῦ κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ εἶνε 0,666 ἢ μᾶλλον 0,667.

2) Διαίρεσις δεκαδικοῦ διὰ δεκαδικοῦ.

214. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν διὰ δεκαδικοῦ, μεταθέτομεν πρῶτον τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ εἰς τοὺς δύο ἴσας θέσεις πρὸς τὰ ἐμπρός, ὥστε νὰ γείνῃ ὁ διαιρέτης ἀκέραιος· ἔπειτα διαιροῦμεν κατὰ τὸν προηγούμενον κανόνα.*

Ἐὰν ὁ διαιρετέος δὲν ἔχῃ ἀρκετὰ δεκαδικὰ ψηφία, διὰ νὰ μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολή, γράφομεν μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ.

Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν τὸ ὀρθὸν τοῦ κανόνος τούτου, ἀρκεῖ νὰ ἐνθυμηθῶμεν, ὅτι μεταθέτοντες τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ ἐμπρὸς ἴσας θέσεις καὶ εἰς τοὺς δύο ἀριθμούς, πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (ἐπὶ 10, ἂν κατὰ μίαν θέσιν μεταθέσωμεν· ἐπὶ 100, ἂν κατὰ δύο θέσεις· ἐπὶ 1000, ἐὰν κατὰ τρεῖς κτλ.) Κατὰ δὲ τὴν γενικὴν ἰδιότητα τῆς διαιρέσεως (ἐδ. 186) τὸ πηλίκον τότε δὲν ἀλλάσσει.

Παραδείγματα.

1) Νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 25,16 διὰ 3,2.

```
251,6  | 32
       |________
  276    7,8625
   200
     80
     160
       0
```

2) Νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 0,3 διὰ 2,48.

30	248
300	0,120...
520	
240	
...	

3) Νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 21,75 διὰ 3,21.

2175	321
2490	6,77...
2430	
...	

Τροπὴ τῶν κοινῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικά.

215. Ἐπειδὴ αἱ πράξεις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν γίνονται ὡς καὶ αἱ τῶν ἀκεραίων, ἐνῷ τῶν κοινῶν κλασμάτων αἱ πράξεις εἶναι ὀλιγώτερον ἁπλαῖ· διὰ τοῦτο εἰς τὰς ἐφαρμογὰς τῆς ἀριθμητικῆς προτιμῶνται οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοί· τρέπονται δὲ καὶ τὰ κοινὰ κλάσματα εἰς δεκαδικὰ εἴτε ἀκριβῶς εἴτε κατὰ προσέγγισιν.

Ἡ τροπὴ τῶν κοινῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικὰ ἀνάγεται εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν· διότι πᾶν κλάσμα εἶνε τὸ πηλίκον τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ διὰ τοῦ παρανομαστοῦ του (ἐδ. 147) τὸ δὲ πηλίκον τοῦτο ἐκφράζεται, ὡς εἴδομεν, διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἢ ἀκριβῶς ἢ μὲ ὅσην θέλομεν προσέγγισιν.

Παραδείγματα.

1) Νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ εἰς δεκαδικόν.

3	8
30	0,375
60	
40	
0	

ὅθεν $\frac{3}{8}=0,375$.

2) Νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{2}{7}$ εἰς δεκαδικόν.

```
2  | 7
20   0,285714...
 60
  40
   50
    10
     30
      2
```

ὅθεν $\frac{2}{7}=0,285714$, μὲ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατομμυριοστοῦ.

Ἄλλα μὲν τῶν κοινῶν κλασμάτων τρέπονται εἰς δεκαδικὰ ἀκριβῶς, ἄλλα δὲ ὄχι· διακρίνονται δὲ τὰ πρῶτα ἀπὸ τῶν δευτέρων διὰ τοῦ ἑξῆς θεωρήματος. ×

ΘΕΩΡΗΜΑ

216. *Διὰ νὰ τρέπηται κοινὸν ἀνάγωγον κλάσμα εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς, πρέπει ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ νὰ μὴ περιέχῃ ἄλλον πρῶτον παράγοντα πλὴν τοῦ 2 καὶ 5· τοῦτο καὶ ἀρκεῖ.*

Ἔστω τυχὸν ἀνάγωγον κλάσμα τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$, καὶ ἂς ὑποτεθῇ ὅτι ὑπάρχει δεκαδικόν τι κλάσμα ἴσον αὐτῷ, ἔστω τὸ $\frac{A}{100000}$, ἢ $\frac{A}{10^5}$ ἤτοι ἔστω

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{A}{10^5}$$

Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδ. 153 οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος $\frac{A}{10^5}$ θὰ εἶνε ἰσοπολλαπλάσια τῶν ὅρων τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ (ὅπερ εἶνε ἀνάγωγον)· ἄρα ὁ β θὰ διαιρῇ τὸν 10^5· *ἑπομένως δὲν θὰ περιέχῃ* (ἐδ. 154) *ἄλλους πρώτους παράγοντας πλὴν τῶν 2 καὶ 5* (τούτους μόνον περιέχει ὁ 10^5).

Τοῦτο δὲ ἀρκεῖ· διότι ἔστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{2^4\times5}$, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς δὲν περιέχει ἄλλον παράγοντα πλὴν τῶν 2 καὶ 5. Διὰ νὰ τραπῇ τοῦτο εἰς δεκαδικόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιασθῶσιν οἱ δύο ὅροι αὐτοῦ ἐπὶ 5^3 (διὰ νὰ ἔχωσιν ἀμφότεροι οἱ πρῶτοι παράγοντες 2 καὶ 5 ἴσους ἐκθέτας)· διότι τότε γίνεται

$$\frac{\alpha\times5^3}{2^4\times5^4}=\frac{\alpha\times5^3}{2\times2\times2\times2\times5\times5\times5\times5}=\frac{\alpha\times5^3}{10\times10\times10\times10}=$$

$$\frac{\alpha\times5^3}{10^4} \text{ ἤτοι } \frac{\alpha\times5^3}{10000}$$

ἐτράπη λοιπὸν τὸ δοθὲν κλάσμα εἰς δεκαδικόν· καὶ ἂν γραφῇ ὡς συνήθως, θὰ ἔχῃ 4 δεκαδικὰ ψηφία (ὅσος εἶνε ὁ μεγαλήτερος ἐκθέτης τῶν δύο παραγόντων τοῦ παρονομαστοῦ του).

Παραδείγματα.

1) Τὸ κλάσμα $^3/_8$ τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς· διότι ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ εἶνε 2^3, διὰ νὰ τραπῇ δὲ εἰς δεκαδικόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ὅροι του ἀμφότεροι ἐπὶ 5^3 τότε γίνεται $\frac{3\times5^3}{1000}$ ἢ 0,375· τὸ αὐτὸ δὲ εὑρίσκομεν καὶ διαιροῦντες τὸν ἀριθμητὴν 3 διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 8 κατὰ τὰ προειρημένα.

2) Τὸ κλάσμα $^8/_{15}$ δὲν δύναται νὰ τραπῇ εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς· διότι ὁ παρονομαστής του εἶνε 3×5· ὥστε ἔχει τὸν πρῶτον παράγοντα 3 (διάφορον τῶν 2 καὶ 5)· ἐπομένως, ἂν διαιρέσωμεν τὸν 8 διὰ 15, κατὰ τὸ ἐδάφιον 213, ἡ διαίρεσις οὐδέποτε θὰ λάβῃ πέρας.

Παρατήρησις.

217. Ὅταν τὸ κοινὸν κλάσμα δὲν δύναται νὰ τραπῇ ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν, ἡ δεκαδικὴ διαίρεσις τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του δὲν ἔχει τέλος. Ἐξακολουθοῦντες ὅμως αὐτὴν πλησιάζομεν ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον πρὸς τὸ κοινὸν κλάσμα· δυνάμεθα δηλαδὴ νὰ εὕρωμεν δεκαδικὸν κλάσμα διαφέρον τοῦ δοθέντος κοινοῦ ὀλιγώτερον πάσης δοθείσης δεκαδικῆς μονάδος. Ἄν, λόγου χάριν, προστάξῃ τις νὰ εὕρωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν διαφέροντα τοῦ $^2/_3$ ὀλιγώτερον ἑνὸς χιλιοστοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν, μέχρις οὗ εὕρωμεν τὰ χιλιοστὰ τοῦ πηλίκου· διότι τότε εὑρίσκομεν, ὅτι εἶνε $\frac{2}{3}=0,666+\frac{2}{3}$ τοῦ χιλιοστοῦ· ὥστε τὸ δεκαδικὸν 0,666 διαφέρει τοῦ $\frac{2}{3}$ ὀλιγώτερον ἑνὸς χιλιοστοῦ.

Ὁμοίως τὸ 0,6666 διαφέρει τοῦ $\frac{2}{3}$ ὀλιγώτερον $\frac{1}{10000}$

καὶ τὸ 0,66666 διαφέρει τοῦ $\frac{2}{3}$ ὀλιγώτερον $\frac{1}{100000}$

καὶ τὸ 0,666666 διαφέρει τοῦ $\frac{2}{2}$ ὀλιγώτερον $\frac{1}{1000000}$

καὶ οὕτω καθεξῆς·

Ἐκ τούτου φθάνομεν εἰς τὴν ἰδέαν, ὅτι τὸ κοινὸν κλάσμα $^2/_3$ θὰ ἀπετελεῖτο, ἂν ἦτο δυνατὸν νὰ ἑνώσωμεν 6 μονάδας ἐξ ἑκάστης δεκαδικῆς τάξεως (ἤτοι 6 δέκατα, 6 ἑκατοστὰ κτλ.) καὶ δύναται ἑπομένως νὰ θεωρηθῇ ὡς συγκείμενον ἐξ ἀπείρου πλήθους δεκαδικῶν μονάδων ἐντελῶς ὡρισμένων.

Τὸ αὐτὸ δὲ δύναται νὰ λεχθῇ καὶ περὶ παντὸς κλάσματος μὴ δυναμένου νὰ τραπῇ ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν· διότι τὰ δεκαδικὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν ἐπιχειροῦντες νὰ τρέψωμεν αὐτὸ εἰς δεκαδικόν, εἶνε ἅπαντα ἐντελῶς ὡρισμένα.

Κατὰ ταῦτα δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, ὅτι πᾶν κλάσμα ἀποτελεῖται ἐκ δεκαδικῶν μονάδων, ὧν τὸ πλῆθος εἶνε ἢ πεπερασμένον (ὅταν ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος δὲν περιέχῃ ἄλλον πρῶτον παράγοντα πλὴν τοῦ 2 καὶ 5), ἢ ἄπειρον (ὅταν ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος, ἀναγώγου ὄντος, περιέχῃ ἄλλον τινὰ πρῶτον παράγοντα)· ἑπομένως τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἔχον ἢ πεπερασμένον ἀριθμὸν ψηφίων ἢ ἄπειρον.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

218. *Ὅταν κοινὸν κλάσμα τρέπηται εἰς δεκαδικὸν ἔχον ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία, τὸ δεκαδικὸν τοῦτο, ἀπό τινος ψηφίου καὶ ἐφεξῆς, ἀποτελεῖται ἔκ τινων ψηφίων, τὰ ὁποῖα ἐπαναλαμβάνονται ἐπ' ἄπειρον τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.*

Ἂς λάβωμεν, ὡς παράδειγμα, τὸ κλάσμα $^4/_7$.

$$\begin{array}{l|l} 4 & 7 \\ \hline 40 & 0,571428 \\ \quad 50 & \\ \quad\; 10 & \\ \quad\;\; 30 & \\ \quad\;\;\; 20 & \\ \quad\;\;\;\; 60 & \\ \quad\;\;\;\; 4 & \end{array}$$

τρέποντες αὐτὸ εἰς δεκαδικὸν παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ ὑπόλοιπα τῶν μερικῶν διαιρέσεων θὰ εἶνε πάντα μικρότερα τοῦ 7· οὐδὲν ἐξ αὐτῶν θὰ εἶνε

0· διότι τὸ κλάσμα $^4/_7$ δὲν τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν)· ἄρα δὲν δύνανται νὰ μείνωσιν ἄλλα ὑπόλοιπα ἢ τὰ ἑξῆς ἓξ 1,2,3,4,5,6.

Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν, ὅτι, ἀφοῦ κάμωμεν τὸ πολὺ ἓξ διαιρέσεις, θὰ εὕρωμεν ἐξ ἀνάγκης ἓν ὑπόλοιπον καὶ πρὶν εὑρεθέν· τότε θὰ ἐπαναρχίσωμεν τὰς ἤδη γενομένας διαιρέσεις καὶ ἑπομένως θὰ εὑρίσκωμεν τὰ αὐτὰ ψηφία τοῦ πηλίκου καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν· τοῦτο δὲ θὰ γίνηται ἐπ' ἄπειρον. ×

Ὁρισμοί.

219. *Περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα* λέγεται τὸ ἔχον ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία ἀποτελούμενα (ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς) ἔκ τινων ψηφίων, τὰ ὁποῖα ἐπαναλαμβάνονται ἐπ' ἄπειρον τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.

Τὸ σύνολον τῶν οὕτως ἐπαναλαμβανομένων ψηφίων λέγεται *περίοδος*.

Τὸ περιοδικὸν λέγεται *ἁπλοῦν* μέν, ἐὰν ἡ περίοδος ἀρχίζῃ ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν· *μικτὸν* δέ, κατὰ τὴν ἐναντίαν περίπτωσιν· τότε δὲ τὰ προηγούμενα τῆς πρώτης περιόδου δεκαδικὰ ψηφία ἀποτελοῦσι τὸ μὴ περιοδικὸν μέρος.

Παραδείγματα.

Τὸ κλάσμα 0,727272... εἶναι περιοδικὸν ἁπλοῦν· ἡ δὲ περίοδος αὐτοῦ εἶνε 72.

Τὸ δὲ κλάσμα 0,82535535535.... εἶνε περιοδικὸν μικτόν· ἡ περίοδος αὐτοῦ εἶνε 535, τὸ δὲ μὴ περιοδικὸν μέρος εἶνε 82.

Σημείωσις. Κατὰ τὰ προηγουμένως ἀποδειχθέντα, (ἐδ. 218), ὅταν κοινὸν κλάσμα τρέπηται εἰς δεκαδικὸν ἔχον ἄπειρα ψηφία, τὸ δεκαδικὸν τοῦτο εἶνε περιοδικόν· καὶ τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τῆς περιόδου καὶ τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους (ἂν ὑπάρχῃ) εἶνε μικρότερον τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κοινοῦ κλάσματος.

Παραδείγματος χάριν, τὸ κλάσμα $^4/_7$ δίδει περιοδικὸν ἁπλοῦν ἔχον περίοδον ἑξαψήφιον· τὸ δὲ $^3/_{11}$ δίδει ὅμοιον ἔχον περίοδον διψήφιον.

Εὕρεσις τοῦ κοινοῦ κλάσματος ἐξ οὗ παράγεται δοθὲν περιοδικὸν κλάσμα.

ΑΠΛΑ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ

220. Ἔστω κατὰ πρῶτον οἱονδήποτε περιοδικὸν κλάσμα ἄνευ ἀκεραίου μέρους· οἷον τὸ 0,727272.....
ἂς λάβωμεν ἐξ αὐτοῦ περιόδους τινάς, ἔστω τέσσαρας· τότε ἔχομεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 0,72727272.

τὸν ἀριθμὸν τοῦτον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 100, (ὥστε ἡ ὑποδιαστολὴ νὰ προχωρήσῃ κατὰ μίαν περίοδον) καὶ εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν

$$72,727272.$$

Ἂν ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶχεν ἀκόμη μίαν περίοδον (ἤτοι ἂν εἶχεν ἀκόμη 72 ἑκατοντάκις ἑκατομμυριοστά), ἡ διαφορὰ αὐτοῦ καὶ τοῦ προηγουμένου θὰ ἦτο ἀκριβῶς 72 ἀκέραια. Ἄρα ἡ διαφορά των θὰ εἶνε μικροτέρα τοῦ 72 ἀκεραίου κατὰ 72 ἑκατοντάκις ἑκατομμυριοστά· τουτέστιν ἡ ῥηθεῖσα διαφορὰ εἶνε

$$72\frac{72}{100000000} \text{ ἢ } 72\ \frac{72}{10^8}$$

Ἀλλ' ἡ διαφορὰ αὐτη εἶνε 99 φορὰς ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 0,72727272· (διότι ἐλάβομεν αὐτὸν 100 φορὰς καὶ ἔγεινεν 72,727272 καὶ ἀπὸ τούτου ἀφῃρέσαμεν αὐτὸν μίαν φοράν). Ὥστε ἂν διαιρεθῇ διὰ τοῦ 99, θὰ δώσῃ τὸν δεκαδικὸν τοῦτον· ἤτοι εἶνε

$$0,72727272=\frac{72}{99}-\frac{72}{10^8}\times\frac{1}{99}.$$

Ἂν ἐλαμβάνομεν 5 περιόδους τοῦ δοθέντος περιοδικοῦ, θὰ εὑρίσκομεν ὁμοίως.

$$0,7272727272=\frac{72}{99}-\frac{72}{10^{10}}\times\frac{1}{99}.$$

Ἂν δὲ ἕξ, θὰ εὑρίσκομεν

$$0,727272727272=\frac{72}{99}-\frac{72}{10^{12}}\times\frac{1}{99} \text{ καὶ οὕτω καθεξῆς.}$$

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι ὁσασδήποτε περιόδους καὶ ἂν λάβωμεν κατὰ σειρὰν ἀπ' ἀρχῆς τοῦ δοθέντος περιοδικοῦ, ὁ ἀποτελούμενος ὑπ' αὐτῶν ἀριθμὸς θὰ εἶνε μικρότερος τοῦ κοινοῦ κλάσματος $\frac{72}{99}$.

Ἀλλ' ἡ διαφορά των δύναται νὰ γίνῃ μικροτέρα πάσης δεκαδικῆς μονάδος· διότι, ἐὰν λάβωμεν τέσσαρας περιόδους, ἡ διαφορὰ εἶνε $\frac{72}{99}\times\frac{1}{10^8}$ ἤτοι μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{10^8}$. ἂν λάβωμεν 5, ἡ διαφορὰ γίνεται μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{10^{10}}$. ἂν ἕξ, ἡ διαφορὰ γίνεται μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{10^{12}}$ καὶ οὕτω καθεξῆς, καὶ ἂν ἦτο δυνατὸν νὰ λάβωμεν πάσας τὰς περιόδους τοῦ δοθέντος περιοδικοῦ, θὰ ἀπετελεῖτο ὁ ἀριθμὸς $^{72}/_{99}$.

'Εκ τούτου συμπεραίνομεν, ὅτι ἂν τὸ δοθὲν περιοδικὸν παράγηται ἐκ τῆς τροπῆς κοινοῦ τινος κλάσματος τὸ κλάσμα τοῦτο θὰ εἶνε ἴσον τῷ $^{72}/_{99}$. διότι, ὅταν δεκαδικὸν ἔχον ἄπειρα ψηφία παράγηται ἐκ τῆς τροπῆς κοινοῦ κλάσματος, καθόσον λαμβάνομεν περισσότερα ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ τούτου, κατὰ τοσοῦτον προσεγγίζομεν πρὸς τὸ κοινὸν κλάσμα ἐξ οὗ παρήχθη (ἐδ. 217).

Ὅτι δὲ ἀληθῶς τὸ δοθὲν περιοδικὸν 0,72727272... παράγεται ἐκ τοῦ κλάσματος $^{72}/_{99}$, δεικνύεται ὡς ἑξῆς·

Ὅταν τρέπω τὸ κλάσμα $^{72}/_{99}$ εἰς δεκαδικὸν διὰ νὰ εὕρω τὰ δύο πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία, πρέπει νὰ διαιρέσω τὸν 7200 διὰ 99. Ἀλλ' ἀντὶ νὰ διαιρέσω τὸν ἀριθμὸν 7200 εἰς 99 ἴσα μέρη, δύναμαι νὰ διαιρέσω αὐτὸν εἰς 100 ἴσα μέρη καὶ ἔπειτα τὸ περισσεῦον ἓν μερίδιον νὰ διαιρέσω πάλιν εἰς 99 ἴσα μέρη (ἰδὲ σελ. 52). Διαιρῶ τοιουτοτρόπως τὸν 7200 καὶ εὑρίσκω πηλίκον 72 καὶ ὑπόλοιπον 72. Ἄρα ἐξακολουθῶν τὴν πρᾶξιν, θὰ εὑρίσκω πάντοτε τὰ αὐτὰ ψηφία 7,2· τουτέστι θὰ εὕρω τὸ περιοδικὸν 0,72727272....

221. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται τὸ ἑξῆς θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ κοινὸν κλάσμα, ἐξ οὗ παράγεται ἁπλοῦν περιοδικὸν ἄνευ ἀκεραίου μέρους, ἔχει ἀριθμητὴν μὲν μίαν περίοδον, παρονομαστὴν δὲ τὸν ἀριθμόν, ὅστις προκύπτει ἐξ αὐτῆς, ὅταν πάντα τὰ ψηφία αὐτῆς γίνωσιν 9.

Σημείωσις. Ὁ ἀριθμός, ὅστις εὑρίσκεται κατὰ τὸ θεώρημα τοῦτο, εἶνε πάντοτε κλασματικὸς (ἑπομένως παράγει τὸ δεκαδικὸν περιοδικόν), πλὴν ὅταν πάντα τὰ ψηφία τῆς περιόδου εἶνε 9· ὅταν δηλαδὴ τὸ δοθὲν περιοδικὸν εἶνε 0,999999.... διότι τότε ὁ ἀριθμός, πρὸς ὃν προσεγγίζομεν λαμβάνοντες ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον περισσότερα ψηφία (ὁ κατὰ τὸ θεώρημα εὑρισκόμενος), εἶνε $^{9}/_{9}$ ἢ $^{99}/_{99}$ ἢ $^{999}/_{999}$ κτλ. τουτέστιν 1 ἀκέραιον. Ἄρα ***τὸ περιοδικὸν τοῦτο ἐξ οὐδενὸς κοινοῦ κλάσματος παράγεται.*** Ὅτι δὲ προσεγγίζομεν εἰς τὴν μονάδα 1 ὅταν λαμβάνομεν ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον περισσότερα ψηφία αὐτοῦ, ἀποδεικνύεται ἁπλούστατα καὶ ἐκ τούτου, ὅτι τὸ 0,9 διαφέρει τῆς μονάδος 1 κατὰ $^{1}/_{10}$, τὸ 0,99 διαφέρει ἀπ' αὐτῆς κατὰ $^{1}/_{100}$, τὸ 0,999 κατὰ $^{1}/_{1000}$, καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, ὅτι ἅπασαι αἱ δεκαδικαὶ μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ 0,99999... ἀποτελοῦσι τὴν ἀκεραίαν μονάδα 1.

222. Εἰς τὰ προηγούμενα ἀνάγεται εὐκόλως καὶ ἡ εὕρεσις τοῦ κοινοῦ κλάσματος, ἐξ οὗ παράγεται δοθὲν ἁπλοῦν περιοδικὸν ἔχον ἀκέραιον μέρος.

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ ἁπλοῦν περιοδικὸν 45,722722722...

Ἐπειδὴ τοῦτο εἶνε ἄθροισμα τοῦ ἀκεραίου 45 καὶ τοῦ ἁπλοῦ περιοδικοῦ 0,722722722... φανερὸν εἶνε, ὅτι παράγεται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ

$$45\frac{722}{999} \text{ ἤτοι } \frac{45\times999+722}{999}$$

Ἐὰν τὰ περιοδικὰ ψηφία εἶνε πάντα 9, τὸ περιοδικὸν ἐξ οὐδενὸς κοινοῦ κλάσματος παράγεται· οἷον τὸ κλάσμα, 14,99999....

Αἱ δὲ μονάδες αὐτοῦ συναποτελοῦσιν, ἂν ληφθῶσιν ἅπασαι, τὸν ἀκέραιον 15.

Παρατήρησις.

223. Τὸ κατὰ τὰ προηγούμενα εὑρισκόμενον κοινὸν κλάσμα (ἐξ οὗ παράγεται δοθὲν ἁπλοῦν περιοδικόν), ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ δὲν εἶνε ἀνάγωγον. Ἀλλ' ὁ παρανομαστὴς αὐτοῦ, ὡς λήγων εἰς 9, δὲν ἔχει οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν παράγοντα 5. Οὐδὲ δύναται νὰ ἀποκτήσῃ τοὺς παράγοντας τούτους ἐν τῇ ἁπλοποιήσει τοῦ κλάσματος, διότι τότε διαιρεῖται διά τινος τῶν παραγόντων του.

Ἐντεῦθεν συνάγεται τὸ ἑξῆς θεώρημα·

224. *Ὁ παρονομαστὴς τοῦ ἀναγώγου κλάσματος, ὅπερ παράγει ἁπλοῦν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα, δὲν ἔχει οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν παράγοντα 5.*

Μικτὰ περιοδικά.

225. Ταῦτα ἀνάγονται εὐκόλως εἰς τὰ ἁπλᾶ περιοδικά. Διότι ἔστω, λόγου χάριν, τὸ μικτὸν περιοδικὸν 18,75427427427...

Ἐὰν μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν δύο θέσεις πρὸς τὰ ἐμπρὸς (διὰ νὰ ἀρχίζῃ ἡ περίοδος ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν), λαμβάνομεν τὸ ἁπλοῦν περιοδικὸν 1875, 427 427...

Τὸ περιοδικὸν τοῦτο παράγεται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ $1875+\frac{427}{999}$ ἤτοι

ἐκ τοῦ κοινοῦ κλάσματος $\frac{1875\times999+427}{999}$ ἢ $\frac{1873552}{999}$

ἐπειδὴ δὲ τὸ ἁπλοῦν περιοδικὸν 1875, 427 427... προκύπτει ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ 1873552 διὰ 999, τὸ μικτὸν περιοδικὸν 18,75427427... ὅπερ ἔχει τὰ αὐτὰ καὶ τὸ ἁπλοῦν ψηφία, ἀλλ' ἐν τῷ ὁποίῳ ἡ ὑποδιαστολὴ εὑρίσκεται δύο θέσεις πρίν, θὰ προκύπτῃ προφανῶς ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ 18735,52 διὰ 999, ἤτοι ἐκ τοῦ κλάσματος $\frac{1873552}{99900}$

226. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κοινὸν κλάσμα, ἐξ οὗ παράγεται δοθὲν μικτὸν περιοδικόν, μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ ἐμπρός, ὥστε νὰ καταστήσωμεν αὐτὸ ἁπλοῦν, εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμόν, ἐξ οὗ τὸ ἁπλοῦν τοῦτο παράγεται καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν διὰ 10, ἂν μίαν θέσιν μετεθέσαμεν τὴν ὑποδιαστολήν· διὰ 100, ἂν δύο καὶ οὕτω καθεξῆς.

Σημείωσις. Ἐὰν πάντα τὰ περιοδικὰ ψηφία εἶνε 9, τὸ μικτὸν περιοδικὸν ἐξ οὐδενὸς παράγεται κοινοῦ κλάσματος· οἷον τὸ κλάσμα 7,8399999...

Αἱ δὲ μονάδες αὐτοῦ (ἂν ἅπασαι ληφθῶσιν), ἀποτελοῦσι τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 7,84· τοῦτο καὶ ἀμέσως δύναται νὰ ἀποδειχθῇ (ἐδ. 221 σημ.)· εὑρίσκεται δὲ καὶ διὰ τοῦ ἀνωτέρω κανόνος.

Παρατήρησις.

227. Ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κοινοῦ κλάσματος, ἐξ οὗ παράγεται μικτὸν περιοδικόν, οὐδέποτε λήγει εἰς 0. Εἰς τὸ ἀνωτέρω δοθὲν παράδειγμα ὁ ἀριθμητὴς εἶνε $1875\times999\times+427$· γράφεται δὲ καὶ ὡς ἑξῆς·
$1875\times1000-1875+427$, ἤτοι $1875427-1875$· ἐξ οὗ φαίνεται, ὅτι, ἵνα λήγῃ εἰς 0, ἔπρεπε τὸ τελευταῖον ψηφίον 5 τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους νὰ εἶνε ἴσον μὲ τὸ τελευταῖον ψηφίον τῆς περιόδου· ἤτοι μὲ τὸ 7· τότε ὅμως καὶ τὸ ψηφίον τοῦτο 5 θὰ περιελαμβάνετο εἰς τὴν περίοδον (ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως)· διότι τότε τὸ περιοδικὸν θὰ ἦτο 18,774274274 27... καὶ θὰ εἶχε περίοδον 742· θὰ ἤρχιζε δὲ ἡ περίοδος μίαν θέσιν πρίν.

Ὁ δὲ παρονομαστὴς 99×100 ἔχει, ὡς ἀμέσως φαίνεται, ἀμφοτέρους τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5, ἑκάτερον μὲ ἐκθέτην 2 (διότι $100=2^2\times5^2$) τουτέστι τοσάκις ἑκάτερον, ὅσα εἶνε τὰ μὴ περιοδικὰ ψηφία τοῦ δοθέντος μικτοῦ περιοδικοῦ.

Ἁπλοποιοῦντες δὲ τὸ κλάσμα εἶνε δυνατὸν νὰ ἐξαλείψωμεν ἢ τὸν παράγοντα 2 (ἅπαξ ἢ πολλάκις) ἢ τὸν παράγοντα 5· ἀλλ' οὐχὶ ἀμφοτέρους· διότι τότε θὰ διῃροῦντο οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος διὰ 10, ὅπερ ἀδύνατον (διότι ὁ ἀριθμητὴς δὲν λήγει εἰς 0). Ὥστε ὁ παρονομαστὴς τοῦ προκύπτοντος ἀναγώγου κλάσματος θὰ διατηρήσῃ τὸν ἕνα τοὐλάχιστον ἐκ τῶν παραγόντων 2 ἢ 5 μὲ τὸν αὐτὸν καὶ πρὶν ἐκθέτην.

Ἐντεῦθεν συνάγεται τὸ θεώρημα·

228. *Ὁ παρονομαστὴς τοῦ κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος, ἐξ οὗ παράγεται μικτὸν περιοδικόν, περιέχει τὸν ἕνα ἐκ τῶν παραγόντων 2 ἢ 5 μὲ ἐκθέτην τὸν ἀριθμὸν τῶν μὴ περιοδικῶν ψηφίων. Δύναται δὲ νὰ ἔχῃ καὶ τὸν ἄλλον μὲ ἐκθέτην ἴσον ἢ μικρότερον.*

229. Συνοψίζοντες ἅπαντα τὰ περὶ τῶν δεκαδικῶν εἰρημένα, συμπεραίνομεν τὰ ἑξῆς·

1) Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κοινοῦ κλάσματος περιέχῃ μόνον τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5, τὸ κλάσμα τοῦτο τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀκριβῶς.

2) Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος δὲν περιέχῃ μήτε τὸν παράγοντα 2 μήτε τὸν παράγοντα 5, τὸ κλάσμα τοῦτο παράγει ἁπλοῦν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα.

Τὸ κλάσμα τοῦτο δὲν τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν (ἐδ. 216)· ἄρα παράγει περιοδικὸν δεκαδικόν· παράγει δὲ ἁπλοῦν· διότι ἂν παρῆγε μικτόν, ὁ παρονομαστής του θὰ περιεῖχεν ἕνα τοὐλάχιστον ἐκ τῶν παραγόντων 2 ἢ 5 (ἐδ. 228).

3) Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος περιέχῃ τὸν ἕτερον τῶν παραγόντων 2 ἢ 5 ἢ καὶ ἀμφοτέρους, περιέχῃ δὲ πλὴν αὐτῶν καὶ ἄλλους παράγοντας, τὸ κλάσμα τοῦτο παράγει μικτὸν περιοδικόν.

Τὸ κλάσμα τοῦτο, ὡς μὴ τρεπόμενον ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν (ἐδ. 216), θὰ παράγῃ περιοδικὸν δεκαδικόν· παράγει δὲ μικτόν· διότι ἂν παρῆγεν ἁπλοῦν, δὲν θὰ περιεῖχεν ὁ παρονοματτής του οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν παράγοντα 5. (ἐδ. 224).

(4) Πᾶν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα παράγεται ἔκ τινος κοινοῦ κλάσματος, ὅπερ ἀποτελοῦσιν ἅπασαι αἱ μονάδες αὐτοῦ ὁμοῦ λαμβανόμεναι· ἐξαιροῦνται μόνον ἐκεῖνα, ὧν πάντα τὰ περιοδικὰ ψηφία εἶναι 9· διότι ταῦτα ἐξ οὐδενὸς κοινοῦ κλάσματος παράγονται· καὶ τούτων ὅμως αἱ μονάδες, ἅπασαι ληφθεῖσαι, συναποτελοῦσιν ἀριθμόν, ἀκέραιον μὲν τῶν ἁπλῶν, δεκαδικὸν δὲ τῶν μικτῶν.)

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Νὰ δειχθῇ ὅτι πᾶς ἀριθμὸς Α μὴ ἔχων τὸν παράγοντα 2 μηδὲ τον 5, διαιρεῖ ἀριθμόν τινα, οὗ τινος πάντα τὰ ψηφία εἶναι 9, (ἤτοι διαιρεῖ δύναμίν τινα τοῦ 10, ἀφ' οὗ ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτῆς μία μονάς.)

Ἐὰν δὲ ἐκ πασῶν τῶν τοιούτων δυνάμεων τοῦ 10 λάβωμεν τὴν ἐλαχίστην, ὁ ἐκθέτης αὐτῆς δεικνύει τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τῆς περιόδου ἐν τῷ περιοδικῷ κλάσματι τῷ παραγομένῳ ἐκ τοῦ κλάσματος.

$\frac{1}{A}$ ἢ καὶ ἐκ παντὸς κλάσματος $\frac{B}{A}$ ἀναγώγου.

2) Εἰς περιοδικόν τι κλάσμα, οἷον εἰς τὸ 0,58585858... δυνάμεθα

ὡς περίοδον νὰ λάβωμεν ἢ 58 ἢ 5858 ἢ 585858 κτλ. τότε κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἐδαφίου 221 παράγεται τὸ περιοδικὸν ἐκ τῶν ἑξῆς κοινῶν κλασμάτων·

$$\frac{58}{99},\ \frac{5858}{9999},\ \frac{585858}{999999}$$

Νὰ δειχθῇ ἐκ τῶν προτέρων ἡ ἰσότης τῶν κλασμάτων τούτων.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΝ Ε'.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ὁρισμοί.

230. *Ποσὸν* λέγεται πᾶν τὸ ἐπιδεχόμενον αὔξησιν καὶ ἐλάττωσιν· οἷον τὸ μῆκος, ἡ ἐπιφάνεια, ὁ ὄγκος, τὸ βάρος τῶν σωμάτων εἶνε ποσά, καὶ ὁ χρόνος ἐπίσης.

231. *Μέτρησις* τοῦ ποσοῦ λέγεται ἡ σύγκρισις αὐτοῦ πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς ὡρισμένον καὶ γνωστόν, τὸ ὁποῖον λέγεται *μονάς*. Ἐκ τῆς συγκρίσεως ταύτης εὑρίσκομεν πόσαι μονάδες καὶ πόσα καὶ ποῖα μέρη τῆς μονάδος ἀποτελοῦσι τὸ ποσόν· ἤτοι πῶς ἀποτελεῖται τὸ ποσὸν ἐκ τῆς μονάδος καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς.

Ὁ ἀριθμός, ὅστις ἀποτελεῖται ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ ἐκ τῶν μερῶν της, ὁ ἀριθμὸς οὗτος λέγεται, ὅτι παριστᾷ τὸ ποσόν. Ἐάν, παραδείγματος χάριν, εὕρωμεν ὅτι ποσόν τι ἀποτελεῖται ἐκ τῆς μονάδος τετράκις ληφθείσης, ὁ παριστῶν αὐτὸ ἀριθμὸς εἶνε ὁ 4. Ἐὰν δὲ ἀποτελῆται ἐκ τῆς μονάδος καὶ ἐκ τοῦ ἡμίσεως αὐτῆς καὶ ἐκ τοῦ τετάρτου αὐτῆς, ὁ ἀριθμὸς ὁ παριστῶν αὐτὸ εἶνε $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, ἤτοι $\frac{7}{4}$.

Διὰ νὰ ἀποφύγωσιν ὅσον τὸ δυνατὸν τὰ κλάσματα (τὰ ὁποῖα διὰ τοὺς πολλοὺς εἶνε δύσκολα), ἔλαβον εἰς τὴν μέτρησιν ὡρισμένα τινὰ μέρη τῆς ἀρχικῆς μονάδος καὶ ταῦτα ἐθεώρησαν ὡς νέας μονάδας καὶ ἔδωκαν εἰς αὐτὰ ἴδια ὀνόματα. Παραδείγματος χάριν, τὸ $\frac{1}{400}$ τῆς ὀκᾶς ὠνόμασαν δράμιον καὶ ἑπομένως ἀντὶ νὰ λέγωσιν, ὅτι βάρις τι εἶνε 5 ὀκάδες καὶ $\frac{160}{400}$ τῆς ὀκᾶς, λέγουσιν ὅτι εἶνε 5 ὀκάδες καὶ 160 δράμια. Ὁμοίως τὸ $\frac{1}{60}$ τῆς ὥρας ὠνόμασαν λεπτὸν πρῶτον, τὸ $\frac{1}{100}$ τῆς δραχμῆς λεπτὸν κτλ.

Ἐπίσης διὰ νὰ ἀποφύγωσι τοὺς λίαν μεγάλους ἀριθμούς, οἵτινες προκύπτουσιν, ὅταν τὸ ποσὸν εἶνε λίαν μέγα ὡς πρὸς τὴν ἀρχικὴν μονάδα, ἔλαβον ὡρισμένα τινὰ πολλαπλάσια αὐτῆς ὡς νέας μονάδας καὶ ἔδωκαν εἰς αὐτὰ ἴδια ὀνόματα. Ἐάν, παραδείγματος χάριν, πρόκειται νὰ μετρήσωμεν τὸ μῆκος ἑνὸς τοίχου ἀρκεῖ ὁ πῆχυς. Ἀλλ' ἐὰν ἔχωμεν νὰ μετρήσωμεν τὴν ἀπόστασιν τῶν Ἀθηνῶν ἀπὸ τῆς Κωνσταντινουπόλεως, λαμβάνομεν 1000 πήχεις ὡς μίαν μονάδα, τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν στάδιον καὶ δι' αὐτῆς ἐκφράζομεν τὴν ἀπόστασιν.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον δύναται ποσόν τι νὰ παριστᾶται δι' ἀριθμοῦ συγκειμένου ἐκ πολλῶν ἄλλων, ὁμοειδῶν μέν, ἀλλ' ἐχόντων διαφόρους μονάδας καὶ διάφορα ὀνόματα. Ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς λέγεται *συμμιγὴς ἀριθμός*.

232. Ἐκ τούτων ὁδηγούμεθα εἰς τὸν ἑξῆς ὁρισμόν·

Συμμιγὴς ἀριθμὸς εἶνε ἀριθμὸς ***σύνθετος ἐξ ἄλλων***, *τῶν ὁποίων αἱ μονάδες εἶνε πολλαπλάσια μιᾶς ἀρχικῆς μονάδος ἢ μέρη αὐτῆς, ἔχοντα ἴδιον ὄνομα ἕκαστον.*

Σημείωσις. Οἱ συμμιγεῖς ἀριθμοὶ εἶνε πάντοτε συγκεκριμένοι.

Μονάδες διάφοροι καὶ ὀνόματα αὐτῶν.

Τὰ διάφορα ἔθνη δὲν λαμβάνουσι δι' ἕκαστον ποσὸν οὔτε τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν μονάδα οὔτε τὰς αὐτὰς ὑποδιαιρέσεις αὐτῆς (μόνον διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ χρόνου καὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἐπεκράτησαν αἱ αὐταὶ μονάδες εἰς πάντα τὰ πεπολιτισμένα ἔθνη). Διὰ τοῦτο ἐκθέτομεν ἐν τοῖς ἑπομένοις τὰ κυριώτερα εἴδη τῶν συμμιγῶν, μάλιστα δὲ ὅσα ἡμεῖς μεταχειριζόμεθα.

Μονάδες μήκους.

1) Γαλλικὸν μέτρον ἢ βασιλικὸς πῆχυς.

Ἡ κυριωτέρα μονὰς τοῦ μήκους, τῆς ὁποίας ἡ χρῆσις ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἐξαπλοῦται, εἶνε τὸ γαλλικὸν *μέτρον*. Ἡ μονὰς αὐτὴ συνδέεται πρὸς τὸ μέγεθος τῆς γῆς· διότι ὡρίσθη οὕτως, ὥστε ἡ περιφέρεια τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς νὰ ἔχῃ μῆκος 40000000 μέτρα.

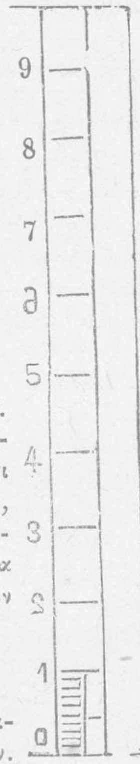
Παρ' ἡμῖν τὸ γαλλικὸν μέτρον ὠνομάσθη *βασιλικὸς πῆχυς*.

Μέτρον ἢ βασιλικὸς πῆχυς, ἀρχικὴ μονάς.

παλάμη $=\frac{1}{10}$ τοῦ πήχεως   στάδιον=1000 μέτρα

δάκτυλος$=\frac{1}{10}$ τῆς παλάμης

γραμμὴ $=\frac{1}{10}$ τοῦ δακτύλου



Κατὰ ταῦτα εἶνε

πήχ.		παλ.		δακτ.		γρ.
1	=	10	=	100	=	1000
		παλ.		δακτ.		γρ.
		1	=	10	=	100
				δακτ.		γρ.
				1	=	10

Τὸ ἀπέναντι σχῆμα παριστᾷ παλάμην διῃρημένην εἰς δακτ.

Καθὼς βλέπομεν, αἱ ὑποδιαιρέσεις τοῦ μέτρου εἶνε δεκαδικαί· τοῦτο δὲ ἐγένετο διὰ τὴν εὐκολίαν τῶν πράξεων· διότι πᾶς ἀριθμὸς παριστῶν μῆκος, ἤτοι συγκείμενος ἐκ μέτρων, παλαμῶν, δακτύλων καὶ γραμμῶν, παρίσταται καὶ ὡς δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἔχων ἀκέραιον μέρος τοὺς πήχεις, δέκατα δὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν παλαμῶν, ἑκατοστὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν δακτύλων καὶ χιλιοστὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν γραμμῶν.

	πήχ.	παλ.	δακτ.	γραμ.		πήχ.
οἷον	15	2	3	5	εἶνε=	15,235

Ἑπομένως αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν συμμιγῶν τούτων ἀριθμῶν ἀνάγονται εἰς τὰς πράξεις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

Ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 15 πήχ. 235 ἀπαγγέλλεται κατὰ τὰ περὶ ἀπαγγελίας τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν εἰρημένα (ἐδ. 213) καὶ ὡς ἑξῆς· 152 παλάμαι καὶ 35 γραμμαί, ἢ 15235 γραμμαί, ἢ 1523 δάκτυλοι καὶ 5 γραμμαὶ κτλ.

2) *Τεκτονικὸς πῆχυς.*

Ὁ τεκτονικὸς πῆχυς εἶνε τὰ 75 ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου· μεταχειρίζονται δ' αὐτὸν εἰς τὰς οἰκοδομὰς καὶ εἰς τὰ οἰκόπεδα.

3) *Πήχεις τοῦ ἐμπορίου.*

Εἰς τὸ ἐμπόριον διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὑφασμάτων μεταχειρίζονται τὸν μικρὸν πῆχυν τῆς Κωνσταντινουπόλεως, ὅστις λέγεται *ἐνδεζὲ* καὶ εἶνε 0, πήχ. 648 (ἤτοι 648 χιλιοστὰ τοῦ γαλλικοῦ μέτρου)· καὶ τὸν μεγαλήτερον, ὅστις λέγεται *ἀρσίν*, καὶ εἶνε 0, μ. 669· διαιρεῖται δὲ ἕκαστος τούτων εἰς 8 *ῥούπια.*

4) *'Οργυιά.*

Ἡ ὀργυιὰ εἶνε παλαιοτέρα ἀρχικὴ μονὰς τοῦ μήκους· ἔχει δὲ τὰς ἑξῆς ὑποδιαιρέσεις·

'Οργυιὰ ἀρχικὴ μονάς.

ποῦς$=\frac{1}{6}$ τῆς ὀργυιᾶς

δάκτυλος$=\frac{1}{12}$ τοῦ ποδός

γραμμὴ $=\frac{1}{12}$ τοῦ δακτύλου.

Ἡ χρῆσις τῆς ὀργυιᾶς καὶ τῶν ὑποδιαιρέσεων αὐτῆς ἤρχισεν ἤδη νὰ γίνηται σπανιωτέρα Ἡ σχέσις αὐτῆς πρὸς τὸ μέτρον εἶνε ἡ ἑξῆς· 1ὀργ.=1, μέτ. 94904 καὶ 1 μέτ.=0όρ. 3πόδ. 0δακ. 11 γραμμ. $\frac{296}{1000}$

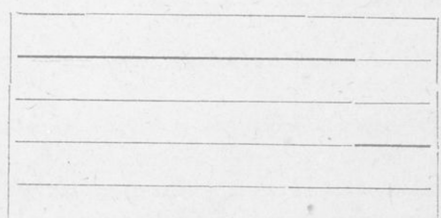
1 πούς=0, μέτ. 32484.

Μονάδες ἐπιφανείας.

Μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν λαμβάνεται τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶνε ἴση μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους.

Εἶνε δὲ τὸ τετράγωνον ἐπιφάνεια ἐπίπεδος περικλειομένη ὑπὸ τεσσάρων ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουσιν ὀρθὰς γωνίας.

Τετραγωνικὸς πῆχυς λέγεται τὸ τετράγωνον, τὸ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶνε ἴση μὲ ἕνα πῆχυν.



Τετραγωνικὴ παλάμη λέγεται τὸ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶνε μία παλάμη($=\frac{1}{10}$ τοῦ πήχεως)· εἶνε δὲ ἡ τετραγ. παλάμη τὸ $\frac{1}{100}$ τοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως. Ἐὰν τῷ ὄντι θέσωμεν 10 τετραγων. παλάμας εἰς μίαν σειρὰν καὶ προσαρμόσωμεν αὐτάς, θὰ ἀποτελεσθῇ ἓν ὀρθογώνιον ἔχον βάσιν ἕνα πῆχυν καὶ ὕψος $\frac{1}{10}$ τοῦ πήχεως, ἤτοι μίαν παλάμην. Ἐὰν δὲ 10 τοιαῦτα ὀρθογώνια προσαρμόσωμεν (κατὰ τὰς μεγαλειτέρας πλευράς των), θ' ἀποτελεσθῇ ὁ τετραγωνικὸς πῆχυς· ὥστε ὁ τετραγωνικὸς πῆχυς περιέχει 10×10 ἤτοι 100 τετραγωνικὰς παλάμας.

Τετραγωνικὸς δάκτυλος λέγεται τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶνε εἷς δάκτυλος ($=\frac{1}{10}$ τῆς παλάμης$=\frac{1}{100}$ τοῦ μέτρου)· εἶνε δὲ ὁ τετραγωνικὸς δάκτυλος τὸ $\frac{1}{100}$ τῆς τετραγωνικῆς παλάμης καὶ τὸ $\frac{1}{10000}$ τοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως.

Καὶ ἐνταῦθα αἱ ὑποδιαιρέσεις εἶνε δεκαδικαί, ὥστε πᾶς ἀριθμὸς παριστῶν ἐπιφάνειαν, ἤτοι συγκείμενος ἐκ τετραγ. πήχεων, τετραγ. παλαμῶν, τετραγ. δακτύλων, γράφεται καὶ ὡς δεκαδικὸς ἀριθμός.

οἷον 3 τ. πχ. 15 τ. πχ. 2 τ. δακ. γράφεται 3, τ. π. 1502 ἀπαγγέλλεται δὲ (συμφώνως πρὸς τὰ ἐν τῷ ἐδ. 213 εἰρημένα) κατὰ πολλοὺς τρόπους· π. χ. 3 τετρ. πήχεις, 15 τετρ. παλάμαι καὶ 2 τετρ. δάκτυλοι, ἢ 315 τετρ. παλάμαι καὶ 2 τετρ. δάκτυλοι ἢ 31502 τετραγ. δάκτυλοι.

Τεκτονικὸς τετραγωνικὸς πῆχυς εἶνε τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶνε εἷς τεκτονικὸς πῆχυς· εἶνε δὲ ἐν χρήσει διὰ τὴν μέτρησιν τῶν οἰκοπέδων. Ἡ σχέσις αὐτοῦ πρὸς τὸ τετραγωνικὸν μέτρον εἶνε ἡ ἑξῆς·

$$1 \text{ τετρ. τεκ. πήχ.} = \frac{9}{16} \text{ τοῦ τετρ. μέτρου}$$

καὶ ἐπομένως 1 τετραγ. μέτρ.$=\frac{16}{9}$ τοῦ τεκτ. τετρ. πήχεως.

Διὰ τὰς μεγάλας ἐπιφανείας μεταχειρίζονται παρ' ἡμῖν τὸ *βασιλικὸν στρέμμα*$=1000$ τετρ. μέτρα.

Ἐὰν νοηθῇ τὸ βασιλικὸν στρέμμα ὡς τετράγωνον, ἡ πλευρά του θὰ εἶνε ὡς ἔγγιστα 31 μέτρ., 662 $\left(\text{κατὰ προσέγγισιν } \frac{1}{1000}\right)$

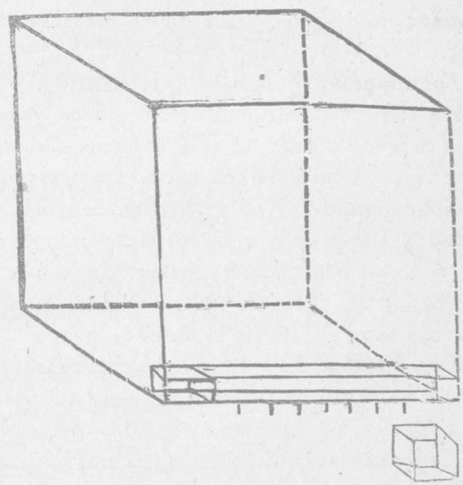
Τὸ *παλαιὸν στρέμμα* εἶνε τετράγωνον ἔχων πλευρὰν 55 μικροὺς πήχεις τῆς Κωνσταντινουπόλεως.

Εἶνε δὲ τὸ παλαιὸν στρέμμα ἴσον μὲ 1,27 βασιλικὰ στρέμματα. Ἐπομένως τὸ βασιλικὸν στρέμμα εἶνε ἴσον μὲ 0,787 τοῦ παλαιοῦ στρέμματος.

Μονάδες ὄγκου ἢ χωρητικότητος.

Μονὰς τῶν ὄγκων λαμβάνεται ὁ κύβος, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶνε ἴση μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους. Εἶνε δὲ ὁ κύβος στερεὸν περικλυόμενον ὑπὸ 6 τετραγώνων ἴσων. Καὶ ἂν μὲν ἡ μονὰς τοῦ μήκους εἶνε τὸ μέτρον, ἡ μονὰς τῶν ὄγκων λέγεται **κυβικὸν μέτρον**· ἂν δὲ ἡ μονὰς τοῦ μήκους εἶνε ἡ παλάμη, ἡ μονὰς τοῦ ὄγκου λέγεται **κυβικὴ παλάμη**· ἂν δὲ ὁ δάκτυλος ἡ μονὰς τοῦ ὄγκου λέγεται **κυβικὸς δάκτυλος** κτλ.

Ἡ κυβικὴ παλάμη εἶνε τὸ $\frac{1}{1000}$ τοῦ κυβικοῦ μέτρου.



Ἐὰν τῷ ὄντι θέσωμεν εἰς μίαν σειρὰν 10 κυβικὰς παλάμας καὶ προσαρμόσωμεν αὐτάς, σχηματίζομεν στερεὸν ἔχον μῆκος 1 πῆχυν, πλάτος ὅμως καὶ ὕψος μίαν παλάμην· ἐὰν δὲ 10 τοιαῦτα στερεὰ θέσωμεν ἐπί τινος ἐπιπέδου καὶ προσαρμόσωμεν αὐτὰ κατὰ τὰς ἐπιμήκεις ἐπιφανείας των, σχηματίζομεν στερεὸν ἔχον μῆκος καὶ πλάτος ἴσα μὲ 1 πῆχυν, ὕψος ὅμως μίαν παλάμην.

Ἐὰν τέλος 10 τοιαῦτα στερεὰ θέσωμεν ἐπ' ἀλλήλων καὶ προσαρμόσωμεν, σχηματίζομεν τὸ κυβικὸν μέτρον· ὥστε τὸ κυβικὸν μέτρον σύγκειται ἐκ χιλίων κυβικῶν παλαμῶν, ἢ ἡ κυβικὴ παλάμη εἶνε τὸ χιλιοστὸν τοῦ κυβικοῦ πήχεως.

Ὁμοίως σύγκειται ἡ κυβικὴ παλάμη ἐκ 1000 κυβικῶν δακτύλων καὶ ὁ κυβικὸς δάκτυλος εἶνε τὸ $\frac{1}{1000}$ τῆς κυβικῆς παλάμης.

Λίτρα λέγεται ἡ χωρητικότης τῆς κυβικῆς παλάμης, ἤτοι ἡ χωρητικότης κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶνε μία παλάμη. Εἰς ἓν κυβικὸν μέτρον περιέχονται κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα 1000 λίτραι. Ἡ λίτρα εἶνε ἐν χρήσει διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὑγρῶν.

Κοιλὸν λέγεται τὸ δέκατον τοῦ κυβικοῦ πήχεως, ἤτοι ὁ ὄγκος ὅσον ἔχουσιν 100 κυβικαὶ παλάμαι· γίνεται δὲ τούτου χρῆσις ἰδίως εἰς τοὺς δημητριακοὺς καρπούς.

Παρατήρησις.

Αἱ μονάδες τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ὄγκων λέγονται θεωρητικαὶ μονάδες· διότι δὲν μετροῦμεν ἀμέσως δι' αὐτῶν τὰς ἐπιφανείας καὶ τοὺς ὄγκους, ἀλλ' ἐμμέσως· μετροῦμεν δηλ. διὰ τῆς μονάδος τοῦ μήκους γραμμάς τινας τῆς ἐπιφανείας ἢ τοῦ ὄγκου καὶ ἐξ αὐτῶν εὑρίσκομεν διὰ τοῦ λογαριασμοῦ πόσας μονάδας ἔχει ἡ ἐπιφάνεια ἢ ὁ ὄγκος (τὰ περὶ τούτων διδάσκει λεπτομερῶς ἡ Γεωμετρία).

Μονάδες βάρους.

Οἱ Γάλλοι παραδεχθέντες τὸ μέτρον ὡς ἀρχικὴν μονάδα τοῦ μήκους ἐσχέτισαν πρὸς ταύτην καὶ τὰς λοιπὰς μονάδας· ὅθεν καὶ τὰς μονάδας τοῦ βάρους. Διὰ τοῦτο παρεδέχθησαν τὰς ἑξῆς μονάδας βάρους.

Γραμμάριον, ἢ δραχμὴ (Gramme).
τοῦτο εἶνε τὸ βάρος τοῦ ὕδατος, ὅσον χωρεῖ εἰς ἕνα κυβικὸν δάκτυλον (τὸ ὕδωρ πρέπει νὰ εἶνε καθαρὸν καὶ ἀπεσταγμένον καὶ εἰς θερμοκρασίαν 4 βαθμῶν τοῦ κοινοῦ θερμομέτρου).

Χιλιόγραμμον (Kilogramme)=1000 γραμμάρια.

Τὸ χιλιόγραμμον εἶνε τὸ βάρος τοῦ ὕδατος, ὅσον χωρεῖ μία κυβικὴ παλάμη ἤτοι τὸ βάρος μιᾶς λίτρας ὕδατος.

Τόννος λέγεται τὸ βάρος χιλίων χιλιογράμμων, ἤτοι τὸ βάρος τοῦ ὕδατος, ὅσον χωρεῖ εἰς ἓν κυβικὸν μέτρον.

Τὰς μονάδας ταύτας τοῦ βάρους παρεδέχθησαν καὶ οἱ Βέλγοι καὶ οἱ Ὀλλανδοὶ καὶ οἱ Γερμανοί, πλὴν δὲ τοῦ χιλιογράμμου μεταχειρίζονται οἱ Γερμανοὶ τὸ φούντιον (pfund), ὅπερ ἔχει βάρος 500 γραμμαρ.

Παρ' ἡμῖν καὶ τοῖς Ὀθωμανοῖς μονάδες βάρους ἐν χρήσει εἶνε αἱ ἑξῆς·

Ὀκὰ ἀρχικὴ μονὰς *Στατὴρ*=44 ὀκάδες

Δράμιον$=\frac{1}{400}$ τῆς ὀκᾶς.

Ἡ σχέσις τῆς ὀκᾶς πρὸς τὸ χιλιόγραμμον εἶνε ἡ ἑξῆς·

1 ὀκὰ=1280 γραμμάρια.

1 δράμ.$=3\frac{1}{5}$ γραμμάρια.

Τὸ δὲ χιλιόγραμμον εἶνε $312\frac{1}{2}$ δράμια=0,78... τῆς ὀκᾶς λίτρα ὕδατος εἶνε λοιπὸν $312\frac{1}{2}$ δράμια.

Μονάδες νομισμάτων.

(*Ἑλληνικαί*).

Δραχμὴ ἀρχικὴ μονάς. *πεντάδραχμον*=5 δραχμαί,

λεπτὸν $\frac{1}{100}$ τῆς δραχμῆς. *εἰκοσάδραχμον*=20 δραχμαί.

Σημείωσις. Περὶ τῶν νομισματικῶν μονάδων τῶν διαφόρων ἐθνῶν ἰδὲ μικράν μου ἀριθμητικήν.

Μονάδες χρόνου

(ἐν χρήσει παρὰ πᾶσι τοῖς πεπολιτισμένοις ἔθνεσιν)

Ἡμέρα ἢ νυχθήμερον ἀρχικὴ μονάς. *Μὴν*=30 ἡμέραι

Ὥρα=$\frac{1}{24}$ τῆς ἡμέρας *Ἔτος*=12 μῆνες=365 ἡμέραι

Λεπτὸν πρῶτον=$\frac{1}{60}$ τῆς ὥρας

λεπτὸν δεύτερον=$\frac{1}{60}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ.

Παρατήρησις. Οἱ μῆνες ἔχουσιν ἄλλοι μὲν 30, ἄλλοι δὲ 31 ἡμέρας· ὁ δὲ Φεβρουάριος ἔχει 28 διὰ τὰ κοινὰ ἔτη, 29 δὲ διὰ τὰ ἐμβόλιμα ἢ δίσεκτα, ἅτινα ἔχουσι 366 ἡμέρας, ἐν ᾧ τὰ κοινὰ ἔχουσι 365.

Σημείωσις. Τὰ πρῶτα λεπτὰ σημειοῦνται διὰ μιᾶς ὀξείας· οἷον 30′ τὰ δὲ δεύτερα διὰ δύο· οἷον 15″.

Κατὰ τὰ προηγούμενα εἶνε

$$1 \text{ ἡμ.} = 24 \text{ ὥρ.} = 1440' = 86400''$$
$$1 \text{ ὥρ.} = 60' = 3600''$$
$$1' = 60''$$

Σημείωσις. Ἡ ἐργάσιμος ἡμέρα θεωρεῖται ἴση μὲ 12 ὥρας, ἐκτὸς ἂν εἰς τὸ πρόβλημα ὁρίζηται ἄλλως.

Διαίρεσις τῆς περιφερείας.

(παραδεδεγμένη ὑπὸ πάντων τῶν πεπολιτισμένων ἐθνῶν).

Πᾶσα περιφέρεια κύκλου διαιρεῖται εἰς 360 μέρη ἴσα, τὰ ὁποῖα λέγονται *μοῖραι*. Ἑκάστη μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 *λεπτὰ πρῶτα* καὶ ἕκαστον λεπτὸν πρῶτον εἰς 60 *λεπτὰ δεύτερα*.

Σημείωσις. Αἱ μοῖραι σημειοῦνται δι' ἑνὸς μηδενικοῦ, ὅπερ γράφεται ὀλίγον ὑπεράνω καὶ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ· οἷον 72^0, τὰ πρῶτα λεπτὰ δι' ἑνὸς τόνου καὶ τὰ δεύτερα διὰ δύο· οἷον $\mathbf{23}^0\ 48'\ 32''$.

Γενικὴ παρατήρησις.

234. Ὅσα εἴδη συμμιγῶν ἔχουσι μονάδας μὲ δεκαδικὰς ὑποδιαιρέσεις, γράφονται ὡς δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς οἱασδήποτε ἐκ τῶν μονάδων των, καὶ ἑπομένως ἀνάγονται εἰς τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς, ὥστε αἱ ἐπ' αὐτῶν πράξεις ἀνάγονται εἰς πράξεις ἐπὶ δεκαδικῶν ἀριθμῶν. Αἱ γαλλικαὶ μονάδες τῶν μέτρων καὶ τῶν σταθμῶν ἔχουσι τὸ προτέρημα τοῦτο· ἐκτὸς δὲ τούτου βασίζονται ἐπὶ τοῦ μέτρου, ὅπερ ἕνεκα τῆς σχέσεώς του πρὸς τὸ μέγεθος τῆς γῆς, δύναται πάντοτε νὰ εὑρίσκηται. Διὰ τὰ δύο ταῦτα πλεονεκτήματα ἐπεκράτησε τὸ γαλλικὸν μετρικὸν σύστημα τῶν μονάδων οὐ μόνον καθ' ἅπασαν τὴν Γαλλίαν, ἀλλὰ καὶ εἰς ἄλλα κράτη (τὸ Βέλγιον, τὴν Ὁλλανδίαν, τὴν Ἑλβετίαν)· εἰσήχθη δὲ καὶ παρ' ἡμῖν διὰ βασιλικοῦ διατάγματος (τοῦ 1836), ἀλλ' ἡ ὁλοσχερὴς παραδοχὴ αὐτοῦ δὲν κατωρθώθη ἀκόμη παρ' ἡμῖν.

Ἐν τοῖς ἑπομένοις πραγματευόμενοι τὰς πράξεις τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν λαμβάνομεν τὰ παραδείγματα ἐκ τῶν συμμιγῶν τῶν μὴ ἐχόντων δεκαδικὰς ὑποδιαιρέσεις· τοῦτο δὲ διότι τῶν ἄλλων αἱ πράξεις γίνονται εὐκολώτερον ὡς πράξεις δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

Τροπὴ συμμιγοῦς εἰς ἁπλοῦν, ἤτοι εἰς ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος.

235. *Ἐὰν ὁ συμμιγὴς τραπῇ εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεώς του, γίνεται ἀκέραιος ἀριθμός.*

Ἔστω ὡς παράδειγμα ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς

18στατ. 32ὀκ. 250δρ.

ὅστις πρόκειται νὰ τραπῇ εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεώς του· ἤτοι εἰς δράμια.

Κατὰ πρῶτον τρέπομεν τοὺς στατῆρας εἰς ὀκάδας καὶ ἔπειτα τὰς ὀκάδας εἰς δράμια, ὡς ἑξῆς·

Ἐπειδὴ 1 στατὴρ ἔχει 44 ὀκάδας, οἱ 18 ἔχουσι 44×18, ἤτοι 792 ὀκάδας· ἔχει δὲ ὁ συμμιγὴς πρὸς τούτοις καὶ 32 ὀκάδας, ὥστε οἱ 18στατ. καὶ 32ὀκάδ. γίνονται 824 ὀκάδες.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ὀκὰ ἔχει 400 δράμια, αἱ 824 ὀκάδες ἔχουσι δράμια 400×824, ἤτοι 329600·
ἔχει δὲ ὁ συμμιγὴς πρὸς τούτοις 250 δράμια· ὥστε τὸ ὅλον γίνονται

329850 δράμια·

ἐτράπη λοιπὸν ὁ δοθεὶς συμμιγὴς εἰς δράμια.

Διάταξις τῆς πράξεως.

Πρὸς εὐκολίαν διατάσσεται ἡ πρᾶξις ὡς ἑξῆς·

$$
\begin{array}{r}
18\text{στ.}\quad 32\text{ὀκ.}\quad 250\text{δρ.}\\
18\\
44\\
\hline
72\\
72\\
\hline
792\text{ὀκ.}\\
32\\
\hline
824\text{ὀκ.}\\
400\\
\hline
329600\text{δρ.}\\
250\\
\hline
329850\text{δρ.}=18\text{στ.}\quad 32\text{ὀκ.}\quad 250\text{δρ.}
\end{array}
$$

236. *Ἐὰν ὁ συμμιγὴς τραπῇ εἰς μονάδας ἄλλης τάξεως (ἀνωτέρας τῆς τελευταίας), γίνεται κλασματικὸς ἀριθμὸς ἢ καὶ μικτός.*

Ἔστω ὡς παράδειγμα ὁ συμμιγὴς

$$4\text{ἡμ.}\quad 10\text{ὥρ.}\quad 48',\quad 32'',$$

ὅστις πρόκειται νὰ τραπῇ εἰς ἀριθμὸν ὡρῶν.

Αἱ μὲν ἡμέραι καὶ ὧραι γίνονται ἀκέραιος ἀριθμὸς ὡρῶν, ὡς ἀνωτέρω διελάβομεν, εἶνε δὲ $4\text{ἡμ.}\ 10\text{ὥρ.}=24\times4+10=106$ ὧραι· τὸ δὲ ἄλλο μέρος τοῦ συμμιγοῦς (ἤτοι τὰ $48'\ 32''$) τρέπομεν πρῶτον εἰς δεύτερα λεπτὰ ὡς ἀνωτέρω διελάβομεν.

$$48'\quad 32''=60''\times48+32''=2800''+32''=2912''$$

Μένει ἀκόμη νὰ τρέψωμεν τὰ $2912''$ εἰς ὥρας (ἢ εἰς μέρη τῆς ὥρας)· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ μάθωμεν πόσον μέρος τῆς ὥρας εἶνε τὸ $1''$· δηλαδὴ πόσα δεύτερα λεπτὰ ἔχει μία ὥρα.

$$1\text{ὥρ.}=60'=60''\times60=3600''.$$

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὸ $1''$ εἶνε τὸ $\frac{1}{3600}$ τῆς ὥρας, τὰ $2912''$ εἶνε $\frac{2912}{3600}$ τῆς ὥρας.

Ἄρα ὁ δοθεὶς συμμιγὴς ἐτράπη εἰς ἀριθμὸν ὡρῶν

$$106\frac{2912}{3600}\ \text{ἢ}\ 106\frac{728}{900}\ \text{ἢ}\ 106\frac{182}{225}$$

237. Ἐκ τούτων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

Διὰ νὰ τρέψωμεν συμμιγῆ ἀριθμὸν εἰς ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος του, τρέπομεν τὰ μέρη, ὧν αἱ μονάδες εἶνε μεγαλήτεραι τῆς δοθείσης, εἰς ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν τῆς μονάδος ταύτης· τὰ δὲ μέρη, ὧν αἱ μονάδες εἶνε μικρότεραι, τρέπομεν εἰς κλάσμα τῆς αὐτῆς μονάδος.

Πρὸς εὕρεσιν δὲ τοῦ κλάσματος τούτου, τρέπομεν πρῶτον τὰ ῥηθέντα μέρη εἰς τὸ τελευταῖον ἐξ αὐτῶν καὶ ἔπειτα ὑπὸ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν γράφομεν παρονομαστὴν τὸν ἀριθμόν, ὅστις δεικνύει πόσαι μονάδες τῆς τελευταίας τάξεως ἀποτελοῦσι τὴν ὁρισθεῖσαν μονάδα.

Παραδείγματα.

5όκ. 22 δρ $= 5\frac{220}{400}$ ἢ $5\frac{11}{20}$ τῆς ὀκᾶς

Ὁ αὐτὸς συμμιγὴς εἶνε $= \frac{2220}{17600}$ τοῦ στατῆρος ἢ $\frac{111}{800}$

2όργ. 3π. 6δ. 4γρ. $= 2\frac{508}{864}$ ἢ $2\frac{127}{216}$ τῆς ὀργυιᾶς.

Ὁ αὐτὸς συμμιγὴς εἶνε $= 15\frac{76}{144}$ ἢ $15\frac{19}{36}$ τοῦ ποδός.

Ὁ αὐτὸς συμμιγὴς εἶνε $= 186\frac{4}{12}$ ἢ $186\frac{1}{3}$ τοῦ δακτύλου.

Σημείωσις. Ἐν τοῖς προηγουμένοις ὑποτίθεται, ὅτι ὁ συμμιγὴς σύγκειται ἐξ ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ἐνίοτε δυνατὸν νὰ ἔχῃ καὶ κλάσμα τι τῆς κατωτάτης ὑποδιαιρέσεως, ὡς π. χ. ὁ συμμιγὴς

2στ. 15όκ. 265δρ. $\frac{1}{3}$

Διὰ νὰ τρέψωμεν τοῦτον εἰς ἀριθμὸν ὀκάδων, παρατηροῦμεν ὅτι

2στ. 15όκ. $=$ 103όκ. 265δρ. $= \frac{265}{400}$ τῆς ὀκᾶς

$\frac{1}{3}$ τοῦ δραμίου $= \frac{1}{3}$ τοῦ $\frac{1}{400}$ ἢ $= \frac{1}{1200}$ τῆς ὀκᾶς.

ὥστε ὁ δοθεὶς συμμιγὴς εἶνε 103όκ. $\frac{265}{400} + \frac{1}{1200}$ τῆς ὀκᾶς,

ἢ 103όκ. $\frac{796}{1200}$.

Τροπὴ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ εἰς συμμιγῆ.

238. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται κλασματικός τις συγκεκριμένος ἀριθμός, οἷον ὁ $^{17}/_{5}$ τῆς ὀκᾶς, νὰ τραπῇ εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν.

Κατὰ πρῶτον ἐξάγομεν τὰς ἀκεραίας μονάδας τοῦ δοθέντος κλάσματος καὶ εὑρίσκομεν $\frac{17}{5}$ὀκ.$=3^{\text{ὀκ.}}\frac{2}{5}$ τῆς ὀκᾶς·

μένει λοιπὸν νὰ τρέψωμεν τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς ὀκᾶς εἰς δράμια· καὶ πρὸς τοῦτο

πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ $\frac{2}{5}$ ἐπὶ 400· διότι 1 ὀκᾶ$=$400 δρ.

ἄρα $\frac{1}{5}$ ὀκ $=\frac{400}{5}$δρ. καὶ $\frac{2}{5}$ ὀκ.$=400\times\frac{2}{5}$δρ. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι

$\frac{2}{5}$ὀκ.$=$160 δράμια. Ἐτράπη λοιπὸν τὸ κλάσμα $\frac{17}{5}$ τῆς ὀκᾶς εἰς

συμμιγῆ ἀριθμὸν $3^{\text{ὀκ.}}\ 160^{\text{δρ.}}$

Διάταξις τῆς πράξεως.

$$\frac{17\text{ὀκᾶς}}{5}\qquad \begin{array}{r|l} 17 & 5 \\ \hline 2 & 3\text{ὀκ.}\ \ 160\text{δρ.} \\ 400 & \\ \hline 800 & \\ 30 & \\ 0 & \end{array}$$

Σημειωτέον δέ, ὅτι ἡ πρᾶξις αὕτη κατ' οὐδὲν διαφέρει ἀπὸ τοῦ μερισμοῦ τῶν 17 ὀκάδων εἰς 5 ἴσα μέρη· διότι, ἂν 5 ἄνθρωποι μοιρασθῶσι 17 ὀκάδας, θὰ λάβῃ ἕκαστος $^{17}/_{5}$ τῆς ὀκᾶς.

239. Ἐκ τούτων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών·

Διὰ νὰ τρέψωμεν κλασματικὸν ἀριθμὸν εἰς συμμιγῆ, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ πηλίκον θὰ εἶνε ὁμοειδὲς μὲ τὸν κλασματικόν, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ τὸ ἐξαγόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· τὸ πηλίκον τῆς νέας ταύτης διαιρέσεως παριστᾷ μονάδας τῆς τάξεως ταύτης, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ τὸ ἐξαγόμενον διαιροῦμεν πάλιν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς τὰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως.

Σημείωσις. Ἐὰν εἰς μίαν τῶν διαιρέσεων τούτων δὲν εὑρεθῇ πηλίκον (ἂν δηλαδὴ ὁ διαιρέτης ὑπερβαίνῃ τὸν διαιρετέον), λαμβάνομεν ὡς πηλίκον αὐτῆς τὸ 0 καὶ ὡς ὑπόλοιπον αὐτῆς τὸν διαιρετέον της καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν πρᾶξιν κατὰ τὸν κανόνα.

Παραδείγματα.

$^{3}/_{5}$στατ.=26όκ 160δρ.
$^{12}/_{9}$ ὥρ. =1ὥρα 20'
$^{6}/_{7}$ἡμέρ.=23ὥρ. 8' 34'' $^{2}/_{7}$.

Πράξεις τῶν συμμιγῶν.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

240. *Ἡ πρόσθεσις τῶν συμμιγῶν γίνεται ὡς καὶ ἡ πρόσθεσις τῶν ἀκεραίων· δηλαδὴ προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀριθμοὺς ἑκάστης τάξεως ἀρχίζοντες ἀπὸ τῶν μονάδων τῆς τελευταίας. Καὶ ὅταν μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων μιᾶς τάξεως δὲν ἀποτελῇ μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας, γράφομεν αὐτὸ ὁλόκληρον, ὅταν ὅμως ἀποτελῇ, τότε διαιροῦμεν αὐτὸ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δεικνύει, πόσαι μονάδες τῆς τάξεως ταύτης ἀποτελοῦσι μίαν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας· καὶ τὸ μὲν ὑπόλοιπον γράφομεν εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἀθροίσματος, τὸ δὲ πηλίκον ἑνοῦμεν μὲ τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.*

Σημείωσις. Πρὸς εὐκολίαν γράφομεν τοὺς προσθετέους τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως, ὥστε οἱ ἀριθμοὶ τῆς αὐτῆς μονάδος νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην.

Ὅτι δὲ πρέπει νὰ εἶνε ὁμοειδεῖς οἱ προσθετέοι, ἐννοεῖται ἀφ' ἑαυτοῦ.

Παραδείγματα.

15ὥρ.	20'	40''
6	0'	38''
	15'	48''
1	10'	
22	47'	6''

18στ.	40όκ.	350δρ.
	27	75
42	2	125
61στ.	26όκ.	150δρ.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

241. *Καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν συμμιγῶν γίνεται ὡς καὶ ἡ τῶν ἀκεραίων· δηλαδὴ ἀφαιροῦμεν ἕκαστον ἀριθμὸν τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ τοῦ μειωτέου, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν ἀριθμῶν τῆς τελευταίας τάξεως. Ἐὰν δὲ ἀριθμός τις τοῦ μειωτέου εἶνε μικρότερος τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ τοῦ ἀφαιρετέου, αὐξά-*

νομεν αὐτὸν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσαι ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, φροντίζοντες ὅμως νὰ προσθέσωμεν ἔπειτα μίαν μονάδα εἰς τὸν ἀριθμὸν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως ἐν τῷ ἀφαιρετέῳ (κατὰ τὴν γενικὴν ἰδιότητα τῆς ἀφαιρέσεως ἐδ. 29,1).

Σημείωσις. Πρὸς εὐκολίαν τῆς πράξεως γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑποκάτω τοῦ μειωτέου οὕτως, ὥστε οἱ ἀριθμοὶ τῆς αὐτῆς μονάδος νὰ εὑρίσκωνται εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν στήλην.

Ὅτι δὲ πρέπει ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος νὰ εἶνε ὁμοειδεῖς, ἐννοεῖται ἀφ' ἑαυτοῦ.

Παραδείγματα.

65ὀργ.	4π.	2δ.	10γρ.
6ὀργ.	5π.	8δ.	5γρ.
58ὀργ.	4π.	6δ.	5γρ.

182στ.	12ὀκ.	250δρ.
	32ὀκ.	320δρ.
181στ.	23ὀκ.	330δρ.

2ἡμ.			
	10ὧρ.	30′	30″
1ἡμ.	13ὧρ.	29′	30″

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

1) Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον.

242. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον τῶν μερῶν του ἐπὶ τὸν ἀκέραιον.*

Ἡ ὀρθότης τοῦ κανόνος τούτου συνάγεται ἀμέσως ἐκ τῆς θεμελιώδους ἰδιότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἐδ. 134)· διότι ὁ συμμιγὴς εἶνε ἄθροισμα τῶν μερῶν του.

Παρατήρησις. Ἐὰν εἰς μερικόν τι γινόμενον περιέχωνται μονάδες τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ἐξάγομεν αὐτὰς καὶ τὰς προσθέτομεν εἰς τὸ μερικὸν γινόμενον τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως· τοῦτο δὲ λέγεται *κατάταξις* τῶν μονάδων.

Παραδείγματα.

1) Ἔχομεν 12 σάκκους καφέ, ἐξ ὧν ἕκαστος περιέχει 1στ. 15ὀκ. 250δρ. πόσος καφὲς περιέχεται εἰς τοὺς 12 σάκκους;

Φανερὸν εἶνε, ὅτι πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸν συμμιγῆ 1στ. 15ὀκ. 250δρ. δώδεκα φοράς, τουτέστι νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ 12.

12.

Διάταξις τῆς πράξεως.

1στ.	15ὀκ.	250δρ.		Κατάταξις
		12		
12στ.	180ὀκ.	3000δρ.		3000δρ. = 7ὀκ. 200δρ.
				187ὀκ. = 4στ. 11ὀκ.
16στ.	11ὀκ.	200δρ.		

ὥστε τὸ γινόμενον εἶνε 16 στ. 11ὀκ. 200δρ.

2) Διὰ νὰ διατρέξῃ τις ἓν στάδιον, χρειάζεται 1 ὥρ. 10′ 15″. πόσας ὥρας χρειάζεται, ἵνα διατρέξῃ 25 στάδια;

1ὥρ.	10′	15″		Κατάταξις
		25′		
25ὥρ.	250′	375″		375″ = 6′ 15″
				256′ = 4ὥρ. 16′
29ὥρ.	16	15		

2) Διαίρεσις συμμιγοῦς δι᾽ ἀκεραίου.

243. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ δι᾽ ἀκεραίου* (ἤτοι διὰ νὰ μερίσωμεν συμμιγῆ εἰς ἴσα μέρη) *διαιροῦμεν χωριστὰ ἕκαστον τῶν μερῶν του διὰ τοῦ ἀκεραίου* (κατὰ τὴν γενικὴν ἰδιότητα τῆς διαιρέσεως ἐδ. 190).

Ὅταν δὲ ἡ διαίρεσις ἀριθμοῦ τινος τοῦ συμμιγοῦς ἀφήσῃ ὑπόλοιπον, τρέπομεν αὐτὸ εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ ἑνοῦμεν αὐτὰς μὲ τὰς ὁμοίας μονάδας τοῦ συμμιγοῦς, πρὶν διαιρέσωμεν αὐτόν. Διὰ τοῦτο ἀρχίζομεν τὴν διαίρεσιν ἀπὸ τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τάξεως καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὰς μονάδας τῶν κατωτέρων.

Παράδειγμα

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ μοιράσωμεν 250στ. 18ὀκ. 350δρ. ἑνὸς πράγματος εἰς 15 ἀνθρώπους. Τουτέστι νὰ μερίσωμεν τὸν συμμιγῆ εἰς 15 ἴσα μέρη.

Κατὰ πρῶτον μοιράζομεν τοὺς 250 στατῆρας καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι λαμβάνει ἕκαστος 16 στατῆρας καὶ περισσεύουν 10 στατῆρες. Τοὺς 10 τούτους στατῆρας τρέπομεν εἰς ὀκάδας καὶ εὑρίσκομεν 440 ὀκάδας· ἔχει δὲ ὁ συμμιγὴς καὶ 18 ὀκάδας, ὥστε ἔχομεν νὰ μοιράσωμεν 458 ὀκάδας εἰς τοὺς 15 ἀνθρώπους. Ἐκ τούτων λαμβάνει ἕκαστος

30 ὀκάδας καὶ περισσεύουν καὶ 8 ὀκάδες. Τὰς 8 ταύτας ὀκάδας τρέπομεν εἰς δράμια καὶ εὑρίσκομεν 3200 δράμια· ἔχει δὲ ὁ συμμιγὴς καὶ 350 δράμια. Λοιπὸν ἔχομεν νὰ μοιράσωμεν δράμια 3550. Ἐκ τούτων δὲ λαμβάνει ἕκαστος 236 δράμια καὶ $^2/_3$ τοῦ δραμίου.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

250στ. 18ὀκ. 350δρ.	15
100	16στ. 30ὀκ. 236δρ. $^{10}/_{15}$
10	
44	
440	
18	
458ὀκ.	
08	
400	
3200	
350	
3550δρ.	
55	
100	
10	

Παρατήρησις.

244. Ἡ διαίρεσις συμμιγοῦς δι' ἀκεραίου, ἡ κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον γινομένη, εἶνε μερισμὸς τοῦ συμμιγοῦς εἰς μέρη ἴσα· οὐχὶ δὲ μέτρησις τοῦ συμμιγοῦς δι' ἄλλου ἀριθμοῦ, ἥτις λέγεται μὲν καὶ αὐτὴ διαίρεσις, διαφέρει ὅμως τοῦ μερισμοῦ οὐσιωδῶς (ἰδὲ ἐδ. 74 παρατ.). Εἰς τοιαύτην διαίρεσιν π. χ. ἄγει τὸ ἑξῆς πρόβλημα· 15 στατῆρες ἐξ ἑνὸς πράγματος ἀξίζουν 1 τάλληρον, πόσον ἀξίζουν 250στ. 18ὀκ. 350δρ; (ἐκ τοῦ αὐτοῦ πράγματος). Φανερὸν εἶνε, ὅτι τόσα τάλληρα (καὶ μέρη αὐτοῦ) ἀξίζουν, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ συμμιγὴς τοὺς 15 στατῆρας (καὶ τὰ μέρη αὐτοῦ)· ὥστε ἡ πρᾶξις ἐνταῦθα εἶνε μέτρησις· πρέπει δηλονότι νὰ μετρηθῇ ὁ συμμιγὴς 250στ. 18ὀκ. 350δρ. διὰ τῶν 15 στατήρων. Περὶ τῆς τοιαύτης διαιρέσεως θὰ διαλάβωμεν ἐν τοῖς ἑπομένοις.

Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν.

245. Ὁ πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον δύναται νὰ γίνῃ καὶ κατὰ τὴν ἑξῆς μέθοδον, ἥτις λέγεται *μέθοδος τῶν ἁπλῶν μερῶν*·(προτιμᾶται δὲ ἡ μέθοδος αὕτη, ὅταν ὁ ἀκέραιος πολλαπλασιαστὴς εἶνε πολυψήφιος ἀριθμός).

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ 12 ὥρ. 45′ 50″ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 280.

Διὰ νὰ κάμωμεν τοῦτο θὰ πολλαπλασιάσωμεν πάλιν ἕκαστον μέρος τοῦ συμμιγοῦς ἐπὶ τὸν 280.

Καὶ αἱ μὲν 12 ὧραι ἐπὶ 280 πολλαπλασιασθεῖσαι γίνονται 12× 280 ὧραι, ἤτοι 3360 ὧραι.

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τώρα τὰ 45′ ἐπὶ 280, παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν εἴχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 60′ (ἤτοι μίαν ὥραν) ἐπὶ 2o0, θὰ εὑρίσκομεν γινόμενον 280 ὥρας.

Τουτέστιν 60′×280=280ὥρ.

ἄρα 30′×280=140ὥρ. διότι τὰ 30′ εἶνε τὸ ἥμισυ τῶν 60′.

καὶ 15′×280= 70ὥρ. διότι τὰ 15′ εἶνε τὸ ἥμισυ τῶν 30′.

ὥστε 45′×280=210ὥρ.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι εὑρήκαμεν τὸ γινόμενον τῶν 45′ ἐπὶ 280 ἀναλύσαντες τὸ 45′ εἰς 30′ (ἥμισυ τῆς ὥρας) καὶ εἰς 15′ (ἥμισυ τῶν 30′) ἤτοι ἀνελύσαμεν τὰ 45′ εἰς μέρη τῆς ὥρας ἁπλᾶ, τοιαῦτα δηλονότι, ὥστε νὰ πολλαπλασιάζωνται εὐκόλως (οἷον τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον, τὸ τέταρτον κτλ.).

Μένει ἀκόμη νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ 50′ ἐπὶ τὸν 280.

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι

1′ ×280=280′=4ὥρ. 40′

ἄρα 30″×280= 2ὥρ. 20′ (διότι 30″ εἶνε $^1/_2$ τοῦ 1′)

καὶ 20″×280= 1ὥρ. 33′ 20″(διότι 20″ = $^1/_3$ τοῦ 1′)

ἄρα 50″×280= 3ὥρ. 53′ 20″

Ἀφοῦ ἐπολλαπλασιάσαμεν πάντα τὰ μέρη τοῦ συμμιγοῦς, δὲν μένει ἄλλο ἢ νὰ προσθέσωμεν τὰ εὑρεθέντα μερικὰ γινόμενα.

12ὥρ ×280=3360ὥρ.

45′ ×280= 210ὥρ.

50″ ×280= 3ὥρ. 53′ 20″

ἄρα τὸ γινόμενον εἶνε 3573ὥρ. 53′ 20″

Διάταξις τῆς πράξεως.

Πρὸς συντομίαν διατάσσεται ἡ πρᾶξις ὡς ἑξῆς·

		12ὣρ.	45′	50″
		280		
		960ὣρ.		
		24		
45′	) 30′ δίδουσιν	140		
	) 15′ δίδουσιν	70		(1′ δίδει 4 ὣρ. 40′)
50″	) 30″ δίδουσιν	2	20′	
	) 20″ δίδουσιν	1	33′	20″
	γινόμενον	2573	53′	20″

Παραδείγματα.

1)

	5στ.	27ὀκ.	300δρ.	
	320			
	1600			
22ὀκ.=$^1/_2$στατ.	(160			
$5^1/_2$ὀκ.=$^1/_4$ τῶν22ὀκ	(40			
	(			(1ὀκ. δίδει 320ὀκ.=7στ.12ὀκ.)
100δρ.=$^1/_4$τῆςὀκᾶς	(1	36ὀκ.		
γινόμενον	1801στ.	36ὀκ.		

2)

	5δρ.	60λεπτ.
	412	
	2060	
50λ.=$^1/_2$δρ.	(206	
10λ.=$^1/_5$ τῶν 50	(41	20
	2307δρ.	20λ.

Σημείωσις. Περισσότερα παραδείγματα ἰδὲ ἐν τῇ πρακτ. ἀριθμητικῇ.

3) Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ κλασματικὸν καὶ ἐπὶ μικτόν.

246. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν σιμμιγῆ ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.*

Παραδείγματος χάριν, διὰ νὰ πολλαπλασιάσω τὸν συμμιγῆ 3ὣρ. 10′ 20″ ἐπὶ τὸ κλάσμα $^5/_8$, πολλαπλασιάζω αὐτὸν πρῶτον ἐπὶ 5 καὶ εὑρίσκω 15ὥρ. 50′ 100″, ἔπειτα διαιρῶ τὸ γινόμενον τοῦτο διὰ τοῦ 8 καὶ εὑρίσκω 1ὥρ. 58′ 56″ $^1/_2$.

Τοῦτο δὲ εἶνε τὸ ζητούμενον γινόμενον τοῦ συμμιγοῦς ἐπὶ $^5/_8$.

Διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἐδ. 169), διὰ νὰ πολλαπλασιάσω οἱονδήποτε ἀριθμὸν ἐπὶ $^5/_8$, ἀρκεῖ νὰ λάβω τὸ $^1/_8$ αὐτοῦ πεντάκις, ἢ τὸ $^1/_8$ τοῦ πενταπλασίου αὐτοῦ.

Σημείωσις. Ἐνίοτε δύναται νὰ γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμὸς οὗτος καὶ κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $^7/_8$, ἀναλύομεν αὐτὸ εἰς $^4/_8$, $^2/_8$ καὶ $^1/_8$· καὶ πολλαπλασιάζομεν ἐφ' ἕκαστον τούτων χωριστὰ (κατὰ τὸ ἐδ. 170).

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $^4/_8$, λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ πολλαπλασιαστέου· διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $^2/_8$, λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ πρώτου γινομένου· καὶ τέλος διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $^1/_8$, λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ δευτέρου γινομένου.

247. *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ μικτόν, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν πρῶτον ἐπὶ τὸν ἀκέραιον τοῦ μικτοῦ, ἔπειτα καὶ ἐπὶ τὸ κλάσμα αὐτοῦ καὶ προσθέτομεν τὰ δύο γινόμενα (κατὰ τὸ ἐδ. 170).*

4) Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ κλάσματος.

248. *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ διὰ κλάσματος, ἀντιστρέφομεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸ ἀντεστραμμένον κλάσμα (ἰδὲ ἐδ. 185).*

Παρατήρησις. Καὶ ἡ διαίρεσις αὕτη τοῦ συμμιγοῦς διὰ κλάσματος εἶνε μερισμὸς πολλαπλασίου τινὸς τοῦ συμμιγοῦς· διὸ καὶ δίδει ἐξαγόμενον ὁμοειδὲς πρὸς τὸν συμμιγῆ διαιρετέον· διαφέρει δὲ τῆς μετρήσεως τοῦ συμμιγοῦς διὰ κλάσματος ὁμοειδοῦς, ἥτις καὶ αὐτὴ λέγεται διαίρεσις· περὶ τῆς διαιρέσεως ταύτης θὰ διαλάβωμεν ἐν τοῖς ἑπομένοις.

Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ συμμιγῆ.

249. Ὁ πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ συμμιγῆ γίνεται ὡς ἑξῆς· *Πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐφ' ἕκαστον μέρος τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ ἔπειτα ἑνοῦμεν τὰ μερικὰ γινόμενα.*

Διακρίνεται δὲ ὁ πολλαπλασιαστέος ἐκ τούτου, ὅτι εἶνε ὁμοειδὴς πρὸς τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δὲ τὸν πολλαπλασιαστέον ἐφ' ἕκαστον μέρος τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἢ τρέπομεν τὰ μέρη ταῦτα εἰς ἀριθμοὺς μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς μονάδος, ἢ μεταχειριζόμεθα τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν.

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 2ταλ 3δρ. 50λεπ. πόσον ἀξίζουν 35 ὀκ. 350 δρ. τοῦ αὐτοῦ πράγματος ;

Πολλαπλασιαστέος εἶνε ὁ συμμιγὴς 2ταλ. 3δρ. 50λεπ. πολλαπλασιαστὴς δὲ ὁ συμμιγὴς 35ὀκ. 350δρ.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὰ μέρη τοῦ συμμιγοῦς πολλαπλασιαστοῦ ὡς ἀριθμοὺς ὀκάδων, θὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ 2ταλ. 3δρ. 50λεπ. ἐπὶ τὸν μικτὸν $35\frac{350}{400}$ ἢ $35\,\frac{7}{8}$.

Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν ὡς ἑξῆς :

		2ταλ.	3δρ.	50λ.
		35ὀκ.	350δραμ.	
	(πρὸς 2ταλ.	70ταλ.		
ἀξία τῶν 35ὀκ.	) πρὸς $2^1/_2$δρ. $=^1/_2$ταλ.	17	2δρ.	50λεπ.
	(πρὸς 1 δρ. $=^1/_5$ταλ.	7		
	) τῶν 200 $=^1/_2$ὀκ.	1	1	75
ἀξία τῶν 350δρ.	(τῶν 100	0	3	$37^1/_2$
	) τῶν 50	0	1	$68^1/_2, ^1/_4$
		96ταλ.	4δρ.	31λ. $^1/_4$

Κατὰ πρῶτον εὑρίσκομεν τὴν ἀξίαν τῶν 35 ὀκ. πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 35 (κατὰ τὸ ἐδ. 245) ἔπειτα, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 350 δρ., ἀναλύομεν αὐτὰ εἰς 200 ($=^1/_2$ τῆς ὀκᾶς) καὶ 100 ($=^1/_2$ τῶν 200) καὶ 50 ($=^1/_2$ τῶν 100) καὶ πολλαπλασιάζομεν ἐφ' ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων χωριστά, ἤτοι εὑρίσκομεν τὴν ἀξίαν αὐτῶν ἐκ τῆς ἀξίας τῆς μιᾶς ὀκᾶς.

Ἔστω προσέτι τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

Μὲ ἓν τάλληρον ἀγοράζει τις 35 ὀκ. 350 δρ. ἐξ ἑνὸς πράγματος· πόσον ἀγοράζει μὲ 2 ταλ. 3 δρ. 50 λ, :

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο πολλαπλασιαστέος εἶνε ὁ συμμιγὴς 35 ὀκάδ. 350 δρ. πολλαπλασιαστὴς δὲ ὁ συμμιγὴς 2 ταλ. 3 δρ. 50 λ.

		35όκ.	350δρ.	
		2τάλ.	2δρ.	50λ.
μὲ 2τάλ. ἀγοράζει τις	ἀπὸ 35όκ.	70όκ.		
	ἀπὸ 200δρ.	1		
	ἀπὸ 100δρ.	0,	200δρ.	
	ἀπὸ 50δρ.	0,	100δρ.	
μὲ $2^1/_2$δρ.=$^1/_2$τάλ. ἀγοράζει τις		17	375	
μὲ 1δρ.=$^1/_5$τάλ. ἀγοράζει τις		7	70	
	Τὸ ὅλον	96όκ.	345δρ.	

Παρατήρησις.

Εἰς ἀμφότερα τὰ προβλήματα ταῦτα οἱ παράγοντες εἶνε οἱ αὐτοί, ἐν τούτοις τὰ γινόμενα διαφέρουσι κατὰ τὰς μονάδας τῶν κατωτέρων τάξεων. Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν πῶς συμβαίνει τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι, ἂν τραπῶσιν ἀμφότεροι οἱ συμμιγεῖς εἰς ἁπλοῦς ἀριθμοὺς (ὁ μὲν εἷς εἰς ἀριθμὸν ὀκάδων, ὁ δὲ ἄλλος εἰς ἀριθμὸν ταλλήρων), τὸ γινόμενον αὐτῶν θὰ εἶνε ὁ αὐτὸς ἀριθμός, οἱοσδήποτε ἐξ αὐτῶν καὶ ἂν ληφθῇ ὡς πολλαπλασιαστέος. Ἀλλὰ κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν ὁ ἀριθμὸς οὗτος θὰ εἶνε ἀριθμὸς ταλλήρων, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν ἀριθμὸς ὀκάδων. Διὰ τοῦτο τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ γινομένου θὰ εἶνε τὸ αὐτὸ εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις· ἀλλὰ τὸ μένον κλάσμα, ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιπτώσει θὰ τραπῇ εἰς δραχμὰς καὶ λεπτά, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ εἰς δράμια· ἐπειδὴ δὲ αἱ ὑποδιαιρέσεις τοῦ ταλλήρου εἶνε διάφοροι τῶν τῆς ὀκᾶς, θὰ προκύψωσι διάφορα ἐξαγόμενα.

250. Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν συμμιγοῦς ἐπὶ συμμιγῆ ὑπάγεται ὡς μερικὴ περίπτωσις ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου συγκεκριμένου ἐπὶ συμμιγῆ· διότι ὁ συγκεκριμένος ἀκέραιος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συμμιγὴς ἔχων μίαν μόνην τάξιν μονάδων.

Τοιοῦτον εἶνε τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

Ἐργάτης λαμβάνει δι' ἑκάστην ὥραν ἐργασίας 5 δραχμάς, πόσον θὰ λάβῃ ἂν ἐργασθῇ 7 ὥρ. 40′;

		5δρ.	
		7ὥρ.	40′
διὰ τὰς 7 ὥρ.	. . . .	35δρ.	
διὰ τὰ 40′	διὰ 30′=$^1/_2$ὥρ. . . .	2δρ.	50λ.
	διὰ 10′=$^1/_3$τῶν 30′ .	0	$83^1/_3$
	Τὸ ὅλον	38δρ.	$33^1/_3$.

6) Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ συμμιγοῦς.

251. Συμμιγὴς διαιρέτης δὲν δύναται νὰ διαιρέσῃ ἀριθμόν, ἐκτὸς ἀφοῦ τραπῇ εἰς ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος.

Διακρίνομεν δὲ εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν συμμιγῶν δύο περιπτώσεις.

1) Ἐὰν οἱ συμμιγεῖς εἶνε ὁμοειδεῖς.

2) Ἐὰν εἶνε ἑτεροειδεῖς.

252. *Ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι ὁμοειδεῖς.*

Ἂς λάβωμεν, ὡς παράδειγμα, τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

Ἐργάτης λαμβάνει καθ' ἡμέραν 4 δρ. 30 λ. εἰς πόσας ἡμέρας ἐργαζόμενος θὰ λάβῃ 383 δρ. 40 λ. ;

Φανερὸν εἶνε, ὅτι ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς 383 δρ. 40 λ. (ἤτοι 38340 λεπτὰ) τὸν ἀριθμὸν 4 δρ. 30 λ. (=430 λ.) καὶ τὰ μέρη αὐτοῦ, τόσας ἡμέρας καὶ τόσα μέρη τῆς ἡμέρας πρέπει νὰ ἐργάζηται· ὥστε διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν 38340 διὰ τοῦ 430.

Ἡ διαίρεσις αὕτη εἶνε μέτρησις καὶ τὸ ἐξαγόμενον αὐτῆς $\frac{3834}{43}$ ὡς ἀφῃρημένος ἀριθμός, δύναται νὰ παραστήσῃ ὅ,τι δήποτε πρᾶγμα.

Εἰς τὸ προκείμενον πρόβλημα παριστᾷ ἡμέρας. Ἐὰν δὲ τρέψωμεν τὸ ἐξαγόμενον εἰς συμμιγῆ ἀριθμὸν ἡμερῶν, ευρίσκομεν ὅτι χρειάζεται 89 ἡμ. 1 ὥρ. 57′ $\frac{9}{43}$. Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι·

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ δι' ἄλλου, ὅταν εἶνε ὁμοειδεῖς, τρέπομεν αὐτοὺς εἰς ἀριθμοὺς τῆς ἐλαχίστης ἐκ τῶν μονάδων των (ὅτε γίνονται ἀκέραιοι ἀριθμοί), καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν τοὺς ἀκεραίους τούτους· τὸ δὲ εἶδος τοῦ πηλίκου προσδιορίζεται ἐκ τοῦ προβλήματος.

Σημείωσις. Μερικαὶ περιπτώσεις τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶνε ἡ διαίρεσις συμμιγοῦς δι' ἀκεραίου ὁμοειδοῦς καὶ ἡ διαίρεσις ἀκεραίου διὰ συμμιγοῦς ὁμοειδοῦς τῷ ἀκεραίῳ. Διότι δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι τοῦ ἑνὸς τῶν συμμιγῶν ἐμηδενίσθησαν τὰ μέρη πάντα πλὴν ἑνὸς καὶ μόνου. Τοῦτο συμβαίνει π. χ. εἰς τὰ ἑξῆς προβλήματα·

Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζει τις ἐξ ἑνὸς πράγματος 6 ὀκάδας· πόσαι δραχμαὶ χρειάζονται διὰ νὰ ἀγοράσῃ 175 ὀκ. 300 δρ. ;

Κτίστης τις κτίζει εἰς μίαν ὥραν 4 πόδ. 8 δακτ. τοῖχον· εἰς πόσας ὥρας θὰ κτίσῃ 52 ὀργ. ;

Ἡ λύσις τῶν προβλημάτων τούτων γίνεται κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα.

Ὁμοίως λύονται τὰ προβλήματα, ἐν οἷς ζητεῖται νὰ διαιρεθῇ συμμιγὴς διὰ κλάσματος ὁμοειδοῦς, ἢ νὰ διαιρεθῇ κλάσμα διὰ συμμιγοῦς ὁμοειδοῦς· οἷον·

Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζει τις ἐξ ἑνὸς πράγματος $^3/_5$ τοῦ στατῆρος· πόσαι δραχμαὶ χρειάζονται διὰ νὰ ἀγοράσῃ τις 28 στ. 15 ὀκ. 300 δρ. ἐκ τοῦ αὐτοῦ πράγματος;

Ἐνταῦθα ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ τρέπονται εἰς δράμια κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα (ἢ ὁ συμμιγὴς τρέπεται εἰς ἀριθμὸν στατήρων).

Ἵνα διανύσῃ ὁδοιπόρος τις ἓν στάδιον, χρειάζεται 2 ὥρ. 5', 40''· πόσα στάδια θὰ διανύσῃ εἰς $\frac{2}{5}$ τῆς ὥρας;

Καὶ ἐνταῦθα δύνανται νὰ τραπῶσιν ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ εἰς δεύτερα λεπτὰ (ἢ νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς εἰς ἀριθμὸν ὡρῶν).

Ἐν γένει παρατηροῦμεν, ὅτι ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ (ὅταν δηλαδὴ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶνε συγκεκριμένοι καὶ ὁμοειδεῖς ἀριθμοί), ἵνα ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις, ἀνάγκη νὰ τραπῶσιν ἀμφότεροι εἰς ἀριθμοὺς μιᾶς μονάδος· προτιμότερον δὲ εἶνε νὰ τρέπωνται εἰς ἀριθμοὺς τῆς ἐλαχίστης τῶν μονάδων των· διότι τότε γίνονται ἀκέραιοι.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑ

253. *Ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶνε συμμιγεῖς ἑτεροειδεῖς.*

Ὅταν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶνε ἑτεροειδεῖς, τρέπομεν τὸν διαιρέτην εἰς κλάσμα καὶ διὰ τοῦ κλάσματος τούτου διαιροῦμεν τὸν διαιρετέον (κατὰ τὸ ἐδ. 248).

Τὸ πηλίκον κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶνε πάντοτε ὁμοειδὲς μὲ τὸν διαιρετέον· διότι ὁ διαιρετέος πρέπει νὰ εἶνε γινόμενον τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου, τὸ δὲ γινόμενον εἶνε ὁμοειδὲς μὲ ἕνα ἐκ τῶν παραγόντων (τὸν πολλαπλασιαστέον δηλονότι)· ἀνάγκη λοιπὸν νὰ εἶνε ὁ διαιρετέος ὁμοειδὴς ἢ μὲ τὸν διαιρέτην ἢ μὲ τὸ πηλίκον· καὶ ἐπειδὴ δὲν εἶνε τώρα ὁμοειδὴς μὲ τὸν διαιρέτην, θὰ εἶνε ὁμοειδὴς μὲ τὸ πηλίκον.

Ἂς λάβωμεν, ὡς παράδειγμα, τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

3 στ. 18 ὀκ. 300 δρ. ἐξ ἑνὸς πράγματος ἐπωλήθησαν 58 δρ. 60 λ. πρὸς πόσον ἐπωλήθη ὁ στατήρ;

Ἡ τιμὴ ἑκάστου στατῆρος, ἂν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν συμμιγῆ 3 στ. 18 ὀκ. 300 δρ. θὰ δώσῃ γινόμενον 58δρ. 60λ.

Ἐνταῦθα λοιπὸν ἔχομεν τὸ γινόμενον δύο παραγόντων καὶ τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν· ἄρα ὁ ἄλλος θὰ εἶνε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ συμμιγοῦς 58 δρ. 60 λ. διὰ τοῦ συμμιγοῦς 3 στ. 18 ὀκ. 300 δρ. (κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως ἐδ. 183).

Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν ταύτην, τρέπομεν τὸν διαιρέτην εἰς ἀριθμὸν στατήρων (διότι τοῦ στατῆρος ἡ τιμὴ ζητεῖται) καὶ εὑρίσκομεν 3 στατ. $\frac{75}{176}$ ἢ $\frac{603}{176}$ στατ. ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον καὶ εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον πηλίκον, ὅπερ εἶνε 17δρ. 10λ. $\frac{230}{603}$λ.

Σημείωσις. Ἡ πρᾶξις γίνεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, καὶ ὅταν ὁ διαιρετέος εἶνε ἀκέραιος ἀριθμός· ἤτοι ἔχῃ μόνον μίαν τάξιν μονάδων. Ὅταν δὲ ὁ διαιρέτης εἶνε ἀκέραιος ἀριθμὸς ἡ πρᾶξις καταντᾷ μερισμὸς τοῦ συμμιγοῦς εἰς ἴσα μέρη (ἐδ. 243).

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Μὲ ἓν τάλληρον ἀγοράζει τις 2στ. 15ὀκ. 300δρ. ἐξ ἑνὸς πράγματος· πόσα τάλληρα χρειάζονται διὰ νὰ ἀγοράσῃ 72 στατῆρας;

('Απ. 30τάλ. $\frac{222}{415}$)

2) Ἐργάτης τις λαμβάνει καθ' ὥραν $^7/_8$ τῆς δραχμῆς· πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργασθῇ, διὰ νὰ λάβῃ 15δρ. 30λ.; ('Απ. 17ὥρ. 29′ $^1/_7$).

3) Μία μοῖρα περιφερείας τινὸς ἔχει μῆκος 1δακτ. 8γρ. πόσον μῆκος ἔχουσι 32° 6′ 20″ τῆς αὐτῆς περιφερείας; ('Απ. 4ποδ. 5δ. 6γρ. $^1/_9$).

4) Πόσος χρόνος εἶνε ἀπὸ τῆς 1 Ἀπριλίου 1844 μέχρι τῆς 21 Μαΐου 1887; ('Απ. 43ἔτ. 1μ. 21ἡμ.).

5) Ἀτμόπλοιόν τι διήνυσεν 120 μίλια εἰς 2ἡμ. 8ὥρ. 45′, πόσα μίλια διήνυσε καθ' ὥραν; ('Απ. 2μίλ $\frac{26}{724}$)

6) Σιδηρόδρομός τις διανύει καθ' ὥραν στάδια 35,8· πόσα στάδια διανύει εἰς 12ὥρ. 25′ 40″; ('Απ. στάδια 444,91...).

7) Σιδηροῦ τινος ἐλάσματος μία παλάμη ἔχει βάρος 5ὀκ. 250δρ., πόσον βάρος ἔχουσι 2μέτρ., 18 ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἐλάσματος;

('Απ. 122ὀκ. 250δρ.).

(8 Πόσον ἀξίζουν 12στ. 16ὀκ. 200δρ. ἀνθράκων πρὸς 6δρ. 20λ. τὸν στατῆρα; ('Απ. 75δρ. 72 $^1/_2$ λεπτά).

Προβλήματα ἐπὶ τῶν μέτρων καὶ τῶν σταθμῶν.

1) Νὰ τραπῶσιν 23 $^3/_8$ μικροὶ πήχεις τῆς Κωνσταντινουπόλεως εἰς μέτρα γαλλικά.

Λύσις. Ἐπειδὴ εἷς μικρὸς πῆχυς (ἐνδεζὲ) εἶνε 0μ. 648, οἱ 23 $^3/_8$ μικροὶ θὰ εἶνε μέτρα 0,648×23 $^3/_8$. Πολλαπλασιάζοντες τὸν δεκαδικὸν ἐπὶ 23 καὶ ἔπειτα ἐπὶ $^3/_8$ εὑρίσκομεν, ὅτι 23πήχ. ἐνδεζὲ καὶ $^3/_8$ αὐτῶν, =15μ. 147.

2) Νὰ τραπῶσιν 67,8 μέτρα εἰς μικροὺς πήχεις ἐνδεζέ.

Λύσις. Ὁ ζητούμενος ἀριθμός, ἂν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 0,648, θὰ δώσῃ 67μ., 8· ἄρα εἶνε τὸ πηλίκον $\frac{67,8}{0,648}$.

3) Νὰ τραπῶσι 2στ. 18όκ. 250δρ. εἰς τόννους, χιλιόγραμμα καὶ γραμμάρια.

Λύσις. Οἱ 2στ. 18όκ. γίνονται 106 ὀκάδες· καὶ ἐπειδὴ ἡ ὀκὰ ἔχει 1280 γραμμάρια, αἱ 106 ὀκάδες γίνονται 1280×106, ἤτοι 135,680 γραμμάρια. Τὸ δράμιον εἶνε 3γρ. καὶ $^1/_5$ ἢ 3,2· ἄρα τὰ 250 δράμια $3,2 \times 250$ ἤτοι 800 γραμ. ἄρα ὁ δοθεὶς συμμιγὴς γίνεται τὸ ὅλον 136480 γραμ. ἤτοι 136 χιλιόγρ. καὶ 480 γραμ..

4) Νὰ τραπῶσι 2 τόννοι, 152 χιλιόγραμμα καὶ 620 γραμμάρια, εἰς στατῆρας, ὀκάδας καὶ δράμια.

Λύσις. Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶνε τὸ ὅλον γραμμάρια, 2152620· ἄρα εἶνε δράμια $\frac{2152620}{3,2}$ ἤτοι δράμια $672693 \frac{3}{4}$. ταῦτα δὲ γίνονται 38στ. 9όκ. 293δρ. $\frac{3}{4}$.

5) Νὰ τραπῶσιν 25 ὀργυιαὶ καὶ 2 πόδες εἰς γαλλικὰ μέτρα.

Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ ὀργυιὰ εἶνε 1μ., 94904, αἱ $25^1/_3$ θὰ εἶνε μέτρα $1,94904 \times 25^1/_3$, ἤτοι 49μ., 37568.

6) Νὰ τραπῶσι 582 παλαιὰ στρέμματα εἰς βασιλικά.

Λύσις. Ἐπειδὴ ἓν παλαιὸν στρέμμα εἶνε 1,27 βασιλικά, τὰ 582 παλαιὰ εἶνε $1,27 \times 582$ βασιλικά, ἤτοι 739,14.

7) Οἰκόπεδόν τι εἶνε 620 τεκτονικῶν τετραγωνικῶν πήχεων· πόσα τετραγωνικὰ μέτρα ἔχει;

Λύσις. Εἷς τεκτ. τετρ. πῆχυς εἶνε $^9/_{16}$ τοῦ τετρ. μέτρου· ἄρα 620 τετρ. πήχεις εἶνε $^9/_{16} \times 620$, ἤτοι 348 τ. μ., 75.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΝ ΣΤ΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι·

ΠΕΡΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ

Ὁρισμοί.

254. *Τετράγωνον ἀριθμοῦ*, ἤ δευτέρα δύναμις αὐτοῦ, λέγεται τὸ γινόμενον, τὸ ὁποῖον δίδει, ὅταν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του (ἰδὲ ἐδ. 51).

Παραδείγματος χάριν, τὸ τετράγωνον τοῦ 5 εἶνε 5×5 ἤτοι 25, καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ 11 εἶνε 11×11, ἤτοι 121· τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ $\frac{1}{2}$ εἶνε $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ ἤτοι $\frac{1}{4}$.

Τὰ τετράγωνα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 12) εἶνε κατὰ σειρὰν τὰ ἑξῆς :

ἀριθμοὶ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
τετρ.	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100,	121,	144

Πᾶς ἀκέραιος ἀριθμός, ὅστις δὲν εἶνε τετράγωνον ἄλλου ἀκεραίου (οἷον ὁ 10, ὁ 12 κτλ.), δὲν εἶνε τετράγωνον οὐδενὸς ἀριθμοῦ, ὡς ἀποδεικνύεται ἐν τῷ ἑξῆς θεωρήματι·

ΘΕΩΡΗΜΑ

255. *Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν εἶνε τετράγωνον ἀκεραίου τινός, δὲν εἶνε οὐδὲ κλάσματος τετράγωνον.*

Ἔστω τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός, ὅστις δὲν εἶνε τετράγωνον ἀκεραίου· οἷον ὁ 10· λέγω, ὅτι ὁ 10 δὲν εἶνε οὐδὲ κλάσματος τετράγωνον.

Διότι, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι κλάσμα τι $\frac{\alpha}{\beta}$, (ὅπερ δύναμαι νὰ ὑποθέσω ἀνάγωγον), ἔχει τετράγωνον τὸ 10, ἤτοι ὅτι εἶνε

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=10, \text{ ἢ } \frac{\alpha^2}{\beta^2}=10 \qquad \text{(ἐδ. 181).}$$

Τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶνε ἀνάγωγον, ἤτοι, οἱ δύο ἀριθμοὶ α καὶ β δὲν ἔχουσι κανένα κοινὸν διαιρέτην· ἄρα καὶ αἱ δυνάμεις αὐτῶν α^2 καὶ β^2 δὲν ἔχουσι κανένα κοινὸν διαιρέτην (ἐδ. 128)· ὅθεν καὶ τὸ κλάσμα $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ θὰ εἶναι ἀνάγωγον καὶ ἐπομένως εἶναι ἀδύνατον νὰ διαιρῇ ἀκριβῶς ὁ παρονομαστής του τὸν ἀριθμητήν του· ὥστε τὸ κλάσμα τοῦτο $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ δὲν δύναται νὰ εἶνε ἴσον μὲ τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν 10· ἄρα ὁ 10 δὲν εἶνε τετράγωνον οὐδενὸς κλάσματος.

Παρατήρησις.

256. Ἐὰν ἀναλύσωμεν δοθέντα ἀκέραιον ἀριθμὸν εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν, ἂν εἶνε τετράγωνον ἢ ὄχι (ἐδ. 123).

Ἀλλὰ καὶ δι' ἄλλων τινῶν γνωρισμάτων δυνάμεθα ἐνίοτε νὰ διακρίνωμεν, ὅτι ἀριθμός τις δὲν εἶνε τετράγωνον· τοιαῦτα εἶνε τὰ ἑξῆς δύο.

1) *Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς λήγῃ εἰς ἓν ἐκ τῶν ψηφίων*

2, 3, 7, 8

δὲν εἶνε τετράγωνον.

Διότι ἐκ τοῦ τρόπου μὲ τὸν ὁποῖον ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν, συνάγομεν ἀμέσως, ὅτι τὸ τετράγωνον παντὸς ἀκεραίου λήγει εἰς τὸ αὐτὸ ψηφίον, εἰς τὸ ὁποῖον λήγει καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ τελευταίου ψηφίου του· π. χ. τὸ τετράγωνον τοῦ 47 λήγει εἰς τὸ ψηφίον 9, ὡς καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ 7.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ τετράγωνα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν δὲν λήγουσιν εἰς οὐδὲν ἐκ τῶν ψηφίων 2, 3, 7, 8, συμπεραίνομεν, ὅτι οὐδὲν τετράγωνον λήγει εἴς τι τῶν ψηφίων τούτων.

2) *Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς λήγῃ εἰς περιττὸν ἀριθμὸν μηδενικῶν (ὡς οἱ 50, 15000 κτλ.), δὲν εἶνε τετράγωνον.*

Διότι, ἂν ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς εἶνε τετράγωνον ἄλλου, ὁ ἄλλος οὗτος θὰ λήγῃ εἰς 0· ἀλλ' ὅταν ἀριθμὸς λήγῃ εἰς 0, τὸ τετράγωνόν του θὰ λήγῃ εἰς διπλάσια μηδενικά, ἤτοι θὰ λήγῃ εἰς ἄρτιον ἀριθμὸν μηδενικῶν (κατὰ τὸ ἐδ. 38)· ὥστε ὁ ἀκέραιος ἀριθμός, ὅστις λήγει εἰς περιττὸν ἀριθμὸν μηδενικῶν, δὲν δύναται νὰ εἶνε τετράγωνον ἄλλου.

Διὰ νὰ διακρίνωμεν δέ, ἂν κλάσμα τι εἶνε τετράγωνον ἢ ὄχι, ἔχομεν τὸ ἑξῆς θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

257. *Κλάσμα ἀνάγωγον δὲν δύναται νὰ εἶνε τετράγωνον ἐκτὸς ἂν ἑκάτερος τῶν ὅρων του εἶνε τετράγωνον.*

Ἀπόδειξις. Ἔστω κλάσμα ἀνάγωγον τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$. ἂν τὸ κλάσμα τοῦτο εἶνε τετράγωνον, θὰ εἶνε τετράγωνον κλάσματος καὶ ὄχι ἀκεραίου, διότι τὸ τετράγωνον παντὸς ἀκεραίου εἶνε ἀκέραιος ἀριθμός· ἂς ὑποθέσωμεν λοιπόν, ὅτι τὸ δοθὲν κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶνε τετράγωνον κλάσματός τινος $\frac{\mu}{\nu}$ ὅπερ ὑποθέτω ἀνάγωγον, τότε θὰ εἶνε

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\mu}{\nu}\times\frac{\mu}{\nu}=\frac{\mu^2}{\nu^2}$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ εἶνε ἀνάγωγον, καὶ τὸ $\frac{\mu^2}{\nu^2}$ θὰ εἶνε ἀνάγωγον (ἐδ. 128) ἀλλὰ καὶ τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶνε ἀνάγωγον· ὅταν δὲ δύο ἀνάγωγα κλάσματα εἶνε ἴσα, καὶ οἱ ἀριθμηταὶ αὐτῶν εἶνε χωριστὰ ἴσοι καὶ οἱ παρονομασταὶ ἴσοι (ἐδ. 154)· ἐντεῦθεν συνάγομεν, ὅτι θὰ εἶνε $\alpha=\mu^2$ καὶ $\beta=\nu^2$. Τοῦτο δὲ ἐπρόκειτο νὰ δείξωμεν.

Σημείωσις. Κλάσμα μὴ ἀνάγωγον δύναται νὰ εἶνε τετράγωνον χωρὶς νὰ εἶνε οἱ ὅροι του. Π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{2}{8}\left(=\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2$ καὶ τὸ $\frac{8}{50}\left(=\frac{4}{25}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)^2$

Οἱ ἀριθμοί, οἵτινες εἶνε τετράγωνα ἄλλων, λέγονται τέλεια τετράγωνα· οἷον οἱ ἀριθμοὶ 49 $(=7^2)$, $\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\frac{16}{25}$ εἶνε τέλεια τετράγωνα.

Ὁρισμοί.

258. *Τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει αὐτὸν τετράγωνον.*

Παραδείγματος χάριν, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 81 εἶνε ὁ 9· διότι τὸ τετράγωνον τοῦ 9 εἶνε 81· ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα $^{25}/_{36}$ εἶνε τὸ $^5/_6$· διότι τὸ τετράγωνον $^5/_6$ εἶνε $^{25}/_{36}$, κτλ.

Τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν παριστῶμεν διὰ τοῦ σημείου $\sqrt{\ }$ τὸ ὁποῖον λέγεται *ῥιζικόν*· οἷον $\sqrt{49}$ σημαίνει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 49, ἤγουν τὸ 7, καὶ $\sqrt{1/4}$ σημαίνει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ $1/4$, ἤτοι τὸ $1/2$.

259. *Τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος* λέγεται ὁ μέγιστος ἀκέραιος τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς οὗτος· οἷον τοῦ 58 τετρ. ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶνε ὁ 7· διότι τὸ τετράγωνον τοῦ 7 εἶνε 49 (καὶ χωρεῖ εἰς τὸν 58) τοῦ δὲ 8 εἶνε 64, τουτέστι μεγαλήτερον τοῦ 58. Ὁμοίως τοῦ 17 τετρ. ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶνε ὁ 4, καὶ τοῦ $17\frac{1}{2}$ τετρ. ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶνε ὡσαύτως ὁ 4· τοῦ δὲ 25 τετρ. ῥίζα κατὰ προσέγ. μονάδος εἶνε ὁ 5.

260. Τετραγωνικὴ δὲ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ λέγεται ἐκ τῶν κλασμάτων, ἅτινα ἔχουσι παρονομαστὴν τὸ ν, τὸ μέγιστον, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς οὗτος.

Παραδείγματος χάριν, ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ εἶνε $\frac{14}{10}$· διότι τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{14}{10}$ ἤτοι τὸ $\frac{196}{100}$ χωρεῖ εἰς τὸν ἀριθμὸν 2· ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{15}{10}$ δὲν χωρεῖ εἰς τὸν 2, διότι εἶνε $\frac{225}{100}$ ἢ 2,25.

Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.

261. *Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης* δοθέντος ἀριθμοῦ λέγεται ἡ πρᾶξις, δι' ἧς εὑρίσκομεν τὴν τετρ. ῥίζαν αὐτοῦ, ἢ τὴν ἀκριβῆ (ἂν εἶνε τέλειον τετράγωνον), ἢ τὴν κατὰ προσέγγισιν ὡρισμένην.

Κατὰ πρῶτον θὰ μάθωμεν, πῶς ἐξάγεται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα δοθέντος ἀκεραίου ἀριθμοῦ, ἢ ἀκριβῶς, ἂν εἶνε τέλειον τετράγωνον, ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ἂν δὲν εἶνε τέλειον τετράγωνον· διότι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὑπάγονται, ὡς θὰ ἴδωμεν καὶ ἄλλαι.

Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν

262. Ἂν μὲν ὁ δοθεὶς ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶνε μικρότερος τοῦ 100, ἡ τετρ. ῥίζα αὐτοῦ (ἢ ἡ ἀκριβὴς ἢ ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος), θὰ εἶνε μικροτέρα τῆς τετρ. ῥίζης τοῦ 100, ἤτοι μικροτέρα τοῦ 10· ἄρα θὰ εἶνε μονοψήφιος· εὑρίσκομεν δ' αὐτὴν ἀμέσως ἀπὸ μνήμης· διότι ἐκ τοῦ Πυθαγορείου πίνακος ἐνθυμούμεθα ἀμέσως τὰ τετράγωνα πάντων τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν.

Παραδείγματος χάριν, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 49 εἶνε 7· διότι $7\times7=49$. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 35 (κατὰ προσέγ. μονάδος) εἶνε ὁ 5· διότι τὸ τετράγωνον αὐτοῦ (ἤτοι τὸ 25) χωρεῖ εἰς τὸν δοθέντα ἀριθμὸν καὶ μένει καὶ ὑπόλοιπον 10· ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀμέσως μεγαλητέρου ἀκεραίου (τοῦ 6) δὲν χωρεῖ.

Ἐὰν δὲ ὁ δοθεὶς ἀκέραιος εἶνε μεγαλήτερος τοῦ 100, ἡ τετρ. ῥίζα αὐτοῦ (ἡ ἀκριβὴς ἢ ἡ προσεγγίζουσα), θὰ εἶνε μεγαλητέρα τοῦ 10· ἤτοι θὰ ἔχῃ δεκάδας. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ῥίζαν ταύτην, ἔχομεν ἀνάγκην τοῦ ἑξῆς θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

263. *Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν σύγκειται ἐκ τῶν τετραγώνων αὐτῶν καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου αὐτῶν.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν δύο τυχόντες ἀριθμοὶ α καὶ β· τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θὰ εἶνε $\alpha+\beta$· τὸ δὲ τετράγωνον τούτου θὰ εἶνε τὸ γινόμενον

$$(\alpha+\beta)\times(\alpha+\beta), \text{ ἢ } (\alpha+\beta)^2$$

τὸ γινόμενον τοῦτο, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδαφίου 50, σύγκειται ἐκ τῶν ἑξῆς τεσσάρων μερικῶν γινομένων

$$\alpha\times\alpha,\quad \alpha\times\beta\quad \beta\times\alpha,\quad \beta\times\beta$$

ἢ

$$\alpha^2\quad \alpha\times\beta,\quad \alpha\times\beta\quad \beta^2$$

καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶνε

$$\alpha^2+2\times\alpha\times\beta+\beta^2.$$

Ἐδείχθη λοιπὸν ἡ ἰσότης

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\times\alpha\times\beta+\beta^2.$$

Παραδείγματα.

Τὸ 11 εἶνε ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν 10 καὶ 1· τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ 11 σύγκειται ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ 10 (ὅπερ εἶνε 100) καὶ ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ 1 (ἤτοι 1) καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν δύο μερῶν (ἢ $2\times10\times1$)· ὥστε $11^2=100+1+20=121$.

Ὁμοίως τὸ τετράγωνον τοῦ 12 (ἢ $10+2$) σύγκειται ἐκ τοῦ 100 καὶ ἐκ τοῦ 4 καὶ ἐκ τοῦ διπλασίο τοῦ 20, ἤτοι εἶνε 144.

Κα τὸ τετράγωνον τοῦ 102 (ὅπερ 10 εἶνε ἄθροισμα τοῦ 100 καὶ τοῦ 2) εἶνε ἴσον τῷ $100^2+2^2+400=10000+404=10404$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

264. *Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ διαφέρωσι κατὰ μονάδα, τὰ τετράγωνα αὐτῶν διαφέρουσι κατὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τούτων.*

Διότι, ἂν ὁ μικρότερος ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν παρασταθῇ διὰ τοῦ α, ὁ μεγαλήτερος θὰ εἶνε $\alpha+1$, καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν θὰ εἶνε τοῦ
μὲν μικροτέρου α^2
τοῦ δὲ μεγαλητέρου $(\alpha+1)^2$ ἤτοι $\alpha^2+2\alpha+1$
διαφέρουσι δὲ ἀπ' ἀλλήλων τὰ δύο ταῦτα τετράγωνα κατὰ $2\alpha+1$, τουτέστι κατὰ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν α καὶ $\alpha+1$.

265. Δυνάμεθα τώρα νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ (τὴν ἀκριβῆ, ἂν εἶνε τέλειον τετράγωνον, εἰ δὲ μή, τὴν κατὰ προσέγγισιν μονάδος).

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγ. ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ 3854. Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς οὗτος ὑπερβαίνει τὸν 100, ἡ τετραγ. ῥίζα αὐτοῦ θὰ ὑπερβαίνῃ τὸ 10· ἄρα θὰ σύγκηται ἐκ δεκάδων δ καὶ ἐκ μονάδων μ· καὶ διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν αὐτὴν ὡς ἄθροισμα τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσιν αἱ δ δεκάδες, (ἤτοι τοῦ ἀριθμοῦ $\delta\times10$) καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων μ, τουτέστι

$$\delta\times10+\mu.$$

Τὸ τετράγωνον αὐτῆς (τὸ ὁποῖον θὰ χωρῇ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς) θὰ σύγκηται (κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα).

1) Ἐκ τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων (τουτέστιν ἐκ τοῦ

$$(\delta\times10)\times(\delta\times10) \text{ ἤτοι } (\delta^2\times100).$$

2) Ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας

$$(\text{ἤτοι ἐκ τοῦ } 2\times\delta\times10\times\mu).$$

3) Ἐκ τοῦ τετραγώνου τῶν μονάδων (ἤτοι μ^2).

Ἄρα ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 3854, ὡς περιέχων τὸ τετράγωνον τῆς ῥίζης του, θὰ σύγκηται ἐκ τῶν τριῶν τούτων μερῶν καὶ ἔκ τινος ὑπολοίπου, (ἂν δὲν εἶνε τέλειον τετράγωνον)· τουτέστιν εἶνε

$$3854=\delta^2\times100+2\times\delta\times10\times\mu+\mu^2\times\upsilon \qquad (1)$$

Ἐκ τῶν μερῶν τούτων αἱ δ^2 ἑκατοντάδες δὲν δύνανται νὰ περιέχωνται ἢ εἰς τὰς 38 ἑκατοντάδας τοῦ ἀριθμοῦ· ἀλλὰ τὸ μέγιστον τετράγωνον, τὸ ὁποῖον χωρεῖ ὁ 38, εἶνε τὸ 36· ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων εἶνε 36 καὶ ἑπομένως $\delta=6$· (ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 3854 περιέχεται μεταξὺ τοῦ τετραγώνου τῶν 6 δεκάδων, ἤτοι τοῦ 3600 καὶ τοῦ τετραγώνου τῶν 7 δεκάδων, ἤτοι τοῦ 4900· ὥστε ἡ ῥίζα του δὲν δύναται νὰ ἔχῃ 7 δεκάδας). Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι *Αἱ δεκάδες τῆς ῥίζης παντὸς ἀριθμοῦ εὑρίσκονται, ἐὰν ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν ἑκατοντάδων του.*

Ἀφοῦ εὑρήκαμεν τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων ($\delta=6$), μένει ἀκόμη νὰ εὕρωμεν τὰς μονάδας μ· πρὸς τοῦτο ἀφαιροῦμεν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος (1) τὰς 36 ἑκατοντάδας καὶ εὑρίσκομεν

$$254=2\times6\times10\times\mu+\mu^2+\upsilon \qquad (2).$$

Ἐκ τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες ἀποτελοῦσι τὸν 254, ὁ πρῶτος εἶνε δεκάδες ($12\times\mu$ δεκάδες)· ἄρα δὲν δύναται νὰ περιέχηται ἢ μόνον εἰς τὰς 25 δεκάδας· ἀλλ' εἰς τὰς 25 ταύτας δεκάδας περιέχονται καὶ αἱ δεκάδες τοῦ ὑπολοίπου υ (ἂν ἔχῃ) καὶ αἱ δεκάδες τοῦ τετραγώνου μ^2 (ἂν ἔχῃ), ὥστε θὰ εἶνε

$$25 \geqq 12\times\mu.$$

Ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι τὸ *ψηφίον* μ *τῶν μονάδων δὲν δύναται νὰ εἶνε μεγαλήτερον τοῦ ψηφίου, ὅπερ εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὰς 25 δεκάδας τοῦ ὑπολοίπου 254 διὰ τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης.*

Ἐπειδὴ δὲ τὸ μ δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸ 2, δοκιμάζομεν τὸ ψηφίον 2. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τὸν 254 πρέπει νὰ περιέχηται τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν 6 δεκάδων ἐπὶ τὰς 2 μονάδας, ἤτοι τὸ γινόμενον 120×2, καὶ τὸ τετράγωνον τῶν 2 μονάδων, ἤτοι τὸ 2×2· ὥστε πρέπει νὰ περιέχηται τὸ γινόμενον 122×2, τοῦ γινομένου δὲ τούτου ὁ μὲν εἷς παράγων εἶνε τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον 2, ὁ δὲ ἄλλος σχηματίζεται, ἂν διπλασιάσωμεν τὰς εὑρεθείσας 6 δεκάδας καὶ δεξιὰ τοῦ διπλασίου αὐτῶν γράψωμεν τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον 2. Τὸ γινόμενον τοῦτο εἶνε 244 καὶ περιέχεται ἀληθῶς εἰς τὸν ἀριθμὸν 254· ἀφαιροῦντες δὲ αὐτὸ ἀπὸ τούτου εὑρίσκομεν τέλος καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως 10.

Ὥστε εὑρέθη ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 3854 κατὰ προσέγγισιν μονάδος· εἶνε δὲ ὁ ἀριθμὸς 62.

Διάταξις τῆς πράξεως.

$$\begin{array}{r|l}
38'54 & 62 \\
36 & \overline{122} \\
\hline
25'4 & \quad 2 \\
24'4 & \overline{244} \\
\hline
10 &
\end{array}$$

Ὁμοίως ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν οἱουδήποτε ἀκεραίου. Διότι ἔστω, ὡς παράδειγμα, ὁ ἀριθμὸς

58742

Κατὰ τὰ προηγούμενα, αἱ δεκάδες τῆς ῥίζης του θὰ εὑρεθῶσιν, ἂν ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν 587 ἑκατοντάδων του· ἡ δὲ ῥίζα τοῦ 587 εὑρίσκεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω

```
 5'87  |  24
 4     |-------
-----  |  44
 18'7      4
 17 6    -----
-----     176
  1 1
```

καὶ εἶνε 24· ὥστε αἱ δεκάδες τῆς ῥίζης τοῦ 58742 εἶνε 24· μένει ἀκόμη πρὸς εὕρεσιν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων· τοῦτο δὲ (κατὰ τὰ προαποδειχθέντα) δὲν δύναται νὰ εἶνε μεγαλήτερον τοῦ ψηφίου, ὅπερ εὑρίσκομεν διαιροῦντες διὰ τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων (ἤτοι διὰ τοῦ 48) τὰς δεκάδας τοῦ ὑπολοίπου, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ τετραγώνου τῶν 24 δεκάδων· τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο εἶνε 11 ἑκατοντάδες (αἵτινες ἔμειναν ἐκ τῶν 587 ἑκατοντάδων, ἀφ' ὧν ἀφῃρέσαμεν τὸ τετράγωνον τῶν 24 δεκάδων) καὶ 42 μονάδες, ἤτοι εἶνε 1142. Διαιροῦντες τὰς 114 δεκάδας τοῦ ὑπολοίπου τούτου διὰ τοῦ 48, εὑρίσκομεν τὸ ψηφίον 2, ὅπερ γράφομεν δεξιὰ τοῦ 48 καὶ ὑποκάτω αὐτοῦ καὶ πολλαπλασιάζομεν· ἐπειδὴ δὲ τὸ προκύπτον γινόμενον 964 περιέχεται εἰς τὸ ὑπόλοιπον 1142, συμπεραίνομεν, ὅτι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων εἶνε 2· ἀφαιροῦντες τέλος τὸ γινόμενον 964 ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου 1142, εὑρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως 178.

Διάταξις τῆς πράξεως.

```
 5'87'42  |  242
 4        |----------------------
-------   |  44          482
 18'7         4            2
 17 6       -----        -----
--------     176          964
   1142
    964
  -------
    178
```

Ὥστε ἐξήχθη ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 58742 κατὰ προσέγγισιν μονάδος· εἶνε δὲ ὁ 242.

266. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανὼν τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης·

Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀκεραίου ἀριθμοῦ (ἀκριβῶς, ἂν εἶνε τετράγωνον, εἰ δὲ μή, κατὰ προσέγγισιν μονάδος), *χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τμήματα διψήφια ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων· ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ πρώτου τμήματος, ὅπερ εὑρίσκεται εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἀριθμοῦ καὶ δύναται νὰ εἶνε διψήφιον ἢ μονοψήφιον· ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ τμήματος τούτου θὰ εἶνε τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ζητουμένης ῥίζης. Ἀφαιροῦμεν τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ῥίζης ἀπὸ τοῦ τμήματος, ἐξ οὗ εὑρέθη, καὶ δεξιὰ τοῦ μένοντος ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ ἑπόμενον τμῆμα, ὅτε σχηματίζεται ἀριθμός τις· τοῦ ἀριθμοῦ τούτου χωρίζομεν τὰς ἁπλᾶς μονάδας καὶ διαιροῦμεν τὰς δεκάδας του διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου τῆς ῥίζης.*

Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου αὐτῆς καὶ τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμὸν πολλαπλασιάζομεν ἐπ' αὐτὸ τὸ πηλίκον· καὶ ἂν μὲν τὸ γινόμενον ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ σχηματισθέντος ἀριθμοῦ (οὗ τὰς δεκάδας διῃρέσαμεν), τὸ εὑρεθὲν πηλίκον εἶνε τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ζητουμένης ῥίζης· καὶ γράφομεν αὐτὸ δεξιὰ τοῦ πρώτου· εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ εὕρωμεν ψηφίον, οὗ τὸ γινόμενον νὰ ἀφαιρῆται· τὸ ψηφίον τοῦτο θὰ εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ῥίζης· καὶ ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν καὶ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάσωμεν τὸ ἀκόλουθον τμῆμα, σχηματίζεται δεύτερός τις ἀριθμός.

Καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου διαιροῦμεν τὰς δεκάδας διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν ἀποτελοῦσι τὰ δύο εὑρεθέντα ψηφία τῆς ῥίζης καὶ γράφομεν τὸ πηλίκον δεξιὰ τοῦ διαιρέτου καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν ἐπ' αὐτὸ τὸ πηλίκον· καὶ ἂν μὲν τὸ γινόμενον ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ δευτέρου σχηματισθέντος ἀριθμοῦ, τὸ εὑρεθὲν ψηφίον εἶνε τὸ τρίτον ψηφίον τῆς ῥίζης, εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τοιουτοτρόπως ἐξακολουθοῦμεν, μέχρις οὗ καταβιβασθῶσι πάντα τὰ διψήφια τμήματα. Τὸ εἰς τὸ τελευταῖον τμῆμα ἀντιστοιχοῦν πηλίκον θὰ εἶνε τὸ τελευταῖον τῆς ῥίζης ψηφίον· τὸ δὲ εἰς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦν ὑπόλοιπον θὰ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τὰς πράξεως. Καὶ ἂν μὲν εἶνε τὸ ὑπόλοιπον 0, ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶνε τέλειον τετράγωνον καὶ εὑρέθη ἡ ῥίζα αὐτοῦ ἀκριβῶς· εἰ δὲ μή, εὑρέθη κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Παραδείγματα.

16΄81΄72	410		
16	81	820	
081	1		
81	81		
072			

9΄36΄36	306
9	606
0 36 36	6
36 36	3636
0	

8΄48	29
4	49
44΄8	9
44 1	441
7	

Παρατηρήσεις.

1) Ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τῆς τετρ. ῥίζης εἶναι ἴσος τῷ ἀριθμῷ τῶν τμημάτων, εἰς ἃ χωρίζεται ὁ ἀριθμός. Διὰ τοῦτο ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἔχει, ἢ τὸ ἥμισυ τῶν ψηφίων αὐτοῦ (ἂν τὸ πλῆθος αὐτῶν εἶναι ἄρτιον), ἢ τὸ ἥμισυ τῶν ψηφίων αὐτοῦ ἓν ἔτι προσλαβόντων (ἂν τὸ πλῆθος αὐτῶν εἶνε περιττόν).

2) Δυνατὸν νὰ συμβῇ, ὥστε μία τῶν διαιρέσεων, τὰς ὁποίας κάμνομεν διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ δεύτερον, τὸ τρίτον κτλ. ψηφίον τῆς ῥίζης, νὰ δίδῃ πηλίκον μεγαλήτερον τοῦ 9. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἀρχίζομεν τὰς δοκιμὰς ἀπὸ τοῦ 9 (τοῦτο συνέβη εἰς τὸν ἀριθμὸν 848).

3) Δυνατὸν ἐπίσης νὰ συμβῇ, ὥστε μία τῶν προειρημένων διαιρέσεων νὰ δίδῃ πηλίκον 0 (ὡς εἰς τὸν ἀριθμὸν 93636)· τότε τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τῆς ῥίζης εἶνε 0· γράφομεν δὲ αὐτὸ δεξιὰ τῶν ἄλλων καὶ καταβιάζοντες καὶ τὸ ἑπόμενον τμῆμα ἐξακολουθοῦμεν τὴν πρᾶξιν κατὰ τὸν κανόνα.

4) Τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸ διπλάσιον τῆς ῥίζης. Ἂν, λόγου χάριν, εὑρέθη ῥίζα ὁ ἀριθμὸς 62, τὸ ὑπόλοιπον δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸν 124· διότι ἂν ἔμενεν ὑπόλοιπον 125, ἢ μεγαλήτερον τούτου, ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς θὰ περιεῖχε τὸ τετράγωνον τοῦ 62καὶ τὸ ἄθροισμα 62+63· ἄρα θὰ περιεῖχε καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ κατὰ μονάδα μεγαλητέρου ἀριθμοῦ (τοῦ 63)· ὅπερ εἶνε $62^2+62+63$· (κατὰ τὸ πόρισμα 264). Ἑπομένως δὲν θὰ ἦτο ἡ τετρ. ῥίζα ὁ 62, ἀλλ' ὁ 53 ἢ καὶ ἄλλος μεγαλήτερος ἀριθμός.

Ἐξαγωγὴ τῆς τετρ. ῥίζης οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

267. *Ἡ τετρ. ῥίζα οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, εἶνε ἡ αὐτὴ μὲ τὴν τετρ. ῥίζαν τοῦ ἀκεραίου μέρους αὐτοῦ.*

Ἔστω, ὡς παράδειγμα, ὁ ἀριθμὸς $42\ ^2/_5$· τὸ μέγιστον ἀκέραιον τετράγωνον, τὸ ὁποῖον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς οὗτος, θὰ περιέχηται προδήλως εἰς τὸ ἀκέραιον μέρος του, ἤτοι εἰς τὸν 42· τοῦτο δὲ εἶναι τὸ 36· ἄρα 6 εἶνε ἡ τετρ. ῥίζα ἀμφοτέρων κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Ὁμοίως ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ 142,75 κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶνε ἡ ῥίζα τοῦ 142, ἤτοι τὸ 11, καὶ ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ $^{1500}/_8$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶνε ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ 187, ἤτοι ὁ 13.

Ἐξαγωγὴ τῆς τετρ. ῥίζης οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$.

268. Ἡ εὕρεσις τῆς τετρ. ῥίζης οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετρ. ῥίζης ἀκεραίου κατὰ προσέγγισιν μονάδος· γίνεται δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς·

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετρ. ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ Α κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$· τουτέστι νὰ εὕρωμεν ἐκ τῶν κλασμάτων, ἅτινα ἔχουσι παρονομαστὴν ν, τὸ μέγιστον τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς Α· ἔστω τοιοῦτο τὸ $\frac{\rho}{\nu}$· ἤτοι ἔστω

$$\left(\frac{\rho}{\nu}\right)^2 \leqq A \quad \text{ἀλλὰ} \quad \left(\frac{\rho+1}{\nu}\right)^2 > A$$

ἢ

$$\frac{\rho^2}{\nu^2} \leqq A \quad \text{ἀλλὰ} \quad \frac{(\rho+1)^2}{\nu^2} > A$$

Ἐκ τούτου ἕπεται $\rho^2 \leqq A \times \nu^2$, ἀλλὰ $(\rho \times 1)^2 > A \times \nu^2$

Αἱ δὲ ἀνισότητες αὗται δεικνύουσιν, ὅτι ὁ ἀκέραιος ρ εἶνε ὁ μέγιστος ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς $A \times \nu^2$· τουτέστιν ὁ ρ εἶνε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $A \times \nu^2$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

269. Ἐκ τούτου συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών·

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετρ. ῥίζαν οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσ-

έγγισιν $\frac{1}{\nu}$, πολλαπλασιάζομεν αυτὸν ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ ν, ἤτοι ἐπὶ ν, καὶ ἐξάγομεν τὴν τετρ. ῥίζαν τοῦ γινομένου ($A \times \nu^2$) κατὰ προσέγγισιν μονάδος· τὴν δὲ ῥίζαν ταύτην διαιροῦμεν διὰ ν.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ἔχωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $^1/_5$· πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ 5^2, ἤτοι ἐπὶ 25, καὶ εὑρίσκομεν γινόμενον 50· τούτου ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, καὶ εἶνε 7· τὴν ῥίζαν ταύτην 7 διαιροῦμεν διὰ τοῦ 5 καὶ εὑρίσκομεν $^7/_5$. Αὕτη δὲ εἶνε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $^1/_5$.

Ὁμοίως, ἂν ἔχωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ κλάσματος $^2/_3$ κατὰ προσέγγισιν $^1/_{60}$, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ ἐπὶ 60^2 καὶ εὑρίσκομεν γινόμενον $60^2 \times {}^2/_3$ ἢ $60 \times 20 \times 2$, τουτέστι 2400· τοῦ γινομένου τούτου ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ὅτε εὑρίσκομεν 48· διαιροῦμεν τέλος αὐτὴν διὰ τοῦ 60 καὶ ὁ οὕτω εὑρισκόμενος ἀριθμὸς $^{48}/_{60}$ ἢ $^4/_5$ εἶνε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $^2/_3$ κατὰ προσέγγισιν $^1/_{60}$.

Ἂν τέλος ζητῆται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 5,1 κατὰ προσέγγισιν $^1/_{12}$, πολλαπλασιάζομεν $5{,}1 \times 12^2$ καὶ εὑρίσκομεν $5 \times 144 + {}^1/_{10} \times 144 = 720 + 14{,}4$ ἢ 734,4 τοῦ γινομένου τούτου λαμβάνομεν τὸ ἀκέραιον μέρος (ἐδ. 277) 734 καὶ τούτου ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ὅτε εὑρίσκομεν 27· ὥστε ἡ ζητουμένη ῥίζα τοῦ 5,1 κατὰ προσέγγισιν $^1/_{12}$ εἶνε $^{27}/_{12}$ ἢ $2^1/_4$.

Συνήθως τὸ κλάσμα τῆς προσεγγίσεως ἔχει παρονομαστὴν δύναμίν τινα τοῦ 10· ζητεῖται δηλονότι νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ A κατὰ προσέγγισιν $^1/_{10\sigma}$· τότε ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ προηγουμένου κανόνος γίνεται εὐκολωτέρα· διότι ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἀριθμοῦ A ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ 10σ, ἤτοι ἐπὶ τὸ $10\sigma \times 10\sigma$ ἢ $10^2\sigma$ γίνεται εὐκολώτατα.

Παραδείγματα.

1) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $^1/_{10000}$.

Λύσις. Πολλαπλασιάζω τὸν 2 ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῶν 10000, ἤτοι γράφω δεξιὰ τοῦ 2 ὀκτὼ μηδενικὰ καὶ τοῦ προκύπτοντος ἀριθμοῦ 200000000 ἐξάγω τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ὅτε εὑρίσκω 14142· τὴν ῥίζαν ταύτην διαιρῶ διὰ 10000 καὶ ἔχω 1,4142, ἥτις εἶνε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $^1/_{10000}$.

2) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ $^{12}/_7$ κατὰ προσέγγισιν $^1/_{1000}$.

Λύσις. Πολλαπλασιάζω τὸ $^{12}/_7$ ἐπὶ 1000^2 καὶ τοῦ γινομένου $^{12}/_7 \times 1000^2$ λαμβάνω τὸ ἀκέραιον μέρος, ὅπερ εἶνε 1714285 καὶ ἐξάγω τὴν τετραγωνικὴν αὐτοῦ ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος· ὅτε εὑρίσκω 1309· διαιρῶ ἔπειτα τὴν ῥίζαν ταύτην διὰ 1000 καὶ ὁ προκύπτων ἀριθμὸς 1,309 εἶνε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $^{12}/_7$ κατὰ προσέγγισιν $^1/_{1000}$.

Σημείωσις. Διὰ νὰ εὕρω τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ γινομένου $^{12}/_7 \times 1000^2$ τρέπω τὸ κλάσμα $^{12}/_7$ εἰς δεκαδικὸν καὶ ἔπειτα μεταθέτω τὴν ὑποδιαστολὴν 6 θέσεις πρὸς τὰ ἐμπρός, παραλείπω δὲ πάντα τὰ μετ' αὐτὴν ψηφία.

3) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 18,65924467, κατὰ προσέγγισιν $^1/_{100}$.

Λύσις. Πολλαπλασιάζω τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ἐπὶ 100^2, ἤτοι ἐπὶ 10000 καὶ εὑρίσκω τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ γινομένου, ὅπερ εἶνε 186592. τούτου ἐξάγω τὴν τετρ. ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος καὶ εὑρίσκω 331· διαιρῶ τὴν ῥίζαν ταύτην δι' 100 καὶ ὁ προκύπτων ἀριθμὸς 4,31 εἶνε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ δοθέντος δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $^1/_{100}$.

Ὁμοίως εὑρίσκω, ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 0,000068 κατὰ προσέγγισιν $^1/_{1000}$ εἶνε 0,008.

Παρατηρήσεις.

270. Ἂν ὁ παρανομαστὴς τοῦ κλάσματος, οὗτινος ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, εἶνε τέλειον τετράγωνον (καὶ τοιοῦτος γίνεται πάντοτε, ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν παρανομαστήν του), παραλείπομεν αὐτόν, ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ, ἢ ἀκριβῶς, ἂν εἶνε δυνατόν, ἢ κατὰ προσέγγισιν, καὶ ταύτην διαιροῦμεν ἔπειτα διὰ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ παρανομαστοῦ.

Παραδείγματος χάριν, ἂν ζητῆται ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ $^2/_3$, γράφομεν αὐτὸν ὡς ἑξῆς $^6/_9$· ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν τοῦ 6 κατὰ προσέγγισίν τινα ἔστω $^1/_{100}$ καὶ εὑρίσκομεν 2,44· διαιροῦντες δ' αὐτὴν διὰ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ 9, ἤτοι διὰ 3, εὑρίσκομεν 0,81.

Ἐὰν συμβῇ νὰ εἶνε ἀμφότεροι οἱ ὅροι τετράγωνα τέλεια, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ κλάσματος εὑρίσκεται ἀκριβῶς· ἀρκεῖ νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα καὶ τῶν δύο ὅρων· π. χ. ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $^4/_{25}$ εἶνε $^2/_5$· τοῦ δὲ 0,0016 εἶνε 0,04.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν εἶνε τέλειον τετράγωνον, ἐάν, τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 5, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων δὲν εἶνε 2· ἤ, ἐὰν τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 6, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶνε ἄρτιον· ἤ,

ἐὰν τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 1, 4, 9, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶνε περιττόν.

2) Ἐὰν κλάσμα τι εἶνε τέλειον τετράγωνον, καὶ τὸ γινόμενον τῶν ὅρων αὐτοῦ εἶνε ἐπίσης τέλειον τετράγωνον· καὶ τἀνάπαλιν ἀληθεύει.

Διότι, ἂν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶνε τετράγωνον, ἂν μὲν εἶνε ἀνάγωγον, θὰ εἶνε $\alpha=\mu^2$, $\beta=\nu^2$ (ἐδ. 257)· ἄρα καὶ $\alpha\times\beta=\mu^2\times\nu^2=(\mu\times\nu)^2$· ἂν δὲ ἔχωσιν οἱ ὅροι του κοινόν τινα διαιρέτην δ, μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τούτου θὰ γίνωσιν ἀμφότεροι τέλεια τετράγωνα, ὥστε θὰ εἶνε

$$\alpha=\mu^2\times\delta, \text{ καὶ } \beta=\nu^2\times\delta$$

ἄρα καὶ $\qquad \alpha\times\beta=\mu^2\times\nu^2\times\delta^2=(\mu\times\nu\times\delta)^2.$

Καὶ ἀντιστρόφως· ἂν τὸ γινόμενον τῶν δύο ὅρων $\alpha\times\beta$ εἶνε ἴσον τῷ τετραγώνῳ ρ^2, τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ θὰ εἶνε τέλειον τετράγωνον· διότι εἶνε

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\times\beta}{\beta\times\beta}=\frac{\rho^2}{\beta^2}=\left(\frac{\rho}{\beta}\right)^2$$

3) Παντὸς περιττοῦ ἀριθμοῦ τὸ τετράγωνον εἶνε πολλαπλάσιον τοῦ 8 ηὐξημένον κατὰ μονάδα.

Διότι πᾶς περιττὸς ἀριθμὸς εἶναι τῆς μορφῆς $2\nu+1$ (ἔνθα ν δηλοῖ ἀκέραιόν τινα ἀριθμόν)· ἑπομένως τὸ τετράγωνόν του εἶνε· $4\times\nu^2+4\times\nu+1$· ἢ $4\nu\times(\nu+1)+1$. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν δύο ἐφεξῆς ἀριθμῶν ν καὶ $\nu+1$ ὁ ἕτερος εἶναι πάντοτε ἄρτιος, τὸ γινόμενον $4\nu\times(\nu+1)$ διαιρεῖται διὰ τοῦ 8.

4) Πᾶς περιττὸς ἀριθμός, ὅστις εἶνε ἄθροισμα δύο τετραγώνων, εἶνε πολλαπλάσιόν τι τοῦ 4 ηὐξημένον κατὰ μονάδα.

Ἡ πρότασις στηρίζεται εἰς τοῦτο, ὅτι, ὅταν τὰ τετράγωνα δύο ἀριθμῶν ἔχωσιν ἄθροισμα περιττὸν ἀριθμόν, ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν εἶνε ἄρτιος, ὁ δὲ ἄλλος περιττός.

5) Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν, ὧν οὐδέτερος εἶνε διαιρετὸς διὰ 3, εἶναι πάντοτε διαιρετὴ διὰ 3.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΠΕΡΙ ΚΥΒΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ

Ὁρισμοί.

271. Κύβος ἀριθμοῦ, ἡ τρίτη δύναμις αὐτοῦ, λέγεται τὸ γινόμενον τριῶν παραγόντων ἴσων μὲ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.

Π. χ., ὁ κύβος τοῦ 5 εἶνε $5\times5\times5$, ἤτοι 125, καὶ ὁ κύβος τοῦ 1,2 εἶνε $1{,}2\times1{,}2\times1{,}2$, ἤτοι 1,728.

Οἱ κύβοι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 10) εἶνε κατὰ σειρὰν οἱ ἑξῆς·

ἀριθμοὶ	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
κύβοι	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000.

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι οἱ κύβοι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν δύνανται νὰ λήγωσιν εἰς οἱονδήποτε ψηφίον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

272. *Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν εἶνε κύβος ἀκεραίου τινός, δὲν εἶνε οὐδὲ κλάσματος κύβος.*

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀληθεύει γενικῶς περὶ πάσης δυνάμεως· ἀποδεικνύεται δὲ ἀπαραλλάκτως, ὡς ἀπεδείχθη διὰ τὴν δευτέραν δύναμιν (ἐδ. 255).

Παρατήρησις.

273. Ἐὰν ἀναλύσωμεν δοθέντα ἀκέραιον ἀριθμὸν εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, διακρίνομεν ἀμέσως, ἂν εἶνε κύβος ἢ ὄχι (ἐδ. 123). Ἀλλὰ καὶ ἐξ ἄλλων τινῶν γνωρισμάτων δυνάμεθα ἐνίοτε νὰ διακρίνωμεν, ὅτι ἀριθμός τις δὲν εἶνε κύβος· τοιοῦτον εἶνε τὸ ἑξῆς·

Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς λήγῃ εἰς μηδενικά, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος δὲν διαιρεῖται διὰ 3, ὁ ἀριθμὸς οὗτος δὲν εἶνε κύβος.

Διότι, ἂν ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς εἶνε κύβος ἄλλου, ὁ ἄλλος οὗτος θὰ λήγῃ εἰς 0· ἀλλ' ὅταν ἀριθμὸς λήγῃ εἰς ἓν μηδενικὸν (ὡς 60, 170), ὁ κύβος του λήγει εἰς τρία μηδενικά, ὅταν ὁ ἀριθμὸς λήγῃ εἰς δύο μηδενικά, ὁ κύβος του λήγει εἰς ἓξ μηδενικά, κτλ. ὥστε πᾶς ἀριθμός, ὅστις λήγει εἰς πλῆθος μηδενικῶν μὴ διαιρούμενον διὰ 3 δὲν δύναται νὰ εἶνε κύβος.

Διὰ νὰ διακρίνωμεν δέ, ἂν δοθέν τι κλάσμα εἶνε κύβος ἢ ὄχι, ἔχομεν τὸ ἑξῆς θεώρημα·

ΘΕΩΡΗΜΑ

274. *Κλάσμα ἀνάγωγον δὲν δύναται νὰ εἶνε κύβος, ἐκτὸς ἐὰν ἑκάτερος τῶν ὅρων εἶνε κύβος.*

Τὸ θεώρημα ἀληθεύει γενικῶς περὶ πάσης δυνάμεως καὶ ἀποδεικνύεται ἀπαράλλακτα, ὡς ἀπεδείχθη διὰ τὴν δευτέραν δύναμιν (ἐδ. 257).

Σημείωσις. Κλάσμα μὴ ἀνάγωγον δύναται νὰ εἶνε κύβος, χωρὶς νὰ εἶνε οἱ ὅροι του π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{2}{16}$ εἶνε κύβος τοῦ $\frac{1}{2}$, τὸ $\frac{3}{8}$ εἶνε κύβος τοῦ $\frac{1}{3}$, κτλ.

Ὁρισμοί.

Οἱ ἀριθμοί, οἵτινες εἶνε κύβοι ἄλλων, λέγονται τέλειοι κύβοι.

275. *Κυβικὴ ῥίζα* ἀριθμοῦ λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει αὐτὸν κύβον. Παραδείγματος χάριν, ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 27 εἶνε ὁ 3· διότι $27=3^3$· ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 125 εἶνε ὁ 5· διότι $125=5^3$· καὶ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 0,008 εἶνε 0,2· διότι $0{,}008=(0{,}2)^3$.

Τὴν κυβικὴν ῥίζαν παριστῶμεν διὰ τοῦ σημείου $\sqrt[3]{\ }$, οἷον $\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$ σημαίνει τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ 27, ἤτοι τὸν 3, καὶ $\sqrt[3]{1000}$ σημαίνει τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ 1000, ἤτοι τὸν 10.

276. *Κυβικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος* λέγεται ὁ μέγιστος ἀκέραιος τοῦ ὁποίου τὸν κύβον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς οὗτος.

Οἷον τοῦ 42 κυβικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶνε ὁ 3· διότι ὁ 42 χωρεῖ μὲν τὸν κύβον τοῦ 3 (ἤτοι τὸν 27), ἀλλὰ δὲν χωρεῖ τὸν κύβον τοῦ 4 (ὅστις εἶνε 64). Ὁμοίως ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 100 κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶνε ὁ 4, καὶ τοῦ 125 ἡ κυβ. ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶνε ὁ 5 (ἡ ἀκριβὴς αὐτοῦ κυβικὴ ῥίζα).

277. *Κυβικὴ δὲ ῥίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν* $\frac{1}{\nu}$ λέγεται ἐκ τῶν κλασμάτων, τὰ ὁποῖα ἔχουσι παρονομαστὴν ν, τὸ μέγιστον τοῦ ὁποίου τὸν κύβον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς οὗτος.

Παραδείγματος χάριν, ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ εἶνε 1,2· διότι ὁ 2 χωρεῖ μὲν τὸν κύβον τοῦ $\frac{12}{10}$ (ὅστις εἶνε 1,728), ἀλλὰ δὲν χωρεῖ τὸν κύβον τοῦ $\frac{13}{10}$ (διότι οὗτος εἶνε 2,197).

Ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης.

278. *Ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης* δοθέντος ἀριθμοῦ λέγεται ἡ πρᾶξις, δι᾽ ἧς εὑρίσκομεν τὴν κυβ. ῥίζαν αὐτοῦ, ἢ τὴν ἀκριβῆ (ἂν εἶνε τέλειος κύβος), ἢ τὴν κατὰ προσέγγισιν ὡρισμένην.

Κατὰ πρῶτον θὰ μάθωμεν, πῶς ἐξάγεται ἡ κυβ. ῥίζα δοθέντος ἀκεραίου ἢ ἀκριβῶς, ἂν εἶνε τέλειος κύβος, ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ἂν δὲν εἶνε τοιοῦτος. Διότι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀνάγονται καὶ αἱ ἄλλαι.

Ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

279. Ἂν μὲν ὁ δοθεὶς ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶνε μικρότερος τοῦ 1000, ἡ κυβ. ῥίζα αὐτοῦ (ἡ ἀκριβὴς ἢ ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος) θὰ εἶνε μικροτέρα τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ 1000, ἤτοι μικροτέρα τοῦ 10 (διότι $10^3=1000$)· ἄρα θὰ εἶνε μονοψήφιος· εὑρίσκομεν δ' αὐτὴν εὐκόλως.

Παραδείγματος χάριν, ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 141 κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶνε 5· διότι $5^3=125$· ἀλλὰ $6^3=216$. Ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 705 εἶνε 8· διότι $8^3=512$· ἐνῷ $9^3=729$.

Ἐὰν δὲ ὁ δοθεὶς ἀκέραιος εἶνε μεγαλήτερος τοῦ 1000, ἡ κυβικὴ αὐτοῦ ῥίζα (ἡ ἀκριβὴς ἢ ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος) θὰ εἶνε μεγαλητέρα τοῦ 10, ἤτοι θὰ ἔχῃ δεκάδας. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ αὐτὴν ἔχομεν ἀνάγκην τοῦ ἑξῆς θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

280. *Ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν σύγκειται ἐκ τῶν κύβων τῶν δύο ἀριθμῶν καὶ ἐκ τοῦ τριπλασίου γινομένου τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου καὶ ἐκ τοῦ τριπλασίου γινομένου τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου.*

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν δύο τυχόντες ἀριθμοὶ α καὶ β· τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θὰ εἶνε $α+β$. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν κύβον τοῦ $α+β$, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ τετράγωνον αὐτοῦ, ἤτοι τὸ

$$α^2+2α\times β+β^2,$$

πάλιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν $α+β$. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν πρῶτον ἐπὶ α καὶ ἔπειτα ἐπὶ β καὶ ἀθροίζομεν τὰ δύο γινόμενα (ἐδ. 35). Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν·

$$(α+β^3=α^3+2α^2\times β+α\times β^2+α^2\times β+2α\times β^2+β^3$$

παρατηροῦντες δέ, ὅτι

$$2α^2\times β+α^2\times β=3α^2\times β \text{ καὶ } 2α\times β^2+α\times β^2=3α\times β^2$$

γράφομεν τὸν κύβον τοῦ $α+β$ ὡς ἑξῆς·

$$(α+β)^3=α^3+3α^2\times β+3α\times β^2+β^3.$$

Ἡ δὲ ἰσότης αὕτη ἐκφράζει τὸ προκείμενον θεώρημα.

ΠΟΡΙΣΜΑ

281. *Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ διαφέρωσι κατὰ μονάδα, οἱ κύβοι αὐτῶν διαφέρουσι κατὰ τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ μικροτέρου καὶ κατὰ τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ τοῦ μικροτέρου καὶ κατὰ μίαν μονάδα.*

Διότι, ἂν ὁ μικρότερος ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν παρασταθῇ διὰ τοῦ α, ὁ μεγαλήτερος θὰ εἶνε $α+1$· καὶ οἱ κύβοι αὐτῶν θὰ εἶνε, τοῦ μὲν μικροτέρου $α^3$, τοῦ δὲ μεγαλητέρου $(α+1)^3$ ἤτοι $α^3+3α^2+3α+1$· διαφέρουσι δὲ οἱ κύβοι οὗτοι ἀπ' ἀλλήλων κατὰ $3α^2+3α+1$.

282. Δυνάμεθα νῦν νὰ εὕρωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ (τὴν ἀκριβῆ, ἂν εἶνε τέλειον τετράγωνον, εἰ δὲ μή, τὴν κατὰ προσέγγισιν μονάδος). Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ 41679.

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς οὗτος ὑπερβαίνει τὸν 1000, ἡ κυβ. ῥίζα αὐτοῦ θὰ ὑπερβαίνῃ τὸ 10· ἄρα θὰ σύγκηται ἐκ δεκάδων δ καὶ ἐκ μονάδων μ· καὶ διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν αὐτὴν ὡς ἄθροισμα τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦσιν αἱ δεκάδες του (ἤτοι τοῦ $\delta\times 10$) καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων του, τουτέστι $\delta\times 10+\mu$.

Ὁ δὲ κύβος αὐτῆς (ὅστις θὰ χωρῇ εἰς τὸν δοθέντα ἀριθμὸν) θὰ σύγκηται (κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα).

1) Ἐκ τοῦ κύβου τῶν δεκάδων (τουτέστιν ἐκ τοῦ

$$(\delta\times 10)\times(\delta\times 10)\times(\delta\times 10),\ \text{ἤτοι}\ \delta^3\times 1000).$$

2) Ἐκ τοῦ τριπλασίου γινομένου τῶν μονάδων μ ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων, (ἤτοι ἐκ τοῦ $3\mu\times\delta^2\times 100$).

3) Ἐκ τοῦ τριπλασίου γινομένου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων, (ἤτοι ἐκ τοῦ $3\delta\times 10\times\mu^2$)

καὶ 4) Ἐκ τοῦ κύβου τῶν μονάδων· (ἤτοι ἐκ τοῦ μ^3.)

ἄρα ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 41679, ὡς περιέχων τὸν κύβον τῆς ῥίζης του, θὰ σύγκηται ἐκ τῶν τεσσάρων τούτων μερῶν καὶ ἔκ τινος ὑπολοίπου (ἂν δὲν εἶνε τέλειος κύβος)· τουτέστιν εἶνε

$$(1)\qquad 41679=1000\times\delta^3+100\times 3\delta^2\times\mu+10\times 3\delta\times\mu^2+\mu^3+\upsilon$$

Ἐκ τῶν μερῶν τούτων αἱ δ^3 χιλιάδες δὲν δύνανται νὰ περιέχωνται ἢ εἰς τὰς 41 χιλιάδας τοῦ ἀριθμοῦ. Ἀλλ' ὁ μέγιστος κύβος, τὸν ὁποῖον χωρεῖ ὁ 41, εἶνε ὁ 27· ὥστε ὁ κύβος τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων δ θὰ εἶνε 27 καὶ ἑπομένως $\delta=3$· (δὲν δύναται νὰ εἶνε $\delta=4$, διότι ὁ κύβος τῶν 4 δεκάδων εἶνε 64 χιλιάδες, ἤτοι μεγαλήτερος τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ). Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι X

Αἱ δεκάδες τῆς κυβ. ῥίζης παντὸς ἀριθμοῦ εὑρίσκονται, ἂν ἐξαχθῇ ἡ κυβ. ῥίζα τῶν χιλιάδων αὐτοῦ.

Ἀφοῦ εὑρήκαμεν τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων ($\delta=3$), μένει ἀκόμη νὰ εὕρωμεν τὰς μονάδας μ. Πρὸς τοῦτο ἀφαιροῦμεν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος (1) τὰς 27 χιλιάδας καὶ εὑρίσκομεν

$$(2)\qquad 14679=100\times 27\times\mu+10\times 9\times\mu^2+\mu^3+\upsilon$$

Ἐκ τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες ἀποτελοῦσι τὸν 14679, ὁ πρῶτος εἶνε ἑκατοντάδες ($27\times\mu$ ἑκατοντάδες), ἄρα δὲν δύναται νὰ περιέχηται ἢ μόνον εἰς τὰς 146 ἑκατοντάδας· ἀλλ' εἰς τὰς 146 ταύτας ἑκατοντάδας περιέχονται ἐπίσης καὶ ἑκατοντάδες τῶν λοιπῶν μερῶν (ἂν ἔχωσιν)· ὥστε θὰ εἶνε

$$146 \leqq 27 \times \mu.$$

Ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων δὲν δύναται νὰ εἶνε μεγαλήτερον τοῦ ψηφίου, ὅπερ εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὰς 146 ἑκατοντάδας τοῦ ὑπολοίπου 14679 διὰ τοῦ τριπλασίου τετραγώνου τῶν δεκάδων.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ μ δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸ 5, δοκιμάζομεν τὸ ψηφίον τοῦτο. Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν τὸν κύβον τοῦ 35, ὅστις εἶνε 42875· ἤτοι μεγαλήτερος τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ 41679· δοκιμάζομεν λοιπὸν τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον 4 καὶ πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν τὸν κύβον τοῦ 34, ὅστις εἶνε 39304 καὶ ἑπομένως περιέχεται εἰς τὸν δοθέντα ἀριθμόν. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 41679 κατὰ προσέγγισιν μονάδος, εἶνε ὁ 34· ἐὰν δὲ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ 41679 τὸν κύβον τοῦ 34, εὑρίσκομεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως, ὅπερ εἶνε 2375.

Διάταξις τῆς πράξεως.

41′679	34
27	$3 \times 3^2 = 27$
146′79	

41 679	$34^3 = 39304$
39 304	
2 375	

Ὁμοίως ἐξάγομεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν οἱουδήποτε ἀκεραίου· διότι ἔστω ὡς παράδειγμα ὁ ἀριθμὸς

181 653 487

Κατὰ τὰ προειρημένα αἱ δεκάδες τῆς κυβικῆς ῥίζης του θὰ εὑρεθῶσιν, ἂν ἐξαχθῇ ἡ κυβ. ῥίζα τῶν 181 653 χιλιάδων του· ἡ δὲ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 181 653 ἐξάγεται κατὰ τὰ προηγούμενα

181 653	56
125	$3 \times 5^2 = 75$
56 6′53	
181 653	$56^3 = 175616$
175 616	
6 037	

καὶ εἶνε 56· ὥστε αἱ δεκάδες τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ 181 653 487 εἶνε 56· μένει ἀκόμη πρὸς εὕρεσιν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων: τοῦτο δὲ (κατὰ τὰ προαποδειχθέντα) δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν διαιροῦντες διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων (ἤτοι διὰ τοῦ 9408) τὰς ἑκατοντάδας τοῦ ὑπολοίπου, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ κύβου τῶν 56 δεκάδων· τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο εἶνε 6037 χιλιάδες, (αἵτινες ἔμειναν ἐκ τῶν 181653 χιλιάδων) καὶ 487 μονάδες, ἤτοι 6037487· διαιροῦντες δὲ τὰς ἑκατοντάδας αὐτοῦ διὰ τοῦ 9408, εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ ζητούμενον ψηφίον δὲν εἶνε μεγαλήτερον τοῦ 6· ὑψοῦντες δὲ πρὸς δοκιμὴν τὸν 566 εἰς τὸν κύβον εὑρίσκομεν 181 321 496, ὥστε ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ 181 653 487 εἶνε 566, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως εἶνε 331991.

Διάταξις τῆς πράξεως.

181′653′487	566	
125		
566′53	$3\times5^2=75$	$56^3=175616$
181653	$3\times56^2=9408$	$566^3=181321496$
175616		
60374′87		

```
181653487
181321496
---------
   331991
```

283. Ἐκ τῶν προηγουμένων πάντων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών·

Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν ἀκεραίου ἀριθμοῦ (ἀκριβῶς, ἂν εἶναι κύβος, εἰ δὲ μή, κατὰ προσέγγισιν μονάδος), *χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τριψήφια τμήματα ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων. Ἐξάγομεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ πρώτου τμήματος, ὅπερ εὑρίσκεται εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἀριθμοῦ καὶ δύναται νὰ εἶνε τριψήφιον ἢ διψήφιον ἢ καὶ μονοψήφιον· ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ τμήματος τούτου θὰ εἶνε τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ζητουμένης ῥίζης.*

Ἀφαιροῦμεν τὸν κύβον τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ῥίζης ἀπὸ τοῦ τμήματος, ἐξ οὗ εὑρέθη, καὶ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ δευτέρου τμήματος, τὸν δὲ οὕτω σχηματιζόμενον ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ῥίζης.

Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ῥίζης καὶ τὸν τότε προκύπτοντα ἀριθμὸν ὑψοῦμεν εἰς τὸν κύβον.

Ἐὰν ὁ κύβος οὗτος ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ ἐκ τῶν δύο πρώτων τμημάτων σχηματιζομένου ἀριθμοῦ, τὸ εὑρεθὲν πηλίκον εἶνε τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ζητουμένης ῥίζης· εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον· καὶ καθεξῆς, μέχρις οὗ εὕρωμεν ἀριθμὸν δυνάμενον νὰ ἀφαιρεθῇ.

Δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ τρίτου τμήματος καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν σχηματίζουσι τὰ δύο πρῶτα ψηφία τῆς ῥίζης.

Τὸ εὑρεθὲν πηλίκον δοκιμάζομεν γράφοντες αὐτὸ δεξιὰ τῶν ἤδη εὑρεθέντων ψηφίων τῆς ῥίζης καὶ ὑψοῦντες τὸν ἀποτελούμενον ἀριθμὸν εἰς τὸν κύβον. Ἐὰν ὁ κύβος οὗτος δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν ἐκ τῶν τριῶν πρώτων τμημάτων ἀποτελούμενον ἀριθμόν, τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον εἶνε τὸ τρίτον ψηφίον τῆς ῥίζης, εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ εὑρεθῇ τὸ ἀληθὲς ψηφίον.

Ἐξακολουθοῦμεν τοιουτοτρόπως, μέχρις οὗ καταβιβάσωμεν καὶ τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ τελευταίου τμήματος καὶ εὕρωμεν τὸ τελευταῖον ψηφίον τῆς ῥίζης.

Παρατηρήσεις.

1) Ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τῆς κυβ. ῥίζης εἶνε ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν τμημάτων, εἰς ἃ χωρίζεται ὁ δοθεὶς ἀριθμός. Ἐὰν λοιπὸν τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ εἶνε $3ν$ ἢ $3ν-1$ ἢ $3ν-2$, ἡ κυβικὴ ῥίζα αὐτοῦ θὰ ἔχῃ $ν$ ψηφία.

2) Ἐὰν εἴς τινα τῶν διαιρέσεων, δι' ὧν εὑρίσκομεν τὰ ψηφία τῆς ῥίζης, εὑρεθῇ πηλίκον μεγαλήτερον τοῦ 9, ἀρχίζομεν τὰς δοκιμὰς ἀπὸ τοῦ 9.

3) Ἐὰν εἴς τινα τῶν διαιρέσεων τὸ πηλίκον εἶνε 0, καὶ τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τῆς ῥίζης θὰ εἶνε 0.

4) Τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως δὲν δύναται νὰ εἶνε μεγαλήτερον τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις σύγκειται ἐκ τοῦ τριπλασίου τῆς ῥίζης καὶ ἐκ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου αὐτῆς (τοῦτο ἐξάγεται ἐκ τοῦ ἐδ. 281).

Ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

284. *Ἡ κυβικὴ ῥίζα οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶνε ἡ αὐτὴ μὲ τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ ἀκεραίου μέρους αὐτοῦ.*

Ἡ πρότασις αὕτη ἀποδεικνύεται ἀπαραλλάκτως, ὡς ἀπεδείχθη καὶ περὶ τῆς τετρ. ῥίζης (ἐδ. 267).

Ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$

285. Ἡ εὕρεσις τῆς κυβικῆς ῥίζης οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς κυβικῆς ῥίζης ἀκεραίου κατὰ προσέγγισιν μονάδος· γίνεται δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς·

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν κυβ. ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ Α κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$· τουτέστι νὰ εὕρωμεν ἐκ τῶν κλασμάτων, ἅτινα ἔχουσι παρονομαστὴν ν, τὸ μέγιστον τοῦ ὁποίου τὸν κύβον χωρεῖ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς Α. Ἔστω τοιοῦτο τὸ $\frac{\rho}{\nu}$, ἤτοι ἔστω

$$\left(\frac{\rho}{\nu}\right)^3 \leqq A \qquad \text{ἀλλὰ} \qquad \left(\frac{\rho+1}{\nu}\right)^3 > A$$

ἐκ τούτων ἕπεται

$$\rho^3 \leqq A\times\nu^3 \quad \text{ἀλλὰ} \quad (\rho+1)^3 > A\times\nu^3$$

αἱ δὲ ἀνισότητες αὗται δεικνύουσιν, ὅτι ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς ρ εἶνε ὁ μέγιστος ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου τὸν κύβον χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς $A\times\nu^3$, τουτέστιν ὁ ρ εἶνε ἡ κυβ. ῥίζα τοῦ $A\times\nu^3$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

286. Ἐκ τούτου συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών·

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν κυβ. ῥίζαν οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν κύβον τοῦ ν καὶ ἐξάγομεν τὴν κυβ. ῥίζαν τοῦ γινομένου ($A\times\nu^3$) κατὰ προσέγγισιν μονάδος· τὴν δὲ ῥίζαν ταύτην διαιροῦμεν διὰ ν.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, ζητῆται ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 100 κατὰ προσέγγισιν $^1/_5$, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ 5^3, ἤτοι ἐπὶ 125 καὶ γίνεται 12500· ἐξάγομεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου 12500 κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ὅτε εὑρίσκομεν 23· ἔπειτα διαιροῦμεν ταύτην διὰ 5 καὶ εὑρίσκομεν $^{23}/_5$ ἢ $4\ ^3/_5$, αὕτη δὲ εἶνε ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 100 κατὰ προσέγγισιν $^1/_5$.

Συνήθως τὸ κλάσμα τῆς προσεγγίσεως ἔχει παρονομαστὴν δύναμίν τινα τοῦ 10· ζητεῖται δηλονότι νὰ ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ Α κατὰ προσέγγισιν $^1/_{10}$σ· τότε ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ προηγουμένου κανόνος γίνεται εὐκολωτέρα.

Παραδείγματα.

1) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 2 μὲ προσέγγισιν $^1/_{1000}$.

Λύσις. Πολλαπλασιάζω τὸν 2 ἐπὶ τὸν κύβον τοῦ 1000, ἤτοι ἐπὶ 10^9, (ἤτοι γράφω πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ 2 ἐννέα μηδενικὰ) καὶ τοῦ προκύπτοντος ἀριθμοῦ 2000000000 ἐξάγω τὴν κυβικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ὅτε εὑρίσκω 1269· τὴν ῥίζαν ταύτην διαιρῶ διὰ 1000 καὶ ἔχω 1,269· τοῦτο δὲ εἶναι ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 2 μὲ προσέγγισιν $^1/_{1000}$.

2) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ $^5/_9$ μὲ προσέγγισιν $^1/_{100}$.

Λύσις. Πολλαπλασιάζω τὸ κλάσμα $^5/_9$ ἐπὶ 100^3 καὶ τοῦ γινομένου λαμβάνω τὸ ἀκέραιον μέρος, ὅπερ εἶνε 555555, καὶ τούτου ἐξάγω τὴν κυβικὴν ῥίζαν μὲ προσέγγισιν μονάδος, ὅτε εὑρίσκω 82· διαιρῶ ἔπειτα τὴν ῥίζαν ταύτην 82 διὰ 100 καὶ εὑρίσκω 0,82· τοῦτο δὲ εἶνε ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ $^5/_9$ μὲ προσέγγισιν $^1/_{100}$.

3) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 5,92347 μὲ προσέγγισιν $^1/_{10}$.

Λύσις. Πολλαπλασιάζω αὐτὸν ἐπὶ 10^3, ἤτοι ἐπὶ 1000, καὶ τοῦ γινομένου λαμβάνω τὸ ἀκέραιον μέρος, ὅπερ εἶναι 5923· τούτου ἐξάγω τὴν κυβικὴν ῥίζαν μὲ προσέγγισιν μονάδος καὶ εὑρίσκω 18· διαιρῶ αὐτὴν διὰ 10 καὶ εὑρίσκω, 1,8· τοῦτο δὲ εἶνε ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ μὲ προσέγγισιν $^1/_{10}$.

Ὁμοίως εὑρίσκεται, ὅτι ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 0,00000428 κατὰ προσέγγισιν 0,001 εἶνε 0,016.

Παρατήρησις.

287. Ἐὰν συμβῇ νὰ εἶνε ἀμφότεροι οἱ ὅροι κλάσματός τινος τέλειοι κύβοι, ἡ κυβ. ῥίζα αὐτοῦ εὑρίσκεται ἀκριβῶς· ἀρκεῖ νὰ ἐξαχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ ἡ τοῦ παρανομαστοῦ· π. χ. ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{8}{1000}$ εἶνε $\frac{2}{10}$, ἡ κυβ. ῥίζα τοῦ $\frac{27}{1000000}$ εἶναι $\frac{3}{100}$ ἡ τοῦ $\frac{64}{125}$ εἶνε $\frac{4}{5}$ κλ.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν δύναται νὰ εἶνε κύβος, ἐάν, τοῦ ψηφίου τῶν

μονάδων ὄντος 2 ἢ 6, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶνε ἄρτιον· ἤ, ἐάν, τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 4 ἢ 8, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶνε περιττόν.

2) Ἀκέραιος ἀριθμὸς λήγων εἰς 5 δὲν δύναται νὰ εἶνε κύβος, ἐὰν τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων του δὲν εἶνε μήτε 2 μήτε 7.

3) Ἡ διαφορὰ τῶν κύβων δύο ἐφεξῆς ἀκεραίων εἶνε πολλαπλάσιόν τι τοῦ 6 ηὐξημένον κατὰ μονάδα.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΝ Ζ'.

Μέθοδοι.

Περὶ ποσῶν ἀναλόγων.

288. Πολλάκις ποσόν τι ἐξαρτᾶται ἀπὸ ἄλλου ἢ ἀπὸ πολλῶν ἄλλων. Π. χ., τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα θὰ δώσῃ τις, διὰ νὰ ἀγοράσῃ ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, ἐξαρτῶνται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πήχεων τοὺς ὁποίους θὰ ἀγοράσῃ· διότι εἶνε φανερόν, ὅτι διὰ περισσοτέρους πήχεις θὰ δώσῃ περισσότερα χρήματα. Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν, οἵτινες χρειάζονται διὰ νὰ κτίσωσι τοῖχόν τινα, ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ὕψους τοῦ τοίχου καὶ ἐκ τοῦ μήκους αὐτοῦ καὶ ἐκ τοῦ πλάτους αὐτοῦ· ἔτι δὲ καὶ ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν, ἐν αἷς θὰ κτισθῇ ὁ τοῖχος, καὶ ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὡρῶν τῆς ἡμερησίας ἐργασίας.

289. Δύο ποσὰ λέγονται *ἀνάλογα*, ἐὰν ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν προξενῇ πολλαπλασιασμὸν τοῦ ἄλλου ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Παραδείγματα.

Ἂν δύο ὀκάδες ἐξ ἑνὸς πράγματος ἀξίζουν 5 δραχμάς,
2×3 ὀκάδες τοῦ αὐτοῦ πράγματος ἀξίζουν 5×3 δραχμάς· καὶ
$2+\frac{1}{8}$ » » » » » $5\times\frac{1}{8}$ »
καὶ οὕτω καθεξῆς·
ὥστε ἡ ἀξία ἑνὸς πράγματος καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων του εἶνε ἀνάλογα.

Ἂν ἐργάτης τις λαμβάνῃ ἡμερομίσθιον 4 δραχμὰς
διὰ 2 ἡμέρας θὰ λάβῃ 4×2 δραχμὰς
διὰ 5 ἡμέρας θὰ λάβῃ 4×5 δραχμὰς
διὰ $6\frac{1}{5}$ ἡμέρας θὰ λάβῃ $4 \times 6\frac{1}{5}$ δραχμὰς
ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ μισθὸς τοῦ ἐργάτου καὶ αἱ ἡμέραι τῆς ἐργασίας του εἶνε ἀνάλογα.

Ἂν ὁδοιπόρος τις διανύῃ εἰς 1 ὥραν $7\frac{1}{2}$ στάδια
θὰ διανύσῃ εἰς 4 ὥρας $(7\frac{1}{2}) \times 4$ στάδια
καὶ εἰς $\frac{1}{8}$ ὥρας $(7\frac{1}{2}) \times \frac{1}{8}$ στάδια
ἄρα αἱ ὧραι τῆς ὁδοιπορίας καὶ τὰ διανυόμενα στάδια εἶνε ἀνάλογα.

Ἂν εἰς 8 ἀνθρώπους
διανεμηθῶσιν ἐξ ἴσου 400 δρ. θὰ λάβῃ ἕκαστος 50
ἂν διανεμηθῶσι 400×2 δρ. » » 50×2.
ἂν διανεμηθῶσι $400 \times \frac{5}{6}$ δρ. » » $50 \times \frac{5}{6}$
καὶ οὕτω καθεξῆς (ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνθρώπων μένει ὁ αὐτός)· ὥστε τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον διανέμεται, καὶ τὸ μερίδιον ἑκάστου ἀνθρώπου εἶνε ἀνάλογα (ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνθρώπων πρέπει νὰ μένῃ ἀμετάβλητος).

Σημείωσις. Δὲν πρέπει νὰ νομίζωμεν, ὅτι, ὅταν δύο ποσὰ συναυξάνωσιν, εἶνε καὶ ἀνάλογα· διότι, λόγου χάριν, τὸ ἀνάστημα τοῦ παιδίου καὶ τὰ ἔτη αὐτοῦ συναυξάνουσι καὶ ὅμως δὲν εἶνε ἀνάλογα.

Ποσὰ ἀντίστροφα.

290. Δύο ποσὰ λέγονται *ἀντίστροφα*, ἢ *ἀντιστρόφως ἀνάλογα*, ὅταν ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν προξενῇ ιαίρεσιν τοῦ ἄλλου διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Παραδείγματα.

Ἐὰν 1 ἐργάτης τελειώνῃ ἔργον τι εἰς 12 ἡμέρας,
2 ἐργάται θὰ τελειώσωσιν αὐτὸ εἰς $\frac{12}{2}$ ἡμέρας.
καὶ 8 ἐργάται » » » εἰς $\frac{12}{8}$ ἡμέρας.

καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν, ἐν αἷς ἐκτελοῦσιν ἔργον τι, εἶνε ποσὰ ἀντίστροφα.

Ἐὰν 12 ἄνθρωποι μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου 600 δρ. θὰ λάβῃ ἕκαστος 50 δρ.

Ἐὰν 12×8 ἄνθρωποι μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου τὸ αὐτὸ ποσόν, θὰ λάβῃ ἕκαστος $\frac{50}{8}$ δρ.

Ἐὰν δὲ $\frac{12}{4}$ ἄνθρωποι μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου τὸ αὐτὸ ποσόν, θὰ λάβῃ ἕκαστος 50×4 δρ. καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνθρώπων, οἵτινες θὰ μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου ποσόν τι, καὶ τὸ μερίδιον ἑκάστου εἶνε ποσὰ ἀντίστροφα.

Σημείωσις. Δὲν πρέπει νὰ νομίζωμεν, ὅτι, ὅταν δύο ποσὰ μεταβάλλωνται ἀνομοίως (τουτέστιν αὐξανομένου τοῦ ἑνὸς ἐλαττοῦται τὸ ἄλλο), εἶνε καὶ ἀντίστροφα· διότι π. χ. ἂν μία ἅμαξα συρομένη ὑπὸ δύο ἵππων διατρέχῃ τὸ ἀπ' Ἀθηνῶν εἰς Πειραιᾶ διάστημα εἰς 1 ὥραν, συρομένη ὑπὸ 4 δὲν θὰ διατρέξῃ αὐτὸ εἰς $^1/_2$ ὥραν· οὐδὲ συρομένη ὑπὸ 8 θὰ διατρέξῃ αὐτὸ εἰς $^1/_4$ τῆς ὥρας.

Παρατήρησις.

291. Ὅταν ἐξετάζωμεν, ἂν ποσόν τι εἶναι ἀνάλογον πρὸς ἄλλο, ἢ ἀντίστροφον πρὸς αὐτό, ἀφίνομεν ἀμετάβλητα πάντα τὰ ἄλλα ποσά, ἀπὸ τῶν ὁποίων ἐνδέχεται νὰ ἐξαρτᾶται τὸ ποσὸν τοῦτο.

Π. χ., ὅταν ἄνθρωποί τινες θὰ μοιρασθῶσιν ἐξ ἴσου ποσόν τι χρημάτων, ἐὰν θέλω νὰ μάθω τὴν σχέσιν τοῦ μεριδίου πρὸς τὸ ποσόν, ὅπερ διανέμεται, πρέπει νὰ ἀφήσω τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀνθρώπων ἀμετάβλητον· τότε δὲ (ἐδ. 289 παράδειγμα 4ον), εὑρίσκω, ὅτι τὸ μερίδιον καὶ τὸ ποσόν, ὅπερ διανέμεται, εἶνε ἀνάλογα. Ὁμοίως, ἂν θέλω νὰ μάθω τὴν σχέσιν τοῦ μεριδίου πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀνθρώπων, εἰς τοὺς ὁποίους γίνεται ἡ διανομή, πρέπει νὰ ἀφήσω τὸ διανεμόμενον ποσὸν ἀμετάβλητον· τότε δὲ εὑρίσκω (ἐδ. 290 παράδειγμα 2ον), ὅτι τὸ μερίδιον καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνθρώπων εἶνε ποσὰ ἀντίστροφα.

Περὶ ἀριθμῶν ἀναλόγων.

292. Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους ἴσους τὸ πλῆθος, ἐὰν προκύπτωσιν ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, οἷον οἱ ἀριθμοὶ 10, 15, 30, 100 εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τοὺς 2, 3, 6, 20· διότι προκύπτουσιν ἐκ τούτων πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ 5.

Καὶ οἱ δεύτεροι δὲ ἀριθμοὶ εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τοὺς πρώτους· διότι προκύπτουσιν ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ $^1/_5$.

Μέθοδοι.

293. *Μέθοδος* λέγεται τρόπος τις γενικός, διὰ τοῦ ὁποίου λύομεν εἶδός τι προβλημάτων.

Στοιχειώδη προβλήματα λέγω ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται δύο ἀριθμοὶ καὶ ζητεῖται τρίτος, ὅστις εὑρίσκεται ἐκ τῶν δοθέντων διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἢ διὰ διαιρέσεως· τοιαῦτα, λόγου χάριν, εἶνε τὰ ἑξῆς δύο γενικὰ προβλήματα.

1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία μονάδων τινῶν (ἑνὸς πράγματος), ὅταν εἶνε γνωστὴ ἡ ἀξία τῆς μιᾶς μονάδος.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τῆς μιᾶς μονάδος (ἐξ ἑνὸς πράγματος), ὅταν εἶναι γνωστὴ ἡ ἀξία μονάδων τινῶν τοῦ αὐτοῦ πράγματος.

Διότι τὸ μὲν πρῶτον λύεται δι' ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ, τὸ δὲ δεύτερον διὰ μιᾶς διαιρέσεως.

Μέθοδος τῶν τριῶν.

294. Ἡ μέθοδος τῶν τριῶν λύει τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τί γίνεται ἓν ποσόν, ὅταν μεταβληθῇ ἄλλο ποσὸν ἀνάλογον τούτου ἢ ἀντίστροφον.

Λέγεται δὲ μέθοδος τῶν τριῶν, διότι εἰς αὐτὴν δίδονται τρεῖς ἀριθμοὶ καὶ ἐξ αὐτῶν πρόκειται νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος.

Δύο ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν παριστῶσι τὰ ποσά, ὁποῖα ἦσαν πρίν, ὁ δὲ ἄλλος παριστᾷ τὴν νέαν τιμὴν τοῦ ἑνὸς ποσοῦ· ζητεῖται δὲ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ.

Τὰ τοιαῦτα προβλήματα ἀναλύονται εἰς δύο στοιχειώδη καὶ λύονται, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν ἑξῆς παραδειγμάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

12 πήχεις ὑφάσματός τινος ἀξίζουν 65 δραχμάς· πόσον ἀξίζουν 35 πήχεις ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος ;

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχομεν δύο ποσὰ ἀνάλογα· τὸν ἀριθμὸν τῶν πήχεων καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν δραχμῶν· κατὰ πρῶτον ἦσαν οἱ πήχεις 12 καὶ αἱ δραχμαὶ 65· τώρα ἔγιναν οἱ πήχεις 35 πόσαι θὰ γίνουν αἱ δραχμαί ;

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

Ἀφ' οὗ οἱ 12 πήχεις ἀξίζουν 65 δρ. ὁ εἷς πῆχυς ἀξίζει $\frac{65}{12}$ δρ. καὶ ἐκ ἀφοῦ ὁ εἷς πῆχυς ἀξίζει $\frac{65}{12}$ δρ. οἱ 35 πήχεις ἀξίζουν $\frac{65}{12}\times 35$ δρ. Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι τὸ δοθὲν πρόβλημα ἀνελύθη εἰς τὰ ἑξῆς δύο στοιχειώδη·

1) Οἱ 12 πήχεις ἀξίζουν 65 δραχμάς· πόσον ἀξίζει ὁ εἷς πῆχυς

2) Ὁ εἷς πῆχυς ἀξίζει $\frac{65}{12}$ δραχ. πόσον ἀξίζουν οἱ 35 πήχεις;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ἐργάται τινὲς ἐργαζόμενοι 7 ὥρας καθ' ἡμέραν ἐτελείωσαν ἔργον τι εἰς 10 ἡμέρας· ἂν εἰργάζοντο 9 ὥρας καθ' ἡμέραν, εἰς πόσας ἡμέρας, ἤθελον τελειώσει τὸ ἔργον;

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχομεν δύο ποσὰ ἀντίστροφα· τὰς ὥρας τῆς καθημερινῆς ἐργασίας καὶ τὰς ἡμέρας, εἰς τὰς ὁποίας οἱ ἐργάται τελειώνουσι τὸ ἔργον· κατὰ πρῶτον ἦσαν αἱ ὧραι 7 καὶ αἱ ἡμέραι 10, τώρα αἱ ὧραι ἔγειναν 9, πόσαι θὰ γίνωσιν αἱ ἡμέραι;

Πρῶτον θὰ εὕρωμεν πόσαι θὰ γίνωσιν αἱ ἡμέραι, ὅταν αἱ ὧραι ἀπὸ 7 γίνωσιν 1, (ὅταν δηλαδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν διαιρεθῇ διὰ 7) καὶ πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

Ὅταν εἰργάζοντο 7 ὥρας καθ' ἡμέραν, ἐχρειάσθησαν 10 ἡμέρας διὰ νὰ τελειώσωσι τὸ ἔργον· ἂν λοιπὸν εἰργάζοντο μόνον 1 ὥραν καθ' ἡμέραν, θὰ ἐχρειάζοντο ἡμέρας 10×7 (ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ 7· διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν διῃρέθη διὰ 7 (εἶνε δὲ ταῦτα ἀντίστροφα ποσά). Ἀφ' οὗ δὲ χρειάζονται 10×7 ἡμέρας, ὅταν ἐργάζωνται μίαν ὥραν καθ' ἡμέραν, ἂν εἰργάζοντο 9 ὥρας καθ' ἡμέραν, θὰ ἐχρειάζοντο ἡμέρας $\frac{10 \times 7}{9}$ (ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν διῃρέθη δι' 9· διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ 9).

Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις, εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν εἶνε 7 ἡμ. $^7/_9$, ἤτοι 7 ἡμ. καὶ 7 ὥρ.

Κανὼν γενικός.

295. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Γράφομεν εἰς ἕνα στίχον τὰς πρώτας τιμὰς τῶν δύο ποσῶν, ἔπειτα εἰς δεύτερον στίχον τὴν νέαν τιμὴν τοῦ ἑνὸς καὶ τὴν ζητουμένην νέαν τιμὴν τοῦ ἄλλου, τὴν ὁποίαν παριστῶμεν διὰ τοῦ γράμματος χ· φροντίζομεν δέ, ὥστε οἱ ὁμοειδεῖς ἀριθμοὶ νὰ εἶναι εἰς τὴν αὐτὴν στήλην καὶ χωρίζομεν αὐτοὺς διὰ γραμμῆς ὁριζοντίας. Τούτων γενομένων, *ἵνα εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν χ, πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ἀριθμὸν (τὸν ὁμοειδῆ αὐτοῦ) ἐπὶ τὸ κλάσμα, ὅπερ ἀποτελεῖται* *ἐκ τῶν δύο ἄλλων ὡς εἶνε γεγραμμένοι, ἐὰν τὰ ποσὰ εἶνε ἀντίστροφα, ἢ ἐπὶ τὸ αὐτὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον, ἐὰν τὰ ποσὰ εἶνε ἀνάλογα.*

Παραδείγματος χάριν, διὰ νὰ λύσωμεν τὸ 1ον πρόβλημα, γράφομεν τὰ δεδομένα καὶ τὸ ζητούμενον ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{cc} \text{πήχ.} & \text{δραχ.} \\ \dfrac{12}{35} & \dfrac{65}{\chi} \end{array}$$

καὶ ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα (πολλαπλασιάζομεν δηλαδὴ τὸν ὁμοειδῆ τοῦ χ, ἤτοι τὸν 65, ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{12}{35}$ ἀντεστραμμένον· διότι τὰ ποσὰ εἶνε ἀνάλογα καὶ εὑρίσκομεν $\chi = 65 \times \frac{35}{12}$ καὶ ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις $\chi = 189\ \frac{7}{12}$

Διὰ νὰ λύσωμεν δὲ τὸ 2ον πρόβλημα, γράφομεν πάλιν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{cc} \text{ὥρ. ἐργ.} & \text{ἡμέραι} \\ \dfrac{7}{9} & \dfrac{10}{\chi} \end{array}$$

καὶ ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα εὑρίσκομεν $\chi = 10 \times \frac{7}{9} = \frac{70}{9}$

Ἐνταῦθα ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸν ὁμοειδῆ τοῦ χ ἐπὶ τὸ κλάσμα, ὅπερ ἀποτελοῦσιν οἱ δύο ἄλλοι ἀριθμοὶ ὡς εἶναι γεγραμμένοι· διότι τὰ ποσὰ εἶνε ἀντίστροφα.

Ὁμοίως, διὰ νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

Ταχυδρόμος βαδίζων $5\frac{1}{2}$ ὥρας καθ' ἡμέραν διανύει ἀπόστασίν τινα εἰς 18 ἡμέρας· πόσας ὥρας πρέπει νὰ βαδίζῃ καθ' ἡμέραν, ἵνα διανύσῃ τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν εἰς 12 ἡμέρας;

γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{cc} \text{ὧραι ὁδοιπ.} & \text{ἡμερ.} \\ \dfrac{5\frac{1}{2}}{\chi} & \dfrac{18}{12} \end{array}$$

ὅθεν, ἐπειδὴ τὰ δύο ποσὰ εἶνε ἀντίστροφα,

$$\chi=5\frac{1}{2}\times\frac{18}{12}=\frac{99}{12}, \quad \text{ἤτοι } \chi=8 \text{ὥρ.} \frac{1}{4}.$$

Ὁμοίως, διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα,

Μὲ 35 δραχμὰς καὶ 60 λεπτὰ ἀγοράζει τις $6\frac{1}{2}$ *ὀκάδας βουτύρου· πόσον ἀγοράζει μὲ 128 δραχμὰς 30 λεπτά;*

γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς ὡς ἕπεται

δραχ.	ὀκάδ.
35,60	$6\frac{1}{2}$
128,30	χ

ὅθεν
$$\chi=6\frac{1}{2}\times\frac{128,30}{35,60}=6\frac{1}{2}\times\frac{1283}{356}=\frac{13\times1283}{2\times356}$$

καὶ ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εὑρίσκομεν

$$\chi=23 \text{ ὀκ.} \frac{303}{712} \quad \text{ἢ } 23 \text{ ὀκ. } 170 \text{ δρ.} \frac{20}{89}.$$

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα·

1) Ἀτμόπλοιόν τι διήνυσεν 70 μίλια εἰς $9\,^1|_2$ ὥρας· εἰς πόσας ὥρας θὰ διανύσῃ 125 μίλια; (Ἀπ. 16 ὥρ. $57\,^6|_7$).

2) Διὰ νὰ γίνῃ ἔνδυμά τι ἐχρειάσθησαν $3\,^1/_2$ πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος ἔχοντος πλάτος 1 πχ. $^3/_8$· πόσοι πήχεις χρειάζονται διὰ τὸ αὐτὸ ἔνδυμα ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶνε $^7|_8$ τοῦ πήχεως; (Ἀπ. $5\,^1/_2$).

3) Πόσοι πήχεις ὑφάσματος ἔχοντος πλάτος $1\,^2/_8$ τοῦ πήχεως χρειάζονται διὰ νὰ καλυφθῇ τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου, ὅπερ ἔχει μῆκος μὲν 5 πήχεις, πλάτος δὲ 4; (Ἀπ. 16).

4) Εἴς τι φρούριον ὑπάρχουσι τροφαὶ διὰ 45 ἡμέρας· ἐὰν γίνῃ ἀνάγκη νὰ ἐξαρκέσωσιν αἱ τροφαὶ 60 ἡμέρας, πόσον μέρος τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος ἄνθρωπος ἐν αὐτῷ; (Ἀπ. $^3/_4$).

5) Εἰς πολεμικόν τι πλοῖον, ὅπερ ἔχει πλήρωμα 750 ἄνδρας, ὑπάρχουσι τροφαὶ διὰ 50 ἡμέρας· τὸ πλοῖον τοῦτο ἀπαντῆσαν διέσωσε 35 ναυαγούς· πόσας ἡμέρας θὰ διαρκέσωσι τώρα αἱ τροφαί; ἤ, ἂν θέλωσι νὰ διαρκέσωσιν αἱ τροφαὶ πάλιν 50 ἡμέρας, πόσον μέρος τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος;

(Αἱ τροφαὶ θὰ διαρκέσωσι 47 ἡμέρας, θὰ περισσεύσουν δὲ καὶ 605 σιτηρέσια· ἢ θὰ λαμβάνῃ ἕκαστος τὰ $\frac{150}{157}$ τοῦ πρώτου σιτηρεσίου.

6) Ὡρολόγιόν τι, ὅπερ ὑστερεῖ 6 λεπτὰ εἰς 24 ὥρας, ἐτέθη εἰς συμφωνίαν μὲ ἀκριβὲς ὡρολόγιον, καθ' ἣν στιγμὴν τοῦτο ἐδείκνυε μεσημβρίαν· τίς θὰ εἶνε ἡ ἀληθὴς ὥρα, ὅταν τὸ πρῶτον ὡρολόγιον θὰ δεικνύῃ 8 μετὰ μεσημβρίαν; ('Απ. 8ὥρ. $2'\ ^{2}/_{239}$).

7) Ἀτμάμαξά τις διανύουσα 30 στάδια καθ' ὥραν ἀνεχώρησε διευθυνομένη εἰς πόλιν ἀπέχουσαν 350 στάδια· μετὰ 3 ὥρας ἀνεχώρησε πρὸς τὴν αὐτὴν πόλιν δευτέρα ἀτμάμαξα διανύουσα 75 στάδια εἰς 2 ὥρας· ποία ἐκ τῶν δύο θὰ φθάσῃ πρώτη εἰς τὴν πόλιν ταύτην;
('Απ. Ἡ δευτέρα θὰ φθάσῃ 2ὥρ. 20' πρὸ τῆς πρώτης).

8) Εἴς τι φρούριον ἦσαν 810 στρατιῶται καὶ εἶχον τὴν 1 Μαρτίου τροφὰς δι' ὅλον τὸν μῆνα τοῦτον· τὴν νύκτα τῆς 7 Μαρτίου γενομένης ἐξόδου ἐφονεύθησαν 80 στρατιῶται· μέχρι τίνος θὰ διαρκέσωσι τώρα αἱ τροφαί; ('Απ. μέχρι τῆς 3 Ἀπριλίου τὸ ἑσπέρας).

Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν.

296. Ἡ μέθοδος αὕτη λύει τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ, τί γίνεται ἓν ποσόν, ὅταν μεταβληθῶσιν ἄλλα, πρὸς ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶνε τὸ ποσὸν τοῦτο ἢ ἀνάλογον ἢ ἀντίστροφον.

Εἰς τὰ προβλήματα ταῦτα δίδονται αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ πολλῶν ποσῶν καὶ ἔπειτα αἱ νέαι τιμαὶ ὅλων τῶν ἄλλων πλὴν ἑνός· τούτου δὲ ἡ νέα τιμὴ εἶνε τὸ ζητούμενον.

Τὰ τοιαῦτα προβλήματα ἀναλύονται εἰς δύο ἢ περισσότερα προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν· διὰ τοῦτο δὲ ἡ μέθοδος, δι' ἧς λύομεν αὐτά, λέγεται **σύνθετος** μέθοδος τῶν τριῶν (ἡ δὲ μέθοδος τῶν τριῶν λέγεται πρὸς διάκρισιν *ἁπλῆ*).

Ὁ τρόπος τῆς λύσεως τῶν τοιούτων προβλημάτων γίνεται φανερὸς ἐκ τῶν ἑπομένων παραδειγμάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

18 ἐργάται ἐργαζόμενοι 7 ὥρας καθ' ἡμέραν ἐτελείωσαν ἔργον τι εἰς 25 ἡμέρας· πόσας ὥρας καθ' ἡμέραν πρέπει νὰ ἐργάζωνται 52 ἐργάται ἂν θέλωσι νὰ τελειώσωσι τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς 15 ἡμέρας;

Διὰ νὰ λύσω τὸ πρόβλημα τοῦτο, κατατάσσω τὰ δεδομένα ὡς καὶ προηγουμένως.

ἐργ.	ὥρ.	ἡμ.	
18	7	25	—
52	χ	15	

ἔπειτα σκέπτομαι ὡς ἑξῆς·

Ἂν μόνοι οἱ ἐργάται μεταβληθῶσι καὶ ἀπὸ 18 γίνωσι 52, (ἀλλ' αἱ ἡμέραι, εἰς τὰς ὁποίας θὰ τελειώσωσι τὸ ἔργον, νὰ μείνωσιν αἱ αὐταὶ 25), αἱ ὧραι θὰ γίνωσι (κατὰ τὸν κανόνα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν)

$$7\times\frac{18}{52}$$

(διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν τῆς καθημερινῆς ἐργασίας εἶνε ποσὰ ἀντίστροφα).

Ἂν δὲ ἔπειτα μεταβληθῶσιν αἱ ἡμέραι καὶ ἀπὸ 25 γίνωσι 15, (ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν νὰ μείνῃ ὡς εἶνε, ἤτοι 52), αἱ ὧραι θὰ γίνωσι (κατὰ τὸν κανόνα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν)

$$7\times\frac{18}{52}\times\frac{25}{15} \text{ ἢ } 7\times\frac{9}{26}\times\frac{5}{3} \text{ ἢ } 7\times\frac{3}{26}\times 5$$

(διότι αἱ ὧραι τῆς καθημερινῆς ἐργασίας καὶ αἱ ἡμέραι, καθ' ἃς διαρκεῖ ἡ ἐργασία, εἶνε ποσὰ ἀντίστροφα).

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις, εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν εἶνε $\frac{105}{26}$, ἤτοι 4 ὥρ. 2′ $\frac{4}{13}$

Σημείωσις. Δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο καὶ ὡς ἑξῆς· εὑρίσκομεν πόσας ὥρας ἐργασίας ἀπαιτεῖ τὸ ἔργον δι' ἕνα ἄνθρωπον. Ἐπειδὴ οἱ 18 ἐργάται ἐργάζονται 7 ὥρ. καθ' ἑκάστην ἐπὶ 25 ἡμέρας, τὸ ἔργον χρειάζεται δι' ἕνα ἄνθρωπον ὥρας ἐργασίας $25\times7\times18$· καὶ ἐπειδὴ εἶνε 52 οἱ ἐργάται, πρέπει ἕκαστος νὰ ἐργασθῇ ὥρας $\frac{25\times7\times18}{52}$ καὶ ἐπειδὴ πρέπει νὰ τελειώσωσι τὸ ἔργον εἰς 15 ἡμέρας, πρέπει νὰ ἐργάζηται ἕκαστος καθ' ἡμέραν $\frac{25\times7\times18}{52\times15}$ ὥρας.

20 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 ὥρας καθ' ἡμέραν ἐχρειάσθησαν 25 ἡμέρας διὰ νὰ σκάψωσι τάφρον ἔχουσαν μῆκος 200 πήχεων, πλάτος 4 καὶ βάθος 2. Εἰς πόσας ἡμέρας 50 ἐργάται ἐργαζόμενοι 9 ὥρας καθ' ἡμέραν θὰ σκάψωσι τάφρον ἔχουσαν μῆκος 80 πήχεων, πλάτος 8 καὶ βάθος 3;

Κατατάσσομεν πρῶτον τὰ δεδομένα καὶ τὸ ζητούμενον ὡς καὶ προηγουμένως.

ἐργ.	ὥρ.	ἡμερ.	μῆκ.	πλάτ.	βάθ.
20	8	25	200	4	2
50	9	χ	80	8	3

ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

Ἂν μόνον οἱ ἐργάται ἀπὸ 20 γίνωσι 50 (τὰ δὲ ἄλλα πάντα μείνωσιν ὡς εἶνε), ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $^{20}/_{50}$ (κατὰ τὸν κανόνα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν), καὶ θὰ γίνῃ

$$25 \times \frac{20}{50}.$$

(διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν καὶ αἱ ἡμέραι, καθ' ἃς διαρκεῖ τὸ ἔργον, εἶνε ποσὰ ἀντίστροφα):
τόσας λοιπὸν ἡμέρας χρειάζονται οἱ 50 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 ὥρας καθ' ἡμέραν διὰ νὰ σκάψωσι τάφρον ἔχουσαν μῆκος 200, πλάτος 4 καὶ βάθος 2.

Ἂν ἔπειτα μεταβληθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν τῆς καθημερινῆς ἐργασίας (τὰ δὲ ἄλλα μείνωσιν ὡς εἶνε, ἤτοι οἱ ἐργάται 50 καὶ ἡ τάφρος ἡ αὐτή), ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $^{8}/_{9}$ (κατὰ τὸν κανόνα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν· διότι αἱ ὧραι τῆς καθημερινῆς ἐργασίας καὶ αἱ ἡμέραι, καθ' ἃς διαρκεῖ ἡ ἐργασία, εἶνε ἀντίστροφα) καὶ θὰ γίνῃ

$$25 \times \frac{20}{50} \times \frac{8}{9}.$$

τόσας λοιπὸν ἡμέρας χρειάζονται οἱ 50 ἄνθρωποι ἐργαζόμενοι 9 ὥρας καθ' ἑκάστην, ἵνα σκάψωσι τὴν πρώτην τάφρον.

Ἂν ἔπειτα μεταβληθῇ τὸ μῆκος τῆς τάφρου καὶ ἀπὸ 200 γίνῃ 80 (τὰ δ' ἄλλα πάντα μείνωσιν ὡς εἶνε, ἤτοι ἐργάται 50, ὧραι ἐργασίας 9, πλάτος 4 καὶ βάθος 2), ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{80}{200}$ (διότι τὸ μῆκος τῆς τάφρου καὶ αἱ ἡμέραι εἶνε ἀνάλογοι), καὶ θὰ γίνῃ

$$25 \times \frac{20}{50} \times \frac{8}{9} \times \frac{80}{200}$$

Ἂν ἔπειτα μεταβληθῇ τὸ πλάτος τῆς τάφρου καὶ ἀπὸ 4 γίνῃ 8, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $^{8}/_{4}$ καὶ θὰ γίνῃ

$$25 \times \frac{20}{50} \times \frac{8}{9} \times \frac{80}{200} \times \frac{8}{4}$$

Ἂν τέλος μεταβληθῇ τὸ βάθος καὶ γίνῃ 3 ἀπὸ 2 (τὰ δ' ἄλλα μείνωσιν ὡς εἶνε, ἤτοι ἐργάται 50, ὧραι ἐργασίας 9, μῆκος τάφρου 80, πλάτος 8), ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $^{3}/_{2}$, καὶ θὰ γίνῃ

$$25 \times \frac{20}{50} \times \frac{8}{9} \times \frac{80}{200} \times \frac{8}{4} \times \frac{3}{2}.$$

τόσας λοιπὸν ἡμέρας χρειάζονται οἱ 50 ἄνθρωποι ἐργαζόμενοι 9 ὥρας καθ' ἑκάστην, διὰ νὰ σκάψωσι τάφρον ἔχουσαν μῆκος 80, πλάτος 8 καὶ βάθος 3.

Ἁπλοποιοῦντες τὸ γινόμενον τοῦτο, εὑρίσκομεν $^8/_3 \times 4$ ἤτοι $^{32}/_3$ ἢ 10 ἡμ. καὶ $^2/_3$ τῆς ἡμέρας, ἤτοι 10 ἡμέρας καὶ 6 ὥρας (διότι ἡ καθημερινὴ ἐργασία εἶνε 9 ὧραι).

Σημείωσις. Αἱ ἡμέραι, εἰς τὰς ὁποίας διαρκεῖ ἡ ἐργασία, δὲν εἶνε ἀκριβῶς ἀνάλογοι πρὸς τὸ βάθος τῆς τάφρου· διότι ὅσον γίνεται βαθυτέρα ἡ τάφρος, τόσον γίνεται δυσκολωτέρα ἡ ἐκφορὰ τῶν χωμάτων· ἀλλὰ τὴν διαφορὰν ταύτην παραβλέπομεν.

297. Ἐὰν τώρα εἰς τὰ λυθέντα προβλήματα παραβάλωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου πρὸς τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος, ὡς εἶνε κατατεταγμένα, συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὁμοειδῆ αὐτοῦ ἀριθμὸν (τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ), *ἀλλεπαλλήλως ἐφ' ἕκαστον τῶν κλασμάτων, ἅτινα ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν δύο τιμῶν ἑκάστου ποσοῦ· ἀντιστρέφομεν ὅμως προηγουμένως τὸ κλάσμα, ἐὰν τὸ ποσόν του εἶνε ἀνάλογον πρὸς τὸ ποσὸν τοῦ ἀγνώστου.*

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα·

1) Διὰ τὴν τροφὴν 160 στρατιωτῶν ἐπὶ 25 ἡμέρας ἐχρειάσθησαν 1850 δραχμαί· εἰς πόσας ἡμέρας θὰ φθάσωσιν 8510 δραχμαὶ διὰ τὴν τροφὴν 400 στρατιωτῶν ; (Ἀπ. 46).

2) Ἄνθρωπός τις ἐργαζόμενος 6 ὥρας καθ' ἡμέραν ἐξετέλεσε τὰ $^2/_5$ ἔργου τινὸς εἰς 25 ἡμέρας· πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζηται καθ' ἡμέραν, διὰ νὰ ἐκτελέσῃ τὸ ἐπίλοιπον ἔργον εἰς 15 ἡμέρας; (Ἀπ. 15).

3) Βιβλίον τι ἔχει 250 σελίδας· ἑκάστη σελὶς ἔχει 32 στίχους καὶ ἕκαστος στίχος 40 γράμματα· ἐὰν τὸ βιβλίον τοῦτο τυπωθῇ οὕτως, ὥστε εἰς ἑκάστην σελίδα νὰ εἶνε 36 στίχοι καὶ εἰς ἕκαστον στίχον 45 γράμματα, ἐκ πόσων σελίδων θ' ἀποτελῆται ;

(Ἀπ. 198· ἡ τελευταία δὲν θὰ εἶνε πλήρης).

4) Ἔργον τι πρέπει νὰ ἐκτελεσθῇ εἰς 12 ἡμέρας· πρὸς τοῦτο ἐμισθώθησαν 15 ἐργάται, οἵτινες ἐξετέλεσαν τὰ $^3/_4$ τοῦ ἔργου εἰς 10 ἡμέρας· δύνανται οὗτοι μόνοι νὰ τελειώσωσι τὸ ἔργον ἐντὸς τῆς τεταγμένης προθεσμίας ; καί, ἂν δὲν δύνανται, πόσοι ἐργάται ἀκόμη πρέπει νὰ μισθωθῶσι ; (Ἀπ. ἀκόμη 10 ἐργάται).

5) Ἐπωλήθησαν 40 βαρέλια μετὰ τοῦ ἐν αὐτοῖς περιεχομένου οἴνου ἀντὶ 6750 δραχμῶν, ἕκαστον δὲ βαρέλιον περιεῖχε 420 ὀκάδας οἴνου, πόσον πρέπει νὰ πωληθῶσι 32 βαρέλια μετὰ τοῦ ἐν αὐτοῖς περιεχομέ-

νου οἴνου, ἐὰν ἕκαστον περιέχῃ 350 ὀκάδας οἴνου τῆς αὐτῆς ποιότητος; ἡ τιμὴ ἑκάστου βαρελίου κενοῦ εἶνε τῶν μὲν πρώτων 25 δραχμαί, τῶν δὲ δευτέρων 22. ('Απ. 4537 δρ. $^1/_8$).

Περὶ τῆς συνεζευγμένης μεθόδου.

298. Ὡς σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ ἡ οὕτω καλουμένη «συνεζευγμένη μέθοδος».

Παράδειγμα τῶν προβλημάτων τῆς μεθόδου ταύτης ἔστω τὸ ἑξῆς·

Νὰ εὕρωμεν πόσα ῥωσσικὰ ῥούβλια κάμνουσι 1800 τουρκικαὶ λίραι, ἠξεύροντες, ὅτι 12 τουρκικαὶ λίραι κάμνουσιν 11 ἀγγλικάς, 26 δὲ ἀγγλικαὶ λίραι κάμνουσιν 165 ῥούβλια.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς δύο προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ὡς ἑξῆς φαίνεται·

α') 26 ἀγγλ. λίραι κάμνουν 165 ῥούβλια
11 » » » πόσα ῥούβλια;

Ἐκ τούτου εὑρίσκομεν, ὅτι 11 ἀγγλ. λίραι, ἤτοι 12 τουρκικαί, κάμνουν ῥούβλια $165 \times \frac{11}{26}$.

β') 12 τουρκικαὶ λίραι κάμνουν ῥούβλια $165 \times \frac{11}{26}$
1800 » » πόσα ῥούβλια;

λύοντες δὲ τοῦτο εὑρίσκομεν, ὅτι 1800 τουρκ. λίραι κάμνουν ῥούβλια

$$\frac{165 \times 11 \times 1800}{26 \times 12} \text{ ἢ } 10471 \text{ ῥούβ. } \frac{2}{13}.$$

Ὡς δεύτερον παράδειγμα, ἔστω καὶ τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

Ἔμπορος ἔφερεν ἐκ Παρισίων εἰς Ἀθήνας 2500 πήχεις ἑνὸς ὑφάσματος, τὸ ὁποῖον ἠγόρασε πρὸς 1 φρ.,15 τὸ μέτρον· ἐξώδευσε 1 φρ.15 τὸ... δὲ διὰ ναῦλον καὶ δασμὸν 32 ἐπὶ τοῖς 100 (ἤτοι διὰ πρᾶγμα ἀξίας 100 δραχμῶν ἐξώδευσε 32 δρ.) πόσον τοῦ κοστίζει ὁ μικρὸς πῆχυς ἐν Ἀθήναις, ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ χρυσοῦ εἰκοσοφράγκου εἶνε 24 δραχμαί;

Γράφομεν τὰ δεδομένα καὶ τὸν ἄγνωστον ὡς ἑξῆς·

χ δραχμαὶ = 1 μικρὸς πῆχ.
1 μικ. πχ = 0,648 μέτρα
1 μέτρον = 1, 15 φρ. χρυσᾶ
20 φρ. χρ. = 24 δραχ.
πρὸ τῶν ἐξόδων 100 δραχ. = 132 δραχ, μετὰ τὰ ἔξοδα.

Καὶ τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀναλύεται εἰς τὰ ἑξῆς τῆς μεθόδου τῶν τριῶν·

α'.) Ὅσον πρᾶγμα κοστίζει ἐν Παρισίοις 100 δρ., τόσον κοστίζει ἐν Ἀθήναις 132· ὅσον πρᾶγμα κοστίζει ἐν Παρισίοις 24 δρ., πόσον ἐν Ἀθήναις; Λύοντες τὸ πρόβλημα τοῦτο εὑρίσκομεν, ὅτι, ὅσον πρᾶγμα κοστίζει ἐν Παρ. 24 δρ ἤτοι 20 χρυσᾶ φράγκα, τόσον κοστίζει ἐν Ἀθήναις $132 \times \frac{24}{100}$ δρ.

β'.) Ὅσον πρᾶγμα κοστίζει ἐν Παρισίοις 20 φρ. χρυσᾶ, ἐν Ἀθήναις κοστίζει $132 \times \frac{24}{100}$ δρ. ὅσον πρᾶγμα κοστίζει ἐν Παρισίοις 1 φρ. 15 χρυσᾶ, πόσον κοστίζει ἐν Ἀθήναις; Ἐκ τούτου εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ μέτρον κοστίζει ἐν Ἀθήναις $132 \times \frac{24}{100} \times \frac{1,15}{20}$ δρ.

γ'.) Ἡ ἀξία τοῦ μέτρου ἐν Ἀθήναις εἶνε $132 \times \frac{24}{100} \times \frac{1,15}{20}$ δρ. ποία εἶνε ἡ ἀξία τῶν 0,648 τοῦ μέτρου (ἤτοι τοῦ μικροῦ πήχεως;) Λύοντες καὶ τοῦτο, εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ ἀξία τοῦ μικροῦ πήχεως ἐν Ἀθήναις εἶνε $132 \times \frac{25}{100} \times \frac{1,15}{20} \times \frac{648}{1000}$ ἤτοι 1 δρ. 18.....

299. Ἐὰν συγκρίνωμεν τὴν λύσιν ταύτην πρὸς τὰ δεδομένα ὡς εἶνε κατατεταγμένα, συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

Γράφομεν κατὰ πρῶτον τὸ γράμμα, δι' οὗ παρίσταται ὁ ἄγνωστος, δεξιὰ δ' αὐτοῦ τὸν ἰσοδύναμόν του ἀριθμόν. Ὑπ' αὐτοὺς γράφομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον πάντα τὰ ζεύγη τῶν ἰσοδυνάμων ἀριθμῶν, ἕκαστον εἰς ἕνα στίχον καὶ οὕτως, ὥστε ἕκαστος στίχος νὰ ἀρχίζῃ μὲ τὸ εἶδος, εἰς τὸ ὁποῖον τελειώνει ὁ προηγούμενος αὐτοῦ· πρέπει δὲ τότε (ἐὰν τὰ δεδομένα εἶνε ἐπαρκῆ πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος) νὰ συμβαίνῃ, ὥστε ὁ τελευταῖος ἀριθμὸς τοῦ τελευταίου στίχου νὰ εἶνε ὁμοειδὴς πρὸς τὸν ἄγνωστον.

Τούτων γενομένων, **πολλαπλασιάζομεν πάντας τοὺς πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀγνώστου εὑρισκομένους ἀριθμοὺς καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν ὑποκάτω τοῦ ἀγνώστου εὑρισκομένων ἀριθμῶν· τὸ πηλίκον εἶνε ὁ ζητούμενος ἀριθμός.**

Προβλήματα τόκου.

300. *Τόκος* λέγεται τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον λαμβάνει, ὅστις δανείζει χρήματα.

Ὁ τόκος τῶν 100 δραχ. εἰς ἓν ἔτος λέγεται *ἐπιτόκιον*· ὁρίζεται δὲ τοῦτο διὰ συμφωνίας ἰδιαιτέρας μεταξὺ τοῦ δανείζοντος καὶ τοῦ δανειζομένου.

Τὸ ποσὸν τῶν δανειζομένων χρημάτων λέγεται **κεφάλαιον**.

Ὁ τόκος ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ κεφαλαίου καὶ ἐκ τοῦ ἐπιτοκίου, ἔτι δὲ καὶ ἐκ τοῦ χρόνου, καθ' ὃν διαρκεῖ τὸ δάνειον.

Ὁ τόκος εἶνε ἢ **ἁπλοῦς** ἢ **σύνθετος**· καὶ ἁπλοῦς μὲν λέγεται ὁ τόκος, ὅταν τὸ κεφάλαιον μένῃ τὸ αὐτὸ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου· σύνθετος δέ, ὅταν ὁ τόκος ἑκάστου ἔτους δίδῃ καὶ αὐτὸς τόκον εἰς τὰ ἑπόμενα ἔτη· ὥστε εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους ὁ τόκος προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ ἐκ τῆς προσθέσεως προκύπτον ποσὸν λαμβάνεται ὡς κεφάλαιον διὰ τὸ ἑπόμενον ἔτος.

Ἐάν τις π. χ. δανεισθῇ 500 δραχμὰς μὲ ἐπιτόκιον 10 καὶ μὲ τόκον ἁπλοῦν, εἰς μὲν τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους θὰ χρεωστῇ 550 δραχμὰς (500 κεφάλαιον καὶ 50 τόκον), εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους 600 (500 κεφάλαιον καὶ 100 τόκον), εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ τρίτου 650, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἀλλ' ἐὰν ὁ τόκος εἶνε σύνθετος, εἰς μὲν τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους θὰ χρεωστῇ 550 δρ. (500 κεφάλαιον καὶ 50 τόκον), εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ δευτέρου 605 δρ. (550 κεφ. καὶ 55 τόκ.), εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ τρίτου 665,50(605 κεφ. καὶ 60,50 τόκ.), καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ὁ σύνθετος τόκος λέγεται καὶ *ἀνατοκισμός*, τὸ δὲ ἐπὶ συνθέτῳ τόκῳ δανειζόμενον ποσὸν λέγεται, ὅτι *ἀνατοκίζεται*.

Ἐνταῦθα διαλαμβάνομεν μόνον περὶ τοῦ ἁπλοῦ τόκου.

301. Εἰς ἕκαστον πρόβλημα τόκου παρουσιάζονται 4 ποσά·

1) τὸ κεφάλαιον
2) ὁ τόκος
3) τὸ ἐπιτόκιον
4) ὁ χρόνος, ἤτοι ἡ διάρκεια τοῦ δανείου.

Τὰ ποσὰ ταῦτα εἶνε ἀνὰ δύο ἢ ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα.

Ὁ τόκος εἶνε ἀνάλογος πρὸς ἕκαστον τῶν τριῶν ἄλλων.

Διότι εἶνε φανερόν, ὅτι διπλάσιον κεφάλαιον φέρει διπλάσιον τόκον, τριπλάσιον κεφάλαιον τριπλάσιον τόκον (ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ καὶ μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον)· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ὡσαύτως εἰς διπλάσιον, τριπλάσιον κτλ. χρόνον, ὁ τόκος γίνεται διπλάσιος, τριπλάσιος κτλ. (τῶν λοιπῶν μενόντων ἀμεταβλήτων).

Ἐπίσης διπλασιαζομένου τοῦ ἐπιτοκίου, διπλασιάζεται καὶ ὁ τόκος (τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ χρόνου μενόντων ἀμεταβλήτων), κτλ.

Τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ χρόνος εἶνε ἀντίστροφα· διότι ἂν π. χ. κεφάλαιον 500 δρ. χρειάζηται δύο ἔτη διὰ νὰ φέρῃ τόκον 50 δραχ. (πρὸς 5 τοῖς ἑκατόν), διπλάσιον κεφάλαιον δανειζόμενον μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον 5, διὰ νὰ φέρῃ τὸν αὐτὸν τόκον χρειάζεται μόνον ἓν ἔτος· κεφάλαιον 250 δρ. δανειζόμενον μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον, ἵνα φέρῃ τὸν αὐτὸν τόκον χρειάζονται 4 ἔτη.

Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν, ὅτι τὰ προβλήματα τοῦ τόκου θὰ λύωνται κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν (ἁπλῆν ἢ σύνθετον).

302. Εἰς ἕκαστον πρόβλημα τόκου δίδονται τρία ἐκ τῶν ἀνωτέρω ποσῶν καὶ ζητεῖται τὸ τέταρτον. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ζητούμενον δύναται νὰ εἶνε, ἢ ὁ τόκος, ἢ τὸ κεφάλαιον, ἢ τὸ ἐπιτόκιον, ἢ ὁ χρόνος, συμπεραίνομεν, ὅτι τὰ προβλήματα τοῦ τόκου εἶνε τεσσάρων εἰδῶν. Ἐν τοῖς ἑπομένοις λύομεν ἓν ἐξ ἑκάστου εἴδους.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1ον (ἄγνωστον ὁ τόκος).

Πόσον τόκον φέρουσιν 7850 δραχμαὶ εἰς 3 ἔτη πρὸς 7 τοῖς ἑκατόν; (ἀντὶ 7 τοῖς ἑκατὸν γράφεται συντομίας χάριν 7 %).

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν, γράφομεν τὰ δεδομένα καὶ τὸ ζητούμενον ὡς ἑξῆς·

κεφ.	ἔτη	τόκος
$\frac{100}{7850}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{\chi}$

ἔπειτα παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ τόκος χ εἶνε ἀνάλογος καὶ πρὸς τὸ κεφάλαιον καὶ πρὸς τὸν χρόνον· ἐφαρμόζοντες λοιπὸν τὸν κανόνα τοῦ ἐδ. 297, εὑρίσκομεν

$$\chi = 7 \times \frac{7850}{100} \times \frac{3}{1} = \frac{7 \times 7850 \times 3}{100} \text{ ἢ } \chi = 1648{,}50. \text{ δραχ.}$$

Ἐκ τῆς τιμῆς ταύτης τοῦ ἀγνώστου χ συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

303. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον πολλαπλασιάζομεν τὰ τρία δεδομένα* (ἤτοι τὸ κεφάλαιον, τὸ ἐπιτόκιον καὶ τὸν χρόνον) *καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν δι' 100.*

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2ον (ἄγνωστον τὸ κεφάλαιον).

Ποῖον κεφάλαιον τοκισθὲν ἐπὶ $2\frac{1}{2}$ *ἔτη πρὸς* 9 % *ἔφερε τόκον 820 δραχμάς*;

Κατατάσσομεν τὰ δεδομένα καὶ τὸ ζητούμενον ὡς ἑξῆς·

κεφ.	ἔτη	τόκ.
$\frac{100}{\chi}$	$\frac{1}{2\frac{1}{2}}$	$\frac{9}{820}$

ἔπειτα παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ κεφάλαιον πρὸς μὲν τὸν τόκον εἶνε ἀνάλογον, πρὸς δὲ τὸν χρόνον ἀντίστροφον· ὅθεν ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν εὑρίσκομεν

$$\chi=100\times\frac{1}{2\frac{1}{2}}+\frac{820}{9}=\frac{820\times100}{9\times2\frac{1}{2}}.$$

Ἐκ τῆς τιμῆς ταύτης τοῦ ἀγνώστου κεφαλαίου συνάγομεν τὸ ἑξῆς κανόνα·

304. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων (ἐπιτοκίου καὶ χρόνου).*

Εἰς το ἀνωτέρω πρόβλημα, ἐὰν διπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος, ὅπερ εἶνε ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου χ, εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{1640\times100}{9\times5}=\frac{1640\times20}{9}=3644 \text{ δρ.},\ 44\frac{4}{9}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3ον (ἄγνωστον ὁ χρόνος).

Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 25800 δραχμῶν τοκιζόμενον πρὸς $8\frac{1}{2}$ $^0/_0$ θὰ φέρῃ τόκον 2590 δρ., 60;

Κατατάσσομεν τὰ δεδομένα καὶ τὸν ἄγνωστον

κεφ.	ἔτη	τόκος
100	1	8,50
25800	χ	2590,60

Ἔπειτα παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ χρόνος εἶνε ἀνάλογος μὲν τοῦ τόκου, ἀντίστροφος δὲ τοῦ κεφαλαίου· ὅθεν ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα (ἐδ. 297) εὑρίσκομεν·

$$\chi=1\times\frac{100}{25800}\times\frac{2590,60}{8,50}=\frac{100\times2590,60}{8,50\times25800}$$

Ἐκ τῆς λύσεως ταύτης συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

305 *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν χρόνον (εἰς ἔτη), πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων* (κεφαλαίου καὶ ἐπιτοκίου).

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο, ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις, εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{100\times259060}{850\times25800}=\frac{25906}{85\times258}$$

ἤτοι $\chi=1$ἔτ., 2μῆν., 5ἡμέρ.$\frac{591}{2193}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4ον (ἄγνωστον τὸ ἐπιτόκιον).

Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη κεφάλαιον 3058 δραχμῶν καὶ ἔφερεν εἰς 5 ἔτη καὶ 4 μῆνας τόκον 820 δρ.;

Κατατάσσομεν τὰ δεδομένα καὶ τὸν ἄγνωστον ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{ccc} \text{κεφ.} & \text{ἔτη} & \text{τόκος} \\ \dfrac{3058}{100} & \dfrac{5\frac{1}{3}}{1} & \dfrac{820}{\chi} \end{array}$$

ἔπειτα παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ τόκος χ (τῶν 100 δρ. εἰς 1 ἔτος) εἶνε ἀνάλογος καὶ πρὸς τὸ κεφάλαιον καὶ πρὸς τὸν χρόνον· ὅθεν ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα εὑρίσκομεν

$$\chi = 820 \times \frac{100}{3058} \times \frac{1}{5\frac{1}{3}} = \frac{820 \times 100}{3058 \times (5\frac{1}{3})}$$

Ἐκ τῆς λύσεως ταύτης συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

306. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων* (κεφαλαίου καὶ χρόνου)

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 3 ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος, ὅπερ εἶνε ἡ τιμὴ τοῦ χ, εὑρίσκομεν

$$\chi = \frac{820 \times 100 \times 3}{3058 \times 16} = \frac{410 \times 100 \times 3}{3058 \times 8} = \frac{123000}{24464}, \text{ ἤτοι } \chi = 5{,}02\,^0/_0$$

περίπου.

Παρατήρησις.

307. Οἱ τέσσαρες εὑρεθέντες κανόνες περὶ τῶν προβλημάτων τοῦ τόκου περιλαμβάνονται εἰς ἕνα, τὸν ἑξῆς·

Ἂν μὲν ζητῆται ὁ τόκος, πολλαπλασιάζομεν τὰ τρία δεδομένα καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 100· ἂν δὲ ζητῆται ἄλλο τι, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων δοθέντων.

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα·

1) Πόσον τόκον φέρουσι 1527 δραχμαὶ καὶ 80 λεπτὰ εἰς 8 μῆνας πρὸς 7 $^0/_0$; (Ἀπ. 71,29...)

2) Δανείσας τις χρήματα πρὸς $7\frac{1}{3}\,^0/_0$ ἔλαβε μετὰ 3 ἔτη τόκον 270 δραχμάς, πόσα ἐδάνεισεν; (Ἀπ. 1200)

3) Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιόν τι τοκιζόμενον πρὸς 8 $^0/_0$ διπλασιά-

ζεται; (γίνεται δηλαδὴ ὁ τόκος ἴσος μὲ τὸ κεφάλαιον) (Ἀπ. 12 ἔτ. 6μ.).

4) Διὰ νὰ ἀσφαλίσῃ τις τὸ φορτίον ἑνὸς πλοίου, πρέπει νὰ πληρώσῃ $\frac{1}{2}$ % ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ φορτίου, ἥτις εἶνε 85000 δραχμαί· πόσον θὰ πληρώσῃ δι' ἀσφάλιστρα; (Ἀπ. 425 δρ.).

5) Ἠγόρασέ τις οἰκίαν ἀντὶ 25000 δραχμῶν· τὴν οἰκίαν ταύτην ἐνοικιάζει 180 δραχμὰς κατὰ μῆνα· ἐξοδεύει ὅμως κατ' ἔτος δι' ἐπισκευάς, ὕδωρ, φόρον κλπ. δραχμὰς 300· πόσον τοῖς ἑκατὸν κερδίζει ἐκ τῶν χρημάτων του κατ' ἔτος; (Ἀπ. 7,44 %).

6) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν 7500 ὀκάδας ἐλαίου πρὸς 90 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν· ἐπώλησε δ' αὐτὸ μετὰ 3 μῆνας πρὸς 1,10· πόσον τοῖς ἑκατὸν κατ' ἔτος ἐκέρδησεν; (Ἀπ. $88\frac{8}{9}$ %).

7) Σιτέμπορός τις ἠγόρασε σῖτον πρὸς 36 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν· μετὰ 7 μῆνας θέλει νὰ πωλήσῃ αὐτὸν καὶ νὰ κερδίσῃ ἐπὶ τῶν χρημάτων του 10 %· πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν; (Ἀπ. 38 λεπ. $^1/_{10}$ τοῦ λεπτοῦ).

8) Ἠγόρασέ τις οἰκίαν ἀντὶ 72000 δραχμῶν καὶ κτῆμα ἀντὶ 36800 δραχμῶν· καὶ ἐκ μὲν τῆς οἰκίας ἀπολαμβάνει ἐτησίως 4500 δραχμάς, ἐκ δὲ τοῦ κτήματος 1200· πόσον τοῖς ἑκατὸν ἀπολαμβάνει ἐκ τῶν δύο τούτων ὁμοῦ; (Ἀπ. 5,24...)

9) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ὁ τόκος τοῦ κεφαλαίου κ εἰς η ἡμέρας, εἶνε

$\frac{\kappa.\ \eta}{6000}$ ἐὰν τοκίζηται πρὸς 6 %

$\frac{\kappa.\ \eta}{8000}$ » » $4\,^1/_2$ %

$\frac{\kappa.\ \eta}{7200}$ » » 5 %

ΠΕΡΙ ΥΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

308. *Ὑφαίρεσις* λέγεται τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον ἐκπίπτεται ἐξ ἑνὸς χρέους, ὅταν τὸ χρέος τοῦτο πληρώνηται πρὸ τῆς διορίας του.

Ὑπάρχουσι δὲ δύο εἰδῶν ὑφαιρέσεις, ἡ *ἐξωτερικὴ* καὶ ἡ *ἐσωτερική*.

α'. Ὑφαίρεσις ἐξωτερική.

309. Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶνε ὁ τόκος ὅλου τοῦ ποσοῦ, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τὸ χρεωστικὸν γραμμάτιον, διὰ τὸν χρόνον, ὅστις θὰ περάσῃ ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως αὐτοῦ. Ἐπομένως τὰ προβλήματα τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως δὲν διαφέρουσι ποσῶς ἀπὸ τῶν προβλημάτων τοῦ τόκου. Ὡς παράδειγμα ἔστω τὸ ἑξῆς·

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Γραμμάτιον 2500 δραχμῶν προεξοφλεῖται 8 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ πρὸς $7\frac{1}{2}$ $^0/_0$ πόση εἶνε ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις αὐτοῦ ;

Τὸ ζητούμενον εἶνε ὁ τόκος τῶν 2500 δραχμῶν εἰς 8 μῆνας πρὸς $7\frac{1}{2}$ $^0/_0$· ὁ τόκος οὗτος εἶνε

$$\frac{2500\times(7\frac{1}{2})\times\frac{8}{12}}{100} \text{ ἢ } 25\times\frac{2}{3}(7\ \frac{1}{2}) \text{ ἢ } 25\times\frac{1}{3}\times 15$$

ἤτοι 25×5 ἢ 125 δρ.

ὥστε τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου (ἤτοι αἱ 2500 δραχ.) θὰ ἐλαττωθῇ κατὰ 125 δρ. ἐπομένως θὰ πληρωθῇ μὲ μόνον 2375 δραχμάς.

Παρατήρησις. Ἐκ τῶν 2500 δραχμῶν πληρώνονται μόνον αἱ 2375 καὶ ὅμως κρατεῖται ὁ τόκος τῶν 2500. Ἐκ τούτου γίνεται φανερόν, ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις δὲν εἶνε δικαία. Ἀλλ' οἱ ἔμποροι μεταχειρίζονται αὐτὴν διὰ τὴν εὐκολίαν· δικαιολογεῖται δὲ διὰ τῆς ἀμοιβαιότητος.

β'. Ὑφαίρεσις ἐσωτερική.

310. Ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶνε ὁ τόκος τῆς ποσότητος, τὴν ὁποίαν πληρώνει, ὅστις προεξοφλεῖ τὸ γραμμάτιον, διὰ τὸν χρόνον, ὅστις παρέρχεται ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς ἡμέρας, καθ' ἣν λήγει τὸ γραμμάτιον.

Διὰ νὰ μάθωμεν πῶς εὑρίσκεται ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις ἂς λάβωμεν τὸ ἑξῆς παράδειγμα·

Γραμμάτιον 1200 δραχμῶν προεξοφλεῖται 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 8 $^0/_0$, πόση εἶνε ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις ;

Ἡ ζητουμένη ὑφαίρεσις δὲν εἶνε τώρα ὁ τόκος τῶν 1200 δραχμῶν, (εἰς τρεῖς μῆνας), ἀλλ' ὀλιγωτέρων, δηλαδὴ ἐκείνων, τὰς ὁποίας θὰ πληρώσῃ ὁ ἐξαργυρῶν τὸ γραμμάτιον· ὥστε αἱ 1200 δρ. θὰ ἀποτελῶνται ἐκ τοῦ ποσοῦ, τὸ ὁποῖον πληρώνει ὁ ἐξαργυρῶν τὸ γραμμάτιον καὶ ἐκ τοῦ τόκου τοῦ ποσοῦ τούτου διὰ 3 μῆνας πρὸς 8 $^0/_0$.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, εὑρίσκομεν πρῶτον τὸν τόκον τῶν 100 δρ. εἰς 3 μῆνας πρὸς 8 $^0/_0$· ὁ τόκος οὗτος εἶνε

$$\frac{100\times\frac{3}{12}\times8}{100} \text{ ἢ 2 δραχμαί· ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·}$$

100 δραχμαὶ τοκιζόμεναι σήμερον γίνονται μετὰ 3 μῆνας 102· ἂν λοιπὸν ἔχῃ τις νὰ λάβῃ μετὰ 3 μῆνας 102 δραχμὰς καὶ πωλήσῃ σήμερον τὸ γραμμάτιόν του, θὰ λάβῃ μόνον 100 καὶ θὰ χάσῃ τὰς 2 (ὅστις εἶνε ὁ τόκος τῶν 100).

ὥστε εἰς 102 δραχμὰς γίνεται ὑφαίρεσις 2δρ.

εἰς μίαν δραχμὴν » » $\frac{2}{102}$

καὶ εἰς 1200 δραχ. θὰ γίνῃ ὑφαίρεσις $\frac{2}{102}\times 1200$ ἢ $\frac{1200}{51}$ ἤτοι 23 δρ. 52λ. $\frac{16}{17}$.

Ἐπειδὴ ἡ ὑφαίρεσις καὶ τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου εἶνε ἀνάλογα (διότι εἰς διπλάσιον ποσὸν γίνεται προδήλως διπλασία ὑφαίρεσις, εἰς τριπλάσιον τριπλασία κτλ.) δυνάμεθα, ἀφοῦ εὕρωμεν, ὅτι εἰς 102 δραχμὰς γίνεται ὑφαίρεσις 2, νὰ εὕρωμεν τὴν ὑφαίρεσιν τῶν 1200 δραχμῶν καὶ διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν

ποσὸν	ὑφαίρ.
102	2
1200	χ

ὅθεν $$\chi=2\times\frac{1200}{102}=\frac{1200}{51}.$$

311. Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως·

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν, πολλαπλασιάζομεν τὸ εἰς τὸ γραμμάτιον περιεχόμενον ποσὸν ἐπὶ τὸν τόκον τῶν ἑκατὸν δραχμῶν διὰ τὸν χρόνον, ὅστις παρέρχεται ἀπὸ τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ τόκου τούτου καὶ τοῦ 100.

312. Τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον πληρώνεται σήμερον διὰ τὸ γραμμάτιον, λέγεται *παροῦσα ἀξία* αὐτοῦ. Εὑρίσκεται δὲ ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ὅλου ποσοῦ τοῦ ἐν τῷ γραμματίῳ περιεχομένου ἀφαιρεθῇ ἡ ὑφαίρεσις.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου τῶν 1200 δραχμῶν εἶνε 1200—23δρ. 52λ.$\frac{16}{17}$, τουτέστιν 1176δρ. 47λ$\frac{1}{17}$

Δύναται δὲ νὰ εὑρεθῇ καὶ ἀμέσως ἡ παροῦσα ἀξία ὡς ἑξῆς·

102 δραχμαὶ (πληρωτέαι μετὰ 3 μῆνας πρὸς 8 $^0/_0$) ἔχουσι παροῦσαν

ἀξίαν 100· πόση εἶνε ἡ παροῦσα ἀξία 1200 δραχμῶν; (πληρωτέων ἐπίσης μετὰ 3 μῆνας πρὸς 8 $^0/_0$).

Ἡ παροῦσα ἀξία καὶ τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου εἶνε προφανῶς ἀνάλογα· ὅθεν

παροῦσα ἀξία	ποσὸν
100	102
χ	1200

$$\frac{102}{1200} \text{ καὶ } \chi = 100 \times \frac{1200}{102} = \frac{1200 \times 100.}{102}$$

εἶνε δὲ εὔκολον νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ παροῦσα ἀξία, τὴν ὁποίαν οὕτως εὑρίσκομεν, καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις συναποτελοῦσι τὸ ὅλον ποσὸν τοῦ γραμματίου, ἤτοι τὰς 1200 δραχμάς.

Σημείωσις. Ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶνε μὲν ἀνάλογος τοῦ ἐν τῷ γραμματίῳ περιεχομένου ποσοῦ, ἀλλὰ δὲν εἶνε ἀνάλογος, οὔτε τοῦ χρόνου οὔτε τοῦ ἐπιτοκίου. Διότι διπλασιαζομένου τοῦ χρόνου ἡ ὑφαίρεσις δεν γίνεται διπλασία, ἀλλὰ κατά τι μικροτέρα ἢ διπλασία· ὁμοίως, διπλασιαζομένου τοῦ ἐπιτοκίου, ἡ ὑφαίρεσις γίνεται μεγαλητέρα, ἀλλ' ὄχι καὶ διπλασία. Τῷ ὄντι εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα διὰ 3 μῆνας ἡ ὑφαίρεσις εἶνε $\frac{1200 \times 2.}{102}$ διὰ δὲ 6 μῆνας θὰ εἶνε $\frac{1200 \times 4.}{104}$

τοῦτο δ' εἶνε ὀλιγώτερον τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου, διότι τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου εἶνε $\frac{1200 \times 4.}{102}$

313. Τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα εἶνε γνωστὴ ἡ ὑφαίρεσις καὶ ζητεῖται ὁ χρόνος, ἢ τὸ ἐπιτόκιον, ἢ τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου, ἀνάγονται εὐκόλως εἰς προβλήματα τόκου· διότι ἡ ὑφαίρεσις εἶνε ὁ τόκος τῆς παρούσης ἀξίας διὰ τὸν χρόνον, ὅστις μεσολαβεῖ ἀπὸ τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου.

Ἐὰν π. χ. δοθῇ τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

Γραμμάτιόν τι ἐξωφλήθη 9 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 8$^0/_0$ καὶ ἔπαθεν ὑφαίρεσιν 70 δραχ. πόσον ἦτο τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου;

Εὑρίσκομεν κατὰ πρῶτον ποῖον κεφάλαιον εἰς 9 μῆνας πρὸς 8$^0/_0$ φέρει τόκον 70 δραχμάς· τὸ κεφάλαιον τοῦτο θὰ εἶνε τὸ ποσόν, μὲ τὸ ὁποῖον ἐπληρώθη τὸ γραμμάτιον, ἤτοι ἡ παροῦσα ἀξία αὐτοῦ, ἐὰν δὲ εἰς αὐτὴν προστεθῇ ἡ ὑφαίρεσις θὰ προκύψῃ τὸ ὅλον ποσὸν τοῦ γραμματίου.

Ἐὰν δὲ δοθῇ τὸ ἑξῆς·

Εἰς γραμμάτιον 1500 δραχμῶν ἐξοφληθὲν 16 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του ἔγινεν ὑφαίρεσις 120 δραχμῶν· πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν ἔγινεν ἡ ὑφαίρεσις;

Αἱ 120 δραχμαὶ εἶνε ὁ τόκος τῶν 1500—120, ἤτοι τῶν 1380 δραχμῶν (δι' ὧν ἐξωφλήθη τὸ γραμμάτιον) εἰς 16 μῆνας· ζητεῖται δὲ τὸ ἐπιτόκιον.

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα·

1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὑφαίρεσις γραμματίου 1872, δρ. 25 προεξοφλουμένου 4 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ πρὸς 8 $^0/_0$ ('Απ. 48,63...)

2) Γραμμάτιον 2500 δραχμῶν προεξωφλήθη 14 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ, ἀντὶ δραχμῶν 2150· πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐγένετο ἡ προεξόφλησις; ('Απ. 12 $^0/_0$).

3) Πωλήσας τις οἰκίαν ἀντὶ 32700 δραχμῶν, ἐκέρδησεν 9 $^0/_0$ ἐπὶ τοῦ ποσοῦ, δι' οὗ εἶχεν ἀγοράσῃ αὐτήν· πόσον τὴν εἶχεν ἀγοράσῃ; ('Απ. 30000).

4) Μετὰ πόσον χρόνον λήγει γραμμάτιον 1743 δραχμῶν, ὅπερ προεξοφλεῖται πρὸς 7 $_0/^0$ διὰ 1400 δραχμῶν: ('Απ. 3 ἔτ. $^1/_2$).

5) Πόσων δραχμῶν εἶνε τὸ γραμμάτιον, τὸ ὁποῖον προεξωφλήθη πρὸς 8 $^0/_0$ διὰ 3890 δραχμῶν 4 $^1/_2$ μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ; ('Απ. 4006,70).

6) Ἔχει τις δύο γραμμάτια τὸ μὲν ἓν 7500 δραχμῶν πληρωτέον μετὰ 8 μῆνας, τὸ δὲ ἄλλο 4800 πληρωτέον μετὰ 15 μῆνας· ἐὰν θέλῃ νὰ ἀνταλλάξῃ αὐτὰ ἀντὶ ἑνὸς μόνου γραμματίου πληρωτέου μετὰ ἓν ἔτος, πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ φέρῃ τὸ γραμμάτιον τοῦτο, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 8 $^0/_0$; ('Απ. $12405\frac{15}{17}$).

7) Ἔμπορος ἠγόρασε παρ' ἄλλου πράγματα ἀξίας 381 δρ., μὴ δυνάμενος δὲ νὰ πληρώσῃ ἀμέσως, θέλει νὰ ἐκδώσῃ γραμμάτιον πληρωτέον μετὰ 5 μῆνας μὲ ἐπιτόκιον 8 $^0/_0$· πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ φέρῃ τὸ γραμμάτιον τοῦτο; ('Απ. 3943,20).

Μερισμὸς εἰς μέρη ἀνάλογα.

314. *Νὰ μερισθῇ ἀριθμός*, οἷον ὁ 180, *εἰς μέρη ἀνάλογα δοθέντων ἀριθμῶν*, οἷον τῶν ἀριθμῶν 2,3,5, σημαίνει νὰ γίνῃ τόσα μέρη, ὅσοι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ καὶ ἀνάλογα πρὸς αὐτούς, ἤτοι τὰ μέρη ταῦτα νὰ γίνωνται ἴσα πρὸς τοὺς δοθέντας ἀριθμούς, ὅταν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπί τινα ἀριθμόν.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, παρατηροῦμεν, ὅτι, ἂν ὁ ἀριθμός, ὅστις πρόκειται νὰ μερισθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2,3,5, ἦτο ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 2+3+5, ἤτοι 10, τὰ μέρη θὰ ἦσαν προφανῶς 2,3,5· ἂν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς ἦτο διπλάσιος, ἤτοι 20, τὰ μέρη θὰ ἦσαν διπλάσια 4,6,10, ἂν ἦτο τριπλάσιος, ἤτοι 30, τὰ μέρη θὰ ἦσαν τριπλάσια 6,9,15· καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι *ἕκαστον μέρος εἶνε ἀνάλογον τοῦ μεριστέου ἀριθμοῦ*· ἐπομένως δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν, προτείνοντες αὐτὸ ὡς ἑξῆς·

Ὅταν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς εἶνε 10, τὸ πρῶτον μέρος εἶνε 2, ὅταν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς εἶνε 180, ποῖον θὰ εἶνε τὸ πρῶτον μέρος;

μεριστέος ἀριθμὸς α'. μέρος

$$\frac{10}{180} \qquad \frac{2}{\chi} \qquad \text{ἄρα } \chi=2\times\frac{180}{10}, \text{ ἤτοι } \chi=36.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ τὰ ἄλλα μέρη· καὶ τὰ τρία μέρη εἶνε

$$\frac{180}{10}\times 2, \ \frac{180}{10}\times 3, \ \frac{180}{10}\times 5.$$

315. Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν κανόνα·

Διὰ νὰ μερίσωμεν ἀριθμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα δοθέντων ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐφ' ἕκαστον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν καὶ τὰ γινόμενα διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν.

Σημείωσις. Οἱ ἀριθμοί, ἀναλόγως τῶν ὁποίων μερίζομεν, δύνανται νὰ πολλαπλασιασθῶσι πάντες ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμόν, χωρὶς νὰ βλαφθῶσι τὰ μέρη· ἢ καὶ νὰ διαιρεθῶσι πάντες διὰ τοῦ τυχόντος ἀριθμοῦ. Διότι, ἂν παραδείγματος χάριν, πρόκειται νὰ μερίσωμεν ἀριθμόν τινα Κ ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 2,3,5, τὰ μέρη θὰ εἶνε.

$$K\times\frac{2}{10}, \qquad K\times\frac{3}{10}, \qquad K\times\frac{5}{10}, \quad 10=2+3+5,$$

Ἂν δὲ ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν 2,3,5 λάβωμεν τοὺς 2×8, 3×8, 5×8, τὰ μέρη θὰ εἶνε·

$$K\times\frac{2\times 8}{10\times 8}, \qquad K\times\frac{3\times 8}{10\times 8}, \qquad K\times\frac{5\times 8}{10\times 8}$$

διότι τὸ ἄθροισμα 2×8+3×8+5×8 εἶνε 10×8· ὥστε τὰ μέρη ἔμειναν τὰ αὐτά.

Ὁμοίως καὶ ἡ διαίρεσις τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5 διὰ τοῦ τυχόντος ἀριθμοῦ δὲν βλάπτει τὰ μέρη.

Διὰ ταῦτα, ἐὰν ἔχωμεν νὰ μερίσωμεν ἀριθμόν τινα ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν $2\frac{1}{2}$, $5\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$, πολλαπλασιάζομεν τούτους ἐπὶ 18 (διὰ νὰ γίνωσιν ἀκέραιοι) καὶ γίνονται 45, 102, 8· ἔπειτα μερίζομεν ἀναλόγως τῶν 45, 102, 8· ὅπερ εἶνε εὐκολώτερον. Ἐὰν δὲ πρόκειται νὰ μερίσωμεν ἀριθμὸν ἀναλόγως τῶν 100, 200, 500, μερίζομεν ἀναλόγως τῶν 1, 2, 5, ὅπερ εἶνε εὐκολώτερον.

Προβλήματα ἑταιρείας.

316. *Προβλήματα ἑταιρίας* λέγονται ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ μοιρασθῇ τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία ἐπιχειρήσεώς τινος εἰς ἐκείνους, οἵτινες τὴν ἀνέλαβον.

Τὰ τοιαῦτα προβλήματα ἀνάγονται εἰς τὸν μερισμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα· γίνεται δὲ τοῦτο φανερὸν ἐκ τῶν ἑξῆς παραδειγμάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

Τρεῖς ἔμποροι ἔκαμαν ἑταιρίαν διά τινα ἐπιχείρησιν καὶ κατέβαλον τὰ ἑξῆς ποσά. Ὁ πρῶτος 7500 δραχμάς, ὁ δεύτερος 12,000 δρ. καὶ ὁ τρίτος 22500. Ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως ἐκέρδησαν 2,800 δραχμάς· πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Λύσις. Ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ δ τὸ κέρδος τῆς μιᾶς δραχμῆς (δηλαδὴ τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον θὰ ἐλάμβανέ τις, ἂν κατέβαλλε 1 δραχμὴν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν), ὁ πρῶτος, ἐπειδὴ κατέβαλεν 7500 δραχ., θὰ λάβῃ $7500 \times \delta$, ὁ δεύτερος θὰ λάβῃ $12000 \times \delta$ καὶ ὁ τρίτος $22500 \times \delta$· τὰ τρία δὲ ταῦτα $7{,}500 \times \delta$, $12000 \times \delta$, $22500 \times \delta$ θὰ συναποτελῶσι τὸ ὅλον κέρδος, ἤτοι τὰς 2800 δρ.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι, διὰ νὰ λύσωμεν τὸ προκείμενον πρόβλημα, πρέπει νὰ μερίσωμεν τὸ κέρδος 2800 δρ. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν καταβολῶν 7500, 12000, 22500· ἐκτελοῦντες τὸν μερισμὸν τοῦτον κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἐδ. 315, εὑρίσκομεν τὰ μέρη·

$$\frac{2800 \times 7500}{42000} \qquad \frac{2800 \times 12000}{42000} \qquad \frac{2800 \times 22500}{42000}$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{2 \times 750}{3} \quad \frac{2 \times 1200}{3} \quad \frac{2 \times 2250}{3} \quad \text{ἤτοι } 500 \ 800 \ 1500.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

Ἔμπορός τις ἤρχισεν ἐπιχείρησίν τινα μὲ 8000 δραχμάς· μετὰ πέντε δὲ μῆνας προσέλαβε συνέταιρον, ὅστις καὶ αὐτὸς κατέβαλεν 8000 δραχμάς· δέκα δὲ μῆνας μετὰ ταῦτα προσέλαβε καὶ τρίτον συνέταιρον, ὅστις κατέβαλε καὶ αὐτὸς τὸ αὐτὸ ποσὸν 8000 δρ. Τρία ἔτη ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς ἐπιχειρήσεως εὑρέθη, ὅτι ἐκέρδησαν 3800 δραχμάς. Πόσας πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος;

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο αἱ μὲν καταβολαὶ εἶνε αἱ αὐταί· διότι ἕκαστος τῶν συνεταίρων κατέβαλεν 8000 δραχμάς· ἀλλ' οἱ χρόνοι, καθ' οὓς αἱ καταβολαὶ ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν, εἶνε διάφοροι· διότι τοῦ μὲν πρώτου τὰ χρήματα ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 36 μῆνας, τοῦ δὲ δευτέρου 31, τοῦ δὲ τρίτου 21. Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ τοῦ δ τὸ κέρδος τῶν 8000 εἰς ἕνα μῆνα, ὁ μὲν πρῶτος θὰ λάβῃ $36\times\delta$, ὁ δὲ δεύτερος $31\times\delta$, ὁ δὲ τρίτος $21\times\delta$· τὰ τρία δὲ ταῦτα μερίδια

$36\times\delta$, $31\times\delta$, $21\times\delta$ θὰ συναποτελῶσι τὸ ὅλον κέρδος ἤτοι τὰς 3800 δραχμάς.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι, διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, πρέπει νὰ μερίσωμεν τὸ κέρδος 3800 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν χρόνων 36, 31, 21, καθ' οὓς αἱ καταβολαὶ ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν· ἑπομένως τὰ μερίδια

εἶνε
$$3800\times\frac{36}{88},\quad 3800\times\frac{31}{88},\quad 3800\times\frac{21}{88}$$

$$1554\ \delta.\frac{6}{11},\quad 1338\frac{7}{11},\quad 906\frac{9}{11}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

Ἄνθρωπός τις ἤρχισεν ἐπιχείρησίν τινα μὲ 2000 δραχμάς· μετὰ ἓν ἔτος προσέλαβε συνέταιρον, ὅστις κατέβαλεν 7000 δρ. ὀκτὼ δὲ μῆνας μετὰ τοῦτον προσέλαβε καὶ τρίτον συνέταιρον, ὅστις κατέβαλεν 6000 δραχμάς, τρία δὲ ἔτη μετὰ τὴν πρόσληψιν τούτου εὑρέθη, ὅτι ἐκέρδησαν 18000 δραχμάς· πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος.

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο καὶ τὰ κεφάλαια τῶν συνεταίρων διαφέρουσι καὶ οἱ χρόνοι, καθ' οὓς ταῦτα ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν.

Ὁ πρῶτος	κατέβαλε	2000	δρ.	διὰ	56	μῆνας
ὁ δεύτερος	κατέβαλε	7000	»	διὰ	44	μῆνας
ὁ τρίτος	κατέβαλε	6000	»	διὰ	36	μῆνας

Λύσις. Ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ δ τὸ κέρδος τῆς μιᾶς δραχμῆς, εἰς ἕνα μῆνα τὸ κέρδος τῆς μιᾶς δρ. εἰς 56 μῆνας θὰ εἶνε $56\times\delta$, καὶ τὸ κέρδος τῶν 2000 δρ. εἰς 56 μῆνας θὰ εἶνε $56\times2000\times\delta$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ κέρδος τῶν 7000 εἰς 44 μῆνας εἶνε $44\times7000\times\delta$, καὶ τὸ κέρδος τῶν 6000 δραχμῶν εἰς 36 μῆνας εἶνε $36\times6000\times\delta$. Ἑπομένως τὰ μερίδια τῶν συνεταίρων εἶνε κατὰ σειρὰν τοῦ α′ $56 \times 2000 \times \delta$

τοῦ β′ $44 \times 7000 \times \delta$

τοῦ γ′ $36 \times 6000 \times \delta$

καὶ τὰ τρία ταῦτα μερίδια θὰ συναποτελῶσι τὸ ὅλον κέρδος, ἤτοι τὰς 18000 δραχμάς.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι, διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, *ἀρκεῖ νὰ μερίσωμεν τὸ κέρδος 18000 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 56×2000, 44×7000, 36×6000, ἤτοι τῶν γινομένων, ἅτινα εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τὸ κεφάλαιον ἑκάστου ἐπὶ τὸν χρόνον, καθ' ὃν ἔμεινεν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν.*

Διαιροῦντες τοὺς ἀριθμοὺς τούτους διὰ 1000, ἔχομεν νὰ μερίσωμεν τὸν 18000 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 56×2, 44×7, 36×6· καὶ ἐκτελοῦντες τὸν μερισμόν, εὑρίσκομεν τὰ ἑξῆς μερίδια·

$$\alpha' \; 3169\frac{43}{53}, \qquad \beta' \; 8716\frac{52}{53}, \qquad \gamma' \; 6113\frac{11}{53}$$

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα·

1) Εἰς τὴν κατασκευὴν τῆς πυρίτιδος λαμβάνονται συνήθως 16 μέρη νίτρου, 3 μέρη ἄνθρακος καὶ 2 μέρη θείου· πόσαι ὀκάδες ἐξ ἑκάστης τῶν ὑλῶν τούτων χρειάζονται διὰ νὰ κατασκευασθῶσιν 840 ὀκ. πυρίτιδος ('Απ. 640 ὀκ. νίτρου, 120 ὀκ. ἄνθρακ. 80 ὀκ. θείου).

2) Ἔμπορος ἐχρεωκόπησεν ἔχων μὲν 12000 δρ., ὀφείλων δὲ εἰς μὲν τὸν Α 5800 δρ. εἰς τὸν Β 7600 εἰς δὲ τὸν Γ 9400· πόσας ἐκ τῶν 12000 πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος ἀναλόγως τῶν ὀφειλομένων εἰς αὐτόν;

$$\left(\text{A } 3052\frac{36}{57}, \quad \text{B } 4000, \; \Gamma \; 4947\frac{21}{57} \right).$$

3). Ἔμπορός τις ἤρχισεν ἐπιχείρησίν τινα μὲ κεφάλαιον 10000 δραχμῶν· μετὰ 8 μῆνας προσέλαβε καὶ συνέταιρον, ὅστις κατέβαλεν 6000 δρ. δύο δὲ ἔτη μετὰ ταῦτα εὗρον, ὅτι ἐκέρδησαν 2900 δρ. πόσας πρέπει νὰ λάβῃ ἑκάτερος ἐξ αὐτῶν; ('Απ. ὁ α′ 2000 ὁ δὲ β′ 900).

4) Πατήρ τις διέταξεν ἐν τῇ διαθήκῃ του νὰ μοιρασθῇ ἡ περιουσία του εἰς τὰ τρία τέκνα του ὡς ἑξῆς· ὁ δεύτερος υἱὸς νὰ λάβῃ τὰ $^5/_6$, τῆς μερίδος τοῦ πρώτου· ἡ δὲ κόρη νὰ λάβῃ τὴν μερίδα τοῦ πρώτου καὶ τὸ ἥμισυ τῆς μερίδος τοῦ δευτέρου· ἡ περιουσία σύγκειται ἐξ 78000 δραχμῶν· πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστον τέκνον; ('Απ. ὁ α′ υἱὸς 24000, ὁ β′ 20000, ἡ δὲ κόρη 34000).

5) Θεῖός τις ἀφίνει εἰς τοὺς τρεῖς ἀνεψιούς του τὴν περιουσίαν του, συνισταμένην ἐκ δραχ. 9372· διατάσσει δὲ νὰ λάβῃ ἕκαστος τόσα, ὥστε τὰ μερίδια αὐτῶν κατατιθέμενα εἰς τὴν τράπεζαν ἐπὶ τόκῳ ἁπλῷ 5 $_0/^0$ νὰ γίνωνται ἴσα, ὅταν θὰ συμπληρώνωσι τὸ 21 ἔτος τῆς ἡλικίας των· ὁ πρῶτος εἶνε 12 ἐτῶν, ὁ δεύτερος 9 καὶ ὁ τρίτος 5· πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος; ('Απ. ὁ α' 3456, ὁ β' 3132, ὁ γ' 2784).

6) Ἔργον τι ἐξετελέσθη ὑπὸ δύο ἐργατῶν, ἐξ ὧν ὁ μὲν πρῶτος εἰργάσθη 7 ἡμέρας ἐπὶ 6 ὥρας καθ' ἡμέραν· ὁ δὲ δεύτερος 12 ἡμέρας ἐπὶ 4 ὥρας καθ' ἡμέραν. Ἔλαβον δὲ ὡς πληρωμὴν δραχμὰς 45· πόσας θὰ λάβῃ ἕκαστος; ('Απ. ὁ α' 21, ὁ δὲ β' 24).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΙΞΕΩΣ.

317. Τὰ προβλήματα τῆς μίξεως εἶνε δύο εἰδῶν.

α') Ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος πραγμάτων, τῶν ὁποίων δίδονται αἱ ποσότητες καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἑκάστου.

β') Ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται αἱ τιμαὶ τῆς μονάδος δύο πραγμάτων καὶ ζητεῖται πόσον θὰ λάβωμεν ἐξ ἑκατέρου, διὰ νὰ σχηματίσωμεν μίγμα ὡρισμένον καὶ τοῦ ὁποίου ἡ μονὰς νὰ ἔχῃ δεδομένην τιμήν.

Προβλήματα τοῦ πρώτου εἴδους.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ἀνέμιξέ τις τριῶν εἰδῶν οἴνους· ἐκ τοῦ πρώτου εἴδους, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 50 λεπτά, ἔλαβεν 100 ὀκάδας, ἐκ τοῦ δευτέρου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 35 λεπτά, ἔλαβε 250· καὶ ἐκ τοῦ τρίτου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 80 λεπτά, ἔλαβε 50 ὀκάδας· πόση θὰ εἶνε ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ μίγματος;

Φανερὸν εἶνε, ὅτι, διὰ νὰ λύσω τὸ πρόβλημα τοῦτο, ἀρκεῖ *νὰ εὕρω τὴν ἀξίαν ἑκάστου τῶν ἀναμιχθέντων οἴνων*, ἔπειτα ἐξ αὐτῶν *τὴν ἀξίαν τοῦ μίγματος*· μετὰ δὲ ταῦτα *νὰ μερίσω τὴν ἀξίαν τοῦ μίγματος εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶνε καὶ αἱ ὀκάδες αὐτοῦ*· τὸ πηλίκον θὰ εἶνε ἡ ζητουμένη τιμὴ τῆς μιᾶς ὀκᾶς τοῦ μίγματος

Ἀξία τοῦ πρώτου οἴνου	$50 \times 100 = 5000$	λεπτὰ
» » δευτέρου »	$35 \times 250 = 8750$	»
» » τρίτου »	$80 \times 50 = 4000$	»
ἑπομένως ἀξία τοῦ μίγματος	17750	λεπτά.

Τὸ μῖγμα σύγκειται ἐξ ὀκάδων $100+250+50$ ἤτοι 400.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ 400 ὀκάδες τοῦ μίγματος ἀξίζουν 17750 λεπ. ἡ μία ὀκᾶ αὐτοῦ θὰ ἀξίζῃ $\frac{1775}{40}$ ἢ 44λ. $\frac{3}{8}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Συνεχωνεύθησαν 20 γραμμάρια ἀργύρου ἔχοντος βαθμὸν καθαρότητος 0,900 μετὰ 50 γραμμαρίων ἀργύρου ἔχοντος βαθμὸν καθαρότητος 0,835· ποῖος θὰ εἶνε ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος τοῦ κράματος ;

Σημείωσις. Λέγοντες ὅτι ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος τοῦ ἀργύρου εἶνε 0,900, ἐννοοῦμεν, ὅτι μόνον τὰ $\frac{900}{1000}$ αὐτοῦ εἶνε καθαρὸς ἄργυρος, τὰ δὲ ἄλλα $\frac{100}{1000}$ εἶνε ἄλλα μέταλλα εὐτελῆ.

Καὶ τὸ πρόβλημα τοῦτο, ὡς καὶ τὰ πρὸς αὐτὸ ὅμοια, λύεται κατὰ τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα τῆς μίξεως. Διότι εἶνε προφανές, ὅτι ἀρκεῖ πρὸς λύσιν αὐτοῦ νὰ εὕρωμεν τὸ *ποσὸν τοῦ καθαροῦ ἀργύρου, ὅστις ὑπάρχει εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν ἀναμιχθέντων μετάλλων, ἔπειτα* ἐκ τούτων *τὸ ποσὸν τοῦ καθαροῦ ἀργύρου, ὅστις ὑπάρχει εἰς τὸ κρᾶμα, καὶ τέλος νὰ μερίσωμεν τὸ ποσὸν τοῦτο εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶνε αἱ μονάδες τοῦ μίγματος*. Τὸ πηλίκον θὰ εἶνε τὸ ποσὸν τοῦ καθαροῦ ἀργύρου, ὅστις ὑπάρχει εἰς ἑκάστην μονάδα τοῦ κράματος, τουτέστιν ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος τοῦ κράματος.

καθαρ. ἄργ. τοῦ πρώτου	$0,900 \times 20 = 18$		γραμμάρια
» » » δευτέρου	$0,835 \times 50 = 41$	75	

ἑπομένως καθαρὸς ἄργυρος τοῦ κράματος $=59$,γρ. 75.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ κρᾶμα σύγκειται ἐκ $50+20$, ἤτοι 70 γραμμαρίων, συνάγεται, ὅτι ἕκαστον γραμμάριον τοῦ κράματος ἔχει ἄργυρον καθαρὸν $\frac{59,75}{70}$ ἢ 0,853...

Προβλήματα τοῦ δευτέρου εἴδους.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Οἰνοπώλης τις ἔχει δύο εἰδῶν οἴνους· τοῦ πρώτου εἴδους ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 45 λεπτά, τοῦ δὲ δευτέρου 80, θέλει δὲ νὰ κάμῃ ἐξ αὐτῶν μῖγμα 800 ὀκάδων, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ ἀξίζῃ 60 λεπτά· πόσον θὰ βάλῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους ;

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, παρατηροῦμεν, ὅτι μία ὀκᾶ τοῦ πρώτου εἴδους ἐπωλεῖτο χωριστὰ 45 λεπτά· τώρα δὲ εἰς τὸ μῖγμα εὑρισκομένη θὰ πωλῆται 60· ὥστε δι' ἑκάστην ὀκᾶν τοῦ πρώτου εἴδους θὰ κερδίζῃ ὁ οἰνοπώλης 15 λεπτά· ἀλλὰ πάλιν θὰ ζημιώνηται δι' ἑκάστην ὀκᾶν τοῦ δευτέρου 20 λ. (διότι χωριστὰ ἐπωλεῖτο 80 λεπτὰ καὶ τώρα εἰς τὸ μῖγμα εὑρισκομένη θὰ πωλῆται 60).

Λοιπὸν 1 ὀκᾶ τοῦ α΄ εἴδους κερδίζει 15 λεπτά.
1 ὀκᾶ τοῦ β΄ εἴδους χάνει 20 λεπτά·

ἄρα, ἂν βάλῃ ἐκ τοῦ πρώτου εἴδους 20 ὀκάδας, θὰ κερδίσῃ 15×20 ἂν δὲ ἐκ τοῦ δευτέρου εἴδους βάλῃ 15 ὀκάδας, θὰ χάσῃ 20×15 καὶ ἐπειδὴ 15×20 εἶνε ἴσον μὲ τὸ 20×15, συμπεραίνομεν, ὅτι οὔτε κέρδος θὰ ἔχῃ οὔτε ζημίαν, ἂν ἀναμίξῃ·

20 ὀκάδας ἐκ τοῦ α΄
καὶ 15 ὀκάδας ἐκ τοῦ β΄.

ὥστε, ἂν ἤθελε νὰ κάμῃ μῖγμα 35 ὀκάδων, ἔπρεπε νὰ βάλῃ
20 ὀκάδας ἐκ τοῦ α΄
καὶ 15 ὀκάδας ἐκ τοῦ β΄.

ἂν ἤθελε νὰ κάμῃ μῖγμα μιᾶς ὀκᾶς, ἔπρεπε νὰ βάλῃ

ἐκ τοῦ α΄ εἴδους $\frac{20}{35}$

ἐκ τοῦ β΄ εἴδους $\frac{15}{35}$

Λοιπὸν διὰ νὰ κάμῃ μῖγμα 800 ὀκάδων, πρέπει νὰ βάλῃ

ἐκ τοῦ α΄ εἴδους $\frac{20}{35} \times 800$, ἤτοι 457 ὀκ. $\frac{1}{7}$

ἐκ τοῦ β΄ εἴδους $\frac{15}{35} \times 800$, ἤτοι 342 ὀκ. $\frac{6}{7}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ἔχει τις δύο ὄγκους ἀργύρου· καὶ τοῦ μὲν πρώτου ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος εἶνε 0,935, τοῦ δὲ δευτέρου 0,880· πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρου διὰ νὰ σχηματίσῃ 5 ὀκάδας ἀργύρου ἔχοντος βαθμὸν καθαρότητος 0,900 ;

Ἑκάστη ὀκᾶ τοῦ πρώτου εἴδους εἰσάγει εἰς τὸ κρᾶμα 0,035 ἀργύρου περισσότερον τοῦ ἀπαιτουμένου (διότι τὸ κρᾶμα πρέπει νὰ ἔχῃ βαθμὸν καθαρότητος 0,900)· ἑκάστη δὲ ὀκᾶ τοῦ δευτέρου εἰσάγει εἰς τὸ κρᾶμα 0,020 ἀργύρου ὀλιγώτερον τοῦ ἀπαιτουμένου. Ὥστε ἐξ ἑκάστης ὀκᾶς τοῦ α′ εἴδους περισσεύει ἄργυρος 0,035 τῆς ὀκᾶς, ἐξ ἑκάστης δὲ ὀκᾶς τοῦ β′ λείπει ἄργυρος 0,020 τῆς ὀκᾶς.

Ἐὰν λοιπὸν βάλῃ 20 ὀκάδας ἐκ τοῦ α′, θὰ περισσεύῃ ἄργυρος

$$0,035 \times 20 \text{ ὀκάδες·}$$

ἐὰν δὲ βάλῃ 35 ὀκάδας ἐκ τοῦ δευτέρου, θὰ λείπῃ ἄργυρος

$$0,020 \times 35 \text{ ὀκάδες.}$$

Ὥστε, ἐὰν βάλῃ 20 ὀκάδας ἐκ τοῦ α′ καὶ 35 ὀκάδας ἐκ τοῦ δευτέρου, ὅσος ἄργυρος λείπει ἐκ τοῦ ἑνὸς εἴδους, τόσος περισσεύει ἐκ τοῦ ἄλλου, καὶ ἑπομένως τὸ κρᾶμα οὔτε περισσότερον τοῦ ἀπαιτουμένου θὰ περιέχῃ ἄργυρον οὔτε ὀλιγώτερον.

Ἂν λοιπὸν ἤθελε νὰ κάμῃ κρᾶμα 55 ὀκάδων, ἔπρεπε νὰ βάλῃ

20 ὀκ. ἐκ τοῦ α′
καὶ 35 ὀκ. ἐκ τοῦ β′.

ἂν ἤθελε νὰ κάμῃ κρᾶμα 1 ὀκ., ἔπρεπε νὰ βάλῃ

$$\frac{20}{55} \text{ ἐκ τοῦ α}'$$

$$\text{καὶ } \frac{35}{55} \text{ ἐκ τοῦ β}'.$$

$$\frac{20}{55} \times 5 \text{ ἐκ τοῦ α}', \text{ ἤτοι } 1 \text{ ὀκ. } 327 \text{ δρ.} \frac{3}{11}.$$

$$\text{καὶ } \frac{35}{55} \times 5 \text{ ἐκ τοῦ β}', \text{ ἤτοι } 3 \text{ ὀκ. } 72 \text{ δρ.} \frac{8}{11}.$$

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) Σιτέμπορος ἀνέμιξε τρία εἴδη σίτου· καὶ ἐκ μὲν τοῦ πρώτου εἴδους ἔλαβεν 800 ὀκάδας, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου 1500 καὶ ἐκ τοῦ τρίτου 2000· πρὶν τὰ ἀναμίξῃ, ἐπώλει τὸ πρῶτον εἶδος πρὸς 40 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, τὸ δεύτερον πρὸς 30 καὶ τὸ τρίτον πρὸς 25· πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν τοῦ μίγματος, διὰ νὰ κερδίσῃ 10 $^0/_0$ ἐπὶ τῆς ἀξίας αὐτοῦ;

Σημείωσις. Θὰ εὕρωμεν πρῶτον πόσον ἀξίζει τὸ μῖγμα, ἔπειτα θὰ προσθέσωμεν εἰς τὴν ἀξίαν τοῦ μίγματος τὸν τόκον αὐτῆς πρὸς 10 $^0/_0$ (δι' ἓν ἔτος) καὶ τὸ ἄθροισμα εἶνε τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ μίγματος· διαιροῦντες τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶναι αἱ ὀκάδες τοῦ μίγματος, θὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον· οὕτος εὑρίσκομεν, ὅτι πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν πρὸς 32 λεπτὰ καὶ $\frac{21}{43}$ τοῦ λεπτοῦ.

2) Οἰνοπώλης ἔχει δύο εἰδῶν οἶνον· καὶ τοῦ μὲν πρώτου εἴδους πωλεῖ τὴν ὀκᾶν 80 λεπτά, τοῦ δὲ δευτέρου 45· θέλει δὲ νὰ κάμῃ ἐξ αὐτῶν μῖγμα 2800 ὀκάδων, τοῦ ὁποίου τὴν ὀκᾶν νὰ πωλῇ 54 λεπτὰ καὶ νὰ κερδίσῃ 8 $^0/_0$ ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ μίγματος· πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρου τῶν οἴνων;

Σημείωσις. Διὰ νὰ κερδίσῃ 8 $^0/_0$ ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ μίγματος, ἀρκεῖ νὰ κερδίσῃ 8 $^0/_0$ ἐπὶ τῆς ἀξίας ἑκάστης ὀκᾶς· πρέπει λοιπὸν νὰ προσθέσωμεν εἰς τὴν τιμὴν τῆς ὀκᾶς ἑκάστου εἴδους 8 $^0/_0$· ὥστε πρέπει νὰ λάβωμεν ὡς τιμὴν τοῦ α΄ εἴδους 86λ,4, ὡς τιμὴν δὲ τοῦ δευτέρου 48λ, 6· καὶ ἔπειτα νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα ὡς τὰ προβλήματα τοῦ δευτέρου εἴδους τῆς μίξεως· οὕτως εὑρίσκομεν, ὅτι πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ μὲν τοῦ α΄ εἴδους 400 ὀκάδας, ἐκ δὲ τοῦ β΄ 2400.

3) Ἔχει τις 85 δράμια ἀργύρου, τοῦ ὁποίου ὁ βαθμὸς καθαρότητος εἶνε 0,900 καὶ θέλει νὰ ἀναβιβάσῃ τὸν βαθμὸν τῆς καθαρότητος αὐτοῦ εἰς 0,975· πόσον καθαρὸν ἄργυρον πρέπει νὰ ἀναμίξῃ μετ' αὐτοῦ;
('Απ. 255 δράμια).

4) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν 850 ὀκάδας ἐλαίου πρὸς 95 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, ἔπειτα 2800 ὀκάδας πρὸς 1,05 καὶ τέλος 1890 ὀκάδας πρὸς 90 λεπτά· ἐὰν τώρα θέλῃ νὰ πωλήσῃ ὅλον τὸ ἔλαιον τοῦτο διὰ μιᾶς, πρὸς πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν ὀκᾶν διὰ νὰ μὴ ζημιωθῇ; καὶ πρὸς πόσον ἂν θέλῃ νὰ κερδίσῃ 30 $^0/_0$ ἐπὶ τῆς ἀξίας του;

('Απ. 98λ. $\frac{193}{554}$ ἂν δὲ θέλῃ νὰ κερδίσῃ 30 $^0/_0$, θὰ πωλήσῃ πρὸς 1 δρ. 27 $\frac{236}{277}$).

Περὶ τῶν ἀριθμητικῶν μέσων.

318. *Ἀριθμητικὸν μέσον* ἢ *μέσος ὅρος* διαφόρων ποσῶν ὁμοειδῶν λέγεται τὸ ἄθροισμα αὐτῶν διῃρημένον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ἐκφράζει τὸ πλῆθος αὐτῶν.

Παραδείγματος χάριν, ὁ μέσος ὅρος τῶν ἀριθμῶν 12, 18 καὶ 30 εἶνε $\frac{12+18+30}{3}$, ἤτοι 20· ὁ δὲ μέσος ὅρος τῶν ἀριθμῶν 20, 35 40, 61 εἶνε $\frac{156}{4}$ ἢ 39.

Τοὺς μέσους ὅρους μεταχειριζόμεθα εἰς πολλὰς περιπτώσεις.

Ὑποθέσωμεν λόγου χάριν, ὅτι ἐμετρήσαμεν τὸ μῆκος μιᾶς γραμμῆς τρεῖς φοράς· καὶ τὴν μὲν πρώτην φορὰν εὑρήκαμεν, ὅτι εἶνε 5,8 μέτρα, τὴν δὲ δευτέραν 5,76, τὴν δὲ τρίτην 5,758 (εὑρήκαμεν δὲ διαφόρους ἀριθμοὺς εἰς τὰς τρεῖς καταμετρήσεις, διὰ τὰ λάθη, εἰς ἃ ὑποπίπτομεν ἕνεκα τῆς ἀτελείας τῶν ὀργάνων ἡμῶν)· τότε ὡς πιθανωτέραν τιμὴν τοῦ μήκους τῆς γραμμῆς λαμβάνομεν τὸν μέσον ὅρον τῶν τριῶν εὑρεθέντων ἀριθμῶν· ἤτοι

$$^1/_3\,(5{,}8+5{,}76+5{,}758) \text{ ἢ } 5{,}772\ldots$$

Ὡς παράδειγμα τῶν μέσων ὅρων, ἔστω καὶ τὸ ἑξῆς·

Τὰ εἰσοδήματα τῶν τελωνείων κράτους τινὸς ἦσαν

τῷ	1880	δραχμὰς	7 489 851
τῷ	1881	»	8 500 314
τῷ	1882	»	8 358 705
τῷ	1883	»	9 005 015
τῷ	1884	»	10 267 519
τῷ	1885	»	12 665 758

ζητεῖται ὁ μέσος ὅρος τῶν εἰσοδημάτων τῶν τελωνείων κατὰ τὰ ἓξ ταῦτα ἔτη.

Προσθέτοντες τὰ εἰσοδήματα τῶν ἓξ ἐτῶν εὑρίσκομεν 56287162 καὶ λαμβάνοντες τὸ ἕκτον τούτου εὑρίσκομεν ὡς μέσον ὅρον 9381193,66...

* ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΟΥ Ζ'. ΒΙΒΛΙΟΥ

Μέθοδος τῶν ἐξισώσεων.

319. *Ἐξίσωσις* λέγεται ἰσότης συνδέουσα πρὸς ἄλληλα γνωστὰ καὶ ἄγνωστα.

Παραδείγματος χάριν, ἡ ἰσότης $3\chi=12$ συνδέει τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν χ μετὰ τῶν γνωστῶν 3 καὶ 12· εἶνε λοιπὸν ἐξίσωσις.

Ὁμοίως ἡ ἰσότης $\frac{\chi}{2}+5=3\chi-5$ εἶνε ἐξίσωσις.

Καὶ ἡ ἰσόσης $3\chi-\psi=1$, ἥτις συνδέει πρὸς ἀλλήλους δύο ἀγνώστους ἀριθμοὺς χ, ψ καὶ γνωστοὺς ἀριθμούς, εἶνε ἐξίσωσις.

Λύσις τῆς ἐξισώσεως (ὅταν περιέχῃ ἕνα ἄγνωστον) λέγεται ἡ εὕρεσις τοῦ ἀγνώστου αὐτῆς, ἤτοι ἡ εὕρεσις τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις τιθέμενος ἀντὶ τοῦ ἀγνώστου χ καθιστᾷ τὴν ἐξίσωσιν ἀληθῆ, ἥτις ἐπαληθεύει αὐτήν.

320. Τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων θὰ μάθωμεν ἀλλαχοῦ λεπτομερῶς. Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν μόνον τοῦτο, ὅτι ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τῆς ἰσότητος καὶ ἐπὶ τῶν γενικῶν ἰδιοτήτων τῶν τεσσάρων πράξεων.

Αἱ ἰδιότητες τῆς ἰσότητος, ἐπὶ τῶν ὁποίων στηρίζεται ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων, εἶνε αἱ ἑξῆς.

1) Ἐὰν εἰς ἴσα προσθέσωμεν ἴσα, προκύπτουσιν ἴσα.

2) Ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἀφαιρέσωμεν ἴσα, προκύπτουσιν ἴσα.

3) Ἐὰν ἴσα πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ ἴσα, προκύπτουσιν ἴσα.

4) Ἐὰν ἴσα διαιρέσωμεν δι' ἴσων, προκύπτουσιν ἴσα.

Λύσις μιᾶς ἐξισώσεως μὲ ἕνα ἄγνωστον.

Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν, πῶς γίνεται ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων, θὰ λάβωμεν ἁπλᾶ τινα παραδείγματα.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $5\chi=85$.

Διὰ νὰ λύσωμεν αὐτήν, διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ τοῦ 5, καὶ εὑρίσκομεν $\chi=17$, ὥστε ὁ ἄγνωστος εἶνε 17· οὗτος δηλαδὴ ὁ ἀριθμὸς (καὶ οὗτος μόνος) τιθέμενος ἀντὶ τοῦ χ εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν καθιστᾷ αὐτὴν ἀληθῆ· καὶ ὄντως εἶνε $5\times17=85$.

Ἔστω προσέτι ἡ ἐξίσωσις $2\chi-3=17$

Διὰ νὰ λύσωμεν αὐτήν, προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ ἴσα τὸν ἀριθμὸν 3, ὅτε προκύπτει $2\chi-3+3=17+3$ ἢ $2\chi=20$. διαιροῦμεν τώρα ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ 2 καὶ εὑρίσκομεν $\chi=10$· ὥστε ὁ μόνος ἀριθμός, ὁ τὴν ἐξίσωσιν ἐπαληθεύων εἶνε ὁ 10· καὶ τῷ ὄντι εἶνε $2\times10-3=17$ ἢ $17=17$.

Ἔστω καὶ ἡ ἐξίσωσις $2\chi+8=\chi-12$.

Διὰ νὰ λύσωμεν αὐτήν, προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ ἴσα τὸν ἀριθμὸν 12, ὅτε εὑρίσκομεν $2\chi+8+12=7\chi-12+12$·
ἤτοι $2\chi+20=7\chi$· ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ἴσων τούτων 2χ, ὅτε εὑρίσκομεν

$2\chi-2\chi+20=7\chi-2\chi$ ἢ $20=(7-2)\chi$·

τουτέστιν $20=5\chi$·

τέλος διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ τοῦ 5 καὶ εὑρίσκομεν $4=\chi$.

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 4, ἂν τεθῇ ἀντὶ τοῦ χ (καὶ μόνος οὗτος), ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν· καὶ τῷ ὄντι θέτοντες 4 εἰς τὴν ἐξίσωσιν ἀντὶ χ, εὑρίσκομεν $2\times4+8=7\times4-12$, ἢ $16=16$, ὅπερ ἀληθές· ἂν ὅμως τεθῇ ἄλλος οἱοσδήποτε ἀριθμὸς ἀντὶ τοῦ χ, ἡ ἰσότης δὲν ἀληθεύει.

Ἔστω προσέτι ἡ ἐξίσωσις $\frac{\chi}{2}-1=\frac{\chi+1}{3}$.

Πρὸς λύσιν αὐτῆς πολλαπλασιάζομεν πρῶτον ἀμφότερα τὰ ἴσα ἐπὶ 2,3 (ἤτοι ἐπὶ κοινόν τι πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν 2 καὶ 3) καὶ εὑρίσκομεν·

$$2.3.\frac{\chi}{2}\;1.2.3.=2.3.\frac{\chi+1}{3}$$

ἤτοι $$3\chi-6=2(\chi+1)$$
ἢ $$3\chi-6=2\chi+2.$$

προσθέτομεν ἔπειτα εἰς ἀμφότερα τὰ ἴσα τὸν ἀριθμὸν 6, ὅτε εὑρίσκομεν $$3\chi=2\chi+8.$$

ἀφαιροῦμεν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ἴσων τὸν ἀριθμὸν 2χ, ὅτε εὑρίσκομεν

$$3\chi-2\chi=2\chi+8-2\chi.$$

ἤτοι $$\chi=8.$$

Ὥστε ὁ μόνος ἀριθμός, ὅστις λύει τὴν ἐξίσωσιν, εἶνε ὁ 8· καὶ τῷ ὄντι ἔχομεν $\frac{8}{2}-1=\frac{8+1}{3}$ ἢ $4-1=3$, ὅπερ ἀληθές.

Σημείωσις. Μία ἐξίσωσις μόνον ἕνα ἄγνωστον δύναται νὰ προσδιορίσῃ· ἂν δὲ ἐξίσωσίς τις περιέχῃ ἀγνώστους περισσοτέρους τοῦ ἑνός, δυνάμεθα νὰ δώσωμεν, οἱασδήποτε τιμὰς θέλωμεν εἰς πάντας τοὺς ἄλλους, πλὴν ἑνός. Τότε οὗτος ἀπομένει μόνος ἐν τῇ ἐξισώσει καὶ προσδιορίζεται ἐξ αὐτῆς.

Ἔστω π. χ. ἡ ἐξίσωσις $2\chi-3\psi=1$. Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὸν ψ τὴν τιμὴν 1, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $2\chi-3=1$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\chi=2$· ἐὰν δὲ δώσωμεν εἰς τὸν ψ τὴν τιμὴν 2, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $2\chi-6=1$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\chi=3\ ^1/_2$, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Λύσις δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους.

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις

$$\chi+\psi=30$$
$$\chi-\psi=18.$$

Ἐνταῦθα πρέπει νὰ εὕρωμεν δύο ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι νὰ ἐπαληθεύωσι καὶ τὰς δύο ταύτας ἐξισώσεις (ἤτοι νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα μὲν 30, διαφορὰν δὲ 18).

Ἐὰν προσθέσωμεν ἴσα εἰς ἴσα, εὑρίσκομεν.

$$\chi+\psi+\chi-\psi=48$$

ἤ $\chi+\chi+\psi-\psi=48$ ἢ $2\chi=48$.

ὅθεν καὶ $\chi=24$.

Ἀφ' οὗ εὑρήκαμεν τὸν χ, θέτομεν τὴν τιμὴν αὐτοῦ εἰς τὴν μίαν ἐκ τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων, ἔστω εἰς τὴν $\chi+\psi=30$, καὶ εὑρίσκομεν

$$24+\psi=30\cdot \text{ ὅθεν } \psi=6.$$

Ὥστε οἱ μόνοι ἀριθμοὶ οἱ τὰς δοθείσας ἐξισώσεις ἐπαληθεύοντες εἶνε ὁ 24 καὶ ὁ 6· καὶ ὄντως εἶνε

$$24+6=30 \text{ καὶ } 24-6=18.$$

Ἔστωσαν προσέτι αἱ δύο ἐξισώσεις

$$3\chi-\psi=2$$
$$7\chi+2\psi=48\cdot$$

ἐὰν τώρα προσθέσωμεν τὰς ἐξισώσεις ταύτας, δὲν θὰ φύγῃ ὁ ἄγνωστος ψ (ὡς εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα συνέβη)· διότι εἰς τὴν μίαν προστίθεται 2ψ εἰς δὲ τὴν ἄλλην ἀφαιρεῖται ψ· ἀλλ' εἶνε εὔκολον νὰ γίνῃ καὶ εἰς τὴν πρώτην 2ψ ἀντὶ ψ· ἀρκεῖ νὰ διπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα αὐτῆς· τότε ἡ πρώτη ἐξίσωσις γίνεται

$$6\chi-2\psi=4.$$

ἡ δὲ δευτέρα εἶνε $7\chi+2\psi=48$.

ὅθεν προσθέτοντες ἴσα εἰς ἴσα λαμβάνομεν

$$13\chi=52\cdot \text{ ὅθεν } \chi=4.$$

Ἐὰν δὲ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χ θέσωμεν εἰς τὴν δευτέραν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων, λαμβάνομεν $28+2\psi=48$
ἐξ ἧς $2\psi=20$ καὶ $\psi=10$·
ὥστε οἱ μόνοι ἀριθμοί, οἱ τὰς δοθείσας ἐξισώσεις ἐπαληθεύοντες, εἶνε

$$\chi=4 \text{ καὶ } \psi=10.$$

Σημείωσις. Ἐν γένει, ὅταν θέλωμεν διὰ τῆς προσθέσεως τῶν ἐξισώσεων ἢ διὰ τῆς ἀφαιρέσεως αὐτῶν νὰ φύγῃ ὁ εἷς ἄγνωστος (καὶ τοιουτοτρόπως νὰ εὐκολυνθῇ ἡ λύσις), πρέπει νὰ κάμωμεν, ὥστε ὁ ἄγνωστος οὗτος νὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν πολλαπλασιαστὴν εἰς ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις· γίνεται δὲ τοῦτο πάντοτε, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἑκατέραν τῶν ἐξισώσεων μὲ τὸν ἀριθμόν, ὅστις πολλαπλασιάζει τὸν ἄγνωστον ἐν τῇ ἄλλῃ.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

321. Πᾶσαι αἱ προηγούμεναι μέθοδοι τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων ὑπάγονται εἰς τὴν μέθοδον τῶν ἐξισώσεων· συνίσταται δὲ αὕτη εἰς τοῦτο· εὑρίσκομεν ἐξίσωσίν τινα, ἥτις συνδέει τὰ γνωστὰ τοῦ προβλήματος πρὸς τὸν ἄγνωστον αὐτοῦ (ἤτοι τὰ δεδομένα πρὸς τὸ ζητούμενον)· ἔπειτα λύομεν τὸν ἐξίσωσιν ταύτην καὶ οὕτως ἔχομεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν.

Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν τὴν μέθοδον ταύτην, ἂς ἐφαρμόσωμεν αὐτὴν εἰς τὰ ἤδη λυθέντα (διὰ τῶν ἄλλων μεθόδων) προβλήματα.

Προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

1) 15 ὀκάδες ἐξ ἑνὸς πράγματος ἀξίζουν 128 δραχμάς· πόσον ἀξίζουν 40 ὀκάδες ἐκ τοῦ αὐτοῦ πράγματος;

Ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ χ τὴν ἀξίαν τῶν 40 ὀκάδων, ἡ ἀξία τῆς μιᾶς ὀκᾶς θὰ εἶνε $\frac{\chi}{40}$·

ἀλλ' ἐπειδὴ 15 ὀκάδες ἀξίζουν 128 δραχμάς, ἡ ἀξία τῆς ὀκᾶς θὰ εἶνε $\frac{128}{15}$ ἄρα θὰ εἶνε $\frac{\chi}{40}=\frac{128}{15}$.

ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἐπὶ 40 (δηλαδὴ ἀμφότερα τὰ ἴσα αὐτῆς), εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{40\times128}{15}$$

τὸ ἐξαγόμενον δὲ τοῦτο δίδει καὶ ὁ κανὼν τοῦ ἐδαφίου 295.

2) *'Εργάται τινὲς ἐργαζόμενοι 8 ὥρας καθ' ἡμέραν ἐτελείωσαν ἔργον τι εἰς 15 ἡμέρας· πόσας ὥρας ἔπρεπε νὰ ἐργάζωνται καθ' ἡμέραν, ἂν ἤθελον νὰ τελειώσωσιν αὐτὸ εἰς 12 ἡμέρας;*

Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν· ὅταν ἡ ἐργασία διαρκέσῃ 12 ἡμέρας, ὁ ὅλος ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν, καθ' ἃς ἐκτελεῖται, θὰ εἶνε 12χ· ὅταν δὲ διαρκέσῃ 15 ἡμέρας, ὁ ὅλος ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν, καθ' ἃς ἐκτελεῖται, εἶνε 15×8· ἐντεῦθεν συνάγομεν, ὅτι θὰ εἶνε $12\chi = 15\times 8$· καὶ διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ 12, εὑρίσκομεν

$$\chi = \frac{15\times 8}{12} \text{ ἤτοι } \chi = 10.$$

Προβλήματα τόκου.

Ἔστω κ τὸ κεφάλαιον, τ ὁ τόκος, ε τὸ ἐπιτόκιον καὶ χ ὁ χρόνος (εἰς ἔτη).

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον ἐκ τῶν τριῶν ἄλλων, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

Ἐπειδὴ 100 δραχμαὶ φέρουσιν εἰς ἓν ἔτος τόκον ε δραχμάς, ἡ μία δραχμὴ φέρει εἰς ἓν ἔτος τόκον $\frac{\varepsilon}{100}$, καὶ αἱ κ δραχμαὶ εἰς ἓν ἔτος φέρουσι τόκον $\frac{\varepsilon.\ \kappa.}{100}$, ἄρα αἱ κ δραχμαὶ εἰς χ ἔτη θὰ φέρωσι τόκον $\frac{\kappa.\ \varepsilon.\ \chi.}{100}$. εἶνε λοιπὸν $\tau = \frac{\kappa.\ \varepsilon.\ \chi.}{100}$ (παράβαλ. ἐδ. 303).

Παρατήρησις. Ἀντὶ $\kappa\times\varepsilon\times\chi$ ἐγράψαμεν διὰ συντομίαν κ.ε.χ. ἡ γραφὴ αὕτη τοῦ γινομένου εἶνε συνήθης, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ παριστῶνται διὰ γραμμάτων.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης, ἥτις συνδέει τὰ τέσσαρα ποσὰ (κεφάλαιον, ἐπιτόκιον, τόκον καὶ χρόνον), δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀμέσως τὸ ἕν, ὅταν ἔχωμεν τὰ τρία ἄλλα.

Ἐάν, λόγου χάριν, θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον κ ἐκ τῶν τριῶν ἄλλων, πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ ἴσα ἐπὶ 100 καὶ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $100.\ \tau = \kappa.\ \varepsilon.\ \chi.$

ἔπειτα διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ τοῦ γινομένου ε. χ. τότε εὑρίσκομεν $\frac{100.\ \tau.}{\varepsilon.\ \chi.} = \kappa$ (παράβαλ. ἐδ. 304)

Ἐὰν δὲ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν χρόνον ἐκ τῶν τριῶν ἄλλων, διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα (α) διὰ τοῦ γινομένου κ. ε. τότε εὑρίσκομεν

$$\frac{100\tau.}{\kappa.\ \varepsilon}=\chi \qquad \text{(παράβαλε ἐδ. 305).}$$

Ἐὰν τέλος θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον ε, διαιροῦμεν τὰ ἴσα (α) διὰ τοῦ γινομένου κ. χ καὶ εὑρίσκομεν

$$\frac{100\tau}{\kappa.\ \chi}=\varepsilon \qquad \text{(παράβαλε ἐδ. 306)}$$

Ὥστε πάντα τὰ προβλήματα τοῦ τόκου λύονται ἐκ μιᾶς μόνης ἐξισώσεως

$$\tau=\frac{\kappa.\varepsilon.\chi.}{100}.$$

Σημείωσις. Ὁμοίως λύονται τὰ προβλήματα τῆς ὑφαιρέσεως ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$\upsilon=\frac{\kappa.\chi.\varepsilon.}{100+\chi.\varepsilon}$$

τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν κατὰ τὰ ἐν τῷ ἐδαφίῳ 311 ἐκτεθέντα καὶ ἐν τῇ ὁποίᾳ υ σημαίνει τὴν ὑφαίρεσιν (ἐσωτερικήν).

Μερισμὸς εἰς μέρη ἀνάλογα.

Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς Κ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν α, β, γ.

Τὰ ζητούμενα μέρη τοῦ Κ, ὡς ἀνάλογα τῶν α, β, γ, θὰ εἶνε

$$\alpha\chi,\ \beta\chi,\ \gamma\chi$$

τοῦ χ ὄντος ἀγνώστου τινὸς ἀριθμοῦ.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ μέρη τοῦ Κ προστιθέμενα δίδουσι τὸν Κ, ἔπεται

$$\alpha\chi+\beta\chi+\gamma\chi=K$$

ἤτοι

$$(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\chi=K \qquad \text{(ἐδ. 174)}$$

καὶ ἂν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ τοῦ α+β+γ, εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{K}{\alpha+\beta+\gamma}$$

ὥστε τὰ μέρη τοῦ Κ θὰ εἶνε

$$\frac{\alpha K}{\alpha+\beta+\gamma},\qquad \frac{\beta K}{\alpha+\beta+\gamma},\qquad \frac{\gamma K}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Προβλήματα μίξεως.

1). Ἔχει τις σῖτον τριῶν εἰδῶν· τοῦ πρώτου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 30 λεπτά, τοῦ δευτέρου 25, τοῦ δὲ τρίτου 22· ζητεῖται, ἂν ἀναμίξῃ 800 ὀκάδας ἐκ τοῦ πρώτου εἴδους καὶ 1000 ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ 1800 ἐκ τοῦ τρίτου, πόση θὰ εἶνε ἡ ἀξία τῆς ὀκᾶς τοῦ μίγματος;

Ἔστω χ ἡ ζητουμένη ἀξία τῆς ὀκᾶς τοῦ μίγματος· ἐπειδὴ τὸ μῖγμα συνίσταται ἐξ $800+1000+1800$ ὀκάδων, ἡ ἀξία αὐτοῦ θὰ εἶνε $(800+1000+1800).\ \chi$.

Ἀλλ' ἡ ἀξία τοῦ μίγματος εὑρίσκεται καὶ ἐκ τῶν ἀξιῶν τῶν μερῶν του· καὶ τὸ μὲν πρῶτον μέρος, ἤτοι αἱ 800 ὀκάδες τοῦ πρώτου εἴδους, ἀξίζει 30×800 λεπτά, τὸ δὲ δεύτερον 25×1000 καὶ τὸ τρίτον 22×1800· ὥστε ἡ ἀξία τοῦ μίγματος εἶνε λεπτὰ

$$30\times800+25\times1000+22\times1800\cdot$$

ἄρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(800+1000+1800)\chi=30\times800+25\times1000+22\times1800$$

καὶ $$\chi=\frac{30\times800+25\times1000+22\times1800}{800+1000+1800}=\frac{886}{36}=24\ \frac{11}{18}$$

2). Ἔχει τις δύο εἰδῶν οἴνους· τοῦ πρώτου εἴδους ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 55 λεπτά, τοῦ δὲ δευτέρου 90· θέλει δὲ νὰ κάμῃ ἐξ αὐτῶν μῖγμα 1200 ὀκάδων, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ ἀξίζῃ 60 λεπτά· πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρου εἴδους;

Ἔστωσαν χ αἱ ὀκάδες, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ τοῦ πρώτου εἴδους καὶ ψ αἱ ὀκάδες τοῦ δευτέρου.

Ἐπειδὴ τὸ μῖγμα θὰ ἔχῃ 1200 ὀκάδας, θὰ εἶνε προφανῶς

$$\chi+\psi=1200.$$

Ἡ ἀξία τοῦ μίγματος θὰ εἶνε λεπτὰ 60×1200.

ἀλλ' αἱ χ ὀκάδες τοῦ πρώτου εἴδους ἀξίζουν λεπτὰ $55\ \chi$, αἱ δὲ ψ ὀκάδες τοῦ δευτέρου ἀξίζουν $90\ \psi$· ἄρα ἡ ἀξία τοῦ μίγματος θὰ εἶνε $55\ \chi+90\ \psi$.

Ἐντεῦθεν συνάγεται ἡ ἐξίσωσις $55\ \chi+90\ \psi=60\times1200$.

Ἔχομεν λοιπὸν πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τὰς δύο ἐξισώσεις

$$\chi+\psi=1200$$
$$55\chi+90\psi=60.\ 1200.$$

Πρὸς λύσιν τῶν ἐξισώσεων τούτων πολλαπλασιάζομεν τὴν πρώτην ἐπὶ 90 καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἀπ' αὐτῆς τὴν δευτέραν· τότε ἐξαφανίζεται ὁ ἄγνωστος ψ καὶ εὑρίσκομεν

$$90\chi-55\chi=1200\cdot 90-1200.60$$

ἢ

$$(90-55)\chi=1200\,(90-60) \qquad (\text{ἐδ. } 51)$$

ὅθεν καὶ

$$\chi=1200\frac{90-60}{90-55} \text{ ἢ } 1200.\frac{30}{35} \text{ ἢ } 1200.\frac{6}{7}$$

ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ

$$\psi=1200\,\frac{60-55}{00-55} \text{ ἢ } 1200\cdot\frac{1}{7}$$

Σημείωσις. Ἐὰν τὰ ποσά, τὰ ὁποῖα θὰ ἀναμιχθῶσιν, εἶνε τριῶν ἢ καὶ περισσοτέρων εἰδῶν, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα δύο ἐξισώσεις μὲ τρεῖς ἢ περισσοτέρας ἀγνώστους. Θὰ εἶνε λοιπὸν δυνατὸν νὰ λάβωμεν καὶ ἄλλα ποσὰ ὡς θέλομεν, πλὴν δύο, ἅτινα θὰ προσδιορίζωσιν αἱ δύο ἐξισώσεις· διὰ τοῦτο τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται τότε ἀπείρους λύσεις.

Συνεζευγμένη μέθοδος.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρῶτον πρόβλημα τοῦ ἐδ. 298, ὑποθέτομεν, ὅτι πάντα τὰ ἐν αὐτῷ περιεχόμενα νομίσματα τρέπονται εἰς ἓν μόνον εἶδος, ἔστω εἰς δραχμάς. Ἐὰν α εἶνε ἡ ἀξία τῆς τουρκικῆς λίρας εἰς δραχμάς, β ἡ ἀξία τῆς ἀγγλικῆς καὶ γ ἡ ἀξία τοῦ ῥουβλίου, θὰ ἔχωμεν τὰς ἐξισώσεις (κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος).

$\gamma\chi=1800.\ \alpha$, διότι χ ῥούβλια κάμνουν 1800 λίρ. τουρκ.
$12\alpha=\ 11\cdot\ \beta$, διότι 12 λίρ. τουρκ. κάμνουν 11 ἀγγλικὰς
$26\beta=\ 165,\ \gamma$, διότι 26 ἀγγ. λίραι κάμνουν 165 ῥούβλια.

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἴσα ἐπὶ ἴσα, εὑρίσκομεν $\chi.\ 12.\ 26.\ \alpha\ \ \beta.\ \gamma=1800.\ 11.\ 165\ \ \alpha.\ \beta.\ \gamma$ καὶ διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ τοῦ $\alpha.\ \beta.\ \gamma.$

$$\chi.\ 12.\ 26=1800.\ 11.\ 165.$$

ὅθεν

$$\chi=\frac{1800.\ 11.\ 165.}{12.\ \ 26.}$$

Πρὸς ἄσκησιν περὶ τὴν μέθοδον τῶν ἐξισώσεων λύομεν καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) Νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 200 εἰς δύο μέρη, ὧν ἡ διαφορὰ νὰ εἶνε 18.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὰ δύο μέρη διὰ τῶν γραμμάτων χ καὶ ψ, θὰ ἔχωμεν τὰς ἐξισώσεις.

$$\chi+\psi=200$$

καὶ

$$\chi-\psi=18$$

Πρὸς λύσιν τῶν ἐξισώσεων τούτων προσθέτομεν αὐτὰς καὶ εὑρίσκομεν $2\chi = 218$· ἄρα $\chi = 109$.
καὶ ἐπειδὴ $\chi + \psi = 200$· θὰ εἶνε $109 + \psi = 200$ ἄρα $\psi = 91$.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ ἥμισυ καὶ τὸ τρίτον προστιθέμενα νὰ δίδωσι τὸν κατὰ μονάδα μικρότερον ἀριθμόν.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ χ, τὸ ἥμισυ αὐτοῦ θὰ εἶνε $\frac{\chi}{2}$ τὸ τρίτον αὐτοῦ $\frac{\chi}{3}$. θὰ εἶνε δὲ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος·

$$\frac{\chi}{2} + \frac{\chi}{3} = \chi - 1.$$

Πρὸς λύσιν τῆς ἐξισώσεως ταύτης πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ ἴσα ἐπὶ 6 καὶ εὑρίσκομεν

$$3\chi + 2\chi = 6\chi - 6 \text{ ἢ } 5\chi = 6\chi - 6$$

καὶ προσθέτοντες 6 εἰς ἀμφότερα τὰ ἴσα, $5\chi + 6 = 6\chi$
καὶ ἀφαιροῦντες 5χ ἀπ' ἀμφοτέρων εὑρίσκομεν $6 = \chi$.

3) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τέταρτον διαφέρει ἀπὸ τοῦ τρίτου κατὰ μονάδας.

Ἐὰν διὰ τοῦ χ παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\chi}{3} - \frac{\chi}{4} = 1$$

Διὰ νὰ λύσωμεν δὲ αὐτήν, πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ ἴσα ἐπὶ 3. 4. ἤτοι 12, ὅτι εὑρίσκομεν $4\chi - 3\chi = 12$, ἤτοι $\chi = 12$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

Περὶ λόγου καὶ ἀναλογιῶν.

322. *Λόγος* τοῦ α πρὸς τὸν β λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις δεικνύει πῶς ἀποτελεῖται ὁ α ἐκ τοῦ β καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ.

Ὁ λόγος σύγκειται ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς, καθ' ὃν τρόπον σύγκειται ὁ α ἐκ τοῦ β καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ.

Ἐὰν π. χ. εἶνε $\alpha = \beta + \beta + \frac{\beta}{2}$ ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β εἶνε.

$1 + 1 + \frac{1}{2}$ ἤτοι $\frac{5}{2}$

Σημείωσις. Ὁμοίως ὁρίζεται καὶ ὁ λόγος δύο οἱωνδήποτε ὁμοειδῶν ποσῶν.

Θεώρημα.

323. *Ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β εἶνε τὸ πηλίκον* $\frac{\alpha}{\beta}$.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β εἶνε $2\frac{3}{5}$· τοῦτο σημαίνει, ὅτι εἶνε

$$\alpha = \beta + \beta + \frac{\beta}{5} + \frac{\beta}{5} + \frac{\beta}{5}$$

ἢ

$$\alpha = (1 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}) \quad (\text{ἐδ. } 174).$$

Ἐντεῦθεν συνάγεται, ἂν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ τοῦ β,

$$\frac{\alpha}{\beta} = 1 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 2\frac{3}{5}$$

ὥστε ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β εἶνε τὸ πηλίκον τοῦ α διὰ β.

Διὰ τοῦτο ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸν β παρίσταται διὰ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἢ καὶ διὰ τοῦ $\alpha : \beta$.

324. *Ἀναλογία* εἶνε ἡ ἰσότης δύο λόγων.

οἷον $\frac{12}{8} = \frac{6}{4}$ ἢ $12 : 8 = 6 : 4$ εἶνε ἀναλογία.

Σημείωσις. Ὅταν ἡ ἀναλογία γράφηται διὰ τεσσάρων ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς· $12:8=6:4$, οἱ εἰς τὰ ἄκρα εὑρισκόμενοι ἀριθμοὶ (οἱ 12 καὶ 4) λέγονται *ἄκροι* τῆς ἀναλογίας, οἱ δὲ ἄλλοι δύο λέγονται *μέσοι*· καὶ οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ λέγονται *ὅροι* τῆς ἀναλογίας. Πρὸς τούτοις οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ τῶν δύο λόγων (ὁ 12 καὶ 6) λέγονται *ἡγούμενοι*, οἱ δὲ δεύτεροι λέγονται *ἑπόμενοι*.

325. Ἐπειδὴ αἱ ἀναλογίαι ὑπάγονται εἰς τὰς ἰσότητας, αἱ ἰδιότητες αὐτῶν εὑρίσκονται ἐκ τῶν γενικῶν ἰδιοτήτων τῆς ἰσότητος· ὥστε εἶνε περιττὸν νὰ γίνηται ἰδιαίτερος λόγος περὶ αὐτῶν· διὰ τοῦτο ἀρκούμεθα εἰς τὰς ἑξῆς δύο ἰδιότητας.

1) *Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶνε ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων.*

Ἔστω ἡ ἀναλογία $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα ἐπὶ $\beta \times \delta$, εὑρίσκομεν

$$\frac{\alpha}{\beta} \times \beta \times \delta = \frac{\gamma}{\delta} \times \delta \times \beta$$

ἢ $\alpha \times \delta = \beta \times \gamma$· ὅπερ ἐπρόκειτο νὰ δείξωμεν.

Καὶ ἀντιστρόφως· ἐκ τῆς ἰσότητος $\alpha \times \delta = \beta \times \gamma$, ἐὰν διαιρέσωμεν τὰ ἴσα διὰ τοῦ $\beta \times \delta$, προκύπτει

$$\frac{\alpha \times \delta}{\beta \times \delta} = \frac{\beta \times \gamma}{\beta \times \delta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \quad \text{ἢ} \quad \alpha : \beta = \gamma : \delta$$

ὥστε, ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶνε τοιοῦτοι, ὥστε τὸ γινόμενον δύο ἐξ αὐτῶν νὰ εἶνε ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι συνιστῶσιν ἀναλογίαν, ἐν τῇ ὁποίᾳ ἄκροι εἶνε οἱ παράγοντες τοῦ ἑνὸς γινομένου, μέσοι δὲ οἱ παράγοντες τοῦ ἄλλου.

2) *Ἐὰν προστεθῶσιν οἱ ὁμοταγεῖς ὅροι ὁσωνδήποτε λόγων ἴσων, προκύπτει λόγος ἴσος.*

Ἔστωσαν ἴσοι οἱ λόγοι $\frac{\alpha}{A}, \frac{\beta}{B}, \frac{\gamma}{\Gamma}, \frac{\delta}{\Delta}.$

Ἐπειδὴ τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{A}, \frac{\beta}{B}, \frac{\gamma}{\Gamma}, \frac{\delta}{\Delta}$ εἶνε ἴσα, ἐὰν προσθέσωμεν τοὺς ὁμωνύμους αὐτῶν ὅρους, προκύπτει κλάσμα ἴσον (ἐδ. 199).

ἄρα καὶ τὸ κλάσμα $\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{A+B+\Gamma+\Delta}$ θὰ εἶνε ἴσον πρὸς τὰ προηγούμενα τουτέστιν ὁ λόγος τοῦ $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ πρὸς τὸ $A+B+\Gamma+\Delta$ εἶνε ἴσος πρὸς τοὺς δοθέντας ἴσους λόγους

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐὰν ὁσωνδήποτε λόγων προστεθῶσιν οἱ ὁμοταγεῖς ὅροι, προκύπτει λόγος, ὅστις περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ἐκ τῶν δοθέντων λόγων

2) Νὰ δειχθῇ, ὅτι, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ὁμοταγεῖς ὅροι ὁσωνδήποτε ἀναλογιῶν, προκύπτει ἀναλογία.

3) Ἐὰν οἱ ὁμοταγεῖς ὅροι δύο ἀναλογιῶν προστεθῶσι, πότε προκύπτει ἀναλογία ἀληθής;

ΤΕΛΟΣ.

Αγορ. Κ. [illegible]

346
16ος

17.000

ε50