ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΣ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΜΟΝΗ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ

ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΑΣ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΚΑΤΑ ΑΜΒ΄. ΝΟΜΟΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚ ΤΟΥ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΥ «Ο ΠΑΛΑΜΗΔΗΣ»
1890

Πᾶν ἀντίτυπον μὴ φέρον τὴν ὑπογραφήν μου θεωρεῖται ἐκ τυποκλοπίας προερχόμενον.

Ἐν Ἀθήναις, τῇ 14 Ἰουνίου 1888.

Ἀριθ. Πρωτ. 8064 / Διεκπ.

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΤΟ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΤΩΝ ΕΚΚΛΗΣΙΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

Πρὸς τὸν κ. Ι. Ν. Χατζιδάκιν.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰ ἄρθρα 7 καὶ 8 τοῦ ἀπὸ 22 Ἰουνίου 1882 ͵ΑΜΒ' νόμου καὶ τὸ ἄρθρον 16 τοῦ ἀπὸ 4 Σεπτεμβρίου τοῦ αὐτοῦ ἔτους Β. Διατάγματος περὶ τῶν διδακτικῶν βιβλίων τῆς μέσης καὶ τῆς κατωτέρας ἐκπαιδεύσεως, ἐπὶ τῇ βάσει τῆς κατὰ τὰ ἄρθρα 9 καὶ 14 τοῦ αὐτοῦ Β. Διατάγματος ἐκθέσεως τῆς δευτέρας Ἐπιτροπείας τῶν κριτῶν τῶν διδακτικῶν βιβλίων τῆς μέσης ἐκπαιδεύσεως, γνωρίζομεν ὑμῖν, ὅτι τὴν εἰς τὸν διαγωνισμὸν ὑποβληθεῖσαν *Εὐθύγραμμον Τριγωνομετρίαν* ὑμῶν ἐγκρίνομεν, ὅπως εἰσαχθῇ ἐπὶ τετραετίαν ἀρχομένην ἀπὸ τοῦ προσεχοῦς σχολικοῦ ἔτους ὡς μόνον διδακτικὸν βιβλίον διὰ τοὺς μαθητὰς τῶν γυμνασίων τοῦ Κράτους, δημοσίων, δημοσυντηρήτων καὶ ἰδιωτικῶν. Καλεῖσθε δέ, ὅπως συμμορφωθῆτε πρὸς τὸ ἄρθρον 6 τοῦ ͵ΑΜΒ' Νόμου καὶ πρὸς τὰς διατάξεις τοῦ ͵ΑΧΙ' Νόμου τῆς 20 Δεκεμβρίου 1887 καὶ πρὸς τὸ ἄρθρον 18 τοῦ ἀπὸ 4 Σεπτεμβρίου 1882 Β. Διατάγματος καὶ τὸ ἄρθρον 17 τοῦ αὐτοῦ Διατάγματος ὡς ἀντικατεστάθη συμπληρωθὲν δι' ὁμοίου τῆς 4 Ἰουνίου 1884.

Ὁ Ὑπουργὸς
Π. ΜΑΝΕΤΑΣ

Ὁ Διεκπεραιωτὴς
Σ. Π. ΠΑΡΙΣΗΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἐπιθυμῶν νὰ κατασταθῇ δυνατὴ ἡ ἐν τοῖς ἡμετέροις γυμνασίοις διδασκαλία τῆς τριγωνομετρίας ἔγραψα τὸ παρὸν βιβλίον. Ἐφρόντισα δὲ ὅπως ἀποβῇ ἁπλούστερον τῶν ὑπαρχόντων καὶ ἁρμοδιώτερον, παραλείψας ὅσα μόνον εἰς τὴν ἀνωτέραν μαθηματικὴν χρησιμεύοντα οὐδαμῶς ἀναγκαιοῦσι πρὸς τὴν ἐπίλυσιν τῶν τριγώνων καὶ πρὸς τὰς ἐφαρμογὰς τῆς τριγωνομετρίας, εἰς τὰς ὁποίας ἀποβλέπει ἡ γυμνασιακὴ ἐκπαίδευσις. Διὰ τοῦτο δὲν ἐθεώρησα τόξα ἀρνητικά, οὐδὲ ὑπερβαίνοντα τὰς 360°· ἀνέπτυξα δὲ πρῶτον τὴν θεωρίαν τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου· διότι αὐταὶ εἶνε αἱ πρωτεύουσαι τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ καί, ἴσην ἔχουσαι σημασίαν καὶ σπουδαιότητα, ἀποτελοῦσι τὴν βάσιν τῆς τριγωνομετρίας· μετὰ δὲ ταῦτα ὥρισα τὰς ἐφαπτομένας καὶ τὰς συνεφαπτομένας ὡς πηλίκα τῶν δύο πρώτων τριγωνομετρικῶν γραμμῶν· διότι κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον καὶ τὰ σημεῖα αὐτῶν ἁπλούστατα ἐξηγοῦνται καὶ ἡ σπουδὴ αὐτῶν καθίσταται ἁπλουστέρα. Τὰς δὲ τεμνούσας καὶ συνδιατεμνούσας παρέλειψα· διότι αὗται κατήντησαν ἤδη ἄχρηστοι καὶ ἀντικαθίστανται συνήθως ὑπὸ τῶν πηλίκων $\frac{1}{\text{συντ}}$ καὶ $\frac{1}{\text{ημτ}}$ ἀναγόμεναι οὕτω εἰς τὰς δύο πρωτευούσας γραμμάς.

Ὅσα ἐσημειώθησαν δι' ἀστερίσκων (ὡς ἡ κατασκευὴ τῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων καί τινα ἄλλα) δύνανται νὰ παραλείπωνται, ἐὰν ὁ χρόνος δὲν συγχωρῇ τὴν διδασκαλίαν αὐτῶν.

Ι. Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙΣ

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α'.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑΙ ΓΡΑΜΜΑΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τὸ τρίγωνον εἶνε τὸ ἁπλούστατον τῶν σχημάτων· αἱ ἰδιότητες πάντων τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων ἀνάγονται εἰς ἰδιότητας τοῦ τριγώνου καὶ διὰ τῆς βοηθείας τοῦ τριγώνου ἀποδεικνύονται· καὶ αὐτοῦ τοῦ κύκλου, καίπερ διαφορωτάτου κατὰ τὸ σχῆμα, αἱ ἰδιότητες διὰ τῶν τριγώνων ἀποδεικνύονται· ἀλλὰ καὶ ἡ μέτρησις πάντων τῶν σχημάτων ἀνάγεται εἰς τὴν μέτρησιν τριγώνων, ὡς ἐν τοῖς στοιχείοις τῆς γεωμετρίας ἐμάθομεν· καὶ ἐν ἑνὶ λόγῳ τὸ τρίγωνον καὶ ἐν τῇ θεωρητικῇ γεωμετρίᾳ καὶ ἐν ταῖς ποικίλαις ἐφαρμογαῖς αὐτῆς (ὡς ἐν τῇ γεωδαισίᾳ, τῇ ἀστρονομίᾳ, τῇ ναυτικῇ κτλ.) ἔχει τὸ μέγιστον μέρος.

Αἱ πλεῖσται τῶν ἐφαρμογῶν τῆς γεωμετρίας ἄγουσιν εἰς τὴν μέτρησιν ἑνὸς ἢ πολλῶν ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ τριγώνου· (λέγω δὲ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου τὰς γωνίας καὶ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ). Ἀλλ' ἐκ τῆς γεωμετρίας εἶνε γνωστόν, ὅτι, ὅταν ἐκ τῶν ἓξ στοιχείων τριγώνου δοθῶσιν

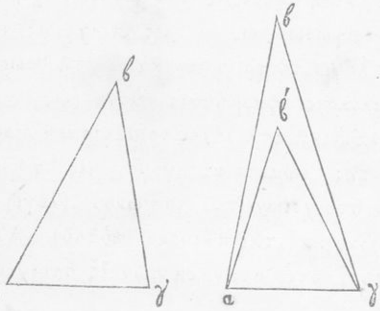
ἢ 1) μία πλευρὰ καὶ δύο γωνίαι,

ἢ 2) δύο πλευραὶ καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία,

ἢ 3) δύο πλευραὶ καὶ ἡ ἀπέναντι τῆς μεγαλητέρας γωνία,

ἢ 4) αἱ τρεῖς πλευραί,

καὶ τὰ λοιπὰ τοῦ τριγώνου στοιχεῖα, καίτοι ἄγνωστα, εἶνε ὅμως ἐντελῶς ὡρισμένα· καὶ δύνανται νὰ εὑρεθῶσι διὰ γεωμετρικῆς κατασκευῆς. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ τῆς γεωμετρίας χορηγούμεναι κατασκευαί, ἂν καὶ θεωρητικῶς εἶνε ἀκριβεῖς, ἐν τῇ ἐφαρμογῇ ὅμως οὐ μόνον ὑπόκεινται εἰς λάθη ἕνεκα τῆς ἀτελείας τῶν ὀργάνων ἡμῶν, ἀλλὰ καὶ ἀκατόρθωτοι εἶνε, ὅταν αἱ δεδομέναι γραμμαί, ὡς συμβαίνει συνήθως, ἕνεκα τοῦ μεγέθους αὐτῶν δὲν δύνανται νὰ περιληφθῶσιν ἐντὸς τοῦ σχεδίου, ἐφ' οὗ ἐργαζόμεθα. Καὶ δυνατὸν μὲν εἶνε τότε νὰ σμικρύνωμεν πάσας τὰς δεδομένας γραμμὰς κατά τινα ἀναλογίαν (π. χ. ἀντὶ 10000 μέτρων νὰ λάβωμεν 1), ὥστε νὰ δύναται ἡ κατασκευὴ νὰ συμπεριληφθῇ ἐντὸς τοῦ σχεδίου· διότι τότε τὸ ἐν τῷ σχεδίῳ κατασκευασθὲν τρίγωνον εἶνε ὅμοιον πρὸς τὸ ζητούμενον καὶ ἐκ τῶν γραμμῶν αὐτοῦ, ἐὰν μεγεθυνθῶσι κατὰ τὴν τεθεῖσαν ἀναλογίαν, εὑρίσκονται αἱ γραμμαὶ τοῦ ζητουμένου· ἀλλὰ τότε τὰ λάθη ἀποβαίνουσι μεγάλα· διότι ἂν εἴς τινα γραμμὴν τοῦ σχεδίου συμβῇ λᾶθος $\frac{1}{1000}$ τοῦ μέτρου, ἐπειδὴ θὰ πολλαπλασιασθῇ αὕτη ἐπὶ τὸν 10000, ἵνα δώσῃ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν γραμμὴν τοῦ ζητουμένου τριγώνου, θὰ συμβῇ ἐπὶ τῆς ἀληθοῦς γραμμῆς λᾶθος 10 μέτρων. Ἀλλ' ἔτι περισσότερον βλάπτουσι τὰ ἐπὶ τῶν γωνιῶν συμβαίνοντα λάθη, ὡς γίνεται δῆλον ἐκ τοῦ ἐπομένου παραδείγματος.



Σχῆμα 1

Ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις δύο σημείων Α καὶ Β. Ἐὰν ἐμπόδιόν τι ἐμποδίζῃ τὴν ἄμεσον μέτρησιν, θὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις διὰ τριγώνου· πρὸς τοῦτο μετρεῖται ἐκ τοῦ σημείου Α μετὰ πάσης τῆς δυνατῆς ἀκριβείας γραμμή τις εὐθεῖα, ἡ ΑΓ, ἥτις λέγεται *βάσις*. Ὡσαύτως μετροῦνται ὅσον τὸ δυνατὸν ἀκριβῶς καὶ αἱ γωνίαι ΓΑΒ καὶ ΑΓΒ· ἔστω π. χ.

$$\text{ΑΓ}=2000,\ \text{μέτρα} \qquad \text{Α}=79^0\ 18' \qquad \text{Γ}=82^0\ 25'$$

ἔπειτα ὁρίζεται ἡ σμίκρυνσις, ἔστω $\frac{1}{10000}$, καὶ κατασκευάζεται ἐπὶ τοῦ σχεδίου ἡ εὐθεῖα αγ ἴση πρὸς τὰ $\frac{2}{10}$ τοῦ μέτρου καὶ αἱ γωνίαι α καὶ γ ἴσαι πρὸς τὰς μετρηθείσας Α καὶ Γ καὶ γίνεται οὕτω τὸ τρίγωνον αβγ ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ· τέλος μετρεῖται ἡ αβ καὶ ἐξ αὐτῆς πολλαπλασιαζομένης ἐπὶ 10000 εὑρίσκεται ἡ ζητουμένη ἀπόστασις ΑΒ.

Ἀλλ' ἐκ τοῦ τρόπου τούτου βλέπει τις ἀμέσως ὅτι λᾶθός τι (ἔστω καὶ ὀλίγων λεπτῶν) συμβὰν περὶ τὴν χάραξιν τῶν γωνιῶν α καὶ γ, ἢ περὶ τὴν μέτρησιν τῶν Α καὶ Γ, προξενεῖ λᾶθος ἐπὶ τῆς αβ, τὸ ὁποῖον, ὅταν ἡ γωνία β εἶνε ἱκανῶς μικρὰ (ἤτοι τὸ ἄθροισμα α+γ πλησιάζῃ πρὸς τὰς δύο ὀρθάς), δύναται νὰ ὑπερβῇ καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς· δυνατὸν μάλιστα μηδὲ ὅλως νὰ τέμνωνται ἐντὸς τοῦ σχεδίου αἱ εὐθεῖαι αβ καὶ γβ, ὅταν ἡ γωνία β εἶνε λίαν μικρά.

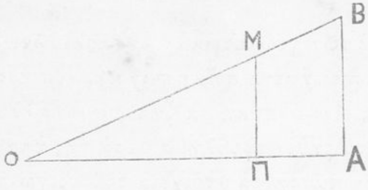
Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν, ὅτι ἡ διὰ τῶν γεωμετρικῶν κατασκευῶν εὕρεσις τριγώνου, οὗτινος ἐδόθησαν τὰ εἰρημένα τρία στοιχεῖα, εἶνε ἀνεπαρκὴς ἐν τῇ πράξει· καὶ ἑπομένως εἶνε ἀνάγκη νὰ ζητήσωμεν ἄλλον τρόπον, διὰ τοῦ ὁποίου νὰ λύηται τὸ ῥηθὲν πρόβλημα μετὰ τῆς ἀπαιτουμένης ἀκριβείας. Ἐὰν νοήσωμεν πάντα τὰ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου μεμετρημένα καὶ ἐκπεφρασμένα δι' ἀριθμῶν γίνεται φανερόν, ὅτι μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες μετροῦσι τὰ δεδομένα στοιχεῖα καὶ τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες μετροῦσι τὰ ζητούμενα, ἐξ ἀνάγκης ὑπάρχουσι σχέσεις τινὲς ἀριθμητικαί· διότι οἱ δεύτεροι οὗτοι ἀριθμοὶ εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένοι, ὅταν δοθῶσιν οἱ πρῶτοι. Ἐκ τῶν ἀριθμητικῶν τούτων σχέσεων, ὅταν εὑρεθῶσι, θὰ καταστῇ δυνατὸν νὰ εὑρίσκωμεν τὰ ζητούμενα τοῦ τριγώνου στοιχεῖα διὰ τῶν ἀριθμητικῶν μεθόδων, αἵτινες ὑπερέχουσι τῶν γεωμετρικῶν κατὰ τοῦτο, ὅτι, οὖσαι αὐτοτελῆ τῆς διανοίας ἔργα, οὐδαμῶς παραβλάπτονται ἐκ τῆς ἀτελείας τῶν ὀργάνων ἡμῶν, ὥστε, ὅταν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶνε ἀκριβεῖς, δύνανται οἱ ἐξ αὐτῶν εὑρισκόμενοι διὰ τῶν ἀριθμητικῶν μεθόδων νὰ προσδιορισθῶσι μεθ' ὅσης θέλωμεν προσεγγίσεως.

Ἡ ἔρευνα τῶν ἀριθμητικῶν σχέσεων, αἵτινες ὑπάρχουσι μεταξὺ τῶν στοιχείων παντὸς τριγώνου εἶνε ἔργον τῆς τριγωνομετρίας· σκοπὸς δ' αὐτῆς εἶνε, ὅταν δοθῶσι τρία ἐκ τῶν στοιχείων τούτων (οὐχὶ αἱ τρεῖς γωνίαι), ἡ διὰ τῶν ἀριθμῶν εὕρεσις τῶν λοιπῶν.

Τὸ ἔργον τῆς τριγωνομετρίας καθιστᾷ ἁπλούστερον ἡ ἀνάλυσις παντὸς τριγώνου εἰς δύο ὀρθογώνια τρίγωνα· ἐὰν τῷ ὄντι ἀπὸ τῆς μεγαλητέρας τῶν γωνιῶν καταβιβασθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ἀπέναντι πλευράν, διαιρεῖ τὸ τρίγωνον εἰς δύο ὀρθογώνια τρίγωνα. Ὥστε ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἀριθμητικαὶ σχέσεις τῶν στοιχείων τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου· διότι εἰς τοῦτο ἀνάγονται καὶ τὰ ἄλλα.

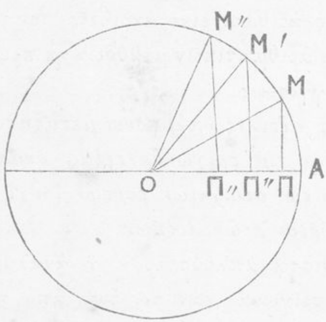
Ἀλλὰ καὶ ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ἀρκεῖ νὰ θεωρηθῶσι μόνον ἐκεῖνα, ὧν ἡ ὑποτείνουσα εἶνε ἴση τῇ μονάδι τοῦ μήκους καὶ παρίσταται ἑπομένως διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 1· διότι πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὡς τὸ ΟΑΒ, εἶνε ὅμοιον πρὸς ἓν τοιοῦτον· ἐὰν τῷ ὄντι ληφθῇ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης τὸ τμῆμα ΟΜ ἴσον τῇ μονάδι τοῦ μήκους καὶ ἐκ τοῦ Μ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ ἡ ΜΠ, γίνεται ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὸ

ΟΜΠ, ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν καὶ ἔχον ὑποτείνουσαν ἴσην τῇ μονάδι.



Σχῆμα 2

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τῶν ὁποίων ἡ ὑποτείνουσα εἶνε 1, ὑπολείπονται τέσσαρα στοιχεῖα ἄγνωστα, αἱ δύο ὀξεῖαι γωνίαι καὶ αἱ δύο κάθετοι πλευραί· ἀλλὰ καὶ μεταξὺ τῶν γωνιῶν τούτων ὑπάρχει ἡ σχέσις $Μ+Ο=$ μιᾷ ὀρθῇ $=90^{\circ}$. ὥστε ἔχομεν τρία μόνον ἄγνωστα, τὴν γωνίαν Ο καὶ τὰς δύο πλευρὰς ΟΠ καὶ ΜΠ. Ὅτι δὲ πρὸς ἑκάστην τιμὴν τῆς γωνίας Ο ἀντιστοιχοῦσιν ὡρισμέναι τιμαὶ τῶν πλευρῶν ΟΠ καὶ ΠΜ, εἶνε φανερόν· ἂν λοιπὸν εἴχομεν πίνακα περιέχοντα τὰς τιμὰς τῆς γωνίας Ο καὶ ἀπέναντι ἑκάστης ἐξ αὐτῶν τὰς ἀντιστοιχούσας τιμὰς τῶν δύο καθέτων πλευρῶν, διὰ τοῦ τοιούτου πίνακος θὰ ἠδυνάμεθα νὰ λύσωμεν ἀριθμητικῶς πάντα τὰ περὶ ὧν ὁ λόγος προβλήματα τοῦ τριγώνου.



Σχῆμα 3

Ἐὰν ἡ γωνία Ο τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΠΜ λαμβάνῃ διαφόρους τιμάς, μενούσης ἀκινήτου τῆς πλευρᾶς αὐτῆς ΟΑ καὶ διατηρούσης τῆς ὑποτεινούσης ΟΜ τὸ ἑαυτῆς μῆκος 1, ἡ κορυφὴ Μ κινεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, ὅστις ἔχει κέντρον τὸ σημεῖον Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν μονάδα 1, αἱ δὲ τιμαὶ τῆς γωνίας Ο, ὡς ΑΟΜ, ΑΟΜ′ . . . θὰ μετρῶνται ὑπὸ τῶν κυκλικῶν τόξων ΑΜ, ΑΜ′ . . . ἅτινα ἄρχονται ἐκ τοῦ σημείου Α· ἀπὸ τῶν τόξων δὲ τούτων θὰ ἐξαρτῶνται αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ τοῦ τριγώνου, περὶ ὧν γίνεται λόγος· ἀλλὰ τότε ἡ μὲν μία ἐμφανίζεται ὡς κάθετος καταβιβαζομένη ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου τοῦ τόξου (ὅπερ μετρεῖ τὴν γωνίαν Ο) ἐπὶ τὴν διὰ τοῦ ἑτέρου διερχομένην διάμετρον, ἡ δὲ ἄλλη ὡς ἀπόστασις τῆς πλευρᾶς ταύτης ἀπὸ τοῦ κέντρου. Αἱ δύο αὗται γραμμαὶ ἀποτελοῦσι τὴν βάσιν τῆς τριγωνομετρίας καὶ περὶ τούτων θὰ διαλάβωμεν ἐν τοῖς ἑπομένοις.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑΙ ΓΡΑΜΜΑΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

Ἡμίτονον καὶ συνημίτονον.

ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Πᾶσα περιφέρεια νοεῖται διῃρημένη εἰς 360 ἴσα μέρη, ὧν ἕκαστον λέγεται *μοῖρα*· ἑκάστη δὲ μοῖρα εἰς 60 ἴσα μέρη, ἅτινα λέγονται πρῶτα λεπτά· καὶ ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 δεύτερα.

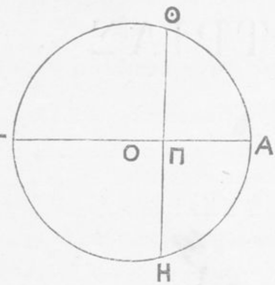
2. Ἐν κύκλῳ, ἔχοντι ἀκτῖνα τὴν μονάδα τοῦ μήκους καλεῖται *ἡμίτονον* τοῦ τυχόντος τόξου ἡ εὐθεῖα, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ ἑνὸς πέρατος τοῦ τόξου κάθετος ἐπὶ τὴν διὰ τοῦ ἑτέρου πέρατος διερχομένην διάμετρον.

Συνημίτονον δὲ τόξου λέγεται ἡ ἀπόστασις τοῦ ἡμιτόνου αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Κατὰ ταῦτα ἐν τῷ κύκλῳ ΑΘΓΔ (σχ. 4)' (οὗτινος ἡ ἀκτὶς ΟΘ ὑποτίθεται 1) τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου ΑΘ εἶνε ἡ εὐθεῖα ΘΠ, ἥτις ἐκ τοῦ πέρατος Θ τοῦ τόξου, ἤχθη κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΓ, τὴν διὰ τοῦ ἑτέρου πέρατος Α διερχομένην· τὸ δὲ συνημίτονον τοῦ αὐτοῦ τόξου εἶνε ἡ ΟΠ· τοῦτ' ἔστιν ἡ ἀπόστασις τοῦ ἡμιτόνου ΘΠ ἀπὸ τοῦ κέντρου Ο.

Σχῆμα 4.

3. Ἐὰν τὸ τόξον ΑΘ δὲν ὑπερβαίνῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν (ἤτοι τὰς 180°) καὶ ἐκβληθῇ τὸ ἡμίτονον αὐτοῦ ΘΠ πέραν τῆς διαμέτρου, ἐφ' ἣν εἶνε κάθετον, μέχρι τῆς περιφερείας, γίνεται ΠΗ=ΘΠ καὶ τόξ. ΑΗ=τόξ. ΑΘ. ὅθεν συνάγεται, ὅτι δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὸ ἡμίτονον καὶ ὡς ἑξῆς.



Σχῆμα 5.

Ἡμίτονον παντὸς τόξου εἶνε τὸ ἥμισυ τῆς χορδῆς τοῦ διπλασίου τόξου· συνημίτονον δὲ ἡ ἀπόστασις τῆς αὐτῆς χορδῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου α παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου ἡμα, τὸ δὲ συνημίτονον διὰ τοῦ συνα, ὑποτίθενται δὲ ἀμφότερα μεμετρημένα διὰ τῆς μονάδος ΟΑ καὶ ἐκπεφρασμένα δι' ἀριθμῶν.

4 Ὅταν συγκρίνωμεν τὰ ἡμίτονα καὶ τὰ συνημίτονα πολλῶν τόξων πρὸς ἄλληλα, ἵνα κατασταθῇ ἡ σύγκρισις αὐτῶν εὐκολώτερα, λαμβάνομεν πάντα τὰ τόξα οὕτως, ὥστε νὰ ἄρχωνται ἐξ ἑνὸς σημείου τῆς περιφερείας, ὅπερ διὰ τοῦτο λέγεται *ἀρχὴ τῶν τόξων*· τότε τὰ μὲν ἡμίτονα γίνονται κάθετα ἐπὶ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον (τὴν διὰ τῆς κοινῆς ἀρχῆς τῶν τόξων διερχομένην), τὰ δὲ συνημίτονα κεῖνται πάντα ἐπὶ τῆς διαμέτρου ταύτης.

Τοῦτο φαίνεται ἐκ τοῦ σχήματος 6· διότι τῶν τόξων ΑΘ, ΑΙ, ΑΚ ἡμίτονα μὲν εἶνε αἱ ΘΠ, ΙΡ, ΚΖ, κάθετοι ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΓ· συνημίτονα δὲ αἱ εὐθεῖαι ΟΠ, ΟΡ, ΟΖ, αἵτινες κεῖνται ἐπὶ τῆς ΑΓ.

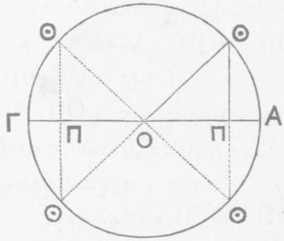
Σχῆμα 6.

5. Ἐὰν κινητὸν ἀναχωρήσῃ ἐκ τοῦ Α, δύναται νὰ διατρέξῃ τὴν περιφέρειαν κατὰ δύο ἀντιθέτους φορὰς ἤτοι τὴν ΑΘΙΚΓΔΑ καὶ τὴν ΑΔΓΚΙΘΑ· ἡ πρώτη, ἣν δεικνύει τὸ παρακείμενον βέλος, ἂς λέγηται θετικὴ φορά, ἡ δὲ δευτέρα ἀρνητική. Πάντα τὰ τόξα νοοῦνται ἐνταῦθα ὡς ἀρχόμενα ἐκ τοῦ Α καὶ ἔχοντα θετικὴν φοράν. Διὰ τῆς συνθήκης ταύτης ὁρίζεται ἐντελῶς τὸ τόξον, ὅταν δοθῇ τὸ πέρας αὐτοῦ. Οὕτω π.χ. τὸ τόξον, οὗτινος πέρας εἶνε τὸ Κ, εἶνε τὸ ΑΘΙΚ, τὸ περατούμενον εἰς τὸ Γ εἶνε τὸ ΑΘΙΚΒΓ καὶ τὸ περατούμενον εἰς τὸ Δ εἶνε τὸ ΑΘΙΚΒΓΔ (καὶ οὐχὶ τὸ ΑΔ)

Ἐὰν τὸ πέρας τόξου, ἔστω τοῦ ΑΘ, ὀπισθοχωροῦν πέσῃ ἐπὶ τὴν ἀρχὴν Α, τὸ τόξον καταντᾷ 0· ἐὰν δὲ τοὐναντίον προχωροῦν γράψῃ ὅλην τὴν περιφέρειαν καὶ ἐπιστρέψῃ εἰς τὸ Α, τὸ τόξον καταντᾷ 360^0, ὥστε *πᾶν τόξον περιλαμβάνεται μεταξὺ 0^0 καὶ 360^0*.

Σχέσεις μεταξὺ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου παντὸς τόξου.

6. Ἔστω τυχὸν τόξον τὸ ΑΘ. (σχ. 7), ὅπερ παριστῶμεν διὰ τοῦ γράμματος α· ἐὰν εἰς τὸ πέρας αὐτοῦ Θ φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ΟΘ, βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον αὐτοῦ εἶνε αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΘΠ. οὗτινος ἡ ὑποτείνουσα ὑπετέθη ἴση τῇ μονάδι· ἐκ τούτου ἕπεται κατὰ τὸ πυθαγόρειον θεώρημα.



Σχῆμα 7

(1) $(\text{ημ}α)^2+(\text{συν}α)^2=1$

τουτ' ἔστι *τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου παντὸς τόξου ἰσοῦται τῇ μονάδι* 1.

Ἡ ἐξίσωσις (1), ἡ τὸ ἡμίτονον πρὸς τὸ συνημίτονον τοῦ τυχόντος τόξου συνδέουσα, δεικνύει, ὅτι, *ὅταν τὸ ἡμίτονον αὐξηθῇ, τὸ συνημίτονον ἐλαττοῦται· καὶ ἀντιστρόφως*. Τοῦτο δὲ καὶ ἐκ τοῦ σχήματος συνάγεται ἀμέσως.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) δυνάμεθα, δοθέντος τοῦ ἡμιτόνου, νὰ εὕρωμεν τὸ συνημίτονον (τοῦ αὐτοῦ τόξου)· ἢ καὶ τἀνάπαλιν, δοθέντος τοῦ συνημιτόνου, νὰ εὕρωμεν τὸ ἡμίτονον· διότι αὕτη λυομένη μὲν πρὸς τὸ συνημίτονον γίνεται,

(2) $\text{συν}^2α=1-\text{ημ}^2α \quad \text{καὶ} \quad \text{συν}α=\sqrt{1-\text{ημ}^2α}$

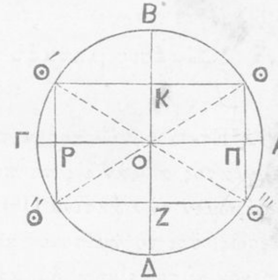
λυομένη δὲ πρὸς τὸ ἡμίτονον γίνεται

(3) $\text{ημ}^2α=1-\text{συν}^2α \quad \text{καὶ} \quad \text{ημ}α=\sqrt{1-\text{συν}^2α}$

Διάκρισις τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων εἰς θετικὰ καὶ εἰς ἀρνητικά.

7. Ἔστω τυχὸν τόξον μικρότερον τοῦ τεταρτημορίου ΑΒ, τὸ ΑΘ, ἐὰν ἐκ τοῦ πέρατος αὐτοῦ ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΘΘ'' καὶ ἡ Θ'Θ''' οὕτως,

ὥστε νὰ σχηματίζῃ τὴν γωνίαν ΑΟΘ‴ ἴσην τῇ γωνίᾳ ΑΟΘ, καὶ ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΘΘ′, Θ′Θ″, Θ″ Θ‴, Θ‴ Θ, γίνεται ὀρθογώνιον τὸ σχῆμα ΘΘ′ Θ″ Θ‴· διότι αἱ γωνίαι αὐτοῦ εἶνε ὀρθαί, ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς ἡμικύκλια. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τούτου γίνεται νῦν φανερόν, ὅτι τὰ 4 τόξα τὰ εἰς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ καταλήγοντα, ἔχουσι καὶ ἡμίτονα ἴσα (διότι εἶνε ΘΠ = Θ′Ρ = Θ″ Ρ = Θ‴ Π) καὶ συνημίτονα ἴσα (διότι εἶνε ΟΠ = ΟΡ). Ἀλλὰ πᾶν ἄλλο τόξον ἔχει ἡμίτονον διαφέρον τοῦ ΘΠ καὶ συνημίτονον διαφέρον τοῦ ΟΠ· διότι ἂν μὲν καταλήγῃ μεταξὺ τῶν σημείων Θ καὶ Θ′, ἢ μεταξὺ τῶν Θ″ καὶ Θ‴, ἔχει ἡμίτονον μεγαλήτερον τοῦ ΘΠ καὶ συνημίτονον μικρότερον τοῦ ΟΠ· ἂν δὲ καταλήγῃ μεταξὺ τῶν σημείων Θ‴ καὶ Θ, ἢ μεταξὺ τῶν Θ″ καὶ Θ′, ἔχει ἡμίτονον μικρότερον τοῦ ΘΠ καὶ συνημίτονον μεγαλήτερον τοῦ ΟΠ. Διὰ νὰ διακρίνωνται καὶ τὰ τέσσαρα ταῦτα τόξα ἀπ' ἀλλήλων ἐκ τῶν ἡμιτόνων καὶ ἐκ τῶν συνημιτόνων αὐτῶν, *συνεφωνήθη νὰ διακριθῶσι τὰ ἡμίτονα καὶ τὰ συνημίτονα εἰς θετικὰ καὶ εἰς ἀρνητικά·* καὶ ἑπομένως νὰ παριστῶνται τὰ μὲν θετικὰ ὑπὸ θετικῶν ἀριθμῶν, τὰ δὲ ἀρνητικὰ ὑπὸ ἀρνητικῶν. Θεωροῦνται δὲ θετικὰ μὲν ἡμίτονα, ὅσα εὑρίσκονται ἄνω τῆς διαμέτρου ΑΓ, ἀρνητικὰ δέ, ὅσα ὑποκάτω αὐτῆς. Ὡσαύτως θετικὰ μὲν συνημίτονα, ὅσα κεῖνται ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΟΑ, ἀρνητικὰ δέ, ὅσα ἐπὶ τῆς ἀντιθέτου ΟΓ.



Σχῆμα 8

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον καὶ τῶν τεσσάρων τόξων ΑΘ, ΑΘ′, ΑΘ″, ΑΘ‴ τὰ ἡμίτονα καὶ τὰ συνημίτονα διαφέρουσι· διότι

τοῦ μὲν ΑΘ εἶνε ἡμίτονον = + ΘΠ, συνημίτονον = + ΟΠ
τοῦ δὲ ΑΘ′ » ἡμίτονον = + ΘΠ, συνημίτονον = − ΟΠ
τοῦ δὲ ΑΘ″ » ἡμίτονον = − ΘΠ, συνημίτονον = − ΟΠ
τοῦ δὲ ΑΘ‴ » ἡμίτονον = − ΘΠ, συνημίτονον = + ΟΠ

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι *τόξου περατουμένου ἐν τῷ πρώτῳ τεταρτημορίῳ ἀμφότεραι αἱ γραμμαὶ εἶνε θετικαί· ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ εἶνε θετικὸν μὲν τὸ ἡμίτονον ἀρνητικὸν δὲ τὸ συνημίτονον, ἐν τῷ τρίτῳ ἀμφότερα εἶνε ἀρνητικὰ καὶ ἐν τῷ τετάρτῳ* (τοὐναντίον ἢ ἐν τῷ δευτέρῳ) *τὸ μὲν ἡμίτονον εἶνε ἀρνητικὸν τὸ δὲ συνημίτονον θετικόν.*

ΣΗΜ. Ἐκ τῆς διακρίσεως ταύτης τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων εἰς θετικὰ καὶ εἰς ἀρνητικά, ἡ μεταξὺ αὐτῶν σχέσις, ἡ διὰ τῆς ἐξισώσεως (1) ἐκφραζομένη, οὐδαμῶς ἀλλοιοῦται· διότι περιέχει μόνον τὰ τετράγωνα αὐτῶν, ἅτινα εἶνε θετικὰ πάντοτε καὶ οὐδόλως βλάπτονται, εἴτε θετικῶς ληφθῇ εἴτε ἀρνητικῶς ἕκαστον.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Καὶ τὰ ἡμίτονα δύνανται νὰ ἀναχθῶσι πάντα ἐπὶ μιᾶς διαμέτρου· διότι ἂν ἐκ τοῦ πέρατος τοῦ τόξου ΑΘ ἀχθῇ παράλληλος τῇ διαμέτρῳ ΑΓ, ἡ ΘΚ, αὕτη τέμνει ἐπὶ τῆς καθέτου διαμέτρου ΔΟΒ τμῆμά τι ΟΚ, ὅπερ εἶνε ἴσον καὶ παράλληλον τῷ ἡμιτόνῳ ΘΠ. Ὥστε θετικὰ μὲν εἶνε τὰ ἡμίτονα, ὅσα κεῖνται ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΟΒ, ἀρνητικὰ δέ, ὅσα ἐπὶ τῆς ἀντιθέτου ΟΔ. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τόξου οἱουδήποτε εἶνε τὰ ἀπὸ τοῦ κέντρου Ο ἀρχόμενα τμήματα τῶν δύο καθέτων διαμέτρων ΑΓ καὶ ΒΔ (ὧν ἡ τὸ συνημίτονον ἔχουσα διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν τόξων), ἅτινα χωρίζουσιν αἱ ἀπὸ τοῦ πέρατος τοῦ τόξου ἀγόμεναι ἐπ' αὐτὰς κάθετοι.

Περὶ τῆς μεταβολῆς τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου, ὅταν τὸ τόξον αὐξάνῃ ἀπὸ 0^0 μέχρι 360^0.

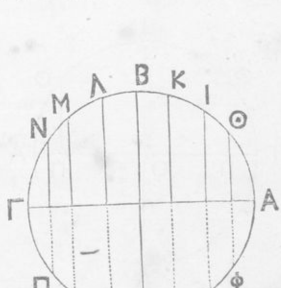
8. Ἔστω τυχὸν τόξον μικρότερον τῶν 90^0, τὸ ΑΘ. Ἐὰν τὸ τόξον τοῦτο ἐλαττούμενον καταντήσῃ 0, τὸ πέρας αὐτοῦ Θ ὀπισθοχωροῦν θὰ πέσῃ εἰς τὸ Α καὶ τὸ μὲν ἡμίτονον αὐτοῦ ἐλαττούμενον θὰ μηδενισθῇ, τὸ δὲ συνημίτονον αὐτοῦ αὐξανόμενον θὰ καταντήσῃ ἴσον τῇ ἀκτῖνι 1· ὅθεν συνάγεται ὅτι εἶνε

$$\text{ημ } 0^0 = 0 \qquad \text{συν } 0^0 = 1.$$

Ἐὰν τὸ τόξον αὐξάνῃ ἀπὸ τοῦ 0^0 μέχρι τῶν 90^0 (ἤτοι ἐν τῷ πρώτῳ τεταρτημορίῳ), τὸ μὲν ἡμίτονον αὐτοῦ προδήλως αὐξάνεται ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ 1, τὸ δὲ συνημίτονον αὐτοῦ ἐλαττοῦται ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 0· ὥστε εἶνε

$$\text{ημ } 90^0 = 1, \qquad \text{συν } 90^0 = 0.$$

Αὐξανομένου τοῦ τόξου ἀπὸ τῶν 90^0 μέχρι τῶν 180^0, τὸ μὲν ἡμίτονον ἐλαττοῦται ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 0, τὸ δὲ συνημίτονον αὐξάνεται μὲν κατὰ τὸ μέγεθος,



Σχῆμα 9

γίνεται ὅμως ἀρνητικὸν καὶ διατρέχει τὰς τιμὰς ἀπὸ 0 μέχρι —1, διὰ τὸ τόξον ΑΓ τῶν 180^0 ἔχομεν

$$\text{ημ } 180^0 = 0, \qquad \text{συν } 180^0 = -1.$$

Αὐξανομένου δὲ τοῦ τόξου ἀπὸ τῶν 180^0 μέχρι τῶν 270^0, τὸ πέρας αὐτοῦ διατρέχει τὸ τρίτον τεταρτημόριον ΓΔ καὶ τὸ μὲν ἡμίτονον αὐτοῦ αὐξάνει ἀρνητικὸν ὂν καὶ διατρέχει τὰς τιμὰς 0. . . .—1, τὸ δὲ συνημίτονον ἐλαττοῦται, ἀρνητικὸν ὡσαύτως διαμένον, καὶ διατρέχει τὰς τιμὰς ἀπὸ — 1 . . . . μέχρι τοῦ 0· ὥστε εἶνε

$$\text{ημ } 270^0 = -1, \qquad \text{συν } 270^0 = 0.$$

Ἐὰν τέλος τὸ τόξον αὐξάνῃ ἀπὸ τῶν 270^0 μέχρι τῶν 360^0, τὸ πέρας αὐτοῦ διατρέχει τὸ τέταρτον τεταρτημόριον ΔΑ καὶ τὸ μὲν ἡμίτονον αὐτοῦ ἐλαττοῦται, ἀρνητικὸν διαμένον, καὶ διατρέχει τὰς τιμὰς —1 . . . . 0· τὸ δὲ συνημίτονον, θετικὸν γινόμενον, αὐξάνεται ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ 1· ὥστε εἶνε

$$\text{ημ } 360^0 = 0 = \text{ημ } 0^0.$$
$$\text{συν } 360^0 = 1 = \text{συν } 0^0.$$

Ἐκ τῶν εἰρημένων συνάγεται, ὅτι τὸ ἡμίτονον λαμβάνει πάσας τὰς μὴ ὑπερβαινούσας τὴν μονάδα τιμὰς καὶ θετικῶς καὶ ἀρνητικῶς· ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ συνημίτονον.

Ἁπλαῖ σχέσεις μεταξὺ δύο τόξων καὶ ἀντιστοιχοῦσαι σχέσεις μεταξὺ τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων αὐτῶν.

1) *Τόξα συμπληρωματικά.*

9. Δύο τόξα λέγονται *συμπληρωματικά*, ὅταν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶνε ἴσον τῷ τεταρτημορίῳ· τοιαῦτα εἶνε τὰ τόξα ΑΘ καὶ ΘΒ (σχ. 10).

Δύο συμπληρωματικὰ τόξα ἔχουσι τὰ αὐτὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα ἀλλ' ἀντιστρόφως· ἤτοι τὸ ἡμίτονον τοῦ ἑνὸς εἶνε συνημίτονον τοῦ ἄλλου.

Σχῆμα 10

Τοῦτο φαίνεται ἀμέσως ἐκ τοῦ σχήματος· διότι ἐξ αὐτοῦ βλέπομεν, ὅτι εἶνε

$$\text{ημ } ΑΘ = ΘΠ = ΟΚ \qquad \text{ημ } ΘΒ = ΘΚ = ΟΠ$$
$$\text{συν } ΑΘ = ΟΠ \qquad \text{συν } ΘΒ = ΟΚ$$

ὥστε $\quad$ ημ. ΑΘ = συν ΘΒ

καὶ συν ΑΘ = ημ. ΘΒ.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τῶν γραμμάτων α καὶ β δύο τόξα συμπληρωματικά, τουτέστι συνδεόμενα διὰ τῆς ἰσότητος

$$\alpha + \beta = 90^0$$

θὰ ἔχωμεν κατὰ ταῦτα $\quad$ ημ. α = συν β

συν α = ημ β

καὶ ἐπειδὴ τὸ ἕτερον τῶν τόξων, ἔστω τὸ β, ἰσοῦται τῇ ὑπεροχῇ τῶν 90^0 ὑπὲρ τὸ ἄλλο, ἤτοι $\beta = 90^0 - \alpha$, αἱ ἰσότητες αὗται γράφονται καὶ ὡς ἕπεται $\quad$ ημ. $(90^0 - \alpha)$ = συν α

συν $(90^0 - \alpha)$ = ημ. α. $\quad$ (1)

2.) *Τόξα παραπληρωματικά.*

10. Δύο τόξα λέγονται *παραπληρωματικά*, ὅταν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶνε ἴσον τῇ ἡμιπεριφερείᾳ· τοιαῦτα εἶνε τὰ τόξα ΑΘ καὶ ΘΓ ἢ ΑΘ' (σχ. 10).

Δύο τόξα παραπληρωματικὰ ἔχουσιν ἡμίτονα μὲν ἴσα, συνημίτονα δὲ ἀντίθετα.

Καὶ ὄντως ἐκ τοῦ σχήματος βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι εἶνε

ημ. ΑΘ = ΘΠ = ΟΚ, $\quad$ ημ. ΘΓ = ημ. ΑΘ΄ = ΟΚ

συν ΑΘ = ΟΠ $\quad$ συν ΘΓ = συν ΑΘ΄ = — ΟΠ

ὅθεν ἕπεται $\quad$ ημ. ΑΘ = ημ. ΘΓ

συν ΑΘ = — συν ΘΓ

Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι, ἂν παραστήσωμεν διὰ α καὶ β δύο παραπληρωματικὰ τόξα, τοῦτ᾽ ἔστι διὰ τῆς ἰσότητος $\alpha + \beta = 180^0$ συνδεόμενα, θὰ εἶνε $\quad$ ημ α = ημ β

συν α = — συν β

καὶ ἐπειδὴ εἶνε $\beta = 180 - \alpha$, αἱ αὐταὶ ἰσότητες γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς

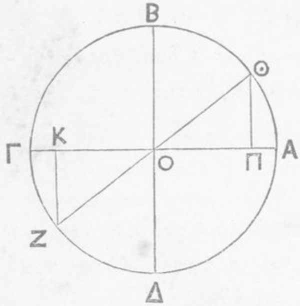
ημ. $(180^0 - \alpha)$ = ημ. α

συν $(180^0 - \alpha)$ = — συν α. $\quad$ (2)

3). *Τόξα διαφέροντα ἀπ᾽ ἀλλήλων κατὰ ἡμιπεριφέρειαν.*

11. Ἐὰν δύο τόξα διαφέρωσι κατὰ 180^0, τὸ μεγαλήτερον ὑπερβαίνει τὰς 180^0 ἔστω τοιοῦτο τὸ ΑΒΓΖ (σχ. 11)· ἐὰν ἐκ τοῦ πέ-

ρατος αὐτοῦ Ζ ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΖΟΘ, προσδιορίζεται τὸ τόξον ΑΘ,



Σχῆμα 11.

ὅπερ διαφέρει τοῦ ΑΒΓΖ κατὰ 180^0. Ἐκ δὲ τοῦ σχήματος φαίνεται ἀμέσως, ὅτι τὰ δύο τόξα ΑΘ καὶ ΑΒΓΖ, ἔχουσι καὶ ἡμίτονα ἀντίθετα καὶ συνημίτονα ἀντίθετα (διότι τὰ τρίγωνα ΟΘΠ καὶ ΟΚΖ εἶνε ἴσα, τὰ δὲ πέρατα τῶν τόξων εὑρίσκονται ἐν ἀντιθέτοις τεταρτημορίοις)· ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ α τὸ μικρότερον τόξον, ἤτοι τὸ ΑΘ, θὰ εἶνε

$$\begin{aligned} \text{ημ}\,(180^0+\alpha) &= -\,\text{ημ}\,\alpha \\ \text{συν}\,(180^0+\alpha) &= -\,\text{συν}\,\alpha. \end{aligned} \qquad (3)$$

4.) Τόξα ἀποτελοῦντα μίαν ὁλόκληρον περιφέρειαν.

12. Ἔστωσαν δύο ἄνισα τόξα, α καὶ β, ἀποτελοῦντα ὁλόκληρον περιφέρειαν· ἐπειδὴ τὸ μεγαλήτερον ἐξ αὐτῶν θὰ ὑπερβαίνῃ τὰς 180^0, ἔστω δὲ τοιοῦτο τὸ β, δύναται νὰ τεθῇ $\beta = 180^0 + \gamma$, καὶ ἐπομένως κατὰ τὰ προηγουμένως ἀποδειχθέντα

$$\begin{aligned} \text{ημ}\,\beta &= -\,\text{ημ}\,\gamma \\ \text{συν}\,\beta &= -\,\text{συν}\,\gamma. \end{aligned}$$

ἐπειδὴ δὲ ὑπετέθη $\alpha + \beta = 360^0$, ἕπεται $\alpha + 180^0 + \gamma = 360^0$, ἤτοι $\alpha + \gamma = 180^0$· τοῦτ' ἔστι τὰ τόξα α καὶ γ εἶνε παραπληρωματικά· ὥστε εἶνε

$$\begin{aligned} \text{ημ}\,\gamma &= \text{ημ}\,\alpha \\ \text{συν}\,\gamma &= -\,\text{συν}\,\alpha \end{aligned}$$

παραβάλλοντες δὲ τὰς ἰσότητας ταύτας πρὸς τὰς προηγουμένας, συμπεραίνομεν, ὅτι εἶνε

$$\begin{aligned} \text{ημ}\,\beta &= -\,\text{ημ}\,\alpha \\ \text{συν}\,\beta &= \text{συν}\,\alpha. \end{aligned} \qquad (4)$$

Τουτέστιν ὅτι δύο τόξα ἀποτελοῦντα τὴν περιφέρειαν ἔχουσιν ἡμίτονα μὲν ἀντίθετα, συνημίτονα δὲ ἴσα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον παντὸς τόξου δύνανται νὰ ἀναχθῶσιν εἰς γραμμὰς τόξου μικροτέρου τῶν 90^0· διότι, ἂν μὲν εἶνε μεταξὺ 90^0 καὶ 180^0, τὸ παραπληρωματικὸν αὐτοῦ εἶνε μεταξὺ 0^0 καὶ 90^0 καὶ ἔχουσι ἴσα μὲν ἡμίτονα ἀντίθετα δὲ συνημίτονα. ἂν δὲ εἶνε μεταξὺ 180^0 καὶ 270^0, ἀφαιροῦμεν ἀπ' αὐτοῦ 180^0, ὅτε μένει τόξον μικρότερον τῶν 90^0· ἔχουσι δὲ τὰ τόξα ταῦτα ἀντίθετα ἡμίτονα καὶ ἀντίθετα συνημίτονα· ἂν δὲ τέλος εἶνε μεταξὺ 270^0 καὶ 360^0, τὸ λεῖπον τόξον, ἵνα ἀποτελεσθῇ ἡ περιφέρεια, θὰ εἶνε μεταξὺ 0^0 καὶ 90^0· ἔχουσι δὲ τὰ τόξα ταῦτα ἡμίτονα μὲν ἀντίθετα, συνημίτονα δὲ ἴσα.

Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τῶν τόξων ἀπὸ 0^0 μέχρις 90^0· διότι εἰς ταῦτα ἀνάγομεν καὶ τὰ τῶν ἄλλων.

Παραδείγματα.

1) 137^0· τούτου παραπληρωματικὸν εἶνε τὸ τόξον 43^0

ὅθεν
$$\text{ημ}\ 137^0 = \text{ημ}\ 43^0$$
$$\text{συν}\ 137^0 = -\ \text{συν}\ 43^0$$

2) 252^0· τοῦτο διαφέρει τοῦ 180^0 κατὰ 72^0

ὅθεν
$$\text{ημ}\ 252^0 = -\ \text{ημ}\ 72^0$$
$$\text{συν}\ 252^0 = -\ \text{συν}\ 72^0$$

3) 336^0· τοῦτο ἀποτελεῖ τὴν περιφέρειαν μετὰ τοῦ τόξου 24^0.

ὅθεν
$$\text{ημ}\ 336^0 = -\ \text{ημ}\ 24^0$$
$$\text{συν}\ 336^0 = \ \text{συν}\ 24^0$$

Ἀλλὰ καὶ τὰ ἡμίτονα καὶ τὰ συνημίτονα τῶν μεταξὺ 45^0 καὶ 90^0 περιλαμβανομένων τόξων ἀνάγονται εἰς τὰς γραμμὰς τῶν μεταξὺ 0^0 καὶ 45^0 περιλαμβανομένων· διότι, ἂν τὸ β περιέχηται μεταξὺ 45^0 καὶ 90^0, τὸ συμπλήρωμα αὐτοῦ, α ἢ $90^0 - \beta$, περιέχεται μεταξὺ 0^0 καὶ 45^0 εἶνε δὲ (ἐδ. 9)
$$\text{ημ}\ \beta = \text{συν}\ (90^0 - \beta) = \text{συν}\ \alpha$$
$$\text{συν}\ \beta = \text{ημ}\ (90^0 - \beta) = \text{ημ}\ \alpha.$$

Ὥστε ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν τὰ ἡμίτονα καὶ τὰ συνημίτονα τῶν τόξων, ἅτινα περιέχονται μεταξὺ 0^0 καὶ 45^0.

5) Τόξα, ὧν τὸ ἓν εἶνε διπλάσιον τοῦ ἄλλου.

13. Ἔστω ΑΘ τυχὸν τόξον μικρότερον τῶν 180^0 καὶ ΘΠ τὸ ἡμίτονον αὐτοῦ, ἐὰν ἀχθῶσιν εἰς τὰ πέρατα τῆς διαμέτρου ΑΓ, αἱ ΘΑ καὶ ΘΓ εὐθεῖαι (σχ. 12), γίνεται ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΘΓ, ἐξ οὗ κατὰ γνωστὸν γεωμετρικὸν θεώρημα ἔχομεν
$$(\Theta\mathrm{A})^2 = \mathrm{A\Gamma}.\ \Pi\mathrm{A}. \qquad (\iota)$$
καὶ
$$(\Theta\Gamma)^2 = \mathrm{A\Gamma}.\ \Gamma\Pi.$$

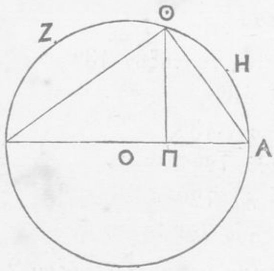
Ἀλλ' ἂν παραστήσωμεν τὸ τόξον ΑΘ διὰ τοῦ α, τὸ τόξον ΘΓ ἰσοῦται τῷ $180^0 - \alpha$ καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ ΘΖ ἰσοῦται τῷ $90^0 - \frac{\alpha}{2}$ εἶνε δὲ (ἐδ 3.)

$$\Theta A = 2\ \eta\mu \left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

$$\Gamma\Theta = 2\eta\mu\ \Theta Z = 2\ \eta\mu \left(90 - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\ \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Πρὸς τούτοις εἶνε

$$\Pi A = OA - O\Pi = 1 - \sigma\upsilon\nu\alpha$$
$$\Gamma\Pi = \Gamma O + O\Pi = 1 + \sigma\upsilon\nu\alpha$$



Σχῆμα 12

Ὥστε αἱ ἰσότητες (ι) γίνονται

$$4\eta\mu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\ (1 - \sigma\upsilon\nu\alpha)$$

καὶ $$4\,\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\ (1 + \sigma\upsilon\nu\alpha)$$

ἤτοι $$\left.\begin{aligned} 1 - \sigma\upsilon\nu\alpha &= 2\ \eta\mu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ 1 + \sigma\upsilon\nu\alpha &= 2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Διὰ τῶν τύπων τούτων δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ ἡμίσεως τοῦ τυχόντος τόξου, ὅταν ἔχωμεν τὸ συνημίτονον αὐτοῦ τοῦ τόξου· διότι οὗτοι λυόμενοι πρὸς τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ $\frac{\alpha}{2}$ γίνονται

$$(5')\qquad \eta\mu\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}{2}}\,, \qquad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{2}}\,.$$

Εὕρεσις τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου τόξων τινῶν.

Τόξον 45^0

Σχῆμα 13

14. Ἔστω τὸ τόξον ΑΕ ἴσον τῷ 8φ τῆς περιφερείας, ἤτοι 45^0 (σχ. 13)· τὸ ἡμίτονον αὐτοῦ ΕΠ καὶ τὸ συνημίτονον ΟΠ καὶ ἡ ἀκτὶς ΟΕ συνιστῶσιν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία αὐτοῦ Ο εἶνε 45^0, καὶ ἡ γωνία Ε εἶνε ὡσαύτως 45^0, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο τρίγωνον εἶνε καὶ ἰσοσκελές· καὶ διὰ τοῦτο εἶνε

$$(\mathrm{ΕΠ})^2 + (\mathrm{ΕΠ})^2 = 1, \text{ ἤτοι } (\mathrm{ΕΠ})^2 = \frac{1}{2} = (\mathrm{ΟΠ})^2$$

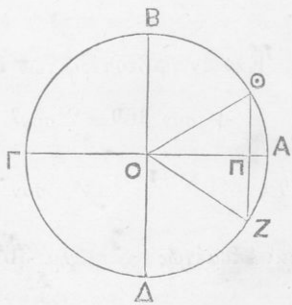
ὅθεν

$$\text{ημ. } 45^0 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

ΣΗΜ. Τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα δίδουσι καὶ οἱ τύποι (5΄), ἂν ἐν αὐτοῖς τεθῇ $\alpha = 90^0$.

Τόξον 30⁰

15. Ἔστω 30^0 τὸ τόξον ΑΘ (σχ. 14)· ἐὰν τὸ ἡμίτονον αὐτοῦ ΘΠ προσεκβληθῇ ὑποκάτω τῆς διαμέτρου ΑΓ μέχρι τῆς περιφερείας, ἀχθῶσι δὲ καὶ αἱ ἀκτῖνες ΟΘ καὶ ΟΖ, γίνεται τρίγωνον τὸ ΟΘΖ ὅπερ εἶνε ἰσόπλευρον· διότι τὸ τόξον ΘΖ εἶνε 60^0 καὶ ἡ χορδὴ αὐτοῦ εἶνε διὰ τοῦτο πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου, ἥτις, ὡς ἐκ τῶν στοιχείων ἐνθυμούμεθα, ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου (τοῦτο δεικνύεται ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριῶν γωνιῶν Ο, Θ, Ζ τοῦ τριγώνου) ὥστε εἶνε



Σχῆμα 14.

$$\mathrm{ΘΖ} = 1 \text{ καὶ } \mathrm{ΘΠ} = \frac{1}{2} \text{ τοῦτ' ἔστιν}$$

$$\text{ημ. } 30^0 = \frac{1}{2}$$

Ἔχοντες τὸ ἡμίτονον εὑρίσκομεν καὶ τὸ συνημίτονον ἐκ τῆς ἐξισώσεως 2. τοῦ ἐδ. 6.

$$\text{συν } 30^0 = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Τόξον 60⁰.

16. Τὸ τόξον 60^0 εἶνε συμπλήρωμα τοῦ τόξον τῶν 30^0· ὅθεν ἕπεται

$$\text{ημ. } 60^0 = 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

$$\text{συν } 60^0 = 30^0 = \frac{1}{2}.$$

**Τόξον 18⁰.*

Τὸ ἡμίτονον αὐτοῦ εἶνε τὸ ἥμισυ τῆς χορδῆς τοῦ τόξου τῶν 36^0, ἡ δὲ χορδὴ αὐτη εἶνε ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου ἥτις (ὡς ἐκ τῶν στοιχείων εἶνε γνωστὸν) ἰσοῦται πρὸς τὸ μεγαλήτερον μέρος τῆς ἀκτῖνος 1 διαιρεθείσης μέσον καὶ ἄκρον λόγον· τοῦτο δὲ εἶνε (Στ. Αλ. σελ. 173) $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

ὅθεν
$$\text{ἡμ}\, 18^0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

καὶ ἑπομένως
$$\text{συν}\, 18^0 = \sqrt{1-\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right]^2} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

Τόξον 36⁰.

Ἐὰν ἐν τῷ δευτέρῳ τῶν τύπων (5) ὑποθέσωμεν $\alpha = 36^0$, εὑρίσκομεν
$$1 + \text{συν}\, 36^0 = 2\ \text{συν}^2\, 18^0 = 2.\frac{1}{16}.\left(10+2\sqrt{5}\right)$$

ὅθεν
$$\text{συν}\, 36^0 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

καὶ ἑπομένως
$$\text{ημ}\, 36^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Παρατήρησις.

17. Ἐὰν εἰς τοὺς τύπους (5′) τοῦ ἐδαφίου 13 θέσωμεν $\alpha = 45^0$ καὶ ἀντικαταστήσωμεν τὸ συν 45^0 διὰ τῆς γνωστῆς τιμῆς αὐτοῦ, εὑρίσκομεν
$$\text{συν}\left(\frac{45^0}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$$
$$\text{ἢ συν}\left(\frac{90^0}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Ἐὰν δὲ εἰς τοὺς αὐτοὺς τύπους θέσωμεν $\alpha = \dfrac{90^0}{4}$ καὶ ἀντικαταστήσωμεν τὸ συνημίτονον τοῦ $\dfrac{90^0}{4}$ ὑπὸ τῆς εὑρεθείσης τιμῆς αὐτοῦ, εὑρίσκομεν ὁμοίως
$$\text{συν}\left(\frac{90^0}{8}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

ὁμοίως εὑρίσκεται καὶ
$$\text{συν}\left(\frac{90^0}{16}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δύναταί τις νὰ εὕρῃ τὸ συνημίτονον (ἑπομένως καὶ τὸ ἡμίτονον) πάντων τῶν τόξων $\frac{90^0}{4}, \frac{90^0}{8}, \frac{90^0}{16}, \frac{90^0}{32} \dots \frac{90^0}{2^\nu} \dots$ ὧν ἕκαστον εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ προηγουμένου αὐτοῦ.

Ἐκ τῶν αὐτῶν τύπων εὑρίσκομεν ὑποθέτοντες $\alpha = 30^0$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{30^0}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

ὁμοίως

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{30^0}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

καὶ γενικῶς δυνάμεθα κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον νὰ εὕρωμεν τὰ συνημίτονα (ἑπομένως καὶ τὰ ἡμίτονα) πάντων τῶν τόξων

$$\frac{30^0}{2}, \frac{30^0}{4}, \frac{30^0}{8} \dots \frac{30^0}{2^\nu} \dots$$

18. Πρὸς εὐκολωτέραν ἐπιθεώρησιν τῶν προηγουμένων τύπων παραθέτομεν αὐτοὺς ἐνταῦθα.

$\eta\mu 0^0 = 0$	$\sigma\upsilon\nu 0^0 = 1$	$\eta\mu(90^0 - \alpha) = \sigma\upsilon\nu\ \alpha$ $\sigma\upsilon\nu(90^0 - \alpha) = \eta\mu\ \alpha$	(1)
$\eta\mu 30^0 = \frac{1}{2}$	$\sigma\upsilon\nu 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$		
$\eta\mu 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$,	$\sigma\upsilon\nu 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\eta\mu(180^0 - \alpha) = \eta\mu\ \alpha$ $\sigma\upsilon\nu(180^0 - \alpha) = -\sigma\upsilon\nu\ \alpha$	(2)
$\eta\mu 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$,	$\sigma\upsilon\nu 60^0 = \frac{1}{2}$		
$\eta\mu 90^0 = 1$	$\sigma\upsilon\nu 90^0 = 0$	$\eta\mu(180^0 + \alpha) = -\eta\mu\ \alpha$ $\sigma\upsilon\nu(180^0 + \alpha) = -\sigma\upsilon\nu\ \alpha$	(3)
$\eta\mu 180^0 = 0$	$\sigma\upsilon\nu 180^0 = -1$		
$\eta\mu 270^0 = -1$	$\sigma\upsilon\nu 270^0 = 0$	$\eta\mu(360^0 - \alpha) = -\eta\mu\ \alpha$ $\sigma\upsilon\nu(360^0 - \alpha) = \sigma\upsilon\nu\ \alpha.$	(4)
$\eta\mu 360^0 = 0$	$\sigma\upsilon\nu 360^0 = 1$		

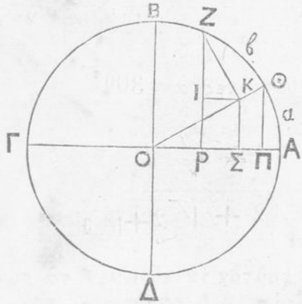
$$\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1$$

$$1 + \sigma\upsilon\nu\alpha = 2\,\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2} \qquad 1 - \sigma\upsilon\nu\ \alpha = 2\,\eta\mu^2\frac{\alpha}{2} \qquad (5)$$

*Θεμελιώδης ἰδιότης τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων.

19. Ἐκ τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων δύο τόξων α καὶ β δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν $\alpha + \beta$

Ἔστωσαν δύο τόξα α καὶ β, ὧν τὸ ἄθροισμα δὲν ὑπερβαίνει τὰς 90°· ἂς ληφθῇ (σχ. 15) τὸ τόξον ΑΘ = α καὶ τὸ τόξον ΘΖ = β καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΘΠ, ΖΡ κάθετοι ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΓ, ἔτι δὲ καὶ ἡ ἀκτὶς ΟΘ καὶ ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἡ ΖΚ· τέλος ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ Κ ἡ ΚΙ παράλληλος τῇ ΑΓ καὶ ἡ ΚΣ κάθετος ἐπ' αὐτήν· κατὰ τοὺς ὁρισμοὺς τῶν δύο θεωρουμένων γραμμῶν εἶνε



Σχῆμα 15

$$\eta\mu\alpha = \Theta\Pi \qquad \sigma\upsilon\nu\alpha = \mathrm{O}\Pi$$
$$\eta\mu\beta = \mathrm{ZK}, \qquad \sigma\upsilon\nu\beta = \mathrm{OK}$$

(ι) $$\eta\mu\,(\alpha+\beta) = \mathrm{ZP} = \mathrm{ZI} + \mathrm{IP} = \mathrm{ZI} + \mathrm{K}\Sigma$$
$$\sigma\upsilon\nu\,(\alpha+\beta) = \mathrm{OP} = \mathrm{O}\Sigma - \mathrm{P}\Sigma = \mathrm{O}\Sigma - \mathrm{KI}$$

Ἀλλ' ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΚΣ καὶ ΟΘΠ εὑρίσκομεν

$$\frac{\mathrm{K}\Sigma}{\Theta\Pi} = \frac{\mathrm{O}\Sigma}{\mathrm{O}\Pi} = \frac{\mathrm{OK}}{\mathrm{O}\Theta}$$

ἤτοι $$\frac{\mathrm{K}\Sigma}{\eta\mu\alpha} = \frac{\mathrm{O}\Sigma}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu\beta}{1}$$

ἐξ ὧν ἕπεται $\mathrm{K}\Sigma = \eta\mu\alpha.\,\sigma\upsilon\nu\beta$, καὶ $\mathrm{O}\Sigma = \sigma\upsilon\nu\alpha.\,\sigma\upsilon\nu\beta$.

Ἀλλὰ καὶ τὰ τρίγωνα ΖΚΙ καὶ ΘΟΠ εἶνε ὅμοια (διότι αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἶνε κάθετοι ἀνὰ δύο) καὶ ἐξ αὐτῶν εὑρίσκομεν

$$\frac{\mathrm{ZI}}{\mathrm{O}\Pi} = \frac{\mathrm{IK}}{\Pi\Theta} = \frac{\mathrm{KZ}}{\mathrm{O}\Theta}$$

ἤτοι $$\frac{\mathrm{ZI}}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\mathrm{IK}}{\eta\mu\alpha} = \frac{\eta\mu\beta}{1}$$

ἐξ ὧν ἕπεται $\mathrm{ZI} = \sigma\upsilon\nu\alpha.\,\eta\mu\beta$, καὶ $\mathrm{IK} = \eta\mu\alpha\;\eta\mu\beta$.

Ἀντικαθιστῶντες τώρα ἐν ταῖς ἰσότησιν (ι) τὰς γραμμὰς ὑπὸ τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν αὐτῶν, εὑρίσκομεν τοὺς τύπους

$$\begin{aligned}\eta\mu\,(\alpha+\beta) &= \eta\mu\,\alpha.\,\sigma\upsilon\nu\,\beta + \eta\mu\beta.\,\sigma\upsilon\nu\alpha \\ \sigma\upsilon\nu\,(\alpha+\beta) &= \sigma\upsilon\nu\,\alpha.\,\sigma\upsilon\nu\,\beta - \eta\mu\beta.\,\eta\mu\beta\end{aligned} \qquad (6)$$

διὰ τῶν ὁποίων εὑρίσκεται τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ ἀθροίσματος α+β, ὅταν εἶνε γνωστὰ τὰ ἡμίτονα καὶ τὰ συνημίτονα τῶν δύο τόξων α καὶ β.

20. Ἐκ τῶν αὐτῶν δεδομένων δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ τὸ ἡμί-

τονον καὶ τὸ συνημίτονον τῆς διαφορᾶς τῶν τόξων, ἤτοι τὰ ημ $(\alpha-\beta)$ καὶ συν $(\alpha-\beta)$.

Διότι τὸ τόξον α εἶνε ἄθροισμα τῶν δύο τόξων β καὶ $(\alpha-\beta)$ (ὑποτίθεται $\alpha>\beta$)· ἐφαρμόζοντες λοιπὸν ἐπ' αὐτῶν τοὺς εὑρεθέντας τύπους (6) εὑρίσκομεν

$$\text{ημ}\alpha=\text{συν}\beta.\ \text{ημ}\ (\alpha-\beta)+\text{ημ}\beta\ \text{συν}\ (\alpha-\beta)$$
$$\text{συν}\alpha=\text{συν}\beta.\ \text{συν}\ (\alpha-\beta)-\text{ημ}\beta\ \text{ημ}\ (\alpha-\beta).$$

Ἐκ τῶν δύο δὲ τούτων ἐξισώσεων, αἵτινες περιέχουσι τὰ δύο ζητούμενα ημ $(\alpha-\beta)$ καὶ συν$(\alpha-\beta)$, προσδιορίζονται ταῦτα ὡς ἑξῆς·

Ἐὰν ἡ πρώτη πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ συνβ, ἡ δὲ δευτέρα ἐπι —ημβ καὶ προστεθῶσι κατὰ μέλη, προκύπτει

$$\text{ημ}\alpha\ \text{συν}\beta-\text{ημ}\beta\ \text{συν}\alpha=\text{ημ}\ (\alpha-\beta)\ (\text{ημ}^2\beta+\text{συν}^2\beta).$$

Ἐὰν δὲ ἡ μὲν πρώτη πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ημβ ἡ δὲ δευτέρα ἐπὶ συνβ, καὶ προστεθῶσι κατὰ μέλη, προκύπτει

$$\text{συν}\alpha.\ \text{συν}\beta+\text{ημ}\alpha.\ \text{ημ}\beta=\text{συν}(\alpha-\beta).\ (\text{ημ}^2\beta+\text{συν}^2\beta)$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε $\text{ημ}^2\beta+\text{συν}^2\beta=1$, αἱ ἰσότητες αὗται γράφονται ὡς ἕπεται

$$(6')\qquad \begin{aligned}\text{ημ}\ (\alpha-\beta)&=\text{ημ}\ \alpha.\ \text{συν}\ \beta-\text{ημ}\ \beta\ \text{συν}\ \alpha\\ \text{συν}(\alpha-\beta)&=\text{συν}\ \alpha.\ \text{συν}\ \beta+\text{ημ}\ \alpha\ \text{ημ}\ \beta.\end{aligned}$$

Οὗτοι δὲ εἶνε οἱ τύποι, δι' ὧν εὑρίσκεται τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τῆς διαφορᾶς $\alpha-\beta$ δύο τόξων ἐκ τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημόνων αὐτῶν.

Σημ. Ἐν τῇ ἀποδείξει τῶν τύπων (6) ὑπετέθη, ὅτι τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$ δὲν ὑπερβαίνει τὰς 90^0· ἀποδεικνύεται ὅμως, ὅτι ἀληθεύουσιν οὗτοι δι' οἱαδήποτε τόξα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Ἐκ τῶν τύπων (6) καὶ (6΄) πηγάζουσιν ἅπαντες οἱ προηγουμένως εὑρεθέντες τύποι· ἐὰν παραδείγματος χάριν ὑποθέσωμεν ἐν τοῖς δευτέροις $\alpha=\beta$, εὑρίσκομεν

$$\text{ημ}0^0=0\qquad \text{συν}0^0=1$$

ἐὰν δὲ $\alpha=90^0$, εὑρίσκομεν

$$\text{ημ}(90^0-\beta)=\text{συν}\ \beta,\qquad \text{συν}(90^0-\beta)=\text{ημ}\beta$$

ἐπίσης δυνάμεθα διὰ μερικῶν ὑποθέσεων νὰ εὕρωμεν ἐξ αὐτῶν πάντας τοὺς προηγουμένους τύπους.

Εὕρεσις τοῦ ημ.2α καὶ τοῦ συν2α ἐκ τῶν ημ. α καὶ συν α

21. Ἐὰν ἐν τοῖς τύποις (6) ὑποτεθῇ $\alpha=\beta$, προκύπτουσιν οἱ ἑπόμενοι τύποι

$$\begin{aligned}\text{ημ}2\alpha&=2\text{ημ}\ \alpha.\ \text{συν}\ \alpha\\ \text{συν}2\alpha&=\text{συν}^2\alpha-\text{ημ}^2\alpha\end{aligned}\qquad (7)$$

δι' ὧν εὑρίσκομεν τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ διπλασίου τόξου, ὅταν ἔχωμεν τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ τόξου.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Ἐὰν ἐν τῷ δευτέρῳ τῶν τύπων (7) τεθῇ $2\alpha = \delta$, προκύπτει

$$\sigma\upsilon\nu\,\delta = \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\delta}{2}\right) - \eta\mu^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε $$1 = \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\delta}{2}\right) + \eta\mu^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

ἔπεται $$1 + \sigma\upsilon\nu\,\delta = 2\,\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

καὶ $$1 - \sigma\upsilon\nu\,\delta = 2\eta\mu^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

οὗτοι δὲ εἶνε οἱ τύποι τοῦ ἐδαφίου 13

* Τύποι, δι' ὧν τρέπεται τὸ ἄθροισμα καὶ ἡ διαφορὰ δύο ἡμιτόνων ἢ δύο συνημιτόνων εἰς γινόμενον.

(21′) Ἐκ τῶν θεμελιωδῶν τύπων (6) καὶ (6′) τῶν ἐδαφίων 19 καὶ 20 εὑρίσκομεν εὐκόλως τοὺς ἑξῆς διὰ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως

$$\eta\mu\,(\alpha+\beta) + \eta\mu\,(\alpha-\beta) = 2\eta\mu\alpha\;\;\sigma\upsilon\nu\beta$$
$$\eta\mu\,(\alpha+\beta) - \eta\mu\,(\alpha-\beta) = 2\sigma\upsilon\nu\alpha\;\;\eta\mu\beta$$
$$\sigma\upsilon\nu\,(\alpha+\beta) + \sigma\upsilon\nu\,(\alpha-\beta) = 2\sigma\upsilon\nu\alpha\;\;\sigma\upsilon\nu\beta$$
$$\sigma\upsilon\nu\,(\alpha-\beta) - \sigma\upsilon\nu\,(\alpha+\beta) = 2\eta\mu\alpha\;\;\eta\mu\beta$$

καὶ ἂν παραστήσωμεν τὰ δύο τόξα $\alpha+\beta$ καὶ $\alpha-\beta$ διὰ Α καὶ Β, ἤτοι ἂν θέσωμεν

$$\alpha+\beta = A, \qquad \alpha-\beta = B,$$

προκύπτει $$\alpha = \frac{1}{2}(A+B) \qquad \beta = \frac{1}{2}(A-B),$$

καὶ οἱ προηγούμενοι τύποι γίνονται

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu\,\frac{1}{2}(A+B)\;\sigma\upsilon\nu\;\frac{1}{2}(A-B)$$

$$\eta\mu A - \eta\mu B = 2\eta\mu\,\frac{1}{2}(A-B)\;\sigma\upsilon\nu\;\frac{1}{2}(A+B)$$

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu\frac{1}{2}(A+B)\;\sigma\upsilon\nu\;\frac{1}{2}(A-B)$$

$$\sigma\upsilon\nu B - \sigma\upsilon\nu A = 2\eta\mu\,\frac{1}{2}(A+B)\;\eta\mu\;\frac{1}{2}(A-B)$$

διὰ τῶν τύπων τούτων τρέπεται τὸ ἄθροισμα καὶ ἡ διαφορὰ δύο ἡμιτόνων ἢ δύο συνημιτόνων εἰς γινόμενον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

Ἐφαπτόμεναι καὶ συνεφαπτόμεναι.

22. *Ἐφαπτομένη* τοῦ τόξου α λέγεται τὸ πηλίκον $\frac{\eta\mu\ \alpha}{\sigma\upsilon\nu\ \alpha}$, ὅπερ παρίσταται πρὸς συντομίαν διὰ τοῦ συμβόλου εφα.

Συνεφαπτομένη δὲ τοῦ τόξου α λέγεται τὸ πηλίκον $\frac{\sigma\upsilon\nu\ \alpha}{\eta\mu\ \alpha}$, ὅπερ παρίσταται πρὸς συντομίαν διὰ τοῦ συμβόλου σφα.

Ὥστε κατὰ τὸν ὁρισμὸν ἔχομεν

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon\varphi\alpha &= \frac{\eta\mu\ \alpha}{\sigma\upsilon\nu\ \alpha} \\ \sigma\varphi\alpha &= \frac{\sigma\upsilon\nu\ \alpha}{\eta\mu\ \alpha} \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων τούτων ἕπεται ἀμέσως ἡ ἑξῆς

$$\varepsilon\varphi\alpha .\ \sigma\varphi\alpha = 1$$

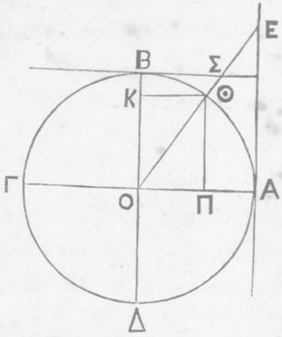
τουτ᾽ ἔστι *τὸ γινόμενον τῆς ἐφαπτομένης τοῦ τυχόντος τόξου ἐπὶ τὴν συνεφαπτομένην αὐτοῦ ἰσοῦται τῇ μονάδι* 1.

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ συνεφαπτομένη ἔχουσι πάντοτε τὸ αὐτὸ σημεῖον.

23. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων, δι᾽ ὧν ὁρίζονται ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ συνεφαπτομένη, φαίνεται ἀμέσως, ὅτι εἶνε θετικαὶ μὲν ἀμφότεραι, ὅταν τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον εἶνε ὁμοειδῆ, ὅπερ συμβαίνει ἐν τῷ πρώτῳ καὶ τῷ τρίτῳ τεταρτημορίῳ· ἀρνητικαὶ δὲ ἀμφότεραι, ὅταν ταῦτα εἶνε ἑτεροειδῆ, ὅπερ συμβαίνει ἐν τῷ δευτέρῳ καὶ τῷ τετάρτῳ.

Γεωμετρικὴ παράστασις τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῶν συνεφαπτομένων.

24. Τὰ πηλίκα $\frac{\eta\mu\ \alpha}{\sigma\upsilon\nu\ \alpha}$ καὶ $\frac{\sigma\upsilon\nu\ \alpha}{\eta\mu\ \alpha}$ δύνανται νὰ παρασταθῶσι γεωμετρικῶς δι᾽ εὐθειῶν ἐφαπτομένων τοῦ κύκλου, ἐν τῷ ὁποίῳ παρίστανται καὶ τὰ ἡμίτονα καὶ τὰ συνημίτονα· ἐκ ταύτης δὲ τῆς παραστάσεως ἔλαβον καὶ τὰ ὀνόματα.



Σχῆμα 16.

Ἔστω τυχὸν τόξον μικρότερον τῶν 90^0, ὡς τὸ ΑΘ (σχ. 16). ΘΠ τὸ ἡμίτονον καὶ ΟΠ ἢ ΘΚ τὸ συνημίτονον αὐτοῦ· ἐὰν ἐκ τῶν ἄκρων Α καὶ Β τοῦ τεταρτημορίου ΑΒ ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου, ἡ ἀκτὶς ΟΘ προσεκβαλλομένη τέμνει τὴν μὲν πρώτην κατὰ τὸ Ε τὴν δὲ δευτέραν κατὰ τὸ Σ, καὶ γίνεται τὸ μὲν τρίγωνον ΟΑΕ ὅμοιον τῷ ΟΘΠ, τὸ δὲ τρίγωνον ΟΒΣ ὅμοιον πρὸς τὸ ΟΚΘ. Ἐκ τῶν δύο πρώτων εὑρίσκομεν.

$$\frac{ΑΕ}{ΠΘ} = \frac{ΟΑ}{ΟΠ}$$

ἤτοι $\quad \frac{ΑΕ}{ημα}, = \frac{1}{συνα}, \quad$ ὅθεν $ΑΕ = \frac{ημ\ α}{συν\ α} = εφα.$

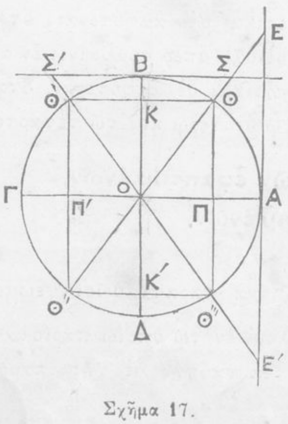
Ἐκ δὲ τῶν δύο δευτέρων συνάγεται ἡ ἰσότης

$$\frac{ΒΣ}{ΚΘ} = \frac{ΟΒ}{ΟΚ}$$

ἢ $\quad \frac{ΒΣ}{συν\ α} = \frac{1}{ημ\ α} \quad$ ὅθεν $ΒΣ = \frac{συν\ α}{ημ\ α} = σφα$

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι ἡ μὲν ἐφαπτομένη εἶνε τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν τόξων Α, ἡ δὲ συνεφαπτομένη τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου εἰς τὸ Β (πέρας τοῦ τεταρτημορίου) περατοῦνται δὲ τὰ τμήματα ταῦτα ἀμφότερα ὑπὸ τῆς διαμέτρου, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ πέρατος τοῦ τόξου.

Ἐθεωρήσαμεν τόξα μικρότερα τῶν 90^0· ἀλλ' οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶνε τὸ τόξον, ἤτοι εἰς οἱονδήποτε τεταρτημόριον καὶ ἂν καταλήγῃ, ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ συνεφαπτομένη αὐτοῦ ἰσοῦνται (κατὰ τὸ μέγεθος) πρὸς τὰ τμήματα τῶν εἰρημένων δύο ἐφαπτομένων τοῦ κύκλου τὰ περατούμενα ὑπὸ τῆς διαμέτρου, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ πέρατος τοῦ τόξου.



Σχῆμα 17.

Ἐὰν τῷ ὄντι τὸ τόξον καταλήγῃ εἰς τὸ δεύτερον τεταρτημόριον, ὡς τὸ ΑΘ′, (σχ. 17) ἡ διὰ τοῦ πέρατος αὐτοῦ διερχομένη διάμετρος Θ′ Ο Θ‴ ὁρίζει ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένης τὸ τμῆμα ΑΕ′, ἐπὶ δὲ τῆς κατὰ τὸ Β τὸ τμῆμα ΒΣ′· καὶ ἂν ἐκ τοῦ Θ′ ἀχθῇ ἡ Θ′Κ παράλληλος τῇ διαμέτρῳ ΑΓ καὶ ἡ Θ΄Π΄ κάθετος ἐπ' αὐτήν, γίνεται τὸ τρίγωνον Θ΄Π΄Ο ὅμοιον τῷ ΟΑΕ΄, καὶ τὸ τρίγωνον Θ΄ΚΟ ὅμοιον τῷ ΟΒΣ΄. Ἐκ τούτων εὑρίσκονται καὶ πάλιν αἱ ἰσότητες

$$\frac{\text{ΑΕ}'}{\text{Π}'\text{Θ}'}=\frac{\text{ΟΑ}}{\text{ΟΠ}'} \qquad \text{καὶ} \quad \frac{\text{ΒΣ}'}{\text{ΚΘ}'}=\frac{\text{ΟΒ}}{\text{ΟΚ}}$$

ἐξ ὧν ἕπεται

$$\text{ΑΕ}'=\frac{\text{Π}'\text{Θ}'}{\text{ΟΠ}'} \qquad \text{καὶ ΒΣ}'=\frac{\text{ΚΘ}'}{\text{ΟΚ}}$$

τοῦτ' ἔστιν ἰσοῦται ἡ ΑΕ΄ πρὸς τὸ θετικῶς λαμβανόμενον πηλίκον τοῦ ἡμιτόνου διαιρουμένου διὰ τοῦ συνημιτόνου, ἡ δὲ ΒΣ΄ πρὸς τὸ ἀντίστροφον πηλίκον.

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις, καὶ ὅταν τὸ τόξον καταλήγῃ εἰς τὸ τρίτον τεταρτημόριον, ὡς τὸ ΑΘ΄΄, ἢ καὶ εἰς τὸ τέταρτον, ὡς τὸ ΑΘ΄΄΄.

Ἄξιον παρατηρήσεως εἶνε, ὅτι αἱ θετικαὶ ἐφαπτόμεναι (ἐδ. 23) κεῖνται ἐπὶ τοῦ μέρους ΑΕ τῆς κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου, αἱ δὲ ἀρνητικαὶ ἐπὶ τοῦ ἀντιθέτου ΑΕ΄· ὁμοίως αἱ θετικαὶ συνεφαπτόμεναι κεῖνται ἐπὶ τοῦ μέρους ΒΣ τῆς εἰς τὸ Β ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου, αἱ δὲ ἀρνητικαὶ ἐπὶ τοῦ ἀντιθέτου ΒΣ΄.

Περὶ τῆς μεταβολῆς τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς συνεφαπτομένης, ὅταν τὸ τόξον μεταβάλληται.

25. Ἡ ἁπλῆ ὄψις τοῦ σχήματος δεικνύει, ὅτι αὐξανομένου τοῦ τόξου ἀπὸ 0^0 μέχρι 90^0, αὐξάνεται ἡ ἐφαπτομένη· ἀλλὰ τοῦτο φαίνεται καὶ ἐκ τῆς ἰσότητος (8), ἐξ ἧς ὁρίζεται ἡ ἐφαπτομένη· διότι, αὐξανομένου τοῦ τόξου ἀπὸ 0^0 μέχρι 90^0, αὐξάνεται μὲν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος $\frac{\text{ημ } α}{\text{συν } α}$, ἐλαττοῦται δὲ ὁ παρονομαστής, καὶ δι' ἀμφότερα ταῦτα αὐξάνει τὸ πηλίκον.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Τὰ τόξα τῶν 90^0 καὶ τῶν 270^0 δὲν ἔχουσιν ἐφαπτομένην· διότι καὶ τὸ κλάσμα $\frac{\text{ημ } α}{\text{συν } α}$, γίνεται τότε $\frac{1}{0}$ ἢ $\frac{-1}{0}$, ὥστε πρὸς οὐδένα ἀριθμὸν εἶνε ἴσον (Στ. Ἀλ. ἐδ. 54)· ἀλλὰ καὶ ἡ γεωμετρικὴ κατασκευὴ οὐδὲν δίδει δι' αὐτὰ τμῆμα· διότι ἡ ἀκτὶς ΟΘ γίνεται τότε παράλληλος τῇ ΑΕ, ἑπομένως οὐδὲν τμῆμα προσδιορίζει ἐπ' αὐτῆς· ἀλλὰ πᾶν ἄλλο τόξον (μεταξὺ 0^0 καὶ 360^0) ἔχει ἐφαπτομένην· διότι ὁ παρονομαστὴς συν α μόνον διὰ τὰ τόξα 90^0 καὶ 270^0 γίνεται 0· ὅσον δὲ ἡ διαφορὰ τοῦ τόξου ἀπὸ τῶν 90^0 ἢ ἀπὸ τῶν 270^0 ἐλαττοῦται, ἡ ἐφαπτομένη αὐτοῦ αὐξάνεται (θετικὴ οὖσα ἢ ἀρνητικὴ) καὶ δύναται νὰ ὑπερβῇ πᾶν δοθὲν μέγεθος, ὡς ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται· τοῦτο δὲ ἐννοοῦμεν, ὅταν λέγωμεν συντόμως, ὅτι *ἡ ἐφαπτομένη γίνεται ἄπειρος, ὅταν τὸ τόξον γίνῃ* 90^0 ἢ 270^0· τὸ αὐτὸ δὲ καὶ ἀλγεβρικῶς ἐκφράζουσι διὰ τῆς παραστάσεως

$$\text{εφ}90^0 = \infty, \qquad \text{εφ}270^0 = \infty$$

ἡ δὲ συνεφαπτομένη τῶν τόξων τούτων εἶνε προδήλως 0.

Ὁμοίως ἡ συνεφαπτομένη *γίνεται ἄπειρος*, ὅταν τὸ τόξον γίνῃ 0^0 ἢ 180^0, ἤτοι

$$\text{σφ}0^0 = \infty, \qquad \text{σφ}180^0 = \infty$$

ἡ δὲ ἐφαπτομένη τῶν τόξων τούτων εἶνε 0.

Αὐξανομένου τοῦ τόξου ἀπὸ τῶν 90^0 μέχρι τῶν 180^0, ἡ ἐφαπτομένη αὐτοῦ ἐλαττοῦται (ἀρνητικὴ οὖσα) καὶ καταντᾷ 0· διότι ὅσῳ τὸ πέρας τοῦ τόξου, τὸ Θ′, πλησιάζει πρὸς τὸ Γ (σχ. 17) τόσῳ ἀνέρχεται τὸ σημεῖον Ε′ καὶ πλησιάζει πρὸς τὸ Α.

Αὐξανομένου δὲ τοῦ τόξου ἀπὸ τῶν 180^0 μέχρι τῶν 270^0, ἡ ἐφαπτομένη γίνεται θετικὴ καὶ αὐξάνει ἀπὸ 0 εἰς ἄπειρον· λαμβάνει δὲ τὰς αὐτὰς τιμάς, ἅς τινας ἔλαβεν ἐν τῷ πρώτῳ τεταρτημορίῳ.

Ἂν τέλος τὸ τόξον αὐξάνῃ ἀπὸ 270^0 μέχρι 360^0, ἡ ἐφαπτομένη αὐτοῦ ἐλαττοῦται (ἀρνητικὴ οὖσα) καὶ καταντᾷ 0· λαμβάνει δὲ τὰς αὐτὰς τιμάς, ἅς τινας ἔλαβεν ἐν τῷ δευτέρῳ τεταρτημορίῳ

Ἡ συνεφαπτομένη μεταβάλλεται ἀντιθέτως τῇ ἐφαπτομένῃ, ἤτοι αὐξάνει μέν, ὅταν ἡ ἐφαπτομένη ἐλαττῶται, ἐλαττοῦται δέ, ὅταν ἡ ἐφαπτομένη αὐξάνῃ.

Τοῦτο φαίνεται μὲν καὶ ἐκ τοῦ σχήματος, δεικνύεται δὲ καὶ ἐκ τῆς ἰσότητος

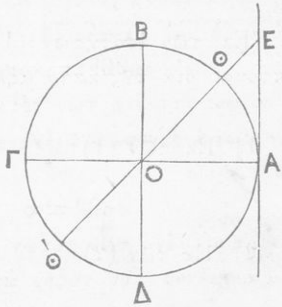
$$\text{εφα}.\ \text{σφα} = 1,$$

δι' ἧς αἱ δύο αὗται ποσότητες συνδέονται πρὸς ἀλλήλας.

Παρατήρησις.

26. Ἐκ τῶν προειρημένων γίνεται δῆλον, ὅτι τὸ τόξον δὲν δύναται νὰ ὁρισθῇ ἐντελῶς διὰ τῆς ἐφαπτομένης αὐτοῦ, *ἐκτὸς ἂν γνωρίζωμεν εἰς ποῖον τεταρτημόριον καταλήγῃ*· διότι, δοθείσης ἐφαπτομένης οἱασδήποτε, ὑπάρχουσι δύο τόξα ἀντιστοιχοῦντα πρὸς αὐτήν· καί, ἂν μὲν ἡ δοθεῖσα ἐφαπτομένη εἶνε θετική, τὰ πρὸς αὐτὴν ἀντιστοιχοῦντα δύο

τόξα εἶνε, ἓν μεταξὺ 0^0 καὶ 90^0, καὶ ἕτερον μεταξὺ 180^0 καὶ 270^0· ἂν δὲ ἡ δοθεῖσα ἐφαπτομένη εἶνε ἀρνητική, τὰ πρὸς αὐτὴν ἀντιστοιχοῦντα δύο τόξα εἶνε, ἓν μεταξὺ 90^0 καὶ 180^0 καὶ ἕτερον μεταξὺ 270^0 καὶ 360^0. Τὰ τόξα ταῦτα εὑρίσκονται γεωμετρικῶς, ἂν ληφθῇ ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου τμῆμα ἴσον τῇ δοθείσῃ ἐφαπτομένῃ ἀρχόμενον ἐκ τοῦ Α (πρὸς τὰ ἄνω μέν, ἂν εἶνε θετική, πρὸς τὰ κάτω δέ, ἂν ἀρνητικὴ) καὶ ἐκ τοῦ πέρατος αὐτῆς Ε ἀχθῇ διάμετρος τοῦ κύκλου· τὰ σημεῖα Θ,Θ', καθ' ἃ τέμνει τὴν περιφέρειαν ἡ διάμετρος αὕτη, εἶνε τὰ πέρατα τῶν δύο ἀντιστοιχούντων τόξων ΑΘ, ΑΘ' (σχ. 18).



Σχῆμα 18.

Τὸ πρὸς δοθεῖσαν ἐφαπτομένην ἀντιστοιχοῦν τόξον ὁρίζεται ἐντελῶς, ὅταν θεωρῶνται μόνον τὰ μεταξὺ 0^0 καὶ 180^0 περιλαμβανόμενα τόξα.

Ἐφαπτόμεναι καὶ συνεφαπτόμεναι τόξων τινῶν.

27. Ἐπειδὴ γνωρίζομεν τὰ ἡμίτονα καὶ τὰ συνημίτονα τόξων τινῶν (ἐδ. 14) δυνάμεθα ἐξ αὐτῶν νὰ εὕρωμεν καὶ τὰς ἐφαπτομένας καὶ τὰς συνεφαπτομένας τῶν αὐτῶν τόξων.

Ἐκ τῶν ἐν τῷ ἐδαφίῳ 18 δεδομένων εὑρίσκομεν

$$\begin{array}{ll}
\text{εφ}0^0=0, & \text{σφ}0=\infty \\
\text{εφ}30^0=\dfrac{1}{\sqrt{3}}, & \text{σφ}30^0=\sqrt{3} \\
\text{εφ}45^0=1, & \text{σφ}45^0=1 \\
\text{εφ}60^0=\sqrt{3}, & \text{σφ}60^0=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\
\text{εφ}90^0=\infty & \text{σφ}90^0=0 \\
\text{εφ}180^0=0 & \text{σφ}180^0=\infty \\
\text{εφ}270^0=\infty & \text{σφ}270^0=0 \\
\text{εφ}360^0=0 & \text{σφ}360^0=\infty
\end{array}$$

Ἁπλαῖ τινες σχέσεις μεταξὺ δύο τόξων καὶ ἀντιστοιχοῦσαι σχέσεις μεταξὺ τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῶν συνεφαπτομένων αὐτῶν.

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) (2) (3) (4) (5) τοῦ ἐδαφίου 18 προκύπτουσι διὰ τῆς κατὰ μέλη διαιρέσεως αἱ ἑπόμεναι·

1) Ἐκ τῶν (1)
$$\begin{aligned} \text{ἐφ}(90-\alpha) &= \text{σφ}\alpha \\ \text{σφ}(90-\alpha) &= \text{ἐφ}\alpha \end{aligned} \qquad (1')$$

2) Ἐκ τῶν (2)
$$\begin{aligned} \text{εφ}(180-\alpha) &= -\text{εφ}\alpha \\ \text{σφ}(180-\alpha) &= -\text{σφ}\alpha \end{aligned} \qquad (2')$$

3) Ἐκ τῶν (3)
$$\begin{aligned} \text{εφ}(180+\alpha) &= \text{εφ}\alpha \\ \text{σφ}(180+\alpha) &= \text{σφ}\alpha \end{aligned} \qquad (3')$$

4) Ἐκ τῶν (4)
$$\begin{aligned} \text{εφ}(360-\alpha) &= -\text{εφ}\alpha \\ \text{σφ}(360-\alpha) &= -\text{σφ}\alpha \end{aligned} \qquad (4')$$

5) Ἐκ τῶν (5)
$$\begin{aligned} \text{εφ}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1-\text{συν}\,\alpha}{1+\text{συν}\,\alpha} \\ \text{σφ}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1+\text{συν}\,\alpha}{1-\text{συν}\,\alpha} \end{aligned} \qquad (5')$$

Ἐκφράζουσι δὲ αἱ ἰσότητες αὗται τὰς ἑπομένας προτάσεις.

1) *Ἐὰν δύο τόξα εἶνε συμπληρώματα ἀλλήλων, ἡ ἐφαπτομένη τοῦ ἑτέρου ἐξ αὐτῶν εἶνε συνεφαπτομένη τοῦ ἄλλου.*

2) *Ἐὰν δύο τόξα εἶνε παραπληρώματα ἀλλήλων, ἢ συναποτελῶσι τὴν περιφέρειαν, καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν εἶνε ἀντίθετοι καὶ αἱ συνεφαπτόμεναι ὁμοίως.*

3) *Ἐὰν δύο τόξα διαφέρωσι κατὰ 180^0, καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν εἶνε ἴσαι καὶ αἱ συνεφαπτόμεναι αὐτῶν ὡσαύτως ἴσαι.*

Διὰ τῶν τύπων (5′) εὑρίσκομεν τὴν ἐφαπτομένην τοῦ τόξου $\frac{\alpha}{2}$ ἐκ τοῦ συνημιτόνου τοῦ διπλασίου τόξου α.

Οὕτω π. χ. εἶνε $\sigma\upsilon\nu\, 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ Ἐντεῦθεν ἕπεται

$$\epsilon\varphi\left(\frac{45}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$$

ΣΗΜ Τὸ ἡμίτονον, τὸ συνημίτονον, ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ συνεφαπτομένη τόξου οἱουδήποτε λέγονται, ἑνὶ ὀνόματι, *τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ* τοῦ τόξου τούτου.

Εὕρεσις τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου ἐκ τῆς ἐφαπτομένης.

29. Ὅταν ἡ ἐφαπτομένη τόξου δοθῇ, καὶ τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον αὐτοῦ εἶνε ὡρισμένα κατὰ τὸ μέγεθος· διότι συνδέονται διὰ τῶν ἐξισώσεων $\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1$

$$\frac{\eta\mu\,\alpha}{\sigma\upsilon\nu\,\alpha} = \epsilon\varphi\alpha.$$

Ἵνα ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων εὕρωμεν τὰς τιμὰς τῶν ημ α καὶ συν α (ὑποθέτοντες γνωστὴν τὴν εφα), ἀπαλλάσσομεν τὴν δευτέραν ἀπὸ τῶν παρονομαστῶν, ὅτε γίνεται $\eta\mu\,\alpha = \sigma\upsilon\nu\,\alpha \cdot \epsilon\varphi\alpha$, καὶ ἀντικαθιστῶμεν τὴν τιμὴν τοῦ ημ α εἰς τὴν πρώτην· οὕτω προκύπτει

$$(\epsilon\varphi\,\alpha\,\sigma\upsilon\nu\,\alpha)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1$$

ἢ $$\epsilon\varphi^2\alpha . \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1$$

ἐξ ἧς $$(1 + \epsilon\varphi^2\alpha) . \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1$$

ὅθεν $\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1}{1+\epsilon\varphi^2\alpha}$ καί $\sigma\upsilon\nu\,\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon\varphi^2\alpha}}$ (ε)

ἐπειδὴ δὲ $\eta\mu\,\alpha = \sigma\upsilon\nu\,\alpha . \epsilon\varphi\,\alpha$, ἕπεται $\eta\mu\,\alpha = \pm\frac{\epsilon\varphi\,\alpha}{\sqrt{1+\epsilon\varphi^2\alpha}}$

Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα δύναται νὰ ληφθῇ καὶ θετικῶς καὶ ἀρνητικῶς, ἀλλ' ἐν ἀμφοτέροις τοῖς τύποις δέον νὰ ληφθῇ μετὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου· διότι ἐξ αὐτῶν διαιρουμένων πρέπει νὰ προκύπτῃ ἡ σχέσις $\frac{\eta\mu\,\alpha}{\sigma\upsilon\nu\,\alpha} = \epsilon\varphi\alpha$.

Ὅτι δὲ τὸ σημεῖον τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου δὲν δύναται νὰ ὁρισθῇ ἐκ τῆς ἐφαπτομένης, γίνεται φανερὸν ἐκ τούτου, ὅτι πρὸς ἑκάστην δοθεῖσαν ἐφαπτομένην ἀντιστοιχοῦσι δύο τόξα περατούμενα εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου καὶ ἔχοντα διὰ τοῦτο ἀντίθετα ἡμίτονα καὶ ἀντίθετα συνημίτονα· οἱ δὲ τύποι (ε) πρέπει νὰ δίδωσιν ἀμφοτέρων τῶν τόξων τούτων τὰ ἡμίτονα καὶ τὰ συνημίτονα.

Τὸ σημεῖον τῆς τετρ. ῥίζης ὁρίζομεν, ἐὰν ἠξεύρωμεν εἰς ποῖον τεταρτημόριον περατοῦται τὸ τόξον· διὰ τόξα λόγου χάριν μικρότερα τῶν 90^0 ἡ ῥίζα πρέπει νὰ λαμβάνηται θετικῶς, διότι ταῦτα ἔχουσι θετικὸν συνημίτονον.

Παρατήρησις.

30. Αἱ τέσσαρες τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ παντὸς τόξου, συνδέονται διὰ τῶν τριῶν ἑπομένων ἐξισώσεων.

$$ημ^2α + συν^2α = 1$$

$$εφα = \frac{ημ\ α}{συν\ α} \quad καὶ \quad σφα = \frac{συν\ α}{ημ\ α} \qquad (ε)$$

ὥστε, δοθείσης τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν, προσδιορίζονται ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων καὶ αἱ τρεῖς ἄλλαι (κατὰ τὸ μέγεθος)· πᾶσα δὲ ἄλλη ἐξίσωσις τὰς γραμμὰς τοῦ τυχόντος τόξου α συνδέουσα πρέπει, ἢ νὰ καταντᾷ ταὐτότης, ἢ νὰ δίδῃ τὴν πρώτην $ημ^2α + συν^2α = 1$, ὅταν ἐν αὐτῇ ἀντικατασταθῶσιν αἱ ἐφαπτόμεναι καὶ αἱ συνεφαπτόμεναι ὑπὸ τῶν τιμῶν αὐτῶν· διότι μεταξὺ τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου τοῦ τυχόντος τόξου αὐτὴ μόνη ἡ ἐξίσωσις ὑπάρχει. Εὑρίσκομεν δὲ ἐξισώσεις τοιαύτας ὅσας δήποτε, ἐὰν πολλαχῶς συνδυάσωμεν τὰς τρεῖς ἀρχικὰς ἐξισώσεις (ε)· ἀναγράφομεν δὲ ἐνταῦθα μόνον τὰς πρωτευούσας ἐξ αὐτῶν

$$εφα \ \ σφα. = 1.$$

$$1 + εφ^2α = \frac{1}{συν^2α}$$

$$1 + σφ^2α = \frac{1}{ημ^2α}$$

$$εφα + σφα = \frac{1}{ημ\ α.συν\ α}$$

τῶν ὁποίων τὸ ἀληθὲς εὐκόλως ἀποδεικνύεται διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως τῶν εφα καὶ σφα ὑπὸ τῶν τιμῶν αὐτῶν.

* Εὕρεσις τῆς ἐφαπτομένης τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς δύο τόξων ἐκ τῶν ἐφαπτομένων τῶν δύο τόξων.

31. Ἐὰν οἱ τύποι 6 τοῦ ἐδαφίου 19 διαιρεθῶσι κατὰ μέλη, προκύπτει

$$\frac{ημ(α+β)}{συν(α+β)} = \frac{ημ\ α.\ συν\ β + ημ\ β\ \ συν\ α}{συν\ α.\ συν\ β - ημ\ α.\ ημ\ β.}$$

καὶ ἂν τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος ταύτης διαιρέσωμεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν διὰ τοῦ συν α. συν β, προκύπτει

$$\frac{\text{ημ}\,(\alpha+\beta)}{\text{συν}(\alpha+\beta)}=\frac{\frac{\text{ημ}\ \alpha}{\text{συν}\ \alpha}+\frac{\text{ημ}\ \beta}{\text{συν}\ \beta}}{1\ \frac{\text{ημ}\ \alpha}{\text{συν}\ \alpha}.\ \frac{\text{ημ}\ \beta}{\text{συν}\ \beta}.}$$

καὶ ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὰ πηλίκα ὑπὸ τῶν ἴσων αὐτοῖς ἐφαπτομένων εὑρίσκομεν τὸν τύπον

$$\text{εφ}\ (\alpha+\beta)=\frac{\text{εφα}+\text{εφ}\ \beta}{1-\text{εφα}.\ \text{εφ}\ \beta} \qquad (9)$$

διὰ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τὴν ἐφαπτομένην τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta$ τῶν δύο τόξων α καὶ β, ὅταν ἔχωμεν τὰς ἐφαπτομένας αὐτῶν.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν ἐκ τῶν τύπων (6′) τοῦ ἐδ. 20 τὸν ἑπόμενον τύπον

$$\text{εφ}\ (\alpha-\beta)=\frac{\text{εφ}\ \alpha-\text{εφ}\ \beta}{1+\text{εφ}\ \alpha\ \ \text{εφβ}} \qquad (9')$$

διὰ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τὴν ἐφαπτομένην τῆς διαφορᾶς $\alpha-\beta$ τῶν δύο τόξων α καὶ β, ὅταν ἔχωμεν τὰς ἐφαπτομένας αὐτῶν

Τέλος εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ τύπου (9) ὑποθέτοντες $\alpha=\beta$

$$\text{εφ}\ 2\alpha=\frac{2\ \text{εφα}}{1-\text{εφ}^2\alpha} \qquad (10)$$

ΣΗΜ. Ἐκ τῶν θεωρηθέντων ὁμοίων τριγώνων τοῦ σχήματος 16 εὑρίσκεται εὐκόλως, ὅτι τὰ πηλίκα $\frac{1}{\text{συν}\ \alpha}$ καὶ $\frac{1}{\text{ημ}\ \alpha}$ παρίστανται ὑπὸ τῶν γραμμῶν ΟΕ καὶ ΟΣ, αἵτινες ἄγονται ἐκ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς συνεφαπτομένης· τὰς γραμμὰς ταύτας καλοῦσι, τὴν μὲν ΟΕ *τέμνουσαν* τοῦ τόξου· α (α = ΑΘ), τὴν δὲ ΟΣ *συνδιατέμνουσαν* τοῦ αὐτοῦ τόξου· ἀλλ' αἱ γραμμαὶ αὗται κατήντησαν ἤδη ἄχρηστοι ὡς ἴδιαι τριγωνομετρικαὶ γραμμαί, διότι ἀνάγονται εἰς τὰ ἀντίστροφα τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων· καὶ ἀντὶ τεμνα καὶ συνδα προτιμῶσι νὰ γράφωσι σήμερον τὰ πηλίκα.

$$\frac{1}{\text{συν}\ \alpha},\quad \frac{1}{\text{ημ}\ \alpha}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III.

Περὶ τῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων.

Κατασκευὴ τῶν πινάκων.

32. Πίναξ περιέχων τὰς χορδὰς τῶν τόξων (τουτέστι τὰ ἡμίτονα διπλᾶ) ἀπὸ μοίρας εἰς μοῖραν προχωρούντων εὑρίσκεται ἤδη ἐν τῇ μαθηματικῇ συντάξει τοῦ ἕλληνος ἀστρονόμου Πτολεμαίου.

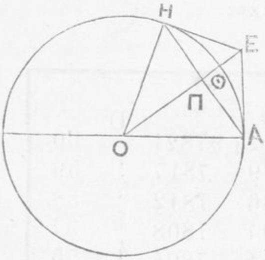
Οἱ σήμερον ἐν χρήσει τελειότεροι πίνακες εἶνε οἱ τοῦ Λαλάνδου, ἐν οἷς τὰ τόξα προχωροῦσι κατὰ λεπτόν, καὶ οἱ τοῦ Καλλέτου, ἐν οἷς προχωροῦσι κατὰ $10''$.

Ὁ λογισμὸς τῶν τοιούτων πινάκων στηρίζεται ἐπὶ τῆς θεμελιώδους ἰδιότητος τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων (ἐδ. 19)· ἐὰν τῷ ὄντι εὑρεθῇ τὸ ημ $1'$, ἐξ αὐτοῦ εὑρίσκεται ἀμέσως καὶ τὸ συνημίτονον αὐτοῦ, ἐκ δὲ τούτων διὰ τῶν θεμελιωδῶν τύπων (6) τοῦ ἐδαφίου 19 εὑρίσκεται τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ τόξου τῶν $2'$· ἐκ τούτων πάλιν διὰ τῶν αὐτῶν τύπων εὑρίσκεται τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ ἀθροίσματος $2'+1'$ ἤτοι τοῦ $3'$· ἔπειτα τοῦ ἀθροίσματος $3'+1'$ καὶ οὕτω καθεξῆς ἐφ' ὅσον θέλωμεν Ἔχοντες οὕτω τὰ ἡμίτονα καὶ τὰ συνημίτονα, εὑρίσκομεν ἐξ αὐτῶν καὶ τὰς ἐφαπτομένας καὶ τὰς συνεφαπτομένας τῶν αὐτῶν τόξων.

Μένει λοιπὸν νὰ δείξωμεν, πῶς εὑρίσκεται τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου $1'$ πρὸς τοῦτο ἔχομεν ἀνάγκην τῶν ἑπομένων προτάσεων.

33. *Πᾶν τόξον μικρότερον τῶν 90^0 εἶνε μεγαλήτερον μὲν τοῦ ἡμιτόνου του, μικρότερον δὲ τῆς ἐφαπτομένης του.*

Ἔστω τόξον μικρότερον τῶν 90^0 τὸ ΑΘ, καὶ ἐφαπτομένη αὐτοῦ ἡ ΑΕ. Ἐὰν ἐκ τοῦ πέρατος Ε τῆς ἐφαπτομένης ἀχθῇ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ἡ ΕΗ καὶ ἐπιζευχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΟΘ, ΟΗ καὶ ἡ χορδὴ ΑΗ, τὰ δύο τόξα ΑΘ καὶ ΘΗ θὰ εἶνε ἴσα· διότι αἱ γωνίαι ΑΟΘ καὶ ΘΟΗ, αἱ ἐπ' αὐτῶν βαίνουσαι, εἶνε ἴσαι, (διότι τὰ τρίγωνα ΟΑΕ καὶ ΟΗΕ εἶνε ἴσα ὡς ὀρθογώνια καὶ ἔχοντα τὴν ὑποτείνουσαν ἴσην καὶ μίαν ἄλλην πλευρὰν ἴσην). Τούτου τεθέντος παρατηροῦμεν, ὅτι πᾶν τόξον εἶνε μεγαλήτερον μὲν πάσης εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένης γραμμῆς μικρότερον



δὲ πάσης περιγεγραμμένης. (Στ Γεωμ. ἐδ. 274) ἄρα

χορδ. $ΑΗ <$ τόξου $ΑΘΗ < ΑΕ + ΕΗ$ καὶ ἂν διὰ τοῦ α παραστήσωμεν τὸν ἀριθμόν, ὅστις ἐκφράζει τὸ μῆκος τοῦ τόξου ΑΘ (ἀναμνηστέον, ὅτι ἐλήφθη ΟΑ 1), αἱ ἀνισότητες αὗται γράφονται καὶ ὡς ἕπεται.

$$2\,\eta\mu\,\alpha < 2\alpha < 2.\,\varepsilon\varphi\alpha$$

ἢ $\eta\mu\,\alpha < \alpha < \varepsilon\varphi\alpha.$ ὅ. ἔ. δ.

34 *Ἡ διαφορὰ τοῦ τόξου ἀπὸ τοῦ ἡμιτόνου αὐτοῦ εἶνε μικροτέρα τοῦ κύβου τοῦ τόξου* (τουτέστι τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ἐκφράζει τὸ τόξον, ὅταν ἡ ἀκτὶς ληφθῇ ὡς μονάς).

Ἐκ τῆς ἀνισότητος $\varepsilon\varphi\alpha > \alpha$ ἢ $\frac{\eta\mu\,\alpha}{\sigma\upsilon\nu\,\alpha} > \alpha$

πορίζόμεθα τὴν ἑπομένην $\eta\mu\,\alpha > \alpha.\,\sigma\upsilon\nu\,\alpha.$

Ἡ δὲ ἀνισότης αὕτη ἐνισχύεται, ἐὰν τὸ μικρότερον πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ συν α· διότι τότε καθίσταται ἔτι μικρότερον· ὥστε εἶνε

$$\eta\mu\,\alpha > \alpha.\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha \quad \text{ἢ} \quad \eta\mu\,\alpha > \alpha\,(1-\eta\mu^2\alpha)$$

ἐξ ἧς καὶ $\alpha - \eta\mu\,\alpha < \alpha.\,\eta\mu^2\alpha$

Ἐὰν δὲ ἀντὶ ημ α τεθῇ εἰς τὸ δεύτερον μέλος τὸ μεγαλήτερον αὐτοῦ α, ἡ ἀνισότης ἐνισχύεται, ὥστε προκύπτει $\alpha - \eta\mu\,\alpha < \alpha^3$. ὅ. ἔ. δ.

35. Ἐφαρμόσωμεν νῦν τοῦτο εἰς τὸ τόξον 1'· ἐπειδὴ τὸ μῆκος τῆς ὅλης περιφερείας εἶνε $2\,\pi$, ($\pi = 3,\ 1415926535\ldots$) τὸ μῆκος τῆς τόξου 1^0 εἶνε $\frac{\pi}{180}$, καὶ τοῦ τόξου 1΄ τὸ μῆκος εἶνε $\frac{\pi}{10800}$· τουτέστι μετὰ τὴν διαίρεσιν $\tau o\xi\ 1' = 0{,}0002908882\ldots$

ἑπομένως τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου τούτου διαφέρει τοῦ ἀριθμοῦ 0,0002908882... (ὅστις ἐκφράζει τὸ τόξον) διαφορὰν μικροτέραν τοῦ κύβου $(0{,}0002908882\ldots)^3$, ἑπομένως μικροτέραν καὶ τοῦ $(0{,}0003)^3$, ἤτοι τοῦ $\frac{27}{10^{12}}$, ἄρα μικροτέραν καὶ τοῦ $\frac{1}{10^{10}}$. Ἐντεῦθεν βλέπομεν ὅτι τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ τόξον (ἐκπεφρασμένα δι' ἀριθμῶν) ἔχουσι κοινὰ τὰ 10 πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία· καὶ διὰ τοῦτο εἶνε $\eta\mu\ 1' = 0{,}00\ \ 290\,8882\ldots$

ΣΗΜ. Ἐπειδὴ οἱ λογισμοὶ γίνονται συνήθως διὰ τῶν λογαρίθμων, ἀναγκαιοῦσιν ἐν ταῖς ἐφαρμογαῖς σπανιώτατα αἱ τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ αὐταί, συχνότατα δὲ οἱ λογάριθμοι αὐτῶν· διὰ τοῦτο οἱ πίνακες περιέχουσιν ἀμέσως τοὺς λογαρίθμους τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν.

36. Αὔτη φαίνεται ἐκ τοῦ ἑπομένου πίνακος.

18⁰

43	
1″	0,72
2	1,43
3	2,15
4	2,87
5	3,58
6	4,30
7	5,02
8	5,73
9	6,45

42	
1	0,7
2	1,4
3	2,1
4	2,8
5	3,5
6	4,2
7	4,9
8	5,6
9	6.3

39	
1	0,65
2	1,30
3	1,95
4	2,60
5	3,25
6	3,90
7	4,55
8	5,20
9	5,85

38	
1	0,63
2	1,27
3	1,90
4	2,53
5	3,17
6	3,80
7	4,43
8	5,07
9	5,70

′	Sin.	D	Tang.	D	Cotg.	Cos.	D	′
0	1,48998		1,51178		0,48822	1,97821		60
1	9037	39	1221	43	8779	7817	4	59
2	9076	39	1264	43	8736	7812	5	58
3	9115	39	1306	42	8694	7808	4	57
4	9153	38	1349	43	8651	7804	4	56
5	9192	39	1392	43	8608	7800	4	55
6	9231	39	1435	43	8565	7769	4	54
7	9269	38	1478	43	8522	7792	4	53
8	9308	39	1520	42	8480	7788	4	52
9	9347	39	1563	43	8437	7784	4	51
10	9385	38	1606	43	8394	7779	5	50
11	9424	39	1648	42	8352	7775	4	49
12	9462	38	1691	43	8309	7771	4	48
13	9500	38	1734	43	8266	7767	4	47
14	9539	39	1776	42	8224	7763	4	46
15	9577	38	1819	43	8181	7759	4	45
16	9615	38	1861	42	8139	7754	5	44
17	9654	39	1903	42	8097	7750	4	43
18	9692	38	1946	43	8054	7746	4	42
19	9730	38	1988	42	8012	7742	4	41
20	9768	38	2013	43	7969	7738	4	40
21	9806	38	2073	42	7927	7734	4	39
22	9844	38	2115	42	7885	7729	5	38
23	9882	38	2157	42	7843	7725	4	37
24	9920	38	2200	43	7800	7721	4	36
25	9958	38	2242	42	7758	7717	4	35
26	1,49996	38	2284	42	7716	7713	4	34
27	1,50034	38	2326	42	7674	7708	5	33
28	0072	38	2368	42	7632	7704	4	32
29	0110	38	2410	42	7590	7700	4	31
30	1,50148	38	1,52452	42	0,47548	1,97696	4	30
′	Cos.		Cotg.		Tang.	Sin.		′

71⁰

Αἱ μοῖραι τῶν τόξων, τῶν μικροτέρων τῶν 45^0 εἶνε γεγραμμέναι εἰς τὸ ἄνω μέρος τῆς σελίδος, τὰ δὲ πρῶτα λεπτὰ ἐν τῇ πρώτῃ πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλῃ, ἐν ᾗ ταῦτα προχωροῦσι πρὸς τὰ κάτω αὐξανόμενα· φέρει δὲ ἡ στήλη αὕτη ἐπὶ κεφαλῆς τὸ σημεῖον ΄. Ὁ δὲ λογάριθμος ἑκάστης τῶν τεσσάρων τριγωνομετρικῶν γραμμῶν δοθέντος τόξου εὑρίσκεται γεγραμμένος ἐν τῷ τόπῳ, ἔνθα ἡ τὰ πρῶτα λεπτὰ τοῦ δοθέντος τόξου ἔχουσα ὁριζοντία σειρὰ διασταυροῦται μετὰ τῆς στήλης, ἐφ' ἧς εὑρίσκεται ἐπιγεγραμμένον τὸ ὄνομα τῆς γραμμῆς. Ἡ τοὺς λογαρίθμους τῶν ἡμιτόνων ἔχουσα στήλη φέρει ἐπὶ κεφαλῆς τὰ γράμματα **sin** (=**simus**), ἡ δὲ τοὺς τῶν ἐφαπτομένων, τὰ γράμματα **tang** (=**tangentes**), ἡ τοὺς τῶν συνεφαπτομένων τὰ **Cotg**.(=**Cotangentes**), καὶ ἡ τοὺς τῶν συνημιτόνων τὰ **Cos**(=**Cosinus**). Ἐπειδὴ δὲ πολλοὶ ἐφεξῆς λογάριθμοι ἔχουσι κοινὰ τὰ δύο πρῶτα ψηφία (τὸ χαρακτηριστικὸν καὶ τὰ δέκατα), γράφονται ταῦτα ἅπαξ καὶ νοοῦνται ἐπαναλαμβανόμενα τὰ αὐτὰ μέχρις οὗ ἀλλαχθῶσιν. Ἐπαναλαμβάνονται ὅμως, πρὸς εὐκολίαν τῆς εὑρέσεως αὐτῶν, εἰς τὴν ἀρχὴν καὶ εἰς τὸ τέλος ἑκάστης σελίδος.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον βλέπομεν, ὅτι εἶνε

$$\text{λογ ημ } (18^0\ 10') = \overline{1}.\ 49385$$
$$\text{λογ εφ } (18^0\ 13') = \overline{1},\ 51734$$
$$\text{λογ σφ } (18^0\ \ 0') = 0,\ 48822$$
$$\text{λογ συν } (18^0\ 30') = \overline{1},\ 97696$$

Τῶν τόξων τῶν μεγαλητέρων τῶν 45^0 αἱ μὲν μοῖραι εὑρίσκονται εἰς τὸ κάτω μέρος τῆς σελίδος, τὰ δὲ πρῶτα λεπτὰ αὐτῶν εἰς τὴν τελευταίαν στήλην πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ προχωροῦσι πρὸς τὰ ἄνω αὐξανόμενα· ἐγράφησαν δὲ οὕτω τὰ τόξα ταῦτα, ὥστε ἕκαστον νὰ εὑρίσκηται μετὰ τοῦ συμπληρώματος αὐτοῦ εἰς τὴν αὐτὴν σελίδα καὶ οἱ λογάριθμοι τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν ἀμφοτέρων τῶν συμπληρωματικῶν τόξων νὰ εὑρίσκωνται ἐν μιᾷ καὶ τῇ αὐτῇ ὁριζοντίᾳ σειρᾷ. Τὸ εἶδος τῆς γραμμῆς διὰ τὰ τόξα ταῦτα ἐγράφη ὑποκάτω τῶν στηλῶν· ἐγράφη δὲ **cos** ὑπὸ τὴν στήλην τῶν **sin**· καὶ **sin** ὑπὸ τὴν στήλην τῶν **cos**· διότι τὸ ἡμίτονον τοῦ ἑτέρου τῶν συμπληρωματικῶν τόξων ἰσοῦται πρὸς τὸ συνημίτονον τοῦ ἄλλου· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἐγράφη **cotg** ὑπὸ τὴν στήλην τῶν **tang**, καὶ τἀνάπαλιν **tang** ὑπὸ τὴν στήλην τῶν **cotg**.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον βλέπομεν, ὅτι εἶνε

λογ συν $(71^0\ 50') = \overline{1},49385$ = λογ ημ $(18^0\ 10')$

λογ σφ $(71^0\ 47') = \overline{1},51734$ = λογ εφ $(18^0\ 13')$

λογ εφ $(71^0\ 60') = 0,48822$ = λογ σφ $(18^0\ \ 0')$

λογ ημ $(71^0\ 30') = \overline{1},97696$ = λογ συν $(18^0\ 30')$

37. Οἱ λογάριθμοι τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων εἶνε ἀρνητικοὶ ἀριθμοί· διότι ταῦτα εἶνε μικρότερα τῆς μονάδος· ἐν τοῖς πίναξιν ἐτράπησαν εἰς ἄλλους ἔχοντας μόνον τὸ χαρακτηριστικὸν ἀρνητικὸν (Στ. Ἄλγ. ἐδ. 237.)

ΣΗΜ. Εἰς τοὺς πίνακας τοῦ Καλλέτου προσετέθησαν 10 θετικαὶ μονάδες εἰς ἕκαστον τῶν ἀρνητικῶν λογαρίθμων, ἵνα κατασταθῶσι θετικοί· τοῦτο ὅμως βλάπτει μᾶλλον ἢ ὠφελεῖ εἰς τὰς ἐφαρμογάς.

38. Πρὸς τὰ δεξιὰ ἑκάστης στήλης λογαρίθμων ὑπάρχει ἄλλη στενοτέρα, ἐπὶ τῆς κορυφῆς τῆς ὁποίας ὑπάρχει τὸ γράμμα **D** (**Differences**)· ἐν αὐτῇ εὑρίσκονται γεγραμμέναι αἱ διαφοραὶ δύο ἐφεξῆς λογαρίθμων, τουτέστιν ἡ αὔξησις ἢ ἡ ἐλάττωσις ἑκάστου λογαρίθμου ἡ πρὸς τὴ αὔξησιν τοῦ τόξου κατὰ 1′ ἀντιστοιχοῦσα. Τὴν χρῆσιν τῶν διαφορῶν τούτων θὰ ἴδωμεν παρακατιόντες.

39. Οἱ λογάριθμοι τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῶν συνεφαπτομένων ἔχουσι τὰς αὐτὰς διαφοράς· καὶ ὄντως ἐκ τῆς ἰσότητος εφ α. σφα=1 ἕπεται

λογ εφ α + λογ σφ α =0 ἢ λογ σφ α=—λογ εφ α·

τοῦτ' ἔστιν οἱ λογάριθμοι τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς συνεφαπτομένης τοῦ αὐτοῦ τόξου εἶνε πάντοτε ἀντίθετοι ἀριθμοί· ἑπομένως ἂν αὐξηθῇ ὁ ἕτερος αὐτῶν κατὰ δ, ὁ ἄλλος θὰ ἐλαττωθῇ κατὰ δ.

Χρῆσις τῶν πινάκων.

40. Ἡ χρῆσις τῶν λογαριθμικῶν πινάκων τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν ἑπομένων δύο προβλημάτων·

1ον) *Δοθέντος τόξου εὑρεῖν τὸν λογάριθμον μιᾶς τῶν τριγωνομετρικῶν αὐτοῦ γραμμῶν.*

2ον) *Δοθέντος τοῦ λογαρίθμου μιᾶς τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν, εὑρεῖν τὸ ἀντιστοιχοῦν τόξον.*

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1ον

41. Δοθέντος τόξου εὑρεῖν τὸν λογάριθμον μιᾶς τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν αὐτοῦ.

Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τούτου περιλαμβάνει δύο περιπτώσεις.

α΄) Ἂν τὸ δοθὲν τόξον περιέχῃ μόνον μοίρας καὶ πρῶτα λεπτά, ὁ ζητούμενος λογάριθμος εὑρίσκεται ἀμέσως ἐν τοῖς πίναξιν.

Οὕτως εὑρίσκεται

$$\text{λογ ημ } (75^0 \quad 18') = \overline{1},\ 98555.$$
$$\text{λογ συν } (83^0, \quad 15') = \overline{1},\ 07018.$$
$$\text{λογ εφ } (14^0 \quad 16') = \overline{1},\ 40531.$$
$$\text{λογ σφ } (87^0 \quad 14') = \overline{2},\ 68417.$$

β΄) Ἂν τὸ δοθὲν τόξον ἔχῃ καὶ μέρη τοῦ πρώτου λεπτοῦ.

Ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ζητεῖται ὁ λογάριθμος τοῦ ἡμιτόνου τοῦ τόξου $44^0\ 17'\ 22''$· ἐπειδὴ τὸ τόξον τοῦτο περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν $44^0\ 17'$ καὶ $44^0\ 18'$, καὶ τὸ ἡμίτονον αὐτοῦ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν ἡμιτόνων τῶν τόξων τούτων, καὶ ὁ λογάριθμος τοῦ ἡμιτόνου του ὡσαύτως· εἶνε δὲ

$$\text{λογ ημ } (44^0 \quad 17') = \overline{1},\ 84398.$$
$$\text{λογ ημ } (44^0 \quad 18') = \overline{1},\ 84411.$$

ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων τούτων εἶνε 13 (μονάδες τῆς τελευταίας τάξεως) ἀλλὰ καὶ ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἑπομένων εἶνε πάλιν 13, καὶ ἡ διαφορά αὕτη δύο ἐφεξῆς λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων ἐπὶ πολὺ διατηρεῖται· ὥστε δυνάμεθα νὰ παραδεχθῶμεν, ὅτι *ἡ αὔξησις τῶν λογαρίθμων εἶνε ἀνάλογος τῆς αὐξήσεως τῶν τόξων*, ὅτε σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Δι' αὔξησιν ἑνὸς λεπτοῦ ἀπὸ τοῦ τόξου $44^0\ 17'$ εἰς τὸ τόξον $44^0\ 18'$ ηὐξήθη ὁ λογάριθμος τοῦ ἡμιτόνου κατὰ 13 (ἑκατοντάκις χιλιοστά), δι' αὔξησιν $22''$, ἤτοι $\frac{22}{60}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ, ἀπὸ τοῦ τόξου $44^0\ 17'$ εἰς τὸ δοθὲν τόξον $44^0\ 17'\ 22''$, ὁ εἰρημένος λογάριθμος θὰ αὐξηθῇ κατὰ $\frac{22}{60} \cdot 13$, ἤτοι κατὰ 5 (ὡς ἔγγιστα)· ὥστε πρέπει νὰ προσθέσωμεν 5 μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως εἰς τὸν λογ ημ $(44^0\ 17')$, ἵνα εὕρωμεν τὸν λογ ημ $(44^0\ 17'\ 22'')$· ἑπομένως εἶνε

$$\text{λογ ημ } (44^0\ 17'\ 22'') = \overline{1},\ 84403.$$

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον εὑρίσκονται καὶ οἱ ἑπόμενοι λογάριθμοι.

1) λογ εφ $(14^0\ 38'\ 40'')$

ἔχομεν λογ εφ $(14^0\ 38') = \overline{1},41681$. διαφορὰ 52

διὰ 40″ προστίθεται $\frac{40}{60} \cdot 52 = 35$.

ὅθεν λογ ἐφ $(14^0,\ 38'\ 40'') = \overline{1},41716$.

2) λογ σφ $(8^0\ 9'\ 10'')$

ἔχομεν λογ σφ $(8^0\ 9') = 0,84402$ διαφορὰ 90

διὰ 10′ ἀφαιροῦνται $\frac{10}{60} \cdot 90 = 15$.

ὅθεν λογ σφ $(8^0\ 9'\ 10'') = 0,84387$.

3) λογ συν $(69^0\ 14'\ 25'')$

ἔχομεν λογ συν $(69^0\ 14') = \overline{1},54969$. διαφορὰ 33

διὰ 25″ ἀφαιροῦνται $\frac{25}{60} \cdot 33 = 14$.

ὅθεν λογ συν $(69^0\ 14'\ 25'') = \overline{1},54955$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν ἐφαπτομένων οἱ λογάριθμοι προβαίνουσιν ἐν τοῖς πίναξιν αὐξανόμενοι, τῶν δὲ συνημιτόνων καὶ τῶν συνεφαπτομένων ἐλαττούμενοι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2ον

42. Δοθέντος τοῦ λογαρίθμου μιᾶς τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν, εὑρεῖν τὸ ἀντιστοιχοῦν τόξον· (τὸ τόξον τοῦτο ὑποτίθεται πάντοτε μικρότερον τῶν 90^0).

Ἂν ὁ δοθεὶς λογάριθμος περιέχηται ἐν τοῖς πίναξιν ἐν τῇ οἰκείᾳ στήλῃ, τὸ τόξον εὑρίσκεται ἀμέσως· ἄν, παραδείγματος χάριν, δοθῇ

$$\text{λογ συν } \alpha = \overline{1},97615,$$

εὑρίσκομεν ἐκ τῶν πινάκων ἀμέσως $\alpha = 18^0\ 49'$.

Ὁμοίως, ἂν δοθῇ λογ ἐφ $\chi = 0,03060$

εὑρίσκομεν ἐκ τῶν πινάκων $\chi = 47^0\ \ 1'$.

Ἂν ὁ δοθεὶς λογάριθμος δὲν ὑπάρχῃ ἐν τοῖς πίναξι, θὰ περιλαμβάνηται μεταξὺ δύο ἐφεξῆς λογαρίθμων τῆς ῥηθείσης γραμμῆς, καὶ ἑπομένως τὸ ζητούμενον τόξον θὰ περιλαμβάνηται μεταξὺ τῶν πρὸς αὐτοὺς ἀντιστοιχούντων δύο τόξων, ὧν ἡ διαφορὰ εἶνε 1′

Ἂν π. χ. δοθῇ

$$\text{λογ ημ } \alpha = \overline{1},40891,$$

εὑρίσκομεν ἐν τῇ στήλῃ τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων

$$\overline{1},40873 = \text{λογ ημ } (14^0\ 51')$$
$$\overline{1},40921 = \text{λογ ημ } (14^0\ 52')$$

ὁ δοθεὶς λογάριθμος $\overline{1},40891$ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τούτων, οἵτινες διαφέρουσι κατὰ 48· παραδεχόμενοι δέ, ὡς καὶ πρίν, ὅτι ἡ αὔξησις τῶν λογαρίθμων εἶνε ἀνάλογος τῆς αὐξήσεως τῶν τόξων, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς· ἂν ὁ λογάριθμος τοῦ ἡμ $(14^0\ 51')$, ὅστις εἶνε $\overline{1}40873$, αὐξηθῇ κατὰ 48 (μονάδας τῆς κατωτάτης τάξεως), τὸ τόξον αὐξάνεται κατὰ $1'$, ἤτοι $60''$. ἂν δὲ ὁ αὐτὸς λογάριθμος αὐξηθῇ μόνον κατὰ 18 (ὅτε γίνεται ἴσος τῷ δοθέντι), τὸ τόξον θὰ αὐξηθῇ κατὰ $60''\cdot\frac{18}{48}$· ἤτοι κατὰ $23''$ ὡς ἔγγιστα· ὥστε εἶνε

$$\alpha = 14^0 \quad 51' \quad 23''.$$

Ὁμοίως ἂν δοθῇ $\quad$ λογ συν $\beta = \overline{1},89885$,

εὑρίσκομεν $\quad \overline{1},89888 =$ λογ συν $(37^0\ 36')$

καὶ $\quad \overline{1},89879 =$ λογ συν $(37^0\ 37')$

ἐπειδὴ δὲ ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων τούτων εἶνε 9, ὁ δὲ δοθεὶς διαφέρει τοῦ πρώτου κατὰ 3, ἕπεται ὅτι πρέπει νὰ αὐξηθῇ τὸ τόξον $(37^0\ 36')$ κατὰ τὰ $\frac{3}{9}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ, ἤτοι κατὰ $20''$, ἵνα γίνῃ ἴσον τῷ τόξῳ β· ὥστε εἶνε $\quad \beta = 37^0 \quad 36' \quad 20''$

Ὁμοίως ἂν δοθῇ $\quad$ λογ εφ $\chi = 1,25849$.

εὑρίσκομεν $\quad 1,25708 =$ λογ εφ $(86^0\ 50')$

$\quad 1,25937 =$ λογ εφ $(86^0\ 51')$

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι, ἂν ὁ λογάριθμος 1,25708 αὐξηθῇ κατὰ 229 (ὅτε γίνεται 1,25937), τὸ ἀντιστοιχοῦν τόξον $86^0\ 50'$ αὐξάνεται κατὰ $1'$· ὥστε, ἂν ὁ αὐτὸς λογάριθμος αὐξηθῇ μόνον κατὰ 141 (ὅτε γίνεται ἴσος τῷ δοθέντι), θὰ αὐξηθῇ τὸ τόξον κατὰ $\frac{141}{229}\cdot 60'$, ἤτοι κατὰ $37''$ περίπου· ὥστε εἶνε

$$\chi = 86^0 \quad 50' \quad 37''$$

Ἔστω πρὸς τούτοις

$$\text{λογ σφ } \omega = 0,11101$$

ἔχομεν $\quad 0,11110 =$ λογ σφ $(37^0 \quad 45')$ — $\quad$ διαφορὰ 26

διὰ διαφορὰν 9 (ἐπὶ ἔλαττον) πρέπει νὰ αὐξηθῇ τὸ τόξον κατὰ $\frac{9}{26}\cdot 60''$, ἤτοι κατὰ $21''$ περίπου· ὥστε εἶνε

$$\omega = 37^0 \quad 45' \quad 21'',$$

* Παρατήρησις.

43. Ἐνίοτε, ἀντὶ νὰ δοθῇ ὁ λογάριθμος τριγωνομετρικῆς τινος γραμμῆς, δίδεται αὐτὴ ἡ γραμμὴ (δι' ἀριθμοῦ ἐκπεφρασμένη) καὶ ζητεῖται τὸ ἀντιστοιχοῦν τόξον· τότε διακρίνομεν δύο περιπτώσεις·

1η) Ἂν ἡ δοθεῖσα γραμμὴ εἶνε θετική, εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον αὐτῆς (ἐκ τοῦ πίνακος, ὅστις περιέχει τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν) καὶ ἐξ αὐτοῦ τὸ τόξον.

Ἂν, παραδείγματος χάριν, ζητῆται τὸ τόξον χ, διὰ τὸ ὁποῖον εἶνε

$$\text{ημ}\ \chi = \frac{1}{5},$$

ἔχομεν $\text{λογ ημ}\ \chi = \text{λογ}\left(\frac{1}{5}\right) = -\ \text{λογ}\ 5 = \overline{1},30103\cdot$

ὅθεν κατὰ τὰ προηγούμενα εὑρίσκομεν

$$\chi = 11^0\ \ 32'\ \ 13''.$$

Ὁμοίως, ἂν ζητῆται τὸ τόξον φ, διὰ τὸ ὁποῖον εἶνε

$$\text{εφ}\ \varphi = \frac{8}{\sqrt{45}},$$

θὰ ἔχωμεν $\text{λογ εφ}\ \varphi = \text{λογ}\ 8 - {}^1/_2\ \text{λογ}\ 45\cdot$

$$\text{λογ}\ 8 = 0,\ 90309$$

$\text{λογ}\ 45 = 1,65321,\quad {}^1/_2\ \text{λογ}\ 45 = 0,\ 82660$

ὅθεν $\text{λογ εφ}\ \varphi = 0,\ 07649$

καὶ κατὰ τὰ προηγουμένως ἐκτεθέντα εὑρίσκομεν ἐκ τῶν πινάκων

$$\varphi = 50^0\ \ 1'\ \ 12''.$$

2α) Ἐὰν ἡ δοθεῖσα γραμμὴ εἶνε ἀρνητική· τότε ἀντὶ τοῦ ζητουμένου τόξου εὑρίσκομεν τὸ παραπλήρωμα αὐτοῦ, ἂν ἡ γραμμὴ εἶνε συνημίτονον, ἢ ἐφαπτομένη, ἢ συνεφαπτομένη· διότι τὸ παραπλήρωμα θὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν γραμμὴν θετικήν· εὑρεθέντος δὲ τοῦ παραπληρώματος αὐτοῦ, εὑρίσκεται ἀμέσως τὸ ζητούμενον τόξον.

Ἐάν, λόγου χάριν, δοθῇ

$$\text{εφ}\ \omega = -\ 4$$

παριστῶντες τὸ παραπλήρωμα τοῦ ω διὰ φ, θὰ ἔχωμεν

$$\text{εφ}\ \varphi = \text{εφ}\ (180 - \omega) = 4\cdot$$

$$\text{ὅθεν λογ εφ}\ \varphi = \text{λογ}\ 4 = 0,60206$$

$$\text{καὶ}\ \varphi = 75^0\ \ 57'\ \ 50''$$

$$\text{ἐπομένως}\ \omega = 104^0\ \ 2'\ \ 10'$$

Ἐὰν δὲ ἡ δοθεῖσα ἀρνητικὴ γραμμὴ εἶνε ἡμίτονον, τὸ ἀντιστοιχοῦν πρὸς αὐτὴν τόξον θὰ ὑπερβαίνῃ τὰς 180^0 καὶ ἀφαιροῦντες ἀπ' αὐτοῦ τὰς 180^0 θὰ ἔχωμεν τόξον, οὗτινος τὸ ἡμίτονον θὰ εἶνε (εδ. 11) θετικὸν καὶ ἴσον τῷ δοθέντι. Εὑρόντες δὲ τὸ τόξον τοῦτο προσθέτομεν εἰς αὐτὸ τὰς 180^0 καὶ ἔχομεν τὸ ζητούμενον.

Ἐὰν π. χ. δοθῇ $\quad ημ\, χ = -\frac{1}{8}$

θέτομεν $χ = 180 + ω$· ὅτε ἔχομεν $ω = χ - 180$

καὶ $ημ\, ω = ημ(χ - 180) = \frac{1}{8}$.

ὅθεν $λογ\, ημω = λογ\left(\frac{1}{8}\right) = \; -λογ\ 8$

ἤτοι $\quad λογ\, ημω = \overline{1},09691$

ὅθεν $\quad ω = \ 7^0\ \ 10'\ 51''$.

καὶ $\quad χ = 187^0\ \ 10'\ 51''$

ΣΗΜ Πρὸς ἑκάστην τιμὴν μιᾶς οἱασδήποτε τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν ἀντιστοιχοῦσι δύο τόξα μικρότερα περιφερείας ἐκ τούτων τὸ μικρότερον εὑρίσκεται κατὰ τὴν προηγουμένως ἐκτεθεῖσαν μέθοδον· ἐκ δὲ τούτου εὑρίσκεται καὶ τὸ ἄλλο εὐκόλως διὰ τῶν γνωστῶν ἰδιοτήτων τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν ἐδ. (10) (11) (12) καὶ (23).

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Β'.

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΜΕΤΡΗΣΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

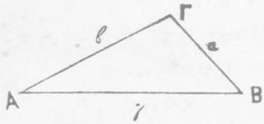
Αἱ τὰ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου συνδέουσαι σχέσεις.

ΟΡΙΣΜΟΙ

44. Δοθείσης γωνίας, ἐὰν γραφῇ κύκλος ἔχων κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας καὶ ἀκτῖνα τὴν μονάδα τοῦ μήκους, τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ἀπολαμβανόμενον τόξον τοῦ κύκλου λέγεται *μέτρον τῆς γωνίας*, ἢ ὅτι *μετρεῖ τὴν γωνίαν*. Παρίστανται δὲ ἀμφότερα, καὶ ἡ γωνία καὶ τὸ τόξον, ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

45. Ἡμίτονον καὶ συνημίτονον γωνίας λέγεται τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ μετροῦντος αὐτὴν τόξου· ὡσαύτως λέγεται καὶ ἐφαπτομένη γωνίας καὶ συνεφαπτομένη γωνίας.

ΣΗΜ. Τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου θὰ παριστῶμεν ἐν τοῖς ἑπομένοις διὰ τῶν γραμμάτων Α, Β, Γ, τὰς δὲ πλευρὰς διὰ τῶν α, ϐ, γ, διὰ τοῦ α τὴν ἀπέναντι τῆς γωνίας Α, διὰ τοῦ ϐ τὴν ἀπέναντι τῆς Β καὶ διὰ τοῦ γ τὴν ἀπέναντι τῆς Γ. (σχ. 20)



Σχῆμα 20.

Σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων ὀρθογωνίου τριγώνου.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'.

46. *Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἑκατέρα τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἰσοῦται τῇ ὑποτεινούσῃ πολλαπλασιασθείσῃ ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι γωνίας ἢ ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς προσκειμένης.*

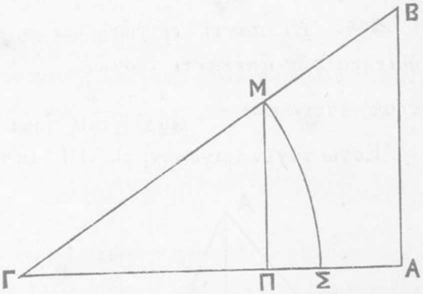
Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ (σχ. 21) ὀρθὴν ἔχον τὴν γωνίαν Α. Ἐὰν γραφῇ κύκλος, κέντρον μὲν ἔχων τὴν κορυφὴν Γ, ἀκτῖνα δὲ τὴν μονάδα, τὸ τόξον ΜΣ τοῦ κύκλου, ὅπερ περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας Γ, μετρεῖ τὴν γωνίαν ταύτην· καὶ ἂν ἐκ τοῦ Μ ἀχθῇ ἡ κάθετος ΜΠ ἐπὶ τὴν ΓΑ, ἡ μὲν ΜΠ θὰ εἶνε ἡμίτονον τοῦ τόξου ΜΣ, ἡ δὲ ΓΠ συνημίτονον αὐτοῦ. Ἀλλ' ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΓΠΜ καὶ ΓΑΒ ἕπεται.

$$\frac{ΑΒ}{ΠΜ}=\frac{ΑΓ}{ΓΠ}=\frac{ΒΓ}{ΓΜ}.$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶνε $ΓΜ=1$, $ΜΠ=ημΓ$, $ΓΠ=συνΓ$, αἱ ἰσότητες αὗται γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς·

$$\frac{γ}{ημΓ}=\frac{β}{συνΓ}=α.$$

ἐξ ὧν ἕπεται
$$β=α\ συνΓ$$
$$γ=α ημΓ. \quad (1)$$



Σχῆμα 21

Ἀντικαθιστῶντες δὲ τὴν γωνίαν Γ ὑπὸ τοῦ ἴσου αὐτῇ $90^0—Β$ (διότι $Β+Γ=90^0$), εὑρίσκομεν ἐκ τούτων τὰς δύο ἑπομένας ἰσότητας

$$\left.\begin{aligned} β&=α\ ημΒ \\ γ&=α\ συνΒ \end{aligned}\right\} \quad (1')$$

αἵτινες θὰ εὑρίσκοντο καὶ ἀμέσως, ἂν ὁ κύκλος ἐγράφετο περὶ τὴν κορυφὴν Β ὡς κέντρον.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄.

47. *Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἑκατέρα τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἰσοῦται τῇ ἄλλῃ πολλαπλασιασθείσῃ ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἀπέναντι γωνίας, ἢ ἐπὶ τὴν συνεφαπτομένην τῆς προσκειμένης.*

Ἐὰν αἱ ἰσότητες (1) διαιρεθῶσι κατὰ μέλη, προκύπτει

$$\frac{β}{γ}=\frac{συνΓ}{ημΓ} \quad καὶ \quad \frac{γ}{β}=\frac{ημΓ}{συνΓ}.$$

ὅθεν $\qquad β=γ\ σφΓ \qquad καὶ\ γ=β\ εφΓ. \qquad (2)$

Ὁμοίως εὑρίσκεται ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1΄)

$$β=γ\ εφΒ. \qquad καὶ\ γ=β\ σφΒ. \qquad (2')$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ Ἐὰν αἱ ἰσότητες (1) ὑψωθῶσιν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ προστεθῶσιν ἔπειτα κατὰ μέλη, προκύπτει

$$β^2+γ^2=α^2\ (ημ^2Γ+συν^2Γ)$$

ἤτοι $\qquad β^2+γ^2=α^2$

ἡ γνωστὴ σχέσις τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.

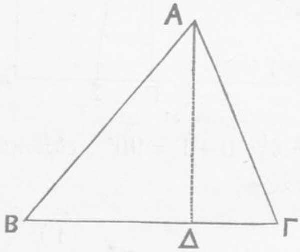
Σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων παντὸς τριγώνου.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'.

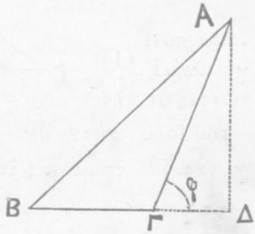
48. *Ἐν παντὶ τριγώνῳ αἱ πλευραὶ εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἡμίτονα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν.*

τουτ' ἔστιν εἶνε $\frac{\alpha}{\eta\mu\Delta}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}\cdot$

Ἔστω τυχὸν τρίγωνον, τὸ ΑΒΓ ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἔστω κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ ἡ ΑΔ ἐὰν ἡ κάθετος αὕτη πέσῃ ἐντὸς τοῦ τριγώνου (σχ. 22) (ὅπερ συμβαίνει, ὅταν ἀμφότεραι αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶνε ὀξεῖαι), θὰ διαιρέσῃ τὸ τρίγωνον εἰς δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, τὰ ΑΒΔ, καὶ ΑΓΔ, ἐξ ὧν εὑρίσκομεν (46)



Σχῆμα 22



Σχῆμα 23

$$A\Delta=\gamma\eta\mu B \quad \kappa\alpha\grave{\iota} \quad A\Delta=\beta\eta\mu\Gamma$$

ὅθεν ἔπεται $\gamma\eta\mu B=\beta\eta\mu\Gamma$

καὶ $$\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}=\frac{\beta}{\eta\mu B} \qquad (3)$$

Ἐὰν δὲ ἡ κάθετος πέσῃ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου (σχ. 23), εἶνε πάλιν

$$A\Delta=\gamma\eta\mu B \quad \kappa\alpha\grave{\iota} \quad A\Delta=\beta\eta\mu\varphi$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία φ καὶ ἡ γωνία Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶνε παραπληρωματικαί, ἔχουσιν ἴσα ἡμίτονα· ἑπομένως αἱ ἰσότητες αὗται γίνονται πάλιν

$$A\Delta=\gamma\eta\mu B \quad \kappa\alpha\grave{\iota} \quad A\Delta=\beta\eta\mu\Gamma\cdot$$

ἐξ ὧν ἕπεται πάλιν ἡ ἰσότης (3)

Ἐὰν ἡ κάθετος ἀχθῇ ἐκ τῆς κορυφῆς Β, εὑρίσκεται ὁμοίως

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\Delta}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}\cdot$$

Ἐὰν δὲ ἐκ τῆς Γ, εὑρίσκεται ἡ ἰσότης

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\Delta}=\frac{\beta}{\eta\mu B}\cdot$$

Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι ἐν παντὶ τριγώνῳ οἱ τρεῖς λόγοι

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A}, \quad \frac{\beta}{\eta\mu B}, \quad \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$$ εἶνε ἴσοι.

τοὐτ' ἔστιν

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \qquad (4)$$

ΣΗΜ. Ἂν ἡ κάθετος ἐφαρμόσῃ ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, τὸ τρίγωνον εἶνε ὀρθογώνιον καὶ ἡ ἰσότης τῶν τριῶν λόγων εἶνε ἤδη ἀποδεδειγμένη.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄.

49. *Ἐν παντὶ τριγώνῳ τὸ τετράγωνον τῆς τυχούσης πλευρᾶς ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλὴν τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν πλευρῶν τούτων πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.*

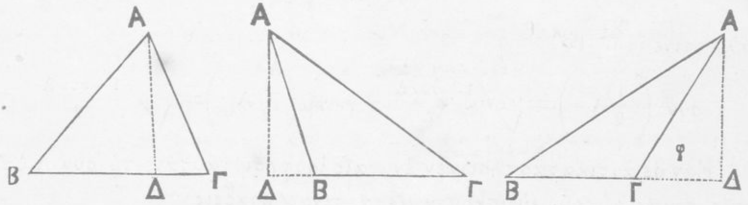
Ἔστω τυχὸν τρίγωνον, τὸ ΑΒΓ, καὶ γ μία τῶν πλευρῶν αὐτοῦ· λέγω ὅτι εἶνε

$$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma.$$

Ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἔστω κάθετος ἡ ΑΔ ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ.

Ἐὰν ἡ γωνία Γ εἶνε ὀξεῖα, (σχ. 24 καὶ 25) κατά τι θεώρημα τῆς γεωμετρίας εἶνε

$$(AB)^2=(B\Gamma)^2+(A\Gamma)^2-2(B\Gamma)\,(\Delta\Gamma).$$



Σχῆμα 24. Σχῆμα 25. Σχῆμα 26.

Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ εὑρίσκεται

$$\Delta\Gamma=A\Gamma\ \sigma\upsilon\nu\ \Gamma.$$

ὅθεν ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ πρώτῃ ἰσότητι τὴν ΔΓ ὑπὸ τοῦ ἴσου αὐτῆς εὑρίσκομεν

$$(AB)^2=(B\Gamma)^2+(A\Gamma)^2-2(B\Gamma)\,(A\Gamma)\ \sigma\upsilon\nu\ \Gamma,$$

ἤτοι $$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\ \Gamma.$$

Ἐὰν δὲ ἡ γωνία Γ εἶνε ἀμβλεῖα, ἡ κάθετος ΑΔ πίπτει ἐκτὸς τοῦ τριγώνου (σχ. 26)· καὶ τότε ἔχομεν ἐκ τῶν στοιχείων τῆς γεωμετρίας τὴν ἰσότητα

$$(\mathrm{AB})^2=(\mathrm{B\Gamma})^2+(\mathrm{A\Gamma})^2+2(\mathrm{B\Gamma}).(\Gamma\Delta). \qquad (\iota)$$

Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΓΔ ἕπεται

$$\Gamma\Delta=\mathrm{A\Gamma}\ \text{συν}\varphi\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία φ εἶνε παραπληρωματικὴ τῆς Γ, εἶνε συνφ=— συνΓ· ἐπομένως $\Gamma\Delta=\mathrm{A\Gamma}.\ (-\text{συν}\ \Gamma)=-\mathrm{A\Gamma}\ \text{συν}\Gamma.$

καὶ ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὴν τιμὴν ταύτην τῆς ΓΔ εἰς τὴν ἰσότητα (ι), εὑρίσκομεν πάλιν

$$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\ \text{συν}\Gamma\cdot$$

Ἐπειδὴ ἡ πρότασις ἐφαρμόζεται ἐπὶ ἑκάστης τῶν πλευρῶν, ἕπεται ὅτι εἶνε

$$\begin{aligned}\alpha^2&=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\ \text{συν A}\\ \beta^2&=\gamma^2+\alpha^2-2\gamma\alpha\ \text{συν B}\\ \gamma^2&=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\ \text{συν }\Gamma\end{aligned} \qquad (5)$$

Τοὺς τύπους τούτους δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ὑπὸ μορφὴν καταλληλοτέραν πρὸς τὴν χρῆσιν τῶν λογαρίθμων. Πρὸς τοῦτο λύομεν τὸν πρῶτον πρὸς τὸ συν Α, ὅτε εὑρίσκομεν

$$\text{συν A}=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$$

ἀλλ' εἶνε (ἐδ. 13)

$$\text{συν}\left(\frac{1}{2}\mathrm{A}\right)=\sqrt{\frac{1+\text{συν A}}{2}},\qquad \text{ημ}\left(\frac{1}{2}\mathrm{A}\right)=\sqrt{\frac{1-\text{συν A}}{2}}$$

Ἐὰν δὲ ἀντικαταστήσωμεν ἐν ταῖς ἰσότησι ταύταις τὸ συν Α ὑπὸ τῆς τιμῆς αὐτοῦ, εὑρίσκομεν μετά τινας πράξεις

$$\text{συν}\left(\frac{1}{2}\mathrm{A}\right)=\sqrt{\frac{2\beta\gamma+\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{4\beta\gamma}.}$$

$$\text{ημ}\left(\frac{1}{2}\mathrm{A}\right)=\sqrt{\frac{2\beta\gamma-\beta^2-\gamma^2+\alpha^2}{4\beta\gamma}.}$$

ἐπειδὴ δὲ εἶνε

$$\begin{aligned}2\beta\gamma+\beta^2+\gamma^2-\alpha^2&=(\beta+\gamma)^2-\alpha^2=(\alpha+\beta+\gamma)\,(-\alpha+\beta+\gamma).\\ 2\beta\gamma-\beta^2-\gamma^2+\alpha^2&=\alpha^2-(\beta-\gamma)^2=(\alpha+\beta-\gamma)\,(\alpha-\beta+\gamma),\end{aligned}$$

ἔπεται
$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}A\right)=\sqrt{\frac{(-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)}{4\beta\gamma}}$$
$$(6)\qquad \eta\mu\left(\frac{1}{2}A\right)=\sqrt{\frac{(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)}{4\beta\gamma}}.$$

Ἐὰν δὲ πρὸς συντομίαν θέσωμεν
$$\alpha+\beta+\gamma=2\tau$$
(ὅτε τ σημαίνει τὴν ἡμίσειαν περίμετρον τοῦ τριγώνου) καὶ ἀφαιρέσωμεν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς τεθείσης ἰσότητος, πρῶτον τὸ 2α, εἶτα τὸ 2β καὶ τέλος τὸ 2γ, εὑρίσκομεν
$$\begin{aligned}-\alpha+\beta+\gamma&=2(\tau-\alpha)\\ \alpha-\beta+\gamma&=2(\tau-\beta)\\ \alpha+\beta-\gamma&=2(\tau-\gamma)\end{aligned}\qquad(7)$$
καὶ διὰ τῆς βοηθείας τῶν ἰσοτήτων τούτων οἱ τύποι (6) γράφονται ὡς ἑξῆς
$$\left.\begin{aligned}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}A\right)&=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}\\ \eta\mu\left(\frac{1}{2}A\right)&=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}\end{aligned}\right.\qquad(8)$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ἐκ τῆς δευτέρας τῶν ἰσοτήτων (5)
$$\left.\begin{aligned}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}B\right)&=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)}{\gamma\alpha}}\\ \eta\mu\left(\frac{1}{2}B\right)&=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}{\gamma\alpha}}\end{aligned}\right.\qquad(8)$$
καὶ ἐκ τῆς τρίτης
$$\left.\begin{aligned}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)&=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\gamma)}{\alpha\beta}}\\ \eta\mu\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)&=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\alpha\beta}}.\end{aligned}\right.\qquad(8)$$

Ἐὰν νῦν διαιρέσωμεν ἀνὰ δύο τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν
$$\left.\begin{aligned}\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}A\right)&=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}\\ \varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}B\right)&=\sqrt{\frac{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{\tau(\tau-\beta)}}\\ \varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)&=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\tau(\tau-\gamma)}}\end{aligned}\right.\qquad(9)$$

Αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι πρέπει ἐν τοῖς τύποις τούτοις νὰ λαμβάνωνται θετικῶς· διότι τὰ ἡμίση τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου, ἤτοι αἱ γωνίαι $\frac{1}{2}$ Α, $\frac{1}{2}$ Β, $\frac{1}{2}$ Γ, εἶνε μικρότεραι τῶν 90^0, ἑπομένως αἱ τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ αὐτῶν εἶνε θετικαί.

ΣΗΜ. Ἐὰν ἐν τριγώνῳ τρέψωμεν τὰ γράμματα τῶν κορυφῶν ἀπὸ Α, Β, Γ εἰς Β, Γ, Α (τὸ Α εἰς Β, τὸ Β εἰς Γ καὶ τὸ Γ εἰς Α), θὰ τραπῶσιν ὁμοίως καὶ τὰ γράμματα τῶν πλευρῶν ἀπὸ α, β, γ, εἰς β, γ, α ἀλλ' οἱ εὑρεθέντες γενικοὶ τύποι (4) (5) (6) (9), οἱ ἐπὶ τοῦ τυχόντος τριγώνου ἰσχύοντες, πρέπει προφανῶς νὰ ἀληθεύωσι καὶ μετὰ τὴν τροπὴν ταύτην· τρέποντες ἄρα τὰ γράμματα ὡς εἴπομεν, δυνάμεθα ἐξ ἑνὸς τῶν τύπων τούτων νὰ εὕρωμεν τοὺς ὁμοίους του.

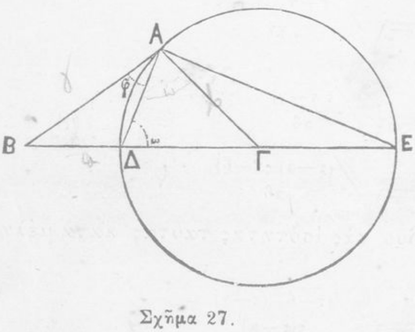
ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'.

50. *Ἐν παντὶ τριγώνῳ ἡ διαφορὰ δύο πλευρῶν ἔχει λόγον πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, ὃν ἔχει καὶ ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν ἀπέναντι γωνιῶν πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τοῦ ἡμιαθροίσματος αὐτῶν.*

Τουτ' ἔστιν εἶνε

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\text{εφ}\ \frac{1}{2}\,(\text{Α}-\text{Β})}{\text{εφ}\ \frac{1}{2}\,(\text{Α}+\text{Β})} \qquad (10)$$

Ἔστω τυχὸν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ ἐκ τῶν δύο πλευρῶν α καὶ β τῶν περιεχουσῶν τὴν γωνίαν Γ ἔστω μεγαλητέρα ἡ α, (ὅτε καὶ ἡ γωνία Α θὰ εἶνε μεγαλητέρα τῆς Β)· κέντρῳ τῷ Γ καὶ ἀκτῖνι τῇ μικροτέρᾳ πλευρᾷ ΑΓ ἂς γραφῇ περιφέρεια κύκλου ἡ ΑΔΕΑ. ἥτις τέμνει τὴν ΒΓ κατὰ τὸ σημεῖον Δ καὶ τὴν προσεκβολὴν αὐτῆς κατὰ τὸ Ε. τότε θὰ εἶνε (σχ. 27).



Σχῆμα 27.

$$\text{ΒΔ}=\text{ΒΓ}-\text{ΓΔ}=\alpha-\beta$$
$$\text{ΒΕ}=\text{ΒΓ}+\text{ΓΕ}=\alpha+\beta$$

Τὸ τρίγωνον ΒΔΑ ἔχει τὰς πλευρὰς ΒΔ $(=\alpha-\beta)$ καὶ ΒΑ $(=\gamma)$ ἀπέναντι δ' αὐτῶν τὰς γωνίας φ καὶ 180—ω· ἑπομένως εἶνε (ἐδ. 48)

$$\frac{\alpha-\beta}{\text{ημ}\varphi}=\frac{\gamma}{\text{ημ}\omega} \qquad \text{ἢ}\ \alpha-\beta=\gamma\,\frac{\text{ημ}\varphi}{\text{ημ}\omega}.$$

Καὶ τὸ τρίγωνον ΒΑΕ ἔχει τὰς πλευρὰς ΒΕ $(=\alpha+\beta)$ καὶ ΑΒ $(=\gamma)$, ἀπέναντι δ' αὐτῶν τὰς γωνίας $\varphi+90^0$ (διότι ἡ ΔΑΕ εἶνε ὀρθὴ) καὶ Ε $(=90-\omega)$· ἑπομένως εἶνε

$$\frac{\alpha+\beta}{\eta\mu\,(90+\varphi)}=\frac{\gamma}{\eta\mu\,(90-\omega)}$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία $90+\varphi$ εἶνε παραπληρωματικὴ τῆς $90-\varphi$, ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται (ἰδὲ ἐδ. 10 καὶ 9).

$$\frac{\alpha+\beta}{\sigma\upsilon\nu\varphi.}=\frac{\gamma}{\sigma\upsilon\nu\omega} \qquad \text{ἢ } \alpha+\beta=\gamma\,\frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\omega}$$

Ἐκ δὲ ταύτης καὶ ἐκ τῆς προηγουμένως εὑρεθείσης ἕπεται νῦν ἡ ἰσότης

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\eta\mu\varphi}{\eta\mu\omega}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\sigma\upsilon\nu\varphi}=\frac{\varepsilon\varphi\varphi}{\varepsilon\varphi\omega}. \qquad (\iota)$$

Ἀλλ' ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται ἀμέσως, ὅτι εἶνε

$$\omega=\frac{1}{2}.\ \mathrm{A\Gamma E}=\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \quad \text{καὶ } \omega=\varphi+\mathrm{B}.$$

ὥστε $\varphi=\omega-\mathrm{B}=\frac{1}{2}\mathrm{A}+\frac{1}{2}\mathrm{B}-\mathrm{B}=\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B}).$

καὶ διὰ ταῦτα ἡ ἰσότης (ι) γίνεται

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\varepsilon\varphi\,\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\varepsilon\varphi\,\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})}\cdot$$

ΣΗΜ. Ὑπετέθησαν αἱ πλευραὶ α καὶ β ἄνισοι· ἂν εἶνε $\alpha=\beta$, θὰ εἶνε καὶ $\mathrm{A}=\mathrm{B}$ καὶ ἡ ἰσότης (10) πάλιν ἀληθεύει

Παρατήρησις.

51. Τὰ ἓξ στοιχεῖα παντὸς τριγώνου συνδέονται διὰ τῶν ἑπομένων τριῶν ἐξισώσεων

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma=180^0$$

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\mathrm{A}}=\frac{\beta}{\eta\mu\mathrm{B}}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}. \qquad (\varepsilon)$$

Πᾶσα δὲ ἄλλη ἐξίσωσις, τὰ ἓξ ταῦτα στοιχεῖα συνδέουσα πρέπει νὰ καταντᾷ ταὐτότης, ὅταν ἐν αὐτῇ ἀντικατασταθῶσι τὰ Γ, α, β, ὑπὸ τῶν τιμῶν αὐτῶν

$$\Gamma=180^0-\mathrm{A}-\mathrm{B}. \qquad \alpha=\frac{\gamma\eta\mu\,\mathrm{A}}{\eta\mu\,(\mathrm{A}+\mathrm{B})}, \qquad \beta=\frac{\gamma\eta\mu\,\mathrm{B}}{\eta\mu\,(\mathrm{A}+\mathrm{B})},$$

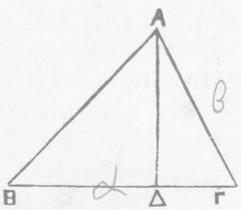
καὶ $\eta\mu\Gamma=\eta\mu\,(\mathrm{A}+\mathrm{B})$

ἃς παρέχουσιν αἱ ἐξισώσεις (ε)· διότι ἂν μὴ ἐγίνετο ταὐτότης, θὰ συνέδεε τὰ ἐν αὐτῇ περιεχόμενα γ, Α, Β· ὅπερ ἄτοπον· διότι ταῦτα οὐδαμῶς συνδέονται πρὸς ἄλληλα καὶ δύνανται νὰ μεταβάλλωνται κατὰ τὸ δοκοῦν.

Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι πᾶσα ἄλλη ἐξίσωσις τὰ ἓξ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου συνδέουσα, πρέπει νὰ εἶνε ἀκολούθημα τῶν ἐξισώσεων (ε), τουτέστι νὰ προκύπτῃ ἐξ αὐτῶν ἁρμοδίως συνδυαζομένων καὶ τοῦ τριγώνου μηδαμῶς παρεμβαίνοντος· διότι, ἂν εἰς τὴν ταὐτότητα τὴν ὁποίαν δίδει, ὅταν τεθῶσιν ἐν αὐτῇ αἱ τιμαὶ τῶν Γ, α, β, ἀντικαταστήσωμεν πάλιν τὰς τιμὰς ταύτας ὑπὸ τῶν γραμμάτων Γ, α, β, θὰ εὕρωμεν προφανῶς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν.

Ἂν καὶ ἐκ τῶν ἐξισώσεων (ε) δύνανται νὰ εὑρεθῶσιν αἱ λοιπαί, ἀπεδείξαμεν ἐν τούτοις τὰς ἐξισώσεις (5) (9) καὶ (10) ἀνεξαρτήτως τῶν (ε) καὶ ἀμέσως ἐκ τοῦ σχήματος· διότι τοῦτο ἐφάνη ἡμῖν εὐκολώτερον.

Ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.



Σχῆμα 28.

52. Ἔστω τυχὸν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· καὶ ἐκ τῆς κορυφῆς Α κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ ἡ ΑΔ· ἐὰν παραστήσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου διὰ τοῦ Ε, θὰ εἶνε (σχ. 28).

$$Ε = \frac{1}{2} . ΒΓ . ΑΔ = \frac{1}{2}\, α . ΑΔ$$

Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ εὑρίσκομεν

$$ΑΔ = ΑΓ \cdot ημΓ = β \cdot ημΓ.$$

ὅθεν ἕπεται $$Ε = \frac{1}{2}\, αβ\, ημΓ. \qquad (11)$$

Τουτ' ἔστι *τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται τῷ ἡμίσει τοῦ γινομένου δύο τῶν πλευρῶν αὐτοῦ πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.*

Ἐπειδὴ εἶνε (ἐδ. 21) $ημΓ = 2 . ημ\left(\frac{1}{2}Γ\right) . συν\left(\frac{1}{2}Γ\right)$,

ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὰ $ημ\left(\frac{1}{2}Γ\right) . συν\left(\frac{1}{2}Γ\right)$ ὑπὸ τῶν τιμῶν αὐτῶν (8), εὑρίσκομεν

$$ημΓ = \frac{2}{αβ}\sqrt{τ(τ-α)\,(τ-β)\,(τ-γ)}$$

καὶ ἂν ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ ημΓ τεθῇ εἰς τὴν ἰσότητα (11), προκύπτει

$$Ε = \sqrt{τ(τ-α)\,(τ-β)\,(τ-γ)} \qquad (12)$$

διὰ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

ΣΗΜ. Ἐὰν τυχὸν τετράπλευρον διαιρεθῇ εἰς τρίγωνα διὰ τῶν διαγωνίων αὐτοῦ καὶ ἐφαρμοσθῇ ἐπ' αὐτῶν ὁ τύπος (11), εὑρίσκεται ἡ ἑξῆς πρότασις.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου ἰσοῦται τῷ ἡμίσει τοῦ γινομένου τῶν διαγωνίων αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.

* Ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

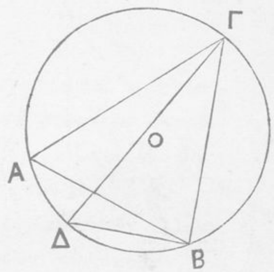
53. Ἔστω τυχὸν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ ὁ εἰς αὐτὸ περιγεγραμμένος κύκλος ὁ ΑΔΒΓΑ· ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς Γ ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΓΟΔ, ἥν τινα παριστῶμεν διὰ δ, καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ ΔΒ, γίνεται ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΒΔΓ, ἐξ οὗ εὑρίσκομεν

$$\text{ΒΓ} = \text{ΓΔ} \cdot \eta\mu\Delta\cdot$$

ἀλλ' ἡ γωνία Δ εἶνε ἴση τῇ Α (ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα)· ὅθεν

$$\alpha = \delta\ \eta\mu\text{Α}$$

καὶ ἑπομένως $\delta = \dfrac{\alpha}{\eta\mu\text{Α}} = \dfrac{\beta}{\eta\mu\text{Β}} = \dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}\cdot$ (13)

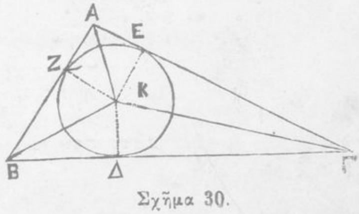


Σχῆμα 29.

τουτέστιν ἡ *διάμετρος τοῦ εἰς τρίγωνον περιγεγραμμένου κύκλου ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῆς τυχούσης αὐτοῦ πλευρᾶς πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι γωνίας*.

* Ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

54. Ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου Κ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἀχθῶσιν ἐπὶ τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου αἱ εὐθεῖαι ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, διαιρεῖται τὸ τρίγωνον εἰς τρία, ἔχοντα βάσεις μὲν τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου, ὕψη δὲ τὰς ἀκτῖνας ΚΔ, ΚΕ, ΚΖ τοῦ κύκλου, (αἵτινες εἶνε κάθετοι ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας)· ἑπομένως τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν εἶνε



Σχῆμα 30.

$$\frac{1}{2}\alpha.\rho,\quad \frac{1}{2}\beta.\rho,\quad \frac{1}{2}\gamma.\rho,$$

ρ οὔσης τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου.

Ἐντεῦθεν ἕπεται

$$E = \frac{1}{2}\rho(\alpha+\beta+\gamma) = \rho.\tau$$

Ὅθεν καὶ $\rho = \frac{E}{\tau}$.

ἀντικαθιστῶντες δὲ τὸ Ε ὑπὸ τῆς τιμῆς αὐτοῦ (12) εὑρίσκομεν

$$\rho = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}} \tag{14}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

Ἐπίλυσις τῶν τριγώνων.

Ἐπίλυσις τριγώνου λέγεται ἡ διὰ τῶν ἀριθμῶν εὕρεσις τῶν στοιχείων αὐτοῦ, ὅταν δοθῶσιν ἀρκετὰ ἐξ αὐτῶν. (ἰδὲ εἰσαγωγήν).

Ἐπίλυσις τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων.

55. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ὁρίζεται ἐντελῶς, ὅταν δοθῶσιν, ἢ μία πλευρὰ αὐτοῦ (ἡ ὑποτείνουσα ἢ μία τῶν καθέτων) καὶ μία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, ἢ δύο πλευραὶ αὐτοῦ (αἵτινες δυνατὸν νὰ εἶνε αἱ δύο κάθετοι ἢ μία κάθετος καὶ ἡ ὑποτείνουσα). Διὰ τοῦτο ἐν τῇ ἐπιλύσει τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων διακρίνομεν τὰς ἑπομένας τέσσαρας περιπτώσεις.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 1η

56. ***Δοθείσης τῆς ὑποτεινούσης α ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ μιᾶς τῶν ὀξειῶν αὐτοῦ γωνιῶν, ἔστω τῆς Β, εὑρεῖν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.***

Πρὸς εὕρεσιν τῶν ζητουμένων ἔχομεν τοὺς τύπους (1΄) τοῦ ἐδ. 46.

$$\Gamma = 90^0 - B, \qquad \beta = \alpha \text{ ημ. } B, \qquad \gamma = \alpha \text{ συν } B.$$

Ἐκ τοῦ πρώτου εὑρίσκομεν ἀμέσως τὴν γωνίαν Γ· ἐκ δὲ τῶν ἄλλων λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν ἴσων, εὑρίσκομεν

$$\text{λογ } \beta = \text{λογ } \alpha + \text{λογ ημ. } B. \qquad \text{λογ } \gamma = \text{λογ } \alpha + \text{λογ συν } B.$$

ἐξ ὧν λογιζόμεθα τὰς πλευρὰς β καὶ γ τῇ βοηθείᾳ τῶν λογαρίθμων.

Παραδείγματα.

1ον) Ἔστωσαν δεδομένα $\alpha = 1598$ μέτρα

καὶ $B = 32^0,\ 18',\ 30''$,

Πρὸς εὕρεσιν τῆς Γ ἀφαιροῦμεν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν **Β** ἀπὸ $89^0\ 59'\ 60''$ (τουτέστιν ἀπὸ 90^0) καὶ εὑρίσκομεν

$$\Gamma = 57^0\ 41'\ 30''$$

Λογισμὸς τῆς πλευρᾶς β		**Λογισμὸς τῆς πλευρᾶς γ**	
$\beta = \alpha$ ημ. B		$\gamma = \alpha$ συν B	
λογ α =	3,20358	λογ α =	3,20358
λογ ημ. B =	$\bar{1}$,72793	λογ συν B =	$\bar{1}$,92695
λογ β =	2,93151	λογ γ =	3,13053
καὶ β =	854,1	καὶ γ =	1350,6

ΣΗΜ. Ἕκαστος τῶν λογαρίθμων, τοὺς ὁποίους λαμβάνομεν ἀμέσως ἐκ τῶν πινάκων, δύναται νὰ διαφέρῃ τοῦ ἀληθοῦς τὸ πολὺ κατὰ ἡμίσειαν μονάδα τῆς τελευταίας τάξεως· διὰ τοῦτο ὁ λογ ϐ, ὁ ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ δύο τοιούτων λογαρίθμων εὑρεθείς, δύναται νὰ διαφέρῃ τοῦ ἀληθοῦς τὸ πολὺ κατὰ μίαν μονάδα τῆς ῥηθείσης τάξεως· τοιαύτη δὲ διαφορὰ προξενεῖ (ὡς ἐκ τῶν πινάκων βλέπομεν) λᾶθος ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ ϐ τὸ πολὺ $\frac{1}{5}$ τοῦ τελευταίου ψηφίου 1, (ὅπερ σημαίνει δέκατα)· ὥστε τὸ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ϐ συμβαῖνον λᾶθος δὲν ὑπερβαίνει τὰ $\frac{2}{100}$ τοῦ μέτρου. Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς γ συμβαῖνον λᾶθος δὲν εἶνε μεγαλήτερον τῶν $\frac{3}{100}$ τοῦ μέτρου.

2ον) Ἔστωσαν δεδομένα $\alpha = 3955^{\mu},8$ καὶ $B = 76^0\ 40'\ 25''$

$$\begin{array}{r} 89^0\ \ 59'\ \ 60'' \\ 76^0\ \ 40'\ \ 25'' \\ \hline \Gamma = 13^0,\ 19'\ \ 35'' \end{array}$$

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς ϐ

$$\begin{array}{lcl} \text{λογ } \alpha & = & 3{,}59724 \\ \text{λογ ημ } B & = & \overline{1}{,}98814 \\ \hline \text{λογ } \beta & = & 3{,}58538 \\ \text{καὶ } \beta & = & 3849{,}3 \end{array}$$

κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ

$$\begin{array}{lcl} \text{λογ } \alpha & = & 3{,}59724 \\ \text{λογ συν } B & = & \overline{1}{,}36267 \\ \hline \text{λογ } \gamma & = & 2{,}95991 \\ \text{καὶ } \gamma & = & 911{,}82 \end{array}$$

κατὰ προσέγγισιν $\frac{2}{100}$ τοῦ μέτρου

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 2α

57. *Δοθείσης μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, ἔστω τῆς ϐ καὶ μιᾶς τῶν ὀξειῶν αὐτοῦ γωνιῶν, εὑρεῖν τὰ λοιπὰ αὐτοῦ στοιχεῖα.*

Ἐκ τῆς δοθείσης ὀξείας γωνίας εὑρίσκεται ἀμέσως καὶ ἡ ἄλλη· ἑπομένως ἀμφότεραι αἱ ὀξεῖαι γωνίαι δύνανται νὰ ὑποτεθῶσι γνωσταί.

Αἱ ἄγνωστοι πλευραί, α καὶ γ, θὰ εὑρεθῶσιν ἐκ τῶν τύπων

$$\alpha = \frac{\beta}{\text{ημ } B} \qquad \text{καὶ } \gamma = \beta\,\text{σφ } B = \frac{\beta}{\text{εφ} B}$$

οἵτινες δίδουσι

$$\text{λογ } \alpha = \text{λογ } \beta - \text{λογ ημ } B, \qquad \text{λογ } \gamma = \text{λογ } \beta + \text{λογ σφ } B.$$

Παραδείγματα.

1ον) Ἔστωσαν δεδομένα $\beta = 895^{\mu},5$ καὶ $\Gamma = 43^0,\ 18'\ 20''$

$$\begin{array}{r} 89^0\ \ 59'\ \ 60'' \\ 43^0\ \ 18'\ \ 20'' \\ \hline B = 46^0\ \ 41'\ \ 40'' \end{array}$$

Εὕρεσις τῆς ὑποτεινούσης

$$\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B}$$

$$\begin{array}{lcr} \lambda o\gamma\ \beta & = & 2,95207 \\ \lambda o\gamma\ \eta\mu\ B & = & \bar{1},86196 \\ \hline \lambda o\gamma\ \alpha & = & 3,09011 \\ \kappa\alpha\grave{\iota}\ \alpha & = & 1230,57 \end{array}$$

κατὰ προσέγ. $\frac{3}{100}$ τοῦ μέτρου·

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ

$$\gamma = \beta\ \sigma\varphi\ B$$

$$\begin{array}{lcr} \lambda o\gamma\ \beta & = & 2,95207 \\ \lambda o\gamma\ \sigma\varphi\ B & = & \bar{1},97430 \\ \hline \lambda o\gamma\ \gamma & = & 2,92637 \\ \kappa\alpha\grave{\iota}\ \gamma & = & 844,06 \end{array}$$

κατὰ προσέγ. $\frac{2}{100}$ τοῦ μέτρου.

2ον). Ἔστωσαν δεδομένα $\beta = 8530^{\mu},4$ καὶ $B = 32^0,\ 15'$

$$\begin{array}{r} 89^0\ \ 60' \\ 32^0\ \ 15' \\ \hline \Gamma = 57^0\ \ 45' \end{array}$$

Εὕρεσις τῆς ὑποτεινούσης α

$$\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B}$$

$$\begin{array}{lcr} \lambda o\gamma\ \beta & = & 3,93097 \\ \lambda o\gamma\ \eta\mu\ B & = & \bar{1},72723 \\ \hline \lambda o\gamma\ \alpha & = & 4,20374 \\ \kappa\alpha\grave{\iota}\ \alpha & = & 15986 \end{array}$$

κατὰ προσέγ. $\frac{4}{10}$ μέτρου

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ

$$\gamma = \beta\sigma\varphi\ B$$

$$\begin{array}{lcr} \lambda o\gamma\ \beta & = & 3,93097 \\ \lambda o\gamma\ \beta\sigma\varphi\ B & = & 0,20000 \\ \hline \lambda o\gamma\ \gamma & = & 4,13097 \\ \kappa\alpha\grave{\iota}\ \gamma & = & 13520 \end{array}$$

κατὰ προσέγ. $\frac{3}{10}$ μέτρου.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 3

58. *Δοθεισῶν τῶν δύο καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, εὑρεῖν τὴν ὑποτείνουσαν καὶ τὰς δύο ὀξείας αὐτοῦ γωνίας*

Πρὸς εὕρεσιν τῶν ζητουμένων ἔχομεν τοὺς τύπους

$$\varepsilon\varphi\ B = \frac{\beta}{\gamma}, \qquad \Gamma = 90^0 - B, \qquad \kappa\alpha\grave{\iota}\ \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2.$$

Ἐκ τοῦ πρώτου ἕπεται

$$\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ B = \lambda o\gamma\ \beta - \lambda o\gamma\ \gamma.$$

Ἐκ δὲ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκομεν διὰ τῶν λογαρίθμων τὴν γωνίαν Β, ἐξ ἧς καὶ τὴν Γ.

Ὁ τὴν ὑποτείνουσαν δίδων τύπος $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ δὲν εἶνε κατάλληλος πρὸς τὴν χρῆσιν τῶν λογαρίθμων· διὰ τοῦτο, ἀφοῦ εὑρεθῇ ἡ γωνία Β, προσδιορίζεται καὶ ἡ ὑποτείνουσα α ἐκ τοῦ τύπου

$$\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B}$$

ὅστις δίδει λογ α = λογ β — λογ ημΒ.

Παραδείγματα.

1ον) Ἔστωσαν δεδομένα $\beta = 1593^{\mu},8$ $\gamma = 8907^{\mu},3$.

Εὕρεσις τῆς γωνίας Β.

$$\varepsilon\varphi\, B = \frac{\beta}{\gamma}$$

λογ β	=	3,20244
λογ γ	=	3,94974
λογ εφ Β	=	$\bar{1}$,25270
καὶ Β	=	10° 8′ 42″
ὅθεν καὶ Γ	=	79° 51′ 18″

Εὕρεσις τῆς ὑποτεινούσης.

$$\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu\, B}$$

λογ β	=	3,20244
λογ ημ Β	=	$\bar{1}$,24585
λογ α	=	3,95659
ὅθεν καὶ α	=	$9048^{\mu},8$

κατὰ προσέγ. $\frac{2}{10}$ τοῦ μέτρου.

2ον) Ἔστωσαν δεδομένα $\beta = 450^{\mu},8$ καὶ $\gamma = 854^{\mu},6$.

Εὕρεσις τῆς γωνίας Β.

$$\varepsilon\varphi\, B = \frac{\beta}{\gamma}$$

λογ β	=	2,65398
λογ γ	=	2,93176
λογ εφ Β	=	$\bar{1}$,72222
καὶ Β	=	27° 48′ 42″
ὅθεν καὶ Γ	=	62° 11′ 18″

Εὕρεσις τῆς ὑποτεινούσης.

$$\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu\, B}$$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\ \beta &= 2,65398 \\ \lambda o\gamma\ \eta\mu\, B &= \overline{1},66892 \\ \hline \lambda o\gamma\ \alpha &= 2,98506 \\ \kappa\alpha\grave{\iota}\ \alpha &= 966^{\mu},18 \end{aligned}$$

κατὰ προσέγ. $\frac{2}{100}$ τοῦ μέτρου.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 4.

59. *Δοθείσης τῆς ὑποτεινούσης α καὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας, ἔστω τῆς β, εὑρεῖν τὴν ἄλλην πλευρὰν καὶ τὰς δύο ὀξείας γωνίας.*

Πρὸς εὕρεσιν τῆς πλευρᾶς γ ἔχομεν τὸν τύπον

$$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$$

$$\text{ὅθεν } 2.\ \lambda o\gamma\ \gamma = \lambda o\gamma\,(\alpha+\beta) + \lambda o\gamma\,(\alpha-\beta)$$

$$\text{καὶ} \qquad \lambda o\gamma\ \gamma = \frac{1}{2}\cdot\Big(\lambda o\gamma(\alpha+\beta) + \lambda o\gamma(\alpha-\beta)\Big)$$

Πρὸς εὕρεσιν τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν τὸν τύπον (ἐδ. 46)

$$\eta\mu\, B = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad \text{ἢ } \sigma\upsilon\nu\ \Gamma = \frac{\beta}{\alpha},$$

ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν γωνίαν Γ καὶ ὡς ἑξῆς·
ἐπειδὴ εἶνε (ἐδ. 13).

$$\eta\mu\left(\frac{1}{2}\Gamma\right) = \sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\ \Gamma}{2}} \qquad \text{καὶ } \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}\Gamma\right) = \sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\ \Gamma}{2}}$$

ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν τοῦ συν Γ εἰς τοὺς τύπους τούτους λαμβάνομεν

$$\eta\mu\left(\frac{1}{2}\Gamma\right) = \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{2\alpha}} \qquad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}\Gamma\right) = \sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}}$$

$$\text{ὅθεν καὶ } \varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}\Gamma\right) = \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$$

$$\text{καὶ } \lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}\Gamma\right) = \frac{1}{2}\Big(\lambda o\gamma(\alpha-\beta) - \lambda o\gamma(\alpha+\beta)\Big)$$

Διὰ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν $\frac{1}{2}$ Γ, ὅθεν καὶ τὴν Γ, (χρειαζόμεθα δὲ πρὸς τοῦτο τοὺς αὐτοὺς λαγαρίθμους, τοὺς ὁποίους μετεχειρίσθημεν πρὸς εὕρεσιν τῆς πλευρᾶς γ)· εὑρεθείσης δὲ τῆς Γ, εὑρίσκεται καὶ ἡ Β ἀμέσως.

* Παρατήρησις.

Ἐκ τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς προσδιορίζεται ἀκριβέστερον ἡ γωνία ἢ ἐκ τοῦ ἡμιτόνου καὶ ἐκ τοῦ συνημιτόνου αὐτῆς· διότι μικρόν τι σφάλμα περὶ τὴν ἐφαπτομένην συμβὰν προξενεῖ μικρὸν λάθος ἐπὶ τῆς γωνίας· τοὐναντίον μικρὸν σφάλμα συμβὰν περὶ τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας (μάλιστα ἂν ἡ γωνία ὀλίγον διαφέρῃ τῶν 90^0), ἢ περὶ τὸ συνημίτονον (μάλιστα ἂν ἡ γωνία εἶνε μικρὰ) δύναται νὰ προξενήσῃ μέγα λάθος ἐπὶ τῆς γωνίας. Ὅπως πεισθῇ τις περὶ τούτου, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσῃ ἐν τοῖς πίναξιν, ὅτι ἡ διαφορὰ Δ δύο ἐφεξῆς λογαρίθμων τῶν ἐφαπτομένων ὑπερβαίνει πάντοτε τὰς διαφορὰς δ καὶ θ δύο ἐφεξῆς λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων τοῦ αὐτοῦ τόξου. Ἐὰν λοιπὸν ὁ δοθεὶς λογάριθμος τῆς ἐφαπτομένης ἔχῃ σφάλμα ἴσον πρὸς μίαν μονάδα τῆς τελευταίας τάξεως, τὸ ἐπὶ τῆς γωνίας προξενούμενον λάθος θὰ εἶνε $\frac{60''}{\Delta}$ περίπου· (διότι εἰς λάθος Δ μονάδων τῆς εἰρημένης τάξεως ἀντιστοιχεῖ λάθος $60''$ ἐπὶ τῆς γωνίας), ἐνῷ τὸ αὐτὸ σφάλμα εἰς τὸν λογάριθμον τοῦ ἡμιτόνου συμβάν, θὰ προξενήσῃ ἐπὶ τῆς γωνίας λάθος $\frac{60''}{\delta}$ περίπου· εἰς δὲ τὸν λογάριθμον τοῦ συνημιτόνου συμβάν, θὰ προξενήσῃ λάθος ἐπὶ τῆς γωνίας $\frac{60''}{\theta}$ περίπου, ταῦτα δὲ εἶνε μεγαλήτερα· διότι, ὡς εἴπομεν, $\delta < \Delta$ καὶ $\theta < \Delta$.

Ὁ δὲ λόγος, δι' ὃν αἱ διαφοραὶ Δ τῶν λογαρίθμων τῶν ἐφαπτομένων ὑπερβαίνουσι τὰς διαφορὰς τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων, εἶνε ὁ ἀκόλουθος·

Ἐπειδὴ εἶνε $$\text{εφ}\,\varphi = \frac{\text{ημ}\,\varphi}{\text{συν}\,\varphi},$$

ἕπεται $$\text{λογ εφ}\,\varphi = \text{λογ ημ}\,\varphi - \text{λογ συν}\,\varphi.$$

Ἐὰν δὲ ἡ γωνία αὐξηθῇ κατὰ $1'$, ὁ λογάριθμος τοῦ ἡμιτόνου της θὰ αὐξηθῇ κατὰ δ, τοῦ δὲ συνημιτόνου θὰ ἐλαττωθῇ κατὰ θ· ἐπομένως ὁ λογάριθμος τῆς ἐφαπτομένης, (ὅστις εἶνε πάντοτε ἴσος τῇ διαφορᾷ τῶν δύο πρώτων), θὰ αὐξηθῇ κατὰ $\delta+\theta$· εἶνε λοιπὸν $\Delta=\delta+\theta$.

Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι πρέπει πάντοτε, ὅταν πρόκειται νὰ εὑρεθῇ γωνία τις ἐκ τῶν τριγωνομετρικῶν αὐτῆς γραμμῶν, νὰ μεταχειριζώμεθα εἰ δυνατὸν τὴν ἐφαπτομένην.

Παραδείγματα.

1ον) Ἔστωσαν δεδομένα· $\alpha=7450{,}6$· $\beta=2971{,}8$

$$\alpha+\beta=10422{,}4$$
$$\alpha-\beta=4478{,}8$$

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ

$$\gamma=\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}$$

$\lambda o\gamma\,(\alpha-\beta)=3{,}65116$
$\lambda o\gamma\,(\alpha+\beta)=4{,}01797$
ἀθρ. $7{,}66913$
$\lambda o\gamma\,\gamma=3{,}83456$
καὶ $\gamma=6832{,}2$
κατὰ προσέγ. $\frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου

Εὕρεσις τῆς γωνίας Γ

$$\varepsilon\varphi\,\frac{1}{2}\Gamma=\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$$

$\lambda o\gamma\,(\alpha-\beta)=3{,}65116$
$\lambda o\gamma\,(\alpha+\beta)=4{,}01797$
διαφ. $\bar{1}{,}63319$
$\lambda o\gamma\,\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)=\bar{1}{,}81659$
καὶ $\frac{1}{2}\Gamma=33^0\ 14'\ 45''$ προσέγ. $\frac{1}{23}$
ὅθεν $\Gamma=66^0\ 29'\ 30''$ προσέγ $\frac{1'}{14}$
καὶ $B=23^0\ 30'\ 30''$

2ον) Ἔστωσαν δεδομένα $\alpha=487^{\mu.}$ $\beta=408^{\mu.},5$

$$\alpha+\beta=895{,}5$$
$$\alpha-\beta=78{,}5$$

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ

$\lambda o\gamma\,(\alpha-\beta)=1{,}89487$
$\lambda \acute{o}\gamma\,(\alpha+\beta)=2{,}95207$
ἄθρ. $4{,}84694$
$\lambda o\gamma\,\gamma=2{,}42347$
ὅθεν $\gamma=265{,}14$
κατὰ προσέγ. $\frac{1}{100}$ τοῦ μέτρου

Εὕρεσις τῆς γωνίας Γ.

$\lambda o\gamma\,(\alpha-\beta)=1{,}89487$
$\lambda o\gamma\,(\alpha+\beta)=2{,}95207$
διαφ. $\bar{2}{,}94280$
$\lambda o\gamma\,\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)=\bar{1}{,}47140$
ὅθεν $\frac{1}{2}\Gamma=16^0\ 29\ 34$
προσέγ. $\left(1\ \frac{1}{2}\right)$
καὶ $\Gamma=32^0\ 59\ 8$ (προσέγ. 3).
ὅθεν καὶ $B=57^0\ 0'\ 52''$

Ἐπίλυσις τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων ἐν γένει.

60. Τὸ εὐθύγραμμον τρίγωνον ὁρίζεται ἐντελῶς, ὅταν δοθῶσιν, ἢ μία πλευρὰ αὐτοῦ καὶ δύο γωνίαι (καὶ ἡ πρὸς τὴν πλευρὰν θέσις αὐτῶν), ἢ δύο πλευραὶ καὶ μία γωνία (ἥτις δύναται νὰ εἶνε, ἢ ἡ ὑπὸ τῶν δύο πλευρῶν περιεχομένη, ἢ ἡ ἀντικειμένη εἰς τὴν μεγαλητέραν ἐξ αὐτῶν), ἢ αἱ τρεῖς πλευραὶ αὐτοῦ.

Διὰ ταῦτα ἐν τῇ ἐπιλύσει τῶν τριγώνων διακρίνομεν τὰς ἑπομένας τέσσαρας περιπτώσεις.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 1η

61. *Δοθείσης μιᾶς πλευρᾶς α καὶ δύο γωνιῶν τοῦ τριγώνου, εὑρεῖν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.*

Ἡ τρίτη γωνία εὑρίσκεται ἀμέσως ἐκ τῆς ἰσότητος

$$A+B+\Gamma=180^{0}\cdot$$

αἱ δὲ ζητούμεναι πλευραὶ β καὶ γ, δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων (4) τοῦ ἐδ. 48.

$$\beta=\frac{\alpha\,\eta\mu\,B}{\eta\mu\,A},\qquad \gamma=\frac{\alpha\,\eta\mu\,\Gamma}{\eta\mu\,A}.$$

ἐξ ὧν λαμβάνομεν τοὺς πρὸς τὴν χρῆσιν τῶν λογαρίθμων καταλλήλους τύπους

$$\lambda o\gamma\,\beta=\lambda o\gamma\,\alpha+\lambda o\gamma\,\eta\mu\,B-\lambda o\gamma\,\eta\mu\,A$$
$$\lambda o\gamma\,\gamma=\lambda o\gamma\,\alpha+\lambda o\gamma\,\eta\mu\,\Gamma-\lambda o\gamma\,\eta\mu\,A.$$

Παράδειγμα.

Ἔστωσαν δεδομένα

$$\alpha=752^{\mu},8\cdot\quad B=67^{0}\ 33'\ 10''\cdot\quad \Gamma=79^{0}\ 40'$$

ζητοῦνται δὲ αἱ πλευραὶ β, γ καὶ ἡ γωνία A καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου·

Ἐν πρώτοις εἶνε $B+\Gamma=147^{0}\ 13'\ 10''$

ὅθεν $A=32^{0}\ 46'\ 50''$

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς β

$$\beta = \frac{\alpha\ \eta\mu B}{\eta\mu\ A}$$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\ \alpha &= 2{,}87668 \\ \lambda o\gamma\ \eta\mu\ B &= \bar{1}{,}96578 \\ \hline \text{ἄθρ.}\quad & 2{,}84246 \\ \lambda o\gamma\ \eta\mu\ A &= \bar{1}{,}73354 \\ \hline \lambda o\gamma\ \beta &= 3{,}10892 \\ \text{καὶ}\ \beta &= 1285{,}06 \end{aligned}$$

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ

$$\beta = \frac{\alpha\ \eta\mu\Gamma}{\eta\mu\ A}$$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\ \alpha &= 2{,}87668 \\ \lambda o\gamma\ \eta\mu\ \Gamma &= \bar{1}{,}99290 \\ \hline \text{ἄθρ.}\quad & 2{,}86958 \\ \lambda o\gamma\ \eta\mu\ A &= \bar{1}{,}73354 \\ \hline \lambda o\gamma\ \gamma &= 3{,}13604 \\ \text{καὶ}\ \gamma &= 1367{,}84 \end{aligned}$$

κατὰ προσέγγισιν $\frac{3}{100}$ τοῦ μέτρου.

Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ

$$E = \frac{1}{2}\alpha\beta\ \eta\mu\ \Gamma$$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\ \alpha &= 2{,}87668 \\ \lambda o\gamma\ \beta &= 3{,}10892 \\ \lambda o\gamma\ \eta\mu\ \Gamma &= \bar{1}{,}99290 \\ \hline \lambda o\gamma\ (2E) &= 5{,}97850 \\ \text{καὶ}\quad 2E &= 951700\ \text{τετρ. μέτρα.} \\ \text{ὅθεν}\quad E &= 475850\ \text{τετρ. μέτρα.} \end{aligned}$$

ΣΗΜ. Ὁ λογ (2Ε) δύναται νὰ διαφέρῃ τοῦ ἀληθοῦς (ἐδ. 56. Σημ.) τὸ πολὺ κατὰ $2\frac{1}{2}$ μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως. Ἐπειδὴ δὲ ὡς ἐκ τῶν πινάκων βλέπομεν), ἂν αὐξηθῇ ὁ λογάριθμος οὗτος κατὰ 5 μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως, ὁ ἀριθμὸς 2Ε αὐξάνει κατὰ 100, ἕπεται, ὅτι τὸ ἐπὶ τοῦ 2Ε συμβαῖνον λᾶθος εἶνε μικρότερον τῶν 50 τ. μ. καὶ ἑπομένως τὸ ἐπὶ τοῦ Ε συμβαῖνον λάθος εἶνε μικρότερον τῶν 25 τετρ. μέτρων.

Παρατήρησις.

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον $E = \frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma$ ἀντικαταστήσωμεν τὸ β ὑπὸ τῆς τιμῆς αὐτοῦ $\beta = \frac{\alpha\eta\mu\ B}{\eta\mu\ A}$, εὑρίσκομεν

$$F = \frac{1}{2}\alpha^2\frac{\eta\mu\ B\ \eta\mu\ \Gamma.}{\eta\mu\ A}$$

τὸν δὲ τύπον τοῦτον μεταχειριζόμεθα, ὅταν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν Ε ἀμέσως ἐκ τῶν δεδομένων καὶ πρὶν εὕρωμεν τὰς πλευρὰς β καὶ γ.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 2α

62. *Δοθεισῶν δύο πλευρῶν α, β τοῦ τριγώνου καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας Γ, εὑρεῖν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.*

Πρὸς εὕρεσιν τῶν ζητουμένων μεταχειριζόμεθα τὸν τύπον (τοῦ ἐδ. 50)

$$\frac{\varepsilon\varphi\,\frac{1}{2}(A-B)}{\varepsilon\varphi\,\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}.$$

Ἐπειδὴ ἐδόθη ἡ γωνία Γ, εἶνε δὲ $A+B+\Gamma=180^0$,

ἕπεται $$A+B\quad 180^0-\Gamma$$

καὶ $$\frac{1}{2}(A+B)=90^0-\frac{1}{2}\Gamma\cdot$$

ὥστε ὁ προκείμενος τύπος γίνεται

$$\varepsilon\varphi\,\frac{1}{2}(A\quad B)=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\,\sigma\varphi\,\frac{1}{2}\Gamma\cdot$$

ὅθεν $\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\,\frac{1}{2}(A-B)=\lambda o\gamma\,(\alpha-\beta)+\lambda o\gamma\ \sigma\varphi\,\frac{1}{2}\Gamma-\lambda o\gamma\,(\alpha+\beta)$.

Ἐκ τούτου τοῦ τύπου εὑρίσκομεν τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν γωνιῶν Α καὶ Β· παριστῶντες δὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν ταύτην διὰ Δ, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{2}(A-B)=\Delta$$

ἀλλὰ καὶ $$\frac{1}{2}(A+B)=90-\frac{1}{2}\Gamma$$

ὅθεν $$A=90-\frac{1}{2}\Gamma+\Delta\cdot$$

καὶ $$B=90-\frac{1}{2}\Gamma-\Delta.$$

Μετὰ τὴν εὕρεσιν τῶν γωνιῶν Α καὶ Β εὑρίσκομεν καὶ τὴν πλευρὰν γ ἐκ τοῦ τύπου

$$\gamma=\frac{\alpha\,\eta\mu\,\Gamma}{\eta\mu\,A}$$

Παράδειγμα.

Ἔστωσαν δεδομένα

$$\alpha=5897{,}2\cdot\qquad \beta=1409{,}8\cdot\qquad \Gamma=39^0\ 15'.$$

$$\alpha+\beta=7307$$

$$\alpha-\beta=4487{,}4$$

$$\frac{1}{2}\Gamma=19^0\ 37'\ 30''$$

Εὕρεσις τῶν γωνιῶν Α καὶ Β

$$\varepsilon\varphi\ \frac{1}{2}(A-B)=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\sigma\varphi\ \frac{1}{2}\ \Gamma.$$

$$\lambda o\gamma\ (\alpha-\beta)=3{,}65200$$

$$\lambda o\gamma\ \sigma\varphi\ \frac{1}{2}\ \Gamma=0{,}44785$$

$$\text{ἄθρ.}\quad 4{,}09985$$

$$\lambda o\gamma\ (\alpha+\beta)=3{,}86374$$

$$\lambda o\gamma\,\varepsilon\varphi\,\frac{1}{2}\ (A-B)=0{,}23611.$$

ἐξ οὗ $\frac{1}{2}(A-B)=59^{0}\quad 51'\quad 35''$ (προσέγ. 4'')·

ἐπειδὴ δὲ $\frac{1}{2}(A+B)=70^{0}\quad 22'\quad 30''=90-\frac{1}{2}\Gamma,$

εὑρίσκομεν $A=130^{0}\quad 14'\quad 5''$

$$B=10^{0}\quad 30'\quad 55''.$$

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ

$$\gamma=\alpha\ \frac{\eta\mu\ \Gamma}{\eta\mu\ A}$$

$$\lambda o\gamma\ \alpha=3{,}77064$$

$$\lambda o\gamma\ \eta\mu\,\Gamma=\overline{1}{,}80120$$

$$\text{ἄθρ.}\quad 3{,}57184$$

$$\lambda o\gamma\ \eta\mu\ A=\overline{1}{,}88275$$

$$\lambda o\gamma\ \gamma=3{,}68909$$

$$\text{καὶ}\ \gamma=4887{,}56$$

Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ Ε.

$$2\ E=\alpha\ \beta\ \eta\mu\ \Gamma.$$

$$\lambda o\gamma\ \alpha=3{,}77064$$

$$\lambda o\gamma\ \beta=3.14916$$

$$\lambda o\gamma\ \eta\mu\ \Gamma=\overline{1}{,}80120$$

$$\lambda o\gamma\ (2E)=6{,}72100$$

$$2\ E=5260120\ \text{τ. μ}$$

$$E=2630060\ \text{τ. μ. προσέγ. 94 τ. μέτρ.}$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 3

63 *Δοθεισῶν δύο πλευρῶν α καὶ β τοῦ τριγώνου καὶ τῆς γωνίας Α, ἥτις εἶνε ἀπέναντι μιᾶς τῶν πλευρῶν τούτων, εὑρεῖν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου.*

Πρὸς εὕρεσιν τῶν ζητουμένων ἔχομεν τοὺς τύπους

$$\eta\mu\ B = \frac{\beta\,\eta\mu\ A}{\alpha},\quad A+B+\Gamma=180^0,\quad \gamma=\frac{\alpha\ \eta\mu\ \Gamma}{\eta\mu\ A}.$$

Ἐκ τοῦ πρώτου εὑρίσκεται ἡ γωνία Β, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου ἡ Γ καὶ ἐκ τοῦ τρίτου μετὰ τὴν εὕρεσιν τῆς Γ εὑρίσκεται ἡ πλευρὰ γ.

Ἵνα τὸ πρόβλημα ᾖ δυνατόν, πρέπει ἡ τιμὴ τοῦ ημ Β νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὴν μονάδα· τουτέστιν νὰ εἶνε $\frac{\beta\ \eta\mu\ A}{\alpha} \leqq 1$,

ἤτοι $$\beta\ \eta\mu\ A \leqq \alpha \qquad (\theta)$$

τούτου δὲ συμβαίνοντος, ἂν παραστήσωμεν διὰ Δ τὴν μικροτέραν τῶν 90^0 γωνίαν, τὴν ἔχουσαν ἡμίτονον τὸ $\frac{\beta\ \eta\mu\ A}{\alpha}$, πρέπει νὰ λάβωμεν (διότι μόνον τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας Β ἐδόθη)

$$\text{ἢ } B=\Delta \text{ καὶ ἑπομένως } \Gamma=180^0-A-\Delta$$
$$\text{ἢ } B=180^0-\Delta, \text{ καὶ ἑπομένως } \Gamma=\Delta-A.$$

Ἀλλ' ἂν μὲν εἶνε $\beta<\alpha$, θὰ εἶνε καὶ $\beta\ \eta\mu\ A<\alpha$· διότι τὸ β ημ Α δὲν ὑπερβαίνει τὸ β, ἑπομένως τὸ πρόβλημα εἶνε τότε δυνατόν· ἔχει ὅμως μίαν μόνην λύσιν· διότι ἐκ τῆς ἰσότητος

$$\eta\mu\ \Delta=\frac{\beta\ \eta\mu\ A}{\alpha}$$

ἕπεται (ἐπειδὴ $\beta<\alpha$) $\quad \eta\mu\ \Delta<\eta\mu\ A$·

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ἡ ὀξεία γωνία Δ εἶνε τότε μικροτέρα τῆς Α· δὲν δυνάμεθα λοιπὸν νὰ λάβωμεν τὴν δευτέραν τιμὴν τῆς Β, ἥτις θὰ παρεῖχεν ἀρνητικὴν τιμὴν τῆς Γ· ὥστε ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ θὰ λάβωμεν·

$$B=\text{τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ } \Delta$$
$$\Gamma=180^0-A-\Delta.$$

Ὅτι δὲ ἡ τιμὴ αὕτη τῆς Γ εἶνε θετική, καὶ ὅταν ἡ Α εἶνε ἀμβλεῖα, φαίνεται ἐκ τῆς ἀνισότητος (θ), ἥτις δεικνύει, ὅτι ἡ ὀξεῖα γωνία 180—Α εἶνε μεγαλητέρα τῆς Δ.

Ἐὰν εἶνε $\beta=\alpha$, θὰ εἶνε καὶ $B=A$ ὅθεν $\Gamma=180-2A$, ἡ δὲ λύσις αὕτη εἶνε παραδεκτή, ἐὰν ἡ δοθεῖσα γωνία Α εἶνε ὀξεῖα.

Ἐὰν τέλος εἶνε $\beta > \alpha$, ἀνάγκη νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἀνισότης

$$\beta \text{ ημ } A \leqq \alpha \cdot$$

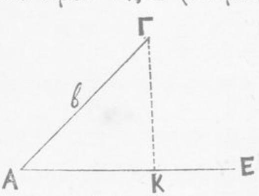
τούτου δὲ συμβαίνοντος, αἱ τιμαὶ τῶν γωνιῶν Α καὶ Γ εἶνε

$$\text{ἢ } B = \text{τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ } \Delta, \text{ ἐπομένως } \Gamma = 180^0 - A - \Delta$$

$$\text{ἢ } B = 180^0 - \Delta, \text{ καὶ ἐπομένως } \Gamma = \Delta - A \cdot$$

εἶνε δὲ ἀμφότεραι αἱ λύσεις αὗται παραδεκταί, *ἐὰν ἡ δοθεῖσα γωνία Α εἶνε ὀξεῖα*· διότι τότε εἶνε μικρότερα τῆς ὀξείας Δ (ἐπειδὴ ημ $\Delta >$ ημΑ)· ἐπομένως αἱ τιμαὶ ἀμφοτέρων τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ περιλαμβάνονται, ὡς πρέπει, μεταξὺ 0^0 καὶ 180^0.

Παρατηρητέον δέ, ὅτι αἱ δύο αὗται λύσεις καταντῶσιν εἰς μίαν, ἐὰν εἶνε β ημ $A = \alpha$ διότι τότε ἡ γωνία Δ γίνεται ὀρθή· ὥστε αἱ δύο τιμαὶ τῆς Β (ἐπομένως καὶ τῆς Γ) γίνονται ἴσαι.



Σχῆμα 31.

Ὁ περιορισμὸς ὁ ἀπαιτούμενος, ἵνα τὸ πρόβλημα λυθῇ, δύναται νὰ ἑρμηνευθῇ γεωμετρικῶς ὡς ἕπεται.

Ἔστω ἡ γωνία ΓΑΕ ἴση τῇ δοθείσῃ Α καὶ ἡ ΑΓ ἴση τῇ β· καὶ ἐκ τοῦ Γ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΕ ἡ ΓΚ· ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΓΚ εὑρίσκομεν

$$\Gamma K = A\Gamma.\text{ ημ } A = \beta \text{ ημ } A \cdot$$

ὥστε ὁ ῥηθεὶς περιορισμὸς εἶνε $\Gamma K < \alpha \cdot$

τουτέστιν ἡ πλευρὰ α, ἡ εἰς τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ὑποτείνουσα, πρέπει νὰ μὴ εἶνε μικροτέρα τῆς καθέτου, ἥτις καταβιβάζεται ἐκ τοῦ πέρατος τῆς μιᾶς πλευρᾶς, ἥτις ἐλήφθη ἴση τῇ β, ἐπὶ τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς δοθείσης γωνίας.

Τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα εἶνε γνωστὰ καὶ ἐκ τῶν στοιχείων τῆς γεωμετρίας.

Παραδείγματα.

1ον

Ἔστωσαν δεδομένα

$$\alpha = 893^{\mu\varepsilon\tau\rho},8 \cdot \qquad \beta = 697^{\mu.},4$$

$$A = 58^0 \; 13' \; 20'' \cdot$$

ζητοῦνται δὲ αἱ γωνίαι Β, Γ καὶ ἡ πλευρὰ γ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

Ἐπειδὴ εἶνε $\alpha > \beta$, τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐπιδέχεται μίαν καὶ μόνον μίαν λύσιν.

Εὕρεσις τῆς γωνίας Β

$$\eta\mu\, B = \frac{\beta\eta\mu\, B}{\alpha}$$

$$\begin{aligned}
\lambda o\gamma\ \beta &= 2,84348 \\
\lambda o\gamma\ \eta\mu\, A &= \bar{1},92947 \\
\hline
\text{ἄθρ.}\quad & \ 2,77295 \\
\lambda o\gamma\ \alpha &= 2,95124 \\
\hline
\lambda o\gamma\ \eta\mu\, B &= \bar{1},82171 \\
\text{καὶ}\ B &= 41^0\ \ 33'\ \ 8'' \quad \text{προσέγ. } 6''.
\end{aligned}$$

Εὕρεσις τῆς γωνίας Γ

$$\begin{aligned}
A &= 58^0\ \ 13'\ \ 20'' \\
B &= 41^0\ \ 33'\ \ 8'' \\
\hline
A+B &= 99^0\ \ 46'\ \ 28'' \\
\text{ὅθεν}\quad \Gamma &= 80^0\ \ 13'\ \ 32''
\end{aligned}$$

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ

$$\gamma = \frac{\alpha\eta\mu\, \Gamma}{\eta\mu\, A}$$

$$\begin{aligned}
\lambda o\gamma\ \alpha &= 2,95124 \\
\lambda o\gamma\ \eta\mu\, \Gamma &= \bar{1},99365 \\
\hline
\text{ἄθρ.}\quad & \ 2,94489 \\
\lambda o\gamma\ \eta\mu\, A &= \bar{1},92947 \\
\hline
\lambda o\gamma\ \gamma &= 3,01542 \\
\text{καὶ}\ \gamma &= 1036,^{\mu}14 \quad \text{προσέγ. } \frac{4}{100}.
\end{aligned}$$

Εὕρεσις τοῦ Ἐμβαδοῦ Ε

$$\begin{aligned}
2E &= \beta\gamma\eta\mu A. \\
\lambda o\gamma\ \beta &= 2,84348 \\
\lambda o\gamma\ \gamma &= 3,01542 \\
\lambda o\gamma\, \eta\mu\, A &= \bar{1},92947 \\
\hline
\lambda o\gamma\ (2E) &= 5,78837 \\
\text{καὶ}\ \ 2E &= 614286 \quad \text{προσέγ. } 36^{\tau.\,\mu.} \\
\text{ὅθεν}\ \ E &= 307143 \quad \text{προσέγ. } 18^{\tau.\ \mu\acute{\epsilon}\tau\rho.}
\end{aligned}$$

2ον

Ἔστωσαν δεδομένα

$$\alpha = 1873^{\mu},5, \quad \beta = 2954^{\mu}$$
$$A = 35^{0}\ 12'\ 40''$$

Εὕρεσις τῆς γωνίας Β.

$$\eta\mu B = \frac{\beta\eta\mu A}{\alpha}$$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\ \beta &= 3,47041 \\ \lambda o\gamma\eta\mu A &= \overline{1}.76087 \\ \hline \check{\alpha}\theta\rho.\ & \ 3,23128 \\ \lambda o\gamma\ \alpha &= 3,27265 \\ \hline \lambda o\gamma\eta\mu B &= \overline{1},95863 \end{aligned}$$

ὅθεν $B = 65^{0}\ 23'\ 10''$ προσέγ. $15''$

Ἐπειδὴ δὲ εἶνε $\beta > \alpha$, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν καὶ

$$B = 114^{0}\ 36'\ 50''$$

ἤτοι τὴν παραπληρωματικὴν τῆς προηγουμένης τιμῆς· ὥστε ἔχομεν δύο λύσεις

1η Λύσις.

$$\begin{aligned} B &= 65^{0}\ 23'\ 10'' \\ A &= 35^{0}\ 12'\ 40'' \\ \hline A+B &= 100^{0}\ 35'\ 50'' \\ \text{ὅθεν}\ \Gamma &= 79^{0}\ 24'\ 10' \end{aligned}$$

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ

$$\gamma = \frac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\ \alpha &= 3,27265 \\ \lambda o\gamma\eta\mu\Gamma &= \overline{1},99253 \\ \hline \check{\alpha}\theta\rho.\ & \ 3,26518 \\ \lambda o\gamma\eta\mu A &= \overline{1},76087 \\ \hline \lambda o\gamma\ \gamma &= 3,50431 \\ \text{καὶ}\ \gamma &= 3193,9 \end{aligned}$$

2α Λύσις.

$$\begin{aligned} B &= 114^{0}\ 36'\ 50'' \\ A &= 35^{0}\ 12'\ 40'' \\ \hline A+B &= 149^{0}\ 49\ 30'' \\ \text{ὅθεν}\ \Gamma &= 30^{0}\ 10'\ 30'' \end{aligned}$$

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ

$$\gamma = \frac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}.$$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\ \alpha &= 3,27265 \\ \lambda o\gamma\eta\mu\Gamma &= \overline{1},70126 \\ \hline \check{\alpha}\theta\rho.\ & \ 2,97391 \\ \lambda o\gamma\eta\mu A &= \overline{1},76087 \\ \hline \lambda o\gamma\ \gamma &= 3,21304 \\ \text{καὶ}\ \gamma &= 1633,2 \end{aligned}$$

3ον

Ἔστωσαν δεδομένα

$$\alpha = 393^{\mu},5 \qquad \beta = 2549^{\mu} \qquad A = 58^{0}\ 12'$$

Εὕρεσις τῆς γωνίας Β.

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\ \beta &= 3,40637 \\ \lambda o\gamma\eta\mu\ A &= \overline{1},92936 \\ \text{ἄθρ·} &\ \ 3,33573 \\ \lambda o\gamma\ \alpha &= 2,59939 \\ \lambda o\gamma\eta\mu B &= 0,73634 \end{aligned}$$

ἐπειδὴ ὁ εὑρεθεὶς λογάριθμος τοῦ ἡμιτόνου τῆς Β εἶνε θετικὸς (ὅπερ σημαίνει, ὅτι ἡ παράστασις $\frac{\beta\eta\mu A}{\alpha}$, ἤτοι τὸ ημΒ, ὑπερβαίνει τὴν μονάδα), ἡ γωνία Β δὲν ὑπάρχει καὶ τὸ πρόβλημα εἶνε ἀδύνατον.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 4η

64 *Δοθεισῶν τῶν τριῶν πλευρῶν τριγώνου, εὑρεῖν τὰς γωνίας αὐτοῦ.*

Πρὸς εὕρεσιν τῶν ζητουμένων μεταχειριζόμεθα τοὺς ἀκολούθους τύπους.

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}A\right) = \sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}$$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}B\right) = \sqrt{\frac{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{\tau(\tau-\beta)}}$$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}\Gamma\right) = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\tau(\tau-\gamma)}}$$

οἵτινες δίδουσι τοὺς πρὸς τὴν χρῆσιν τῶν λογαρίθμων καταλλήλους τύπους.

$$\lambda o\gamma.\,\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}A\right) = \frac{1}{2}\left\{\lambda o\gamma(\tau-\beta)+\lambda o\gamma(\tau-\gamma)-\lambda o\gamma\ \tau-\lambda o\gamma(\tau-\alpha)\right\}$$

$$\lambda o\gamma.\,\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}B\right) = \frac{1}{2}\left\{\lambda o\gamma(\tau-\gamma)+\lambda o\gamma(\tau-\alpha)-\lambda o\gamma\ \tau-\lambda o\gamma(\tau-\beta)\right\}$$

$$\lambda o\gamma.\,\varepsilon\varphi.\left(\frac{1}{2}\Gamma\right) = \frac{1}{2}\left\{\lambda o\gamma(\tau-\alpha)+\lambda o\gamma(\tau-\beta)-\lambda o\gamma\ \tau-\lambda o\gamma(\tau-\gamma)\right\}$$

Παρατηρητέον δ' ὅτι, ἵνα τὸ πρόβλημα ᾖ δυνατόν, ἀνάγκη καὶ τὰ τρία ὑπόρριζα νὰ εἶνε θετικά· ἐπειδὴ δὲ εἶνε (σελ 45)

$$\tau = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$$

$$\tau-\alpha = \frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)$$

$$\tau-\beta=\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)$$

$$\tau-\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma),$$

ἐὰν ἐκ τῶν δοθεισῶν πλευρῶν ἡ α μηδετέρας τῶν ἄλλων εἶνε μικροτέρα, οἱ παράγοντες (τ—β), (τ—γ) καὶ τ θὰ εἶνε θετικοί, καὶ τὰ ὑπόρριζα θὰ ἔχωσιν ἑπομένως τὸ σημεῖον τοῦ παράγοντος τ—α, ὅστις διὰ τοῦτο ἀνάγκη νὰ εἶνε θετικός, ἤτοι $\alpha<\beta+\gamma$· ἐξ οὗ βλέπομεν ὅτι, ἵνα τὸ πρόβλημα λυθῇ, πρέπει μηδεμία τῶν δοθεισῶν πλευρῶν νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων· τούτου δὲ συμβαίνοντος, ἐμάθομεν ἐν τοῖς στοιχείοις τῆς γεωμετρίας, ὅτι τὸ τρίγωνον πάντοτε ὑπάρχει.

Παράδειγμα.

Ἔστωσαν δεδομένα

$$\alpha=597,^{\mu}8. \quad \beta=398,^{\mu}1, \quad \gamma=206^{\mu}$$

ζητοῦνται δὲ αἱ γωνίαι καὶ τὸ ἐμβαδόν.

Ἐν πρώτοις εἶνε $\alpha+\beta+\gamma=1201,9$

$$
\begin{array}{lll}
\text{ὅθεν} & \tau=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)= & 600,95 \\
 & \tau-\alpha= & 3,15 \\
 & \tau-\beta= & 202,85 \\
 & \tau-\gamma= & 394,95 \\
\text{καὶ} & \text{λογ}\ \tau= & 2,77883 \\
 & \text{λογ}\ (\tau-\alpha)= & 0,49831 \\
 & \text{λογ}\ (\tau-\beta)= & 2,30718 \\
 & \text{λογ}\ (\tau-\gamma)= & 2,59654
\end{array}
$$

Εὕρεσις τῆς γωνίας Α.

$$\text{εφ}\left(\frac{1}{2}A\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)\ (\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{λογ}\ (\tau-\beta)= & 2,30718 \\
\text{λογ}\ (\tau-\gamma)= & 2,59654 \\
\hline
\text{ἄθρ.} & 4,90372
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
\text{λογ}\ \tau= & 2,77883 \\
\text{λογ}\ (\tau-\alpha)= & 0,49831 \\
\hline
\text{ἄθρ.} & 3,27714
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
 & 4,90372 \\
- & 3,27714 \\
\hline
\text{διαφ.} & 1,62658
\end{array}
$$

$$\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}A\right)=0{,}81329.$$

καὶ $\frac{1}{2}A=$	81^0	$15'$	$40'',7$	προσέγ. $\frac{3''}{4}$.
καὶ $A=$	162^0	$31'$	$21'',4$	προσέγ. $1''\ ^1/_2$

Εὕρεσις τῆς γωνίας Β.

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}B\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\gamma)\ (\tau-\alpha)}{\tau(\tau-\beta)}}$$

λογ $(\tau-\gamma)=$	2,59654	λογ $\tau=$	2,77883
λογ $(\tau-\alpha)=$	0,49831	λογ $(\tau-\beta)=$	2,30718
ἄθρ.	3,09485	ἄθρ.	5,08601

	3,09485
	5,08601
διαφ.	$\overline{2},00884$

$$\lambda o\gamma.\ \varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}B\right)=\overline{1},00442$$

καὶ $\frac{1}{2}B=$	5^0	$46'$	$7'$	προσέγ. $\frac{1''}{2}$.
ὅθεν $B=$	11^0	$32'$	$14''$	προσέγ. $1''$.

Εὕρεσις τῆς γωνίας Γ.

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)\ (\tau-\beta)}{\tau(\tau-\gamma)}}$$

λογ $(\tau-\alpha)=$	0,49831	λογ $\tau=$	2,77883
λογ $(\tau-\beta)=$	2,30718	λογ $(\tau-\gamma)=$	2,59654
ἄθρ.	2,80549	ἄθρ.	5,37537

	2,80549
	5,37537
διαφ.	$\overline{3},43012$

$$\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)=\overline{2},71506$$

καὶ $\frac{1}{2}\Gamma$	2^0	$58'$	$13''$	προσέγ. $\frac{1''}{3}$
ὅθεν $\Gamma=$	5^0	$56'$	$26''$	προσέγ. $\frac{2''}{3}$

ΣΗΜ. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν πρέπει νὰ εἶνε ἴσον

180^0, δυνάμεθα νὰ βασανίσωμεν τὰς προηγουμένας πράξεις ἀθροίζοντες τὰς εὑρεθείσας τιμὰς αὐτῶν καὶ παρατηροῦντες τὴν διαφορὰν τοῦ ἀθροίσματος ἀπὸ τῶν 180^0.

$$
\begin{array}{rrrrl}
A= & 162^0 & 31' & 21'', & 4 \\
B= & 11^0 & 32' & 14'' & \\
\Gamma= & 5^0 & 56' & 26'' & \\
\hline
A+B+\Gamma = & 180^0 & 0' & 1'', & 4
\end{array}
$$

Τὸ κατὰ τὴν εὕρεσιν τῆς Α συμβὰν λάθος ἦτο μικρότερον τοῦ $1''\,{}^1/_2$, τὸ δὲ κατὰ τὴν εὕρεσιν τῆς Β μικρότερον τοῦ $1''$, τὸ δὲ κατὰ τὴν εὕρεσιν τῆς Γ μικρότερον τοῦ $\frac{2''}{3}$· ὥστε τὸ εἰς τὸ ἄθροισμα Α+Β+Γ ὑπάρχον λάθος δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὰ $3''\,\frac{1}{6}$· ὅπερ ἀληθῶς συμβαίνει.

Εὕρεσις τοῦ Ἐμβαδοῦ Ε

$$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

$$
\begin{array}{rl}
\lambda o\gamma\ \tau = & 2,77883 \\
\lambda o\gamma\ (\tau-\alpha) = & 0,49831 \\
\lambda o\gamma\ (\tau-\beta) = & 2,30718 \\
\lambda o\gamma\ (\tau-\gamma) = & 2,59654 \\
\hline
\text{ἄθρ.} & 8,18086 \\
\lambda o\gamma\ E = & 4,09043
\end{array}
$$

καὶ $E = 12314^{\tau.\mu.},8$ προσέγ. $^3/_{10}$ τοῦ τετρ. μέτρου.

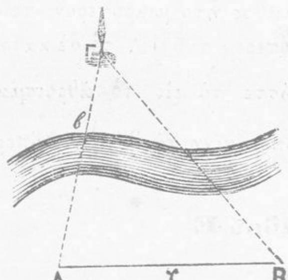
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III.

Προβλήματα.

1ον

65. *Εὑρεῖν τὴν ἀπόστασιν σημείου προσιτοῦ ἀπό τινος ἀπροσίτου ἀλλ' ὁρατοῦ.*

Ἔστω Α τὸ προσιτὸν σημεῖον καὶ Γ τὸ ἀπρόσιτον καὶ ΑΓ ἡ ζητουμένη ἀπόστασις (σχ. 32).



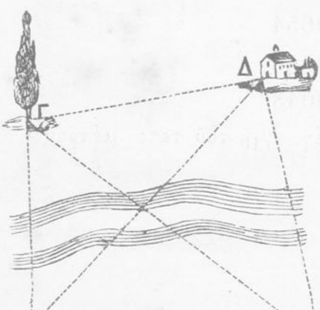
Σχῆμα 32

Ἐκ τοῦ σημείου Α μετροῦμεν, ὅσον ἐνδέχεται ἀκριβέστερον, γραμμήν τινα ΑΒ ἐπὶ ὁμαλοῦ ἐδάφους· ἔπειτα μετροῦμεν διὰ γωνιομετρικοῦ ὀργάνου* τὰς γωνίας ΓΑΒ καὶ ΓΒΑ. Ἔχοντες τότε τοῦ τριγώνου ΑΒΓ μίαν πλευρὰν γ καὶ τὰς προσκειμένας γωνίας Α καὶ Β, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ τἆλλα στοιχεῖα αὐτοῦ· διὰ τὴν ΑΓ ἔχομεν τὸν τύπον (ἐδ. 48)

$$ΑΓ = ΑΒ.\frac{ημ\,Β}{ημ(Α+Β)}$$

2ον

66. *Εὑρεῖν τὴν ἀπόστασιν δύο σημείων Γ καὶ Δ ἀπροσίτων ἀλλ' ὁρατῶν.*



Σχῆμα 33.

Ἐκ τοῦ σημείου Α, ἐφ' οὗ ἱστάμεθα, μετροῦμεν πάλιν εὐθεῖάν τινα ΑΒ ἐπὶ ὁμαλοῦ ἐδάφους, καὶ ὅσον ἐνδέχεται ἀκριβέστερον· ἔπειτα μετροῦμεν τὰς πέντε γωνίας ΔΒΑ, ΓΒΑ, ΓΑΒ, ΔΑΒ καὶ ΓΑΔ· ἔχοντες τότε ἑκατέρου τῶν τριγώνων ΔΑΒ καὶ ΓΑΒ μίαν πλευρὰν ΑΒ καὶ τὰς προσκειμένας αὐτῇ γωνίας, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς πλευρὰς ΑΔ καὶ ΑΓ· ἐκ δὲ τούτων καὶ ἐκ τῆς γωνίας ΓΑΔ ὁρίζεται τὸ τρίγωνον ΑΓΔ ἐντελῶς καὶ εὑρίσκεται ἡ ζητουμένη ἀπόστασις ΓΔ.

Παρατήρησις. Ἐὰν τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ κεῖνται ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου, ἀλλὰ μόνον τότε, ἡ γωνία ΓΑΔ ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν

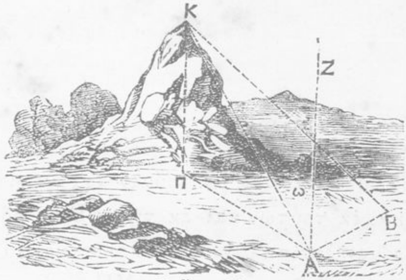
* Τὴν περιγραφὴν τῶν γωνιομετρικῶν ὀργάνων καὶ τὴν ἐξήγησιν τῆς χρήσεως αὐτῶν παραλείπομεν.

γωνιῶν ΓΑΒ καὶ ΔΑΒ· ἐπομένως εἶνε περιττὸν νὰ μετρηθῇ διὰ τοῦ γωνιομετρικοῦ ὀργάνου.

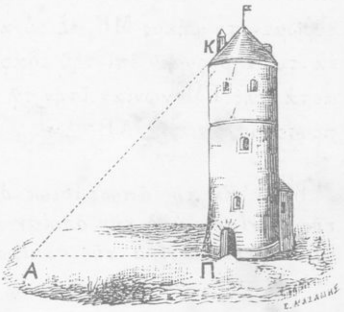
3ον

67. *Εὑρεῖν τὸ ὕψος βουνοῦ.* Τουτέστι τὴν ἀπόστασιν τῆς κορυφῆς αὐτοῦ Κ ἀπὸ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ἐφ' οὗ ἱστάμεθα.

Ἐπὶ ἐδάφους ὁμαλοῦ, ἐξ οὗ φαίνεται ἡ κορυφὴ τοῦ βουνοῦ, μετροῦμεν βάσιν τινά, ἔστω τὴν ΑΒ, καὶ τὰς γωνίας ΚΑΒ καὶ ΚΒΑ καὶ εὑρίσκομεν ἐξ αὐτῶν τὴν ἀπόστασιν ΑΚ. Ἔπειτα μετροῦμεν τὴν γωνίαν ΖΑΚ, ἣν σχηματίζει ἡ ΑΚ πρὸς τὴν κατακόρυφον τοῦ τόπου Α, ἔστω δὲ ἡ γωνία αὕτη ω. Ἐὰν τότε νοήσωμεν ἐκ τῆς κορυφῆς Κ τὴν κάθετον ΚΠ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ Α ἐφ' οὗ ἵσταται κάθετος καὶ ἡ ΑΖ, φανερὸν εἶνε ὅτι αἱ ΖΑ καὶ ΚΠ θὰ εἶνε παράλληλοι καὶ διὰ τοῦτο, ἂν νοήσωμεν καὶ τὴν ΑΠ, ἔχομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΚΠΑ, οὗτινος γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΑΚ καὶ τὰς γωνίας ΑΚΠ=ω καὶ ΚΑΠ=90—ω· ὥστε δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ΚΠ, ἥτις εἶνε τὸ ὕψος τοῦ βουνοῦ ὑπεράνω τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ὅπερ διέρχεται διὰ τοῦ Α.



Σχῆμα 34.



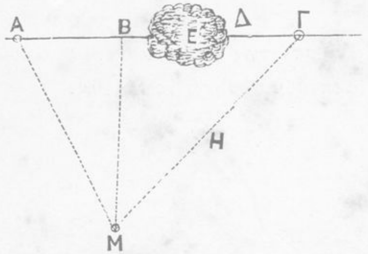
Σχῆμα 35.

Παρατήρησις. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ὕψος οἱουδήποτε ἀντικειμένου. Ἀλλ' ἂν τὸ μετρητέον ὕψος ΚΠ φαίνηται, ὡς π. χ. εἰς τὸν πύργον (σχ. 35), εἶνε δὲ καὶ τὸ ἔδαφος ὁμαλὸν καὶ ὁριζόντιον, ἀρκεῖ νὰ μετρηθῇ ἡ ἀπόστασις ΑΠ καὶ ἡ γωνία ΠΑΚ. διότι ἐκ τούτων προσδιορίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΚΠΑ, οὗ πλευρὰ εἶνε τὸ ζητούμενον ὕψος.

4ον

68. *Ἐπὶ ἐδάφους ἐπιπέδου εὑρεῖν τὴν προσεκβολὴν εὐθείας πέραν*

ἀντικειμένου οἱουδήποτε, ὅπερ ἐμποδίζει νὰ βλέπωμεν τὴν φορὰν τῆς εὐθείας.



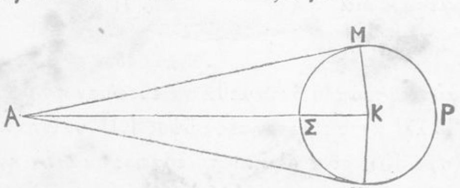
Σχ. 36

Ἔστω ΑΒ ἡ εὐθεῖα, τῆς ὁποίας πρέπει νὰ εὑρεθῇ ἡ προσεκβολὴ ὄπισθεν τοῦ ἐμποδίου Ε. Μετροῦμεν τὸ μῆκος ΑΒ, ἔπειτα ἐκλέγομεν ὡς σταθμὸν σημεῖόν τι Μ, ἐξ οὗ νὰ φαίνηται καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ ὁ ὄπισθεν τοῦ ἐμποδίου τόπος εἰς ὃν θὰ εὑρίσκηται ἡ προσεκβολὴ τῆς εὐθείας.

Μετὰ ταῦτα μετροῦμεν τὰς γωνίας Α καὶ Β τοῦ τριγώνου ΑΒΜ, καὶ ἐκ τούτων καὶ ἐκ τῆς ΑΒ προσδιορίζομεν τὴν πλευρὰν ΑΜ, Σύρομεν ἔπειτα ἐπὶ τοῦ ἐδάφους γραμμὴν ἐκ τοῦ Μ. πρὸς τὸ μέρος τῆς προσεκβολῆς, ἔστω τὴν ΜΗ. καὶ μετροῦμεν τὴν γωνίαν αὐτῆς πρὸς τὴν ΜΑ, ἤτοι τὴν ΗΜΑ. Ἐὰν τότε νοήσωμεν τὴν τομὴν Γ τῆς προσεκβολῆς καὶ τῆς γραμμῆς ΜΗ, ἔχομεν τοῦ τριγώνου ΓΑΜ μίαν πλευρὰν ΑΜ καὶ τὰς προσκειμένας αὐτῇ γωνίας ὥστε δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος ΜΓ, ἐξ οὗ καὶ τὸ σημεῖον Γ προσδιορίζεται· τέλος ἐκ τοῦ Γ σύρομεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους τὴν γραμμὴν ΓΔ, ἥτις σχηματίζει μετὰ τῆς ΓΜ γωνίαν ἴσην τῇ τοῦ τριγώνου ΑΓΜ, καὶ ἔχομεν τὴν προσεκβολὴν τῆς ΑΒ.

5ον

69. *Ἐκ τῆς ἀποστάσεως δοθέντος σημείου ἀπὸ σφαίρας καὶ ἐκ τῆς γωνίας, ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ἡ σφαῖρα ἀπὸ τοῦ σημείου, εὑρεῖν τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.*



Ἐὰν διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ διὰ τοῦ σημείου Α νοήσωμεν τυχὸν ἐπίπεδον, τοῦτο τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ μέγιστον αὐτῆς κύκλον, ἔστω τὸν ΜΣΝΡ· ἐὰν δὲ τοῦ κύκλου τούτου ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι ἐκ τοῦ Α αἱ ΑΜ καὶ ΑΝ καὶ αἱ ἀκτῖνες ΚΝ καὶ ΚΜ, γίνεται ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΚΜΑ, οὗτινος ἔχομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΑΚ καὶ τὴν γωνίαν ΚΑΜ, ἥτις εἶνε τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης ΜΑΝ (=ω), ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ἡ σφαῖρα ἐκ τοῦ Α.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τούτου τριγώνου εὑρίσκομεν

$$ΚΜ = ΑΚ.\ ημ\left(\frac{1}{2}\omega\right).$$

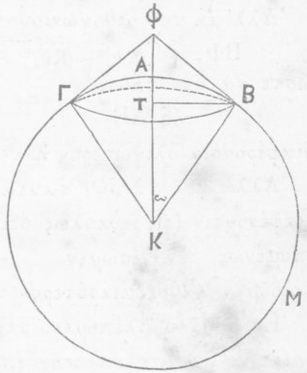
ΣΗΜ. Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης εὑρίσκομεν καὶ τοὐναντίον τὴν ἀπόστασιν ΑΚ τῆς σφαίρας ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὅταν ἔχωμεν τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας καὶ τὴν γωνίαν ω, ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ἐκ τοῦ σημείου Α.

6ον.

70. *Γνωστοῦ ὄντος τοῦ ὕψους φάρου ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης, εὑρεῖν ἐπ' αὐτῆς τὴν μεγίστην ἀπόστασιν, ἀπὸ τῆς ὁποίας φαίνεται τὸ φῶς αὐτοῦ.*

Γνωστόν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς θαλάσσης ἀποτελεῖ σφαῖραν, τῆς ὁποίας ὁ μέγιστος κύκλος ἔχει περιφέρειαν 40000000 μέτρων· ἐπομένως ἀκτῖνα ἔχει ἴσην τῷ $\frac{40000000}{2\pi}$ ἤτοι 6366198 μέτρα περίπου· τὴν ἀκτῖνα δὲ ταύτην παριστῶμεν διὰ ρ.

Ἔστω Κ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ταύτης καὶ Φ τὸ φῶς καὶ ΦΑ (=υ) τὸ ὕψος αὐτοῦ εἰς μέτρα ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. Ἐὰν διὰ τῆς ἀκτῖνος ΚΑ νοηθῇ τυχὸν ἐπίπεδον, θὰ τέμνῃ τὴν σφαῖραν κατὰ μέγιστον κύκλον, ἔστω τὸν ΑΒΜ· καὶ ἂν ἀχθῇ ἐκ τοῦ Φ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου τούτου ἡ ΦΒ καὶ περιστραφῇ ἔπειτα ὁ μέγιστος κύκλος περὶ τὴν ΚΦ, φανερὸν εἶνε, ὅτι ἡ ὑπὸ τοῦ τόξου ΑΒ γραφομένη ζώνη περιέχει πάντα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ἀφ' ὧν τὸ φῶς φαίνεται· ὥστε ἡ μεγίστη ἀπόστασις, ἀπὸ τῆς ὁποίας τὸ φῶς φαίνεται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, εἶνε ἡ ΑΒ.



Σχῆμα 38

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόξου ΑΒ ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ ἡ κεντρικὴ γωνία ω· διότι εἶνε

$$\frac{\text{τόξ ΑΒ}}{40000000} = \frac{360}{\omega} \qquad (\iota)$$

Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΦΚΒ εὑρίσκομεν ΚΒ = ΚΦ συνω· ὅθεν

$$συνω = \frac{ΚΒ}{ΦΚ} = \frac{\rho}{\rho+\upsilon}.$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης ἕπεται

$$\text{συν}\left(\frac{1}{2}\omega\right)=\sqrt{\frac{2\rho+\upsilon}{2\rho+2\upsilon}}$$

$$\text{ημ}\left(\frac{1}{2}\omega\right)=\sqrt{\frac{\upsilon}{2\rho+2\upsilon}}$$

$$\text{ὅθεν εφ}\left(\frac{1}{2}\omega\right)=\sqrt{\frac{\upsilon}{2\rho+\upsilon}}$$

Διὰ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν $\frac{1}{2}\omega$, ὅθεν καὶ τὴν ω· ταύτης δὲ εὑρεθείσης, εὑρίσκομεν καὶ τὸ τόξον ΑΒ ἐκ τῆς ἰσότητος(ι).

* Ἐπειδὴ τὸ ὕψος υ εἶνε συνήθως ἐλάχιστον πρὸς τὴν ἀκτῖνα ρ, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ τόξον ΑΒ εὐκολώτερον ὡς ἑξῆς

Τὸ τόξον ΑΒ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης ΦΒ καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ ΑΒ· ἑπομένως διαφέρει ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ΦΒ ὀλιγώτερον ἢ ΒΦ—ΒΑ, ἤτοι ὀλιγώτερον τοῦ ὕψους υ· (διότι ἐν τῷ τριγώνῳ ΦΑΒ ἡ μία πλευρὰ ΑΦ ὑπερβαίνει τὴν διαφορὰν τῶν ἄλλων).

Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΒΦ ἔχομεν

$$\text{ΒΦ}=\sqrt{(\text{ΚΦ})^2-(\text{ΚΒ})^2}=\sqrt{(\rho+\upsilon)^2-\rho^2}=\sqrt{2\rho\upsilon+\upsilon^2}$$

ὥστε τὰ δύο ταῦτα

τόξ ΑΒ καὶ $\sqrt{2\rho\upsilon+\upsilon^2}$

διαφέρουσιν ὀλιγώτερον ἢ υ·

Ἀλλὰ καὶ τὰ δύο ταῦτα $\sqrt{2\rho\upsilon}$ καὶ $\sqrt{2\rho\upsilon+\upsilon^2}$, διαφέρουσιν (ὡς εὐκόλως δεικνύεται) ὀλιγώτερον ἢ υ.

ἑπομένως, ἐὰν θέσωμεν τόξ. ΑΒ$=\sqrt{2\rho\upsilon}$, ποιοῦμεν λάθος μικρότερον τοῦ ὕψους υ·

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι *ἡ μεγίστη ἀπόστασις, ἀπὸ τῆς ὁποίας φαίνεται τὸ φῶς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης, εἶνε περίπου ἀνάλογος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ὕψους αὐτοῦ ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης*.

Διὰ υ=1 μέτρον εὑρίσκομεν τόξ. ΑΒ=3568 μέτρα περίπου.

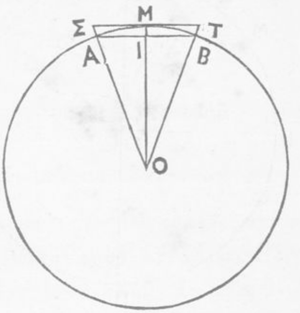
ΣΗΜ. Ἐν τῇ λύσει τοῦ προβλήματος τούτου δὲν ἐλήφθη ὑπ' ὄψιν ἡ διάθλασις τοῦ φωτὸς ἐν τῷ ἀέρι.

7ον

71. *Γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἡ γῆ εἶνε σφαῖρα, τῆς ὁποίας ὁ μέγιστος κύκλος ἔχει περιφέρειαν 40000000 μέτρα, εὑρεῖν τὸ μῆκος τοῦ τόξου μιᾶς*

μοίρας καὶ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς αὐτοῦ καὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ μέσον αὐτοῦ.

Ἔστω ΑΒ ἡ χορδὴ καὶ ΣΤ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ εἰρημένου τόξου. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΜΟΤ ἔχομεν ἐν πρώτοις



Σχῆμα 39.

$$\text{ΜΤ} \quad \rho.\ \dot{\epsilon}\varphi\ 30' = \frac{40000000}{2\pi}\ \epsilon\varphi\ 30'\ *$$

$$\begin{aligned}
\lambda o\gamma\ 40000000 &= 7{,}6020599 \\
\lambda o\gamma\ 2\pi &= 0{,}7981798 \\
\lambda o\gamma\ \rho &= 6{,}8038801 \\
\lambda o\gamma\ \epsilon\varphi\ 30' &= \bar{3}{,}9408584 \\
\lambda o\gamma\ \text{ΜΤ} &= 4{,}7447385 \\
\text{ὅθεν ΜΤ} &= 55556{,}^{\mu}96 \\
\text{ὅθεν ΣΤ} &= 111113{,}^{\mu}92
\end{aligned}$$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΙΟΒ εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned}
\text{ΙΒ} &= \rho.\ \eta\mu\ 30' \\
\lambda o\gamma\ \rho &= 6{,}8038801 \\
\lambda o\gamma\ \eta\mu\ 30' &= \bar{3}{,}9408419 \\
\lambda o\gamma\ \text{ΙΒ} &= 4{,}7447220 \\
\text{ὅθεν ΙΒ} &= 55554^{\mu}{,}85 \\
\text{ὅθεν ΑΒ} &= 111109^{\mu}{,}70
\end{aligned}$$

Τὸ τόξον ΑΒ τῆς μιᾶς μοίρας εἶνε $\frac{40000000}{360} = 111111{,}11.$

Ἐντεῦθεν ἕπεται τόξ. ΑΒ — ΑΒ $= 1{,}41$

καὶ ΣΤ — τόξ. ΑΒ $= 2{,}81$·

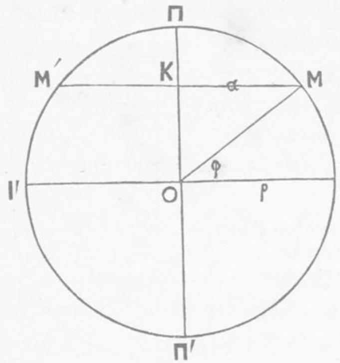
ὥστε τὸ τόξον τῆς μιᾶς μοίρας τὴν μὲν χορδὴν αὐτοῦ ὑπερέχει κατὰ 1 μέτρον $\frac{41}{100}$ τοῦ μέτρου περίπου, τῆς δὲ ἐφαπτομένης αὐτοῦ εἶνε μικρότερον κατὰ 2,81 περίπου μέτρα.

8ον

72. *Εὑρεῖν τὴν ἀκτῖνα τοῦ παραλλήλου κύκλου τῆς γηΐνης σφαίρας, οὗτινος τὸ γεωγραφικὸν πλάτος εἶνε γνωστόν.* (Εὑρεῖν τοῦ αὐτοῦ κύκλου τὸ μῆκος τοῦ τόξου μιᾶς μοίρας).

* Ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ μετεχειρίσθημεν τοὺς ἑπταψηφίους λογαρίθμους τοῦ Καλλέτου διὰ τὴν μεγαλητέραν ἀκρίβειαν αὐτῶν.

Ἐὰν διὰ τοῦ ἄξονος τῆς γῆς ΠΠ′ νοήσωμεν ἐπίπεδον, θὰ τέμνῃ τὴν μὲν γῆν κατὰ μέγιστον κύκλον αὐτῆς, τὸ δὲ ἐπίπεδον τοῦ ἰσημερινοῦ κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΙΙ′, τὸ δὲ ἐπίπεδον τοῦ παραλλήλου κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΜΜ′ παράλληλον τῇ ΙΙ′· θὰ εἶνε δὲ τὸ τόξον ΜΙ ἴσον τῷ δοθέντι πλάτει φ καὶ ἡ ζητουμένη ἀκτὶς τοῦ παραλλήλου κύκλου εἶνε ἡ ΜΚ$=\alpha$. Ἐὰν ἀχθῇ ἡ ἀκτὶς ΟΜ, γίνεται ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΟΚΜ, ἐξ οὗ εὑρίσκομεν



Σχῆμα 40.

$$KM = \alpha = \rho \sigma \upsilon \nu \varphi.$$

Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου τούτου εἶνε

$$2\pi.\ \rho.\ \sigma\upsilon\nu\varphi$$

καὶ τὸ τόξον μιᾶς μοίρας τοῦ παραλλήλου τούτου ἔχει μῆκος

$$\frac{2\pi.\rho}{360}\ \sigma\upsilon\nu\varphi, \qquad \text{ἤτοι}\ \frac{40000000}{360}\ \sigma\upsilon\nu\varphi \quad \text{ἢ}\ 111111{,}1\ \sigma\upsilon\nu\varphi\cdot$$

Ὡς παράδειγμα ἔστω $\varphi = 38^0$

Διὰ τὴν ἀκτῖνα α ἔχομεν $\alpha = \rho\ \sigma\upsilon\nu\ 38^0$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\ \rho &= 6{,}80388 \quad (\text{ἰδὲ προηγ. πρόβλημα}) \\ \lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu\ 38^0 &= \bar{1}{,}89653 \\ \hline \lambda o\gamma\ \alpha &= 6{,}70041 \\ \kappa\alpha\grave{\iota}\ \alpha &= 5016625\ \mu\acute{\varepsilon}\tau\rho. \end{aligned}$$

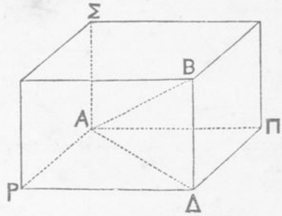
Διὰ τὸ μῆκος τοῦ τόξου 1^0 ἔχομεν

$$\mu\tilde{\eta}\kappa o\varsigma\ \tau\acute{o}\xi o\upsilon\ 1^0 = \frac{40000000}{360}\cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\ 40000000 &= 7{,}60206 \\ \lambda o\gamma\ \ 360 &= 2{,}55630 \\ \hline \delta\iota\alpha\varphi o\rho\grave{\alpha} &\quad\ 5{,}04576 \\ \lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu\ 38^0 &= \bar{1}{,}89653 \\ \hline &\quad\ 4{,}94229 \\ \kappa\alpha\grave{\iota}\ \tau\acute{o}\xi o\nu\ 1^0 &= 87556\ \mu\acute{\varepsilon}\tau\rho. \end{aligned}$$

9ον

73. *Ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, οὗτινος εἶνε γνωσταὶ αἱ τρεῖς ἀκμαὶ ΑΠ, ΑΡ, ΑΣ εὑρεῖν τὴν διαγώνιον ΑΒ καὶ τὰς γωνίας αὐτῆς πρὸς τὰς ἀκμάς.*



Σχῆμα 41.

Ἐὰν νοήσωμεν τὴν διαγώνιον ΑΔ τῆς ἕδρας ΑΠΔΡ, εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΠ· (διότι ἡ ἕδρα εἶνε ὀρθογώνιον)

$$(\mathrm{A\Delta})^2=(\mathrm{A\Pi})^2+(\Pi\Delta)^2=(\mathrm{A\Pi})^2+(\mathrm{AP})^2.$$

ἀλλὰ καὶ τὸ τρίγωνον ΒΑΔ εἶνε ὀρθογώνιον· διότι ἡ ΒΔ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΠΔΡ ὥστε ἡ γωνία ΒΔΑ εἶνε ὀρθή· ἐπομένως εἶνε

$$(\mathrm{AB})^2=(\mathrm{B\Delta})^2+(\mathrm{A\Delta})^2=(\mathrm{A\Sigma})^2+(\mathrm{A\Delta})^2$$

ὅθεν $$(\mathrm{AB})^2=(\mathrm{A\Pi})^2+(\mathrm{AP})^2+(\mathrm{A\Sigma})^2.$$

ἐξ οὗ καὶ $$\mathrm{AB}=\sqrt{(\mathrm{A\Pi})^2+(\mathrm{AP})^2+(\mathrm{A\Sigma})^2}.$$

Ἐκ τοῦ αὐτοῦ τριγώνου ΑΒΔ εὑρίσκομεν

$$\mathrm{B\Delta}=\mathrm{AB}.\ \text{συν}\ (\mathrm{AB\Delta})$$

καὶ ἐπειδὴ $\mathrm{B\Delta}=\mathrm{A\Sigma}$ καὶ γωνία $\mathrm{AB\Delta}=$γων. ΒΑΣ,

ἔχομεν $$\mathrm{A\Sigma}=\mathrm{AB}\ \text{συν}\ (\mathrm{BA\Sigma})\cdot$$

ὅθεν $$\text{συν}\ (\mathrm{BA\Sigma})=\frac{\mathrm{A\Sigma}}{\mathrm{AB}}.$$

ἐκ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκεται ἡ γωνία τῆς διαγωνίου ΑΒ πρὸς τὴν ἀκμὴν ΑΣ·

Ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$\text{συν}\ (\mathrm{BA\Pi})=\frac{\mathrm{A\Pi}}{\mathrm{AB}} \qquad \text{καὶ συν}\ (\mathrm{BAP})=\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AB}}.$$

Ἔστω, παραδείγματος χάριν

$$\mathrm{A\Pi}=3, \quad \mathrm{AP}=1, \quad \mathrm{A\Sigma}=2$$

τότε εἶνε $$\mathrm{AB}=\sqrt{3^2+2^2+1^2}=\sqrt{14}$$

ὅθεν (Dupuis σελ. 147) $\mathrm{AB}=3{,}74165$.

Εὕρεσις τῆς γωνίας ΒΑΠ.

$$\text{συν}\ (\mathrm{BA\Pi})=\frac{\mathrm{A\Pi}}{\mathrm{AB}}=\frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$\text{λογ}\ 3=0{,}47712$$

λογ $14=1{,}14613$, $\quad {}^1/_2$ λογ $14=0{,}57306$

$$\text{λογ συν}\ (\mathrm{BA\Pi})=\bar{1},90406$$

$$\text{καὶ}\ \mathrm{BA\Pi}=36^0\ 41'\ 54''$$

Εὕρεσις τῆς γωνίας ΒΑΡ

$$\sigma\upsilon\nu\,(\mathrm{BAP})=\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AB}}=\frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\ 1 &= 0 \\ \frac{1}{2}\ \lambda o\gamma\ 14 &= 0{,}57306 \\ \hline \lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu\,(\mathrm{BAP}) &= \bar{1}{,}42694 \\ \kappa\alpha\grave{\iota}\ \mathrm{BAP} &= 74^0\ 29'\ 55'' \end{aligned}$$

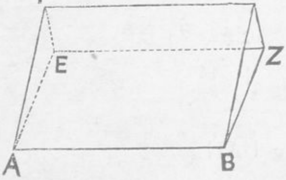
Εὕρεσις τῆς γωνίας ΒΑΣ.

$$\sigma\upsilon\nu\,(\mathrm{B}\Lambda\Sigma)=\frac{\mathrm{A}\Sigma}{\mathrm{AB}}=\frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\ 2 &= 0{,}30103 \\ \frac{1}{2}\ \lambda o\gamma\ 14 &= 0{,}57306 \\ \hline \lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu\,(\mathrm{BA\Sigma}) &= \bar{1}{,}72797 \\ \kappa\alpha\grave{\iota}\ \mathrm{BA\Sigma} &= 57^0\ 41'\ 18'' \end{aligned}$$

10ον

74. *Οἰκόπεδον ἐπὶ τῆς πλευρᾶς λόφου κείμενον ἔχει ὀρθογώνιον σχῆμα καὶ βάσιν ὁριζοντίαν. Ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου εἶνε β πήχεις, τὸ δὲ ὕψος υ, ἡ δὲ κλίσις τοῦ ἐδάφους πρὸς τὸν ὁρίζοντα εἶνε φ μοιρῶν. Ζητεῖται πόσων τετραγωνικῶν πήχεων θὰ εἶνε τὸ ὁριζόντιον ἔδαφος αὐτοῦ.*



Σχῆμα 42.

Ἐὰν ἐκ τῆς ὁριζοντίας βάσεως ΑΒ (σχ. 42) νοήσωμεν ὁριζόντιον ἐπίπεδον καὶ καταβιβάσωμεν ἐπ' αὐτὸ τὰς καθέτους ΓΕ καὶ ΔΖ ἀπὸ τῶν κορυφῶν τοῦ ὀρθογωνίου, φανερὸν εἶνε, ὅτι τὸ ὁριζόντιον ἔδαφος τοῦ οἰκοπέδου εἶνε τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΕΖ, τουτέστιν ἡ προβολὴ αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον· τὸ δὲ ἐμβαδὸν τῆς προβολῆς ταύτης εἶνε ἴσον τῷ ΑΒ. ΑΕ ἤτοι β· ΑΕ·
ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΕΓ ἔχομεν

$$\mathrm{AE}=\mathrm{A\Gamma}.\ \sigma\upsilon\nu\,\varphi = \upsilon.\ \sigma\upsilon\nu\varphi$$

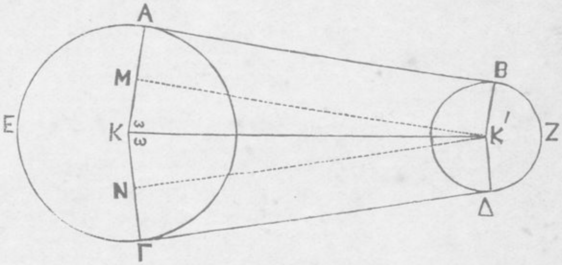
(διότι ἡ γωνία ΓΑΕ ἰσοῦται τῇ γωνίᾳ τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΒΓΔ καὶ ΑΒΕΖ, τουτέστι τῇ φ).

Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΕΖ εἶνε β. υ. συνφ· ἤτοι ἡ προβολὴ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ ἐπὶ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον ἰσοῦται τῷ ὀρθογωνίῳ τούτῳ πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας αὐτοῦ πρὸς τὸν ὁρίζοντα.

11ον

75. *Δύο τροχοί, τῶν ὁποίων οἱ ἄξονες εἶνε παράλληλοι, πρόκειται νὰ περιβληθῶσι δι' ἱμάντος, ὥστε ἡ κίνησις τοῦ ἑνὸς νὰ μεταδίδηται καὶ εἰς τὸν ἄλλον. Ζητεῖται τὸ μῆκος τοῦ ἁρμοδίου πρὸς τοῦτο ἱμάντος· εἶνε δὲ γνωσταὶ αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο τροχῶν ρ καὶ ρ΄ καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν ἀξόνων αὐτῶν α.*

Νοήσωμεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τοὺς ἄξονας τῶν τροχῶν· τοῦτο θὰ τέμνῃ αὐτοὺς κατὰ δύο κύκλους ΑΕΓ καὶ ΒΖΔ, ὧν τινων εἶνε γνωσταὶ αἱ ἀκτῖνες καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων· τὸν δὲ ἱμάντα θὰ τέμνῃ κατὰ γραμμήν, ἥτις ἀποτελεῖται ἐκ τῶν δύο κοινῶν ἐφαπτομένων ΑΒ, ΓΔ τῶν κύκλων καὶ ἐκ τῶν τόξων ΑΕΓ καὶ ΒΖΔ (διότι ὁ ἱμὰς εἶνε τεταμένος, ὥστε εἰς τὰ μέρη ἔνθα χωρίζεται ἀφ' ἑκατέρου τῶν τροχῶν ἐφάπτεται αὐτοῦ). Πρόκειται λοιπὸν νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος



Σχῆμα 43

$$\text{τοξ ΑΕΓ} + \text{τόξ ΒΖΔ} + \text{ΑΒ} + \text{ΓΔ}$$

Ἐκ τῶν κέντρων Κ καὶ Κ΄ ἂς ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΚΓ καὶ Κ΄Β, Κ΄Δ καὶ ἐκ τοῦ Κ΄ (κέντρου τοῦ μικροτέρου κύκλου) ἡ Κ΄Μ παράλληλος τῇ ΒΑ καὶ Κ΄Ν τῇ ΔΓ. Ἐπειδὴ τὸ σχῆμα ΑΒΜΚ΄ εἶνε ὀρθογώνιον (ὡς ἔχον ὀρθὰς τὰς γωνίας αὐτοῦ) εἶνε ΑΜ=Κ΄Β=ρ΄ ὥστε ΚΜ=ρ −ρ΄, καὶ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου Κ΄ΚΜ εὑρίσκομεν

$$\text{συν}\,\omega = \frac{\rho-\rho'}{\alpha}$$

ἐξ οὗ εὑρίσκεται ἡ γωνία ω.

Τῆς γωνίας ω εὑρεθείσης, εὑρίσκομεν τὸ τόξον ΑΕΓ ἐκ τῆς ἰσότητος·

$$\frac{2\pi\rho}{360} = \frac{\text{τοξ. ΑΕΓ}}{360-2\omega}.$$

διότι τὰ τόξα παντὸς κύκλου εἶνε ἀνάλογα τῶν ἐπικέντρων γωνιῶν καὶ εἰς τὸ τόξον ΑΕΓ ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρος γωνία ἡ $360^0 - 2\omega$.

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης εὑρίσκομεν

$$\text{τόξ. } ΑΕΓ = \frac{180-\omega}{90}\ \pi\rho.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν (διότι ἡ γωνία ΒΚ΄Δ εἶνε ἴση τῇ ΑΚΓ΄),

$$\text{τόξ. } ΒΖΔ = \frac{\omega}{90}\ \pi\rho'.$$

Ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΜΚΚ΄ εὑρίσκομεν

$$Κ'Μ = \sqrt{\alpha^2-(\rho-\rho')^2}$$

εἶνε δὲ Κ΄Μ = ΑΒ = ΓΔ.

Ὥστε τὸ ζητούμενον μῆκος εἶνε

$$2\sqrt{\alpha^2-(\rho-\rho')^2} + \frac{180-\omega}{90}\ \pi\rho. + \frac{\omega}{90}\ \pi\rho'$$

Ἔστω, ὡς παράδειγμα

$\rho = 0{,}5$ μέτρ. $\rho = 0{,}2$ μέτρ. $\alpha = 8^{\mu}$

ἔχομεν ἐν πρώτοις

$$\text{συν } \omega = \frac{3}{80}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{λογ} & 3 & = & 0{,}47712 \\ \text{λογ} & 80 & = & 1{,}90309 \\ \hline \text{λογσυν} & \omega & = & \bar{2}{,}57403 \end{array}$$

καὶ $\omega = 87^0\ 51'$ καὶ $180 - \omega = 92^0,\ 9'$

$$\text{Τόξ. } ΑΕΓ = \frac{92 + \frac{9}{60}}{90}\ \pi.\ 0,\ 5 = 1{,}608$$

$$\text{Τοξ. } ΒΖΔ = \frac{87 + \frac{51}{60}}{90}\ \pi.\ 0,\ 2 = 0{,}613$$

$$\sqrt{8^2 - \left(\tfrac{3}{10}\right)^2} = \frac{1}{10}\sqrt{6400-9} = \frac{1}{10}\sqrt{6391} = 7{,}994$$

ὥστε τὸ ζητούμενον μῆκος τοῦ ἱμάντος θὰ εἶνε

$$\begin{array}{lrcl} & 1{,}608 & = & \text{τοξ. } ΑΕΓ \\ & 0{,}613 & = & \text{τοξ. } ΒΖΔ \\ & 15{,}988 & = & ΑΒ + ΓΔ \\ \hline \text{τὸ ὅλον} & 18{,}209 & & \end{array}$$

— ΤΕΛΟΣ