ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΔΗΜ. ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ε' ΚΑΙ ΣΤ' ΤΑΞΕΩΝ ΤΟΥ ΔΗΜ. ΣΧΟΛΕΙΟΥ

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΑΘΗΝΑΙ 1958

ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΔΗΜ. ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ
Δημοδιδασκάλου

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΥΠΟ ΤΟΥ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΔΙΑ ΤΗΣ ΥΠ' ΑΡΙΘ. 61452/12-6-1952 ΑΠΟΦΑΣΕΩΣ

Ε' ΚΑΙ ΣΤ' ΤΑΞΕΩΝ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

'Απόσπασμα
ἐκ τῆς Εἰσηγητ. 'Εκθέσεως τοῦ Σοῦ 'Εκπαιδ. Συμβουλίου

...Τὸ ὑπὸ κρίσιν βιβλίον ἀνταποκρίνεται πλήρως εἰς ὅλας τὰς ἀπαιτήσεις τῆς προκηρύξεως. Χάρις δὲ εἰς τὴν μεθοδικὴν διάταξιν τῆς ὕλης, τὴν ἐπιτυχῆ ἐκλογὴν τῶν ἀσκήσεων καὶ τὴν σαφήνειαν τῆς ἐκφράσεως δύναται νὰ χαρακτηρισθῇ ὡς **ἓν ἐκ τῶν καλυτέρων** βιβλίων τοῦ εἴδους του. Τὴν ἀρτιότητα τοῦ ὑπὸ κρίσιν βιβλίου, ἐνισχύουν **αἱ ἐργασίαι** τὰς ὁποίας εἰς διάφορα μέρη αὐτοῦ παρεμβάλλει ὁ συγγραφεύς, διότι δι' αὐτῶν παρέχεται ἡ εὐκαιρία εἰς τοὺς μικροὺς μαθητὰς ν' ἀναπτύξουν πρωτοβουλίαν, ν' ἀσκήσουν τὰς δεξιότητας αὐτῶν καὶ ν' ἀφυπνίσουν τὸ καλαισθητικὸν συναίσθημα . . .

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ 44α
ΑΘΗΝΑΙ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
Δ/σις Διδακτ. Βιβλίων
Ἀριθ. Πρωτ. 61330

Ἀθῆναι τῇ 20-6-1952

Πρὸς

τὸν κ. Γεώργ. Παπαϊωάννου
Ὁδὸς Σταδίου 44α

Ἐνταῦθα

Ἀνακοινοῦμεν ὑμῖν, ὅτι διὰ τῆς ὑπ' ἀριθ. 61452|12-6-52 ἀποφάσεως τοῦ Ὑπουργείου, μετὰ σύμφωνον γνωμοδότησιν τοῦ Κεντρικοῦ Γνωμοδοτικοῦ καὶ Διοικητικοῦ Συμβουλίου τῆς Ἐκπαιδεύσεως, ἐνεκρίθη τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον «Πρακτικὴ Γεωμετρία» βιβλίον σας ὡς βοηθητικὸν τοῦ μαθήματος τῆς Γεωμετρίας διὰ τοὺς μαθητὰς τῶν Ε΄ καὶ ΣΤ΄ τάξεων τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου ἐπὶ μίαν τριετίαν ἀρχομένην ἀπὸ 1-9-52.

Παρακαλοῦμεν ὅθεν, ὅπως μεριμνήσητε διὰ τὴν ἔγκαιρον ἐκτύπωσιν τοῦ βιβλίου τούτου, συμμορφούμενοι πρὸς τὰς ὑποδείξεις τοῦ Ἐκπαιδευτικοῦ Συμβουλίου καὶ τὸν κανονισμὸν ἐκδόσεως βοηθητικῶν βιβλίων τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου.

Κοινοποίησις
Κ.Γ.Δ.Σ.Ε

Ἐντολῇ Ὑπουργοῦ
Ὁ Διευθυντὴς
Χ. Μούστρης

Κάθε γνήσιο ἀντίτυπο φέρει τὴν ἰδιόχειρη ὑπογραφὴ τοῦ συγγραφέα

ΜΕΡΟΣ Α΄.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

1. Σώματα

Παρατήρηση. Παρατηρῆστε γύρω σας. Θὰ ἰδῆτε διάφορα πράγματα, ποὺ μπορεῖτε νὰ τὰ πιάσετε μὲ τὰ χέρια σας. Π.χ. βιβλία, μολύβια, σάκκες, θρανία, καρέκλες, τόπια, κασετίνες.

Ὅλα αὐτὰ τὰ πράγματα, ποὺ τὰ βλέπετε καὶ τὰ πιάνετε λέγονται ***ὑλικὰ σώματα*** ἢ ἁπλῶς ***σώματα***.

Θὰ ἰδῆτε ἀκόμα, ὅτι τὰ σώματα πιάνουν κάποιον τόπο, ὅπου καὶ ἂν τ' ἀφήσετε. Τὸν τόπο, ποὺ πιάνουν τὰ σώματα, τὸν λέμε ***χῶρο***.

Τὸ ποτῆρι, ἡ κιμωλία κλπ. πιάνουν χῶρο καὶ λέγονται σώματα.

Συμπέρασμα

Κάθε πρᾶγμα, ποὺ πιάνει χῶρο, λέγεται σῶμα.

2. Γεωμετρικὸ σῶμα

Κάθε σῶμα μποροῦμε νὰ τὸ ἐξετάσωμε ἀπὸ τί ὕλη εἶναι καμωμένο, τί γεύση ἔχει, ἂν εἶναι σκληρὸ ἢ μαλακὸ ἢ τί σχῆμα καὶ μέγεθος ἔχει.

Ὅταν ἕνα σῶμα τὸ ἐξετάζωμε ***μόνο*** γιὰ νὰ ἰδοῦμε τί ***σχῆμα*** καὶ ***μέγεθος*** ἔχει, χωρὶς νὰ μᾶς ἐνδιαφέρῃ ἡ ὕλη ἀπὸ τὴν ὁποία εἶναι καμωμένο, τὸ χρῶμα του, κλπ. τότε τὸ λέμε ***στερεὸ σῶμα***. Ἀπὸ τὰ στερεὰ σώματα, ἐκεῖνα ποὺ ἔχουν ὡρισμένο σχῆμα, λέγονται ***γεωμετρικὰ σώματα***.

3. Διαστάσεις τῶν σωμάτων

Παρατήρηση. Πάρτε ἕνα ὁποιοδήποτε στερεὸ σῶμα καὶ παρατηρῆστε το. Π.χ. μιὰ κασετίνα. Θὰ ἰδῆτε, ὅτι ἡ κασετίνα ἐκτείνεται α) ἀπὸ κάτω πρὸς τὰ ἐπάνω, β) ἀπὸ τὰ ἐμπρὸς πρὸς τὰ ὀπίσω καὶ γ) ἀπὸ τὰ δεξιὰ πρὸς τὰ ἀριστερά.

Ὥστε ἡ κασετίνα αὐτὴ ἔχει τρεῖς ***διαστάσεις***. Ὅλα τὰ στερεὰ σώματα ἔχουν, ὅπως ἡ κασετίνα, τρεῖς διαστάσεις.

Οἱ διαστάσεις τῶν στερεῶν σωμάτων εἶναι τρεῖς : τὸ μῆκος, τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος.

4. Ὄγκος τῶν σωμάτων

Παρατήρηση. Ἂν ἀπὸ ἕνα κουτὶ λουκούμια βγάλετε **ἕνα** λουκούμι, θὰ ἰδῆτε, ὅτι ὁ χῶρος ποὺ ἔπιανε τὸ λουκούμι αὐτό, μένει ἄδειανός. Τὸ λουκούμι λοιπὸν αὐτὸ εἶχε τὸ χῶρο του.

Αὐτὸς ὁ χῶρος, ποὺ πιάνει κάθε σῶμα, λέγεται ***ὄγκος***.

Συμπέρασμα

Ὄγκος τῶν σωμάτων λέγεται ὁ χῶρος, ποὺ πιάνει κάθε σῶμα.

Κάθε σῶμα ἔχει τὸν ὄγκο του, γιατὶ κάθε σῶμα πιάνει χῶρο. Δυὸ σώματα δὲν χωροῦν στὸν ἴδιο χῶρο.

5. Σχῆμα τῶν σωμάτων

Παρατήρηση. Παρατηρῆστε διάφορα σώματα. **Θὰ ἰδῆτε, ὅτι δὲν** εἶναι ὅμοια στὸ ἐξωτερικό τους. Ἡ καρέκλα εἶναι διάφορη ἀπὸ τὴν κασετίνα καὶ ἡ κιμωλία ἐντελῶς διάφορη ἀπὸ τὰ θρανία. Αὐτὸ γίνεται, γιατὶ ἡ καρέκλα τελειώνει ἐξωτερικὰ ἀλλοιώτικα ἀπὸ τὴν κασετίνα. Κάθε σῶμα λοιπὸν τελειώνει ἐξωτερικὰ μὲ ξεχωριστὸ τρόπο. ***Τὰ διάφορα σώματα ἔχουν διαφορετικὴ ἐξωτερικὴ μορφὴ ἢ σχῆμα.***

6. Ἐπιφάνεια τῶν σωμάτων

Παρατήρηση. Παρατηρῆστε τὴν κασετίνα σας. Θὰ ἰδῆτε, ὅτι ἐξωτερικὰ τελειώνει κάπου. Ἐκεῖ ποὺ τελειώνει ἐξωτερικὰ ἡ κασετίνα σας, εἶναι τὰ ἄκρα της. Ἄκρα ἔχουν ὅλα τὰ σώματα, γιατὶ ὅλα τὰ σώματα τελειώνουν κάπου.

Ὅλα μαζὶ τὰ ἄκρα ἑνὸς σώματος, ποὺ μποροῦμε νὰ ἰδοῦμε ἢ νὰ ψαύσωμε, κάνουν τὴν ἐπιφάνειά του.

Οἱ ἐπιφάνειες ἔχουν μόνο δυὸ διαστάσεις : μῆκος καὶ πλάτος.

7. Εἴδη ἐπιφανειῶν

α'. Ἐπίπεδη ἐπιφάνεια

Παρατήρηση. Δοκιμάστε μὲ τὴν εὐθύγραμμη κόψη τοῦ κανόνα τὴν προσθινὴ ἐπιφάνεια τοῦ πίνακα σὲ διάφορες κάθε φορὰ θέσεις.

Θὰ ἰδῆτε, ὅτι ὅλη ἡ κόψη τοῦ κανόνα θὰ ἐγγίζη τὴν ἐπιφάνεια τοῦ πίνακα, σὲ ὁποιαδήποτε θέση της καὶ ἂν τὸν βάλετε.

Τὸ ἴδιο θὰ συμβῇ, ἂν δοκιμάσατε μὲ τὸν κανόνα σας καὶ τὴν ἐπιφάνεια τοῦ τραπεζιοῦ, τοῦ θρανίου σας κλπ.

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πίνακα, τοῦ τραπεζιοῦ, τοῦ θρανίου κλπ. εἶναι ***ἐπίπεδη ἐπιφάνεια***.

Συμπέρασμα :

Ἐπίπεδη ἐπιφάνεια ἢ ἁπλῶς ἐπίπεδο λέγεται ἡ ἐπιφάνεια, ποὺ ὅλα τὰ σημεῖα της ἐγγίζουν τὴν εὐθύγραμμη κόψη τοῦ κανόνα, σὲ ὁποιαδήποτε διεύθυνση καὶ ἂν δοκιμάσωμε μ' αὐτόν

β΄. Καμπύλη ἐπιφάνεια

Δοκιμάστε τὴν ἐπιφάνεια τοῦ τοπιοῦ μὲ τὴν εὐθύγραμμη κόψη τοῦ κανόνα σὲ διάφορες κάθε φορὰ θέσεις της, ὅπως ἀκριβῶς δοκιμάσατε τὴν ἐπιφάνεια τοῦ πίνακα, τοῦ τραπεζιοῦ, τοῦ θρανίου.

Θὰ ἰδῆτε, ὅτι ἡ κόψη τοῦ κανόνα ἀκουμπᾶ μόνο σ' ἕνα σημεῖο της, σ' ὁποια θέση καὶ ἂν βάλετε τὸν κανόνα.

Τὸ ἴδιο θὰ παρατηρήσετε, ἂν δοκιμάσετε μὲ τὸν ἴδιο τρόπο καὶ τὴν καμπουρωτὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς χωνιοῦ, ἑνὸς σωλήνα. Ἡ εὐθύγραμμη κόψη τοῦ κανόνα δὲν ἐγγίζει τὸ σωλήνα σὲ ὅλες τὶς διευθύνσεις.

Ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τοῦ τοπιοῦ, τοῦ χωνιοῦ, τοῦ σωλήνα κλπ. δὲν εἶναι σὰν τὴν ἐπιφάνεια τοῦ πίνακα καὶ τοῦ τραπεζιοῦ, γιατὶ ἡ εὐθύγραμμη κόψη τοῦ κανόνα δὲν ἐφαρμόζει ἐπάνω σ' αὐτὲς παντοῦ, ὁπωσδήποτε καὶ ἂν τὸν στρέψωμε. Αὐτὸ συμβαίνει, γιατὶ κανένα τμῆμα τῆς ἐπιφάνειάς τους, ὅσο μικρὸ καὶ ἂν εἶναι δὲν εἶναι ἐπίπεδη ἐπιφάνεια.

Οἱ ἐπιφάνειες αὐτὲς λέγονται ***καμπύλες*** ἢ ***κυρτὲς*** ἐπιφάνειες.

Συμπέρασμα :

Ἡ ἐπιφάνεια ποὺ κανένα τμῆμα της, ὅσο μικρὸ καὶ ἂν εἶναι, δὲν εἶναι ἐπίπεδη ἐπιφάνεια, λέγεται καμπύλη ἢ κυρτὴ ἐπιφάνεια.

Καμπύλες ἢ κυρτὲς ἐπιφάνειες ἔχουν τὰ πορτοκάλια, τὰ καρπούζια, τὰ τόπια καὶ γενικὰ ὅλα τὰ στρογγυλὰ σώματα, ὅπως τὰ χωνιά, τὰ στρογγυλὰ μολύβια κλπ.

γ΄. Τεθλασμένη ἐπιφάνεια

Παρατήρηση. Δοκιμάστε μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ὅλη τὴν ἐπιφάνεια τῆ κασετίνας.

Θὰ ἰδῆτε, ὅτι ἡ κόψη τοῦ κανόνα ἀκουμπᾶ στὶς διάφορες ἐπιφά-νειες τῆς κασετίνας, ὄχι ὅμως *συγχρόνως* σὲ ὅλες μαζί.

Δηλαδὴ ἡ ἐπιφάνεια τῆς κασετίνας ἀποτελεῖται ἀπὸ διάφορες ἐπί-πεδες ἐπιφάνειες, ἀλλὰ δὲν εἶναι ὅλη *ἐπίπεδη*.

Τέτοια ἐπιφάνεια ἔχουν πολλὰ κουτιά.

Συμπέρασμα :

Ἐπιφάνεια, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ πολλὲς ἐπίπεδες ἐπιφά-νειες, ἀλλὰ δὲν εἶναι ἐπίπεδη, λέγεται τεθλασμένη.

δ΄. Μικτὴ ἐπιφάνεια

Ἔχομε σώματα, ποὺ ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἐπίπεδες καὶ καμπύλες ἐπιφάνειες, π.χ. τὰ κουτιὰ τοῦ γάλακτος, τῶν κονσερβῶν κλπ. Οἱ ἐπι-φάνειες αὐτὲς λέγονται *μικτές*.

Ἀνακεφαλαίωση

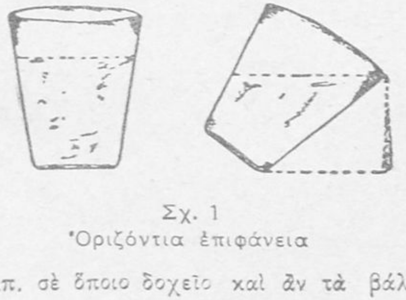
Ἔχομε λοιπὸν 4 εἰδῶν ἐπιφάνειες.

1) Ἐπίπεδη ἐπιφάνεια ἢ ἐπίπεδο
2) Καμπύλη ἐπιφάνεια
3) Τεθλασμένη ἐπιφάνεια
4) Μικτὴ ἐπιφάνεια

8. Ἐπίπεδες ἐπιφάνειες

α΄. Ὁριζόντια ἐπιφάνεια

Πάρτε ἕνα ποτήρι, ποὺ νὰ ἔχῃ νερὸ ὡς τὴ μέση. Θὰ ἰδῆτε, ὅτι ἡ ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ νεροῦ μέσα στὸ ποτήρι ἔχει τὴ διεύθυνση, ποὺ βλέπετε στὸ σχῆμα 1.



Σχ. 1
Ὁριζόντια ἐπιφάνεια

Γέρνομε τὸ ποτήρι δεξιά, ἀριστερά, ἐμπρός, ὀπίσω, χω-ρὶς βέβαια νὰ χύνεται τὸ νερό.

Θὰ ἰδῆτε, ὅτι ἡ διεύθυνση τῆς ἐλεύθερης ἐπιφάνειας τοῦ νεροῦ μένει πάντα ἡ ἴδια.

Τὸ ἴδιο θὰ παρατηρῆστε καὶ στὰ ἄλλα ὑγρά, κρασί, λάδι κλπ. σὲ ὁποιο δοχεῖο καὶ ἂν τὰ βάλετε. Πάντα ἡ ἐλεύθερη ἐπιφά-νεια, ὅταν τὸ ὑγρὸ εἶναι ἤρεμο, ἔχει τὴν ἴδια διεύθυνση. Ἡ διεύθυνση, ποὺ ἔχει ἡ ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ἤρεμου νεροῦ μέσα σὲ δοχεῖο, λέ-γεται *ὁριζόντια*.

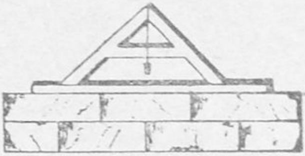
Συμπέρασμα

Ἡ ἐ π ι φ ά ν ε ι α, ποὺ ἔχει παντοῦ τὴ διεύθυνση τῆς ἐλεύθερης ἐπιφάνειας τοῦ ἥρεμου νεροῦ μέσα σὲ δοχεῖο, λέγεται ὁριζόντια ἐπιφάνεια

9. Ὄργανα μὲ τὰ ὁποῖα δοκιμάζομε τὶς ὁριζόντιες ἐπιφάνειες

Ἀ λ φ ά δ ι

Οἱ τεχνῖτες, κτίστες, μαραγκοὶ κλπ. γιὰ νὰ δοκιμάζουν, ἂν μιὰ ἐπιφάνεια εἶναι ὁριζόντια (πατώματα, τραπέζια, μπιλιάρδα κλπ.) μεταχειρίζονται τὸ ἀλφάδι (Σχ. 2). Τὸ ἀλφάδι εἶναι ἕνα κεφαλαῖο Α ἀπὸ ξύλο. Τὸ σανίδι ποὺ ἑνώνει τὰ δυὸ σκέλη τοῦ Α, ἔχει ἀκριβῶς στὴ μέση χαραγμένη μία γραμμή. Ἀπὸ τὴν κορυφὴ τοῦ ἀλφαδιοῦ κρέμεται μὲ κλωστὴ ἕνα βαρίδι.

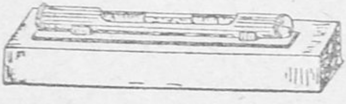


Σχ. 2
Ἀλφάδι

Ἂν τὸ πάτωμα εἶναι ὁριζόντιο, τὸ νῆμα περνᾶ ἀκριβῶς μπροστὰ ἀπὸ τὴ γραμμή. Ἂν ὄχι, κλίνει δεξιὰ ἢ ἀριστερά· τότε εἶναι πλάγιο καὶ ὄχι ὁριζόντιο.

Ἀ ε ρ ο σ τ ά θ μ η

Ἄλλο ὄργανο γιὰ μικρὲς ὁριζόντιες ἐπιφάνειες εἶναι ἡ **ἀεροστάθμη** τῶν μαραγκῶν (Σχ 3). Ἡ ἀεροστάθμη εἶναι ἕνας γυάλινος σωλήνας γεμάτος νερὸ μὲ μιὰ μικρὴ φυσαλίδα ἀέρα, ποὺ κινεῖται ἐλεύθερα μέσα σ᾽ αὐτόν. Ὁ σωλήνας εἶναι στηριγμένος σὲ ξύλινη βάση. Ἂν ἡ ἐπιφάνεια, ποὺ δοκιμάζομε, εἶναι ὁριζόντια, ἡ φυσαλίδα στέκεται ἀνάμεσα στὶς δυὸ γραμμές, ποὺ εἶναι χαραγμένες στὸ γυάλινο σωλήνα καὶ ποὺ δείχνουν τὸ μισὸ ἀκριβῶς τῆς ἀεροστάθμης. Ἂν ὄχι, φεύγει δεξιὰ ἢ ἀριστερά.



Σχ. 3
Ἀεροστάθμη

Κ α τ α κ ό ρ υ φ η ἐ π ι φ ά ν ε ι α

Νῆμα τῆς στάθμης

Οἱ κτίστες γιὰ νὰ δοκιμάζουν τοὺς τοίχους, ποὺ κτίζουν μεταχειρίζονται τὸ νῆμα τῆς στάθμης.

Τὸ ὄργανο αὐτὸ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα βαρίδι δεμένο σὲ κλωστή. Στάθμη μπορεῖτε νὰ κάνετε καὶ σεῖς μὲ μιὰ κλωστὴ καὶ ἕνα βαρίδι. Ὅταν ἀφήσωμε τὸ βαρίδι ἐλεύθερο, ἡ κλωστὴ τεντώνεται καὶ παίρνει μιὰ διεύθυνση. Ἡ διεύθυνση αὐτή, ποὺ παίρνει τὸ νῆμα τῆς στάθμης, **λέγεται *κατακόρυφη*** (Σχ. 4).

Σχ. 4
Νῆμα τῆς στάθμης

Συμπέρασμα

Ἡ ἐπιφάνεια, ποὺ ἔχει τὴ διεύθυνση τοῦ νήματος τῆς στάθμης, λέγεται κατακόρυφη.

Πλάγια ἐπιφάνεια

Ἡ ἐπίπεδη ἐπιφάνεια, ποὺ δὲν εἶναι οὔτε ὁριζόντια, οὔτε κατακόρυφη, λέγεται πλάγια.

Ἀνακεφαλαίωση

Οἱ ἐπίπεδες λοιπὸν ἐπιφάνειες εἶναι :

α΄ Ὁριζόντια ἐπιφάνεια ἢ ὁριζόντιο ἐπίπεδο.
β΄ Κατακόρυφη ἐπιφάνεια ἢ κατακόρυφο ἐπίπεδο.
γ΄ Πλάγια ἐπιφάνεια ἢ πλάγιο ἐπίπεδο.

ΜΕΡΟΣ Β΄.

ΠΡΙΣΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α΄.

1. Κύβος

α΄. Ἕδρες

Παρατήρηση 1. **Παρατηρῆστε αὐτὸ τὸ** στερεὸ σῶμα (Σχ. 5) Εἶναι ἕνας *κύβος*.

Προσέξτε **τὶς διαστάσεις τοῦ κύβου. Θὰ** ἰδῆτε, ὅτι ἔχει, ὅπως κάθε στερεὸ σῶμα, ***τρεῖς διαστάσεις***, μῆκος, **πλάτος** καὶ ὕψος.

Μετρῆστε **τὶς διαστάσεις** του. **Θὰ** βρῆτε, ὅτι ὅλες εἶναι ἴσες μεταξύ τους. Μ' ἄλλα λόγια ***ὁ κύβος ἔχει τὸ αὐτὸ μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος.***

Παρατήρηση 2. Παρατηρῆστε τὴν ἐπιφάνειά του. Θὰ ἰδῆτε, ὅτι **ἡ ἐπιφάνειά του εἶναι *τεθλασμένη*, ἀποτελεῖται** δηλ. ἀπὸ ἕξι ἐπίπεδες ἐπιφάνειες.

Μετρῆστε τὶς ἐπιφάνειες τοῦ κύβου μ' ἕνα χαρτί. Θὰ ἰδῆτε, ὅτι ὅλες οἱ ἐπιφάνειές του εἶναι ἴσες μεταξύ τους.

Οἱ ἕξι αὐτὲς ἐπιφάνειες τοῦ κύβου λέγονται **ἕδρες** καὶ εἶναι ἴσες μεταξύ τους.

Σχ. 5
Κύβος

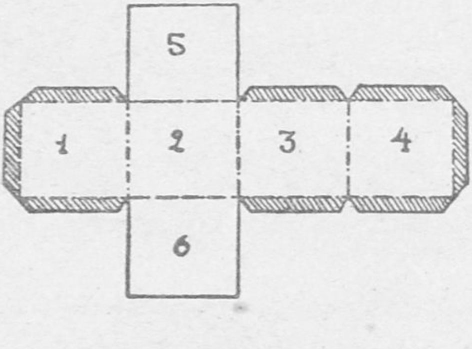
Παρατήρηση 3 Στηρίξτε τὸν κύβο σας σὲ μιὰ ὁριζόντια ἐπιφάνεια καὶ παρατηρῆστε τὶς ἕδρες του. Ἡ ἕδρα στὴν ὁποία στηρίζεται ὁ κύβος, λέγεται *βάση*.

Ἡ ἕδρα αὐτή, ὅπως καὶ ἡ ἀπέναντί της, εἶναι ὁριζόντιες, ὅλες δὲ οἱ ἄλλες ἕδρες του εἶναι ***κατακόρυφες***.

Ὁ κύβος λοιπόν, ὅταν στηρίζεται σὲ ὁριζόντια ἐπιφάνεια, ἔχει δυὸ ἕδρες ***ὁριζόντιες*** καὶ τέσσερες ***κατακόρυφες***.

Πῶς γίνεται ὁ κύβος μὲ χαρτόνι

Ζωγραφίστε μὲ τὸ μολύβι σας στὸ χαρτόνι ἕξι ἴσα τετράγωνα, ὅπως τὰ βλέπετε στὸ σχ. 6. Μὲ τὸ μαχαιράκι σας κόβετε τὸ σχέδιο καὶ ἔπειτα χαράζετε λιγάκι τὶς γραμμές, ποὺ σημειώνονται μὲ κομμένες γραμμοῦλες. Σπάζετε κατόπιν τὸ χαρτόνι στὶς χαραγμένες κόψεις πρὸς τὸ ἀντίθετο μέρος τοῦ χαράγματος, ξύνετε ἐλαφρὰ μὲ τὸ μαχαιράκι σας τὶς μαυρισμένες ἀκροῦλες γιὰ νὰ μποροῦν νὰ κολληθοῦν εὔκολα, τὶς κολλᾶτε μὲ ἀλευρόκολλα καὶ ἔχετε τὸν κύβο σας. Ἂν θέλετε μπορεῖτε νὰ



Σχ. 6
Ἀνάπτυγμα κύβου

τὸν ντύσετε μὲ λεπτὸ χρωματιστὸ χαρτὶ ἢ κολλᾶτε τὶς ἑνώσεις τῶν ἑδρῶν του μὲ χάρτινες κορδέλλες.

Τὸ σχέδιο, ὅπως εἶναι στὸ σχ. 6, λέγεται ***ἀνάπτυγμα κύβου.***

β΄. Ἀκμὲς καὶ κορυφὲς τοῦ κύβου

Παρατήρηση 1. Παρατηρῆστε τὸν κύβο. Θὰ ἰδῆτε, ὅτι οἱ ἕδρες του συναντῶνται δυὸ δυό, κόβουν ἡ μιὰ τὴν ἄλλη καὶ σχηματίζουν τὶς κόψεις τοῦ κύβου.

Τὸ μέρος, ποὺ συναντῶνται δυὸ ἕδρες τοῦ κύβου, λέγεται ***ἀκμή.***

Μετρῆστε τὶς ἀκμὲς τοῦ κύβου σας. Θὰ βρῆτε, ὅτι ὅλες εἶναι δώδεκα.

Παρατήρηση 2. Παρατηρῆστε πάλι τὸν κύβο σας θὰ ἰδῆτε, ὅτι σ᾽ ἕνα σημεῖο συναντῶνται τρεῖς ἕδρες.

Τὸ μέρος, ὅπου συναντῶνται τρεῖς ἕδρες τοῦ κύβου, λέγεται ***κορυφή***. Ὁ κύβος ἔχει ***ὀκτὼ κορυφές.***

Συμπέρασμα:

Ὁ ***κύβος ἔχει δώδεκα ἀκμὲς καὶ ὀκτὼ κορυφές.***

γ΄. Θέση τῶν ἑδρῶν καὶ τῶν ἀκμῶν τοῦ κύβου

Παρατήρηση. Παρατηρῆστε δυὸ ἀπέναντι ἕδρες τοῦ κύβου. Θὰ ἰδῆτε, ὅτι ἀπέχουν ἐξ ἴσου καὶ πῶς ὅσο καὶ ἂν τὶς προεκτείνετε δὲν θὰ συναντηθοῦν.

Οἱ ἕδρες αὐτὲς λέγονται ***παράλληλες.***

Κάθε ***δυὸ ἀπέναντι ἕδρες τοῦ κύβου εἶναι παράλληλες***. Καὶ ὅλα τὰ ἐπίπεδα, ποὺ ὅσο καὶ ἂν τὰ προεκτείνωμε δὲν συναντῶνται, λέγονται ***παράλληλα ἐπίπεδα.***

Τὸ πάτωμα τῆς αἴθουσας καὶ ἡ ὀροφή της εἶναι ***παράλληλα*** ἐπίπεδα, καθὼς καὶ οἱ ἀπέναντι τοῖχοι μεταξύ τους,

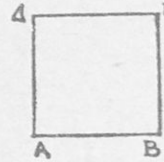
Τὸ ἴδιο βλέπετε καὶ στὶς ἀκμὲς τοῦ κύβου. Κάθε δυὸ ἀπέναντι ἀκμὲς τοῦ κύβου εἶναι παράλληλες.

2. Σχῆμα τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου

Τετράγωνο - Πλευρές - Περίμετρος

Πάρτε τὸν κύβο σας, τοποθετῆστε τον ἐπάνω σ᾽ ἕνα λευκὸ χαρτὶ καὶ μὲ τὸ μολύβι σας σύρετε γραμμὲς ἀκολουθῶντας τὶς ἀκμὲς τῆς βάσεώς του.

Θὰ σχηματισθῇ τότε ἕνα σχέδιο, ποὺ θὰ δείχνῃ τὸ μέγεθος καὶ τὸ σχῆμα τῆς ἕδρας τοῦ κύβου (Σχ. 7). Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται ***τετράγωνο*** καὶ οἱ γραμμές, ποὺ τὸ περιβάλλουν, λέγονται ***πλευρές***.



Σχ. 7
Τετράγωνα

Τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν πλευρῶν του, λέγεται ***περίμετρος***.

Ἂν μετρήσετε ὅλες τὶς πλευρὲς τοῦ τετραγώνου, θὰ ἰδῆτε, ὅτι ὅλες εἶναι ἀκριβῶς ἴσες μεταξύ τους.

Γιὰ νὰ βρεθῇ λοιπὸν ἡ περίμετρος ἑνὸς τετραγώνου, δὲν ἔχετε παρὰ νὰ μετρήσετε τὴ μιὰ πλευρά του καὶ νὰ τὴν πολλαπλασιάσετε ἐπὶ τὸ 4, ἀφοῦ ὅλες οἱ πλευρές του εἶναι ἴσες.

3. Γραμμὴ—Εἴδη γραμμῶν

Ὅπως εἴδαμε ***περίμετρος*** τοῦ τετραγώνου εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν του. Ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἶναι μία ***γραμμὴ*** (Σχ. 8).


Σχ. 8
Γραμμὴ

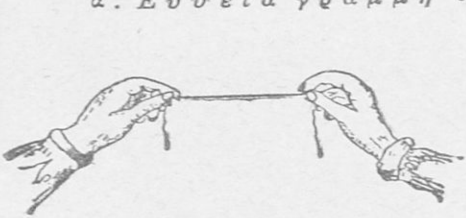
Γραμμὲς εἶναι οἱ ἄκρες ἀπὸ ἕνα φύλλο χαρτί, μιὰ τεντωμένη κλωστὴ κλπ.

Γραμμὴ εἶναι τὰ ἄκρα κάθε ἐπιφάνειας.

Οἱ γραμμὲς ***ἔχουν μόνο μῆκος***, δὲν ἔχουν οὔτε πλάτος, οὔτε ὕψος.

Οἱ ἐπιφάνειες, ὅπως εἴδαμε, εἶναι ἐπίπεδες, καμπύλες, τεθλασμένες καὶ μικτές. Ἀφοῦ λοιπὸν οἱ ἐπιφάνειες τελειώνουν σὲ γραμμὲς καὶ οἱ γραμμὲς θὰ εἶναι 4 εἰδῶν :

α΄. ***Εὐθεῖα γραμμὴ*** εἶναι ἡ συντομώτερη γραμμὴ μεταξὺ δύο σημείων. Μιὰ καλὰ τεντωμένη κλωστὴ δείχνει μιὰ εὐθεῖα γραμμὴ (σχ. 9).

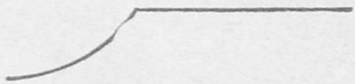

Σχ. 9. Εὐθεῖα γραμμή


Σχ. 10. Τεθλασμένες γραμμὲς

β΄. ***Τεθλασμένη γραμμὴ*** λέγεται ἡ γραμμή, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ δυὸ ἢ περισσότερες εὐθεῖες γραμμές, χωρὶς νὰ εἶναι εὐθεῖα (σχ. 10).

γ΄. *Καμπύλη γράμμη* λέγεται ἡ γραμμή, ποὺ δὲν εἶναι εὐθεῖα, οὔτε κανένα κομμάτι της εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ (σχ. 11).

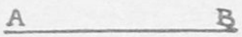
Σχ. 11. Καμπύλες γραμμὲς



Σχ. 12. Μικτὴ

δ΄. ***Μικτὴ γραμμὴ*** **λέγεται ἡ** γραμμή, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθεῖα καὶ καμπύλη γραμμὴ (σχ. 12).

Τὶς γραμμὲς τὶς ὀνομάζομε στὴ **Γεωμετρία** μὲ γράμματα, ποὺ τὰ



Σχ. 13. Γραμμὴ ΑΒ

Σχ. 14. Ἡ καμπύλη ΑΒ

γράφομε στὶς ἄκρες τους. Π.χ. ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΑΒ (σχ. 13), ἡ καμπύλη ΑΒ (σχ. 14).

4. Εὐθεῖες γραμμὲς

Ἂν παρατηρήσωμε διάφορες εὐθεῖες γραμμές, θὰ ἴδοῦμε, ὅτι εἶναι :

α΄. Εὐθεῖες γραμμές, ποὺ ἀκολουθοῦν τὴ διεύθυνση τῆς ἐλεύθερης ἐπιφάνειας τοῦ ἤρεμου νεροῦ μέσα σὲ ποτῆρι ἢ σὲ ἄλλο δοχεῖο.

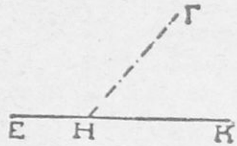
Ἡ εὐθεῖα, ποὺ ἔχει αὐτὴ τὴ διεύθυνση, λέγεται ὁριζόντια (εὐθεῖα αβ σχ. 15).

β΄. Εὐθεῖες γραμμές, ποὺ ἀκολουθοῦν τὴν διεύθυνση τοῦ νήματος τῆς στάθμης.

Ἡ εὐθεῖα, ποὺ ἔχει αὐτὴ τὴ διεύθυνση, λέγεται κατακόρυφη (σχ. 15).

γ΄. Εὐθεῖες, ποὺ δὲν εἶναι οὔτε κατακόρυφες, οὔτε ὁριζόντιες.

Σχ. 15



Σχ. 16

Ἡ εὐθεῖα, ποὺ δὲν εἶναι οὔτε κατακόρυφη, οὔτε ὁριζόντια, λέγεται πλάγια. Στὸ σχῆμα 16 ἡ εὐθεῖα ΗΓ εἶναι πλάγια.

Πῶς γράφομε εὐθεῖες γραμμὲς

Γιὰ νὰ γράψωμε εὐθεῖες γραμμὲς στὸ τετράδιό μας μεταχειριζόμαστε τὸν κανόνα (ρίγα).

Σχ. 11

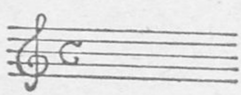
Οἱ διάφοροι τεχνῖτες μεταχειρίζονται ἐκτὸς ἀπὸ τὸν κανόνα καὶ ἄλλα μέσα. Οἱ κτῖστες π.χ., γιὰ νὰ κτίσουν ἴσους τοίχους, μεταχειρίζονται τὸν τεντωμένο σπάγγο. Τὸ ἴδιο καὶ οἱ κηπουροὶ γιὰ νὰ κάμουν ἴσιες τὶς βραγιές τους.

Οἱ μαραγκοὶ καὶ οἱ λοτόμοι μεταχειρίζονται σπάγγο, ποὺ τὸν ἔχουν βουτήξει σὲ κόκκινο χρῶμα (Σχ. 17).

5. Παράλληλες εὐθεῖες

Ὅπως ἔχωμε παράλληλες ἐπιφάνειες (οἱ ἀπέναντι ἕδρες τοῦ κύβου).

Σχ. 18. Παράλληλες εὐθεῖες



Σχ. 19. Πεντάγραμμο

ἔχομε καὶ παράλληλες εὐθεῖες (οἱ ἀκμὲς τοῦ κύβου).

Παράλληλες εὐθεῖες λέγονται οἱ εὐθεῖες γραμμές, ὅταν βρί-

σκωνται στὸ ἴδιο ἐπίπεδο καὶ δὲν συναντῶνται πουθενά, ὁσοδήποτε καὶ ἂν τὶς προεκτείνωμε καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τους (σχ. 18).

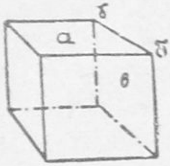
Παράλληλες εὐθεῖες εἶναι οἱ εὐθεῖες γραμμὲς στὸ πεντάγραμμο κλπ. (Σχ. 19).

6. Κάθετες ἐπιφάνειες καὶ εὐθεῖες

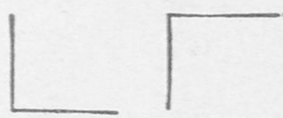
Παρατήρηση. Παρατηρῆστε τὶς συνεχόμενες ἕδρες α καὶ β τοῦ κύβου στὸ σχῆμα 20. Ἡ ἕδρα α εἶναι ὁριζόντια καὶ ἡ β κατακόρυφη.

Οἱ δύο αὐτὲς ἕδρες εἶναι ***κάθετες μεταξύ τους.***

Ἂν βάλωμε μιὰ ἐπιφάνεια κατακόρυφη ἐπάνω σὲ μιὰ ὁριζόντια, θὰ ἔχωμε τότε δύο ***κάθετες ἐπιφάνειες,*** δηλαδὴ ἡ ὁριζόντια ἕδρα εἶναι κάθετη ἐπὶ τὴν κατακόρυφη καὶ ἡ κατακόρυφη ἕδρα κάθετη ἐπὶ τὴν ὁριζόντια. Οἱ τοῖχοι τῆς αἴθουσάς σας μὲ τὸ πάτωμά της εἶναι κάθετες ἐπιφάνειες, ἡ μία ἐπάνω στὴν ἄλλη.

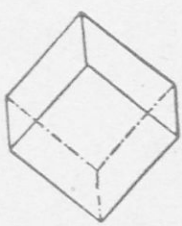


Σχ. 20. Κάθετες ἐπιφάνειες



Σχ. 21. Κάθετες εὐθεῖες

Τὸ ἴδιο παρατηροῦμε καὶ μὲ τὶς ἀκμὲς τῆς ἴδιας ἕδρας τοῦ κύβου, ποὺ δὲν εἶναι παράλληλες· εἶναι ***κάθετες*** (Σχ. 21).



Σχ. 22

Μιὰ ὁριζόντια ἀκμὴ καὶ μιὰ κατακόρυφη σχηματίζουν δύο κάθετες ἀκμές.

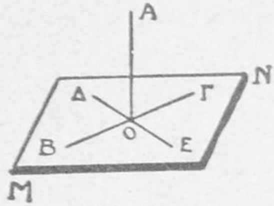
Ἂν τοποθετήσετε ὅμως κάπως διαφορετικώτερα τὸν κύβο, βλέπετε, ὅτι οἱ συνεχόμενες ἕδρες παύουν νὰ εἶναι ὁριζόντιες καὶ κατακόρυφες, δηλαδὴ χάνουν τὴ διεύθυνσή τους, χωρὶς ὅμως νὰ ἀλλάξουν καὶ τὴ θέση τους (Σχ. 22).

Εἶναι πάλι κάθετες, ὅπως οἱ ἀκμές τους.

Εὐθεῖα κάθετη σὲ ἐπίπεδο

Μία εὐθεῖα εἶναι κάθετη σ' ἕνα ἐπίπεδο, ὅταν εἶναι κάθετη σὲ δυὸ εὐθεῖες, ποὺ βρίσκονται στὸ ἴδιο ἐπίπεδο καὶ περνοῦν ἀπ' τὸ σημεῖο, ὅπου ἡ εὐθεῖα αὐτὴ συναντᾶ τὸ ἐπίπεδο.

Ἔτσι ἡ εὐθεῖα ΑΟ εἶναι κάθετη στὸ ἐπίπεδο ΜΝ, ἐπειδὴ εἶναι κάθετη στὶς εὐθεῖες γραμμὲς ΒΓ καὶ ΔΕ, ποὺ περνοῦν ἀπὸ τὸ σημεῖο Ο (Σχ. 23).



Σχ. 23

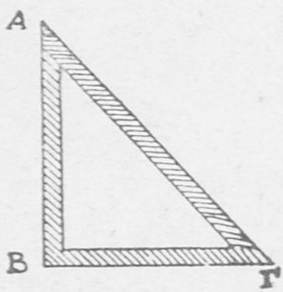
Γνώμονας ἢ γωνία

Γιὰ νὰ μποροῦμε νὰ ξεχωρίζωμε **τὶς** κάθετες ἐπιφάνειες καὶ τὶς κάθετες εὐθεῖες, ἔχομε ἕνα γεωμετρικὸ ὄργανο, ποὺ λέγεται *γνώμονας ἢ γωνία.*

Ὁ γνώμονας εἶναι ξύλινος ἢ μετάλλινος καὶ εἶναι κατασκευασμένος, ὅπως βλέπετε στὸ σχῆμα 24, ἔτσι ποὺ νὰ ἔχη τὶς δυὸ πλευρές του κάθετες τὴ μιὰ ἐπάνω στὴν ἄλλη.

Γνώμονας λέγεται ἐπίσης καὶ μιὰ λεπτὴ σανίδα (σχ. 25), ποὺ τὴ χρησιμοποιοῦμε, ὅπως καὶ τὸ σχῆμα 24.

Ὅταν θέλωμε νὰ δοκιμάσωμε, ἂν δυο εὐθεῖες εἶναι κάθετες, το



Σχ. 24 Γνώμονας


Σχ. 25

ποθετοῦμε τὴ μιὰ κάθετη πλευρὰ τοῦ γνώμονα ἐπάνω στὴ μιὰ ἀπὸ τὶς εὐθεῖες, ἔτσι ποὺ αὐτὴ νὰ ἀκολουθῆ ἀκριβῶς τὴν πλευρὰ τοῦ γνώμονα. Ἂν ἡ ἄλλη εὐθεῖα ἀκολουθῆ ***ἀκριβῶς*** τὴν ἄλλη πλευρὰ τοῦ γνώμονα, τότε οἱ εὐθεῖες αὐτὲς εἶναι ***κάθετες***, ἂν ὄχι δὲν εἶναι κάθετες.

Δοκιμάζοντας ἔτσι μὲ τὸ γνώμονα τὶς ἕδρες καὶ τὶς ἀκμὲς τοῦ κύβου βρίσκομε, ὅτι ὅλες οἱ συνεχόμενες ἕδρες καὶ ἀκμές του εἶναι κάθετες.

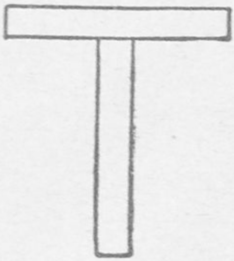
Τὸ ἴδιο θὰ παρατηρήσωμε καὶ στὸ τετράγωνο. Κάθε δυὸ συνεχόμενες μεταξύ τους πλευρὲς εἶναι κάθετες.

Ἐπίσης γιὰ νὰ γράψωμε δυὸ κάθετες εὐθεῖες τοποθετοῦμε τὸ γνώμονα σ' ἕνα φύλλο χαρτὶ ἢ στὸν πίνακα καὶ σύρωμε δύο εὐθεῖες ἀκολουθώντας τὶς κάθετες πλευρές του. Τότε θὰ ἔχωμε δυὸ κάθετες εὐθεῖες.

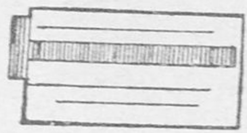
Πῶς γράφομε παράλληλες εὐθεῖες

Παράλληλες εὐθεῖες μποροῦμε νὰ γράψωμε μὲ τὸ γεωμετρικὸ ὄργανο **Ταῦ**. Τὸ ὄργανο αὐτὸ εἶναι ἕνα μετάλλινο ἢ ξύλινο κεφαλαῖο Τ (Σχ. 26).

Ἔχομε π. χ. μιὰ εὐθεῖα καὶ θέλομε νὰ γράψωμε τὴν παράλληλό της. Μὲ τὸ γνώμονά μας φέρομε στὴν εὐθεῖα αὐτὴ μιὰ κάθετο. Ἔπειτα



Σχ. 26. Ταῦ

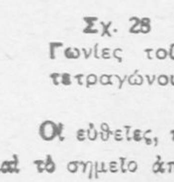


Σχ. 27

στηρίζομε τὸ Ταῦ μὲ μιὰ ἀκμή του στὴν κάθετο, μεταχειριζόμαστε τὴν ἄλλη γιὰ κανόνα καὶ γράφομε τὴν παράλληλό μας (Σχ. 27).

7. Γωνίες

Παρατήρηση. Ἂν παρατηρήσετε τὸ τετράγωνο, θὰ ἰδῆτε, ὅτι κάθε δύο πλευρές του συναντῶνται σ' ἕνα σημεῖο (σχ. 27).



Σχ. 28
Γωνίες τοῦ τετραγώνου

Οἱ πλευρὲς τοῦ τετραγώνου ἑνώνονται δυὸ-δυὸ σὲ τέσσερα σημεῖα, ὅπως βλέπετε, καὶ σχηματίζουν **4 *γωνίες***. Καὶ ὅταν δύο εὐθεῖες σμίγουν σ' ἕνα σημεῖο καὶ κόβουν ἡ μιὰ τὴν ἄλλη, σχηματίζουν *γωνίες*.

Γωνία σχηματίζεται ἀπὸ δυὸ εὐθεῖες, ποὺ ξεκινοῦν ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο, χωρὶς νὰ ἀποτελοῦν εὐθεῖα.

Οἱ εὐθεῖες, ποὺ ἀποτελοῦν τὴ γωνία, λέγονται ***πλευρὲς*** τῆς γωνίας καὶ τὸ σημεῖο ἀπ' ὅπου ξεκινοῦν οἱ πλευρές, λέγεται ***κορυφὴ τῆς γωνίας***. Ἂν προεκτείνωμε τὶς πλευρές, ἡ γωνία δὲν ἀλλάζει, γιατὶ τὸ ἄνοιγμα τῆς γωνίας παραμένει τὸ ἴδιο. Τὴ γωνία τὴν ὀνομάζομε μὲ **τρία γράμματα**, ποὺ γράφομε στὶς ἄκρες τῶν πλευρῶν της καὶ στὴν κορυφή της. Όταν δμως τὰ διαβάζωμε, προσέχομε νὰ λέμε τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς πάντα στὴ μέση. Π.χ. τὴ γωνία (σχ. 29) τὴ διαβάζομε ἔτσι : ΒΑΓ ἢ ΓΑΒ ὄχι δμως ΑΓΒ ἢ ΓΒΑ.

Σχ. 29

α΄. Εἴδη γωνιῶν

Εἴδαμε στὰ προηγούμενα, δτι κάθε δυὸ συνεχόμενες πλευρὲς τοῦ τετραγώνου εἶναι κάθετες μεταξύ τους καὶ δλες μαζὶ σχηματίζουν 4 γωνίες. Ἂν χρησιμοποιήσωμε τὸ γνώμονα, θὰ ἰδοῦμε, δτι οἱ γωνίες, ποὺ σχηματίζονται ἀπὸ τὶς κάθετες πλευρές, εἶναι ἴσες. Οἱ γωνίες αὐτὲς λέγονται *ὀρθές.*

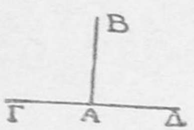
Συμπέρασμα

Ἡ γωνία, ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ δυὸ κάθετες εὐθεῖες, λέγεται ὀρθὴ γωνία.

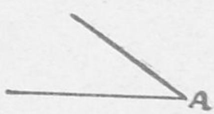
Ὅλες οἱ γωνίες τοῦ τετραγώνου εἶναι ὀρθὲς γωνίες, γιατὶ δλες σχηματίζονται ἀπὸ κάθετες εὐθεῖες.

Κάθετος σὲ μιὰ εὐθεῖα σχηματίζει δυὸ γωνίες ὀρθὲς (σχ. 30).

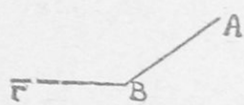
Ἡ γωνία, ποὺ τὸ ἄνοιγμά της εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ ἄνοιγμα τῆς ὀρθῆς γωνίας, λέγεται *ὀξεῖα γωνία* (σχ. 31) καὶ ἡ γωνία, ποὺ ἔχει



Σχ. 30
Ὀρθὲς γωνίες



Σχ. 31
Ὀξεῖα γωνία



Σχ. 32
Ἀμβλεῖα γωνία

ἄνοιγμα μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ ἄνοιγμα τῆς ὀρθῆς, λέγεται *ἀμβλεῖα γωνία* (σχ. 32).

Τὶς γωνίες τὶς μετροῦμε ὄχι ἀπὸ τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν τους, ἀλλὰ ἀπὸ τὸ *ἄνοιγμά τους*. Περισσότερα γι' αὐτὸ θὰ μάθωμε, δταν φθάσωμε στὸ κεφάλαιο γιὰ τὸν κύκλο.

Ἀνακεφαλαίωση

1. Τετράγωνο λέγεται ἡ ἐπιφάνεια, ποὺ περικλείεται ἀπὸ 4 πλευρὲς ἴσες μεταξύ τους καὶ ἔχει καὶ τὶς 4 γωνίες ὀρθές.

2. Οἱ εὐθεῖες, ποὺ περικλείουν τὸ τετράγωνο, λέγονται πλευρὲς καὶ τὸ ἄθροισμά τους λέγεται περίμετρος.

3. Ὅλες οἱ ἕδρες τοῦ κύβου ἔχουν σχῆμα τετραγώνου.

4. Ὀρθὴ γωνία λέγεται, ἡ γωνία ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ δυὸ κάθετες εὐθεῖες.

5. Ὀξεῖα γωνία λέγεται, ἡ γωνία ποὺ εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὴν ὀρθή.

6. Ἀμβλεῖα γωνία λέγεται, ἡ γωνία ποὺ εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ὀρθή.

7. Ὅλες οἱ ὀρθὲς γωνίες εἶναι ἴσες. Δὲν συμβαίνει ὅμως τὸ ἴδιο μὲ τὶς ὀξεῖες καὶ ἀμβλεῖες γωνίες.

8. Ὁ κύβος ἔχει ἕξι ἕδρες καὶ 24 ὀρθὲς γωνίες.

Ἐργασίες

1. Κάμετε ἀπὸ χαρτόνι ἕνα τετράγωνο. Βρῆτε τὴν περίμετρό του.

2. Κατασκευάστε ἀπὸ χαρτόνι ἕνα γνώμονα καὶ ἕνα Τ.

3. Κάμετε 3 ὀρθές, 3 ὀξεῖες καὶ 3 ἀμβλεῖες γωνίες στὸ τετράδιό σας καὶ ὀνομάστε τις μὲ γράμματα.

4. Γράψτε στὸ τετράδιό σας γραμμὲς εὐθεῖες, καμπύλες, τεθλασμένες καὶ μικτές.

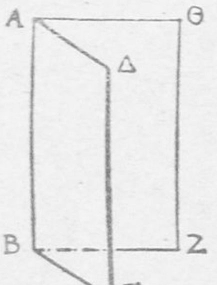
5. Γράψτε δυὸ εὐθεῖες κάθετες καὶ δυὸ παράλληλες.

6. Ζωγραφίστε τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ κύβου.

7. Κατασκευάστε ἕνα κύβο μὲ χαρτόνι.

β΄. Δίεδρες γωνίες τοῦ κύβου

Παρατήρηση. Ἀνοῖξτε τὸν κύβο σας καὶ ἀφαιρέστε τέσσερες ἕδρες, ὥστε νὰ μείνουν μόνο δυὸ συνεχόμενες. Θὰ ἰδῆτε, ὅτι οἱ συνεχόμενες ἕδρες, ἐκεῖ ποὺ σμίγουν, σχηματίζουν ἕνα ἄνοιγμα, ποὺ λέγεται ***δίεδρη γωνία***.



Σχ. 33
Δίεδρη γωνία

Δυὸ συνεχόμενοι τοῖχοι π.χ. σχηματίζουν δίεδρη γωνία. Στὸ σχῆμα 33 φαίνεται μιὰ δίεδρη γωνία.

Ὁ κύβος ἔχει 12 δίεδρες γωνίες. Ὅλες οἱ δίεδρες γωνίες τοῦ κύβου εἶναι ὀρθές, γιατὶ σχηματίζονται ἀπὸ κάθετες ἕδρες,

γ΄. Στερεὲς γωνίες τοῦ κύβου

Παρατήρηση. Ἀφίνομε σ' ἕνα κύβο μόνο τρεῖς συνεχόμενες ἕδρες, ποὺ ἡ κάθε μιὰ συναντᾶ τὶς δυὸ ἄλλες. Βλέπομε, ὅτι οἱ ἕδρες αὐτὲς τελειώνουν καὶ σμίγουν σ' ἕνα σημεῖο, ποὺ εἶναι μιὰ κορυφὴ τοῦ κύβου. Σχηματίζεται ἔτσι μιὰ γωνία διαφορετικώτερη ἀπὸ τὴ διεδρη.

Ἡ γωνία αὐτὴ λέγεται ***στερεὰ γωνία*** καὶ ἐπειδὴ σχηματίζεται ἀπὸ τρεῖς ἕδρες λέγεται ***τρίεδρη στερεὰ γωνία***.

Βλέπομε ἀκόμη, ὅτι οἱ ἕδρες μιᾶς στερεᾶς γωνίας εἶναι ἐπίπεδα, ποὺ σμίγουν στὴν ἴδια κορυφή. Αὐτὴ ἡ κορυφὴ εἶναι ἡ ***κορυφὴ*** τῆς τρίεδρης στερεᾶς γωνίας.

Ἂν τὰ ἐπίπεδα αὐτὰ εἶναι τρία, ἔχομε ***τρίεδρη*** στερεὰ γωνία, ἂν εἶναι τέσσερα, ἔχομε ***τετράεδρη*** στερεὰ γωνία κλπ.

Ὁ κύβος ἔχει ὀκτὼ κορυφές. Ἐπομένως σχηματίζει ὀκτὼ τρίεδρες στερεὲς γωνίες.

Ἀσκήσεις

1. Πῶς λέγονται οἱ ἐπιφάνειες, ποὺ ἀποτελοῦν τὸν κύβο, πόσες εἶναι καὶ πῶς λέγονται στὴ γεωμετρία οἱ ἐπιφάνειες ποὺ ἔχουν αὐτὸ τὸ σχῆμα ;

2. Τί εἶναι οἱ ἀπέναντι ἕδρες τοῦ κύβου ;

3. Τί εἶναι οἱ συνεχόμενες ἕδρες τοῦ κύβου ;

4. Πόσες ἀκμὲς ἔχει ὁ κύβος ; Τί εἶναι οἱ δυὸ ἀπέναντι ἀκμὲς καὶ τί οἱ συνεχόμενες ;

5. Πόσες ὀρθὲς γωνίες ἔχει ὁ κύβος ;

6. Πόσες δίεδρες γωνίες ἔχει ὁ κύβος ;

7. Πόσες στερεὲς γωνίες ἔχει ὁ κύβος ;

8. Μέτρηση τῶν διαστάσεων τῶν σωμάτων

α΄. Μέτρα γιὰ τὸ μῆκος

Τὰ στερεὰ σώματα, ὅπως εἴδαμε, ἔχουν τρεῖς διαστάσεις : ***Μῆκος, πλάτος*** καὶ ***ὕψος***. Τὸ ὕψος λέγεται μερικὲς φορὲς καὶ βάθος, ὅπως τὸ βάθος τοῦ πηγαδιοῦ, τὸ βάθος μιᾶς δεξαμενῆς νεροῦ κλπ.

Γιὰ νὰ μετροῦμε τὶς διαστάσεις τῶν σωμάτων, δηλαδὴ τὸ μῆκος, τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος, μεταχειριζόμαστε τὸ ***μέτρο***, ποὺ λέγεται καὶ ***γαλλικὸ μέτρο***, γιατὶ πρώτη φορὰ τὸ μεταχειρίσθησαν οἱ Γάλλοι. Ἐμεῖς οἱ Ἕλληνες μεταχειριζόμαστε γιὰ τὸ μέτρημα τοῦ μήκους, τοῦ πλάτους καὶ τοῦ ὕψους, πολλὲς φορές, ἐκτὸς ἀπὸ τὸ μέτρο, καὶ τὴν πήχη, ἡ ὁποία εἶναι διαιρεμένη σὲ ὀκτὼ ἴσα μέρη, ποὺ τὰ λέμε ὄγδοα τῆς πήχης ἢ ρούπια. Ἡ πήχη εἶναι 0,648 τοῦ μέτρου.

Οἱ κτίστες μεταχειρίζονται τὸν τεκτονικὸ πῆχυ, ποὺ εἶναι τὰ 0,75 τοῦ μέτρου. Οἱ Ἄγγλοι καὶ οἱ Ἀμερικανοὶ ἔχουν τὴν ὑάρδα, ποὺ εἶν 0,914 τοῦ μέτρου.

Γαλλικὸ μέτρο. Τὸ μέτρο χωρίζεται σὲ δέκα ἴσα μέρη, ποὺ λ γονται *παλάμες*. Ἡ παλάμη εἶναι τὸ ἕνα δέκατο (0,1) τοῦ μέτρο γι' αὐτὸ λέγεται *δέκατο*.

Ἡ παλάμη ἢ τὸ δέκατο πάλι χωρίζεται σὲ δέκα ἴσα μέρη, πο λέγονται δάκτυλοι (πόντοι). Ἀφοῦ ἡ κάθε παλάμη ἔχει 10 δακτύλου οἱ 10 παλάμες, δηλαδὴ ὁλόκληρο τὸ μέτρο, ἔχει 100 δακτύλους, γ αὐτὸ ὁ κάθε δάκτυλος εἶναι τὸ ἕνα ἑκατοστὸ (0,01) τοῦ μέτρου κα λέγεται *ἑκατοστό*.

Ὁ δάκτυλος ἢ τὸ ἑκατοστὸ τοῦ μέτρου χωρίζεται πάλι σὲ 10 ἴσ μέρη, ποὺ λέγονται *γραμμές*.

Ἔτσι κάθε δάκτυλος ἔχει 10 γραμμὲς καὶ ὁλόκληρο τὸ μέτρο ποὺ ἔχει 100 δακτύλους, ἔχει 1000 γραμμές.

Κάθε γραμμὴ λοιπὸν εἶναι ἕνα χιλιοστὸ (0,001) τοῦ μέτρου κα λέγεται *χιλιοστό*.

Μέτρο ἔχουν ὅλοι οἱ τεχνῖτες, οἱ ραφτάδες, οἱ τσαγκάρηδες, ο μαραγκοί, οἱ κτίστες, οἱ ὑφασματοπῶλες, κλπ. γιὰ τὴ δουλειά τους.

Τὸ μέτρο εἶναι ἢ ξύλινο διπλωτό, ὅπως τὸ ἔχουν οἱ μαραγκοὶ κα οἱ κτίστες ἢ μουσαμαδένιο, ὅπως τὸ ἔχουν οἱ ραφτάδες καὶ οἱ τσαγκάρηδες ἢ ξύλινο μονοκόμματο, ὅπως τὸ ἔχουν οἱ ὑφασματοπῶλες κλπ. Πάντα ὅμως εἶναι διαιρεμένο σὲ 10 παλάμες ἢ δέκατα, 100 δακτύλους ἢ ἑκατοστὰ καὶ 1000 γραμμὲς ἢ χιλιοστά.

Σχ. 34

Γιὰ μεγάλες ἀποστάσεις πάλι καὶ γιὰ εὐκολία μας μεταχειριζόμαστε τὴν κορδέλλα, ποὺ ἔχει 10 μέτρα καὶ λέγεται δεκάμετρο ἢ ποὺ ἔχει 1000 μέτρα καὶ λέγεται *χιλιόμετρο*. Αὐτὲς εἶναι μεγάλες ταινίες, ποὺ τυλίγονται μέσα σὲ μετάλλινα κουτιά, γιὰ νὰ μὴ χαλοῦν (σχ. 34) καὶ τὶς μεταχειρίζονται οἱ μηχανικοὶ γιὰ νὰ μετροῦν μεγάλες ἀποστάσεις, ὅπως εἶναι οἱ δρόμοι.

Συμπέρασμα

Ἀπὸ ὅσα εἴπαμε παραπάνω βγαίνει ὅτι :

α΄. Τὸ 1 μέτρο ἔχει 10 παλάμες ἢ δέκατα, 100 δακτύλους ἢ ἑκατοστὰ (πόντοι), 1000 γραμμὲς ἢ χιλιοστά.

β'. Ἡ 1 παλάμη ἢ δέκατο τοῦ μέτρου ἔχει 10 δακτύλους ἢ ἑκατοστά, 100 γραμμὲς ἢ χιλιοστά.

γ'. Ὁ 1 δάκτυλος ἢ ἑκατοστὸ τοῦ μέτρου ἔχει 10 γραμμὲς ἢ χιλιοστά.

Μὲ ἄλλα λόγια :

1000	χιλιοστὰ	ἢ	γραμμὲς	κάνουν	ἕνα μέτρο
100	»	»	»	»	μιὰ παλάμη
10	»	»	»	»	ἕνα δάκτυλο
100	ἑκατοστὰ	ἢ	δάκτυλοι	κάνουν	ἕνα μέτρο
10	»	»	»	»	μιὰ παλάμη
10	δέκατα	ἢ	παλάμες	κάνουν	ἕνα μέτρο

β'. Πῶς γράφομε τοὺς ἀριθμούς, ποὺ βγαίνουν ἀπὸ τὸ μέτρημα τῶν διαστάσεων

Τοὺς ἀριθμούς, ποὺ βγαίνουν ἀπὸ τὸ μέτρημα τῶν διαστάσεων, ἂν ἔχουν καὶ ὑποδιαιρέσεις τοῦ μέτρου (δέκατα, ἑκατοστά, χιλιοστά), τοὺς γράφομε καὶ τοὺς διαβάζομε, ὅπως τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς.

Γιὰ συντομία πάλι, ἀντὶ νὰ γράφωμε ὁλόκληρες τὶς λέξεις (μέτρο, χιλιόμετρο) γράφομε μόνον τὰ ἀρχικά τους γράμματα.

Παράδειγμα :

1 μέτρο γράφεται 1 μ.
1 παλάμη ἢ δέκατο τοῦ μέτρου γράφεται 0,1 μ.
1 δάκτυλος ἢ ἑκατοστὸ τοῦ μέτρου γράφεται 0,01 μ.
1 γραμμὴ ἢ χιλιοστὸ τοῦ μέτρου γράφεται 0,001 μ.
1 δεκάμετρο γράφεται 1 Δμ.
1 χιλιόμετρο γράφεται 1 Χμ.

9. Πῶς βρίσκομε τὴν περίμετρο τοῦ τετραγώνου

Μάθαμε, ὅτι ὅλες οἱ πλευρὲς τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσες μεταξύ τους. Γιὰ νὰ βροῦμε λοιπὸν τὴν περίμετρό του, δὲν ἔχομε παρὰ νὰ βροῦμε τὸ μῆκος μιᾶς πλευρᾶς καὶ νὰ τὸ πολλαπλασιάσωμε ἐπὶ 4, ὅσες δηλαδὴ εἶναι οἱ πλευρές του.

Παράδειγμα :

Ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 5 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του ;

Πολλαπλασιάζομε τὸ 5 μ. $\times 4 = 20$ μέτρα εἶναι ἡ περίμετρος αὐτοῦ τοῦ τετραγώνου.

Ἀντίθετα, ὅταν ξέρωμε τὴν περίμετρο, μποροῦμε νὰ βροῦμε τὴν πλευρὰ τοῦ τετραγώνου διαιρώντας τὴν περίμετρο διὰ τοῦ 4, γιατὶ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἶναι **τὸ τέταρτο** τῆς περιμέτρου του.

Παράδειγμα:

Ἡ περίμετρος ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 36 μέτρα. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ πλευρά του;

Θὰ διαιρέσωμε τὸ 36 μ. : 4 = 9 μέτρα εἶναι ἡ πλευρὰ αὐτοῦ τοῦ τετραγώνου.

Ἐργασίες:

1. Κάμετε ἀπὸ λεπτὸ χαρτόνι ἕνα μέτρο μὲ τὶς ὑποδιαιρέσεις του.

2. Κάμετε ἀπὸ χαρτόνι μιὰ π α λ ά μ η μὲ τὶς ὑποδιαιρέσεις της.

3. Κάμετε ἀπὸ χαρτόνι ἕνα δάκτυλο μὲ τὶς ὑποδιαιρέσεις του.

Ἀσκήσεις:

1. Πόσες παλάμες ἔχει ἕνα μέτρο καὶ πῶς ἀλλοιῶς λέγονται;

2. Πόσες παλάμες ἔχει τὸ μισὸ μέτρο;

3. Πόσα ἑκατοστὰ ἔχει ἕνα μέτρο; Πόσα ἑκατοστὰ ἔχουν οἱ 2 παλάμε; οἱ 4; οἱ 5;

4. Πόσες γραμμὲς ἔχει τὸ μέτρο;

5. Πόσες γραμμὲς ἔχουν τὰ δέκα ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου;

6. Πόσες γραμμὲς ἔχουν δυόμιση παλάμες;

7. Πόση εἶναι ἡ περίμετρος μιᾶς τετραγωνικῆς αὐλῆς, ποὺ ἡ πλευρά της εἶναι 13 μέτρα;

8. Πόση εἶναι ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγωνικοῦ οἰκοπέδου, ποὺ ἔχει περίμετρο 248 μέτρα;

9. Γιὰ νὰ περιφράξωμε ἕνα τετραγωνικὸ περιβόλι, ποὺ ἡ πλευρά του εἶναι 37 μέτρα, πήραμε συρματόπλεγμα πρὸς 8500 δρχ. τὸ μέτρο. Πόσα μέτρα συρματόπλεγμα πήραμε καὶ πόσο ἐκόστισε;

10. Κάμετε καὶ σεῖς παρόμοια προβλήματα.

10. Μέτρηση τῶν ἐπιφανειῶν

α΄ Μέτρα γιὰ τὶς ἐπιφάνειες

Γιὰ νὰ μετροῦν οἱ ἄνθρωποι τὶς διαστάσεις, δηλαδὴ τὸ μῆκος, τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος, μεταχειρίζονται, ὅπως μάθαμε, τὸ γαλλικὸ μέτρο.

Γιὰ νὰ μετροῦν τὶς ἐπιφάνειες, ἔχουν ἕνα ἄλλο μέτρο, ποὺ λέγεται *τετραγωνικὸ μέτρο*.

Τὸ τετραγωνικὸ μέτρο εἶναι ἕνα τετράγωνο, ποὺ ἡ κάθε πλευρά του εἶναι ἴση μὲ ἕνα γαλλικὸ μέτρο.

Μὲ τὸ μέτρο αὐτὸ μετροῦν τὶς ἐπιφάνειες. Δηλαδή, ὅταν θέλουν νὰ μετρήσουν μιὰ ἐπιφάνεια, βρίσκουν *πόσα τετραγωνικὰ* μέτρα χωρεῖ ἡ ἐπιφάνεια αὐτή.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν τετραγωνικῶν μέτρων, ποὺ χωρεῖ σὲ κάθε ἐπιφάνεια, λέγεται στὴ Γεωμετρία *ἐμβαδόν*.

Πολλὲς φορὲς ὅμως ἡ ἐπιφάνεια, ποὺ μετροῦμε εἶναι μικρότερη ἀπὸ ἕνα τετραγωνικὸ μέτρο ἢ χωρεῖ ὁλόκληρα τετραγωνικὰ μέτρα, ἀλλὰ περισσεύουν καὶ μερικὰ κομμάτια, μικρότερα ἀπὸ ἕνα τετραγωνικὸ μέτρο.

Γιὰ νὰ μποροῦν νὰ μετροῦν καὶ τὶς ἐπιφάνειες, ποὺ εἶναι μικρότερες ἀπὸ τὸ τετραγωνικὸ μέτρο ἢ καὶ τὰ κομμάτια μιᾶς ἐπιφάνειας ποὺ περισσεύουν ἀπὸ τὴ μέτρηση μὲ ὁλόκληρα τετραγωνικὰ μέτρα, χώρισαν τὸ τετραγωνικὸ μέτρο, ὅπως καὶ τὸ γαλλικό, σὲ μικρότερα κομμάτια. Τὰ μικρότερα αὐτὰ κομμάτια τὰ λέμε *ὑποδιαιρέσεις* τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου.

β΄. Ὑποδιαιρέσεις τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου

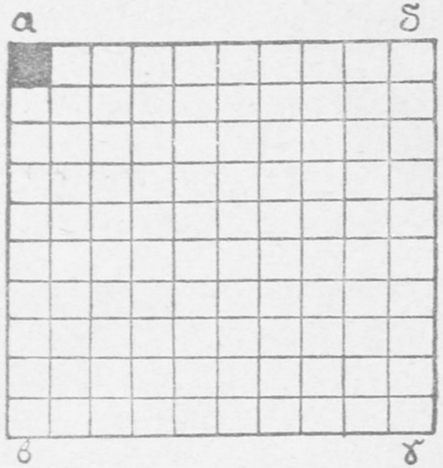
Γιὰ τὶς ὑποδιαιρέσεις τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου ἐχρησιμοποίησαν τὶς ὑποδιαιρέσεις τοῦ γαλλικοῦ μέτρου, δηλ. τὶς παλάμες, τοὺς δακτύλους καὶ τὶς γραμμές.

Εἴδαμε ὅτι τὸ τετραγωνικὸ μέτρο εἶναι ἕνα τετράγωνο, ποὺ ἡ κάθε πλευρά του εἶναι ἕνα μέτρο. Γιὰ νὰ καταλάβωμε τὶς ὑποδιαιρέσεις τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου, κατασκευάζομε ἕνα τετράγωνο μὲ ξύλινες πηχίτσες, ποὺ ἡ κάθε μιὰ ἔχει μῆκος ἑνὸς μέτρου (σχ. 35).

Διαιροῦμε κάθε μιὰ ἀπὸ τὶς σανιδένιες πηχίτσες, πού, ὅπως εἴπαμε, ἔχουν μῆκος ἑνὸς μέτρου, σὲ δέκα ἴσα μέρη, ποὺ τὸ καθένα βέβαια θὰ ἔχῃ μῆκος μιᾶς παλάμης. Ἑνώνομε ὕστερα μὲ κλωστὲς ὅλες τὶς ὑποδιαιρέσεις τῶν ἀπέναντι πλευρῶν, ὅπως στὸ σχῆμα 35. Θὰ ἰδοῦμε, ὅτι θὰ σχηματισθοῦν 100 μικρὰ τετράγωνα. Ἂν μετρήσετε τώρα τὶς πλευρὲς τοῦ καθενὸς ἀπὸ τὰ τετράγωνα αὐτά, θὰ ἰδῆτε, ὅτι ἔχει ἡ κάθε μιὰ πλευρά τους μῆκος μιᾶς παλάμης. Τὰ τετράγωνα αὐτὰ τὰ λέμε *τετραγωνικὲς παλάμες*.

Συμπέρασμα

Ἡ τετραγωνικὴ παλάμη εἶναι τετράγωνο, ποὺ ἡ κάθε πλευρά του ἔχει μῆκος μιᾶς παλάμης (δέκατο) τοῦ μέτρου.



Σχ. 35. Τετραγωνικὸ μέτρο

Τὸ τετραγωνικὸ μέτρο, ὅπως εἴδαμε, ἔχει 100 τετραγωνικὲς παλάμες. Δηλαδὴ ἡ κάθε τετραγωνικὴ παλάμη εἶναι ἕνα ἑκατοστὸ τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου (0,01 τ. μ.=μιὰ τετραγωνικὴ παλάμη).

Ἂν τώρα κάνωμε τὸ ἴδιο σὲ κάθε τετραγωνικὴ παλάμη, δηλαδὴ ἂν ἑνώσωμε τὶς δέκα διαιρέσεις τῶν ἀπέναντι πλευρῶν της, θὰ σχηματισθοῦν σὲ κάθε τετραγωνικὴ παλάμη 100 μικρότερα τετράγωνα, ποὺ ἡ πλευρὰ τοῦ καθενὸς θὰ ἔχῃ μῆκος ἑνὸς δακτύλου. **Τὰ τετράγωνα αὐτὰ τὰ λέμε *τετραγωνικοὺς δακτύλους*.**

Συμπέρασμα

Τετραγωνικὸς δάκτυλος εἶναι ἕνα τετράγωνο, ποὺ ἡ κάθε πλευρά του ἔχει μῆκος ἑνὸς δακτύλου (ἑκατοστὸ) τοῦ μέτρου.

Ἀφοῦ τὸ τετραγωνικὸ μέτρο ἔχει 100 τετραγωνικὲς παλάμες καὶ ἡ κάθε τετραγωνικὴ παλάμη 100 ***τετραγωνικοὺς δακτύλους***, ὅλο τὸ τετραγωνικὸ μέτρο θὰ ἔχῃ 10.000 τετραγωνικοὺς δακτύλους (δηλαδὴ 100×100). **Ὁ τετραγωνικὸς δάκτυλος λοιπὸν εἶναι ἕνα δεκάκις χιλιοστὸ τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου (0,0001 τετρ. μέτρου=ἕνας τετραγωνικὸς δάκτυλος).**

Τὸ ἴδιο θὰ γίνῃ, ἂν τὸν τετραγωνικὸ δάκτυλο τὸν διαιρέσωμε σὲ τετραγωνικὲς γραμμές. Σὲ κάθε τετραγωνικὸ δάκτυλο θὰ σχηματισθοῦν 100 τετραγωνικὲς γραμμὲς καὶ σὲ ὁλόκληρο τὸ τετραγωνικὸ μέτρο, ποὺ ἔχει δέκα χιλιάδες τετραγωνικοὺς δακτύλους, θὰ σχηματισθοῦν

10.000 × 100 = 1.000.000 τετραγωνικὲς γραμμές. Ἡ τετραγωνικὴ γραμμὴ λοιπὸν εἶναι τὸ ἕνα ἑκατομμυριοστὸ τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου (0,000001 τ. μ. = 1 τετραγωνικὴ γραμμή).

γ΄. Πῶς γράφομε τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ἐμβαδῶν

Ἀφοῦ τώρα οἱ τετραγωνικὲς παλάμες εἶναι *ἑκατοστὰ* τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου, οἱ τετραγωνικοὶ δάκτυλοι ***δεκάκις χιλιοστὰ*** καὶ οἱ τετραγωνικὲς γραμμὲς ***ἑκατομμυριοστά,*** ὅταν γράφωμε ἢ διαβάζωμε ἐμβαδὸν μὲ ὑποδιαιρέσεις τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου, πρέπει νὰ προσέχωμε, ὥστε τὰ δυὸ πρῶτα ψηφία μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴ νὰ εἶναι ***τετραγωνικὲς παλάμες***, τὰ δυὸ κατόπιν ***τετραγωνικοὶ δάκτυλοι*** καὶ τὰ δυὸ τελευταῖα ***τετραγωνικὲς γραμμές***.

Παραδείγματα :

α΄. 5 τετραγωνικοὶ δάκτυλοι, 2 τετραγωνικὲς γραμμὲς θὰ γραφοῦν : 0,000502 τετρ. μέτρου.

β΄. 1 τετραγωνικὸ μέτρο, 17 τετρ. παλάμες, 2 τετρ. δάκτυλοι καὶ 4 τετρ. γραμμὲς θὰ γραφῆ : 1,170204 τμ.

Σημείωση. Ὁ τετραγωνικὸς τεκτονικὸς πῆχυς εἶναι τὰ $\frac{9}{10}$ τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου.

Ἀνακεφαλαίωση

1 τετρ. μέτρο ἔχει		100 τετρ.	παλάμες	
1 » » »		10.000 »	δακτύλους	
1 » » »		1.000.000 »	γραμμὲς	
100	τετρ. παλάμες κάνουν	1	τετρ. μέτρο	
10.000	» δάκτυλοι »	1	»	»
1.000.000	» γραμμὲς »	1	»	»

δ΄. Μέτρηση μεγάλων ἐπιφανειῶν

Γιὰ μεγάλες ἐπιφάνειες μεταχειριζόμαστε τὸ τετραγ. χιλιόμετρο.

Τὸ ***τετραγωνικὸ χιλιόμετρο*** εἶναι τετράγωνο, ποὺ ἡ κάθε πλευρά του ἔχει μῆκος 1000 μέτρων.

Τὸ ***τετραγωνικὸ χιλιόμετρο*** τὸ μεταχειριζόμαστε γιὰ τὴ μέτρηση τῆς ἐπιφάνειας διαφόρων χωρῶν ἢ πολὺ μεγάλων ἐκτάσεων ὅπως τῆς ἐπιφάνειας τῆς Γῆς κλπ.

Σημείωση. Τὰ χωράφια τὰ μετροῦν σὲ στρέματα (1 στρέμμα = 1000 τ.μ.).

11. Ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἐπιφάνειας, ποὺ ἔχει σχῆμα τετραγώνου, πρέπει νὰ βροῦμε ***πόσα τετραγωνικὰ μέτρα*** χωρεῖ αὐτὴ ἡ ἐπιφάνεια.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

Σχ. 36. Ἐμβαδὸν τετραγώνου

Ἐργαζόμαστε ἔτσι: Μετροῦμε μὲ τὸ γαλλικὸ μέτρο τὴ μιὰ πλευρὰ τῆς ἐπιφάνειας καὶ βρίσκομε π. χ. ὅτι ἔχει μῆκος 6 μέτρα. Φυσικὰ καὶ οἱ ἄλλες πλευρές του, ἀφοῦ εἶναι ἴσες μεταξύτους ἔχουν μῆκος ἡ κάθε μιὰ 6 μέτρα. Χωρίζομε λοιπὸν ὅλες τὶς πλευρὲς αὐτῆς τῆς ἐπιφάνειας σὲ ἕξι ἴσα μέρη τὴν κάθε μιά. Τὸ κάθε μέρος θὰ εἶναι ἀκριβῶς ἕνα μέτρο. Ἑνώνομε ὕστερα τὶς διαιρέσεις τῶν τεσσάρων πλευρῶν καὶ θὰ ἰδοῦμε ὅτι θὰ σχηματισθοῦν 36 τετράγωνα, ποὺ ἡ κάθε πλευρά τους ἔχει ἕνα μέτρο. Μὲ ἄλλα λόγια θὰ σχηματισθοῦν 36 τετραγωνικὰ μέτρα (σχ. 36). Ὥστε αὐτὴ ἡ ἐπιφάνεια ἔχει ἐμβαδὸν 36 τετραγωνικῶν μέτρων. Στὸ ἴδιο ὅμως ἀποτέλεσμα φθάνομε, ἂν μετρήσωμε τὴ μιὰ πλευρὰ τῆς ἐπιφάνειας αὐτῆς, ποὺ ἔχει μῆκος 6 μέτρα καὶ τὴν πολλαπλασιάσωμε ἐπὶ τὸν ἑαυτό της, δηλαδὴ 6 μ. × 6 μ. = 36 τ. μ.

Συμπέρασμα:

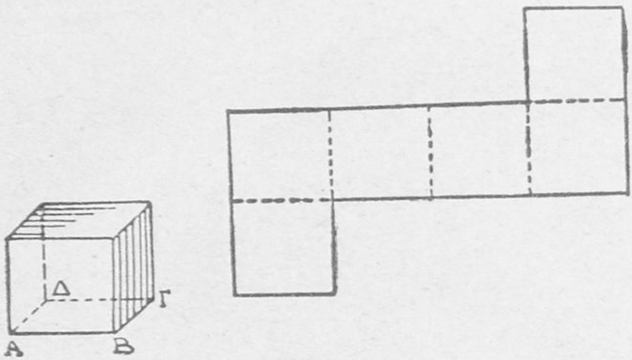
Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου πολλαπλασιάζομε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς του ἐπὶ τὸν ἑαυτό της.

Παράδειγμα. Ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 2,5 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ τοῦ τετραγώνου;

Τὸ ἐμβαδόν του εἶναι 2,5 μ. × 2,5 μ. = 6,25 τ.μ.

12. Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κύβου

Εἶναι εὔκολο τώρα νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κύβου. Ξέρομε, ὅτι ὁ κύβος ἔχει 6 ἕδρες τετραγωνικὲς ἴσες μεταξύ τους. Ἂν βροῦμε λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς ἕδρας καὶ τὸ πολλαπλασιάσωμε



Σχ. 37

ἐπὶ 6, θὰ ἔχωμε τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κύβου (σχ. 37). Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς ἕδρας, μᾶς χρειάζεται τὸ μῆκος μιᾶς ἀκμῆς του, ποὺ εἶναι φυσικὰ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου.

Παράδειγμα. Ἡ ἀκμὴ ἑνὸς κύβου ἔχει μῆκος 2 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κύβου ;

Λύση

α'. Πολλαπλασιάζομε τὸ 2 μ. × 2 μ. = 4 τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς ἕδρας του.

β'. Πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς ἕδρας 4 τ.μ. × 6 = 24 τ.μ. εἶναι τό ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κύβου.

Συμπέρασμα

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κύβου, πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας του ἐπὶ 6.

Ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύβου πάλι μποροῦμε εὔκολα νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας του, ἂν βέβαια διαιρέσωμε τὸ ἐμβαδόν του διὰ τοῦ 6

Παράδειγμα. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς κύβου εἶναι 48 **τ.μ.** Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας του ;

Λ ύ σ η

48 τ. μ. : 6=8 τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας **του**

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

*1. Ἡ αὐλὴ ἑνὸς σχολείου ἔχει σχῆμα τετράγωνο. Ἡ κάθε **πλευρά** της εἶναι 12 μέτρα. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς αὐλῆς ;*

*2. Ὁ σχολικὸς κῆπος ἔχει τέσσερες τετραγωνικὲς πρασιές, **ποὺ ἡ κάθε** πλευρά τους ἔχει μῆκος 2,5 μ. Ὁ κῆπος ὅλος εἶναι τετράγωνο, ποὺ ἡ κάθε πλευρά του ἔχει μῆκος 8 μέτρα. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι οἱ πρασιὲς τοῦ κήπου καὶ πόσα περισσεύουν γιὰ ἄλλες σπορές ;*

3. Μιὰ αἴθουσα ἑνὸς σχολείου ἔχει σχῆμα κύβου. Ἡ ἀκμή της εἶναι 5 μέτρα. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφάνειας τῆς αἴθουσας ;

4. Ἕνα μπαοῦλο κυβικὸ πρόκειται νὰ ντυθῇ μὲ μουσαμά. Ἡ ἀκμὴ τοῦ μπαούλου εἶναι 0,80 μέτρα. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα μουσαμὰς θὰ χρειασθῇ ;

5. Ὁ κουμπαρὰς τῆς τάξης μας εἶναι κύβος, ποὺ ἔχει ἐπιφάνεια 0,24 τ.μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας του ;

6. Ἡ ἀκμὴ ἑνὸς κύβου εἶναι 0,20 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς του ;

7. Ὅλες οἱ ἀκμὲς ἑνὸς κύβου ἔχουν μῆκος 6 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφάνειάς του ;

13. Πῶς μετροῦμε τὸν ὄγκο τῶν σωμάτων

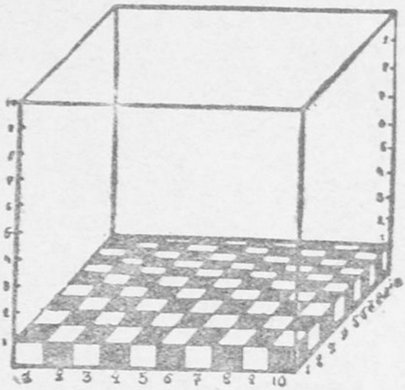
α΄. Μέτρα γιὰ τὸν ὄγκο

Ὅπως γιὰ τὶς ἐπιφάνειες μεταχειριζόμαστε τὸ τετραγωνικὸ μέτρο ποὺ, ὅπως εἴδαμε, εἶναι ἕνα τετράγωνο, ποὺ *κάθε πλευρά* του ἔχει μῆκος ἑνὸς μέτρου ἔτσι καὶ γιὰ νὰ μετροῦμε τὸν ὄγκο τῶν σωμάτων μεταχειριζόμαστε τὸ ***κυβικὸ μέτρο***, ποὺ εἶναι ἕνας κύβος ποὺ ἡ ***κάθε του*** *ἕδρα ἔχει **ἕνα τετραγωνικὸ** μέτρο.*

β΄. Ὑποδιαιρέσεις τοῦ κυβικοῦ μέτρου

Τὸ κυβικὸ μέτρο ἔχει καὶ αὐτό, ὅπως ὅλα τὰ μέτρα, τὶς ὑποδιαιρέσεις του. Μποροῦμε νὰ βροῦμε μόνοι μας τὶς ὑποδιαιρέσεις τοῦ κυβικοῦ μέτρου.

Παίρνομε ἕνα κυβικὸ μέτρο. Ἡ βάση του εἶναι βέβαια ἕνα τετρα γωνικὸ μέτρο, ὅπως ἄλλωστε καὶ ὅλες οἱ ἕδρες του, ἀφοῦ εἶναι κύβος. Χωρίζομε τὴ βάση του σὲ 100 τετραγωνικὲς παλάμες, ὅπως κάναμε στὸ τετραγωνικὸ μέτρο. Χωρίζομε καὶ τὸ ὕψος του σὲ 10 παλάμες καὶ ἑνώνομε τὰ χωρίσματα αὐτὰ μὲ τὶς ἀπέναντι ἕδρες. Θὰ ἰδοῦμε, ὅτι θὰ σχηματισθοῦν τότε 10 σειρὲς ἀπὸ 100 μικροὺς κύβους, ποὺ οἱ ἕδρες τοῦ καθενὸς εἶναι μιὰ τετραγωνικὴ παλάμη (σχ. 38). ***Οἱ κύβοι αὐτοὶ λέγονται κυβικὲς παλάμες.*** Ἂν μετρήσωμε τώρα, θὰ ἰδοῦμε, ὅτι ὅλο τὸ κυβικὸ μέτρο ἔχει 100 × 10 = 1000 ***κυβικὲς παλάμες.***



Σχ. 38. Κυβικὸ μέτρο

Πρώτη λοιπὸν ὑποδιαίρεση τοῦ κυβικοῦ μέτρου εἶναι *ἡ κυβικὴ παλάμη*, ποὺ εἶναι τὸ ἕνα χιλιοστό του (1 κυβικὴ παλάμη = 0,001 κυβικοῦ μέτρου).

Ἂν κάνωμε τὸ ἴδιο καὶ στὴν κυβικὴ παλάμη, θὰ βροῦμε, πὼς καὶ αὐτὴ χωρίζεται σὲ 1000 κυβικοὺς δακτύλους. Ἀφοῦ δὲ τὸ κυβικὸ μέτρο ἔχει 1000 κυβικὲς παλάμες καὶ ἡ κυβικὴ παλάμη ἔχει 1000 κυβικοὺς δακτύλους, ὅλο τὸ κυβικὸ μέτρο ἔχει 1000 × 1000 = 1.000.000 κυβικοὺς δακτύλους.

Ἑπομένως ὁ κυβικὸς δάκτυλος εἶναι ἕνας κύβος, ποὺ ἡ κάθε ἕδρα του εἶναι ἕνας τετραγωνικὸς δάκτυλος.

Ὁ κυβικὸς δάκτυλος εἶναι τὸ ἕνα ἑκατομμυριοστὸ τοῦ κυβικοῦ μέτρου (1 κυβικὸς δάκτυλος = 0,000001 κ. μ.).

Οἱ ὑποδιαιρέσεις τοῦ κυβικοῦ μέτρου γράφονται καὶ διαβάζονται, ὅπως οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοί, μόνον πρέπει νὰ προσέχωμε, ὥστε τὶς κυβικὲς παλάμες νὰ τὶς γράφωμε καὶ νὰ τὶς διαβάζωμε σὰν χιλιοστὰ καὶ τοὺς κυβικοὺς δακτύλους σὰν ἑκατομμυριοστά.

Παράδειγμα. α΄. Ὁ ὄγκος ἑνὸς σώματος εἶναι 3 κυβικὰ μέτρα, 25 κυβικὲς παλάμες καὶ 8 κυβικοὶ δάκτυλοι.

Θὰ τὸ γράψωμε ἔτσι : 3,025008 κυβικὰ μέτρα.

β) 125 κυβ. παλάμες, 348 κυβ. δάκτυλοι, θὰ τὰ γράψωμε 0,125348 κ.μ.

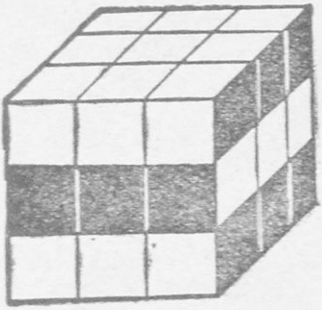
Συμπέρασμα :

1 κυβικὸ μέτρο ἔχει 1000 κυβικὲς παλάμες
1 κυβικὸ μέτρο ἔχει 1.000.000 κυβικοὺς δακτύλους

14. Ὄγκος τοῦ κύβου

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο ἑνὸς κύβου, πρέπει νὰ βροῦμε πόσα κυβικὰ μέτρα χωρεῖ ὁ κύβος αὐτός.

Ἂς πάρωμε π. χ. ἕναν κύβο ποὺ ἡ πλευρὰ τῆς βάσεώς του εἶναι 3 μέτρα (σχ. 39). Θὰ σχηματισθοῦν μὲ τὸν τρόπο, ποὺ μάθαμε, στὴν ἕδρα τῆς βάσεώς του 9 τετραγωνικὰ μέτρα. Ἂν τώρα χωρίσωμε τὸ ὕψος του σὲ 3 ἴσα μέρη καὶ ἑνώσωμε τὶς ἀπέναντι ἕδρες μὲ χωρίσματα, αὐτὰ θὰ σχηματίσουν 3 σειρὲς ἀπὸ 9 κυβικὰ μέτρα ἡ κάθε μιὰ σειρά, δηλαδὴ 9 κ.μ.×3=27 κυβ. μέτρα.



Σχ. 39. Ὄγκος κύβου

Ἀντὶ ὅμως νὰ κάνωμε ὅλη αὐτὴ τὴν πολύπλοκη ἐργασία, φθάνομε στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα, ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ κύβου ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ξέρομε ὅμως, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ κύβου βρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμε τὴν πλευρά της ἐπὶ τὸν ἑαυτό της, ἐπειδὴ εἶναι τετράγωνο

Ἀλλὰ καὶ τὸ ὕψος τοῦ κύβου εἶναι ἴσο μὲ τὴν πλευρὰ τῆς βάσεως. Γι' αὐτό, ὅταν ξέρωμε τὴν πλευρὰ τῆς βάσεως, δηλαδὴ μιὰ ἀκμὴ τοῦ κύβου, τὴν πολλαπλασιάζομε ἐπὶ τὸν ἑαυτό της γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως καὶ τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸν ἑαυτό της γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τοῦ κύβου.

Παράδειγμα : Ἡ ἀκμὴ ἑνὸς κύβου εἶναι 5 μέτρα. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του ;

Λ ύ σ η

5 μ.×5 μ.×5 μ.=125 κυβικὰ μέτρα εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κύβου.

Συμπέρασμα :

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τοῦ κύβου πολλαπλασιάζομε μιὰ ἀκμὴ ἐπὶ τὸν ἑαυτό της καὶ τὸ γινόμενο, ποὺ θὰ βροῦμε πάλι

ἐπὶ τὴν ἀκμή του. Δηλαδὴ πολλαπλασιάζομε τὶς τρεῖς διαστάσεις του, τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος καὶ τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸ ὕψος.

Ἀσκήσεις

1. Κατασκευάστε μὲ πηλὸ ἕνα κύβο μὲ μῆκος ἀκμῆς 0,08 μέτρα. Βρῆτε τὸν ὄγκο αὐτοῦ τοῦ κύβου.

2. Ἡ ἀκμὴ ἑνὸς κυβικοῦ δοχείου εἶναι 4,50 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου ;

3. Νὰ βρῆτε τὸν ὄγκο ἑνὸς κύβου, ποὺ ἔχει ἀκμὴ 2 μ. καθὼς καὶ τὸν ὄγκο ἑνὸς ἄλλου κύβου, ποὺ ἔχει ἀκμὴ 4 μ. Πόσες φορὲς ὁ ὄγκος τοῦ δευτέρου κύβου εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ὄγκο τοῦ πρώτου ;

4. Ὅλες οἱ ἀκμὲς ἑνὸς κύβου ἔχουν μῆκος 4,80 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του ;

Μέτρα βάρους

Μὲ βάση τὸν ὄγκο τοῦ κύβου οἱ ἄνθρωποι βρῆκαν τὰ μέτρα βάρους, δηλαδὴ τὸ *γραμμάριο*, τὸ *χιλιόγραμμο* (κιλὸ) καὶ τὸν *τόννο*.

Πῆραν νερὸ ἀποσταγμένο θερμοκρασίας 4° καὶ γέμισαν ἕνα *κυβικὸ μέτρο*. Τὸ βάρος τοῦ νεροῦ αὐτοῦ τὸ ὠνόμασαν ἕνα *τόννο*. Ὕστερα γέμισαν ἀπὸ τὸ ἴδιο νερὸ μιὰ *κυβικὴ παλάμη*. Τὸ βάρος αὐτοῦ τὸ ὠνόμασαν ἕνα *χιλιόγραμμο* (κιλὸ) καὶ τὸ βάρος τοῦ νεροῦ, ποὺ χωρεῖ ἕνας *κυβικὸς δάκτυλος*, τὸ ὠνόμασαν *γραμμάριο*.

Ἑπομένως :

α΄. Τόννος λέγεται τὸ βάρος τοῦ ἀποσταγμένου νεροῦ 4°, ποὺ χωρεῖ σ᾽ ἕνα κυβικὸ μέτρο.

β΄. *Χιλιόγραμμο* ἢ κιλὸ λέγεται τὸ βάρος τοῦ ἴδιου νεροῦ, ποὺ χωρεῖ σὲ μιὰ κυβικὴ παλάμη καὶ

γ΄. *Γραμμάριο* λέγεται τὸ βάρος τοῦ ἴδιου νεροῦ, ποὺ χωρεῖ σ᾽ ἕνα κυβικὸ δάκτυλο.

Εὔκολα καταλαβαίνετε, ὅτι ὁ τόννος ἔχει 1000 χιλιόγραμμα, ἀφοῦ τὸ κυβικὸ μέτρο ἔχει 1000 κυβικὲς παλάμες καὶ τὸ χιλιόγραμμο 1000 γραμμάρια, ἀφοῦ ἡ κυβικὴ παλάμη ἔχει 1000 κυβικοὺς δακτύλους.

Σημείωση. Ἕνα χιλιόγραμμο ἔχει 312,5 δράμια.

Ἀσκήσεις

1. Τί μέτρο μεταχειριζόμαστε γιὰ τὴ μέτρηση τοῦ ὄγκου τῶν σωμάτων ;

2. Ποιές εἶναι οἱ ὑποδιαιρέσεις τοῦ κυβικοῦ μέτρου ;

3. Πόσες κυβικὲς παλάμες ἔχει ἕνα κυβικὸ μέτρο ; Πόσους κυβικοὺς δακτύλους ;

4. *Πόσους κυβικοὺς δακτύλους ἔχουν 1, 2, 5, 8 κυβικὲς παλάμες ;*

5. *Γράψτε μὲ δεκαδικὸ ἀριθμὸ 5 κυβικὰ μέτρα, 18 κυβικὲς παλάμες καὶ 4 κυβικοὺς δακτύλους.—125 κυβικοὺς δακτύλους, 5 κυβικὲς παλάμες καὶ 25 κυβικοὺς δακτύλους.—5 κυβικὰ μέτρα καὶ μισὴ κυβικὴ παλάμη.*

6. *Διαβάστε τοὺς παρακάτω δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς 0,003 κ. μ. 15,025 κ. μ., 2,225045 κ.μ., 0,000350 κ.μ., 1,005003 κ.μ.*

7. *Πῶς βρίσκομε τὸν ὄγκο τοῦ κύβου ;*

8. *Πόσα κυβικὰ μέτρα χωρεῖ ἕνα κυβικὸ δωμάτιο, ποὺ ἔχει μῆκος 4 μέτρα ;*

9. *Μιὰ κυβικὴ δεξαμενὴ ἔχει μῆκος 3 μέτρα. Πόσα χιλιόγραμμα νερὸ χωρεῖ ;*

10. *Πόσα γραμμάρια ἔχει τὸ κιλό ; Πόσα κιλὰ ἔχει ὁ τόννος ;*

11. *Δυὸ κυβικὰ μέτρα πόσους τόννους νερό χωροῦν ;*

12. *Τρεῖς κυβικὲς παλάμες καὶ 150 κυβικοὶ δάκτυλοι πόσα γραμμάρια νερὸ χωροῦν ;*

13. *Κατασκευάστε ἀπὸ χαρτόνι ἕνα κύβο μὲ μῆκος ἀκμῆς 0,10 μ. καὶ βρῆτε τὸν ὄγκο του. Πόσο νερὸ χωρεῖ ὁ κύβος σας ;*

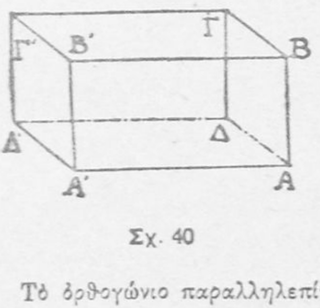
14. *Πόσες ὀκάδες ἔχει ὁ τόννος ;*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β'

1. Ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο

α'. Ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Ἡ αἴθουσα τοῦ σχολείου, ἡ κασετίνα, τὸ κουτὶ μὲ τὶς κιμωλίες, διάφορα ἄλλα κουτιὰ ἔχουν σχῆμα *ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου*.



Σχ. 40

Τὸ σχῆμα 40 παριστάνει ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Ὅπως βλέπετε ἡ ἐπιφάνειά του ἀποτελεῖται **ἀπὸ ἕξι ἐπίπεδες ἐπιφάνειες**.

Ἡ ἕδρα, στὴν ὁποία στηρίζεται τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο καὶ ἡ ἀπέναντί της, λέγονται ***βάσεις***. Ἡ ἀπόσταση **μεταξύ** τους λέγεται ***ὕψος***.

Τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, ἔχει, ὅπως **ὁ κύβος**, τρεῖς διαστάσεις, ***μῆκος***, ***πλάτος*** καὶ ***ὕψος***.

β΄. Ἕδρες τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Παρατήρηση 1. Παρατηρῆστε τὸ ἐξωτερικὸ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Οἱ ἐπίπεδες ἐπιφάνειες, ποὺ περικλείουν τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, εἶναι ἕξι.

Τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἔχει 6 ἕδρες, ὅπως καὶ ὁ κύβος. Θὰ ἰδῆτε ὅτι οἱ ἀπέναντι ***μόνον ἕδρες εἶναι ἴσες καὶ παράλληλες***, ἐνῶ ὁ κύβος ἔχει ὅλες τὶς ἕδρες ἴσες μεταξύ τους.

Παρατήρηση 2. Στηρίξτε τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο **σὲ μιὰ** ὁριζόντια ἐπιφάνεια καὶ προσέξτε τὴ διεύθυνση τῶν ἑδρῶν του. **Θὰ** ἰδῆτε ὅτι ἔχει δυὸ ὁριζόντιες ἕδρες, **τὶς *βάσεις του*,** δηλαδὴ **ἐκείνη** στὴν ὁποία στηρίζεται καὶ τὴν ἀπέναντί **της καὶ 4 *κατακόρυφες*, ποὺ** λέγονται ***παράπλευρες ἕδρες.***

γ΄. Ἀκμές, γωνίες καὶ κορυφὲς τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Ἡ εὐθεῖα γραμμή, ποὺ συναντῶνται δυὸ ἕδρες λέγεται **ἀκμή.**

Παρατήρηση 3. Τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἔχει ***12 ἀκμές,*** ὅπως καὶ ὁ κύβος, **ὄχι ὅμως ὅλες ἴσες μεταξύ τους,** ἀλλὰ μόνο **τὶς ἀπέ**ναντι ἴσες.

Παρατήρηση 4. Τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο **ἔχει** ἐπίσης **12** δίεδρες γωνίες, 8 κορυφὲς καὶ 24 γωνίες ἐπίπεδες.

Δοκιμάστε τὶς γωνίες μὲ τὸ γνώμονα. Θὰ ἰδῆτε, ὅτι ὅλες οἱ γωνίες του εἶναι ***ὀρθές***, ὅπως καὶ στὸν κύβο.

Ὕστερα ἀπ᾽ αὐτά, ποὺ μάθαμε, μποροῦμε εὔκολα νὰ βροῦμε σὲ τί διαφέρει τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἀπὸ τὸν κύβο. Δυὸ μόνον διαφορὲς ἔχει. Ὅτι ***μόνον οἱ ἀπέναντι ἕδρες του εἶναι ἴσες*** καὶ ὄχι ***ὅλες*** ὅπως στὸν κύβο, καὶ ὅτι οἱ ἕδρες του δὲν ἔχουν σχῆμα τετραγώνου, ὅπως στὸν κύβο, ἀλλὰ ***ἄλλο*** σχῆμα. Κατὰ τὰ ἄλλα εἶναι ὅμοιο μὲ τὸν κύβο.

Βρῆτε μόνοι σας **τὶς ὁμοιότητες.**

Ἀσκήσεις:

*1. Δεῖξτε τὶς ἕδρες, **τὶς ἀκμές, τὶς κορυφὲς καὶ τὴν ἐπιφάνεια ἑνὸς** ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.*

*2. Συγκρίνετε τὸν κύβο **μὲ τὸ** ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο **καὶ** πῆτε τὶς διαφορὲς καὶ ὁμοιότητές τους.*

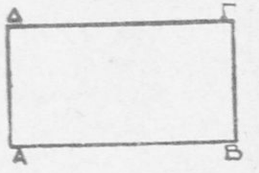
*3. Τί σχῆμα **ἔχει** ἡ κασετίνα σας; **Δεῖξτε τὶς ἀκμές, ποὺ παριστά-***

νουν τὶς διαστάσεις τῆς κασετίνας σας. Δεῖξτε ἐπίσης τὶς βάσεις τῆς κασετίνας σας.

4. Δεῖξτε ὅλες τὶς κάθετες καὶ παράλληλες ἀκμὲς καὶ ἕδρες τῆς κασετίνας σας.

δ'. Σχῆμα τῶν ἑδρῶν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Τοποθετῆστε τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἐπάνω σ' ἕνα λευκὸ χαρτὶ καὶ μὲ μολύβι σύρετε γραμμὲς ἀκολουθώντας τὶς ἀκμὲς τῆς βάσεώς του. Θὰ ἰδῆτε τότε ὅτι θὰ σχηματισθῆ ἕνα σχῆμα, ποὺ θὰ δείχνη τὸ μέγεθος καὶ τὸ σχῆμα τῆς ἕδρας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Τὸ σχῆμα αὐτὸ (σχ. 41), λέγεται **ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο** ἢ ἁπλῶς **ὀρθογώνιο**.

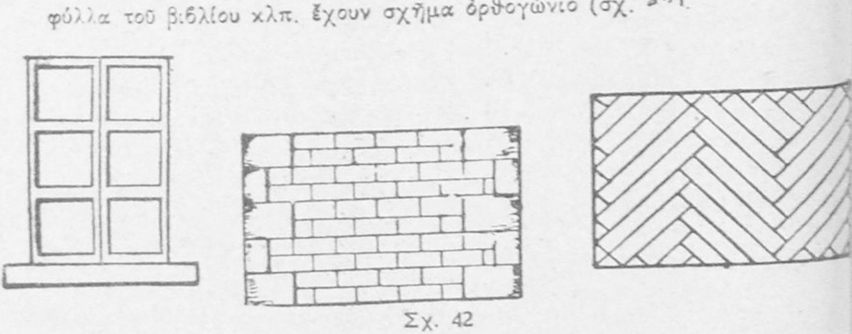


Σχ. 41. Ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο

Παρατηρῆστε τὶς πλευρὲς τοῦ ὀρθογωνίου. Θὰ ἰδῆτε, ὅτι οἱ ἀπέναντι πλευρές του εἶναι *ἴσες* καὶ *παράλληλες* καὶ *ὅλες του οἱ γωνίες ὀρθές*. Γι' αὐτὸ καὶ λέγεται *ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο*.

Ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο ἢ ἁπλῶς ὀρθογώνιο λέγεται τὸ τετράπλευρο, ποὺ ἔχει τὶς ἀπέναντι πλευρὲς ἴσες καὶ παράλληλες καὶ τὶς γωνίες του ὀρθές.

Ἐφαρμογές. Τὸ ὀρθογώνιο χρησιμοποιεῖται πιὸ πολὺ ἀπ' ὅλα τὰ τετράπλευρα. Οἱ πόρτες, τὰ παράθυρα, οἱ τοῖχοι, τὰ πατώματα, τὰ φύλλα τοῦ βιβλίου κλπ. ἔχουν σχῆμα ὀρθογώνιο (σχ. 42).



Σχ. 42

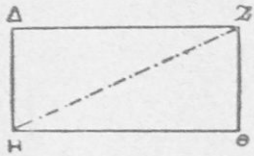
Ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο λέγεται τὸ γεωμετρικὸ σχῆμα, ποὺ *οἱ ἕξι ἕδρες του εἶναι ὀρθογώνια καὶ μόνο οἱ ἀπέναντι ἕδρες εἶναι ἴσες καὶ παράλληλες.*

'Ε ρ γ α σ ί ε ς.

Βρῆτε τὶς ὁμοιότητες καὶ τὶς διαφορὲς τοῦ ὀρθογωνίου καὶ τοῦ τετραγώνου.

ε'. Βάση, ὕψος, περίμετρος καὶ διαγώνιος τοῦ ὀρθογωνίου

Ἡ μιὰ ἀπὸ τὶς μεγαλύτερες πλευρὲς τοῦ ὀρθογωνίου λέγεται ***βάση*** ἢ ***μῆκος*** καὶ μιὰ ἀπ' τὶς μικρότερες ***ὕψος*** ἢ ***πλάτος***.



Σχ. 43. Διαγώνιος παραλληλογράμμου

Περίμετρος τοῦ ὀρθογωνίου λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν του.

Διαγώνιος τοῦ παραλληλογράμμου λέγεται ἡ εὐθεῖα, ποὺ ἑνώνει δυὸ κορυφές, χωρὶς νὰ εἶναι πλευρὰ τοῦ παραλληλογράμμου (σχ. 43). Ἡ εὐθεῖα ΖΗ εἶναι ***διαγώνιος***. Οἱ διαγώνιες τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἴσες μεταξύ τους.

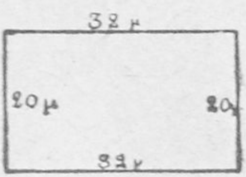
στ'. Πῶς βρίσκομε τὴν περίμετρο τοῦ ὀρθογωνίου

Τὸ ὀρθογώνιο, εἴδαμε, ὅτι ἔχει τὶς δυὸ ἀπέναντι πλευρές του ἴσες καὶ παράλληλες. Ἐπομένως γιὰ νὰ βροῦμε τὴν περίμετρό του, παίρνομε τὸ μῆκος τῶν δυὸ πλευρῶν, π. χ. τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους του καὶ τὰ διπλασιάζομε. Τότε θὰ ἔχωμε τὴν περίμετρό του.

Παράδειγμα. Ἕνας κῆπος σὲ σχῆμα ὀρθογώνιο ἔχει μῆκος 32 μ. καὶ πλάτος 20 μ. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του ; (σχ. 44).

Λ ύ σ η

Θὰ προσθέσωμε τὸ μῆκος 32 μ. καὶ τὸ πλάτος 20 μ. καὶ θὰ τὰ διπλασιάσωμε.



Σχ. 44.
Περίμετρος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου

32 μ.+20 μ.=52 μ.
52 μ.×2=104 μ.

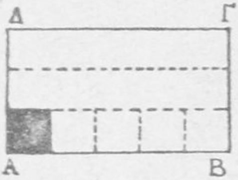
ἢ 32 μ.+32 μ.=64 μ.
20 μ.+20 μ.=40 μ.
104 μ. εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ κήπου.

ζ'. Πῶς γράφομε ὀρθογώνιο

Μὲ τὸν κανόνα γράφω μιὰ εὐθεῖα. Στὶς ἄκρες τῆς εὐθείας φέρω μὲ τὸ γνώμονα δυὸ ἴσες κάθετες. Ἑνώνω τὰ ἄκρα τῶν δυὸ αὐτῶν καθέτων μὲ μιὰ εὐθεῖα καὶ ἔχω τὸ ὀρθογώνιο.

η΄. Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου

Κάνομε στὴν αὐλὴ τοῦ σχολείου ἕνα ὀρθογώνιο, ποὺ ἔχει μῆκος 5 μ. καὶ πλάτος 3 μ. Χωρίζομε τὸ μῆκος του σὲ 5 ἴσα κομμάτια, ποὺ τὸ καθένα θὰ ἔχῃ βέβαια μῆκος 1 μ. Ἔπειτα χωρίζομε καὶ τὸ ὕψος σὲ 3 ἴσα κομμάτια, ποὺ κι αὐτὰ τὸ καθένα τους θὰ ἔχῃ μῆκος 1 μέτρο. Χωρίζομε καὶ τὶς ἀπέναντι πλευρὲς σὲ ὅσα κομμάτια χωρίσαμε τὶς ἀντίστοιχές τους. Ἑνώνομε ὕστερα τὶς διαιρέσεις αὐτὲς μὲ εὐθεῖες (σχ. 45). Βλέπομε, ὅτι σχηματίζονται μέσα σ' αὐτὸ τὸ ὀρθογώνιο 15 τετράγωνα, ποὺ ἡ κάθε πλευρά τους ἔχει 1 μέτρο, δηλαδὴ 15 τετραγωνικὰ μέτρα. Τὸ 15 ὅμως εἶναι γινόμενο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ 5×3, δηλαδὴ τῆς βάσεως (μῆκος) τοῦ ὀρθογωνίου ἐπὶ τὸ πλάτος του (ὕψος).



(Σχ. 45)

Συμπέρασμα

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου πολλαπλασιάζομε τὴ βάση ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

1. Ζωγραφίστε στὸ τετράδιό σας ἕνα ὀρθογώνιο μὲ μῆκος 0,06 μ. καὶ πλάτος 0,04 μ.

Νὰ βρῆτε τὴν περίμετρό του. Νὰ βρῆτε τὸ ἐμβαδόν του.

2. Δεῖξτε στὸ ὀρθογώνιό σας τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος, τὶς γωνίες καὶ τὶς κορυφές του. Δεῖξτε τὶς βάσεις καὶ τὸ ὕψος του.

3. Πόσες διαγώνιες μποροῦμε νὰ φέρωμε στὸ ὀρθογώνιο;

4. Ἡ αὐλὴ ἑνὸς σχολείου ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου. Τὸ μῆκος της εἶναι 20 μέτρα καὶ τὸ πλάτος της 15 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός της; Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν της;

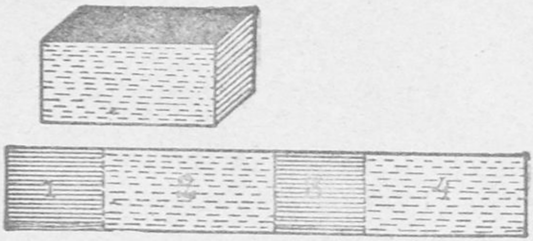
5. Ἡ περίμετρος ἑνὸς ὀρθογωνίου οἰκοπέδου εἶναι 100 μέτρα. Τὸ μῆκος του εἶναι 30 μέτρα. Πόσο εἶναι τὸ πλάτος του; Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

6. Ἂν τὸ πάτωμα τῆς αἰθουσάς σας ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου, νὰ βρῆτε τὸ ἐμβαδόν της;

7. Χρειάζεται νὰ στρωθῆ μιὰ ὀρθογώνια αὐλὴ μὲ ὀρθογώνιες *πλάκες. Τὸ μῆκος τῆς αὐλῆς εἶναι 15 μέτρα καὶ τὸ πλάτος 12 μέτρα Τὸ μῆκος κάθε πλάκας εἶναι 0,60 μ. καὶ τὸ πλάτος 0,50 μ. Πόσες πλάκες θὰ χρειασθοῦμε ;*

2. Ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφάνειας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Παρατήρηση. Σκεπάστε μ' ἕνα χαρτὶ ὅλη τὴν παράπλευρη ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἀκριβῶς. Κόψτε μὲ τὸ ψαλλίδι ὅσο χαρτὶ περισσεύει ἔξω ἀπὸ τὴν παράπλευρη ἐπιφάνεια. Ἀνοῖξτε



Σχ. 46. Παράπλευρη ἐπιφάνεια

ὕστερα τὸ χαρτὶ αὐτὸ καὶ τοποθετῆστε το ἁπλωμένο στὸ τραπέζι σας. Θὰ ἰδῆτε τότε, ὅτι τὸ χαρτὶ αὐτὸ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου (Σχ. 46). Μετρῆστε τὸ μῆκος του. Θὰ βρῆτε, ὅτι εἶναι ἴσο ἀκριβῶς μὲ τὴν περίμετρο τῆς βάσεως τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Συμπέρασμα

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, πολλαπλασιάζομε τὴν περίμετρο τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του, γιατὶ ἡ παράπλευρη ἐπιφάνειά του εἶναι ἴση μὲ ὀρθογώνιο, ποὺ ἔχει μῆκος ἴσο μὲ τὴν περίμετρο τῆς βάσεώς του καὶ ὕψος ἐπίσης ἴσο μὲ τὸ ὕψος του.

Ὅλη ὅμως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου δὲν ἀποτελεῖται μόνον ἀπὸ τὴν παράπλευρη ἐπιφάνεια. Ἐκτὸς ἀπ' αὐτὴ ἔχει καὶ τὴν ἐπιφάνεια τῶν δυὸ βάσεών του.

Οἱ βάσεις του ἐπίσης εἶναι ὀρθογώνια ἴσα. Βρίσκομε λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς βάσεως καὶ τὸ διπλασιάζομε.

Στὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεων προσθέτομε καὶ τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας καὶ ἔτσι βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφάνειας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Συμπέρασμα

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφάνειας ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, προσθέτομε στὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεών του τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας.

Μποροῦμε ἀκόμα νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριῶν ἀνίσων ἑδρῶν χωριστὰ καὶ κατόπι νὰ τὸ διπλασιάσωμε καὶ τέλος νὰ προσθέσωμε τὰ τρία ἐμβαδά.

Παράδειγμα. Ἡ αἴθουσα τοῦ σχολείου μας ἔχει μῆκος 8 μέτρα, πλάτος 6 μέτρα καὶ ὕψος 5,25 μέτρα. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφάνειας.

Λύση

1. Θὰ βροῦμε πρῶτα τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας. Γι' αὐτὸ θὰ βροῦμε.

α'. Τὴν περίμετρο τῆς βάσεως

8 μ.+8 μ.+6 μ.+6 μ.=28 μ. εἶναι ἡ περίμετρος τῆς βάσεως

β'. Πολλαπλασιάζομε τώρα τὴν περίμετρο ἐπὶ τὸ ὕψος γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας 28 μ.×5,25 μ.=147 τ.μ.

2. Θὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως καὶ θὰ τὸ διπλασιάσωμε γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεων.

α'. 8 μ.×6=48 τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς βάσεως.

β'. 48 μ.×2=96 τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεων.

3 Τέλος θὰ προσθέσωμε τὰ δύο ἐμβαδὰ καὶ θὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφάνειας.

Ἐμβαδὸν παράπλευρης ἐπιφάνειας	147	τ. μ.
Ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεων	96	τ. μ.
Τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφάνειας εἶναι	243	τ. μ.

Μὲ τὸν ἄλλο τρόπο. Βρίσκομε χωριστὰ τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριῶν ἀνίσων ἑδρῶν καὶ τὸ διπλασιάζομε.

α) 8 μ.× 6 μ.=48 τ.μ.	48 τ.μ.×2=96 τ.μ.
β) 6 μ.×5,25 μ.=31,50 τ.μ.	31,50 τ.μ.×2=63 τ.μ.
γ) 8 μ.×5,25 μ.=42 τ.μ.	42 τ.μ.×2=84 τ.μ.
	243 τ.μ. εἶναι τὸ

ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφάνειας.

Ἀσκήσεις

1. Βρῆτε τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς βάσεως τῆς κασετίνας σας. Τί σᾶς χρειάζεται γι' αὐτό;

2. Βρῆτε τὴ περίμετρο τῆς μιᾶς βάσεως τῆς κασετίνας σας. Τί σᾶς χρειάζεται ;

3 Βρῆτε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τῆς κασετίνας σας καὶ τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφάνειάς της.

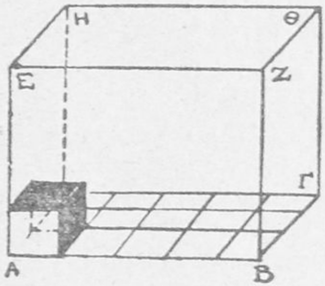
4· Μιὰ δεξαμενή, ποὺ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχει μῆκος 2,5 μ., πλάτος 2 μ. καὶ ὕψος 4 μ. Ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὅλης ἐπιφάνειάς της.

5. Μετρῆστε καὶ βρῆτε τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφάνειας τῆς αἰθουσάς σας.

Κάνετε μόνοι σας παρόμοια προβλήματα.

3. Ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου (σχ. 47), θὰ ἐργασθοῦμε, ὅπως κα στὸν κύβο. Θὰ μετρήσωμε τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος τῆς μιᾶς βάσεως, καθὼς καὶ τὸ ὕψος του. Βρίσκομε, ὅτι ἔχει μῆκος 5 μ., πλάτος 3 μ. καὶ ὕψος 4 μ. Χωρίζομε τὸ μῆκος τῆς βάσεως καὶ τὴν ἀπέναντι πλευρά του σὲ 5 ἴσα μέρη, ποὺ τὸ καθένα θὰ ἔχη μῆκος 1 μέτρο. Χωρίζομε ἐπίσης καὶ τὸ πλάτος καὶ τὴν ἀπέναντί του πλευρὰ σὲ 3 ἴσα μέρη, ποὺ κι αὐτὰ τὸ καθένα τους θὰ ἔχη μῆκος 1 μέτρο. Ἑνώνομε μὲ εὐθεῖες τὰ σημεῖα αὐτὰ καὶ βλέπομε, ὅτι σχηματίζονται 15 τετράγωνα, ποὺ τὸ καθένα τους ἔχει ἐμβαδὸν ἕνα τετραγωνικὸ μέτρο. Δηλαδὴ ὅλη ἡ βάση 15 τ. μ.



Σχ. 47)

Ἂν κάνωμε τώρα τὸ ἴδιο καὶ μὲ τὸ ὕψος βλέπομε, ὅτι σχηματίζονται σ' ὅλο αὐτὸ τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο 60 κύβοι, ποὺ ὁ καθένας τους εἶναι ἕνα κυβικὸ μέτρο. Ὥστε ὁ ὄγκος αὐτοῦ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 60 κ. μ. Στὸ ἴδιο ὅμως ἀποτέλεσμα φθάνομε, ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως 15 τ. μ. $\times$ 4 μ. τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου $=$ 60 κ. μ.

Γιὰ τὸ ἐμβαδὸν πάλι τῆς βάσεως πολλαπλασιάζομε, ὅπως μάθαμε, τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος.

Συμπέρασμα :

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου,

πολλαπλασιάζομε τίς τρεῖς διαστάσεις του, τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος καὶ τὸ γινόμενο ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Παράδειγμα. Ἡ αἴθουσα τοῦ σχολείου, ποὺ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἔχει μῆκος 8 μ., πλάτος 6 μ, καὶ ὕψος 5 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της;

Ὄγκος=μῆκος×πλάτος×ὕψος.

8 μ.×6 μ.×5 μ.=240 κ. μ. εἶναι ὁ ὄγκος τῆς αἴθουσας αὐτῆς.

Ἀσκήσεις

1. Βρῆτε τὸν ὄγκο τῆς κασετίνας σας.

2. Βρῆτε τὸν ὄγκο τῆς αἴθουσάς σας.

3. Βρῆτε τὸν ὄγκο δεξαμενῆς, ποὺ ἔχει μῆκος 2 μ., πλάτος 2 μ., καὶ ὕψος 4 μ. Πόσο νερὸ χωρεῖ ἡ δεξαμενὴ αὐτή;

4. Ἕνα χαντάκι μὲ 35 μ. μῆκος, 1 μέτρο πλάτος, 1,5 μ. ὕψος πρόκειται νὰ κτισθῆ μὲ πέτρες. Πόσα κυβικὰ μέτρα πέτρα θὰ χρειασθοῦν;

5. Ἕνας σωρὸς πέτρες σὲ σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ μῆκος 6 μ., πλάτος 3 μ. καὶ ὕψος 2,5 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα πέτρες ἔχει;

6. Ἕνα δοκάρι μήκους 4,5 μ., πλάτους 0,50 μ. καὶ ὕψους 0,62, πόσα κυβικὰ μέτρα ἔχει; Πόσες σανίδες θὰ βγοῦν ἀπὸ τὸ δοκάρι αὐτό, ἂν ἡ κάθε σανίδα ἔχει μῆκος 4,5 μ., πλάτος 0,25 μ. καὶ ὕψος 0,20 μ.

7. Ἕνας δρόμος 375 μέτρα καὶ πλάτους 4 μέτρα πρόκειται νὰ στρωθῆ μὲ χαλίκι σὲ βάθος 0,20 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα χαλίκι θὰ χρειασθοῦν;

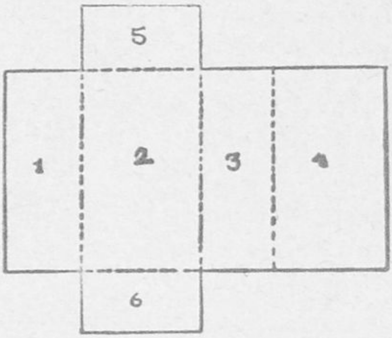
4. Κατασκευὴ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ χαρτόνι

Ἂν ἀνοίξωμε ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, θὰ παρατηρήσωμε, ὅτι θὰ μᾶς παρουσιασθῆ τὸ σχῆμα 48.

Ἔχομε ἔτσι τὸ **ἀνάπτυγμα** τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Ἀπὸ τὸ ἀνάπτυγμα βλέπομε, ὅτι τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο ἔχει ἕξι ἐπίπεδες τετράπλευρες ἐπιφάνειες, ποὺ ἔχουν σχῆμα ὀρθογωνίου καὶ ποὺ οἱ ἀπέναντι ἀνὰ δύο εἶναι ἴσες.

Ἀφοῦ λοιπὸν ξέρομε τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, εἶναι εὔκολο νὰ τὸ κατασκευάσωμε μὲ χαρτόνι. Σχεδιάζομε ἐπάνω στὸ χαρτόνι τὸ ἀνάπτυγμα, ὅπως τὸ βλέπομε στὸ σχῆμα 48, σύμφωνα μὲ τίς διαστάσεις, ποὺ θέλομε νὰ ἔχη τὸ παραλληλεπίπεδό μας (μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος) Προσέχομε ἐπίσης τὶς ἀπέναντι ἕδρες νὰ τὶς κάνωμε ἴσες. Κόβομε ὕστερα τὸ σχέδιο στὶς μαῦρες γραμμὲς μόνο, χαράζομε ἐλαφρὰ μὲ τὸ μαχαιράκι μας τὶς διακεκομμένες γραμμὲς τοῦ σχεδίου μας, τὸ διπλώνομε πρὸς τὴν ἀντίθετη μεριὰ τοῦ χαράγματος καὶ κολλᾶμε μὲ ἀλευρόκολλα τὶς συνεχόμενες ἕδρες. Ἔχομε τότε τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδό μας.



Σχ. 48

Ἂν θέλετε κολλᾶτε ἀπ' ἔξω χρωματιστὸ χαρτὶ ἢ χρωματιστὲς χάρτινες κορδελίτσες, ὅπως κάνατε καὶ στὸν κύβο.

Ἐργασίες

1. Κάνετε ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο μὲ χαρτόνι, ποὺ νὰ ἔχῃ μῆκος 0,1 μ., πλάτος 0,60 μ. καὶ ὕψος 0,05 μ.

2. Ἰχνογραφῆστε ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο.

3. Βρῆτε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφάνειας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ποὺ κατασκευάσατε, καθὼς καὶ τὸν ὄγκο του.

4. Ἰχνογραφῆστε τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου στὸ τετράδιο τῆς Γεωμετρίας σας.

5. Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο κάμετε ἕνα κουτί, ἀφήνοντας ξεκόλλητη τὴ μιὰ ἕδρα γιὰ καπάκι.

6. Μπορεῖτε νὰ κάμετε ὅ,τι εἶδος κουτάκι θέλετε ἢ καὶ σπιτάκια ἀκόμα μὲ χαρτόνι, σὲ σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ νὰ βρῆτε τὴν ἐπιφάνειά τους καὶ τὸν ὄγκο τους.

5. Κλίμακες

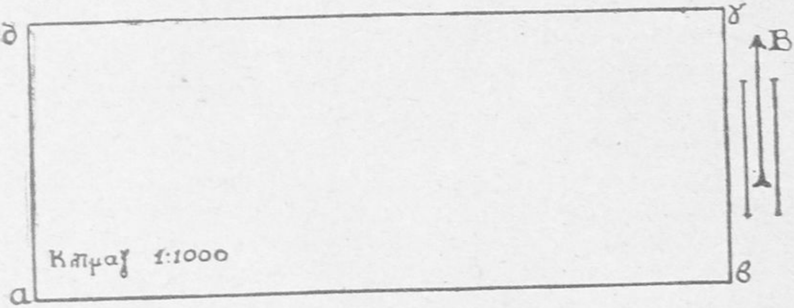
α'. Ἀριθμητικὴ κλίμαξ

Κοιτᾶξτε τὸ χάρτη σας. Παριστάνει τὴν Ἑλλάδα μας πολὺ μικρότερη ἀπ' ὅ,τι εἶναι πραγματικά, γιὰ νὰ μπορῇ νὰ χωράῃ στὸ χάρτη.

Ἰδέτε ἕνα **σχέδιο** ἢ ἕνα **διάγραμμα** ἑνὸς μηχανικοῦ. Παριστάνει ἕνα ὀρθογώνιο οἰκόπεδο. Ἀπὸ κάτω γράφει $1:1000$ ἢ $\frac{1}{1.000}$. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς λέγεται **ἀριθμητικὴ κλίμαξ** καὶ δείχνει, πῶς κάθε πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι χίλιες φορὲς μικρότερη στὸ σχέδιο, ἀπ' ὅ,τι εἶναι πραγματικά. Μετροῦμε καὶ βρίσκομε π. χ. αβ=0,09 μ. καὶ αδ=0,04 μ. Τότε οἱ πραγματικὲς διαστάσεις θὰ εἶναι 0,09×1000=90 μέτρα καὶ 0,04×1000=40 μέτρα (Σχ. 49).

Τί ἐκάναμε; Ἐπολλαπλασιάσαμε τὶς διαστάσεις τοῦ σχεδίου ἐπὶ 1000 καὶ βρήκαμε τὶς πραγματικὲς διαστάσεις τοῦ οἰκοπέδου.

Τέτοια διαγράμματα δὲν γίνονται μόνο μ' αὐτὴ τὴν ἀριθμητικὴ κλίμακα. Συνηθισμένες ἐπίσης κλίμακες εἶναι καὶ $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ κλπ. ἢ $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{500}$ κλπ. Ὅπως παραπάνω εἴπαμε ἡ κλίμακα π.χ. $\frac{1}{500}$



Σχ. 49

φανερώνει, πὼς κάθε πλευρὰ εἶναι πεντακόσιες φορὲς πραγματικὰ μεγαλύτερη ἀπ' ὅ,τι εἶναι στὸ σχέδιο.

Ἂν κυττάξωμε τὶς κλίμακες, βλέπομε ὅτι εἶναι κλάσματα, ποὺ ἔχουν πάντα ἀριθμητὴ τὴ μονάδα καὶ ποὺ ὁ παρονομαστής τους δείχνει πόσες φορὲς ἡ κάθε πλευρὰ ἑνὸς πραγματικοῦ ἐπιπέδου σχήματος εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ἀντίστοιχη γραμμὴ τοῦ σχεδίου.

Μὲ τὴν κλίμακα λοιπὸν μποροῦμε :

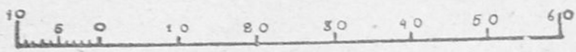
α) Νὰ παραστήσωμε μ' ἕνα σχέδιο ὅμοιο ἕνα οἰκόπεδο, ἕνα σπίτι κλπ. ὅσο θέλομε μικρότερο· καὶ

β) *Ἀπ' τὸ σχέδιο νὰ βροῦμε τὶς πραγματικὲς διαστάσεις τοῦ οἰκοπέδου, σπιτιοῦ κλπ., ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸ μῆκος τῆς γραμμῆς ἐπὶ τὸν παρονομαστὴ τῆς κλίμακος.*

β'. Γραφικὴ κλίμαξ

Σ' ἄλλα σχέδια ὅμως μεταχειρίζονται μιὰ ἄλλη κλίμακα, ποὺ λέγεται ***γραφική***. Μ᾽ αὐτὴ εὔκολα μὲ τὸ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτη μποροῦμε νὰ βροῦμε τὶς πραγματικὲς διαστάσεις ἑνὸς σώματος.

Ἡ γραφικὴ κλίμαξ ἢ καὶ ἁπλὴ κλίμακα εἶναι μιὰ εὐθεῖα διαιρεμένη σὲ ἴσα τμήματα ποὺ καθένα παριστάνει ὡρισμένο μῆκος π.χ. τὸ σχῆμα 50, δείχνει μιὰ γραφικὴ κλίμακα, ποὺ μπορεῖ νὰ ἀντικαταστήσῃ τὴν ἀριθμητικὴ κλίμακα $\frac{1}{1000}$. Κάθε τμῆμα της εἶναι τὸ ἕνα ἑκατοστὸ τοῦ μέτρου (0,01) μ. καὶ παριστάνει ***δέκα*** μέτρα, γιατὶ ὅπως



Σχ. 50

ὡρίσαμε, ἡ γραφικὴ αὐτὴ κλίμακα εἶναι 1:1000 καὶ 0,01 μ. ×1000=10 μ.

Προσέξτε ὅμως. Στὸ ἀριστερὸ μέρος τῆς εὐθείας εἶναι ἕνα τμῆμα. Αὐτὸ ἔχει μῆκος 0,01 μ. καὶ εἶναι διαιρεμένο σὲ 10 ἴσα μέρη, ὥστε καθένα θὰ εἶναι 0,001 μ. Κάθε χιλιοστὸ αὐτοῦ τοῦ τμήματος συνεπῶς παριστάνει ἕνα μέτρο, γιατὶ 0,001 μ. ×1000=1 μέτρο.

Πῶς μεταχειριζόμαστε τὴ γραφικὴ κλίμακα

Ἂν θέλωμε νὰ βροῦμε τὴν ἀπόσταση δυὸ σημείων Α καὶ Β ἑνὸς σχεδίου καμωμένου μὲ κλίμακα 1 : 1000, ἀνοίγομε τὸ διαβήτη καὶ μετροῦμε τὴν ἀπόσταση τοῦ Α ἀπὸ τοῦ Β. Ὕστερα βάζομε τὸ ἕνα σκέλος τοῦ διαβήτη ἔτσι, ὥστε νὰ συμπέσῃ μὲ μιὰ ὑποδιαίρεση τῆς κλίμακος, ἔστω π.χ. μὲ τὸ 40. Ἂν πέσῃ τὸ ἄλλο σκέλος στὸ Ο, τότε ἡ ἀπόσταση εἶναι πραγματικὰ 40 μέτρα. Ἂν πέσῃ ὅμως ἀριστερώτερα τοῦ Ο, ἔστω στὸ 6, τότε ἡ ἀπόσταση θὰ εἶναι 40+6=46 μέτρα, γιατὶ κάθε ὑποδιαίρεση τοῦ τμήματος αὐτοῦ παριστάνει ἕνα μέτρο.

Ἐφαρμογές. Μὲ τὴν κλίμακα βρίσκομε τὸ μῆκος τῶν δρόμων ἀπὸ ἕνα σχέδιο μιᾶς πόλεως, τὴν ἀπόσταση δύο πόλεων σ᾽ ἕνα γεωγραφικὸ χάρτη, τὶς διαστάσεις κεντημάτων, φορεμάτων ἀπὸ τὰ σχέδια τῶν περιοδικῶν κλπ.

Ἀσκήσεις

1. Βρῆτε ἀπὸ τὸ χάρτη τῆς Ἑλλάδος τὶς ἀποστάσεις διαφόρων πόλεων.

2. Μετρῆστε τὴν αὐλὴ τοῦ σχολείου. Κάνετε τὸ σχέδιό της μὲ κλίμακα $\frac{1}{1000}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ'.

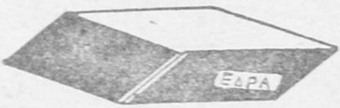
1. Πλάγιο παραλληλεπίπεδο

α'. Ἐπιφάνεια τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου

Τὸ γεωμετρικὸ σῶμα, ποὺ παριστάνει τὸ σχῆμα 51, εἶναι **ἕνα *πλάγιο παραλληλεπίπεδο*.**

Ὅπως βλέπετε, ἡ ἐπιφάνειά του **εἶναι τεθλασμένη καὶ ἀποτελεῖται** ἀπὸ ἕξι ἐπίπεδες ἐπιφάνειες.

Ἂν στηρίξωμε τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο σὲ ὁριζόντια ἐπιφάνεια, θὰ ἴδοῦμε, ὅτι ἡ ἕδρα στὴν ὁποία στηρίζεται καὶ ἡ ἀπέναντί της εἶναι ***ὁριζόντιες***, ἐνῶ οἱ παράπλευρες ἕδρες του εἶναι ***πλάγιες*** πρὸς τὶς ὁριζόντιες, δηλαδὴ δὲν εἶναι ***κάθετες*** στὶς βάσεις του, ὅπως στὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο καὶ στὸν κύβο. Καὶ ἂν προσέξωμε τὶς ἕδρες του, θὰ ἴδοῦμε, ὅτι οἱ ἀπέναντι εἶναι *ἴσες* καὶ ***παράλληλες***, ὅπως ἀκριβῶς καὶ στὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο.



Σχ. 51

Γιὰ τὸ λόγο αὐτὸν τὸ γεωμετρικὸ σῶμα, ποὺ δὲν ἔχει τὶς ἕδρες του κάθετες μεταξύ τους, λέγεται ***πλάγιο*** καὶ ***παραλληλεπίπεδο***, γιατί, οἱ ἀπέναντί του ἕδρες εἶναι παράλληλες.

β'. Βάσεις καὶ ὕψος τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου

Ἡ ἕδρα, στὴν ὁποία στηρίζεται καὶ ἡ ἀπέναντί της, λέγονται ***βάσεις***. Ἡ ἀπόσταση μεταξὺ τῶν δύο βάσεων λέγεται ***ὕψος***. Τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο ἔχει, ὅπως ὅλα τὰ στερεά, τρεῖς διαστάσεις: ***μῆκος, πλάτος*** καὶ ***ὕψος***.

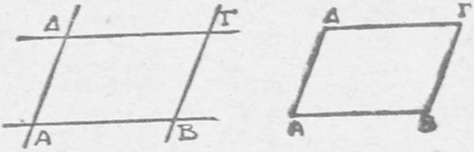
γ'. Ἀκμές, γωνίες καὶ κορυφὲς τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου

Τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο ἔχει 12 ἀκμές, ἀπὸ τὶς ὁποῖες οἱ ἀπέναντι εἶναι ἴσες, ὅπως καὶ στὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, 12 δίεδρες γωνίες, 8 κορυφὲς καὶ 24 γωνίες, οἱ ὁποῖες εἶναι ***ὀξεῖες*** καὶ ***ἀμβλεῖες***. Στὰ πλάγια δηλ. παραλληλεπίπεδα οἱ ἕδρες δὲν ἔχουν καμμιὰ ***ὀρθὴ*** γωνία, ἀλλὰ καθεμιὰ ἔχει ***δύο ὀξεῖες*** καὶ ***δύο ἀμβλεῖες*** γωνίες.

Ἔτσι πλάγιο παραλληλεπίπεδο λέγεται τὸ γεωμετρικὸ σῶμα, ποὺ ἔχει ἕξι ἕδρες, τὶς ἀπέναντι ἴσες καὶ παράλληλες καὶ τὶς γωνίες ὄχι ὀρθές.

δ΄. Σχῆμα τῶν ἑδρῶν τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου

Ἂν πάρωμε μιὰ ἕδρα ἑνὸς πλαγίου παραλληλεπιπέδου καὶ τὴν ἰχνογραφήσωμε στὸ χαρτί, θὰ ἴδοῦμε ὅτι ἔχει τὸ **σχῆμα 62**, ποὺ λέγεται ***παραλληλόγραμμο***, εἶναι καὶ αὐτὸ τετράπλευρο.



Σχ. 62. Παραλληλόγραμμο

Ἂν μετρήσωμε τὶς πλευρὲς καὶ τὶς γωνίες του, θὰ ἴδοῦμε, ὅτι κάθε δυὸ ἀπέναντι πλευρὲς εἶναι ἴσες καὶ παράλληλες καὶ οἱ γωνίες του **δὲν εἶναι ὀρθές**, ἀλλὰ οἱ δυὸ εἶναι ὀξεῖες καὶ οἱ ἄλλες δυὸ ἀμβλεῖες.

Ὁμοιάζει μὲ τὸ ὀρθογώνιο γιατί α) εἶναι τετράπλευρο β) ἔχει τὶς ἀπέναντι πλευρὲς ἴσες καὶ παράλληλες καὶ γ) ἔχει τέσσερες γωνίες.

Διαφέρει ἀπ' αὐτό, γιατί α) οἱ συνεχόμενες πλευρές του δὲν εἶναι κάθετες καὶ β) οἱ γωνίες του δὲν εἶναι ὀρθές ἀλλὰ οἱ ***δυὸ εἶναι ὀξεῖες*** καὶ οἱ ***δυὸ ἀμβλεῖες***.

Οἱ δυὸ ὀξεῖες γωνίες τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσες, καθὼς καὶ οἱ δυὸ ἀμβλεῖες.

Συμπέρασμα

Τὸ τετράπλευρο σχῆμα, ποὺ ἔχει τὶς ἀπέναντι πλευρὲς ἴσες καὶ παράλληλες καὶ τὶς γωνίες του ἀμβλεῖες καὶ ὀξεῖες (ὄχι ὀρθές), λέγεται πλάγιο παραλληλόγραμμο ἢ ἁπλῶς παραλληλόγραμμο.

Ἐ ρ γ α σ ί ε ς

1. Κάνετε στὸ τετράδιό σας ἕνα τετράγωνο, ἕνα ὀρθογώνιο καὶ ἕνα παραλληλόγραμμο καὶ γράψτε τὶς ὁμοιότητες καὶ τὶς διαφορές τους.

2. Κόψτε ἀπὸ χαρτόνι ἕνα τετράγωνο, ἕνα ὀρθογώνιο καὶ ἕνα παραλληλόγραμμο.

ε΄. Πῶς βρίσκομε τὴν περίμετρο τοῦ παραλληλογράμμου

Τὸ παραλληλόγραμμο ἔχει, ὅπως εἴδατε, τὶς ἀπέναντι πλευρές του ἴσες καὶ παράλληλες. Ἐπομένως γιὰ νὰ βροῦμε τὴν περίμετρό του, μᾶς χρειάζεται τὸ μῆκος τῶν δυὸ γειτονικῶν πλευρῶν του. Ἂν αὐτὸ τὸ διπλασιάσωμε, θὰ ἔχωμε τὴν περίμετρό του.

Παράδειγμα. Οἱ δυὸ γειτονικὲς πλευρὲς ἑνὸς κήπου, ποὺ ἔχει σχῆμα παραλληλογράμμου εἶναι ἡ μία 30,5 μ. καὶ ἡ ἄλλη 18 μ. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του;

Λύση

30,5 μ.+18 μ.=48,5 μ. 48,5 μ.×2=97 μ. εἶναι ἡ περίμετρος
ἢ 30,5 μ.+30,5 μ.+18 μ.+18 μ.=97 μ. εἶναι ἡ περίμετρος.

Ἀσκήσεις

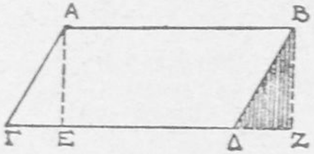
1. Οἱ δυὸ γειτονικὲς πλευρὲς ἑνὸς παραλληλογράμμου εἶναι 8 μ. ἡ μία καὶ 5 μ. ἡ ἄλλη. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του;

2. Ζωγραφίστε ἕνα παραλληλόγραμμο ποὺ οἱ γειτονικὲς πλευρές του εἶναι ἡ μία 0,07 μ. καὶ ἡ ἄλλη 0,05 μ. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του;

2 Ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου

Τὸ πλάγιο παραλληλόγραμμο ἔχει τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν μὲ τὸ ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο, ποὺ ἔχει τὴν ἴδια βάση καὶ τὸ ἴδιο ὕψος.

Νὰ γιατί: Στὸ πλάγιο παραλληλόγραμμο ΑΒΔΓ (σχ. 53) σύρομε μιὰ κάθετη ἀπὸ τὴν κορυφὴ Α στὴ βάση ΓΔ. Θὰ ἰδοῦμε, ὅτι θὰ σχηματισθῆ ἕνα τρίγωνο ΑΓΕ.



Σχ. 53
Ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου

Τὸ τρίγωνο αὐτὸ τὸ κόβομε καὶ τὸ μεταφέρομε στὴν ἄλλη πλευρὰ ΒΔ.

Θὰ ἰδοῦμε τώρα, ὅτι θὰ σχηματισθῆ ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο, ἴσο μὲ τὸ πλάγιο παραλληλόγραμμο. Ἐπομένως γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου, κάνομε ὅ,τι καὶ στὸ ὀρθογώνιο, δηλαδὴ πολλαπλασιάζομε ***τὴ βάση ἐπὶ τὸ ὕψος του.*** Ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἡ κάθετος ποὺ φέρομε ἀπὸ τὴν ἀπέναντι πλευρὰ πρὸς τὴ βάση του.

Ἀσκήσεις

1. Ἡ βάση ἑνὸς παραλληλογράμμου εἶναι 5,60 μ., τὸ ὕψος του 3,5 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

2. Ἕνα οἰκόπεδο ἔχει σχῆμα παραλληλογράμμου. Τὸ μῆκος του εἶναι 82 μ. καὶ τὸ πλάτος του 38 μ. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι τὸ οἰκόπεδο αὐτό;

6. Ἕνα χωράφι σχήματος παραλληλογράμμου ἔχει μῆκος 122,5 *μ. καὶ πλάτος 93,5 μ. Πόσο θὰ πωληθῇ ὅλο αὐτὸ τὸ χωράφι, ἂν τὸ τετραγωνικό του μέτρο πουλιέται 80 χιλιάρικα ;*

4. Γιὰ νὰ ἀγοράσω ἕνα οἰκόπεδο ἐπλήρωσα 20.000.000 δρχ. Τὸ μῆκος του εἶναι 192 μ. καὶ τὸ πλάτος του 88 μ. Πόσο ἐπλήρωσα τὸ τετραγωνικὸ μέτρο ;

3. Ὄγκος τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου

Ἂν πάρωμε δυὸ παραλληλεπίπεδα ἀπὸ χαρτόνι, ἕνα ὀρθογώνιο καὶ ἕνα πλάγιο, μὲ τὶς ἴδιες διαστάσεις καὶ γεμίσωμε τὸ ἕνα μὲ ἄμμο καὶ κατόπιν τὴν ἀδειάσωμε στὸ ἄλλο, θὰ ἰδοῦμε ὅτι χωροῦν καὶ τὰ δυὸ τὴν ἴδια ποσότητα ἄμμου Δηλαδὴ ἔχουν τὸν ἴδιο ὄγκο. Πραγματικά : *Τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο ἔχει τὸν ἴδιο ὄγκο μὲ τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, ποὺ ἔχει τὶς ἴδιες διαστάσεις.*

Συμπέρασμα :

Γιὰ νὰ βροῦμε λοιπὸν τὸν ὄγκο πλαγίου παραλληλεπιπέδου, κάνομε, ὅ,τι κάνομε καὶ στὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο Δηλαδὴ πολλαπλασιάζομε τὶς τρεῖς διαστάσεις του ἢ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Παράδειγμα Οἱ διαστάσεις ἑνὸς πλαγίου παραλληλεπιπέδου εἶναι: μῆκος 3 μ., πλάτος 2 μ. καὶ ὕψος 8 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του ;

Λύση

Ὄγκος=4 μ.×3 μ.×2 μ.=24 κ. μ.

ἢ Βάση 4×3=12 τ. μ.

12 τ. μ.×2 μ.=24 κ. μ. εἶναι ὁ ὄγκος του.

Ἀσκήσεις

1. Τί διαφέρει τὸ πλάγιο παραλληλόγραμμο ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο ; Ποιὲς διαφορὲς ὑπάρχουν μεταξὺ τοῦ πλαγίου καὶ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

2. Τί κοινὰ ἔχουν ὁ κύβος, τὸ ὀρθογώνιο καὶ τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο καὶ τί τὸ τετράγωνο, τὸ ὀρθογώνιο καὶ τὸ παραλληλόγραμμο ;

3. Πῶς ἐργαζόμαστε γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ὀρθογωνίου καὶ τοῦ παραλληλογράμμου ;

4. Πῶς ἐργαζόμαστε γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τοῦ κύβου, τοῦ ὀρθογωνίου καὶ τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου ;

5. Ἕνα κιβώτιο, ποὺ ἔχει σχῆμα πλαγίου παραλληλεπιπέδου, ἔχει μῆκος 0,15 μ., πλάτος 0,90 μ. καὶ ὕψος 0,45 μ. Πόσο νερὸ χωρεῖ ;

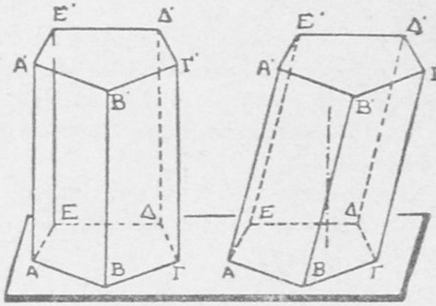
ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ'

1. Ὀρθὰ καὶ πλάγια πρίσματα

Ἀπὸ ὅσα μάθαμε γιὰ τὸν κύβο, τὸ ὀρθογώνιο καὶ τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο βγαίνει, ὅτι καὶ τὰ τρία αὐτὰ στερεὰ σώματα ἔχουν 6 ἕδρες. Γι' αὐτὸ λέγονται στὴ Γεωμετρία ***ἑξάεδρα***. Γενικὰ τὰ στερεὰ αὐτὰ σώματα λέγονται ***πολύεδρα***.

Καὶ τὰ τρία αὐτὰ στερεὰ σώματα ἔχουν τὶς δυὸ ἀπέναντι ἕδρες ἴσες καὶ παράλληλες καὶ τὶς παράπλευρες ἕδρες παραλληλόγραμμα. Τὰ στερεὰ αὐτὰ τὰ λέμε ***πρίσματα***.

Γενικὰ πρῖσμα *λέγεται τὸ στερεὸ σῶμα, ποὺ ἔχει τὶς δυὸ*



Σχῆμα 54.

ἀπέναντι ἕδρες ἴσες καὶ παράλληλες καὶ τὶς παράπλευρες ἕδρες παραλληλόγραμμα.

Ἕνα πρῖσμα εἶναι ὀρθόν, ὅταν οἱ παράπλευρες ἀκμές του εἶναι κάθετες ἐπὶ τὶς ἀκμὲς τῆς βάσεώς του.

Τὰ πρίσματα, ποὺ δὲν εἶναι ***ὀρθὰ*** λέγονται ***πλάγια πρίσματα***.

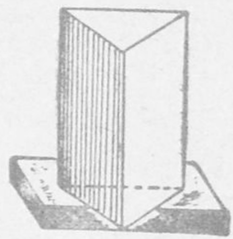
Ὀρθὰ πρίσματα εἶναι ὁ κύβος καὶ τὸ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο πλάγιο δὲ πρῖσμα τὸ πλάγιο παραλληλεπίπεδο.

Τὸ σχῆμα 54 δείχνει ἕνα ὀρθὸ καὶ ἕνα πλάγιο πρῖσμα.

2. Τριγωνικὸ πρῖσμα

Τὸ στερεὸ σῶμα, ποὺ παριστάνει τὸ σχῆμα 55, λέγεται ***τριγωνικὸ πρῖσμα***. Τριγωνικὰ πρίσματα εἶναι μερικὰ γυαλάκια, ποὺ κρέμονται στοὺς πολυελαίους τῶν ἐκκλησιῶν κλπ.

Τὸ τριγωνικὸ πρῖσμα ἔχει ἐπιφάνεια *τεθλασμένη*. Περικλείεται ἀπὸ πέντε ἕδρες, ἀπὸ τὶς ὁποῖες οἱ δυὸ εἶναι ἴσιες καὶ παράλληλες καὶ οἱ τρεῖς *παράπλευρες*. Οἱ δυὸ ἴσες κα παράλληλες λέγονται *βάσεις* τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος καὶ ἔχουν σχῆμα *τριγώνου*.



Σχ. 55
Τριγωνικὸ πρῖσμα

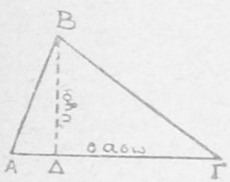
Ὅταν στὸ τριγωνικὸ πρῖσμα οἱ παράπλευρες ἀκμὲς εἶναι κάθετες στὶς βάσεις, τότε τὸ τριγωνικὸ πρῖσμα εἶναι *ὀρθό*.

Τὸ τριγωνικὸ πρῖσμα ἔχει 5 ἕδρες, 9 ἀκμές, 6 κορυφὲς ἢ τρίεδρες γωνίες καὶ 9 δίεδρες γωνίες.

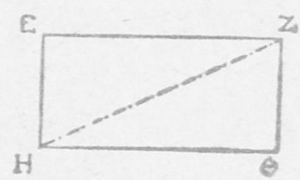
Ὕψος τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἡ ἀπόσταση ἀπὸ τὴ μιὰ βάση στὴν ἄλλη. Τὸ ὕψος στὸ ὀρθὸ πρῖσμα εἶναι ἴσο μὲ μιὰ παράπλευρη ἀκμή.

3. Τρίγωνο

Ὅπως βλέπετε (Σχ. 56), τὸ τρίγωνο εἶναι σχῆμα, ποὺ ἔχει τρεῖς πλευρὲς καὶ τρεῖς γωνίες. Τὸ ὀνομάζομε μὲ τρία γράμματα, ποὺ βάζομε στὶς κορυφές του. *Βάση* τοῦ τριγώνου εἶναι μιὰ ἀπὸ τὶς πλευρές του καὶ ὕψος του ἡ κάθετος, ποὺ φέρνομε ἀπὸ τὴν κορυφὴ στὴ βάση του Σχ. 56).



Σχ. 56. ΑΓ Βάση τοῦ τριγώνου
ΒΔ ὕψος τοῦ τριγώνου



Σχ. 57

Παρατήρηση. Κόψτε ἀπὸ χαρτὶ ἕνα τρίγωνο καὶ μὲ βάση αὐτὸ κόψτε ἕνα ἄλλο τρίγωνο *ἴσο* ἀκριβῶς μὲ τὸ προηγούμενο. Βάλετε τὸ ἕνα κοντὰ στὸ ἄλλο, ὅπως βλέπετε στὸ σχῆμα 57. Θὰ ἰδῆτε, ὅτι θὰ σχηματισθῆ ἕνα παραλληλόγραμμο.

Συμπέρασμα:

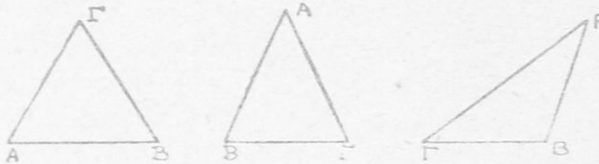
Κάθε τρίγωνο εἶναι τὸ μισὸ ἀπὸ τὸ παραλληλόγραμμο, ποὺ ἔχει τὴν ἴδια βάση καὶ τὸ ἴδιο ὕψος.

Τὸ ἴδιο βλέπομε, ὅταν σὲ ὁποιοδήποτε παραλληλόγραμμο σύρωμε μιὰ διαγώνιο. Τὸ παραλληλόγραμμο αὐτὸ μοιράζεται σὲ **δύο ἴσα τρίγωνα** (Σχ. 57).

α΄. Εἴδη τριγώνων

Ἀπὸ τὶς πλευρὲς ἔχομε τριῶν εἰδῶν τρίγωνα: (Σχ. 58).

α΄. Τὸ *ἰσοσκελὲς* τρίγωνο, ποὺ ἔχει τὶς δυὸ μόνο πλευρές του ἴσες.



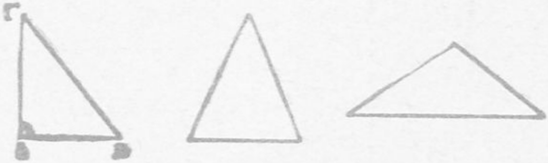
Σχ. 58. Διάφορα εἴδη τριγώνων

β΄. Τὸ *ἰσόπλευρο* τρίγωνο, ποὺ ἔχει καὶ τὶς τρεῖς πλευρές του ἴσες.

γ΄. Τὸ *σκαληνό*, ποὺ καὶ οἱ τρεῖς πλευρές του εἶναι ἄνισες.

Ἀπὸ τὶς γωνίες ἔχομε πάλι τριῶν εἰδῶν τρίγωνα (Σχ. 59)

α΄. Τὸ *ὀρθογώνιο* τρίγωνο, ποὺ ἔχει μιὰ ὀρθὴ γωνία.



Σχ. 59

β΄. Τὸ *ὀξυγώνιο* τρίγωνο, ποὺ ἔχει καὶ τὶς τρεῖς γωνίες του ὀξεῖες.

γ΄. Τὸ *ἀμβλυγώνιο* τρίγωνο, ποὺ ἔχει μιὰ ἀμβλεῖα γωνία.

Περίμετρος τοῦ τριγώνου εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πλευρῶν του.

β΄. Ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου

Ἀφοῦ, ὅπως εἴπαμε, τὸ τρίγωνο εἶναι τὸ μισὸ ἀπὸ τὸ παραλληλόγραμμο, ποὺ ἔχει τὴν ἴδια βάση καὶ ὕψος, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, βρίσκομε πρῶτα τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τοῦ παραλληλογράμμου καὶ παίρνομε τὸ μισό, ποὺ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

Συμπέρασμα

Γιὰ νὰ βροῦμε λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, πολλαπλασιάζομε τὴ βάση ἐπὶ τὸ ὕψος του καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ 2.

Παράδειγμα Ἡ βάση ἑνὸς τριγώνου εἶναι 3 μ., τὸ ὕψος του 4 μ.

Λ ύ σ η

Θὰ πολλαπλασιάσωμε τὴ βάση ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ θὰ διαιρέσωμε διὰ τοῦ 2.

Ἐμβαδὸν $=3$ μ. $\times 4$ μ. $=12$
$12 : 2 = 6$ τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδόν.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

1. Τί λέγεται πρῖσμα καὶ πόσων εἰδῶν πρίσματα ἔχομε ;

2. Τί λέγεται τριγωνικὸ πρίσμα ;

3. Πόσες ἕδρες ἔχει τὸ τριγωνικὸ πρῖσμα ;

4. Τί σχῆμα ἔχουν οἱ βάσεις τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος καὶ τί οἱ παράπλευρες ἕδρες του ;

5. Τί λέγεται τρίγωνο ; Πόσα εἴδη τριγώνων ἔχομε, ἀπὸ τὶς πλευρὲς καὶ πόσα ἀπὸ τὶς γωνίες ;

5. Κόψτε ἀπὸ χαρτόνι ἕνα τρίγωνο ἀπὸ τὸ κάθε εἶδος (ἰσόπλευρο ἰσοσκελές, σκαληνό, ὀρθογώνιο, ὀξυγώνιο καὶ ἀμβλυγώνιο).

7. Βρῆτε τὴν περίμετρο αὐτῶν τῶν τριγώνων.

8. Κόψτε ἀπὸ χαρτόνι ἕνα παραλληλόγραμμο μὲ βάση (μῆκος) 0,08 μ. καὶ ὕψος 0,05 μ. καὶ βρῆτε τὸ ἐμβαδόν του.

9. Χωρῖστε τὸ παραλληλόγραμμό σας μὲ μιὰ διαγώνιο σὲ δύο τρίγωνα. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καθενὸς ἀπ' αὐτὰ τὰ τρίγωνα ; Πῶς τὸ βρήκατε ;

10. Κάθε τρίγωνο τί μέρος τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ;

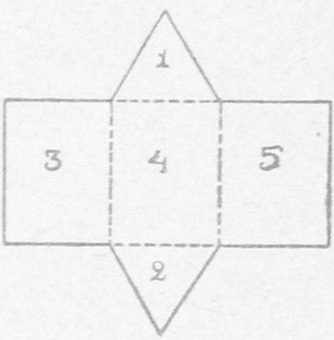
11. Ἕνα χωράφι τριγωνικὸ ἔχει βάση 65 μέτρα καὶ πλάτος 48 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

12. Ἡ πλευρὰ ἀπὸ ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο εἶναι 5 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του;

13. Ἀπὸ ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ἡ μιὰ κάθετος εἶναι 15 μέτρα καὶ ἡ ἄλλη 12 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

4. Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τοῦ ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος

Παρατήρηση. Τυλίξτε μ' ἕνα χαρτὶ τὴν παράπλευρη ἐπιφάνεια τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος. Κόψτε ἀκριβῶς τὸ χαρτὶ στὰ χνάρια της καὶ ὕστερα ἀνοίξτε το. Θὰ ἔχωμε τὸ *ἀνάπτυγμά της* (σχ. 60). Ἀπὸ τὸ ἀνάπτυγμα αὐτὸ θὰ ἰδῆτε καθαρά, ὅτι ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο, ποὺ ἔχει *βάση* τὴν περίμετρο τοῦ τριγώνου τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος καὶ ὕψος, τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος.



Σχ. 60. Ἀνάπτυγμα τριγωνικοῦ πρίσματος

Συμπέρασμα

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος πολλαπλασιάζομε τὴν περίμετρο τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του, γιατὶ ἡ παράπλευρη ἐπιφάνειά του εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμο, ποὺ ἔχει βάση του τὴν περίμετρο τῆς τριγωνικῆς βάσεως τοῦ πρίσματος καὶ ὕψος τὸ ὕψος του.

Παράδειγμα. Ἡ περίμετρος τῆς βάσεως ἑνὸς τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι 7 μέτρα καὶ τὸ ὕψος 3 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας.

Λύση

7 μ.×3=21 τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας

5. Ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφάνειας ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος

Καταλαβαίνετε τώρα, ὅτι γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφάνειας τριγωνικοῦ πρίσματος, πρέπει νὰ βροῦμε χωριστὰ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεών του καὶ στὸ τέλος νὰ προσθέσωμε ὅλα τὰ ἐμβαδά.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας μάθαμε νὰ τὸ βρίσκωμε. Μὰ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο ἄλλων ἑδρῶν, ποὺ εἶναι τρίγωνα, μάθαμε ἐπίσης νὰ τὸ βρίσκωμε. Καὶ ἐπειδὴ οἱ δύο βάσεις εἶναι τρίγωνα ἴσα, βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς καὶ τὸ διπλασιάζομε. Στὸ τέλος προσθέτομε τὰ ἐμβαδὰ καὶ ἔτσι ἔχομε τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφάνειας τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος.

6. Ὄγκος ὁποιουδήποτε (ὀρθοῦ ἢ πλαγίου) πρίσματος

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τριγωνικοῦ πρίσματος, πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος, ὅπως κάνωμε γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο σὲ ὅλα τὰ προηγούμενα πρίσματα (κύβος, ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, πλάγιο παραλληλεπίπεδο).

Παράδειγμα. Ἡ βάση ἑνὸς τριγωνικοῦ πρίσματος ἔχει μῆκος 3 μέτρα καὶ ὕψος 2 μέτρα. Τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι 4 μέτρα. Ποιὸς εἶναι ὁ ὄγκος του,

Λ ύ σ η

α΄. Θὰ βροῦμε πρῶτα τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς **του.**

Θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ μῆκος τῆς μιᾶς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος της καὶ θὰ διαιρέσωμε διὰ 2, ἐπειδὴ εἶναι τρίγωνο.

$$\frac{3 \times 2}{2} = 3 \text{ τ. μ,}$$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως.

β΄. Θὰ πολλαπλασιάσωμε ἔπειτα τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως **ἐπὶ τὸ ὕψος** τοῦ πρίσματος, γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο του.

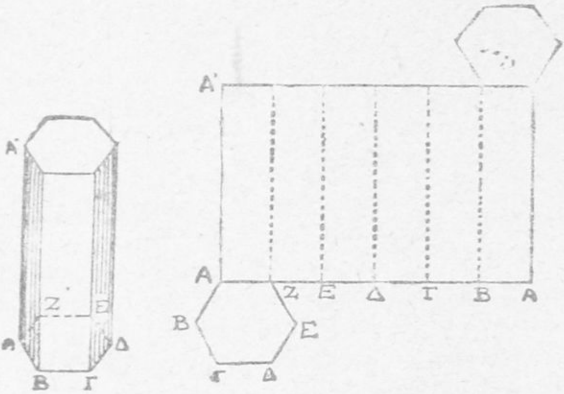
3 τ. μ. $\times$ 4 μ. = 12 κ. μ. εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος.

7. Κατασκευὴ ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος

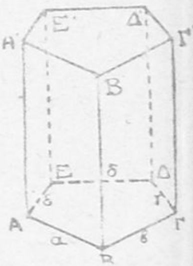
Ζωγραφῆστε τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, ὅπως τὸ βλέπετε στὸ σχῆμα 60, κόψτε το καὶ κολλῆστε μὲ ἀλευρόκολλα, ὅπως κάνατε καὶ στὰ ἄλλα πρίσματα.

Σημείωση. Ἐκτὸς ἀπὸ τριγωνικὰ πρίσματα ἔχομε καὶ πρίσματα, ποὺ ἔχουν σὰν βάση διάφορα πολύγωνα σχήματα (πεντάγωνα, ἑξάγωνα κλπ σχήματα).

Ἔτσι τὰ πρίσματα παίρνουν τὴν ὀνομασία τους ἀπὸ τὸ σχῆμα τῆς



Σχ. 61



Σχ. 62

βάσεώς τους. Ἂν ἔχουν βάση τρίγωνο, τὰ λέμε *τριγωνικά*, ἂν τετράπλευρα, τὰ λέμε *τετραγωνικὰ* ἂν πεντάγωνα *πενταγωνικὰ* (Σχ. 62), ἑξάγωνο *ἑξαγωνικὰ* κλπ.

Τὸ σχῆμα 61 μᾶς δείχνει ἑξαγωνικὸ πρίσμα καὶ τὸ ἀνάπτυγμά του.

Ἀσκήσεις

1. Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος;

2. Κάνετε ἕνα δικό σας πρόβλημα, ποὺ νὰ ζητῆται ἡ εὕρεση τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας.

3. Τί μᾶς χρειάζεται γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφάνειας τοῦ ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος;

4. Κάμετε ἕνα πρόβλημα.

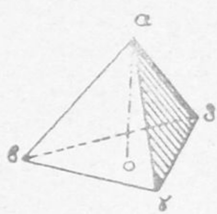
5. Πῶς βρίσκομε τὸν ὄγκο κάθε πρίσματος; Κάμετε ἕνα πρόβλημα.
6. Ζωγραφίστε τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος.
7. Κατασκευάστε μὲ χαρτόνι, ἕνα ὀρθὸ τριγωνικὸ πρῖσμα. Βρῆτε τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφάνειάς του. Βρῆτε τὸν ὄγκο του.

ΜΕΡΟΣ Γ'.

ΠΥΡΑΜΙΔΕΣ

1. Τριγωνικὴ πυραμίδα

Στὸ σχῆμα 63 βλέπετε μιὰ ***τριγωνικὴ πυραμίδα***. Ἡ ἐπιφάνεια ὁποιασδήποτε τριγωνικῆς πυραμίδας εἶναι ***τεθλασμένη***. Ὅλες εἶναι τρίγωνα. Τὸ σημεῖο α εἶναι κορυφὴ τῆς πυραμίδας. ***Βάση*** τῆς πυραμίδας λέγεται ἡ ἕδρα, ποὺ βρίσκεται ἀπέναντι στὴν κορυφή της. Οἱ ἄλλες τρεῖς ἕδρες λέγονται ***παράπλευρες ἕδρες***. Οἱ παράπλευρες ἕδρες εἶναι τρίγωνα, ποὺ ἔχουν βάσεις τὶς πλευρὲς τῆς βάσεως τῆς πυραμίδας καὶ τελειώνουν σμίγοντας σ' ἕνα σημεῖο, πού, ὅπως εἴπαμε, λέγεται κορυφὴ τῆς πυραμίδας. Ἡ ἀπόσταση ἀπὸ τὴν κορυφὴ ὡς τὴ βάση τῆς πυραμίδας λέγεται ***ὕψος*** τῆς πυραμίδας. Οἱ ἕδρες τῆς πυραμίδας δὲν εἶναι κάθετες στὴ βάση της.



Σχ. 63

Ἡ τριγωνικὴ πυραμίδα ἔχει ἕξι ἀκμές, 6 δίεδρες γωνίες, 4 τρίεδρες γωνίες καὶ 4 κορυφές, 3 στὴ βάση της καὶ μιὰ ἀπέναντί της.

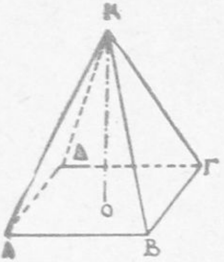
2. Εἴδη πυραμίδων

Ἐκτὸς ἀπὸ τὴν τριγωνικὴ πυραμίδα, ποὺ ἡ βάση της εἶναι τρίγωνο, ὑπάρχουν καὶ πυραμίδες, ποὺ ἔχουν βάση τους ἐπιφάνειες μὲ σχῆμα π. χ. τετράπλευρο, πεντάπλευρο, ἑξάπλευρο κλπ.

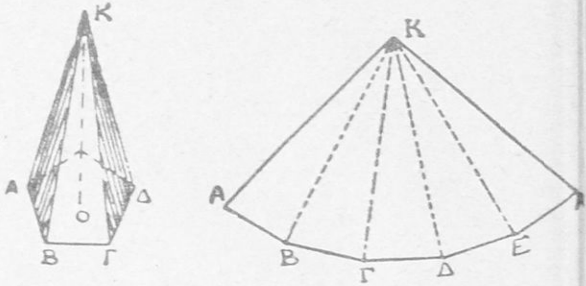
Καὶ ὅπως τὰ πρίσματα, ἔτσι καὶ οἱ πυραμίδες, παίρνουν τὴν ὀνομασία τους ἀπὸ τὸ σχῆμα τῆς βάσεως.

Ἂν ἡ βάση τῆς πυραμίδας εἶναι τρίγωνο, ἡ πυραμίδα λέγεται τρι-

γωνική, ἂν εἶναι τετράπλευρο, *τετραγωνική* (σχ. 64), ἂν εἶναι πεντά-γωνο, *πενταγωνική* (σχ. 65), ἂν εἶναι ἑξάγωνο *ἑξαγωνική* (σχ. 66) κλπ.

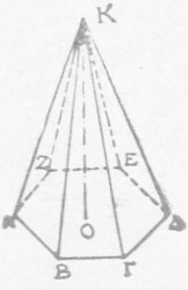


Σχ. 64. Τετραγωνική

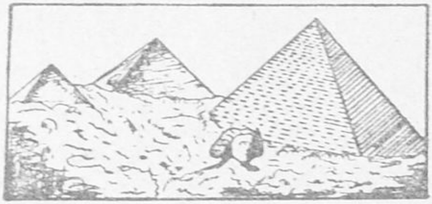


Σχ. 65. Πενταγωνική—Ἀνάπτυγμα τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς της

Σημείωση. Ἡ πυραμίδα πῆρε τὸ ὄνομά της ἀπὸ τοὺς τάφους τῶν νεκρῶν τῶν ἀρχαίων Αἰγυπτίων. Οἱ ἀρχαῖοι Αἰγύπτιοι ἐλάτρευαν μεταξὺ τῶν ἄλλων θεῶν καὶ τὴ φωτιά. Ἕνα θεό τους τὸν παράσταιναν στὰ κτίσματα τῶν τάφων τους μὲ τὸ σχῆμα τῆς φλόγας, ποὺ βγάζει ἡ φωτιά. Καὶ ἐπειδή, ὅπως ξέρετε, τὴ φωτιὰ τὴ λέγαν πῦρ, πῆραν καὶ τὰ κτίσματα τῶν τάφων τους τὸ ὄνομα *πυραμίδα*.



Σχ. 66. Ἑξαγωνική



Σχ. 67. Πυραμίδες τῆς Αἰγύπτου

Τέτοιες πυραμίδες - τάφοι σώζονται ἀκόμα στὴν Αἴγυπτο. Μεγαλύτερη ἀπ' αὐτὲς εἶναι ἡ πυραμίδα τοῦ βασιλιᾶ Χέοπα. Ἔχει βάση τετράγωνο μὲ πλευρὰ 237 μέτρα. Τὸ ὕψος της εἶναι 186 μέτρα (σχ. 67).

3. Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφάνειας τῆς τριγωνικῆς πυραμίδας

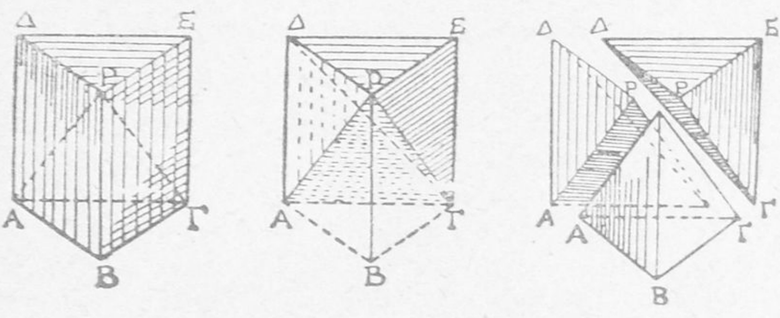
Ξέρομε, ὅτι ὅλες οἱ ἕδρες τῆς τριγωνικῆς πυραμίδας εἶναι τρίγωνα. Γιὰ νὰ βροῦμε λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφάνειάς της, βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριγώνων χωριστὰ (βάση ἐπὶ ὕψος διὰ 2) καὶ προσθέτομε στὸ τέλος ὅλα τὰ ἐμβαδά. Ἔτσι θὰ ἔχωμε τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφάνειας τῆς πυραμίδας.

Ἂν ἡ πυραμίδα εἶναι κανονικὴ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας βρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμε τὴν περίμετρο τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ὕψος ἑνὸς παράπλευρου τριγώνου καὶ διαιρέσωμε διὰ 2.

4. Ὄγκος τριγωνικῆς πυραμίδας

Παίρνομε ἕνα τριγωνικὸ πρῖσμα καὶ μιὰ τριγωνικὴ πυραμίδα, ποὺ ἔχουν ἴσες βάσεις καὶ ἴσα ὕψη (Σχ. 68).

Γεμίζομε τὴν πυραμίδα μὲ χῶμα ψιλὸ καὶ ὕστερα τὸ ρίχνομε μέσα στὸ πρῖσμα. Θὰ παρατηρήσωμε, ὅτι γιὰ νὰ γεμίση τὸ πρῖσμα, θὰ χρειασθοῦν τρεῖς πυραμίδες γεμάτες χῶμα. Ἀπ᾽ αὐτὸ βγαίνει τὸ συμπέρασμα



Σχ. 68

ὅτι ***ἡ πυραμίδα εἶναι τρεῖς φορὲς μικρότερη ἀπὸ τὸ πρῖσμα, ποὺ ἔχει τὴν ἴδια βάση καὶ τὸ ἴδιο ὕψος.***

Γιὰ νὰ βροῦμε λοιπὸν τὸν ὄγκο τῆς πυραμίδας, δὲν ἔχομε παρὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τοῦ πρίσματος καὶ νὰ τὸν διαιρέσωμε διὰ 3. Γιὰ νὰ βροῦμε δὲ τὸν ὄγκο τοῦ πρίσματος, εἴπαμε, ὅτι πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος.

Συμπέρασμα

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τῆς πυραμίδας πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιροῦμε διὰ τοῦ 3.

Παράδειγμα. Μιὰ τριγωνικὴ πυραμίδα ἔχει βάση μὲ μῆκος 3 μέτρα καὶ ὕψος 3,5 μέτρα. Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδας εἶναι 4 μέτρα. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της ;

Λύση

α'. Θὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως καί, ἐπειδὴ ἡ βάση της εἶναι τρίγωνο, θὰ πολλαπλασιάσωμε τὴ βάση ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ θὰ διαιρέσωμε διὰ τοῦ 2, ὥστε :

3 μ.×3,5 μ.=10,5

10,5 μ. : 2=5,25 τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως.

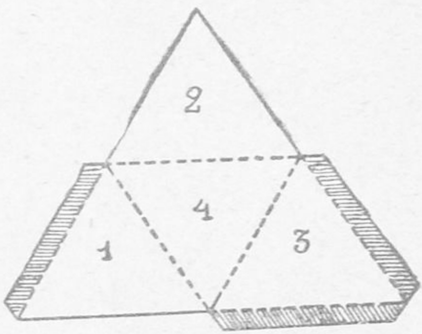
β'. Τὸ ἐμβαδόν τῆς βάσεως θὰ τὸ πολλαπλασιάσωμε ἐπὶ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδας καὶ τὸ γινόμενο θὰ τὸ διαιρέσωμε διὰ τοῦ 3, γιατὶ ἡ πυραμίδα εἶναι τὸ τρίτο τοῦ πρίσματος, ὥστε :

5,25 τ. μ.×4 μ.=21

21 : 3=7 κ. μ. εἶναι ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδας.

5 Κατασκευὴ τριγωνικῆς πυραμίδας

Ζωγραφίζομε στὸ χαρτόνι ἕνα μεγάλο ἰσόπλευρο τρίγωνο (Σχ. 69).



Σχ. 69. Ἀνάπτυγμα τριγωνικῆς **πυραμίδας**

Μὲ τὸ διαβήτη βρίσκομε τὴ μέση τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τοῦ τριγώνου καὶ ἡ σημαδεύομε. Ἑνώνομε ὕστερα τὰ σημάδια αὐτὰ μὲ εὐθεῖες. Θὰ σχηματισθῆ τότε ἕνα μικρότερο τρίγωνο μέσα στὸ μεγάλο. Κόβομε τὸ μεγάλο τρίγωνο ἀπὸ τὸ χαρτόνι καὶ χαράζομε ἐλαφρὰ τὶς πλευρὲς τοῦ μικροῦ τριγώνου. Σπάζομε ὕστερα τὸ χαρτόνι στὶς χαραματιὲς πρὸς τὴν ἀντίθετη μεριά, ξύνομε λιγάκι τὰ μαυρισμένα μέρη γιὰ νὰ κολλήσουν εὔκολα καὶ ἐφαρμοστὰ καὶ τὰ κολλᾶμε μὲ ψαρόκολλα. Ντύνομε τὴν πυραμίδα μας μὲ χρωματιστὸ χαρτί, γιὰ νὰ γίνη ὡραιότερη ἢ κολλᾶμε χρωματιστὲς χάρτινες κορδελίτσες στὶς ἑνώσεις τῶν ἑδρῶν.

Κατασκευάστε μιὰ τέτοια πυραμίδα ἀπὸ χαρτόνι.

Ασκήσεις

1. Τί λέγεται τριγωνικὴ πυραμίδα;

2. Πόσες ἕδρες, ἀκμὲς καὶ δίεδρες γωνίες ἔχει ἡ τριγωνικὴ πυραμίδα;

3. Τί σχῆμα ἔχουν οἱ ἕδρες τῆς τριγωνικῆς πυραμίδας;

4. Ἀπὸ ποῦ παίρνουν τὴν ὀνομασία τους οἱ πυραμίδες καὶ πόσων εἰδῶν ἔχομε;

5. Τί μᾶς χρειάζεται γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφάνειας τῆς τριγωνικῆς πυραμίδας;

6. Βρῆτε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφάνειας τῆς πυραμίδας, ποὺ κατασκευάσατε.

7. Ἡ πυραμίδα τί σχέση ἔχει μὲ τὸ πρῖσμα, ποὺ ἔχει τὴν ἴδια βάση καὶ τὸ ἴδιο ὕψος μ' αὐτή;

8. Τί μᾶς χρειάζεται νὰ ξέρωμε γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο τῆς τριγωνικῆς πυραμίδας;

9. Βρῆτε τὸν ὄγκο τῆς πυραμίδας, ποὺ κατασκευάσατε.

10. Ἕνας σωρὸς πέτρες ἔχει τὸ σχῆμα τριγωνικῆς πυραμίδας. Ἡ βάση του ἔχει μῆκος 4 μ. καὶ ὕψος 3,5 μ. Τὸ ὕψος τοῦ σωροῦ εἶναι 2,5 μ. Πόσα κυβικὰ μέτρα πέτρες ἔχει ὅλος ὁ σωρός;

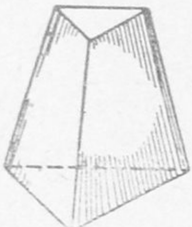
11. Ἡ πυραμίδα τοῦ τάφου τοῦ Χέοπα εἶναι τετραγωνική. Ἡ πλευρὰ τῆς βάσης της (τετράγωνο) ἔχει μῆκος 237 μ. Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδας εἶναι 186 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της;

12. Ἰχνογραφίστε τὸ ἀνάπτυγμα τριγωνικῆς, τετραγωνικῆς καὶ ἑξαγωνικῆς πυραμίδας καὶ κατασκευάστε τις μὲ χαρτόνι.

6. Κόλουρη πυραμίδα

Ἂν κόψωμε μιὰ τριγωνικὴ πυραμίδα κάτω ἀπὸ τὴν κορυφή της μὲ κοψιὰ παράλληλη πρὸς τὴ βάση της, θὰ ἔχωμε τὴν κόλουρη τριγωνικὴ πυραμίδα (Σχ. 70).

Ἡ κόλουρη τριγωνικὴ πυραμίδα τελειώνει σὲ πέντε ἐπίπεδα. Ἔχει δηλαδὴ καὶ αὐτὴ ***τεθλασμένη ἐπιφάνεια***. Ἂν προσέξωμε τώρα τὴν κόλουρη πυραμίδα, θὰ ἴδοῦμε, ὅτι διαφέρει ἀπὸ τὴν ὁλόκληρη. Δὲν ἔχει τώρα κορυφή, ἔχει πέντε ἕδρες ἀντὶ τέσσερες, μὲ τὴν κοψιά της σχηματίσθηκε μιὰ τριγωνικὴ ἕδρα μικρότερη ἀπὸ τὴ βάση της καὶ οἱ παράπλευρες ἕδρες της δὲν εἶναι πιὰ τρίγωνα.



Σχ. 70 Κόλουρη πυραμίδα

Στὴν κόλουρη πυραμίδα οἱ δυὸ ἀπέναντι παράλληλες ἕδρες λέγονται *βάσεις*. Ὕψος της εἶναι ἡ ἀπόσταση ἀπὸ τὴ μιὰ βάση στὴν ἄλλη.

Κόλουρη πυραμίδα μπορεῖ νὰ προκύψη ἀπ' ὅλα τὰ εἴδη τῶν πυραμίδων, ἂν κόψωμε καθεμιὰ μὲ κοψιὰ παράλληλη πρὸς τὴ βάση της.

Ἔτσι οἱ βάσεις τῆς κόλουρης πυραμίδας μπορεῖ νὰ εἶναι τρίγωνα, τετράπλευρα, πεντάπλευρα κλπ.

Ἡ κόλουρη πυραμίδα εἶναι κανονική, ὅταν σχηματίσθηκε ἀπὸ κανονικὴ πυραμίδα μὲ κοψιά, ὅπως εἴπαμε παραπάνω.

7. Σχῆμα τῶν ἑδρῶν τῆς κανονικῆς κόλουρης πυραμίδας

Ἡ βάση καὶ ἡ ἀπέναντί της ἕδρα στὴν κόλουρη τριγωνικὴ πυραμίδα εἶναι, ὅπως εἴπαμε, τρίγωνα. Οἱ παράπλευρές της ὅμως ἕδρες εἶναι τετράπλευρα. Ἂν προσέξωμε τὰ τετράπλευρα (Σχ. 71), θὰ ἴδοῦμε, ὅτι οἱ δυὸ ἀπέναντι πλευρές τους εἶναι παράλληλες, οἱ ἄλλες δυὸ ὄχι.

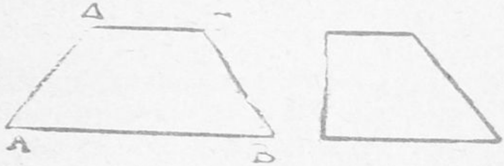
Τὸ σχῆμα αὐτό, ποὺ ἔχουν οἱ παράπλευρες ἕδρες τῆς κόλουρης πυραμίδας, λέγεται στὴ Γεωμετρία *τραπέζιο*.

Συμπέρασμα

Τραπέζιο λέγεται τὸ τετράπλευρο, ποὺ ἔχει μόνον δυὸ πλευρές του παράλληλες.

α΄. Βάση, ὕψος καὶ περίμετρος τοῦ τραπεζίου

Οἱ δυὸ παράλληλες πλευρὲς τοῦ τραπεζίου λέγονται **βάσεις τοῦ** τραπεζίου, *ὕψος* του λέγεται ἡ ἀπόσταση, ποὺ ἔχουν οἱ δυὸ βάσεις του. Τὸ ὕψος τὸ μετροῦμε φέροντας μιὰ κάθετο ἀπὸ **τὴ μιὰ βάση στὴν ἄλλη.**



Σχ. 71

Ἕνα τραπέζιο λέγεται ἰσοσκελὲς, ὅταν οἱ δυὸ παράλληλες πλευρὲς του εἶναι ἴσες.

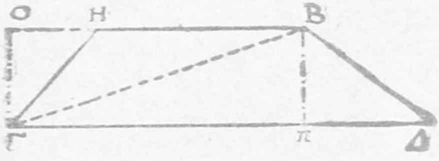
Περίμετρος τοῦ τραπεζίου εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν του. Ἂν συγκρίνετε ἕνα παραλληλόγραμμο μὲ ἕνα τραπέζιο, θὰ βρῆτε ὁμοιότητες καὶ διαφορές.

Ἡ σπουδαιότερη διαφορὰ εἶναι, ὅτι τὸ τραπέζιο ἔχει *δυὸ μόνο* πλευρές του παράλληλες, ἐνῶ τὸ παραλληλόγραμμο ἔχει ὅλες τὶς ἀπέναντι πλευρὲς παράλληλες.

β΄. Ἐμβαδὸν τραπεζίου

Ἂν σὲ ἕνα τραπέζιο φέρωμε μιὰ διαγώνιο, θὰ ἰδοῦμε ὅτι θὰ σχηματισθοῦν δύο τρίγωνα (σχ. 72).

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ τοῦ τραπεζίου, δὲν ἔχομε παρὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν κάθε τριγώνου χωριστὰ καὶ νὰ προσθέσωμε τὰ δύο ἐμβαδά. Ἔτσι θὰ ἔχωμε τὸ ἐμβαδὸν ὅλου τοῦ τραπεζίου.



Σχ. 72. Ἐμβαδὸν τραπεζίου

Ἂν προσέξωμε ὅμως, θὰ ἰδοῦμε ὅτι τὰ δυὸ αὐτὰ **τρίγωνα ἔχουν τὸ ἴδιο** *ὕψος*. (Σχ. 72 ὕψος ΟΓ καὶ ὕψος Βπ)

Ἀντὶ λοιπὸν νὰ πολλαπλασιάσωμε τὴ βάση **κάθε τριγώνου ἐπὶ τὸ** ὕψος του, ποὺ εἶναι τὸ ἴδιο, καὶ νὰ διαιροῦμε **διὰ τοῦ 2, γιὰ συντομία** προσθέτομε τὸ μῆκος τῶν δυὸ βάσεων τῶν τριγώνων, ποὺ εἶναι οἱ δυὸ παράλληλες τοῦ τραπεζίου, τὸ ἄθροισμά τους τὸ πολλαπλασιάζομε ἐπὶ τὸ ὕψος, ποὺ εἶναι τὸ ἴδιο καὶ διαιροῦμε διὰ τοῦ 2. Θὰ φθάσωμε πάλι στὸ ἴδιο συμπέρασμα.

Συμπέρασμα

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου προσθέτομε τὶς δυὸ βάσεις του, πολλαπλασιάζομε τὸ ἄθροισμά τους ἐπὶ τὸ ὕψος του καὶ τὸ γινόμενο διαιροῦμε διὰ τοῦ 2.

Παράδειγμα. Ἡ μεγάλη βάση ἑνὸς τραπεζίου εἶναι 4 μ. ἡ μικρὴ 3 μ., τὸ ὕψος 2,5 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

Λύση

α΄. Προσθέτομε τὶς δυὸ βάσεις του 4+3=7 μ.

β΄. Πολλαπλασιάζομε τὸ ἄθροισμα ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου καὶ τὸ γινόμενο διαιροῦμε διὰ 2.

7 μ.×2,5=17,5

17,5 : 2=8,75 τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου.

Ἀσκήσεις

1. Τί εἶναι ἡ κόλουρη πυραμίδα;

2. Ποιὸ σχῆμα λέγεται τραπέζιο;

3. Τί διαφορὲς ἔχει τὸ τραπέζιο καὶ τὸ παραλληλόγραμμο;

4. Ἕνα οἰκόπεδο, ποὺ ἔχει σχῆμα τραπεζίου, ἔχει μῆκος τῆς μεγάλης βάσεώς του 48 μ., τῆς μικρῆς 29 μ. καὶ ὕψος 42 μ. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα ἔχει τὸ οἰκόπεδο αὐτό;

5. Μιὰ στέγη ἑνὸς σπιτιοῦ ἔχει σχῆμα τραπεζίου. Οἱ παράλληλές της εἶναι 12 μ. καὶ 10 μ. Τὸ ὕψος 4 μ. Πρόκειται νὰ στρωθῆ μὲ κεραμμίδια ὀρθογώνια, ποὺ ἡ βάση τους εἶναι 0,12 μ. καὶ τὸ ὕψος τους 0,06. Πόσα κεραμίδια θὰ χρειασθοῦν γιὰ τὴ στέγη αὐτή;

6. Κατασκευάστε ἀπὸ χαρτόνι μιὰ κόλουρη τριγωνικὴ πυραμίδα.

ΜΕΡΟΣ Δ'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α'.

1. Κύλινδρος

Τὸ στερεὸ σῶμα, ποὺ παριστάνει τὸ σχῆμα 73 εἶναι **ἕνας κύλινδρος.**

Κυλινδρικὰ σώματα λέγονται τὰ σώματα, ποὺ ἔχουν τὸ σχῆμα τοῦ κυλίνδρου. Μερικὰ τέτοια εἶναι τὰ κουτιὰ ἀπὸ κονσέρβες, οἱ σωλῆνες τῆς θερμάστρας, μερικὰ μολύβια, τὰ σωληνάρια τοῦ κινίνου κλπ.

Σχ. 73
Κύλινδρος

α'. Ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου

Παρατήρηση 1. Προσέξτε τὸ ἐξωτερικὸ τοῦ κυλίνδρου, θὰ ἰδῆτε ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ τρεῖς ἐπιφάνειες. Ἀπὸ μιὰ κυρτὴ καὶ δυὸ ἐπίπεδες.

β'. Βάσεις καὶ ὕψος τοῦ κυλίνδρου

Παρατήρηση 2. Ἂν θελήσωμε νὰ στηρίξωμε τὸν κύλινδρο, θὰ ἰδοῦμε, ὅτι στηρίζεται καλύτερα σὲ μιὰ ἀπὸ τὶς δυὸ ἐπίπεδες ἐπιφάνειές του παρὰ στὴν κυρτή.

Γι' αὐτὸ οἱ ἐπίπεδες ἐπιφάνειες τοῦ κυλίνδρου λέγονται *βάσεις του.*

Ἡ ἀπόσταση, ποὺ ὑπάρχει ἀπὸ τὴ μιὰ βάση τοῦ κυλίνδρου ὡς τὴν ἄλλη, λέγεται ***ὕψος*** τοῦ κυλίνδρου.

Ἂν μετρήσωμε μ' ἕνα χαρτὶ τὶς δυὸ **βάσεις τοῦ κυλίνδρου,** θὰ ἰδοῦμε, ὅτι εἶναι ἴσες καὶ *παράλληλες.*

2. Ὁ κύλινδρος

α'. Περιφέρεια

Παρατήρηση. **Πάρτε** τὸν κύλινδρο. Στηρίξτε τον μὲ τὴ μιὰ βάση του σ' ἕνα φύλλο τοῦ τετραδίου σας καὶ μὲ τὸ μολύβι σας ἰχνογραφίστε πάνω στὸ χαρτὶ τὴ βάση του. Θὰ σᾶς παρουσιασθῇ ἕνα σχῆμα τέτοιο (σχ. 74). **Τὸ** σχῆμα αὐτὸ λέγεται ***κύκλος.***

Ὅπως βλέπετε, ὁ κύκλος εἶναι μιὰ ἐπίπεδη ἐπιφάνεια, ποὺ περικλείεται ἀπὸ μιὰ καμπύλη γραμμή.

Ἡ καμπύλη αὐτὴ γραμμή, ποὺ περικλείει τὸν κύκλο, λέγεται **περιφέρεια** τοῦ κύκλου (σχ. 74).

Σχ. 74

β΄. Πῶς γράφομε περιφέρεια κύκλου

Μποροῦμε νὰ γράψωμε κύκλο στὸν πίνακα μὲ μιὰ κλωστή. Στηρίζομε τὴ μιὰ ἄκρη τῆς κλωστῆς σ' ἕνα σημεῖο καὶ τὴν κρατᾶμε ἀκίνητη. Τὴν ἄλλη ἄκρη τῆς τεντωμένης κλωστῆς, ὅπου ἔχομε δεμένη κιμωλία, τὴ σύρωμε γύρω ἀπὸ τὸ ἀκίνητο σημεῖο. Ἡ κιμωλία τότε θὰ γράψη τὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου.

Κέντρο αὐτοῦ τοῦ κύκλου εἶναι τὸ σημεῖο, στὸ ὁποῖο στηρίξαμε τὴ μιὰ ἄκρη τῆς τεντωμένης κλωστῆς.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο μποροῦμε νὰ γράψωμε κύκλο καὶ στὸ τετράδιό μας, ὅπου ἀντὶ κιμωλίας χρησιμοποιοῦμε μολύβι.

Τὸν τρόπο αὐτὸν μεταχειρίζονται οἱ κηπουροί, ὅταν θέλουν νὰ φτιάσουν κυκλικὲς πρασιὲς στοὺς κήπους τους. Στὴν ἄκρη τοῦ σχοινιοῦ ὅμως τότε δένουν ἕνα πάσσαλο.

Στὴ Γεωμετρία, γιὰ νὰ γράψωμε κύκλο, ἔχομε ἕνα ὄργανο, ποὺ λέγεται *διαβήτης*.

Ὁ διαβήτης εἶναι ἕνα γεωμετρικὸ ὄργανο, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο σκέλη. Στὴν ἄκρη τοῦ ἑνὸς στερεώνομε μολύβι ἢ κιμωλία καὶ τὸ ἄλλο τὸ στηρίζομε ἀκίνητο σ' ἕνα σημεῖο.

Περιστρέφομε τότε τὸ σκέλος, ποὺ ἔχομε τὸ μολύβι ἢ τὴν κιμωλία καὶ γράφομε τὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου. Τὸ σημεῖο, στὸ ὁποῖο στηρίζεται τὸ ἀκίνητο σκέλος τοῦ διαβήτη, εἶναι τὸ *κέντρο* τοῦ κύκλου (σχ. 75).

Σχ. 75
Διαβήτης

γ΄. Κέντρο τοῦ κύκλου

Μετρῆστε τὴν ἀπόσταση ἀκριβῶς ἀπὸ τὸ κέντρο ὡς τὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου.

Θὰ ἰδῆτε, ὅτι τὸ *κέντρο* ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφέρειας.

Γενικὰ συμπεράσματα

1. Κύλινδρος εἶναι τὸ στερεὸ σῶμα, ποὺ οἱ δυὸ παράλληλες βάσεις του εἶναι κύκλοι ἴσοι καὶ ἡ παράπλευρη ἐπιφάνειά του κυρτή.

2. *Κέντρο τοῦ κύκλου λέγεται τὸ σημεῖο, ἀπὸ τὸ ὁποῖο ἀπέχουν ἐξ ἴσου ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφέρειας.*

Τὸ κέντρο γιὰ συντομία τὸ γράφομε μὲ ἕνα κεφαλαῖο Κ.

3. *Περιφέρεια τοῦ κύκλου λέγεται ἡ κλειστὴ καμπύλη γραμμή, ποὺ ὅλα τὰ σημεῖα της ἔχουν τὴν ἴδια ἀπόσταση ἀπὸ ἕνα σημεῖο, ποὺ λέγεται κέντρο τοῦ κύκλου.*

4. *Κύκλος εἶναι ἡ ἐπίπεδη ἐπιφάνεια, ποὺ περικλείεται ἀπὸ μιὰ καμπύλη γραμμή, ποὺ λέγεται περιφέρεια καὶ ποὺ ὅλα τὰ σημεῖα της ἔχουν τὴν ἴδια ἀκριβῶς ἀπόσταση ἀπὸ ἕνα σημεῖο, ποὺ βρίσκεται στὸ ἐσωτερικό της καὶ λέγεται κέντρο.*

δ'. Ἀκτίνα τοῦ κύκλου

Ἂν ἑνώσετε τὸ κέντρο τοῦ κύκλου μ' ἕνα σημεῖο τῆς περιφέρειας μὲ *εὐθεῖα γραμμή*, ἔχετε τότε τὴν *ἀκτίνα τοῦ κύκλου.*

Ἀκτίνα τοῦ κύκλου λέγεται ἡ εὐθεῖα γραμμή, ποὺ ἑνώνει τὸ κέντρο τοῦ κύκλου μὲ ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς περιφέρειας.

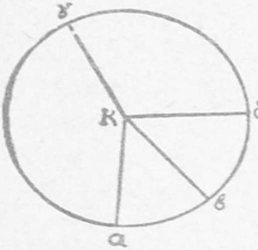
Στὸ σχῆμα 76 οἱ Κα, Κϐ, Κδ καὶ Κγ εἶναι ἀκτῖνες.

Ἀκτῖνες μποροῦμε νὰ γράψωμε σὲ κάθε κύκλο πολλές. Ἂν ὅμως τὶς μετρήσωμε, θὰ ἰδοῦμε, ὅτι εἶναι ὅλες ἴσες μεταξύ τους.

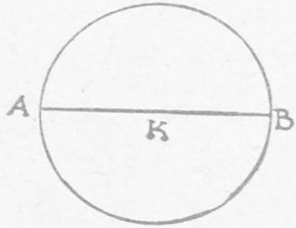
Ὅλες λοιπὸν οἱ ἀκτῖνες στὸν ἴδιο κύκλο εἶναι ἴσες μεταξύ τους.

ε'. Διάμετρος

Ἀπὸ ἕνα σημεῖο τῆς περιφέρειας σύρομε μιὰ *εὐθεῖα γραμμή*, ποὺ



Σχ. 76. Ἀκτῖνες



Σχ. 77. Διάμετρος

νὰ περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρο τοῦ κύκλου καὶ νὰ τελειώνῃ σ' ἕνα ἄλλο σημεῖο τῆς περιφέρειας (σχ. 77).

Ἡ εὐθεῖα αὐτὴ ΑΒ λέγεται *διάμετρος* τοῦ κύκλου.

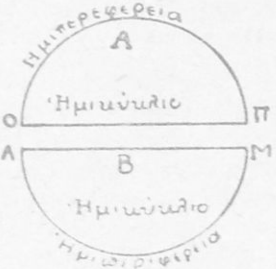
Ἂν μετρήσωμε τὴ διάμετρο ΑΒ μὲ τὸ μέτρο, θὰ ἰδοῦμε, ὅτι εἶναι ἴση μὲ τὶς δυὸ ἀκτῖνες, τὴν ΑΚ καὶ ΚΒ.

Ἡ διάμετρος εἶναι διπλάσια τῆς ἀκτίνας τοῦ ἴδιου κύκλου, ἢ δυὸ ἀκτῖνες τοῦ ἴδιου κύκλου κάνουν μιὰ διάμετρο τοῦ **ἴδιου κύκλου.**

Διαμέτρους σ' **ἕνα** κύκλο μποροῦμε νὰ γράψωμε **πολλές. Οἱ διάμετροι** τοῦ ἴδιου κύκλοῦ εἶναι **ἴσες** μεταξύ τους.

στ'. Ἡμικύκλιο - Ἡμιπεριφέρεια

Σ' ἕνα κύκλο σύρομε μιὰ διάμετρο. Ἡ διάμετρος χωρίζει **τὸν κύκλο** σὲ δυὸ μέρη. **Ἂν** μετρῆστε τὰ κομμάτια αὐτὰ μ' **ἕνα χαρτί, θὰ** βρῆτε, ὅτι εἶναι ἀκριβῶς **ἴσα.** Ἡ διάμετρος λοιπὸν χώρισε αὐτὸν **τὸν** κύκλο **σὲ δυὸ ἴσα** μέρη, ποὺ τὸ καθένα εἶναι **ἀκριβῶς** ***μισὸς κύκλος.*** Τὸ ἴδιο θὰ συμβῆ, ἂν σύρωμε **μιὰ** ὁποιαδήποτε διάμετρο σὲ ἄλλο κύκλο.



Σχ. 78

Καθε διάμετρος χωρίζει τὸν κύκλο σὲ δυὸ ἴσες ἐπιφάνειες. Οἱ ἐπιφάνειες ***αὐτὲς λέγονται ἡμικύκλια*** (σχ. 78).

Ὅπως ὅμως βλέπομε, ἡ διάμετρος δὲν χωρίζει μόνο τὸν κύκλο σὲ δυὸ ἡμικύκλια, ἀλλὰ καὶ τὴν περιφέρεια **τοῦ** κύκλου σὲ δυὸ ἴσα μέρη, ποὺ λέγονται ***ἡμιπεριφέρειες*** (σχ. 78).

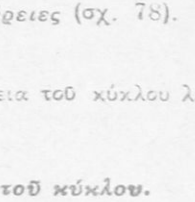
ζ'. Τόξο - χορδὴ

Ἕνα ὁποιοδήποτε κομμάτι ἀπὸ τὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου λέγεται *τόξο.*

Στὸ σχῆμα 79 τόξο **εἶναι τὸ** ΓΕΔ.

Τόξο εἶναι ἕνα κομμάτι τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου.

Στὸν κύκλο σχῆμα 79 σύρομε μιὰ εὐθεῖα. Οἱ **εὐθεῖες, ποὺ** ἑνώνουν δυὸ σημεῖα τῆς περιφέρειας, χωρὶς **νὰ** περνοῦν **ἀπὸ** τὸ κέντρο τοῦ κύκλου, ὅπως **ἡ** διάμετρος, λέγονται ***χορδὲς τοῦ*** κύκλου, **π.χ.,** ἡ ΓΔ. Ὅλες οἱ χορδὲς **ἑνὸς** κύκλου εἶναι μικρότερες **ἀπὸ τὴ** διάμετρο **τοῦ** ἴδιου κύκλου.



Σχ. 79

η'. Τμῆμα - Τομέας

Στὸν κύκλο σύρομε τὴ χορδὴ ΓΔ. Ἡ χορδὴ **αὐτὴ** χώρισε, ὅπως βλέπετε, ἕνα κομμάτι τοῦ κύκλου. Τὸ κομμάτι αὐτὸ περικλείεται ἀπὸ τὸ ***τόξο*** ΓΕΔ **καὶ τὴ** χορδὴ ΓΔ **καὶ** λέγεται ***τμῆμα*** τοῦ κύκλου

Ἔτσι τμῆμα τοῦ κύκλου εἶναι τὸ μέρος τοῦ κύκλου, ποὺ περικλείεται ἀπὸ ἕνα τόξο καὶ ἀπὸ τὴ χορδή του.

Στὸν κύκλο (Σχ. 79) σύρομε δυὸ ἀκτῖνες. Οἱ δυο αὐτὲς ἀκτῖνες χώρισαν ἕνα κομμάτι τοῦ κύκλου, ποὺ περικλείεται ἀπὸ τὶς δυὸ ἀκτῖνες καὶ τὸ τόξο, ποὺ εἶναι μεταξύ τους. Τὸ κομμάτι αὐτὸ τοῦ κύκλου λέγεται *τομέας*.

Στὸ σχῆμα 79 τομέας εἶναι ΑΟΒ.

θ'. Ἐπίκεντρη γωνία

Παρατήρηση. Στὸ σχῆμα 79 οἱ δυὸ ἀκτίνες **ΑΟ καὶ ΟΒ** σχημάτισαν μαζὶ μὲ τὸ τόξο ΑΒ ἕνα κυκλικὸ τομέα, ὅπως μάθατε. Οἱ δυὸ αὐτὲς ἀκτῖνες σχημάτισαν καὶ μιὰ γωνία, ΑΟΒ, ποὺ ἔχει τὴν κορυφή της στὸ κέντρο ἀκριβῶς τοῦ κύκλου. Ἡ γωνία αὐτὴ λέγεται *ἐπικεντρη γωνία*, γιατὶ ἔχει τὴν κορυφή της ἐπάνω στὸ κέντρο.

η'. Διαίρεση τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου

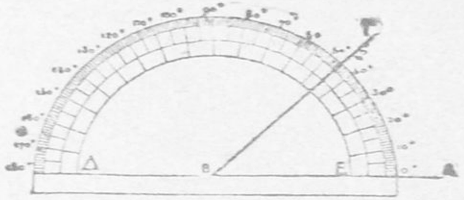
Ἂν 360 ἴσες ἐπίκεντρες γωνίες γεμίσουν ὁλόκληρο τὸν κύκλο, ἡ καθεμιὰ θὰ λέγεται **μοίρα**. Τὴ **μοίρα τὴ** διαιροῦμε σὲ 60 ἴσα μέρη, ποὺ λέγονται **πρῶτα λεπτὰ** καὶ **κάθε πρῶτο** λεπτὸ διαιρεῖται πάλι σὲ 60 ἴσα μέρη, ποὺ λέγονται **δεύτερα λεπτά**. Ἀφοῦ τώρα ὁλόκληρη ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου ἔχει 360 μοῖρες, ἡ ἡμιπεριφέρεια ἔχει 180 μοῖρες καὶ τὸ τέταρτο τῆς περιφέρειας 90 μοῖρες.

ια'. Μοιρογνωμόνιο—Μέτρηση γωνιῶν

Τὶς γωνίες τὶς μετροῦμε ὄχι ἀπὸ τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν τους, ἀλλὰ ἀπὸ τὸ *ἄνοιγμά τους*.

Γιὰ νὰ μετροῦμε τὶς γωνίες ἔχομε ἕνα ὄργανο, ποὺ τὸ λέμε *μοιρογνωμόνιο* ἢ *ἀναγωγέα* (Σχ. 80). Τὸ μοιρογνωμόνιο εἶναι ἕνα *ἡμικύκλιο* χαμωμένο ἀπὸ ζελατίνα ἢ ἀπὸ μέταλλο καὶ διαιρεμένο ἀπὸ 0-180 ἴσα μέρη, ποὺ λέγονται *μοῖρες*. Στὴ βάση του εἶναι μιὰ εὐθεῖα γραμμή. Ἐπάνω στὸ ἡμικύκλιο καὶ στὴ μέση ἀκριβῶς εἶναι χαραγμένη μιὰ γραμμή, ποὺ δείχνει 90 μοῖρες (ἕνα τέταρτο τοῦ κύκλου). Ἡ γραμμὴ αὐτὴ ἂν μετακινηθῆ, θὰ συναντήση τὴ μέση τῆς εὐθείας τῆς βάσεως καὶ θὰ σχηματίση δύο ὀρθὲς γωνίες.

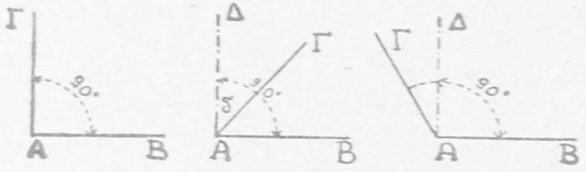
Γιὰ νὰ μετρήσωμε μιὰ γωνία βάζομε τὸ μοιρογνωμόνιο ἔτσι, ὥστε τὸ μέσο τῆς εὐθείας γραμμῆς τῆς βάσεώς του νὰ εἶναι στὴν κορυφὴ τῆς γωνίας καὶ ἡ εὐθεῖα νὰ ἀκολουθήση τὴ μιὰ πλευρὰ τῆς γωνίας. Παρατηροῦμε ἔπειτα ποῦ θὰ πέση ἡ ἄλλη πλευρὰ καὶ σημειώνομε τὸν ἀριθμὸ ἐπάνω στὸν ὁποῖο πέφτει. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς μᾶς δείχνει τὸ μέγεθος τῆς γωνίας. Στὸ σχῆμα 80 ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι 36 μοιρῶν. Ἂν ἡ γω-



Σχ. 80. Μοιρογνωμόνιο

νία εἶναι μικρότερη ἀπὸ 90 μοῖρες, εἶναι ὀξεῖα γωνία, ἂν εἶναι μεγαλύτερη, εἶναι ἀμβλεῖα γωνία (σχ. 81).

Τὶς μοῖρες τὶς γράφομε μὲ ἕνα μικρὸ μηδενικό, ποὺ βάζομε πάνω καὶ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ. Π.χ. 25 μοῖρες θὰ τὶς γράψωμε ἔτσι: 25° κλπ.



Σχ. 81. Γωνία ὀρθή. Γωνία ὀξεῖα. Γωνία ἀμβλεῖα

Τὰ πρῶτα λεπτὰ τὰ σημειώνομε μὲ μιὰ ὀξεῖα, ποὺ γράφομε πάνω καὶ δεξιὰ στὸν ἀριθμὸ καὶ τὰ δεύτερα μὲ δυὸ ὀξεῖες. Π.χ. 25 πρῶτα λεπτὰ καὶ 42 δεύτερα, τὰ γράφομε ἔτσι: 25′ 42″. Καὶ τὶς 85 μοῖρες, 45 πρῶτα λεπτὰ καὶ 25 δεύτερα, τὰ γράφομε ἔτσι: 85° 45′ 25″ κλπ.

Ἐργασίες

1. Κάμετε ἀπὸ χαρτόνι ἢ κόντρα - πλακὲ ἕνα μοιρογνωμόνιο καὶ διαιρέστε το σὲ μοῖρες.

2. Κατασκευάστε μὲ πηλὸ κυλίνδρους καὶ ἰχνογραφίστε τους στὸ τετράδιό σας.

3. Γράψτε μὲ τὸ διαβήτη σας ἕνα κύκλο στὸ τετράδιό σας μὲ ἀκτίνα 3 ἑκατοστά.

4. Σημειῶστε στὸν κύκλο σας αὐτὸν τὸ κέντρο μὲ Κ καὶ γράψετε μιὰ ἀκτίνα καὶ μιὰ διάμετρο.

5. Γράψτε ἕνα κύκλο καὶ σημειῶστε ἕνα τόξο, μιὰ χορδή, ἕνα τμῆμα καὶ ἕνα τομέα.

6. Κατασκευάστε ἀπὸ χαρτόνι ἕνα κύκλο. Χρωματίστε τὸ τμῆμα του μὲ μπλὲ χρῶμα καὶ τὸν τομέα του μὲ πράσινο.

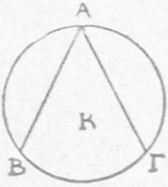
7. Κατασκευάστε ἀπὸ χαρτόνι δυὸ ἡμικύκλια καὶ χωρίστε τα σὲ μοῖρες.

8. Κατασκευάστε ἕνα κύκλο ἀπὸ χαρτόνι καὶ χωρίστε ἕνα τόξο 45° καὶ ἕνα 90°.

9. Διαιρέστε ἕνα κύκλο στὶς μοῖρες του.

10. Κάμετε 1 ὀρθή, 1 ὀξεῖα καὶ 1 ἀμβλεῖα γωνία. Μετρῆστε τὶς γωνίες σας μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο καὶ γράψτε πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ κάθε μία.

3. Ἐγγεγραμμένη γωνία



Σχ. 82. Ἐγγεγραμμένη γωνία

Παρατήρηση. Στὸ σχῆμα 82 οἱ δυὸ χορδὲς ΑΒ καὶ ΑΓ ἑνώνονται στὸ σημεῖο τῆς περιφέρειας Α καὶ σχηματίζουν μιὰ γωνία, τὴ γωνία ΒΑΓ. Ἡ γωνία αὐτὴ λέγεται *ἐγγεγραμένη γωνία*.

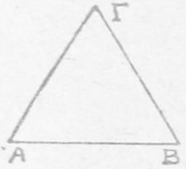
Ὥστε: ***Ἐγγεγραμμένη γωνία λέγεται ἡ γωνία, ποὺ οἱ πλευρές της εἶναι χορδὲς τοῦ κύκλου καὶ ἡ κορυφή της εἶναι σ' ἕνα σημεῖο τῆς περιφέρειας.***

4. Κανονικὰ πολύγωνα

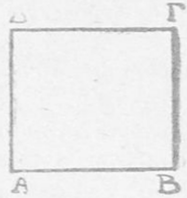
Τὸ ἰσόπλευρο τρίγωνο καὶ τὸ τετράγωνο, ποὺ μάθατε, εἶναι κανονικὰ πολύγωνα.

Ἂν προσέξετε (σχ. 83 καὶ 84), θὰ ἰδῆτε, ὅτι ἔχουν ὅλες τὶς πλευρές τους ἴσες, καθὼς καὶ τὶς γωνίες τους ἴσες. Γι' αὐτὸ λέγονται *κανονικά*.

Δὲν συμβαίνει ὅμως τὸ ἴδιο μὲ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνο καὶ μὲ τὸ



Σχ. 83 Ἰσόπλευρο τρίγωνο

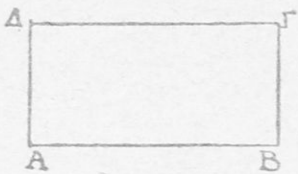


Σχ. 84. Τετράγωνο

ὀρθογώνιο, γιατὶ οὔτε ὅλες τους οἱ πλευρὲς εἶναι ἴσες, οὔτε οἱ γωνίες (σχ. 85).

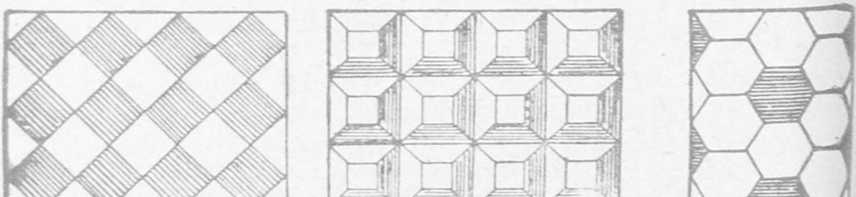
Γι' αὐτὸ αὐτὰ δὲν εἶναι κανονικὰ πολύγωνα. Ὥστε:

Σχ. 85. Ἰσοσκελὲς τρίγωνο



Ὀρθογώνιο

Κανονικὰ λέγονται τὰ πολύγωνα, ὅταν ἔχουν ὅλες τὶς πλευρές τους ἴσες καὶ ὅλες τους τὶς γωνίες ἴσες.



Σχ. 86

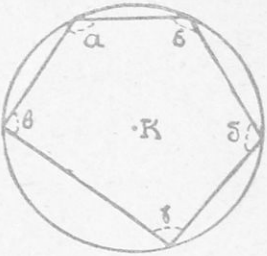
Στὰ μωσαϊκά, στὶς τοιχογραφίες κλπ., χρησιμοποιοῦν γιὰ διακόσμηση κανονικὰ πολύγωνα (τετράγωνα, πεντάγωνα, ἑξάγωνα κλπ. σχ. 86).

5. Ἐγγεγραμμένο πολύγωνο

Μέσα σὲ μιὰ περιφέρεια κύκλου, μποροῦμε νὰ γράψωμε ἕνα πολύγωνο ἔτσι.

Γράφομε μερικὲς χορδές, ὥστε ὅλες μαζὶ νὰ ἀποτελέσουν ἕνα πολύγωνο. Ἔγινε, ὅπως βλέπετε, ἕνα πεντάγωνο, ποὺ εἶναι ἐγγεγραμένο μέσα στὸν κύκλο καὶ ἔχει τὶς κερυφές του ὅλες σὲ πέντε σημεῖα τῆς περιφέρειας (σχ. 87).

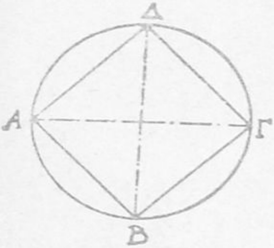
Τὸ πεντάγωνο αὐτὸ λέγεται *ἐγγεγραμμένο πεντάγωνο.*



Σχ. 87.
Ἐγγεγραμμένο πεντάγωνο

6. Πῶς γράφομε κανονικὰ πολύγωνα μέσα σὲ κύκλους

Τὸ πεντάγωνο (σχῆμα 87) δὲν εἶναι κανονικό. Μποροῦμε ὅμως νὰ γράψωμε κανονικὰ πολύγωνα μέσα στὸν κύκλο ἔτσι :



Σχ. 88.

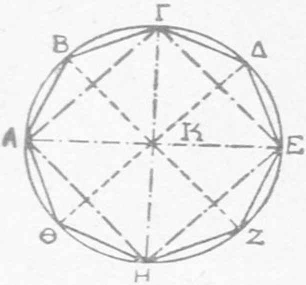
α΄. Ἐγγεγραμμένο τετράγωνο

Σύρωμε στὸν κύκλο δυὸ διαμέτρους κάθετες ΑΓ καὶ ΒΔ. Ἑνώνομε ἔπειτα τὶς ἄκρες τῶν διαμέτρων μὲ τὶς χορδὲς ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ καὶ ΒΑ καὶ θὰ σχηματισθῆ τὸ τρετράπλευρο ΑΒΓΔ, πού, ὅπως βλέπετε, εἶναι ἐγγεγραμμένο τετράγωνο (σχ. 88).

β΄. Ἐγγεγραμμένο κανονικὸ ὀκτάγωνο

Γράφομε στὴν ἀρχὴ μέσα στὸν κύκλο ἕνα τετράγωνο, ὅπως μάθαμε παραπάνω. Βρίσκομε ὕστερα τὸ μέσον τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου. Φέρομε τὶς διαμέτρους, ποὺ ἑνώνουν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ πενταγώνου. Θὰ παρατηρήσωμε, ὅτι ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου διαιρέθηκε σὲ ὀκτὼ ἴσα τόξα : Ἑνώνομε τότε μὲ χορδὲς τὶς ἄκρες τῶν τόξων ἀφοῦ σβύσομε ὅλες τὶς γραμμὲς μέσα στὸν κύκλο καὶ ἔχομε ἔτσι ἐγγεγραμμένο κανονικὸ ὀκτάγωνο (σχ. 89).

Ἂν ξαναμοιράσωμε πάλι κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο τὶς πλευρὲς τοῦ ὀκταγώνου καὶ κάνωμε, ὅπως παραπάνω, θὰ σχηματίσωμε ἐγγεγραμμένο κανονικὸ 16γωνο, ἀπ' αὐτὸ δέ, ἂν ἐπαναλάβωμε τὰ παραπάνω, θὰ σχηματίσωμε κανονικὸ 32γωνο, ὕστερα 64γωνο, ἔπειτα 128γωνο κλπ.



Σχ 89
Κανονικὸ ὀκτάγωνο

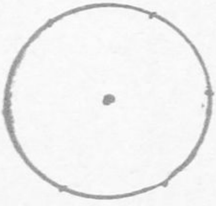
Θὰ παρατηρήσωμε ὅμως τότε, ὅτι ὅσο περισσότερες εἶναι οἱ πλευρὲς τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, τόσο μικρότερες γίνονται, ὥστε ἂν θεωρήσωμε ἐγγεγραμμένο κανονικὸ πολύγωνο μὲ πάρα πολλὲς πλευρές, τότε ἡ ***περίμετρός του*** θὰ γίνη ἴση μὲ τὴν ***περιφέρεια*** τοῦ κύκλου.

Ἑπομένως μποροῦμε νὰ ποῦμε, ὅτι ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο παρὰ ἕνα πολύγωνο μὲ πάρα πολλὲς πλευρές.

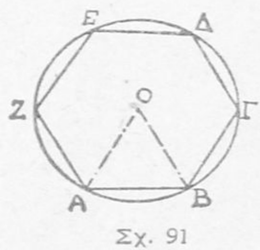
γ'. Ἐγγεγραμμένο κανονικὸ ἑξάγωνο

Ἔχουν εὕρει, ὅτι ἂν ἐπάνω σὲ μιὰ περιφέρεια κύκλου σημειώσωμε μὲ τὸ διαβήτη καὶ μὲ ἄνοιγμα ἴσο μὲ τὴν ἀκτίνα της, ἡ περιφέρεια χωρίζεται σὲ ***ἕξι ἴσα τόξα*** (σχ. 90).

Ἂν τώρα ἑνώσωμε τὰ σημεῖα αὐτὰ τῆς περιφέρειας μὲ τὶς χορ-



Σχ. 90



Σχ. 91

δές, ὅπως ξέρωμε, θὰ σχηματισθῆ ἕνα κανονικὸ ἑξάγωνο ἐγγεγραμμένο (σχ. 91).

δ'. Ἐγγεγραμμένο κανονικὸ δωδεκάγωνο

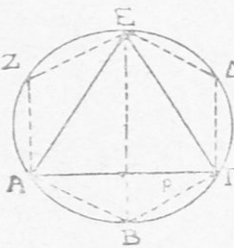
Ὅπως ἀπὸ τὸ ἐγγεγραμμένο τετράγωνο μποροῦμε νὰ ἐγγράψωμε κανονικὸ ὀκτάγωνο, ἔτσι καὶ ἀπὸ τὸ κανονικὸ ἑξάγωνο εἶναι εὔκολο νὰ ἐγγράψωμε κανονικὸ δωδεκάγωνο μέσα στὸν κύκλο. Ἔπειτα μὲ τὸν ἴδιο τρόπο κανονικὸ 24γωνο, κατόπιν κανονικὸ 48γωνο κλπ.

ε'. Ἐγγεγραμμένο τρίγωνο

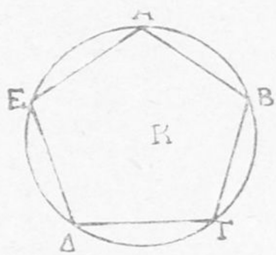
Ἀπὸ τὸ ἐγγεγραμμένο κανονικὸ ἑξάγωνο μποροῦμε νὰ γράψωμε μέσα στὸν κύκλο τρίγωνο, ἂν ἑνώσωμε μὲ χορδὲς τὶς τρεῖς κορυφὲς τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου ἀφίνοντας κάθε φορὰ μιὰ (σχ. 92).

στ'. Κέντρο κανονικοῦ πολυγώνου

Τὸ κέντρο ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι τὸ σημεῖο, ποὺ ἀπέχει



Σχ. 92



Σχ. 93

ἐξ ἴσου ἀπ' ὅλες τὶς κορυφές, ὅπως ἀπέχει ἐπίσης ἐξ ἴσου καὶ ἀπὸ ὅλες τὶς πλευρές του.

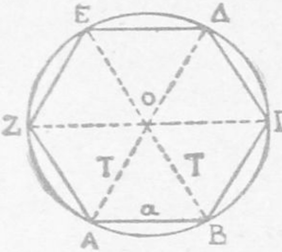
Τὸ κέντρο τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι τὸ ἴδιο μὲ τὸ κέντρο τοῦ κύκλου, ὅπου τὸ πολύγωνο εἶναι ἐγγεγραμμένο.

Τὸ σχῆμα 93 δείχνει τὸ κέντρο τοῦ κύκλου, ποὺ εἶναι καὶ κέντρο τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.

Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου

Ὅταν ἔχωμε ἕνα ὁποιοδήποτε κανονικὸ πολύγωνο καὶ θέλομε νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδόν του, θὰ ἑνώσωμε τὸ κέντρο τοῦ πολυγώνου μὲ τὶς κορυφές του καὶ ἔτσι θὰ σχηματισθοῦν τόσα τρίγωνα, ὅσες εἶναι οἱ πλευρὲς τοῦ πολυγώνου (σχ. 94)

Έπειτα θὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς **τέτοιου τριγώνου. Πρέπει νὰ** ξέρωμε τὴ βάση του καὶ νὰ τὴν πολλαπλασιάσωμε ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου καὶ νὰ **διαιρέσωμε τὸ** γινόμενο διὰ 2. Ἔτσι, ἀφοῦ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν **ἑνὸς** τριγώνου, τὸ πολλαπλασιάζομε **μὲ τὸν** ἀριθμὸ τῶν τριγώνων, γιατὶ τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα καὶ ἔχομε τελικὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.



Σχ. 94

Ἂν εἶναι κανονικὸ πεντάγωνο θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς τριγώνου ἐπὶ **5**, ἂν εἶναι ἑξάγωνο ἐπὶ 6 κ.ο.κ.

Παράδειγμα. Ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου ἡ πλευρὰ εἶναι 0,30 μ. καὶ ἡ ἀπόσταση τῆς πλευρᾶς ἀπὸ τὸ κέτρο τοῦ πολυγώνου εἶναι 0,20 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ τοῦ ἑξαγώνου;

Λύση

Θὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου

$$\frac{0,30\times 0,20\ \mu.}{2} = 0,03\ \tau.\mu.$$

ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα εἶναι 6, θὰ πολλαπλασιάσωμε ἐπὶ 6.

$$0,03\ \tau.\mu. \times 6 — 0,18\ \tau.\mu.$$

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑξαγώνου εἶναι 0,18 τ.μ.

Ἀσκήσεις

1. *Ποιὰ γωνία λέγεται ἐπίκεντρη καὶ ποιὰ ἐγγεγραμμένη; Γράψτε σ' ἕνα κύκλο μιὰ ἐπίκεντρη καὶ μιὰ ἐγγεγραμμένη γωνία.*
2. *Κάμετε τρεῖς κύκλους ἴσους μὲ χαρτόνι.*
3. *Τί λέγεται πολύγωνο καὶ ποιὸ λέγεται **κανονικὸ** πολύγωνο; Φτιάστε μὲ χαρτόνι τρία κανονικὰ πολύγωνα.*
4. *Ποιὸ πολύγωνο λέγεται ἐγγεγραμμένο;*
5. *Σχηματίστε ἐγγεγραμμένο ἑξάγωνο καὶ δωδεκάγωνο;*
6. *Σχηματίστε ἐγγεγραμμένο τετράγωνο καὶ κανονικὸ δεκάγωνο.*
7. *Τί θὰ κάνῃ ὁ ξυλουργός, ὅταν ἔχῃ νὰ κατασκευάσῃ ἕνα κανονικὸ ἑξάγωνο τραπέζι;*
8. *Ὅταν φτιάσωμε ἕνα κανονικὸ πολύγωνο μὲ πάρα πολλὲς πλευρὲς τί θὰ γίνῃ;*

7. Μῆκος τῆς περιφέρειας

Παρατήρηση. Μετροῦμε μὲ κάθε δυνατὴ ἀκρίβεια τὸ μῆκος τῆς περιφέρειας ἑνὸς κύκλου καὶ τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου τοῦ ἴδιου κύκλου. Διαιροῦμε τὸ μῆκος τῆς περιφέρειας διὰ τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου. Θὰ βροῦμε πηλίκο 3,14.

Τὸ ἴδιο κάνομε καὶ σ' ἄλλους κύκλους μεγαλύτερους ἢ μικρότερους. Βρίσκομε *πάντα* πηλίκο τὸν ἴδιο *ἀριθμὸ 3,14*.

Ἀπ' αὐτὸ βγαίνει, ὅτι ἡ ***περιφέρεια κάθε κύκλου εἶναι 3,14 φορὲς μεγαλύτερη ἀπ' τὴ διάμετρο τοῦ κύκλου καὶ ἡ διάμετρος πάλι εἶναι 3,14 φορὲς μικρότερη ἀπὸ τὴν περιφέρεια τοῦ ἴδιου κύκλου.***

Δοκιμάστε μόνοι σας καὶ θὰ τὸ ἰδῆτε.

Ἡ σχέση αὐτή, ποὺ ἔχει ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου μὲ τὴ διάμετρό της παριστάνεται μὲ τὸ ἑλληνικὸ γράμμα π σ' ὅλες τὶς Γεωμετρίες τοῦ κόσμου.

Τὸ π αὐτὸ φανερώνει τὸν ἀριθμὸ 3,14 δηλαδὴ π=3,14.

α'. Πῶς βρίσκομε τὸ μῆκος τῆς περιφέρειας, ὅταν ξέρωμε τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου

Εὔκολα μποροῦμε νὰ βροῦμε τὸ μῆκος τῆς περιφέρειας, ὅταν ξέρωμε τὴ διάμετρο. Ἀφοῦ, ὅπως μάθαμε, ἡ διάμετρος εἶναι 3,14 φορὲς μικρότερη ἀπὸ τὴν περιφέρεια, δὲν ἔχομε, παρὰ νὰ πάρωμε τὴ διάμετρο 3,14 φορές, δηδαδὴ νὰ πολλαπλασιάσωμε τὴ διάμετρο ἐπὶ τὸ 3,14 καὶ θὰ ἔχωμε τότε τὸ μῆκος τῆς περιφέρειας.

Παράδειγμα. Ἡ διάμετρος ἑνὸς κύκλου εἶναι 2 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου;

Λύση

2 μ.×3,14=6,28 μ. εἶναι ἡ περιφέρεια αὐτοῦ τοῦ κύκλου.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μῆκος τῆς περιφέρειας ἑνὸς κύκλου, πολλαπλασιάζομε τὴ διάμετρό του ἐπὶ 3,14.

β'. Πῶς βρίσκομε τὴ διάμετρο, ὅταν ξέρωμε τὸ μῆκος τῆς περιφέρειας

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴ διάμετρο, ὅταν γνωρίζωμε τὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου, ἐπειδὴ ξέρομε, ὅτι ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου, εἶναι 3,14 φορὲς

μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ διάμετρο, διαιροῦμε **τὸ** μῆκος τῆς περιφέρειας **διὰ τοῦ 3,14** καὶ τὸ πηλίκο εἶναι ἡ διάμετρος.

Παράδειγμα. Ἡ περιφέρεια ἑνὸς κύκλου **εἶναι** 2,355 μέτρα. Πόση **εἶναι ἡ διάμετρος αὐτοῦ** τοῦ κύκλου ;

Λύση

2,355 μ. : 3,14=0,75 μ. εἶναι τὸ μῆκος **τῆς** διαμέτρου **τοῦ κύκλου** αὐτοῦ.

Τώρα μποροῦμε εὔκολα ἀπὸ τὴν ἀκτίνα νὰ βροῦμε τὴν περιφέρεια, ἀφοῦ ξέρομε, ὅτι ἡ ἀκτίνα εἶναι μισὴ διάμετρος καὶ ἀπὸ τὴν περιφέρεια νὰ βροῦμε τὴν ἀκτίνα. Πῶς ;

Παράδειγμα 1. Ἡ ἀκτίνα ἑνὸς κύκλου εἶναι **1,5 μ.** Πόση εἶναι ἡ περιφέρειά του ;

Ἀπὸ τὴν ἀκτίνα θὰ βρῶ πρῶτα τὴ διάμετρο. Πολλαπλασιάζω τὴν ἀκτίνα 1,5 μ. ἐπὶ 2, γιατὶ ξέρω πὼς ἡ διάμετρος εἶναι δυὸ φορὲς μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ἀκτίνα. Αὐτὸ ποὺ θὰ βρῶ εἶναι ἡ διάμετρος. Τὴν πολλαπλασιάζω ἐπὶ 3,14 καὶ ἔχω τότε τὴν περιφέρεια.

Ὥστε ἔχομε ; 1,5 μ. × 2= 3 μ.=*διάμετρος.*
3 μ ×3,14 = 9,42 μ.=*περιφέρεια.*

Παράδειγμα 2. Ἡ περιφέρεια ἑνὸς κύκλου εἶναι 4,41 μ. Πόση εἶναι ἡ ἀκτίνα του ;

Λύση

Θὰ διαιρέσω τὴν περιφέρεια πρῶτα διὰ τοῦ 3,14 καὶ θὰ βρῶ τὴν διάμετρο. Ἔπειτα θὰ διαιρέσω τὴ διάμετρο διὰ τοῦ 2 καὶ θὰ βρῶ τὴν ἀκτίνα, γιατὶ ἡ διάμετρος εἶναι δυὸ φορὲς μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ἀκτίνα.

Δηλαδή : 4,71 : 3,14=1,5 μ. ***ἡ διάμετρος***
1,5 : 2 =0,75 μ. ***ἡ ἀκτίνα***

8. Τύποι

Γιὰ εὐκολία στὴ Γεωμετρία μεταχειριζόμαστε **τὰ ἀρχικὰ** γράμματα **γιὰ νὰ** γράψωμε **διάφορες** ἔννοιες. Π.χ. τὴν περιφέρεια τὴ γράφωμε μὲ **ἕνα** μεγάλο Π (γιὰ νὰ ξεχωρίζῃ ἀπὸ τὸ 3,14, ποὺ τὸ γράφομε, ὅπως **εἴπαμε**, μὲ μικρὸ π).

Τὴ διάμετρο **μὲ δ** μικρό, τὴν ἀκτίνα μὲ ἕνα α μικρὸ κλπ.

Ἔτσι μποροῦμε νὰ γράψωμε τοὺς *τύπους*, ὅπως λέμε στὴ Γεωμετρία, αὐτῶν ποὺ μάθαμε.

Π=δ×π. *Ὁ τύπος* αὐτὸς θὰ διαβασθῇ ἔτσι:

Περιφέρεια=διάμετρος×3,14.

Τὸν παραπάνω τύπο (Π=δ×π) μποροῦμε νὰ τὸν γράψωμε καὶ **Π=2α×π.** Ὁ τύπος αὐτὸς θὰ διαβασθῇ ἔτσι:

Περιφέρεια=δυὸ ἀκτῖνες (δηλαδὴ διάμετρος) *ἐπὶ 3,14.*

Μποροῦμε ἀκόμα νὰ γράψωμε μὲ τὸν τύπο πῶς βρίσκομε τὴ διάμετρο ἀπὸ τὴν περιφέρεια ἔτσι: $\delta = \frac{\Pi}{\pi}$ δηλαδή:

Διάμετρος=Περιφέρεια διὰ 3,14

Ἀσκήσεις

1. *Πῶς βρίσκομε τὴν περιφέρεια ἀπὸ τὴν ἀκτίνα ἢ ἀπὸ τὴν διάμετρο;*

2. *Πῶς βρίσκομε τὴ διάμετρο ἢ τὴν ἀκτίνα ἀπὸ τὴν περιφέρεια;*

3. *Ἡ διάμετρος ἑνὸς κύκλου εἶναι 3,5 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ περιφέρειά του;*

4. *Ἡ ἀκτίνα ἑνὸς ἁλωνιοῦ εἶναι 6 μέτρα. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ περιφέρειά του;*

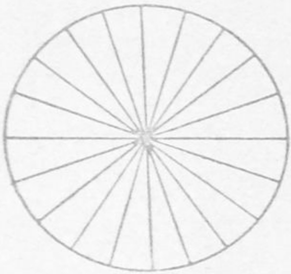
5. *Ἡ περιφέρεια ἑνὸς κύκλου εἶναι 15,7 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ διάμετρος καὶ πόση ἡ ἀκτίνα του;*

6. *Οἱ τροχοὶ ἑνὸς αὐτοκινήτου ἔχουν ἀκτίνα 0,60 μ. Πόση εἶναι ἡ περιφέρειά τους καὶ πόσες στροφὲς θὰ κάνῃ ὁ καθένας γιὰ νὰ διατρέξῃ τὸ αὐτοκίνητο 75.360 μέτρα;*

9. Πῶς βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου

Στὰ προηγούμενα μαθήματα εἴδαμε πῶς ἡ περίμετρος ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου μὲ πάρα πολλὲς πλευρὲς εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν περιφέρει τοῦ κύκλου, στὸν ὁποῖο εἶναι ἐγγεγραμμένο. Ἂν τώρα στὸν κύκλο σύρωμε πάρα πολλὲς ἀκτῖνες, θὰ σχηματισθοῦν πολλοὶ τομεῖς, οἱ ὁποῖοι μποροῦν νὰ θεωρηθοῦν σὰν τρίγωνα, ποὺ ἔχουν βάση τὸ τόξο τοῦ τομέα καὶ ὕψος τους τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου (σχ. 95).

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ξέρομε, ὅτι πολλαπλασιάζομε τὴ βάση του ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ διαιροῦμε διὰ 2. Δὲν ἔχομε λοιπὸν ἐδῶ νὰ κάνωμε τίποτε ἄλλο, παρὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν ὅλων αὐτῶν τῶν τριγώνων, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου.



Σχ. 95

Μποροῦμε ὅμως νὰ σκεφθοῦμε ἕναν ἁπλούστερο τρόπο. Ὅλες μαζὶ οἱ βάσεις τῶν τριγώνων αὐτῶν, δηλαδὴ ὅλα μαζὶ τὰ τόξα τῆς περιφέρειας μᾶς κάνουν ὅλη τὴν περιφέρεια (σχ 95). Ἀντὶ λοιπὸν νὰ πολλαπλασιάζωμε χωριστὰ κάθε τόξο ποὺ εἶναι ἡ βάση κάθε τριγώνου, ἐπὶ τὴν ἀκτίνα ποὺ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου καὶ νὰ διαιροῦμε διὰ 2, πολλαπλασιάζομε μιὰ καὶ καλὴ ὅλα τὰ τόξα δηλαδὴ ***τὴν περιφέρεια τοῦ κύκλου*** ἐπὶ τὴν ἀκτίνα καὶ διαιροῦμε διὰ 2.

Συμπέρασμα :

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου πολλαπλασιάζομε τὴν περιφέρεια (Π) ἐπὶ τὴν ἀκτίνα (α) καὶ διαιροῦμε διὰ τοῦ 2. Ἔτσι ἔχομε τὸν τύπο $E = \frac{\Pi \times \alpha}{2}$.

Ἂν ξέρωμε τώρα τὴν ἀκτίνα, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, θὰ ἐργασθοῦμε ἔτσι. Θὰ πολλαπλασιάσωμε τὴ διάμετρο ἐπὶ 3,14 καὶ θὰ βροῦμε τὴν περιφέρεια Τὴν περιφέρεια πάλι θὰ τὴν πολλαπλασιάσωμε ἐπὶ τὴν ἀκτίνα καὶ τὸ γινόμενο θὰ τὸ διαιρέσωμε διὰ 2. Ἔτσι θὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου.

Μ' ἄλλα λόγια θὰ ἔχωμε τὸν παρακάτω τύπο.

Ἐμβαδὸν κύκλου $= \frac{\alpha \times 2 \times \pi \times \alpha}{2}$. Ἁπλοποιοῦμε τὸ κλάσμα διὰ τοῦ 2 καὶ μᾶς μένει τώρα $E = \alpha \times \pi \times \alpha$.

Στὴν ἀριθμητική, ὅταν πολλαπλασιάζωμε ἕναν ἀριθμὸ ἐπὶ τὸν ἑαυτό του λέμε ὅτι βρίσκομε τὸ ***τετράγωνο*** αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τὸ σημειώνομε μὲ ἕνα μικρὸ 2, ποὺ τὸ βάνομε ἐπάνω καὶ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ.

Παράδειγμα $4 \times 4 = 4^2$, $53 \times 53 = 53^2$ κλπ.

Καὶ ἐδῶ λοιπόν, ποὺ ἔχομε νὰ πολλαπλασιάσωμε ἀκτίνα ἐπὶ τὸν ἑαυτό της, ἔχομε τὴν ἀκτίνα στὸ τετράγωνο καὶ μποροῦμε νὰ τὸ γράφωμε ἔτσι $α^2$, ποὺ θά πῆ $α \times α$. Ἑπομένως ἔχομε τώρα τὸν τελικὸ τύπο *τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου* $E = α^2 \times π$

Σημαίνει : *ἐμβαδὸν κύκλου=ἀκτίνα ἐπὶ τὸν ἑαυτό της ἐπὶ 3,14.*

Παράδειγμα. Ἡ ἀκτίνα ἑνὸς κύκλου εἶναι 5 μέτρα. Ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ τοῦ κύκλου ;

Σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε, θὰ λύσωμε τὸ πρόβλημα ἔτσι :

α'. Ἀναλυτικὰ

$$E = \frac{5 \times 2 \times 3{,}14 \times 5}{2} = \frac{157}{2} = 78{,}5$$ τ.μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου.

β'. Μὲ τὸν τύπο

$E = 5^2 \times 3{,}14 = 78{,}5$ τ.μ. εἶναι τὸν ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου.

Ἀσκήσεις

Σημείωση : Θὰ γίνουν πρῶτα ἀναλυτικὰ καὶ ἔπειτα μὲ τὸν τύπο.

1. Ἡ ἀκτίνα ἑνὸς κύκλου εἶναι 3 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

2. Ἡ διάμετρος ἑνὸς κύκλου εἶναι 8 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

3. Ἡ περιφέρεια ἑνὸς κύκλου εἶναι 18,98 μέτρα. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ;

4. Στὸ σχολικὸ κῆπο ἔγινε μιὰ κυκλικὴ πρασιὰ μὲ ἀκτίνα μέτρα. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα ἔχει αὐτὴ ἡ πρασιά ;

5. Ὁ σχολικὸς κῆπος εἶναι ἕνα τετράγωνο μὲ περίμετρο 80 μέτρα. Ἂν κατασκευάσωμε δυὸ κυκλικὲς πρασιὲς μὲ ἀκτίνα 6 μ. τὴ μιὰ καὶ μὲ 8 μ. τὴν ἄλλη, πόσα τετραγωνικὰ μέτρα θὰ εἶναι ἡ καθεμιὰ καὶ πόσα τετραγωνικὰ μέτρα θὰ μείνουν στὸν ὑπόλοιπο κῆπο ;

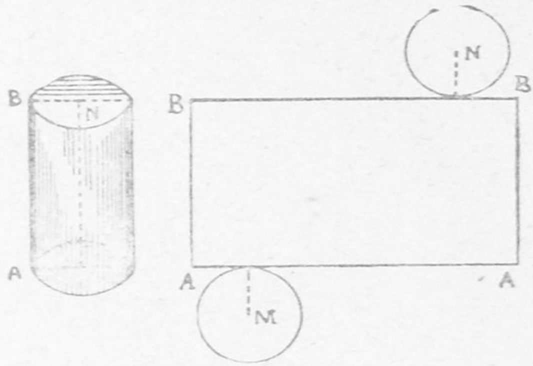
Κάνετε καὶ σεῖς διάφορα προβλήματα μόνοι σας.

10. Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυλίνδρου

Παρατήρηση 1. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἀποτελεῖται ἀπὸ τὶς δυὸ βάσεις του, ποὺ εἶναι, ὅπως εἴδαμε κύκλοι ἴσοι καὶ παράλληλοι καὶ ἀπὸ τὴν παράπλευρή του ἐπιφάνεια, ποὺ εἶναι κυρτή. Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυλίνδρου, θὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῶν δυὸ κυκλικῶν βάσεων καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας καὶ τὸ ἄθροισμά της, θὰ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυλίνδρου.

Τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο κύκλων, μάθαμε πῶς τὸ βρίσκομε ($E = \alpha^2 \times \pi$). Βρίσκομε πρῶτα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς κύκλου καὶ ἔπειτα τὸ διπλασιάζομε, γιατὶ οἱ δυὸ κύκλοι (βάσεις) τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἴσοι. Πῶς ὅμως θὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας ;

Παρατήρηση 2. Παίρνομε μιὰ κόλλα χαρτὶ (σχ. 96) καὶ τυλίγομε



Σχ. 96

μ' αὐτὴ τὴν κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου. Κόβομε τὸ χαρτί, ποὺ περισσεύει καὶ ἔπειτα τὸ ἀνοίγομε. Θὰ παρατηρήσωμε, ὅτι τὸ χαρτὶ ποὺ ἔμεινε, ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου. Ὥστε ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἕνα ὀρθογώνιο, ποὺ ἔχει βάση τὴν περιφέρεια τῆς κυκλικῆς βάσεώς του καὶ ὕψος, τὸ ὕψος αὐτοῦ. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ξέρομε πῶς βρίσκεται. Πολλαπλασιάζομε τὴ βάση ἐπὶ τὸ ὕψος του. Στὴν κυρτὴ ἐπιφάνεια βάση εἶναι ἡ περιφέρεια τῆς κυκλικῆς βάσεως καὶ ὕψος, τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου.

Συμπέρασμα

Γιὰ νὰ βροῦμε λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυλίνδρου πολλαπλασιάζομε τὴν περιφέρεια τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἔπειτα προσθέτομε τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεων τοῦ κυλίνδρου στὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας καὶ ἔχομε ἔτσι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυλίνδρου.

Παράδειγμα. Ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφάνειας κυλίνδρου, ποὺ ἡ ἀκτίνα τῆς βάσεώς του εἶναι 0,90 μέτρα καὶ τὸ ὕψος του 3,5 μέτρα ;

Λύση

α'. Θὰ βροῦμε πρῶτα τὸ ἐμβαδὸν τῶν δυὸ κυκλικῶν βάσεών του $E=\alpha^2 \times \pi$ δηλαδὴ $0,90 \times 0,90 \times 3,14 = 2,5434$ τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς βάσεως. Τὸ ἐμβαδὸν τῶν δυὸ βάσεων θὰ εἶναι:

$$2,5434 \times 2 = 5,0868 \text{ τ. μ.}$$

β'. Θὰ βροῦμε τώρα τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας. Θὰ πολλαπλασιάσωμε τὴν περιφέρεια τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου.

Ἀκτίνα $0,90 \times 2 = 1,80$ μ. 1,80 μ. εἶναι ἡ διάμετρος

, 70 μ. $\times 3,14$ μ. $= 5,652$ μ. = περιφέρεια

5,642 μ. $\times 3,5$ μ. $= 19,782$ τ. μ. = ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυλίνδρου

γ'. Θὰ προσθέσωμε τώρα ὅλα τὰ ἐμβαδὰ

5,0868 τ. μ.	ἐμβαδὸν τῶν δυὸ κυκλικῶν βάσεων
19,782 τ. μ.	ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας
24,8688 τ. μ.	

Ἀσκήσεις

1. Ἡ ἀκτίνα τῆς βάσεως ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι 0,75 μ. καὶ τὸ ὕψος του 3 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῶν δυὸ βάσεών του, πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειάς του καὶ πόσο τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφάνειάς του;

2. Ἡ ἀκτίνα τῆς βάσεως ἑνὸς κυλινδρικοῦ δοχείου εἶναι 0,25 μ. καὶ τὸ ὕψος του 1,5 μέτρα. Πόσο θὰ πληρώσωμε γιὰ νὰ κλείσωμε μὲ κόντρα πλακὲ τὴ βάση του καὶ τὴν κυρτὴ ἐπιφάνεια, ἂν τὸ τετραγωνικὸ μέτρο του στοιχίζει 5.000 δραχ.;

11. Ὄγκος τοῦ κυλίνδρου

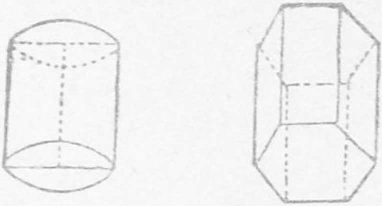
Παρατήρηση. Ἂν παρατηρήσωμε ἕνα πρῖσμα καὶ ἕνα κύλινδρο, θὰ ἰδοῦμε, ὅτι αὐτὰ τὰ δυὸ γεωμετρικὰ σώματα ἔχουν τὶς παρακάτω ὁμοιότητες (σχ. 97).

1) Ἔχουν ἀπὸ δυὸ βάσεις ἴσες καὶ παράλληλες.

2) Ἂν φαντασθοῦμε ἕνα πρῖσμα μὲ πάρα πολλὲς παράπλευρες ἕδρες, ἡ *περίμετρος* καθεμιᾶς ἀπ' τὶς βάσεις του θὰ εἶναι *περιφέρεια* κύκλου, τὸ *πολύγωνο* θὰ εἶναι *κύκλος* καὶ τὸ *πρῖσμα* θὰ εἶναι *κύλινδρος*.

Συμπέρασμα :

Ὥστε ὁ κύλινδρος εἶναι ἕνα πρῖσμα, ποὺ ἔχει πάρα πολλὲς ἕδρες. Συνεπῶς καὶ τὸν ὄγκο τοῦ κυλίνδρου θὰ τὸν βροῦμε, ὅπως



Σχ. 97

βρίσκομε τὸν ὄγκο τοῦ πρίσματος, δηλαδὴ θὰ πολλαπλασιάσωμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ὁ τύπος του εἶναι : ὄγκος$=\alpha^2 \times \pi \times \upsilon$.

Σημείωση. Στοὺς τύπους τῆς Γεωμετρίας, γιὰ νὰ μὴ μπερδευώμαστε μὲ τὰ ἄλλα γράμματα, παραλείπομε τὸ σημεῖο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (X) καὶ στὴ θέση του βάζομε τελεία.

Τὸν παραπάνω τύπο λοιπὸν θὰ τὸν γράψωμε ἔτσι

Ὄγκος κυλίνδρου$=\alpha^2 . \pi . \upsilon$.

Ἀσκήσεις

1. Ἡ ἀκτίνα τῆς βάσεως ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι 0,30 μ. καὶ τὸ ὕψος του 2 μ. Ποιὸς εἶναι ὁ ὄγκος του ;

Λύση

α΄. Βρίσκομε πρῶτα τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδου

Ε=0,30 μ.×0,30 μ.×3,14=0,2826 τ. μ.

Αὐτὸ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του.

β΄. Πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος καὶ βρίσκομε τὸν ὄγκο τοῦ κυλίνδρου.

Ἐμβαδὸν βάσεως 0,2826 τ. μ.×2 μ.=0,5652 κ. μ.

εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου.

2. Πόσα κιλὰ νερὸ θὰ χωρέση κυλινδρικὸ δοχεῖο, ποὺ ἔχει διάμετρο 1,5 μ. καὶ ὕψος 3 μέτρα ;

3. Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι 6,28 μ. καὶ τὸ *ὕψος του 2 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ ἀκτίνα τοῦ κυλίνδρου καὶ πόσος ὁ ὄγκος του ;*

4. Ἡ ἀκτίνα τῆς βάσεως ἑνὸς κυλινδρικοῦ δοχείου εἶναι 0,90 μέτρα καὶ τὸ ὕψος του 1,80 μέτρα. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του ; Πόσες ὀκάδες γάλα χωρεῖ ;

5. Ἰχνογραφίστε τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ κυλίνδρου.

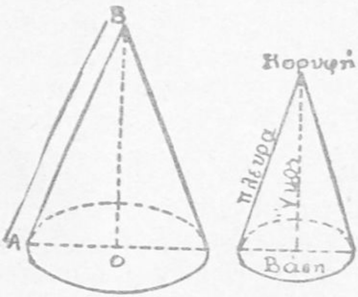
6. Κάμετε ἀπὸ χαρτόνι ἕνα πρῖσμα καὶ ἕνα κύλινδρο, ποὺ ἔχουν καὶ τὰ δυὸ τὴν ἴδια χωρητικότητα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β'.

1. Κῶνος

Τὸ στερεὸ σῶμα, ποὺ βλέπετε (Σχ. 98) εἶναι ὁ **κῶνος**. Σώματα κωνικὰ λέγονται *ὅλα τὰ σώματα, ποὺ ἔχουν τὸ σχῆμα τοῦ κώνου*. Μερικὰ τέτοια εἶναι τὰ χωνιά, οἱ κωνικὲς σκηνές, μερικὲς καλύβες χωρικῶν, τὸ ἐπάνω μέρος τοῦ δοχείου (Σχ. 99).

Παρατήρηση. Προσέξτε τὸ ἐξωτερικὸ τοῦ κώνου. Θὰ ἰδῆτε, ὅτι



Σχ. 98

Σχ. 99

ἀποτελεῖται ἀπὸ δυὸ ἐπιφάνειες. Ἀπὸ **μιὰ** *κυρτὴ* ἐπιφάνεια καὶ μιὰ *ἐπίπεδη*, στὴν ὁποία στηρίζεται.

Ἡ ἐπίπεδη ἐπιφάνεια, στὴν ὁποία στηρίζεται ὁ κῶνος, εἶναι ἡ *βάση* του καὶ εἶναι κύκλος, κυρτὴ δὲ εἶναι ἡ παράπλευρη ἐπιφάνειά του.

Ἡ *παράπλευρη* ἐπιφάνεια τελειώνει σὲ **κορυφή**, ποὺ βρίσκεται ἀπέναντι στὴ βάση.

Ἡ κάθετη εὐθεῖα ἀπὸ τὴν κορυφὴ στὴ βάση εἶναι **τὸ ὕψος τοῦ** κώνου καὶ λέγεται καὶ **ἄξονας** αὐτοῦ.

Ἡ κάθετη γραμμή, ποὺ ἑνώνει ἕνα σημεῖο τῆς περιφέρειας **τῆς** βάσεως τοῦ κώνου μὲ τὴν κορυφή του, λέγεται *πλευρὰ* τοῦ κώνου.

Κῶνος εἶναι στερεὸ σῶμα, ποὺ ἔχει βάση κύκλο καὶ παράπλευρη ἐπιφάνεια μιὰ κυρτὴ ἐπιφάνεια, ποὺ τελειώνει σὲ κορυφή.

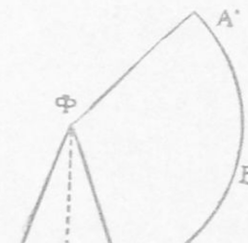
Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφάνειας κώνου βρίσκομε χωριστὰ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του καὶ χωριστὰ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειάς του καὶ τὸ ἄθροισμά τους εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου.

Ἡ βάση τοῦ κώνου εἶναι κύκλος καὶ εὔκολα βρίσκομε τὸ ἐμβαδόν του, ὅπως μάθαμε ($E = \alpha^2 \cdot \pi$).

Παρατήρηση. Ἡ κυρτὴ ὅμως ἐπιφάνεια δὲν ξέρομε τί εἴδους σχῆμα ἔχει. Γιὰ νὰ τὸ βροῦμε κάνομε τὸ ἑξῆς: Παίρνομε ἕνα χαρτὶ καὶ τυλίγομε τὴν κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου. Κόβομε τὸ χαρτί, ποὺ περισσεύει καὶ ἀφίνομε μόνο τόσο, ὅση ἀκριβῶς εἶναι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια. Ἔπειτα ἀνοίγομε τὸ χαρτὶ αὐτὸ καὶ βλέπομε, ὅτι ἔχει σχῆμα *κυκλικοῦ τομέα* μὲ κέντρο τὴν κορυφὴ τοῦ κώνου καὶ μὲ ἀκτίνα τὴν πλευρά του (Σχ. 100).

Μποροῦμε τώρα, ποὺ ξέρομε, ὅτι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου εἶναι κυκλικὸς τομέας, νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδόν της, ὅπως βρίσκομε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέα.



Σχ. 100

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέα τὸ βρίσκομε, ὅπως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, γιατὶ ὁ τομέας, ὅπως εἴδαμε, εἶναι *τρίγωνο*. Πολλαπλασιάζομε δηλαδὴ τὴ βάση τοῦ τομέα ἐπὶ τὸ ὕψος του καὶ διαιροῦμε διὰ 2.

Βάση ὅμως τοῦ τομέα εἶναι τὸ τόξο του, πού, ὅπως εἴδαμε μὲ τὸ χαρτὶ ποὺ τυλίξαμε τὸν κῶνο, εἶναι ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως *τοῦ κώνου* καὶ ὕψος του εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου, δηλαδὴ ἡ *ἀκτίνα* τοῦ τομέα.

Συμπέρασμα

Γιὰ νὰ βροῦμε λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας κώ

νου πολλαπλασιάζομε τὴν περιφέρεια τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὴν πλευρά του καὶ διαιροῦμε διὰ 2.

Προβλήματα

1. *Βρῆτε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας κώνου, ποὺ ἡ πλευρά του εἶναι 1,5 μ. καὶ ἡ ἀκτίνα τῆς βάσεώς του 0,5 μ.*

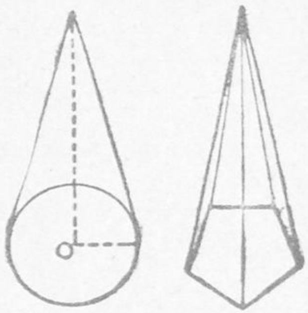
2. *Ἀπὸ τὸν παραπάνω κῶνο νὰ βρῆτε τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφάνειάς του.*

3. *Ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας κώνου, ὅταν ἡ πλευρά του εἶναι 4 μέτρα καὶ ἡ διάμετρος τῆς βάσεώς του 2,5 μ.,*

4. *Πόσα μέτρα ὕφασμα μὲ πλάτος $\frac{7}{8}$ πηχ., χρειάζονται γιὰ νὰ κάνωμε μιὰ κωνικὴ σκηνὴ μὲ πλευρὰ 8 μέτρα καὶ ἀκτίνα βάσεως 2 μέτρα ;*

3. Ὄγκος τοῦ κώνου

Παρατήρηση. Ἂν παρατηρήσωμε μιὰ πολυγωνικὴ κανονικὴ πυραμίδα καὶ ἕνα κῶνο (σχ. 101), θὰ ἰδοῦμε, ὅτι μοιάζουν. Καὶ τὰ δυὸ αὐτὰ στερεὰ σώματα ἔχουν μιὰ βάση καὶ παράπλευρη ἐπιφάνεια, ποὺ τελειώνει σὲ κορυφή. Ἂν δὲ κάνωμε τὴ βάση τῆς πυραμίδας, δηλαδὴ τὸ πολύγωνο μὲ πάρα πολλὲς πλευρές, τότε ἡ περίμετρός του θὰ καταντήση *περιφέρεια*, τὸ *πολύγωνο κύκλος* καὶ ἡ *παράπλευρη* ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδας ***κυρτὴ*** ἐπιφάνεια. Δηλαδὴ ἡ παραμίδα θὰ γίνη κῶνος, ὅπως εἴδαμε καὶ τὸ *πρῖσμα* νὰ γίνεται ***κύλινδρος***. Ὥστε ὁ κῶνος μπορεῖ νὰ θεωρηθῆ πυραμίδα μὲ *πάρα πολλὲς ἕδρες*.



Σχ. 101

Αὐτὸ τὸ βλέπομε καλύτερα, ἂν πάρωμε μιὰ πυραμίδα καὶ ἕνα κῶνο μὲ τὴν ἴδια βάση καὶ τὸ ἴδιο ὕψος καὶ τοὺς γεμίσωμε ψιλὸ ἄμμο. Θὰ ἰδοῦμε, ὅτι χωροῦν τὴν ἴδια ποσότητα (σχ. 101).

Γιὰ νὰ βροῦμε λοιπὸν τὸν ὄγκο κώνου, κάνομε ὅ,τι κάνομε γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο παραμίδας.

Ἔτσι γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο κώνου πολλαπλασιάζομε τὸ

ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του καὶ διαιροῦμε διὰ 3.

Τύπος : $\text{Ὄγκος κώνου} = \frac{\alpha^2 \cdot \pi \cdot \upsilon}{3}$.

4. Πῶς κατασκευάζομε κῶνο ἀπὸ χαρτόνι

Κάνομε πρῶτα τὸν κύκλο τῆς βάσεως. Ἔπειτα, ἀφοῦ βροῦμε τὸ μῆκος τῆς περιφέρειας τῆς βάσεως, ὅπως μάθαμε ($\alpha \times 2 \times 3{,}14$), μὲ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτη, ὅσο θέλομε νὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου, γράφομε ἕνα τόξο, ὅσο εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφέρειας τῆς βάσεως τοῦ κώνου μας. Ἑνώνομε ὕστερα τὰ ἄκρα τοῦ τόξου καὶ ἀφίνομε νὰ συμπέσουν οἱ δυὸ πλευρὲς τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας. Τυλίγομε τὸ τόξο τοῦ τομέα γύρω στὸν κύκλο, ποὺ κόψαμε γιὰ βάση, κολλᾶμε μὲ λουρίδες χαρτὶ τὶς ἑνώσεις καὶ ἔτσι ἔχομε τὸν κῶνο μας.

Μποροῦμε, ἂν θέλωμε, νὰ τὸν τυλίξωμε μὲ χρωματιστὸ χαρτὶ γιὰ νὰ γίνη πιὸ ὡραῖος.

Προβλήματα

1. Κατασκευάστε κῶνο ἀπὸ χαρτόνι ἢ πηλό.

2. Πῶς βρίσκομε τὸν ὄγκο τοῦ κώνου καὶ γιατὶ ἐργαζόμαστε ἔτσι;

3. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κώνου, ποὺ τὸ ὕψος του εἶναι 6 μ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του 4,14 μ.;

4. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κώνου, ποὺ ἡ βάση του ἔχει ἀκτίνα 1,5 μ. καὶ ὕψος 2 μ.;

5. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος κώνου, ποὺ ἔχει διάμετρο βάσεως 3,5 μ. καὶ ὕψος 3 μ.;

6. Πόσο εἶναι τὸ ὕψος κώνου, ποὺ ὁ ὄγκος του εἶναι 35 κ. μ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν της βάσεώς του 9 τ. μ.;

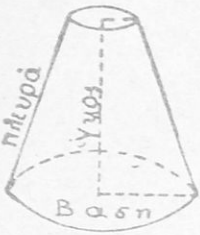
5. Κόλουρος κῶνος

Ἂν κόψωμε τὸν κῶνο μὲ ἕνα ἐπίπεδο παράλληλα πρὸς τὴ βάση του ἔχομε τὸν *κόλουρο κῶνο* (σχ. 102).

Ἡ τομὴ τοῦ κώνου εἶναι κύκλος μικρότερος ἀπὸ τὸν κύκλο τῆς βάσεώς του.

Σχῆμα κολούρου κώνου ἔχουν διάφορα ἀμπαζούρ, ποτήρια, δακτυλίθρες, δοχεῖα μεταφορᾶς ὑγρῶν (σχ. 103) κλπ.

Παρατήρηση. Όπως βλέπετε ὁ κόλουρος κῶνος τελειώνει σὲ τρεῖς ἐπιφάνειες *Δυὸ κύκλους καὶ μιὰ κυρτὴ ἐπιφάνεια*. Οἱ δυὸ κύκλοι εἶναι *παράλληλοι* καὶ ἄνισοι. Βάσεις τοῦ κολούρου κώνου εἶναι οἱ δυὸ κύκλοι του. *Πλευρά του* δὲ ἡ εὐθεῖα, ποὺ ἑνώνει τὶς δυὸ περι-



Σχ. 102


Σχ. 103

φέρειες τῶν κυκλικῶν βάσεών του καὶ βρίσκεται ἐπάνω στὴν κυρτὴ ἐπιφάνεια. Ὕψος τοῦ κολούρου κώνου εἶναι ἡ εὐθεῖα γραμμή, ποὺ ἑνώνει τὰ κέντρα τῶν δύο κύκλων του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ'.

1. Σφαίρα

Τὰ τόπια, οἱ βῶλοι, ποὺ παίζετε, εἶναι σώματα *σφαιρικά*. Τὸ στερὸ σῶμα, ποὺ ἔχει τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγεται *σφαίρα* (Σχ. 104)

α'. Ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας

Παρατήρηση. Προσέξτε τὴ σφαίρα. Θὰ ἰδῆτε, ὅτι τελειώνει σὲ μιὰ μόνη κυρτὴ ἐπιφάνεια.

β'. Βάση τῆς σφαίρας

Ἀφῆστε κάτω τὴ σφαίρα. Θὰ ἰδῆτε, ὅτι στηρίζεται σὲ ὁποιοδήποτε μέρος τῆς κυρτῆς ἐπιφανειάς της. Δηλαδὴ ἡ σφαίρα δὲν ἔχει ξεχωριστὴ βάση.


Σχ. 104

γ'. Κέντρο τῆς σφαίρας

Μέσα στὴ σφαίρα καὶ ἀκριβῶς στὴ μέση ὑπάρχει ἕνα σημεῖο, ἀπὸ τὸ ὁποῖο ἀπέχουν ἐξ ἴσου ὅλα τὰ σημεῖα τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειάς της. Τὸ σημεῖο αὐτὸ λέγεται **κέντρο τῆς σφαίρας.**

Ἂν κάποιο σημεῖο τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρο λιγότερο ἢ περισσότερο ἀπὸ ἕνα ἄλλο, τότε τὸ σῶμα αὐτὸ δὲν εἶναι σφαίρα.

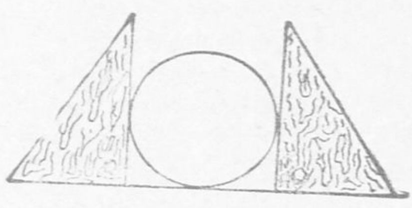
Σφαίρα εἶναι τὸ στερεὸ σῶμα, ποὺ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφάνειάς του ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ ἕνα σημεῖο, ποὺ λέγεται κέντρο τῆς σφαίρας.

δ΄. Ἀκτίνα - Διάμετρος

Ἂν ἀπὸ τὸ κέντρο φέρωμε εὐθεῖες στὴν ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, οἱ εὐθεῖες αὐτὲς λέγονται ***ἀκτῖνες***. Ἡ ***ἀκτίνα*** ἑνώνει τὸ κέντρο τῆς σφαίρας μὲ ἕνα σημεῖο τῆς ἐπιφάνειας. Μὲ ἄλλα λόγια: Ἡ εὐθεῖα, ποὺ ἑνώνει τὸ κέντρο τῆς σφαίρας μὲ ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς ἐπιφάνειάς της, λέγεται ***ἀκτίνα*** τῆς σφαίρας.

Εὔκολα καταλαβαίνετε, πώς, ἀφοῦ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφάνειας τῆς σφαίρας ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ κέντρο τους, ὅλες οἱ ἀκτῖνες τῆς ἴδιας σφαίρας εἶναι ἴσες μεταξύ τους.

Ἂν ἀπὸ ἕνα σημεῖο τῆς ἐπιφάνειας τῆς σφαίρας φέρωμε μιὰ εὐθεῖα πρὸς ἕνα ἄλλο σημεῖο τῆς ἐπιφάνειάς της, ποὺ νὰ περνᾷ ἀπὸ τὸ κέντρο τῆς σφαίρας, ἡ εὐθεῖα αὐτὴ λέγεται ***διάμετρος.***



Σχ. 105

Ἡ διάμετρος ἑνώνει δυὸ σημεῖα τῆς ἐπιφάνειας τῆς σφαίρας καὶ περνᾷ ἀπὸ τὸ κέντρο της. Ὅλες οἱ διάμετροι τῆς ἴδιας σφαίρας εἶναι ἴσες μεταξύ τους καὶ φυσικὰ διπλάσιες τῆς ἀκτίνας τῆς ἴδιας σφαίρας. Διαμέτρους ἢ ἀκτῖνες μποροῦμε νὰ φέρωμε πολλὲς σὲ μιὰ σφαίρα.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴ διάμετρο ἀφίνομε νὰ περάση μόλις ἡ σφαίρα ἀπὸ δυὸ γνώμονες, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 105. Ἡ ἀπόσταση μεταξὺ τῶν καθέτων πλευρῶν μᾶς δείχνει τὴ διάμετρο τῆς σφαίρας.

ε΄. Τομὴ τῆς σφαίρας.—Μέγιστοι καὶ μικροὶ κύκλοι

Παρατήρηση 1. Πάρτε ἕνα σῶμα, ποὺ ἔχει σφαιρικὸ σχῆμα. Π.χ. ἕνα ὁλοστρόγγυλο πορτοκάλι. Μ᾽ ἕνα μαχαίρι τὸ κόβετε σὲ δυὸ κομμάτια. Προσέξτε τὴν τομὴ (τὸ κόψιμο). Βλέπετε, πὼς εἶναι *ἐπίπεδη* ἐπιφάνεια καὶ ἔχει τὸ σχῆμα κύκλου, εἶναι δηλαδὴ σωστὸς *κύκλος*. Ὁσεσδήποτε ἐπίπεδες τομὲς καὶ ἂν κάμετε στὸ πορτοκάλι αὐτὸ καὶ σὲ ὁποιαδήποτε σφαίρα, πάντα θὰ σᾶς παρουσιασθῆ *κύκλος*.

Ἡ ἐπίπεδη λοιπὸν τομὴ τῆς σφαίρας εἶναι κύκλος.

Παρατήρηση 2, Παρατηροῦμε ἀκόμα, πὼς ὅσο ἡ τομὴ πλησιάζει πρὸς τὸ κέντρο τῆς σφαίρας, τόσο πιὸ *μεγαλύτερος* εἶναι ὁ κύκλος, ὅσο δὲ ἀπομακρύνεται ἀπὸ τὸ κέντρο, τόσο *μικρότερος* εἶναι ὁ κύκλος. Ἂν δὲ ἡ τομὴ περάση ἀκριβῶς ἀπὸ τὸ κέντρο τῆς σφαίρας, τότε θὰ ἔχωμε τὸ πιὸ *μεγάλο κύκλο*, ποὺ ἡ ἀκτίνα του θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτίνα τῆς σφαίρας.

Ὅσες δὲ τομὲς καὶ ἂν κάνωμε, ποὺ νὰ περνοῦν ἀπὸ τὸ κέντρο τῆς σφαίρας, θὰ ἰδοῦμε, ὅτι ὅλοι οἱ κύκλοι ποὺ θὰ παρουσιασθοῦν, θὰ εἶναι ἴσοι μεταξύ τους.

Ὁ κύκλος, ποὺ γίνεται ἀπὸ τομή, ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρο τῆς σφαίρας λέγεται *μέγιστος* κύκλος. Σὲ κάθε σφαίρα μποροῦμε νὰ ἔχωμε ὅσους θέλομε μέγιστους κύκλους. Ὅλοι οἱ μέγιστοι κύκλοι κάθε σφαίρας εἶναι ἴσοι μεταξύ τους.

Ὅλοι οἱ ἄλλοι κύκλοι, ποὺ δὲν περνοῦν ἀπὸ τὸ κέντρο τῆς σφαίρας, λέγονται *μικροὶ κύκλοι*.

στ΄. Ἡμισφαίρια

Κάθε μέγιστος κύκλος χωρίζει τὴ σφαίρα σὲ δυὸ ἴσα μέρη, ποὺ λέγονται *ἡμισφαίρια*. Ἡ γῆ, ποὺ εἶναι σὰν μιὰ σφαίρα, χωρίζεται μὲ τὸν Ἰσημερινό, ποὺ εἶναι μέγιστος κύκλος, σὲ δυὸ ἡμισφαίρια, τὸ Βόρειο καὶ τὸ Νότιο ἡμισφαίριο.

ζ΄. Ἄξονας καὶ πόλοι

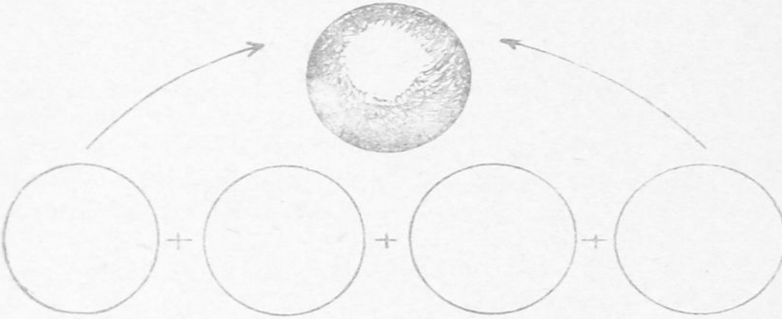
Παρατήρηση. Ἂν περάσωμε ἕνα εὐθύγραμμο σύρμα, ἀπὸ τὸ κέντρο τῆς σφαίρας, τότε τὸ σύρμα αὐτὸ θὰ εἶναι διάμετρος τῆς σφαίρας αὐτῆς. Ἂν τὸ σύρμα αὐτὸ εἶναι μεγαλύτερο καὶ ἐξέχει ἀπὸ τὴ μιὰ καὶ τὴν ἄλλη μεριὰ τῆς σφαίρας, τότε μποροῦμε νὰ περιστρέψωμε τὴ σφαίρα αὐτὴ γύρω ἀπὸ τὸ σύρμα.

Στὴν περίπτωση αὐτὴ λέμε, πὼς τὸ σύρμα αὐτό, γύρω ἀπὸ όποιο περιστρέφεται ἡ σφαίρα, εἶναι ὁ *ἄξονας τῆς σφαίρας*. Τὰ σημεῖα τῆς σφαιρικῆς ἐπιφάνειας, ἀπὸ ὅπου διέρχεται ὁ ἄξονας, λέγονται *πόλοι*.

Στὴν ὑδρόγειο σφαίρα, ὅπως ξέρωμε, ἔχομε τὸν ἄξονα, γύρω ἀπὸ τὸν ὁποῖο περιστρέφεται, τοὺς πόλους, τὸ Βόρειο καὶ τὸ Νότιο, τοὺς μέγιστους κύκλους (μεσημβρινοὺς καὶ Ἰσημερινὸ) καὶ τοὺς μικροὺς κύκλους (παράλληλους κύκλους). Κοιττᾶξτε τὴν ὑδρόγειο σφαίρα τοῦ σχολείου σας καὶ θὰ τὰ βρῆτε.

2. Ἐμβαδὸν τῆς σφαίρας

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφάνειας μιᾶς σφαίρας, πολλαπλασιάζομε τὴ διάμετρο ἐπὶ τὸν ἑαυτό της καὶ τὸ γινόμενο ἐπὶ 3,14 ἢ πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς μεγίστου κύκλου της ἐπὶ 4, γιατὶ



Σχ. 106

βρῆκαν, πὼς ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας εἶναι τέσσερες φορὲς μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ἐπιφάνεια ἑνὸς μέγιστου κύκλου της (σχ. 106).

Παράδειγμα. Ἡ ἀκτίνα μιᾶς σφαίρας εἶναι 0,35 μ. Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφάνειάς της ;

α΄. Ἕνας τρόπος

Διάμετρος ἐπὶ διάμετρον ἐπὶ 3,14.

0,35 μ.×2=0,70 μ.=ἡ διάμετρος.

0,70 μ.×0,70 μ.×3,14=1,5386 τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδόν της.

β΄. Ὁ ἄλλος τρόπος

Ἐμβαδὸν μεγίστου κύκλου ἐπὶ 4.

0,35 μ.×0,35 μ.×3,14=0,3846 τ. μ. ἐμβαδὸν μεγίστου κύκλου.

0,3846×4=1,5386 τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδόν της.

'Ασκήσεις καὶ προβλήματα.

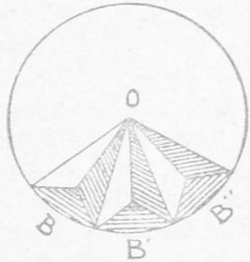
1. *Τί πρέπει νὰ ξέρωμε γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαίρας ;*
2. *Βρῆτε τὴν ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, ποὺ ἔχει ἀκτίνα 0,7 μ.*
3. *Ποιὰ εἶναι ἡ ἐπιφάνεια σφαίρας, ποὺ ἔχει μέγιστο κύκλο 5,1810 τ.μ. ;*
4. *Ποιὰ εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, ποὺ ἡ διάμετρός της εἶναι 0,14 μέτρα.*
5. *Πόση εἶναι ἡ ἀκτίνα τῆς σφαίρας, ποὺ ἔχει ἐμβαδὸν 113,04 τ.μ.*
6. *Θέλομε νὰ ντύσωμε μιὰ σφαίρα, ποὺ ἔχει ἀκτίνα 0,2 μ. μὲ ὕφασμα. Πόσο ὕφασμα θὰ χρειασθοῦμε;*

Πόσα τετραγωνικὰ χιλιόμετρα εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῆς γῆς, ὅταν ξέρωμε, ὅτι ὁ μεσημβρινός της εἶναι 40.000 χλμ.

8. *Κατασκευάστε μὲ πηλὸ σφαίρα καὶ ἰχνογραφίστε σφαιρικὰ ἀντικείμενα.*
9. *Κατασκευάστε ἡμισφαίρια καὶ ἰχνογραφίστε τα.*

3. Ὄγκος τῆς σφαίρας

Μποροῦμε νὰ ποῦμε, πὼς ἡ σφαίρα εἶναι γεμάτη ἀπὸ πάρα πολλὲς πυραμίδες καὶ πὼς ἡ καθεμιὰ ἔχει τὴν καρυφή της στὸ κέντρο τῆς σφαίρας καὶ τὴ βάση της στὴν ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας (σχ 107).



Σχ. 107

Μὲ τέτοιες λοιπὸν πυραμίδες γεμάτη ἡ σφαίρα μας, θὰ εἶναι σὰν μιὰ καὶ μόνη πυραμίδα, ποὺ θὰ ἔχῃ κορυφὴ τὸ κέντρο καὶ ὕψος τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας. Ὁ ὄγκος λοιπὸν αὐτῆς τῆς πυραμίδας θὰ εἶναι καὶ ὄγκος τῆς σφαίρας.

Γιὰ νὰ βροῦμε ὅμως τὸν ὄγκο τῆς πυραμίδας πολλαπλασιάζομε τὴ βάση της ἐπὶ τὸ ὕψος της καὶ διαιροῦμε διὰ 3. Τὸ διο θὰ κάνωμε καὶ γιὰ τὸν ὄγκο τῆς σφαίρας. Μὲ τὴ διαφορὰ ἐδῶ γιὰ βάση θὰ θεωρήσωμε τὴν ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας καὶ γιὰ ὕψος τὴν ἀκτίνα της.

Γιὰ νὰ βροῦμε λοιπὸν τὸν ὄγκο σφαίρας πολλαπλασιάζομε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφάνειάς της ἐπὶ τὴν ἀκτίνα καὶ διαιροῦμε τὸ γινόμενο διὰ 3.

Παράδειγμα. Ποιὸς εἶναι ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας, ποὺ ἔχει ἀκτίνα 3 μέτρα ;

Λύση

Θὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφάνειας τῆς σφαίρας.

α'. Ἐμβαδὸν μεγίστου κύκλου 3 μ.×3 μ.×3,14=28,26 τ.μ.

β'. Ἐμβαδὸν ἐπιφάνειας σφαίρας 28,26 τ.μ.×4=113,04 τ.μ.

γ'. Ὄγκος τῆς σφαίρας $\frac{113{,}04\times3}{3}=$ **113,04 κ. μ.**

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

1. Τί μᾶς χρειάζεται νὰ ξέρωμε γιὰ νὰ βροῦμε τὸν ὄγκο μιᾶς σφαίρας ;

2. Ἂν σᾶς ποῦν νὰ βρῆτε τὸν ὄγκο μιᾶς σφαίρας τί θὰ μετρήσετε πρῶτα ;

3. Ἡ ἀκτίνα μιᾶς σφαίρας εἶναι 0,6 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της ;

4. Ὁ μέγιστος κύκλος μιᾶς σφαίρας ἔχει 113,04 τ.μ. καὶ ἡ ἀκτίνα της 6 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας αὐτῆς ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ'.

1. Εἰδικὸ βάρος τῶν σωμάτων

Ὅλοι μας ξέρομε, πὼς τὰ διάφορα σώματα, ποὺ ἔχουν τὸν ἴδιο ὄγκο, δὲν ἔχουν καὶ τὸ ἴδιο *βάρος*. Ἄλλα εἶναι βαρύτερα καὶ ἄλλα ἐλαφρότερα. Ἐπομένως, ἂν ξέρωμε μόνο τὸν ὄγκο ἑνὸς σώματος, δὲν μποροῦμε νὰ ξέρωμε καὶ τὸ βάρος του. Γιὰ νὰ μποροῦμε νὰ βρίσκωμε ἀπὸ τὸν ὄγκο τοῦ σώματος καὶ τὸ βάρος του, πρέπει νὰ ξέρωμε καὶ ἕναν ἄλλο ἀριθμό, ποὺ φανερώνει τὸ *εἰδικὸ βάρος* αὐτοῦ τοῦ σώματος.

Εἰδικὸ βάρος ἑνὸς σώματος λέγεται τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ βάρους τοῦ σώματος διὰ τοῦ βάρους ἴσου ὄγκου νεροῦ ἀποσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4° Κελσίου.

Τὸ ἀποσταγμένο νερὸ μὲ θερμοκρασία 4° Κελσίου, ποὺ χωράει μέσα σὲ μιὰ κυβικὴ παλάμη, βρῆκαν, ὅτι ἔχει βάρος 1000 γραμμάρια. Ἂν ἔχωμε λοιπὸν μιὰ κυβικὴ παλάμη μάρμαρο, ποὺ ζυγίζει 2700 γραμμάρια, τὸ εἰδικὸ βάρος τοῦ μαρμάρου θὰ εἶναι 2700 : 100=2,7

Ὁ ἴδιος ὅμως ἀριθμὸς φανερώνει **καὶ τὸν ὄγκο τοῦ** σώματος καὶ τ **βάρος τοῦ** νεροῦ, **ποὺ ἔχει** τὸν ἴδιο ὄγκο. Ἀντὶ λοιπὸν νὰ διαιροῦμε τ **βάρος τοῦ** σώματος διὰ τοῦ βάρους τοῦ νεροῦ, ***γιὰ νὰ βροῦμε τὸ εἰ δικὸ βάρος του, διαιροῦμε τὸ βάρος τοῦ σώματος διὰ τοῦ ὄγκου του*** **καὶ** ἔχομε **ἔτσι** τὸ εἰδικὸ βάρος τοῦ σώματος.

Ἀφοῦ τώρα **τὸ** εἰδικὸ βάρος τοῦ σώματος βγαίνει **ἀπὸ τὴ** διαίρεσ **τοῦ** βάρους **τοῦ σώματος διὰ τοῦ ὄγκου** του, **γιὰ** νὰ βροῦμε τὸ βάρος του, **ὅταν** ξέρωμε **τὸν ὄγκο καὶ τὸ** εἰδικὸ βάρος, **πολλαπλασιάζομε** τὸν **ὄγκο ἐπὶ** τὸ εἰδικὸ βάρος τοῦ σώματος. Ἔτσι βρίσκομε τὸ βάρος τοῦ **σώματος**.

Στὸ παρακάτω πίνακα ἔχομε τὸ εἰδικὸ βάρος **γιὰ** συνηθισμένα **πράγματα.**

Χρυσάφι	19,3	Οἰνόπνευμα	0,90
Μάρμαρο	2,7	Κρασί	9,99
Γυαλί	2,5	Λάδι ἐληᾶς	0,9
Μολύβι	11,35	Πάγος	0,9
Θαλασσινὸ νερὸ	1,026	Μπύρα	0,9
Γάλα ἀγελάδος	1,03		

Μὲ τὸ εἰδικὸ αὐτὸ βάρος καὶ μὲ τὸν ὄγκο τοῦ σώματος μποροῦμε νὰ βροῦμε τὸ βάρος τοῦ σώματος, χωρὶς νὰ τὸ ζυγίζωμε, ἂν πολλαπλασιάσωμε τὸν ὄγκο του ἐπὶ τὸ εἰδικό του βάρος.

Παράδειγμα. Σ' ἕνα δοχεῖο κυλινδρικό, ποὺ οἱ βάσεις του ἔχου **ἀκτίνα** 0,6 καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 1,5 μ. ἔχομε κρασί. Ποιὸ εἶναι τ βάρος τοῦ κρασιοῦ, ποὺ ἔχει μέσα τὸ βαρέλι αὐτό ;

Ὄγκος κυλίνδρου=α². π. υ.

Λ ύ σ η

0,6 μ.×0,6 **μ** ×3,14×1,5 μ.=1,6956 **κ. μ.**

Αὐτὸς εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ βαρελιοῦ.

Τὸν ὄγκο τοῦ βαρελιοῦ θὰ τὸν πολλαπλασιάσωμε **ἐπὶ τὸ εἰδικὸ** βά **ρος τοῦ** κρασιοῦ, **ποὺ εἶναι** 0,99 **καὶ τὸ** γινόμενο θὰ **εἶναι τὸ** βάρος το **κρασιοῦ** σὲ χιλιόγραμμα (κιλά)

Πρὶν ὅμως θὰ τρέψωμε τὸν ὄγκο τοῦ βαρελιοῦ **σὲ κυβικὲς** παλά **μες**, γιατὶ τὸ εἰδικὸ βάρος τῶν σωμάτων εἶναι ὑπολογισμένο **σὲ** μιὰ ***κυ βικὴ παλάμη.***

Ὥστε 1,695 κ. μ.,=1695 κ. παλ. καὶ

1695 κυβ. παλ.×0,99=1678,0 χιλιόγραμμα εἶναι τὸ βάρος τοῦ κρ κοῦ, ποὺ χωρεῖ αὐτὸ τὸ βαρέλι. Ἂν θέλετε τρέπετε τὰ κιλὰ σὲ ὀκάδες, ὅπως μάθατε.

Διάφορα προβλήματα

1. Ἕνας ἀνεμόμυλος ἔχει σχῆμα κυλίνδρου, τελειώνει δὲ σὲ κῶνο, ποὺ ἡ βάση του εἶναι ἴση μὲ τὴ βάση τοῦ κυλίνδρου. Ἡ ἀκτίνα τῆς βάσεως τοῦ ἀνεμόμυλου αὐτοῦ εἶναι 3 μ., τὸ ὕψος τοῦ κυλινδρικοῦ μέρους εἶναι 4 μ. καὶ τὸ ὕψος κώνου 1,5 μ., ἡ πλευρὰ δὲ τοῦ κώνου 1.6 μ.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφάνειας τοῦ ἀνεμόμυλου αὐτοῦ καὶ ὁ ὄγκος του.

2. Ἡ περιφέρεια ἑνὸς ἁλωνιοῦ εἶναι 37,68 μ. Πόση εἶναι ἡ διάμετρός του καὶ πόση ἡ ἀκτίνα του.

3. Ἕνα κυλινδρικὸ δοχεῖο, ποὺ ἡ βάση του ἔχει ἀκτίνα 0,45 μ. καὶ ὕψος 1,35 μ., εἶναι γεμάτο λάδι. Πόσα χιλιόγραμμα ἔχει μέσα τὸ βαρέλι αὐτὸ καὶ πόσες ὀκάδες μᾶς κάνουν ; (Εἰδικὸ βάρος λαδιοῦ 0,02).

4. Ἀκτίνα μιᾶς κωνικῆς σκηνῆς εἶναι 2 μ. καὶ ἡ πλευρά της 4,5 μ. Πόσα μέτρα ὕφασμα χρειάσθηκε γιὰ νὰ γίνῃ αὐτὴ ἡ σκηνή ; Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της, ἂν τὸ ὕψος της εἶναι 3,20 μ. ;

5. Ἡ διάμετρος τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου εἶναι 6 μ. καὶ τὸ ὕψος εἶναι 7 μ. Ποιὸς εἶναι ὁ ὄγκος του ;

6. Πόσο πανὶ θὰ χρειασθῇ νὰ τυλίξωμε μιὰ σφαίρα, ποὺ ἔχει ἀκτίνα 3 μ ;

7. Ποιὸς εἶναι ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας, ποὺ ἔχει ἀκτίνα 8 μέτρα ;

Τ Ε Λ Ο Σ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Α.΄

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Β΄.

ΠΡΙΣΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ'.

ΜΕΡΟΣ Γ'.

ΠΥΡΑΜΙΔΕΣ

ΜΕΡΟΣ Δ'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ'.

ΤΑ ΝΕΑ ΒΟΗΘΗΤΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ
ΓΕΩΡΓΙΟΥ Δ. ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ
ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΑ ΔΙΑ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟΝ ΕΤΟΣ 1957—58

---

1. ΔΙΑ ΤΗΝ ΣΤ΄. ΤΑΞΙΝ
καὶ τὸ Β΄ ἔτος τῆς συνδιδασκαλίας τῶν Ε΄ καὶ ΣΤ΄ τάξεων

Λειτουργικὴ Κατήχησις,	Γεωρ. Δ. Παπαϊωάννου	ἀρ. ἐγκρ. 65303
Ἱστορία Νεωτ. Χρόνων,	Γεωρ. Δ. Παπαϊωάννου	ἔτος ἐγκρ. 1955
Γραμματ. Καθαρευούσης	Γεωρ. Δ. Παπαϊωάννου	ἀρ. ἐγκρ. 52975
Φυσικὴ Πειραμ. - Χημεία	Γεωρ. Δ. Παπαϊωάννου— Ν. Ι. Παπάκη	» » 71660
Ἀριθμητικὴ	Γεωρ. Δ. Παπαϊωάννου	» » 61452
Γεωμετρία	Γεωρ. Δ. Παπαϊωάννου	» » 61452
Γεωγραφία Εὐρώπης	Γεωρ. Δ. Παπαϊωάννου	» » 71658
Γεωμετρία	Π. Τόγκα—Μ. Γ. Ἰωαννίδου	» » 61452
Φυσικὴ Ἱστορία	Γεωρ. Δ. Παπαϊωάννου	Συνιστᾶται

2. ΔΙΑ ΤΗΝ Ε΄. ΤΑΞΙΝ
καὶ τὸ Α΄ ἔτος συνδιδασκαλίας τῶν Ε΄ καὶ ΣΤ΄ τάξεων

Γραμματ. Καθαρευούσης	Γεωρ. Δ. Παπαϊωάννου	ἀρ. ἐγκρ. 52974
Ἀριθμητικὴ	Γεωρ. Δ. Παπαϊωάννου	» » 61452
Γεωμετρία	Γεωρ. Δ. Παπαϊωάννου	» » 61552
Φυσικὴ Πειραμ. - Χημεία	Γεωρ. Δ. Παπαϊωάννου— Ν. Ι. Παπάκη	» » 71659
Βυζαντινὴ Ἱστορία	Μιχ. Μπίγκα	ἔτος ἐκγρ. 1955
Φυσικὴ Ἱστορία	Γεωρ. Δ Παπαϊωάννου	Συνιστᾶται
Γεωμετρία	Π. Τόγκα—Μ. Γ. Ἰωαννίδου	ἀρ. ἐγκρ. 61452
Γεωγραφία Ἠπείρων	Γεωρ. Δ. Παπαϊωάννου	» » 124005
Περικοπαὶ Εὐαγγελίων	Βασ. Ἰωαννίδου	» » 105643