ΠΕΤΡΟΥ Γ. ΤΟΓΚΑ
ΕΠΙΤΙΜΟΥ ΔΙΕΥΘΥΝΤΟΥ ΤΗΣ ΒΑΡΒΑΚΕΙΟΥ ΠΡΟΤΥΠΟΥ ΣΧΟΛΗΣ
ΤΟΥ ΔΙΔΑΣΚΑΛΕΙΟΥ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ
Τ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΕΥΕΛΠΙΔΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ, ΤΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ
ΛΥΚΕΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΔΙΑ ΤΑΣ ΑΝΩΤΑΤΑΣ
ΣΧΟΛΑΣ ΤΟΥ ΚΡΑΤΟΥΣ

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΠΕΜΠΤΗ

Περιέχει 375 ἀσκήσεις καὶ προβλήματα Γεωμετρίας (1 - 375) μὲ τὰς λύσεις των, ἀναφερομένας εἰς τὸ πρῶτον Βιβλίον τῆς Θεωρητικῆς Γεωμετρίας Π. Γ. Τόγκα (Ἔκδοσις Β')

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
"ΠΕΤΡΟΣ Γ. ΤΟΓΚΑΣ Ο.Ε."
ΙΠΠΟΚΡΑΤΟΥΣ 6 - ΤΗΛ. 628.326
ΑΘΗΝΑΙ

5

ΠΕΤΡΟΥ Γ. ΤΟΓΚΑ

ΕΠΙΤΙΜΟΥ ΔΙΕΥΘΥΝΤΟΥ ΤΗΣ ΒΑΡΒΑΚΕΙΟΥ ΠΡΟΤΥΠΟΥ ΣΧΟΛΗΣ
ΤΟΥ ΔΙΔΑΣΚΑΛΕΙΟΥ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ
Τ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΕΥΕΛΠΙΔΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ, ΤΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ
ΛΥΚΕΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΔΙΑ ΤΑΣ ΑΝΩΤΑΤΑΣ
ΣΧΟΛΑΣ ΤΟΥ ΚΡΑΤΟΥΣ

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ
ΕΚΔΟΣΙΣ ΠΕΜΠΤΗ

Περιέχει 375 ἀσκήσεις καὶ προβλήματα Γεωμετρίας (1 - 375) μὲ τὰς λύσεις των, ἀναφερομένας εἰς τὸ πρῶτον Βιβλίον τῆς Θεωρητικῆς Γεωμετρίας Π. Γ. Τόγκα (Ἔκδοσις Β')

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
"ΠΕΤΡΟΣ Γ. ΤΟΓΚΑΣ Ο.Ε."
ΙΠΠΟΚΡΑΤΟΥΣ 6 - ΤΗΛ. 628.326
ΑΘΗΝΑΙ

Κάθε γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.

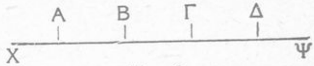
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ὁμὰς Α΄. 1. *Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ΧΨ εἶναι σημειωμένα κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ· νὰ δειχθῇ ὅτι, ἐὰν τὰ εὐθυγρ. τμήματα ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι ἴσα, θὰ εἶναι ἴσα καὶ τὰ ΑΒ καὶ ΓΔ.*

Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΑΒ=ΓΔ.

Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΑΓ=ΒΔ· ἐὰν ἀπὸ τὰ ἴσα αὐτὰ εὐθύγραμμα τμήματα ἀφαιρέσωμεν τὸ κοινὸν εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΓ, τὰ ἀπομένοντα τμήματα εἶναι ἴσα, δηλ. εἶναι ΑΒ=ΓΔ.



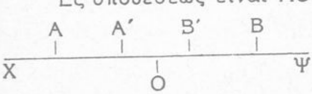
Σχ. 1

2. *Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ΧΨ λαμβάνομεν ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ μέσου Ο τοῦ τμήματος αὐτοῦ λαμβάνομεν δύο τμήματα ἴσα ΟΑ΄ καὶ ΟΒ΄. Νὰ δειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι ΒΑ΄=ΑΒ΄ καὶ ΑΑ΄=ΒΒ΄.*

1ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΒΑ΄=ΑΒ΄.

Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΑΟ=ΟΒ (1) καὶ ΟΒ΄=ΟΑ΄ (2)· ἐὰν προσθέσωμεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη, θὰ ἔχωμεν

ΑΟ+ΟΒ΄=ΟΒ+ΟΑ΄ ἢ ΑΒ΄=ΒΑ΄.



Σχ. 2.

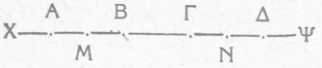
2ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΑΑ΄=ΒΒ΄.

Ἐὰν ἀπὸ τὰ ἴσα εὐθύγραμμμα τμήματα ΟΑ καὶ ΟΒ ἀφαιρέσωμεν τὰ ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα ΟΑ΄ καὶ ΟΒ΄, τὰ ἀπομένοντα τμήματα εἶναι ἴσα, δηλ. εἶναι ΑΑ΄=ΒΒ΄.

3. *Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ΧΨ λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ.* ***1ον.*** *Νὰ δειχθῇ, ὅτι ΑΓ+ΒΔ=ΑΔ+ΒΓ.* ***2ον.*** *Ἐὰν Μ εἶναι τὸ μέσον τοῦ ΑΒ καὶ Ν τὸ μέσον τοῦ ΓΔ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι* $\mathrm{MN} = \dfrac{\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{B\Delta}}{2}$.

1ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΑΓ+ΒΔ=ΑΔ+ΒΓ. Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ (Σχ. 3) εἶναι

ΑΓ = ΑΒ + ΒΓ (1) ΒΔ = ΒΓ + ΓΔ (2)



Σχ. 3

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$A\Gamma+B\Delta=AB+B\Gamma+B\Gamma+\Gamma\Delta \quad \text{ἢ}$$
$$A\Gamma+B\Delta=(AB+B\Gamma+\Gamma\Delta)+B\Gamma$$

Ἐπειδὴ $AB+B\Gamma+\Gamma\Delta=A\Delta$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται

$$A\Gamma+B\Delta=A\Delta+B\Gamma.$$

2ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $MN=\dfrac{A\Gamma+B\Delta}{2}$ ἢ $2MN=A\Gamma+B\Delta$ (3).

Ἐπειδὴ $A\Gamma+B\Delta=A\Delta+B\Gamma$, ὅπως ἐδείχθη (1ον), ἡ ἰσότης (3) γράφεται $2MN=A\Delta+B\Gamma$ (3΄)· ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ (σχ. 3) ἔχομεν

$$A\Delta=AM+MN+N\Delta \ (4) \quad \text{καὶ} \quad B\Gamma=MN-MB-\Gamma N \ (5)$$

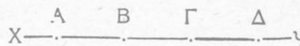
Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (4) καὶ (5) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$A\Delta+B\Gamma=AM+MN+N\Delta+MN-MB-\Gamma N \quad (6)$$

Ἐπειδὴ $AM=MB$, $N\Delta=\Gamma N$, τὰ AM, $N\Delta$, MB, ΓN ἐξαλείφονται καὶ ἡ ἰσότης (6) γίνεται $A\Delta+B\Gamma=2MN$ ἢ $A\Gamma+B\Delta=2MN$.

4. Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ΧΨ λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Ἐὰν εἶναι $B\Gamma=\Gamma\Delta$, *νὰ δειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι* $A\Gamma=\dfrac{AB+A\Delta}{2}$.

Θὰ δείξωμεν, ὅτι $A\Gamma=\dfrac{AB+A\Delta}{2}$ ἢ $2A\Gamma=AB+A\Delta$. Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ (σχ. 4) ἔχομεν $A\Gamma=AB+B\Gamma$ (1) καὶ $A\Gamma=A\Delta-\Gamma\Delta$ (2)



(Σχ. 4)

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$2A\Gamma=AB+B\Gamma+A\Delta-\Gamma\Delta \quad (3)$$

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $B\Gamma=\Gamma\Delta$ οἱ προσθετέοι $B\Gamma$ καὶ $\Gamma\Delta$ τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (3) ἐξαλείφονται καὶ ἔχομεν

$$2A\Gamma=AB+A\Delta.$$

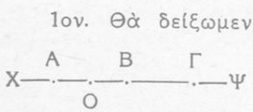
5. Δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ, μιᾶς εὐθείας ΧΨ καὶ Ο τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ. 1ον. Ἐὰν τὸ σημεῖον Γ κεῖται ἐκτὸς τοῦ τμήματος ΑΒ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι

$$AO=\frac{\Gamma A-\Gamma B}{2}, \quad \Gamma O=\frac{\Gamma A+\Gamma B}{2}.$$

2ον. Ἐὰν τὸ σημεῖον Γ κεῖται μεταξὺ τῶν Ο καὶ Β νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$AO=\frac{\Gamma A+\Gamma B}{2}, \quad \Gamma O=\frac{\Gamma A-\Gamma B}{2}.$$

1ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $AO=\dfrac{\Gamma A-\Gamma B}{2}$ ἢ $2AO=\Gamma A-\Gamma B$.



(Σχ. 5)

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ (σχ. 5) εἶναι:

$$\Gamma A=AO+O\Gamma \quad (1)$$
$$\Gamma B=O\Gamma-OB \quad (2)$$

Ἀφαιροῦμεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\Gamma A-\Gamma B=(AO+O\Gamma)-(O\Gamma-OB)=AO+O\Gamma-O\Gamma+OB=AO+OB$$

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $OB=AO$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται $\Gamma A-\Gamma B=AO+AO$ ἢ $\Gamma A-\Gamma B=2AO$.

Ἐπίσης θὰ δείξωμεν, ὅτι $\Gamma O=\dfrac{\Gamma A+\Gamma B}{2}$ ἢ $2\Gamma O=\Gamma A+\Gamma B$.

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα 5 εἶναι

$$\Gamma A=\Gamma O+OA \quad (3) \quad \text{καὶ} \quad \Gamma B=\Gamma O-OB \quad (4)$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (3) καὶ (4) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

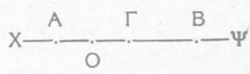
$$\Gamma A+\Gamma B=\Gamma O+OA+\Gamma O-OB \quad \text{ἢ} \quad \Gamma A+\Gamma B=2\Gamma O$$

Τὰ ΑΟ καὶ ΟΒ ἐξαλείφονται, διότι ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $AO=OB$.

2ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $AO=\dfrac{\Gamma A+\Gamma B}{2}$ ἢ $2AO=\Gamma A+\Gamma B$.

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ (σχ. 6) εἶναι

$$\Gamma A=AO+O\Gamma \quad (1) \quad \text{καὶ}$$
$$\Gamma B=OB-O\Gamma \quad (2)$$



Σχ. 6

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\Gamma A+\Gamma B=AO+O\Gamma+OB-O\Gamma \quad \text{ἢ} \quad \Gamma A+\Gamma B=AO+OB$$

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $AO=OB$, ἡ τελευταία ἰσότης γράφεται $\Gamma A+\Gamma B=AO+AO$ ἢ $\Gamma A+\Gamma B=2AO$.

Ἐπίσης θὰ δείξωμεν, ὅτι $\Gamma O=\dfrac{\Gamma A-\Gamma B}{2}$ ἢ $2\Gamma O=\Gamma A-\Gamma B$.

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ (σχ. 6) εἶναι

$$\Gamma A=\Gamma O+OA \quad (3) \quad \text{καὶ} \quad \Gamma B=OB-O\Gamma \quad (4)$$

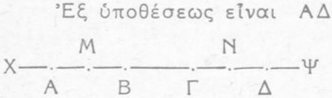
Ἀφαιροῦμεν τὰς ἰσότητας (3) καὶ (4) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\Gamma A-\Gamma B=(\Gamma O+OA)-(OB-O\Gamma) \quad \text{ἢ} \quad \Gamma A-\Gamma B=\Gamma O+OA-OB+O\Gamma$$
$$\text{ἢ} \quad \Gamma A-\Gamma B=2O\Gamma.$$

Τὰ ΟΑ καὶ ΟΒ ἐξαλείφονται, διότι εἶναι ἐξ ὑποθέσεως ἴσα.

Ὁμὰς Β΄. 6. Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ΧΨ λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα **Α, Β, Γ, Δ. *Ἐὰν εἶναι* ΑΔ=10 *ἑκ. καὶ* ΒΓ=7 *ἑκ. νὰ ὑπολογισθοῦν : 1ον. Τὸ ἄθροισμα* ΑΒ+ΓΔ. *2ον. Ἡ ἀπόστασις τῶν μέσων τῶν* ΑΒ *καὶ* ΓΔ.**

Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $A\Delta=10$ ἑκ., $B\Gamma=7$ ἑκ.



Σχ. 7

1ον. Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ (σχ. 10) ἔχομεν

$$AB+\Gamma\Delta=A\Delta-B\Gamma=10-7=3 \text{ ἑκ.}$$

2ον. Ἐὰν Μ εἶναι τὸ μέσον τοῦ ΑΒ καὶ Ν τὸ μέσον τοῦ ΓΔ, θὰ εἶναι

$$MN=MB+B\Gamma+\Gamma N \quad \text{ἢ} \quad MN=(MB+\Gamma N)+B\Gamma \quad (1)$$

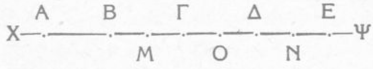
Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $MB+\Gamma N$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος $AB+\Gamma\Delta$, δηλ. εἶναι ἴσον μὲ 1,5 ἑκ., καὶ $B\Gamma=7$ ἑκ., ἡ ἰσότης (1) γίνεται $MN=1{,}5+7=8{,}5$ ἑκ.

7. Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ΧΨ λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα **Α, Β, Γ, Δ, Ε, *καὶ τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι* ΑΒ=2 *ἑκ.*, ΑΓ=4 *ἑκ.*, ΑΔ=7 *ἑκ. καὶ***

ΑΕ=9 *ἑκ. Ἐὰν* Μ *καὶ* Ν *εἶναι τὰ μέσα τῶν* ΒΓ *καὶ* ΔΕ *καὶ* Ο *τὸ μέσον τῆς* ΜΝ, *νὰ ὑπολογισθῇ τὸ* ΑΟ.

Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΑΒ=2 ἑκ., ΑΓ=4 ἑκ., ΑΔ=7 ἑκ., ΑΕ=9 ἑκ.

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ (σχ. 8) εἶναι



Σχ. 8

$$ΑΟ=ΑΒ+ΒΜ+ΜΟ$$

$$\text{ἢ} \quad ΑΟ=2+\frac{ΒΓ}{2}+\frac{ΜΝ}{2} \quad (1)$$

Ὑπολογίζομεν τὰ ΒΓ, ΜΝ· ἔχομεν

$$ΒΓ=ΑΓ-ΑΒ=4-2=2 \text{ ἑκ.}$$

$$ΜΝ=ΜΓ+ΓΔ+ΔΝ=\frac{ΒΓ}{2}+ΓΔ+\frac{ΔΕ}{2} \quad (2)$$

Ἐπειδὴ ΒΓ=2, ΓΔ=ΑΔ−ΑΓ=7−4=3 καὶ ΔΕ=ΑΕ−ΑΔ=9−7=2, ἡ (2) γίνεται ΜΝ=1+3+1=5 ἑκ.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ ΒΓ καὶ ΜΝ μὲ τὰς τιμάς των καὶ ἔχομεν ΑΟ=2+1+2,5=5,5 ἑκ.

8. Ἐπὶ ἑνὸς πίνακος ἔχουν σημειωθῇ πέντε σημεῖα. Πόσας εὐθείας ὁρίζουν τὰ σημεῖα αὐτά; Νὰ γενικεύσετε τὸ ζήτημα διὰ ν σημεῖα.

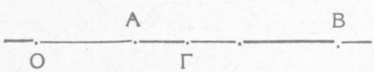
1ον. Ἔστω, ὅτι τὰ σημεῖα εἶναι πέντε. Ἀπὸ κάθε σημεῖον δυνάμεθα νὰ φέρωμεν, πρὸς τὰ ἄλλα σημεῖα, 4 ἢ (5—1) εὐθείας. Ἑπομένως ἀπὸ τὰ 5 σημεῖα δυνάμεθα νὰ φέρωμεν 4×5 εὐθείας. Ἐπειδὴ ὅμως κάθε εὐθεῖα, ποὺ συνδέει δύο σημεῖα, γράφεται δύο φορὰς ἕπεται, ὅτι πραγματικῶς δυνάμεθα νὰ φέρωμεν (4×5) : 2 ἢ 10 εὐθείας.

2ον. Ἔστω, ὅτι τὰ σημεῖα εἶναι ν. Ἀπὸ κάθε σημεῖον δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ν—1 εὐθείας. Ἑπομένως ἀπὸ τὰ ν σημεῖα δυνάμεθα νὰ φέρωμεν (ν—1)·ν εὐθείας. Ἐπειδὴ ὅμως κάθε εὐθεῖα, ποὺ συνδέει δυὸ σημεῖα γράφεται δυὸ φορὰς ἕπεται, ὅτι πραγματικῶς δυνάμεθα θὰ φέρωμεν $\frac{(ν-1)ν}{2}$ εὐθείας.

9. Δίδεται ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ, *ἕνα σημεῖον* Γ *κείμενον μεταξὺ τῶν* Α *καὶ* Β *καὶ ἕνα σημεῖον* Ο *ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς* ΒΑ. *Ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι* ΟΑ=8 *ἑκ.,* ΟΒ=32 *ἑκ. καὶ ὅτι τὸ* ΓΑ *εἶναι τὸ τρίτον τοῦ* ΓΒ, *νὰ ὑπολογισθῇ τὸ* ΟΓ.

Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΟΑ=8 ἑκ., ΟΒ=32 ἑκ. καὶ ΓΒ=3ΓΑ.

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ (σχ. 9) θὰ εἶναι



Σχ. 9

$$ΑΒ=ΟΒ-ΟΑ=32-8=24 \text{ ἑκ.}$$

Ἐπίσης εἶναι

$$ΟΓ=ΟΑ+ΑΓ \quad \text{ἢ} \quad ΟΓ=8+ΑΓ \quad (1).$$

Ὑπολογίζομεν τὸ ΑΓ· ἔχομεν

$$ΑΓ+ΓΒ=ΑΒ \quad \text{ἢ} \quad ΑΓ+3ΑΓ=24 \quad \text{ἢ} \quad 4ΑΓ=24, \quad \text{ἄρα} \quad ΑΓ=6$$

'Αντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) τὸ ΑΓ μὲ τὴν τιμήν του 6 καὶ ἔχομεν

ΟΓ=8+6=14 ἑκ.

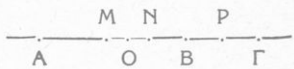
10. 'Επὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν τρία σημεῖα Α, Β, Γ *καὶ τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι* ΑΒ=10 *ἑκ. καὶ* ΒΓ=6 *ἑκ. 'Εὰν* Μ, Ν, Ρ *εἶναι τὰ μέσα τῶν εὐθυγρ. τμημάτων* ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ, *νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τμήματα* ΜΝ *καὶ* ΑΡ *ἔχουν τὸ αὐτὸ μέσον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου αὐτοῦ ἀπὸ τὸ σημεῖον* Α.

'Εξ ὑποθέσεως εἶναι ΑΒ=10 ἑκ., ΒΓ=6 ἑκ. 'Επειδὴ τὸ Μ εἶναι τὸ μέσον τοῦ ΑΒ, θὰ εἶναι ΑΜ=ΜΒ=5 ἑκ. 'Επίσης εἶναι

ΑΓ=ΑΒ+ΒΓ=10+6=16 ἑκ.

καὶ ἐπειδὴ τὸ Ν εἶναι τὸ μέσον τοῦ ΑΓ θὰ εἶναι ΑΝ=ΝΓ=8 ἑκ.· ἄρα θὰ εἶναι

ΜΝ=ΑΝ−ΑΜ=8−5=3 ἑκ.



Σχ. 10

'Επειδὴ τὸ Ρ εἶναι τὸ μέσον τοῦ ΒΓ, θὰ εἶναι ΒΡ=ΡΓ=3 ἑκ. 'Εὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ μέσον τοῦ ΜΝ εἶναι τὸ σημεῖον Ο θὰ εἶναι

ΑΟ=ΑΜ+ΜΟ=5+1,5=6,5 εκ.

'Επίσης ἔχομεν ΑΡ=ΑΒ+ΒΡ=10+3=13 ἑκ.

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ΑΡ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΑΟ, ἄρα τὸ Ο εἶναι τὸ μέσον τοῦ ΑΡ.

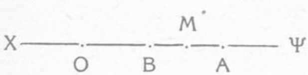
Εὑρήκαμεν, ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ Ο ἀπὸ τοῦ Α εἶναι ἴση μὲ

ΑΟ=6,5 ἑκ.

11. 'Επὶ μιᾶς εὐθείας ΧΨ *λαμβάνομεν τὰ σημεῖα* Α, Ο, Β, *'Εὰν* ΟΑ=α *καὶ* ΟΒ=β, *ὅπου* $\alpha > \beta$, *νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγρ. τμήματος* ΑΒ *καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου* Ο *ἀπὸ τὸ μέσον* Μ *τοῦ* ΑΒ. *Νὰ ἐξετασθοῦν δύο περιπτώσεις, καθ' ὅσον τὸ* Ο *δὲν κεῖται μεταξὺ τῶν* Α *καὶ* Β *ἢ κεῖται μεταξὺ τῶν* Α *καὶ* Β.

1ον. 'Υποθέτομεν, ὅτι τὸ Ο εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ τμήματος ΑΒ (σχ. 11). 'Εξ ὑποθέσεως εἶναι ΟΑ=α, ΟΒ=β. 'Όπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα ἔχομεν:

ΒΑ=ΟΑ−ΟΒ=α−β



Σχ. 11

'Επίσης ἔχομεν ΟΜ=ΟΑ−ΜΑ καὶ ΟΜ=ΟΒ+ΒΜ. Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν, ὅτι ΜΑ = ΜΒ λαμβάνομεν

$$2\cdot\text{ΟΜ}=\text{ΟΑ}+\text{ΟΒ} \quad \text{ἢ} \quad 2\cdot\text{ΟΜ}=\alpha+\beta, \quad \text{ἄρα} \quad \text{ΜΟ}=\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

2ον. 'Υποθέτομεν, ὅτι τὸ Ο κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β (σχ. 12).

$$\begin{array}{c} \qquad\quad M \\ X\text{———}\cdot\text{————}\cdot\text{——}\cdot\text{——}\cdot\text{——}\Psi \\ \quad A \qquad\qquad\quad O \quad B \end{array}$$

Σχ. 12

Ἐπειδὴ $\alpha > \beta$, τὸ Ο πλησιάζει περισσότερον πρὸς τὸ Β.

Ἔχομεν $AB = AO + OB = \alpha + \beta$.

Ἐπίσης ἔχομεν $OM = OA - AM$ καὶ $OM = MB - OB$. Προσθέτομεν τὰς δύο τελευταίας ἰσότητας κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$2OM = OA - AM + MB - OB \quad (1)$$

Ἐπειδὴ $AM = MB$ ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$2OM = OA - OB = \alpha - \beta, \text{ ἄρα } OM = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

Η ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΙ ΑΙ ΓΩΝΙΑΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΓΩΝΙΑΙ

12. ***Νὰ τραποῦν εἰς βαθμοὺς αἱ κάτωθι γωνίαι*** :

15^0, $22^0\,30'$, 60^0, 135^0, $12^0\,30'$.

1ον. Ἀφοῦ αἱ 90^0 ἰσοδυναμοῦν μὲ 100 βαθμούς, αἱ 15^0 θὰ ἰσοδυναμοῦν μὲ $\frac{100\times15}{90}=16{,}66$ βαθμούς.

2ον. Αἱ $22^0\,30'$ ἢ $22{,}^05$ ἰσοδυναμοῦν μὲ $\frac{100\times22{,}5}{90}=25$ βαθμ.

3ον. Αἱ 60^0 ἰσοδυναμοῦν μὲ $\frac{100\times60}{90}=66{,}66$ βαθμ.

4ον. Αἱ 135^0 ἰσοδυναμοῦν μὲ $\frac{100\times135}{90}=150$ βαθμ.

5ον. Αἱ $12^0\,30'$ ἢ $12^0{,}5$ ἰσοδυναμοῦν μὲ $\frac{100\times12{,}5}{90}=13{,}888$ βαθμ.

13. ***Νὰ τραποῦν εἰς μοίρας αἱ κάτωθι γωνίαι*** .

50^γ, 30^γ, 45^γ, 135^γ, $34{,}78^\gamma$.

1ον. Ἀφοῦ οἱ 100 βαθμοὶ ἰσοδυναμοῦν μὲ 90^0

οἱ 50 βαθμοὶ θὰ ἰσοδυναμοῦν μὲ $\frac{90\times50}{100}=45^0$.

2ον. Οἱ 30 βαθμ. ἰσοδυναμοῦν μὲ $\frac{90\times30}{100}=27^0$.

3ον. Οἱ 45 βαθμ. ἰσοδυναμοῦν μὲ $\frac{90\times45}{100}=40^0\,30'$.

4ον. Οἱ 135 βαθμ. ἰσοδυναμοῦν μὲ $\frac{90\times135}{100}=121^0\,30'$.

5ον. Οἱ 34,78 βαθμ. ἰσοδυναμοῦν μὲ $\frac{90\times34{,}78}{100}=31^0\,18'\,7'',2$.

14. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα καὶ ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν :

$$A=84^{\circ}\,27'\,35'', \quad B=47^{\circ}\,52'\,48''.$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν Α καὶ Β εἶναι

$$A+B=84^{\circ}\,27'\,35''+47^{\circ}\,52'\,48''=132^{\circ}\,20'\,23''.$$

Ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν Α καὶ Β εἶναι

$$A-B=(84^{\circ}\,27'\,35'')-(47^{\circ}\,52'\,48'')=36^{\circ}\,34'\,47''.$$

Α' Ὁμάς. 15. Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ συμπληρωματικὴ καὶ ἡ παραπληρωματικὴ γωνία τῆς γωνίας $48^{\circ}\,54'\,12''$.

Ἡ συμπληρωματική της εἶναι $90^{\circ}-(48^{\circ}\,54'\,12'')$

ἢ $(89^{\circ}\,59'\,60'')-(48^{\circ}\,54'\,12'')=41^{\circ}\,5'\,48''$.

Ἡ παραπληρωματική της εἶναι $180^{\circ}-(48^{\circ}\,54'\,12'')$

ἢ $(179^{\circ}\,59'\,60'')-(48^{\circ}\,54'\,12'')=131^{\circ}\,5'\,48''$.

16. Μία γωνία εἶναι ἴση μὲ $^{3}/_{4}$ *τῆς ὀρθῆς καὶ μία ἄλλη ἴση μὲ* $^{3}/_{8}$ *τῆς ὀρθῆς. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παραπληρωματικὴ γωνία : 1ον. τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο γωνιῶν· καὶ 2ον. τῆς διαφορᾶς των.*

Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν εἶναι

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{8}=\frac{6}{8}+\frac{3}{8}=\frac{9}{8}=1\,\frac{1}{8}\ \text{ὀρθ.}$$

Ἡ διαφορά των εἶναι $\frac{3}{4}-\frac{3}{8}=\frac{6}{8}-\frac{3}{8}=\frac{3}{8}$ ὀρθ.

1ον. Ἡ παραπληρωματικὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν εἶναι

$$2\ \text{ὀρθ.}-\frac{9}{8}\ \text{ὀρθ.}=\frac{16-9}{8}=\frac{7}{8}\ \text{ὀρθ.}$$

2ον. Ἡ παραπληρωματικὴ τῆς διαφορᾶς των εἶναι

$$2\ \text{ὀρθ.}-\frac{3}{8}\ \text{ὀρθ.}=\frac{16-3}{8}=\frac{13}{8}\ \text{ὀρθ.}$$

17. Δίδονται αἱ γωνίαι $\alpha=75^{\circ}$, $\beta=135^{\circ}$, $\gamma=40^{\circ}\,24'\,30''$, $\delta=124^{\circ}\,2'\,48''$. *1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ συμπληρωματικαὶ τῶν γωνιῶν* α *καὶ* γ. *2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παραπληρωματικαὶ τῶν γωνιῶν* β *καὶ* δ. *3ον) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα* $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ *καὶ ἡ διαφορὰ* $\delta-\gamma$.

1ον. Ἡ συμπληρωματικὴ τῆς γωνίας α εἶναι

$$90^{\circ}-\alpha=90^{\circ}-75^{\circ}=15^{\circ}.$$

Ἡ συμπληρωματικὴ τῆς γωνίας γ εἶναι

$$90^{\circ}-(40^{\circ}\,24'\,30'') \text{ ἢ } (89^{\circ}\,59'\,60'')-(40^{\circ}\,24'\,30'')=49^{\circ}\,35'\,30''.$$

2ον. Ἡ παραπληρωματικὴ τῆς β εἶναι

$$180^{\circ}-\beta=180^{\circ}-135^{\circ}=45^{\circ}.$$

Ἡ παραπληρωματικὴ τῆς δ εἶναι

$$180^{\circ}-(124^{\circ}\,2'\,48'') \text{ ἢ } (179^{\circ}\,59'\,60'')-(124^{\circ}\,2'\,48'')=55^{\circ}\,57'\,12''.$$

3ον. Ἔχομεν

$$\begin{array}{r} \alpha=\ \ 75^{\circ} \\ \beta=135^{\circ} \\ \gamma=\ \ 40^{\circ}\,24'\,30'' \\ \delta=124^{\circ}\ \ 2'\,48'' \\ \hline \alpha+\beta+\gamma+\delta=374^{\circ}\,27'\,18'' \end{array} \qquad \begin{array}{r} \delta=124^{\circ}\ \ 2'\,48^{\circ} \\ \gamma=\ \ 40^{\circ}\,24'\,30'' \\ \hline \delta-\gamma=83^{\circ}\,38'\,18'' \end{array}$$

18. Δίδονται αἱ γωνίαι $A=17^\circ 13' 47''$ *καὶ* $B=53^\circ 10' 25''$. *Νὰ ὑπολογισθῇ : 1ον. Τὸ ἄθροισμά των. 2ον. Ἡ διαφορά των. 3ον. Ἡ παραπληρωματικὴ τοῦ ἀθροίσματός των. 4ον. Ἡ συμπληρωματικὴ τῆς διαφορᾶς των.*

1ον. $A+B=(17^\circ 13' 47'')+(53^\circ 10' 25'')=70^\circ 24' 12''$.

2ον. $B-A=(53^\circ 10' 25'')-(17^\circ 13' 47'')=35^\circ 56' 38''$.

3ον. Ἡ παραπληρωματικὴ τοῦ ἀθροίσματος $A+B$ εἶναι
$180^\circ-(A+B)=(179^\circ 59' 60'')-(70^\circ 24' 12'')=109^\circ 35' 48''$.

4ον. Ἡ συμπληρωματικὴ τῆς διαφορᾶς $B-A$ εἶναι
$90^\circ-(B-A)=(89^\circ 59' 60'')-(35^\circ 56' 38'')=54^\circ 3' 22''$.

Β'. Ὁμάς. 19. Μία γωνία εἶναι διπλασία τῆς παραπληρωματικῆς της. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη γωνία ;

Ἂν χ εἶναι ἡ μία γωνία, ἡ ἄλλη θὰ εἶναι 2χ.

Ἐπειδὴ αἱ δύο γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, θὰ εἶναι

$$\chi+2\chi=180^\circ \quad ἤ \quad 3\chi=180^\circ, \quad ἄρα \quad \chi=60^\circ.$$

Ὥστε αἱ γωνίαι εἶναι 120° καὶ 60°.

20. Μία γωνία εἶναι τὸ τρίτον τῆς συμπληρωματικῆς της. Πρὸς πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς ἰσοῦται ἡ γωνία αὐτή ; Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ γωνία αὐτή ;

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ 3χ τὴν μεγαλυτέραν γωνίαν, ἡ μικροτέρα θὰ εἶναι χ. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι αὐταὶ εἶναι συμπληρωματικαί, θὰ εἶναι

$$3\chi+\chi=90^\circ \quad ἤ \quad 4\chi=90^\circ, \quad ἄρα \quad \chi=22^\circ 30'.$$

Ὥστε ἡ ζητουμένη γωνία εἶναι $22^\circ 30'$.

21. Ἡ διαφορὰ δύο παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι 96°. *Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη γωνία ;*

Ἔστωσαν χ καὶ ψ αἱ ζητούμεναι γωνίαι. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι αὐταὶ εἶναι παραπληρωματικαί, θὰ εἶναι $\chi+\psi=180^\circ$ (1).

Κατὰ τὸ πρόβλημα εἶναι καὶ $\chi-\psi=96^\circ$ (2).

Προσθέτομεν τὰς (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$2\chi=276^\circ, \quad ἄρα \quad \chi=138^\circ, \quad ὁπότε \quad \psi=180^\circ-138^\circ=42^\circ.$$

22. Ἡ διαφορὰ δύο συμπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι $^1/_4$ *τῆς ὀρθῆς γωνίας. Πρὸς πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς ἰσοῦται ἑκάστη γωνία ;*

Ἔστωσαν χ καὶ ψ αἱ ζητούμεναι γωνίαι. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι εἶναι συμπληρωματικαὶ θὰ εἶναι $\chi+\psi=1$ ὀρθ. (1).

Κατὰ τὸ πρόβλημα εἶναι καὶ $\chi-\psi=\frac{1}{4}$ ὀρθ. (2).

Προσθέτομεν τὰς (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

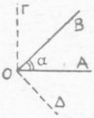
$$2\chi=1\frac{1}{4} \quad ἤ \quad 2\chi=\frac{5}{4}, \quad ἄρα \quad \chi=\frac{5}{8} \text{ ὀρ.}$$

Ἡ ἄλλη γωνία ψ θὰ εἶναι $^3/_8$ ὀρθῆς.

23 Δίδεται μία γωνία ΑΟΒ ἴση μὲ $43^\circ 17' 24''$. *Ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο φέρομεν τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΑ καὶ κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς ΟΒ καὶ ἔπειτα τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΒ καὶ κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς ΟΑ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία ΓΟΔ.*

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα 13 εἶναι

$$\widehat{\Gamma O\Delta} = \widehat{\Gamma OA} + \widehat{AO\Delta} \qquad (1)$$



Σχ. 13

Ἐπειδὴ ἡ ΟΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ ἡ γωνία ΓΟΑ θὰ εἶναι 90^0.

Ἐπειδὴ ἡ ΟΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΒ, ἡ γωνία ΔΟΑ εἶναι συμπληρωματικὴ τῆς γωνίας α δηλ. εἶναι

$$\widehat{AO\Delta} = 90^0 - \alpha = 90^0 - 43^0\ 17'\ 24'' = 46^0\ 42'\ 36''$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰς γωνίας ΓΟΑ καί ΑΟΔ μὲ τὰς τιμάς των καὶ ἔχομεν

$$\widehat{\Gamma O\Delta} = 90^0 + 46^0\ 42'\ 36'' = 136^0\ 42'\ 36''.$$

Α' Ὁμάς. 24. Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Ο *μιᾶς εὐθείας* ΑΒ *φέρομεν, πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας αὐτῆς, δύο ἡμιευθείας* ΟΓ *καὶ* ΟΔ *οὕτως, ὥστε αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι* ΑΟΓ, ΓΟΔ, ΔΟΒ *νὰ εἶναι ἴσαι. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μέτρον ἑκάστης γωνίας: 1ον. Εἰς μοίρας. 2ον. Εἰς βαθμούς. 3ον. Εἰς μέρη ὀρθῆς.*

Αἱ σχηματιζόμεναι τρεῖς γωνίαι ΑΟΓ, ΓΟΔ, ΔΟΒ ἔχουν ἄθροισμα 180^0, ἢ 200^γ ἢ 2 ὀρθ. Ἐπειδὴ δὲ καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι εἶναι ἴσαι ἕπεται, ὅτι καθεμία ἀπὸ αὐτὰς εἶναι ἴση μὲ 60^0 ἢ 200/3 βαθμοὺς ἢ 2/3 ὀρθῆς.

25. Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Ο *φέρομεν 7 ἡμιευθείας, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν, μεταξύ των, διαδοχικὰς γωνίας ἴσας. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μέτρον ἑκάστης γωνίας: 1ον. Εἰς μοίρας. 2ον. Εἰς βαθμούς. 3ον. Εἰς μέρη ὀρθῆς.*

Αἱ σχηματιζόμεναι 8 γωνίαι ἔχουν ἄθροισμα 360^0 ἢ 400 βαθμοὺς ἢ 4 ὀρθ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἴσαι μεταξύ των ἕπεται, ὅτι κάθε μία εἶναι ἴση μὲ $360/8 = 45^0$ ἢ μὲ $400/8 = 50$ βαθμ. ἢ μὲ $4/8 = 1/2$ ὀρθῆς.

Ὁμὰς Β'. 26. Τρεῖς ἡμιευθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ *ἄγονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον* Ο. *Ἐὰν εἶναι γων.* $AOB = \frac{3}{4}$ *ὀρθῆς καὶ γων.* $BO\Gamma = 98^0\ 12'\ 48''$, *νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μέτρον τῆς γωνίας* ΓΟΑ *εἰς μοίρας. Νὰ ἐξετασθοῦν δύο περιπτώσεις σχήματος.*

1ον. Ἐν πρώτοις εἶναι γων. $AOB = 3/4$ ὀρ. $= 67^0\ 30'$.

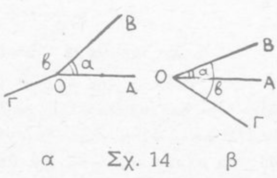
Ἐπειδὴ αἱ διαδοχικαὶ γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κορυφὴν τὸ Ο (σχ. 14α) ἔχουν ἄθροισμα 360^0, θὰ εἶναι

$$\widehat{AO\Gamma} = 360^0 - (\alpha + \beta) \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ

$$\alpha + \beta = 67^0\ 30' + 98^0\ 12'\ 48'' = 165^0\ 42'\ 48''$$

ἡ (1) γράφεται



α Σχ. 14 β

$$\widehat{AO\Gamma} = 360^0 - (165^0\ 42'\ 48'') = 194^0\ 17'\ 12''$$

2ον. Ἐὰν αἱ γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ δὲν εἶναι ἐφεξῆς (σχ. 14β) τότε θὰ εἶναι

γων. ΑΟΓ=γων. ΒΟΓ—γων. ΑΟΒ=$98^0\,12'\,48''-67^0\,30'=30^0\,42'\,48''$.

27. *Δίδεται μία γωνία* ΑΟΒ=$35^0\,46'\,28''$ *καὶ μία ἡμιευθεῖα* ΟΓ, *ἡ ὁποία δὲν κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας* ΑΟΒ *καὶ τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι* γων. ΑΟΓ=γων. ΒΟΓ. *Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μέτρον τῆς γωνίας* ΑΟΓ.

Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι (σχ. 14α) γων. ΑΟΒ=γων. α=$35^0\,46'\,28''$
καὶ γων. ΒΟΓ=γων. ΑΟΓ, δηλ. γων. β=γων. β'.

Ἐπειδὴ αἱ περὶ τὸ Ο γωνίαι α, β, β' ἔχουν ἄθροισμα 360^0, αἱ δύο ἴσαι γωνίαι β καὶ β' θὰ εἶναι
$360^0-\alpha$ ἢ $360^0-35^0\,46'\,28''=324^0\,13'\,32''$ ἄρα ἡ μία θὰ εἶναι $162^0\,6'\,46''$.

28. *Ἀπὸ ἕνα σημεῖον* Ο *φέρομεν τὰς ἡμιευθείας* ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ. *Ἐὰν ἡ γωνία* ΒΟΓ *εἶναι ὀρθὴ καὶ αἱ γωνίαι* ΑΟΒ *καὶ* ΓΟΔ *συμπληρωματικαί, τί γραμμὴ εἶναι ἡ* ΑΟΔ; *Καὶ πῶς συναντῶνται αἱ* ΟΑ *καὶ* ΟΔ, *ἐὰν αἱ γωνίαι* ΑΟΒ *καὶ* ΓΟΔ *εἶναι παραπληρωματικαί;*

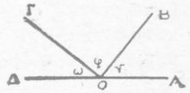
1ον. Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι (σχ. 15)

φ=1 ὀρθὴ καὶ ν+ω=1 ὀρθή.

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη λαμβάνομεν

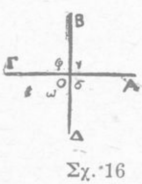
φ+ν+ω=2 ὀρθ. ἢ (φ+ν)+ω=2 ὀρθ.

ἢ γων. ΑΟΓ+γων. ΓΟΔ=2 ὀρθ.



Σχ. 15

Ἐπειδὴ αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ΑΟΓ καὶ ΓΟΔ εἶναι παραπληρωματικαί, αἱ μὴ κοιναὶ πλευραί των ΟΑ καὶ ΟΔ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Ὥστε ἡ ΑΟΔ εἶναι εὐθεῖα.



Σχ. 16

2ον. Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι (σχ. 16)

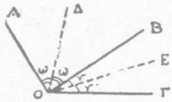
φ=1 ὀρθ. καὶ ν+ω=2 ὀρθ.

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη λαμβάνομεν φ+ν+ω=3 ὀρθ.

Ἐπειδὴ ὅμως αἱ περὶ τὸ Ο γωνίαι ν, φ, ω, σ ἔχουν ἄθροισμα 4 ὀρθάς, ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία σ εἶναι ἴση μὲ 1 ὀρθήν. Ἐπειδὴ ἡ γωνία σ εἶναι ὀρθὴ ἕπεται, ὅτι αἱ πλευραί της ΟΑ καὶ ΟΔ τέμνονται καθέτως.

Α' Ὁμάς. 29. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς γωνιῶν σχηματίζουν γωνίαν, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δοθεισῶν γωνιῶν. Ἐφαρμογή: Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία τῶν διχοτόμων: 1ον. Ἂν αἱ δοθεῖσαι γωνίαι εἶναι* 68^0 *καὶ* 45^0. *2ον. Ἂν αἱ δοθεῖσαι γωνίαι εἶναι συμπληρωματικαί.*

Ἔστωσαν αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ καὶ ΟΔ, ΟΕ αἱ



Σχ. 17

διχοτόμοι των ἀντιστοίχως. Θὰ δείξωμεν, ὅτι γων. ΔΟΕ$=\frac{1}{2}$(γων. ΑΟΒ$+$γων. ΒΟΓ).

Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι

γων. ΔΟΒ$=\frac{1}{2}$ γων. ΑΟΒ (1) καὶ

γων. ΒΟΕ$=\frac{1}{2}$ γων. ΒΟΓ (2).

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη ἔχομεν:

γων. ΔΟΒ$+$γων. ΒΟΕ$=\frac{1}{2}$ γων. ΑΟΒ$+\frac{1}{2}$ γων. ΒΟΓ

ἢ γων. ΔΟΕ $=\frac{1}{2}$(γων. ΑΟΒ$+$γων. ΒΟΓ).

Ἐφαρμογή. 1ον. Ἡ γωνία τῶν διχοτόμων εἶναι ἴση μὲ

$$\frac{1}{2}(68^\circ+45^\circ)=56^\circ\,30'.$$

2ον. Ἡ γωνία τῶν διχοτόμων εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῶν 90°, δηλ. μὲ 45°.

30. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας προεκτεινομένη πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς εἶναι διχοτόμος τῆς κατὰ κορυφὴν γωνίαν της.

Διότι γνωρίζομεν (§ 68), ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

31. Νὰ διατυπωθῇ καὶ νὰ ἀποδειχθῇ τὸ ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος τῆς § 67.

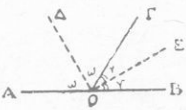
Ἐὰν αἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς γωνιῶν εἶναι κάθετοι, αἱ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.

Ἔστωσαν αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ΑΟΓ καὶ ΓΟΒ καὶ ΟΔ, ΟΕ αἱ διχοτόμοι των.

Ἐπειδὴ αἱ ΟΔ καὶ ΟΕ εἶναι κάθετοι ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΔΟΕ εἶναι ὀρθή, ἤτοι εἶναι

$\widehat{\Delta O E}=1$ ὀρθ. ἢ $\nu+\omega=1$ ὀρθ. (1)

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (1) ἐπὶ 2 καὶ ἔχομεν

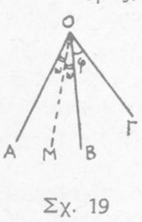


Σχ. 18

$2\nu+2\omega=2$ ὀρθ. ἢ $\widehat{A O \Gamma}+\widehat{\Gamma O B}=2$ ὀρθαί.

Ὥστε αἱ γωνίαι ΑΟΓ καὶ ΓΟΒ εἶναι παραπληρωματικαί.

Β' Ὁμάς. 32. Δίδονται δύο ἐφεξῆς γωνίαι ΑΟΒ *καὶ* ΒΟΓ *καὶ* ΟΜ *ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας* ΑΟΒ· *νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι*



Σχ. 19

$$\widehat{AOM}=\frac{\widehat{AO\Gamma}-\widehat{BO\Gamma}}{2},\quad \widehat{\Gamma OM}=\frac{\widehat{\Gamma OA}+\widehat{\Gamma OB}}{2}$$

1ον. Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα ἔχομεν

$\widehat{AOB}=\widehat{AO\Gamma}-\widehat{BO\Gamma}$ ἢ $2\,\widehat{AOM}=\widehat{AO\Gamma}-\widehat{BO\Gamma}$.

ἄρα $\widehat{AOM}=$γων. $\frac{\widehat{AO\Gamma}-\widehat{BO\Gamma}}{2}$

2ον. Ἔχομεν

$$\widehat{\Gamma O M}=\widehat{A O \Gamma}-\widehat{A O M} \quad \text{καὶ} \quad \widehat{\Gamma O M}=\widehat{B O \Gamma}+\widehat{B O M}.$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψει, ὅτι γων. ΑΟΜ=γων. ΒΟΜ λαμβάνομεν

$$2\widehat{\Gamma O M}=\widehat{A O \Gamma}+\widehat{B O \Gamma} \quad \text{ἢ} \quad \widehat{\Gamma O M}=\frac{\widehat{A O \Gamma}+\widehat{B O \Gamma}}{2}$$

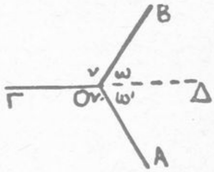
33. Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Ο *φέρομεν τὰς ἡμιευθείας* ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, *οὕτως ὥστε αἱ σχηματιζόμεναι τρεῖς διαδοχικαὶ γωνίαι νὰ εἶναι ἴσαι. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι κάθε μία ἀπὸ τὰς ἡμιευθείας αὐτάς, ἂν προεκταθῇ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς διχοτομῇ τὴν γωνίαν τῶν δύο ἄλλων ἡμιευθειῶν.*

Ἔστωσαν ΑΟΒ, ΒΟΓ καὶ ΓΟΑ αἱ τρεῖς σχηματιζόμεναι ἴσαι γωνίαι
Προεκτείνομεν τὴν ΟΓ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς, ὁπότε ἡ γωνία ΑΟΒ χωρίζεται εἰς τὰς γωνίας ω καὶ ω'. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\widehat{\omega}=\widehat{\omega'}$.

Ἐπειδὴ ἡ ΓΟΔ εἶναι εὐθεῖα θὰ εἶναι

$$\nu+\omega=2 \text{ ὀρθ.} \quad \text{καὶ} \quad \nu'+\omega'=2 \text{ ὀρθ.}$$

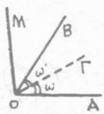
Ἄρα $\nu+\omega=\nu'+\omega'$ καὶ ἐπειδὴ $\nu=\nu'$ θὰ εἶναι $\omega=\omega'$ · δηλ. ἡ ΓΟΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΟΒ.



Σχ. 20

34. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ διχοτόμος ΟΓ *μιᾶς γωνίας* ΑΟΒ *σχηματίζει μὲ μίαν ἡμιευθεῖαν* ΟΜ, *ἡ ὁποία κεῖται ἐκτὸς ἢ ἐντὸς τῆς γωνίας* ΑΟΒ, *μίαν γωνίαν ἴσην μὲ τὸ ἡμιάθροισμα ἢ μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ ἡμιευθεῖα* ΟΜ *μὲ ἑκάστην τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας* ΑΟΒ.

1ον. Ἔστω, ὅτι ἡ ΟΜ κεῖται ἐκτὸς τῆς γωνίας ΑΟΒ. Θὰ δείξωμεν ὅτι $\widehat{\Gamma O M}=\dfrac{\widehat{A O M}+\widehat{B O M}}{2}$.



Σχ. 21

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα ἔχομεν

$$\widehat{\Gamma O M}=\widehat{\omega'}+\widehat{B O M} \quad \text{καὶ} \quad \widehat{\Gamma O M}=\widehat{A O M}-\widehat{\omega}.$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη λαμβάνομεν $2.\widehat{\Gamma O M}=\widehat{\omega'}+\widehat{B O M}+\widehat{A O M}-\widehat{\omega}$ (1).

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ω καὶ ω' εἶναι ἴσαι, διότι ἡ ΟΓ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΟΒ, ἡ ἰσότης (1) γίνεται

$$2.\widehat{\Gamma O M}=\widehat{B O M}+\widehat{A O M}, \quad \text{ἄρα} \quad \widehat{\Gamma O M}=\frac{\widehat{B O M}+\widehat{A O M}}{2}.$$

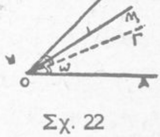
2ον. Ἔστω, ὅτι ἡ ΟΜ κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας ΑΟΒ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\widehat{\Gamma O M}=\dfrac{\widehat{A O M}-\widehat{B O M}}{2}$.

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα 22 ἔχομεν

$$\widehat{\Gamma O M}=\widehat{A O M}-\omega \quad \text{καὶ} \quad \widehat{\Gamma O M}=\widehat{\Gamma O B}-\widehat{B O M}.$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη ἔχομεν

$$2\,\widehat{\Gamma O M}=\widehat{A O M}-\widehat{\omega}+\widehat{\Gamma O B}-\widehat{B O M} \quad (2).$$

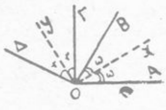


Σχ. 22

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ω καὶ ΓΟΒ εἶναι ἴσαι ἐξ ὑποθέσεως, ἡ ἰσότης (2) γράφεται

$$2.\widehat{ΓΟΜ}=\widehat{ΑΟΜ}-\widehat{ΒΟΜ}, \quad \text{ἄρα} \quad \widehat{ΓΟΜ}=\frac{\widehat{ΑΟΜ}-\widehat{ΒΟΜ}}{2}.$$

35. Δίδεται μία ὀρθὴ γωνία xOy. Ἐὰν ἡ Ox εἶναι διχοτόμος μιᾶς γωνίας ΑΟΒ καὶ Oy εἶναι διχοτόμος μιᾶς γωνίας ΓΟΔ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι ΑΟΓ καὶ ΒΟΔ εἶναι παραπληρωματικαί.



Σχ. 23

Ἐξ ὑποθέσεως αἱ γωνίαι ω καὶ ω εἶναι ἴσαι. Ὁμοίως εἶναι ἴσαι καὶ αἱ γωνίαι ν. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\widehat{ΑΟΓ}=2\widehat{ω}+\widehat{ΒΟΓ} \qquad (1)$$

$$\widehat{ΒΟΔ}=\widehat{ΒΟΓ}+2\widehat{ν} \qquad (2)$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη ἔχομεν

$$\widehat{ΑΟΓ}+\widehat{ΒΟΔ}=2\widehat{ω}+2\,\widehat{ΒΟΓ}+2\widehat{ν}=2\,(\widehat{ω}+\widehat{ΒΟΓ}+\widehat{ν}) \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ $\widehat{ω}+\widehat{ΒΟΓ}+\widehat{ν}=xOy=1$ ὀρθ. ἡ ἰσότης (3) γίνεται

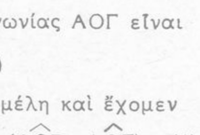
$$\widehat{ΑΟΓ}+\widehat{ΒΟΔ}=2\,.\,1 \text{ ὀρθ.}=2 \text{ ὀρθαί.}$$

Ὥστε αἱ γωνίαι ΑΟΓ καὶ ΓΟΔ εἶναι παραπληρωματικαί.

36. Δύο γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὴν κορυφὴν καὶ μίαν κοινὴν πλευρὰν καὶ δὲν εἶναι ἐφεξῆς, ἔχουν διαφορὰν 90°. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν αὐτῶν εἶναι ἴση μὲ 45°.

Ἔστωσαν αἱ γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΑΟΓ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὴν τὴν πλευρὰν ΟΑ, τὰς δὲ ΟΒ καὶ ΟΓ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΟΑ καὶ τοιαῦται, ὥστε $\widehat{ΑΟΒ}-\widehat{ΑΟΓ}=90^0$.

Ἔστω ΟΔ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΟΒ καὶ ΟΕ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΟΓ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ γωνία ΕΟΔ εἶναι 45°.



Σχ. 24

Ἐπειδὴ ἡ ΟΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΟΒ ἔχομεν

$$\widehat{ΑΟΔ}=\frac{1}{2}\,\widehat{ΑΟΒ} \qquad (1)$$

Ἐπίσης ἐπειδὴ ἡ ΟΕ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΟΓ εἶναι

$$\widehat{ΑΟΕ}=\frac{1}{2}\,\widehat{ΑΟΓ} \qquad (2)$$

Ἀφαιροῦμεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\widehat{ΑΟΔ}-\widehat{ΑΟΕ}=\frac{1}{2}\,\widehat{ΑΟΒ}-\frac{1}{2}\,\widehat{ΑΟΓ} \quad \text{ἢ} \quad \widehat{ΕΟΔ}=\frac{1}{2}\,(\widehat{ΑΟΒ}-\widehat{ΑΟΓ}) \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\widehat{ΑΟΒ}-\widehat{ΑΟΓ}=90^0$

ἡ ἰσότης (3) γίνεται $\widehat{ΕΟΔ}=45^0$.

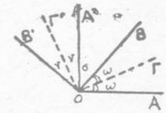
37. *Δίδεται μία γωνία ΑΟΒ. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Ο φέρομεν τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΑ′ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΑ καὶ κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς ΟΒ καὶ ἔπειτα τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΒ′ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΒ καὶ κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς ΟΑ′. **Νὰ ἀποδειχθῆ**, ὅτι αἱ γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΑΟΒ′ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ διχοτόμοι των κάθετοι.*

Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι γων. ΑΟΑ′=γων. ΒΟΒ′=1 ὀρθή.

1ον. Αἱ γωνίαι ΑΟΒ καὶ Α′ΟΒ′ εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν συμπληρωματικὴν γωνίαν σ.

2ον. Ἔστω ΟΓ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΟΒ ὁπότε αἱ γωνίαι ω εἶναι ἴσαι καὶ ΟΓ′ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α′ΟΒ′, ὁπότε αἱ γωνίαι ν εἶναι ἴσαι.

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΟΒ καὶ Α′ΟΒ′ εἶναι ἴσαι, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω θὰ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ γωνίαι ω καὶ ν.



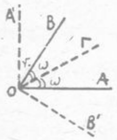
Σχ. 25

Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\widehat{\Gamma O \Gamma'}=\widehat{\omega}+\widehat{\sigma}+\widehat{\nu} \quad \text{ἢ} \quad \widehat{\Gamma O \Gamma'}=\widehat{\omega}+\widehat{\sigma}+\widehat{\omega}=\widehat{2\omega}+\widehat{\sigma}=\widehat{A O A'}=1 \text{ ὀρθ.}$$

Ὥστε αἱ διχοτόμοι ΟΓ καὶ ΟΓ′ εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

38. *Δίδεται μία γωνία ΑΟΒ. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Ο φέρομεν τὴν ΟΑ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΑ καὶ κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς ΟΒ καὶ ἔπειτα τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΒ′ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΒ καὶ κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς ΟΑ. **Νὰ δειχθῆ**, ὅτι αἱ γωνίαι ΑΟΒ καὶ Α′ΟΒ′ ἔχουν τὴν αὐτὴν διχοτόμον καὶ ὅτι αἱ γωνίαι αὐταὶ εἶναι παραπληρωματικαί.*



Σχ. 26

1ον. Ἔστω ΟΓ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΟΒ. Ἐπομένως αἱ γωνίαι ω εἶναι ἴσαι.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΟΑ′ εἶναι ὀρθή, ἐκ κατασκευῆς, θὰ εἶναι $2\omega+\nu=1$ ὀρθὴ (1).

Ὁμοίως ἐπειδὴ ἡ γωνία ΒΟΒ′ εἶναι ὀρθή, θὰ εἶναι $2\omega+AOB'=1$ ὀρθὴ (2).

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$2\omega+\nu=2\omega+AOB'$ ἢ $\nu=AOB'$, ὁπότε καὶ $\widehat{A'O\Gamma}=\widehat{\Gamma OB}$.

Ὥστε ἡ ΟΓ εἶναι διχοτόμος καὶ τῆς γων. Α′ΟΒ′.

2ον. Ἔχομεν $\widehat{AOB}=2\omega$ καὶ $\widehat{A'OB'}=2\omega+2\nu$.

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη ἔχομεν

$$\widehat{AOB}+\widehat{A'OB'}=\widehat{4\omega}+\widehat{2\nu}=2(\widehat{2\omega}+\widehat{\nu})$$

Καὶ ἐπειδὴ $2\omega+\nu=\widehat{AOA'}=1$ ὀρθ. ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$\widehat{AOB}+\widehat{A'OB'}=2 \text{ ὀρθ.}$$

Ὥστε αἱ γωνίαι ΑΟΒ καὶ Α′ΟΒ′ εἶναι παραπληρωματικαί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΚΑΘΕΤΟΙ ΚΑΙ ΠΛΑΓΙΑΙ ΠΡΟΣ ΕΥΘΕΙΑΝ

39. Πόσας διαγωνίους δυνάμεθα νὰ φέρωμεν: 1ον. Εἰς ἕνα ὀκτάγωνον; 2ον. Εἰς ἕνα πολύγωνον μὲ ν πλευράς;

Ἀπὸ κάθε κορυφὴν πολυγώνου, μὲ ν κορυφάς, δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ν—3 διαγωνίους· ἑπομένως ἀπὸ τὰς ν κορυφάς του δυνάμεθα νὰ φέρωμεν (ν—3)·ν διαγωνίους. Ἐπειδὴ ὅμως αἱ διαγώνιοι αὐταὶ ἐπαναλαμβάνονται ἀπὸ 2 φορὰς ἕπεται, ὅτι τὸ πραγματικὸν πλῆθος τῶν διαγωνίων εἶναι $\frac{(\nu-3)\cdot\nu}{2}$. Ὥστε ἂν παραστήσωμεν μὲ Δ τὸ πλῆθος τῶν διαγωνίων του θὰ ἔχωμεν $\Delta=\frac{(\nu-3)\,\nu}{2}$.

Ἐὰν τὸ πολύγωνον εἶναι ὀκτάγωνον, αἱ διαγώνιοί του Δ θὰ εἶναι

$$\Delta=\frac{(8-3)\,8}{2}=20.$$

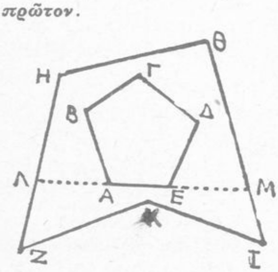
40. Πόσας πλευρὰς ἔχει τὸ πολύγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει 14 διαγωνίους; 54 διαγωνίους;

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον $\Delta=\frac{(\nu-3)\nu}{2}$ θέσωμεν Δ=14 λαμβάνομεν $14=\frac{(\nu-3)\,\nu}{2}$ ἢ $28=\nu^2-3\nu$ ἢ $\nu^2-3\nu-28=0$.
Αἱ ρίζαι τῆς δευτεροβαθμίου αὐτῆς ἐξισώσεως εἶναι ν=7 καὶ ν=—4.

Μόνον ἡ θετικὴ τιμὴ τοῦ ν εἶναι παραδεκτή· ἡ ἀρνητικὴ τιμὴ τοῦ ν ἀποκλείεται. Ἑπομένως τὸ πολύγωνον ἔχει 7 κορυφάς, δηλ. εἶναι ἑπτάγωνον.

Ὁμοίως ἔχομεν $54=\frac{(\nu-3)\,\nu}{2}$ ἢ $108=\nu^2-3\nu$ ἢ $\nu^2-3\nu-108=0$.
Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι ν=12 καὶ ν=—9 (ἀποκλείεται). Ἄρα τὸ δωδεκάγωνον ἔχει 54 διαγωνίους.

41. Ἡ περίμετρος ἑνὸς κυρτοῦ πολυγώνου εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὴν περίμετρον κάθε πολυγώνου, κυρτοῦ ἢ μὴ κυρτοῦ, τὸ ὁποῖον περιβάλλει τὸ πρῶτον.



Σχ. 27

Ἔστω τὸ κυρτὸν πολύγωνον ΑΒΓΔΕ (σχ. 27), τὸ ὁποῖον περιβάλλεται ἀπὸ τὸ μὴ κυρτὸν πολύγωνον ΖΗΘΙΚ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$AB+B\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta E+EA<ZH+H\Theta+\Theta I+IK+KZ.$$

Προεκτείνομεν μίαν τυχοῦσαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ, ἔστω τὴν ΑΕ καὶ ἔστωσαν Λ καὶ Μ τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ΑΕ συναντᾷ τὴν περίμετρον τοῦ περιβάλλοντος πολυγώνου.

Ἐπειδὴ ἡ κυρτὴ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓΔΕ περιβάλλεται ἀπὸ τὴν τεθλασμένην γραμμὴν ΑΛΗΘΜΕ καὶ ἔχει μὲ αὐτὴν τὰ αὐτὰ ἄκρα Α, Ε, θὰ εἶναι (§ 75) μικροτέρα αὐτῆς, ἤτοι θὰ εἶναι

$$ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΕ<ΑΛ+ΛΗ+ΗΘ+ΘΜ+ΜΕ \quad (1)$$

Ὁμοίως ἐπειδὴ ἡ ΛΑΕΜ εἶναι εὐθεῖα, ἡ δὲ ΛΖΚΙΜ εἶναι τεθλασμένη καὶ ἔχουν τὰ αὐτὰ ἄκρα Λ καὶ Μ, θὰ εἶναι

$$ΛΑ+ΑΕ+ΕΜ<ΜΙ+ΙΚ+ΚΖ+ΖΛ \quad (2)$$

Προσθέτομεν τὰς ἀνισότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΕ+ΛΑ+ΑΕ+ΕΜ<ΑΛ+ΛΗ+ΗΘ+ΘΜ+ΜΕ+ΜΙ+$$
$$+ΙΚ+ΚΖ+ΖΛ.$$

Ἀφαιροῦμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος αὐτῆς τὰ ΛΑ καὶ ΕΜ, τὰ ὁποῖα εἶναι κοινά, καὶ ἔχομεν

$$ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΕ+ΑΕ<ΛΗ+ΗΘ+ΘΜ+ΜΙ+ΙΚ+ΚΖ+ΖΛ \quad (3)$$

Ἐὰν παρατηρήσωμεν, ὅτι

$$ΖΛ+ΛΗ=ΖΗ \quad \text{καὶ} \quad ΘΜ+ΜΙ=ΘΙ$$

ἡ ἀνισότης (3) γράφεται

$$ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΕ+ΑΕ<ΖΗ+ΗΘ+ΘΙ+ΙΚ+ΚΖ$$

Κάθετοι καὶ πλάγιαι πρὸς εὐθεῖαν

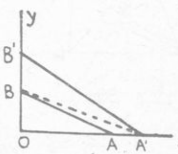
41. Δίδεται ἡ ὀρθὴ γωνία xOy· ***ἐπὶ τῆς πλευρᾶς*** Ox ***λαμβάνομεν δύο σημεῖα*** Α ***καὶ*** Α′ ***καὶ τοιαῦτα, ὥστε*** ΟΑ < ΟΑ′ ***καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς*** Oy ***τὰ σημεῖα*** Β ***καὶ*** Β′ ***καὶ τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι*** ΟΒ < ΟΒ′. ***Φέρομεν τὰς εὐθείας*** ΑΒ ***καὶ*** Α′Β′. ***Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι*** ΑΒ < Α′Β′.

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΑ′. Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΟΑ < ΟΑ′· ἄρα αἱ πλάγιαι ΒΑ καὶ ΒΑ′ πρὸς τὴν Ox εἶναι ἄνισοι καὶ θὰ εἶναι

$$ΒΑ<ΒΑ' \quad (1)$$

Ἐπίσης αἱ Α′Β καὶ Α′Β′ εἶναι πλάγιαι πρὸς τὴν Oy καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΟΒ < ΟΒ′, θὰ εἶναι

$$Α'Β<Α'Β' \quad (2).$$



Σχ. 28

Ἀπὸ τὰς ἀνισότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$ΒΑ<ΒΑ'<Α'Β', \quad \text{ἄρα} \quad ΒΑ<Α'Β'.$$

42. Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Ο, ***τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς μιᾶς εὐθείας*** xy ***φέρομεν τὴν κάθετον*** ΟΑ ***πρὸς τὴν*** xy ***καὶ δύο ἀνίσους πλαγίας*** ΟΒ ***καὶ*** ΟΓ. ***Ἐὰν εἶναι*** ΟΓ > ΟΒ ***νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι καὶ*** γων. ΑΟΓ > γων. ΑΟΒ.

Σχ. 29

Ὑποθέτομεν πρῶτον, ὅτι αἱ πλάγιαι ΟΒ καὶ ΟΓ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου ΟΑ. Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΟΓ > ΟΒ θὰ εἶναι καὶ ΑΓ > ΑΒ. Τὸ σημεῖον Β κεῖται λοιπὸν μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ καὶ ἑπομένως ἡ γωνία ΑΟΓ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γων. ΑΟΒ.

Ἔστω τώρα, ὅτι αἱ πλάγιαι ΟΒ καὶ ΟΓ′ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς καθέτου ΟΑ. Ἐπὶ τῆς

2

ΑΓ′ λαμβάνομεν τμῆμα ΑΒ′=ΑΒ καὶ φέρομεν τὴν ΟΒ′. Ἀποδεικνύομεν ὁμοίως, ὅτι γων. ΑΟΓ′> γων. ΑΟΒ′.

Ἀλλὰ ἐπειδὴ γων. ΑΟΒ′=γων. ΑΟΒ, ἡ προηγουμένη ἀνισότης γίνεται γων. ΑΟΓ′> γων. ΑΟΒ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ′.

ΤΡΙΓΩΝΑ

Τρίγωνα

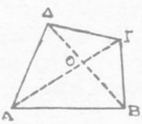
Α. Ὁμάς. 43. Δύο πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου εἶναι 16 μέτρα καὶ 9 μέτρα· Μεταξὺ ποίων τιμῶν δύναται νὰ μεταβάλλεται τὸ μῆκος τῆς τρίτης πλευρᾶς του;

Γνωρίζομεν, ὅτι κάθε πλευρὰ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς των.

Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πλευρῶν εἶναι 16 μ. + 9 μ. = 25 μ. Ἡ διαφορά των εἶναι 16 μ. — 9 μ. = 7 μ.

Ὥστε ἡ τρίτη πλευρὰ πρέπει νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 7 μέτρων καὶ μικροτέρα τῶν 25 μέτρων.

44. Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων τετραπλεύρου εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν του.



Σχ. 30

Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ ΑΓ, ΒΔ αἱ διαγώνιοί του. Θὰ δείξωμεν, ὅτι: ΑΓ+ΒΔ> ΑΒ+ΓΔ. Ἐπειδὴ ἡ μία πλευρὰ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, θὰ ἔχωμεν ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΟΑΒ ΑΒ < ΟΑ + ΟΒ (3)

Ὁμοίως ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΟΓΔ ἔχομεν

ΓΔ < ΟΓ + ΟΔ (2)

Προσθέτομεν τὰς ἀνισότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν: ΑΒ + ΓΔ < ΟΑ + ΟΒ + ΟΓ + ΟΔ (3)

Ἐπειδὴ ΟΑ+ΟΓ=ΑΓ καὶ ΟΒ+ΟΔ=ΒΓ, ἡ ἀνισότης (3) γράφεται ΑΒ+ΓΔ <ΑΓ+ΒΔ ἢ ΑΓ+ΒΔ> ΑΒ+ΓΔ.

45. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Δ· φέρομεν τὸ εὐθύγρ. τμῆμα ΑΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι τὸ ΑΔ εἶναι μικρότερον τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ τριγώνου καὶ 2ον ὅτι $ΑΔ > \frac{ΑΒ+ΑΓ-ΒΓ}{2}$.

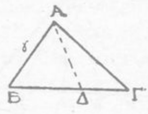
Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΒ ἡ πλευρὰ ΑΔ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων, ἤτοι εἶναι

ΑΔ < ΑΒ+ΒΔ (1), ΑΔ > ΑΒ — ΒΔ (2)

Ὁμοίως ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΔΓ ἔχομεν

ΑΔ < ΑΓ+ΔΓ (3), ΑΔ > ΑΓ — ΔΓ (4)

1ον. Προσθέτομεν τὰς ἀνισότητας (1) καὶ (3) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν



Σχ. 31

$$2ΑΔ < ΑΒ+ΒΔ+ΑΓ+ΔΓ \quad ἢ \quad 2ΑΔ < ΑΒ+ΑΓ+(ΒΔ+ΔΓ)$$

$$ἢ \quad 2ΑΔ < ΑΒ+ΑΓ+ΒΓ \quad ἢ \quad ΑΔ < \frac{ΑΒ+ΑΓ+ΒΓ}{2}$$

2ον. Προσθέτομεν τὰς ἀνισότητας (2) καὶ (4) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$2ΑΔ > ΑΒ-ΒΔ+ΑΓ-ΔΓ \quad ἢ$$

$$2ΑΔ > ΑΒ+ΑΓ-(ΒΔ+ΔΓ) \quad ἢ \quad 2ΑΔ > ΑΒ+ΑΓ-ΒΓ,$$

$$ἄρα \quad ΑΔ > \frac{ΑΒ+ΑΓ-ΒΓ}{2}.$$

Β' Ὁμάς. 46. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τρίτη πλευρὰ ἑνὸς τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ εἶναι 4 μέτρ. καὶ 9 μέτρα, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ τρίτη πλευρὰ περιέχει ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν μέτρων. Ὑπάρχουν πολλαὶ λύσεις;

Γνωρίζομεν, ὅτι κάθε πλευρὰ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς των.

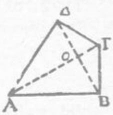
Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πλευρῶν εἶναι 9 μ. + 4 μ. = 13 μ. Ἡ διαφορα των εἶναι 9 μ. — 4 μ. = 5 μ. Ὥστε ἡ τρίτη πλευρὰ πρέπει νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 5 μ. καὶ μικροτέρα τῶν 13 μ. Ἡ τρίτη πλευρὰ δύναται λοιπὸν νὰ εἶναι 6 μ., 7 μ., 8 μ., 9 μ., 10 μ., 11 μ., 12 μ.

47. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ περίμετρος ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος τῶν διαγωνίων του καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.

Ἔστω ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ ΑΓ, ΒΔ αἱ διαγώνιοί του. Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$ΑΓ + ΒΔ < ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ < 2(ΑΓ + ΒΔ)$$

Γνωρίζομεν, ὅτι μία πλευρὰ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων· ἄρα



Σχ. 32

ἀπὸ τὸ τρίγωνον	ΒΑΓ	ἔχομεν	$ΑΓ < ΑΒ + ΒΓ$	(1)
» » »	ΔΑΓ	»	$ΑΓ < ΑΔ + ΔΓ$	(2)
» » »	ΑΒΔ	»	$ΒΔ < ΑΒ + ΑΔ$	(3)
» » »	ΓΒΔ	»	$ΒΔ < ΒΓ + ΔΓ$	(4)

Προσθέτομεν τὰς ἀνισότητας (1), (2), (3), (4) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$2ΑΓ+2ΒΔ < 2ΑΒ+2ΒΓ+2ΓΔ+2ΑΔ \quad ἢ \quad ΑΓ+ΒΔ < ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΑΔ \quad (5)$$

Γνωρίζομεν (ἄσκ. 45), ὅτι

$$ΑΓ+ΒΔ > ΑΒ+ΓΔ \ (6) \quad καὶ \quad ΑΓ+ΒΔ > ΑΔ+ΒΓ \ (7).$$

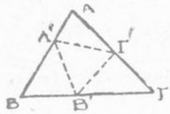
Προσθέτομεν τὰς ἀνισότητας (6) καὶ (7) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$2ΑΓ+2ΒΔ > ΑΒ+ΓΔ+ΑΔ+ΒΓ \quad ἢ \quad 2(ΑΓ+ΒΔ) > ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ \quad (8)$$

Ἀπὸ τὰς (5) καὶ (8) συνάγομεν, ὅτι

$$ΑΓ+ΒΔ < ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ < 2(ΑΓ+ΒΔ).$$

48. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ περίμετρος ἑνὸς τριγώνου Α'Β'Γ', τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς κορυφάς του ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἄλλου τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι μικροτέρα τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓ.



Σχ. 33

Γνωρίζομεν, ὅτι κάθε πλευρὰ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων. 'Από τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΒΒ'Α', ΓΓ'Β' καὶ ΑΑ'Γ' θὰ ἔχωμεν

$$Α'Β' < Α'Β + ΒΒ', \quad Β'Γ' < Β'Γ + ΓΓ', \quad Γ'Α' < Γ'Α + ΑΑ'$$

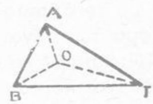
Προσθέτομεν τὰς ἀνισότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$Α'Β' + Β'Γ' + Γ'Α' < Α'Β + ΒΒ' + Β'Γ + ΓΓ' + Γ'Α + ΑΑ' \quad ἤ$$

$$Α'Β' + Β'Γ' + Γ'Α' < (Α'Β + Α'Α) + (ΒΒ' + Β'Γ) + (ΓΓ' + Γ'Α) \quad (1)$$

'Επειδὴ $Α'Β + ΑΑ' = ΑΒ$, $ΒΒ' + Β'Γ = ΒΓ$ καὶ $ΓΓ' + Γ'Α = ΓΑ$, ἡ ἀνισότης (1) γράφεται $Α'Β' + Β'Γ' + Γ'Α' < ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ$.

49. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων σημείου κειμένου ἐντὸς τριγώνου ἀπὸ τῶν κορυφῶν του, εἶναι μικρότερον τῆς περιμέτρου καὶ μεγαλύτερον τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ τριγώνου.



Σχ. 34

Ἔστω ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Ο ἕνα σημεῖον ἐντὸς αὐτοῦ. Φέρομεν τὰς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\frac{1}{2}(ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ) < ΟΑ + ΟΒ + ΟΓ < ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ$$

Γνωρίζομεν, ὅτι κάθε πλευρὰ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του. 'Από τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΑ θὰ ἔχωμεν:

$$ΑΒ < ΟΑ + ΟΒ, \quad ΒΓ < ΟΒ + ΟΓ, \quad ΓΑ < ΟΓ + ΟΑ$$

Προσθέτομεν τὰς ἀνισότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν:

$$ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ < 2ΟΑ + 2ΟΒ + 2ΟΓ \quad ἤ$$

$$\frac{1}{2}(ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ) < ΟΑ + ΟΒ + ΟΓ \quad (1)$$

Ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ΒΑΓ περιβάλλει τὴν ΒΟΓ καὶ ἔχει μὲ αὐτὴν τὰ αὐτὰ ἄκρα· ἄρα θὰ εἶναι $ΑΒ + ΑΓ > ΟΒ + ΟΓ$ (2)

Ὁμοίως ἔχομεν

$$ΑΒ + ΒΓ > ΟΓ + ΟΑ \quad (3) \qquad ΒΓ + ΓΑ > ΟΒ + ΟΑ \quad (4)$$

Προσθέτομεν τὰς ἀνισότητας (2), (3), (4) κατὰ μέλη ἔχομεν

$$2ΑΒ + 2ΒΓ + 2ΓΑ > 2ΟΑ + 2ΟΒ + 2ΟΓ$$

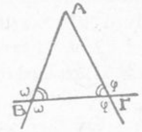
$$ἤ \quad ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ > ΟΑ + ΟΒ + ΟΓ \quad (5)$$

'Από τὰς ἀνισότητας (1) καὶ (5) συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{1}{2}(ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ) < ΟΑ + ΟΒ + ΟΓ < ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ$$

'Ιδιότητες ἰσοσκελῶν τριγώνων

'Ασκήσεις. 50. 'Εὰν προεκταθῇ ἡ βάσις ἰσοσκελοῦς τριγώνου, αἱ σχηματιζόμεναι ἐξωτερικαὶ γωνίαι του εἶναι ἴσαι.



Σχ. 35

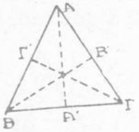
Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 35), εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ΑΒ=ΑΓ, καὶ ω καὶ φ αἱ ἐξωτερικαὶ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ προέκτασις τῆς βάσεώς του ΒΓ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\widehat{\omega}=\widehat{\varphi}$.

Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, αἱ παρὰ τὴν βάσιν του γωνίαι Β καὶ Γ θὰ εἶναι ἴσαι. Ἀλλ' αἱ γωνίαι ω καὶ Β καθὼς καὶ αἱ φ καὶ Γ εἶναι παραπληρωματικαί, ὡς ἐφεξῆς τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ παραπληρωματικαὶ αὐτῶν ω καὶ φ θὰ εἶναι ἴσαι, δηλαδὴ θὰ εἶναι $\widehat{\omega}=\widehat{\varphi}$.

51. ***Αἱ προεκτάσεις τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου πρὸς τὸ μέρος τῆς βάσεως σχηματίζουν μὲ τὴν βάσιν γωνίας ἴσας.***

Ἀποδεικνύομεν, ὡς ἀνωτέρω, ὅτι αἱ γωνίαι ω' καὶ φ' (σχ. 35) εἶναι ἴσαι, ὡς παραπληρωματικαὶ τῶν ἴσων γωνιῶν Β καὶ Γ.

52. ***Αἱ τρεῖς διάμεσοι ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του καὶ ὕψη του.***



Σχ. 36

Ἔστω τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' αἱ διάμεσοί του· θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ διάμεσοι αὐταὶ διχοτομοῦν τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΑΒ=ΒΓ=ΓΑ. Ἐπειδὴ ΑΒ=ΑΓ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως ἡ διάμεσος ΑΑ' εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν καὶ διὰ τὰς δύο ἄλλας διαμέσους.

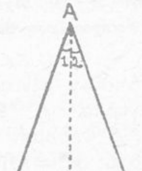
Περιπτώσεις ἰσότητος τριγώνων

Α' Ὁμάς. 53. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἕνα τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές: 1ον. Ἐὰν ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας του εἶναι συγχρόνως καὶ ὕψος αὐτοῦ. 2ον. Ἐὰν ἕνα ὕψος του εἶναι συγχρόνως καὶ διάμεσός του. (Ἀντίστροφα τῶν θεωρημάτων τῆς § 89).

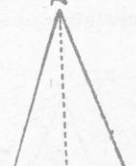
1ον. Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 37) εἰς τὸ ὁποῖον ἡ διχοτόμος ΑΔ τῆς γωνίας Α εἶναι καὶ ὕψος τοῦ τριγώνου· δηλαδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι

$\widehat{A}_1=\widehat{A}_2$ καὶ $ΑΔ \perp ΒΓ$

Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.



Σχ. 37



Σχ. 38

Τὰ ὀρθογ. τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ ἔχουν τὴν ΑΔ κοινήν, $\widehat{A}_1=\widehat{A}_2$ ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι καὶ ΑΒ=ΑΓ. Ἐπειδὴ ΑΒ=ΑΓ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

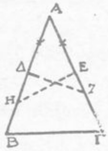
2ον. Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 38), εἰς τὸ ὁποῖον τὸ ὕψος του ΑΔ εἶναι καὶ διάμεσος τοῦ τριγώνου· δηλ. ἐξ ὑποθέσεως εἶναι

$$ΑΔ \perp ΒΓ \quad \text{καὶ} \quad ΒΔ = ΔΓ.$$

Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

Τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ ἔχουν τὴν ΑΔ κοινήν, ΒΔ=ΔΓ ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως θὰ ἔχουν καὶ ΑΒ=ΑΓ. Ἐπειδὴ ΑΒ=ΑΓ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

54. ***Αἱ κάθετοι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου μέχρι τῶν ἀπέναντι πλευρῶν, εἶναι ἴσαι.***

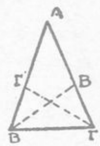


Σχ. 39

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 39) καὶ ΔΖ, ΕΗ αἱ κάθετοι εἰς τὰ μέσα Δ καὶ Ε τῶν ἴσων πλευρῶν του. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΔΖ=ΕΗ.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΖ καὶ ΑΕΗ ἔχουν ΑΔ=ΑΕ ὡς μισὰ τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ τὴν γωνίαν Α κοινήν· δηλ. ἔχουν μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην καὶ τὴν προσκειμένην γωνίαν ἴσην, ἄρα θὰ εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΔΖ=ΕΗ.

55. ***Αἱ διχοτόμοι τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσαι.***

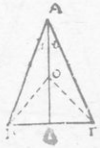


Σχ. 40

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΒΒ', ΓΓ' αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του Β καὶ Γ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΒΒ'=ΓΓ'.

Τὰ τρίγωνα ΒΓΓ' καὶ ΒΓΒ' ἔχουν τὴν ΒΓ κοινήν, γων. Β=γων. Γ ὡς παρὰ τὴν βάσιν γωνίας ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ $\widehat{ΒΓ}Γ'=\widehat{ΓΒ}Β'=ν'$, ὡς ἡμίση τῶν ἴσων γωνιῶν Γ καὶ Β, ἤτοι τὰ τρίγωνα αὐτὰ ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας· ἄρα εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως θὰ ἔχουν καὶ τὰ ἄλλα στοιχεῖα των ἴσα, ἤτοι θὰ εἶναι ΒΒ' = ΓΓ'.

56. ***Κάθε σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς βάσεώς του.***

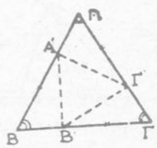


Σχ. 41

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ΑΒ=ΑΓ καὶ ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α. Ἔστω Ο τυχὸν σημεῖον τῆς διχοτόμου ΑΔ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΟΒ καὶ ΟΓ· θὰ δείξωμεν, ὅτι ΟΒ = ΟΓ.

Πράγματι· τὰ τρίγωνα ΑΟΒ καὶ ΑΟΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας· ἤτοι ἔχουν ΑΒ = ΑΓ ἐξ ὑποθέσεως, ΑΟ κοινὴν καὶ $\widehat{Α_1} = \widehat{Α_2}$, διότι ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ τὰ ἄλλα στοιχεῖα των ἴσα· ἤτοι θὰ εἶναι ΟΒ = ΟΓ.

57. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ *ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου* ΑΒΓ *λαμβάνομεν μήκη* ΑΑ′=ΒΒ′=ΓΓ′. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον* Α′Β′Γ′ *εἶναι ἰσόπλευρον.*

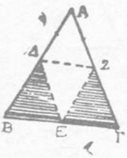

Σχ. 42

Τὰ τρίγωνα ΑΑ′Γ′, ΒΒ′Α′ καὶ ΓΓ′Β′ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας· ἤτοι ἔχουν ΑΑ′=ΒΒ′=ΓΓ′ ἐξ ὑποθέσεως ΑΓ′= ΒΑ′= ΓΒ′, ὡς ὑπόλοιπα τῶν ἴσων πλευρῶν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἀπὸ τῶν ὁποίων ἀφῃρέθησαν τὰ ἴσα τμήματα ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ καὶ γων. Α=γων. Β=γων. Γ ὡς γωνίας τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ· ἄρα θὰ ἔχουν

Α′Γ′ = Α′Β′ = Β′Γ′.

Ὥστε τὸ τρίγωνον Α′Β′Γ′ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἑπομένως καὶ ἰσογώνιον.

58. Τὸ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου, εἶναι ἰσοσκελές.

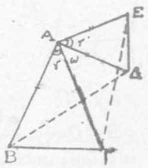

Σχ. 43

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, ὅπου ΑΒ = ΑΓ καὶ Δ, Ε, Ζ, τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του ΑΒ, ΒΓ. ΓΑ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΔΕ, ΕΖ, ΖΔ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ἰσοσκελές.

Πράγματι. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς θὰ εἶναι ΑΒ=ΑΓ καὶ γων. Β=γων. Γ.

Τὰ τρίγωνα ΔΒΕ καὶ ΕΓΖ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας· ἤτοι ἔχουν ΒΕ=ΕΓ, διότι τὸ Ε εἶναι μέσον τῆς ΒΓ, ΒΔ=ΓΖ ὡς ἡμίση τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ γων. Β=γων. Γ ὡς καὶ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι ἰσοσκελοῦς τριγώνου· ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ θὰ ἔχουν καὶ ΕΔ=ΕΖ. Ἐπειδὴ ΕΔ=ΕΖ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ἰσοσκελές.

59. Δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΕ *ἔχουν τὴν κορυφήν των* Α *κοινὴν καὶ τὰς γωνίας τῆς κορυφῆς ἴσας. Ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθείας* ΒΔ *καὶ* ΓΕ, *νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι* ΒΔ = ΓΕ.


Σχ. 44

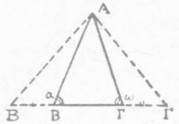
Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι

ν = ν′, ΑΒ = ΑΓ, καὶ ΑΔ = ΑΕ.

Τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΓΕ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, ἤτοι ἔχουν ΑΒ=ΑΓ, ΑΔ=ΑΕ, ἐξ ὑποθέσεως καὶ γων. ΒΑΔ = γων. ΓΑΕ, διότι ἑκάστη τούτων εἶναι ἄθροισμα τῶν ἴσων γωνιῶν ν καὶ ν′ καὶ τῆς κοινῆς γωνίας ω· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ

ΒΔ = ΓΕ.

60. Δίδεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ· *προεκτείνομεν τὴν βάσιν του* ΒΓ *καὶ ἑκατέρωθεν αὐτῆς λαμβάνομεν τμήματα* ΒΒ′ *καὶ* ΓΓ′ *ἴσα. Νὰ ἀποδειχθῇ : 1ον ὅτι αἱ γωνίαι* ΑΒΒ′ *καὶ* ΑΓΓ′ *εἶναι ἴσαι. 2ον ὅτι τὸ τρίγωνον* Α΄Β′Γ′ *εἶναι ἰσοσκελές.*


Σχ. 45

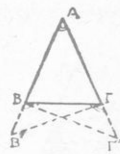
1ον. Αἱ γωνίαι ω καὶ ω′ εἶναι ἴσαι, ὡς παραπληρωματικαὶ τῶν ἴσων γωνιῶν Β καὶ Γ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ.

2ον. Τὰ τρίγωνα ΑΒΒ′ καὶ ΑΓΓ′ ἔχουν ΑΒ=ΑΓ ἐξ ὑποθέσεως, ΒΒ′=ΓΓ′ ἐκ κατασκευῆς, καὶ ω=ω′, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω· δηλ. ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην· ἄρα εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως θὰ ἔχουν καὶ τὰ ἄλλα των στοιχεῖα ἴσα, δηλ. θὰ εἶναι ΑΒ′ = ΑΓ′. Ἐπειδὴ ΑΒ′ = ΑΓ′ τὸ τρίγωνον ΑΒ′Γ′ εἶναι ἰσοσκελές.

61. Ἐὰν αἱ ἴσαι πλευραὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου προεκταθοῦν κατὰ μήκη ἴσα, τὰ ἄκρα των θὰ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς βάσεώς του.

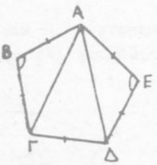
Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. Προεκτείνομεν τὰς ἴσας πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λαμβάνομεν μήκη ΒΒ′=ΓΓ′. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΒΓ′ καὶ ΓΒ′. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΒΓ′=ΓΒ′.

Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ′ καὶ ΑΓΒ′ ἔχουν ΑΒ=ΑΓ ἐξ ὑποθέσεως, ΑΓ′=ΑΒ′ ὡς ἀθροίσματα ἴσων τμημάτων καὶ γων. Α κοινήν· δηλ. ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην· ἄρα εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΒΓ′ = ΓΒ′.


Σχ. 46

62. Ἐὰν αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι ἑνὸς πενταγώνου εἶναι ἴσαι, αἱ διαγώνιοί του, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὴν αὐτὴν κορυφὴν τοῦ πενταγώνου, εἶναι ἴσαι.

Ἔστω ἕνα πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ εἰς τὸ ὁποῖον ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = . . . , $\widehat{Α} = \widehat{Β} = \widehat{Γ} = \widehat{Δ} = \widehat{Ε}$.


Σχ. 47

Φέρομεν τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΑΔ· θὰ δείξωμεν. ὅτι ΑΓ = ΑΔ.

Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΕΔ ἔχουν

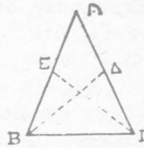
ΑΒ = ΒΓ = ΑΕ = ΕΔ καὶ $\widehat{Β} = \widehat{Ε}$

δηλ. ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην· ἄρα θὰ εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως θὰ ἔχουν: ΑΓ = ΑΔ.

Β′ Ὁμάς. 63. Αἱ διάμεσοι ἰσοσκελοῦς τριγώνου, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς ἴσας πλευράς του εἶναι ἴσαι.

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 48) καὶ ΒΔ, ΓΕ αἱ διάμεσοί του, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς ἴσας πλευράς του ΑΓ καὶ ΑΒ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΒΔ=ΓΕ. Τὰ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΕΓ ἔχουν ΑΔ=ΑΕ, ὡς μισὰ τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΓ καὶ ΑΒ, ΑΒ=ΑΓ, ἐξ ὑποθέσεως καὶ τὴν γωνίαν Α κοινήν· δηλ. ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην· ἄρα εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως θὰ ἔχουν

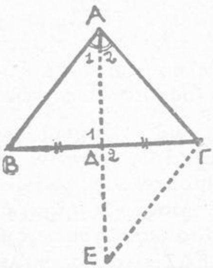
ΓΕ = ΒΔ.



Σχ. 48

64. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἕνα τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές, ἐὰν ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας του εἶναι συγχρόνως καὶ διάμεσός του (ἀντίστροφον τοῦ 3ου θεωρήματος τῆς § 89).

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α καὶ διάμεσός του· δηλ. ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ καὶ ΒΔ = ΔΓ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.



Σχ. 49

Προεκτείνομεν τὴν ΑΔ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα ΔΕ=ΑΔ· φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΓ. Τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΔΕΓ ἔχουν: ΒΔ = ΔΓ ἐξ ὑποθέσεως, ΑΔ = ΔΕ ἐκ κατασκευῆς καὶ $\widehat{\Delta_1} = \widehat{\Delta_2}$ ὡς κατὰ κορυφήν· ἄρα θὰ εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως θὰ ἔχουν καὶ $\widehat{E} = \widehat{A_1}$, ΕΓ=ΑΒ (1)

Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$, ἄρα θὰ εἶναι καὶ $E = A_2$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΓΕ ἔχει τὰς δύο γωνίας Ε καὶ A_2 ἴσας, ἄρα θὰ εἶναι ἰσοσκελὲς, ὁπότε θὰ εἶναι ΕΓ = ΑΓ (2).

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι ΑΒ=ΑΓ. Ἐπειδὴ ΑΒ=ΑΓ, τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

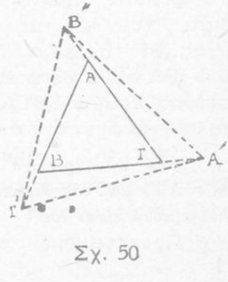
65. Δίδεται τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ· *προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν* ΒΓ *κατὰ* ΓΑ′, *τὴν* ΓΑ *κατὰ* ΑΒ′ *καὶ τὴν* ΑΒ *κατὰ* ΒΓ′. *Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν αἱ προεκτάσεις* ΓΑ′, ΑΒ′, ΒΓ′ *εἶναι ἴσαι, τὸ τρίγωνον* Α′Β′Γ′ *εἶναι ἰσόπλευρον.*

Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι

ΑΒ=ΒΓ=ΓΑ καὶ Α=Β=Γ.

Τὰ τρίγωνα Β′Γ′Α καὶ Β′Α′Γ ἔχουν: Β′Α=ΓΑ′ ἐξ ὑποθέσεως, ΑΓ′=Β′Γ, ὡς ἄθροισμα ἴσων εὐθυγρ. τμημάτων καὶ $\widehat{B'A\Gamma'} = \widehat{B'\Gamma A'}$ ὡς παραπληρωματικὰς τῶν ἴσων γωνιῶν Α καὶ Γ, δηλ. ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην· ἄρα εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως θὰ ἔχουν καὶ

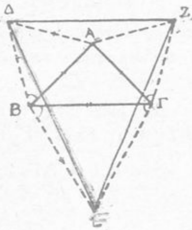
Β′Γ′ = Β′Α′ (1)



Σχ. 50

Ὁμοίως ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων Γ΄ΒΑ΄ καὶ Β΄ΓΑ΄ εὑρίσκομεν, ὅτι Γ΄Α΄=Β΄Α΄ (2). Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι Β΄Γ΄=Β΄Α΄=Γ΄Α΄, ὁπότε τὸ τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ἰσόπλευρον.

66. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου κατασκευάζομεν ἰσόπλευρα τρίγωνα, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐκτὸς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ἐξωτερικαὶ κορυφαί των σχηματίζουν ἰσοσκελὲς τρίγωνον.



Σχ. 51

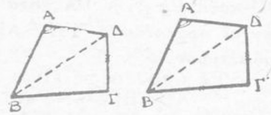
Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ΑΒ = ΑΓ. Ἐξωτερικῶς τοῦ τριγώνου κατασκευάζομεν τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΔΑΒ, ΒΕΓ καὶ ΖΑΓ. Φέρομεν τὰς εὐθείας, ΔΕ, ΕΖ, ΖΔ· θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΕΔΖ εἶναι ἰσοσκελές.

Τὰ τρίγωνα ΒΔΕ καὶ ΓΕΖ ἔχουν ΒΔ=ΓΖ, ὡς ἴσας πρὸς τὰς ἴσας πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ, ΒΕ=ΕΓ, ὡς πλευρὰς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΕΒΓ καὶ $\Delta\widehat{B}E = E\widehat{\Gamma}Z$, διότι ἑκάστη τούτων εἶναι ἄθροισμα τριῶν ἴσων γωνιῶν, δύο τῶν 60^0 καὶ τῶν ἴσων γωνιῶν Β καὶ Γ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ· δηλ. τὰ τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην· ἄρα εἶναι ἴσα καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι ΕΔ=ΕΖ. Ἐπειδὴ ΕΔ=ΕΖ, τὸ τρίγωνον ΕΔΖ εἶναι ἰσοσκελές.

67. Δύο τετράπλευρα εἶναι ἴσα, ἐὰν ἔχουν τὰς τέσσαρας πλευράς των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ μίαν γωνίαν, περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν, ἴσην.

Ἔστωσαν τὰ τετράπλευρα ΑΒΓΔ καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄, τὰ ὁποῖα ἔχουν ΑΒ=Α΄Β΄, ΒΓ=Β΄Γ΄, ΓΔ=Γ΄Δ΄, ΔΑ=Δ΄Α΄ καὶ γων. Α=γων. Α΄. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ τετράπλευρα αὐτὰ εἶναι ἴσα.

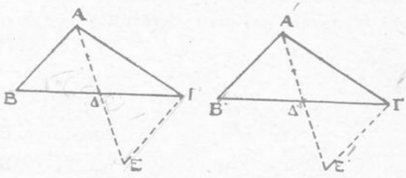
Φέρομεν τὰς διαγωνίους ΒΔ καὶ Β΄Δ΄. Τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ Α΄Β΄Δ΄ ἔχουν ΑΒ=Α΄Β΄, ΑΔ=Α΄Δ΄ καὶ γων. Α=γων. Α΄ ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα καὶ ἐπομένως θὰ ἔχουν καὶ ΒΔ = Β΄Δ΄. Τὰ τρίγωνα ΒΓΔ καὶ Β΄Γ΄Δ΄ εἶναι ἴσα διότι ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας ΒΓ=Β΄Γ΄, ΓΔ=Γ΄Δ΄ ἐξ ὑποθέσεως καὶ ΒΔ=Β΄Δ΄ καὶ ἐδείχθη. Τὰ τετράπλευρα λοιπὸν ΑΒΓΔ καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄ ἀποτελοῦνται ἕκαστον ἀπὸ δύο ἴσα τρίγωνα καὶ ἐπομένως εἶναι ἴσα



Σχ. 52

68. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ *καὶ* Α΄Β΄Γ΄ *ἔχουν τὰς πλευρὰς* ΑΒ=Α΄Β΄, ΑΓ=Α΄Γ΄ *καὶ τὰς διαμέσους* ΑΔ *καὶ* Α΄Δ΄ *ἴσας. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα.*

Προεκτείνομεν τὴν διάμεσον ΑΔ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα ΔΕ=ΑΔ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΕ. Τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΔΕΓ ἔχουν τὴν πλευρὰν ΑΔ=ΔΕ ἐκ κατασκευῆς, τὴν ΒΔ=ΔΓ, διότι τὸ Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΒΓ καὶ τὰς γωνίας ΑΔΒ καὶ ΕΔΓ ἴσας ὡς κατὰ κορυφήν· ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην· ἐπομένως θὰ ἔχουν καὶ ΓΕ=ΑΒ (1).



Σχ. 53

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως καὶ εἰς τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' ἀποδεικνύομεν, ὅτι Γ'Ε'=Α'Β' (2).

Ἐπειδὴ τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) εἶναι ἴσα ἐξ ὑποθέσεως, θὰ εἶναι ἴσα καὶ τὰ πρῶτα μέλη των· ἤτοι θὰ εἶναι

ΓΕ = Γ'Ε'.

Τὰ τρίγωνα ΑΓΕ καὶ Α'Γ'Ε' ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας· ἤτοι τὴν ΑΓ=Α'Γ' ἐξ ὑποθέσεως, ΑΕ=Α'Ε' ὡς διπλάσια τῶν ἴσων διαμέσων ΑΔ καὶ Α'Δ' καὶ τὴν ΓΕ=Γ'Ε', ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω.

Ἂν λοιπὸν θέσωμεν τὸ τρίγωνον Α'Γ'Ε' ἐπὶ τοῦ ἴσου του ΑΓΕ, τὸ Δ' θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Δ, ὁπότε θὰ εἶναι Γ'Δ'=ΓΔ· ἐπειδὴ Γ'Δ'=ΓΔ ἕπεται, ὅτι θὰ εἶναι Γ'Β'=ΓΒ, ὡς διπλάσια ἴσων τμημάτων· ὥστε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι ἴσα.

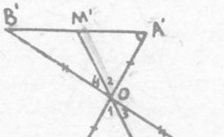
Γ'. Ὁμάς. 69. Δίδονται τὰ σημεῖα Α, Β, Ο *τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Προεκτείνομεν τὴν* ΑΟ *κατὰ ἕνα τμῆμα* ΟΑ'=ΑΟ *καὶ τὴν* ΒΟ *κατὰ ἕνα τμῆμα* ΟΒ'=ΒΟ. *1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι* Α'Β'=ΑΒ. *2ον. Φέρομεν τὴν διάμεσον* ΟΜ *τοῦ τριγώνου* ΟΑΒ, *ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν* Α'Β' *εἰς τὸ* Μ'. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ* Μ' *εἶναι μέσον τῆς* Α'Β'.

1ον. Τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΑ'Β' εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν

ΟΑ = ΟΑ', ΟΒ = ΟΒ'

ἐξ ὑποθέσεως καὶ γων. ΑΟΒ = γων. Α'ΟΒ' ὡς κατὰ κορυφήν.

Ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΑΒ = Α'Β' καὶ $\widehat{B} = \widehat{B'}$ καὶ $\widehat{A} = \widehat{A'}$.

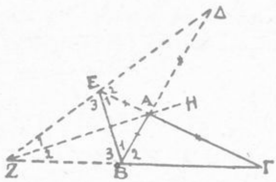


Σχ. 54

2ον. Τὰ τρίγωνα ΟΜΒ καὶ ΟΜ'Β' ἔχουν ΟΒ = ΟΒ' ἐξ ὑποθέσεως καὶ $\widehat{B} = \widehat{B'}$ ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω καὶ $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ ὡς κατὰ κορυφήν· ἄρα θὰ εἶναι ἴσα καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι ΜΒ=Μ'Β'. Ὁμοίως ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων ΟΜΑ καὶ ΟΜ'Α' εὑρίσκομεν, ΜΑ=Μ'Α'.

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΜΑ=ΜΒ θὰ εἶναι καὶ Μ'Α'=Μ'Β'. Δηλ. τὸ Μ' εἶναι μέσον τῆς Α'Β'.

70. *Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν* ΒΑ *ἑνὸς τριγώνου* ΑΒΓ *κατὰ ἕνα μῆκος* ΑΔ=ΑΓ *καὶ τὴν πλευρὰν* ΓΑ *κατὰ ἕνα μῆκος* ΑΕ=ΑΒ. *Φέρομεν τὴν* ΕΔ, *ἡ ὁποία τέμνει τὴν* ΒΓ *εἰς τὸ* Ζ. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον* ΒΕΖ *εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας* Ζ *διέρχεται διὰ τοῦ σημείου* Α.



Σχ. 55

Τὸ τρίγωνον ΑΕΒ εἶναι ἰσοσκελὲς διότι ἔχει ΑΕ=ΑΒ ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα αἱ παρὰ τὴν βάσιν του γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι, δηλ. θὰ εἶναι $\widehat{E_1}=\widehat{B_1}$ (1).

Τὰ τρίγωνα ΑΕΔ καὶ ΑΒΓ εἶναι ἴσα διότι ἔχουν ΑΕ=ΑΒ, ΑΔ=ΑΓ ἐξ ὑποθέσεως καὶ γων. ΕΑΔ = γων. ΒΑΓ ὡς κατὰ κορυφήν· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ

γων. Δ = γων. Γ, καὶ $\widehat{E_2}=\widehat{B_2}$ (2)
καὶ ΕΔ = ΒΓ.

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν·

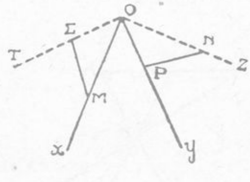
$$\widehat{E_1}+\widehat{E_2}=\widehat{B_1}+\widehat{B_2} \quad ἢ \quad \widehat{ΔEB}=\widehat{ΓBE}$$

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΔΕΒ καὶ ΓΒΕ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ παραπληρωματικαί των γωνίαι E_3 καὶ B_3 εἶναι ἴσαι. Ὥστε τὸ τρίγωνον ΖΒΕ εἶναι ἰσοσκελές, διότι αἱ παρὰ τὴν βάσιν του γωνίαι E_3 καὶ B_3 εἶναι ἴσαι· ἄρα θὰ εἶναι ΖΕ = ΖΒ.

Τὰ τρίγωνα ΖΑΒ καὶ ΖΑΕ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας, ἤτοι ΖΑ κοινήν, ΖΒ=ΖΕ ὡς ἐδείχθη καὶ ΑΒ=ΑΕ, ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα θὰ εἶναι καὶ $Z_1=Z_2$· δηλ. ἡ ΖΑ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΕΖΒ.

71. *Δίδεται ἡ γωνία* ΧΟΨ. *Φέρομεν τὴν κάθετον* ΟΖ *ἐπὶ τὴν* ΧΟ *καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς* ΟΨ, *ἔπειτα τὴν κάθετον* ΟΤ *ἐπὶ τὴν* ΟΨ *καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς* ΟΧ. *Λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν* ΟΧ *καὶ* ΟΖ *δύο μήκη ἴσα* ΟΜ=ΟΝ *καὶ ἐπὶ τῶν* ΟΨ *καὶ* ΟΤ *δύο ἄλλα μήκη ἴσα* ΟΡ=ΟΣ. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι* ΟΡΝ *καὶ* ΟΣΜ *εἶναι ἴσαι.*

Τὰ τρίγωνα ΟΝΡ καὶ ΟΜΣ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν
ΟΝ = ΟΜ, ΟΡ = ΟΣ,
ἐξ ὑποθέσεως καὶ
γων. ΝΟΡ=γων. ΜΟΣ,
διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν συμπληρωματικὴν γωνίαν ΧΟΨ· ἄρα θὰ εἶναι καὶ
γων. ΟΡΝ = γων. ΟΣΜ.



Σχ. 36

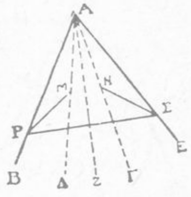
72. *Δίδονται δύο ἴσαι γωνίαι* ΒΑΓ *καὶ* ΔΑΕ, *αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὴν κορυφὴν* Α *καὶ ἕνα κοινὸν μέρος τὴν γωνίαν* ΔΑΓ. *Ἐπὶ τῶν* ΑΔ *καὶ* ΑΓ *λαμβάνομεν μήκη ἴσα* ΑΜ=ΑΝ· *ἐπὶ τῶν* ΑΒ *καὶ* ΑΕ *λαμβάνομεν δύο ἄλλα μήκη ἴσα* ΑΡ=ΑΣ. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι* ΜΡ=ΝΣ *καὶ ὅτι ἡ* ΡΣ *εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας* ΔΑΓ

Τὰ τρίγωνα ΑΡΜ καὶ ΑΣΝ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν

ΑΡ=ΑΣ, ΑΜ=ΑΝ καὶ γων. ΒΑΜ=γων. ΣΑΝ, ὡς διαφορὰ τῶν ἴσων γωνιῶν ΒΑΓ καὶ ΔΑΕ ἀπὸ τὰς ὁποίας ἀφηρέθη ἡ κοινὴ γωνία ΔΑΓ· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ΡΜ = ΣΝ.

Ἐπειδὴ ΑΡ=ΑΣ, τὸ τρίγωνον ΑΡΣ εἶναι ἰσοσκελές. Ἡ διχοτόμος ΑΖ τῆς γωνίας ΒΑΕ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν του ΡΣ.

Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι ἡ ΑΖ εἶναι διχοτόμος καὶ τῆς γωνίας ΔΑΓ.



Σχ. 56

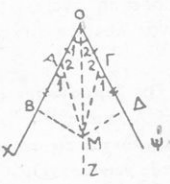
Ἐπειδὴ $\widehat{ΒΑΖ} = \widehat{ΖΑΕ}$ καὶ $\widehat{ΒΑΜ} = \widehat{ΝΑΣ}$ θὰ εἶναι καὶ

$$\widehat{ΒΑΖ} - \widehat{ΒΑΔ} = \widehat{ΖΑΕ} - \widehat{ΝΑΣ} \text{ ἢ } \widehat{ΔΑΖ} = \widehat{ΖΑΓ}.$$

Ἄρα ἡ ΑΖ εἶναι διχοτόμος καὶ τῆς γωνίας ΔΑΓ.

Ὥστε ἡ ΑΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΡΣ.

73. *Δίδεται ἡ γωνία* ΧΟΨ *καὶ ἕνα σημεῖον* Μ *τῆς διχοτόμου της* ΟΖ. *Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς* ΟΧ *λαμβάνομεν δύο τμήματα* ΟΑ *καὶ* ΟΒ *καὶ ἐπὶ τῆς* ΟΨ *δύο τμήματα* ΟΓ *καὶ* ΟΔ, *ἀντιστοίχως ἴσα μὲ τὰ* ΟΑ *καὶ* ΟΒ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ,*** *ὅτι τὰ τρίγωνα* ΜΑΒ *καὶ* ΜΓΔ *εἶναι ἴσα.*



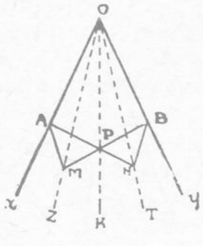
Σχ. 58

Τὰ τρίγωνα ΟΑΜ καὶ ΟΓΜ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὴν ΟΜ κοινήν, ΟΑ=ΟΓ ἐξ ὑποθέσεως καὶ γων. ΑΟΜ=γων. ΜΟΓ, διότι ἡ ΟΜ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΧΟΨ· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ γων. ΟΑΜ=γων. ΟΓΜ καὶ ΜΑ=ΜΓ.

Τὰ τρίγωνα ΟΜΒ καὶ ΟΜΔ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ΟΒ=ΟΔ ἐξ ὑποθέσεως, ΟΜ κοινὴν καὶ γων. ΒΟΜ=γων. ΔΟΜ διότι ἡ ΟΖ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΧΟΨ. Ἄρα θὰ ἔχουν ΒΜ=ΜΔ καὶ γων. ΑΒΜ=γων. ΓΔΜ.

Τὰ τρίγωνα ΜΑΒ καὶ ΜΓΔ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ΑΒ=ΓΔ, ὡς ὑπόλοιπα τῶν ἴσων εὐθ. τμημάτων ΟΒ καὶ ΟΔ ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἀφηρέθησαν τὰ ἴσα εὐθ. τμήματα ΟΑ καὶ ΟΓ, γων. Β=γων. Δ ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω καὶ γων. ΒΑΜ=γων. ΔΓΜ, διότι εἶναι παραπληρωματικαὶ τῶν ἴσων γωνιῶν ΟΑΜ καὶ ΟΓΜ.

74. *Ἐπὶ τῶν πλευρῶν* ΟΧ *καὶ* ΟΨ *μιᾶς γωνίας* ΧΟΨ *λαμβάνομεν δύο μήκη ἴσα* ΟΑ=ΟΒ. *Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας* ΧΟΨ *φέρομεν τὴν ἡμιευθεῖαν* ΟΖ *οὕτως, ὥστε ἡ γωνία* ΧΟΖ *νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεως τῆς γωνίας* ΧΟΨ. *Ὁμοίως φέρομεν τὴν* ΟΤ *εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας* ΧΟΨ *οὕτως, ὥστε* $\widehat{ΨΟΤ}=\widehat{ΧΟΖ}$. *Ἐπὶ τῶν* ΟΖ *καὶ* ΟΤ *λαμβάνομεν δύο μήκη ἴσα* ΟΜ=ΟΝ. *Φέρομεν τὰς* ΑΝ *καὶ* ΒΜ, *αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ* Ρ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ,*** *ὅτι :* ***1ον.*** *Τὰ τρίγωνα* ΡΑΜ *καὶ* ΡΒΝ *εἶναι ἴσα.* ***2ον.*** *Τὸ* Ρ *κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου, τῆς γωνίας* ΧΟΨ.



Σχ. 59

1ον. Τὰ τρίγωνα ΟΑΜ καὶ ΟΒΝ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ΟΑ=ΟΒ, ΟΜ=ΟΝ ἐξ ὑποθέσεως καὶ γων. ΑΟΜ=γων. ΒΟΝ ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ΑΜ=ΒΝ, γων. ΟΜΑ=γων. ΟΝΒ καὶ γων. ΟΑΜ=γων. ΟΒΝ.

Τὰ τρίγωνα ΟΑΝ και ΟΒΜ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ΟΑ=ΟΒ, ΟΝ=ΟΜ ἐξ ὑποθέσεως καὶ γων. ΑΟΝ = γων. ΒΟΜ, διότι ἑκάστη εἶναι ἄθροισμα τῶν ἴσων γωνιῶν ΑΟΜ, ΒΟΝ καὶ τῆς κοινῆς γωνίας ΜΟΝ· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ γων. ΟΑΝ=γων. ΟΒΜ, γων. ΟΝΑ=γων. ΟΜΒ.

Τὰ τρίγωνα ΡΑΜ καὶ ΡΒΝ ἔχουν ΑΜ=ΒΝ, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω, γων. ΡΑΜ=γων. ΡΒΝ, διότι εἶναι διαφορὰ τῶν ἴσων γωνιῶν ΟΑΜ καὶ ΟΒΝ ἀπὸ τὰς ὁποίας ἀφηρέθησαν αἱ ἴσαι γωνίαι ΟΑΝ καὶ ΟΒΜ. Ἀνωτέρω ἐδείχθη, ὅτι

γων. ΟΜΑ=γων. ΟΝΒ καὶ γων. ΟΜΒ=γων. ΟΝΑ

ἄρα θὰ εἶναι καὶ

γων. ΟΜΑ+γων. ΟΜΒ=γων. ΟΝΒ+γων. ΟΝΑ ἢ γων. ΑΜΡ=γων. ΒΝΡ.

Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΡΑΜ καὶ ΡΒΝ ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας· ἄρα θὰ εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως θὰ ἔχουν ΑΡ = ΡΒ.

2ον. Τὰ τρίγωνα ΟΡΑ καὶ ΟΡΒ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ΟΡ κοινήν ΟΑ=ΟΒ ἐξ ὑποθέσεως καὶ ΑΡ=ΡΒ, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ γων. ΑΟΡ=γων. ΒΟΡ. Ἡ ΟΡ εἶναι λοιπόν διχοτόμος τῆς γων. ΧΟΨ.

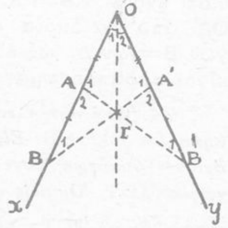
75. *Δίδεται μία γωνία* xOy. *Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς* Ox *λαμβάνομεν τὰ τμήματα* OA *καὶ* OB, *ἐπὶ δὲ τῆς* Oy *τὰ τμήματα* OA′=OA *καὶ* OB′=OB. *Φέρομεν ἔπειτα τὰς εὐθείας* BA′ *καὶ* B′A, *αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον* Γ. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα* ΟΓ *εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας* xOy.

1ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΒΑ′=ΑΒ′. Ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα ΟΑΒ′ καὶ ΟΑ′Β εἶναι ἴσα. Πράγματι τὰ τρίγωνα αὐτὰ ἔχουν ΟΑ=ΟΑ′, ΟΒ′=ΟΒ, ἐξ ὑποθέσεως καὶ τὴν γωνίαν Ο κοινήν· δηλαδὴ ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην· ἄρα θὰ εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως θὰ ἔχουν καὶ τὰ ἄλλα στοιχεῖα των ἴσα· δηλ. θὰ εἶναι ΑΒ′=ΒΑ′, $\widehat{B'_1}=\widehat{B_1}$, $\widehat{A_1}=\widehat{A_1'}$.

2ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι

ΓΑ=ΓΑ′, ΓΒ=ΓΒ′.

Τὰ τρίγωνα ΓΑΒ καὶ ΓΑ′Β′ ἔχουν: ΑΒ=Α′Β′, ὡς ὑπόλοιπα τῶν ἴσων εὐθυγρ. τμημάτων ΟΒ καὶ ΟΒ′ ἀπὸ τῶν



Σχ. 60

ὁποίων ἀφῃρέθησαν τὰ ἴσα τμήματα ΟΑ καὶ ΟΑ′, $\widehat{B_1}=\widehat{B'_1}$ ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω, $\widehat{A_2}=\widehat{A'_2}$, ὡς παραπληρωματικὰς τῶν ἴσων γωνιῶν A_1 καὶ A_1'· δηλ. τὰ τρίγωνα αὐτὰ ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας· ἄρα εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως θὰ ἔχουν καὶ ΓΑ = ΓΑ′, ΓΒ′ = ΓΒ′.

3ον. Θὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ἡ ΟΓ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Ο· ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι $\widehat{O_1}=\widehat{O_2}$. Τὰ τρίγωνα ΟΑΓ καὶ ΟΑ′Γ ἔχουν ΟΑ=ΟΑ′, ἐξ ὑποθέσεως, ΟΓ κοινὴν καὶ ΓΑ=ΓΑ′, ὅπως ἐδείχθη ἀνωτέρω· δηλ. ἔχουν καὶ τρεῖς πλευράς των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ἴσα· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ $\widehat{O_1}=\widehat{O_2}$.

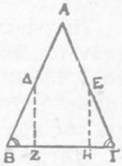
Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι O_1 καὶ O_2 εἶναι ἴσαι, ἡ ΟΓ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Ο.

Περιπτώσεις ἰσότητος ὀρθογωνίων τριγώνων

Ἀσκήσεις. Α′ Ὁμάς. 76. Τὰ μέσα τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὴν βάσιν του.

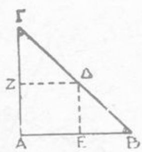
Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Δ, Ε τὰ μέσα τῶν ἴσων πλευρῶν του ΑΒ, ΑΓ.

Ἀπὸ τὰ Δ καὶ Ε φέρομεν τὰς καθέτους ΔΖ καὶ ΕΗ ἐπὶ τὴν βάσιν του ΒΓ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΔΖ=ΕΗ.



Σχ. 61

Πράγματι· τὰ σχηματισθέντα ὀρθογώνια τρίγωνα ΔΖΒ καὶ ΕΗΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ΔΒ καὶ ΕΓ ἴσας, ὡς ἡμίση τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ τὰς ὀξείας γωνίας Β καὶ Γ ἴσας, ὡς παρὰ τὴν βάσιν γωνίας ἰσοσκελοῦς τριγώνου· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ΔΖ=ΕΗ.



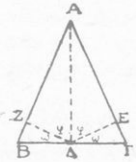
Σχ. 62

77. Τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης ἑνὸς ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς καθέτους πλευράς του.

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Δ τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης του. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὰς καθέτους ΔΕ καὶ ΔΖ ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΔΕ=ΔΖ.

Πράγματι· τὰ σχηματισθέντα ὀρθογώνια τρίγωνα ΔΕΒ καὶ ΓΖΔ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην, ἤτοι ἔχουν ΔΒ=ΓΔ, διότι τὸ Δ εἶναι μέσον τῆς ΒΓ καὶ γων. Β=γων. Γ, ὡς παρὰ τὴν βάσιν γωνίας τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ· ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΔΕ=ΔΖ.

78. Αἱ κάθετοι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς βάσεως ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἐπὶ τὰς ἴσας πλευράς του εἶναι ἴσαι, καὶ σχηματίζουν ἴσας γωνίας μὲ τὴν βάσιν, καθὼς καὶ μὲ τὴν διάμεσον τοῦ τριγώνου.



Σχ. 63

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ΑΒ=ΑΓ, ΑΔ ἡ διάμεσός του καὶ ΔΖ, ΔΕ αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ γωνίαι $\omega=\omega'$ καὶ $\varphi=\varphi'$.

Τὰ σχηματισθέντα ὀρθογώνια τρίγωνα ΔΖΒ καὶ ΔΕΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας, ἤτοι ΒΔ=ΔΓ, διότι τὸ Δ εἶναι μέσον τῆς ΒΓ καὶ τὰς ὀξείας γωνίας Β καὶ Γ ἴσας, ὡς παρὰ τὴν βάσιν γωνίας ἰσοσκελοῦς τριγώνου· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ΔΖ = ΔΕ καὶ $\omega = \omega'$.

Αἱ γωνίαι φ καὶ φ' εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν ἴσας συμπληρωματικὰς γωνίας ω καὶ ω'.

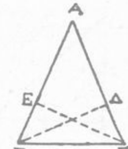
79. Ἐὰν αἱ κάθετοι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ μέσον μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου ἐπὶ τὰς ἄλλας πλευράς του εἶναι ἴσαι, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 63) καὶ Δ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὰς καθέτους ΔΖ καὶ ΔΕ ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Ἐὰν εἶναι ΔΕ=ΔΖ θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

Πράγματι· τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΔΖΒ καὶ ΔΕΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας, ἤτοι ΒΔ=ΔΓ, διότι τὸ Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΒΓ καὶ τὰς καθέτους πλευρὰς ΔΕ καὶ ΔΖ ἴσας ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα θὰ ἔχουν τὴν γων. Β = γων. Γ. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει τὰς δύο γωνίας Β καὶ Γ ἴσας, εἶναι ἰσοσκελές.

80. Αἱ κάθετοι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς βάσεως ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἐπὶ τὰς ἴσας πλευράς του, εἶναι ἴσαι.

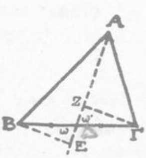
Ἔστωσαν ΒΔ καὶ ΓΕ αἱ κάθετοι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς βάσεως ΒΓ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τὰς ἴσας πλευρὰς ΑΓ καὶ ΑΒ· θὰ δείξωμεν, ὅτι ΒΔ = ΓΕ.



Σχ. 64

Τὰ σχηματιζόμενα ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΓΔ καὶ ΒΓΕ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ κοινὴν καὶ γων. Γ=γων. Β, ὡς παρὰ τὴν βάσιν γωνίας ἰσοσκελοῦς τριγώνου. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν συνάγομεν, ὅτι εἶναι ΒΔ=ΓΕ.

81. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι δύο κορυφαὶ τριγώνου ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὴν διάμεσον, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὴν τρίτην κορυφήν.

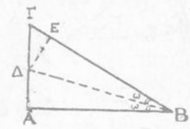


Σχ. 64

Ἔστω ΑΔ ἡ διάμεσος ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ ΒΕ καὶ ΓΖ αἱ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΔ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΒΕ=ΓΖ. Τὰ σχηματιζόμενα ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΕΔ καὶ ΓΖΔ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην, ἤτοι ἔχουν τὴν ΒΔ = ΔΓ, διότι τὸ Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΒΓ καὶ γων. ω=γων. ω', ὡς κατὰ κορυφήν· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ΒΕ = ΓΖ.

Β' Ὁμάς. *82. Δίδεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον τὸ εἰς Α· φέρομεν τὴν διχοτόμον ΒΔ τῆς γωνίας Β, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΑΓ εἰς τὸ Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΔΑ < ΔΓ.*

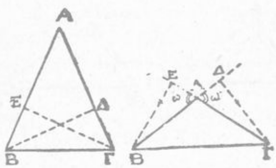
Φέρομεν τὴν ΔΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΔΑΒ καὶ ΔΕΒ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὴν ὑποτείνουσαν ΒΔ κοινὴν καὶ τὰς γωνίας ω καὶ ω' ἴσας ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα θὰ εἶναι ΔΑ=ΔΕ (1). Ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ δὲ ΔΓ πλαγία πρὸς αὐτήν, θὰ εἶναι ΔΕ < ΔΓ. Ἐὰν εἰς τὴν ἀνισότητα αὐτὴν θέσωμεν ἀντὶ τοῦ ΔΕ τὸ ἴσον του ΔΑ, ποὺ δίδει ἡ (1), θὰ ἔχωμεν ΔΑ < ΔΓ.



Σχ. 65

83. Ἐὰν δύο ὕψη τριγώνου εἶναι ἴσα, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἀντιστρόφως.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον τὰ ὕψη ΒΔ καὶ ΓΕ εἶναι ἴσα. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.



Σχ. 66

Ἔστω ὅτι ἡ γωνία Α εἶναι ὀξεῖα. Πράγματι· τὰ σχηματιζόμενα ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΕΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς καθέτους πλευρὰς ΒΔ καὶ ΓΕ ἴσας ἐξ ὑποθέσεως καὶ τὴν ἀπέναντι τούτων γωνίαν Α κοινήν· ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΑΒ=ΑΓ. Ἐπειδὴ ΑΒ=ΑΓ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

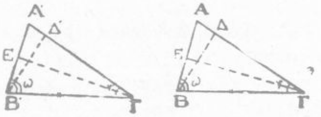
Ἔστω, ὅτι ἡ γωνία Α εἶναι ἀμβλεῖα. Τὰ σχηματιζόμενα ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΕΒ καὶ ΑΔΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς καθέτους πλευρὰς ΒΕ καὶ ΓΔ ἴσας, ἐξ ὑποθέσεως καὶ τὰς ἀπέναντι τούτων ὀξείας γωνίας ω καὶ ω' ἴσας ὡς κατὰ κορυφήν. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΑΒ καὶ ΑΓ ἴσαι, ὁπότε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω, ὅτι εἶναι ΑΒ=ΑΓ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΒΔ=ΓΕ. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων ΑΔΒ καὶ ΑΕΓ συνάγομεν, ὅτι

ΒΔ = ΓΕ.

84. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἔχουν τὰς πλευρὰς ΒΓ καὶ Β'Γ' ἴσας καὶ τὰ ὕψη ΒΔ καὶ ΓΕ ἴσα, ἀντιστοίχως, πρὸς τὰ ὕψη Β'Δ' καὶ Γ'Ε'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ἴσα.

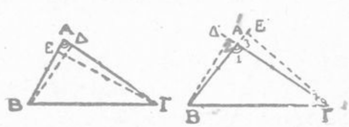
Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΕΓ καὶ Β'Ε'Γ' εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ΒΓ καὶ Β'Γ' ἴσας ἐξ ὑποθέσεως καὶ τὰς καθέτους πλευρὰς ΓΕ καὶ Γ'Ε' ἴσας ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα θὰ εἶναι καὶ γων. ω = γων. ω'. Ὁμοίως τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΔΓ καὶ Β'Δ'Γ' εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας, ΒΓ=Β′Γ′ καὶ τὰς καθέτους πλευρὰς ΒΔ καὶ Β′Δ′ ἴσας, ἐξ ὑποθέσεως, ἄρα θὰ εἶναι καὶ γων. Γ = γων. Γ′. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας γωνίας ἴσας, ἤτοι ἔχουν ΒΓ=Β′Γ′ ἐξ ὑποθέσεως καὶ Β=Β′, Γ=Γ′ ὡς ἐδείχθη.



Σχ. 67

85. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ ἔχουν τὰς γωνίας Α καὶ Α′ παραπληρωματικὰς καὶ ΑΒ=Α′Β′, ΑΓ=Α′Γ′. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ ὕψη ΒΔ καὶ Β′Δ′ εἶναι ἴσα. Ἐπίσης εἶναι ἴσα καὶ τὰ ὕψη ΓΕ καὶ Γ′Ε′.

Τὰ τρίγωνα ΒΔΑ καὶ Β′Δ′Α′ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των, ΑΒ καὶ Α′Β′ ἴσας ἐξ ὑποθέσεως καὶ τὰς ὀξείας γωνίας Α καὶ $Α'_2$ ἴσας, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν $Α'_1$· ἄρα θὰ εἶναι ΒΔ=Β′Δ′. Ὁμοίως τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΕΑ καὶ Γ′Ε′Α′ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας ΑΓ καὶ Α′Γ′ ἴσας ἐξ ὑποθέσεως καὶ τὰς ὀξείας γωνίας Α καὶ $Α'_3$ ἴσας, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν $Α'_1$· ἄρα θὰ εἶναι ΓΕ = Γ′Ε′.



Σχ. 68

86. Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας xy λαμβάνομεν δύο σημεῖα Α καὶ Β. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς xy, φέρομεν τὰς εὐθείας ΟΑ καὶ ΟΒ καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λαμβάνομεν εὐθύγραμμα τμήματα ΑΑ′, ΒΒ′ ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ ΟΑ καὶ ΟΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Α′ καὶ Β′ ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ τὴν xy.

Φέρομεν τὰς ΟΓ, Α′Δ καὶ Β′Ε καθέτους ἐπὶ τὴν xy. Τὰ σχηματισθέντα ὀρθογώνια τρίγωνα Α′ΔΑ καὶ ΑΓΟ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ΑΑ′ καὶ ΟΑ ἴσας ἐξ ὑποθέσεως καὶ τὰς ὀξείας γωνίας ω καὶ ω ἴσας, ὡς κατὰ κορυφήν· ἄρα θὰ εἶναι

$$Α'Δ = ΟΓ \qquad (1)$$

Ὁμοίως τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα Β′ΕΒ καὶ ΟΓΒ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ΒΒ′= ΟΒ ἐξ ὑποθέσεως καὶ ν = ν′· ἄρα θὰ εἶναι

$$Β'Ε = ΟΓ \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι Α′Δ = Γ′Ε.

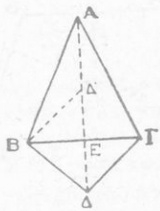
Σχ. 69

Ἰδιότης τῶν σημείων τῆς μεσοκαθέτου ἑνὸς εὐθ. τμήματος

Ἀσκήσεις 87. Ἐὰν δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν, ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰς κορυφάς των εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν.

Ἔστωσαν τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΒΔΓ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Ε. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.

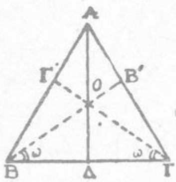
Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΒΔΓ εἶναι ἰσοσκελῆ θὰ εἶναι ΑΒ=ΑΓ καὶ ΔΒ=ΔΓ. Ἐπειδὴ ΑΒ=ΑΓ, τὸ σημεῖον Α κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ. Ὁμοίως ἐπειδὴ ΔΒ=ΔΓ, τὸ σημεῖον Δ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ. Τὰ σημεῖα λοιπὸν Α καὶ Δ εἶναι σημεῖα τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΓ· ἄρα ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ εἰς τὸ μέσον της.



Σχ. 70

88. Δίδεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΑΔ τῆς γωνίας Α τῆς κορυφῆς του λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Ο καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας ΒΟΒ′ καὶ ΓΟΓ′, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Β′ καὶ Γ′. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΒΒ′=ΓΓ′.

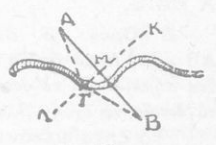
Ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ θὰ εἶναι καὶ ὕψος καὶ διάμεσος αὐτοῦ. Ἐπειδὴ τὸ Ο κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ΑΔ εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ, θὰ εἶναι ΟΒ=ΟΓ· αἱ γωνίαι ω καὶ ω′ θὰ εἶναι ἴσαι, ὡς παρὰ τὴν βάσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΟΒΓ. Τὰ τρίγωνα Β′ΒΓ καὶ Γ′ΓΒ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας, ἤτοι ἔχουν τὴν ΒΓ κοινήν, γων. Γ=γων. Β ὡς παρὰ τὴν βάσιν γωνίας τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ καὶ γων. ω=γων. ω′ ὡς ἐδείχθη· ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΒΒ′ = ΓΓ′.



Σχ. 71

89. Μεταξὺ δύο χωρίων Α καὶ Β ὑπάρχει ἕνας ποταμός. Οἱ κάτοικοι τῶν δύο χωρίων θέλουν νὰ κατασκευάσουν, μὲ κοινὰ ἔξοδα, μίαν γέφυραν ἐπὶ τοῦ ποταμοῦ οὕτως, ὥστε ἡ γέφυρα νὰ ἀπέχῃ ἰσάκις ἀπὸ τὰ δύο χωρία. Ποῦ πρέπει νὰ κατασκευασθῇ ἡ γέφυρα;

Διὰ νὰ ἀπέχῃ ἡ γέφυρα ἴσον ἀπὸ τὰ χωρία Α καὶ Β πρέπει νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΑΒ, ἡ ὁποία συνδέει τὰ δύο χωρία. Πρὸς τοῦτο φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ ἀπὸ τὸ μέσον αὐτῆς Μ φέρομεν τὴν κάθετον ΚΛ ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἡ κάθετος αὐτὴ τέμνει τὸν ποταμὸν εἰς τὸ σημεῖον Γ. Εἰς τὸ

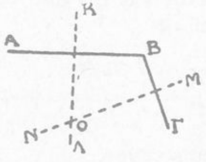


Σχ. 72

σημεῖον αὐτὸ πρέπει νὰ κατασκευασθῇ ἡ γέφυρα. Πράγματι, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Γ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ θὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β, ἤτοι θὰ εἶναι ΓΑ = ΓΒ.

90. ***Ποῦ θὰ κεῖται τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τρία δοθέντα σημεῖα, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας.***

Ἔστωσαν Α, Β, Γ, τὰ δοθέντα σημεῖα, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Διὰ νὰ ἀπέχῃ τὸ ζητούμενον σημεῖον ἴσον ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β πρέπει νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ΚΛ εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΑΒ. Ὁμοίως διὰ νὰ ἀπέχῃ τὸ ζητούμενον σημεῖον ἴσον ἀπὸ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ, πρέπει νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ΜΝ εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν σημεῖον θὰ εἶναι τὸ σημεῖον Ο τῆς τομῆς τῶν δύο αὐτῶν καθέτων ΚΛ καὶ ΜΝ.



Σχ. 73

Γεωμετρικοὶ τόποι

Α' Ὁμάς. 91. ***Νὰ εὑρεθῇ το σημεῖον, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ δύο τεμνομένας εὐθείας καὶ ἴσον ἀπὸ δύο ἄλλας τεμνομένας εὐθείας.***

Τὰ ζητούμενα σημεῖα θὰ εἶναι τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν τὰ δύο ζεύγη τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν.

92. ***Δίδεται ἕνα τρίγωνον*** ΑΒΓ ***καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς*** ΒΓ ***ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον θὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς*** ΑΒ ***καὶ*** ΑΓ.

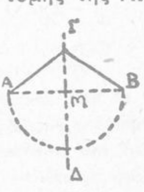
Τὸ ζητούμενον σημεῖον θὰ εἶναι σημεῖον τῆς τομῆς τῆς πλευρᾶς ΒΓ καὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ΒΑΓ.

93. ***Δίδεται ἕνα τρίγωνον*** ΑΒΓ ***καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς*** ΑΓ ***ἢ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της, ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὰς κορυφὰς*** Β ***καὶ*** Γ.

Τὸ ζητούμενον σημεῖον θὰ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς ΑΓ καὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

94. ***Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα.***

Ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ δοθέντα σημεῖα. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ τὴν κάθετον ΓΔ εἰς τὸ μέσον Μ τῆς ΑΒ. Κάθε σημεῖον τῆς ΓΔ εἶναι κέντρον μιᾶς περιφερείας ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β.



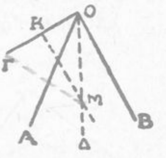
Σχ. 74

Β' Ὁμάς. 95. ***Δίδονται δύο εὐθύγραμμα τμήματα*** ΑΒ ***καὶ*** ΓΔ, ***τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἕνα σημεῖον*** Ο, ***τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι κοινὴ κορυφὴ δύο ἰσοσκελῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν βάσεις τὰ*** ΑΒ ***καὶ*** ΓΔ.

Τὸ ζητούμενον σημεῖον εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν καθέτων εἰς τὰ μέσα τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΒ καὶ ΓΔ.

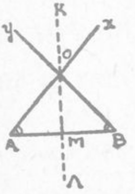
96. Δίδεται μιὰ γωνία ΑΟΒ *καὶ ἕνα σημεῖον* Γ *τοιοῦτον, ὥστε ἡ* ΟΓ *νὰ μὴ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας* ΑΟΒ. *Νὰ εὑρεθῇ ἕνα σημεῖον* Μ, *τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὰς* ΟΑ *καὶ* ΟΒ *καὶ τοιοῦτον, ὥστε* ΜΟ = ΜΓ.

Διὰ νὰ ἀπέχῃ τὸ ζητούμενόν σημεῖον ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ΑΟΒ πρέπει νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΟΔ τῆς γωνίας ΑΟΒ. Διὰ νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὰ σημεῖα Ο καὶ Γ πρέπει νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΟΓ. Ζητούμενον λοιπὸν σημεῖον εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς διχοτόμου ΟΔ τῆς γωνίας ΑΟΒ καὶ τῆς καθέτου ΚΜ εἰς τὸ μέσον Κ τῆς εὐθείας ΟΓ.



Σχ. 75

97. Δίδεται ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ· *ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ* ΑΒ *καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ φέρομεν τὰς εὐθείας* Αx *καὶ* Βy, *αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν ἴσας γωνίας μὲ τὸ* ΑΒ. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου* Μ *τῆς τομῆς των.*



Σχ. 76

Ἔστω Ο τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν Αx καὶ Βy. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Α καὶ Β εἶναι ἴσαι, ἐξ ὑποθέσεως τὸ τρίγωνον ΟΑΒ ἰσοσκελές, ἑπομένως ἡ κορυφὴ Ο κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως ΑΒ.

Ὁ ζητούμενος λοιπὸν τόπος εἶναι ἡ κάθετος ΚΛ εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ.

98. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ὅταν ἕνα σημεῖον ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα δύο διαδοχικῶν τμημάτων ΑΒ *καὶ* ΒΓ, *τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, θὰ ἀπέχῃ ἴσον καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα* Α *καὶ* Γ.

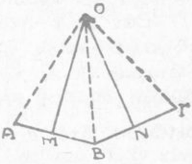
Ἔστω Ο ἕνα σημεῖον καὶ τοιοῦτον, ὥστε

ΟΑ=ΟΒ, ΟΒ=ΟΓ (1).

Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΟΑ=ΟΓ.

Πράγματι ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) ἔχομεν

ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ, ἄρα ΟΑ=ΟΓ.



Σχ. 77

'Αντιστοιχία μεταξὺ τῶν γωνιῶν καὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου

99. Δίδεται ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. *Ἀπὸ τὴν κορυφὴν* Β *τῆς βάσεώς του* ΒΓ *φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν* ΒΔ *ἐντὸς τοῦ τριγώνου, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν* ΑΓ *εἰς τὸ σημεῖον* Δ. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι* ΒΔ > ΔΓ.

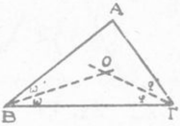
Σχ. 78

Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, αἱ παρὰ τὴν βάσιν του γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ἴσαι.

Συγκρίνομεν τὰς γωνίας ω καὶ Γ τοῦ τριγώνου ΔΒΓ. Ἡ γωνία ω εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας Β, διότι εἶναι μέρος αὐτῆς· ἄρα ἡ ω θὰ εἶναι μικροτέρα καὶ τῆς γωνίας Γ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν

Β, ἤτοι εἶναι $\widehat{\omega} < \widehat{\Gamma}$. Εἰς τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΔΒΓ αἱ δύο γωνίαι ω καὶ Γ εἶναι ἄνισοι, ἄρα καὶ αἱ ἀπέναντι τούτων πλευραὶ θὰ εἶναι ἄνισοι καὶ ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ θὰ κεῖται ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας γωνίας, ἤτοι θὰ εἶναι ΒΔ > ΔΓ.

100. Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ ἑνὸς τριγώνου τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Ο. Ἐὰν εἶναι ΑΒ > ΑΓ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΟΒ > ΟΓ.



Σχ. 79

Ἐπειδὴ αἱ ΒΟ καὶ ΓΟ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ ἀντιστοίχως, θὰ εἶναι $\omega=\omega'$ καὶ $\varphi=\varphi'$. Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΑΒ > ΑΓ θὰ εἶναι καὶ $\widehat{\Gamma} > \widehat{B}$ καὶ ἑπομένως $\widehat{\varphi} > \widehat{\omega}$.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΟΒΓ ἡ γωνία φ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ω· ἄρα καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν πλευραὶ θὰ εἶναι ἄνισοι, ἤτοι θὰ εἶναι ΟΒ > ΟΓ.

101. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι κάθε πλευρὰ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τῆς ἡμιπεριμέτρου του.

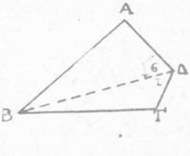
Ἔστωσαν α, β, γ αἱ τρεῖς πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\alpha < \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$.

Πράγματι, ἐὰν ἡ α ἦτο ἴση μὲ τὴν ἡμιπερίμετρον, δηλ. ἐὰν ἦτο $\alpha = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ θὰ εἴχομεν ἐκ τῆς ἰσότητος αὐτῆς $2\alpha=\alpha+\beta+\gamma$ ἢ $\alpha=\beta+\gamma$ ὅπερ ἄτοπον, διότι ἡ μία πλευρὰ ἑνὸς τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

Ἐὰν ἡ α ἦτο μεγαλυτέρα τῆς ἡμιπεριμέτρου, δηλ. ἐὰν ἦτο $\alpha > \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ θὰ εἴχομεν $2\alpha > \alpha+\beta+\gamma$ ἢ $\alpha > \beta+\gamma$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον· ὥστε ἡ πλευρὰ α εἶναι μικροτέρα τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ τριγώνου, ἤτοι εἶναι $\alpha < \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$.

102. Εἰς ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἡ ΑΒ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα πλευρά του καὶ ἡ ΓΔ ἡ μικροτέρα πλευρά του. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι γων. ΑΔΓ > γων. ΑΒΓ *καὶ* γων. ΒΓΔ > ΒΑΔ.

Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΒΔ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΑΔ, ἤτοι εἶναι ΑΒ > ΑΔ ἄρα καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν γωνίαι σ καὶ ω εἶναι ἄνισοι καὶ θὰ εἶναι σ > γων. ΑΒΔ (1) ὁμοίως εἰς τὸ τρίγωνον ΒΓΔ εἶναι ΒΓ > ΔΓ, ἄρα θὰ εἶναι καὶ τ > γων. ΔΒΓ (2).



Σχ. 80

Προσθέτομεν τὰς ἀνισότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν σ + τ > γων. ΑΒΔ + γων. ΔΒΓ ἢ

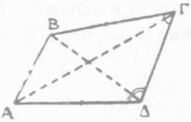
γων. ΑΔΓ > γων. ΑΒΓ.

Ἐὰν φέρωμεν τὴν διαγώνιον ΑΓ καὶ ἐργασθῶμεν ὁμοίως εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ θὰ εὕρωμεν, ὅτι

γων. ΒΓΔ > γων. ΒΑΔ.

103. Εἰς ἕνα κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ΑΔ = ΒΓ καὶ $\widehat{\Delta} > \widehat{\Gamma}$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΓ > ΒΔ.

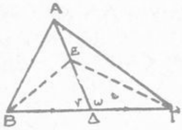
Τὰ τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΔΓΒ ἔχουν: ΑΔ=ΒΓ ἐξ ὑποθέσεως, ΔΓ κοινὴν καὶ $\widehat{A\Delta\Gamma} > \widehat{\Delta\Gamma B}$· ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἄνισα καὶ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας γωνίας ΑΔΓ θὰ κεῖται μεγαλυτέρα πλευρά, δηλ. θὰ εἶναι ΑΓ > ΒΔ.



Σχ. 81

104. Ἐὰν διάμεσος τριγώνου περιέχεται μεταξὺ ἀνίσων πλευρῶν, αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς μέχρι τῶν ἄκρων τῆς τρίτης πλευρᾶς, εἶναι ἄνισοι καὶ μεγαλυτέρα εἶναι ἐκείνη, ἡ ὁποία κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΔ ἡ διάμεσός του. Ἔστω, ὅτι εἶναι ΑΓ > ΑΒ. Ἐπὶ τῆς ΑΔ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Ε καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας ΕΒ καὶ ΕΓ. Θὰ δείξωμεν ὅτι ΕΓ > ΕΒ.



Σχ. 82

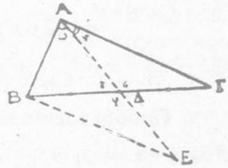
Τὰ τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΑΔΒ ἔχουν: ΑΔ κοινήν, ΒΔ=ΔΓ, διότι τὸ Δ εἶναι μέσον τῆς ΒΓ καὶ ΑΓ > ΑΒ· ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἄνισα καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι $\widehat{\omega} > \widehat{\nu}$.

Τὰ τρίγωνα ΕΔΓ καὶ ΕΔΒ ἔχουν ΕΔ κοινήν, ΔΓ=ΔΒ καὶ γων. ω > γων. ν· ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἄνισα καὶ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας γωνίας κεῖται μεγαλυτέρα πλευρά· δηλ. εἶναι ΕΓ > ΕΒ.

105. Ἐὰν διάμεσος τριγώνου περιέχεται μεταξὺ ἀνίσων πλευρῶν: 1ον σχηματίζει μὲ αὐτὰς ἀνίσους γωνίας καὶ μεγαλυτέραν μὲ τὴν μικροτέραν πλευράν· 2ον σχηματίζει μὲ τὸ ἥμισυ τῆς τρίτης πλευρᾶς, ἡ ὁποία πρόσκειται εἰς τὴν μεγαλυτέραν πλευράν, γωνίαν ἀμβλεῖαν.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΔ ἡ διάμεσός του. Ἐὰν εἶναι ΑΓ > ΑΒ, θὰ δείξωμεν: 1ον ὅτι ω > ν.

Προεκτείνομεν τὴν διάμεσον ΑΔ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα ΔΕ=ΑΔ· φέρομεν τὴν ΒΕ. Τὰ τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΒΔΕ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας, ΔΓ=ΒΔ, ΑΔ=ΔΕ καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας σ καὶ φ ἴσας ὡς κατὰ κορυφήν· ἄρα θὰ εἶναι ΑΓ=ΒΕ καὶ $\widehat{E} = \widehat{\nu}$. Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως ΑΓ > ΑΒ θὰ εἶναι καὶ ΒΕ > ΑΒ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΕ ἡ πλευρὰ ΒΕ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΑΒ, ἄρα καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν κείμεναι γωνίαι θὰ εἶναι ἄνισοι καὶ θὰ εἶναι ω > Ε ἢ ω > ν.



Σχ. 83

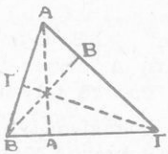
2ον Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ γωνία σ εἶναι ἀμβλεῖα. Τὰ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ ἔχουν: ΑΔ κοινὴν ΒΔ=ΔΓ, διότι τὸ Δ εἶναι μέσον τῆς ΒΓ καὶ ΑΒ$<$ΑΓ, ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ θὰ εἶναι ἄνισα καὶ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς θὰ κεῖται μεγαλυτέρα γωνία, δηλ. θὰ εἶναι γων. $\sigma >$ γων. τ. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι σ καὶ τ εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ σ μεγαλυτέρα τῆς τ ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία σ εἶναι ἀμβλεῖα.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν

Α'. Ὁμάς. 106. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὑψῶν ἑνὸς ὀξυγωνίου τριγώνου περιέχεται μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος καὶ τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν πλευρῶν του.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΑ' ἕνα ὕψος του· θὰ δείξωμεν, ὅτι
$$AA' < \frac{AB+A\Gamma}{2}.$$

Πράγματι· ἡ ΑΑ' εἶναι κάθετος ἡ δὲ ΑΒ πλαγία πρὸς τὴν ΒΓ· ἄρα θὰ εἶναι $AA' < AB$ (1).



Σχ. 84

Ὁμοίως ἡ ΑΑ' εἶναι κάθετος, ἡ δὲ ΑΓ πλαγία πρὸς τὴν ΒΓ· ἄρα θὰ εἶναι $AA' < A\Gamma$ (2).

Προσθέτομεν τὰς ἀνισότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν $2AA' < AB + A\Gamma$, ἄρα
$$AA' < \frac{AB+A\Gamma}{2} \quad \text{ἢ} \quad \upsilon_\alpha < \frac{\gamma+\beta}{2}.$$

Ἂν παραστήσωμεν μὲ $\upsilon_\alpha, \upsilon_\beta, \upsilon_\gamma$ τὰ ὕψη ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ μὲ α, β, γ τὰς πλευράς του, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὰ ἀνωτέρω
$$\upsilon_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}, \quad \upsilon_\beta < \frac{\gamma+\alpha}{2}, \quad \upsilon_\gamma < \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Προσθέτομεν τὰς ἀνισότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν
$$\upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma < \alpha + \beta + \gamma \quad (3).$$

Ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΑ'Β ἔχομεν $AA' > AB - BA'$ (4).

Ἐπίσης ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΑ'Γ ἔχομεν $AA' > A\Gamma - A'\Gamma$ (5).

Προσθέτομεν τὰς ἀνισότητας (4) καὶ (5) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν
$$2AA' > AB + A\Gamma - (BA' + A'\Gamma) \quad \text{ἢ} \quad 2AA' > AB + A\Gamma - B\Gamma$$
$$\text{ἢ} \quad 2\upsilon_\alpha > \gamma + \beta - \alpha \quad \text{ἢ} \quad \upsilon_\alpha > \frac{\gamma+\beta-\alpha}{2} \quad (6)$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν $\upsilon_\beta > \dfrac{\alpha+\gamma-\beta}{2}$ (7) καὶ $\upsilon_\gamma > \dfrac{\beta+\alpha-\gamma}{2}$ (8)

Προσθέτομεν τὰς ἀνισότητας (6), (7), (8) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν
$$\upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma > \frac{2\alpha+2\beta+2\gamma-(\alpha+\beta+\gamma)}{2} \quad \text{ἢ} \quad \upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma > \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \quad (9).$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (9) συνάγομεν, ὅτι
$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} < \upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma < \alpha + \beta + \gamma.$$

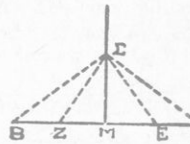
107. Δίδεται ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΓ, ἡ μεσοκάθετος αὐτοῦ εἰς τὸ μέσον Μ καὶ Σ ἕνα τυχὸν σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου. Ἡ κάθετος ἀπὸ τὸ Σ *ἐπὶ τὴν ΣΒ τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ε καὶ ἡ κάθετος ἀπὸ τὸ Σ ἐπὶ τὴν ΣΓ τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΣΜ εἶναι μεσοκάθετος τῆς ΕΖ.*

Ἐπειδὴ τὸ Σ κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου ΣΜ τῆς ΒΓ, θὰ εἶναι ΣΒ=ΣΓ· τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΣΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι γων. ΣΒΓ=γων. ΣΓΒ.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΣΕ καὶ ΓΣΖ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ΣΒ = ΣΓ καὶ

γων. ΣΒΕ = γων. ΣΓΖ·

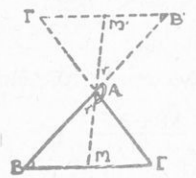
ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΣΕ=ΣΖ. Ἐπειδὴ ΣΕ=ΣΖ, ἡ ΣΜ εἶναι μεσοκάθετος τῆς ΕΖ.



Σχ. 85

108. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ· προεκτείνομεν τὰς πλευράς του ΒΑ καὶ ΓΑ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Α καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τμήματα ΑΒ′=ΑΒ καὶ ΑΓ′=ΑΓ· φέρομεν εὐθεῖαν Β′Γ′. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι Β′Γ′=ΒΓ· 2ον ὅτι ἡ κορυφὴ Α καὶ τὰ μέσα Μ καὶ Μ′ τῶν ΒΓ καὶ Β′Γ′ κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας καὶ ὅτι τὸ Α εἶναι τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΜΜ′.

1ον Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΒΓ=Β′Γ′. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην· ἤτοι ἔχουν τὰς ΑΒ=ΑΒ′ καὶ ΑΓ=ΑΓ′ ἐξ ὑποθέσεως καὶ γων. ΒΑΓ=γων. Β′ΑΓ′ ὡς κατὰ κορυφήν. ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΒΓ=Β′Γ′ καὶ γων. Β=γων. Β′.



Σχ. 86

Τὰ τρίγωνα ΑΒΜ καὶ ΑΒ′Μ′ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην· ἤτοι ἔχουν ΑΒ=ΑΒ′ ἐξ ὑποθέσεως, ΒΜ=Β′Μ′ ὡς μισὰ τῶν ἴσων εὐθειῶν ΒΓ καὶ Β′Γ′ καὶ γων. Β= =γων. Β′, ὡς ἐδείχθη· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ γων. ν=γων. ν′ καὶ ΑΜ=ΑΜ′.

Αἱ γωνίαι ΒΑΜ καὶ ΜΑΒ′ εἶναι παραπληρωματικαί, διότι εἶναι ἐφεξῆς, τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας, ἤτοι εἶναι

γων. ΒΑΜ + γων. ΜΑΒ′ = 2 ὀρθ.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα αὐτὴν τὴν γωνίαν ΒΑΜ μὲ τὴν ἴσην της γωνίαν Β′ΑΜ′ καὶ ἔχομεν γων. Β′ΑΜ′+γων. ΜΑΒ′=2 ὀρθ.

Ἐπειδὴ αἱ ἐφεξῆς γωνίαι Β′ΑΜ′ καὶ ΜΑΒ′ εἶναι παραπληρωματικαί, αἱ μὴ κοιναὶ πλευραί των ΑΜ καὶ ΑΜ′ κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας· ὥστε ἡ ΜΑΜ′ εἶναι εὐθεῖα.

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ΑΜ=ΑΜ′, ἕπεται, ὅτι τὸ Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΜΜ′.

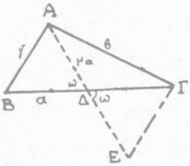
109. Ἐὰν α, β, γ εἶναι αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ μ_α ἡ διάμεσος, ἡ ἀγομένη ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

1ον. $\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} < \mu_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}$. *2ον.* $\frac{\gamma-\beta}{2} < \mu_\alpha < \frac{\gamma+\beta}{2}$.

Ἔστω ΑΒΓ ἕνα τρίγωνον καὶ ΑΔ=μ_α μία διάμεσος αὐτοῦ.

1ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι: $\frac{ΑΒ+ΑΓ-ΒΓ}{2} < ΑΔ < \frac{ΑΒ+ΑΓ}{2}$

Προεκτείνομεν τὴν διάμεσον ΑΔ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν μῆκος ΔΕ=ΑΔ. Φέρομεν τὴν ΓΕ. Τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΓΔΕ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, ἤτοι ἔχουν τὴν ΑΔ=ΔΕ ἐκ κατασκευῆς τὴν ΒΔ=ΔΓ, διότι τὸ Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΒΓ καὶ γων. ω=γων. ω' ὡς κατὰ κορυφήν· ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΑΒ=ΓΕ.



Σχ. 87

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΓΕ εἶναι

$$ΑΕ < ΑΓ + ΓΕ \quad (1)$$

'Επειδὴ ΑΕ=2ΑΔ καὶ ΓΕ=ΑΒ ἡ ἀνισότης (1) γράφεται:

$$2ΑΔ < ΑΓ+ΑΒ \text{ ἢ } ΑΔ < \frac{ΑΓ+ΑΒ}{2} \quad (2)$$

'Απὸ τὸ τρίγωνον ΑΔΓ ἔχομεν

$$ΑΔ > ΑΓ-ΔΓ \quad (3)$$

'Επίσης ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΔΒ ἔχομεν

$$ΑΔ > ΑΒ-ΒΔ \text{ ἢ } ΑΔ > ΑΒ-ΔΓ \quad (4)$$

Προσθέτομεν τὰς ἀνισότητας (3) καὶ (4) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$2\,ΑΔ > ΑΓ+ΑΒ-2\,ΔΓ \text{ ἢ } 2\,ΑΔ > ΑΓ+ΑΒ-ΒΓ$$

$$\text{ἢ } ΑΔ > \frac{ΑΓ+ΑΒ-ΒΓ}{2} \quad (5)$$

'Απὸ τὰς ἀνισότητας (2) καὶ (5) συνάγομεν, ὅτι:

$$\frac{ΑΒ+ΑΓ-ΒΓ}{2} < ΑΔ < \frac{ΑΒ+ΑΓ}{2} \text{ ἢ } \frac{\gamma+\beta-\alpha}{2} < \mu_\alpha < \frac{\gamma+\beta}{2}.$$

2ον. 'Εδείξαμεν ἀνωτέρω, ὅτι $ΑΔ < \frac{ΑΒ+ΑΓ}{2}$ (6)

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΕ ἡ πλευρὰ ΑΕ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων, δηλ. εἶναι:

$$ΑΕ > ΑΒ-ΒΕ \text{ ἢ } 2ΑΔ > ΑΒ-ΑΓ \text{ ἢ } ΑΔ > \frac{ΑΒ-ΑΓ}{2} \quad (7)$$

'Απὸ τὰς ἀνισότητας (6) καὶ (7) συνάγομεν, ὅτι:

$$\frac{ΑΒ-ΑΓ}{2} < ΑΔ < \frac{ΑΒ+ΑΓ}{2} \text{ ἢ } \frac{\gamma-\beta}{2} < \mu_\alpha < \frac{\gamma+\beta}{2}$$

110. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν διαμέσων ἑνὸς τριγώνου εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἡμιπεριμέτρου του καὶ μικρότερον τῆς περιμέτρου του.

'Εὰν παραστήσωμεν μὲ α, β, γ τὰς πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ μὲ $\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\gamma$ τὰς διαμέσους, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀντιστοίχως ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ θὰ ἔχωμεν κατὰ τὴν ἄσκησιν 109:

$$\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} < \mu_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}, \quad \frac{\gamma+\alpha-\beta}{2} < \mu_\beta < \frac{\gamma+\alpha}{2}, \quad \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} < \mu_\gamma < \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Προσθέτομεν τὰς ἀνισότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ λαμβάνομεν

$$\frac{\beta+\gamma-\alpha+\gamma+\alpha-\beta+\alpha+\beta-\gamma}{2} < \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < \frac{\beta+\gamma+\gamma+\alpha+\alpha+\beta}{2}$$

$$\text{ἢ } \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} < \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < \alpha+\beta+\gamma.$$

111. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι ἰσόπλευρον ἡ μεγαλυτέρα πλευρά του εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τρίτου τῆς περιμέτρου του καὶ ἡ μικροτέρα πλευρά του εἶναι μικροτέρα τοῦ τρίτου τῆς περιμέτρου του (δύο περιπτώσεις).

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθόσον τὸ τρίγωνον εἶναι σκαληνὸν ἢ ἰσοσκελές.

Ἔστω ἕνα σκαληνὸν τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ καὶ ἡ ΑΓ ἡ μικροτέρα πλευρά. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $AB > \frac{1}{3}(AB+B\Gamma+\Gamma A)$ καὶ ὅτι: $A\Gamma < \frac{1}{3}(AB+B\Gamma+\Gamma A)$.

Ἐὰν ἡ ΑΒ ἦτο μικροτέρα τοῦ τρίτου τῆς περιμέτρου, δηλ. ἐὰν ἦτο $AB < \frac{1}{3}(AB+B\Gamma+\Gamma A)$ (1) τότε κατὰ μείζονα λόγον θὰ ἦτο

$$B\Gamma < \frac{1}{3}(AB+B\Gamma+\Gamma A) \quad (2) \qquad \Gamma A < \frac{1}{3}(AB+B\Gamma+\Gamma A) \quad (3).$$

Προσθέτοντες τὰς ἀνισότητας (1), (2), (3) κατὰ μέλη, θὰ ἔχωμεν

$$AB+B\Gamma+\Gamma A < AB+B\Gamma+\Gamma A$$

ἤτοι ἡ περίμετρος ἑνὸς τριγώνου εἶναι μικροτέρα τῆς περιμέτρου του, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον.

Ἐὰν ἡ ΑΒ ἦτο ἴση μὲ τὸ τρίτον τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, δηλ. ἐὰν ἦτο

$AB = \frac{1}{3}(AB+B\Gamma+\Gamma A)$, θὰ εἴχομεν ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν

$$3AB = AB+B\Gamma+\Gamma A \quad \text{ἢ} \quad 2AB = B\Gamma+\Gamma A \quad (4).$$

Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $AB > B\Gamma$ καὶ $AB > \Gamma A$, ἄρα θὰ εἶναι καὶ

$$2AB > B\Gamma+\Gamma A.$$

Ὥστε ἡ ἰσότης (4) εἶναι ἄτοπος.

Ὥστε ἡ πλευρὰ ΑΒ δὲν εἶναι οὔτε μικροτέρα οὔτε ἴση μὲ τὸ τρίτον τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου· ἄρα εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τρίτου τῆς περιμέτρου του.

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἡ μικροτέρα πλευρὰ ΑΓ εἶναι μικροτέρα τοῦ τρίτου τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου.

2ον. Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι ἴσαι καὶ μεγαλύτεραι τῆς ΒΓ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $AB > \frac{1}{3}(AB+B\Gamma+\Gamma A)$.

Ἐὰν ἦτο $AB < \frac{1}{3}(AB+B\Gamma+\Gamma A)$ θὰ ἦτο

$$3AB < AB+B\Gamma+\Gamma A \quad \text{ἢ} \quad 2AB < B\Gamma+\Gamma A \quad \text{ἢ} \quad AB < B\Gamma$$

πρᾶγμα ἄτοπον, διότι ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας $AB > B\Gamma$.

Ἐὰν ἦτο $AB = \frac{1}{3}(AB+B\Gamma+\Gamma A)$ θὰ ἦτο $3AB = AB+B\Gamma+\Gamma A$ ἢ $2AB = B\Gamma+\Gamma A$ ἢ $AB = B\Gamma$ πρᾶγμα τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον, διότι ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας $AB > B\Gamma$.

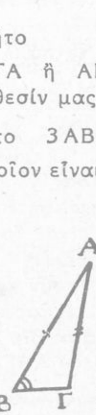
Ἄρα θὰ εἶναι

$$AB > \frac{1}{3}(AB+B\Gamma+\Gamma A).$$

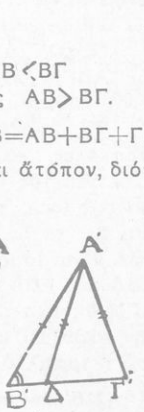
Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ

$$\Gamma A < \frac{1}{3}(AB+B\Gamma+\Gamma A).$$

112. Δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὴν γωνίαν, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς μιᾶς αὐτῶν ἴσην, εἶναι ἢ ἴσα ἢ ἄνισα.



Σχ. 88



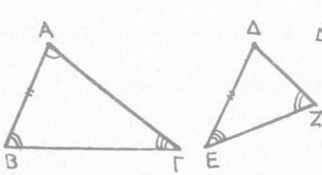
Σχ. 88α

Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ', τὰ ὁποῖα ἔχουν ΑΒ=Α'Β', ΑΓ=Α'Γ' καὶ $\widehat{B}=\widehat{B'}$.

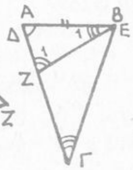
Ἐὰν αἱ πλευραὶ ΒΓ καὶ Β'Γ' εἶναι ἴσαι, τότε τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην.

Ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι αἱ πλευραὶ ΒΓ καὶ Β'Γ' εἶναι ἄνισοι, τότε τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι προφανῶς ἄνισα. (Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 88α) εἶναι μέρος τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ').

Β' Ὁμάς. 113. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς τρεῖς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν, τὰ τρίγωνα εἶναι ἢ ἴσα ἢ ἄνισα.



Σχ. 89



Σχ. 89β

Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, τὰ ὁποῖα ἔχουν: ΑΒ=ΔΕ καὶ Α=Δ, Β=Ζ, Γ=Ε. Ἐὰν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶχον τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΔΕ ἴσας καὶ τὰς προκειμένας εἰς αὐτὰς γωνίας ἴσας, τὰ τρίγωνα θὰ ἦσαν ἴσα· δηλαδή, ἐὰν εἶχον

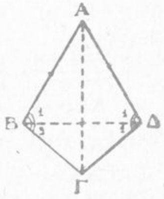
$$AB=\Delta E,\ \widehat{A}=\widehat{\Delta}\ \text{καὶ}\ \widehat{B}=\widehat{E}.$$

Ἐὰν ὅμως εἰς τὰς ἴσας πλευρὰς ΑΒ καὶ ΔΕ δὲν πρόσκεινται ἴσαι γωνίαι, μία πρὸς μίαν, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 89β τὰ τρίγωνα δὲν εἶναι ἴσα.

114. Ἐὰν δύο διαδοχικαὶ πλευραὶ τετραπλεύρου εἶναι ἴσαι καὶ αἱ προσκείμεναι εἰς αὐτὰς δύο γωνίαι του εἶναι ἴσαι, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραπλεύρου εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ΑΒ=ΑΔ καὶ γων. ΑΒΓ=γων. ΑΔΓ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ διαγώνιοί του ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΑΒ=ΑΔ, ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως εἶναι γων B_1=γων. Δ_1. Ἐὰν ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ ἀφαιρέσωμεν τὰς ἴσας γωνίας B_1 καὶ Δ_1 αἱ ἀπομένουσαι γωνίαι B_2 καὶ Δ_2 εἶναι ἴσαι. Ἀλλὰ τότε τὸ τρίγωνον ΓΒΔ εἶναι ἰσοσκελές. Ἐπειδὴ τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΓΒΔ ἔχουν κοινὴν τὴν βάσιν ΒΔ, ἡ εὐθεῖα ΑΓ, ἡ ὁποία ἑνώνει τὰς κορυφάς των εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ (ἄσκ. 87). Ἄρα αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

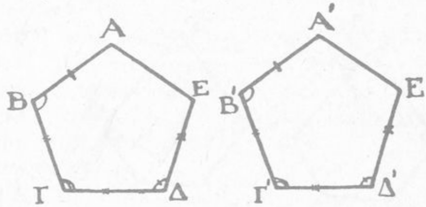


Σχ. 90

115. Δύο πολύγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν ν—1 διαδοχικὰς πλευρὰς ἴσας καὶ αἱ ὁποῖαι περιέχουν ν—2, γωνίας ἴσας καὶ ὁμοίως κειμένας.

῞Εστωσαν τὰ πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄, τὰ ὁποῖα ἔχουν ΑΒ=Α΄Β΄, ΒΓ=Β΄Γ΄, ΓΔ=Γ΄Δ΄, ΔΕ=Δ΄Ε΄ καὶ Β=Β΄, Γ=Γ΄, Δ=Δ΄. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ πολύγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα.

Πράγματι θέτομεν τὸ πολύγωνον Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓΔΕ οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ Α΄Β΄ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της πλευρᾶς ΑΒ. Τότε λόγῳ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν Β καὶ Β΄ ἡ πλευρὰ Β΄Γ΄ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΒΓ καὶ ἐπειδὴ εἶναι Β΄Γ΄=ΒΓ τὸ Γ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Γ. Ὁμοίως λόγῳ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν Γ καὶ Γ΄, Δ, Δ΄ καὶ τῶν πλευρῶν ΓΔ=Γ΄Δ΄ καὶ ΔΕ=Δ΄Ε΄, αἱ πλευραὶ Γ΄Δ΄ καὶ Δ΄Ε΄ θὰ ἐφαρμόσουν ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΓΔ καὶ ΔΕ. ᾿Επειδὴ τὸ Α΄ κεῖται ἐπὶ τοῦ Α, τὸ δὲ Ε΄ ἐπὶ τοῦ Ε, ἕπεται ὅτι ἡ πλευρὰ Ε΄Α΄ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΑΕ. Τὸ πολύγωνον λοιπὸν Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ ΑΒΓΔΕ καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσον πρὸς αὐτό.

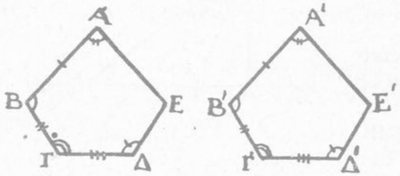


Σχ. 91

116. Δύο πολύγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν ν—2 διαδοχικὰς πλευρὰς ἴσας καὶ ν—1, προσκειμένας εἰς αὐτάς, γωνίας ἴσας καὶ ὁμοίως κειμένας.

῞Εστωσαν τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄, τὰ ὁποῖα ἔχουν ΑΒ=Α΄Β΄, ΒΓ=Β΄Γ΄, ΓΔ=Γ΄Δ΄ καὶ Α=Α΄, Β=Β΄, Γ=Γ΄, Δ=Δ΄. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ πολύγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα.

Πράγματι θέτομεν τὸ πολύγωνον Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓΔΕ οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ Α΄Β΄ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της ΑΒ. Τότε λόγῳ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν Β καὶ Β΄ ἡ πλευρὰ Β΄Γ΄ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΒΓ καὶ ἐπειδὴ εἶναι Β΄Γ΄=ΒΓ, τὸ σημεῖον Γ΄ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Γ. ᾿Επίσης λόγῳ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν Γ καὶ Γ΄, καθὼς καὶ τῶν γωνιῶν Δ καὶ Δ΄ καὶ τῆς ἰσότητος τῶν πλευρῶν ΓΔ καὶ Γ΄Δ΄ ἡ πλευρὰ Γ΄Δ΄ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΓΔ, ἡ δὲ πλευρὰ Δ΄Ε΄ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΔΕ. ᾿Επίσης ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Α΄ καὶ Α εἶναι ἴσαι, ἡ πλευρὰ Α΄Ε΄ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΕ. ῞Ωστε ἡ πλευρὰ Α΄Ε΄ θὰ λάβῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΑΕ, ἡ δὲ πλευρὰ Δ΄Ε΄ θὰ λάβῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΔΕ καὶ ἑπομένως τὸ Ε΄ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Ε.

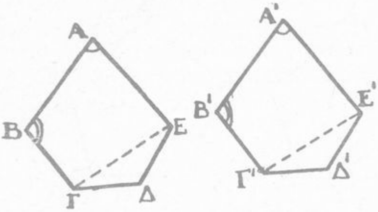


Σχ. 92

Τὸ πολύγωνον λοιπὸν Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓΔΕ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ἴσον πρὸς αὐτό.

117. Δύο πολύγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν ὅλας τὰς πλευράς των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ ν—3 διαδοχικὰς γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ ὁμοίως κειμένας.

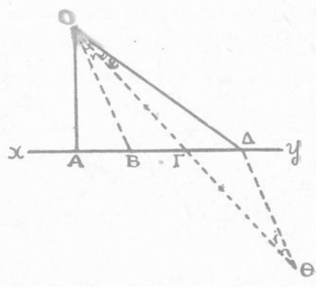
Ἔστωσαν τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α'Β'Γ'Δ'Ε', τὰ ὁποῖα ἔχουν ΑΒ=Α'Β', ΒΓ=Β'Γ', ΓΔ=Γ'Δ', ΔΕ=Δ'Ε', ΕΑ=ΕΑ', Α=Α', Β=Β'. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ πολύγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα.



Σχ. 93

Πράγματι· θέτομεν τὸ πολύγωνον Α'Β'Γ'Δ'Ε' ἐπὶ τοῦ ΑΒΓΔΕ οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ Α'Β' νὰ ἐφαρμόση ἐπὶ τῆς ἴσης της ΑΒ. Λόγῳ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν Α καὶ Α', Β καὶ Β' αἱ πλευραὶ Α'Β', Β'Γ', Α'Ε θὰ ἐφαρμόσουν ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΑΕ. Ἐὰν τώρα φέρωμεν τὰς διαδιαγωνίους ΓΕ καὶ ΓΕ' αὗται θὰ συμπέσουν. Ἀλλὰ τότε καὶ τὰ τρίγωνα Γ'Δ'Ε' καὶ ΓΔΕ θὰ ἐφαρμόσουν, διότι ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ κεῖνται ὁμοίως. Ὥστε τὸ πολύγωνον Α'Β'Γ'Δ'Ε' θὰ ἐφαρμόση ἐπὶ τοῦ ΑΒΓΔΕ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ἴσον μὲ αὐτό.

118. Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Ο, *τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς εὐθείας* xy, *φέρομεν τὴν κάθετον* ΟΑ *ἐπὶ τὴν* xy *καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου τὰς πλαγίας* ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ... *καὶ τοιαύτας, ὥστε* ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ= . . . . . *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι* ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ, . . . *βαίνουν ἐλαττούμεναι.*



Σχ. 94

Θὰ δείξωμεν, ὅτι ω<ν. Προεκτείνομεν ΟΓ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της λαμβάνομεν τμῆμα ΓΘ=ΟΓ. Φέρομεν τὴν ΔΘ. Τὰ τρίγωνα ΟΒΓ καὶ ΓΔΘ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας, τὰς ΟΓ=ΓΘ' ἐκ κατασκευῆς, ΒΓ=ΓΔ, ἐξ ὑποθέσεως ἐπὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ΒΓΟ καὶ ΔΓΘ ἴσας, ὡς κατὰ κορυφήν· ἄρα θὰ εἶναι

γων. ν=γων. ν' καὶ ΟΒ=ΔΘ.

Ἀλλὰ ΟΒ<ΟΔ, ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΔΘ<ΟΔ.

Παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τὸ τρίγωνον ΟΔΘ εἶναι ΔΘ<ΟΔ· ἄρα θὰ εἶναι καὶ γων. ω <γων. ν' ἢ γων. ω <γων. ν.

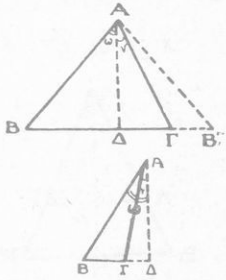
119. Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ *φέρομεν ὕψος* ΑΔ. *Ἐὰν εἶναι* ΑΒ>ΑΓ, *νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι καὶ* γων. ΒΑΔ> γων. ΔΑΓ.

᾿Επειδὴ ἡ πλαγία ΑΒ εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν πλαγίαν ΑΓ θὰ εἶναι ΔΒ > ΔΓ. Προεκτείνομεν τὴν ΒΓ καὶ λαμβάνομεν ΔΒ′=ΒΔ. Φέρομεν τὴν ΑΒ′. ᾿Επειδὴ τὸ Β′ εὑρίσκεται εἰς τὴν προέκτασιν τῆς ΔΓ θὰ εἶναι προφανῶς γων. ΔΑΒ′ > ν (1).

᾿Αλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΒ′ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΒ′ ἐκ κατασκευῆς· ἄρα ἡ ΑΔ εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΑΒ′· ἤτοι θὰ εἶναι γων. ΔΑΒ′=γων. ω (2).

᾿Εὰν εἰς τὴν ἀνισότητα (1) θέσωμεν ἀντὶ τῆς γωνίας ΔΑΒ′ τὴν ἴσην της γωνίαν ω θὰ ἔχωμεν γων. ω > γων. ν.

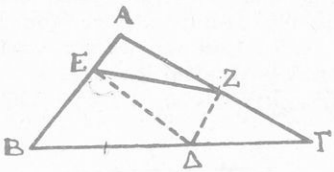
῞Οταν τὸ Δ πίπτῃ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΓ εἶναι προφανές, ὅτι ω > ν.



Σχ. 95

120. Κάθε πλευρὰ τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία συνδέει τοὺς πόδας τῶν καθέτων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς ἐπὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς τοῦ τριγώνου.

῎Εστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Δ τυχὸν σημεῖον τῆς πλευρᾶς ΒΓ· ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὰς καθέτους ΔΕ καὶ ΔΖ ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΖ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΒΓ > ΕΖ.



Σχ. 96

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΔΕΒ ἡ ὑποτείνουσα ΒΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς καθέτου ΔΕ, δηλαδὴ εἶναι ΒΔ > ΔΕ (1)

῾Ομοίως ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΔΖΓ ἔχομεν ΔΓ > ΔΖ (2).

Προσθέτομεν τὰς ἀνισότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν ΒΔ+ΔΓ > ΔΕ+ΔΖ ἢ ΒΓ > ΔΕ+ΔΖ (3).

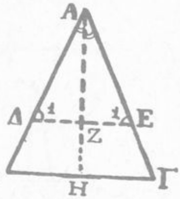
᾿Αλλὰ ΔΕ+ΔΖ > ΕΖ (4). ᾿Απὸ τὰς ἀνισότητας (3) καὶ (4) συνάγομεν ὅτι: ΒΓ > ΕΖ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

ΕΥΘΕΙΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ

Γωνίαι σχηματιζόμεναι ὑπὸ δύο παραλλήλων καὶ μιᾶς τεμνούσης

Α΄ Ὁμάς. 121. *Κάθε εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ τέμνουσα τὰς ἴσας πλευράς του, ὁρίζει ἕνα δεύτερον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοσκελές.*



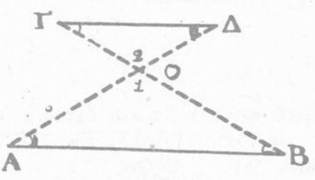
Σχ. 97

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΔΕ μία εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν του ΒΓ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι ἰσοσκελές.

Αἱ γωνίαι Β καὶ Δ_1 εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντός, ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΒΓ καὶ ΔΕ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΒ.

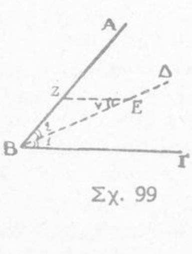
Ὁμοίως αἱ γωνίαι Γ καὶ Ε_1 εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐκτός καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΒΓ καὶ ΔΕ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΓ. Ἐπειδὴ ὅμως αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ἴσαι, ὡς παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ θὰ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἴσαι πρὸς αὐτὰς γωνίαι Δ_1 καὶ Ε_1. Ἐπειδὴ $\Delta_1 = \text{Ε}_1$, τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι ἰσοσκελές.

122. *Δύο εὐθεῖαι* ΑΒ *καὶ* ΓΔ *εἶναι παράλληλοι. Φέρομεν τὰς εὐθείας* ΑΔ *καὶ* ΒΓ, *αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς εἰς ἕνα σημεῖον* Ο. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα* ΟΑΒ *καὶ* ΟΓΔ *ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας, μίαν πρὸς μίαν.*



Σχ. 98

Αἱ γωνίαι Α καὶ Δ εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΔ. Ἐπίσης αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΓ. Αἱ γωνίαι Ο_1 καὶ Ο_2 εἶναι ἴσαι, ὡς κατὰ κορυφήν.



Σχ. 99

Β΄ Ὁμάς. 123. *Ἂν ἀπὸ τυχὸν σημεῖον τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς μίαν πλευρὰν τῆς γωνίας, τὸ προκῦπτον τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.*

Ἔστω ἡ γωνία ΑΒΓ καὶ ΒΔ ἡ διχοτόμος της. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ε τῆς ΒΔ φέρομεν τὴν ΕΖ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΖΒΕ εἶναι ἰσοσκελές.

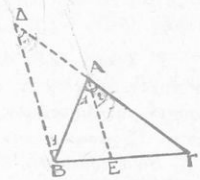
Πράγματι· ἐπειδὴ ἡ ΒΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α θὰ εἶναι $\widehat{B_1}=\widehat{B_2}$ (1). Ἀλλὰ $\widehat{B_1}=\widehat{E}$ (2) ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΖΕ καὶ ΒΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΔ. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $B_2=E$· Ὥστε τὸ τρίγωνον ΖΕΒ εἶναι ἰσοσκελές, διότι αἱ γωνίαι τοῦ B_2 καὶ Ε εἶναι ἴσαι.

124. Δίδεται μία γωνία ΑΒΓ· *ἀπὸ τυχὸν σημεῖον* Ζ *τῆς πλευρᾶς* ΑΒ *φέρομεν παράλληλον* ΖΕ *πρὸς τὴν* ΒΓ *καὶ κειμένην ἐντὸς τῆς γωνίας. Ἐπὶ τῆς* ΖΕ *λαμβάνομεν τμῆμα* ΖΕ=ΖΒ. ***Νὰ** ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ εὐθεῖα* ΒΕ *εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας* ΑΒΓ.

Τὸ τρίγωνον ΖΒΕ (σχ. ἀσκ. 123) εἶναι ἰσοσκελὲς ἐκ κατασκευῆς ἄρα θὰ εἶναι $B_2=E$ (1).

Ἀλλὰ $\widehat{E}=\widehat{B_1}$ (2) ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΖΕ καὶ ΒΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΕ. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $B_1=B_2$, δηλ. ἡ ΒΕ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΒΓ.

125. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ· *φέρομεν τὴν διχοτόμον* ΑΕ *τῆς γωνίας* Α *καὶ ἀπὸ τὸ* Β *φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν διχοτόμον, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν προέκτασιν τῆς* ΓΑ *εἰς τὸ* Δ. ***Νὰ** ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ τρίγωνον* ΒΑΔ *εἶναι ἰσοσκελές.*

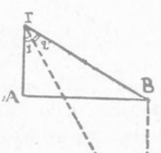


Σχ. 100

Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $A_1=A_2$· ἀλλὰ $A_1=\widehat{B_1}$ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΕ καὶ ΔΒ τεμνομένων ἀπὸ τῆς ΑΒ. Ἐπίσης εἶναι: $A_2=\Delta$, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΑΕ καὶ ΔΒ τεμνομένων ἀπὸ τῆς ΓΔ.

Ἐπειδὴ $\widehat{A_1}=\widehat{A_2}$ ἕπεται, ὅτι $\widehat{B_1}=\widehat{\Delta}$. Τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ἔχει λοιπὸν δύο γωνίας ἴσας καὶ ἑπομένως εἶναι ἰσοσκελές.

Α' Ὁμάς. 126. Δίδεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, *ὀρθογώνιον εἰς τὸ* Α· *ἀπὸ τὴν κορυφὴν* Β *φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν πλευρὰν* ΑΒ *κειμένην ἐκτὸς τοῦ τριγώνου καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα* ΒΔ=ΒΓ. ***Νὰ** ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ εὐθεῖα* ΔΓ *εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας* Γ.



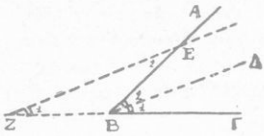
Σχ. 101

Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΒΔ=ΒΓ· ἄρα τὸ τρίγωνον ΒΓΔ εἶναι ἰσοσκελές· θὰ εἶναι λοιπὸν $\widehat{\Delta}=\widehat{\Gamma_2}$ (1).

Αἱ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ· ἄρα αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι Δ καὶ Γ_1 τῶν παραλλήλων ΑΓ καὶ ΒΔ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΓΔ εἶναι ἴσαι· ἤτοι εἶναι γων. Δ=γων. Γ_1 (2)· ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $\Gamma_1=\Gamma_2$ Ἐπειδὴ $\Gamma_1=\Gamma_2$ ἡ ΔΓ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Γ.

127. Νὰ δειχθῇ, ὅτι μία εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν διχοτόμον μιᾶς γωνίας, τέμνει τὴν μίαν πλευρὰν καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ἄλλης εἰς σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας.

Ἔστω μία γωνία ΑΒΓ, ΒΔ ἡ διχοτόμος της καὶ μία εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Ε καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ΓΒ εἰς τὸ Ζ· θὰ δείξωμεν, ὅτι ΒΕ = ΒΖ.



Σχ. 102

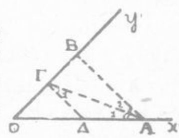
Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$. Ἀλλὰ $\widehat{B_2} =$ γων. $\widehat{E_1}$ (1), ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΒΔ καὶ ΖΕ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΑ. Ἐπίσης εἶναι $B_1 = Z$ (2), ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΒΔ καὶ ΖΕ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΖΓ. Ἐπειδὴ $B_1 = B_2$, συνάγομεν ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2), ὅτι $\widehat{E_1} = \widehat{Z}$. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΒΕΖ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἔχει δύο γωνίας ἴσας· ἄρα θὰ εἶναι ΒΕ=ΒΖ.

Β' Ὁμάς. 128. Δίδεται μία γωνία xOy· *ἐπὶ τῆς πλευρᾶς* Ox *λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον* Α, *ἀπὸ τὸ ὁποῖον φέρομεν τὴν κάθετον* ΑΒ *ἐπὶ τὴν* Oy· *φέρομεν τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας* ΟΑΒ, *ἡ ὁποία τέμνει τὴν* Oy *εἰς τὸ* Γ· *ἀπὸ τὸ* Γ *φέρομεν τὴν* ΓΔ *κάθετον ἐπὶ τὴν* Oy, *ἡ ὁποία τέμνει τὴν* Ox *εἰς τὸ* Δ. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον* ΓΔΑ *εἶναι ἰσοσκελές.*

Ἐξ ὑποθέσεως ἡ ΑΓ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΟΑΒ, ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (1),

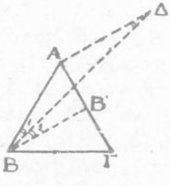
Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΔΓ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν Oy, ἑπομένως αἱ γωνίαι Γ_1 καὶ A_2 εἶναι ἴσαι ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΓ, ἤτοι εἶναι $\Gamma_1 = A_2$. (2)

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $A_1 = \Gamma_1$· ἄρα τὸ τρίγωνον ΓΔΑ εἶναι ἰσοσκελές.



Σχ. 103

129. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α *ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου* ΑΒΓ *φέρομεν τὴν κάθετον* ΑΔ *ἐπὶ τὴν πλευρὰν* ΑΓ *καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα* ΑΔ=ΒΓ. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα* ΒΔ *διχοτομεῖ τὴν γωνίαν, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὴν* ΑΒ *καὶ ἀπὸ τὸ ὕψος* ΒΒ' *τοῦ τριγώνου* ΑΒΓ.

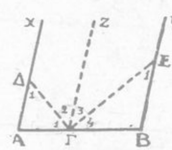


Σχ. 104

Τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελὲς ἐκ κατασκευῆς· ἄρα αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι του Δ καὶ B_1 εἶναι ἴσαι. Αἱ ΑΔ καὶ ΒΒ' εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΓ· ἄρα αἱ γωνίαι Δ καὶ B_2 εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΔ καὶ ΒΒ΄ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΔ. Αἱ γωνίαι λοιπὸν B_1 καὶ B_2 εἶναι ἴσαι, ὡς ἴσαι πρὸς τὴν γωνίαν Δ· ἑπομένως ἡ ΒΔ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΑΒΒ΄.

130. Ἀπὸ τὰ ἄκρα ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ *φέρομεν, πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ* ΑΒ, *δύο ἡμιευθείας παραλλήλους* Αx *καὶ* Βy. *Λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ* ΑΒ *τυχὸν σημεῖον* Γ, *ἐπὶ τῆς* Αx *ἕνα τμῆμα* ΑΔ=ΑΓ *καὶ ἐπὶ τῆς* Βy *ἕνα τμῆμα* ΒΕ=ΓΒ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ****, ὅτι ἡ γωνία* ΔΓΕ *εἶναι ὀρθή.*

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΓΔ καὶ ΒΕΓ εἶναι ἰσοσκελῆ, ἐκ κατασκευῆς, θὰ εἶναι $\Delta_1=\Gamma_1$ καὶ $\widehat{E_1}=\widehat{\Gamma_4}$. Φέρομεν τὴν ΓΖ παράλληλον πρὸς τὴν Αx, ἡ ὁποία θὰ εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὴν Βy.



Σχ. 105

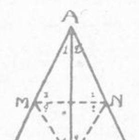
Γνωρίζομεν, ὅτι $\widehat{\Gamma_1}+\widehat{\Gamma_2}+\widehat{\Gamma_3}+\widehat{\Gamma_4}=2$ ὀρθ. (1)

Ἀλλὰ $\Gamma_2=\Delta_1$, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων Αx καὶ ΓΖ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΔΓ· ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\Gamma_2=\Gamma_1$.

Ὁμοίως εἶναι $\Gamma_3=\Gamma_4=E_1$. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) τὰς γωνίας Γ_1 καὶ Γ_4 μὲ τὰς ἴσας των γωνίας Γ_2 καὶ Γ_3 καὶ ἔχομεν $\widehat{\Gamma_2}+\widehat{\Gamma_2}+\widehat{\Gamma_3}+\widehat{\Gamma_3}=2$ ὀρθ. ἢ $2\widehat{\Gamma_2}+2\widehat{\Gamma_3}=2$ ὀρθ., ἢ $\widehat{\Gamma_2}+\widehat{\Gamma_3}=1$ ὀρθ. ἢ γων. ΔΓΕ=1 ὀρθ.

131. Εἰς ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ *φέρομεν τὸ ὕψος* ΑΗ *καὶ μίαν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν του, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ἴσας πλευράς του εἰς τὰ σημεῖα* Μ *καὶ* Ν. ***Νὰ ἀποδειχθῇ****, ὅτι* γων. ΝΜΗ = γων. ΜΝΗ *καὶ* γων. ΑΗΜ = γων. ΑΗΝ.

Ἐπειδὴ ἡ ΜΝ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ τὸ τρίγωνον ΑΜΝ εἶναι ἰσοσκελὲς (Βλέπε ἀσκ. 121)· ἄρα θὰ εἶναι ΑΜ=ΑΝ. Τὰ τρίγωνα ΑΜΗ καὶ ΑΗΝ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, ἤτοι ἔχουν τῆς ΑΗ κοινήν, ΑΜ=ΑΝ, ὡς ἐδείχθη καὶ γων. $A_1=A_2$, διότι ἡ ΑΗ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ $\widehat{H_1}=\widehat{H_2}$. Ἡ ΑΗ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΜΝ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΗΝΜ ἡ ΗΑ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Η καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΜΝ, ἄρα τὸ τρίγωνον αὐτὸ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι $\widehat{M_2}=\widehat{N_2}$.



Σχ. 106

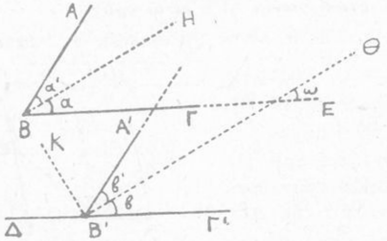
Γωνίαι τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι ἢ κάθετοι

Α΄ Ὁμάς. 132. Ἐὰν δύο γωνίαι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους, αἱ διχοτόμοι των εἶναι παράλληλοι ἢ κάθετοι.

1ον. Ἔστωσαν αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς. Ἔστωσαν ΒΗ καὶ Β΄Θ αἱ διχοτόμοι των. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ΒΗ καὶ Β΄Θ εἶναι παράλληλοι.

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ ἔχουν τὰς πλευρὰς παραλλήλους καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς θὰ εἶναι ἴσαι· ἄρα καὶ τὰ μισὰ αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσα· ἤτοι θὰ εἶναι

$$\alpha=\alpha'=\beta=\beta'.$$



Σχ. 107

Ἡ γωνία ω θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν β ὡς ἐντὸς ἐκτὸς τῶν παραλλήλων ΒΓ καὶ Β΄Γ΄ τεμνομένων ὑπὸ τῆς Β΄Θ, ἤτοι εἶναι $\widehat{\beta}=\widehat{\omega}$.

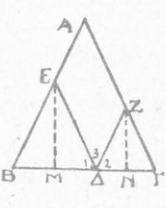
Ἀλλὰ β=α, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω· ἄρα θὰ εἶναι ω=α. Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ ΒΗ καὶ Β΄Θ τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΒΕ σχηματίζουν τὰς γωνίας α καὶ ω ἴσας· ἄρα αἱ ΒΗ καὶ Β΄Θ εἶναι παράλληλοι.

2ον. Ἔστωσαν αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Δ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ ΒΗ, Β΄Κ αἱ διχοτόμοι των. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ΒΗ καὶ Β΄Κ εἶναι κάθετοι.

Αἱ Β΄Κ καὶ Β΄Θ εἶναι κάθετοι μεταξύ των, ὡς διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν. Ἡ Β΄Κ ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν Β΄Θ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΒΗ. Ὥστε αἱ ΒΗ καὶ Β΄Κ εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

133. Δίδεται ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. *Ἐπὶ τῆς βάσεώς του* ΒΓ *λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον* Δ *καὶ ἀπὸ τὰ μέσα* Μ *καὶ* Ν *τῶν τμημάτων* ΒΔ *καὶ* ΔΓ *φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὴν* ΒΓ, *αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς πλευρὰς* ΑΒ *καὶ* ΑΓ *εἰς τὰ σημεῖα* Ε *καὶ* Ζ. *Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία* ΕΔΖ *εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν* Α.

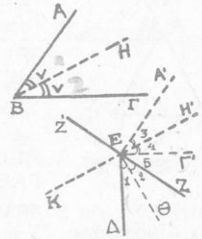
Τὸ τρίγωνον ΕΒΔ εἶναι ἰσοσκελὲς διότι ἡ ΕΜ εἶναι ὕψος καὶ διάμεσος αὐτοῦ, ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{B}=\widehat{\Delta}_1$. Ἀλλὰ Β = Γ, διότι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{\Gamma}=\widehat{\Delta}_1$. Αἱ εὐθεῖαι ΕΔ καὶ ΑΓ εἶναι παράλληλοι, διότι τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΒΓ σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας Δ_1 καὶ Γ ἴσας. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΖΔΓ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ὅτι ἡ ΖΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ. Αἱ γωνίαι Α καὶ ΕΔΖ ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ μὲ ἀντίθετον φοράν· ἄρα αἱ γωνίαι αὐταὶ εἶναι ἴσαι· δηλ. εἶναι $\widehat{A}=\widehat{E\Delta Z}$.



Σχ. 108

Β' Ὁμάς. 134. Ἐὰν δύο γωνίαι ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους, μίαν πρὸς μίαν, αἱ διχοτόμοι των εἶναι κάθετοι ἢ παράλληλοι.

1ον. Ἔστωσαν αἱ ἴσαι γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους, ἤτοι τὴν ΔΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ τὴν ΖΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΑ. Ἔστωσαν ἐπίσης ΒΗ καὶ ΕΘ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν αὐτῶν. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ διχοτόμοι αὐταὶ εἶναι κάθετοι μεταξύ των.



Σχ. 109

Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Ε τῆς γωνίας ΔΕΖ φέρομεν τὰς εὐθείας ΕΓ' καὶ ΕΑ' παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς πλευρὰς ΒΓ καὶ ΒΑ τῆς γωνίας ΑΒΓ. Ἐπίσης φέρομεν καὶ τὴν διχοτόμον ΕΗ' τῆς γωνίας Α'ΕΓ'. Αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ Α'ΕΓ' εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς, ἄρα καὶ τὰ μισὰ αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσα· δηλ. θὰ εἶναι :

$\widehat{B_1}=\widehat{B_2}=\widehat{E_3}=E_4$ (1) καὶ αἱ διχοτόμοι των ΒΗ καὶ ΕΗ' θὰ εἶναι παράλληλοι, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν ἄσκησιν 132.

Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως, αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσαι, ἄρα τὰ μισὰ αὐτῶν εἶναι ἴσα, ἤτοι εἶναι : $\widehat{B_1}=\widehat{B_2}=\widehat{E_1}=\widehat{E_2}$ (2)

Ἀπὸ τὰς (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $\widehat{B_1}=\widehat{B_2}=\widehat{E_1}=\widehat{E_2}=\widehat{E_3}=\widehat{E_4}$.

Ἡ γωνία ΔΕΓ' εἶναι ὀρθή, διότι ἡ ΔΕ ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΕΓ'· δηλ. θὰ εἶναι :

$$\text{γων. } \Delta E \Gamma' = 1 \text{ ὀρθ.} \quad \text{ἢ} \quad \widehat{E_1}+\widehat{E_2}+\widehat{E_5}=1 \text{ ὀρθ.}$$

Ἂν εἰς τὴν ἰσότητα αὐτὴν ἀντικαταστήσωμεν τὴν γωνίαν E_1 μὲ τὴν ἴσην της γωνίαν E_4, θὰ ἔχωμεν

$$\widehat{E_4}+\widehat{E_2}+\widehat{E_5}=1 \text{ ὀρθ.} \quad \text{ἢ} \quad \Theta\widehat{E}H=1 \text{ ὀρθ.}$$

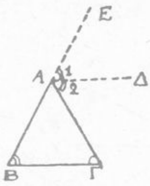
Ἄρα ἡ ΘΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΗ' καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλον της ΒΗ. Ὥστε αἱ διχοτόμοι ΕΘ καὶ ΒΗ εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

2ον. Ἔστωσαν αἱ παραπληρωματικαὶ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ', αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους καὶ ΒΗ, ΕΚ αἱ διχοτόμοι των. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ΒΗ καὶ ΕΚ εἶναι παράλληλοι. Αἱ διχοτόμοι ΕΘ καὶ ΕΚ εἶναι κάθετοι, ὡς διχοτόμοι τῶν ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν ΔΕΖ καὶ ΔΕΖ'· ἀλλὰ ἡ ΒΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΘ, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν περίπτωσιν 1ον. Αἱ εὐθεῖαι λοιπὸν ΕΚ καὶ ΒΗ, ὡς κάθετοι ἐπι τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλοι.

135. Ἐὰν ἡ διχοτόμος ἐξωτερικῆς γωνίας τριγώνου εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευράν του, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἀντιστρόφως.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας ΓΑΕ. Ἐὰν ἡ ΑΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ, θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

Ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΓΑΕ, αἱ γωνίαι A_1 καὶ A_2 θὰ εἶναι ἴσαι. Ἀλλὰ αἱ γωνίαι Β καὶ A_1 εἶναι ἴσαι ὡς ἐντός, ἐκτος τῶν παραλλήλων ΒΓ καὶ ΑΔ τεμνομένων ἀπὸ τῆς ΕΒ.



Σχ. 110

Ὁμοίως αἱ γωνίαι Γ καὶ A_2 εἶναι ἴσαι ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΒΓ καὶ ΑΔ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΓ. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι A_1 καὶ A_2 εἶναι ἴσαι, ἐξ ὑποθέσεως ἕπεται, ὅτι καὶ αἱ ἴσαι πρὸς αὐτὰς γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ἴσαι. Ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, διότι αἱ παρὰ τὴν βάσιν του γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ἴσαι.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας ΓΑΕ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ.

Πράγματι. Ἐπειδὴ ἡ ΕΑΓ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΓ θὰ εἶναι § 138 $E\widehat{A}\Gamma = B + \Gamma$ ἢ $A_1 + A_2 = B + \Gamma$.

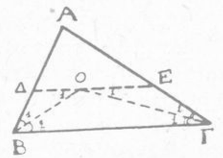
Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $A_1 = A_2$ καὶ $B = \Gamma$, ἡ ἰσότης (1) γράφεται $2A_1 = 2B$ ἢ $A_1 = B$. Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΒΓ τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΑΒ σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας Β καὶ A_1 ἴσας· ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι παράλληλοι.

Σημ. Τὸ ἀντίστροφον τῆς ἀσκήσεως αὐτῆς νὰ διδαχθῇ μετὰ τὸ Κεφάλαιον Ε′.

136. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ *καὶ* Ο *τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν του. Ἀπὸ τὸ* Ο *φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν* ΒΓ, *ἡ ὁποία τέμνει τὴν* ΑΒ *εἰς τὸ* Δ *καὶ τὴν* ΑΓ *εἰς τὸ* Ε. ***Νὰ ἀποδειχθῇ***, *ὅτι*

$$\Delta E = B\Delta + \Gamma E$$

Ἐπειδὴ ἡ ΒΟ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Β θὰ εἶναι $B_1 = B_2$· Ἀλλὰ $B_2 = O_1$, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΒΓ καὶ ΔΕ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΟ· ἄρα θὰ εἶναι καὶ $B_1 = O_1$. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΔΒΟ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι $B\Delta = \Delta O$ (1).



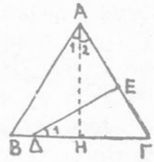
Σχ. 111

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $\widehat{\Gamma_2} = \widehat{\Gamma_1} = \widehat{O_2}$ καὶ ἑπομένως τὸ τρίγωνον ΕΟΓ εἶναι ἰσοσκελές, ὁπότε θὰ εἶναι $\Gamma E = OE$ (2). Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$B\Delta + \Gamma E = \Delta O + OE$ ἢ $B\Delta + \Gamma E = \Delta E$.

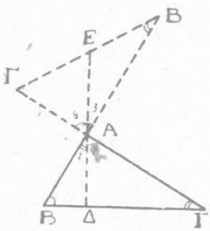
137. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Δ *τῆς βάσεως* ΒΓ *ἰσοσκελοῦς τριγώνου* ΑΒΓ *φέρομεν τὴν* ΔΕ *κάθετον ἐπὶ τὴν πλευρὰν* ΑΓ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ***, *ὅτι ἡ γωνία* Α *εἶναι διπλασία τῆς γωνίας* ΕΔΓ.

Φέρομεν τὸ ὕψος τοῦ ΑΗ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ. Ἡ ΑΗ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς· δηλαδὴ εἶναι $\widehat{A}_1=\widehat{A}_2$. Αἱ γωνίαι A_2 καὶ Δ_1 εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους μίαν πρὸς μίαν, δηλ. τὴν ΑΗ κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΓ, τὴν ΑΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΕ, ἐξ ὑποθέσεως. Ἀλλὰ ἡ γωνία Α εἶναι διπλασία τῆς γωνίας A_2, ἄρα ἡ γωνία Α εἶναι διπλασία καὶ τῆς γωνίας Δ_1, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ τὴν A_2.



Σχ. 112

138. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α. Προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Α καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΑ ἕνα τμῆμα ΑΒ′=ΑΓ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΓΑ ἕνα τμῆμα ΑΓ′=ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ προέκτασις τοῦ ὕψους ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον Ε τῆς Β′Γ′.



Σχ. 113

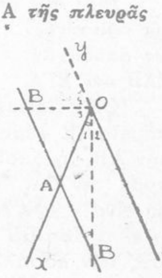
Τὰ σχηματισθέντα ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒ′Γ′ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς καθέτους πλευράς των ἴσας, ἤτοι ἔχουν ΑΒ = ΑΓ′, ΑΓ=ΑΒ′ ἐκ κατασκευῆς, ἄρα θὰ εἶναι

$$\widehat{\Gamma}=\widehat{B'},\quad \widehat{B}=\widehat{\Gamma'}.$$

Αἱ γωνίαι A_1 καὶ A_3 εἶναι ἴσαι, ὡς κατὰ κορυφήν· ὁμοίως εἶναι ἴσαι καὶ αἱ γωνίαι A_2 καὶ A_4.

Ἀλλὰ $\widehat{A}_1=\widehat{\Gamma}$, διότι εἶναι ὀξεῖαι γωνίαι καὶ ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους· ἄρα θὰ εἶναι $A_1=\Gamma=B'$. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΕΒ εἶναι ἰσοσκελές, διότι αἱ παρὰ τὴν βάσιν του γωνίαι A_3 καὶ Β′ εἶναι ἴσαι· ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΕΒ=ΕΑ (1). Ὁμοίως εἶναι $A_2=B=\Gamma'$. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΕΑΓ′ εἶναι ἰσοσκελές, διότι $A_4=\Gamma'$ ἄρα θὰ εἶναι ΕΓ′=ΕΑ (2). Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι Γ′Ε=ΕΒ′· ἄρα τὸ Ε εἶναι τὸ μέσον τῆς Β′Γ′.

139. Δίδεται μία γωνία xOy· ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Α τῆς πλευρᾶς Ox φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν Oy καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τμῆμα ΑΒ=ΟΑ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΟΒ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Ο ἢ τῆς παραπληρωματικῆς της, καθόσον τὸ τμῆμα ΑΒ κεῖνται ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τῆς γωνίας Α.



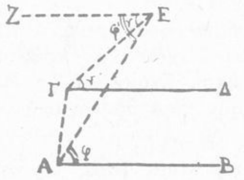
Σχ. 114

1ον. Τὸ σχηματισθὲν τρίγωνον ΟΑΒ εἶναι ἰσοσκελές, διότι εἶναι ΟΑ=ΑΒ ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{O}_1=\widehat{B}$· ἀλλὰ $B=O_2$, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ Oy τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΟΒ. Ὥστε θὰ εἶναι καὶ $O_1=O_2$ καὶ ἑπομένως ἡ ΟΒ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Ο.

2ον. Ἐὰν λάβωμεν ΑΒ′=ΟΑ καὶ φέρωμεν τὴν ΟΒ′, θὰ ἔχωμεν Β′=O_3. Ἀλλὰ $\widehat{B'}=\widehat{O_4}$ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων Β′Α καὶ Οy τεμνομένων ἀπὸ τῆς ΟΒ′· ἄρα θὰ εἶναι $O_3=O_4$ καὶ ἑπομένως ἡ ΟΒ′ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας xOy′ παραπληρωματικῆς τῆς xOy.

140. Δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ *καὶ* ΓΔ *κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης* ΑΓ, *ἕνα δὲ σημεῖον* Ε *κεῖται ἐκτὸς τοῦ σχήματος* ΒΑΓΔ. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία* ΑΕΓ *ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν γωνιῶν* ΕΑΒ *καὶ* ΕΓΔ.

Θὰ δείξωμεν ὅτι, γων. ΑΕΓ=γων. ΕΑΒ—γων. ΕΓΔ. Ἀπὸ τὸ Ε φέρομεν τὴν ΕΖ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ ἡ ὁποία θὰ εἶναι καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ. Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα ἡ γωνία ΑΕΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τῶν γωνιῶν ΑΕΖ καὶ ν, δηλ. εἶναι.



Σχ. 115

γων. ΑΕΓ=γων. ΑΕΖ—ν (1)

Ἀλλὰ ἡ γωνία ΑΕΖ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν φ, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΖΕ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΕ, ἤτοι εἶναι γων. ΑΕΖ = φ.

Ὁμοίως ἡ γωνία ν εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ν′, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΓΔ καὶ ΖΕ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΓΕ.

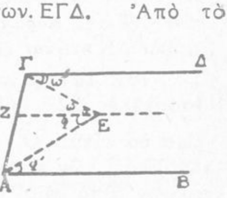
Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰς γωνίας ΑΕΖ καὶ ν μὲ τὰς ἴσας των γωνίας φ καὶ ν′ καὶ ἔχομεν

γων. ΕΑΓ=φ—ν′ ἢ γων. ΑΕΓ=γων. ΕΑΒ—γων. ΕΓΔ.

Σημ. Ἐὰν τὸ σημεῖον κεῖται κάτωθεν τῆς ΑΒ, τότε θὰ εἶναι γων. ΑΕΓ=γων. ΕΓΔ—γων. ΕΑΒ.

141. Δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ *καὶ* ΓΔ *κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης* ΑΓ, *ἕνα δὲ σημεῖον* Ε *κεῖται ἐντὸς τοῦ σχήματος* ΒΑΓΔ. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία* ΑΕΓ *ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν* ΕΑΒ *καὶ* ΕΓΔ.

Θὰ δείξωμεν, ὅτι γων. ΑΕΓ=γων. ΒΑΕ+γων. ΕΓΔ. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Ε φέρομεν τὴν ΕΖ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία θὰ εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὴν ΓΔ. Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα θὰ εἶναι γων. ΑΕΓ=ω+φ (1). Ἀλλὰ ἡ γωνία ω εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ω′, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΓΔ καὶ ΖΕ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΕΓ, ἤτοι εἶναι ω=ω′.



Σχ. 116

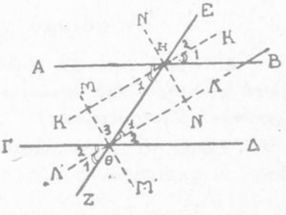
Ὁμοίως ἡ γωνία φ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν φ′, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΖΕ καὶ ΑΒ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΕ, ἤτοι εἶναι φ= φ′.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰς γωνίας ω καὶ φ μὲ τὰς ἴσας των ω΄ καὶ φ΄ καὶ ἔχομεν:

γων. ΑΕΓ=ω΄+φ΄ ἢ γων. ΑΕΓ=γων. ΕΓΔ+γων. ΕΑΒ.

142. *Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι τέμνονται ὑπὸ τρίτης. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνιῶν ἢ τῶν δύο ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνιῶν ἢ τῶν ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνιῶν ἢ τῶν ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνιῶν εἶναι παράλληλοι. 2ον ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνιῶν εἶναι κάθετοι.*

Ἔστωσαν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται ὑπὸ τῆς ΕΖ εἰς τὰ σημεῖα Η καὶ Θ. Ἔστω ΚΗ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΗΖ καὶ ΘΛ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΕΘΔ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ΚΗ καὶ ΘΛ εἶναι παράλληλοι. Ἐπειδὴ αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ΑΗΖ καὶ ΕΘΔ εἶναι ἴσαι καὶ τὰ μισὰ αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσα· ἄρα αἱ γωνίαι $Η_1$ καὶ $Θ_1$ εἶναι ἴσαι. Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΚΗ καὶ ΘΛ τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΕΖ σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας $Η_1$ καὶ $Θ_1$ ἴσας, ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΚΗ καὶ ΘΛ εἶναι παράλληλοι.



Σχ. 117

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι αἱ διχοτόμοι ΗΝ καὶ ΘΜ τῶν ἐντὸς ἐναλλάξ, γωνιῶν ΒΗΖ καὶ ΕΘΓ εἶναι παράλληλοι.

Ἡ διχοτόμος ΚΗ τῆς γωνίας ΑΗΖ προεκτεινομένη πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας εἶναι διχοτόμος καὶ τῆς κατὰ κορυφήν της γωνίας ΕΗΒ· δηλ. ἡ ΚΗΚ΄ εἶναι διχοτόμος τῶν δύο κατὰ κορυφὴν γωνιῶν ΑΗΖ καὶ ΕΗΒ. Ὁμοίως ἡ ΛΘΛ΄ εἶναι διχοτόμος τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν ΕΘΔ καὶ ΓΘΖ· ἡ ΜΘΜ΄ εἶναι διχοτόμος τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν ΕΘΓ καὶ ΖΘΔ καὶ ἡ ΝΗΝ΄ τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν ΒΗΘ καὶ ΕΗΑ. Ἀλλὰ ἐδείχθη ἀνωτέρω, ὅτι αἱ ΚΗΚ΄ καὶ ΛΘΛ΄ εἶναι παράλληλοι. Ὥστε αἱ διχοτόμοι ΗΚ΄ καὶ ΘΛ΄ τῶν ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνιῶν ΕΗΒ καὶ ΓΘΖ εἶναι παράλληλοι. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι αἱ διχοτόμοι ΗΝ΄ καὶ ΘΜ΄ τῶν ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνιῶν ΕΗΑ καὶ ΖΘΔ εἶναι παράλληλοι.

2ον. Γνωρίζομεν (§ 169), ὅτι αἱ διχοτόμοι ΚΚ΄ καὶ ΝΝ΄ τῶν τεσσάρων γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΕΖ εἶναι κάθετοι μεταξύ των. Ὁμοίως αἱ διχοτόμοι ΛΛ΄ καὶ ΜΜ΄ τῶν τεσσάρων γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι ΓΔ καὶ ΕΖ εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

Ἐπειδὴ ἡ ΝΗΝ΄ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΗΚ΄, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλον τῆς Λ΄ΘΛ. Ὥστε αἱ διχοτόμοι ΗΝ καὶ ΘΛ τῶν ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνιῶν ΒΗΘ καὶ ΗΘΔ εἶναι κάθετοι μεταξύ των. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι αἱ διχοτόμοι ΘΜ καὶ ΗΚ τῶν ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνιῶν ΗΘΓ καὶ ΑΗΘ εἶναι κάθετοι μεταξύ των. Ἐπίσης αἱ διχοτόμοι ΗΚ' καὶ ΘΜ' τῶν ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνιῶν ΕΗΒ καὶ ΖΘΔ εἶναι κάθετοι μεταξύ των, διότι εἶναι μέρη τῶν καθέτων εὐθειῶν ΚΗΚ' καὶ ΜΘΜ' κλπ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'.

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΕΝΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ, ΕΝΟΣ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ

Ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου

Α' Ὁμάς. 143. Εἰς ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον μία γωνία του εἶναι ἴση μὲ τὰ $^2/_3$ μιᾶς ἄλλης γωνίας του. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ ὀρθογων. τριγώνου (2 περιπτώσεις).

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία Α εἶναι ὀρθή. Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

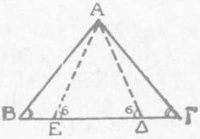
Ι. Ἔστω, ὅτι ἡ γωνία Β εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς γωνίας Α· ἤτοι εἶναι $B=\frac{2}{3}A$ ἢ $B=\frac{2}{3}\cdot 90^0=60^0$, ὁπότε γωνία $\Gamma=30^0$.

ΙΙ. Περίπτωσις. Ἔστω, ὅτι ἡ γωνία Β εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς γωνίας Γ, ἤτοι, ὅτι εἶναι $B=\frac{2}{3}\Gamma$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἰσότης $B+\Gamma=90^0$ γράφεται $\frac{2}{3}\Gamma+\Gamma=90^0$ ἢ $\frac{5\Gamma}{3}=90^0$

ἢ $5\Gamma=270^0$, ἄρα $\Gamma=54^0$.

Ὥστε $\Gamma=54^0$, ὁπότε $B=90^0-54^0=36^0$.

144. Εἰς ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ γωνία τῆς κορυφῆς του εἶναι 78°. Ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΓ λαμβάνομεν τμήματα ΒΔ=ΑΒ καὶ ΓΕ=ΓΑ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι: 1ον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. 2ον τοῦ τριγώνου ΑΔΕ.



Σχ. 118

1ον. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ γωνία Α εἶναι 78^0, ἄρα θὰ εἶναι $B+\Gamma=180^0-78^0=102^0$ καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ἴσαι, ὡς παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ, θὰ εἶναι $B=\Gamma=51^0$.

Τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἐκ κατασκευῆς εἶναι ΒΔ=ΒΑ· ἄρα θὰ εἶναι

$$\widehat{\sigma}=B\widehat{A}\Delta.$$

Ἐπειδὴ ἡ γωνία Β εἶναι 51^0 θὰ εἶναι $\widehat{\sigma}+B\widehat{A}\Delta=180^0-51^0=129^0$

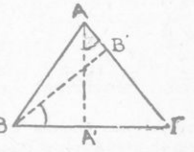
καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι σ καὶ ΒΑΔ εἶναι ἴσαι, ὡς ἐδείχθη, θὰ εἶναι

$$\widehat{\sigma} = \mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}\Delta} = \frac{129^0}{2} = 64^0\,30'.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $\sigma'=64^0\,30'$· εἰς τὸ τρίγωνον ΑΕΔ εἶναι $\sigma=\sigma'=64^0\,30'$ ἄρα θὰ εἶναι $\mathrm{E A \Delta}=180^0-64^0\,30'-64^0\,30'=51^0$.

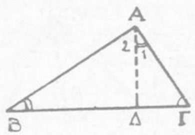
145. Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ *φέρομεν τὰ ὕψη* ΑΑ′ *καὶ* ΒΒ′. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι* γων. Α′ΑΓ=γων. Β′ΒΓ.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΑ′Γ καὶ ΒΒ′Γ ἔχουν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν Γ κοινήν· ἄρα αἱ ἄλλαι ὀξεῖαι των γωνίαι Α′ΑΓ καὶ Β′ΒΓ θὰ εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν συμπληρωματικὴν γωνίαν Γ.



Σχ. 119

146. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α *τῆς ὀρθῆς γωνίας* Α *ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου φέρομεν τὸ ὕψος* ΑΔ. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρία τρίγωνα* ΑΒΓ, ΑΔΒ *καὶ* ΑΔΓ *ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας, μίαν πρὸς μίαν.*



Σχ. 120

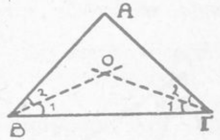
Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΒ ἔχουν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν Β κοινήν· ἄρα αἱ ἄλλαι ὀξεῖαι γωνίαι των Γ καὶ A_2 θὰ εἶναι ἴσαι. Ὁμοίως τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΒ ἔχουν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν Γ κοινήν· ἄρα αἱ ἄλλαι ὀξεῖαι γωνίαι των Β καὶ A_1 θὰ εἶναι ἴσαι.

147. Εἰς ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, *ἡ γωνία τῆς κορυφῆς* Α *εἶναι διπλασία μιᾶς τῶν παρὰ τὴν βάσιν του γωνιῶν. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῆς βάσεως.*

Ἔστω ΑΒΓ ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι Β=Γ καὶ Α=2Β. Ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα $A+B+\Gamma=180^0$ ἀντικαταστήσωμεν τὴν γωνίαν Α μὲ τὸ ἴσον του 2Β καὶ τὴν Γ μὲ τὴν ἴσην της Β λαμβάνομεν

$2B+B+B=180^0$ ἢ $4B=180^0$, ἄρα $B=45^0$.

Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τῆς βάσεως σχηματίζουν ἕνα τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ δύο γωνίαι ἔχουν ἄθροισμα $22^0\,30'+22'\,30'$ ἢ 45^0 καὶ ἑπομένως ἡ τρίτη γωνία του θὰ εἶναι ἴση μὲ $180^0-45^0=135^0$.



Σχ. 121

148. Ἐὰν ἡ βάσις ΒΓ *ἰσοσκελοῦς τριγώνου* ΑΒΓ *προεκταθῇ μέχρι ἑνὸς σημείου* Δ, *νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:* ΑΔ > ΑΓ.

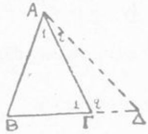
Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\widehat{B}=\widehat{\Gamma}_1$. Φέρομεν τὴν ΑΔ. Εἰς τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΓΔ ἡ γωνία Γ_2 εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι:

$$\Gamma_2=B+A_1 \quad \text{ἢ} \quad \Gamma_2=\Gamma_1+A_1 \quad \text{ἄρα} \quad \Gamma_2>\Gamma_1 \qquad (1)$$

Ἀλλ' ἡ γωνία Γ_1, ὡς ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΓΔ εἶναι

$$\Gamma_1 = \Delta + A_2 \quad \text{ἄρα} \quad \Gamma_1 > \Delta \quad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἀνισότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $\Gamma_2 > \Delta$. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΓΔ· αἱ δύο γωνίαι του Γ_2 καὶ Δ εἶναι ἄνισοι καὶ εἶναι $\Gamma_2 > \Delta$, ἄρα θὰ εἶναι καὶ $ΑΔ > ΑΓ$.

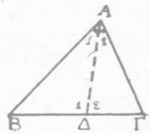


Σχ. 122

β' Λύσις. Ἐπειδὴ αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ὀξεῖαι, ἡ γωνία Γ_2 θὰ εἶναι ἀμβλεῖα, ὡς παραπληρωματικὴ τῆς ὀξείας γωνία Γ_1. Ἀναγκαστικῶς τότε ἡ γωνία Δ τοῦ τριγώνου ΑΓΔ εἶναι ὀξεῖα, ἄρα θὰ εἶναι $\Gamma_2 > \Delta$ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι $ΑΔ > ΑΓ$.

***149.** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας ἑνὸς τριγώνου τέμνει τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς δύο τμήματα, τὰ ὁποῖα εἶναι μικρότερα ἀντιστοίχως τῶν προσκειμένων, πρὸς τὰ τμήματα αὐτά, πλευρῶν τοῦ τριγώνου.*

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ καὶ τὸ σημεῖον Δ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $ΒΔ < ΑΒ$ καὶ $ΔΓ < ΑΓ$.



Σχ. 123

Πράγματι, ἐξ ὑποθέσεως αἱ γωνίαι A_1 καὶ A_2 εἶναι ἴσαι. Ἡ γωνία Δ_1 εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΔΓ· ἄρα θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας A_2 καὶ ἑπομένως καὶ τῆς ἴσης της γωνίας A_1. Παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ αἱ δύο γωνίαι του Δ_1 καὶ A_1 εἶναι ἄνισοι· ἄρα θὰ εἶναι ἄνισοι καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν πλευραί. Ἐπειδὴ εἶναι $\Delta_1 > A_1$ θὰ εἶναι καὶ $ΑΒ > ΒΔ$, δηλ. $ΒΔ < ΑΒ$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ $ΔΓ < ΑΓ$.

***150.** Εἰς ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ *ἡ γωνία του* Β *εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας* Γ. *Ἐὰν φέρωμεν τὴν διχοτόμον* ΑΔ *τῆς γωνίας* Α, *νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι*

$$ΑΔΓ - ΑΔΒ = Β - Γ.$$

Σχ. 142

Ἡ γωνία μ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΔΒ· ἄρα θὰ εἶναι $\mu = B + A_1$ (1).

Ἡ γωνία ν εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΔΓ· ἄρα θὰ εἶναι $\nu = \Gamma + A_2$ (2).

Ἀφαιροῦμεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν:

$$\mu - \nu = (B + A_1) - (\Gamma + A_2) \text{ ἢ } \mu - \nu = B + A_1 - \Gamma - A_2 \quad (3)$$

Ἐπειδὴ $A_1 = A_2$, διότι ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α, θὰ εἶναι

$$\mu - \nu = B - \Gamma \quad \text{ἢ} \quad A\widehat{\Delta}\Gamma - A\widehat{\Delta}B = \widehat{B} - \widehat{\Gamma}$$

***151.** Ἐὰν ἡ μία γωνία ἑνὸς τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ἀμβλυγώνιον.*

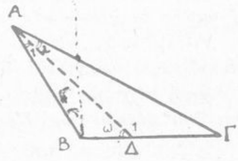
Ἔστω ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $\widehat{A} > \widehat{B} + \widehat{\Gamma}$ (1)· θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον αὐτὸ εἶναι ἀμβλυγώνιον.

Προσθέτομεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος (1) τὴν γωνίαν Α καὶ ἔχομεν $\widehat{A} + \widehat{A} > \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma}$ ἢ $2A > 180^0$ ἢ $A > 90^0$· ἄρα τὸ τρίγωνον εἶναι ἀμβλυγώνιον.

152. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ *εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι* $\widehat{B} - \widehat{\Gamma} = 90^0$. ***Νὰ** ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διχοτόμος* ΑΔ *τῆς γωνίας* Α *σχηματίζει μὲ τὴν* ΒΓ *γωνίαν* 45^0.

Θὰ δείξωμεν, ὅτι γων. $\omega = 45^0$.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία ω εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΔΓ θὰ εἶναι $\omega = \Gamma + \frac{A}{2}$ (1).



Σχ. 125

Ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ἔχομεν $\omega + B + \frac{A}{2} = 180^0$ ἢ $\omega = 180^0 - B - \frac{A}{2}$ (2).

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη ἔχομεν
$2\omega = 180^0 + \Gamma - B$ ἢ $2\omega = 180^0 - (B - \Gamma)$, (3).

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $B - \Gamma = 90^0$ ἡ (3) γίνεται $2\omega = 180^0 - 90^0$ ἢ $2\omega = 90^0$, ἄρα $\omega = 45^0$.

153. Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, *ὀρθογώνιον εἰς τὸ* Α, *εἶναι* ΑΒ < ΑΓ. *Φέρομεν τὸ ὕψος* ΑΗ *καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης* ΒΓ *τμῆμα* ΗΔ=ΗΒ. *Ἀπὸ τὸ* Γ *φέρομεν τὴν* ΓΕ *κάθετον ἐπὶ τὴν* ΑΔ, *ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς* ΑΔ *εἰς τὸ* Ε. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ* ΒΓ *εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας* ΑΓΕ.

Τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἡ ΑΗ εἶναι ὕψος καὶ διάμεσος τοῦ αὐτοῦ· ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{\omega} = \widehat{\omega'}$. Ἀλλὰ $\widehat{\omega} = \widehat{\varphi}$ ὡς κατὰ κορυφήν· ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{\omega} = \widehat{\varphi}$.

Σχ. 126

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΓΕΔ ἔχουν ὀξείας γωνίας $\omega = \varphi$· ἄρα αἱ γωνίαι ν καὶ ν′ θὰ εἶναι ἴσαι, ὡς συμπληρώματα τῶν ἴσων γωνιῶν ω καὶ φ ἤτοι εἶναι $\nu = \nu'$.

Ὥστε ἡ ΓΒ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΓΕ.

Ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς πολυγώνου

154. Πόσον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τετραπλεύρου ; ἑνὸς ἑξαγώνου ; ἑνὸς δεκαπενταγώνου ;

Αἱ γωνίαι ἑνὸς τετραπλεύρου ἔχουν ἄθροισμα $2\times4-4=4$ ὀρθάς.
Αἱ γωνίαι ἑνὸς ἑξαγώνου ἔχουν ἄθροισμα $2\times6-4=8$ ὀρθάς.
Αἱ γωνίαι ἑνὸς δεκαπενταγώνου ἔχουν ἄθροισμα $2\times15-4=26$ ὀρθάς.

***155.** Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς κυρτοῦ πολυγώνου εἶναι 18 ὀρθαί. Πόσας πλευρὰς ἔχει τὸ πολύγωνον;*

Ἔστω, ὅτι τὸ πολύγωνον ἔχει ν πλευράς. Τότε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του εἶναι $2\nu-4$ ὀρθ. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του εἶναι 18 ὀρθ. ἔχομεν $2\nu-4=18$ ἢ $2\nu=22$, ἄρα $\nu=11$· ὥστε τὸ πολύγωνον ἔχει 11 πλευράς.

***156.** Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς κυρτοῦ πολυγώνου εἶναι 1080°. Πόσας πλευρὰς ἔχει τὸ πολύγωνον;*

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ πολύγωνον αὐτὸ ἔχει 271 πλευράς.

***157.** Ἕνα δεκάγωνον ἔχει ὅλας τὰς γωνίας του ἴσας. Μὲ πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς ἰσοῦται κάθε γωνία του;*

Αἱ 10 ἴσαι γωνίαι τοῦ δεκαγώνου ἔχουν ἄθροισμα $2\times10-4=16$ ὀρθ.· ἄρα ἡ μία γωνία του εἶναι ἴση μὲ 16 ὀρθ. : $10=1{,}6$ ὀρθ.

***158.** Ἡ μία γωνία ὀκταγώνου εἶναι ὀρθή, καὶ αἱ ἄλλαι γωνίαι του εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Πόσων μοιρῶν εἶναι κάθε γωνία του;*

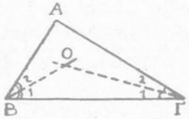
Αἱ 8 γωνίαι τοῦ ὀκταγώνου ἔχουν ἄθροισμα $2\times8-4=12$ ὀρθ. Ἐφ' ὅσον ἡ μία γωνία του εἶναι ὀρθή, αἱ ἄλλαι 7 ἴσαι γωνίαι του ἔχουν ἄθροισμα 11 ὀρθάς· ἑπομένως κάθε μία ἀπὸ αὐτὰς εἶναι ἴση μὲ $\frac{11}{7}$ ὀρθ. ἢ μὲ $\frac{11}{7}\times 90^\circ=141^\circ\,25'\,42'',9$.

***159.** Ὑπάρχει κυρτὸν πολύγωνον, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του εἶναι 13 ὀρθαὶ γωνίαι;*

Ἔστω ὅτι ὑπάρχει τοιοῦτον πολύγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει ν πλευράς· τότε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του θὰ ἦτο ἴσον μὲ $2\nu-4$ ὀρθ. καὶ θὰ εἴχομεν τὴν ἐξίσωσιν $2\nu-4=13$ ἢ $2\nu=17$· ἄρα $\nu=8{,}5$ πλευρ. Ἐπειδὴ τὸ ν πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς συνάγομεν, ὅτι δὲν ὑπάρχει τοιοῦτον πολύγωνον.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν ἐπὶ τοῦ Ε΄ Κεφαλαίου

*Α΄ Ὁμάς. **160.** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι ἴση μὲ* $1 \text{ ὀρθ.} + \frac{A}{2}$.



Σχ. 127

Ἔστω Ο τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων ΒΟ καὶ ΓΟ τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΟΒΓ εἶναι

$$\widehat{O}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}=2 \text{ ὀρθ.} \quad \text{ἢ}$$

$$\widehat{O}=2 \text{ ὀρθ.} - \left(\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}\right)$$

'Επειδὴ $A+B+\Gamma=2$ ὀρθ. θὰ εἶναι $\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}=1$ ὀρθ. $-\frac{A}{2}$.

'Αντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ ἄθροισμα $\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}$ μὲ τὸ ἴσον των καὶ ἔχομεν:

$$\text{γων. } O = 2 \text{ ὀρθ.} - \left(1 \text{ ὀρθ.} - \frac{A}{2}\right) = 2 \text{ ὀρθ.} - 1 \text{ ὀρθ.} + \frac{A}{2} =$$

$$= 1 \text{ ὀρθ.} + \frac{A}{2}.$$

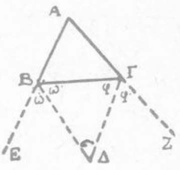
161. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὰς διχοτόμους τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν Β *καὶ* Γ *ἑνὸς τριγώνου* ΑΒΓ, *εἶναι ἴση μὲ* 1 *ὀρθ.* $-\frac{A}{2}$.

Ἔστω Δ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διχοτόμων ΒΔ, ΓΔ τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν Β, Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\Delta=1$ ὀρθ.$-\frac{A}{2}$.

'Εκ τοῦ τριγώνου ΒΔΓ ἔχομεν $\Delta+\omega+\varphi=2$ ὀρθ. (1). 'Επειδὴ αἱ γωνίαι Β καὶ ΓΒΕ εἶναι παραπληρωματικαὶ θὰ εἶναι $B+2\omega=2$ ὀρθ. ἢ $\frac{B}{2}+\omega=1$ ὀρθ. ἢ $\omega=1$ ὀρθ.$-\frac{B}{2}$. 'Ομοίως ἐκ τῶν γωνιῶν Γ καὶ 2φ λαμβάνομεν

$$\Gamma+2\varphi=2 \text{ ὀρθ. ἢ } \frac{\Gamma}{2}+\varphi=1 \text{ ὀρθ. ἢ}$$

$$\varphi=1 \text{ ὀρθ.} - \frac{\Gamma}{2}.$$



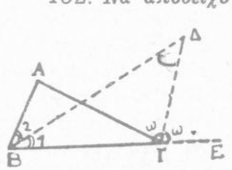
Σχ. 128

'Αντικαθιστῶντες τὰς γωνίας ω καὶ φ διὰ τῶν ἴσων των εἰς τὴν (1) λαμβάνομεν

$$\Delta+1 \text{ ὀρθ.}-\frac{B}{2}+1 \text{ ὀρθ.} - \frac{\Gamma}{2} = 2 \text{ ὀρθ. ἢ } \Delta=\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2} \quad (2)$$

'Αλλὰ ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἔχομεν $A+B+\Gamma=2$ ὀρθ. ἢ $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}=1$ ὀρθ. ἢ $\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}=1$ ὀρθ.$-\frac{A}{2}$. 'Αντικαθιστῶντες εἰς τὴν(2)τὸ ἄθροισμα $\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}$διὰ τῆς τιμῆς των λαμβάνομεν $\Delta=1$ὀρθ.$-\frac{A}{2}$

162. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ διχοτόμος τῆς ἐσωτερικῆς γωνίας Β *ἑνὸς τριγώνου καὶ ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας του* Γ *εἶναι ἴση μὲ* $\frac{A}{2}$.



Σχ. 129

Ἔστω Δ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς διχοτόμου ΒΔ τῆς γωνίας Β καὶ τῆς διχοτόμου ΓΔ τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\Delta = \frac{A}{2}.$$

Πράγματι, ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΔΒΓ ἔχομεν:

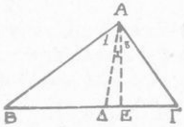
$$\widehat{\Delta}+\frac{B}{2}+B\widehat{\Gamma}\Delta=2 \text{ ὀρθ. ἢ } \widehat{\Delta}+\frac{B}{2}+\widehat{\Gamma}+\widehat{\omega}=2 \text{ ὀρθ. ἢ}$$

$$\widehat{\Delta}=2 \text{ ὀρθ.}-\frac{B}{2}-\Gamma-\omega. \quad (1)$$

Ἡ γωνία ω εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας ΑΓΕ, ἄρα εἶναι ἴση μὲ $\frac{A+B}{2}$· ἐπειδὴ 2 ὀρθ.=Α+Β+Γ, ἡ ἰσότης (1) γίνεται

$$\widehat{\Delta}=A+B+\Gamma-\frac{B}{2}-\Gamma-\frac{A+B}{2}=\frac{A}{2}.$$

163. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία, ἡ ὁποία σχηματίζεται ὑπὸ τῆς διχοτόμου καὶ τοῦ ὕψους, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α *ἑνὸς τριγώνου* ΑΒΓ, *εἶναι ἴση μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν γωνιῶν* Β *καὶ* Γ.



Σχ. 130

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΔ, ΑΕ ἡ διχοτόμος καὶ τὸ ὕψος, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α· θὰ δείξωμεν, ὅτι $\Delta\widehat{A}E=\frac{\Gamma-B}{2}$.

Πράγματι εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΑΕ ἔχομεν:

$$\widehat{B}+\text{γων. } BAE=1 \text{ ὀρθὴ ἢ } \widehat{B}+A_1+A_2=1 \text{ ὀρθ. ἢ}$$

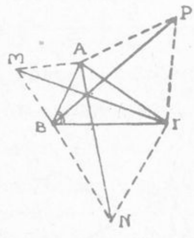
$$B+\frac{A}{2}+A_2=1 \text{ ὀρθὴ ἢ } A_2=1 \text{ ὀρθὴ}-B-\frac{A}{2}$$

$$\text{ἢ } \widehat{A_2}=\frac{A+B+\Gamma}{2}-B-\frac{A}{2}=\frac{\Gamma-B}{2}.$$

Β'. Ὁμάς. 164. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ *κατασκευάζομεν ἐκτὸς αὐτοῦ, τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα* ΜΑΒ, ΝΒΓ *καὶ* ΡΑΓ. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι* ΜΓ = ΝΑ = ΡΒ.

Τὰ τρίγωνα ΜΒΓ καὶ ΑΒΝ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας· ἤτοι ἔχουν ΜΒ=ΒΑ, ὡς πλευρὰς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΜ, ΒΓ=ΒΝ, ὡς πλευρὰς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΒΝΓ καὶ γων. ΜΒΓ=γων. ΑΒΝ, διότι ἑκάστη τούτων εἶναι ἄθροισμα μιᾶς γωνίας 60° καὶ τῆς κοινῆς γωνίας ΑΒΓ· ἄρα θὰ εἶναι ΜΓ=ΑΝ (1). Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΝ καὶ ΑΒΡ εἶναι ἴσα, ὁπότε θὰ εἶναι ΑΝ=ΒΡ (2). Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) συννάγομεν, ὅτι

ΜΓ=ΑΝ=ΡΒ.

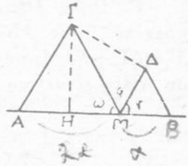


Σχ. 131

165. Δίδεται ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ=3α. *Ἐπὶ τοῦ* ΑΒ *λαμβάνομεν ἕνα τμῆμα* ΑΜ=2α. *Μὲ πλευρὰς τὰς* ΑΜ *καὶ* ΜΒ *κατασκευάζομεν τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα* ΑΜΓ *καὶ* ΜΒΔ, *κείμενα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ* ΑΒ

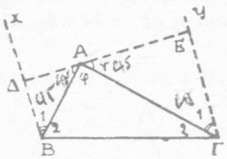
Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΔ *καὶ τὴν κάθετον* ΓΗ *ἐπὶ τὴν* ΑΒ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ,*** *ὅτι* ΓΗ = ΓΔ.

'Επειδὴ τὰ τρίγωνα ΓΑΜ καὶ ΔΜΒ εἶναι ἰσόπλευρα, θὰ εἶναι γων ω=γων ν=60°. 'Επειδὴ ἡ γωνία ω, φ, ν ἔχουν ἄθροισμα 180° καὶ αἱ ω=ν=60° ἕπεται ὅτι καὶ φ=60°. Τὰ τρίγωνα ΓΗΜ καὶ ΓΜΔ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην ἤτοι ἔχουν τὴν ΓΜ κοινὴν ΜΗ=ΜΔ=α καὶ ω=φ=60°· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ΓΗ=ΓΔ.



Σχ. 132

166. *Δίδεται ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ, *ὀρθογώνιον εἰς τὸ* Α. *'Απὸ τὰς κορυφὰς* Β *καὶ* Γ *φέρομεν τὰς εὐθείας* Βx *καὶ* Γy, *αἱ ὁποῖαι νὰ σχηματίζουν μὲ τὰς* ΑΒ *καὶ* ΑΓ *γωνίας* 45°. *'Απὸ τὸ* Α *φέρομεν τὰς καθέτους* ΑΔ *καὶ* ΑΕ *ἐπὶ τὰς* Βx *καὶ* Γy *ἀντιστοίχως.* ***Νὰ ἀποδειχθῇ,*** *ὅτι τὰ σημεῖα* Δ, Α, Ε *κεῖνται ἐπ' εὐθείας.*



Σχ. 133

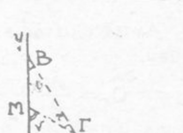
Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ΔΑΕ εἶναι εὐθεῖα· εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΒ ἡ μία ὀξεῖα γωνία του εἶναι 45°, ἄρα καὶ ἡ ἄλλη γωνία του ω θὰ εἶναι 45°, ἤτοι θὰ εἶναι ω=45°. Ὁμοίως ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΕΓ συνάγομεν, ὅτι γων. ν=45°. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\omega+\varphi+\nu=45^\circ+90^\circ+45^\circ=180^\circ \quad \text{ἢ}$$

$$\omega+(\varphi+\nu)=180^\circ.$$

'Επειδὴ αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ω καὶ (φ+ν) εἶναι παραπληρωματικαί, αἱ μὴ κοιναὶ πλευραί των ΑΔ καὶ ΑΕ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Ὥστε ἡ ΔΑΕ εἶναι εὐθεῖα.

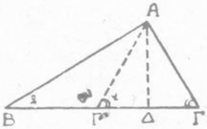
167. *Δίδεται μία ὀρθὴ γωνία* xOy. *'Επὶ τῆς πλευρᾶς* Οx *λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον* Α *καὶ ἐπὶ τῆς* Οy *ἕνα ἄλλο σημεῖον* Β. *'Απὸ τὸ* Α *φέρομεν τὴν εὐθεῖαν* ΑΜ, *ἡ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν* Οx *γωνίαν* 30° *καὶ νὰ τέμνῃ τὴν* Οy *εἰς τὸ* Μ. *'Επίσης ἀπὸ τὸ* Β *φέρομεν τὴν* ΒΝ, *ἡ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν* Οy *γωνίαν* 30° *καὶ νὰ τέμνῃ τὴν* Οx *εἰς τὸ* Ν. *Αἱ εὐθεῖαι* ΑΜ *καὶ* ΒΝ *τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον* Γ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ,*** *ὅτι τὰ τρίγωνα* ΑΝΓ *καὶ* ΒΜΓ *εἶναι ἰσοσκελῆ.*



Σχ. 134

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΜΟΑ ἡ ὀξεῖα γωνία Α εἶναι 30°, ἄρα ἡ ἄλλη ὀξεῖα γωνία του ν θὰ εἶναι 60°, ὡς συμπληρωματικὴ τῆς γωνίας Α· ἤτοι εἶναι ν=60°. Ἡ γωνία ΒΜΓ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας ν, διότι εἶναι ἐφεξῆς, τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας· ἄρα θὰ εἶναι γωνΒΜΓ=120°. Εἰς τὸ τρίγωνον ΒΜΓ εἶναι γων Β=30° ἐξ ὑποθέσεως γων ω=120° ὡς ἐδείχθη· ἄρα ἡ τρίτη γωνία του τ θὰ εἶναι 30°. Ὥστε τὸ τρίγωνον ΒΜΓ εἶναι ἰσοσκελές, διότι αἱ δύο γωνίαι του Β καὶ Γ εἶναι ἴσαι. 'Επίσης τὸ τρίγωνον ΓΝΑ εἶναι ἰσοσκελὲς, διότι γων. $\tau'=30^0$ ὡς κατὰ κορυφὴν τῆς γωνίας τ καὶ γων. $A=30^0$ ἐξ ὑποθέσεως.

Γ' 'Ομάς. 168. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α· φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΓΔ λαμβάνομεν τμῆμα $\Delta\Gamma'=\Delta\Gamma$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ' τοῦ τριγώνου ΑΒΓ' εἶναι ἴση μὲ 90^0.



Σχ. 135

Τὸ τρίγωνον ΑΓ'Γ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως ΓΓ'· ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma}_1$. 'Αλλὰ $\widehat{\Gamma'}_1+\widehat{A\Gamma B}=180^0$ καὶ $A\Gamma B=180^0-\Gamma'_1$ ἢ $A\Gamma B=180^0-\Gamma$. 'Αφαιροῦμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς τὴν γωνίαν Β καὶ ἔχομεν

$\widehat{A\Gamma B}-B=180^0-\Gamma-B$ ἢ $\widehat{A\Gamma B}-B=180^0-(B+\Gamma)$

ἢ $\widehat{A\Gamma B}-B=180^0-90^0=90^0$.

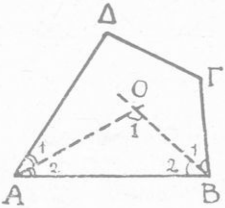
***169.** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὰς διχοτόμους δύο διαδοχικῶν γωνιῶν τετραπλεύρου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν του.*

Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ ΑΟ, ΒΟ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του Α καὶ Β, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο. Θὰ δείξωμεν, ὅτι γων. $O=\dfrac{\Gamma+\Delta}{2}$.

'Εκ τοῦ τριγώνου ΟΑΒ ἔχομεν

$$\widehat{O}_1+\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=2 \text{ ὀρθ.}$$

ἢ $$\widehat{O}_1=2 \text{ ὀρθ.}-\frac{A}{2}-\frac{B}{2} \quad (1)$$



Σχ. 136

'Επειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τετραπλεύρου ἰσοῦται μὲ 4 ὀρθάς, θὰ εἶναι $A+B+\Gamma+\Delta=4$ ὀρθ. ἢ $\dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}+\dfrac{\Gamma}{2}+\dfrac{\Delta}{2}=2$ ὀρθ.

'Αντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ 2 ὀρθ. μὲ τὸ ἴσον του καὶ ἔχομεν :

$$\widehat{O}_1=\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}+\frac{\Delta}{2}-\frac{A}{2}-\frac{B}{2}=\frac{\Gamma+\Delta}{2}$$

***170.** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ διχοτόμοι δύο ἀπέναντι γωνιῶν τετραπλεύρου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν του.* (Σχολὴ Εὐελπίδων 1950)

Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ΒΟ, καὶ ΔΟ αἱ διχοτόμοι τῶν ἀπέναντι γωνιῶν του Β καὶ Δ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\widehat{O}=\dfrac{A-\Gamma}{2}$.

Προεκτείνομεν τὴν ΔΟ μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Ε· ἐκ τοῦ τριγώνου ΟΒΕ ἔχομεν

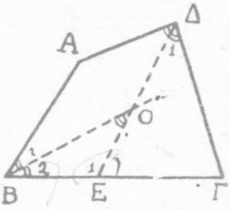
$$\widehat{O}+\frac{B}{2}+\widehat{E_1}=2 \text{ ὀρθ.} \quad \text{ἢ} \quad \widehat{O}=2 \text{ ὀρθ.}-\frac{B}{2}-\widehat{E_1} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τετραπλεύρου ἰσοῦται μὲ 4 ὀρθὰς ἔχομεν: $A+B+\Gamma+\Delta=4$ ὀρθ.

ἢ $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}+\frac{\Delta}{2}=2$ ὀρθ.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία E_1 εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΔΕΓ ἔχομεν

$$\widehat{E_1}=\Gamma+\Delta_1 \quad \text{ἢ} \quad E_1=\Gamma+\frac{\Delta}{2}.$$

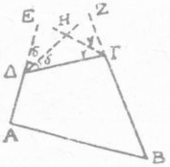


Σχ. 137

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) τὸ 2 ὀρθ. καὶ E_1 μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

$$\widehat{O}=\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}+\frac{\Delta}{2}-\frac{B}{2}-\Gamma-\frac{\Delta}{2}=\frac{A-\Gamma}{2}$$

171. ***Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ διχοτόμοι δύο διαδοχικῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τετραπλεύρου, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο (ἐσωτερικῶν) αὐτῶν διαδοχικῶν γωνιῶν του.***



Σχ. 138

Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ ΔΗ, ΓΗ αἱ διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν ΕΔΓ καὶ ΔΓΖ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Η· θὰ δείξωμεν, ὅτι γων. $H=\frac{\Gamma+\Delta}{2}$.

Ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΗΔΓ ἔχομεν

$\delta+\gamma+H=180^0$ ἢ $H=180^0-(\delta+\gamma)$ (1).

Αἱ γωνίαι ΑΔΓ καὶ ΕΔΓ εἶναι παραπληρωματικαὶ ὡς ἐφεξῆς, τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας· ἤτοι εἶναι

$$\Delta+E\Delta\Gamma=180^0 \quad \text{ἢ} \quad \Delta+2\delta=180^0 \quad \text{ἢ} \quad 2\delta=180^0-\Delta \quad \text{ἄρα} \quad \delta=90^0-\frac{\Delta}{2}.$$

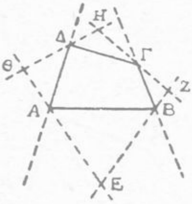
Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $\gamma=90^0-\frac{\Gamma}{2}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) τὰ δ καὶ γ διὰ τῶν ἴσων των καὶ

ἔχομεν $$H=180^0-\left(90^0-\frac{\Delta}{2}+90^0-\frac{\Gamma}{2}\right)=\frac{\Gamma+\Delta}{2}.$$

172. ***Αἱ διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τετραπλεύρου, τεμνόμεναι, σχηματίζουν τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.***

Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον σχηματίζουν αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του· θὰ δείξωμεν, ὅτι



Σχ. 139

$$\widehat{Ε}+\widehat{Η}=2 \text{ δοθ.} \quad \text{καὶ} \quad Ζ+Θ=2 \text{ ὀρθ.}$$

Ἐδείξαμεν (ἄσκ. 171), ὅτι

$$\widehat{Ε}=\frac{Α+Β}{2} \quad \text{καὶ} \quad \widehat{Η}=\frac{Γ+Δ}{2}.$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη λαμβάνομεν

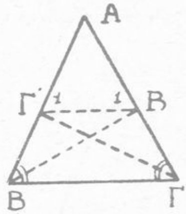
$$Ε+Η=\frac{Α+Β+Γ+Δ}{2}=\frac{4 \text{ ὀρθ.}}{2}=2 \text{ ὀρθαί.}$$

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι ἴσον μὲ 4 ὀρθὰς καὶ ἐπειδὴ $\widehat{Ε}+\widehat{Η}=2$ ὀρθ. ἕπεται, ὅτι $\widehat{Ζ}+\widehat{Θ}=2$ ὀρθαί.

173. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τοὺς πόδας τῶν δύο ὑψῶν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς βάσεώς του, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν.

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΒΒ' καὶ ΓΓ' δύο ὕψη του. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν Γ'Β'. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ Γ'Β' εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.

Πράγματι, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΒ'Γ καὶ ΓΓ'Β εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην· ἤτοι ἔχουν τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ κοινὴν καὶ γων. Γ=γων. Β ὡς παρὰ τὴν βάσιν γωνίας τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ



Σχ. 140

$$ΒΓ' = ΓΒ'.$$

Ἐὰν ἀπὸ τὰ ἴσα τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ ἀφαιρέσωμεν τὰ ἴσα τμήματα ΒΓ' καὶ ΓΒ' τὰ ἀπομένοντα τμήματα ΑΓ' καὶ ΑΒ' εἶναι ἴσα.

Ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒ'Γ' εἶναι ἰσοσκελές.

Τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒ'Γ' ἔχουν τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς των Α κοινήν, ἄρα καὶ αἱ ἄλλαι γωνίαι των θὰ εἶναι ἴσαι, ἤτοι θὰ εἶναι $Β = Γ'_1 = Γ = Β_1$.

Ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΒΓ καὶ Γ'Β' τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΑΒ σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας Β καὶ $Γ'_1$ ἴσας, ἄρα αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ εἶναι παράλληλοι.

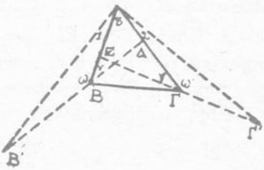
174. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ· *φέρομεν τὰ ὕψη* ΒΔ *καὶ* ΓΕ. *Προεκτείνομεν τὸ ὕψος* ΒΔ *πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς* Β *καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα* ΒΒ'=ΑΓ. *Ἐπίσης ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ὕψους*

ΓΕ *πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς* Γ *λαμβάνομεν τμῆμα* ΓΓ'=ΑΒ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ*** *: 1ον ὅτι,* ΑΒ'=ΑΓ'. *2ον Ὅτι ἡ γωνία* Β'ΑΓ' *εἶναι ὀρθή.*

1ον. Τὰ τρίγωνα ΑΒΒ' καὶ ΑΓΓ' εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην· ἤτοι ἔχουν

ΑΒ=ΓΓ' καὶ ΒΒ'=ΑΓ

ἐκ κατασκευῆς καὶ ω=ω', ὡς παραπληρωματικαὶ τῶν ἴσων γωνιῶν ν καὶ ν'· εἶναι δὲ ἴσαι αἱ γωνίαι ν καὶ ν' ὡς συμπληρωματικαὶ τῆς αὐτῆς γωνίας Α εἰς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΔΑ καὶ ΓΕΑ.



Σχ. 141

Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων αὐτῶν συνάγομεν

$$AB'=A\Gamma' \text{ καὶ } \widehat{A_1}=\widehat{\Gamma'},\ \widehat{B'}=\widehat{A_2}.$$

2ον. Ἔχομεν $\widehat{B'A\Gamma'}=\widehat{A_1}+\widehat{A_3}+\widehat{A_2}$ (1)

Ἐπειδὴ $A_1=\Gamma'$ ὅπως ἐδείχθη ἀνωτέρω, ἡ ἰσότης (1) γίνεται

$$\widehat{B'A\Gamma'}=\Gamma'+A_3+A_2 \qquad (2)$$

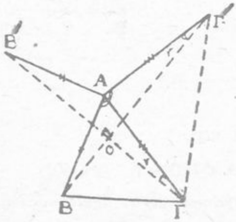
Ἀλλὰ εἰς τὸ ὀρθογώνιον Γ'ΕΑ αἱ δύο ὀξεῖαι γωνίαι του ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ 1 ὀρθήν· ἤτοι εἶναι

$$\Gamma'+\text{γων. } EA\Gamma'=1 \text{ ὀρθ. ἢ } \Gamma'+A_3+A_2=1 \text{ ὀρθ.} \qquad (3)$$

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (2) καὶ (3) συνάγομεν, ὅτι $\widehat{B'A\Gamma'}=1$ ὀρθή.

175. Δίδεται ἕνα τρίγωνον **ΑΒΓ.** ***Ἀπὸ τὴν κορυφὴν*** **Α** ***φέρομεν τὴν*** **ΑΒ'** ***κάθετον ἐπὶ τὴν*** **ΑΒ** ***καὶ ἴσην μὲ*** **ΑΒ** ***καὶ κειμένην ἐκτὸς τοῦ τριγώνου. Ἐπίσης ἀπὸ τὸ*** **Α** ***φέρομεν τὴν κάθετον*** **ΑΓ'** ***ἐπὶ τὴν*** **ΑΓ** ***καὶ ἴσην μὲ τὴν*** **ΑΓ** ***καὶ κειμένην ἐκτὸς τοῦ τριγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι*** **ΓΒ'** ***καὶ*** **ΒΓ'** ***εἶναι ἴσαι καὶ κάθετοι μεταξύ των.***

Τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα ΑΒ'Γ καὶ ΑΒΓ' εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην· ἤτοι ἔχουν ΑΒ'=ΑΒ, ΑΓ=ΑΓ' ἐκ κατασκευῆς καὶ γων. Β'ΑΓ=γων. ΒΑΓ', διότι ἑκάστη τούτων ἀποτελεῖται ἀπὸ μίαν ὀρθὴν γωνίαν καὶ ἀπὸ τὴν κοινὴν γωνίαν Α. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ Β'Γ=ΒΓ' καὶ ν=ν'.



Σχ. 142

Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι αἱ Β'Γ καὶ ΒΓ' εἶναι κάθετοι μεταξύ των. Ἔστω Ο τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν Β'Γ καὶ ΒΓ'. Φέρομεν τὴν ΓΓ'. Τὸ τρίγωνον Γ'ΑΓ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς ἐκ κατασκευῆς· ἄρα αἱ παρὰ τὴν βάσιν του γωνίαι ΑΓ'Γ καὶ ΑΓΓ' θὰ εἶναι ἴσαι μὲ 45^0. Ὥστε εἰς τὸ τρίγωνον Γ'ΟΓ θὰ εἶναι

$$\text{γων. } O\Gamma'\Gamma=45^0-\nu \text{ καὶ γων. } O\Gamma'\Gamma=45+\nu'$$

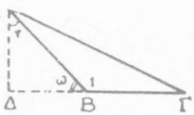
Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\text{γων. } ΟΓ'Γ + \text{γων. } ΟΓ'Γ = 90^0.$$

Ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίγωνον Γ'ΟΓ αἱ δύο γωνίαι του ΟΓ'Γ καὶ ΟΓ'Γ ἔχουν ἄθροισμα 90^0 ἕπεται, ὅτι ἡ τρίτη γωνία του Γ'ΟΓ θὰ εἶναι ὀρθή. Ὥστε αἱ Β'Γ καὶ Γ'Β εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

***Δ' Ὁμάς. 176.** Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ γωνία Β εἶναι ἀμβλεῖα καὶ μικροτέρα τῶν 135^0, ἡ δὲ γωνία Γ εἶναι μικροτέρα τῶν 45^0. Ἐὰν ΑΔ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΒΔ < ΑΔ < ΓΔ.*

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΒ ἡ γωνία ω εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας Β καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία Β εἶναι μικροτέρα τῶν 135^0, ἡ γωνία ω θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῶν $180^0 - 135^0$ ἢ 45^0· ἄρα ἡ γωνία ν, ἡ ὁποία εἶναι συμπληρωματικὴ τῆς γωνίας ω θὰ εἶναι μικροτέρα τῶν 45^0· ἤτοι εἶναι $ν < ω$· ἄρα θὰ εἶναι καὶ $ΒΔ < ΑΔ$ (1).



Σχ. 143

Ὁμοίως εἰς τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΑΔΓ ἡ γωνία Γ εἶναι μικροτέρα τῶν 45^0· ἄρα ἡ συμπληρωματική της γωνία ΔΑΓ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 45^0· ἤτοι εἶναι Γ < γων. ΔΑΓ· ἄρα θὰ εἶναι καὶ $ΑΔ < ΔΓ$ (2).

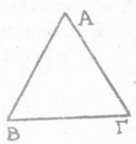
Ἐκ τῶν ἀνισοτήτων (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $ΒΔ < ΑΔ < ΔΓ$.

***177.** Ἐὰν ἡ βάσις ΒΓ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα, ἢ ἴση, ἢ μικροτέρα τῶν ἴσων πλευρῶν του, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία Α εἶναι, ἀντιστοίχως μεγαλυτέρα ἢ ἴση ἢ μικροτέρα τῶν 60^0.*

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ μὲ βάσιν τὴν ΒΓ. Γνωρίζομεν, ὅτι $Α + Β + Γ = 180^0$ ἢ $Α + 2Γ = 180^0$ (1)

1ον. Ἔστω, ὅτι $ΒΓ > ΑΒ$. Τότε θὰ εἶναι καὶ

$$\widehat{Α} > \widehat{Γ} \quad ἢ \quad 2Α > 2Γ.$$



Σχ. 144

Προσθέτομεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος αὐτῆς τὴν γωνίαν Α καὶ ἔχομεν

$$2Α + Α > Α + 2Γ \quad ἢ \quad 3Α > Α + 2Γ$$

ἢ ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὴν ἰσότητα (1)

$$3Α > 180^0 \cdot \quad ἄρα \quad Α > 60^0.$$

2ον. Ἔστω, ὅτι $ΒΓ = ΑΒ$. Τότε τὸ τρίγωνον θὰ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ θὰ εἶναι $Α = 60^0$.

3ον. Ἔστω, ὅτι $ΒΓ < ΑΒ$· τότε θὰ εἶναι καὶ

$$\widehat{Α} < \widehat{Γ} \quad ἢ \quad 2Α < 2Γ \quad ἢ \quad 3Α < Α + 2Γ \quad ἢ \quad 3Α < 180^0 \quad ἢ \quad Α < 60^0.$$

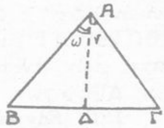
***178.** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι μία γωνία ἑνὸς τριγώνου εἶναι ὀξεῖα, ὀρθή, ἢ ἀμβλεῖα, ἐὰν ἡ διάμεσος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας αὐτῆς εἶναι, ἀντιστοίχως μεγαλυτέρα ἴση ἢ μικροτέρα τοῦ ἡμίσεως τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς.*

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΔ ἡ διάμεσός του.

1ον. Ἐὰν $ΑΔ > \frac{1}{2}ΒΓ$, θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ γωνία Α εἶναι ὀξεῖα.

'Εξ ὑποθέσεως εἶναι $Α\Delta > \frac{1}{2}$ ΒΓ, δηλ. $Α\Delta > Β\Delta$. 'Επειδὴ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΒ εἶναι $Α\Delta > Β\Delta$ θὰ εἶναι καὶ $Β > ω$ (1). 'Ομοίως, ἐπειδὴ εἶναι $Α\Delta > \frac{1}{2}$ ΒΓ, δηλαδὴ

$Α\Delta > \Delta Γ$, θὰ εἶναι $Γ > ν$ (2).



Σχ. 145

Προσθέτοντες τὰς ἀνισότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη ἔχομεν

$Β+Γ > ω+ν$ ἢ $Β+Γ > Α$ ἢ 2 ὀρ.$-Α > Α$ ἢ
2 ὀρθ. $> 2Α$· ἄρα 1 ὀρθ. $> Α$·
ἤτοι ἡ γωνία Α εἶναι ὀξεῖα

2ον. Ἔστω, ὅτι $Α\Delta = \frac{1}{2}$ ΒΔ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ γωνία Α εἶναι ὀρθή.

'Επειδὴ $Α\Delta = \frac{1}{2}$ ΒΓ$=\Delta Γ$ τὰ τρίγωνα ΑΔΒ, ΑΔΓ εἶναι ἰσοσκελῆ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι

$Β=ω$ καὶ $Γ=ν$· ἄρα $Β+Γ=ω+ν$ ἢ $Β+Γ=Α$ ἢ 2 ὀρθ.$-Α=Α$
ἢ 2 ὀρθ. $= 2$ Α· ἄρα $Α = 1$ ὀρθή.

3ον. Ἔστω, ὅτι $Α\Delta < \frac{1}{2}$ ΒΓ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ γωνία Α εἶναι ἀμβλεῖα.

'Επειδὴ εἶναι $Α\Delta < \frac{1}{2}$ ΒΓ, δηλ. $Α\Delta < Β\Delta$, θὰ εἶναι καὶ $Β < ω$ (3).

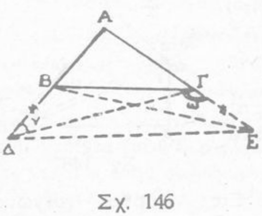
'Ομοίως ἐπειδὴ εἶναι $Α\Delta < \frac{1}{2}$ ΒΓ, δηλ. $Α\Delta < \Delta Γ$ θὰ εἶναι καὶ $Γ < ν$ (4).

Προσθέτοντες τὰς ἀνισότητας (3) καὶ (4) κατὰ μέλη ἔχομεν

$Β+Γ < ω+ν$ ἢ $Β+Γ < Α$ ἢ 2 ὀρθ.$-Α < Α$ ἢ 2 ὀρθ. < 2 Α·
ἄρα 1 ὀρ. $< Α$. Ὥστε ἡ γωνία Α εἶναι ἀμβλεῖα.

179. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ· *προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς* ΑΒ *καὶ* ΑΓ *καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λαμβάνομεν τμήματα* ΒΔ=ΓΕ. *1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι* ΔΕ> ΒΓ. *2ον. 'Εὰν εἶναι* ΑΒ<ΑΓ *νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι* ΔΓ <ΒΕ.

1ον. Φέρομεν τὴν ΓΔ· ἡ γωνία ω εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΔΓ καὶ ἑπομένως εἶναι $ω > ν$· Τὰ τρίγωνα ΒΔΓ καὶ ΓΔΕ ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας, τὴν ΒΔ=ΓΕ ἐξ ὑποθέσεως, τὴν ΔΓ κοινήν, καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ν καὶ ω ἀνίσους· ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἄνισα καὶ θὰ εἶναι $\Delta Ε > ΒΓ$, ὡς κείμεναι ἀπέναντι ἀνίσων γωνιῶν ω καὶ ν.



Σχ. 146

2ον. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $ΑΒ < ΑΓ$ ἐξ ὑποθέσεως, ἄρα θὰ εἶναι καὶ γων. Γ<γων. Β, ὁπότε αἱ παραπληρωματικαί των γωνίαι ΒΓΕ καὶ ΓΒΔ εἶναι ἄνισοι καί ἐπειδὴ εἶναι Γ<Β θὰ εἶναι

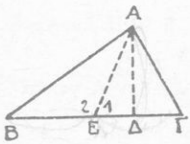
γων. ΔΓΕ> γων. ΔΒΓ.

Τὰ τρίγωνα ΔΒΓ καὶ ΒΓΕ ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας, ἤτοι τὴν ΒΓ κοινήν, ΒΔ=ΓΕ ἐξ ὑποθέσεως καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ΔΒΓ καὶ ΒΓΕ ἀνίσους· ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἄνισα καὶ ἀπέναντι τῶν ἀνίσων γωνιῶν κεῖνται ἄνισοι πλευραί. 'Επειδὴ δὲ εἶναι γων. ΔΓΕ> γων. ΔΒΓ ἕπεται, ὅτι ΒΕ> ΔΓ.

180. 'Εὰν τὸ ὕψος ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία, ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὁποίας ἄγεται τὸ ὕψος, εἶναι ὀξεῖα ἢ κατ' ἐξαίρεσιν ὀρθή.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΔ τὸ ὕψος του καὶ τοιοῦτον ὥστε $ΑΔ = \frac{1}{2} ΒΓ$.

Θὰ δείξωμεν, ὅτι γων. Α> 90, εἴτε γων. Α=90°.



Σχ. 147

1ον. Ἔστω, ὅτι ΑΒ> ΑΓ. Φέρομεν τὴν διάμεσον ΑΕ. 'Εξ ὑποθέσεως εἶναι

ΑΔ=ΒΕ=ΕΓ.

'Απὸ τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΑΔΕ ἔχομεν ΑΕ> ΑΔ· ἄρα ΑΕ> ΒΕ καὶ ΑΕ> ΕΓ.

'Επειδὴ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΕΒ εἶναι ΑΕ> ΒΕ ἕπεται, ὅτι θὰ εἶναι $Β > \widehat{ΒΑΕ}$ (1).'Επίσης ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΕΓ εἶναι ΑΕ> ΕΓ θὰ εἶναι $Γ > \widehat{ΕΑΓ}$ (2). Προσθέτοντες τὰς ἀνισότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$Β+Γ > \widehat{ΒΑΕ}+\widehat{ΕΑΓ}$ ἢ $Β+Γ > Α$ ἢ 2 ὀρθ.$-Α > Α$ ἢ 2 ὀρθ.$> 2Α$·

ἄρα $Α < 1$ ὀρθ.

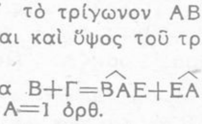
2ον. Ἔστω, ὅτι ΑΒ=ΑΓ. 'Επειδὴ ΑΒ=ΑΓ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως ἡ διάμεσος ΑΕ εἶναι καὶ ὕψος τοῦ τριγώνου. Θὰ εἶναι τότε

$ΑΕ=ΒΕ=ΕΓ$ ὁπότε $Β=\widehat{ΒΑΕ}$ καὶ $Γ=\widehat{ΕΑΓ}$· ἄρα $Β+Γ=\widehat{ΒΑΕ}+\widehat{ΕΑΓ}$

ἢ 2 ὀρθ.$-Α=Α$ ἢ 2 ὀρθ.$=2Α$ ἄρα $Α=1$ ὀρθ.

Ε' 'Ομάς. 181. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ὅταν δύο ἀπέναντι γωνίαι τετραπλεύρου εἶναι ὀρθαί, αἱ διχοτόμοι τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν του εἶναι παράλληλοι.

Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι Α καὶ Γ εἶναι ὀρθαὶ καὶ ΒΖ καὶ ΔΕ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β καὶ Δ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ΒΖ καὶ ΔΕ εἶναι παράλληλοι.



Σχ. 148

'Επειδὴ αἱ γωνίαι Α καὶ Γ εἶναι ὀρθαί, αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι Β καὶ Δ ἔχουν ἄθροισμα δύο ὀρθῶν.

Ἑπομένως τὰ ἡμίσυ αὐτῶν ἔχουν ἄθροισμα 1 ὀρθῆς, ἤτοι εἶναι $\widehat{δ}+Β_1=1$ ὀρθ. (1). Εἰς τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΔΑΕ εἶναι $δ+ω=1$ ὀρθ. (2). 'Εκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $\widehat{Β_1}+δ=δ+ω$ ἢ $ω=\widehat{Β_1}=\widehat{ΖΒΑ}$.

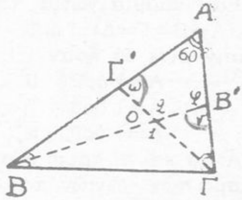
Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΒΖ καὶ ΕΔ τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΒΑ σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ω καὶ ΖΒΑ ἴσας· ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΒΖ καὶ ΕΔ εἶναι παράλληλοι.

182. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία Α εἶναι 60°. Φέρομεν τὰς διχοτόμους ΒΒ' καὶ ΓΓ' τῶν γωνιῶν του, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Β' καὶ Γ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

γων. ΒΒ'Γ = γων. ΓΓ'Α.

Ἔστω Ο τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων ΒΒ' καὶ ΓΓ'. Ἐπειδή, ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $A=60^\circ$ ἕπεται, ὅτι $B+\Gamma=120^\circ$, ὁπότε

$$\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}=60^\circ.$$



Σχ. 149

Ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΒΟΓ ἔχομεν

$$\widehat{O}_1+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}=180^\circ \quad \text{ἢ}$$

$$\widehat{O}_1=180^\circ-\frac{B+\Gamma}{2}=180^\circ-60^\circ=120^\circ,$$

ὁπότε $\widehat{O}_1=\widehat{O}_2=120^\circ$.

Ἀπὸ τὸ τετράπλευρον ΑΓ'ΟΒ' ἔχομεν

$$\widehat{A}+\widehat{\omega}+\widehat{O}_2+\widehat{\varphi}=360^\circ \quad \text{ἢ} \quad 60^\circ+\widehat{\omega}+120^\circ+(180^\circ-\nu)=360^\circ \quad \text{ἢ} \quad \omega-\nu=0$$

$$\text{ἢ} \quad \omega=\nu \cdot \quad \text{δηλ.} \quad \widehat{\Gamma\Gamma'A}=\widehat{BB'\Gamma}.$$

183. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἕνα κυρτὸν πολύγωνον δὲν δύναται νὰ ἔχῃ περισσοτέρας ἀπὸ τρεῖς ὀξείας γωνίας.

Διότι, ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ κυρτὸν πολύγωνον ἔχει περισσοτέρας ἀπὸ τρεῖς ὀξεῖας γωνίας, ἔστω ὅτι ἔχει τέσσαρας ὀξείας γωνίας, τὰς Α, Β, Γ, Δ, καὶ προεκτείνωμεν τὰς πλευράς των κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, θὰ σχηματισθοῦν αἱ ἐξωτερικαὶ γωνίαι α, β, γ, δ, αἱ ὁποῖαι, ὡς παραπληρωματικαὶ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν Α, Β, Γ, Δ, θὰ εἶναι ἀμβλεῖαι, ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν α, β, γ, δ, θὰ εἶναι μεγαλύτερον τῶν 4 ὀρθῶν γωνιῶν, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον. Ὥστε τὸ κυρτὸν πολύγωνον δὲν δύναται νὰ ἔχῃ περισσοτέρας ἀπὸ τρεῖς ὀξείας γωνίας,

184. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε πολύγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει τοὐλάχιστον τέσσαρας πλευράς, μία τυχοῦσα γωνία του εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων γωνιῶν του.

Ἔστω τὸ κυρτὸν πολύγωνον ΑΒΓΔ..., τὸ ὁποῖον ἔχει ν πλευράς, ὅπου ν εἶναι ἴσον ἢ μεγαλύτερον τοῦ 4. Γνωρίζομεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς πολυγώνου, μὲ ν πλευράς, εἶναι ἴσον μὲ 2ν—4 ὀρθάς.

Ὥστε θὰ εἶναι $A+B+\Gamma+\Delta+\ldots\ldots=2\nu-4$ ὀρθ. Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\nu\geqq 4$, θὰ εἶναι

$$A+B+\Gamma+\Delta+\ldots\ldots>4 \text{ ὀρθ.} \quad (1).$$

'Επειδὴ τυχοῦσα γωνία τοῦ πολυγώνου εἶναι μικροτέρα τῶν 2 ὀρθῶν, θὰ εἶναι, ἔστω $A < 2$ ὀρθ. ὁπότε ἀπὸ τὴν (1) λαμβάνομεν

$$B+\Gamma+\Delta+\ldots > 2 \text{ ὀρθ.} \quad \text{ἢ} \quad B+\Gamma+\Delta+\ldots > A.$$

185. ***Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι του δὲν εἶναι ἴσαι : 1ον. 'Η μία τοὐλάχιστον ἐκ τῶν γωνιῶν του εἶναι ὀξεῖα. 2ον. 'Η μία τοὐλάχιστον ἐκ τῶν γωνιῶν του εἶναι ἀμβλεῖα.***

1ον. Ἔστωσαν A, B, Γ, Δ, αἱ γωνίαι ἑνὸς τετραπλεύρου. Γνωρίζομεν, ὅτι $A+B+\Gamma+\Delta = 4$ ὀρθαί.

'Εὰν καμμία γωνία τοῦ τετραπλεύρου δὲν ἦτο ὀξεῖα, θὰ ἦσαν εἴτε $A=B=\Gamma=\Delta=1$ ὀρθ. πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν, εἴτε θὰ ἦσαν

$A=1$ ὀρθ., $B=1$ ὀρθ., $\Gamma=1$ ὀρθ., $\Delta > 1$ ὀρθ.,

εἴτε $A=1$ ὀρθ., $B=1$ ὀρθ., $\Gamma > 1$ ὀρθ., $\Delta > 1$ ὀρθ.,

εἴτε $A=1$ ὀρθ., $B > 1$ ὀρθ., $\Gamma > 1$ ὀρθ., $\Delta > 1$ ὀρί.

'Αλλὰ καὶ αἱ τρεῖς αὐταὶ ὑποθέσεις εἶναι ἄτοποι, διότι τότε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου θὰ ἦτο μεγαλύτερον τῶν 4 ὀρθῶν.

Ὥστε μιὰ τοὐλάχιστον γωνία του πρέπει νὰ εἶναι ὀξεῖα.

2ον. 'Εὰν καμμία γωνία τοῦ τετραπλεύρου δὲν ἦτο ἀμβλεῖα, τότε θὰ ἦσαν, εἴτε $A=B=\Gamma=\Delta=1$ ὀρθ. πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν, εἴτε θὰ εἶναι

$A=1$ ὀρθ., $B=1$ ὀρθ., $\Gamma=1$ ὀρθ., $\Delta < 1$ ὀρθ.,

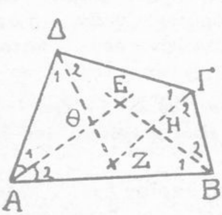
εἴτε $A=1$ ὀρθ. $B=1$ ὀρθ., $\Gamma < 1$ ὀρθ., $\Delta < 1$ ὀρθ.,

εἴτε $A=1$ ὀρθ., $B < 1$ ὀρθ., $\Gamma < 1$ ὀρθ., $\Delta < 1$ ὀρθ.

ὁπότε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου θὰ ἦτο μικρότερον τῶν 4 ὀρθῶν, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον.

Ὥστε μία τοὐλάχιστον γωνία του πρέπει νὰ εἶναι ἀμβλεῖα.

186. ***Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τετραπλεύρου σχηματίζουν τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.***



Σχ. 150

Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ ΑΕ, ΒΕ, ΓΖ, ΔΖ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του, αἱ ὁποῖαι τεμνόμεναι σχηματίζουν τὸ τετράπλευρον ΕΘΖΗ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$E+Z=2 \text{ ὀρθ.} \quad \text{καὶ} \quad \Theta+H=2 \text{ ὀρθ.}$$

Πράγματι, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν ἄσκησιν 169, εἶναι

$$E=\frac{\Gamma+\Delta}{2} \quad \text{καὶ} \quad Z=\frac{A+B}{2}.$$

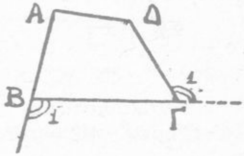
Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη, ἔχομεν

$$E+Z=\frac{A+B+\Gamma+\Delta}{2}=\frac{4 \text{ ὀρθ.}}{2}=2 \text{ ὀρθ.}$$

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου ΕΘΖΗ εἶναι ἴσον μὲ 1 ὀρθ. καὶ Ε+Ζ=2 ὀρθ. ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι καὶ Θ+Η=2 ὀρθ.

187. Δίδεται ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ. ***Προεκτείνομεν*** *τὴν πλευρὰν* ΑΒ *πρὸς τὸ μέρος τοῦ* Β *καὶ τὴν πλευρὰν* ΒΓ *πρὸς τὸ μέρος τοῦ* Γ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ***, *ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων ἐξωτερικῶν γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν* Α *καὶ* Δ.

Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ $Β_1$, $Γ_1$ δύο ἐξωτερικαὶ γωνίαι του. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\widehat{Β_1}+\widehat{Γ_1}=\widehat{Α}+\widehat{Δ}$.



Σχ. 151

Πράγματι ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Β καὶ $Β_1$ εἶναι ἐφεξῆς παραπληρωματικαί, θὰ εἶναι

$$\widehat{Β}+\widehat{Β_1}=2 \text{ ὀρθ.} \quad (1).$$

Ὁμοίως εἶναι

$$\widehat{Γ}+\widehat{Γ_1}=2 \text{ ὀρθ.} \quad (2)$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$Β+Β_1+Γ+Γ_1=4 \text{ ὀρθ.} \quad (3)$$

Ἐπειδὴ $Α+Β+Γ+Δ=4$ ὀρθ. ἡ (3) γράφεται

$$Β+Β_1+Γ+Γ_1=Α+Β+Γ+Δ \quad \text{ἢ} \quad Β_1+Γ_1=Α+Δ.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ'.

ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ — ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

Παραλληλόγραμμα

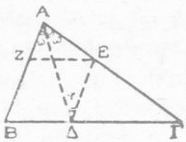
188. Δίδεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. *Ἀπὸ τὸ μέσον* Δ *τῆς βάσεώς του* ΒΓ *φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς* ΑΒ *καὶ* ΑΓ, *αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν* ΒΓ, *ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ* Α, *εἰς τὰ σημεῖα* Ε *καὶ* Ζ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ***, *ὅτι τὸ τρίγωνον* ΔΕΖ *εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον* ΑΒΓ.

Σχ. 152

Τὰ τετράπλευρα ΒΔΕΑ καὶ ΔΓΑΖ εἶναι παραλληλόγραμμα ἐκ κατασκευῆς· ἄρα θὰ εἶναι ΑΒ=ΕΔ καὶ ΑΓ=ΖΔ. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην· ἤτοι ἔχουν ΑΒ=ΕΔ, ΑΓ=ΖΔ καὶ γων. Α = γων. Δ, διότι αἱ πλευραί των εἶναι παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι.

189. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. ***Φέρομεν*** *τὴν διχοτόμον* ΑΔ *τῆς γωνίας* Α, *ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν* ΒΓ *εἰς τὸ* Δ. *Ἀπὸ τὸ* Δ *φέρομεν πα-*

ράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΑΓ εἰς τὸ Ε. Ἀπὸ τὸ Ε φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΕ = ΒΖ.



Σχ. 153

Τὸ τετράπλευρον ΒΔΕΖ εἶναι παραλληλόγραμμον ἐκ κατασκευῆς· ἄρα θὰ εἶναι ΔΕ=ΒΖ (1). Αἱ γωνίαι ν καὶ ω εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΕΔ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΔ· ἤτοι εἶναι ν=ω. Ἀλλὰ ω=ω, διότι ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α· ἄρα θὰ εἶναι ν=ω. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΕΑΔ εἶναι ἰσοσκελές, ἄρα θὰ εἶναι

ΔΕ = ΑΕ (2).

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὸ ΔΕ μὲ τὸ ἴσον του ΒΖ καὶ ἔχομεν ΒΖ = ΑΕ.

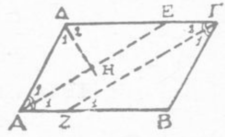
190. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν ἀπέναντι γωνιῶν παραλληλογράμμου εἶναι παράλληλοι, αἱ δὲ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι πρόσκεινται πρὸς τὴν αὐτὴν πλευράν, εἶναι κάθετοι.*

1ον. Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ ΑΕ καὶ ΓΖ αἱ διχοτόμοι τῶν ἀπέναντι γωνιῶν του Α καὶ Γ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ΑΕ καὶ ΓΖ εἶναι παράλληλοι.

Ἐπειδὴ αἱ ἀπέναντι γωνίαι Α καὶ Γ εἶναι ἴσαι καὶ τὰ ἡμίση αὐτῶν θὰ εἶναι

$Α_1 = Α_2 = Γ_1 = Γ_2$.

Ἀλλὰ $Ζ_1 = Γ_2$ (2), ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΔΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΓΖ.



Σχ. 154

Ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα (2) θέσωμεν ἀντὶ τῆς γωνίας $Γ_2$ τὴν ἴσην της $Α_1$, θὰ ἔχωμεν $Ζ_1 = Α_1$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΕ καὶ ΖΓ τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΑΒ σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας $Α_1$ καὶ $Ζ_1$ ἴσας· ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΑΕ καὶ ΖΓ εἶναι παράλληλοι.

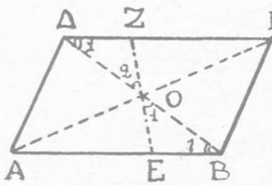
2ον. Ἔστωσαν ΑΕ καὶ ΔΗ αἱ διχοτόμοι τῶν προσκειμένων γωνιῶν Α καὶ Δ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ΑΕ καὶ ΔΗ εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

Αἱ γωνίαι Α καὶ Δ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ εἶναι παραπληρωματικαί, ὡς δύο διαδοχικαὶ γωνίαι παραλληλογράμμου· ἄρα τὰ ἡμίση αὐτῶν $Α_2$ καὶ $Δ_1$ θὰ ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ 1 ὀρθήν.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΗΔ αἱ δύο γωνίαι του $Α_2$ καὶ $Δ_1$ ἔχουν ἄθροισμα μίαν ὀρθὴν γωνίαν· ἄρα ἡ τρίτη γωνία του Η εἶναι ὀρθή. Ἑπομένως αἱ πλευραὶ ΑΗ καὶ ΔΗ εἶναι κάθετοι μεταξύ των. Ὥστε αἱ διχοτόμοι ΑΗ καὶ ΔΗ εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

Α' Ὁμάς. 191. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον ἑνὸς παραλληλογράμμου καὶ περατοῦται εἰς τὰς ἀπέναντι πλευράς του, διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ κέντρου τοῦ παραλληλογράμμου.

Ἔστω Ο τὸ κέντρον τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Ἀπὸ τὸ Ο φέρομεν μίαν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΕΟΖ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ε καὶ τὴν ΓΔ εἰς τὸ Ζ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΟΖ=ΟΕ.



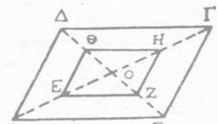
Σχ. 155

Τὰ τρίγωνα ΟΕΒ καὶ ΟΖΔ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν

$$\text{ΟΒ} = \text{ΟΔ}, \quad \widehat{\text{Ο}_1} = \widehat{\text{Ο}_2}$$

ὡς κατὰ κορυφὴν καὶ $\widehat{\text{Β}_1} = \widehat{\text{Δ}_1}$ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ παραλλήλων· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ΕΟ=ΟΖ.

192. Αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἡμιδιαγωνίων παραλληλογράμμου σχηματίζουν παραλληλόγραμμον μὲ κέντρον τὸ κέντρον τοῦ δοθέντος παραλληλογράμμου.

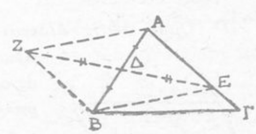


Σχ. 156

Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ ΑΓ, ΒΔ αἱ διαγώνιοί του, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο. Ἐὰν Ε, Ζ, Η, Θ εἶναι τὰ μέσα τῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Τὰ ΟΕ καὶ ΟΗ εἶναι ἴσα, ὡς ἡμίση τῶν ἴσων ΟΑ καὶ ΟΓ. Ὁμοίως εἶναι ΟΘ=ΟΖ, ὡς ἡμίση τῶν ἴσων ΟΔ καὶ ΟΒ. Εἰς τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ αἱ διαγώνιοί του ΕΗ καὶ ΖΘ διχοτομοῦνται, ἄρα τὸ ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Β' Ὁμάς. 193. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ· *ἀπὸ τὸ μέσον* Δ *τῆς πλευρᾶς* ΑΒ *φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν* ΑΓ *εἰς τὸ σημεῖον* Ε. *Προεκτείνομεν τὴν* ΕΔ *πέραν τοῦ* Δ *καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα* ΔΖ=ΕΔ. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα* ΒΖ *εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν* ΓΑ.

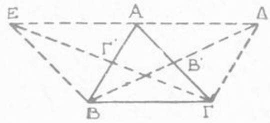


Σχ. 157

Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΑΔ=ΔΒ καὶ ΔΕ=ΔΖ. Εἰς τὸ τετράπλευρον ΖΒΕΑ παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ διαγώνιοί του ΑΒ καὶ ΖΕ διχοτομοῦνται· ἄρα τὸ τετράπλευρον αὐτὸ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἑπομένως ἡ ΖΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ.

194. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. *Φέρομεν τὰς διαμέσους* ΒΒ' *καὶ* ΓΓ' *καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεών των λαμβάνομεν μήκη* Β'Δ=ΒΒ' *καὶ* Γ'Ε=ΓΓ'. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι* ΑΔ=ΑΕ *καὶ ὅτι τὰ σημεῖα* Α, Δ, Ε, *κεῖνται ἐπ' εὐθείας.*

Φέρομεν τὰς ΒΕ καὶ ΓΔ. Τὸ τετράπλευρον ΒΓΔΑ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοί του ΑΓ καὶ ΒΔ διχοτομοῦνται ἐκ κατασκευῆς· ἄρα θὰ εἶναι ΒΓ = ΑΔ. (1)



Σχ. 158

Ὁμοίως τὸ τετράπλευρον ΒΓΑΕ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοί του ΑΒ καὶ ΓΕ διχοτομοῦνται ἐκ κατασκευῆς· ἄρα θὰ εἶναι ΒΓ=ΑΕ (2).

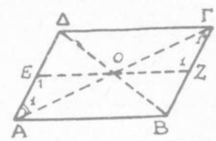
Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι ΑΔ=ΑΕ.

2ον. Αἱ ΑΔ καὶ ΑΕ, ὡς παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΓ καὶ ἀγόμεναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α, κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, διότι ἐὰν δὲν ἔκειντο ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας θὰ εἴχομεν ἐκ τοῦ Α δύο παραλλήλους πρὸς τὴν ΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον.

195. ***Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν παραλληλογράμμου διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ παραλληλογράμμου.***

Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, Ε καὶ Ζ τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του ΑΔ καὶ ΒΓ καὶ Ο τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς ΕΖ καὶ τῆς διαγωνίου ΑΓ· θὰ δείξωμεν, ὅτι

ΑΟ = ΟΓ.



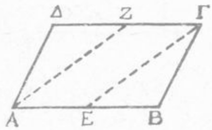
Σχ. 159

Ἐπειδὴ αἱ ΑΕ καὶ ΒΖ εἶναι ἴσαι, ὡς ἡμίση τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ καὶ παράλληλοι, τὸ τετράπλευρον ΑΒΖΕ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ὥστε αἱ ΑΒ καὶ ΕΖ εἶναι παράλληλοι.

Τὰ τρίγωνα ΑΟΕ καὶ ΓΟΖ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας· ἤτοι ἔχουν ΑΕ=ΖΓ ὡς ἡμίση ἴσων πλευρῶν, $E_1 = Z_1$ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΔ καὶ ΒΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΕΖ καὶ $A_1 = \Gamma_1$ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΔ καὶ ΓΒ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΓ.

Ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΑΟ = ΟΓ.

Γ' Ὁμάς. **196.** ***Δίδεται τὸ παραλληλόγραμμον*** ΑΒΓΔ ***καὶ*** Ε ***καὶ*** Ζ ***τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του*** ΑΒ ***καὶ*** ΓΔ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον*** ΑΕΓΖ ***εἶναι παραλληλόγραμμον.***

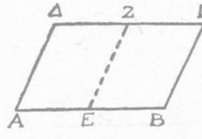


Σχ. 160

Τὸ τετράπλευρον ΑΕΖΓ ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευράς του ΑΕ καὶ ΖΓ ἴσας, ὡς ἡμίση τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Εἶναι δὲ αἱ ΑΕ καὶ ΖΓ παράλληλοι, ὡς τμήματα τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΔΓ. Ἄρα τὸ τετράπλευρον ΑΕΓΖ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι ἔχει δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους.

197. Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν παραλληλογράμμου χωρίζει αὐτὸ εἰς δύο παραλληλόγραμμα. Ἀληθεύει τὸ ἀντίστροφον;

Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ Ε καὶ Ζ τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν των ΑΒ καὶ ΔΓ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΖ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ τετράπλευρα ΑΕΖΔ καὶ ΕΒΓΖ εἶναι παραλληλόγραμμα.



Σχ. 161

Πράγματι. Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ΑΕ καὶ ΔΖ τοῦ τετραπλεύρου ΑΕΖΔ εἶναι ἴσαι, ὡς ἡμίση τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΔΓ τοῦ παραλληλογράμμου καὶ παράλληλοι, ὡς τμήματα τῶν παραλλήλων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΔΓ. Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΑΕΖΔ ἔχει δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ τὸ ΕΒΓΖ εἶναι παραλληλόγραμμον.

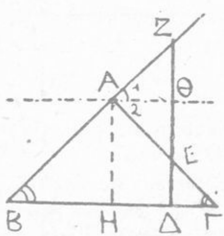
Καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει. ἤτοι: ***Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΕΖ, ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν τετραπλεύρου χωρίζει αὐτὸ εἰς δύο παραλληλόγραμμα τὸ τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον.***

Πράγματι· ἐπειδὴ τὰ ΑΕΖΔ καὶ ΕΒΓΖ εἶναι παραλληλόγραμμα θὰ εἶναι ΑΕ=ΔΖ καὶ ΕΒ=ΖΓ καὶ παράλληλοι. Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη λαμβάνομεν

ΑΕ+ΕΒ=ΔΖ+ΖΓ ἢ ΑΒ=ΔΓ.

Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἔχει δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους εἶναι παραλληλόγραμμον.

198. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Δ τῆς βάσεως ΒΓ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε καὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα ΔΕ+ΔΖ εἶναι σταθερόν.



Σχ. 162

Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΗ καὶ ἀπὸ τὸ Α κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΖ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΔΖ εἰς τὸ Θ.

Αἱ ΒΓ καὶ ΑΘ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΘ. Ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{B}=\widehat{A}_1$ ὡς ἐντὸς ἐκτὸς παραλλήλων καὶ $\widehat{\Gamma}=\widehat{A}_2$. Ἐπειδὴ $\widehat{B}=\widehat{\Gamma}$ ἔπεται, ὅτι εἶναι καὶ $A_1=A_2$. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΕΖ ἡ ΑΘ εἶναι ὕψος καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας Α, ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΕΖ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΕΘ=ΘΖ.

Θὰ εἶναι λοιπὸν ΔΕ=ΔΘ−ΘΕ ἢ ΔΕ=ΑΗ−ΘΕ (1)

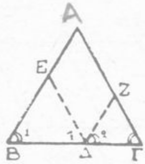
καὶ ΔΖ=ΔΘ+ΘΖ ἢ ΔΖ=ΑΗ+ΘΖ (2)

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψει, ὅτι ΘΕ=ΘΖ, ἔχομεν

ΔΕ+ΔΖ=2 ΑΗ=διπλάσιον τοῦ ὕψους ΑΗ=σταθερόν.

199. Ἐὰν ἀπὸ τυχὸν σημεῖον τῆς βάσεως ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀχθοῦν παράλληλοι πρὸς τὰς ἴσας πλευράς του, σχηματίζεται ἕνα παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι σταθερά.

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Δ τυχὸν σημεῖον τῆς βάσεώς του ΒΓ. Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν τὰς ΔΖ καὶ ΔΕ παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ ΑΕΔΖ εἶναι σταθερά.



Σχ. 163

Προφανῶς εἶναι:

περίμετρος παράλληλ. ΑΕΔΖ=ΑΕ+ΕΔ+ΔΖ+ΖΑ (1)

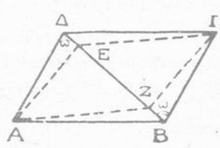
Τὸ τρίγωνον ΕΒΔ εἶναι ἰσοσκελὲς, διότι αἱ παρὰ τὴν βάσιν του γωνίαι Β καὶ Δ_1 εἶναι ἴσαι, ὡς ἴσαι πρὸς τὴν γωνίαν Γ. Πράγματι εἶναι: Β=Γ, ὡς παρὰ τὴν βάσιν γωνίαν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ καὶ Δ_1=Γ, ὡς ἐντός ἐκτὸς τῶν παραλλήλων ΕΔ καὶ ΑΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΓ. Ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς λοιπὸν τριγώνου ΕΒΔ ἔχομεν ΕΔ = ΕΒ.

Ὁμοίως ἀπὸ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΖΔΓ ἔχομεν ΔΖ=ΓΖ. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ ΕΔ καὶ ΔΖ διὰ τῶν ἴσων των καὶ ἔχομεν:

περιμετρ. παραλλ. ΑΕΔΖ=ΑΕ+ΕΒ+ΓΖ+ΖΑ=(ΑΕ+ΕΒ)+(ΓΖ+ΖΑ)= ΑΒ+ΑΓ=σταθερόν.

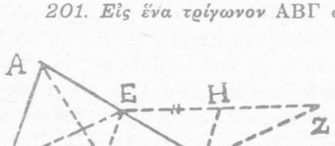
200. Δίδεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. *Ἀπὸ τὰς ἀπέναντι κορυφὰς* Α *καὶ* Γ *φέρομεν καθέτους* ΑΕ *καὶ* ΓΖ *ἐπὶ τὴν διαγώνιον* ΒΔ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον*** ΑΕΓΖ ***εἶναι παραλληλόγραμμον.***

Τὰ σχηματισθέντα ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΕΔ καὶ ΓΖΒ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ΑΔ καὶ ΒΓ ἴσας, ὡς ἀπέναντι πλευρὰς παραλληλογράμμου καὶ τὰς ὀξείας γωνίας ω′ καὶ ω ἴσας, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ παραλλήλων· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ΑΕ=ΓΖ. Ἀλλὰ αἱ ΑΕ καὶ ΓΖ εἶναι καὶ παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΒΔ. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΑΕΓΖ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι ἔχει δύο ἀπέναντι πλευρὰς ΑΕ καὶ ΓΖ ἴσας καὶ παραλλήλους



Σχ. 164

201. Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ *φέρομεν τὰς διαμέσους* ΑΔ *καὶ* ΒΕ. *Ἀπὸ τὴν κορυφὴν* Γ *φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν* ΒΕ, *ἡ ὁποία τέμνει τὴν παράλληλον πρὸς τὴν* ΒΓ, *ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὴ* Ε, *εἰς τὸ σημεῖον* Ζ. *Ἐὰν* Η *εἶναι τὸ μέσον τῆς* ΕΖ *νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι* ΔΕ *εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν* ΓΗ.

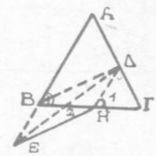


Σχ. 165

Τὸ τετράπλευρον ΒΓΖΕ εἶναι παραλληλόγραμμον ἐκ κατασκευῆς, ἄρα θὰ εἶναι ΒΓ = ΕΖ. Ἐπειδὴ ΒΓ=ΕΖ καὶ τὰ ἡμίση αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσα· ἤτοι θὰ εἶναι ΔΓ=ΕΗ. Εἰς τὸ τετράπλευρον ΔΓΗΕ αἱ δύο ἀπέναντι πλευραί του ΔΓ καὶ ΕΗ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι· ἄρα τὸ τετράπλευρον αὐτὸ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἑπομένως ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΗ.

Δ΄ Ὁμάς. 202. *Δίδεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον* ΑΒΓ *μὲ βάσιν τὴν* ΒΓ· *Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς* ΑΓ *λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον* Δ *καὶ προεκτείνομεν τὴν* ΑΒ *κατὰ ἕνα μέρος* ΒΕ *ἴσον μὲ* ΓΔ· *φέρομεν ἔπειτα τὴν εὐθεῖαν* ΕΔ, *ἡ ὁποία τέμνει τὴν* ΒΓ *εἰς ἕνα σημεῖον* Ζ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ****, ὅτι τὸ* Ζ *εἶναι τὸ μέσον τῆς* ΕΔ.

Φέρομεν τὴν ΔΗ παράλληλον τῆς ΒΕ. Ἡ γωνία Β εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν $Η_1$, ὡς ἐντός, ἐκτὸς τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΔΗ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΗ. Ἀλλὰ Β=Γ ὡς παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ, ἄρα θὰ εἶναι $Γ=Η_1$. Ὥστε τὸ τρίγωνον ΔΗΓ εἶναι ἰσοσκελές, διότι αἱ παρὰ τὴν βάσιν του γωνίαι $Η_1$ καὶ Γ εἶναι ἴσαι· ἄρα θὰ εἶναι ΔΓ=ΔΗ· ἀλλὰ ΔΓ=ΒΕ ἐκ κατασκευῆς, ἄρα θὰ εἶναι ΒΕ=ΔΗ.



Σχ. 166

Φέρομεν τὴν ΕΗ· τὸ τετράπλευρον ΒΕΗΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι ἔχει δύο ἀπέναντι πλευράς, ΒΕ καὶ ΔΗ, ἴσας καὶ παραλλήλους· ἄρα αἱ διαγώνιοί του ΒΗ καὶ ΕΔ διχοτομοῦνται, ἤτοι εἶναι ΕΖ=ΖΔ.

203. *Δίδεται ἕνα παραλληλόγραμμον* ΑΒΓΔ· *προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν* ΑΒ *καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα* ΒΕ=ΒΓ. *Ἐπίσης προεκτείνομεν τὴν* ΑΔ *καὶ λαμβάνομεν* ΔΖ=ΓΔ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ*** : *1ον ὅτι* $\widehat{ΔΓΖ}=\widehat{ΒΓΕ}$ *καὶ 2ον ὅτι τὰ σημεῖα* Ζ, Γ, Ε *κεῖνται ἀπ' εὐθείας.*

Αἱ ΑΒ καὶ ΔΖ εἶναι ἴσαι, ὡς ἴσαι πρὸς τὴν ΔΓ, ἤτοι εἶναι ΑΒ=ΔΖ (1).

Σχ. 167

Ὁμοίως αἱ ΒΕ καὶ ΑΔ εἶναι ἴσαι, ὡς ἴσαι πρὸς τὴν ΒΓ, ἤτοι εἶναι ΒΕ = ΑΔ (2)

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν ΑΒ+ΒΕ=ΔΖ+ΑΔ ἢ ΑΕ=ΑΖ.

Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΕΖ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι $\widehat{Ζ}=\widehat{Ε}$ (3)

Ἀλλὰ $Ζ=Γ_2$ ὡς παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΔΓΖ καὶ $\widehat{Ε}=\widehat{Γ}_1$ ὡς παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΒΕΓ. Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{Ζ}=\widehat{Ε}$, ὡς ἐδείχθη καὶ αἱ ἴσαι πρὸς αὐτὰς γωνίαι $Γ_2$ καὶ $Γ_1$ θὰ εἶναι ἴσαι, ἤτοι θὰ εἶναι $\widehat{ΔΓΖ}=\widehat{ΒΓΕ}$.

2ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ σημεῖα Ε, Γ, Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι $\widehat{\Gamma}_1+\widehat{\Gamma}_3+\widehat{\Gamma}_2=2$ ὀρθ.

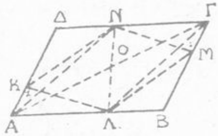
Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΕΖ εἶναι $\widehat{A}+\widehat{E}+\widehat{Z}=2$ ὀρθ. (4)

Ἀλλὰ $A=\Gamma_3$ ὡς ἀπέναντι γωνίαι παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, $E=\Gamma_1$ καὶ $Z=\Gamma_2$ ὡς ἐδείχθη. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἰσότητα (4) τὰς γωνίας Α, Ε καὶ Ζ, μὲ τὰς ἴσας των ἔχομεν $\Gamma_3+\Gamma_1+\Gamma_2=2$ ὀρθ.

Ὥστε τὰ σημεῖα Ε, Γ καὶ Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

204. Ἐὰν ἕνα παραλληλόγραμμον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα ἄλλο, (δηλαδὴ αἱ κορυφαί του κεῖνται ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ πρώτου), τὰ κέντρα των συμπίπτουν.

Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΚΛΜΝ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ Ο τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς διαγωνίου ΑΓ τοῦ ΑΒΓΔ καὶ τῆς διαγωνίου ΝΛ τοῦ ΚΛΜΝ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΑΟ=ΟΓ καὶ ΟΛ=ΟΝ.

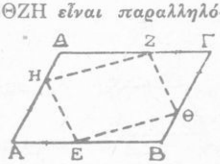


Σχ. 168

Τὰ τρίγωνα ΚΑΛ καὶ ΝΓΜ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας, ἤτοι ἔχουν ΚΛ=ΝΜ ὡς ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ παραλληλογράμμου ΚΛΜΝ, $\widehat{K}_1=\widehat{M}_1$ καὶ $\widehat{\Lambda}_1=\widehat{N}_1$ διότι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν καὶ ἀντιθέτου φορᾶς· ἄρα θὰ εἶναι ΑΛ = ΝΓ.

Ἐὰν φέρωμεν τὴν ΑΝ καὶ ΛΓ, τὸ σχηματισθὲν τετράπλευρον ΑΛΓΝ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ ἀπέναντι πλευραί του ΑΛ καὶ ΝΓ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι· ἄρα αἱ διαγώνιοί του ΑΓ καὶ ΛΝ διχοτομοῦνται, ἤτοι εἶναι ΑΟ = ΟΓ ΛΟ = ΟΝ.

205. Δίδεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. *Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς του* ΑΒ *λαμβάνομεν τυχὸν τμῆμα* ΑΕ, *ἐπὶ τῆς πλευρᾶς* ΓΔ *τμῆμα* ΓΖ=ΑΕ. *Ἐπίσης ἐπὶ τῆς πλευρᾶς* ΑΔ *λαμβάνομεν τυχὸν τμῆμα* ΑΗ *καὶ ἐπὶ τῆς* ΓΒ *τμῆμα* ΓΘ=ΑΗ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ** : 1ον ὅτι τὸ τετράπλευρον* ΕΘΖΗ *εἶναι παραλληλόγραμμον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ* ΑΒΓΔ. *2ον Ὅτι τὰ κέντρα τῶν δύο παραλληλογράμμων συμπίπτουν.*



Σχ. 169

Τὰ τρίγωνα ΑΕΗ καὶ ΓΖΘ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, ἤτοι ΑΕ = ΓΖ, ΑΗ = ΓΘ ἐκ κατασκευῆς καὶ γων. Α=γων. Γ ὡς ἀπέναντι γωνίας παραλληλογράμμου· ἄρα θὰ εἶναι ΕΗ=ΖΘ.

Ὁμοίως τὰ τρίγωνα ΕΒΘ καὶ ΔΗΖ εἶναι ἴσα, διότι ΕΒ=ΔΖ, ὡς ὑπόλοιπα τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ἀπὸ τῶν ὁποίων ἀφῃρέθησαν τὰ ἴσα τμήματα ΑΕ καὶ ΓΖ, ΒΘ=ΔΗ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ γων. Β=γων. Δ· ἄρα ΕΘ=ΗΖ.

Τὸ τετράπλευρον ΕΘΖΗ εἶναι λοιπὸν παραλληλόγραμμον, διότι αἱ ἀπέναντι πλευραί του εἶναι ἴσαι.

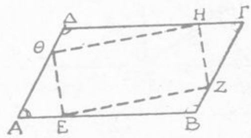
2ον. Ἐπειδὴ τὸ παραλληλόγραμμον ΕΘΖΗ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ ΑΒΓΔ, τὰ κέντρα των θὰ συμπέσουν, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν ἄσκησιν 204.

206. Δίδεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ· *ἐπὶ τῶν πλευρῶν του* ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ *λαμβάνομεν τμήματα*

$$\mathrm{AE}=\frac{\mathrm{AB}}{4},\quad \mathrm{BZ}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{4},\quad \Gamma\mathrm{H}=\frac{\Gamma\Delta}{4},\quad \Delta\Theta=\frac{\Delta\mathrm{A}}{4}.$$

***Νὰ ἀποδειχθῇ**: 1ον Ὅτι τὸ τετράπλευρον* ΕΖΗΘ *εἶναι παραλληλόγραμμον. 2ον Ὅτι τὰ δύο παραλληλόγραμμα ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον.*

1ον. Τὰ τμήματα ΑΕ καὶ ΓΗ εἶναι ἴσα, διότι ἕκαστον τούτων εἶναι τὸ τέταρτον τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ· ἄρα καὶ τὰ ΕΒ καὶ ΔΗ θὰ εἶναι ἴσα, ὡς ὑπόλοιπα τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ἀπὸ τῶν ὁποίων ἀφηρέθησαν τὰ ἴσα τμήματα ΑΕ καὶ ΓΗ· ἤτοι εἶναι ΕΒ=ΔΗ.



Σχ. 170

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ΒΖ=ΔΘ καὶ ΑΘ=ΓΖ.

Τὰ τρίγωνα ΕΒΖ καὶ ΔΘΗ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, ἤτοι ἔχουν ΒΕ=ΔΗ, ΒΖ=ΔΘ, ὡς ἐδείχθη καὶ γων. Β = γων. Δ, ὡς ἀπέναντι γωνίας τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ΕΖ=ΘΗ.

Ὁμοίως ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων ΑΕΘ καὶ ΓΗΖ εὑρίσκομεν, ὅτι ΘΕ=ΗΖ. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΕΖΗΘ ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευράς του ἴσας, ἄρα εἶναι παραλληλόγραμμον.

2ον. Τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖΗΘ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ ἑπομένως, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν ἄσκησιν 204, ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Ὀρθογώνια

*207. Α' Ὁμάς. **Νὰ ἀποδειχθῇ**, ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν παραλληλογράμμου σχηματίζουν ὀρθογώνιον.*

Σχ. 171

Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΔ τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον σχηματίζουν αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του Α, Β, Γ, Δ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ ΕΖΗΘ εἶναι ὀρθογώνιον.

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Α καὶ Δ εἶναι παραπληρωματικαὶ αἱ ἡμίσεις αὐτῶν α καὶ δ ἔχουν ἄθροισμα 1 ὀρθ. ἤτοι θὰ εἶναι α+δ=1 ὀρ.

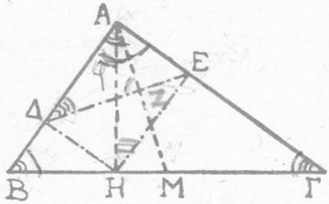
Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΖΔ αἱ δύο γωνίαι του α καὶ δ ἔχουν ἄθροισμα 1 ὀρθήν, ἄρα ἡ τρίτη γωνία του ΑΖΔ εἶναι ὀρθή· ἤτοι εἶναι γων. ΑΖΔ = 1 ὀρθ. ὁπότε καὶ ἡ κατὰ κορυφήν της γωνία Ζ εἶναι ὀρθή.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι γων. Η = γων. Θ = γων. Ε = 1 ὀρθ. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΕΖΗΘ ἔχει τὰς γωνίας του ὀρθάς, ἄρα εἶναι ὀρθογώνιον.

208. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, *ὀρθογώνιον εἰς τὸ* Α. *Ἀπὸ τὸν πόδα* Η *τοῦ ὕψους* ΑΗ *φέρομεν τὰς καθέτους* ΗΔ *καὶ* ΗΕ *ἐπὶ τὰς πλευρὰς* ΑΒ *καὶ* ΑΓ. *Φέρομεν τὴν διάμεσον* ΑΜ.
1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΔΕ = ΑΗ.
2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\widehat{BAM}=\widehat{ABM} \quad \textit{καὶ} \quad \widehat{A\Delta E}=\widehat{A\Gamma B}.$$

3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΑΜ *εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν* ΔΕ.



Σχ. 172

Λύσις. 1ον. Τὸ τετράπλευρον ΑΔΗΕ εἶναι ὀρθογώνιον, διότι αἱ γωνίαι του Α, Δ, Ε, Η εἶναι ὀρθαί· ἄρα αἱ διαγώνιοί του ΔΕ καὶ ΑΗ εἶναι ἴσαι.

2ον. Γνωρίζομεν, ὅτι ἡ διάμεσος ὀρθογωνίου τριγώνου, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας διαιρεῖ τὸ τρίγωνον εἰς δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΒΜ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι $\widehat{BAM}=\widehat{ABM}$.

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον ΑΔΗΕ, ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΔΕ καὶ ΑΗΕ συνάγομεν, ὅτι $\widehat{A\Delta E}=\widehat{AHE}$. Ἀλλὰ $\widehat{AHE}=\widehat{A\Gamma B}$, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους. Ἄρα θὰ εἶναι

$$\widehat{A\Delta E}=\widehat{A\Gamma B}.$$

3ον. Ἔστω Ζ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ΑΜ καὶ ΔΕ. Ἐδείξαμεν, ὅτι $\widehat{A\Delta E}=\widehat{\Gamma}$ (1) καὶ $\widehat{BAM}=\widehat{B}$ (2).

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\widehat{A\Delta E}+\widehat{BAM}=\widehat{\Gamma}+\widehat{B} \quad ἤ \quad \widehat{A\Delta E}+\widehat{BAM}=1 \text{ ὀρθ.}$$

Ἄρα ἡ τρίτη γωνία ΑΖΔ τοῦ τριγώνου ΑΔΖ εἶναι ὀρθὴ καὶ ἑπομένως ἡ ΔΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΜ.

Β' Ὁμάς. 209. Δίδεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). *Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν* ΒΑ *πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς* Α *καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως, λαμβάνομεν τμῆμα* ΑΔ = ΑΒ *καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν* ΔΓ. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία* ΒΓΔ *εἶναι ὀρθή.*

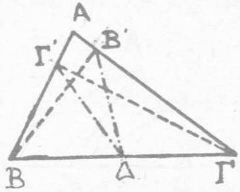
Σχ. 173

Εἰς τὸ τρίγωνον ΒΓΔ, ἡ ΓΑ εἶναι διάμεσος καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΒΔ· ἄρα τὸ τρίγωνον αὐτὸ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Γ (§ 155).

210. ***Εἰς ἕνα τρίγωνον*** ΑΒΓ ***φέρομεν τὰ ὕψη του*** ΒΒ′ ***καὶ*** ΓΓ′. ***Ἐὰν*** Δ ***εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς*** ΒΓ, ***νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι*** ΔΒ′ = ΔΓ′.

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΒ′Γ ἡ Β′Δ εἶναι διάμεσος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Β′ τῆς ὀρθῆς γωνίας· ἄρα θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης του ΒΓ, ἤτοι θὰ εἶναι

$$B'\Delta = \frac{1}{2}\,B\Gamma.$$



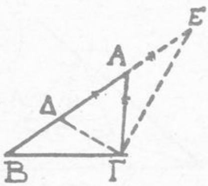
Σχ. 174

Ὁμοίως εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΓ′Γ, ἡ Γ′Δ εἶναι διάμεσός του, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Γ′ τῆς ὀρθῆς γωνίας· ἄρα θὰ εἶναι

$$\Gamma'\Delta = \frac{1}{2}\,B\Gamma \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $B'\Delta = \Gamma'\Delta$.

211. ***Δίδεται ἕνα τρίγωνον*** ΑΒΓ. ***Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς*** ΑΒ ***λαμβάνομεν ἕνα τμῆμα*** ΑΔ=ΑΓ ***καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς*** ΒΑ ***ἕνα τμῆμα*** ΑΕ=ΑΓ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα*** ΔΓ ***εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν*** ΕΓ.



Σχ. 175

Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΔΓΕ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Γ.

Πράγματι ἐξ ὑποθέσεως εἶναι

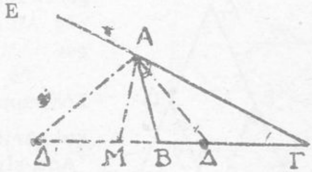
$$A\Gamma = A\Delta = AE\cdot$$

ἤτοι ἡ ΓΑ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΔΕ. Ἐπειδὴ ἡ ΓΑ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου ΕΔΓ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς ΔΕ ἕπεται, ὅτι τὸ τρίγωνον ΔΓΕ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Γ· ὥστε ἡ ΔΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΓ.

212. ***Εἰς ἕνα τρίγωνον*** ΑΒΓ ***φέρομεν τὴν διχοτόμον*** ΑΔ ***τῆς γωνίας*** Α ***καὶ τὴν διχοτόμον*** ΑΔ′ ***τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας*** Α, ***αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν πλευρὰν*** ΒΓ ***εἰς τὰ σημεῖα*** Δ ***καὶ*** Δ′ ***ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ μέσον*** Μ ***τῆς*** ΔΔ′ ***ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ σημεῖα*** Δ, Δ′ ***καὶ*** Α.

Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$MA = M\Delta = M\Delta'.$$



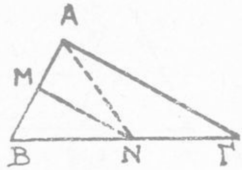
Σχ. 176

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΕΑΒ καὶ ΒΑΓ εἶναι ἐφεξῆς παραπληρωματικαὶ αἱ διχοτόμοι των ΑΔ′ καὶ ΑΔ εἶναι κάθετοι. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν Δ′ΑΔ εἶναι ὀρθογώνιον.

Ἐπειδὴ ἡ ΑΜ εἶναι διάμεσος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου Δ′ΑΔ θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης· ἤτοι θὰ εἶναι

$$AM = M\Delta' = M\Delta.$$

213. ***Ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν κάθετον ΜΝ εἰς τὴν ΑΒ. Ἐὰν τὸ Ν εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α.***



Σχ. 177

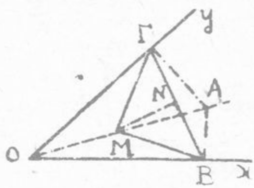
Φέρομεν τὴν ΑΝ. Ἐπειδὴ τὸ Ν εἶναι σημεῖον τῆς καθέτου ΝΜ εἰς τὸ μέσον Μ τῆς ΑΒ ἕπεται, ὅτι εἶναι ΑΝ=ΒΝ. Ἀλλὰ τὸ Ν εἶναι ἐξ ὑποθέσεως, μέσον τῆς ΒΓ· ἄρα θὰ εἶναι ΑΝ=ΒΝ=ΝΓ. Ἐπειδὴ ἡ διάμεσος ΑΝ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἕπεται, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α.

214. ***Δίδεται μία γωνία xOy καὶ ἕνα σημεῖον Α ἐντὸς αὐτῆς. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τὴν ΑΒ κάθετον ἐπὶ τὴν Οx καὶ τὴν ΑΓ κάθετον ἐπὶ τὴν Οy. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὸ μέσον Μ τῆς εὐθείας ΟΑ μὲ τὸ μέσον Ν τῆς εὐθείας ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.***

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΓΑ ἡ ΓΜ εἶναι διάμεσος, ἀγομένη ἀπὸ τὴν κορυφὴν Γ τῆς ὀρθῆς γωνίας του· ἄρα θὰ εἶναι $\Gamma M = \frac{1}{2}\, OA$ (1)

Ὁμοίως ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΒΑ, θὰ ἔχωμεν $BM = \frac{1}{2}\, OA$ (2).

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι ΓΜ=ΒΜ.

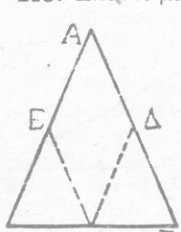


Σχ. 178

Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΜΓΒ ἡ ΜΝ εἶναι διάμεσος αὐτοῦ, ἄρα καὶ ὕψος αὐτοῦ. Ὥστε ἡ ΜΝ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.

Ρόμβος

215. ***Ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς βάσεως ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τὰς παραλλήλους ΜΔ καὶ ΜΕ πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΔΜΕ εἶναι ρόμβος.***

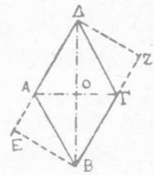


Σχ. 179

Τὸ τετράπλευρον ΑΔΜΕ εἶναι παραλληλόγραμμον ἐκ κατασκευῆς. Τὰ τρίγωνα ΕΒΜ καὶ ΔΜΓ ἔχουν ΒΜ=ΜΓ, $\widehat{B} = \widehat{\Gamma M\Delta}$, $\widehat{EMB} = \widehat{\Gamma}$. Ἄρα εἶναι ἴσα. Ἐπομένως θὰ εἶναι ΕΜ=ΜΔ. Ἐπειδὴ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΔΜΕ ἔχει δύο διαδοχικὰς πλευρὰς ἴσας, θὰ εἶναι ρόμβος.

216. ***Δίδεται ἕνας ρόμβος ΑΒΓΔ. Ἀπὸ τὴν***

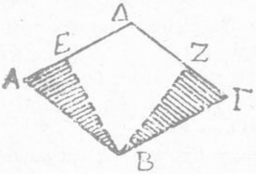
κορυφήν του Β φέρομεν κάθετον ΒΕ ἐπὶ τὴν ΑΔ καὶ ἀπὸ τὴν κορυφὴν Δ κάθετον ΔΖ ἐπὶ τὴν ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΒΖΔ εἶναι ὀρθογώνιον.



Σχ1. 80

Ἡ ΒΕ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΒΓ. Αἱ ΕΒ καὶ ΔΖ, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΒΖ, εἶναι παράλληλοι. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΕΒΖΔ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἐπειδὴ μία γωνία του Ε εἶναι ὀρθὴ εἶναι ὀρθογώνιον.

217. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἀπόστασις δύο παραλλήλων πλευρῶν ρόμβου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.



Σχ. 181

Ἔστω ὁ ρόμβος ΑΒΓΔ καὶ ΒΕ, ΒΖ αἱ ἀποστάσεις τῶν ἀπέναντι παραλλήλων πλευρῶν του· θὰ δείξωμεν, ὅτι ΒΕ=ΒΖ. Τὰ σχηματισθέντα ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΕΑ καὶ ΒΖΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ΒΑ καὶ ΒΓ ἴσας, ὡς πλευρὰς ρόμβου καὶ τὰς γωνίας Α καὶ Γ ἴσας, ὡς ἀπέναντι γωνίας παραλληλογράμμου· ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΒΕ=ΒΖ.

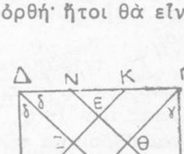
Τετράγωνον

218. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου τεμνόμεναι σχηματίζουν τετράγωνον.

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον σχηματίζουν αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του Α, Β, Γ, Δ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ ΕΖΗΘ εἶναι τετράγωνον.

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Α καὶ Δ εἶναι παραπληρωματικαὶ αἱ ἡμίσεις αὐτῶν α καὶ δ θὰ ἔχουν ἄθροισμα 1 ὀρθήν, ἤτοι θὰ εἶναι α + δ = 1 ὀρθ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΖΔ αἱ δύο γωνίαι του α καὶ δ ἔχουν ἄθροισμα μίαν ὀρθήν, ἄρα ἡ τρίτη γωνία του ΑΖΔ θὰ εἶναι ὀρθή· ἤτοι θὰ εἶναι γων. ΑΖΔ = 1 ὀρθή, ὁπότε καὶ ἡ κατὰ κορυφήν της γωνία Ζ εἶναι ὀρθή.



Σχ. 182

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἡ

γων. Η=γων. Θ=γων. Ε=1 ὀρθ.

Τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ ἔχει λοιπὸν τὰς γωνίας του ὀρθάς, ἄρα εἶναι ὀρθογώνιον.

Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΕΒ εἶναι ἰσοσκελές, διότι αἱ παρὰ τὴν βάσιν του γωνίαι α καὶ β εἶναι ἴσαι, ὡς ἡμίση τῶν ὀρθῶν γωνιῶν Α καὶ Β· ἄρα θὰ εἶναι ΑΕ = ΕΒ (1).

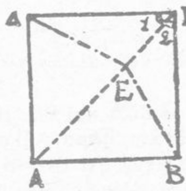
Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΖΔ καὶ ΘΒΓ εἶναι ἴσα διότι, ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας, καὶ τὰς ὀξείας γωνίας ἴσας· ἤτοι ἔχουν ΑΔ=ΒΓ ὡς ἀπέναντι πλευρὰς ὀρθογωνίου καὶ α=δ=β=γ=45°· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ΑΖ=ΘΒ (2).

Ἀφαιροῦμεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

ΑΕ—ΑΖ=ΕΒ—ΘΒ ἢ ΖΕ=ΕΘ.

Τὸ ὀρθογώνιον ΕΖΗΘ ἔχει τὰς δύο διαδοχικὰς πλευρὰς ΖΕ καὶ ΕΘ, ἴσας, ἄρα εἶναι τετράγωνον.

219. ***Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον μιᾶς διαγωνίου τετραγώνου φέρομεν εὐθείας πρὸς τὰς κορυφάς του. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράγωνον ἐχωρίσθη εἰς δύο ζεύγη ἐξ ἴσων τριγώνων.***



Σχ. 183

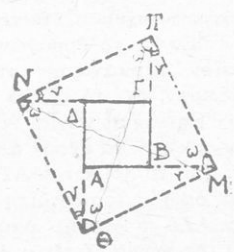
Ἔστω τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ καὶ Ε τυχὸν σημεῖον τῆς διαγωνίου του ΑΓ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΕΒ καὶ ΕΔ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα ΕΒΓ καὶ ΕΓΔ εἶναι ἴσα.

Πράγματι τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὴν ΓΕ κοινήν, τὴν ΓΒ=ΓΔ ὡς πλευρὰς τετραγώνου καὶ $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 45^0$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΕΔ εἶναι ἴσα.

220. ***Δίδεται ἕνα τετράγωνον*** ΑΒΓΔ· ***προεκτείνομεν τὰς ἀπέναντι πλευράς του κατὰ μήκη ἴσα πρὸς τὰς πλευρὰς καὶ κατ' ἀντίθετον φορὰν καὶ λαμβάνομεν*** ΒΜ=ΑΒ, ΔΝ=ΓΔ, ΓΠ=ΒΓ, ΑΘ=ΔΑ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι*** ΜΝ ***καὶ*** ΘΠ ***εἶναι ἴσαι.***

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΘΑΜ, ΜΒΠ, ΠΓΝ καὶ ΝΔΘ εἶναι ἴσα, διότι, ἔχουν τὰς καθέτους πλευράς των ἴσας· ἤτοι ἔχουν ΑΘ=ΒΜ=ΓΠ=ΔΝ ὡς ἴσας πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ καὶ ΑΜ=ΒΠ=ΓΝ=ΔΘ ὡς διπλασίας τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος τετραγώνου· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας, ἤτοι ΘΜ=ΜΠ=ΠΝ=ΝΘ, καὶ τὰς ὀξείας γωνίας ἴσας· ἤτοι αἱ γωνίαι ν εἶναι ἴσαι καὶ αἱ γωνίαι ω εἶναι ἴσαι.



Σχ. 184

Τὸ τετράπλευρον ΘΜΠΝ ἔχει τὰς πλευράς του ἴσας, ὡς ἐδείχθη καὶ τὰς γωνίας των ἴσας, διότι ἑκάστη τούτων εἶναι ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ν καὶ ω. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν αὐτὸ εἶναι τετράγωνον καὶ ἑπομένως αἱ διαγώνιοί του εἶναι ἴσαι· ἤτοι εἶναι ΜΝ=ΜΘ.

221. ***Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου*** ΑΒΓ ***κατασκευάζομεν τετράγωνα, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι τοῦ σχηματιζομένου ἑξαγώνου εἶναι ἴσαι, καὶ ὅτι αἱ πλευραί του σχηματίζουν δύο ὁμάδας τριῶν ἴσων πλευρῶν.***

Ἔστω ΑΒΓ ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ ΑΒΔΕ, ΒΓΖΗ καὶ ΑΓΘΚ τὰ τετράγωνα, τὰ ὁποῖα κατασκευάζομεν μὲ πλευρὰς τὰς πλευρὰς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΔΗ, ΖΘ, ΚΕ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ γωνίαι τοῦ ἑξαγώνου ΔΗΖΘΚΕ εἶναι ἴσαι καί ὅτι

ΔΗ=ΖΘ=ΚΕ καὶ ΗΖ=ΘΚ=ΕΔ.

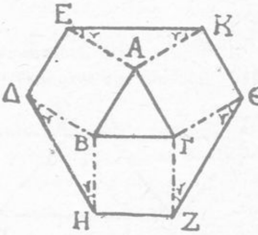
Τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΒΔΗ, ΓΖΘ, ΑΚΕ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτοῦ περιεχομένην γωνίαν ἴσην, ἤτοι ἔχουν :

ΒΔ=ΒΗ=ΓΖ=ΓΘ=ΑΚ=ΑΕ

ὡς πλευρὰς ἴσων τετραγώνων και

$\widehat{\Delta B H} = \widehat{Z\Gamma\Theta} = \widehat{K A E} = 120^0$

διότι ἑκάστη τούτων εἶναι διαφορὰ 4 ὀρθῶν γωνιῶν ἀπὸ τὰς ὁποίας ἀφηρέθησαν τρεῖς ἴσαι γωνίαι (δύο ὀρθαὶ γωνίαι καὶ μία γωνία 60^0 ὡς γωνίαι τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου). Ἀφοῦ τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα, θὰ ἔχουν καὶ ΔΗ=ΖΘ=ΚΕ καὶ τὰς γωνίας ν ἴσας.

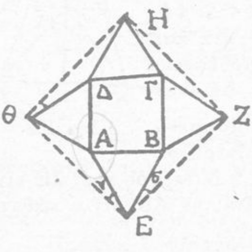


Σχ. 185

Αἱ γωνίαι τοῦ ἑξαγώνου εἶναι ἴσαι, διότι ἑκάστη τούτων ἀποτελεῖται ἀπὸ μίαν ὀρθὴν γωνίαν καὶ ἀπὸ μίαν ἴσην γωνίαν ν.

Θὰ εἶναι δὲ ΗΖ=ΘΚ=ΕΚ ὡς πλευραὶ ἴσων τετραγώνων.

222. ***Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς τετραγώνου*** ΑΒΓΔ ***κατασκευάζομεν τέσσαρα ἰσόπλευρα τρίγωνα*** ΑΒΕ, ΒΓΖ, ΓΔΗ, ΔΑΘ, ***τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐκτὸς τοῦ τετραγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα*** Ε, Ζ. Η, Θ ***εἶναι κορυφαὶ τετραγώνου.***



Σχ. 186

Φέρομεν τὰς εὐθείας ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ. Τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα ΘΑΕ, ΕΒΖ, ΖΓΗ, ΗΔΘ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, ἤτοι ἔχουν

ΘΑ=ΑΕ=ΕΒ=ΒΖ=ΖΓ=ΓΗ=ΗΔ=ΔΘ,

ὡς ἴσας πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τετραγώνου καὶ τὰς γωνίας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κορυφὰς τὰς Α, Β, Γ, Δ ἴσας, διότι ἑκάστη τούτων εἶναι ἴση μὲ

$360^0 - 90^0 - 60^0 - 60^0$

ἤτοι μὲ 150^0. Ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ΘΕ=ΕΖ=ΖΗ=ΗΘ καὶ $\nu = \sigma$.

Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ ἔχει τὰς τέσσαρας πλευράς του ἴσας, εἶναι ρόμβος,

Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΘΕ ἡ γωνία ΕΑΘ εἶναι ἴση μὲ 150^0· ἄρα αἱ παρὰ τὴν βάσιν του γωνίαι εἶναι ἴσαι μὲ 15^0 ἑκάστη, ἤτοι εἶναι $\nu = 15^0$. Ὁμοίως εἶναι $\sigma = 15^0$.

Ἡ γωνία Ε τοῦ ρόμβου ΕΖΗΘ εἶναι ἴση μὲ $\nu + 60^\circ + \sigma$, ἤτοι μὲ

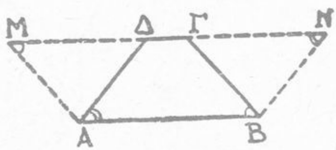
$$15^\circ + 60^\circ + 15^\circ = 90^\circ.$$

Ἐπειδὴ ἡ μία γωνία τοῦ ρόμβου εἶναι ὀρθή, ὅλαι αἱ γωνίαι του εἶναι ὀρθαί· ἄρα τὸ τετράπλευρον ΕΖΓΘ εἶναι τετράγωνον, διότι ἔχει καὶ τὰς πλευράς του ἴσας καὶ τὰς γωνίας του ὀρθάς.

Τραπέζια

Α΄ Ὁμάς. 223. Δίδεται τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ· *ἀπὸ τὰ ἄκρα* Α *καὶ* Β *τῆς μεγάλης βάσεώς του φέρομεν παραλλήλους* ΑΜ *καὶ* ΒΝ *πρὸς τὰς πλευρὰς* ΒΓ *καὶ* ΑΔ *ἀντιστοίχως, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν προέκτασιν τῆς* ΔΓ *εἰς τὰ σημεῖα* Μ *καὶ* Ν. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι*

$$\widehat{M} = \widehat{B} \quad \textit{καὶ} \quad \widehat{N} = \widehat{A}.$$



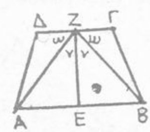
Σχ. 187

Τὸ τετράπλευρον ΑΒΝΔ εἶναι παραλληλόγραμμον ἐκ κατασκευῆς· ἄρα αἱ ἀπέναντι γωνίαι Α καὶ Ν εἶναι ἴσαι. Ὁμοίως τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΜ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι

γων. Β = γων. Μ.

224. Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν παραλλήλων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τραπεζίου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς πλευρὰς αὐτάς.

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ καὶ ΕΖ ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν βάσεων ΑΒ καὶ ΓΔ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΖΑ καὶ ΖΒ. Τὰ τρίγωνα ΑΔΖ καὶ ΒΓΖ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ΑΔ = ΒΓ ἐξ ὑποθέσεως ΔΖ=ΓΖ, διότι τὸ Ζ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΔΓ καὶ $\widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma}$, ὡς παρὰ τὴν μικρὰν βάσιν γωνίας ἰσοσκελοῦς τραπεζίου· ἄρα θὰ εἶναι ΖΑ=ΖΒ. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΖΑΒ εἶναι ἰσοσκελές, ἑπομένως ἡ διάμεσός του ΖΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἡ ΖΕ ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΔΓ.



Σχ. 188

225. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα δύο μὴ διαδοχικῶν πλευρῶν τετραπλεύρου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς πλευρὰς αὐτάς, τὸ τετράπλευρον εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον.

Ἔστω ΖΕ (σχ. 188) ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καὶ ἔστω, ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ.

Ἐν πρώτοις τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι τραπέζιον, διότι αἱ δύο ἀπέναντι πλευραί του ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΕΖ. Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοσκελές.

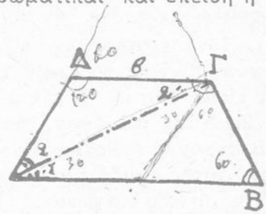
Φέρομεν τὰς ΖΑ καὶ ΖΒ. Αἱ ΖΑ καὶ ΖΒ εἶναι ἴσαι, διότι τὸ Ζ εἶναι σημεῖον τῆς καθέτου ΕΖ εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΖΑΒ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως ἡ ΖΕ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς, δηλ. $\widehat{\nu}=\widehat{\nu}$· ἄρα καὶ αἱ συμπληρωματικαὶ αὐτῶν γωνίαι ω καὶ ω εἶναι ἴσαι. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΔΖΑ καὶ ΖΓΒ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ΔΖ=ΖΓ ἐξ ὑποθέσεως, ΖΑ=ΖΒ ὡς ἐδείχθη καὶ $\widehat{\omega}=\widehat{\omega}$· ἄρα θὰ εἶναι ΑΔ=ΒΓ. Τὸ τραπέζιον λοιπὸν ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοσκελές.

226. *Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περίμετρος ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου* ΑΒΓΔ (ΑΔ=ΒΓ), *ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι αἱ ἀμβλεῖαι γωνίαι του εἶναι διπλάσιαι τῶν ὀξειῶν γωνιῶν του καὶ ὅτι ἡ διαγώνιος* ΑΓ *εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν* ΒΓ. *Ἡ μικρὰ βάσις* ΓΔ *ἔχει μῆκος β μέτρα.*

Αἱ γωνίαι Α καὶ Δ εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ ἐπειδὴ ἡ Δ εἶναι διπλασία τῆς Α ἕπεται, ὅτι

$\Delta = 120^0$ καὶ $\widehat{A} = 60^0$ ὁπότε

$B = A = 60^0$ καὶ $\Gamma = \Delta = 120^0$.



Σχ. 189

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΒ εἶναι $A_1=30^0$, ὁπότε καὶ $A_2=30^0$ καὶ $\Gamma_2=30^0$. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΔΑΓ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως ΑΔ=ΒΓ=ΔΓ=β.

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΒ ἡ πλευρὰ ΒΓ=β κεῖται ἀπέναντι ὀξείας γωνίας 30^0 καὶ ἑπομένως εἶναι ἴση μὲ μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης ΑΒ· ἄρα θὰ εἶναι ΑΒ = 2ΒΓ = 2β. Ἡ περίμετρος τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ θὰ εἶναι λοιπὸν

$$AB+B\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta A=2\beta+\beta+\beta+\beta=5\beta.$$

227. *Νὰ διατυπωθῇ καὶ νὰ ἀποδειχθῇ τὸ ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος τῆς § 164.*

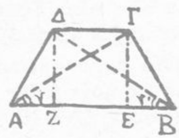
1ον. *Ἐὰν αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ τραπεζίου σχηματίζουν μὲ κάθε βάσιν του ἴσας γωνίας, τὸ τραπέζιον εἶναι ἰσοσκελές.*

Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ (Σχ. 190), εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι Α=Β καὶ Γ=Δ· θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον.

Πράγματι ἐκ τῶν κορυφῶν Γ καὶ Δ φέρομεν τὰς καθέτους ΓΕ καὶ ΔΖ ἐπὶ τὴν ΑΒ. Τὰ σχηματιζόμενα ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΖΔ καὶ ΒΕΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς καθέτους πλευρὰς ΔΖ καὶ ΓΕ ἴσας, ὡς καθέτους περιεχομένας μεταξὺ παραλλήλων πλευρῶν καὶ τὰς ὀξείας γωνίας Α καὶ Β ἴσας ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ΑΔ=ΒΓ. Ὥστε τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ ἔχει τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς του ἴσας, ἤτοι εἶναι ἰσοσκελές.

2ον. *Ἐὰν αἱ διαγώνιοι ἑνὸς τραπεζίου εἶναι ἴσαι, τὸ τραπέζιον εἶναι ἰσοσκελές.*

Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι ἴσαι. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΑΔ = ΒΓ.



Σχ. 190

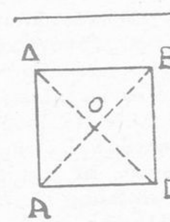
Φέρομεν τὰς καθέτους ΔΖ καὶ ΓΕ ἐπὶ τὴν ΑΒ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΕΓ καὶ ΒΖΔ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ΑΓ καὶ ΒΔ ἴσας ἐξ ὑποθέσεως καὶ ΓΕ=ΔΖ, ὡς καθέτους περιεχομένας μεταξὺ παραλλήλων εὐθειῶν· ἄρα θὰ εἶναι ν=ν′. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ΑΒ κοινήν, ΑΓ=ΒΔ ἐξ ὑποθέσεως καὶ ν=ν′ ὡς ἐδείχθη· ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΒΓ=ΑΔ. Τὸ τραπέζιον λοιπὸν ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοσκελές.

Κατασκευὴ τετραπλεύρων

228. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράγωνον: 1ον. Ἂν γνωρίζωμεν τὴν περίμετρόν του. 2ον. Ἂν γνωρίζωμεν τὴν διαγώνιόν του.***

1ον. Διαιροῦμεν τὴν περίμετρόν του εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ κατασκευάζομεν τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ νὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ τέταρτον τῆς περιμέτρου.

2ον. Εἰς τὸ μέσον τῆς δοθείσης διαγωνίου ΑΒ φέρομεν κάθετον ἐπ᾽ αὐτὴν καὶ ἑκατέρωθεν αὐτῆς λαμβάνομεν τμήματα ΟΓ=ΟΔ μὲ τὸ ἥμισυ τῆς διαγωνίου. Τὰ σημεῖα Α, Δ, Β, Γ εἶναι κορυφαὶ τετραγώνου ΑΔΒΓ. Τὸ ΑΔΒΓ εἶναι τετράγωνον, διότι αἱ διαγώνιοί του εἶναι ἴσαι καὶ διχοτομοῦνται καθέτως.



Σχ. 191

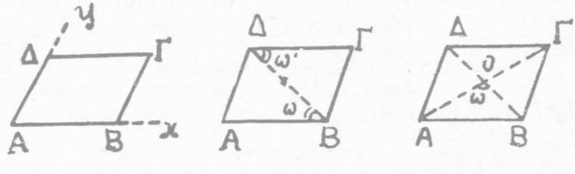
229. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα παραλληλόγραμμον* ΑΒΓΔ, *ἂν γνωρίζωμεν*:**

1ον. *Τὰς πλευρὰς* ΑΒ, ΑΔ *καὶ τὴν γωνίαν* Α.
2ον. *Τὴν πλευρὰν* ΔΓ, *τὴν διαγώνιον* ΒΔ *καὶ τὴν γωνίαν* ΑΒΔ.
3ον. *Τὴν πλευρὰν* ΑΒ *καὶ τὰς γωνίας* ΑΒΔ *καὶ* ΒΑΓ.

1ον. Κατασκευάζομεν μίαν γωνίαν χΑψ (Σχ. 192 α) ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν Α. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν της Αχ καὶ Αψ λαμβάνομεν τμήματα ΑΒ καὶ ΑΔ ἴσα ἀντιστοίχως μὲ τὰς δοθείσας πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΔ. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἀπὸ τὸ Β παράλληλον πρὸς τὴν ΑΔ. Αἱ παράλληλοι αὗται τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Γ. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον παραλληλόγραμμον.

2ον. Γνωρίζοντες τὴν γωνίαν ΑΒΔ (Σχ. 192 β) γνωρίζομεν καὶ τὴν γωνίαν ΔΒΓ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ τὴν ΒΔΓ, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ παραλλήλων. Κατασκευάζομεν λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΔΓ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν δύο πλευρὰς ΔΒ καὶ ΔΓ ἴσας ἀντιστοίχως μὲ τὴν δοθεῖσαν διαγώνιον ΔΒ καὶ μὲ τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν ΔΓ καὶ τὴν ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένην γωνίας ω. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὴν ΔΑ παράλληλον πρὸς τὴν ΓΒ καὶ ἀπὸ τὸ Β τὴν παράλληλον ΒΑ πρὸς τὴν ΓΔ. Αἱ παράλληλοι αὐταὶ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Α. Τὸ σχηματιζόμενον παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον.

3ον. Κατασκευάζομεν ἕνα τρίγωνον ΟΑΒ (Σχ. 192 γ), τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν δύο πλευρὰς ΟΑ, ΟΒ ἴσας μὲ τὰ ἡμίση τῶν δοθεισῶν διαγωνίων καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ω ἴσην μὲ τὴν δοθεῖ-



α β γ

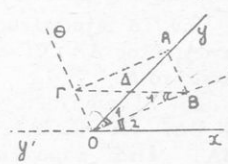
Σχ. 192

σαν γωνίαν τῶν διαγωνίων. Προεκτείνομεν τὰς ΑΟ καὶ ΟΒ πέραν τῆς κορυφῆς Ο καὶ λαμβάνομεν ΟΓ=ΟΑ καὶ ΟΔ=ΟΒ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ καὶ τὸ σχηματιζόμενον τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοί του ΑΓ καὶ ΒΔ διχοτομοῦνται ἐκ κατασκευῆς.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ ΣΤ' Κεφαλαίου

Α' Ὁμάς. 230. Δίδεται μία γωνία xOy· *ἀπὸ τυχὸν σημεῖον* Α *τῆς πλευρᾶς* Oy *φέρομεν τὴν* ΑΒ *κάθετον ἐπὶ τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον τῆς γωνίας* xOy *καὶ τὴν* ΑΓ *κάθετον ἐπὶ τὴν ἐξωτερικὴν διχοτόμον τῆς γωνίας* xOy. ***Νὰ ἀποδειχθῇ**: 1ον ὅτι τὸ τετράπλευρον* ΟΒΑΓ *εἶναι ὀρθογώνιον. 2ον. Ὅτι ἡ* ΒΓ *εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν* Ox *καὶ διχοτομεῖ τὴν* ΟΑ.

1ον. Αἱ διχοτόμοι ΟΒ καὶ ΟΓ τῶν ἐφεξῆς γωνιῶν xOy καὶ yOy' εἶναι κάθετοι. Αἱ ΑΒ καὶ ΓΟ εἶναι παράλληλοι ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΟΒ. Ὁμοίως εἶναι παράλληλοι καὶ αἱ ΑΓ καὶ ΒΟ. Τὸ τετράπλευρον ΟΒΑΓ εἶναι λοιπὸν παραλληλόγραμμον, καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι του εἶναι ὀρθαὶ εἶναι ὀρθογώνιον.



Σχ. 193

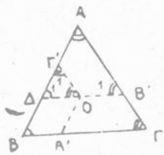
2ον. Αἱ ΑΟ καὶ ΒΓ εἶναι διαγώνιοι ὀρθογωνίου· ἄρα εἶναι ἴσαι, καὶ διχοτομοῦνται εἰς τὸ Δ, ἤτοι εἶναι

$$ΔΑ = ΔΟ = ΔΒ = ΔΓ.$$

Ἐπειδὴ ΔΟ=ΔΒ τὸ τρίγωνον ΔΟΒ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι $O_1=B_1$· ἀλλὰ $O_1=O_2$, διότι ἡ ΟΒ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας yOx, ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{O_2} = \widehat{B_1}$. Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΓΒ καὶ Ox, τεμνόμενοι ὑπὸ τῆς ΟΒ σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας O_2 καὶ B_1 ἴσας· ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΓΒ καὶ Ox εἶναι παράλληλοι.

231. *Δίδεται ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον* ΑΒΓ· *ἀπὸ ἕνα τυχὸν σημεῖον* Ο, *τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τοῦ τριγώνου φέρομεν παραλλήλους* ΟΑ', ΟΒ', ΟΓ' *πρὸς τὰς πλευρὰς* ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, *αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς πλευρὰς* ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ, *ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα* Α', Β', Γ'. ***Νὰ ἀποδειχθῇ,*** *ὅτι τὸ ἄθροισμα* ΟΑ'+ΟΒ'+ΟΓ' *εἶναι ἴσον μὲ μίαν ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου.*

Προεκτείνομεν τὴν Β'Ο μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Δ· τὸ σχηματισθὲν τρίγωνον Γ'ΔΟ εἶναι ἰσόπλευρον, ὡς ἰσογώνιον.



Σχ. 194

Πράγματι εἶναι $\widehat{O}=\widehat{\Gamma}$, $\widehat{\Delta}=\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma'}=\widehat{A}$, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους, ἀντιστοίχως, καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς.

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{\Gamma}$ θὰ εἶναι καὶ $\widehat{O}=\widehat{\Delta}=\widehat{\Gamma'}$· ἄρα θὰ εἶναι Γ'Δ=ΔΟ=ΟΓ'. Θὰ εἶναι λοιπὸν

ΟΒ'+ΟΓ'=ΟΒ'+ΟΔ ἢ ΟΒ'+ΟΓ'=ΔΒ' (1).

Ἐπειδὴ ὅμως καὶ τὸ τρίγωνον ΑΔΒ' εἶναι ἰσόπλευρον, θὰ εἶναι ΔΒ'=ΔΑ. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ ΔΒ' διὰ τοῦ ἴσου των ΔΑ ἔχομεν ΟΒ'+ΟΓ'=ΑΔ (2).

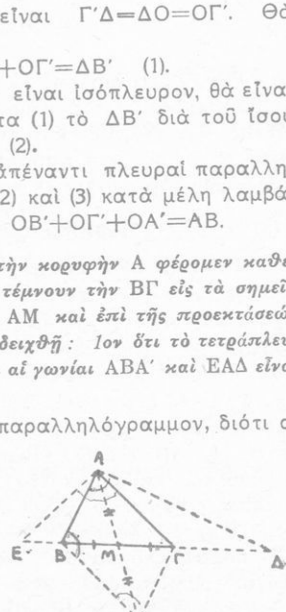
Ἀλλὰ εἶναι καὶ ΟΑ'=ΔΒ (3), ὡς ἀπέναντι πλευραὶ παραλληλογράμμου. Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (2) καὶ (3) κατὰ μέλη λαμβάνομεν ΟΒ'+ΟΓ'+ΟΑ'=ΑΔ+ΔΒ ἢ ΟΒ'+ΟΓ'+ΟΑ'=ΑΒ.

232. *Δίδεται ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ. *Ἀπὸ τὴν κορυφὴν* Α *φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς* ΑΒ *καὶ* ΑΓ, *αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν* ΒΓ *εἰς τὰ σημεῖα* Δ *καὶ* Ε *ἀντιστοίχως. Φέρομεν τὴν διάμεσον* ΑΜ *καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της λαμβάνομεν τμῆμα* ΜΑ' = ΑΜ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ :*** *1ον ὅτι τὸ τετράπλευρον* ΑΒΑ'Γ *εἶναι παραλληλόγραμμον· 2ον ὅτι αἱ γωνίαι* ΑΒΑ' *καὶ* ΕΑΔ *εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί.*

1ον. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΑ'Γ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοί του ΑΑ', ΒΓ διχοτομοῦνται εἰς τὸ Μ.

2ον. Αἱ διαδοχικαὶ γωνίαι ΑΒΑ' καὶ ΒΑΓ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΑ'Γ εἶναι παραπληρωματικαί, ἤτοι $\widehat{ABA'}+\widehat{BA\Gamma}=2$ ὀρθαί. (1)

Ἀλλὰ αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΕΑΔ εἶναι ἢ ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους μίαν πρὸς μίαν· ἤτοι εἶναι



Σχ. 195

εἴτε $\widehat{BA\Gamma}=\widehat{EA\Delta}$ (2) εἴτε $\widehat{BA\Gamma}+\widehat{EA\Delta}=2$ ὀρθαί. (2')

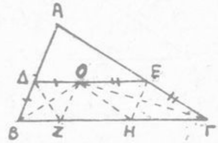
Ἐὰν ὑφίσταται ἡ ἰσότης (2), τότε ἡ ἰσότης (1) γίνεται

$$\widehat{ABA'}+\widehat{EA\Delta}=2 \text{ ὀρθαί}.$$

'Εὰν ὑφίσταται ἡ ἰσότης (2'), τότε ἐκ τῶν (1) καὶ (2') συνάγομεν, ὅτι

$$\widehat{ABA'}+\widehat{BA\Gamma}=\widehat{BA\Gamma}+\widehat{EA\Delta} \quad \text{ἢ} \quad \widehat{ABA'}=\widehat{EA\Delta}.$$

*233. 'Απὸ τὸ κοινὸν σημεῖον Ο τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν μίαν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε. **Νὰ ἀποδειχθῇ**: 1ον· ὅτι ΔΕ=ΒΔ+ΓΕ. 2ον. 'Απὸ τὸ Ο φέρομεν τὴν ΟΖ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ζ· ἐπίσης φέρομεν τὴν ΟΗ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Η. **Νὰ ἀποδειχθῇ**, ὅτι ἡ ΟΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΗ καὶ ἡ ΟΒ κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΖ.*



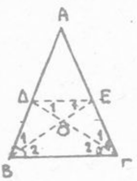
Σχ. 196

1ον. Βλέπει ἄσκησιν 136.

2ον. Τὸ παραλληλόγραμμον ΟΗΓΕ εἶναι ρόμβος, διότι αἱ δύο διαδοχικαὶ πλευραί του ΟΕ καὶ ΕΓ εἶναι ἴσαι· ἄρα αἱ διαγώνιοί του ΟΓ αἱ ΕΗ εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον ΟΔΒΖ εἶναι ρόμβος καὶ αἱ διαγώνιοί του ΟΒ καὶ ΔΖ εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

*234. **Νὰ ἀποδειχθῇ**, ὅτι ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, ὅταν ἡ εὐθεῖα ΔΕ, ἡ ὁποία συνδέει τοὺς πόδας τῶν διχοτόμων ΒΕ καὶ ΓΔ τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ.*



Σχ. 197

Τὸ τρίγωνον ΒΔΕ εἶναι ἰσοσκελές, διότι αἱ γωνίαι B_1 καὶ E_1 εἶναι ἴσαι, ὡς ἴσαι πρὸς τὴν γωνίαν B_2. Πράγματι αἱ γωνίαι B_1 καὶ B_2 εἶναι ἴσαι ἐξ ὑποθέσεως καὶ ἡ B_2 εἶναι ἴση μὲ τὴν E_1 ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΒΓ καὶ ΔΕ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΕ· ἄρα θὰ εἶναι ΔΒ=ΔΕ (1).

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΔΕΓ εἶναι ἰσοσκελές· ἄρα θὰ εἶναι ΕΓ=ΔΕ (2).

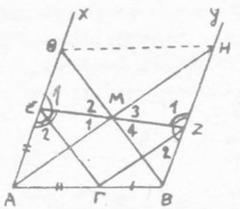
'Απὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) λαμβάνομεν ΒΔ=ΕΓ. Τὸ τραπέζιον λοιπὸν ΒΓΕΔ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως αἱ παρὰ τὴν βάσιν του γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ἴσαι· ἄρα καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, διότι αἱ γωνίαι του Β καὶ Γ εἶναι ἴσαι.

Β' Ὁμάς. 235. 'Επὶ μιᾶς εὐθείας ΑΒ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Γ· ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β φέρομεν δύο τυχούσας παραλλήλους Αx καὶ Βy πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ. 'Επὶ τῆς Αx λαμβάνομεν τμῆμα ΑΕ=ΑΓ καὶ ἐπὶ τῆς Βy τμῆμα ΒΖ=ΒΓ. 'Εὰν Μ εἶναι τὸ μέσον εὐθείας ΕΖ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΑΜΒ εἶναι ὀρθή.

Προεκτείνομεν τὴν ΑΜ μέχρις ὅτου συναντήσει τὴν Αy εἰς τὸ σημεῖον Η. 'Επίσης προεκτείνομεν τὴν ΒΜ μέχρις ὅτου συναντήσει τὴν Αx εἰς τὸ Θ. Φέρομεν τὴν ΘΗ.

Τὰ τρίγωνα ΑΜΕ καὶ ΗΜΖ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας· ἤτοι ἔχουν ΕΜ=ΜΖ, ἐξ ὑποθέσεως $\widehat{M_1} = \widehat{M_3}$ ὡς κατὰ κορυφὴν καὶ $\widehat{E_2} = \widehat{Z_1}$ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων Ax καὶ By τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΕΖ· ἄρα θὰ ἔχουν

καὶ ΑΕ=ΖΗ καὶ ΑΜ=ΜΗ.



Σχ. 198

Ὁμοίως, τὰ τρίγωνα ΜΒΖ καὶ ΕΜΘ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν

$$\text{EM}=\text{MZ}, \quad \widehat{M_4}=\widehat{M_2}, \quad E_1=Z_2\cdot$$

ἄρα θὰ εἶναι

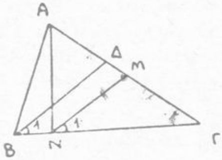
καὶ ΕΘ=ΒΖ καὶ ΘΜ=ΜΒ.

Εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΗΘ αἱ διαγώνιοί του ΑΗ καὶ ΒΘ διχοτομοῦνται, διότι ἐδείχθη, ὅτι ΑΜ=ΜΗ καὶ ΘΜ=ΒΜ· ἄρα τὸ τετράπλευρον αὐτὸ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἐπειδὴ ΑΓ=ΑΕ=ΖΗ καὶ ΓΒ=ΒΖ ἕπεται, ὅτι

$$\text{ΑΓ}+\text{ΓΒ}=\text{ΖΗ}+\text{ΒΖ} \quad \text{ἢ} \quad \text{ΑΒ}=\text{ΒΗ}.$$

Ἐπειδὴ αἱ διαδοχικαὶ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΒΗ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΗΘ εἶναι ἴσαι, τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ῥόμβος· ἄρα αἱ διαγώνιοί του τέμνονται καθέτως καὶ ἑπομένως ἡ γωνία ΑΜΒ εἶναι ὀρθή.

236. Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, *ἡ γωνία* Β *εἶναι διπλασία τῆς γωνίας* Γ· *Ἀπὸ τὸ μέσον* Μ *τῆς* ΑΓ *φέρομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν διχοτόμον* ΒΔ *τῆς γωνίας* Β· *ἡ παράλληλος αὐτὴ τέμνει τὴν* ΒΓ *εἰς τὸ* Ν. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον* ΑΝΓ *εἶναι ὀρθογώνιον.*



Σχ. 199

Ἡ γωνία

$$\widehat{B_1} = \frac{B}{2} = \widehat{\Gamma} \quad \text{καὶ} \quad \widehat{N_1} = \widehat{B_1}$$

ὡς ἐντὸς ἐκτὸς τῶν παραλλήλων ΒΔ καὶ ΝΜ· ἀπὸ τὰς ἰσότητας αὐτὰς συνάγομεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΜΝΓ εἶναι ἰσοσκελές· ἄρα θὰ εἶναι ΜΝ=ΜΓ. Ἀλλὰ ΜΓ=ΜΑ ἐξ ὑποθέσεως καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι

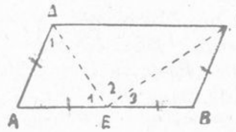
$$\text{MN} = \text{MA} = \text{M}\Gamma = \frac{\text{A}\Gamma}{2}.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ διάμεσος ΝΜ τοῦ τριγώνου ΑΝΓ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς ΑΓ· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΝΓ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Ν.

237. Ἐὰν εἰς ἕνα παραλληλόγραμμον ἡ μία ἀπὸ τὰς δύο διαδοχικὰς πλευράς του εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς τέμνονται καθέτως.

Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ΑΒ=2ΒΓ. Ἔστω Ε τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΕΔ καὶ ΕΓ· θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ΕΔ καὶ ΕΓ εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

Ἐπειδὴ αἱ ΑΕ καὶ ΑΔ εἶναι ἴσαι, ὡς ἴσαι πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ, τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι ἰσοσκελές· ἄρα θὰ εἶναι $E_1=\Delta_1$. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ 2 ὀρθὰς θὰ ἔχωμεν ἀπὸ τὸ τρίγ. ΑΔΕ, $A+E_1+\Delta_1=2$ ὀρθ. ἢ $A+2E_1=2$ ὀρθ. ἢ $E_1=1$ ὀρθ.$-\dfrac{A}{2}$ (1). Ὁμοίως ἀπὸ τὸ ἰσο-

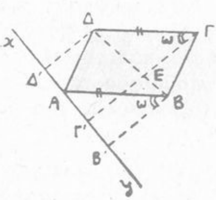


Σχ. 200

σκελὲς τρίγωνον ΕΒΓ ἔχομεν $E_3=1$ ὀρθ. $-\dfrac{B}{2}$. Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν $E_1+E_3=2$ ὀρθ. $-\dfrac{A+B}{2}$ (3). Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Α καὶ Β εἶναι δύο διαδοχικαὶ γωνίαι παραλληλόγραμμου θὰ εἶναι $A+B=2$ ὀρθ. ἐπομένως ἡ ἰσότης (3) γράφεται $E_1+E_3=1$ ὀρθ.

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι E_1, E_2, E_3 ἔχουν ἄθροισμα 2 ὀρθῶν καὶ εἶναι $E_1+E_3=1$ ὀρθ. ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία E_2 εἶναι ἴση μὲ 1 ὀρθήν· ἄρα αἱ πλευραί της ΕΔ καὶ ΕΓ εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

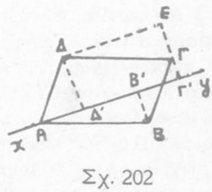
238. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α *ἑνὸς παραλληλογράμμου* ΑΒΓΔ *φέρομεν μίαν τυχοῦσαν εὐθεῖαν* xAy. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς* Γ *ἀπὸ τὴν* xy *εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν* Β *καὶ* Δ *ἀπὸ τὴν* xy, *καθόσον ἡ* xy *κεῖται ἐκτὸς τοῦ παραλληλογράμμου ἢ τέμνει αὐτό.*



Σχ. 201

1ον. Ἔστωσαν ΒΒ′, ΓΓ′, ΔΔ′ αἱ ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν Β, Γ, Δ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν Χψ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΓΓ′=ΒΒ′+ΔΔ′.

Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν τὴν ΔΕ παράλληλον πρὸς τὴν χψ. Τὸ σχηματισθὲν τετράπλευρον ΔΔ′Γ′Ε εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ ἀπέναντι πλευραί του εἶναι παράλληλοι· ἤτοι αἱ ΔΕ καὶ Δ′Γ′ ἐκ κατασκευῆς καὶ ἡ ΔΔ′ καὶ ΕΓ′ ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν xy. Ἄρα θὰ εἶναι ΕΓ′=ΔΔ′ (1).



Σχ. 202

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒ′Β καὶ ΔΕΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας, ἤτοι ΑΒ=ΔΓ, ὡς ἀπέναντι πλευρὰς παραλληλογράμμου καὶ τὰς ὀξείας γωνίας ω καὶ ω' ἴσας, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους· ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΓΕ=ΒΒ' (2).

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν·

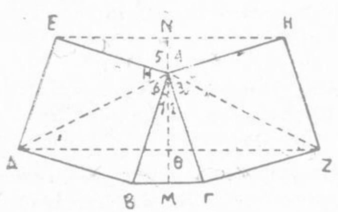
$$ΕΓ'+ΓΕ=ΔΔ'+ΒΒ' \quad ἤ \quad ΓΓ'=ΔΔ'+ΒΒ'$$

2ον. Ἔστω, ὅτι ἡ χψ τέμνει τὸ ΑΒΓΔ (Σχ. 202) θὰ δείξωμεν, ὅτι ΓΓ'=ΔΔ'−ΒΒ'. Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν χψ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς Γ'Γ εἰς τὸ Ε. Ἐργαζόμενοι ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι Γ'Ε=ΔΔ', ΓΕ=ΒΒ'. Ἀφαιροῦντες τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$Γ'Ε-ΓΕ=ΔΔ'-ΒΒ' \quad ἤ \quad ΓΓ'=ΔΔ'-ΒΒ'$$

239. Δίδεται ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. Μὲ πλευρὰς τὰς ἴσας πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ κατασκευάζομεν τὰ τετράγωνα ΑΒΔΕ καὶ ΑΓΖΗ, ἐκτὸς τοῦ τριγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΔΖ καὶ ΕΗ εἶναι παράλληλοι.

Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΔ καὶ ΑΖ. Αἱ ΑΔ καὶ ΑΖ εἶναι ἴσαι, ὡς διαγώνιοι τῶν ἴσων τετραγώνων ΑΒΔΕ καὶ ΑΓΖΗ· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΔΖ εἶναι ἰσοσκελές. Ἐπίσης τὸ τρίγωνον ΑΗΕ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ΑΕ=ΑΗ, ὡς πλευραὶ ἴσων τετραγώνων.



Σχ.203

Φέρομεν τὴν ΑΘ κάθετον ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΔΖ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Μ. Ἡ ΑΘ ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΔΖ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΔΖ εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς του· ἤτοι εἶναι $Δ\widehat{Α}Θ=Θ\widehat{Α}Ζ$.

Ἐὰν ἀπὸ τὰς ἴσας αὐτὰς γωνίας ἀφαιρέσωμεν τὰς ἴσας γωνίας $Α_6$ καὶ $Α_3$ ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι ἴση μὲ 45°, αἱ ἀπομένουσαι γωνίαι $Α_1$ καὶ $Α_2$ εἶναι ἴσαι. Ὥστε ΑΘΜ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς Α τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἐπομένως εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ. Συνεπῶς αἱ εὐθεῖαι ΔΖ καὶ ΒΓ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΜ.

Ἡ ΑΜ προεκτεινομένη τέμνει τὴν ΕΗ εἰς τὸ σημεῖον Ν.

Αἱ γωνίαι ΕΑΜ καὶ ΗΑΜ εἶναι ἴσαι, διότι ἑκάστη τούτων εἶναι ἄθροισμα μιᾶς ὀρθῆς γωνίας καὶ τῶν ἴσων γωνιῶν $Α_1$ καὶ $Α_2$· ἄρα καὶ αἱ παραπληρωματικαὶ αὐτῶν γωνίαι $Α_5$ καὶ $Α_4$ εἶναι ἴσαι. Ἡ ΜΑΝ εἶναι λοιπὸν διχοτόμος τῆς γωνίας Α τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΗΕ καὶ ἐπομένως εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΕΗ. Ὥστε ἡ ΒΓ καὶ ΕΗ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΝΑΜ.

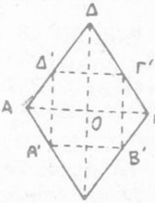
Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΕΗ καὶ ΔΖ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΓ, θὰ εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλοι· ἤτοι ἡ ΔΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΕΗ.

240. ***Δίδεται ἕνας ρόμβος* ΑΒΓΔ· *ἐπὶ τῶν πλευρῶν του* ΑΒ *καὶ* ΑΔ *λαμβάνομεν μήκη* ΑΑ' *καὶ* ΑΔ' *ἴσα, ἐπὶ δὲ τῶν πλευρῶν του* ΓΒ *καὶ* ΓΔ *λαμβάνομεν μήκη* ΓΒ' *καὶ* ΓΓ', *ἀντιστοίχως, ἴσα πρὸς τὰ πρῶτα. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα* Α', Β', Γ', Δ' *εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου.***

Τὰ τρίγωνα ΑΑ'Δ' καὶ ΓΓ'Β' εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν

$ΑΑ'=ΑΔ'=ΓΒ'=ΓΓ'$ ἐξ ὑποθέσεως καὶ $\widehat{Α}=\widehat{Γ}$ ὡς ἀπέναντι γωνίαι τοῦ ρόμβου ΑΒΓΔ. Ἄρα θὰ εἶναι $Α'Δ'=Β'Γ'$. Ὁμοίως τὰ τρίγωνα ΔΔ'Γ' καὶ ΒΑ'Β' εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν

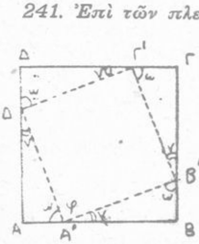
$$ΔΔ'=ΔΓ'=ΒΒ'=ΒΑ'$$



Σχ. 204

ὡς ὑπόλοιπα τῶν ἴσων πλευρῶν τοῦ ρόμβου ἀπὸ τὰς ὁποίας ἀφῃρέθησαν ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα, καὶ $\widehat{Δ}=\widehat{Β}$· ἄρα θὰ εἶναι $Δ'Γ'=Α'Β'$. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν Α'Β'Γ'Δ' εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ ἀπέναντι πλευραί του εἶναι ἴσαι. Φέρομεν τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΒΔ τοῦ ρόμβου ΑΒΓΔ, αἱ ὁποῖαι εἶναι κάθετοι μεταξύ των. Ἡ ΑΓ ὡς διχοτόμος τῆς γωνίας Α τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΑ'Δ' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν του Α'Δ' ἄρα αἱ Δ'Α' καὶ ΔΒ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΓ. Ὁμοίως ἡ Β'Γ' εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι αἱ Α'Β' καὶ Δ'Γ' εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΓ. Αἱ διαδοχικαὶ πλευραὶ λοιπὸν τοῦ παραλληλογράμμου Α'Β'Γ'Δ' εἶναι κάθετοι μεταξύ των, διότι αἱ παράλληλοι πρὸς αὐτὰς ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι κάθετοι. Τὸ παραλληλόγραμμον λοιπὸν Α'Β'Γ'Δ' εἶναι ὀρθογώνιον.

241. ***Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς τετραγώνου* ΑΒΓΔ *λαμβάνομεν κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν μήκη* $ΑΑ'=ΒΒ'=ΓΓ'=ΔΔ'$. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα* Α', Β', Γ', Δ' *εἶναι κορυφαὶ τετραγώνου.***



Σχ. 205

Φέρομεν τὰς εὐθείας Α'Β', Β'Γ', Γ'Δ', Δ'Α'. Τὰ σχηματισθέντα ὀρθογώνια τρίγωνα Δ'ΑΑ', Α'ΒΒ', Β'ΓΓ' καὶ Γ'ΔΔ' εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς καθέτους πλευράς των ἴσας· ἤτοι ἔχουν

$$ΑΑ'=ΒΒ'=ΓΓ'=ΔΔ'$$

ἐξ ὑποθέσεως καί

$$Δ'Α=Α'Β=Β'Γ=Γ'Δ$$

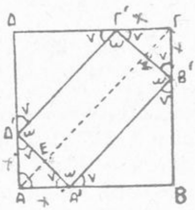
ὡς ὑπόλοιπα τῶν ἴσων πλευρῶν τοῦ τετραγώνου ἀπὸ τῶν ὁποίων ἀφῃρέθησαν ἴσα τμήματα· ἄρα θὰ ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας καὶ τὰς ὀξείας γωνίας ἴσας· ἤτοι θὰ εἶναι Α'Β'=Β'Γ'=Γ'Δ'=Δ'Α' καὶ αἱ γωνίαι ν εἶναι ἴσαι μεταξύ των, καθὼς καὶ αἱ γωνίαι ω ἴσαι μεταξύ των. Ἐπειδὴ Α'Β'=Β'Γ'=Γ'Δ'=Δ'Α' τὸ τετράπλευρον Α'Β'Γ'Δ' εἶναι ρόμβος. Αἱ γωνίαι ω, φ, ν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κορυφὴν τὸ Α' ἔχουν ἄθροισμα 2 ὀρθῶν, ἤτοι εἶναι

ω+φ+ν=2 ὀρθ. ἢ φ=2 ὀρθ.—(ω+ν) (1).

Ἀλλὰ ω+ν=1 ὀρθή, διότι εἶναι αἱ ὀξεῖαι γωνίαι ὀρθογωνίου τριγώνου. Ἑπομένως ἡ ἰσότης (1) γίνεται φ=2 ὀρθ.—1 ὀρθ.=1 ὀρθ. Ἐπειδὴ ὁ ρόμβος Α'Β'Γ'Δ' ἔχει μίαν γωνίαν ὀρθὴν ἔχει καὶ τὰς ἄλλας γωνίας του ὀρθάς, ἤτοι εἶναι τετράγωνον.

242. Δίδεται τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ· *ἐπὶ τῶν πλευρῶν* ΑΒ *καὶ* ΑΔ *τῆς γωνίας* Α *λαμβάνομεν τμήματα* ΑΑ'=ΑΔ'· *ἐπίσης ἐπὶ τῶν πλευρῶν* ΓΒ *καὶ* ΓΔ *τῆς γωνίας* Γ *λαμβάνομεν τμήματα* ΓΒ'=ΓΓ' *ἴσα πρὸς τὰ* ΑΑ' *καὶ* ΑΔ'. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα* Α', Β', Γ', Δ' *εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι σταθερά.*

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΑ'Δ', ΒΒ'Α', ΓΓ'Β', ΔΔ'Γ' εἶναι ἰσοσκελῆ καὶ ἐπομένως κάθε μία ἀπὸ τὰς παρὰ τὴν βάσιν γωνίας του ν εἶναι ἴση μὲ 45°. Αἱ περὶ το Α' τρεῖς διαδοχικαὶ γωνίαι ἔχουν ἄθροισμα 180°· ἐπειδὴ δὲ αἱ δύο γωνίαι ν ἔχουν ἄθροισμα 90°, ἡ τρίτη γωνία ω εἶναι ἴση μὲ 90°. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι



Σχ. 206

ω=Α'=Β'=Γ'=Δ'=90°.

Ὥστε τὸ τετράπλευρον Α'Β'Γ'Δ' ἔχει ὅλας τὰς γωνίας του ὀρθάς· ἄρα εἶναι ὀρθογώνιον. Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Α'Δ' εἰς τὸ Ε καὶ τὴν Β'Γ' εἰς τὸ Ζ. Ἐπειδὴ ἡ ΑΓ διχοτομεῖ τὰς γωνίας Α καὶ Γ θὰ εἶναι διάμεσος καὶ ὕψος τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ΑΑ'Δ' καὶ ΓΓ'Β'. Τὰ Ε καὶ Ζ εἶναι μέσα τῶν Α'Δ' καὶ Β'Γ'. Εἰς τὸ τρίγωνον ΕΑΑ' αἱ γωνίαι του Α=Α'=45°· ἄρα θὰ εἶναι ΕΑ'=ΕΑ. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι ΖΒ'=ΖΓ. Ἡ ἡμιπερίμετρος λοιπὸν ΕΑ'Β'Ζ τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἴση μὲ τὴν διαγώνιον ΑΓ τοῦ τετραγώνου, διότι

ΕΑ'+Α'Β'+Β'Ζ=ΑΕ+ΕΖ+ΖΓ=ΑΓ.

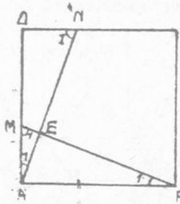
Ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ ὀρθογωνίου Α'Β'Γ'Δ' εἶναι σταθερά, διότι εἶναι ἴση μὲ 2ΑΓ.

243. Δίδεται ἕνα τετράγωνον ΑΒΓΔ· *ἐπὶ τῶν πλευρῶν του* ΑΔ *καὶ* ΔΓ *λαμβάνομεν τμήματα* ΑΜ *καὶ* ΔΝ *ἴσα. Φέρομεν τὰς εὐθείας* ΒΜ *καὶ* ΑΝ. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ* ΑΝ *εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν* ΒΜ.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΜΑΒ καὶ ΝΔΑ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς καθέτους πλευρὰς των ἴσας μίαν πρὸς μίαν· ἤτοι ἔχουν ΑΒ=ΑΔ, ὡς πλευρὰς τετραγώνου καὶ ΑΜ=ΑΝ ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα θὰ ἔχουν

$\widehat{B_1}=\widehat{A_1}$ καὶ $\widehat{M_1}=\widehat{N_1}$. Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΜΑΒ αἱ ὀξεῖαι γωνίαι του ω καὶ ν εἶναι συμπληρωματικαί, ἤτοι εἶναι $\widehat{B_1}+\widehat{M_1}=1$ ὀρθ. (1).

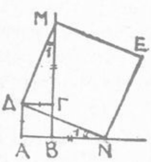
Ἀλλὰ $B_1=A_1$ ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω, ἄρα ἡ ἰσότης (1) γράφεται $A_1+M_1=1$ ὀρθ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΜΕΑ αἱ δύο γωνίαι του A_1 καὶ M_1 ἔχουν ἄθροισμα 1 ὀρθὴν γωνίαν, ἄρα ἡ τρίτη γωνία του Ε εἶναι ὀρθή. Ὥστε αἱ ΑΝ καὶ ΒΜ εἶναι κάθετοι μεταξύ των.



Σχ. 207

244. ***Δίδεται ἕνα τετράγωνον*** **ΑΒΓΔ.** ***Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν*** **ΑΒ** ***κατὰ ἕνα μῆκος*** **ΑΝ>ΑΒ.** ***Ἐπίσης προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν*** **ΒΓ** ***καὶ λαμβάνομεν ἕνα μῆκος*** **ΓΜ=ΑΝ.** ***Κατασκευάζομεν τὸ παραλληλόγραμμον*** **ΔΝΕΜ·** ***Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τοῦτο εἶναι τετράγωνον.***

Τὰ ὀρθογ. τρίγωνα ΑΔΝ καὶ ΔΓΜ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ΑΔ=ΔΓ ὡς πλευρὰς τετραγώνου, ΑΝ=ΓΜ ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ΔΝ=ΔΜ καὶ $\widehat{N_1}=\widehat{M_1}$.



Σχ. 208

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι N_1 καὶ M_1 εἶναι ἴσαι καὶ ἔχουν τὰς πλευράς των ΝΒ καὶ ΜΓ καθέτους καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν, ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτάς, αἱ δύο ἄλλαι πλευραί των ΝΔ καὶ ΔΜ θὰ εἶναι κάθετοι μεταξύ των. Ὥστε ἡ γωνία ΜΔΝ εἶναι ὀρθή.

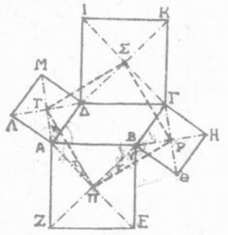
Ὥστε τὸ παραλληλόγραμμον ΜΔΝΕ ἔχει μίαν γωνίαν ὀρθὴν καὶ δύο διαδοχικὰς πλευρὰς ΔΝ, ΔΜ ἴσας· ἄρα εἶναι τετράγωνον.

245. ***Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς παραλληλογράμμου*** **ΑΒΓΔ** ***κατασκευάζομεν τέσσαρα τετράγωνα*** **ΑΒΕΖ, ΒΓΗΘ, ΓΔΙΚ, ΔΑΛΜ,** ***τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐκτὸς τοῦ παραλληλογράμμου. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ κέντρα*** **Π, Ρ, Σ, Τ** ***τῶν τεσσάρων τετραγώνων εἶναι κορυφαὶ ἑνὸς ἄλλου τετραγώνου.***

Φέρομεν τὰς εὐθείας ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΠ· θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΠΡΣΤ εἶναι τετράγωνον.

Γνωρίζομεν, ὅτι αἱ διαγώνιοι τετραγώνου εἶναι καὶ διχοτόμοι τῶν ἀπέναντι γωνιῶν του· ὥστε κάθε μία ἀπὸ τὰς γωνίας ν εἶναι 45°. Αἱ γωνίαι ΔΑΒ καὶ ΕΒΘ εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους μίαν πρὸς μίαν· πράγματι ἡ ΕΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐκ κατασκευῆς, ἡ ΘΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ ἐκ κατασκευῆς, ἄρα θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΑΔ.

Τὰ τρίγωνα ΤΑΠ καὶ ΠΡΒ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην· ἤτοι ἔχουν ΑΤ=ΒΡ ὡς ἡμίση τῶν ἴσων διαγωνίων ΑΜ καὶ ΒΗ τῶν ἴσων τετραγώνων ΔΑΛΜ καὶ ΒΓΗΘ, ΑΠ=ΠΒ, ὡς ἡμίση τῶν ἴσων διαγωνίων τοῦ τετραγώνου ΑΒΕΖ καὶ γων. ΤΑΠ=γων. ΠΒΡ, διότι ἑκάστη τούτων ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο γωνίας ἴσας μὲ 45° καὶ ἀπὸ τὰς ἴσας γωνίας ΔΑΒ καὶ ΕΒΘ· ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ θὰ ἔχουν ΤΠ=ΠΡ καὶ τ=τ'. 'Ομοίως ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων ΠΒΡ, ΡΣΓ καὶ ΣΔΤ εὑρίσκομεν, ὅτι ΠΡ=ΡΣ=ΣΤ.



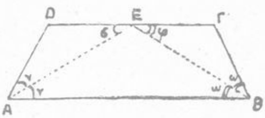
Σχ. 209

"Ωστε τὸ τετράπλευρον ΠΡΣΤ ἔχει τὰς πλευράς του ἴσας· ἐξ ἄλλου ἡ γωνία ΤΠΡ εἶναι ἴση μὲ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΑΠΒ, διότι καθεμία ἐξ αὐτῶν ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν κοινὴν γωνίαν ΤΠΒ καὶ ἀπὸ τὰς ἴσας γωνίας τ καὶ τ'. "Ωστε εἶναι $T\widehat{\Pi}P=90°$.

'Ομοίως εὑρίσκομεν, ὅτι καὶ αἱ ἄλλαι τρεῖς γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ΠΡΣΤ εἶναι ὀρθαί. "Ωστε τὸ τετράπλευρον ΠΡΣΤ ἔχει τὰς πλευράς του ἴσας καὶ τὰς γωνίας του ὀρθάς· ἄρα εἶναι τετράγωνον.

Δ' 'Ομάς. ***246.*** ***Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν ἡ μικροτέρα βάσις ἑνὸς τραπεζίου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του, αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, ποὺ πρόσκειται εἰς τὴν μεγαλυτέραν βάσιν, τέμνουν τὴν μικροτέραν βάσιν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.***

"Εστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ εἰς τὸ ὁποῖον ἡ μικροτέρα βάσις ΓΔ εἶναι ἴση μὲ ΑΔ+ΒΓ. "Εστω ΑΕ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α, ἡ ὁποία τέμνει τὴν βάσιν ΔΓ εἰς τὸ Ε. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ Ε εἶναι σημεῖον καὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Β.



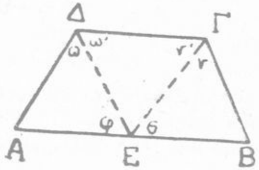
Σχ. 210

'Επειδὴ ἡ ΑΕ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α θὰ εἶναι ν=ν'· ἀλλὰ ν=σ, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΔΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΕ· ἄρα θὰ εἶναι καὶ ν'=σ. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΔΑΕ εἶναι ἰσοσκελές· ἄρα θὰ εἶναι ΔΕ=ΔΑ (1). 'Εξ ὑποθέσεως ἡ ΔΓ εἶναι ἴση μὲ ΑΔ+ΒΓ· ἐπειδὴ δὲ εἶναι ΔΕ=ΑΔ ἕπεται, ὅτι θὰ εἶναι ΕΓ=ΓΒ.

Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΓΕΒ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι φ=ω'· ἀλλὰ φ=ω, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΕΒ· ἄρα θὰ εἶναι ω=ω'· ἤτοι ἡ ΒΕ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Β. "Ωστε αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Α καὶ Β τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ε τῆς ΔΓ.

247. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ὅταν ἡ μεγαλυτέρα βάσις ἑνὸς τραπεζίου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του, αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, ποὺ πρόσκειται εἰς τὴν μικροτέραν βάσιν τέμνουν τὴν μεγάλην βάσιν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ μεγαλυτέρα βάσις ΑΒ εἶναι ἴση μὲ ΑΔ+ΒΓ, ἤτοι ἔστω ΑΒ=ΑΔ+ΒΓ. Ἔστω ΔΕ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Δ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ε. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ Ε εἶναι σημεῖον καὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Γ.



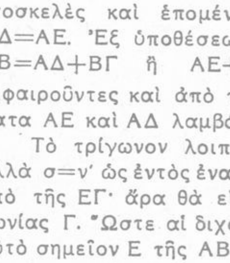
Σχ. 211

Ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Δ θὰ εἶναι ω=ω'· ἀλλὰ ω'=φ, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνομένων ὑπό τῆς ΔΕ· ἄρα θὰ εἶναι ω=φ. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΔΕ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΑΔ=ΑΕ. Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΑΒ=ΑΔ+ΒΓ ἢ ΑΕ+ΕΒ=ΑΔ+ΒΓ. Ἀφαιροῦντες καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς τὰ ἴσα τμήματα ΑΕ καὶ ΑΔ λαμβάνομεν ΕΒ=ΒΓ.

Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΒΕΓ εἶναι ἰσοσκελές· ἄρα θὰ εἶναι σ=ν· ἀλλὰ σ=ν' ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΕΓ· ἄρα θὰ εἶναι ν'=ν. Ἡ ΓΕ εἶναι λοιπὸν διχοτόμος τῆς γωνίας Γ. Ὥστε αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Δ καὶ Γ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ε τῆς ΑΒ.

***248.** Ἂν ἀπὸ τὰς κορυφὰς ἑνὸς τετραπλεύρου φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὰς διαγωνίους του, σχηματίζεται ἕνα παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ δοθέντος τετραπλεύρου.*

Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Ἀπὸ τὰς κορυφάς του Α, Β, Γ, Δ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς διαγωνίους του ΑΓ καὶ ΒΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.



Σχ. 212

Τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ ἀπέναντι πλευραί του εἶναι παράλληλοι ἐκ κατασκευῆς. Ἔστω Ο τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ. Αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ διαιροῦν τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖΗΘ εἰς τέσσαρα παραλληλόγραμμα ΑΕΒΟ, ΒΖΓΟ, ΟΓΗΔ καὶ ΔΘΑΟ. Ἡ πλευρὰ ΑΒ τοῦ τετραπλεύρου διαιρεῖ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΕΒΟ εἰς δύο ἴσα τρίγωνα ΑΕΒ καὶ ΑΒΟ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι παραραλλόγρ. ΑΕΒΟ=2 τρίγ. ΑΟΒ (1).

Ὁμοίως καὶ κάθε ἄλλη πλευρὰ τοῦ τετραπλεύρου διαιρεῖ κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ τρία ἄλλα παραλληλόγραμμα εἰς δύο ἴσα τρίγωνα· ἤτοι εἶναι

παραλληλόγρ. ΒΖΓΟ=2 τριγ. ΟΒΓ (2)
παραλληλόγρ. ΟΓΗΔ=2 τριγ. ΟΓΔ (3)
παραλληλόγρ. ΔΘΑΟ=2 τριγ. ΑΟΔ (4)

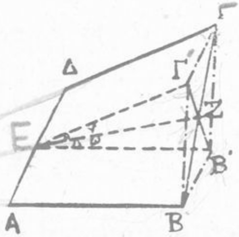
Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (1), (2), (3), (4) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

ΑΕΒΟ+ΒΖΓΟ+ΟΓΗΔ+ΔΘΑΟ=
=2 (τριγ. ΟΑΒ+τριγ. ΟΒΓ+τριγ. ΟΓΔ+τριγ. ΟΔΑ)

ἢ παραλληλ. ΕΖΗΘ=2 τετραπλ. ΑΒΓΔ.

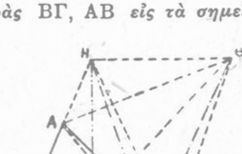
249. ***Δίδεται ἕνα τετράπλευρον*** ΑΒΓΔ, ***τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ*** ΑΒ ***καὶ*** ΓΔ ***εἶναι ἴσαι. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα*** ΕΖ, ***ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του σχηματίζει ἴσας γωνίας μὲ τὴν*** ΑΒ ***καὶ*** ΔΓ.

Φέρομεν τὴν ΓΓ' καὶ ΕΓ' παραλλήλους πρὸς τὰς ΔΑ καὶ ΔΓ. 'Επίσης φέρομεν τὰς ΒΒ' καὶ ΕΒ' παραλλήλους πρὸς τὰς ΑΔ καὶ ΑΒ. 'Απὸ τὰ παραλληλόγραμμα ΔΕΓ'Γ καὶ ΑΒΒ'Ε ἔχομεν ΕΓ'=ΔΓ, ΓΓ'=ΕΔ, ΕΒ'=ΑΒ. ΒΒ'=ΕΑ. 'Επειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΑΒ=ΔΓ καὶ ΔΕ=ΕΑ. θὰ εἶναι ΕΓ'=ΕΒ' καὶ ΓΓ'=ΒΒ'. 'Επειδὴ αἱ ΓΓ' καὶ ΒΒ' εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. ὡς παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΔ, τὸ τετράπλευρον ΒΒ'ΓΓ' εἶναι παραλληλόγραμμον, καὶ ἑπομένως αἱ διαγώνιοι του ΒΓ καὶ Β'Γ' θὰ διχοτομοῦνται εἰς τὸ Ζ. 'Αλλὰ τότε εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΕΒ'Γ' ἡ ΕΖ ὡς διάμεσος θὰ εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας Ε καὶ ἑπομένως αἱ γωνίαι ν καὶ ω εἶναι ἴσαι. ῞Ωστε ἡ ΕΖ σχηματίζει ἴσας γωνίας ω καὶ ν μὲ τὰς ΕΒ' καὶ ΕΓ', ἄρα θὰ σχηματίζῃ ἴσας γωνίας καὶ μὲ τὰς παραλλήλους των ΑΒ καὶ ΔΓ.



Σχ. 213

250. ***Δίδεται ἕνα τρίγωνον*** ΑΒΓ. ***Αἱ μεσοκάθετοι*** ΔΟ, ΕΟ ***τῶν πλευρῶν του*** ΑΒ, ΒΓ, ***προεκτεινόμεναι, τέμνουν τὰς πλευρὰς*** ΒΓ, ΑΒ ***εἰς τὰ σημεῖα*** Ζ, Η ***ἀντιστοίχως. 'Εὰν σχηματίσωμεν τὸ παραλληλόγραμμον*** ΗΒΖΘ, ***νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ*** ΟΘ ***εἶναι μεσοκάθετος τῆς πλευρᾶς*** ΑΓ.



Σχ. 214

'Επειδὴ ἡ ΖΔ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ, θὰ εἶναι ΖΑ=ΖΒ. 'Αλλὰ ΗΘ=ΖΒ ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΒΖΘΗ, ἄρα θὰ εἶναι ΑΖ=ΗΘ. Τὸ τραπέζιον λοιπὸν ΑΗΘΖ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΑΘ=ΗΖ (1).

'Επειδὴ ἡ ΗΕ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ, θὰ εἶναι ΗΒ=ΗΓ. 'Αλλὰ ΗΒ=ΘΖ, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΒΖΘΗ· ἄρα θὰ εἶναι ΗΓ=ΘΖ. Τὸ τραπέζιον λοιπὸν

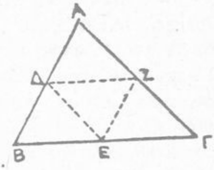
ΓΖΘΗ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΘΓ=ΗΖ (2). Ἀπὸ τὰς (1) καὶ (2) λαμβάνομεν ΘΑ=ΘΓ. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΘΑΓ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως τὸ ὕψος του ΘΜ θὰ εἶναι διάμεσός του. Ὥστε ἡ ΘΜΔ εἶναι μεσοκάθετος τῆς πλευρᾶς ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'.

Ἐφαρμογαὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν παραλληλογράμμων

Α' Ὁμάς. 251. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τριγώνου μὲ μίαν ἀπὸ τὰς κορυφάς του, εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Δ, Ε, Ζ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του· Φέρομεν τὰς εὐθείας ΔΕ, ΕΖ, ΖΔ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ ΑΔΕΖ, ΒΕΖΔ καὶ ΓΖΔΕ εἶναι παραλληλόγραμμα.



Σχ. 215

Πράγματι εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ εὐθεῖα ΔΕ συνδέει τὰ μέσα Δ καὶ Ε δύο πλευρῶν του, ἄρα ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευράν του ΑΓ.

Ὁμοίως εἰς τὸ αὐτὸ τρίγωνον ἡ εὐθεῖα ΕΖ συνδέει τὰ μέσα Ε καὶ Ζ δύο πλευρῶν του· ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευράν του ΑΒ. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΑΔΕΖ ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους· ἄρα εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ τὰ τετράπλευρα ΒΕΖΔ καὶ ΓΖΔΕ εἶναι παραλληλόγραμμα.

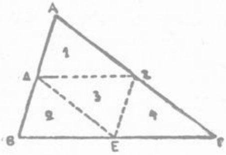
252. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι κορυφαὶ ἄλλου τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ πρώτου ἀντιστοίχως καὶ ἴσαι μὲ τὰ ἡμίση αὐτῶν.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 215) καὶ Δ, Ε, Ζ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς.

Ἡ εὐθεῖα ΔΕ συνδέει τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ τοῦ τριγώνου· ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν του ΑΓ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τὰς ἄλλας πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΔΕΖ.

253. Αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου διαιροῦν τὸ τρίγωνον εἰς τέσσαρα ἴσα τρίγωνα.

Ἐδείχθη εἰς τὴν ἄσκ. 251, ὅτι τὰ ΑΔΕΖ, ΒΕΖΔ. ΓΖΔΕ εἶναι παραλληλόγραμμα. Ἐπειδὴ ἡ διαγώνιος ἑνὸς παραλληλογράμμου χωρίζει αὐτὸ εἰς ἴσα τρίγωνα ἕπεται, ὅτι τὰ τρίγωνα 1 καὶ 3 εἶναι ἴσα, διότι ἡ ΔΖ εἶναι διαγώνιος τοῦ παραλληλογράμμου ΑΔΕΖ. Ὁμοίως εἶναι ἴσα τὰ τρίγωνα 3 καὶ 4, καθὼς τὰ 2 καὶ 3· ἄρα τὰ τρίγωνα 1, 2, 3, 4 εἶναι ἴσα μεταξύ των.

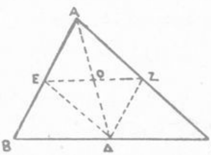


Σχ. 216

254. ***Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου, διχοτομεῖ τὴν διάμεσον, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τρίτην πλευράν του.***

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ΑΔ ἡ διάμεσός του καὶ ΕΖ ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα Ε καὶ Ζ τῶν πλευρῶν του ΑΒ καὶ ΑΓ. Ἔστω Ο τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ΑΔ καὶ ΕΖ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΑΟ=ΟΔ καὶ ΕΟ=ΟΖ.

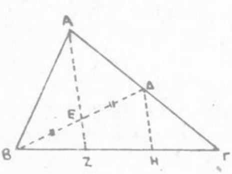
Φέρομεν τὰς ΕΔ καὶ ΑΖ. Τὸ τετράπλευρον ΑΕΔΖ εἶναι παραλληλόγραμμον, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν ἄσκ. 251. Ἄρα αἱ διαγώνιοί του ΑΔ καὶ ΕΖ διχοτομοῦνται. Θὰ εἶναι λοιπὸν ΑΟ=ΟΔ καὶ ΕΟ=ΟΖ.



Σχ. 217

255. ***Εἰς ἕνα τρίγωνον*** **ΑΒΓ** ***φέρομεν τὴν διάμεσον*** **ΒΔ** ***καὶ ἔστω*** **Ε** ***τὸ μέσον αὐτῆς. Φέρομεν ἔπειτα τὴν εὐθεῖαν*** **ΑΕ**, ***ἡ ὁποία τέμνει τὴν*** **ΒΓ** ***εἰς τὸ*** **Ζ.** ***Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι*** **ΖΓ=2ΒΖ.**

Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΖ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Η. Εἰς τὸ τρίγωνον ΓΑΖ ἡ ΔΗ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΖ καὶ ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον Δ τῆς ΑΓ· ἄρα θὰ διέλθῃ ἀπὸ τὸ μέσον Η τῆς ΖΓ, ἤτοι θὰ εἶναι ΖΗ=ΗΓ (1). Εἰς τὸ τρίγωνον ΒΔΗ ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΗ καὶ ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον Ε τῆς ΒΔ· ἄρα θὰ διέλθῃ ἀπὸ τὸ μέσον Ζ τῆς πλευρᾶς ΒΗ, ἤτοι θὰ εἶναι ΒΖ=ΖΗ (2). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι ΒΖ=ΖΗ=ΗΓ ἄρα ΖΓ=2.ΒΖ.

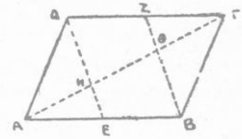


Σχ. 218

256. ***Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰς ἀπέναντι κορυφὰς παραλληλογράμμου εἰς τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του, διαιροῦν τὴν διαγώνιόν του εἰς τρία ἴσα μέρη.***

Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, Ε καὶ Ζ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΔΕ καὶ ΒΖ· θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ΔΕ καὶ ΒΖ τριχοτομοῦν τὴν διαγώνιον ΑΓ, ἤτοι ὅτι εἶναι ΑΗ=ΗΘ=ΘΓ.

Ἐπειδὴ αἱ ΔΖ καὶ ΕΒ εἶναι ἴσαι, ὡς ἡμίση τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ΔΓ καὶ ΑΒ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, καὶ παράλληλοι, τὸ τετράπλευρον ΕΒΖΔ εἶναι παραλληλόγραμμον· ἄρα αἱ ΔΕ καὶ ΖΒ εἶναι παράλληλοι. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΘ ἡ ΕΗ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΘ καὶ ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον Ε τῆς πλευρᾶς του ΑΒ· ἄρα θὰ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Η τῆς ΑΘ, ἤτοι θὰ εἶναι ΑΗ=ΗΘ (1).

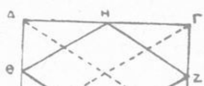


Σχ. 219

Ὁμοίως εἰς τὸ τρίγωνον ΓΔΗ, ἡ ΖΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΗ καὶ ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον Ζ τῆς πλευρᾶς του ΓΔ· ἄρα θὰ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Θ τῆς ἄλλης πλευρᾶς του, ἤτοι θὰ εἶναι ΗΘ=ΘΓ (2). Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι ΑΗ=ΗΘ=ΘΓ.

257. ***Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν : 1ον Ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι κορυφαὶ ρόμβου. 2ον Ἑνὸς ρόμβου εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου. 3ον Ἑνὸς τετραγώνου εἶναι κορυφαὶ ἄλλου τετραγώνου.***

1ον. Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ καὶ Ε, Ζ, Η, Θ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι ρόμβος.



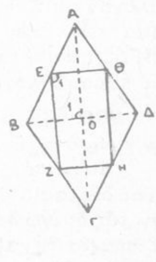
Σχ. 220

Ἐν πρώτοις τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ κορυφαί του εἶναι μέσα τῶν πλευρῶν τετραπλεύρου (§ 173). Εἶναι δὲ καὶ ρόμβος, διότι αἱ δύο διαδοχικαὶ πλευραί του ΕΖ καὶ ΖΗ εἶναι ἴσαι· πράγματι εἶναι

$$ΕΖ=\frac{1}{2}ΑΓ \quad καὶ \quad ΖΗ=\frac{1}{2}ΒΔ.$$

Ἐπειδὴ ΑΓ=ΒΔ, ὡς διαγώνιοι ὀρθογωνίου ἕπεται, ὅτι ΕΖ=ΖΗ.

2ον. Ἔστωσαν Ε, Ζ, Η, Θ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ ρόμβου ΑΒΓΔ (Σχ. 221)· θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι ὀρθογώνιον.



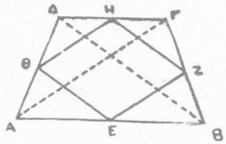
Σχ. 221

Τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ κορυφαί του Ε, Ζ, Η, Θ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τετραπλεύρου ΑΒΓΔ· αἱ πλευραί τοῦ ΕΖΗΘ εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς διαγωνίους τοῦ δοθέντος τετραπλεύρου. Αἱ γωνίαι ΖΕΘ καὶ ΑΟΒ εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ ἀντιθέτου φορᾶς. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι ὀρθή, διότι αἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου τέμνονται καθέτως, ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ἴση πρὸς αὐτὴν γωνία Ε εἶναι ὀρθή. Τὸ παραλληλόγραμμον λοιπὸν ΕΖΗΘ ἔχει μίαν γωνίαν του ὀρθήν, ἄρα εἶναι ὀρθογώνιον.

3ον. Ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ρόμβος ἔπεται, ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του εἶναι κορυφαὶ ρόμβου καὶ ὀρθογωνίου. Δηλ. τὸ τετράπλευρον αὐτὸ εἶναι τετράγωνον, διότι ἔχει τὰς πλευράς του ἴσας καὶ τὰς γωνίας του ὀρθάς.

258. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου εἶναι κορυφαὶ ρόμβου.

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ καὶ Ε, Ζ, Η, Θ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι ρόμβος.



Σχ. 222

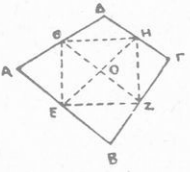
Ἐν πρώτοις τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ κορυφαί του εἶναι μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Εἶναι δὲ

$$ΕΖ = \frac{1}{2} ΑΓ \quad \text{καὶ} \quad ΖΗ = \frac{1}{2} ΒΓ.$$

Ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι ἴσαι, ὡς διαγώνιοι ἰσοσκελοῦς τραπεζίου, θὰ εἶναι καὶ ΕΖ=ΖΗ· τὸ παραλληλόγραμμον λοιπὸν ΕΖΗΘ ἔχει δύο διαδοχικὰς πλευρὰς ΕΖ καὶ ΖΗ ἴσας, ἄρα εἶναι ρόμβος.

259. Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τετραπλεύρου εἶναι ἴσαι, τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος τετραπλεύρου, εἶναι ὀρθογώνιον.

Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ Ε, Ζ, Η, Θ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΕΗ καὶ ΖΘ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Ο· ἐὰν εἶναι ΕΗ=ΖΘ, θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι ὀρθογώνιον.



Σχ. 223

Τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ κορυφαί του εἶναι μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι ΕΗ καὶ ΖΘ τοῦ παραλληλογράμμου ΕΖΗΘ εἶναι ἴσαι, τὸ ΕΖΗΘ εἶναι ὀρθογώνιον.

260. Ἐὰν μία βάσις τραπεζίου εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης, ἡ διάμεσός του διαιρεῖται εἰς τρία ἴσα μέρη ὑπὸ τῶν διαγωνίων του.

Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ (Σχ. 224), τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ΑΒ εἶναι διπλασία τῆς ΓΔ, ἤτοι ΑΒ=2ΓΔ, καὶ ΕΖ ἡ διάμεσός του. Φέρομεν τὰς διαγωνίους του ΑΓ καὶ ΒΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ΕΖ εἰς τὰ σημεῖα Η καὶ Θ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΕΗ=ΗΘ=ΘΖ.

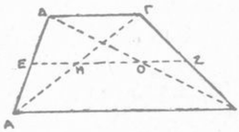
Γνωρίζομεν, ὅτι ἡ διάμεσος τραπεζίου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο βάσεών του· ἤτοι εἶναι

$$ΕΖ = \frac{ΑΒ+ΓΔ}{2} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΑΒ=2.ΓΔ, ἡ ἰσότης (1) γίνεται

$$ΕΖ=\frac{3.ΓΔ}{2} \quad ἢ \quad ΕΗ+ΗΘ+ΘΖ=\frac{3.ΓΔ}{2} \quad (2)$$

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΓ, ἡ ΕΗ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΓ καὶ ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον Ε τῆς πλευρᾶς ΑΔ· ἄρα ἡ ΕΗ θὰ διέλθῃ ἀπὸ τὸ μέσον τῆς τρίτης πλευρᾶς του καὶ θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΔΓ· ἤτοι θὰ εἶναι



Σχ. 224

$$ΕΗ=\frac{ΔΓ}{2} \quad (3)$$

Ὁμοίως ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΒΓΔ θὰ ἔχωμεν

$$ΖΘ=\frac{ΔΓ}{2} \quad (4)$$

Εἰς τὴν ἰσότητα (2) ἀντικαθιστῶμεν τὰ ΕΗ καὶ ΖΘ διὰ τῶν ἴσων των καὶ ἔχομεν

$$\frac{ΔΓ}{2}+ΗΘ+\frac{ΔΓ}{2}=\frac{3.ΔΓ}{2} \quad ἢ \quad ΗΘ=\frac{ΔΓ}{2} \quad (5)$$

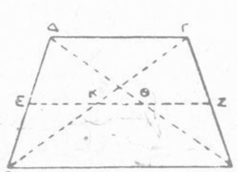
Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (3), (4), (5) συνάγομεν ὅτι

$$ΕΗ=ΗΘ=ΘΖ=\frac{ΔΓ}{2}.$$

261. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διάμεσος τραπεζίου διέρχεται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του καὶ ὅτι τὸ τμῆμα τῆς διαμέσου, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν διαγωνίων του εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου.

Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ καὶ ΕΖ ἡ διάμεσός του. Εἰς τὸ τρίγωνον ΔΑΒ, ἡ ΕΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον Ε τῆς πλευρᾶς του ΔΑ· ἄρα θὰ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Θ τῆς πλευρᾶς του ΔΒ καὶ θὰ εἶναι $ΕΘ=\frac{ΑΒ}{2}$ (1)

Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΕΖ εἰς τὸ Κ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΓ, ἡ ΕΚ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΓ καὶ ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ΔΑ· ἄρα θὰ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Κ τῆς πλευρᾶς ΑΓ καὶ θὰ εἶναι



Σχ. 225

$$ΕΚ=\frac{ΓΔ}{2} \quad (2)$$

Ἀφαιροῦντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

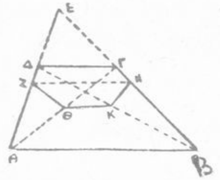
$$ΕΘ-ΕΚ=\frac{ΑΒ}{2}-\frac{ΓΔ}{2}$$

$$ἢ \quad ΚΘ=\frac{ΑΒ-ΓΔ}{2}.$$

Ἡ ΚΘ εἶναι τμῆμα τῆς διαμέσου ΕΖ τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΖ καὶ συνδέει τὰ μέσα Κ καὶ Θ τῶν διαγωνίων του.

262. Προεκτείνομεν τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς ἑνὸς τραπεζίου ΑΒΓΔ *μέχρι τῆς συναντήσεώς των εἰς ἕνα σημεῖον* Ε. *'Εὰν* Ζ, Η, Θ, Κ *εἶναι τὰ μέσα τῶν* ΑΕ, ΒΕ *καὶ τῶν διαγωνίων* ΑΓ *καὶ* ΒΔ, *νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ* ΘΚΗΖ *εἶναι τραπέζιον.*

'Αρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ΖΗ καὶ ΘΚ εἶναι παράλληλοι. Εἰς τὸ τρίγωνον ΕΑΒ, ἡ εὐθεῖα ΖΗ συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο πλευρῶν του· ἄρα ἡ ΖΗ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευράν του ΑΒ. Γνωρίζομεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ἑνὸς τραπεζίου εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις του· ἄρα ἡ ΘΚ θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ. Αἱ ΖΗ καὶ ΘΚ εἶναι παράλληλοι μεταξύ των, ὡς παράλληλοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΖΘΚΗ εἶναι τραπέζιον, διότι αἱ δύο ἀπέναντι πλευραί του ΘΚ καὶ ΖΗ εἶναι παράλληλοι.



Σχ. 226

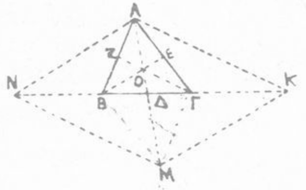
'Ασκήσεις ἐπὶ τοῦ Ζ' κεφαλαίου

Α' 'Ομάς. 264. Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ *φέρομεν τὰς διαμέσους* ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ. *Προεκτείνομεν τὴν* ΑΔ *κατὰ μῆκος* ΔΜ=ΑΔ. *'Επίσης προεκτείνομεν τὴν* ΒΓ *καὶ ἑκατέρωθεν αὐτῆς λαμβάνομεν τμήματα* ΒΝ=ΓΚ=ΒΓ. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ πλευραὶ τῶν τριγώνων* ΑΝΜ *καὶ* ΑΜΚ *εἶναι διπλάσιαι τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου* ΑΒΓ.

Τὸ τετράπλευρον ΑΝΜΚ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοί του ΑΜ καὶ ΝΚ διχοτομοῦνται ἐκ κατασκευῆς· ἄρα θὰ εἶναι

ΑΝ=ΜΚ, ΝΜ=ΑΚ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΓΑΝ, ἡ εὐθεῖα ΒΕ συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν του· ἄρα ἡ ΒΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευράν του καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς, δηλ. εἶναι



Σχ. 227

$$\text{ΒΕ} = \frac{1}{2}\text{ΑΝ} \cdot \text{ ἄρα } \text{ΑΝ}=2\text{ΒΕ} \text{ ἢ } \text{ΜΚ}=\text{ΑΝ}=2\text{ΒΕ}.$$

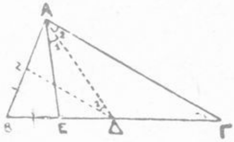
'Ομοίως εἰς τὸ τρίγωνον ΒΑΚ, ἡ εὐθεῖα ΓΖ συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν του· ἄρα θὰ εἶναι

$$\text{ΓΖ} = \frac{1}{2}\text{ΑΚ} \text{ ἢ } 2\text{ΖΓ}=\text{ΑΚ} \text{ ἢ } \text{ΝΜ}=\text{ΑΚ}=2\text{ΓΖ}.$$

'Εκ κατασκευῆς εἶναι καὶ ΑΜ=2ΑΔ. Ὥστε αἱ πλευραὶ τῶν τριγώνων ΑΝΜ καὶ ΑΚΜ εἶναι διπλάσιαι τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

264. Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ *ἡ πλευρὰ* ΒΓ *εἶναι διπλασία τῆς* ΑΒ. *Νὰ* *ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διάμεσος ΑΔ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΑΓ καὶ ἀπὸ τὴν διάμεσον ΑΕ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ.*

Τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελὲς, διότι ΑΒ=ΒΔ. Ἔστω Ζ τὸ μέσον τῆς ΑΒ· εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ εὐθεῖα ΔΖ συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν του, ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι $Δ_1=Α_2$ (1) ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ. Τὰ τρίγωνα ΑΕΔ καὶ ΖΑΔ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὴν ΑΔ κοινήν, ΑΕ=ΔΖ, ὡς διαμέσους τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΒΑΔ καὶ $Α\widehat{Δ}Ε = Ζ\widehat{Α}Δ$, ὡς παρὰ τὴν βάσιν γωνίας τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΒΑΔ· ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\widehat{Δ}_1 = \widehat{Α}_1$ (2).

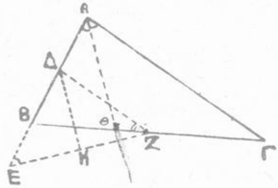


Σχ. 228

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $\widehat{Α}_1 = \widehat{Α}_2$. Ὥστε ἡ ΑΔ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΕΑΓ.

265. *Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ· ἐπὶ τῆς πλευρᾶς του ΑΒ καὶ ἀπὸ τὸ μέσον Δ αὐτῆς λαμβάνομεν ἕνα τμῆμα ΔΕ ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΓ. Ἀπὸ τὸ Ε φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ κάθετος αὐτὴ τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ μέσον της.*

Ἔστω Ζ τὸ μέσον τῆς ΒΓ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ εὐθεῖα ΔΖ συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν του, ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευράν του καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς· ἤτοι εἶναι $ΔΖ = \frac{1}{2}$ ΑΓ καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ.



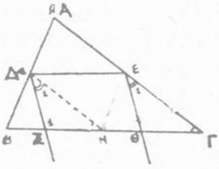
Σχ. 229

Ἐπειδὴ ὅμως ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $ΔΕ = \frac{1}{2}$ ΑΓ ἕπεται, ὅτι ΔΕ=ΔΖ.

Τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι λοιπὸν ἰσοσκελές. Φέρομεν τὸ ὕψος ΔΗ τοῦ ἰσοσκελοῦς αὐτοῦ τριγώνου. Ἡ ΔΗ εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας ΕΔΖ. Αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΒΔΖ εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΑΓ καὶ ΔΖ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΒ· ἄρα αἱ διχοτόμοι των ΑΘ καὶ ΔΗ εἶναι παράλληλοι. Ἐπειδὴ ἡ ΕΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΗ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΑΘ. Ὥστε ἡ κάθετος ΕΖ ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ζ.

266. *Ἀπὸ τὰ μέσα Δ καὶ Ε τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν δύο τυχούσας παραλλήλους ΔΖ καὶ ΕΘ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Ζ καὶ Θ. Νὰ ἀποδειχθῇ : 1ον ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι τὸ τέταρτον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, 2ον ὅτι τὸ τετράπλευρον ΔΖΘΕ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.*

1ον Εἰς τὴν ἄσκησιν 253 ἐδείχθη, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι τὸ τέταρτον τοῦ ΑΒΓ.

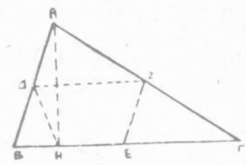


Σχ. 230

2ον Ἔστω Η τὸ μέσον τῆς ΒΓ. Φέρομεν τὰς ΗΔ καὶ ΗΕ. Τὰ παραλληλόγραμμα ΔΖΘΕ καὶ ΔΗΓΕ ἔχουν κοινὸν μέρος τὸ τετράπλευρον ΔΗΘΕ, καὶ τὰ ἴσα τὰ τρίγωνα ΔΖΗ καὶ ΕΘΓ. Εἶναι δὲ τὰ τρίγωνα αὐτὰ ἴσα, διότι ἔχουν ΔΖ=ΕΘ, ὡς ἀπέναντι πλευρὰς παραλληλογράμμου καὶ $\widehat{\Delta_1}=\widehat{E_1}$, καὶ $\widehat{Z_1}=\widehat{E\Theta\Gamma}$, διότι ἔχουν τὰς πλευρὰς των παραλλήλους. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ παραλληλόγραμμον ΔΗΓΕ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἕπεται, ὅτι καὶ τὸ ΔΖΘΕ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

267. Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου καὶ ὁ ποὺς ἑνὸς ὕψους του εἶναι κορυφαὶ ἰσοσκελοῦς τραπεζίου.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Δ, Ε, Ζ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του καὶ Η ὁ ποὺς τοῦ ὕψους ΑΗ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΔΗ, ΕΖ καὶ ΖΔ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΗΕΖΔ εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον.

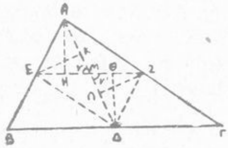


Σχ. 231

Ἐπειδὴ ἡ ΕΖ συνδέει τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ καὶ ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς. Ὁμοίως ἡ ΔΗ, ὡς διάμεσος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΗΒ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης ΑΒ· ἄρα αἱ ΕΖ καὶ ΗΔ εἶναι ἴσαι, ὡς ἴσαι πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ.

Τὸ τετράπλευρον ΗΕΖΔ εἶναι τραπέζιον, διότι αἱ ΔΖ καὶ ΗΕ εἶναι παράλληλοι καὶ ἰσοσκελές, διότι ΕΖ=ΗΔ ὡς ἐδείχθη.

268. Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ *φέρομεν τὴν διάμεσον* ΑΔ, *ἡ ὁποία τέμνει τὴν εὐθεῖαν* ΕΖ, *ποὺ συνδέει τὰ μέσα* Ε *καὶ* Ζ *τῶν πλευρῶν* ΑΒ *καὶ* ΑΓ *εἰς τὸ σημεῖον* Μ. *Νὰ ἀποδειχθῇ : 1ον ὅτι τὸ* Μ *εἶναι τὸ μέσον τῆς* ΑΔ *καὶ* ΕΖ. *2ον ὅτι τὰ σημεῖα* Α *καὶ* Δ *ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὴν* ΕΖ. *3ον ὅτι τὰ σημεῖα* Ε *καὶ* Ζ *ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὴν* ΑΔ.



Σχ. 232

1ον Εἰς τὴν ἄσκ. 254 ἐδείχθη, ὅτι αἱ ΑΔ καὶ ΕΖ διχοτομοῦνται.

2ον Ἐκ τῶν Α καὶ Δ φέρομεν τὰς καθέτους ΑΗ καὶ ΔΘ ἐπὶ τὴν ΕΖ· θὰ δείξωμεν, ὅτι ΑΗ=ΔΘ.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΗΜ καὶ ΔΘΜ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην· ἤτοι ἔχουν ΑΜ = ΜΔ, ὡς ἐδείχθη, ν = ν', ὡς κατὰ κορυφήν· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ

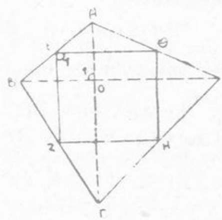
ΑΗ = ΔΘ.

3ον. Ἀπὸ τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ φέρομεν τὰς καθέτους ΕΚ καὶ ΖΛ ἐπὶ τὴν ΑΔ· θὰ δείξωμεν, ὅτι ΕΚ=ΖΛ.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΕΚΜ καὶ ΖΛΜ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην· ἤτοι ἔχουν ΕΜ=ΜΖ, ὡς ἐδείχθη καὶ ν=ν'· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ΕΚ=ΖΛ.

Β' Ὁμάς. 269. Ἐὰν αἱ διαγώνιοι τετραπλεύρου εἶναι κάθετοι μεταξύ των, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου.

Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι κάθετοι. Ἐὰν Ε, Ζ, Η, Θ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του, θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι ὀρθογώνιον.



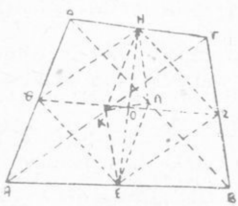
Σχ. 233

Ἐν πρώτοις τὸ ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ κορυφαί του εἶναι μέσα τῶν πλευρῶν του (§ 173)· εἶναι δὲ καὶ ὀρθογώνιον, διότι αἱ γωνίαι του εἶναι ὀρθαί.

Πράγματι αἱ γωνίαι Ε καὶ Ο εἶναι ἴσαι, διότι αἱ πλευραί των εἶναι παράλληλοι καὶ ἔχουν ἀντίθετον φοράν.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία Ο εἶναι ὀρθή, διότι ἐξ ὑποθέσεως αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι κάθετοι, θὰ εἶναι καὶ ἡ γωνία Ε ὀρθή, ὡς ἴση μὲ τὴν Ο. Τὸ παραλληλόγραμμον λοιπὸν ΕΖΗΘ ἔχει μίαν γωνίαν ὀρθήν· ἄρα εἶναι ὀρθογώνιον.

270. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ τρεῖς εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τετραπλεύρου καὶ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μέσον ἑκάστης τῶν τριῶν αὐτῶν εὐθειῶν.



Σχ. 234

Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, Ε, Ζ, Η, Θ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του καὶ Κ, Λ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του ΑΓ καὶ ΒΔ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΕΗ, ΘΖ καὶ ΚΛ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

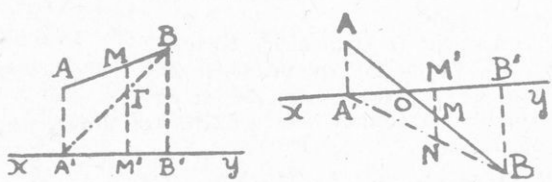
Φέρομεν τὰς εὐθείας ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ, ΗΚ, ΚΕ, ΕΛ καὶ ΛΗ.

Τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ κορυφαί του εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τετραπλεύρου. Ἄρα αἱ διαγώνιοί του ΕΗ καὶ ΘΖ διχοτομοῦνται, ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Ο. Εἰς τὸ τρίγωνον ΓΔΑ ἡ ΗΚ συνδέει τὰ μέσα Η καὶ Κ τῶν δύο πλευρῶν του· ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς. Ὁμοίως εἰς τὸ τρίγωνον ΒΔΑ, ἡ ΛΕ συνδέει τὰ μέσα Λ καὶ Ε τῶν δύο πλευρῶν του· ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν ΑΔ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς. Ἄρα αἱ ΗΚ καὶ ΕΛ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, ὡς ἴσαι καὶ παράλληλοι πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΑΔ· τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΗΚΕΛ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἑπομένως αἱ διαγώνιοί του ΚΛ καὶ ΗΕ διχοτομοῦνται εἰς τὸ Ο, τὸ ὁποῖον, ὅπως ἐδείχθη ἀνωτέρω, εἶναι τὸ μέσον τῆς ΗΕ.

271. ***Δίδεται μία εὐθεῖα*** xy ***καὶ δύο σημεῖα*** Α ***καὶ*** Β, ***τὰ ὁποῖα κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς*** xy. ***Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου*** Μ ***τοῦ εὐθ. τμήματος*** ΑΒ ***ἀπὸ τὴν*** xy ***εἶναι ἴση μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν σημείων*** Α ***καὶ*** Β ***ἀπὸ τὴν*** xy. ***Ἐὰν τὰ σημεῖα*** Α ***καὶ*** Β ***κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς*** xy, ***τί δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν;***

Ἔστωσαν ΑΑ', ΒΒ' καὶ ΜΜ' αἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων Α, Β, Μ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν xy. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $MM' = \frac{AA'+BB'}{2}$

Αἱ ΑΑ', ΜΜ' ΒΒ' εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν. Φέρομεν τὴν ΒΑ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΜΜ' εἰς τὸ σημεῖον Γ. Εἰς



ΣΧ. 225

τὸ τρίγωνον ΒΑΑ', ἡ ΜΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΑ' καὶ ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς πλευρᾶς τοῦ ΒΑ· ἄρα θὰ εἶναι $M\Gamma = \frac{AA'}{2}$ (1).

Ὁμοίως εἰς τὸ τρίγωνον Α'Β'Β, ἡ Μ'Γ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΒ' καὶ ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον Μ' τῆς πλευρᾶς του Α'Β'· ἄρα θὰ εἶναι

$$\Gamma M' = \frac{BB'}{2} \qquad (2).$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$M\Gamma + \Gamma M' = \frac{AA'}{2} + \frac{BB'}{2} \quad \text{ἢ} \quad MM' = \frac{AA'+BB'}{2}$$

2ον) Ἔστω, ὅτι τὰ σημεῖα Α καὶ Β εὑρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς xy (Σχ. 225 β). Φέρομεν τὴν ΑΒ καὶ ἔστω Μ τὸ μέσον της

Ἔστωσαν ΑΑ', ΒΒ' καὶ ΜΜ' αἱ ἀποστάσεις τῶν Α, Β, Μ ἀπὸ τὴν xy.

Αἱ ΑΑ', ΒΒ, καὶ ΜΜ' εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν xy. Φέρομεν τὴν Α'Β, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΜΜ' εἰς τὸ σημεῖον Ν;

Σκεπτόμενοι, ὅπως εἰς τὴν περίπτωσιν 1ον, ἔχομεν ἀπὸ τὸ τρίγωνον Α'Β'Β $\quad NM' = \frac{BB'}{2} \quad (3).$

'Επίσης ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΒΑ'Α ἔχομεν $\quad NM = \frac{AA'}{2} \quad (4).$

'Αφαιροῦντες τὰς ἰσότητας (3) καὶ (4) κατὰ μέλη λαμβάνομεν.

$$NM' - NM = \frac{BB'}{2} - \frac{AA'}{2} \quad \text{ἢ} \quad MM' = \frac{BB' - AA'}{2}$$

Ὥστε, ἐὰν τὰ σημεῖα Α καὶ Β κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς xy, ἡ ΜΜ' εἶναι ἴση μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν ἀποστάσεων τῶν Α καὶ Β ἀπὸ τὴν xy.

272. Τὸ ἄθροισμα ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν ἑνὸς παραλληλογράμμου ἀπὸ εὐθεῖαν, ἡ ὁποία δὲν τέμνει τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων τοῦ παραλληλογράμμου ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν αὐτήν.

Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ xy μία εὐθεῖα ἐκτὸς αὐτοῦ. Φέρομεν τὰς καθέτους ΑΑ', ΒΒ' ΓΓ', ΔΔ' ἐπὶ τὴν xy καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων τοῦ παραλληλογράμμου, τὴν ΟΟ' κάθετον ἐπὶ τὴν xy. Θὰ δείξωμεν, ὅτι

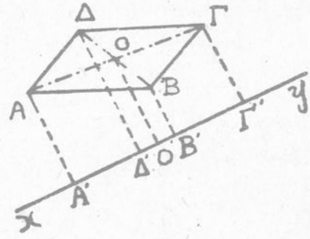
$$4 \cdot OO' = AA' + BB' + \Gamma\Gamma' + \Delta\Delta'.$$

Αἱ ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ', ΔΔ', ΟΟ' εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν xy.

Εἰς τὸ τραπέζιον ΑΑ'Γ'Γ, ἡ ΟΟ' εἶναι διάμεσος αὐτοῦ, διότι ἡ ΟΟ' εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις ΑΑ' καὶ ΓΓ' καὶ ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον Ο τῆς ΑΓ· ἄρα θὰ εἶναι

$$OO' = \frac{AA' + \Gamma\Gamma'}{2} \quad \text{ἢ}$$

$$2 \cdot OO' = AA' + \Gamma\Gamma' \quad (1).$$



Σχ. 236

Εἰς τὸ τραπέζιον ΔΔ'Β'Β, ἡ ΟΟ' εἶναι διάμεσος αὐτοῦ, ἄρα θὰ εἶναι

$$OO' = \frac{\Delta\Delta' + BB'}{2} \quad \text{ἢ}$$

$$2 \cdot OO' = \Delta\Delta' + BB' \quad (2).$$

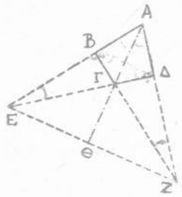
Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$4 \cdot OO' = AA' + BB' + \Gamma\Gamma' + \Delta\Delta'.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η΄.

Μερικαὶ ἀξιοσημείωτοι ἰδιότητες τοῦ τριγώνου

***273. Εἰς τὸ τετράπλευρον** ΑΒΓΔ, **αἱ γωνίαι** Β **καὶ** Δ **εἶναι ὀρθαί. Προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς** ΑΒ **καὶ** ΓΔ, **αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον** Ε **καὶ τὰς πλευρὰς** ΒΓ **καὶ** ΑΔ, **αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ** Ζ. **Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαγώνιος** ΑΓ **εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν** ΕΖ.*

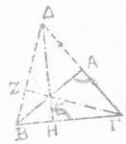


Σχ. 237

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΕΖ, αἱ ΕΔ καὶ ΖΒ εἶναι δύο ὕψη του, τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Γ.

Ἐπειδὴ τὰ ὕψη ἑνὸς τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ τρίτον ὕψος εἶναι ἡ ΑΓΘ. Ὥστε ἡ ΑΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΖ.

***274. Δίδεται ἕνα τρίγωνον** ΑΒΓ, **ὀρθογώνιον εἰς τὸ** Α. **Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν** ΓΑ **καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της λαμβάνομεν τμῆμα** ΑΔ = ΓΑ. **Ἀπὸ τὸ** Δ **φέρομεν τὴν** ΔΗ **κάθετον ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν** ΒΓ, **ἡ ὁποία τέμνει τὴν** ΑΒ **εἰς τὸ** Ε. **Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα** ΓΕ **εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν** ΔΒ.*

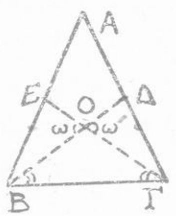


Σχ. 238

Εἰς τὸ τρίγωνον ΔΒΓ, ἡ ΒΑ εἶναι ὕψος του διότι ἡ γωνία Α εἶναι ὀρθὴ ἐξ ὑποθέσεως. Ἐπίσης ἡ ΔΗ εἶναι ὕψος τοῦ τριγ. ΔΒΓ, διότι ἡ ΔΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ. Τὸ σημεῖον Ε εἶναι λοιπὸν σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου ΔΒΓ καὶ ἑπομένως ἡ ΓΕΖ εἶναι τὸ τρίτον ὕψος του. Ἡ ΓΖ εἶναι λοιπὸν κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ.

275. Ἐὰν δύο διάμεσοι τριγώνου εἶναι ἴσαι, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΒΔ, ΓΕ δύο διάμεσοί του. Ἐὰν ΒΔ=ΓΕ, θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.



Σχ. 239

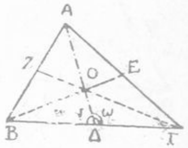
Ἔστω Ο τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων ΒΔ καὶ ΓΕ. Τὰ τρίγωνα ΟΕΒ καὶ ΟΔΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, ἤτοι ἔχουν ΒΟ=ΟΓ, διότι ἑκάστη τούτων ἰσοῦται μὲ τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν ἴσων διαμέσων ΒΔ καὶ ΓΕ, τὴν ΟΕ=ΟΔ διότι ἑκάστη τούτων ἰσοῦται μὲ τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν ἴσων διαμέσων ΒΔ καὶ ΓΕ καὶ γων. ω=γων. ω', ὡς κατὰ κορυφήν· ἄρα θὰ εἶναι ΒΕ=ΓΔ· ἑπομένως καὶ τὰ διπλάσια τούτων ΑΒ καὶ ΑΓ θὰ εἶναι ἴσα· δηλ. θὰ εἶναι ΑΒ=ΑΓ. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

276. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν δύο πλευραὶ τριγώνου εἶναι ἄνισοι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι διάμεσοί του εἶναι ἄνισοι καὶ εἰς τὴν μεγαλυτέραν πλευρὰν ἀντιστοιχεῖ μικροτέρα διάμεσος.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΒΕ καὶ ΓΖ δύο διάμεσοί του· θὰ δείξωμεν, ὅτι, ἐὰν ΑΒ $<$ ΑΓ, θὰ εἶναι ΓΖ $>$ ΒΕ.

Φέρομεν καὶ τὴν διάμεσον ΑΔ. Γνωρίζομεν, ὅτι αἱ διάμεσοι τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Ο τοιοῦτον, ὥστε εἶναι $ΒΟ = \frac{2}{3}ΒΕ$ καὶ $ΓΟ = \frac{2}{3}ΓΖ$. Τὰ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ ἔχουν τὴν ΑΔ κοινήν, τὴν ΒΔ=ΔΓ καὶ τὴν ΑΒ $<$ ΑΓ· ἄρα εἶναι ἄνισα καὶ θὰ εἶναι $ν < ω$;

Τὰ τρίγωνα ΟΔΒ καὶ ΟΔΓ ἔχουν τὴν ΟΔ κοινήν, ΒΔ=ΔΓ καὶ γωνίαι $ν < ω$· ἄρα εἶναι ἄνισα καὶ θὰ εἶναι ΟΒ $<$ ΟΓ. (1).



Σχ. 240

Ἐπειδὴ $ΟΒ = \frac{2}{3}ΒΕ$ καὶ $ΟΓ = \frac{2}{3}ΓΖ$, ἡ ἀνισότης (1) γράφεται

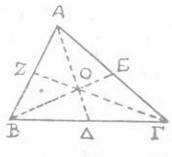
$$\frac{2}{3}ΒΕ < \frac{2}{3}ΓΖ \text{ ἢ } ΒΕ < ΓΖ \text{ ἤτοι } ΓΖ > ΒΕ.$$

277. Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν διαμέσων ἑνὸς τριγώνου εἶναι μεγαλύτερον τῶν τριῶν τετάρτων τῆς περιμέτρου του.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ αἱ τρεῖς διάμεσοί του· θὰ δείξωμεν, ὅτι $ΑΔ+ΒΕ+ΓΖ > \frac{3}{4}(ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ)$.

Ἔστω Ο τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων. Εἰς τὸ τρίγωνον ΟΒΓ, ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν· ἤτοι εἶναι

$$ΟΒ+ΟΓ > ΒΓ \quad (1)$$



Σχ. 241

Ὁμοίως ἀπὸ τὰ τρίγωνα ΟΓΑ καὶ ΟΑΒ ἔχομεν

$$ΟΓ+ΟΑ > ΑΓ \ (2), \text{ καὶ } ΟΑ+ΟΒ > ΑΒ \ (3)$$

Προσθέτομεν τὰς ἀνισότητας (1), (2), (3) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$2ΟΒ+2ΟΓ+2ΟΑ > ΒΓ+ΓΑ+ΑΒ \quad (4)$$

Ἀλλὰ $ΟΒ = \frac{2}{3}ΒΕ$, $ΟΓ = \frac{2}{3}ΓΖ$ καὶ $ΟΑ = \frac{2}{3}ΑΔ$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἀνισότητα (4) τὰ ΟΒ, ΟΓ, ΟΑ διὰ τῶν ἴσων των καὶ ἔχομεν

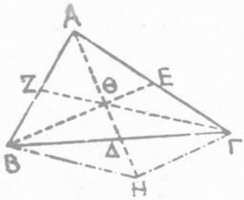
$$\frac{4}{3}ΒΕ + \frac{4}{3}ΓΖ + \frac{4}{3}ΑΔ > ΒΓ+ΓΑ+ΑΒ \quad \text{ἢ}$$

$$\frac{4}{3}(ΒΕ+ΓΖ+ΑΔ)>ΒΓ+ΓΑ+ΑΒ \quad \text{ἢ} \quad ΒΕ+ΓΖ+ΑΔ>\frac{3}{4}(ΒΓ+ΓΑ+ΑΒ).$$

278. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι κάθε διάμεσος τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων διαμέσων του.

Ἔστωσαν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ αἱ τρεῖς διάμεσοι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ Θ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των. Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$ΑΔ<ΒΕ+ΓΖ, \quad ΒΕ<ΑΔ+ΓΖ \quad \text{καὶ} \quad ΓΖ<ΑΔ+ΒΕ$$



Σχ. 242

Προεκτείνομεν τὴν ΑΔ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της λαμβάνομεν τμῆμα ΔΗ=ΘΔ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΒΗ, ΗΓ.

Τὸ τετράπλευρον ΒΗΓΘ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοί του ΒΓ καὶ ΘΗ διχοτομοῦνται εἰς τὸ Δ. Θὰ εἶναι λοιπὸν ΒΗ=ΘΓ καὶ ΒΘ=ΗΓ. Ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΓΘΗ ἔχομεν

$$ΘΗ<ΗΓ+ΓΘ, \quad ΗΓ<ΓΘ+ΘΗ,$$
$$ΓΘ<ΘΗ+ΗΓ.$$

Ἐπειδὴ

$$ΘΗ=2\cdot ΘΔ=2\cdot\frac{1}{3}ΑΔ=\frac{2}{3}ΑΔ, \quad ΗΓ=ΒΘ=\frac{2}{3}ΒΕ \quad \text{καὶ} \quad ΓΘ=\frac{2}{3}ΓΖ$$

αἱ προηγούμεναι ἀνισότητες γράφονται

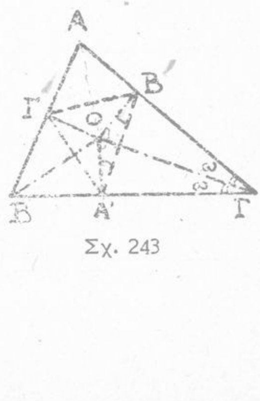
$$\frac{2}{3}ΑΔ<\frac{2}{3}ΒΕ+\frac{2}{3}ΓΖ \quad \text{ἢ} \quad ΑΔ<ΒΕ+ΓΖ$$

$$\frac{2}{3}ΒΕ<\frac{2}{3}ΓΖ+\frac{2}{3}ΑΔ \quad \text{ἢ} \quad ΒΕ<ΓΖ+ΑΔ$$

$$\frac{2}{3}ΓΖ<\frac{2}{3}ΑΔ+\frac{2}{3}ΒΕ \quad \text{ἢ} \quad ΓΖ<ΑΔ+ΒΕ$$

279. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο ***τῆς τομῆς τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου*** ΑΒΓ ***φέρομεν τὰς καθέτους*** ΟΑ′, ΟΒ′, ΟΓ′ ***ἐπὶ τὰς πλευρὰς*** ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου εἶναι κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου*** Α′Β′Γ′.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΑ′Γ καὶ ΟΒ′Γ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας, ἤτοι τὴν ΟΓ κοινὴν καὶ τὰς ὀξείας γωνίας ω καὶ ω′ ἴσας, διότι ἡ ΟΓ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Γ· ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΓΑ′=ΓΒ′.



Σχ. 243

Ἐπειδὴ εἶναι ΓΑ′=ΓΒ′, τὸ τρίγωνον ΓΑ′Β′ εἶναι ἰσοσκελές. Ἡ ΓΟ ὡς διχοτόμος τῆς γωνίας τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΓΑ′Β′, θὰ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως Α′Β′· ὥστε ἡ

ΓΟ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν Α'Β'. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ ΟΒ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς Α'Γ', ἡ δὲ ΟΑ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς Β'Γ'.

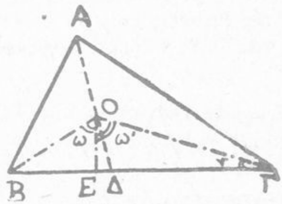
280. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο τῆς τομῆς τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τὴν κάθετον ΟΕ ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ. Ἐὰν Δ εἶναι τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ διχοτόμος ΑΔ τῆς γωνίας Α τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι γων.ΒΟΔ=γων.ΕΟΓ.

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΕΓ, ἡ γωνία ω εἶναι συμπληρωματικὴ τῆς γωνίας ν· ἤτοι εἶναι $\omega'=90^0-\nu$ ἢ $\omega'=90^0-\frac{\Gamma}{2}$ 1)

Ἐπειδὴ $90^0=\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}$, ἡ ἰσότης (1) γίνεται

$\omega'=\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}-\frac{\Gamma}{2}$ ἢ

$\omega'=\frac{A}{2}+\frac{B}{2}$ (1')



Σχ. 244

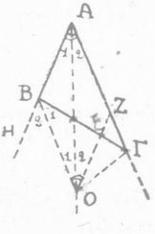
Ἡ γωνία ω εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΟΒ· ἄρα θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν του· ἤτοι θὰ εἶναι

$\omega=\frac{A}{2}+\frac{B}{2}$ (2)

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1') καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι ω=ω' ἤτοι εἶναι

γων.ΒΟΔ=γων.ΕΟΓ.

281. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΟ τῆς γωνίας Α καὶ τὰς ἐξωτερικὰς διχοτόμους ΒΟ καὶ ΓΟ τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο. Ἀπὸ τὸ Ο φέρομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Ε καὶ τὴν πλευρὰν ΑΓ εἰς τὸ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΕΖ=ΑΖ—ΒΕ.



Σχ. 245

Ἐπειδὴ ἡ ΟΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, αἱ γωνίαι A_1 καὶ O_2 εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΟΖ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΟ· ἤτοι εἶναι $\widehat{A_1}=\widehat{O_2}$. Ἀλλὰ $A_1=A_2$, διότι ἡ ΑΟ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α· ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\widehat{A_2}=\widehat{O_2}$. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΖΑΟ εἶναι ἰσοσκελές, διότι αἱ παρὰ τὴν βάσιν του γωνίαι A_2 καὶ O_2 εἶναι ἴσαι· ἄρα θὰ εἶναι ΟΖ=ΑΖ (1).

Ὁμοίως αἱ γωνίαι B_2 καὶ $\widehat{BOZ}$ εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΟΖ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΟ· ἤτοι εἶναι $B_2=\widehat{BOZ}$. Ἀλλὰ $B_1=B_2$, διότι ἡ ΒΟ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΗΒΓ· ἄρα θὰ εἶναι καὶ B_1=ΒΟΖ. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΕΒΟ εἶναι ἰσοσκελές, διότι αἱ παρὰ τὴν βάσιν του γωνίαι B_1 καὶ ΒΟΕ εἶναι ἴσαι· ἄρα θὰ εἶναι ΟΕ=ΕΒ (2).

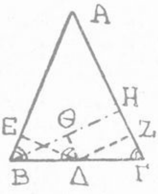
'Αφαιροῦμεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$ΟΖ-ΟΕ=ΑΖ-ΕΒ \quad ἢ \quad ΕΖ=ΑΖ-ΒΕ.$$

'Ασκήσεις ἐπὶ τοῦ Η' Κεφαλαίου

282. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν του εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ ἕνα ἀπὸ τὰ ὕψη του.

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 246) καὶ Δ τυχὸν σημεῖον τῆς βάσεώς του ΒΓ. 'Απὸ τὸ Δ φέρομεν τὰς καθέτους ΔΕ καὶ ΔΖ ἐπὶ τὰς ἴσας πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ· θὰ δείξωμεν, ὅτι ΔΕ+ΔΖ=σταθερόν.



Σχ. 246

'Απὸ τὸ Β φέρομεν τὴν ΒΗ κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΑ.

Αἱ ΒΗ καὶ ΔΖ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΓ. 'Απὸ τὸ Δ φέρομεν τὴν ΔΘ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΗ εἰς τὸ σημεῖον Θ.

Τὸ τετράπλευρον ΔΖΗΘ εἶναι ὀρθογώνιον· ἄρα θὰ εἶναι ΔΖ=ΘΗ (1)

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΕΒΔ καὶ ΘΔΒ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας, ἤτοι τὴν ΒΔ κοινήν, καὶ τὰς ὀξείας γωνίας ΕΒΔ καὶ ΒΔΘ ἴσας, ὡς ἴσας πρὸς τὴν γωνίαν Γ· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ΔΕ=ΒΘ (2)

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$ΔΖ+ΔΕ=ΘΗ+ΒΘ \quad ἢ \quad ΔΖ+ΔΕ=ΒΗ \qquad (3)$$

'Επειδὴ τὸ ΒΗ εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ ἕνα ἀπὸ τὰ ἴσα ὕψη τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ τὰς κορυφὰς τῶν ἴσων γωνιῶν του, ἡ ἰσότης (3) γράφεται

$$ΔΖ+ΔΕ=ΒΗ=σταθερόν.$$

283. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων σημείου κειμένου ἐντὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ἀπὸ τῶν πλευρῶν του εἶναι σταθερὸν (καὶ ἴσον μὲ τὸ ὕψος του).

Ἔστω τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Ο τυχὸν σημεῖον ἐντὸς αὐτοῦ. 'Απὸ τὸ Ο φέρομεν τὰς καθέτους ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ ἐπὶ τὰς ἴσας πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$ΟΔ+ΟΕ+ΟΖ = σταθερόν.$$

'Απὸ τὸ Ο φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Θ καὶ Κ.

Ἐπίσης φέρομεν τὸ ὕψος ΑΗ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΘΚ εἰς τὸ σημεῖον Λ.

Τὸ τρίγωνον ΑΘΚ εἶναι ἰσόπλευρον, ἐπειδὴ εἶναι ἰσογώνιον. Ἐπειδὴ τὸ Ο κεῖται ἐπὶ τῆς βάσεως ΘΚ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΘΚ, τὸ ἄθροισμα ΟΔ+ΟΖ, θὰ ἰσοῦται μὲ ἕνα ἀπὸ τὰ ὕψη τοῦ τριγώνου· ἤτοι θὰ εἶναι

$$ΟΔ+ΟΖ=ΑΛ \quad (1)$$

Αἱ ΛΗ καὶ ΟΕ εἶναι ἴσαι, ὡς κάθετοι περιεχόμεναι μεταξὺ παραλλήλων· ἤτοι εἶναι

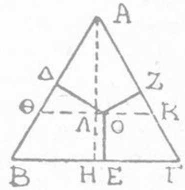
$$ΟΕ=ΛΗ \quad (2)$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$ΟΔ+ΟΖ+ΟΕ=ΑΛ+ΛΗ \quad \text{ἢ}$$

$$ΟΔ+ΟΖ+ΟΕ=ΑΗ=\text{σταθερὸν}$$

διότι τὸ ΑΗ εἶναι ἕνα ἀπὸ τὰ ἴσα ὕψη τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου.



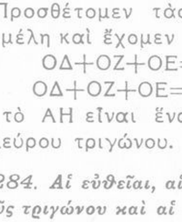
Σχ. 247

284. Αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τυχὸν σημεῖον τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς ἴσας πλευράς του ὑπὸ ἴσας γωνίας, ἔχουν ἄθροισμα σταθερόν.

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Δ τυχὸν σημεῖον τῆς ΒΓ. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὰς εὐθείας ΔΕ καὶ ΔΖ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ καὶ τοιαύτας, ὥστε νὰ εἶναι $Δ\widehat{Ε}Β = Δ\widehat{Ζ}Γ$. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΔΕ+ΔΖ=σταθερόν.

Ἐκ τοῦ Β φέρομεν τὴν ΒΗ παράλληλον πρὸς τὴν ΔΖ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Η. Τότε θὰ εἶναι ω΄=ν΄, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΒΗ καὶ ΔΖ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΓ. Ἐπίσης φέρομεν ἐκ τοῦ Δ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΗ εἰς τὸ σημεῖον Θ. Θὰ εἶναι ἐπίσης ν΄=ν. Τὸ τετράπλευρον ΔΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον ἐκ κατασκευῆς, ἄρα θὰ εἶναι

$$ΔΖ = ΘΗ \quad (1).$$



Σχ. 248

Αἱ γωνίαι ω καὶ ν εἶναι ἴσαι, ὡς ἴσαι πρὸς τὰς ἴσας γωνίας ν΄ καὶ ω΄. Τὰ τρίγωνα ΒΕΔ καὶ ΒΘΔ ἔχουν τὰς γωνίας ΕΒΔ καὶ ΘΔΒ ἴσας, ὡς ἴσας πρὸς τὴν γωνίαν Γ· ἐπίσης ἔχουν ω=ν· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ τὰς τρίτας γωνίας των ἴσας, ἤτοι $Ε\widehat{Δ}Β=Θ\widehat{Β}Δ$. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΕΒΔ καὶ ΘΒΔ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην, ἤτοι τὴν ΒΔ κοινήν, καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας ὡς ἐδείχθη· ἄρα θὰ εἶναι

$$ΔΕ = ΒΘ \quad (2).$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη ἔχομεν

$$ΔΖ+ΔΕ=ΘΗ+ΒΘ \quad ἢ \quad ΔΖ+ΔΕ=ΒΗ.$$

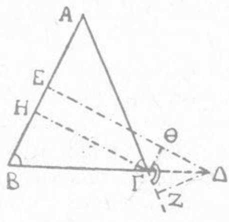
Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα ΔΖ+ΔΕ εἶναι ἴσον μὲ τὴν εὐθεῖαν ΒΗ ἡ ὁποία, ἄγεται ἐκ τοῦ Β καὶ σχηματίζει μὲ τὴν ΑΓ γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω· ἄρα τὸ ἄθροισμα αὐτὸ εἶναι σταθερόν.

285. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς βάσεως ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἀπὸ τὰς ἴσας πλευράς του, εἶναι σταθερά.

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Δ τὸ τυχὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς βάσεως ΒΓ. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὰς καθέτους ΔΕ καὶ ΔΖ ἐπὶ τὰς ἴσας πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ· θὰ δείξωμεν, ὅτι ΔΕ—ΔΖ=σταθερά.

Ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν τὴν ΓΗ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Αἱ εὐθεῖαι ΔΕ καὶ ΓΗ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΔΕ εἰς τὸ Θ. Τὸ τετράπλευρον ΗΓΘΕ εἶναι παραλληλόγραμμον ἐκ κατασκευῆς· ἄρα θὰ εἶναι

$$ΘΕ=ΓΗ \qquad (1)$$



Σχ. 249

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΔΘΓ καὶ ΔΖΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας, ἤτοι τὴν ΓΔ κοινὴν καὶ τὰς ὀξείας γωνίας ΘΓΔ καὶ ΔΓΖ ἴσας, ὡς ἴσας πρὸς τὴν γωνίαν Β· πράγματι ἡ γωνία ΘΓΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν Β, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΘ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΔ, ἡ δὲ γωνία ΔΓΖ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΓΒ, ὡς κατὰ κορυφὴν καὶ ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ τὴν Β, ὡς παρὰ τὴν βάσιν γωνία ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων ΔΘΓ καὶ ΔΖΓ ἔχομεν ΔΘ=ΔΖ. Ἡ διαφορὰ λοιπὸν ΔΕ—ΔΖ γράφεται

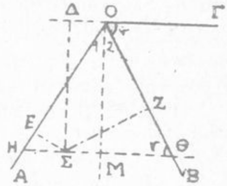
$$ΔΕ-ΔΖ=ΔΕ-ΔΘ \quad ἢ \quad ΔΕ-ΔΖ=ΘΕ \quad ἢ \quad ΔΕ-ΔΖ=ΓΗ=\text{σταθερά}$$

διότι τὸ ΓΗ εἶναι ἕνα ἀπὸ τὰ ἴσα ὕψη τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ τὰς κορυφὰς τῶν ἴσων γωνιῶν του Β καὶ Γ.

286. Δίδονται δύο ἐφεξῆς γωνίαι ΑΟΒ *καὶ* ΒΟΓ, *ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι* 60^0 *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν ἕνα σημεῖον* Σ *κεῖται ἐπὶ τῆς πρώτης γωνίας, ἡ ἀπόστασίς του* ΣΔ *ἀπὸ τὴν* ΟΓ *εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα* ΣΕ+ΣΖ *τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τὰς εὐθείας* ΑΟ *καὶ* ΟΒ.

Ἀπὸ τὸ σημεῖον Σ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν διχοτόμον ΟΜ τῆς γωνίας ΑΟΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς πλευρὰς ΟΑ καὶ ΟΒ εἰς τὰ σημεῖα Η καὶ Θ.

Τὸ σχηματισθὲν τρίγωνον ΟΗΘ εἶναι ἰσόπλευρον· πράγματι, τὸ τρίγωνον ΟΗΘ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἡ ΟΜ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς του καὶ ὕψος του· εἶναι δὲ καὶ ἰσόπλευρον, διότι ἡ γωνία Α τῆς κορυφῆς του εἶναι 60^0.



Σχ. 250

Ἐπειδὴ γωνίαι $\nu=\nu'=60^0$, ἡ ΟΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΗΘ. Εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΟΗΘ τὸ σημεῖον Σ κεῖται ἐπὶ τῆς βάσεώς του ΗΘ· ἄρα αἱ ἀποστάσεις του ΣΕ καὶ ΣΖ ἀπὸ τὰς πλευράς του ΟΗ καὶ ΟΘ θὰ ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ ἕνα ἀπὸ τὰ τρία ὕψη του, ἤτοι μὲ ΟΜ· ἤτοι θὰ εἶναι ΣΕ+ΣΖ=ΟΜ.

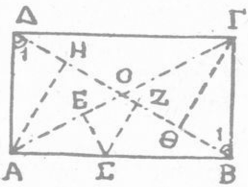
Ἀλλὰ ἡ ΟΜ εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν δύο παραλλήλων ΟΓ καὶ ΗΘ καὶ ἑπομένως εἶναι σταθερά· ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα ΣΕ+ΣΖ, τὸ ἴσον μὲ τὸ ΟΜ θὰ εἶναι σταθερόν.

287. *Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον* ΑΒΓΔ. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐὰν ἕνα σημεῖον* Σ *κινῆται ἐπὶ τῆς περιμέτρου του, αἱ ἀποστάσεις του ἀπὸ τὰς διαγωνίους τοῦ ὀρθογωνίου ἔχουν ἄθροισμα σταθερόν.*

Ἔστω, ὅτι τὸ σημεῖον Σ κεῖται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ. Ἔστωσαν ἐπίσης ΣΕ καὶ ΣΖ αἱ ἀποστάσεις τοῦ Σ ἀπὸ τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΒΔ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΣΕ+ΣΖ=σταθερόν.

Ἔστω Ο τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ. Ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἴσαι καὶ διχοτομοῦνται, τὰ τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΔ, ΟΔΑ εἶναι ἰσοσκελῆ. Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΟΑΒ, αἱ ἀποστάσεις ἑνὸς σημείου Σ τῆς βάσεώς του ἀπὸ τὰς ἴσας πλευράς του ἔχουν ἄθροισμα σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ ἕνα ἀπὸ τὰ ὕψη του· ἤτοι εἶναι

ΣΕ+ΣΖ=ΑΗ.



Σχ. 251

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι, ἐὰν τὸ σημεῖον Σ κεῖται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ αἱ ἀποστάσεις του ἀπὸ τὰς ἴσας πλευρὰς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΟΒΓ θὰ ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ ἕνα ἀπὸ τὰ ὕψη του ΓΘ.

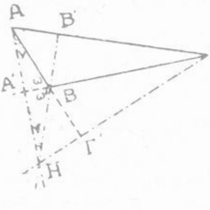
Ἀλλὰ τὰ ὕψη ΑΗ καὶ ΓΘ εἶναι ἴσα, ὡς πλευραὶ τῶν ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΗΔ καὶ ΓΘΒ. Εἶναι δὲ τὰ τρίγωνα αὐτὰ ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ΑΔ καὶ ΒΓ ἴσας, ὡς ἀπέναντι πλευρὰς ὀρθογωνίου καὶ τὰς ὀξείας γωνίας $Δ_1$ καὶ $Β_1$ ἴσας ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ. Ὥστε αἱ ἀποστάσεις τοῦ σημείου Σ ἀπὸ τὰς διαγωνίους ἔχουν ἄθροισμα σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ τὴν ἀπόστασιν μιᾶς κορυφῆς τοῦ ὀρθογωνίου ἀπὸ τῆς διαγωνίου, ἡ ὁποία δὲν διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν αὐτήν.

Σημ. Ἐπειδὴ τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΓΔ εἶναι ἴσα καθὼς καὶ τὰ ΟΒΓ καὶ ΟΔΑ εἶναι ἴσα, τὰ ὕψη των θὰ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ ὕψη ΑΗ καὶ ΓΘ.

288. Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι Β—Γ=90°. Ἐὰν Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΗΒΓ εἶναι ἴσα.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι Β—Γ=90°, καὶ Η τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν τριῶν ὑψῶν του ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ'· θὰ δείξωμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΗΒΓ εἶναι ἴσα.

Ἡ γωνία Β τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ ὀρθογων. τριγώνου ΑΑ'Β καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι Β=Α'+ν ἢ Β=90°+ν (1)



Σχ. 252

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι Β—Γ=90° δηλ. Β=90°+Γ ἡ ἰσότης (1) γράφεται: 90°+Γ=90°+ν· ἄρα ν=Γ (2)

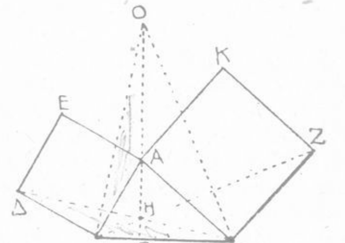
Αἱ γωνίαι Γ καὶ ΑΗΒ ἔχουν τὰς πλευρὰς των καθέτους μίαν πρὸς μίαν· ἤτοι εἶναι ΗΑ' κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ ΗΒ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ· ἄρα αἱ γωνίαι Γ καὶ ΑΗΒ εἶναι ἴσαι, ἤτοι εἶναι ν'=Γ. (3)

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (2) καὶ (3) συνάγομεν, ὅτι ν=ν'.

Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΒΑΗ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ν=ν'· ἄρα θὰ εἶναι ΑΒ=ΒΗ. Ἐπειδὴ ἡ ΒΑ' εἶναι ὕψος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΒΑΗ, θὰ εἶναι καὶ διάμεσος αὐτοῦ· ἤτοι ἡ Α'ΒΓ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΗ. Ἑπομένως θὰ εἶναι ΓΑ=ΓΗ. Ὥστε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΗΒΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας· ἤτοι ἔχουν τὴν ΓΒ κοινήν, ΑΒ=ΒΗ, καὶ ΓΑ=ΓΗ, ὡς ἐδείχθη.

289. Θεώρημα τοῦ Vecten. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἐκτὸς αὐτοῦ, κατασκευάζομεν τὰ τετράγωνα ΑΒΔΕ καὶ ΑΓΖΚ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΒΖ καὶ ΓΔ τέμνονται ἐπὶ τοῦ ὕψους ΑΘ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Προεκτείνομεν τὸ ὕψος ΑΘ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Α καὶ λαμμάνομεν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τμῆμα ΑΟ=ΒΓ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΟΒ καὶ ΟΓ. Τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΔΒΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην· ἤτοι ἔχουν ΑΒ=ΒΔ, ὡς πλευρὰς τετραγώνου, ΑΟ=ΒΓ ἐκ κατασκευῆς καὶ γων. ΟΑΒ=γων. ΔΒΓ, διότι αἱ πλευραί των εἶναι κάθετοι μία πρὸς μίαν· ἄρα ἡ ΓΔ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΒ. Ὁμοίως ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων ΟΑΓ καὶ ΒΓΖ ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἡ ΒΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΓ.

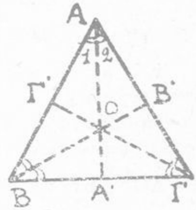


Σχ. 253

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ΟΘ, ΒΖ, ΓΔ εἶναι κάθετοι ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΟ, ΒΟ τοῦ τριγώνου ΟΒΓ καὶ ἄγονται ἀπὸ τὰς ἀπέναντι κορυφὰς Ο, Β, Γ· ἄρα αἱ ΟΘ, ΒΖ, ΓΔ εἶναι ὕψη τοῦ τριγώνου ΟΒΓ καὶ ἑπομένως τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Η.

290. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἕνα τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον, ἐὰν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν καθέτων εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του συμπίπτῃ μὲ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν του καὶ ἀντιστρόφως.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Ο τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν καθέτων Α'Ο, Β'Ο, Γ'Ο εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν των ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Ἐπειδὴ τὸ Ο εἶναι καὶ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν των, αἱ ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον.



Σχ. 254

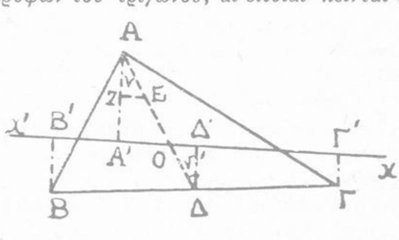
Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΓ'Ο καὶ ΑΒ'Ο εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας, ἤτοι ΑΟ κοινὴν καὶ τὰς ὀξείας γωνίας A_1 καὶ A_2 ἴσας· ἄρα θὰ εἶναι ΑΓ'=ΑΒ'.

Ἐπειδὴ ΑΓ'=ΑΒ', δηλ. ἐπειδὴ τὸ ἥμισυ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι ἴσα, θὰ εἶναι καὶ ὁλόκληροι αἱ πλευραὶ ἴσαι· ἤτοι εἶναι ΑΒ=ΑΓ (1). Ὁμοίως ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΓ'Ο καὶ ΒΑ'Ο συνάγομεν, ὅτι ΒΓ'=ΒΑ', ἄρα καὶ ΑΒ=ΒΓ (2). Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι ΑΒ=ΑΓ=ΒΓ, ἤτοι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον.

Ἀντιστρόφως. Εἰς κάθε ἰσόπλευρον τρίγωνον, τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν καθέτων εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του καὶ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν του, συμπίπτουν.

Διότι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν των εἶναι καὶ κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του.

291. Ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων ἑνὸς τριγώνου φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν δύο κορυφῶν τοῦ τριγώνου, αἱ ὁποῖαι κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας, ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν αὐτήν, εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀπόστασιν τῆς τρίτης κορυφῆς τοῦ τριγώνου ἀπὸ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.



Σχ. 255

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Ο τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων του. Ἐκ τοῦ Ο φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν χ' χ καὶ ἐκ τῶν Α, Β, Γ φέρομεν τὰς καθέτους ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' ἐπὶ τὴν χχ'· θὰ δείξωμεν, ὅτι ΒΒ'+ΓΓ'=ΑΑ'.

Φέρομεν τὴν διάμεσον ΑΔ· ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὴν ΔΔ' κάθετον ἐπὶ τὴν χ'χ'. Αἱ εὐθεῖαι ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ', ΔΔ' εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν χ'χ'.

Ἐπειδὴ αἱ παράλληλοι ΒΒ', ΔΔ', ΓΓ' ὁρίζουν ἴσα τμήματα ΒΔ=ΔΓ ἐπὶ τῆς ΒΓ, θὰ ὁρίζουν ἴσα τμήματα καὶ ἐπὶ τῆς Β'Γ'· ἤτοι θὰ εἶναι $$\text{Β}'\Delta' = \Delta'\Gamma'.$$

Ἡ ΔΔ' εἶναι λοιπὸν διάμεσος τοῦ τραπεζίου ΒΒ'Γ'Γ· ἄρα θὰ εἶναι $$\Delta\Delta' = \frac{1}{2}(\text{ΒΒ}+\Gamma\Gamma') \qquad (1)$$

Ἔστω Ε τὸ μέσον τῆς ΑΟ. Ἐπειδὴ $\text{ΑΟ} = \frac{2}{3}\text{Α}\Delta$ ἕπεται, ὅτι $\text{ΑΕ} = \frac{1}{3}\text{Α}\Delta$. Ὥστε εἶναι $\text{ΑΕ}=\text{ΕΟ}=\text{Ο}\Delta = \frac{1}{3}\text{Α}\Delta$.

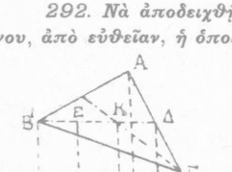
Ἐκ τοῦ Ε φέρομεν κάθετον ΕΖ ἐπὶ τὴν ΑΑ', ἡ ὁποία τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ Ζ.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΖΕ καὶ ΔΔ'Ο εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην· ἤτοι ἔχουν ΑΕ=ΔΟ, διότι ἑκάστη τούτων εἶναι ἴση μὲ $\frac{\text{Α}\Delta}{3}$ καὶ ν=ν', ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΑ' καὶ ΔΔ' τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΔ· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ $$\Delta\Delta' = \text{ΑΖ}.$$

Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ ΔΔ' θέτομεν εἰς τὴν (1) καὶ ἔχομεν $$\text{ΑΖ} = \frac{1}{2}(\text{ΒΒ}'+\Gamma\Gamma') \quad \text{ἢ} \quad 2\cdot\text{ΑΖ} = \text{ΒΒ}'+\Gamma\Gamma' \qquad (2)$$

Αἱ εὐθεῖαι ΕΖ καὶ ΟΑ' εἶναι παράλληλοι, διότι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΑ'. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΑ'Ο, ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΟΑ' καὶ ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον Ε τῆς πλευρᾶς του ΑΟ, ἄρα ἡ ΕΖ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Ζ τῆς τρίτης πλευρᾶς· ἤτοι εἶναι ΑΖ=ΖΑ'. ἄρα 2ΑΖ=ΑΑ'. Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ 2·ΑΖ θέτομεν εἰς τὴν (2) καὶ ἔχομεν $$\text{ΑΑ}' = \text{ΒΒ}'+\Gamma\Gamma'.$$

292. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους ἑνὸς τριγώνου, ἀπὸ εὐθεῖαν, ἡ ὁποία κεῖται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, εἶναι ἴση μὲ τὸ τρίτον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀποστάσεων τῶν τριῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ἀπὸ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.



Σχ. 256

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τυχοῦσα εὐθεῖα χ'χ, ἐκτὸς αὐτοῦ. Ἔστω Κ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Φέρομεν τὰς καθέτους ΚΚ', ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' ἐπὶ τὴν χ'χ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\text{ΚΚ}' = \frac{1}{3}(\text{ΑΑ}'+\text{ΒΒ}'+\Gamma\Gamma')$.

Ἐκ τοῦ μέσου Δ τῆς ΑΓ φέρομεν τὴν ΔΔ' κάθετον ἐπὶ τὴν χ'χ. Ἐπίσης ἐκ τοῦ μέσου Ε τῆς ΒΚ φέρομεν τὴν ΕΕ' κάθετον ἐπὶ τὴν χ'χ. Αἱ εὐθεῖαι ΕΕ' καὶ ΔΔ' εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν· ἄρα τὸ τετράπλευρον ΕΕ΄Δ΄Δ εἶναι τραπέζιον. Αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΕΕ΄, ΚΚ΄, ΔΔ΄ ὁρίζουν ἴσα τμήματα ΕΚ, ΚΔ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΔ· ἄρα θὰ ὁρίζουν ἴσα τμήματα καὶ ἐπὶ τῆς Ε΄Δ΄, ἡ ὁποία τέμνεται ὑπ' αὐτῶν. Ἤτοι εἶναι Ε΄Κ΄=Κ΄Δ΄· ἄρα ἡ ΚΚ΄ εἶναι διάμεσος τοῦ τραπεζίου ΕΕ΄Δ΄Δ καὶ ἑπομένως εἶναι ἴση μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεων· ἤτοι εἶναι

$$KK' = \frac{1}{2}(EE'+\Delta\Delta') \qquad (1)$$

Ἐπίσης ἡ ΔΔ΄ εἶναι διάμεσος τοῦ τραπεζίου ΑΑ΄Γ΄Γ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι $\Delta\Delta' = \frac{1}{2}(AA'+\Gamma\Gamma')$.

Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ ΔΔ΄ θέτομεν εἰς τὴν (1) καὶ ἔχομεν:

$$KK' = \frac{1}{2}\left[EE' + \frac{1}{2}(AA'+\Gamma\Gamma')\right] \quad \text{ἢ}$$

$$KK' = \frac{1}{4}(2EE'+AA'+\Gamma\Gamma') \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ ἡ ΕΕ΄ εἶναι διάμεσος τοῦ τραπεζίου ΒΒ΄Κ΄Κ, θὰ εἶναι

$$EE' = \frac{1}{2}(BB'+KK') \quad \text{ἢ} \quad 2.EE'=BB'+KK'$$

Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ 2.ΕΕ΄ θέτομεν εἰς τὴν (2) καὶ ἔχομεν

$$KK' = \frac{1}{4}(BB'+KK'+AA'+\Gamma\Gamma') \quad \text{ἢ} \quad 4.KK'=BB'+KK'+AA'+\Gamma\Gamma' \quad \text{ἢ}$$

$$3.KK'=BB'+AA'+\Gamma\Gamma' \quad \text{ἄρα} \quad KK' = \frac{1}{3}(AA'+BB'+\Gamma\Gamma').$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ΄.

Συμμετρία

293. Νὰ ἐξετασθῇ ἡ συμμετρία: 1ον εἰς ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον. 2ον εἰς ἕνα παραλληλόγραμμον. 3ον εἰς ἕνα ὀρθογώνιον. 4ον εἰς ἕνα ῥόμβον. 5ον εἰς ἕνα τετράγωνον.

1ον. Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔχει ὡς ἄξονας συμμετρίας, τὰ τρία ὕψη του.

2ον. Τὸ παραλληλόγραμμον ἔχει ἕνα κέντρον συμμετρίας, τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του.

3ον. Τὸ ὀρθογώνιον ἔχει δύο ἄξονας συμμετρίας καθέτους μεταξύ των: τὰς εὐθείας, ποὺ συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του. Τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν δύο αὐτῶν εὐθειῶν καὶ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων, εἶναι ἕνα κέντρον συμμετρίας.

4ον. Ὁ ρόμβος ἔχει δύο ἄξονας συμμετρίας, τὰς δύο διαγωνίους του καὶ ἕνα κέντρον συμμετρίας, τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του.

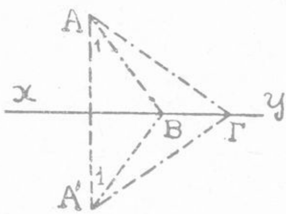
5ον. Τὸ τετράγωνον ἔχει ὡς ἄξονας συμμετρίας τὰς δύο διαγωνίους του καὶ τὰς εὐθείας, ποὺ συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του. Τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του εἶναι κέντρον συμμετρίας.

294. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν ἕνα τετράπλευρον ἔχῃ ἕνα κέντρον συμμετρίας, τὸ τετράπλευρον αὐτὸ εἶναι παραλληλόγραμμον.*

Ἐφ' ὅσον τὸ τετράπλευρον ἔχει ἕνα κέντρον συμμετρίας, αἱ διαγώνιοί του θὰ τέμνωνται εἰς τὸ μέσον. Ἑπομένως θὰ εἶναι παραλληλόγραμμον.

295. *Δύο σημεῖα* Α *καὶ* Α′ *εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν εὐθεῖαν* xy· *συνδέομεν τὰ σημεῖα* Α *καὶ* Α′ *μὲ δύο τυχόντα σημεῖα* Β *καὶ* Γ *τῆς* xy. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι*

γων. ΒΑΓ = γων. ΒΑ′Γ.



Σχ. 257

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Α καὶ Α′ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν xy, ἡ xy εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΑ′. Θὰ εἶναι λοιπὸν

ΓΑ = ΓΑ′ καὶ ΒΑ = ΒΑ′.

Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′ΒΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των ἴσας μίαν πρὸς μίαν· ἤτοι τὴν ΒΓ κοινήν, ΒΑ = ΒΑ′, ΓΑ = ΓΑ′, ὡς ἐδείχθη· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ γων ν = γων. ν′.

296. *Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας* xy *λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον* Ο *καὶ ἐκτὸς αὐτῆς ἕνα ἄλλο σημεῖον* Μ. *Ἔστω* Μ′ *τὸ συμμετρικὸν τοῦ* Μ *πρὸς τὴν* xy *καὶ* Μ″ *τὸ συμμετρικὸν τοῦ* Μ *πρὸς τὸ* Ο. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία* ΜΜ′Μ″ *εἶναι ὀρθή.*

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν xy, ἡ xy εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς Μ.

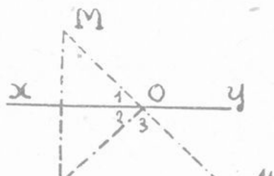
Ἐπειδὴ τὸ Ο εἶναι σημεῖον τῆς xy, καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΜΜ′, θὰ εἶναι

ΟΜ = ΟΜ′ (1).

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ″ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸ Ο, θὰ εἶναι

ΟΜ = ΟΜ″ (2)

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι ΟΜ = ΟΜ′ = ΟΜ″.



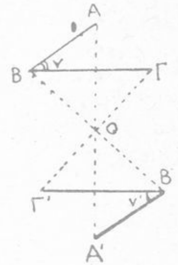
Σχ. 258

Εἰς τὸ τρίγωνον ΜΜ′Μ″ ἡ διάμεσος Μ′Ο εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΜΜ″· ἄρα τὸ τρίγωνον αὐτὸ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Μ′.

297. Τὸ συμμετρικὸν σχῆμα μιᾶς γωνίας πρὸς κέντρον συμμετρίας ἢ πρὸς ἄξονα συμμετρίας εἶναι γωνία ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν.

1ον. Ἔστω ἡ γωνία ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ ἡ συμμετρικὴ αὐτῆς πρὸς κέντρον Ο (Σχ. 259). Θὰ δείξωμεν, ὅτι γων. ΑΒΓ=γων. Α΄Β΄Γ΄.

Πράγματι αἱ πλευραὶ Β΄Α΄ καὶ ΒΑ εἶναι παράλληλοι, διότι εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς κέντρον Ο.



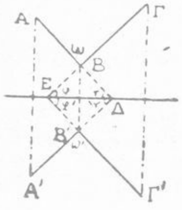
Σχ. 259

Ὁμοίως αἱ πλευραὶ ΒΓ καὶ Β΄Γ΄ εἶναι παράλληλοι διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Αἱ γωνίαι λοιπὸν ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ ἀντιρρόπους.

2ον. Ἔστω ἡ γωνία ΑΒΓ καὶ xy ὁ ἄξων συμμετρίας· ἔστω Α΄Β΄Γ΄ ἡ γωνία, ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὰ συμμετρικὰ σημεῖα Α΄, Β΄, Γ΄ τῶν Α, Β, Γ (Σχ. 239α). Θὰ δείξωμεν, ὅτι

γων. Α΄Β΄Γ΄ = γων. ΑΒΓ.

Πράγματι ἡ πλευρὰ ΑΒ προεκτεινομένη τέμνει τὸν ἄξονα xy εἰς τὸ σημεῖον Δ. Ἡ συμμετρικὴ τῆς εὐθείας ΑΔ εἶναι ἡ Α΄Δ καὶ εἶναι γων. ν = γων. ν΄.



Σχ. 259 α

Ὁμοίως ἡ πλευρὰ ΓΒ προεκτεινομένη τέμνει τὴν xy εἰς τὸ σημεῖον Ε καὶ ἡ ΕΓ΄ εἶναι ἡ σύμμετρικὴ τῆς εὐθείας ΕΓ καὶ εἶναι

γων. σ = γων. σ.

Τὰ τρίγωνα ΕΒΔ καὶ ΕΒ΄Δ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας· ἤτοι ἔχουν τὴν ΕΔ κοινὴν καὶ ν=ν΄, καὶ σ=σ΄, ὡς ἐδείχθη· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ γων. ΕΒΔ = γων. ΕΒ΄Δ ὁπότε καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν των γωνίαι ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ἴσαι· ἤτοι εἶναι

γων. ΑΒΓ = γων. Α΄Β΄Γ΄.

298. Ἐὰν ἕνα σχῆμα ἔχῃ ἕνα ἄξονα συμμετρίας καὶ ἕνα κέντρον συμμετρίας, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος αὐτοῦ, θὰ ἔχῃ καὶ δεύτερον ἄξονα συμμετρίας κάθετον ἐπὶ τὸν πρῶτον εἰς τὸ κέντρον συμμετρίας αὐτοῦ.

Σχ. 260

Ἔστω Α τυχὸν σημεῖον ἑνὸς σχήματος (Σ), Α΄ τὸ συμμετρικόν του πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὸν x΄x΄ καὶ Α΄΄΄ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Α πρὸς κέντρον συμμετρίας τὸ Ο. Ἀπὸ τὸ Ο φέρομεν τὴν y΄Oy κάθετον ἐπὶ τὴν x'x. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ yOy' εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος Σ.

Φέρομεν εὐθείας ΟΑ, ΟΑ', ΟΑ''' καὶ Α''' Α'. Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΟΑ=ΟΑ''' καὶ ΑΜ=ΜΑ'. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΑ'''Α', ἡ εὐθεῖα ΟΜ συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν του, ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν Α'''Α'. Ἡ Οy ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν Οx θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της Α'''Α'.

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ΟΑ'''=ΟΑ', ὡς ἴσα πρὸς τὴν ΟΑ, τὸ τρίγωνον ΟΑ'''Α' εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως ἡ κάθετος yOy' διχοτομεῖ τὴν βάσιν του· ἤτοι εἶναι Α'''Κ=ΚΑ'. Τὰ σημεῖα λοιπὸν Α''' καὶ Α' εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν ΨΟΨ'. Ἑπομένως ἡ yy' εἶναι ἄξων συμμετρίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι'.

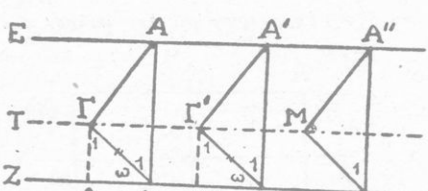
Γεωμετρικοὶ τόποι

299. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κορυφῶν τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ἔχουν κοινὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, αἱ κορυφαί των θὰ ἀπέχουν ἀπὸ τὴν βάσιν ἀποστάσεις ἴσας μὲ τὸ δοθὲν ὕψος· ἄρα (§ 195) θὰ κεῖνται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν καὶ ἡ ὁποία ἀπέχει αὐτῆς ἀπόστασιν ἴσην μὲ τὸ δοθὲν ὕψος.

300. Μεταξὺ δύο παραλλήλων εὐθειῶν Ε καὶ Ζ φέρομεν καθέτους. Μὲ βάσεις τὰς καθέτους αὐτὰς κατασκευάζομεν τρίγωνα ἴσα μεταξύ των. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς τρίτης κορυφῆς τῶν τριγώνων αὐτῶν.

Ἔστωσαν ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' δύο τοιαῦτα ἴσα τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσεις τὰς ΑΒ καὶ Α'Β'. Αἱ κορυφαὶ των Γ καὶ Γ' εἶναι προφανῶς σημεῖα τοῦ τόπου.



Σχ. 261

Φέρομεν τὰς καθέτους ΓΔ καὶ Γ'Δ' ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν Ζ. Τὰ σχηματισθέντα ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΔΒ καὶ Γ'Δ'Β' εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ΓΒ καὶ Γ'Β' ἴσας καὶ τὰς ὀξείας γωνίας ω καὶ ω' ἴσας, ὡς συμπληρωματικὰς τῶν ἴσων γωνιῶν B_1 καὶ B_1· ἄρα θὰ εἶναι ΓΔ=Γ'Δ'.

Ἐπειδὴ αἱ ἀποστάσεις αὗται ΓΔ καὶ Γ΄Δ΄ εἶναι ἴσαι, τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ΄ κεῖνται ἐπὶ εὐθείας Τ παραλλήλου πρὸς τὴν εὐθεῖαν Ζ καὶ ἡ ὁποία ἀπέχει ἀπὸ τὴν Ζ ἀπόστασιν ΓΔ.

Ὥστε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ἡ εὐθεῖα Τ.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας Τ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ Μ εἶναι ἡ τρίτη κορυφὴ ἑνὸς τριγώνου ἴσου πρὸς τὸ ΑΒΓ καὶ τοῦ ὁποίου αἱ δύο ἄλλαι κορυφαὶ κεῖνται ἐπὶ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν Ε καὶ Ζ.

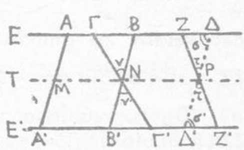
Ἀπὸ τὸ σημεῖον Μ φέρομεν παραλλήλους ΜΝ καὶ ΜΑ΄΄, ἀντιστοίχως, πρὸς τὰς πλευρὰς ΓΒ καὶ ΓΑ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς Ζ καὶ Ε εἰς τὰ σημεῖα Ν καὶ Α΄΄. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν Α΄΄Ν.

Αἱ ΜΝ καὶ ΓΒ εἶναι ἴσαι, ὡς παράλληλοι περιεχόμεναι μεταξὺ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν Ζ καὶ Τ, ἤτοι εἶναι ΜΝ=ΓΒ. Ὁμοίως, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, εἶναι καὶ ΜΑ΄΄=ΓΑ. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄΄ΜΝ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην· ἤτοι ἔχουν ΑΓ=Α΄΄Μ, ΓΒ=ΜΝ, ὡς ἐδείχθη καὶ γων. ΑΓΒ=γων. Α΄΄ΜΝ, διότι αἱ πλευραί των εἶναι παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι. Ἄρα τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς εὐθείας Τ εἶναι ἡ τρίτη κορυφὴ ἑνὸς τριγώνου ἴσου μὲ τὸ ΑΒΓ. Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν Τ εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος· ὥστε ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος εἶναι εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὰς δοθείσας καὶ ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὴν τρίτην κορυφὴν ἑνὸς δοθέντος τριγώνου.

*301. **Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων τῶν περιεχομένων μεταξὺ δύο παραλλήλων εὐθειῶν.***

Ἔστωσαν Ε καὶ Ε΄ αἱ δοθεῖσαι παράλληλοι καὶ Μ καὶ Ν τὰ μέσα τῶν εὐθειῶν ΑΑ΄ καὶ ΓΓ΄ τῶν περιεχομένων μεταξὺ τῶν Ε καὶ Ε΄. Τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν εἶναι σημεῖα τοῦ τόπου.

Φέρομεν τὴν ΜΝ, καὶ ἐκ τοῦ Ν τὴν ΒΒ΄ παράλληλον τῆς ΑΑ΄. Τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα ΝΓΒ καὶ ΝΓ΄Β΄ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην ΓΝ=ΝΓ΄ καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας· ἤτοι τὰς ν=ν΄ ὡς κατὰ κορυφὴν καὶ ΝΓΒ=ΝΓ΄Β΄ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων Ε καὶ Ε΄ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΓΓ΄. Θὰ εἶναι λοιπὸν καὶ ΒΝ = ΝΒ΄.



Σχ. 262

Ἀλλ' ἐπειδὴ ΑΑ΄=ΒΒ΄, θὰ εἶναι καὶ ΑΜ=ΒΝ. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΑΜΝΒ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι ἔχει δύο ἀπέναντι πλευρὰς ΑΜ καὶ ΒΝ ἴσας καὶ παραλλήλους.

Ἑπομένως ἡ ΜΝ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς εὐθείας Ε καὶ Ε΄.

Ἀντιστρόφως. Θὰ δείξωμεν, ὅτι κάθε σημεῖον τῆς παραλλήλου ΜΝ, ἔστω τὸ Ρ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου· δηλ. εἶναι μέσον ἑνὸς εὐθ. τμήματος, ποὺ περιέχεται μεταξὺ τῶν Ε καὶ Ε΄.

Πράγματι, ἔστω ΖΡΖ΄ ἕνα ἀπὸ τὰ εὐθ. τμήματα αὐτά. Φέρομεν ἐκ τοῦ Ρ τὴν ΔΡΔ΄ παράλληλον τῆς ΑΑ΄.

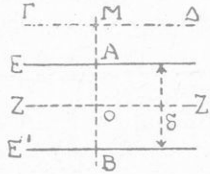
Ἔχομεν ΔΡ = ΑΜ, ΡΔ′ = ΜΑ′, ὡς παράλληλοι περιεχόμεναι μεταξὺ παραλλήλων. Θὰ εἶναι λοιπὸν καὶ ΔΡ=ΔΖ′. Τὰ τρίγωνα ΖΡΔ καὶ ΡΔΖ′ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν πλευρὰν ἴσην, ΔΡ=Δ′Ρ καὶ τὰς προσκειμένας γωνίας ἴσας, ἤτοι τὰς τ=τ′, ὡς κατὰ κορυφὴν καὶ τὰς σ=σ′, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων Ε καὶ Ε′ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΔΔ′· ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων τούτων προκύπτει ΡΖ=ΡΖ′, ὁπότε τὸ Ρ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΖΖ′′.

Ὁ ζητούμενος λοιπὸν τόπος εἶναι ἡ παράλληλος ΜΝ πρὸς τὰς δοθείσας εὐθείας, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τοῦ μέσου Μ μιᾶς εὐθείας ΑΑ′ περιεχομένης μεταξὺ τῶν Ε καὶ Ε′.

302. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο παραλλήλους εὐθείας εἶναι ἴσον μὲ δοθὲν μῆκος λ.

Ἔστωσαν Ε καὶ Ε′ αἱ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι καὶ δ ἡ ἀπόστασις αὐτῶν. Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις, καθόσον τὸ λ εἶναι μεγαλύτερον, ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ δ·

1η περίπτωσις. λ>δ. Ἔστω, ὅτι ἕνα σημεῖον Μ τοῦ τόπου κεῖται ἄνωθεν τῆς εὐθείας Ε. Φέρομεν ἐκ τοῦ Μ τὴν ΜΑΒ κάθετον ἐπὶ τὰς Ε καὶ Ε′. Ἐπίσης ἐκ τοῦ μέσου Ο τῆς ΑΒ φέρομεν τὴν ΖΟΖ′ παράλληλον πρὸς τὰς δοθείσας εὐθείας. Ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν.



Σχ. 263

$$ΜΑ+ΜΒ = (ΜΟ-ΟΑ)+(ΜΟ+ΟΒ) = 2ΜΟ$$

καὶ ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι

ΜΑ+ΜΒ=λ ἕπεται, ὅτι λ=2ΜΟ

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει $ΜΟ=\frac{λ}{2}$

ὅλα λοιπὸν τὰ σημεῖα Μ κεῖνται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν ΖΖ′ καὶ ἡ ὁποία ἀπέχει αὐτῆς ἀπόστασιν $ΟΜ=\frac{λ}{2}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ὑπάρχει καὶ μία ἄλλη παράλληλος τῆς ΖΖ′, ἡ ὁποία εὑρίσκεται κάτωθεν τῆς Ε′ καὶ ἡ ὁποία ἀπέχει τῆς ΖΖ′ ἀπόστασιν ἴσην μὲ $\frac{λ}{2}$.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἕνα σημεῖον Ν τοῦ τόπου ἔκειτο μεταξὺ τοῦ Ε καὶ Ε′ θὰ εἴχομεν ΝΑ+ΝΒ=ΑΒ=δ καὶ ἐπειδὴ ὑπετέθη, ὅτι λ>δ ἕπεται, ὅτι ΝΑ + ΝΒ < λ.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι δὲν ὑπάρχει τοιοῦτον σημεῖον τοῦ τόπου μεταξὺ τῶν εὐθειῶν Ε καὶ Ε′.

Εἰς τὴν περίπτωσιν λοιπόν, καθ' ἣν λ>δ ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι τῆς ΖΖ′ καὶ ἀπέχουσαι αὐτῆς ἀπόστασιν $\frac{λ}{2}$.

2α περίπτωσις. λ=δ. Ἐὰν λ=δ, δὲν ὑπάρχει κανὲν σημειον τόπου κειμένου ἐκτὸς τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν Ε καὶ Ε'· διότι, πράγματι, ἡ μία ἐκ τῶν ἀποστάσεων ΜΑ, ΜΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς δ, καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΜΑ + ΜΒ>λ.

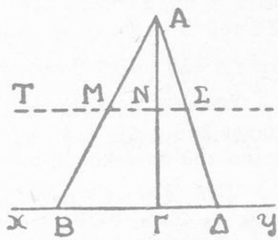
Ἀλλὰ δι' ὅλα τὰ σημεῖα Ν τὰ κείμενα μεταξὺ τῶν παραλλήλων Ε καὶ Ε' θὰ ἔχωμεν ΝΑ+ΝΒ=δ ἢ ΝΑ+ΝΒ=λ.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ὅλος ὁ χῶρος, ὁ εὑρισκόμενος μεταξὺ τῶν παραλλήλων Ε καὶ Ε'.

3η περίπτωσις λ<δ. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δὲν ὑπάρχει κανὲν σημεῖον, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς δύο παραλλήλου Ε καὶ Ε' νὰ ἰσοῦται μὲ λ.

303. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

Ἔστω xy ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ Α τὸ δοθὲν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς xy. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν, τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΑΒ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν εὐθεῖαν xy εἰς τὸ σημεῖον Β. Ἐπίσης ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τὴν κάθετον ΑΓ ἐπὶ τὴν xy. Ἔστω Μ τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ καὶ Ν τὸ μέσον τοῦ ΑΓ. Τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν εἶναι προφανῶς σημεῖα τοῦ τόπου.



Σχ. 264

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΜΝ. Ἡ εὐθεῖα ΜΝ, ὡς συνδέουσα τὰ μέσα Μ καὶ Ν τῶν δύο πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν ΒΓ τοῦ τριγώνου. Ἐπειδὴ δὲν δύναται νὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Ν ἄλλη παράλληλος πρὸς τὴν xy, ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ ζητουμένου τόπου θὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς παπαραλλήλου Τ πρὸς τὴν xy, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ Ν.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω Σ τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας Τ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΣ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν xy εἰς τὸ σημεῖον Δ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ σημεῖον Σ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου· δηλ. εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΔ.

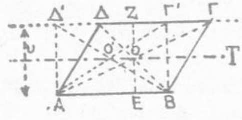
Πράγματι· εἰς τὸ τρίγωνον ΑΓΔ, ἡ εὐθεῖα ΝΣ ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον Ν τῆς πλευρᾶς ΑΓ καὶ εἶναι παράλληλος, ἐξ ὑποθέσεως, πρὸς τὴν πλευρὰν ΓΔ· ἄρα ἡ ΝΣ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς τρίτης πλευρᾶς του, ἤτοι εἶναι ΑΣ=ΣΔ· ὥστε τὸ τυχὸν σημεῖον Σ τῆς εὐθείας Τ εἶναι μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΔ, δηλ. εἶναι σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου.

Ὥστε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι εὐθεῖα Τ παράλληλος πρὸς τὴν δοθεῖσαν καὶ ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου Α ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

304. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν παραλληλογράμμων, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ Ο τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του (δηλ. τὸ κέντρον τοῦ παραλληλογράμμου). Τὸ Ο εἶναι προφανὲς ἕνα σημεῖον τοῦ τόπου.

Ἔστω ἐπίσης ΑΒΓ′Δ′ ἕνα ἄλλο παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν τὴν ΑΒ καὶ ὕψος ἴσον μὲ τὸ ὕψος τοῦ ΑΒΓΔ, δηλ. ἡ Δ′Γ′ κεῖται ἐπὶ τῆς αὐτῆς παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΒ ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται ἡ πλευρὰ ΔΓ. Ἔστω Ο′ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων ΑΓ′ καὶ ΔΔ′. Τὸ Ο′ εἶναι ἐπίσης σημεῖον τοῦ τόπου.



Σχ. 265

Φέρομεν τὴν ΟΟ′. Τὰ σημεῖα Ο καὶ Ο′ εἶναι τὰ μέσα τῶν ΑΓ καὶ ΑΓ′. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΓ′Γ ἡ εὐθεῖα Ο′Ο συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν του, ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν του Γ′Γ. Ἡ ΟΟ′ ὡς παράλληλος πρὸς τὴν Γ′Γ, θὰ εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὴν ΑΒ. Παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ σημεῖα Ο καὶ Ο′ τοῦ ζητουμένου τόπου κεῖνται ἐπὶ εὐθείας Τ παραλλήλου πρὸς τὴν κοινὴν βάσιν τοῦ παραλληλογράμμου. Ἐκ τοῦ Ο φέρομεν τὴν κάθετον ΕΟΖ ἐπὶ τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ΑΒ καὶ ΓΔ τοῦ παραλληλογράμμου. Γνωρίζομεν, ὅτι $ΟΕ=ΟΖ=\frac{υ}{2}$.

Ὥστε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι εὐθεῖα Τ παράλληλος πρὸς τὴν κοινὴν βάσιν ΑΒ καὶ ἡ ὁποία ἀπέχει αὐτῆς ἀπόστασιν ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ δοθέντος ὕψους. Τὸ ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

305. ***Δίδεται ἡ γωνία*** ΑΟΒ· ***ἀπὸ τυχὸν σημεῖον*** Μ, ***τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας*** ΑΟΒ ***φέρομεν τὰς παραλλήλους*** ΜΓ ***καὶ*** ΜΔ ***ἀντιστοίχως πρὸς τὰς πλευρὰς*** ΟΒ ***καὶ*** ΟΑ, ***αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν*** ΟΑ ***εἰς τὸ*** Γ ***καὶ τὴν*** ΟΒ ***εἰς τὸ*** Δ. ***Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου Μ, ἵνα τὸ ἄθροισμα*** ΜΓ+ΜΔ ***εἶναι ἴσον μὲ δοθὲν μῆκος λ.***

Ἔστω Μ ἕνα σημεῖον κείμενον ἐντὸς τῆς γωνίας ΑΟΒ καὶ τοιοῦτον, ὥστε ΜΓ+ΜΔ=λ. Τὸ Μ εἶναι προφανῶς σημεῖον τοῦ τόπου.

Σχ. 266

Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΟΑ ἕνα τμῆμα ΟΕ=λ καὶ φέρομεν τὴν ΕΜ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν ΟΒ εἰς τὸ Ζ. Ἔχομεν λ=ΟΕ=ΟΓ+ΓΕ καὶ λ=ΜΓ+ΜΔ· ἄρα λ=ΟΓ+ΓΕ=ΜΓ+ΜΔ. (1)

Ἀλλά, ἐπειδὴ ΟΓ=ΜΔ, ὡς παράλληλοι περιεχόμεναι μεταξὺ παραλλήλων ἕπεται ἐκ τῆς (1), ὅτι ΓΕ=ΓΜ καὶ κατὰ συνέπειαν θὰ εἶναι καὶ

γων. Ε = γων. ν. (2)

Ἀλλὰ εἶναι καὶ γων. Ζ=γων. ν (3) ἐπειδὴ ἔχουν τὰς πλευρὰς των παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους.

Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) προκύπτει, ὅτι γων. Ε=γων. Ζ.

Τὸ τρίγωνον ΟΕΖ εἶναι λοιπὸν ἰσοσκελὲς καὶ ἔχει ΟΕ=ΟΖ=λ. Κάθε σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε ΜΓ+ΜΔ=λ, κεῖται ἐπὶ τῆς βάσεως τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ δύο ἴσαι πλευραὶ εἶναι ΟΕ=ΟΖ=λ.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω Μ′ ἕνα σημεῖον τῆς ΕΖ. Φέρομεν τὰς Μ′Γ′ καὶ Μ′Δ′ παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ΑΟΒ· λέγω, ὅτι Μ′Γ′+Μ′Δ′=λ.

Πράγματι· εἶναι Μ′Δ′=ΟΓ′, ὡς παράλληλοι περιεχόμεναι μεταξὺ παραλλήλων καὶ Μ′Γ′=Γ′Ε, διότι τὸ τρίγωνον ΓΕΜ′ εἶναι ἰσοσκελές, διότι αἱ γωνίαι Ε καὶ ΕΜΓ εἶναι ἴσαι, ὡς ἴσαι πρὸς τὴν γων. Ζ.

Θὰ εἶναι λοιπόν: Μ′Γ′+Μ′Δ′=Γ′Ε+Γ′Ο ἢ καὶ Μ′Γ′+Μ′Δ′=ΟΕ=λ.

Ὁ ζητούμενος λοιπὸν τόπος εἶναι ἡ βάσις τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω.

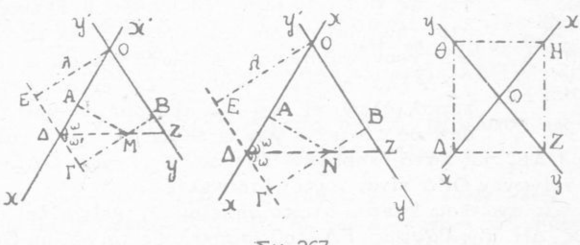
306. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο τεμνομένας εὐθείας εἶναι ἴσον μὲ δοθὲν μῆκος λ

Ἔστωσαν xOx′ καὶ yOy′ δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι καὶ Μ ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας xOy καὶ τοιοῦτον, ὥστε αἱ ἀποστάσεις ΜΑ καὶ ΜΒ ἀπὸ τὰς δύο αὐτὰς εὐθείας νὰ ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ λ· δηλ. ἔστω, ὅτι ΜΑ+ΜΒ=λ.

Τὸ σημεῖον Μ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Προεκτείνομεν τὴν ΜΒ κατὰ ΜΓ=ΜΑ, ὁπότε θὰ εἶναι ΒΓ=λ. Τὸ σημεῖον Γ, ὡς ἀπέχον τῆς yy′ ἀπόστασιν λ κεῖται ἐπὶ εὐθείας ΕΔΓ παραλλήλου πρὸς τὴν yy′.

Φέρομεν τὴν ΔΜ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν Oy εἰς



Σχ. 267

τὸ Ζ· τὰ σχηματισθέντα ὀρθογώνια τρίγωνα ΜΑΔ καὶ ΜΓΔ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὴν ὑποτείνουσαν ΜΔ κοινὴν καὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ἴσην: ἤτοι ΜΑ=ΜΓ ἐκ κατασκευῆς· ἄρα θὰ ἔχουν γων. ω=γων. ω′.

Ἀλλὰ γων. Ζ=γων. ω′, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ κλπ.· ἑπομένως εἶναι γων. ω=γων. Ζ, ὁπότε τὸ τρίγωνον ΟΔΖ εἶναι ἰσοσκελές.

Τὸ σημεῖον Μ κεῖται λοιπὸν ἐπὶ τῆς βάσεως ΔΖ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΟΔΖ, τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ Δ ὁρίζεται, ἐὰν φέρωμεν τὴν παράλληλον ΕΔΓ πρὸς τὴν y′y καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπ᾽ αὐτῆς ἴσην μὲ λ.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω Ν (Σχ. 267β) ἕνα σημεῖον τῆς ΔΖ. Θὰ δείξω, ὅτι τὸ ἄθροισμα ΝΑ+ΝΒ τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τὰς xx′ καὶ yy′ εἶναι ἴσον μὲ λ.

Πράγματι· ἐπειδὴ Ζ=ω καὶ Ζ=ω′ ἕπεται, ὅτι ω=ω′.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΝΑΔ καὶ ΝΓΔ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ὑποτείνουσαν ΝΔ κοινὴν καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην, ἤτοι ω=ω′· ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΝΑ = ΝΓ.

Θὰ εἶναι λοιπὸν ΝΑ+ΝΒ=ΝΓ+ΝΒ=ΓΒ=λ.

Ὁ ζητούμενος λοιπὸν τόπος, διὰ τὴν γωνίαν xOy, εἶναι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΔΖ.

Διὰ τὰς ἄλλας γωνίας εὑρίσκομεν ὁμοίως τὰ τμήματα ΖΗ, ΗΘ, ΘΔ (Σχ. 267.γ). Ὁ πλήρης τόπος εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ ὀρθογων, ΔΖΗΘ.

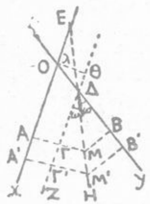
307. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο εὐθείας τεμνομένας εἶναι ἴση μὲ δοθὲν μῆκος λ.

Ἔστω Μ ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας, xOy, ΜΑ καὶ ΜΒ αἱ ἀποστάσεις του ἀπὸ τὰς εὐθείας xx′ καὶ yy′ καὶ τοιοῦτον, ὥστε ΜΑ—ΜΒ=λ.

Ἐπὶ τῆς ΜΑ λαμβάνομεν εὐθ. τμῆμα ΜΓ=ΜΒ, ὁπότε θὰ εἶναι

ΑΓ=ΜΑ—ΜΓ ἢ ΑΓ=ΜΑ—ΜΒ=λ.

Τὸ σημεῖον Γ κεῖται λοιπὸν ἐπὶ εὐθείας ΖΓΔ παραλλήλου τῆς xx′ καὶ ἡ ὁποία ἀπέχει αὐτῆς ἀπόστασιν λ. Φέρομεν τὴν ΔΜ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν xx′ εἰς τὸ Ε. Τὰ σχηματισθέντα ὀρθογώνια τρίγωνα ΜΔΓ καὶ ΜΔΒ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ἴσην, ἤτοι τὴν ΜΔ κοινὴν καὶ ΓΜ=ΜΒ ἐκ κατασκευῆς. Θὰ ἔχουν λοιπὸν καὶ γων. ω = γων. ω′.



Σχ. 268

Ἀλλὰ γων. ω = γων. Ε, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς τῶν παραλλήλων xΕ καὶ ΖΔ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΕΜ· ἄρα θὰ εἶναι γων. ω′ = γων. Ε καὶ ἐπειδὴ ω′=γων. ΟΔΕ, ὡς κατὰ κορυφὴν ἕπεται, ὅτι γων. ΟΔΕ=γων. Ε.

Τὸ τρίγωνον ΟΕΔ εἶναι λοιπὸν ἰσοσκελές.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται, ὅτι τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως ΔΗ τῆς βάσεως ΕΔ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΟΕΔ, τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ Δ ὁρίζεται ὑπὸ τῆς τομῆς τῆς yy′ καὶ τῆς παραλλήλου ΔΖ πρὸς τὴν xx′, ἡ ὁποία ἀπέχει αὐτῆς ἀπόστασιν λ.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω Μ′ ἕνα σημεῖον τῆς ΔΗ· ἔχομεν

Μ′Β′=Μ′Γ′, Γ′Α′=λ· ὥστε

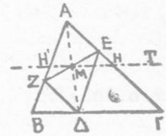
Μ′Α′—Μ′Β′=Γ′Α′=λ.

Ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν κειμένων ἐντὸς τῆς γωνίας xOy καὶ τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τῆς xx′, ἐλαττουμένη κατὰ τὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς yy′, εἶναι ἴση μὲ λ, εἶναι ἡ εὐθεῖα ΔΗ.

Διὰ τὰ ἄλλα σημεῖα, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐντὸς τῶν τριῶν ἄλλων γωνιῶν εὑρίσκομεν ἄλλας εὐθείας, τὰς ὁποίας κατασκευάζομεν, ὅπως κατεσκευάσθη ἡ ΔΗ. Τέλος διὰ τὸν τόπον τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τῆς yy′, ἐλαττουμένη κατὰ τὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τὴν xx′, εἶναι ἴση μὲ λ, εὑρίσκομεν ὁμοίως ἄλλας τέσσαρας εὐθείας. Ὁ πλήρης τόπος ἀποτελεῖται ἀπὸ 8 εὐθείας, αἱ ὁποῖαι εἶναι αἱ προεκτάσεις τῶν πλευρῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ μία τῶν πλευρῶν του εἶναι ἡ ΔΕ καὶ Ο τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του.

308. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. *Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον* Δ *τῆς βάσεώς του φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευράς του* ΑΒ *καὶ* ΑΓ, *αἱ ὁποῖαι τέμνουν αὐτάς, ἀντιστοίχως, εἰς τὰ σημεῖα* Ε *καὶ* Ζ. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν παραλληλογράμμων* ΑΖΔΕ, *τὰ ὁποῖα σχηματίζονται, ὅταν τὸ* Δ *κινῆται ἐπὶ τῆς βάσεως* ΒΓ.

Ἔστω ΑΖΔΕ μία τυχοῦσα θέσις τοῦ παραλληλογράμμου. Φέρομεν τὰς διαγωνίους του ΑΔ καὶ ΖΕ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Μ. Τὸ Μ εἶναι κέντρον τοῦ παραλληλογράμμου ΑΖΔΕ καὶ ἑπομένως εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.



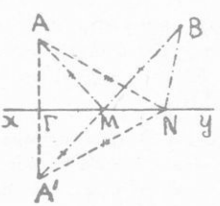
Σχ. 269

Ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου διχοτομοῦνται, θὰ εἶναι ΑΜ=ΜΔ. Τὸ Μ λοιπὸν εἶναι τὸ μέσον ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ΑΔ, τὸ ὁποῖον ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΓ. Ἀλλὰ γνωρίζομεν (ἄσκ. 303), ὅτι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν, εἶναι μία εὐθεῖα Τ παράλληλος πρὸς τὴν δοθεῖσαν καὶ ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου Α ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ. Ὥστε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΗΗ′ τῆς παραλλήλου Τ, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Προβλήματα ἐπὶ τοῦ Α′ βιβλίου πρὸς γενικὴν ἐπανάληψιν

Α′ Ὁμάς. 309. Δίδεται ἡ εὐθεῖα xy *καὶ ἐκτὸς αὐτῆς καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, δύο σημεῖα* Α *καὶ* Β *Ἐκ τοῦ* Α *φέρομεν τὴν κάθετον* ΑΓ *ἐπὶ τὴν* xy *καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα* ΓΑ′=ΑΓ. *Φέρομεν τὴν* Α′Β, *ἡ ὁποία τέμνει τὴν* xy *εἰς τὸ σημεῖον* Μ *καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς* xy *ἕνα ἄλλο τυχὸν σημεῖον* Ν. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι*

ΑΜ+ΜΒ<ΑΝ+ΝΒ.



Σχ. 270

Ἐπειδὴ ἡ ΜΓ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΑ′ θὰ εἶναι ΜΑ=ΜΑ′.

Ὁμοίως εἶναι ΝΑ=ΝΑ′.

Ἐπειδὴ ἡ Α′Β εἶναι εὐθεῖα καὶ ἡ Α′ΝΒ τεθλασμένη θὰ εἶναι

Α′Β <Α′Ν+ΝΒ ἢ Α′Μ+ΜΒ<Α′Ν+ΝΒ ἢ ΑΜ+ΜΒ′<ΑΝ+ΝΒ.

310. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α *ἑνὸς τριγώνου* ΑΒΓ, (ΑΒ > ΑΓ) *φέρομεν τὸ ὕψος* ΑΕ *καὶ τὴν διχοτόμον* ΑΔ *τῆς γωνίας* Α. ***1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ,*** *ὅτι* γων. $ΔΑΕ = \frac{Γ-Β}{2}$. ***2ον. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν*** Γ *φέρομεν τὴν* ΓΖ *κάθετον ἐπὶ τὴν διχοτόμον* ΑΔ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ,*** *ὅτι* γων.$ΒΓΖ = \frac{Γ-Β}{2}$. ***3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ,*** *ὅτι* γων.$ΑΔΒ = 1$ ὀρθ.$+ \frac{Γ-Β}{2}$.

Σχ. 271

1ον Βλέπε λύσιν ἀσκήσεως 163.

2ον Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΒΓΖ καὶ ΔΑΕ ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους μίαν πρὸς μίαν, θὰ εἶναι ἴσαι· ἤτοι εἶναι

$$\text{γων.}ΒΓΖ = \text{γων.}\ ΔΑΕ = \frac{Γ-Β}{2}.$$

3ον Ἡ γωνία ΑΔΒ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΔΕ· ἄρα θὰ εἶναι γων.$ΑΔΒ =$ γων.Ε $+$ γων.$ΔΑΕ = 1$ ὀρθ.$+ \frac{Γ-Β}{2}$.

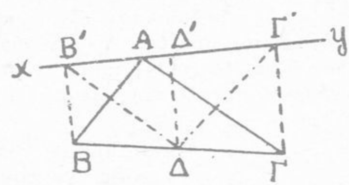
311. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α *ἑνὸς τριγώνου* ΑΒΓ *φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν* xΑy. ***Ἀπὸ τὰς κορυφὰς*** Β ***καὶ*** Γ ***φέρομεν καθέτους*** ΒΒ΄ ***καὶ*** ΓΓ΄ *ἐπὶ τὴν* xΑy. ***Νὰ ἀποδειχθῇ,*** *ὅτι τὸ μέσον* Δ *τῆς* ΒΓ *ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ σημεῖα* Β΄ *καὶ* Γ΄.

Θὰ δείξωμεν, ὅτι

ΔΒ΄ = ΔΓ΄.

Φέρομεν τὴν ΔΔ΄ κάθετον ἐπὶ τὴν xy. Αἱ εὐθεῖαι ΒΒ΄, ΓΓ΄, ΔΔ΄ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν xy. Ἐπειδὴ αἱ παράλληλοι ΒΒ΄, ΔΔ΄, ΓΓ΄ ὁρίζουν ἴσα τμήματα ΒΔ=ΔΓ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ, θὰ ὁρίζουν ἴσα τμήματα καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας Β΄Γ΄· ἤτοι θὰ εἶναι Β΄Δ΄ = Δ΄Γ΄. Ἡ ΔΔ΄ εἶναι λοιπὸν κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς Β΄Γ΄· ἄρα κάθε σημεῖον της θὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα της Β΄ καὶ Γ΄· ἤτοι θὰ εἶναι

ΔΒ΄ = ΔΓ΄.



Σχ. 272

312. Ἡ γωνία Β *ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου* ΑΒΓ *εἶναι* 30^0. ***Νὰ ἀποδειχθῇ,*** *ὅτι ἡ διάμεσος καὶ τὸ ὕψος, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας* Α, *διαιροῦν τὴν γωνίαν* Α *εἰς τρία ἴσα μέρη.*

Σχ. 273

Ἔστωσαν ΑΔ ἡ διάμεσος καὶ ΑΗ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\widehat{A_1}=\widehat{A_2}=\widehat{A_3}$.

Πράγματι, ἐπειδὴ ἡ γωνία Β εἶναι 30^0 ἡ ἀπέναντι αὐτῆς πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης· ἤτοι εἶναι ΑΓ=ΒΔ=ΔΓ. Ἀλλὰ καὶ ἡ διάμεσος ΑΔ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης· ἤτοι εἶναι ΑΔ=ΒΔ=ΔΓ. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΔΓ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ τὸ ὕψος του ΑΗ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΔΑΓ, ἤτοι εἶναι $\widehat{A_2}=\widehat{A_1}=30^0$. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ΑΔ=ΒΔ θὰ εἶναι $A_3=B=30^0$. Ἄρα θὰ εἶναι $A_1=A_2=A_3=30^0$.

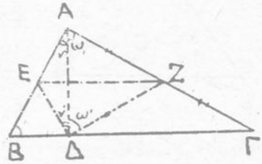
313. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, *ὀρθογώνιον εἰς τὸ* Α. *Φέρομεν τὸ ὕψος* ΑΔ *καὶ συνδέομεν μὲ εὐθείας τὸ* Δ *μὲ τὰ μέσα* Ε *καὶ* Ζ *τῶν καθέτων πλευρῶν* ΑΒ *καὶ* ΑΓ. *Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι τὸ τρίγωνον* ΕΔΖ *εἶναι ὀρθογώνιον. 2ον ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου* ΕΔΖ *εἶναι ἴσαι μὲ τὰ ἡμίση τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου* ΑΒΓ.

Ἡ ΔΕ, ὡς διάμεσος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΒ, θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης ΑΒ· ἤτοι εἶναι ΔΕ=ΕΑ.

Ἀπὸ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΕΔΑ θὰ ἔχωμεν $\widehat{\nu'}=\widehat{\nu}$ (1). Ὁμοίως ἡ ΔΖ εἶναι διάμεσος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι

$$ΔΖ=\frac{ΑΓ}{2}=ΑΖ\cdot$$

τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΖΑΔ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $\omega'=\omega$ (2).



Σχ. 274

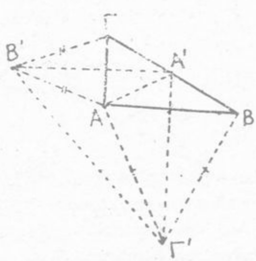
Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη ἔχομεν

$$\nu'+\omega'=\nu+\omega \quad ἤ \quad E\widehat{Δ}Z=B\widehat{A}Γ=1 \text{ ὀρθή}.$$

Ὥστε τὸ τρίγωνον ΕΔΖ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Δ.

2ον. Ἐδείχθη, ὅτι $ΔΕ=\frac{ΑΒ}{2}$ καὶ $ΔΖ=\frac{ΑΓ}{2}$.

Ἡ ΕΖ ὡς συνδέουσα τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς· ἤτοι εἶναι $ΕΖ=\frac{1}{2}ΒΓ$.



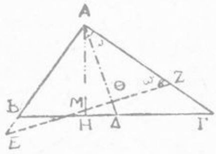
Σχ. 275

314. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, *ὀρθογώνιον εἰς τὸ* Α. *Μὲ πλευρὰς τὰς* ΑΒ *καὶ* ΑΓ *κατασκευάζομεν, πρὸς τὰ ἔξω τοῦ τριγώνου, τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα* ΑΒΓ' *καὶ* ΑΓΒ'. *Ἐὰν* Α' *εἶναι τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης* ΒΓ, *νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον* Α'Β'Γ' *εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ* Α'.

Φέρομεν τὴν ΑΑ'. Ἡ ΑΑ' ὡς διάμεσος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ΑΒΓ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης· ἤτοι εἶναι ΑΑ'=Α'Γ=Α'Β. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν Α'ΓΑ καὶ Α'ΒΑ εἶναι ἰσοσκελῆ. Τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα Β'ΓΑ καὶ Α'ΓΑ ἔχουν κοινὴν βάσιν τὴν ΓΑ· ἄρα ἡ Β'Α' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΑ. Ὁμοίως διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ Α'Γ' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Αἱ γωνίαι Β'Α'Γ' καὶ ΓΑΒ εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους μίαν πρὸς μίαν, ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία ΓΑΒ εἶναι ὀρθὴ ἔπεται ὅτι καὶ ἡ ἴση της γωνία Β'Α'Γ' εἶναι ὀρθή. Ὥστε τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α'.

315. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ *ὀρθογώνιον εἰς τὸ* Α. *Φέρομεν τὴν διάμεσον* ΑΔ *καὶ μίαν τυχοῦσαν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὴν* ΑΔ, *ἡ ὁποία τέμνει τὴν* ΑΔ *εἰς τὸ σημεῖον* Θ *καὶ τὰς πλευρὰς* ΑΒ *καὶ* ΑΓ *ἢ τὰς προεκτάσεις των, εἰς τὰ σημεῖα* Ε *καὶ* Ζ *ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὴν κορυφὴν* Α *μὲ τὸ μέσον* Μ *τῆς* ΕΖ *εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν* ΒΓ.

Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΑΜΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ· ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ γωνίαι ΗΑΓ καὶ Γ εἶναι συμπληρωματικαί.



Σχ. 276

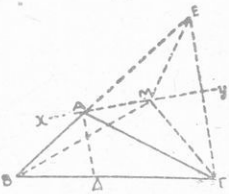
Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΕΖ, ἡ ΑΜ εἶναι διάμεσός του, ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα χωρίζει τὸ τρίγωνον εἰς δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα τὰ ΑΜΖ καὶ ΑΜΕ. Ἀπὸ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΜΖ ἔχομεν $\widehat{\omega}=\widehat{\omega}'$. Ὁμοίως εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ ΑΔ εἶναι διάμεσός του καὶ ἑπομένως τὸ τρίγωνον ΑΔΓ εἶναι ἰσοσκελές· ἄρα θὰ εἶναι $\Delta\widehat{A}\Gamma=\widehat{\Gamma}$.

Ἐξ ὑποθέσεως τὸ τρίγωνον ΑΘΖ εἶναι ὀρθογώνιον· ἄρα αἱ ὀξεῖαι γωνίαι του ω' καὶ γων. ΘΑΓ εἶναι συμπληρωματικαί· δηλ. εἶναι

$$\widehat{\omega}'+\Delta\widehat{A}\Gamma=1 \text{ ὀρθ.} \quad (1)$$

Ἀλλὰ $\widehat{\omega}'=\widehat{\omega}$ καὶ ΔΑΓ=Γ, ὡς ἐδείχθη. Ἡ ἰσότης λοιπὸν (1) γράφεται $\widehat{\omega}+\widehat{\Gamma}=1$ ὀρθ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΗΓ αἱ δύο γωνίαι του ω καὶ Γ εἶναι συμπληρωματικαί· ἄρα ἡ τρίτη γωνία του Η εἶναι ὀρθή. Ὥστε ἡ ΑΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ

316. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. *Ἀπὸ τὴν κορυφήν του* Α *φέρομεν μίαν εὐθεῖαν* xy *κάθετον ἐπὶ τὴν διχοτόμον* ΑΔ *τῆς γωνίας* Α. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν συνδέσωμεν τυχὸν σημεῖον* Μ *τῆς* xy *μὲ τὰς κορυφὰς* Β *καὶ* Γ, *λαμβάνομεν ἕνα τρίγωνον* ΜΒΓ, *τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι μεγαλυτέρα τῆς περιμέτρου τοῦ* ΑΒΓ.



Σχ. 277

Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΜΒ+ΒΓ+ΓΜ>ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ.

Ἡ xy ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας εἶναι διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας ΕΑΓ. Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν xy, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΒΑ εἰς τὸ σημεῖον Ε. Ἐπειδὴ ἡ Αy εἶναι κάθετος ἐπὶ ΓΕ καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας ΓΑΕ, τὸ τρίγωνον ΕΑΓ εἶναι ἰσοσκελές, ἤτοι εἶναι ΑΕ=ΑΓ. Ἐπίσης εἶναι ΜΕ=ΜΓ, διότι τὸ Μ εἶναι σημεῖον τῆς καθέτου xy εἰς τὸ μέσον τῆς ΓΕ.

Ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΕΒΜ ἔχομεν

ΕΒ <ΒΜ+ΜΕ ἢ ΕΑ+ΑΒ <ΒΜ+ΜΕ (1)

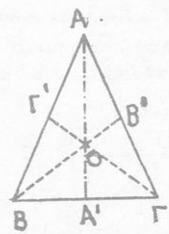
Ἀλλὰ ΕΑ=ΑΓ καὶ ΜΕ=ΜΓ, ὡς ἐδείχθη, ἄρα ἡ (1) γίνεται

ΑΓ + ΑΒ <ΒΜ + ΜΓ (2)

Προσθέτομεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (2) τὸ ΒΓ καὶ ἔχομεν ΑΓ+ ΑΒ + ΒΓ <ΒΜ + ΜΓ + ΒΓ.

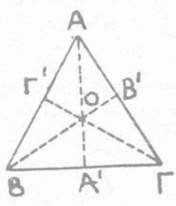
317. Εἰς ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν του, τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν μεσοκαθέτων του, τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων του, τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν τριῶν ὕψων του καὶ ἡ κορυφή του κεῖνται ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς.

Εἰς ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τὸ ὕψος ΑΑ΄, τὸ ὁποῖον ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφήν του εἶναι διάμεσος, διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς καὶ μεσοκάθετος. Τὰ σημεῖα λοιπὸν τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων του τῶν μεσοκαταθέτων του, τῶν διαμέσων του, τῶν ὑψῶν του θὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς ΑΑ΄.



Σχ. 278

318. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἕνα τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον, ἐὰν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων του συμπίπτῃ μὲ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν καθέτων εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του καὶ ἀντιστρόφως.



Σχ. 279

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον τὸ Ο εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν μεσοκαταθέτων του καὶ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων του.

Ἐὰν φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΟΑ΄ αὐτή, ὡς διάμεσος, θὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον Α΄ τῆς ΒΓ. Τὰ τρία λοιπὸν σημεῖα Α,Ο,Α΄ κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας· ὥστε ἡ διάμεσος ΑΑ΄ εἶναι καὶ ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΑΒ=ΑΓ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι ΑΒ=ΒΓ· ἄρα τὸ ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον.

Ἀντιστρόφως. Εἰς κάθε ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν μεσοκαθέτων του καὶ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων του συμπίπτουν, διότι αἱ διάμεσοι εἶναι καὶ μεσοκάθετοι.

319. Τέμνομεν τὰς πλευρὰς μιᾶς γωνίας μὲ μίαν τυχοῦσαν τέμνουσαν.

Φέρομεν τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ τέμνουσα αὐτὴ μὲ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διχοτόμοι αὐταὶ τέμνονται ἀνὰ δύο ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς δοθείσης γωνίας.

Ἡ τέμνουσα τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας σχηματίζει ἕνα τρίγωνον καὶ γνωρίζομεν (§ 181), ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Ἐπίσης ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος μιᾶς γωνίας του καὶ αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν του τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον (§ 183)· ὥστε τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων αὐτῶν κεῖνται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Ο.

Β' Ὁμάς. 320. Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ φέρομεν τὰς καθέτους ΜΒ' καὶ ΜΓ' ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὅταν τὸ σημεῖον Μ κινῆται ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσας ΒΓ, ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Μ ἐπὶ τὴν Β'Γ', διέρχεται πάντοτε ἀπὸ ἕνα σταθερὸν σημεῖον.

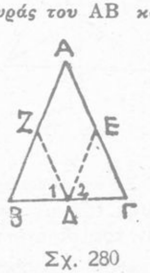
Ἀπὸ τὰ σημεῖα Γ καὶ Β φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Δ.

Σχ. 279

Τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΔΓ εἶναι τετράγωνον, διότι δύο διαδοχικαὶ πλευραί του ΑΓ καὶ ΑΒ εἶναι ἴσαι ἐξ ὑποθέσεως. Φέρομεν τὴν ΜΔ. Προεκτείνομεν τὴν ΜΒ' μέχρις ὅτου συναντήσει τὴν ΓΔ εἰς τὸ σημεῖον Ε.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΜΒ'Γ' καὶ ΜΕΔ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς καθέτους πλευράς των ἴσας· ἤτοι ΜΓ'=ΜΕ ὡς πλευρὰς τοῦ τετραγώνου ΓΓ'ΜΕ καὶ ΜΒ'=ΕΔ ὡς ἴσας πρὸς τὴν Β'Β· ἄρα αἱ γωνίαι των ν καὶ ν' εἶναι ἴσαι. Ἐπειδὴ ἡ πλευρὰ Γ'Μ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΜΕ, θὰ εἶναι καὶ ἡ Γ'Β' κάθετος ἐπὶ τὴν ΜΔ. Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Μ ἐπὶ τὴν Β'Γ' διέρχεται ἀπὸ τὸ ὡρισμένον σημεῖον Δ.

321. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Δ τῆς βάσεως ΒΓ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν παραλλήλους ΔΕ καὶ ΔΖ πρὸς τὰς ἴσας πλευράς του ΑΒ καὶ ΑΓ. 1ον Διὰ ποίαν θέσιν τοῦ Δ ἐπὶ τῆς ΒΓ, τὸ παραλληλόγραμμον ΑΖΔΕ γίνεται ῥόμβος; 2ον. Ποίους ὅρους πρέπει νὰ ἐκπληρῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἵνα τὸ παραλληλόγραμμον ΑΖΔΕ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ πληρουμένων τῶν ὅρων αὐτῶν διὰ ποίαν θέσιν τοῦ Δ τὸ ὀρθογώνιον αὐτὸ εἶναι τετράγωνον;



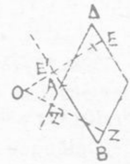
Σχ. 280

1ον. Πρέπει τὸ Δ νὰ κεῖται εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως ΒΓ. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΖΔΕ θὰ εἶναι ῥόμβος, διότι αἱ διαδοχικαὶ πλευραί του ΖΔ καὶ ΔΕ θὰ εἶναι ἴσαι μὲ τὰ ἡμίση τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΓ καὶ ΑΒ.

2ον. Διὰ νὰ εἶναι ὀρθογώνιον τὸ παραλληλόγραμμον ΑΖΔΕ πρέπει αἱ γωνίαι του νὰ εἶναι ὀρθαί· ἄρα πρέπει τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ νὰ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α.

Ὅταν τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α καὶ τὸ σημεῖον Δ κεῖται εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως ΒΓ, τὸ παραλληλόγραμμον ΑΖΔΕ εἶναι τετράγωνον, διότι εἶναι ρόμβος καὶ ὀρθογώνιον.

322. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου κειμένου ἐκτὸς ρόμβου ἀπὸ δύο διαδοχικὰς πλευράς του ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἀποστάσεων τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀπὸ τὰς δυὸ ἄλλας πλευρὰς τοῦ ρόμβου.



Σχ. 282

Ἔστω ὁ ρόμβος ΑΒΓΔ καὶ Ο τυχὸν σημεῖον ἐκτὸς αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ Ο φέρομεν τὴν ΟΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἡ ὁποία θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΒΑ εἰς τὸ σημεῖον Ε'. Ἐπίσης φέρομεν τὴν ΟΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΒ, ἡ ὁποία θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΓΒ εἰς τὸ σημεῖον Ζ. 1ον. Θὰ δείξωμεν $ΟΕ+ΟΖ'=ΟΖ+ΟΕ'$.

Ἔχομεν $ΟΕ=ΟΕ'+Ε'Ε$ (1) καὶ $ΟΖ'=ΟΖ-ΖΖ'$ (2)

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψει, ὅτι $ΕΕ'=ΖΖ'$, ὡς ἀποστάσεις τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ρόμβου, λαμβάνομεν $ΟΕ+ΟΖ'=ΟΕ'+ΟΖ$.

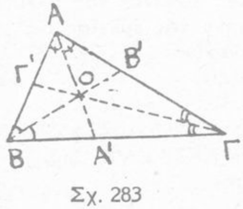
2ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $ΟΕ'-ΟΖ'=ΟΕ-ΟΖ$· ἔχομεν

$$ΟΕ'=ΟΕ-Ε'Ε \quad (2) \quad ΟΖ'=ΟΖ-Ζ'Ζ \quad (3)$$

Ἀφαιροῦντες τὰς ἰσότητας (2) καὶ (3) λαμβάνομεν

$$ΟΕ'-ΟΖ'=ΟΕ-Ε'Ε-ΟΖ+Ζ'Ζ=ΟΕ-ΟΖ, \quad (\text{διότι } Ε'Ε'=Ζ'Ζ).$$

323. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι μικρότερον τῆς περιμέτρου καὶ μεγαλύτερον τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ τριγώνου.



Σχ. 283

Ἔστω ΑΒΓ ἕνα τρίγωνον καὶ ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του.

Γνωρίζομεν (ἄσκ. 242), ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι μικρότεραι τῶν ἀντιστοίχων διαμέσων τοῦ τριγώνου. Ἐὰν λοιπὸν ὀνομάσωμεν $μ_α$, $μ_β$, $μ_γ$ τὰς διαμέσους ἑνὸς τριγώνου θὰ ἔχωμεν

$$ΑΑ'+ΒΒ'+ΓΓ'<μ_α+μ_β+μ_γ \quad (1)$$

Ἀλλὰ

$$μ_α+μ_β+μ_γ<ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ \quad (\text{ἄσκ. } 110)$$

καὶ ἑπομένως κατὰ μείζονα λόγον θὰ εἶναι

$$ΑΑ'+ΒΒ'+ΓΓ'<ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ' \quad (2)$$

Ἔστω Ο τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων. Ἀπὸ τὰ τρίγωνα ΟΒΑ', ΟΑ'Γ, ΟΓΒ', ΟΒ'Α, ΟΑΓ', ΟΓ'Β ἔχομεν

$$ΟΒ+ΟΑ'>ΒΑ', \quad ΟΑ'+ΟΓ>Α'Γ,$$
$$ΟΓ+ΟΒ'>ΓΒ', \quad ΟΒ'+ΟΑ>Β'Α,$$
$$ΟΑ+ΟΓ'>ΑΓ', \quad ΟΓ'+ΟΒ>Γ'Β.$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$2ΟΒ+2ΟΑ'+2ΟΓ+2ΟΒ'+2ΟΑ+2ΟΓ'>ΒΑ'+Α'Γ+ΓΒ'+Β'Α+ΑΓ'+Γ'Β$$

ἢ $$2[(ΟΒ+ΟΒ')+(ΟΓ+ΟΓ')+(ΟΑ'+ΟΑ)]>(ΒΑ'+Α'Γ)+$$
$$+(ΓΒ'+Β'Α)+(ΑΓ'+Γ'Β)$$

ἢ $$2(ΒΒ'+ΓΓ'+ΑΑ')>ΒΓ+ΓΑ+ΑΒ$$

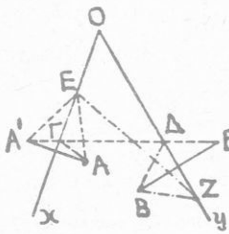
ἢ $$ΑΑ+ΒΒ'+ΓΓ'>\frac{1}{2}(ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ) \quad (3)$$

Ἀπὸ τὰς ἀνισότητας (2) καὶ (3) συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{1}{2}(ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ)<ΑΑ'+ΒΒ'+ΓΓ'<ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ$$

324. Ἐντὸς μιᾶς γωνίας xOy κεῖνται δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντομώτερος δρόμος μεταβάσεως ἀπὸ τοῦ σημείου Α εἰς τὸ Β καὶ ὁ ὁποῖος νὰ ἐγγίζῃ τὰς πλευρὰς Ox καὶ Oy τῆς γωνίας.

Ὁρίζομεν τὰ συμμετρικὰ σημεῖα Α' καὶ Β' τῶν σημείων Α καὶ Β πρὸς τὰς πλευρὰς Ox καὶ Oy τῆς γωνίας xOy. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν Α'Β', ἡ ὁποία τέμνει τὰς Ox καὶ Oy εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΓ καὶ ΒΔ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ὁ δρόμος ΑΓΔΒ εἶναι ὁ ἐλάχιστος δρόμος.



Σχ. 284

Πράγματι αἱ ΓΑ καὶ ΓΑ' εἶναι ἴσαι, διότι τὸ Γ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΑ'· ἤτοι εἶναι ΓΑ'=ΑΓ (1)

Ὁμοίως εἶναι ΔΒ=ΔΒ'· ὥστε θὰ εἶναι

$$ΑΓ+ΓΔ+ΔΒ=Α'Γ+ΓΔ+ΔΒ'=ΑΓΔΒ$$

Ἔστω ΑΕΖΒ τυχὸν δρόμος, ὁ ὁποῖος συνδέει τὰ δύο δοθέντα σημεια καὶ ὁ ὁποῖος συναντᾷ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας xOy εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΕΑ' καὶ ΖΒ'. Θὰ εἶναι ΕΑ'=ΕΑ καὶ ΖΒ'=ΖΒ. Ὥστε θὰ εἶναι

$$ΑΕ+ΕΖ+ΖΒ=Α'Ε+ΕΖ+ΖΒ'$$

δηλ. τεθλ. γραμμὴ ΑΕΖΒ=τεθλ. γρ. Α'ΕΖΒ'.

Ἀλλὰ ἡ τεθλασμένη γραμμὴ Α'ΕΖΒ' εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν Α'Β'' ἄρα καὶ ἡ ἴση της τεθλ. γραμμὴ ΑΕΖΒ>Α'Β', δηλ.

τεθλ. ΑΕΖΒ> τεθλ.ΑΓΔΒ.

√

325. Δίδονται δύο εὐθεῖαι Χ, Υ παράλληλοι. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Α τῆς Χ φέρομεν τὴν ΑΒ κάθετον ἐπὶ τὴν Υ καὶ τὴν ΑΓ πλαγίαν πρὸς τὴν Υ. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ φέρομεν μίαν εὐθεῖαν ΓΔΕ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ καὶ τὴν Χ εἰς τὸ Ε καὶ τοιαύτην, ὥστε ΔΕ=2ΑΓ. 1ον. Ἐὰν Ζ εἶναι *τὸ μέσον τῆς ΔΕ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΓΖ εἶναι ἰσοσκελές. 2ον Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι τριπλασία τῆς γωνίας ΕΓΒ.*

1ον. Ἡ ΑΖ εἶναι διάμεσος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΕ· ἄρα εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ ὑποτεινούσης, ἤτοι εἶναι $AZ=\frac{1}{2}\Delta E$. Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως, ΔΕ=2ΑΓ, ἄρα $AZ=\frac{2\cdot A\Gamma}{2}=A\Gamma$ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΓΖ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως $\Gamma_2=Z_2$.

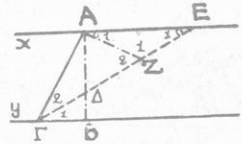
2ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι γων. ΑΓΒ = 3 γων. ΕΓΒ.

Ἔχομεν γων. $A\Gamma B=\Gamma_2+\Gamma_1$ (1). Ἀλλὰ $\Gamma_2=Z_2$ ὡς ἐδείχθη.

Ἀλλὰ ἡ Z_2 εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΖΕ καὶ ἑπομένως εἶναι

$$\Gamma_2=Z_2=A_1+E_1 \quad (2).$$

Ἀλλὰ $A_1=E_1$ ὡς παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΖΕ καὶ $E_1=\Gamma_1$, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι τῶν παραλλήλων Χ καὶ Υ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΕΓ. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) τὰς γωνίας E_1 καὶ A_1 διὰ τῶν ἴσων των ἔχομεν



Σχ. 285

$$\Gamma_2=\Gamma_1+\Gamma_1 \quad \text{ἢ} \quad \Gamma_2=2\Gamma_1$$

τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ Γ_2 θέτομεν εἰς τὴν (1) καὶ ἔχομεν

γων. $A\Gamma B=2\Gamma_1+\Gamma_1$ ἢ γων. $A\Gamma B=3\Gamma_1$ ἢ γων. ΑΓΒ=3 γων. ΕΓΒ.

326. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τραπέζιον : 1ον ἡ διαφορὰ τῶν δύο βάσεών του εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του. 2ον. Ἑκάστη τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του εἶναι μικροτέρα τῆς ἄλλης, αὐξηθείσης κατὰ τὴν διαφορὰν τῶν βάσεών του. 3ον. Τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεών του εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν διαγωνίων του.*

Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ μὲ βάσεις τὰς ΑΒ=Β, ΓΔ=β καὶ μὴ παραλλήλους πλευρὰς ΑΔ=α, ΒΓ=γ.

Σχ. 286

1ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $B-\beta<\alpha+\gamma$. Ἐκ τοῦ Γ φέρωμεν τὴν ΓΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΔΑ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ε. Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΑΕΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, θὰ εἶναι ΑΕ=ΔΓ=β, ΓΕ=ΔΑ=α. Εἰς τὸ τρίγωνον ΓΕΒ ἡ πλευρὰ ΕΒ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του, ἤτοι εἶναι $EB<E\Gamma+B\Gamma$ ἢ $B-\beta<\alpha+\gamma$.

2ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\gamma<\alpha+(B-\beta)$.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΓΕΒ εἶναι $B\Gamma<\Gamma E+EB$ ἢ $\gamma<\alpha+(B-\beta)$.

3ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $B+\beta<A\Gamma+B\Delta$.

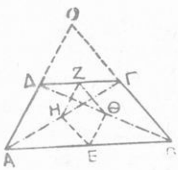
Ἔστω Ζ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΖΒ ἔχομεν $AB < AZ + BZ$ ἢ $B < AZ + BZ$. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΔΖΓ ἔχομεν $\Delta\Gamma < Z\Delta + Z\Gamma$ ἢ $\beta < Z\Delta + Z\Gamma$. Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη ἔχομεν

$B+\beta < AZ+BZ+Z\Delta+Z\Gamma$ ἢ $B+\beta < (AZ+Z\Gamma)+(BZ+Z\Delta)$ ἢ $B+\beta < A\Gamma + B\Delta$.

327. ***Συνδέομεν μὲ εὐθείας τὰ μέσα*** Ε ***καὶ*** Ζ ***τῶν βάσεων*** ΑΒ ***καὶ*** ΓΔ ***ἑνὸς τραπεζίου*** ΑΒΓΔ ***μὲ τὰ μέσα*** Η ***καὶ*** Θ ***τῶν διαγωνίων του*** ΑΓ ***καὶ*** ΒΔ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι*** Ε ***καὶ*** Ζ ***τοῦ τετραπλεύρου*** ΕΘΖΗ ***εἶναι ἴσαι μὲ τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ*** ΑΔ ***καὶ*** ΒΓ, ***προεκτεινόμεναι μέχρι τῆς συναντήσεώς των εἰς τὸ σημεῖον*** Ο.

Θὰ δείξωμεν, ὅτι γων. Ε = γων. Ζ = γων. Ο.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΓΔΑ ἡ ΖΗ συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν του· ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν ΑΔ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς. Ὁμοίως εἰς τὸ τρίγωνον ΒΔΑ ἡ ΘΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς, διότι συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν του. Ὥστε αἱ ΖΗ καὶ ΘΕ εἶναι ἴσαι, ὡς ἴσαι πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΑΔ καὶ παράλληλοι· ἄρα τὸ ΕΘΖΗ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ὥστε αἱ γωνίαι Ε καὶ Ζ εἶναι ἴσαι, ὡς ἀπέναντι γωνίαι παραλληλογράμμου ἤτοι εἶναι γων Ε = γων. Ζ (1). Εἰς τὸ τρίγωνον ΔΒΓ ἡ ΖΘ συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν του· ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν ΓΒ.



Σχ. 287

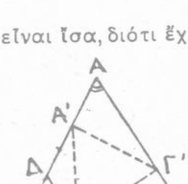
Αἱ γωνίαι Ο καὶ Ζ ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους, μίαν πρὸς μίαν καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς, ἄρα εἶναι ἴσαι· ἤτοι εἶναι γων. Ο = γων. Ζ (2). Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

γων. Ε = γων. Ζ = γων. Ο.

Γ΄ Ὁμάς. 328. ***Δίδεται ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον*** ΑΒΓ· ***ἐπὶ τῶν πλευρῶν του*** ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ***λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα*** Α΄, Β΄, Γ΄ ***καὶ τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι*** $AA' = BB' = \Gamma\Gamma' = \frac{AB}{3}$. ***Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι τὸ τρίγωνον*** Α΄Β΄Γ΄ ***εἶναι ἰσόπλευρον· 2ον ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου*** Α΄Β΄Γ΄ ***εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου*** ΑΒΓ.

1ον. Τὰ τρίγωνα ΑΑ΄Γ΄, ΒΒ΄Α΄ καὶ ΓΓ΄Β΄ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν $AA' = BB' = \Gamma\Gamma'$ ἐξ ὑποθέσεως, $A\Gamma' = A'B = B'\Gamma$, ὡς ὑπόλοιπα τῶν ἴσων πλευρῶν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἀπὸ τὰς ὁποίας ἀφῃρέθησαν τὰ ἴσα τμήματα ΓΓ΄, ΒΒ΄, ΑΑ΄ καὶ $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 60^\circ$· ἄρα θὰ εἶναι $A'B' = B'\Gamma' = \Gamma'A'$ καὶ ἑπομένως τὸ τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ἰσόπλευρον.

2ον. Ἔστω Δ τὸ μέσον τῆς Α΄Β. Τὰ σημεῖα Α΄ καὶ Δ διαιροῦν τὴν ΑΒ εἰς τρία ἴσα μέρη· ἄρα εἶναι $\Delta B = \frac{1}{2} A'B$.



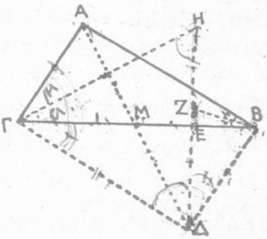
Σχ. 288

Τὸ τρίγωνον ΔΒΒ΄ εἶναι λοιπὸν ἰσοσκελές. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία Β εἶναι 60° ἕπεται, ὅτι τὸ τρίγωνον ΔΒΒ΄ εἶναι ἰσόπλευρον. Εἰς τὸ τρίγωνον Α΄Β΄Β ἡ διάμεσος Β΄Δ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς Α΄Β, ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒ΄Β εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α. Ὥστε ἡ Α΄Β· εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ αἱ πλευραὶ Β΄Γ΄ καὶ Γ΄Α΄ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως.

329. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, *ὀρθογώνιον εἰς τὸ* Α. *Φέρομεν τὴν διάμεσον* ΑΜ *καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα* ΜΔ=ΑΜ. *Ἐκ τοῦ* Δ *φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν* ΒΓ, *ἡ ὁποία τέμνει τὴν* ΒΓ *εἰς τὸ* Ε, *τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας* Β *εἰς τὸ* Ζ *καὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας* Γ *εἰς τὸ* Η. *Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι τὸ* ΑΒΔΓ *εἶναι ὀρθογώνιον. 2ον ὅτι* ΑΓ=ΔΖ *καὶ* ΔΗ=ΑΒ.

1ον. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΔΓ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοί του ΑΔ καὶ ΒΓ διχοτομοῦνται εἰς τὸ Μ ἐκ κατασκευῆς. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία Α εἶναι ὀρθή, τὸ ΑΒΔΓ εἶναι ὀρθογώνιον.



Σχ. 289

2ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΑΓ=ΔΖ.

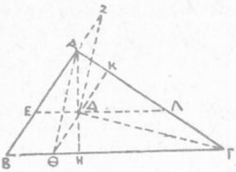
Ἐπειδὴ ΑΓ=ΒΔ, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι ΒΔ=ΔΖ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΔΒΖ αἱ γωνίαι ΔΒΖ, ΒΖΔ εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν ἴσας συμπληρωματικὰς γωνίας· πράγματι ἡ γωνία ΒΖΔ εἶναι συμπληρωματικὴ τῆς γωνίας ν, διότι εἶναι δύο ὀξεῖαι γωνίαι τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΖΕΒ. Ὁμοίως ἡ γωνία ΔΒΖ εἶναι συμπληρωματικὴ τῆς ν΄. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ν=ν΄, διότι ἡ ΒΖ εἶναι διχοτόμος, ἕπεται ὅτι $\widehat{ΒΖΔ}=\widehat{ΔΒΖ}$ Τὸ τρίγωνον ΔΒΖ εἶναι ἰσοσκελές· ἄρα θὰ εἶναι ΒΔ=ΔΖ=ΑΓ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ τρίγωνον ΔΓΗ εἶναι ἰσοσκελές, ὁπότε ΔΗ=ΔΓ=ΑΒ.

330. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, *ὀρθογώνιον εἰς τὸ* Α· *φέρομεν τὸ ὕψος* ΑΗ· *ἀπὸ τυχὸν σημεῖον* Δ *τοῦ ὕψους* ΑΗ *φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν* ΒΓ, *ἡ ὁποία τέμνει τὴν* ΑΒ *εἰς τὸ* Ε. *Ἀπὸ τὸ* Δ *φέρομεν τὴν* ΔΖ *κάθετον ἐπὶ τὴν* ΔΓ, *ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν* ΑΒ *εἰς τὸ* Ζ. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι* ΒΕ = ΑΖ.

Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Θ καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Κ. Ἐπειδὴ ἡ ΒΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ καὶ ἡ παράλληλός της ΘΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ. Ἡ ΔΚ εἶναι λοιπὸν ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΔΓ.

Ἐπίσης ἡ ΓΗ εἶναι ἕνα δεύτερον ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΔΓ. Τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν δύο αὐτῶν ὑψῶν εἶναι τὸ Θ.

Τὸ τρίτον ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΔΓ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΘΑ, ἡ ὁποία συνδέει τὸ σημεῖον Θ μὲ τὴν τρίτην κορυφήν του Α. Ἡ ΘΑ εἶναι λοιπὸν κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΓ. Ἐπειδὴ καὶ ἡ ΔΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΓ, ἐξ ὑποθέσεως, ἕπεται, ὅτι αἱ ΘΑ καὶ ΔΖ εἶναι παράλληλοι. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΑΘΔΖ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ ἀπέναντι πλευραί του εἶναι παράλληλοι. Ἄρα θὰ εἶναι ΘΔ=ΑΖ καὶ ἐπειδὴ ΘΔ=ΒΕ, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΒΘΔΕ ἕπεται, ὅτι ΒΕ=ΑΖ.

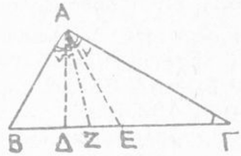


Σχ. 290

331. ***Ἀπὸ τὴν κορυφὴν*** **Α** ***τῆς ὀρθῆς γωνίας ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου*** **ΑΒΓ** ***φέρομεν τὸ ὕψος*** **ΑΔ** ***καὶ τὴν διάμεσον*** **ΑΕ.** ***Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι*** **γων.ΔΑΕ=Β—Γ.** ***2ον ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν*** **ΔΑΕ** ***καὶ*** **ΒΑΓ** ***συμπίπτουν.***

Ἡ ΑΕ ὡς διάμεσος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης ΔΓ· δηλ. θὰ εἶναι ΑΕ=ΕΓ καὶ ΑΕ=ΒΕ. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΕΓ εἶναι ἰσοσκελῆ, αἱ παρὰ τὴν βάσιν των γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι· ἤτοι θὰ εἶναι $Β=Β\widehat{Α}Ε$ καὶ $Γ=Γ\widehat{Α}Ε$. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν $Δ\widehat{Α}Ε=Β\widehat{Α}Ε-Β\widehat{Α}Δ$ (1).

Ἀλλὰ $Β\widehat{Α}Ε=\widehat{Β}$, ὡς ἐδείχθη καὶ $Β\widehat{Α}Δ=Γ$, διότι εἶναι συμπληρωματικαὶ τῆς αὐτῆς γωνίας Β. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὰς γωνίας ΒΑΕ καὶ ΒΑΔ διὰ τῶν ἴσων των λαμβάνομεν $Δ\widehat{Α}Ε=Β-Γ$.



Σχ. 291

2ον. Ἔστω ΑΖ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΔΑΕ· θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΑΖ εἶναι διχοτόμος καὶ τῆς γωνίας ΒΑΓ·

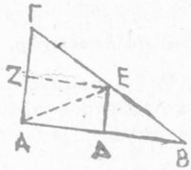
Αἱ γωνίαι ν′ καὶ ν εἶναι ἴσαι, ὡς ἴσαι πρὸς πρὸς τὴν Γ. δηλ. εἶναι ν′=ν. Ἐὰν προσθέσωμεν εἰς τὰς ἴσας αὐτὰς γωνίας τὰς ἴσας ἐξ ὑποθέσεως, γωνίας ΔΑΖ καὶ ΖΑΕ αἱ προκύπτουσαι γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἤτοι $Β\widehat{Α}Ζ=Ζ\widehat{Α}Γ$. Ὥστε ἡ ΑΖ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΑΓ.

332. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι αἱ κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου τέμνονται ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης· 2ον ὅτι αἱ κάθετοι αὗται καὶ ἡ διάμεσος ἡ ἀγομένη ἐκ τῆς ὀρθῆς γωνίας διαιροῦν τὸ τρίγωνον εἰς τέσσαρα ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα.

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 292). Ἀπὸ τὸ μέσον Δ τῆς ΑΒ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ εἰς τὸ Ε· θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ Ε εἶναι σημεῖον τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΑΓ.

Αἱ εὐθεῖαι ΓΑ καὶ ΕΔ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ καὶ ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον Δ τῆς ΑΒ· ἄρα ἡ ΔΕ θὰ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Ε τῆς πλευρᾶς ΒΓ, ἤτοι εἶναι ΕΒ=ΕΓ. Φέρομεν τὴν ΑΕ. Ἐπειδὴ ἡ ΑΕ εἶναι διάμεσος ὀρθογωνίου τριγώνου, ἀγομένη ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας, θὰ εἶναι

$ΑΕ=\frac{ΒΓ}{2}$, ἤτοι εἶναι ΑΕ=ΕΒ=ΕΓ. Τὰ τρίγωνα ΑΕΒ καὶ ΑΕΓ εἶναι ἰσοσκελῆ. Ἐὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν Ε τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου φέρομεν τὴν κάθετον ΕΖ ἐπὶ τὴν βάσιν του ΑΓ αὐτὴ θὰ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον Ζ τῆς ΑΓ. Ὥστε τὸ Ε εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν καθέτων ΔΕ, ΖΕ καὶ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ.



Σχ. 292

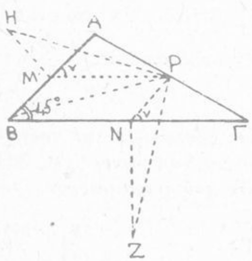
2ον. Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τὰ τέσσαρα τρίγωνα ΑΔΕ, ΑΕΖ, ΒΕΔ καὶ ΓΖΕ εἶναι ἴσα (ἄσκ. 255).

333. *Εἰς ἕνα τρίγωνον* ΑΒΓ *ἡ γωνία* Β *εἶναι* 45^0 *Ἀπὸ τὰ μέσα* Μ *καὶ* Ν *τῶν πλευρῶν* ΑΒ *καὶ* ΒΓ *φέρομεν, εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ τριγώνου, τὴν* ΜΗ *κάθετον ἐπὶ τὴν* ΑΓ *καὶ ἴσην μὲ* $\frac{ΑΒ}{2}$ *καὶ τὴν* ΝΖ *κάθετον ἐπὶ τὴν* ΒΓ *καὶ ἴσην μὲ* $\frac{ΒΓ}{2}$. *Ἐὰν* Ρ *εἶναι τὸ μέσον τῆς* ΑΓ, *νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι*

$$ΡΒ = ΡΗ = ΡΖ.$$

Φέρομεν τὰς εὐθείας ΜΡ, ΗΡ, ΡΝ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ εὐθεῖα ΜΡ συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν του· ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευράν του ΒΓ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς· ἤτοι εἶναι $ΜΡ=\frac{ΒΓ}{2}=ΒΝ$ καὶ παράλληλος. Ὁμοίως διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι $ΡΝ=\frac{ΑΒ}{2}=ΒΜ$ καὶ παράλληλος. Ἐπίσης αἱ γωνίαι ν εἶναι ἴσαι μὲ τὴν Β ὡς ἐντός, ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη παραλλήλων τεμνομένων ὑπὸ τρίτης· ἤτοι εἶναι $ν=Β=45^0$.



Σχ. 293

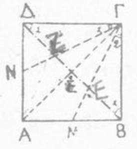
Τὰ τρίγωνα ΡΜΗ καὶ ΡΝΖ ἔχουν τὴν ΡΜ=ΒΝ, ὡς ἐδείχθη τὴν ΜΗ=ΡΝ, ὡς ἴσας πρὸς τὴν ΒΜ καὶ $Η\widehat{Μ}Ρ=Ρ\widehat{Ν}Ζ$, διότι ἑκάστη τούτων εἶναι ἄθροισμα μιᾶς ὀρθῆς καὶ 45^0. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν αὐτὰ εἶναι ἴσα, ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ΡΗ = ΡΖ (1).

Ἐπίσης τὰ τρίγωνα ΡΜΗ καὶ ΡΜΒ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὴν ΡΜ κοινήν, τὴν ΜΗ=ΜΒ ἐξ ὑποθέσεως καὶ $Ρ\widehat{Μ}Η=Ρ\widehat{Μ}Β=135^0$· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ΡΗ=ΡΒ (2) Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$ΡΗ = ΡΖ = ΡΒ.$$

334. Εἰς ἕνα τετράγωνον ΑΒΓΔ ***λαμβάνομεν τὰ μέσα*** Μ ***καὶ*** Ν ***τῶν δύο προσκειμένων πλευρῶν*** ΑΒ ***καὶ*** ΑΔ ***καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας*** ΓΜ ***καὶ*** ΓΝ, ***αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν διαγώνιον*** ΒΔ ***εἰς τὰ σημεῖα*** Ε ***καὶ*** Ζ ***ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι*** ΒΕ = ΕΖ = ΖΔ.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΔΝ καὶ ΓΒΜ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς καθέτους πλευρὰς των ἴσας· ἤτοι ἔχουν ΓΔ=ΓΒ, ὡς πλευρὰς τετραγώνου καὶ ΔΝ=ΒΜ, ὡς ἡμίση τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΔ καὶ ΑΒ τοῦ τετραγώνου. Ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ΓΝ=ΓΜ καὶ $\widehat{Γ_1}=\widehat{Γ_2}$. Τὰ τρίγωνα ΔΖΓ καὶ ΓΕΒ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας, ἤτοι ἔχουν ΓΔ=ΓΒ, $\widehat{Γ_1}=\widehat{Γ_2}$, ὡς ἐδείχθη καὶ $Δ_1=Β_1=45^0$· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ΔΖ=ΕΒ (1). Ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραγώνου διχοτομοῦνται θὰ εἶναι ΔΗ=ΗΒ. Ἐὰν ἀπὸ τὰ ἴσα αὐτὰ τμήματα ἀφαιρέσωμεν τὰ ἴσα τμήματα ΔΖ καὶ ΕΒ τὰ ἀπομένοντα τμήματα θὰ εἶναι ἴσα, ἤτοι θὰ εἶναι ΖΗ=ΗΕ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΓΑΒ αἱ ΓΜ καὶ ΒΗ εἶναι διάμεσοί του, τὸ δὲ Ε σημεῖον τῆς τομῆς των. Γνωρίζομεν, ὅτι $ΒΕ=\frac{2}{3}ΒΗ$ (2) καὶ $ΕΗ=\frac{1}{3}ΒΗ$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ΖΗ=ΕΗ, ὡς ἐδείχθη, θὰ εἶναι καὶ $ΖΗ=\frac{1}{3}ΒΗ$,

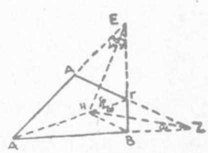


Σχ. 294

ὁπότε $ΖΗ+ΕΗ=\frac{1}{3}ΒΗ+\frac{1}{3}ΒΗ$ ἢ $ΖΕ=\frac{2}{3}ΒΗ$ (3) Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (2) καὶ (3) συνάγομεν, ὅτι ΒΕ=ΕΖ (4). Ἐπίσης ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (4) συνάγομεν, ὅτι ΔΖ=ΖΕ=ΒΕ.

335. Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ προεκτάσεις τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τετραπλεύρου, τέμνονται ὑπὸ γωνίαν, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου.

Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΔΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Ἐπίσης προεκτείνομεν τὰς ΑΔ καὶ ΒΓ καὶ ἔστω Ε τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των Φέρομεν τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν Ε καὶ Ζ καὶ ἔστω Η τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των· θὰ δείξωμεν, ὅτι $\widehat{ΕΗΖ}=\frac{Α+Γ}{2}$.



Σχ. 295

Φέρομεν τὴν ΑΗ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη χωρίζει τὴν γωνίαν ΕΗΖ εἰς τὰς γωνίας φ καὶ ω.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία φ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΗΕ, θὰ εἶναι $\varphi =$ γων.$EAH + \nu$ (1).

Ὁμοίως ἐπειδὴ ἡ γωνία ω εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΗΖ θὰ εἶναι $\omega=$γων.$HAZ+$γων.HZA (2). Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\varphi+\omega=\widehat{EAH}+\nu+\widehat{HAZ}+\widehat{HZA} \quad \text{ἢ} \quad (\varphi+\omega)=(\widehat{EAH}+\widehat{HAZ})+\nu+\widehat{HZA}$$

$$\text{ἢ} \quad \widehat{EHZ}=A+\nu+\widehat{HZA} \quad (3).$$

Ὁμοίως, ἐὰν φέρωμεν τὴν ΗΓ καὶ ἐργασθῶμεν ὁμοίως εἰς τὰ τρίγωνα ΕΗΓ καὶ ΓΗΖ εὑρίσκομεν, ὅτι $\widehat{E\Gamma Z}=$γων. $EHZ+\nu+HZ\Gamma$ (4). Ἀφαιροῦμεν τὰς ἰσότητας (3) καὶ (4) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\widehat{EHZ}-\widehat{E\Gamma Z}=A-\widehat{EHZ} \quad \text{ἢ} \quad \widehat{EHZ}+\widehat{EHZ}=A+\widehat{E\Gamma Z} \quad \text{ἢ}$$

$$2\widehat{EHZ}=A+\Gamma, \quad \text{ἄρα} \quad \widehat{EHZ}=\frac{A+\Gamma}{2}.$$

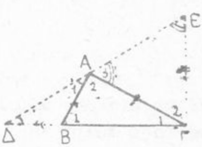
Δ΄ Ὁμάς. 336. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ***ὀρθογώνιον εἰς τὸ*** Α. ***Ἀπὸ τὴν κορυφὴν του*** Γ ***φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν*** ΒΓ ***καὶ λαμβάνομεν τμῆμα*** ΓΕ=ΑΓ. ***Προεκτείνομεν τὴν*** ΓΒ ***κατὰ μῆκος*** ΒΔ=ΑΒ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα*** Δ, Α, Ε ***κεῖνται ἐπ' εὐθείας.***

Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΔ καὶ ΑΕ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΔΑΕ εἶναι εὐθεῖα.

Τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἐκ κατασκευῆς εἶναι ΑΒ=ΒΔ· ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{A_1}=\widehat{\Delta}$.

Ἡ γωνία B_1 εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΔ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι

$$\widehat{B_1}=\widehat{A_1}+\Delta \quad \text{ἢ} \quad \widehat{B_1}=2\widehat{A_1} \quad \text{ἢ} \quad A_1=\frac{B_1}{2} \quad (1).$$



Σχ. 296

Ὁμοίως τὸ τρίγωνον ΑΓΕ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ΑΓ=ΓΕ· ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{A_3}=\widehat{E}$. Ἀλλὰ $\widehat{A_3}+\widehat{E}=2$ ὀρθ.$-\Gamma_2$ ἢ $2A_3=2$ ὀρθ.$-\Gamma_2$· ἐπειδὴ $\Gamma_2=1$ ὀρθ.$-\Gamma_1$ ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$2A_3=2 \text{ ὀρθ.}-(1 \text{ ὀρθ.}-\Gamma_1) \quad \text{ἢ} \quad 2A_3=1 \text{ ὀρθ.}+\Gamma_1 \quad \text{ἢ}$$

$$A_3=\frac{1}{2} \text{ ὀρθ.} + \frac{\Gamma_1}{2} \quad (2).$$

Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι καὶ $\widehat{A_2}=1$ ὀρθ. (3).

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1), (2), (3) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$A_1+A_2+A_3=\frac{B_1}{2}+1 \text{ ὀρθ.}+\frac{1}{2} \text{ ὀρθ.}+\frac{\Gamma_1}{2}=\frac{B_1+\Gamma_1}{2}+1 \text{ ὀρθ.}+\frac{1}{2} \text{ ὀρ.} \quad (4)$$

Ἐπειδὴ $B_1+\Gamma_1=1$ ὀρθή, ἡ ἰσότης (4) γίνεται

$$A_1+A_2+A_3=\frac{1}{2} \text{ ὀρθ.}+1 \text{ ὀρθ.}+\frac{1}{2} \text{ ὀρθ.} \quad \text{ἢ} \quad \widehat{\Delta A E}=2 \text{ ὀρθ.}$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ γωνία ΔΑΕ εἶναι εὐθύγραμμος· ἄρα αἱ πλευραί της ΑΔ καὶ ΑΕ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

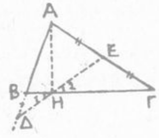
337. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, *τοῦ ὁποίου ἡ γωνία* Β *εἶναι διπλασία τῆς γωνίας* Γ. ***Φέρομεν τὸ ὕψος*** ΑΗ ***καὶ προεκτείνομεν τὴν*** ΑΒ ***κατὰ ἕνα μῆκος*** ΒΔ=ΒΗ. *'Εὰν* Ε *εἶναι τὸ μέσον τῆς* ΑΓ, *νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα* Δ, Η, Ε ***κεῖνται ἐπ' εὐθείας.***

Φέρομεν τὰς ΔΗ καὶ ΔΕ. Τὸ τρίγωνον ΒΔΗ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ΒΔ=ΒΗ· ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{H_1}=\widehat{\Delta}$. Ἡ γωνία Β εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΒΔΗ· ἄρα θὰ εἶναι

$$\widehat{B}=\widehat{\Delta}+\widehat{H_1} \quad \text{ἢ} \quad \widehat{B}=2\widehat{H_1}$$

'Επειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι καὶ $\widehat{B}=2\Gamma$ θὰ εἶναι

$$2H_1=2\Gamma \quad \text{ἢ} \quad H_1=\Gamma \quad (1)$$



Σχ. 297

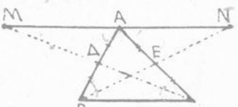
Εἰς τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΑΗΓ ἡ ΗΕ εἶναι διάμεσος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας Η· ἄρα θὰ εἶναι ΗΕ=ΕΓ. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΕΗΓ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι $\widehat{H_2}=\Gamma$ (2).

'Απὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$\widehat{H_1}=\widehat{H_2}.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ γωνίαι H_1 καὶ H_2 ἔχουν τὴν αὐτὴν κορυφὴν Η καὶ αἱ δύο πλευραὶ ΗΒ καὶ ΗΓ κεῖνται ἐπ' εὐθείας· ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἴσαι καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν φορὰν ὡς πρὸς αὐτὴν τὴν εὐθεῖαν, ἕπεται, ὅτι αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ ΗΔ καὶ ΗΓ εἶναι ἡ μία προέκτασις τῆς ἄλλης. Ἄρα τὰ σημεῖα Δ, Η, Ε κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

338. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. ***Κατασκευάζομεν τὸ συμμετρικὸν*** Μ *τοῦ* Γ *ὡς πρὸς τὸ μέσον* Δ *τῆς* ΑΒ *καὶ τὸ συμμετρικὸν* Ν *τοῦ* Β *ὡς πρὸς τὸ μέσον* Ε *τῆς* ΑΓ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ,*** *ὅτι τὰ σημεῖα* Μ, Ν *καὶ* Α ***κεῖνται ἐπ' εὐθείας.***



Σχ. 298

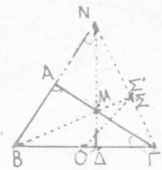
Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΜ καὶ ΑΝ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΜΑΝ εἶναι εὐθεῖα. Τὸ σημεῖον Α εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Β ὡς πρὸς κέντρον συμμετρίας τὸ Δ· ἄρα ἡ ΑΜ εἶναι συμμετρικὴ τῆς ΒΓ ὡς πρὸς κέντρον τὸ Δ. Ὥστε αἱ ΑΜ καὶ ΒΓ εἶναι παράλληλοι.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι αἱ ΑΝ καὶ ΒΓ εἶναι παράλληλοι.

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ ΑΜ καὶ ΑΝ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΓ καὶ ἄγονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Α· ἄρα αἱ ΑΜ καὶ ΑΝ συμπίπτουν καὶ ἀποτελοῦν μίαν εὐθεῖαν. Ὥστε ἡ ΜΑΝ εἶναι εὐθεῖα.

339. Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Δ *τῆς ὑποτεινούσης* ΒΓ *ἑνὸς ὀρθ τριγώνου* ΑΒΓ *φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν* ΒΓ, *ἡ ὁποία τέμνει τὴν* ΑΓ *εἰς τὸ* Μ *καὶ τὴν προέκτασιν τῆς* ΒΑ *εἰς τὸ* Ν. *Ἔστω* Ο *τὸ μέσον τῆς* ΒΓ. *Ὁρίζομεν ἐπὶ τῆς* ΓΝ *ἕνα σημεῖον* Σ *τοιοῦτον, ὥστε τὸ τρίγωνον* ΟΓΣ *νὰ εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ κορυφὴν τὸ* Ο. ***Νὰ ἀποδειχθῇ***, *ὅτι τὰ σημεῖα* Β, Μ *καὶ* Σ *κεῖνται ἐπ' εὐθείας.*

Φέρομεν τὰς εὐθείας ΜΒ καὶ ΜΣ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΒΝΓ, αἱ εὐθεῖαι ΝΔ καὶ ΓΑ εἶναι δύο ὕψη του. Τὸ σημεῖον Μ τῆς τομῆς των εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου καὶ ἑπομένως ἡ ΒΜΣ' εἶναι τὸ τρίτον ὕψος του τὸ κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΝ. Φέρομεν τὴν ΟΣ'.



Σχ. 299

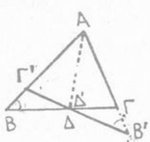
Εἰς τὸ τρίγωνον ΒΣΓ, ἡ ΟΣ εἶναι διάμεσος καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΒΓ· ἄρα τὸ τρίγωνον ΒΣΓ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Σ· ἄρα ἡ ΒΣ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΝΓ.

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΒΜΣ' καὶ ΒΣ, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ Β, εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΝΓ· ἄρα συμπίπτουν καὶ ἑπομένως τὰ σημεῖα Β, Μ, Σ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

340. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. ***Φέρομεν τὴν διχοτόμον*** ΑΔ *καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς* ΑΒ *ἕνα μῆκος,* ΑΓ'=ΑΓ *καὶ ἐπὶ τῆς* ΑΓ *ἕνα μῆκος* ΑΒ'=ΑΒ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ***, *ὅτι τὰ σημεῖα* Β', Γ' *καὶ* Δ *κεῖνται ἐπ' εὐθείας.*

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν Β'Γ' καὶ ἔστω Δ' τὸ σημεῖον, ὅπου ἡ Β'Γ' τέμνει τὴν ΒΓ.

Ἐπειδὴ ΑΒ=ΑΒ', τὰ σημεῖα Β καὶ Β' εἶναι συμμετρικά, ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον ΑΔ. Ὁμοίως ἐπειδὴ ΑΓ'=ΑΓ, τὰ σημεῖα Γ' καὶ Γ εἶναι συμμετρικά, ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν διχοτόμον ΑΔ· ἄρα αἱ ΒΓ καὶ Β'Γ' εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον ΑΔ. Ἐπειδὴ αἱ ΒΓ καὶ Β'Γ' εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν ΑΔ πρέπει, νὰ τέμνωνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς διχοτόμου ΑΔ. Τὸ Δ' εἶναι λοιπὸν σημεῖον τῆς ΑΔ. Ἀλλὰ τὸ Δ' εἶναι σημεῖον καὶ τῆς ΒΓ· ἄρα τὰ σημεῖα Δ καὶ Δ' συμπίπτουν καὶ ἑπομένως τὸ Δ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας Β'Γ'. Ὥστε τὰ τρία σημεῖα Β',Γ' καὶ Δ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.



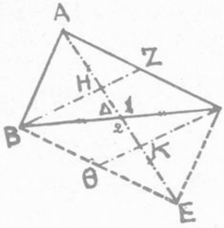
Σχ. 300

Δ' Ὁμὰς 341. ***Εἰς ἕνα τρίγωνον*** ΑΒΓ *φέρομεν τὴν διάμεσον* ΑΔ *καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα* ΔΕ=ΑΔ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ*** : *1ον ὅτι τὰ τρίγωνα* ΑΔΓ *καὶ* ΒΔΕ *εἶναι ἴσα· 2ον ὅτι τὸ τετράπλευρον* ΑΒΕΓ *εἶναι παραλληλόγραμμον : 3ον ὅτι* $\frac{ΑΒ+ΑΓ-ΒΓ}{2} < ΑΔ < \frac{ΑΒ+ΑΓ}{2}$.

4ον. Συνδέομεν μὲ εὐθεῖαν τὸ σημεῖον Β *μὲ τὸ μέσον* Ζ *τῆς* ΑΓ *καὶ τὸ σημεῖον* Γ *μὲ τὸ μέσον* Θ *τῆς* ΒΕ· *νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι* ΒΖ *καὶ* ΓΘ *τριχοτομοῦν τὴν* ΑΕ.

1ον. Τὰ τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΒΔΕ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ΑΔ=ΔΕ, ἐκ κατασκευῆς, $ΔΓ = ΒΔ$, ἐξ ὑποθέσεως καὶ $Δ_1 = Δ_2$ ὡς κατὰ κορυφήν.

2ον. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΕΓ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοί του ΑΕ καὶ ΒΓ διχοτομοῦνται εἰς τὸ Ε.



Σχ. 301

3ον. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶναι $ΑΕ < ΑΒ + ΒΕ$ ἢ $2ΑΔ < ΑΒ + ΑΓ$ ἄρα

$$ΑΔ < \frac{ΑΒ+ΑΓ}{2} \quad (1).$$

Ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΔΓ ἔχομεν

$$ΑΔ > ΑΓ - ΔΓ \quad (2).$$

Ὁμοίως ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΔΒ ἔχομεν

$$ΑΔ > ΑΒ - ΒΔ \quad (3).$$

Προσθέτομεν τὰς ἀνισότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$2ΑΔ > ΑΓ + ΑΒ - (ΔΓ + ΒΔ) \text{ ἢ } 2ΑΔ > ΑΓ + ΑΒ - ΒΓ \text{ ἢ}$$

$$ΑΔ > \frac{ΑΓ+ΑΒ-ΒΓ}{2} \quad (4).$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (4) συνάγομεν, ὅτι

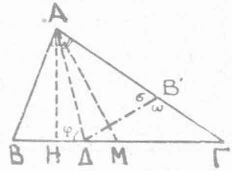
$$\frac{ΑΒ+ΑΓ-ΒΓ}{2} < ΑΔ < \frac{ΑΒ+ΑΓ}{2}$$

4ον. Ἡ ΒΖ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τέμνει την διάμεσον ΑΔ εἰς τὸ Η. Θὰ εἶναι λοιπὸν $ΑΗ = \frac{2}{3} ΑΔ$ καὶ $ΗΔ = \frac{1}{3} ΑΔ$ (5). Ὁμοίως ἡ ΓΘ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου ΒΕΓ καὶ τέμνει τὴν διάμεσον ΕΔ εἰς τὸ Κ. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$ΕΚ = \frac{2}{3} ΕΔ = \frac{2}{3} ΑΔ \text{ καὶ } ΚΔ = \frac{1}{3} ΕΔ = \frac{1}{3} ΑΔ \quad (6).$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (5) καὶ (6) συνάγομεν, ὅτι $ΑΗ = ΗΚ = ΚΕ = \frac{2}{3} ΑΔ$.

342. Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ *φέρομεν τὸ ὕψος του* ΑΗ, *τὴν διχοτόμον* ΑΔ *τῆς γωνίας* Α *καὶ τὴν διάμεσον* ΑΜ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ*** : ***1ον*** *ὅτι ἡ διχοτόμος* ΑΔ *κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας* ΗΑΓ. ***2ον*** *ὅτι* $ΔΓ > ΒΔ$. ***3ον*** *ὅτι ἡ διχοτόμος* ΑΔ *δὲν ὑπερβαίνει τὴν διάμεσον* ΑΜ.



Σχ. 302

1ον Ἐὰν ἡ γωνία Β τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα ἡ πρότασις εἶναι προφανής. Ἔστω ὅτι ἡ γωνία Β εἶναι ὀξεῖα καὶ ὅτι $Β > Γ$. (1)

Προσθέτομεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος (1) τὸ ἄθροισμα $Α + Β$ καὶ ἔχομεν $Α + 2Β > Α + Β + Γ$ ἢ $Α + 2Β > 2$ ὀρθ.· ἄρα $\frac{Α}{2} + Β > 1$ ὀρ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν του $\frac{A}{2}$ καὶ Β εἶναι μεγαλύτερον τῆς 1 ὀρθ.· ἄρα ἡ τρίτη γωνία του φ εἶναι ὀξεῖα. Συνεπῶς ἡ διχοτόμος ΑΔ εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς γωνίας ΗΑΓ.

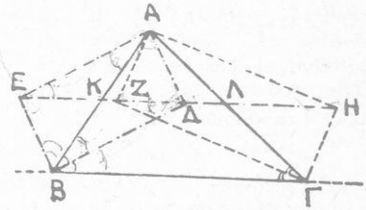
2ον Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΔΓ>ΒΔ.

Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ λαμβάνομεν τμῆμα ΑΒ'=ΑΒ καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΔΒ'. Τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΒ' εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην· ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΒΔ=ΔΒ' καὶ Β=σ'. Εἰς τὸ τρίγωνον ΔΒ'Γ ἡ γωνία ω εἶναι ἀμβλεῖα, διότι ἡ παραπληρωματική της σ εἶναι ὀξεῖα, ὡς ἴση μὲ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν Β· ἄρα θὰ εἶναι καί ΔΓ> ΔΒ' ἢ ΔΓ> ΒΔ.

3ον Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΑΜ> ΑΔ.

Ἐπειδὴ ΔΓ> ΒΔ, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω, θὰ εἶναι καὶ ΗΜ> ΗΔ. Ἡ ΑΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, αἱ δὲ ΑΜ καὶ ΑΔ πλάγιαι πρὸς αὐτήν· ἐπειδὴ δὲ εἶναι ΗΜ> ΗΔ ἕπεται, ὅτι θὰ εἶναι καὶ ΑΜ> ΑΔ.

343. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. *Ἐκ τῆς κορυφῆς* Α *φέρομεν τὴν* ΑΔ *κάθετον ἐπὶ τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον τῆς γωνίας* Β *καὶ τὴν* ΑΕ *κάθετον ἐπὶ τὴν ἐξωτερικὴν διχοτόμον τῆς γωνίας* Β. *Ὁμοίως ἐκ τοῦ* Α *φέρομεν τὰς καθέτους* ΑΖ *καὶ* ΑΗ *ἐπὶ τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον καὶ ἐξωτερικὴν διχοτόμον τῆς γωνίας* Γ. *Νὰ ἀποδειχθῇ : 1ον ὅτι τὰ τετράπλευρα* ΑΕΒΔ *καὶ* ΑΖΓΗ *εἶναι ὀρθογώνια. 2ον ὅτι αἱ* ΕΔ *καὶ* ΖΗ *εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν* ΒΓ *καὶ διχοτομοῦν ἀντιστοίχως τὰς* ΑΒ *καὶ* ΑΓ. *3ον ὅτι τὰ σημεῖα* Ε, Δ, Ζ, Η *κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.*



Σχ. 303

1ον καὶ 2ον βλέπε λύσιν ἀσκήσεως 230.

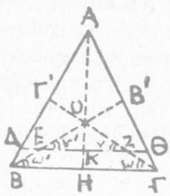
3ον. Ἐδείχθη, ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ καὶ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Κ τῆς ΑΒ. Ὁμοίως, ὅτι ἡ ΖΗ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ καὶ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς ΑΓ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ εὐθεῖα ΚΛ συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο πλευρῶν του, ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευράν του ΒΓ.

Ἐπειδὴ αἱ παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΓ εὐθεῖαι ΕΔ καὶ ΖΗ διέρχονται διὰ τῶν Κ καὶ Λ ἕπεται, ὅτι συμπίπτουν εἰς μίαν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ· ὥστε τὰ σημεῖα Ε, Δ, Ζ, Η κεῖνται ἐπ' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν ΒΓ.

344. Εἰς ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, (ΑΒ=ΑΓ) *φέρομεν τὰς διαμέσους* ΒΒ', ΓΓ', *αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον* Ο. *Νὰ ἀποδειχθῇ : 1ον ὅτι τὸ τρίγωνον* ΟΒΓ *εἶναι ἰσοσκελές, τὰ δὲ τρίγωνα* ΟΒΓ' *καὶ* ΟΓΒ' *εἶναι ἴσα.*

***2ον** Φέρομεν τυχοῦσαν παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ, τὴν διάμεσον ΒΒ' εἰς τὸ Ε, τὴν διάμεσον ΓΓ' εἰς τὸ Ζ καὶ τὴν πλευρὰν ΑΓ εἰς τὸ Θ· νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΔΕ=ΖΘ.*

1ον. α') Γνωρίζομεν, ὅτι $ΒΟ=\frac{2}{3}ΒΒ'$ καὶ $ΓΟ=\frac{2}{3}ΓΓ'$.



Σχ. 304

Ἐπειδὴ ΒΒ'=ΓΓ' ἕπεται, ὅτι ΒΟ=ΓΟ. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΟΒΓ εἶναι ἰσοσκελές· ἄρα θὰ εἶναι ω'=ω'.

β'.) Τὰ τρίγωνα ΟΒΓ' καὶ ΟΓΒ' εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας· ἤτοι ἔχουν ΒΓ'=ΓΒ' ὡς ἡμίση τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ, ΒΟ=ΓΟ, ὡς ἐδείχθη καὶ ΟΓ'=ΟΒ', διότι ἑκάστη τούτων ἰσοῦται μὲ τὸ 1/3 τῶν ἴσων διαμέσων ΓΓ' καὶ ΒΒ'.

2ον. Φέρομεν τὴν διάμεσον ΑΟΗ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΔΘ εἰς τὸ Κ. Ἡ ΑΗ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α καὶ ὕψος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ. Τὸ τρίγωνον ΑΔΘ εἶναι ἰσοσκελές, διότι αἱ γωνίαι του Δ καὶ Θ εἶναι ἴσαι, ὡς ἴσαι πρὸς τὰς ἴσας γωνίας Β καὶ Γ. Ἡ ΑΚΗ λοιπόν, ὡς διχοτόμος τῆς γωνίας Α θὰ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον Κ τῆς ΔΘ· ἤτοι εἶναι ΔΚ=ΚΘ.

Αἱ γωνίαι ω' καὶ ν' εἶναι ἴσαι ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΒΓ καὶ ΔΘ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΟΒ, ἤτοι εἶναι ω'=ν'. Ὁμοίως εἶναι ω=ν. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ω'=ω', ὡς ἐδείχθη θὰ εἶναι καὶ ν'=ν· ἤτοι τὸ τρίγωνον ΟΕΖ εἶναι ἰσοσκελές· ἄρα θὰ εἶναι ΕΚ=ΚΖ (2) Ἀφαιροῦντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν ΔΚ—ΕΚ=ΚΘ—ΚΖ ἢ ΔΕ=ΖΘ.

***345**. Δίδεται ὁ ρόμβος ΑΒΓΔ. Ἀπὸ τὰς κορυφάς του Β καὶ Δ φέρομεν τὰς καθέτους ΒΕ, ΒΖ, ΔΗ, ΔΘ ἐπὶ τὰς ἀπέναντι πλευράς του. Αἱ κάθετοι αὐταὶ τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Κ καὶ Λ. Νὰ ἀποδειχθῇ : 1ον ὅτι αἱ γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ΒΛΔΚ εἶναι ἴσαι, μία πρὸς μίαν, μὲ τὰς γωνίας τοῦ ρόμβου. 2ον ὅτι τὸ τετράπλευρον ΒΛΔΚ εἶναι ρόμβος.*

Σχ. 305

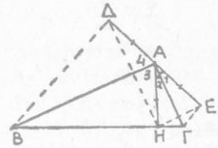
1ον Ἡ γωνία ν ἔχει τὴν πλευρὰν ΔΗ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐκ κατασκευῆς, καὶ τὴν πλευρὰν ΔΘ κάθετον ἐπὶ ΑΔ. Αἱ γωνίαι λοιπὸν ν καὶ Α ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους μίαν πρὸς μίαν· ἄρα εἶναι ἴσαι, ἤτοι εἶναι $\widehat{ν}=\widehat{Α}$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι $\widehat{ν'}=\widehat{Α}$ καὶ ἐπειδὴ Α=Γ ὡς ἀπέναντι γωνίαι ρόμβου, θὰ εἶναι $\widehat{ν}=\widehat{ν'}=\widehat{Α}=\widehat{Γ}$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι $\widehat{σ}=\widehat{σ'}=\widehat{Β}=\widehat{Δ}$.

2ον. Αἱ ΒΕ καὶ ΔΗ εἶναι τὰ δύο ὕψη τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΔ, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ τὰς κορυφὰς τῆς βάσεώς του ΒΔ· ἄρα εἶναι ἴσα, ἤτοι εἶναι ΒΕ=ΔΗ.

3ον Φέρομεν τὴν ΒΔ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΕΔ καὶ ΒΗΔ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας, ἤτοι τὴν ΒΔ κοινὴν καὶ τὰς ὀξείας γωνίας ΒΔΕ καὶ ΗΒΔ ἴσας, ὡς παρὰ τὴν βάσιν γωνίας τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΔ· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ γων.ΗΔΒ=γων.ΕΒΔ. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΚΒΔ εἶναι ἰσοσκελές, διότι αἱ γωνίαι του ΗΔΒ καὶ ΕΒΔ εἶναι ἴσαι· ἄρα θὰ εἶναι ΚΒ=ΚΗ. Τὸ παραλληλόγραμμον λοιπὸν ΒΛΔΚ εἶναι ῥόμβος, διότι δύο διαδοχικαὶ πλευραί του εἶναι ἴσαι.

346. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ***ὀρθογώνιον εἰς τὸ*** Α. ***Φέρομεν τὸ ὕψος*** ΑΗ ***καὶ λαμβάνομεν τὰ σημεῖα*** Δ ***καὶ*** Ε ***συμμετρικὰ τοῦ*** Η ***ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς*** ΑΒ ***καὶ*** ΑΓ. ***1ον Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα*** Δ, Α, Ε, ***κεῖνται ἐπ' εὐθείας. 2ον Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι*** ΒΔ ***καὶ*** ΓΕ ***εἶναι παράλληλοι. 3ον Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι*** ΑΗ=ΔΑ=ΑΕ.



Σχ. 306

1ον. Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Η καὶ Ε εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν ΑΓ, θὰ εἶναι $\widehat{A_2}=\widehat{A_1}$ (1).

Ἐπίσης ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Η καὶ Δ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν ΑΒ θὰ εἶναι $\widehat{A_3}=\widehat{A_4}$ (2).

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι A_2 καὶ A_3 ἔχουν ἄθροισμα 1 ὀρθὴν γωνίαν ἕπεται, ὅτι θὰ εἶναι $2(A_2+A_3)=2$ ὀρθ. Ἄρα τὰ σημεῖα Δ, Α, Ε κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

2ον. Τὰ τρίγωνα ΒΔΑ καὶ ΒΗΑ εἶναι ἴσα, διότι εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν ΑΒ Ἄρα θὰ εἶναι γων. ΒΔΑ=γων. ΒΗΑ=1 ὀρθ. Ὁμοίως καὶ τὰ τρίγωνα ΑΗΓ καὶ ΑΕΓ εἶναι ἴσα· ἄρα θὰ εἶναι

γων. ΑΕΓ = γων. ΑΗΓ = 1 ὀρθ.

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΔΒ καὶ ΕΓ τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς εὐθείας ΔΕ σχηματίζουν τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ΒΔΑ καὶ ΑΕΓ παραπληρωματικάς· ἄρα αἱ ΔΒ καὶ ΕΓ εἶναι παράλληλοι.

3ον. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων ΒΔΑ καὶ ΒΗΑ συνάγομεν, ὅτι ΔΑ=ΑΗ (3). Ἐπίσης ἀπὸ τὰ ἴσα τρίγωνα ΑΗΓ καὶ ΑΕΓ συνάγομεν, ὅτι ΑΕ=ΑΗ (4). Ἀπὸ τὰς (3) καὶ (4) συνάγομεν, ὅτι

ΑΗ = ΔΑ = ΑΕ.

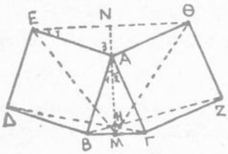
347. Ἐπὶ τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ ***καὶ*** ΑΓ ***ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου*** ΑΒΓ ***κατασκευάζομεν, ἐξωτερικῶς τοῦ τριγώνου, τὰ τετράγωνα*** ΑΒΔΕ ***καὶ*** ΑΓΖΘ. ***Ἔστω*** Μ ***τὸ μέσον τῆς*** ΒΓ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι : 1ον*** ΜΕ=ΜΘ. ***2ον*** ΒΖ=ΓΔ. ***3ον αἱ*** ΕΘ ***καὶ*** ΑΜ ***εἶναι κάθετοι μεταξύ των. 4ον*** ΕΘ=2ΑΜ. ***5ον αἱ*** ΒΖ ***καὶ*** ΓΔ ***τέμνονται ἐπὶ τῆς εὐθείας*** ΑΜ.

1ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΜΕ=ΜΘ.

Τὰ τρίγωνα ΕΑΜ καὶ ΘΑΜ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ΑΕ=ΑΘ, ὡς πλευρὰς ἴσων τετααγώνων, ΑΜ κοινὴν καὶ γων. ΕΑΜ=γων. ΘΑΜ, διότι ἑκάστη τούτων εἶναι ἄθροισμα μιᾶς ὀρθῆς γωνίας καὶ μιᾶς ἐκ τῶν ἴσων γωνιῶν A_1 καὶ A_2. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΜΕ=ΜΘ.

2ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΒΖ=ΓΔ.

Τὰ τρίγωνα ΒΓΖ καὶ ΒΓΔ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ΓΖ=ΒΔ, ὡς πλευρὰς ἴσων τετραγώνων, ΒΓ κοινὴν καὶ γων. ΒΓΖ=γων. ΔΒΓ, διότι ἑκάστη τούτων εἶναι ἄθροισμα ἴσων γωνιῶν (μιᾶς ὀρθῆς καὶ μιᾶς τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ). Ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΒΖ=ΓΔ.



Σχ. 307

3ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ΕΘ καὶ ΑΜ εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

Τὸ τρίγωνον ΜΕΘ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ΜΕ=ΜΘ, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω. Ἡ κορυφή του λοιπὸν Μ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον Ν τῆς ΕΘ.

Ἐπειδὴ εἶναι καὶ ΑΕ=ΑΘ, ἡ κορυφὴ Α κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΕΘ. Ἡ εὐθεῖα ΜΑ, ὡς συνδέουσα δύο σημεῖα τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΕΘ, θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΘ.

4ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΕΘ = 2 ΑΜ.

Ἔστω Ν τὸ μέσον τῆς ΕΘ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΕΝΑ καὶ ΑΜΒ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας ΑΕ=ΑΒ, ὡς πλευρὰς τετραγώνου, καὶ $\widehat{E_1} = \widehat{A_1}$, διότι αἱ πλευραί των εἶναι κάθετοι· ἄρα θὰ εἶναι

$$EN=AM \quad ἢ \quad 2\cdot EN=2\cdot AM \quad ἢ \quad EΘ=2\cdot AM.$$

5ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΒΖ καὶ ΓΔ τέμνονται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΜ.

Ἔστω Η τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ΒΖ καὶ ΓΔ.

Ἐδείξαμεν ἀνωτέρω, ὅτι τὰ τρίγωνα ΒΓΖ καὶ ΔΒΓ εἶναι ἴσα· ἄρα θὰ εἶναι γων. ΓΒΖ = γων. ΒΓΔ.

Ἐπειδὴ γων. ΓΒΖ = γων. ΒΓΔ, τὸ τρίγωνον ΒΗΓ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΗΒ=ΗΓ. Τὸ Η ὡς ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ΜΑ εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΒΓ. Ἄρα τὸ σημεῖον Η τῆς τομῆς τῶν ΒΖ καὶ ΓΔ κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΜ.

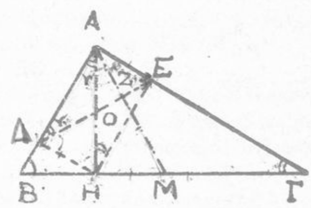
ΣΤ'. Ὁμάς. 348. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ ***ὀρθογώνιον εἰς τὸ*** Α. ***Φέρομεν τὸ ὕψος*** ΑΗ ***καὶ ἐκ τοῦ*** Η ***τὰς καθέτους*** ΗΔ ***καὶ*** ΗΕ ***ἐπὶ τὰ πλευρὰς*** ΑΒ ***καὶ*** ΑΓ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι αἱ*** ΑΗ ***καὶ*** ΔΕ ***εἶναι ἴσαι· 2ον ὅτι ἡ*** ΔΕ ***εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάμεσον*** ΑΜ ***τοῦ τριγώνου*** ΑΒΓ· ***3ον ὅτι αἱ γωνίαι*** ΒΔΕ ***καὶ*** ΕΓΒ ***εἶναι παραπληρωματικαί.***

1ον. Τὸ τετράπλευρον ΑΔΗΕ εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, διότι αἱ ἀπέναντι πλευραί του εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν καὶ διότι ἡ γωνία Α εἶναι ὀρθή. Αἱ ΑΗ καὶ ΔΕ εἶναι ἴσαι, ὡς διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου ΑΔΗΕ καὶ διχοτομοῦνται εἰς τὸ Ο.

2ον. Ἔστω Ζ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ΔΕ καὶ ΑΜ. Ἡ ΑΜ ὡς διάμεσος ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης του, ἤτοι εἶναι ΑΜ=ΜΒ=ΜΓ. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΜΑΒ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως αἱ παρὰ τὴν βάσιν του γωνίαι εἶναι ἴσαι· ἤτοι εἶναι

γων.ΜΑΒ=γων.Β. (1)

Τὸ τρίγωνον ΟΑΔ εἶναι ἰσοσκελές, διότι αἱ ΘΑ καὶ ΘΔ εἶναι ἴσαι μὲ τὰ ἡμίση τῶν διαγωνίων τοῦ ὀρθογωνίου ΑΔΗΕ· ἄρα εἶναι ν=ν'. Ἀλλὰ ἡ ν εἶναι συμπληρωματικὴ τῆς γωνίας Β, διότι εἶναι αἱ δύο ὀξεῖαι γωνίαι τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΗΒ. Ἐπίσης καὶ ἡ Γ εἶναι συμπληρωματικὴ τῆς γωνίας Β, ὡς ὀξεῖαι γωνίαι τοῦ ὀρθογων. τριγώνου ΑΒΓ· ἄρα αἱ γωνίαι ν καὶ Γ εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν συμπληρωματικὴν γωνίαν Β. ἤτοι εἶναι ν=Γ ἢ ν'=Γ. (2)



Σχ. 308

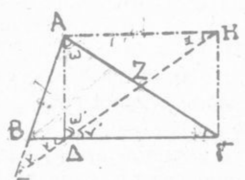
Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη ἔχομεν

γων.ΜΑΒ+γων.ν'=Β+Γ=1 ὀρθή.

Ἐπειδὴ αἱ δύο γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΖΔ ἔχουν ἄθροισμα 1 ὀρθ. ἡ τρίτη γωνία του Ζ εἶναι ὀρθή· ἄρα αἱ ΔΕ καὶ ΑΜ εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

3ον. Αἱ γωνίαι ΒΔΕ καὶ ν' εἶναι παραπληρωματικαί, ὡς ἐφεξῆς τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, δηλ. εἶναι $\widehat{B\Delta E}+\nu'=2$ ὀρθ. Ἀλλὰ $\nu'=\nu=\Gamma$, ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{B\Delta E}+\widehat{\Gamma}=2$ ὀρθαί.

349. ***Δίδεται ἕνα τρίγωνον*** ΑΒΓ, ***εἰς τὸ ὁποῖον ἡ γωνία*** Β ***εἶναι διπλασία τῆς*** Γ. ***Φέρομεν τὸ ὕψος*** ΑΔ ***καὶ προεκτείνομεν τὴν*** ΑΒ ***κατὰ ἕνα μῆκος*** ΒΕ=ΒΔ.***Ἡ εὐθεῖα*** ΕΔ ***συναντᾷ τὴν*** ΑΓ ***εἰ τὸ*** Ζ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ : 1ον ὅτι αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων*** ΑΒΓ ***καὶ*** ΑΕΖ ***εἶναι ἴσαι, μία πρὸς μίαν. 2ον ὅτι*** ΖΑ=ΖΓ=ΖΔ. ***3ον, ὅτι*** ΑΒ=ΔΓ—ΔΒ.



Σχ. 297

Τὸ τρίγωνον ΒΕΔ εἶναι ἰσοσκελές, διότι εἶναι ΒΕ = ΒΔ ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι ν εἶναι ἴσαι· ἡ γωνία Β εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΒΕΔ, ἄρα θὰ εἶναι Β=2ν, ὁπότε $\nu=\frac{B}{2}$. Ἐξ ὑποθέσεως καὶ ἡ γωνία Γ εἶναι ἴση μὲ $\frac{B}{2}$· ἄρα ν=Γ.

Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΓ καὶ ΑΕΖ ἔχουν τὴν γωνίαν Α κοινήν, γωνΓ=γων.ν· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ τὰς τρίτας γωνίας των ἴσας,ἤτοι θὰ εἶναι Β=ΑΖΕ.

2ον. Ἐδείξαμεν, ὅτι ν=Γ· ἀλλὰ ν=ν', ὡς κατὰ κορυφήν, ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\nu'=\Gamma$· ἤτοι τὸ τρίγωνον ΖΔΓ εἶναι ἰσοσκελές· ἄρα θὰ εἶναι ΖΔ=ΖΓ (1).

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΓ, ἡ γωνία ω εἶναι συμπληρωματικὴ τῆς γωνίας Γ ἢ τῆς ἴσης της ν'. Ἐπίσης αἱ γωνίαι ω' καὶ ν' εἶναι συμπληρωματικαί. Αἱ γωνίαι λοιπὸν ω καὶ ω' εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν συμπληρωματικὴν γωνίαν ν', ἤτοι εἶναι $\omega=\omega'$. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΖΑΔ εἶναι ἰσοσκελές, ἄρα θὰ εἶναι ΖΔ=ΖΑ (2). Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1), (2) συνάγομεν, ὅτι ΖΔ=ΖΓ=ΖΑ.

3ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΑΒ=ΔΓ—ΔΒ, Ἔχομεν

$$AB = AE - BE \quad \text{ἢ} \quad AB = AE - B\Delta \quad (3)$$

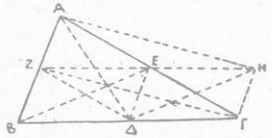
Προεκτείνομεν τὴν ΔΖ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της λαμβάνομεν τμῆμα ΖΗ=ΔΖ. Τὸ τετράπλευρον ΑΔΓΗ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοί του ΑΓ καὶ ΔΗ διχοτομοῦνται. Ἄρα θὰ εἶναι

$$\nu' = H_1 \text{· ἀλλὰ } \nu' = \nu = E \text{· ἄρα } E = H_1.$$

Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΕΗ εἶναι ἰσοσκελές· ἄρα εἶναι ΑΕ=ΑΗ=ΔΓ. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (3) τὸ ΑΕ μὲ τὸ ἴσον του ΔΓ καὶ ἔχομεν ΑΒ = ΔΓ — ΒΔ.

350. ***Εἰς ἕνα τρίγωνον*** ΑΒΓ ***φέρομεν τὰς διαμέσους*** ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ· ***φέρομεν τὴν εὐθεῖαν*** ΖΕ ***καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα*** ΕΗ=ΖΕ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι τὰ τετράπλευρα*** ΑΖΔΕ, ΒΔΕΖ, ΓΕΖΔ, ΑΖΓΗ ***καὶ*** ΒΔΗΕ ***εἶναι παραλληλόγραμμα. 2ον ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου*** ΑΔΗ ***εἶναι ἴσαι μὲ τὰς διαμέσους τοῦ τριγώνου*** ΑΒΓ. ***3ον ὅτι τὸ τρίγωνον*** ΑΔΗ ***εἶναι ἴσον μὲ*** 3/4 ***τοῦ τριγώνου*** ΑΒΓ.

1ον. Διὰ τὰ τρία πρῶτα τετράπλευρα βλέπε λύσιν ἀσκήσ. 253. Τὸ τετράπλευρον ΑΖΓΗ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοί του ΑΓ καὶ ΖΗ διχοτομοῦνται ἐξ ὑποθέσεως. Τὸ τετράπλευρον ΒΔΗΕ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ δύο ἀπέναντι πλευραί του ΒΔ καὶ ΕΗ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι πρὸς τὴν ΖΕ.



Σχ. 310

2ον. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΗ ἡ πλευρὰ ΑΔ εἶναι μία διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἡ πλευρὰ ΔΗ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΒΕ, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΒΔΗΕ· ἤτοι ἡ πλευρὰ ΔΗ τοῦ τριγώνου ΑΔΗ εἶναι ἴση μὲ τὴν δευτέραν διάμεσον ΒΕ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἡ τρίτη πλευρὰ ΑΗ τριγώνου ΑΔΗ εἶναι ἴση μὲ τὴν τρίτην διάμεσον ΓΖ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΖΓΗ. Ὥστε αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΔΗ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τρεῖς διαμέσους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

3ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\text{τριγ.}A\Delta H = \frac{3}{4}\,\text{τριγ.}AB\Gamma$

Γνωρίζομεν, ὅτι ἡ διαγώνιος παραλληλογράμμου διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο ἴσα τρίγωνα. Ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΖΔΕ, καὶ συνεπῶς ἰσοδύναμον μὲ τὸ τρίγωνον ΖΔΕ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ αὐτοῦ παραλληλογράμμου· ἤτοι εἶναι τριγ. ΑΔΕ = τριγ. ΖΔΕ.

Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΖΔΕ εἶναι τὸ τέταρτον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (βλέπε ἄσκ. 255)· ἤτοι εἶναι τριγ. ΑΔΕ$=\frac{1}{4}$ τριγ.ΑΒΓ (1). Ὁμοίως ἀπὸ τὸ παραλληλόγραμμον ΒΔΗΕ εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ τριγ.ΕΔΗ=τριγ.ΒΔΕ· ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΒΔΕ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΒΔΕΖ καὶ ἑπομένως ἰσοδύναμον μὲ τὸ τρίγωνον ΖΔΕ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ αὐτοῦ παραλληλογράμμου· ἤτοι θὰ εἶναι

$$\text{τρίγ. ΕΔΗ}=\text{τριγ. ΖΔΕ ἢ τρίγ. ΕΔΗ}=\frac{1}{4}\ \text{τριγ. ΑΒΓ} \quad (2).$$

Ὁμοίως ἀπὸ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΖΓΗ εὑρίσκομεν, ὅτι τρίγ. ΑΕΗ=τρίγ. ΕΖΓ. Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΕΖΓ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΖΔΓΕ καὶ συνεπῶς ἰσοδύναμον μὲ τὸ τρίγωνον ΖΔΕ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ αὐτοῦ παραλληλογράμμου, ὥστε θὰ εἶναι

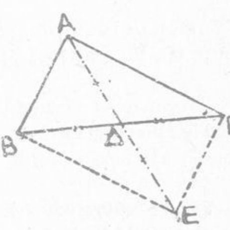
$$\text{τριγ. ΑΕΗ}=\text{τριγ. ΖΔΓ ἢ τριγ. ΑΕΗ}=\frac{1}{4}\ \text{τριγ. ΑΒΓ} \quad (3).$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (1), (2), (3) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\text{τριγ. ΑΔΕ}+\text{τριγ. ΔΕΗ}+\text{τριγ. ΑΕΗ}=\frac{3}{4}\ \text{ΑΒΓ ἢ τριγ. ΑΔΗ}=\frac{3}{4}\ \text{ΑΒΓ}.$$

351. *Ἐὰν ἡ γωνία* Α *ἑνὸς τριγώνου* ΑΒΓ *εἶναι ὀξεῖα, ὀρθή, ἢ ἀμβλεῖα, ἡ διάμεσός του, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν* Α *εἶναι μεγαλυτέρα, ἴση, ἢ μικροτέρα τοῦ ἡμίσεως τῆς πλευρᾶς* ΒΓ.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΔ ἡ διάμεσός του. Προεκτείνομεν τὴν ΑΔ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα ΔΕ=ΑΔ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΒΕ καὶ ΓΕ· τὸ σχηματισθὲν τετράπλευρον ΑΒΕΓ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοί του ΑΕ καὶ ΒΓ διχοτομοῦνται ἐκ κατασκευῆς.



Σχ. 311

1ον. Ἔστω, ὅτι ἡ γωνία Α εἶναι ὀξεῖα. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΑΔ$>\frac{ΒΓ}{2}$. Ἐπειδὴ ἡ γωνία Α τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΕΓ εἶναι ὀξεῖα, ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΑΒΕ εἶναι ἀμβλεῖα, ὡς παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας Α. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΕ ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας, ἤτοι τὴν ΑΒ κοινὴν καὶ ΑΓ=ΒΕ, ὡς ἀπέναντι πλευρὰς παραλληλογράμμου, καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας Α καὶ ΑΒΕ ἀνίσους· ἄρα εἶναι ἄνισα καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{ΑΒΕ}>\widehat{ΒΑΓ}$ ἕπεται, ὅτι θὰ εἶναι

$$\text{ΑΕ}>\text{ΒΓ ἢ 2ΑΔ}>\text{ΒΓ· ἄρα ΑΔ}>\frac{1}{2}\ \text{ΒΓ}.$$

2ον. Ἀποδεικνύομεν ὁμοίως, ὅτι ἐὰν ἡ γωνία Α εἶναι ἀμβλεῖα θὰ εἶναι $ΑΔ < \frac{1}{2}$ ΒΓ.

3ον. Ἔστω, ὅτι γων. Α=1 ὀρθή. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $ΑΔ = \frac{ΒΓ}{2}$. Πράγματι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΒΓ εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΑΕ=ΒΓ ἢ 2ΑΔ=ΒΓ· ἄρα $ΑΔ = \frac{ΒΓ}{2}$.

352. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τυχὸν σημεῖον ἐντὸς τοῦ τριγώνου εἰς τὰς κορυφάς του εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο μεγαλυτέρων πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Ο τυχὸν σημεῖον ἐντὸς αὐτοῦ· φέρομεν τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ. Ἐὰν ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι αἱ μεγαλύτεραι πλευραὶ τοῦ τριγώνου θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ < ΑΒ+ΑΓ.$$

Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΑΒ > ΑΓ > ΒΓ· ἄρα καὶ αἱ ἀπέναντι τῶν πλευρῶν αὐτῶν γωνίαι εἶναι ἄνισοι, δηλ. εἶναι

$$\widehat{Γ} > \widehat{Β} > \widehat{Α} \quad (1).$$

Σχ. 312

Ἐκ τοῦ Ο φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν μικροτέραν πλευρὰν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ε καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ. Αἱ γωνίαι Β καὶ ω εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΕΖ καὶ ΒΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΒ· ἤτοι εἶναι Β=ω. Ὁμοίως εἶναι Γ=ν. Ἡ σχέσις λοιπὸν (1) γίνεται

$$ν > ω > Α \quad (2).$$

Ἐπειδὴ μεταξὺ τῶν γωνιῶν Α, ω, ν τοῦ τριγώνου ΑΕΖ ὑπάρχει ἡ σχέσις (2), θὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν πλευρῶν του ἡ σχέσις

$$ΑΕ > ΑΖ > ΕΖ \quad (3).$$

Ἡ γωνία σ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΟΖ· ἄρα εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐντὸς γωνίας ν, ἤτοι εἶναι σ > ν καὶ λόγῳ τῆς σχέσεως (2) εἶναι σ > ω. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΕΟ εἶναι σ > ω· ἄρα θὰ εἶναι

$$ΑΕ > ΟΑ \quad (4).$$

Εἰς τὸ τρίγωνον ΟΕΒ ἡ πλευρὰ ΟΒ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων· ἤτοι εἶναι ΒΕ+ΕΟ > ΟΒ (5). Ὁμοίως ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΟΖΓ ἔχομεν ΟΖ+ΖΓ > ΟΓ (6).

Προσθέτοντες τὰς ἀνισότητας (4), (5), (6) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$ΑΕ+ΒΕ+ΕΟ+ΟΖ+ΖΓ > ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ \quad ἢ$$

$$(ΑΕ+ΒΕ)+(ΕΟ+ΟΖ)+ΖΓ > ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ \quad ἢ$$

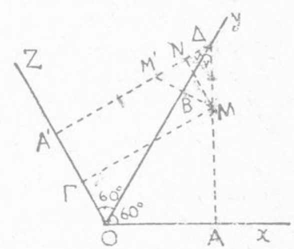
$$ΑΒ+ΕΖ+ΖΓ > ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ \quad (7).$$

Ἐὰν εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀνισότητος (7) ἀντικαταστήσωμεν τὸ ΕΖ διὰ τοῦ μεγαλυτέρου του ΑΖ, τὸ πρῶτον μέλος της θὰ εἶναι κατὰ μείζονα λόγον μεγαλύτερον τοῦ δευτέρου μέλους της, ἤτοι θὰ εἶναι ΑΒ+ΑΖ+ΖΓ > ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ ἢ ΑΒ+ΑΓ > ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ.

353. Τρεῖς εὐθεῖαι Ox, Oy, Oz, *σχηματίζουν μεταξύ των τὰς γωνίας* xOy *καὶ* yOz *ἴσας μὲ* 60^0. *'Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον* M, *τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας* xOy *φέρομεν τὰς καθέτους* MA, MB, MΓ *ἐπὶ τὰς εὐθείας* Ox, Oy, Oz. ***Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι*** MA+MB=MΓ.

Προεκτείνομεν τὴν MA μέχρις ὅτου συναντήσει τὴν Oy εἰς τὸ σημεῖον Δ. 'Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὴν ΔA' κάθετον ἐπὶ τὴν OZ. 'Ἐπειδὴ ἡ Oy εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ZOx, τὸ σημεῖον της Δ θὰ ἀπέχῃ ἰσάκις ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας, ἤτοι θὰ εἶναι ΔA=ΔA'.

'Η MB προεκτεινομένη τέμνει τὴν ΔA' εἰς τὸ σημεῖον M'. Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΔAO ἡ γωνία ν' εἶναι 30^0, διότι ἡ συμπληρωματική της εἶναι 60^0. 'Ομοίως εἶναι $\nu=30^0$. Εἰς τὸ τρίγωνον ΔM'M ἡ ΔB εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Δ καὶ ὕψος τοῦ τριγώνου· ἄρα τὸ τρίγωνον ΔM'M εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία τῆς κορυφῆς του εἶναι 60^0, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον. Φέρομεν τὸ ὕψος MN τοῦ τριγώνου ΔM'M. Αἱ NA' καὶ MΓ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν OZ. 'Ομοίως αἱ MN καὶ OA' εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΔA'. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν A'ΓMN εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι του εἶναι ὀρθαὶ εἶναι ὀρθογώνιον. Ἄρα θὰ εἶναι



Σχ. 313

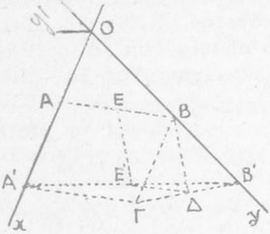
MΓ=NA' ἢ MΓ=NM'+M'A' (1).

'Ἀλλὰ NM'=BM, ὡς ἡμίση τῶν ἴσων πλευρῶν ΔM' καὶ MM' τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΔM'M. 'Ἐπίσης εἶναι M'A'=MA, ὡς ὑπόλοιπα τῶν ἴσων πλευρῶν ΔA' καὶ ΔA ἀπὸ τῶν ὁποίων ἀφηρέθησαν αἱ ἴσαι πλευραὶ ΔM καὶ ΔM' τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΔM'M. 'Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ τμήματα NM' καὶ MA' μὲ τὰ ἴσα των BM καὶ MA καὶ ἔχομεν MΓ=MB+MA.

354. Δίδεται μία γωνία xOy. ***'Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς*** Ox ***λαμβάνομεν δύο τυχόντα σημεῖα*** A ***καὶ*** A', ***ἐπὶ δὲ τῆς πλευρᾶς*** Oy ***δύο ἄλλα σημεῖα*** B ***καὶ*** B' ***καὶ τοιαῦτα, ὥστε*** AA' = BB'. ***Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα*** EE', ***ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα*** E ***καὶ*** E' ***τῶν*** AB ***καὶ*** A'B' ***εἶναι παράλληλος ἢ κάθετος πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας*** xOy.

'Ἐκ τοῦ A' φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν AB, ἐκ δὲ τοῦ B παράλληλον πρὸς τὴν Ox. Αἱ παράλληλοι αὐταὶ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Γ. Τὸ σχηματισθὲν τετράπλευρον AA'ΓB εἶναι παραλληλόγραμμον ἐκ κατασκευῆς· ἄρα θὰ εἶναι AA' = BΓ. 'Ἐπειδὴ δὲ εἶναι AA'=BB' ἔπεται, ὅτι θὰ εἶναι BΓ=BB'. Τὸ τρίγωνον BΓB' εἶναι λοιπὸν ἰσοσκελές.

Ἔστω Δ τὸ μέσον τῆς ΓB'. Εἰς τὸ τρίγωνον ΓB'A' ἡ ΔE' συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν του· ἄρα ἡ ΔE' εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς. Ἀλλὰ ἡ Α΄Γ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, διότι τὸ ΑΑ΄ΓΒ εἶναι παραλληλόγραμμον ἐκ κατασκευῆς· ἄρα ἡ ΕΔ εἶναι ἴση μὲ $\frac{ΑΒ}{2}$ καὶ παράλληλος. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΕΕ΄ΔΒ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ δύο ἀπέναντι πλευραί του Ε΄Δ καὶ ΕΒ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Ἀλλὰ ἡ ΒΔ εἶναι διάμεσος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΒΓΒ΄, ἄρα εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας ΓΒΒ΄.



Σχ. 314

Αἱ γωνίαι xOy καὶ ΓΒy εἶναι ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων Ox καὶ ΒΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς Oy. Γνωρίζομεν δέ, ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνιῶν εἶναι παράλληλοι, ἤτοι ἡ ΒΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας xOy, ἑπομένως καὶ ἡ παράλληλος της ΕΕ΄ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν αὐτὴν διχοτόμον.

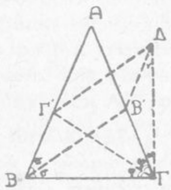
Ἡ ΕΕ΄ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας xOy΄.

355. Ἐὰν αἱ διχοτόμοι δύο γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσαι, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΒΒ΄, ΓΓ΄ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ. Ἐὰν εἶναι ΒΒ΄ = ΓΓ΄ θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ δὲν εἶναι ἰσοσκελές, τότε αἱ γωνίαι του Β καὶ Γ θὰ εἶναι ἄνισοι καὶ ἔστω, ὅτι Β > Γ, ὁπότε θὰ εἶναι καὶ σ > φ (1).

Τὰ τρίγωνα ΒΓΒ΄ καὶ ΒΓΓ΄ ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας, τὴν ΒΓ κοινὴν καὶ ΓΓ΄=ΒΒ΄ ἐξ ὑποθέσεως, καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας σ καὶ φ ἀνίσους· ἄρα εἶναι ἄνισα καὶ ἐπειδὴ εἶναι σ > φ θὰ εἶναι καὶ ΓΒ΄ > ΒΓ΄ (2).



Σχ. 315

Ἐκ τοῦ Γ΄ φέρομεν τὴν Γ΄Δ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΒ΄ καὶ ἐκ τοῦ Β΄ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Γ΄Δ εἰς τὸ Δ. Τὸ σχηματισθὲν τετράπλευρον Γ΄ΒΒ΄Δ εἶναι παραλληλόγραμμον· ἄρα θὰ εἶναι

$$Γ΄Δ = ΒΒ΄ = ΓΓ΄ \quad \text{καὶ} \quad ΒΓ΄ = Β΄Δ.$$

Τὸ τρίγωνον λοιπὸν Γ΄ΓΔ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως αἱ παρὰ τὴν βάσιν του γωνίαι εἶναι ἴσαι· ἤτοι θὰ εἶναι σ+ν=φ+ω (3). Ἐπειδὴ ὑπετέθη σ > φ, διὰ νὰ ὑφίσταται ἡ ἀνισότης (2) πρέπει νὰ εἶναι ν < ω. Εἰς τὸ τρίγωνον ΔΒ΄Γ αἱ δύο γωνίαι του ν καὶ ω εἶναι ἄνισοι· ἄρα καὶ αἱ ἀπέναντι τούτων κείμεναι πλευραὶ εἶναι ἄνισοι καὶ ἐπειδὴ εἶναι ν < ω θὰ εἶναι καὶ ΓΒ΄ < Β΄Δ.

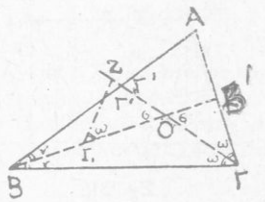
Ἀλλὰ $B'\Delta = B\Gamma'$ ὡς ἀπέναντι πλευραὶ παραλληλογράμμου. Ἑπομένως ἡ προηγουμένη ἀνισότης γράφεται $\Gamma B' < B\Gamma'$ (4). Ἐκ τῶν ἀνισοτήτων (2) καὶ (4) παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ΓΒ' εἶναι μεγαλυτέρα καὶ μικροτέρα τῆς ΒΓ', πράγμα τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον.

Εἰς τὸ ἄτοπον αὐτὸ ἐπέσαμεν, διότι ὑπεθέσαμεν, ὅτι αἱ γωνίαι Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἄνισοι· ἄρα αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ἴσαι καὶ ἑπομένως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

356. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς τὴν μεγαλυτέραν πλευρὰν ἑνὸς τριγώνου ἀντιστοιχεῖ ἡ μικροτέρα διχοτόμος γωνίας του.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $AB > A\Gamma$. Φέρομεν τὰς διχοτόμους ΒΒ' καὶ ΓΓ' τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο. Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\Gamma\Gamma' < BB'.$$



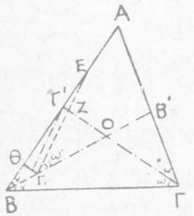
Σχ. 316

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $AB > A\Gamma$ θὰ εἶναι καὶ γων. $\Gamma >$ γων. Β, ἄρα $\widehat{\omega} > \widehat{\nu}$.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΒΟΓ εἶναι $\widehat{\omega} > \widehat{\nu}$, ἄρα

$$OB > O\Gamma \quad (1).$$

Ἐπὶ τῆς ΟΒ λαμβάνομεν τμῆμα $O\Gamma_1 = O\Gamma$ καὶ ἀπὸ τὸ Γ_1 φέρομεν τὴν εὐθεῖαν $\Gamma_1 EZ$, ἡ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν $O\Gamma_1$ γωνίαν ἴσην μὲ ω. Ἡ ΓΕΖ τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ε καὶ τὴν ΓΓ', προεκτεινομένην ἐν ἀνάγκῃ, εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα ΟΓΒ' καὶ $Z\Gamma_1 O$ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν $O\Gamma = O\Gamma_1$ ἐκ κατασκευῆς καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὰς γωνίας ἴσας, ἤτοι $\omega = \omega'$ ἐκ κατασκευῆς, $\sigma = \sigma'$ ὡς κατακορυφήν· ἄρα ἔχουν καὶ $\Gamma B' = \Gamma_1 Z$ καὶ $OB' = OZ$. Ἀλλὰ εἶναι $OZ > O\Gamma'$ (2). Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $OB + OZ > O\Gamma + O\Gamma'$ ἢ $OB + OZ > \Gamma\Gamma'$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν σχέσιν αὐτὴν τὸ ΟΖ διὰ τοῦ ἴσου του ΟΒ' λαμβάνομεν $OB + OB' > \Gamma\Gamma'$ ἢ $BB' > \Gamma\Gamma'$.



Σχ. 317

Ἐὰν ἡ Γ'ΕΖ τέμνῃ τὴν ΓΓ' ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 317, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

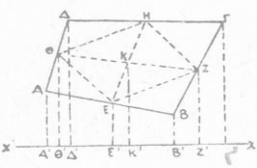
Ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων ΟΓΒ' καὶ $O\Gamma_1 Z$ λαμβάνομεν $OB' = OZ$ (1) καὶ $O\Gamma_1 = O\Gamma$ (2). Ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ_1 φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΓΓ', ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Θ. Ἀπὸ τὸ Γ' φέρομεν παράλληλον Γ'Η πρὸς τὴν $E\Gamma_1$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν $\Theta\Gamma_1$ εἰς τὸ Η. Ἡ γωνία $B\Theta\Gamma_1$ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΒΓ'Γ, διότι εἶναι ἐντός, ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων $\Theta\Gamma_1$ καὶ Γ'Γ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΒ, ἤτοι εἶναι $\widehat{B\Theta\Gamma_1} = \widehat{B\Gamma'\Gamma}$. Ἀλλὰ $\widehat{B\Gamma'\Gamma} = A + \omega$ ὡς ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΓ'Γ. Ὥστε θὰ εἶναι καὶ $\widehat{B\Theta\Gamma_1} = \widehat{A} + \widehat{\omega}$. Εἰς τὸ τρίγωνον

$B\Theta\Gamma_1$ ἢ $\widehat{B\Theta\Gamma_1}$ εἶναι λοιπὸν μεγαλυτέρα τῆς ν. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ $B\Gamma_1 < \Gamma_1\Theta$, ὁπότε $B\Gamma_1 > \Gamma_1 H$ ἢ $B\Gamma_1 > Z\Gamma'$ (3). Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς (1), (2), καὶ (3) λαμβάνομεν

$$OB' + O\Gamma_1 + B\Gamma_1 > OZ + O\Gamma + Z\Gamma' \quad ἢ \quad BB' > \Gamma\Gamma'$$

357. ***Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν τεσσάρων κορυφῶν τετραπλεύρου ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθεῖαν*** xy, ***εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν δύο εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν.***

Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ xy ἡ δοθεῖσα. Ἔστωσαν, Ε, Ζ, Η, Θ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του καὶ Κ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ΕΗ καὶ ΖΘ. Φέρομεν τὰς καθέτους ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ', ΔΔ' καὶ ΚΚ' ἐπὶ τὴν xy· θὰ δείξωμεν, ὅτι



Σχ. 318

$$AA' + BB' + \Gamma\Gamma' + \Delta\Delta' = 4 \cdot KK'.$$

Φέρομεν τὰς ΘΘ' καὶ ΖΖ' καθέτους ἐπὶ τὴν xy. Ἐπειδὴ αἱ ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ', ΔΔ', ΚΚ', ΘΘ', ΖΖ' εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, εἶναι παράλληλοι. Εἰς τὸ τραπέζιον ΑΑ'Δ'Δ ἡ ΘΘ' εἶναι διάμεσός του· ἄρα θὰ εἶναι $\Theta\Theta' = \frac{AA' + \Delta\Delta'}{2}$ (1).

Ὁμοίως εἰς τὸ τραπέζιον ΒΒ'Γ'Γ ἡ ΖΖ' εἶναι διάμεσός του· ἄρα θὰ εἶναι $\quad ZZ' = \frac{BB' + \Gamma\Gamma'}{2}$ (2).

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\Theta\Theta' + ZZ' = \frac{AA' + BB' + \Gamma\Gamma' + \Delta\Delta'}{2} \quad (3).$$

Ἐπειδὴ τὸ Κ εἶναι σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων τοῦ παραλληλογράμμου ΕΖΗΘ, θὰ εἶναι μέσον τῆς ΘΖ. Εἰς τὸ τραπέζιον ΘΘ'Ζ'Ζ ἡ ΚΚ' εἶναι διάμεσός του, ἄρα θὰ εἶναι

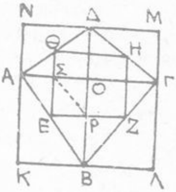
$$KK' = \frac{\Theta\Theta' + Z'Z'}{2} \quad ἢ \quad 2KK' = \Theta\Theta' + ZZ'.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (3) τὸ ἄθροισμα $\Theta\Theta' + ZZ'$ διὰ τοῦ ἴσου του καὶ ἔχομεν

$$2 \cdot KK' = \frac{AA' + BB' + \Gamma\Gamma' + \Delta\Delta'}{2} \cdot \quad ἄρα \quad 4 \cdot KK' = AA' + BB' + \Gamma\Gamma' + \Delta\Delta'.$$

Ζ' Ὁμάς. 358. Δίδεται ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ ***καὶ*** Ε, Ζ, Η, Θ ***τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του. 1ον Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον*** ΕΖΗΘ, ***εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ*** ΑΒΓΔ. ***2ον Ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ τετραπλεύρου*** ΑΒΓΔ ***φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς διαγωνίους του· νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ σχηματιζόμενον παραλληλόγραμμον*** ΚΛΜΝ ***εἶναι διπλάσιον τοῦ*** ΑΒΓΔ ***καὶ τετραπλάσιον τοῦ*** ΕΖΗΘ.

1ον. Φέρομεν τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΒΔ καὶ ἔστω Ο, τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΟΔ ἡ εὐθεῖα ΘΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΟ καὶ ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον Θ τῆς πλευρᾶς ΑΔ· ἄρα ἡ ΘΕ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς τρίτης πλευρᾶς του ΑΟ· ἤτοι τὸ Σ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΟΑ.



Σχ. 319

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ Ρ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΒΟ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΟΑΒ ἡ εὐθεῖα ΣΡ συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν του· ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν ΑΒ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς, ἤτοι εἶναι

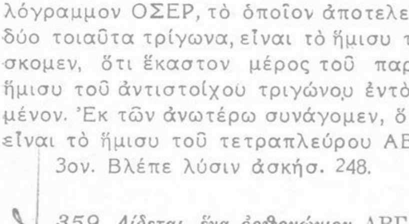
ΣΡ = ΑΕ = ΕΒ.

Τὰ τέσσαρα τρίγωνα ΑΕΣ, ΣΕΡ, ΕΒΡ, ΟΣΡ εἶναι ἴσα μεταξύ των, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των ἴσας ἀντιστοίχως. Τὸ παραλληλόγραμμον ΟΣΕΡ, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο τοιαῦτα τρίγωνα, εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τριγώνου ΑΟΒ. Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ἕκαστον μέρος τοῦ παραλληλογράμμου ΕΖΗΘ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἀντιστοίχου τριγώνου ἐντὸς τοῦ ὁποίου εἶναι ἐγγεγραμμένον. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖΗΘ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

3ον. Βλέπε λύσιν ἀσκήσ. 248.

359. ***Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ. Φέρομεν δύο παραλλήλους πρὸς τὴν διαγώνιον ΑΓ, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ τὴν ΑΓ καὶ τέμνουν τὰς προεκτάσεις τῶν πλευρῶν ΔΑ, ΔΓ, ΒΓ, ΒΑ εἰς τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον καί ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν δύο διαδοχικῶν πλευρῶν του ἰσοῦται μὲ τὴν διαγώνιον τοῦ ὀρθογωνίου.***

Φέρομεν τὰς καθέτους ΕΚ καὶ ΗΜ ἐπὶ τὴν ΑΓ. Ἐπειδὴ αἱ παράλληλοι ΕΖ καὶ ΗΘ ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ τὴν ΑΓ, θὰ εἶναι ΕΚ=ΗΜ.



Σχ. 320

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΕΚΑ καὶ ΗΜΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην· ἤτοι ἔχουν ΕΚ=ΗΜ, ὡς ἐδείχθη καὶ ν=ν', διότι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ ἀντιρρόπους· ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΕΑ=ΗΓ (1).

Ἐὰν εἰς τὰ ἴσα αὐτὰ τμήματα προσθέσωμεν τὰ ἴσα τμήματα ΑΔ καὶ ΓΒ λαμβάνομεν ΕΑ+ΑΔ=ΗΓ+ΓΒ ἢ ΕΔ=ΗΒ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΕΔΖ καὶ ΗΒΘ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ΕΔ=ΗΒ, ὡς ἐδείχθη καὶ ω=ω', διότι αἱ πλευραί των εἶναι παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ΕΖ=ΘΗ. Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ ἔχει τὰς πλευράς του ΕΖ καὶ ΗΘ ἴσας καὶ παραλλήλους. ἄρα εἶναι παραλληλόγραμμον.

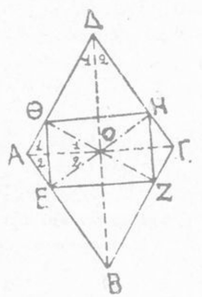
β) Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι ΕΖ—ΖΗ=ΑΓ.

Ἡ ΓΒ προεκτεινομένη τέμνει τὴν ΕΖ εἰς τὸ Η'. Τὸ τετράπλευρον ΕΗ'ΓΑ εἶναι παραλληλόγραμμον ἐκ κατασκευῆς· ἄρα θὰ εἶναι ΑΓ=ΕΗ' καὶ ΑΕ=ΓΗ' (4). Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (4) συνάγομεν, ὅτι ΗΓ=ΓΗ'. Εἰς τὸ τρίγωνον ΖΗΗ' ἡ ΖΓ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΗΗ', ἄρα τὸ τρίγωνον ΖΗΗ' εἶναι ἰσοσκελές, ἤτοι εἶναι ΖΗ=ΖΗ'. Θὰ εἶναι λοιπὸν ΕΖ—ΖΗ=ΕΖ—ΖΗ'=ΕΗ'=ΑΓ.

360. Δίδεται ἕνας ρόμβος ΑΒΓΔ. *Ἀπὸ τὸ σημεῖον* Ο *τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του* ΑΓ *καὶ* ΒΔ *φέρομεν τὰς καθέτους* ΟΕ, ΟΖ, ΟΗ, ΟΘ *ἐπὶ τὰς πλευράς του* ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ *ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι* ΟΕ=ΟΖ=ΟΗ=ΟΘ. *2ον ὅτι αἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦν τὰς γωνίας, τὰς ὁποίας σχηματίζουν ἀνὰ δύο αἱ ἀποστάσεις* ΟΕ, ΟΖ, ΟΗ, ΟΘ. *3ον ὅτι τὰ σημεῖα* Ε, Ζ, Η, Θ *εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου.*

1ον. Γνωρίζομεν, ὅτι αἱ διαγώνιοι ρόμβου εἶναι διχοτόμοι τῶν ἀπέναντι γωνιῶν του. Τὸ σημεῖον Ο, ὡς κείμενον ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Δ θὰ ἀπέχῃ ἰσάκις ἀπὸ τὰς πλευράς του, ἤτοι θὰ εἶναι ΟΘ=ΟΗ (1). Ἐπίσης ἐπειδὴ τὸ Ο κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Β θὰ εἶναι ΟΖ=ΟΕ (2). Τὸ Ο ὡς κείμενον ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΑΓ τῆς γωνίας Α θὰ εἶναι ΟΘ=ΟΕ (3). Ἐπειδὴ δὲ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Γ θὰ εἶναι ΟΖ=ΟΗ (4). Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1), (2), (3), (4) συνάγομεν, ὅτι

ΟΕ=ΟΖ=ΟΗ=ΟΘ.



Σχ. 321

2ον. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΘΑ καὶ ΟΑΕ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας, ἤτοι τὴν ΑΟ κοινὴν καὶ τὰς ὀξείας γωνίας A_1 καὶ A_2 ἴσας, ὡς ἡμίση τῆς γωνίας Α· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ $\widehat{O_1}=\widehat{O_2}$. Ἤτοι ἡ ΑΟΓ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΕΟΘ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΗΟΖ, ἡ δὲ ΒΔ διχοτόμος τῶν γωνιῶν ΕΟΖ καὶ ΗΟΘ.

3ον. Φέρομεν τὰς ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ, ΕΖ. Ἡ ΟΘ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ ἐξ ὑποθέσεως, ἄρα προεκτεινομένη θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλον τῆς ΒΓ. Ὥστε ἡ ΘΟΖ εἶναι εὐθεῖα. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ ΕΟΗ εἶναι εὐθεῖα. Αἱ ΗΕ καὶ ΖΘ εἶναι διαγώνιοι τοῦ τετραπλεύρου ΕΖΗΘ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ΕΟ=ΟΖ=ΟΗ=ΟΘ τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται. Ἐπειδὴ δὲ αἱ διαγώνιοι ΕΗ καὶ ΖΘ εἶναι ἴσαι, διότι ἑκάστη τούτων ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἴσα τμήματα ἕπεται, ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖΗΘ εἶναι ὀρθογώνιον.

361. Δύο ἴσαι εὐθεῖαι ΕΗ *καὶ* ΖΘ *διχοτομοῦνται εἰς τὸ* Ο. *Ἀπὸ τὰ* *ἄκρα Ε καὶ Η τῆς ΕΗ φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὴν ΕΗ, ἀπὸ δὲ τὰ ἄκρα Ζ καὶ Θ τῆς ΖΘ φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὴν ΖΘ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς προηγουμένας καθέτους εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι ὀρθογώνιον. 2ον ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος.*

1ον. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ (σχ. ἀσκ. 360). Ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοί του ΕΗ καὶ ΖΘ διχοτομοῦνται εἰς τὸ Ο, ἐξ ὑποθέσεως, τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἐπειδὴ δὲ αἱ διαγώνιοί του ΕΗ καὶ ΖΘ εἶναι ἴσαι, τὸ ΕΖΗΘ εἶναι ὀρθογώνιον.

2ον. Αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΖΘ. Ὁμοίως αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΕΗ. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον ΕΖΗΘ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, αἱ διαγώνιοί του θὰ τέμνωνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο, εἰς τὸ ὁποῖον τέμνονται αἱ διαγώνιοι τοῦ ΕΖΗΘ.

Ἐπειδὴ αἱ ἀποστάσεις ΟΘ καὶ ΟΗ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως ἴσαι ἕπεται, ὅτι τὸ Ο κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Δ. Ἤτοι ἡ ΒΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Δ· ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ ΒΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Β. ἡ δὲ ΑΓ διχοτόμος τῶν γωνιῶν Α καὶ Γ.

Θὰ εἶναι λοιπὸν $\widehat{\Delta_1} = \frac{\Delta}{2}$ καὶ $\widehat{A_1} = \frac{A}{2}$,

ἄρα $\widehat{\Delta_1} + \widehat{A_1} = \frac{\Delta + A}{2}$ (1). Ἀλλὰ αἱ γωνίαι Α καὶ Δ εἶναι παραπληρωματικαί, ὡς δύο διαδοχικαὶ γωνίαι παραλληλογράμμου, ἄρα θὰ εἶναι

$$\Delta_1 + A_1 = 1 \text{ ὀρθή}.$$

Εἰς τὸ τρίγωνον ΔΟΑ αἱ δύο γωνίαι του Δ_1 καὶ A_1 ἔχουν ἄθροισμα 1 ὀρθῆς, ἄρα ἡ τρίτη γωνία του ΔΟΑ εἶναι ὀρθή· ὥστε ἡ ΔΟ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΘ. Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τέμνονται καθέτως· ἄρα τὸ ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος.

362. *Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον τραπέζιον* ΑΒΓΔ, ($\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^0$). *Ἡ μεγάλη βάσις ΔΓ εἶναι διπλασία τῆς μικρᾶς βάσεως ΑΒ καὶ ἡ ἀμβλεῖα γωνία Β εἶναι τριπλασία τῆς ὀξείας γωνίας Γ. 1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι Β καὶ Γ. 2ον Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Β φέρομεν τὴν κάθετον ΒΕ ἐπὶ τὴν ΔΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαγώνιος ΑΓ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ΒΕ. 3ον. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΕ· νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΑΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ καὶ ἴση μὲ αὐτήν. 4ον. Ἐὰν Ν εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ΑΕ καὶ ΒΔ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΝΜ εἶναι ἴση μὲ τὸ τέταρτον τῆς βάσεως ΔΓ.*

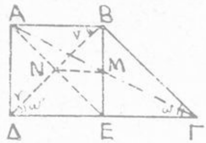
1ον. Αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι παραπληρωματικαί, ὡς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΔΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΓ, ἤτοι εἶναι $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^0$ (1). Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\widehat{B} = 3 \cdot \widehat{\Gamma}$ ἄρα ἡ ἰσότης (1) γίνεται $3\widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma} = 180^0$ ἢ $4\,\widehat{\Gamma} = 180^0$ ἢ $\widehat{\Gamma} = 45^0$, ὁπότε

$$B = 3 .\ 45^0 = 135^0.$$

2ον. Αἱ ΑΒ καὶ ΔΕ εἶναι ἴσαι ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΕΔ. Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΔΓ ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ΔΕ, ὡς ἴση τῆς ΑΒ, θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΔΓ· ἤτοι εἶναι

$$ΑΒ = ΔΕ = ΕΓ = \frac{1}{2} ΔΓ.$$

Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΑΕΓΒ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ ἀπέναντι πλευραί του ΑΒ καὶ ΕΓ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι· ἄρα αἱ διαγώνιοί του ΑΓ καὶ ΒΕ διχοτομοῦνται, ἤτοι τὸ Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΒΕ.



Σχ. 322

3ον. Ἐδείχθη, ὅτι ω=ω'=ν=45⁰. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΒ εἶναι ἰσοσκελές, διότι αἱ παρὰ τὴν βάσιν του γωνίαι ν καὶ ν' εἶναι ἴσαι μὲ 45⁰· ἄρα θὰ εἶναι ΑΒ=ΑΔ. Ὥστε τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΕΔ εἶναι τετράγωνον, διότι αἱ δύο διαδοχικαὶ πλευραί του ΑΔ καὶ ΑΒ εἶναι ἴσαι. Ἑπομένως αἱ διαγώνιοί του ΑΕ καὶ ΒΔ εἶναι ἴσαι καὶ κάθετοι μεταξύ των.

4ον. Ἡ εὐθεῖα ΝΜ συνδέει τὰ μέσα Ν καὶ Μ τῶν δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΕΓ· ἄρα θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΕΓ καὶ θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς ἤτοι θὰ εἶναι $ΝΜ = \frac{1}{2} ΕΓ$. Ἐπειδὴ $ΕΓ = \frac{1}{2} ΔΓ$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται $ΜΝ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} ΔΓ = \frac{1}{4} ΔΓ$.

363. Δίδεται ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ μὲ βάσεις τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἔστωσαν Ε καὶ Ζ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ, Η τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Α καὶ Δ καὶ Κ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι ἡ ΗΚ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις καὶ ὅτι $ΕΗ = \frac{ΑΔ}{2}$, $ΖΚ = \frac{ΒΓ}{2}$. 2ον Ὅτι διὰ νὰ τέμνωνται αἱ τέσσαρες διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τραπεζίου εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεών του νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του.

1ον. Αἱ γωνίαι Α καὶ Δ (Σχ. 323) εἶναι παραπληρωματικαί, διότι εἶναι ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων βάσεων τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΔ. Τὰ ἡμίση τῶν γωνιῶν αὐτῶν $Α_1$ καὶ $Δ_1$ ἔχουν ἄθροισμα 1 ὀρθ. γωνίας καὶ ἑπομένως τὸ τρίγωνον ΑΗΔ εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον εἰς τὸ Η.

Ἐπειδὴ ἡ ΗΕ εἶναι διάμεσος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΗΔ, θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης· ἤτοι εἶναι $ΗΕ = \frac{ΑΔ}{2} = ΕΑ$.

Ἐπειδὴ ΗΕ=ΕΑ τὸ τρίγωνον ΕΑΗ εἶναι ἰσοσκελές, ἄρα θὰ εἶναι $Α_1 = Η_1$· ἀλλὰ $Α_1 = Α_2$ ἐξ ὑποθέσεως, ἄρα εἶναι $Α_2 = Η_1$. Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΕΗ καὶ ΑΒ τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΑΗ σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας $Α_2$ καὶ $Η_1$ ἴσας· ἄρα αἱ ΕΗ καὶ ΑΒ εἶναι παράλληλοι. Τὸ Η λοιπὸν κεῖται ἐπὶ τῆς ΕΖ, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, ὡς διάμεσος τραπεζίου. Σκεπτόμενοι ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἡ ΖΚ εἶναι ἴση μὲ $\frac{ΒΓ}{2}$ καὶ ὅτι τὸ Κ κεῖται ἐπὶ τῆς ΕΖ. Ἡ ΗΚ λοιπὸν εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου.

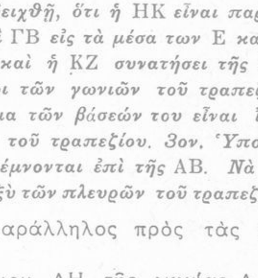
2ον. Διὰ νὰ τέμνωνται, εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τραπεζίου πρέπει τὰ σημεῖα Η καὶ Κ νὰ συμπίπτουν, ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι, $ΕΖ = ΕΗ + ΗΚ$ (1) Ἀλλὰ ἡ ΕΖ εἶναι διάμεσος τραπεζίου καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι μὲ $ΕΖ = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ $ΕΗ = \frac{ΑΔ}{2}$ καὶ $ΗΖ = \frac{ΒΓ}{2}$ ἡ (1) γίνεται $\frac{ΑΒ + ΓΔ}{2} = \frac{ΑΔ}{2} + \frac{ΒΓ}{2}$

ἢ $$ΑΒ + ΓΔ = ΑΔ + ΒΓ.$$

364. Δίδεται ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ, *μὲ μεγάλην βάσιν τὴν* ΑΒ. *1ον. Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν* Α *καὶ* Δ, *τέμνονται εἰς τὸ* Η *καὶ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν* Γ *καὶ* Β *τέμνονται εἰς τὸ* Κ. ***Νὰ*** *ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ* ΗΚ *εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις καὶ τέμνει τὰς* ΑΔ *καὶ* ΓΒ *εἰς τὰ μέσα των* Ε *καὶ* Ζ. ***Νὰ*** *ὑπολογισθῇ ἡ* ΕΗ *συναρτήσει τῆς* ΑΔ *καὶ ἡ* ΚΖ *συνατήσει τῆς* ΒΓ. *2ον. Ὑποθέτομεν, ὅτι αἱ τέσσαρες διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τραπεζίου τέμνονται.* ***Νὰ*** *ἀποδειχθῇ, ὅτι τότε τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεών του εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου. 3ον. Ὑποθέτομεν, ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν* Δ *καὶ* Γ *τέμνονται ἐπὶ τῆς* ΑΒ. ***Νὰ*** *εὑρεθῇ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν πλευρῶν τοῦ τραπεζίου.*

1ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΗΚ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις ΑΒ καὶ ΓΔ.

Ἐπειδὴ τὸ Η κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΔΗ τῆς γωνίας Δ, αἱ ἀποστάσεις του ΗΠ καὶ ΗΘ ἀπὸ τὰς πλευράς της θὰ εἶναι ἴσαι. Ὁμοίως ἐπειδὴ τὸ Η εἶναι σημεῖον τῆς διχοτόμου ΑΗ τῆς γωνίας Α, θὰ εἶναι $ΗΛ = ΗΘ$. Ἄρα θὰ εἶναι $ΗΠ = ΗΛ$ ὡς ἴσαι πρὸς τὴν ΗΘ.



Σχ. 323

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $ΚΜ = ΚΝ$.

Τὰ σημεῖα λοιπὸν Η καὶ Κ ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ τὰς βάσεις ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ ἑπομένως κεῖνται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις καὶ ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ μέσα Ε καὶ Ζ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ. Δηλ. ἡ ΗΚ κεῖται ἐπὶ τῆς διαμέσου ΕΖ τοῦ τραπεζίου.

Ἐπειδὴ $\widehat{Α} + \widehat{Δ} = 180^0$ θὰ εἶναι $\widehat{Δ_1} + \widehat{Α_1} = 90^0$. Ἄρα $Δ\widehat{Η}Α = 90^0$. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΔΗΑ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Η. Ἡ ΕΗ εἶναι διάμεσος ὀρθογωνίου τριγώνου, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας· ἄρα θὰ εἶναι $ΕΗ = \frac{ΑΔ}{2}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $ΚΖ = \frac{ΒΓ}{2}$.

2ον. Ἐὰν αἱ τέσσαρες διχοτόμοι τέμνωνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, τότε τὰ σημεῖα Η καὶ Κ συμπίπτουν καὶ θὰ εἶναι

$$ΕΗ + ΚΖ = ΕΖ = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2}. \quad (1)$$

Ἀλλὰ ἐδείχθη, ὅτι εἶναι καὶ $ΕΗ + ΚΖ = \frac{ΑΔ + ΒΓ}{2}$. (2)

Ἀπὸ τὰς (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $ΑΒ + ΓΔ = ΑΔ + ΒΓ$.

3ον. Ἔστω, ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Δ καὶ Γ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒ. Τότε θὰ εἶναι

$$\widehat{Σ}_2 = \widehat{Δ}_2 = \widehat{Δ}_1 \quad \text{καὶ} \quad \widehat{Σ}_1 = \widehat{Γ}_1 = \widehat{Γ}_2.$$

Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΔΣ καὶ ΒΓΣ εἶναι ἰσοσκελῆ καὶ θὰ εἶναι

$$ΑΣ = ΑΔ \quad \text{καὶ} \quad ΣΒ = ΒΓ$$

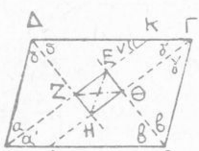
ἄρα καὶ $ΑΣ + ΣΒ = ΑΔ + ΒΓ$ ἢ $ΑΒ = ΑΔ + ΒΓ$.

Δηλαδὴ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ μεγάλη βάσις ΑΒ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου.

Η' Ὁμάς. **365.** ***Νὰ ἀποδειχθῇ** : 1ον ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν παραλληλογράμμου τεμνόμεναι σχηματίζουν ὀρθογώνιον. 2ον Αἱ διαγώνιοι τοῦ σχηματιζομένου ὀρθογωνίου εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ παραλληλογράμμου καὶ ἑκάστη ἐξ αὐτῶν εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τῶν δύο διαδοχικῶν πλευρῶν τοῦ παραλληλογράμμου. 3ον Ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου τεμνόμεναι σχηματίζουν τετράγωνον.*

1ον Βλέπε λύσιν ἀσκήσεως 207.

2ον Ἡ διχοτόμος ΑΕ τῆς γωνίας Α προεκτεινομένη τέμνει τὴν ΔΓ εἰς τὸ Κ· ἡ γωνία ν εἶναι ἴση μὲ τὴν α', ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλήλων ΑΒ καὶ ΔΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΚ· ἀλλὰ α'=α, διότι ἡ ΑΕ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α, ἄρα θὰ εἶναι ν=α.



Σχ. 324

Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΔΑΚ εἶναι ἰσοσκελές· ἄρα θὰ εἶναι ΔΑ=ΔΚ. Ἐπειδὴ ἡ ΔΖ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Δ τῆς κορυφῆς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΔΑΚ θὰ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον Ζ τῆς βάσεως ΑΚ· ἤτοι τὸ Ζ εἶναι μέσον τῆς ΑΚ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ Θ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΛΓ. Ἐπειδὴ τὸ ΑΛΓΚ εἶναι παραλληλόγραμμον αἱ ἀπέναντι πλευραί του ΑΚ καὶ ΛΓ θὰ εἶναι ἴσαι· ἄρα καὶ τὰ ἡμίση αὐτῶν ΑΖ καὶ ΛΘ θὰ εἶναι ἴσα. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΑΛΘΖ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ δύο ἀπέναντι πλευραί του ΑΖ καὶ ΛΘ θὰ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Ὥστε ἡ διαγώνιος ΖΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, ἄρα καὶ πρὸς τὴν ΔΓ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ διαγώνιος ΕΗ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς ΑΔ καὶ ΒΓ. Ἐπειδὴ τὸ ΑΛΘΖ εἶναι παραλληλόγραμμον, θὰ εἶναι ΖΘ = ΑΛ ἢ ΖΘ = ΑΒ — ΛΒ ἢ ΖΘ = ΑΒ — ΒΓ.

Ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου ΕΖΗΘ εἶναι ἴσαι, θὰ εἶναι

ΕΗ = ΖΘ = ΑΒ — ΒΓ.

Ὥστε διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου ΕΖΗΘ εἶναι ἴσαι μὲ τὴν διαφορὰν τῶν δύο διαδοχικῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος παραλληλογράμμου.

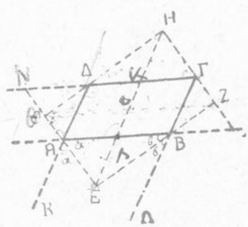
3ον. Βλέπε λύσιν ἀσκ. 218.

366. Αἱ διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν ἑνὸς παραλληλογράμμου, τέμνονται, σχηματίζουν ἕνα ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων εἶναι ἴσον μὲ τὴν περίμετρον τοῦ παραλληλογράμμου.

Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον σχηματίζουν αἱ διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τοῦ ΑΒΓΔ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ ΕΖΗΘ εἶναι ὀρθογώνιον καί, ὅτι

ΕΗ + ΖΘ = ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ

Αἱ ἐξωτερικαὶ γωνίαι ΚΑΒ καὶ ΑΒΛ εἶναι παραπληρωματικαὶ ὡς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΔΚ καὶ ΓΛ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΒ· ἤτοι εἶναι



2α+2β=2 ὀρθ., ἄρα α+β=1 ὀρθή.

Σχ. 325

Εἰς τὸ τὸ τρίγωνον ΑΕΒ αἱ δύο γωνίαι του α καὶ β ἔχουν ἄθροισμα 1 ὀρθήν, ἄρα ἡ τρίτη γωνίατου Ε εἶναι ὀρθή, ἤτοι Ε=1 ὀρθή. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι γων. Ζ = γων.Η=γων.Θ = 1 ὀρθή. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΕΖΗΘ ἔχει τὰς γωνίας του ὀρθάς, ἄρα εἶναι ὀρθογώνιον.

Προεκτείνομεν τάς ΕΘ καὶ ΓΔ, καὶ ἔστω Ν τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον τέμνονται· ὁμοίως προεκτείνομεν τὰς ΗΓ καὶ ΑΒ καὶ ἔστω Μ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των. Τὸ τετράπλευρον ΑΜΓΝ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ ἀπέναντι πλευραί του εἶναι παράλληλοι. Εἰς τὸ τρίγωνον ΒΓΜ ἡ ΒΖ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΓΒΜ καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΜ· ἄρα τὸ τρίγωνον ΒΜΓ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως εἶναι

ΒΜ = ΒΓ καί Μ Ζ = ΖΓ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΔΑΝ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΔΝ=ΔΑ καὶ ΑΘ=ΘΝ.

Ἐπειδὴ αἱ ΑΝ καὶ ΜΓ εἶναι ἴσαι, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΜΓΝ καὶ τὰ ἡμίση τῶν ΑΘ καὶ ΜΖ θὰ εἶναι ἴσαι. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΑΜΖΘ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ δύο ἀπέναντι πλευραί του ΑΘ καὶ ΜΖ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι· ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΘΖ=ΑΜ (3).

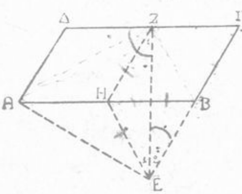
Ἀλλὰ $AM=AB+BM$ ἢ $AM=AB+B\Gamma$. Ἑπομένως ἡ ἰσότης (3) γράφεται $\Theta Z=AB+B\Gamma$ (4).

Φέρομεν καὶ τὴν ἄλλην διαγώνιον ὀρθογωνίου ΕΖΗΘ. Ἐπειδὴ αἱ διαγώνιαι ὀρθογωνίου εἶναι ἴσαι θὰ εἶναι $EH=\Theta Z$· ἄρα θὰ εἶναι καὶ $EH=AB+B\Gamma$ ἢ $EH=\Gamma\Delta+\Delta A$ (5).

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητος (4) καὶ (5) κατὰ μέλη λαμβάνομεν
$$\Theta Z+EH=AB+B\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta A.$$

367. Δίδεται ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, *εἰς τὸ ὁποῖον ἡ πλευρὰ* ΑΒ *εἶναι διπλασία τῆς* ΒΓ. ***Ἐκ τῆς κορυφῆς*** Α ***φέρομεν τὴν κάθετον*** ΑΕ ***ἐπὶ τὴν*** ΒΓ ***καὶ συνδέομεν τὸ*** Ε ***μὲ τὸ μέσον*** Ζ ***τῆς*** ΓΔ. ***Ἔστω*** Η ***τὸ μέσον τῆς*** ΑΒ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ** : 1ον. ὅτι τὸ* ΗΒΓΖ *εἶναι ῥόμβος. 2ον. ὅτι* ΗΖ=ΗΕ=ΗΒ. *3ον. ὅτι ἡ* ΖΕ *εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας* ΗΕΓ. ***4ον.** ὅτι ἡ γων.* ΔΖΕ *εἶναι τριπλασία τῆς* ΖΕΓ.

1ον. Τὸ τετράπλευρον ΗΒΓΖ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ ἀπέναντι πλευραί του εἶναι ΗΒ καὶ ΖΓ εἶναι ἴσαι, ὡς ἡμίση τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ τοῦ παραλληλογράμμου, καὶ παράλληλοι.



Σχ. 326

Ἐπειδὴ $HB=\frac{AB}{2}$ καὶ $B\Gamma=\frac{AB}{2}$ ἐξ ὑποθέσεως, ἕπεται, ὅτι $HB=B\Gamma$. Τὸ παραλληλόγραμμον λοιπὸν ΗΒΓΖ εἶναι ρόμβος, διότι δύο διαδοχικαὶ πλευραί του ΗΒ καὶ ΒΓ, εἶναι ἴσαι· ἄρα θὰ εἶναι $HB=B\Gamma=\Gamma Z=HZ$ (1).

2ον. Ἡ ΕΗ ὡς διάμεσος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΕΒ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης· ἤτοι εἶναι $EH=\frac{AB}{2}$ ἢ $EH=HB$ (2).

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $HZ=HE=HB$.

3ον. Ἐπειδὴ $HZ=HE$ τὸ τρίγωνον ΗΖΕ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως εἶναι $\widehat{Z_1}=\widehat{E_1}$. Αἱ γωνίαι Z_1 καὶ E_2 εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΗΖ καὶ ΕΓ· τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΖΕ· ἀλλὰ $Z_1=E_1$ ὡς ἐδείχθη, ἄρα θὰ εἶναι $E_1=E_2$· ἤτοι ἡ ΖΕ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΗΕΓ.

4ον. Ἡ γωνία ΔΖΕ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΕΖΓ· ἄρα θὰ εἶναι $\Delta\widehat{Z}E=\widehat{\Gamma}+E_2$ (4).

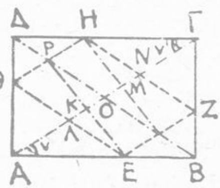
Ἀλλὰ $\widehat{\Gamma}=H\widehat{B}E$, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΔΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΓΕ καὶ $H\widehat{B}E=H\widehat{E}B$ ὡς παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΗΒΕ· ἄρα θὰ εἶναι
$$\widehat{\Gamma}=H\widehat{E}B=E_1+E_2=2E_2.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (4) τὴν γωνίαν Γ διὰ τῆς ἴσης της $2E_2$ λαμβάνομεν $\Delta\widehat{Z}E=2\widehat{E_2}+\widehat{E_2}=3\widehat{E_2}$ ἢ $\Delta\widehat{Z}E=3Z\widehat{E}\Gamma$.

368. Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ. *Φέρομεν δύο παραλλήλους* ΕΖ, *καὶ* ΗΘ *πρὸς τὴν διαγώνιον* ΑΓ, *αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ αὐτὴν καὶ αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου εἰς τὰ σημεῖα* Ε, Ζ, Η, Θ. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ ὀρθογώνιον τετράπλευρον* ΕΖΗΘ *εἶναι παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου.*

Φέρομεν τὰς ΕΚ καὶ ΗΜ καθέτους ἐπὶ τὴν ΑΓ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΚΕ καὶ ΗΜΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην, ἤτοι ἔχουν ΕΚ=ΗΜ ἐξ ὑποθέσεως καὶ ν′=ν′ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΓ· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ΑΕ=ΗΓ.

Ἐὰν ἀπὸ τὰς ἴσας πλευρὰς ΑΒ καὶ ΓΔ ἀφαιρέσωμεν τὰ ἴσα τμήματα ΑΕ καὶ ΓΗ, τὰ ἀπομένοντα τμήματα ΕΒ καὶ ΔΗ εἶναι ἴσα, ἤτοι ΕΒ=ΔΗ (1).



Σχ. 327

Ὁμοίως, ἐὰν φέρωμεν καθέτους ἀπὸ τὰ σημεῖα Θ καὶ Ζ ἐπὶ τὴν ΑΓ ἀποδεικνύομεν, ὅτι ΑΘ=ΓΖ καὶ ἑπομένως ΔΘ=ΒΖ (2).

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΘΔΗ καὶ ΕΒΖ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς καθέτους πλευράς των ἴσας· ἤτοι ἔχουν ΔΗ=ΒΕ καὶ ΔΘ=ΒΖ, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω, ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ΘΗ=ΕΖ. Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ΕΖ καὶ ΗΘ ἴσας καὶ παραλλήλους, ἄρα εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἔστω Ο τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ. Τὸ Ο εἶναι σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων τοῦ παραλληλογράμμου ΕΖΓΘ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον. Προεκτείνομεν τὴν ΕΚ μέχρις ὅτου συναντήσει τὴν ΘΗ εἰς τὸ σημεῖον Ρ. Τὸ Κ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΕΡ ἐξ ὑποθέσεως. Εἰς τὸ τρίγωνον ΕΡΘ ἡ ΚΛ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΡΘ καὶ ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον Κ τῆς πλευρᾶς ΕΡ· ἄρα ἡ ΚΛ θὰ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Λ τῆς τρίτης πλευρᾶς ΕΘ.

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΘΑΕ ἡ ΑΛ εἶναι διάμεσός του, ἀγομένη ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας, ἄρα χωρίζει τὸ τρίγωνον εἰς δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα· ἤτοι τὸ τρίγωνον ΑΛΕ εἶναι ἰσοσκελὲς εἶναι λοιπὸν ΑΛ = ΛΕ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΝΖΓ εἶναι ἰσοσκελές, ἤτοι εἶναι ΝΓ=ΝΖ. Ἐπίσης εἶναι ΛΝ=ΖΕ ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΕΖΝΛ.

Θὰ εἶναι λοιπὸν ΑΓ=ΑΛ+ΛΝ+ΝΓ=ΛΕ+ΕΖ+ΖΝ·

ἤτοι ἡ διαγώνιος ΑΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἡμιπερίμετρον τοῦ ΕΖΗΘ. Ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι ὀρθογωνίου εἶναι ἴσαι ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ΒΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἡμιπερίμετρον τοῦ ΕΖΗΘ. Ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν δύο διαγωνίων τοῦ ΑΒΓΔ ἰσοῦται μὲ τὴν περίμετρον τοῦ ΕΖΗΘ.

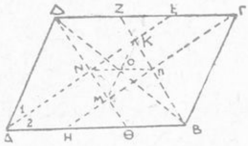
369. Εἰς ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ *φέρομεν τὰς διχοτόμους* ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ, ΔΘ *τῶν γωνιῶν του, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς ἀπέναντι πλευρὰς εἰς τὰ σημεῖα* Ε, Ζ, Η, Θ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ**: 1ον ὅτι κάθε διχοτόμος σχηματίζει μὲ τὰς πλευρὰς τοῦ παραλληλογράμμου, ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον (π. χ. ἡ* ΑΕ *σχηματίζει τὸ τρίγωνον* ΑΔΕ). *2ον Τὸ τετράπλευρον* ΚΛΜΝ, *τὸ ὁποῖον σχηματίζουν αἱ διχοτόμοι, εἶναι ἕνα ὀρθογώνιον. 3ον Τὸ κέντρον τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ συμπίπτει μὲ τὸ κέντρον τοῦ παραλληλογράμμου. 4ον Τί πρέπει νὰ εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον* ΑΒΓΔ, *ἵνα τὸ ὀρθογώνιον* ΚΛΜΝ *εἶναι τετράγωνον;*

1ον. Αἱ γωνίαι $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, διότι ἡ ΑΕ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α· ἀλλὰ $A_2 = E_1$ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ παραλλήλων· ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{A}_1 = \widehat{E}_1$ καὶ τὸ τρίγωνον ΔΑΕ εἶναι ἰσοσκελές.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι τὰ τρίγωνα ΒΓΗ, ΒΓΖ, ΑΔΘ εἶναι ἰσοσκελῆ.

2ον. Βλέπε λύσιν ἀσκήσ. 207.

3ον. Ἐδείχθη, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΔΘ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΝ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν του ΔΘ, τὸ Ν θὰ εἶναι μέσον τῆς ΔΘ. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ τὸ Λ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΒΖ. Ἔστω Ο τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς διαγωνίου ΒΔ καὶ τῆς ΝΛ.



Σχ. 328

Εἰς τὸ τρίγωνον ΔΘΒ ἡ ΝΟ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΔΒ, ἄρα θὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον Ο τῆς ΔΒ καὶ θὰ εἶναι $NO = \frac{1}{2}\,\Theta B$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΒΖΔ, ὅτι τὸ Ο εἶναι μέσον τῆς ΒΔ καὶ ὅτι τὸ $O\Lambda = \frac{1}{2}\,\Delta Z$. Ἐπειδὴ $\Theta B = \Delta Z$, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΔΘΒΖ θὰ εἶναι καὶ ΝΟ=ΟΛ. Ὥστε τὸ Ο εἶναι μέσον καὶ τῆς διαγωνίου ΝΟ τοῦ ὀρθογωνίου ΝΜΛΚ. Ὥστε τὰ κέντρα τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ καὶ τοῦ ὀρθογωνίου ΚΛΜΝ συμπίπτουν.

4ον. Τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον πρέπει νὰ εἶναι ὀρθογώνιον ὁπότε τὸ ΚΛΜΝ θὰ εἶναι τετράγωνον (ἄσκ. 218).

370. Εἰς ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ *λαμβάνομεν ἐντὸς αὐτοῦ τυχὸν σημεῖον* Μ. ***Εὑρίσκομεν** τὰ συμμετρικὰ σημεῖα,* Ε, Ζ, Η, Θ *τοῦ* Μ *πρὸς τὰς πλευρὰς* ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ *τοῦ ὀρθογωνίου.* ***Νὰ ἀποδειχθῇ**: 1ον Ὅτι αἱ κορυφαὶ τοῦ ὀρθογωνίου* ΑΒΓΔ *εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου*

ΕΖΗΘ, *καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαγώνιοί του, συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου. 2ον. Ποῦ πρέπει νὰ κεῖται τὸ δοθὲν σημεῖον* Μ, *ἵνα τὸ* ΕΖΗΘ *εἶναι παραλληλόγραμμον; Ποῖον παραλληλόγραμμον, εἰδικῶς, λαμβάνομεν τότε; 3ον Τί πρέπει νὰ εἶναι τὸ δοθὲν ὀρθογώνιον, ἵνα τὸ* ΕΖΗΘ *εἶναι τετράγωνον;*

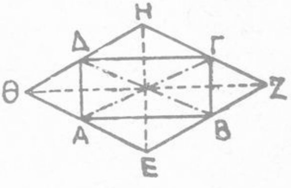
1ον. Φέρομεν τὰς ΜΒ καὶ ΜΑ· ἐξ ὑποθέσεως τὰ σημεῖα Μ καὶ Ε εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν ΑΒ· ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΜΕ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΒΕ=ΒΜ (1).

Ἐπίσης τὰ σημεῖα Μ καὶ Ζ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν ΒΓ· ἄρα ἡ ΒΓ θὰ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΜΖ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι

ΒΖ = ΒΜ (2).

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι ΕΒ=ΒΖ, ἤτοι τὸ Β εἶναι τὸ μέσον τῆς ΕΖ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ κορυφὴ Γ εἶναι μέσον τῆς ΖΗ, ἡ κορυφὴ Δ εἶναι μέσον τῆς ΗΘ καὶ ἡ κορυφὴ Α εἶναι μέσον τῆς ΘΕ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΘΕΖ ἡ εὐθεῖα ΑΒ συνδέει τὰ μέσα Α καὶ Β δύο πλευρῶν του· ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς, ἤτοι εἶναι $AB = \frac{1}{2}ΘZ$ ἢ ΘΖ=2·ΑΒ.



Σχ. 329

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ΕΗ=2·ΒΓ.
Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

ΕΗ = 2·ΒΓ.

2ον. Αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραπλεύρου ΕΖΗΘ εἶναι ἐκ κατασκευῆς κάθετοι μεταξύ των. Διὰ νὰ εἶναι τὸ τετράπλευρον αὐτὸ παραλληλόγραμμον, πρέπει ἀναγκαστικῶς νὰ εἶναι ρόμβος· ἀλλὰ διὰ νὰ εἶναι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ ρόμβος πρέπει νὰ εἶναι ΕΖ=ΖΗ=ΗΘ=ΘΕ.

Ἀλλὰ ΕΖ = 2·ΜΒ, ΖΗ = 2·ΜΓ, ΗΘ = 2·ΜΔ, ΘΕ = 2·ΜΑ.
Ὥστε πρέπει νὰ εἶναι

2·ΜΒ = 2·ΜΓ = 2·ΜΔ = 2·ΜΑ ἢ ΜΒ = ΜΓ = ΜΔ = ΜΑ·

δηλ. τὸ Μ νὰ ἀπέχῃ ἰσάκις ἀπὸ τὰς τέσσαρας κορυφὰς τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ σημεῖον Μ θὰ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ὀρθογωνίου· δηλαδὴ τὸ Μ θὰ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του ΑΓ καὶ ΒΔ.

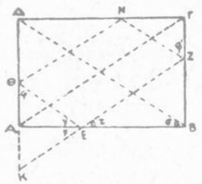
Ὥστε, ἐὰν τὸ Μ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ, τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι ρόμβος· αἱ πλευραὶ τοῦ ρόμβου εἶναι διπλάσιαι τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ τοῦ ὀρθογωνίου, καὶ παράλληλοι πρὸς αὐτάς.

3ον. Διὰ νὰ εἶναι ὁ ρόμβος ΕΖΗΘ τετράγωνον πρέπει αἱ διαγώνιοί του ΕΗ καὶ ΖΘ νὰ εἶναι ἴσαι, ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι ΕΗ = ΖΘ. Ἀλλὰ ΕΗ=2ΒΓ καὶ ΖΘ=2ΑΒ. Ἄρα πρέπει νὰ εἶναι 2ΒΓ=2ΑΒ ἢ ΒΓ=ΑΒ. Διὰ νὰ εἶναι ὅμως ΒΓ=ΑΒ πρέπει τὸ δοθὲν ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ νὰ εἶναι τετράγωνον.

Ὥστε, ἐὰν τὸ ΑΒΓΔ εἶναι τετράγωνον τότε καὶ τὸ ΕΖΗΘ θὰ εἶναι τετράγωνον.

371, Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν πάντοτε ἕνα παραλληλόγραμμον εἰς ἕνα ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς διαγωνίους τοῦ ὀρθογωνίου. Νὰ ἀποδειχθῇ δέ, ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων τοῦ ὀρθογωνίου.

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ε τῆς ΑΒ φέρομεν τυχοῦσαν παράλληλον ΕΖ πρὸς τὴν διαγώνιον ΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Ἀπὸ τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ φέρομεν παραλλήλους ΕΘ καὶ ΖΗ πρὸς τὴν διαγώνιον ΒΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς πλευρὰς ΑΔ καὶ ΓΔ ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Θ καὶ Η. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΗΘ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον.



Σχ. 330

Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ἀπέναντι πλευραί του ΕΘ καὶ ΖΗ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Αἱ ΕΘ καὶ ΖΗ εἶναι παράλληλοι, ὡς παράλληλοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΒΔ. Προεκτείνομεν τὴν ΖΕ μέχρις, ὅτου συναντήσει τὴν προέκτασιν τῆς ΔΑ εἰς τὸ σημεῖον Κ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΘΑΕ καὶ ΕΑΚ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην, ἤτοι ἔχουν τὴν ΑΕ κοινὴν καὶ $\widehat{\nu}=\widehat{\nu'}$. Πράγματι εἶναι $\widehat{\nu}=\widehat{\tau}=\widehat{\Gamma A B}$ καὶ $\widehat{\nu'}=\widehat{B\Delta A'}$. Ἀλλὰ $\widehat{\Gamma A B}=\widehat{\Delta B A}$, ἄρα καὶ $\widehat{\nu}=\widehat{\nu'}$. Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων αὐτῶν συνάγομεν, ὅτι ΑΚ=ΑΘ, καὶ ἐπειδὴ ΑΚ=ΓΖ, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ παραλληλογράμμου, θὰ εἶναι καὶ ΑΘ=ΓΖ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΕΘ καὶ ΓΗΖ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην, ἤτοι ἔχουν ΑΘ=ΓΖ, ὡς ἐδείχθη καὶ $\varphi=\varphi'$, διότι ἔχουν πλευρὰς παραλλήλους καὶ ἀντιρρόπους· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ΘΕ=ΖΗ.

Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι ἔχει δύο ἀπέναντι πλευρὰς ΕΘ καὶ ΖΗ ἴσας καὶ παραλλήλους.

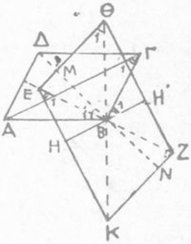
Ἐξ ἄλλου εἶναι ΘΕ+ΕΖ=ΚΕ+ΕΖ=ΚΖ=ΑΓ.

Ἤτοι τὸ ἥμισυ τῆς περιμέτρου τοῦ παραλληλογράμμου ΕΖΗΘ εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαγώνιον ΑΓ τοῦ ὀρθογωνίου. Συνεπῶς ὁλόκληρος ἡ περίμετρος τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴση μὲ τὰς δύο διαγωνίους τοῦ ὀρθογω ίου, δηλ. μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο διαγωνίων του, διότι αἱ διαγώνιοι ὀρθογωνίου εἶναι ἴσαι.

372. Δίδεται ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. *Ἀπὸ τὴν κορυφὴν* Β *φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν* ΓΒ *καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ* Β *τμήματα* ΒΕ *καὶ* ΒΖ *ἴσα πρὸς τὴν* ΒΓ. *Ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον* Β *φέρομεν τὴν κάθετον πρὸς τὴν* ΒΑ *καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ* Β *μήκη* ΒΘ *καὶ* ΒΚ *ἴσα μὲ* ΑΒ. *1ον Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι* ΕΚ *καὶ* ΘΖ *εἶναι παράλληλοι. 2ον Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἰσότης τῶν τριγώνων* ΑΔΓ, ΑΒΓ, ΘΒΖ, ΕΒΚ. *3ον Φέρομεν τὰ ὕψη* ΒΗ *καὶ* ΒΗ΄ *τῶν τριγώνων* ΕΒΚ *καὶ* ΘΒΖ. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι* ΒΗ=ΒΗ΄ *καί, ὅτι τὰ σημεῖα* Η, Β, Η΄ *κεῖνται ἐπ' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν* ΑΓ. *4ον Φέρομεν τὰ ὕψη* ΒΜ *καὶ* ΒΝ *τῶν τριγώνων* ΒΕΘ *καὶ* ΒΖΚ. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα* Δ, Μ, Β, Ν *κεῖνται ἐπ' εὐθείας.*

1ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΕΚ καὶ ΘΖ εἶναι παράλληλοι Τὸ τετράπλευρον ΕΚΖΘ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοί του ΕΖ καὶ ΘΚ διχοτομοῦνται εἰς τὸ Β. Ἄρα αἱ ΕΚ καὶ ΘΖ εἶναι παράλληλοι

2ον. Τὰ τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΑΒΓ εἶναι ἴσα, διότι ἡ διαγώνιος ΑΓ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ χωρίζει αὐτὸ εἰς δύο ἴσα τρίγωνα. Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΘΒΖ καὶ ΕΒΚ εἶναι ἴσα μεταξύ των, διότι ἔχουν εἰς τὸ Β μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ δύο πλευρῶν ἀντιστοίχως ἴσων. Ἄρα τὰ τέσσαρα τρίγωνα ΑΔΓ, ΑΒΓ, ΘΒΖ καὶ ΕΒΚ εἶναι ἴσα.



Σχ. 331

3ον. Ἐπειδὴ αἱ ΒΗ καὶ ΒΗ΄ εἶναι κάθετοι ἐπὶ δύο παραλλήλους εὐθείας ΕΚ καὶ ΘΖ καὶ ἄγονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Η ἕπεται, ὅτι ἡ ΗΒΗ΄ εἶναι εὐθεῖα.

Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι ἡ ΗΒΗ εἶναι παράλληλος μὲ τὴν ΑΓ.

Εἶναι $\widehat{B_1} = \widehat{E_1}$ διότι ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους.

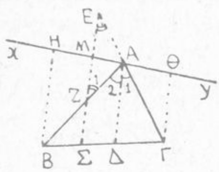
Ἐπίσης εἶναι $\widehat{E_1} = \widehat{\Gamma_1}$ ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων ΕΒΚ καὶ ΑΒΓ· ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{B_1} = \widehat{\Gamma_1}$ καὶ ἑπομένως αἱ ΗΒΗ΄ καὶ ΑΓ εἶναι παράλληλοι.

4ον. Ἀποδεικνύομεν ὡς ἀνωτέρω, ὅτι τὰ τρίγωνα ΔΓΒ, ΔΑΒ, ΕΒΘ καὶ ΒΚΖ εἶναι ἴσα καὶ ὅτι τὰ σημεῖα Μ, Β, Ν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, διότι αἱ ΒΜ καὶ ΒΝ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς παραλλήλους ΕΘ καὶ ΚΖ

Ἐπίσης εἶναι $A\widehat{B}M = \widehat{\Theta_1}$, διότι αἱ πλευραί των εἶναι κάθετοι·

ἀλλὰ $\Delta\widehat{B}A = \widehat{\Theta_1}$, ὡς γωνίαι ἴσων τριγώνων ἄρα θὰ εἶναι $A\widehat{B}M = \Delta\widehat{B}A$. Αἱ εὐθεῖαι λοιπὸν ΒΜ καὶ ΒΔ συμπίπτουν καὶ ἑπομένως τὰ σημεῖα Δ, Μ, Β, Ν κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Θ΄ Ὁμάς. 373. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. *Ἀπὸ ἕνα σημεῖον* Σ *τὸ ὁποῖον κινῆται ἐπὶ τῆς* ΒΓ *φέρομεν μίαν παράλληλον πρὸς τὴν διχοτόμον* ΑΔ *τῆς γωνίας* Α, *ἡ ὁποία τέμνει τὴν* ΑΓ *εἰς τὸ* Ε *καὶ τὴν* ΑΒ *εἰς τὸ* Ζ. ***Νὰ εὑρεθῇ** ὁ γεωμ. τόπος τοῦ μέσου τῆς* ΕΖ.



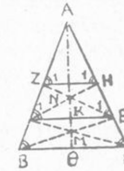
Σχ. 332

Ἔστω Μ τὸ μέσον τῆς ΕΖ· τὸ Μ εἶναι ἕνα σημεῖον τοῦ τόπου. Αἱ γωνίαι $Α_1$ καὶ Ε εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς τῶν παραλλήλων ΑΔ καὶ ΕΣ. Ἐπίσης εἶναι $Α_2 = Ζ_1$ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν αὐτῶν παραλλήλων. Ἐπειδὴ εἶναι $Α_1 = Α_2$, θὰ εἶναι καὶ $Ε = Ζ_1$. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΕΖ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως τὸ μέσον Μ τῆς βάσεως του ΕΖ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ΕΑΒ, δηλ. ἐπὶ τῆς διχοτόμου xy τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α.

Ἀπὸ τὰ Β καὶ Γ φέρομεν καθέτους ΒΗ καὶ ΓΘ ἐπὶ τὴν xy. Τὸ τμῆμα ΗΘ τῆς διχοτόμου xy εἶναι προφανῶς ὁ ζητούμενος τόπος, διότι τὸ σημεῖον Σ κινεῖται ἐπὶ τῆς ΒΓ μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ.

374. Εἰς ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ *φέρομεν μίαν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν* ΒΓ, *ἡ ὁποία τέμνει τὰς ἴσας πλευρὰς* ΑΒ *καὶ* ΑΓ *εἰς τὰ σημεῖα* Δ *καὶ* Ε· *φέρομεν τὰς εὐθείας* ΓΔ *καὶ* ΒΕ, *αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον* Μ. ***Νὰ εὑρεθῇ** ὁ γεωμ. τόπος τοῦ σημείου* Μ, *ὅταν ἡ εὐθεῖα* ΔΕ *κινῆται παραλλήλως πρὸς τὴν* ΒΓ.

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ· φέρομεν τὰς παραλλήλους ΔΕ καὶ ΖΗ πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ. Ἐπειδὴ αἱ ΔΕ καὶ ΖΗ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ, τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΑΖΗ εἶναι ἰσοσκελῆ καὶ ἑπομένως τὰ τραπέζια ΒΓΕΔ καὶ ΔΕΗΖ εἶναι ἰσοσκελῆ. Ἔστωσαν Μ καὶ Ν αἱ τομαὶ τῶν διαγωνίων τῶν τραπεζίων ΒΓΕΔ καὶ ΔΕΗΖ. Τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν εἶναι σημεῖα τοῦ τόπου. Γνωρίζομεν, ὅτι αἱ διαγώνιοι ἰσοσκελῶν τραπεζίων τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν βάσεών του, δηλ. ἐπὶ τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν Α τῆς κορυφῆς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου. Τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν κεῖνται λοιπὸν ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΑΘ τῆς γωνίας Α.



Σχ. 333

Ὥστε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς τοῦ δοθέντος ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

375. Δίδεται ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. *Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον* Σ *τῆς βάσεώς του* ΒΓ *φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν* ΒΓ, *ἡ ὁποία τέμνει τὴν* ΑΓ *εἰς τὸ* Ν *καὶ τὴν* ΑΒ *εἰς τὸ* Μ. ***1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ**, ὅτι* ΑΜ=ΑΝ. ***2ον. Φέρομεν** τὸ ὕψος* ΑΗ. ***Νὰ ἀποδειχθῇ**, ὅτι* $ΑΗ = \frac{ΣΜ + ΣΝ}{2}$ *καὶ ἐξ αὐτοῦ νὰ ἐξαχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα* $ΣΜ + ΣΝ$ *εἶναι σταθερόν, ὅταν τὸ σημεῖον* Σ *κι-*

νῆται ἐπὶ τῆς ΒΓ. ***3ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ μέσου τῆς*** ΜΝ, *ὅταν τὸ* Σ *κινῆται ἐπὶ τῆς* ΒΓ.

1ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΑΜ = ΑΝ.

Αἱ ΑΗ καὶ ΜΣ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν ΒΓ. Αἱ γωνίαι $Α_2$ καὶ $Ν_1$ εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΗ καὶ ΜΣ. Ἐπίσης αἱ γωνίαι $Α_1$ καὶ Μ εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς παραλλήλων. Ἐπειδὴ $Α_1 = Α_2$, θὰ εἶναι καὶ $Ν_1$=Μ. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΝΜ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως εἶναι ΑΜ=ΑΝ.

Σχ. 334

2ον. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΘ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΜΑΝ. Θὰ εἶναι ΘΝ = ΘΜ. Ἐπίσης εἶναι ΑΗ=ΘΣ ὡς κάθετοι περιεχόμεναι μεταξὺ παραλλήλων.

Εἶναι ΑΗ=ΘΣ ἢ ΑΗ=ΣΜ−ΜΘ (1) καὶ ΑΗ=ΣΝ+ΘΝ (2).
Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$2ΑΗ=ΣΜ+ΣΝ \quad ἢ \quad ΑΗ=\frac{ΣΜ+ΣΝ}{2}.$$

Τὸ ἄθροισμα ΣΜ+ΣΝ εἶναι σταθερόν, ὡς διπλάσιον τοῦ σταθεροῦ ὕψους ΑΗ. Ὥστε τὸ ἄθροισμα ΣΜ + ΣΝ μένει σταθερόν, ὅταν τὸ Σ κινῆται ἐπὶ τῆς ΒΓ μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ.

3ον. Ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν ἄσκησιν 373. Ὁ τόπος τοῦ μέσου Θ τῆς ΜΝ, ὅταν τὸ Σ κινῆται ἐπὶ τῆς ΒΓ, εἶναι ἕνα τμῆμα ΚΛ τῆς διχοτόμου xy τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Τὸ τμῆμα ΚΛ τῆς διχοτόμου xy, ὁρίζουν αἱ κάθετοι ΒΚ καὶ ΓΛ, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ἐπὶ τὴν xy.