ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΚΑΣΑΠΟΓΛΟΥ
ΛΑΜΠΡΟΣ.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β΄ ΤΑΞΕΩΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

Καραπόγλου
Λάμπρος

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β΄ ΤΑΞΕΩΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ 1967

ΑΝΑΤΥΠΩΣΙΣ

᾿Εκ τοῦ βιβλίου τῆς ᾿Επιτροπῆς τοῦ ῾Υπουργείου ᾿Εθνικῆς Παιδείας καὶ Θρησκευμάτων «ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΠΡΩΤΗΝ ΒΑΘΜΙΔΑ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ» (Βιβλίον **II**), ὡς ἐτροποποιήθη ὑπὸ τῆς ἁρμοδίας ἐπιτροπῆς τοῦ ῾Υπουργείου

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

Τά διανύσματα καί οἱ σχετικοί ἀριθμοί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

Σύνολα. Διμελεῖς σχέσεις καί γραφική των παράστασις Ἀπεικονίσεις καί συναρτήσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄

Ἀλγεβρικός λογισμός.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄

Ἀναλογίαι καί ἐφαρμογαί των

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄

Διανύσματα είς τό έπίπεδον

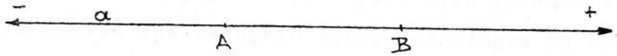
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α.

Τά διανύσματα καί οἱ σχετικοί ἀριθμοί.

§ 1. Τά διανύματα.

1.1 Ὅπως ἡ κίνησις ἑνός ὀχήματος ἐπάνω εἰς ἕνα δρόμον ἠμπορεῖ νά γίνῃ κατά δύο κατευθύνσεις, ἔτσι καί ἡ κίνησις ἑνός σημείου ἐπάνω εἰς μίαν εὐθεῖαν ἠμπορεῖ, ἐπίσης, νά γίνῃ κατά δύο κατευθύνσεις.

Π.χ. Διά νά χαράξωμεν τό τμῆμα ΑΒ πρέπει:



νά κινήσωμεν τήν αἰχμήν τοῦ μολυβιοῦ μας εἴτε ἀπό τό Α πρός τό Β εἴτε ἀπό τό Β πρός τό Α. Ἐάν λοιπόν θέλωμεν νά γνωρίζωμεν ὄχι μόνον τό μέγεθος τοῦ δρόμου πού διήνυσε τό κινητόν (εἰς τήν περίπτωσίν μας ἡ αἰχμή τοῦ μολυβιοῦ) ἀλλά καί πρός ποίαν κατεύθυνσιν ἐκινήθη, θά πρέπῃ νά χρησιμοποιήσωμεν νέους τρόπους ἐκφράσεως καί νέα σύμβολα.

Ἔτσι, ὅταν θέλωμεν νά ὑποδείξωμεν ὅτι ἡ κίνησις ἔγινεν ἀπό τό Α πρός τό Β, θά γράφομεν . $\overline{AB}$ καί θά ἐκφωνοῦμεν: διάνυσμα ἄλφα - βῆτα. Ὅταν ἀντιθέτως θέλωμεν νά ὑποδείξωμεν ὅτι ἡ κίνησις ἔγινεν ἀπό τό Β πρός τό Α θά γράφωμεν $\overrightarrow{BA}$ καί καί θά ἐκφωνοῦμεν: διάνυσμα βῆτα - ἄλφα.

Διά νά διακρίνωμεν τάς δύο ἀντιθέτους κατευθύνσεις χρησιμοποιοῦμεν τούς ὅρους θετική φορά καί ἀρνητική φορά.

Ἡ θετική φορά ἠμπορεῖ νά ὁρισθῇ κατ' ἐλευθέραν ἐκλογήν μας, άρκεῖ νά τηρῆται ἡ ἰδία εἰς ὁλόκληρον τό ὑπό ἐξέτασιν θέμα. Εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ ἀνωτέρω σχήματος, ὡς θετική φορά λαμβάνεται συνήθως ἡ φορά κατά τήν ὁποίαν γράφομεν, δηλαδή ἀπό τά ἀριστερά πρός τά δεξιά (εἰς τό σχῆμα μας, ἀπό τό A πρός τό B). Ἡ ἀντίθετος φορά, ἀπό τό B πρός τό A, εἶναι τότε ἡ ἀρνητική. Ἡ θετική φορά χαρακτηρίζεται μέ τό σῆμα + (θετικόν) καί ἡ ἀρνητική μέ τό σῆμα − (ἀρνητικόν). Τά δύο αὐτά σήματα εἶναι διακριτικά καί δέν πρέπει νά συγχέωνται μέ τά ὅμοια των "σύν" καί "πλήν" τῆς προσθέσεως καί τῆς ἀφαιρέσεως.

Μία εὐθεῖα, ἐπί τῆς ὁποίας ἔχει ὁρισθῆ ἡ θετική φορά, λέγεται <u>προσανατολισμένη</u>.

Κάθε προσανατολισμένη εὐθεῖα ἔχει, ἐκτός ἀπό τήν φοράν της, καί μίαν ὡρισμένην διεύθυνσιν εἰς τόν χῶρον.

Δύο εὐθεῖαι μή παράλληλοι ἔχουν διαφορετικήν διεύθυνσιν, ἐνῶ δύο παράλληλοι ἔχουν τήν ἰδίαν διεύθυνσιν.

<u>1.2 Χαρακτηριστικά γνωρίσματα διανυσμάτων</u>. Ἕνα διάνυσμα καθορίζεται ἀπό τά ἀκόλουθα χαρακτηριστικά γνωρίσματα:

α) Ἀπό τήν διεύθυνσίν του: δηλαδή ἀπό τήν διεύθυνσιν τῆς εὐθείας πού τό φέρει.

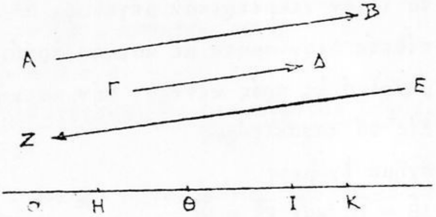
β) Ἀπό τήν φοράν του.

γ) Ἀπό τό μέγεθός του, δηλαδή τό μῆκος τοῦ ἀντιστοίχου τμήματος.

<u>1.3 Συγγραμμικα διανύσματα</u>. Δύο διανύσματα λέγονται <u>συγγραμμικά</u>, ὅταν φέρωνται ὑπό τῆς ἰδίας εὐθείας ἤ ὑπό παραλλήλων εὐθειῶν.

Εἰς τό κατωτερω σχῆμα τά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{EZ}$ εἶναι συγγραμμικά ἐάν αἱ εὐθεῖαι $AB \parallel \Gamma\Delta \parallel EZ$. Συγγραμμικά ἐπίσης εἶναι καί τά: $\overrightarrow{H\Theta}$, $\overrightarrow{\Theta K}$, $\overrightarrow{KI}$. διότι φέρονται ὑπό τῆς ἰδίας εὐθείας.

Τά διανύσματα ὅμως $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ καί $\overrightarrow{\mathrm{HI}}$ δέν εἶναι συγγραμμικά, διότι φέρονται ἀπό δύο μή παραλλήλους εὐθείας τήν ΓΔ καί τήν α.



Δύο συγγραμμικά διανύσματα λέγομεν ὅτι εἶναι διαδοχικά, ὅταν ἡ ἀρχή τοῦ δευτέρου συμπίπτη μέ τό τέλος τοῦ πρώτου. Εἰς τό προηγούμενον σχῆμα τά διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{HI}}$ καί $\overrightarrow{\mathrm{I}\Theta}$ εἶναι διαδοχικά. Διαδοχικά ἐπίσης εἶναι τά $\overrightarrow{\mathrm{H}\Theta}$ καί $\overrightarrow{\Theta\mathrm{I}}$, τά $\overrightarrow{\mathrm{HK}}$ καί $\overrightarrow{\mathrm{K}\Theta}$ κ.τ.λ.

Σημείωσις. Ὅταν δύο ἤ περισσότερα διανύσματα ἀνήκουν εἰς τόν ἴδιον φορέα (τήν ἰδίαν εὐθεῖαν) δέν χρησιμοποιοῦμεν βέλη κατά τήν σχεδίασίν των. Ἡ φορά τοῦ καθενός ὁρίζεται ἀπό τήν διαδοχήν τῶν δύο γραμμάτων πού τό συμβολίζουν.

§ 2. Πρόσθεσις διανυσμάτων.

2.1 Πρόσθεσις διαδοχικῶν διανυσμάτων. Ἄθροισμα δύο διαδοχικῶν διανυσμάτων ὀνομάζομεν τό διάνυσμα πού ἔχει ἀρχήν τήν ἀρχήν τοῦ πρώτου καί πέρας τό πέρας τοῦ δευτέρου. Εἰς τό προηγούμενον σχῆμα ἔχομεν τά ἀθροίσματα:

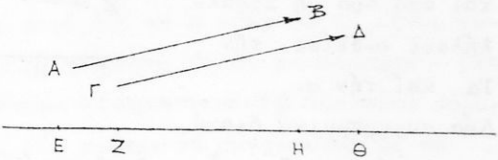
$$\overrightarrow{\mathrm{H}\Theta} + \overrightarrow{\Theta\mathrm{I}} = \overrightarrow{\mathrm{HI}} \quad , \overrightarrow{\mathrm{HI}} + \overrightarrow{\mathrm{IK}} = \overrightarrow{\mathrm{HK}} \ , \overrightarrow{\mathrm{HK}} + \overrightarrow{\mathrm{K}\Theta} = \overrightarrow{\mathrm{H}\Theta} \ ,$$

$$\overrightarrow{\mathrm{I}\Theta} + \overrightarrow{\Theta\mathrm{K}} = \overrightarrow{\mathrm{IK}} \quad \text{κ.τ.λ.}$$

2.2 Ἴσα καί ἀντίθετα διανύσματα. Δύο συγγραμμικά διανύσματα λέγομεν ὅτι εἶναι ἴσα, ἐάν ἔχουν τήν ἰδίαν φοράν καί τό ἴδιον γεωμετρικόν μέγεθος. Δύο ἴσα συγγραμμικά διανύσματα μέ κοινήν τήν ἀρχήν ἔχουν κοινά καί τά πέρατά των (συμπίπτουν).

Δύο συγγραμμικά διανύσματα λέγονται ἀντίθετα, ἐάν ἔχουν τό ἴδιον γεωμετρικόν μέγεθος, ἀλλά ἀντίθετον φοράν. Δύο ἀντίθετα διανύσματα μέ κοινήν ἀρχήν ἔχουν τά πέρατά των συμμετρικά ὡς πρός κέντρον τήν κοινήν ἀρχήν.

Εἰς τό παραπλεύρως σχῆμα ἔχομεν:

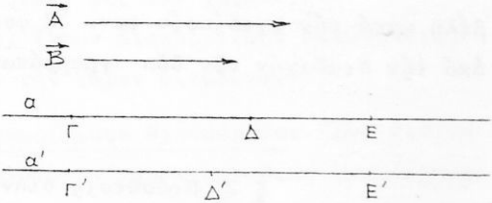


$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ καί $\overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{H\Theta}$

Τά διανύσματα ὅμως $\overrightarrow{EZ}$ καί $\overrightarrow{\Theta H}$ εἶναι ἀντίθετα. Ἀντίθετα ἐπίσης εἶναι τά $\overrightarrow{EH}$ καί $\overrightarrow{HE}$, ὅπως καί τά $\overrightarrow{EH}$ καί $\overrightarrow{\Theta Z}$.

2.3 Πρόσθεσις δύο συγγραμμικῶν διανυσμάτων.

Ἔστω ὅτι ἔχομεν νά προσθέσωμεν τά συγγραμμικά διανύσματα $\vec{A} + \vec{B}$ (τά σημειώνομεν μέ ἕνα γράμμα χάριν εὐκολίας). Ἐπάνω εἰς μίαν παράλληλον πρός αὐτά εὐθεῖαν α λαμβάνομεν (παραπλεύρως σχῆμα) τά διαδοχικά



διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \vec{A}$ καί $\overrightarrow{\Delta E} = \vec{B}$. Ἔχομεν τότε:

$$\vec{A} + \vec{B} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta E} = \overrightarrow{\Gamma E}.$$

Ἐπομένως: <u>Διά νά προσθέσωμεν δύο συγγραμμικά διανύσματα λαμβάνομεν ἐπάνω εἰς μίαν εὐθεῖαν, παράλληλον πρός αὐτά, δύο διαδοχικά διανύσματα ἴσα ἀντιστοίχως πρός τά δοθέντα. Τό ἄθροισμά τῶν δύο αὐτῶν διαδοχικῶν διανυσμάτων εἶναι τό ζητούμενον ἄθροισμα τῶν δύο δοθέντων.</u>

Ἄς μορφώσωμεν τώρα τό ἄθροισμα $\vec{B} + \vec{A}$ ἀντιμεταθέτοντες τά προσθετέα διανύσματα. Πρός τοῦτο λαμβάνομεν ἐπάνω εἰς μίαν εὐθεῖαν α'//α τά διαδοχικά διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma'\Delta'} = \vec{B}$ καί $\overrightarrow{\Delta'E'} = \vec{A}$.

θά ἔχωμεν τότε:

$$\vec{B} + \vec{A} = \overrightarrow{\Gamma'\Delta'} + \overrightarrow{\Delta'E'} = \overrightarrow{\Gamma'E'}$$

καί παρατηροῦμεν ὅτι: $\overrightarrow{\Gamma'E'} = \overrightarrow{\Gamma E}$, ἑπομενως καί:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

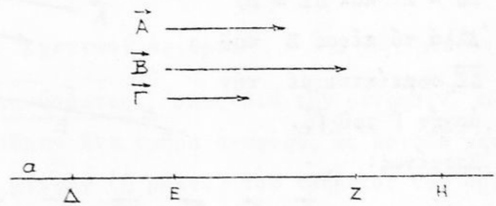
<u>Είς τό ἄθροισμα λοιπόν δύο συγγραμμικῶν διανυσμάτων ἰσχύει ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως.</u>

<u>Σημείωσις</u>. Είς τό ἑξῆς θά γίνεται λόγος μόνον διά συγγραμμικά διανύσματα καί θά λέγωμεν ἁπλῶς διανύματα παραλείποντες τό ἐπίθετον συγγραμμικά.

<u>2.4 Προσεταιριστικότης</u>. Ἔστω ὅτι ζητεῖται τό ἄθροισμα: $(\vec{A}+\vec{B}) + \vec{\Gamma}$. Τοῦτο γράφεται καί χωρίς παρένθεσιν:

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{\Gamma} = (\vec{A}+\vec{B}) + \vec{\Gamma}.$$

Παίρνομεν ἐπάνω είς μίαν εὐθεῖαν α παράλληλον πρός τά δοθέντα διανύσματα. τά διαδοχικά διανύσματα:



$\overrightarrow{\Delta E} = \vec{A}$, $\overrightarrow{EZ} = \vec{B}$, $\overrightarrow{ZH} = \vec{\Gamma}$.

Τότε: (σχ. παραπλεύρως)

$$\begin{aligned}(\vec{A}+\vec{B}) + \vec{\Gamma} &= (\overrightarrow{\Delta E}+\overrightarrow{EZ}) + \overrightarrow{ZH}\\ &= \overrightarrow{\Delta Z} + \overrightarrow{ZH}\\ &= \overrightarrow{\Delta H}\end{aligned}$$

Ἔχομεν ἐπίσης:

$$\begin{aligned}\vec{A} + (\vec{B}+\vec{\Gamma}) &= \overrightarrow{\Delta E} + (\overrightarrow{EZ}+\overrightarrow{ZH})\\ &= \overrightarrow{\Delta E} + \overrightarrow{EH}\\ &= \overrightarrow{\Delta H}\end{aligned}$$

Ἑπομένως: $(\vec{A}+\vec{B}) + \vec{\Gamma} = \vec{A} + (\vec{B}+\vec{\Gamma})$

<u>Είς τήν πρόσθεσιν λοιπόν διανυσμάτων ἰσχύει ἡ προσεταιρι-</u>

στικότης.

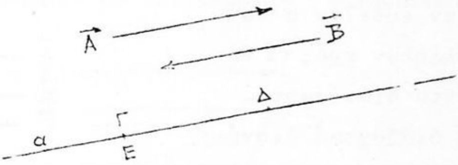
Συνδυάζοντες τήν προσεταιριστικότητα μέ τήν ἀντιμεταθετικότητα συμπεραίνομεν ὅτι:

<u>Τό ἄθροισμα τριῶν διανυσμάτων εἶναι ἀνεξάρτητον ἀπό τήν σειράν τῶν προσθετέων διανυσμάτων.</u>

Ἡ ἰδιότης αὐτή τῆς προσθέσεως τῶν διανυσμάτων ἰσχύει καί διά περισσότερα διανύσματα. Ἔτσι ἔχομεν π.χ.

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{\Gamma} + \vec{\Delta} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{\Delta} + \vec{\Gamma} = \vec{B} + \vec{A} + \vec{\Delta} + \vec{\Gamma} =$$
$$= \vec{B} + \vec{\Delta} + \vec{A} + \vec{\Gamma} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

<u>2.5 Μηδενικόν διάνυσμα.</u> Ἔστω ὅτι ἔχομεν νά προσθέσωμεν τά ἀντίθετα διανύσματα $\vec{A} + \vec{B}$. Τά κάμνομεν διαδοχικά λαμβάνοντες ἐπάνω εἰς μίαν παράλληλον μέ αὐτά εὐθεῖαν α. (Παραπλεύρως σχῆμα).



$\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \vec{A}$ καί $\overrightarrow{\Delta E} = \vec{B}$.

Ἀλλά τό πέρας Ε τοῦ $\overrightarrow{\Delta E}$ συμπίπτει μέ τήν ἀρχήν Γ τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Ἐπομένως:

$$\vec{A} + \vec{B} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta E} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{\Gamma\Gamma}.$$

Βλέπομεν λοιπόν ὅτι πρέπει νά δεχθῶμεν καί διανύσματα πού ἡ ἀρχή καί τό πέρας των νά συμπίπτουν καί πού ἐννοεῖται τά θεωροῦμεν ἴσα μεταξύ των. Ἕνα ὁποιοδήποτε ἀπό αὐτά θά τό συμβολίζομεν $\vec{O}$ καί θά τό ὀνομάζομεν <u>μηδενικόν διάνυσμα.</u>

Τό διάνυσμα $\vec{O}$ εἶναι οὐδέτερον στοιχεῖον εἰς τήν πρόσθεσιν τῶν διανυσμάτων:

$$\vec{A} + \vec{O} = \vec{O} + \vec{A} = \vec{A}.$$

§ 3. Ἀφαίρεσις

<u>3.1 Ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως $\overrightarrow{AB} + \vec{x} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$. (1)</u>

Ἐπειδή θέλομεν ἡ πρόσθεσις νά ἔχῃ ἀντίστροφον πρᾶξιν τήν ἀφαίρεσιν, θά ἔχωμεν τάς ἰσοδυνάμους ἐξισώσεις:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{X} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Longleftrightarrow \overrightarrow{X} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} - \overrightarrow{AB}.$$

Γιά νά εὕρω τήν διαφοράν $\overrightarrow{X}$, προσθέτω εἰς τά δύο μέλη τῆς (1) τό διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$, ἀντίθετον τοῦ $\overrightarrow{AB}$ καί ἔχω:

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{X} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{O} + \overrightarrow{X} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{BA}$$

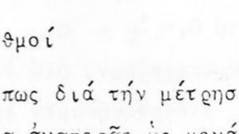
Ἐπομένως: $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{BA}$

Ἡ διαφορά λοιπόν δύο διανυσμάτων εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τοῦ μειωτέου διανύσματος μέ τό διάνυσμα τό ἀντίθετον πρός τό ἀφαιρετέον.

§ 4. Σχετικοί ἀριθμοί

4.1 Μέτρησις διανύσματος. Ὅπως διά τήν μέτρησιν τῶν τμημάτων χρησιμοποιοῦμεν ἕνα τμῆμα ἀναφορᾶς ὡς μονάδα μετρήσεως καί ὀνομάζομεν μέτρον (ἤ μῆκος) τοῦ τμήματος τόν ἀριθμόν πού ἐκφράζει τόν λόγον τοῦ μετρουμένου τμήματος πρός τό τμῆμα ἀναφορᾶς, ἔτσι καί διά τήν μέτρησιν τῶν διανυσμάτων (ἐννοοῦμεν πάντοτε συγγραμμικά διανύσματα), θά χρησιμοποιήσωμεν ὡς μονάδα μετρήσεως ἕνα διάνυσμα ἀναφορᾶς $\overrightarrow{M} \neq \overrightarrow{O}$.

4.2 Ἔστω τώρα ὅτι θέλομεν νά μετρήσωμεν μέ τό διάνυσμα $\overrightarrow{M}$ τά διανύσματα $\overrightarrow{A}$ καί $\overrightarrow{B}$ (σχ. παραπλεύρως).



Μετροῦμεν τά γεωμετρικά μεγέθη τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{A}$ καί $\overrightarrow{B}$ με μονάδα τό γεωμετρικόν μέγεθος τοῦ $\overrightarrow{M}$. Προκύπτει καί διά τά δύο διανύσματα ὁ ἀριθμός 3. Ἐπειδή τά δύο διανύσματα εἶναι ἀντίθετα, πρέπει νά κάμωμεν διάκρισιν μεταξύ τῶν μέτρων των. Πρός τοῦτο λέγομεν ὅτι τό $\vec{A}$ πού ἔχει τήν ἰδίαν φοράν μέ τό $\vec{M}$ ἔχει σχετικόν μέτρον τόν θετικόν ἀριθμόν $^{+}3$ καί ὅτι τό $\vec{B}$ πού ἔχει ἀντίθετον φοράν πρός τό $\vec{M}$ ἔχει σχετικόν μέτρον τόν ἀρνητικόν ἀριθμόν $^{-}3$. Μέ ἄλλας λέξεις: ἀπό τόν ἀριθμόν τῆς ἀριθμητικῆς 3 ἐδημιουργήσαμεν δύο νέους ἀριθμούς, τόν θετικόν $^{+}3$ καί τόν ἀρνητικόν $^{-}3$ πού θά καλοῦμεν σχετικούς ἀριθμούς καί θά τούς ἐκφωνοῦμεν: "θετ.τρία" καί " ἀρνητικόν τρία". Λέγομεν δέ ὅτι ὁ $^{+}3$ εἶναι τό σχετικόν μέτρον τοῦ $\vec{A}$ (ἤ ὁ λόγος τοῦ διανύσματος $\vec{A}$ πρός τό διάνυσμα $\vec{M}$) καί ὁ $^{-}3$ σχετικόν μέτρον τοῦ $\vec{B}$ (ἤ ὁ λόγος τοῦ διανύσματος $\vec{B}$ πρός τό διάνυσμα $\vec{M}$).

Ἐννοεῖται ὅτι σχετικόν μέτρον τοῦ μηδενικοῦ διανύσματος $\vec{O}$ εἶναι τό $0 = {}^{+}0 = {}^{-}0$.

Ὅπως παρατηροῦμεν, διά νά δημιουργήσωμεν τούς σχετικούς ἀριθμούς ἐτοποθετήσαμεν ἐμπρός ἀπό τούς ἀριθμούς τῆς Ἀριθμητικῆς, τούς ὁποίους ἐμάθαμεν, ἕνα σῆμα, τό + ἤ τό −. Τά σήματα αὐτά (πού θά τά γράφωμεν μέ μικρότερον μέγεθος ἀπό τά + καί − τῆς προσθέσεως καί ἀφαιρέσεως καί ὀλίγον ὑψηλότερα ἀπό αὐτά) θά τά λέγωμεν πρόσημα.

Δύο σχετικοί ἀριθμοί μέ τό ἴδιον πρόσημον π.χ. οἱ $^{+}\frac{2}{3}$ καί $^{+}0,5$ ἤ οἱ $^{-}3$ καί $^{-}\frac{1}{4}$ λέγονται ὁμόσημοι. Δύο δέ μέ διαφορετικά πρόσημα, ὅπως οἱ $^{-}3$ καί $^{+}2,5$, λέγονται ἑτερόσημοι.

Ἀπόλυτος τιμή ἑνός σχετικοῦ ἀριθμοῦ λέγεται ἡ ἀριθμητική τιμή πού προκύπτει, ἐάν ἀφαιρεθῆ τό πρόσημον. Δι'αὐτήν γράφομεν:

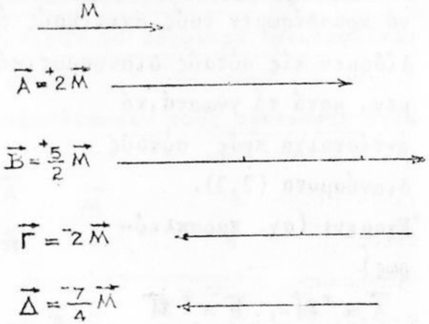
$$|{}^{-}5| = 5 \ , \quad \left|{}^{+}\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$$

καί ἐκφωνοῦμεν: "ἀπόλυτος τιμή τοῦ $^{-}5$ ἴσον 5, ἀπόλυτος τιμή τοῦ $^{+}\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$"

§ 5. Πολλαπλασιασμός διανύσματος μέ σχετικόν ἀριθμόν.

<u>5.1 Ἐκτελεσταί σχετικοί ἀριθμοί.</u> Ὅπως οἱ ρητοί ἀριθμοί ἠμποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν ὡς ἐκτελεσταί, ἔτσι καί οἱ σχετικοί ρητοί ἀριθμοί ἠμποροῦν καί αὐτοί νά χρησιμοποιηθοῦν ὡς ἐκτελεσταί.

Ἄς ἐφαρμόσωμεν ἐπάνω εἰς τό διάνυσμα $\overrightarrow{M}$ ὡς ἐκτελεστάς τούς σχετικούς ἀριθμούς $^{+}2$, $^{+}\frac{5}{2}$, $^{-}2$, $^{-}\frac{7}{4}$.



Θά εὕρωμεν, κατά σειράν, τά διανύσματα:

$\overrightarrow{A} = {}^{+}2\overrightarrow{M}$, $\overrightarrow{B} = {}^{+}\frac{5}{2}\overrightarrow{M}$,

$\overrightarrow{\Gamma} = {}^{-}2\overrightarrow{M}$, $\overrightarrow{\Delta} = {}^{-}\frac{7}{4}\overrightarrow{M}$.

<u>Σημείωσις</u>. Ὑπενθυμίζομεν ὅτι ἡ λέξις <u>ἐκτελεστής</u> εἶναι συνώνυμος μέ τήν λέξιν <u>πολλαπλασιαστής</u> καί ὅτι ὁ συμβολισμός $^{+}5\overrightarrow{M}$ σημαίνει καί ἐδῶ πολλαπλασιασμόν τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{M}$ ἐπί $^{+}5$.

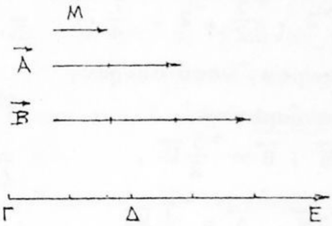
Τά διανύσματα $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{\Gamma}$, $\overrightarrow{\Delta}$ εἶναι συγγραμμικά με τό $\overrightarrow{M}$. Τά $\overrightarrow{A}$ καί $\overrightarrow{B}$ ἔχουν τήν ἰδίαν φοράν μέ τό διάνυσμα ἀναφορᾶς $\overrightarrow{M}$, ἐφ' ὅσον ὁ λόγος των πρός αὐτό (ἤ τό σχετικόν μέτρον των) εἶναι θετικός. Τά $\overrightarrow{\Gamma}$ καί $\overrightarrow{\Delta}$ ὅμως ἔχουν ἀντίθετον φοράν πρός τό $\overrightarrow{M}$, διότι ἔχουν πρός αὐτό λόγον ἀρνητικόν

Τά διανύσματα $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{\Gamma}$, $\overrightarrow{\Delta}$ παρέχουν μίαν διανυσματικήν ἀπεικόνισιν τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν $^{+}2$, $^{+}\frac{5}{2}$, $^{-}2$, $^{-}\frac{7}{4}$.

Ἀφοῦ λοιπόν ἐπιλέξωμεν ἕνα διάνυσμα ἀναφορᾶς, κάθε σχετικός ἀριθμός ἀπεικονίζεται μέ ἕνα διάνυσμα τό ὁποῖον ἔχει λόγον πρός τό διάνυσμα ἀναφορᾶς τόν ἴδιον αὐτόν σχετικόν ἀριθμόν καί τήν ἰδίαν φοράν πρός αὐτό, ἐάν ὁ ἀριθμός εἶναι θετικός ἀντίθετον δέ φοράν, ἐάν εἶναι ἀρνητικός

§ 6. Πρόσθεσις καί ἀφαίρεσις τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν

6.1 Ἄθροισμα δύο σχετικῶν ἀριθμῶν. Ἔστω ὅτι ἔχομεν νά προσθέσωμεν τούς σχετικούς ἀριθμούς $\alpha = {}^{+}3$ καί $\beta = {}^{+}2$. Δίδομεν εἰς αὐτούς διανυσματικήν ἀπεικόνισιν καί προσθέτομεν, κατά τά γνωστά, τά ἀντίστοιχα πρός αὐτούς διανύσματα (2,3).



Ἔχομεν: (σχ. παραπλεύρως)

$\vec{A} = {}^{+}2\vec{M}$, $\vec{B} = {}^{+}3\vec{M}$

$\vec{\Gamma\Delta} = \vec{A}$, $\vec{\Delta E} = \vec{B}$

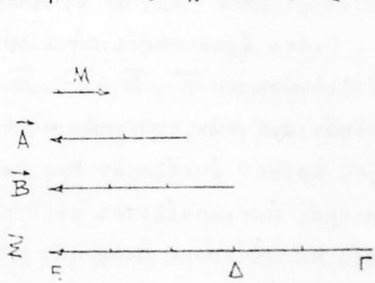
$\vec{\Sigma} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{\Gamma\Delta} + \vec{\Delta E} = \vec{\Gamma E}$

Ἄρα $\vec{\Sigma} = {}^{+}2\vec{M} + {}^{+}3\vec{M} = ({}^{+}2 + {}^{+}3)\vec{M} = {}^{+}5\vec{M}$

Ἐπομένως $\boxed{{}^{+}2 + {}^{+}3 = {}^{+}5}$

Τό ἄθροισμα, λοιπόν, δύο θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμός θετικός καί ἔχει ὡς ἀπόλυτον τιμήν τό ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν προσθετέων.

Ἔστω τώρα ὅτι ἔχομεν νά προσθέσωμεν τούς σχετικούς ἀριθμούς $\alpha = {}^{-}2$ καί $\beta = {}^{-}3$.



Ἐργαζόμενοι ὅπως καί προηγουμένως εὑρίσκομεν (σχ. παραπλεύρως)

$\vec{A} = {}^{-}2\vec{M}$, $\vec{B} = {}^{-}3\vec{M}$

$\vec{\Gamma\Delta} = \vec{A}$, $\vec{\Delta E} = \vec{B}$

$\vec{\Sigma} = \vec{A} + \vec{B} = {}^{-}2\vec{M} + {}^{-}3\vec{M} =$

$= ({}^{-}2 + {}^{-}3)\vec{M} = {}^{-}5\vec{M}$

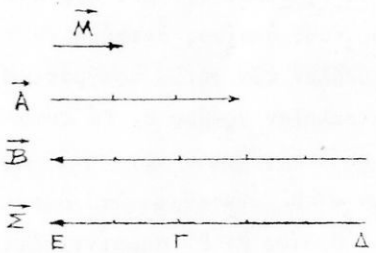
Ἐδῶ αἱ διανυσματικαί ἀπεικονίσεις A καί B τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν $^-2$ καί $^-3$ ἔχουν ἀντίθετον φοράν πρός τό διάνυσμα ἀναφορᾶς $\vec{M}$, διότι ἔχουν πρός αὐτό λόγον ἀρνητικόν ἀριθμόν.

Ἐπομένως: $\boxed{^-2 + {}^-3 = {}^-5}$

Τό ἄθροισμα λοιπόν δύο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός καί ἔχει ὡς ἀπόλυτον τιμήν τό ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν δύο προσθετέων.

Ἔστω, ἀκόμη, ὅτι ἔχομεν νά προσθέσωμεν τούς σχετικούς ἀριθμούς $\alpha = {}^+3$ καί $\beta = {}^-5$.

Κατασκευάζομεν καί πάλιν τάς διανυσματικάς ἀπεικονίσεις των καί ἐργαζόμεθα κατά τά γνωστά.



Ἔχομεν (σχ. παραπλεύρως):

$\vec{A} = {}^+3\vec{M}$, $\vec{B} = {}^-5\vec{M}$

$\vec{\Gamma\Delta} = \vec{A}$, $\vec{\Delta E} = \vec{B}$

$$\vec{\Sigma} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{\Gamma\Delta} + \vec{\Delta E} = {}^+3\vec{M} + {}^-5\vec{M} = ({}^+3 + {}^-5)\vec{M}$$

Ἀλλά $\vec{\Gamma\Delta} + \vec{\Delta E} = \vec{\Gamma E} = {}^-2\vec{M}$

Ἐπομένως $\boxed{^+3 + {}^-5 = {}^-2}$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι: $\boxed{^-3 + {}^+5 = {}^+2}$

Τό ἄθροισμα, λοιπόν, δύο ἑτεροσήμων σχετικῶν ἀριθμῶν ἔχει τό πρόσημον τοῦ ἔχοντος τήν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν, ἡ δέ ἀπόλυτος τιμή του εἶναι ἴση πρός τήν διαφοράν τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν δύο ἑτεροσήμων προσθετέων.

6.2 Ἡ Ἄλγεβρα. Ὅπως εἰς τήν ἀριθμητικήν παριστάνομεν γενικῶς τούς ἀριθμούς μέ μικρά γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου ἔτσι καί ἐδῶ θά παριστάνωμεν συχνά τούς σχετικούς ἀριθμούς μέ μικρά γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου. Ἔχομεν ἤδη σημειώσει (6.1) συμβολικῶς $\alpha = {}^{+}2$, $\beta = {}^{-}3$ κ.τ.λ.

Ὁ μαθηματικός κλάδος πού ἀσχολεῖται μέ τούς σχετικούς ἀριθμούς καί γενικῶς μέ τούς νόμους τῶν ἀριθμῶν λέγεται Ἄλγεβρα*.

Τούς σχετικούς ἀριθμούς τούς ὀνομάζομεν καί πραγματικούς ἀριθμούς. Μέ μικρά γράμματα λοιπόν τοῦ ἀλφαβήτου θά παριστάνωμεν τούς ρητούς πραγματικούς ἀριθμούς.

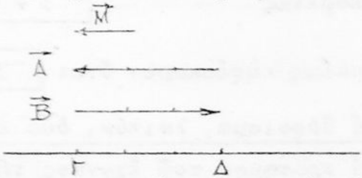
Σημείωσις. Εἰς τούς πραγματικούς ἀριθμούς περιλαμβάνονται καί οἱ σχετικοί ἀριθμοί πού ἀντιστοιχοῦν εἰς τούς ἀσυμμέτρους, τούς ὁποίους ἀνεφέραμεν εἰς τό Κεφ. ΙΑ΄(4.13). Βιβλ. Ι

Τό σύνολον τῶν ρητῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν θά περιστάνωμεν μέ τό κεφαλαῖον γράμμα Ρ. Τό σύνολον τῶν ρητῶν θετικῶν μέ τό P^{+}, καί τό σύνολον τῶν ρητῶν ἀρνητικῶν μέ τό P^{-}. Ὅταν γράφωμεν $\alpha \in P^{-}$ ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ α εἶναι ρητός ἀρνητικός ἀριθμός. Ὁμοίως $\beta \in P^{+}$ σημαίνει ὅτι ὁ β εἶναι θετικός ἀριθμός.

6.3 Ἄθροισμα ἀντιθέτων σχετικῶν ἀριθμῶν.

Εἴδαμεν ἀνωτέρω (2.5) ὅτι δύο ἀντίθετα διανύσματα ἔχουν ἄθροισμα τό μηδενικόν διάνυσμα $\vec{0}$. Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἔχομεν νά προσθέσωμεν δύο ἀντιθέτους σχετικούς ἀριθμούς, π.χ. τούς $\frac{{}^{+}5}{2}$ καί $\frac{{}^{-}5}{2}$

Ἀπεικονίζομεν αὐτούς εἰς τά διανύσματα:



* Πρῶτος ἀπό τούς ἀρχαίους Ἕλληνας πού ἠσχολήθη μέ τήν Ἄλγεβραν εἶναι ὁ ἀλεξανδρινός μαθηματικός Διόφαντος (325-410 μ.Χ.). Ἀπό τόν Διόφαντον ἔλαβαν ἀργότερα οἱ Ἄραβες τάς πρώτας γνώσεις τῆς Ἀλγέβρας καί τάς μετέδωσαν βραδύτερον εἰς τήν Εὐρώπην. Ἡ λέξις Ἄλγεβρα εἶναι λέξις ἀραβική καί ἔχει ἐπικρατήσει διεθνῶς. Πρέπει ὅμως νά εἴπωμεν ὅτι καί οἱ Ἰνδοί κατεῖχον πολλάς γνώσεις Ἀλγέβρας, χωρίς ὅμως νά τάς ἔχουν συστηματοποιήση ἐπιστημονικῶς.

$$\vec{A} = \frac{^+5}{2}\vec{M} \quad \text{καί} \quad \vec{B} = \frac{^-5}{2}\vec{M}$$

μέ διάνυσμα ἀναφορᾶς τό $\vec{M}$ (σχ. προηγουμένης σελίδος) καί προσθέτομεν $\vec{\Sigma} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{\Gamma\Delta} + \vec{\Delta\Gamma} = \vec{O}$

$$\vec{\Sigma} = \frac{^+5}{2}\vec{M} + \frac{^-5}{2}\vec{M} = \left(\frac{^+5}{2} + \frac{^-5}{2}\right)\vec{M} = 0 \times \vec{M}$$

Ἐπομένως

$$\boxed{\frac{^+5}{2} + \frac{^-5}{2} = 0}$$

<u>Τό ἄθροισμα λοιπόν δύο ἀντιθέτων ἀριθμῶν εἶναι τό 0.</u>

Ἔχομεν:

$$0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha \quad (\alpha \in P)$$

<u>Ἤτοι τό μηδέν εἶναι οὐδέτερον στοιχεῖον εἰς τήν πρόσθεσιν τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν.</u>

<u>6.4 Νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως.</u> Ἔστω ὅτι $\vec{A}$ καί $\vec{B}$ εἶναι αἱ διανυσματικαί ἀπεικονίσεις δύο σχετικῶν ἀριθμῶν α καί β , καί $\vec{M}$ τό διάνυσμα ἀναφορᾶς.

Ἔχομεν:

$$\vec{A} = \alpha\vec{M} \quad \text{καί} \quad \vec{B} = \beta\vec{M}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = \alpha\vec{M} + \beta\vec{M} = (\alpha+\beta)\vec{M} \qquad (1)$$

Ἐπίσης:

$$\vec{B} + \vec{A} = \beta\vec{M} + \alpha\vec{M} = (\beta+\alpha)\vec{M}$$

Ἐπειδή ὅμως (2.3) $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ θά εἶναι καί

$$(\alpha+\beta)\vec{M} = (\beta+\alpha)\vec{M}$$

καί: $\boxed{\alpha + \beta = \beta + \alpha}$

Ἤτοι: <u>Ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως ἰσχύει εἰς τήν πρόσθεσιν τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν.</u>

Αὐτό γίνεται φανερόν καί ἀπό τήν πρᾶξιν:

$$\left.\begin{array}{l} ^-5 + {}^+3 = {}^-2 \\ ^+3 + {}^-5 = {}^-2 \end{array}\right\} \Longrightarrow {}^-5 + {}^+3 = {}^+3 + {}^-5$$

6.5 Προσεταιριστικότης. Ἐμάθαμεν (2.4) ὅτι ἡ προσεταιριστικότης ἰσχύει εἰς τήν πρόσθεσιν τῶν διανυσμάτων καί ὅτι ἕνα ἄθροισμα διανυσμάτων εἶναι ἀνεξάρτητον ἀπό τήν σειράν τῶν προσθετέων του.

Ἔστω ὅτι τά διανύσματα $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{\Gamma}$ εἶναι ἀπεικονίσεις τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν α, β, γ μέ διάνυσμα ἀναφορᾶς τό $\vec{M}$. Ἔχομεν

$$(\vec{A}+\vec{B}) + \vec{\Gamma} = \vec{A} + (\vec{B}+\vec{\Gamma}) \quad \text{ἤ}$$

$$(\alpha\vec{M}+\beta\vec{M}) + \gamma\vec{M} = (\alpha+\beta)\vec{M} + \gamma\vec{M} = [(\alpha+\beta)+\gamma]\vec{M}$$

καί:

$$\alpha\vec{M} + (\beta\vec{M}+\gamma\vec{M}) = \alpha\vec{M} + (\beta+\gamma)\vec{M} = [\alpha+(\beta+\gamma)]\vec{M}$$

Ἑπομένως:

$$\boxed{(\alpha+\beta) + \gamma = \alpha + (\beta+\gamma)}$$

Ἡ προσεταιριστικότης λοιπόν ἰσχύει καί εἰς τήν πρόσθεσιν τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν, ἑπομένως καί ἡ ἀντιμεταθετικότης εἰς τούς τρεῖς προσθετέους.

$$\alpha + \beta + \gamma = \beta + \alpha + \gamma = \beta + \gamma + \alpha \text{ κ.λ.π.}$$

Ἔστω τώρα ὅτι ἔχομεν τό ἄθροισμα:

$\sigma = {}^-3 + {}^+2 + {}^-5 + {}^-7 + {}^+1$ ἔχομεν ἐπειδή ${}^-3 + {}^+2 = {}^-1$,

$\sigma = ({}^-1 + {}^-5 + {}^-7) + {}^+1$

$\sigma = ({}^-1 + {}^-7 + {}^-5) + {}^+1$ (διότι ἡ ἀντιμεταθετικότης ἰσχύει εἰς τούς τρεῖς προσθετέους).

Ἀλλά καί ${}^-3 + {}^+2 + {}^-7 + {}^-5 + {}^+1 = ({}^-1 + {}^-7 + {}^-5) + {}^+1$

Ἑπομένως:

$${}^-3 + {}^+2 + {}^-5 + {}^-7 + {}^+1 = {}^-3 + {}^+2 + {}^-7 + {}^-5 + {}^+1$$

Ὅπως ἐκάμαμεν τήν ἀντιμετάθεσιν τῶν διαδοχικῶν προσθετέων ${}^-5$ καί ${}^-7$, ἔτσι μέ νέας ἀντιμεταθέσεις διαδοχικῶν προσθετέων ἠμποροῦμεν νά μεταβάλωμεν ὅπως θέλομεν τήν σειράν τῶν προσθετέων.

Ἑπομένως τό ἄθροισμα ὁσωνδήποτε σχετικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀνεξάρτητον ἀπό τήν σειράν των.

6.6 Ἐπιμεριστικότης. Ἀπό τήν σχέσιν (1) (6.4): $\alpha\vec{M} + \beta\vec{M} = (\alpha+\beta)\vec{M}$ συμπεραίνομεν ὅτι:

Ὁ πολλαπλασιασμός ἑνός διανύσματος μέ σχετικούς ἀριθμούς εἶναι ἐπιμεριστικός ἀναφορικῶς μέ τήν πρόσθεσιν τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν.

6.7 Ἀφαίρεσις. Ἐμάθαμεν (2.4) ὅτι ἡ διαφορά δύο διανυσμάτων εὑρίσκεται, ἐάν προσθέσωμεν εἰς τό μειωτέον διάνυσμα τό ἀντίθετον τοῦ ἀφαιρετέου:

$$\vec{X} = \vec{\Gamma\Delta} - \vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta} + \vec{BA}$$

Ἀνάλογος κανών ἰσχύει καί εἰς τήν ἀφαίρεσιν τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν.

Ἔστω π.χ. πρός λύσιν ἡ ἐξίσωσις:

$$^{+}8 + x = {}^{+}5 \qquad (1)$$

Προσθέτοντες εἰς τά δύο μέλη τόν σχετικόν ἀριθμόν $^{-}8$ εὑρίσκομεν:

$$^{-}8 + {}^{+}8 + x = {}^{+}5 + {}^{-}8$$

ἤ

$$x = {}^{+}5 + {}^{-}8 = {}^{-}3$$

Τόν ἀριθμόν x πού εἶναι ἄθροισμα τῶν $^{+}5$ καί $^{-}8$ ὀνομάζομεν διαφοράν τοῦ ἀριθμοῦ $^{+}5$ ἀπό τόν ἀριθμόν $^{+}8$, καθώς καί ὑπόλοιπον ἀφαιρέσεως τοῦ $^{+}8$ ἀπό τόν $^{+}5$, γράφομεν δέ:

$$x = {}^{+}5 - {}^{+}8 = {}^{+}5 + {}^{-}8 = {}^{-}3$$

Διά νά εὕρωμεν λοιπόν, τήν διαφοράν δύο σχετικῶν ἀριθμῶν προσθέτομεν εἰς τόν μειωτέον τόν ἀντίθετον τοῦ ἀφαιρετέου.

Βλέπομεν τώρα ὅτι ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως

$$\alpha + x = \beta \implies x = \beta - \alpha$$

εἶναι πάντοτε δυνατή.

Παραδείγματα:

1ον $\quad \frac{-2}{3} + x = \frac{-5}{6} \qquad x = \frac{-5}{6} - \frac{-2}{3} = \frac{-5}{6} + \frac{+2}{3} = \frac{-1}{6}$

$$\boxed{x = \frac{-1}{6}}$$

2ον $^{+}2,5 + x = \frac{^{+}3}{4} \Longrightarrow x = \frac{^{+}3}{4} - 2\frac{1}{2} = \frac{^{+}3}{4} + \frac{^{-}5}{2} = \frac{^{-}7}{4}$

$$\boxed{x = \frac{^{-}7}{4}}$$

§ 7. Πρακτική χρῆσις τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν

7.1 Ἡ ἀνάγκη τῆς χρήσεως τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν δέν προέκυψε μόνον ἀπό τήν ἀνάγκην τῆς μετρήσεως τῶν διανυσμάτων. Ὑπάρχουν καί ἄλλα μεγέθη πού ἡ μέτρησίς των γίνεται κατά δύο ἀντιθέτους φοράς:

α) Ἡ κίνησις τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑδραργύρου εἰς ἕνα θερμόμετρον ἤ εἰς ἕνα ὑδραργυρικόν βαρόμετρον γίνεται καί πρός τά ἄνω καί πρός τά κάτω. Ὅταν τό θερμόμετρον ἀνέλθη κατά 3° ἡ θερμοκρασία μεταβάλλεται κατά $^{+}3^{o}$, ὅταν ὅμως κατέλθη 3°, ἡ θερμοκρασία μετεβλήθη κατά $^{-}3^{o}$. Ἐάν λοιπόν ἡ θερμοκρασία ἦτο ἀρχικῶς $^{+}18$, θά γίνη μετά τήν ἐπελθοῦσαν μεταβολήν:

$$^{+}18^{o} + {}^{+}3^{o} = {}^{+}21^{o} \text{ ἤ } {}^{+}18^{o} + {}^{-}3^{o} = {}^{+}15^{o}.$$

Ὅπως γνωρίζομεν τά θερμόμετρα πού μετροῦν τάς μεταβολάς τῆς θερμοκρασίας, εἶναι βαθμολογημένα μέ ἐνδείξεις ἄνω τοῦ μηδενός (θετικάς) καί κάτω τοῦ μηδενός (ἀρνητικάς). Ἡ ἔνδειξις 0^{o} δεικνύει τήν θερμοκρασίαν τοῦ τηκομένου πάγου καί ἡ ἔνδειξις $^{+}100^{o}$ τήν θερμοκρασίαν τοῦ ὕδατος εὑρισκομένου εἰς βρασμόν, ὑπό πίεσιν μιᾶς ἀτμοσφαίρας.

β) Ὁ ταμίας μιᾶς τραπέζης ἐνεργεῖ εἰσπράξεις καί πληρωμάς. Εἰς κάθε εἴσπραξιν ἤ πληρωμήν τό ταμεῖον του ὑπόκειται εἰς ἀντίστοιχον αὔξησιν ἤ ἐλάττωσιν. Ἐάν κατά τινα στιγμήν εἶχεν εἰς τό ταμεῖον του ἕνα ποσόν α δρχ καί ἐνεργήση μίαν πληρωμήν 100 δρχ τό ταμεῖον του παθαίνει τήν μεταβολήν $^{-}100$ δρχ. 'Εάν ὅμως κάμη εἴσπραξιν 100 δρχ ἡ μεταβολή θά εἶναι $^{+}100$.

Ἡ κατάστασις τοῦ ταμείου μετά τήν εἴσπραξιν θά εἶναι $\alpha + {}^{+}100$ καί μετά τήν πληρωμήν $\alpha + {}^{-}100$. Ἡ εἴσπραξις εἶναι θετική αὔξησις καί ἡ πληρωμή ἀρνητική αὔξησις (ἐλάττωσις δηλ. είς τό περιεχόμενον τοῦ ταμείου).

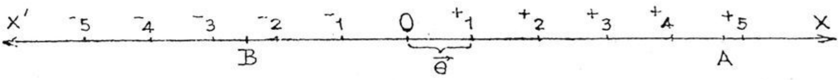
γ) Ἡ ἄνοδος ἤ ἡ κάθοδος ἑνός ὀρειβάτου είς ἕνα ὄρος μεταβάλλει κάθε στιγμήν τό ὕψος τοῦ ὀρειβάτου ἀπό τήν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης. Ἡ μεταβολή κατά τήν ἄνοδον χαρακτηρίζεται θετική, ἐνῶ κατά τήν κάθοδον λογίζεται ἀρνητική.
'Ενῶ τά διάφορα ὕψη ἐπάνω ἀπό τήν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης χαρακτηρίζονται θετικά, τά ὕψη κάτω ἀπό τήν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης χαρακτηρίζονται ἀρνητικά. Ἕνα ὑποβρύχιον έν καταδύσει ἔχει ἀρνητικήν κατακόρυφον ἀπόστασιν ἀπό τήν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης. 'Εάν π.χ. εὑρίσκεται είς βάθος 75 m, λέγομεν ὅτι ἔχει ὕψος $^{-}75$ m καί ἐάν ἀνέλθη κατά 30 m, τό νέον ὕψος του θά εἶναι $^{-}75 + {}^{+}30 = {}^{-}45$, ἐάν ἀκολούθως κάμη, νέαν κατάδυσιν 50 m, θά ἔχωμεν ὕψος ἀπό τήν ἐπιφάνειαν :

$$^{-}45 + {}^{-}50 = {}^{-}95 \text{ m} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

δ) Ἡ μέτρησις τοῦ χρόνου γίνεται καί αὐτή κατά δύο φοράς. Λέγομεν π.χ. πρό 2 ὡρῶν ἤ μετά 2 ὥρας. Ὁ χρόνος πού προηγεῖται μιᾶς ὡρισμένης χρονικῆς στιγμῆς λογίζεται ἀρνητικός· ἐνῶ ἐκεῖνος πού ἀκολουθεῖ μετά τήν ὡρισμένην χρονικήν στιγμήν λογίζεται θετικός. Λέγομεν ἀκόμη: ἡ ὥρα εἶναι 8 καί 25 καί ἐννοοῦμεν $^{+}8$ h $+ {}^{+}25$ min ἤ 8 παρά 25 καί ἐννοοῦμεν $^{+}8$ h $+ {}^{-}25$ min.
'Επίσης αἱ χρονολογίαι πρό Χριστοῦ χαρακτηρίζονται ἀρνητικαί ἐνω αἱ μετά Χριστόν θετικαί. 'Αντί π.χ. νά εἴπωμεν: Τό ἔτος 75 π.Χ", λέγομεν ἁπλῶς: "τό ἔτος $^{-}75$" καί τό ἔτος 85 μ. . , $^{+}85$.

§ 8. Γραφική παράστασις τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν

<u>8.1 Τετμημένη σημείου.</u> Γνωρίζομεν ἤδη νά παριστάνωμεν τούς ρητούς ἀριθμούς τῆς ἀριθμητικῆς μέ σημεῖα ἐπάνω εἰς μίαν ἡμιευθεῖαν (Βιβ. 1,6.10Γ). Διά νά παραστήσωμεν τούς σχετικούς ἀριθμούς θά χρησιμοποιήσωμεν μίαν εὐθεῖαν, τήν ὁποίαν θά χωρίσωμεν μέ ἕνα σημεῖον Ο εἰς δύο ἡμιευθείας Οx καί Οx΄. Ἐάν λάβωμεν ὡς διάνυσμα ἀναφορᾶς τό $\vec{\theta}$, τότε



ὁ ἀριθμός $^{+}4{,}7$ ἔχει διανυσματικήν ἀπεικόνισιν $\overrightarrow{OA}$, ἐνῶ ὁ ἀριθμός $^{-}2{,}5$ ἔχει $\overrightarrow{OB}$. Οἱ ἀριθμοί $^{+}4{,}7$ καί $^{-}2{,}5$ εἶναι τά σχετικά μέτρα τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ καί $\overrightarrow{OB}$. Γράφομεν:

$\overline{OA} = {}^{+}4{,}7$ καί ἐκφωνοῦμεν: σχετ. μέτρον τοῦ $\overrightarrow{OA}$ ἴσον $^{+}4{,}7$

$\overline{OB} = {}^{-}2{,}5$ " " " " " $\overrightarrow{OB}$ " $^{-}2{,}5$

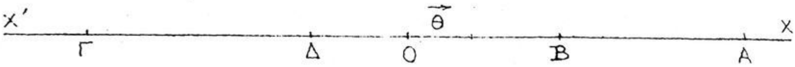
Οἱ ἀριθμοί $^{+}4{,}7$ καί $^{-}2{,}5$ λέγονται <u>τετμημέναι</u> τῶν σημείων Α καί Β.

Κάθε λοιπόν, σχετικός ἀριθμός ἠμπορεῖ νά παρασταθῇ μέ ἕνα σημεῖον ἐπί μιᾶς εὐθείας.

Μία εὐθεῖα, ὅπως τοῦ ἀνωτέρω σχ., ἐπί τῆς ὁποίας ἔχει ὁρισθῇ ἡ θετική φορά, ἡ ἀρχή τῶν συντεταγμένων καί τό διάνυσμα ἀναφορᾶς, λέγεται <u>ἄξων</u>.

Φυσικά δέν ἀποκλείεται ἡ τετμημένη ἑνός σημείου τοῦ ἄξονος νά μή εἶναι ρητός σχετικός ἀριθμός ἀλλά ἀσύμμετρος. Τότε τήν τετμημένην του θά τήν λάβωμεν πρός τό παρόν κατά προσέγγισιν.

<u>8.2 Τετμημένη διανύσματος.</u> Ἔστω τό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ φερόμενον ὑπό τοῦ ἄξονος x΄x, β = $^{+}2{,}5$ ἡ τετμημένη τοῦ πέρατος του καί α = $^{+}5{,}6$ ἡ τετμημένη τῆς ἀρχῆς του.



Ἔχομεν, κατά τά γνωστά:(3.1)

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$$

Ἑπομένως: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Καί ἄν ὀνομάσωμεν x τό σχετικόν μέτρον τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$,

$$x\vec{\Theta} = \beta\vec{\Theta} - \alpha\vec{\Theta} = (\beta-\alpha)\vec{\Theta}$$

$$= {}^{+}2{,}5\vec{\Theta} - {}^{+}5{,}6\vec{\Theta} = ({}^{+}2{,}5 - {}^{+}5{,}6)\vec{\Theta} = {}^{-}3{,}1\vec{\Theta}$$

καί $$\boxed{x = \beta - \alpha = {}^{+}2{,}5 - {}^{+}5{,}6}$$

Ἄρα: Τό σχετικόν μέτρον (ἤ ἡ τετμημένη) ἑνός διανύσματος φερομένου ὑπό ἄξονος εὑρίσκεται, ἐάν ἀπό τήν τετμημένην τοῦ τέλους ἀφαιρέσωμεν τήν τετμημένην τῆς ἀρχῆς.

Ὁμοίως καί διά τό διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ θά ἔχωμεν:

$\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \delta - \gamma$ (δ καί γ τετμημέναι τῶν Δ καί Γ)

$$= {}^{-}1{,}5 - {}^{-}4{,}9 = {}^{-}1{,}5 + {}^{+}4{,}9 = {}^{+}3{,}4$$

§ 9. Ἀριθμητικά πολυώνυμα.

9.1 Ὀνομάζομεν ἀριθμητικόν πολυώνυμον εἰς τήν ἄλγεβραν μίαν σειράν ἀπό προσθέσεις καί ἀφαιρέσεις σημειωμένας ἐπί σχετικῶν ἀριθμῶν.

Παραδείγματα:

$$\sigma = {}^{+}3 - {}^{+}5 - {}^{-}9 + {}^{+}3 - {}^{-}1$$

$$\tau = \frac{{}^{-}2}{3} + \frac{{}^{+}5}{6} - {}^{-}1 - \frac{{}^{+}3}{4}$$

Διά νά ὑπολογίσω τήν τιμήν τοῦ ἀριθμητικοῦ πολυωνύμου μετατρέπω τάς ἀφαιρέσεις εἰς προσθέσεις:

$$\sigma = {}^{+}3 - {}^{+}5 - {}^{-}9 + {}^{-}3 - {}^{-}1 = {}^{+}3 + {}^{-}5 + {}^{+}9 + {}^{-}3 + {}^{+}1 = {}^{+}5$$

$$\tau = \frac{{}^{-}2}{3} + \frac{{}^{+}5}{6} - {}^{-}1 - \frac{{}^{+}3}{4} = \frac{{}^{-}2}{3} + \frac{{}^{+}5}{6} + {}^{+}1 + \frac{{}^{-}3}{4} = \frac{{}^{+}5}{12}.$$

Σημείωσις. Εἰς τά ἀριθμητικά πολυώνυμα θά παραλείπωμεν τό πρόσημον $^{+}$ τῶν θετικῶν ἀριθμῶν καί θά γράφωμεν:

$$\sigma = 3 - 5 - {}^{-}9 + {}^{-}3 - {}^{-}1 \quad \text{κ.ο.κ.}$$

<u>9.2 Πρόσθεσις ἀριθμητικῶν πολυωνύμων.</u> Ἔστω ὅτι ἔχομεν νά προσθέσωμεν τά ἀριθμητικά πολυώνυμα:

$$\sigma = {}^{-}3 + 5 + {}^{-}7 - {}^{-}1 \quad \text{καί} \quad \tau = 2 - {}^{-}3 - 5 + {}^{-}7$$

Γράφομεν:

$$\sigma + \tau = ({}^{-}3+5+{}^{-}7-{}^{-}1) + (2-{}^{-}3-5+{}^{-}7) \quad \text{ἤ :}$$

$$\sigma + \tau = ({}^{-}3+5+{}^{-}7+1) + (2 + 3+{}^{-}5+{}^{-}7)$$

Ἡ προσεταιριστικότης ὅμως τῆς προσθέσεως μᾶς ἐπιτρέπει νά γράφωμεν χωρίς παρενθέσεις:

$$\sigma + \tau = {}^{-}3 + 5 + {}^{-}7 + 1 + 2 + 3 + {}^{-}5 + {}^{-}7$$

Εἰς τό ἴδιον ὅμως ἀποτέλεσμα καταλήγομεν καί ἐάν τό ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμητικῶν πολυωνύμων τό γράφωμεν, εὐθύς ἐξ ἀρχῆς, χωρίς παρενθέσεις:

$$\begin{aligned} \sigma + \tau &= {}^{-}3 + 5 + {}^{-}7 - {}^{-}1 + 2 - {}^{-}3 - 5 + {}^{-}7 \\ &= {}^{-}3 + 5 + {}^{-}7 + 1 + 2 + 3 + {}^{-}5 + {}^{-}7. \end{aligned}$$

<u>Ὅρους</u> ἀριθμητικοῦ πολυωνύμου ὀνομάζομεν τούς προσθετέους του.

Ὅροι τοῦ ἀρ. πολυωνύμου $\sigma = {}^{-}3 - 5 - {}^{-}7 + 1$ εἶναι οἱ σχετικοί ἀριθμοί ${}^{-}3$, ${}^{-}5$, 7 καί 1 , διότι:

$$\sigma = {}^{-}3 - 5 - {}^{-}7 + 1 = {}^{-}3 + {}^{-}5 + 7 + 1$$

<u>Διά νά προσθέσω λοιπόν ἀριθμητικά πολυώνυμα σχηματίζω πολυώνυμον μέ ὅρους τούς ὅρους τῶν προσθετέων πολυωνύμων. Μεταξύ τοῦ τελευταίου ὅρου τοῦ πρώτου πολυωνύμου καί τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ ἑπομένου του τοποθετῶ τό προσθετικόν σχῆμα+.</u>

<u>9.3</u> Ἐπειδή ἡ τιμή ἑνός ἀθροίσματος σχετικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπό τήν σειράν τῶν προσθετέων καί ἐπειδή κάθε ἀρθμητικόν πολυώνυμον ἠμπορεῖ νά μετασχηματισθῇ εἰς ἄθροισμα σχετικῶν ἀριθμῶν, ἕπεται ὅτι:

<u>Ἡ τιμή ἑνός ἀριθμητικοῦ πολυωνύμου εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπό τήν σειράν τῶν ὅρων του.</u>

Παράδειγμα:

$$ {}^{-}2 + {}^{-}3 - 5 - {}^{-}7 + 1 = 1 + {}^{-}3 - 5 - {}^{-}7 + {}^{-}2 \qquad (1)$$

Πράγματι:

$$ {}^{-}2 + {}^{-}3 - 5 - {}^{-}7 + 1 = {}^{-}2 + {}^{-}3 + {}^{-}5 + 7 + 1 = {}^{-}2$$

καί: $1 + {}^{-}3 - 5 - {}^{-}7 + {}^{-}2 = 1 + {}^{-}3 + {}^{-}5 + 7 + {}^{-}2 = {}^{-}2$

Τά δεύτερα μέλη τῶν δύο τελευταίων ἰσοτήτων εἶναι ἴσα, ἑπομένως καί τά πρῶτα εἶναι ἴσα, (μεταβατικότης).

<u>Σημείωσις</u>. Σύμφωνα μέ τήν ἀνωτέρω ἰδιότητα, ἠμποροῦμεν νά γράφωμεν καί:

$$ {}^{-}2 + {}^{-}3 - 5 - {}^{-}7 + 1 = -5 + {}^{-}3 + 1 - {}^{-}7 + {}^{-}2 ,$$

μέ τήν ἔννοιαν ὅτι: $\boxed{-5 = {}^{-}5}$ διότι:

$$ {}^{-}2 + {}^{-}3 - 5 - {}^{-}7 + 1 = {}^{-}2 + {}^{-}3 + {}^{-}5 - {}^{-}7 + 1$$

<u>9.4 Ἀντίθετα ἀριθμητικά πολυώνυμα.</u> Ἄς θεωρήσωμεν τά δύο ἀριθμητικά πολυώνυμα:

$$-3 + 2 - {}^{-}5 + 1 = {}^{-}3 + {}^{+}2 + {}^{+}5 + {}^{+}1 \qquad \text{καί:}$$

$$3 - 2 - 5 - 1 = {}^{+}3 + {}^{-}2 + {}^{-}5 + {}^{-}1$$

Τά δύο αὐτά ἀριθμητικά πολυώνυμα τά λέγομεν <u>ἀντίθετα</u> διότι ἀποτελοῦνται ἀπό προσθετέους ἀντιστοίχως ἀντιθέτους. Τό ἄθροισμά των εἶναι ἴσον μέ μηδέν:

$$(3+2-{}^{-}5+1) + (3+{}^{-}2-5-1) = (-3+3) + (2+{}^{-}2) + (5+{}^{-}5) + (1+{}^{-}1) = 0.$$

<u>9.5. Ἀφαίρεσις ἀριθμητικῶν πολυωνύμων.</u> Διά νά ἀφαιρέσωμεν ἕνα ἀριθμητικόν πολυώνυμον ἀπό ἕνα ἄλλο προσθέτομεν εἰς τό μειωτεον τό ἀντίθετον τοῦ ἀφαιρετέου ἀριθμητικοῦ πολυωνύμου.

Π.χ. $(5-3+{}^{-}2) - ({}^{-}2-1+2) = 0 - ({}^{-}1) = {}^{+}1$

ἐξ ἄλλου:

$$(5-3+{}^{-}2) + (2+1-2) = 0 + {}^{+}1 = {}^{+}1$$

Ἐπομένως:

Ἡ διαφορά δύο ἀριθμητικῶν πολυωνύμων εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τοῦ μειωτέου καί τοῦ ἀντιθέτου τοῦ ἀφαιρετέου.

Σημείωσις. Δέν εἶναι ἀπαραίτητος ἡ τοποθέτησις τοῦ μειωτέου ἀριθμητικοῦ πολυωνύμου ἐντός παρενθέσεως. Παρένθεσις χρησιμοποιεῖται μόνον εἰς τό ἀφαιρετέον ἀριθμητικόν πολυώνυμον.

Ἄν τούς ὅρους τῶν ἀριθμητικῶν πολυωνύμων παραστήσωμεν μέ γράμματα, θά ἔχωμεν:

$$(\alpha-\beta) - (\gamma-\delta+\varepsilon) = (\alpha-\beta) + (-\gamma+\delta-\varepsilon)$$
$$= \alpha - \beta - \gamma + \delta - \varepsilon$$

Ἀντιθέτως, ἐάν ἔχωμεν ἕνα ἀριθμητικόν πολυώνυμον ἠμποροῦμεν νά θέσωμεν μερικούς ὅρους του ἐντός παρενθέσεως.

Παραδείγματα:

α) $\alpha + \beta - \gamma - \delta + \varepsilon = \alpha + (\beta-\gamma) - (\delta-\varepsilon)$

β) $\alpha - \beta + \gamma - \delta = \alpha - (\beta-\gamma+\delta)$

γ) $\alpha + \beta - \gamma + \delta + \varepsilon = \alpha + (\beta-\gamma+\delta) + \varepsilon$

Τά ἀνωτέρω παραδείγματα δεικνύουν τόν μηχανισμόν τῆς χρήσεως τῶν παρενθέσεως εἰς τά ἀριθμητικά πολυώνυμα:

Ἡ παρένθεσις χρησιμοποιεῖται, ὅταν θέλωμεν νά ἀπομονώσωμεν μερικούς ὅρους ἑνός πολυωνύμου. Καί ἄν μέν θέλωμεν ἡ παρένθεσις νά ἔχῃ πρό αὐτῆς τό προσθετικόν σῆμα +, οἱ ὅροι θά τοποθετηθοῦν μέσα εἰς τήν παρένθεσιν ὅπως εἶναι. Ἐάν ὅμως θέλωμεν νά ἔχωμεν ἐμπρός ἀπό τήν παρένθεσιν τό ἀφαιρετικόν σῆμα − , τότε πρέπει μέσα εἰς τήν παρένθεσιν νά γίνουν τά προσθετικά σήματα τῶν ὅρων ἀφαιρετικά καί τά ἀφαιρετικά προσθετικά

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Διανύσματα.

1) Δίδονται τά ἔναντι συγγραμμικά διανύσματα καί ζητεῖται νά εὑρεθοῦν -ά:

α) $\vec{A} + \vec{B} + \vec{\Gamma}$ δ) $\vec{A} - (\vec{B} - \vec{\Gamma})$

β) $\vec{A} - \vec{B}$ ε) $(\vec{A} - \vec{B}) - \vec{\Gamma}$

γ) $\vec{A} - (\vec{B} + \vec{\Gamma})$ στ) $(\vec{B} + \vec{\Gamma}) - \vec{A}$

2) Μέ διάνυσμα ἀναφορᾶς τό $\vec{M}$ ($\xrightarrow{\vec{M}}$) νά κατασκευάσετε τά διανύσματα:

α) $\vec{A} = {}^{+}\frac{1}{3}\vec{M}$ γ) $\vec{\Gamma} = {}^{-}2\vec{M}$ ε) $\vec{E} = {}^{-}\frac{3}{5}\vec{M}$

β) $\vec{B} = {}^{-}\frac{3}{4}\vec{M}$ δ) $\vec{\Delta} = {}^{+}\frac{3}{5}\vec{M}$ ζ) $\vec{Z} = {}^{+}\frac{1}{2}\vec{M}$

3) Μέ διάνυσμα ἀναφορᾶς τό διάνυσμα $\vec{M}$ ($\xrightarrow{\vec{M}}$) νά εὑρεθοῦν τά:

α) ${}^{-}\frac{2}{3}\vec{M} + 2\vec{M}$ γ) ${}^{-}2\vec{M} + {}^{+}\frac{4}{3}\vec{M}$

β) ${}^{+}3\vec{M} - {}^{+}\frac{3}{2}\vec{M}$ δ) ${}^{-}\frac{1}{2}\vec{M} + {}^{+}2\vec{M}$

Πρόσθεσις καί ἀφαίρεσις σχετικῶν ἀριθμῶν.

4) Νά εὑρεθοῦν τά ἀθροίσματα:

α) ${}^{-}3 + {}^{+}2 + {}^{-}5 + {}^{-}1$ γ) ${}^{-}1,3 + {}^{+}\frac{2}{5} + {}^{-}\frac{1}{2}$

β) ${}^{-}\frac{3}{4} + {}^{+}\frac{1}{2} + {}^{-}\frac{5}{8} + {}^{+}1,75$ δ) ${}^{-}1,222\ldots + {}^{+}\frac{2}{3} + {}^{-}\frac{7}{9}$

5) Νά εὑρεθοῦν αἱ διαφοραί:

α) ${}^{-}5 - {}^{-}7$ γ) ${}^{+}\frac{1}{2} - {}^{-}\frac{1}{4}$ ε) ${}^{-}3 - {}^{+}0,151515\ldots$

β) ${}^{-}7 - {}^{-}5$ δ) ${}^{-}\frac{1}{3} - {}^{+}\frac{1}{6}$ ζ) $0 - {}^{-}3,25$

6) Ἀπό ἕκαστον ἐκ τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν ${}^{-}1$, ${}^{+}\frac{3}{4}$, ${}^{-}5$, ${}^{-}2\frac{1}{3}$ νά ἀφαιρεθῆ ἕκαστος ἐκ τῶν ${}^{+}2$, ${}^{-}\frac{1}{2}$, ${}^{+}\frac{4}{3}$. (δώδεκα ἀφαιρέσεις)

7) Ἕνα ὑποβρύχιον πλέει εἰς βάθος 18 m. Ἀκολούθως ἀνέρχεται κατά 12 m καί ἐν συνεχεία βυθίζεται κατά 20 m, ἀνέρχεται κατά 30 m καί τέλος βυθίζεται κατά 13 m. Εἰς ποῖον ὕψος ἀπό τήν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης (βάθος) θά εὑρεθῆ μετά τήν τελευταίαν βύθισίν του. Αἱ μεταβολαί τοῦ βάθους θά παρασταθοῦν μέ σχετικούς ἀριθμούς.

8) Νά παραστήσετε μέ σχετικούς ἀριθμούς τάς κατωτέρω χρονολογίας καί νά εὕρετε μέ ἀφαίρεσιν τῆς παλαιοτέρας ἀπό τήν νεωτέραν πόσα ἔτη ἐπέρασαν:

Ἀπό 85 μ. Χ. ἕως 450 μ.Χ.
" 75 π.Χ. " 75 μ.Χ.

Ἀπό 450 π.Χ. ἕως 250 π.Χ.

9) Ὁ Θαλῆς προεῖπεν ἔκλειψιν ἡλίου τό 597 π.Χ. Νά εὕρετε μέ ἀφαίρεσιν πόσα ἔτη ἐπέρασαν μέχρι τῆς γεννήσεως τοῦ Ἀριστοτέλους (384 π.Χ.) καί πόσα ἔτη ἔζησεν ὁ Ἀριστοτέλης ἐάν ἀπέθανεν τό 322 π. Χ. (θά ἀφαιρῆτε τήν παλαιοτέραν χρονολογίαν ἀπό τήν νεωτέραν).

10) Ὁ Μέγας Ἀλέξανδρος ἐγεννήθη τό ἔτος 356 π.Χ., ἔγινε βασιλεύς τό ἔτος 336 π.Χ. καί ἀπέθανεν τό ἔτος 324 π.Χ. Νά εὕρετε ἀφαιροῦντες τάς παλαιοτέρας χρονολογίας ἀπό τάς νεωτέρας:

α) Πόσων ἐτῶν ἦτο ὁ Μ. Ἀλέξανδρος ὅταν ἔγινε βασιλεύς.
β) Πόσα ἔτη ἐβασίλευσε.
γ) Εἰς ποίαν ἡλικίαν ἀπέθανε.

Τετμημέναι σημείων καί διανυσμάτων.

11) Τά σημεῖα Α, Β, Γ, Δ εὑρίσκονται ἐπάνω εἰς ἕνα ἄξονα $x'x$ καί ἔχουν τετμημένας κατά σειράν $^{-}2$, $^{+}3$, $^{-}1$, $^{\pm}4$. Νά εὑρεθοῦν αἱ τετμημέναι τῶν διανυσμάτων: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Delta}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma A}$, $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta B}$.

Παράδειγμα: $\overline{\Delta A} = 4 - {}^{-}2 = 4 + 2 = 6$.

Ἀριθμητικά πολυώνυμα.

12) Νά ὑπολογισθοῦν τά ἀριθμητικά πολυώνυμα:

α) $-5 + 3 - \frac{2}{3} - \frac{5}{6} + 1$ β) $2 - 3\frac{1}{3} + 1\frac{1}{2} - 0{,}25$

γ) $1{,}25 - \frac{3}{4} + 0{,}75 - \frac{1}{2}$ δ) $-1{,}2 + \frac{3}{5} - 0{,}7 + \frac{1}{2}$

13) Δίδονται τά ἀριθμητικά πολυώνυμα:
$\sigma = 2 - 3 + 5 - 1$, $\tau = -3 + 7 - 1 + 2$, $\varrho = 8 - 1 - 5 + 2$
καί ζητεῖται νά ὑπολογισθοῦν τά ἀθροίσματα καί αἱ διαφοραί:

α) $\sigma + \tau + \varrho$ β) $\sigma - \tau$, γ) $\varrho - \tau$
δ) $\tau - \sigma$ ε) $\sigma - (\tau + \varrho)$, ζ) $\varrho - (\tau - \sigma)$

14) Εἰς τά κατωτέρω ἀριθμητικά πολυώνυμα νά τεθοῦν ἐντός μιᾶς παρενθέσεως οἱ ὑπογραμμισμένοι ὅροι:

α) $2 - \underline{3} + \underline{5} - \underline{1} - 7$ β) $-3 + \underline{1} - \underline{5} - \underline{1} - 2$
γ) $2 - \underline{3} - \underline{5} - 1$ δ) $3 - 5 + \underline{1} - \underline{7}$

15) Νά ἐξαλειφθοῦν αἱ παρενθέσεις εἰς τά κατωτέρω ἀριθμητικά πολυώνυμα

α) $1 - (2 - 3 + 5)$ β) $-2 - (3 + 5 - 1)$
γ) $2 - 3 - [5 - (3 - 1) + 2]$.

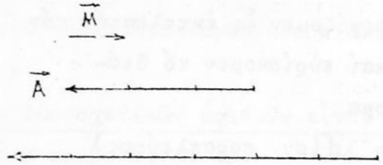
§ 11. Πολλαπλασιασμός.

<u>11.1 Γινόμενον δύο παραγόντων.</u> Ἔστω πρός ἐκτέλεσιν ὁ πολλαπλασιασμός: $^{+}2\times{}^{-}3$.

Λαμβάνομεν ἕνα διάνυσμα ἀναφορᾶς $\vec{M}$ καί ἐφαρμόζομεν εἰς αὐτό ὡς ἐκτελεστήν τόν $^{-}3$. Προκύπτει τό διάνυσμα:

$$\vec{A} = {}^{-}3\vec{M}$$

Εἰς τό διάνυσμα $\vec{A}$ ἐφαρμόζομεν ὡς ἐκτελεστήν τόν $^{+}2$.



Προκύπτει τό διάνυσμα:

$$\vec{B} = {}^{+}2\vec{A}$$
$$= {}^{+}2\times({}^{-}3\vec{M})$$

Ἀλλά εἰς τό διάνυσμα $\vec{B} = {}^{+}2\times({}^{-}3\vec{M})$ ἠμποροῦμεν νά καταλήξωμεν ἀμέσως ἐφαρμόζοντες εἰς τό $\vec{M}$ κατ' εὐθεῖαν ὡς ἐκτελεστήν τόν $^{-}6$:

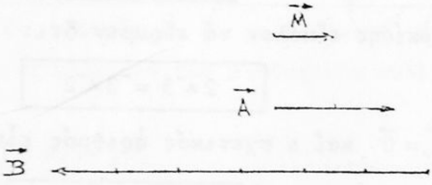
$$\vec{B} = 2\times({}^{-}3\vec{M}) = {}^{-}6\vec{M}$$

Διά τοῦτο ὁρίζομεν τό γινόμενον $^{+}2\times{}^{-}3$ ὡς ἑξῆς

$$\boxed{{}^{+}2\times{}^{-}3 = {}^{-}6}$$

Τό ἴδιον γινόμενον $^{-}6$ εὑρίσκομεν καί μέ τόν πολλαπλασιασμόν $^{-}3\times{}^{+}2$:

$$\vec{A} = {}^{+}2\vec{M}$$
$$\vec{B} = {}^{-}3\vec{A}$$
$$= \times({}^{+}2\vec{M})$$
$$= {}^{-}6\vec{M}$$



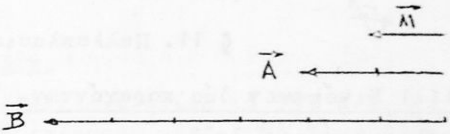
Ἐπομένως

$$\boxed{{}^{-}3\times{}^{+}2 = {}^{+}2\times{}^{-}3}$$

Ἔστω τώρα ὅτι ζητεῖται τό γινόμενον $^{+}3\times{}^{+}2$.

Ἐργαζόμενοι, ὅπως καί προηγουμένως, εὑρίσκομεν

$$\vec{A} = {}^{+}2\vec{M}$$
$$\vec{B} = {}^{+}3\vec{A}$$
$$= {}^{+}3\times({}^{+}2\vec{M})$$
$$= {}^{+}6\vec{M}$$

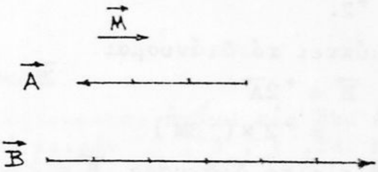


καί:

$$\boxed{{}^{+}3\times{}^{+}2 = {}^{+}2\times{}^{+}3} \qquad (2)$$

Ἔστω, ἀκόμη, ὅτι ζητεῖται τό γινόμενον $^{-}2\times{}^{-}3$.

Ἐφαρμόζομεν ὡς ἐκτελεστήν τόν $^{-}3$ εἰς τό διάνυσμα ἀναφορᾶς $\vec{M}$ καί εὑρίσκομεν τό διάνυσμα $\vec{A} = {}^{-}3\vec{M}$ (σχ. παραπλεύρως) Ἀκολούθως ἐφαρμόζομεν εἰς τό διάνυσμα A ὡς ἐκτελεστήν τόν $^{-}2$ καί εὑρίσκομεν τό γινόμενον



$$\vec{B} = {}^{-}2\vec{A} = {}^{-}2\times({}^{-}3\vec{M})$$

Ἀλλά εἰς τό ἴδιον διάνυσμα $\vec{B} = {}^{-}2({}^{-}3\vec{M})$ καταλήγομεν καί ἐάν πολλαπλασιάσσωμεν κατ' εὐθεῖαν ἐπί $^{+}6$ τό διάνυσμα ἀναφορᾶς $\vec{M}$. Ἑπομένως:

$$\boxed{{}^{-}2\times{}^{-}3 = {}^{+}6}$$

Εἶναι ἐπίσης εὔκολον νά εὕρωμεν ὅτι:

$$\boxed{{}^{-}2\times{}^{-}3 = {}^{-}3\times{}^{-}2} \qquad (3)$$

Ἐάν $\vec{M} = \vec{0}$ καί α σχετικός ἀριθμός εἶναι εὔκολον νά εὕρωμεν ὅτι:

$$\boxed{\alpha\cdot 0 = 0\cdot\alpha = 0}$$

<u>Συμπεράσματα:</u>

α) <u>Τό γινόμενον δύο ἑτεροσήμων σχετικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀρνητικόν, ἡ δέ ἀπόλυτος τιμή του εἶναι ἴση μέ τό γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν των.</u>

β) Τό γινόμενον δύο ὁμοσήμων σχετικῶν ἀριθμῶν εἶναι θετικόν, ἡ δέ ἀπόλυτος τιμή του εἶναι ἴση μέ τό γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν των.

γ) Εἰς τό γινόμενον δύο σχετικῶν ἀριθμῶν ἰσχύει ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως (ἰσότητες (1), (2), (3))

$$\boxed{\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha}$$

δ) Ἀπό τά παραδείγματα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο σχετικῶν ἀριθμῶν συμπεραίνομεν ὅτι:

Ἡ ἀπόλυτος τιμή τοῦ γινομένου δύο σχετικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴση μέ τό γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν των.

ε) Εἴδαμεν ἐπίσης ὅτι $^-3 \times (^+2\overrightarrow{M}) = {^-6}\overrightarrow{M}$

καί $(^-3 \times {^+2})\overrightarrow{M} = {^-6}\overrightarrow{M}$

Ἑπομένως: $^-3 \times (^+2\overrightarrow{M}) = (^-3 \times {^+2})\overrightarrow{M}$. Εἰς τόν πολλαπλασιασμόν, λοιπόν διανύσματος μέ σχετικούς ἀριθμούς ἰσχύει ὁ νόμος τῆς προσεταιριστικότητος ὡς πρός τόν πολ/σμόν τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν

$$\boxed{\begin{array}{c} ^-3 \times (^+2\overrightarrow{M}) = (^-3 \times {^+2})\overrightarrow{M} \\ \alpha \cdot (\beta\overrightarrow{M}) = (\alpha \cdot \beta)\overrightarrow{M} \end{array}}$$

11.2 Γινόμενον μέ περισσοτέρους ἀπό δύο παράγοντας.

Ὀνομάζομεν γινόμενον τῶν ἀριθμῶν α, β, γ, δ, κατά τήν τάξιν πού ἔχουν δοθῆ τό ἐξαγόμενον τῶν διαδοχικῶν πολλαπλασιασμῶν:

$$\Gamma = [(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma] \cdot \varepsilon \qquad (1)$$

Παράδειγμα: $\alpha = {^-3}$, $\beta = {^+5}$, $\gamma = {^-2}$, $\delta = {^-1}$.

Ἀντικαθιστοῦμεν εἰς τήν (1) καί εὑρίσκομεν:

$$\Gamma = [(^-3 \times {^+5}) \times {^-2}] \times {^-1} = (^-15 \times {^-2}) \times {^-1} = {^+30} \times {^-1} = {^-30}$$

11.3 Προσεταιριστικότης. Ἔστω ὅτι ζητεῖται τό γινόμενον $\Gamma = {^-3} \times {^+2} \times {^-4}$. Ἔχομεν:

$$\Gamma = {^-3} \times {^+2} \times {^-4} = (^-3 \times {^+2}) \times {^-4} = {^-6} \times {^-4} = {^+24}$$

Ἐξ ἄλλου: $^-3\times(^+2\times^-4) = {}^-3\times{}^-24 = {}^+24$

καί συνεπῶς:

$\boxed{(^-3\times^+2)\times^-4 = {}^-3\times(^+2\times^-4)}$ γενικῶς δέ, $\boxed{(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma = \alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)}$

Ἑπομένως: <u>Εἰς τόν πολλαπλασιασμόν τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν ἰσχύει ὁ νόμος τῆς προσεταιριστικότητος.</u>

Συνδυάζοντες τήν ἀντιμεταθετικότητα καί τήν προσεταιριστικότητα, ἔχομεν:

$$^-3\times^+2\times^-4 = (^-3\times^+2)\times^-4 = {}^-3\times(^+2\times^-4) = {}^-3\times(^-4\times^+2) =$$
$$= (^-3\times^-4)\times^+2 = (^-4\times^-3)\times^+2.$$

Ἀλλά καί $^-4\times^-3\times^+2 = (^-4\times^-3)\times^+2$. Ἑπομένως:

$$^-3\times^+2\times^-4 = {}^-4\times^+2\times^-3 \quad \text{κ.λ.π.}$$

<u>Τό γινόμενον λοιπόν, τριῶν παραγόντων εἶναι ἀνεξάρτητον ἀπό τήν σειράν των.</u>

Τό ἴδιον ἰσχύει καί διά περισσοτέρους παράγοντας. Ἔστω ὅτι ἔχομεν τό γινόμενον : $\Gamma = {}^-3\times^+2\times^-5\times^+4\times^-10$.

Θά ἴδωμεν ὅτι εἶναι ἴσον μέ τό $\Gamma' = {}^-3\times^+2\times^+4\times^-5\times^-10$

Ἔχομεν $\Gamma = {}^-3\times^+2\times^-5\times^+4\times^-10 = (^-6\times^-5\times^+4)\times^-10 = (^-6\times^+4\times^-5)\times^-10$.

Ἀλλά καί $\Gamma' = {}^-3\times^+2\times^+4\times^-5\times^-10 = (^-6\times^+4\times^-5)\times^-10$

Ἑπομένως καί $\Gamma = \Gamma'$, ἤ :

$$^-3\times^+2\times^-5\times^+4\times^-10 = {}^-3\times^+2\times^+4\times^-5\times^-10.$$

Ἀφοῦ λοιπόν ἠμποροῦμεν νά ἀντιμεταθέσωμεν ἕνα παράγοντα μέ τόν προηγούμενον ἤ μέ τόν ἑπόμενόν του, ὅπως τούς $^-5$ καί $^+4$ εἰς τό ἀνωτέρω παράδειγμα, ἠμποροῦμεν μέ ἐπανάληψιν νά τόν ἀντιμεταθέσωμεν μέ ὁποιονδήποτε ἄλλον.

Καί συνεπῶς:

<u>Τό γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων εἶναι ἀνεξάρτητον ἀπό τήν σειράν των.</u>

Ἀπό τήν ἰδιότητα αὐτήν τοῦ γινομένου τριῶν ἤ περισσοτέρων παραγόντων συνάγομεν καί τάς ἀκολούθους:

α) Εἰς τό γινόμενον σχετικῶν ἀριθμῶν ἠμποροῦμεν νά ἀντικαταστήσωμεν δύο ἤ περισσοτέρους παράγοντας μέ τό γινόμενόν των καί ἀντιστρόφως: Εἰς ἕνα γινόμενον ἠμποροῦμεν ἕνα παράγοντα νά τόν ἀντικαταστήσωμεν μέ δύο ἤ περισσοτέροϋς ἄλλους πού τόν ἔχουν γινόμενον.

β) Γινόμενον σχετικῶν ἀριθμῶν πολλαπλασιάζεται μέ σχετικόν ἀριθμόν, ἐάν πολλαπλασιάσωμεν ἕνα παράγοντά του.

$$\mu\cdot(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma) = \alpha\cdot(\mu\cdot\beta)\cdot\gamma$$

γ) Διά νά πολλαπλασιάσωμεν γινόμενα σχηματίζομεν ἕνα γινόμενον ἀπό ὅλους τούς παράγοντας τῶν γινομένων

$$(\alpha\cdot\beta)\cdot(\gamma\cdot\delta\cdot\varepsilon) = \alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta\cdot\varepsilon$$

δ) Ἔστω ὅτι ζητεῖται τό γινόμενον:

$$\Gamma = {}^{-}5\times{}^{+}3\times{}^{-}2\times{}^{-}4\times{}^{+}2 \qquad (1)$$

Σύμφωνα μέ τήν ἀνωτέρω ἰδιότητα (α) ἠμποροῦμεν νά ἀντικαταστήσωμεν ἀνά δύο τούς ἀρνητικούς παράγοντας του μέ τό γινόμενόν των πού εἶναι θετικόν. Ἐάν λοιπόν τό γινόμενον περιέχη 2ν ἀρνητικούς παράγοντας (ἄρτιον πλῆθος) θά εἶναι θετικόν· ἐάν ὅμως περιέχη $2\nu + 1$ ἀρνητικους παράγοντας (περιττόν πλῆθος), θά εἶναι ἀρνητικόν.

Τό γινόμενον λοιπόν δύο ἤ περισσοτέρων σχετικῶν ἀριθμῶν, διαφόρων τοῦ μηδενός, εἶναι θετικόν, ἐάν τό πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων πού περιέχει εἶναι ἄρτιον καί ἀρνητικόν ἐάν τό πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων του εἶναι περιττόν. Ἡ δέ ἀπόλυτος τιμή του εἶναι ἴση μέ τό γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων του.

Τό γινόμενον λοιπόν (1) εἶναι ἀρνητικόν διότι περιέχει τρεῖς ἀρνητικούς παράγοντας.

$$\Gamma = {}^{-}5\times{}^{+}3\times{}^{-}2\times{}^{-}4\times{}^{+}2 = {}^{-}(5\times3\times2\times4\times2) = {}^{-}240$$

καί : $$|\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta| = |\alpha|\cdot|\beta|\cdot|\gamma|\cdot|\delta|$$

ε) $\alpha\cdot{}^{+}1 = {}^{+}1\times\alpha = \alpha$ (α, σχετικός)

Ἐπομένως: <u>ἡ θετική μονάς εἶναι οὐδέτερον στοιχεῖον εἰς τόν πολλαπλασιασμόν τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν.</u>

<u>11.4 Ἐπιμεριστικότης</u>. Παρατηροῦμεν, πρῶτον, ὅτι ἄν ἔχωμεν:

$$\vec{A} = {}^{-}5\vec{M} \quad \text{καί} \quad \vec{B} = {}^{+}2\vec{M} \quad \text{θά εἶναι καί}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = {}^{-}5\vec{M} + {}^{+}2\vec{M} = ({}^{-}5 + {}^{+}2)\vec{M} = {}^{-}3\vec{M}$$

Ἀφοῦ λοιπόν : $\vec{A} + \vec{B} = {}^{-}3\vec{M}$, θά ἔχωμεν καί:

$$ {}^{-}2(\vec{A}+\vec{B}) = {}^{-}2\cdot({}^{-}3\vec{M}) = {}^{+}6\vec{M} \qquad (1)$$

Ἐξ ἄλλου: $ {}^{-}2\cdot\vec{A} = {}^{-}2\cdot({}^{-}5\vec{M}) = {}^{+}10\vec{M}$

$$ {}^{-}2\vec{B} = {}^{-}2\cdot({}^{+}2\vec{M}) = {}^{-}4\vec{M}$$

καί μέ πρόσθεσιν κατά μέλη τῶν δύο αὐτῶν ἰσοτήτων:

$$ {}^{-}2\vec{A} + {}^{-}2\vec{B} = {}^{+}10\vec{M} + {}^{-}4\vec{M} = ({}^{+}10 + {}^{-}4)\vec{M} = {}^{+}6\vec{M} \qquad (2)$$

Ἀπό τάς ἰσότητας (1) καί (2) συμπεραίνομεν ὅτι:

$$\boxed{ {}^{-}2(\vec{A}+\vec{B}) = {}^{-}2\vec{A} + {}^{-}2\vec{B}} \qquad (3)$$

Ἐπομένως: <u>Ὁ πολλαπλασιασμός διανυσμάτων μέ σχετικόν ἀριθμόν εἶναι ἐπιμεριστικός ὡς πρός τήν πρόσθεσιν τῶν διανυσμάτων.</u>

<u>Σημείωσις</u>. Ἡ σχέσις (3) δέν πρέπει νά συγχέεται μέ τήν:

$$(\alpha+\beta)\vec{M} = \alpha\vec{M} + \beta\vec{M} \quad (6.7)$$

Ἔστω τώρα ὅτι δίδονται τά διανύσματα $\vec{A} = \alpha\vec{M}$ καί $\vec{B} = \beta\vec{M}$ καί ὁ σχετικός ἀριθμός ν ἔχομεν:

$$\nu(\vec{A}+\vec{B}) = \nu(\alpha\vec{M}+\beta\vec{M}) = \nu[(\alpha+\beta)\vec{M}] = \nu(\alpha+\beta)\vec{M}$$

καί:

$$\nu(\vec{A}+\vec{B}) = \nu\vec{A} + \nu\vec{B} = \nu\alpha\vec{M} + \gamma\beta\vec{M} = (\nu\alpha+\nu\beta)\vec{M}$$

Ἐπομένως:

$$\nu(\alpha+\beta)\vec{M} = (\nu\alpha+\nu\beta)\vec{M}$$

καί $$\boxed{\nu(\alpha+\beta) = \nu\alpha + \nu\beta}$$

Ἐάν δέ $\nu = (\gamma+\delta)$ ἔχομεν:

$$(\gamma+\delta)\cdot(\alpha+\beta) = (\gamma+\delta)\cdot\alpha + (\gamma+\delta)\cdot\beta = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$$

Ἄρα: Ὁ πολλαπλασιασμός τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἐπιμεριστικός ὡς πρός τήν πρόσθεσιν.

Ἔστω ὅτι ἔχομεν νά πολλαπλασιάσωμεν:

$$^{-}2 \times (^{+}8 - ^{-}3)$$

Ἐπειδή κάθε διαφορά εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τοῦ μειωτέου καί τοῦ ἀντιθέτου τοῦ ἀφαιρετέου, θά ἔχωμεν:

$$^{-}2 \times (^{+}8 - ^{-}3) = {^{-}2} \times (^{+}8 + ^{+}3) = (^{-}2 \times ^{+}8) + (^{-}2 \times ^{+}3) = (^{-}2 \times ^{+}8) + ^{-}6$$

καί: $(^{-}2 \times ^{+}8) - (^{-}2 \times ^{-}3) = (^{-}2 \times ^{+}8) - ^{+}6 = (^{-}2 \times ^{+}8) + ^{-}6$

Ἀπό τάς δύο αὐτάς ἰσότητας συμπεραίνομεν ὅτι:

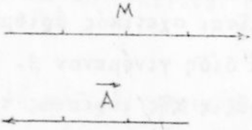
$$^{-}2 \times (^{+}8 - ^{-}3) = (^{-}2 \times ^{+}8) - (^{-}2 \times ^{-}3)$$

Καί ἐπομένως: Ὁ πολλαπλασιασμός τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἐπιμεριστικός ὡς πρός τήν ἀφαίρεσιν τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν.

$$\boxed{\alpha\cdot(\beta-\gamma) = \alpha\cdot\beta - \alpha\cdot\gamma}$$

11.5 Ἀντίστροφοι σχετικοί ἀριθμοί. Ἔστω ὅτι δίδεται ἕνα διάνυσμα ἀναφορᾶς, $\overrightarrow{M} \neq 0$ καί ἐφαρμόζομεν εἰς αὐτό ὡς ἐκτελεστήν τόν σχετικον ἀριθμόν $\frac{^{-}3}{4}$.

Προκύπτει τότε τό διάνυσμα $\overrightarrow{A} = \frac{^{-}3}{4}\overrightarrow{M}$. Ἐάν εἰς τοῦτο ἐφαρμόσωμεν ὡς ἐκτελεστήν τόν $\frac{^{-}4}{3}$ θά προκύψη τό διάνυσμα $\overrightarrow{M} = \frac{^{-}4}{3}\overrightarrow{A}$, ὅπως φαίνεται εἰς τό παραπλεύρως σχῆμα.



$\overrightarrow{A} = \frac{^{-}3}{4}\overrightarrow{M}$, $\overrightarrow{M} = \frac{^{-}4}{3}\overrightarrow{A}$

Ἔχομεν λοιπόν τάς ἰσοδυνάμους σχέσεις:

$$\overrightarrow{A} = \frac{^{-}3}{4}\overrightarrow{M} \Longleftrightarrow \overrightarrow{M} = \frac{^{-}4}{3}\overrightarrow{A}$$

Ἀπό τήν $\overrightarrow{M} = \frac{^{-}4}{3}\overrightarrow{A}$ ἀντικαθιστῶντες τόν $\overrightarrow{A}$ μέ τί ἴσον του $\frac{^{-}3}{4}\overrightarrow{M}$ λαμβάνομεν:

$$\overrightarrow{M} = \frac{^{-}4}{3}\times\left(\frac{^{-}3}{4}\right)\overrightarrow{M} = \left(\frac{^{-}4}{3}\times\frac{^{-}3}{4}\right)\overrightarrow{M} \quad \text{καί:}$$

$$^{+}1 = \frac{^{-}4}{3} \times \frac{^{-}3}{4} \quad \left(\delta\iota\acute{o}\tau\iota\ ^{+}1\vec{M} = \left(\frac{^{-}4}{3} \times \frac{^{-}3}{4}\right)\vec{M}\right)$$

Οἱ ἀριθμοί λοιπόν $\frac{^{-}4}{3}$ καί $\frac{^{-}3}{4}$ ἔχουν γινόμενον $^{+}1$.

Τό ἴδιον συμβαίνει καί μέ τούς ἀριθμούς:

$$^{+}7 \quad \text{καί} \quad ^{+}\frac{1}{7}\ , \quad ^{+}7 \times ^{+}\frac{1}{7} = ^{+}1 \quad \text{κ.λ.π.}$$

καί γενικῶς μέ τούς α καί $\frac{1}{\alpha}$ ($\alpha \neq 0$, σχετικός)

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$$

Οἱ ἀριθμοί α καί $\frac{1}{\alpha}$ λέγονται ἀντίστροφοι ἀριθμοί καί ἔχουν γινόμενον τήν θετικήν μονάδα. Ἡ ἰδιότης αὐτή τῶν ἀντιστρόφων ἀριθμῶν εἶναι χαρακτηριστική.

Πραγματικά, ἐάν:

$$\alpha\beta = 1\ , \ \text{τότε καί}\ \ \beta = \frac{1}{\alpha}\ ,$$

ἤτοι ὁ β εἶναι ἀντίστροφος τοῦ α.

Οἱ ἀντίστροφοι ἀριθμοί εἶναι ἀπαραιτήτως ὁμόσημοι, ἀφοῦ ἔχουν γινόμενον θετικόν ($^{+}1$). √

§ 12. Διαίρεσις.

12.1 Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x = \beta$. (α,β σχετικοί , $\alpha \neq 0$).

Ζητεῖται σχετικός ἀριθμός x, ὥστε πολλαπλασιαζόμενος μέ τόν α νά δίδη γινόμενον β.

Ἡ πρᾶξις τῆς εὑρέσεως τοῦ x λέγεται διαίρεσις, ὁ β λέγεται διαιρετέος, ὁ α διαιρέτης καί ὁ ζητούμενος x λέγεται πηλίκον καί συμβολίζεται μέ β : α. Ἔχομεν λοιπόν τήν ἰσοδυναμίαν: $\beta : \alpha = x \iff \alpha x = \beta$.

Πολλαπλασιάζοντες τά δύο μέλη τῆς $\alpha x = \beta$ μέ τόν ἀντίστροφον τοῦ α, δηλ. ἐπί $\frac{1}{\alpha}$, ἔχομεν:

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha x = \frac{1}{\alpha}\beta \quad \text{ἤ} \quad x = \frac{1}{\alpha}\cdot\beta \quad \left(\text{διότι}\ \frac{1}{\alpha}\cdot\alpha = 1\right)$$

Ἑπομένως: Τό πηλίκον δύο σχετικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴσον πρός τό γινόμενον τοῦ διαιρετέου μέ τόν ἀντίστροφον τοῦ διαιρέτου.

Καί ἐπειδή δύο ἀντίστροφοι ἀριθμοί εἶναι ὁμόσημοι ἰσχύει καί εἰς τήν διαίρεσιν ὁ κανών τῶν προσήμων καί τῶν ἀπολύτων τιμῶν, ὅπως καί εἰς τόν πολλαπλασιασμόν, ἤτοι:

Τό πηλίκον δύο σχετικῶν ἀριθμῶν εἶναι θετικόν μέν, ἐάν εἶναι ὁμόσημοι, ἀρνητικόν δέ ἐάν εἶναι ἑτερόσημοι ἡ δέ ἀπόλυτος τιμή του εἶναι ἴση μέ τό πηλίκον τῶν ἀπολύτων τιμῶν των.

Ἄν ὁ διαιρετέος εἶναι μηδέν, τότε τό πηλίκον, μέ $\alpha \neq 0$, εἶναι πάντοτε μηδέν. $(0 : \alpha = 0)$.

Παραδείγματα: α) $^-5 : {}^+7 = {}^-5 \times \frac{^+1}{7} = \frac{^-5}{7}$ β) $\frac{^+2}{3} : \frac{^-4}{5} = \frac{^+2}{3} \times \frac{^-5}{4} = \frac{^-5}{6}$

γ) $^+1 : \frac{^-1}{3} = {}^+1 \times {}^-3 = {}^-3$ δ) $^+2\,\frac{1}{3} : {}^-3\,\frac{1}{2} = \frac{^+7}{3} : \frac{^-7}{2} = \frac{^+7}{3} \times \frac{^-2}{7} = \frac{^-2}{3}$

ε) $0 : \frac{^-2}{3} = 0 \times \frac{^-3}{2} = 0$.

Καί γενικῶς $\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$ καί $|\alpha : \beta| = |\alpha| : |\beta|$

Τό γινόμενον $\beta \cdot \frac{1}{\alpha}$ γράφεται: $\beta \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$ καί λέγεται ἀλγεβρικόν κλάσμα.

12.1 Ἀλγεβρικά κλάσματα: Ἐπειδή κάθε ἀλγεβρικόν κλάσμα εἶναι πηλίκον διαιρέσεως μέ διαιρετέον τόν ἀριθμητήν καί διαιρέτην τόν παρονομαστήν, ἐφαρμόζομεν εἰς αὐτό τόν κανόνα τῶν προσήμων τῆς διαιρέσεως καί τοῦ δίδομεν τήν συνήθη μορφήν τοῦ ρητοῦ σχετικοῦ ἀριθμοῦ

Παραδείγματα:

α) $\frac{^+3}{^+4} = {}^+3 : {}^+4 = \frac{^+3}{4}$, β) $\frac{^-3}{^-4} = {}^-3 : {}^-4 = \frac{^+3}{4}$, γ) $\frac{^+3}{^-4} = {}^+3 : {}^-4 = \frac{^-3}{4}$

12.3 Σύνθετα ἀλγεβρικά κλάσματα. Ὅπως ὑπάρχουν σύνθετα ἀριθμητικά κλάσματα, ἔτσι ὑπάρχουν καί σύνθετα ἀλγεβρικά κλάσματα. Ἐάν π.χ. εἰς τήν λύσιν τῆς ἐξισώσεως:

$$\alpha x = \beta \Longleftrightarrow x = \frac{\beta}{\alpha},$$

έχομεν $\alpha = \frac{^-3}{4}$ καί $\beta = \frac{^-5}{6}$, τότε : $x = \frac{\frac{^-3}{4}}{\frac{^-5}{6}}$.

Πολλαπλασιάζοντες τούς ὅρους τοῦ συνθέτου αὐτοῦ κλάσματος ἐπί 12 ἔχομεν.

$$\frac{^+12 \times \frac{^-3}{4}}{^+12 \times \frac{^-5}{6}} = \frac{^-9}{^-10} = \frac{^+9}{10}.$$

Τά σύνθετα λοιπόν ἀλγεβρικά κλάσματα μετατρέπονται εἰς ἁπλᾶ, ὅπως καί τά σύνθετα ἀριθμητικα ἀρκεῖ νά τηρῆται ὁ κανών τῶν προσήμων τοῦ πολλαπλασιασμο καί τῆς διαιρέσεως.

§ 13. Δυνάμεις τῶν ρητῶν σχετικῶν ἀριθμῶν.

13.1 Αἱ δυνάμεις τῶν ρητῶν σχετικῶν ἀριθμῶν μέ ἐκθέτας ἀκεραίους ἀριθμητικούς (τῆς ἀριθμητικῆς) ὁρίζονται ὅπως καί αἱ δυνάμεις τῶν ρητῶν ἀριθμῶν τῆς ἀριθμητικῆς

$\alpha \times \alpha = \alpha^2$, $\alpha \times \alpha \times \alpha = \alpha^3$, $\alpha \times \alpha \times \ldots \times \alpha = \alpha^\mu$ (μ παράγοντες).

καί ὑπολογίζονται, ὅπως εἰς τήν αριθμητικήν, ἀρκεῖ νά τηροῦνται οἱ κανόνες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν πρασημων.

Παραδείγματα:

α) $(^-1)^2 = {}^+1$, $(^-1)^3 = {}^-1$, $(^-1)^{2\nu} = {}^+1$, $(^-1)^{2\nu+1} = {}^-1$

β) $(^-5)^2 = {}^+(5^2) = {}^+25$, $(^-5)^3 = {}^-(5^3) = {}^-125$, $(^-5)^4 = {}^+(5^4) = {}^+625$.

$(^-5)^{2\nu} = {}^+(5^{2\nu})$, $(^-5)^{2\nu+1} = {}^-(5^{2\nu+1})$

γ) $(^+1)^\nu = {}^+1^\nu$, $(^+2)^5 = {}^+(2^5) = {}^+32$, $(^+2)^\nu = {}^+(2^\nu)$

Ἀπό τούς ἀνωτέρω ὁρισμούς καί τά παραδείγματα συμπεραίνομεν τά ἀκόλουθα:

α) Αἱ γνωσταί ἰδιότητες τῶν δυνάμεων πού ἰσχύουν εἰς τήν ἀριθμητικήν ἰσχύουν καί εἰς τούς σχετικούς ἀριθμούς.

$\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$, $\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$, $(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)^\mu = \alpha^\mu \cdot \beta^\mu \cdot \gamma^\mu$,

$(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu \cdot \nu}$ $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\mu = \frac{\alpha^\mu}{\beta^\mu}$

β) Αἱ δυνάμεις τῶν θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε ἀριθμοί θετικοί καί ὑπολογίζονται ὅπως αἱ ἀντίστοιχοι δυνάμεις τῶν ἀριθμῶν τῆς ἀριθμητικῆς

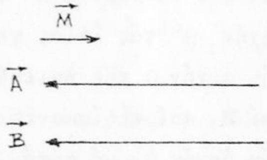
$$({}^{+}2)^{\mu} = {}^{+}(2^{\mu})$$

γ) Αἱ δυνάμεις τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμοί θετικοί μέν, ἐάν ὁ ἐκθέτης εἶναι ἄρτιος (ἄρτιον πλῆθος ἀρνητικῶν παραγόντων) καί ἀρνητικοί ἐάν ὁ ἐκθέτης εἶναι περιττός (περιττόν πλῆθος ἀρνητικῶν παραγόντων), αἱ δέ ἀπόλυτοι τιμαί των εἶναι ἴσαι πρός τάς ἀντιστοίχους δυνάμεις τῶν ἀπολύτων τιμῶν των.

§ 14. Σύγκρισις τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν.

14.1 Ἴσοι σχετικοί ἀριθμοί. Δύο σχετικοί ἀριθμοί ἤ εἶναι ἴσοι ἤ εἶναι ἄνισοι.

Ἐάν δύο σχετικοί ἀριθμοί εἶναι ἴσοι, παριστάνουν τά μέτρα δύο ἴσων διανυσμάτων, ὡς πρός τό ἴδιον διάνυσμα ἀναφορᾶς.



Οἱ σχετικοί ἀριθμοί α καί β εἶναι ἴσοι ἐάν

$\vec{A} = \alpha\vec{M}$, $\vec{B} = \beta\vec{M}$ καί $\vec{A} = \vec{B}$

Εἰς τό παραπλεύρως σχῆμα ἔχομεν:

$\vec{A} = \frac{-7}{2}\vec{M}$, $\vec{B} = \frac{-7}{2}\vec{M}$ καί $\vec{A} = \vec{B}$, ἐπομένως: $\frac{-7}{2} = \frac{-7}{2}$ καί

$$\frac{-7}{2} - \frac{-7}{2} = \frac{-7}{2} + \frac{+7}{2} = 0$$

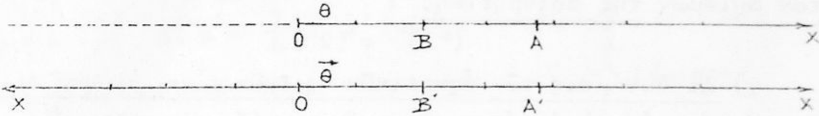
Ἐάν λοιπόν $\alpha = \beta$, τότε καί $\alpha - \beta = 0$.

Ἀντιστρόφως: ἐάν $\alpha - \beta = 0$, τότε $\alpha = \beta + 0 = \beta$

Χαρακτηριστική λοιπόν ἰδιότης τῶν ἴσων σχετικῶν ἀριθμῶν εἶναι ὅτι ἔχουν διαφοράν μηδέν.

$$\boxed{\alpha = \beta \Longleftrightarrow \alpha - \beta = 0}$$

<u>14.2 Ἄνισοι σχετικοί ἀριθμοί.</u> Τούς ρητούς ἀριθμούς τῆς ἀριθμητικῆς παρεστήσαμεν μέ σημεῖα ἐπί μιᾶς ἡμιευθείας Ox



καί συμφωνήσαμεν ὅτι ὁ ρητός ἀριθμός α τῆς ἀριθμητικῆς εἶναι μεγαλύτερος ἤ μικρότερος ἀπό τόν β καθόσον τό σημεῖον Α πού τόν παριστάνει ἐπάνω εἰς τήν ἡμιευθεῖαν Ox εὑρίσκεται δεξιώτερα ἤ ἀριστερώτερα ἀπό τό σημεῖον Β πού παριστάνει τόν β. Π.χ. εἰς τήν ἀνωτέρω ἡμιευθεῖαν Ox , ὅπου μέ μονάδα $\theta = 1$ cm , τό σημεῖον Α ἔχει τετμημένην τόν ἀριθμόν $\alpha = 3,7$ καί τό Β τόν ἀριθμόν 2. Ἔχομεν:

$$3,7 > 2 \quad \text{καί} \quad 2 < 3,7$$

Ἄς πάρωμεν τώρα ἐπάνω εἰς τόν ἄξονα $x'x$ μέ διάνυσμα ἀναφορᾶς τό $\vec{\theta}$, ἴσον κατά γεωμετρικόν μέγεθος μέ 1 cm, τά σημεῖα Α΄ μέ τετμημένην $^+3,7$ καί Β΄ μέ τετμημένην $^+2$. Βλέπομεν ὅτι τά σημεῖα Α΄ καί Β΄ τοῦ ἄξονος $x'x$ ἀπέχουν ἀπό τήν ἀρχήν Ο τάς ἰδίας γεωμετρικάς ἀποστάσεις που ἀπέχουν ἀπό τήν ἀρχήν Ο τῆς ἡμιευθείας Ox τά ἀντίστοιχα των σημεῖα Α καί Β καί εὑρίσκονται εἰς τήν ἰδίαν σχετικήν θέσιν ὡς πρός τήν ἀρχήν Ο μέ αὐτά, δηλαδή πρός τά δεξια. Δυνάμεθα λοιπόν νά ταυτίσωμεν τούς σχετικούς ἀριθμους $^+3,7$ καί $^+2$ ἀντιστοίχως, μέ τούς ἀριθμούς 3,7 καί 2 της ἀριθμητικῆς. Καθε λοιπόν θετικός ἀριθμός θά ταυτισθῆ μέ τόν ἀντίστοιχόν του τῆς ἀριθμητικῆς καί διά τοῦτο εἰς τούς θετικούς ἀριθμούς ἠμποροῦμεν νά παραλείπωμεν τό προσημον +. Ἐπειδή δέ $3,7 > 2$, θά εἶναι καί $^+3,7 > {}^+2$. Ἄρα:

α) <u>Ἀπό δύο θετικούς ἀριθμούς μεγαλύτερος εἶναι ἐκεῖνος πού ἔχει τήν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν</u>· ἐπίσης:

β) Πᾶς θετικός ἀριθμός εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τό μηδέν.
Ὅπως ἀπό δύο θετικούς ἀριθμούς μεγαλύτερος εἶναι ἐκεῖνος πού τό παραστατικόν του σημεῖον ἐπί τοῦ ἄξονος εὑρίσκεται δεξιώτερα ἐπάνω εἰς τόν ἡμιάξονα Ox, ἔτσι καί ἀπό δύο ἀρνητικούς ἀριθμούς, ἤ ἀπό ἕνα θετικόν καί ἕνα ἀρνητικόν, μεγαλύτερος εἶναι ἐκεῖνος πού τό παραστατικόν του σημεῖον εὑρίσκεται δεξιώτερα ἐπάνω εἰς τόν ἄξονα x΄x.
Θά ἔχωμεν λοιπόν:

$^-3 > ^-5$, $^+1 > ^-2$, $0 > ^-3$ Ἐπομένως:

γ) Ἀπό δύο ἀρνητικούς ἀριθμούς μεγαλύτερος εἶναι ἐκεῖνος πού ἔχει τήν μικροτέραν ἀπόλυτον τιμήν.

δ) Ἀπό δύο ἑτεροσήμους σχετικούς ἀριθμούς μεγαλύτερος εἶναι ὁ θετικός.

ε) Κάθε ἀρνητικός ἀριθμός εἶναι μικρότερος ἀπό τό μηδέν.
Ἀπό τά παραπάνω ἕπεται ἡ ἰσοδυναμία:

$$\boxed{\alpha > \beta \iff \alpha - \beta > 0}$$

Π.χ. $^+5 > ^+3$ καί $^+5 - ^+3 = ^+2 > 0$

$^-3 > ^-5$ καί $^-3 - ^-5 = ^+2 > 0$

$^+2 > ^-3$ καί $^+2 - ^-3 = ^+5 > 0$

Ὅτε ἕνας σχετικός ἀριθμός α εἶναι μεγαλύτερος ἀπό ἕνα ἄλλον σχετικόν β, ὅταν, καί μόνον ὅταν ἡ διαφορά α - β εἶναι ἀριθμός θετικός.
Μέ ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι ἕνας σχετικός ἀριθμός γ εἶναι μικρότερος ἀπό ἄλλον σχετικόν δ ὅταν, καί μόνον ὅταν ἡ διαφορά γ - δ εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός.
Π.χ.

$^-7 < ^-3$ καί $^-7 - ^-3 = ^-4 < 0$

$^+2 < ^+5$ καί $^+2 - ^+5 = ^-3 < 0$

$^-1 < ^+2$ καί $^-1 - ^+2 = ^-3 < 0$

καί τήν ἰσοδυναμίαν:

$$\boxed{\alpha < \beta \iff \alpha - \beta < 0}$$

Ὅλα αὐτά δικαιολογοῦν ἐπίσης καί τά ἑξῆς:

Ἀντί α = θετικός ἀριθμός, γράφομεν συμβολικῶς $\alpha > 0$

" α = ἀρνητικός " " " $\alpha < 0$

" α καί β ὁμόσημοι ἀριθμοί " " $\alpha\beta > 0$

" α καί β ἑτερόσημοι ἀριθ. " " $\alpha\beta < 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πολλαπλασιασμός.

1) Νά εὑρεθοῦν τά γινόμενα:

$^{-}3 \times {}^{+}5$, $^{-}1 \times {}^{-}3$, $^{-}7 \times \frac{^{+}2}{3}$, $\frac{^{-}5}{7} \times \frac{^{+}14}{5}$, $^{-}2\frac{1}{3} \times {}^{-}3\frac{1}{2}$

2) Νά ὑπολογισθοῦν αἱ παραστάσεις

$\alpha\beta - \beta\gamma + \alpha\beta\gamma$, $\alpha\gamma + \alpha - \alpha\beta$, $^{+}3\alpha\beta - {}^{-}2\beta\gamma + \alpha\gamma$,

ὅταν: $\alpha = {}^{-}2$, $\beta = {}^{+}3$, $\gamma = {}^{-}5$.

3) Τό γινόμενον $^{-}3 \cdot {}^{+}2 \cdot {}^{-}1 \cdot {}^{-}5 \cdot {}^{+}4$ νά μετασχηματισθῇ εἰς γινόμενον

α) ἑνός ἀρνητικοῦ παράγοντος καί ἑνός θετικοῦ.

β) τριῶν ἀρνητικῶν παραγόντων.

γ) τριῶν θετικῶν καί ἑνός ἀρνητικοῦ.

δ) πέντε ἀρνητικῶν παραγόντων.

Νά αἰτιολογηθῇ ἡ κάθε περίπτωσις καί νά ἐξετασθῇ ἐάν κάθε φορά ὑπάρχῃ καί δευτέρα λύσις.

4) Ὁ ἀριθμός $^{-}36$ νά γίνῃ γινόμενον:

α) Ἑνός ἀρνητικοῦ καί ἑνός θετικοῦ παράγοντος.

β) Τριῶν ἀρνητικῶν παραγόντων.

γ) Τριῶν θετικῶν καί ἑνός ἀρνητικοῦ παράγοντος.

Νά ἐξετασθῇ κάθε φοράν ἐάν ὑπάρχῃ καί ἄλλη λύσις.

5) Ὁ ἀριθμός $^{+}60$ νά γίνῃ γινόμενον:

1ον Τεσσάρων ἀρνητικῶν παραγόντων.

2ον δύο θετικῶν καί δύο ἀρνητικῶν παραγόντων.

3ον δύο θετικῶν καί ἑνός ἀρνητικοῦ. (εἶναι δυνατόν;)

6) Νά εὑρεθοῦν τά ἀκόλουθα γινόμενα, χωρίς προηγουμένως νά ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις τῶν παρενθέσεων:

$^{-}12 \times \left(\frac{^{-}2}{3} + \frac{^{+}1}{4} - \frac{^{-}3}{4}\right)$, $\left(\frac{^{+}2}{3} - \frac{^{+}1}{6} + \frac{^{-}7}{12} - {}^{+}1\right) \times {}^{+}24$

$({}^{-}2+{}^{+}3)\times({}^{-}5-{}^{-}4)$, $\left(\frac{{}^{-}2}{3}-\frac{5}{6}+{}^{+}1\right)\times({}^{-}24+{}^{-}12)$

Διαίρεσις

7) Νά εὑρεθοῦν τά πηλίκα:

α) ${}^{-}35:{}^{-}7$, ${}^{-}35:{}^{+}7$, ${}^{+}35:{}^{-}7$, ${}^{+}35:{}^{+}7$

β) $\frac{{}^{-}5}{8}:\frac{{}^{-}1}{4}$, $\frac{{}^{-}5}{8}\cdot\frac{{}^{+}1}{2}$, $\frac{{}^{+}5}{7}:{}^{-}2\,\frac{1}{3}$, ${}^{-}2\,\frac{3}{5}:{}^{-}5\,\frac{2}{3}$

γ) $\left(\frac{{}^{-}1}{2}+\frac{{}^{+}2}{3}-\frac{{}^{+}1}{4}\right):\left(\frac{{}^{-}5}{6}-{}^{+}1\right)$, ${}^{-}18:\left(\frac{{}^{-}2}{3}-{}^{-}5\,\frac{1}{2}\right)$

Σύνθετα κλάσματα.

8) Νά γίνουν ἁπλᾶ τά σύνθετα κλάσματα:

$$\frac{\frac{{}^{-}1}{2}}{\frac{{}^{+}3}{4}},\quad \frac{{}^{-}5}{\frac{{}^{+}2}{3}},\quad \frac{\frac{{}^{+}3}{4}}{{}^{-}6},\quad \frac{{}^{+}1-\frac{{}^{-}2}{3}+\frac{{}^{+}1}{4}}{\frac{{}^{-}2}{3}-\frac{{}^{+}1}{2}+{}^{+}1},\quad \frac{\frac{{}^{-}5}{6}+\frac{{}^{+}3}{4}+{}^{+}1}{\frac{{}^{-}5}{8}+\frac{{}^{+}2}{3}-1},\quad \frac{{}^{-}2}{\frac{1-\frac{{}^{+}2}{3}}{\frac{{}^{-}1}{2}}}$$

$$\left(\frac{\frac{{}^{-}1}{2}-\frac{{}^{-}2}{3}+1}{\frac{{}^{+}5}{6}-{}^{-}1}\right):\left(\frac{\frac{{}^{+}5}{8}-\frac{{}^{-}1}{6}}{\frac{{}^{-}1}{3}+\frac{{}^{+}1}{2}-{}^{+}1}\right)$$

Προβλήματα.

9) Ἕνα κινητόν κινεῖται μέ σταθεράν ταχύτητα 5 m/sec ἐπάνω εἰς ἕνα ἄξονα κατά τήν θετικήν φοράν. Ἐάν κατά μίαν στιγμήν εὑρίσκετο εἰς τήν ἀρχήν Ο, ποία θά εἶναι ἡ τετμημένη του μετά 4 sec ., καί ποία ἦτο αὐτή πρό 4 sec ;
Σημείωσις: Ἡ ταχύτης προσημαίνεται θετικῶς ἤ ἀρνητικῶς , καθόσον τό κινητόν κινεῖται κατά τήν θετικήν ἤ τήν ἀρνητικήν φοράν. Ὁ χρόνος προσημαίνεται θετικός ἤ ἀρνητικός καθόσον ἀναφέρεται εἰς τό μέλλον ἤ εἰς τό παρελθόν.

10) Ἕνα κινητόν κινεῖται ἐπάνω εἰς ἕνα ἄξονα κατά τήν ἀρνητικήν φοράν μέ σταθεράν ταχύτητα 5 m/sec. Ἐάν κατά τινα στιγμήν εὑρίσκετο εἰς τήν ἀρχήν Ο, ποία θά εἶναι ἡ τετμημένη του μετά 4 soc καί ποία ἦτο πρό 4 sec;

Σύγκρισις τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν.

11) Νά τεθῆ τό κατάλληλον σημεῖον ἀνισότητος μεταξύ τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν:

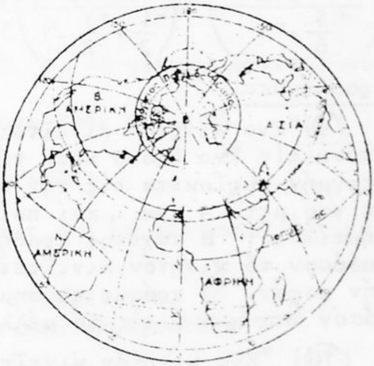
${}^{+}1$ καί ${}^{-}2$, $\frac{{}^{+}5}{6}$ καί $\frac{{}^{+}7}{12}$, ${}^{-}3$ καί ${}^{-}5$, ${}^{-}1$ καί $\frac{{}^{-}1}{2}$, ${}^{-}3$ καί $\frac{{}^{+}1}{2}$, ${}^{-}2\,\frac{1}{3}$ καί ${}^{-}2{,}25$, 0 καί ${}^{+}12$, 0 καί ${}^{-}11$, ${}^{-}1{,}333\ldots$ καί ${}^{-}1{,}222\ldots$

$^{-}0,75$ καί $^{-}1\frac{3}{4}$, $^{+}0,001$ καί $^{-}1000$.

(12) Εἰς τά ἀνωτέρω ζεύγη σχετικῶν ἀριθμῶν νά εὑρεθῆ τό ὑπόλοιπον ἀφαιρέσεως 1ον τοῦ μεγαλυτέρου ἀπό τόν μικρότερον καί δεύτερον τοῦ μικροτέρου ἀπό τόν μεγαλύτερον. Εἰς τήν πρώτην περίπτωσιν τό ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι πάντοτε ἀρνητικόν, εἰς δέ τήν δευτέραν θετικόν (διατί ;).

§ 15. Καρτεσιαναί συντεταγμέναι εἰς τό ἐπίπεδον.

15.1 Γεωγραφικαί συντεταγμέναι σημείου. Ὅπως εἶναι γνωστόν, οἱ γεωγράφοι προσδιορίζουν τήν θέσιν ἑνός σημείου Α ἐπάνω εἰς τήν ἐπιφάνειαν τῆς γῆς, καθώς καί ἐπάνω εἰς τόν χάρτην πού τήν ἀπεικονίζει, μέ δύο ἀριθμούς πού λέγονται γεωγραφικαί συντεταγμέναι τοῦ σημειου αὐτοῦ. Ἡ μία λέγεται γεωγραφικόν μῆκος καί προσδιορίζει τόν γήϊνον μεσημβρινόν πού περνᾶ ἀπό τό σημεῖον Α (σχ. παραπλεύρως) καί ἡ ἄλλη γεωγραφικόν πλάτος καί προσδιορίζει τόν γήϊνον παράλληλον πού περνᾶ ἀπό τό σημεῖον Α.

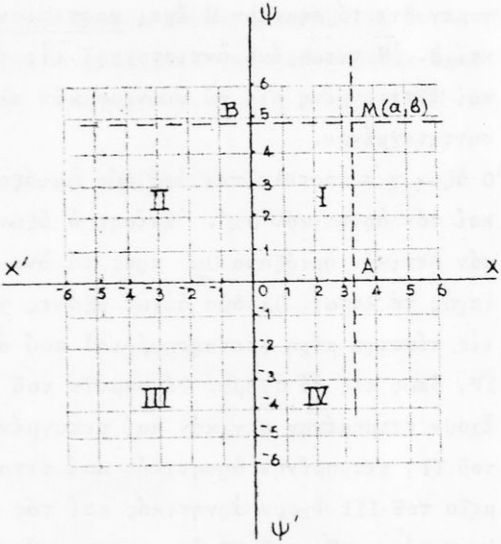


Οἱ μεσημβρινοί εἶναι κυκλικαί τομαί τῆς γηΐνης σφαίρας, μέ ἐπίπεδα διερχόμενα ἀπό τούς δύο πόλους καί εἶναι ἀριθμημένοι ἀπό 0^{o} ἕως 180^{o} ἀνατολικά καί δυτικά ἀπό τόν μεσημβρινόν τοῦ ἀστεροσκοπείου τοῦ Γκρήνουΐτς, πλησίον τοῦ Λονδίνου. Τό Γκρήνουΐτς ἔχει γεωγραφικόν μῆκος 0^{o}.

Οἱ παράλληλοι εἶναι κυκλικαί τομαί τῆς γηΐνης σφαίρας μέ ἐπίπεδα κάθετα πρός τούς μεσημβρινούς καί παράλληλα πρός τόν γήϊνον ἰσημερινόν. Ἀριθμοῦνται καί αὐτοί εἰς μοίρας ἀπό 0^{o}

ἕως 90° πρός βορρᾶν καί 0° ἕως 90° πρός νότον. Οἱ τόποι τοῦ ἰσημερινοῦ ἔχουν γεωγραφικόν πλάτος 0°. Τό σημεῖον Α εἰς τό σχῆμα ἔχει γεωγραφικόν μῆκος 60° ἀνατολικόν καί πλάτος 30° βόρειον.

15.2 Καρτεσιαναί συντεταγμέναι: Ἄς λάβωμεν τώρα δύο ὀρθογωνίους ἄξονας εἰς τετραγωνισμένον χαρτί, ὅπως φαίνεται εἰς τό παραπλεύρως σχῆμα (προτιμοῦμεν τετραγωνισμένον κατά χιλιοστόν). Ὁ ἄξων x΄x ἀντιστοιχεῖ πρός τόν ἰσημερινόν τῶν γεωγραφικῶν συνετατγμένων καί ὁ ἄξων y΄y πρός τόν μεσημβρινόν τοῦ Γκρήνουϊτς.



Κάθε σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου ἀνήκει εἰς μίαν εὐθεῖαν πού εἶναι παράλληλος πρός τόν ἄξονα y΄y καί τέμνει καθέτως τόν ἄξονα x΄x Ἐάν λάβωμεν μίαν μονάδα μετρήσεως (π.χ. 5 mm, ὅπως εἰς τό σχῆμα), τό σχετικόν μέτρον $\overline{OA} = \alpha$ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OA}$ λέγεται τετμημένη τοῦ σημείου Μ. Ὅλα τά σημεῖα τῆς εὐθείας ΑΜ ἔχουν τήν ἰδίαν τετμημένην α. Τό ἴδιον ὅμως σημεῖον Μ ἀνήκει καί εἰς τήν εὐθεῖαν ΜΒ, παράλληλον πρός τόν ἄξονα x΄x καί κάθετον πρός τόν y΄y εἰς τό σημεῖον Β.

Μέ τήν ἰδίαν μονάδα μετρήσεως εὑρίσκομεν τό σχετικόν μέτρον $\overrightarrow{OB} = β$ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OB}$, τό ὁποῖον ὀνομάζομεν <u>τεταγμένην</u> τοῦ σημείου Μ. Ὅλα τά σημεῖα πού εὑρίσκονται ἐπάνω είς τήν εὐθεῖαν ΜΒ ἔχουν τήν ἰδίαν τεταγμένην β. Αἱ εὐθεῖαι ΑΜ καί ΒΜ εἶνοι τελείως ὡρισμέναι, ὅταν γνωρίζωμεν τούς ἀριθμούς α καί β καί τέμνονται είς τό σημεῖον Μ πού ἔχει τετμημένην α καί τεταγμένην β. Γράφομεν συμβολικά Μ(α,β) καί λέγομεν ὅτι τό σημεῖον Μ ἔχει <u>καρτεσιανάς συντεταγμένας</u>* α καί β. Ἡ τετμημένη ἀντιστοιχεῖ είς τό γεωγραφικόν μῆκος καί ἡ τεταγμένη είς τό γεωγραφικόν πλάτος τῶν γεωγραφικῶν συντεταγμένων.

Ὁ ἄξων x΄x ἀποτελεῖται ἀπό δύο ἡμιάξονας, τόν θετικόν Οx καί τόν ἀρνητικόν Οx΄. Ἐπίσης ὁ ἄξων y΄y ἀποτελεῖται ἀπό τόν θετικόν ἡμιάξονα Οy πρός τά ἄνω καί τόν ἀρνητικόν Οy΄ (πρός τά κάτω). Οἱ δύο αὐτοί ἄξονες χωρίζοουν τό ἐπίπεδον είς τέσσερα μέρη (τεταρτημόρια) πού ἀριθμοῦνται I, II, III, IV, ὅπως είς τό σχῆμα. Τά σημεῖα τοῦ πρώτου τεταρτημορίου ἔχουν τετμημένην θετικήν καί τεταγμένην θετικήν. Τά σημεῖα τοῦ II, τετμημένην ἀρνητικήν καί τεταγμένην θετικήν. Τά σημεῖα τοῦ III ἔχουν ἀρνητικάς καί τάς δύο συντεταγμένας. Τέλος, τά σημεῖα τοῦ IV ἔχουν τετμημένην θετικήν καί τεταγμένην ἀρνητικήν.

Τά σημεῖα τοῦ ἄξονος x΄x ἔχουν τεταγμένην μηδέν.

Τά σημεῖα τοῦ ἄξονος y΄y ἔχουν τετμημένην μηδέν.

Τό σημεῖον Ο τῆς ἀρχῆς ἔχει τετμημένην μηδέν καί τεταγμένην μηδέν.

<u>15.3 Διατεταγμένα ζεύγη.</u>

Ἡ τετμημένη καί ἡ τεταγμένη ἑνός σημείου ἀποτελοῦν ἕνα δια-

---

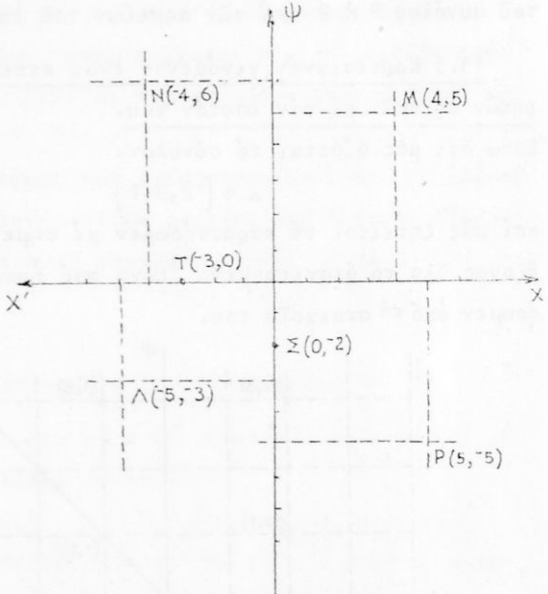
* Καρτέσιος (Descartes). Μέγας γάλλος φιλόσοφος καί μαθηματικός (1596-1650). Εἶναι ὁ δημιουργούς τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας καί συγγραφεύς σπουδαίων φυσικομαθηματικῶν καί φιλοσοφικῶν ἔργων.

τεταγμένον ζεῦγος ἀπό ρητούς ἀριθμούς,ὅταν ληφθοῦν μέ τήν σειράν, πρῶτον τετμημένη καί δεύτερον τεταγμένη.

Κάθε διατεταγμένον ζεῦγος ἀπό ρητούς σχετικούς ἀριθμούς παριστάνει ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου. Ὑπάρχουν ὅμως καί σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου πού δέν εἶναι δυνατόν νά παρασταθοῦν μέ διατεταγμένα ζεύγη ρητῶν ἀριθμῶν, ἀλλά χρειάζονται διά τήν παράστασίν των τούς ἀσυμμέτρους ἀριθμούς, περί τῶν ὁποίων ὡμιλήσαμεν καί ἄλλοτε. Τά σημεῖα ταῦτα ἠμποροῦν νά παρασταθοῦν, πρός τό παρόν, κατά προσέγγισιν μέ ζεύγη ρητῶν ἀριθμῶν.

Παράδειγμα.

Εἰς τό παραπλεύρως σχῆμα ἐσημειώσαμεν τά σημεῖα Μ,Ν,Λ,Ρ,Σ,Τ πού ἔχουν κατά σειράν καρτεσιανάς συντεταγμένας τά διατεταγμένα ζεύγη Μ(4,5) Ν(⁻4,6), Λ(⁻5,⁻3), Ρ(5,⁻5), Σ(0,⁻2), Τ(⁻3,0).



Ἐπάνω εἰς χιλιοστομετρημένον χαρτί ἠμποροῦμεν νά καθορίσωμεν σημεῖα μέ συντεταγμένας μέχρι τοῦ ἑνός δεκάτου καί τοῦ ἑνός εἰκοστοῦ μέ μονάδα τό 1 cm.

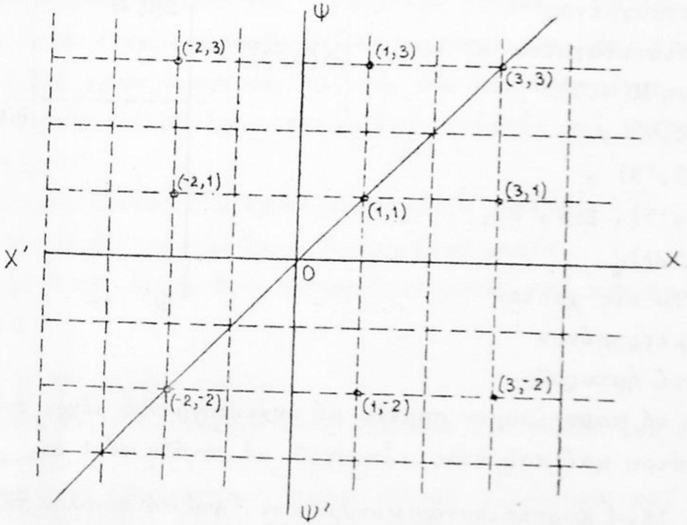
15.4 Καρτεσιασνόν γινόμενον. Ἀπό τό σύνολον τῶν ρητῶν σχετικῶν ἀριθμῶν ἠμποροῦμεν νά κατασκευάσωμεν ἄπειρα διατεταγμένα ζεύγη, τά ὁποῖα ἀποτελοῦν ἕνα νεον σύνολον πού ὀνομάζεται <u>καρτεσιανόν γινόμενον</u> καί συμβολίζεται P × P (Μέ τό P συμβολίζομεν τούς ρητούς σχετικούς ἀριθμούς). Κάθε διατεταγμένον ζεῦγος προσδιορίζει ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου καί ἀντιστρόφως κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ἠμπορεῖ νά παρασταθῆ, ἀκριβῶς ἤ μέ αἰσθητήν προσέγγισιν, ὅσην ἐπιτρέπουν τά ὄργανα μετρήσεως, μέ ἕνα διατεταγμένον ζεῦγος. Ἔχομεν λοιπόν ἀντιστοιχίαν ἕνα πρός ἕνα μεταξύ τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου P × P καί τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου.

<u>15.5 Καρτεσιανόν γινόμενον ἑνός πεπερασμένου συνόλου ρητῶν ἀριθμῶν μέ τόν ἑαυτόν του.</u>

Ἔστω ὅτι μᾶς δίδεται τό σύνολον.

$$A = \{{}^{-}2, 3, 1\}$$

καί μᾶς ζητεῖται νά παραστήσωμεν μέ σημεῖα εἰς ὀρθογωνίους ἄξονας ὅλα τά διατεταγμένα ζεύγη πού ἠμποροῦμεν νά κατασκευάσωμεν ἀπό τά στοιχεῖα του.



Τά ζεύγη αὐτά εἶναι τά ἀκόλουθα ἐννέα:

$$(^-2,^-2)\ ,\ (^-2,3)\ ,\ (^-2,1)\ ,$$
$$(3,^-2)\ ,\ (3,3)\ ,\ (3,1)\ ,$$
$$(1,^-2)\ ,\ (1,3)\ ,\ (1,1)\ .$$

καί σχηματίζονται, ὅπως ἐμάθαμεν εἰς τό καρτεσιανόν γινόμενον τῶν ἀριθμῶν τῆς ἀριθμητικῆς.

Τά ἐννέα αὐτά διατεταγμένα ζεύγη ἀποτελοῦν ἕνα νέον σύνολον τό:

$A \times A = \{(^-2,^-2),(^-2,3),(^-2,1)\ (3,^-2),(3,3)(3,1),(1,^-2),(1,3),(1,1)\}$

Καθένα ἀπό τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου $A \times A$ ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, ὅπως φαίνεται εἰς τό ἀνωτέρω σχῆμα. Τό σύνολον $A \times A$ λέγεται καρτεσιανόν γινόμενον τοῦ συνόλου A.

<u>Παρατήρησις</u>: Ἡ διχοτόμος τῶν τεταρτημορίων I καί III εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ συνόλου τῶν σημείων πού ἀντιστοιχοῦν εἰς τά στοιχεῖα τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου $A \times A$.

§ 16. Ἀπεικονίσεις - Συναρτήσεις.

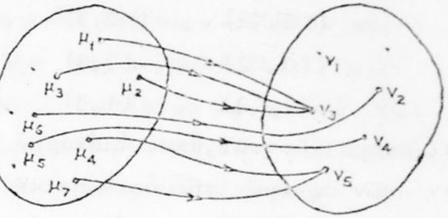
<u>16.1</u> Ἄς παραστήσωμεν μέ M τό σύνολον 7 μαθητῶν καί μέ N τό σύνολον τῶν Κυκλάδων νήσων.

$$M = \{\mu_1,\ \mu_2,\ldots,\ \mu_7\}\ ,\qquad N = \{\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3,\ldots,\ \nu_{23}\}$$

Κατά τάς θερινάς διακοπάς καθένας ἀπό τούς 7 μαθητάς μετέβη πρός παραθερισμόν εἰς μίαν νῆσον. Ἐάν τώρα καλέσωμεν x ἕνα τυχόν στοιχεῖον τοῦ συνόλου M καί y ἕνα τυχόν στοιχεῖον τοῦ συνόλου N, ἠμποροῦμεν νά συνδέσωμεν τά στοιχεῖα τῶν δύο συνόλων μέ τήν σχέσιν:

"y εἶναι νῆσος παραθερισμοῦ τοῦ x"

Ἡ σχέσις αὐτή ἠμπορεῖ νά παρασταθῆ μέ γραμμάς πού ἔχουν τήν ἀρχήν των εἰς ἕνα στοιχεῖον τοῦ συνόλου M καί τό πέρας των



εἰς ἕνα στοιχεῖον τοῦ Ν. Ἡ διεύθυνσις τῆς μεταβάσεως κάθε μαθητοῦ καθορίζεται μέ τό βέλος.

Παρατηροῦμεν ἀμέσως ὅτι μερικοί μαθηταί μετέβησαν εἰς τήν ἰδίαν νῆσον καί ὅτι εἰς μερικάς νήσους δέν μετέβη κανένας μαθητής πρός παραθερισμόν. Λέγομεν τότε ὅτι ἡ σχέσις:

" y = νῆσος παραθερισμοῦ τοῦ x"

ἀπεικονίζει τό σύνολον Μ μέσα εἰς τό σύνολον Ν.

Ἡ σχέσις αὐτή "νῆσος παραθερισμοῦ" λέγεται καί συνάρτησις πού ἀπεικονίζει τό σύνολον Μ <u>μέσα</u> εἰς τό Ν. Τήν συνάρτησιν συμβολίζομεν μέ τό μικρόν γράμμα σ ἤ τό λατινικόν f, γράφομεν δέ: σ(x) = y καί συμβολίζομεν:

$$\boxed{\sigma : M \longrightarrow N : x \longrightarrow \sigma(x) = y}$$

Ἀντί τῶν διαγραμμάτων τοῦ ἀνωτέρω σχήματος πού παριστάνουν

M \ N	ν_1	ν_2	ν_3	ν_4	ν_5	ν_6	ν_7	...
μ_1			+					
μ_2			+					
μ_3			+					
μ_4					+			
μ_5				+				
μ_6		+						
μ_7					+			

μέ κλειστάς γραμμάς τά σύνολα Μ καί Ν καί καλοῦνται διαγράμματα Euler ἤ Venn, ἠμποροῦμεν νά παραστήσωμεν τήν ἰδίαν συνάρτησιν μέ ἕνα πίνακα διπλῆς εἰσόδου, ὅπως εἰς τό σχῆμα τῆς προηγουμένης σελίδος.

Εἰς ἑκάστην γραμμήν τοῦ πίνακος ἀντιστοιχεῖ ἕνας μαθητής καί εἰς ἑκάστην στήλην μία νῆσος. Εἰς τήν διασταύρωσιν τῶν δύο ταινιῶν πού ἀντιστοιχοῦν εἰς τήν γραμμήν τοῦ μαθητοῦ καί εἰς τήν στήλην τῆς νήσου τοῦ παραθερισμοῦ του τοποθετοῦμεν ἕνα μικρόν σταυρόν. Καί ἐδῶ παρατηροῦμεν ὅτι ὑπάρχουν νῆσοι χωρίς μαθητάς παραθεριστάς.

Ἐκεῖνο πού καθορίζει τήν συνάρτησιν εἶναι ὅτι διά κάθε x (δηλ. διά κάθε μαθητήν τοῦ παραδείγματός μας) ὑπάρχει ἕνα μόνον y , δηλαδή μία νῆσος παραθερισμοῦ, ἐνῶ εἰς κάθε y (εἰς κάθε νῆσον) ἠμπορεῖ νά ἀντιστοιχοῦν περισσότερα x (περισσότεροι ἀπό ἕνας μαθηταί)

Παρόμοιαι σχέσεις - συναρτήσεις ὑπάρχουν πολλαί

Παραδείγματα:

1ον "y εἶναι ὁ πατέρας τοῦ x"

2ον "y εἶναι τό ἀνάστημα τοῦ x"

3ον "y εἶναι τό διπλάσιον τοῦ x"

4ον "y εἶναι τό τετράγωνον τοῦ x"

Εἰς τά δύο τελευταῖα παραδείγματα ἀπεικονίζεται ἕνα σύνολον A ἀπό ἀριθμούς, μέσα εἰς ἕνα σύνολον B ἀπό ἀριθμούς. Εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν λέγομεν ὅτι ἔχομεν μίαν ἀριθμητικήν συνάρτησιν.

16.2 Γραφική παράστασις ἀριθμ. συναρτήσεως. Ἄς θεωρήσωμεν τώρα τήν ἀριθμητικήν συνάρτησιν:

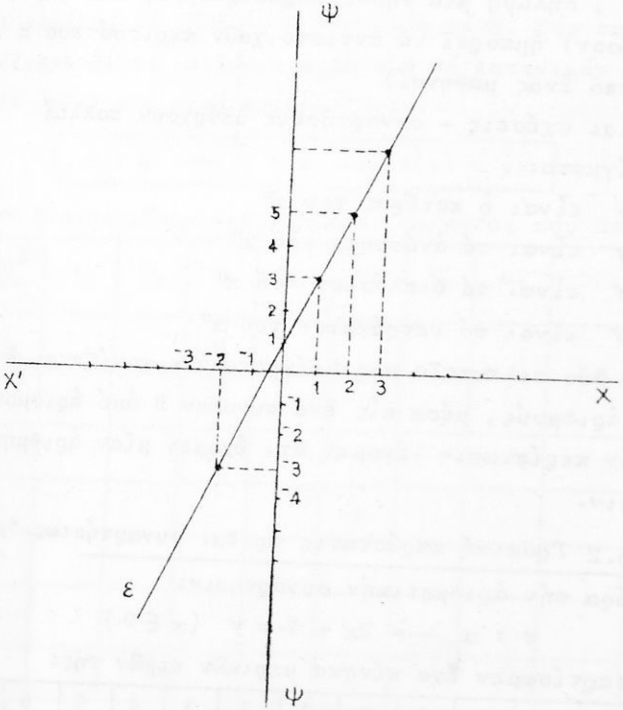
$$\sigma : x \longrightarrow 2x + 1 = y \quad (x \in P)$$

Ἄς καταρτίσωμεν ἕνα πίνακα μερικῶν τιμῶν της:

τιμαί τῆς x	⁻2	⁻1	0	1	2	3	4	5	6	7	...
τιμαί τῆς y	⁻3	⁻1	1	3	5	7	9	11	13	15	...

Παρατηροῦμεν ἐδῶ ὅτι διά κάθε x ὑπάρχει ἕνα καί μόνον y καί ἀντιστρόφως, διά κάθε y , ἴσον μέ ἕνα ρητόν ἀριθμόν, ὑπάρχει ἕνα $x = \frac{y-1}{2}$, τοῦ ὁποίου ἀντίστοιχον εἶναι τό θεωρούμενον y. Θά λέγωμεν εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν, ὅτι ἡ συνάρτησις $2x + 1 = y$ ἀπεικονίζει τό σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ἐπάνω εἰς τόν ἑαυτόν του.

Παρατηροῦμεν ἀκόμη ὅτι ἠμποροῦμεν νά παραστήσωμεν κάθε ζεῦγος (x,y) τιμῶν τῆς ἀνωτέρω ἀριθμητικῆς συναρτήσεως μέ ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου πού ἔχει καρτεσιανάς συντεταγμένας x καί y εἰς ὀρθογωνίους ἄξονας, ὅπως εἰς τό κατωτέρω σχῆμα. Εἰς τόν πίνακα τιμῶν τῆς συναρτήσεως ἐδώσαμεν εἰς τόν x τι-



μάς ἀκεραίας καί βλέπομεν ὅτι τά ἀντίστοιχα σημεῖα τοῦ κάθε διατεταγμένου ζεύγους εὑρίσκονται ὅλα ἐπάνω είς μίαν εὐθεῖαν ε.

Εἶναι εὔκολον νά παρατηρήσωμεν ὅτι καί είς κάθε ἄλλο διατεταγμένον ζεῦγος τιμῶν τῆς συναρτήσεως αὐτῆς, ἔστω καί ἄν ἕνα ἤ καί τά δύο στοιχεῖα του δέν εἶναι ἀκέραιοι, ἀντιστοιχεῖ ἕνα σημεῖον τῆς εὐθείας ε. Καί ἀντίστροφα είς κάθε σημεῖον τῆς εὐθείας ε ἀντιστοιχεῖ ἕνα διατεταγμένον ζεῦγος τῆς ἰδίας συναρτήσεως πού ἠμποροῦμεν νά μετρήσωμεν τά δύο στοιχεῖα του μέ καλήν προσέγγισιν, ὅταν ἐργαζώμεθα ἐπάνω είς χιλιοστομετρημένον χαρτί.

Είς τήν ἀριθμητικήν συνάρτησιν

$$\sigma : x \longrightarrow \sigma(x) = y$$

$$\sigma : x \longrightarrow 2x + 1 = y$$

Τό γράμμα x πού ἀντικαθίσταται ἀπό ἕνα οἱονδήποτε ῥητόν ἀριθμόν λέγεται <u>μεταβλητή</u>. Ἡ ἀντίστοιχος τιμή τοῦ y εἶναι τό δεύτερον μέλος τοῦ διατεταγμένου ζεύγους.

Ἔστω ἀκόμη ἡ συνάρτησις:

$$\sigma : x \longrightarrow {}^{-}2x + 1 = y$$

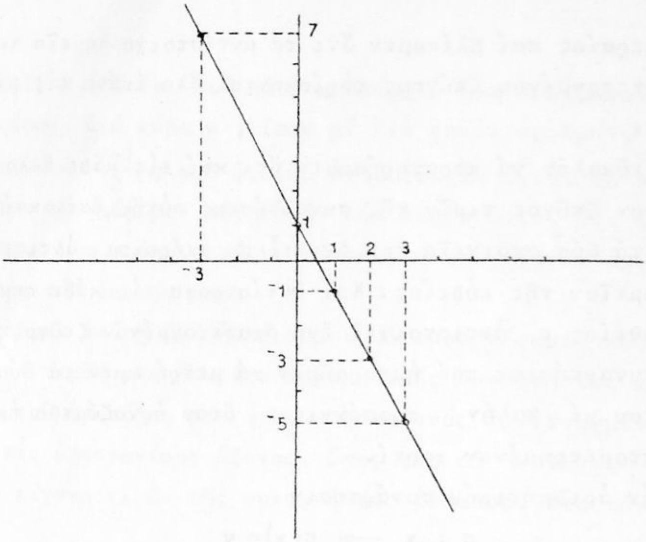
Ἄς κατασκευάσωμεν καί πάλιν ἕνα πίνακα ἀκεραίων τιμῶν της καί ἄς τήν ἀπεικονίσωμεν γραφικῶς.

x =	⁻3	⁻2	⁻1	0	1	2	3	4	5	...
y =	7	5	3	1	⁻1	⁻3	⁻5	⁻7	⁻8	...

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι αἱ τιμαί τοῦ y βαίνουν ἐλαττούμεναι κατ᾿ἀναλογίαν δύο πρός μίαν ἀκεραίαν μονάδα αὐξήσεως τοῦ x.

Είς τήν περίπτωσιν αὐτήν λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις εἶναι φθίνουσα.

Είς τήν φθίνουσαν αὐτήν συνάρτησιν ἡ εὐθεῖα τῆς γραφικῆς ἀπεικονίσεως κατέρχεται ἀπό τά ἀριστερά ἄνω πρός τά δεξιά κάτω.



Εἰς τήν προηγουμένην ὅμως περίπτωσιν τῆς συναρτήσεως

$$\sigma : x \longrightarrow 2x + 1 = y$$

αἱ τιμαί τοῦ y βαίνουν αὐξανόμεναι, κατ᾽ἀναλογίαν δύο πρός μίαν μονάδα αὐξήσεως τῶν τιμῶν τοῦ x καί ἡ εὐθεῖα ε τῆς γραφικῆς παραστάσεώς της ἀνέρχεται ἀπό τά ἀριστερά κάτω πρός τά δεξιά ἄνω.

Γενικά ἡ συνάρτησις

$$\sigma : x \longrightarrow \alpha x + \beta = y \quad (\alpha, \beta \in P)$$

ἔχει ὡς γραφικήν παράστασιν μίαν εὐθεῖαν, εἶναι δέ αὔξουσα, ὅταν $\alpha > 0$ καί φθίνουσα, ὅταν $\alpha < 0$.

Η συνάρτησις αὐτή λέγεται <u>γραμμική</u>.

Ὅταν ἡ σταθερά $\beta = 0$, τότε ἡ συνάρτησις γίνεται

$$\sigma : x \rightarrow \alpha x = y$$

καί ἡ εὐθεῖα τῆς γραφικῆς ἀπεικονίσεώς της περνᾶ ἀπό τήν ἀρχήν Ο τῶν ἀξόνων καί εἶναι αὔξουσα, ἄν καί πάλιν $\alpha > 0$ καί φθίνουσα, ἄν $\alpha < 0$.

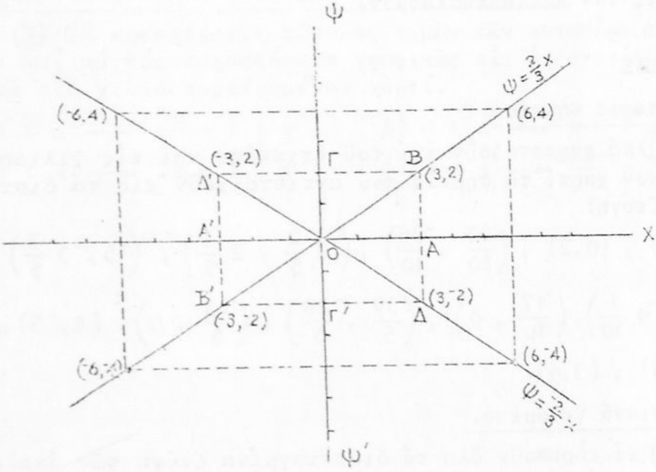
Εστω π.χ. ἡ συνάρτησις:

$$σ : x \longrightarrow \frac{2}{3}x = y$$

Ἂς κατασκευάσωμεν ἕνα πίνακα τιμῶν της καί ἄς τήν παραστήσωμεν γραφικῶς:

x =	⁻6	⁻3	0	3	6	9	...
y =	⁻4	⁻2	0	2	4	6	...

Παρατηροῦμεν καί πάλιν, ὅτι, ἐπειδή $α = \frac{2}{3} > 0$, ἡ συνάρτησις εἶναι αὔξουσα καί ἡ εὐθεῖα τῆς γραφικῆς παραστάσεώς της ἀνέρχεται ἀπό τά ἀριστερά κάτω πρός τά δεξιά ἄνω·



<u>Παρατήρησις</u>. Εἰς τήν συνάρτησιν

$$σ : x \rightarrow \frac{2}{3}x = y \quad \left(α = \frac{2}{3} > 0 \right)$$

παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν δίδωμεν εἰς τόν x τιμάς θετικάς, τότε καί ὁ y λαμβάνει τιμάς θετικάς· ὅταν δέ ὁ x λαμβάνει τιμάς ἀρνητικάς, τότε καί ὁ y λαμβάνει τιμάς ἀρνητικάς. Ἔχομεν δηλαδή ἐπαλήθευσιν τοῦ κανόνος τῶν προσήμων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ:

$$\frac{^{+}2}{3} \times {}^{-}3 = {}^{-}2 \quad , \quad \frac{^{+}2}{3} \times {}^{+}3 = {}^{+}2 \quad , \text{ κ.λ.π.}$$

Ἐάν, ἀντιθέτως ἔχωμεν τήν συνάρτησιν:

$$\sigma : x \longrightarrow \frac{^{-}2}{3} x = y$$

καί τήν γραφικήν παράστασίν της σύμφωνα μέ τόν κατωτέρω πίνακα (προηγούμενον σχῆμα)

x =	⁻6	⁻3	0	3	6	9	...
y =	4	2	0	⁻2	⁻4	⁻6	...

παρατηροῦμεν ὅτι καί πάλιν ἐπαληθεύεται ὁ κανών τῶν προσήμων εἰς τόν πολλαπλασιασμόν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Παράστασις σημείου.

1) Νά παρασταθοῦν ἐπί τοῦ ἐπιπέδου καί εἰς χιλιοστομετρημένον χαρτί τά σημεῖα πού ἀντιστοιχοῦν εἰς τά διατεταγμένα ζεύγη:

$(0, {}^{-}3)$, $(0,2)$, $\left(\frac{27}{10}, \frac{^{-}36}{10}\right)$, $\left({}^{-}3\frac{2}{5}, 2\frac{4}{5}\right)$, $\left({}^{-}5, {}^{-}3\frac{3}{5}\right)$,

$\left(\frac{43}{10}, {}^{-}4\frac{1}{10}\right)$, $\left(\frac{^{-}17}{10}, 0\right)$, $\left(\frac{39}{5}, \frac{^{-}28}{5}\right)$, $\left(\frac{13}{5}, 0\right)$, $(4, {}^{-}5)$,

$({}^{-}2, {}^{-}5)$, $(3,6)$.

Καρτεσιανά γινόμενα.

2) Νά εὑρεθοῦν ὅλα τά διατεταγμένα ζεύγη τῶν ἀκολούθων συνόλων καί νά παρασταθοῦν γραφικῶς εἰς ὀρθογωνίους ἄξονας τά καρτεσιανά γινόμενά των.

A×A.

$A = \{{}^{-}4, 3, 2\}$, $B = \{3, {}^{-}1, 4, {}^{-}5\}$, $\Gamma = \left\{\frac{^{-}5}{2}, 3, \frac{^{-}26}{5}\right\}$

Ἀπεικονίσεις.

3) Νά γίνη ἀπεικόνισις μέ διάγραμμα τοῦ Ὄϊλερ (Euler) τῆς σχέσεως:

1ον "y εἶναι πατέρας τοῦ μαθητοῦ x" , ὅπου

$x \in A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ καί $y \in B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5\}$

καί γνωρίζομεν ὅτι ὁ β_1 εἶναι πατέρας τῶν α_2 καί α_5, ὁ β_2 πατέρας τῶν α_3 καί α_4 καί ὁ β_5 πατέρας τοῦ α_1.
Τῆς ἰδίας συναρτήσεως νά γίνη ἀπεικόνισις μέ ἕνα πίνακα διπλῆς εἰσόδου.

(4) Ὁμοίως ἀπεικόνισις μέ διάγραμμα τοῦ Euler καί μέ πίνακα τῆς σχέσεως:
"y εἶναι τό ἀνάστημα τοῦ x"

$x \in A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$

$y \in B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7\}$

$\beta_1 = 1{,}50$
$\beta_2 = 1{,}51$
$\beta_3 = 1{,}52$
$\beta_4 = 1{,}53$
$\beta_5 = 1{,}54$
$\beta_6 = 1{,}57$
$\beta_7 = 1{,}58$

καί

Μαθ.	ἀνάστημα
α_1	1,53
α_2	1,57
α_3	1,52
α_4	1,57
α_5	1,57

Γραφικαί παραστάσεις ἀριθμητικῶν συναρτήσεων.

(5) Νά καταρτίσετε πίνακας τιμῶν τῶν κατωτέρω συναρτήσεων καί νά τάς παραστήσετε γραφικῶς εἰς ὀρθογωνίους ἄξονας ἐπάνω εἰς χιλιοστομετρημένον χαρτί.

α) $\sigma : x \longrightarrow \frac{3x}{2} - 1 = y$ β) $\sigma : x \longrightarrow x + 1 = y$

γ) $\sigma : x \longrightarrow {}^{-}2x + 1 = y$ δ) $\sigma : x \longrightarrow \frac{{}^{-}2x}{3} = y$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

Σύνολα. Διμελεῖς σχέσεις καί γραφική των παράστασις 'Απεικονίσεις καί συναρτήσεις.

§ 1. Ἴσα σύνολα. 'Ισοδύναμα σύνολα.

1.1. Ἴσα σύνολα. Εἰς τήν σελίδα 45Α τοῦ Βιβλίου Ι ὡρίσαμεν τήν ἰσότητα (ἤ ταυτότητα) δύο συνόλων Α καί Β ὡς ἑξῆς: Τό σύνολον Α εἶναι ἴσον μέ τό σύνολον Β, ἄν τά στοιχεῖα του ταυτίζωνται ἕνα πρός ἕνα μέ τά στοιχεῖα τοῦ Β. Αὐτό ἐκφράζεται συμβολικῶς ὡς ἑξῆς:

$$A = B \iff (x \in A \Rightarrow x \in B \quad \text{καί} \quad x \in B \Rightarrow x \in A).$$

Χρησιμοποιοῦντες τήν ἔννοιαν τοῦ ὑποσυνόλου (Βιβλ. Ι, σελ. 40-42Α) ἠμποροῦμεν νά δώσωμεν εἰς τόν παραπάνω ὁρισμόν καί τήν ἀκόλουθον συμβολικήν διατύπωσιν:

$$A = B \iff (A \subseteq B \text{ καί } B \subseteq A).$$

Ὅταν λοιπόν ἕνα σύνολον δίδεται μέ ἀναγραφήν τῶν στοιχείων του κατά τινα σειράν (τάξιν), ἡ μεταβολή αὐτῆς τῆς σειρᾶς δίδει ἕνα σύνολον ἴσον μέ τό ἀρχικόν. Π.χ. ἄν Τ εἶναι τό σύνολον $\{A, B, \Gamma, AB, B\Gamma, \Gamma A\}$ τῶν κορυφῶν καί τῶν πλευρῶν ἑνός τριγώνου ΑΒΓ καί $T' = \{AB, B\Gamma, \Gamma A, A, B, \Gamma\}$ τό σύνολον τῶν πλευρῶν καί τῶν κορυφῶν τοῦ ἰδίου τριγώνου, τότε $T = T'$.

'Ιδού τώρα καί μερικά ἄλλα παραδείγματα ἰσότητος συνόλων.

1) $\left.\begin{array}{l} A = \{x \,/\, x \text{ ἄκρον πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου ΚΛΜΝ}\} \\ B = \{x \,/\, x \text{ ἄκρον διαγωνίου τοῦ τετραγών.ΚΛΜΝ}\} \end{array}\right\} \Rightarrow A = B$

2) $\left.\begin{array}{l} A = \{x \,/\, x \text{ διαιρέτης τοῦ } 12\} \\ B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \end{array}\right\} \Rightarrow A = B$

3) $\left.\begin{array}{l} A = \{x \,/\, x \text{ φυσικός ἀριθμός μέ δεκαδικήν} \\ \qquad \text{παράστασιν λήγουσαν εἰς } 0, 2, 4, 6, 8\} \\ B = \{x \,/\, x \text{ φυσικός ἀριθμός ἄρτιος}\} \end{array}\right\} \Rightarrow A = B$

$$4)\quad \left.\begin{array}{l} A = \{x/x \ \text{πολλαπλάσιον τοῦ } 5\} \\ B = \{x/x \ \text{ἀκέραιος μέ δεκαδικήν παρά-} \\ \qquad\quad \text{στασιν λήγουσαν εἰς } 0 \text{ ἤ } 5\} \end{array}\right\} \Longrightarrow A = B$$

$$5)\quad \left.\begin{array}{l} A = \{x/x \ \text{ἰσοσκελές τρίγωνον}\} \\ B = \{x/x \ \text{τρίγωνον μέ δύο γωνίας ἴσας}\} \end{array}\right\} \Rightarrow A = B$$

<u>1.2.</u> Ὑπενθυμίζομεν ὅτι ἡ ἰσότης συνόλων ἔχει τάς ἀκολούθους ἰδιότητας:

1) τήν ἀνακλαστικήν : $A = A$,

2) τήν συμμετρικήν : $B = \Gamma \Leftrightarrow \Gamma = B$

καί 3) τήν μεταβατικήν : $(A = B \text{ καί } B = \Gamma) \Rightarrow A = \Gamma$.

<u>1.3.</u> <u>Ἰσοδύναμα σύνολα.</u> Ἐμάθαμεν (Βιβλ. Ι, σ. 46Α) ὅτι ἕνα σύνολον A λέγεται ἰσοδύναμον μέ ἕνα ἄλλο B , ἐάν εἰς κάθε στοιχεῖον τοῦ A ἠμποροῦμεν νά ἀντιστοιχίσωμεν ἕνα στοιχεῖον τοῦ B οὕτως ὥστε καί κάθε στοιχεῖον τοῦ B νά εἶναι ἀντίστοιχον ἑνός καί μόνον στοιχείου τοῦ A.

Μέ συντομωτέραν ἔκφρασιν, δύο σύνολα A καί B λέγονται ἰσοδύναμα μεταξύ των, ἐάν τά στοιχεῖα τοῦ ἑνός ἠμποροῦν νά ἀντιστοιχισθοῦν ἕνα πρός ἕνα εἰς τά στοιχεῖα τοῦ ἄλλου. Γράφομεν τότε:

$A \sim B$ (καί διαβάζομεν: A ἰσοδύναμον B).

<u>Παραδείγματα:</u>

$$1)\quad \left.\begin{array}{l} A = \{5,7,3\} \\ B = \{\kappa,\lambda,5\} \end{array}\right\} \Longrightarrow A \sim B$$

$$2)\quad \left.\begin{array}{l} A = \{x/x \ \text{γράμμα τοῦ ἑλλην. ἀλφαβήτου}\} \\ B = \{x/x \ \text{φυσικός ἀριθμός} \leqslant 24\} \end{array}\right\} \Rightarrow A \sim B$$

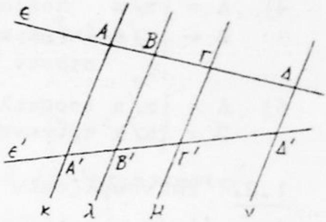
$$3)\quad \left.\begin{array}{l} A = \{x/x \ \text{ἐποχή τοῦ ἔτους}\} \\ B = \{x/x \ \text{κύριον σημεῖον τοῦ ὁρίζοντος}\} \end{array}\right\} \Longrightarrow A \sim B$$

$$4)\quad \left.\begin{array}{l} A = \{x/x \ \text{μαθητής τοῦ Ἰησοῦ}\} \\ B = \{x/x \ \text{μήν τοῦ ἔτους}\} \end{array}\right\} \Longrightarrow A \sim B$$

$$5)\quad \left.\begin{array}{l} A = \{x/x \ \text{κορυφή τριγώνου}\} \\ B = \{x/x \ \text{πλευρά τριγώνου}\} \end{array}\right\} \Rightarrow A \sim B$$

6) Ἄς χαράξωμεν δύο τυχούσας εὐθείας ε καί ε' ἐπί ἑνός ἐπιπέδου καί ἄς τάς κόψωμεν μέ τάς εὐθείας κ, λ, μ, ν, παραλλήλους μεταξύ των. Παρατηροῦμεν ὅτι

(βλ. σχ. παραπλεύρως) εἰς τά τμήματα ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ, ΓΔ, πού ὁρίζονται ἐπάνω εἰς τήν ε ἀντιστοιχοῦν ἕνα πρός ἕνα κατά σειράν τά τμήματα Α΄Β΄, Α΄Γ΄, Α΄Δ΄, Β΄Γ΄, Β΄Δ΄, Γ΄Δ΄ τῆς εὐθείας ε΄. Ἐπομένως



$\{ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ, ΓΔ\} \sim \{Α'Β', Α'Γ', Α'Δ', Β'Γ', Β'Δ', Γ'Δ'\}$

7) $\left.\begin{array}{l} A = \{x/x \text{ σημεῖον μιᾶς περιφερείας } (\Pi)\} \\ B = \{x/x \text{ ἀκτίς τῆς περιφερείας } (\Pi)\} \end{array}\right\} \Longrightarrow A \sim B.$

Πράγματι, εἰς κάθε σημεῖον τῆς (Π) ἠμποροῦμεν νά ἀντιστοιχίσωμεν τήν ἀκτῖνα πού καταλήγει εἰς τό σημεῖον αὐτό.

8) $\left.\begin{array}{l} A = \{x/x \text{ ἐπίκεντρος γωνία εἰς ἕνα κύκλον } K\} \\ B = \{x/x \text{ τόξον τοῦ κυκλου } K\} \end{array}\right\} \Longrightarrow A \sim B$

Πράγματι, αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι εἰς ἕνα κύκλον καί τά τόξα τοῦ ἰδίου κύκλου ἀντιστοιχοῦν ἕνα πρός ἕνα (Βιβλ. Ι, σ. 98Α).

1.4. Ἰδιότητες ἰσοδυνάμων συνόλων. Ὑπενθυμίζομεν τάς ἀκολούθους ἰδιότητας τῶν ἰσοδυνάμων συνόλων:

1) $A \sim A$, ἀνακλαστικήν

2) $A \sim B \Longrightarrow B \sim A$, συμμετρικήν

3) $(A \sim B$ καί $B \sim \Gamma) \Longrightarrow A \sim \Gamma$, μεταβατικήν

4) $A = B \Longrightarrow A \sim B$

Τό ἀντίστροφον

$$A \sim B \Longrightarrow A = B$$

τῆς ἰδιότητος αὐτῆς δέν ἀληθεύει, ὅπως φαίνεται ἀπό τά δοθέντα παραδείγματα 1) ἕως 8).

5) Ἐάν ἕνα σύνολον Α εἶναι πεπερασμένον, τότε καί κάθε ἰσοδύναμον μέ αὐτό εἶναι πεπερασμένον καί ἔχει τόν ἴδιον πληθικόν ἀριθμόν μέ τό Α. Π.χ. τά δύο ἰσοδύναμα σύνολα τοῦ παραδείγματος 1) τοῦ ἐδαφίου 1.3 ἔχουν πληθικόν ἀριθμόν 3, τοῦ παραδείγματος 2) πληθικόν ἀριθμόν 24, τοῦ παραδείγματος 3) πληθικόν ἀριθμόν 4, τοῦ παραδείγματος 4) πληθικόν ἀριθμόν 12.

1.5. Ἀπαριθμητά ἀπειροσύνολα. Ἔστω Φ τό σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καί Α τό σύνολον τῶν ἀρτίων φυσικῶν ἀριθμῶν:

$$\begin{array}{l} \Phi = \{1,2,3,4,5,\ldots, \nu, \ldots\}, \\ \quad\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow \qquad\quad \updownarrow \\ A = \{2,4,6,8,10,\ldots,2\nu, \ldots\}. \end{array}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τά στοιχεῖα τῶν δύο συνόλων ἀντιστοιχοῦν ἕνα πρός ἕνα κατά τόν τρόπον πού ὑποδεικνύομεν μέ τά διπλᾶ βέλη· ἐπομένως τό σύνολον Α τῶν ἀρτίων εἶναι ἰσοδύναμον μέ τό σύνολον Φ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καί διά τοῦτο τό ὀνομάζομεν ἀπαριθμητόν. Μέ ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν:

$$\begin{array}{l} \Phi = \{1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ldots,\ \nu\ ,\ \ldots\}, \\ \quad\ \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \qquad\quad \updownarrow \\ \Xi = \{1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ldots,\ \nu^2,\ \ldots\} \end{array}$$

Ἐπομένως καί τό σύνολον Τ τῶν τετραγώνων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀπειροσύνολον ἀπαριθμητόν.

1.6. Μή ἀπαριθμητά σημειοσύνολα. Γνωρίζομεν (Βιβλ.Ι,σ,56Α) ὅτι ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα καί, γενικώτερον, μία γραμμή ἠμπορεῖ νά θεωρηθῇ ὡς ἕνα (μή πεπερασμένον) σύνολον σημείων. Τά σύνολα σημείων τά ὀνομάζομεν μονολεκτικῶς σημειοσύνολα. Τά ἀνωτέρω σημειοσύνολα καθώς καί ἄλλα, ὅπως τό σύνολον τῶν σημείων μιᾶς ἐπιφανείας, τό σύνολον τῶν σημείων ἑνός στερεοῦ κτλ., ἔχουν τήν ἰδιότητα νά εἶναι ἀπειροσύνολα μή ἀπαριθμητά, ὅπως θά μάθωμεν εἰς ἀνωτέραν τάξιν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

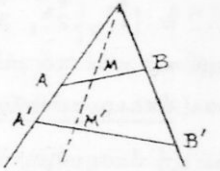
1) Νά ἐξετάσετε ἄν τά δύο σύνολα
$A = \{x/x$ τρίγωνον ἰσόπλευρον$\}$,
$B = \{x/x$ τρίγωνον ἰσογώνιον$\}$
εἶναι ἴσα.

2) Νά ἐξετάσετε ἄν τά δύο σύνολα
$A = \{x/x$ παραλληλόγραμμον$\}$
$E = \{x/x$ τετράπλευρον μέ ἕνα κέντρον συμμετρίας$\}$
εἶναι ἴσα.

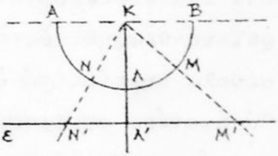
3) Αἱ συνηθέστεραι μονάδες εἶναι: διά τά μήκη τό μέτρον m καί αἱ ὑποδιαιρέσεις του dm , cm , mm , διά τάς ἐπιφανείας αἱ m^2, dm^2, cm^2, mm^2καί διά ὄγκους αἱ m^3 , dm^3 , cm^3 , mm^3. Νά ἐξετάσετε ἄν τά τρία σύνολα πού ἀποτελοῦνται ἀντιστοίχως ἀπό τάς ἀνωτέρω μονάδας μήκους,ἐπιφανείας καί ὄγκου εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των.

4) Ἀπό τό κοινόν κέντρον δύο ὁμοκέντρων κύκλων χαράσσομεν τέσσαρας ἡμιευθείας πρός διαφόρους κατευθύνσεις. Νά ἐξετάσετε ἄν τά δύο σύνολα τῶν τόξων πού ὁρίζονται ἀπό τάς ἡμιευθείας αὐτάς ἐπί τῶν δύο περιφερειῶν εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των. Ἄραγε συμβαίνει τό ἴδιον καί μέ ὁσασδήποτε ἡμιευθείας μέ ἀρχήν τό κέντρον ;

5) Ἀπό τήν κοινήν κορυφήν δύο κατακορυφήν γωνιῶν χαράσσομεν εὐθείας κειμένας ἐντός τῶν γωνιῶν τούτων καί χωριζούσας αὐτάς εἰς διαδοχικάς γωνίας. Νά ἐξετάσετε ἐάν τά δύο σύνολα τῶν σχηματιζομένων διαδοχικῶν γωνιῶν εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των.



6) Νά ἐξηγήσετε διατί τά δύο σημειοσύνολα τῶν τμημάτων AB καί A΄B΄ τοῦ παραπλεύρως σχήματος εἶναι ἰσοδύναμα.



7) Νά ἐξηγήσετε διατί τό σημειοσύνολον τῆς ἡμιπεριφερείας χωρίς τά ἄκρα της A, B τοῦ παραπλεύρως σχήματος (εἰς τό ὁποῖον ἡ διάμετρος AB εἶναι // ε) εἶναι ἰσοδύναμον μέ τό σημειοσύνολον τῆς εὐθείας ε.

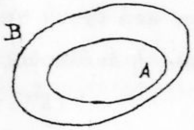
2. Σχέσις ἐγκλεισμοῦ.

2.1. Ἐμάθαμεν (Βιβλ. I, σελ. 40A) τί ὀνομάζεται ὑποσύνολον ἑνός συνόλου καί πῶς συμβολίζεται: ἕνα σύνολον A εἶναι ὑποσύνολον ἑνός συνόλου B, ἐάν καί μόνον ἐάν κάθε στοιχεῖον τοῦ A εἶναι στοιχεῖον καί τοῦ B. Συμβολικῶς γράφομεν:

$$A \subseteq B \iff (x \in A \Rightarrow x \in B) .$$

Ἀντί τῆς ἐκφράσεως: τό A εἶναι ὑποσύνολον τοῦ B χρησιμοποιοῦμεν καί τήν ἔκφρασιν: τό A ἐγκλείεται εἰς τό B.

Αὐτή ἡ σχέσις ἐγκλεισμοῦ παριστάνεται γραφικῶς μέ τά Βέννια διαγράμματα τοῦ παραπλεύρως σχήματος.



<u>Παραδείγματα.</u> 1ον. Τό σύνολον Π τῶν πτηνῶν ἐγκλείεται εἰς τό σύνολον Ζ τῶν ζώων.

2ον. Τό σύνολον Ρ τῶν ρόδων ἑνός ἀνθοκήπου ἐγκλείεται εἰς τό συνολον Α τῶν ἀνθέων τοῦ ἰδίου ἀνθοκήπου.

3ον. Τό σύνολον τῶν ἀνωμάλων ρημάτων τῆς ἑλληνικῆς γλώσσης ἐγκλείεται εἰς τό σύνολον τῶν ρημάτων της.

4ον. Τό σύνολον τῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων ἐγκλείεται εἰς τό σύνολον τῶν ἰσογωνίων τριγώνων.

5ον. Τό σύνολον τῶν παραλληλογράμμων ἐγκλείεται εἰς τό σύνολον τῶν τετραπλεύρων.

Εἰς ποῖα ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων τό ἐγκλεισμένον σύνολον εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον καί εἰς ποῖα δέν εἶναι ;

<u>2.2.</u> Ἄς εἶναι Μ τό σύνολον τῶν μαθηματικῶν βιβλίων μιᾶς βιβλιοθήκης καί Β τό σύνολον τῶν βιβλίων τῆς βιβλιοθήκης αὐτῆς. Χαρακτηριστική ἰδιότης τῶν στοιχείων τοῦ Μ εἶναι:

μ = μαθηματικόν βιβλίον τῆς βιβλιοθήκης.

Χαρακτηριστική ἰδιότης τῶν στοιχείων τοῦ Β εἶναι:

β = βιβλίον τῆς βιβλιοθήκης.

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἐγκλεισμός $M \subseteq B$ ἔχει ὡς συνέπειαν τήν ἀκόλουθον λογικήν σχέσιν (συνεπαγωγήν) :

$$\mu \Longrightarrow \beta .$$

Γενικῶς, ἐάν $A \subseteq B$ καί α, β ἀντίστοιχοι χαρακτηριστικαί ἰδιότητες τῶν στοιχείων τῶν δύο συνόλων, τότε θά ἔχωμεν τήν συνεπαγωγήν

$$\alpha \Longrightarrow \beta .$$

Ἀντιστρόφως, ἐάν μία ἰδιότης α συνεπάγεται τήν ἰδιότητα β , τότε τό σύνολον Α τῶν στοιχείων πού χαρακτηρίζονται ἀπό τήν ἰδιότητα α ἐγκλείεται εἰς τό σύνολον Β τῶν στοιχείων πού ἔχουν χαρακτηριστικήν ἰδιότητα τήν β. Δηλαδή ἀληθεύει ἡ ἀκόλουθος λογική ἰσοδυναμία:

$$(A \subseteq B) \iff (\alpha \Rightarrow \beta) .$$

<u>Παράδειγμα.</u> Ἄς παραστήσωμεν μέ ε τήν ἰδιότητα νά εἶναι ἕνα πολύγωνον κυρτόν ἑξάγωνον, μέ κ τήν ἰδιότητα νά εἶναι ἕνα πολύγωνον κυρτόν, μέ Ε τό σύνολον τῶν κυρτῶν ἑξαγώνων καί μέ Κ τό σύνολον τῶν κυρτῶν πολυγώνων. Θά ἔχωμεν τότε τήν λογικήν ἰσοδυναμίαν:

$$(\varepsilon \Rightarrow \varkappa) \iff (E \subseteq K) .$$

2.3. <u>Δυναμοσύνολον.</u> Ἀπό τό σύνολον $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ἠμποροῦμεν νά σχηματίσωμεν τά ἑξῆς $8 = 2^3$ ὑποσύνολά του:

$$\{\ \}, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha,\beta\}, \{\alpha,\gamma\}, \{\beta,\gamma\}, \{\alpha,\beta,\gamma\}.$$

Τό σύνολον τῶν ὑποσυνόλων τούτων καλεῖται <u>δυναμοσύνολον</u> τοῦ συνόλου Α καί συμβολίζεται μέ τήν γραφήν $\mathcal{P}(A)$, ὅπου τό γράμμα $\mathcal{P}$ εἶναι τό καλλιγραφικόν λατινικόν πέ.

Εἶναι εὔκολον νά βεβαιωθῶμεν ὅτι ἐάν ἕνα πεπερασμένον σύνολον Α ἔχῃ 1, 2, 3, 4, 5, 6, κτλ στοιχεῖα, τότε τό δυναμοσύνολόν του $\mathcal{P}(A)$ ἔχει ἀντιστοίχως $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, κ.τ.λ. στοιχεῖα.

<u>Ἐφαρμογή.</u> Μία εὐθεῖα δ θεωρουμένη ὡς σημειοσύνολον περιέχεται εἰς ἕνα ἐπίπεδον Π, θεωρούμενον καί τοῦτο ὡς σημειοσύνολον. Δυνάμεθα τότε νά γράφωμεν:

$$\delta \subseteq \Pi \quad \text{καθώς καί} \quad \delta \in \mathcal{P}(\Pi),$$

διότι ἡ εὐθεῖα δ εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Π, ἑπομένως στοιχεῖον τοῦ δυναμοσυνόλου $\mathcal{P}(\Pi)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Καλοῦμεν Α τό σύνολον τῶν ἀειθαλῶν δένδρων καί Δ τό σύνολον τῶν δένδρων. Νά γράφετε τήν σχέσιν ἐγκλεισμοῦ πού ἰσχύει διά τά δύο αὐτά σύνολα.

2) Ἔστω $A = \{x/x$ πτηνόν ἀποδημητικόν$\}$,
$\Pi = \{x/x$ πτηνόν $\}$.

Ποία σχέσις ἐγκλεισμοῦ ὑπάρχει μεταξύ Π καί Α καί ποία λογική σχέσις (συνεπαγωγή) ἀληθεύει μεταξύ τῶν χαρακτηριστικῶν ἰδιοτήτων τῶν δύο συνόλων ;

3) Ὅμοιον ζήτημα διά τά σύνολα:
$A = \{x/x$ ἐπίπεδον χωρίον$\}$,
$B = \{x/x$ κύκλος$\}$.

4) Ὅμοιον ζήτημα διά τά σύνολα·
$A = \{x/x$ πολλαπλάσιον τοῦ 3$\}$,
$B = \{x/x$ πολλαπλάσιον τοῦ 9$\}$.

5) Ἔστω $M = \{x/x$ μηλιά$\}$,
$O = \{x/x$ ὀπωροφόρον δένδρον$\}$,
$\Delta = \{x/x$ δένδρον $\}$.

Παρατηροῦμεν ὅτι
$$M \subseteq O \quad , \quad O \subseteq \Delta \quad \text{καί} \quad M \subseteq \Delta .$$
Μέ ἄλλα λόγια, ἡ σχέσις ἐγκλεισμοῦ ἔχει τήν μεταβατικήν ἰδιότητα:
$$(M \subseteq O \ \text{ καί } \ O \subseteq \Delta) \Longrightarrow M \subseteq \Delta .$$
Δώσατε δύο ἄλλα παραδείγματα διά τήν μεταβατικότητα τῆς σχέσεως ἐγκλεισμοῦ.

6) Νά εὕρετε τό δυναμοσύνολον τοῦ συνόλου
$A = \{$Δημήτρης , Νίκος$\}$.

7) Νά εὕρετε τό δυναμοσύνολον $\mathcal{P}(A)$ τοῦ συνόλου
$A = \{x/x$ τόνος εἰς τήν ἑλληνικήν γλῶσσαν$\}$.

8) Νά εὕρετε τό $\mathcal{P}(A)$, ἄν
$A = \{x/x$ φυσικός ἀριθμός $\geqslant 3$ καί $< 7\}$.

§ 3 Τομή συνόλων καί σύζευξις ἰδιοτήτων.

3.1. Τομή συνολων. Ἐμάθαμεν (Βιβλ. Ι, σ. 51Α) ὅτι τομή δύο ἤ περισσοτέρων συνόλων εἶναι ἕνα σύνολον πού ἀποτελεῖται ἀπό τά στοιχεῖα τά ὁποῖα εἶναι κοινά εἰς ὅλα τά δοθέντα σύνολα. Π.χ. διά τήν τομήν $A \cap B$ δύο συνόλων Α καί Β ἔχομεν:
$$x \in (A \cap B) \iff x \in A \quad \text{καί} \quad x \in B.$$
Θά δώσωμεν τώρα μερικά παραδείγματα πρός ἐπανάληψιν καί θά τά χρησιμοποιήσωμεν διά νά κάμωμε μερικάς προσθέτους παρατηρήσεις.

1) Ἔστω

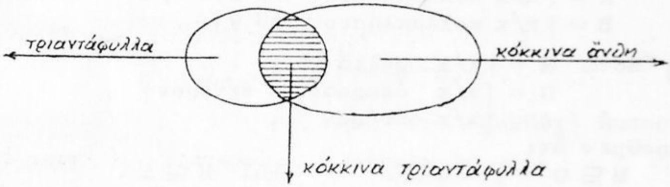
$$A = \{x/x \text{ κόκκινον ἄνθος}\},$$

$$B = \{x/x \text{ τριαντάφυλλον}\}.$$

Ἡ τομή των εἶναι:

$$A \cap B = \{x/x \text{ κόκκινον τριαντάφυλλον}\}.$$

Ἰδού καί μία παράστασίς της μέ διάγραμμα τοῦ Venn :



2) Ἄς θεωρήσωμεν τά σύνολα

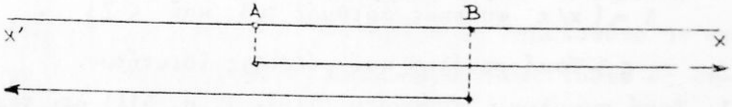
$A = \{x/x \text{ διαιρέτης τοῦ } 18\} = \{1,2,3,6,9,18\}$,

$B = \{x/x \text{ διαιρέτης τοῦ } 12\} = \{1,2,3,4,6,12\}$.

Ἡ τομή των εἶναι τό σύνολον τῶν κοινῶν διαιρετῶν τοῦ 18 καί τοῦ 12:

$$A \cap B = \{1,2,3,6\}.$$

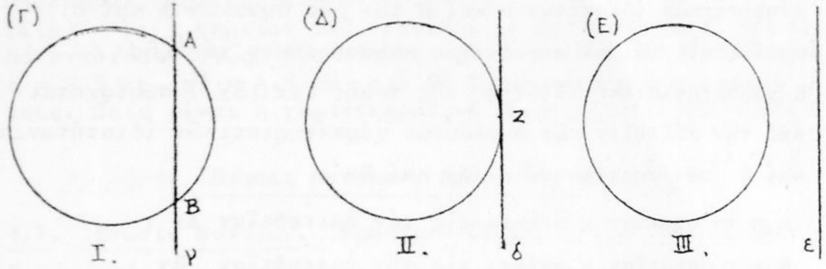
3) Ἐπάνω εἰς μίαν εὐθεῖαν $x'x$



λαμβάνομεν δύο σημεῖα A καί B. Τό σύνολον τῶν σημείων τοῦ τμήματος AB εἶναι ἡ τομή τῶν ἡμιευθειῶν Ax καί Bx΄ θεωρουμένων ὡς σημειοσυνόλων:

$$(Ax \cap Bx') = \{x/x \text{ σημεῖον τοῦ τμήματος } AB\}.$$

4) Ἄς θεωρήσωμεν μίαν περιφέρειαν καί μίαν εὐθεῖαν ἑνός ἐπιπέδου ὡς σημειοσύνολα. Τρεῖς εἶναι αἱ δυναταί σχετικαί θέσεις των, ὅπως φαίνεται εἰς τό ἀκόλουθον σχῆμα:



Είς τήν θέσιν I , αί δύο γραμμαί τέμνονται καί έχουν δύο κοινά σημεῖα, τά A καί B. Γράφομεν λοιπόν:

$$(\Gamma) \cap \gamma = \{A , B\} .$$

Είς τήν θέσιν II , αί γραμμαί εφάπτονται καί έχουν ένα κοινόν σημεῖον , τό Z . Γράφομεν λοιπόν :

$$(\Delta) \cap \delta = \{Z\} .$$

Είς τήν θέσιν III δέν έχουν κανένα κοινόν σημεῖον καί γράφομεν:

$$(E) \cap \varepsilon = \emptyset$$

<u>3.2. Σύζευξις χαρακτηριστικῶν ἰδιοτήτων.</u> Ἄς ἐπανέλθωμεν εἰς τό 1ον ἀνωτέρω παράδειγμα καί ἄς παραστήσωμεν μέ α τήν χαρακτηριστικήν ἰδιότητα τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου A :

$$\alpha = \text{κόκκινο ἄνθος} ,$$

καί μέ β τήν χαρακτηριστικήν ἰδιότητα τοῦ συνόλου B :

$$\beta = \text{τριαντάφυλλον} .$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τά στοιχεῖα τῆς τομῆς $A \cap B$:

$$A \cap B = \{x / x \ \text{κόκκινο τριαντάφυλλον}\}$$

ἔχουν ὡς χαρακτηριστικήν ἰδιότητα τήν διπλῆν ἰδιότητα α καί β. Αὐτό τό ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι ἡ χαρακτηριστική ἰδιότης τῆς τομῆς $A \cap B$ προκύπτει ἀπό τήν <u>σύζευξιν</u> τῶν χαρα-

κτηριστικῶν ἰδιοτήτων α καί β τῶν δύο συνολων Α καί Β.
Ὁμοίως εἰς τό 3ον παράδειγμα παρατηροῦμεν τά ἑξῆς:
Ἡ χαρακτηριστική ἰδιότης τῆς τομῆς (Ax∩Bx΄) προέρχεται ἀπό τήν σύζευξιν τῶν ἀκολούθων χαρακτηριστικῶν ἰδιοτήτων α καί β τῶν σημειοσυνόλων Ax καί Bx΄:

α = τό σημεῖον x ἀνήκει εἰς τήν ἡμιευθεῖαν Ax ,

β = τό σημεῖον x ἀνήκει εἰς τήν ἡμιευθεῖαν Bx΄ .

Ἀναλόγους παρατηρήσεις νά κάμετε εἰς τά δύο ἄλλα παραδείγματα.

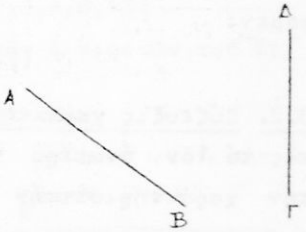
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ἔστω
Α = {x/x φυσικός ἀριθμός < 50 καί πολλαπλάσιον τοῦ 5},
Β = {x/x φυσικός ἀριθμός < 50 καί πολλαπλάσιον τοῦ 6}.
Νά σχηματίσετε τήν τομήν Α∩Β μέ ἀναγραφήν τῶν στοιχείων της καί νά διατυπώσετε τήν χαρακτηριστικήν ἰδιότητά των μέ τήν σύζευξιν δύο χαρακτηριστικῶν ἰδιοτήτων .

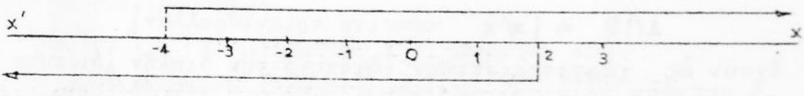
2) Δίδονται δύο τμήματα μή παράλληλα:

ΑΒ ∦ ΓΔ

(βλ. σχ. παραπλεύρως). Νά χαράξετε τάς μεσοκαθέτους των ε καί ζ καί νά τάς θεωρήσετε ὡς σημειοσύνολα. Ποία εἶναι ἡ τομή των ε∩ζ καί ποῖαι αἱ χαρακτηριστικαί ἰδιότητες τῶν τριῶν συνόλων ε, ζ καί ε∩ζ ;



3) Δίδονται τά σύνολα
Α = {x/x ρητός σχετικός ἀριθμός ≤ 2} ,
Β = {x/x ρητός σχετικός ἀριθμός ≥ -4} .
Νά εὑρεθῆ ἡ τομή των καί νά ἑρμηνευθῆ γεωμετρικῶς εἰς τό κατωτέρω σχῆμα



4) Συμβολίζομεν μέ (Κ,α) τόν κύκλον πού ἔχει κέντρον τό σημεῖον Κ καί ἀκτῖνα α. Τόν κύκλον αὐτόν ἠμποροῦμεν νά τόν θεωρήσωμεν ὡς ἕνα σύνολον σημείων τοῦ ἐπιπέδου μέ τήν

ἀκόλουθον χαρακτηριστικήν ἰδιότητα:
(Κ,α) = {x/x σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου μέ ἀπόστασιν ἀπό τό Κ ≤ α}
Νά σχεδιάσετε τώρα δύο κύκλους (Κ,α) καί(Κ΄,α΄) μέ ΚΚ΄= 3cm
α = 2,5 cm, α΄ = 1,5 cm καί νά γραμμοσκιάσετε τήν τομήν τους. Ποία εἶναι ἡ χαρακτηριστική ἰδιότης αὐτῆς τῆς τομῆς;

§ 4. Ἕνωσις συνόλων. Διάζευξις ἰδιοτήτων.

4.1. Ἕνωσις συνόλων. Ἐμάθαμεν (Βιβλ. Ι , σ. 48-50Α) ὅτι ἕνωσις δύο ἤ περισσοτέρων δοθέντων συνόλων εἶναι ἕνα σύνολον πού ἀποτελεῖται ἀπό τά στοιχεῖα τά ὁποῖα ἀνήκουν εἰς ἕνα τουλάχιστον ἀπό τά δοθέντα σύνολα. Π.χ. διά τήν ἕνωσιν A ∪ B δύο συνόλων A καί B ἔχομεν:

$$x \in (A \cup B) \iff \text{εἴτε } x \in A \text{ εἴτε } x \in B.$$

Θά ἐξετάσωμεν τώρα πῶς ἡ χαρακτηριστική ἰδιότης τῶν στοιχείων τῆς ἑνώσεως A ∪ B σχετίζεται μέ τάς χαρακτηριστικάς ἰδιότητας τῶν δύο συνόλων A καί B.

Διάζευξις ἰδιοτήτων. Ἄς πάρωμεν πάλιν τό παράδειγμα 1) τοῦ ἐδαφίου 3.1 :

A = {x/x κόκκινον ἄνθος},
B = {x/x τριαντάφυλλον}

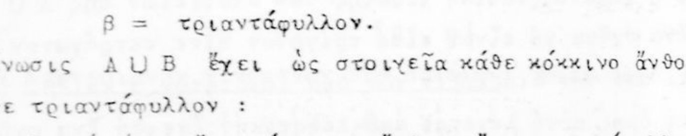
μέ τάς ἀντιστοίχους χαρακτηριστικάς ἰδιότητας

α = ἄνθος κόκκινο ,
β = τριαντάφυλλον.

Ἡ ἕνωσις A ∪ B ἔχει ὡς στοιχεῖα κάθε κόκκινο ἄνθος καί κάθε τριαντάφυλλον :

A ∪ B = {x/x εἴτε κόκκινο ἄνθος εἴτε τριαντάφυλλον} ,

παρίσταται δέ μέ τό ἀκόλουθον διάγραμμα τοῦ Venn :



Ἐπομένως τά στοιχεῖα τῆς ἑνώσεως A ∪ B χαρακτηρίζονται ἀπό τήν ἰδιότητα : ἕνα πρᾶγμα νά εἶναι εἴτε κόκκινο ἄνθος εἴτε τριαντάφυλλον. Αὐτή ἡ ἰδιότης λέγομεν ὅτι προκύπτει ἀπό τήν διάζευξιν τῶν δύο ἰδιοτήτων :

α = κόκκινο ἄνθος καί β = τριαντάφυλλον.

Ἡ διάζευξις αὐτή λέγεται μή ἀποκλειστική, ἐπειδή ἡ ἰδιότης α δέν ἀποκλείει τήν ἰδιότητα β˙ πράγματι ὑπάρχουν τά κόκκινα τριαντάφυλλα πού ἔχουν καί τάς δύο ἰδιότητας α καί β. Παρατηροῦμεν ὅτι αὐτή ἡ μή ἀποκλειστική διάζευξις ἰσοδυναμεῖ μέ τό νά μή εἶναι ξένα μεταξύ των τά δύο ἀντίστοιχα σύνολα A καί B.

2) Ἔστω τώρα

$A = \{x/x \text{ τρίγωνον}\}$,

$B = \{x/x \text{ τετράγωνον}\}$.

Ἡ ἕνωσίς των εἶναι :

$A \cup B = \{x/x \text{ εἴτε τρίγωνον εἴτε τετράγωνον}\}$.

Ἐδῶ αἱ χαρακτηριστικαί ἰδιότητες τῶν στοιχείων τῶν συνόλων A καί B εἶναι ἀντιστοίχως :

α = ἕνα σχῆμα νά εἶναι τρίγωνον,

β = ἕνα σχῆμα νά εἶναι τετράγωνον.

Ἐπομένως ἡ χαρακτηριστική ἰδιότης τῶν στοιχείων τῆς $A \cup B$ εἶναι: ἕνα σχῆμα νά εἶναι εἴτε τρίγωνον εἴτε τετράγωνον καί προκύπτει ἀπό τήν διάζευξιν τῶν δύο ἰδιοτήτων α καί β. Ἡ διάζευξις ὅμως αὐτή λέγεται ἀποκλειστική, ἐπειδή ἕνα σχῆμα δέν ἠμπορεῖ νά εἶναι συγχρόνως καί τρίγωνον καί τετράγωνον˙ τά δύο σύνολα A καί B εἶναι τώρα ξένα μεταξύ των.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Μία τάξις T μικτοῦ Γυμνασίου ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα σύνολον A μαθητῶν καί ἕνα σύνολον K μαθητριῶν. Νά συμβολίσετε τά σύνολα A, K καί $A \cup K$ μέ τάς χαρακτηριστικάς ἰδιότητας τῶν στοιχείων των.

2) Ἔστω
A = {x/x φυσικός ἀριθμός < 20 καί διψήφιος ἄρτιος} ,
B = {x/x φυσικός < 20 καί διψήφιον πολλαπλάσιον τοῦ 3} .
Νά συμβολίσετε, μέ ἀναγραφήν τῶν στοιχείων των, τά δύο αὐτά σύνολα καθώς καί τήν ἕνωσίν των. Ἀκολούθως νά ἐξετάσετε, ἐάν ἡ διάζευξις τῶν χαρακτηριστικῶν ἰδιοτήτων τῶν A καί B εἶναι ἤ δέν εἶναι ἀποκλειστική.

3) Δύο συνεπίπεδοι εὐθεῖαι ε καί ε΄ ἤ τέμνονται ἤ εἶναι παράλληλοι ἤ συμπίπτουν. Θεωροῦντες αὐτάς ὡς σημειοσύνολα νά συμβολίσετε τήν ἕνωσίν των εἰς ἑκάστην περίπτωσιν καί νά ἐξετάσετε τό εἶδος τῆς διαζεύξεως τῶν ἀντιστοίχων χαρακτηριστικῶν ἰδιοτήτων τῶν στοιχείων των.

4) Ἕνας ὀπωρόκηπος Δ περιέχει ἕνα σύνολον δένδρων: μηλιές M , ροδακινιές P καί ἀχλαδιές A. Νά συμβολίσετε τά σύνολα M , P , A καί M∪P∪A μέ τάς χαρακτηριστικάς ἰδιότητας τῶν στοιχείων των καί νά καθορίσετε τό εἶδος τῆς διαζεύξεως αὐτῶν τῶν ἰδιοτήτων .

5) Νά δώσετε δύο παραδείγματα ἀποκλειστικῆς διαζεύξεως ἰδιοτήτων καί δύο μή ἀποκλειστικῆς διαζεύξεως.

§ 5. Καρτεσιανόν γινόμενον δύο συνόλων. Γραφική παράστασίς του.

5.1. Διατεταγμένα ζεύγη. Ἐμάθαμεν (Βιβλ. I , σ. 38A) τί εἶναι διατεταγμένον ζεῦγος (α,β) δύο στοιχείων α καί β , καί ὅτι, ἐάν $\alpha \neq \beta$, τότε

$$(\alpha , \beta) \neq (\beta , \alpha) ,$$

ἐνῶ

$$\{\alpha , \beta\} = \{\beta , \alpha\}$$

5.2. Καρτεσιανόν γινόμενον δύο συνόλων. Ἔστω

$$A = \{\alpha , \beta , \gamma\}$$

καί

$$B = \{0 , \square\}$$

Τό καρτεσιανόν γινόμενον $A \times B$ τῶν δύο τούτων συνόλων ἀποτελεῖται ἀπό ὅλα τά διατεταγμένα ζεύγη πού ἔχουν ὡς πρῶτον στοιχεῖον ἕνα οἱονδήποτε στοιχεῖον τοῦ A καί ὡς δεύτερον στοιχεῖον ἕνα οἱονδήποτε τοῦ B , ἤτοι

$$A \times B = \{(\alpha,0),(\alpha,\square),(\beta,0),(\beta,\square),(\gamma,0),(\gamma,\square)\}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι

$B \times A = \{(0,\alpha),(0,\beta),(0,\gamma),\ (\square,\alpha),\ (\square,\beta),\ (\square,\gamma\ )\}$.

Ἐπομένως

$$A \times B \neq B \times A \ .$$

Μέ ἄλλους λόγους εἰς τό καρτεσιανόν γινόμενον δέν ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετικότης.

Γενικῶς, ἐάν A καί B εἶναι δύο τυχόντα σύνολα τό καρτεσιανόν των γινόμενον $A \times B$ ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \ \text{ καί } \ y \in B\}.$$

Τά σύνολα A καί B δέν ἀποκλείεται νά εἶναι ἴσα (τά αὐτά), ὁπότε θά ἔχωμεν :

$$A \times A = \{(x,y) \mid x \in A \quad \text{ καί } \quad y \in A\}.$$

Τό γινόμενον $A \times A$ συμβολίζεται συντόμως μέ A^2 :

$$A^2 = \{(x,y) \mid x \in A \quad \text{ καί } y \in A\} \quad .$$

Ἐάν τά σύνολα A καί B εἶναι πεπερασμένα καί ἔχουν ἀντιστοίνους πληθικούς ἀριθμούς κ καί λ , τότε τό $A \times B$ εἶναι πεπερασμένον καί ἔχει πληθικόν ἀριθμόν τό γινόμενον κ.λ. Νά ἐπαληθεύσετε τοῦτο μέ $\kappa = 3$ καί $\lambda = 4$.

Μέ τάς ἰδίας ἀριθμητικάς τιμάς τοῦ κ καί τοῦ λ νά εὕρετε τούς πληθικούς ἀριθμούς τῶν καρτεσιανῶν γινομένων A^2 καί B^2.

5.3. Γραφική παράστασις καρτεσιανοῦ γινομένου.

Τό καρτεσιανόν γινόμενον $B \times A$, ὅπου

$$B = \{0, \square\} \qquad \text{καί } A = \{\alpha\ ,\ \beta\ ,\ \gamma\}$$

ἠμπορεῖ νά παρασταθῇ γραφικῶς μέ τόν ἀκόλουθον πίνακα διπλῆς εἰσόδου:

B \ A	α	β	γ
0	(0,α)	(0,β)	(0,γ)
□	(□,α)	(□,β)	(□,γ)

Μέ ὅμοιον πίνακα ἠμποροῦμεν νά παραστήσωμεν κάθε καρτεσιανόν γινόμενον δύο συνόλων.

Εἰδικῶς, ὅταν τά σύνολα A καί B ἔχουν ὡς στοιχεῖα ρητούς σχετικούς ἀριθμούς , τότε τά καρτεσιανά γινόμενα $A \times B$ καί $B \times A$ ἔχουν ὡς στοιχεῖα διατεταγμένα ζεύγη ρητῶν σχετικῶν ἀριθμῶν. Τά ζεύγη αὐτά ἐμάθαμεν (Βιβλ. II, σ. 41 καί ἑξῆς) νά τά παριστάνωμεν γεωμετρικῶς μέ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου χρησιμοποιοῦντες ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων.

Π.χ. ἐάν

$A = B = P =$ σύνολον τῶν ρητῶν σχετικῶν ἀριθμῶν ,

τότε τό $P^2 = P \times P$ ἀποτελεῖται ἀπό ὅλα τά διατεταγμένα ζεύγη (x, y), ὅπου x καί y ὁποιοιδήποτε ρητοί σχετικοί ἀριθμοί, ἤτοι συμβολικά:

$$P^2 = \{(x,y) \mid x \in P \quad \text{καί} \quad y \in P\}$$

Ἐξ ἄλλου τό ζεῦγος (x, y) παριστάνεται, ὅπως γνωρίζομεν, μέ ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου πού ἔχει τετμημένην x καί τεταγμένην y ὡς πρός τό σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων πού χρησιμοποιοῦμεν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά σχηματίσετε τό καρτεσιανόν γινόμενον $A \times B$ τῶν συνόλων

$$A = \{+ \; , \; = \; , \; : \} ,$$
$$B = \{ \Longrightarrow \; , \; \sim \; \}$$

καί νά τό παραστήσετε μέ πίνακα διπλῆς εἰσόδου.

2) Δίδονται τά σύνολα

$$A = \left\{-2, 3\frac{1}{2}, 4\frac{2}{5}\right\} \quad \text{καί} \quad B = \left\{2, -4\frac{3}{5}, 5, -3\frac{1}{2}\right\}.$$

Νά παραστήσετε γεωμετρικῶς ἐπί τετραγωνισμένου χιλιοστομετρικοῦ χάρτου τά καρτεσιανά γινόμενα $A \times B$ καί $B \times A$ εἰς δύο χωριστά σχεδιάσματα.
Νά ἐξετάσετε, ἐάν ἰσχύει ἡ σχέσις ἰσοδυναμίας

$$(A \times B) \sim (B \times A).$$

3) Νά παραστήσετε γεωμετρικῶς ἐπί χιλιοστομετρικοῦ χάρ-

του τό καρτεσιανόν γινόμενον A^2, εάν

$$A = \left\{-3\ ,\ 5\ ,\ 2\frac{3}{5}\ ,-5\frac{1}{2}\right\}.$$

Νά χαράξετε τήν διχοτόμον τῶν γωνιῶν I καί III τοῦ συστήματος ὀρθογωνίων ἀξόνων (Βιβλ. I , σ. 105) καί νά ἐξετάσετε ἐάν εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σημειοσυνόλου πού ἀπεικονίζει τό A^2.

§ 6. Διαμερισμός συνόλου.

6.1. Διαμερισμός. Τό σύνολον Γ τῶν μαθητῶν τοῦ Γυμνασίου μας κατανέμεται είς τάς ἕξι τάξεις του T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 καί T_6 κατά τρόπον ὥστε:

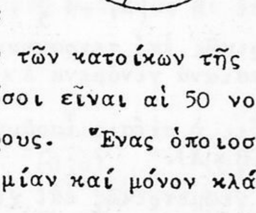
1ον. Καμμία τάξις νά μή εἶναι σύνολον κενόν.

2ον. Δύο τυχοῦσαι τάξεις νά εἶναι σύνολα ξένα μεταξύ των.

3ον. Ἡ ἕνωσις τῶν ἕξι τάξεων νά εἶναι σύνολον ἴσον μέ τό σύνολον Γ.

Ὁ διαχωρισμός ἑνός συνόλου είς ὑποσύνολα τά ὁποῖα ἔχουν τάς ἀνωτέρω τρεῖς ἰδιότητας ὀνομάζεται διαμερισμός τοῦ συνόλου είς κλάσεις.

Ὁ διαμερισμός τοῦ Γυμνασίου μας είς τάς ἕξι τάξεις του ἠμπορεῖ νά παρασταθῇ γραφικῶς μέ τόν ἀκόλουθον τρόπον:



Ἄλλα παραδείγματα:

1ον. Τό σύνολον τῶν κατοίκων τῆς Ἑλλάδος διαμερίζεται είς 51 κλάσεις, ὅσοι εἶναι αἱ 50 νομοί της πλέον ἡ περιοχή τοῦ Ἁγίου Ὄρους. Ἕνας ὁποιοσδήποτε κάτοικος τῆς Ἑλλάδος ἀνήκει είς μίαν καί μόνον κλάσιν (ὡς κάτοικος ἑνός καί μόνον νομοῦ ἤ τῆς περιοχῆς τοῦ Ἁγίου Ὄρους). Ἐπί κάθε κάτοικος τῆς Ἑλλάδος προσδιορίζει μίαν ὡρισμένην κλάσιν καί ἠμπορεῖ νά θεωρηθῆ ὡς ἀντιπρόσωπός της. Π.χ. ἕνας Λέσβιος ἀντιπροσωπεύει τήν κλάσιν τῶν κατοίκων τοῦ νομοῦ Λέσβου.

2ον. Τό σύνολον τῶν σπονδυλωτῶν ζώων διαμερίζεται εἰς τάς κλάσεις τῶν θηλαστικῶν, τῶν βατραχωδῶν, τῶν ἑρπετῶν, τῶν πτηνῶν καί τῶν ἰχθύων.

3ον Τό σύνολον τῶν ἀκεραίων σχετικῶν ἀριθμῶν διαμερίζεται εἰς τάς ἑξῆς τρεῖς κλάσεις:

$\Phi = \{x/x$ φυσικός ἀριθμός$\} = \{x/x$ ἀκέραιος θετικός$\}$

$A = \{x/x$ ἀκέραιος ἀρνητικός$\} = \{-1,-2,-3,-4,\ldots\}$

$M = \{x/x$ μηδέν$\} = \{0\}$.

6.2. <u>Διαμερισμός εἰς δύο κλάσεις</u>. Ἔστω

$\Phi = \{x/x$ φυσικός ἀριθμός$\} = \{1,2,3,4,\ldots\}$.

Τό σύνολον αὐτό διαμερίζεται εἰς τάς δύο κλάσεις:

$A' = \{x/x$ φυσικός περιττός$\} = \{1,3,5,7,\ldots\}$

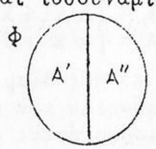
$A'' = \{x/x$ φυσικός ἄρτιος$\} = \{2,4,6,8,\ldots\}$.

Εἰς τόν διαμερισμόν αὐτόν ἰσχύουν αἱ λογικαί ἰσοδυναμίαι:

$$x \in A' \iff x \notin A''$$

καί

$$x \in A'' \iff x \notin A'.$$



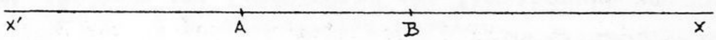
Γραφικῶς ὁ διαμερισμός παριστάνεται μέ τό παραπλεύρως διάγραμμα:

Γενικῶς, ὅταν ἕνα σύνολον E εἶναι διαμερισμένον εἰς δύο κλάσεις E′ καί E″, τότε ἡ καθεμία ἀπό αὐτάς εἶναι συμπλήρωμα τῆς ἄλλης ὡς πρός ὑπερσύνολον τό E (Βιβλ. I, σ. 52-53A)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Μία ἀνθοδέσμη ἀποτελεῖται ἀπό χρυσάνθεμα λευκά, χρυσάνθεμα κόκκινα καί χρυσάνθεμα κίτρινα. Νά ἐξετάσετε, ἐάν τά τρία αὐτά ὑποσύνολα ἀποτελοῦν διαμερισμόν τοῦ συνόλου τῶν χρυσανθέμων τῆς ἀνθοδέσμης καί διατί.

2) Ἕνα τμῆμα ΑΒ λέγεται <u>κλειστόν</u>, ἄν εἰς τό σύνολον τῶν σημείων του περιλαμβάνωμεν τά δύο ἄκρα του Α καί Β, λέγεται <u>ἀνοικτόν</u>, ἄν δέν περιλαμβάνωμεν εἰς αὐτό οὔτε τό Α οὔτε τό Β.
Ὁμοίως μία ἡμιευθεῖα Αx λέγεται <u>κλειστή</u> ἤ <u>ἀνοικτή</u> ὅταν ἡ ἀρχή της Α <u>συμπεριλαμβάνεται</u> ἤ <u>δέν συμπεριλαμβάνεται</u> εἰς τό σύνολον τῶν σημείων της.
Νά λάβετε τώρα ἐπάνω εἰς τήν εὐθεῖαν x΄x



δύο σημεῖα Α καί Β καί νά ἐξετάσετε:
α) ἄν τό κλειστόν τμῆμα ΑΒ καί αἱ δύο ἀνοικταί ἡμιευθεῖαι Αx΄ καί Βx ἀποτελοῦν διαμερισμόν τοῦ σημειοσυνόλου τῆς εὐθείας
β) ἄν ἡ κλειστή ἡμιευθεῖα Αx΄ καί ἡ ἀνοικτή Αx ἀποτελοῦν διαμερισμόν τῆς x΄x
γ) ἄν αἱ ἀνοικταί ἡμιευθεῖαι Βx΄ καί Βx ἀποτελοῦν διαμερισμόν τῆς x΄x
δ) ἄν αἱ κλεισταί ἡμιευθεῖαι Αx καί Βx΄ ἀποτελοῦν διαμερισμόν τῆς x΄x.

3) Ἔστω Γ τό σύνολον τῶν σχετικῶν <u>ἀκεραίων</u> ἀριθμῶν. Νά ἐξετάσετε, ἄν τά κατωτέρω ὑποσύνολά του ἀποτελοῦν διαμερισμόν τοῦ Γ εἰς κλάσεις εἰς ἑκάστην ἀπό τάς διδομένας τέσσαρας περιπτώσεις:
α) $A = \{x/x \leqslant 0\}$, $B = \{x/0 < x \leqslant 7\}$, $\Delta = \{x/x > 7\}$
β) $A = \{x/x \leqslant -3\}$, $B = \{x/x \geqslant 5\}$, $\Delta = \{x/x > 6\}$
γ) $A = \{x/-7 \leqslant x < 5\}$, $B = \{x/x \geqslant 5\}$, $\Delta = \{x/x < -7\}$
δ) $A = \{x/x \geqslant -5\}$, $B = \{x/x \leqslant 0\}$.

4) Πῶς διαμερίζει ἡ Γραμματική τῆς Ἑλληνικῆς γλώσσης τό σύνολον τῶν ὀνομάτων εἰς δύο κλάσεις;
Νά παραστήσετε μέ ἕνα διάγραμμα τόν διαμερισμόν αὐτόν.

§ 7. Διμελεῖς σχέσεις.

<u>7.1. Διμελής σχέσις.</u> 1) Ὅταν λέγωμεν: "ὁ μαθητής x εἶναι συμμαθητής τοῦ y εἰς τό τμῆμα A_1 τῆς 1ης τάξεως ἑνός Γυμνασίου" ἐκφράζομεν μίαν σχέσιν μεταξύ δύο μελῶν τοῦ συνόλου Γ τῶν μαθητῶν τοῦ Γυμνασίου. Διά τοῦτο ἡ σχέσις αὐτή λέγεται <u>διμελής</u>. Τά ζεύγη (x,y) διά τά ὁποῖα ἡ σχέσις ἀληθεύει, ἀποτελοῦν ἕνα σύνολον Α πού παριστάνομεν ὡς ἑξῆς:
$A = \{(x,y) \mid x \in \Gamma,\ y \in \Gamma$ καί x συμμαθητής τοῦ y εἰς τό $A_1\}$.

Τό σύνολον αὐτό εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου

$$\Gamma \times \Gamma = \Gamma^2 = \{(x,y) \mid x \in \Gamma \quad \text{καί} \quad y \in \Gamma\}$$

πού ἔχει ἐπί πλέον ὡς στοιχεῖα τά ζεύγη μαθητῶν (x,y) διά τά ὁποῖα ἡ ἀνωτέρω σχέσις δέν ἀληθεύει.

2) Ἔστω Ε τό σύνολον τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου. Ἡ σχέσις καθετότητος μεταξύ δύο εὐθειῶν x καί y τοῦ Ε εἶναι μία διμελής σχέσις πού παρεστήσαμεν μέ τόν συμβολισμόν $x \perp y$.

3) Μέ τήν ἀπεικόνισιν (Βιβλ. ΙΙ, σ. 45):

"y εἶναι νῆσος παραθερισμοῦ τοῦ x εἰς τάς Κυκλάδας"

ὁρίζομεν μίαν διμελῆ σχέσιν μεταξύ τῶν στοιχείων x καί y τῶν δύο συνόλων

$$A = \{x/x \ \text{μαθητής τοῦ σχολείου μας}\},$$

$$B = \{y/y \ \text{νῆσος τῶν Κυκλάδων}\}.$$

4) Μέ τήν ἀριθμητικήν συνάρτησιν (Βιβλ. ΙΙ, σ. 47-48):

$$\sigma : x \xrightarrow{\sigma} 2x + 1 = y \qquad (x \in P \ , \ y \in P)$$

ὁρίζομεν μίαν διμελῆ σχέσιν μεταξύ δύο ρητῶν σχετικῶν ἀριθμῶν x καί y . Τά ζεύγη (x,y) διά τά ὁποῖα ἡ ἀνωτέρω σχέσις ἀληθεύει παριστάνονται , ὅπως εἴδαμεν, γεωμετρικῶς μέ σημεῖα μιᾶς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου.

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τά παραδείγματα 1), 2), καί 4) ἡ σχέσις συνδέει δύο στοιχεῖα τοῦ αὐτοῦ συνόλου, ἀντιθέτως εἰς τό παράδειγμα 3) ἡ σχέσις συνδέει δύο στοιχεῖα διαφορετικῶν συνόλων.

Ἐκτός τῶν διμελῶν σχέσεων ὑπάρχουν φυσικά καί σχέσεις μέ τρία ἤ περισσότερα μέλη, ὅπως π.χ. ἡ σχέσις: "τό σημεῖον x κεῖται μεταξύ τῶν σημείων y καί z μιᾶς εὐθείας ε" ἤ ἡ σχέσις: "ὁ μαθητής x ἦλθε πρῶτος μεταξύ τῶν συμμαθητῶν του εἰς τό διαγώνισμα."

Θά περιορίσωμεν ὅμως τήν μελέτην μας εἰς τήν ἀκόλουθον διμελῆ σχέσιν.

7.2. Σχέσις ἰσοδυναμίας. 1) Ἐμάθαμεν (Βιβλ. Ι, σ. 6Γ) ὅτι δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καί $\frac{\alpha'}{\beta'}$ λέγονται ἴσα (ἤ ἰσοδύναμα), ὅταν ἐφαρμοζόμενα ὡς ἐκτελεσταί εἰς τό ἴδιον εὐθύγραμμον τμῆμα δίδουν ἴσα τμήματα. Ἡ σχέσις αὐτή εἶναι μία διμελής σχέσις μεταξύ τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου τῶν κλασμάτων καί ἔχει τάς ἀκολούθους τρεῖς ἰδιότητας :

1) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$, ἀνακλαστικήν ,

2) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'} \Longrightarrow \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha}{\beta}$, συμμετρικήν ,

3) $\left(\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'} \text{ καί } \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha''}{\beta''}\right) \Longrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha''}{\beta''}$, μεταβατικήν.

Κάθε διμελής σχέσις μεταξύ τῶν στοιχείων ἑνός συνόλου ἡ ὁποία ἔχει τάς ἀνωτέρω τρεῖς ἰδιότητας λέγεται σχέσις ἰσοδυναμίας.

Ἡ ἀνωτέρω σχέσις μεταξύ κλασμάτων διαμερίζει τό σύνολον τῶν κλασμάτων εἰς κλάσεις ἴσων (ἤ ἰσοδυνάμων) κλασμάτων. Π.χ. τό σύνολον τῶν ἴσων κλασμάτων

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \ldots, \frac{2\nu}{3\nu}, \ldots \qquad (\nu \in \Phi)$$

ἀποτελεῖ μίαν κλάσιν. Κάθε στοιχεῖον τῆς κλάσεως προσδιορίζει ὁλόκληρον τήν κλάσιν καί δύναται νά ληφθῇ ὡς ἀντιπρόσωπός της. Ἕνας εἰδικός ἀντιπρόσωπος εἶναι τό ἀνάγωγον κλάσμα της.

Γενικῶς, μία σχέσις ἰσοδυναμίας μεταξύ τῶν στοιχείων ἑνός συνόλου διαμερίζει τό σύνολον εἰς κλάσεις ἰσοδυνάμων στοιχείων αἱ ὁποῖαι καλοῦνται κλάσεις ἰσοδυναμίας.

Κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου ἀνήκει εἰς μίαν ὡρισμένην κλάσιν ἰσοδυναμίας καί ἑπομένως προσδιορίζει τήν κλάσιν του, δύναται δέ νά ληφθῇ ὡς ἀντιπρόσωπός της.

2) Ἡ ἰσότης μεταξύ δύο συνόλων (βλ. § 1.1–1.2) εἶναι μία διμελής σχέσις ἰσοδυναμίας.

3) Ἡ ἰσοδυναμία μεταξύ δύο συνόλων (βλ. 1.3-1.4) εἶναι μία διμελής σχέσις ἰσοδυναμίας. Τά ἀπαριθμητά ἀπειροσύνολα (§ 1.5) ἀποτελοῦν μίαν σημαντικωτάτην κλάσιν ἰσοδυναμίας αὐτῆς τῆς διμελοῦς σχέσεως ὡς ἀντιπρόσωπος τῆς κλάσεως ἠμπορεῖ νά ληφθῆ τό σύνολον Φ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

4) Ἡ ἰσότης μεταξύ δύο τριγώνων (Βιβλ. Ι, σ. 50 Γ κ.ἑ.) εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας, ἐπειδή ἔχει τάς ἰδιότητας:

α) τργ ΑΒΓ = τργ ΑΒΓ

β) (τργ ΑΒΓ = τργ Α΄Β΄Γ΄) $\Longrightarrow$ (τργ Α΄Β΄Γ΄ = τργ ΑΒΓ),

γ) (τργ ΑΒΓ = τργ Α΄Β΄Γ΄ καί τργ Α΄Β΄Γ΄ = τργ Α΄΄Β΄΄Γ΄΄) $\Longrightarrow$ (τργ ΑΒΓ = τργ Α΄΄Β΄΄

5) Ἡ παραλληλία μεταξύ δύο εὐθειῶν, ὅπως τήν ὡρίσαμεν (Βιβλ. Ι, σ. 77Α), δέν εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας, ἐπειδή δέν ἔχει τήν ἀνακλαστικήν ἰδιότητα. Εἶναι ὅμως χρήσιμον νά εὐρύνωμεν τήν ἔννοιαν τῆς παραλληλίας κατά τόν ἀκόλουθον τρόπον, οὕτως ὥστε ἡ παραλληλία μεταξύ δύο εὐθειῶν νά γίνη σχέσις ἰσοδυναμιας :

<u>Ὁρισμός</u>. Δύο εὐθεῖαι α καί β λέγονται <u>παράλληλοι μεταξύ των μέ εὐρεῖαν σημασίαν</u>, ὅταν καί μόνον ὅταν 1ον εἶναι συνεπίπεδοι, δηλαδή κεῖνται μέσα εἰς ἕνα καί τό ἴδιον ἐπίπεδο , καί 2ον δέν ἔχουν κανένα κοινόν σημεῖον ἤ ἔχουν ὅλα τους τά σημεῖα κοινά (συμπίπτουν).

Εἰς τήν περίπτωσιν πού δέν ἔχουν κανένα κοινόν σημεῖον, αἱ εὐθεῖαι θά λέγωνται <u>παράλληλοι μέ στενήν σημασίαν</u>.

Τό σύμβολον $\parallel$ θά συμβολίζη εἰς τό ἑξῆς παραλληλίαν μέ εὐρεῖαν σημασίαν.

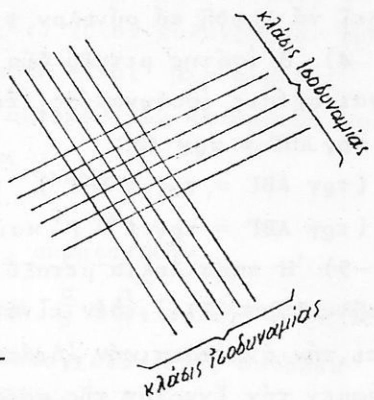
Ἄς θεωρήσωμεν τώρα τό σύνολον $E = \{\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots\}$ τῶν εὐθειῶν ἑνός ἐπιπέδου καί τήν σχέσιν παραλληλίας μέ εὐρεῖαν σημασίαν εἰς αὐτό τό σύνολον. Διά τήν σχέσιν αὐτήν ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες:

α) $\varepsilon \parallel \varepsilon$, ἀνακλαστική,

β) $\varepsilon \parallel \varepsilon' \Longrightarrow \varepsilon' \parallel \varepsilon$, συμμετρική,

γ) $(\varepsilon \parallel \varepsilon'$ καί $\varepsilon' \parallel \varepsilon'') \Longrightarrow \varepsilon \parallel \varepsilon''$, μεταβατική.

Ἄρα ἡ παραλληλία μέ εὐρεῖαν σημασίαν εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας καί διαμερίζει τό σύνολον E τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου εἰς κλάσεις ἰσοδυναμίας.



Κάθε κλάσις ἀποτελεῖται ἀπό τάς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου πού εἶναι ἀνά δύο παράλληλοι μεταξύ των καί ὁρίζει <u>μίαν διεύθυνσιν</u> ἐντός τοῦ ἐπιπέδου. Δύο διαφορετικαί κλάσεις εἶναι ὑποσύνολα τοῦ E ξένα μεταξύ των καί ὁρίζουν δύο διαφορετικάς διευθύνσεις.

<u>7.3. Γραφική παράστασις διμελοῦς σχέσεως.</u> 1) Ἡ ποδοσφαιρική ὁμάς Π ἑνός Γυμνασίου Σ εἶναι ἕνα σύνολον ἕνδεκα μαθητῶν:

$$\Pi = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$$

οἱ ὁποῖοι ἀνήκουν εἰς τάς τάξεις τοῦ Γυμνασίου ὡς ἑξῆς:

οἱ 1,2,3,4,5 εἰς τήν ΣΤ΄ τάξιν
οἱ 6, 7, 8 " " Ε΄ "
οἱ 9 , 10 " " Δ΄ "
καί ὁ 11 " " Γ΄ "

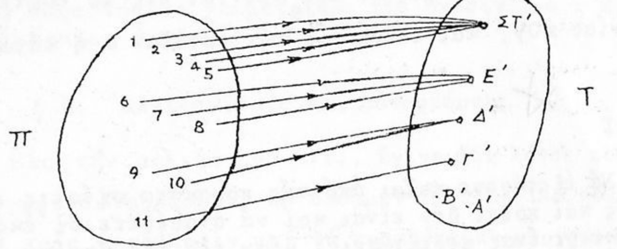
Ἡ σχέσις:

" x μέλος τῆς ὁμάδος Π ἀνήκει εἰς τήν τάξιν y τοῦ Σ "-

εἶναι μία διμελής σχέσις μεταξύ τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου Π καί τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου

$$T = \{A', B', \Gamma', \Delta', E', \Sigma T'\}$$

τῶν τάξεων τοῦ Γυμνασίου. Ἠμποροῦμεν νά παραστήσωμεν γραφικῶς τήν σχέσιν μέ τά ἀκόλουθα διαγράμματα τοῦ Venn συμπληρωμένα μέ γραμμάς πού ξεκινοῦν ἀπό τά στοιχεῖα τοῦ Π καί καταλήγουν εἰς στοιχεῖα τοῦ Τ :



Ἡ ἰδία διμελής σχέσις ἠμπορεῖ νά παρασταθῆ καί μέ τόν ἀκόλουθον πίνακα διπλῆς εἰσόδου:

Τ \ Π	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Α'											
Β'											
Γ'											+
Δ'									+	+	
Ε'						+	+	+			
ΣΤ'	+	+	+	+	+						

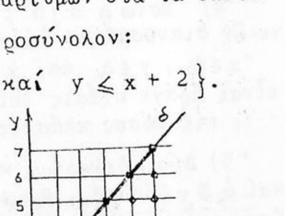
2) Ἔστω δεύτερον ἡ διμελής σχέσις

$$y \leq x + 2 \quad \text{ὅπου } x \in Φ \text{ καί } y \in Φ .$$

Τά διατεταγμένα ζεύγη (x,y) φυσικῶν ἀριθμῶν διά τά ὁποῖα ἡ σχέσις ἀληθεύει ἀποτελοῦν ἕνα ἀπειροσύνολον:

$$Λ = \{(x,y) \mid x \in Φ \ , \ y \in Φ \quad \text{καί} \quad y \leq x + 2\}.$$

Τό σύνολον αὐτό παριστάνεται γεωμετρικῶς μέ τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου πού ἔχουν ὡς πρός ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων τάς ἑξῆς συντεταγμένας:



x =	1	2	3	4	5	. . .
y φυσικός $\leqslant$	3	4	5	6	7	. . .

Εἰς τό προηγούμενον σχῆμα τά σημεῖα αὐτά εἶναι οἱ κόμβοι τοῦ τετραγωνισμένου χάρτου πού κεῖνται εἰς τό ἐσωτερικόν τῆς γωνίας $x\hat{O}y$, καί ἐπάνω εἰς τήν εὐθεῖαν δ ἤ κάτωθεν αὐτῆς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά ἐξετάσετε ποῖαι ἀπό τάς παρακάτω σχέσεις εἶναι διμελεῖς καί ποῖαι δέν εἶναι καί νά ἀναφέρετε δι' ἑκάστην δύο συγκεκριμένας περιπτώσεις, μίαν εἰς τήν ὁποίαν ἡ σχέσις νά ἀληθεύῃ καί μίαν εἰς τήν ὁποίαν ἡ σχέσις νά μή ἀληθεύῃ:

1η. $x \in A$ (Α τυχόν σύνολον , x τυχόν στοιχεῖον).
2α. ΑΚ = ΓΔ (ΑΚ καί ΓΔ τυχόντα εὐθύγραμμα τμήματα).
3η. Ἡ εὐθεῖα x εἶναι συνεπίπεδος μέ τήν εὐθεῖαν y.
4η. Ὁ ρητός σχετικός ἀριθμός x εἶναι ἄθροισμα τῶν ρητῶν σχετικῶν ἀριθμῶν y καί z.
5η. Ὁ x εἶναι ἐξάδελφος τοῦ y.
6η. $x + y + \omega = 10$ $(x \in \Phi , y \in \Phi , \omega \in \Phi)$.
7η. $x = y + 5$ $(x \in \Phi , y \in \Phi)$.

Νά σχηματίσετε καί ἰδικάς σας διμελεῖς σχέσεις.

2) Νά ἐξηγήσετε διατί ἡ σχέσις καθετότητος $x \perp y$ μεταξύ δύο εὐθειῶν ἑνός ἐπιπέδου δέν εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.

3) Ἡ σχέσις " ὁ φυσικός ἀριθμός x εἶναι διαιρέτης τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ y " εἶναι ἄραγε σχέσις ἰσοδυναμίας καί διατί ;

4) Ἔστω $\Delta = \{\vec{\delta}, \vec{\delta'}, \vec{\delta''}, \ldots\}$ τό σύνολον τῶν μή μηδενικῶν διανυσμάτων ἐπάνω εἰς μίαν εὐθεῖαν ε. Ἡ σχέσις "$x \in \Delta$, $y \in \Delta$ καί x ἔχει τήν αὐτήν φοράν μέ τό y" εἶναι ἄραγε σχέσις ἰσοδυναμίας καί, εἰς καταφατικήν περίπτω-[illegible], εἰς πόσας κλάσεις ἰσοδυναμίας διαμερίζει τό σύνολον Δ;

5) Δύο ἀδελφοί Α καί Β ἔχουν ὁ Α τρία παιδιά: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ καί ὁ Β δύο: β_1, β_2 . Νά παραστήσετε μέ διαγράμματα τοῦ Venn καί καταλλήλους συνδετικάς γραμμάς τήν διμελῆ σχέσιν: $x \in \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, y \in \{\beta_1, \beta_2\}$ καί x ἐξάδελφος ἤ ἐξαδέλφη τοῦ y.

6) Νά παραστήσετε γεωμετρικῶς τάς διμελεῖς σχέσεις

$y = x + 2$ καί $y = x - 3$

ὅπου x καί y ἀκέραιοι σχετικοί ἀριθμοί.

7) Νά παραστήσετε γεωμετρικῶς τήν διμελῆ σχέσιν $x \leqslant y$ ὅπου x καί y ἀκέραιοι σχετικοί ἀριθμοί.

8) Νά παραστήσετε γεωμετρικῶς τήν σχέσιν $y \leqslant \frac{1}{2}x$ ὅπου x καί y ἀκέραιοι ἀριθμοί $\geqslant 0$.

§ 8. Ἀπεικονίσεις καί συναρτήσεις

8.1. Εἰς τήν σελίδα 45 κ.ἑ., ἔγινε ἤδη λόγος περί ἀπεικονίσεων καί συναρτήσεων. Θά δώσωμεν τώρα μερικά νέα παραδείγματα πρός ἐπανάληψιν καί θά προσθέσωμεν μερικάς συμπληρώσεις.

1) Ἄς ἐπανέλθωμεν εἰς τό παράδειγμα 1) τοῦ ἐδ. § 7.3. Ἡ διμελής σχέσις:

" x μέλος τῆς ὁμάδος Π ἀνήκει εἰς τήν τάξιν y τοῦ Σ "

ἀντιστοιχίζει εἰς κάθε ποδοσφαιριστήν τῆς ὁμάδος Π μίαν ὡρισμένην τάξιν τοῦ Γυμνασίου Σ. Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ τάξεις Α΄καί Β΄ δέν ἀντιστοιχοῦν εἰς κανένα μέλος τῆς ὁμάδος Π , ἐνῶ ἡ καθεμία ἀπό τάς τάξεις Γ΄, Δ΄, Ε΄ καί ΣΤ΄ ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα τουλάχιστον μέλος τῆς ὁμάδος.

Δι'αὐτό λέγομεν ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἀντιστοιχία εἶναι μία ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου

$$Π = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$$

ἐντός τοῦ συνόλου

$$T = \{Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄, Ε΄, ΣΤ΄\}$$

καί ἐπί τοῦ ὑποσυνόλου τοῦ T:

$$T_1 = \{Γ΄, Δ΄, Ε΄, ΣΤ΄\}.$$

Ἡ ἰδία ἀντιστοιχία λέγεται καί συνάρτησις μέ πεδίον ὁρισμοῦ τό σύνολον Π καί πεδίον τιμῶν τό σύνολον T_1 , ὑποσύνολον τοῦ T. Οἱ ποδοσφαιρισταί τῆς ὁμάδος Π λέγονται ἀρχέτυπα τῆς ἀπεικονίσεως, αἱ τάξεις Γ΄, Δ΄, Ε΄ καί ΣΤ΄ λέγονται εἰκόνες τῶν ἀρχετύπων. Κάθε ἀρχέτυπον ἔχει μίαν καί μόνον εἰκόνα· π.χ. τό ἀρχέτυπον 1 ἔχει εἰκόνα τήν τάξιν ΣΤ΄καί τό 7 ἔχει εἰκόνα τήν τάξιν Ε΄. Δύο ἤ περισσότερα ἀρχέτυπα ἡμποροῦν νά ἔχουν <u>τήν αὐτήν εἰκόνα</u>· π.χ. τά ἀρχέτυπα 9 καί 10 ἔχουν τήν αὐτήν εἰκόνα Δ΄.

2) Ἔστω

$$M = \{x \mid x \text{ μαθητής τοῦ Γυμνασίου } \Sigma\}$$

καί $T = \{y \mid y \text{ τάξις τοῦ Γυμνασίου } \Sigma\}$.

Ἡ διμελής σχέσις

" x μαθητής τοῦ Γυμνασίου Σ ἀνήκει εἰς τήν τάξιν y τοῦ Σ"

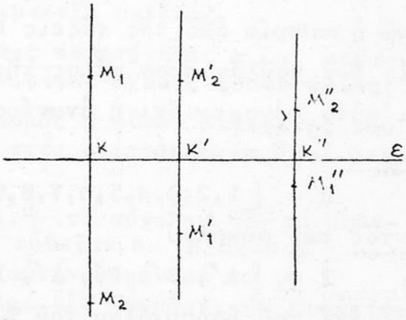
ἀπεικονίζει τώρα τό σύνολον Μ ἐπί τοῦ συνόλου Τ, διότι κάθε τάξις τοῦ Σ ἔχει μαθητάς καί ἐπομένως κάθε στοιχεῖον τοῦ Τ εἶναι εἰκών ἑνός τουλάχιστον στοιχείου τοῦ Μ.

3) Ἔστω

$$A = \{x \mid x \text{ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου } p\}$$

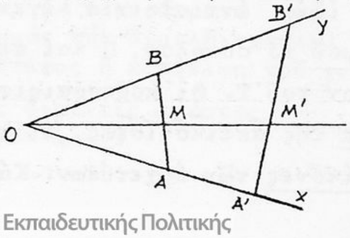
καί $B = \{y \mid y \text{ σημεῖον τῆς εὐθείας } \varepsilon \text{ τοῦ ἐπιπέδου } p\}$.

Ἀπό κάθε σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου χαράσσομεν τήν κάθετον πρός τήν εὐθεῖαν ε καί ἔστω Κ τό σημεῖον τομῆς τῆς καθέτου μέ τήν ε.



Εἰς τό σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχίζομεν τό σημεῖον Κ, ἴχνος τῆς καθέτου πρός τήν ε ἀπό τό σημεῖον Μ. Ἡ ἀντιστοιχία αὐτή εἶναι μία ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου Α ἐπί τοῦ συνόλου Β, διότι κάθε σημεῖον τῆς εὐθείας ε εἶναι εἰκών, ἀπειραρίθμων μάλιστα, σημείων τοῦ ἐπιπέδου p.

4) Ἄς εἶναι $x\hat{O}y$ μία κυρτή γωνία (σχ. παραπλεύρως), ΑΒ καί Α΄Β΄ δύο τμήματα μέ ἄκρα ἐπάνω



εἰς τάς δύο πλευράς τῆς γωνίας. Ἔστω Μ τυχόν σημεῖον τοῦ (κλειστοῦ) τμήματος ΑΒ ($M \in AB$). Ἡ ἡμιευθεῖα ΟΜ θά κόψη τό τμῆμα Α΄Β΄ εἰς ἕνα σημεῖον , ἄς τό καλέσωμεν Μ΄ ($M' \in A'B'$). Ἐάν εἰς τό Μ ἀντιστοιχίσωμεν τό Μ΄, θά ἔχωμεν μίαν ἀπεικόνισιν τοῦ σημειοσυνόλου ΑΒ ἐπί τοῦ σημειοσυνόλου Α΄Β΄. Ἡ ἀπεικόνισις αὐτή ἔχει τήν ἀκόλουθον ἰδιότητα: ὄχι μόνον κάθε ἀρχέτυπον Μ ἔχει μίαν καί μόνον εἰκόνα Μ΄ ἀλλά καί , ἀντιστρόφως, κάθε εἰκών ἔχει ἕνα μόνον ἀρχέτυπον. Ἀπεικονίσεις καί συναρτήσεις μέ αὐτήν τήν ἰδιότητα λέγονται ἀμφιμονοσήμαντοι.

5) Ἔστω

$$A = \{x \,/\, x \text{ ἄρτιος φυσικός ἀριθμός}\}$$

καί $\Phi = \{y \,/\, y \text{ φυσικός ἀριθμός}\}$.

Ἡ διμελής σχέσις $y = \frac{1}{2}x$ ἀπεικονίζει τό σύνολον Α ἐπί τοῦ συνόλου Φ , διότι ἀντιστοιχίζει εἰς κάθε ἄρτιον φυσικόν x ἕνα φυσικόν ἀριθμόν y οὕτως ὥστε κάθε φυσικός ἀριθμός y νά εἶναι εἰκών ἑνός ἀρτίου φυσικοῦ, τοῦ $x = 2y$. Μέ ἄλλην ἔκφρασιν , ἔχομεν ἐδῶ μίαν συνάρτησιν μέ πεδίον ὁρισμοῦ τό σύνολον Α καί πεδίον τιμῶν τό σύνολον Φ . Ἡ συνάρτησις αὐτή εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος, ἐπειδή κάθε φυσικός y εἶναι εἰκών ἑνός μόνον ἀρτίου, τοῦ $x = 2y$.

6) Ἔστω $P = \{x/x$ ρητός σχετικός ἀριθμός$\}$. Ἡ διμελής σχέσις $y = \frac{1}{3}x$, ($x \in P$), ἀπεικονίζει τό σύνολον Ρ ἐπί τοῦ ἑαυτοῦ του. Ἡ ἀπεικόνισις εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος, ἐπειδή εἰς κάθε ρητόν σχετικόν ἀριθμόν x ἀντιστοιχίζει ἕνα ἐπίσης ρητόν ἀριθμόν y οὕτως ὥστε καί κάθε ρητός σχετικός ἀριθμός y νά εἶναι εἰκών ἑνός καί μόνον ρητοῦ, τοῦ $x = 3y$.

8.2. Συμβολική γραφή μιᾶς ἀπεικονίσεως ἤ συναρτήσεως. Ἄς εἶναι Α καί Β δύο (μή κενά) σύνολα (δέν ἀποκλείομεν τήν περίπτωσιν $A = B$) καί ἄς παραστήσωμεν μέ x τυχόν στοιχεῖον τοῦ A , μέ y τυχόν στοιχεῖον τοῦ B. Τό A λέγεται <u>πεδίον τῆς μεταβλητῆς x</u> καί τό B <u>πεδίον τῆς μεταβλητῆς y</u>. Μία ἀπεικόνισις τοῦ A ἐντός (ἤ ἐπί) τοῦ B (μία συνάρτησις μέ πεδίον ὁρισμοῦ τό A καί πεδίον τιμῶν ἕνα ὑποσύνολον τοῦ B) παριστάνεται μέ τό γράμμα σ, ἀρχικόν τῆς λέξεως συνάρτησις καί μέ ἕνα βέλος κατευθυνόμενον ἀπό τό γράμμα A πρός τό γράμμα B ὡς ἑξῆς:

$$\sigma : \quad A \xrightarrow{\sigma} B.$$

Ὁ συμβολισμός αὐτός διαβάζεται ἔτσι: Τό σύνολον A ἀπεικονίζεται διά τῆς συναρτήσεως σ ἐντός (ἤ ἐπί) τοῦ συνόλου B. Ἀντί τοῦ σ χρησιμοποιεῖται καί τό γράμμα f, ἀρχικόν τῆς λέξεως functio = συνάρτησις. Ὅπως φαίνεται καί ἀπό τά παραδείγματα τοῦ προηγουμένου ἐδαφίου, ἡ ἀπεικόνισις αὐτή εἶναι μία ειδική διμελής σχέσις: εἶναι μία ἀντιστοιχία στοιχείων τοῦ B εἰς τά στοιχεῖα τοῦ A , τοιαύτη ὥστε κάθε στοιχεῖον x τοῦ A νά ἔχη ἕνα καί μόνον ἀντίστοιχον στοιχεῖον y τοῦ B. Αὐτό συμβολίζεται μέ τόν ἀκόλουθον τρόπον:

$$\sigma : \quad x \xrightarrow{\sigma} \sigma(x) = y \qquad , (x \in A \ , \ y \in B).$$

Μέ ἄλλους λόγους, τό σύμβολον σ(x) παριστάνει τήν εἰκόνα τοῦ στοιχείου x εἰς τήν θεωρουμένην ἀπεικόνισιν (ἤ συνάρτησιν) σ. Ὁ ἀνωτέρω συμβολισμός διαβάζεται ὡς ἑξῆς: "τό στοιχεῖον x τοῦ A ἔχει, εἰς τήν ἀπεικόνισιν σ, ἀντίστοιχον στοιχεῖον (ἤ εἰκόνα) τό σημεῖον σ(x) = y τοῦ B" .

Π.χ. διά τήν συνάρτησιν τοῦ παραδείγματος 5) γράφομεν:

$$\sigma : \quad x \xrightarrow{\sigma} \frac{1}{2}x = y \qquad , \quad (x \in A \ , \quad y \in \Phi).$$

Εἰς τήν συνάρτησιν αὐτήν, ὅπως καί εἰς ἐκείνην τοῦ παραδείγματος 6), καί τό πεδίον ὁρισμοῦ καί τό πεδίον τιμῶν εἶναι σύνολα ἀριθμῶν· διά τοῦτο αἱ συναρτήσεις αὐταί λέγονται <u>ἀριθμητικαί</u> . Διά τόν συμβολισμόν ἀριθμητικῶν συναρτήσεων συνηθίζεται καί ἁπλουστέρα γραφή. Π.χ. διά τήν συνάρτησιν τοῦ 5) γράφομεν ἁπλῶς :

$$y = \frac{1}{2}x \quad , \quad (x \in \{x/x \text{ ἄρτιος φυσικός}\})$$

καί διά τήν συνάρτησιν τοῦ 6):

$$y = \frac{1}{3}x \quad , \quad (x \in \{x/x \text{ ρητός σχετικός ἀριθμός}\})$$

8.3. <u>Γεωμετρική (ἤ γραφική) παράστασις ἀριθμητικῆς συναρτήσεως</u>. Ἔστω ἡ ἀριθμητική συνάρτησις

$$\sigma : \; x \xrightarrow{\sigma} -2x = y \quad , \quad (x \in \Phi).$$

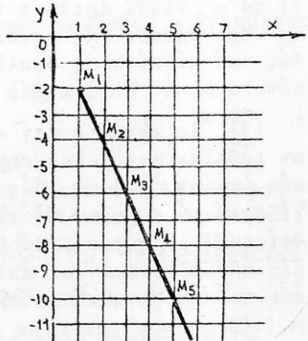
Εἰς κάθε φυσικόν ἀριθμ. x ἡ σ ἀντιστοιχίζει ἕναν ἀκέραιον ἀρνητικόν ἀριθμόν $y = -2x$. Τό διατεταγμένον ζεῦγος $(x, y = -2x)$ εἶναι ἕνα ζεῦγος ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν μεταβλητῶν x καί y εἰς τήν συνάρτησιν σ, λέγεται δέ συντόμως <u>ζεῦγος ἀντιστοίχων τιμῶν</u>. Τό σύνολον Σ τῶν ζευγῶν τούτων:

$$\Sigma = \{(x, y) \mid x \in \Phi \quad \text{καί} \quad y = -2x\}$$

ἀποτελεῖ οὐσιαστικά τήν συνάρτησιν σ. Ἐννοεῖται ὅτι δέν ἠμποροῦμεν νά ἀναγράφωμεν παρά ὀλίγα μόνον στοιχεῖα αὐτοῦ τοῦ ἀπειροσυνόλου Σ. Αὐτό γίνεται μέ ἕνα πίνακα πού ἔχει συνήθως τήν ἀκόλουθον ἁπλῆν διάταξιν:

x	1	2	3	4	5	6	7	. . .
y = −2x	−2	−4	−6	−8	−10	−12	−14	. . .

Ἄς θεωρήσωμεν τώρα τό ζεῦγος ἀντιστοίχων τιμῶν $(x, y = -2x)$ ὡς ζεῦγος συντεταγμένων ἑνός σημείου τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρός ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων. Τότε κάθε ζεῦγος τοῦ Σ παριστάνεται γεωμετρικά μέ ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου καί τό σύνολον Σ τῶν ζευγῶν ἀπεικονίζεται ἀμφιμονοσήμαντα ἐπί ἑνός σημειοσυνόλου Σ* τοῦ ἐπιπέδου. Τό σημειοσύνολον αὐτό Σ* λέγεται <u>γεωμετρική</u>



(ἤ γραφική) παράστασις τῆς συναρτήσεως σ. Εἰς τό θεωρούμενον παράδειγμα τό Σ* ἀποτελεῖται ἀπό τούς κόμβους $M_1, M_2, M_3, \ldots$ τοῦ προηγουμένου σχήματος οἱ ὁποῖοι κεῖνται ἐπάνω εἰς τήν ἡμιευθεῖαν πού ἔχει ἀρχήν τό σημεῖον $M_1(1,{}^-2)$ καί περνᾶ ἀπό τό σημεῖον $M_2(2,{}^-4)$.

Γενικῶς, ὅπως εἴπαμεν εἰς τό Βιβλ. II, σ. 50, κάθε ἀριθμητική συνάρτησις τῆς μορφῆς $y = \alpha x + \beta$, ὅπου α καί β εἶναι δύο δεδομένοι ρητοί σχετικοί ἀριθμοί, παριστάνεται γεωμετρικῶς μέ ἕνα σύνολον σημείων πού ἀνήκουν εἰς μίαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

1) Τρεῖς ἀδελφοί Α, Β, Γ ἔχουν τέκνα, ὁ Α τά $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, ὁ Β τό β_1 καί ὁ Γ τά γ_1 καί γ_2 . Συνδέομεν τά στοιχεῖα x τοῦ συνόλου $T = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \gamma_1, \gamma_2\}$ μέ τά στοιχεῖα y τοῦ συνόλου $\Pi = \{A, B, \Gamma\}$ διά τῆς διμελοῦς σχέσεως: "ὁ x ἔχει θεῖον τόν y" . Νά παραστήσετε μέ διαγράμματα τοῦ Βένν καί κατάλληλα συνδετικά βέλη καθώς καί μέ πίνακα διπλῆς εἰσόδου τήν ἀνωτέρω σχέσιν, νά ἐξηγήσετε δέ βάσει τῶν δύο αὐτῶν παραστάσεων, διατί ἡ σχέσις δέν ὁρίζει ἀπεικόνισιν τοῦ Τ ἐντός ἤ ἐπί τοῦ Π.

2) Νά ἐξετάσετε ἄν ὁρίζουν ἀπεικονίσεις (συναρτήσεις) αἱ ἀκόλουθοι διμελεῖς σχέσεις:
α) τό y εἶναι τόπος γεννήσεως τοῦ x
β) τό y εἶναι ἔτος γεννήσεως τοῦ x
γ) τό y εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ x σήμερα
δ) τό y εἶναι βάρος τοῦ κιβωτίου x
ε) τό y εἶναι ἀριθμός πενταπλάσιος τοῦ ἀριθμοῦ x.
Νά παραστήσετε τάς σχέσεις αὐτάς μέ Βένν-ια διαγράμματα καθώς καί μέ πίνακας διπλῆς εἰσόδου λαμβάνοντες δύο ὀλιγομελῆ σύνολα Α καί Β ὡς πεδία τῶν μεταβλητῶν x καί y.

3) Ἄς εἶναι ε καί ε΄ δύο παράλληλοι μέ στενήν σημασίαν εὐθεῖαι καί Κ ἕνα σημεῖον εἰς τό ἐσωτερικόν τῆς ταινίας τήν ὁποίαν ὁρίζουν. Εἰς τό τυχόν σημεῖον Μ τῆς ε ἀντιστοιχίζομεν τό σημεῖον Μ΄ τῆς ε΄ τό ὁποῖον εἶναι τομή τῆς εὐθείας ΚΜ μέ τήν ε΄. Νά δείξετε ὅτι ἡ ἀντιστοιχία αὐτή εἶναι μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ σημειοσυνόλου τῆς ε ἐπί τοῦ σημειοσυνόλου τῆς ε΄.

4) Θεωροῦμεν μίαν περιφέρειαν (Π) καί μίαν ἐφαπτομένην

της δ ὡς σημειοσύνολα. Ἔστω Κ τό κέντρον τῆς περιφερείας. Χαράσσομεν τήν ἡμιευθεῖαν ΚΜ πού ἔχει ἀρχήν τό Κ καί περνᾶ ἀπό τό τυχόν σημεῖον Μ τῆς δ. Ἡ ἡμιευθεῖα αὐτή τέμνει τήν (Π) εἰς ἕνα σημεῖον Μ΄. Νά δείξετε ὅτι ἡ ἀντιστοιχία: Μ΄ ἀντίστοιχον τοῦ $M \in \delta$ εἶναι μία ἀπεικόνισις τοῦ σημειοσυνόλου δ ἐντός τοῦ σημειοσυνόλου (Π). Ἐπί ποίου ὑποσυνόλου τοῦ (Π) ἀπεικονίζεται τό δ ;

4) Νά ἐξετάσετε, ἄν ἡ συμμετρία ὡς πρός σημεῖον εἰς τό ἐπίπεδον ἠμπορεῖ νά θεωρηθῇ ὡς ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ἐπί τοῦ ἑαυτοῦ του καί, εἰς καταφατικήν περίπτωσιν, ἄν ἡ ἀπεικόνισις εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος.

5) Ὅμοιον ζήτημα διά τήν συμμετρίαν ὡς πρός εὐθεῖαν εἰς τό ἐπίπεδον.

6) Ὅμοιον ζήτημα διά τήν παράλληλον μετατόπισιν κάθε σημείου τοῦ ἐπιπέδου κατά ἕνα διάνυσμα ἴσον πρός δοθέν διάνυσμα $\vec{\mu}$ τοῦ ἐπιπέδου.

7) Ὅμοιον ζήτημα διά τήν στροφήν τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου περί ἕνα δοθέν κέντρον Ο καί κατά μίαν δεδομένην γωνίαν α , π.χ. τήν $\measuredangle 60^0$.

8) Ἔστω $A = \{x / x$ ἀκέραιος σχετικός ἀριθμός$\}$. Θεωροῦμεν τήν συνάρτησιν

$$y = 2x - 1 , \quad (x \in A).$$

Νά καταρτίσετε ἕνα πίνακα ἀντιστοίχων τιμῶν διά $\chi = -3, -2, 1, 0, 1, 2, 3$ καί νά παραστήσετε γεωμετρικῶς τά προκύπτοντα διατεταγμένα ζευγη (x,y).
Ποῖον εἶναι τό πεδίον τιμῶν τῆς συναρτήσεως καί εἶναι ἡ συνάρτησις ἀμφιμονοσήμαντος ;

9) Ὅμοιον ζήτημα διά τήν συνάρτησιν

$$\sigma : x \xrightarrow{\sigma} -x + 2 = y \quad , \quad (x \in A).$$

10) Ἔστω $P = \{x / x$ ρητός σχετικός ἀριθμός$\}$. Νά παραστήσετε γεωμετρικῶς τήν συνάρτησιν

$$\sigma : x \xrightarrow{\sigma} \frac{5}{2} = y \quad , \quad (x \in P).$$

11) Ἡ συνάρτησις

$$y = x^2 \quad , \quad (x \in P)$$

ποῖον πεδίον τιμῶν ἔχει ; Νά δείξετε ὅτι δέν εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος. Νά καταρτίσετε ἕνα πίνακα ἀντιστοίχων τιμῶν διά $x = 0 , \pm\frac{1}{2} , \pm 1 , \pm\frac{3}{2} , \pm 2 , \pm\frac{5}{2}$ καί νά παραστήσετε γεωμετρικῶς τά προκύπτοντα διατεταγμένα ζεύγη (x,y), χρησιμοποιοῦντες χιλιοστομετρικόν χάρτην καί λαμβάνοντες τό 1 cm ὡς μονάδα μήκους ἐπί τῶν ἀξόνων συντεταγμένων.

12) Ἡ συνάρτησις

$$y = -x^2 \quad , \quad (x \in P)$$

ἐπί ποίου συνόλου ἀπεικονίζει τό P ; Εἶναι ἡ ἀπεικόνισις ἀμφιμονοσήμαντος ;

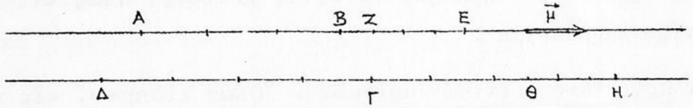
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄

Ἀλγεβρικός λογισμός.

§ 1. Ἀνασκόπησις τῶν τεσσάρων βασικῶν πράξεων ἐπί σχετικῶν ἀριθμῶν.

1.1. Ὑπενθυμίζομεν πρῶτον τά ἀκόλουθα:

α) Δύο διανύσματα λέγονται συγγραμμικά, ὅταν αἱ εὐθεῖαι πού τά φέρουν εἶναι μεταξύ των παράλληλοι μέ εὐρεῖαν σημασίαν. Π.χ. τά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ (σχ. κατωτέρω) εἶναι συγγραμμικά μέ τό διάνυσμα $\overrightarrow{\mu}$



β) Ἕνας σχετικός ἀριθμός εἶναι ἕνας ἀριθμός τῆς Ἀριθμητικῆς ὁ ὁποῖος ἔχει ἐμπρός του τό σῆμα + ἤ τό σῆμα −. Ἀπόλυτος τιμή ἑνός σχετικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ὁ ἀριθμός τῆς Ἀριθμητικῆς ἀπό τόν ὁποῖον προκύπτει μέ τήν προσθήκην τοῦ προσήμου + ἤ −. Π.χ. $|{}^{+}3| = 3$, $|{}^{-}4| = 4$.

γ) Εἰς τήν δημιουργίαν τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν μᾶς ὡδήγησε ἡ μέτρησις τῶν διανυσμάτων, τά ὁποῖα εἶναι συγγραμμικά μέ ἕνα (μή μηδενικόν) διάνυσμα $\overrightarrow{\mu}$ πού ἐκλέγεται ὡς μονάς καί καλεῖται διάνυσμα ἀναφορᾶς. Τά συγγραμμικά αὐτά διανύσματα ὅταν δέν εἶναι μηδενικά, ἔχουν ἤ τήν ἰδίαν φοράν μέ τό $\overrightarrow{\mu}$ ἤ τήν ἀντίθετον. Ὅσα ἔχουν τήν ἰδίαν φοράν μετροῦνται ἀπό σχετικούς ἀριθμούς θετικούς, ὅσα ἔχουν τήν ἀντίθετον , ἀπό ἀρνητικούς. Π.χ. τά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ (σχ. ἀνωτέρω) ἔχουν σχετικά μέτρα τούς ἀριθμούς ${}^{+}3$ καί ${}^{-}4$ ἀντιστοίχως. Τό μηδενικόν διάνυσμα ἔχει σχετικόν μέτρον τόν ἀριθμόν

$^{+}0 = {}^{-}0 = 0.$

δ) Διά νά παραστήσωμεν κατά γενικόν τρόπον σχετικούς ἀριθμούς χρησιμοποιοῦμεν μικρά ἑλληνικά γράμματα μέ τήν ἀκόλουθον συμφωνίαν: Ἐάν τό γράμμα α παριστάνη ἕνα σχετικόν ἀριθμόν, τότε ἡ γραφή $^{-}α$ θά παριστάνη τόν σχετικόν ἀριθμόν τόν ἀντίθετον τοῦ α, δηλαδή ἐκεῖνον πού ἔχει τήν ἰδίαν ἀπόλυτον τιμήν μέ τόν α ἀλλά διαφορετικόν πρόσημον.

Π.χ. ἐάν $α = {}^{-}3$, τότε $^{-}α = {}^{+}3$. Δέν πρέπει λοιπόν νά παρασυρώμεθα ἀπό τήν παρουσίαν τοῦ προσήμου – ἐμπρός ἀπό ἕνα γράμμα καί νά νομίζωμεν ὅτι ὁ παριστανόμενος ἀριθμός εἶναι ἀρνητικός· ἠμπορεῖ νά εἶναι θετικός, ὅπως εἰς τό ἀνωτέρω παράδειγμα.

1.2. Πρόσθεσις σχετικῶν ἀριθμῶν. Ὅπως εἴδαμεν, εἰς κάθε διάνυσμα $\vec{δ}$ συγγραμμικόν μέ τό $\vec{μ}$ ἀντιστοιχεῖ ἕνας σχετικός ἀριθμός: τό σχετικόν μέτρον τοῦ $\vec{δ}$ ὡς πρός τό διάνυσμα ἀναφορᾶς $\vec{μ}$. Ἀντιστρόφως, εἰς κάθε σχετικόν ἀριθμόν α ἀντιστοιχοῦν διανύσματα συγγραμμικά μέ τό $\vec{μ}$, τά ὁποῖα εἶναι ἴσα μεταξύ των, ἔχουν ὅλα τόν ἀριθμόν α ὡς σχετικόν μέτρον καί παριστάνονται ἀπό τό γινόμενον $α\vec{μ}$. Π.χ. εἰς τόν ἀριθμόν $\frac{^{-}3}{2}$ ἀντιστοιχεῖ τό διάνυσμα $\frac{^{-}3}{2}\vec{μ} = \overrightarrow{EZ}$, καθώς καί κάθε ἴσον πρός αὐτό, π.χ. τό $\overrightarrow{HΘ}$ (βλ. προηγούμενον σχῆμα).

Χρησιμοποιοῦντες αὐτήν τήν ἀντιστοιχίαν μεταξύ σχετικῶν ἀριθμῶν καί διανυσμάτων συγγραμμικῶν μέ τό $\vec{μ}$, ὡδηγήθημεν ἀπό τήν πρόσθεσιν συγγραμμικῶν διανυσμάτων (Βιβλ. II, σ. 4 κ.ἑ.) διά νά ὁρίσωμεν τό ἄθροισμα δύο σχετικῶν ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς:

I) Τό ἄθροισμα δύο ὁμοσήμων σχετικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμός ὁμόσημος μέ αὐτούς καί ἔχει ἀπόλυτον τιμήν τό ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν προσθετέων. Π.χ.

$^{+}5 + {}^{+}3 = {}^{+}8$, $(|^{+}5| + |^{+}3| = 5 + 3 = 8)$

Kassapoglou Lampros

$^-5 + {}^-3 = {}^-8$, $(|^-5| + |^-3| = 5 + 3 = 8)$

II) Τό ἄθροισμα δύο ἑτεροσήμων σχετικῶν ἀριθμῶν μέ ἀνίσους ἀπολύτους τιμάς ἔχει πρόσημον τό πρόσημον τοῦ προσθετέου μέ τήν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν καί ἀπόλυτον τιμήν τήν διαφοράν τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν προσθετέων. Π.χ.

$^+5 + {}^-3 = {}^+2$, $(|^+5| - |^-3| = 5 - 3 = 2)$

$^-5 + {}^+3 = {}^-2$, $(|^-5| - |^+3| = 5 - 3 = 2)$

III) Τό ἄθροισμα δύο ἀντιθέτων σχετικῶν ἀριθμῶν εἶναι τό μηδέν. Π.χ. $^-3 + {}^+3 = 0$.

IV) Τό ἄθροισμα ἑνός οἱουδήποτε σχετικοῦ ἀριθμοῦ α καί τοῦ 0 εἶναι ὁ ἀριθμός α. Π.χ. $^-3 + 0 = {}^-3$.

Τό ἄθροισμα τριῶν ἤ περισσοτέρων σχετικῶν ἀριθμῶν πού δίδονται μέ μίαν ὡρισμένην σειράν εὑρίσκεται μέ διαδοχικάς προσθέσεις δύο σχετικῶν ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς: προσθέτομεν τόν πρῶτον προσθετέον μέ τόν δεύτερον, τό προκῦπτον ἄθροισμα μέ τόν τρίτον προσθετέον κ.ο.κ. μέχρις ἐξαντλήσεως τῶν προσθετέων. Π.χ.

$^-3 + {}^-4 + {}^+2 = ({}^-3 + {}^-4) + {}^+2 = {}^-7 + {}^+2 = {}^-5$

$^-3 + {}^-4 + {}^+2 + {}^-10 = ({}^-3 + {}^-4 + {}^+2) + {}^-10 = {}^-5 + {}^-10 = {}^-15$.

<u>1.3.</u> <u>Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως.</u> Ὅπως εἴδαμεν (Βιβλ. II, σ. 15 κ.ἑ.), ἡ πρόσθεσις ἔχει τάς ἑξῆς ἰδιότητας·

1η $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, ἀντιμεταθετικότης.

2α $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$, προσεταιριστικότης.

Ἀπό τάς δύο αὐτάς ἰδιότητας καί ἀπό τόν ἀνωτέρω ὁρισμόν τοῦ ἀθροίσματος τριῶν ἤ περισσοτέρων σχετικῶν ἀριθμῶν ἕπονται γενικώτερον αἱ δύο ἀκόλουθοι ἰδιότητες:

I) Ἕνα ἄθροισμα σχετικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀνεξάρτητον ἀπό τήν σειράν μέ τήν ὁποίαν λαμβάνονται οἱ προσθετέοι· μέ ἄλλους λόγους, ἠμποροῦμεν εἰς ἕνα ἄθροισμα νά μεταβάλωμεν τήν σειράν τῶν προσθετέων χωρίς τό ἄθροισμα νά μεταβληθῆ.

Π.χ. $\alpha+\beta+\gamma+\delta = \beta+\alpha+\gamma+\delta = \gamma+\alpha+\delta+\beta = \ldots$

II) Ἕνα ἄθροισμα δέν μεταβάλλεται, ἄν ἀντικαταστήσωμεν δύο ἤ περισσοτέρους προσθετέους του μέ τό ἄθροισμά των.

Π.χ. $^{-}3+^{-}4+^{+}2+^{-}10 = ^{-}3+^{-}4+(^{+}2+^{-}10) = ^{-}3+^{-}4+^{-}8 = ^{-}15.$

Ἀντιστρόφως, ἕνα προσθετέον ἐπιτρέπεται νά τόν ἀντικαταστήσωμεν μέ δύο ἤ περισσοτέρους πού τόν ἔχουν ὡς ἄθροισμα.

3η. $\alpha+\gamma = \beta+\gamma \Longleftrightarrow \alpha = \beta$, ἰδιότης τῆς διαγραφῆς.

4η. $(\alpha+\beta)\vec{\mu} = \alpha\vec{\mu} + \beta\vec{\mu}$,

ἤτοι ὁ πολλαπλασιασμός διανύσματος μέ σχετικούς ἀριθμούς εἶναι ἐπιμεριστικός ὡς πρός τήν πρόσθεσιν τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν.

<u>1.4.</u> <u>Ἀφαίρεσις.</u> Εἰς τήν ἀφαίρεσιν δίδονται δύο σχετικοί ἀριθμοί, ἕνας μειωτέος α καί ἕνας ἀφαιρετέος β, καί ζητεῖται ἕνας σχετικός ἀριθμός x ὁ ὁποῖος νά ἐπαληθεύη τήν ἐξίσωσιν

$$\beta + x = \alpha .$$

Διά νά τόν εὕρωμεν προσθέτομεν καί εἰς τά δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως τόν ἀριθμόν $^{-}\beta$ (ἀντίθετον τοῦ ἀφαιρετέου). Ἀπό τήν ἰσοδυναμίαν

$$\beta + x = \alpha \Longleftrightarrow {}^{-}\beta + \beta + x = \alpha + {}^{-}\beta$$

καί ἀπό τάς ἰσότητας

$$^{-}\beta + \beta = 0 \quad , \quad 0 + x = x$$

προκύπτει ὅτι

$$x = \alpha + {}^{-}\beta .$$

Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμός x εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένος καί ἴσος μέ τό ἄθροισμα τοῦ μειωτέου α καί τοῦ ἀντιθέτου $^{-}\beta$ πρός τόν ἀφαιρετέον β , λέγεται δέ <u>διαφορά</u> ἤ <u>ὑπόλοιπον</u> τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ β ἀπό τόν α καί σημειώνεται μέ τήν γραφήν $\alpha - \beta$.

Ἔχομεν λοιπόν:

$$\beta + x = \alpha \Longleftrightarrow x = \alpha - \beta = \alpha + {}^{-}\beta .$$

Π.χ.

$$^{+}3 - {}^{+}5 = {}^{+}3 + {}^{-}5 = {}^{-}2 \quad , \quad {}^{+}3 - {}^{-}5 = {}^{+}3 + {}^{+}5 = {}^{+}8$$

$$0 - {}^{+}6 = 0 + {}^{-}6 = {}^{-}6 \quad , \quad 0 - {}^{-}2 = 0 + {}^{+}2 = {}^{+}2 \ ,$$

$$^{+}4 - {}^{+}4 = {}^{+}4 + {}^{-}4 = 0 \quad , \quad {}^{-}8 - {}^{-}8 = {}^{-}8 + {}^{+}8 = 0$$

1.5. 'Ιδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως. Ὅπως γνωρίζομεν, ἡ πρᾶξις τῆς ἀφαιρέσεως ἐπί ἀριθμῶν τῆς 'Αριθμητικῆς τότε μόνον ἠμπορεῖ νά ἐκτελεσθῇ, ὅταν ὁ μειωτέος της εἶναι $\geqslant$ τοῦ ἀφαιρετέου της. Εἰς τούς σχετικούς ἀριθμούς, ὅπως προκύπτει ἀπό τά ἀνωτέρω, ἡ διαφορά ὑπάρχει πάντοτε, ὁποιοιδήποτε σχετικοί ἀριθμοί καί ἄν εἶναι οἱ δύο ὅροι τῆς ἀφαιρέσεως. Αὐτό ἔχει ὡς συνέπειαν νά ἰσχύουν χωρίς κανένα περιορισμόν αἱ ἰδιότητες I ἕως V πού διετυπώσαμεν εἰς τό Βιβλ. I, σ. 17-20Β. Τάς ἰδιότητας αὐτάς θά τάς διατυπώσωμεν τώρα συντόμως μέ τάς ἀκολούθους ἰσότητας, αἱ ὁποῖαι ἰσχύουν δι'ὁποιουσδήποτε σχετικούς ἀριθμούς:

I) $\alpha - \beta = (\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)$ καί $\alpha - \beta = (\alpha-\gamma)-(\beta-\gamma)$

II) $(\alpha+\beta+\gamma)-\delta = (\alpha-\delta)+\beta+\gamma = \alpha+(\beta-\delta)+\gamma = \alpha + \beta + (\gamma-\delta)$

III) $\alpha - (\beta+\gamma) = (\alpha-\beta)-\gamma = (\alpha-\gamma) - \beta$

IV) $\alpha + (\beta-\gamma) = (\alpha+\beta) - \gamma = (\alpha-\gamma) + \beta$

V) $\alpha - (\beta-\gamma) = (\alpha-\beta) + \gamma = (\alpha+\gamma) - \beta$.

1.6. 'Αριθμητικά πολυώνυμα. Ὅπως ἔχομεν μάθει (Βιβλ. II, σ. 19), ἀριθμητικόν πολυώνυμον εἰς τήν Ἄλγεβραν λέγεται μία σειρά σχετικῶν ἀριθμῶν συνδεομένων μέ τά σύμβολα + καί − τῆς προσθέσεως καί ἀφαιρέσεως. Τιμή τοῦ ἀριθμητικοῦ πολυωνύμου εἶναι ὁ σχετικός ἀριθμός πού προκύπτει μετά τήν ἐκτέλεσιν τῶν σημειωμένων πράξεων. Π.χ.

$$^{+}3 - {}^{+}5 - {}^{-}9 + {}^{+}2 = \left[({}^{+}3 - {}^{+}5) - {}^{-}9\right] + {}^{+}2 = \left[{}^{-}2 - {}^{-}9\right] + {}^{+}2 = {}^{+}7 + {}^{+}2 = {}^{+}9.$$

Ἕνα ἀριθμητικόν πολυώνυμον μετατρέπεται εἰς ἄθροισμα σχετικῶν ἀριθμῶν, ἄν ἀντικαταστήσωμεν κάθε παρουσιαζομένην ἀφαίρεσιν ἀριθμοῦ μέ τήν πρόσθεσιν τοῦ ἀντιθέτου ἀριθμοῦ. Π.χ.

$$^{+}3 - {}^{+}5 - {}^{-}9 + {}^{+}2 = {}^{+}3 + {}^{-}5 + {}^{+}9 + {}^{+}2 .$$

Οἱ προσθετέοι τοῦ προκύπτοντος ἀθροίσματος λέγονται <u>ὅροι</u> καί τοῦ ἀρχικοῦ πολυωνύμου. Π.χ. οἱ ἀριθμοί $^{+}3, {}^{-}5, {}^{+}9, {}^{+}2$ εἶναι ὅροι καί τοῦ πολυωνύμου $^{+}3 - {}^{+}5 - {}^{-}9 + {}^{+}2$.

Ἐπειδή ἕνα ἄθροισμα εἶναι ἀνεξάρτητον ἀπό τήν σειράν τῶν προσθετέων του, συμπεραίνομεν ὅτι καί ἡ τιμή ἑνός ἀριθμητικοῦ πολυωνύμου δέν μεταβάλλεται, ἄν ἀλλάξωμεν τήν σειράν τῶν ὅρων του. Π.χ.

$$^{+}3 - {}^{+}5 - {}^{-}9 + {}^{+}2 = {}^{+}3 - {}^{-}9 + {}^{+}2 - {}^{+}5 = {}^{+}9 .$$

Δύο ἀριθμητικά πολυώνυμα λέγονται <u>ἀντίθετα</u>, ὅταν ἔχουν τούς ὅρους των ἀντιθέτους ἕνα πρός ἕνα. Π.χ. τά πολυώνυμα

$$^{+}3 - {}^{+}5 - {}^{-}9 + {}^{+}2 \qquad \text{καί} \qquad {}^{-}3 - {}^{-}5 - {}^{+}9 + {}^{-}2$$

εἶναι ἀντίθετα. Τό ἄθροισμα δύο ἀντιθέτων πολυωνύμων εἶναι φυσικά μηδέν. Π.χ.

$$({}^{+}3 - {}^{+}5 - {}^{-}9 + {}^{+}2) + ({}^{-}3 - {}^{-}5 - {}^{+}9 + {}^{-}2) = {}^{+}9 + {}^{-}9 = 0.$$

Διά νά συντομεύσωμεν τήν γλωσσικήν διατύπωσιν, λέγοντες πολυώνυμον δέν θά ἀποκλείωμεν εἰς τό ἑξῆς καί τήν καταχρηστικήν περίπτωσιν, τό πολυώνυμον νά ἀποτελῆται ἀπό <u>ἕνα</u> μόνον ὅρον, ἀφοῦ ἄλλωστε διά κάθε σχετικόν ἀριθμόν α ἔχομεν:

$$\alpha = \alpha + 0 = \alpha - 0 = \alpha + \beta + {}^{-}\beta = \text{κτλ.}$$

Ἠμποροῦμεν τώρα νά διατυπώσωμεν γενικά τούς ἀκολούθους δύο κανόνας:

I) Διά νά προσθέσωμεν ἕνα ἀριθμητικόν πολυώνυμον εἰς ἕνα ἄλλο, τό γράφομεν χωρίς παρένθεσιν εἰς τήν συνέχειαν αὐτοῦ τοῦ ἄλλου. Π.χ.

$$^{+}7 - {}^{+}2 + ({}^{+}8 + {}^{-}5) = {}^{+}7 - {}^{+}2 + {}^{+}8 + {}^{-}5 = {}^{+}8 .$$

II) Διά νά ἀφαιρέσωμεν ἕνα πολυώνυμον, προσθέτομεν τό ἀντίθετόν του. Π.χ.

$$^{+}7 - {}^{+}2 - ({}^{+}8 + {}^{-}5) = {}^{+}7 - {}^{+}2 + {}^{-}8 + {}^{+}5 = {}^{+}2.$$

1.7. Χρῆσις παρενθέσεων. Ἀπό τάς δύο τελευταίας ἰσότητας συμπεραίνομεν τούς ἀκολούθους κανόνας διά τήν χρῆσιν παρενθέσεων.

1) Μία παρένθεσις ἡ ὁποία περιέχει ἀριθμητικόν πολυώνυμον καί ἔχει ἐμπρός της τό σημεῖον + τῆς προσθέσεως ἠμπορεῖ νά ἐξαλειφθῆ, χωρίς οἱ ὅροι τοῦ περιεχομένου πολυωνύμου νά πάθουν καμμίαν ἀλλαγήν· ἐάν ὅμως ἡ παρένθεσις ἔχη ἐμπρός της τό σημεῖον – τῆς ἀφαιρέσεως, τότε, διά νά τήν ἐξαλείψωμεν, πρέπει 1ον νά τρέψωμεν τό πρό αὐτῆς ἀφαιρετικόν σημεῖον – εἰς τό προσθετικόν σημεῖον + καί 2ον τούς ὅρους τοῦ περιεχομένου πολυωνύμου νά τούς ἀντικαταστήσωμεν μέ τούς ἀντιθέτους των. Π.χ.

$$^{-}3 + (^{+}9 - ^{-}10) + ^{-}8 = ^{-}3 + ^{+}9 - ^{-}10 + ^{-}8 = ^{+}8$$

$$^{-}3 - (^{+}9 - ^{-}10) + ^{-}8 = ^{-}3 + ^{-}9 - ^{+}10 + ^{-}8 = ^{-}30 .$$

2) Εἰς ἕνα ἀριθμητικόν πολυώνυμον ἠμποροῦμεν νά κλείσωμεν ὁσουσδήποτε ὅρους του μέσα εἰς μίαν παρένθεσιν γράφοντες ἐμπρός της τό σημεῖον + τῆς προσθέσεως· ἐάν ὅμως θέλωμεν νά ἔχωμεν ἐμπρός ἀπό τήν παρένθεσιν τό σημεῖον – τῆς ἀφαιρέσεως, τότε πρέπει νά ἀντικαταστήσωμεν μέ τούς ἀντιθέτους των τούς ὅρους πού θά κλείσωμεν μέσα εἰς τήν παρένθεσιν. Π.χ.

$$^{-}11 + ^{-}7 - ^{+}5 + ^{-}4 - ^{+}8 = ^{-}11 + (^{-}7 + ^{-}4 - ^{+}8) - ^{+}5 = ^{-}11 - (^{+}7 + ^{+}4 - ^{-}8) - ^{+}5.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά εὑρεθοῦν τά ἀκόλουθα ἀθροίσματα:

α) $^{-}3 + ^{+}5$, $^{-}1 + ^{+}7$, $^{+}3 + ^{-}5$, $^{-}9 + ^{+}11$, $^{+}9 + ^{+}12$

β) $^{-}\frac{3}{4} + ^{+}\frac{5}{4}$, $^{-}\frac{1}{6} + ^{-}\frac{5}{6}$, $^{+}\frac{7}{9} + ^{-}\frac{11}{9}$, $^{+}\frac{7}{12} + ^{+}\frac{17}{12}$

γ) $^{+}2,35 + ^{-}3,85$, $^{-}7,125 + ^{+}8$, $^{-}18,375 + ^{+}13,85$

δ) $^{-}\frac{5}{6} + ^{+}\frac{7}{12}$, $^{+}\frac{3}{4} + ^{-}\frac{5}{2}$, $^{-}0,75 + ^{+}\frac{31}{10}$, $^{-}1,666... + ^{-}\frac{2}{3}$

ε) $^{-}\frac{1}{2} + ^{+}\frac{3}{4} + ^{-}\frac{5}{2} + ^{+}\frac{2}{3}$, $^{-}\frac{1}{7} + ^{+}\frac{2}{3} + ^{-}\frac{1}{2}$

2) Εἰς τό ἄθροισμα $^{-}3+{}^{+}15+{}^{-}8$, χωρίς προηγουμένως νά ὑπολογισθῇ, νά προστεθῇ ὁ $^{+}8$ μέ ὅλους τούς δυνατούς τρόπους. Ποῖος εἶναι ὁ ἁπλούστερος;
Ὅμοιον ζήτημα εἰς τήν πρόσθεσιν $\left(\frac{-5}{4}+\frac{+5}{6}\right)+{}^{+}1,25$.

3) Νά ὑπολογισθοῦν μέ διαφόρους τρόπους τά ἀθροίσματα:
α) $(^{-}7+{}^{+}3+{}^{-}15+{}^{+}1)+(^{+}17+{}^{-}3+{}^{-}2+{}^{+}7)$

β) $\left(\frac{-5}{6}+\frac{+7}{2}+\frac{-3}{4}\right)+\left(\frac{-7}{6}+\frac{+3}{4}\right)+\left(\frac{-1}{2}+\frac{-3}{2}\right)+\frac{+1}{6}$

Ποῖον τρόπον εὑρίσκετε ἁπλούστερον ;

4) Ὁ ἀριθμός $^{-}3$ νά ἀναλυθῇ εἰς δύο προσθετέους ἀπό τούς ὁποίους ὁ ἕνας νά εἶναι τήν μίαν φοράν ὁ $^{+}4$ καί τήν ἄλλην φοράν ὁ $^{-}7$.

5) Ἀπό τόν τύπον x = α + β νά ὑπολογισθῇ ὁ x μέ τάς ἀκολούθους ἀντιστοίχους τιμάς τῶν α καί β:

α =	$^{-}5$	$^{+}3$	$^{-}9$	$^{-}2\frac{1}{3}$	$^{+}3\frac{2}{5}$	$^{-}17\frac{1}{2}$	0
β =	$^{+}15$	$^{-}2\frac{2}{3}$	$^{+}8\frac{1}{4}$	$^{+}5\frac{1}{6}$	$^{-}13\frac{3}{4}$	$^{+}10,85$	$^{-}3,5$

6) Ἀπό τούς τέσσαρας ἀριθμούς $^{-}3$, $^{-}2$, $^{+}0,25$, 0 νά ἀφαιρεθῇ διαδοχικῶς ὁ καθένας ἐκ τῶν ἀριθμῶν $\frac{+5}{4}$, $^{-}1,45$, $^{+}8,1$.

7) Εἰς τά κατωτέρω ἀριθμητικά πολυώνυμα νά τεθοῦν οἱ δύο τελευταῖοι ὅροι ἐντός παρενθέσεως 1ον μέ τό προσθετικόν σημεῖον + ἐμπρός ἀπό τήν παρένθεσιν καί 2ον μέ τό ἀφαιρετικόν − ἐμπρός ἀπ' αὐτήν :
α) $^{+}3-{}^{+}5+{}^{+}1-{}^{+}2$, β) $^{-}7+{}^{+}3-{}^{+}1-{}^{+}5$, γ) $\varkappa-\lambda-\mu$,
δ) $\lambda+\mu-\varkappa$, ε) $\nu-\mu-\lambda+\varkappa$.

8) Νά ἐξαλείψετε τάς ἀγκύλας καί τάς παρενθέσεις ἀπό τάς ἀκολούθους ἀριθμητικάς παραστάσεις καί νά ὑπολογίσετε τάς τιμάς τῶν ἀριθμητικῶν πολυωνύμων πού προκύπτουν:
α) $^{-}3,5-(^{-}7,25+{}^{-}8+{}^{+}2,5)$

β) $0-\left[\left(^{+}3\frac{1}{2}+{}^{-}8\right)-(^{+}1-{}^{+}4+{}^{+}1,2)\right]$

γ) $^{-}3-\left[^{+}1-(^{-}2,5+{}^{+}3)+{}^{+}1\right]$.

9) Νά ἐξαλείψετε τάς ἀγκύλας καί τάς παρενθέσεις ἀπό τάς ἀκολούθους ἐγγραμμάτους παραστάσεις καί νά τάς γράψετε μέ τόν ἁπλούστερον δυνατόν τρόπον:
(I) $\alpha+(\beta-\gamma)-[\beta+\gamma-(1-\beta)]$

(II) $[\alpha-(\beta+\gamma)]-[(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)]$.

1.8 <u>Πολλαπλασιασμός</u>. Χρησιμοποιοῦντες τούς σχετικούς ἀριθμούς ὡς πολλαπλασιαστάς διανυσμάτων τά ὁποῖα εἶναι συγγραμμικά μέ ἕνα διάνυσμα ἀναφορᾶς $\vec{\mu}$ (Βιβλ. ΙΙ, σ. 25 κ.ἑ.) ἐφθάσαμεν εἰς τόν ἀκόλουθον ὁρισμόν τοῦ γινομένου δύο σχετικῶν ἀριθμῶν:

Ι) Τό γινόμενον δύο ὁμοσήμων σχετικῶν ἀριθμῶν εἶναι θετικός ἀριθμός καί ἔχει ἀπόλυτον τιμήν τό γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων. Π.χ.

$^{+}3 \cdot {}^{+}5 = {}^{+}15$, $(|^{+}3| \cdot |^{+}5| = 3 \cdot 5 = 15)$

$^{-}3 \cdot {}^{-}5 = {}^{+}15$, $(|^{-}3| \cdot |^{-}5| = 3 \cdot 5 = 15)$.

ΙΙ) Τό γινόμενον δύο ἑτεροσήμων σχετικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός καί ἔχει ἀπόλυτον τιμήν τό γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων . Π.χ.

$^{+}3 \cdot {}^{-}5 = {}^{-}15$, $(|^{+}3| \cdot |^{-}5| = 3 \cdot 5 = 15)$

$^{-}3 \cdot {}^{+}5 = {}^{-}15$, $(|^{-}3| \cdot |^{+}5| = 3 \cdot 5 = 15)$.

ΙΙΙ) Τό γινόμενον ἑνός οἱουδήποτε σχετικοῦ ἀριθμοῦ μέ τό μηδέν εἶναι ἴσον μέ μηδέν καί ἔχει ἑπομένως ἀπόλυτον τιμήν τό γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων. Π.χ.

$^{+}3 \cdot 0 = 0$, $^{-}3 \cdot 0 = 0$, $(|^{+}3| \cdot |0| = |^{-}3| \cdot |0| = 3 \cdot 0 = 0)$.

Τό γινόμενον τριῶν ἤ περισσοτέρων σχετικῶν ἀριθμῶν πού δίδονται μέ μίαν ὡρισμένην σειράν εὑρίσκεται μέ διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς δύο παραγόντων ὡς ἑξῆς: πολλαπλασιάζομεν τόν πρῶτον παράγοντα μέ τόν δεύτερον, τό προκῦπτον γινόμενον μέ τόν τρίτον παράγοντα κ.ο.κ. μέχρις ἐξαντλήσεως τῶν παραγόντων. Π.χ.

$^{-}4 \cdot {}^{+}5 \cdot {}^{-}2 \cdot {}^{+}10 = {}^{-}20 \cdot {}^{-}2 \cdot {}^{+}10 = {}^{+}40 \cdot {}^{+}10 = {}^{+}400$.

<u>1.9. Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.</u> Ὅπως ἐμάθαμεν (Βιβλ. ΙΙ, σ. 27 κ.ἑ.), ὁ πολλαπλασιασμός ἔχει τάς ἑξῆς κυρίας ἰδιότητας:

1η. $\alpha\beta = \beta\alpha$, ἀντιμεταθετικότης.

2α. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$, προσεταιριστικότης.

Ἀπό τάς δύο αὐτάς ἕπονται γενικώτερον αἱ ἑξῆς δύο:

I) Ἕνα γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων δέν μεταβάλλεται ἄν ἀλλάξωμεν τήν σειράν (τήν διάταξιν) τῶν παραγόντων του.

Π.χ. $\alpha\beta\gamma\delta = \alpha\gamma\beta\delta = \alpha\gamma\delta\beta = \alpha\delta\beta\gamma = \delta\gamma\beta\alpha = \ldots$

II) Εἰς ἕνα γινόμενον ἠμποροῦμεν νά ἀντικαταστήσωμεν δύο ἤ περισσοτέρους παράγοντας μέ τό γινόμενόν των· ἀντιστρόφως, ἠμποροῦμεν νά ἀντικαταστήσωμεν ἕνα παράγοντα μέ δύο ἤ περισσοτέρους πού τόν ἔχουν ὡς γινόμενον. Π.χ.

$^-3\cdot{}^-4\cdot{}^+2\cdot{}^-10 = {}^-3\cdot({}^-4\cdot{}^+2)\cdot{}^-10 = {}^-3\cdot{}^-8\cdot{}^-10 = {}^-240.$

3η. Ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι ἐπιμεριστικός ὡς πρός τήν πρόσθεσιν, ἄρα καί ὡς πρός τήν ἀφαίρεσιν, ἤτοι

$$(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma \quad \text{καί} \quad (\alpha-\beta)\gamma = \alpha\gamma - \beta\gamma.$$

Ἰδού δύο ἐφαρμογαί αὐτῆς τῆς ἰδιότητος καί τῶν προηγουμένων: $(\alpha+\beta)\cdot(\gamma+\delta) = \alpha(\gamma+\delta)+\beta(\gamma+\delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$,

$(\alpha-\beta)(\gamma-\delta) = \alpha(\gamma-\delta)-\beta(\gamma-\delta) = \alpha\gamma - \alpha\delta -(\beta\gamma-\beta\delta) = \alpha\gamma-\alpha\delta-\beta\gamma+\beta\delta.$

Καί ἕνα ἀριθμητικόν παράδειγμα:

$({}^-7+{}^+2)({}^-6+{}^-3) = {}^+42 + {}^+21 + {}^-12 + {}^-6 = {}^+45 = {}^-5\cdot{}^-9$.

4η. Ἕνα γινόμενον εἶναι ἴσον μέ μηδέν, ὅταν καί μόνον ὅταν ἕνας τουλάχιστον παράγων του εἶναι μηδέν. Π.χ.

$$\alpha\beta\gamma = 0 \iff \text{εἴτε } \alpha \text{ εἴτε } \beta \text{ εἴτε } \gamma = 0.$$

5η. Ἡ θετική μονάς $^+1$ εἶναι οὐδέτερον στοιχεῖον εἰς τόν πολλαπλασιασμόν , ἤτοι διά κάθε σχετικόν ἀριθμόν α ἔχομεν:

$$\alpha\cdot{}^+1 = {}^+1\cdot\alpha = \alpha.$$

6η. Εἰς κάθε σχετικόν ἀριθμόν $\alpha \neq 0$ ἀντιστοιχεῖ ἕνας ἀντίστροφος, δηλαδή ἕνας σχετικός ἀριθμός τοῦ ὁποίου τό γινόμενον μέ α εἶναι ἴσον μέ $^+1$. Π.χ. ὁ $^+7$ ἔχει ἀντίστροφον τόν $^+\frac{1}{7}$ καί ὁ $\frac{^-2}{3}$ τόν $\frac{^-3}{2}$. Ὁ ἀντίστροφος τοῦ ἀριθμοῦ $\alpha \neq 0$ παριστάνεται μέ $\frac{1}{\alpha}$, εἶναι ὁμόσημος μέ τόν α καί ἔχει ἀπόλυτον τιμήν τόν ἀντίστροφον τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ α:

$$\left|\frac{1}{\alpha}\right| = \frac{1}{|\alpha|} .$$

Ὁ ἀριθμός 0 δέν ἔχει ἀντίστροφον, διότι τό γινόμενον τοῦ 0 μέ ὁποιονδήποτε σχετικόν ἀριθμόν ἰσοῦται μέ 0 καί ὄχι μέ $^+1$.

7η. Ἡ ἰσότης $\alpha = \beta$ ἔχει φυσικά ὡς συνέπειαν τήν ἰσότητα $\alpha\gamma = \beta\gamma$, ὁποιοσδήποτε καί ἄν εἶναι ὁ σχετικός ἀριθμός γ. Ἀντιστρόφως, ἀπό τήν ἰσότητα $\alpha\gamma = \beta\gamma$ δυνάμεθα νά συμπεράνωμεν τήν ἰσότητα $\alpha = \beta$, μόνον ὅταν γνωρίζωμεν ὅτι $\gamma \neq 0$. (Παράβαλε καί Βιβλ. Ι, σ. 35Β , § 3.12). Ἰσχύει ἐπομένως διά τούς σχετικούς ἀριθμούς ἡ λογική ἰσοδυναμία:

$$\alpha\gamma = \beta\gamma \quad \text{καί} \quad \gamma \neq 0 \iff \alpha = \beta.$$

1.10. Διαίρεσις. Εἰς τήν διαίρεσιν δίδονται δύο σχετικοί ἀριθμοί, ἕνας διαιρετέος β καί ἕνας διαιρέτης $\alpha \neq 0$, καί ζητεῖται ἕνας σχετικός ἀριθμός x ὁ ὁποῖος νά ἐπαληθεύη τήν ἐξίσωσιν:

$$\alpha x = \beta$$

Διά νά τόν εὕρωμεν πολλαπλασιάζομεν καί τά δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως μέ τόν ἀντίστροφον $\frac{1}{\alpha}$ τοῦ διαιρέτου α. Ἀπό τήν ἰσοδυναμίαν

$$\alpha x = \beta \iff \frac{1}{\alpha}\cdot \alpha x = \beta\cdot\frac{1}{\alpha}$$

καί ἀπό τάς ἰσότητας

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha = {}^+1 \qquad \text{καί} \quad {}^+1\cdot x = x$$

προκύπτει ὅτι

$$x = \beta\cdot\frac{1}{\alpha}.$$

Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμός x εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένος καί ἴσος μέ τό γινόμενον τοῦ διαιρετέου β ἐπί τόν ἀντίστροφον τοῦ διαιρέτου α. Ὁ ἀριθμός αὐτός λέγεται (ἀκριβές) πηλίκον τοῦ β διά τοῦ α καί σημειώνεται μέ τήν γραφήν $\beta : \alpha$. Ἀπό τά ἀνωτέρω ἕπονται τώρα τά ἑξῆς: τό πηλίκον $\beta:\alpha = \beta\cdot\frac{}{\alpha}$

εἶναι ἀριθμός θετικός, ὅταν οἱ β καί α εἶναι ὁμόσημοι, ἀρνητικός, ὅταν εἶναι ἑτερόσημοι καί μηδέν, ὅταν $\beta = 0$, ἡ δέ ἀπόλυτος τιμή του ἰσοῦται μέ τό πηλίκον τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ διαιρετέου β διά τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ διαιρέτου α : $|\beta : \alpha| = |\beta| : |\alpha|$.

Κατά ταῦτα ἰσχύει καί εἰς τήν διαίρεσιν σχετικῶν ἀριθμῶν ὁ κανών τῶν προσήμων τόν ὁποῖον ἐγνωρίσαμεν εἰς τόν πολλαπλασιασμόν.

Παραδείγματα: $^+2 : {}^+3 = {}^+2 \cdot \frac{^+1}{3} = \frac{^+2}{3}$, $^-2 : {}^-3 = {}^-2 \cdot \frac{^-1}{3} = \frac{^+2}{3}$, $^-2 : {}^+3 = {}^-2 \cdot \frac{^+1}{3} = \frac{^-2}{3}$, $^+2 : {}^-3 = {}^+2 \cdot \frac{^-1}{3} = \frac{^-2}{3}$, $\frac{^-3}{5} : \frac{^-4}{7} = \frac{^+21}{20}$.

1.10. Ἀλγεβρικά κλάσματα. Τό πηλίκον $\beta : \alpha = \beta \cdot \frac{1}{\alpha}$ γράφεται καί μέ τήν μορφήν τοῦ κλάσματος $\frac{\beta}{\alpha}$. Ἐπειδή οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος εἶναι τώρα σχετικοί ἀριθμοί, θά τό ὀνομάζωμεν ἀλγεβρικόν, διά νά τό διακρίνωμεν ἀπό τό ἀριθμητικόν κλάσμα πού ἔχει ὅρους ἀριθμούς τῆς Ἀριθμητικῆς. Διά τά ἀλγεβρικά κλάσματα ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος βασική ἰδιότης, ἀντίστοιχος πρός γνωστήν ἰδιότητα τῶν ἀριθμητικῶν κλασμάτων:

Ἡ τιμή ἑνός ἀλγεβρικοῦ κλάσματος δέν μεταβάλλεται ἄν πολλαπλασιάσωμεν ἤ διαιρέσωμεν τούς δύο ὅρους του μέ τόν αὐτόν, ὄχι μηδενικόν σχετικόν ἀριθμόν:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta \cdot \gamma}{\alpha \cdot \gamma} = \frac{\beta : \gamma}{\alpha : \gamma}, \quad \text{ὅπου } \gamma \neq 0.$$

Ἡ ἰδιότης αὐτή μᾶς ἐπιτρέπει νά τρέφωμεν ἕνα σύνθετον ἀλγεβρικόν κλάσμα εἰς ἁπλοῦν κλάσμα, πολλαπλασιάζοντες τούς δύο ὅρους του μέ κατάλληλον ἀριθμόν. Π.χ.

$$\frac{\frac{^+4}{5}}{\frac{^-2}{3}} = \frac{\frac{^+4}{5} \cdot {}^+5 \cdot {}^+3}{\frac{^-2}{3} \cdot {}^+5 \cdot {}^+3} = \frac{^+4 \cdot {}^+3}{^-2 \cdot {}^+5} = \frac{^+12}{^-10} = \frac{^-6}{5}.$$

1.11. Ἁπλοποίησις τῆς γραφῆς τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν. Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι αἱ τέσσαρες βασικαί πράξεις, ὅταν ἐκτελοῦνται ἐπί θετικῶν ἀριθμῶν, δέν διαφέρουν ἀπό τάς ὁμωνύμους των ἐπί τῶν ἀντιστοίχων ἀπολύτων τιμῶν παρά μόνον κατά τό πρόσημον + πού γράφομεν ἐμπρός ἀπό τάς ἀπολύτους τιμάς ἄνω ἀριστερά. Διά τοῦτο συμφωνοῦμεν νά παραλείπωμεν τό πρόσημον + τῶν θετικῶν ἀριθμῶν καί νά τούς γράφωμεν ὅπως τούς ἀριθμούς τῆς Ἀριθμητικῆς. Ἔτσι π.χ.

ἀντί	$^+5+^+3=^+8$	θά	γράφωμεν	$5+3=8$
"	$^+5-^+3=^+2$	"	"	$5-3=2$
"	$^+5\cdot{}^+3=^+15$	"	"	$5\cdot3=15$
"	$^+5:{}^+3=\frac{^+5}{3}$	"	"	$5:3=\frac{5}{3}$.

Δεύτερον, ἐπειδή ἡ πρόσθεσις ἑνός ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ, π.χ. τοῦ $^-3$, ἰσοδυναμεῖ μέ τήν ἀφαίρεσιν τοῦ ἀντιθέτου θετικοῦ $^+3$, συμφωνοῦμεν νά γράφωμεν τόν ἀρνητικόν ἀριθμόν $^-3$ ὡς ἑξῆς: (-3), παραλείποντες τήν παρένθεσιν, ὅταν ὁ ἀρνητικός αριθμός εὑρίσκεται εἰς τήν ἀρχήν μιᾶς ἀριθμητικῆς παραστάσεως. Διά τάς παρενθέσεις αὐτάς , πού περιέχουν ἕνα ἀρνητικόν ἀριθμόν, ἰσχύουν ὅσα εἴπαμεν εἰς τήν § 1.7 περί τῆς χρήσεως παρενθέσεων.

Θά ἀποσαφηνίσωμεν τά ἀνωτέρω εἰς τά ἀκόλουθα παραδείγματα μετατρέποντες τήν παλαιάν γραφήν τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν εἰς τήν νέαν καί ἐκτελοῦντες τάς σημειωμένας πράξεις:

$$^-7+{}^-3+{}^+5-{}^+4=-7+(-3)+5-4=-7-3+5-4=-9$$

$$^+5-{}^-2+{}^-6+{}^+7=5-(-2)+(-6)+7=5+2-6+7=8$$

$$(^-7+{}^-3)-(^-3+{}^+2)=-7+(-3)-(-3+2)=-7-3+3-2=-9$$

$$^-5\cdot{}^+3=-5\cdot3=-15\quad,\quad {}^-5\cdot{}^-3=-5\cdot(-3)=15$$

$$^+5\cdot{}^-3=5\cdot(-3)=-15\quad,\quad {}^-3\cdot{}^-1{,}5=-3\cdot(-1{,}5)=4{,}5$$

$$^-4:{}^-2=-4:(-2)=2\quad,\quad {}^-4:\frac{^+1}{2}=-4:\frac{1}{2}=-4\cdot2=-8$$

$$(^+6-{}^-3+{}^-7)\cdot{}^-4=\big(6-(-3)+(-7)\big)\cdot(-4)=6\cdot(-4)-(-3)(-4)+(-7)(-4)$$
$$=-24-12+28=-8$$

<u>Παρατηρήσεις.</u> I) Τό σύμβολον · τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐμπρός

ἀπό ἕνα γράμμα ἤ μίαν παρένθεσιν παραλείπεται συνήθως. Π.χ.

$3\cdot\alpha\cdot\beta = 3\alpha\beta \quad , \quad 3\cdot(5-7) = 3(5-7) = 3(-2) = -6 \; ,$

$(8-9)\cdot(2+3) = (8-9)\,(2+3) = -1\cdot 5 = -5 \; .$

II) Ὅταν εἰς μίαν ἀριθμητικήν παράστασιν εἶναι σημειωμέναι παρενθέσεις καί διάφοραι βασικαί πράξεις, ἡ σειρά πού πρέπει νά ἀκολουθῆται εἰς τούς ὑπολογισμούς εἶναι ἡ ἀκόλουθος: 1ον ὑπολογίζονται αἱ παρενθέσεις, 2ον ἐκτελοῦνται οἱ σημειωμένοι πολλαπλασιασμοί καί αἱ διαιρέσεις καί 3ον (δηλαδή τελευταῖαι) ἐκτελοῦνται αἱ προσθέσεις καί ἀφαιρέσεις. Π.χ.

$$\begin{aligned}(3-7)\cdot 4 + \big(5\cdot(-6)-6:3\big)\cdot(-2) &= {}^{-}4\cdot 4 + (-30-2)\,(-2)\\ &= {}^{-}4\cdot 4 + (-32)\,(-2)\\ &= -16 + 64 = 48 \; .\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά ὑπολογισθοῦν τά γινόμενα:

$-12\cdot(-6)\;,\; -7\cdot 2\;,\; 3\cdot(-5)\cdot(-2) = 3(-5)\,(-2),$

$-8{,}7\cdot(-8{,}7)\;,\; -0{,}84\left(-\frac{1}{2}\right)5\;,\; -87\cdot\left(-3\frac{1}{4}\right)\cdot 93\cdot 0\;.$

2) Ὁ ἀριθμός -60 νά τραπῆ εἰς γινόμενον α) τριῶν ἀρνητικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν καί β) δύο ἀκεραίων θετικῶν καί ἑνός ἀκεραίου ἀρνητικοῦ. Τί ἔχετε νά παρατηρήσετε ὡς πρός τό πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων ;

3) Ὁ ἀριθμός 60 νά τραπῆ εἰς γινόμενον α) τεσσάρων ἀκεραίων θετικῶν παραγόντων , β) δύο θετικῶν καί δύο ἀρνητικῶν παραγόντων καί γ) τεσσάρων ἀρνητικῶν παραγόντων. Τί ἔχετε νά παρατηρήσετε ὡς πρός τό πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων ;

4) Τά ἀκόλουθα γινόμενα νά ὑπολογισθοῦν κατά δύο τρόπους: 1ον σύμφωνα μέ τήν Παρατήρησιν ΙΙ) τοῦ § 1.11 καί 2ον μέ ἐφαρμογήν τῆς ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ:

$-2\cdot(5-3+1-7) \quad , \quad \left(-3+2\frac{1}{3}-5\frac{1}{2}\right)\cdot 12 \quad ,$

$(1+2-3)\,(-5-7) \quad , \quad \left(\frac{4}{5}-8\right)\left(-\frac{3}{4}+1-\frac{1}{2}\right) .$

5) Εἰς τάς ἀκολούθους ἰσότητας νά ἀντικατασταθοῦν τά γράμματα μέ καταλλήλους ἀριθμούς, οὕτως ὥστε νά φανῆ ἡ ἐφαρ-

μογή τῆς ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ:
$-36+27=9(\alpha+\beta)$, $15-12-3=3(\delta+\varepsilon+\zeta)$, $-20-30-10 = 10(\varkappa+\lambda+\mu)$

6) Νά εὑρεθοῦν τά ἀκόλουθα πηλίκα καί νά γίνουν αἱ δοκιμαί σύμφωνα μέ τήν λογικήν ἰσοδυναμίαν $\beta:\alpha = \gamma \Longleftrightarrow \alpha\cdot\gamma = \beta$:
$-12:(-4)$, $36:(-9)$, $-198:22$, $-169:(-13)$,
$-18:\left(-\frac{3}{4}\right)$, $\frac{9}{10}:(-3)$, $-\frac{2}{3}:5\frac{1}{3}$.

7) Νά ἐπιλυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:
$-3x = 6$, $2x = -6$, $3x = 6$, $\frac{2}{3}x = -\frac{5}{6}$, $\frac{1}{5}x = 0$.

8) Ὁ ἀριθμός -12 νά τραπῆ εἰς γινόμενον δύο παραγόντων ἀπό τούς ὁποίους ὁ ἕνας νά εἶναι κατά σειράν ὁ ἑξῆς:
-3 , 3 , -1 , 6 , -12 , $-\frac{4}{5}$.

Ποίαν πρᾶξιν ἐκτελεῖτε διά νά εὕρετε κάθε φοράν τόν ζητούμενον δεύτερον παράγοντα;

9) Νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἀριθμοί N καί M ἀπό τούς τύπους $N = xy$ καί $M = x:y$ ἐάν:
α) $x = -\frac{7}{11}$, $y = 1{,}25$ καί β) $x = -3{,}5$, $y = -2{,}8$.

10) Νά εὑρεθοῦν αἱ ἀριθμητικαί τιμαί τῶν ἀκολούθων παραστάσεων, ἐάν $\alpha = -2$, $\beta = 3$, $\gamma = -5$;
$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha-\beta+\gamma}$, $\frac{\alpha-\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}$, $\frac{\alpha\beta-\gamma}{\alpha+\beta\gamma}$.

11) Νά ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαί τῶν ἀκολούθων παραστάσεων
$\frac{3x-y}{x+y}$, $\frac{x-2y}{3x-1}$, $\frac{4x-2y+3}{4x-y+1}$
ὅταν 1ον $x = -2$, $y = 6$ καί 2ον $x = \frac{5}{6}$, $y = -\frac{1}{2}$

§ 2. Δυνάμεις σχετικῶν ἀριθμῶν.

2.1. Ὅπως ἐμάθαμεν εἰς τό Βιβλίον II, σ. 34 , ἡ δύναμις α μέ βάσιν τόν σχετικόν ἀριθμόν α καί ἐκθέτην τόν ἀκέραιον $\mu \geqslant 2$ ὁρίζεται ὡς γινόμενον μ παραγόντων ἴσων μέ τόνα:

$$\alpha^\mu = \underbrace{\alpha\cdot\alpha\ \ldots\ \alpha}_{\mu \text{ παράγοντες}}$$

Ἐκτός τούτου ὁρίζομεν ὅτι

$$\alpha^1 = \alpha.$$

Ἀπό τούς ὁρισμούς αὐτούς καί σύμφωνα μέ τόν κανόνα τῶν προσήμων είς τόν πολλαπλασισμόν συμπεραίνομεν τά άκόλουθα:

(α θετικός καί $\mu \in \Phi$) $\Longrightarrow \alpha^{\mu}$ θετικός άριθμός

(α άρνητικός καί $\mu = 2\nu$ μέ $\nu \in \Phi$) $\Longrightarrow \alpha^{\mu}$ θετικός άριθμός

(α άρνητικός καί $\mu = 2\nu - 1$ μέ $\nu \in \Phi$) $\Longrightarrow \alpha^{\mu}$ άρνητικός άριθμός

($\alpha = 0$ καί $\mu \in \Phi$) $\Longrightarrow \alpha^{\mu} = 0$.

'Αριθμητικά παραδείγματα.

$$1^1 = 1^2 = 1^3 = \ldots = 1^{\mu} = 1 \qquad (\mu \in \Phi)$$

$$(-1)^1 = -1, (-1)^2 = 1, (-1)^3 = -1, \ldots, (-1)^{2\nu} = 1, \ (-1)^{2\nu-1} = -1$$

$$(-3)^1 = -3, \ (-3)^2 = 9, \ (-3)^3 = -27, \ldots, (-3)^{2\nu} = 3^{2\nu}, \ (-3)^{2\nu-1} = -3^{2\nu-1}$$

Παρατήρησις. Δέν πρέπει νά συγχέωμεν τήν γραφήν $(-3)^{\mu}$ μέ τήν -3^{μ} καί, γενικῶς, τήν $(-\alpha)^{\mu}$ μέ τήν $-\alpha^{\mu}$. 'Η $(-\alpha)^{\mu}$ σημαίνει τήν μυοστήν δύναμιν τοῦ άριθμοῦ $-\alpha$, άντιθέτου τοῦ α, ένῶ ή $-\alpha^{\mu}$ σημαίνει τόν άριθμόν πού εἶναι άντίθετος τοῦ άριθμοῦ α^{μ}.

Π.χ. έάν $\alpha = 3$ καί $\mu = 4$, τότε

$$(-\alpha)^4 = (-3)^4 = 81 \quad \text{ένῶ} \quad -\alpha^4 = -3^4 = -81$$

καί έάν $\alpha = -3$ καί $\mu = 4$, τότε

$$(-\alpha)^4 = 3^4 = 81 \quad \text{ένῶ} \quad -\alpha^4 = -(-3)^4 = -81.$$

2.2. 'Ιδιότητες τῶν δυνάμεων. Σκεπτόμενοι ὅπως καί είς τήν 'Αριθμητικήν (Βιβλ. I, σ. 58 Β. κ.έ.) εὑρίσκομεν ὅτι καί διά τούς σχετικούς άριθμούς ίσχύουν αἱ άκόλουθοι ίδιότητες δυνάμεων μέ έκθέτας θετικούς άκεραίους:

I) $\alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa+\lambda}$, II) $(\alpha \cdot \beta)^{\kappa} = \alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa}$,

III) $(\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa\lambda}$, IV) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa} = \frac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}}$, ὅπου $\beta \neq 0$,

V) $\alpha^{\kappa} : \alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa-\lambda}$, ὅπου $\alpha \neq 0$ καί $k > \lambda$.

Παραδείγματα:

$$(-4)^2 \cdot (-4)^3 = 16 \cdot (-64) = -1024 = (-4)^{2+3} = (-4)^5$$

$$(-3 \cdot 6)^2 = (-18)^2 = 324 = (-3)^2 \cdot 6^2 = 9 \cdot 36$$

$$[(-2)^3]^4 = [-8]^4 = 4096 = (-2)^{3 \cdot 4} = (-2)^{12}$$

$$\left(\frac{-2}{3}\right)^3 = \left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{(-2)^3}{3^3} = \frac{-8}{27} = -\frac{8}{27}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^5 : \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{3} : \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{5-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

<u>2.3. Δύναμις ἑνός μή μηδενικοῦ σχετικοῦ ἀριθμοῦ μέ ἐκθέτην τό 0 ἤ ἕνα ἀρνητικόν ἀκέραιον.</u> Διά νά ἰσχύη ἡ ἰδιότης V) καί εἰς τήν περίπτωσιν $k \leqslant \lambda$ προχωροῦμεν εἰς τούς ἀκολούθους ὁρισμούς.

1ον "Εστω α ἕνας σχετικός ἀριθμός $\neq$ υ καί $k = \lambda$, ἕνας ἀκέραιος θετικός. Τό πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος $\alpha^\kappa : \alpha^\lambda = \alpha^{\kappa-\lambda}$ εἶναι τότε πηλίκον ἑνός ἀριθμοῦ μή μηδενικοῦ διά τοῦ ἑαυτοῦ του, ἄρα ἰσοῦται μέ 1. Τό δεύτερον μέλος $\alpha^{\kappa-\lambda}$ λαμβάνει τήν τήν μορφήν α^0 πού δέν ἔχει πρός τό παρόν κανένα νόημα. Ἐάν λοιπόν συμφωνήσωμεν ἡ γραφή α^0 νά παριστάνη τήν θετικήν μονάδα 1, τότε ἡ ἰδιότης V) θά ἰσχύη καί εἰς τήν περίπτωσιν $k = \lambda =$ θετικός ἀκέραιος. Διά τοῦτο ὁρίζομεν:

$\alpha^0 = 1$ διά κάθε σχετικόν ἀριθμόν $\alpha \neq 0$.

Π.χ. $(-3)^0 = (-2)^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \left(-\frac{3}{4}\right)^0 = 1$.

2ον. "Εστω $k = 3 < \lambda = 5$. Τό πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος $\alpha^\kappa : \alpha^\lambda = \alpha^{\kappa-\lambda}$ ἰσοῦται τώρα μέ τό κλάσμα

$$\frac{\alpha^3}{\alpha^5} = \frac{\alpha^3 : \alpha^3}{\alpha^5 : \alpha^3} = \frac{1}{\alpha^2},$$

ἐνῶ τό δεύτερον μέλος παίρνει τήν μορφήν α^{-2} πού δέν ἔχει πρός τό παρόν κανένα νόημα. Ἐάν ὅμως συμφωνήσωμεν ἡ γραφή α^{-2} νά παριστάνη τόν ἀριθμόν $\frac{1}{\alpha^2}$, τότε ἡ ἰδιότης V) θά ἰσχύη καί εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν $k = 3 < \lambda = 5$. Ὁρίζομεν λοιπόν:

$\alpha^{-2} = \frac{1}{\alpha^2}$ διά κάθε σχετικόν ἀριθμόν $\alpha \neq 0$.

Γενικῶς, ἔστω ν ἕνας θετικός ἀκέραιος ($\nu \in \Phi$)· ὁρίζομεν ὅτι

$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$ διά κάθε σχετικόν ἀριθμόν $\alpha \neq 0$.

Π.χ.

$$(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = \frac{1}{-27} = -\frac{1}{27}.$$

Ὥστε, δύναμις σχετικοῦ ἀριθμοῦ $\neq 0$ μέ ἐκθέτην ἀρνητικόν ἀκέραιον εἶναι ἴση μέ κλάσμα πού ἔχει ἀριθμητήν τήν θετικήν μονάδα 1 καί παρονομαστήν τήν δύναμιν τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ μέ ἐκθέτην τόν ἀντίθετον θετικόν ἀκέραιον.

2.4. Θά δείξωμεν τώρα μέ μερικά παραδείγματα ὅτι αἱ ἰδιότητες I) ἕως V) τῶν δυνάμεων ἐξακολουθοῦν νά ἰσχύουν καί μετά τούς νέους ὁρισμούς.

Ἄς παριστάνουν τά γράμματα α καί β σχετικούς ἀριθμούς $\neq 0$.
Ἰσχύουν τότε τά ἀκόλουθα:

I) $\alpha^{-2}\cdot\alpha^{-3} = \dfrac{1}{\alpha^2}\cdot\dfrac{1}{\alpha^3} = \dfrac{1}{\alpha^5} = \alpha^{-5} = \alpha^{-2-3}$,

$\alpha^{-3}\cdot\alpha^{5} = \dfrac{1}{\alpha^3}\cdot\alpha^5 = \alpha^2 = \alpha^{-3+5}$

II) $(\alpha\cdot\beta)^{-3} = \dfrac{1}{(\alpha\cdot\beta)^3} = \dfrac{1}{\alpha^3\cdot\beta^3} = \dfrac{1}{\alpha^3}\cdot\dfrac{1}{\beta^3} = \alpha^{-3}\cdot\beta^{-3}$

III) $(\alpha^{-3})^{-2} = \dfrac{1}{(\alpha^{-3})^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\alpha^3}\right)^2} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\alpha^6}} = \alpha^6 = \alpha^{-3\cdot(-2)}$

IV) $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^3} = \dfrac{1}{\dfrac{\alpha^3}{\beta^3}} = \dfrac{\beta^3}{\alpha^3} = \dfrac{1}{\alpha^3}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{1}{\beta^3}} = \alpha^{-3}\cdot\dfrac{1}{\beta^{-3}} = \dfrac{\alpha^{-3}}{\beta^{-3}}$

V) $\alpha^{-2}:\alpha^{-5} = \dfrac{1}{\alpha^2} : \dfrac{1}{\alpha^5} = \dfrac{1}{\alpha^2}\cdot\alpha^5 = \alpha^3 = \alpha^{-2-(-5)}$

2.5. Μία ἐφαρμογή. Εἰς τάς φυσικάς καί τεχνικάς ἐπιστήμας γίνεται συχνά χρῆσις τῶν δυνάμεων τοῦ 10 μέ ἀρνητικούς ἐκθέτας πρός παράστασιν τῶν δεκαδικῶν κλασματικῶν μονάδων. Πράγματι ἔχομεν:

$0{,}1 = \dfrac{1}{10} = 10^{-1}$; $0{,}01 = \dfrac{1}{10^2} = 10^{-2}$; $0{,}001 = \dfrac{1}{10^3} = 10^{-3}$, κ.ο.κ.

Μέ τήν βοήθειαν αὐτῶν τῶν δυνάμεων ἠμποροῦμεν νά γράφωμεν συντόμως καί εὐκρινῶς μικρούς δεκαδικούς ἀριθμούς. Π.χ.

$0{,}000035 = 35\cdot10^{-6} = 3{,}5\cdot10^{-5}$

$0{,}000007 = 7\cdot10^{-6}$, $0{,}00000012 = 12\cdot10^{-8}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκόλουθοι δυνάμεις:
$(-1)^{30}$, $(-1)^{15}$, $(-2)^7$, 2^9, $(-5)^3$, $(-6)^4$, $(-2)^8$,
$\left(-\frac{2}{3}\right)^2$, $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$, $\left(\frac{1}{-2}\right)^4$, $\left(1\frac{1}{4}\right)^3$, $\left(-1\frac{1}{4}\right)^3$, $(-0,5)^3$, $(-0,5)^4$.

2) Εἰς τάς ἀκολούθους ἰσότητας νά ἀντικατασταθῇ ὁ x μέ τόν κατάλληλον ἀκέραιον κάθε φοράν:
$-8 = (-2)^x$, $16 = (-2)^x$, $81 = (-3)^x$, $-243 = (-3)^x$,
$-125 = (-5)^x$, $64 = [(-2)^3]^x$, $8^2 = (-2)^x$.

3) Νά ὑπολογισθοῦν αἱ δυνάμεις:
3^{-2}, 2^{-3}, $(-5)^{-3}$, $(-2)^{-4}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$, $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}$, $(0,5)^{-4}$.

4) Νά ἐκτελεσθοῦν μέ τόν συντομώτερον τρόπον αἱ ἀκόλουθοι πράξεις:
α) $(-2)^4\cdot(-2)^3\cdot(-2)^0$, β) $(-3^4)\cdot(-3)^{-4}\cdot(-3)^{-2}$
γ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, δ) $[(-2)^2]^{-3}\cdot(2^3)^2$.

5) Εἰς τάς ἀκολούθους ἰσότητας νά ἀντικατασταθῇ ὁ x μέ τόν κατάλληλον ἀκέραιον κάθε φοράν:
$5^{-3} = 5^2\cdot 5^x$, $(-2)^2 = (-2)^6 : (-2)^x$, $4^3 = 4^x\cdot 4^5$.

6) Νά ἐκτελεσθοῦν μέ τόν ἁπλούστερον τρόπον αἱ ἀκόλουθοι πράξεις:
$37\cdot 10^{-2}$, $1,5\cdot 10^{-3}$, $0,85 : 10^{-3}$, $-\frac{3}{4} : 10^{-2}$.

7) Νά γράψετε μέ μορφήν γινομένου ἑνός ἀκεραίου ἐπί μίαν δύναμιν τοῦ 10 μέ ἀρνητικόν ἐκθέτην τούς δεκαδικούς ἀριθμούς:
0,0002 , 0,000003 , 0,125 , 13,075.

8) Νά γράψετε μέ μορφήν δεκαδικῶν ἀριθμῶν τά γινόμενα:
$3\cdot 10^{-2}$, $5\cdot 10^{-3}$, $-7\cdot 10^{-5}$, $375\cdot 10^{-4}$,
$2,7\cdot 10^{-3}$, $87\cdot 10^{-6}$, $4,5\cdot 10^{-5}$.

§ 3. Ἀνισότητες μεταξύ σχετικῶν ἀριθμῶν.

3.1. Συνοψίζομεν πρῶτον ὅσα ἐμάθαμεν εἰς τό Βιβλ. Ι , σ. 84Γ κ.ἑ.

Δύο σχετικοί ἀριθμοί α καί β εἶναι ἴσοι, ὅταν καί μόνον ὅταν ἡ διαφορά α − β εἶναι ἴση μέ μηδέν :

$$\alpha = \beta \iff \alpha - \beta = 0$$

οἱ ἀριθμοί ἔχουν τότε τήν αὐτήν ἀπόλυτον τιμήν καί, ἐάν δέν εἶναι μηδέν, τό αὐτό πρόσημον.

Διά δύο ἀνίσους σχετικούς ἀριθμούς α καί β θά ἔχωμεν ἐπομένως $\alpha - \beta \neq 0$, δύο δέ εἶναι τότε αἱ δυναταί περιπτώσεις:

ἤ $\alpha - \beta =$ θετικός ἀριθμός $\iff \alpha > \beta \iff \beta < \alpha$,

ἤ $\alpha - \beta =$ ἀρνητικός ἀριθμός $\iff \alpha < \beta \iff \beta > \alpha$.

<u>Συνέπειαι</u>: 1) Κάθε θετικός ἀριθμός θ εἶναι μεγαλύτερος καί ἀπό τό 0 καί ἀπό κάθε ἀρνητικόν ἀριθμόν α :

$$\vartheta > 0 \quad \text{καί} \quad \vartheta > \alpha \ .$$

2) Κάθε ἀρνητικός ἀριθμός α εἶναι μικρότερος καί ἀπό τό 0 καί ἀπό κάθε θετικόν θ :

$$\alpha < 0 \quad \text{καί} \quad \alpha < \vartheta$$

3) Ἀπό δύο ἀνίσους θετικούς ἀριθμούς ϑ_1 καί ϑ_2 μικρότερος εἶναι ἐκεῖνος πού ἔχει τήν μικροτέραν ἀπόλυτον τιμήν:

$$\vartheta_1 < \vartheta_2 \iff |\vartheta_1| < |\vartheta_2|$$

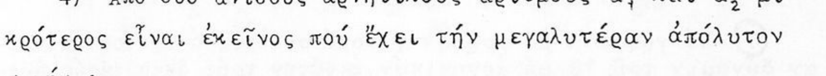
Π.χ. $3 < 5$, $1,5 < 1,75$ κ.ο.κ.

4) Ἀπό δύο ἀνίσους ἀρνητικούς ἀριθμούς α_1 καί α_2 μικρότερος εἶναι ἐκεῖνος πού ἔχει τήν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν :

$$\alpha_1 < \alpha_2 \iff |\alpha_2| < |\alpha_1|$$

Π.χ. $-5 < -3$, $-15 < -0,75$ κ.ο.κ.

Αἱ ἀνωτέρω σχέσεις ἀνισότητος μεταξύ δύο σχετικῶν ἀριθμῶν ἀποκτοῦν μίαν πολύ ἐποπτικήν γεωμετρικήν ἑρμηνείαν, ὅταν θεωρήσωμεν τούς σχετικούς ἀριθμούς ὡς τετμημένας σημείων ἑνός ἄξονος μέ θετικήν φοράν ἐξ ἀριστερῶν πρός τά δεξιά : τό σημεῖον μέ τήν μικροτέραν τετμημένην κεῖται ἀριστερά τοῦ σημείου μέ τήν μεγαλυτέραν τετμημένην (σχ. κατωτέρω).



<u>3.2. Ἰδιότητες τῶν ἀνισοτήτων.</u> 1) Ἔστω ἡ ἀνισότης

$$-3 < -1,5$$

καί ἡ ἰσότης $0,5 = \frac{1}{2}$.

Αἱ δύο αὐταί σχέσεις ἔχουν ὡς συνέπειαν τήν ἀνισότητα

$$-3 + 0,5 < -1,5 + \frac{1}{2} \quad \text{δηλαδή τήν} \quad -2,5 < -1 \ .$$

Γενικῶς ἔχομεν:

$$(\alpha < \beta \ \text{ καί } \ \gamma = \delta) \Longrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \delta \ .$$

Μέ ἄλλους λόγους, εἰς τά δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος ἠμποροῦμεν νά προσθέσωμεν τόν αὐτόν σχετικόν ἀριθμόν ἤ τά ἀντίστοιχα μέλη μιᾶς ἰσότητος· θά προκύψη ἀνισότης ὁμόστροφος (τῆς αὐτῆς φορᾶς).

2) Θεωροῦμεν δύο ὁμοστρόφους ἀνισότητας, π.χ. τάς

$$5 > -2$$

$$-3 > -4 \ .$$

Αἱ δύο αὐταί σχέσεις ἔχουν ὡς συνέπειαν τήν ἀνισότητα

$$5 + (-3) > -2 + (-4) \quad \text{δηλαδή τήν} \quad 2 > -6 \ .$$

Γενικῶς ἔχομεν:

$$(\beta > \alpha \ \text{ καί } \ \delta > \gamma) \Longrightarrow \beta + \delta > \alpha + \gamma \ .$$

Μέ ἄλλους λόγους, ἠμποροῦμεν νά προσθέσωμεν κατά μέλη (δηλαδή πρῶτον μέλος μέ πρῶτον καί δεύτερον μέλος μέ δεύτερον) δύο ὁμοστρόφους ἀνισότητας θά προκύψη ἀνισότης ὁμόστροφος.

3) Ἔστω ἡ ἀνισότης $-3 < -2$ καί ϑ ἕνας θετικός ἀριθμός. Θά ἰσχύη καί ἡ ἀνισότης

$$-3\vartheta < -2\vartheta$$

Πράγματι

$$3\vartheta - (-2\vartheta) = \big(-3-(-2)\big)\cdot\vartheta = \text{ἀρνητ. ἐπί θετ.} < 0 .$$

Ἐπειδή ἡ διαίρεσις μέ ἕνα θετικόν ἀριθμόν ϑ ἰσοδυναμεῖ μέ πολλαπλασιασμόν ἐπί τόν θετικόν ἀριθμόν $\frac{1}{\vartheta}$, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ἀνισότης $-3 < -2$ ἔχει ὡς συνέπειαν καί τήν

$$-3 : \vartheta < -2 : \vartheta \quad \text{δηλαδή τήν} \quad -\frac{3}{\vartheta} < -\frac{2}{\vartheta} \ .$$

Γενικῶς ἔχομεν:

$$(\alpha < \beta \text{ καί } \vartheta > 0) \implies \alpha\vartheta < \beta\vartheta$$

καί $$(\alpha < \beta \text{ καί } \vartheta > 0) \implies \alpha : \vartheta < \beta : \vartheta .$$

Μέ ἄλλους λόγους , ἠμποροῦμεν νά πολλαπλασιάσωμεν (ἤ νά διαιρέσωμεν) καί τά δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος μέ τόν αὐτόν θετικόν ἀριθμόν θά προκύψη ἀνισότης ὁμόστροφος.

4) Ἔστω πάλιν ἡ ἀνισότης $-3 < -2$ καί ϱ ἕνας ἀρνητικός ἀριθμός. Ἄν πολλαπλασιάσωμεν τά δύο μέλη τῆς ἀνισότητος μέ ϱ θά λάβωμεν τώρα τήν ἑτερόστροφον (ἀντιθέτου φορᾶς) ἀνισότητα

$$-3\varrho > -2\varrho .$$

Πράγματι

$$-3\varrho - (-2\varrho) = \big(-3-(-2)\big) \cdot \varrho = \text{ἀρνητ. ἐπί ἀρνητ.} > 0$$

Ἐπειδή ἡ διαίρεσις μέ ἕνα ἀρνητικόν ἀριθμόν ϱ ἰσοδυναμεῖ μέ πολλαπλασιασμόν ἐπί τόν ἀρνητικόν ἀριθμόν $\frac{1}{\varrho}$, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ἀνισότης $-3 < -2$ ἔχει ὡς συνέπειαν τήν ἑτερόστροφον ἀνισότητα

$$-3 : \varrho > -2 : \varrho \quad \text{δηλαδή τήν} \quad -\frac{3}{\varrho} > -\frac{2}{\varrho}$$

Γενικῶς ἔχομεν:

$$(\alpha < \beta \text{ καί } \varrho < 0) \implies \alpha\varrho > \beta\varrho$$

καί $$(\alpha < \beta \text{ καί } \varrho < 0) \implies \alpha : \varrho > \beta : \varrho .$$

Μέ ἄλλους λόγους, ἐάν πολλαπλασιάσωμεν (ἤ διαιρέσωμεν) καί τά δύο μέλη ἀνισότητος μέ τόν ἴδιον ἀρνητικόν ἀριθμόν, θά λάβωμεν ἀντσότητα ἑτερόστροφον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά τεθῇ τό κατάλληλον σύμβολον ἰσότητος ἤ ἀνισότητος μεταξύ τῶν ἀριθμῶν:

α) -3 καί -1 , $-0{,}75$ καί $-2\frac{1}{3}$, -17 καί 0 , 3 καί $\frac{13}{4}$

β) -3 καί $-\frac{13}{4}$; $-2\frac{1}{2}$ καί $-2\frac{1}{3}$, $-1{,}333$ καί $0{,}1$.

γ) $(-2)^3$ καί $(-2)^2$, $(-3)^{-2}$ καί 3^{-2} , 2^2 καί $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

δ) 3^3 καί $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $(-5)^7$ καί $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-7}$, $-0,5$ καί $-0,498$

2) Εἰς τά δύο μέλη τῶν κατωτέρω ἀνισοτήτων νά προσθέσετε τά ἀντίστοιχα μέλη τῶν ἀπέναντί των ἰσοτήτων ἤ ὁμοστρόφων ἀνισοτήτων:

α) $-\frac{2}{3} < -\frac{5}{8}$, $\frac{3}{4} = 0,75$

β) $1\frac{1}{2} > -3$, $-\frac{3}{2} = -1,5$

γ) $-1 < \frac{6}{5}$, $4 < \frac{24}{5}$

δ) $2,5 > -0,5$, $1 > 0,5$.

3) Νά πολλαπλασιασθοῦν τά δύο μέλη κάθε μιᾶς ἀπό τάς ἀκολούθους ἀνισότητας διαδοχικῶς μέ τούς ἀριθμούς 6 καί -12 :

α) $-\frac{5}{6} > -\frac{11}{12}$, $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$, $\frac{7}{12} > \frac{11}{24}$

β) $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} > \frac{1}{2} - \frac{3}{4}$, $-1 + \frac{5}{6} < 1 - \frac{5}{6}$

γ) $\frac{\alpha}{4} - \frac{\alpha}{6} > \alpha$, $\frac{2x}{3} - \frac{3x}{4} > 1$.

4) Νά δείξετε ὅτι ἠμποροῦμεν νά ἀφαιρέσωμεν ἀπό τά δύο μέλη ἀνισότητος τόν ἴδιον σχετικόν ἀριθμόν, χωρίς ἡ ἀνισότης νά ἀλλάξῃ φοράν.

5) Ἔστω ὅτι μεταξύ τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν α καί β ἰσχύει ἡ ἀνισότης $\alpha > \beta$. Νά δείξετε ὅτι θά εἶναι τότε

$\alpha^2 > \beta^2$ ἐάν $\alpha + \beta > 0$
$\alpha^2 = \beta^2$ " $\alpha + \beta = 0$
$\alpha^2 < \beta^2$ " $\alpha + \beta < 0$

Νά δώσετε καί ἀριθμητικά παραδείγματα δι' ἑκάστην περίπτωσιν.

6) Νά ἐξηγήσετε διατί ἡ ἀνισότης $\alpha \cdot \beta > 0$ ἰσοδυναμεῖ μέ τήν πρότασιν: οἱ δύο σχετικοί ἀριθμοί α καί β εἶναι διάφοροι ἀπό τό μηδέν καί ὁμόσημοι.
Μέ ποίαν πρότασιν ἰσοδυναμεῖ ἡ ἀνισότης $\alpha \cdot \beta < 0$;

7) Μεταξύ τῶν (μή μηδενικῶν) σχετικῶν ρητῶν ἀριθμῶν α καί β ἰσχύει ἡ ἀνισότης $\alpha > \beta$. Νά ἐξετάσετε, μέ παραδείγματα πρῶτον καί ἔπειτα γενικῶς, ποία ἀνισότης ἰσχύει μεταξύ τῶν ἀντιστρόφων των $1/\alpha$ καί $1/\beta$ ὅταν 1ον οἱ α καί β εἶναι ὁμόσημοι καί 2ον ὅταν εἶναι ἑτερόσημοι.

8) Νά δείξετε ὅτι $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$ καί $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0$.

§ 4. Προσεγγιστικοί ἀριθμοί.
Ἀπόλυτον καί σχετικόν σφάλμα.

4.1. Εἰς τό Βιβλ. Ι, σ. 38-39 Γ καί σ. 46Γ ἐμάθαμεν τί σημαίνει "προσεγγίζω ἕνα ἀριθμόν μέ ἕνα δεκαδικόν ἀριθμόν κατ'ἔλλειψιν ἤ καθ'ὑπεροχήν". Χάριν ἐπαναλήψεως ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι μετροῦμεν μέ ἕνα ὑποδεκάμετρον, διῃρημένον εἰς mm (χιλιοστά τοῦ μέτρου), τάς διαστάσεις μιᾶς σελίδος τοῦ βιβλίου μας καί ὅτι εὑρίσκομεν διά τήν μίαν 168 mm σύν κάτι μικρότερον τοῦ 1 mm καί διά τήν ἄλλην 240 mm μεῖον κάτι μικρότερον τοῦ 1 mm. Λέγομεν τότε ὅτι ἡ 1η διάστασις εἶναι περίπου ἴση πρός 168 mm μέ προσέγγισιν ἑνός mm κατ'ἔλλειψιν καί ἡ 2α περίπου ἴση πρός 240 mm μέ προσέγγισιν ἑνός mm καθ'ὑπεροχήν:

1η διάσταση $\simeq$ 168 mm κατ'ἔλλειψιν, 2α διάσταση $\simeq$ 240 mm καθ'ὑπεροχήν μέ προσέγγισιν ἑνός mm.

Γενικῶς καμμία μέτρησις ἑνός φυσικοῦ μεγέθους (ἑνός μήκους, ἑνός βάρους, μιᾶς θερμοκρασίας κτλ.) δέν ἠμπορεῖ νά δώσῃ ἐντελῶς ἀκριβές μέτρον τοῦ μεγέθους, διότι καί τά ὄργανα μετρήσεως πού χρησιμοποιοῦμεν παρουσιάζουν ἀτελείας καί αἱ ἀναγνώσεις πού κάμνομεν δέν ἠμποροῦν νά εἶναι ἐντελῶς ἀκριβεῖς. Διά τοῦτο εἰς τάς ἐφαρμογάς τῶν Μαθηματικῶν ἔχουν μεγάλην σπουδαιότητα τά ἀκόλουθα.

4.2. Σφάλμα προσεγγίσεως. Ἔστω $\frac{22}{7}$ ἕνα κοινόν κλάσμα. Ἄν τό τρέψωμεν εἰς δεκαδικόν ἀριθμόν, θά εὕρωμεν τόν περιοδικόν δεκαδικόν ἀριθμόν

$$\frac{22}{7} = 3,\overline{142857}142857\ldots$$

Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι χρειαζόμεθα μίαν προσεγγιστικήν τιμήν τοῦ $\frac{22}{7}$ μέ λάθος μικρότερον τοῦ ἑκατοστοῦ. Θά λάβωμεν $\frac{22}{7} \simeq 3,14$ κατ'ἔλλειψιν ἤ $\frac{22}{7} \simeq 3,15$ καθ'ὑπεροχήν.

ΚΑΣΑΠΟΓΛΟΥ

Ἡ διαφορά:

ἀκριβής τιμή μεῖον προσεγγιστική τιμή $= \frac{22}{7} - 3,14 = 0,00287\ldots$
καί
ἀκριβής τιμή μεῖον προσεγγιστική τιμή $= \frac{22}{7} - 3,15 = -0,00714\ldots$
λέγεται ἀπόλυτον σφάλμα καί, συντόμως, σφάλμα τῆς προσεγγίσεως πού θεωροῦμεν. Τό σφάλμα αὐτό εἶναι θετικόν ὅταν χρησιμοποιοῦμεν προσέγγισιν κατ'ἔλλειψιν καί ἀρνητικόν ὅταν χρησιμοποιοῦμεν προσέγγισιν καθ'ὑπεροχήν.

Καί είς τάς δύο περιπτώσεις ἰσχύει ἡ σχέσις:

ἀκριβής τιμή = προσεγγιστική τιμή + σφάλμα της.

Εἰς τήν μέτρησιν τῶν διαστάσεων μιᾶς σελίδος τοῦ βιβλίου μας (§ 4.1), ἐπειδή δέν μᾶς εἶναι γνωσταί αἱ ἀκριβεῖς διαστάσεις, δέν γνωρίζομεν ἐπακριβῶς οὔτε τά σφάλματα· τό μόνον πού γνωρίζομεν εἶναι ὅτι τό σφάλμα διά τήν 1ην διάστασιν περιέχεται μεταξύ 0 καί 1 mm καί διά τήν 2αν, μεταξύ -1 mm καί 0:

1η διάστασις $\simeq 168$ mm μέ σφάλμα η_1, ὅπου $0 < \eta_1 < 1$ mm

2α διάστασις $\simeq 240$ mm μέ σφάλμα η_2, ὅπου $-1\text{ mm} < \eta_2 < 0$.

Συνήθως είς μιαν μέτρησιν μεγέθους ἐκεῖνο πού γνωρίζομεν εἶναι ὅτι τό σφάλμα τῆς προσεγγίσεως δέν ὑπερβαίνει κάποιον ἀριθμόν κατ'ἀπόλυτον τιμήν.

4.3. Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἕνας μαθητής ἐμέτρησε τό μῆκος τῆς αἰθούσης διδασκαλίας του μέ ἕνα μέτρον διηρημένον είς cm (ἑκατοστά) καί ὅτι ηὗρε τόν ἀριθμόν 830 cm μέ ἕνα σφάλμα $\leqslant 5$ cm κατ'ἀπόλυτον τιμήν. Θά ἔχωμεν τότε

$$825\text{ cm} = 830 - 5 \leqslant \text{μῆκος αἰθούσης} \leqslant 830 + 5 = 835\text{ cm}.$$

Ἄς ὑποθέσωμεν ἀκόμη ὅτι ἕνας ἄλλος μαθητής ἐμέτρησε τό πλάτος τῆς ἰδίας αἰθούσης καί ὅτι ηὗρε 420 cm μέ ἕνα σφάλμα $\leqslant 5$ cm κατ'ἀπόλυτον τιμήν:

$$415\text{ cm} = 420 - 5 \leqslant \text{πλάτος αἰθούσης} \leqslant 420 + 5 = 425\text{ cm}.$$

θέτομεν τώρα τό ἐρώτημα : Ποία ἀπό τάς δύο μετρήσεις εἶναι ποιοτικῶς καλυτέρα ; Προφανῶς ἡ πρώτη, διότι είς περίπου διπλάσιον μῆκος (είς 830 cm) τό σφάλμα ἠμπορεῖ νά εἶναι 5 cm ὅσον καί τό σφάλμα τῆς δευτέρας μετρήσεως είς τό ἥμισυ περίπου μῆκος (είς 420 cm). Ἄν τώρα θελήσωμεν νά προσδιορίσωμεν καί ποσοτικῶς πόσον καλυτέρα εἶναι ἡ πρώτη μέτρησις θά σχηματίσωμεν τούς δύο λόγους (τά δύο πηλίκα):

$$\frac{5}{830} \quad \text{καί} \quad \frac{5}{420}$$

καί θά τούς συγκρίνωμεν. Ἐπειδή ὁ πρῶτος λόγος εἶναι ἴσος περίπου μέ τό ἥμισυ τοῦ δευτέρου:

$$\frac{5}{830} \simeq \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{420} \ ,$$

θά λέγωμεν ὅτι ἡ πρώτη μέτρησις ἔχει <u>διπλάσιον βαθμόν ἀκριβείας</u> ἀπό τήν δευτέραν.

<u>4.4. Σχετικόν ἤ ἀναλογικόν σφάλμα.</u> Ὅπως παρατηροῦμεν, ἡ ἐκτίμησις τοῦ βαθμοῦ ἀκριβείας μιᾶς προσεγγίσεως γίνεται μέ τόν ὑπολογισμόν τοῦ λόγου:

$$\frac{\text{ὑποτιθέμενον σφάλμα}}{\text{ἀκριβής τιμή τοῦ ποσοῦ}} \simeq \frac{\text{ὑποτιθέμενον σφάλμα}}{\text{προσεγγιστική τιμή τοῦ ποσοῦ}}$$

Π.χ. διά τήν προσεγγιστικήν τιμήν 3,14 τοῦ κλάσματος $\frac{22}{7}$ θά ἔχωμεν τόν λόγον:

$$\frac{\text{σφάλμα}}{22/7} \simeq \frac{0,003}{22/7} = \frac{0,021}{22} = \frac{1}{1000} \cdot \frac{21}{22} \simeq \frac{1}{1000}$$

Ὁ λόγος αὐτός

$$\frac{\text{σφάλμα}}{\text{ἀκριβής τιμή}} \simeq \frac{\text{σφάλμα}}{\text{προσεγγιστική τιμή}}$$

λέγεται <u>σχετικόν</u> ἤ <u>ἀναλογικόν σφάλμα</u> τῆς προσεγγίσεως καί χρησιμεύει ὡς κριτήριον διά νά ἐκτιμήσωμεν τόν βαθμόν ἀκριβείας τῆς προσεγγίσεως. Π.χ. μία μέτρησις τῆς ἀποστάσεως μεταξύ Ἀθηνῶν καί Θεσσαλονίκης πού δίδει ὡς ἀποτέλεσμα 593 km μέ ἕνα σφάλμα $\leq \frac{1}{2}$ km κατ'ἀπόλυτον τιμήν, ἔχει τόν ἴδιον περίπου βαθμόν ἀκριβείας μέ τήν ἀνωτέρω προσέγγισιν τοῦ κλάσματος $\frac{22}{7}$ διά τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 3,14.

Πράγματι τό ἀναλογικόν σφάλμα εἰς τήν μέτρησιν τῆς ἀποστάσεως εἶναι:

$$\frac{0,5}{593} = \frac{5}{5930} \simeq \frac{1}{1000} .$$

<u>4.5.</u> Ἔστω τώρα ὅτι θέλομεν νά ὑπολογίσωμεν τήν περίμετρον $2(\alpha+\beta)$ τοῦ ὀρθογωνίου δαπέδου τῆς αἰθούσης τοῦ § 4.3 μέ προσεγγιστικάς διαστάσεις: μῆκος $\alpha = 830$ cm καί πλάτος $\beta = 420$ cm. Ἐπειδή τό σφάλμα καί διά τάς δύο εἶναι $\leqslant 5$cm κατ'ἀπόλυτον τιμήν, ἔχομεν εὕρει (§ 4.3) ὅτι:

$$825 \text{ cm} \leqslant \alpha \leqslant 835 \text{ cm} \quad ,$$

$$415 \text{ cm} \leqslant \beta \leqslant 425 \text{ cm} .$$

Ἄρα

$$1240 \text{ cm} \leqslant \alpha + \beta \leqslant 1260 \text{ cm}$$

καί

$$2480 \leqslant 2(\alpha+\beta) \leqslant 2520 \text{ cm}.$$

Ὥστε ἠμποροῦμεν νά λέγωμεν ὅτι ἡ περίμετρος εἶναι περίπου ἴση μέ 2500 cm μέ ἕνα σφάλμα $\leqslant 20$ cm κατ'ἀπόλυτον τιμήν. Τό ἀναλογικόν σφάλμα εἶναι κατ'ἀπόλυτον τιμήν περίπου ἴσον μέ

$$\frac{20}{2500} = \frac{2}{250} = \frac{1}{125} < \frac{1}{100} .$$

Ἔστω δεύτερον ὅτι θέλομεν νά ὑπολογίσωμεν τό ἐμβαδόν $\alpha\cdot\beta$ τοῦ δαπέδου τῆς ἰδίας αἰθούσης. Θά ἔχωμεν

$$34,2375 \text{ m}^2 = 825 \times 415 \text{ cm}^2 \leqslant \alpha\cdot\beta \leqslant 835 \times 425 \text{ cm}^2 = 35,4875 \text{ m}^2.$$

Ὥστε ἠμποροῦμεν νά λέγωμεν ὅτι τό ἐμβαδόν τοῦ δαπέδου εἶναι περίπου ἴσον πρός 34,8 m^2 μέ ἕνα σφάλμα $< 0,7$ m^2 κατ' ἀπόλυτον τιμήν. Τό ἀντίστοιχον ἀναλογικόν σφάλμα εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμήν περίπου ἴσον μέ

$$\frac{0,7}{35} = \frac{70}{350} = \frac{1}{50} = \frac{2}{100} .$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ποῖον εἶναι τό ἀπόλυτον καί ποῖον τό σχετικόν σφάλμα πού κάμνομεν, ἄν τά ἀκριβῆ ποσά:

235014 mm , 6056,7 km , 5189 gr

τά ἀντικαταστήσωμεν ἀντιστοίχως μέ τάς προσεγγίσεις:

235000 mm , 6060 km , 5200 gr ;

2) Τούς πολυψηφίους δεκαδικούς ἀριθμούς

5,4352 | 0,7589 | 0,02467

τούς στρογγυλεύομεν (τούς συντομεύομεν) εἰς τούς ὀλιγοψηφίους

5,4 | 0,76 | 0,025

ἀντιστοίχως. Ποῖον εἶναι τό ἀπόλυτον καί ποῖον τό σχετικόν σφάλμα πού κάμνομεν εἰς ἑκάστην περίπτωσιν ;

3) Ὁ λόγος τοῦ μήκους μιᾶς περιφερείας πρός τό μῆκος μιᾶς διαμέτρου της παριστάνεται , ὅπως εἶναι γνωστόν, μέ τό γράμμα π καί ἰσοῦται μέ

$$\pi = 1,141592...$$

Ἄν προσεγγίσωμεν τό π 1ον μέ 3,14 καί 2ον μέ 3,1416 ποῖον ἀπόλυτον καί ποῖον σχετικόν σφάλμα κάμνομεν κάθε φοράν ;

4) Αἱ πλευραί ἑνός ὁριζοντίου γηπέδου μέ σχῆμα τριγώνου ἐμετρήθησαν μέ τήν μετροταινίαν καί εὑρέθησαν περίπου ἴσαι πρός

52 m , 34,5 m καί 46,5 m

μέ σφάλμα $\leqslant \frac{1}{4}$ m κατ'ἀπόλυτον τιμήν δι'ἑκάστην πλευράν. Εὑρῆτε μίαν προσεγγιστικήν τιμήν διά τήν περίμετρον τοῦ γηπέδου καθώς καί τά ἀντίστοιχα ἀπόλυτον καί σχετικόν σφάλμα.

5) Αἱ διαστάσεις ἑνός ὀρθογωνίου εἶναι γνωσταί κατά προσέγγισιν μέ σφάλμα $\leqslant 1$ m κατ'ἀπόλυτον τιμήν : μῆκος $\alpha \simeq 235$ m , πλάτος $\beta \simeq 120$ m . Νά εὑρεθῆ τό ἐμβαδόν αβ τοῦ ὀρθογωνίου κατά προσέγγισιν καί νά ὑπολογισθοῦν τά ἀντίστοιχα ἀπόλυτον καί σχετικόν σφάλμα.

§ 5. Ἐξίσωσις $\alpha x + \beta = 0$ καί γραφική ἐπίλυσίς της.

5.1. Διά πρώτην φοράν λόγος περί ἐξισώσεων ἔγινε εἰς τό Βιβλ. Ι , σ. 6 Β . Εἴπαμεν τότε ὅτι ἐξίσωσις διά τό x εἶναι μία ἰσότης πού περιέχει τό γράμμα (τήν μεταβλητήν) x καί πού ἀληθεύει ὄχι δι'ὅλους τούς ἀριθμούς πού παριστάνει τό γράμμα τοῦτο ἀλλά τό πολύ δι'ὡρισμένους μόνον ἀπό αὐτούς.

Π.χ. ἡ ἐξίσωσις $x + 3 = 7$ ἀληθεύει μόνον διά $x = 4$. Αἱ ἐξισώσεις τάς ὁποίας ἔκτοτε ἐθεωρήσαμεν εἶχον τήν μορφήν

$$x + \beta = \alpha \quad \text{ἤ} \quad \alpha - x = \gamma \quad \text{ἤ} \quad x - \beta = \gamma \quad \text{ἤ} \quad \alpha x = \beta ,$$

ὅπου α, β, γ δεδομένοι ἀριθμοί καί x ὁ ἄγνωστος πού πρέπει νά προσδιορίσωμεν οὕτως ὥστε νά ἀληθεύῃ ἡ ἐξίσωσις. Ὅλαι αὐταί αἱ μορφαί ἠμποροῦν νά ὑπαχθοῦν εἰς τήν γενικήν μορφήν $\alpha x + \beta = 0$, $(\alpha \in P \ , \ \beta \in P)$

πού λέγεται <u>πρωτοβάθμιος</u> ἐξίσωσις μέ <u>συντελεστάς</u> τούς ρητούς σχετικούς ἀριθμούς α καί β . Π.χ. ἐπειδή

$$x + 3 = 7 \iff (x+3)-7 = 0 \iff 1 \cdot x + (-4) = 0 ,$$

ἡ ἐξίσωσις $x + 3 = 7$ ὑπάγεται εἰς τήν $\alpha x + \beta = 0$ μέ $\alpha = 1$ καί $\beta = -4$. Ὁμοίως , ἐπειδή

$$2x = -3 \iff 2x - (-3) = 0 \iff 2x + 3 = 0 ,$$

ἡ ἐξίσωσις $2x = -3$ ὑπάγεται εἰς τήν $\alpha x + \beta = 0$ μέ $\alpha = 2$, $\beta = 3$.

<u>5.2. Διερεύνησις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x + \beta = 0$ μέ $\alpha \in P$, $\beta \in P$.</u>

Διερεύνησις σημαίνει νά ἐξετάσωμεν ποῖαι εἶναι αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως εἰς τάς διαφόρους περιπτώσεις πού ἠμποροῦν νά παρουσιασθοῦν.

<u>1η περίπτωσις</u>: $\alpha \neq 0$. Ἔστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $2x - 5 = 0$. Ὅπως γνωρίζομεν, ἰσχύει πρῶτον ἡ ἰσοδυναμία

$$2x - 5 = 0 \iff 2x = 5.$$

Δεύτερον, ἐπειδή $2 \neq 0$, ὑπάρχει ὁ ἀντίστροφος ἀριθμός $\frac{1}{2}$ καί δυνάμεθα νά πολλαπλασιάσωμεν τά δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως $2x = 5$ μέ $\frac{1}{2}$. θά λάβωμεν

$$2x = 5 \iff \frac{1}{2} \cdot 2x = 5 \cdot \frac{1}{2} \iff x = \frac{5}{2} .$$

Ὥστε ἡ ἐξίσωσις $2x - 5 = 0$ ἔχει μίαν μόνον λύσιν, τόν ἀριθμόν $\frac{5}{2}$. Ἰδού καί ἡ ἐπαλήθευσις:

$$2 \cdot \frac{5}{2} - 5 = 5 - 5 = 0.$$

Γενικῶς, ὅταν $\alpha \neq 0$, ὑπάρχει ὁ ἀντίστροφος ἀριθμός $\frac{1}{\alpha}$ καί ἔχομεν τάς ἰσοδυναμίας:

$$\alpha x + \beta = 0 \iff \alpha x + (-\beta) = 0 \iff \alpha x = -\beta$$

καί

$$\alpha x = -\beta \iff \frac{1}{\alpha}\cdot\alpha\cdot x = -\beta\cdot\frac{1}{\alpha} \iff x = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Ὥστε ἡ ἐξίσωσις $\alpha x + \beta = 0$ μέ $\alpha \neq 0$ ἔχει μίαν μόνον λύσιν, τόν ἀριθμόν $-\frac{\beta}{\alpha}$. Μέ τόν συμβολισμόν τῶν συνόλων, αὐτό γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$\{x \mid \alpha x + \beta = 0\} = \left\{-\frac{\beta}{\alpha}\right\}.$$

Π.χ. ἡ ἐξίσωσις $\frac{3}{4}x - \frac{5}{2} = 0$ ἔχει ὡς μόνην λύσιν τήν

$$x = -\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{4}{3} = \frac{10}{3} \quad \text{καί ἑπομένως}$$

$$\left\{x \mid \frac{3}{4}x - \frac{5}{2} = 0\right\} = \left\{\frac{10}{3}\right\}.$$

<u>2α περίπτωσις</u>: $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$. Π.χ. $0\cdot x+2 = 0$. Ἡ ἐξίσωσις αὐτή δέν ἔχει λύσιν, ἐπειδή ὁποιανδήποτε ἀριθμητικήν τιμήν καί ἄν δώσωμεν εἰς τόν x, θά ἔχωμεν

$$0\cdot x + 2 = 0 + 2 = 2 \neq 0 .$$

Γενικῶς, ἡ ἐξίσωσις $0\cdot x + \beta = 0$ μέ $\beta \neq 0$ δέν ἔχει λύσιν, ἐπειδή

$$0\cdot x + \beta = 0 + \beta = \beta \neq 0.$$

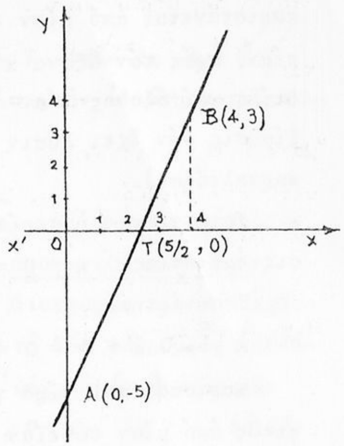
Ἡ ἐξίσωσις εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν λέγεται <u>ἀδύνατος</u> ἤ <u>μή ἐπιλύσιμος</u>.

<u>3η περίπτωσις</u>: $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Ἡ ἐξίσωσις $0\cdot x+0 = 0$ ἀληθεύει τώρα ὁποιαδήποτε καί ἄν εἶναι ἡ τιμή τοῦ x, μέ ἄλλους λόγους κάθε ρητός σχετικός ἀριθμός εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως. Ἡ ἐξίσωσις εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν εἶναι οὐσιαστικά μία <u>ταυτότης</u> διά τό γράμμα x καί δέν τό προσδιορίζει. Διά τοῦτο ἡ περίπτωσις λέγεται <u>περίπτωσις ἀοριστίας</u>.

<u>5.3. Γραφική ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x + \beta = 0$</u>. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $2x - 5 = 0$. Θεωροῦμεν τήν συνάρτησιν

$$\sigma : x \xrightarrow{\sigma} 2x - 5 = y \quad , \quad (x \in P)$$

καί τήν παριστάνομεν γραφικῶς εἰς ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων συντεταγμένων (σχ. παραπλεύρως). Ὅπως γνωρίζομεν, ἡ παράστασις αὐτή εἶναι μία εὐθεῖα, καί ἐπομένως προσδιορίζεται ἀπό δύο σημεῖα της, π.χ. τό A($x = 0$, $y = -5$) καί τό B ($x = 4$, $y = 3$). Ἡ εὐθεῖα αὐτή τέμνει τόν ἄξονα x΄x τῶν τετμημένων εἰς ἕνα σημεῖον T $\left(x = \frac{5}{2} \right.$, $\left. y = 0 \right)$, καί ἡ



τετμημένη $x = \frac{5}{2}$ τοῦ σημείου αὐτοῦ εἶναι ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως $2x - 5 = 0$.

Γενικῶς, ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha x + \beta = 0$ μέ $\alpha \neq 0$. Θεωροῦμεν τήν γραφικήν παράστασιν τῆς συναρτήσεως

$$\sigma : x \xrightarrow{\sigma} \alpha x + \beta = y \quad , \quad (x \in P).$$

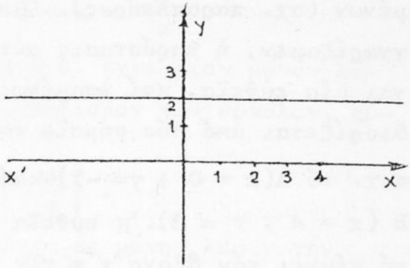
Ἡ παράστασις αὐτή εἶναι , ὅπως γνωρίζομεν, μία εὐθεῖα πού τέμνει τόν ἄξονα x΄x τῶν τετμημένων. Τό σημεῖον τομῆς ἔχει τεταγμένην $y = 0$ καί ἐπομένως ἡ τετμημένη του θά εἶναι ἡ λύσις $x = -\frac{\beta}{\alpha}$ τῆς ἐξισώσεως. Ἔτσι ἡ λύσις τῆς $\alpha x + \beta = 0$ μέ $\alpha \neq 0$ παριστάνεται γεωμετρικῶς ἀπό τό κοινόν σημεῖον τοῦ ἄξονος x΄x καί τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς συναρτήσεως $y = \alpha x + \beta$, $(x \in P)$.

Ὥστε , διά νά ἐπιλύσωμεν γραφικῶς τήν ἐξίσωσιν $\alpha x + \beta = 0$ μέ $\alpha \neq 0$, χαράσσομεν τήν εὐθεῖαν πού παριστάνει τήν συνάρτησιν $y = \alpha x + \beta$ καί σημειώνομεν τό σημεῖον ὅπου ἡ εὐθεῖα αὐτή τέμνει τόν ἄξονα x΄x. Ἡ τετμημένη τοῦ σημείου αὐτοῦ εἶναι ἡ ζητουμένη λύσις τῆς $\alpha x + \beta = 0$.

Ἔστω δεύτερον ἡ ἐξίσωσις $0 \cdot x + 2 = 0$. Ἡ συνάρτησις

$$\sigma : x \xrightarrow{\sigma} 0\cdot x + 2 = 2 = y \quad , \quad (x \in P)$$

παριστάνεται ἀπό μίαν εὐθεῖαν παράλληλον (μέ στενήν σημασίαν) πρός τόν ἄξονα $x'x$ καί δέν ὑπάρχει κοινόν σημεῖον εὐθείας καί ἄξονος $x'x$. Ἡ ἐξίσωσις δέν ἔχει λύσιν (σχ. παραπλεύρως).



Ἔστω τρίτον ἡ περίπτωσις ἀοριστίας $0\cdot x + 0 = 0$.

Ἡ συνάρτησις

$$\sigma : x \xrightarrow{\sigma} 0\cdot x + 0 = 0 = y$$

παριστάνεται τώρα γραφικῶς ἀπό μίαν εὐθεῖαν συμπίπτουσαν μέ τόν ἄξονα $x'x$. Κάθε σημεῖον $(x = \varrho \ , \ y = 0)$ τοῦ ἄξονος τούτου τό ὁποῖον ἔχει τετμημένην $\varrho \in P$ παριστάνει γεωμετρικῶς μίαν λύσιν τῆς ἐξισώσεως $0\cdot x + 0 = 0$.

5.4. Ἰσοδύναμοι ἐξισώσεις. Δύο ἐξισώσεις μέ ἕνα ἄγνωστον λέγονται ἰσοδύναμοι, ὅταν κάθε τιμή τοῦ ἀγνώστου ἡ ὁποία ἐπαληθεύει μίαν ὁποιανδήποτε ἐξ αὐτῶν ἐπαληθεύει καί τήν ἄλλην, μέ ἄλλους λόγους, ὅταν αἱ δύο ἐξισώσεις ἔχουν τάς ἰδίας λύσεις. Π.χ. αἱ ἐξισώσεις $2x - 5 = 0$ καί $3x - \frac{15}{2} = 0$ εἶναι ἰσοδύναμοι, ἐπειδή ἔχουν καί αἱ δύο ὡς μόνην λύσιν τόν ἀριθμόν $\frac{5}{2} = \frac{15}{6}$. Ἰσχύουν τώρα τά ἀκόλουθα.

Ι) Ἄν εἰς μίαν ἐξίσωσιν μέ ἕνα ἄγνωστον ἐκτελέσωμεν βασικάς πράξεις ἐφαρμόζοντες γνωστάς ἰδιότητας τῶν πράξεων τούτων, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος μέ τήν ἀρχικήν. Π.χ.

$$3(2x+1) - 2x = 8 - x \iff 6x + 3 - 2x = 8 - x \ ,$$

ἐπειδή, σύμφωνα μέ τήν ἐπιμεριστικήν ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, $3(2x+1) = 6x + 3$, ὅποιος καί ἄν εἶναι ὁ ἀριθμός τόν ὁποῖον παριστάνει ὁ x.

Ὁμοίως , εἶναι

$4x-7x+x-4 = 7 \iff (4-7+1)x - 4 = 7 \iff -2x -4 = 7$,

ἐπειδή, σύμφωνα πάλιν μέ τήν ἐπιμεριστικήν ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ,

$4x - 7x + x = (4-7+1)x = -2x$.

Οἱ ὅροι $4x$, $-7x$, x λέγονται ὅμοιοι καί ἡ ἀντικατάστασις τοῦ ἀθροίσματός των μέ $-2x$ λέγεται ἀναγωγή ὁμοίων ὅρων.

II) Σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα τῆς διαγραφῆς εἰς τήν πρόσθεσιν (§ 1.3, 3η ἰδιότης), ἐάν εἰς τά δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως μέ ἄγνωστον τόν x προσθέσωμεν τήν αὐτήν ἀλγεβρικήν παράστασιν, π.χ. τήν $\gamma x + \delta$ (ὅπου $\gamma \in P$ καί $\delta \in P$), θά λάβωμεν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν. Π.χ. προσθέτοντες τήν παράστασιν $x - 3$ λαμβάνομεν:

$6x+3-2x = 8-x \iff 6x+3-2x+x-3 = 8-x+x-3 \iff 6x - 2x+x = 8-3$.

Ὅπως βλέπομεν, ὁ ὅρος $-x$ πού εὑρίσκετο εἰς τό δεξιόν μέλος τῆς ἀρχικῆς ἐξ σώσεως μετεφέρθη εἰς τό ἀριστερόν μέλος τῆς τελικῆς, ἀφοῦ ἔλαβε ἀντίθετον πρόσημον.

Ὁμοίως ὁ ὅρος 3 τοῦ ἀριστεροῦ μέλους τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως μετεφέρθη εἰς τό δεξιόν τῆς τελικῆς μέ ἀλλαγήν τοῦ προσήμου του.

Ἡ μεταφορά ὅρων ἀπό τό ἕνα μέλος ἐξισώσεως εἰς τό ἄλλο μᾶς ἐπιτρέπει νά συγκεντρώσωμεν εἰς τό ἕνα μέλος ὅλους τούς ὅρους πού περιέχουν τόν ἄγνωστον καί εἰς τό ἄλλο ὅλους ἐκείνους πού δέν τόν περιέχουν. Αὐτό ἔγινε εἰς τό προηγούμενον παράδειγμα. Ἰδού ἕνα ἄλλο:

$6x-7+3x = 4x-2+x \iff 6x+3x-4x-x = -2 + 7.$

III) Σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα

$(\alpha\gamma = \beta\gamma \text{ καί } \gamma \neq 0) \iff \alpha = \beta$

τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (βλ. § 1.9 , ἰδιότης 7η), ἐάν πολλαπλασιάσωμεν τά δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως μέ τόν ἴδιον μή μηδενικόν ἀριθμόν , θά λάβωμεν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν. Π.χ.

$$\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}=6 \Longleftrightarrow 4\left(\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}\right) = 4\cdot 6 \Longleftrightarrow 3x+10=24.$$

Ἡ ἰδιότης αὐτή μᾶς ἐπιτρέπει μίαν ἐξίσωσιν μέ ρητούς κλασματικούς συντελεστάς νά τήν μετατρέψωμεν εἰς μίαν ἰσοδύναμον μέ ἀκεραίους συντελεστάς, πρᾶγμα πού εὐκολύνει συχνά τήν ἐπίλυσιν τῆς ἐξισώσεως.

5.5. Θά δείξωμεν τώρα πῶς ἠμποροῦμεν νά χρησιμοποιήσωμεν τά προηγούμενα, διά νά ἐπιλύσωμεν ἐξισώσεις πού εἶναι ἰσοδύναμοι μέ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $\alpha x+\beta=0$ καί πού δι' αὐτό λέγονται ἐπίσης πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις.

1ον Παράδειγμα. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $5(x-3)-2(2-x)=6-x$.
Ἐφαρμόζοντες τά προηγούμενα εὑρίσκομεν διαδοχικῶς:

$$\begin{aligned} 5(x-3)-2(2-x)=6-x &\Longleftrightarrow 5x-15-4+2x=6-x\\ &\Longleftrightarrow 5x+2x+x=6+15+4\\ &\Longleftrightarrow 8x=25\\ &\Longleftrightarrow x=\frac{25}{8}. \end{aligned}$$

Ὥστε ἡ θεωρουμένη ἐξίσωσις ἔχει ὡς μόνην λύσιν τό $\frac{25}{8}$.
Ἐπαλήθευσις :

$$5\left(\frac{25}{8}-3\right)-2\left(2-\frac{25}{8}\right)=5\cdot\frac{1}{8}-2\left(-\frac{9}{8}\right)=\frac{5}{8}+\frac{18}{8}=\frac{23}{8}=6-\frac{25}{8}.$$

2ον Παράδειγμα. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{2x-1}{3}+\frac{3x+1}{4}=x-\frac{1}{2}.$$

Ἐξαλείφομεν πρῶτον τούς παρονομαστάς πολλαπλασιάζοντες τά δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπί 12 , ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν 3, 4, 2 · κατόπιν ἐργαζόμεθα ὅπως καί εἰς τό προηγούμενον παράδειγμα:

$$\begin{aligned} \frac{2x-1}{3}+\frac{3x+1}{4}=x-\frac{1}{2} &\Longleftrightarrow 4(2x-1)+3(3x+1)=12\left(x-\frac{1}{2}\right)\\ &\Longleftrightarrow 8x-4+9x+3=12x-6 \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow 8x + 9x - 12x = -6 + 4 - 3$$

$$\Longleftrightarrow 5x = -5$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{-5}{5} = -1 .$$

Ὥστε λύσις τῆς ἐξισώσεως εἶναι ὁ ἀριθμός -1. Ἐπαλήθευσις:

$$\frac{-2-1}{3} + \frac{-3+1}{4} = \frac{-3}{3} + \frac{-2}{4} = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} = -1 - \frac{1}{2} .$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ἐπιλύσατε γραφικῶς τάς τρεῖς ἐξισώσεις
$-2x + 4 = 0$, $3x + 9 = 0$, $4x + 10 = 0$.

2) Νά ἐπιλυθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις: $\boxed{4}$

$11(x-3)+4(x-2) = 7$, $25(4x-1) + 2x = 5x - 8$,

$14(2x-1) - 17(2x-9) = 1-5x$, $8-[4x-(5x+15)] = x-(7-x)$,

$\frac{x}{2} - \frac{x}{5} = \frac{x}{10} + 2$, $\frac{3-x}{12} - \frac{x}{9} = 6 - x$,

$\frac{2x-5}{9} - \frac{2x-7}{12} = 1$, $\frac{1-x}{28} - \frac{x+15}{7} - 4 = 0$,

$\frac{5x-1}{14} - \frac{3x+2}{21} = \frac{3x-4}{28}$, $\frac{5(x+3)}{14} - \frac{4(x-1)}{2} + \frac{6(x-1)}{14} = 0$,

$\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = \frac{x}{12} + 1$, $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = x - \frac{x}{6}$.

§ 6. Προβλήματα πού ὁδηγοῦν εἰς πρωτοβαθμίους ἐξισώσεις.

6.1. Ἐξίσωσις προβλήματος. Ἡ ἐπίλυσις προβλημάτων διευκολύνεται πολύ μέ τήν χρησιμοποίησιν ἐξισώσεων. Εἰς ἕνα ἁπλοῦν πρόβλημα δίδονται μερικοί ἀριθμοί (τά δεδομένα τοῦ προβλήματος) καί ζητεῖται ἕνας ἀριθμός (ὁ ἄγνωστος τοῦ προβλήματος) ὁ ὁποῖος συνδέεται μέ τούς δεδομένους ἀριθμούς μέσω σχέσεων τάς ὁποίας μᾶς ὑποδεικνύει ἡ ἐκφώνησις τοῦ προβλήματος. Ἡ μαθηματική ἔκφρασις τῶν σχέσεων αὐτῶν ὁδηγεῖ εἰς μίαν ἐξίσωσιν διά τόν ἄγνωστον, τήν ὁποίαν ἐπιλύομεν καί ἔτσι εὑρίσκομεν τήν λύσιν τοῦ προβλήματος. Αἱ γενικαί αὐταί παρατηρήσεις θά ἀποσαφηνισθοῦν εἰς τά ἀκόλουθα παραδείγματα.

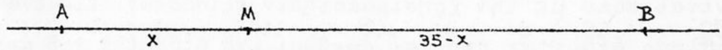
6.2. Πρόβλημα 1ον. Κατά τάς ἐξετάσεις τοῦ Ἰουνίου προήχθησαν ἀπό μίαν τάξιν τά 5/8 τῶν μαθητῶν, παρεπέμφθησαν εἰς ἀνεξέτασιν τόν Σεπτέμβριον τό $\frac{1}{4}$ τῶν μαθητῶν καί ἀπερρίφθησαν 5 μαθηταί. Πόσους μαθητάς εἶχε ἡ τάξις ; Πόσοι προήχθησαν καί πόσοι παρεπέμφθησαν εἰς ἀνεξέτασιν ;

<u>Ἐπίλυσις.</u> Ἄν ὀνομάσωμεν x τόν ἀριθμόν τῶν μαθητῶν τῆς τάξεως, ὁ ἀριθμός τῶν προαγομένων θά εἶναι τότε $\frac{5x}{8}$ καί ὁ ἀριθμός τῶν ἐπανεξεταζομένων $\frac{x}{4}$. Ἐπειδή τώρα οἱ προαγόμενοι μαζί μέ τούς ἐπανεξεταζομένους καί τούς ἀπορριπτομένους ἀποτελοῦν τό σύνολον τῶν μαθητῶν τῆς τάξεως, θά ἔχωμεν τήν ἐξίσωσιν

$$\frac{5x}{8} + \frac{x}{4} + 5 = x .$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτή ἔχει ὡς λύσιν τόν ἀριθμόν 40 ὁ ὁποῖος εἶναι ἀκέραιος θετικός, ὅπως ἔπρεπε νά εἶναι καί ἐπομένως γίνεται δεκτός ὡς λύσις τοῦ προβλήματος.
Κατόπιν αὐτοῦ ὁ ἀριθμός τῶν προαγομένων εἶναι $\frac{5 \cdot 40}{8} = 25$ καί ὁ ἀριθμός τῶν ἐπανεξεταζομένων $\frac{40}{4} = 10$.

<u>Πρόβλημα 2ον.</u> Μεταξύ δύο σημείων Α καί Β, πού ἀπέχουν τό ἕνα ἀπό τό ἄλλο 35 cm , νά εὑρεθῇ ἐπάνω εἰς τήν εὐθεῖαν ΑΒ ἕνα σημεῖον Μ , ὥστε τό τμῆμα ΑΜ νά εἶναι ἴσον πρός τά $\frac{2}{3}$ τοῦ τμήματος ΜΒ :



<u>Ἐπίλυσις.</u> Ἄς παραστήσωμεν μέ x cm τό μῆκος τοῦ τμήματος ΑΜ . Τότε τό τμῆμα ΜΒ θά ἔχῃ μῆκος (35-x) cm. Σύμφωνα μέ τήν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος τό τμῆμα ΑΜ ἰσοῦται μέ τά 2/3 τοῦ τμήματος ΜΒ· ἄρα θά ἔχωμεν τήν ἐξίσωσιν

$$x = \frac{2}{3}(35-x) .$$

Ἡ λύσις της εἶναι x = 14 cm , δηλαδή ἕνας θετικός ἀριθμός<35, ὅπως ἔπρεπε νά εἶναι, καί ἐπομένως γίνεται δεκτή ὡς λύσις τοῦ προβλήματος.

<u>Πρόβλημα 3ον.</u> Ἀπό τά $\frac{5}{9}$ ἑνός σχετικοῦ ἀριθμοῦ ἀφαιροῦ-

μεν τά $\frac{3}{4}$ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ καί ἀπομένει τό $\frac{1}{2}$ τοῦ ἀριθμοῦ ηὐξημένον κατά 11 μονάδας. Νά εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός.

<u>Ἐπίλυσις.</u> Ἄς ὀνομάσωμεν x τόν ζητούμενον ἀριθμόν. Σύμφωνα μέ τήν ἐκφώνησιν, πρέπει ἀπό τά $\frac{5x}{9}$ νά ἀφαιρέσωμεν τά $\frac{3x}{4}$. Τό ὑπόλοιπον $\frac{5x}{9} - \frac{3x}{4}$ θά ἰσοῦται μέ τό ἥμισυ $\frac{x}{2}$ τοῦ ἀριθμοῦ ηὐξημένον κατά 11, ἄρα τό πρόβλημα ὁδηγεῖ εἰς τήν ἀκόλουθον ἐξίσωσιν:

$$\frac{5x}{9} - \frac{3x}{4} = \frac{x}{2} + 11.$$

Τήν ἐπιλύομεν καί εὑρίσκομεν ὡς λύσιν

$$x = -\frac{396}{25} = -15\,\frac{21}{25}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ἀπό ἕνα φορτίον πορτοκάλια ἐπωλήθησαν τά μισά, ἐσάπισαν τό $\frac{1}{10}$ ὁλοκλήρου τοῦ φορτίου καί ἀπέμειναν 200 Πόσα πορτοκάλια εἶχε ὁλόκληρον τό φορτίον ;

2) Ποίαν ὥραν ἔχομεν, ὅταν ἡ χρονική διάρκεια πού ἔχει περάσει ἀπό τό μεσονύκτιον εἶναι ἴση μέ τά 5/3 τῆς χρονικῆς διαρκείας πού ἀπαιτεῖται διά νά συμπληρωθῇ τό εἰκοσιτετράωρον ;

3) Μοῦ λείπουν 3 δρχ διά νά ἀγοράσω ἕνα χαρτοφύλακα, ἐάν ὅμως μοῦ κάμουν ἔκπτωσιν τό 1/3 τῆς ἀξίας του, μοῦ περισσεύουν 16 δρχ. Νά εὑρεθῇ ἡ ἀξία τοῦ χαρτοφύλακος.

4) Ποῖος ἀριθμός ὑπερβαίνει τά τρία τέταρτά του κατά 144;

5) Ποίου ἀριθμοῦ τό $\frac{1}{3}$ καί τό $\frac{1}{4}$ διαφέρουν κατά 6 μονάδας ;

6) Ἡ διαφορά δύο σχετικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι 20, ἐνῶ τό 1/3 τοῦ μεγαλυτέρου εἶναι ἴσον μέ τόν ἀντίθετον τοῦ μικροτέρου. Νά εὑρεθοῦν οἱ δύο σχετικοί ἀριθμοί.

7) Ἕνας κτηνοτρόφος ἠγόρασε 24 πρόβατα καί ἄλλα τόσα γίδια, ἐπλήρωσε δέ συνολικῶς 11250 δρχ. Ἡ τιμή κάθε προβάτου ἦτο μεγαλυτέρα ἀπό τήν τιμήν κάθε γιδιοῦ κατά 80 δρχ. Νά εὑρεθῇ ἡ τιμή ἑκάστου ζώου.

8) Ἕνας πατέρας ἔχει πενταπλασίαν ἡλικίαν ἀπό τόν υἱόν του καί μετά 6 ἔτη θά ἔχῃ μόνον τριπλασίαν. Ποία ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ καί ποία ἡ ἡλικία τοῦ πατέρα ;

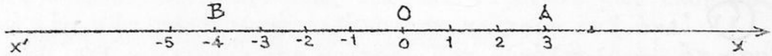
9) Ἕνας πατέρας ἔχει τριπλασίαν ἡλικίαν ἀπό τόν υἱόν του. Μετά πόσα ἔτη ἤ πρό πόσων ἐτῶν ἡ ἡλικία τοῦ πατέρα θά εἶναι ἤ ἦτο τετραπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ ;

10) Δύο σχετικοί ἀριθμοί ἔχουν διαφοράν -27. Τό $\frac{1}{4}$ τοῦ μεγαλυτέρου καί τό $\frac{1}{3}$ τοῦ μικροτέρου εἶναι ἀριθμοί ἀντίθετοι. Νά εὑρεθοῦν οἱ δύο σχετικοί ἀριθμοί.

11) Ἕνα δοχεῖον γεμᾶτο νερό ζυγίζει 12 kg. Ἐάν ἀδειάσωμεν τά 3/4 τοῦ περιεχομένου του, θά ζυγίζη μόνον 5 kg. Νά εὑρεθῆ τό βάρος τοῦ δοχείου κενοῦ.

12) Ὁ μεγαλύτερος ἀπό δύο σχετικούς ἀριθμούς ὑπερβαίνει τόν μικρότερον κατά 36 , καί τό 1/8 τοῦ μικροτέρου εἶναι ἴσον μέ τό ἥμισυ τοῦ μεγαλυτέρου. Νά εὑρεθοῦν οἱ δύο ἀριθμοί.

13) Ἐπί ἑνός ἄξονος $x'x$ εὑρίσκονται δύο σημεῖα Α καί Β μέ ἀντιστοίχους τετμημένας 3 καί -4 :



Ποία εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ σημείου Κ τοῦ ἄξονος διά τό ὁποῖον ἰσχύει ἡ σχέσις:
σχετικόν μέτρον τοῦ $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}$ τοῦ σχετικοῦ μέτρου τοῦ $\overrightarrow{KB}$;
Ὁμοίως, ποία εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ σημείου Μ τοῦ ἄξονος διά τό ὁποῖον ἔχομεν:
σχετικόν μέτρον $\overrightarrow{AM} = -\frac{5}{2}$ τοῦ σχετικοῦ μέτρου τοῦ $\overrightarrow{MB}$;
(βλ. Βιβλ. Ι , σ. 67-68 Γ).

§ 7. Ἀνισώσεις τῆς μορφῆς $\alpha x + \beta > 0$, $(\alpha \in P,\ \beta \in P)$, καί γεωμετρική παράστασις τῶν λύσεών των.

7.1. Ἔστω ὅτι μᾶς δίδεται ἡ σχέσις $3x + 5 > 0$ καί ὅτι ζητοῦνται αἱ ρηταί τιμαί τοῦ γράμματος x διά τάς ὁποίας ἡ σχέσις ἀληθεύει. Λέγομεν τότε ὅτι ἔχομεν νά ἐπιλύσωμεν μίαν πρωτοβάθμιον ἀνισότητα μέ ἄγνωστον τόν x ἤ συντομώτερα, μίαν πρωτοβάθμιον ἀνίσωσιν. Αἱ τιμαί τοῦ x διά τάς ὁποίας ἡ σχέσις ἀληθεύει λέγονται λύσεις τῆς ἀνισώσεως.
Π.χ. ὁ ἀριθμός $x = -1$ εἶναι λύσις τῆς $3x + 5 > 0$, διότι $3\cdot(-1) + 5 = -3 + 5 = 2 > 0$.
Δύο ἀνισώσεις μέ ἕνα ἄγνωστον λέγονται ἰσοδύναμοι, ὅταν ἔχουν

τάς αὐτάς λύσεις. Ἀρκεῖ τότε νά ἐπιλύσωμεν τήν μίαν ἀπό αὐτάς , διά νά ἔχωμεν τάς λύσεις καί τῆς ἄλλης.

7.2. Ἐπίλυσις τῆς $3x + 5 > 0$. Εἰς τήν § 3.2 , ἰδιότης 1), ἐμάθαμεν τό ἑξῆς: "Ἄν εἰς τά δύο μέλη ἀνισότητος προσθέσωμεν τόν αὐτόν σχετικόν ἀριθμόν, θά προκύψη ὁμόστροφος ἀνισότης˙ ἄρα

$$3x + 5 > 0 \Longrightarrow 3x + 5 - 5 > 0 - 5 \quad \text{ἤτοι} \quad 3x > -5 .$$

Ἀντιστρόφως, ἀπό τήν ἀνισότητα $3x > -5$ ἕπεται ἡ

$$3x + 5 > -5 + 5 \quad \text{ἤ} \quad \text{ἡ} \; 3x + 5 > 0.$$

Ὥστε ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία

$$3x + 5 > 0 \Longleftrightarrow 3x > -5. \tag{1}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ὅρος $+5$ τοῦ ἀριστεροῦ μέλους τῆς πρώτης ἀνισότητος μετεφέρθη μέ ἀντίθετον πρόσημον εἰς τό δεξιόν μέλος τῆς δευτέρας ἀνισότητος.

Γνωρίζομεν τώρα τό ἑξῆς (§ 3.2, ἰδιότης 3)) : ἄν πολλαπλασιάσωμεν τά δύο μέλη ἀνισότητος μέ τόν αὐτόν θετικόν ἀριθμόν , θά λάβωμεν ὁμόστροφον ἀνισότητα˙ ἄρα

$$3x > -5 \Longrightarrow \frac{1}{3} \cdot 3x > \frac{1}{3} \cdot (-5) \quad \text{ἤτοι} \quad x > -\frac{5}{3} .$$

Ἀντιστρόφως, ἀπό τήν ἀνισότητα $x > -\frac{5}{3}$ ἕπεται ἡ

$$3 \cdot x > 3 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \quad \text{ἤτοι ἡ} \; 3x > -5 .$$

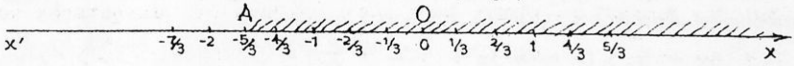
Ἔχομεν λοιπόν καί τήν ἰσοδυναμίαν

$$3x > -5 \Longleftrightarrow x > -\frac{5}{3} . \tag{2}$$

Ἀπό τάς δύο ἰσοδυναμίας (1) καί (2) συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ἀνίσωσις $3x + 5 > 0$ εἶναι ἰσοδύναμος μέ τήν $x > -\frac{5}{3}$˙ αὐτή ὅμως ἔχει προφανῶς ὡς λύσεις ὅλους τούς ρητούς σχετικούς ἀριθμούς πού εἶναι μεγαλύτεροι ἀπό τόν $-\frac{5}{3}$. Ὥστε ἡ ἀνίσωσις $3x + 5 > 0$ ἔχει ἀπειραρίθμους λύσεις : ὅλους τούς ρητούς σχετικούς ἀριθμούς τούς μεγαλυτέρους ἀπό τόν $-\frac{5}{3}$. Μέ τόν συμβολισμόν τῶν συνόλων γράφομεν:

$$\{x \,/\, 3x + 5 > 0\} = \left\{x \,/\, x > -\frac{5}{3}\right\} \quad , \quad (x \in P).$$

Αἱ λύσεις αὐταί ἠμποροῦν νά παρασταθοῦν γεωμετρικῶς ἀπό τά σημεῖα τοῦ ἄξονος x΄x τά ὁποῖα ἔχουν ρητήν τετμημένην καί εὑρίσκονται δεξιά τοῦ σημείου $A\left(-\frac{5}{3}\right)$:



<u>Παρατήρησις.</u> Μέ ὅμοιον τρόπον ἐπιλύεται κάθε ἀνίσωσις $\alpha x + \beta > 0$, ὅταν ὁ συντελεστής α εἶναι <u>θετικός</u> ἀριθμός˙ λύσεις εἶναι οἱ ρητοί σχετικοί ἀριθμοί οἱ μεγαλύτεροι τοῦ ἀριθμοῦ $-\frac{\beta}{\alpha}$, δηλ. $x > -\frac{\beta}{\alpha}$.

<u>7.3.</u> <u>Ἐπίλυσις τῆς ἀνισώσεως $-4x + 8 > 0$.</u> Ἔχομεν πρῶτον τήν ἰσοδυναμίαν

$$-4x + 8 > 0 \iff -4x + 8 - 8 > 0 - 8 \quad \text{ἤτοι} \quad -4x > -8 .$$

Ἐφαρμόζομεν τώρα τήν ἰδιότητα 4) τοῦ § 3.2 : ἄν πολλαπλασιάσωμεν τά δύο μέλη ἀνισότητος μέ τόν ἴδιον ἀρνητικόν ἀριθμόν, θά προκύψη ἀνισότης ἑτερόστροφος˙ ἄρα

$$-4x > -8 \Rightarrow -\frac{1}{4}\cdot(-4x) < -\frac{1}{4}\cdot(-8) \qquad \text{ἤτοι} \quad x < 2.$$

Ἀντιστρόφως ἀπό τήν ἀνισότητα $x < 2$ ἕπεται ἡ

$$-4\cdot x > -4\cdot 2 \qquad \text{ἤτοι ἡ} \; -4x > -8 .$$

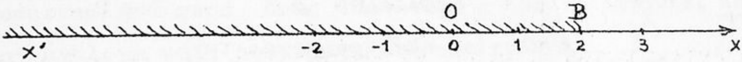
Ὥστε ἔχομεν τάς ἰσοδυναμίας

$$-4x + 8 > 0 \iff -4x > -8 \iff x < 2.$$

Ἡ τελευταία ἀνίσωσις $x < 2$ ἔχει ὅμως προφανῶς ὡς λύσεις τούς ρητούς σχετικούς ἀριθμούς τούς μικροτέρους ἀπό τόν 2. Ἑπομένως αἱ ζητούμεναι λύσεις τῆς $-4x + 8 > 0$ εἶναι ὅλοι οἱ ρητοί σχετικοί ἀριθμοί πού εἶναι μικρότεροι ἀπό τόν 2 :

$$\{x \,/\, -4x + 8 > 0\} = \{x \,/\, x < 2\} .$$

Αἱ λύσεις αὐταί παριστάνονται γεωμετρικῶς ἀπό τά σημεῖα τοῦ ἄξονος x΄x τά ὁποῖα ἔχουν ὡς τετμημένην ρητόν ἀριθμόν καί εὑρίσκονται ἀριστερά τοῦ σημείου Β(2):



Παρατήρησις. Μέ ὅμοιον τρόπον ἐπιλύεται κάθε ἀνίσωσις $\alpha x + \beta > 0$, ὅταν ὁ συντελεστής α εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός· λύσεις εἶναι οἱ ῥητοί σχετικοί ἀριθμοί οἱ μικρότεροι τοῦ ἀριθμοῦ $-\frac{\beta}{\alpha}$, δηλαδή $x < -\frac{\beta}{\alpha}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά ἐπιλυθοῦν αἱ ἀνισώσεις:

$2x - 7 > 0$, $\frac{1}{2}x + 4 > 0$, $5x + \frac{5}{3} > 0$,

$-4x + 3 > 0$, $-\frac{1}{3}x - 9 > 0$, $-6x + \frac{8}{5} > 0$

καί νά παρασταθοῦν γεωμετρικῶς αἱ λύσεις των.

2) Πολλαπλασιάζοντες τά δύο μέλη τῶν ἀνισώσεων

$6x - 5 < 0$, $\frac{3}{2}x - 7 < 0$, $-\frac{1}{2}x - 3 < 0$

ἐπί -1 νά τάς μετατρέψετε εἰς ἀνισώσεις τῆς μορφῆς $\alpha x + \beta > 0$ καί κατόπιν νά τάς ἐπιλύσετε.

3) Νά προσδιορίσετε τάς κοινάς λύσεις τῶν δύο ἀνισώσεων $5x + 15 > 0$ καί $-7x + 14 > 0$ καί νά τάς παραστήσετε γεωμετρικῶς ἐπί τοῦ ἄξονος $x'x$.

4) Ποῖαι εἶναι αἱ λύσεις τῆς ἀνισώσεως $0 \cdot x + \frac{3}{2} > 0$; Ἔχει ἡ ἀνίσωσις $0x - 6 > 0$ λύσεις;

5) Ποίαν σχέσιν ἔχουν αἱ λύσεις τῆς ἀνισώσεως $3x + 5 > 0$ μέ τήν λύσιν τῆς ἐξισώσεως $3x + 5 = 0$; Ὁμοίως ποίαν σχέσιν ἔχουν αἱ λύσεις τῆς ἀνισώσεως $-2x + 6 > 0$ μέ τήν λύσιν τῆς ἐξισώσεως $-2x + 6 = 0$;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄

᾿Αναλογίαι καί ἐφαρμογαί των

§ 1. Κατ᾿ εὐθεῖαν ἀνάλογα μεγέθη ἤ ποσά.

Γραφική παράστασις τῆς σχέσεως μεταξύ δύο ἀναλόγων ποσῶν.

1.1. ᾿Από τήν καθημερινήν πεῖραν μας γνωρίζομεν ζεύγη συμμεταβλητῶν ποσῶν, δηλαδή ποσῶν πού ἀλληλοεξαρτῶνται , κατά τρόπον ὥστε κάθε μεταβολή τῆς τιμῆς τοῦ ἑνός νά ἔχη ὡς συνέπειαν ἀντίστοιχον μεταβολήν τῆς τιμῆς τοῦ ἄλλου. Ἄν παραστήσωμεν μέ x καί y τά δύο συμμεταβλητά ποσά, ἡ ἀλληλεξάρτησίς των θά ἐκφρασθῆ μαθηματικῶς μέ μίαν συνάρτησιν

$$\sigma : x \xrightarrow{\sigma} \sigma(x) = y$$

πού ἀπεικονίζει τό πεδίον τιμῶν τῆς μεταβλητῆς x ἐπί τοῦ πεδίου τιμῶν τῆς μεταβλητῆς y. Εἰς τό παρόν Κεφάλαιον θά μελετήσωμεν τάς περιπτώσεις εἰς τάς ὁποίας ἡ συνάρτησις αὐτή ἔχει μίαν ἀπό τάς ἀκολούθους τρεῖς ἁπλᾶς μορφάς:

$$y = \alpha x \quad , \quad y = \alpha x + \beta \quad , \quad y = \frac{\alpha}{x} \quad ,$$

ὅπου α καί β ρητοί ἀριθμοί $\neq 0$.

1.2. Ποσά κατ᾿ εὐθεῖαν ἀνάλογα.

1ον Παράδειγμα. Ἕνα κιλό ρύζι κοστίζει 12,5 δραχμάς. ᾿Εάν παραστήσωμεν μέ y δραχμάς τήν τιμήν x κιλῶν ἀπό αὐτό τό ρύζι , τότε , ὅπως εἶναι γνωστόν, θά ἔχωμεν μεταξύ x καί y τήν σχέσιν:

$$y = 12{,}5\ x\ .$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐάν ἡ ποσότης x τοῦ ρυζιοῦ πολλαπλασιασθῆ μέ ἕνα ὁποιονδήποτε ρητόν (θετικόν) ἀριθμόν ρ ($\rho = 2, 3, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$), τότε καί ἡ ἀντίστοιχος χρηματική τιμή y τοῦ ρυζιοῦ πολλαπλασιάζεται μέ τόν ἴδιον ἀριθμόν ρ :

$$y\cdot\varrho = 12{,}5\cdot x\cdot\varrho.$$

Δύο συμμεταβλητά ποσά ὅπως τἀνωτέρω x καί y λέγονται κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα καί, συντόμως, ἀνάλογα.

Γενικῶς, ἡ ποσότης x ἑνός ἐμπορεύματος καί ἡ ἀντίστοιχος χρηματική του ἀξία y εἶναι ποσά ἀνάλογα καί συνδέονται διά τῆς σχέσεως

$$y = \alpha x \quad ,$$

ὅπου α εἶναι ἡ λεγομένη τιμή μονάδος τοῦ ἐμπορεύματος.

2ον Παράδειγμα. Ἕνα κεφάλαιον k δραχμῶν τοκίζεται ἐπί 2 ἔτη μέ ἐπιτόκιον 5 % . Πόσον τόκον τ θά ἀποφέρῃ ;

Ὅπως γνωρίζομεν ἤδη ἀπό τό Δημοτικόν σχολεῖον, μεταξύ τῶν συμμεταβλητῶν ποσῶν k καί τ ἔχομεν τήν σχέσιν

$$\tau = \frac{2\cdot 5\cdot k}{100} = \frac{1}{10}\,k$$

Καί ἐδῶ παρατηροῦμεν ὅτι ὁ πολλαπλασιασμός τοῦ κεφαλαίου k μέ ἕνα ὁποιονδήποτε ρητόν (θετικόν) ἀριθμόν ἔχει ὡς συνέπειαν πολλαπλασιασμόν τοῦ τόκου τ μέ τόν ἴδιον ἀριθμόν ϱ :

$$\tau\cdot\varrho = \frac{1}{10}\cdot k\cdot\varrho\ .$$

Τά ποσά k καί τ εἶναι λοιπόν κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα.

3ον Παράδειγμα. Ἕνα σημεῖον Μ κινεῖται ἰσοταχῶς ἐπάνω εἰς ἕνα ἄξονα x΄x , δηλαδή εἰς ἴσα χρονικά διαστήματα διανύει ἴσα διανύσματα.

Ὑποθέτομεν ἀκόμη τά ἑξῆς: τό σημεῖον Μ κινεῖται κατά τήν ἀρνητικήν φοράν τοῦ ἄξονος , διανύει 5 m εἰς 1 min καί εὑρίσκεται εἰς τήν ἀρχήν Ο τῶν τετμημένων κατά τήν χρονικήν στιγμήν t = 0 min, δηλαδή κατά τήν ἀρχήν τῶν χρόνων, ὅπως συνηθίζομεν νά λέγωμεν. Ζητεῖται ἡ τετμημένη x τοῦ Μ t min μετά τήν ἀρχήν τῶν χρόνων t = 0 ἤ t min πρό τῆς χρονικῆς αὐτῆς στιγμῆς.

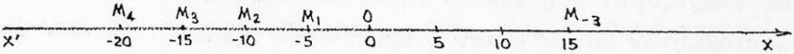
Ὡς μονάδα μήκους ἐπί τοῦ ἄξονος x΄x λαμβάνομεν τό 1 m μέ ἄλλους λόγους, ὡς διάνυσμα ἀναφορᾶς ἐπάνω εἰς τόν ἄξονα λαμβάνομεν ἕνα διάνυσμα μήκους 1 m. Τότε αἱ θέσεις M_1, M_2, M_3, M_4 τοῦ κινητοῦ M

1 min , 2 min , 3 min , 4 min

<u>μετά</u> τήν ἀρχήν τῶν χρόνων $t = 0$, θά ἔχουν προφανῶς ἀντιστοίχους τετμημένας :

$-5 \cdot 1 = -5$, $-5 \cdot 2 = -10$, $-5 \cdot 3 = -15$, $-5 \cdot 4 = -20$.

(Βλ. τό κατωτέρω σχῆμα εἰς τό ὁποῖον τά 5 m = 500 cm παρεστάθησαν μέ 1 cm , δηλαδή <u>ὑπό κλίμακα 1 πρός 500</u> , ὅπως λέγομεν).



Γενικῶς, ἡ τετμημένη x τοῦ σημείου M , t min μετά τήν ἀρχήν τῶν χρόνων $t = 0$, δίδεται ἀπό τήν σχέσιν

$$x = -5\ t\ .$$

Ἡ ἰδία σχέσις μᾶς δίδει τήν τετμημένην τοῦ κινητοῦ M καί εἰς τάς χρονικάς στιγμάς πού προηγοῦνται ἀπό τήν ἀρχήν τῶν χρονων $t = 0$, ἀρκεῖ ἡ μεταβλητή t νά λάβη ἀντιστοίχους ἀρνητικάς τιμάς. Π.χ. διά τήν χρονικήν στιγμήν : 3 min <u>πρό</u> τῆς ἀρχῆς τῶν χρόνων $t = 0$, θά δώσωμεν εἰς τήν μεταβλητήν t τήν τιμήν -3 καί θά λάβωμεν ὡς τετμημένην τῆς ἀντιστοίχου θέσεως M_{-3} τοῦ κινητοῦ M τόν ἀριθμόν

$$x = -5 \cdot (-3) = 15.$$

Αὐτό εἶναι καί ἀπ' εὐθείας φανερόν, ἐπειδή τό κινητον χρειάζεται 3 min διά νά διατρέξη τήν ἀπόστασιν τῶν 15 m ἡ ὁποία χωρίζει τό σημεῖον M_{-3} ἀπό τήν ἀρχήν 0 τῶν τετμημένων. Παρατηροῦμεν καί ἐδῶ ὅτι ὁ πολλαπλασιαμός τοῦ t μέ ἕνα ὁποιονδήποτε ρητόν σχετικόν ἀριθμόν ϱ ἔχει ὡς συνέπειαν τόν πολλαπλασιασμόν τοῦ x μέ τόν ἴδιον ἀριθμόν ϱ :

$$x \cdot \varrho = -5 \cdot t \cdot \varrho$$

Τά ποσά t καί x εἶναι λοιπόν κατ'εὐθεῖαν ἀνάλογα.

1.3. Γραφική παράστασις τῆς σχέσεως μεταξύ δύο κατ'εὐθεῖαν ἀναλόγων ποσῶν. Ὅπως φαίνεται ἀπό τά προηγούμενα παραδείγματα, ἡ σχέσις μεταξύ δύο κατ'εὐθεῖαν ἀναλόγων ποσῶν x καί y ἐκφράζεται μέ μίαν συνάρτησιν

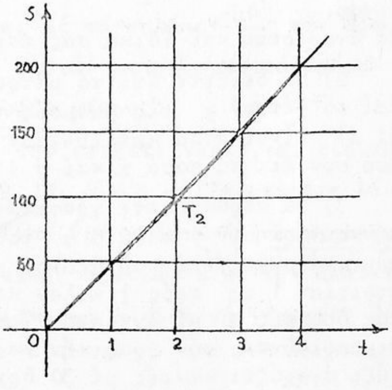
$$\sigma : x \xrightarrow{\sigma} \alpha x = y \quad ,$$

ὅπου α εἶναι ἕνας δεδομένος ρητός ἀριθμός $\neq 0$. Ἑπομένως ἡ γραφική παράστασις τῆς σχέσεως είς ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων συντεταγμένων (x,y) θά εἶναι, ὅπως γνωρίζομεν (Βιβλ. II, σ. 50-), μία εὐθεῖα πού περνᾶ ἀπό τήν ἀρχήν 0 τῶν συντεταγμένων. Διά νά τήν χαράξωμεν ἀρκεῖ νά προσδιορίσωμεν ἕνα ἀκόμη σημεῖον της ἐκτός ἀπό τό 0.

Παράδειγμα. Ἕνα τραῖνον ἔχει μέσην ταχύτητα 50 χιλιόμετρα ἀνά ὥραν (50 km/h). Τό διάστημα s km πού διατρέχει είς χρόνον t h (ὡρῶν) εἶναι, ὅπως εὔκολα προκύπτει, κατ'εὐθεῖαν ἀνάλογον πρός τόν χρόνον t καί δίδεται ἀπό τήν σχέσιν

$$s = 50 \cdot t \quad .$$

Ζητεῖται ἡ γραφική παράστασις τῆς σχέσεως. Παριστάνομεν ἐπί τοῦ ἄξονος τετμημένων Ot τάς ὥρας t μέ ἀντιστοιχίαν 1 cm πρός 1 h καί ἐπί τοῦ ἄξονος τεταγμένων Os τά διανυόμενα διαστήματα s μέ ἀντιστοιχίαν 1 cm πρός 50 km. Ἀπό τόν πίνακα ἀντιστοίχων τιμῶν



t	0	0,5	1	1,5	2	2,5 ...
s	0	25	50	75	100	125 ...

τῆς συναρτήσεως $s = 50\ t$ παίρνομεν τό ζεῦγος ($t = 2$, $s = 100$) καί σημειώνομεν ἐπάνω στό ἐπίπεδον τό σημεῖον T_2 μέ συντεταγμένας (2, 100). Κατόπιν χαράσσομεν τήν ἡμιευθεῖαν OT_2 πού ἔχει ἀρχήν τό σημεῖον O. Αὐτή ἡ ἡμιευθεῖα εἶναι ἡ ζητουμένη γραφική παράστασις.(βλ. προηγούμενο σχῆμα).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ἀπό τά κατωτέρω ζεύγη συμμεταβλητῶν ποσῶν νά εὕρετε ποῖα περιλαμβάνουν κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα ποσά καί ποῖα ὄχι, δικαιολογοῦντες τήν ἀπάντησίν σας :
α) Χρόνος καί ἀντίστοιχος ποσότης ὑφασματος πού ὑφαίνει μία μηχανή.
β) Ἀριθμός προβάτων καί ποσότης κτηνοτροφῶν διά τήν διατροφήν των κατά τόν χειμῶνα.
Ποσότης κτηνοτροφῶν καί διάρκεια τοῦ χειμῶνος εἰς ἡμέρας δι' ἕνα ὡρισμένον ποίμνιον.
γ) Χρονική διάρκεια (χρόνος) καί ἀντίστοιχος αὔξησις τοῦ ἀναστήματος (ἤ τοῦ βάρους) ἑνός παιδιοῦ.
δ) Τόξον περιφερείας καί χορδή τοῦ τόξου.
ε) Τόξον περιφερείας καί ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος γωνία
στ) Ποσότης ἀλεύρου καί ἀντίστοιχος ποσότης παραγομένου ἄρτου.
Νά ἀναφέρετε καί ἰδικά σας παραδείγματα.

2) Νά δείξετε ὅτι τό μέτρον x εἰς μοίρας μιᾶς γωνίας καί τό μέτρον y εἰς βαθμούς τῆς ἰδίας γωνίας (Βιβλ. I, σ. 91 A) εἶναι ποσά κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα. Ποία εἶναι ἡ σχέσις πού συνδέει τά ποσά x καί y ;

3) Νά παραστήσετε γραφικῶς ἐπί χιλιοστομετρικοῦ χάρτου τήν συνάρτησιν $y = 12{,}5\ x$ τοῦ 1ου Παραδείγματος (ἐδ. § 1.2), παριστάνοντες ἐπί τοῦ ἄξονος τετμημένων τά κιλά x μέ ἀντιστοιχίαν 1 cm πρός 1 κιλόν καί ἐπί τοῦ ἄξονος τεταγμένων τάς δραχμάς y μέ ἀντιστοιχίαν 1 cm πρός 10 δραχμάς. Χρησιμοποιοῦντες τήν γραφικήν παράστασιν νά εὕρετε πόσα κιλά ρύζι ἀγοράζει κανείς μέ 30 δρχ καί πόσα μέ 45 δρχ.

4) Νά παραστήσετε γραφικῶς ἐπί χιλιοστομετρικοῦ χάρτου

τήν συνάρτησιν $x = -5\,t$ τοῦ 3ου Παραδείγματος (ἐδ. § 1.2) λαμβάνοντες ἐπί τοῦ ἄξονος τετμημένων Ot τούς χρόνους t min μέ ἀντιστοιχίαν 1 cm πρός 10 min καί ἐπί τοῦ ἄξονος τεταγμένων Ox τάς τετμημένας x τοῦ κινητοῦ M μέ ἀντιστοιχίαν 1 cm πρός 50.

5) Νά παραστήσετε γραφικῶς τήν συνάρτησιν πού προέρχεται ἀπό τό παράδειγμα στ) τῆς Ἀσκήσεως 1), ἐάν εἶναι γνωστόν ὅτι μέ 10 kg ἀλεύρι παρασκευάζονται 14 kg ἄρτου (τά kg ἀλεύρι ἐπί τοῦ ἄξονος τετμημένων, τά kg ἄρτου ἐπί τοῦ ἄξονος τεταγμένων). Χρησιμοποιοῦντες τήν γραφικήν αὐτήν παράστασιν νά εὕρετε πόσα κιλά ἀλεύρι χρειάζονται διά 40 κιλά ἄρτου καί πόσα διά 60 κιλά ἄρτου.

6) Ἐάν εἰς τό παράδειγμα β) τῆς Ἀσκήσεως 1) διά κάθε πρόβατον ἀπαιτοῦνται 80 kg κτηνοτροφαί πρός διατροφήν του κατά τόν χειμῶνα, ποίαν μορφήν θά ἔχη ἡ γραφική παράστασις τῆς συναρτήσεως πού προκύπτει ἀπό τό παράδειγμα: θά εἶναι συνεχής εὐθεῖα ἤ μεμονωμένα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ἀνήκοντα εἰς μίαν εὐθεῖαν;

§ 2. Ἀναλογίαι καί κύριαι ἰδιότητές των.

2.1. Εἰς τό Βιβλ. Ι , σ. 45 Γ ἐμάθαμεν τό ἑξῆς: λόγος ἑνός εὐθυγράμμου τμήματος B πρός ἕνα (μή μηδενικόν) τμῆμα A εἶναι ὁ ἀριθμός λ μέ τόν ὁποῖον πρέπει νά πολλαπλασιασθῆ τό τμῆμα A διά νά προκύψη τό τμῆμα B ὅπου $B = \lambda A$. Τόν λόγον αὐτόν τόν ἐσυμβολίσαμεν μέ τήν γραφήν $\frac{B}{A} = \lambda$ καί εἴδαμεν (Βιβλ. Ι, σ. 47 Γ) ὅτι ἰσοῦται μέ τό πηλίκον $\frac{\beta}{\alpha}$ τῶν ἀριθμῶν β καί α πού προκύπτουν , ὅταν μετρήσωμεν τά τμήματα B καί A μέ τήν αὐτήν μονάδα μήκους.

Τήν ἀνωτέρω ἔννοιαν τοῦ λόγου τήν ἐπεξετείναμεν καί εἰς τά συγγραμμικά διανύσματα (Βιβλ. ΙΙ, σ. 8). Εἴπαμεν ὅτι λόγος ἑνός διανύσματος $\overline{B}$ πρός ἕνα (μή μηδενικόν) συγγραμμικόν διάνυσμα $\overrightarrow{A}$ εἶναι ὁ σχετικός ἀριθμός ϱ μέ τόν ὁποῖον πρέπει νά πολλαπλασιασθῆ τό διάνυσμα $\overline{A}$ διά νά προκύψη τό $\overline{B}$ ὅπου $\overline{B} = \varrho\overline{A}$.

Καί ἐδῶ ἰσχύει ἡ ἰδιότης : ὁ λόγος

$$\frac{\overline{B}}{\overline{A}} = \varrho$$

ἰσοῦται μέ τό πηλίκον $\frac{\beta}{\alpha}$ τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν β καί α πού προκύπτουν, ὅταν μετρήσωμεν τά διανύσματα $\vec{B}$ καί $\vec{A}$ μέ τό αὐτό <u>συγγραμμικόν</u> (μή μηδενικόν) διάνυσμα ἀναφορᾶς $\vec{M}$.

Ἀπό τά ἀνωτέρω ὁδηγούμεθα τώρα εἰς τόν ἀκόλουθον ὁρισμόν:

Λόγος ἑνός ρητοῦ σχετικοῦ ἀριθμοῦ β πρός ἕνα (μή μηδενικόν) ρητόν σχετικόν ἀριθμόν α καλεῖται τό πηλίκον

$$\beta : \alpha = \frac{\beta}{\alpha} .$$

Π.χ. εἰς τό 1ον Παράδειγμα τοῦ ἐδ. § 1.2 ὁ λόγος τῆς χρηματικῆς τιμῆς y δρχ πρός τό ἀντίστοιχον ποσόν x kg ρύζι εἶναι ἴσος μέ

$$\frac{y}{x} = 12,5 \cdot$$

Εἰς τό 2ον Παράδειγμα τοῦ ἰδίου ἐδαφίου ὁ λόγος τοῦ τόκου τ πρός τό ἀντίστοιχον κεφάλαιον k εἶναι ἴσος μέ

$$\frac{\tau}{k} = \frac{1}{10} .$$

Τέλος, εἰς τό 3ον Παράδειγμα ὁ λόγος τῆς τετμημένης x τοῦ κινητοῦ σημείου Μ (εἰς θέσιν διάφορον ἀπό τήν ἀρχήν Ο τῶν τετμημένων) πρός τόν ἀντίστοιχον χρόνον t εἶναι ἴσος μέ

$$\frac{x}{t} = -5.$$

<u>2.2.</u> <u>Ἀναλογίαι.</u> Ἄν εἰς τό 1ον Παράδειγμα δώσωμεν εἰς τό x τάς τιμάς

$$x_1 = 4,6 \text{ kg} \quad \text{καί} \quad x_2 = 7 \text{ kg} ,$$

θά λάβωμεν ἀντιστοίχους τιμάς τοῦ y τάς :

$y_1 = 12,5 \cdot 4,6 = 57,5$ δρχ καί $y_2 = 12,5 \cdot 7 = 87,5$ δρχ.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἀληθεύει ἡ ἰσότης

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} ,$$

διότι

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{57,5}{4,6} = 12,5 \quad \text{καί} \quad \frac{y_2}{x_2} = \frac{87,5}{7} = 12,5.$$

'Η ἰσότης δύο λόγων λέγεται ἀναλογία. Ὥστε ἡ ἰσότης

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \quad \text{ἤ} \quad y_1 : x_1 = y_2 : x_2$$

εἶναι μία ἀναλογία.

Ὁμοίως, ἄν εἰς τό 3ον Παράδειγμα δώσωμεν εἰς τό t δύο ὁποιασδήποτε τιμάς t_1 καί t_2 διαφόρους ἀπό τό 0, αἱ ἀντίστοιχοι τιμαί τοῦ x θά εἶναι

$$x_1 = -5t_1 \quad \text{καί} \quad x_2 = -5t_2 ,$$

θά ἰσχύῃ δέ ἡ ἀναλογία

$$\frac{x_1}{t_1} = \frac{x_2}{t_2} ,$$

διότι

$$\frac{x_1}{t_1} = \frac{-5t_1}{t_1} = -5 \quad \text{καί} \quad \frac{x_2}{t_2} = \frac{-5t_2}{t_2} = -5.$$

Μία ἀναλογία

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \quad \text{ἤ} \quad \alpha : \beta = \gamma : \delta \qquad (\beta \neq 0 \ , \ \delta \neq 0)$$

ἔχει τέσσαρας ὅρους, τούς ἀριθμούς α,β,γ,δ. Οἱ ὅροι α καί δ λέγονται ἄκροι, οἱ β καί γ μέσοι.

Οἱ ὅροι α καί γ λέγονται ἡγούμενοι ἤ ἀριθμηταί, οἱ β καί δ ἀντίστοιχοι ἑπόμενοι ἤ παρονομασταί.

Ὁ τέταρτος ὅρος δ λέγεται τέταρτος ἀνάλογος τῶν τριῶν ἄλλων. Ἄν οἱ δύο μέσοι εἶναι ἴσοι, ὅπως π.χ. εἰς τήν ἀναλογίαν $2 : 4 = 4 : 8$, τότε ὁ ὅρος 4 (καί γενικῶς ὁ ὅρος β εἰς τήν ἀναλογίαν $\alpha : \beta = \beta : \varepsilon$) λέγεται μέσος ἀνάλογος τῶν δύο ἄλλων ὅρων 2 καί 8 (α καί ε).

2.3. Ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν. I) Ἔστω ἡ ἀναλογία

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \ , \ (\beta \neq 0 \ , \ \delta \neq 0).$$

Τό γινόμενον βδ εἶναι ἀριθμός $\neq 0$. Ἑπομένως, σύμφωνα μέ τήν 7ην ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (βλ. σ. 95), θά ἔχωμεν τήν ἰσοδυναμίαν

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \frac{\alpha}{\beta}\cdot\beta\delta = \frac{\gamma}{\delta}\cdot\beta\delta$$

ἤτοι

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \alpha\delta = \beta\gamma \ .$$

Ὥστε, εἰς κάθε ἀναλογίαν τό γινόμενον τῶν δύο ἄκρων εἶναι ἴσον μέ τό γινόμενον τῶν δύο μέσων.

Ἀντιστρόφως, ἀπό μίαν ἰσότητα $\alpha\delta = \beta\gamma$ δύο γινομένων, ὅπου $\beta \neq 0$ καί $\delta \neq 0$, ἠμποροῦμεν νά συμπεράνωμεν τήν ἀναλογίαν

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \qquad \text{ἤ} \qquad \alpha : \beta = \gamma : \delta \ ,$$

εἰς τήν ὁποίαν ἄκροι ὅροι εἶναι οἱ παράγοντες τοῦ ἑνός γινομένου καί μέσοι, οἱ παράγοντες τοῦ ἄλλου γινομένου.

Π.χ. ἀπό τήν ἰσότητα $4\cdot 2{,}5 = 2\cdot 5$ ἕπεται ἡ ἀναλογία

$$\frac{4}{2} = \frac{5}{2{,}5}$$

καί ἀπό τήν $-3\cdot 15 = -2\cdot 22{,}5$ ἡ ἀναλογία

$$\frac{-3}{-2} = \frac{22{,}5}{15} \ .$$

II) Ἔστω ἡ ἀναλογία

(1) $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0)$.

Ἀπό αὐτήν ἕπονται αἱ ἀναλογίαι

(2) $\alpha : \gamma = \beta : \delta$ (ἐναλλαγή τῶν δύο μέσων)

(3) $\delta : \beta = \gamma : \alpha$ (ἐναλλαγή τῶν δύο ἄκρων)

(4) $\beta : \alpha = \delta : \gamma$ (ἐναλλαγή τῶν μέσων μέ τούς ἄκρους).

Πράγματι, καί αἱ τέσσαρες αὐταί ἀναλογίαι εἶναι ἰσοδύναμοι μέ τήν ἰσότητα $\alpha\delta = \beta\gamma$ ἡ ὁποία γράφεται καί ὡς ἑξῆς:

$$\alpha\delta = \gamma\beta \ , \quad \delta\alpha = \beta\gamma \ , \quad \beta\gamma = \alpha\delta \ .$$

Π.χ. ἀπό τήν ἀναλογίαν

$$4 : 3 = 10 : 7{,}5$$

ἠμποροῦμεν νά συμπεράνωμεν τάς ἀναλογίας :

$4 : 10 = 3 : 7{,}5$, $7{,}5 : 3 = 10 : 4$, $3 : 4 = 7{,}5 : 10$.

III) Ἔστω ἡ ἀναλογία

$$(5) \qquad \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2},$$

ὅπου οἱ παρονομασταί β_1 καί β_2 εἶναι θετικοί ἀριθμοί. Αὐτό ἠμποροῦμεν πάντοτε νά τό προϋποθέσωμεν, διότι, ἄν ἕνας παρονομαστής εἶναι ἀρνητικός, τότε τόν μετατρέπομεν εἰς θετικόν ἀλλάζοντες τό πρόσημον καί αὐτοῦ καί τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμητοῦ.

Ἀπό τήν ἀναλογίαν αὐτήν ἕπεται ἡ ἀναλογία

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\beta_1+\beta_2} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \quad \text{ἐπομένως καί ἡ} \quad \frac{\alpha_1+\alpha_2}{\beta_1+\beta_2} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}.$$

Πράγματι, ἡ ἀναλογία (5) ἰσοδυναμεῖ μέ τήν ἰσότητα

$$\alpha_2\beta_1 = \beta_2\alpha_1,$$

καί αὐτή μέ τήν ἰσότητα

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_1 = \beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_1,$$

δηλαδή τήν

$$(\alpha_1+\alpha_2)\beta_1 = (\beta_1+\beta_2)\alpha_1.$$

Ἡ τελευταία ὅμως ἰσότης, σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα I) τῶν ἀναλογιῶν, ἔχει ὡς συνέπειαν τήν ἀναλογίαν:

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\beta_1+\beta_2} = \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Π.χ. ἀπό τήν ἀναλογίαν $7 : 15 = 14 : 30$ ἕπεται ἡ ἀναλογία $21 : 45 = 7 : 15$.

Ἡ ἰδιότης αὐτή ἐπεκτείνεται εὔκολα εἰς μίαν σειράν ἀπό τρεῖς ἤ περισσοτέρους ἴσους λόγους. Π.χ. ἀπό τήν σειράν τῶν ἴσων λόγων

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{21}{28}$$

συμπεραίνομεν τήν ἰσότητα

$$\frac{3+6+21}{4+8+28} = \frac{3}{4}, \quad \text{δηλαδή τήν} \quad \frac{30}{40} = \frac{3}{4}.$$

Πράγματι, ἐφαρμόζοντες ὅ,τι πρό ὀλίγου ἐδείξαμεν, ἔχομεν:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} \Longrightarrow \frac{3+6}{4+8} = \frac{21}{28} \Longrightarrow \frac{3+6+21}{4+8+28} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}.$$

Ὥστε, ὅταν μᾶς δοθοῦν δύο ἤ περισσότεροι ἴσοι λόγοι (μέ θετικούς παρονομαστάς):

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3} = \ldots ,$$

τότε θά σχηματίσωμεν ἕνα νέον ἴσον πρός αὐτούς λόγον, ἄν λάβωμεν ὡς ἀριθμητήν τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν τῶν δοθέντων λόγων καί ὡς παρονομαστήν τό ἄθροισμα τῶν παρονομαστῶν των :

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots}{\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \ldots$$

IV) Εἰς τούς δύο ἴσους λόγους τῆς ἀναλογίας

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \qquad (\beta_1 \ , \ \beta_2 \neq 0)$$

ἄς προσθέσωμεν τήν μονάδα. Θά προκύψη τότε:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \Longleftrightarrow \frac{\alpha_1}{\beta_1} + 1 = \frac{\alpha_2}{\beta_2} + 1 \Longleftrightarrow \frac{\alpha_1+\beta_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2+\beta_2}{\beta_2} .$$

Ὥστε, ἐάν εἰς τούς ἀριθμητάς ἀναλογίας προσθέσωμεν τούς ἀντιστοίχους παρονομαστάς, θά λάβωμεν νέαν ἀναλογίαν. Π.χ.

$$\frac{-8}{30} = \frac{-4}{15} \Longleftrightarrow \frac{22}{30} = \frac{11}{15} .$$

Μέ ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \Longleftrightarrow \frac{\alpha_1}{\beta_1} - 1 = \frac{\alpha_2}{\beta_2} - 1 \Longleftrightarrow \frac{\alpha_1-\beta_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2-\beta_2}{\beta_2} .$$

Ὥστε, ἐάν ἀπό τούς ἀριθμητάς ἀναλογίας ἀφαιρέσωμεν τούς ἀντιστοίχους παρονομαστάς, θά λάβωμεν νέαν ἀναλογίαν. Π.χ.

$$\frac{-8}{30} = \frac{-4}{15} \Longleftrightarrow \frac{-8-30}{30} = \frac{-4-15}{15} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{-38}{30} = \frac{-19}{15} .$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Εἰς ἕνα οἰκόπεδον 450 m^2 ἡ οἰκοδομή καλύπτει 230 m^2. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ οἰκοπέδου 1ον πρός τήν οἰκοδομημένην ἐπιφάνειαν καί 2ον πρός ὁλόκληρον τήν ἐπιφάνειαν τοῦ οἰκοπέδου ;

2) Ἡ ἀπόστασις δύο σημείων Α΄ καί Β΄ ἐπάνω εἰς ἕνα τοπογραφικόν χάρτην εἶναι 15 cm καί ἡ ὁριζοντία ἀπόστασις τῶν ἀντιστοίχων σημείων Α καί Β ἐπάνω εἰς τό ἔδαφος 225 m. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῆς πρώτης πρός τήν δευτέραν ἀπόστασιν;

3) Νά ἁπλοποιήσετε τούς λόγους $\frac{5}{6} : \frac{2}{3}$ καί $0,25 : \left(\frac{5}{4} - \frac{2}{4}\right)$.

4) Ἀπό τήν ἀναλογίαν 9 : 12 = 6 : 8 νά σχηματίσετε τρεῖς νέας ἀναλογίας ἐφαρμόζοντες τήν ἰδιότητα ΙΙ).

5) Ποῖαι ἰδιότητες ἐφηρμόσθησαν εἰς τήν ἀναλογίαν $\frac{9}{12} = \frac{6}{8}$ διά νά προκύψη κάθε μία ἀπό τάς ἀκολούθους ἀναλογίας:

α) $\frac{21}{12} = \frac{14}{8}$, β) $\frac{-3}{12} = \frac{-2}{8}$, γ) $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$,

δ) $\frac{12}{9} = \frac{8}{6}$, ε) $\frac{9}{6} = \frac{12}{8}$, στ) $\frac{8}{12} = \frac{6}{9}$.

6) Νά προσδιορίσετε τό x εἰς κάθε μίαν ἀπό τάς ἀναλογίας: $\frac{5}{6} = \frac{15}{x}$, $\frac{x}{12} = \frac{6}{-4}$, $\frac{15}{x} = \frac{3}{4}$, $\frac{2}{x} = \frac{-1}{2}$

$\frac{0,25}{x} = \frac{5}{4}$, $\frac{3,5}{-x} = \frac{2,5}{5}$, $\frac{5}{x} = \frac{x}{20}$, $\frac{x}{-3} = \frac{-27}{x}$.

7) Μία φωτογραφική εἰκών σχήματος ὀρθογωνίου $4\frac{1}{2}$ cmx6cm ἐμεγεθύνθη οὕτως ὥστε ἡ 2α διάστασίς της νά γίνη 18cm. Πόση ἔγινε ἡ πρώτη της διάστασις ;

§ 3. Ποσά μέ μεταβολάς κατ'εὐθεῖαν ἀναλόγους. Γραφική παράστασις τῆς σχέσεως μεταξύ δύο ποσῶν μέ μεταβολάς ἀναλόγους.

3.1. Ὅπως εἶναι γνωστόν, εἰς τήν καθημερινήν ζωήν χρησιμοποιοῦνται διά τήν μέτρησιν τῆς θερμοκρασίας δύο διάφοροι κλίμακες: 1ον ἡ κλῖμαξ Κελσίου (Celsius) ἡ ὁποία ἀντιστοιχίζει εἰς τήν θερμοκρασίαν τοῦ τηκομένου πάγου τό 0^0C καί εἰς τήν θερμοκρασίαν τοῦ βράζοντος νεροῦ τό 100^0C καί 2ον ἡ κλῖμαξ Φαρενάϊτ (Fahrenheit) ἡ ὁποία ἀντιστοιχίζει εἰς τήν θερμοκρασίαν τοῦ τηκομένου πάγου τόν ἀριθμόν 32^0F καί εἰς τήν θερμοκρασίαν τοῦ βράζοντος νεροῦ τόν ἀριθμόν 212^0F. Ἐπομένως εἰς τό διάστημα τῶν 100^0C τῆς θερμομετρικῆς κλίμακος Κελσίου ἀντιστοιχεῖ τό διάστημα 212-32 = 180^0F τῆς θερμομετρικῆςκλίμακος Φαρενάϊτ. Ἄρα ὅταν μία θερμοκρασία αὐξηθῆ ἀπό 0^0C εἰς t^0C, ἡ ἰδία αὔξησις εἰς βαθμούς Φαρενάϊτ θά εἶναι ἀπό 32^0 F εἰς t^0 F καί θά ἰσχύη ἡ ἀναλογία

$$\frac{t^0F-32^0F}{t^0C-0^0C} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5} .$$

Ὕστερα ἀπό αὐτήν τήν παρατήρησιν εὔκολα εὑρίσκομεν τό ἑξῆς: Ἄν μετρήσωμεν μίαν καί τήν αὐτήν θερμοκρασίαν 1ον εἰς βαθμούς F καί λάβωμεν τό ἀποτέλεσμα t^0F καί 2ον εἰς βαθμούς C καί λάβωμεν τό ἀποτέλεσμα t^0C, τότε μεταξύ τῶν ἀριθμῶν t^0F καί t^0C θά ἰσχύη ἡ ἰσότης:

$$t^0F = \frac{9}{5}t^0C + 32.$$

Ἡ ἰσότης αὐτή, ὅταν ἐπιλυθῆ ὡς πρός τήν μεταβλητήν t^0C, θά μᾶς δώση ἀντιστρόφως τό t^0C ἐκφρασμένον διά τοῦ t^0F:

$$t^0C = \frac{5}{9}t^0F - \frac{32\cdot 5}{9} = \frac{5}{9}t^0F - \frac{160}{9} .$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ μεταβλητή $y = t^0$ F εἶναι συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς t^0C ἔχουσα τήν μορφήν

$$y = \alpha x + \beta \quad , \quad \text{ὅπου } \alpha = \frac{9}{5} \quad \text{καί } \beta = 32.$$

Τά δύο ποσά x καί y εἶναι συμμεταβλητά χωρίς νά εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα. Π.χ. εἶναι εὔκολον νά διαπιστώσωμεν ὅτι ὁ διπλασιασμός τοῦ x δέν ἔχει ὡς συνέπειαν διπλασιασμόν τοῦ y. Ἔχουν ὅμως τά ποσά x καί y μίαν ἄλλην χαρακτηριστικήν ἰδιότητα, τήν ἑξῆς: Ἄς δώσωμεν εἰς τό x μίαν σειράν ἀπό τυχούσας διαφορετικάς τιμάς:

$$x_1 , x_2 , x_3 , \ldots , x_\nu$$

καί ἄς προσδιορίσωμεν τάς ἀντιστοίχους τιμάς τοῦ y:

$$y_1 = \alpha x_1+\beta \quad , \quad y_2 = \alpha x_2+ \beta \quad , \quad y_3 = \alpha x_3+\beta \quad ,\ldots, \quad y_\nu = \alpha x_\nu + \beta.$$

Εἰς τάς μεταβολάς (διαφοράς):

$$x_2- x_1 \ , \ x_3- x_1, \ \ldots \ , \ x_\nu- x_1$$

τοῦ ποσοῦ x ἀντιστοιχοῦν αἱ ἀκόλουθοι μεταβολαί (διαφοραί) τοῦ ποσοῦ y:

$y_2 - y_1 = \alpha(x_2 - x_1)$, $y_3 - y_1 = \alpha(x_3 - x_1)$, ..., $y_\nu - y_1 = \alpha(x_\nu - x_1)$.

Ἐπομένως ἰσχύουν αἱ ἰσότητες:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \ldots = \frac{y_\nu - y_1}{x_\nu - x_1} = \alpha .$$

Συμπεραίνομεν λοιπόν ὅτι αἱ μεταβολαί τοῦ ποσοῦ y εἶναι κατ'εὐθεῖαν ἀνάλογοι πρός τάς ἀντιστοίχους μεταβολάς τοῦ ποσοῦ x. Διά τοῦτο καλοῦμεν τά ποσά x καί y <u>ποσά μέ μεταβολάς κατ'εὐθεῖαν ἀναλόγους</u>. Ἔτσι τό μέτρον τῆς θερμοκρασίας εἰς βαθμούς F καί τό μέτρον τῆς ἰδίας θερμοκρασίας εἰς βαθμούς C εἶναι ποσά μέ μεταβολάς ἀναλόγους.

<u>3.2.</u> Ἰδού ἕνα 2ον παράδειγμα: Ἡ ἀξία τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας πού καταναλίσκει μία οἰκογένεια ἤ ἕνα κατάστημα ὑπολογίζεται ἀνάλογα μέ τήν ποσότητά της εἰς κιλοβαττώρας (kwh), σύμφωνα μέ τάς ἐνδείξεις τοῦ ἠλεκτρικοῦ γνώμονος (μετρητοῦ). Ἐκτός ὅμως ἀπό τήν ἀξίαν τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας ὁ καταναλωτής πληρώνει κάθε μῆνα καί ἕνα σταθερόν ποσόν (πάγιον τέλος) διά τό ἐνοίκιον τοῦ γνώμονος κτλ. Ἐάν λοιπόν μία οἰκογένεια καταναλώση ἐπί ἕνα μῆνα x kwh καί πληρώνη 0,70 δρχ/kwh (δρχ ἀνά κιλοβαττώραν) καθώς καί πάγιον τέλος 40 δρχ , τότε ὁ λογαριασμός τῆς Ἠλεκτρικῆς Ἑταιρίας τόν μῆνα ἐκεῖνον θά γράφη τό ποσόν τῶν δραχμῶν :

$$y = 0,70 \cdot x + 40 .$$

Ἡ συνάρτησις y τοῦ x εἶναι καί ἐδῶ τῆς μορφῆς $y = \alpha x + \beta$ μέ $\alpha = 0,70$ καί $\beta = 40$. Τά ποσά x καί y ἔχουν ἀντιστοίχους μεταβολάς κατ'εὐθεῖαν ἀναλόγους: ὁ λόγος μιᾶς μεταβολῆς $y'' - y'$ τοῦ y πρός τήν ἀντίστοιχον μεταβολήν $x'' - x'$ τοῦ x εἶναι ἴσος μέ 0,70 :

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = 0,70 .$$

3.3. Γραφική παράστασις τῆς σχέσεως μεταξύ δύο ποσῶν μέ μεταβολάς ἀναλόγους. Ὅπως εἴπαμεν, ἡ σχέσις μεταξύ , δύο ποσῶν x καί y ὄχι ἀναλόγων ἀλλά μέ μεταβολάς κατ'εὐθεῖαν ἀναλόγους δίδεται ἀπό μίαν συνάρτησιν τῆς μορφῆς

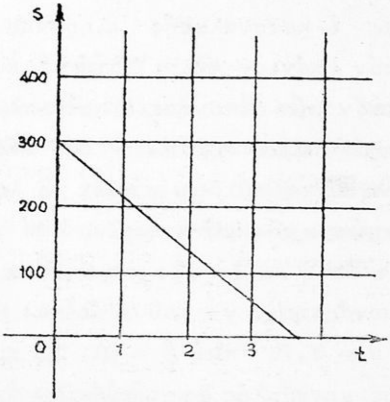
$$\sigma : x \xrightarrow{\sigma} \alpha x + \beta = y \quad , \text{ὅπου } \alpha \neq 0 \ , \quad \beta \neq 0.$$

Ἑπομένως ἡ γραφική παράστασις τῆς σχέσεως εἰς ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων συντεταγμένων (x, y) θά εἶναι μία εὐθεῖα ἡ ὁποία δέν περνᾶ ἀπό τήν ἀρχήν 0 τῶν συντεταγμένων, ἀλλά τέμνει τούς ἄξονας 0x καί 0y ἀντιστοίχως εἰς τά σημεῖα:

$$T_1\left(-\frac{\beta}{\alpha}\ , 0\right) \quad \text{καί} \quad T_2(0,\ \beta).$$

Παράδειγμα. Ἕνα τραῖνο ἀναχωρεῖ ἀπό τόν σταθμόν Α πού ἀπέχει 300 km ἀπό τόν σταθμόν 0 καί κινεῖται πρός τόν σταθμόν 0 μέ μέσην ταχύτητα 80 km/h (χιλιόμετρα ἀνά ὥραν).

Ἀφοῦ εὑρεθῆ ἡ σχέσις πού συνδέει τήν ἀπόστασιν s km τοῦ τραίνου ἀπό τόν σταθμόν 0 μέ τόν χρόνον t h μετά τήν χρονικήν στιγμήν t =0h τῆς ἀναχωρήσεως, νά δοθῆ ἡ γραφική παράστασις τῆς σχέσεως.



Ἡ ἀπόστασις τοῦ τραίνου ἀπό τόν σταθμόν 0 ἐλαττώνεται κατά 80 km κάθε ὥραν. Ἑπομένως ἡ σχέσις μεταξύ s km καί t h θά δίδεται ἀπό τήν συνάρτησιν s = −80t + 300.

Διά τήν γραφικήν της παράστασιν ἀπεικονίζομεν τούς χρόνους t h ἐπί τοῦ ἄξονος τετμημένων 0t μέ ἀντιστοιχίαν 1 cm πρός

1 h καί τάς ἀποστάσεις s km ἐπί τοῦ ἄξονος τεταγμένων Os μέ ἀντιστοιχίαν 1 cm πρός 100 km.

Θά προκύψη τότε ἡ ἀνωτέρω γραφική παράστασις.

Ὅπως φαίνεται ἀπ'αὐτήν, τό τραῖνο θά φθάση εἰς τόν σταθμόν O $3\frac{3}{4}$ h μετά τήν ἀναχώρησίν του.

Αὐτό ἠμποροῦμεν νά τό εὕρωμεν καί ἀπό τήν σχέσιν $s = -80t + 300$, ἄν λάβωμεν τό $s = 0$ καί ἐπιλύσωμεν τήν προκύπτουσαν ἐξίσωσιν $0 = -80t + 300$ ὡς πρός t.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Δίδεται ἡ συνάρτησις $y = 2{,}5 \cdot x - 4$. Νά καταρτίσετε ἕνα πίνακα ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν μεταβλητῶν x καί y διά τάς ἀκολούθους τιμάς τῆς x:
$x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 2$, $x_6 = 3$.
Νά ὑπολογίσετε κατόπιν τάς μεταβολάς (διαφοράς) τῆς y αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς μεταβολάς
$x_2 - x_1$, $x_3 - x_1$, $x_4 - x_1$, $x_5 - x_1$, $x_6 - x_1$ τῆς x. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος μιᾶς μεταβολῆς τῆς y πρός τήν ἀντίστοιχον μεταβολήν τῆς x ;

2) Νά παραστήσετε γραφικῶς ἐπί χιλιοστομετρικοῦ χάρτου τήν σχέσιν $y = \frac{9}{5}x + 32$, ὅπου $x = t^0C$, $y = t^0F$, τοῦ ἐδαφίου § 3.1, ἀπεικονίζοντες ἐπί τοῦ ἄξονος Ox τάς θερμοκρασίας Κελσίου μέ ἀντιστοιχίαν 1 cm πρός 10^0C καί ἐπί τοῦ ἄξονος Oy τάς θερμοκρασίας Φαρενάϊτ μέ ἀντιστοιχίαν 1 cm πρός 10^0F.
Χρησιμοποιοῦντες τήν γραφικήν αὐτήν παράστασιν νά κάμετε τάς ἀκολούθους μετατροπάς θερμοκρασιῶν:
-10^0C εἰς t^0F, 15^0C εἰς t^0F, 25^0C εἰς t^0F,
5^0F εἰς t^0C, 23^0F εἰς t^0C, 50^0F εἰς t^0C,
καί ἔπειτα νά τάς ἐπαληθεύσετε μέ ὑπολογισμούς.

3) Νά παραστήσετε γραφικῶς ἐπί χιλιοστομετρικοῦ χάρτου τήν σχέσιν $y = 0{,}70x + 40$ τοῦ ἐδ. § 3.2, ἀπεικονίζοντες ἐπί τοῦ ἄξονος Ox τάς κιλοβαττώρας x μέ ἀντιστοιχίαν 1 cm πρός 20 kwh καί ἐπί τοῦ ἄξονος Oy τάς δραχμάς y μέ ἀντιστοιχίαν 1 cm πρός 40 δραχμάς. Χρησιμοποιοῦντες τήν γραφικήν αὐτήν παράστασιν, νά εὕρετε τί θά πληρώση ὁ καταναλωτής διά 30 kwh, 60 kwh, 120 kwh καί νά ἐπαληθεύσετε τά ἐξαγόμενά σας μέ ὑπολογισμούς.

Ἐπίσης νά εὕρετε γραφικῶς καί νά ἐπαληθεύσετε ὑπολογιστικῶς πόσαι kwh κατανάλωσις ἀντιστοιχοῦν εἰς ἕνα λογαριασμόν 96 δραχμῶν.

§ 4. Ἀντιστρόφως ἀνάλογα ποσά. Γραφική παράστασις τῆς σχέσεώς των.

4.1. <u>Ἀντιστρόφως ἀνάλογα ποσά.</u> Ἕνα αὐτοκίνητον ἔχει νά διανύση μίαν ἀπόστασιν 225 km· ἐάν τό κάμη μέ μέσην ταχύτητα 50 km/h (χιλιόμετρα ἀνά ὥραν), θά χρειασθῆ χρόνον

$$t = \frac{225}{50} = 4,5 \text{ h} .$$

Γενικῶς, ἕνα αὐτοκίνητον διά νά διανύση μίαν ἀπόστασιν α km μέ μέσην ταχύτητα υ km/h , θά χρειασθῆ χρόνον

$$t = \frac{\alpha}{\upsilon} \text{ h} .$$

Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι διατηροῦμεν τήν ἀπόστασιν α σταθεράν καί ὅτι μεταβάλλομεν τήν ταχύτητα υ , π.χ. ὅτι

τήν διπλασιάζομεν, τήν τριπλασιάζομεν ,τήν τετραπλασιάζομεν.

Τότε ὁ ἀντίστοιχος χρόνος διανύσεως τῆς ἀποστάσεως α θά ἐλαττωθῆ καί θά γίνη

τό ἥμισυ , τό ἕνα τρίτον , τό ἕνα τέταρτον

τοῦ ἀρχικοῦ χρόνου.

Γενικῶς, ἐάν εἰς τήν ταχύτητα υ_1 ($\neq 0$) ἀντιστοιχῆ χρόνος διανύσεως

$$t_1 = \frac{\alpha}{\upsilon_1} ,$$

τότε εἰς τήν ταχύτητα $\upsilon = \upsilon_1 \cdot k$, ὅπου k τυχών ρητός (θετικός) ἀριθμός, θά ἀντιστοιχῆ χρόνος διανύσεως

$$t = \frac{\alpha}{\upsilon_1 \cdot k} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\alpha}{\upsilon_1} = \frac{1}{k} \cdot t_1 .$$

Ὁμοίως , ἐάν ὁ χρόνος διανύσεως t_1 πολλαπλασιασθῆ μέ ἕνα τυχόντα ρητόν (θετικόν) ἀριθμόν λ , τότε ἡ ταχύτης θά γίνη

$$υ = \frac{α}{t_1 \cdot λ} = \frac{1}{λ} \cdot \frac{α}{t_1} = \frac{1}{λ} \cdot υ_1 ,$$

δηλαδή θά πολλαπλασιαθῆ μέ τόν ἀντίστροφον $\frac{1}{λ}$ τοῦ ἀριθμοῦ λ. Παρατηροῦμεν λοιπόν τό ἑξῆς: Τά ποσά υ καί t συμμεταβάλλονται κατά τρόπον ὥστε, ἐάν ἡ τιμή τοῦ ἑνός πολλαπλασιασθῆ μέ ἕνα ὁποιονδήποτε ρητόν (θετικόν) ἀριθμόν ρ, τότε ἡ ἀντίστοιχος τιμή τοῦ ἄλλου πολλαπλασιάζεται μέ τόν ἀντίστροφον ἀριθμόν $\frac{1}{ρ}$. Δύο συμμεταβλητά ποσά, ὅπως τά ἀνωτέρω, λέγονται <u>ἀντιστρόφως ἀνάλογα</u>.

Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνομεν ὅτι τό γινόμενον δύο ὁποιωνδήποτε ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν ποσῶν υ καί t εἶναι σταθερόν, δηλαδή τό ἴδιον δι'ὅλα τά ζεύγη ἀντιστοίχων τιμῶν (υ, t):

$$υ\, t = α = υ_1 t_1 .$$

Ἡ ἰδιότης αὐτή εἶναι χαρακτηριστική διά δύο ἀντιστρόφως ἀνάλογα ποσά x καί y: Δύο ὁποιαιδήποτε ἀντίστοιχοι τιμαί των (x, y) ἔχουν γινόμενον ἕνα ὡρισμένον ἀριθμόν $α \neq 0$:

$$xy = α \iff y = \frac{α}{x} \iff x = \frac{α}{y} .$$

Εἶναι χρήσιμον νά παραβάλωμεν τήν ἰδιότητα αὐτήν μέ τήν χαρακτηριστικήν ἰδιότητα δύο κατ'εὐθεῖαν ἀναλόγων ποσῶν x καί y, ἡ ὁποία, ὅπως εἴδαμεν, εἶναι ἡ ἑξῆς: δύο ὁποιαιδήποτε ἀντίστοιχοι τιμαί των (x,y) ἔχουν λόγον $\frac{y}{x}$ σταθερῶς ἴσον μέ ἕνα ὡρισμένον ἀριθμόν $α \neq 0$:

$$\frac{y}{x} = α \iff \frac{x}{y} = \frac{1}{α} \iff y = αx .$$

<u>4.2.</u> Ἰδού τώρα ἕνα δεύτερον παράδειγμα ἀντιστρόφως ἀναλόγων ποσῶν:

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἕνα ὑφαντουργεῖον διαθέτει ἕνα μεγάλον ἀριθμόν ἀργαλειῶν τοῦ αὐτοῦ τύπου καί ὅτι πρόκειται νά ὑφανθῆ μία ὡρισμένη ποσότης β ὑφάσματος. Ἐάν y_1 ἀργαλειοί χρειάζονται διά τήν ὕφανσιν αὐτήν χρόνον t_1, τότε

$$2y_1 \quad , \quad 3y_1 \quad , \quad 4y_1 \quad , \ldots$$

ἀργαλειοί θά χρειασθοῦν ἀντιστοίχους χρόνους

$$\frac{1}{2}t_1 \; , \; \frac{1}{3}t_1 \; , \; \frac{1}{4}t_1 , \ldots$$

Ὥστε τά ποσά : ἀριθμός y ἀργαλειῶν καί χρόνος t ὑφάνσεως τῆς αὐτῆς ποσότητος ὑφάσματος εἶναι ποσά ἀντιστρόφως ἀνάλογα. Ἡ σχέσις μεταξύ δύο ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν y καί t δίδεται ἀπό τήν ἰσότητα

$$yt = y_1 t_1 = \alpha \iff y = \frac{\alpha}{t} \iff t = \frac{\alpha}{y} \; .$$

<u>4.3. Γραφική παράστασις τῆς συναρτήσεως $y = \dfrac{\alpha}{x}$ $(\alpha \neq 0)$.</u>

Ὅπως εἴδαμεν, ἡ σχέσις μεταξύ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν x καί y δύο ἀντιστρόφως ἀναλόγων ποσῶν δίδεται ἀπό τήν συνάρτησιν

$$\sigma : x \xrightarrow{\sigma} \frac{\alpha}{x} = y \qquad ,$$

ὅπου α εἶναι ἕνας δεδομένος ρητός ἀριθμός $\neq 0$. Πεδίον ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως σ εἶναι τό σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν $x \neq 0$, καί πεδίον τιμῶν τῆς συναρτήσεως τό ἴδιον σύνολον.

Ἡ γραφική παράστασις αὐτῆς τῆς συναρτήσεως εἰς ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων συντεταγμένων (x,y) δέν εἶναι εὐθεῖα, ὅπως εἰς τάς δύο περιπτώσεις πού ἐμελετήσαμεν εἰς τάς § 1 καί 3, ἀλλά μία καμπύλη γραμμή πού ὀνομάζεται <u>ὑπερβολή</u> καί πού θά μελετήσωμεν εἰς ἀνωτέραν τάξιν. Ἠμποροῦμεν ὅμως νά ἀποκτήσωμεν ἀπό τώρα μίαν ἰδέαν τῆς μορφῆς τῆς καμπύλης, ἐάν δώσωμεν π.χ. εἰς τό α τήν τιμήν 100 καί προσδιορίσωμεν μερικά σημεῖα τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς συναρτήσεως

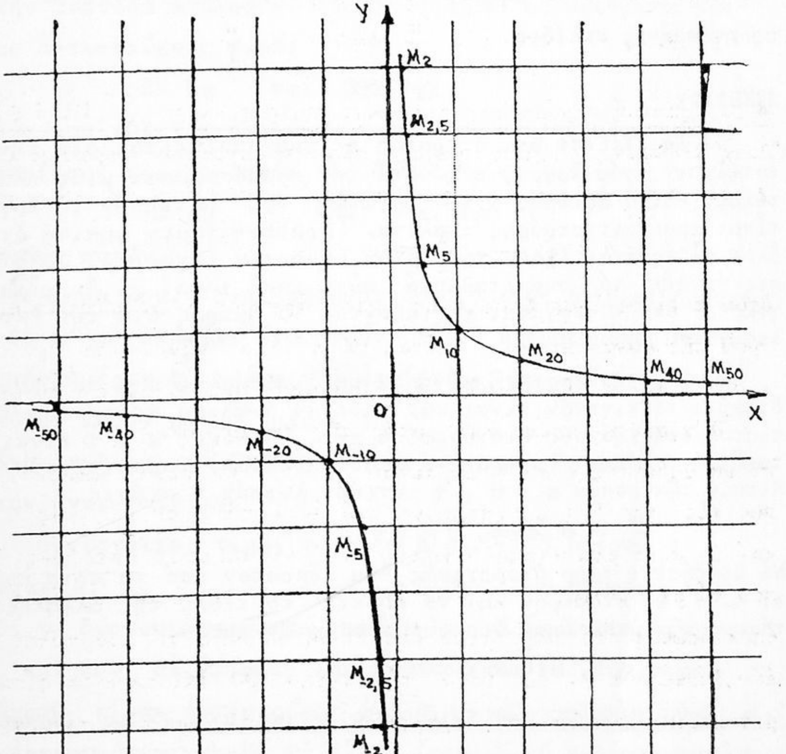
$$y = \frac{100}{x} \qquad , \quad (x = \text{ρητός ἀριθμός} \neq 0).$$

Πρός τοῦτο καταρτίζομεν πρῶτα ἕνα πίνακα ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν μεταβλητῶν x καί y.

x	-50	-40	-20	-10	-5	- 2,5	-2
y	-2	-2,5	-5	-10	-20	-40	-50

καί

x	2	2,5	5	10	20	40	50
y	50	40	20	10	5	2,5	2



Κατόπιν σημειώνομεν ἐπάνω εἰς χιλιοστομετρικόν , χάρτην (λαμβάνοντες ὡς μονάδα μήκους τό 1 mm καί ἐπί τῶν δύο ἀξόνων συντεταγμένων Ox καί Oy) τά σημεῖα

$$M_{-50}\ ,\ M_{-40}\ ,\ M_{-20}\ ,\ M_{-10}\ ,\ M_{-5}\ ,\ M_{-2,5}\ ,\ M_{-2}$$

καί

$$M_{2}\ ,\ M_{2,5}\ ,\ M_{5}\ ,\ M_{10}\ ,\ M_{20}\ ,\ M_{40}\ ,\ M_{50}$$

πού ἔχουν ὡς συντεταγμένας κατά σειράν τά ἀνωτέρω ζεύγη ἀντιστοίχων τιμῶν (x,y) τῆς συναρτήσεως $y = \frac{100}{x}$. Τέλος ἑνώνομεν μέ μίαν κατά τό δυνατόν "ὁμαλήν" καμπύλην γραμμήν τά σημεῖα ταῦτα κατά σειράν. Θά προκύψη τό σχεδίασμα τῆς προηγουμένης σελίδος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά δείξετε ὅτι ὁ χρόνος t πού ἀπαιτεῖται διά τήν ἐκτέλεσιν ἑνός ἔργου, π.χ. διά τήν πλακόστρωσιν μιᾶς πλατείας, καί ὁ ἀριθμός x τῶν ἐργατῶν, πού ἐκτελοῦν τό ἔργον, εἶναι ποσά ἀντιστρόφως ἀνάλογα. (Προϋποθέτομεν φυσικά ὅτι ὅλοι οἱ ἐργάται ἔχουν τήν ἰδίαν ἀπόδοσιν ἐργασίας). Ποία σχέσις συνδέει τά συμμεταβλητά αὐτά ποσά t καί x, ἄν εἶναι γνωστόν ὅτι 40 ἐργάται χρειάζονται 15 ἡμέρας διά τήν ἐκτέλεσιν τοῦ ἔργου ;

2) Εἰς τήν ἰσοταχῆ κίνησιν τά διαστήματα s m τά ὁποῖα διανύει τό κινητόν εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα πρός τούς ἀντιστοίχους χρόνους διανύσεως t sec. Ὁ λόγος s : t εἶναι ἡ ταχύτης υ m/sec (μέτρα ἀνά δευτερόλεπτον) τοῦ κινητοῦ. Μεταξύ τῶν ποσῶν s , υ , t ἰσχύει λοιπόν ἡ σχέσις

$$\frac{s}{t} = \upsilon \iff s = \upsilon t .$$

Νά θεωρήσετε τώρα διαδοχικῶς ἕνα ἕκαστον ἀπό τά τρία ποσά s, t, υ ὡς σταθερόν καί νά εὕρετε τό εἶδος τῆς ἀλληλεξαρτήσεως τῶν ὑπολοίπων δύο συμμεταβλητῶν ποσῶν.

§ 5. Μέθοδοι τῶν τριῶν. Ποσοστά.

<u>5.1.</u> <u>Ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν.</u> <u>Πρόβλημα 1ον.</u> 25 kg ζάχαρη κοστίζουν 300 δρχ · πόσον κοστίζουν 70 kg ἀπό τήν ἰδίαν ζάχαρη ;

Ἄς εἶναι x δρχ τό ζητούμενον κόστος τῶν 70 kg. Ἐπειδή ἡ ποσότης ἑνός ἐμπορεύματος καί ἡ ἀντίστοιχος ἀξία του εἶναι ποσά κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα, θά ἔχωμεν τήν ἀναλογίαν

$$\frac{25}{70} = \frac{300}{x} .$$

Ἡ ἀναλογία αὐτή εἶναι ἰσοδύναμος (βλ. ἐδ. § 2.3) μέ τήν ἰσότητα $25x = 70 \cdot 300$,

ἀπό τήν ὁποίαν συμπεραίνομεν ὅτι

$$x = \frac{70 \cdot 300}{25} = \frac{70 \cdot 12}{1} = 840 \text{ δρχ.}$$

Εἰς τήν ἀνωτέρω ἀναλογίαν ἐτοποθετήσαμεν ὡς ἀριθμητάς τάς πρώτας ἀντιστοίχους τιμάς

25 kg καί 300 δρχ

τῶν δύο κατ' εὐθεῖαν ἀναλόγων ποσῶν τοῦ προβλήματος καί ὡς ἀντιστοίχους παρονομαστάς τάς δευτέρας ἀντιστοίχους τιμάς

70 kg καί x δρχ

τῶν ποσῶν αὐτῶν.

Πρόβλημα 2ον. Ἕνας γεωργός ἐργαζόμενος 6 ὥρας ἡμερησίως (6 h/ἡμ.) σκάπτει ἕνα ἀγρόν εἰς 5 ἡμέρας. Ἐπί πόσας ὥρας τήν ἡμέραν θά πρέπει νά ἐργάζεται, ἐάν θέλη νά σκάψη τόν ἴδιον ἀγρόν εἰς 3 ἡμέρας ;

Ἄς εἶναι x h/ἡμ. αἱ ζητούμεναι ὧραι σκαφῆς ἡμερησίως. Ἔχομεν τήν ἀντιστοιχίαν:

πρῶται ἀντίστοιχοι τιμαί	:	6 h/ἡμ.	5 ἡμέραι
δεύτεραι " "	:	x h/ἡμ.	3 ἡμέραι .

Ἐπειδή τά δύο συμμεταβλητά ποσά : 1ον αἱ ὧραι σκαφῆς ἡμερησίως καί 2ον αἱ ἡμέραι πού ἀπαιτοῦνται διά τήν σκαφήν τοῦ ἀγροῦ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, τό γινόμενον τῶν πρώτων ἀντιστοίχων τιμῶν θά εἶναι ἴσον μέ τό γινόμενον τῶν δευτέρων ἀντιστοίχων τιμῶν (βλ. ἐδ. § 4.1) :

$$6 \cdot 5 = 3x .$$

'Από τήν έξίσωσιν αύτήν διά τό ζητούμενον x εύρίσκομεν:

$$x = \frac{6 \cdot 5}{3} = 2 \cdot 5 = 10 \text{ h/ήμ.}$$

Τά άνωτέρω προβλήματα καί τά δμοιά των έπεκράτησε νά λέγωνται προβλήματα τής <u>άπλής μεθόδου τών τριών.</u>

<u>5.2.</u> <u>Σύνθετος μέθοδος τών τριών.</u> <u>Πρόβλημα 1ον.</u> 6 έργάται έργαζόμενοι 8 h/ήμ. (ώρας άνά ήμέραν) σκάπτουν ένα άγρόν είς 7 ήμέρας. 'Εάν 4 έργάται έργασθούν έπί 7 ώρας ήμερησίως, είς πόσας ήμέρας θά σκάψουν τόν ίδιον άγρόν ; (Προϋποτίθεται ότι ή άπόδοσις τής έργασίας τών έργατών είναι ή αύτή δι'όλους).

"Ας είναι x αί ζητούμεναι ήμέραι πού άπαιτούνται διά τήν σκαφήν τού άγρού. "Εχομεν:

1αι άντίστοιχοι τιμαί:	6 έργ.	8 h/ήμ.	7 ήμέραι
2αι " " :	4 έργ.	7 h/ήμ.	x ήμέραι.

Τό πρόβλημα αύτό άναλύεται είς δύο προβλήματα τής άπλής μεθόδου τών τριών ώς έξής:

Κατά πρώτον κρατούμεν άμεταβλήτους τάς 8 ώρας ήμερησίας έργασίας (8 h/ήμ.) καί έξετάζομεν τήν άλληλεξάρτησιν τών δύο άλλων συμμεταβλητών ποσών : τού άριθμού έργατών άφ' ένός καί τής χρονικής διαρκείας τής σκαφής άφ' έτέρου. "Εχομεν τότε, άν παραστήσωμεν μέ y ήμέρας τό χρονικόν διάστημα πού χρειάζονται οί 4 έργάται διά νά σκάψουν τόν άγρόν :

1αι άντίστοιχοι τιμαί:	6 έργ.	7 ήμέραι
2αι " " :	4 έργ.	y ήμέραι.

'Επειδή τά δύο αύτά συμμεταβλητά ποσά είναι άντιστρόφως άνάλογα, θά έχωμεν διά τό y τήν έξίσωσιν

$$6 \cdot 7 = 4y$$

'Από αύτήν εύρίσκομεν:

$$y = \frac{6 \cdot 7}{4} = 10\frac{1}{2} \text{ ἡμέραι.}$$

Ὥστε 4 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 h/ἡμ. χρειάζονται $\frac{6 \cdot 7}{4}$ ἡμέρας διά τήν σκαφήν τοῦ ἀγροῦ.

Κρατοῦμεν τώρα ἀμετάβλητον τόν ἀριθμόν 4 τῶν ἐργατῶν καί θεωροῦμεν τήν ἀλληλεξάρτησιν τῶν δύο ἄλλων συμμεταβλητῶν ποσῶν: τοῦ ἀριθμοῦ ὡρῶν ἡμερησίας ἐργασίας ἀφ' ἑνός καί τῆς χρονικῆς διαρκείας τῆς σκαφῆς ἀφ' ἑτέρου. Θά ἔχωμεν τήν ἀντιστοιχίαν:

1αι	ἀντίστοιχοι τιμαί :	8 h/ἡμ.	$\frac{6 \cdot 7}{4}$ ἡμέραι
2αι	" "	7 h/ἡμ.	x ἡμέραι.

Ἐπειδή τά δύο αὐτά συμμεταβλητά ποσά εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, θά ἔχωμεν διά τό ζητούμενον x τήν ἐξίσωσιν:

$$8 \cdot \frac{6 \cdot 7}{4} = 7x \,.$$

Τήν ἐπιλύομεν καί εὑρίσκομεν:

$$x = \frac{8 \cdot 6 \cdot 7}{4 \cdot 7} = 2 \cdot 6 = 12 \text{ ἡμέραι.}$$

Πρόβλημα 2ον. Ἕνα συνεργεῖον ἐργαζόμενον ἐπί 6 h/ἡμ. χρειάζεται 5 ἡμέρας διά νά πλακοστρώσῃ μίαν πλατεῖαν 400 m^2. Ἐπί πόσας ὥρας ἡμερησίως πρέπει νά ἐργάζεται τό ἴδιον συνεργεῖον διά νά πλακοστρώσῃ εἰς διάστημα 3 ἡμερῶν πλατεῖαν 300 m^2 ; Καί αὐτό τό πρόβλημα ἀναλύεται εἰς δύο προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν ὡς ἑξῆς:

Κρατοῦμεν πρωτα ἀμετάβλητον τό ἐμβαδόν τῶν 400 m^2, πού ἐπρόκειτο νά πλακοστρωθῇ, καί ἐξετάζομεν τήν ἀλληλεξάρτησιν τῶν δύο ἄλλων συμμεταβλητῶν ποσῶν: 1ον τοῦ ἀριθμοῦ ὡρῶν ἡμερησίας ἐργασίας καί 2ον τῆς χρονικῆς διαρκείας τῆς πλακοστρώσεως. Ἄς εἶναι y h/ἡμ. αἱ ἀπαιτούμεναι τότε ὧραι ἡμερησίας ἐργασίας· θά ἔχωμεν τήν ἀντιστοιχίαν:

1αι ἀντίστοιχοι τιμαί : 6 h/ἡμ. 5 ἡμέραι

2αι " " : y h/ἡμ. 3 ἡμέραι.

Τά δύο συμμεταβλητά ποσά εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ἄρα θά ἰσχύη διά τόν ἄγνωστον y ἡ ἐξίσωσις:

$$6\cdot 5 = y\cdot 3 .$$

Τήν ἐπιλύομεν καί εὑρίσκομεν

$$y = \frac{6\cdot 5}{3} = 10 \text{ h/ἡμ.}$$

Ὥστε τό συνεργεῖον, διά νά πλακοστρώση εἰς 3 ἡμέρας τήν πλατεῖαν τῶν 400 m^2, πρέπει νά ἐργασθῆ 10 ὥρας ἡμερησίως (10 h/ἡμ.).

Κρατοῦμεν τώρα ἀμετάβλητον τήν χρονικήν διάρκειαν τῶν 3 ἡμερῶν διά τήν πλακόστρωσιν καί ἐξετάζομεν τήν ἀλληλεξάρτησιν τῶν δύο ἄλλων συμμεταβλητῶν ποσῶν:

1ον τοῦ ἀριθμοῦ ὡρῶν ἡμερησίας ἐργασίας καί 2ον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς πλατείας. Θά ἔχωμεν τωρα τήν ἀντιστοιχίαν:

1αι ἀντίστοιχοι τιμαί : 10 h/ἡμ. 400 m^2

2αι " " : x h/ἡμ. 300 m^2.

Ἐπειδή τά δύο συμμεταβλητά ποσά εἶναι κατ'εὐθεῖαν ἀνάλογα, θά λάβωμεν διά τό ζητούμενον x τήν ἐξίσωσιν:

$$\frac{10}{x} = \frac{400}{300} \Longleftrightarrow 4x = 30$$

Ἀπό αὐτήν προκύπτει:

$$x = \frac{30}{4} = 7\frac{1}{2} \text{ h/ἡμ.}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Διά 5 m ὕφασμα ἐπληρώσαμεν 93,5 δρχ. Πόσον θά πληρώσωμεν διά 17 m ἀπό τό ἴδιον ὕφασμα;

2) 1557 kg σιδηρομετάλλευμα ἀποδίδουν 900 kg σίδηρον. Μέ πόσα kg μετάλλευμα θά λάβωμεν 1 τόννον (1000 kg) σίδηρον;

3) Ἕνα ζαχαρουργεῖον ἐχρησιμοποίησεν 436 t (τόννους) ζαχαρότευτλα διά νά παρασκευάση 32294 kg ζάχαρη.

Ποίαν ποσότητα ζαχαροτεύτλων θά χρειασθῆ τό ζαχαρουργεῖον διά νά παρασκευάση 10 000 kg ζάχαρη ;

4) Ἕνα πλοῖον εἶχε πλήρωμα 18 ἀνδρῶν καί τροφάς διά 20 ἡμέρας ἀκόμη, ὅταν παρέλαβε 6 ναυαγούς. Διά πόσας ἡμέρας θά ἐπαρκέσουν τώρα τά τρόφιμα, ἐάν τό σιτηρέσιον διά τό πλήρωμα καί τούς ναυαγούς εἶναι τό ἴδιον μέ τό σιτηρέσιον πού ἐδίδετο εἰς τό πλήρωμα πρό τῆς παραλαβῆς τῶν ναυαγῶν ;

5) Ἕνα συνεργεῖον ἐχρειάσθη 25 ἡμέρας διά νά ἀσφαλτοστρώση ἕνα δρόμον 3 600 m μέ πλάτος 9 m. Ἐπί πόσας ἡμέρας πρέπει νά ἐργασθῆ τό ἴδιον συνεργεῖον διά νά ἀσφαλτοστρώση ὑπό τούς ἰδίους ὅρους ἕνα δρόμον 5 000 m μέ πλάτος 6 m ;

6) Ἀπό ἕνα βαρέλι γεμάτο κρασί ἐγεμίσαμεν 180 φιάλας τῶν 0,35 λίτρων (l) (βλ. Βιβλ. Ι, σ. 32-33 Α). Πόσας φιάλας τῶν 0,60 l θά ἐγεμίζαμεν ἀπό ἕνα βαρέλι τοῦ ἰδίου περιεχομένου μέ τό ἀνωτέρω ;

7) Ἐπληρώσαμεν 12 000 δρχ διά νά μεταφέρωμεν 30 τόννους (t) ἐμπόρευμα εἰς ἀπόστασιν 85 km. Πόσον θά πληρώσωμεν διά νά μεταφέρωμεν, ὑπό τούς ἰδίους ὅρους, 17 t ἐμπόρευμα εἰς ἀπόστασιν 97 km ;

8) Μία πλατεῖα ἔχει σχῆμα ὀρθογώνιον μέ μῆκος 225 m καί πλάτος 150 m. Διά νά πλακοστρωθῆ εἰργάσθησαν 325 ἐργάται ἐπί 5 ὥρας ἡμερησίως (5 h/ἡμ.). Πόσοι ἐργάται ἐργαζόμενοι μέ τήν ἰδίαν ἀποδοτικότητα 6 h/ἡμ. θά πλακοστρώσουν μίαν ἄλλην ὀρθογώνιον πλατεῖαν μήκους 190 m καί πλάτους 120 m ;

9) Εἰς ἕνα φρούριον ἔχουν ἀποκλεισθῆ 300 στρατιῶται καί ἔχουν τροφάς διά 60 ἡμέρας μέ σιτηρέσιον 840 gr ἡμερησίως διά κάθε στρατιώτην. Μετά παρέλευσιν 15 ἡμερῶν ἡ φρουρά ἐνισχύθη μέ 50 ἀκόμη ἄνδρας χωρίς ὅμως τρόφιμα. Εἰς πόσα gr πρέπει νά περιορισθῆ τό ἡμερήσιον σιτηρέσιον διά νά ἐπαρκέσουν μέχρι τέλους τῶν 60 ἡμερῶν αἱ ὑπάρχουσαι τροφαί ;

5.3. Ποσοστόν ἐπί τοῖς ἑκατόν. Πρόβλημα 1ον. Ὁ εἰσπράκτωρ τῶν συνδρομῶν ἑνός ἀθλητικοῦ συλλόγου λαμβάνει ὡς ἀμοιβήν διά τήν ἐργασίαν του 25 δρχ διά κάθε εἴσπραξιν 100 δραχμῶν. Ποία θά εἶναι ἡ ἀμοιβή του, ἐάν εἰσπράξη συνολικῶς 2 400 δρχ ;

Εἶναι φανερόν ὅτι ἡ ἀμοιβή τοῦ εἰσπράκτορος εἶναι κατ'εὐθεῖαν ἀνάλογος πρός τήν εἴσπραξιν τήν ὁποίαν κάμνει.
Ἑπομένως, ἄν παραστήσωμεν μέ x δρχ τό ζητούμενον, θά ἔχωμεν τήν ἀναλογίαν

$$\frac{x}{2400} = \frac{25}{100}$$

Ἀπό αὐτήν εὑρίσκομεν:

$$100x = 25 \cdot 2400$$

καί

$$x = \frac{25}{100} \cdot 2400 = 600 \text{ δρχ.}$$

Ὥστε ἡ ἀμοιβή τοῦ εἰσπράκτορος ἰσοῦται μέ τά $\frac{25}{100}$ τῆς συνολικῆς εἰσπράξεώς του. Τό κλάσμα $\frac{25}{100}$ λέγεται ποσοστόν ἐπί τοῖς ἑκατόν καί συμβολίζεται συνήθως μέ τήν γραφήν 25 %.
Παρατηροῦμεν ὅτι

$$\frac{600}{2400} = \frac{25}{100} .$$

Πρόβλημα 2ον. Ἕνας πλανόδιος βιβλιοπώλης ἔλαβε ὡς ποσοστά 72 δρχ ἀπό πώλησιν βιβλίων ἀξίας 480 δρχ. Πόσον ἐπί τοῖς ἑκατόν ἦτο ἡ ἀμοιβή του ;
Σύμφωνα μέ ὅσα παρετηρήσαμεν προηγουμένως, τό ζητούμενον κλάσμα $\frac{x}{100}$ ἰσοῦται μέ $\frac{72}{480}$. Ἀρκεῖ λοιπόν νά μετατρέψωμεν τό $\frac{72}{480}$ εἰς δεκαδικόν κλάσμα μέ παρονομαστήν τό 100 διά νά ἔχωμεν τό ζητούμενον. Ἔτσι λαμβάνομεν:

$$\frac{72}{480} = \frac{100 \cdot 72/480}{100} = \frac{7200:480}{100} = \frac{15}{100} .$$

Ὥστε τό ζητούμενον ποσοστόν εἶναι 15 % .

5.4. Ποσοστόν ἐπί τοῖς χιλίοις. Μέ ὅμοιον τρόπον λύομεν καί τό ἀκόλουθον πρόβλημα:

Πρόβλημα 3ον. Ἕνας ἔμπορος μετέφερεν ἀπό τό τελωνεῖον εἰς τήν ἀποθήκην του ἕνα ἐμπόρευμα 18,5 t (τόννων). Κατά τήν μεταφοράν τό ἐμπόρευμα ἔπαθε φύραν 74 kg. Νά ὑπολογι-

σθῆ τό ποσοστόν τῆς φύρας ἐπί τοῖς χιλίοις (‰).
Τό ζητούμενον κλάσμα $\frac{x}{1000}$ ἰσοῦται μέ τόν λόγον

$$\frac{74\ \text{kg}}{18{,}5\ \text{t}} = \frac{74}{18500}.$$

Διά νά τό εὕρωμεν, ἀρκεῖ λοιπόν νά μετατρέψωμεν τό $\frac{74}{18500}$ εἰς κλάσμα μέ παρονομαστήν τό 1 000. Ἔτσι λαμβάνομεν:

$$\frac{74}{18\cdot 500} = \frac{1000\cdot 74/18\ 500}{1000} = \frac{74\ 000:18\ 500}{1000} = \frac{4}{1000}.$$

Ὥστε τό ζητούμενον ποσοστόν ἐπί τοῖς χιλίοις εἶναι 4 ‰

Πρόβλημα 4ον. Ἕνας ἔμπορος ἐπώλησε ἕνα ἐμπόρευμα ἀντί 3500 δρχ. Τό ποσόν αὐτό ἀποτελεῖται ἀπό τήν τιμήν ἀγορᾶς τοῦ ἐμπορεύματος καί ἀπό ἕνα κέρδος 25 % ἐπί τῆς τιμῆς ἀγορᾶς. Νά εὑρεθῆ ἡ τιμή ἀγορᾶς.
Ἄν παραστήσωμεν μέ x δρχ τήν τιμήν ἀγορᾶς, θά ἔχωμεν διά τόν ἄγνωστον x τήν ἐξίσωσιν:

$$x + \frac{25}{100}x = 3\ 500, \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{125}{100}x = 3\ 500.$$

Τήν ἐπιλύομεν καί εὑρίσκομεν:

$$x = \frac{100}{125}\cdot 3\ 500 = \frac{4}{5}\cdot 3\ 500 = 2\ 800\ \text{δρχ}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ἕνας παλαιοπώλης ἠγόρασεν ἕνα ἔπιπλον μέ 360 δρχ καί τό ἐπώλησε μέ κέρδος 35 %. Πόσον τό ἐπώλησεν ;

2) Ἕνα ἐμπόρευμα ἠγοράσθη εἰς τόν τόπον τῆς παραγωγῆς του μέ 15 800 δρχ. Ἐστοίχισεν ὅμως ἐπί πλέον διά τήν μεταφοράν του 12 % καί ἔπαθε κατά τήν μεταφοράν 0,5 % φθοράν. Τέλος ἐπωλήθη μέ κέρδος 18 % ἐπί τοῦ συνολικοῦ κόστους (τιμή ἀγορᾶς+ἔξοδα μεταφορᾶς). Νά εὕρετε πόσον ἐστοίχισεν ἡ μεταφορά, πόσον ἦτο τό κέρδος καί τί ποσόν δραχμῶν ἀπό τήν τιμήν ἀγορᾶς ἀντιπροσωπεύει ἡ φθορά.

3) Εἰς τόν ἀέρα πού ἀναπνέομεν περιέχεται περίπου 78 % ἄζωτον, 21 % ὀξυγόνον καί 1 % διοξείδιον τοῦ ἄνθρακος. Μία αἴθουσα κινηματογράφου περιέχει 10 500 m^3 ἀέρα· πόσα κυβικά μέτρα (m^3) ὀξυγόνον, πόσα ἄζωτον καί πόσα διοξείδιον τοῦ

ἄνθρακος περιέχει ἡ αἴθουσα ;

(4) Ἕνας παλαιοπώλης ἠγόρασε μέ 500 δρχ ἕνα ἔπιπλον καί τό μετεπώλησε μέ κέρδος 18 %. Μέ τά χρήματα πού εἰσέπραξε ἠγόρασε ἕνα ἄλλο ἔπιπλον καί τό μετεπώλησε μέ ζημίαν 18 %. Νά εὕρετε, ἐάν ἐκέρδισεν ἤ ἐζημίωσεν ἀπό τάς δύο ἀγοραπωλησίας καί πόσον ;

(5) Ἕνα ἐμπόρευμα ἠγοράσθη ἀντί 2993 δρχ μέ ἔκπτωσιν 18 % ἐπί τοῦ κανονικοῦ τιμολογίου. Ποία ἦτο ἡ ἀξία του εἰς τό κανονικόν τιμολόγιον, δηλ. χωρίς τήν ἔκπτωσιν ;

(6) Ἕνας ἔμπορος ἐπώλησεν ἐμπόρευμα ἀντί 2000 δρχ μέ ζημίαν 20 % ἐπί τῆς τιμῆς ἀγορᾶς του. Πόσον εἶχεν ἀγοράσει τό ἐμπόρευμα ;

(7) Ἀπό τό βάρος μιᾶς ποσότητος θαλασσίου ὕδατος 2,5 % περίπου ἀναλογεῖ εἰς τό περιεχόμενον μαγειρικόν ἅλας. Πόσα λίτρα (l) θαλάσσιον ὕδωρ πρέπει νά ἐξατμισθοῦν εἰς μίαν ἁλυκήν διά νά παραχθοῦν 400 kg μαγειρικόν ἅλας ; Ὅπως εἶναι γνωστόν, ἕνα λίτρον (1 l) θαλάσσιον ὕδωρ ἔχει βάρος 1,026 kg.

§ 6. Προβλήματα τόκου καί ὑφαιρέσεως.

6.1. Ὅπως εἶναι γνωστόν, ὁ δανειζόμενος χρήματα ὑποχρεοῦται, ὕστερα ἀπό ἕνα συμφωνημένον χρονικόν διάστημα, νά ἐπιστρέφῃ εἰς τόν δανειστήν του ἐκτός ἀπό τό χρηματικόν ποσόν πού ἐδανείσθη (τό κεφάλαιον) καί ἕνα ἐπί πλέον χρηματικόν ποσόν (τόν τόκον). Ὁ τόκος τ ἐξαρτᾶται ἀπό τό κεφάλαιον κ, ἀπό τήν χρονικήν διάρκειαν t τοῦ δανεισμοῦ καί ἀπό τό ἐπιτόκιον ε %, δηλαδή ἕνα συμφωνημένον ποσόν ἐτησίου τόκου ε διά κάθε 100 χρηματικάς μονάδας δάνειον.

Εὔκολα πιστοποιοῦμεν τά ἑξῆς:

1ον. Ἀπό τά τέσσαρα ποσά κ, t, ε, τ ὁ τόκος τ εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογος πρός τό καθένα ἀπό τά τρία κ, t, ε ὅταν τά ὑπολειπόμενα δύο μένουν σταθερά.

2ον. Τά ποσά κ, t, ε λαμβανόμενα ἀνά δύο εἶναι μεταξύ των ἀντιστρόφως ἀνάλογα, ὅταν τό ὑπολειπόμενον τρίτον καί ὁ τόκος τ μένουν σταθερά.

6.2. Εὕρεσις τοῦ τόκου. Πρόβλημα. Ἕνα κεφάλαιον κ = 8000 δρχ ἐτοκίσθη ἐπί t = 3 ἔτη μέ ἐπιτόκιον ε = 9 . Τί τόκον θά ἀποδώση ;

Ἔστω x δρχ ὁ ζητούμενος τόκος. Διά νά τόν εὕρωμεν, ἐφαρμόζομεν τήν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν πού ἐξηγήσαμεν εἰς τό ἐδ. § 5.2. Ἔχομεν:

	κ	t	τ
1αι ἀντίστοιχοι τιμαί :	100 δρχ	1 ἔτος	9 δρχ
2αι " "	8000 δρχ	3 ἔτη	x δρχ.

Κρατοῦμεν πρῶτα ἀμετάβλητον τό κεφάλαιον τῶν 100 δρχ καί ἔστω y δρχ ὁ τόκος τῶν 100 δρχ διά 3 ἔτη. Ἐπειδή τά δύο συμμεταβλητά ποσά t καί τ εἶναι κατ'εὐθεῖαν ἀνάλογα, θά ἰσχύη ἡ ἀναλογία :

$$\frac{1}{3} = \frac{9}{y} .$$

Ἀπό αὐτήν λαμβάνομεν:

$$1 \cdot y = 9 \cdot 3 \quad , \quad \text{ἤτοι} \quad y = 9 \cdot 3 = 27 \text{ δρχ.}$$

Ὥστε ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν διά 3 ἔτη μέ ἐπιτόκιον 9 % εἶναι 9·3 δρχ.

Κρατοῦμεν τώρα ἀμετάβλητον τόν χρόνον τοκισμοῦ 3 ἔτη καί ἐξετάζομεν τήν ἀλληλεξάρτησιν τῶν δύο ἄλλων συμμεταβλητῶν ποσῶν : τοῦ κεφαλαίου καί τοῦ τόκου.

Ἔχομεν:

	κ	τ
1αι ἀντίστοιχοι τιμαί :	100 δρχ	9·3 δρχ
2αι ἀντίστοιχοι τιμαί :	8000 δρχ	x δρχ.

Ἐπειδή τά συμμεταβλητά ποσά κ καί τ εἶναι κατ'εὐθεῖαν ἀνάλογα, θά ἰσχύη ἡ ἀναλογία :

$$\frac{100}{8000} = \frac{9 \cdot 3}{x} .$$

Ἀπό αὐτήν προκύπτει ἡ ἀκόλουθος ἐξίσωσις διά τόν ζητούμενον τόκον x :

$$100 \cdot x = 8000 \cdot 9 \cdot 3 .$$

Τήν ἐπιλύομεν καί εὑρίσκομεν:

$$x = \frac{8000 \cdot 9 \cdot 3}{100} = 80 \cdot 9 \cdot 3 = 2160 \text{ δρχ.}$$

Γενικῶς ἔχομεν τόν ἀκόλουθον τύπον, τόν ὁποῖον θά ἐφαρμόζωμεν εἰς τά προβλήματα τόκου :

$$\text{(I)} \qquad \tau = \frac{\kappa \cdot \varepsilon \cdot t}{100} \quad , \text{ (t εἰς ἔτη).}$$

Κατά τήν ἐφαρμογήν ὅμως πρέπει νά προσέχωμεν εἰς τό ἑξῆς: Ὅταν ὁ χρόνος τοκισμοῦ δίδεται εἰς μῆνας (μ), θά ἀντικαθιστῶμεν τήν μεταβλητήν t ἔτη μέ τό κλάσμα $\frac{\mu}{12}$ (διότι τό ἔτος ἔχει 12 μῆνας), καί ὅταν χρόνος τοκισμοῦ δίδεται εἰς ἡμέρας (η) , τότε θά ἀντικαθιστῶμεν τό t μέ τό κλάσμα $\frac{\eta}{360}$ (διότι τό λεγόμενον ἐμπορικόν ἔτος ἔχει 360 ἡμέρας). Ἔτσι λαμβάνομεν εἰδικώτερα τούς ἀκολούθους δύο τύπους:

$$\text{(II)} \qquad \tau = \frac{\kappa \cdot \varepsilon \cdot \mu}{1200} \quad , \text{ (χρόνος τοκισμοῦ εἰς μῆνας)}$$

$$\text{(III)} \qquad \tau = \frac{\kappa \cdot \varepsilon \cdot \eta}{36000} \quad , \text{ (χρόνος τοκισμοῦ εἰς ἡμέρας).}$$

<u>6.3.</u> <u>Εὕρεσις τοῦ κεφαλαίου</u>. <u>Πρόβλημα.</u> Ποῖον κεφάλαιον ἐτοκίσθη ἐπί 8 μῆνας πρός 7,5 % καί ἔδωσε τόκον 255 δρχ ; Εἰς τόν τύπον (II) γνωρίζομεν τά ποσά τ = 255 δρχ , ε = 7,5 καί μ = 8 , καί μένει ἄγνωστον τό ποσόν κ. Ἔχομεν λοιπόν διά τό κ τήν πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν

$$255 = \frac{7,5 \cdot 8}{1200} \cdot \kappa$$

τήν ὁποίαν ἐπιλύομεν καί εὑρίσκομεν:

$$\kappa = \frac{1200}{7,5 \cdot 8} \cdot 255 = \frac{150}{7,5} \cdot 255 = 20 \cdot 255 = 5100 \text{ δρχ.}$$

<u>6.4.</u> <u>Εὕρεσις τοῦ χρόνου.</u> <u>Πρόβλημα.</u> Ἐπί πόσον χρόνον εἰς

ἔτη ἐτοκίσθη κεφάλαιον 2500 δρχ πρός 8 % καί ἔφερε τόκον 300 δρχ ;

Εἰς τόν τύπον (Ι) γνωρίζομεν τά ποσά $\tau = 300$ δρχ , $\varepsilon = 8$ καί $\kappa = 2500$ δρχ καί μένει ἄγνωστον τό ποσόν t. Ἔχομεν λοιπόν διά τό t τήν πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν

$$300 = \frac{2500 \cdot 8}{100} \cdot t \,.$$

Τήν ἐπιλύομεν καί εὑρίσκομεν:

$$t = \frac{100}{2500 \cdot 8} \cdot 300 = \frac{300}{25 \cdot 8} = \frac{300}{200} = \frac{3}{2} \text{ ἔτη.}$$

Ὁ ζητούμενος χρόνος ἰσοῦται λοιπόν μέ $1\frac{1}{2}$ ἔτος = 18 μῆνες.

<u>Παρατήρησις</u>. Ἐάν ὁ χρόνος τοκισμοῦ ἐζητεῖτο εἰς μῆνας θά ἐχρησιμοποιοῦμεν τόν τύπον (ΙΙ) μέ $\tau = 300$, $\varepsilon = 8$ καί $\kappa = 2500$, θά εὑρίσκαμεν δέ φυσικά τήν ἰδίαν χρονικήν διάρκειαν τοκισμοῦ:

$$\text{χρόνος τοκισμοῦ εἰς μῆνας} = \frac{1200}{2500 \cdot 8} \cdot 300 = \frac{12 \cdot 3}{2} = 18 \text{ μῆνες.}$$

<u>6.5. Εὕρεσις τοῦ ἐπιτοκίου</u>. Μέ ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθησαν ἐπί 15 μῆνας καί 20 ἡμέρας 5 000 δραχμαί καί ἔφεραν τόκον 705 δρχ ;

Ὁ χρόνος τοκισμοῦ εἰς ἡμέρας εἶναι:

$$360 + 90 + 20 = 470 \text{ ἡμέραι.}$$

Ἑπομένως εἰς τόν τύπον (ΙΙΙ) εἶναι γνωστά τά ποσά $\tau = 705$ δρχ , $\kappa = 5\,000$ δρχ , $\eta = 470$ ἡμέραι καί μένει ὡς ἄγνωστος τό ζητούμενον ποσόν ε. Ἔχομεν λοιπόν διά τό ε τήν πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν

$$705 = \frac{5\,000 \cdot 470}{36\,000}\,\varepsilon \,.$$

Τήν ἐπιλύομεν καί εὑρίσκομεν:

$$\varepsilon = \frac{36\,000}{5000 \cdot 470}\,705 = \frac{36 \cdot 705}{5 \cdot 470} = \frac{36 \cdot 141}{470} = 10{,}8\ \% \,.$$

6.6. <u>Ὑφαίρεσις</u>. Ἡ ἀγοραπωλησία ἑνός ἐμπορεύματος ἠμπορεῖ νά γίνη κατά δύο τρόπους:

1ον <u>τοῖς μετρητοῖς</u> δηλαδή μέ ἄμεσον πληρωμήν τῆς ἀξίας τοῦ ἐμπορεύματος,

ἤ 2ον <u>ἐπί πιστώσει</u> , δηλαδή μέ προθεσμίαν διά τήν πληρωμήν εἴτε ὁλοκλήρου τῆς ἀξίας τοῦ ἐμπορεύματος εἴτε ἑνός μέρους αὐτῆς τό ὁποῖον δέν ἐπληρώθη τοῖς μετρητοῖς.

Ἡ προθεσμία τῆς ἐξοφλήσεως δέν ὑπερβαίνει συνήθως τούς ὀλίγους μῆνας. Ἀντιστοίχως οἱ ἔμποροι χρησιμοποιοῦν δύο διάφορα τιμολόγια: <u>τιμολόγια τοῖς μετρητοῖς</u>, πού εἶναι καί τά εὐθηνότερα, καί <u>τιμολόγια ἐπί πιστώσει</u>, πού εἶναι ἀκριβότερα, διότι ὁ ἔμπορος συνυπολογίζει καί ἕνα τόκον τῆς ἀξίας τοῦ ἐμπορεύματος διά τόν χρόνον τῆς προθεσμίας τῆς πληρωμῆς.

Ὁ ἀγοραστής, πού ἀγοράζει μέ πίστωσιν, ὑπογράφει ἕνα "<u>γραμμάτιον</u>", μέ τό ὁποῖον ἀναλαμβάνει τήν ὑποχρέωσιν νά πληρώση εἰς τόν <u>πιστωτήν</u> του κατά τήν συμφωνημένην ἡμερομηνίαν (<u>λῆξιν</u> τοῦ γραμματίου) τό ποσόν πού ὑπολείπεται πρός πληρωμήν ἀπό τήν ἀξίαν τοῦ ἐμπορεύματος, μαζί μέ τόν τόκον του. Τό συνολικόν αὐτό ποσόν ἀναγράφεται εἰς τό γραμμάτιον καί λέγεται <u>ὀνομαστική ἀξία</u> του. Τό γραμμάτιον παραδίδεται εἰς τόν πιστωτήν.

Συχνά, ἀντί τοῦ γραμματίου, πού τό "ἐκδίδει" ὁ ὀφειλέτης καί τό παραδίδει εἰς τόν πιστωτήν, γίνεται χρῆσις μιᾶς "<u>συναλλαγματικῆς</u>", πού τήν "ἐκδίδει" ὁ πιστωτής καί τήν "ἀποδέχεται" ὁ ὀφειλέτης, μέ τήν ὑπογραφήν του εἰς τό κάτω μέρος τῆς συναλλαγματικῆς ὅπου ἀναγράφεται ἡ λέξις "<u>δεκτή</u>"

Ἡ συναλλαγματική ὅπως καί τό γραμμάτιον μένει εἰς χεῖρας τοῦ πιστωτοῦ.

Ἐάν ὁ κάτοχος ("<u>κομιστής</u>") τοῦ γραμματίου ἤ τῆς συναλλαγματικῆς ἔχη ἀνάγκην ἀπό χρήματα πρό τῆς λήξεώς των , τότε ἠμπορεῖ νά "προεξοφλήση", δηλαδή νά ἐξαργυρώση, τό γραμμάτιον ἤ τήν συναλλαγματικήν πρίν ἀπό τήν λῆξιν των. Αὐτό γίνεται ὡς ἑξῆς:

Ὁ κομιστής τοῦ γραμματίου ἤ τῆς συναλλαγματικῆς τά "ὀπισθογράφει" καί ἔτσι τά μεταβιβάζει εἴτε είς μίαν Τράπεζαν εἴτε εἰς ἕνα τρίτον πρόσωπον , εἰσπράττει δέ τήν ὀνομαστικήν ἀξίαν των μειωμένην κατά τόν τόκον της δι'ὅσας ἡμέρας μεσολαβοῦν μεταξύ τῆς προεξοφλήσεως καί τῆς λήξεως, βάσει ἑνός συμφωνημένου ἐπιτοκίου. Ὁ τόκος αὐτός, τόν ὁποῖον κρατεῖ ἀπό τήν ὀνομαστικήν ἀξίαν εἴτε ἡ Τράπεζα εἴτε τό τρίτον πρόσωπον, λέγεται <u>ἐξωτερική ὑφαίρεσις</u> καί, συντόμως, <u>ὑφαίρεσις</u>. Ἡ διαφορά μεταξύ ὀνομαστικῆς ἀξίας ($A_{ον}$) καί ὑφαιρέσεως (Y) λέγεται <u>παροῦσα ἀξία</u> ($A_{πρ}$) τοῦ γραμματίου ἤ τῆς συναλλαγματικῆς:

$$A_{ον} - Y = A_{πρ} \Longleftrightarrow A_{ον} = A_{πρ} + Y \; .$$

Καταστήματα πού πωλοῦν ἐμπορεύματα μέ "δόσεις", πληρώνονται ἕνα μέρος τῆς ἀξίας των τοῖς μετρητοῖς καί τό ὑπόλοιπον μέ μηνιαίας ἤ δεκαπενθημέρους δόσεις βάσει συναλλαγματικῶν ἤ γραμματίων.

<u>Παράδειγμα.</u> Γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 2 800 δρχ προεξοφλεῖται 96 ἡμέρας πρός τῆς λήξεώς του μέ ἐπιτόκιον 12 %. Νά εὑρεθῆ ἡ παροῦσα ἀξία του.

Ὁ τόκος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας 2800 δρχ διά 96 ἡμέρας μέ ἐπιτόκιον 12 % ἰσοῦται μέ

$$Y = \frac{2800 \cdot 12 \cdot 96}{36\,000} = \frac{28 \cdot 12 \cdot 96}{360} = \frac{28 \cdot 96}{30} = \frac{28 \cdot 32}{10} = 89{,}60 \text{ δρχ.}$$

Ὥστε ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου εἶναι:

$$A_{πρ} = 2800 - 89{,}60 = 2710{,}40 \text{ δρχ.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Πόσον τόκον φέρουν 8550 δρχ , ἐάν τοκισθοῦν ἐπί 1 ἔτος καί 6 μῆνας πρός 12 % ;

2) Ποῖον κεφάλαιον ἐτοκίσθη ἐπί 17 μῆνας πρός 9 % καί ἔφερε τόκον 459 δρχ ;

3) Μέ ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη κεφάλαιον 5700 δρχ ἐπί 108 ἡμέρας καί ἔφερε τόκον 102,60 δρχ ;

4) Ἐπί πόσον χρόνον ἐτοκίσθη κεφάλαιον 15000 δρχ πρός 7,5 % καί ἔφερε τόκον 1875 δρχ ;

5) Ποῖον κεφάλαιον ἐτοκίσθη πρός 11 % ἐπί 1 ἔτος καί ἔγινε μαζί μέ τούς τόκους του 7 795 δρχ ;

Ὑπόδειξις διά τήν λύσιν. Νά παραστήσετε μέ x δρχ τό ζητούμενον κεφάλαιον, ὁπότε ὁ τόκος του θά εἶναι

$$\frac{x \cdot 11 \cdot 1}{100} \text{ δρχ ,}$$

καί, ἀφοῦ γράψετε τήν ἐξίσωσιν διά τό x σύμφωνα μέ τήν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος, νά τήν ἐπιλύσετε.

6) Ποία εἶναι ἡ παροῦσα ἀξία ἑνός γραμματίου ὀνομαστικῆς ἀξίας 3 750 δρχ , τό ὁποῖον προεξοφλεῖται 102 ἡμέρας πρό τῆς λήξεώς του μέ ἐπιτόκιον 8 % ;

7) Ποία εἶναι ἡ ὀνομαστική ἀξία ἑνός γραμματίου πληρωτέου μετά 45 ἡμέρας, ἐάν τοῦτο προεξωφλήθη σήμερον μέ ὑφαίρεσιν 64 δρχ καί ἐπιτόκιον 6 % ;

8) Ἕνα γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 5 800 δρχ πληρωτέον μετά 15 μῆνας προεξοφλεῖται σήμερον ἀντί 5 147,5 δρχ. Νά εὑρεθῇ τό ἐπιτόκιον προεξοφλήσεως.

§ 7. Ἀριθμητικός μέσος ὅρος

7.1 Πρόβλημα 1ον. Ἕνας μαθητής εἶχε τήν παραπλεύρως βαθμολογίαν εἰς τό ἐνδεικτικόν προαγωγῆς του ἀπό τήν Α΄ τάξιν εἰς τήν Β΄ τοῦ γυμνασίου. Νά εὑρεθῇ ὁ ἀριθμητικός μέσος ὅρος (ἀ.μ.ὅ) τῆς βαθμολογίας του.

Θρησκευτικά	17
Ἀρχαῖα Ἑλλ.	16
Νέα Ἑλλην.	18
Μαθηματικά	15
Φυσικά	17
Γεωγραφία	19
Ἱστορία	18
Γαλλικά	16
Γυμναστική	18
Ἰχνογραφία	18
Ὠδική	19
Ἄθροισμα	191

Ὅταν λέγωμεν ἀριθμητικός μέσος ὅρος τῆς βαθμολογίας , ἐννοοῦμεν τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν βαθμῶν ὅλων τῶν μαθημάτων διά τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μαθημάτων.

Ἐπομένως ὁ ζητούμενος ἀριθμητικός μέσος ὅρος εἶναι:

$$191 : 11 = 17\frac{4}{11}.$$

Πρόβλημα 2ον. Τά ὕψη τῆς βροχῆς εἰς χιλιοστόμετρα (mm) κατά τήν διάρκειαν ἑνός ὁλοκλήρου ἔτους ἦσαν εἰς ἕνα τόπον τά ἀκόλουθα ἐπί μίαν πενταετίαν :

Ἔτος	1952	1953	1954	1955	1956
Ὕψος βροχῆς	545	474	686	495	685

Νά εὑρεθῆ τό μέσον ἐτήσιον ὕψος τῆς βροχῆς εἰς τόν τόπον αὐτόν κατά τήν ἀναφερομένην πενταετίαν.

Ὅταν λέγωμεν ὕψος τῆς βροχῆς εἰς ἕνα τόπον κατά τήν διάρκειαν ἑνός ἔτους, ἐννοοῦμεν τό ὕψος εἰς τό ὁποῖον θά ἀνήρχετο ἡ πεσοῦσα βροχή μέσα εἰς ἕνα δοχεῖον μέ ὁριζόντιον βάσιν καί κατακόρυφα πλευρικά τοιχώματα, ἐάν τό συγκεντρούμενον ὕδωρ δέν ἐξητμίζετο.

Προσθέτοντες τά δοθέντα ὕψη καί διαιροῦντες τό ἄθροισμα διά τοῦ ἀριθμοῦ 5 τῶν ἐτῶν εὑρίσκομεν:

$$2885 : 5 = 577 \text{ mm}.$$

Ὥστε τό μέσον ἐτήσιον ὕψος τῆς βροχῆς εἰς τόν τόπον τοῦ προβλήματος κατά τήν πενταετίαν 1952 ἕως 1956 ἦτο 577 mm = = 0,577 m.

Ἀπό τά παραπάνω παραδείγματα συμπεραίνομεν ὅτι ὁ ἀ.μ.ὅ ἀνταποκρίνεται εἰς τό ἀκόλουθον γενικόν πρόβλημα:

Μᾶς δίδονται ν ἀριθμητικαί τιμαί

$$x_1, x_2, \ldots, x_\nu \qquad (\nu \in \Phi)$$

μιᾶς μεταβλητῆς x καί ζητεῖται μία τιμή x_μ τῆς ὁποίας τό γινόμενον μέ τόν ἀριθμόν ν τῶν τιμῶν νά ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν πού ἐδόθησαν:

$$\nu \cdot x_\mu = x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu .$$

Ἀπό τήν σχέσιν αὐτήν προκύπτει ὅτι:

$$x_\mu = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu}{\nu} .$$

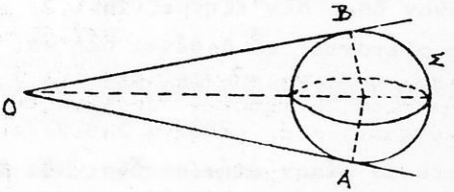
Ἡ τιμή x_μ λέγεται ἀριθμητικός μέσος ὅρος τῶν τιμῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, διότι ἔχει τήν ἰδιότητα νά εἶναι μία ἐνδιάμεσος τιμή (νά κεῖται) μεταξύ τῆς μικροτέρας καί τῆς μεγαλυτέρας ἀπό τάς τιμάς $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ πού ἐδόθησαν. Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἀριθμητικός μέσος ὅρος δύο τιμῶν α καί β ἰσοῦται μέ τό ἡμιάθροισμα $\frac{\alpha+\beta}{2}$ καί ὅτι

$$\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha = \beta - \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ἕνας δρομεύς ἐχρονομετρήθη μέ 4 χρονόμετρα εἰς μίαν διαδρομήν 100 m. Τό πρῶτον χρονόμετρον ἐσημείωσε χρόνον 10,8 sec, τό δεύτερον 11 sec, τό τρίτον 10,9 sec καί τό τέταρτον 10,7 sec. Νά εὑρεθῆ ἡ μέση ἀριθμητική τιμή τῶν ἐνδείξεων τῶν 4 χρονομέτρων.

2) Ἡ γωνία ∢(OA , OB) (βλ. σχῆμα παραπλεύρως) ὑπό τήν ὁποίαν ὁ ὀφθαλμός μας O βλέπει τήν σελήνην (καί γενικῶς, ἕνα σφαιρικόν οὐράνιον σῶμα) λέγεται φαινομένη διάμετρος τῆς σελήνης (καί, γενικῶς, τοῦ οὐρανίου σώματος). Ἐπειδή ἡ ἀπόστασις τῆς σελήνης ἀπό τήν γῆν δέν εἶναι σταθερά, ἡ φαινομένη διάμετρός της μεταβάλλεται: κυμαίνεται μεταξύ μιᾶς ἐλαχίστης τιμῆς 29΄ 24΄΄, πού ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν μεγίστην ἀπόστασιν τῆς σελήνης ἀπό τήν γῆν (ἀπόγειον) καί μιᾶς μεγίστης τιμῆς 33΄28΄΄, πού ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν ἐλαχίστην ἀπόστασιν τῆς σελήνης ἀπό τήν γῆν (περίγειον). Νά εὑρεθῆ ἡ μέση φαινομένη διάμετρος τῆς σελήνης.



3) Ἕνας τεχνητός δορυφόρος τῆς γῆς ἔχει περίγειον (δηλαδή ἐλαχίστην ἀπόστασιν ἀπό τήν ἐπιφάνειαν τῆς γῆς 185) km καί ἀπόγειον (δηλ. μεγίστην ἀπόστασιν ἀπό τήν ἐπιφάνειαν τῆς γῆς). 227 km. Νά εὑρεθῆ ἡ μέση ἀπόστασίς του ἀπό τό κέντρον τῆς γῆς.

4) Μία τάξις ἔχει 40 μαθητάς μέ τά ἀκόλουθα ἀναστήματα εἰς μέτρα (m) :

5 μαθηταί ἔχουν ἀνάστημα 1,52

4	μαθηταί	ἔχουν	ἀνάστημα	1,56
8	"	"	"	1,53
7	"	"	"	1,50
3	"	"	"	1,60
9	"	"	"	1,55
3	"	"	"	1,49
1	μαθητής	ἔχει	"	1,63

Νά εὑρεθῆ τό μέσον ἀνάστημα τῶν μαθητῶν τῆς τάξεως.

5) Ἕνας γεωργός ἔχει τήν ἀκόλουθον ἀπόδοσιν εἰς σῖτον ἀπό τούς τρεῖς ἀγρούς του:

Ἀγρός	Α	ἐκτάσεως	3 στρεμμάτων	, ἀπόδοσις	360 kg
"	Β	"	5 "	, "	750 kg
"	Γ	"	4 "	, "	380 kg

Ποία εἶναι ἡ κατά στρέμμα μέση ἀπόδοσις τῶν τριῶν ἀγρῶν ;

6) Διά τήν χάραξιν ἑνός τοπογραφικοῦ χάρτου ἔγιναν τρεῖς μετρήσεις μέ ὄργανα ἀκριβείας διά νά προσδιορισθῆ ἡ ὁριζόντιος ἀπόστασις δύο σημείων Α καί Β τοῦ ἐδάφους. Τά ἀποτελέσματα τῶν μετρήσεων ἦσαν :

1η	μέτρησις :	2850,80 m
2α	" :	2851,20 m
3η	" :	2847,60 m.

Εἶναι φυσικόν νά δεχθῶμεν ὅτι ὁ ἀ.μ.ὅ. τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν τριῶν μετρήσεων προσεγγίζει καλύτερα τήν πραγματικήν ἀπόστασιν πού ἐμετρήθη. Ποῖος εἶναι αὐτός ;

7) Ἕνας μαθητής εἶχε μ.ὅ. βαθμολογίας εἰς τά Μαθηματικά 14,5 διά τά δύο ἑξάμηνα, ἐνῶ κατά τό πρῶτον ἑξάμηνον εἶχε βαθμόν 13 εἰς τό μάθημα τοῦτο. Νά εὑρεθῆ ὁ βαθμός τοῦ δευτέρου ἑξαμήνου.

§ 8. Μερισμός εἰς μέρη ἀνάλογα πρός δοθέντας ἀριθμούς καί ἐφαρμογαί.

<u>8.1.</u> <u>Πρόβλημα 1ον.</u> Διά τήν ἐκτέλεσιν ἑνός ἔργου εἰργάσθησαν μέ τούς αὐτούς ὅρους τρεῖς ἐργάται ὡς ἑξῆς: Ὁ Α ἐπί 5 ὥρας, ὁ Β ἐπί 6,5 ὥρας καί ὁ Γ ἐπί 7,5 ὥρας. Δι'ὁλόκληρον τήν ἐργασίαν ἔλαβαν οἱ τρεῖς μαζί 323 δρχ. Τί ποσόν ἀναλογεῖ εἰς ἕκαστον ;

Ὅπως εὔκολα ἀντιλαμβανόμεθα, διά νά εἶναι δικαία ἡ διανομή τοῦ ὁλικοῦ ποσοῦ, πρέπει τά μερίδια τῶν τριῶν ἐργατῶν νά εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα πρός τούς ἀντιστοίχους χρόνους ἐργασίας των. Ἄν λοιπόν παραστήσωμεν μέ α δρχ, β δρχ καί γ δρχ τά μερίδια τῶν Α, Ε καί Γ ἀντιστοίχως, θά ἔχωμεν τούς τρεῖς ἴσους λόγους:

$$\frac{\alpha}{5} = \frac{\beta}{6,5} = \frac{\gamma}{7,5} .$$

Σύμφωνα ὅμως μέ τήν ἰδιότητα III) τῶν ἀναλογιῶν (βλ. τέλος ἐδ. § 2.3), ἀπό τήν ἰσότητα τῶν τριῶν αὐτῶν λόγων ἕπεται ὅτι:

$$\frac{\alpha}{5} = \frac{\beta}{6,5} = \frac{\gamma}{7,5} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{5+6,5+7,5} = \frac{323}{19} = 17.$$

Συνεπῶς:

$$\frac{\alpha}{5} = 17 \Longleftrightarrow \alpha = 5 \cdot 17 = 85,00 \text{ δρχ}$$

$$\frac{\beta}{6,5} = 17 \Longleftrightarrow \beta = 6,5 \cdot 17 = 110,50 \text{ δρχ}$$

$$\frac{\gamma}{7,5} = 17 \Longleftrightarrow \gamma = 7,5 \cdot 17 = \underline{127,50 \text{ δρχ}}$$

Ἄθροισμα μεριδίων=323 δρχ.

Διά τήν λύσιν αὐτοῦ τοῦ προβλήματος λέγομεν ὅτι ἐκάμαμεν μερισμόν τοῦ ποσοῦ 323 δρχ εἰς μέρη ἀνάλογα πρός τούς ἀριθμούς 5, 6,5 καί 7,5.

Πρόβλημα 2ον. Τρεῖς αὐτοκινητισταί μετέφεραν: Ὁ Α 3,5 t (τόννους) ἐμπόρευμα εἰς ἀπόστασιν 18 km , ὁ Β 4 t ἐμπόρευμα εἰς ἀπόστασιν 15 km , καί ὁ Γ 2,5 t ἐμπόρευμα εἰς ἀπόστασιν 20 km .

Διά τάς τρεῖς μεταφοράς ἐπληρώθη τό ποσόν 6920 δρχ. Τί ποσόν ἀναλογεῖ εἰς ἕκαστον αὐτοκινητιστήν ;

Ἐδῶ ἡ ἀμοιβή διά τόν κάθε αὐτοκινητιστήν πρέπει νά εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογος πρός τήν ποσότητα τοῦ φορτίου πού μετέφερε, ἄν ἡ ἀπόστασις ἦτο ἡ ἰδία δι' ὅλους, καί πρός τήν ἀπόστασιν τῆς μεταφορᾶς, ἄν τό μεταφερθέν φορτίον ἦτο τό ἴδιον δι' ὅλους. Ἔτσι ἡ μεταφορά 3,5 t εἰς ἀπόστασιν 18 km πρέπει νά θεωρηθῆ ἰσοδύναμος μέ τήν μεταφοράν 1 t εἰς ἀπόστασιν $18\cdot 3,5 = 63$ km ἤ 63 t εἰς ἀπόστασιν 1 km. Ἡ μεταφορά 1 t εἰς ἀπόστασιν 1 km λέγεται χιλιομετρικός τόννος. Εἶναι λοιπόν ὡς ἐάν μετέφεραν :

ὁ Α $3,5\cdot 18 = 63$ χιλιομετρικούς τόννους ,

ὁ Β $4\cdot 15 = 60$ " ,

ὁ Γ $2,5\cdot 20 = 50$ " .

Διά τοῦτο θά κάμωμεν μερισμόν τοῦ ποσοῦ 6920 δρχ εἰς μέρη ἀνάλογα πρός τούς χιλιομετρικούς τόννους (kmt) πού ἀντιστοιχοῦν εἰς κάθε αὐτοκινητιστήν. Ἄς παραστήσωμεν μέ α δρχ, β δρχ καί γ δρχ τά μερίδια τῶν Α, Β καί Γ ἀντιστοίχως. Θά ἔχωμεν

$$\frac{\alpha}{63} = \frac{\beta}{60} = \frac{\gamma}{50} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{63+60+50} = \frac{6920}{173} = 40.$$

Ἑπομένως:

$$\frac{\alpha}{63} = 40 \iff \alpha = 63\cdot 40 = 2520 \text{ δρχ}$$

$$\frac{\beta}{60} = 40 \iff \beta = 60\cdot 40 = 2400 \text{ δρχ}$$

$$\frac{\gamma}{50} = 40 \iff \gamma = 50\cdot 40 = 2000 \text{ δρχ}$$

Ἄθροισμα μεριδίων = 6920 δρχ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Μία κληρονομία 500 000 δρχ πρόκειται νά μοιρασθῆ εἰς τρεῖς κληρονόμους. Ποῖα θά εἶναι τά μερίδιά των,ἄν αὐτά εἶναι ἀνάλογα πρός τάς ἡλικίας των : 13 ἔτη, 18 ἔτη καί 23 ἔτη ;

2) Δύο βοσκοί ἐνοικίασαν ἕνα βοσκότοπον ἀντί 4 000 δρχ δι'ἕν ἔτος μέ τήν συμφωνίαν νά πληρώση ἕκαστος μερίδιον κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογον πρός τόν ἀριθμόν τῶν προβάτων του κατά τήν ἔναρξιν τῆς ἐνοικιάσεως. Ὁ Α εἶχε 80 πρόβατα καί ὁ Β 64. Τί ποσόν θά πληρώση ἕκαστος ;

3) Τρεῖς συνεταῖροι κατέβαλαν διά μίαν κοινήν ἐπιχείρησιν: ὁ Α 50 000 δρχ, ὁ Β 65 000 δρχ καί ὁ Γ 30 000 δρχ. Ἀπό τήν ἐπιχείρησιν ἀπεκόμισαν κέρδος 75 000 δρχ καί τό ἐμοιράσθησαν κατ'ἀναλογίαν τῶν κεφαλαίων πού κατέβαλαν. Ποῖα ἤ-

σαν τά μερίδιά των ;

4) Ένας έπιχειρηματίας ἤρχισε ἐπιχείρησιν μέ ἕνα κεφάλαιον 95 000 δρχ. Τρεῖς μῆνας ὕστερα προσέλαβεν ἕνα συνεταῖρον, ὁ ὁποῖος κατέθεσε διά τήν ἐπέκτασιν τῆς ἐπιχειρήσεως κεφάλαιον 80 000 δρχ. Δύο ἔτη μετά τήν ἔναρξιν τῆς ἐπιχειρήσεως ἐμοιράσθησαν οἱ δύο ἕνα κέρδος 120 000 δρχ κατ' ἀναλογίαν καί πρός τά κεφάλαια πού διέθεσαν καί πρός τά χρονικά διαστήματα κατά τά ὁποῖα τά κεφάλαια αὐτά ἐχρησιμοποιήθησαν. Ποῖα ἦσαν τά μερίδιά των ; (Παράβ. Πρόβλημα 2ον τῆς παραγράφου).

5) Νά μερισθῇ ὁ ἀριθμός 6 390 εἰς μέρη ἀνάλογα πρός τούς ἀριθμούς 2 , 3 , 4 καί 6.

6) Νά μερισθῇ ὁ ἀριθμός 124 000 εἰς μέρη ἀνάλογα πρός τούς ἀριθμούς $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ καί $\frac{1}{5}$. (Ὁ μερισμός αὐτός λέγεται καί "μερισμός τοῦ ἀριθμοῦ 124 000 εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρός τούς ἀριθμούς 2, 3 καί 5").

§ 9. Μείγματα καί κράματα.

9.1. Πρόβλημα 1ον. Ένας οἰνοπώλης ἀνέμειξε 36 kg κρασί τῶν 3,20 δρχ/kg μέ 54 kg κρασί τῶν 4 δρχ/kg. Πόσον τοῦ κοστίζει τό 1 kg τοῦ μείγματος ;

Λύσις. Μετά τήν ἀνάμειξιν θά ἔχῃ 36 + 54 = 90 kg κρασί πού θά κοστίζῃ ἐν ὅλῳ

$$3,20 \cdot 36 + 4 \cdot 54 = 115,20 + 216 = 331,20 \text{ δρχ.}$$

Ἑπομένως 1 kg τοῦ μείγματος τοῦ κοστίζει

$$331,20 : 90 = 3,68 \text{ δρχ.}$$

Ἡ τιμή 3,68 δρχ/kg εἶναι ἡ τιμή μονάδος τοῦ μείγματος καί λέγεται ἀπό μερικούς μέση τιμή τοῦ μείγματος.

Πρόβλημα 2ον. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος μιᾶς ποσότητος α kg ἐλαιολάδου τῶν 25 δρχ/kg πρός τήν ποσότητα σπορελαίου τῶν 15 δρχ/kg τήν ὁποίαν πρέπει νά ἀναμείξωμεν μέ τήν ποσότητα τοῦ ἐλαιολάδου, διά νά ἐπιτύχωμεν τιμήν μονάδος τοῦ μείγματος 23 δρχ / kg ;

Λύσις. Ἔστω x kg ἡ ποσότης τοῦ σπορελαίου πού πρέπει νά ἀναμείξωμεν διά νά ἐπιτύχωμεν τό ζητούμενον. Τό μεῖγμα θά ἔχῃ βάρος

$$(\alpha+x)\ \text{kg}$$

καί συνολικήν ἀξίαν

$$(25\alpha+15x)\ \text{δρχ.}$$

Ἡ τιμή μονάδος τοῦ μείγματος θά εἶναι ἑπομένως:

$$\frac{25\alpha+15x}{\alpha+x}\ \text{δρχ/kg}\ .$$

Αὐτή θέλομεν νά ἰσοῦται μέ 23 δρχ/kg. Ὥστε θά ἔχωμεν διά τόν ἄγνωστον x τήν ἐξίσωσιν

$$\frac{25\alpha+15x}{\alpha+x} = 23.$$

Τήν ἐπιλύομεν μέ τήν γνωστήν μέθοδον (βλ. Κεφ. Β΄, § 5.4-§ 5.5) :

$$\begin{aligned}
\frac{25\alpha+15x}{\alpha+x} = 23 &\iff 25\alpha + 15x = 23\,(\alpha+x)\\
&\iff 25\alpha + 15x = 23\alpha + 23x\\
&\iff 25\alpha - 23\alpha = 23x - 15x\\
&\iff 2\alpha = 8x\\
&\iff x = \frac{2\alpha}{8} = \frac{\alpha}{4}\ \text{kg}
\end{aligned}$$

Ὥστε ὁ ζητούμενος λόγος εἶναι

$$\alpha : x = \alpha : \frac{\alpha}{4} = 4\alpha : \alpha = 4 : 1.$$

Πρέπει λοιπόν νά ἀναμείξωμεν 4 μέρη βάρους ἐλαιολάδου τῶν 25 δρχ/kg μέ 1 μέρος βάρους σπορελαίου τῶν 15 δρχ/kg διά νά ἐπιτύχωμεν τιμήν μονάδος τοῦ μείγματος 23 δρχ/kg.

Τά δύο ἀνωτέρω προβλήματα λέγονται προβλήματα ἀναμείξεως.

9.2. Κράματα. Κράματα ὀνομάζομεν τά σώματα πού προέρχονται ἀπό τήν συγχώνευσιν ἤ σύντηξιν δύο ἤ περισσοτέρων μετάλλων. Ὅταν εἰς ἕνα κρᾶμα εἰσέρχεται πολύτιμον μέταλλον ὅπως χρυσός, λευκόχρυσος (πλατίνα) ἤ ἄργυρος, τότε, διά νά ἐκτιμήσωμεν τήν ἀξίαν τοῦ κράματος, χρησιμοποιοῦμεν τόν λόγον τῆς ποσότητος τοῦ εἰσερχομένου πολυτίμου μετάλλου πρός τήν ποσότητα τοῦ ὅλου κράματος. Ὁ λόγος αὐτός ἐκφράζεται εἰς ποσοστόν ἐπί τοῖς χιλίοις (εἰς χιλιοστά) καί λέγεται τίτλος τοῦ κράματος. Ἔτσι, ὅταν λέγωμεν ὅτι ἕνα ἀργυροῦν νόμισμα ἔχει τίτλον 0,835, ἐννοοῦμεν ὅτι εἰς 1000 gr τοῦ κράματος, ἀπό τό ὁποῖον κατεσκευάσθη τό νόμισμα, τά 835 gr εἶναι καθαρός ἄργυρος καί τά ὑπόλοιπα 1000 - 835 = 165 gr εἶναι εὐτελῆ (εὐθηνά) μέταλλα. Τά προβλήματα ἐπί τῶν κραμάτων εἶναι ὅμοια μέ τά προβλήματα ἐπί τῶν μειγμάτων.

Πρόβλημα 1ον. Συνεχωνεύσαμεν 175 gr χρυσόν τίτλου 0,920 μέ 100 gr χρυσόν τίτλου 0,900. Νά εὑρεθῆ ὁ τίτλος τοῦ νέου κράματος.

Λύσις. Τά 175 gr τίτλου 0,920 περιέχουν καθαρόν χρυσόν

$$0,920 \cdot 175 = 161 \text{ gr}$$

καί τά 100 gr τίτλου 0,900 περιέχουν καθαρόν χρυσόν

$$0,900 \cdot 100 = 90 \text{ gr.}$$

Τό κρᾶμα πού θά προκύψη ἀπό τήν συγχώνευσιν θά ἔχη βάρος

$$175 + 100 = 275 \text{ gr}$$

καί θά περιέχη καθαρόν χρυσόν

$$161 + 90 = 251 \text{ gr.}$$

Ὥστε ὁ τίτλος τοῦ νέου κράματος θά εἶναι:

$$\frac{\text{βάρος χρυσοῦ}}{\text{βάρος κράματος}} = \frac{251}{275} \simeq 0,913 \left(\begin{matrix}\text{μέ προσέγγισιν ἑνός} \\ \text{μισοῦ χιλιοστοῦ}\end{matrix}\right)$$

Πρόβλημα 2ον. Κατά ποῖον λόγον ποσοτήτων πρέπει νά συγχωνεύσωμεν ἄργυρον τίτλου 0,950 μέ ἄλλον ἄργυρον τίτλου 0,800, διά νά ἐπιτύχωμεν νέον κρᾶμα τίτλου 0,835 ;

Λύσις. Ἄς εἶναι α gr μία δεδομένη ποσότης ἀπό τόν ἄργυρον τίτλου 0,950 καί x gr ἡ ἄγνωστος ποσότης ἀπό τόν ἄργυρον τίτλου 0,800 τήν ὁποίαν πρέπει νά συγχωνεύσωμεν μέ τήν δεδομένην πρώτην ποσότητα, διά νά ἐπιτύχωμεν νέον κρᾶμα τίτλου 0,835. Τό βάρος τοῦ νέου κράματος εἶναι

$$(\alpha+x) \text{ gr}$$

καί ἡ περιεκτικότης του εἰς καθαρόν ἄργυρον :

$$(0{,}950\alpha + 0{,}800x) \text{ gr.}$$

Ἄρα ὁ τίτλος τοῦ νέου κράματος εἶναι:

$$\frac{0{,}950\alpha+0{,}800x}{\alpha+x}$$

Αὐτός θέλομεν νά ἰσοῦται μέ 0,835 ὥστε διά τόν ἄγνωστον x θά ἔχωμεν τήν ἐξίσωσιν:

$$\frac{0{,}950\alpha+0{,}800x}{\alpha+x} = 0{,}835$$

Τήν ἐπιλύομεν κατά τά γνωστά:

$$\frac{0{,}950\alpha+0{,}800x}{\alpha+x} = 0{,}835 \Leftrightarrow 0{,}950\alpha+0{,}800x = 0{,}835(\alpha+x)$$

$$\Longleftrightarrow 0{,}950\alpha + 0{,}800x = 0{,}835\alpha + 0{,}835x$$

$$\Longleftrightarrow 0{,}950\alpha - 0{,}835\alpha = 0{,}835x - 0{,}800x$$

$$\Longleftrightarrow 0{,}115\alpha = 0{,}035x$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{0{,}115}{0{,}035}\alpha = \frac{23}{7}\alpha .$$

Ὥστε ὁ ζητούμενος λόγος τῶν ποσοτήτων, τάς ὁποίας πρέπει νά ἀναμείξωμεν ἀπό τά δύο κράματα ἀργύρου , εἶναι

$$\alpha : x = \alpha : \frac{23}{7}\alpha = 7\alpha : 23\alpha = 7 : 23.$$

Μέ ἄλλας λέξεις, πρέπει νά ἀναμείξωμεν 7 μέρη βάρους ἀπό τόν ἄργυρον τίτλου 0,950 μέ 23 μέρη βάρους ἀπό τόν ἄργυρον τίτλου 0,800 , διά νά ἐπιτύχωμεν νέον κρᾶμα τίτλου 0,835.

Πρόβλημα 3ον. Ἀπό τό νέον κρᾶμα τοῦ προηγουμένου προβλήματος κατεσκευάσθη ἕνα κόσμημα πού ζυγίζει 300 gr. Πόσα γραμμάρια περιέχει τό κόσμημα ἀπό τόν ἄργυρον τίτλου 0,950 καί πόσα ἀπό τόν ἄργυρον τίτλου 0,800 ;

Λύσις. Ἄς περιέχη τό κόσμημα α gr ἀπό τό πρῶτον κρᾶμα ἀργύρου καί β gr ἀπό τό δεύτερον.

Σύμφωνα μέ ὅ,τι ηὕραμεν διά τήν σύνθεσιν τοῦ νέου κράματος, θά ἔχωμεν τούς ἴσους λόγους :

$$\frac{\alpha}{7} = \frac{\beta}{23} = \frac{\alpha+\beta}{7+23} = \frac{300}{30} = 10.$$

Ἐπομένως:

$$\frac{\alpha}{7} = 10 \iff \alpha = 7\cdot 10 = 70 \text{ gr}$$

$$\frac{\beta}{23} = 10 \iff \beta = 23\cdot 10 = 230 \text{ gr}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ἕνας οἰνοπώλης ἀνέμειξε 75 kg κρασί τῶν 3,80 δρχ/kg μέ 95 kg τῶν 4,20 δρχ/kg καί 25 kg κρασί τῶν 4,80 δρχ/kg. Νά εὑρεθῇ ἡ τιμή μονάδος τοῦ μείγματος.

2) Κατά ποίαν ἀναλογίαν (δηλαδή, μέ ἀκριβεστέραν μαθηματικήν ἔκφρασιν: κατά ποῖον λόγον ποσοτήτων) πρέπει νά ἀναμείξωμεν ἐλαιόλαδον τῶν 27 δρχ/kg μέ σπορέλαιον τῶν 13 δρχ/kg διά νά ἐπιτύχωμεν μεῖγμα μέ τιμήν μονάδος 22 δρχ/kg;

3) Ἕνας λαδέμπορος ἔχει δύο εἴδη ἐλαιόλαδον: Α καί Β. Ἡ ποιότης Α ἔχει τιμήν 25,50 δρχ/kg καί ἡ Β 23,50 δρχ/kg. Πόσα kg ἀπό κάθε ποιότητα πρέπει νά ἀναμείξῃ ὁ λαδέμπορος, διά νά ἐκτελέσῃ μίαν παραγγελίαν διά 100 kg ἐλαιόλαδον τῶν 25 δρχ/kg ;

4) Ἕνας καφεπώλης ἔχει δύο ποιότητας καφέ : Α τῶν 46 δρχ/kg καί Β τῶν 42 δρχ/kg. Ἀπό τάς δύο αὐτάς ποιότητας ἔκαμε ἕνα μεῖγμα 15 kg τῶν 43 δρχ/kg. Πόσα kg ἀπό κάθε ποιότητα ἀνέμειξε ;

5) Ἕνα βαρέλι ἔχει χωρητικότητα 255 l (λίτρα). Τό γεμίζομεν κατά τά 3/4 μέ κρασί τῶν 3,5 δρχ/kg καί κατά τό 1/4 μέ κρασί τῶν 4,5 δρχ/kg. Πόσον πρέπει νά πωλοῦμεν τό 1 kg τοῦ μείγματος διά νά ἔχωμεν κέρδος 15 % ;

6) Πόσα kg καθαρός χρυσός καί πόσα kg καθαρός χαλκός περιέχονται εἰς ἕνα κρᾶμα ἀπό χρυσόν καί χαλκόν τό ὁποῖον ἔχει τίτλον 0,750 καί ζυγίζει 34,4 kg ;

7) Ἀπό τρία κράματα χρυσοῦ Α, Β, Γ μέ ἀντίστοιχα βάρη 800 gr , 450 gr , 1200 gr καί ἀντιστοίχους τίτλους 0,850 , 0,630 , 0,720 κατεσκευάσθη μέ σύντηξιν ἕνα νέον κρᾶμα. Νά εὑρεθῇ ὁ τίτλος του.

8) Ἕνας χρυσοχόος συνέτηξε δύο κράματα χρυσοῦ Α καί Β κατ' ἀναλογίαν 7 μερῶν βάρους ἀπό τό Α

πρός 3 μέρη βάρους ἀπό τό Β Τό Α εἶχε τίτλον 0,835 καί τό Β 0,950. Νά εὑρεθῇ ὁ τίτλος τοῦ νέου κράματος.

9) Ἔχομεν ἕνα κρᾶμα, βάρους 3,6 kg , ἀπό μόλυβδον καί κασσίτερον (καλάϊ) κατά τήν ἀναλογίαν: 5 μέρη βάρους μόλυβδος πρός 7 μέρη βάρους κασσίτερος. Πόσα kg μόλυβδον πρέπει νά συγχωνεύσωμεν μέ αὐτό τό κρᾶμα διά νά ἐπιτύχωμεν ἐκεῖνο πού χρησιμοποιοῦν οἱ ὑδραυλικοί διά τάς συγκολλήσεις εἰς τάς ὑδραυλικάς ἐγκαταστάσεις ; (Τοῦτο τό κρᾶμα ἀποτελεῖται ἀπό ἴσα μέρη βάρους μολύβδου καί κασσιτέρου).

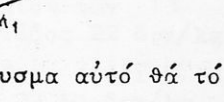
10) Πόσα gr χαλκοῦ πρέπει νά συγχωνεύσωμεν μέ 14,67 gr καθαρόν ἄργυρον διά νά ἐπιτύχωμεν κρᾶμα μέ τίτλον 0,835;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄

Διανύσματα εἰς τό ἐπίπεδον.

§ 1. Ἐφαρμοστά διανύσματα. Ἐλεύθερα διανύσματα.

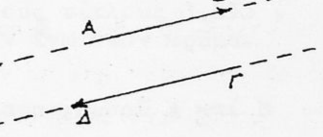
1.1. Εἰς αὐτό τό κεφάλαιον θά μελετήσωμεν τά διανύσματα εἰς τό ἐπίπεδον, ἀφοῦ ἐπαναλάβωμεν, κάπως συστηματικώτερα, ἐκεῖνα πού εἴπαμεν περί διανυσμάτων εἰς τό Βιβλ. ΙΙ, σελ. 1 κ.ἑ. Θεωροῦμεν τό ἐπίπεδον ὡς ἕνα σύνολον Ε σημείων Μ. Τό καρτεσιανόν γινόμενον $E \times E$ ἀποτελεῖται ἀπό τά διατεταγμένα ζεύγη (M_1, M_2) σημείων τοῦ Ε. Ἕκαστον διατεταγμένον ζεῦγος (M_1, M_2) ὁρίζει ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{M_1M_2}$, μέ ἀρχήν τό σημεῖον M_1 καί πέρας τό σημεῖον M_2. Τό διάνυσμα αὐτό θά τό λέγωμεν ἐφαρμοστόν, διά νά τό διακρίνωμεν ἀπό τό ἐλεύθερον διάνυσμα πού θά ὁρίσωμεν παρακάτω.



Διακρίνομεν τά μηδενικά ἐφαρμοστά διανύσματα πού ἔχουν ἀρχήν καί πέρας ταυτιζόμενα (συμπίπτοντα), ὅπως π.χ. τά $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$ τοῦ παραπλεύρως σχήματος, καί τά μή μηδενικά πού ἔχουν ἀρχήν διάφορον ἀπό τό πέρας, ὅπως π.χ. τά $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ καί $\overrightarrow{ZH}$.

Ἕνα μή μηδενικόν ἐφαρμοστόν διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ἔχει φορέα τήν εὐθεῖαν ΑΒ ἡ ὁποία τό "φέρει", ἐπί τῆς ὁποίας δηλαδή κεῖται τά διάνυσμα.

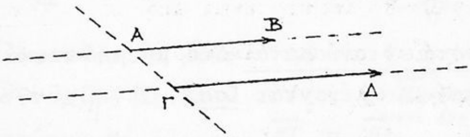
Ἡ διεύθυνσις (βλ. Κεφ. Α΄, τέλος τοῦ § 7.2) τῆς εὐθείας ΑΒ λέγεται καί διεύθυνσις τοῦ διανύσμα-



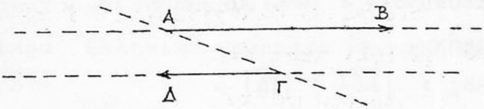
τος $\overrightarrow{AB}$. Δύο μή μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ (βλ. τό ἀνωτέρω σχῆμα) πού ἔχουν τήν ἰδίαν διεύθυνσιν, πού ἑπομένως κεῖνται ἐπάνω εἰς εὐθείας παραλλήλους μέ εὐρεῖαν σημασίαν, λέγονται *παράλληλα* ἤ *συγγραμμικά*.

Ἕνα μηδενικόν διάνυσμα, π.χ. τό AA, δέν ἔχει ὡρισμένον φορέα καί διεύθυνσιν, διά τοῦτο θεωρεῖται συγγραμμικόν μέ *κάθε ἄλλο* διάνυσμα.

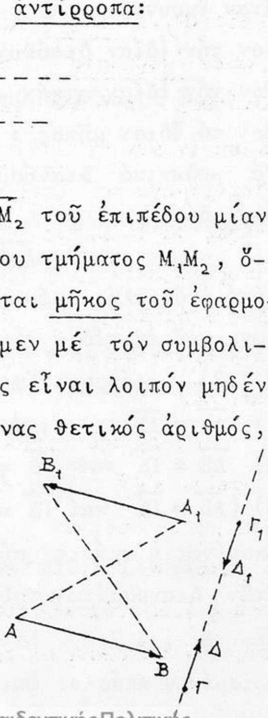
Δύο μή μηδενικά συγγραμμικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ἤ ἔχουν τήν ἰδίαν *φοράν* (κατεύθυνσιν) καί λέγονται *ὁμόρροπα*



ἤ ἔχουν ἀντιθέτους φοράς καί λέγονται *ἀντίρροπα*:

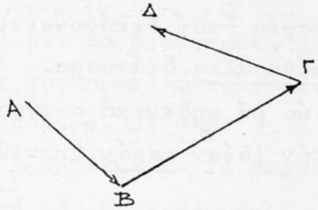


Ἀφοῦ ἐκλέξωμεν δι᾽ ὅλα τά διανύσματα $\overrightarrow{M_1M_2}$ τοῦ ἐπιπέδου μίαν μονάδα μήκους, τό μέτρον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος M_1M_2, ὅταν μετρηθῇ μέ αὐτήν τήν μονάδα, λέγεται *μῆκος* τοῦ ἐφαρμοστοῦ διανύσματος $\overrightarrow{M_1M_2}$ θά τό παριστάνωμεν μέ τόν συμβολισμόν $|\overrightarrow{M_1M_2}|$. Τό μῆκος ἑνός διανύσματος εἶναι λοιπόν μηδέν, ἄν τό διάνυσμα εἶναι μηδενικόν, καί ἕνας θετικός ἀριθμός, ἄν τό διάνυσμα δέν εἶναι μηδενικόν.



Δύο ἐφαρμοστά διανύσματα λέγονται *ἀντίθετα*, ὅταν ἔχουν τήν αὐτήν διεύθυνσιν καί τό αὐτό μῆκος, ἀλλά φοράς ἀντιθέτους. Π.χ. τά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{BA}$ εἶναι ἀντίθετα· ἐπίσης τά $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{A_1B_1}$ ἤ τά $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta_1}$ τοῦ προηγουμένου σχήματος.

Δύο ἤ περισσότερα ἐφαρμοστά διανύσματα πού δίδονται μέ μίαν ὡρισμένην σειράν, λέγονται <u>διαδοχικά</u>, ὅταν συμπίπτη τό πέρας τοῦ 1ου μέ τήν ἀρχήν τοῦ 2ου, τό πέρας τοῦ 2ου μέ ἀρχήν τοῦ 3ου, τό πέρας τοῦ 3ου μέ τήν ἀρχήν τοῦ 4ου κ.ο.κ. Π.χ. τά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ μέ αὐτήν τήν σειράν εἶναι διαδοχικά.



<u>1.2. Ἴσα ἐφαρμοστά διανύσματα.</u> Δύο μή μηδενικά ἐφαρμοστά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται <u>ἴσα</u>: ομόρροπως ίσα

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta},$$

ὅταν ἔχουν:

1ον τήν ἰδίαν διεύθυνσιν : εὐθ. AB ∥ εὐθ. ΓΔ ,

2ον τήν ἰδίαν φοράν ,

3ον τό ἴδιον μῆκος : $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{\Gamma\Delta}|$.

Τά μηδενικά διανύσματα εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ ἴσα μεταξύ των ἀνά δύο:

$$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}, \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Αὐτή ἡ διμελής σχέσις ἰσότητος μεταξύ ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας (βλ. Κεφ. Α΄, § 7.2)· πράγματι ἔχει τάς τρεῖς ἰδιότητας:

1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$, ἀνακλαστικήν ,

2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Longrightarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AB}$, συμμετρικήν ,

3) $(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{ZH}) \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ZH}$, μεταβατικήν .

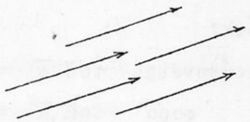
Επομένως ἡ σχέσις αὐτή διαμερίζει τό σύνολον τῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου εἰς <u>κλάσεις</u> <u>ἰσοδυναμίας</u> (βλ. Κεφ. Β΄ , § 7.2). Κάθε ἐφαρμοστόν διάνυσμα ἀνήκει εἰς μίαν ὡρισμένην κλάσιν: ἐκείνην πού ἀποτελεῖται ἀπό τά ἐφαρμοστά

σχέσις

διανύσματα τά ἴσα μέ τό θεωρούμενον διάνυσμα. Δύο ἄνισα ἐφαρμοστά διανύσματα ἀνήκουν εἰς διαφορετικάς κλάσεις, αἱ ὁποῖαι εἶναι σύνολα ξένα μεταξύ των. Τά μηδενικά διανύσματα ἀποτελοῦν μίαν κλάσιν ἰσοδυναμίας. Επαν σελ. 74.

1.3. Ἐλεύθερα διανύσματα. Προχωροῦμεν τώρα εἰς τούς ἀκολούθους ὁρισμούς.

Δύο ἴσα ἐφαρμοστά διανύσματα λέγομεν ὅτι ὁρίζουν ἤ ἀντιπροσωπεύουν ἕνα καί τό αὐτό <u>ἐλεύθερον διάνυσμα</u>.



Πέντε ἐφαρμοστά διανύσματα ἀντιπροσωπευτικά ἑνός ἐλευθέρου διανύσματος.

Ὥστε ὅλα τά διανύσματα μιᾶς κλάσεως ἰσοδυναμίας ὁρίζουν ἤ ἀντιπροσωπεύουν τό ἴδιον ἐλεύθερον διάνυσμα. Τά ἐλεύθερα διανύσματα θά τά συμβολίζωμεν μέ μικρά Ἑλληνικά γράμματα ἐπιγραμμισμένα μέ ἕνα βέλος:

$$\vec{\alpha}\ ,\ \vec{\beta}\ ,\ \vec{\gamma}\ ,\ \text{κ.ο.κ.}$$

Εἰδικῶς τό μηδενικόν ἐλεύθερον διάνυσμα, δηλαδή ἐκεῖνο πού ἀντιπροσωπεύεται ἀπό τήν κλάσιν τῶν μηδενικῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων, θά τό συμβολίζωμεν μέ $\vec{0}$.

Διά νά δηλώσωμεν ὅτι τό ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ὁρίζεται ἤ ἀντιπροσωπεύεται ἀπό τό ἐφαρμοστόν $\overrightarrow{AB}$, θά γράφωμεν :

$$\vec{\alpha} = \overrightarrow{AB} \qquad \text{ἤ} \qquad \overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}\ .$$

Δύο ἐλεύθερα διανύσματα $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ εἶναι <u>ἴσα:</u>

$$\vec{\alpha} = \vec{\beta}\ ,$$

ὅταν καί μόνον ὅταν ἀντιπροσωπεύωνται ἀπό τήν ἰδίαν κλάσιν ἰσοδυναμίας, μέ ἄλλους λόγους ἀπό δύο ἴσα μεταξύ των ἐφαρμοστά διανύσματα.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἕνα ἐλεύθερον διάνυσμα δέν ἔχει οὔτε ὡρισμένον φορέα οὔτε ὡρισμένην ἀρχήν ἤ πέρας· ἐάν ὅμως δέν εἶναι τό $\vec{0}$, τότε ἔχει ὡρισμένην διεύθυνσιν, φοράν καί μῆκος : τήν κοινήν διεύθυνσιν, τήν κοινήν φοράν καί τό κοινόν μῆκος τῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τά ὁποῖα τό ἀντιπροσωπεύουν. Μέ ἄλλους λόγους ἐάν

$$\vec{\alpha} \neq \vec{0} \quad \text{καί} \quad \vec{\alpha} = \overrightarrow{AB},$$

τότε:

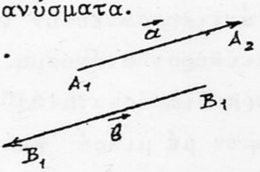
διεύθυνσις τοῦ $\vec{\alpha}$ = διεύθυνσις τοῦ $\overrightarrow{AB}$,

φορά τοῦ $\vec{\alpha}$ = φορά τοῦ $\overrightarrow{AB}$

καί μῆκος $|\vec{\alpha}|$ τοῦ $\vec{\alpha}$ = $|\overrightarrow{AB}|$.

Δύο ἐλεύθερα διανύσματα λέγονται <u>ἀντίθετα</u> , ὅταν ἀντιπροσωπεύωνται ἀπό δύο ἀντίθετα ἐφαρμοστά διανύσματα.

Τό ἀντίθετον τοῦ $\vec{\alpha}$ παριστάνεται μέ $-\vec{\alpha}$.

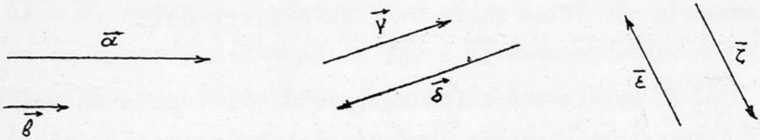


Δύο ἐλεύθερα διανύσματα $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$, πού ἀντιπροσωπεύονται ἀντιστοίχως ἀπό τά ἐφαρμοστά $\overrightarrow{A_1A_2}$ καί $\overrightarrow{B_1B_2}$, λέγονται <u>συγγραμμικά</u>, ὅταν τά $\overrightarrow{A_1A_2}$ καί $\overrightarrow{B_1B_2}$ εἶναι συγγραμμικά.

Λόγος $\frac{\vec{\alpha}}{\vec{\beta}}$ ἑνός ἐλευθέρου διανύσματος $\vec{\alpha}$ πρός ἕνα συγγραμμικόν τον $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ ὁ λόγος $\frac{\overrightarrow{A_1A_2}}{\overrightarrow{B_1B_2}}$ δύο ἀντιστοίχων ἀντιπροσωπευτικῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων. Ὁ λόγος αὐτός εἶναι ἕνας σχετικός ἀριθμός πού ἔχει ἀπόλυτον τιμήν τό πηλίκον

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| : |\overrightarrow{B_1B_2}|$$

τῶν μηκῶν τῶν $\overrightarrow{A_1A_2}$ καί $\overrightarrow{B_1B_2}$ (μηκῶν πού μετρήθηκαν μέ τήν ἰδίαν μονάδα μήκους) καί πρόσημον τό + , ἐάν τά $\overrightarrow{A_1A_2}$ καί $\overrightarrow{B_1B_2}$ εἶναι ὁμόρροπα, τό − , ἐάν τά $\overrightarrow{A_1A_2}$ καί $\overrightarrow{B_1B_2}$ εἶναι ἀντίρροπα.



Π.χ. εἰς τό ἀνωτέρω σχῆμα ἔχομεν:

$$\frac{\vec{\alpha}}{\vec{\beta}} = +3 \quad , \quad \frac{\vec{\gamma}}{\vec{\delta}} = -\frac{2}{3} \quad , \quad \frac{\vec{\varepsilon}}{\vec{\zeta}} = -1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά δείξετε ὅτι διά δύο ὁποιαδήποτε ἐφαρμοστά διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου ἰσχύει ἡ λογική ἰσοδυναμία:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \iff \overrightarrow{AB} \text{ ἀντίθετον τοῦ } \overrightarrow{\Delta\Gamma}.$$

2) Νά χαράξετε δύο <u>ἀντίθετα</u> ἐφαρμοστά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{A_1B_1}$ ἐπάνω εἰς τόν ἴδιον φορέα καί νά δείξετε ὅτι τό μέσον Ο τοῦ τμήματος ΑΑ συμπίπτει μέ τό μέσον τοῦ τμήματος ΒΒ. Ἀπό αὐτό νά συμπεράνετε ὅτι τό σχῆμα πού ἀποτελεῖται ἀπό τά δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{A_1B_1}$ ἔχει κέντρον συμμετρίας τό Ο.

3) Νά χαράξετε δύο <u>ἀντίθετα</u> διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{A_1B}$ μέ διαφορετικούς φορεῖς καί νά ἐπαληθεύσετε ὅτι τό σημεῖον Α εἶναι συμμετρικόν τοῦ A_1 καί τό Β συμμετρικόν τοῦ B_1 ὡς πρός τό σημεῖον τομῆς Ο τῶν τμημάτων AA_1 καί BB_1. Πῶς ἕπεται ἡ ἰδιότης αὐτή εἴτε ἀπό ὅσα ἐμάθατε περί συμμετρίας ὡς πρός σημεῖον (Βιβλ. Ι , σελ. 96-100Β) εἴτε ἀπό ὅσα γνωρίζετε περί παραλλήλων εὐθειῶν (Βιβλ. Ι, σελ. 97-98 Α) καί περί ἰσότητος τριγώνων (Βιβλ. Ι , σ. 50 Γ) ;

4) Ἀπό τάς ἀσκήσεις 2) καί 3) νά συμπεράνετε τό ἑξῆς Ἐάν $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{A_1B_1}$ εἶναι ἀντίθετα διανύσματα , τότε μία στροφή τοῦ $\overrightarrow{AB}$ περί τό σημεῖον Ο κατά γωνίαν 180^0 (Βιβλ. Ι, σ. 121Γ) θά φέρῃ τό $\overrightarrow{AB}$ εἰς σύμπτωσιν μέ τό $\overrightarrow{A_1B_1}$.

5) Νά χαράξετε δύο ἴσα ἐφαρμοστά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$

επάνω εἰς τόν ἴδιον φορέα καί νά δείξετε ὅτι:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Longleftrightarrow \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$$

6) Νά χαράξετε δύο ἴσα ἐφαρμοστά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ μέ διαφορετικούς φορεῖς καί νά ἐπαληθεύσετε ὅτι τότε $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$. Πῶς ἕπεται ἡ ἰδιότης αὐτή εἴτε ἀπό ὅσα γνωρίζετε περί παραλληλογράμμων (Βιβλ. I , σελ. 100 Β) εἴτε ἀπό ὅσα ἐμάθατε περί παραλλήλων εὐθειῶν καί περί ἰσότητος τριγώνων ;

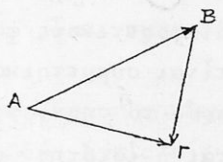
7) Ἀπό τάς ἀσκήσεις 5) καί 6) νά συμπεράνετε τό ἑξῆς: Ἐάν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε μία παράλληλος μετατόπισις (Βιβλ. I , σ. 118Γ) τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ κατά τό διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ θά φέρῃ τό $\overrightarrow{AB}$ εἰς σύμπτωσιν μέ τό $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

8) Δύο διάφορα σημεῖα Α καί Α΄ εἶναι συμμετρικά μεταξύ των ὡς πρός τό σημεῖον Ο. Νά εὕρετε τούς λόγους:

$$\frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}}\ ,\quad \frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{AA'}}\ ,\quad \frac{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{OA'}}\ ,\quad \frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{AO}}$$

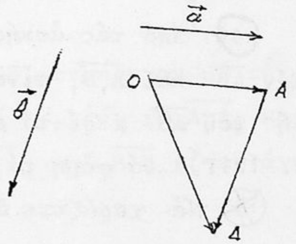
§ 2. Πρόσθεσις διανυσμάτων.

2.1. Πρόσθεσις δύο ἐλευθέρων διανυσμάτων.



Ἄθροισμα δύο διαδοχικῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{B\Gamma}$ λέγεται τό διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ πού ἔχει ἀρχήν τήν ἀρχήν τοῦ 1ου διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ καί πέρας τό πέρας τοῦ 2ου διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ καί πέρας τό πέρας τοῦ 2ου $\overrightarrow{B\Gamma}$. (Παραβ. Βιβλ. II, σ. 3).

Ἀπό τόν ὁρισμόν αὐτόν προχωροῦμεν τώρα εἰς τόν ἀκόλουθον .



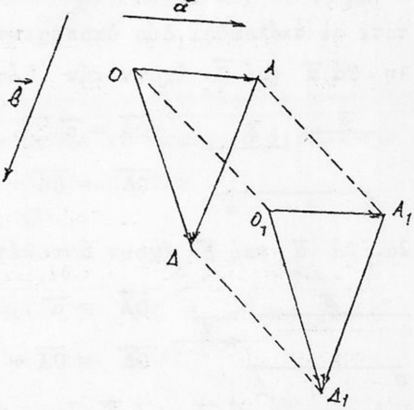
Ἄς εἶναι $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ δύο ἐλεύθερα διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου (σχῆμα παραπλεύρως). Μέ ἀρχήν ἕνα σημεῖον Ο τοῦ ἐπιπέδου κατασκευάζομεν τό ἐφαρμοστόν διάνυσμα

$\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, ἀκολούθως μέ ἀρχήν τό πέρας Α τοῦ $\overrightarrow{OA}$ κατασκευάζομεν τό ἐφαρμοστόν διάνυσμα $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}$. Τό διάνυσμα $\overrightarrow{O\Delta}$, πού εἶναι ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ καί $\overrightarrow{A\Delta}$, ὁρίζει ἕνα ἐλεύθερον **διάνυσμα** $\vec{\delta}$. Αὐτό τό $\vec{\delta}$ εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ τό <u>ἄθροισμα</u> τοῦ $\vec{\alpha}$ μέ τό $\vec{\beta}$ · γράφομεν συμβολικῶς:

$$\vec{\delta} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} .$$

Ὥστε, ἄθροισμα δύο ἐλευθέρων διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ εἶναι τό ἐλεύθερον διάνυσμα πού ὁρίζεται ἀπό τό ἄθροισμα δύο διαδοχικῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τά ὁποῖα ἀντιπροσωπεύουν ἀντιστοίχως τά $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$.

<u>Παρατήρησις 1</u>. Εἶναι εὔκολον νά βεβαιωθῶμεν ὅτι τό ἄθροισμα $\vec{\delta} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ δέν μεταβάλλεται, ἄν ἀλλάξωμεν τό σημεῖον Ο ἀπό τό ὁποῖον ἀναχωροῦμεν, διά νά χαράξωμεν τά διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ καί $\overrightarrow{A\Delta}$ πού ἀντιπροσωπεύουν τά $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ ἀντιστοίχως.



Πράγματι, ἄν ἀντί τοῦ Ο λάβωμεν ὡς ἀφετηρίαν ἕνα ἄλλο σημεῖον O_1 (σχῆμα παραπλεύρως), θά ἔχωμεν νά χαράξωμεν τά διανύσματα $\overrightarrow{O_1A_1} = \vec{\alpha}$ καί $\overrightarrow{A_1\Delta_1} = \vec{\beta}$. Θά ἰσχύουν λοιπόν αἱ ἰσότητες:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O_1A_1} \quad , \quad \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{A_1\Delta_1}$$

ἄρα (βλ. προηγουμένας Ἀσκήσεις 5) ἕως 7)) καί αἱ :

$$\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{\Delta\Delta_1} .$$

Ἐπομένως, ἄν ἀποτυπώσωμεν ἐπί διαφανοῦς χάρτου τό σχῆμα πού ἀποτελεῖται ἀπό τά $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{A\Delta}$ καί $\overrightarrow{O\Delta}$ καί ὑποβάλωμεν τό ἀποτύπωμα εἰς μίαν παράλληλον μετατόπισιν (βιβλ. Ι, σ.

64΄- 66 Γ) κατά τό διάνυσμα OO_1 , τότε τό ἀποτύπωμα αὐτό θά ἔλθη νά συμπέση μέ τό σχῆμα πού ἀποτελεῖται ἀπό τά $\overrightarrow{O_1A_1}$, $\overrightarrow{A_1\Delta}_1$ καί $\overrightarrow{O_1\Delta_1}$.

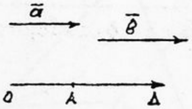
Συνεπῶς ἰσχύει ἡ ἰσότης

$$\overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{O_1\Delta_1}\,.$$

ἀπό αὐτήν ὅμως ἕπεται ὅτι τό ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\delta}$, πού ὁρίζεται ἀπό τό ἐφαρμοστόν $\overrightarrow{O\Delta}$, εἶναι τό ἴδιον μέ ἐκεῖνο πού ὁρίζεται ἀπό τό $\overrightarrow{O_1\Delta}$

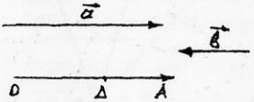
<u>Παρατήρησις 2.</u> Ὁ προηγούμενος ὁρισμός τοῦ ἀθροίσματος δύο ἐλευθέρων διανυσμάτων εἶναι γενικός· ἰσχύει καί εἰς τήν περίπτωσιν πού τά δύο ἐλεύθερα διανύσματα $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ εἶναι συγγραμμικά (ἔχουν τήν ἰδίαν διεύθυνσιν). Παρουσιάζονται τότε αἱ ἀκόλουθοι δύο ὑποπεριπτώσεις:

1η. Τά $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ ἔχουν τήν ἰδίαν φοράν



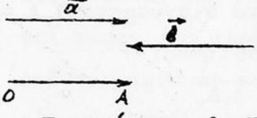
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} \;,\quad \overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta} \\ \overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{A\Delta} \end{array}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{O\Delta} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

2α. Τά $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ ἔχουν ἀντιθέτους φοράς :



$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} \;,\quad \overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta} \\ \overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{A\Delta} \end{array}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{O\Delta} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

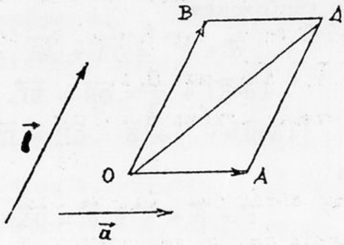
Εἰδικῶς, ἄν τά $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ εἶναι ἀντίθετα, τότε:



$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} \;,\quad \overrightarrow{AO} = \vec{\beta} \\ \overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AO} \end{array}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{OO} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{O}.$$

<u>Παρατήρησις 3.</u> Τά ἐλεύθερα διανύσματα $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ ἄς εἶναι μή συγγραμμικά. Τό ἄθροισμά των $\vec{\delta} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ ἀντιπροσωπεύεται ἀπό τό ἐφαρμοστόν διάνυσμα $\overrightarrow{O\Delta}$ πού εἶναι ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ καί $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}$. Ἐάν ἀπό τό σημεῖον O ὡς ἀρχήν χαράξωμεν καί τό διάνυσμα

$\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$, θά παρατηρήσωμεν ὅτι σχηματίζεται ἕνα παραλληλόγραμμον ΟΑΔΒ. Αὐτοῦ τοῦ παραλληλογράμμου ἡ διαγώνιος $\overrightarrow{O\Delta}$ πού ἀναχωρεῖ ἀπό τήν κοινήν ἀρχήν Ο τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ καί $\overrightarrow{OB}$ συμπίπτει μέ τό ἄθροισμα $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{A\Delta}$.



Ὥστε μέ τήν χάραξιν αὐτῆς τῆς διαγωνίου ἔχομεν ἕνα δεύτερον τρόπον νά εὑρίσκωμεν τό ἄθροισμα δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ (ὅταν $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$). Ὁ τρόπος αὐτός λέγεται <u>κανών τοῦ παραλληλογράμμου</u> καί συμβολίζεται μέ τήν γραφήν:

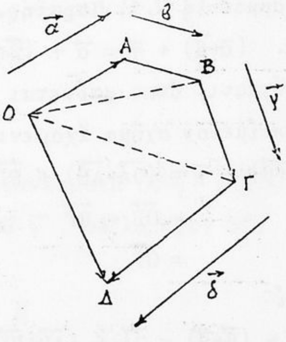
$$\overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} .$$

2.2. Ἄθροισμα τριῶν ἤ περισσοτέρων ἐλευθέρων διανυσμάτων.

Ἔστω ὅτι δίδονται εἰς τό ἐπίπεδον τά ἐλεύθερα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{\delta}$. Ὀνομάζομεν ἄθροισμά των

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta}$$

τό ἐλεύθερον διάνυσμα πού προκύπτει ἀπό τάς ἀκολούθους τρεῖς προσθέσεις δύο διανυσμάτων κάθε φοράν: Προσθέτομεν εἰς τό 1ον διάνυσμα $\vec{\alpha}$ τό 2ον $\vec{\beta}$, εἰς τό ἄθροισμά των $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$ τό 3ον διάνυσμα $\vec{\gamma}$ καί εἰς τό προκῦπτον νέον ἄθροισμα τό 4ον $\vec{\delta}$:



$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta} = [(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma}] + \vec{\delta} .$$

Διά νά κατασκευάσωμεν αὐτό τό ἄθροισμα, λαμβάνομεν, ὅπως φαίνεται εἰς τό ἀνωτέρω σχῆμα:

$$\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} \quad , \quad \overrightarrow{AB} = \vec{\beta} \quad , \quad \overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\gamma} \quad , \quad \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \vec{\delta}$$

καί εὑρίσκομεν:

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

$$(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{O\Gamma}$$

$$[(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}] + \vec{\delta} = \overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{O\Delta}$$

Ἄρα

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta} = \overrightarrow{O\Delta} .$$

Διά νά προσθέσωμεν λοιπόν τρία ἤ περισσότερα ἐλεύθερα διανύσματα πού δίδονται μέ μίαν ὡρισμένην σειράν κατασκευάζομεν μίαν ἀντίστοιχον σειράν ἀπό διαδοχικά ἐφαρμοστά διανύσματα ἀντιπροσωπευτικά τῶν δοθέντων ἐλευθέρων. Τό ἐφαρμοστό διάνυσμα, πού ἔχει ἀρχήν τήν ἀρχήν τοῦ πρώτου ἐφαρμοστοῦ καί πέρας τό πέρας τοῦ τελευταίου ἐφαρμοστοῦ, ἀντιπροσωπεύε τότε τό ζητούμενον ἄθροισμα.

2.3. Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως.

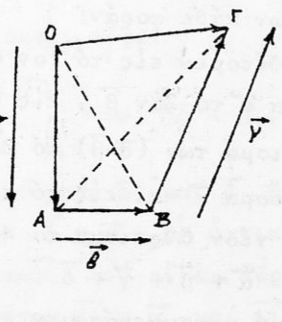
1η $\quad \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$, ἀντιμεταθετικότης.

Ἡ ἰδιότης αὐτή ἕπεται ἀμέσως ἀπό τόν κανόνα τοῦ παραλληλογράμμου (§ 2.1, Παρατήρ. 3).

2α. $\quad (\vec{\alpha}+\vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta}+\vec{\gamma})$, προσεταιριστικότης.

Πράγματι, ὅπως φαίνεται εἰς τό παρακείμενον σχῆμα ἔχομεν:

$$(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) + \vec{\gamma} = (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{O\Gamma}$$



καί

$$\vec{\alpha} + (\vec{\beta}+\vec{\gamma}) = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{O\Gamma}$$

Ἀπό τάς δύο αὐτάς ἰδιότητας καί ἀπό τόν ὁρισμόν τοῦ ἀθροίσματος τριῶν ἤ περισσοτέρων ἐλευθέρων διανυσμάτων ἕπονται γενικώτερον αἱ ἀκόλουθοι δύο ἰδιότητες:

I) Ἕνα ἄθροισμα ἐλευθέρων διανυσμάτων δέν μεταβάλλεται, ἄν ἀλλάξωμεν τήν σειράν τῶν προσθετέων διανυσμάτων. Π.χ.

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha} + \vec{\delta} + \vec{\gamma} = \vec{\gamma} + \vec{\alpha} + \vec{\delta} + \vec{\beta}.$$

II) Ἕνα ἄθροισμα ἐλευθέρων διανυσμάτων δέν μεταβάλλεται, ἄν ἀντικαταστήσωμεν δύο ἤ περισσότερα διανύσματα μέ τό ἄθροισμά των. Ἀντιστρόφως, ἠμποροῦμεν νά ἀντικαταστήσωμεν ἕνα προσθετέον διάνυσμα μέ δύο ἤ περισσότερα διανύσματα πού τό ἔχουν ὡς ἄθροισμα.

Π.χ.

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\delta}) + \vec{\gamma}$$

καί

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2 \quad , \text{ ἐάν } \quad \vec{\beta} = \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2$$

3η. <u>Τό μηδενικόν ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{0}$ εἶναι οὐδέτερον στοιχεῖον εἰς τήν πρόσθεσιν ἐλευθέρων διανυσμάτων:</u>

$$\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha} = \vec{0} + \vec{\alpha}.$$

Πράγματι, ἔστω $\vec{\alpha} = \overrightarrow{OA}$. Ὡς ἀντιπροσωπευτικόν ἐφαρμοστόν διάνυσμα διά τό $\vec{0}$ ἠμποροῦμεν νά λάβωμεν τό $\overrightarrow{AA}$. Θά ἔχωμεν τότε

$$\vec{\alpha} + \vec{0} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} \quad .$$

4η <u>Ἰδιότης τῆς διαγραφῆς:</u>

$$\vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\gamma} \Longrightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}.$$

Πράγματι, ἄν εἰς τά ἴσα ἐξ ὑποθέσεως διανύσματα $(\vec{\alpha}+\vec{\gamma})$ καί $(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ προσθέσωμεν τό $-\vec{\gamma}$, ἀντίθετον τοῦ $\vec{\gamma}$, θά λάβωμεν δύο νέα ἴσα διανύσματα. Εἶναι ὅμως:

$$(\vec{\alpha}+\vec{\gamma}) + (-\vec{\gamma}) = \vec{\alpha} + [\gamma + (-\vec{\gamma})] = \vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$$

καί

$$(\vec{\beta}+\vec{\gamma}) + (-\vec{\gamma}) = \vec{\beta} + [\vec{\gamma} + (-\vec{\gamma})] = \vec{\beta} + \vec{0} = \vec{\beta}.$$

Ἄρα

$$\vec{\alpha} = \vec{\beta} \quad .$$

<u>Παρατήρησις</u>. Ἄν συνδυάσωμεν τήν ἀνωτέρω λογικήν σχέσιν μέ τήν:

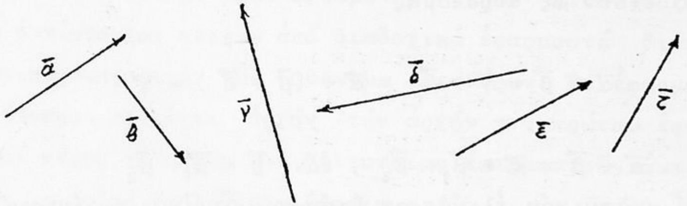
$$\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Longrightarrow \vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\gamma},$$

θά λάβωμεν τήν ἰσοδυναμίαν:

$$\vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\gamma} \Longleftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

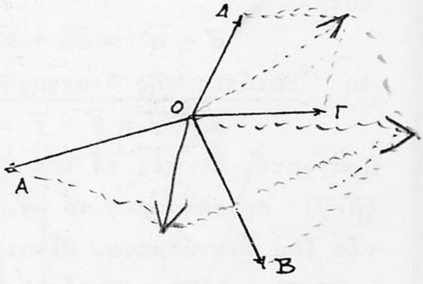
1) Δίδονται τά κατωτέρω ἐλεύθερα διανύσματα:



Ἀφοῦ τά ἀποτυπώσετε ὅλα μαζύ ἐπάνω εἰς τό ἴδιον διαφανές, νά εὕρετε ἐπάνω εἰς αὐτό τά ἀκόλουθα ἀθροίσματα:

$\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\vec{\alpha} + \vec{\gamma}$, $\vec{\beta} + \vec{\delta}$, $\vec{\gamma} + \vec{\varepsilon} + \vec{\zeta}$, $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\zeta} + \vec{\delta}$.

2) Νά εὕρετε μέ τόν κανόνα τοῦ παραλληλογράμμου τό ἄθροισμα τῶν τεσσάρων διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O\Gamma}$, $\overrightarrow{O\Delta}$ τοῦ παρακειμένου σχήματος.
(Θά ἀποτυπώσετε τό σχῆμα ἐπάνω εἰς διαφανές καί θά τό μεταφέρετε εἰς τό τετράδιόν σας).
Μέ τόν ἴδιον τρόπον νά εὕρετε τά ἀθροίσματα:

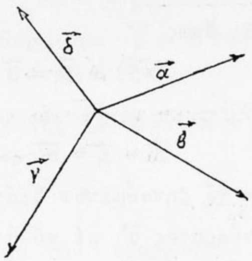


1ον $\overrightarrow{O\Delta} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}$, 2ον $\overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Delta} + \overrightarrow{OB}$.

Τί ἔχετε νά παρατηρήσετε ἀπό τήν σύγκρισιν τῶν τριῶν ἀποτελεσμάτων;

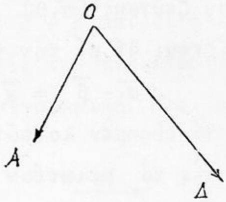
3) Νά εὕρετε τό ἄθροισμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta}$ τῶν εἰς τήν ἐπομένην σελίδα διανυσμάτων μέ τόν κανόνα πού διετυπώθη εἰς τό

τέλος τοῦ § 2.2.
(Νά κάμετε πάλιν ἀποτύπωσιν τοῦ σχήματος ἐπάνω εἰς διαφανές).



Ἡ πρόσθεσις τῶν διανυσμάτων νά γίνῃ καί μέ διαφορετικήν σειράν τῶν προσθετέων, π.χ. μέ τήν : $\vec{\alpha} + \vec{\delta} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$
Τί παρατηρεῖτε ;

4) Εἰς τό σχῆμα παραπλεύρως τό $\overline{ΟΔ}$ εἶναι ἄθροισμα τοῦ διανύσματος $\overline{ΟΑ}$ καί ἑνός ἄλλου μέ ἀρχήν τό Ο. Νά κατασκευάσετε τό διάνυσμα τοῦτο.



5) Δύο ἐφαρμοστά διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ καί $\overrightarrow{OB}$ ἔχουν ἴσα μήκη. Νά δείξετε ὅτι τό διάνυσμα $\overrightarrow{OΔ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ ἔχει φορέα τήν διχοτόμον τῆς γωνίας $\sphericalangle$ (ΟΑ, ΟΒ).

§ 3. Ἀφαίρεσις διανυσμάτων.

3.1. Διαφορά δύο ἐλευθέρων διανυσμάτων. Εἰς τήν ἀφαίρεσιν δίδονται δύο ἐλεύθερα διανύσματα: ἕνα πρῶτον $\vec{\alpha}$ (μειωτέον διάνυσμα) καί ἕνα δεύτερον $\vec{\beta}$ (ἀφαιρετέον διάνυσμα), ζητεῖται δέ ἕνα τρίτον διάνυσμα $\vec{x}$ διά τό ὁποῖον νά ἀληθεύῃ ἡ σχέσις :

$$\vec{\beta} + \vec{x} = \vec{\alpha}.$$

Διά νά τό εὕρωμεν, ἐργαζόμεθα ὅπως καί εἰς τήν ἀφαίρεσιν σχετικῶν ἀριθμῶν (Κεφ. Γ΄, § 1.4.) : προσθέτομεν καί εἰς τά δύο μέλη τῆς ἀνωτέρω σχέσεως τό διάνυσμα $-\vec{\beta}$, ἀντίθετον τοῦ $\vec{\beta}$. Ἔχομεν τήν ἰσοδυναμίαν (βλ. Παρατήρησιν εἰς τό τέλος τῆς § 2) :

$$\vec{\beta} + \vec{x} = \vec{\alpha} \iff (-\vec{\beta}) + \vec{\beta} + \vec{x} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta}).$$

Εἶναι ὅμως

$$(-\vec{\beta}) + \vec{\beta} = \vec{0} \qquad \text{καί} \qquad \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}.$$

Ἄρα

$$\vec{\beta} + \vec{x} = \vec{\alpha} \iff \vec{x} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta}).$$

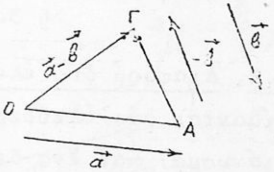
Ὥστε τό ζητούμενον διάνυσμα $\vec{x}$ εἶναι ἄθροισμα τοῦ μειωτέου διανύσματος $\vec{\alpha}$ μέ τό ἀντίθετον $-\vec{\beta}$ τοῦ ἀφαιρετέου διανύσματος $\vec{\beta}$. Τό διάνυσμα αὐτό $\vec{x}$ λέγεται <u>διαφορά</u> τοῦ διατεταγμένου ζεύγους $(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ τῶν δοθέντων διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$, συμβολίζεται δέ μέ τήν γραφήν $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$. Ἔχομεν:

$$\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta}).$$

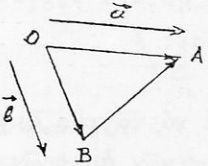
Διά νά εὕρωμεν λοιπόν τήν διαφοράν δύο διανυσμάτων προσθέτομεν εἰς τό μειωτέον διάνυσμα τό ἀντίθετον τοῦ ἀφαιρετέου διανύσματος.

<u>3.2. Κατασκευή ἑνός ἐφαρμοστοῦ διανύσματος ἀντιπροσωπευτικοῦ τῆς διαφορᾶς $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.</u>

<u>1ος τρόπος</u>. Μέ ἀρχήν ἕνα σημεῖον O τοῦ ἐπιπέδου (σχῆμα παραπλεύρως) κατασκευάζομεν τό ἐφαρμοστόν διάνυσμα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$. Ἀκολούθως, μέ ἀρχήν τό πέρας A τοῦ $\overrightarrow{OA}$ κατασκευάζομεν τό ἐφαρμοστόν διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma} = -\vec{\beta}$. Τό διάνυσμα $\overrightarrow{O\Gamma}$ εἶναι ἀντιπροσωπευτικόν τῆς διαφορᾶς $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.



<u>2ος τρόπος</u>. Κατασκευάζομεν δύο ἐφαρμοστά διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ καί $\overrightarrow{OB}$, μέ κοινήν ἀρχήν (σχ. παραπλεύρως), ἀντιπροσωπευτικά τῶν δοθέντων ἐλευθέρων διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$. Κατόπιν χαράσσομεν τό ἐφαρμοστόν διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$. Τό διάνυσμα αὐτό ἀντιπροσωπεύει τήν ζητουμένην διαφοράν $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$. Πράγματι, ἐπειδή



$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} \quad \text{καί} \quad \overrightarrow{BO} = -\vec{\beta},$$

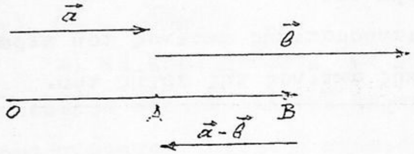
τό διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$ ἀντιπροσωπεύει τό ἄθροισμα $-\vec{\beta} + \vec{\alpha}$ πού εἶναι ἴσον μέ $\vec{\alpha} + (-\vec{\beta}) = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

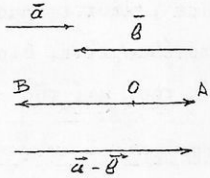
Διά τόν 2ον αὐτόν τρόπον κατασκευῆς τῆς διαφορᾶς $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ γράφομεν :

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$$

καί λέγομεν ὅτι τό $\overrightarrow{BA}$ εἶναι διαφορά τῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ καί $\overrightarrow{OB}$.

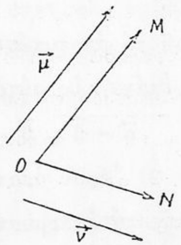
Παρατήρησις. Ὁ ὁρισμός τῆς διαφορᾶς $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ καί αἱ ἀνωτέρω δύο κατασκευαί ἰσχύουν φυσικά καί εἰς τήν περίπτωσιν πού τά δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ εἶναι συγγραμμικά. Π.χ. μέ τήν δευτέραν κατασκευήν εὑρίσκομεν:





Εἰδικῶς, ἐάν $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{0}$.

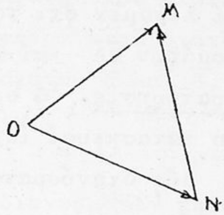
3.3. Διανυσματική ἀκτίς. Ἄς λάβωμεν ἐπάνω εἰς τό ἐπίπεδον ἕνα σταθερόν σημεῖον O. Εἰς κάθε σημεῖον M τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχεῖ τότε ἕνα ὡρισμένον ἐφαρμοστόν διάνυσμα μέ ἀρχήν O καί πέρας τό M. Τό διάνυσμα αὐτό ὀνομάζεται διανυσματική ἀκτίς τοῦ σημείου M ὡς πρός ἀρχήν τό σημεῖον O.



Ἡ διανυσματική ἀκτίς ἀντιπροσωπεύει ἕνα ὡρισμένον ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\mu}$. Ἀντιστρόφως, κάθε ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\nu}$ τοῦ ἐπιπέδου ἀντιπροσωπεύεται ἀπό μίαν ὡρισμένην διανυσματικήν ἀκτῖνα $\overrightarrow{ON}$ καί εἰς αὐτήν ἀντιστοιχεῖ τό ὡρισμένον N τοῦ ἐπιπέδου.

Παρατηροῦμεν λοιπόν ὅτι, μέσω τῶν διανυσματικῶν ἀκτίνων ὡς πρός ἀρχήν τό O, τό σύνολον τῶν ἐλευθέρων διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου ἀπεικονίζεται ἐπί τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου. Ἡ ἀπεικόνισις εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος.

3.4. Παράστασις ἐφαρμοστοῦ διανύσματος μέ τήν διαφοράν δύο διανυσματικῶν ἀκτίνων. Ἔστω $\overrightarrow{NM}$ τυχόν ἐφαρμοστόν διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου καί $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OM}$ αἱ διανυσματικαί ἀκτῖνες τῶν ἄκρων του. Σύμφωνα μέ ὅσα εἴπαμεν εἰς τό ἐδάφιον § 3.2., ἔχομεν

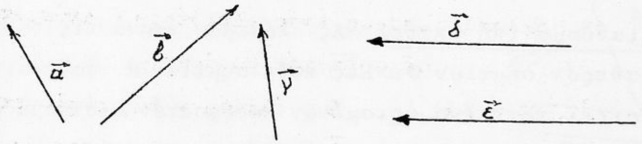


$\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OM}$ καί $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}$.

Ὥστε , κάθε ἐφαρμοστόν διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου εἶναι διαφορά τῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος τοῦ πέρατός του καί τῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος τῆς ἀρχῆς του.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

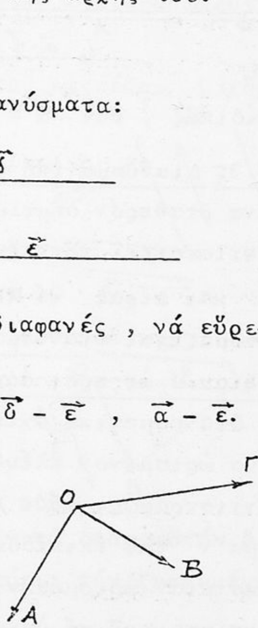
1) Δίδονται τά ἀκόλουθα ἐλεύθερα διανύσματα:



Ἀφοῦ τά ἀποτυπώσετε ἐπάνω εἰς τό ἴδιον διαφανές , νά εὕρετε ἐπάνω εἰς αὐτό τάς διαφοράς:

$$\vec{\alpha} - \vec{\beta}\ ,\ \vec{\beta} - \vec{\gamma}\ ,\ \vec{\gamma} - \vec{\delta}\ ,\ \vec{\varepsilon} - \vec{\gamma}\ ,\ \vec{\delta} - \vec{\varepsilon}\ ,\ \vec{\alpha} - \vec{\varepsilon}.$$

2) Ἀφοῦ ἀποτυπώσετε ἐπάνω εἰς διαφανές τά ἐφαρμοστά διανύσματα τοῦ σχήματος παραπλεύρως, νά ἐκτελέσετε τάς ἀκολούθους πράξεις εἰς τρία χωριστά σχεδιάσματα:



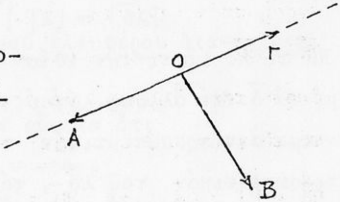
α) $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})-\overrightarrow{O\Gamma}$

β) $\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{O\Gamma})$

γ) $(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{O\Gamma})+\overrightarrow{OB}$.

Ἐάν ἡ σχεδίασίς σας εἶναι ἀρκετά ἀκριβής, θά πιστοποιήσετε ὅτι τά ἀποτελέσματα εἶναι τρία ἴσα ἐφαρμοστά διανύσματα. Ποίας ἀντιστοίχους ἰσότητας συνηντήσατε εἰς τόν ἀλγεβρικόν λογισμόν (Κεφ. Β΄) ;

3) Ὅμοιον ζήτημα διά τάς ἀκολούθους πράξεις ἐπί τῶν διανυσμάτων τοῦ παρακειμένου σχήματος:



α) $(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})-\overrightarrow{O\Gamma}$

β) $(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{O\Gamma})-\overrightarrow{OB}$

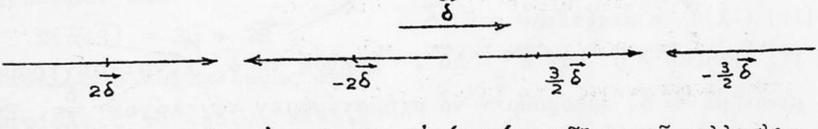
γ) $\overrightarrow{OA}-(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma})$.

4) Νά ἐπαληθεύσετε μέ κατάλληλον σχεδίασιν ὅτι διά τά ἐλεύθερα διανύσματα τοῦ παραπλεύρως σχήματος ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$\vec{\alpha}-\vec{\beta}=(\vec{\alpha}+\vec{\gamma})-(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$$

§ 4. Πολλαπλασιασμός ἑνός ἐλευθέρου διανύσματος μέ σχετικόν ἀριθμόν.

4.1. Εἰς τό Βιβλ. ΙΙ, σ. 9 ἐμάθαμεν πῶς εὑρίσκεται τό γινόμενον ἑνός διανύσματος $\vec{\delta}$ μέ ἕνα ρητόν σχετικόν ἀριθμόν λ. Πρός ὑπενθύμισιν κατασκευάζομεν κατωτέρω ἀντιπροσωπευτικά διανύσματα τεσσάρων γινομένων δι'ἕνα δεδομένον $\vec{\delta}$ καί $\lambda=2$, -2 , $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}$ ἀντιστοίχως:



Θά ὁρίσωμεν τώρα ἐπακριβῶς αὐτήν τήν πρᾶξιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἑνός ἐλευθέρου διανύσματος μέ ἕνα ρητόν σχετικόν ἀριθμόν καί θά ἐξετάσωμεν μερικάς ἰδιότητάς της.

4.2. Ὁρισμός. Ἔστω πρῶτον $\vec{\delta} \neq \vec{0}$ ἕνα ἐλεύθερον διάνυσμα καί $\lambda \neq 0$ ἕνας ρητός σχετικός ἀριθμός. Τό γινόμενον $\lambda\vec{\delta}$ εἶναι ἕνα ἐλεύθερον διάνυσμα μέ τάς ἀκολούθους τρεῖς ἰδιότητας :

1η. Τό $\lambda\vec{\delta}$ ἔχει μῆκος ἴσον μέ $|\lambda|$ $|\vec{\delta}|$

$$|\lambda\vec{\delta}| = |\lambda|\cdot|\vec{\delta}|$$

2α. Τό $\lambda\vec{\delta}$ ἔχει τήν ἰδίαν διεύθυνσιν (εἶναι συγγραμμικόν) μέ τό $\vec{\delta}$. Μέ ἄλλους λόγους, ἄν $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἕνα ἐφαρμοστόν διάνυσμα ἀντιπροσωπευτικόν τοῦ $\vec{\delta}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ἕνα διάνυσμα ἀντιπροσωπευτικόν τοῦ $\lambda\vec{\delta}$, τότε ἔχομεν (μέ εὐρεῖαν σημασίαν):

εὐθεῖα $AB \parallel$ εὐθεῖα $\Gamma\Delta$.

3η. Τό $\lambda\vec{\delta}$ ἔχει τήν ἰδίαν φοράν μέ τό $\vec{\delta}$, ἄν $\lambda > 0$, τήν ἀντίθετον φοράν, ἄν $\lambda < 0$.

Αἱ τρεῖς αὐταί ἰδιότητες προσδιορίζουν ἐντελῶς τό διάνυσμα $\lambda\vec{\delta}$ εἰς τήν θεωρουμένην γενικήν περίπτωσιν $\lambda \neq 0$ καί $\vec{\delta} \neq \vec{0}$.

Ἀπομένει νά εἴπωμεν ποῖον εἶναι τό $\lambda\vec{\delta}$, ὅταν ἔχωμεν εἴτε $\lambda = 0$ εἴτε $\vec{\delta} = \vec{0}$.

Εἶναι φυσικόν, ἀποβλέποντες εἰς τήν 1ην ἰδιότητα, νά ὁρίσωμεν ὅτι τότε τό $\lambda\vec{\delta}$ εἶναι τό μηδενικόν διάνυσμα $\vec{0}$:

$$\lambda\vec{\delta} = \vec{0}, \text{ὅταν εἴτε } \lambda=0 \text{ εἴτε } \vec{\delta} = \vec{0}.$$

Ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμόν φθάνομεν ἀμέσως εἰς τά ἀκόλουθα συμπεράσματα:

I) $1\cdot\vec{\delta} = \vec{\delta}$, $2\vec{\delta} = \vec{\delta} + \vec{\delta}$, $3\vec{\delta} = \vec{\delta} + \vec{\delta} + \vec{\delta}$, κ.ο.κ.

II) $(-1)\vec{\delta}$ = ἀντίθετον τοῦ $\vec{\delta} = -\vec{\delta}$

III) $(-\lambda)\vec{\delta}$ = ἀντίθετον τοῦ $\lambda\vec{\delta}$

IV) Ἔστω $\vec{\delta} \neq \vec{0}$ καί $\vec{\delta}' = \lambda\vec{\delta}$. Ἐπειδή τό $\vec{\delta}'$ εἶναι συγγραμμικόν μέ τό $\vec{\delta}$, ἠμποροῦμεν νά σχηματίσωμεν τόν λόγον $\frac{\vec{\delta}'}{\vec{\delta}}$. Εὑρίσκομεν τότε:

$$\frac{\vec{\delta}'}{\vec{\delta}} = \lambda$$

Π.χ., ἐάν $\vec{\delta}' = 2\vec{\delta}$, τότε $\dfrac{\vec{\delta}'}{\vec{\delta}} = 2$.

Ἀντιστρόφως, ἐάν $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, $\vec{\alpha}'$ συγγραμμικόν μέ τό $\vec{\alpha}$ καί $\dfrac{\vec{\alpha}'}{\vec{\alpha}} = \varkappa$, τότε

$$\vec{\alpha}' = \varkappa\vec{\alpha}.$$

Ὥστε ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία :

$$\vec{\delta}' = \lambda\vec{\delta} \Longleftrightarrow \frac{\vec{\delta}'}{\vec{\delta}} = \lambda \qquad (\text{μέ } \vec{\delta} \neq \vec{0}).$$

4.3. Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐλευθέρου διανύσματος μέ σχετικόν ἀριθμόν.

1ον. Βάσει τοῦ ὁρισμοῦ εὑρίσκομεν εὔκολα ὅτι

$$(-2)\cdot(3\vec{\delta}) = (-2\cdot 3)\vec{\delta} = -6\vec{\delta}\ .$$

(Παράβ. καί Βιβλ. Ι , σ. 76 Γ). Γενικῶς ἔχομεν :

$$\lambda_2(\lambda_1\vec{\delta}) = (\lambda_2\lambda_1)\vec{\delta} \quad , \quad (\lambda_1 \in P\ ,\ \lambda_2 \in P)\ .$$

Ὥστε ἰσχύει προσεταιριστικότης ὡς πρός τούς ἀριθμητικούς πολλαπλασιαστάς.

2ον. Βάσει τοῦ ὁρισμοῦ εὑρίσκομεν εὔκολα ὅτι

$$3\vec{\delta} = (-2+5)\vec{\delta} = -2\vec{\delta} + 5\vec{\delta}$$

(Παράβ. καί Βιβλ. Ι, σ. 59 Γ). Γενικῶς ἔχομεν:

$$(\lambda_1+\lambda_2)\vec{\delta} = \lambda_1\vec{\delta} + \lambda_2\vec{\delta} \quad , \quad (\lambda_1 \in P\ ,\ \lambda_2 \in P\ ).$$

Ὥστε ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι <u>ἐπιμεριστικός</u> ὡς πρός τήν πρόσθεσιν τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν.

3ον. Ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι <u>ἐπιμεριστικός</u> καί ὡς πρός τήν πρόσθεσιν τῶν διανυσμάτων, δηλαδή

$$\lambda(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}\ .$$

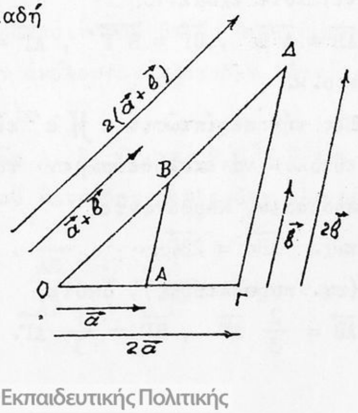
Π.χ. εἶναι εὔκολον νά ἐπαληθεύσωμεν ὅτι

$$2(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = 2\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}\ ,$$

βάσει τοῦ παραπλεύρως σχήματος εἰς τό ὁποῖον εἶναι:

$\vec{OA} = \vec{\alpha}$, $\vec{AB} = \vec{\beta}$, ἄρα

$\vec{OB} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\vec{O\Gamma} = 2\vec{\alpha}$,



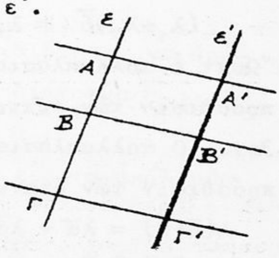
$\vec{\Gamma\Delta} = 2\vec{\beta}$, ἄρα $\vec{O\Delta} = 2\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ καί $\vec{O\Delta} = 2\vec{OB} = 2(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$.

4.4. Θεώρημα τοῦ Θαλῆ. Ἔτσι ὀνομάζεται μία πολύ σημαντική γεωμετρική πρότασις πού ὀφείλεται εἰς τόν Ἕλληνα μαθηματικόν Θαλῆν τόν Μιλήσιον (640-546 π.Χ.), ἕνα ἀπό τούς ἑπτά "σοφούς" τῆς Ἀρχαίας Ἑλλάδος. Εἰς τήν πρότασιν αὐτήν ἠμποροῦμεν νά δώσωμεν τώρα τήν ἀκόλουθον διατύπωσιν χρησιμοποιοῦντες αὐτά πού εἴπαμεν περί διανυσμάτων.

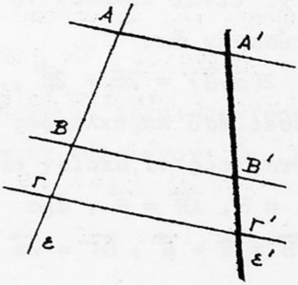
Πρότασις. Ἄς εἶναι α, β, γ, ... τρεῖς ἤ περισσότεραι παράλληλοι εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου καί αὐταί ἄς τέμνουν δύο τυχούσας εὐθείας ε καί ε΄ εἰς τά σημεῖα Α, Β, Γ, ... καί Α΄, Β΄, Γ΄, ... ἀντιστοίχως.
Θά ἰσχύουν τότε αἱ ἰσότητες:

$$\frac{\vec{AB}}{\vec{B\Gamma}} = \frac{\vec{A'B'}}{\vec{B'\Gamma'}}, \quad \frac{\vec{AB}}{\vec{A\Gamma}} = \frac{\vec{A'B'}}{\vec{A'\Gamma'}}, \quad \frac{\vec{B\Gamma}}{\vec{A\Gamma}} = \frac{\vec{B'\Gamma'}}{\vec{A'\Gamma'}}, \text{ κ.ο.κ.}$$

Μέ ἄλλους λόγους, δύο ὁποιαδήποτε διανύσματα πού αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ἀποκόπτουν ἐπί τῆς μιᾶς εὐθείας ε ἔχουν τόν ἴδιον λόγον μέ τά ἀντίστοιχα διανύσματα πού αἱ ἴδιαι παράλληλοι ἀποκόπτουν ἐπί τῆς ἄλλης εὐθείας ε΄.



Ἡ ἀλήθεια τῆς προτάσεως ἕπεται ἀμέσως ἀπό τά προηγούμενα, ὅταν ε ∥ ε΄ (σχ. παραπλεύρως). Πράγματι, τότε ἔχομεν:
$\vec{AB} = \vec{A'B'}$, $\vec{B\Gamma} = \vec{B'\Gamma'}$, $\vec{A\Gamma} = \vec{A'\Gamma'}$, κ.ο.κ.



Εἰς τήν περίπτωσιν ε ∦ ε΄ εἶναι εὔκολον νά ἐπαληθεύσωμεν τήν πρότασιν, λαμβάνοντες π.χ. $\vec{AB} = 2\vec{B\Gamma}$ (σχ. παραπλεύρως), ὁπότε $\vec{AB} = \frac{2}{3}\vec{A\Gamma}$, $\vec{B\Gamma} = \frac{1}{3}\vec{A\Gamma}$.

Μέ μετρήσεις ἐπάνω εἰς τό σχῆμα εὑρίσκομεν ὅτι ἰσχύουν ἀντιστοίχως αἱ σχέσεις:

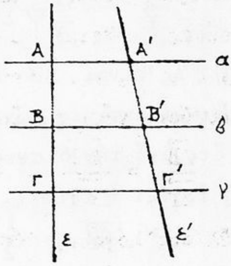
$$\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{B'\Gamma'}\ , \quad \overrightarrow{A'B'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A'\Gamma'}\ , \quad \overrightarrow{B'\Gamma'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'\Gamma'}$$

Ἄρα

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{B\Gamma}} = 2 = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{B'\Gamma'}}\ , \quad \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{A\Gamma}} = \frac{2}{3} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{A'\Gamma'}}\ , \quad \frac{\overrightarrow{B\Gamma}}{\overrightarrow{A\Gamma}} = \frac{1}{3} = \frac{\overrightarrow{B'\Gamma'}}{\overrightarrow{A'\Gamma'}}$$

<u>Μία συνέπεια.</u> Ἄς εἶναι ἡ εὐθεῖα ε κάθετος πρός τάς παραλλήλους α , β , γ καί

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{B\Gamma}} = 1 \qquad \text{ἤτοι } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B\Gamma}.$$



Αἱ δύο ταινίαι πού ὁρίζονται ἀπό τά ζεύγη παραλλήλων εὐθειῶν $\{\alpha,\beta\}$ καί $\{\beta,\gamma\}$ ἔχουν τότε ἴσον πλάτος. Σύμφωνα ὅμως μέ τό θεώρημα τοῦ Θαλῆ εἶναι :

$$\frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{B'\Gamma'}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{B\Gamma}} = 1\ , \text{ ἄρα } \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{B'\Gamma'}.$$

Ἐπομένως, δύο (ἤ περισσότεραι) <u>παράλληλοι</u> ταινίαι τοῦ ἐπιπέδου, <u>πού ἔχουν ἴσον πλάτος</u>, ἀποκόπτουν ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα ἐπάνω εἰς πᾶσαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου ἡ ὁποία τάς τέμνει.

<u>4.5.</u> Ὅπως ἐπαληθεύσαμεν τήν πρότασιν τοῦ Θαλῆ, ἔτσι ἠμποροῦμεν νά ἐπαληθεύσωμεν καί τήν ἀκόλουθον πρότασιν (ἀντίστροφον τῆς προτάσεως τοῦ Θαλῆ):

<u>Πρότασις.</u> Ἐάν διά τά σημεῖα Α, Β, Γ καί Α΄, Β΄, Γ΄ τῶν εὐθειῶν ε καί ἀντιστοίχως ε΄ τοῦ ἐπιπέδου ἀληθεύουν αἱ σχέσεις:

$$\text{εὐθ. } AA' \parallel \text{ εὐθ. } BB' \qquad \text{καί} \qquad \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{A\Gamma}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{A'\Gamma'}}$$

τότε θά εἶναι καί

εὐθ. ΓΓ΄ $\parallel$ εὐθ. ΒΒ , ἄρα καί εὐθ. ΓΓ΄ $\parallel$ εὐθ. ΑΑ΄.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ἀπό τά κατωτέρω ἐλεύθερα διανύσματα

νά κατασκευασθοῦν τά ἀκόλουθα:

$\frac{5}{4}\vec{\alpha}$, $-\frac{2}{3}\vec{\beta}$, $-\frac{1}{2}\vec{\gamma}$, $\frac{3}{4}\vec{\gamma}$,

$\vec{\alpha}-\frac{2}{3}\vec{\gamma}$, $\frac{2}{3}\vec{\gamma}-\frac{5}{4}\vec{\alpha}$, $\vec{\alpha}+\vec{\beta}-2\vec{\gamma}$.

2) Ἄς εἶναι ΑΒ ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ αἱ διανυσματικαί ἀκτῖνες τῶν ἄκρων του καί Μ τό μέσον του. Νά δείξετε ὅτι διά τήν διανυσματικήν ἀκτῖνα $\overrightarrow{OM}$ τοῦ μέσου τοῦ τμήματος ἰσχύει ἡ σχέσις.

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$$

3) Εἰς ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καλοῦμεν Ε τό μέσον τῆς πλευρᾶς ΓΔ. Νά εὕρετε τόν ἀριθμόν x διά τόν ὁποῖον ἀληθεύει ἡ σχέσις $\overrightarrow{AB} = x\cdot\overrightarrow{E\Delta}$.

4) Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εὑρίσκομεν τό σημεῖον Α΄ συμμετρικόν τοῦ Α ὡς πρός τό μέσον Μ τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Νά δείξετε ὅτι $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma} = 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA'}$.

5) Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ καί ἄς εἶναι Δ καί Ε τά μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καί ΑΓ ἀντιστοίχως. Νά δείξετε ὅτι $\overrightarrow{\Delta E} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B\Gamma}$.

<u>Ὑπόδειξις.</u> Νά προεκτείνετε τό διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta E}$ κατά τό διάνυσμα $\overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{\Delta E}$ καί νά δείξετε ὅτι τά τετράπλευρα ΑΔΓΖ καί ΒΓΖΔ εἶναι παραλληλόγραμμα χρησιμοποιοῦντες γνωστάς ἰδιότητας τῶν παραλληλογράμμων ἤ ὅσα εἴπαμεν εἰς τάς § 3.3 καί 3.4.

6) Εἰς τό Βιβλ. Ι , σ. 125 Β ἐμάθαμεν πῶς νά χωρίζωμεν ἕνα τμῆμα ΑΒ εἰς ν ἴσα μέρη (ν ∈ Φ).

Νά δικαιολογήσετε τώρα τήν σχετικήν κατασκευήν στηριζόμενοι εἰς τό Θεώρημα τοῦ Θαλῆ.

7) Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ νά χαράξετε τάς διαμέσους του ΒΕ καί ΓΔ, δηλ. τά τμήματα πού ἑνώνουν τάς κορυφάς Β καί Γ μέ τά μέσα Ε καί Δ ἀντιστοίχως τῶν ἀπέναντι πλευρῶν. Αἱ διάμεσοι αὐταί τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Ο. Ἄς εἶναι Ζ καί Η τά μέσα τῶν τμημάτων ΒΟ καί ΓΟ ἀντιστοίχως. Νά δείξετε ὅτι $\overrightarrow{\Delta E}=\overrightarrow{ZH}$ καί νά συμπεράνετε ἐξ αὐτοῦ ὅτι τό τετράπλευρον ΖΗΕΔ εἶναι παραλληλόγραμμον. Κατόπιν, χρησιμοποιοῦντες γνωστήν ἰδιότητα τοῦ παραλληλογράμμου, νά δείξετε ὅτι $\overrightarrow{BO}=2\overrightarrow{OE}$ καί $\overrightarrow{\Gamma O} = 2\overrightarrow{O\Delta}$.

8) Ἀπό τήν προηγουμένην Ἄσκησιν νά συμπεράνετε ὅτι αἱ τρεῖς διάμεσοι τριγώνου τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον πού ἀπέχει ἀπό ἑκάστην κορυφήν ἀπόστασιν ἴσην μέ τά $\frac{2}{3}$ τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου.

9) Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ὁρίζομεν τά μέσα Α΄καί Β΄τῶν πλευρῶν ΒΓ καί ΓΑ ἀντιστοίχως. Ἀπό τό σημεῖον Β΄φέρομεν τήν παράλληλον πρός τήν εὐθεῖαν ΑΑ΄καί ἔστω Δ τό σημεῖον ὅπου ἡ παράλληλος αὐτή τέμνει τήν πλευράν ΒΓ. Νά δείξετε ὅτι

$$\overrightarrow{B\Delta} + 3\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{0}.$$

Πίνακας τῶν τετραγώνων καὶ τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν τῶν ἀριθμῶν 1 ὡς 100.

ΑΡΙΘΜΟΙ	ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ	ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ	ΑΡΙΘΜΟΙ	ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ	ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ
1	1	1,000	51	2 601	7,141
2	4	1,414	52	2 704	7,211
3	9	1,732	53	2 809	7,280
4	16	2,000	54	2 916	7,349
5	25	2,236	55	3 025	7,416
6	36	2,450	56	3 136	7,483
7	49	2,646	57	3 249	7,550
8	64	2,828	58	3 364	7,616
9	81	3,000	59	3 481	7,681
10	100	3,162	60	3 600	7,746
11	121	3,317	61	3 721	7,810
12	144	3,464	62	3 844	7,874
13	169	3,606	63	3 969	7,937
14	196	3,742	64	4 096	8,000
15	225	3,873	65	4 225	8,062
16	256	4,000	66	4 356	8,124
17	289	4,123	67	4 489	8,185
18	324	4,243	68	4 624	8,246
19	361	4,359	69	4 761	8,307
20	400	4,472	70	4 900	8,367
21	441	4,583	71	5 041	8,426
22	484	4,690	72	5 184	8,485
23	529	4,796	73	5 329	8,544
24	576	4,899	74	5 476	8,602
25	625	5,000	75	5 625	8,660
26	676	5,099	76	5 776	8,718
27	729	5,196	77	5 929	8.775
28	784	5,292	78	6 084	8,832
29	841	5,385	79	6 241	8,888
30	900	5,477	80	6 400	8,944
31	961	5,568	81	6 561	9,000
32	1 024	5,657	82	6 724	9,055
33	1 089	5,745	83	6 889	9,110
34	1 156	5,831	84	7 056	9,165
35	1 225	5,916	85	7 225	9,220
36	1 296	6,000	86	7 396	9,274
37	1 369	6,083	87	7 569	9.327
38	1 444	6,164	88	7 744	9,381
39	1 521	6,245	89	7 921	9,434
40	1 600	6,325	90	8 100	9,487
41	1 681	6,403	91	8 281	9,539
42	1 764	6.481	92	8 464	9,592
43	1 849	6,557	93	8 649	9.644
44	1 936	6,633	94	8 836	9,695
45	2 025	6,708	95	9 025	9,747
46	2 116	6,782	96	9 216	9,798
47	2 209	6,856	97	9 409	9.849
48	2 304	6,928	98	9 604	9,900
49	2 401	7,000	99	9 801	9,950
50	2 500	7,071	100	10 000	10,000

Τὰ ἀντίτυπα τοῦ βιβλίου φέρουν τὸ κάτωθι βιβλιόσημον εἰς ἀπόδειξιν τῆς γνησιότητος αὐτῶν.

Ἀντίτυπον στερούμενον τοῦ βιβλιοσήμου τούτου θεωρεῖται κλεψίτυπον. Ὁ διαθέτων, πωλῶν ἢ χρησιμοποιῶν αὐτὸ διώκεται κατὰ τὰς διατάξεις τοῦ ἄρθρου 7 τοῦ νόμου 1129 τῆς 15/21 Μαρτίου 1946 (Ἐφ. Κυβ. 1946, Α 108).

ΕΚΔΟΣΙΣ: Α΄ 1967 (VIII) — ΑΝΤ. 90.000 ΣΥΜΒ. 158ι/1-8-67—1615/16-8-67

Ἐκτύπωσις: Ἰ. Δικαῖος – Βιβλιοδεσία: Ἰ. Καμπανᾶς Ο.Ε.

Κασάπογλου

Λάμπρος

ΟΕΔΒ