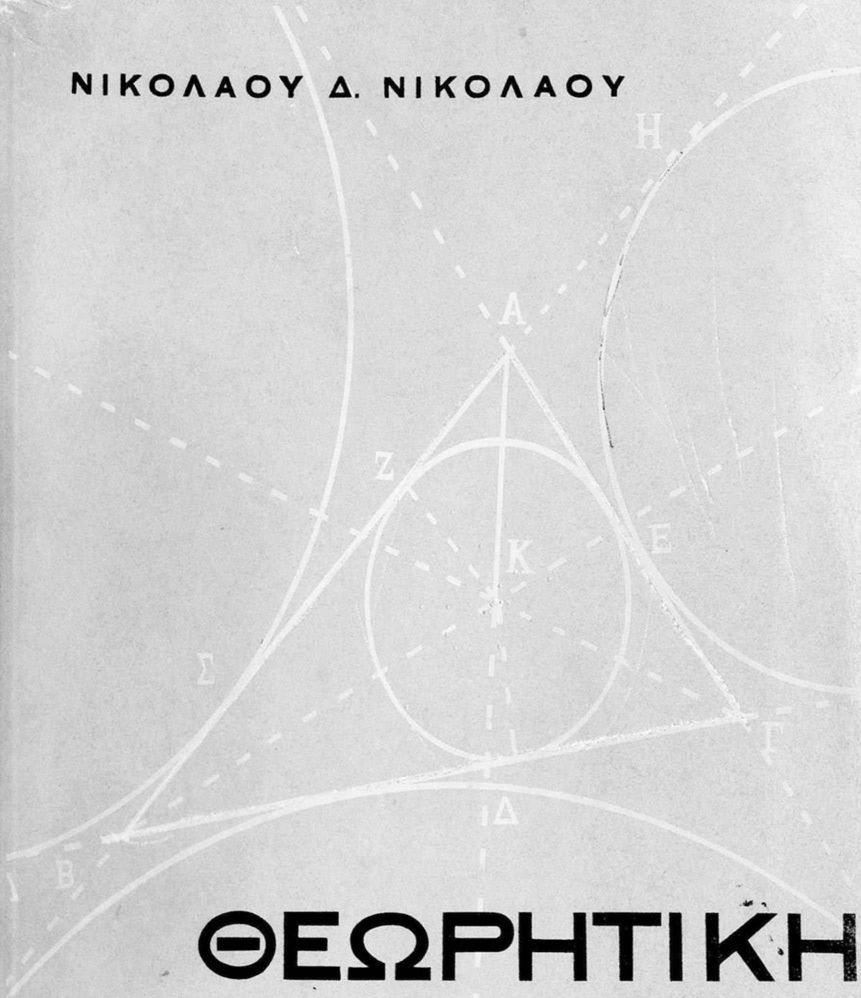
ΝΙΚΟΛΑΟΥ Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ



ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΝΙΚ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ 1969

45064

Καβάπογλου
Λάμπρος

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΔΩΡΕΑ
ΕΘΝΙΚΗΣ ΚΥΒΕΡΝΗΣΕΩΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

§ 1. Ποῖαι ἀνάγκαι ἐγέννησαν τὴν Γεωμετρίαν. Ἀφ' ὅτου οἱ ἄνθρωποι ᾐσθάνθησαν τὴν ἀνάγκην οἰκοδομημάτων χάριν ἀνετωτέρας διαμονῆς, ἀφ' ὅτου τὸ αἴσθημα τῆς ἰδιοκτησίας ἐδημιούργησε τὴν ἀνάγκην ὀροθεσίας, μετρήσεως καὶ διαιρέσεως, ἡ δημιουργία Γεωμετρίας κατέστη ἀναγκαία καὶ ἀναπόφευκτος, τοὐλάχιστον ὑπὸ τὴν πρωτόγονον καὶ ἐντελῶς πρακτικὴν μορφήν.

Πληροφορίαι ἀπὸ τὴν ἀπωτάτην ἀρχαιότητα ἐνισχύουσι τὴν ἄποψιν ταύτην. Οὕτως ὁ Ἡρόδοτος (5ος π.Χ. αἰὼν) ἀναφέρει τὰ ἑξῆς.

Ὁσάκις ὁ Νεῖλος ἐκάλυπτε μέρος τῶν ἀγρῶν τῶν Αἰγυπτίων, ὁ Βασιλεὺς ἀπέστελλε τοὺς μετρητάς, διὰ νὰ κανονίζωσι τὸν πληρωτέον φόρον ἀναλόγως πρὸς τὴν ὑπολειφθεῖσαν ἔκτασιν τοῦ ἀγροῦ ἑκάστου. Κατ' ἄλλας μαρτυρίας, οἱ μετρηταὶ ἠσχολοῦντο νὰ ὁρίζωσιν ἐκ νέου τὰ ὅρια τῶν ἀγρῶν τῶν Αἰγυπτίων μετὰ τὴν ἀποχώρησιν τῶν ὑδάτων τοῦ Νείλου.

Ἀπὸ τὴν ἀνάγκην αὐτήν, καθ' οἱανδήποτε ἐκδοχήν, ἐξεπήδησαν αἱ πρῶται πρακτικαὶ γνώσεις τῆς Γεωμετρίας.

Παρεμφερεῖς γνώσεις φαίνεται ὅτι εἶχον καὶ οἱ Χαλδαῖοι, ὡς ἀποδεικνύουσι τὰ σχέδια τῶν ἀνασκαπτομένων οἰκοδομημάτων καὶ πολλὰ κείμενα ὁμιλοῦντα περὶ πωλήσεως οἰκοπέδων.

Αἱ πρακτικαὶ αὗται γνώσεις ἄνευ ἐσωτερικῆς συνοχῆς ἀπετέλουν τέχνην μᾶλλον ἢ ἐπιστήμην. Πρῶτοι δὲ οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες Φιλόσοφοι καὶ Μαθηματικοὶ διὰ τῆς φιλοσοφικῆς ἰδιοφυΐας των ἤρχισαν τὴν ἐξέτασιν τῶν σχημάτων καθ' ἑαυτὰ καὶ οὕτω βαθμηδὸν διεμόρφωσαν τὴν Γεωμετρίαν εἰς Ἐπιστήμην.

Ὅθεν δικαίως αὕτη θεωρεῖται ὡς κατ' ἐξοχὴν **Ἑλληνικὴ Ἐπιστήμη.**

1. ΑΙ ΠΡΩΤΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ

§ 2. **Τὰ κύρια γεωμετρικὰ στοιχεῖα τῶν σωμάτων.** Ἀπὸ τὴν πρακτικὴν Γεωμετρίαν ἐνθυμούμεθα ὅτι :

α΄) Ὁ ἀπέραντος χῶρος, ὁ ὁποῖος ἐκτείνεται πέριξ ἡμῶν, λέγεται **διάστημα.**

β΄) Εἰς ἕκασταν σῶμα διακρίνομεν, **ὄγκον, σχῆμα** καὶ **ἐπιφάνειαν.**

Ὄγκος σώματος λέγεται τὸ μέρος τοῦ διαστήματος τὸ ὁποῖον καταλαμβάνει τὸ σῶμα τοῦτο.

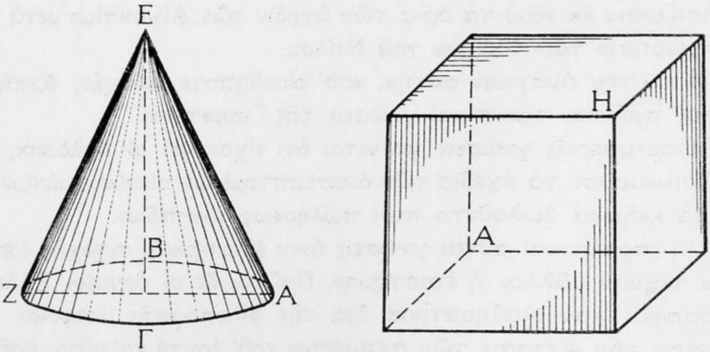
Ὁ ὄγκος ἑκάστου σώματος ἐκτείνεται ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά, ἐκ τῶν ὄπισθεν πρὸς τὰ ἔμπροσθεν, ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω. **Ἔχει** λοιπὸν **ἕκαστον σῶμα τρεῖς διαστάσεις.**

Σχῆμα σώματος λέγεται ὁ τρόπος, κατὰ τὸν ὁποῖον τοῦτο περατοῦται ἐξωτερικῶς.

Ἐπιφάνεια σώματος λέγεται τὸ σύνολον τῶν ἄκρων αὐτοῦ. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ἑκάστου σώματος χωρίζει αὐτὸ ἀπὸ τὸ πέριξ διάστημα.

Ἑκάστη ἐπιφάνεια ἔχει σχῆμα, ἐκτείνεται δὲ κατὰ δύο μόνον διαστάσεις, διότι δὲν ἔχει πάχος.

§ 3. **Αἱ γραμμαὶ καὶ τὰ σημεῖα.** Ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς ὑαλοπίνα-



Σχ. 1

κος ἑνὸς παραθύρου περατοῦται εἰς μίαν γραμμήν. Ὁμοίως ἕκαστον μέρος τῆς ἐπιφανείας τοῦ σώματος ΑΗ (σχ. 1) περατοῦται εἰς γραμμάς. Ἕκαστον δὲ μέρος τῆς ἐπιφανείας τοῦ σώματος ΕΖΑ (σχ. 1) περατοῦται εἰς μίαν γραμμήν. Ὥστε:

Τὰ ἄκρα μιᾶς ἐπιφανείας ἢ ἑνὸς μέρους ἐπιφανείας λέγονται γραμμαί.

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι ἡ γραμμὴ ΑΒΓΖ ἀνήκει εἰς τὰ δύο μέρη τῆς ἐπιφανείας τοῦ σώματος ΕΑΖ καὶ ἑκάστη γραμμὴ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σώματος ΑΗ κεῖται εἰς δύο μέρη τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ. Ἐπειδὴ δὲ ἕκαστον μέρος ἐπιφανείας εἶναι καὶ αὐτὸ ἐπιφάνεια, ἐννοοῦμεν ὅτι:

Πᾶσα γραμμὴ εἶναι τομὴ δύο ἐπιφανειῶν.

Ἑκάστη γραμμὴ ἔχει σχῆμα καὶ μίαν μόνον διάστασιν. Διότι δὲν ἔχει πάχος καὶ πλάτος.

Τὰ ἄκρα τῶν γραμμῶν ἢ ἑνὸς μέρους μιᾶς γραμμῆς λέγονται **σημεῖα.** Εὐκόλως δὲ ἐννοοῦμεν ὅτι:

Ἕκαστον σημεῖον εἶναι τομὴ δύο γραμμῶν.

Τὸ σημεῖον οὐδεμίαν διάστασιν ἔχει.

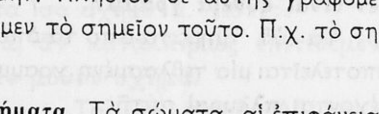
Εἰς ἓν φύλλον χάρτου ἢ εἰς τὸν μελανοπίνακα παριστάνομεν ἓν σημεῖον μὲ μίαν τελείαν στιγμήν. Πλησίον δὲ αὐτῆς γράφομεν ἓν γράμμα, μὲ τὸ ὁποῖον ὀνομάζομεν τὸ σημεῖον τοῦτο. Π.χ. τὸ σημεῖον Α (σχ. 2).

§ **4. Τί εἶναι γεωμετρικὰ σχήματα.** Τὰ σώματα, αἱ ἐπιφάνειαι καὶ αἱ γραμμαὶ λέγονται **γεωμετρικὰ σχήματα,** ὅταν ἐξετάζωνται ὡς πρὸς τὸ σχῆμα μόνον.

Διὰ νὰ διευκολύνωμεν δὲ τὴν ἐξέτασιν ταύτην, παριστάνομεν τὰ σχήματα ταῦτα μὲ εἰκόνας. Καὶ τὰς εἰκόνας δὲ ταύτας λέγομεν σχήματα.

2. ΤΑ ΕΙΔΗ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ

§ 5. **α´) Ἡ εὐθεῖα γραμμή.** Ἂν τεντώσωμεν καλῶς μίαν λεπτὴν τρίχα εἰς τὸ διάστημα, αὕτη λαμβάνει σχῆμα **εὐθείας γραμμῆς.**



Σχ. 2

Εὐθείας γραμμὰς γράφομεν εἰς ἓν φύλλον χάρτου ἢ εἰς τὸν πίνακα μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος, κατὰ μῆκος τοῦ ὁποίου σύρομεν τὴν γραφίδα ἢ τὴν κιμωλίαν (σχ. 2).

Ἂν εἰς μίαν εὐθεῖαν ὁρίσωμεν δύο σημεῖα Α, Β, μεταξὺ αὐτῶν περιέχεται ἓν μέρος ΑΒ τῆς εὐθείας ταύτης.

Τὸ μέρος τοῦτο λέγεται ἰδιαιτέρως **εὐθύγραμμον τμῆμα.**

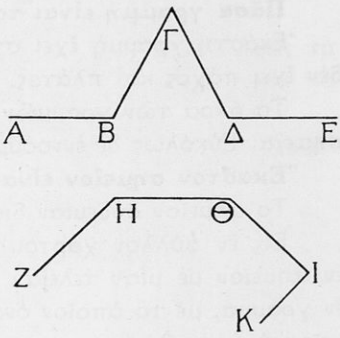
Τὰ δὲ δύο σημεῖα, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ἓν εὐθ. τμῆμα, λέγονται ἄ κ ρ α αὐτοῦ.

β´) Ἡ τεθλασμένη γραμμή. Ἡ γραμμὴ ΑΒΓΔΕ ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθ. τμήματα, ἀλλὰ δὲν εἶναι εὐθεῖα (σχ. 3). Λέγεται δὲ αὕτη **τεθλασμένη** γραμμή.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἡ γραμμὴ ΖΗΘΙΚ λέγεται τεθλασμένη γραμμὴ (σχ. 3). Ὥστε:

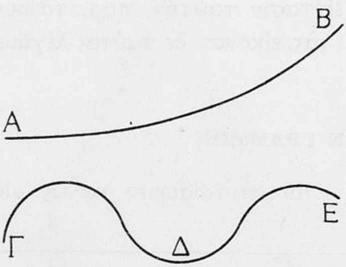
Τεθλασμένη γραμμὴ λέγεται πᾶσα γραμμή, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθύγραμμα τμήματα ἀλλὰ δὲν εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

Τὰ εὐθ. τμήματα ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἀποτελεῖται μία τεθλασμένη γραμμή, λέγονται **πλευραὶ** αὐτῆς.

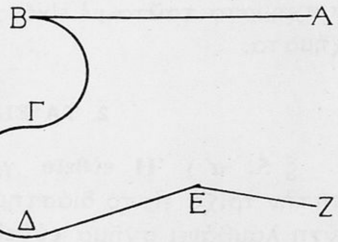


Σχ. 3

γ´) Ἡ καμπύλη γραμμή. Ἡ γραμμὴ ΑΒ (σχ. 4) δὲν ἔχει



Σχ. 4



Σχ. 5

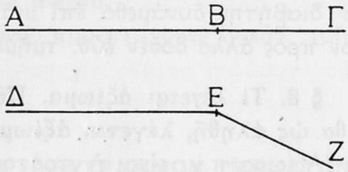
εὐθ. τμήματα. Λέγεται δὲ αὕτη **καμπύλη γραμμή.** Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἡ γραμμὴ ΓΔΕ εἶναι καμπύλη. Ὥστε:

Καμπύλη γραμμὴ λέγεται πᾶσα γραμμή, ἡ ὁποία δὲν ἔχει εὐθ. τμήματα.

δ΄) Ἡ μεικτὴ γραμμή. Πᾶσα γραμμή, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθείας καὶ καμπύλας γραμμάς, λέγεται **μεικτὴ** γραμμή. Π.χ. ἡ ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 5) εἶναι μεικτὴ γραμμή,

3. ΙΣΑ ΚΑΙ ΑΝΙΣΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

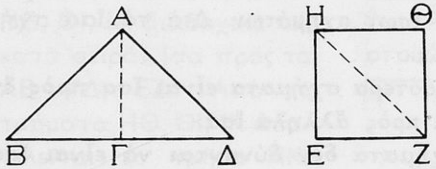
§ 6. Ποῖα σχήματα λέγονται ἴσα καὶ ποῖα ἰσοδύναμα. Μὲ τὸν διαβήτην βεβαιούμεθα εὐκόλως ὅτι τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ ἐφαρμόζει ἀκριβῶς ἐπὶ τοῦ τμήματος ΔΕ (σχ. 6). Λέγονται δὲ ταῦτα **ἴσα τμήματα.**



Σχ. 6

Ὁμοίως τὸ σχῆμα ΑΒΓ ἐφαρμόζει ἀκριβῶς εἰς τὸ ΕΖΗ (σχ. 7) καὶ ἀποτελεῖ μὲ αὐτὸ ἓν σχῆμα. Εἶναι λοιπὸν καὶ ταῦτα ἴσα σχήματα. Ὥστε:

Δύο σχήματα λέγονται ἴσα, ἂν καταλλήλως ἐπιτιθέμενα ἐφαρμόζωσι καὶ ἀποτελοῦσιν ἓν μόνον σχῆμα.



Σχ. 7

Τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΓ καὶ ἡ τεθλ. γραμμὴ ΔΕΖ (σχ. 6) δὲν δύνανται νὰ ἐφαρμόσωσιν, ὅπως εἶναι. Τὸ μέρος ὅμως ΑΒ ἐφαρμόζει εἰς τὸ ΔΕ καὶ τὸ ΒΓ εἰς τὸ ΕΖ. Τὰ σχήματα λοιπὸν ταῦτα ἀποτελοῦνται ἀπὸ μέρη ἴσα, ἓν πρὸς ἕν. Διὰ τοῦτο δὲ ταῦτα λέγονται **ἴσα κατὰ μέρη** ἢ συνηθέστερον **ἰσοδύναμα.**

Ὁμοίως ἀκέραια τὰ σχήματα ΑΒΔ καὶ ΕΖΘΗ δὲν ἐφαρμόζουσιν. Ἐπειδὴ ὅμως ΑΒΓ = ΕΖΗ καὶ ΑΓΔ = ΖΗΘ, τὰ σχήματα ΑΒΓ καὶ ΕΖΘΗ εἶναι ἰσοδύναμα (σχ. 7). Ὥστε:

Δύο σχήματα λέγονται ἰσοδύναμα ἢ ἴσα κατὰ μέρη, ἂν ἐφαρμόζωσι μόνον, ἀφ᾿ οὗ καταλλήλως διαιρεθῶσιν εἰς μέρη.

§ 7. **Ποῖα σχήματα λέγονται ἄνισα.** Τὸ εὐθ. τμῆμα ΔΕ (σχ. 6) εἶναι ἴσον πρὸς ἓν μέρος ΑΒ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΓ. Διά τοῦτο δὲ τὸ ΔΕ λέγεται μικρότερον ἀπὸ τὸ ΑΓ καὶ τοῦτο μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ΔΕ. Εἶναι δηλ. ΔΕ < ΑΓ. Τὰ δύο δὲ εὐθ. τμήματα ΔΕ καὶ ΑΓ μαζὶ λέγονται **ἄνισα σχήματα.** Ὁμοίως τὸ ΑΒΓ εἶναι ἴσον μὲ ἓν μέρος ΕΖΗ τοῦ σχήματος ΕΖΘΗ. Εἶναι λοιπὸν ταῦτα ἄνισα καὶ ΑΒΓ < ΕΖΘΗ. (σχ. 7). Ὥστε:

Δύο σχήματα λέγονται ἄνισα, ἂν τὸ ἓν εἶναι ἴσον ἢ καὶ ἰσοδύναμον πρὸς ἓν μέρος τοῦ ἄλλου.

Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου συγκρίνομεν εὐκόλως δύο εὐθ. τμήματα καὶ διακρίνομεν, ἂν ταῦτα εἶναι ἴσα ἢ ἄνισα. Ἐπίσης μὲ τὸν διαβήτην δυνάμεθα ἐπὶ μιᾶς εὐθείας νὰ ὁρίσωμεν εὐθ. τμῆμα ἴσον πρὸς ἄλλο δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

§ 8. **Τί λέγεται ἀξίωμα. Πᾶσα πρότασις, τὴν ὁποίαν δεχόμεθα ὡς ἀληθῆ, λέγεται ἀξίωμα**[1].

Ἀξίωμα π.χ. εἶναι ἡ πρότασις:

Πᾶν σχῆμα δὲν μεταβάλλεται, ὁπωσδήποτε καὶ ἂν μετακινηθῇ.

4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΩΝ

§ 9. **Ἀξιώματα περὶ τῶν ἴσων σχημάτων.** Διὰ τὰ ἴσα σχήματα δεχόμεθα τὰ κάτωθι ἀξιώματα:

α΄) Ἂν δύο ἢ καὶ περισσότερα σχήματα εἶναι ἴσα πρὸς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σχῆμα, εἶναι καὶ πρὸς ἄλληλα ἴσα.

β΄) Δύο καὶ τὰ αὐτὰ σχήματα δὲν δύνανται νὰ εἶναι ἴσα καὶ ἄνισα.

§ 10. **Ἀξιώματα περὶ τῆς εὐθείας γραμμῆς.** Διὰ τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν δεχόμεθα τὰ ἀκόλουθα ἀξιώματα.

α΄) Ἀπὸ δύο σημεῖα μόνον μία εὐθεῖα γραμμὴ διέρχεται.

Τὸ ἀξίωμα τοῦτο ἐκφράζομεν καὶ ὡς ἑξῆς:

1. Ἄλλοτε πᾶσαν πρότασιν τὴν ὁποίαν ἐδέχοντο ὡς ἀληθῆ, ἐκάλουν αἴτημα. Ἀξίωμα δὲ ἐκάλουν πᾶσαν πρότασιν, τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια ἦτο φανερὰ ἀφ᾽ ἑαυτῆς.

Δύο σημεῖα ὁρίζουσι τὴν θέσιν μιᾶς εὐθείας γραμμῆς.

Διὰ τοῦτο ἑκάστην εὐθεῖαν ὀνομάζομεν μὲ τὰ γράμματα δύο σημείων αὐτῆς. Ὅταν π.χ. λέγομεν εὐθεῖαν ΑΒ, ἐννοοῦμεν τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β (σχ. 6).

β΄) **Πᾶν εὐθ. τμῆμα εἶναι μικρότερον ἀπὸ πᾶσαν ἄλλην γραμμήν, ἡ ὁποία ἔχει τὰ αὐτὰ ἄκρα.**

Διὰ τὸν λόγον τοῦτον τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζουσι δύο σημεῖα, λέγεται **ἀπόστασις** τῶν σημείων τούτων.

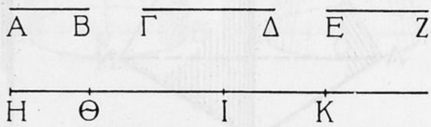
γ΄) **Ἕκαστον εὐθ. τμῆμα ἔχει ἓν μόνον μέσον,** ἤτοι σημεῖον, τὸ ὁποῖον χωρίζει αὐτὸ εἰς δύο ἴσα τμήματα.

δ΄) **Πᾶν εὐθ. τμῆμα δύναται νὰ νοηθῇ προεκτεινόμενον ἐπ' ἄπειρον καὶ ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα αὐτοῦ.**

Μὲ τὴν βοήθειαν δὲ τοῦ κανόνος προεκτείνομεν ἓν εὐθ. τμῆμα, ὅσον θέλομεν.

5. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

§ **11. Πῶς σχηματίζεται τὸ ἄθροισμα εὐθ. τμημάτων.** Ἔστωσαν τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ (σχ. 8). Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου ὁρίζομεν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας τμήματα ΗΘ, ΘΙ, ΙΚ διαδοχικὰ καὶ κατὰ σειρὰν ἴσα πρὸς τὰ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ. Ἀπὸ τὰ τμήματα ΗΘ, ΘΙ, ΙΚ ἀποτελεῖται τὸ τμῆμα ΗΚ.



Σχ. 8.

Τοῦτο λέγεται **ἄθροισμα** τῶν τμημάτων ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ ἢ καὶ τῶν ΗΘ, ΘΙ, ΙΚ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν μιᾶς τεθλασμένης γραμμῆς λέγεται **περίμετρος** αὐτῆς.

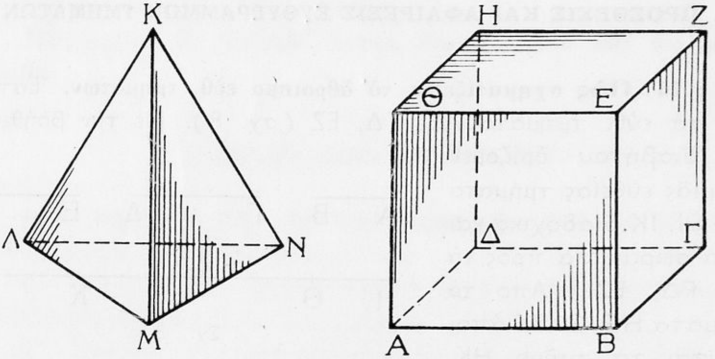
§ **12. Πῶς σχηματίζεται ἡ διαφορὰ δύο ἀνίσων εὐθ. τμημάτων.** Τὰ εὐθ. τμήματα ΘΚ καὶ ΓΔ εἶναι ἄνισα καὶ ΘΚ > ΓΔ (σχ. 8). Μὲ τὸν διαβήτην ὁρίζομεν ἐπὶ τοῦ μεγαλυτέρου ΘΚ ἓν τμῆμα ΘΙ ἴσον πρὸς τὸ ΓΔ. Ἂν νοήσωμεν ὅτι τὸ ΘΙ ἀποκόπτεται, μένει τὸ τμῆμα ΙΚ. Τοῦτο λέγεται **διαφορὰ** τῶν τμημάτων ΘΚ καὶ ΓΔ.

Εἶναι δηλ. ΘΚ − ΓΔ = ΘΚ − ΘΙ = ΙΚ.

6. ΤΑ ΕΙΔΗ ΤΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

§ 13. α΄) Ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια. Εἰς ὁμαλὴν ἐπιφάνειαν μελανοπίνακος ὁρίζομεν δύο τυχόντα σημεῖα Α, Β. Μὲ τὴν βοήθειαν δὲ τοῦ κανόνος γράφομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Τότε βλέπομεν ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα αὐτῆς εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ μελανοπίνακος. Τοῦτο συμβαίνει καὶ ἂν Α, Β εἶναι τυχόντα σημεῖα τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς ὑαλοπίνακος ἑνὸς παραθύρου ἢ ὁμαλοῦ πατώματος κ.τ.λ. Δὲν συμβαίνει ὅμως αὐτό, ἂν Α, Β εἶναι σημεῖα τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς ᾠοῦ ἢ τυχόντα σημεῖα τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς μεταλλικοῦ σωλῆνος.

Ἡ ἰδιότης λοιπὸν αὐτὴ χαρακτηρίζει ἓν ὡρισμένον εἶδος ἐπιφα-



Σχ. 9.

νειῶν. Ταύτας ὀνομάζομεν, **ἐπιπέδους ἐπιφανείας** ἢ ἁπλῶς **ἐπίπεδα.** Ὥστε:

Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἢ ἁπλῶς ἐπίπεδον λέγεται πᾶσα ἐπιφάνεια ἐπὶ τῆς ὁποίας εὑρίσκονται ὅλα τὰ σημεῖα μιᾶς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ δύο τυχόντα σημεῖα τῆς ἐπιφανείας ταύτης.

Τὸν ὁρισμὸν τοῦτον ἐκφράζομεν συντομώτερον ὡς ἑξῆς:

Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἢ ἐπίπεδον λέγεται πᾶσα ἐπιφάνεια, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἐφαρμόζει πανταχοῦ.

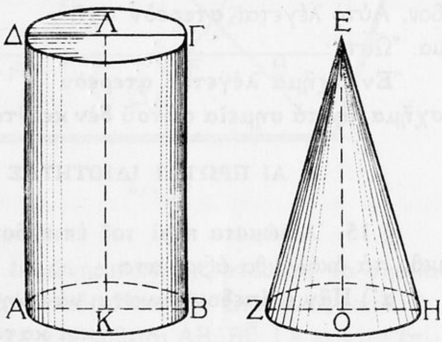
Δι' αὐτὸν τὸν λόγον οἱ τεχνῖται ἀπὸ καιροῦ εἰς καιρὸν ἐφαρμόζουσι μίαν εὐθεῖαν τοῦ κανόνος κατὰ διαφόρους διευθύνσεις ἐπὶ σανίδος, διὰ νὰ ἴδωσιν, ἂν ἔκαμον αὐτὴν ἐπίπεδον ἢ ὄχι ἀκόμη.

β΄) Ἡ τεθλασμένη ἐπιφάνεια. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σώματος ΔΕ (σχ. 9) ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδα μέρη, ἀλλὰ δὲν εἶναι ἐπίπεδον. Αὕτη λέγεται **τεθλασμένη** ἢ **πολυεδρικὴ ἐπιφάνεια** Καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σώματος ΚΛΜΝ (σχ. 9) εἶναι πολυεδρική. Ὥστε:

Μία ἐπιφάνεια λέγεται τεθλασμένη ἢ πολυεδρική, ἂν ἀποτελῆται ἀπὸ ἐπίπεδα μέρη, ἀλλὰ δὲν εἶναι ἐπίπεδον.

γ΄) Ἡ καμπύλη ἐπιφάνεια. Ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς ᾠοῦ δὲν ἔχει ἐπίπεδα μέρη. Λέγεται δὲ αὕτη **καμπύλη** ἐπιφάνεια. Καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς βώλου εἶναι καμπύλη ἐπιφάνεια. Ὥστε:

Μία ἐπιφάνεια λέγεται καμπύλη, ἂν δὲν ἔχῃ ἐπίπεδα μέρη.



Σχ. 10

δ΄) Ἡ μεικτὴ ἐπιφάνεια. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σώματος ΑΓ (σχ. 10) ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἐπίπεδα μέρη καὶ ἀπὸ ἓν καμπύλον. Διὰ τοῦτο αὕτη λέγεται **μεικτὴ** ἐπιφάνεια. Καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σώματος ΕΖΗ (σχ. 10) εἶναι μεικτή. Ὥστε:

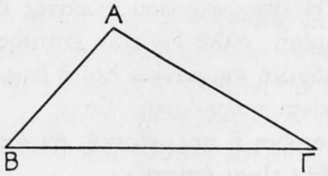
Μία ἐπιφάνεια λέγεται μεικτή, ἂν ἀποτελῆται ἀπὸ ἐπίπεδα καὶ καμπύλα μέρη.

7. ΕΙΔΗ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

§ 14. α΄) Ποῖα σχήματα λέγονται ἐπίπεδα σχήματα. Ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ σχήματος ΑΒΓ (σχ. 11) κεῖνται εἰς ἓν ἐπίπεδον. Δι' αὐτὸ δὲ τοῦτο λέγεται **ἐπίπεδον σχῆμα.** Ὥστε:

Ἓν σχῆμα λέγεται ἐπίπεδον σχῆμα, ἂν ὅλα τὰ σημεῖα αὐτοῦ κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

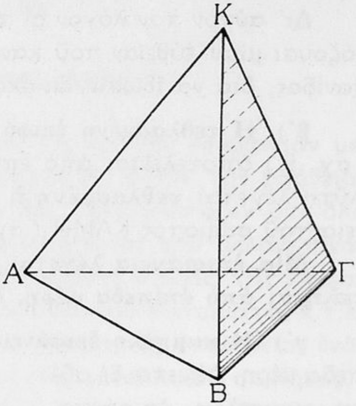
β′) Ποῖα σχήματα λέγονται στερεὰ σχήματα. Τὰ σημεῖα τοῦ σχήματος ΚΑΒΓ (σχ. 12) δὲν



Σχ. 11

κεῖνται ὅλα εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Αὐτὸ λέγεται **στερεὸν** σχῆμα. Ὥστε:

Ἓν σχῆμα λέγεται στερεὸν σχῆμα, ἂν τὰ σημεῖα αὐτοῦ δὲν κεῖνται ὅλα εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.



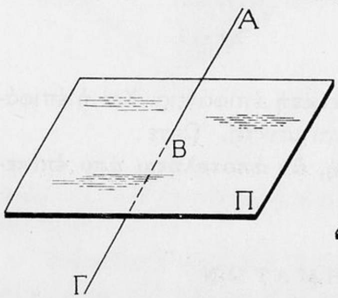
Σχ. 12

8. ΑΙ ΠΡΩΤΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

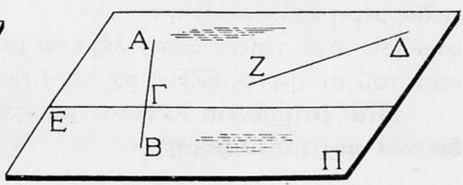
§ **15. Ἀξιώματα περὶ τοῦ ἐπιπέδου.** Περὶ τοῦ ἐπιπέδου δεχόμεθα τὰ ἀκόλουθα ἀξιώματα.

α′) Πᾶν ἐπίπεδον δύναται νὰ νοηθῇ αὐξανόμενον ἐπ᾽ ἄπειρον καὶ κατὰ τὰς δύο διαστάσεις αὐτοῦ.

β′) Ἂν δύο σημεῖα Α, Γ μιᾶς εὐθείας κεῖνται ἑκατέρωθεν ἑνὸς ἐπιπέδου Π, ἡ εὐθεῖα αὕτη ἔχει μὲ τὸ ἐπίπεδον Π ἓν κοινὸν σημεῖον Β (Σχ. 13).



Σχ. 13



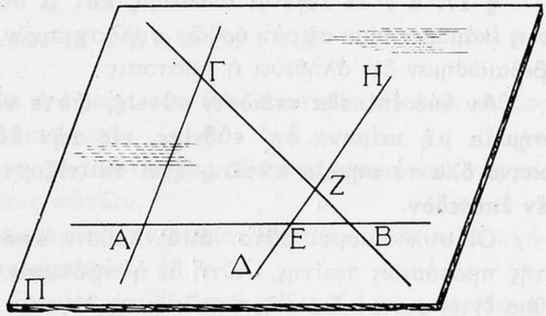
Σχ. 14

γ′) **Πᾶσα εὐθεῖα ἑνὸς ἐπιπέδου χωρίζει αὐτὸ εἰς δύο μέρη.**

Ἂν δὲ δύο σημεῖα αὐτοῦ κεῖνται ἐκτὸς τῆς εὐθείας ταύτης, τὸ ὑπ' αὐτῶν ὁριζόμενον εὐθ. τμῆμα τέμνει τὴν εὐθεῖαν ταύτην μόνον ἂν ταῦτα κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας.

Οὕτω τὸ τμῆμα ΑΒ τέμνει εἰς τὸ σημεῖον Γ τὴν εὐθεῖαν Ε τοῦ ἐπιπέδου Π (σχ. 14). Τὸ δὲ τμῆμα ΔΖ δὲν τέμνει τὴν εὐθεῖαν Ε.

§ **16.** *Θεώρημα:* **Ἂν δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ τεθῶσιν οὕτως ὥστε νὰ ἔχωσι τρία κοινὰ σημεῖα Α,Β,Γ, μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, εἰς τὴν θέσιν ταύτην τὰ ἐπίπεδα ταῦτα ἔχουσι κοινὰ ὅλα τὰ σημεῖα αὐτῶν, ἤτοι ταυτίζονται καὶ ἀποτελοῦσιν ἓν ἐπίπεδον** (Σχ. 15).



Σχ. 15

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τῆς προτάσεως τὰ σημεῖα Α, Β, Γ κεῖνται καὶ εἰς τὰ δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ. Ἐπομένως κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἐπιπέδου (§ 13 α') αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ κεῖνται ἐπίσης καὶ εἰς τὰ δύο ταῦτα ἐπίπεδα.

Ἔστω δὲ Δ ἓν ἄλλο τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Π. Γράφομεν εἰς τὸ ἐπίπεδον Π μίαν εὐθεῖαν ΔΗ, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΒΓ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ καὶ τὰ σημεῖα Ε, Ζ θὰ κεῖνται ἐπ' αὐτοῦ. Καὶ ὁλόκληρος δὲ ἡ εὐθεῖα ΕΖ θὰ κεῖται εἰς τὸ Ρ, ἐπομένως καὶ τὸ σημεῖον Δ αὐτῆς κεῖται εἰς τὸ Ρ.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον βεβαιούμεθα ὅτι: Πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Ρ εἶναι καὶ σημεῖον τοῦ Π. Ἀπεδείχθη λοιπὸν ὅτι:

Πᾶν σημεῖον τοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου κεῖται καὶ εἰς τὸ ἄλλο ἐπίπεδον. Ἤτοι τὰ ἐπίπεδα ταῦτα εἰς τὴν θέσιν ταύτην ἔχουσι

κοινὰ ὅλα τὰ σημεῖα αὐτῶν. Ἐπομένως ταυτίζονται, ἤτοι ἀποτελοῦσιν ἓν μόνον ἐπίπεδον. ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα. **Ἂν τὰ ἄκρα δύο ἐπιπέδων σχημάτων ἐφαρμόζωσι, τὰ σχήματα ταῦτα εἶναι ἴσα.**

9. ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΕΝ ΧΡΗΣΕΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

§ 17. α΄) Τί λέγεται ἀπόδειξις καὶ τί θεώρημα. Προηγουμένως ἐκάμαμεν μίαν σειρὰν ὀρθῶν συλλογισμῶν, διὰ τῶν ὁποίων ἐβεβαιώθημεν ὅτι ἀληθεύει ἡ πρότασις:

Ἂν δύο ἐπίπεδα τεθῶσιν οὕτως, ὥστε νὰ ἔχωσι τρία κοινὰ σημεῖα μὴ κείμενα ἀπ' εὐθείας, εἰς τὴν θέσιν ταύτην ἔχουσι κοινὰ ὅλα τὰ σημεῖα αὐτῶν, ἤτοι ταυτίζονται καὶ ἀποτελοῦσιν ἓν ἐπίπεδον.

Οἱ συλλογισμοὶ οὗτοι ἀποτελοῦσιν **ἀπόδειξιν** τῆς ἀληθείας τῆς προτάσεως ταύτης. Αὐτὴ δὲ ἡ πρότασις, τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια ἔγινε φανερὰ διὰ τῆς ἀποδείξεως, λέγεται **θεώρημα.** Ὥστε:

Ἀπόδειξις εἶναι μία σειρὰ ὀρθῶν συλλογισμῶν, διὰ τῶν ὁποίων βεβαιούμεθα ὅτι μιὰ πρότασις εἶναι ἀληθής.

Θεώρημα λέγεται πᾶσα πρότασις, τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια γίνεται φανερὰ διὰ τῆς ἀποδείξεως.

Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα προηγήθη τὸ θεώρημα, ἤτοι ἡ ἀποδεικτέα πρότασις καὶ ἠκολούθησεν ἡ ἀπόδειξις. Εἶναι ὅμως δυνατὸν νὰ προηγηθῇ ἡ ἀπόδειξις καὶ ὡς συμπέρασμα νὰ ἀκολουθήσῃ τὸ θεώρημα. Εἰς τὰ ἀκόλουθα θὰ γίνηται χρῆσις καὶ τῶν δύο τούτων τρόπων, κατὰ τὰς περιστάσεις.

β΄) Τί λέγεται πόρισμα. Ἀπὸ τὸ προηγούμενον θεώρημα προκύπτει ἡ ἀλήθεια μιᾶς ἄλλης προτάσεως, τὴν ὁποίαν ἐκαλέσαμεν **πόρισμα.** Εἶναι δὲ δυνατὸν ἓν πόρισμα νὰ προκύπτῃ καὶ ἀπὸ περισσότερα θεωρήματα. Ὥστε:

Πόρισμα λέγεται πᾶσα πρότασις, τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια προκύπτει ἀπὸ μίαν ἢ περισσοτέρας ἀληθεῖς προτάσεις.

γ΄) Τί λέγεται πρόβλημα. Εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν καὶ εἰς τὴν Ἄλγεβραν εἴδομεν διάφορα προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα ἐζητεῖτο ἡ τιμὴ ἑνὸς ἢ περισσοτέρων ποσῶν. Εἶναι δὲ δυνατὸν τὰ ποσὰ ταῦτα νὰ εἶναι καὶ γεωμετρικά, π.χ. μήκη γραμμῶν, ἐμβαδὰ ἐπιφανειῶν κ.τ.λ. Ἑπομένως καὶ εἰς τὴν Γεωμετρίαν θὰ ἀπαντήσωμεν τοιαῦτα ἀριθμητικά, οὕτως εἰπεῖν προβλήματα.

Πλὴν τούτων ὅμως ἐνθυμούμεθα ὅτι εἰς τὴν Πρακτικὴν Γεωμετρίαν συνηντήσαμεν προτάσεις, διὰ τῶν ὁποίων ἐζητεῖτο νὰ ὁρισθῇ σημεῖον τι ἢ νὰ κατασκευασθῇ ἢ τροποποιηθῇ ἓν σχῆμα. Πᾶσα τοιαύτη πρότασις λέγεται **γεωμετρικὸν πρόβλημα.**

10. Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

§ 18. Τί διδάσκει ἡ Γεωμετρία. Ἡ Γεωμετρία εἶναι εἷς κλάδος τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης.

Διδάσκει δὲ αὕτη τὰς ἰδιότητας τῶν σχημάτων καὶ τὰς μεθόδους τῆς μετρήσεως αὐτῶν.

Τὸ μέρος τῆς Γεωμετρίας, τὸ ὁποῖον ἐξετάζει τὰ ἐπίπεδα σχήματα, λέγεται **Ἐπιπεδομετρία.**

Τὸ δὲ μέρος τῆς Γεωμετρίας τὸ ὁποῖον ἐξετάζει τὰ στερεὰ σχήματα λέγεται **Στερεομετρία.**

Ἐξετάζει δὲ ἡ Γεωμετρία τὰ διάφορα σχήματα χωρὶς νὰ λαμβάνῃ ὑπ᾽ ὄψιν τὴν ὕλην, ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦνται ταῦτα.

τινὴ ἐκτὸς ἢ στερεομετρικῶν ποσῶν. Εἶναι δὲ δυνατὸν τὰ ποσὰ ταῦτα νὰ εἶναι καὶ γεωμετρικά, π.χ. μῆκος χρόνου, ἐμβαδὸν ἐπιφανείας κ.τ.λ. Ἐρχόμενος καὶ εἰς τὴν Γεωμετρίαν θὰ ἀπαντήσωμεν τοιαῦτα ἀριθμητικά, οὕτως εἰπεῖν προβλήματα.

Πλὴν τούτων ὅμως θὰ ἴδωμεν ὅτι εἰς τὴν Πρακτικὴν Γεωμετρίαν συναντῶμεν προτάσεις, διὰ τῶν ὁποίων ζητεῖται νὰ ὁρισθῇ σημεῖόν τι ἢ νὰ κατασκευασθῇ ἢ τροποποιηθῇ ἓν σχῆμα. Πᾶσα τοιαύτη πρότασις λέγεται **γεωμετρικὸν πρόβλημα**.

Ι Β. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

§ 18. Τί λέγεται ἡ Γεωμετρία. Ἡ Γεωμετρία εἶναι εἷς κλάδος τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης.

Διδάσκει δὲ αὐτὴ τὰς ἰδιότητας τῶν σχημάτων καὶ τὰς μεθόδους τῆς μετρήσεως αὐτῶν.

Τὸ μέρος τῆς Γεωμετρίας, τὸ ὁποῖον ἐξετάζει τὰ ἐπίπεδα σχήματα, λέγεται **Ἐπιπεδομετρία**.

Τὸ δὲ μέρος τῆς Γεωμετρίας τὸ ὁποῖον ἐξετάζει τὰ στερεὰ σχήματα λέγεται **Στερεομετρία**.

Ἐξετάζει δὲ ἡ Γεωμετρία τὰ διάφορα σχήματα χωρὶς νὰ λαμβάνῃ ὑπ' ὄψιν τὴν ὕλην, ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦνται ταῦτα.

ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'

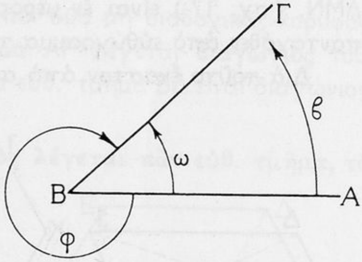
I. ΤΑ ΚΥΡΙΩΤΕΡΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

Ι. ΑΙ ΓΩΝΙΑΙ

§ 19. Τί εἶναι γωνία καὶ ποῖα εἶναι τὰ στοιχεῖα αὐτῆς. Ἀπὸ τὴν πρακτικὴν Γεωμετρίαν ἐνθυμούμεθα ὅτι:

Γωνία λέγεται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἀπὸ δύο εὐθείας, αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουσιν ἀπὸ ἓν σημεῖον καὶ δὲν ἀποτελοῦσιν εὐθεῖαν.

Τὸ σχῆμα π.χ. ΑΒΓ εἶναι γωνία (σχ. 16).



Σχ. 16

Αἱ εὐθεῖαι ἀπὸ τὰς ὁποίας σχηματίζεται μία γωνία λέγονται **πλευραὶ** τῆς γωνίας ταύτης.

Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν πλευρῶν μιᾶς γωνίας λέγεται **κορυφὴ** αὐτῆς. Οὕτως αἱ εὐθεῖαι ΒΑ καὶ ΒΓ εἶναι αἱ πλευραὶ καὶ τὸ σημεῖον Β ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας ΑΒΓ. Ταύτην ὀνομάζομεν καὶ ΓΒΑ ἢ ἁπλῶς Β ἢ καὶ ω.

§ 20. Πῶς γεννᾶται μία γωνία. Ἂς νοήσωμεν ὅτι π.χ. ἡ πλευρὰ ΒΑ στρέφεται περὶ τὴν κορυφὴν Β κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους β καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῆς, ἕως ὅτου συμπέσῃ μὲ τὴν πλευρὰν ΒΓ. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ σύνολον τῶν διαδοχικῶν θέσεων αὐτῆς ἀποτελεῖ τὴν γωνίαν ω. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΒΑ κατὰ τὴν κίνησιν ταύτην γράφει τὴν γωνίαν ω.

Ἡ εὐθεῖα ΒΑ λέγεται **ἀρχικὴ** πλευρά, ἡ δὲ ΒΓ **τελικὴ** πλευρὰ τῆς γωνίας ω.

Ἂν ἡ ΒΑ στραφῇ κατὰ φορὰν ἀντίθετον τῆς φορᾶς τοῦ βέλους β, μέχρις οὗ πάλιν συμπέσῃ μὲ τὴν ΒΓ, θὰ γράψῃ ἄλλην γωνίαν, τὴν φ.

Αἱ δύο γωνίαι ω καὶ φ ἔχουσι τὴν ἑξῆς διαφοράν: Ἂν μία πλευρὰ αὐτῶν προεκταθῇ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τῆς κορυφῆς εἰσέρχεται εἰς τὴν γωνίαν φ, οὐχὶ ὅμως εἰς τὴν ω.

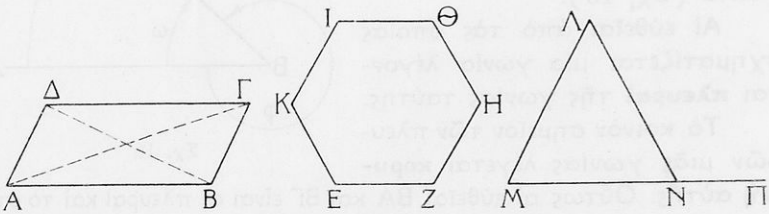
Πρὸς διάκρισιν τὴν μὲν γωνίαν ω λέγομεν **κυρτὴν** τὴν δὲ φ **μὴ κυρτήν.**

Σημείωσις. Εἰς τὰ ἑπόμενα, ὅταν θὰ λέγωμεν ἁπλῶς γωνίαν, θὰ ἐννοοῦμεν κυρτὴν γωνίαν.

II. ΤΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

§ 21. Τί εἶναι εὐθύγραμμα σχήματα καὶ ποῖα τὰ στοιχεῖα αὐτῶν. Παρατηροῦμεν ὅτι ἕκαστον ἀπὸ τὰ σχήματα ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘΙΚ, ΛΜΝ, (σχ. 17) εἶναι ἓν μέρος ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περικλείεται πανταχόθεν ἀπὸ εὐθύγραμμα τμήματα.

Διὰ τοῦτο ἕκαστον ἀπὸ αὐτὰ λέγεται **εὐθύγραμμον σχῆμα.**



Σχ. 17

Καὶ ἀπὸ τὴν Πρακτικὴν Γεωμετρίαν ἐνθυμούμεθα ὅτι:

Ἕκαστον εὐθύγραμμον σχῆμα ἔχει **πλευράς, γωνίας, κορυφὰς καὶ διαγωνίους.**

Πλευραὶ ἑνὸς εὐθυγράμμου σχήματος λέγονται τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα περικλείεται τοῦτο.

Γωνίαι εὐθυγράμμου τμήματος λέγονται αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουσιν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ.

Ἂν ἡ μία πλευρὰ μιᾶς γωνίας εὐθυγράμμου σχήματος προεκταθῇ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς κορυφῆς, σχηματίζεται νέα γωνία. Αὕτη λέγεται **ἐξωτερικὴ** γωνία τοῦ εὐθυγράμμου σχήματος. Π.χ. ἡ ΛΝΠ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ εὐθυγράμμου σχήματος ΛΜΝ (σχ. 17).

Κορυφαὶ ἑνὸς εὐθυγράμμου σχήματος λέγονται αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἕκαστον εὐθύγραμμον σχῆμα ἔχει ἴσον ἀριθμὸν πλευρῶν, γωνιῶν καὶ κορυφῶν. Οὕτω τὸ ΛΜΝ (σχ. 17) ἔχει τρεῖς πλευράς, τρεῖς γωνίας καὶ τρεῖς κορυφάς. Λέγεται δὲ διὰ τοῦτο **τρίπλευρον** ἤ, συνηθέστερον, **τρίγωνον.**

Τὸ ΑΒΓΔ ἔχει τέσσαρας πλευρὰς καὶ λέγεται **τετράπλευρον.** Τὸ ΕΖΗΘΙΚ ἔχει ἓξ πλευρὰς καὶ ἓξ γωνίας. Λέγεται δὲ **ἑξάπλευρον** ἤ, συνηθέστερον, **ἑξάγωνον.**

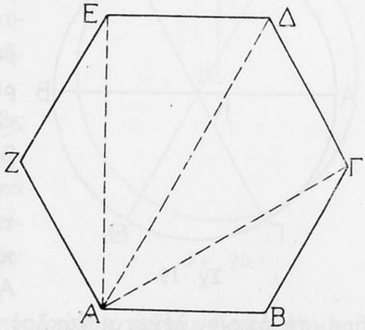
Τὰ πεντάγωνα, ἑξάγωνα κ.τ.λ. λέγονται ὅλα μαζὶ **πολύγωνα.**

Τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν ἑνὸς εὐθ. σχήματος λέγεται **περίμετρος** αὐτοῦ.

Τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΓ ὁρίζεται ἀπὸ δύο μὴ διαδοχικὰς κορυφὰς τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Τὸ τμῆμα ΑΓ λέγεται **διαγώνιος** τοῦ ΑΒΓΔ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὸ εὐθ. τμῆμα ΒΔ εἶναι διαγώνιος τοῦ ΑΒΓΔ. Ὥστε:

Διαγώνιος ἑνὸς εὐθ. σχήματος λέγεται πᾶν εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ δύο μὴ διαδοχικὰς κορυφὰς αὐτοῦ.

§ **22.** *Πρόβλημα.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν διαγωνίων ἑνὸς εὐθ. σχήματος ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.**



Σχ. 18

Λύσις. Ἔστω ἓν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 18). Ἀπὸ μίαν κορυφὴν αὐτοῦ π.χ. τὴν Α ἄγονται 6 − 3 διαγώνιοι, διότι ΑΒ καὶ ΑΖ εἶναι πλευραί. Ἑπομένως ἀπὸ τὰς 6 κορυφὰς αὐτοῦ ἄγονται (6 − 3) · 6 διαγώνιοι. Ἀλλὰ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἑκάστη διαγώνιος π.χ. ἡ ΑΓ μετρεῖται δίς, ὡς ἀγομένη πρῶτον ἐκ τοῦ Α καὶ δεύτερον ἐκ τοῦ Γ. Ἑπομένως τὸ γινόμενον $(6-3)\cdot 6$. εἶναι διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ δ τῶν διαγωνίων.

$$\text{Εἶναι λοιπὸν}\quad \delta = \frac{(6-3)\cdot 6}{2} = 9$$

Γενικῶς: Ἂν τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα ἔχῃ ν πλευράς, ἀπὸ ἑκάστην κορυφὴν ἄγονται $\nu - 3$ διαγώνιοι. Ἀπὸ δὲ τὰς ν κορυφὰς ἄγονται $(\nu-3)\cdot\nu$ διαγώνιοι. Ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν διαγωνίων, ἕπεται ὅτι $\delta = \frac{(\nu-3)\cdot\nu}{2}$

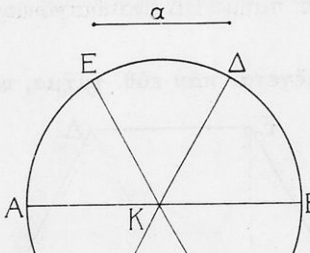
Ἀσκήσεις

1. Νὰ εὑρεθῇ διὰ τοῦ προηγουμένου τύπου ὁ ἀριθμὸς τῶν διαγωνίων ἑνὸς τριγώνου καὶ ἑνὸς τετραπλεύρου.

2. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν διαγωνίων ἑνὸς πενταγώνου, ἑπταγώνου, ὀκταγώνου.

III. ΚΥΚΛΟΣ

§ 23. Τί εἶναι κύκλος καὶ ποῖα εἶναι τὰ στοιχεῖα αὐτοῦ. Ἀπὸ τὴν Πρακτικὴν Γεωμετρίαν γνωρίζομεν ὅτι:



Σχ. 19

Κύκλος εἶναι ἓν μέρος ἐπιπέδου, τοῦ ὁποίου ἓν σημεῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς, εἰς τὴν ὁποίαν περατοῦται.

Ἡ γραμμή, εἰς τὴν ὁποίαν περατοῦται εἰς κύκλος, λέγεται **περιφέρεια** αὐτοῦ. Περιφέρειαν κύκλου γράφομεν συνήθως μὲ τὸν διαβήτην. Τὸ σημεῖον τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας, λέγεται **κέντρον** αὐτοῦ. Οὕτως ἡ γραμμὴ ΑΓΒΕΑ κλείει ἓν μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον λέγεται κύκλος (σχ. 19).

Οὗτος ἔχει περιφέρειαν ΑΓΒΕΑ καὶ κέντρον Κ.

Ἐκτὸς τούτων εἰς ἕκαστον κύκλον διακρίνομεν **ἀκτῖνας** καὶ **διαμέτρους**.

Ἀκτὶς κύκλου λέγεται πᾶν εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον ἀρχίζει ἀπὸ τὸ κέντρον καὶ καταλήγει εἰς τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ. Οὕτω ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, κ.τ.λ. εἶναι ἀκτῖνες τοῦ κύκλου Κ.

Διάμετρος κύκλου λέγεται πᾶν εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον καὶ καταλήγει ἑκατέρωθεν εἰς τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ.

Π.χ. ΑΚΒ, ΓΚΔ, ΕΚΘ εἶναι διάμετροι τοῦ κύκλου Κ.

Εἰς τὸ ἑξῆς χάριν συντομίας θὰ σημειώνωμεν μὲ τὸ σύμβολον (Κ,α) τὸν κύκλον ἢ τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα α.

§ 24. Ποῖαι σχέσεις ὑπάρχουσι μεταξὺ τῶν ἀκτίνων καὶ τῶν διαμέτρων ἑνὸς κύκλου.

α΄) Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τοῦ κύκλου εἶναι φανερὸν ὅτι

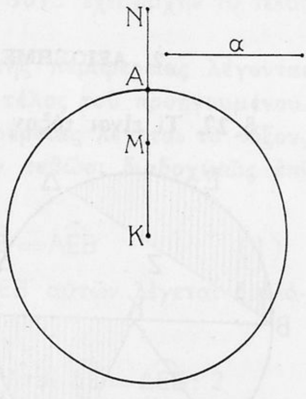
ΚΑ = ΚΒ = ΚΓ κ.τ.λ., ἤτοι:

Ὅλαι αἱ ἀκτῖνες ἑνὸς κύκλου εἶναι ἴσαι.

β) Ἐπειδὴ ἑκάστη διάμετρος ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἀκτῖνας, ἕπεται εὐκόλως ὅτι:

ΑΚΒ = ΓΚΔ = ΕΚΘ κ.τ.λ., ἤτοι:

Ὅλαι αἱ διάμετροι ἑνὸς κύκλου εἶναι ἴσαι.



Σχ. 20

§ 25. Νὰ συγκριθῇ ἡ ἀπόστασις ἑνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου κύκλου ἀπὸ τὸ κέντρον πρὸς τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ.

α΄) Ἔστω Μ ἓν σημεῖον ἐντὸς τοῦ κύκλου Κ (σχ. 20). Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΚΜ συναντᾷ τὴν περιφέρειαν εἰς σημεῖον Α κείμενον πέραν τοῦ Μ. Εἶναι λοιπὸν ΚΜ < ΚΑ. ἤτοι:

Ἡ ἀπόστασις ἑνὸς σημείου, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς κύκλου, ἀπὸ τὸ κέντρον, εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ.

β) Ἔστω ἀκόμη ἓν σημεῖον Ν, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου καὶ ἐκτὸς αὐτοῦ. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ εὐθ. τμῆμα

ΚΝ τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς ἓν σημεῖον Α μεταξὺ Κ καὶ Ν. Εἶναι λοιπὸν ΚΝ 〉 ΚΑ, ἤτοι :

Ἡ ἀπόστασις ἑνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου κύκλου, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς αὐτοῦ, ἀπὸ τὸ κέντρον, εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ.

γ΄) Ἂν ἓν σημεῖον Α κεῖται ἐπὶ περιφερείας (Κ, α) εἶναι φανερὸν ὅτι ΚΑ = α. Ἤτοι :

Ἡ ἀπόστασις παντὸς σημείου περιφερείας ἀπὸ τὸ κέντρον αὐτῆς ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς.

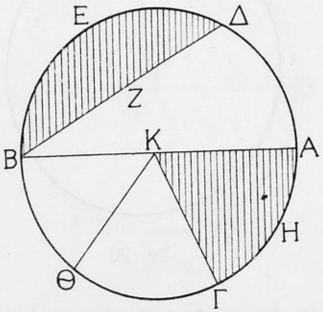
§ 26. Πρώτη ἔννοια γεωμετρικοῦ τόπου. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα ἐννοοῦμεν ὅτι :

Ἀπὸ τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ἑνὸς κύκλου (Κ, α) ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας καὶ μόνον αὐτὰ ἀπέχουσιν ἀπὸ τὸ κέντρον Κ ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα α.

Διὰ τοῦτο ἡ περιφέρεια (Κ, α) λέγεται **γεωμετρικὸς τόπος** ἢ ἁπλῶς **τόπος** τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς, τὰ ὁποῖα ἀπέχουσιν ἀπὸ τὸ Κ ἀπόστασιν ἴσην πρὸς α.

2. ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΑ ΜΕΡΗ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ

§ 27. Τί εἶναι τόξον καὶ χορδὴ αὐτοῦ. Τὸ τυχὸν μέρος ΑΔ μιᾶς περιφερείας Κ (σχ. 21) λέγεται **τόξον.** Καὶ τὰ μέρη ΔΕΒ, ΒΘ, ΑΓ κ.λ.π. τῆς αὐτῆς περιφερείας εἶναι τόξα. Ὥστε :



Σχ. 21

Τόξον λέγεται τυχὸν μέρος περιφερείας.

Τὸ κέντρον τῆς περιφερείας εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται ἓν τόξον, λέγεται καὶ **κέντρον** τοῦ τόξου τούτου.

Τὰ ἄκρα ἑνὸς τόξου ὁρίζουσιν ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα. Τοῦτο λέγεται **χορδὴ** τοῦ τόξου τούτου. Π.χ. τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΖΔ εἶναι χορδὴ τοῦ τόξου ΒΕΔ, ἀλλὰ καὶ τοῦ τόξου ΒΑΔ (σχ. 21).

Περὶ τῶν τόξων δεχόμεθα τὸ ἑξῆς ἀξίωμα:

Πᾶν τόξον ἔχει ἓν μόνον μέσον.

Εἶναι εὔκολον νὰ νοήσωμεν ὅτι ἓν μέρος π.χ. ΚΒΓ κύκλου (Κ, α) (σχ. 21) δύναται νὰ στραφῇ περὶ τὸ κέντρον Κ χωρὶς νὰ ἐξέλθῃ ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου τούτου. Κατὰ τὴν στροφὴν ταύτην πᾶν σημεῖον Θ τοῦ στρεφομένου τόξου ΒΘΓ θὰ μένῃ διαρκῶς ἐπὶ τῆς περιφερείας διότι εἰς πᾶσαν θέσιν του εἶναι ΚΘ = α. Ἕπεται λοιπὸν ἐκ τούτου ὅτι:

α΄) Πᾶν τόξον ἐφαρμόζει πανταχοῦ ἐπὶ τῆς περιφερείας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει.

β΄) Δύο ὡρισμένα τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας εἶναι ἴσα ἢ ἄνισα.

3. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΤΟΞΩΝ

§ 28. Ποῖα τόξα λέγονται διαδοχικά. Τὰ τόξα ΑΔ, ΔΕ λέγονται **διαδοχικά.** Ὁμοίως τὰ τόξα ΔΕ, ΕΒ, ΒΘ (σχ. 21) εἶναι διαδοχικά. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι ἕκαστον ἀπὸ αὐτὰ ἔχει ἀρχὴν τὸ τέλος τοῦ προηγουμένου. Ὥστε:

Δύο ἢ περισσότερα τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας λέγονται διαδοχικά, ἂν ἀρχὴ ἑκάστου εἶναι τὸ τέλος τοῦ προηγουμένου.

Ἄθροισμα τόξων τῆς αὐτῆς περιφερείας λέγεται τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ αὐτά, ἂν τεθῶσι διαδοχικῶς ἐπὶ τῆς περιφερείας ταύτης.

Π.χ. $$\overset{\frown}{\text{ΑΔ}} + \overset{\frown}{\text{ΔΕ}} + \overset{\frown}{\text{ΕΒ}} = \overset{\frown}{\text{ΑΕΒ}} \qquad (1)$$

Ἂν εἶναι $\overset{\frown}{\text{ΔΕ}} = \overset{\frown}{\text{ΕΒ}}$, τὸ ἄθροισμα ΔΕΒ αὐτῶν λέγεται διπλάσιον τοῦ $\overset{\frown}{\text{ΔΕ}}$. Εἶναι δηλ. $\overset{\frown}{\text{ΔΕΒ}} = \overset{\frown}{\text{ΔΕ}} \cdot 2$

Τὸ δὲ ΔΕ λέγεται ἥμισυ τοῦ $\overset{\frown}{\text{ΔΕΒ}}$, ἤτοι $\overset{\frown}{\text{ΔΕ}} = \overset{\frown}{\text{ΔΕΒ}} : 2$

Ὁμοίως ἂν εἶναι $\overset{\frown}{\text{ΑΔ}} = \overset{\frown}{\text{ΔΕ}} = \overset{\frown}{\text{ΕΒ}}$ ἡ ἰσότης (1) γίνεται $\overset{\frown}{\text{ΑΕΒ}} = \overset{\frown}{\text{ΑΔ}} \cdot 3$ καὶ ἐξ αὐτῆς ἕπεται ὅτι:

$$\overset{\frown}{\text{ΑΔ}} = \overset{\frown}{\text{ΑΕΒ}} : 3, \text{ ἤτοι:}$$

Τὸ $\overset{\frown}{\text{ΑΕΒ}}$ εἶναι τριπλάσιον τοῦ $\overset{\frown}{\text{ΑΔ}}$· τοῦτο δὲ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ $\overset{\frown}{\text{ΑΕΒ}}$.

Τὸ $\frac{1}{360}$ μιᾶς περιφερείας λέγεται **μοῖρα.** Αὕτη διαιρεῖται εἰς 60 πρῶτα λεπτὰ (′) καὶ ἕκαστον ἀπὸ αὐτὰ εἰς 60 δεύτερα λεπτὰ (″).

Ὅπως δὲ καὶ ἀπὸ τὴν Πρακτικὴν Γεωμετρίαν, γνωρίζομεν ἡ μοῖρα καὶ τὰ μέρη αὐτῆς χρησιμεύουσιν ὡς μονάδες, πρὸς τὴν ὁποίαν συγκρίνονται τὰ τόξα. Ἂν π.χ. ἓν τόξον εἶναι 20σιον τοῦ $\frac{1}{360}$ τῆς περιφερείας του, λέγομεν ὅτι εἶναι τόξον 20 μοιρῶν καὶ σημειώνεται οὕτως: 20^0.

Ἂν δὲ ἓν τόξον ἀποτελῆται ἀπὸ 10^0, ἀπὸ 15 πρῶτα λεπτὰ τῆς μοίρας καὶ ἀπὸ 28 δεύτερα λεπτὰ σημειώνεται οὕτω $10^0\,15'\,28''$.

§ 29. Τί εἶναι διαφορὰ δύο τόξων. Ἔστωσαν τὰ ἄνισα τόξα. ΑΔΕ καὶ ΑΔ (σχ. 21). Ἂν νοήσωμεν ὅτι ἀπὸ τὸ τόξον ΑΔΕ ἀποκόπτεται τὸ μικρότερον αὐτοῦ τόξον ΑΔ, μένει τὸ τόξον ΔΕ. Τοῦτο λέγεται διαφορὰ τῶν τόξων ΑΔΕ καὶ ΑΔ. Ὥστε:

Διαφορὰ δύο ἀνίσων τόξων τῆς αὐτῆς περιφερείας λέγεται τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον μένει, ἂν ἀπὸ τὸ μεγαλύτερον καὶ ἀπὸ τὸ ἓν ἄκρον αὐτοῦ, ἀποκοπῇ τόξον ἴσον πρὸς τὸ μικρότερον.

4. ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΑ ΜΕΡΗ ΚΥΚΛΟΥ

§ 30. Τί εἶναι τμῆμα κύκλου καὶ τί κυκλικὸς τομεύς. Μεταξὺ π.χ. τοῦ τόξου ΔΕΒ καὶ τῆς χορδῆς ΔΒ αὐτοῦ περιέχεται τὸ μέρος ΔΕΒΖΔ τοῦ κύκλου Κ (σχ. 21). Τὸ μέρος τοῦτο λέγεται **κυκλικὸν τμῆμα.** Ὥστε:

Κυκλικὸν τμῆμα εἶναι μέρος κύκλου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ ἑνὸς τόξου καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ.

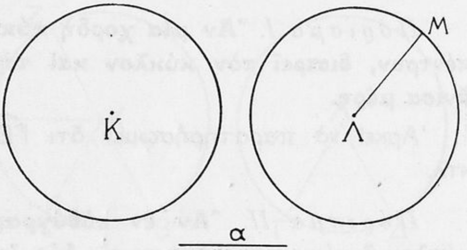
Μεταξὺ τοῦ τόξου ΑΓ καὶ τῶν ἀκτίνων ΚΑ, ΚΓ περιέχεται ἓν μέρος ΚΑΗΓΚ τοῦ κύκλου Κ (σχ. 21). Τοῦτο λέγεται **κυκλικὸς τομεύς.** Ὥστε:

Κυκλικὸς τομεὺς εἶναι μέρος κύκλου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ ἑνὸς τόξου καὶ τῶν ἀκτίνων, αἱ ὁποῖαι καταλήγουσιν εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ.

Τὸ τόξον ἑνὸς κυκλικοῦ τομέως λέγεται **βάσις** αὐτοῦ. Ἡ δὲ γωνία τῶν ἀκτίνων, αἱ ὁποῖαι καταλήγουσιν εἰς τὰ ἄκρα τῆς βάσεως ἑνὸς τομέως, λέγεται καὶ γωνία τοῦ τομέως τούτου.

5. ΑΙ ΠΡΩΤΑΙ ΚΥΚΛΙΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

§ 31. Σύγκρισις δύο κύκλων ἢ δύο περιφερειῶν, τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι. Μὲ κέντρα Κ καὶ Λ καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν δύο περιφερείας (σχ. 22).

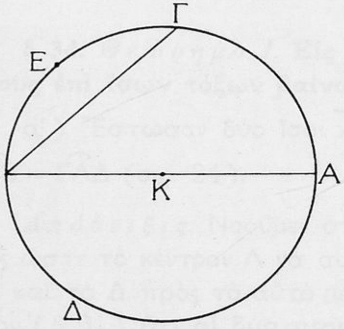


Σχ. 22

Ἂς νοήσωμεν δὲ ὅτι ὁ κύκλος Λ τίθεται ἐπὶ τοῦ Κ οὕτως ὥστε νὰ συμπέσωσι τὰ κέντρα αὐτῶν. Ἓν τυχὸν σημεῖον Μ τῆς περιφερείας Λ θὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς περιφερείας Κ. Διότι, ἂν ἔκειτο ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τοῦ κύκλου Κ, θὰ ἦτο $ΚΜ \lessgtr α$, ἑπομένως καὶ $ΛΜ \lessgtr α$. Αἱ σχέσεις δὲ αὗται εἶναι ψευδεῖς, διότι τὸ Μ εἶναι σημεῖον τῆς περιφερείας Λ καὶ ἑπομένως $ΛΜ = α$.

Κατὰ ταῦτα αἱ δύο περιφέρειαι ἐφαρμόζουσι καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσαι. Κατὰ δὲ τὸ πόρισμα τῆς § 16 καὶ οἱ κύκλοι εἶναι ἴσοι. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἂν αἱ ἀκτῖνες δύο κύκλων εἶναι ἴσαι, οἱ κύκλοι οὗτοι εἶναι ἴσοι καὶ αἱ περιφέρειαι αὐτῶν εἶναι ἐπίσης ἴσαι.



Σχ. 23

§ 32. Νὰ συγκριθῶσι τὰ μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα εἷς κύκλος ἢ μία περιφέρεια χωρίζεται ἀπὸ μίαν διάμετρον. Ἔστω τυχοῦσα διάμετρος ΑΒ ἑνὸς κύκλου Κ (σχ. 23). Ἂς νοήσωμεν δὲ ὅτι τὸ ἓν κυκλικὸν τμῆμα π.χ. τὸ ΑΓΒΚΑ στρέφεται περὶ τὴν ΑΒ, ἕως ὅτου εὑρεθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ΑΔΒΚΑ.

῎Αν σκεφθῶμεν, ὅπως προηγουμένως (§ 31), ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ μὲν τόξον ΑΓΒ ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ ΑΔΒ, τὸ δὲ τμῆμα ΑΓΒΚΑ ἐπὶ τοῦ ΑΔΒΚΑ.

Εἶναι λοιπὸν $\overset{\frown}{ΑΓΒ} = \overset{\frown}{ΑΔΒ}$ καὶ ΑΓΒΚΑ = ΑΔΒΚΑ. ῞Ωστε:

Πᾶσα διάμετρος κύκλου διαιρεῖ αὐτὸν καὶ τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ εἰς δύο ἴσα μέρη.

Διὰ τοῦτο τὰ τμήματα ΑΓΒΚΑ, ΑΔΒΚΑ λέγονται **ἡμικύκλια.** Τὰ δὲ τόξα ΑΓΒ, ΑΔΒ λέγονται **ἡμιπεριφέρειαι.**

Πόρισμα I. **῎Αν μία χορδὴ κύκλου δὲν διέρχηται ἀπὸ τὸ κέντρον, διαιρεῖ τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ εἰς ἄνισα μέρη.**

᾿Αρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι $\overset{\frown}{ΓΕΒ} < \overset{\frown}{ΑΓΒ}$ καὶ $\overset{\frown}{ΒΔΑΓ} > \overset{\frown}{ΒΔΑ}$ κτλ.

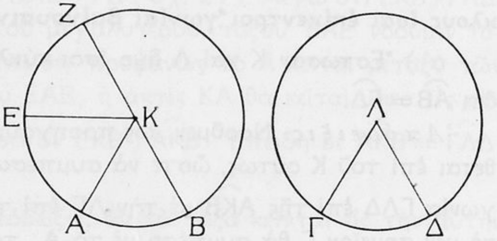
Πόρισμα II. **῎Αν ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα χωρίζῃ ἕνα κύκλον ἢ μίαν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη, τοῦτο εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου τούτου.**

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'

1. ΕΙΔΗ ΓΩΝΙΩΝ

§ 33. **Ποῖαι γωνίαι λέγονται ἐπίκεντροι γωνίαι.** Ἡ γωνία ΑΚΒ ἔχει κορυφὴν τὸ κέντρον Κ ἑνὸς κύκλου. Δι' αὐτὸ αὕτη λέγεται **ἐπίκεντρος γωνία.** Ὁμοίως αἱ γωνίαι ΖΚΕ, ΓΛΔ εἶναι ἐπίκεντροι (σχ. 34). Ὥστε:

Μία γωνία λέγεται ἐπίκεντρος, ἂν ἡ κορυφὴ αὐτῆς εἶναι κέντρον κύκλου.



Σχ. 24

Τὸ τόξον ΑΒ, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς ἐπικέντρου γωνίας ΑΚΒ, λέγεται **ἀντίστοιχον τόξον αὐτῆς.** Συνηθέστερον ἐκφράζομεν τοῦτο λέγοντες ὅτι: **Ἡ ἐπίκεντρος γωνία ΑΚΒ βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ.**

2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΕΠΙΚΕΝΤΡΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

§ 34. *Θεώρημα I.* **Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους ἐπὶ ἴσων τόξων βαίνουσιν ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι.**

α') Ἔστωσαν δύο ἴσοι κύκλοι Κ, Λ καὶ $\widehat{ΑΒ} = \widehat{ΓΔ}$. Λέγω ὅτι $\widehat{ΑΚΒ} = \widehat{ΓΛΔ}$ (σχ. 24).

Ἀπόδειξις. Νοοῦμεν ὅτι ὁ κύκλος Λ τίθεται ἐπὶ τοῦ Κ οὕτως ὥστε τὸ κέντρον Λ νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ Κ, ἡ ἀκτὶς ΛΓ μὲ τὴν ΚΑ καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΚΑ μὲ τὸ Β. Εἶναι τότε γνωστὸν (§ 31) ὅτι αἱ δύο περιφέρειαι θὰ ἐφαρμόσωσιν. Ἐπίσης δὲ θὰ ἐφαρμόσωσι καὶ τὰ ἴσα τόξα ΓΔ καὶ ΑΒ. Ἑπομένως τὸ μὲν Δ θὰ συμπέσῃ μὲ τὸ Β, ἡ δὲ ἀκτὶς ΛΔ μὲ τὴν ΚΒ καὶ ἡ γωνία ΓΛΔ μὲ τὴν ΑΚΒ. Εἶναι λοιπὸν $\widehat{ΑΚΒ} = \widehat{ΓΛΔ}$ ὅ.ἔ.δ.

β´) Ἔστωσαν ἀκόμη δύο ἴσα τόξα ΑΒ καὶ ΕΖ τῆς αὐτῆς περιφερείας Κ. Ἂς νοήσωμεν δὲ καὶ ἓν τόξον ΓΔ ἴσον πρὸς αὐτὰ καὶ κείμενον ἐπὶ ἄλλης περιφερείας Λ ἴσης πρὸς τὴν Κ.

Κατὰ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν εἶναι $\widehat{ΑΚΒ} = \widehat{ΓΛΔ}$ καὶ $\widehat{ΕΚΖ} = \widehat{ΓΛΔ}$.

Ἐκ τούτων δὲ ἕπεται (§ 9 α´) ὅτι $\widehat{ΑΚΒ} = \widehat{ΕΚΖ}$, ὅ.ἔ.δ.

§ 35. *Θεώρημα II.* **Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι βαίνουσιν ἐπὶ ἴσων τόξων.**

α´) Ἔστωσαν Κ καὶ Λ δύο ἴσοι κύκλοι καὶ $\widehat{ΑΚΒ} = \widehat{ΓΛΔ}$. Λέγω ὅτι $\widehat{ΑΒ} = \widehat{ΓΔ}$.

Ἀπόδειξις. Νοοῦμεν, ὡς προηγουμένως, ὅτι ὁ κύκλος Λ τίθεται ἐπὶ τοῦ Κ οὕτως, ὥστε νὰ συμπέσωσι τὰ κέντρα των καὶ ἡ γωνία ΓΛΔ ἐπὶ τῆς $\widehat{ΑΚΒ}$ μὲ τὴν ΛΓ ἐπὶ τῆς ΚΑ. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ μὲν σημεῖον Γ θὰ συμπέσῃ μὲ τὸ Α, τὸ δὲ Δ μὲ τὸ Β. Ἐπειδὴ δὲ αἱ περιφέρειαι θὰ συμπέσωσιν ἕπεται ὅτι τὸ τόξον ΓΔ θά συμπέσῃ μὲ τὸ ΑΒ. Εἶναι λοιπὸν $\widehat{ΑΒ} = \widehat{ΓΔ}$, ὅ.ἔ.δ.

β) Ἂν $\widehat{ΑΚΒ} = \widehat{ΕΚΖ}$, νοοῦμεν ἐπὶ τοῦ κύκλου Λ μίαν γωνίαν ΓΛΔ ἴσην πρὸς τὰς γωνίας ΑΚΒ καὶ ΕΚΖ. Κατὰ δὲ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν εἶναι $\widehat{ΑΒ} = \widehat{ΓΔ}$ καὶ $\widehat{ΕΖ} = \widehat{ΓΔ}$. Ἑπομένως $\widehat{ΑΒ} = \widehat{ΕΖ}$, ὅ.ἔ.δ.

Πόρισμα I. **Ἡ ἀκτίς, ἡ ὁποία καταλήγει εἰς τὸ μέσον τοῦ τόξου μιᾶς ἐπικέντρου γωνίας, διαιρεῖ αὐτὴν εἰς δύο ἴσας γωνίας.**

Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία διαιρεῖ μίαν γωνίαν εἰς δύο ἴσας γωνίας λέγεται **διχοτόμος** αὐτῆς.

Πόρισμα II. **Ἑκάστη γωνία ἔχει μίαν μόνον διχοτόμον.**

Πόρισμα III. **Ἂν δύο τομεῖς τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἢ ἴσων κύκλων ἔχωσιν ἴσας βάσεις ἢ ἴσας γωνίας, οὗτοι εἶναι ἴσοι.**

§ 36. **Ποῖα λέγονται ἀντίστροφα θεωρήματα.** Τὰ δύο προηγούμενα θεωρήματα δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν συντομώτερον οὕτω:

I. Ἂν $\widehat{ΑΒ} = \widehat{ΓΔ}$, θὰ εἶναι καὶ $\widehat{ΑΚΒ} = \widehat{ΓΛΔ}$,

II. Ἂν $\widehat{ΑΚΒ} = \widehat{ΓΛΔ}$, θὰ εἶναι καὶ $\widehat{ΑΒ} = \widehat{ΓΔ}$.

Ἐννοεῖται δὲ ὅτι πρόκειται περὶ ἴσων κύκλων Κ καὶ Λ.

Ἀπὸ τὴν διατύπωσιν ταύτην βλέπομεν ὅτι:

Ἡ ὑπόθεσις ἑκατέρου τῶν θεωρημάτων τούτων εἶναι συμπέρασμα τοῦ ἑτέρου.

Τὰ τοιαῦτα θεωρήματα λέγονται **ἀντίστροφα θεωρήματα.**

§ 37. *Θεώρημα III.* **Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους εἰς ἄνισα τόξα βαίνουσιν ὁμοίως ἄνισοι ἐπίκεντροι γωνίαι.**

Εἰς τοὺς ἴσους κύκλους Κ καὶ Λ θεωροῦμεν τὰ τόξα ΒΑΕ καὶ ΓΔ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἄνισα καὶ $\widehat{ΒΑΕ} > ΓΔ$ (σχ. 24). Λέγω ὅτι $ΕΚΒ > \widehat{ΓΛΔ}$.

Ἀπόδειξις. Ἐπὶ τοῦ μεγαλυτέρου τόξου ΒΑΕ νοοῦμεν τόξον ΑΒ ἴσον πρὸς ΓΔ. Ἐπειδὴ προφανῶς τὸ Α κεῖται μεταξὺ τῶν ἄκρων Ε καὶ Β τοῦ τόξου ΕΑΒ, ἡ ἀκτὶς ΚΑ θὰ κεῖται μέσα εἰς τὴν γωνίαν ΕΚΒ. Θὰ εἶναι λοιπὸν $\widehat{ΕΚΒ} > \widehat{ΑΚΒ}$. Ἐπειδὴ δὲ $\widehat{ΑΚΒ} = \widehat{ΓΛΔ}$, ἕπεται ὅτι $\widehat{ΕΚΒ} > \widehat{ΓΛΔ}$.

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις, ἂν τὰ τόξα κεῖνται εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν.

§ 38. *Θεώρημα IV.* **Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους ἄνισοι ἐπίκεντροι γωνίαι βαίνουσιν ἐπὶ ὁμοίως ἀνίσων τόξων.**

Ἂν δηλ. $\widehat{ΕΚΒ} > \widehat{ΓΛΔ}$, θὰ εἶναι καὶ $\widehat{ΕΑΒ} > \widehat{ΓΔ}$ (σχ. 24).

Ἀπόδειξις. Νοοῦμεν ὅτι ἡ μικροτέρα γωνία ΓΛΔ τίθεται ἐπὶ τῆς ΕΚΒ οὕτως, ὥστε ἡ ἀκτὶς ΛΔ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΚΒ. Εὐκόλως δὲ ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ γωνία ΓΛΔ ἐφαρμόζει εἰς ἓν μέρος ΑΚΒ τῆς μεγαλυτέρας γωνίας ΕΚΒ, τὸ δὲ τόξον ΔΓ ἐφαρμόζει εἰς μέρος ΒΑ τοῦ τόξου ΒΑΕ. Εἶναι λοιπὸν $ΓΔ < \widehat{ΕΑΒ}$.

Δυνάμεθα ὅμως νὰ κάμωμεν τὴν ἀπόδειξιν, ἂν σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς:

Ἂν ἦτο $\widehat{ΓΔ} \geqslant \widehat{ΕΑΒ}$, θὰ ἦτο ἀντιστοίχως $\widehat{ΓΛΔ} \geqslant \widehat{ΕΚΒ}$ (§ 34,37). Αἱ σχέσεις ὅμως αὗται εἶναι ψευδεῖς, διότι ὑπετέθη ὅτι $\widehat{ΓΛΔ} < \widehat{ΕΚΒ}$. Εἶναι λοιπὸν $\widehat{ΓΔ} < \widehat{ΕΑΒ}$, διότι ἄλλο τι δὲν δύναται νὰ συμβῇ.

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις, ἂν αἱ γωνίαι κεῖνται εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον.

Σημείωσις. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ θεωρήματα τῶν §§ 37 καὶ 38 εἶναι ἀντίστροφα.

§ 39. Ἡ μέθοδος τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς. Διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν προηγουμένως (§ 31) ὅτι ἓν σημεῖον Μ τῆς περιφερείας Λ (σχ. 22) πίπτει ἐπὶ τῆς περιφερείας Κ, παρετηρήσαμεν ὅτι: Ἂν δεχθῶμεν ὅτι τὸ Μ πίπτει ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τοῦ κύκλου, φθάνομεν εἰς τὰ συμπεράσματα $ΛΜ \lessgtr α$. Ταῦτα δὲ εἶναι ἀντίθετα πρὸς τὴν ὑπόθεσιν $ΛΜ = α$ καὶ ἑπομένως ἄτοπα.

Δεχόμεθα λοιπὸν κατ' ἀνάγκην ὅτι τὸ Μ πίπτει ἐπὶ τῆς περιφερείας Κ, διότι ἄλλο τι δὲν δύναται νὰ συμβῇ.

Ὁμοίως κατὰ τὸν β΄ τρόπον τῆς ἀποδείξεως τοῦ προηγουμένου θεωρήματος (§ 38) εἴδομεν ὅτι: Ἂν δεχθῶμεν ὅτι: $\widehat{ΓΔ} \geqslant \widehat{ΕΑΒ}$, εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ δεχθῶμεν ὅτι καὶ $\widehat{ΓΛΔ} \geqslant \widehat{ΕΚΒ}$, αἱ ὁποῖαι εἶναι ψευδεῖς κατὰ τὴν ὑπόθεσιν. Ἤ, ὡς λέγομεν συνήθως, **ἀντίκεινται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.**

Κατ' ἀνάγκην λοιπὸν εἶναι $\widehat{ΓΔ} < \widehat{ΕΑΒ}$, διότι ἄλλο τι δὲν δύναται νὰ συμβῇ.

Ἡ τοιαύτη ἀποδεικτικὴ μέθοδος λέγεται **ἀπόδειξις διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς ἢ πλαγία ἀπόδειξις.**

Κατὰ ταύτην, ἄν, δεχόμενοι ἀληθῆ μίαν πρότασιν, καταλήξωμεν εἰς συμπέρασμα ἀντίθετον πρὸς γνωστὴν ἀλήθειαν ἢ πρὸς τὴν ὑπόθεσιν, χαρακτηρίζομεν τὴν πρότασιν ψευδῆ. Ἂν δὲ πᾶσαι αἱ περί τινος δυναταὶ κρίσεις, πλὴν μιᾶς, εἶναι ψευδεῖς, ἡ μία αὕτη εἶναι ἀληθής.

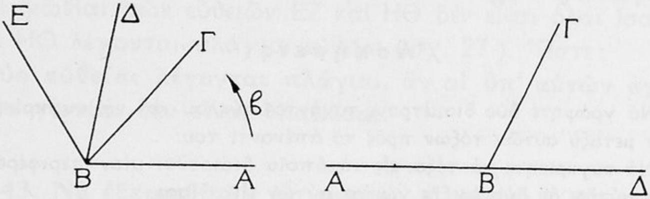
3. ΓΩΝΙΑΙ ΜΕ ΤΗΝ ΑΥΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗΝ

§ 40. α΄) Ποῖαι γωνίαι λέγονται ἐφεξῆς γωνίαι. Αἱ δύο γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΓΒΔ (σχ. 25) ἔχουσι κοινὴν κορυφὴν Β, τὴν πλευρὰν ΒΓ κοινὴν καὶ τὰς ἄλλας ἑκατέρωθεν τῆς ΒΓ. Λέγονται δὲ αὗται **ἐφεξῆς γωνίαι.** Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ αἱ γωνίαι ΓΒΔ, ΔΒΕ εἶναι ἐφεξῆς. Ὥστε:

Δύο γωνίαι λέγονται ἐφεξῆς, ἂν ἔχωσι κοινὴν κορυφήν, μίαν πλευρὰν κοινὴν καὶ τὰς μὴ κοινὰς πλευρὰς ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς.

β΄) Ποῖαι λέγονται διαδοχικαὶ γωνίαι. Ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἐφεξῆς μὲ τὴν ΓΒΔ. ἡ δὲ ΓΒΔ εἶναι ἐφεξῆς μὲ τὴν ΔΒΕ. Αἱ δὲ γωνίαι ΑΒΓ, ΓΒΔ, ΔΒΕ ὅλαι μαζὶ λέγονται **διαδοχικαὶ** γωνίαι. Ὥστε:

Τρεῖς ἢ περισσότεραι γωνίαι λέγονται διαδοχικαί, ἂν ἑκάστη καὶ ἡ ἑπομένη εἶναι ἐφεξῆς γωνίαι.



Σχ. 25

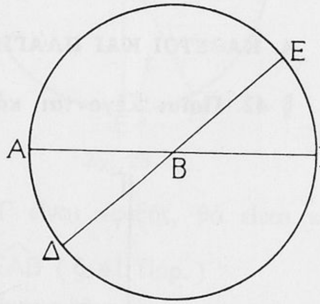
Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι ἐπίκεντροι διαδοχικαὶ γωνίαι βαίνουσιν ἐπὶ διαδοχικῶν τόξων, καὶ ἀντιστρόφως.

γ΄) **Ποῖαι λέγονται κατὰ κορυφὴν γωνίαι.** Αἱ γωνίαι ΑΒΕ καὶ ΓΒΔ (σχ. 26) ἔχουσι κορυφὴν κοινήν, αἱ δὲ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης.

Λέγονται δὲ αὗται **κατὰ κορυφὴν γωνίαι.**

Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ αἱ γωνίαι ΑΒΔ, ΓΒΕ εἶναι κατὰ κορυφὴν γωνίαι. Ὥστε:

Δύο γωνίαι λέγονται κατὰ κορυφήν, ἂν ἔχωσι κορυφὴν κοινήν, αἱ δὲ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης.



ΣΧ. 26

§ 41. Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ δύο κατὰ κορυφὴν γωνιῶν. Ἂν μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Β (σχ. 26) καὶ μὲ τυχοῦσαν ἀκτῖνα γράψωμεν περιφέρειαν, αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι γίνονται ἐπίκεντροι. Ἐπειδὴ δὲ ΑΓ καὶ ΔΕ εἶναι διάμετροι, θὰ εἶναι $\widehat{ΑΕ}+\widehat{ΕΓ} = \widehat{ΑΕ}+\widehat{ΑΔ}$ καὶ ἑπομένως $\widehat{ΕΓ}=\widehat{ΑΔ}$. Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι

$\widehat{ΓΒΕ} = \widehat{ΑΒΔ}$. Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι καὶ $\widehat{ΑΒΕ} = \widehat{ΓΒΔ}$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Πόρισμα. **Ἂν δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι σχηματίζωσι δύο ἐφεξῆς γωνίας ἴσας, πᾶσαι αἱ γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἴσαι.**

Ἀσκήσεις

3. Νὰ γράψητε δύο διαμέτρους τυχόντος κύκλου καὶ νὰ συγκρίνητε ἕκαστον τῶν μεταξὺ αὐτῶν τόξων πρὸς τὸ ἀπέναντί του.

4. Νὰ συγκρίνητε τὰ τόξα, εἰς τὰ ὁποῖα διαιροῦσι μίαν περιφέρειαν δύο διάμετροι αὐτῆς, ἂν δύο ἐφεξῆς γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἴσαι.

5. Ἂν ἓν τόξον ΑΒ μιᾶς περιφερείας Ο εἶναι 50^0, νὰ εὕρητε πόσων μοιρῶν εἶναι ἕκαστον ἀπὸ τὰ τόξα, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ περιφέρεια αὕτη, ἂν αἱ ἀκτῖνες ΟΑ, ΟΒ προεκταθῶσι μέχρι τῆς περιφερείας.

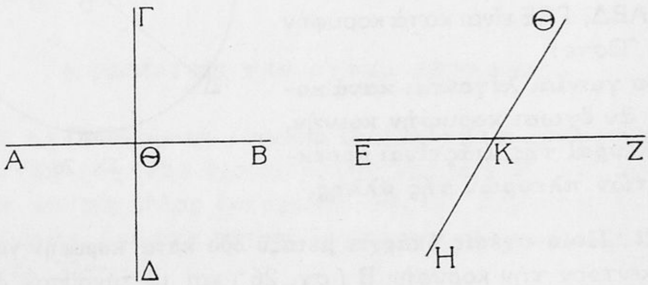
6. Ἂν ἓν τόξον ΑΒ εἶναι 75^0 καὶ ἓν ἄλλο ΒΓ εἶναι 105^0 καὶ τὰ τόξα ταῦτα δὲν ἔχωσι κοινὸν μέρος, νὰ συγκρίνητε τὴν χορδὴν ΑΓ πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου.

7. Νὰ ἐξετάσητε, ἂν αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ (σχ. 25) εἶναι ἐφεξῆς ἢ ὄχι.

8. Νὰ ἐξετάσητε πόσας διχοτόμους ἔχει ἑκάστη γωνία.

4. ΚΑΘΕΤΟΙ ΚΑΙ ΠΛΑΓΙΑΙ ΕΥΘΕΙΑΙ ΚΑΙ ΓΩΝΙΑΙ ΑΥΤΩΝ

§ 42. Ποῖαι λέγονται κάθετοι καὶ ποῖαι πλάγιαι εὐθεῖαι. Αἱ



ΣΧ. 27

γωνίαι τῶν τεμνομένων εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 27) εἶναι ὅλαι ἴσαι. Αἱ δὲ ΑΒ καὶ ΓΔ λέγονται **κάθετοι** εὐθεῖαι. Ὥστε :

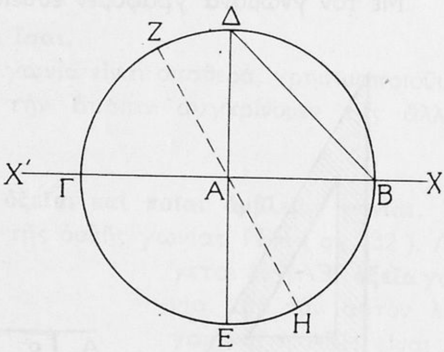
Δύο εὐθεῖαι λέγονται κάθετοι, ἂν αἱ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζόμεναι γωνίαι εἶναι πᾶσαι ἴσαι.

Πᾶσα γωνία σχηματιζομένη ὑπὸ καθέτων εὐθειῶν λέγεται ὀρθὴ γωνία. Ἑκάστη λοιπὸν τῶν γωνιῶν ΑΘΓ, ΓΘΒ, ΒΘΔ, ΔΘΑ (σχ. 27) εἶναι ὀρθὴ γωνία.

Αἱ γωνίαι τῶν εὐθειῶν ΕΖ καὶ ΗΘ δὲν εἶναι ὅλαι ἴσαι, αἱ δὲ ΕΖ καὶ ΗΘ λέγονται πλάγιαι εὐθεῖαι (σχ. 27). Ὥστε:

Δύο εὐθεῖαι λέγονται πλάγιαι, ἂν αἱ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζόμεναι γωνίαι δὲν εἶναι ὅλαι ἴσαι.

§ 43. Νὰ ἐξετασθῇ ἂν ἐκ σημείου Α εὐθείας Χ'Χ ἄγωνται κάθετοι ἐπ' αὐτὴν εὐθεῖαι καὶ πόσαι (σχ. 28). Ἂν μὲ κέντρον Α καὶ μὲ τυχοῦσαν ἀκτῖνα γράψωμεν περιφέρειαν, ὁρίζομεν ἐπὶ τῆς Χ'Χ διάμετρον ΓΒ. Αὕτη διαιρεῖ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἡμιπεριφερείας. Ἂν δὲ Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς μιᾶς, θὰ εἶναι $\widehat{B\Delta} = \widehat{\Delta\Gamma}$. Ἂν δὲ ἀχθῇ καὶ ἡ εὐθεῖα ΔΑΕ, θὰ εἶναι $\widehat{BA\Delta} = \widehat{\Delta A\Gamma}$ (§ 34).



Σχ. 28

Ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι ΒΑΔ, ΔΑΓ εἶναι ἐφεξῆς, θὰ εἶναι καὶ

$$\widehat{BA\Delta} = \widehat{\Delta A\Gamma} = \widehat{\Gamma AE} = \widehat{EAB} \text{ (§ 41 Πόρ.)}$$

Αἱ εὐθεῖαι λοιπὸν Χ'Χ καὶ ΔΑΕ εἶναι κάθετοι.

Ἂν δὲ καὶ μία ἄλλη εὐθεῖα ΑΖ ἦτο κάθετος ἐπὶ τὴν Χ'Χ θὰ ἦτο $\widehat{\Gamma AZ} = \widehat{ZAB}$ καὶ ἑπομένως $\widehat{\Gamma Z} = \widehat{ZB}$, ἤτοι τὸ Ζ θὰ ἦτο μέσον τῆς ἡμιπεριφερείας ΒΔΓ. Τὸ Ζ λοιπὸν ταυτίζεται μὲ τὸ Δ (§ 27) καὶ ἡ ΑΖ μὲ τὴν ΑΔ (§ 10 α'). Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἀπὸ ἕκαστον σημεῖον εὐθείας ἄγεται μία μόνον κάθετος ἐπ' αὐτήν.

Πόρισμα Ι. **Δύο κάθετοι διάμετροι κύκλου διαιροῦσι τὴν**

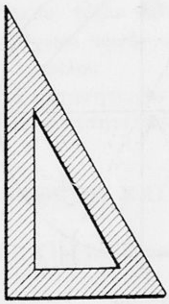
περιφέρειαν εἰς 4 ἴσα τόξα (τεταρτημόρια) καὶ τὸν κύκλον εἰς 4 ἴσους κυκλικοὺς τομεῖς (τεταρτοκύκλια).

Πόρισμα II. **Μία ὀρθὴ ἐπίκεντρος γωνία βαίνει ἐπὶ τεταρτημορίου περιφερείας.**

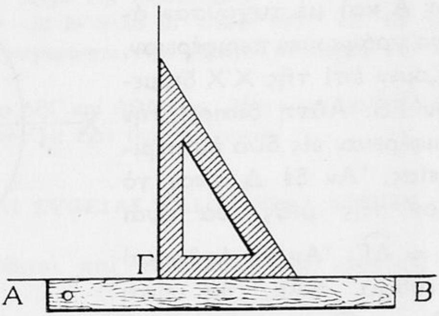
Πόρισμα III. **Ἂν μία ἐπίκεντρος γωνία βαίνῃ ἐπὶ τεταρτημορίου περιφερείας, εἶναι ὀρθὴ γωνία.**

§ 44. Ὁ γνώμων καὶ ἡ χρῆσις αὐτοῦ. Τὸ σχῆμα 29 ἀπεικονίζει τὸ γνωστὸν καὶ ἀπὸ τὴν Πρακτικὴν Γεωμετρίαν ὄργανον, τὸ ὁποῖον λέγεται **γνώμων**. Τοῦτο εἶναι ξύλινον τρίγωνον μὲ δύο καθέτους πλευράς.

Μὲ τὸν γνώμονα γράφομεν εὐθείας καθέτους ἐπὶ δοθεῖσαν εὐ-



Σχ. 29



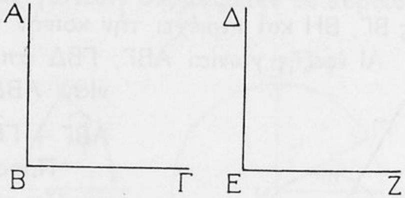
Σχ. 30

θεῖαν ΑΒ. Πρὸς τοῦτο τοποθετοῦμεν τὸν γνώμονα οὕτως, ὥστε ἡ μία ἀπὸ τὰς καθέτους πλευράς του νὰ ἐφαρμόζῃ ἐπὶ τῆς ΑΒ. Ἐὰν δὲ σύρωμεν τὴν γραφίδα κατὰ μῆκος τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς τοῦ γνώμονος, γράφομεν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Ἂν θέλωμεν νὰ γράψωμεν τὴν κάθετον, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ ὡρισμένον σημεῖον Γ τῆς εὐθείας ΑΒ, τοποθετοῦμεν τὸν γνώμονα οὕτως, ὥστε ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ Γ, ἡ δὲ μία πλευρὰ αὐτῆς μὲ τὴν ΑΒ καὶ συνεχίζομεν, ὅπως προηγουμένως.

Πρὸς εὐκολίαν τοποθετοῦμεν τὸν κανόνα οὕτως, ὥστε μία εὐθεῖα αὐτοῦ νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν ΑΒ καὶ μετακινοῦμεν τὸν γνώμονα, οὕτως, ὥστε ἡ μία κάθετος πλευρὰ αὐτοῦ νὰ ὀλισθαίνῃ ἐπὶ τοῦ κανόνος.

§ 45. **Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν.** Ἔστωσαν Β καὶ Ε δύο ὀρθαὶ γωνίαι (σχ. 31). Διὰ νὰ συγκρίνωμεν αὐτάς, νοοῦμεν ὅτι π.χ. ἡ Ε τίθεται ἐπὶ τῆς Β οὕτως, ὥστε ἡ κορυφὴ Ε νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν Β καὶ ἡ πλευρὰ ΕΖ μὲ τὴν ΒΓ. Τοιουτοτρόπως ἡ ΕΔ γίνεται κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ ἐπομένως συμπίπτει μὲ τὴν ΒΑ (§ 43). Ἡ γωνία λοιπὸν Ε ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς Β καὶ ἐπομένως εἶναι $\widehat{B}=\widehat{E}$, ἤτοι:

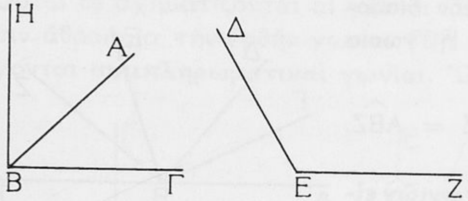


Σχ. 31

Αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ὀρθὴ γωνία εἶναι σταθερά, χρησιμοποιοῦμεν αὐτὴν ὡς μονάδα, πρὸς τὴν ὁποίαν συγκρίνομεν τὰς ἄλλας γωνίας.

§ 46. **Ποῖαι λέγονται ὀξεῖαι καὶ ποῖαι ἀμβλεῖαι γωνίαι.** Ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι μικροτέρα τῆς ὀρθῆς γωνίας ΓΒΗ (σχ. 32). Λέγεται δὲ ἡ ΑΒΓ **ὀξεῖα** γωνία. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἡ ΑΒΗ εἶναι ὀξεῖα γωνία. Ὥστε:



Σχ. 32

Πᾶσα γωνία μικροτέρα τῆς ὀρθῆς γωνίας λέγεται ὀξεῖα γωνία.

Ἡ γωνία ΔΕΖ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς γωνίας. Λέγεται δὲ **ἀμβλεῖα** γωνία. Καὶ ἡ γωνία ΒΑΖ (σχ. 28) εἶναι ἀμβλεῖα γιὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Ὥστε:

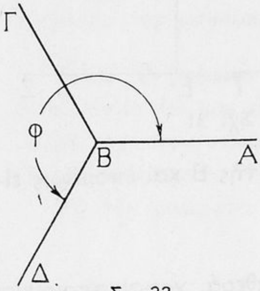
Πᾶσα γωνία μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς λέγεται ἀμβλεῖα γωνία.

5. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΓΩΝΙΩΝ

§ 47. **α΄) Τί εἶναι ἄθροισμα δύο ἐφεξῆς γωνιῶν.** Αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ΓΒΑ, ΑΒΗ ἀποτελοῦσι τὴν γωνίαν ΓΒΗ (σχ. 32).

Διὰ τοῦτο δὲ αὔτη λέγεται **ἄθροισμα** τῶν $\widehat{ΓΒΑ}$ καὶ $\widehat{ΑΒΗ}$. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι ἡ ΓΒΗ σχηματίζεται ἀπὸ τὰς μὴ κοινὰς πλευρὰς ΒΓ, ΒΗ καὶ περιέχει τὴν κοινὴν πλευρὰν ΒΑ τῶν $\widehat{ΓΒΑ}$, $\widehat{ΑΒΗ}$.

Αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ΑΒΓ, ΓΒΔ ἀποτελοῦσι τὴν μὴ κυρτὴν γωνίαν ΑΒΔ (σχ. 33). Εἶναι λοιπόν:



Σχ. 33.

$\widehat{ΑΒΓ} + \widehat{ΓΒΔ} =$ ἡ μὴ κυρτὴ $\widehat{ΑΒΔ} = φ$.

Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι ἡ φ σχηματίζεται ἀπὸ τὰς μὴ κοινὰς πλευρὰς ΒΑ, ΒΔ καὶ περιέχει τὴν κοινὴν πλευρὰν ΒΓ τῶν προσθετέων. Κατὰ ταῦτα:

Ἄθροισμα δύο ἐφεξῆς γωνιῶν λέγεται ἡ γωνία ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὰς μὴ κοινὰς πλευρὰς καὶ περιέχει τὴν κοινὴν πλευρὰν αὐτῶν.

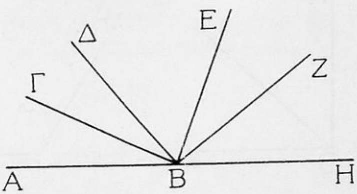
§ 48. β′) Τί εἶναι ἄθροισμα διαδοχικῶν γωνιῶν. Ἔστωσαν αἱ διαδοχικαὶ γωνίαι ΑΒΓ, ΓΒΔ, ΔΒΕ, ΕΒΖ (σχ. 34). Κατὰ τὰ προηγούμενα εἶναι:

$\widehat{ΑΒΓ} + \widehat{ΓΒΔ} = \widehat{ΑΒΔ}$, $\widehat{ΑΒΔ} + \widehat{ΔΒΕ} = \widehat{ΑΒΕ}$, $\widehat{ΑΒΕ} + \widehat{ΕΒΖ} = \widehat{ΑΒΖ}$.

Ἀπὸ τὰς δοθείσας λοιπὸν διαδοχικὰς γωνίας σχηματίζεται ἡ γωνία ΑΒΖ καὶ ἑπομένως:

$\widehat{ΑΒΓ} + \widehat{ΓΒΔ} + \widehat{ΔΒΕ} + \widehat{ΕΒΖ} = \widehat{ΑΒΖ}$.

Ὥστε:



Σχ. 34

Ἄθροισμα διαδοχικῶν γωνιῶν εἶναι ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζομεν ὡς ἑξῆς:

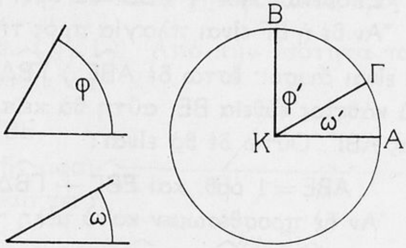
Προσθέτομεν τὰς δύο πρώτας· εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν προσθέτομεν τὴν τρίτην· εἰς τὸ νέον ἄθροισμα προσθέτομεν τὴν τετάρτην καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, ἕως ὅτου προσθέσωμεν ὅλας τὰς γωνίας.

§ 49. γ′) Τί εἶναι ἄθροισμα οἱωνδήποτε γωνιῶν. Ἂς ὑποθέσωμεν πρῶτον ὅτι δύο γωνίαι ω καὶ φ ἔχουσι τυχοῦσαν θέσιν (σχ. 35). Ἂν δὲ δύο ἐφεξῆς γωνίαι ω′ καὶ φ′ εἶναι τοιαῦται, ὥστε:

$\omega=\omega'$, $\varphi=\varphi'$, καλοῦμεν ἄθροισμα $\omega+\varphi$ τὸ ἄθροισμα $\omega'+\varphi'$, δηλ. τὴν γωνίαν ΑΚΒ. Ὥστε:

Ἄθροισμα δύο οἱωνδήποτε γωνιῶν ὀνομάζομεν τὸ ἄθροισμα δύο ἐφεξῆς γωνιῶν ἴσων ἀντιστοίχως πρὸς ταύτας.

Ὁμοίως ἄθροισμα οἱωνδήποτε γωνιῶν περισσοτέρων τῶν δύο, ὀνομάζομεν τὸ ἄθροισμα διαδοχικῶν γωνιῶν ἀντιστοίχως ἴσων πρὸς ἐκείνας.



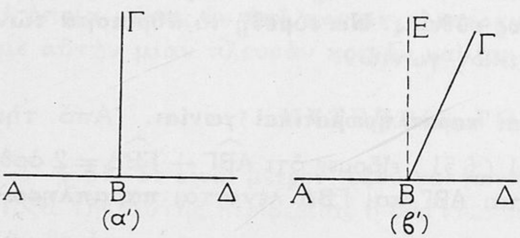
Σχ. 35

Ἂν $\Lambda=\omega+\omega$, ἡ γωνία Λ λέγεται διπλάσια τῆς ω. Ἡ δὲ ω λέγεται ἥμισυ τῆς Λ. Ταῦτα γράφονται ὡς ἑξῆς $\Lambda=\omega\cdot 2$ καὶ $\omega=\Lambda:2$.

Ὁμοίως ἂν $\Theta=\theta+\theta+\theta$, ἡ γωνία Θ εἶναι τριπλασία τῆς θ, ἡ δὲ θ ἓν τρίτον τῆς Θ, ἤτοι $\Theta=\theta\cdot 3$ καὶ $\theta=\Theta:3$ κ.τ.λ.

§ 50. Ποῖαι λέγονται συμπληρωματικαὶ γωνίαι. Ἔστω μία ὀρθὴ γωνία ΓΒΗ (σχ. 32). Ἐντὸς αὐτῆς γράφομεν μίαν εὐθεῖαν ΒΑ. Οὕτω δὲ σχηματίζονται αἱ γωνίαι ΓΒΑ καὶ ΑΒΗ, αἱ ὁποῖαι ἔχουσιν ἄθροισμα τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΓΒΗ. Αἱ γωνίαι ΓΒΑ καὶ ΑΒΗ λέγονται **συμπληρωματικαὶ γωνίαι.** Ὥστε:

Δύο γωνίαι λέγονται συμπληρωματικαί, ἂν ἔχωσιν ἄθροισμα μίαν ὀρθὴν γωνίαν.



Σχ. 36

§ 51. *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα δύο ἐφεξῆς γωνιῶν, ἂν αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ αὐτῶν κεῖνται ἐπὶ εὐθείας.**

Λύσις. Ἔστωσαν αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΓΒΔ, τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΒΔ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (σχ. 36). Ἂν ἡ κοινὴ πλευρὰ ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΔ (σχ. 36α΄) θὰ εἶναι :

$$\widehat{ΑΒΓ} = 1 \text{ ὀρθ. καὶ } \widehat{ΓΒΔ} = 1 \text{ ὀρθ.}$$

Ἑπομένως $\widehat{ΑΒΓ} + \widehat{ΓΒΔ} = 2$ ὀρθ.

Ἂν δὲ ἡ ΒΓ εἶναι πλαγία πρὸς τὴν ΑΔ, αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΓΒΔ θὰ εἶναι ἄνισοι· ἔστω δὲ $\widehat{ΑΒΓ} > \widehat{ΓΒΔ}$. Ἂν ἐκ τοῦ Β ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ΑΔ κάθετος εὐθεῖα ΒΕ, αὕτη θὰ κεῖται ἐντὸς τῆς μεγαλυτέρας γωνίας ΑΒΓ. Οὕτω δὲ θὰ εἶναι :

$$\widehat{ΑΒΕ} = 1 \text{ ὀρθ. καὶ } \widehat{ΕΒΓ} + \widehat{ΓΒΔ} = \widehat{ΕΒΔ} = 1 \text{ ὀρθ.}$$

Ἂν δὲ προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας ταύτας, εὑρίσκομεν ὅτι $\widehat{ΑΒΕ} + \widehat{ΕΒΓ} + \widehat{ΓΒΔ} = 2$ ὀρθ.

Ἐπειδὴ δὲ $\widehat{ΑΒΕ} + \widehat{ΕΒΓ} = \widehat{ΑΒΓ}$, ἡ (1) γίνεται

$$\widehat{ΑΒΓ} + \widehat{ΓΒΔ} = 2 \text{ ὀρθ.}$$

Εὕρομεν λοιπὸν ὅτι :

Ἂν αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ δύο ἐφεξῆς γωνιῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι δύο ὀρθαὶ γωνίαι.

§ **52.** *Πρόβλημα ΙΙ.* **Ἀπὸ ἓν σημεῖον δοθείσης εὐθείας φέρομεν διαφόρους εὐθείας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων διαδοχικῶν γωνιῶν.**

§ **53.** *Πρόβλημα ΙΙΙ.* **Ἀπὸ ἓν σημεῖον ἑνὸς ἐπιπέδου φέρομεν εἰς αὐτὸ διαφόρους εὐθείας. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων διαδοχικῶν γωνιῶν.**

§ **54. Ποῖαι λέγονται παραπληρωματικαὶ γωνίαι.** Ἀπὸ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος 1 (§ 51) εἴδομεν ὅτι $\widehat{ΑΒΓ} + \widehat{ΓΒΔ} = 2$ ὀρθ. (σχ. 36). Αἱ γωνίαι αὗται ΑΒΓ καὶ ΓΒΔ λέγονται **παραπληρωματικαὶ γωνίαι.** Ὥστε :

Δύο γωνίαι λέγονται παραπληρωτικαί, ἂν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι 2 ὀρθαὶ γωνίαι.

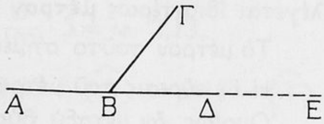
§ 55. *Θεώρημα.* **Ἂν δύο ἐφεξῆς γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ αὐτῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας.**

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΓΒΔ (σχ. 37), αἱ ὁποῖαι εἶναι παραπληρωματικαί. Εἶναι δηλαδή:

$$\widehat{ΑΒΓ} + \widehat{ΓΒΔ} = 2 \text{ ὀρθ.} \qquad (2)$$

Ἂν ΒΕ εἶναι ἡ προέκτασις τῆς ΑΒ κατὰ τὴν φορὰν Α πρὸς Β, θὰ εἶναι $\widehat{ΑΒΓ} + \widehat{ΓΒΕ} = 2$ ὀρθ. (§ 51). Ἀπὸ τὴν ἰσότητα ταύτην καὶ ἀπὸ τὴν (1) ἐννοοῦμεν ὅτι

$$\widehat{ΑΒΓ} + \widehat{ΓΒΔ} = \widehat{ΑΒΓ} + \widehat{ΓΒΕ}.$$



Σχ. 37

Ἂν δὲ ἀπὸ τὰ μέλη αὐτῆς ἀφαιρεθῇ ἡ κοινὴ γωνία ΑΒΓ, προκύπτει ἡ ἰσότης $\widehat{ΓΒΔ} = \widehat{ΓΒΕ}$.

Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι αἱ πλευραὶ ΒΔ καὶ ΒΕ συμπίπτουσιν. Ἡ πλευρὰ λοιπὸν ΒΔ εἶναι προέκτασις τῆς ΑΒ, ἤτοι αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΒΔ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ὅ.ἔ.δ.

6. ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΓΩΝΙΑΣ ΑΠΟ ΑΛΛΗΣ

§ 56. Τί εἶναι γεωμετρικὴ διαφορὰ δύο ἀνίσων γωνιῶν. Γνωρίζομεν ὅτι π.χ. $\widehat{ΑΒΕ} + \widehat{ΕΒΓ} = \widehat{ΑΒΓ}$ (σχ. 36 β') Ἀπὸ δὲ τὴν ἰσότητα ταύτην ἐννοοῦμεν εὐκόλως ὅτι:

$$\widehat{ΕΒΓ} = \widehat{ΑΒΓ} - \widehat{ΑΒΕ}\cdot$$ Ὥστε:

Γεωμετρικὴ διαφορὰ δύο ἀνίσων γωνιῶν λέγεται ἡ γωνία, ἡ ὁποία μένει, ἂν ἀπὸ τὴν μεγαλυτέραν ἀποκοπῇ γωνία ἔχουσα μὲ αὐτὴν μίαν πλευρὰν κοινὴν καὶ ἴση πρὸς τὴν μικροτέραν.

7. ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΓΩΝΙΩΝ

§ 57. Τί εἶναι μέτρον τόξου καὶ γωνίας. Ἔστωσαν Τ καὶ τ δύο τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας ἢ δύο ἴσων περιφερειῶν. Ἂς ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι:

$$Τ = τ + τ + τ \text{ ἢ } Τ = τ \cdot 3$$

Ὁ ἀριθμὸς 3 λέγεται λόγος τοῦ Τ πρὸς τὸ τ καὶ δηλοῦται οὕτω:

$$Τ : τ = 3.$$

Ὁμοίως, ἂν $Τ = τ + τ + \frac{τ}{10} + \frac{τ}{100} \cdot 3$, τὸ τόξον Τ λέγεται γινόμενον τοῦ τ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 2,13. Οὗτος δὲ λέγεται λόγος τοῦ Τ πρὸς τὸ τ. Εἶναι δηλ. Τ:τ = 2,13. Ὥστε:

Λόγος ἑνὸς τόξου πρὸς ἄλλο τόξον τῆς αὐτῆς περιφερείας ἢ ἴσων περιφερειῶν λέγεται ὁ ἀριθμός, μὲ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ β′ τόξον διὰ νὰ προκύψῃ τὸ α′

Ἂν τὸ β′ τόξον τ ληφθῇ ὡς μονὰς τῶν τόξων, ὁ λόγος Τ : τ λέγεται ἰδιαιτέρως **μέτρον** τοῦ τόξου Τ.

Τὸ μέτρον τοῦτο σημειοῦται συντόμως οὕτω $(\widehat{\mathrm{T}})$.

Ἡ δὲ εὕρεσις τοῦ μέτρου $(\widehat{\mathrm{T}})$ λέγεται **μέτρησις** τοῦ Τ.

Ὁμοίως, ἂν μεταξὺ δύο γωνιῶν Λ καὶ ω ὑπάρχῃ ἡ σχέσις $\Lambda = \omega + \omega$ ἢ $\Lambda = \omega \cdot 2$, ὁ 2 λέγεται λόγος τῆς Λ πρὸς τὴν ω

Ἂν δὲ $\Lambda = \omega + \omega + \omega + \frac{\omega}{12} \cdot 2 + \frac{\omega}{100} = \omega \cdot (3,21)$ ὁ ἀριθμὸς 3,21 εἶναι λόγος τῆς Λ πρὸς τὴν ω, ἤτοι:

$$\Lambda : \omega = 3,21$$

Ἂν δὲ ἡ γωνία ω λαμβάνεται ὡς μονὰς τῶν γωνιῶν ὁ λόγος $\widehat{\Lambda} : \widehat{\omega}$ λέγεται ἰδιαιτέρως μέτρον τῆς γωνίας Λ καὶ σημειοῦται οὕτω $(\widehat{\Lambda})$. Ἡ εὕρεσις τοῦ μέτρου $(\widehat{\Lambda})$ λέγεται **μέτρησις** τῆς γωνίας Λ.

Ὡς μονὰς τῶν γωνιῶν (πλὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας) λαμβάνεται ἡ ἐπίκεντρος γωνία, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τῆς μονάδος τῶν τόξων. Οὕτως, ἂν μονὰς τῶν τόξων εἶναι ἡ μοῖρα, ὡς μονὰς τῶν γωνιῶν, λαμβάνεται ἡ ἐπίκεντρος γωνία εἰς κύκλον Κ, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τόξου 1^0 τῆς περιφερείας Κ. Λέγεται δὲ αὕτη **γωνία μιᾶς μοίρας.**

Ὑπὸ τὴν ἀνωτέρω προϋπόθεσιν θὰ ἐξετάσωμεν τὸ ἀκόλουθον ζήτημα.

§ 58. Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ μέτρου γωνίας καὶ τοῦ μέτρου τοῦ ἀντιστοίχου τόξου. Ἔστω Λ μία ἐπίκεντρος γωνία καὶ Τ τὸ ἀντίστοιχον τόξον αὐτῆς. Ἂν τ εἶναι ἡ μονὰς τῶν τόξων τῆς αὐτῆς περιφερείας, ἡ εἰς αὐτὸ βαίνουσα ἐπίκεντρος γωνία ω εἶναι ἡ μονὰς τῶν γωνιῶν.

Ἑπομένως $\widehat{\mathrm{T}} : \widehat{\tau} = (\widehat{\mathrm{T}})$ καὶ $\widehat{\Lambda} : \widehat{\omega} = (\widehat{\Lambda})$. Ἂν δὲ ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι $(\widehat{\mathrm{T}}) = 2,13$ θὰ εἶναι $\mathrm{T} = \tau \cdot 2,13 = \tau + \tau + \frac{\tau}{10} + \frac{\tau}{100} \cdot 3$

Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὸ τόξον τ βαίνει γωνία ω, εἰς τὸ $\frac{\tau}{10}$ θὰ βαίνῃ γωνία, ἥτις δεκαπλασιαζομένη γίνεται ω, ἤτοι $\frac{\omega}{10}$, εἰς τὸ $\frac{\tau}{100}\cdot 3$ θὰ βαίνῃ $\frac{\omega}{100}\cdot 3$. Ἑπομένως εἰς τὸ Τ θὰ βαίνῃ γωνία

$$\omega+\omega+\frac{\omega}{10}+\frac{\omega}{100}\cdot 3$$

ἤτοι θὰ εἶναι $\widehat{\Lambda}=\widehat{\omega}+\widehat{\omega}+\frac{\widehat{\omega}}{10}+\frac{\widehat{\omega}}{100}\cdot 3=\widehat{\omega}\cdot 2{,}13.$

Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι $\widehat{\Lambda}:\widehat{\omega}=2{,}13$ ἢ $(\widehat{\Lambda})=2{,}13=(\widehat{T})$.

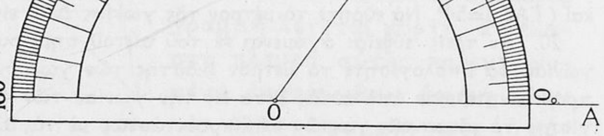
Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Τὸ μέτρον ἐπικέντρου γωνίας ἰσοῦται πρὸς τὸ μέτρον τοῦ ἀντιστοίχου τόξου, ἂν ὡς μονὰς τῶν γωνιῶν ληφθῇ ἡ ἐπίκεντρος γωνία, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τῆς μονάδος τῶν τόξων.

Κατὰ ταῦτα εἰς τόξον π.χ. 25^0 βαίνει ἐπίκεντρος γωνία ἐπίσης 25^0.

Διὰ νὰ μετρήσωμεν λοιπὸν μίαν γωνίαν, ἀρκεῖ νὰ καταστήσωμεν αὐτὴν ἐπίκεντρον καὶ νὰ μετρήσωμεν τὸ ἀντίστοιχον τόξον. Τοῦτο κατορθώνομεν μὲ τὸ **μοιρογνωμόνιον,** ὡς ἀμέσως θὰ ἴδωμεν.

§ 59. Τὸ μοιρογνωμόνιον καὶ ἡ χρῆσις αὐτοῦ. Τὸ μοιρογνωμόνιον εἶναι μετάλλινον ἢ καὶ ξύλινον ἡμικύκλιον, τοῦ ὁποίου τὸ τόξον εἶναι διῃρημένον εἰς 180 ἴσα μέρη. Ἕκαστον ἑπομένως εἶναι τόξον 1^0. Εἶναι δὲ τὰ τόξα ταῦτα ἠριθμημένα ἀπὸ 0 ἕως 180 (σχ. 38).



Σχ. 38

Μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον εὑρίσκομεν τὸ μέτρον μιᾶς γωνίας ΑΟΒ ὡς ἑξῆς:

Τοποθετοῦμεν αὐτὸ εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς γωνίας καὶ οὕτως ὥστε τὸ κέντρον νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν κορυφὴν Ο τῆς γωνίας, ἡ ἀρχὴ 0^0 τῶν διαιρέσεων ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς ΟΑ καὶ τὸ μοιρογνωμόνιον πρὸς τὸ μέρος τῆς ἄλλης πλευρᾶς ΟΒ. Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀναγράφεται εἰς τὴν τομὴν τῆς ἡμιπεριφερείας καὶ τῆς πλευρᾶς ΟΒ εἶναι τὸ μέτρον τῆς γωνίας ΑΟΒ εἰς μοίρας.

Ἀσκήσεις

9. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς ὀρθῆς γωνίας εἰς μοίρας.

10. Νὰ εὕρητε εἰς μοίρας τὸ μέτρον τοῦ $\frac{1}{2}$ καὶ τοῦ $\frac{1}{4}$ τῆς ὀρθῆς γωνίας.

11. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον γωνίας 50^0 εἰς μέρη ὀρθῆς γωνίας.

12. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον γωνίας $40^0\ 20'$ εἰς μέρη ὀρθῆς γωνίας.

13. Ἂν μία γωνία εἶναι $\frac{7}{10}$ ὀρθῆς, νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς συμπληρωματικῆς καὶ παραπληρωματικῆς της εἰς μέρη ὀρθῆς καὶ εἰς μοίρας.

14. Μία γωνία Α ἑνὸς ἑξαγώνου εἶναι $\frac{4}{3}$ ὀρθῆς. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α αὐτοῦ εἰς μοίρας.

15. Μία γωνία Α ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι $\frac{7}{5}$ ὀρθῆς. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α αὐτοῦ.

16. Μία γωνία Α ἑνὸς πενταγώνου εἶναι 108^0. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α εἰς μοίρας καὶ εἰς μέρη ὀρθῆς γωνίας.

17. Μία ἐξωτερικὴ γωνία Α ἑνὸς ἑπταγώνου εἶναι $51^0\ 25'\ 43''$. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς ἐσωτερικῆς γωνίας Α αὐτοῦ εἰς μοίρας καὶ εἰς μέρη ὀρθῆς.

18. Ἀπὸ ἓν σημεῖον μιᾶς εὐθείας τοῦ τετραδίου σας νὰ γράψητε εἰς αὐτὸ δύο εὐθείας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ἐκείνης. Νὰ μετρήσητε τὰς δύο ἀπὸ τὰς γωνίας αἱ ὁποῖαι θὰ σχηματισθῶσι, καὶ νὰ ὑπολογίσητε τὸ μέτρον τῆς τρίτης.

19. Ἀπὸ ἓν σημεῖον Α μιᾶς εὐθείας ΒΓ τοῦ τετραδίου σας νὰ φέρητε πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς δύο εὐθείας ΑΔ, ΑΕ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $(\widehat{ΒΑΔ})=25^0$ καὶ $(\widehat{ΓΑΕ})=50^0$. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς γωνίας ΔΑΕ εἰς μέρη ὀρθῆς γωνίας.

20. Ἂν τρεῖς εὐθεῖαι ἀγόμεναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου σχηματίζωσιν ἴσας γωνίας, νὰ ὑπολογίσητε τὸ μέτρον ἑκάστης τῶν γωνιῶν τούτων. Ἔπειτα νὰ προεκτείνητε μίαν ἀπὸ αὐτὰς μέσα εἰς τὴν γωνίαν τῶν ἄλλων καὶ νὰ ὑπολογίσητε τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν τῆς προεκτάσεως μὲ τὰς ἄλλας δύο εὐθείας.

21. Αἱ ἐξωτερικαὶ γωνίαι Α καὶ Δ δύο τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσαι. Νὰ συγκρίνητε τὰς ἐσωτερικὰς γωνίας Α καὶ Δ αὐτῶν.

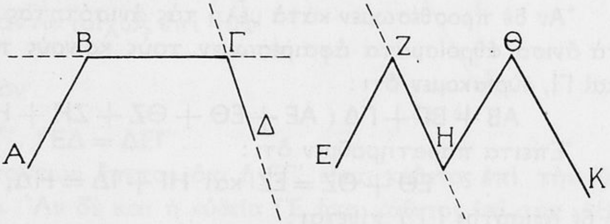
22. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς γωνίας τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι διχοτομοῦσι δύο ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικὰς γωνίας.

23. Νὰ καθορίσητε τὸ σχῆμα τῆς γραμμῆς, τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦσιν αἱ διχοτόμοι δύο κατὰ κορυφὴν γωνιῶν.

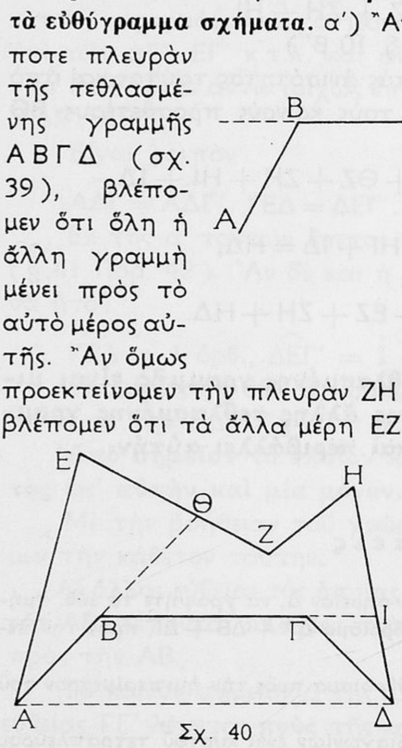
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

1. ΚΑΘΕΤΟΙ ΚΑΙ ΠΛΑΓΙΑΙ ΠΡΟΣ ΕΥΘΕΙΑΝ ΕΚ ΣΗΜΕΙΟΥ ΕΚΤΟΣ ΑΥΤΗΣ ΚΕΙΜΕΝΟΥ

§ 60. Ποῖαι λέγονται κυρταὶ τεθλασμέναι γραμμαὶ καὶ ποῖα κυρτὰ εὐθύγραμμα σχήματα. α΄) Ἂν προεκτείνωμεν ἑκατέρωθεν οἱανδήποτε πλευρὰν τῆς τεθλασμένης γραμμῆς ΑΒΓΔ (σχ. 39), βλέπομεν ὅτι ὅλη ἡ ἄλλη γραμμὴ μένει πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς. Ἂν ὅμως προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΖΗ τῆς τεθλασμένης γραμμῆς ΕΖΗΘΚ, βλέπομεν ὅτι τὰ ἄλλα μέρη ΕΖ καὶ ΗΘΚ αὐτῆς εὑρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ΖΗ.



Σχ. 39



Σχ. 40

Ὅσαι τεθλασμέναι γραμμαὶ ἔχουσι τὴν πρώτην ἰδιότητα λέγονται **κυρταί**. Δηλαδή:

Μία τεθλασμένη ἐπίπεδος γραμμὴ λέγεται κυρτή, ἂν ἑκάστη πλευρὰ αὐτῆς προεκτεινομένη ἑκατέρωθεν, ἀφήνῃ ὅλην τὴν ἄλλην γραμμὴν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς.

β΄) Κατὰ ταῦτα ἡ τεθλ. γραμμὴ ΑΒΓΔ (σχ. 40) εἶναι κυρτή. Καὶ τὸ ὑπ αὐτῆς περικλειόμενον εὐθ. σχῆμα ΑΒΓΔΑ λέγεται **κυρτὸν** εὐθ. σχῆμα. Εὐνόητον δὲ ὅτι τὸ εὐθ. σχῆμα ΑΕΖΗΔΑ δὲν εἶναι κυρτόν. Ὥστε:

Ἓν εὐθύγραμμον σχῆμα λέγεται κυρτόν, ἂν περικλείηται ἀπὸ κυρτὴν τεθλασμένην γραμμήν.

§ 61. Νὰ συγκριθῇ ἡ περίμετρος τῆς κυρτῆς τεθλασμένης γραμμῆς ΑΒΓΔ πρὸς τὴν περίμετρον τῆς τεθλασμένης γραμμῆς ΑΕΖΗΔ, ἥτις ἔχει τὰ αὐτὰ ἄκρα καὶ περικλείει αὐτὴν (σχ. 40).

Προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ. ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα καὶ παρατηροῦμεν ὅτι:

$$ΑΒ + ΒΘ < ΑΕ + ΕΘ,$$

$$ΒΓ + ΓΙ < ΒΘ + ΘΖ + ΖΗ + ΗΙ$$

καὶ $$ΓΔ < ΓΙ + ΙΔ \quad (\S\ 10\ β')$$

Ἂν δὲ προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἀνισότητας ταύτας καὶ ἀπὸ τὰ ἄνισα ἀθροίσματα ἀφαιρέσωμεν τοὺς κοινοὺς προσθετέους ΒΘ καὶ ΓΙ, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ < ΑΕ + ΕΘ + ΘΖ + ΖΗ + ΗΙ + ΙΔ$$

Ἔπειτα παρατηροῦμεν ὅτι:

$$ΕΘ + ΘΖ = ΕΖ \text{ καὶ } ΗΙ + ΙΔ = ΗΔ,$$

ἡ δὲ ἀνισότης (1) γίνεται:

$$ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ < ΑΕ + ΕΖ + ΖΗ + ΗΔ.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἡ περίμετρος μιᾶς κυρτῆς τεθλασμένης γραμμῆς εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὴν περίμετρον πάσης ἄλλης τεθλασμένης γραμμῆς, ἡ ὁποία ἔχει τὰ αὐτὰ ἄκρα καὶ περιβάλλει αὐτήν.

Ἀσκήσεις

24. Ἐντὸς τριγώνου ΑΒΓ νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον Δ, νὰ γράψητε τὰ εὐθ. τμήματα ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ καὶ νὰ συγκρίνητε τὸ ἄθροισμα ΔΑ + ΔΒ + ΔΓ πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου τούτου.

25. Νὰ συγκρίνητε τὸ προηγούμενον ἄθροισμα πρὸς τὴν ἡμιπερίμετρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

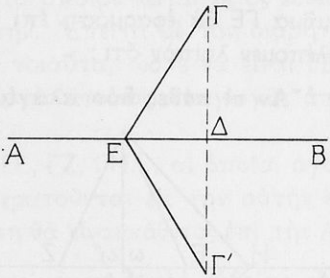
26. Νὰ συγκρίνητε τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου πρὸς τὴν περίμετρον καὶ πρὸς τὴν ἡμιπερίμετρον τοῦ τετραπλεύρου τούτου.

§ 62. Νὰ ἐξετασθῇ, ἂν ἐκ σημείου Γ κειμένου ἐκτὸς εὐθείας ΑΒ ἄγωνται κάθετοι ἐπ᾽ αὐτὴν καὶ πόσαι (σχ. 41).

Τὸ ἐπίπεδον, εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται τὸ Γ καὶ ἡ ΑΒ διαιρεῖται ὑπ' αὐτῆς εἰς δύο μέρη. Νοοῦμεν ὅτι τὸ μέρος, τὸ ὁποῖον περιέχει τὸ Γ στρέφεται περὶ τὴν ΑΒ, ἕως ὅτου τὸ σημεῖον Γ εὑρεθῇ εἰς σημεῖον Γ' τοῦ ἄλλου μέρους.

Ἂν τὸ στραφὲν μέρος τοῦ ἐπιπέδου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην θέσιν του καὶ ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΓΓ' αὕτη τέμνει τὴν ΑΒ εἰς ἓν σημεῖον Δ.

Ἂν διὰ β' φορὰν γίνῃ ἡ αὐτὴ στροφή, τὸ σημεῖον Γ θὰ ἔλθῃ πάλιν εἰς τὸ Γ'. Ἐπειδὴ δὲ ἡ εὐθεῖα ΑΒ μένει ἀκίνητος, αἱ εὐθεῖαι ΔΓ, ΓΕ κ.τ.λ., ἐφαρμόζουσιν ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ΔΓ', ΕΓ' κ.τ.λ. καὶ αἱ γωνίαι ΑΔΓ, ΓΕΔ ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ΑΔΓ', ΔΕΓ'.



Σχ. 41

Εἶναι λοιπὸν

$$\widehat{ΑΔΓ} = \widehat{ΑΔΓ'}, \ \widehat{ΓΕΔ} = \widehat{ΔΕΓ'}.$$

Ἐκ τῆς α' τούτων ἕπεται ὅτι ἡ ΓΓ' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ (§ 41 Πόρ. 42). Ἂν δὲ καὶ ἡ εὐθεῖα ΓΕ ἦτο κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, θὰ ἦτο:

$$\widehat{ΓΕΔ} = 1 \text{ ὀρθ.}, \ \widehat{ΔΕΓ'} = 1 \text{ ὀρθ. καὶ } \widehat{ΓΕΔ} + \widehat{ΔΕΓ'} = 2 \text{ ὀρθ.}$$

Ἐπομένως (§ 55) ἡ γραμμὴ ΓΕΓ' θὰ ἦτο εὐθεῖα καὶ θὰ συνέπιπτε μὲ τὴν ΓΔΓ' (§ 10 α'). Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἀπὸ σημεῖον τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς εὐθείας, ἄγεται κάθετος ἐπ' αὐτὴν καὶ μία μόνον.

Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ γνώμονος δυνάμεθα εὐκόλως νὰ γράψωμεν τὴν κάθετον ταύτην.

Αἱ ἄλλαι εὐθεῖαι τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐκ τοῦ Γ πρὸς τὴν ΑΒ, λέγονται **πλάγιαι** πρὸς αὐτήν. Ἡ ΓΕ εἶναι λοιπὸν πλαγία πρὸς τὴν ΑΒ.

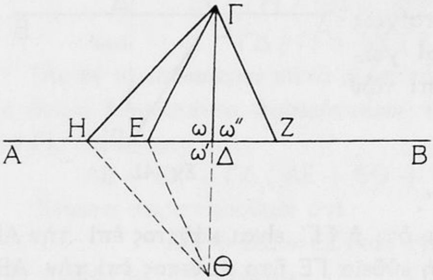
Τὸ κοινὸν σημεῖον Δ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ τῆς καθέτου ἐπ' αὐτὴν εὐθείας ΓΓ' λέγεται **ποὺς** τῆς καθέτου ταύτης. Ὁμοίως τὸ σημεῖον Ε λέγεται πούς τῆς ΓΕ πλαγίας πρὸς τὴν ΑΒ.

§ 63. Ἀπὸ σημεῖον Γ ἐκτὸς εὐθείας ΑΒ (σχ. 42 **) ἄγομεν τὴν κάθετον ΓΔ καὶ ὁρίζομεν ἐπὶ τῆς ΑΒ ἴσα τμήματα ΔΕ, ΔΖ καὶ ΔΗ 〉 ΔΕ. Νὰ συγκριθῶσι, τὰ τμήματα ΓΕ, ΓΖ, ΓΗ, ΓΔ.**

α΄) Διὰ νὰ συγκρίνωμεν τὰ τμήματα ΓΕ καὶ ΓΖ, νοοῦμεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΓΕΔ στρέφεται περὶ τὴν κάθετον ΓΔ, ἕως ὅτου πέσῃ εἰς τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περιέχει τὸ Ζ.

Ἐπειδὴ $\omega = \omega''$, ἡ εὐθεῖα ΔΑ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΔΒ. Ἐπειδὴ δὲ ΔΕ = ΔΖ, τὸ Ε θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ Ζ. Διὰ τοῦτο τὸ τμῆμα ΓΕ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ΓΖ καὶ ἑπομένως εἶναι ΓΕ = ΓΖ. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἂν οἱ πόδες δύο πλαγίων ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀγομένων πρὸς μίαν εὐθεῖαν ἀπέχωσιν ἴσον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου, αἱ πλάγιαι αὗται εἶναι ἴσαι.



Σχ. 42

β΄) Διὰ νὰ συγκρίνωμεν τὸ τμῆμα ΓΔ τῆς καθέτου πρὸς τὸ τμῆμα ΓΕ τυχούσης πλαγίας ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΓΔ ὁρίζομεν τμῆμα ΔΘ ἴσον πρὸς τὸ ΓΔ καὶ ἄγομεν τὸ εὐθ. τμῆμα ΕΘ.

Ἔπειτα παρατηροῦμεν ὅτι:

$$\Gamma\Delta + \Delta\Theta < \Gamma E + E\Theta \ (\S\ 10\ \beta') \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ ΓΔ = ΔΘ καὶ ΓΕ = ΕΘ κατὰ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, ἡ (1) γίνεται.

$\Gamma\Delta + \Gamma\Delta < \Gamma E + \Gamma E$ ἢ $\Gamma\Delta \cdot 2 < \Gamma E \cdot 2$ καὶ ἑπομένως $\Gamma\Delta < \Gamma E$.

Οὕτω βλέπομεν ὅτι:

Ἡ κάθετος ἐπὶ εὐθεῖαν εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν τὸ τμῆμα ΓΔ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ λέγεται **ἀπόστασις** τοῦ σημείου Γ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ.

γ΄) Διὰ νὰ συγκρίνωμεν τὰ τμήματα ΓΕ καὶ ΓΗ, ἄγομεν τὸ τμῆμα ΗΘ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι:

ΓΗ = ΗΘ καὶ ΓΕ = ΕΘ κατὰ τὴν α΄ περίπτωσιν

καὶ $\Gamma H + H\Theta > \Gamma E + E\Theta$ (§ 61)

Ἐκ τούτων εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι $\Gamma H > \Gamma E$. Ὥστε:

῞Αν οἱ πόδες δύο πλαγίων ἀπέχωσιν ἄνισον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου, αἱ πλάγιαι εἶναι ἄνισοι καὶ μεγαλυτέρα εἶναι ἐκείνη, τῆς ὁποίας ὁ ποὺς ἀπέχει περισσότερον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου.

᾿Αντιστρόφως: ᾿Απὸ σημεῖον Γ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς εὐθείας ΑΒ, ἄγομεν τὴν κάθετον ΓΔ ἐπ᾿ αὐτήν. Ἔπειτα μὲ τὸν διαβήτην ὁρίζομεν ἐπὶ τῆς ΑΒ σημεῖα Ε, Ζ, Η τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι ΓΕ= ΓΖ καὶ ΓΗ ⟩ ΓΕ. Εὐκόλως δὲ διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς ἀποδεικνύομεν ὅτι ΔΕ = ΔΖ καὶ ΔΗ ⟩ ΔΕ.

῞Αν δὲ ἐξ ὅλων τῶν εὐθειῶν ΓΔ, ΓΕ, ΓΖ, ΓΗ..., αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Γ, καὶ περατοῦνται εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ, ἡ ΓΔ εἶναι μικροτέρα, αὔτη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Πόρισμα Ι. **᾿Απὸ σημεῖον κείμενον ἐκτὸς εὐθείας εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀχθῶσι πρὸς αὐτὴν τρεῖς εὐθεῖαι ἴσαι.**

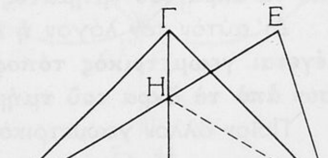
Πόρισμα ΙΙ. **Περιφέρεια κύκλου καὶ εὐθεῖα γραμμὴ δὲν δύνανται νὰ ἔχωσι κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο.**

Πόρισμα ΙΙΙ. **῾Η περιφέρεια κύκλου εἶναι καμπύλη γραμμή.**

§ 64. ᾿Επὶ δοθείσης εὐθείας ΑΒ ὁρίζομεν ἴσα τμήματα ΑΔ καὶ ΔΒ. Ἔπειτα ἄγομεν τὴν ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Νὰ συγκριθῶσι τὰ τμήματα ΓΑ καὶ ΓΒ (σχ. 43).

᾿Επειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΓΑ, ΓΒ, εἶναι πλάγιαι πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ΔΑ = ΔΒ, ἕπεται (§ 63 α΄) ὅτι ΓΑ = ΓΒ, ἤτοι:

῞Αν εὐθεῖα τέμνῃ καθέτως καὶ εἰς τὸ μέσον ἓν εὐθ. τμῆμα, πᾶν σημεῖον αὐτῆς ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος τούτου.



Σχ. 43

§ 65. Ἓν σημεῖον Ε κεῖται ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΓΔ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ εἰς τὸ μέσον αὐτοῦ. Νὰ συγκριθῶσι τὰ τμήματα ΕΑ καὶ ΕΒ (σχ. 43).

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σημεῖον Ε καὶ ἓν ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ ΑΒ, π.χ. τὸ Α, κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ΓΔ. Αὕτη ἑπομένως τέμνεται ὑπὸ τῆς ΑΕ εἰς τὸ σημεῖον Η. Κατὰ δὲ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα εἶναι ΑΗ = ΗΒ.

Ἐπειδὴ δὲ ΗΒ + ΗΕ > ΕΒ (§ 10 β'), ἕπεται ὅτι

ΑΗ + ΗΕ > ΕΒ ἢ ΑΕ > ΕΒ.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἂν ἓν σημεῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης εἰς τὸ μέσον εὐθ. τμήματος, ἀπέχει ἄνισον ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος τούτου. Ἀπέχει δὲ ὀλιγώτερον ἀπὸ τὸ ἄκρον, μὲ τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου.

Πόρισμα Ι. **Ἂν ἓν σημεῖον ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα εὐθ. τμήματος, κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης εἰς τὸ μέσον τοῦ τμήματος τούτου.**

Πόρισμα ΙΙ. **Ἡ κάθετος ἐπὶ μίαν χορδὴν τόξου εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ τόξου τούτου.**

§ 66. Ἀξιοσημείωτος γεωμετρικὸς τόπος. Ἀπὸ τὴν ἰδιότητα τῆς § 64 καὶ ἀπὸ τὸ προηγούμενον Πόρισμα Ι ἐννοοῦμεν ὅτι:

Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον εὐθ. τμήματος καὶ μόνον αὐτὰ ἔχουσι τὴν ἰδιότητα νὰ ἀπέχῃ ἕκαστον ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος τούτου.

Δι' αὐτὸν τὸν λόγον **ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον εὐθ. τμήματος λέγεται γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ὧν ἕκαστον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος τούτου.**

Ποῖον ἄλλον γεωμετρικὸν τόπον ἐγνωρίσαμεν ἕως τώρα;

Ἀσκήσεις

27. Νὰ ἐξετάσητε πόσαι περιφέρειαι διέρχονται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα.

28. Νὰ γράψητε μίαν περιφέρειαν Κ καὶ δύο καθέτους διαμέτρους ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἐπὶ δὲ τῆς ἀκτῖνος ΚΑ νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον Ε καὶ νὰ συγκρίνητε τὸ τμῆμα ΓΕ πρὸς τὴν χορδὴν ΓΑ.

29. Νὰ συγκρίνητε τὸ προηγούμενον τμῆμα ΓΕ πρὸς τὴν χορδὴν ΓΒ.

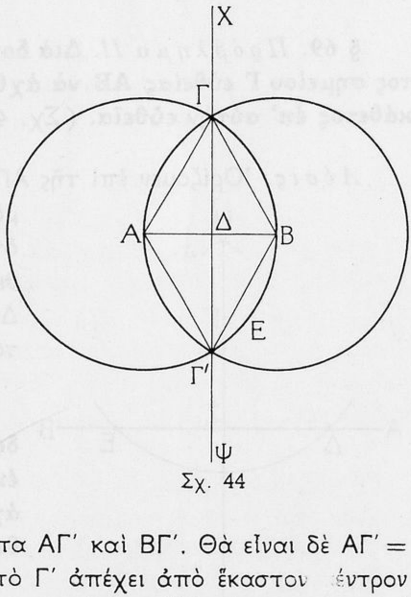
30. Ἀπὸ ἓν σημεῖον Γ ἐκτὸς εὐθείας ΑΒ νὰ φέρητε τὴν ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ δύο ἴσας πλαγίας ΓΕ καὶ ΓΖ. Νὰ συγκρίνητε δὲ τὰς γωνίας ΕΓΔ καὶ ΖΓΔ.

31. Ἂν αἱ προηγούμεναι πλάγιαι εἶναι ἄνισοι, νὰ συγκρίνητε πάλιν τὰς γωνίας ΕΓΔ καὶ ΖΓΔ.

2. ΧΑΡΑΞΙΣ ΚΑΘΕΤΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ ΔΙΑ ΤΟΥ ΚΑΝΟΝΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΔΙΑΒΗΤΟΥ

§ 67. *Θεώρημα (βοηθητικόν).* **Μὲ κέντρα δύο σημεῖα Α,Β καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν ΑΒ αὐτῶν γράφομεν δύο περιφερείας. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αὗται ἔχουσι δύο μόνον κοινὰ σημεῖα** (σχ. 44).

Ἀπόδειξις. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ μέσον Δ τῆς ἀκτῖνος ΑΒ τοῦ κύκλου Α κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου τούτου. Ἡ δὲ δι' αὐτοῦ ἀγομένη εὐθεῖα ΧΨ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐξερχομένη τοῦ κύκλου τούτου ἀπὸ τὸ ἓν μέρος συναντᾷ τὴν περιφέρειαν εἴς τι σημεῖον Γ.



Σχ. 44

Τὸ δὲ εὐθ. τμῆμα ΑΓ εἶναι ἀκτὶς τοῦ κύκλου τούτου καὶ ἑπομένως εἶναι ΑΓ = ΑΒ.

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ ΑΓ = ΓΒ (§ 64), ἕπεται ὅτι ΓΒ = ΑΒ, ἤτοι τὸ τμῆμα ΓΒ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου Β. Ἕνεκα δὲ τούτου τό Γ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας Β. Εἶναι λοιπὸν τὸ Γ κοινὸν σημεῖον τῶν περιφερειῶν Α καὶ Β.

Ὁρίζομεν ἔπειτα ἐπὶ τῆς ΧΨ τμῆμα ΔΓ' ἴσον πρὸς τὸ ΔΓ καὶ γράφομεν τὰ εὐθ. τμήματα ΑΓ' καὶ ΒΓ'. Θὰ εἶναι δὲ ΑΓ' = ΑΓ καὶ ΒΓ' = ΒΓ (§ 64), ἤτοι τὸ Γ' ἀπέχει ἀπὸ ἕκαστον κέντρον ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῶν κύκλων τούτων. Ἑπομένως κεῖται καὶ εἰς τὰς δύο περιφερείας.

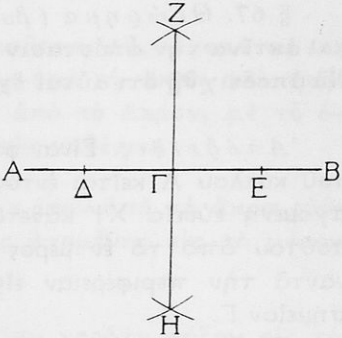
Ἂν δὲ καὶ τρίτον σημεῖον Ε ἔκειτο ἐπὶ τῶν περιφερειῶν τούτων, θὰ ἦτο ΑΕ = ΑΒ καὶ ΒΕ = ΑΒ. ἑπομένως ΑΕ = ΒΕ.

Ἕνεκα τούτου τὸ Ε θὰ ἔκειτο ἐπὶ τῆς ΧΨ, αὕτη δὲ θὰ εἶχε μὲ ἑκατέραν τῶν περιφεριῶν τούτων τρία κοινὰ σημεῖα Γ, Γ′, Ε. Τοῦτο δὲ εἶναι ἀδύνατον (§ 63 Πόρ. ΙΙ). Πλὴν λοιπὸν τῶν Γ καὶ Γ′ οὐδὲν ἄλλο κοινὸν σημεῖον ἔχουσιν αἱ περιφέρειαι αὗται.

Πόρισμα. **Ἡ κοινὴ χορδὴ τῶν περιφερειῶν (Α, ΑΒ) καὶ (Β, ΑΒ) τέμνει καθέτως καὶ εἰς τὸ μέσον τὴν ἀπόστασιν ΑΒ τῶν κέντρων.**

§ **68.** *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ γραφῇ εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ δοθὲν εὐθ. τμῆμα ΑΒ εἰς τὸ μέσον αὐτοῦ.**

Ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν τὴν κοινὴν χορδὴν τῶν περιφερειῶν (Α, ΑΒ) καὶ (Β, ΑΒ).



Σχ. 45

§ **69.** *Πρόβλημα ΙΙ.* **Διὰ δοθέντος σημείου Γ εὐθείας ΑΒ νὰ ἀχθῇ ἡ κάθετος ἐπ' αὐτὴν εὐθεῖα.** (Σχ. 45)

Λύσις: Ὁρίζομεν ἐπὶ τῆς ΑΓ ἑκατέρωθεν τοῦ Γ δύο ἴσα τμήματα ΓΔ, ΓΕ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΔΕ. Συνεχίζομεν λοιπόν, ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα.

Σχ. 46

§ **70.** *Πρόβλημα ΙΙΙ.* **Διὰ δοθέντος σημείου Γ, ὅπερ κεῖται ἐκτὸς δοθείσης εὐθείας ΑΒ, νὰ ἀχθῇ ἡ κάθετος ἐπ' αὐτὴν εὐθεῖα.**

Λύσις: Μὲ κέντρον Γ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ, ἔστω εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε. Ἂν δὲ ἐνθυμηθῶμεν τὸ Πόρισμα ΙΙ τῆς § 65, ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος I (§ 68).

Ἀσκήσεις

32. Νὰ γράψητε ἓν εὐθ. τμῆμα καὶ τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον αὐτό.

33. Νὰ γράψητε ἓν εὐθ. τμῆμα ΟΑ καὶ τὴν περιφέρειαν (Ο, ΟΑ). Νὰ ὁρίσητε δὲ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Μ, τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι ΜΟ = ΜΑ.

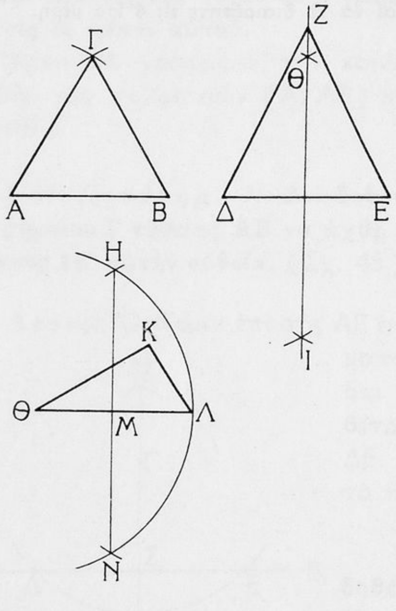
34. Νὰ γράψητε περιφέρειαν κύκλου, νὰ ὁρίσητε ἐπ' αὐτῆς μίαν χορδὴν ΑΒ καὶ νὰ εὕρητε σημεῖον Μ τῆς περιφερείας, τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι ΜΑ = ΜΒ.

35. Νὰ γράψητε ἓν εὐθ. τμῆμα καὶ νὰ τὸ διαιρέσητε εἰς 4 ἴσα μέρη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄

1. ΕΙΔΗ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

§ 71. **α΄) Ἰσόπλευρα τρίγωνα.** Ἔστω εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ Γ ἓν ἀπὸ τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν περιφερειῶν (Α, ΑΒ) καὶ (Β, ΑΒ) (σχ. 47). Ἂν φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας ΑΓ καὶ ΒΓ, σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Τοῦτο προφανῶς ἔχει ΑΒ = ΒΓ = ΓΑ. Διὰ τοῦτο λέγεται **ἰσόπλευρον** τρίγωνον. Ὥστε:



Σχ. 47

Ἰσόπλευρον τρίγωνον λέγεται πᾶν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ὅλαι ἴσαι.

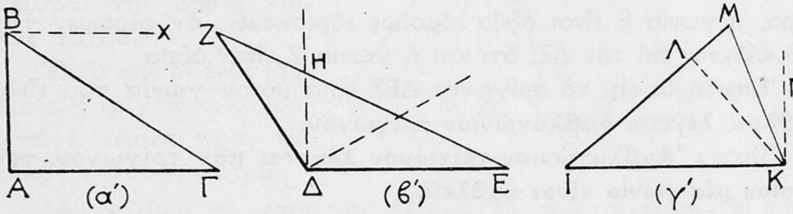
β΄) Ἰσοσκελῆ τρίγωνα. Ἔστω τυχὸν εὐθ. τμῆμα. ΔΕ καὶ ΘΙ ἡ κάθετος ἐπ᾽ αὐτὸ εἰς τὸ μέσον του. Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου ὁρίζομεν ἐπ᾽ αὐτῆς σημεῖον Ζ τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι ΔΖ ≠ ΔΕ. Ἂν δὲ φέρωμεν τὰ εὐθ. τμήματα ΖΔ καὶ ΕΖ, σχηματίζεται τρίγωνον ΖΔΕ. Τοῦτο ἔχει προφανῶς ΔΖ = ΖΕ ≠ ΔΕ καὶ λέγεται **ἰσοσκελὲς τρίγωνον.** Ὥστε:

Ἰσοσκελὲς τρίγωνον λέγεται πᾶν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δύο μόνον πλευραὶ εἶναι ἴσαι.

γ΄) Σκαληνὰ τρίγωνα. Ἔστω ΘΛ τυχὸν εὐθ. τμῆμα. Γράφομεν τὴν κάθετον ἐπ᾽ αὐτὸ εἰς τὸ μέσον του καὶ τὴν περιφέρειαν (Θ, ΘΛ). Ἀπὸ ἓν σημεῖον Κ τοῦ μικροτέρου τῶν δύο ὁριζομένων κυκλικῶν τμημάτων ἄγομεν τὰ εὐθ. τμήματα ΚΘ, ΚΛ. Γνωρίζομεν (§ 65) ὅτι ΚΛ < ΚΘ. Εἶναι δὲ καὶ ΚΘ < ΘΛ. Αἱ πλευραὶ λοιπὸν τοῦ τριγώνου ΚΘΛ εἶναι ἄνισοι. Τοῦτο δὲ λέγεται **σκαληνὸν τρίγωνον**. Ὥστε:

Σκαληνὸν τρίγωνον λέγεται πᾶν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ἄνισοι.

§ 72. α΄) Ὀρθογώνια τρίγωνα. Ἔστω Α ὀρθὴ γωνία. Ἂν τμηθοῦν αἱ πλευραὶ αὐτῆς διὰ μιᾶς εὐθείας ΒΓ, σχηματίζεται ἓν τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία Α εἶναι ὀρθὴ ἐκ κατασκευῆς. Αἱ ἄλλαι γωνίαι του εἶναι ὀξεῖαι.



Σχ. 48

Πράγματι· ἂν φέρωμεν τὴν ΒΧ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ (σχ. 48 α) θὰ σχηματισθῇ ὀρθὴ γωνία ΑΒΧ, ἐντὸς τῆς ὁποίας θὰ κεῖται ἡ ΒΓ, διότι ἄλλως θὰ διήρχετο ἡ ΒΧ μεταξὺ τῶν πλευρῶν ΒΑ, ΒΓ τῆς γωνίας ΑΒΓ. Καὶ τότε, διερχομένη μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Γ θὰ ἔτεμνε τὴν ΑΓ εἴς τι σημεῖον, ἐκ τοῦ ὁποίου θὰ διήρχοντο δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΒ: ἡ ΒΧ καὶ ἡ ΑΓ. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον (§ 62).

Ἐφόσον λοιπὸν ἡ ΒΓ θὰ κεῖται ἐντὸς τῆς ὀρθῆς γωνίας ΑΒΧ, συνάγεται ὅτι ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι μικροτέρα τῆς ὀρθῆς δηλ. ὀξεῖα.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ἂν φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Γ, ὅτι καὶ ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι ὀξεῖα.

Ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ μόνον μία γωνία του εἶναι ὀρθή, λέγεται **ὀρθογώνιον τρίγωνον**.

Ὥστε: **Ὀρθογώνιον τρίγωνον λέγεται πᾶν τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν γωνίαν ὀρθήν.**

β΄) Ἀμβλυγώνια τρίγωνα. Ἔστω ἀμβλεῖα γωνία Δ (σχ. 48β). Ἂν τμηθοῦν αἱ πλευραὶ αὐτῆς διὰ μιᾶς εὐθείας ΕΖ, σχηματίζεται τρίγωνον ΔΕΖ, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία Δ εἶναι ἀμβλεῖα ἐκ κατασκευῆς. Αἱ ἄλλαι γωνίαι του θὰ εἶναι ὀξεῖαι.

Πράγματι· ἂν φέρωμεν τὴν ΔΗ κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΕ πρὸς τὸ μέρος ὅπου καὶ ἡ ΔΖ, σχηματίζεται ὀρθὴ γωνία ΗΔΕ, ἡ ὁποία θὰ εἶναι ἐντὸς τῆς γωνίας ΕΔΖ, καθόσον ὡς ὀρθὴ εἶναι μικροτέρα τῆς ἀμβλείας ΕΔΖ.

Οὕτω τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ θὰ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ΔΗ καὶ ἑπομένως ἡ ΕΖ θὰ τέμνῃ τὴν ΔΗ εἴς τι σημεῖον Η. Σχηματίζεται λοιπὸν τρίγωνον ΗΔΕ, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία Δ εἶναι ὀρθή. Αἱ ἄλλαι γωνίαι αὐτοῦ τοῦ τριγώνου θὰ εἶναι, ὡς γνωστόν, ὀξεῖαι. Ἄρα, ἡ γωνία Ε εἶναι ὀξεῖα· ὁμοίως εὑρίσκομεν, ἂν φέρωμεν τὴν ΔΘ κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΖ, ὅτι καὶ ἡ γωνία Ζ εἶναι ὀξεῖα.

Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, μία μόνον γωνία του εἶναι ἀμβλεῖα, λέγεται **ἀμβλυγώνιον τρίγωνον.**

Ὥστε: **Ἀμβλυγώνιον τρίγωνον λέγεται πᾶν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου μία γωνία εἶναι ἀμβλεῖα.**

γ΄) **Ὀξυγώνια τρίγωνα.** Ἔστω ἓν τρίγωνον ΙΚΛ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν γωνίαν Λ ὀρθὴν (σχ. 48γ). Αἱ ἄλλαι γωνίαι αὐτοῦ θὰ εἶναι, ὡς γνωστὸν ὀξεῖαι (§ 72 α΄). Ὥστε ἡ γωνία Ι καὶ ἡ ΙΚΛ εἶναι ὀξεῖαι.

Φέρομεν τὴν ΚΝ κάθετον ἐπὶ τὴν ΙΚ πρὸς τὸ μέρος τῆς ΚΛ. Σχηματίζεται ὀρθὴ γωνία ΙΚΝ, ἐντὸς τῆς ὁποίας θὰ κεῖται ἡ ΚΛ, διότι ἡ γωνία ΙΚΛ, ὡς ὀξεῖα εἶναι μικροτέρα τῆς ὀρθῆς ΙΚΝ. Ἂν τώρα φέρωμεν διὰ τοῦ Κ ἐντὸς τῆς γωνίας ΛΚΝ τὴν εὐθεῖαν ΚΜ τέμνουσαν τὴν ΙΛ εἰς σημεῖον Μ πέραν τοῦ Λ, θὰ εἶναι ἡ γωνία ΙΚΜ ὀξεῖα, ὡς μικροτέρα τῆς ὀρθῆς ΙΚΝ. Ἀλλὰ καὶ ἡ ΙΜΚ εἶναι ὀξεῖα ὡς γωνία ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΛΜ ἔχοντος ὀρθὴν τὴν Λ καὶ συνεπῶς τὰς ἄλλας ἔχοντος ὀξείας.

Ὑπάρχει λοιπὸν τρίγωνον ΙΚΜ τοῦ ὁποίου καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι εἶναι ὀξεῖαι. Διὰ τοῦτο λέγεται **ὀξυγώνιον τρίγωνον.**

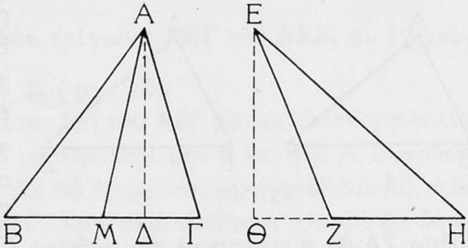
Ὥστε: **Ὀξυγώνιον τρίγωνον λέγεται πᾶν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι ὀξεῖαι.**

§ 73. **Ἄλλα ἀξιοσημείωτα στοιχεῖα τῶν τριγώνων.** Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΔ (σχ. 49) εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς Α ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Λέγεται δὲ ἡ μὲν πλευρὰ ΒΓ **βάσις** τοῦ τριγώνου, ἡ δὲ ἀπόστασις ΑΔ **ὕψος** αὐτοῦ. Ἂν ἡ πλευρὰ ΖΗ τοῦ τριγώνου ΕΖΗ ληφθῇ ὡς βάσις αὐτοῦ, ὕψος θὰ εἶναι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΕΘ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς Ε ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΖΗ. Γενικῶς λοιπόν:

Βάσις ἑνὸς τριγώνου λέγεται μία τυχοῦσα πλευρὰ αὐτοῦ. Ὕψος δὲ ἑνὸς τριγώνου λέγεται ἡ ἀπόστασις τῆς ἀπέναντι κορυφῆς ἀπὸ τὴν βάσιν.

Συνήθως ὡς βάσις καὶ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου λαμβάνονται αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας αὐτοῦ.

Ὡς βάσις δὲ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου λαμβάνεται ἡ ἄνισος πρὸς τὰς ἄλλας πλευρὰς αὐτοῦ.



Σχ. 49

Ἂν Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 49). τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΜ λέγεται **διάμεσος** τοῦ τριγώνου τούτου. Ὥστε:

Διάμεσος τριγώνου λέγεται τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ μίαν κορυφὴν καὶ ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς.

Ἀσκήσεις

36. Νὰ κατασκευάσητε εἰς τὸ τετράδιόν σας ἀπὸ ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον μὲ πλευρὰν 5 ἑκατοστομέτρων.

37. Νὰ κατασκευάσητε ἀπὸ ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ βάσιν 6 ἑκατ. καὶ ἑκάστη ἀπὸ τὰς ἄλλας πλευρὰς νὰ εἶναι 4 ἑκατ. Καὶ ἄλλο μὲ τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ ἑκάστη τῶν ἄλλων πλευρῶν νὰ εἶναι 8 ἑκατ.

38. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ἀμβλυγώνιον τρίγωνον. Νὰ λάβητε ὡς βάσιν αὐτοῦ μίαν πλευρὰν τῆς ἀμβλείας γωνίας καὶ νὰ γράψητε τὸ ἀντίστοιχον ὕψος.

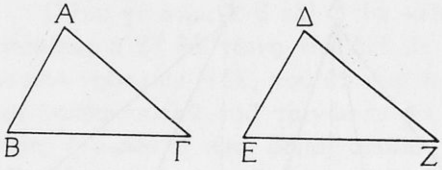
39. Νὰ κατασκευάσητε ἀπὸ ἓν ὀρθογώνιον καὶ ἀπὸ ἓν ἀμβλυγώνιον τρίγωνον. Ἔπειτα δὲ νὰ φέρητε τὴν διάμεσον ἑκάστου, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς μεγαλυτέρας γωνίας αὐτοῦ.

40. Νὰ κατασκευάσητε δύο τυχόντα τρίγωνα καὶ νὰ γράψητε ὅλας τὰς διαμέσους αὐτῶν.

2. ΑΙ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

§ 74. Νὰ συγκριθῶσι δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰ ὁποῖα ἔχουσι ΒΓ = ΕΖ, $\widehat{B} = \widehat{E}$ καὶ $\widehat{\Gamma} = \widehat{Z}$ (σχ. 50).

Νοοῦμεν ὅτι τὸ ΔΕΖ τίθεται ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ ΕΖ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΒΓ μὲ τὴν κορυφὴν Ε ἐπὶ τῆς Β. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΔ θὰ συμπέσῃ μὲ τὴν εὐθεῖαν ΒΑ ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν Β καὶ Ε. Δι' ὅμοιον δὲ λόγον καὶ ἡ εὐθεῖα ΖΔ θὰ συμπέσῃ μὲ τὴν εὐθεῖαν ΓΑ.



Σχ. 50

Τὸ κοινὸν λοιπὸν σημεῖον Δ τῶν εὐθειῶν ΕΔ καὶ ΖΔ θὰ γίνῃ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ΒΑ καὶ ΓΑ, ἤτοι θὰ συμπέσῃ μὲ τὸ Α. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ἐφαρμόζουσι καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσα. Ὥστε:

Ἂν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Ἀπὸ τὸν τρόπον, κατὰ τὸν ὁποῖον ἔγινεν ἡ ἐφαρμογὴ τῶν προηγουμένων τριγώνων προκύπτει ὅτι ΑΒ = ΔΕ, ΑΓ = ΔΖ καὶ $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$. Δηλ. τὰ ἴσα αὐτὰ τρίγωνα ἔχουσιν ἴσα καὶ τὰ ἄλλα ὁμοειδῆ στοιχεῖα αὐτῶν. Εἶναι δὲ ἴσαι πλευραὶ αἱ κείμεναι ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν καὶ ἴσαι γωνίαι ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν.

Πόρισμα Ι. **Ἂν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχωσι ἴσας τὰς ΑΒ καὶ ΔΕ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν Α, Δ καὶ τὰς γωνίας Β καὶ Ε ἴσας, ταῦτα εἶναι ἴσα.**

Τὸ πόρισμα τοῦτο συνήθως διατυπώνομεν συντομώτερον καὶ γενικῶς ὡς ἑξῆς:

Ἂν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχωσι μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην καὶ τὴν προσκειμένην ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην, ταῦτα εἶναι ἴσα.

Ἀσκήσεις

41. Ἀπὸ ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς εὐθείας, ἤχθη ἡ κάθετος ἐπ' αὐτὴν καὶ δύο πλάγιαι. Ἂν αὗται σχηματίζωσιν ἴσας γωνίας μὲ τὴν κάθετον, νὰ συγκριθῶσιν αἱ πλάγιαι αὗται.

42. Ἀπὸ ἓν τυχὸν σημεῖον Δ τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας Α φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν διχοτόμον ταύτην. Αὕτη τέμνει τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Νὰ συγκρίνητε τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ.

43. Ἂν ἡ διχοτόμος ΑΔ τῆς γωνίας Α ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι καὶ ὕψος αὐτοῦ, νὰ συγκρίνητε τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ αὐτοῦ,

§ 75. Νὰ συγκριθῶσι δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, ἂν ἔχωσιν $AB = \Delta E$, $A\Gamma = \Delta Z$, $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$ (σχ. 50).

Νοοῦμεν ὅτι τὸ ΔΕΖ τίθεται ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ ΔΕ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΑΒ μὲ τὴν κορυφὴν Δ ἐπὶ τὴν Α. Εὐκόλως δὲ ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ μὲν εὐθεῖα ΔΖ θὰ ἐφαρμόσῃ μὲ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ, ἡ δὲ κορυφὴ Ζ θὰ συμπέσῃ μὲ τὴν Γ. Κατ' ἀκολουθίαν ἡ πλευρὰ ΕΖ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΒΓ καὶ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ. Ὥστε:

Ἂν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶνα ἴσα.

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι $B\Gamma = EZ$, $\widehat{B} = \widehat{E}$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{Z}$, ὡς προηγουμένως (§ 74).

Πόρισμα I. **Ἂν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχωσι τὰς καθέτους πλευρὰς ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, ταῦτα εἶναι ἴσα.**

Πόρισμα II. **Ἡ διχοτομοῦσα τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν καὶ διχοτομεῖ αὐτήν.**

Πόρισμα III. **Ἂν δύο τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας ἢ ἴσων περιφερειῶν εἶναι ἴσα καὶ αἱ χορδαὶ αὐτῶν εἶναι ἴσαι.**

Ἀσκήσεις

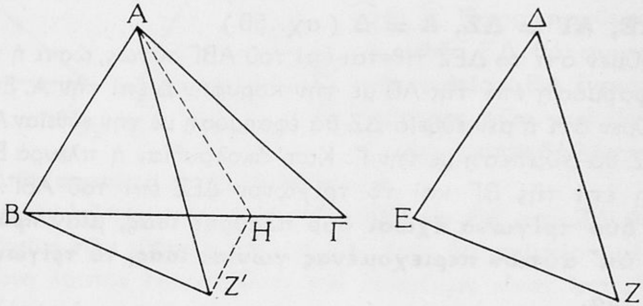
44. Νὰ προεκτείνητε τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς κορυφῆς Α. Νὰ ὁρίσητε δὲ ἐπ' αὐτῶν ἀντιστοίχως τμήματα ΑΒ', ΑΓ' ἴσα πρὸς τὸ ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως. Νὰ φέρητε τὸ εὐθ. τμῆμα Β'Γ' καὶ νὰ συγκρίνητε αὐτὸ πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ.

45. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν γωνίας Α νὰ ὁρίσητε δύο ἴσα τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ. Ἂν δὲ Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς διχοτόμου αὐτῆς, νὰ συγκρίνητε τὰ τμήματα ΜΒ καὶ ΜΓ.

46. Ἂν ἡ διάμεσος ΑΜ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι καὶ ὕψος αὐτοῦ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι τοῦτο εἶναι ἰσοσκελὲς τρίγωνον.

§ 76. Νὰ συγκριθῶσιν αἱ πλευραὶ ΒΓ καὶ ΕΖ δύο τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, ἂν ταῦτα ἔχωσιν ΑΒ = ΔΕ, ΑΓ = ΔΖ καὶ $\widehat{A} > \widehat{\Delta}$ (σχ. 51).

Νοοῦμεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΔΕΖ τίθεται ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ οὕτως,



Σχ. 51

ὥστε ἡ κορυφὴ Δ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Α καὶ ἡ πλευρὰ ΔΕ ἐπὶ τῆς ΑΒ. Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{A} > \widehat{\Delta}$, ἡ πλευρὰ ΔΖ θὰ πέσῃ ἐντὸς τῆς γωνίας Α εἰς μίαν θέσιν ΑΖ′. Τὸ τρίγωνον ΔΕΖ θὰ καταλάβῃ λοιπὸν τὴν θέσιν ΑΒΖ′ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΒΖ′ = ΕΖ καὶ ΑΖ′ = ΔΖ = ΑΓ.

Ἂν δὲ ΑΗ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Ζ′ΑΓ, τὰ τρίγωνα Ζ′ΑΗ καὶ ΗΑΓ θὰ εἶναι ἴσα (§ 75) καὶ ἑπομένως Ζ′Η = ΗΓ. Ἐπειδὴ δὲ ΒΗ + ΗΖ′ > ΒΖ′ (§ 10 β′), ἕπεται ὅτι: ΒΗ + ΗΓ > ΒΖ′ ἢ ΒΓ > ΕΖ. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἂν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἀνίσους, ἀπέναντι τούτων κεῖνται ὁμοίως ἄνισοι πλευραί.

Πόρισμα Ι. **Δύο ἄνισα καὶ μικρότερα ἡμιπεριφερείας τόξα, τῆς αὐτῆς περιφερείας ἢ ἴσων περιφερειῶν ἔχουσιν ὁμοίως ἀνίσους χορδάς.**

Πόρισμα ΙΙ. **Δύο ἄνισα καὶ μεγαλύτερα ἡμιπεριφερείας τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας ἢ ἴσων περιφερειῶν ἔχουσιν ἀνομοίως ἀνίσους χορδάς.**

Πόρισμα ΙΙΙ. **Ἂν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχωσιν ΑΒ = ΔΕ, ΑΓ = ΔΖ καὶ ΒΓ $>$ ΕΖ, θὰ ἔχωσι $\widehat{A} > \widehat{\Delta}$.**

Πόρισμα IV. **Ἂν δύο χορδαὶ τοῦ αὐτοῦ ἢ ἴσων κύκλων εἶναι ἄνισοι, τὰ μικρότερα ἡμιπεριφερείας ἀντίστοιχα τόξα αὐτῶν εἶναι ὁμοίως ἄνισα. Τὰ δὲ μεγαλύτερα ἡμιπεριφερείας τόξα εἶναι ἀνομοίως ἄνισα.**

§ 77. **Νὰ συγκριθῶσι δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, ἂν ἔχωσιν ΑΒ = ΔΕ, ΑΓ = ΔΖ καὶ ΒΓ = ΕΖ.**

Συγκρίνομεν τὰς γωνίας Α καὶ Δ αὐτῶν σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς: Ἂν ἦτο Α $>$ Δ. θὰ ἦτο καὶ ΒΓ $>$ ΕΖ (§ 76). Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀντίθετον πρὸς τὴν ὑπόθεσιν ΒΓ = ΕΖ.

Ἂν πάλιν ἦτο $\widehat{A} < \widehat{\Delta}$, θὰ ἦτο καὶ ΒΓ $<$ ΕΖ, τὸ ὁποῖον ἐπίσης ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

Ἀφ' οὗ λοιπὸν οὔτε $\widehat{A} > \widehat{\Delta}$ οὔτε $\widehat{A} < \widehat{\Delta}$ εἶναι, ἕπεται κατ' ἀνάγκην ὅτι εἶναι $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$. Τὰ δὲ τρίγωνα εἶναι ἴσα (§ 75).

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἂν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς πλευρὰς ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, ταῦτα εἶναι ἴσα.

Πόρισμα. **Ἂν δύο χορδαὶ μικροτέρων ἡμιπεριφερείας τόξων τῆς αὐτῆς ἢ ἴσων περιφερειῶν εἶναι ἴσαι, καὶ τὰ τόξα ταῦτα εἶναι ἴσα.**

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι: Διὰ νὰ ὁρίσωμεν ἴσα τόξα ἐπὶ μιᾶς περιφερείας ἢ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν, ἀρκεῖ νὰ ὁρίσωμεν ἐπ' αὐτῶν ἴσας χορδὰς διὰ τοῦ διαβήτου.

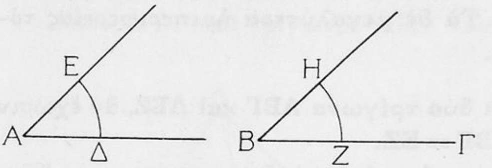
Ἀσκήσεις

47. Νὰ γράψητε μίαν περιφέρειαν καὶ νὰ ὁρίσητε εἰς αὐτὴν δύο ἀνίσους χορδάς. Ἔπειτα δὲ νὰ συγκρίνητε τὰ μεγαλύτερα ἡμιπεριφερείας ἀντίστοιχα τόξα αὐτῶν.

48. Εἰς τὸ ἐπίπεδον ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον Δ καὶ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ, νὰ ὁρίσητε ἀντιστοίχως τμήματα ΔΑ′, ΔΒ′, ΔΓ′, ἴσα ἓν πρὸς ἓν πρὸς τὰ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ. Νὰ σχηματίσητε τὸ τρίγωνον Α′Β′Γ′ καὶ νὰ συγκρίνητε αὐτὸ πρὸς τὸ ΑΒΓ

3. ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

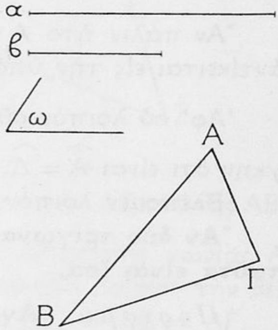
§ 78. *Πρόβλημα I.* **Δίδεται γωνία Α καὶ εὐθεῖα ΒΓ. Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς τὴν Α καὶ ἔχουσα κορυφὴν Β καὶ μίαν πλευρὰν τὴν ΒΓ** (σχ. 52).



Σχ. 52

Λύσις. Καθιστῶμεν τὴν γωνίαν Α ἐπίκεντρον καὶ ἔστω ΔΕ τὸ ἀντίστοιχον τόξον αὐτῆς. Ἔπειτα μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα ΑΔ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις τέμνει τὴν ΒΓ εἴς τι σημεῖον Ζ. Ἐπὶ τῆς περιφερείας ταύτης ὁρίζομεν τόξον ΖΗ ἴσον πρὸς τὸ ΔΕ καὶ ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΗ. Εὐκόλως δὲ ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ σχηματισθεῖσα γωνία ΓΒΗ εἶναι ἡ ζητουμένη.

§ 79. *Πρόβλημα II.* **Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἐδόθησαν δύο πλευραὶ α, β καὶ ἡ γωνία τούτων ω** (σχ. 53).



Σχ. 53.

Λύσις. Κατασκευάζομεν γωνίαν Α ἴσην πρὸς τὴν ω καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῆς ὁρίζομεν τμῆμα ΑΒ = α καὶ ἄλλο ΑΓ = β. Ἄγομεν ἔπειτα τὴν ΒΓ καὶ εὐκόλως ἀποδεικνύομεν ὅτι τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀσκήσεις

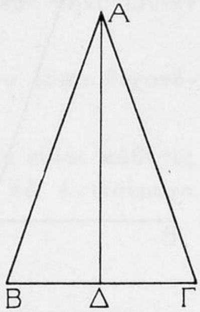
49. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ μία πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας νὰ εἶναι 6 ἑκατοστόμετρα καὶ ἡ ἄλλη 5 ἑκατοστόμετρα.

50. Νὰ ἐξετάσητε, ἂν μὲ τὰ ἀνωτέρω δοθέντα στοιχεῖα α, β, ω εἶναι δυνατὸν ἢ ὄχι νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον διάφορον τοῦ κατασκευασθέντος ΑΒΓ (§ 79. σχ. 53).

4. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΙΣΟΣΚΕΛΩΝ ΚΑΙ ΙΣΟΠΛΕΥΡΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

§ 80. Νὰ συγκριθῶσιν αἱ παρὰ τὴν βάσιν ΒΓ γωνίαι ἰσο**σκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ** (σχ. 54).

Ἂν φέρωμεν τὴν διάμεσον ΑΔ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ χωρίζεται εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ. Ταῦτα ἔχουσιν ΑΒ = ΑΓ καὶ ΒΔ = ΔΓ καὶ τὴν ΑΔ κοινήν. Εἶναι ἄρα (§ 77) ταῦτα ἴσα καὶ διὰ τοῦτο εἶναι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:



Σχ. 54

Αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι παντὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσαι.

Πόρισμα. **Πᾶν ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσογώνιον.**

Ἀσκήσεις

51. Νὰ ὁρίσητε τὸ μέσον Μ τῆς βάσεως ΒΓ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἐπὶ τῶν ἴσων πλευρῶν αὐτοῦ νὰ ὁρίσητε ἴσα τμήματα ΑΕ, ΑΖ. Νὰ γράψητε τὰ εὐθ. τμήματα ΜΕ, ΜΖ καὶ νὰ συγκρίνητε ταῦτα.

52. Νὰ ὁρίσητε τὰ μέσα Δ καὶ Ε τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΓ καὶ ΑΒ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ. Ἔπειτα νὰ γράψητε καὶ νὰ συγκρίνητε τὰς διαμέσους ΒΔ καὶ ΓΕ αὐτοῦ.

53. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ, νὰ ὁρίσητε τὰ μέσα Δ,Ε,Ζ, τῶν πλευρῶν αὐτοῦ καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ἰσόπλευρον.

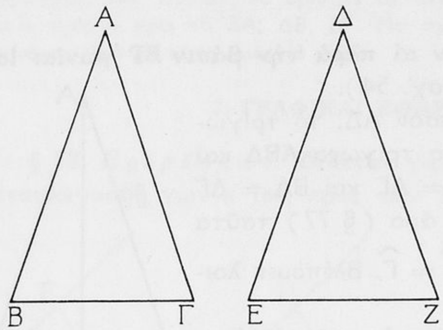
54. Νὰ προεκτείνητε ἑκατέρωθεν τὴν βάσιν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ νὰ συγκρίνητε τὰς ἐξωτερικὰς γωνίας, αἱ ὁποῖαι θὰ σχηματισθῶσιν.

§ 81. Νὰ συγκριθῶσιν αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΓ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $\widehat{\mathbf{B}} = \widehat{\mathbf{\Gamma}}$ (σχ. 55).

Κατασκευάζομεν τρίγωνον ΔΕΖ, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰς

$$ΔΕ = ΑΒ,\ ΔΖ = ΑΓ \text{ καὶ } ΕΖ = ΒΓ. \qquad (1)$$

Θὰ εἶναι ἑπομένως τοῦτο ἴσον πρὸς τὸ ΑΒΓ (§ 77) καὶ ἑπομένως $\widehat{E} = \widehat{B}$ καὶ $\widehat{Z} = \widehat{\Gamma}$. Ἐπειδὴ δὲ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, ἕπεται ὅτι $\widehat{E} = \widehat{\Gamma}$ καὶ $\widehat{Z} = \widehat{B}$.



Σχ. 55

Νοοῦμεν τώρα ὅτι τὸ τρίγωγον ΔΕΖ τίθεται ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ ΕΖ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΒΓ μὲ τὴν κορυφὴν Ε ἐπὶ τῆς Γ. Εὐκόλως δὲ ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ μὲν πλευρὰ ΕΔ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΓΑ, ἡ δὲ ΖΔ ἐπὶ τῆς ΒΑ. Θὰ εἶναι δηλ. ΕΔ = ΓΑ καὶ ΖΔ = ΒΑ. Ἐκ τούτων καὶ τῶν (1) ἕπεται ὅτι ΑΒ = ΑΓ.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Ἂν δύο γωνίαι τριγώνου εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν πλευραὶ εἶναι ἴσαι, ἤτοι τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

Πόρισμα. **Πᾶν ἰσογώνιον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσόπλευρον.**

Ἀσκήσεις

55. Νὰ συγκρίνητε τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον ἔχει ἴσας τὰς ἐξωτερικὰς γωνίας Β καὶ Γ.

56. Νὰ συγκρίνητε τὰς τρεῖς πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς ἐξωτερικαὶ γωνίαι μὲ διαφόρους κορυφὰς εἶναι ἴσαι.

57. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ἰσογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΒΓ νὰ εἶναι 6 ἑκατοστομέτρων.

§ 82. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ ἄγεται ἡ ΑΔ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ αὐτοῦ. Νὰ συγκριθῶσι :

α΄) Τὰ τμήματα ΒΔ καὶ ΔΓ τῆς βάσεως καὶ

β΄) Αἱ γωνίαι ΒΑΔ καὶ ΔΑΓ (Σχ 54).

α΄) Ἐπειδὴ αἱ πλάγιαι πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι ἴσαι, ἕπεται ὅτι ΒΔ = ΔΓ (§ 63 ἀντ.).

Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΒΑΔ καὶ ΔΑΓ εἶναι ἴσα (§ 77) καὶ ἑπομένως $\widehat{ΒΑΔ} = \widehat{ΔΑΓ}$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἡ κάθετος ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἐπὶ τὴν βάσιν, διχοτομεῖ τὴν βάσιν καὶ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς.

Πόρισμα Ι. **Τὰ ὕψη ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του καὶ διάμεσοι αὐτοῦ.**

Πόρισμα ΙΙ. **Ἡ διάμετρος κύκλου, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ χορδὴν αὐτοῦ, διχοτομεῖ τὴν χορδὴν καὶ τὰ ἀντίστοιχα αὐτῆς τόξα.**

Ἀσκήσεις

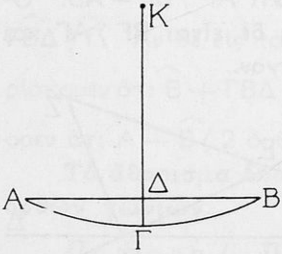
58. Ἐκ σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου νὰ φέρητε τὴν κάθετον καὶ δύο ἴσας πλαγίας πρὸς αὐτήν. Ἔπειτα νὰ συγκρίνητε τὰς γωνίας, τὰς ὁποίας αἱ πλάγιαι αὗται σχηματίζουσι μὲ τὴν κάθετον.

59. Ἂν εὐθεῖα ΑΔ διχοτομῇ τὴν γωνίαν Α τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὸ μεταξὺ τῆς κορυφῆς καὶ τῆς βάσεως τμῆμα ΑΔ εἶναι ὕψος καὶ διάμεσος τοῦ τριγώνου τούτου.

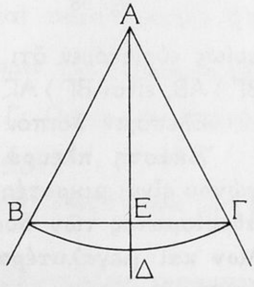
60. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι: Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία τέμνει δίχα καὶ καθέτως τὴν βάσιν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου, διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν αὐτοῦ καὶ διχοτομεῖ τὴν ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνίαν του.

5. ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

§ 83. *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ διχοτομηθῇ δοθὲν τόξον ΑΒ περιφερείας** (σχ. 56).



Σχ. 56



Σχ. 57

Λύσις. Γράφομεν τὴν ΚΔΓ κάθετον ἐπὶ τὴν χορδὴν τοῦ τόξου εἰς τὸ μέσον αὐτῆς (§ 65 Πορ. ΙΙ). Εὐκόλως δὲ ἀποδεικνύομεν ὅτι $\widehat{ΑΓ} = \widehat{ΓΒ}$.

§ **84.** *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ διχοτομηθῇ δοθεῖσα γωνία Α** (σχ. 57).

Λύσις: Καθιστῶμεν τὴν γωνίαν Α ἐπίκεντρον καὶ ὁρίζομεν τὸ μέσον Δ τοῦ ἀντιστοίχου τόξου ΒΔΓ, ὅπως προηγουμένως. Ἄγομεν ἔπειτα τὴν εὐθεῖαν ΑΔ καὶ ἀποδεικνύομεν εὐκόλως ὅτι αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη διχοτόμος.

Ἀσκήσεις

61. Νὰ κατασκευάσητε γωνίαν 45^0.

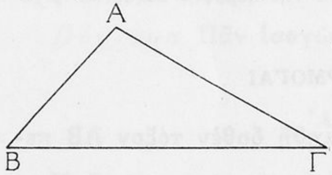
62. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ $Α = 45^0$ $ΑΒ = 10$ ἑκατ. καὶ $ΑΓ = 6$ ἑκατ.

63. Νὰ διαιρέσητε δοθὲν τόξον περιφερείας εἰς 4 ἴσα μέρη.

64. Νὰ διαιρέσητε μίαν γωνίαν εἰς 4 ἴσα μέρη.

6. ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

§ **85. Νὰ συγκριθῇ μία πλευρὰ τριγώνου ΑΒΓ πρὸς τὸ ἄθροισμα καὶ τὴν διαφορὰν τῶν ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ** (σχ. 58).



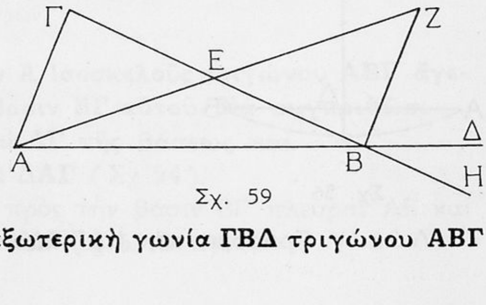
Σχ. 58

α΄) Ἡ πλευρὰ π.χ. ΑΓ ἔχει μὲ τὴν τεθλ. γραμμὴν ΑΒΓ τὰ αὐτὰ ἄκρα. Εἶναι λοιπὸν $ΑΓ < ΑΒ + ΒΓ$ (§ 10 β΄).

β΄) Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι $ΒΓ < ΑΒ + ΑΓ$. Ἂν δὲ ἀπὸ τὰ μέλη αὐτῆς ἀφαιρέσωμεν π.χ. τὴν πλευρὰν ΑΒ, εὑρίσκομεν ὅτι $ΑΓ > ΒΓ - ΑΒ$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $ΑΒ > ΒΓ - ΑΓ$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $ΒΓ > ΑΓ$ καὶ $ΒΓ > ΑΒ$, εἶναι $ΒΓ > ΑΓ - ΑΒ$ κατὰ μείζονα λόγον.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἑκάστη πλευρὰ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.



Σχ. 59

§ **86. Νὰ συγκριθῇ μία ἐξωτερικὴ γωνία ΓΒΔ τριγώνου ΑΒΓ**

πρὸς ἑκατέραν τῶν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν Γ καὶ Α αὐτοῦ (σχ. 59).

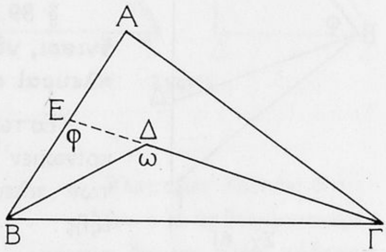
α΄) Γράφομεν τὴν διάμεσον ΑΕ καὶ εἰς τὴν προέκτασιν αὐτῆς ὁρίζομεν τμῆμα ΕΖ = ΑΕ. Ἂν ἔπειτα φέρωμεν τὴν ΒΖ, σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΒΕΖ. Ἐκ τῆς ἰσότητος δὲ τῶν τριγώνων ΑΕΓ καὶ ΒΕΖ (§ 75) ἔπεται ὅτι $\widehat{ΕΒΖ} = \widehat{Γ}$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΒΖ κεῖται ἐντὸς τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας ΓΒΔ, εἶναι $\widehat{ΓΒΔ} > \widehat{ΕΒΖ}$ καὶ ἐπομένως $\widehat{ΓΒΔ} > \widehat{Γ}$.

β΄) Κατὰ ταῦτα εἶναι $\widehat{ΑΒΗ} > \widehat{Α}$. Ἐπειδὴ δὲ $\widehat{ΑΒΗ} = \widehat{ΓΒΔ}$, ἔπεται ὅτι $\widehat{ΓΒΔ} > \widehat{Α}$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Πᾶσα ἐξωτερικὴ γωνία τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ.

Πόρισμα. **Ἂν σημεῖον Δ κεῖται ἐντὸς τριγώνου ΑΒΓ, ἡ γωνία ΒΔΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου τούτου.**

Παρατηροῦμεν ὅτι $\widehat{ΒΔΓ} > \widehat{φ}$ καὶ $\widehat{φ} > \widehat{Α}$ κ.τ.λ.



Σχ. 60

§ 87. Νὰ συγκριθῇ τὸ ἄθροισμα δύο γωνιῶν τριγώνου ΑΒΓ πρὸς 2 ὀρθὰς γωνίας (σχ. 59).

Προεκτείνομεν πχ. τὴν πλευρὰν ΑΒ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι $\widehat{ΓΒΔ} > \widehat{Γ}$. Ἂν δὲ εἰς τὰ μέλη αὐτῆς προσθέσωμεν τὴν γωνίαν Β, εὑρίσκομεν ὅτι $\widehat{Β} + \widehat{ΓΒΔ} > \widehat{Β} + \widehat{Γ}$ ἢ 2 ὀρθ. $> \widehat{Β} + \widehat{Γ}$. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι $\widehat{Α} + \widehat{Β} <$ 2 ὀρθ. καὶ $\widehat{Α} + \widehat{Γ} <$ 2 ὀρθ. Ὥστε:

Τὸ ἄθροισμα δύο γωνιῶν τριγώνου εἶναι μικρότερον τῶν 2 ὀρθῶν γωνιῶν.

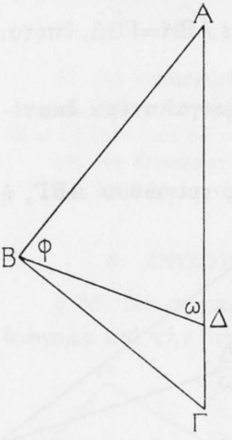
Πόρισμα I. **Πᾶν ὀρθογώνιον ἢ ἀμβλυγώνιον τρίγωνον ἔχει δύο ὀξείας γωνίας.**

Πόρισμα II. **Αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ὀξεῖαι.**

§ 88. *Θεώρημα.* **Ἂν δύο πλευραὶ τριγώνου εἶναι ἄνισοι, αἱ ἀπέναντι αὐτῶν γωνίαι εἶναι ὁμοίως ἄνισοι.**

Ἀπόδειξις. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ΑΓ ⟩ ΑΒ (σχ. 61). Ἂν ἐπὶ τῆς ΑΓ ὁρίσωμεν τμῆμα ΑΔ = ΑΒ, θὰ εἶναι ΑΓ ⟩ ΑΔ καὶ ἑπομένως τὸ Δ θὰ κεῖται μεταξὺ Α καὶ Γ. Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν ΒΔ θὰ κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας Β. Διὰ τοῦτο δὲ θὰ εἶναι

$\widehat{\varphi} < \widehat{AB\Gamma}$ ἢ $\widehat{\varphi} < \widehat{B}$ (1)



Σχ. 61

Ἐπειδὴ ΑΒ = ΑΔ, εἶναι καὶ φ = ω (§ 80), ἡ δὲ (1) γίνεται $\widehat{\omega} < \widehat{B}$. Ἐπειδὴ δὲ $\widehat{\Gamma} < \widehat{\omega}$ (§ 86), ἕπεται κατὰ μείζονα λόγον ὅτι $\widehat{\Gamma} < \widehat{B}$. ὅ.ἔ.δ.

§ 89. **Ἂν δύο γωνίαι τριγώνου εἶναι ἄνισοι, νὰ συγκριθῶσιν αἱ ἀπέναντι αὐτῶν πλευραὶ αὐτοῦ.**

Ἔστω ὅτι $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$ (σχ. 61). Διὰ νὰ συγκρίνωμεν τὰς ἀπέναντι τῶν γωνιῶν τούτων πλευρὰς ΑΓ καὶ ΑΒ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἂν ἦτο ΑΓ ⩽ ΑΒ, θὰ ἦτο $\widehat{B} \leqslant \widehat{\Gamma}$. Ἐπειδὴ δὲ αἱ σχέσεις αὗται ἀντίκεινται εἰς τὴν ὑπόθεσιν, ἀποκλείεται νὰ εἶναι ΑΓ ⩽ ΑΒ. Ἑπομένως ΑΓ ⟩ ΑΒ. Ὥστε.

Ἂν δύο γωνίαι τριγώνου εἶναι ἄνισοι, καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν πλευραὶ εἶναι ὁμοίως ἄνισοι.

Ἀσκήσεις

65. Νὰ συγκρίνητε τὴν ὑποτείνουσαν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου πρὸς ἑκατέραν τῶν ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ.

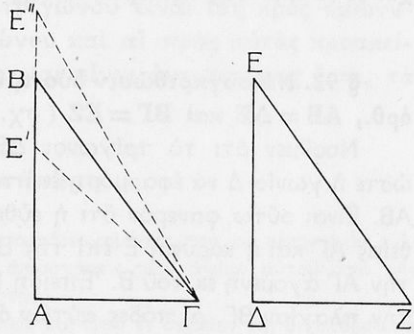
66. Νὰ κατασκευάσητε ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ μὲ βάσιν ΒΓ. Νὰ συγκρίνητε δὲ τὰς ἀποστάσεις τυχόντος σημείου τῆς πλευρᾶς ΑΓ ἀπὸ τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ

7. ΑΛΛΑΙ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

§ 90. Νὰ συγκριθῶσι δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, ἂν $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 1$ ὀρθ. ΑΓ = ΔΖ καὶ $\widehat{B} = \widehat{E}$. (σχ. 62).

Νοοῦμεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΔΕΖ τίθεται ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ, οὕτως ὥστε ἡ ὀρθὴ γωνία Δ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς Α μὲ τὴν ΔΖ ἐπὶ τῆς ΑΓ. Οὕτως ἡ κορυφὴ Ζ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Γ, διότι ΔΖ = ΑΓ.

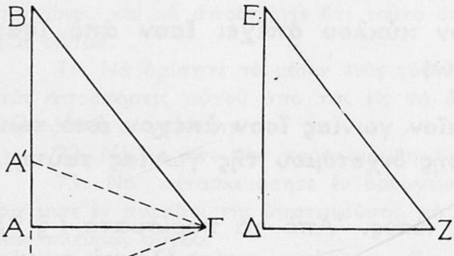
Ἂν δὲ ἡ κορυφὴ Ε ἤρχετο εἰς ἓν σημεῖον Ε′ ἢ Ε′′ τῆς ΑΒ διάφορον τοῦ Β, θὰ ἦτο $\widehat{AE'\Gamma} > \widehat{B}$ ἢ $\widehat{B} > \widehat{AE''\Gamma}$ (§ 86). Ἐπειδὴ δὲ θὰ εἶναι $\widehat{E} = \widehat{AE'\Gamma}$ ἢ $\widehat{E} = \widehat{AE''\Gamma}$, θὰ ἦτο $\widehat{B} \lessgtr \widehat{E}$. Αὗται ὅμως ἀντίκεινται εἰς τὴν ὑπόθεσιν $\widehat{B} = \widehat{E}$. Ὥστε ἡ κορυφὴ Ε συμπίπτει μὲ τὴν Β καὶ τὰ τρίγωνα ἐφαρμόζουσιν ἀκριβῶς.



Σχ. 62

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἂν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχωσι μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς ἀπέναντι ὀξείας γωνίας ἴσας, ταῦτα εἶναι ἴσα.



Σχ. 63

§ 91. Νὰ συγκριθῶσι δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἂν $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 1$ ὀρθ., ΒΓ = ΕΖ καὶ $\widehat{B} = \widehat{E}$ (σχ. 63).

Νοοῦμεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΔΕΖ τίθεται ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ γωνία Ε νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς Β μὲ τὴν πλευρὰν ΕΖ ἐπὶ τῆς ΒΓ. Οὕτως ἡ κορυφὴ Ζ θὰ συμπέσῃ μὲ τὴν Γ, ἡ δὲ Δ θὰ ἔλθῃ εἰς ἓν σημεῖον τῆς πλευρᾶς ΑΒ. Ἂν τοῦτο ἦτο Α′ διάφορον τοῦ Α, θὰ ἤγοντο ἐκ τοῦ Γ δύο κάθετοι ΓΑ καὶ ΓΑ′ ἐπὶ τὴν ΑΒ, ὅπερ ἄτοπον.

Ἡ κορυφὴ λοιπὸν Δ συμπίπτει μὲ τὴν Α καὶ τὰ τρίγωνα ἐφαρμόζουσιν. Ὥστε:

Ἂν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχωσι τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην, ταῦτα εἶναι ἴσα.

Πόρισμα. **Ἕκαστον σημεῖον τῆς διχοτόμου γωνίας ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς αὐτῆς.**

§ 92. Νὰ συγκριθῶσιν δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἂν $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 1$ ὀρθ., ΑΒ = ΔΕ καὶ ΒΓ = ΕΖ (σχ. 63).

Νοοῦμεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΔΕΖ τίθεται ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ, οὕτως ὥστε ἡ γωνία Δ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς Α μὲ τὴν πλευρὰν ΔΕ ἐπὶ τῆς ΑΒ. Εἶναι οὕτω φανερὸν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΖ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΓ καὶ ἡ κορυφὴ Ε ἐπὶ τῆς Β, ἡ δὲ ΕΖ γίνεται πλαγία πρὸς τὴν ΑΓ ἀγομένη ἐκ τοῦ Β. Ἐπειδὴ δὲ ἡ πλαγία αὕτη εἶναι ἴση πρὸς τὴν πλαγίαν ΒΓ, οἱ πόδες αὐτῶν ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τὸν πόδα Α. Ἡ κορυφὴ Ζ λοιπὸν συμπίπτει μὲ τὴν Γ καὶ τὰ τρίγωνα ἐφαρμόζουσι. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἂν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχωσι τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην, ταῦτα εἶναι ἴσα.

Πόρισμα I. **Τὸ κέντρον κύκλου ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ἴσας χορδὰς αὐτοῦ.** Καὶ ἀντιστρόφως.

Πόρισμα II. **Πᾶν σημεῖον γωνίας ἴσον ἀπέχον ἀπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῆς, κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ταύτης.**

§ 93. Εἷς ἀξιοσημείωτος τόπος. Ἀπὸ τὰ πορίσματα (§ 91 καὶ II § 92) ἐννοῦμεν ὅτι: Ἐκ τῶν σημείων γωνίας ὅλα τὰ σημεῖα τῆς διχοτόμου αὐτῆς καὶ μόνον αὐτὰ ἔχουσι τὴν ἀκόλουθον ἰδιότητα:

Ἕκαστον ἀπὸ αὐτὰ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ταύτης.

Διὰ τοῦτο **ἡ διχοτόμος γωνίας** λέγεται **γεωμετρικὸς τόπος** τῶν σημείων **τῶν εὑρισκομένων ἐντὸς τῆς γωνίας καὶ ὧν ἕκαστον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς αὐτῆς.**

§ 94. Συντομωτέρα διατύπωσις τῶν περιπτώσεων ἰσότητος τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων. Τὰς ἀνωτέρω (§ 90 – 93) περιπτώσεις ἰσότητος τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων καὶ τὰ Πορίσματα Ι τῶν § 74 – 75 δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν περιληπτικώτερον οὕτω:

α΄) Ἂν δύο πλευραὶ ὀρθ. τριγώνου εἶναι μία πρὸς μίαν, ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς ὁμωνύμους πλευρὰς ἄλλου ὀρθ. τριγώνου, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.

β΄) Ἂν μία πλευρὰ ὀρθ. τριγώνου εἶναι ἴση πρὸς ὁμώνυμον πλευρὰν ἄλλου ὀρθ. τριγώνου καὶ αἱ πρὸς αὐτὰς προσκείμεναι ἢ ἀντικείμεναι ὀξεῖαι γωνίαι εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Ἀσκήσεις

67. Νὰ γράψητε τυχοῦσαν εὐθεῖαν διερχομένην ἀπὸ τὸ μέσον ἑνὸς εὐθ. τμήματος. Ἔπειτα νὰ γράψητε τὰς ἀποστάσεις τῶν ἄκρων αὐτοῦ ἀπὸ τῆς εὐθείας ταύτης καὶ νὰ συγκρίνητε αὐτάς.

68. Νὰ διχοτομήσητε μίαν γωνίαν καὶ ἀπὸ ἓν σημεῖον τῆς διχοτόμου νὰ φέρητε καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς αὐτῆς. Νὰ συγκρίνητε τὰς ἀποστάσεις τῶν ποδῶν τῶν καθέτων τούτων ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας.

69. Νὰ ὁρίσητε τὰ μέσα τῶν ἴσων πλευρῶν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι ταῦτα ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου.

70. Νὰ ὁρίσητε τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι τοῦτο ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς καθέτους πλευρὰς αὐτοῦ.

71. Νὰ ὁρίσητε τὸ μέσον ἑνὸς τόξου περιφερείας. Ἔπειτα νὰ γράψητε τὰς ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τὰς εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ καταληγούσας ἀκτῖνας καὶ νὰ τὰς συγκρίνητε.

72. Νὰ κάμητε τὴν προηγουμένην ἐργασίαν μὲ τὸ μέσον μιᾶς χορδῆς.

73. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ὀρθογώνιον καὶ σκαληνὸν τρίγωνον καὶ νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον τῆς ὑποτεινούσης, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὰς ἄλλας πλευρὰς αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Γ΄ καὶ τοῦ Δ΄ κεφαλαίου

74. Νὰ συγκρίνητε τὴν περίμετρον παντὸς κυρτοῦ εὐθ. σχήματος πρὸς τὴν περίμετρον ἄλλου εὐθ. σχήματος, τὸ ὁποῖον περικλείει τὸ πρῶτον.

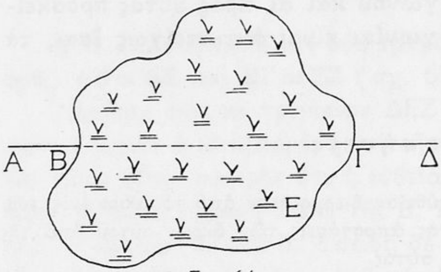
75. Νὰ σχηματίσητε μίαν ὀρθὴν γωνίαν Α καὶ νὰ ὁρίσητε ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς δύο σημεῖα Β, Γ καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης ἄλλα δύο Δ, Ε τοιαῦτα ὥστε νὰ εἶναι ΑΒ $<$ ΑΓ καὶ ΑΔ $<$ ΑΕ. Νὰ συγκρίνητε δὲ τὰ τμήματα ΒΔ καὶ ΓΕ.

76. Νὰ γράψητε μίαν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ νά ὁρίσητε ἐκτὸς αὐτῆς ἓν σημεῖον Γ. Ἔπειτα νὰ ὁρίσητε ἐπὶ τῆς ΑΒ σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $ΜΑ = ΜΓ$ καὶ ἄλλο σημεῖον Ν τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι $ΝΒ = ΝΓ$.

77. Νὰ ὁρίσητε ἐκτὸς δοθείσης εὐθείας ΑΒ δύο σημεῖα Γ, Δ καὶ νὰ ὁρίσητε ἐπὶ τῆς ΑΒ σημεῖον Ζ, διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι $ΖΓ = ΖΔ$.

78. Νὰ κατασκευάσητε τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ φέρητε τὴν διάμεσον ΑΔ αὐτοῦ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς νὰ ὁρίσητε τμῆμα ΔΕ ἴσον πρὸς ΑΔ. Νὰ φέρητε τὸ εὐθ. τμῆμα ΕΓ καὶ νὰ συγκρίνητε αὐτὸ πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ.

79. Εἰς τὸ προηγούμενον σχῆμα νὰ συγκρίνητε τὴν γωνίαν ΒΑΔ πρὸς τὴν ΓΕΔ.



Σχ. 64

80. Εἰς μίαν ὁμαλὴν πεδιάδα ὑπάρχει ἓν μικρὸν ἕλος Ε, διὰ μέσου τοῦ ὁποίου πρόκειται νὰ διέλθῃ μία εὐθεῖα ὁδὸς ΑΒΓΔ. Πῶς ὁ τοπογράφος μηχανικὸς θὰ εὕρῃ τὸ μῆκος τοῦ ἐντὸς τοῦ ἕλους τμήματος αὐτῆς πρὶν ἀποξηρανθῇ τὸ ἕλος ; (σχ. 64).

81. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι $ΑΒ < ΑΓ$. Ἔπειτα νὰ φέρητε τὴν διάμεσον ΑΔ καὶ νὰ συγκρίνητε τὰς γωνίας ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ πρὸς ἀλλήλας καὶ ἑκάστην πρὸς τὴν ὀρθὴν γωνίαν.

82. Νὰ κατασκευάσητε γωνίαν $22^\circ 30'$.

83. Νὰ διαιρέσητε μίαν περιφέρειαν εἰς 8 ἴσα τόξα.

84. Ἂν εἰς ἓν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $ΑΓ > ΑΒ$ καὶ ΑΔ εἶναι διάμεσος αὐτοῦ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι :

$$\frac{ΑΓ - ΑΒ}{2} < ΑΔ < \frac{ΑΓ + ΑΒ}{2}$$

85. Εἰς τὸ προηγούμενον σχῆμα νὰ ἀποδείξητε ὅτι $\widehat{ΒΑΔ} > \widehat{ΓΑΔ}$.

86. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὰ ὕψη ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς βάσεως αὐτοῦ, εἶναι ἴσα.

87. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι : Ἂν δύο ὕψη τριγώνου εἶναι ἴσα, τοῦτο εἶναι ἰσοσκελὲς τρίγωνον.

88. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὰ ὕψη παντὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι ἴσα καὶ ἀντιστρόφως.

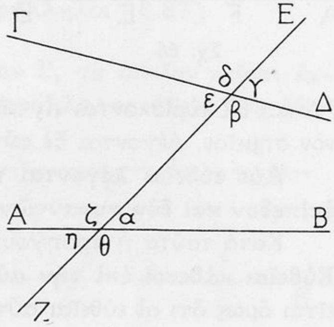
89. Νὰ κατασκευάσητε μίαν γωνίαν καὶ τυχοῦσαν εὐθεῖαν. Νὰ εὕρητε δὲ ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ταύτης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'

1. ΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ ΕΥΘΕΙΑΙ

§ 95. Αἱ γωνίαι δύο εὐθειῶν τεμνομένων ὑπὸ τρίτης. Ἔστωσαν ἐν ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται ἀπὸ τρίτην εὐθεῖαν ΕΖ εἰς σημεῖα διάφορα ἀλλήλων (σχ. 65).

Βλέπομεν δὲ ὅτι σχηματίζονται ὑπ' αὐτῶν 8 γωνίαι, α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ. Ταύτας χωρίζομεν εἰς διάφορα ζεύγη, τὰ ὁποῖα χαρακτηρίζονται ἀπὸ τὴν θέσιν των πρὸς τὰς τεμνομένας καὶ πρὸς τὴν τέμνουσαν εὐθεῖαν. Οὕτω:



Σχ. 65

α) Δύο γωνίαι, ὡς αἱ α καὶ β, αἱ ὁποῖαι κεῖνται μεταξὺ τῶν τεμνομένων εὐθειῶν καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης, λέγονται **ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.**

β') Δύο γωνίαι, ὡς αἱ α καὶ ε, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι διαφόρους κορυφάς, κεῖνται μεταξὺ τῶν τεμνομένων εὐθειῶν καὶ ἑκατέρωθεν τῆς τεμνούσης λέγονται **ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι.**

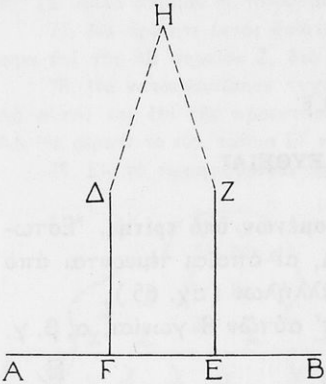
γ') Δύο γωνίαι, ὡς αἱ α καὶ γ, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι διαφόρους κορυφάς, κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης καὶ ἡ μία μεταξύ, ἡ δὲ ἄλλη ἐκτὸς τῶν τεμνομένων εὐθειῶν, λέγονται **ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.**

Ὁμοίως γωνίαι, ὡς αἱ θ καὶ δ λέγονται **ἐκτὸς ἐναλλάξ, αἱ** θ καὶ γ **ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη** κ.τ.λ.

Ἀξιοσημείωτον ὅτι $\alpha + \beta + \varepsilon + \zeta = 4$ ὀρθ. Ἂν δὲ εἶναι $\alpha + \beta \leqslant 2$ ὀρθ., θὰ εἶναι ἀντιστοίχως $\varepsilon + \zeta \geqslant 2$ ὀρθ. Ἂν δὲ $\alpha + \beta > 2$ ὀρθ., θὰ εἶναι $\varepsilon + \zeta < 2$ ὀρθ.

§ 96. *Πρόβλημα.* **Δίδεται εὐθεῖα ΑΒ καὶ ἄγονται δύο**

ἄλλαι ΓΔ, ΕΖ κάθετοι ἐπ' αὐτὴν καὶ εἰς τὸ αὐτὸ μὲ αὐτὴν ἐπίπεδον. Νὰ ἐξετασθῇ, ἂν αἱ κάθετοι αὗται προεκτεινόμεναι τέμνωνται ἢ ὄχι (σχ. 66).



Σχ. 66

Λύσις. Ἂν αὗται ἐτέμνοντο εἴς τι σημεῖον Η, θὰ ἤγοντο ἐξ αὐτοῦ δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΒ. Τοῦτο δὲ εἶναι ἀδύνατον (§ 62). Ὥστε:

Δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν καὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ μετ' αὐτῆς δὲν τέμνονται, ὅσον καὶ ἂν προεκταθῶσι.

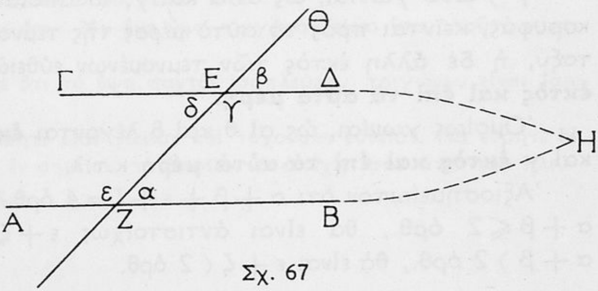
§ 97. Ποῖαι λέγονται παράλληλοι εὐθεῖαι. Αἱ προηγούμεναι εὐθεῖαι ΓΔ και ΕΖ εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον. Λέγονται δὲ αὗται **παράλληλοι εὐθεῖαι.** Ὥστε:

Δύο εὐθεῖαι λέγονται παράλληλοι, ἂν κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν προεκταθῶσι.

Κατὰ ταῦτα ἡ προηγουμένη ἰδιότης διατυποῦται καὶ ὡς ἑξῆς: **Εὐθεῖαι κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλοι.** Νοεῖται ὅμως ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

2. ΑΛΛΑ ΓΝΩΡΙΣΜΑΤΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

§ 98. *Θεώρημα Ι.* **Ἂν δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης ΕΖ σχηματίζωσιν ἴσας δύο ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, αὗται εἶναι παράλληλοι εὐθεῖαι** (σχ. 67).



Σχ. 67

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι $α = β$. Ἂν αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ ἐτέμνοντο εἰς σημεῖον Η, ἡ ἐξωτερικὴ γωνία β τοῦ τριγώνου ΗΕΖ θὰ ἦτο ἴση πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι α, ὅπερ ἄτοπον (§ 86). Αἱ εὐθεῖαι λοιπὸν ΑΒ καὶ ΓΔ οὐδέποτε συναντῶνται, κεῖνται δὲ καὶ εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Ἄρα αὗται εἶναι παράλληλοι εὐθεῖαι (§ 97).

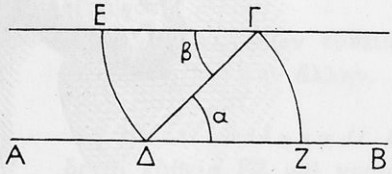
Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύονται καὶ τὰ ἀκόλουθα θεωρήματα.

§ 99. *Θεώρημα ΙΙ.* **Ἂν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης σχηματίζωσι δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας, αἱ εὐθεῖα αὗται εἶναι παράλληλοι.**

§ 100. *Θεώρημα ΙΙΙ.* **Ἂν δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι δύο εὐθειῶν τεμνομένων ὑπὸ τρίτης εἶναι παραπληρωματικαί, αἱ εὐθεῖαι ἐκεῖναι εἶναι παράλληλοι** (§ 87).

§ 101. *Πρόβλημα.* **Ἀπὸ σημεῖον Γ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς εὐθείας ΑΒ, νὰ ἀχθῇ πρὸς αὐτὴν παράλληλος εὐθεῖα** (σχ. 68).

Λύσις. Ἄγομεν εὐθεῖαν ΓΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Δ· ἔστω δὲ α μία ἀπὸ τὰς σχηματιζομένας γωνίας. Ἔπειτα μὲ κορυφὴν τὸ Γ καὶ πλευρὰν τὴν ΓΔ σχηματίζομεν γωνίαν β ἴσην πρὸς τὴν α καὶ ἀπὸ τὸ ἕτερον μέρος τῆς ΓΔ. Εὐκόλως δὲ ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ ἄλλη πλευρὰ ΓΕ τῆς β εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ (§ 99).



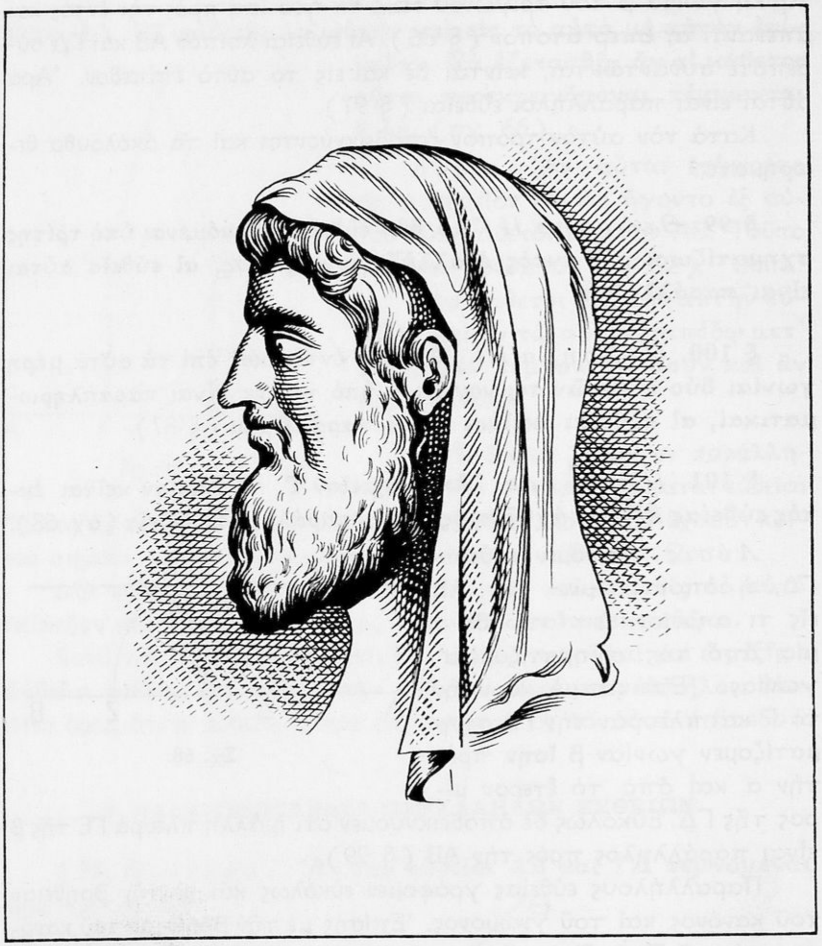
Σχ. 68.

Παραλλήλους εὐθείας γράφομεν εὐκόλως καὶ μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ γνώμονος. Ἐπίσης μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ Ταῦ. Τὰς μεθόδους ταύτας γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν πρακτικὴν γεωμετρίαν.

§ 102. Τὸ Εὐκλείδειον αἴτημα. Ὁ Ἕλλην μαθηματικὸς Εὐκλείδης[1] παρεδέχθη ὅτι:

---

1. Ὁ Εὐκλείδης φέρεται γεννηθεὶς ἐν Συρίᾳ περὶ τὸ ἔτος 330 π.χ. Ὁ πατὴρ αὐτοῦ Ναυκράτης ἀπέστειλεν αὐτὸν εἰς Ἀθήνας διὰ νὰ σπουδάσῃ. Ἐξ Ἀ-

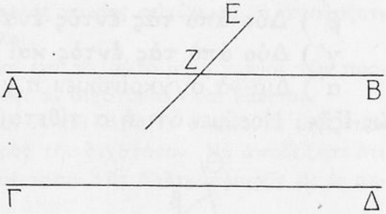


ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Ο ΣΤΟΙΧΕΙΩΤΗΣ

Ἀπὸ ἓν σημεῖον κείμενον ἐκτὸς εὐθείας ἄγεται μία μόνον εὐθεῖα παράλληλος πρὸς ἐκείνην. Ἡ πρότασις αὕτη λέγεται **Εὐκλείδιον αἴτημα.** Ἐπ' αὐτοῦ δὲ στηρίζεται ἡ ἐν χρήσει Γεωμετρία. Διὰ τοῦτο δὲ αὕτη λέγεται **Εὐκλείδειος Γεωμετρία**[2].

3. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

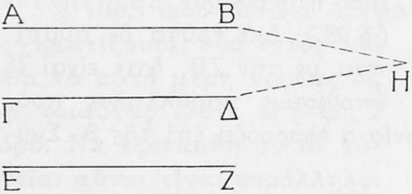
§ **103.** *Πρόβλημα Ι.* **Ἀπὸ ἓν σημεῖον Ζ μιᾶς τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ἄγομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΕΖ. Νὰ ἐξετασθῇ ἂν αὕτη τέμνῃ ἢ ὄχι τὴν ἄλλην παράλληλον** (σχ. 69).



Σχ. 69

Λύσις: Ἂν ἡ ΕΖ δὲν ἔτεμνε τὴν ἄλλην παράλληλον ΓΔ, θὰ ἤγοντο ἐκ τοῦ Ζ δύο παράλληλοι πρὸς τὴν ΓΔ. Τοῦτο δὲ ἀντίκειται πρὸς τὸ Εὐκλείδιον αἴτημα. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι :

Ἂν εὐθεῖα τέμνῃ τὴν μίαν ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν, θὰ τέμνῃ καὶ τὴν ἄλλην.



Σχ. 70

§ **104.** *Πρόβλημα ΙΙ.* **Δίδεται εὐθεῖα ΕΖ καὶ γράφομεν δύο ἄλλας ΑΒ, ΓΔ παραλλήλους πρὸς αὐτὴν καὶ εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον μὲ ἐκείνην. Νὰ ἐξετασθῇ ἂν αὗται εἶναι παράλληλοι ἢ τέμνωνται** (σχ. 70).

θηνῶν μετεκλήθη εἰς Ἀλεξάνδρειαν καὶ ἐδίδαξε Γεωμετρίαν καὶ Ἀριθμητικὴν σχεδὸν μέχρι τοῦ θανάτου του περὶ τὸ ἔτος 270 π.Χ. Περὶ τῶν ἔργων του θὰ γίνῃ λόγος βραδύτερον.

2. Οἱ νεώτεροι μαθηματικοὶ διέπλασαν καὶ δύο ἄλλα συστήματα Γεωμετρίας. Κατὰ τὸ ἓν τούτων ἀπὸ σημεῖον ἐκτὸς εὐθείας ἄγονται δύο παράλληλοι πρὸς αὐτήν. Τῆς Γεωμετρίας ταύτης ἱδρυτὴς εἶναι ὁ Ρῶσος μαθηματικὸς Lobatshefski. Κατὰ τὸ ἄλλο οὐδεμία ἄγεται παράλληλος κ.τ.λ. Ταύτης ἱδρυτὴς εἶναι ὁ Γερμανὸς μαθηματικὸς Riemann. Αὗται λέγονται «Μὴ Εὐκλείδειοι Γεωμετρίαι».

Ἂν σκεφθῶμεν, ὅπως προηγουμένως βεβαιούμεθα ὅτι αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ δὲν τέμνονται. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι:

Εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι καὶ πρὸς ἄλληλας παράλληλοι.

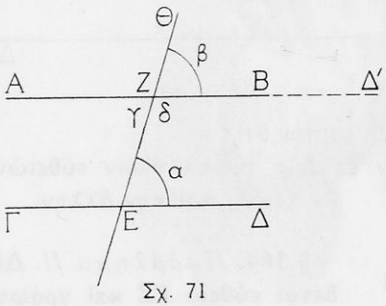
§ 105. **Δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνονται ὑπὸ τρίτης ΕΘ** (σχ. 71). **Νὰ συγκριθῶσι:**

α΄) Δύο ἀπὸ τὰς σχηματιζομένας ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας.

β΄) Δύο ἀπὸ τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας.

γ΄) Δύο ἀπὸ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας.

α΄) Διὰ νὰ συγκρίνωμεν π.χ. τὰς γωνίας α καὶ β, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Νοοῦμεν ὅτι ἡ α τίθεται ἐπὶ τῆς β, οὕτως ὥστε ἡ κορυφὴ Ε νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν κορυφὴν Ζ καὶ ἡ πλευρὰ ΕΖ νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν προέκτασίν της ΖΘ. Ἂν δὲ ΖΔ΄ εἶναι ἡ νέα θέσις τῆς ΕΔ, θὰ εἶναι ἡ γωνία ΘΖΔ΄ = α καὶ ἑπομένως ἡ ΖΔ΄ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ (§ 98). Διὰ τοῦτο δὲ συμπίπτει μὲ τὴν ΖΒ, ἥτις εἶναι ἐξ ὑποθέσεως παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ (§ 102). Ἑπομένως ἡ γωνία α ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς β. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι:



Σχ. 71

Ἂν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τμηθῶσιν ὑπὸ τρίτης, αἱ σχηματιζόμεναι ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι ἴσαι.

β΄) Ἐπειδὴ ἀπεδείχθη $\alpha = \beta$, εἶναι δὲ καὶ $\gamma = \beta$ ἕπεται ὅτι $\alpha = \gamma$. Ἤτοι:

Καὶ αἱ σχηματιζόμεναι ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

γ΄) Ἀπὸ τὰς ἰσότητας $\alpha = \beta$ καὶ $\delta + \beta = 2$ ὀρθ. ἕπεται ὅτι $\alpha + \delta = 2$ ὀρθ. Ἤτοι:

Δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.

Πόρισμα. **Πᾶσα κάθετος ἐπὶ μίαν τῶν παραλλήλων εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην.**

Ἀσκήσεις

90. Δίδεται εὐθεῖα ΑΒ, ἐκτὸς αὐτῆς σημεῖον Γ καὶ γωνία ω. Νὰ ἀχθῆ ἀπὸ τὸ Γ εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν ΑΒ μίαν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ω.

91. Νὰ γράψητε δύο παραλλήλους εὐθείας καὶ μίαν τέμνουσαν αὐτάς. Νὰ συγκρίνητε δέ: α΄) δύο ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας αὐτῶν, β΄) δύο ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίας καὶ γ΄) δύο ἐντὸς ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίας.

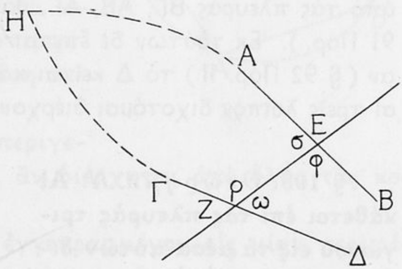
92. Νὰ γράψητε δύο παραλλήλους εὐθείας καὶ μίαν τέμνουσαν αὐτάς. Ἔπειτα νὰ διχοτομήσητε δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας αὐτῶν καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι αἱ διχοτόμοι αὐτῶν εἶναι παράλληλοι.

93. Νὰ διχοτομήσητε δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας τῶν προηγουμένων εὐθειῶν καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι αἱ διχοτόμοι εἶναι κάθετοι.

94. Νὰ διχοτομήσητε μίαν γωνίαν Α καὶ ἀπὸ ἓν σημεῖον Δ μιᾶς τῶν πλευρῶν της νὰ φέρητε παράλληλον πρὸς τὴν διχοτόμον. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἡ παράλληλος αὐτὴ θὰ τμήσῃ τὴν προέκτασιν τῆς ἄλλης πλευρᾶς εἰς ἓν σημεῖον Ε καὶ ὅτι ΑΕ = ΑΔ.

4. ΓΝΩΡΙΣΜΑΤΑ ΤΕΜΝΟΜΕΝΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

§ 106. Δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνόμεναι ὑπὸ ἄλλης ΕΖ σχηματίζουσι δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ω, φ τοιαύτας ὥστε ω + φ ⟨ 2 ὀρθ. Νὰ ἐξετασθῆ ἂν αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι παράλληλοι ἢ τέμνωνται (σχ. 72).



Σχ. 72

Ἂν αἱ εὐθεῖαι αὗται ἦσαν παράλληλοι, θὰ ἦτο ω + φ = 2 ὀρθ. (§ 105 γ΄), ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ὥστε αἱ εὐθεῖαι αὗται τέμνονται.

Γεννᾶται ἤδη τὸ ζήτημα πρὸς ποῖον μέρος τῆς ΕΖ τέμνονται.

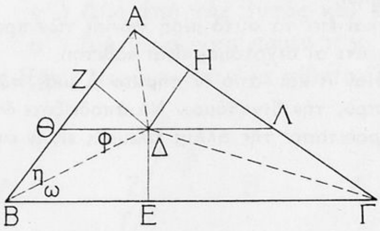
Διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὸ μέρος τοῦτο, παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι, ἐπειδὴ εἶναι ω + φ ⟨ 2 ὀρθ. θὰ εἶναι ρ + σ ⟩ 2 ὀρθ. (§ 95).

Ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἂν ἐτέμνοντο εἰς σημεῖον Η πρὸς τὸ μέρος τῶν γωνιῶν ρ καὶ σ, τὸ τρίγωνον ΗΖΕ θὰ εἶχε δύο γωνίας ρ καὶ σ μὲ ἄθροισμα μεγαλύτερον τῶν δύο ὀρθῶν. Τοῦτο δὲ εἶναι ἄτοπον (§ 87). Ἡ τομὴ λοιπὸν γίνεται πρὸς τὸ μέρος, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι αἱ γωνίαι ω καὶ φ. Ὥστε.

Ἂν ω + φ ⟨ 2 ὀρθ. αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνονται πρὸς τὸ μέρος τῆς ΕΖ, πρὸς τὸ ὁποῖον εὑρίσκονται αἱ γωνίαι αὗται.

Τὴν ἰδιότητα ταύτην χρησιμοποιοῦμεν συνήθως διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι δύο εὐθεῖαι τέμνονται, ὡς θὰ γίνῃ φανερὸν ἀπὸ τὰ ἀκόλουθα ἀξιοσημείωτα θεωρήματα.

§ **107.** *Θεώρημα I.* **Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.**

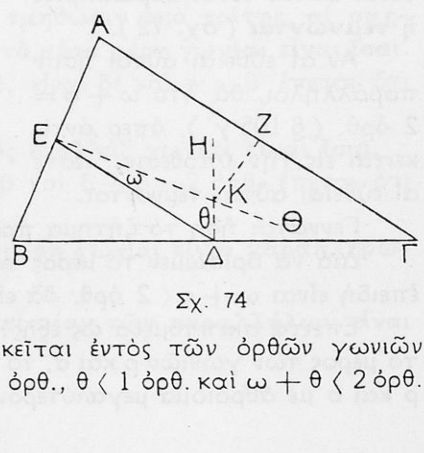


Σχ. 73

Ἀπόδειξις. Ἔστω τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 73). Ἐπειδὴ Β + Γ ⟨ 2 ὀρθ. (§ 87), κατὰ μείζονα λόγον εἶναι $\frac{B}{2} + \frac{\Gamma}{2}$ ⟨ 2 ὀρθ. Αἱ διχοτόμοι λοιπὸν τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τέμνονται εἴς τι σημεῖον Δ ἐντὸς τῆς γωνίας Α (§ 106).

Ἂν δὲ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ εἶναι αἱ ἀποστάσεις τοῦ Δ ἀντιστοίχως ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΑΒ, ΑΓ, θὰ εἶναι ΔΕ = ΔΖ καὶ ΔΕ = ΔΗ (§ 91 Πόρ.). Ἐκ τούτων δὲ ἕπεται ὅτι ΔΖ = ΔΗ καὶ κατ' ἀκολουθίαν (§ 92 Πόρ. II) τὸ Δ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς Α. Καὶ αἱ τρεῖς λοιπὸν διχοτόμοι διέρχονται διὰ τοῦ Δ, ὅ.ἔ.δ.

§ **108.** *Θεώρημα II.* **Αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τριγώνου εἰς τὰ μέσα αὐτῶν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.**



Σχ. 74

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ΔΗ καὶ ΕΘ αἱ κάθετοι εἰς τὰ μέσα δύο πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 74). Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ εὐθ. τμῆμα ΕΔ κεῖται ἐντὸς τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ΗΔΒ, ΘΕΒ. Ἐπομένως εἶναι ω ⟨ 1 ὀρθ., θ ⟨ 1 ὀρθ. καὶ ω + θ ⟨ 2 ὀρθ.

Αἱ εὐθεῖαι λοιπὸν ΔΗ καὶ ΕΘ τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Κ.

Ἐπειδὴ δὲ ΚΒ = ΚΓ καὶ ΚΒ = ΚΑ (§ 64), ἕπεται ὅτι ΚΓ = ΚΑ καὶ ἑπομένως (§ 65 Πορ. 1) τὸ σημεῖον Κ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΑΓ εἰς τὸ μέσον Ζ αὐτῆς.

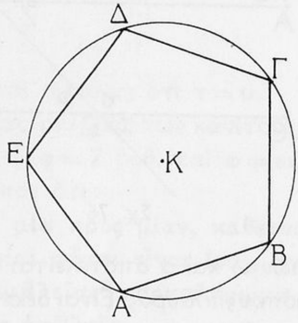
Καὶ αἱ τρεῖς λοιπὸν κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου εἰς τὰ μέσα αὐτῶν διέρχονται ἀπὸ τὸ σημεῖον Κ ὅ.ἔ.δ.

§ 109. Ποία περιφέρεια λέγεται περιγεγραμμένη περὶ εὐθύγραμμον σχῆμα.

Ἀπὸ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ προηγουμένου θεωρήματος γίνεται φανερὸν ὅτι ΚΑ = ΚΒ = ΚΓ.

Ἂν λοιπὸν γραφῇ περιφέρεια μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα ΚΑ, αὕτη θὰ διέλθῃ καὶ ἀπὸ τὰς τρεῖς κορυφὰς τοῦ τριγώνου. Λέγεται δὲ αὕτη **περιγεγραμμένη** περὶ τὸ τρίγωνον· τοῦτο δὲ λέγεται **ἐγγεγραμμένον** εἰς τὴν περιφέρειαν ταύτην.

Ὁμοίως εἰς τὴν περιφέρειαν Κ (σχ. 75) ὁρίζομεν κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, καὶ φέρομεν τὰς χορδὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ. Τὸ οὕτω σχηματιζόμενον εὐθ. σχῆμα ΑΒΓΔΕ λέγεται **ἐγγεγραμμένον** εἰς τὴν περιφέρειαν Κ. Αὕτη δὲ **περιγεγραμμένη** περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ. Ὥστε:



Σχ. 75

Μία περιφέρεια λέγεται περιγεγραμμένη περὶ ἓν εὐθ. σχῆμα, ἂν διέρχηται ἀπὸ ὅλας τὰς κορυφὰς αὐτοῦ.

Ἓν εὐθ. σχῆμα λέγεται ἐγγεγραμμένον εἰς μίαν περιφέρειαν ἂν αὕτη εἶναι περιγεγραμμένη περὶ αὐτό.

Ἄσκησις

95. Νὰ κατασκευάσητε τυχὸν τρίγωνον καὶ νὰ περιγράψητε περὶ αὐτὸ περιφέρειαν.

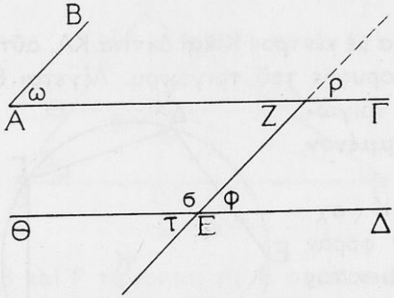
5. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

Ι. ΣΧΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΓΩΝΙΩΝ ΜΕ ΠΛΕΥΡΑΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΥΣ Ή ΚΑΘΕΤΟΥΣ

§ 110. Νὰ συγκριθῶσι δύο γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους, μίαν πρὸς μίαν.

α΄) Αἱ πλευραὶ τῶν γωνιῶν ω καὶ φ (σχ. 76) εἶναι, μία πρὸς μίαν, παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι[1].

Ἐκ τούτων ἡ ΕΖ τέμνουσα τὴν ΕΔ τέμνει καὶ τὴν παράλληλόν της ΑΓ. Ἐπειδὴ δὲ ω = ρ καὶ φ = ρ (§ 105 α΄), θὰ εἶναι καὶ ω = φ.



Σχ. 76

β΄) Αἱ προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς φ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς κορυφῆς Ε εἶναι ἀντίρροποι πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς ω. Ἐπειδὴ δὲ τ = φ, ἕπεται ὅτι καὶ ω = τ.

γ΄) Τὸ ἓν ζεῦγος τῶν παραλλήλων πλευρῶν τῶν γωνιῶν ω καὶ σ ἀποτελεῖται ἀπὸ ὁμορρόπους, τὸ δὲ ἄλλο ἀπὸ ἀντιρρόπους πλευράς. Εἶναι δὲ σ + φ = 2 ὀρθ. ἑπομένως καὶ ω + σ = 2 ὀρθ.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἂν δύο γωνίαι ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους, μίαν πρὸς μίαν, αὗται εἶναι ἴσαι μέν, ἂν αἱ παράλληλοι πλευραὶ εἶναι ὁμόρροποι ἢ ἀντίρροποι, παραπληρωματικαὶ δέ, ἂν αἱ μὲν δύο παράλληλοι πλευραὶ εἶναι ὁμόρροποι, αἱ δὲ ἄλλαι ἀντίρροποι.

§ 111. Νὰ συγκριθῶσι δύο γωνίαι, ἂν αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῆς ἄλλης.

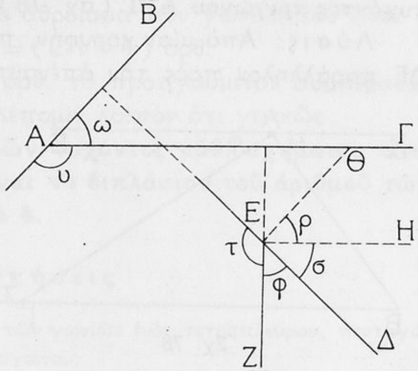
α΄) Ἔστωσαν πρῶτον αἱ ὀξεῖαι γωνίαι ω καὶ φ (σχ. 77), αἱ ὁποῖαι ἔχουσι τὴν ΕΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ καὶ τὴν ΕΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΕΘ καὶ ΕΗ παραλλήλους καὶ ὁμορ-

1. Δύο παράλληλοι πλευραὶ λέγονται ὁμόρροποι, ἂν κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας, ἥτις διέρχεται ἀπὸ τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν, ἀντίρροποι δέ, ἂν κεῖνται ἑκατέρωθεν αὐτῆς.

ρόπους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἔστω δὲ ρ ἡ γωνία αὐτῶν καὶ σ ἡ γωνία ΗΕΔ.

Ἐπειδὴ ἡ ΕΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΕΘ· ἐπομένως εἶναι $\sigma + \rho = 1$ ὀρθ. Δι' ὅμοιον λόγον εἶναι $\varphi + \sigma = 1$ ὀρθ.

Ἐκ τούτων δὲ ἕπεται ὅτι $\sigma + \rho = \varphi + \sigma$ καὶ ἐπομένως $\rho = \varphi$. Ἐπειδὴ δὲ $\rho = \omega$ (§ 110 α΄), θὰ εἶναι καὶ $\varphi = \omega$.



Σχ. 77

β΄) Ἂν προεκτείνωμεν τὰς πλευρὰς ΕΔ καὶ ΑΒ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῶν κορυφῶν των, σχηματίζονται αἱ ἀμβλεῖαι γωνίαι τ καὶ υ. Ἐπειδὴ δὲ $\varphi + \tau = 2$ ὀρθ, $\omega + \upsilon = 2$ ὀρθ., καὶ $\varphi = \omega$ ἕπεται εὐκόλως ὅτι $\tau = \upsilon$.

γ΄) Καὶ αἱ γωνίαι τ καὶ ω ἔχουσι τὰς πλευράς των καθέτους, μίαν πρὸς μίαν. Ἐκ δὲ τῶν ἰσοτήτων $\tau + \varphi = 2$ ὀρθ. καὶ $\varphi = \omega$, ἕπεται ὅτι $\tau + \omega = 2$ ὀρθ. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἂν αἱ πλευραὶ μιᾶς γωνίας εἶναι, μία πρὸς μίαν, κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς ἄλλης γωνίας, αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι, ἂν ἀμφότεραι εἶναι ὀξεῖαι ἢ ἀμφότεραι ἀμβλεῖαι· παραπληρωματικαὶ δέ, ἂν μία εἶναι ὀξεῖα καὶ ἡ ἄλλη ἀμβλεῖα.

Ἀσκήσεις

96. Νὰ κατασκευάσητε δύο ἴσας γωνίας μὲ πλευρὰς παραλλήλους καὶ νὰ διχοτομήσητε αὐτάς. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι αἱ διχοτόμοι αὐτῶν εἶναι παράλληλοι ἢ εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

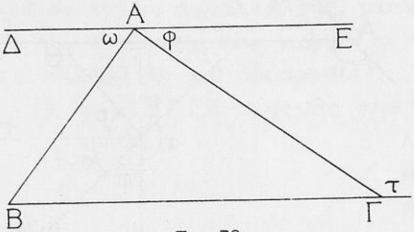
97. Νὰ κατασκευάσητε δύο παραπληρωματικὰς γωνίας μὲ παραλλήλους πλευράς. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι αἱ διχοτόμοι αὐτῶν εἶναι κάθετοι.

98. Νὰ κατασκευάσητε δύο ἴσας γωνίας μὲ καθέτους πλευρὰς καὶ νὰ διχοτομήσητε αὐτάς. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι αἱ διχοτόμοι αὐτῶν εἶναι κάθετοι.

99. Νὰ ἐργασθῆτε ὁμοίως διὰ παραπληρωματικὰς γωνίας μὲ καθέτους πλευρὰς καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι αἱ διχοτόμοι αὐτῶν εἶναι παράλληλοι, ἂν δὲν συμπίπτωσιν.

§ **112.** *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τυχόντος τριγώνου ΑΒΓ** (σχ. 78).

Λύσις: Ἀπὸ μίαν κορυφήν, π.χ. ἀπὸ τὴν Α, ἄγομεν εὐθεῖαν ΔΕ παράλληλον πρὸς τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ΒΓ. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι $\omega + A + \varphi = 2$ ὀρθ., $\omega = B$ καὶ $\varphi = \Gamma$. Ἐκ τούτων δὲ ἕπεται εὐκόλως ὅτι: $A + B + \Gamma = 2$ ὀρθ.



Σχ. 78

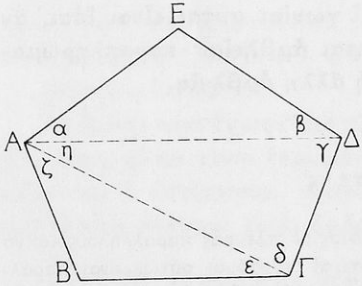
Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:
Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑκάστου τριγώνου εἶναι 2 ὀρθαὶ γωνίαι.

Πόρισμα Ι. **Αἱ ὀξεῖαι γωνίαι παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι συμπληρωματικαί.**

Πόρισμα ΙΙ. **Ἑκάστη ἐξωτερικὴ γωνία τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ.**

Παρατηροῦμεν ὅτι $A + B + \Gamma = 2$ ὀρθ. καὶ $\tau + \Gamma = 2$ ὀρθ. (σχ. 78).

Πόρισμα ΙΙΙ. **Ἂν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, καὶ αἱ ἄλλαι γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἴσαι.**



Σχ. 79

§ **113.** *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τυχόντος εὐθ. σχήματος.**

Λύσις: Ἔστω πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ (σχ. 79). Ἂν φέρωμεν τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΑΔ αὐτοῦ, διαιρεῖται τοῦτο εἰς $(5-2)$ τρίγωνα, διότι εἰς ἑκάστην τῶν πλευρῶν του, πλὴν τῶν ΑΒ καὶ ΑΕ ἀντιστοιχεῖ ἓν τρίγωνον. Τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι $2 \cdot (5-2) = (2 \cdot 5 - 4)$ ὀρθ. ἤτοι:

$$\zeta + B + \varepsilon + \delta + \gamma + \eta + \beta + E + \alpha = (2 \cdot 5 - 4) \text{ ὀρθ.} \quad (1).$$

Ἐπειδὴ δὲ $\alpha+\eta+\zeta=A$, $\varepsilon+\delta=\Gamma$, $\gamma+\beta=\Delta$, ἡ (1) γίνεται

$$A+B+\Gamma+\Delta+E=(2\cdot 5-4) \text{ ὀρθ.}$$

Ἂν τὸ εὐθ. σχῆμα ἔχῃ ν πλευράς, διαιρεῖται κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον εἰς ν-2 τρίγωνα καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του εἶναι

$$2\cdot(\nu-2)=(2\cdot\nu-4) \text{ ὀρθ.}$$

Ἐπειδὴ δὲ καὶ $2\cdot 3-4=2$ ὀρθ. τὸ προηγούμενον συμπέρασμα ἰσχύει καὶ διὰ τὰ τρίγωνα. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι γενικῶς:

Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τυχόντος εὐθ. σχήματος εἶναι τόσαι ὀρθαὶ γωνίαι, ὅσον εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν, ἠλαττωμένον κατὰ 4.

Ἀσκήσεις

100. Νὰ εὕρητε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τετραπλεύρου, πενταγώνου, ἑξαγώνου, ὀκταγώνου καὶ δεκαγώνου.

101. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον καὶ νά ὑπολογίσητε τὸ μέτρον ἑκάστης τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

102. Ἂν εἰς ἓν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $AB=A\Gamma$ καὶ $A=23^{0}, 35'$, νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς γωνίας Β καὶ τῆς Γ.

103. Ἂν ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχῃ $AB=A\Gamma$ καὶ $B=40^{0}\,20'\,35''$, νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς γωνίας Α αὐτοῦ.

104. Ἂν ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχῃ $A=\frac{3}{4}$ ὀρθ. καὶ $B=\frac{2}{5}$ ὀρθ. νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς γωνίας Γ αὐτοῦ.

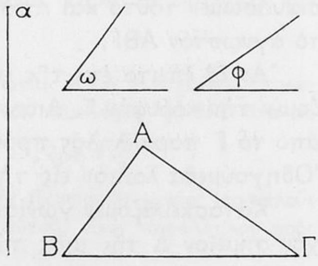
105. Νά εὕρητε τὸ μέτρον ἑκάστης γωνίας ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου εἰς μέρη ὀρθῆς καὶ εἰς μοίρας.

5. ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

§ 114. *Πρόβλημα Ι.* **Ἂν δοθῶσι δύο γωνίαι ω καὶ φ ἑνὸς τριγώνου, νὰ κατασκευασθῇ ἡ τρίτη γωνία αὐτοῦ.**

Περιορισμός. Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν, πρέπει νὰ εἶναι $\omega+\varphi<2$ ὀρθ. (§ 112).

Λύσις. Μὲ πλευρὰν τυχὸν εὐθ. τμῆμα ΒΓ καὶ κορυφὰς Β καὶ Γ κατασκευάζομεν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΓ δύο γωνίας Β καὶ Γ ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰς ω καὶ φ. Εὐκόλως δὲ ἀποδεικνύομεν ὅτι



Σχ. 80

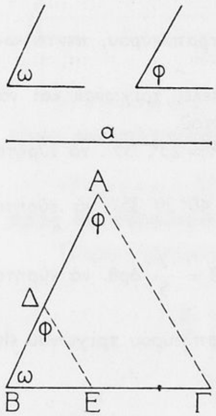
αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ αὐτῶν τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον Α καὶ ὅτι ἡ γωνία Α εἶναι ἡ ζητουμένη (σχ. 80).

§ 115. *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ μιᾶς πλευρᾶς α καὶ τῶν προσκειμένων εἰς αὐτὴν γωνιῶν ω καὶ φ.** (σχ. 80).

Περιορισμός. Πρέπει νὰ εἶναι ω + φ < 2 ὀρθ.

Ἂν ΒΓ = α, Β = ω καὶ Γ = φ. τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον. Ἡ λύσις λοιπὸν εἶναι εὐνόητος.

§ 116. *Πρόβλημα ΙΙΙ.* **Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ μιᾶς πλευρᾶς α, μιᾶς προσκειμένης εἰς αὐτὴν γωνίας ω καὶ τῆς ἀντικειμένης γωνίας φ.**



Σχ. 81

Περιορισμός. Πρέπει νὰ εἶναι ω + φ < 2 ὀρθ.

Διὰ νὰ μάθωμεν τὸν τρόπον τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἔστω ὅτι τὸ ζητούμενον τρίγωνον εἶναι τὸ ΑΒΓ (σχ. 81) καὶ ὅτι ἔχει ΒΓ = α. Β = ω καὶ Α = φ.

Ἂν δὲ φέρωμεν τὴν ΔΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ, γίνεται τὸ τρίγωνον ΔΒΕ. Τοῦτο ἔχει Β = ω, ΒΔΕ = Α = φ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ πλευρὰ ΒΔ εἶναι τυχοῦσα, ἦτο δυνατὸν νὰ κατασκευάσωμεν τοῦτο καὶ ἀπὸ τὴν ἀρχήν, χωρὶς δηλ. νὰ μεσολαβήσῃ τὸ ἄγνωστον ΑΒΓ.

Ἂν δὲ ἔπειτα ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΕ ὁρίσωμεν τμῆμα ΒΓ = α, ὁρίζομεν τὴν κορυφὴν Γ. Διὰ νὰ ὁρισθῇ δὲ ἡ κορυφὴ Α, ἀρκεῖ νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τὸ Γ παράλληλος πρὸς τὴν ΔΕ, ἕως ὅτου συναντήσῃ τὴν ΒΔ. Ὁδηγούμεθα λοιπὸν εἰς τὴν ἑξῆς λύσιν:

Κατασκευάζομεν γωνίαν Β ἴσην πρὸς τὴν ω καὶ μὲ κορυφὴν τυχὸν σημεῖον Δ τῆς μιᾶς πλευρᾶς αὐτῆς καὶ ἐντὸς τῆς Β κατασκευάζομεν γωνίαν ΒΔΕ ἴσην πρὸς τὴν φ. Ἔπειτα ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΕ ὁρίζομεν τμῆμα ΒΓ ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν α καὶ ἐκ τοῦ Γ ἄγομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΔΕ, μέχρις οὗ τμήσῃ τὴν ΒΔ εἴς τι σημεῖον Α.

Εὐκόλως δὲ ἀποδεικνύομεν ὅτι τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Σημείωσις. Ἂν κατασκευάσωμεν τὴν γ΄ γωνίαν τοῦ ζητουμένου τριγώνου, ἀνάγομεν τὸ πρόβλημα εἰς τὸ προηγούμενον.

Ἀσκήσεις

106. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ γωνία τῆς κορυφῆς ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἂν δοθῇ ἡ παρὰ τὴν βάσιν γωνία αὐτοῦ.

107 Ἂν δοθῇ ἡ γωνία τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου, νὰ κατασκευασθῇ ἡ παρὰ τὴν βάσιν γωνία αὐτοῦ.

108. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἂν δοθῇ μία κάθετος πλευρὰ καὶ μία ὀξεῖα γωνία αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Ε΄ κεφαλαίου

109. Ἀπὸ ἓν σημεῖον Β τῆς μιᾶς πλευρᾶς γωνίας Α νὰ φέρητε παράλληλον πρὸς τὴν ἄλλην πλευρὰν καὶ νὰ ὁρίσητε ἐπ᾽ αὐτῆς τμῆμα ΒΔ = ΑΒ ἐντὸς τῆς γωνίας κείμενον. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΔ διχοτομεῖ τὴν Α.

110. Ἂν τὸ τμῆμα ΒΔ, διὰ τὸ ὁποῖον ὁμιλεῖ ἡ προηγουμένη ἄσκησις, εἶναι ἐκτὸς τῆς γωνίας Α, νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἡ ΑΔ διχοτομεῖ τὴν παραπληρωματικὴν τῆς γωνίας Α, ἥτις παραπληρωματικὴ περιέχει τὴν ΑΔ.

111. Ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τριγώνων ΑΒΓ νὰ φέρητε εὐθεῖαν ΘΛ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ. Ἂν αὕτη τέμνῃ τὴν πλευρὰν ΑΒ εἰς τὸ Θ καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Λ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι ΘΛ = ΒΘ + ΓΛ (σχ. 73).

112. Νὰ διχοτομήσητε τὰς γωνίας Β καὶ Γ τυχόντος τριγώνου ΑΒΓ. Ἂν δὲ Δ εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διχοτόμων αὐτῶν, νὰ ἀποδείξητε ὅτι $\widehat{B\Delta\Gamma} = 1$ ὀρθ. $+ \frac{A}{2}$

113. Νὰ διχοτομήσητε τὰς ἐξωτερικὰς γωνίας Β καὶ Γ τυχόντος τριγώνου ΑΒΓ. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι αἱ διχοτόμοι αὐτῶν τέμνονται. Ἂν δὲ Ε εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν, νὰ ἀποδείξητε ὅτι $\widehat{BE\Gamma} = 1$ ὀρθ.$- \frac{A}{2}$.

114. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι: Ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἥτις κεῖται ἀπέναντι τῆς βάσεως αὐτοῦ, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν.

115. Ἂν ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

116. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον, ἂν δοθῇ ἡ βάσις καὶ ἡ παρ' αὐτὴν γωνίαν του.

117. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον, ἂν δοθῇ ἡ βάσις καὶ ἡ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία.

118. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον, ἂν δοθῇ τὸ ὕψος καὶ ἡ παρὰ τὴν βάσιν γωνία του.

119. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον, ἂν δοθῇ τὸ ὕψος καὶ ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνία αὐτοῦ.

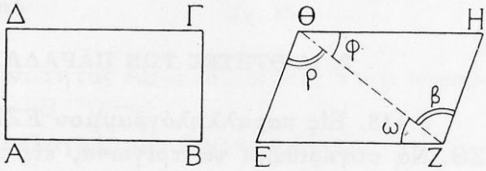
120. Νὰ κατασκευασθῇ ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἂν δοθῇ ἡ ὑποτείνουσα καὶ μία ὀξεῖα γωνία αὐτοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ΄

1. ΤΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

§ 117. Ποῖα εἶναι τὰ εἴδη τῶν τετραπλεύρων. α΄) Ἂν γράψωμεν δύο παραλλήλους εὐθείας ΑΒ, ΔΓ καὶ τμήσωμεν αὐτὰς μὲ ἄλλας δυὸ παραλλήλους εὐθείας ΑΔ, ΒΓ, σχηματίζεται ἓν τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 82).

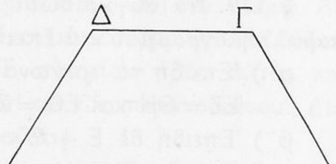
Τοῦτο ὡς ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους, λέγεται ἰδιαιτέρως **παραλληλόγραμμον.** Ὁμοίως σχηματίζομεν καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖΗΘ. Ὥστε:



Σχ. 82

Παραλληλόγραμμον λέγεται πᾶν τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους.

β΄) Ἂν δύο παραλλήλους εὐθείας ΑΒ, ΔΓ τμήσωμεν μὲ δύο ἄλλας ΑΔ καὶ ΒΓ μὴ παραλλήλους, σχηματίζεται ἓν τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 83), τὸ ὁποῖον ἔχει δύο μόνον παραλλήλους πλευράς. Τοῦτο λέγεται ἰδιαιτέρως **τραπέζιον.** Ὥστε:

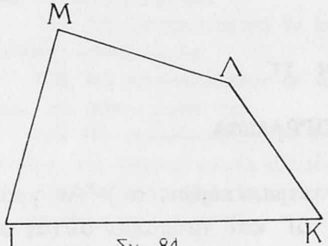


Σχ. 83

Τραπέζιον λέγεται πᾶν τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει δύο μόνον παραλλήλους πλευράς.

Ἂν δύο παραλλήλους εὐθείας ΑΒ καὶ ΔΓ τμήσωμεν διὰ πλαγίας πρὸς αὐτὰς εὐθείας ΑΔ, δυνάμεθα διὰ τοῦ διαβήτου νὰ τμήσωμεν αὐτὰς καὶ δι᾽ ἄλλης ΒΓ μὴ παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΔ καὶ τοιαύτης, ὥστε νὰ εἶναι ΑΔ = ΒΓ. Τὸ τραπέζιον τὸ ὁποῖον σχηματίζομεν τοιουτοτρόπως λέγεται ἰδιαιτέρως **ἰσοσκελὲς τραπέζιον.** Ὥστε:

Ἓν τραπέζιον λέγεται ἰσοσκελές, ἂν αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι ἴσαι.



Σχ. 84

γ΄) Ἂν δύο μὴ παραλλήλους εὐθείας ΙΚ, ΜΛ τμήσωμεν ὑπὸ δύο ἄλλων ἐπίσης μὴ παραλλήλων εὐθειῶν ΙΜ, ΚΛ, σχηματίζεται ἓν τετράπλευρον ΙΚΛΜ (σχ. 84). Τοῦτο δὲν ἔχει παραλλήλους πλευράς, λέγεται δὲ **τραπεζοειδές**. Ὥστε:

Ἓν τετράπλευρον λέγεται τραπεζοειδές, ἂν δὲν ἔχῃ παραλλήλους πλευράς.

2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

§ 118. Εἰς παραλληλόγραμμον ΕΖΗΘ ἄγεται μία διαγώνιος ΖΘ. Νὰ συγκριθῶσι τὰ τρίγωνα, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται αὐτὸ (σχ. 82).

Προφανῶς τὰ τρίγωνα ΕΖΘ, ΖΗΘ ἔχουσι τὴν ΘΖ κοινήν, $\omega = \varphi$ καὶ $\rho = \beta$. Εἶναι ἄρα ἴσα. Ὥστε:

Ἑκατέρα διαγώνιος παραλληλογράμμου διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο ἴσα τρίγωνα.

§ 119. Νὰ συγκριθῶσι πρὸς ἀλλήλας αἱ ἀπέναντι πλευραὶ παραλληλογράμμου καὶ ἔπειτα αἱ ἀπέναντι γωνίαι αὐτοῦ (σχ. 82)

α΄) Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΕΖΘ καὶ ΖΗΘ εἶναι ἴσα, ἕπεται ὅτι:
ΕΖ = ΘΗ καὶ ΕΘ = ΖΗ καὶ Ε = Η.

β΄) Ἐπειδὴ δὲ Ε + Θ = 2 ὀρθ., Ζ + Η = 2 ὀρθ., ἕπεται ὅτι:
Ε + Θ = Ζ + Η καὶ ἑπομένως Θ = Ζ

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

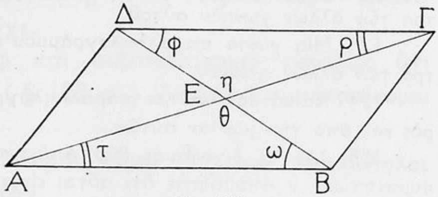
Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ἐπίσης ἴσαι.

Πόρισμα Ι. **Ἂν μία γωνία παραλληλογράμμου εἶναι ὀρθή, καὶ αἱ ἄλλαι γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ὀρθαί.**

Πόρισμα ΙΙ. **Ἂν δύο προσκείμεναι πλευραὶ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι, ὅλαι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι ἴσαι.**

Πόρισμα III. **Παράλληλα εὐθ. τμήματα, τὰ ὁποῖα περατοῦνται ἐπὶ παραλλήλων εὐθειῶν, εἶναι ἴσα.**

Πόρισμα IV. **Τὰ ἐπὶ παραλλήλων εὐθειῶν περατούμενα τμήματα καθέτων ἐπὶ ταύτας εὐθειῶν εἶναι ἴσα.**



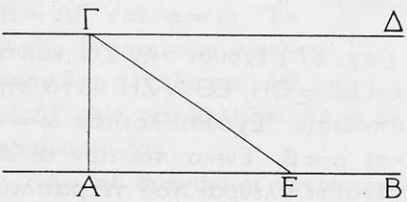
Σχ. 85

§ 120. Νὰ συγκριθῶσι τὰ τμήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ μία διαγώνιος παραλληλογράμμου διαιρεῖται ὑπὸ τῆς ἄλλης (σχ. 85).

Ἀπὸ τὰς προφανεῖς ἰσότητας ΑΒ = ΔΓ, ω = φ, τ = ρ ἐννοοῦμεν ὅτι ΑΕ = ΕΓ καὶ ΔΕ = ΕΒ. Ὥστε:

Αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου διχοτομοῦνται.

§ 121. Στοιχεῖα παραλληλογράμμων καὶ τραπεζίων. Ἐμάθομεν (§ 105 Πόρισμα) ὅτι: Ἂν εὐθεῖα ΑΓ (σχ. 86) εἶναι κάθετος ἐπὶ μίαν τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην. Γνωρίζομεν δὲ (§ 63 β΄) ὅτι τὸ τμῆμα ΑΓ εἶναι μικρότερον παντὸς ἄλλου ΓΕ πλαγίου πρὸς αὐτὰς καὶ ἐπ' αὐτῶν περατουμένου. Διὰ τοῦτο:



Σχ. 86

Τὸ ἐπὶ δύο παραλλήλων εὐθειῶν περατούμενον τμῆμα τυχούσης κοινῆς καθέτου αὐτῶν λέγεται ἀπόστασις τῶν παραλλήλων τούτων.

Βάσις παραλληλογράμμου λέγεται μία τυχοῦσα πλευρὰ αὐτοῦ.

Ὕψος παραλληλογράμμου λέγεται ἡ ἀπόστασις τῆς βάσεως ἀπὸ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν αὐτοῦ.

Βάσεις τραπεζίου λέγονται αἱ παράλληλοι πλευραὶ αὐτοῦ.

Ὕψος τραπεζίου λέγεται ἡ ἀπόστασις τῶν βάσεων αὐτοῦ.

Διάμεσος τραπεζίου λέγεται ἡ ἀπόστασις τῶν μέσων τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις

121. Μία πλευρὰ παραλληλογράμμου εἶναι 15 μέτρα, ἡ δὲ περίμετρος 70 μέτρα. Νὰ εὕρητε τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του.

122. Μία γωνία παραλληλογράμμου εἶναι $\frac{3}{5}$ ὀρθῆς. Νὰ εὕρητε τὰ μέτρα τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ.

123. Μία γωνία παραλληλογράμμου εἶναι $35^0\,20'\,40''$. Νὰ εὕρητε τὰ μέτρα τῶν ἄλλων γωνιῶν.

124. Νὰ κατασκευάσητε παραλληλόγραμμον ἀπὸ δύο προσκειμένας πλευρὰς καὶ ἀπὸ τὴν γωνίαν αὐτῶν.

125. Ἂν αἱ διχοτόμοι δύο ἀπέναντι γωνιῶν παραλληλογράμμου δὲν συμπίπτωσι, ν' ἀποδείξητε ὅτι αὗται εἶναι παράλληλοι.

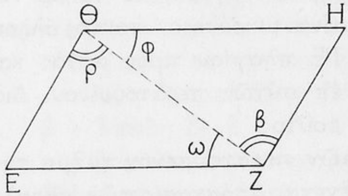
126. Νὰ διχοτομήσητε δύο γωνίας παραλληλογράμμου, αἱ ὁποῖαι πρόσκεινται εἰς μίαν πλευρὰν αὐτοῦ. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι αἱ διχοτόμοι αὐτῶν εἶναι κάθετοι.

127. Νὰ συγκρίνητε τὴν ἀπόστασιν τῶν μέσων δύο ἀπέναντι πλευρῶν παραλληλογράμμου πρὸς μίαν ἀπὸ τὰς ἄλλας πλευράς.

3. ΓΝΩΡΙΣΜΑΤΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

§ 122. Ἂν ἓν τετράπλευρον ἔχῃ τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας ἢ τὰς ἀπέναντι γωνίας ἴσας, νὰ ἐξετασθῇ ἂν εἶναι παραλληλόγραμμον ἢ ὄχι.

α') Τὰ τρίγωνα ΕΖΘ, ΘΖΗ (σχ. 87) ἔχουσι τὴν ΖΘ κοινὴν καὶ ΕΖ = ΘΗ, ΕΘ = ΖΗ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν. Ἔχουσι λοιπὸν $\omega = \varphi$ καὶ $\rho = \beta$. Ἕνεκα τούτων αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ τετραπλεύρου εἶναι παράλληλοι.



Σχ. 87

β') Ἂν Ε = Η, Θ = Ζ (σχ. 87), θὰ εἶναι καὶ Ε + Θ = Η + Ζ. Ἐπειδὴ δὲ (Ε + Θ) + (Η + Ζ) = 4 ὀρθ. ἕπεται ὅτι Ε + Θ = 2 ὀρθ. καὶ Ε + Ζ = 2 ὀρθ. Ἕνεκα τούτων αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἂν αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ἢ αἱ ἀπέναντι γωνίαι τετραπλεύρου εἶναι ἴσαι, τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον.

Πόρισμα Ι. **Ἂν αἱ πλευραὶ τετραπλεύρου εἶναι ὅλαι ἴσαι, τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον.**

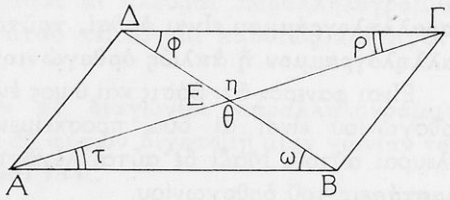
Πόρισμα ΙΙ. **Ἂν αἱ γωνίαι τετραπλεύρου εἶναι ὅλαι ὀρθαί, τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον.**

§ **123. Ἐπὶ δύο παραλλήλων εὐθειῶν ὁρίζομεν δύο ἴσα τμήματα ΕΖ, ΗΘ** (σχ. 87). **Νὰ ἐξετασθῇ ἂν τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον ἢ ὄχι.**

Παρατηροῦμεν ὅτι $\omega = \varphi$ καὶ συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι $ΕΘ = ΖΗ$. Κατὰ τὴν ἀνωτέρω (§ 122 α΄) ἰδιότητα συμπεραίνομεν ὅτι :

Ἂν δύο πλευραὶ τετραπλεύρου εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον.

§ **124. Ἂν αἱ διαγώνιοι τετραπλεύρου διχοτομοῦνται νὰ ἐξετασθῇ, ἂν τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον ἢ ὄχι** (σχ. 88).



Σχ. 88

Ἀπὸ τὴν προφανῆ ἰσότητα τῶν τριγώνων ΑΕΒ, ΔΕΓ ἕπεται ὅτι $ΑΒ = ΔΓ$ καὶ $\varphi = \omega$. Ἐκ δὲ τῆς β΄ τούτων συνάγεται ὅτι αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΔΓ εἶνα παράλληλοι. Κατὰ δὲ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα συμπεραίνομεν ὅτι :

Ἂν αἱ διαγώνιοι τετραπλεύρου διχοτομοῦνται, τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἀσκήσεις

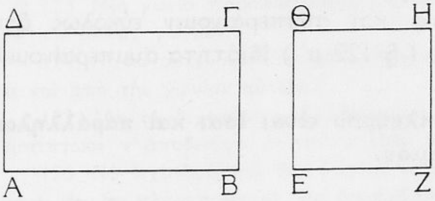
128. Δίδονται δύο εὐθ. τμήματα δ καὶ δ΄. Νὰ κατασκευάσητε παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου μία διαγώνιος νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ δ, ἡ ἄλλη πρὸς τὸ δ΄ καὶ ἡ γωνία τῶν διαγωνίων τούτων νὰ εἶναι 45^0.

129. Νὰ ὁρίσητε τὰ μέσα τῶν ἡμίσεων τῶν διαγωνίων ἑνὸς παραλληλογράμμου καὶ νὰ κατασκευάσητε τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ μέσα ταῦτα. Νὰ ἐξετάσητε δέ, ἅν τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον ἢ ὄχι.

130. Νὰ ὁρίσητε τὰ μέσα Ε, Ζ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ΑΒ, ΔΓ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Ἔπειτα νὰ γράψητε τὰ εὐθ. τμήματα ΑΖ, ΔΕ καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι ταῦτα διχοτομοῦνται.

4. ΕΙΔΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

§ 125. α΄) Ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα. Ἂν τμήσωμεν δύο παραλλήλους εὐθείας ΑΒ καὶ ΔΓ διὰ δύο καθέτων πρὸς αὐτὰς εὐθειῶν ΑΔ, ΒΓ, σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 89). Ἐπειδὴ δὲ ὅλαι αἱ γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ὀρθαί, τοῦτο λέγεται **ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ἢ ἁπλῶς ὀρθογώνιον.**



Σχ. 89

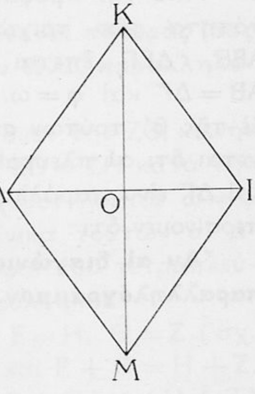
Καὶ τὸ ΕΖΗΘ εἶναι ὀρθογώνιον. Ὥστε:

Ἂν πᾶσαι αἱ γωνίαι παραλληλογράμμου εἶναι ὀρθαί, τοῦτο λέγεται ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ἢ ἁπλῶς ὀρθογώνιον (1).

Εἶναι φανερὸν ὅτι βάσις καὶ ὕψος ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι αἱ δύο προσκείμεναι πλευραὶ αὐτοῦ. Μαζὶ δὲ αὗται λέγονται **διαστάσεις** τοῦ ὀρθογωνίου.

Τοῦ ὀρθογωνίου ΕΖΗΘ ὅλαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι. Τοῦτο λέγεται ἰδιαιτέρως **τετράγωνον.** Ὥστε:

Τετράγωνον εἶναι ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι. (2)



Σχ. 90

β΄) Ρόμβος. Τὸ παραλληλόγραμμον ΙΚΛΜ (σχ. 90) ἔχει ἴσας ὅλας τὰς πλευράς του. Αἱ γωνίαι ὅμως αὐτοῦ δὲν εἶναι ὀρθαί. Τοῦτο ἰδιαιτέρως λέγεται **ρόμβος.** Ὥστε:

Ρόμβος εἶναι παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ὅλαι ἴσαι, αἱ δὲ γωνίαι δὲν εἶναι ὀρθαί.

---

1. Κατὰ τὴν § 119 Πόρ. Ι ἀρκεῖ νὰ εἶναι ἡ μία γωνία τοῦ παραλληλογράμμου ὀρθή.

2. Κατὰ τὴν § 119 Πόρ. ΙΙ ἀρκεῖ νὰ εἶναι ἴσαι αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου.

γ΄) **Ρομβοειδές.** Αἱ προσκείμεναι πλευραὶ ΑΒ, ΑΔ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ (σχ. 88) εἶναι ἄνισοι· αἱ δὲ γωνίαι αὐτοῦ δὲν εἶναι ὀρθαί. Τοῦτο ἰδιαιτέρως λέγεται **ρομβοειδές.** Καὶ τὸ ΕΖΗΘ (σχ. 87) εἶναι ρομβοειδές. Ὥστε:

Ρομβοειδὲς εἶναι παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου αἱ προσκείμεναι πλευραὶ εἶναι ἄνισοι, αἱ δὲ γωνίαι δὲν εἶναι ὀρθαί.

§ 126. Ἰδιαίτεραι ἰδιότητες τῶν ὀρθογωνίων καὶ ρόμβων. Τὰ ὀρθογώνια καὶ οἱ ρόμβοι, πλὴν τῶν γενικῶν ἰδιοτήτων τῶν παραλληλογράμμων, ἔχουσι καὶ τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας: Τούτων αἱ ἀποδείξεις γίνονται εὐκόλως ὑπὸ τῶν μαθητῶν.

Θεώρημα I. **Αἱ διαγώνιοι παντὸς ὀρθογωνίου εἶναι ἴσαι**

Ἀντιστρόφως: **Ἂν αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι, τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.**

Θεώρημα II. **Ἂν πᾶσαι αἱ πλευραὶ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι, αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ τέμνονται καθέτως καὶ διχοτομοῦσι τὰς γωνίας του.**

Ἀντιστρόφως: **Ἂν αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου τέμνωνται καθέτως ἢ μία ἐξ αὐτῶν διχοτομῇ μίαν γωνίαν του, ὅλαι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι ἴσαι.**

Πόρισμα I. **Αἱ διαγώνιοι παντὸς τετραγώνου εἶναι ἴσαι, τέμνονται καθέτως, καὶ διχοτομοῦσι τάς γωνίας του.**

Πόρισμα II. **Ἂν αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι καὶ τέμνωνται καθέτως, τοῦτο εἶναι τετράγωνον.**

Πόρισμα III. **Ἂν αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι καὶ μία ἐξ αὐτῶν διχοτομῇ μίαν γωνίαν του, τοῦτο εἶναι τετράγωνον.**

Ἀσκήσεις

131. Νὰ ὁρίσητε τὰς ὁμοιότητας, οἱ ὁποῖαι ὑπάρχουσι:
    α΄) Μεταξὺ τετραγώνου καὶ ρόμβου.
    β΄) Μεταξὺ τετραγώνου καὶ ἄλλου ὀρθογωνίου.
    γ΄) Μεταξὺ ὀρθογωνίου καὶ ρομβοειδοῦς.
    δ΄) Μεταξὺ ρόμβου καὶ ρομβοειδοῦς.
132. Νὰ ὁρίσητε τὰς διαφοράς, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουσι μεταξὺ τῶν προηγουμένων σχημάτων, ὡς ἀνὰ δύο ἀνεγράφησαν.

133. Νὰ συγκρίνητε τὰς γωνίας, τὰς ὁποίας ἑκάστη πλευρὰ ὀρθογωνίου σχηματίζει μὲ τὰς διαγωνίους αὐτοῦ.

134. Ἂν μία διαγώνιος ὀρθογωνίου σχηματίζῃ μὲ μίαν πλευρὰν γωνίαν 25° 20′ 30″, νὰ ὑπολογίσητε τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν τῶν διαγωνίων αὐτοῦ.

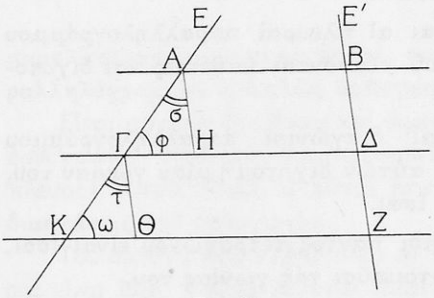
135. Νὰ γράψητε δύο διαμέτρους κύκλου καὶ τὰς χορδὰς τῶν τόξων, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ὑπ' αὐτῶν, ἡ περιφέρεια. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι τὸ ὑπ' αὐτῶν ἀποτελούμενον εὐθ. σχῆμα εἶναι ὀρθογώνιον.

136. Νὰ κατασκευάσητε τετράγωνον ἀπὸ τὴν διαγώνιον αὐτοῦ.

137. Νὰ κατασκευάσητε ρόμβον ἀπὸ τὰς διαγωνίους αὐτοῦ.

5. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

§ **127.** *Θεώρημα Ι.* **Ἂν τμήματα εὐθείας περιεχόμενα μεταξὺ παραλλήλων εὐθειῶν εἶναι ἴσα, καὶ τὰ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων περιεχόμενα τμήματα πάσης ἄλλης εὐθείας εἶναι ἴσα.**



Σχ. 91

Ἂν π.χ. ΑΓ = ΓΚ, θὰ εἶναι καὶ ΒΔ = ΔΖ (σχ. 91).

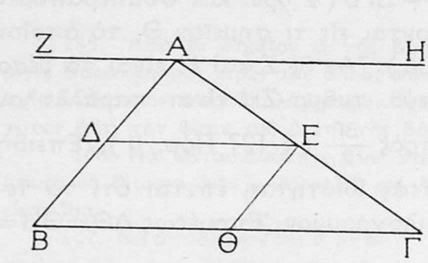
Ἀπόδειξις. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΗ, ΓΘ παραλλήλους πρὸς τὴν Ε′. Αὗται δὲ εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι καὶ ἕνεκα τούτου εἶναι σ = τ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ ΑΓ = ΓΚ καὶ φ = ω, εὐκόλως ἐννοοῦμεν ὅτι ΑΗ = ΓΘ. Ἐκ τούτων δέ καὶ τῶν ΑΗ = ΒΔ, ΓΘ = ΔΖ (§ 119 Πόρ. ΙΙΙ) ἕπεται ὅτι ΒΔ = ΔΖ, ὅ ἔ.δ.

Πόρισμα Ι. **Ἂν ἐκ τοῦ μέσου μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου ἀχθῇ παράλληλος πρὸς ἄλλην πλευρὰν αὐτοῦ, αὕτη διέρχεται καὶ ἀπὸ τὸ μέσον τῆς τρίτης πλευρᾶς αὐτοῦ.**

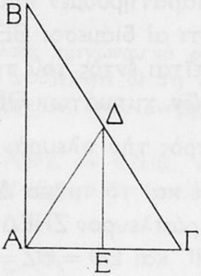
Πόρισμα ΙΙ. **Τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὰ μέσα δύο πλευρῶν τριγώνου, εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν καὶ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς** (σχ. 92).

Πόρισμα ΙΙΙ. **Ἡ διάμεσος ὀρθογωνίου τριγώνου, ἡ ὁποία**

ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης αὐτοῦ (σχ. 93).



Σχ. 92



Σχ. 93

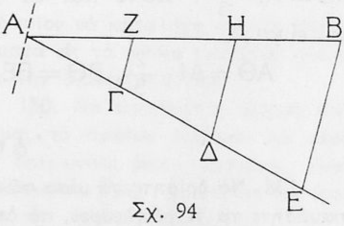
Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐκ τοῦ μέσου Δ τῆς ὑποτεινούσης ἀγομένη παράλληλος πρὸς τὴν AB τέμνει δίχα καὶ καθέτως τὴν AΓ.

§ **128.** *Πρόβλημα.* **Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν εὐθ. τμῆμα AB εἰς τρία ἴσα μέρη** (σχ. 94).

Ἔστω ὅτι AZ = ZH = HB.

Ἂν φέρωμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν AE καὶ παραλλήλους εὐθείας BE, HΔ, ZΓ, θὰ εἶναι

AΓ = ΓΔ = ΔE (§ 127).

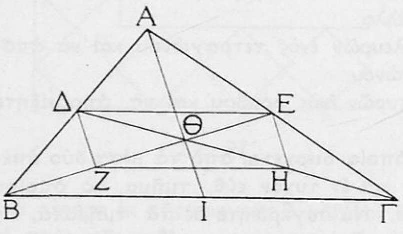


Σχ. 94

Ἀντιστρόφως:

Ἂν AΓ = ΓΔ = ΔE, θὰ εἶναι καὶ AZ = ZH = HB. Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν τὴν ἑξῆς λύσιν:

Ἄγομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν AE διάφορον τῆς AB καὶ ὁρίζομεν ἐπ' αὐτῆς ἴσα διαδοχικὰ τμήματα AΓ, ΓΔ, ΔE. Φέρομεν ἔπειτα τὴν EB καὶ τὰς παραλλήλους πρὸς αὐτὴν εὐθείας ΓZ, ΔH. Οὕτως εἶναι AZ = ZH = HB.



Σχ. 95

§ **129.** *Θεώρημα II.* **Αἱ διάμεσοι παντὸς τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ ἑκάστην κορυφὴν τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου.**

Ἔστωσαν ΑΙ, ΒΕ, ΓΔ αἱ διάμεσοι τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 95).

Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι $\widehat{ΕΒΓ} + \widehat{ΔΓΒ} < 2$ ὀρθ. καὶ συμπεραίνομεν ὅτι αἱ διάμεσοι ΒΕ καὶ ΓΔ τέμνονται εἴς τι σημεῖον Θ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τοῦ τριγώνου (§ 106). Ἂν δὲ Ζ καὶ Η εἶναι τὰ μέσα τῶν τμημάτων ΘΒ καὶ ΓΘ, τὸ εὐθ. τμῆμα ΖΗ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ καὶ ἴσον πρὸς $\frac{ΒΓ}{2}$ (§ 127 Πόρ. ΙΙ). Ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ τμῆμα ΔΕ ἔχει τὰς αὐτὰς ἰδιότητας, ἕπεται ὅτι τὸ τετράπλευρον ΖΗΕΔ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἑπομένως ΔΘ = ΘΗ = ΗΓ καὶ ΕΘ = ΘΖ = ΖΒ.

Εἶναι λοιπὸν $ΓΘ = ΓΔ \cdot \frac{2}{3}$ καὶ $ΒΘ = ΒΕ \cdot \frac{2}{3}$.

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ΓΔ ἐλήφθη κατὰ τύχην, θὰ πρέπῃ καὶ ἡ ΑΙ νὰ τέμνῃ τὴν ΒΕ εἰς ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὸ Β τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ΒΕ, τοῦτο δὲ εἶναι τὸ Θ. Ἀποδεικνύομεν δὲ ἐπίσης ὅτι καὶ $ΑΘ = ΑΙ \cdot \frac{2}{3}$. Ὥστε καὶ αἱ τρεῖς διάμεσοι διέρχονται ἀπὸ τὸ Θ καὶ εἶναι:

$$ΑΘ = ΑΙ \cdot \frac{2}{3}, \quad ΒΘ = ΒΕ \cdot \frac{2}{3} \quad \text{καὶ} \quad ΓΘ = ΓΔ \cdot \frac{2}{3}.$$

Ἀσκήσεις

138. Νὰ ὁρίσητε τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς τετραπλεύρου καὶ νὰ κατασκευάσητε τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς αὐτά. Νὰ ἐξετάσητε δὲ τί εἴδους τετράπλευρον εἶναι τοῦτο.

139. Νὰ γράψητε τὰ εὐθ. τμήματα, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἑνὸς τετραπλεύρου καὶ νὰ συγκρίνητε τὰ τμήματα, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ καθὲν διαιρεῖται ἀπὸ τὸ ἄλλο.

140. Νὰ ὁρίσητε τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς τετραγώνου καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι ταῦτα εἶναι κορυφαὶ τετραγώνου.

141. Νὰ ὁρίσητε τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς ρόμβου καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι ταῦτα εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου.

142. Νὰ γράψητε τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν ἑνὸς παραλληλογράμμου καὶ ἓν τυχὸν εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον καταλήγει εἰς τὰς ἄλλας πλευρὰς αὐτοῦ. Νὰ συγκρίνητε δὲ τὰ τμήματα, εἰς τὰ ὁποῖα τοῦτο διαιρεῖται ὑπὸ τῆς πρώτης εὐθείας.

143. Νὰ ὁρίσητε ἓν εὐθ. τμῆμα τ καὶ νὰ κατασκευάσητε ἓν τετράγωνον μὲ περίμετρον τ.

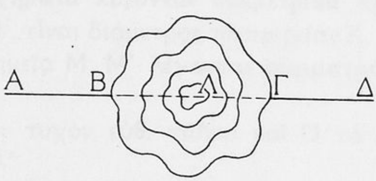
144. Νὰ κατασκευάσητε ἰσόπλευρον τρίγωνον μὲ περίμετρον δοθὲν εὐθ. τμῆμα τ.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ ΣΤ' κεφαλαίου

145. Ἀπὸ ἓν σημεῖον Δ τῆς βάσεως ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου νὰ φέρητε παραλλήλους πρὸς τὰς ἄλλας πλευρὰς αὐτοῦ. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι τὸ σχηματιζόμενον παραλληλόγραμμον ἔχει σταθερὰν περίμετρον, ἤτοι ἀνεξάρτητον ἀπὸ τὴν θέσιν τοῦ Δ ἐπὶ τῆς βάσεως.

146. Νὰ κατασκευάσητε δύο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχωσιν Α = Ε, ΑΒ = ΕΖ καὶ ΑΔ = ΕΘ. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι ταῦτα εἶναι ἴσα.

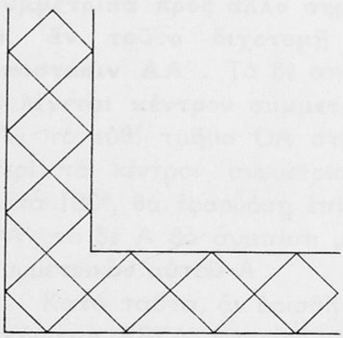
147. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἡ ἀπόστασις δύο παραλλήλων πλευρῶν ρόμβου ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῶν ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ.



Σχ. 96

148. Νὰ γράψητε τὴν διάμεσον ἑνὸς τραπεζίου καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι αὐτη εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις καὶ ἴση πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα αὐτῶν.

149. Νὰ γράψητε ἓν εὐθ. τμῆμα. τὸ ὁποῖον νὰ καταλήγῃ εἰς τὰς βάσεις ἑνὸς τραπεζίου καὶ νὰ συγκρίνητε τὰ τμήματα εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τοῦτο ἀπὸ τὴν διάμεσον αὐτοῦ.



Σχ. 97

150. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζουσι τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ἑνὸς τραπεζίου, εἶναι παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις καὶ ἴσον πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν αὐτῶν.

151. Μὲ διάμετρον τὴν ὑποτείνουσαν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου νὰ γράψητε περιφέρειαν κύκλου καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι αὐτη διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας.

152. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι: Ἂν δύο διάμεσοι τριγώνου εἶναι ἴσαι, τὸ τρίγωνον τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές.

153. Νὰ γράψητε τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ νὰ φέρητε ἐκ τῆς κορυφῆς Β κάθετον ἐπὶ τὴν διχοτόμον ταύτην. Ἂν δὲ Ε εἶναι ὁ ποὺς τῆς καθέτου ταύτης καὶ Ζ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὸ τμῆμα ΕΖ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ καὶ ἴσον πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ.

154. Δύο ἀδελφοὶ ἐκληρονόμησαν ἓν παραλληλόγραμμον οἰκόπεδον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν πλευρὰν ΑΒ παράλληλον πρὸς δημοσίαν ὁδόν, ἡ ὁποία διέρ-

χεται πρὸ αὐτοῦ. Πῶς θὰ γίνῃ δικαία διανομὴ αὐτοῦ μεταξὺ τῶν ἀδελφῶν τούτων;

155 Εἰς μίαν πεδιάδα ὑπάρχει λόφος Λ, τὸν ὁποῖον πρόκειται νὰ διασχίσῃ εὐθεῖα σιδηροδρομικὴ γραμμὴ ΑΒΓΔ. Πῶς ὁ μηχανικὸς θὰ χαράξῃ τὴν προέκτασιν ΓΔ αὐτῆς ὄπισθεν τοῦ λόφου πρὶν γίνῃ ἡ διάτρησις αὐτοῦ; (σχ. 96).

159. Νὰ ἰχνογραφήσητε τὸ σχῆμα 97, τὸ ὁποῖον μία δεσποινὶς πρόκειται νὰ κεντήσῃ εἰς ἓν τραπεζομάνδηλον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ′

ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΕΝ ΕΠΙΠΕΔΩ

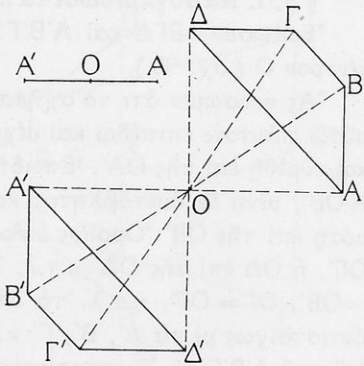
Ι. ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΠΡΟΣ ΚΕΝΤΡΟΝ

§ 130. Ποῖα σημεῖα ἢ σχήματα λέγονται συμμετρικὰ πρὸς κέντρον. Γνωρίζομεν ὅτι, ἂν ΜΜ′, εἶναι διάμετρος περιφερείας Κ, εἶναι ΚΜ = ΚΜ′. Διὰ τοῦτο τὰ σημεῖα Μ, Μ′ λέγονται **συμμετρικὰ** ἀλλήλων πρὸς τὸ κέντρον Κ.

Γενικώτερον. Ἂν ΑΑ′ εἶναι τυχὸν εὐθ. τμῆμα καὶ Ο τὸ μέσον αὐτοῦ, τὰ σημεῖα Α καὶ Α′ λέγονται συμμετρικὰ ἀλλήλων πρὸς τὸ σημεῖον Ο (σχ. 98).

Ὥστε:

Δύο σημεῖα Α, Α′ λέγονται συμμετρικὰ πρὸς ἄλλο σημεῖον Ο, ἂν τοῦτο διχοτομῇ τὴν ἀπόστασιν ΑΑ′. Τὸ δὲ σημεῖον Ο λέγεται **κέντρον συμμετρίας.** Ἂν τὸ εὐθ. τμῆμα ΟΑ στραφῇ περὶ τὸ κέντρον συμμετρίας Ο κατὰ 180°, θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ΟΑ′, τὸ δὲ Α θὰ συμπέσῃ μὲ τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ Α′.



Σχ. 98

Κατὰ ταῦτα, ἂν ὁρισθῇ ἓν κέντρον συμμετρίας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ σχήματος ΑΒΓΔ, ἕκαστον σημεῖον τοῦ σχήματος τούτου ἔχει συμμετρικὸν ἓν σημεῖον τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Π.χ. τοῦ Α συμμετρικὸν εἶναι τὸ Α′, τοῦ Β τὸ Β′ κ.τ.λ.

Τὸ σύνολον τῶν συμμετρικῶν τούτων σημείων ἀποτελεῖ σχῆμα Α′Β′Γ′Δ′. Τοῦτο λέγεται **συμμετρικὸν** τοῦ ΑΒΓΔ πρὸς κέντρον Ο.

Εἶναι δὲ εὐνόητον ὅτι καὶ τὸ ΑΒΓΔ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Α′Β′Γ′Δ′ πρὸς τὸ αὐτὸ κέντρον Ο. Διὰ τοῦτο τὰ σχήματα ΑΒΓΔ, Α΄Β΄Γ΄Δ΄ λέγονται **συμμετρικὰ ἀλλήλων** ἢ ἁπλῶς **συμμετρικὰ πρὸς κέντρον Ο.** Ὥστε:

Δύο σχήματα λέγονται συμμετρικὰ πρὸς κέντρον, ἂν ἕκαστον σημεῖον ἑκάστου εἶναι συμμετρικὸν ἑνὸς σημείου τοῦ ἄλλου πρὸς τὸ αὐτὸ κέντρον.

Τὸ συμμετρικὸν τυχόντος σημείου περιφερείας Κ πρὸς κέντρον συμμετρίας τὸ Κ εἶναι σημεῖον τῆς αὐτῆς περιφερείας. Ἐπομένως συμμετρικὸν τῆς περιφερείας πρὸς Κ εἶναι ἡ ἰδία περιφέρεια. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον τὸ Κ λέγεται **κέντρον συμμετρίας** τῆς περιφερείας. Ὥστε:

Ἓν σημεῖον λέγεται κέντρον συμμετρίας σχήματος, ἂν τὸ σχῆμα τοῦτο εἶναι συμμετρικὸν ἑαυτοῦ πρὸς τὸ σημεῖον τοῦτο.

§ 131. Νὰ συγκριθῶσι τὰ πρὸς κέντρον συμμετρικὰ σχήματα.

Ἔστωσαν ΑΒΓΔ καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄ δύο σχήματα συμμετρικὰ πρὸς κέντρον Ο (σχ. 98).

Ἂς νοήσωμεν ὅτι τὸ σχῆμα ΟΑΒΓΔ στρέφεται περὶ τὸ Ο ἐν τῷ αὐτῷ πάντοτε ἐπιπέδῳ καὶ μέχρις οὗ ἡ ΟΑ διαγράψῃ γωνίαν 180^0 καὶ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ΟΑ΄. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία ΑΟΒ ἰσοῦται πρὸς τὴν Α΄ΟΒ΄, μένει δὲ ἀμετάβλητος κατὰ τὴν στροφήν, ἡ ΟΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΟΒ΄ Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ ΟΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΟΓ΄, ἡ ΟΔ ἐπὶ τῆς ΟΔ΄ κ.τ.λ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ ΟΑ = ΟΑ΄, ΟΒ = ΟΒ΄, ΟΓ = ΟΓ΄, κ.τ.λ. τὰ σημεῖα Α,Β,Γ, κ.τ.λ. θὰ συμπέσωσιν ἀντιστοίχως μὲ τὰ Α΄, Β΄, Γ΄ κ.τ.λ. Τὸ δὲ σχῆμα ΑΒΓΔ ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ Α΄Β΄Γ΄Δ΄. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι.

Τὰ πρὸς κέντρον συμμετρικὰ ἐπίπεδα σχήματα εἶναι ἴσα.

Ἀσκήσεις

157. Νὰ σχηματίσητε τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου πρὸς κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας αὐτοῦ.

158. Νὰ σχηματίσητε τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου πρὸς κέντρον τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης αὐτοῦ.

159. Νὰ σχηματίσητε τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου πρὸς κέντρον τὴν κορυφὴν αὐτοῦ.

160. Νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον ἐκτὸς δοθείσης εὐθείας καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὸ συμμετρικὸν αὐτῆς πρὸς αὐτὸ εἶναι εὐθεῖα παράλληλος πρὸς αὐτήν.

161. Νὰ ὁρίσητε τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς παραλληλογράμου πρὸς κέντρον τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων αὐτοῦ. Ποῖον συμπέρασμα περὶ τοῦ σημείου τούτου προκύπτει ἀπὸ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου ;

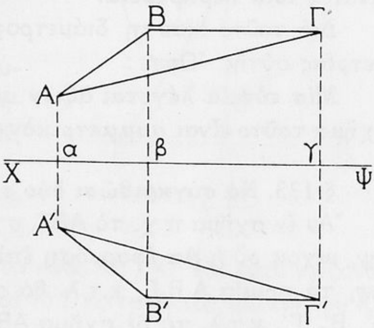
162. Νὰ προεκτείνητε ἑκάστην διάμεσον τυχόντος τριγώνου πέραν τοῦ ποδὸς αὐτῆς καὶ κατὰ τμῆμα ἴσον πρὸς τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτῆς. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι τὰ ἄκρα τῶν προεκτάσεων τούτων εἶναι κορυφαὶ τριγώνου ἴσου πρὸς τὸ πρῶτον.

2. ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΠΡΟΣ ΑΞΟΝΑ

§ 132. Ποῖα σημεῖα ἢ σχήματα λέγονται συμμετρικὰ πρὸς ἄξονα. Ἔστω ΑΑ′, ἓν εὐθ. τμῆμα καὶ χψ εὐθεῖα κάθετος ἐπ' αὐτὸ καὶ εἰς τὸ μέσον του. Τὰ ἄκρα Α καὶ Α′ αὐτοῦ λέγονται **συμμετρικὰ** ἀλλήλων ἢ ἁπλῶς **συμμετρικὰ** πρὸς τὴν εὐθεῖαν χψ (σχ. 99).

Ἡ δὲ εὐθεῖα χψ λέγεται **ἄξων συμμετρίας.**

Ὁμοίως τὰ Β, Β′ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα χψ. Ὥστε :



Σχ. 99

Δύο σημεῖα λέγονται συμμετρικὰ πρὸς εὐθεῖαν ἂν αὕτη τέμνῃ δίχα καὶ καθέτως τὴν ἀπόστασιν αὐτῶν.

Εἶναι φανερὸν δὲ ὅτι ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἄξονος εἶναι συμμετρικὸν ἑαυτοῦ.

Ὁ ἄξων χψ διαιρεῖ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ καὶ τοῦ σημείου Α εἰς δύο μέρη. Ἂς νοήσωμεν ὅτι τὸ μέρος Αχψ στρέφεται περὶ τὸν ἄξονα χψ, ἕως ὅτου πέσῃ ἐπὶ τοῦ μέρους Α′χψ. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν στροφὴν ταύτην ἡ Αα μένει διαρκῶς κάθετος ἐπὶ τὴν χψ, θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς αΑ′. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ Αα = αΑ′, τὸ Α θὰ συμπέσῃ μὲ τὸ συμμετρικόν του Α′.

Ἔστω ἤδη τυχὸν εὐθ. σχῆμα ΑΒΓ. Ἕκαστον σημεῖον αὐτοῦ ἔχει ἓν συμμετρικὸν πρὸς τὸν ἄξονα χψ. Τὸ σύνολον τῶν συμμετρικῶν τούτων σημείων ἀποτελεῖ εὐθ. σχῆμα Α΄Β΄Γ΄. Τοῦτο λέγεται **συμμετρικὸν** τοῦ ΑΒΓ πρὸς ἄξονα συμμετρίας χψ.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὸ ΑΒΓ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Α΄Β΄Γ΄ πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα χψ. Διὰ τοῦτο δὲ τὰ σχήματα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ λέγονται **συμμετρικὰ ἀλλήλων** ἢ ἁπλῶς **συμμετρικὰ πρὸς ἄξονα** χψ. Ὥστε:

Δύο σχήματα λέγονται συμμετρικὰ πρὸς ἄξονα, ἂν ἕκαστον σημεῖον ἑκάστου εἶναι συμμετρικὸν ἑνὸς σημείου τοῦ ἄλλου πρὸς τὸν ἄξονα τοῦτον.

Ἐπειδὴ ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον χορδῆς εἶναι διάμετρος, ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ συμμετρικὸν τυχόντος σημείου τῆς περιφερείας πρὸς μίαν διάμετρον αὐτῆς εἶναι σημεῖον τῆς αὐτῆς περιφερείας. Ἐκ τούτου δὲ ἕπεται ὅτι:

Συμμετρικὸν σχῆμα περιφερείας πρὸς μίαν διάμετρον αὐτῆς εἶναι ἡ ἰδία περιφέρεια.

Διὰ τοῦτο ἑκάστη διάμετρος περιφερείας λέγεται **ἄξων συμμετρίας** αὐτῆς. Ὥστε:

Μία εὐθεῖα λέγεται ἄξων συμμετρίας ἑνὸς σχήματος, ἂν τὸ σχῆμα τοῦτο εἶναι συμμετρικὸν ἑαυτοῦ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ταύτην.

§ 133. Νὰ συγκριθῶσι δύο συμμετρικὰ πρὸς ἄξονα σχήματα.

Ἂν ἓν σχῆμα π.χ. τὸ ΑΒΓ, στραφῇ περὶ τὸν ἄξονα συμμετρίας χψ, μέχρις οὗ ἡ Αα ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς αΑ΄, ὡς προηγουμένως εἴπομεν, τὰ σημεῖα Α,Β,Γ, κ.τ.λ. θὰ συμπέσωσι μὲ τὰ συμμετρικά των Α΄, Β΄, Γ΄, κ.τ.λ. τὸ δὲ σχῆμα ΑΒΓ θὰ ἐφαρμόσῃ μὲ τὸ Α΄Β΄Γ΄. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι:

Τὰ πρὸς ἄξονα συμμετρικὰ σχήματα εἶναι ἴσα.

Ἀσκήσεις

163. Νὰ γράψητε εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς δοθέντα ἄξονα καὶ νὰ ὁρίσητε τὸ συμμετρικὸν αὐτῆς πρὸς τὸν ἄξονα τοῦτον.

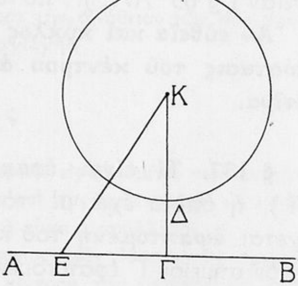
164. Νὰ γράψητε μίαν εὐθεῖαν μὴ παράλληλον πρὸς δοθέντα ἄξονα. Νὰ ὁρίσητε τὸ συμμετρικὸν αὐτῆς πρὸς τὸν ἄξονα τοῦτον καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι αἱ συμμετρικαὶ αὗται εὐθεῖαι τέμνουσιν αὐτὸν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον. Ἔπειτα δὲ νὰ συγκρίνητε τὰς γωνίας τῶν εὐθειῶν τούτων μὲ τὸν ἄξονα.

165. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὸ ὕψος ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η'

I. ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΠΡΟΣ ΚΥΚΛΟΝ

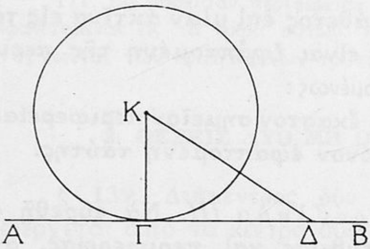
§ 134. Εἰς τὰ ἑπόμενα προβλήματα θὰ παριστῶμεν μὲ τὸ Ρ τὴν ἀκτῖνα κύκλου Κ καὶ θὰ ὀνομάζωμεν ΚΓ τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου Κ ἀπὸ ὡρισμένην εὐθεῖαν ΑΒ. Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν δὲ πόσας καὶ ποίας θέσεις δύνανται νὰ ἔχωσι πρὸς ἄλληλα τὰ σχήματα ταῦτα, θὰ λύσωμεν τὰ ἀκόλουθα προβλήματα.



Σχ. 100

§ 135. *Πρόβλημα I.* **Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν κοινῶν σημείων εὐθείας ΑΒ καὶ κύκλου Κ, ἂν ΚΓ ⟩ Ρ** (σχ. 100).

Ἐπειδὴ ΚΓ ⟩ Ρ, ὁ πούς Γ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου Κ. Ἂν δὲ Ε εἶναι τυχὸν ἄλλο σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ, θὰ εἶναι ΚΕ ⟩ ΚΓ καὶ κατὰ μείζονα λόγον θὰ εἶναι ΚΕ ⟩ Ρ. Ἑπομένως καὶ τὸ Ε κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου Κ.



Σχ. 101

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἂν ΚΓ ⟩ Ρ, ἡ εὐθεῖα καὶ ὁ κύκλος οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον.

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι:

Ἂν κύκλος καὶ εὐθεῖα οὐδὲν ἔχωσι κοινὸν σημεῖον, ὁ πούς Γ θὰ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου καὶ ἑπομένως ΚΓ ⟩ Ρ.

§ 136. *Πρόβλημα II.* **Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν κοινῶν σημείων κύκλου Κ καὶ εὐθείας ΑΒ, ἂν ΚΓ = Ρ** (σχ. 101).

Ἐπειδὴ ΚΓ = Ρ, ὁ πούς Γ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας Κ. Εἶναι λοιπὸν τοῦτο κοινὸν σημεῖον τῆς ΑΒ καὶ τοῦ κύκλου Κ. Ἂν δὲ εἶναι Δ τυχὸν ἄλλο σημεῖον τῆς ΑΒ, θὰ εἶναι ΚΔ > ΚΓ ἢ ΚΔ > Ρ. Ἑπομένως τὸ Δ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου Κ. Ὥστε:

Ἂν ΚΓ = Ρ, ἡ εὐθεῖα καὶ ὁ κύκλος ἔχουσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον.

Ἀντιστρόφως: Ἂν ἡ εὐθεῖα καὶ ὁ κύκλος ἔχωσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον Γ, τοῦτο θὰ εἶναι προφανῶς σημεῖον τῆς περιφερείας καὶ θὰ εἶναι ΚΓ = Ρ. Ἐπειδὴ πᾶν ἄλλο σημεῖον Δ τῆς εὐθείας κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου, θὰ εἶναι ΚΔ > Ρ καὶ ἐπομένως ΚΓ < ΚΔ. Ἐκ ταύτης ἕπεται ὅτι ΚΓ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (§ 63 Ἀντ.). Ὥστε:

Ἂν εὐθεῖα καὶ κύκλος ἔχωσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα.

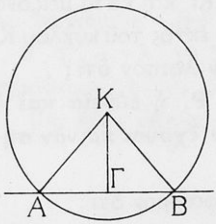
§ 137. Τί εἶναι ἐφαπτομένη κύκλου. Ἡ εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 101), ἡ ὁποία ἔχει μὲ τὸν κύκλον Κ ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, λέγεται **ἐφαπτομένη** τοῦ κύκλου ἢ τῆς περιφερείας αὐτοῦ· τὸ δὲ κοινὸν σημεῖον Γ ἐφαπτομένης καὶ περιφερείας λέγεται **σημεῖον ἐπαφῆς.**

Ἀπὸ ὅσα δὲ εἴπομεν προηγουμένως ἐννοοῦμεν εὐκόλως ὅτι:

α΄) **Ἡ ἀκτὶς ἡ ὁποία καταλήγει εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην.** Ἀντιστρόφως:

β΄) **Ἡ κάθετος ἐπὶ μίαν ἀκτῖνα εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας.** Ἑπομένως:

γ΄) **Ἀπὸ ἕκαστον σημεῖον περιφερείας ἄγεται μία μόνον ἐφαπτομένη ταύτης.**



Σχ. 102

§ 138. *Πρόβλημα ΙΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν κοινῶν σημείων εὐθείας καὶ περιφερείας, ἂν ΚΓ < Ρ** (σχ. 102).

Λύσις: Ἐπειδὴ ΚΓ < Ρ, ὁ ποὺς Γ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου. Ἡ ἀπέραντος λοιπὸν εὐθεῖα ΧΨ διερχομένη διὰ τοῦ Γ κατὰ τὴν ἔξοδόν της ἀπὸ τὸν πεπερασμένον κύκλον θὰ συναντήσῃ κατ' ἀνάγκην τὴν περιφέρειαν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη, ἤτοι εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Β· διότι περισσότερα κοινὰ σημεῖα μὲ αὐτὴν δὲν δύναται νὰ ἔχῃ (§ 63 Πόρ. ΙΙ). Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἂν ΚΓ ⟨ Ρ, ἡ εὐθεῖα καὶ ἡ περιφέρεια ἔχουσι δύο κοινὰ σημεῖα.

Ἀντιστρόφως: Ἂν εὐθεῖα χψ καὶ περιφέρεια Κ ἔχωσι δύο κοινὰ σημεῖα Α καὶ Β, τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΚΑ, ΚΒ θὰ εἶναι ἀκτῖνες καὶ ἑπομένως ἴσα. Εἶναι λοιπὸν ἀμφότεραι πλάγιαι πρὸς τὴν ΑΒ· ἡ δὲ κάθετος ΚΓ θὰ εἶναι μικροτέρα ἑκατέρας, ἤτοι ΚΓ ⟨ Ρ.

Σημείωσις. Οἱ μαθηταὶ ἃς ἀποδείξωσι τὴν ἀλήθειαν τῶν δύο τούτων συμπερασμάτων καὶ διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Ἀσκήσεις

166. Νὰ γράψητε τὴν ἐφαπτομένην περιφερείας εἰς ὡρισμένον σημεῖον αὐτῆς.

167. Νὰ γράψητε μίαν διάμετρον κύκλου καὶ τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς. Νὰ ἐξετάσητε δὲ ἂν αὗται τέμνωνται ἢ εἶναι παράλληλοι.

168. Νὰ καθορίσητε τὴν θέσιν τῆς βάσεως ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου πρὸς τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν καὶ ἀκτῖνα τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου τούτου.

169. Νὰ γράψητε δύο καθέτους ἀκτῖνας ἑνὸς κύκλου καὶ τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν. Νὰ εὕρητε δὲ τὸ μέτρον τῆς γωνίας τῶν ἐφαπτομένων τούτων.

170. Νὰ γράψητε εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν ἐφαπτομένην παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

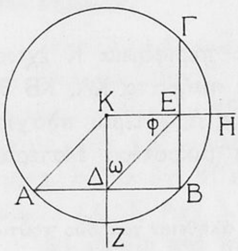
171. Εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν νὰ γράψητε δύο πλαγίας ἀκτῖνας καὶ τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν. Νὰ εὕρητε δὲ ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῆς γωνίας τῶν ἐφαπτομένων τούτων καὶ τῆς γωνίας τῶν ἀκτίνων.

2. ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΜΗ ΟΜΟΚΕΝΤΡΩΝ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΩΝ

§ 139. Διάκεντρος δύο περιφερειῶν. Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ κέντρα δύο περιφερειῶν, λέγεται **διάκεντρος** αὐτῶν.

§ 140. *Πρόβλημα.* **Πόσαι περιφέρειαι διέρχονται ἀπὸ τρία σημεῖα Α,Β,Γ, μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας** (σχ. 103).

Λύσις: Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Α,Β,Γ, δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, εἶναι κορυφαὶ τριγώνου. Ἐμάθομεν δὲ (§ 109) ὅτι περιγράφεται περὶ αὐτὸ περιφέρεια, ἤτοι διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ, διέρχεται μία περιφέρεια. Τὸ κέντρον δὲ Κ ταύτης εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ΔΖ, ΕΗ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΒΓ εἰς τὰ μέσα αὐτῶν (§ 65 Πόρ. ΙΙ).



Σχ. 103

Ἂν δὲ καὶ ἄλλη περιφέρεια Κ′ διήρχετο ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, θὰ ἦτο Κ′Α = Κ′Β καὶ Κ′Β = Κ′Γ. Ἕνεκα τούτων τὸ κέντρον Κ′ θὰ ἦτο κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ΔΖ καὶ ΕΗ, ὅπερ ἀδύνατον, διότι αὗται πλὴν τοῦ Κ οὐδὲν ἄλλο κοινὸν σημεῖον ἔχουσι. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἀπὸ τρία σημεῖα, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, διέρχεται περιφέρεια καὶ μία μόνον.

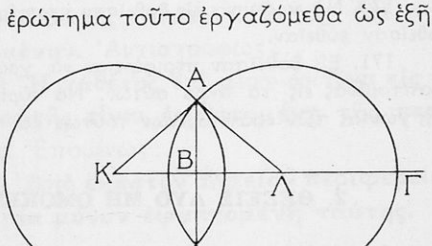
Πόρισμα. **Δύο περιφέρειαι δὲν δύνανται νὰ ἔχωσι τρία κοινὰ σημεῖα.**

Γεννᾶται δὲ τώρα τὸ ἀκόλουθον ἐρώτημα:

§ 141. Ὑπάρχουσι δύο περιφέρειαι ἔχουσαι δύο ἢ ἓν κοινὸν σημεῖον;

Διὰ νὰ ἀπαντήσωμεν εἰς τὸ ἐρώτημα τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Γράφομεν μίαν περιφέρειαν Κ καὶ ὁρίζομεν ἐπ' αὐτῆς ἓν σημεῖον Α (σχ. 104). Ἂν δὲ Λ εἶναι τυχὸν ἄλλο σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς, εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον Λ καὶ ἀκτῖνα ΛΑ, διέρχεται ἀπὸ τὸ Α. Εἶναι λοιπὸν τοῦτο κοινὸν σημεῖον τῶν περιφερειῶν Κ καὶ Λ (σχ. 104).



Σχ. 104

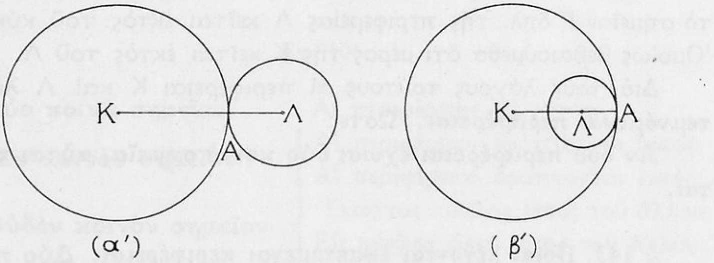
Διὰ νὰ ἴδωμεν δὲ ἂν αὗται ἔχωσιν ἢ μὴ καὶ ἄλλο κοινὸν σημεῖον διακρίνομεν τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις:

α΄) Ἂν τὸ Α κεῖται ἐκτὸς τῆς διακέντρου ΚΛ. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ Α΄ συμμετρικὸν τοῦ Α πρὸς τὴν ΚΛ εἶναι διάφορον ἀπὸ τὸ Α. Ἐπειδὴ δὲ ἡ εὐθεῖα ΚΛ εἶναι ἄξων συμμετρίας καὶ τῶν δύο περιφερειῶν Κ καὶ Λ (§ 132) τὸ Α΄ κεῖται καὶ εἰς τὰς δύο ταύτας περιφερείας. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Ἂν δύο περιφέρειαι ἔχωσι κοινὸν σημεῖον ἐκτὸς τῆς διακέντρου αὐτῶν, θὰ ἔχωσι κοινὸν καὶ τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ πρὸς τὴν διάκεντρον. Ὥστε :

Εἶναι δυνατὸν δύο περιφέρειαι νὰ ἔχωσι δύο κοινὰ σημεῖα.

β΄) Ἂν τὸ Α κεῖται ἐπὶ τῆς διακέντρου (σχ. 105). Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην συμμετρικὸν τοῦ Α πρὸς τὴν ΚΛ εἶναι πάλιν τὸ Α. Ἂν δὲ αἱ περιφέρειαι εἶχον καὶ ἄλλο κοινὸν σημεῖον Β ἐκτὸς



Σχ. 105

τῆς διακέντρου, θὰ εἶχον κοινὸν καὶ τὸ Β΄ συμμετρικὸν αὐτοῦ πρὸς τὴν ΚΛ. Θὰ εἶχον δηλ. τρία κοινὰ σημεῖα, ὅπερ ἀδύνατον (§ 140 Πόρ.). Οὔτε δὲ ἐπὶ τῆς διακέντρου ΚΛ ὑπάρχει ἄλλο κοινὸν σημεῖον. Διότι ἐκ τῶν σημείων τῆς ΚΛ μόνον τὸ Α καὶ τὸ ἐκ διαμέτρου ἀντίθετον αὐτοῦ Α΄ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας Κ. Ἂν δὲ καὶ τὸ Α΄ ἔκειτο ἐπὶ τῆς περιφερείας Λ, αἱ δύο περιφέρειαι θὰ εἶχον κοινὴν τὴν διάμετρον ΑΑ΄ καὶ θὰ ἐταυτίζοντο. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Ἂν δύο περιφέρειαι ἔχωσιν ἓν κοινὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς διακέντρου αὐτῶν, οὐδὲν ἄλλο κοινὸν σημεῖον δύνανται νὰ ἔχωσιν. Ὥστε :

Εἶναι δυνατὸν δύο περιφέρειαι νὰ ἔχωσι ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον.

Στηριζόμενοι δὲ εἰς τὰ προηγούμενα ἐννοοῦμεν εὐκόλως ὅτι:

1ον. Ἂν δύο περιφέρειαι ἔχωσι δύο κοινὰ σημεῖα, ταῦτα εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν διάκεντρον αὐτῶν, οὐδὲν δὲ τούτων κεῖται ἐπ' αὐτῆς.

2ον. Ἂν δύο περιφέρειαι ἔχωσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, τοῦτο κεῖται ἐπὶ τῆς διακέντρου αὐτῶν.

§ 142. Ποῖαι λέγονται τεμνόμεναι περιφέρειαι. Ἔστωσαν δύο περιφέρειαι Κ, Λ (σχ. 104), αἱ ὁποῖαι ἔχουσι δύο κοινὰ σημεῖα Α, Α΄. Τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΑ΄ εἶναι χορδὴ τόξων καὶ τῶν δύο περιφερειῶν. Εἶναι λοιπὸν κοινὴ χορδὴ αὐτῶν. Τοῦτο σημαίνει ὅτι μέρος ἑκάστου τῶν κύκλων τούτων εἶναι μέρος καὶ τοῦ ἄλλου.

Ἐπειδὴ δὲ $ΚΛ + ΛΑ > ΚΑ$ καὶ $ΛΑ = ΛΓ$, ἕπεται ὅτι $ΚΓ > ΚΑ$. τὸ σημεῖον Γ δηλ. τῆς περιφερείας Λ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου Κ. Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι μέρος τῆς Κ κεῖται ἐκτὸς τοῦ Λ.

Διὰ τοὺς λόγους τούτους αἱ περιφέρειαι Κ καὶ Λ λέγονται **τεμνόμεναι περιφέρειαι.** Ὥστε:

Ἂν δύο περιφέρειαι ἔχωσι δύο κοινὰ σημεῖα, αὗται τέμνονται.

§ 143. Ποῖαι λέγονται ἐφαπτόμεναι περιφέρειαι. Δύο περιφέρειαι λέγονται ἐφαπτόμεναι, ἂν ἔχωσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον. Π.χ. αἱ περιφέρειαι Κ, Λ (σχ. 105) εἶναι ἐφαπτόμεναι περιφέρειαι ἢ ἐφάπτονται ἀλλήλων.

Τὸ κοινὸν σημεῖον δύο ἐφαπτομένων περιφερειῶν λέγεται **σημεῖον ἐπαφῆς.**

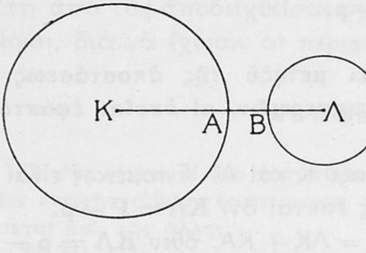
Οὕτω σημεῖον ἐπαφῆς τῶν Κ, Λ εἶναι τὸ Α (σχ. 105).

Ἂν δύο ἐφαπτόμεναι περιφέρειαι κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου ἐπαφῆς, λέγεται ὅτι **ἐφάπτονται ἐκτὸς** (σχ. 105 α΄).

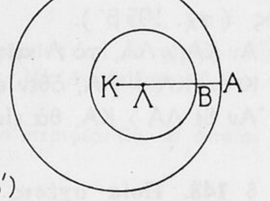
Ἂν δὲ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ σημείου ἐπαφῆς λέγεται ὅτι **ἐφάπτονται ἐντὸς** (σχ. 105 β΄).

§ 144. Ποῖαι εἶναι αἱ δυναταὶ θέσεις δύο περιφερειῶν πρὸς ἀλλήλας. Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι δύο περιφέρειαι δύνανται νὰ ἔχωσι δύο κοινὰ σημεῖα ἢ ἓν ἢ οὐδέν. Εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν εἶναι δυνατὸν μία περιφέρεια νὰ εἶναι ὅλη ἐκτὸς τοῦ ἄλλου κύκλου (σχ. 106 α′) ἢ ὅλη ἐντὸς αὐτοῦ (σχ. 106 β).

Ὥστε αἱ δυναταὶ θέσεις δύο περιφερειῶν εἶναι αἱ ἑξῆς πέντε:



(α′)



(β′)

Σχ. 106

α′)	**Δύο κοινὰ σημεῖα.**	Αἱ περιφέρειαι τέμνονται.
β′)	**Ἓν κοινὸν σημεῖον**	Αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐκτός.
γ′)		Αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐντός.
δ′)	**Οὐδὲν κοινὸν σημεῖον**	Ἕκαστος κύκλος ἐκτὸς τοῦ ἄλλου.
ε′)		Εἷς κύκλος ὅλος ἐντὸς τοῦ ἄλλου.

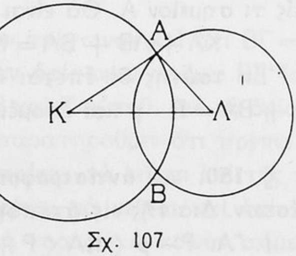
2. ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΗΣ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΣ ΤΩΝ ΚΕΝΤΡΩΝ ΠΡΟΣ ΤΑΣ ΑΚΤΙΝΑΣ ΔΥΟ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΩΝ

§ 145. Ποῖαι σχέσεις ὑπάρχουσι μεταξὺ τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων δύο τεμνομένων περιφερειῶν καὶ τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.

Ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΚΑΛ (σχ. 107) βλέπομεν ἀμέσως ὅτι:

$$ΚΑ - ΛΑ < ΚΛ < ΚΑ + ΛΑ.$$

Ἂν δὲ θέσωμεν ΚΑ = Ρ καὶ ΛΑ = ρ, αὗται γίνονται $\mathbf{Ρ - ρ < ΚΛ < Ρ + ρ}$.



Σχ. 107

§ 146. Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῆς ἀποστάσεως τῶν

κέντρων καὶ τῶν ἀκτίνων δύο περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται ἐκτὸς (σχ. 105 α').

Παρατηροῦντες ὅτι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Α κεῖται μεταξὺ Κ καὶ Λ ἐννοοῦμεν εὐκόλως ὅτι **ΚΛ = Ρ + ρ.**

§ 147. Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων καὶ τῶν ἀκτίνων δύο περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται ἐντὸς (σχ. 105 β').

Ἂν ΚΑ > ΛΑ, τὸ Λ κεῖται μεταξὺ Κ καὶ Α. Ἑπομένως εἶναι:

ΚΑ = ΚΛ + ΛΑ, ὅθεν εὐκόλως ἕπεται ὅτι **ΚΛ = Ρ — ρ.**

Ἂν δὲ ΛΑ > ΚΑ, θὰ εἶναι ΛΑ = ΛΚ + ΚΑ, ὅθεν **ΚΛ = ρ — Ρ.**

§ 148. Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων καὶ τῶν ἀκτίνων δύο κύκλων, ἂν ἕκαστος κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἄλλου.

Ἔστωσαν Α, Β τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ τμῆμα ΚΛ τέμνει ἀντιστοίχως τὰς περιφερείας Κ καὶ Λ (σχ. 106 α'). Ἐπειδὴ τὸ Β κεῖται ἐξ ὑποθέσεως ἐκτὸς τοῦ κύκλου Κ, εἶναι ΚΒ > ΚΑ καὶ ἐπομένως ΚΒ + ΒΛ > ΚΑ + ΛΒ ἢ **ΚΛ > Ρ + ρ.**

§ 149. Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων δύο κύκλων καὶ τῶν ἀκτίνων αὐτῶν, ἂν ὁ εἷς κύκλος κεῖται ἐντὸς τοῦ ἄλλου.

Ἔστω ὅτι ὁ κύκλος Λ κεῖται ὅλος ἐντὸς τοῦ Κ (σχ. 106 β'). Ἂν τὸ τμῆμα ΚΛ προεκταθῇ κατὰ τὴν φορὰν Κ πρὸς Λ, θὰ συναντήσῃ πρῶτον τὴν περιφέρειαν Λ εἴς τι σημεῖον Β καὶ ἔπειτα τὴν Κ εἴς τι σημεῖον Α. Θὰ εἶναι λοιπόν:

ΚΛ + ΛΒ + ΒΑ = ΚΑ ἢ ΚΛ + ρ + ΒΑ = Ρ.

Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι:

ΚΛ + ΒΑ = Ρ – ρ καὶ ἐπομένως **ΚΛ < Ρ — ρ.**

§ 150. Αἱ ἀντίστροφοι τῶν προηγουμένων (§ 145 — 149) **σχέσεων.** Διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς βεβαιούμεθα εὐκόλως ὅτι:

1. Ἂν Ρ – ρ < ΚΛ < Ρ + ρ, αἱ περιφέρειαι τέμνονται.
2. Ἂν ΚΛ = Ρ + ρ, αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐκτός.
3. Ἂν ΚΛ = Ρ – ρ, αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐντός.

4. Ἂν ΚΛ $>$ Ρ + ρ, ἕκαστος κύκλος κεῖται ὅλος ἐκτὸς τοῦ ἄλλου.

5. Ἂν ΚΛ $<$ Ρ − ρ, ὁ κύκλος Λ κεῖται ὅλος ἐντὸς τοῦ Κ.

Ἐκ τούτων καὶ τῶν προηγουμένων (§ 145 − 149) ἕπεται ὅτι ἑκάστη ἀπὸ τὰς ἀποδειχθείσας σχέσεις εἶναι **ἀναγκαία** καὶ **ἐπαρκὴς** συνθήκη, διὰ νὰ ἔχωσιν αἱ περιφέρειαι τὴν ἀντίστοιχον θέσιν.

Ἀσκήσεις

172. Νὰ γράψητε δύο ἐφαπτομένας περιφερείας καὶ νὰ φέρητε ἀπὸ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς εὐθεῖαν ἐφαπτομένην τῆς μιᾶς. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι αὕτη ἐφάπτεται καὶ τῆς ἄλλης.

173. Νὰ ὁρίσητε τὴν ἀμοιβαίαν θέσιν δύο περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι γράφονται μὲ κέντρα Α, Β καὶ ἀκτῖνα $\frac{AB}{2}$

174. Μὲ κέντρα Α, Β καὶ ἀκτῖνα μεγαλυτέραν τοῦ $\frac{AB}{2}$ γράφομεν δύο περιφερείας. Νὰ καθορίσητε τὴν ἀμοιβαίαν θέσιν αὐτῶν. Ἔπειτα δὲ νὰ ἐξετάσητε μήπως καὶ μὲ τὴν βοήθειαν τῶν περιφερειῶν τούτων δυνάμεθα νὰ λύσωμεν ἓν γνωστὸν πρόβλημα.

175. Νὰ γράψητε μίαν περιφέρειαν Κ καὶ νὰ ὁρίσητε ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Α. Νὰ γράψητε δὲ περιφέρειαν ἐφαπτομένην ταύτης εἰς τὸ Α καὶ νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν διάμετρον τῆς Κ.

176. Νὰ γράψητε δύο ὁμοκέντρους περιφερείας καὶ τρίτην τέμνουσαν αὐτάς. Ἔπειτα νὰ γράψητε τὰς κοινὰς χορδὰς ταύτης καὶ ἑκάστης τῶν πρώτων. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι αὗται εἶναι παράλληλοι.

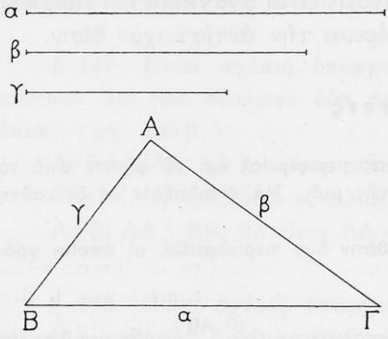
4. ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

§ 151 *Πρόβλημα.* **Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν πλευρῶν α, β, γ αὐτοῦ** (σχ. 108).

Ἔστω ὅτι ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ ὅτι ΒΓ = α, ΑΒ = γ καὶ ΑΓ = β. Ἂν εἰς μίαν εὐθεῖαν ὁρίσωμεν τμῆμα ΒΓ ἴσον πρὸς τὸ α, ὁρίζομεν τὰς δύο κορυφὰς Β καὶ Γ αὐτοῦ. Διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὴν θέσιν τῆς τρίτης κορυφῆς Α, παρατηροῦμεν ὅτι πρέπει νὰ εἶναι ΑΒ = γ. Ἑπομένως ἡ κορυφὴ Α πρέπει νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας (Β, γ). Δι' ὅμοιον λόγον πρέπει νὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας (Γ, β). Θὰ εἶναι λοιπὸν ἡ κορυφὴ Α κοινὸν σημεῖον τῶν δύο τούτων περιφερειῶν ἐκτὸς τῆς ΒΓ.

Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν τὸν ἑξῆς τρόπον λύσεως:

Γράφομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν καὶ εἰς αὐτὴν ὁρίζομεν τμῆμα ΒΓ ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν α, τὸ ὁποῖον οὐδενὸς τῶν ἄλλων εἶναι μικρότερον. Ἔπειτα γράφομεν τὰς περιφερείας (Β, γ) καὶ (Γ, β).



Σχ. 108

Ἂν αὗται τέμνωνται καὶ Α εἶναι ἓν κοινὸν σημεῖον αὐτῶν, φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΒΑ, ΓΑ. Οὕτω δὲ σχηματίζεται τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον προφανῶς εἶναι τὸ ζητούμενον.

Πᾶν ἄλλο τρίγωνον, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται μὲ τὰ δοθέντα στοιχεῖα, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΒΓ.

Ὥστε, ἂν αἱ περιφέρειαι αὗται τέμνωνται, τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν.

Διὰ νὰ τέμνωνται δὲ αἱ περιφέρειαι πρέπει νὰ εἶναι:
$\beta-\gamma < \mathrm{B\Gamma} < \beta+\gamma$ (§ 150, 1) ἂν $\beta \geqslant \gamma$ ἢ $\beta-\gamma < \alpha < \beta+\gamma$.

Ἐπειδὴ δὲ $\alpha \geqslant \beta$, ἡ ἀνισότης $|\beta-\gamma| < \alpha$ ἀληθεύει. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εἶναι $\alpha < \beta+\gamma$, διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν.

Αὐτὴ ἡ τελευταία ἐξέτασις λέγεται **διερεύνησις** τοῦ προβλήματος. Ὥστε:

Διερεύνησις ἑνὸς προβλήματος λέγεται ἡ ἐξέτασις τῶν συνθηκῶν, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ πληροῦνται, διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν. Ἐν συνεχείᾳ δὲ ἐξετάζονται καὶ οἱ ὅροι, ὑπὸ τοὺς ὁποίους δύναται ἓν πρόβλημα νὰ ἔχῃ λύσεις περισσοτέρας τῆς μιᾶς.

Ἀσκήσεις

177. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον μὲ πλευρὰς 3 ἑκατ. 4 ἑκατ. 5 ἑκατ.

178. Νὰ κατασκευάσητε ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ βάσιν 5 ἑκατ. καὶ 8 ἑκατ. ἑκάστην τῶν ἄλλων πλευρῶν.

179. Εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν ἀκτῖνος 6 ἑκατ. νὰ ἐγγράψητε ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ βάσιν 4 ἑκατ.

180. Νὰ κατασκευάσητε ὀρθογώνιον ἀπὸ μίαν πλευρὰν καὶ ἀπὸ τὴν διαγώνιον αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τῶν Ζ΄ καὶ Η΄ Κεφαλαίων

181. Νὰ γράψητε δύο ὁμοκέντρους περιφερείας καὶ δύο χορδὰς τῆς ἐξωτερικῆς, αἱ ὁποῖαι θὰ ἐφάπτωνται τῆς ἐσωτερικῆς. Ἔπειτα δὲ νὰ συγκρίνητε τὰς χορδὰς ταύτας.

182. Εἰς μίαν περιφερείαν νὰ γράψητε μίαν ἐφαπτομένην καὶ μίαν χορδὴν παράλληλον πρὸς αὐτήν. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς διχοτομεῖ τὸ ἀντίστοιχον πρὸς τὴν χορδὴν τόξον.

183. Εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν νὰ γράψητε δύο καθέτους διαμέτρους ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἔπειτα νὰ γράψητε μίαν περιφέρειαν (Γ, ΓΑ) νὰ καθορίσητε τὴν θέσιν τῶν δύο τούτων περιφερειῶν καὶ τὸν λόγον διὰ τὸν ὁποῖον ἔχουσι τὴν θέσιν ταύτην.

184. Ἐπὶ δοθείσης περιφερείας Κ νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον Ο καὶ νὰ ὁρίσητε τὸ Κ΄ συμμετρικὸν τοῦ Κ πρὸς κέντρον συμμετρίας τὸ Ο. Ἔπειτα δὲ νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὸ συμμετρικὸν τυχόντος σημείου Μ τῆς περιφερείας Κ εἶναι σημεῖον τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει κέντρον Κ΄ καὶ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Κ.

185. Εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν Κ νὰ φέρητε διαφόρους ἐφαπτομένας καὶ νὰ ὁρίσητε τὸ συμμετρικὸν τοῦ κέντρου Κ πρὸς ἑκάστην τούτων. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι ὅλα τὰ συμμετρικὰ ταῦτα κεῖνται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας.

186. Νὰ γράψητε δύο ἐφαπτομένας περιφερείας καὶ διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς νὰ γράψητε εὐθεῖαν τέμνουσαν τὰς περιφερείας ταύτας Ἔπειτα νὰ φέρητε ἐφαπτομένην ἑκάστης περιφερείας ἀπὸ τὸ ἐπ᾿ αὐτῆς ἄκρον τῆς τεμνούσης καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι αὗται εἶναι παράλληλοι.

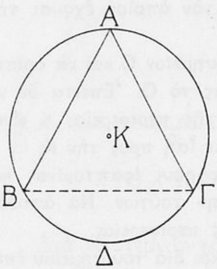
187. Νὰ καυασκευάσητε παραλληλόγραμμον ἀπὸ μίαν πλευρὰν καὶ ἀπὸ τὰς διαγωνίους του.

188. Νὰ κατασκευάσητε μίαν ἐπίκεντρον γωνίαν 45^0 καὶ νὰ φέρητε ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας εἰς τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς περιφερείας καὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας. Νὰ ὑπολογίσητε δὲ τὴν γωνίαν τῶν ἐφαπτομένων τούτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ΄

1. ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑΙ ΓΩΝΙΑΙ. ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΚΑΙ ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

§ 152. Ποῖαι λέγονται ἐγγεγραμμέναι γωνίαι. Ἀπὸ ἓν σημεῖον Α περιφερείας Κ φέρομεν δύο χορδὰς ΑΒ, ΑΓ (σχ. 109). Οὕτω σχηματίζεται ἡ γωνία Α. Αὕτη λέγεται ἐγγεγραμμένη εἰς αὐτὸν τὸν κύκλον. Ὥστε:



Σχ. 109

Μία γωνία λέγεται ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον, ἂν ἡ μὲν κορυφὴ αὐτῆς κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, αἱ δὲ πλευραὶ εἶναι χορδαὶ αὐτοῦ.

Τὸ τόξον ΒΔΓ, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας Α, λέγεται **ἀντίστοιχον** αὐτῆς τόξον. Συνήθως λέγομεν ὅτι ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία Α βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΔΓ.

Ἡ αὐτὴ γωνία Α λέγεται ἐγγεγραμμένη καὶ εἰς τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΒΑΓΒ (σχ. 109).

2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

§ 153. Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ ἐγγεγραμμένης καὶ ἐπικέντρου γωνίας, αἱ ὁποῖαι βαίνουσιν εἰς τὸ αὐτὸ τόξον.

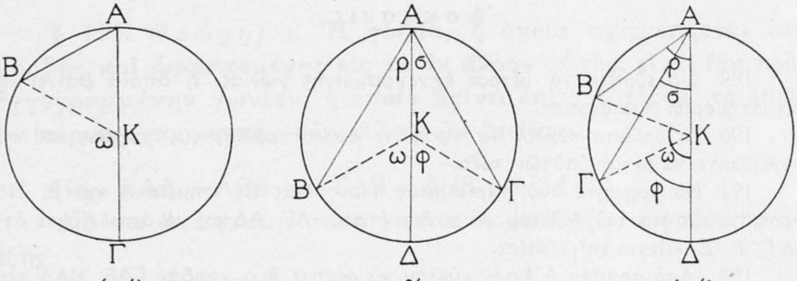
α΄) Ἂν τὸ κέντρον Κ κεῖται εἰς μίαν πλευρὰν τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας (σχ. 110 α΄), εἶναι προφανῶς $\widehat{\omega}=\widehat{A}+\widehat{B}$. Ἐπειδὴ δὲ $\widehat{A}=\widehat{B}$, ἔπεται ὅτι $\widehat{\omega}=2\widehat{A}$ καὶ $\widehat{A}=\frac{\widehat{\omega}}{2}$

β΄) Ἂν τό Κ κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας Α (σχ. 110 β΄) καὶ ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΑΚΔ, θὰ εἶναι $\widehat{\rho}=\frac{\widehat{\omega}}{2}$, $\sigma=\frac{\widehat{\varphi}}{2}$ καὶ ἑπομένως:

$$\widehat{A}=\widehat{\rho}+\widehat{\sigma}=\frac{\widehat{\omega}+\widehat{\varphi}}{2}=\frac{\widehat{BK\Gamma}}{2}.$$

γ') Ἂν τὸ Κ κεῖται ἐκτὸς τῆς $\widehat{A}$ καὶ ἀχθῇ πάλιν ἡ διάμετρος ΑΚΔ (σχ. 110 γ'), θὰ εἶναι $\widehat{\rho}=\frac{\widehat{\omega}}{2}$, $\widehat{\sigma}=\frac{\widehat{\varphi}}{2}$ καὶ ἐπομένως:

$$\widehat{B A \Gamma}=\widehat{\rho}-\widehat{\sigma}=\frac{\widehat{\omega}-\widehat{\varphi}}{2}=\frac{\widehat{B K \Gamma}}{2}.$$



(α')   (β')   (γ')

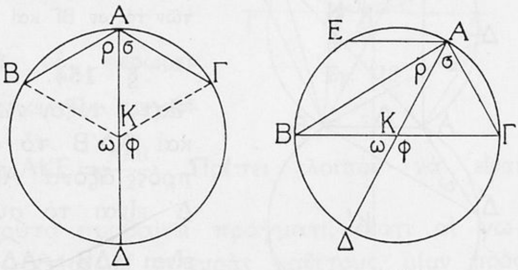
Σχ. 110

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Πᾶσα ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον γωνία εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου, ἡ ὁποία βαίνει εἰς τὸ αὐτὸ τόξον.

Πόρισμα I. **Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους ἐπὶ ἴσων τόξων βαίνουσιν ἴσαι ἐγγεγραμμέναι γωνίαι.**

Καὶ ἀντιστρόφως: **Ἴσαι ἐγεγραμμέναι γωνίαι βαίνουσιν ἐπὶ ἴσων τόξων.**



(α')   (β')

Σχ. 111

Πόρισμα II. **Ἂν μία ἐγγεγραμμένη γωνία βαίνῃ ἐπὶ ἡμιπεριφερείας εἶναι ὀρθή.**

Πόρισμα III. **Ἂν μία ἐγγεγραμμένη γωνία βαίνῃ ἐπὶ τόξου μικροτέρου ἡμιπεριφερείας, εἶναι ὀξεῖα.**

Πόρισμα IV. **Ἂν μία ἐγγεγραμμένη γωνία βαίνῃ ἐπὶ τόξου μεγαλυτέρου ἡμιπεριφερείας, εἶναι ἀμβλεῖα.**

Οὕτως ἐκ τοῦ σχήματος (111 β΄) βλέπομεν ὅτι:

$$\widehat{\text{ΒΑΓ}} = \widehat{\rho} + \widehat{\sigma} = \frac{\widehat{\omega} + \widehat{\varphi}}{2} = 1 \text{ ὀρθ.}, \quad \widehat{\sigma} < 1 \text{ ὀρθ.}, \ \widehat{\text{ΕΑΓ}} > 1 \text{ ὀρθ.}$$

Ἀσκήσεις

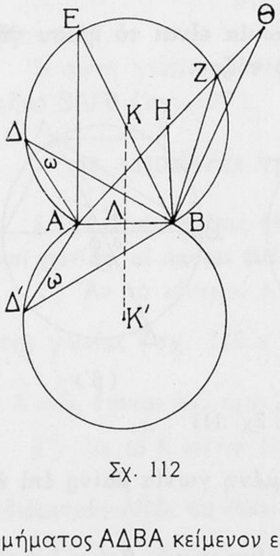
189. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον ἐγγεγραμμένης γωνίας, ἡ ὁποία βαίνει εἰς τεταρτημόριον περιφερείας.

190. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ γράψητε δύο παραλλήλους χορδὰς καὶ νὰ συγκρίνητε τὰ μεταξὺ αὐτῶν τόξα.

191. Νὰ γράψητε δύο περιφερείας τεμνομένας εἰς σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ γράψητε τὰς διὰ τοῦ Α διερχομένας διαμέτρους ΑΓ, ΑΔ καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὰ Γ, Β, Δ, κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

192. Ἀπὸ σημεῖον Α ἐντὸς κύκλου νὰ φέρητε δύο χορδὰς ΓΑΕ, ΒΑΔ καὶ νὰ ἀποδείξητε π.χ. ὅτι ἡ γωνία ΓΑΒ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο ἐγγεγραμμένων, τῶν ὁποίων ἡ μία βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΓ, ἡ δὲ ἄλλη ἐπὶ τοῦ ΔΕ.

193. Ἀπὸ ἓν σημεῖον Η, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐκτὸς κύκλου, νὰ φέρητε δύο τεμνούσας ΗΕΓ, ΗΖΒ τῆς περιφερείας. Νὰ συγκρίνητε τὴν γωνίαν αὐτῶν πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἐγγεγραμμένων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι βαίνουσιν ἐπὶ τῶν τόξων ΒΓ καὶ ΖΕ.



Σχ. 112

§ 154. Ἀξιοσημείωτος τόπος.

Ἔστω τόξον ΑΔΒ, χορδὴ αὐτοῦ ΑΒ καὶ ΑΔ΄Β τὸ συμμετρικὸν τοῦ ΑΔΒ πρὸς ἄξονα ΑΒ (σχ. 112). Ἂν δὲ Δ΄ εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Δ, θὰ εἶναι $\widehat{\text{ΑΔΒ}} = \widehat{\text{ΑΔ΄Β}} = \widehat{\omega}$ (§ 133). Καὶ ἂν Ζ εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ τόξου ΑΔΒ ἢ τοῦ ΑΔ΄Β, θὰ εἶναι ἐπίσης $\widehat{\text{ΑΖΒ}} = \widehat{\omega}$. Διὰ σημεῖον δὲ Η ἐντὸς τοῦ κυκλ. τμήματος ΑΔΒΑ κείμενον εἶναι $\widehat{\text{ΑΗΒ}} > \widehat{\text{ΑΖΒ}}$ ἢ $\widehat{\text{ΑΗΒ}} > \widehat{\omega}$. Ἂν δὲ Θ εἶναι ἐκτὸς τοῦ σχήματος ΑΔΒΔ΄Α θὰ εἶναι, $\widehat{\text{ΑΘΒ}} < \widehat{\text{ΑΖΒ}}$ ἢ $\widehat{\text{ΑΘΒ}} < \widehat{\omega}$.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι: Ἡ χορδὴ ΑΒ φαίνεται ὑπὸ γωνίαν ω ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς ΑΔΒΔ'Α καὶ μόνον ἀπὸ αὐτά. Διὰ τοῦτο ἡ γραμμὴ ΑΔΒΔ'Α λέγεται **γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἡ χορδὴ ΑΒ φαίνεται ὑπὸ γωνίαν τὴν ω.** Ἂν ἡ γωνία ω εἶναι ὀρθή, τόπος εἶναι ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον ΑΒ.

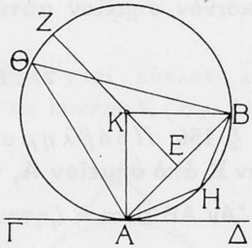
§ **155.** *Θεώρημα.* **Ἡ γωνία, ἡ ὁποία σχηματίζεται ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης εἰς τὸ ἓν ἄκρον αὐτῆς, εἶναι ἴση πρὸς ἐγγεγραμμένην γωνίαν, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν ἐκείνης.**

Π.χ. $\widehat{ΒΑΔ} = \widehat{ΑΘΒ}$ καὶ $\widehat{ΓΑΒ} = \widehat{ΑΗΒ}$ (σχ. 113).

Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν πῶς γίνεται ἡ ἀπόδειξις, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Πρῶτον παρατηροῦμεν ὅτι:

$\widehat{ΑΘΒ} = \dfrac{\widehat{ΑΚΒ}}{2}$. Ἂν δὲ εἶναι πράγματι $\widehat{ΒΑΔ} = \widehat{ΑΘΒ}$, πρέπει νὰ εἶναι καὶ $\widehat{ΒΑΔ} = \dfrac{\widehat{ΑΚΒ}}{2}$. Διὰ νὰ σχηματίσωμεν δὲ γωνίαν $\dfrac{\widehat{ΑΚΒ}}{2}$, ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν τὸ ὕψος ΚΕ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΚΒ. Οὕτως εἶναι $\widehat{ΑΚΕ} = \dfrac{\widehat{ΑΚΒ}}{2}$. Πρέπει λοιπὸν νὰ εἶναι $\widehat{ΒΑΔ} = \widehat{ΑΚΕ}$. Ἀλλὰ τοῦτο συμβαίνει πράγματι, διότι αἱ γωνίαι ΒΑΔ, ΑΚΕ εἶναι ὀξεῖαι μὲ πλευρὰς καθέτους, μίαν πρὸς μίαν.



Σχ. 113

Ἀπὸ αὐτὴν τὴν ἐργασίαν ὁδηγούμεθα εἰς τὴν ἀκόλουθον ἀπόδειξιν.

Ἀπόδειξις α') Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΚΑ, ΚΒ καὶ τὴν ΚΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἔπειτα παρατηροῦμεν ὅτι $\widehat{ΑΚΕ} = \dfrac{\widehat{ΑΚΒ}}{2}$

καὶ $\widehat{A\Theta B} = \frac{\widehat{AKB}}{2}$. Ἔπεται λοιπὸν ὅτι $\widehat{A\Theta B} = \widehat{AKE}$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ $\widehat{BA\Delta} = \widehat{AKE}$ (§ 111), ἔπεται ὅτι $\widehat{BA\Delta} = \widehat{A\Theta B}$, ὅ.ἔ.δ.

β΄) Ἡ εὐθεῖα ΕΚΖ διχοτομεῖ καὶ τὴν μὴ κυρτὴν γωνίαν ΑΚΒ, εἶναι δηλαδή:

$\widehat{AKZ} = \frac{\text{μὴ κυρ. } \widehat{AKB}}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ $\widehat{AHB} = \frac{\text{μὴ κυρ. } \widehat{AKB}}{2}$,

ἔπεται ὅτι $\widehat{AHB} = \widehat{AKZ}$. (1)

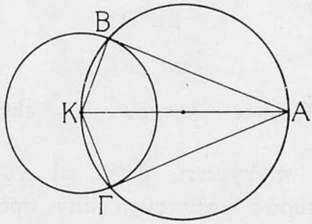
Ἀλλ' αἱ ἀμβλεῖαι γωνίαι ΑΚΖ καὶ ΓΑΒ ἔχουσι πλευρὰς καθέτους, μίαν πρὸς μίαν, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι $\widehat{AKZ} = \widehat{\Gamma AB}$. Ἀπὸ αὐτὴν δὲ καὶ ἀπὸ τὴν (1) ἔπεται ὅτι $\widehat{\Gamma AB} = \widehat{AHB}$, ὅ.ἔ.δ.

Πόρισμα. **Ἂν δύο ἐφαπτόμεναι περιφερείας τέμνωνται, τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς.**

3. ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

§ 156. *Πρόβλημα.* **Νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη εἰς δοθέντα κύκλον Κ ἀπὸ σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς αὐτοῦ** (σχ. 114).

Ἂν ΑΒ εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη, θὰ εἶναι $\widehat{ABK} = 1$ ὀρθ. Ἑπομένως τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Β κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ διάμετρον ΑΚ. Ἀπὸ τὸ συμπέρασμα τοῦτο ὁδηγούμεθα εἰς τὴν ἑξῆς λύσιν.



Σχ. 114

Ἄγομεν τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΚ καὶ γράφομεν τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον ΑΚ. Αὕτη, ὡς διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας Κ, καὶ ἀπὸ σημεῖον Α ἐκτὸς τῆς Κ τέμνει αὐτὴν εἰς δύο σημεῖα Β καὶ Γ Φέρομεν ἔπειτα τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ. Λέγω δὲ ὅτι αὗται ἐφάπτονται τῆς περιφερείας Κ.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $\widehat{ABK} = \widehat{A\Gamma K} = 1$ ὀρθ. (§ 153 Πόρ. ΙΙ) αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τὰς ἀκτῖνας ΚΒ, ΚΓ εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν. Εἶναι ἄρα ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας Κ (§ 137 β΄) Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἀπὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου, ἄγονται δύο ἐφαπτόμεναι εἰς αὐτόν.

Ἀσκήσεις

194. Εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν νὰ ἐγγράψητε τρίγωνον ΑΒΓ καὶ νὰ γράψητε τὴν ἐφαπτομένην ΖΑΗ. Νὰ συγκρίνητε δὲ τὴν γωνίαν ΖΑΒ πρὸς τὴν Γ καὶ τὴν ΗΑΓ πρὸς τὴν Β.

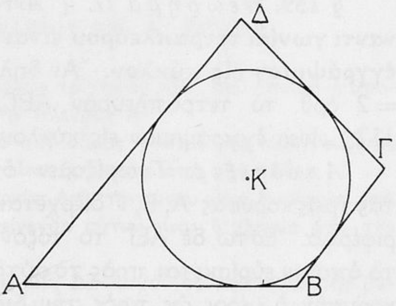
195. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΚ (σχ. 114) διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΒΑΓ τῶν ἐφαπτομένων καὶ τὴν γωνίαν ΒΚΓ.

196. Νὰ εὕρητε τὴν σχέσιν, ἡ ὁποία συνδέει τὰς γωνίας ΒΑΓ καὶ ΒΚΓ τοῦ σχήματος 114.

197. Εἰς δοθέντα κύκλον νά ἐγγράψητε τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν δοθῶσιν ἡ κορυφὴ Α καὶ αἱ γωνίαι Β καὶ Γ αὐτοῦ.

§ 157. Ποῖα λέγονται περιγεγραμμένα περὶ κύκλον εὐθ. σχήματα. Αἱ ἐφαπτόμεναι ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εἰς κύκλον Κ (σχ. 115) σχηματίζουσι τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Τοῦτο λέγεται **περιγεγραμμένον** περὶ τὸν κύκλον Κ. Ὥστε:

Ἓν εὐθύγραμμον σχῆμα λέγεται περιγεγραμμένον περὶ κύκλον, ἂν πᾶσαι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ἐφάπτωνται τοῦ κύκλου τούτου.



Σχ. 115

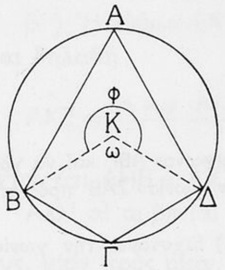
Ὁ κύκλος Κ (σχ. 115) λέγεται **ἐγγεγραμμένος** εἰς τὸ ΑΒΓΔ. Ὥστε:

Εἷς κύκλος λέγεται ἐγγεγραμμένος εἰς ἓν εὐθύγραμμον σχῆμα, ἂν τοῦτο εἶναι περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον τοῦτον.

Σημείωσις. Προηγουμένως (§ 109) ἐλάβομεν ἀφορμὴν νὰ ὁρίσωμεν τὰ εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένα εὐθύγραμμα σχήματα.

4. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΩΝ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΩΝ

§ 158. *Θεώρημα Ι.* **Αἱ ἀπέναντι γωνίαι ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον τετραπλεύρου εἶναι παραπληρωματικαί.**



Σχ. 116

Π.χ. $Α + Γ = 2$ ὀρθ. καὶ $Β + Δ = 2$ ὀρθ. (σχ. 116).

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὰς γνωστὰς ἰσότητας $Α = \frac{ω}{2}$, $Γ = \frac{φ}{2}$, ἔπεται ὅτι:

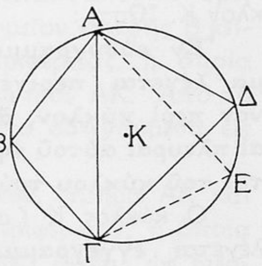
$$Α + Γ = \frac{ω + φ}{2} = \frac{4 \text{ ὀρθ.}}{2} = 2 \text{ ὀρθ.}$$

Ἐπειδὴ δὲ $(Β + Δ) + (Α + Γ) = 4$ ὀρθαί, ἔπεται ὅτι καὶ $Β + Δ = 2$ ὀρθ. ὅ.ἔ.δ.

Πόρισμα Ι. **Πᾶν παραλληλόγραμμον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον εἶναι ὀρθογώνιον.**

Πόρισμα ΙΙ. **Ἑκάστη γωνία κυρτοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπέναντι ἐξωτερικὴν γωνίαν αὐτοῦ.**

§ 159. *Θεώρημα ΙΙ. (Ἀντίστροφον τοῦ Ι).* **Ἂν δύο ἀπέναντι γωνίαι τετραπλεύρου εἶναι παραπληρωματικαί, τοῦτο εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.** Ἂν δηλ. $Β + Δ = 2$ ὀρθ. τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 117) εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.



Σχ. 117

Ἀπόδειξις. Γνωρίζομεν ὅτι ἀπὸ τὰς τρεῖς κορυφὰς Α, Β, Γ διέρχεται μία περιφέρεια. Ἔστω δὲ ΑΕΓ τὸ τόξον αὐτῆς, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται πρὸς τὸ αὐτὸ μὲ τὴν κορυφὴν Δ μέρος ὡς πρὸς τὴν διαγώνιον ΑΓ. Ἂν φέρωμεν τὰς χορδὰς ΕΑ, ΕΓ, σχηματίζεται τὸ ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον ΑΕΓΒ. Κατὰ δὲ τὸ προηγούμενον θεώρημα εἶναι $Β + Ε = 2$ ὀρθ. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς $Β + Δ = 2$ ὀρθ. ἔπεται ὅτι $Δ = Ε$. Ἐκ ταύτης ἔπεται (§ 154) ὅτι ἡ κορυφὴ Δ κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΕΓ. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον. ὅ.ἔ.δ.

Πόρισμα Ι. **Πᾶν ὀρθογώνιον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.**

Πόρισμα II. **Ἂν μία γωνία κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπέναντι ἐξωτερικὴν γωνίαν αὐτοῦ, τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.**

Ἀσκήσεις

198. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγράψητε τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ νὰ ὁρίσητε τὸ μέσον Δ τοῦ τόξου ΒΓ. Ἔπειτα νὰ φέρητε χορδὴν ΔΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι ΔΕ = ΑΒ.

199. Περὶ δοθέντα κύκλον νὰ περιγράψητε ὀρθογώνιον τρίγωνον. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ ὑπερβαίνει τὴν ὑποτείνουσαν κατὰ τὴν διάμετρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

200. Περὶ δοθέντα κύκλον νὰ περιγράψητε τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι ΑΒ+ΓΔ = ΒΓ+ΔΑ.

201. Νὰ συγκρίνητε τὰς πλευρὰς παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον.

202. Νὰ διχοτομήσητε τὰς γωνίας ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι, ἂν σχηματίζηται ὑπὸ τῶν διχοτόμων τετράπλευρον, τοῦτο εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

203. Νὰ κατασκευάσητε ἓν τρίγωνον ἀπὸ μίαν πλευράν, ἀπὸ μίαν τῶν εἰς αὐτὴν προσκειμένων γωνιῶν καὶ ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Α΄ βιβλίου

204. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ ὑποτείνουσα ΒΓ νὰ εἶναι διπλασία ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΑΓ.

205. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι μία ἀπὸ τὰς ὀξείας γωνίας τοῦ προηγουμένως κατασκευασθέντος ὀρθ. τριγώνου ΑΒΓ εἶναι διπλασία ἀπὸ τὴν ἄλλην.

206. Ἂν ἡ μία ἀπὸ τὰς ὀξείας γωνίας ὀρθ. τριγώνου εἶναι διπλασία ἀπὸ τὴν ἄλλην, νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ εἶναι διπλασία ἀπὸ τὴν μικροτέραν πλευράν του.

207. Νὰ γράψητε τὰς ἀποστάσεις ΔΕ, ΔΖ τυχόντος σημείου Δ τῆς βάσεως ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ ἀπὸ τὰς ἴσας πλευρὰς αὐτοῦ καὶ τὴν ἀπόστασιν ΒΗ τοῦ ἑνὸς ἄκρου Β τῆς βάσεως ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΑΓ. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι ΔΕ+ΔΖ = ΒΗ.

208. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ καὶ νὰ ὁρίσητε ἐντὸς αὐτοῦ τυχὸν σημεῖον Δ. Νὰ γράψητε τὰς ἀποστάσεις ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ τοῦ Δ ἀπὸ τὰς πλευρὰς καὶ τὸ ὕψος ΑΚ τοῦ τριγώνου. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι ΔΕ + ΔΖ + ΔΗ = ΑΚ.

209. Νὰ γράψητε τὴν διαγώνιον ΑΓ ἑνὸς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Νὰ ὁρίσητε τὰ μέσα Ε καὶ Ζ τῶν πλευρῶν ΓΔ καὶ ΑΒ. Νὰ φέρητε τὰς εὐθείας ΒΕ,

ΔΖ καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἡ διαγώνιος ΑΓ διαιρεῖται ὑπ' αὐτῶν εἰς τρία ἴσα μέρη.

210. Ἂν ἡ μία βάσις ΓΔ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου ΑΒΓΔ εἶναι ἴση πρὸς $ΑΔ + ΒΓ$ καὶ Ε εἶναι τὸ μέσον τῆς ΓΔ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΕ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν Α τοῦ τραπεζίου τούτου.

211. Ἂν ἡ μία βάσις ΓΔ ἑνὸς τραπεζίου ΑΒΓΔ, εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν ΒΓ καὶ ΑΔ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Α καὶ Β τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον τῆς ΓΔ.

212. Νὰ κατασκευάσητε ἓν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, εἰς τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι $ΑΒ = ΒΓ \cdot 2$. Νὰ ὁρίσητε ἔπειτα τὸ μέσον Ε τῆς ΓΔ καὶ νὰ φέρητε τὰς εὐθείας ΑΕ καὶ ΒΕ. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι ἡ γωνία ΑΕΒ εἶναι ὀρθή.

213. Νὰ γράψητε τὸ ὕψος ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ, καὶ τὴν διχοτόμον ΑΕ. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι $\widehat{ΔΑΕ} = \frac{Β - Γ}{2}$, ἂν $ΑΓ > ΑΒ$.

214. Νὰ διχοτομήσητε δύο διαδοχικὰς γωνίας Α καὶ Β ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἡ γωνία τῶν διχοτόμων ἰσοῦται πρὸς $\frac{Γ + Δ}{2}$.

215. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὰ εὐθ. τμήματα, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν καὶ ἀπὸ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον.

216. Νὰ γράψητε δύο ἐφαπτομένας περιφερείας καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς νὰ φέρητε δύο τεμνούσας τῶν περιφερειῶν τούτων. Νὰ γράψητε δὲ τὰς χορδάς, τὰς ὁποίας ὁρίζουσι τὰ ἄκρα αὐτῶν, καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι αὗται εἶναι παράλληλοι.

217. Ἀπὸ τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου κύκλου νὰ φέρητε δύο παραλλήλους χορδὰς καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι αὗται εἶναι ἴσαι καὶ ὅτι τὰ ἄλλα ἄκρα αὐτῶν κεῖνται ἐπὶ διαμέτρου τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

218. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὰ ὕψη παντὸς τριγώνου διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον. (Τὸ σημεῖον τοῦτο λέγεται ὀ ρ θ ό κ ε ν τ ρ ο ν τοῦ τριγώνου).

219. Νὰ ἐγγράψητε τρίγωνον ΑΒΓ εἰς δοθέντα κύκλον Ο. Νὰ ὁρίσητε τὸ Α συμμετρικὸν τῆς κορυφῆς Α πρὸς τὸ κέντρον Ο καὶ τὸ ὀρθόκεντρον Η τοῦ τριγώνου. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΗΑ' διχοτομεῖ τὴν πλευρὰν ΒΓ.

220. Εἰς τὸ προηγούμενον σχῆμα νὰ γράψητε καὶ τὴν ἀπόστασιν ΟΘ τοῦ κέντρου Ο ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΒΓ καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι $ΟΘ = \frac{ΑΗ}{2}$.

221. Ἀπὸ ἑκάστην κορυφὴν τριγώνου ΑΒΓ νὰ γράψητε παράλληλον πρὸς τὴν ἀπέναντι πλευράν. Οὕτω σχηματίζεται νέον τρίγωνον ΘΙΚ. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι κέντρον τῆς περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένης περιφερείας εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον Η τοῦ ΑΒΓ.

222. Ἂν Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἕκαστον τῶν σημείων Α, Β, Γ εἶναι ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ δύο ἄλλα καὶ τὸ Η.

223. Ἂν Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ καὶ Δ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $ΑΔ = ΗΔ \cdot 3$.

224. Ἂν Ο εἶναι τὸ κέντρον τῆς περὶ τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένης περιφερείας καὶ Η τὸ ὀρθόκεντρον αὐτοῦ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἡ εὐθεῖα ΟΗ διέρχεται ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων τοῦ αὐτοῦ τριγώνου.

(Ἡ εὐθεῖα ΟΗ λέγεται εὐθεῖα τοῦ Euler).

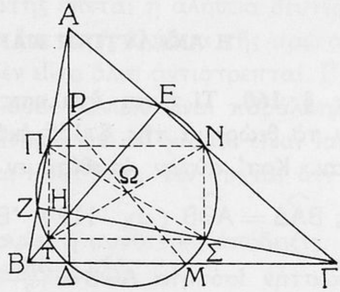
225. Νὰ ὁρίσητε τὰ μέσα Μ, Π, Ν τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ, τὸ ὀρθόκεντρον Η αὐτοῦ, τὰ μέσα Ρ, Τ, Σ τῶν τμημάτων ΑΗ, ΒΗ, ΓΗ καὶ τοὺς πόδας Δ, Ε, Ζ τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 118). Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι :

α΄) Τὸ τετράπλευρον ΠΝΣΤ εἶναι ὀρθογώνιον.

β΄) Τὰ σημεῖα Ζ καὶ Ε κεῖνται ἐπὶ τῆς περὶ τὸ ΠΝΣΤ περιγεγραμμένης περιφερείας.

γ΄) Τὸ τετράπλευρον ΡΝΜΤ εἶναι ὀρθογώνιον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον μὲ τὸ ΠΝΣΤ.

δ΄) Τὸ Δ κεῖται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.



Σχ. 118

Κατὰ ταῦτα τὰ 9 σημεῖα Δ, Ε, Ζ, Μ, Π, Ν, Ρ, Σ, Τ, κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας. Αὐτὴ λέγεται διὰ τοῦτο περιφέρεια τῶν 9 σημείων. Λέγεται δὲ καὶ περιφέρεια τοῦ Euler.

226. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὸ κέντρον τῆς περιφερείας τῶν 9 σημείων τριγώνου διχοτομεῖ τὴν ἀπόστασιν τοῦ ὀρθοκέντρου αὐτοῦ ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

227. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἡ διάμετρος τῆς περιφερείας τῶν 9 σημείων τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς περὶ τὸ τρίγωνον τοῦτο περιγεγραμμένης περιφερείας.

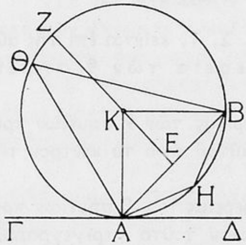
228. Ἂν Η εἶναι νὸ ὀρθόκεντρον ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΗΒΓ, ΑΗΓ, ΑΒΗ ἔχουσι τὴν αὐτὴν περιφέρειαν τῶν 9 σημείων.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'

Η ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

§ 160. Τί εἶναι ἀνάλυσις καὶ σύνθεσις. Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὸ θεώρημα τῆς § 155 ἐκάμαμεν μίαν προκαταρκτικὴν ἐργασίαν. Κατ' αὐτὴν ὑπεθέσαμεν ὅτι ἀληθεύει ἡ ἀποδεικτέα σχέσις $\widehat{ΒΑΔ} = \widehat{ΑΘΒ}$ (σχ. 119). Ἔπειτα συνεδυάσαμεν αὐτὴν μὲ τὴν γνωστὴν ἰσότητα $\widehat{ΑΘΒ} = \frac{\widehat{ΑΚΒ}}{2} = \widehat{ΑΚΕ}$ καὶ ἐπορίσθημεν τὴν ἰσότητα $\widehat{ΒΑΔ} = \widehat{ΑΚΕ}$. Παρετηρήσαμεν δὲ ὅτι αὐτὴ ὄντως ἀληθεύει. Αὐτὴ ἡ ἐργασία λέγεται **ἀνάλυσις.**



Σχ. 119

Μετὰ ταῦτα ἔχοντες ὁδηγὸν τὰ προηγούμενα ἠκολουθήσαμεν ἀντίθετον πορείαν. Ἠρχίσαμεν δηλ. ἀπὸ τὴν ἀληθῆ ἰσότητα $\widehat{ΒΑΔ} = \widehat{ΑΚΕ}$. Παρετηρήσαμεν ὅτι $\widehat{ΑΚΕ} = \frac{\widehat{ΑΚΒ}}{2}$ καὶ ἐπορίσθημεν νέαν ἀληθῆ ἰσότητα $\widehat{ΒΑΔ} = \frac{\widehat{ΑΚΒ}}{2}$.

Ἀπὸ αὐτὴν τέλος καὶ ἀπὸ τὴν ἀληθῆ ἰσότητα $\widehat{ΑΘΒ} = \frac{\widehat{ΑΚΒ}}{2}$ ἐπορίσθημεν τὴν ἀλήθειαν τῆς ἰσότητος $\widehat{ΒΑΔ} = \widehat{ΑΘΒ}$, ἥτις ἦτο ἡ ἀποδεικτέα πρότασις. Ἡ δευτέρα αὕτη ἐργασία λέγεται **σύνθεσις.**

Ἡ σύνθεσις μόνη ἀποτελεῖ πλήρη ἀπόδειξιν. Μεταχειριζόμεθα δὲ αὐτὴν μόνον, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν σειρὰν τῶν συλλογισμῶν, μὲ τοὺς ὁποίους καταλήγομεν εἰς τὴν ἀποδεικτέαν ἀλήθειαν ἢ εὐκόλως ἐννοοῦμεν τὴν σειρὰν ταύτην. Ἡ δὲ ἀνάλυσις μόνη δὲν ἀποτελεῖ πάντοτε πλήρη ἀπόδειξιν. Διότι ἐκ τοῦ ὅτι παραδεχόμενοι τὸ ἀποδεικτέον ὡς ἀληθὲς φθάνομεν εἰς ἀληθὲς συμπέρασμα δὲν ἕπεται πάντοτε ὅτι ἀληθεύει ἡ πρότασις, ἡ ὁποία ὑπετέθη ἀληθής.

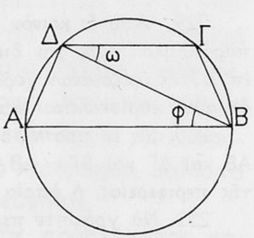
Τὸ τοιοῦτον συμπέρασμα εἶναι ἀσφαλὲς μόνον, ἂν αἱ διαδοχικαί προτάσεις τῆς ἀναλύσεως εἶναι **ἀντιστρεπταί.** Ἤτοι τοιαῦται ὥστε, ἂν ἐκ τῆς ἀληθείας μιᾶς πρώτης ἕπεται ἡ ἀλήθεια δευτέρας καὶ ἐκ τῆς ἀληθείας τῆς δευτέρας νὰ ἕπεται ἡ ἀλήθεια τῆς πρώτης. Τῆς Γεωμετρίας ὅμως αἱ προτάσεις δὲν εἶναι ὅλαι ἀντιστρεπταί. Π.χ. Ἂν παραδεχθῶμεν ὅτι αἱ πλευραὶ δύο γωνιῶν εἶναι παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι, ἀσφαλῶς συμπεραίνομεν ὅτι αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι. Ἂν ὅμως δεχθῶμεν ὅτι δύο γωνίαι εἶναι ἴσαι, δέν ἕπεται ὅτι αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἶναι παράλληλοι.

Διὰ τοῦτο τὴν ἀνάλυσιν ἀκολουθεῖ ἡ συνθετικὴ ἀπόδειξις.

Ἰδοὺ δὲ δύο ἀκόμη ἁπλᾶ παραδείγματα:

§ 161. *Θεώρημα Ι.* **Πᾶν τραπέζιον ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον εἶναι ἰσοσκελὲς** (σχ. 120).

Ἀνάλυσις. Ἂν τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοσκελές, ἤτοι, ἂν ΑΔ = ΒΓ, θὰ εἶναι καὶ τόξον ΑΔ = μὲ τόξ. ΒΓ. Ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι καὶ φ = ω, ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι. Τοῦτο δὲ εἶναι ἀληθές.

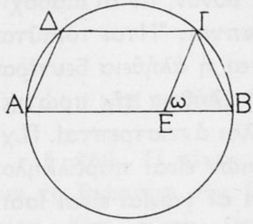


Σχ. 120

Σύνθεσις. Ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι, εἶναι φ = ω. Ἕνεκα ταύτης δὲ εἶναι $\overparen{ΑΔ} = \overparen{ΒΓ}$ καὶ ἐξ αὐτῆς ἕπεται ὅτι αἱ χορδαὶ ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι ἴσαι. Ἑπομένως τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοσκελές.

§ 162. *Θεώρημα ΙΙ.* **Πᾶν ἰσοσκελὲς τραπέζιον, εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.**

Ἀνάλυσις. Ἂν τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ (σχ. 121) εἶναι ἐγγράψιμον, θὰ εἶναι Β + Δ = 2 ὀρθ. (§ 158). Ἂν δὲ φέρωμεν τὴν ΓΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΔ, θὰ εἶναι ΕΓ = ΑΔ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $ΒΓ = ΑΔ$, ἕπεται ὅτι $ΓΕ = ΒΓ$ καὶ ἑπομένως $Β = ω$. Ἡ ἰσότης λοιπὸν $Β + Δ = 2$ ὀρθ. γίνεται $ω + Δ = 2$ ὀρθ. Ἐπειδὴ δὲ καὶ $ω = Α$, αὕτη γίνεται $Α + Δ = 2$ ὀρθ. Ἐξ αὐτῆς δὲ ἕπεται ὅτι αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΓΔ πρέπει νὰ εἶναι παράλληλοι. Τοῦτο δὲ εἶναι ἀληθές.



Σχ. 121

Σύνθεσις. Ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι, ἕπεται ὅτι $Α + Δ = 2$ ὀρθ. Ἂν δὲ φέρωμεν τὴν ΓΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΔ, θὰ εἶναι $Α = ω$ καὶ $ΑΔ = ΓΕ$. Ἐκ δὲ τῆς $Α = ω$ καὶ τῆς $Α + Δ = 2$ ὀρθ. ἕπεται ὅτι $ω + Δ = 2$ ὀρθ. Ἐκ δὲ τῆς $ΑΔ = ΓΕ$ καὶ τῆς $ΑΔ = ΒΓ$, ἕπεται ὅτι $ΒΓ = ΓΕ$ καὶ ἑπομένως $ω = Β$. Ἡ προηγουμένη λοιπὸν ἰσότης $ω + Δ = 2$ ὀρθ. γίνεται $Β + Δ = 2$ ὀρθ. Κατ' ἀκολουθίαν τὸ ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον (§ 159).

Ἀσκήσεις

229. Ἀπὸ ἓν κοινὸν σημεῖον δύο τεμνομένων περιφερειῶν φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν διάκεντρον αὐτῶν. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπ' αὐτῆς ὁριζομένων χορδῶν εἶναι διπλάσιον ἀπὸ τὴν ἀπόστασιν τῶν κέντρων, ἂν αὐτὰ εὑρίσκωνται ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς χορδῆς.

230. Εἰς ἓν τραπέζιον ΑΒΓΔ ἡ πλευρὰ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς βάσεις ΑΒ καὶ ΔΓ καὶ $ΒΓ = ΑΒ + ΔΓ$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΔ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον ΒΓ.

231. Νὰ γράψητε περιφέρειαν Κ καὶ νὰ ὁρίσητε ἐκτὸς τοῦ κύκλου σημεῖον Α. Νὰ φέρητε ἔπειτα τὴν εὐθεῖαν ΑΚ, ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα Β καὶ Γ. Ἂν τὸ Β εἶναι μεταξὺ Α καὶ Κ καὶ Δ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας, νὰ ἀποδείξητε ὅτι $ΑΒ < ΑΔ$ καὶ $ΑΓ > ΑΔ$.

232. Ἀπὸ ἕκαστον κοινὸν σημεῖον δύο τεμνομένων περιφερειῶν νὰ φέρητε κοινὴν τέμνουσαν αὐτῶν καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι αἱ χορδαί, τὰς ὁποίας ὁρίζουσι τὰ ἄκρα αὐτῶν εἶναι παράλληλοι.

233. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὰ ὕψη ὀξυγωνίου τριγώνου διχοτομοῦσι τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν.

(Τὸ δεύτερον τοῦτο τρίγωνον λέγεται ὀρθικὸν τοῦ πρώτου).

234. Εἰς δοθέντα κύκλον Κ νὰ ἐγγράψητε τρίγωνον ΑΒΓ καὶ νὰ φέρητε τὰ ὕψη ΑΔ καὶ ΒΕ αὐτοῦ. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι ἡ ἀκτὶς ΚΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ.

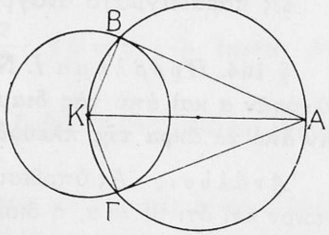
235. Ἀπὸ ἓν σημεῖον τῆς περὶ τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένης περιφερείας

νὰ φέρητε καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου τούτου. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι οἱ πόδες τῶν καθέτων τούτων κεῖνται ἐπ' εὐθείας (Εὐθεῖα τοῦ Simson).

236. Νὰ φέρητε τὰ ὕψη ΒΕ καὶ ΓΖ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ. Νὰ ὁρίσητε τὸ μέσον Μ τῆς πλευρᾶς ΒΓ καὶ τὸ μέσον Ρ τοῦ τμήματος ΑΗ (Η τὸ ὀρθόκεντρον). Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΜΡ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΕ.

§ 163. Χρῆσις τῆς ἀναλύσεως εἰς τὴν λύσιν προβλημάτων.

Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν πῶς νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τῆς § 156 ἐκάμαμεν τὴν ἑξῆς προκαταρκτικὴν ἐργασίαν. Ὑπεθέσαμεν ὅτι γνωρίζομεν τὴν ζητουμένην εὐθεῖαν καὶ ὅτι αὕτη ἦτο ἡ ΑΒ (σχ. 122). Παρετηρήσαμεν δὲ τότε ὅτι ἡ γωνία ΑΒΚ θὰ ἦτο ὀρθὴ καὶ τὸ σημεῖον Β ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον ΑΚ. Κατελήξαμεν δηλ. οὕτως εἰς ἓν σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἠδυνάμεθα καὶ ἀπὸ τὴν ἀρχὴν νὰ κατασκευάσωμεν. Ἡ πρώτη αὐτὴ ἐργασία λέγεται **ἀνάλυσις.**



Σχ. 122

Μετὰ ταῦτα, κατεσκευάσαμεν τὴν περιφέρειαν, εἰς τὴν ὁποίαν ὡδηγήθημεν ἀπὸ τὴν ἀνάλυσιν, ὡρίσαμεν οὕτω τὸ σημεῖον Β καὶ ἐφέραμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Ἡ δευτέρα αὐτὴ ἐργασία λέγεται **σύνθεσις.**

Τέλος δὲ ἀπεδείξαμεν ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι πράγματι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

Μὲ ὅμοιον τρόπον εἰργάσθημεν καὶ διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς § 128 καὶ τῆς § 151. Εἰς τὸ πρόβλημα μάλιστα τῆς § 151 τὴν ἀπόδειξιν ἠκολούθησε καὶ διερεύνησις.

Ἐν γένει ὁσάκις ἀγνοοῦμεν τὴν λύσιν ἑνὸς προβλήματος, κάμνομεν χρῆσιν τῆς **ἀναλύσεως,** ἡ ὁποία συνίσταται εἰς τὸ ἑξῆς:

Ὑποθέτομεν ὅτι κατεσκευάσθη τὸ ζητούμενον σχῆμα καὶ μὲ τὴν βοήθειαν γνωστῶν ἰδιοτήτων ἀγόμεθα εἰς τὴν κατασκευὴν ἄλλου σχήματος. Ἀπὸ αὐτὸ εἰς ἄλλο καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, ἕως ὅτου καταλήξωμεν εἰς σχῆμα, τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν νὰ κατασκευάζωμεν ἀπὸ τὴν ἀρχήν.

Μετὰ τὴν ἀνάλυσιν ταύτην κάμνομεν σύνθεσιν. Αὕτη συνίσταται εἰς τὸ ἑξῆς:

Ἀρχίζομεν ἀπὸ τὴν κατασκευὴν τοῦ τελευταίου σχήματος, εἰς τὸ ὁποῖον μᾶς ὡδήγησεν ἡ ἀνάλυσις καὶ κατασκευάζομεν ὅλα τὰ προηγούμενα κατὰ σειρὰν ἀντίστροφον τῆς προηγουμένης. Οὕτω δὲ καταλήγομεν εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ ζητουμένου σχήματος.

Μετὰ τὴν σύνθεσιν πρέπει νὰ ἀκολουθῇ ἀπόδειξις, ὅτι τὸ κατασκευασθὲν σχῆμα εἶναι τὸ ζητούμενον. Ὁσάκις δὲ δὲν εἶναι προφανὴς ἡ ὕπαρξις λύσεως, πρέπει νὰ ἀκολουθῇ διερεύνησις, ἤτοι ἀνεύρεσις τῶν ἀναγκαίων καὶ ἐπαρκῶν σχέσεων τῶν δεδομένων στοιχείων, διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν.

Ὡς παραδείγματα ἀναγράφομεν ἀκόμη καὶ τὰ ἀκόλουθα:

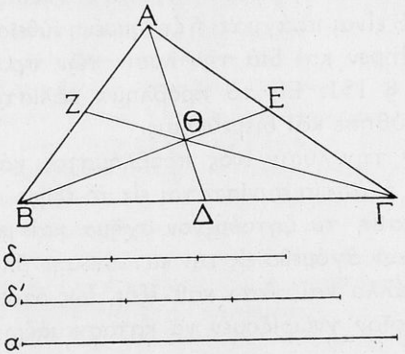
§ 164. *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἀπὸ μίαν πλευρὰν α καὶ ἀπὸ τὰς διαμέσους δ καὶ δ′, αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουσιν ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς πλευρᾶς ταύτης.**

Ἀνάλυσις. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ ὅτι ΒΓ = α, ἡ διάμεσος ΒΕ = δ καὶ ἡ διάμεσος ΓΖ = δ′.

Ἄν Θ εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν, ἡ ΑΘΔ θὰ εἶναι ἡ γ′ διάμεσος καὶ $ΒΘ = ΒΕ \cdot \frac{2}{3} = δ \cdot \frac{2}{3}$, $ΓΘ = ΓΖ \cdot \frac{2}{3} = δ' \cdot \frac{2}{3}$,

$ΑΘ = ΑΔ \cdot \frac{2}{3} = ΘΔ \cdot 2$ (§ 129).

Γνωρίζομεν λοιπὸν τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΒΘΓ καὶ ἑπομένως δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τοῦτο ἀπ' ἀρχῆς.



Σχ. 123

Σύνθεσις. Διαιροῦμεν τὰ δοθέντα τμήματα δ καὶ δ′ εἰς τρία ἴσα μέρη ἕκαστον καὶ κατασκευάζομεν τρίγωνον ΒΘΓ μὲ πλευρὰς ΒΓ = α, $ΒΘ = δ \cdot \frac{2}{3}$ καὶ $ΓΘ = δ' \cdot \frac{2}{3}$. Τοιουτοτρόπως ὁρίζονται αἱ δύο κορυφαὶ Β καὶ Γ τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

Διὰ νὰ ὁρίσωμεν δὲ τὴν τρίτην κορυφὴν Α, φέρομεν τὴν διάμεσον ΘΔ τοῦ ΒΘΓ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς πέραν τῆς κορυφῆς Θ ὁρίζομεν τμῆμα ΘΑ = ΘΔ · 2. Ἄγομεν τέλος τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ καὶ σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον

Ἀπόδειξις. Τοῦτο ἔχει πλευρὰν $ΒΓ = α$ ἐκ κατασκευῆς. Ἐπειδὴ δὲ τὸ Δ εἶναι μέσον αὐτῆς, ἡ ΑΘΔ εἶναι διάμεσος αὐτοῦ. Ἐκ δὲ τῆς ἰσότητος $ΑΘ = ΘΔ \cdot 2$. ἔπεται ὅτι $ΑΘ = ΑΔ \cdot \frac{2}{3}$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν Θ εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Αἱ εὐθεῖαι λοιπὸν ΒΘΕ, ΓΘΖ εἶναι αἱ ἄλλαι διάμεσοι αὐτοῦ. Καὶ ἑπομένως $ΒΘ = ΒΕ \cdot \frac{2}{3}$ καὶ $ΓΘ = ΓΖ \cdot \frac{2}{3}$.

Ἐπειδὴ δὲ ἐλήφθησαν $ΒΘ = δ \cdot \frac{2}{3}$, $ΓΘ = δ' \cdot \frac{2}{3}$ ἔπεται ὅτι $ΒΕ = δ$ καὶ $ΓΖ = δ'$.

Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΒΓ ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα καὶ ἑπομένως εἶναι τὸ ζητούμενον.

Διερεύνησις. Ἀπὸ τὸν τρόπον τοῦτον τῆς λύσεως ἐννοοῦμεν ὅτι: Διὰ νὰ ἔχῃ λύσιν τὸ πρόβλημα, πρέπει νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ κατασκευὴ τοῦ τριγώνου ΘΒΓ, διότι αἱ ὑπόλοιποι κατασκευαὶ εἶναι προφανῶς ὅλαι δυναταί. Ἡ δὲ κατασκευὴ τοῦ ΘΒΓ εἶναι δυνατή, ἂν (ὑποτιθεμένου ὅτι $δ' > δ$,) ἀληθεύῃ ἡ $ΓΘ - ΒΘ < ΒΓ < ΓΘ + ΒΘ$, ἢ $δ' \cdot \frac{2}{3} - δ \cdot \frac{2}{3} < α < δ' \cdot \frac{2}{3} + δ \cdot \frac{2}{3}$. Ἐκ τούτων δὲ ἔπεται ὅτι πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $δ' - δ < \frac{3α}{2} < δ' + δ$.

Ἀσκήσεις

237. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ δύο πλευρῶν καὶ τῆς διαμέσου, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν ἀπὸ αὐτάς.

238. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΒΓ καὶ ἀπὸ τὰς διαμέσους ΑΔ καὶ ΒΕ αὐτοῦ.

239. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ καὶ ἀπὸ τὴν διάμεσον ΑΔ.

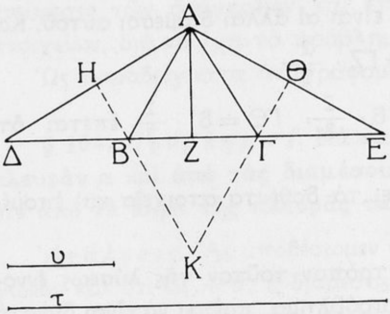
§ **165.** *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἐκ τῆς περιμέτρου καὶ τοῦ ὕψους υ αὐτοῦ** (σχ. 124).

Ἀνάλυσις. Ἂν τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον, θὰ εἶναι $ΑΖ = υ$ καὶ $ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ = τ$. Ἂν δὲ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς βάσεως ΒΓ λάβωμεν $ΒΔ = ΓΕ = ΑΒ$, θὰ εἶναι: $ΔΕ = ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ = τ$.

Ἐπειδὴ δὲ $BZ = Z\Gamma$, θὰ εἶναι καὶ $\Delta B + BZ = Z\Gamma + \Gamma E$ ἢ $\Delta Z = ZE$ καὶ ἑπομένως $A\Delta = AE$. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν $A\Delta E$ εἶναι ἰσοσκελές.

Ἐπειδὴ δὲ γνωρίζομεν τὴν βάσιν ΔE καὶ τὸ ὕψος AZ αὐτοῦ, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τοῦτο ἀπ' ἀρχῆς.

Παρατηροῦμεν ἀκόμη ὅτι ἡ κορυφὴ B κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς $A\Delta$, διότι $B\Delta = BA$. Ὁμοίως ἡ κορυφὴ Γ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς AE μεταξὺ B καὶ E.



Σχ. 124

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν ἰσοσκελὲς τρίγωνον $A\Delta E$ μὲ βάσιν $\Delta E = \tau$ καὶ ὕψος $AZ = \upsilon$.

Ἔπειτα ἄγομεν τὰς καθέτους εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν $A\Delta$, AE. Ἂν δὲ ἡ ΔE τέμνηται ὑπ' αὐτῶν ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα B καὶ Γ μὲ τὸ Γ μεταξὺ B καὶ E, ἄγομεν τά εὐθ. τμήματα AB, $A\Gamma$.

Οὕτω δὲ σχηματίζεται τρίγωνον $AB\Gamma$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀπόδειξις. Τοῦτο ἔχει ὕψος $AZ = \upsilon$ ἐκ κατασκευῆς.

Ἐπειδὴ $AB = B\Delta$ καὶ $A\Gamma = \Gamma E$, τὸ δὲ Γ μεταξὺ B καὶ E, εἶναι καὶ

$$AB + B\Gamma + A\Gamma = \Delta B + B\Gamma + \Gamma E = \Delta E = \tau.$$

Ἀπὸ δὲ τὰς ἰσότητας $\widehat{\Delta} = \widehat{E}$, $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{\Delta} \cdot 2$, $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{E} \cdot 2$ προκύπτει ἡ ἰσότης $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{A\Gamma B}$ καὶ ἑπομένως $A\Gamma = AB$.

Τὸ τρίγωνον λοιπὸν $AB\Gamma$ εἶναι ἰσοσκελές. Ἔχει δὲ καὶ τὰ δοθέντα στοιχεῖα, ἑπομένως εἶναι τὸ ζητούμενον.

Διερεύνησις. Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν, πρέπει νὰ εἶναι δυναταὶ αἱ προηγούμεναι κατασκευαὶ καὶ αἱ εὐθεῖαι HB, $\Theta\Gamma$ νὰ τέμνωνται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου $A\Delta E$, διότι τότε τὸ Γ θὰ εἶναι μεταξὺ B καὶ E.

Ἡ κατασκευὴ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου $A\Delta E$ εἶναι δυνατή, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

Αἱ δὲ κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τέμνονται εἰς τὸ κέντρον Κ τῆς περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένης περιφερείας. Διὰ νὰ εἶναι δὲ τὸ Κ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, πρέπει νὰ εἶναι $\widehat{\Delta A E} > 1$ ὀρθ. καὶ ἐπομένως $\widehat{\Delta} + \widehat{E} < 1$ ὀρθ. Ἐπειδὴ δὲ $\widehat{\Delta} = \widehat{E}$, πρέπει νὰ εἶναι $\widehat{\Delta}.\ 2 < 1$ ὀρθ. καὶ $\widehat{\Delta} < \frac{1}{2}$ ὀρθ. Διὰ νὰ συμβαίνῃ δὲ τοῦτο, πρέπει νὰ εἶναι $\widehat{\Delta A Z} > \frac{1}{2}$ ὀρθ. καὶ ἐπομένως $\widehat{\Delta A Z} > \widehat{\Delta}$. Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι πρέπει νὰ εἶναι $\Delta Z > AZ$ καὶ ἐπομένως $\Delta Z \cdot 2 > AZ \cdot 2$ ἢ $\tau > \upsilon \cdot 2$.

Ἀσκήσεις

240. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ δύο γωνιῶν καὶ τοῦ ἀθροίσματος $AB + A\Gamma$.

241. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἀπὸ τὴν γωνίαν Β καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα $AB + A\Gamma$.

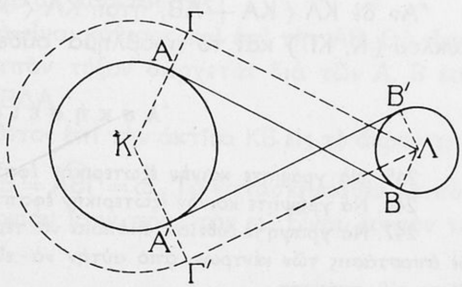
242. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἀπὸ τὴν γωνίαν Γ ἢ Β καὶ ἀπὸ τὴν διαφοραν $A\Gamma - AB$ (ὑποτίθεται $A\Gamma > AB$).

243. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ δύο γωνιῶν καὶ τῆς περιμέτρου αὐτοῦ.

244. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ἀπὸ δύο γωνίας καὶ ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

§ 166. *Πρόβλημα III.* **Νὰ γραφῇ κοινὴ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη δύο δεδομένων περιφερειῶν Κ καὶ Λ** (σχ. 125).

Ἀνάλυσις. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ΑΒ εἶναι ἡ ζητουμένη κοινὴ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη τῶν περιφερειῶν Κ καὶ Λ, ἤτοι ὅτι αὗται κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς ἐφαπτομένης ΑΒ αὐτῶν. Ἂν φέρωμεν τὴν ΛΓ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ μέχρι τῆς εὐθείας ΚΑ, τὸ τετράπλευρον ΑΓΛΒ θὰ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ $A\Gamma = \Lambda B$. Ἡ δὲ ΛΓ θὰ ἐφάπτηται εἰς τὸ Γ τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα $K\Gamma = KA + A\Gamma = KA + \Lambda B$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ περιφέρεια αὕτη δύναται νὰ γραφῇ ἀρχικῶς, καὶ ἡ ΛΓ δύναται νὰ γραφῇ μετ' αὐτὴν (§ 156).



Σχ. 125

Σύνθεσις. Γράφομεν περιφέρειαν μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα ΚΑ + ΛΒ. Ἔπειτα ἄγομεν τὴν ΛΓ ἐφαπτομένην εἰς αὐτὴν καὶ τὴν ἀκτῖνα ΚΓ. Αὕτη τέμνει τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν Κ εἰς ἓν σημεῖον Α. Ἔπειτα ἄγομεν ἀκτῖνα ΛΒ παράλληλον καὶ ἀντίρροπον πρὸς τὴν ΚΑ. Ἄγομεν τέλος τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ΚΑ + ΑΓ = ΚΓ, ἐκ κατασκευῆς δὲ εἶναι καὶ ΚΑ + ΛΒ = ΚΓ, ἕπεται ὅτι ΑΓ = ΛΒ. Ἐπειδὴ δὲ αὗται εἶναι καὶ παράλληλοι ἐκ κατασκευῆς, τὸ τετράπλευρον ΑΓΛΒ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἐκ δὲ τῆς Γ = 1 ὀρθ. ἕπεται ὅτι Β = 1 ὀρθ. καὶ $\widehat{ΚΑΒ}$ = 1 ὀρθ. Ἡ ΑΒ λοιπὸν ἐφάπτεται καὶ τῶν δύο περιφερειῶν. Ἔχει δὲ προφανῶς τοὺς κύκλους ἑκατέρωθεν αὐτῆς καὶ ἑπομένως εἶναι πράγματι ἡ ζητουμένη.

Διερεύνησις. Εἶναι φανερὸν ὅτι, διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν, πρέπει νὰ ἄγηται ἐκ τοῦ Λ ἐφαπτομένη εἰς τὴν βοηθητικὴν περιφέρειαν (Κ, ΚΓ). Διὰ νὰ συμβαίνῃ δὲ τοῦτο, πρέπει νὰ εἶναι:

$$ΚΛ \geqslant ΚΓ \text{ ἢ } ΚΛ \geqslant ΚΑ + ΛΒ.$$

Ἂν εἶναι ΚΛ > ΚΑ + ΛΒ, ἤτοι, ἂν οἱ δύο κύκλοι εἶναι ἐκτὸς ἀλλήλων χωρὶς νὰ ἔχωσι κοινὰ σημεῖα, ἄγονται ἐκ τοῦ Λ δύο ἐφαπτόμεναι ΛΓ, ΛΓ′ καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, ἤτοι ὑπάρχουσι δύο κοιναὶ ἐσωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι ΑΒ, Α′Β′, αἱ ὁποῖαι γράφονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

Ἂν ΚΛ = ΚΑ + ΛΒ = ΚΓ, τὸ Λ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας (Κ, ΚΓ) καὶ ἄγεται πρὸς αὐτὴν μία μόνη ἐφαπτομένη.

Ἂν δὲ ΚΛ < ΚΑ + ΛΒ, ἤτοι ΚΛ < ΚΓ, τὸ Λ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου (Κ, ΚΓ) καὶ τὸ πρόβλημα οὐδεμίαν ἔχει λύσιν.

Ἀσκήσεις

245. Νὰ γράψητε κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην δύο ἴσων περιφερειῶν.

246. Νὰ γράψητε κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην δύο ἀνίσων περιφερειῶν.

247. Νὰ γράψητε εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ δύο δοθείσας περιφερείας, αἱ δὲ ἀποστάσεις τῶν κέντρων ἀπὸ αὐτὴν νὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς δοθέντα εὐθ. τμήματα.

248. Νὰ γράψητε εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ δύο δοθείσας περιφερείας καὶ νὰ ὁρίζωνται ἐπ' αὐτῆς χορδαὶ ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς δοθέντα εὐθ. τμήματα.

249. Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Γ νὰ γράψητε εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ δοθεῖσαν περιφέρειαν Κ, ἡ δὲ ἐπ' αὐτῆς ὁριζομένη χορδὴ νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

§ **167.** *Πρόβλημα IV.* **Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα κύκλου, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν χορδὴν ΑΒ καὶ νὰ δέχηται γωνίαν ἴσην πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν ω** (σχ. 126).

Ἀνάλυσις. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ΑΔΒΑ εἶναι τὸ ζητούμενον κυκλικὸν τμῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχει κέντρον Κ.

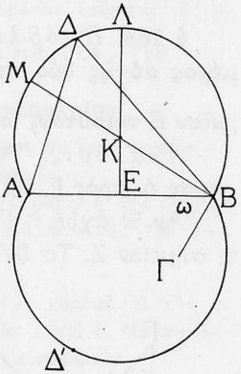
Ἂν φέρωμεν τὴν ἐφαπτομένην ΒΓ, θὰ εἶναι $\widehat{ΑΒΓ} = \widehat{ΑΔΒ} = ω$. Ἑπομένως ἡ ΒΓ δύναται νὰ γραφῇ ἀπ' ἀρχῆς. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΚΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ ἡ ΚΕ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, αὗται δὲ δύνανται νὰ γραφῶσιν, ὁρίζεται καὶ τὸ Κ.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν γωνίαν ΑΒΓ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν ω. Ἄγομεν ἔπειτα τὴν ΒΜ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ τὴν ΛΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς.

Οὕτως ὁρίζεται ἡ τομὴ Κ τῶν καθέτων τούτων.

Ἔπειτα δὲ μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα ΚΒ γράφομεν τὸ τόξον ΑΔΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐκτὸς τῆς γωνίας ΑΒΓ.

Τὸ ὑπ' αὐτοῦ καὶ τῆς ΑΒ ὁριζόμενον κυκλικὸν τμῆμα ΑΒΔΑ εἶναι τὸ ζητούμενον.



Σχ. 126

Ἀπόδειξις. Αἱ εὐθεῖαι ΛΕ καὶ ΜΒ τέμνονται εἴς τι σημεῖον Κ, διότι ἡ ΛΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἐνῷ ἡ ΜΒ ὡς κάθετος τῆς ΒΓ εἰς τὸ Β, δὲν δύναται νὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΑΒ. Θὰ εἶναι δὲ ΚΑ = ΚΒ. Τὸ γραφὲν λοιπὸν τόξον διέρχεται διὰ τῶν Α, Β καὶ ὁρίζεται κυκλικὸν τμῆμα ΑΒΔΑ.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΒΓ ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΚΒ εἰς τὸ ἄκρον της εἶναι ἐφαπτομένη, εἶναι $\widehat{ΑΔΒ} = \widehat{ΑΒΓ} = ω$. Τὸ κατασκευασθὲν λοιπὸν κυκλικὸν τμῆμα δέχεται γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ω. Εἶναι λοιπὸν τὸ ζητούμενον.

Διερεύνησις. Αἱ προηγούμεναι κατασκευαὶ εἶναι ὅλαι δυναταί. Τὸ πρόβλημα λοιπὸν ἔχει πάντοτε λύσιν. Ἂν δὲ ἡ γωνία ΑΒΓ κατασκευασθῇ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τῆς χορδῆς ΑΒ, κατασκευάζομεν καὶ ἄλλο κυκλικὸν τμῆμα, τὸ ὁποῖον πληροῖ τὰ ἐπιτάγματα τοῦ προβλήματος. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πρῶτον, διότι εἶναι συμμετρικὸν αὐτοῦ πρὸς τὴν ΑΒ.

Τὸ πρόβλημα ἑπομένως ἔχει μίαν λύσιν.

Ἀσκήσεις

250. Νὰ κατασκευάσητε τμῆμα κύκλου μὲ χορδὴν 6 ἑκατ. καὶ νὰ δέχηται γωνίαν 45^0.

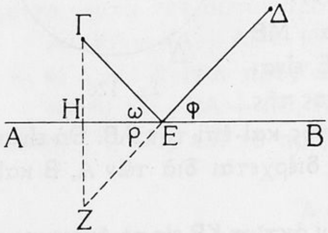
251. Νὰ κατασκευάσητε τμῆμα κύκλου μὲ χορδὴν 5 ἑκατ. καὶ νὰ δέχηται γωνίαν 60^0.

252. Εἰς δοθέντα κύκλον γράφομεν χορδὴν ΑΒ. Οὕτως ὁ κύκλος διαιρεῖται εἰς δύο κυκλικὰ τμήματα. Ἂν τὸ ἓν ἀπὸ αὐτὰ δέχηται γωνίαν $52^0\ 35'\ 20''$, νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν δέχεται τὸ ἄλλο.

§ **168.** *Πρόβλημα V.* **Δίδεται εὐθεῖα ΑΒ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς δύο σημεῖα Γ καὶ Δ. Νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ σημεῖον Ε τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι** $\widehat{ΓΕΑ} = \widehat{ΔΕΒ}$ **ἢ** $ω = φ$ (σχ. 127).

Ἀνάλυσις. Ἂν $ω = φ$ καὶ προεκτείνωμεν τὴν ΔΕ κατὰ τὴν φορὰν Δ πρὸς Ε, θὰ εἶναι $ρ = φ$, ὅθεν $ω = ρ$.

Ἂν δὲ ἀχθῇ ἡ ΓΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, αὕτη τέμνει τὴν ΔΕ εἴς τι σημεῖον Ζ. Τὰ δὲ ὀρθ. τρίγωνα ΓΗΕ καὶ ΕΗΖ θὰ εἶναι ἴσα. Ἑπομένως $ΓΗ = ΗΖ$.



Σχ. 127

Τὸ Ζ λοιπὸν εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Γ πρὸς τὴν ΑΒ. Ἑπομένως ὁρίζεται καὶ ἀρχικῶς. Μετ' αὐτὸ δὲ ἡ ΖΔ καὶ τὸ Ε.

Σύνθεσις. Ὁρίζομεν τὸ Ζ συμμετρικὸν τοῦ Γ πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἄγομεν τὴν ΔΖ. Ἡ τομὴ Ε ταύτης καὶ τῆς ΑΒ εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον.

Ἀπόδειξις. Τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΓΗΕ καὶ ΖΕΗ ἔχουσι $ΓΗ = ΗΖ$ καὶ τὴν ΗΕ κοινήν· εἶναι ἄρα ἴσα καὶ ἑπομένως $ω = ρ$.

Ἐπειδὴ δὲ καὶ $φ = ρ$, ἕπεται ὅτι $ω = φ$. Τὸ Ε λοιπὸν εἶναι τὸ ζητούμενον.

Διερεύνησις. Τὸ σημεῖον Γ ἔχει ἓν μόνον συμμετρικὸν πρὸς τὴν ΑΒ, ἤτοι τὸ Ζ. Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο καὶ τὸ Δ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ΑΒ, ἡ εὐθεῖα ΔΖ τέμνει τὴν ΑΒ καὶ εἰς ἓν μόνον σημεῖον. Ἔχει λοιπὸν πάντοτε μίαν λύσιν τὸ πρόβλημα.

Ἀσκήσεις

253. Νὰ ὁρίσητε ἐπὶ τοῦ ΑΒ τοῦ ἀνωτέρω σχήματος 127 ἓν σημεῖον Θ καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι $ΓΕ + ΕΔ < ΓΘ + ΘΔ$.

254. Δίδεται ὡς ἀνωτέρω (σχ. 127) εὐθεῖα ΑΒ καὶ δύο σημεῖα Γ,Δ. Νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ σημεῖον Θ τοιοῦτον, ὥστε ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΓΘΔ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

255 Ἂν Φ εἶναι φωτεινὸν σημεῖον καὶ ἔχῃ ὡρισμένην θέσιν πρὸ ἐπιπέδου κατόπτρου ΑΒ, νὰ ὁρισθῇ τὸ σημεῖον προσπτώσεως φωτεινῆς ἀκτῖνος, τὴν ὁποίαν νὰ δεχθῇ μετὰ τὴν ἀνάκλασίν της ὀφθαλμὸς εὑρισκόμενος ἐπίσης εἰς ὡρισμένην θέσιν Δ πρὸ τοῦ κατόπτρου.

256. Ἂν δύο δοθέντα σημεῖα Α, Β κεῖνται ἑκατέρωθεν δοθείσης εὐθείας ΓΔ, νὰ ὁρίσητε ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Ε τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\widehat{ΓΕΑ} = \widehat{ΓΕΒ}$.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Α΄ κεφαλαίου

257. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ γράψητε δύο τεμνομένας καὶ ἴσας χορδάς. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι τὰ τμήματα αὐτῶν εἶναι ἴσα, ἓν πρὸς ἕν.

258. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ὁρίσητε τὸ μέσον Ε τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ. Ἔπειτα νὰ φέρητε τὸ ὕψος ΑΔ καὶ τὴν διάμεσον ΑΕ. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι $\widehat{ΔΑΕ} = Γ - Β$ ἂν $ΑΒ > ΑΓ$.

259. Ἐκ τοῦ μέσου Γ ἑνὸς τόξου ΑΒ νὰ φέρητε δύο χορδὰς ΓΔ, ΓΗ, αἱ ὁποῖαι τέμνουσι τὴν χορδὴν ΑΒ ἀντιστοίχως εἰς σημεῖα Ζ καὶ Ε. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι τὸ τετράπλευρον ΔΖΕΗ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

260. Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς δοθείσης γωνίας ΓΒΔ, νὰ γράψητε εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ εἰς σημεῖον Ε τὴν πλευρὰν ΒΓ καὶ εἰς σημεῖον Ζ τὴν ἄλλην καὶ νὰ εἶναι $ΑΕ = ΕΖ$ ἢ $ΑΕ \cdot 2 = ΕΖ$.

261. Ἀπὸ σημεῖον Α ἐντὸς γωνίας νὰ γράψητε εὐθεῖαν τοιαύτην, ὥστε τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τμῆμα αὐτῆς νὰ διχοτομῆται ὑπὸ τοῦ Α.

262. Νὰ κατασκευάσητε γωνίαν $ΓΑΒ < 1$ ὀρθ. καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον Δ. Ἔπειτα δὲ ἐπὶ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς νὰ ὁρίσητε ἄλλο σημεῖον, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὸ Δ καὶ ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΑΓ.

263. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ἀπὸ τὰς διαμέσους αὐτοῦ.

264. Νὰ κατασκευάσητε τετράγωνον ἀπὸ τὴν ἀπόστασιν τοῦ μέσου μιᾶς πλευρᾶς ἀπὸ τὴν διαγώνιον αὐτοῦ.

265. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ ἀπὸ τὸ ὀρθόκεντρον Η αὐτοῦ, ἀπὸ τὸ κέντρον Ο τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας καὶ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν Ε, ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται ἡ πλευρὰ ΒΓ αὐτοῦ.

266. Νὰ ὁρισθῇ ἡ εὐθεῖα τοῦ Simson, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν κορυφὴν Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

169. Πῶς ὁρίζεται ὁ γεωμετρικὸς τόπος σημείων, τὰ ὁποῖα ἔχουσι μίαν κοινὴν ἰδιότητα. Εἰς τὸ Α΄ βιβλίον ἐλάβομεν ἀφορμὴν νὰ παρατηρήσωμεν μερικὰ παραδείγματα γεωμετρικῶν τόπων. Ἕνεκα δὲ τῆς σπουδαιότητος αὐτῶν συγκεντρώνομεν ταῦτα εἰς τὰ ἀκόλουθα:

1ον. Ἑκάστη περιφέρεια κύκλου εἶναι γεωμ. τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουσιν ἀπὸ τὸ κέντρον ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ.

2ον. Ἡ εὐθεῖα, ἥτις τέμνει δίχα καὶ καθέτως ἓν εὐθ. τμῆμα, εἶναι γεωμ. τόπος τῶν σημείων, ὧν ἕκαστον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ εὐθυγράμμου τούτου τμήματος.

3ον. Ἡ διχοτόμος γωνίας εἶναι γεωμ. τόπος τῶν σημείων τῆς γωνίας ταύτης, ὧν ἕκαστον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς αὐτῆς.

4ον. Ἡ γραμμή, τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦσι τὰ τόξα τῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα ἔχουσι χορδὴν ΑΒ ὡρισμένην κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος καὶ δέχονται δοθεῖσαν γωνίαν, εἶναι γεωμ. τόπος τῶν σημείων, ἐξ ἑκάστου τῶν ὁποίων ἡ χορδὴ ΑΒ φαίνεται ὑπὸ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν.

5ον. Ἡ περιφέρεια, ἥτις ἔχει διάμετρον δοθὲν κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος εὐθ. τμῆμα ΑΒ, εἶναι γεωμ. τόπος τῶν σημείων, ἐξ ἑκάστου τῶν ὁποίων τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ φαίνεται ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν.

Πλὴν τούτων ἔστωσαν τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα:

6ον. **Γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ δύο ὡρισμένας καὶ παραλλήλους εὐθείας, εἶναι ἡ εὐθεῖα, ἥτις εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτὰς καὶ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ αὐτάς.**

Διότι προφανῶς πάντα τὰ σημεῖα αὐτῆς καὶ μόνον αὐτὰ ἔχουσι τὴν ἰδιότητα νὰ ἀπέχωσιν ἴσον ἀπὸ τὰς παραλλήλους ταύτας εὐθείας.

7ον. **Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουσιν ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθεῖαν Ε ὡρισμένην ἀπόστασιν α, ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο εὐθείας, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν Ε καὶ ἑκάστη ἀπέχει ἀπὸ αὐτὴν ἀπόστασιν α.**

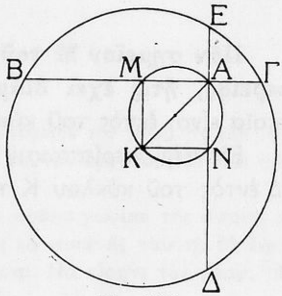
Διότι εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι πάντα τὰ σημεῖα αὐτῶν καὶ μόνον αὐτὰ ἀπέχουσιν ἀπὸ τὴν Ε ἀπόστασιν α.

8ον. **Γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουσιν ἀπὸ τὸ κέντρον δοθέντος κύκλου (Κ, α) ἀπόστασιν μικροτέραν τῆς ἀκτῖνος α, εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου τούτου πλὴν τῆς περιφερείας του.**

Διότι προφανῶς ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας ταύτης καὶ μόνον αὐτὰ ἔχουσι τὴν ἰδιότητα ταύτην.

Ἀπὸ τὰ παραδείγματα ταῦτα συνάγομεν τὸν ἑξῆς ὁρισμόν:

Γεωμετρικὸς τόπος σημείων, τὰ ὁποῖα ἔχουσι μίαν κοινὴν ἰδιότητα, καλεῖται ἡ γραμμὴ ἢ ἡ ἐπιφάνεια, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα καὶ μόνον αὐτὰ ἔχουσι τὴν κοινὴν ταύτην ἰδιότητα.



Σχ. 128

§ 170. *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων τῶν χορδῶν δοθέντος κύκλου, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α ἐντὸς τοῦ κύκλου τούτου.**

Λύσις. Ἔστω ΒΓ μία χορδή, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ Α.

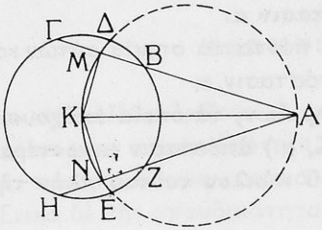
Τὸ μέσον Μ αὐτῆς εἶναι προφανῶς σημεῖον τοῦ τόπου. Ἂν φέρωμεν τὸ εὐθ. τμῆμα ΚΜ, γνωρίζομεν ὅτι $\widehat{ΚΜΑ} = 1$ ὀρθ.

Ἤτοι, τὸ ὡρισμένον κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος εὐθ. τμῆμα ΚΑ φαίνεται ἀπὸ τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ζητουμένου τόπου ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν.

Κεῖται λοιπὸν τὸ Μ ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ διάμετρον ΚΑ (§ 169, 5ον).

Ἂν δὲ Ν εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας ταύτης, θὰ εἰναι $\widehat{KNA}=1$ ὀρθ. (§ 152, Πόρ. II). Ἡ ΚΝ λοιπὸν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΔΑΕ καὶ τὸ Ν μέσον αὐτῆς. Εἶναι λοιπὸν τοῦτο σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου. Ὥστε:

Πᾶν σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον ΚΑ. Καὶ πᾶν σημεῖον αὐτῆς, εἶναι σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου.



Ὁ ζητούμενος λοιπὸν τόπος εἶναι ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον ΚΑ.

Ἂν αἱ προεκτάσεις τῶν χορδῶν διέρχωνται ἀπὸ τὸ Α (σχ. 129) καὶ ἐργασθῶμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, βεβαιούμεθα ὅτι:

Πᾶν σημεῖον Μ τοῦ ζητουμένου τόπου κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει διάμετρον ΚΑ. Τὰ σημεῖα ὅμως αὐτῆς, τὰ ὁποῖα εἶναι ἐκτὸς τοῦ κύκλου Κ, δὲν εἶναι σημεῖα τοῦ τόπου.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι μόνον τὸ ἐντὸς τοῦ κύκλου Κ τόξον ΔΚΕ τῆς προηγουμένης περιφερείας.

Ἀσκήσεις

267. Νὰ εὕρητε τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν ποδῶν τῶν καθέτων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ ὡρισμένον σημεῖον Α ἐπὶ τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ ἄλλο ὡρισμένον σημεῖον Κ.

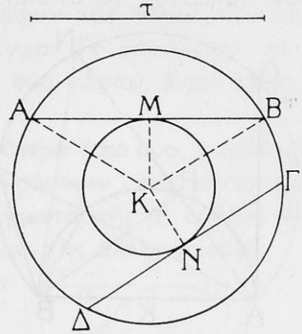
268. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ εὕρητε τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν συμμετρικῶν τοῦ Α πρὸς τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ Β.

269. Δίδονται δύο ἴσαι περιφέρειαι Κ καὶ Λ. Νὰ εὕρητε τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν σημείων, ἀπὸ ἕκαστον τῶν ὁποίων ἄγονται ἴσαι ἐφαπτόμεναι πρὸς αὐτάς.

§ 171 *Πρόβλημα II.* **Δίδεται κύκλος Κ καὶ εὐθύγραμμον τμῆμα τ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων τῶν χορδῶν τοῦ κύκλου Κ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι πρὸς τὸ τ** (σχ. 130).

Λύσις. Ἔστω ΑΒ μία χορδὴ ἴση πρὸς τ καὶ Μ τὸ μέσον αὐτῆς. Τοῦτο θὰ εἶναι σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀπόστασις ΚΜ εἶναι ἡ αὐτὴ καὶ ἂν τὸ Μ κεῖται εἰς ἄλλην χορδὴν ἴσην πρὸς τ (§ 92 Πόρ Ι), ἔπεται ὅτι τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας (Κ, ΚΜ).

Ἂν δὲ Ν εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας ταύτης καὶ ἀχθῇ χορδὴ ΓΔ ἐφαπτομένη ταύτης εἰς τὸ Ν, θὰ εἶναι ἡ ΚΝ κάθετος ἐπ' αὐτὴν καὶ τὸ Ν μέσον αὐτῆς. Ἐπειδὴ δὲ ΚΜ = ΚΝ, θὰ εἶναι καὶ ΓΔ = ΑΒ = τ (§ 92 Πόρ. Ι). Ὥστε:



Σχ. 130

Πᾶν σημεῖον τῆς περιφερείας (Κ, ΚΜ) εἶναι σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου.

Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ἡ περιφέρεια (Κ,ΚΜ).

Ἀσκήσεις

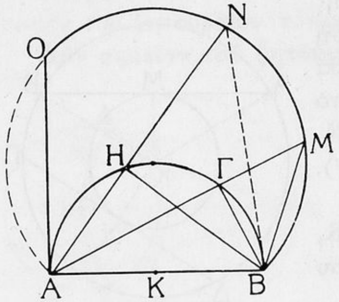
270. Δίδεται κύκλος Κ καὶ εὐθ. τμῆμα δ. Νὰ εὕρητε τὸν γεωμ. τόπον τῶν σημείων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἄγονται εἰς τὸν κύκλον τοῦτον ἐφαπτόμεναι ἴσαι πρὸ τὸ δ.

271. Ἂν δοθῇ κύκλος Κ, νὰ κατασκευάσητε ὀρθὴν γωνίαν τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ ἐφάπτονται τοῦ Κ. Ἀπὸ τὸν τρόπον τῆς κατασκευῆς ταύτης θὰ ἐννοήσητε ὅτι κατασκευάζονται ἄπειροι τοιαῦται γωνίαι. Νὰ εὕρητε τὸν γεωμ. τόπον τῶν κορυφῶν τῶν γωνιῶν τούτων.

272. Νὰ γράψητε δύο ὁμοκέντρους περιφερείας καὶ νὰ κατασκευάσητε ὀρθὴν γωνίαν, τῆς ὁποίας ἡ μία πλευρὰ νὰ ἐφάπτηται τῆς μιᾶς, ἡ δὲ ἄλλη τῆς ἄλλης περιφερείας. Τοιαῦται γωνίαι δύνανται νὰ κατασκευασθῶσιν ἄπειροι. Νὰ εὕρητε τὸν γεωμ. τόπον τῶν κορυφῶν αὐτῶν.

§ 172. *Πρόβλημα ΙΙΙ.* **Νὰ γράψητε ἡμιπεριφέρειαν μὲ διάμετρον ΑΒ ὡρισμένην κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος. Νὰ φέρητε τυχοῦσαν χορδὴν ΑΓ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς νὰ λάβητε τμῆμα ΓΜ ἴσον πρὸς τὴν χορδὴν ΒΓ. Νὰ εὕρητε δὲ τὸν γεωμετρικὸν τόπον, τὸν ὁποῖον γράφει τὸ Μ, ὅταν τὸ Γ γράφῃ τὴν δοθεῖσαν ἡμιπεριφέρειαν** (σχ. 131).

Λύσις. Ἐπειδὴ ΒΓ = ΓΜ καὶ $\widehat{ΑΓΒ}$ = 1 ὀρθ., ἔπεται εὐκόλως ὅτι Μ = 45°. Ἤτοι, τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ φαίνεται ἐκ τοῦ Μ ὑπὸ γωνίαν στὴν γωνίαν 45^0. Κεῖται λοιπὸν τὸ Μ ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἡμικύκλιον



Σχ. 131

μέρος τῆς ΑΒ, ἔχει χορδὴν ΑΒ καὶ δέχεται γωνίαν 45^0 (§ 169, 4ον).

Ἂν δὲ μετὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ τόξου τοῦ τμήματος τούτου φέρωμεν τὴν ΑΟ ἐφαπτομένην τοῦ δοθέντος ἡμικυκλίου, ἐννοοῦμεν εὐκόλως ὅτι τὰ σημεῖα τοῦ τόξου ΑΟ δὲν ἀποτελοῦσι μέρος τοῦ τόπου.

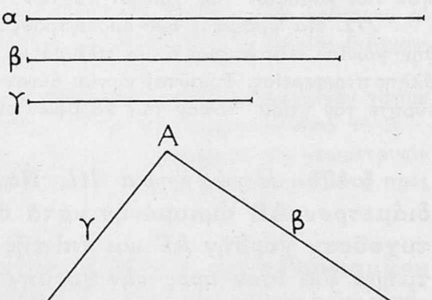
Πᾶν δὲ σημεῖον Ν τοῦ ὑπολοίπου τόξου ΒΜΟ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου. Διότι ἡ γωνία Ν εἶναι 45^0 ἐκ κατασκευῆς καὶ $\widehat{BHN} = \widehat{BHA} = 1$ ὀρθ. Ἄρα $HN = HB$.

Ἐξ ὅλων τούτων ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι τὸ τόξον ΒΜΟ.

Ἀσκήσεις

273. Νὰ λύσητε τὸ προηγούμενον (§ 172) πρόβλημα, ἂν ἀντὶ ἡμιπεριφερείας γράψωμεν ὁλόκληρον περιφέρειαν.

§ 173. Χρῆσις τῶν γεωμ. τόπων εἰς τὴν λύσιν προβλημάτων. Εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος § 151 ἀνεπαισθήτως τρόπον τινὰ ἐκάμομεν χρῆσιν γεωμ. τόπων. Διότι παρετηρήσαμεν, ὅτι ἡ ἄγνωστος κορυφὴ Α πρέπει νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας (Β, γ), διότι ΑΒ = γ καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας (Γ, β), διότι ΑΓ = β. Οὕτω δὲ ὡδηγήθημεν εἰς τὸ νὰ γράψωμεν τὰς περιφερείας ταύτας κ.τ.λ. Ὥστε:

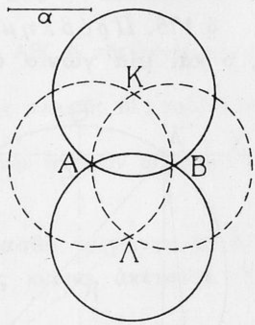


Σχ. 132

Ὅταν διὰ γεωμετρικήν τινα κατασκευὴν (πρόβλημα) εἶναι ἀπαραίτητος ὁ προσδιορισμὸς ἑνὸς σημείου, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐκπληροῖ δύο ἐπιτάγματα, δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν καὶ ὡς ἑξῆς: Εὑρίσκομεν καὶ γράφομεν τὸν τόπον τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα πληροῦσι τὸ ἓν ἐπίταγμα· ἔπειτα γράφομεν τὸν τόπον τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα πληροῦσι τὸ β' ἐπίταγμα. Τὸ ζητούμενον τότε σημεῖον ὁρίζεται ὡς κοινὸν σημεῖον τῶν δύο τόπων, διότι πληροῖ καὶ τὰ δύο ἐπιτάγματα.

Ἂν δὲ τὰ ἐπιτάγματα εἶναι περισσότερα ἀπὸ δύο, χωρίζομεν αὐτὰ καταλλήλως εἰς δύο ὁμάδας καὶ γράφομεν τὸν τόπον τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα πληροῦσι τὰ ἐπιτάγματα τῆς α' ὁμάδος καὶ τὸν τόπον τῶν σημείων τῶν ἐπιταγμάτων τῆς ἄλλης ὁμάδος.

Εἰς τὰ ἑπόμενα προβλήματα θὰ κάμωμεν χρῆσιν τῆς μεθόδου ταύτης.



Σχ. 133

§ **174.** *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχηται ἀπὸ δύο ὡρισμένα σημεῖα Α,Β καὶ νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν ἀκτῖνα α** (σχ. 133).

Λύσις. Ἄγνωστον εἶναι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας. Ἂν τοῦτο εἶναι Κ, πρέπει νὰ εἶναι ΚΑ = α καὶ ΚΒ = α. Πρέπει λοιπὸν τὸ Κ νὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῶν δύο περιφερειῶν (Α, α) καὶ (Β,α), ἤτοι θὰ εἶναι κοινὸν σημεῖον αὐτῶν.

Ἐννοοῦμεν λοιπὸν ὅτι πρέπει νὰ γράψωμεν τὰς περιφερείας ταύτας καὶ ἔπειτα μὲ κέντρον κοινὸν σημεῖον αὐτῶν καὶ ἀκτῖνα α νὰ γράψωμεν περιφέρειαν. Εὐκόλως δὲ ἀποδεικνύομεν ὅτι αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη.

Διερεύνησις: Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν, πρέπει αἱ γραφεῖσαι περιφέρειαι νὰ ἔχωσι κοινὸν ἢ κοινὰ σημεῖα. Πρὸς τοῦτο δὲ πρέπει νὰ εἶναι $ΑΒ \leqslant α + α$ ἢ $ΑΒ \leqslant 2α$ κ.τ.λ.

Ἀσκήσεις

274. Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α, Β καὶ ἔχει τὸ κέντρον ἐπὶ δοθείσης εὐθείας Ε.

275. Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ ὡρισμένον ση-

μεῖον Α, καὶ ἐφάπτεται δοθείσης εὐθείας Ε εἰς ὡρισμένον σημεῖον Β αὐτῆς.

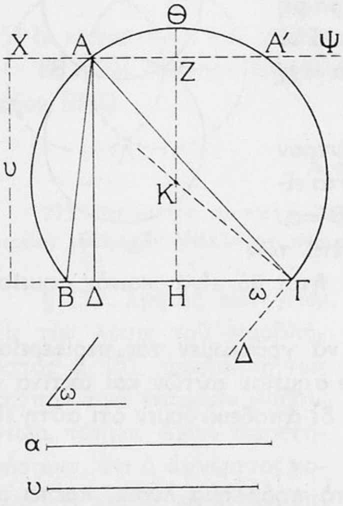
276. Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα α, νὰ διέρχηται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α καὶ νὰ ἔχῃ τὸ κέντρον ἐπὶ δοθείσης περιφερείας Κ.

277. Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχηται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α, νὰ ἐφάπτηται δοθείσης εὐθείας Ε καὶ νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα α.

278. Νὰ κατασκευάσητε μίαν γωνίαν Α καὶ εἰς τὴν μίαν πλευρὰν αὐτῆς νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον Β. Ἔπειτα νὰ γράψητε μίαν περιφέρειαν, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτηται τῶν δύο πλευρῶν αὐτῆς, τῆς δὲ ΑΒ εἰς τὸ Β.

279. Δίδεται περιφέρεια Κ, σημεῖον Α ἐκτὸς τοῦ κύκλου καὶ εὐθ. τμῆμα α. Νὰ γράψητε περιφέρειαν, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα α, νὰ διέρχηται ἀπὸ τὸ Α καὶ νὰ ἐφάπτηται ἐκτὸς τῆς Κ.

§ 175. *Πρόβλημα ΙΙ.* **Δίδονται δύο εὐθύγραμμα τμήματα α, υ καὶ μία γωνία ω. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ βάσιν ΒΓ ἴσην πρὸς α, ὕψος ΑΔ ἴσον πρὸς υ καὶ γωνίαν Α ἴσην πρὸς ω** (σχ. 134).



Σχ. 134

Λύσις. Ἂν ἐπὶ εὐθείας ὁρισθῇ τμῆμα ΒΓ = α, μένει ἄγνωστος ἡ κορυφὴ Α. Ἐπειδὴ τὸ ὕψος ΑΔ = υ, ἡ κορυφὴ Α κεῖται ἐπὶ εὐθείας ΧΨ παραλλήλου πρὸς τὴν ΒΓ εἰς ἀπόστασιν υ ἀπ᾽ αὐτῆς. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία Α εἶναι ἴση πρὸς ω, ἡ κορυφὴ Α πρέπει νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον ἔχει χορδὴν ΒΓ καὶ δέχεται γωνίαν ω.

Κατασκευάζομεν λοιπὸν τοὺς δύο τόπους καὶ ἔστω Α κοινὸν σημεῖον αὐτῶν. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται.

Διερεύνησις Ἂν ἐκ τοῦ κέντρου Κ φέρωμεν κάθετον ΘΖΗ ἐπὶ τὴν ΒΓ, θὰ εἶναι ΗΖ = υ. Διὰ νὰ ἔχῃ δὲ τὸ πρόβλημα λύσιν, πρέπει προφανῶς νὰ εἶναι $ΗΖ \leqslant ΗΘ$ ἢ $υ \leqslant ΗΘ$.

Ἂν $υ < ΗΘ$, οἱ δύο τόποι ἔχουσι δύο κοινὰ σημεῖα Α καὶ Α′.

Τὰ τρίγωνα ὅμως ΑΒΓ καὶ Α΄ΒΓ ἔχουσι τὰς πλευράς των ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, καὶ εἶναι ἴσα. Διαφέρουσι λοιπὸν μόνον κατὰ τὴν θέσιν καὶ θεωρεῖται ὅτι ἀποτελοῦσι μίαν λύσιν.

Ἂν $υ = ΗΘ$, οἱ δύο τόποι ἔχουσι κοινὸν μόνον τὸ Θ· τὸ δὲ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΘΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἂν δὲ $υ > ΗΘ$, οἱ δύο τόποι οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον, τὸ δὲ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν.

Ἀσκήσεις

280. Νὰ κατασκευάσητε ὀρθογώνιον τρίγωνον ἀπὸ τὴν ὑποτείνουσαν καὶ ἀπὸ τὸ ἐπὶ ταύτην ὕψος.

281. Νὰ κατασκευάσητε ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ καὶ τῆς διαμέσου $ΒΜ = δ$.

282. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, τοῦ ὕψους ΑΔ καὶ τῆς διαμέσου ΑΜ.

283. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΒΓ τὴν διάμεσον ΑΜ καὶ ἀπὸ τὴν γωνίαν Α.

§ 176. *Πρόβλημα ΙΙΙ.* **Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ δύο πλευρῶν α καὶ β καὶ τῆς γωνίας Α, ἥτις κεῖται ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς α** (σχ. 135).

Ἀνάλυσις. Ἂν ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον, θὰ εἶναι $ΑΓ = β$, $ΓΒ = α$ καὶ ἀπέναντι τῆς ΓΒ θὰ κεῖται γωνία ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν Α. Ἐὰν λοιπὸν κατασκευασθῇ γωνία $ΧΑΨ = Α$ καὶ ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΑΧ τμῆμα ΑΓ ἴσον πρὸς τὴν β, μένει ἄγνωστος ἡ τρίτη κορυφὴ Β.

Αὐτη ὀφείλει νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς ΑΨ τῆς $\widehat{ΧΑΨ}$. Ὡς ἀπέχουσα δὲ τῆς κορυφῆς Γ ἀπόστασιν ΓΒ ἴσην πρὸς τὴν α, ὀφείλει νὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας (Γ, α). Θὰ εἶναι ἄρα αὔτη κοινὸν σημεῖον τῶν γραμμῶν τούτων.

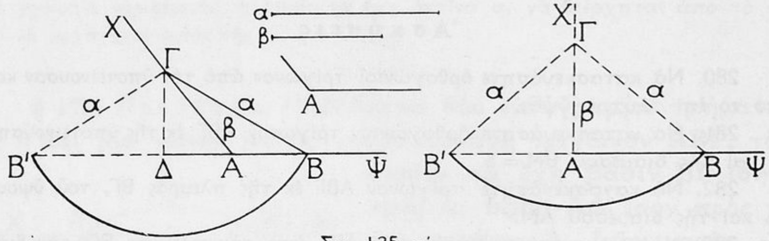
Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν γωνία $ΧΑΨ = Α$, ὁρίζομεν ἐπὶ τῆς ΑΧ τμῆμα ΑΓ ἴσον πρὸς τὸ β καὶ γράφομεν τὴν περιφέρειαν (Γ, α).

Ἂν αὔτη τέμνῃ τὴν ἄλλην πλευρὰν εἴς τι σημεῖον Β, ἄγομεν τὴν ΓΒ καὶ σχηματίζομεν τὸ τρίγωνον ΑΓΒ, τὸ ὁποῖον προφανῶς εἶναι τὸ ζητούμενον.

Διερεύνησις. Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν, ἂν ἡ περιφέρεια (Γ, α) ἔχῃ μὲ τὴν ΑΨ, κοινὸν ἢ κοινὰ σημεῖα.

Ἂν δὲ ΓΔ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ Γ ἀπὸ τὴν ΑΨ, πρέπει νὰ εἶναι $\Gamma\Delta \leqslant \alpha$. Ἐξαρτᾶται δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν λύσεων καὶ ἐκ τοῦ εἴδους τῆς γωνίας Α. Διακρίνομεν λοιπὸν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις:

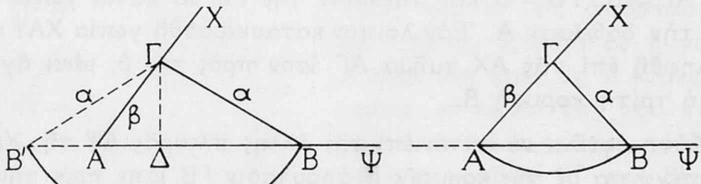
1ον. Ἂν $A \geqslant 1$ ὀρθ. (σχ 135 α′), ἡ Α εἶναι ἡ μεγαλυτέρα γωνία τοῦ τριγώνου καὶ ἑπομένως πρέπει νὰ εἶναι καὶ $\alpha > \beta$.



Σχ. 135 α′

Ἐπειδὴ δὲ τότε εἶναι $\beta \geqslant \Gamma\Delta$, θὰ εἶναι κατὰ μείζονα λόγον $\alpha > \Gamma\Delta$. Κατ' ἀκολουθίαν ἡ περιφέρεια ἔχει μὲ τὴν εὐθεῖαν ΑΨ δύο κοινὰ σημεῖα Β καὶ Β′ κείμενα ἑκατέρωθεν τοῦ Α, διότι τοῦτο κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου, ἐπειδὴ $\Gamma A < \alpha$.

Καὶ ἂν μὲν $A > 1$ ὀρθ., μόνον τὸ τρίγωνον ΑΓΒ ἔχει τὰ δοθέντα



(β′) (γ′)

Σχ. 135 β′ -

στοιχεῖα· ἂν δὲ $A = 1$ ὀρθ. ἀμφότερα τὰ τρίγωνα ΑΓΒ καὶ ΑΓΒ′ ἔχουσι τὰ δοθέντα στοιχεῖα, ἀλλὰ εἶναι ἴσα. Ἔχει λοιπὸν τὸ πρόβλημα μίαν λύσιν.

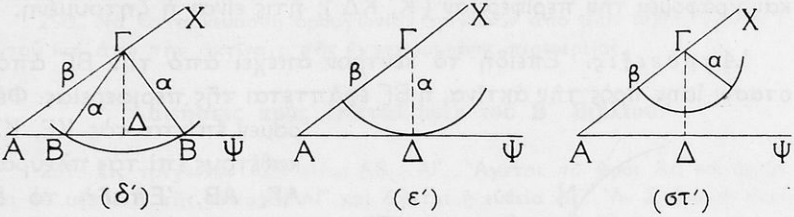
2ον. Ἂν $A < 1$ ὀρθ. εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι $\alpha > \beta$, $\alpha = \beta$ καὶ $\alpha < \beta$.

Ἂν $\alpha > \beta$ (σχ. 135 β′), ἡ περιφέρεια (Γ, α) ἔχει μὲ τὴν εὐθεῖαν Αψ δύο κοινὰ σημεῖα, ὧν μόνον τὸ ἓν κεῖται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Αψ. Ἔχει λοιπὸν τὸ πρόβλημα μίαν λύσιν.

Ἂν $\alpha = \beta$ (σχ. 135 γ′) ἡ περιφέρεια (Γ, α) τέμνει τὴν πλευρὰν Αψ, εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, τὸ δὲ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἂν $\alpha < \beta$ (σχ. 136 δ′, ε′, στ′), διακρίνομεν τρεῖς μερικωτέρας περιπτώσεις, καθ' ὅσον $\alpha > \Gamma\Delta$, $\alpha = \Gamma\Delta$ καὶ $\alpha < \Gamma\Delta$.

Ἂν $\alpha > \Gamma\Delta$, ἡ περιφέρεια (Γ, α) ἔχει μὲ τὴν Αψ δύο κοινὰ σημεῖα Β καὶ Β′ ἀμφότερα ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΨ κείμενα, διότι τὸ Α κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου (Γ, α), διότι εἶναι $\mathrm{A\Gamma} > \alpha$. Ἀμφότερα λοιπὸν



Σχ. 135 δ′ - στ′

τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒ′Γ ἔχουσι τὰ δοθέντα στοιχεῖα, ἤτοι τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις.

Ἂν $\alpha = \Gamma\Delta$, ἡ περιφέρεια (Γ, α) ἐφάπτεται τῆς πλευρᾶς ΑΨ εἰς τὸ Δ καὶ τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΑΔΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἂν $\alpha < \Gamma\Delta$, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

Ἀσκήσεις

284. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ καὶ ἀπὸ τὸ ὕψος ΑΔ αὐτοῦ.

285. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ ἀπὸ τὴν γωνίαν Β καὶ ἀπὸ τὰ ὕψη ΑΔ καὶ ΓΕ.

286. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΒΓ, τὴν γωνίαν Α καὶ τὸ ἄθροισμα $\mathrm{AB} + \mathrm{A\Gamma}$.

287. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἀπὸ τὴν γωνίαν Α καὶ ἀπὸ τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

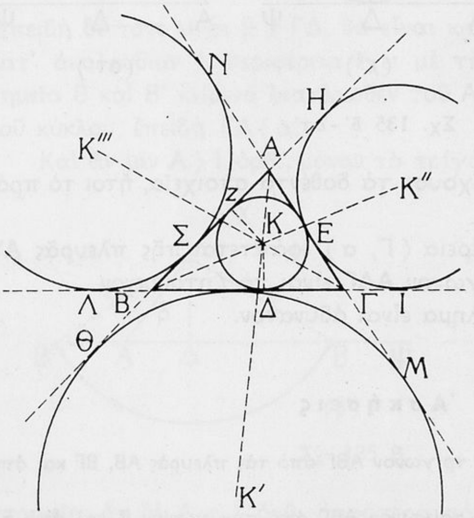
§ **177.** *Πρόβλημα IV.* **Εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ κύκλος** (σχ. 136).

Ἀνάλυσις. Ἂν Κ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου κύκλου καὶ Δ, Ε, Ζ τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν μὲ τὴν περιφέρειαν, θὰ εἶναι ΚΔ = ΚΕ = ΚΖ.

Ἐκ τῆς ΚΔ = ΚΖ ἕπεται ὅτι τὸ Κ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Β. Ἐκ δὲ τῆς ΚΔ = ΚΕ ἕπεται ὅτι τὸ Κ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς Γ.

Σύνθεσις. Διχοτομοῦμεν τὰς γωνίας Β καὶ Γ τοῦ δοθέντος τριγώνου καὶ ἔστω Κ ἡ τομὴ τῶν διχοτόμων τούτων (§ 107). Γράφομεν τὴν ἀπόστασιν ΚΔ τοῦ Κ ἀπὸ μίαν πλευρὰν π.χ. τὴν ΒΓ καὶ γράφομεν τὴν περιφέρειαν (Κ, ΚΔ), ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὸ κέντρον ἀπέχει ἀπὸ τὴν ΒΓ ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα, ἡ ΒΓ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας. Φέρομεν ἔπειτα τὰς ΚΕ, ΚΖ καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΓ, ΑΒ. Ἐπειδὴ τὸ Κ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς Β, εἶναι ΚΔ = ΚΖ. Ἡ πλευρὰ λοιπὸν ΑΒ ἐφάπτεται εἰς τὸ Ζ τῆς περιφερείας. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΓ ἐφάπτεται εἰς τὸ Ε τῆς περιφερείας ταύτης. Εἶναι λοιπὸν ὁ κύκλος Κ ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ τρίγωνον.



Σχ. 136

Διερεύνησις. Ἐπειδὴ αἱ διχοτόμοι παντὸς τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (§ 107), ὁ ὁρισμὸς τοῦ Κ εἶναι πάντοτε δυνατὸς κ.τ.λ. Ἔχει λοιπὸν τὸ πρόβλημα μίαν λύσιν.

Παρατηρήσεις. Ἡ διχοτόμος τῆς Α καὶ τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Β ἢ Γ τέμνονται εἰς σημεῖον Κ'. Τοῦτο εἶναι κέντρον περιφερείας, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῆς ΒΓ καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ. Ἡ περιφέρεια αὕτη εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς γωνίας Α καὶ παραπλεύρως ἀπὸ τὸ τρίγωνον. Διὰ τοῦτο λέγεται **παρεγγεγραμμένη περιφέρεια εἰς τὸ τρίγωνον.** Ὁμοίως ὁρίζομεν τὰ κέντρα Κ'', Κ''' δύο ἄλλων παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν.

Ἀσκήσεις

288. Εἰς δοθεῖσαν γωνίαν Α νὰ ἐγγραφῇ κύκλος, ὁ ὁποῖος νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν ἀκτῖνα ρ.

289. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἀπὸ τὴν γωνίαν Β καὶ ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα ρ τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας.

290. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἀπὸ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν Γ αὐτοῦ καὶ ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα ρ τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Β' Βιβλίου.

291. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ΑΒ < ΑΓ. Ἄγεται τὸ ὕψος ΑΔ καὶ ὁρίζεται τὸ μέσον Ε τῆς πλευρᾶς ΑΓ καὶ ἄγεται ἡ εὐθεῖα ΔΕ. Ἂν Ζ εἶναι ἡ τομὴ ταύτης καὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι $\widehat{ΒΖΔ} = \widehat{Β} - \widehat{Γ}$.

292. Ἂν Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι:

α') Ἂν ΑΜ > ΒΜ, θὰ εἶναι Α < 1 ὀρθ.
β') » ΑΜ < ΒΜ, θὰ εἶναι Α > 1 ὀρθ.
γ') » ΑΜ = ΒΜ, » » Α = 1 ὀρθ.

293. Νὰ διατυπώσητε καὶ νὰ ἀποδείξητε τὰς ἀντιστρόφους τῶν προηγουμένων σχέσεων.

294. Εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ περιγράψητε περιφέρειαν Κ. Νὰ φέρητε τὸ ὕψος ΑΕ, τὴν διχοτόμον ΑΔ καὶ τὴν διάμετρον ΑΚΗ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι ἡ ΑΔ διχοτομεῖ καὶ τὴν γωνίαν ΕΑΗ.

295. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ φέρητε δύο καθέτους χορδὰς καὶ τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι, ἂν αἱ ἐφαπτόμεναι αὗται σχηματίζουσι τετράπλευρον, τοῦτο εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

296. Ἀπὸ ἓν σημεῖον Α περιφερείας νὰ φέρητε τρεῖς χορδὰς ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ. Ἂν γράψωμεν τὰς περιφερείας, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι διαμέτρους τὰς χορδὰς ταύτας καὶ Ε,Ζ,Η, εἶναι τὰ ἄλλα κοινὰ σημεῖα αὐτῶν ἀνὰ δύο λαμβανομένων, νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὰ Ε,Ζ,Η κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

297. Εἰς δοθέντα κύκλον Ο νὰ ἐγγράψητε τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ νὰ ὁρίσητε τὸ συμμετρικὸν Α' τῆς κορυφῆς Α πρὸς κέντρον Ο. Ἔπειτα δὲ νὰ ἀναγνωρίσητε τὴν εὐθεῖαν τοῦ Simson, ἥτις ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὸ Α.

298. Ἀπὸ τὰ σημεῖα δοθείσης περιφερείας Κ ἄγονται εὐθύγραμμα τμήματα ἴσα, παράλληλα καὶ ὁμόρροπα πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα τ. Νὰ εὕρητε τὸν γεωμ. τόπον τῶν ἄκρων τῶν τοιούτων τμημάτων.

299. Δίδεται κύκλος Κ καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον Β ἐπὶ τῆς περιφερείας Κ καὶ τὸ μέσον Μ τοῦ τμήματος ΑΒ. Νὰ εὕρητε δὲ τὸν γεωμ. τόπον, τὸν ὁποῖον γράφει τὸ Μ, ἂν τὸ Β γράφῃ τὴν περιφέρειαν Κ.

300. Ἓν σταθερὸν εὐθ. τμῆμα τ κινεῖται οὕτως, ὥστε τὰ ἄκρα του εὑρίσκονται πάντοτε ἐπὶ καθέτων εὐθειῶν. Νὰ εὕρητε τὸν γεωμ. τόπον τῶν θέσεων, ἀπὸ τὰς ὁποίας διέρχεται τὸ μέσον αὐτοῦ.

301. Ἀπὸ ἓν σημεῖον Μ περιφερείας Ο νὰ φέρητε κάθετον ΜΕ ἐπὶ ὡρισμένην διάμετρον ΑΒ. Εἰς δὲ τὴν ἀκτῖνα ΟΜ νὰ ὁρίσητε τμῆμα ΟΝ ἴσον πρὸς τὸ ΜΕ. Νὰ εὕρητε δὲ τὸν γεωμ. τόπον, τὸν ὁποῖον γράφει τὸ Ν, ἂν τὸ Μ γράφῃ τὴν περιφέρειαν Ο.

302. Δίδεται περιφέρεια (Κ, R), εὐθεῖα Ε καὶ εὐθ. τμῆμα τ. Νὰ γράψητε περιφέρειαν μὲ ἀκτῖνα τ, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτηται τῆς Ε καὶ τῆς περιφερείας Κ ἐκτός.

303. Δίδονται δύο περιφέρειαι καὶ εὐθ. τμῆμα ρ. Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ ἀκτῖνα ρ, ἥτις νὰ ἐφάπτηται τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν ἐκτός.

304. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῆς ἀκτῖνος R τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας, τοῦ ὕψους ΑΕ καὶ τῆς διχοτόμου ΑΔ.

305. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ, ἐκ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, τῆς γωνίας Α καὶ τῆς ἀκτῖνος ρ τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας.

306. Νὰ κατασκευάσητε ὀρθογώνιον ἀπὸ τὴν περίμετρον καὶ ἀπὸ τὴν διαγώνιον αὐτοῦ.

307. Νὰ κατασκευάσητε τραπέζιον ἀπὸ τὰς βάσεις του καὶ ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα R τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας Κ.

308. Δίδονται δύο περιφέρειαι τεμνόμεναι εἰς σημεῖα Α καὶ Α΄ Νὰ φέρητε κοινὴν τέμνουσαν ΓΑΒ ἴσην πρὸς τὸ δοθὲν εὐθ. τμῆμα τ.

309. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι Ε, Ε΄, ἓν σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτῶν καὶ εὐθ. τμῆμα τ. Νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τὸ Α εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ ἐντὸς τῶν παραλλήλων τμῆμα νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ τ.

310. Δίδεται κύκλος (Κ,R) καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ φέρητε ἀπὸ τὸ Α τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν καὶ τοιαύτην, ὥστε τὸ ἐκτὸς τοῦ κύκλου τμῆμα ΑΒ αὐτῆς νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐντὸς ΒΓ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

1. ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

§ 178. Τί εἶναι ποσὰ καὶ ποῖα τὰ εἴδη αὐτῶν. Γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν Ἀριθμητικὴν ὅτι:

Ποσὸν λέγεται πᾶν ὅ,τι ἐπιδέχεται αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν.

Π. χ. εἷς ὅμιλος μαθητῶν, μία ἐπιφάνεια, μία γραμμὴ κ.τ.λ. εἶναι ποσά.

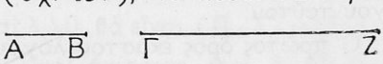
Ἓν ποσὸν λέγεται **πλῆθος,** ἂν ἀποτελῆται ἀπὸ μέρη ἀνεξάρτητα ἀλλήλων καὶ αὐτοτελῆ. Π. χ. μία ποίμνη προβάτων, μία δενδροστοιχία εἶναι πλήθη.

Ἓν ποσὸν λέγεται **συνεχές,** ἂν δὲν ἀποτελῆται ἀπὸ μέρη ἀνεξάρτητα ἀλλήλων. Π. χ. αἱ γραμμαί, αἱ ἐπιφάνειαι, ὁ χρόνος εἶναι συνεχῆ ποσά.

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι ἕκαστον συνεχὲς ποσὸν δύναται νὰ νοηθῇ διῃρημένον εἰς μέρη. Ταῦτα ὅμως συνέχονται πρὸς ἄλληλα καὶ ἀποτελοῦσιν ἓν ὅλον.

§ 179. Τί λέγεται γινόμενον ποσοῦ ἐπὶ θετικὸν ἀριθμόν. Ἂν εἶναι ΓΖ = ΑΒ + ΑΒ + ΑΒ (σχ. 137), τὸ ποσὸν ΓΖ λέγεται **γινόμενον** τοῦ ΑΒ ἐπὶ τὸν 3· εἶναι δὲ

$$3 = 1 + 1 + 1.$$



Σχ. 137

Ὁμοίως, ἂν δύο γωνίαι (ἢ τόξα) ω καὶ θ συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως $\omega = \theta + \theta + \frac{\theta}{10} + \frac{5\theta}{100}$, τὴν γωνίαν (ἢ τὸ τόξον) ω ἐκαλέσαμεν (§ 57) γινόμενον τῆς γωνίας (ἢ τοῦ τόξου) θ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν $1 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{5}{100} = 2{,}15$. Ὥστε:

Γινόμενον ποσοῦ ἐπὶ θετικὸν ἀριθμὸν λέγεται τὸ ποσόν, τὸ

ὁποῖον γίνεται ἀπὸ αὐτὸ καὶ ἀπὸ τὰ μέρη αὐτοῦ, ὅπως ὁ ἀριθμὸς γίνεται ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα καὶ ἀπὸ τὰ μέρη αὐτῆς.

Ἀσκήσεις

311. Νὰ ὁρίσητε εἰς μίαν περιφέρειαν ἓν τόξον μικρότερον τεταρτημορίου καὶ νὰ σχηματίσητε τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ 2 καὶ ἐπὶ $3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$.

312. Νὰ γράψητε μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ω καὶ νὰ σχηματίσητε τὸ γινόμενον αὐτῆς ἐπὶ $1\frac{1}{2}$ ἢ ἐπὶ $\frac{3}{4}$.

§ 180. Τί λέγεται λόγος ποσοῦ πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς ποσόν. Τί εἶναι μέτρησις καὶ μέτρον ποσοῦ. Ἐπειδὴ ΓΖ = ΑΒ · 3, ὁ ἀριθμὸς 3 λέγεται λόγος τοῦ ΓΖ πρὸς τὸ ΑΒ. Ὁμοίως, ἐπειδὴ $\omega = \theta \cdot 2{,}15$, ὁ ἀριθμὸς 2,15 λέγεται λόγος τῆς γωνίας ω πρὸς τὴν γωνίαν θ. Ὥστε:

Λόγος ποσοῦ πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς ποσὸν λέγεται ὁ ἀριθμός, μὲ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ δεύτερον ποσόν, διὰ νὰ προκύψῃ τὸ πρῶτον.

Ὁ λόγος ποσοῦ Π πρὸς ἄλλο Π′ παρίσταται οὕτω: Π : Π′ ἢ καὶ οὕτω: $\frac{\Pi}{\Pi'}$.

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι ὁ λόγος οὗτος γίνεται ἀπὸ τὴν μονάδα καὶ ἀπὸ τὰ μέρη αὐτῆς, ὅπως τὸ πρῶτον ποσὸν γίνεται ἀπὸ τὸ δεύτερον καὶ ἀπὸ τὰ μέρη αὐτοῦ.

Τὰ ποσά, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦσιν ἕνα λόγον, λέγονται **ὅροι** τοῦ λόγου τούτου.

Ὁ πρῶτος ὅρος ἑκάστου λόγου λέγεται **ἡγούμενος,** ὁ δὲ δεύτερος λέγεται **ἑπόμενος** ὅρος αὐτοῦ.

Ἂν τὸ ποσὸν ΑΒ (σχ. 137) ληφθῇ ὡς μονάς, ὁ λόγος $\frac{\Gamma Z}{AB}$ λέγεται **μέτρον** τοῦ ΓΖ. Ὥστε:

Μέτρον ἑνὸς ποσοῦ λέγεται ὁ λόγος αὐτοῦ πρὸς ὡρισμένον καὶ ὁμοειδὲς ποσόν, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς μονάς.

Τὸ μέτρον ποσοῦ Π παρίσταται συντόμως οὕτω: (Π).

Μέτρησις ποσοῦ λέγεται ἡ εὕρεσις τοῦ μέτρου αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις

313. Νὰ ὁρίσητε τὸν λόγον μιᾶς περιφερείας πρὸς ἓν τεταρτημόριον αὐτῆς.

314. Νὰ ὁρίσητε τὸν λόγον ἑνὸς ρόμβου πρὸς ἓν ἀπὸ τὰ τρίγωνα, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ὑπὸ τῶν διαγωνίων του.

315. Νὰ ὁρίσητε τὸν λόγον μιᾶς ἐγγεγραμμένης γωνίας πρὸς τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν, ἡ ὁποία βαίνει εἰς τὸ αὐτὸ τόξον.

3. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΜΕΤΡΩΝ ΤΩΝ ΠΟΣΩΝ

§ 181. *Θεώρημα I.* **Τὸ μέτρον ἑνὸς ποσοῦ εἶναι ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν μερῶν αὐτοῦ, ἂν μετρηθῶσι μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.**

Ἂν π.χ. ἓν ποσὸν Π ἀποτελῆται ἀπὸ μέρη Α καὶ Β καὶ Μ εἶναι ἡ μονάς, μὲ τὴν ὁποίαν μετροῦμεν αὐτά, θὰ εἶναι

$$(\Pi) = (A) + (B).$$

Ἀπόδειξις. Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι $(A) = A : M = \lambda$ καὶ $(B) = B : M = \lambda'$, θὰ εἶναι $A = M \cdot \lambda$, $B = M \cdot \lambda'$. Καὶ ἑπομένως: $\Pi = A + B = M \cdot (\lambda + \lambda')$. Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι:
$(\Pi) = \Pi : M = \lambda + \lambda' = (A) + (B)$, ὅ.ἔ.δ.

Πόρισμα I. **Τὰ ἴσα ἢ ἰσοδύναμα σχήματα ἔχουσι τὸ αὐτὸ μέτρον, ἂν μετρηθῶσι μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα. Καὶ ἀντιστρόφως.**

Πόρισμα II. **Τὸ μέτρον τῆς διαφορᾶς δύο ποσῶν ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἀντιστοίχων μέτρων αὐτῶν.**

§ 182. *Θεώρημα II.* **Ἂν ἓν ποσὸν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ θετικὸν ἀριθμὸν καὶ τὸ μέτρον αὐτοῦ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.**

Ἂν δηλ. Π εἶναι ἓν ποσὸν καὶ $\lambda > 0$, θὰ εἶναι $(\Pi \cdot \lambda) = (\Pi) \cdot \lambda$.

Ἀπόδειξις. α΄) Ἂν ὁ λ εἶναι ἀκέραιος, π.χ. 3, θὰ εἶναι: $\Pi \cdot 3 = \Pi + \Pi + \Pi$ καὶ κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα θὰ εἶναι

$$(\Pi \cdot 3) = (\Pi) + (\Pi) + (\Pi) = (\Pi) \cdot 3.$$

β΄) Ἂν λ εἶναι κλασματικὴ μονάς, π.χ. $\frac{1}{4}$, θὰ εἶναι

$\Pi = \left. \Pi \cdot \frac{1}{4} \right| \cdot 4$ καὶ κατὰ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν θὰ εἶναι:

$$(\Pi) = \left(\Pi \cdot \frac{1}{4} \right) \cdot 4, \text{ ὅθεν } \left(\Pi \cdot \frac{1}{4} \right) = (\Pi) \cdot \frac{1}{4}.$$

γ΄) Ἂν $\lambda = 1{,}21\ldots$, θὰ εἶναι:

$$\Pi \cdot 1{,}21\ldots = \Pi + \frac{\Pi}{10} + \frac{\Pi}{10} + \frac{\Pi}{100} + \ldots$$

Ἑπομένως (§ 181)

$$(\Pi \cdot 1{,}21\ldots) = (\Pi) + \left(\frac{\Pi}{10}\right) + \left(\frac{\Pi}{10}\right) + \left(\frac{\Pi}{100}\right) + \ldots$$

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν εἶναι

$$\left(\frac{\Pi}{10}\right) = (\Pi)\,\frac{1}{10}, \quad \left(\frac{\Pi}{100}\right) = (\Pi)\cdot\frac{1}{100}, \text{ ἕπεται ὅτι}$$

$$(\Pi \cdot 1{,}21\ldots) = (\Pi) + (\Pi)\cdot\frac{1}{10} + (\Pi)\cdot\frac{1}{10} + (\Pi)\cdot\frac{1}{100} + \ldots$$

ἢ $(\Pi \cdot 1{,}21\ldots) = (\Pi)\cdot 1{,}21\ldots$ Ὥστε δι' οἱανδήποτε θετικὴν τιμὴν τοῦ λ εἶναι $(\Pi \cdot \lambda) = (\Pi)\cdot\lambda$, ὅ.ἔ.δ.

Πόρισμα. **Ὁ λόγος ποσοῦ πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς ποσὸν ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν μέτρων αὐτῶν, ἂν μετρηθῶσι μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.**

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν $\Pi : P = \lambda$, θὰ εἶναι $\Pi = P \cdot \lambda$ καὶ ἑπομένως $(\Pi) = (P \cdot \lambda) = (P)\cdot\lambda$. Ἐκ ταύτης δὲ βλέπομεν ὅτι:

$$(\Pi) : (P) = \lambda = \Pi : P.$$

§ 183. Τί εἶναι κοινὸν μέτρον δύο ποσῶν. Ποῖα λέγονται σύμμετρα καὶ ἀσύμμετρα ποσά. Ἂν $\Pi : M = \lambda$, $P : M = \lambda'$, οἱ δὲ ἀριθμοὶ λ καὶ λ΄ εἶναι ἀκέραιοι, τὸ ποσὸν Μ λέγεται **κοινὸν μέτρον** τῶν ποσῶν Π καὶ Ρ. Ταῦτα δὲ τὰ ποσὰ λέγονται **σύμμετρα** ποσά. Ὥστε:

Ἓν ποσὸν λέγεται κοινὸν μέτρον ἄλλων, ἂν οἱ λόγοι ἑκάστου τούτων πρὸς ἐκεῖνο εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Δύο ὁμοειδῆ ποσὰ λέγονται σύμμετρα ποσά, ἂν ἔχωσι κοινὸν μέτρον.

Δύο δὲ ὁμοειδῆ ποσὰ λέγονται ἀσύμμετρα, ἂν δὲν ἔχωσι κοινὸν μέτρον.

Σημείωσις. Βραδύτερον θὰ γνωρίσωμεν ἀσύμμετρα ποσά.

§ 184. Τί λέγεται μῆκος εὐθ. τμήματος καὶ ποῖαι αἱ συνηθέστεραι μονάδες μήκους. Τὸ μέτρον εὐθ. τμήματος λέγεται **μῆκος**

αὐτοῦ. Αἱ δὲ διάφοροι μονάδες, τὰς ὁποίας μεταχειριζόμεθα διὰ τὴν μέτρησιν τῶν γραμμῶν, λέγονται **μονάδες μήκους**.

Ἀπὸ τὴν Ἀριθμητικὴν καὶ ἀπὸ τὴν Πρακτικὴν Γεωμετρίαν γνωρίζομεν, ὅτι συνηθεστέρα μονὰς μήκους εἶναι τὸ **μέτρον** ἢ ὁ **βασιλικὸς πῆχυς** μὲ τὰ πολλαπλάσια καὶ ὑποπολλαπλάσια αὐτοῦ.

Πολλαπλάσια δὲ τοῦ μέτρου εἶναι τὸ **στάδιον** ἢ **χιλιόμετρον** καὶ τὸ **μυριάμετρον** = 10 χιλμ.

Ὑποπολλαπλάσια δὲ τοῦ μέτρου εἶναι ἡ **παλάμη,** ὁ **δάκτυλος** καὶ ἡ **γραμμή.**

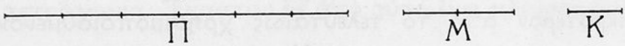
Καὶ τὸ μέτρον πάσης ἄλλης γραμμῆς, ἡ ὁποία ἐμετρήθη μὲ μίαν μονάδα μήκους, λέγεται ἐπίσης **μῆκος** τῆς γραμμῆς ταύτης.

Γεννᾶται τώρα ἡ ἀπορία: Τί εἴδους ἀριθμὸς δύναται νὰ εἶναι τὸ μέτρον ἑνὸς εὐθ. τμήματος.

Τὴν ἀπορίαν ταύτην λύουσι τὰ ἑπόμενα θεωρήματα.

§ 185. *Θεώρημα Ι.* **Ἂν ἓν εὐθ. τμῆμα εἶναι σύμμετρον πρὸς τὴν μονάδα, τὸ μέτρον αὐτοῦ εἶναι ἀκέραιος ἢ κλασματικός, δηλ. σύμμετρος ἀριθμός. Καὶ ἀντιστρόφως.**

Ἀπόδειξις. Ἔστω Π ἓν εὐθ. τμῆμα, Μ ἡ μονὰς τοῦ μήκους καὶ Κ κοινὸν μέτρον τῶν Π καὶ Μ (σχ. 138). Ἂν ὑποθέσωμεν



Σχ. 138

ὅτι Π : Κ = μ καὶ Μ : Κ = ν, οἱ ἀριθμοὶ μ καὶ ν εἶναι ἀκέραιοι (§ 183). Ἐπειδὴ δὲ ἀπὸ τὴν Μ : Κ = ν προκύπτει ὅτι $K = M \cdot \frac{1}{\nu}$, ἀπὸ τὴν ἰσότητα Π : Κ = μ ἕπεται ὅτι $\Pi = \frac{M}{\nu} \cdot \mu$ καὶ ἑπομένως $\Pi : M = \frac{\mu}{\nu}$ ἢ $(\Pi) = \frac{\mu}{\nu}$.

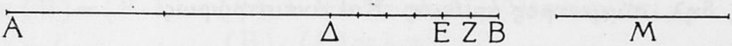
Ἂν ὁ μ εἶναι διαιρετὸς ὑπὸ τοῦ ν, ὁ ἀριθμὸς $\frac{\mu}{\nu}$ θὰ εἶναι ἀκέραιος· ἄλλως οὗτος θὰ εἶναι κλάσμα. ὅ.ἔ.δ.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω ὅτι $(\Pi) = \frac{\mu}{\nu}$ καὶ μ, ν ἀκέραιοι, ἑπομένως $\frac{\mu}{\nu}$ ἀκέραιος ἢ κλάσμα. Ἂν Μ εἶναι ἡ μονὰς μήκους, θὰ εἶναι $(\Pi) = \Pi : M = \frac{\mu}{\nu}$ καὶ ἑπομένως $\Pi = \frac{M}{\nu}\mu$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ $M = \frac{M}{\nu}\cdot\nu$, ἕπεται ὅτι τὸ ποσὸν $\frac{M}{\nu}$ εἶναι κοινὸν μέτρον τῶν Π καὶ M, τὸ δὲ Π εἶναι σύμμετρον πρὸς τὴν μονάδα M.

§ **186.** *Θεώρημα ΙΙ.* **Ἂν ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα εἶναι ἀσύμμετρον πρὸς τὴν μονάδα, τὸ μέτρον αὐτοῦ εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός. Καὶ ἀντιστρόφως.**

Ἀπόδειξις. Ἔστω AB ἓν εὐθ. τμῆμα ἀσύμμετρον πρὸς τὴν μονάδα M (σχ. 139).

Ἂς ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι ἡ μονὰς M χωρεῖ εἰς τὸ AB δύο φορὰς καὶ μένει ἓν τμῆμα $\Delta B < M$. Εἰς τὸ τμῆμα ΔΒ χωρεῖ τὸ $\frac{M}{10}$, ἔστω 4 φορὰς καὶ μένει ἓν τμῆμα $EB < \frac{M}{10}$. Εἰς τὸ EB χωρεῖ τὸ $\frac{M}{100}$ π. χ. 7 φορὰς καὶ μένει ἓν μέρος $ZB < \frac{M}{100}$.



Σχ. 139

Ἂν ἐξακολουθήσωμεν οὕτω, βλέπομεν ὅτι πάντοτε μένει ἓν μέρος μικρότερον ἀπὸ τὸ τελευταίως χρησιμοποιούμενον μέρος τῆς μονάδος M. Διότι, ἂν π. χ. τὸ $\frac{M}{100}$ ἐχώρει εἰς τὸ EB ἀκριβῶς 7 φοράς, θὰ ἦτο $(AB) = (A\Delta) + (\Delta E) + (EB) = 2{,}47$, τὸ δὲ AB θὰ ἦτο σύμμετρον πρὸς τὴν μονάδα M (§ 185). Τοῦτο δὲ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

Θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ μῆκος τοῦ AB, ἀριθμὸς 2,47 . . . μὲ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία. Δὲν εἶναι δὲ ταῦτα περιοδικά, διότι ἄλλως ὁ ἀριθμὸς 2,47 . . . θὰ ἦτο ἴσος πρὸς ἓν κλάσμα καὶ τὰ τμήματα AB καὶ M θὰ ἦσαν σύμμετρα, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Εἶναι λοιπὸν ὁ 2,47 . . . , ἤτοι τὸ μέτρον τοῦ AB, ἀσύμμετρος ἀριθμός, ὅ.ἔ.δ.

Τὸ ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Τὰ θεωρήματα ταῦτα ἀληθεύουσι καὶ ἂν Π εἶναι τόξον ἢ γωνία ἢ τυχὸν ἄλλο ποσόν. Ἀποδεικνύονται δὲ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

Ἐκ τῆς ἀληθείας δὲ τούτων καὶ τῶν ὅρων σύμμετρα καὶ ἀσύμμετρα ποσὰ προῆλθον καὶ οἱ ὅροι σύμμετροι καὶ ἀσύμμετροι ἀριθμοί.

§ **187. Ποῖαι εἶναι αἱ μονάδες τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τί λέγεται ἐμβαδὸν ἐπιφανείας.** Ἀπὸ τὴν Πρακτικὴν Γεωμετρίαν γνωρίζομεν ὅτι :

Ὡς μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν λαμβάνεται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τετραγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν τὴν μονάδα μήκους.

Οὕτως, ἂν ὡς μονὰς μήκους ληφθῇ τὸ μέτρον ἢ ἡ παλάμη ἢ ὁ δάκτυλος ἢ ἡ γραμμή, ἀντίστοιχος μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν θὰ εἶναι τὸ τετράγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν ἓν μέτρον ἢ μίαν παλάμην κ.τ.λ.

Λέγονται δὲ τὰ τετράγωνα ταῦτα κατὰ σειρὰν **τετραγωνικὸν μέτρον, τετραγωνικὴ παλάμη, τετραγωνικὸς δάκτυλος, τετραγωνικὴ γραμμή**.

Ἂν διαιρέσωμεν εἰς 10 ἴσα μέρη δύο προσκειμένας πλευρὰς τοῦ τετρ. μέτρου καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἑκατέρας φέρωμεν εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὴν ἄλλην διαιροῦμεν τὸ τετρ. μέτρον εἰς 100 τετράγωνα. Ἕκαστον δὲ ἀπὸ αὐτὰ ἔχει πλευρὰν μιᾶς παλάμης.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι τὸ τετραγωνικὸν μέτρον ἔχει 100 τετραγωνικὰς παλάμας.

Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι μία τετ. παλάμη ἔχει 100 τετ. δακτύλους καὶ εἷς τετ. δάκτυλος ἔχει 100 τετ. γραμμάς. Κατὰ ταῦτα :

1 τετ. μέτ = 100 τετ. παλ. = 10.000 τετ. δακ. = 1000000 τ. γραμ.
1 τετ. παλ. = 100 τετ. δακ. = 10000 τ. γραμ.
1 τετ. δακ. = 100 τ. γραμ.

Ἂν ὡς μονὰς μήκους ληφθῇ τὸ χιλιόμετρον, ἀντίστοιχος μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν θὰ εἶναι τὸ **τετραγωνικὸν χιλιόμετρον.** Εἶναι δὲ τοῦτο τετράγωνον μὲ πλευρὰν 1000 μέτρων καὶ περιέχει :

1000 1000 = 1000000 τετ. μέτρα

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ἀγρῶν καὶ ἀμπέλων χρησιμοποιοῦμεν τὸ **βασιλικὸν στρέμμα,** τὸ ὁποῖον ἔχει 1000 τετρ. μέτρα καὶ τὸ **παλαιὸν στρέμμα** τὸ ὁποῖον ἔχει 1270 τετ. μέτρα.

Διὰ δὲ τὴν μέτρησιν τῶν οἰκοπέδων, πλὴν τοῦ τετ. μέτρου χρησιμοποιοῦμεν ἐνίοτε καὶ τὸν **τεκτονικὸν τετραγωνικὸν πῆχυν.** Οὗτος εἶναι τετράγωνον μὲ πλευρὰν ἑνὸς τεκτονικοῦ πήχεως, ἤτοι $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου. Εἶναι δὲ 1 τετ. τεκ. πῆχυς $=\frac{9}{16}$ τοῦ τετρ. μέτρου.

Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας λέγεται τὸ μέτρον αὐτῆς, ἤτοι ὁ λόγος αὐτῆς πρὸς τὴν μονάδα τῶν ἐπιφανειῶν. Ἂν π.χ. Ε εἶναι τυχοῦσα ἐπιφάνεια, Μ ἡ μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν καὶ Ε : Μ = 3,25, ὁ ἀριθμὸς 3,25 λέγεται ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας Ε.

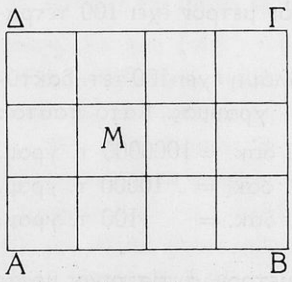
Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἐπιφανείας γίνεται ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα καὶ ἀπὸ τὰ μέρη αὐτῆς, ὅπως ἡ ἐπιφάνεια αὕτη γίνεται ἀπὸ τὴν μονάδα Μ τῶν ἐπιφανειῶν καὶ ἀπὸ τὰ μέρη αὐτῆς.

Διὰ τὸν λόγον τοῦτον τὸ ἐμβαδὸν λαμβάνει τὸ ὄνομα τῆς μονάδος Μ. Ἂν π.χ. Μ = 1 τετ. μέτρον, τὸ ἐμβαδὸν τῆς προηγουμένης ἐπιφανείας Ε εἶναι 3,25 τετ. μέτρα.

3. ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

1. ΕΜΒΑΔΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

§ **188.** *Πρόβλημα I.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου, ἂν γνωρίζωμεν τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.**



Σχ. 140

Λύσις α΄) Ἔστω ΑΒΓΔ (σχ. 140) ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον ἔχει (ΑΒ) = 4 μέτρα καὶ (ΑΔ) = 3 μέτρα.

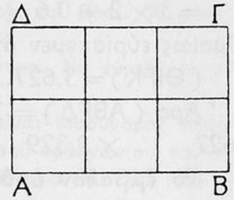
Τοῦτο διαιρεῖται εὐκόλως εἰς 4×3, ἤτοι 12 τετράγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι πλευρὰν 1 μέτρου.

Εἶναι λοιπὸν $(ΑΒΓΔ) = 4 \times 3 = 12$ τετραγωνικὰ μέτρα.

β΄) Ἔστω ἄλλο ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ (σχ. 141), τὸ ὁποῖον ἔχει $(ΑΒ) = \frac{3}{4}$ μέτρου καὶ $(ΑΔ) = \frac{2}{3}$ μέτρου.

Διαιροῦμεν τὴν ΑΒ εἰς 3, τὴν δὲ ΑΔ εἰς 2 ἴσα μέρη καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἕκαστον ἀπὸ αὐτὰ εἶναι $\frac{1}{4}$ μέτρου.

Εὐκόλως ἔπειτα διαιροῦμεν τὸ ΑΒΓΔ εἰς 3×2, ἤτοι 6 τετράγωνα μὲ πλευρὰν $\frac{1}{4}$ μέτ. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον τὸ τετραγωνικὸν μέτρον διαιρεῖται εἰς 4×4, ἤτοι 16 τοιαῦτα τετράγωνα, ἕπεται ὅτι ἕκαστον τούτων εἶναι $\frac{1}{16}$ τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου.

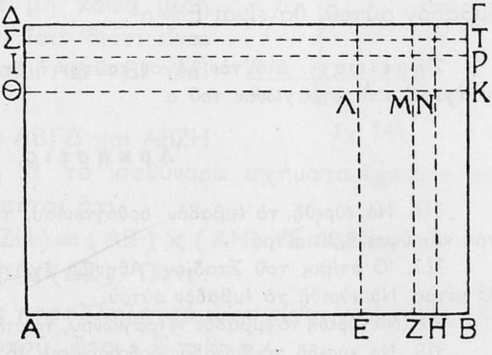


Σχ. 141

Εἶναι λοιπὸν $(ΑΒΓΔ) = \frac{1}{16} \cdot 6 = \frac{6}{16}$ τετραγωνικοῦ μέτρου ἢ $(ΑΒΓΔ) = \frac{1}{16} \cdot 2 \cdot 3 = \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{4}$ τετραγωνικοῦ μέτρου.

γ΄) Ἂν $(ΑΒ) = \frac{2}{3}$ μέτ. καὶ $(ΑΔ) = \frac{3}{4}$ μέτ. τρέπομεν τὰ κλάσματα ταῦτα εἰς ὁμώνυμα καὶ εὑρίσκομεν ὅτι $(ΑΒ) = \frac{8}{12}$ μέτρου καὶ $(ΑΔ) = \frac{9}{12}$ μέτρου. Κατὰ δὲ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν εἶναι $(ΑΒΓΔ) = \frac{8}{12} \cdot \frac{9}{12} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$ τετ. μέτρ.

δ΄) Ἔστω τέλος ἄλλο ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ (σχ. 142), τὸ ὁποῖον ἔχει $(ΑΒ) = 3{,}627\ .\ .\ .$ μέτρ. καὶ $(ΑΔ) = 2{,}329\ .\ .$ μέτρ. Ἐπὶ τῆς ΑΒ ὁρίζομεν διαδοχικὰ τμήματα ΑΕ, ΕΖ, ΖΗ . . τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι $(ΑΕ) = 3$ μέτ., $(ΕΖ) = 0{,}6$ μέτ., $(ΖΗ) = 0{,}02$ μέτ... Ὁμοίως ἐπὶ τῆς ΑΔ ὁρίζομεν διαδοχικὰ τμήματα ΑΘ, ΘΙ, ΙΣ, . . . τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι $(ΑΘ) = 2$ μέτ. $(ΘΙ) = 0{,}3$ μέτ. $(ΙΣ) = 0{,}02$ μέτ... Ἔπειτα φέρομεν ἀπὸ τὰ σημεῖα. Ε, Ζ, Η, . . . παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΔ,



Σχ. 142

ἀπὸ δὲ τὰ Θ, Ι, Σ. ... παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΒ. Οὕτω βλέπομεν ὅτι:

$$(ΑΘΚΒ) = (ΑΘΛΕ) + (ΕΛΜΖ) + (ΖΜΝΗ) + \ldots$$
$$= 3 \times 2 + 0{,}6 \times 2 + 0{,}02 \times 2 + .. = 3{,}627.... \times 2.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι:

$$(ΘΙΡΚ) = 3{,}627... \times 0{,}3, \ (ΙΣΤΡ) = 3{,}627 \times 0{,}02 \text{ κτλ.}$$

Ἄρα $(ΑΒΓΔ) = 3{,}627 ... \times (2 + 0{,}3 + 0{,}02 + ...) =$ $3{,}627 \ . \ . \ . \times 2{,}329...$ τετρ. μέτρ. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Γενικῶς δηλ. ἂν β εἶναι τὸ μῆκος τῆς βάσεως, υ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους καὶ Ε τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου, θὰ εἶναι $Ε = β \cdot υ$.

Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος πρέπει νὰ μετρῶνται μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα μήκους, τὸ δὲ γινόμενον αὐτῶν δηλοῖ μονάδας ἐπιφανειῶν ἀντιστοίχους πρὸς ταύτην. Ἂν π.χ. β καὶ υ παριστῶσι μέτρα ἢ παλάμας, τὸ $β \cdot υ$ παριστᾷ ἀντιστοίχως τετ. μέτρα ἢ τετ. παλάμας.

Πόρισμα. **Τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου εἶναι γινόμενον τοῦ μήκους τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του.**

Ἂν δηλ. α εἶναι τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τετραγώνου καὶ Ε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ, θὰ εἶναι $Ε = α^2$.

Σημείωσις. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον ἡ δευτέρα δύναμις παντὸς ἀριθμοῦ α λέγεται καὶ τετράγωνον τοῦ α.

Ἀσκήσεις

316. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν 5,20 μέτρα καὶ ὕψος 3,30 μέτρα.

317. Ὁ στίβος τοῦ Σταδίου Ἀθηνῶν ἔχει μῆκος 204 μέτρ. καὶ πλάτος 33 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

318. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν 5,40 μέτρα.

319. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν 45,50 μέτρα καὶ περίμετρον 150,76 μέτρα.

320. Ὁ Παρθενὼν ἔχει μῆκος 69,51 μέτρ. καὶ περίμετρον 200,74 μέτρ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

321. Τὸ Θησεῖον ἔχει πλάτος 13,72 μέτρ. καὶ περίμετρον 90,98 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δαπέδου αὐτοῦ.

322. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει περίμετρον 40,36 μέτρων.

323. Ἓν τετράγωνον ἔχει ἐμβαδὸν 14,0625 τετ. μέτρων. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ.

324. Ὀρθογώνιον ἔχει ἐμβαδὸν 450 τετ. μέτρα καὶ βάσιν 30 μέτρ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

325. Ἓν τετράγωνον ἔχει ἐμβαδὸν 81 τετ. μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου αὐτοῦ.

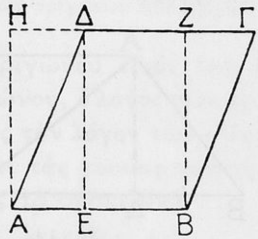
326. Ἓν ὀρθογώνιον ἔχει ὕψος 20 μέτρ. καὶ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τετράγωνον πλευρᾶς 32 μέτρων. Νὰ εὑρεθῇ ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου τούτου.

327. Μία οἰκοδέσποινα θέλει νὰ στρώσῃ μὲ τάπητα πλάτους 1,80 μέτρ. αἴθουσαν μήκους 4,30 μέτρ. καὶ πλάτους 4 μέτρ. Νὰ εὕρητε πόσα μέτρα ἀπὸ τὸν τάπητα αὐτὸν θὰ χρειασθῇ.

328. Εἷς ὀρθογώνιος διάδρομος ἔχει μῆκος 8 μέτρ. καὶ πλάτος 3 μέτρ. Εἶναι δὲ οὗτος ἐστρωμένος μὲ τετραγωνικὰς πλάκας πλευρᾶς 0,20 μέτρ. Νὰ εὕρητε πόσας πλάκας ἔχει.

§ 189. *Πρόβλημα II.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ἐκ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους αὐτοῦ** (σχ. 143).

Λύσις. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΗ καὶ ΒΖ καθέτους ἐπὶ τὴν ΔΓ. Οὕτω δὲ σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΖΗ.



Σχ. 143

Τοῦτο καὶ τὸ ΑΒΓΔ ἔχουσι κοινὸν μέρος τὸ ΑΒΖΔ, τὰ δὲ μὴ κοινὰ μέρη ΑΔΗ, ΒΓΖ εἶναι τρίγωνα ἴσα διότι εἶναι ὀρθ. τρίγωνα καὶ ἔχουσιν ΑΔ = ΒΓ καὶ ΑΗ = ΒΖ.

Τὰ σχήματα λοιπὸν ΑΒΓΔ καὶ ΑΒΖΗ εἶναι ἰσοδύναμα. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ἰσοδύναμα σχήματα ἔχουσιν ἴσα ἐμβαδὰ (181 Πόρ. 1), ἕπεται ὅτι

(ΑΒΓΔ) = (ΑΒΖΗ) = (ΑΒ) × (ΑΗ). Ἑπομένως

(ΑΒΓΔ) = (ΑΒ) × (ΔΕ). Ὥστε :

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς παραλληλογράμμου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ, ἤτοι : Ε = β · υ.

Πόρισμα I. **Ἂν δύο παραλληλόγραμμα ἔχωσιν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη, εἶναι ἴσα ἢ ἰσοδύναμα.**

Πόρισμα II. **Ἂν δύο παραλληλόγραμμα ἔχωσιν ἴσας βά-**

σεις, εἶναι ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν. Ἂν δὲ ἔχωσιν ἴσα ὕψη, εἶναι ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν.

Ἀσκήσεις

329. Ἓν παραλληλόγραμμον ἔχει βάσιν 54,36 μέτ. καὶ ὕψος ἴσον πρὸς τὸ τρίτον τῆς βάσεως αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

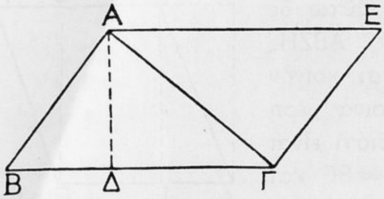
330. Εἷς ρόμβος ἔχει περίμετρον 149,40 μέτ. ἡ δὲ ἀπόστασις δύο παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι 30,10 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

331. Διάφορα ἰσοδύναμα παραλληλόγραμμα ἔχουσι κοινὴν βάσιν ὡρισμένην κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν ἀπέναντι αὐτῆς κορυφῶν αὐτῶν, ἂν δοθῇ ἓν ἀπὸ τὰ παραλληλόγραμμα ταῦτα.

II. ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

§ **190.** *Πρόβλημα III.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ΑΒΓ ἐκ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους αὐτοῦ** (σχ. 144).

Λύσις. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΕ καὶ ΓΕ παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τὴν ΒΓ καὶ ΑΒ. Οὕτω σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΕ, τὸ ὁποῖον ἔχει μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΔ.



Σχ. 144

Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΓΕ εἶναι ἴσα (§ 118), ἕπεται ὅτι τὸ ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓΕ. Ἑπομένως $(ΑΒΓ) = \frac{(ΑΒΓΕ)}{2}$ (1).

Ἐπειδὴ δὲ $(ΑΒΓΕ) = (ΒΓ) \times (ΑΔ)$, ἡ ἰσότης (1) γίνεται $(ΑΒΓ) = \frac{(ΒΓ) \times (ΑΔ)}{2}$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ, ἤτοι: $\mathbf{E = \frac{1}{2}}$ **β · υ.**

Πόρισμα I. **Τὰ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη, εἶναι ἴσα ἢ ἰσοδύναμα.**

Πόρισμα II. **Ἂν δύο τρίγωνα ἔχωσιν ἴσα ὕψη, εἶναι ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν. Ἂν δὲ ἔχωσιν ἴσας βάσεις, εἶναι ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.**

Ἀσκήσεις

332. Ἓν τρίγωνον ἔχει βάσιν 240 μέτρ. καὶ ὕψος 20 μέτρ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

333. Μία ἄμπελος ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν ἐμβαδὸν εἶναι 3 βασιλικὰ στρέμματα, ἡ δὲ μία τῶν καθέτων πλευρῶν 150 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς αὐτοῦ.

334. Ἓν τριγωνικὸν οἰκόπεδον ἔχει βάσιν 25,60 μέτ. καὶ ὕψος 13,20 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τοῦ οἰκοπέδου τούτου, ἂν ὁ τετρ. τεκτ. πῆχυς τιμᾶται 36,40 δραχ.

335. Νὰ συγκρίνητε τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα μία διάμεσος τριγώνου διαιρεῖ αὐτό.

336. Νὰ διαιρέσητε ἓν τρίγωνον εἰς τρία μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθειῶν ἀγομένων ἔκ τινος κορυφῆς αὐτοῦ.

337. Νὰ ἀποδειχθῶσι μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἐμβαδῶν αἱ ἀσκήσεις 147, 207 καὶ 208.

338. Νὰ ὁρίσητε ἐντὸς τριγώνου ἓν σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε αἱ ἐξ αὐτοῦ πρὸς τὰς κορυφὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι νὰ διαιρῶσιν αὐτὸ εἰς τρία ἰσοδύναμα τρίγωνα.

339. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἑνὸς παραλληλογράμμαυ ΑΒΓΔ νὰ ὁρίσητε τυχὸν σημεῖον Ε καὶ νὰ φέρητε τὰς εὐθείας ΑΕ καὶ ΔΕ. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ΑΒΕ καὶ ΔΕΓ.

§ 191. *Θεώρημα.* **Ἂν μία γωνία τριγώνου εἶναι ἴση ἢ παραπληρωματικὴ μιᾶς γωνίας ἄλλου τριγώνου, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων τούτων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν πλευρῶν, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὰς γωνίας ταύτας.**

Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι:

$\widehat{A} = \widehat{\Delta}$ (σχ. 145 α') ἢ $\widehat{A} + \widehat{\Delta} = 2$ ὀρθ. (σχ. 145 β'). Λέγω ὅτι:

$$\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΔΕΒ})} = \frac{(\text{ΑΒ}) \cdot (\text{ΑΓ})}{(\text{ΔΕ}) \cdot (\text{ΔΖ})}$$

Ἀπόδειξις: α') Θέτομεν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἰς τὴν θέσιν ΑΕ'Ζ' οὕτως, ὥστε ἡ γωνία Δ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς Α (σχ. 145α') καὶ ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΖ'.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΖ' ἔχουσι κοινὸν ὕψος τὴν ἀπόστασιν τῆς κορυφῆς Β ἀπὸ τῆς ΑΓ, θὰ εἶναι

$$\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΑΒΖ}')} = \frac{(\text{ΑΓ})}{(\text{ΑΖ}')} . \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ καὶ τὰ ΑΒΖ', ΑΕ'Ζ' εἶναι ἰσοϋψῆ, ἕπεται ὅτι

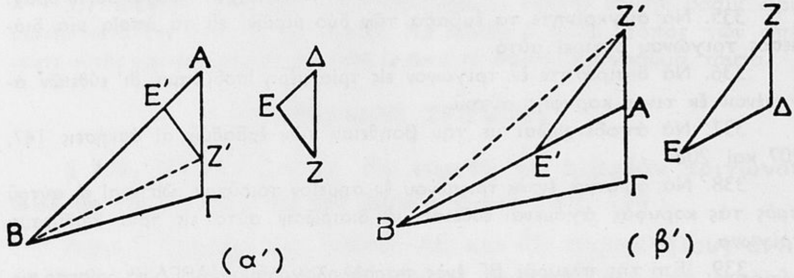
$$\frac{(\text{ΑΒΖ}')}{(\text{ΑΕ}'\text{Ζ}')} = \frac{(\text{ΑΒ})}{(\text{ΑΕ}')} \qquad (2)$$

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2).

εὑρίσκομεν ὅτι $\dfrac{(ΑΒΓ)}{(ΑΕ'Ζ')} = \dfrac{(ΑΒ)\cdot(ΑΓ)}{(ΑΕ')\cdot(ΑΖ')}$ (3)

Ἐπειδὴ δὲ $ΑΕ' = ΔΕ$, $ΑΖ' = ΔΖ$ καὶ $(ΑΕ'Ζ') = (ΔΕΖ)$, ἡ ἰσότης (3) γίνεται $\dfrac{(ΑΒΓ)}{(ΔΕΖ)} = \dfrac{(ΑΒ)\cdot(ΑΓ)}{(ΔΕ)\cdot(ΔΖ)}$. ὅ.ἔ.δ.

β') Ἂν $\widehat{Α} + \widehat{Δ} = 2$ ὀρθ. τὸ τρίγωνον ΔΕΖ τίθεται εἰς τὴν θέσιν



Σχ. 145

ΑΕ'Ζ' (σχ. 145 β') οὕτως, ὥστε ἡ γωνία Δ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς παραπληρωματικῆς τῆς Α. Μετὰ ταῦτα δὲ ἐξακολουθοῦμεν, ὅπως προηγουμένως.

Ἀσκήσεις

340. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει (ΑΒ) = 2 μέτ, (ΑΓ) = 8 μέτ. καὶ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ἄλλο τρίγωνον Α'Β'Γ', τὸ ὁποῖον ἔχει Α'Β' = Α'Γ' καὶ $\widehat{Α'} = \widehat{Α}$. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς Α'Β'.

341. Νὰ κατασκευάσητε ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΔΕΖ ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν αἱ κάθετοι πλευραὶ τούτου εἶναι 4 ἑκατ. ἡ μία καὶ 9 ἑκατ. ἡ ἄλλη.

342. Ἂν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἔχωσιν: $\widehat{Α} = \widehat{Α'}$ καὶ $\widehat{Β} + \widehat{Β'} = 2$ ὀρθ., νὰ ἀποδείξητε ὅτι ΒΓ : Β'Γ' = ΑΓ : Α'Γ'.

III. ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ

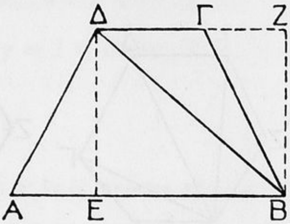
§ 192. *Πρόβλημα. IV.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου ΑΒΓΔ ἐκ τῶν βάσεων καὶ τοῦ ὕψους αὐτοῦ** (σχ. 146).

Λύσις. Ἄγομεν τὴν διαγώνιον ΔΒ καὶ διαιροῦμεν τὸ τραπέζιον εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ. Ἐπειδὴ δὲ

$$(\mathrm{AB\Delta}) = \frac{(\mathrm{AB})\cdot(\mathrm{\Delta E})}{2},\ (\mathrm{B\Gamma\Delta}) = \frac{(\mathrm{\Delta\Gamma})\cdot(\mathrm{BZ})}{2} = \frac{(\mathrm{\Delta\Gamma})\cdot(\mathrm{\Delta E})}{2},$$

ἔπεται εὐκόλως ὅτι $(\mathrm{AB\Delta}) + (\mathrm{B\Gamma\Delta}) = \frac{(\mathrm{AB})\cdot(\mathrm{\Delta E})}{2} + \frac{(\mathrm{\Delta\Gamma})\cdot(\mathrm{\Delta E})}{2}$, ὅθεν

$$(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = \frac{(\mathrm{AB}) + (\mathrm{\Delta\Gamma})}{2} \times (\mathrm{\Delta E})$$



Σχ. 146

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἂν δηλ. Β, β, υ εἶναι ἀντιστοίχως τὰ μήκη τῶν βάσεων καὶ τοῦ ὕψους, θὰ εἶναι $\mathrm{E} = \frac{\mathrm{B} + \beta}{2} \cdot \upsilon$.

Πόρισμα. **Τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου εἶναι γινόμενον τῆς διαμέσου ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.**

Ἀσκήσεις

343. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσεις 50 μέτρα καὶ 30 μέτ. ὕψος δὲ 20 μέτρα.

344. Ἓν τραπέζιον ἔχει μίαν βάσιν 65,60 μέτρ., ὕψος 10 μέτρ. καὶ ἐμβαδὸν 528 τετρ. μέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς ἄλλης βάσεως αὐτοῦ.

345. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου, τὸ ὁποῖον ἔχει διάμεσον 48,30 μέτρ. καὶ ὕψος 17,50 μέτρ.

346. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου εἶναι γινόμενον μιᾶς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ μέσου τῆς ἄλλης ἀπὸ ἐκείνης.

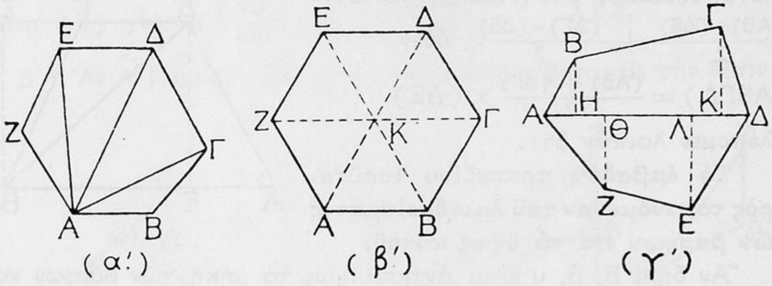
IV. ΕΜΒΑΔΟΝ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ

§ 193. *Πρόβλημα V.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τυχόντος πολυγώνου** (σχ. 147).

Λύσις. α') Διαιροῦμεν αὐτὸ εἰς τρίγωνα, ἔπειτα εὑρίσκομεν καὶ προσθέτομεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων τούτων. Γίνεται δὲ ἡ διαίρεσις αὐτὴ κατὰ τοὺς ἑξῆς δύο τρόπους:

1ον. Ἄγομεν ὅλας τὰς διαγωνίους, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ μίαν κορυφὴν π.χ. τὴν Α (σχ. 147 α΄). Οὕτως, ἂν ἓν πολύγωνον ἔχῃ ν πλευράς, διαιρεῖται εἰς $(\nu-2)$ τρίγωνα.

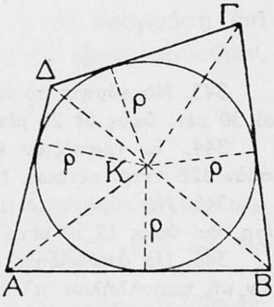
2ον. Ὁρίζομεν ἐντὸς αὐτοῦ ἓν σημεῖον Κ καὶ ἄγομεν πάντα τὰ



Σχ. 147

εὐθ. τμήματα ἐξ αὐτοῦ πρὸς τὰς κορυφάς. Οὕτω δὲ πολύγωνον ν πλευρῶν διαιρεῖται εἰς ν τρίγωνα (σχ. 147 β΄).

β΄) Ἄγομεν τὴν μεγαλυτέραν διαγώνιον ΑΔ (σχ. 147 γ΄) καὶ ἐκ τῶν ἄλλων κορυφῶν καθέτους ΒΗ, ΓΚ, ΕΛ, ΖΘ ἐπ' αὐτήν. Οὕτω δὲ τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ διαιρεῖται εἰς ὀρθογώνια τρίγωνα καὶ τετράπλευρα (τραπέζια ἢ ὀρθογώνια). Εὑρίσκομεν ἔπειτα καὶ προσθέτομεν τὰ ἐμβαδὰ τούτων.



Σχ. 148

§ 194. Μία ἀξιοσημείωτος ἐφαρμογή. Ἔστω εὐθ. σχῆμα ΑΒΓΔ (σχ. 148) περιγεγραμμένον περὶ κύκλον Κ ἀκτῖνος ρ. Ἂν Ε εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓΔ, κατὰ τὰ προηγούμενα, θὰ εἶναι $E=(KAB)+(KB\Gamma)+(K\Gamma\Delta)+(KA\Delta)$.

Ἐπειδὴ δὲ $(KAB)=\frac{1}{2}(AB)\cdot\rho$, $(KB\Gamma)=\frac{1}{2}(B\Gamma)\cdot\rho$,

$$(K\Gamma\Delta)=\frac{1}{2}(\Gamma\Delta)\cdot\rho,\ (KA\Delta)=\frac{1}{2}(A\Delta)\cdot\rho,$$

ἔπεται ὅτι $E=\frac{(AB)+(B\Gamma)+(\Gamma\Delta)+(A\Delta)}{2}\cdot\rho$. Ἤτοι:

Τὸ ἐμβαδὸν εὐθυγράμμου σχήματος περιγεγραμμένου περὶ

κύκλον εἶναι γινόμενον τῆς ἡμιπεριμέτρου αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Ἂν λοιπὸν α, β, γ εἶναι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ καὶ ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένου κύκλου, θὰ εἶναι $E = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \cdot \rho$. Ἂν δὲ θέσωμεν $\alpha + \beta + \gamma = 2\tau$, ἕπεται ὅτι $E = \tau\rho$.

Ἀσκήσεις

347. Ἑκάστη πλευρὰ ἑξαγώνου ἔχει μῆκος α· ἓν δὲ σημεῖον αὐτοῦ ἀπέχει ἀπὸ ἑκάστην πλευρὰν $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

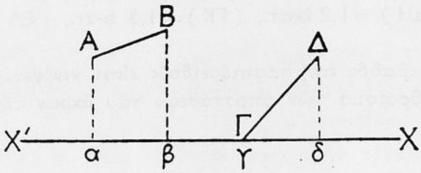
348. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 147 γ'), ἂν (ΑΗ) = 0,5 ἑκατ., (ΑΘ) = 1 ἑκατ., (ΘΛ) = 0,5 ἑκατ., (ΗΚ) = 3,5 ἑκατ., (ΚΔ) = 1,4 ἑκατ., (ΛΔ) = 2,8 ἑκατ., (ΒΗ) = 1,2 ἑκατ., (ΓΚ) = 1,3 ἑκατ., (ΕΛ) = 1 ἑκατ., (ΖΘ) = 0,8 ἑκατ.

349. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τραπεζοειδοῦς εἶναι γινόμενον μιᾶς διαγωνίου αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν ἄκρων τῆς ἄλλης διαγωνίου ἀπ' αὐτῆς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'

Ι. ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΠΛΕΥΡΩΝ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

§ 195. Τί εἶναι προβολὴ σημείου ἢ εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ ἄξονα. Ἀπὸ ἓν σημεῖον Α τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς εὐθείας Χ΄Χ, ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν Αα κάθετον ἐπὶ τὴν Χ΄Χ (σχ. 149.) Ὁ πούς α τῆς καθέτου ταύτης λέγεται **ὀρθὴ προβολὴ** ἢ ἁπλῶς **προβολὴ** τοῦ σημείου Α ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν Χ΄Χ. Ὁμοίως προβολὴ τοῦ Β εἶναι τὸ β, τοῦ Δ τὸ δ κ.τ.λ. Ὥστε:



Σχ. 149

Προβολὴ σημείου ἐπὶ εὐθεῖαν, λέγεται ὁ πούς τῆς καθέτου, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ταύτην.

Ἡ εὐθεῖα, ἐπὶ τὴν ὁποίαν θεωροῦνται αἱ προβολαί, λέγεται **προβολικὸς ἄξων.**

Αἱ προβολαὶ α, β τῶν ἄκρων εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ. ὁρίζουσι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα αβ. Τοῦτο λέγεται **προβολὴ** τοῦ ΑΒ. Ὥστε.

Προβολὴ εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ ἄξονα λέγεται τὸ τμῆμα τοῦ ἄξονος τούτου, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὰς προβολὰς τῶν ἄκρων τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος.

Ἀσκήσεις

350. Νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον ἐπὶ μιᾶς εὐθείας καὶ τὴν προβολὴν αὐτοῦ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ταύτην.

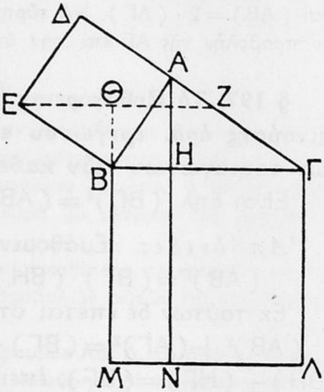
351. Νὰ γράψητε ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ καὶ νὰ ὁρίσητε τὴν προβολὴν τῆς κορυφῆς Β ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΑΓ (Α = 1 ὀρθ.).

352. Νὰ ὁρίσητε ἑκατέρωθεν ἄξονος χ΄χ δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ γράψητε τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ νὰ ὁρίσητε τὰς προβολὰς τῶν δύο μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα τοῦτο διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ προβ. ἄξονος χ΄χ.

§ **196.** *Θεώρημα Ι.* **Τὸ τετράγωνον μιᾶς καθέτου πλευρᾶς ὀρθ. τριγώνου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν τὴν ὑποτείνουσαν καὶ ὕψος τὴν προβολὴν τῆς καθέτου ταύτης πλευρᾶς ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.**

Ἂν δηλ. ΑΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ (σχ. 150), θὰ εἶναι $(AB)^2 = (B\Gamma)\cdot(BH)$ καὶ $(A\Gamma)^2 = (B\Gamma)\cdot(H\Gamma)$.

Ἀπόδειξις. Κατασκευάζομεν τὸ τετράγωνον ΑΒΕΔ τῆς ΑΒ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΒΓΖΕ. Φέρομεν ἔπειτα τὴν ΒΘ κάθετον ἐπὶ τὴν ΕΖ καὶ βλέπομεν ὅτι :



Σχ. 150

$(B\Gamma ZE) = (B\Gamma)\cdot(B\Theta)$, ἀλλὰ καὶ
$(B\Gamma ZE) = (BE)\cdot(AB)$.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι :
$(B\Gamma)\cdot(B\Theta) = (BE)\cdot(AB)$.
Ἐπειδὴ δὲ
$(ABE\Delta) = (AB)^2 = (BE)\cdot(AB)$
ἕπεται ὅτι :

$$(AB)^2 = (B\Gamma)\cdot(B\Theta). \quad (1)$$

Τώρα παρατηροῦμεν ὅτι τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΕΒΘ, ΑΒΗ ἔχουσι :

$$EB = AB \text{ καὶ } \widehat{EB\Theta} = \widehat{EBA} - \widehat{\Theta BA} = \widehat{\Theta BH} - \widehat{\Theta BA} = \widehat{ABH}.$$

Εἶναι λοιπὸν ταῦτα ἴσα καὶ ἑπομένως $B\Theta = BH$. Ἡ δὲ ἰσότης (1) γίνεται $(AB)^2 = (B\Gamma)\cdot(BH)$.

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι καὶ

$$(A\Gamma)^2 = (B\Gamma)\cdot(H\Gamma).$$

Πόρισμα. **Ὁ λόγος τῶν τετραγώνων τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθ. τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν προβολῶν αὐτῶν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.**

Ἀσκήσεις

353. Ἡ ὑποτείνουσα ἑνὸς ὀρθ. τριγώνου ἔχει μῆκος 5 ἑκατ. Ἡ δὲ ἐπ' αὐτὴν προβολὴ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς διαιρεῖ αὐτὴν εἰς δύο τμήματα, ὧν τὸ ἓν ἔχει μῆκος 1,8 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὰ μήκη τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ.

354. Ἡ ὑποτείνουσα ὀρθ. τριγώνου ἔχει μῆκος 10 ἑκατ. καὶ μία ἀπὸ τὰς

ἄλλας πλευρὰς 6 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὰ μήκη τῶν προβολῶν τῶν καθέτων πλευρῶν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

355. Νὰ γράψητε μίαν διάμετρον κύκλου καὶ ἐκ τοῦ ἑνὸς ἄκρου αὐτῆς νὰ γράψητε δύο χορδάς. Νὰ προβάλητε ταύτας ἐπὶ τὴν διάμετρον ταύτην καὶ νὰ συγκρίνητε τὸν λόγον τῶν τετραγώνων αὐτῶν πρὸς τὸν λόγον τῶν προβολῶν των.

356. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $(AB) = 2 \cdot (A\Gamma)$. Νὰ εὕρητε δὲ τὸν λόγον τῆς προβολῆς τῆς ΑΒ πρὸς τὴν προβολὴν τῆς ΑΓ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ.

§ 197. Τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα*. Τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ὀρθ. τριγώνου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ.

Εἶναι δηλ. $(B\Gamma)^2 = (AB)^2 + (A\Gamma)^2$ (σχ. 150).

Ἀπόδειξις. Ἐμάθομεν προηγουμένως ὅτι:

$$(AB)^2 = (B\Gamma)\cdot(BH) \text{ καὶ } (A\Gamma)^2 = (B\Gamma)\cdot(H\Gamma).$$

Ἐκ τούτων δὲ ἕπεται ὅτι:

$$(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = (B\Gamma)\cdot[(BH)+(H\Gamma)] = (B\Gamma)^2, \text{ διότι}$$

$(BH)+(H\Gamma) = (B\Gamma)$, ἐπειδὴ τὸ Η εἶναι πάντοτε μεταξὺ Β καὶ Γ, λόγῳ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν Β καὶ Γ. ὅ.ἔ.δ.

Συνήθως χάριν συντομίας θέτομεν $(B\Gamma) = \alpha$, $(A\Gamma) = \beta$, $(AB) = \gamma$. Τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα λοιπὸν ἐκφράζεται διά τῆς σχέσεως:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2.$$

Πόρισμα Ι. **Τὸ τετράγωνον ἑκατέρας τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθ. τριγώνου εὑρίσκεται, ἂν τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης.**

Εἶναι δηλ. $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$ καὶ $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$.

---

* Ὁ φιλόσοφος καὶ μαθηματικὸς Πυθαγόρας ἐγεννήθη ἐν Σάμῳ περὶ τὸ 580 π. Χ. Οὗτος μετέβη εἰς Αἴγυπτον, ἔνθα ἐμυήθη εἰς τὰς γνώσεις τῶν Αἰγυπτίων διὰ τῆς μελέτης τῶν βιβλίων αὐτῶν.

Κατὰ τὴν ἐπιστροφήν του εἰς τὴν Ἑλλάδα διέμεινεν ὀλίγον εἰς τὴν Σάμον, ὁπόθεν περὶ τὸ 536 π. Χ. διεπεραιώθη εἰς Κρότωνα τῆς Ἰταλίας, ἔνθα ἵδρυσε τὴν περίφημον Πυθαγόρειον Φιλοσοφικὴν Σχολήν.

Ὁ Πυθαγόρας καὶ οἱ μαθηταί του ἔδωκαν σπουδαίαν ὤθησιν εἰς τὴν διαμόρφωσιν καὶ ἀνάπτυξιν τῆς θεωρητικῆς Γεωμετρίας. Καταδιωχθεὶς ὅμως ὑπὸ τῶν δημοκρατικῶν διὰ τὰ ἀριστοκρατικά του φρονήματα κατέφυγεν εἰς τὸ ἱερὸν τῶν Μουσῶν τῆς πόλεως Metaponte, ἔνθα ἀπέθανεν ἐκ πείνης περὶ τὸ 500 π.Χ.

Πόρισμα II. **Τὸ τετράγωνον τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν ἴσην πρὸς τὴν διαγώνιον ἄλλου τετραγώνου, εἶναι διπλάσιον τούτου.** Ἂν λοιπὸν δ εἶναι ἡ διαγώνιος καὶ α ἡ πλευρὰ τετραγώνου θὰ εἶναι $\delta^2 = 2\,\alpha^2$.

Πόρισμα III. **Ἡ διαγώνιος τετραγώνου εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ.**

Ἀσκήσεις

357. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ὀρθ. τρίγωνον μὲ καθέτους πλευρὰς 6 ἑκατ. καὶ 8 ἑκατ. Νὰ ὑπολογίσητε δὲ τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης αὐτοῦ.

358. Μία ἄμπελος ἔχει σχῆμα ὀρθ. τριγώνου. Τούτου ἡ ὑποτείνουσα ἔχει μῆκος 50 μέτρων καὶ ἡ μία κάθετος πλευρὰ 30 μέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς.

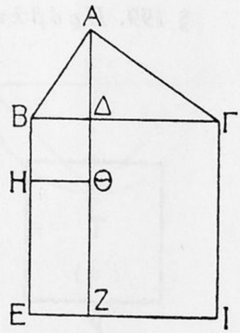
359. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ὀρθ. τρίγωνον μὲ καθέτους πλευρὰς 9 ἑκατ. καὶ 12 ἑκατ. Νὰ ὑπολογίσητε δὲ τὰ μήκη τῶν προβολῶν αὐτῶν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

360. Νὰ κατασκευάσητε ἓν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ (ΑΒ) = 28 ἑκατ. (ΑΔ) = 3 ἑκατ. καὶ $A = 45^0$. Νὰ εὕρητε δὲ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

361. Ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔχει βάσιν 6 μέτρων καὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς 10 μέτρων ἑκάστην. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

362. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν ἰσοπλεύρου τριγώνου ἀπὸ τὴν πλευρὰν α αὐτοῦ.

363. Δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι ἔχουσιν ἀκτῖνας Ρ καὶ ρ (Ρ > ρ). Ἂν μία χορδὴ τῆς ἐξωτερικῆς ἐφάπτεται τῆς ἐσωτερικῆς περιφερείας, νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ταύτης.



Σχ. 151

§ 198. *Θεώρημα III.* **Τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως ΑΔ τῆς κορυφῆς Α τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν τμημάτων ΒΔ, ΔΓ τῆς ὑποτεινούσης. Εἶναι δηλ. $(ΑΔ)^2 = (ΒΔ)\cdot(ΔΓ)$** (σχ. 151).

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ὀρθογώνιον, ἕπεται ὅτι $(ΑΔ)^2 = (ΑΒ)^2 - (ΒΔ)^2$ (1).

Ἐμάθομεν δὲ (§ 196) ὅτι $(ΑΒ)^2 = (ΒΔΖΕ)$, ἂν ΒΕ = ΒΓ.

Καὶ ἂν κατασκευάσωμεν τὸ τετράγωνον ΒΔΘΗ, ἡ (1) γίνεται

$$(ΑΔ)^2 = (ΒΔΖΕ) - (ΒΔΘΗ) = (ΗΘΖΕ).$$

Ἐπειδὴ δὲ $(ΗΘΖΕ) = (ΗΘ)\cdot(ΗΕ)$ καὶ

$$ΗΘ = ΒΔ,\ ΗΕ = ΒΕ - ΒΗ = ΒΓ - ΒΔ = ΔΓ,$$

ἕπεται ὅτι $(ΗΘΖΕ) = (ΒΔ)\cdot(ΔΓ)$ καὶ $(ΑΔ)^2 = (ΒΔ)\ (ΔΓ)$.

Ἀσκήσεις

364. Ἓν ὀρθ. τρίγωνον ἔχει καθέτους πλευρὰς 6 ἑκατ. καὶ 8 ἑκατ. Νὰ ὑπολογίσητε τὴν ἀπόστασιν τῆς κορυφῆς Α τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀπὸ τὴν ὑποτείνουσαν.

365. Τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος ὀρθογωνίου τριγωνικοῦ ἀγροῦ διαιρεῖ αὐτὴν εἰς τμήματα 4 μέτρων καὶ 9 μέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀγροῦ τούτου.

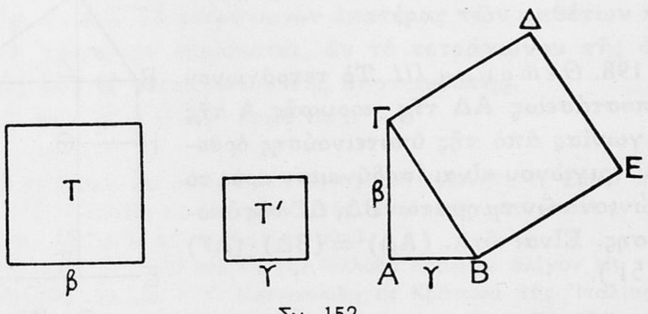
366. Νὰ γράψητε περιφέρειαν μὲ ἀκτῖνα 3 ἑκατ. καὶ μίαν διάμετρον ΑΒ αὐτῆς. Ἔπειτα νὰ διαιρέσητε ταύτην εἰς 3 ἴσα μέρη ΑΓ, ΓΔ, ΔΒ καὶ ἐκ τοῦ Δ νὰ φέρητε μέχρι τῆς ἡμιπεριφερείας κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Νὰ εὕρητε δὲ τὸ μῆκος τῆς καθέτου ταύτης.

367. Ἂν ΑΔ εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς Α ὀρθογωνίου τριγώνου ἀπὸ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι: $\dfrac{1}{(ΑΒ)^2} + \dfrac{1}{(ΑΓ)^2} = \dfrac{1}{(ΑΔ)^2}$.

2. ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΕΙΣ ΑΛΛΑ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ

§ 199. *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσο-**



Σχ. 152

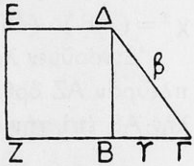
δύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο δοθέντων τετραγώνων Τ καὶ Τ′ (σχ. 152).

Ἂν χ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου, θὰ εἶναι $χ^2 = β^2 + γ^2$. Ἐκ ταύτης βλέπομεν ὅτι χ εἶναι ὑποτείνουσα ὀρθ.

τριγώνου μὲ καθέτους πλευρὰς β καὶ γ. Κατασκευάζομεν λοιπὸν ὀρθ. τρίγωνον ΑΒΓ μὲ ΑΒ = γ, ΑΓ = β καὶ ἔπειτα τὸ τετράγωνον ΒΓΔΕ τῆς ὑποτεινούσης. Τοῦτο δὲ εἶναι τὸ ζητούμενον.

§ **200.** *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὴν διαφορὰν δύο δοθέντων τετραγώνων Τ καὶ Τ′** (σχ. 152 καὶ 153).

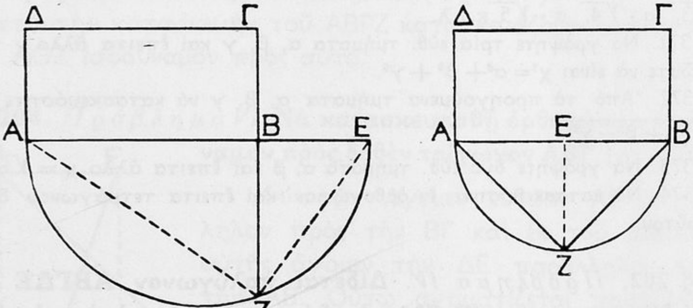
Λύσις. Ἂν ψ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου, θὰ εἶναι $ψ^2 = β^2 - γ^2$. Ἐννοοῦμεν λοιπὸν ὅτι ψ εἶναι κάθετος πλευρὰ ὀρθ. τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει ὑποτείνουσαν β καὶ ἄλλην πλευρὰν γ. Μετὰ ταῦτα συνεχίζομεν εὐκόλως τὴν λύσιν.



Σχ. 153

§ **201.** *Πρόβλημα ΙΙΙ.* **Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ** (σχ. 154).

α′ Τρόπος. *Ἀνάλυσις.* Ἂν χ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου, θὰ εἶναι $χ^2 = (ΑΒ) \cdot (ΒΓ)$. Ἂν δὲ ἐπὶ τῆς



Σχ. 154

προεκτάσεως τῆς ΑΒ ὁρίσωμεν τμῆμα ΒΕ = ΒΓ, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $χ^2 = (ΑΒ) \cdot (ΒΕ)$.

Ἀπὸ αὐτὴν δὲ ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ πλευρὰ χ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ἀπὸ τὴν ὑποτείνουσαν ΑΕ αὐτοῦ, ἂν ἡ κορυφὴ αὐτὴ προβάλληται εἰς τὸ Β.

Σύνθεσις. Κατὰ ταῦτα πρέπει νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον τοῦτο. Πρὸς τοῦτο γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν μὲ διάμετρον ΑΕ καὶ προεκτείνομεν τὴν ΓΒ, μέχρις οὗ συναντήσῃ αὐτὴν εἰς τὸ Ζ, ὅπερ εἶναι ἡ γ΄ κορυφὴ τοῦ ἐν λόγῳ τριγώνου ΖΑΕ.

Εἶναι δὲ $\chi = ΒΖ$, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται.

β΄ Τρόπος. Ἂν ἐπὶ τῆς ΑΒ δηλ. τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου, ὁρίσωμεν τμῆμα $ΑΕ = ΑΔ$, ἡ ἰσότης $\chi^2 = (ΑΒ) \cdot (ΒΓ)$ γίνεται $\chi^2 = (ΑΒ) \cdot (ΑΕ)$.

Ἐννοοῦμεν λοιπὸν ὅτι ἡ πλευρὰ χ εἶναι ἴση πρὸς τὴν κάθετον πλευρὰν ΑΖ ὀρθ. τριγώνου ΑΖΒ (σχ. 154 β΄), ἥτις ἔχει προβολὴν ΑΕ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΑΒ.

Ἀσκήσεις

368. Νὰ κατασκευάσητε τετράγωνον διπλάσιον ἀπὸ δόθεν τετράγωνον.

369. Νὰ γράψητε ἓν εὐθ. τμῆμα α καὶ ἔπειτα ἄλλο ἴσον πρὸς $\alpha \cdot \sqrt{2}$.

370. Ἀφ' οὗ γράψητε τὸ τμῆμα $\alpha \cdot \sqrt{2}$, νὰ γράψητε ἄλλο ἴσον πρὸς $\alpha \cdot \sqrt{3}$, $\alpha \cdot \sqrt{4}$, $\alpha \cdot \sqrt{5}$ κ.τ.λ.

371. Νὰ γράψητε τρία εὐθ. τμήματα α, β, γ καὶ ἔπειτα ἄλλο χ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\chi^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.

372. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα τμήματα α, β. γ νὰ κατασκευάσητε ἄλλο $\psi = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}$.

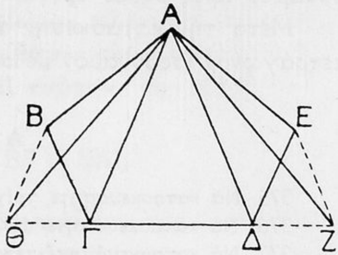
373. Νὰ γράψητε δύο εὐθ. τμήματα α, β καὶ ἔπειτα ἄλλο $\chi = \sqrt{\alpha\beta}$.

374. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ὀρθογώνιον καὶ ἔπειτα τετράγωνον διπλάσιον αὐτοῦ.

§ 202. *Πρόβλημα IV.* **Δίδεται πολύγωνον ΑΒΓΔΕ** (σχ. 155). **Νὰ κατασκευασθῇ ἄλλο ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ καὶ νὰ ἔχῃ μίαν πλευρὰν ὀλιγωτέραν.**

Ἀνάλυσις. Ἂν ΑΒΓΖ εἶναι τὸ ζητούμενον σχῆμα, τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΑΔΖ θὰ εἶναι ἰσοδύναμα. Ἐπειδὴ δὲ ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΔ, θὰ εἶναι ἰσοϋψῆ ἐν σχέσει πρὸς αὐτὴν τὴν βάσιν. Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν ΕΖ θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ.

Σύνθεσις. Ἄγομεν διαγώνιον ΑΔ, ἡ ὁποία ἀποχωρίζει ἀπὸ τὸ πολύγωνον τὸ τρίγωνον ΑΕΔ. Ἔπειτα φέρομεν τὴν ΕΖ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΔ, μέχρις οὗ τμήσῃ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ. Οὕτως ὁρίζεται ἡ κορυφὴ Ζ. Ἂν φέρωμεν τὴν ΑΖ, σχηματίζεται τὸ ζητούμενον σχῆμα ΑΒΓΖ.



Σχ. 155

Ἀπόδειξις. Τοῦτο ἔχει μίαν πλευρὰν ὀλιγωτέραν ἀπὸ τὸ ΑΒΓΔΕ, διότι αἱ δύο πλευραὶ ΑΕ καὶ ΕΔ ἀντικατεστάθησαν μὲ τὴν ΑΖ.

Εἶναι δὲ καὶ
$$\left.\begin{array}{l}(ΑΒΓΖ)=(ΑΒΓΔ)+(ΑΔΖ)\\(ΑΒΓΔΕ)=(ΑΒΓΔ)+(ΑΔΕ)\end{array}\right\}\qquad(1)$$

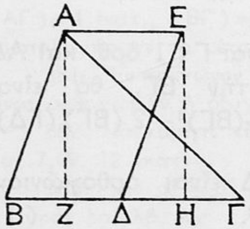
Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΑΔΖ, ΑΔΕ ἔχουσι κοινὴν βάσιν ΑΔ καὶ ἴσα τὰ ἐπ' αὐτὴν ὕψη, ἕνεκα τῆς παραλληλίας τῶν ΑΔ καὶ ΕΖ, ἕπεται ὅτι (ΑΔΖ) = (ΑΔΕ).

Ἐκ τῶν (1) λοιπὸν προκύπτει ὅτι (ΑΒΓΖ) = (ΑΒΓΔΕ).

§ **203.** *Πρόβλημα V.* **Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν πολύγωνον ΑΒΓΔΕ** (σχ. 155).

Μετὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ ΑΒΓΖ κατασκευάζομεν ὁμοίως τρίγωνον ΑΘΖ ἰσοδύναμον πρὸς αὐτό.

§ **204.** *Πρόβλημα VI.* **Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ** (σχ. 156).



Σχ. 156

Λύσις. Ἄγομεν εὐθεῖαν ΑΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ ἐκ τοῦ μέσου Δ αὐτῆς ἄγομεν τὴν ΔΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ. Οὕτω σχηματίζεται παραλληλόγραμμον ΑΒΔΕ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τρίγωνον. Διότι.

$$(ΑΒΓ) = (ΒΔ)\cdot(ΑΖ) = (ΑΒΔΕ).\ (1)$$

Ἂν δὲ φέρωμεν τὴν ΕΗ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, σχηματίζεται ὀρθογώνιον ΑΖΗΕ καὶ βλέπομεν εὐκόλως ὅτι (ΑΖΗΕ) = (ΑΒΔΕ) καὶ ἕνεκα τῆς (1) εἶναι (ΑΒΓ) = (ΑΖΗΕ). Τὸ ὀρθογώνιον λοιπὸν ΑΖΗΕ εἶναι τὸ ζητούμενον.

§ **205.** *Πρόβλημα VII.* **Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ** (σχ. 156).

Μετὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΖΗΕ σχηματίζομεν τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ αὐτὸ (§ 201).

Ἀσκήσεις

375. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν τραπεζοειδές.

376. Νὰ κατασκευάσητε τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν τραπέζιον.

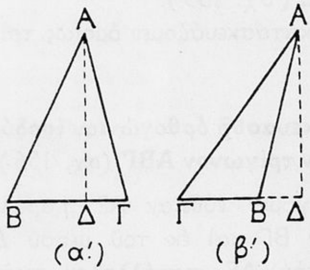
377. Νὰ κατασκευάσητε τετράγωνον διπλάσιον δοθέντος τριγώνου.

378. Νὰ κατασκευάσητε δύο ἄνισα ὀρθογώνια καὶ ἔπειτα τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

379. Νὰ κατασκευάσητε τυχὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Εἰς μίαν πλευρὰν νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον Ε καὶ νὰ φέρητε ἐξ αὐτοῦ μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ διαιρῇ αὐτὸ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

3. ΑΛΛΑΙ ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

§ **206.** *Θεώρημα I.* **Τὸ τετράγωνον πλευρᾶς τριγώνου, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι ὀξείας γωνίας, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἄλλων πλευρῶν ἠλαττωμένον κατὰ δύο ὀρθογώνια, τὰ ὁποῖα ἔχουσι βάσιν μίαν ἀπὸ αὐτάς, ὕψος δὲ τὴν προβολὴν τῆς ἄλλης ἐπὶ ταύτην** (σχ. 157).



Σχ. 157

Ἂν δηλ. εἶναι $Γ < 1$ ὀρθ. καὶ ΑΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, θὰ εἶναι $(ΑΒ)^2 = (ΑΓ)^2 + (ΒΓ)^2 - 2\,(ΒΓ)\,(ΓΔ)$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ὀρθογώνιον, εἶναι
$$(ΑΒ)^2 = (ΑΔ)^2 + (ΒΔ)^2. \qquad (1)$$
Ἐπειδὴ δὲ $(ΒΔ) = (ΒΓ) - (ΓΔ)$ (σχ. 157 α′)

ἢ $(ΒΔ) = (ΓΔ) - (ΒΓ)$ (σχ. 157 β′)

ἔπεται ὅτι $(ΒΔ)^2 = (ΒΓ)^2 + (ΓΔ)^2 - 2\,(ΒΓ)\,(ΓΔ)$, ἡ δὲ (1) ἀκολούθως γίνεται $(ΑΒ)^2 = (ΑΔ)^2 + (ΓΔ)^2 + (ΒΓ)^2 - 2(ΒΓ)(ΓΔ)$
$$= (ΑΓ)^2 + (ΒΓ)^2 - 2\,(ΒΓ)\,(ΔΓ). \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

§ **207.** *Θεώρημα ΙΙ.* **Τὸ τετράγωνον πλευρᾶς τριγώνου, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι ἀμβλείας γωνίας, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἄλλων πλευρῶν ηὐξημένον κατὰ δύο ὀρθογώνια, τὰ ὁποῖα ἔχουσι βάσιν τὴν μίαν ἀπὸ αὐτάς, ὕψος δὲ τὴν προβολὴν τῆς ἄλλης ἐπὶ ταύτην** (σχ. 157 β′)

Ἂν δηλ. $B > 1$ ὀρθ. θὰ εἶναι

$$(A\Gamma)^2 = (AB)^2 + (B\Gamma)^2 + 2(B\Gamma)(B\Delta).$$

Ἀπόδειξις. Ἕνεκα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΓΔ εἶναι $(A\Gamma)^2 = (A\Delta)^2 + (\Gamma\Delta)^2$ (1)

Ἐπειδὴ δὲ $(\Gamma\Delta) = (B\Gamma) + (B\Delta)$, θὰ εἶναι

$(\Gamma\Delta)^2 = (B\Gamma)^2 + (B\Delta)^2 + 2(B\Gamma)(B\Delta)$, ἡ δὲ (1) γίνεται.

$(A\Gamma)^2 = (A\Delta)^2 + (B\Delta)^2 + (B\Gamma)^2 + 2(B\Gamma)(B\Delta)$

$= (AB)^2 + (B\Gamma)^2 + 2(B\Gamma)(B\Delta)$, ὅ.ἔ.δ.

Πόρισμα. **Ἡ γωνία Α τριγώνου ΑΒΓ εἶναι**

α′) ὀρθή, ἂν $(B\Gamma)^2 = (AB)^2 + (A\Gamma)^2$,

β′) ὀξεῖα, ἂν $(B\Gamma)^2 < (AB)^2 + (A\Gamma)^2$,

γ′) ἀμβλεῖα, ἂν $(B\Gamma)^2 > (AB)^2 + (A\Gamma)^2$

Ἀσκήσεις

380. Νὰ κατασκευάσητε ἓν τρίγωνον ΑΒΓ μὲ πλευρὰς (ΑΒ) = 3 ἑκατ. (ΑΓ) = 4 ἑκατ., (ΒΓ) = 5 ἑκατ. Νὰ μετρήσητε τὴν γωνίαν Α αὐτοῦ καὶ νὰ δικαιολογήσητε τὸ μέτρον, τὸ ὁποῖον θὰ εὕρητε.

381. Ἓν τρίγωνον ἔχει πλευρας 4, 5, 6 ἑκατ. Νὰ ἐξετάσητε, ἂν τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον ἢ ὀξυγώνιον ἢ ἀμβλυγώνιον.

382. Νὰ κάμητε τὴν ἰδίαν ἐργασίαν διὰ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰς 7, 9, 12 ἑκατ.

383. Ἂν $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, νὰ ἐξετάσητε τί εἴδους τρίγωνον εἶναι τὸ ἔχον πλευρὰς λα, λβ, λγ.

384. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει (ΑΒ) = 8 ἑκατ. (ΑΓ) = 10 ἑκατ. καὶ (ΒΓ) = 15 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς προβολῆς τῆς πλευρᾶς ΑΓ ἐπὶ τὴν ΑΒ.

385. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ καὶ νὰ γράψητε ἐντὸς αὐτοῦ εὐθ. τμῆμα ΔΕ παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ καὶ τέμνον τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι:

$$(BE)^2 = (E\Gamma)^2 + (B\Gamma)\cdot(\Delta E).$$

12

4. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΔΙΑΜΕΣΩΝ

§ **208.** *Θεώρημα Ι.* **Ἂν ΑΜ εἶναι διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ** (σχ. 158) **θὰ εἶναι :**

$$(\mathrm{AB})^2 + (\mathrm{A\Gamma})^2 = 2\,(\mathrm{AM})^2 + 2\,(\mathrm{BM})^2 \qquad (1)$$

Ἀπόδειξις α΄) Ἂν $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$, τὰ τρίγωνα ΑΒΜ καὶ ΑΜΓ εἶναι ὀρθογώνια (σχ. 158 α΄) καὶ ἑπομένως.

$$(\mathrm{AB})^2 = (\mathrm{AM})^2 + (\mathrm{BM})^2$$

$$(\mathrm{A\Gamma})^2 = (\mathrm{AM})^2 + (\mathrm{\Gamma M})^2 = (\mathrm{AM})^2 + (\mathrm{BM})^2$$

Ἐκ τούτων δὲ εὑρίσκομεν ἀμέσως ὅτι :

$$(\mathrm{AB})^2 + (\mathrm{A\Gamma})^2 = 2\,(\mathrm{AM})^2 + 2\,(\mathrm{BM})^2, \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

β΄) Ἂν $\mathrm{A\Gamma} > \mathrm{AB}$ (σχ. 158 β΄), θὰ εἶναι καὶ $\omega > \varphi$ (§ 76 Πόρ. 111). Ἕνεκα δὲ ταύτης καὶ τῆς $\omega + \varphi = 2$ ὀρθ., εἶναι $\omega > 1$ ὀρθ. καὶ $\varphi < 1$ ὀρθ.

Ἐὰν δὲ ἐφαρμόσωμεν τὰ προηγούμενα θεωρήματα ἀντιστοίχως εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΜ, ΑΜΓ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$(\mathrm{AB})^2 = (\mathrm{AM})^2 + (\mathrm{BM})^2 - 2\,(\mathrm{BM})\,(\Delta\mathrm{M})$$

καὶ

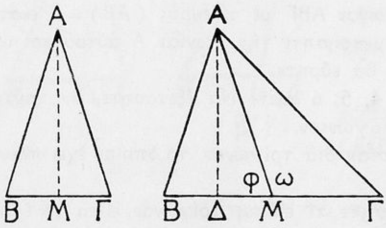
$$(\mathrm{A\Gamma})^2 = (\mathrm{AM})^2 + (\mathrm{M\Gamma})^2 + 2\,(\mathrm{M\Gamma})\,(\Delta\mathrm{M}) = (\mathrm{AM})^2 + (\mathrm{BM})^2 + 2\,(\mathrm{BM})\,(\Delta\mathrm{M})$$

Ἐκ τούτων δὲ εὑρίσκομεν πάλιν ὅτι :

$$(\mathrm{AB})^2 + (\mathrm{A\Gamma})^2 = 2\,(\mathrm{AM})^2 + 2\,(\mathrm{BM})^2 \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

Ἀπεδείχθη λοιπὸν ἡ ἰσότης (1), ἤτοι :

Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ διπλασίου τετραγώνου τῆς μεταξὺ αὐτῶν διαμέσου καὶ τοῦ διπλασίου τετραγώνου τοῦ ἡμίσεος τῆς τρίτης πλευρᾶς.



(α΄) (β΄)

Σχ. 158

§ **209.** *Θεώρημα ΙΙ.* **Ἂν Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, ΑΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ $\mathrm{A\Gamma} > \mathrm{AB}$, θὰ εἶναι : $(\mathrm{A\Gamma})^2 - (\mathrm{AB})^2 = 2\,(\mathrm{B\Gamma})\,(\Delta\mathrm{M})$** (σχ. 158 β΄).

Ἀπόδειξις. Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι:

$$(ΑΓ)^2 = (ΑΜ)^2 + (ΜΓ)^2 + 2(ΜΓ)(ΔΜ)$$
$$(ΑΒ)^2 = (ΑΜ)^2 + (ΒΜ)^2 - 2(ΒΜ)(ΔΜ)$$

Ἑπομένως $(ΑΓ)^2 - (ΑΒ)^2 = 2(ΔΜ)[(ΜΓ) + (ΒΜ)] =$ $2(ΒΓ)(ΔΜ)$, ὅ.ἔ.δ. Ὥστε:

Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς δύο ὀρθογώνια, ἔχοντα βάσιν μὲν τὴν γ΄ πλευράν, ὕψος δὲ τὴν ἐπ᾿ αὐτὴν προβολὴν τῆς πρὸς αὐτὴν ἀντιστοίχου διαμέσου.

Ἀσκήσεις

386. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς διαμέσου ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ, ἂν $(ΑΒ) = 8$ ἑκατ., $(ΑΓ) = 12$ ἑκατ., $(ΒΓ) = 10$ ἑκατ.

387. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἄγομεν τὸ ὕψος ΑΔ καὶ τὴν διάμεσον ΑΜ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος (ΔΜ) συναρτήσει τῶν πλευρῶν α, β, γ, τοῦ τριγώνου τούτου.

388. Νὰ γράψητε δύο ὁμοκέντρους περιφερείας καὶ μίαν διάμεσον ΑΒ τῆς μικροτέρας. Ἂν δὲ Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς μεγαλυτέρας περιφερείας, νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὸ ἄθροισμα $(ΜΑ)^2 + (ΜΒ)^2$ εἶναι ἀνεξάρτητον ἀπὸ τὴν θέσιν τοῦ Μ ἐπὶ τῆς περιφερείας ταύτης.

389. Νὰ ἀποδείξητε τὸ αὐτὸ καὶ ἂν ἡ μὲν ΑΒ εἶναι διάμετρος τῆς ἐξωτερικῆς, τὸ δὲ Μ σημεῖον τῆς ἐσωτερικῆς περιφερείας.

390. Ἂν Ε καὶ Ζ εἶναι τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι:

$$(ΑΒ)^2 + (ΒΓ)^2 + (ΓΔ)^2 + (ΔΑ)^2 = (ΑΓ)^2 + (ΒΔ)^2 + 4(ΕΖ)^2.$$

391. Ἂν ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, νὰ ἀποδείξητε ὅτι:

$$(ΑΒ)^2 + (ΒΓ)^2 + (ΓΔ)^2 + (ΔΑ)^2 = (ΑΓ)^2 + (ΒΔ)^2.$$

5. ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΕΚ ΤΩΝ ΠΛΕΥΡΩΝ ΑΥΤΟΥ

§ 210. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ὕψη καὶ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ΑΒΓ ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ (σχ. 158 β΄).

Λύσις. α΄) Θέτομεν $(ΒΓ) = α$, $(ΑΓ) = β$, $(ΒΑ) = γ$, Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΒ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$(ΑΔ)^2 = (ΑΒ)^2 - (ΒΔ)^2 = γ^2 - (ΔΒ)^2. \qquad (1)$$

Ἂν $Β < 1$ ὀρθ. εἶναι $β^2 = α^2 + γ^2 - 2α(ΒΔ)$ καὶ ἑπομένως

$$(ΒΔ) = \frac{α^2 + γ^2 - β^2}{2α}.$$

Ἂν δὲ $Β > 1$ ὀρθ. εἶναι $β^2 = α^2 + γ^2 + 2α(ΒΔ)$, ὅθεν

$$(ΒΔ) = \frac{β^2 - α^2 - γ^2}{2α} = -\frac{α^2 + γ^2 - β^2}{2α}.$$

Καὶ εἰς τὰς δύο λοιπὸν περιπτώσεις εἶναι

$$(\mathrm{B\Delta})^2 = \frac{(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)^2}{4\alpha^2},$$ ἡ δὲ ἰσότης (1) γίνεται

$$(\mathrm{A\Delta})^2 = \gamma^2 - \frac{(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)^2}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha^2\gamma^2-(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)^2}{4\alpha^2}.$$

Ἐπειδὴ δὲ $4\alpha^2\gamma^2-(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)=$

$$(2\alpha\gamma+\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)\cdot(2\alpha\gamma-\alpha^2-\gamma^2+\beta^2)=$$

$$[(\alpha+\gamma)^2-\beta^2]\cdot[\beta^2-(\alpha-\gamma)^2]=$$

$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)(\beta+\alpha-\gamma)(\beta-\alpha+\gamma)$, ἕπεται ὅτι

$$(\mathrm{A\Delta}) = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)(\beta-\alpha+\gamma)} \quad (2).$$

Ἂν δὲ θέσωμεν $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$ καὶ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὰ μέλη αὐτῆς κατὰ σειρὰν 2α, 2β, 2γ, εὑρίσκομεν ὅτι

$\beta+\gamma-\alpha=2(\tau-\alpha)$, $\alpha+\gamma-\beta=2(\tau-\beta)$, $\alpha+\beta-\gamma=2(\tau-\gamma)$.

Ἡ δὲ ἰσότης (2) γίνεται $(\mathrm{A\Delta}) = \dfrac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$.

Ἐὰν δὲ θέσωμεν $(\mathrm{A\Delta}) = \mathbf{Y}_\alpha$, ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{Y}_\alpha &= \frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} \\ \text{Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι}\quad \mathbf{Y}_\beta &= \frac{2}{\beta}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} \\ \text{καὶ}\quad \mathbf{Y}_\gamma &= \frac{2}{\gamma}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

β΄) Ἂν εἰς τὴν ἰσότητα $\mathrm{E} = \frac{1}{2}(\mathrm{B\Gamma})\cdot(\mathrm{A\Delta}) = \frac{1}{2}\alpha(\mathrm{A\Delta})$ ἀντικαταστήσωμεν τὸ (ΑΔ) ὑπὸ τῆς εὑρεθείσης τιμῆς του, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\mathbf{E} = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} \quad (4)$$

Ἀσκήσεις

392. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰς 57 μέτ., 76 μέτ., καὶ 95 μέτ.

393. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει πλευρὰς (ΑΒ) = 42 μέτρ., (ΑΓ) = 56 μέτ., καὶ (ΒΓ) = 70 μέτ. Νὰ εὕρητε τὸ ὕψος ΒΔ αὐτοῦ. Ποῖον συμπέρασμα προκύπτει περὶ τοῦ τριγώνου τούτου ἀπὸ τὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν θὰ εὕρητε;

394. Ἂν ρ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας ἡ ὁποία εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι:

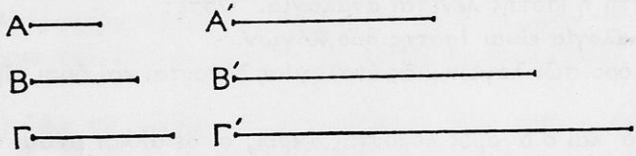
$$\rho = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}} \quad \text{ἂν } \alpha+\beta+\gamma = 2\tau.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ

Ι. ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ

§ 211. Ποῖα ποσὰ λέγονται ἀνάλογα πρὸς ἄλλα ἰσάριθμα.

Ἔστωσαν τὰ εὐθ. τμήματα Α, Β, Γ καὶ Α′, Β′, Γ′ τοιαῦτα, ὥστε εἶναι $A' = A \cdot 3$, $B' = B \cdot 3$, $\Gamma' = \Gamma \cdot 3$ (σχ. 159). Τὰ Α′, Β′, Γ′ λέγονται **ἀνάλογα** πρὸς τὰ Α, Β, Γ.



Σχ. 159

Γενικῶς: Ἂν $\Pi' = \Pi \cdot \lambda$, $P' = P \cdot \lambda$, $\Sigma' = \Sigma \cdot \lambda$ (1)

τὰ ποσὰ Π′, Ρ′, Σ′ λέγονται ἀνάλογα πρὸς τὰ Π, Ρ, Σ. Ὥστε:

Δύο ἢ περισσότερα ποσὰ λέγονται ἀνάλογα πρὸς ἄλλα ἰσάριθμα, ἂν γίνωνται ἐκ τούτων διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ἐπειδὴ δὲ ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες

$$\Pi = \Pi' \cdot \frac{1}{\lambda},\ P = P' \cdot \frac{1}{\lambda},\ \Sigma = \Sigma' \cdot \frac{1}{\lambda}, \qquad (2)$$

ἕπεται ὅτι καὶ τὰ ποσὰ Π, Ρ, Σ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ Π′, Ρ′ Σ′.

Τὰ ἐξ ἀλλήλων διὰ πολ)σμοῦ προκύποντα ποσὰ λέγοντα **ὁμόλογα** ἢ **ἀντίστοιχα** ποσά. Π. χ. τὰ Π καὶ Π′ εἶναι ὁμόλογα ποσά, τὰ Ρ, Ρ′ ὁμοίως καὶ τὰ Σ, Σ′ ἐπίσης εἶναι ὁμόλογα ποσά.

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{\Pi'}{\Pi} = \frac{P'}{P} = \frac{\Sigma'}{\Sigma}$. (3)

Ἂν δὲ κληθῇ λ ἕκαστος τῶν λόγων τούτων, προκύπτουσιν πάλιν αἱ ἰσότητες (1).

Ὁμοίως ἀπὸ τὰς (2) εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{P}{P'} = \frac{\Sigma}{\Sigma'}$. (4)

καὶ ἐκ τούτων προκύπτουσιν πάλιν αἱ (2). Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἂν ποσά τινα εἶναι ἀνάλογα πρὸς ἄλλα ἰσάριθμα, ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων ποσῶν εἶναι ὁ αὐτός. Καὶ ἀντιστρόφως.

Διὰ τοῦτο, διὰ νὰ δηλώσωμεν ὅτι τὰ ποσὰ Π', Ρ', Σ', εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ Π, Ρ, Σ, μεταχειριζόμεθα τὰς ἰσότητας (1) ἢ (3) ἢ (4).

2. ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΥΤΩΝ

§ 212. Τί εἶναι ἀναλογία καὶ ποῖα τὰ στοιχεῖα αὐτῆς.

Ἂν π.χ. $K : \Pi = 3$ καὶ $P : \Sigma = 3$, θὰ εἶναι καὶ $K : \Pi = P : \Sigma$.

Αὐτὴ ἡ ἰσότης λέγεται **ἀναλογία.** Ὥστε:

Ἀναλογία εἶναι ἰσότης δύο λόγων.

Οἱ ὅροι τῶν λόγων μιᾶς ἀναλογίας λέγονται καὶ ὅροι τῆς ἀναλογίας.

Ὁ α' καὶ ὁ δ' ὅρος λέγονται **ἄκροι,** οἱ δὲ ἄλλοι **μέσοι** ὅροι.

Οἱ προηγούμενοι καὶ οἱ ἑπόμενοι τῶν λόγων λέγονται ἀντιστοίχως **ἡγούμενοι** καὶ **ἑπόμενοι** τῆς ἀναλογίας.

Εἰς τὴν ἀναλογίαν $\frac{K}{\Pi} = \frac{\Pi}{P}$ οἱ μέσοι ὅροι εἶναι ἴσοι. Αὐτὴ λέγεται **συνεχὴς** ἀναλογία. Ὁ δὲ μέσος ὅρος Π λέγεται **μέσος ἀνάλογος** τῶν ἄκρων Κ καὶ Ρ.

Ἡ Ἀριθμητικὴ μᾶς διδάσκει διαφόρους ἰδιότητας τῶν ἀναλογιῶν. Ἀπὸ αὐτὰς χρησιμοποιοῦμεν εἰς τὴν Γεωμετρίαν τὰς ἀκολούθους.

Σημείωσις. Τὰ διὰ τὴν ἀπόδειξιν αὐτῶν χρησιμοποιούμενα ὁμοειδῆ ποσὰ θεωροῦνται μετρημένα μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.

§ 213. Ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν.

Ἔστω ἡ ἀναλογία

$$K : \Pi = P : \Sigma \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ (§ 182 Πόρ.) $K : \Pi = (K) : (\Pi)$ καὶ $P : \Sigma = (P) : (\Sigma)$, ἕπεται ὅτι $(K) : (\Pi) = (P) : (\Sigma)$ (2)

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἐκ τῆς (2) προκύπτει ἡ (1). Ὥστε:

α') Ἂν 4 ποσὰ συνιστῶσιν ἀναλογίαν καὶ τὰ μέτρα αὐτῶν

συνιστῶσιν ἀναλογίαν. Καὶ ἀντιστρόφως: Ἂν τὰ μέτρα 4 ποσῶν συνιστῶσιν ἀναλογίαν καὶ τὰ ποσὰ ταῦτα, συνιστῶσιν ἀντίστοιχον ἀναλογίαν.

Κατὰ ταῦτα ἐκ τῆς ἀναλογίας (1) προκύπτει ἡ (2) ἢ $\frac{(K)}{(\Pi)}=\frac{(P)}{(\Sigma)}$ (3). Καὶ ἂν ὅλοι οἱ ὅροι τῆς (1) εἶναι ὁμοειδεῖς καὶ οἱ ὅροι τῆς (3) θὰ εἶναι ὁμοειδεῖς.

Ἂν δὲ ἐξαλείψωμεν τοὺς παρονομαστὰς ταύτης, εὑρίσκομεν ὅτι: $(K)\cdot(\Sigma)=(\Pi)\cdot(P)$. Ἤτοι: (4)

β΄) Ἂν οἱ ὅροι ἀναλογίας εἶναι ὅλοι ὁμοειδεῖς, τὸ γινόμενον τῶν μέτρων τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν μέτρων τῶν μέσων.

Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι τὰ μέτρα (Κ), (Π), (Ρ), (Σ) ὁμοειδῶν ποσῶν Κ, Π, Ρ, Σ, εἶναι τοιαῦτα, ὥστε ἀληθεύει ἡ ἰσότης (4). Ἂν τὰ μέλη αὐτῆς διαιρέσωμεν διὰ τοῦ γινομένου $(\Pi)\cdot(\Sigma)$, εὑρίσκομεν τὴν ἀναλογίαν (2)· ἐκ ταύτης προκύπτει καὶ ἡ (1). Ἤτοι:

γ΄) Ἂν τὸ γινόμενον τῶν μέτρων τῶν ἄκρων ὁμοειδῶν ποσῶν Κ, Π, Ρ, Σ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν μέτρων τῶν μέσων, τὰ ποσὰ ταῦτα συνιστῶσιν ἀναλογίαν, καθ' ἣν σειρὰν εἶναι γεγραμμένα.

Σημείωσις. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην καὶ εἰς τὴν προηγουμένην τὰ ποσὰ πρέπει νὰ μετρῶνται μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.

Ἔστω πάλιν ὅτι οἱ ὅροι τῆς ἀναλογίας $K:\Pi=P:\Sigma$ εἶναι ὅλοι ὁμοειδεῖς.

Κατὰ τὰ προηγούμενα θὰ εἶναι:

$$(K)\cdot(\Sigma)=(\Pi)\cdot(P) \qquad (5)$$

Ἂν δὲ γράψωμεν τὰ μέτρα τούτων κατὰ τὴν σειρὰν

$$(K),\ (P),\ (\Pi),\ (\Sigma)$$

πάλιν ἀληθεύει ἡ (5). Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα θὰ εἶναι $(K):(P)=(\Pi):(\Sigma)$ καὶ ἐπομένως $K:P=\Pi:\Sigma$. Ὥστε:

δ΄) Ἂν οἱ ὅροι ἀναλογίας εἶναι ὅλοι ὁμοειδεῖς καὶ ἀντιμετατεθῶσιν οἱ μέσοι ὅροι, προκύπτει πάλιν ἀναλογία.

Ἂν εἰς τὰ μέλη ἀναλογίας $\frac{K}{\Pi}=\frac{P}{\Sigma}$ προστεθῇ ἡ 1, προκύπτει ἡ ἰσότης $\frac{K}{\Pi}+1=\frac{P}{\Sigma}+1$, ὅθεν βλέπομεν ὅτι:

ε΄) Ἂν $\frac{K}{\Pi}=\frac{P}{\Sigma}$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{K+\Pi}{\Pi}=\frac{P+\Sigma}{\Sigma}$.

Ἂν οἱ ὅροι τῆς ἀναλογίας $\frac{K}{\Pi}=\frac{P}{\Sigma}$ εἶναι ὅλοι ὁμοειδεῖς, προκύπτουσιν ἐξ αὐτῆς κατὰ σειρὰν αἱ ἀναλογίαι:

$$\frac{K}{P}=\frac{\Pi}{\Sigma},\quad \frac{K+P}{P}=\frac{\Pi+\Sigma}{\Sigma},\quad \frac{K+P}{\Pi+\Sigma}=\frac{P}{\Sigma}.$$ Ὥστε:

στ΄) Ἂν οἱ ὅροι ἀναλογίας $\frac{K}{\Pi}=\frac{P}{\Sigma}$ εἶναι ὅλοι ὁμοειδεῖς θὰ εἶναι καὶ $\frac{K}{\Pi}=\frac{P}{\Sigma}=\frac{K+P}{\Pi+\Sigma}$.

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἀληθεύει δι᾽ ὁσουσδήποτε ἴσους λόγους, ἂν ὅλοι οἱ ὅροι αὐτῶν εἶναι ὁμοειδεῖς.

Οὕτως ἂν $\frac{K}{\Pi}=\frac{P}{\Sigma}=\frac{\Lambda}{M}$ θὰ εἶναι $\frac{K}{\Pi}=\frac{P}{\Sigma}=\frac{K+P}{\Pi+\Sigma}$

καὶ ἑπομένως $\frac{\Lambda}{M}=\frac{K+P}{\Pi+\Sigma}=\frac{K+P+\Lambda}{\Pi+\Sigma+M}$. Ὥστε:

ζ΄) Ἂν $\frac{K}{\Pi}=\frac{P}{\Sigma}=\frac{\Lambda}{M}=\cdots=\frac{\Phi}{X}$ θὰ εἶναι

$$\frac{K}{\Pi}=\frac{P}{\Sigma}=\frac{\Lambda}{M}=\cdots=\frac{\Phi}{X}=\frac{K+P+\Lambda+\cdots+\Phi}{\Pi+\Sigma+M+\cdots+X}.$$

Ἀσκήσεις

395. Ἂν 4 εὐθ. τμήματα γεγραμμένα κατὰ σειρὰν συνιστῶσιν ἀναλογίαν, νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τῶν ἄκρων εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν μέσων. Καὶ ἀντιστρόφως.

396. Ἂν τρία εὐθ. τμήματα συνιστῶσι συνεχῆ ἀναλογίαν, νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ μέσου ἀναλόγου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν ἄκρων. Καὶ ἀντιστρόφως.

397. Νὰ γράψητε δύο εὐθ. τμήματα καὶ ἔπειτα νὰ ὁρίσητε τὸ μέσον ἀνάλογον αὐτῶν.

§ 214. Ποῖα λέγονται συμμεταβλητὰ ποσὰ καὶ ποῖα συμμεταβλητὰ ποσὰ λέγονται ἀνάλογα. Ἂν ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 2 μέτρα, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι 4 τετ. μέτρα. Ἂν μεταβληθῇ ἡ πλευρὰ καὶ γίνῃ π.χ. 3 μέτρα, μεταβάλλεται καὶ τὸ ἐμβαδὸν καὶ γίνεται 9 τετ. μέτρα. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου λέγονται **συμμεταβλητὰ ποσά.** Ὥστε:

Δύο ποσὰ λέγονται συμμεταβλητά, ἂν μεταβαλλομένου τοῦ ἑνὸς μεταβάλληται καὶ τὸ ἄλλο.

Οἱ τρόποι, κατὰ τοὺς ὁποίους δύο συμμεταβλητὰ ποσὰ ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλλήλων εἶναι ποικιλώτατοι.

Ἀπὸ αὐτοὺς ἁπλούστερος καὶ συνηθέστερος εἶναι ἐκεῖνος, κατὰ τὸν ὁποῖον, **ἂν τὸ ἓν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἕνα ἀριθμὸν καὶ τὸ ἄλλο πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.**

Π.χ. ἂν ἡ πλευρὰ α ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι 2 μέτρα, ἡ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι $2 \cdot 3 = 6$ μέτρα. Ἂν ἡ πλευρὰ γίνῃ $2 \cdot 2$ μέτρα, ἡ περίμετρος γίνεται $(2 \cdot 2) \cdot 3 = 6 \cdot 2$ μέτρα κ.τ.λ.

Τὰ τοιαῦτα συμμεταβλητὰ ποσὰ λέγονται **ἀνάλογα** ποσὰ ἢ **ἀναλόγως μεταβαλλόμενα ποσά.** Ὥστε:

Δύο συμμεταβλητὰ ποσὰ λέγονται ἀνάλογα ἢ ὅτι μεταβάλλονται ἀναλόγως, ἂν πολλαπλασιαζομένης μιᾶς τιμῆς τοῦ ἑνὸς ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, πολλαπλασιάζηται καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

3. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΩΝ ΣΥΜΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΠΟΣΩΝ

§ 215. Σχέσις τοῦ λόγου δύο τιμῶν ἑνὸς ποσοῦ πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν ἄλλου ἀναλόγου πρὸς αὐτὸ ποσοῦ. Ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὴν πλευρὰν α καὶ τὴν περίμετρον Π ἰσοπλεύρου τριγώνου.

Ἂν π.χ. $α = 2$ μέτ. θὰ εἶναι $Π = 6$ μέτ.

Ἂν δὲ $α' = 4$ μέτ. θὰ εἶναι $Π' = 12$ μέτ. Ὁ λόγος τῶν δύο τούτων τιμῶν τοῦ πρώτου ποσοῦ εἶναι $\frac{α'}{α} = \frac{4}{2} = 2$. Ἀλλὰ καὶ $\frac{Π'}{Π} = \frac{12}{6} = 2$. εἶναι λοιπὸν $\frac{α'}{α} = \frac{Π'}{Π}$.

Γενικῶς: Ἔστωσαν α καὶ α' δύο τιμαὶ ἑνὸς ποσοῦ Π καὶ β, β' αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ ἄλλου ποσοῦ Ρ ἀναλόγου πρὸς τὸ Π.

Ἂν $α' : α = λ$, θὰ εἶναι $α' = α \cdot λ$.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ ποσὰ Π καὶ Ρ ὑπετέθησαν ἀνάλογα, θὰ εἶναι καὶ $β' = β \cdot λ$. (§ 214). Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι $β' : β = λ = α' : α$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἂν δύο συμμεταβλητὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου.

Ἀντιστρόφως: Ἂν $\alpha' : \alpha = \beta' : \beta$ καὶ κληθῇ λ ἕκαστος τούτων, θὰ εἶναι $\alpha' = \alpha \cdot \lambda$ καὶ $\beta' = \beta \cdot \lambda$, ἤτοι:

Ἂν τυχοῦσα τιμὴ α τοῦ Π πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ λ καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ β τοῦ Ρ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ λ. Τὰ ποσὰ λοιπὸν Π καὶ Ρ εἶναι ἀνάλογα (§ 214).

§ 216. Ἔστωσαν α, α′ α″ τυχοῦσαι τιμαὶ ἑνὸς ποσοῦ Π καὶ β, β′, β″ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ ἄλλου ποσοῦ Ρ ἀναλόγου καὶ ὁμοειδοῦς πρὸς τὸ Π. Νὰ συγκριθῶσιν οἱ λόγοι $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha'}{\beta'}, \frac{\alpha''}{\beta''}$.

Λύσις. Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ Π καὶ Ρ εἶναι ἀνάλογα, εἶναι $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}$ καὶ $\frac{\alpha}{\alpha''} = \frac{\beta}{\beta''}$ κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα.

Ἐπειδὴ δὲ ὅλοι οἱ ὅροι τῶν ἀναλογιῶν τούτων εἶναι ὁμοειδεῖς, ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς γνωρίζομεν ὅτι ἐκ μὲν τῆς α′ προκύπτει ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'}$ ἐκ δὲ τῆς β′ ἡ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha''}{\beta''}$,

Εἶναι λοιπὸν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha''}{\beta''}$. Ὥστε: (1)

Ἂν δύο ὁμοειδῆ ποσὰ μεταβάλλωνται ἀναλόγως, ὁ λόγος τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν αὐτῶν εἶναι σταθερός.

Ἀντιστρόφως: Ἂν ἀληθεύωσιν αἱ ἰσότητες (1), ἐπειδὴ ὅλοι οἱ ὅροι αὐτῶν εἶναι ὁμοειδεῖς, θὰ εἶναι καὶ $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}$. Κατὰ δὲ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα τὰ ποσὰ Π καὶ Ρ εἶναι ἀνάλογα.

§ 217. Ἔστωσαν α, β τυχοῦσαι ἀντίστοιχοι τιμαὶ δύο συμμεταβλητῶν ποσῶν Π καὶ Ρ καὶ λ τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός. Ἂν α·λ καὶ β·λ εἶναι ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῶν ποσῶν Π καὶ Ρ, νὰ ἐξετασθῇ, ἂν τὰ ποσα ταῦτα εἶναι ἀνάλογα ἢ ὄχι.

Λύσις. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἀναλόγων ποσῶν (§ 214) πρέπει νὰ ἐξετάσωμεν, ἂν εἰς τὴν τιμὴν α·μ ἀντιστοιχῇ τιμὴ β·μ, οἱοσδήποτε ἀριθμὸς καὶ ἂν εἶναι ὁ μ. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὴν τιμὴν

$\alpha \cdot 2, \alpha \cdot 3, \alpha \cdot 4, \ldots$ τοῦ Π ἀντιστοιχεῖ τιμὴ

$\beta \cdot 2, \beta \cdot 3, \beta \cdot 4, \ldots$ τοῦ Ρ ἐξ ὑποθέσεως.

Εἰς τὴν τιμὴν π.χ. $α \cdot \frac{1}{4}$ τοῦ Π, ἔστω ὅτι ἀντιστοιχεῖ τιμὴ χ τοῦ Ρ. Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν εἰς τὴν τιμὴν $\left(α \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot 4$ ἀντιστοιχεῖ τιμὴ $χ \cdot 4$. Ἐπειδὴ δὲ $\left(α \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot 4 = α$ καὶ εἰς αὐτὴν ἀντιστοιχεῖ τιμὴ β, πρέπει νὰ εἶναι $χ \cdot 4 = β$ καὶ ἑπομένως $χ = β \cdot \frac{1}{4}$.

Κατὰ ταῦτα εἰς τὴν τιμὴν π. χ. $α \cdot \frac{1}{1000}$ τοῦ Π, ἀντιστοιχεῖ τιμὴ $β \cdot \frac{1}{1000}$ τοῦ Ρ. Κατὰ δὲ τὴν ὑπόθεσιν εἰς τὴν τιμὴν $\left(α \cdot \frac{1}{1000}\right) \cdot 5167$ ἀντιστοιχεῖ τιμὴ $\left(β \cdot \frac{1}{1000}\right) \cdot 5167$ ἢ εἰς τὴν τιμὴν $α \cdot 5{,}167$ ἀντιστοιχεῖ τιμὴ $β \cdot 5{,}167$.

Ἔστω τέλος $α \cdot 3{,}14144144414\ldots$ μία τιμὴ τὸ Π. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τοῦ Ρ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Εἰς	τὴν	τιμὴν	$α \cdot 3$	ἀντιστοιχεῖ	τιμὴ	$β \cdot 3$
»	»	»	$α \cdot 3{,}1$	»	»	$β \cdot 3{,}1$
»	»	»	$α \cdot 3{,}14$	»	»	$β \cdot 3{,}14$
»	»	»	$α \cdot 3{,}141$	»	»	$β \cdot 3{,}141$

Ἂν ἐξακολουθήσωμεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, ἐννοοῦμεν ὅτι εἰς τὴν τιμὴν

$α \cdot 3{,}14144144414\ldots$ τοῦ Π ἀντιστοιχεῖ τιμὴ

$β \cdot 3{,}14144144414\ldots$ τοῦ Ρ:

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Εἰς τὴν τιμὴν $α \cdot μ$ τοῦ Π ἀντιστοιχεῖ τιμὴ $β \cdot μ$ τοῦ Ρ, οἱοσδήποτε ἀριθμὸς καὶ ἂν εἶναι ὁ μ. Ἑπομένως τὰ ποσὰ Π καὶ Ρ εἶναι ἀνάλογα (§ 214).

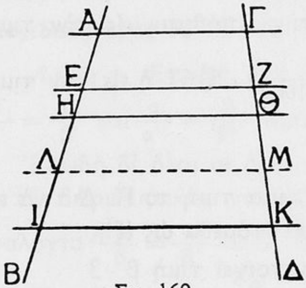
Κατὰ ταῦτα:

Διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν ὅτι δύο συμμεταβλητὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς μιᾶς τιμῆς τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τυχόντα ἀκέραιον ἀριθμὸν συνεπάγεται πολλαπλασιασμὸν τῆς ἀντιστοίχου τιμῆς τοῦ ἄλλου ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον ἀριθμόν.

4. ΑΝΑΛΟΓΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΤΜΗΜΑΤΑ

§ 218. *Θεώρημα I.* **Ἂν δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων εὐθειῶν, τὰ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων περιεχόμενα τμήματα αὐτῶν (ἀντίστοιχα) μεταβάλλονται ἀναλόγως** (σχ. 160).

Ἀπόδειξις. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ΑΕ · 2 = ΗΙ καὶ ὅτι Λ εἶναι τὸ μέσον τοῦ ΗΙ. Εἶναι λοιπὸν



Σχ. 160

$$ΑΕ = ΗΛ = ΛΙ. \qquad (1)$$

Ἄγομεν ἐκ τοῦ Λ εὐθεῖαν ΛΜ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) προκύπτει:

ΓΖ = ΘΜ = ΜΚ (§ 127). Ἄρα τὸ ΘΚ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΓΖ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι εἰς τμῆμα τῆς ΑΒ τριπλάσιον τοῦ ΑΕ ἀντιστοιχεῖ τμῆμα τῆς ΓΔ τριπλάσιον τοῦ ΓΖ κ.τ.λ.

Ἄρα (§ 217) τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ μεταβάλλονται ἀναλόγως.

Σημείωσις. Τὸ θεώρημα τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸν Θαλῆν*.

Πόρισμα I. **Ἂν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων**

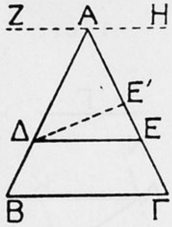
---

* Ὁ Θαλῆς ὁ Μιλήσιος ἦτο εἷς ἐκ τῶν ἑπτὰ σοφῶν τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος ἔζησε δὲ μεταξὺ 627 καὶ 547 π. Χ. Αἱ πληροφορίαι περὶ τοῦ βίου αὐτοῦ εἶναι ἀσαφεῖς καὶ ἀντιφατικαί. Εἶναι ὅμως βέβαιον ὅτι ἐταξίδευσεν δι' ἐμπορικὰς ὑποθέσεις εἰς Αἴγυπτον, ἔνθα ἠδυνήθη νὰ ἐκμαιεύσῃ πολλὰς ἐπιστημονικὰς γνώσεις τὰς ὁποίας ζηλοτύπως ἐκράτουν μυστικὰς οἱ ἱερεῖς τῆς Αἰγύπτου. Ὁ Πλούταρχος δὲ ἀναφέρει ὅτι ὁ Θαλῆς ἐξέπληξε τὸν βασιλέα Ἄμασιν τῆς Αἰγύπτου μὲ τὸν τρόπον, καθ' ὃν εὗρε τὸ ὕψος μιᾶς πυραμίδος μετρῶν τὴν σκιὰν αὐτῆς. Κατὰ τὸν Ἱερώνυμον τὸν Ρόδιον ἡ μέτρησις αὕτη ἔγινε τὴν στιγμὴν τῆς ἡμέρας, καθ' ἣν ἡ σκιὰ κατακορύφου ράβδου ἦτο ἰσομήκης πρὸς τὴν ράβδον ταύτην. Ἐπανελθὼν εἰς τὴν πατρίδα του ἵδρυσε τὴν περίφημον Ἰώνιον Φιλοσοφικὴν Σχολὴν καὶ ἠσχολεῖτο ἀποκλειστικῶς εἰς Φιλοσοφικὰς θεωρίας, εἰς ἀστρονομικὰς παρατηρήσεις καὶ εἰς τὰ μαθηματικά.

εὐθειῶν, τὰ ὑπ' αὐτῶν ὁριζόμενα τμήματα τῆς μιᾶς εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῆς ἄλλης.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα τῆς § 216 εἶναι $\frac{ΑΕ}{ΓΖ}=\frac{ΕΗ}{ΖΘ}=\frac{ΗΙ}{ΘΚ}$ κ.τ.λ.

Πόρισμα ΙΙ. **Ἂν εὐθεῖα παράλληλος πρὸς μίαν πλευρὰν τριγώνου τέμνῃ τὰς ἄλλας πλευρὰς αὐτοῦ, τὰ τμήματα τῆς μιᾶς εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῆς ἄλλης. Καὶ ἀντιστρόφως.**



Σχ. 161

Ἂν π. χ. ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ (σχ. 161) καὶ ἀχθῇ ἡ ΖΑΗ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα θὰ εἶναι

$$\frac{ΑΔ}{ΔΒ}=\frac{ΑΕ}{ΕΓ}. \qquad (1)$$

Ἀντιστρόφως. Ἂν ἀληθεύῃ ἡ (1), ἡ ΔΕ θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ. Πράγματι, ἂν ΔΕ' ἦτο ἡ ἐκ τοῦ Δ ἀγομένη παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, θὰ ἦτο $\frac{ΑΔ}{ΔΒ}=\frac{ΑΕ'}{Ε'Γ}$. (2)

Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (1) ἕπεται ὅτι $\frac{ΑΕ}{ΕΓ}=\frac{ΑΕ'}{Ε'Γ}$ καὶ ἑπομένως $\frac{ΑΕ}{ΕΓ}+1=\frac{ΑΕ'}{Ε'Γ}+1$ ἢ $\frac{ΑΓ}{ΕΓ}=\frac{ΑΓ}{Ε'Γ}$. Ἐκ ταύτης ἕπεται ὅτι ΕΓ = Ε'Γ. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὰ Ε καὶ Ε' ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸ Γ. Ἐπειδὴ δὲ εὐθυγραμμίζονται μὲ τὸ Γ καὶ ἐπὶ πλέον εἶναι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ θὰ συμπίπτουν. Ἄρα ἡ ΔΕ συμπίπτει μὲ τὴν ΔΕ', δηλ. τὴν ἀπὸ τὸ Δ παράλληλλον τῆς ΒΓ.

Ἀσκήσεις

398. Ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων τριγώνου ἄγομεν εὐθεῖαν παράλληλλον πρὸς μίαν πλευράν. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αὕτη διαιρεῖ ἑκατέραν τῶν ἄλλων εἰς τμήματα, τῶν ὁποίων τὸ ἓν εἶναι διπλάσιον τοῦ ἄλλου.

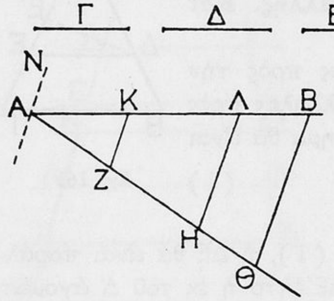
399. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν διαμέσων τῶν τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα ἓν τετράπλευρον διαιρεῖται ὑπὸ τῶν διαγωνίων του, εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου.

400. Ἂν Ε εἶναι τὸ μέσον τῆς διαμέσου ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἡ ΒΕ διαιρεῖ τὴν ΑΓ εἰς τμήματα ἔχοντα λόγον 1 : 2.

5. ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

§ **219.** *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ διαιρεθῇ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς ἄλλα δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα Γ, Δ, Ε** (σχ. 162).

Λύσις. Ἄγομεν εὐθεῖαν ΑΘ, ἡ ὁποία σχηματίζει μὲ τὴν ΑΒ γωνίαν καὶ ὁρίζομεν ἐπ' αὐτῆς τμήματα ΑΖ, ΖΗ, ΗΘ διαδοχικά, ὁμόρροπα καὶ ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ Γ, Δ, Ε. Ἔπειτα γράφομεν τὴν εὐθεῖαν ΘΒ καὶ τὰς ΖΚ, ΗΛ παραλλήλους πρὸς τὴν ΘΒ. Τοιουτοτρόπως τὸ ΑΒ διαιρεῖται εἰς τὰ ζητούμενα τμήματα ΑΚ, ΚΛ, ΛΒ.



Σχ. 162

Ἀπόδειξις. Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΘ τέμνονται ὑπὸ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ΖΚ, ΗΛ, ΘΒ καὶ τῆς ΑΝ παραλλήλου πρὸς αὐτάς. Ἄρα (§ 218 Πόρ. 1) εἶναι $\frac{ΑΚ}{ΑΖ} = \frac{ΚΛ}{ΖΗ} = \frac{ΛΒ}{ΗΘ}$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΖ = Γ, ΖΗ = Δ, ΗΘ = Ε, αὗται γίνονται $\frac{ΑΚ}{Γ} = \frac{ΚΛ}{Δ} = \frac{ΛΒ}{Ε}$, ὅ.ἔ.δ.

Ἀσκήσεις

401. Νὰ διαιρέσητε δοθὲν τμῆμα α εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον 3 : 4.

402. Νὰ διαιρέσητε δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τρία μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 4 δι' εὐθειῶν ἀγομένων ἐκ τῆς κορυφῆς Α.

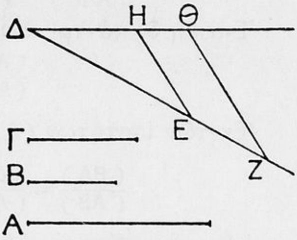
403. Νὰ κατασκευάσητε ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν ὑποτείνουσαν α, ἡ δὲ ἐπ' αὐτὴν προβολὴ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς νὰ διαιρῇ αὐτὴν εἰς μέρη ἔχοντα λόγον 2 : 3.

404. Νὰ διαιρέσητε δοθὲν τμῆμα α εἰς τμήματα χ, ψ, ω τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{χ}{3} = \frac{ψ}{2} = \frac{ω}{4}$.

405. Εἰς δοθέντα σημεῖα, Α, Β, ἐνεργοῦσι δύο δυνάμεις παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι. Ἡ εἰς τὸ Α ἐνεργοῦσα ἔχει ἔντασιν 4 χιλιογράμμων, ἡ δὲ ἄλλη 5 χιλιογρ. Νὰ ὁρίσητε τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης αὐτῶν.

§ **220.** *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τετάρτη ἀνάλογος δοθέντων εὐθυγράμμων τμημάτων Α, Β, Γ** (σχ. 163).

Κατασκευάζομεν γωνίαν Δ καὶ εἰς τὴν μίαν πλευρὰν ὁρίζομεν τμήματα ΔΕ καὶ ΕΖ ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ Α καὶ Β. Εἰς δὲ τὴν ἄλλην πλευρὰν ὁρίζομεν τμῆμα ΔΗ ἴσον πρὸς τὸ Γ. Φέρομεν ἔπειτα τὴν ΕΗ καὶ τὴν ΖΘ παράλληλον πρὸς αὐτήν.



Σχ. 163

Οὕτως εἶναι $\frac{ΔΕ}{ΕΖ} = \frac{ΔΗ}{ΗΘ}$ ἢ $\frac{Α}{Β} = \frac{Γ}{ΗΘ}$. Τὸ ΗΘ λοιπὸν εἶναι τὸ ζητούμενον τμῆμα.

Ἀσκήσεις

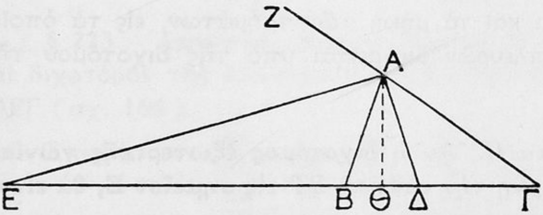
406. Ἂν δοθῶσι τρία εὐθ. τμήματα α, β, γ, νὰ γράψητε ἓν εὐθ. τμῆμα χ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $(χ) = \frac{(β)\cdot(γ)}{(α)}$.

407. Νὰ κατασκευάσητε ὀρθογώνιον μὲ δοθεῖσαν βάσιν καὶ ἰσοδύναμον πρὸς ἄλλο δοθὲν ὀρθογώνιον.

408. Ἂν δοθῶσι δύο εὐθ. τμήματα α καὶ β, νὰ γραφῇ ἄλλο εὐθ. τμῆμα χ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $(α)^2 = (β)\cdot(χ)$.

6. ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

§ **221.** *Θεώρημα Ι.* **Ἡ διχοτομοῦσα γωνίαν τριγώνου διαιρεῖ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς τμήματα ἀνάλογα πρὸς τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὰ πλευράς. Καὶ ἀντιστρόφως.**



Σχ. 164

Ἂν δηλ. ἡ ΑΔ διχοτομῇ τὴν γωνίαν Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 164), θὰ εἶναι

$$\frac{ΒΔ}{ΑΒ} = \frac{ΔΓ}{ΑΓ}.$$

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν μία γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΔ εἶναι ἴση πρὸς μίαν γωνίαν τοῦ ΑΔΓ. Κατὰ δὲ τὴν ἰδιότητα τῆς § 191 θὰ εἶναι

$$\frac{(\text{ΑΒΔ})}{(\text{ΑΔΓ})}=\frac{(\text{ΑΒ})\cdot(\text{ΑΔ})}{(\text{ΑΔ})\cdot(\text{ΑΓ})}=\frac{(\text{ΑΒ})}{(\text{ΑΓ})}, \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΘ εἶναι

$$\frac{(\text{ΑΒΔ})}{(\text{ΑΔΓ})}=\frac{(\text{ΒΔ})}{(\text{ΔΓ})} \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι $\frac{(\text{ΒΔ})}{(\text{ΔΓ})}=\frac{(\text{ΑΒ})}{(\text{ΑΓ})}$, ὅθεν

$$\frac{(\text{ΒΔ})}{(\text{ΑΒ})}=\frac{(\text{ΔΓ})}{(\text{ΑΓ})} \text{ καὶ } \frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΑΒ}}=\frac{\text{ΔΓ}}{\text{ΑΓ}}, \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

Ἀντιστρόφως: Ἂν $\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΑΒ}}=\frac{\text{ΔΓ}}{\text{ΑΓ}}$, ἡ ΑΔ διχοτομεῖ τὴν Α.

Διότι ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης προκύπτει ὅτι

$$\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΑΒ}}=\frac{\text{ΔΓ}}{\text{ΑΓ}}=\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΑΒ}+\text{ΑΓ}}. \qquad (3)$$

Ἂν δὲ διχοτόμος τῆς Α ἦτο ἄλλη εὐθεῖα ΑΔ′ θὰ ἦτο

$$\frac{\text{ΒΔ}'}{\text{ΑΒ}}=\frac{\text{Δ}'\text{Γ}}{\text{ΑΓ}}=\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΑΒ}+\text{ΑΓ}}.$$

Ἐκ τούτων καὶ τῆς (3) ἕπεται ὅτι $\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΑΒ}}=\frac{\text{ΒΔ}'}{\text{ΑΒ}}$, ὅθεν ΒΔ = ΒΔ′. Τὰ σημεῖα λοιπὸν Δ καὶ Δ′ ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τὸ Β. Ἐπειδὴ δὲ εὐθυγραμμίζονται μὲ τὸ Β καὶ ἐπὶ πλέον εἶναι καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ, συμπίπτουσιν. Ἄρα ἡ ΑΔ συμπίπτει μὲ τὴν ΑΔ′ διχοτόμον τῆς $\widehat{\text{Α}}$. ὅ.ἔ.δ.,

Ἐφαρμογή. Ἂν (ΑΓ) = α, (ΑΓ) = β, (ΑΒ) = γ θὰ εἶναι

$$\frac{(\text{ΒΔ})}{\gamma}=\frac{(\text{ΔΓ})}{\beta}=\frac{\alpha}{\gamma+\beta} \quad \text{καὶ ἑπομένως}$$

$$(\text{ΒΔ})=\frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}, \quad (\text{ΔΓ})=\frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}$$

Ὁμοίως ὁρίζονται καὶ τὰ μήκη τῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα ἑκάστη τῶν ἄλλων πλευρῶν διαιρεῖται ὑπὸ τῆς διχοτόμου τῆς ἀπέναντι γωνίας.

§ 222. *Θεώρημα ΙΙ.* **Ἂν ἡ διχοτόμος ἐξωτερικῆς γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ τέμνῃ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ εἰς σημεῖον Ε, θὰ εἶναι $\frac{\text{ΕΒ}}{\text{ΑΑ}}=\frac{\text{ΕΓ}}{\text{ΑΓ}}$. Καὶ ἀντιστρόφως.**

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $\widehat{\text{ΕΑΓ}}+\widehat{\text{ΕΑΖ}}=2$ ὀρθ. καὶ $\widehat{\text{ΕΑΖ}}=\widehat{\text{ΕΑΒ}}$, ἔπεται ὅτι $\widehat{EA\Gamma} + \widehat{EAB} = 2$ ὀρθ. Κατὰ δὲ τὴν ἰδιότητα τῆς § 191, θὰ εἶναι $\frac{(EAB)}{(EA\Gamma)} = \frac{(AE)\cdot(AB)}{(AE)\cdot(A\Gamma)}$, ὅθεν $\frac{(EAB)}{(EA\Gamma)} = \frac{(AB)}{(A\Gamma)}$.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΘ, εἶναι

$$\frac{(EAB)}{(EA\Gamma)} = \frac{(EB)}{(E\Gamma)}.$$

Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι $\frac{EB}{AB} = \frac{E\Gamma}{A\Gamma}$.

Ἀντιστρόφως: Ἂν εἶναι $\frac{EB}{AB} = \frac{E\Gamma}{A\Gamma}$, ἡ εὐθεῖα ΑΕ διχοτομεῖ τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ΖΑΒ. Ἡ ἀπόδειξις γίνεται κατὰ τρόπον ὅμοιον πρὸς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀντιστρόφου τοῦ προηγουμένου θεωρήματος.

Ἀσκήσεις

409. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει (ΑΒ) = 8 ἑκατ. (ΒΓ) = 10 ἑκατ. καὶ (ΑΓ) = 12 ἑκατ. Νὰ ὑπολογισθῶσι τὰ μήκη τῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ πλευρὰ ΒΓ διαιρεῖται ὑπὸ τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν Α.

410. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $2\alpha = \beta + \gamma$. Νὰ ὑπολογισθῶσι τὰ μήκη τῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ ΒΓ ὑπὸ τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν Α συναρτήσει τῶν β καὶ γ.

411. Νὰ διχοτομήσητε τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τῆς ἀσκήσεως 409 καὶ νὰ ὑπολογίσητε τὰς ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς διχοτόμου καὶ τῆς εὐθείας ΒΓ.

412. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει (ΑΒ) = 6 ἑκατ., (ΒΓ) = 10 ἑκατ. καὶ (ΑΓ) = 8 ἑκατ. Νὰ ὑπολογίσητε τὴν ἀπόστασιν τῶν σημείων, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ εὐθεῖα ΒΓ τέμνεται ἀπὸ τὰς διχοτόμους τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς γωνίας Α.

§ 223. Ἁρμονικὰ συζυγῆ σημεῖα. Ἔστωσαν ΑΔ καὶ ΑΕ αἱ διχοτόμοι τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 164).

Ἐπειδὴ $\frac{\Delta B}{AB} = \frac{\Delta\Gamma}{A\Gamma}$, $\frac{EB}{AB} = \frac{E\Gamma}{A\Gamma}$, θὰ εἶναι καὶ

$$\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma},\quad \frac{EB}{E\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}.$$

Ἐκ τούτων δὲ βλέπομεν, ὅτι $\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{EB}{E\Gamma}$ (1). Ἤτοι:

Ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τοῦ Δ ἀπὸ τῶν σημείων Β καὶ

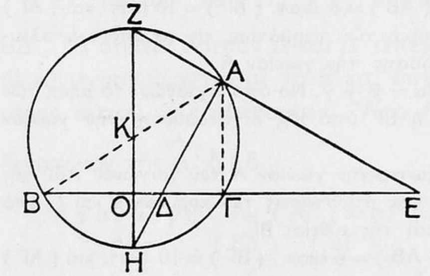
Γ ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀποστάσεων τοῦ Ε ἀπὸ τῶν αὐτῶν σημείων Β καὶ Γ.

Τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὴν ἰδιότητα ταύτην, λέγονται **ἁρμονικὰ συζυγῆ ἀλλήλων** πρὸς τὰ Β καὶ Γ. Ἡ δὲ εὐθεῖα ΒΓ λέγομεν ὅτι **διαιρεῖται ἁρμονικῶς** ὑπὸ τῶν σημείων Δ καὶ Ε.

Ἐκ τῆς ἀναλογίας (1) προκύπτει εὐκόλως ἡ ἀναλογία $\frac{ΒΔ}{ΒΕ}=\frac{ΓΔ}{ΓΕ}$. Ἐκ ταύτης γίνεται φανερὸν ὅτι καὶ τὰ Β, Γ εἶναι ἁρμονικὰ συζυγῆ ἀλλήλων πρὸς τὰ Δ καὶ Ε, ἡ δὲ εὐθεῖα ΔΕ διαιρεῖται ἁρμονικῶς ὑπὸ τῶν Β καὶ Γ.

Τὰ σημεῖα Β,Γ,Δ,Ε, εἰς τὴν τοιαύτην θέσιν αὐτῶν ἀποτελοῦσι μίαν **ἁρμονικὴν σημειοσειράν.**

§ **224.** *Πρόβλημα Ι.* **Ἂν δοθῶσιν ἐπ' εὐθείας τρία σημεῖα Β, Γ, Δ, νὰ ὁρισθῇ τὸ ἁρμονικὸν συζυγὲς τοῦ Δ πρὸς τὰ ἄλλα Β καὶ Γ.**



Σχ. 165

Ἀνάλυσις. α') Ἂν τὸ Δ κεῖται μεταξὺ Β και Γ (σχ. 165), ἀπὸ αὐτὸ θὰ διέρχηται ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ. Αὐτὴ ὅμως θὰ διέρχηται καὶ ἀπὸ τὸ μέσον Η τοῦ τόξου τοῦ ἀντιστοίχου πρὸς τὴν γωνίαν ΒΑΓ, ἐγγεγραμμένην εἰς τὴν πρειφέρειαν ΑΒΓ. Ἂν λοιπὸν ὁρισθῇ τὸ μέσον Η αὐτοῦ τοῦ τόξου, ὁρίζεται ἡ εὐθεῖα ΗΔ καὶ δι' αὐτῆς ἡ κορυφὴ Α ἐπὶ τῆς ἀντιστοίχου περιφερείας.

Ἂν δὲ Ε εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον, ἡ ΑΕ θὰ διχοτομῇ τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν Α καὶ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ. Διὰ τοῦτο θὰ διέρχηται ἀπὸ τὸ ἄλλο ἄκρον Ζ τῆς διὰ τοῦ Η διερχομένης διαμέτρου.

Σύνθεσις. Γράφομεν τυχοῦσαν περιφέρειαν Κ, ἡ ὁποία νὰ διέρχηται ἀπὸ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ καὶ διάμετρον ΖΗ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ. Ἔπειτα φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΗΔ. Ἔστω δὲ Α ἡ ἄλλη τομὴ αὐτῆς καὶ τῆς περιφερείας Κ. Ἄγομεν τέλος τὴν ΖΑ, ἥτις τέμνει τὴν εὐθεῖαν ΒΓ εἰς τὸ ζητούμενον σημεῖον Ε.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $\widehat{ΒΗ} = \widehat{ΗΓ}$, ἡ ΑΗ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΒΑΓ. Ἡ δὲ εὐθεῖα ΖΑΕ ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΗ διχοτομεῖ τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν Α τοῦ αὐτοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Κατὰ τὰ προηγούμενα λοιπὸν θὰ εἶναι $\frac{ΔΒ}{ΔΓ} = \frac{ΕΒ}{ΕΓ}$ καὶ ἐπομένως τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε εἶναι ἁρμονικὰ συζυγῆ πρὸς τὰ Β καὶ Γ.

β') Ἂν δοθῇ τὸ Δ ἐκτὸς τῶν Β, Γ, ἄγεται ἡ ΔΖ καὶ ὁρίζεται ἡ κορυφὴ Α. Ἔπειτα δὲ ἡ ΑΗ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ ζητούμενον σημεῖον Ε. Ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὅπως προηγουμένως.

§ 225. Ποία εἶναι ἡ ἀμοιβαία θέσις τῶν σημείων ἁρμονικῆς σημειοσειρᾶς. Εἰς τὸ σχ. 165 τὰ Δ καὶ Γ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ μέσου Ο τοῦ τμήματος ΒΓ. Ἐπειδὴ δὲ $\widehat{ΑΖΟ} + \widehat{ΖΟΔ} < 2$ ὀρθ., αἱ εὐθεῖαι ΖΑ καὶ ΒΓ τέμνονται εἰς σημεῖον Ε πρὸς τὸ μέρος τῶν γωνιῶν τούτων, ἐπομένως καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μὲ τὸ Δ μέρος τῆς ΖΗ ἢ τοῦ Ο. Ὥστε:

Τὰ ἁρμονικὰ συζυγῆ Δ καὶ Ε πρὸς τὰ Β καὶ Γ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ μέσου τοῦ ΒΓ·

Εἰς τὸ αὐτὸ σχῆμα τὸ Δ. κεῖται μεταξὺ Ο καὶ Γ, ἡ δὲ πλευρὰ ΗΔΑ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΗΑΖ εἶναι χορδὴ τοῦ κύκλου Κ καὶ ἡ ἐπ' αὐτὴν κάθετος ΖΑ τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ε ἐκτὸς τοῦ κύκλου. Ὥστε:

Ἀπὸ τὰ δύο ἁρμονικὰ συζυγῆ πρὸς τὰ δύο σημεῖα Β καὶ Γ τὸ ἓν κεῖται μεταξὺ Β καὶ Γ, τὸ δὲ ἄλλο ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ τμήματος ΒΓ.

Ἂν τὸ Δ συμπίπτῃ μὲ τὸ μέσον Ο, ἡ ΗΔΑ ταυτίζεται μὲ τὴν ΗΟΖ, τὸ Α μὲ τὸ Ζ καὶ ἡ Ζ Α κάθετος ἐπὶ τὴν ΗΔΑ γίνεται κάθετος ἐπὶ τὴν ΗΖ καὶ ἐπομένως παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ. Τὸ Ε λοιπὸν ἀφανίζεται εἰς τὸ ἄπειρον. Ὥστε:

Ἁρμονικὸν συζυγὲς τοῦ μέσου ἑνὸς εὐθ. τμήματος ΒΓ πρὸς τὰ ἄκρα αὐτοῦ εἶναι τὸ ἐπ' ἄπειρον σημεῖον τῆν εὐθείας ΒΓ.

Ἀσκήσεις

413. Νά ἀποδείξητε ὅτι ἕκαστον σημεῖον εὐθείας ΒΓ ἔχει ἓν μόνον ἁρμονικὸν συζυγὲς πρὸς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ αὐτῆς.

414. Ἀπὸ τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου ΑΒ περιφερείας νὰ φέρητε ἐφαπτομένας εἰς αὐτήν. Ἔπειτα νὰ γράψητε τρίτην ἐφαπτομένην εἰς ἓν σημεῖον Μ τῆς αὐτῆς περιφερείας. Ἂν Γ, Δ, Ε εἶναι σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα αὔτη τέμνει τὰς δύο πρώτας ἐφαπτομένας καὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ εἶναι ἁρμονικὰ συζυγῆ πρὸς τὰ Μ καὶ Ε.

415. Αἱ διχοτόμοι τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς ὀρθῆς γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ τέμνουσι τὴν εὐθειαν ΒΓ εἰς σημεῖα Δ καὶ Ε. Ἂν εἶναι $ΑΔ = ΑΒ$ νὰ ἀποδείξητε ὅτι $ΑΕ = ΑΓ$ καὶ ὅτι $(ΕΒ)^2 = (ΕΓ) \cdot (ΔΒ)$.

416. Ἂν Ο εἶναι τὸ μέσον εὐθ. τμήμαμος ΑΒ καὶ τὰ σημεῖα Γ, Δ εἶναι ἁρμονικὰ συζυγῆ πρὸς τὰ Α καὶ Β, νὰ ἀποδείξητε ὅτι : $(ΟΑ)^2 = (ΟΓ) \cdot (ΟΔ)$.

§ **226.** *Πρόβλημα ΙΙ.* **Δίδονται δύο ἄνισα εὐθύγραμμα τμήματα μ, ν καὶ ὁρίζονται εἰς ἓν ἐπίπεδον δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ ὁρισθῇ καὶ νὰ γραφῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι ΜΑ : ΜΒ = μ : ν** (σχ. 166).

Λύσις. Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΑΒ. Ἂν ΜΔ, ΜΕ εἶναι αἱ διχοτόμοι τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς γωνίας Μ τοῦ τριγώνου ΑΜΒ, θὰ εἶναι :

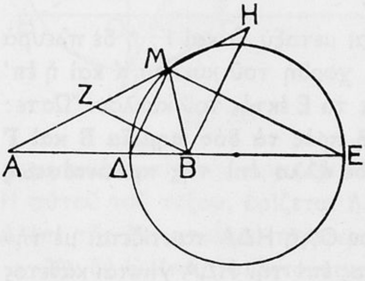
$ΔΑ : ΔΒ = ΜΑ : ΜΒ = μ : ν$ καὶ

$ΕΑ : ΕΒ = ΜΑ : ΜΒ = μ : ν$.

Ἐπομένως :

$ΔΑ : ΔΒ = ΕΑ : ΕΒ = μ : ν$, τὰ δὲ σημεῖα Δ καὶ Ε εἶναι ἁρμονικὰ συζυγῆ πρὸς τὰ Α καὶ Β.

Ἐκ τούτων τὸ Δ ὁρίζομεν καὶ ἀρχικῶς, ἂν διαιρέσωμεν τὸ δοθὲν τμῆμα ΑΒ εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰ μ καὶ ν (§ 219). Μετὰ τοῦτο δὲ ὁρίζομεν καὶ τὸ Ε (§ 224).



Σχ. 166

Ὥστε τὸ εὐθ. τμῆμα ΔΕ εἶναι τελείως ὡρισμένον κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος.

Ἐπειδὴ δὲ $\widehat{ΔΜΕ} = 1$ ὀρθ., τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον ΔΕ καὶ γράφεται εὐκόλως.

Ἂν δὲ Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας ταύτης καὶ φέρωμεν τὰς εὐθείας ΒΖ, ΒΗ ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς τὰς ΜΕ, ΜΔ, θὰ εἶναι $\widehat{ΖΒΗ} = \widehat{ΔΜΕ} = 1$ ὀρθ. καὶ

$$μ : ν = ΑΔ : ΔΒ = ΑΜ : ΜΗ$$

$$μ : ν = ΕΑ : ΕΒ = ΑΜ : ΜΖ \qquad (1)$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι ΜΖ = ΜΗ, ἡ δὲ ΒΜ εἶναι διάμεσος τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΖΒΗ καὶ διὰ τοῦτο ΒΜ = ΜΗ (§ 127 Πόρ ΙΙΙ).

Ἡ α' λοιπὸν τῶν ἰσοτήτων (1) γίνεται μ : ν = ΑΜ : ΒΜ, ἤτοι τὸ Μ εἶναι σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι:

Ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὸ εὐθ. τμῆμα ΔΕ.

Τοῦτο δὲ ὁρίζομεν, ὅπως προηγουμένως εἴπομεν.

Σημείωσις. Ἂν μ καὶ ν εἶναι ἀριθμοὶ π.χ. 2 καὶ 3, ὁρίζομεν εὐκόλως δύο τμήματα ἔχοντα λόγον 2 : 3 καὶ ἐργαζόμεθα, ὡς προηγουμένως.

§ 227. *Πρόβλημα ΙΙΙ.* **Δίδεται εὐθεῖα Ε, δύο σημεῖα Α, Β καὶ λόγος μ : ν. Νὰ ὁρισθῶσιν σημεῖα Μ τῆς Ε τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι ΜΑ : ΜΒ = μ : ν.**

Λύσις. Γράφομεν, ὅπως προηγουμένως, τὸν τόπον τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τὰ Α καὶ Β ἔχουσι λόγον μ : ν. Προφανῶς τὰ ζητούμενα σημεῖα εἶναι αἱ τομαὶ τοῦ τόπου τούτου καὶ τῆς εὐθείας Ε. Ἑπομένως οὐδὲν ἢ ἓν ἢ δύο σημεῖα τῆς Ε πληροῦσι τὸ ἐπίταγμα τοῦ προβλήματος.

Ἂν τὰ Α, Β κεῖνται ἐπὶ τῆς Ε, τὸ πρόβλημα λύεται καὶ ὡς ἑξῆς: Ὁρίζομεν (§ 219) ἓν σημεῖον Μ μεταξὺ Α καὶ Β καὶ ἔπειτα τὸ ἁρμονικὸν συζυγὲς αὐτοῦ πρὸς τὰ Α καὶ Β (§ 224).

Ἀσκήσεις

417. Νὰ γράψητε τὸν γεωμ. τόπον τῶν σημείων Μ, διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι $ΜΑ : ΜΒ = \frac{2}{3}$. Ἔπειτα δὲ τὸν τόπον τῶν σημείων, διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι $ΜΒ : ΜΑ = \frac{2}{3}$.

418. Εἰς μίαν περιφέρειαν νὰ ὁρίσητε τόξον. ΑΒ Ἐπ' αὐτοῦ δὲ νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε ἡ χορδὴ ΜΑ νὰ εἶναι πρὸς τὴν ΜΒ ὡς δοθὲν τμῆμα μ πρὸς ἄλλο δοθὲν ν.

419. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ μὲ βάσιν ΒΓ ἴσην πρὸς 8 ἑκατ., ὕψος 2 ἑκατ., καὶ νὰ εἶναι ΑΒ : ΑΓ = 3 : 5.

420. Εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐνεργοῦσι δύο παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι δυνάμεις. Ἡ εἰς τὸ Α ἐνεργοῦσα ἔχει ἔντασιν 3 χιλιογρ., ἡ δὲ ἄλλη 2 χιλιογρ. Νὰ ὁρίσητε τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης αὐτῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'

1. ΟΜΟΙΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

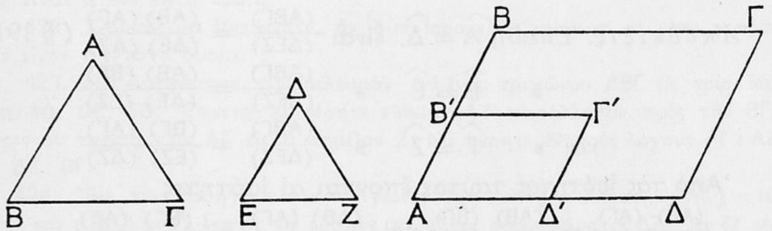
§ 228. Ποῖα εὐθ. σχήματα λέγονται ὅμοια. Ἔστωσαν δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (σχ. 167). Ταῦτα προφανῶς ἔχουσιν $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{Z}$. Εἶναι δὲ καὶ

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{EZ}$$

διότι οἱ ὁμώνυμοι ὅροι τῶν λόγων τούτων εἶναι ἴσοι.

Διὰ τοὺς λόγους τούτους τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα λέγονται **ὅμοια τρίγωνα.**

Ὁμοίως, ἂν ἐκ τῶν μέσων Δ′ καὶ Β′ τῶν πλευρῶν ΑΔ καὶ ΑΒ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΑΔ, σχηματίζεται νέον παραλληλόγραμμον ΑΔ′Γ′Β′..



Σχ. 167

Τὰ δύο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ καὶ ΑΒ′Γ′Δ′ ἔχουσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας, μίαν πρὸς μίαν καὶ

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{A\Delta}{A\Delta'}.$$

Λέγονται δὲ καὶ ταῦτα ὅμοια σχήματα. Ὥστε:

Δύο εὐθύγραμμα σχήματα λέγονται ὅμοια, ἂν αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι καὶ αἱ γωνίαι ἑκάστου ἴσαι, μία πρὸς μίαν, πρὸς τὰς ὑπὸ ὁμολόγων πλευρῶν σχηματιζομένας γωνίας τοῦ ἄλλου (§ 211).

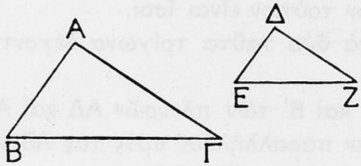
Ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων πλευρῶν δύο ὁμοίων σχημάτων λέγεται **λόγος ὁμοιότητος** αὐτῶν. Π. χ. ὁ λόγος ὁμοιότητος τῶν παραλληλογράμμων ΑΒΓΔ, ΑΒ′Γ′Δ′ εἶναι 2.

Αἱ κορυφαὶ τῶν ἴσων γωνιῶν δύο ὁμοίων σχημάτων λέγονται **ὁμόλογοι κορυφαί.**

Αἱ διάμεσοι, διχοτόμοι, ὕψη ὁμοίων τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ ὁμολόγους κορυφάς, λέγονται ὁμοίως **ὁμόλογοι διάμεσοι, ὁμόλογοι διχοτόμοι, ὁμόλογα ὕψη.**

2. ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

§ 229. **Θεώρημα Ι. Ἂν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχωσι τὰς γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, ταῦτα εἶναι ὅμοια.**



Σχ. 168

Ἂν δηλ. εἶναι $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{Z}$, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι ὅμοια (σχ. 168).

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$, εἶναι $\dfrac{(AB\Gamma)}{(\Delta EZ)} = \dfrac{(AB)\,(A\Gamma)}{(\Delta E)\,(\Delta Z)}$ (§ 191)

» $\widehat{B} = \widehat{E}$ » $\dfrac{(AB\Gamma)}{(\Delta EZ)} = \dfrac{(AB)\,(B\Gamma)}{(\Delta E)\,(EZ)}$

καὶ » $\widehat{\Gamma} = \widehat{Z}$ » $\dfrac{(AB\Gamma)}{(\Delta EZ)} = \dfrac{(B\Gamma)\,(A\Gamma)}{(EZ)\,(\Delta Z)}$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας ταύτας ἕπονται αἱ ἰσότητες

$$\frac{(AB)\,(A\Gamma)}{(\Delta E)\,(\Delta Z)} = \frac{(AB)\,(B\Gamma)}{(\Delta E)\,(EZ)} \text{ καὶ } \frac{(AB)\,(A\Gamma)}{(\Delta E)\,(\Delta Z)} = \frac{(B\Gamma)\,(A\Gamma)}{(EZ)\,(\Delta Z)}.$$

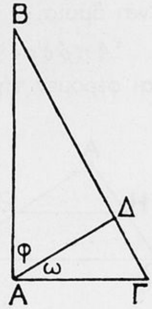
Ἀπὸ τὴν α′ τούτων προκύπτει ὅτι $\dfrac{(A\Gamma)}{(\Delta Z)} = \dfrac{(B\Gamma)}{(EZ)}$, ἀπὸ δὲ τὴν β′ ἡ ἰσότης $\dfrac{(AB)}{(\Delta E)} = \dfrac{(B\Gamma)}{(EZ)}$.

Εἶναι λοιπὸν $\dfrac{AB}{\Delta E} = \dfrac{B\Gamma}{EZ} = \dfrac{A\Gamma}{\Delta Z}$, ἤτοι τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουσι τὰς πλευρὰς ἀναλόγους. Ἐπειδὴ δὲ ἔχουσι καὶ τὰς γωνίας ἴσας, ἕπεται ὅτι εἶναι ὅμοια (§ 228).

Σημείωσις. Πρέπει νὰ προσέξωμεν ὅτι ὁμόλογοι πλευραὶ εἶναι αἱ κείμεναι ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν.

Πόρισμα I. **Ἂν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ὅμοια.**

Πόρισμα II. **Τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος ΑΔ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΓ διαιρεῖ αὐτὸ εἰς τρίγωνα ὅμοια πρὸς ἄλληλα καὶ πρὸς αὐτὸ** (σχ. 169).



Σχ. 169

Πόρισμα III. **Ἑκατέρα τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς προβολῆς της ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.**

Πόρισμα IV. **Τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖ τὴν ὑποτείνουσαν.**

Ἀσκήσεις

421. Νὰ ἐξετάσητε, ἂν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα μὲ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην εἶναι ἢ δὲν εἶναι ὅμοια.

422. Ὁμοίως νὰ ἐξετάσητε, ἂν δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα μὲ μίαν γωνίαν ἴσην εἶναι πάντοτε ὅμοια.

423. Νὰ διαιρέσητε τὴν πλευρὰν ΑΒ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἰς τρία ἴσα μέρη ΑΔ, ΔΕ, ΕΒ. Ἔπειτα νὰ φέρητε εὐθεῖαν ΔΖ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, μέχρις οὗ τμήσῃ τὴν ΑΓ εἴς τι σημεῖον Ζ. Νὰ εὕρητε δὲ τοὺς λόγους ΑΓ : ΑΖ καὶ ΔΖ : ΒΓ.

424. Ἂν τὸ προηγούμενον τρίγωνον ἔχῃ (ΑΒ) = 9 ἑκατ., (ΑΓ) = 10 ἑκατ. καὶ (ΒΓ) = 15 ἑκατ., νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ΔΖ. Ἂν δὲ φέρητε τὴν ΕΘ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ τέμνουσαν τὴν ΑΓ εἰς τὸ Θ, νὰ εὕρητε καὶ τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ΕΘ.

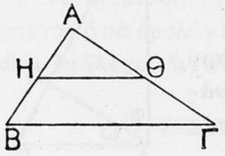
425. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ὀρθ. τρίγωνον ΑΒΓ μὲ καθέτους πλευρὰς (ΑΒ) = 3 ἑκατ. καὶ (ΑΓ) = 4 ἑκατ. Ἔπειτα εἰς τὴν μίαν πλευρὰν ὀρθῆς γωνίας Δ νὰ ὁρίσητε τμῆμα (ΔΕ) = 6 ἑκατ. καὶ νὰ κατασκευάσητε γωνίαν ΔΕΖ = Β. Νὰ ὑπολογίσητε δὲ τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης ΕΖ αὐτοῦ.

426. Νὰ ἀποδείξητε τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα μὲ τὴν βοήθειαν ὁμοίων τριγώνων (σχ. 169).

427. Ὁμοίως νὰ ἀποδείξητε τὰ θεωρήματα τῶν §§ 196, 198.

§ 230. *Θεώρημα II.* **Ἂν δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους, ταῦτα εἶναι ὅμοια.** Ἂν δηλαδὴ εἶναι $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{Z\Delta}$ (1), τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, (σχ. 170) εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις. Ἐπὶ τῆς ΑΒ ὁρίζομεν τμῆμα ΑΗ ἴσον πρὸς ΔΕ καὶ φέρομεν τὴν ΗΘ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΗΘ θὰ εἶναι ὅμοια (§ 229).



Σχ. 170

Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\frac{AB}{AH} = \frac{B\Gamma}{H\Theta} = \frac{A\Gamma}{A\Theta}$$

Ἐπειδὴ δὲ ΑΗ = ΔΕ, ἕπεται ὅτι $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{H\Theta} = \frac{A\Gamma}{A\Theta}$

Ἐκ τούτων δὲ καὶ τῶν (1) βλέπομεν ὅτι ΗΘ = ΕΖ καὶ ΑΘ = ΔΖ. Τὰ δὲ τρίγωνα ΑΗΘ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσα· ἑπομένως $\widehat{\Delta} = \widehat{A}$, $\widehat{E} = \widehat{H} = \widehat{B}$ καὶ $\widehat{Z} = \widehat{\Theta} = \widehat{\Gamma}$. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχουσι καὶ τὰς γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν. Ἄρα εἶναι ὅμοια.

Σημείωσις. Ἄξιον προσοχῆς εἶναι ὅτι ἴσαι γωνίαι εἶναι αἱ κείμεναι ἀπέναντι ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἀσκήσεις

428. Νὰ ὁρίσητε τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τριγώνου καὶ νὰ σχηματίσητε τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει αὐτὰ κορυφάς. Νὰ ἐξετάσητε δέ, ἂν τοῦτο εἶναι ὅμοιον ἢ μὴ πρὸς τὸ πρῶτον.

429. Ἂν δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὰ ὕψη τοῦ ἑνὸς εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ὁμόλογα ὕψη τοῦ ἄλλου. Νὰ ἐξετάσητε δέ, ἂν ἀληθεύῃ καὶ τὸ ἀντίστροφον.

430. Ἐμάθομεν ὅτι ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν δύο τριγώνων προκύπτει ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν καὶ ἀντιστρόφως. Νὰ ἐξετάσητε, ἂν συμβαίνῃ τοῦτο εἰς τετράγωνον καὶ ὀρθογώνιον μὲ ἀνίσους διαστάσεις. Ἔπειτα εἰς ρόμβον καὶ τετράγωνον.

§ 231. *Θεώρημα III.* **Κατασκευάζομεν τρίγωνον ΔΕΖ καὶ γωνίαν Α ἴσην πρὸς τὴν Δ. Εἰς δὲ τὰς πλευρὰς τῆς Α ὁρίζομεν τμήματα ΑΒ, ΑΓ ἀνάλογα πρὸς τὰς πλευρὰς ΔΕ καὶ ΔΖ (π.χ. διπλάσια). Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ὅμοια** (σχ. 170).

Ἀπόδειξις. Ἐκ κατασκευῆς εἶναι $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$ καὶ

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} \qquad (1)$$

Ἂν δὲ ὁρίσωμεν τμῆμα ΑΗ = ΔΕ καὶ φέρωμεν τὴν ΗΘ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ. θὰ εἶναι $\frac{ΑΒ}{ΑΗ} = \frac{ΑΓ}{ΑΘ}$ ἢ $\frac{ΑΒ}{ΔΕ} = \frac{ΑΓ}{ΑΘ}$.

Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (1) ἕπεται ὅτι ΑΘ = ΔΖ καὶ ἑπομένως τὰ τρίγωνα ΑΗΘ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσα. Εἶναι λοιπὸν $\widehat{E} = \widehat{H} = \widehat{B}$ καὶ $\widehat{Z} = \widehat{\Theta} = \widehat{\Gamma}$ καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, εἶναι ὅμοια (§ 229).

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἂν μία γωνία τριγώνου εἶναι ἴση πρὸς μίαν γωνίαν ἄλλου τριγώνου καὶ αἱ πλευραὶ τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι ἀνάλογοι, τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια.

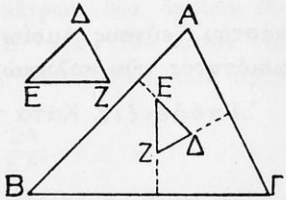
Ἀσκήσεις

431. Νὰ κατασκευάσητε δύο ὀρθ. τρίγωνα μὲ ἀναλόγους καθέτους πλευράς. Νὰ ἐξετάσητε δέ, ἂν ταῦτα εἶναι ὅμοια ἢ μή.

432. Νὰ κατασκευάσητε δύο ὅμοια τρίγωνα καὶ νὰ γράψητε δύο ὁμολόγους διαμέσους αὐτῶν. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι αὗται διαιροῦσι ταῦτα εἰς τρίγωνα ὅμοια, ἓν πρὸς ἕν.

433. Νὰ γράψητε τὸ ὕψος ΑΔ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ τὰς ΔΕ, ΔΖ ἀντιστοίχως καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΕΖ εἶναι ὅμοια.

§ **232.** *Θεώρημα IV.* **Κατασκευάζομεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἔπειτα ἄλλο ΔΕΖ μὲ πλευρὰς παραλλήλους ἢ καθέτους, μίαν πρὸς μίαν, πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ΑΒΓ. Τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια** (σχ. 171).



Σχ. 171

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι αἱ ΑΒ καὶ ΔΕ εἶναι παράλληλοι (ἢ κάθετοι)· ὁμοίως αἱ ΑΓ καὶ ΔΖ καὶ αἱ ΒΓ, ΕΖ. Διὰ τοῦτο αἱ γωνίαι π. χ. Α καὶ Δ θὰ εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικαὶ (§ 110, 111). Ταῦτα δὲ ἀληθεύουσι καὶ διὰ τὸ ζεῦγος τῶν γωνιῶν Β, Ε καὶ τῶν Ζ, Γ.

Αἱ δυναταὶ λοιπὸν ὑποθέσεις περὶ τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων τούτων εἶναι αἱ ἑξῆς:

1η. Α + Δ = 2 ὀρθ,, Β + Ε = 2 ὀρθ., Γ + Ζ = 2 ὀρθ.
2α. Α = Δ, Β + Ε = 2 ὀρθ., Γ + Ζ = 2 ὀρθ.
3η. Α = Δ, Β = Ε., Γ = Ζ.

Ἂν δὲ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν 6 τούτων γωνιῶν εἶναι 4 ὀρθ., ἐννοοῦμεν ὅτι αἱ δύο πρῶται ὑποθέσεις εἶναι ἀπραγματοποίητοι. Ἀληθεύουσι λοιπὸν αἱ ἰσότητες τῆς τελευταίας σειρᾶς, τὰ δὲ τρίγωνα εἶναι ὅμοια (§ 229).

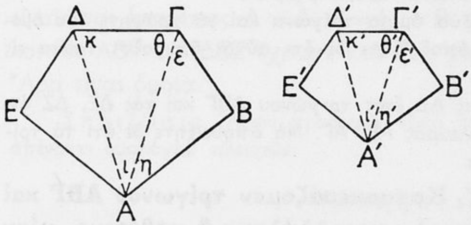
Σημείωσις. Πρέπει νὰ προσέξωμεν ὅτι ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν κεῖνται παράλληλοι (ἢ κάθετοι) πλευραί. Ἑπομένως ὁμόλογοι πλευραὶ εἶναι αἱ παράλληλοι (ἢ κάθετοι) πλευραί.

Ἄσκησις

434. Πῶς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ κατακόρυφον ὕψος δένδρου μὲ τὴν χρησιμοποίησιν ὁμοίων τριγώνων;

3. ΓΕΝΙΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

§ 233. *Θεώρημα I.* **Ἂν φέρωμεν τὰς διαγωνίους δύο ὁμοίων εὐθυγράμμων σχημάτων ΑΒΓΔΕ, Α'Β'Γ'Δ'Ε', αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ δύο ὁμολόγους κορυφὰς Α, Α', τὰ εὐθύγραμμα σχήματα διαιροῦνται εἰς τρίγωνα ὅμοια, ἓν πρὸς ἕν, καὶ ὁμοίως κείμενα. Ὁ δὲ λόγος ὁμοιότητος ἑκάστου ζεύγους ὁμοίων τριγώνων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον ὁμοιότητος τῶν πολυγώνων** (σχ. 172).



Σχ. 172

Ἀπόδειξις. Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν εἶναι $\widehat{B} = \widehat{B'}$ καὶ

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$$

Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΓ, Α'Β'Γ' εἶναι ὅμοια καὶ ἑπομένως $\widehat{\varepsilon} = \widehat{\varepsilon'}$, $\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$ καὶ $\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}$ θὰ εἶναι καὶ $\widehat{\theta} = \widehat{\theta'}$, $\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΓΔ, Α'Γ'Δ' εἶναι ὅμοια. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι καὶ τὰ τρίγωνα ΑΔΕ, Α'Δ'Ε' εἶναι ὅμοια, μὲ λόγον ὁμοιότητος τὸν λόγον δύο ὁμολόγων πλευρῶν τῶν δύο πολυγώνων, ὅ.ἔ.δ.

§ 234. *Θεώρημα II.* **Ἂν δύο πολύγωνα ἀποτελοῦνται ἀπὸ**

τρίγωνα ὅμοια ἓν πρὸς ἕν, ὁμοίως κείμενα καὶ μὲ τὸν αὐτὸν λόγον ὁμοιότητος, ταῦτα εἶναι ὅμοια.

Ἂν π.χ. τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ εἶναι ἀντιστοίχως ὅμοια πρὸς τὰ ὁμοίως κείμενα Α′Β′Γ′, Α′Γ′Δ′, Α′Δ′Ε′, καὶ ἔχουσιν ὅλα τὰ ζεύγη τὸν αὐτὸν λόγον ὁμοιότητος π.χ. λ, τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, Α′Β′Γ′Δ′Ε′ θὰ εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις. Ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΑΓΔ πρὸς τὰ Α′Β′Γ′, Α′Γ′Δ′ εἶναι $\widehat{B}=\widehat{B'}$, $\widehat{\varepsilon}=\widehat{\varepsilon'}$, $\widehat{\theta}=\widehat{\theta'}$ καὶ ἑπομένως $\widehat{\varepsilon}+\widehat{\theta}=\widehat{\varepsilon'}+\widehat{\theta'}$ ἢ $\widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma'}$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι $\widehat{\Delta}=\widehat{\Delta'}$, $\widehat{E}=\widehat{E'}$, $\widehat{A}=\widehat{A'}$.

Ἔχουσι δηλ. τὰ δύο πολύγωνα τὰς γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν

Εὐκόλως ἐπίσης βλέπομεν ὅτι $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\dfrac{A\Gamma}{A'\Gamma'}=\lambda$

$$\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}=\frac{A\Delta}{A'\Delta'}=\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}=\lambda$$

$$\frac{\Delta E}{\Delta'E'}=\frac{AE}{A'E'}=\frac{A\Delta}{A'\Delta'}=\lambda$$

Ἐκ τούτων δὲ ἕπεται ὅτι : $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\dfrac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}=\dfrac{\Delta E}{\Delta'E'}=\dfrac{AE}{A'E'}$

ἤτοι αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν πολυγώνων τούτων εἶναι ἀνάλογοι. Εἶναι λοιπὸν ταῦτα ὅμοια.

§ 235. Σχέσις τοῦ λόγου τῶν περιμέτρων δύο ὁμοίων εὐθυγράμμων σχημάτων ΑΒΓΔΕ, Α′Β′Γ′Δ′Ε′ πρὸς τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν (σχ. 172). Ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν σχημάτων τούτων εἶναι :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}=\frac{\Delta E}{\Delta'E'}=\frac{EA}{E'A'}$$

Κατὰ δὲ τὴν ἰδιότητα (§ 213 ζ′) εἶναι :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AB+B\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta E+EA}{A'B'+B'\Gamma'+\Gamma'\Delta'+\Delta'E'+E'A'}$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Ὁ λόγος τῶν περιμέτρων δύο ὁμοίων εὐθ. σχημάτων εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν.

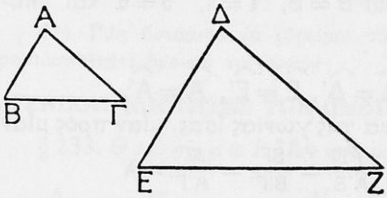
Ἀσκήσεις

435. Αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 5 ἑκατ. καὶ 8 ἑκατ. Ἄλλο δὲ ὀρθογώνιον ὅμοιον μὲ αὐτὸ ἔχει δεκαπλασίαν περίμετρον ἀπὸ αὐτό. Νά εὕρητε τὰς διαστάσεις τοῦ β′ ὀρθογωνίου.

436. Ἓν τριγωνικὸν οἰκόπεδον ἔχει περίμετρον 98 μέτρων καὶ εἶναι ὅμοιον πρὸς τρίγωνον μὲ πλευρὰς 3 ἑκατ. 5 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ οἰκοπέδου τούτου.

437. Ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔχει βάσιν 5 μέτ. καὶ περίμετρον 21 μέτρων. Ἄλλο τρίγωνον ὅμοιον πρὸς αὐτὸ ἔχει περίμετρον 52,5 μέτ. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου τούτου.

§ **236.** *Πρόβλημα.* **Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων εὐθ. σχημάτων, ἂν εἶναι γνωστὸς ὁ λόγος λ τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν.**



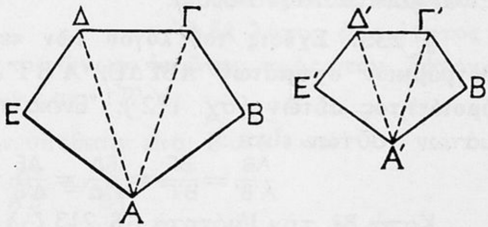
Σχ. 173

Λύσις. α') Ἔστωσαν πρῶτον δύο ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (σχ. 173). Ἐπειδὴ ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν εἶναι $\widehat{A}=\widehat{\Delta}$, ἕπεται ὅτι

$$\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΔΕΖ})}=\frac{(\text{ΑΒ})\ (\text{ΑΓ})}{(\text{ΔΕ})\ (\text{ΔΖ})}=\frac{(\text{ΑΒ})}{(\text{ΔΕ})}\cdot\frac{(\text{ΑΓ})}{(\text{ΔΖ})}.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\frac{(\text{ΑΒ})}{(\text{ΔΕ})}=\frac{(\text{ΑΓ})}{(\text{ΔΖ})}=\lambda$, ἕπεται ὅτι: $\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΔΕΖ})}=\lambda^2$

β') Τὰ ὅμοια εὐθ. σχήματα ΑΒΓΔΕ καὶ Α'Β'Γ'Δ'Ε' διαιροῦμεν εἰς τρίγωνα ὅμοια, ἓν πρὸς ἕν, διὰ τῶν ὁμολόγων διαγωνίων, τὰς ὁποίας ἄγομεν ἀπὸ τὰς ὁμολόγους κορυφὰς Α καὶ Α' (σχ. 174).



Σχ. 174

Κατὰ δὲ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, εἶναι:

$$\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{Α'Β'Γ'})}=\lambda^2,\quad \frac{(\text{ΑΓΔ})}{(\text{Α'Γ'Δ'})}=\lambda^2,\quad \frac{(\text{ΑΔΕ})}{(\text{Α'Δ'Ε'})}=\lambda^2.$$

Εἶναι λοιπὸν $\lambda^2=\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{Α'Β'Γ'})}=\frac{(\text{ΑΓΔ})}{(\text{Α'Γ'Δ'})}=\frac{(\text{ΑΔΕ})}{(\text{Α'Δ'Ε'})}$.

Ἂν δὲ ἐφαρμόσωμεν τὴν ἰδιότητα (§ 213 ζ'), εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\frac{(\text{ΑΒΓ})+(\text{ΑΓΔ})+(\text{ΑΔΕ})}{(\text{Α'Β'Γ'})+(\text{Α'Γ'Δ'})+(\text{Α'Δ'Ε'})}=\lambda^2 \quad \text{ἢ} \quad \frac{(\text{ΑΒΓΔΕ})}{(\text{Α'Β'Γ'Δ'Ε'})}=\lambda^2.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων εὐθ. σχημάτων ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν.

Ἐπειδὴ $\lambda = \frac{AB}{A'B'}$, ἡ ἀποδειχθεῖσα ἰσότης γίνεται:

$$\frac{(ΑΒΓΔΕ)}{(Α'Β'Γ'Δ'Ε')} = \frac{(ΑΒ)^2}{(Α'Β')^2}.$$ Αὕτη ἐκφράζει ὅτι:

Δύο ὅμοια εὐθ. σχήματα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν αὐτῶν.

Πόρισμα. **Ἂν αἱ πλευραὶ εὐθ. σχήματος πολλαπλασιασθῶσιν ὅλαι ἐπὶ λ, αἱ δὲ γωνίαι μείνωσιν ἀμετάβλητοι, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ λ^2.**

Ἀσκήσεις

438. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον μὲ πλευρὰν 2 ἑκατ. κα ἔπειτα ἄλλο ἐννεαπλάσιον αὐτοῦ.

439. Νὰ εὕρητε τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος ἑνὸς τριγώνου πρὸς ἄλλο διπλάσιον αὐτοῦ.

440. Ἓν ὀρθογώνιον ἔχει ἐμβαδὸν 24 τετ. μέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ μέσα τῶν ἡμίσεων τῶν διαγωνίων αὐτοῦ.

441. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει ἐμβαδὸν 16 τετ. ἑκατ. καὶ ὕψος $(ΑΔ) = 2\sqrt{3}$ ἑκατ. Νὰ ὁρίσητε ἐπὶ τοῦ ὕψους τούτου ἓν σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε ἂν φέρωμεν ἀπὸ αὐτὸ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ, νὰ ἀποχωρίζηται τρίγωνον 3 τετ. ἑκατοστομέτρων.

§ 237. Τί εἶναι σχέδιον ἢ σχεδιάγραμμα εὐθυγράμμου σχήματος. Ὅταν ὁ μηχανικὸς θέλῃ νὰ ἀπεικονίσῃ ἓν π.χ. οἰκόπεδον εἰς ἓν φύλλον χάρτου, σχηματίζει εἰς αὐτὸ ἓν σχῆμα πολὺ μικρότερον, ὥστε νὰ χωρῇ εἰς τὸ φύλλον, ἀλλὰ ὅμοιον πρὸς τὸ σχῆμα τοῦ οἰκοπέδου.

Αὐτὸ τὸ ἐπὶ τοῦ χάρτου σχῆμα λέγεται **σχέδιον** ἢ **σχεδιάγραμμα** τοῦ οἰκοπέδου.

Ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος τοῦ σχεδίου πρὸς τὸ ἀπεικονιζόμενον λέγεται **ἀριθμητικὴ κλῖμαξ** ἢ **σμίκρυνσις** καὶ ἀναγράφεται πάντοτε εἰς τὸ φύλλον τοῦ σχεδίου. Αἱ συνηθέστεραι κλίμακες εἶναι κλασματικαὶ μονάδες μὲ παρονομαστὰς δυνάμεις τοῦ 10.

Π. χ. $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1.000}$, $\frac{1}{10.000}$ κ.τ.λ.

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι ὁ παρονομαστὴς ἑκάστης τοιαύτης κλίμακος φανερώνει πόσας φορὰς ἓν εὐθ. τμῆμα τοῦ ἀπεικονιζομένου σχήματος εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἐν τῷ σχεδίῳ ὁμολόγου. Ἂν π.χ. ἡ κλῖμαξ εἶναι $\frac{1}{1000}$, μία δὲ πλευρὰ τοῦ σχεδίου ἔχῃ μῆκος 0,05 μέτ., ἡ ἀντίστοιχος πλευρὰ τοῦ ἀπεικονιζομένου ἔχει μῆκος $0{,}05 \cdot 1000 = 50$ μέτρα.

Ὁμοίως, ἂν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχεδίου εἶναι ε, τὸ δὲ πραγματικὸν Ε, θὰ εἶναι $\frac{E}{\varepsilon} = 1000^2$, ὅθεν $E = \varepsilon \cdot 1000^2$. Δηλαδή :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἐμβαδὸν ἀπεικονιζομένου σχήματος πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχεδίου ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ τῆς κλίμακος.

Ἀσκήσεις

442. Ἓν ὀρθογώνιον οἰκόπεδον ἔχει διαστάσεις 40 μέρ. καὶ 25 μέτ. Νὰ ἀπεικονίσητε αὐτὸ ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1000}$.

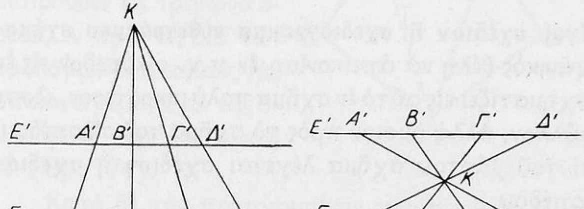
443. Τὸ τρίγωνον ΔΕΖ (σχ. 173) ἀπεικονίζει ἀγρὸν ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{10000}$. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀγροῦ τούτου.

444. Ἡ πλευρὰ ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ἔχει μῆκος 8 μέτρων. Νὰ ἀπεικονίσητε αὐτὸ μὲ ἄλλο 10000 φορὰς μικρότερον.

4. ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Ι. ΔΕΣΜΗ ΕΥΘΕΙΩΝ

§ 238. *Θεώρημα.* **Ἂν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι Ε, Ε′ τέμνωνται ὑπὸ εὐθειῶν διερχομένων ἐξ ἑνὸς σημείου Κ, τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα. Καὶ ἀντιστρόφως, ἂν αἱ τέμνουσαι μὴ εἶναι παράλληλοι.** Εἶναι δηλ. Α′ : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}$. (σχ. 175).



Σχ. 175

Ἀπόδειξις. Τὰ τρίγωνα ΚΑΒ καὶ ΚΑ′Β′ ἔχοντα τὰς γωνίας των ἴσας ἀνὰ μίαν εἶναι ὅμοια.

Ἄρα εἶναι: $\frac{KA}{KA'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{KB}{KB}$.

Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι:

$$\frac{KB}{KB'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{K\Gamma}{K\Gamma'} \text{ καὶ } \frac{K\Gamma}{K\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{K\Delta}{K\Delta'}.$$

Ἐκ τούτων δὲ συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \cdots$$ ὅ.ἔ.δ.

Ἀντιστρόφως: Β': Ἂν εἶναι $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \cdots$ αἱ εὐθεῖαι ΑΑ' ΒΒ', ΓΓ', ΔΔ'... διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἂν δύο ἐξ αὐτῶν π.χ. αἱ ΑΑ', ΒΒ' διέρχονται πᾶσαι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἂν μὴ εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις. Αἱ εὐθεῖαι ΑΑ' ΒΒ' τέμνονται εἴς τι σημεῖον Κ, ἐξ ὑποθέσεως.

Ἂν δὲ ἡ ΚΓ' τέμνῃ τὴν Ε εἰς σημεῖον Γ'', ἀποδεικνύομεν εὐκόλως ὅτι ΒΓ = ΒΓ'', τοῦτο δέ σημαίνει ὅτι τὰ Γ, Γ'' ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ Β. Εἶναι ὅμως ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας μὲ τὸ Β καὶ ἐπὶ πλέον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις τοῦ σχήματος· ἄρα τὸ Γ'' συμπίπτει μὲ τὸ Γ.

Τὰ σημεῖα λοιπὸν Γ, Γ', Κ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ἤτοι ἡ ΓΓ' διέρχεται διὰ τοῦ Κ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται τὸ αὐτὸ καὶ περὶ τῆς ΔΔ'...

Αἱ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Κ ἀγόμεναι εὐθεῖαι ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ἀποτελοῦσι **δέσμην** εὐθειῶν.

Αἱ εὐθεῖαι ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ.... λέγονται ἀκτῖνες **τῆς δέσμης**. Τὸ δὲ κοινὸν σημεῖον Κ τῶν ἀκτίνων λέγεται **κέντρον** τῆς δέσμης.

Ἀσκήσεις

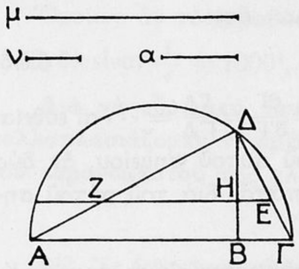
445. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἡ ὑπὸ τῶν μέσων τῶν βάσεων τραπεζίου ὁριζομένη εὐθεῖα διέρχεται ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ καὶ ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων του.

446. Μία εὐθεῖα κινεῖται παραλλήλως πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ. Νά εὕρητε τὸν γεωμ. τόπον τῶν μέσων τῶν τμημάτων αὐτῆς, τὰ ὁποῖα περατοῦνται ἐπὶ τῶν ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου τούτου.

§ 239. *Πρόβλημα*. **Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἔχον πρὸς δοθὲν τετράγωνον λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον δύο δοθέντων εὐθ. τμημάτων μ καὶ ν** (σχ. 176).

Ἀνάλυσις. Ἂν ΔΖ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου καὶ α τοῦ δοθέντος τετραγώνου θὰ εἶναι $(\Delta Z)^2 : \alpha^2 = \mu : \nu$. (1)

Ἂν δὲ κατασκευάσωμεν ὀρθ. τρίγωνον μὲ καθέτους πλευρὰς ΔΖ καὶ ΔΕ = α καὶ φέρωμεν τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος ΔΗ, θὰ εἶναι $(\Delta Z)^2 : \alpha^2 = ZH : HE$. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς (1) ἕπεται ὅτι $ZH : HE = \mu : \nu$.



Σχ. 176

Ἂν ἔπειτα ἐκ σημείου Β τῆς ΔΗ φέρωμεν εὐθεῖαν ΑΓ παράλληλον πρὸς τὴν ΖΕ, θὰ εἶναι

$$AB : B\Gamma = ZH : HE = \mu : \nu.$$

Ἐκ τούτων ὁδηγούμεθα εἰς τὴν ἀκόλουθον λύσιν.

Σύνθεσις. Ἐπὶ εὐθείας ὁρίζομεν διαδοχικὰ καὶ ὁμόρροπα τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα μ καὶ ν. Μὲ διάμετρον δὲ ΑΓ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν καὶ ἐκ τοῦ Β ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ τέμνουσαν τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἴς τι σημεῖον Δ.

Ἐπὶ τῆς εὐθείας δὲ ΔΓ ὁρίζομεν τμῆμα ΔΕ = α καὶ ἄγομεν τὴν ΕΖ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ. Το τμῆμα ΔΖ τῆς εὐθείας ΔΑ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

Πράγματι, ἕνεκα τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΖΔΕ, εἶναι :

$$(\Delta Z)^2 : (\Delta E)^2 = (ZH) : (HE).$$

Ἐπειδὴ δὲ ΔΕ = α καὶ $ZH : HE = AB : B\Gamma = \mu : \nu$ (§ 238), ἕπεται ὅτι $(\Delta Z)^2 : \alpha^2 = \mu : \nu$.

Ἀσκήσεις

447. Νὰ κατασκευασθῆ τετράγωνον τριπλάσιον δοθέντος τετραγώνου.

448. Νὰ κατασκευασθῆ τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὰ $\frac{3}{4}$ δοθέντος τετραγώνου.

449. Νὰ κατασκευασθῆ τετράγωνον διπλάσιον δοθέντος ὀρθογωνίου.

II. ΔΥΝΑΜΙΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΠΡΟΣ ΚΥΚΛΟΝ

§ 240. *Θεώρημα Ι.* **Ἂν σημεῖα Β,Δ,Ε,Γ, κεῖνται ἐπὶ μιᾶς**

περιφερείας, αἱ χορδαὶ ΒΓ καὶ ΔΕ τέμνωνται εἰς σημεῖον Α, θὰ εἶναι (ΑΒ) (ΑΓ) = (ΑΔ) (ΑΕ).

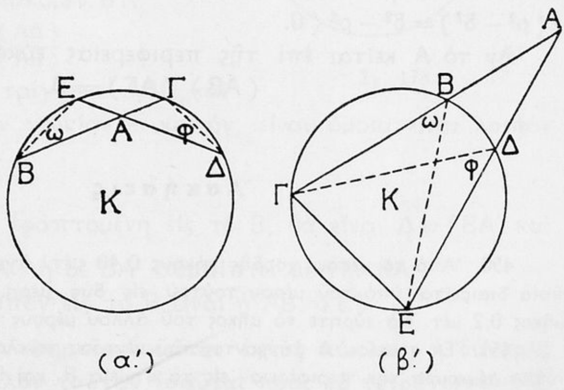
Καὶ ἀντιστρόφως: **Ἂν ἀληθεύῃ ἡ (1), αἱ δὲ εὐθεῖαι ΒΓ, ΔΕ τέμνωνται εἰς σημεῖον Α, τὰ σημεῖα Β,Γ,Δ,Ε, κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας** (σχ. 117).

Ἀπόδειξις. Εἰς τὰ σχήματα (117 α΄ καὶ β΄) βλέπομεν ὅτι $\widehat{ΑΓΔ} = \widehat{ΑΕΒ}$ καὶ $\widehat{ΓΑΔ} = ΒΑΕ$. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΕ καὶ ΑΓΔ εἶναι ὅμοια καὶ ἑπομένως $\frac{ΑΒ}{ΑΔ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ}$. Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι (ΑΒ) (ΑΓ) = (ΑΔ) (ΑΕ), ὅ.ἔ.δ.

Ἀντιστρόφως: Ἂν ἀληθεύῃ ἡ (1) καὶ διαιρέσωμεν τὰ μέλη αὐτῆς διὰ τοῦ γινομένου (Α Γ) (ΑΔ), εὑρίσκομεν ὅτι

$$\frac{(ΑΒ)}{(ΑΔ)} = \frac{(ΑΕ)}{(ΑΓ)}.$$

Αἱ πλευραὶ λοιπὸν ΑΒ, ΑΕ τοῦ τριγώνου ΑΒΕ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΔ, ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΓΔ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι Α τῶν τριγώνων ΑΒΕ ΑΓΔ, εἶναι ἴσαι, ἢ συμπίπτουσιν, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια καὶ διὰ τοῦτο $\widehat{ΑΒΕ} = \widehat{ΑΔΓ}$, ἄρα ω = φ (σχ. 177). Τὸ εὐθύγρ. λοιπὸν τμῆμα ΓΕ φαίνεται ἐκ τῶν Β καὶ Δ ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν. Ἑπομένως τὰ Γ,Ε,Β,Δ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.



Σχ. 177

§ 241. Δύναμις σημείου πρὸς κύκλον. Ἀπὸ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα ἕπεται ὅτι, δι᾽ ὡρισμένον σημεῖον Α καὶ ὡρισμένην περιφέρειαν Κ, τὸ γινόμενον (ΑΒ) (ΑΓ) εἶναι τὸ αὐτό, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ τέμνουσα ΑΒΓ.

Τὸ σταθερὸν τοῦτο γινόμενον λαμβανόμενον μὲ τὸ πρόσημον $+$ ἢ $-$ καθόσον τὰ ΑΒ, ΑΓ εἶναι ὁμόρροπα ἢ ἀντίρροπα λέγεται **δύναμις τοῦ Α πρὸς τὸν κύκλον Κ.**

Εὐκόλως φαίνεται ὅτι ἡ δύναμις σημείου Α πρὸς ἕνα κύκλον Κ, εἶναι θετικὴ ἂν τὸ Α εἶναι εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου Κ, καὶ ἀρνητικὴ ὅταν τοῦτο εἶναι εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ. Ἂς παραστήσωμεν διὰ ρ τὴν ἀκτῖνα κύκλου Κ καὶ διὰ δ τὴν ἀπόστασιν ΑΚ δοθέντος σημείου Α ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ. Ἡ εὐθεῖα ΑΚ τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα Ζ καὶ Η. Ἂν τὸ Α κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου Κ, θὰ εἶναι

$$ΑΗ = ΑΚ + ΚΗ = δ + ρ \quad \text{καὶ}$$
$$ΑΖ = ΑΚ - ΚΖ = δ - ρ.$$

Ἑπομένως $(ΑΒ)(ΑΓ) = (ΑΖ)(ΑΗ) = (δ - ρ)(δ + ρ) = δ^2 - ρ^2 > 0$. Ἂν δὲ τὸ Α κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου, ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $(ΑΒ)\ (ΑΓ) = ρ^2 - δ^2$. Ἂν προτάξωμεν τοῦτο τὸ $-$, βλέπομεν ὅτι ἡ δύναμις τοῦ Α τούτου εἶναι $-(ρ^2 - δ^2) = δ^2 - ρ^2 < 0$.

Ἂν τὸ Α κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας εὐκόλως φαίνεται ὅτι

$$(ΑΒ)\ (ΑΓ) = 0.$$

Ἀσκήσεις

450. Ἀπὸ τὸ μέσον χορδῆς μήκους 0,40 μέτ. ἄγεται ἄλλη χορδή, ἡ ὁποία διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ μέσου τούτου εἰς δύο μέρη. Τὸ ἓν ἀπὸ αὐτὰ ἔχει μῆκος 0,2. μέτ. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τοῦ ἄλλου μέρους τῆς χορδῆς ταύτης.

451. Ἐκ σημείου Α ἀπέχοντος τοῦ κέντρου κύκλου Κ 10 ἑκατ. ἄγεται εὐθεῖα τέμνουσα τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ΒΓ, ἂν (ΑΒ) = 8 ἑκατ. καὶ ἡ ἀκτὶς εἶναι 3 ἑκατοστόμετρα.

452. Ἂν ΒΔ καὶ ΓΕ εἶναι ὕψη τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι

$$(ΑΒ)\ (ΑΕ) = (ΑΓ)\ (ΑΔ).$$

453. Ἂν Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τριγώνου ΑΒΓ καὶ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τὰ ὕψη αὐτοῦ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι (ΗΔ) (ΗΑ) = (ΗΕ) (ΗΒ) = (ΗΖ) (ΗΓ).

454. Ἂν τὰ εὐθ. τμήματα α,β,γ,δ συνιστῶσι τὴν ἀναλογίαν $α : β = γ : δ$ καὶ εἶναι γνωστὰ τρία οἱαδήποτε τούτων, νὰ γραφῇ τὸ ὑπολειπόμενον διὰ μεθόδου στηριζομένης ἐπὶ τῆς ἰδιότητος § 240.

§ **242** *Θεώρημα II.* **Ἂν ἐκ σημείου Α ἀχθῇ τέμνουσα ΑΓΔ καὶ ἐφαπτομένη ΑΒ δοθέντος κύκλου, θὰ εἶναι**

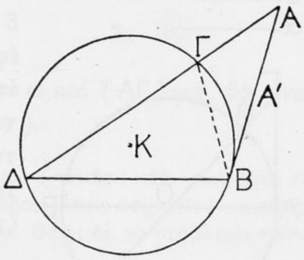
$$(ΑΒ)^2 = (ΑΓ)\,(ΑΔ).$$

Καὶ ἀντιστρόφως: **Ἂν ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς γωνίας Α ὁρισθῶσι δύο σημεῖα Γ, Δ, ἐπὶ δὲ τῆς ἄλλης πλευρᾶς ἓν σημεῖον Β οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $(ΑΒ)^2 = (ΑΓ)\,(ΑΔ)$, ἡ ΑΒ ἐφάπτεται εἰς τὸ Β τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Β,Γ,Δ** (σχ. 178).

Ἀπόδειξις. Τὰ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΒΓ ἔχουσι τὴν γωνίαν Α κοινὴν καὶ τὴν Δ ἴσην πρὸς τὴν ΑΒΓ (§ 155). Εἶναι λοιπὸν ταῦτα ὅμοια καὶ ἑπομένως

$$\frac{(ΑΒ)}{(ΑΓ)} = \frac{(ΑΔ)}{(ΑΒ)},$$

ὅθεν $(ΑΒ)^2 = (ΑΓ)\,(ΑΔ)$, ὅ.ἔ.δ.



Σχ. 178

Ἀντιστρόφως: Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος $(ΑΒ)^2 = (ΑΓ)\,(ΑΔ)$ διὰ τοῦ γινομένου $(ΑΒ)\,(ΑΓ)$ εὑρίσκομεν ὅτι

$$\frac{(ΑΒ)}{(ΑΓ)} = \frac{(ΑΔ)}{(ΑΒ)}.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ ἔχουσι καὶ τὴν γωνίαν Α κοινήν, εἶναι ὅμοια εἶναι λοιπὸν $\widehat{Δ} = \widehat{ΓΒΑ}$

Ἂν δὲ ΒΑ′ εἶναι ἐφαπτομένη εἰς τὸ Β, θὰ εἶναι $\widehat{Δ} = \widehat{ΓΒΑ'}$ καὶ ἑπομένως $\widehat{ΓΒΑ} = \widehat{ΓΒΑ'}$, ἡ δὲ ΒΑ′ συμπίπτει μὲ τὴν ΒΑ.

Ἐφαπτομένη λοιπὸν εἰς τὸ Β εἶναι ἡ ΑΒ, ὅ.ἔ.δ.

Πόρισμα. **Ἂν σημεῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου, ἡ δύναμις αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον τοῦτον ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἐφαπτομένης, ἥτις ἄγεται ἐξ αὐτοῦ εἰς τὸν κύκλον τοῦτον.**

Ἀσκήσεις

455. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς ἐφαπτομένης ΑΒ κύκλου Κ ἀκτῖνος 8 ἑκατ., ἥτις ἄγεται ἐκ σημείου Α ἀπέχοντος τοῦ κέντρου 12 ἑκατ.

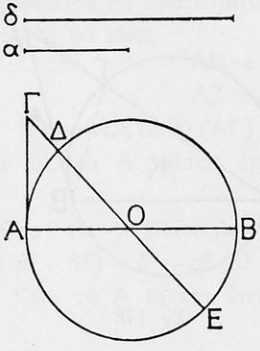
456. Ἐπὶ εὐθείας δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ, κατὰ τὴν σειρὰν αὐτήν. Νὰ εὕρητε τὸν γεωμ. τόπον τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων, αἱ ὁποῖαι ἄγον-

ται ἐκ τοῦ Γ εἰς τὰς περιφερείας, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β·

457. Ἐκ τοῦ σημείου Α τῆς περιφερείας Κ, ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ρ, ἄγεται ἐφαπτομένη ταύτης καὶ ὁρίζεται ἐπ' αὐτῆς τμῆμα ΑΒ ἔχον μῆκος 4ρ. Νὰ εὕρητε τὴν ἀπόστασιν τοῦ Β ἀπὸ ἑκατέρου τῶν σημείων, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ εὐθεῖα ΒΚ τέμνει τὴν περιφέρειαν ταύτην.

458. Νὰ γραφῇ τὸ μέσον ἀνάλογον δύο δοθέντων εὐθ. τμημάτων α καὶ β διὰ μεθόδου στηριζομένης ἐπὶ τῆς ἰδιότητος § 242.

§ **243.** *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις ἔχουσι δοθεῖσαν διαφορὰν δ καὶ ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν τετράγωνον πλευρᾶς α** (σχ. 179).



Σχ. 179

Λύσις Μὲ διάμετρον ΑΒ ἴσην πρὸς δ γράφομεν περιφέρειαν Ο. Ἔπειτα ἄγομεν ἐφαπτομένην ταύτης εἰς τὸ Α καὶ ὁρίζομεν ἐπ' αὐτῆς τμῆμα ΑΓ ἴσον πρὸς α. Μετὰ ταῦτα ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΟ, ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα Δ καὶ Ε. Τὰ τμήματα ΓΔ καὶ ΓΕ εἶναι διαστάσεις τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου.

Διότι προφανῶς εἶναι

$(ΑΓ)^2 = (ΓΔ)(ΓΕ)$ ἢ $α^2 = (ΓΔ)(ΓΕ)$, ἤτοι τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν τετράγωνον.

Εἶναι δὲ καὶ $ΓΕ - ΓΔ = ΔΕ = ΑΒ = δ$, ἤτοι αἱ διαστάσεις τοῦ αὐτοῦ ὀρθογωνίου ἔχουσι διαφορὰν δ.

Ἤδη ἡ κατασκευὴ τοῦ ὀρθογωνίου γίνεται εὐκόλως.

Μήκη τῶν διαστάσεων. Ἂν α καὶ δ εἶναι δοθέντα μήκη, εὑρίσκομεν τὰ μήκη τῶν διαστάσεων ΓΔ καὶ ΓΕ ὡς ἑξῆς:

Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΟΓΑ ἕπεται ὅτι:

$$(ΟΓ)^2 = (ΑΓ)^2 + (ΟΑ)^2 = α^2 + \frac{δ^2}{4} \quad \text{καὶ ἑπομένως}$$

$$(ΟΓ) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4α^2 + δ^2}.$$

$$\text{Ἄρα } (ΓΔ) = (ΟΓ) - (ΟΔ) = \frac{1}{2}\sqrt{4α^2 + δ^2} - \frac{δ}{2}$$

$$\text{καὶ } (ΓΕ) = (ΟΓ) + (ΟΕ) = \frac{1}{2}\sqrt{4α^2 + δ^2} + \frac{δ}{2}.$$

Ἀσκήσεις

459. Ἓν ὀρθογώνιον ἔχει ἐμβαδὸν 9 τετ. ἑκατ. αἱ δὲ διαστάσεις του διαφέρουσι κατὰ 2 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὰ μήκη τῶν διαστάσεων τούτων.

460. Δίδονται δύο εὐθ. τμήματα μὲ μήκη 4 ἑκατ. καὶ 6 ἑκατ. Νὰ κατασκευάσητε τὰς ἀπολύτους τιμὰς τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-6\chi-16=0$.

461. Νὰ κατασκευάσητε ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν ὀρθογώνιον καὶ αἱ διαστάσεις του νὰ ἔχωσι δοθεῖσαν διαφορὰν δ.

§ 244. *Πρόβλημμα ΙΙ. (χρυσῆ τομή).** **Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν εὐθ. τμῆμα ΑΒ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, ἤτοι εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ ἓν εἶναι μέσον ἀνάλογον τοῦ δοθέντος τμήματος καὶ τοῦ ἄλλου μέρους** (σχ. 180).

Σχ. 180

Ἀνάλυσις. Ἂν Γ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς διαιρέσεως καὶ θέσωμεν (ΑΒ)$=\alpha$ καὶ (ΑΓ)$=\chi$, θὰ εἶναι

$$\alpha : \chi = \chi : (\alpha - \chi).$$

---

* Ἡ γεωμετρικὴ κατασκευὴ τῆς διαιρέσεως (τομῆς) εὐθ. τμήματος εἰς **μέσον καὶ ἄκρον λόγον** ἐτέθη ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου, ὅστις ἀσχολεῖται μὲ αὐτὴν εἰς τὸ ΙΙ καὶ VI βιβλίον τῶν «**Στοιχείων**» του. Θέτει δὲ τὸ πρόβλημα τοῦτο εἰς τὸ ΙΙ βιβλίον ὡς ἑξῆς:

Νὰ διαιρεθῇ εὐθ. τμῆμα εἰς δύο μέρη τοιοῦτα, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον βάσιν τὸ δοθὲν εὐθ. τμῆμα καὶ ὕψος τὸ ἕτερον τῶν τμημάτων νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὸ ἕτερον τμῆμα.

Ὁ Εὐκλείδειος οὗτος ὅρος « εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον » ἀναφέρεται καὶ ὑπὸ τοῦ Gremona (1114 – 1187) εἰς τὴν ὑπ' αὐτοῦ ἐκδοθεῖσαν μετάφρασιν τῶν ἀραβικῶν σχολίων ἐπὶ τῶν « Στοιχείων » τοῦ Εὐκλείδου, καθὼς καὶ εἰς διάφορα Εὐρωπαϊκὰ σχολικὰ βιβλία.

Κατὰ τὸ δεύτερον ἥμισυ τοῦ 13ου αἰῶνος ὁ Novarra εἰς τὴν ὑπ' αὐτοῦ ἐκδοθεῖσαν πλήρη μετάφρασιν τῶν « Στοιχείων » τοῦ Εὐκλείδου θεωρεῖ τὴν διαίρεσιν ταύτην ὡς ἀξιοθαύμαστον γεωμετρικὴν κατασκευὴν καὶ ἀπαραίτητον βοήθημα διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν κανονικῶν στερεῶν.

Βραδύτερον (1445 – 1514 περίπου) ὁ Luca Pacioli εἰς ἔργον του περὶ κανονικῶν στερεῶν ἔκαμεν εὐρυτάτην χρῆσιν τῆς τομῆς ταύτης καὶ ὠνόμασεν αὐτὴν « **θεϊκὴν ἀναλογίαν** ».

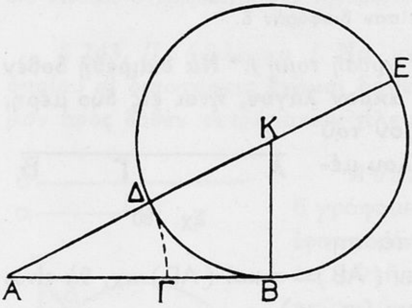
Ὁ Ramus, Κέπλερος καὶ ἄλλοι μεταχειρισθέντες τὸν ὅρον τοῦτον καὶ ἐξ αὐτοῦ πιθανῶς ὁρμώμενοι προσεπάθησαν νὰ ἀνακαλύψωσιν ἐνυπάρχον τυχὸν μυστήριον εἰς τὴν τομὴν ταύτην.

Ἀπὸ τοῦ 1871 γίνεται χρῆσις καὶ τοῦ ὅρου « **συνεχὴς διαίρεσις** ». Ὁ δὲ ὅρος « **χρυσῆ τομή** » ἐνεφανίσθη τὸ πρῶτον τὸ ἔτος 1835, ὡς ἀναφέρει ὁ Μ. Ohm εἰς σχετικὸν ἔργον του.

Ἡ ἐξίσωσις δὲ αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἐξίσωσιν

$$\chi^2 + \alpha\chi = \alpha^2 \text{ ἢ } \chi(\chi + \alpha) = \alpha^2.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ἐκ ταύτης ὅτι τὸ ἄγνωστον τμῆμα χ εἶναι ἡ μικροτέρα τῶν διαστάσεων ὀρθογωνίου ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ τετράγωνον πλευρᾶς α καὶ τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις διαφέρουσι κατὰ α. Ἐντεῦθεν προκύπτει ἡ ἀκόλουθος λύσις.



Σχ. 181

Σύνθεσις. Ἐκ τοῦ ἄκρου Β τοῦ δοθέντος τμήματος ΑΒ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπ' αὐτὸ καὶ ὁρίζομεν ἐπ' αὐτῆς τμῆμα ΒΚ ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒ. Γράφομεν ἔπειτα τὴν περιφέρειαν (Κ, ΚΒ) καὶ ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΚ (σχ. 181). Αὕτη τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς σημεῖα Δ καὶ Ε, ὧν τὸ α' μεταξὺ Α

Ὁ Pfeiffer εἰς σχετικὸν ἔργον του ἐκφράζει τὴν ὑπόνοιαν ὅτι ἡ «χρυσῆ τομὴ» συναντᾶται εἰς τὴν φύσιν (π. χ. εἰς τὸ σῶμα τοῦ ἀνθρώπου καὶ τῶν ζώων, εἰς τοὺς κλάδους καὶ τὰ φύλλα τῶν δένδρων κ.τ.λ.) Καὶ ἄλλοι ἐκτὸς τοῦ Pfeiffer διαπιστώσαντες τὴν ὕπαρξιν τῆς χρυσῆς τομῆς θεωροῦσι ταύτην ὡς «βασικὸν δόγμα ὡραιότητος». Τὸ γεγονὸς ὅτι προκαλεῖται εὐάρεστον συναίσθημα, ὅταν ὁ λόγος τῶν διαστάσεων ὀρθογωνίου εἶναι $\frac{8}{13}$ δικαιολογεῖ πως τὴν ἀνωτέρω ἀντίληψιν. Διότι $\frac{8}{13}$ εἶναι κατὰ προσέγγισιν τιμὴ τοῦ ἑνὸς τῶν μερῶν εὐθ. τμήματος μήκους 1 διῃρημένου εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

Ἡ ἀνωτέρω (§ 244) ἐξίσωσις $\chi(\chi + \alpha) = \alpha^2$ διὰ $\alpha = 1$ λαμβάνει τὴν μορφὴν $\chi = \frac{1}{1+\chi}$ ἢ τὴν τοῦ συνεχοῦς κλάσματος

$$\chi = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots}}}}}}$$

καὶ Κ. Γράφομεν τέλος τὴν περιφέρειαν (Α, ΑΔ), ἥτις τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ ζητούμενον σημεῖον.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $(ΑΒ)^2 = (ΑΔ)\cdot(ΑΕ)$ καὶ $ΑΔ = ΑΓ$, $ΔΕ = ΑΒ = α$, ἕπεται ὅτι $α^2 = (ΑΓ)\,[\,(ΑΓ) + α\,]$.

Ἂν δὲ συγκρίνωμεν ταύτην πρὸς τὴν ἐξίσωσιν $α^2 = χ\,(χ + α)$, βλέπομεν ὅτι $(ΑΓ) = χ$, ἡ δὲ ἀναλογία $α : χ = χ : (α - χ)$ γίνεται

$$ΑΒ : ΑΓ = ΑΓ : ΓΒ, \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

Ἀσκήσεις

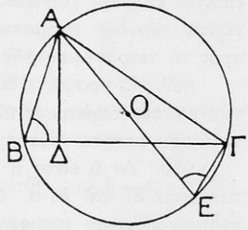
462. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος ἑκατέρου τῶν μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα εὐθ. τμῆμα μήκους α διαιρεῖται εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

463. Ἂν εὐθεῖα ΔΕ παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ διαιρῇ μίαν τῶν ὑπ' αὐτῆς τεμνομένων πλευρῶν εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, νὰ ἀποδείξητε ὅτι θὰ διαιρῇ ὁμοίως καὶ τὴν ἄλλην πλευράν.

464. Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς γωνίας ΒΓΔ νὰ φέρητε εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει πρῶτον τὴν πλευρὰν ΓΒ εἴς τι σημεῖον Ε καὶ ἔπειτα τὴν ΓΔ εἰς σημεῖον Ζ οὕτως, ὥστε τὸ σημεῖον Ε νὰ διαιρῇ τὸ τμῆμα ΑΖ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

5. ΑΚΤΙΣ ΤΗΣ ΠΕΡΙ ΤΡΙΓΩΝΟΝ ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ

§ 245. *Θεώρημα*. **Τὸ ὀρθογώνιον δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τοῦ ὕψους, τὸ ὁποῖον ἔχει κοινὴν ἀρχὴν μὲ αὐτάς, καὶ τῆς διαμέτρου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας** (σχ. 182).



Σχ. 182

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΓΕ προκύπτει ἡ ἀναλογία

$(ΑΒ) : (ΑΕ) = (ΑΔ) : (ΑΓ)$, ὅθεν

$(ΑΒ)\cdot(ΑΓ) = (ΑΔ)\cdot(ΑΕ)$, ὅ.ἔ.δ.

§ 246. *Πρόβλημα*. **Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς R τῆς περὶ τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένης περιφερείας ἐκ τῶν πλευρῶν α, β, γ αὐτοῦ.**

ὅθεν εὑρίσκονται αἱ διαδοχικῶς καὶ περισσότερον πρὸς τὴν ἀκριβῆ τιμὴ προσεγγίζουσαι τιμαὶ τοῦ χ

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},\ \frac{13}{21},\ \frac{21}{34},\ \frac{34}{55},\ \ldots$$

Λύσις. Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα εἶναι $\beta\gamma = 2\,\mathrm{R}\Upsilon_\alpha$. Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι $\alpha\beta\gamma = 2\mathrm{R}\cdot\Upsilon_\alpha\cdot\alpha$. Καὶ ἐπειδὴ $\Upsilon\cdot\alpha = 2\mathrm{E}$, αὕτη γίνεται $\boldsymbol{\alpha\beta\gamma = 4\mathrm{RE}}$. (1)

Ἐκ ταύτης δὲ προκύπτει ὅτι :

$$\mathrm{R} = \frac{\alpha\beta\gamma}{4\mathrm{E}} \quad \text{ἢ} \quad \mathrm{R} = \frac{\alpha\beta\gamma}{4\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}$$

Ἀσκήσεις

465. Ἓν τρίγωνον ἔχει πλευρὰς 4 ἑκατ., 6 ἑκατ.. 8 ἑκατ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

466. Ἂν τὸ ὀρθογώνιον δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῆς τρίτης πλευρᾶς καὶ τοῦ ἐπ᾽ αὐτὴν ὕψους, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον.

467. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν τρίγωνον εἶναι

$$\mathrm{R}\rho = \frac{\alpha\beta\gamma}{4\tau} \quad \text{καὶ} \quad \mathrm{R}\ \Upsilon_\alpha \Upsilon_\beta \Upsilon_\gamma = 2\mathrm{E}^2.$$

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Γ΄ βιβλίου

468. Ἀπὸ τὸ μέσον μιᾶς καθέτου πλευρᾶς ἑνὸς ὀρθ. τριγώνου νὰ φέρητε κάθετον ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν δύο τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ ὑποτείνουσα, ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς.

469. Νὰ γράψητε δύο περιφερείας ἐφαπτομένας ἐκτὸς καὶ μίαν κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην αὐτῶν. Νὰ εὕρητε δὲ τὴν ἀπόστασιν τῶν σημείων ἐπαφῆς αὐτῆς συναρτήσει τῶν ἀκτίνων Α καὶ α.

470. Ἂν Δ εἶναι ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς Α ὀρθ. τριγώνου ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ καὶ Α, α, α΄ αἱ ἀκτῖνες τῶν περὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΒ, ΑΔΓ περιγεγραμμένων περιφερειῶν, νὰ ἀποδείξητε ὅτι

$$\mathrm{A}^2 = \alpha^2 + \alpha'^2.$$

471. Νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον Α εἰς μίαν περιφέρειαν Κ καὶ νὰ φέρητε χορδὴν ΒΓ παράλληλον πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΚΑ. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι

$$(\mathrm{AB})^2 + (\mathrm{A\Gamma})^2 = 4\,(\mathrm{KA})^2.$$

472. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν ἰσοσκελοῦς τραπεζίου, τοῦ ὁποίου ἡ μία βάσις εἶναι 50 μέτ., ἡ ἄλλη 28 μέτ. καὶ ἑκάστη τῶν ἄλλων πλευρῶν 12 μέτρα.

473. Νὰ γράψητε δύο εὐθ. τμήματα α καὶ τ. Ἔπειτα δὲ νὰ κατασκευάσητε ἓν ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι

$$(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = \alpha^2 \quad \text{καὶ} \quad \mathrm{AB} + \mathrm{B\Gamma} = \tau.$$

474. Νὰ ὁρίσητε δύο εὐθ. τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἂν $(\mathrm{AB}) = 2\alpha$ καὶ

$(\Gamma\Delta) = k$, νὰ εὕρητε τὸν γεωμ. τόπον τῶν σημείων Μ, διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι $(MA)^2 + (MB)^2 = \kappa^2$.

475. Νὰ γράψητε μίαν εὐθεῖαν Ε, ἓν τμῆμα τ καὶ νὰ ὁρίσητε δύο σημεῖα Α, Β ἐκτὸς τῆς Ε κείμενα. Νὰ ὁρίσητε ἔπειτα ἓν σημεῖον Μ τῆς εὐθείας Ε τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι $(MA)^2 + (MB)^2 = \tau^2$.

476. Νὰ γράψητε ἓν εὐθ. τμῆμα. Ἂν καλέσητε α τὸ μῆκος αὐτοῦ, νὰ γράψητε ἄλλο εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ μῆκος $\alpha\sqrt{12}$.

477. Νὰ κατασκευάσητε δύο ἄνισα τρίγωνα. Ἀπὸ ἓν ὡρισμένον σημεῖον μιᾶς πλευρᾶς τοῦ μεγαλυτέρου νὰ γράψητε εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ ἀποχωρίζῃ ἀπὸ αὐτὸ τρίγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ μικρότερον.

478. Δίδεται ἓν εὐθ. τμῆμα k καὶ δύο σημεῖα Α, Β εἰς ἀπόστασιν α. Νὰ εὕρητε τὸν γεωμ. τόπον τῶν σημείων Μ, διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι

$$(MA)^2 - (MB)^2 = k^2.$$

479. Δίδεται εὐθεῖα Ε, δύο σημεῖα Α, Β εἰς ἀπόστασιν $(AB) = \alpha$ καὶ ἐκτὸς τῆς Ε. Νὰ ὁρίσητε ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι

$$(MA)^2 - (MB)^2 = \frac{\alpha^2}{2}.$$

480. Εἰς ἓν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγράψητε κύκλον Κ. Ἂν δὲ ΑΔ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α, νὰ εὕρητε τὸν λόγον ΑΚ : ΚΔ συναρτήσει τῶν πλευρῶν α, β, γ τοῦ τριγώνου τούτου.

481. Νὰ γράψητε τὴν διάμεσον ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ καὶ νὰ διχοτομήσετε τὰς γωνίας ΑΔΒ, ΑΔΓ. Ἂν Ε εἶναι ἡ τομὴ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἀπὸ τὴν α' διχοτόμον καὶ Ζ ἡ τομὴ τῆς πλευρᾶς ΑΓ ἀπὸ τὴν β' διχοτόμον, νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.

482. Νὰ διχοτομήσητε τὴν ἐσωτερικὴν καὶ ἐξωτερικὴν ὀρθὴν γωνίαν Α ἑνὸς ὀρθ. τριγώνου ΑΒΓ. Ἔστωσαν δὲ Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως αἱ τομαὶ τῆς εὐθείας ΒΓ ὑπὸ τῶν διχοτόμων. Ἂν ΑΕ = ΑΓ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι

$$A\Delta = AB \text{ καὶ } (BE)^2 = (E\Gamma)\,(\Delta B).$$

483. Ἐπὶ εὐθείας ΑΒ νὰ ὁρίσητε δύο σημεῖα Γ, Δ ἁρμονικὰ συζυγῆ πρὸς τὰ Α, Β. Ἔπειτα νὰ ἀποδείξητε ὅτι, ἂν ὁ λόγος τῆς ἁρμονικῆς διαιρέσεως εἶναι > 1, ἀληθεύει ἡ $\dfrac{2}{(AB)} = \dfrac{1}{(A\Gamma)} + \dfrac{1}{(A\Delta)}$. Νὰ ἐξετασθῇ καὶ ἡ περίπτωσις, ὅπου ὁ ἀνωτέρω λόγος εἶναι < 1.

484. Νὰ γράψητε τὰς διαγωνίους ἑνὸς τραπεζίου ΑΒΓΔ καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἡ τομὴ Ε αὐτῶν διαιρεῖ ἑκάστην εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰς παρακειμένας βάσεις.

485. Νὰ κατασκευάσητε δύο ὅμοια τρίγωνα καὶ νὰ γράψητε δύο ὁμόλογα ὕψη αὐτῶν. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι ταῦτα διαιροῦσι τὰ τρίγωνα εἰς μέρη ὅμοια ἓν πρὸς ἓν καὶ ὅτι ὁ λόγος τῶν ὑψῶν τούτων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων.

486. Εἰς μίαν περιφέρειαν Κ ἀκτῖνος α νὰ γράψητε μίαν χορδὴν ΒΓ καὶ νὰ ὁρίσητε ἐπ' αὐτῆς ἓν σημεῖον Α. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι

$$(KA)^2 + (AB)\cdot(A\Gamma) = \alpha^2.$$

487. Νὰ γράψητε ἓν εὐθ. τμῆμα β καὶ νὰ κατασκευάσητε ὀρθ. τρίγωνον τοῦ ὁποίου ἡ μία κάθετος πλευρὰ νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ β, ἡ δὲ ἄλλη νὰ εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς β καὶ τῆς ὑποτεινούσης.

488. Εἰς ἓν τρίγωνον νὰ ἐγγράψητε τετράγωνον.

489. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α.

490. Νὰ γράψητε εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις ἑνὸς τραπεζίου ἡ ὁποία νὰ διαιρῇ αὐτὸ εἰς δύο μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰς ἀντιστοίχους βάσεις αὐτοῦ.

491. Νὰ γράψητε τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι $(ΑΒ)(ΑΓ) = (ΑΔ)^2 + (ΒΔ)(ΔΓ)$.

492. Στηριζόμενοι εἰς τὴν προηγουμένην ἰσότητα νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἡ ΑΔ ἔχει μῆκος $(ΑΔ) = \frac{2}{β+γ}\sqrt{βγτ(τ-α)}$.

493. Ἂν ἡ διχοτόμος ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ ἰσοῦται πρὸς τὸ τμῆμα ΒΔ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι $α^2 = β(β+γ)$.

494. Νὰ γράψητε τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι $(ΑΔ)^2 = (ΔΒ)(ΔΓ) - (ΑΒ)(ΑΓ)$.

495. Στηριζόμενοι εἰς τὴν προηγουμένην ἰσότητα νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ ἔχει μῆκος.

$(ΑΔ) = \frac{2}{γ-β}\sqrt{βγ(τ-β)(τ-γ)}$, ἂν $γ > β$.

496. Νὰ γράψητε τὰς διχοτόμους ΑΔ, ΑΔ΄ τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων αὐτῶν νὰ λάβητε τμήματα ΔΕ, Δ΄Ε΄ ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς ΑΔ καὶ ΑΔ΄. Ἔπειτα δὲ νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου ΔΕΕ΄Δ΄ συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ

497. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγράψητε τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι $(ΑΓ)(ΒΔ) = (ΑΒ)(ΓΔ) + (ΒΓ)(ΑΔ)$ (θ. τοῦ Πτολεμαίου)

498. Περὶ δοθὲν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ νὰ περιγράψητε περιφέρειαν καὶ νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον Μ ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΓ αὐτῆς. Ἔπειτα δὲ νὰ ἀποδείξητε ὅτι αἱ χορδαὶ ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως $ΜΒ = ΜΑ + ΜΓ$.

499. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ἰσοσκελὲς τραπέζιον καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ εἶναι ἴσαι. Ἔπειτα δὲ νὰ ὑπολογίσητε τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου συναρτήσει τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν τοῦ τραπεζίου.

500. Εἰς μίαν περιφέρειαν ἀκτῖνος ρ νὰ ὁρίσητε διαδοχικὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ. Ἂν α εἶναι τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ΑΒ καὶ β τῆς ΒΓ, νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς χορδῆς τοῦ ἀθροίσματος ΑΓ τῶν τόξων ΑΒ καὶ ΒΓ.

501. Ἀπὸ τὸ μῆκος α τῆς χορδῆς ἑνὸς τόξου καὶ ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα ρ αὐτοῦ νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς χορδῆς διπλασίου τόξου.

502. Ἓν τραπέζιον ΑΒΓΔ ἔχει βάσεις ΑΒ καὶ ΓΔ, αἱ δὲ διαγώνιοι τέμνονται εἰς σημεῖον Ε. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι $(ΕΒΓ) = (ΕΑΔ)$.

503. Εἰς ὀρθ. τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγράψητε κύκλον. Ἂν δὲ Δ εἶναι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι

$$(ΑΒΓ) = (ΒΔ)(ΔΓ).$$

504. Εἰς δοθέντα κύκλον ἀκτῖνος ρ νὰ γράψητε δύο καθέτους ἀκτῖνας ΟΓ, ΟΔ καὶ νὰ προβάλητε αὐτὰς ἐπὶ μίαν διάμετρον. Ἂν δὲ ΟΕ, ΟΖ εἶναι αἱ προβολαὶ αὐτῶν, νὰ ἀποδείξητε ὅτι

$$(ΟΕ)^2 + (ΟΖ)^2 = ρ^2.$$

505. Νὰ γράψητε δύο ἀνίσους περιφερείας Κ, Λ καὶ νὰ φέρητε ἀκτῖνας ΚΑ, ΛΒ παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι ἡ τομὴ τῶν εὐθειῶν ΚΛ, ΑΒ εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὰς ἀκτῖνας ταύτας.

506. Τὸ αὐτὸ καὶ ἂν αἱ παράλληλοι ἀκτῖνες εἶναι ἀντίρροποι.

507. Ἂν ἰσοσκελὲς τραπέζιον εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον, νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἡ διάμετρος αὐτοῦ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου.

508. Ἂν ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι αἱ βάσεις τραπεζίου ΑΒΓΔ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι

$$(ΑΓ)^2 + (ΒΔ)^2 = (ΒΓ)^2 + (ΑΔ)^2 + 2(ΑΒ)(ΓΔ).$$

509. Νὰ γράψητε τρεῖς περιφερείας, αἱ ὁποῖαι νὰ τέμνωνται ἀνὰ δύο. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι αἱ κοιναὶ χορδαὶ αὐτῶν διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον, ὅταν τὰ 3 κέντρα δὲν εὑρίσκωνται ἐπ' εὐθείας.

510. Εἰς ἓν τόξον ΒΓ νὰ ὁρίσητε σημεῖον Α, νὰ φέρητε τὰς ἀποστάσεις ΑΔ, ΑΗ, ΑΖ τοῦ Α ἀπὸ τὴν χορδὴν ΒΓ καὶ ἀπὸ τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι

$$(ΑΔ)^2 = (ΑΗ)(ΑΖ).$$

511. Νὰ κατασκευάσητε σκαληνὸν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἔπειτα ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ κοινὴν τὴν γωνίαν Α.

512. Εἰς μίαν εὐθεῖαν νὰ ὁρίσητε δύο διαδοχικὰ τμήματα ΑΒ, ΒΓ. Ἔπειτα νὰ εὕρητε τὸν γεωμ. τόπον τῶν σημείων, ἐξ ἑκάστου τῶν ὁποίων ταῦτα φαίνονται ὑπὸ ἴσας γωνίας.

513. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἀπὸ τὸν λόγον ΑΒ : ΑΓ καὶ ἀπὸ τὴν διχοτόμον ΑΔ.

514. Ἐντὸς τριγώνου ΑΒΓ νὰ γράψητε εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία νὰ διαιρῇ αὐτὸ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

515. Νὰ γράψητε περιφέρειαν, ἡ ὁποία νὰ διέρχηται ἀπὸ δύο ὡρισμένα σημεῖα Α, Β, καὶ νὰ ἐφάπτηται δοθείσης εὐθείας Ε.

516. Νὰ γράψητε περιφέρειαν, ἡ ὁποία νὰ διέρχηται ἀπὸ δύο ὡρισμένα σημεῖα Α, Β, καὶ νὰ ἐφάπτηται δοθείσης περιφερείας Κ.

517. Νὰ γράψητε περιφέρειαν, ἡ ὁποία νὰ διέρχηται ἀπὸ ὡρισμένον σημεῖον Α καὶ νὰ ἐφάπτηται δύο δεδομένων εὐθειῶν Ε καὶ Ε΄.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'

1. ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

§ 247. Ποῖα λέγονται κανονικὰ εὐθ. σχήματα. Ὡς γνωστὸν ὅλαι αἱ πλευραὶ ἑνὸς τετραγώνου εἶναι ἴσαι καὶ ὅλαι αἱ γωνίαι του εἶναι ἐπίσης ἴσαι. Διὰ τοὺς λόγους τούτους τὸ τετράγωνον λέγεται **κανονικὸν** σχῆμα.

Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι κανονικὸν σχῆμα. Ὥστε:

Ἓν εὐθ. σχῆμα λέγεται κανονικόν, ἂν ὅλαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι καὶ ὅλαι αἱ γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ἐπίσης ἴσαι.

Μία κυρτὴ τεθλασμένη γραμμὴ λέγεται **κανονική, ἂν ὅλαι αἱ πλευραὶ αὐτῆς εἶναι ἴσαι καὶ ὅλαι αἱ γωνίαι ἴσαι.**

Ἀσκήσεις

518. Ἓν κανονικὸν πολύγωνον ἔχει ν πλευράς. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον ἑκάστης γωνίας αὐτοῦ εἰς μέρη ὀρθῆς.

519. Νὰ εὕρητε τὸ προηγούμενον μέτρον εἰς μοίρας.

2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΕΥΘ. ΣΧΗΜΑΤΩΝ

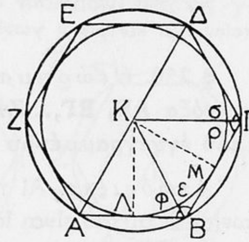
§ 248. *Θεώρημα Ι.* **Πᾶν κανονικὸν εὐθύγραμμον σχῆμα εἶναι ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον.**

Ἀπόδειξις: α') Ἔστω ΑΒΓΔΕΖ ἓν κανονικὸν εὐθύγρ. σχῆμα (σχ. 183). Ἀπὸ τὰς τρεῖς διαδοχικὰς κορυφὰς Α,Β, καὶ Γ αὐτοῦ διέρχεται μία περιφέρεια. Τὸ κέντρον Κ αὐτῆς ὁρίζεται ἂν γραφῶσιν αἱ ΚΛ, ΚΜ ἀντιστοίχως κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν χορδῶν ΑΒ, ΒΓ.

Ἐπειδὴ δὲ ΚΑ = ΚΒ = ΚΓ καὶ ΑΒ = ΒΓ, ἕπεται ὅτι φ = ε = ρ.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι $\varphi = \varepsilon = \frac{B}{2}$.

Ἐπειδὴ δὲ Β = Γ, θὰ εἶναι καὶ $\rho = \frac{\Gamma}{2} = \sigma$. Ὅθεν τὰ τρίγωνα ΚΒΓ καὶ ΚΓΔ. εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως ΚΔ = ΚΒ. Ἡ κορυφὴ λοιπὸν Δ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας Κ. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰς κορυφὰς Ε καὶ Ζ. Τὸ σχῆμα λοιπὸν ΑΒΓΔΕΖ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, ὅ.ἔ.δ.



Σχ. 183

γ΄) Ἐπειδὴ αἱ χορδαὶ ΑΒ, ΒΓ,...ΖΑ εἶναι ἴσαι, αἱ ἀποστάσεις ΚΛ, ΚΜ,... τοῦ κέντρου ἀπὸ αὐτὰς εἶναι ἴσαι. Αἱ πλευραὶ λοιπὸν ΑΒ, ΒΓ κ.τ.λ. ἐφάπτονται τῆς περιφερείας (Κ,ΚΛ), τὸ δὲ σχῆμα ΑΒΓΔΕΖ εἶναι περιγεγραμμένον περὶ αὐτήν, ὅ.ἔ.δ.

§ 249. Ἀξιοσημείωτα στοιχεῖα κανονικοῦ εὐθ. σχήματος.

Ἀπὸ τὸν τρόπον, κατὰ τὸν ὁποῖον ἔγινεν ἡ ἀπόδειξις τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, βλέπομεν ὅτι ἡ ἐγγεγραμμένη καὶ ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια εἰς ἓν κανονικὸν σχῆμα ἔχουσι κοινὸν κέντρον. Τοῦτο λέγεται καὶ **κέντρον** τοῦ κανονικοῦ σχήματος.

Αἱ ἀκτῖνες τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία περιγράφεται περὶ ἓν κανονικὸν σχῆμα, λέγονται καὶ **ἀκτῖνες** τοῦ σχήματος τούτου.

Ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἑνὸς κανονικοῦ σχήματος ἀπὸ μίαν πλευρὰν αὐτοῦ λέγεται **ἀπόστημα** τοῦ σχήματος τούτου.

Εἶναι δὲ τὸ **ἀπόστημα** τοῦτο καὶ **ἀκτὶς τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας.**

Ἡ γωνία π.χ. ΑΚΒ τῶν ἀκτίνων ΚΑ, ΚΒ, αἱ ὁποῖαι καταλήγουν εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς πλευρᾶς ΑΒ λέγεται **κεντρικὴ** γωνία τοῦ σχήματος ΑΒΓΔΕΖ.

Ἂν δὲ ἓν κανονικὸν σχῆμα ἔχῃ ν πλευράς, περὶ τὸ κέντρον Κ σχηματίζονται ν ἴσαι κεντρικαὶ γωνίαι. Ἑκάστη λοιπὸν ἔχει μέτρον $\frac{4}{\nu}$ τῆς ὀρθῆς γωνίας.

Ἀσκήσεις

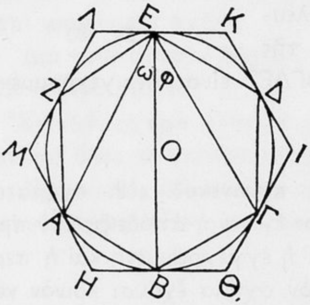
520. Νὰ εὕρητε τὸ μέσον τῆς κεντρικῆς γωνίας ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ ἑνὸς τετραγώνου.

521. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς κεντρικῆς γωνίας, ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ ὀκταγώνου.

522. Νὰ εὕρητε τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν ἑνὸς κανονικοῦ σχήματος, τὸ ὁποῖον ἔχει κεντρικὴν γωνίαν 36^0.

§ 250. *Θεώρημα ΙΙ.* **Ἂν περιφέρεια εἶναι διῃρημένη εἰς ἴσα τόξα ΑΒ, ΒΓ,...ΖΑ, αἱ χορδαὶ τούτων εἶναι πλευραὶ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ΑΒΓΔΕΖ** (σχ. 184).

Ἀπόδειξις. Αἱ πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι προφανῶς ἴσαι. Καὶ αἱ γωνίαι δὲ αὐτοῦ εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουσιν εἰς ἴσα τόξα. Τὸ ἐγγεγραμμένον λοιπὸν σχῆμα ΑΒΓΔΕΖ εἶναι κανονικόν.



Σχ. 184

§ 251. *Θεώρημα ΙΙΙ.* **Ἂν περιφέρεια εἶναι διῃρημένη εἰς ἴσα τόξα καὶ φέρωμεν ἐφαπτομένας εἰς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως, περιγράφεται κανονικὸν εὐθ. σχῆμα.**

Ἂν π.χ. $\widehat{AB} = \widehat{B\Gamma} = ... = \widehat{ZA}$, τὸ περιγεγραμμένον ΗΘΙΚΛΜ σχῆμα (σχ. 184) εἶναι κανονικόν.

Ἀπόδειξις. Γνωρίζομεν (§ 155 Πορ.) ὅτι $HA = HB$, $\Theta B = \Theta\Gamma$ κ.λ.π. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΗΑΒ, ΘΒΓ, ΙΓΔ κ.λ.π. εἶναι ἰσοσκελῆ μὲ ἴσας βάσεις ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ κ.λ.π. Αἱ δὲ παρ' αὐτὰς γωνίαι εἶναι ἴσαι. Οὕτω π. χ. $\widehat{HAB} = \omega$, $\widehat{\Theta B\Gamma} = \varphi$, Ἐπειδὴ δὲ $\omega = \varphi$ ἕπεται ὅτι $\widehat{HAB} = \widehat{\Theta B\Gamma}$. Τὰ ἰσοσκελῆ λοιπὸν ταῦτα τρίγωνα εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως $\widehat{H} = \widehat{\Theta} = \widehat{I} = \widehat{K} = \widehat{\Lambda} = \widehat{M}$ καὶ $AH = HB = B\Theta = \Theta\Gamma$ κ.τ.λ., ἄρα καὶ $H\Theta = \Theta I = IK = K\Lambda = \Lambda M = MH$. Τὸ σχῆμα λοιπὸν ΗΘΙΚΛΜ εἶναι κανονικόν.

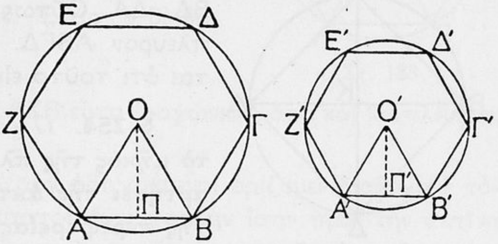
Σημείωσις. Τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ΗΘΙΚΛΜ καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον ΑΒΓΔΕΖ ἐγγίζουσι τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ αὐτὰ σημεῖα. Λέγονται δὲ ταῦτα ἀντίστοιχα σχήματα.

Ὁμοίως ὁρίζονται καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τεθλασμέναι γραμμαί.

§ **252.** *Θεώρημα IV.* **Ἂν δύο κανονικὰ εὐθ. σχήματα ἔχωσι τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν, εἶναι ὅμοια. Ὁ δὲ λόγος τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀποστημάτων καὶ πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.**

Ἀπόδειξις. α΄) Ἂν τὰ κανονικὰ εὐθύγρ. σχήματα ΑΒΓΔ...Μ, Α΄Β΄Γ΄Δ΄...Μ΄ ἔχωσιν ἀπὸ ν πλευράς, ἑκάστη γωνία αὐτῶν εἶναι $\frac{2\nu-4}{\nu}$ ὀρθ. (σχ. 185). Εἶναι λοιπὸν Α = Α΄, Β = Β΄ κτλ. Ἐπειδὴ δὲ ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ κτλ. καὶ Α΄Β΄ = Β΄Γ΄ = Γ΄Δ΄ κτλ. ἕπεται ὅτι

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}$$



Σχ. 185.

κτ.λ. Εἶναι λοιπὸν τὰ σχήματα ταῦτα ὅμοια.

β΄) Ἐπειδὴ $\widehat{\Pi OB}=\frac{\widehat{AOB}}{2}=\frac{2}{\nu}$ ὀρθ. καὶ $\widehat{\Pi'O'B'}=\frac{2}{\nu}$ ὀρθ., ἕπεται ὅτι $\widehat{\Pi OB}=\widehat{\Pi'O'B'}$, τὰ δὲ ὀρθ. τρίγωνα ΟΠΒ, Ο΄Π΄Β΄ εἶναι ὅμοια. Διὰ τοῦτο δὲ εἶναι $\frac{OB}{O'B'}=\frac{O\Pi}{O'\Pi'}=\frac{\Pi B}{\Pi'B'}$. Εἶναι δὲ καὶ

$$\frac{\Pi B}{\Pi'B'}=\frac{\Pi B\cdot 2}{\Pi'B'\cdot 2}=\frac{AB}{A'B'}.\ \text{Ὥστε}:$$

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{O\Pi}{O'\Pi'}=\frac{OB}{O'B'},\ \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Ἀσκήσεις

523. Ἂν ἓν κανονικὸν εὐθ. σχῆμα ἔχῃ περισσοτέρας ἀπὸ 4 πλευράς, νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἑκάστη γωνία του εἶναι ἀμβλεῖα.

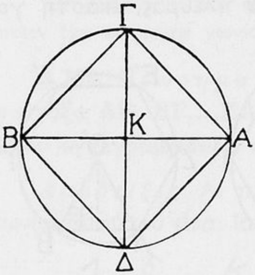
524. Ἓν κανονικὸν εὐθ. σχῆμα ἔχει ἀκτῖνα 3 ἑκατ, ἡ δὲ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένη περιφέρεια ἔχει ἀκτῖνα $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ.

525. Ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων δύο κανονικῶν ἑξαγώνων εἶναι 2. Νὰ εὕρητε τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων περιμέτρων καὶ τὸν λόγον τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν.

3. ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

§ **253.** *Πρόβλημα Ι.* **Εἰς δοθέντα κύκλον Κ νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον** (σχ. 186).

Λύσις. Κατὰ τὴν ἰδιότητα § 250 πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 4 ἴσα τόξα. Φέρομεν λοιπὸν δύο καθέτους διαμέτρους ΑΒ, ΓΔ καὶ τὰς χορδὰς ΑΓ, ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ. Οὕτως ἐγγράφεται τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Εὐκόλως δὲ ἀποδεικνύεται ὅτι τοῦτο εἶναι τετράγωνον.



Σχ. 186

§ **254.** *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τετραγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.**

Λύσις. Ἀπὸ τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΑΚΓ (σχ. 186) προκύπτει ἡ ἰσότης $(\text{ΑΓ})^2 = 2R^2$ καὶ ἑπομένως $(\text{ΑΓ}) = R\sqrt{2}$.

Ἀσκήσεις

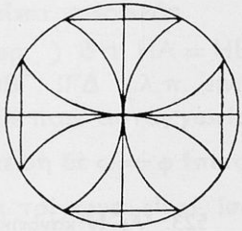
526. Νὰ εὕρητε τὴν περίμετρον καὶ τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

527. Νὰ εὕρητε τὸ ἀπόστημα τετραγώνου ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

528. Ἕνα τετράγωνον ἔχει περίμετρον $8\sqrt{2}$ μέτ. Νὰ εὕρητε τὴν ἀκτῖνα τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

529. Ἓν τετράγωνον ἔχει ἀκτῖνα 3 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδόν του.

530. Ἓν τετράγωνον ἔχει ἐμβαδὸν 50 τετ. ἑκατοστομέτρων. Νὰ εὕρητε τὴν ἀκτῖνα καὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ.


Σχ. 187

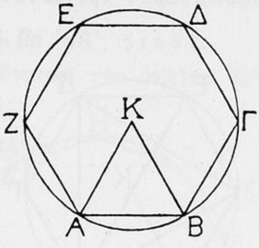
531. Νὰ περιγράψητε τετράγωνον περὶ δοθέντα κύκλον καὶ νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς του συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου τούτου.

532. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγράψητε καὶ νὰ περιγράψητε κανονικὸν ὀκτάγωνον.

533. Νὰ ἰχνογραφήσητε τὸ σχῆμα 187 καὶ νὰ χρωματίσητε τὰ μέρη αὐτοῦ κατὰ βούλησιν.

§ **255.** *Πρόβλημα III.* **Εἰς δοθέντα κύκλον Κ νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν ἑξάγωνον** (σχ. 188).

Ἀνάλυσις. Ἔστω ὅτι ΑΒΓΔΕΖ εἶναι τὸ ζητούμενον κανονικὸν ἑξάγωνον. Ἡ κεντρικὴ γωνία ΑΚΒ θὰ εἶναι $\frac{4}{6}$ ἢ $\frac{2}{3}$ ὀρθ. Αἱ ἄλλαι δὲ γωνίαι τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΚΒ θὰ ἔχωσιν, ἄθροισμα $2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$ ὀρθ. Ἑκάστη δὲ θὰ εἶναι $\frac{2}{3}$ ὀρθ.



Σχ. 188

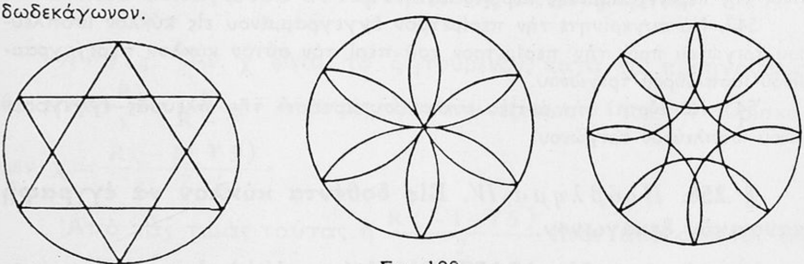
Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΚΒ εἶναι ἰσογώνιον, ἄρα καὶ ἰσόπλευρον, ἤτοι εἶναι (ΑΒ) = R

Σύνθεσις. Ἐκ τούτων ὁδηγούμενοι ὁρίζομεν διαδοχικὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ. . . ΖΑ, ὧν ἕκαστον ἔχει χορδὴν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα καὶ γράφομεν τὰς χορδὰς ταύτας. Τὸ ὑπ' αὐτῶν ἀποτελούμενον σχῆμα ΑΒΓΔΕΖ **εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον** (§ 250).

Ἀσκήσεις

534. Νὰ γράψητε ἓν εὐθ. τμῆμα καὶ ἔπειτα μὲ πλευρὰν αὐτὸ νὰ κατασκευάσητε κανονικὸν ἑξάγωνον.

535. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγράψητε καὶ νὰ περιγράψητε κανονικὸν δωδεκάγωνον.


Σχ. 189

536. Νὰ εὕρητε τὸ ἀπόστημα κανονικοῦ ἑξαγώνου συναρτήσει τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ.

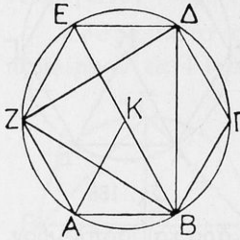
537. Τὸ ἀπόστημα ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι $3\sqrt{3}$ ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς του.

538. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ ἑξαγώνου συναρτήσει τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ.

539. Νὰ ἰχνογραφήσετε τὰ σχήματα 189 καὶ νὰ χρωματίσητε τὰ μέρη ἑκάστου κατὰ βούλησιν.

§ 256. *Πρόβλημα IV.* **Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον.**

Λύσις. Ἀφ' οὗ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 6 ἴσα τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ, φέρομεν τὰς χορδὰς τῶν τόξων ΒΓΔ, ΔΕΖ καὶ ΖΑΒ. Ἐπειδὴ ἕκαστον τούτων εἶναι $\frac{1}{3}$ τῆς περιφερείας, τὸ τρίγωνον ΔΒΖ εἶναι ἰσόπλευρον.



Σχ. 190

§ 257. *Πρόβλημα V.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ἰσοπλεύρου τριγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.**

Λύσις. Τὸ τόξον ΒΓΔΕ (σχ. 190) εἶναι ἡμιπεριφέρεια, τὸ δὲ τρίγωνον ΒΔΕ ὀρθογώνιον. Εἶναι λοιπὸν

$(ΒΔ)^2 = (ΒΕ)^2 - (ΔΕ)^2 = 4\,R^2 - R^2 = 3\,R^2$ καὶ ἑπομένως $(ΒΔ) = R\sqrt{3}$

Ἀσκήσεις

540. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ περιγράψητε ἰσόπλευρον τρίγωνον.

541. Νὰ εὕρητε τὸ ἀπόστημα ἰσοπλεύρου τριγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

542. Νὰ συγκρίνητε τὴν περίμετρον ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἰσοπλεύρου τριγώνου πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου.

543. Νὰ εὕρητε τὴν ἀκτῖνα κύκλου συναρτήσει τῆς πλευρᾶς ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου.

§ 256. *Πρόβλημα IV.* **Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν δεκάγωνον.**

Ἀνάλυσις. Ἂν ΑΒΔΕΖΗΘΙΛΜ (σχ. 191) εἶναι τὸ ζητούμενον, ἡ κεντρικὴ γωνία Κ θὰ εἶναι $\frac{4}{10}$ ὀρθ. Ἑκάστη δὲ τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΚΒ θὰ εἶναι $\frac{8}{10}$ ὀρθ. Ἂν δὲ γράψωμεν τὴν διχοτόμον ΒΓ τῆς $\widehat{Β}$, θὰ εἶναι

$$\widehat{ΓΒΚ} = \widehat{Κ},\ \widehat{ΑΓΒ} = \widehat{Κ} + \widehat{ΓΒΚ} = \frac{8}{10}\text{ ὀρθ.} = \widehat{ΓΑΒ}.$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι $ΓΚ = ΓΒ = ΑΒ$. Ἀφ' ἑτέρου γνωρίζομεν (§ 221) ὅτι:

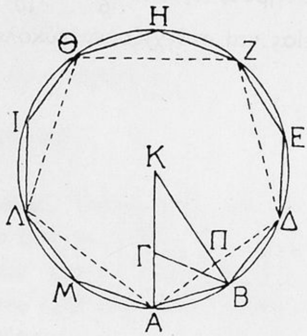
$$ΚΒ : ΑΒ = ΚΓ : ΑΓ \quad ἢ \quad ΚΑ : ΚΓ = ΚΓ : ΑΓ.$$

Ἐκ ταύτης βλέπομεν ὅτι τὸ σημεῖον Γ διαιρεῖ τὴν ἀκτῖνα ΚΑ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον. Εἶναι δὲ

$ΚΓ = ΑΒ > ΓΑ$, διότι $\widehat{ΑΓΒ} > \widehat{ΑΒΓ}$.

Ὥστε:

Ἡ πλευρὰ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ μεγαλύτερον μέρος τῆς ἀκτῖνος διῃρημένης εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.



Σχ. 191

Σύνθεσις. Διαιροῦμεν τὴν ἀκτῖνα τοῦ δοθέντος κύκλου εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον (§ 244). Ἔπειτα ὁρίζομεν διαδοχικὰ τόξα ΑΒ, ΒΔ, ΔΕ κ.τ.λ. ἕκαστον μὲ χορδὴν ἴσην μὲ τὸ μεγαλύτερον μέρος τῆς ἀκτῖνος καὶ συνεχίζομεν εὐκόλως.

§ **256.** *Πρόβλημα VII.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς κανονικοῦ δεκαγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.**

Λύσις. Ἂν x εἶναι τὸ ζητούμενον, κατὰ τὰ προηγούμενα θὰ εἶναι $\frac{R}{x} = \frac{x}{R - x}$. Λύοντες δὲ τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εὑρίσκομεν $x = \frac{R(-1 \pm \sqrt{5})}{2}$.

Ἀπὸ τὰς τιμὰς ταύτας ἡ $\frac{R(-1-\sqrt{5})}{2}$ εἶναι ἀπαράδεκτος ὡς ἀρνητική.

Εἶναι λοιπὸν $x = \frac{R}{2}(-1 + \sqrt{5})$.

Ἀσκήσεις

544. Νὰ περιγράψητε κανονικὸν δεκάγωνον εἰς δοθέντα κύκλον.
545. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγράψητε κανονικὸν πεντάγωνον.
546. Νὰ περιγράψητε κανονικὸν πεντάγωνον εἰς δοθέντα κύκλον.

§ 260. *Πρόβλημμα VIII.* **Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν δεκαπεντάγωνον.**

Λύσις: Ὁρίζομεν τὸ $\frac{1}{6}$ καὶ τὸ $\frac{1}{10}$ τῆς περιφερείας καὶ παρατηροῦντες ὅτι $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ ὁρίζομεν τὸ $\frac{1}{15}$ τῆς περιφερείας καὶ συνεχίζομεν εὐκόλως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'

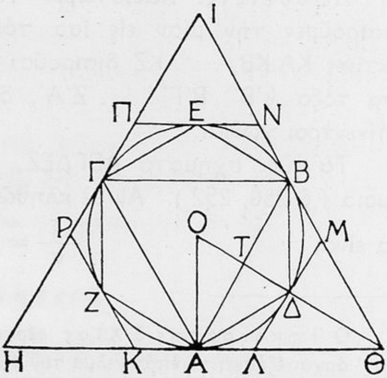
ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ

1. ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ

§ 261. Τί λέγεται μῆκος περιφερείας. Ἔστω ΑΒΓ ἰσόπλευρον τρίγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο (σχ. 192). Ἂν ἐγγράψωμεν εἰς τὸν κύκλον κανονικὸν ἑξάγωνον, ἔπειτα κανονικὸν δωδεκάγωνον κτλ., παρατηροῦμεν ὅτι ἕκαστον ἔχει περίμετρον μεγαλυτέραν ἀπὸ τὸ προηγούμενον (§ 61). Ἤτοι:

Ἡ περίμετρος ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον κανονικοῦ εὐθ. σχήματος βαίνει ἀπαύστως αὐξανομένη, ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἀπαύστως διπλασιάζηται.

Μένει ὅμως ἡ περίμετρος αὕτη πάντοτε μικροτέρα π.χ. ἀπὸ τὴν περίμετρον τοῦ τυχόντος περιγεγραμμένου τριγώνου ΗΘΙ.



Σχ. 192

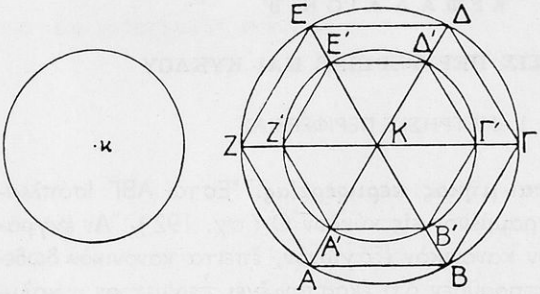
Διὰ ταῦτα, ὡς γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν Ἄλγεβραν, ἡ περίμετρος αὕτη ἔχει ἓν ὅριον.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ πλευραὶ βαίνουσιν ἀπαύστως ἐλαττούμεναι καὶ τείνουσι νὰ γίνωσι σημεῖα, ἡ περίμετρος τείνει νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν περιφέρειαν. Διὰ τοῦτο:

Ὀνομάζομεν μῆκος μιᾶς περιφερείας τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου κανονικοῦ εὐθ. σχήματος ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν περιφέρειαν ταύτην, ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἀπαύστως διπλασιάζηται.

῾Η εὕρεσις τοῦ μήκους μιᾶς περιφερείας στηρίζεται εἰς τὸ ἀκόλουθον θεώρημα τοῦ ῾Ιπποκράτους τοῦ Χίου *.

§ **262.** *Θεώρημα.* **῾Ο λόγος δύο περιφερειῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.**



Σχ. 193

῎Αν δηλ. Γ καὶ γ εἶναι τὰ μήκη δύο περιφερειῶν Κ, κ καὶ R, ρ τὰ μήκη τῶν ἀκτίνων αὐτῶν μετρημένων μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα, θὰ εἶναι $\frac{\Gamma}{\gamma} = \frac{R}{\rho}$ (σχ. 193).

᾿Απόδειξις. Καθιστῶμεν τὰς περιφερείας ὁμοκέντρους καὶ διαιροῦμεν τὴν μίαν εἰς ἴσα τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ. Αἱ ἀκτῖνες ΚΑ,ΚΒ, . . . ΚΖ διαιροῦσι καὶ τὴν ἄλλην περιφέρειαν εἰς ἴσα τόξα Α′Β′, Β′Γ′ . . . Ζ′Α′, διότι ἐπ᾿ αὐτῶν βαίνουσιν ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι.

Τὰ εὐθ. σχήματα ΑΒΓΔΕΖ, Α′Β′Γ′Δ′Ε′Ζ′ εἶναι κανονικὰ καὶ ὅμοια (§ 250, 252). ῎Αν δὲ κληθῶσι Σ καὶ σ αἱ περίμετροι αὐτῶν, θὰ εἶναι

$$\frac{\Sigma}{\sigma} = \frac{AB}{A'B'}$$

῾Ο ῾Ιπποκράτης ὁ Χῖος φέρεται γεννηθεὶς περὶ τὸ ἔτος 470 π.Χ. Κατ᾿ ἀρχὰς ἐξήσκει τὸ ἐπάγγελμα τοῦ ἐφοπλιστοῦ. Λέγεται δὲ ὅτι ἠδικήθη ὑπὸ τοῦ ἐν Βυζαντίῳ ᾿Αθηναϊκοῦ τελωνείου ἢ κατ᾿ ἄλλας πληροφορίας ἐν πλοῖον του συνελήφθη ὑπὸ πειρατῶν. ῏Ηλθεν λοιπὸν εἰς ᾿Αθήνας, διὰ νὰ διεκδικήσῃ τὸ δίκαιόν του. Διήρχετο δὲ τὰς ὥρας τῆς ἀργίας του ἀκούων μαθήματα φιλοσοφίας καὶ τέλος ἵδρυσε καὶ ἰδίαν φιλοσοφικὴν σχολήν. Οὕτω δὲ βαθμηδὸν ἐξειλίχθη εἰς ἕνα τῶν ἐνδοξοτέρων ῾Ελλήνων γεωμετρῶν.

Τὰ τρία περίφημα προβλήματα τὸ τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, τὸ τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου (Δήλιον πρόβλημα) καὶ τὸ τῆς τριχοτομήσεως τυχούσης γωνίας ἐτέθησαν ἐπὶ τῶν χρόνων τοῦ ῾Ιπποκράτους. Εἶναι δὲ γνωστὸν ὅτι ἡ σπουδὴ τῶν προβλημάτων τούτων ὑπῆρξε λίαν γόνιμος εἰς μαθηματικὰς ἀνακαλύψεις.

Ἐπειδὴ δὲ (§ 252) εἶναι καὶ $\frac{R}{\rho}=\frac{AB}{A'B'}$, ἕπεται ὅτι

$$\frac{\Sigma}{\rho}=\frac{R}{\rho}.$$

Ἐπειδὴ δὲ κατελήξαμεν εἰς τὴν ἰσότητα ταύτην χωρὶς νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῶν εὐθ. σχημάτων, συμπεραίνομεν ὅτι αὕτη ἀληθεύει καὶ ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ἀπαύστως διπλασιάζηται.

Εἶναι λοιπὸν ὅρ $\frac{\Sigma}{\sigma}=\frac{R}{\rho}$ ἢ $\frac{\text{ὅρ. }\Sigma}{\text{ὅρ. }\sigma}=\frac{R}{\rho}$.

Ἐπειδὴ δὲ ὅρ $\Sigma=\Gamma$, ὅρ $\sigma=\gamma$, ἕπεται ὅτι $\frac{\Gamma}{\gamma}=\frac{R}{\rho}$, ὅ.ἔ.δ.

Πόρισμα I. **Ὁ λόγος περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον αὐτῆς εἶναι σταθερός, ἤτοι ὁ αὐτὸς δι' ὅλας τὰς περιφερείας.**

Πράγματι ἀπὸ τὰς ἰσότητας $\frac{\Gamma}{\gamma}=\frac{R}{\rho}=\frac{2R}{2\rho}$ προκύπτει ἡ ἰσότης $\frac{\Gamma}{2R}=\frac{\gamma}{2\rho}$.

Ὁ σταθερὸς οὗτος λόγος περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον αὐτῆς παριστάνεται εἰς τὰ συγγράμματα ὅλων τῶν ἐθνῶν μὲ τὸ Ἑλληνικὸν γράμμα π (ἀρχικὸν τῆς λέξεως περιφέρεια)*.

Πόρισμα II. **Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας εἶναι γινόμενον τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου αὐτῆς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν π.**

Διότι ἐκ τῆς ἰσότητος $\frac{\Gamma}{2R}=\pi$ προκύπτει ὅτι $\Gamma=2R\pi$.

Ἀσκήσεις

547. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἀκτῖνος 5 μέτρων.

548. Νὰ εὕρητε τὴν ἀκτῖνα περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει μῆκος 12,56636 ἑκατοστόμετρα.

---

*Ἱστορικὴ σημείωσις περὶ τοῦ π. Κατὰ τὸ 1761 ὁ μαθηματικὸς Lambert ἀπέδειξεν ὅτι ὁ π εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός. Πρῶτος ὅμως ὁ μέγας τῆς ἀρχαιότητος μαθηματικὸς Ἀρχιμήδης ὥρισε κατὰ προσέγγισιν τιμὴν αὐτοῦ $\frac{22}{7}=3{,}1428$ ἀκριβῶς $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$.
Ὁ Πτολεμαῖος εὗρε $\pi=3{,}14166\ldots$ Ὁ δὲ Ὁλλανδὸς γεωμέτρης L. Metius εὗρε $\pi=\frac{325}{115}=3{,}1415920$. Διὰ τὰς ἐφαρμογὰς εἶναι ἀρκοῦσα ἡ τιμὴ 3.14159.

549. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία περιγράφεται περὶ κανονικὸν ἑξάγωνον πλευρᾶς 3 ἑκατ.

550. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία ἐγγράφεται εἰς τὸ προηγούμενον ἑξάγωνον.

551. Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία περιγράφεται περὶ ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι $6\pi\sqrt{3}$ παλάμαι. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ.

552. Ἓν τετράγωνον ἔχει πλευρὰν $4\sqrt{2}$ παλαμῶν. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς ἐγεγγραμμένης καὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

553. Νὰ γράψητε δύο περιφερείας καὶ ἔπειτα ἄλλην ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

554. Νὰ γράψητε μίαν περιφέρειαν καὶ ἄλλην τριπλασίαν αὐτῆς.

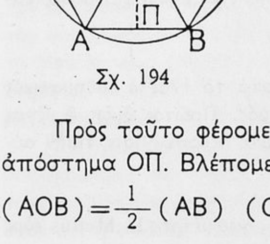
II. ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΚΥΚΛΟΥ

§ 263. Τί λέγεται ἐμβαδὸν κύκλου. Ἂν σκεφθῶμεν, ὅπως εἰς τὴν § 261, ἐννοοῦμεν ὅτι :

α΄) Ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον κανονικοῦ εὐθ. σχήματος ἀπαύστως διπλασιάζηται, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ἔχει ὅριον.

β΄) Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ εὐθ. σχήματος ἀπαύστως αὐξανομένη τείνει νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου.

Διὰ τὸν λόγον τοῦτον ὀνομάζομεν ἐμβαδὸν κύκλου τὸ ὅριον, εἰς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ εὐθ. σχήματος ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτόν, ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἀπαύστως διπλασιάζηται.



Σχ. 194

§ 264. *Πρόβλημα.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν Κ κύκλου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R αὐτοῦ** (σχ. 194).

Λύσις Ἐγγράφομεν εἰς κύκλον Ο κανονικὸν εὐθ. σχῆμα ΑΒΓΔΕΖ καὶ εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

Πρὸς τοῦτο φέρομεν τὰς ἀκτῖνας εἰς τὰς κορυφάς του καὶ τὸ ἀπόστημα ΟΠ. Βλέπομεν δὲ ὅτι

$$(\text{ΑΟΒ}) = \frac{1}{2}(\text{ΑΒ})\ (\text{ΟΠ}),\ \ (\text{ΒΟΓ}) = \frac{1}{2}\ (\text{ΒΓ})\ (\text{ΟΠ}),\ \ldots\ldots$$

$$\ldots(\text{ΖΟΑ}) = \frac{1}{2}(\text{ΖΑ})\ (\text{ΟΠ}).$$

Ἂν δὲ προσθέσωμεν ταύτας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν ὅτι

$$(ΑΒΓΔΕΖ) = \frac{1}{2}(ΟΠ)\,[(ΑΒ) + (ΒΓ) + \ldots + (ΖΑ)].$$

Ἂν δὲ καλέσωμεν Σ τὴν περίμετρον αὐτοῦ, ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται $(ΑΒΓΔΕΖ) = \frac{1}{2}(ΟΠ) \cdot Σ$.

Ἡ ἰσότης αὕτη ἀληθεύει ὁσασδήποτε πλευρὰς καὶ ἂν ἔχῃ τὸ εὐθ. σχῆμα. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\text{ὅρ}\,(ΑΒΓΔΕΖ) = \frac{1}{2}\,\text{ὅρ}\,(ΟΠ)\ \text{ὅρ}\,Σ. \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ ὅρ. (ΑΒΓΔΕΖ) εἶναι τὸ ἐμβαδὸν Κ τοῦ κύκλου, ὅρ. $Σ = Γ$ καὶ προφανῶς ὅρ. $(ΟΠ) = R$, ἡ (1) γίνεται

$$K = Γ \cdot \frac{R}{2} \cdot \quad \text{Ἤτοι :} \qquad (2)$$

Τὸ ἐμβαδὸν κύκλου εἶναι γινόμενον τῆς περιφερείας ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.

Ἐπειδὴ δὲ $Γ = 2\pi R$, ἡ ἰσότης (2) γίνεται $K = \pi R^2$ (3)

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου, πολλαπλασιάζομεν τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ π.

Πόρισμα. **Ὁ λόγος δύο κύκλων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.**

Ἀσκήσεις

555. Ἓν κυκλικὸν ἁλώνιον ἔχει ἀκτῖνα 4 μέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

556. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, εἰς τὸ ὁποῖον ἐγγράφεται κανονικὸν ἑξάγωνον πλευρᾶς 2,5 παλαμῶν.

557. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἐμβαδὸν 12,56636 τετ. μέτρα. Νὰ εὕρητε δὲ καὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας αὐτοῦ.

558. Ἓν σημεῖον Α περιφερείας ἀπέχει 6 ἑκατ. ἀπὸ τὸ ἓν ἄκρον μιᾶς διαμέτρου ΒΓ καὶ 8 ἑκατ. ἀπὸ τὸ ἄλλο ἄκρον αὐτῆς. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τούτου.

559. Νὰ σχηματίσητε κύκλον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο δοθέντων κύκλων.

560. Νὰ σχηματίσητε κύκλον ἰσοδύναμον πρὸς τὴν διαφορὰν δύο δοθέντων κύκλων.

561. Εἰς ἓν τετράγωνον νὰ ἐγγράψητε κύκλον. Ἔπειτα νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου συναρτήσει τῆς πλευρᾶς α τοῦ τετραγώνου.

562. Νὰ εὕρητε συναρτήσει τῆς πλευρᾶς τοῦ προηγουμένου τετραγώνου τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ, ἡ ὁποία κεῖται ἐκτὸς τοῦ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

§ 265. Τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου. Ὀνομάζομεν τετραγωνισμὸν ἑνὸς κύκλου τὴν κατασκευὴν τετραγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς τὸν κύκλον τοῦτον, διὰ τῆς χρήσεως μόνον κανόνος καὶ διαβήτου.

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $K = \Gamma \cdot \frac{R}{2}$ ἐννοοῦμεν ὅτι ἕκαστος κύκλος εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τρίγωνον, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἔχῃ βάσιν ἰσομήκη πρὸς τὴν περιφέρειαν καὶ ὕψος ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ.

Ἂν ἑπομένως ἦτο δυνατὴ ἡ κατασκευὴ τοιούτου τριγώνου, θὰ ἠδυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον μὲ αὐτὸ καὶ ἔπειτα τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον.

Τὸ πρόβλημα τῆς κατασκευῆς τοιούτου τριγώνου ἀπησχόλησεν ἐπὶ πολλοὺς αἰῶνας τοὺς μαθηματικούς, μέχρις οὗ τὸ 1882 ὁ Γερμανὸς μαθηματικὸς Lindemann ἀπέδειξεν ὅτι ἡ κατασκευὴ αὕτη διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου εἶναι ἀδύνατος. Ὁ τετραγωνισμὸς λοιπὸν τοῦ κύκλου εἶναι ἀδύνατος.

III. ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΟΞΟΥ ΚΑΙ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΟΜΕΩΣ

§ 266. Τί λέγεται μῆκος τόξου. Ἂν εἰς ἓν τόξον ἐγγράψωμεν κανονικὴν τεθλ. γραμμήν, ἔπειτα ἄλλην μὲ διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν κ.τ.λ., ὅπως εἰς τὴν § 261, ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ μῆκος τῆς τεθλ. γραμμῆς ἔχει ὅριον. Τὸ ὅριον τοῦτο ὀνομάζομεν μῆκος τοῦ τόξου τούτου.

§ 267. *Πρόβλημα.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τ ἑνὸς τόξου μ^0 καὶ ἀκτῖνος R.**

Λύσις. Ἂν καλέσωμεν Γ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει τὸ τόξον, θὰ εἶναι

$\frac{\tau}{\Gamma} = \frac{\mu}{360}$ (§ 182 Πόρ.). Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι :

$$\tau = \Gamma \cdot \frac{\mu}{360} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ $\Gamma = 2\pi R$, ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται

$$\tau = \pi R \cdot \frac{\mu}{180} \qquad (2)$$

Π. χ. ἓν τόξον 40^0 καὶ ἀκτῖνος 2 μέτρων ἔχει μῆκος

$$\tau = \pi \cdot \frac{40}{90} = 1{,}39626 \text{ μέτ.}$$

Ἀσκήσεις

563. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τόξου 50^0 καὶ ἀκτῖνος 3 μέτρων.

564. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τόξου 120^0 καὶ ἀκτῖνος 2 μέτρ.

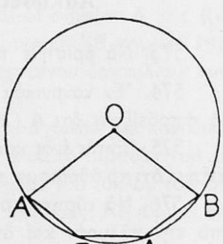
565. Ἓν τόξον 60^0 ἔχει μῆκος π ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.

566. Ἓν τόξον ἀκτῖνος 12 ἑκατ. ἔχει μῆκος 6π ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον αὐτοῦ.

567. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς αὐτοῦ καὶ ἀκτῖνα τὴν πλευράν του νὰ γράψητε τρία τόξα μικρότερα ἡμιπεριφερείας καὶ περατούμενα εἰς δύο κορυφὰς τοῦ τριγώνου ἕκαστον. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῶν ὑπ' αὐτῶν ἀποτελουμένης γραμμῆς ἐκ τῆς πλευρᾶς α τοῦ τριγώνου.

§ 268. Τί λέγεται ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως. Ἔστω κυκλικὸς τομεὺς ΟΑΒ καὶ ΑΓΔΒ μία κανονικὴ τεθλ. γραμμὴ ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τόξον τοῦ τομέως τούτου (σχ. 195).

Αὐτὴ ἡ τεθλ. γραμμὴ καὶ αἱ ἀκτῖνες ΟΑ, ΟΒ ἀποτελοῦσιν ἕνα πολυγωνικὸν τομέα ΟΑΓΔΒ. Ἂν ἐγγράψωμεν εἰς τὸ τόξον τοῦ τομέως ἄλλην τεθλ. γραμμὴν μὲ διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν κ.τ.λ., ὅπως εἰς τὴν § 261, ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ πολυγωνικὸς τομεὺς ἔχει ὅριον. Τὸ ὅριον τοῦτο ὀνομάζομεν ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΟΑΒ.



Σχ. 195

§ 269. *Πρόβλημα.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κ κυκλικοῦ τομέως μ^0 καὶ ἀκτῖνος R.**

Λύσις. Ἂν ἐγγράψωμεν εἰς τὴν βάσιν τοῦ τομέως κανονικὴν τεθλ. γραμμὴν καὶ ἐργασθῶμεν, ὅπως εἰς τὴν § 264, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\kappa = \tau \cdot \frac{R}{2} \quad \text{Ἤτοι:} \qquad (1)$$

Τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως εἶναι γινόμενον τοῦ μήκους τοῦ τόξου αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος.

Ἐπειδὴ δὲ $\tau = \pi R \cdot \frac{\mu}{180}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$\kappa = \pi R \cdot \frac{R}{2} \cdot \frac{\mu}{180} \quad \text{ἢ} \quad \kappa = \pi R^2 \cdot \frac{\mu}{360}. \qquad (2)$$

Ἀσκήσεις

568. Νὰ κατασκευάσητε κυκλικὸν τομέα 60^0 καὶ ἀκτῖνος 4 ἑκατ. Νὰ εὕρητε δὲ ἔπειτα τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

569. Μὲ κέντρον τὴν μίαν κορυφὴν ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ ἀκτῖνα τὴν πλευρὰν αὐτοῦ νὰ γράψητε τόξον περιεχόμενον μεταξὺ τῶν ἄλλων κορυφῶν καὶ μικρότερον ἡμιπεριφερείας. Νὰ εὕρητε δὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου τομέως συναρτήσει τῆς πλευρᾶς α τοῦ τριγώνου.

570. Εἷς κυκλικὸς τομεὺς 30^0 ἔχει ἐμβαδὸν $\frac{3\pi}{4}$ τετρ. παλάμας. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος καὶ τῆς βάσεως αὐτοῦ.

571. Εἰς κυκλικὸν τομέα 90^0 καὶ ἀκτῖνος 5 ἑκατ. νὰ φέρητε τὴν χορδὴν τῆς βάσεως αὐτοῦ. Νὰ ὑπολογίσητε δὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου ἐντὸς αὐτοῦ κυκλικοῦ τμήματος.

572. Εἷς κυκλικὸς τομεὺς ἔχει ἀκτῖνα 3 μέτρων καὶ ἐμβαδὸν $\frac{9\pi}{4}$ τετ. μέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς γωνίας αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Δ΄ βιβλίου

573. Νὰ ὁρίσητε ποῖον κανονικὸν εὐθ. σχῆμα ἔχει γωνίαν $\frac{10}{7}$ ὀρθ.

574. Ἓν κανονικὸν εὐθ. σχῆμα ἔχει ἀκτῖνα R, πλευρὰν α καὶ ἀπόστημα ρ. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι $4(R^2 - \rho^2) = \alpha^2$.

575. Ἐντὸς ἑνὸς κανονικοῦ εὐθ. σχήματος νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπὸ τὰς πλευρὰς εἶναι σταθερόν.

576. Νὰ εὕρητε τὸ ἀπόστημα καὶ τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ εὐθ. σχήματος ἀπὸ τὴν πλευρὰν καὶ ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ.

577. Νὰ εὕρητε τὸ ἀπόστημα καὶ τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ εὐθ. σχήματος περιγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος R, ἂν ἡ πλευρὰ τοῦ ἀντιστοίχου ἐγγεγραμμένου εἶναι α. Νὰ ἐφαρμόσητε τὸ ἐξαγόμενον εἰς περιγεγραμμένον κανονικὸν ἑξάγωνον ἢ τρίγωνον.

578. Ἀπὸ τὴν πλευρὰν α κανονικοῦ εὐθ. σχήματος καὶ ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα R αὐτοῦ νὰ εὕρητε τὴν πλευρὰν τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ εὐθ. σχήματος, τὸ ὁποῖον ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.

579. Ἀπὸ τὴν πλευρὰν α κανονικοῦ εὐθ. σχήματος καὶ ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα R

αὐτοῦ νὰ εὕρητε τὴν πλευρὰν τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ εὐθ. σχήματος, τὸ ὁποῖον ἔχει ἥμισυ ἀριθμὸν πλευρῶν.

580. Νὰ ἐγγράψητε εἰς κύκλον τετράγωνον ΑΓΒΔ, νὰ προεκτείνητε τὴν πλευρὰν ΒΓ κατὰ τὴν φορὰν Β πρὸς Γ καὶ κατὰ τμῆμα ΓΕ ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΓ. Νὰ γράψητε τὴν εὐθεῖαν ΑΕ καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι αὕτη ἐφάπτεται εἰς τὸ Α τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας καὶ ἰσοῦται πρὸς τὴν διάμετρον αὐτῆς.

581. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν Ε περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ ε τοῦ ἀντιστοίχου ἐγγεγραμμένου.

582. Νὰ προεκτείνητε τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΓΔ κανονικοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ, μέχρις οὗ συναντηθῶσιν εἴς τι σημεῖον Η. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὸ τρίγωνον ΗΑΔ εἶναι ἰσόπλευρον.

583. Νὰ εὕρητε τὸ ἀπόστημα ΚΗ κανονικοῦ δεκαγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.

584. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ δεκαγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.

585. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς κανονικοῦ ὀκταγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.

586. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ ὀκταγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.

587. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς κανονικοῦ δωδεκαγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.

588. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ δωδεκαγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.

589. Ἓν τόξον $20^\circ 20'$ ἔχει ἀκτῖνα 2 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος αὐτοῦ.

590. Ἓν τόξον ἔχει ἀκτῖνα 2 ἑκατ. καὶ μῆκος $\frac{41\pi}{180}$ ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς γωνίας του.

591. Νὰ γράψητε δύο ὁμοκέντρους περιφερείας καὶ ἐκ σημείου Α τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας νὰ φέρητε ἐφαπτομένην ΑΒ τῆς ἐσωτερικῆς (Β σημεῖον ἐπαφῆς). Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεταξὺ αὐτῶν περιεχομένου δακτυλίου συναρτήσει τοῦ τμήματος ΑΒ.

592. Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον εἶναι ἐγγεγραμμένον τετράγωνον καὶ κανονικὸν ἑξάγωνον. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑξαγώνου εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου κατὰ $(3\sqrt{3}-4)$ τετ. ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τούτου.

593. Αἱ ἀκτῖνες δύο κύκλων διαφέρουσι κατὰ δύο παλάμας. Νὰ εὕρητε τὴν διαφορὰν τῶν περιφερειῶν αὐτῶν.

594. Εἰς ἕνα κύκλον νὰ γράψητε χορδὴν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα. Ἔπειτα νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν κυκλικῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται ὁ κύκλος, συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου τούτου.

595. Δύο κύκλοι ἔχουσι ἀκτῖνα R, ἡ δὲ ἀπόστασις ΚΛ τῶν κέντρων των εἶναι $R\sqrt{3}$. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι αἱ περιφέρειαι αὐτῶν τέμνονται. Ἔπειτα δὲ νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κοινῆς ἐπιφανείας τῶν κύκλων τούτων.

596. Νὰ ὁρίσητε τὸ μέσον Η τῆς πλευρᾶς ΓΔ κανονικοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ

καὶ νὰ γράψητε τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΗ. Ἔπειτα δὲ νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ ἑξάγωνον ὑπὸ τοῦ ΑΗ συναρτήσει τῆς πλευρᾶς α αὐτοῦ.

597. Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς τετραγώνου καὶ ἀκτῖνα τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ νὰ γράψητε τόξα περιεχόμενα μεταξὺ τῶν πλευρῶν. Ἔπειτα δὲ νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ τῶν τόξων τούτων συναρτήσει τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου.

598. Τρεῖς ἴσοι κύκλοι, Κ, Λ ,Μ ἐφάπτονται ἀνὰ δύο ἐκτός. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ τῶν περιφερειῶν αὐτῶν, συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R αὐτῶν.

599. Εἰς δοθὲν ἡμικύκλιον νὰ ἐγγράψητε ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ. Ἔπειτα νὰ γράψητε ἡμιπεριφερείας ἐκτὸς τοῦ τριγώνου μὲ διαμέτρους τὰς καθέτους πλευρὰς αὐτοῦ. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ τῶν τριῶν ἡμιπεριφερειῶν, εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

Σημείωσις. Τὰ μέρη ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἀποτελεῖται ἡ ἐπιφάνεια αὕτη λέγονται **μηνίσκοι τοῦ Ἱπποκράτους.**

600. Εἰς τὴν διάμετρον ΑΒ δοθέντος ἡμικυκλίου νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον Γ καὶ ἐντὸς τοῦ ἡμικυκλίου νὰ γράψητε ἡμιπεριφερείας μὲ διαμέτρους ΑΓ καὶ ΓΒ. Ἔπειτα δὲ νὰ ὑψώσητε εἰς τὸ Γ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ μέχρι τῆς ἡμιπεριφερείας καὶ νὰ εὕρητε συναρτήσει τῆς καθέτου ταύτης τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ τῶν τριῶν ἡμιπεριφερειῶν. Νὰ ὁρίσητε ἔπειτα τὴν θέσιν τοῦ Γ, εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ μεγίστη τοιαύτη ἐπιφάνεια.

601. Νὰ διαιρέσητε δοθέντα κύκλον εἰς 3 ἰσοδύναμα μέρη μὲ ὁμοκέντρους περιφερείας.

602. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ γράψητε μίαν διάμετρον ΑΒ καὶ νὰ ὁρίσητε εἰς αὐτὴν ἓν σημεῖον Γ, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τὴν ἑξῆς ἰδιότητα : Ἂν μὲ διαμέτρους ΑΓ καὶ ΓΒ γράψωμεν ἡμιπεριφερείας ἑκατέρωθεν τῆς ΑΒ, νὰ διαιρῆται ὑπ' αὐτῶν ὁ κύκλος εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον 3 : 2

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

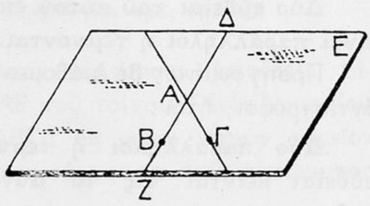
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

Ι. ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

§ 270. Νὰ ἐξετασθῇ πόσα ἐπίπεδα διέρχονται ἀπὸ δύο τεμνομένας εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ (σχ. 196).

Εἰς τυχὸν ἐπίπεδον Ε γράφομεν μίαν εὐθεῖαν ΔΖ. Θέτομεν δὲ αὐτὸ οὕτως, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΔΖ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΑΒ.

Νοοῦμεν ἔπειτα ὅτι τὸ ἐπίπεδον Ε στρέφεται περὶ τὴν ΑΒ, μέχρις ὅτου καὶ τὸ Γ εὑρεθῇ ἐπ' αὐτοῦ. Εἶναι φανερὸν ὅτι εἰς τὴν θέσιν ταύτην τὸ Ε περιέχει καὶ τὰς δύο εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ. Διέρχεται λοιπὸν δι' αὐτῶν ἓν ἐπίπεδον.



Σχ. 196

Ἂν δὲ διήρχετο ἀπὸ αὐτὰς καὶ ἄλλο ἐπίπεδον Ε΄, τὰ δύο ἐπίπεδα Ε καὶ Ε΄ θὰ εἶχον τρία κοινὰ σημεῖα Α,Β,Γ, μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας. Τοῦτο δὲ εἶναι ἀδύνατον (§ 16). Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἀπὸ δύο τεμνομένας εὐθείας διέρχεται ἓν μόνον ἐπίπεδον.

Τὴν ἰδιότητα ταύτην διατυπώνομεν καὶ ὡς ἑξῆς:

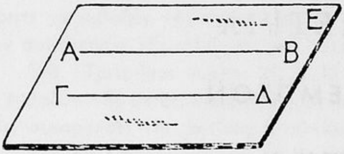
Δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου.

Πόρισμα Ι. **Τρία μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα σημεῖα ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου.**

Πόρισμα ΙΙ. **Μία εὐθεῖα καὶ ἓν σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς κείμενον ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου.**

§ **271. Νὰ ἐξετασθῇ πόσα ἐπίπεδα διέρχονται ἀπὸ δύο παραλλήλους εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ** (σχ. 197).

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν παραλλήλων εὐθειῶν (§ 97) αἱ εὐθεῖαι αὗται κεῖνται εἰς ἓν ἐπίπεδον Ε. Διέρχεται δηλ. ἀπὸ αὐτὰς ἓν ἐπίπεδον.



Σχ. 197

Ἂν δὲ διήρχετο ἀπὸ αὐτὰς καὶ ἄλλο ἐπίπεδον Ε΄, τὰ δύο ἐπίπεδα θὰ εἶχον κοινὰ π.χ. τὰ σημεῖα Α, Β, Γ. τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Τοῦτο δὲ εἶναι ἀδύνατον. Ὥστε:

Ἀπὸ τὰς παραλλήλους εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ διέρχεται ἓν μόνον ἐπίπεδον. Ἤτοι:

Δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου.

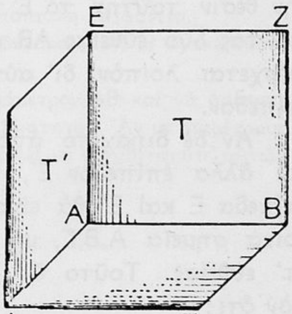
§ **272. Ποῖαι εἶναι αἱ δυναταὶ θέσεις δύο εὐθειῶν πρὸς ἀλλήλας.** Ἀπὸ τὴν Ἐπιπεδομετρίαν γνωρίζομεν ὅτι:

Δύο εὐθεῖαι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εἶναι παράλληλοι ἢ τέμνονται.

Προηγουμένως δὲ ἐμάθομεν καὶ τὸ ἀντίστροφον, ἤτοι:

Δύο παράλληλοι ἢ τεμνόμεναι εὐθεῖαι κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

Ἡ εὐθεῖα ΑΕ τοῦ τοίχου ΑΒΖΕ (σχ. 198) δωματίου διέρχεται ἀπὸ ἓν μόνον σημεῖον Α τοῦ πατώματος, ἡ δὲ εὐθεῖα ΓΔ τοῦ πατώματος δὲν διέρχεται ἀπὸ τὸ Α.



Σχ. 198

Γεννᾶται ἤδη ἡ ἀπορία, ἂν ἀπὸ τὰς εὐθείας ΑΕ καὶ ΓΔ διέρχονται ἐπίπεδα καὶ πόσα.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἀπορίαν ταύτην, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἂν διήρχετο ἀπὸ αὐτὰς ἓν ἐπίπεδον Π, τοῦτο θὰ περιεῖχε τὴν ΓΔ καὶ τὸ σημεῖον Α τοῦ πατώματος. Κατὰ δὲ τὸ ἀνωτέρω πόρισμα ΙΙ (§ 270) θὰ συνέπιπτε μὲ τὸ πάτωμα, ἡ δὲ εὐθεῖα ΑΕ τοῦ Π θὰ

ἔκειτο ἐπὶ τοῦ πατώματος. Τοῦτο ὅμως ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν
Ὥστε :

Οὐδὲν ἐπίπεδον διέρχεται ἀπὸ τὰς εὐθείας ΑΕ καὶ ΓΔ.

Εἴδομεν λοιπὸν ὅτι :

Δύο εὐθεῖαι δύνανται νὰ τέμνωνται ἢ νὰ εἶναι παράλληλοι ἢ νὰ μὴ κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

Αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, λέγονται **ἀσύμβατοι εὐθεῖαι.**

Ἀσκήσεις

603. Νὰ δείξητε εἰς τὴν αἴθουσαν τῆς διδασκαλίας : α΄) Δύο τεμνομένας εὐθείας καὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν. β΄) Δύο παραλλήλους εὐθείας καὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν. γ΄) Τρία σημεῖα μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας καὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν. δ΄) Δύο ἀσυμβάτους εὐθείας.

604. Ἓν σημεῖον Α κεῖται εἰς ἐπίπεδον Ε καὶ ἓν σημεῖον Β κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τούτου. Νὰ ἐξετάσητε πόσα κοινὰ σημεῖα ἔχει ἡ εὐθεῖα ΑΒ μὲ τὸ ἐπίπεδον Ε.

605. Μία εὐθεῖα ΑΒ ἔχει μὲ ἓν ἐπίπεδον κοινὸν σημεῖον μόνον τὸ Α. Νὰ ἐξετάσητε, ἂν ὑπάρχωσιν εὐθεῖαι τοῦ Ε παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΒ.

§ 273. Ποῖαι εὐθεῖαι λέγονται τέμνουσαι ἐπιπέδου. Εἴπομεν προηγουμένως ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΕ τοῦ τοίχου Τ ἑνὸς δωματίου (σχ 198) ἔχει μὲ τὸ πάτωμα ΑΒΓΔ ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον τὸ Α. Δι' αὐτὸ ἡ εὐθεῖα ΑΕ λέγεται **τέμνουσα** τοῦ πατώματος
Ὥστε :

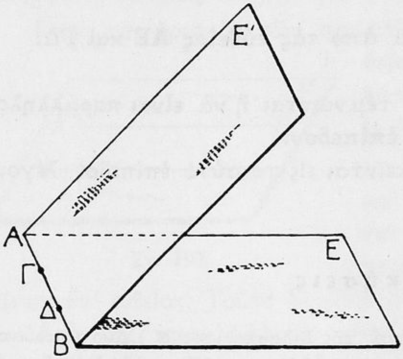
Μία εὐθεῖα λέγεται τέμνουσα ἑνὸς ἐπιπέδου, ἂν ἔχῃ μὲ αὐτὸ ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον.

Τὸ δὲ κοινὸν σημεῖον εὐθείας καὶ ἐπιπέδου λέγεται **ποὺς** ἢ **ἴχνος** τῆς εὐθείας ταύτης.

§ 274. Τί λέγεται τομὴ δύο ἐπιπέδων καὶ ποῖον τὸ σχῆμα αὐτῆς. α΄) Παρατηροῦντες τὰ ἐπίπεδα τοῦ πατώματος ἢ τῆς ὀροφῆς καὶ τῶν ἐσωτερικῶν ἐπιφανειῶν τῶν τοίχων ἑνὸς δωματίου βλέπομεν ὅτι εἶναι δυνατὸν δύο ἐπίπεδα νὰ ἔχωσι πολλὰ κοινὰ σημεῖα.

Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κοινῶν σημείων δύο ἐπιπέδων λέγεται τομὴ τῶν ἐπιπέδων τούτων.

β΄) Διὰ νὰ γνωρίσωμεν τὸ σχῆμα τῆς τομῆς δύο ἐπιπέδων Ε καὶ Ε΄, (σχ. 199) σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:



Σχ. 199

Δύο τυχόντα κοινὰ σημεῖα Α καὶ Β τῶν ἐπιπέδων τούτων ὁρίζουσι τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Γνωρίζομεν δὲ ὅτι αὕτη κεῖται καὶ ἐπὶ τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων.

Πᾶν δὲ ἄλλο κοινὸν σημεῖον Γ τῶν ἐπιπέδων τούτων κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΒ. Διότι, ἂν ἔκειτο ἐκτὸς αὐτῆς, τὰ δύο ἐπίπεδα θὰ ἐταυτίζοντο (§ 270 Πόρ. ΙΙ), ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

Ὥστε: Κοινὰ σημεῖα τῶν δύο ἐπιπέδων εἶναι ὅλα τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ μόνον αὐτά. Ἑπομένως:

Ἡ τομὴ δύο ἐπιπέδων εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

Ἀσκήσεις

606. Νὰ δείξητε εἰς τὴν αἴθουσαν τῆς διδασκαλίας δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα καὶ τὴν τομὴν αὐτῶν.

607. Νοήσατε διάφορα ἐπίπεδα Π, Ρ, Σ, κ.τ.λ, τὰ ὁποῖα νὰ διέρχωνται ἀπὸ μίαν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ ἓν ἄλλο ἐπίπεδον Ε, τὸ ὁποῖον νὰ τέμνηται ὑπὸ τῆς ΑΒ π.χ. εἰς τὸ Α. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι αἱ τομαὶ τῶν ἐπιπέδων Π, Ρ, Σ, κ.τ.λ. ὑπὸ τοῦ Ε διέρχονται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α.

608. Νὰ ἐξετάσητε, ἂν δύο εὐθεῖαι Ε καὶ Ε΄ μὴ κείμεναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον εἶναι δυνατόν, νὰ τμηθῶσιν ὑπὸ δύο παραλλήλων εὐθειῶν.

2. ΚΑΘΕΤΟΣ ΚΑΙ ΠΛΑΓΙΑΙ ΠΡΟΣ ΕΠΙΔΕΔΟΝ ΕΥΘΕΙΑΙ

§ 275. Ποία εὐθεῖα λέγεται κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον. Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ γνώμονος βεβαιούμεθα ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΕ δωματίου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΔ τοῦ πατώματος ΑΒΓΔ (σχ. 198).

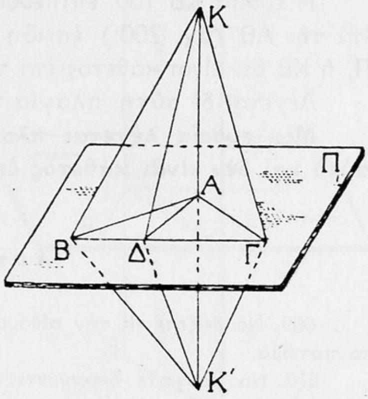
Βλέπομεν δηλ. ὅτι εἶναι δυνατὸν μία εὐθεῖα νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο τεμνομένας εὐθείας ἑνὸς ἐπιπέδου εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν.

Οὕτω καὶ ἡ εὐθεία ΑΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΓ καὶ ΑΒ ἑνὸς ἐπιπέδου Π (σχ. 200).

Θὰ ἐξετάσωμεν τώρα, ἂν ἡ ΑΚ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τυχοῦσαν ἄλλην εὐθεῖαν ΑΔ τοῦ Π.

Πρὸς τοῦτο γράφομεν εὐθεῖαν ΒΔΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς δοθείσας εἰς τὰ σημεῖα Β,Δ,Γ. Προεκτείνομεν ἔπειτα τὴν ΑΚ κατὰ τμῆμα ΑΚ′ ἴσον πρὸς τὸ ΑΚ.

Οὕτω τὸ τμῆμα ΚΚ′ τέμνεται ὑπὸ ἑκατέρας τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΑΓ δίχα καὶ καθέτως. Θὰ εἶναι λοιπὸν ΒΚ = ΒΚ′ καὶ ΓΚ = ΓΚ′, τὰ δὲ τρίγωνα ΚΒΓ καὶ Κ′ΒΓ εἶναι ἴσα.



Σχ. 200

Διὰ τοῦτο δὲ εἶναι καὶ $\widehat{ΒΓΚ} = \widehat{ΒΓΚ'}$. Τὰ δὲ τρίγωνα ΚΔΓ, Κ′ΔΓ ἔχουσι τὴν ΓΔ κοινήν, ΚΓ = Κ′Γ καὶ τὰς ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας· εἶναι λοιπὸν ἴσα καὶ διὰ τοῦτο ΔΚ = ΔΚ′. Τὸ δὲ τρίγωνον ΚΔΚ′ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως ἡ διάμεσος ΔΑ αὐτοῦ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΚΚ′. Ὥστε:

Ἂν μία εὐθεῖα διέρχηται ἀπὸ τὴν τομὴν δύο ἄλλων εὐθειῶν καὶ εἶναι κάθετος ἐπ᾽ αὐτάς, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ πᾶσαν ἄλλην εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν διερχομένην διὰ τῆς τομῆς των.

Ὀνομάζομεν δὲ τὴν εὐθεῖαν ταύτην ΑΚ **κάθετον** ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον. Δηλαδή:

Μία εὐθεῖα τέμνουσα ἐπίπεδον λέγεται κάθετος ἐπ᾽ αὐτό, ἂν εἶναι κάθετος ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου τούτου, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸν πόδα αὐτῆς.

Καὶ τὸ ἐπίπεδον δὲ λέγεται κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ταύτην.

Κατὰ ταῦτα ἡ προηγουμένη ἰδιότης διατυποῦται καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἂν μία εὐθεῖα διέρχηται ἀπὸ τὴν τομὴν δύο ἄλλων καὶ

εἶναι κάθετος ἐπ' ἀμφοτέρας ταύτας, αὕτη εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν.

§ 276. Ποῖαι εὐθεῖαι λέγονται πλάγιαι πρὸς ἐπίπεδον.

Ἡ εὐθεῖα ΚΒ τοῦ ἐπιπέδου ΚΒΑ προφανῶς δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ (σχ. 200·) ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΒ εἶναι εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου Π, ἡ ΚΒ δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π.

Λέγεται δὲ αὕτη πλαγία πρὸς τὸ Π (σχ. 200). Ὥστε:

Μία εὐθεῖα λέγεται πλαγία πρὸς ἕν ἐπίπεδον, ἂν τέμνῃ αὐτὸ καὶ δὲν εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτό.

Ἀσκήσεις

609. Νὰ δείξητε εἰς τὴν αἴθουσαν τῆς διδασκαλίας εὐθείας καθέτους ἐπὶ τὸ πάτωμα.

610. Νὰ γράψητε δεικνύοντες διὰ τοῦ δακτύλου σας εἰς ἕνα τοῖχον εὐθεῖαν πλαγίαν πρὸς τὸ πάτωμα.

611. Ἂν ὁ μελανοπίναξ στηρίζηται ἐπὶ τρίποδος, νὰ ὁρίσητε, ἂν αἱ μικρότεραι πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι κάθετοι ἢ πλάγιαι πρὸς τὸ πάτωμα.

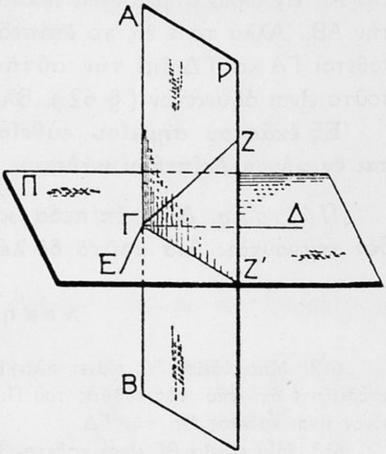
§ 277. *Πρόβλημα.* **Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ εἰς ἕν σημεῖον Γ αὐτῆς** (σχ. 201).

· *Λύσις.* Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι ὑπάρχουσιν ἄπειροι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Γ, διότι διὰ τῆς ΑΒ διέρχονται ἄπειρα ἐπίπεδα καὶ εἰς τὸ καθένα ὑπάρχει ἀπὸ μία κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Γ. Ἀπὸ τὰς καθέτους αὐτὰς δύο τυχοῦσαι π.χ. αἱ ΓΔ, ΓΕ κεῖνται εἰς ἕν ἐπίπεδον Π. Κατὰ δὲ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα, ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π καὶ ἐπὶ πᾶσαν εὐθεῖαν αὐτοῦ, ἡ ὁποῖα διέρχεται ἀπὸ τὸ Γ. Ἂν δέ μία ἄλλη ΓΖ ἀπὸ τὰς αὐτὰς καθέτους εὑρίσκετο ἐκτὸς τοῦ Π, τοῦτο θὰ ἐτέμνετο ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου Ρ τῶν εὐθειῶν ΓΑ, ΓΖ κατὰ μίαν εὐθεῖαν ΓΖ'. Θὰ ἦτο δὲ ἡ ΓΑ κάθετος ἐπ' αὐτήν. Ἀλλὰ τότε ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ θὰ ἤγοντο ἐκ τοῦ Γ δύο κάθετοι ΓΖ, ΓΖ' ἐπὶ τὴν ΑΒ. Τοῦτο δὲ εἶναι ἀδύνατον. Κεῖται λοιπὸν ἡ ΓΖ εἰς τὸ ἐπίπεδον Π. Ὥστε:

Ὅλαι αἱ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Γ, εὑρίσκονται ἐπὶ

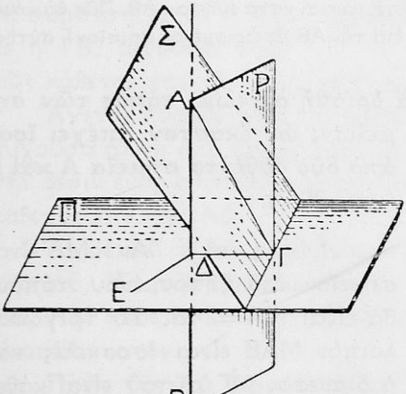
τοῦ Π. Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως: **κάθε εὐθεῖα τοῦ Π διερχομένη ἀπὸ τὸ Γ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ** (§ 275).

Ἑπομένως: Ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ἐπίπεδον Π, κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Γ καὶ ὁριζόμενον ὑπὸ δύο οἱωνδήποτε τῶν καθέτων ἐπ' αὐτὴν εὐθειῶν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Γ.



Σχ. 201

§ 278. Νὰ ἐξετασθῇ πόσα ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ εὐθεῖαν ΑΒ ἄγονται ἐκ σημείου Γ αὐτῆς ἢ ἐκτὸς αὐτῆς κειμένου. α') Ἂν τὸ Γ εἶναι σημεῖον τῆς ΑΒ (σχ. 201), ἐμάθομεν προηγουμένως ὅτι δύο εὐθεῖαι ΓΔ, ΓΕ κάθετοι ἐπ' αὐτὴν ὁρίζουσιν ἐπίπεδον Π κάθετον ἐπ' αὐτήν. Ἂν δὲ ἀπὸ τὸ Γ διήρχετο καὶ ἄλλο ἐπίπεδον Π' κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, τυχοῦσα εὐθεῖα ΓΖ αὐτοῦ διάφορος τῆς τομῆς τῶν Π, Π' θὰ ἦτο κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ θὰ ἦτο ἐκτὸς τοῦ Π. Τοῦτο δὲ εἶναι ἀδύνατον (§ 279).



Σχ. 202

β') Ἂν τὸ Γ κεῖται ἐκτὸς τῆς ΑΒ (σχ. 202), ὁρίζει μὲ αὐτὴν ἓν ἐπίπεδον Ρ. Εἰς αὐτὸ ἄγεται ἐκ τοῦ Γ μία εὐθεῖα ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Κατὰ δὲ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν ἀπὸ τὸ Δ ἄγεται ἓν μόνον ἐπίπεδον Π κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Τοῦτο περιέχει τὴν εὐθεῖαν ΔΓ καὶ ἑπομένως διέρχεται ἀπὸ τὸ Γ.

Οὐδὲν δὲ ἄλλο ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀπὸ τὸ Γ καὶ τέμνουσι τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Διότι ἄλλως θὰ διήρχετο ἀπὸ τὸ Δ, πλὴν τοῦ Π καὶ ἄλλο ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Τοῦτο δὲ ἀπεδείχθη προηγουμένως ἀδύνατον.

Ἂν δὲ ἓν ἐπίπεδον Σ διήρχετο ἀπὸ τὸ Γ καὶ ἔτεμνε καθέτως τὴν ΑΒ εἰς ἄλλο σημεῖον Α, ἡ εὐθεῖα ΓΑ αὐτοῦ θὰ ἦτο κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἀλλὰ τότε εἰς τὸ ἐπίπεδον ΔΓΑ θὰ ἤγοντο ἐκ τοῦ Γ δύο κάθετοι ΓΑ καὶ ΓΔ ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Γνωρίζομεν δὲ ὅτι τοῦτο εἶναι ἀδύνατον (§ 62). Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Ἐξ ἑκάστου σημείου εὐθείας ἢ ἐκτὸς αὐτῆς κειμένου ἄγεται ἓν μόνον ἐπίπεδον κάθετον ἐπ' αὐτήν.

Πόρισμα. **Δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν δὲν τέμνονται. Διὰ τοῦτο δὲ λέγονται παράλληλα ἐπίπεδα.**

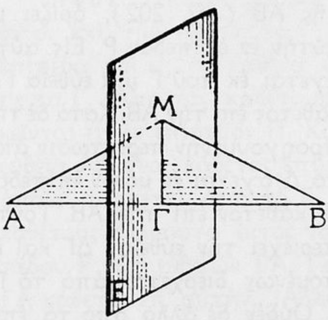
Ἀσκήσεις

612. Μία εὐθεῖα ΓΔ τέμνει πλαγίως εἰς σημεῖον Δ ἓν ἐπίπεδον Π. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἀπὸ τὰς εὐθείας τοῦ Π, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ Δ, μία μόνον εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ.

613. Μία εὐθεῖα ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον Π καὶ Β εἶναι ὁ πούς αὐτῆς. Αὐτη καὶ τυχοῦσα εὐθεῖα ΒΑ πλαγία πρὸς τὸ Π ὁρίζουσιν ἓν ἐπίπεδον ΑΒΓ. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἀπὸ τὰς εὐθείας τοῦ Π, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ Β, μία μόνον εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ.

614. Δύο ἐπίπεδοι ὄψεις μιᾶς δοκοῦ τέμνονται κατὰ εὐθεῖαν ΑΒ. Πῶς θὰ κόψη αὐτὴν ὁ τεχνίτης κατὰ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς ὡρισμένον σημεῖον Γ αὐτῆς;

§ 279. *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ ὁρισθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων, ὧν ἕκαστον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β** (σχ. 203).



Σχ. 203.

Λύσις. α΄) Ἂν Μ εἶναι σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου, θὰ εἶναι ΜΑ = ΜΒ. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΜΑΒ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἡ διάμεσος ΜΓ αὐτοῦ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Διὰ τοῦτο ἡ ΜΓ, ἑπομένως καὶ τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ε, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως ΑΒ.

β΄) Ἂν δὲ Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ Ε, ἡ εὐθεῖα ΜΓ κειμένη εἰς τὸ ἐπίπεδον Ε εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ μέσον Γ τοῦ τμήματος ΑΒ. Θὰ εἶναι λοιπὸν ΜΑ = ΜΒ ἤτοι τὸ Μ εἶναι σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου. Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν ὅτι:

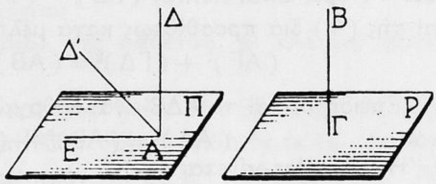
Ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει δίχα καὶ καθέτως τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ.

Ἄσκησις

615. Εἰς δοθὲν ἐπίπεδον Π γράφομεν εὐθεῖαν Ε. Ὁρίζομεν δὲ καὶ δύο σημεῖα Α, Β, ὧν τὸ ἓν τουλάχιστον κεῖται ἐκτὸς τοῦ Π. Πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρίσωμεν σημεῖον Μ τῆς Ε τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι ΜΑ = ΜΒ; Πόσα δὲ τοιαῦτα σημεῖα ὑπάρχουσιν;

§ 280. Νὰ ἐξετασθῇ πόσαι εὐθεῖαι κάθετοι ἐπὶ ἐπίπεδον Π ἄγονται ἀπὸ ἓν σημεῖον Α αὐτοῦ. (σχ. 204).

Ἔστω τυχοῦσα εὐθεῖα ΒΓ. Γνωρίζομεν ὅτι ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Γ αὐτῆς ἄγεται ἓν ἐπίπεδον Ρ κάθετον ἐπ᾽ αὐτήν.



Σχ. 204

Νοοῦμεν ἤδη ὅτι τὸ Ρ τίθεται ἐπὶ τοῦ Π οὕτως, ὥστε τὸ σημεῖον Γ νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ Α. Τότε ἡ ΓΒ, μένουσα διαρκῶς κάθετος ἐπὶ τὸ Ρ, θὰ λάβῃ μίαν θέσιν ΑΔ κάθετον ἐπὶ τὸ Π.

Ἄγεται λοιπὸν ἀπὸ τὸ Α μία κάθετος ΑΔ ἐπὶ τὸ Π. Αὕτη καὶ τυχοῦσα ἄλλη ΑΔ΄ διερχομένη ἀπὸ τὸ Α καὶ ἐκτὸς τοῦ Π ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου ΔΑΔ΄. Τοῦτο τέμνει τὸ Π κατὰ εὐθεῖαν ΑΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΔ.

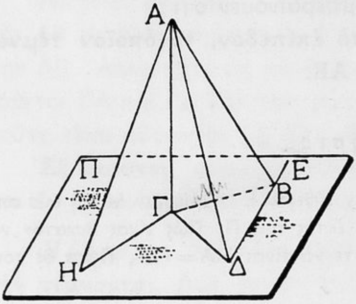
Ἂν δὲ καὶ ἡ ΑΔ΄ ἦτο κάθετος ἐπὶ τὸ Π, θὰ ἦτο κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΑΕ. Ἐν τῷ ἐπιπέδῳ λοιπὸν ΔΑΔ΄ θὰ ὑπῆρχον δύο εὐθεῖαι ΑΔ, ΑΔ΄ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΕ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Α. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον.

Πλὴν τῆς ΑΔ λοιπὸν οὐδεμία ἄλλη εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ Π ἄγεται ἀπὸ τὸ Α. Ὥστε:

Δι᾽ ἑκάστου σημείου ἐπιπέδου ἄγεται μία μόνον εὐθεῖα κάθετος ἐπ᾽ αὐτό.

§ 281. Νὰ ἐξετασθῇ πόσαι εὐθεῖαι κάθετοι ἐπὶ ἐπίπεδον Π ἄγονται ἐκ σημείου Α ἐκτὸς αὐτοῦ κειμένου. (σχ. 205).

Ἂν ΔΕ εἶναι τυχοῦσα εὐθεῖα τοῦ Π, αὕτη καὶ τὸ σημεῖον Α ὁρίζουσιν ἓν ἐπίπεδον ΑΔΕ. Εἰς αὐτὸ ἄγεται ἐκ τοῦ Α μία εὐθεῖα ΑΒ κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ. Καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον Π ἄγεται μία εὐθεῖα ΒΓ κάθετος ἐπίσης ἐπὶ τὴν ΔΕ. Ὁμοίως εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ ἄγεται εὐθεῖα ΑΓ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.



Σχ. 205

Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον ἔχει $\widehat{\Gamma} = 1$ ὀρθ. καὶ ἑπομένως.

$$(\mathrm{A\Gamma})^2 + (\mathrm{\Gamma B})^2 = (\mathrm{AB})^2 \quad (1).$$

Ἂν δὲ Δ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς ΒΕ, τὸ τρίγωνον ΓΒΔ ἔχει $\widehat{\mathrm{\Gamma B\Delta}} = 1$ ὀρθ. Εἶναι λοιπὸν $(\mathrm{\Gamma\Delta})^2 - (\mathrm{\Gamma B})^2 = (\mathrm{B\Delta})^2$. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς (1) διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι

$$(\mathrm{A\Gamma})^2 + (\mathrm{\Gamma\Delta})^2 = (\mathrm{AB})^2 + (\mathrm{B\Delta})^2. \quad (2)$$

Ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ ΑΔΒ εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον ($\widehat{\mathrm{B}} = 1$ ὀρθ) εἶναι

$$(\mathrm{A\Delta})^2 = (\mathrm{AB})^2 + (\mathrm{B\Delta})^2 \quad (3)$$

Ἡ (2) τότε γίνεται

$$(\mathrm{A\Gamma})^2 + (\mathrm{\Gamma\Delta})^2 = (\mathrm{A\Delta})^2.$$

Ἐκ ταύτης ἕπεται ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΓ εἶναι ἐκ κατασκευῆς κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἕπεται ὅτι εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π αὐτῶν.

Ἄγεται λοιπὸν ἐκ τοῦ Α μία κάθετος ΑΓ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.

Ἂν καὶ ἡ ΑΗ ἦτο κάθετος ἐπὶ τὸ Π, θὰ ἦτο κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΓΗ. Θὰ ἤγοντο δὲ ἐκ τοῦ Α δύο εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΑΗ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΓΗ καὶ εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΑΓΗ. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον. Κατὰ ταῦτα:

Ἐκ σημείου ἐκτὸς ἐπιπέδου κειμένου ἄγεται μία μόνον εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο.

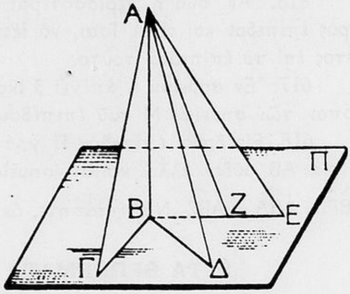
Αἱ ἄλλαι εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τοῦ Α εἰς τὸ Π, λέγονται **πλάγιαι** πρὸς αὐτὸ (§ 276).

§ 282. Ἀπὸ σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς ἐπιπέδου Π, ἄγεται ἡ ΑΒ κάθετος ἐπὶ τὸ Π καὶ ὁσαιδήποτε πλάγιαι. Νὰ συγ-

κριθῶσι : α΄) Ἡ κάθετος καὶ τυχοῦσα πλαγία. β΄) Δύο πλάγιαι, τῶν ὁποίων οἱ πόδες ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου. γ΄) Δύο πλάγιαι, τῶν ὁποίων οἱ πόδες ἀπέχουσιν ἄνισον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου. (σχ. 206).

α΄) Τὸ ἐπίπεδον τῆς ΑΒ καὶ τυχούσης πλαγίας ΑΓ τέμνει τὸ Π κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ. Ἐπειδὴ δὲ $\widehat{ΑΒΓ} = 1$ ὀρθ. εἶναι ΑΓ ⟩ ΑΒ, ἤτοι:

Ἡ κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας πρὸς αὐτό, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον.



Σχ. 206

β΄) Ἂν ΒΓ = ΒΔ, τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως ΑΓ = ΑΔ, ἤτοι:

Ἂν οἱ πόδες δύο πλαγίων ἀγομένων ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀπέχωσιν ἴσον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου, αἱ πλάγιαι αὗται εἶναι ἴσαι.

γ΄) Ἂν εἶναι ΒΕ ⟩ ΒΓ καὶ ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΒΕ τμῆμα ΒΖ ἴσον πρὸς ΒΓ, θὰ εἶναι ΒΕ ⟩ ΒΖ καὶ ΑΓ = ΑΖ. Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΕ αἱ ΑΖ, ΑΕ εἶναι πλάγιαι πρὸς τὴν ΒΕ κ.τ.λ. θὰ εἶναι ΑΕ ⟩ ΑΖ ἑπομένως καὶ ΑΕ ⟩ ΑΓ. Ὥστε:

Ἂν ΒΕ ⟩ ΑΓ, εἶναι καὶ ΑΕ ⟩ ΑΓ.

Εὐκόλως δὲ ἀποδεικνύονται καὶ αἱ ἀκόλουθοι ἰδιότητες ἀντίστροφοι τῶν προηγουμένων.

α΄) Ἡ μικροτέρα ὅλων τῶν ἐκ σημείου πρὸς ἐπίπεδον ἀγομένων εὐθειῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο.

γ΄) Ἂν ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον Π καὶ ΑΓ, ΑΔ εἶναι ἴσαι πλάγιαι πρὸς αὐτό, θὰ εἶναι ΒΓ = ΒΔ.

γ΄) Ἂν δὲ ΑΕ ⟩ ΑΓ, θὰ εἶναι καὶ ΒΕ ⟩ ΒΓ.

§ 283. Τί λέγεται ἀπόστασις σημείου ἀπὸ ἐπίπεδον. Τὸ τμῆμα ΑΒ τῆς καθέτου ἐπὶ ἐπίπεδον Π (σχ. 206) ὡς μικρότερον ὅλων τῶν ἄλλων ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ κ.τ.λ. λέγεται **ἀπόστασις** τοῦ σημείου Α ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον Π. Ὥστε:

Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ ἐπίπεδον λέγεται τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὸ σημεῖον τοῦτο καὶ ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου, ἡ ὁποία ἄγεται ἐξ αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

Ἀσκήσεις

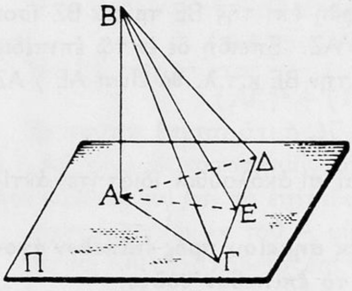
616. Ἂν δύο ἢ περισσότεραι εὐθεῖαι ἄγωνται ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου πρὸς ἐπίπεδον καὶ εἶναι ἴσαι, νὰ ἐξετασθῇ, ἂν μία ἀπὸ αὐτὰς εἶναι ἡ μὴ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο.

617. Ἓν σημεῖον Α ἀπέχει 3 ἑκατ. ἀπὸ ἐπίπεδον Π. Νὰ εὕρητε τὸν γεωμ. τόπον τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου Π, διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι $(AM) = 5$ ἑκατ.

618. Εἰς δοθὲν ἐπίπεδον Π γράφονται τρεῖς εὐθεῖαι ΒΓ, ΒΔ, ΒΖ. Ἄλλη δὲ εὐθεῖα ΑΒ οὐδὲν ἄλλο κοινὸν σημεῖον ἔχουσα μὲ τὸ Π εἶναι τοιαύτη ὥστε $\widehat{ΑΒΓ} = \widehat{ΑΒΔ} = \widehat{ΑΒΖ}$. Νὰ ἐξετάσητε, ἂν αὕτη εἶναι πλαγία ἢ κάθετος πρὸς τὸ Π.

3. ΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΚΑΘΕΤΩΝ

§ **284.** *Θεώρημα I.* **Εὐθεῖα ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον Π καὶ ΓΔ εἶναι τυχοῦσα εὐθεῖα αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ ποδὸς Α ἄγεται εὐθεῖα ΑΕ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ καὶ τέμνουσα αὐτὴν εἰς τὸ Ε. Ἂν Β εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς ΑΒ, ἡ ΒΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ** (σχ. 207).



Σχ. 207

Ἀπόδειξις. Ἐπὶ τῆς ΓΔ ὁρίζομεν δύο ἴσα τμήματα ΕΓ, ΕΔ καὶ ἄγομεν τὰς εὐθείας ΒΓ, ΒΔ, ΑΓ, ΑΔ. Τὸ τμῆμα λοιπὸν ΓΔ τέμνεται δίχα καὶ καθέτως ὑπὸ τῆς ΑΕ καὶ διὰ τοῦτο εἶναι

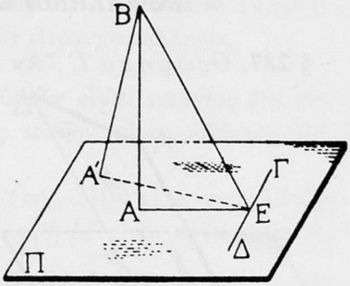
$ΑΓ = ΑΔ$.

Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι $ΒΓ = ΒΔ$, ἡ δὲ διάμεσος ΒΕ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΒΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ, ὅ.ἔ.δ.

§ **285.** *Θεώρημα II.* **Ἐκ τοῦ σημείου Β ἐκτὸς ἐπιπέδου Π κειμένου ἄγεται εὐθεῖα ΒΑ κάθετος ἐπὶ τὸ Π καὶ ἄλλη ΒΕ κάθετος ἐπὶ εὐθεῖαν ΓΔ τοῦ Π. Ἡ εὐθεῖα ΑΕ, τὴν ὁποίαν ὁρίζουσιν οἱ πόδες τῶν καθέτων τούτων, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ** (σχ. 107).

Ἀπόδειξις. Ὁρίζομεν, ὡς προηγουμένως ΕΓ = ΕΔ καὶ συμπεραίνομεν ὅτι ΒΓ = ΒΔ. Ἐκ ταύτης δὲ συμπεραίνομεν ὅτι ΑΓ = ΑΔ καὶ προχωροῦμεν ὡς προηγουμένως.

§ 286. *Θεώρημα ΙΙΙ.* **Ἐκ σημείου Ε εὐθείας ΓΔ ἄγονται εὐθεῖαι ΕΒ, ΕΑ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΓΔ. Ἐκ σημείου δὲ Β τῆς ΕΒ ἄγεται εὐθεῖα ΒΑ κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΑ. Ἡ ΒΑ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π τῶν εὐθειῶν ΑΕ καὶ ΓΔ** (σχ. 208).



Σχ. 208

Ἀπόδειξις. Ἂν ἡ ΒΑ ἦτο πλαγία πρὸς τὸ Π, θὰ ἤγετο ἐκ τοῦ Β ἄλλη εὐθεῖα ΒΑ′ κάθετος ἐπὶ τὸ Π. Ὁ δὲ πούς Α′ αὐτῆς θὰ ἔκειτο ἐκτὸς τῆς ΑΕ, διότι ἄλλως θὰ ἤγοντο ἐκ τοῦ Β δύο εὐθεῖαι ΒΑ, ΒΑ′ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΕΑ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ μετ' αὐτῆς ἐπιπέδῳ ΑΕΒ. Τοῦτο δὲ εἶναι ἀδύνατον. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα ἡ ΕΑ′ θὰ ἦτο κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ, θὰ ἤγοντο ἐκ τοῦ Ε καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν ΓΔ. Τοῦτο δὲ εἶναι ἀδύνατον. Εἶναι λοιπὸν ἡ ΒΑ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.

Ἀσκήσεις

619. Μία εὐθεῖα ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ. Ἂν δὲ Ε εἶναι τὸ μέσον τῆς βάσεως ΒΓ αὐτοῦ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἡ ΔΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.

620. Εἰς τὸ προηγούμενον σχῆμα νὰ ἐξετάσητε ἂν ἡ βάσις ΒΓ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι κάθετος ἢ πλαγία πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΔΑΕ.

621. Εὐθεῖα ΖΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ καὶ Ε εἶναι ἡ τομὴ τῶν διαγωνίων αὐτοῦ. Ἂν Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ νὰ ἐξετάσητε, ἂν αὕτη εἶναι κάθετος ἢ πλαγία πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΖΕΜ.

622. Εἰς σημεῖον Α δοθείσης περιφερείας Κ ἄγεται ἐφαπτομένη ΓΔ. Ἂν δὲ ΚΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου, νὰ ἐξετάσητε, ἂν ἡ ΓΔ τέμνῃ καθέτως ἢ πλαγίως τὸ ἐπίπεδον ΒΚΑ.

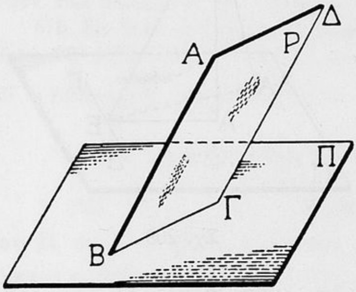
623. Ἡ ἀπόστασις ΑΒ σημείου Α ἀπὸ ἐπίπεδον Π εἶναι 4 ἑκατ. Μὲ κέν-

τρον τὸν πόδα Β καὶ ἀκτῖνα 3 ἑκατ. γράφομεν περιφέρειαν εἰς τὸ ἐπίπεδον Π. Εἰς ἓν σημεῖον Γ αὐτῆς ἄγομεν ἐφαπτομένην, ἐπὶ τῆς ὁποίας ὁρίζομεν τμῆμα $(\Gamma\Delta) = 2\sqrt{6}$ ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὴν ἀπόστασιν ΑΔ.

624. Ἐπὶ ἐπιπέδου Π ὁρίζεται σημεῖον Ο καὶ ἐκτὸς αὐτοῦ ἄλλο σημεῖον Α. Ἀπὸ τὸ Ο διέρχονται ἄπειροι εὐθεῖαι τοῦ Π. Νὰ εὕρητε τὸν γεωμ. τόπον τῶν προβολῶν τοῦ Α ἐπὶ ταύτας.

4. ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ ΕΥΘΕΙΑΙ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΑ

§ 287. *Θεώρημα I.* **Ἂν ἐπίπεδον Π τέμνῃ εὐθεῖαν ΑΒ, θὰ τέμνῃ καὶ πᾶσαν εὐθεῖαν ΓΔ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ** (σχ. 209).

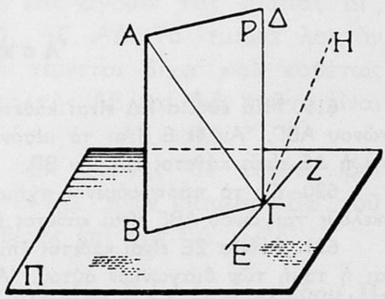


Σχ. 209

Ἀπόδειξις. Αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ ὁρίζουσιν ἐπίπεδον Ρ. Τοῦτο περιέχει τὸ σημεῖον Β τοῦ Π. Τὰ ἐπίπεδα λοιπὸν ταῦτα τέμνονται κατὰ μίαν εὐθεῖαν ΒΓ.

Αὕτη ὡς τέμνουσα τὴν ΑΒ θὰ τέμνῃ καὶ τὴν ΔΓ εἰς ἓν σημεῖον Γ, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ σημεῖον τοῦ Π, ἐφ' οὗ δὲν κεῖται ἡ ΓΔ.

§ 288. *Θεώρημα II.* **Ἂν δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον Π, αὗται εἶναι παράλληλοι.** (σχ. 210).



Σχ. 210

Ἀπόδειξις. Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι, ἂν αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶχον κοινὸν σημεῖον Μ, θὰ ἤγοντο ἐξ αὐτοῦ δύο κάθετοι ἐπὶ τὸ Π. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον (§ 280, 281).

Μένει νὰ ἴδωμεν, ἂν αὗται κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Πρὸς τοῦτο εἰς τὸ ἐπίπεδον Π γράφομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΓ τῶν ἰχνῶν αὐτῶν, καὶ τὴν ΕΓΖ κάθετον, ἐπ' αὐτήν.

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΓΖ ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ Π. Κατὰ δὲ τὸ Ι θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων ἡ ΕΓΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ. Ἑπομένως ἡ ΕΓΖ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ τῶν εὐθειῶν ΑΓ καὶ ΒΓ. Τὸ ἐπίπεδον δὲ τοῦτο περιέχει ὅλας τὰς καθέτους ἐπὶ τὴν ΕΓΖ εἰς τὸ Γ, ἑπομένως καὶ τὴν ΓΔ. Περιέχει δὲ προφανῶς καὶ τὴν ΑΒ.

Αἱ εὐθεῖαι λοιπὸν ΑΒ καὶ ΓΔ κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον Ρ. Ἐπειδὴ δὲ δὲν τέμνονται, ἕπεται ὅτι εἶναι παράλληλοι.

§ 289. *Θεώρημα ΙΙΙ.* **Ἂν εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον καὶ πᾶσα παράλληλος πρὸς αὐτὴν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο.**

Ἂν δηλ. αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΔΓ (σχ. 210) εἶναι παράλληλοι, ἡ δὲ ΑΒ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, καὶ ἡ ΔΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π.

Ἀπόδειξις. Γνωρίζομεν ὅτι ἐκ τοῦ Δ ἄγεται εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ Π (§ 281) καὶ ὅτι αὕτη θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ (§ 288). Ἑπομένως συμπίπτει μὲ τὴν ΔΓ, κατὰ τὸ Εὐκλείδειον αἴτημα. Τοῦτο φανερώνει, ὅτι ἡ ΔΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π.

Πόρισμα. **Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τρίτην εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλοι.**

Ἀσκήσεις

625. Μία εὐθεῖα ΚΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον Π. Εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο σχηματίζομεν ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἡ πλευρὰ ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΔΑΚ.

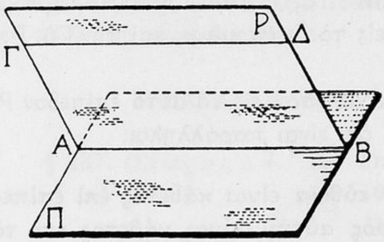
626. Εἰς τὴν τομὴν δύο ἐπιπέδων ὁρίζομεν δύο σημεῖα Γ, Δ. Ἐκτὸς δὲ τῆς τομῆς ταύτης ὁρίζομεν ἓν σημεῖον Α τοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου καὶ ἓν Β τοῦ ἄλλου. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὰ μέσα τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΓ, ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου.

§ 290. *Θεώρημα IV.* **Ἂν εὐθεῖα δὲν περιέχηται εἰς ἐπίπεδον καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς εὐθεῖαν αὐτοῦ, οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχει μὲ τὸ ἐπίπεδον.**

Ἡ εὐθεῖα π. χ. ΓΔ δὲν περιέχεται εἰς τὸ ἐπίπεδον Π καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ τοῦ Π. Λέγω ὅτι ἡ ΓΔ καὶ τὸ ἐπίπεδον Π οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουσι (σχ. 211).

Ἀπόδειξις. Ἂν ἡ ΓΔ εἶχε κοινόν τι σημεῖον Ε μὲ τὸ Π, θὰ ἔτεμνε τὸ Π εἰς τὸ Ε, ὡς μὴ κειμένη ἐπ' αὐτοῦ.

Τὸ δὲ Π θὰ ἔτεμνε καὶ τὴν ΑΒ, ἤτοι θὰ εἶχε μετ' αὐτῆς ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.



Σχ. 211

Εἶναι λοιπὸν ἀδύνατον νὰ ἔχῃ ἡ εὐθεῖα ΓΔ κοινὸν σημεῖον μὲ τὸ ἐπίπεδον Π.

Διὰ τὸν λόγον τοῦτον ἡ ΓΔ λέγεται **παράλληλος** πρὸς τὸ Π. Ὥστε:

Μία εὐθεῖα λέγεται παράλληλος πρὸς ἓν ἐπίπεδον, ἂν ἡ εὐθεῖα καὶ τὸ ἐπίπεδον οὐδὲν ἔχωσι κοινὸν σημεῖον.

Πόρισμα Ι. **Ἂν δύο ἐπίπεδα τέμνωνται, πᾶσα εὐθεῖα τοῦ ἑνὸς παράλληλος πρὸς τὸ ἄλλο, εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὴν τομὴν αὐτῶν.**

Πόρισμα ΙΙ. **Ἂν εὐθεῖα Ε εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον Π, ἡ ἐκ σημείου Α τοῦ ἐπιπέδου Π ἀγομένη παράλληλος πρὸς τὴν Ε κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π.**

Ἀσκήσεις

627. Δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα πρὸς μίαν εὐθεῖαν Ε καὶ τέμνονται κατὰ ἄλλην εὐθεῖαν ΑΒ. Νὰ ἐξετάσητε, ἂν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ Ε εἶναι παράλληλοι ἢ ὄχι.

628. Ἀπὸ μίαν εὐθεῖαν ΑΒ διέρχονται διάφορα ἐπίπεδα Π, Ρ... Ἓν δὲ ἄλλο ἐπίπεδον Κ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ. Νὰ ἐξετάσησε, ἂν αἱ τομαὶ τῶν ἐπιπέδων ἐκείνων ὑπὸ τοῦ Κ εἶναι παράλληλοι ἢ ὄχι.

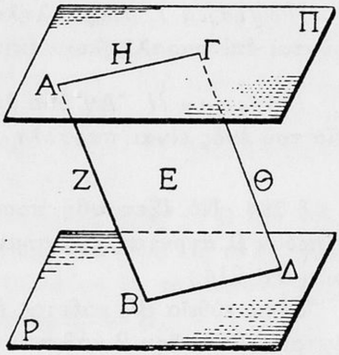
629. Νὰ ἐξετάσητε πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρισθῇ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ διέρχηται ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθεῖαν Ε καὶ νὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν ἄλλην εὐθεῖαν Ε' ἀσύμβατον πρὸς τὴν Ε.

5. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

§ **291. Ποῖα λέγονται παράλληλα ἐπίπεδα.** Ἐμάθομεν (§ 278 Πόρ.) ὅτι: Δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν δὲν τέμνονται. Λέγονται δὲ ταῦτα **παράλληλα** ἐπίπεδα. Ὥστε:

Δύο ἐπίπεδα λέγονται παράλληλα, ἄν δὲ τέμνωνται ὅσον καὶ ἄν προεκταθῶσιν.

§ **292. Δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι παράλληλα. Μία δὲ εὐθεῖα ΒΖ τέμνει τὸ Ρ εἰς ἓν σημεῖον Β. Νὰ ἐξετασθῇ, ἂν αὕτη τέμνῃ ἢ ὄχι καὶ τὸ Π** (σχ. 212).



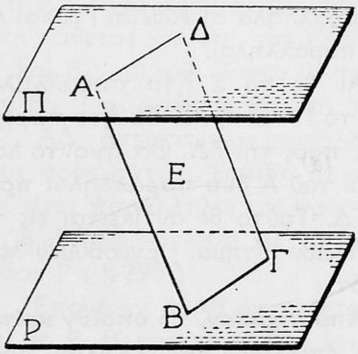
Σχ. 212

Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Γ τοῦ Π ἄγεται εὐθεῖα ΓΘ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΖ. Τὸ ἐπίπεδον Ρ τέμνον τὴν ΒΖ θὰ τέμνῃ καὶ τήν παράλληλόν της ΓΘ. Ὁμοίως τὸ Π τέμνον τὴν ΓΘ θὰ τέμνῃ καὶ τὴν ΒΖ, ὅ.ἔ.δ.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Ἂν μία εὐθεῖα τέμνῃ ἓν τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, τέμνει καὶ τὸ ἄλλο.

Πόρισμα. **Ἂν ἐπίπεδον Ε τέμνῃ ἓν τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων Π καὶ Ρ, θὰ τέμνῃ καὶ τὸ ἄλλο** (σχ. 212).



Σχ. 213

Ἂν τὸ Ε τέμνῃ τὸ Ρ κατὰ τὴν ΒΔ, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι μία εὐθεῖα ΒΖ τοῦ Ε τέμνουσα τὸ Ρ θὰ τέμνῃ καὶ τὸ Π.

§ **293. Νὰ ἐξετασθῇ, ἂν αἱ τομαὶ ΑΔ, ΒΓ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων Π, Ρ ὑπὸ ἄλλου Ε εἶναι παράλληλοι ἢ ὄχι** (σχ. 213).

Αἱ τομαὶ ΑΔ καὶ ΒΓ κεῖνται εἰς τὸ ἐπίπεδον Ε. Ἑπομένως θὰ εἶναι παράλληλοι ἢ θὰ τέμνωνται.

Ἂν ἐτέμνοντο εἰς ἓν σημεῖον Μ, τοῦτο θὰ ἦτο κοινὸν σημεῖον τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ. Ἑπομένως ταῦτα δὲν θά ἦσαν παράλληλα, ὡς ὑπετέθη. Δὲν τέμνονται λοιπὸν αἱ εὐθεῖαι αὗται. Ὥστε:

Αἱ τομαὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ ἄλλου εἶναι παράλληλοι εὐθεῖαι.

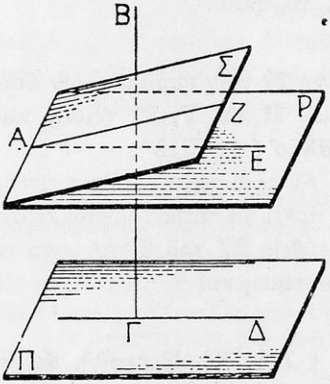
Πόρισμα Ι. **Παράλληλα εὐθ. τμήματα, τὰ ὁποῖα περατοῦνται ἐπὶ παραλλήλων ἐπιπέδων, εἶναι ἴσα.**

Πόρισμα ΙΙ. **Ἂν δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα πᾶσα εὐθεῖα τοῦ ἑνὸς εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἄλλο** (§ 290).

§ 294. Νὰ ἐξετασθῇ πόσα ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον Π ἄγονται ἀπὸ σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς αὐτοῦ (σχ. 214).

Ἔστω εὐθεῖα ΒΓ κάθετος ἐπὶ τὸ Π. Γνωρίζομεν ὅτι ἐκ τοῦ Α ἄγεται ἓν ἐπίπεδον Ρ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ. Τὰ δὲ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι παράλληλα (§ 278 Πόρ.).

Ἔστω δὲ Σ ἓν ἄλλο ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ Α. Τὰ ἐπίπεδα Π, Ρ, Σ τέμνονται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ ἀντιστοίχως κατὰ τὰς εὐθείας ΓΔ, ΑΕ, ΑΖ.



Σχ. 214

Ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι παράλληλα αἱ εὐθεῖαι ΓΔ καὶ ΑΕ εἶναι παράλληλοι.

Ἂν δὲ τὸ Σ ἦτο παράλληλον πρὸς τὸ Π καὶ ἡ ΑΖ θὰ ἦτο παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ. Θὰ ἤγοντο λοιπὸν ἐκ τοῦ Α δύο παράλληλοι πρὸς τὴν ΓΔ. Τοῦτο δὲ ἀντίκειται εἰς τὸ Εὐκλείδειον αἴτημα. Ἐννοοῦμεν λοιπὸν ὅτι:

Ἀπὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς ἐπιπέδου, ἄγεται ἓν μόνον ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς αὐτό.

Πόρισμα. **Δύο ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τρίτον εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλα.**

§ 295. *Πρόβλημα.* **Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ σημείου Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς ἐπιπέδου Π καὶ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο.**

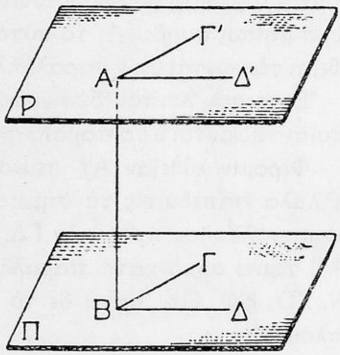
Λύσις. Ἔστω Ρ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὸ Α καὶ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ Π (σχ. 214).

Γνωρίζομεν ὅτι τυχοῦσα εὐθεῖα ΑΕ τοῦ Ρ διερχομένη ἀπὸ τὸ Α εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ Π (§ 293 Πόρ. ΙΙ). Καὶ πᾶσα δὲ εὐθεῖα ΑΖ διερχομένη διὰ τοῦ Α καὶ παράλληλος πρὸς τὸ Π κεῖται ἐπὶ τοῦ Ρ. Διότι ἄλλως τέμνουσα τὸ Ρ θὰ ἔτεμνε καὶ τὸ Π, ἤτοι δὲν θὰ ἦτο παράλληλος πρὸς τὸ Π. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Πᾶσα εὐθεῖα τοῦ Ρ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ Π καὶ πᾶσα παράλληλος πρὸς τὸ Π ἀγομένη ἐκ τοῦ Α κεῖται εἰς τὸ Ρ. Ἄρα:

Ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι τὸ ἐπίπεδον Ρ, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὸ Α καὶ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ Π.

§ 296. **Δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι παράλληλα, μία δὲ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π. Νὰ ἐξετασθῇ ἂν αὕτη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Ρ ἢ ὄχι** (σχ. 215).



Σχ. 215

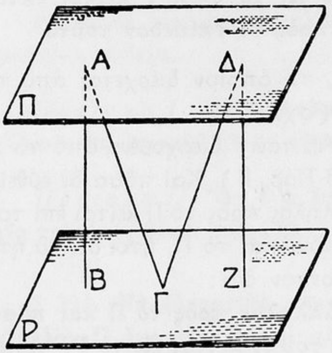
Ἡ εὐθεῖα ΑΒ τέμνουσα τὸ Π εἰς τὸ σημεῖον Β θὰ τέμνῃ καὶ τὸ Ρ εἰς σημεῖον Α (§ 292). Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὰς εὐθείας ΒΓ καὶ ΒΔ αὐτοῦ. Ἕνεκα δὲ τούτου θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὰς ΑΓ′, ΑΔ′ ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς αὐτάς. Ἐπειδὴ δὲ αὗται εἶναι παράλληλοι καὶ πρὸς τὸ Π (§ 290), θὰ κεῖνται εἰς τὸ ἐπίπεδον Ρ (§ 295).

Ἐπομένως ἡ ΑΒ ὡς κάθετος ἐπὶ τὰς ΑΓ′, ΑΔ′ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ Ρ. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Πᾶσα κάθετος ἐπὶ ἓν τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἄλλο.

Πόρισμα. **Τὰ ἐπὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων περατούμενα κάθετα ἐπ' αὐτὰ εὐθύγραμμα τμήματα εἶναι ἴσα.**

§ 297. Τί λέγεται ἀπόστασις δύο παραλλήλων ἐπιπέδων.



Σχ. 216

Ἔστω εὐθ. τμῆμα ΑΒ κάθετον ἐπὶ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα Π καὶ Ρ (σχ. 216). Γνωρίζομεν ὅτι ΑΒ < ΑΓ. Ἂν δὲ ΔΓ εἶναι τυχὸν εὐθ. τμῆμα πλάγιον πρὸς τὰ ἐπίπεδα, εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι ΑΒ < ΔΓ.

Διὰ τοῦτο τὸ ΑΒ λέγεται **ἀπόστασις** τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ Δηλαδή:

Ἀπόστασις δύο παραλλήλων ἐπιπέδων λέγεται εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπ' αὐτὰ καὶ περατοῦται εἰς αὐτά.

§ 298. Πῶς τέμνονται δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων (σχ. 217). Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Θαλοῦ (§ 218) δύο εὐθεῖαι τέμνονται ὑπὸ παραλλήλων εὐθειῶν εἰς μέρη ἀνάλογα. Θὰ ἐξετάσωμεν τώρα μήπως συμβαίνει τὸ αὐτὸ καὶ ὅταν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων.

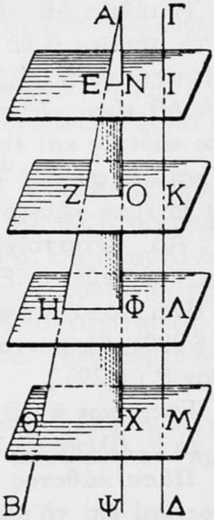
Ἔστωσαν λοιπὸν δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων.

Φέρομεν εὐθεῖαν ΑΨ τέμνουσαν τὰ παράλληλα ἐπίπεδα εἰς τὰ σημεῖα Ν, Ο, Φ, Χ, καὶ παράλληλον πρὸς τὴν ΓΔ. Τὸ ἐπίπεδον ΒΑΨ τέμνει αὐτὰ κατὰ παραλλήλους εὐθείας ΕΝ, ΖΟ, ΗΦ, ΘΧ. Κατὰ δὲ τὸ θεώρημα τοῦ Θαλοῦ, εἶναι:

$$\frac{ΕΖ}{ΝΟ} = \frac{ΖΗ}{ΟΦ} = \frac{ΗΘ}{ΦΧ} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ ΝΟ = ΙΚ, ΟΦ = ΚΛ, ΦΧ = ΛΜ (§ 293 Πόρ. 1), ἕπεται ὅτι

$$\frac{ΕΖ}{ΙΚ} = \frac{ΖΗ}{ΚΛ} = \frac{ΗΘ}{ΛΜ} \qquad (2)$$



Σχ. 217

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἂν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα.

Ἀσκήσεις

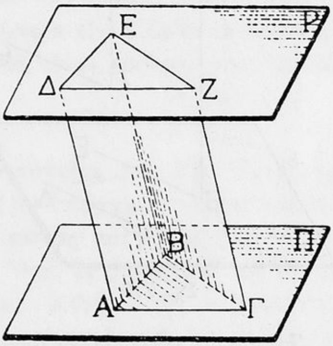
630. Δίδονται δύο παράλληλα ἐπίπεδα Π, Ρ, τὰ ὁποῖα ἀπέχουσιν ἀλλήλων 10 ἑκατ. Ἓν σημεῖον Α ἀπέχει 5 ἑκατ. ἀπὸ τοῦ Π καὶ κεῖται πρὸς τὸ ἕτερον ἢ τὸ Ρ μέρος, ἐν σχέσει πρὸς τὸ Π. Ἓν εὐθ. τμῆμα ΑΒ ἔχει μῆκος 24 ἑκατ. καὶ τέμνει τὸ Ρ εἰς τὸ Β. Νὰ εὕρητε τὰ μήκη τῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται τοῦτο ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου Π.

631. Μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων Π καὶ Ρ εὑρίσκεται ἄλλο Σ παράλληλον πρὸς αὐτὰ καὶ ἀπέχον 4 ἑκατ. ἀπὸ τὸ Π καὶ 7 ἑκατ. ἀπὸ τὸ Ρ. Ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα ἔχει μῆκος 2,2 παλαμῶν καὶ ἔχει τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ μήκη τῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα τοῦτο διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου Σ.

6. ΓΩΝΙΑΙ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΜΕ ΠΛΕΥΡΑΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΥΣ

§ 299. Νὰ συγκριθῶσι δύο γωνίαι Α, Δ αἱ ὁποῖαι ἔχουσι πλευρὰς παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους, μίαν πρὸς μίαν, καὶ δὲν κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (σχ. 218).

Εἰς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας Α ὁρίζομεν τμήματα ΑΒ, ΑΓ καὶ εἰς τὰς παραλλήλους πρὸς αὐτὰς πλευρὰς τῆς Δ ὁρίζομεν ΔΕ = ΑΒ καὶ ΔΖ = ΑΓ.



Σχ. 218

Ἐπειδὴ τὰ τετράπλευρα ΑΒΕΔ, ΑΓΖΔ εἶναι παραλληλόγραμμα, αἱ πλευραὶ ΒΕ καὶ ΓΖ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΔ· ἄρα εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσαι καὶ παράλληλοι.

Διὰ τοῦτο δὲ καὶ τὸ ΒΓΖΕ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἑπομένως ΒΓ = ΕΖ.

Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΓ, ΔΕΖ ἔχουσιν ΑΒ = ΔΕ, ΑΓ = ΔΖ καὶ ΒΓ = ΕΖ. Εἶναι ἄρα ταῦτα ἴσα καὶ ἑπομένως Α = Δ. Ὥστε :

Ἂν δύο γωνίαι μὴ κείμεναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἔχωσι πλευρὰς παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους, μίαν πρὸς μίαν, αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι*.

---

* Ἡ ἰδιότης αὕτη εἶναι γενίκευσις τῆς ἐν § 110 ἰδιότητος.

Παρατηροῦντες ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΔΕ, ΔΖ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ Π (§ 290), ἐννοοῦμεν εὐκόλως ὅτι τὸ ἐπίπεδον Ρ αὐτῶν εἶναι. παράλληλον πρὸς τὸ Π. (§ 295). Δηλαδή:

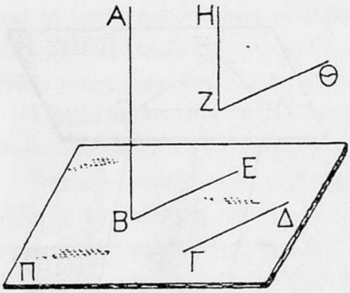
Τὰ ἐπίπεδα δύο γωνιῶν, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι, μία πρὸς μίαν, εἶναι παράλληλα.

Ἄσκησις

632. Ἀπὸ τὰς κορυφὰς τριγώνου ΑΒΓ νοήσατε ἴσα παράλληλα καὶ ὁμόρροπα εὐθύγραμμα τμήματα ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Νὰ συγκρίνητε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ καὶ νὰ ἐξετάσητε, ἂν τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν εἶναι παράλληλα ἢ ὄχι.

7. ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΑΣΥΜΒΑΤΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

§ 300. Τί λέγεται γωνία δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν. Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (σχ. 219).



Σχ. 219

Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ζ φέρομεν τὰς εὐθείας ΖΗ, ΖΘ παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ΑΒ, ΓΔ.

Ἡ γωνία ΗΖΘ τῶν δύο ἀνωτέρω εὐθειῶν ΖΗ, ΖΘ εἶναι τελείως ὡρισμένη κατὰ μέγεθος, ὡς εὐκόλως ἐξάγεται ἐκ τοῦ θεωρήματος (§ 299).

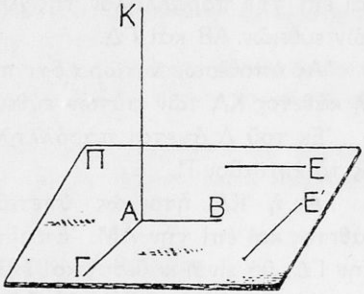
Ἡ γωνία αὕτη ΗΖΘ ὀνομάζεται **γωνία τῶν ἀσυμβάτων εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ**. Ἐπειδὴ τὸ Ζ εἶναι αὐθαίρετον, ὁρίζεται ἡ γωνία τῶν ΑΒ, ΓΔ καὶ ἂν ἀπὸ τυχὸν σημεῖον τῆς μιᾶς π. χ. ἀπὸ τὸ Β τῆς ΑΒ, ἀχθῇ ἡ παράλληλος ΒΕ πρὸς τὴν ἄλλην. Ἂν ἡ γωνία δύο εὐθειῶν εἶναι ὀρθή, αὗται γενικῶς λέγονται **ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι.**

Οὕτω: **Δύο ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι δυνατὸν νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου ἢ νὰ εἶναι ἀσύμβατοι.**

Αἱ πρῶται, ὡς γνωστόν, λέγονται **κάθετοι εὐθεῖαι**, ὁ δὲ ὅρος

ὀρθογώνιοι ἔγινε δεκτὸν νὰ κυριολεκτῆται διὰ δύο ἀσυμβάτους, τῶν ὁποίων ἡ γωνία εἶναι ὀρθή.

§ 301. Γενίκευσις τῆς συνθήκης καθετότητος εὐθείας καὶ ἐπιπέδου. Ἔστω εὐθεῖα ΚΑ ὀρθογώνιος πρὸς δύο τεμνομένος εὐθείας Ε, Ε΄ ἐπιπέδου Π. (σχ. 220).



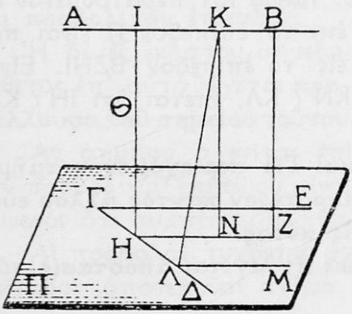
Σχ. 220

Αἱ ἐκ τοῦ ποδὸς Α ἀγόμεναι παράλληλοι πρὸς τὰς Ε, Ε΄ εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ κεῖνται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π. Γωνία δὲ τῶν ΚΑ καὶ Ε εἶναι ἡ ΚΑΒ, τῶν δὲ ΚΑ καὶ Ε΄, ἡ ΚΑΓ.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΚΑ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως ὀρθογώνιος πρὸς τὰς Ε, Ε΄. αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ὀρθαὶ καὶ ἑπομένως ἡ ΚΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π (§ 275).

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ γενικεύσωμεν τὴν συνθήκην καθετότητος εὐθείας καὶ ἐπιπέδου ὡς ἑξῆς: **Ἂν εὐθεῖα εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς δύο τεμνομένας εὐθείας ἐπιπέδου, θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τό ἐπίπεδον τοῦτο.**

§ 302. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ. Νὰ ἐξετασθῇ ἂν ὑπάρχωσι κοιναὶ κάθετοι ἐπ᾽ αὐτὰς καὶ πόσαι (σχ. 221).



Σχ. 221

Ἀπὸ ἓν σημεῖον Γ τῆς ΓΔ φέρομεν εὐθεῖαν ΓΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον Π τῶν ΓΔ, ΓΕ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ (§ 290). Ἂν δὲ ἀπὸ σημεῖον Β τῆς ΑΒ ἀχθῇ εὐθεῖα ΒΖ κάθετος ἐπὶ τὸ Π, τὸ ἐπίπεδον ΑΒΖ τέμνει τὸ Π κατὰ εὐθεῖαν ΗΖ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, ἑπομένως καὶ πρὸς τὴν ΓΕ. Διὰ τοῦτο ἡ ΗΖ τέμνει τὴν ΓΔ εἴς τι σημεῖον Η.

Ἡ δὲ πρὸς τὴν ΒΖ παράλληλος εὐθεῖα ΗΘ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π, ἑπομένως κάθετος καὶ ἐπὶ τὰς εὐθείας ΓΔ καὶ ΖΗ αὐτοῦ.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΗΘ κεῖται εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΖΗ, τέμνει καὶ τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Ι. Ὡς κάθετος δὲ ἐπὶ τὴν ΗΖ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλον της ΑΒ. Εἶναι λοιπὸν ἡ ΙΗ κοινὴ κάθετος τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ.

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι πλὴν τῆς ΗΙ ὑπάρχει καὶ ἄλλη κοινὴ κάθετος ΚΛ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ.

Ἐκ τοῦ Λ ἄγεται παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ ἡ ΛΜ, ἥτις κεῖται εἰς τὸ ἐπίπεδον Π.

Ἂν ἡ ΚΛ ἦτο, ὡς ὑπετέθη, κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, θὰ ἦτο κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΛΜ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΚΛ ὑπετέθη κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΓΔ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π τῶν ΓΔ, ΛΜ. Ἕνεκα τούτου αἱ ΚΛ καὶ ΙΗ θὰ ἦσαν παράλληλοι, τὸ δὲ ἐπίπεδον αὐτῶν ΙΚΛΗ θὰ περιεῖχε καὶ τὰς δύο εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ. Τοῦτο δὲ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Δὲν ὑπάρχει λοιπὸν ἄλλη κοινὴ κάθετος τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Ὥστε:

Ἂν δύο εὐθεῖαι εἶναι ἀσύμβατοι, ὑπάρχει μία μόνον κοινὴ κάθετος αὐτῶν.

§ 303. Τί λέγεται ἀπόστασις δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν. Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι καὶ ΙΗ ἡ κοινὴ κάθετος αὐτῶν ὁριζομένη ὅπως προηγουμένως εἴπομεν (σχ. 221).

Ἔστω δὲ ἀκόμη τυχὸν ἄλλο εὐθ. τμῆμα ΚΛ περατούμενον εἰς ταύτας. Ἡ ἐκ τοῦ Κ κάθετος ΚΝ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΙΗ καὶ κεῖται εἰς τὸ ἐπίπεδον ΒΖΗΙ. Εἶναι δὲ προφανῶς ΚΝ = ΙΗ. Ἐπειδὴ δὲ ΚΝ < ΚΛ, ἕπεται ὅτι ΙΗ < ΚΛ, ἤτοι:

Τὸ μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ περιεχόμενον τμῆμα τῆς κοινῆς καθέτου αὐτῶν εἶναι μικρότερον παντὸς ἄλλου εὐθ. τμήματος, τὸ ὁποῖον περατοῦται εἰς αὐτάς.

Διὰ τὸν λόγον τοῦτον τὸ τμῆμα ΙΗ λέγεται **ἀπόστασις** τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Ὥστε:

Ἀπόστασις δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν λέγεται τὸ τμῆμα τῆς κοινῆς καθέτου αὐτῶν, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ αὐτῶν.

Ἀσκήσεις

633. Ἂν εὐθεῖα Ε εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον Π, θὰ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς οἱανδήποτε εὐθεῖαν τοῦ Π.

634. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἂν δύο εὐθεῖαι εἶναι ὀρθογώνιοι, δι᾽ ἑκάστης ἐξ αὐτῶν διέρχεται ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἄλλην.

635. Μία εὐθεῖα ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς ἓν ἐπίπεδον Π. Μία δὲ εὐθεῖα ΓΔ τοῦ Π δὲν εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ἀσύμβατοι εὐθεῖαι.

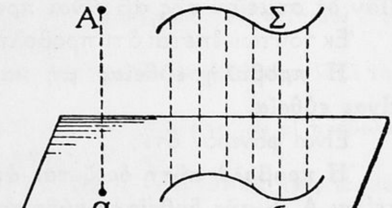
636. Μία εὐθεῖα ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον Π καὶ τυχοῦσα εὐθεῖα ΓΔ τοῦ Π ἀσύμβατος πρὸς τὴν ΑΒ. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἡ ἀπόστασις τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι σταθερά.

8. ΟΡΘΑΙ ΠΡΟΒΟΛΑΙ ΕΠΙ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

§ 304. Τί λέγεται ὀρθὴ προβολὴ σημείου ἢ σχήματος ἐπὶ ἐπίπεδον. Ἔστω ἐπίπεδον Π, ἓν σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτοῦ καὶ Αα ἡ ἐπὶ τὸ Π κάθετος εὐθεῖα (σχ. 222).

Ὁ πούς α τῆς καθέτου ταύτης λέγεται ἰδιαιτέρως **ὀρθὴ προβολὴ ἢ ἁπλῶς προβολὴ** τοῦ Α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π. Ὥστε:

Προβολὴ σημείου ἐπὶ ἐπίπεδον λέγεται ὁ πούς τῆς καθέτου, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου τούτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.



Σχ. 222

Τὸ ἐπίπεδον, εἰς τὸ ὁποῖον γίνονται αἱ προβολαί, λέγεται **προβολικὸν** ἐπίπεδον.

Ἡ δὲ ἐξ ἑκάστου σημείου κάθετος ἐπ᾽ αὐτὸ λέγεται **προβάλλουσα τοῦ σημείου** τούτου.

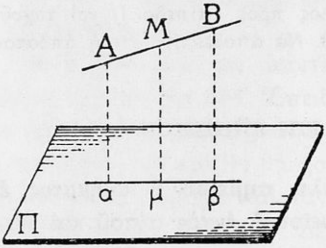
Ἂν σημεῖον α κεῖται ἐπὶ τοῦ προβολικοῦ ἐπιπέδου, εἶναι φανερὸν ὅτι συμπίπτει μὲ τὴν προβολήν του.

Αἱ προβολαὶ τυχόντος σχήματος Σ ἐπὶ τὸ αὐτὸ προβολικὸν ἐπίπεδον ἀποτελοῦσι σχῆμα σ. Τοῦτο λέγεται **προβολὴ** τοῦ Σ. Ὥστε:

Προβολὴ σχήματος ἐπὶ ἐπίπεδον λέγεται ὁ γεωμ. τόπος τῶν προβολῶν πάντων τῶν σημείων τοῦ σχήματος τούτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

§ 305. *Πρόβλημα.* **Νὰ ὁρισθῇ ἡ προβολὴ εὐθείας ἐπὶ ἐπίπεδον.**

Λύσις. Ἔστω εὐθεῖα ΑΒ μὴ κάθετος πρὸς τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον Π (σχ. 223). Ἡ προβάλλουσα Αα τοῦ σημείου Α καὶ ἡ ΑΒ ὁρίζουσι τὸ ἐπίπεδον ΒΑα. Τοῦτο τέμνει τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον κατὰ εὐθεῖαν αβ. Ἡ δὲ προβάλλουσα Μμ τυχόντος σημείου Μ τῆς ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν Αα. Κεῖται λοιπὸν αὕτη εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒαβ, ὁ δὲ ποὺς μ αὐτῆς κεῖται ἐπὶ τῆς αβ.



Σχ. 223

Ἀντιστρόφως. Ἡ κάθετος ἐπὶ τὸ Π εἰς τυχὸν σημεῖον μ τῆς αβ κεῖται ἐπίσης εἰς τὸ ἐπίπεδον ΒΑαβ, καὶ τέμνει τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Μ. Εἶναι λοιπὸν τὸ μ προβολὴ τοῦ Μ. Ὥστε:

Ἡ προβολὴ παντὸς σημείου τῆς ΑΒ εἶναι σημεῖον τῆς αβ. Πᾶν δὲ σημεῖον τῆς αβ εἶναι προβολὴ σημείου τῆς ΑΒ.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι προβολὴ τῆς ΑΒ εἶναι ἡ εὐθεῖα αβ. Ἤτοι:

Ἡ προβολὴ εὐθείας μὴ καθέτου ἐπὶ τὸ προβ. ἐπίπεδον εἶναι εὐθεῖα.

Εἶναι φανερὸν ὅτι:

Ἡ προβολὴ αὕτη ὁρίζεται ἀπὸ τὰς προβολὰς α, β, δύο σημείων Α, Β τῆς δοθείσης εὐθείας.

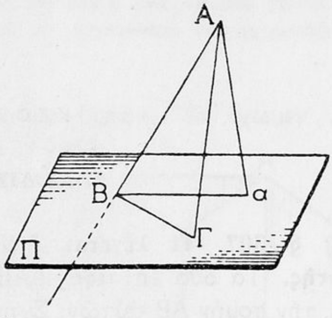
Ἂν ἡ εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον, ὅλα τὰ σημεῖα αὐτῆς ἔχουσι προβολὴν τὸν πόδα αὐτῆς. Οὗτος δὲ εἶναι προβολὴ τῆς εὐθείας. Ὥστε:

Ἡ προβολὴ εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον εἶναι σημεῖον.

§ 306. **Τί λέγεται κλίσις εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον.** Ἔστω εὐθεῖα ΑΒ πλαγία πρὸς ἐπίπεδον Π, Βα ἡ προβολὴ αὐτῆς ἐπ' αὐτὸ καὶ ΒΓ τυχοῦσα ἄλλη εὐθεῖα τοῦ Π ἀπὸ τὰς διερχομένας διὰ τοῦ ἴχνους Β τῆς ΑΒ (σχ. 224). Ἂν ἐπὶ τῆς ΒΓ ὁρίσωμεν τμῆμα ΒΓ = Βα, παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒα, ΑΒΓ ἔχουσι τὴν ΑΒ κοινήν, ΒΓ = Βα, καὶ ΑΓ > Αα,

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι $\widehat{AB\alpha} < \widehat{AB\Gamma}$ (§ 76 Πόρ. ΙΙΙ), ἤτοι :

Ἡ ὀξεῖα γωνία τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ τῆς προβολῆς της ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ΑΒ μὲ τυχοῦσαν ἄλλην εὐθεῖαν ΒΓ τοῦ Π διερχομένην ἀπὸ τὸ ἴχνος Β τῆς ΑΒ.



Σχ. 224

Διὰ τοῦτο ἡ γωνία ΑΒα λέγεται **κλίσις** τῆς εὐθείας ΑΒ πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π. Ὥστε :

Κλίσις πλαγίας εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον λέγεται ἡ ὀξεῖα γωνία, τὴν ὁποίαν αὕτη σχηματίζει μὲ τὴν προβολήν της ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο.

Ἀσκήσεις

637. Νὰ συγκρίνητε ἓν εὐθ. τμῆμα ΑΒ παράλληλον πρὸς ἐπίπεδον Π μὲ τὴν προβολὴν αβ αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.

638. Νὰ συγκρίνητε ἓν εὐθ. τμῆμα ΑΒ πλάγιον πρὸς ἐπίπεδον Π μὲ τὴν προβολήν του ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτό.

639. Ἂν δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, νὰ ἐξετάσητε, ἂν αἱ προβολαὶ αὐτῶν ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλοι ἢ ὄχι.

640. Νὰ συγκρίνητε τὸν λόγον δύο τμημάτων μιᾶς εὐθείας πρὸς τὸν λόγον τῶν προβολῶν αὐτῶν ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

641. Νὰ ὁρίσητε τὴν προβολὴν τοῦ μέσου ἑνὸς εὐθ. τμήματος, ἂν εἶναι γνωσταὶ αἱ προβολαὶ τῶν ἄκρων αὐτοῦ.

642. Νὰ συγκρίνητε τὸν λόγον δύο παραλλήλων εὐθ. τμημάτων πρὸς τὸν λόγον τῶν προβολῶν ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

643. Ἡ προβολὴ Βα τοῦ εὐθ. τμήματος ΒΑ (σχ. 224) ἰσοῦται πρὸς τὴν προβάλλουσαν Αα τοῦ ἄκρου Α αὐτοῦ. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς κλίσεως τοῦ ΒΑ πρὸς τὸ προβ. ἐπίπεδον.

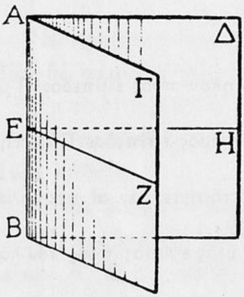
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

1. ΑΙ ΔΙΕΔΡΟΙ ΓΩΝΙΑΙ

§ 307. Τί λέγεται δίεδρος γωνία καὶ ποῖα τὰ στοιχεῖα αὐτῆς. Τὰ δύο ἐπίπεδα ΔΑΒ καὶ ΓΑΒ (σχ. 225) περατοῦνται εἰς τὴν τομὴν ΑΒ αὐτῶν. Σχηματίζουσι δὲ ταῦτα ἓν στερεὸν σχῆμα. Τοῦτο λέγεται **δίεδρος γωνία.**

Τὰ ἐπίπεδα ΓΑΒ καὶ ΔΑΒ λέγονται **ἕδραι** αὐτῆς· ἡ δὲ τομὴ ΑΒ αὐτῶν λέγεται **ἀκμὴ** τῆς διέδρου γωνίας. Ὥστε:

Δίεδρος γωνία εἶναι σχῆμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἀπὸ δύο ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα περατοῦνται εἰς τὴν τομὴν αὐτῶν.



Σχ. 225

Τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα σχηματίζουσι μίαν δίεδρον γωνίαν, λέγονται ἕδραι αὐτῆς.

Ἡ τομὴ τῶν ἑδρῶν μιᾶς διέδρου γωνίας λέγεται ἀκμὴ αὐτῆς.

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν εἰς τοὺς ὁρισμοὺς τούτους ἀντικαταστήσωμεν τὰ ἐπίπεδα μὲ εὐθείας καὶ τὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων μὲ τὴν τομὴν εὐθειῶν, δηλ. μὲ σημεῖον, προκύπτουσιν οἱ ὁρισμοὶ ἐπιπέδου γωνίας καὶ τῶν στοιχείων αὐτῆς. Καὶ ἀντιστρόφως.

Ὅπως δὲ μίαν ἐπίπεδον γωνίαν ὀνομάζομεν μὲ τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς ἢ μὲ τρία γράμματα κ.τ.λ., οὕτω λέγομεν ἡ δίεδρος γωνία ΑΒ ἢ ΓΑΒΔ ἢ ΔΑΒΓ.

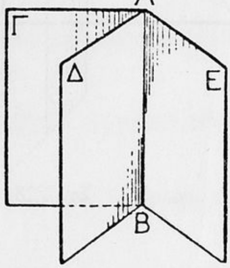
Τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ἀκμὴν ΑΒ εἰς ἓν σημεῖον Ε καὶ εἶναι κάθετον ἐπ' αὐτήν, τέμνει τὰς ἕδρας αὐτῆς κατὰ τὰς εὐθείας ΕΖ, ΕΗ.

Ἡ γωνία ΖΕΗ τῶν εὐθειῶν τούτων λέγεται **ἀντίστοιχος ἐπίπεδος γωνία** τῆς διέδρου ταύτης γωνίας.

Ἀσκήσεις

644. Νὰ νοήσητε ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν ἀκμὴν μιᾶς διέδρου γωνίας εἰς δύο διάφορα σημεῖα τῆς ἀκμῆς ταύτης καὶ νὰ συγκρίνητε τὰς σχηματιζομένας ἀντιστοίχους ἐπιπέδους γωνίας.

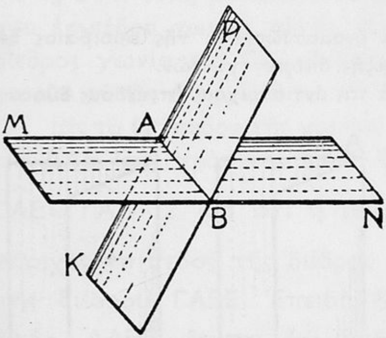
§ 308. Δίεδροι γωνίαι μὲ κοινὴν ἀκμήν. Ἂν ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν ἀνωτέρω ἀντιστοιχίαν μεταξὺ τῶν ὁρισμῶν τῶν στοιχείων διέδρων γωνιῶν καὶ ἐπιπέδων γωνιῶν, ἐνθυμηθῶμεν δὲ καὶ τοὺς ὁρισμοὺς διαφόρων ἐπιπέδων γωνιῶν μὲ κοινὴν κορυφήν, ἀγόμεθα εὐκόλως εἰς τοὺς ἑξῆς ὁρισμούς :



Σχ. 226

α΄) Δύο δίεδροι γωνίαι λέγονται ἐφεξῆς, ἂν ἔχωσιν ἀκμὴν κοινήν, μίαν ἕδραν κοινὴν καὶ τὰς μὴ κοινὰς ἕδρας ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς.

Π.χ. αἱ δίεδροι ΓΑΒΔ καὶ ΔΑΒΕ (σχ. 226) εἶναι ἐφεξῆς. Ὁμοίως ἐφεξῆς δίεδροι εἶναι καὶ αἱ ΜΑΒΡ, ΡΑΒΝ (σχ. 227).



Σχ. 227

β΄) Δύο δίεδροι γωνίαι λέγονται κατὰ κορυφήν, ἂν ἔχωσι κοινὴν ἀκμήν, αἱ δὲ ἕδραι ἑκατέρας εἶναι προεκτάσεις τῶν ἑδρῶν τῆς ἄλλης.

Π.χ. αἱ ΜΑΒΡ, ΚΑΒΝ (σχ. 227) εἶναι κατὰ κορυφὴν δίεδροι γωνίαι.

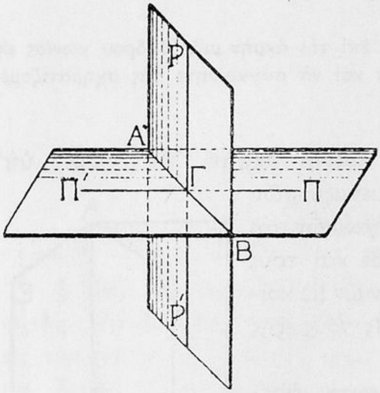
γ΄) Δύο ἐπίπεδα λέγονται κάθετα, ἂν αἱ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζόμεναι δίεδροι γωνίαι εἶναι ὅλαι ἴσαι (§ 6).

Π.χ. τὰ ἐπίπεδα ΠΠ΄ καὶ ΡΡ΄ εἶναι κάθετα, διότι σχηματίζουσι 4 ἴσας διέδρους γωνίας (σχ. 228).

δ΄) Δύο ἐπίπεδα λέγονται πλάγια, ἂν αἱ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζόμεναι δίεδροι γωνίαι δὲν εἶναι ὅλαι ἴσαι.

Π. χ. Τὰ ἐπίπεδα ΜΝ καὶ ΚΡ (σχ. 277) εἶναι πλάγια.

ε΄) Μία δίεδρος γωνία λέγεται ὀρθὴ δίεδρος, ἂν αἱ ἕδραι αὐτῆς εἶναι κάθετοι.



Σχ. 228

Π. χ. ἑκάστη ἀπὸ τὰς διέδρους ΠΑΒΡ, ΡΑΒΠ΄, Π΄ΑΒΡ΄, Ρ΄ΑΒΠ (σχ. 228) εἶναι ὀρθὴ δίεδρος γωνία.

στ΄) Μία δίεδρος γωνία λέγεται ὀξεῖα, ἂν εἶναι μικροτέρα ὀρθῆς διέδρου γωνίας, ἀμβλεῖα δέ, ἂν εἶναι μεγαλυτέρα ὀρθῆς διέδρου γωνίας.

Π.χ. ἡ ΡΑΒΝ εἶναι ὀξεῖα, ἡ δὲ ΜΑΒΡ εἶναι ἀμβλεῖα δίεδρος γωνία (σχ. 227).

Ἀσκήσεις

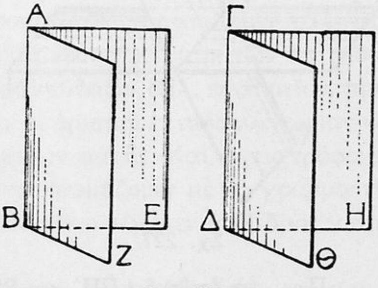
645. Νὰ δείξητε εἰς τὴν αἴθουσαν τῆς διδασκαλίας ἓν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ πάτωμα καὶ τὴν ἀντίστοιχον ἐπίπεδον τῆς διέδρου γωνίας αὐτῶν.

646. Νὰ δείξητε ἐπίσης μίαν δίεδρον γωνίαν μὲ κατακόρυφον ἀκμὴν καὶ τὴν ἀντίστοιχον ἐπίπεδον γωνίαν αὐτῆς.

647. Νὰ ἐξετάσητε πῶς δύνανται νὰ ὀνομασθῶσιν ἐκ τῆς ἀμοιβαίας θέσεώς των αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι δύο ἐφεξῆς διέδρων γωνιῶν.

648. Ὁμοίαν ἐξέτασιν νὰ κάμητε διὰ τὰς ἀντιστοίχους ἐπιπέδους δύο κατὰ κορυφὴν διέδρων γωνιῶν.

§ 309. Σχέσις τῶν ἀντιστοίχων ἐπιπέδων γωνιῶν δύο ἴσων διέδρων γωνιῶν καὶ ἀντιστρόφως.



Σχ. 229

α΄) Ἂν δύο ἴσαι δίεδροι γωνίαι ἐφαρμόσωσι καὶ ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν κοινὴν ἀκμὴν αὐτῶν, θὰ σχηματισθῶσιν αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι γωνίαι αὐτῶν, ἡ μία ἀκριβῶς ἐπὶ τῆς ἄλλης. Ὥστε:

Αἱ ἴσαι δίεδροι γωνίαι ἔχουσιν ἴσας ἀντιστοίχους ἐπιπέδους γωνίας.

β′) Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ δίεδροι γωνίαι ΑΒ καὶ ΓΔ ἔχουσιν ἴσας ἀντιστοίχους ἐπιπέδους ΕΒΖ καὶ ΗΔΘ (σχ. 229). Ἂς νοήσωμεν δὲ ὅτι ἡ δίεδρος ΓΔ τίθεται ἐπὶ τῆς ΑΒ οὕτως, ὥστε ἡ γωνία ΗΔΘ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης ΕΒΖ. Τότε ἡ ἀκμὴ ΔΓ ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΗΔΘ θὰ γίνῃ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΕΒΖ, ἑπομένως θὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ΑΒ. Διὰ ταῦτα δὲ ἡ μὲν ἕδρα ΓΔΘ θὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ἕδραν ΑΒΖ, ἡ δὲ ΓΔΗ μὲ τὴν ΑΒΕ.

Αἱ δίεδροι λοιπὸν γωνίαι ἐφαρμόζουσιν. Ὥστε:

Ἂν αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι γωνίαι δύο διέδρων γωνιῶν εἶναι ἴσαι, αἱ δίεδροι αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι.

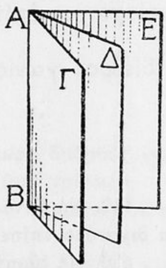
Πόρισμα Ι. **Αἱ κατὰ κορυφὴν δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι.**

Πόρισμα ΙΙ. **Τῶν ὀρθῶν διέδρων γωνιῶν αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ὀρθαί.**

Πόρισμα ΙΙΙ. **Ἂν ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος διέδρου γωνίας εἶναι ὀρθή, ἡ δίεδρος αὕτη γωνία εἶναι ὀρθή·**

§ 310. Πῶς μεταβάλλεται μία δίεδρος γωνία μετὰ τῆς ἀντιστοίχου ἐπιπέδου γωνίας αὐτῆς. Καὶ ἀντιστρόφως. Ἔστω ΓΑΒΔ μία δίεδρος γωνία καὶ ΓΑΔ ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος γωνία αὐτῆς (σχ. 230).

Εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς γωνίας ταύτης ἔστω γωνία ΔΑΕ ἴση πρὸς τὴν ΓΑΔ. Εἶναι φανερὸν ὅτι $\widehat{ΓΑΕ} = \widehat{ΓΑΔ} \cdot 2$ καὶ ὅτι ἡ μὲν $\widehat{ΔΑΕ}$ εἶναι ἀντίστοιχος ἐπίπεδος τῆς διέδρου ΔΑΒΕ, ἡ δὲ $\widehat{ΓΑΕ}$ τῆς διέδρου ΓΑΒΕ. Ἐπειδὴ δὲ διέδρ. ΓΑΒΔ = διέδρ. ΔΑΒΕ, ἕπεται ὅτι διέδρ. ΓΑΒΕ = διέδρ. ΓΑΒΔ · 2.



Σχ. 230.

Ἀντιστρόφως. Ἂν διέδρ. ΓΑΒΕ = διέδρ. ΓΑΒΔ · 2, θὰ εἶναι διέδρ. ΓΑΒΔ = διέδρ. ΔΑΒΕ. Ἑπομένως $\widehat{ΓΑΔ} = \widehat{ΔΑΕ}$ καὶ $\widehat{ΓΑΕ} = \widehat{ΓΑΔ} \cdot 2$. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι, ἂν τριπλασιασθῇ ἢ τετραπλασιασθῇ κ.τ.λ. τὸ ἓν τῶν ποσῶν τούτων καὶ τὸ ἄλλο τριπλασιάζεται ἢ τετραπλασιάζεται κ.τ.λ. Συμπεραίνομεν λοιπὸν (§ 217) ὅτι:

Αἱ δίεδροι γωνίαι εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀντιστοίχους ἐπιπέδους γωνίας αὐτῶν.

§ 311. Σχέσις τοῦ μέτρου διέδρου γωνίας πρὸς τὸ μέτρον τῆς ἀντιστοίχου ἐπιπέδου γωνίας αὐτῆς. Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα εἶναι.

$$\frac{\text{δίεδ } \Gamma AB E}{\text{δίεδ } \Gamma AB\Delta} = \frac{\widehat{\Gamma AE}}{\widehat{\Gamma A\Delta}}.$$

Ἂν δὲ ἡ ΓΑΔ εἶναι ἡ μονὰς τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, τὸ β΄ μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης εἶναι τὸ μέτρον τῆς γωνίας ΓΑΕ. Καὶ ἄν, ὡς συνήθως, ἡ δίεδρος ΓΑΒΔ ληφθῇ ὡς μονὰς τῶν διέδρων γωνιῶν, τὸ α΄ μέλος τῆς ἰδίας ἰσότητος εἶναι τὸ μέτρον τῆς διέδρου γωνίας ΓΑΒΕ.

Μὲ τὴν προϋπόθεσιν λοιπὸν ταύτην βλέπομεν ὅτι:

Τὸ μέτρον διέδρου γωνίας ἰσοῦται πρὸς τὸ μέτρον τῆς ἀντιστοίχου ἐπιπέδου γωνίας αὐτῆς.

Κατὰ ταῦτα ἡ μέτρησις μιᾶς διέδρου γωνίας ἀνάγεται εἰς τὴν μέτρησιν τῆς ἀντιστοίχου ἐπιπέδου γωνίας αὐτῆς. Ἂν π.χ. ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος γωνία μιᾶς διέδρου γωνίας εἶναι $\frac{7}{8}$ ὀρθῆς ἡ δίεδρος γωνία θὰ εἶναι $\frac{7}{8}$ τῆς ὀρθῆς διέδρου γωνίας.

Ἀσκήσεις

649. Νὰ ἐξετάσητε ἂν μία δίεδρος γωνία δύναται νὰ διχοτομηθῇ καὶ πόσα διχοτόμα ἐπίπεδα δύναται νὰ ἔχῃ.

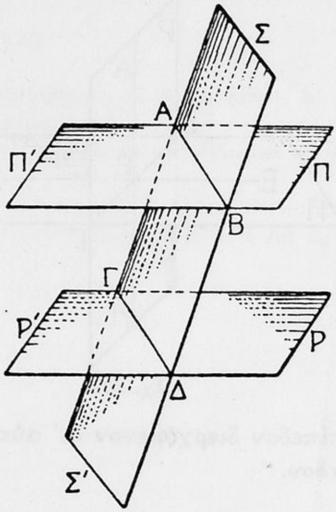
650. Νὰ εὕρητε τὸ ἄθροισμα δύο ἐφεξῆς διέδρων γωνιῶν, ἂν αἱ μὴ κοιναὶ ἕδραι αὐτῶν κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

651. Ἀπὸ μίαν εὐθεῖαν ἑνὸς ἐπιπέδου νὰ νοήσητε διάφορα ἐπίπεδα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ. Νὰ εὕρητε δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων διαδοχικῶν διέδρων γωνιῶν.

652. Νὰ εὕρητε τὸ ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν διέδρων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ἀπὸ διάφορα ἐπίπεδα διερχόμενα ἀπὸ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

§ 312. Γωνίαι δύο ἐπιπέδων τεμνομένων ὑπὸ τρίτου. Ἔστωσαν δύο ἐπίπεδα Π΄Π, Ρ΄Ρ, τὰ ὁποῖα τέμνονται ἀπὸ ἄλλο Σ΄Σ κατὰ τὰς παραλλήλους εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 231).

Εἶναι φανερὸν ὅτι οὕτω σχηματίζονται 4 δίεδροι γωνίαι μὲ ἀκμὴν ΑΒ καὶ ἄλλαι 4 μὲ ἀκμὴν ΓΔ. Ἀπὸ αὐτὰς σχηματίζομεν διάφορα ζεύγη διέδρων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι χαρακτηρίζονται ἀπὸ τὴν θέσιν αὐτῶν ὡς πρὸς τὰ τεμνόμενα ἐπίπεδα καὶ πρὸς τὸ τέμνον αὐτά. Π.χ. αἱ δίεδροι γωνίαι ΣΑΒΠ καὶ ΣΓΔΡ ἔχουσι διοφόρους ἀκμάς, κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ Σ΄Σ καὶ ἡ μία μεταξὺ τῶν Π΄Π, Ρ΄Ρ, ἡ δὲ ἄλλη ἐκτὸς αὐτῶν. Διὰ ταῦτα δὲ αὗται λέγονται **ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.**



Σχ. 231

Ὁμοίως ὁρίζομεν καὶ ἄλλα ζεύγη κατ᾽ ἀναλογίαν πρὸς τὰ γνωστὰ ζεύγη τῶν γωνιῶν δύο εὐθειῶν τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου τεμνομένων ὑπὸ τρίτης.

Ἀσκήσεις

653. Νὰ συγκρίνητε δύο ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη διέδρους γωνίας σχηματιζομένας ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τεμνομένων ὑπὸ τρίτου.

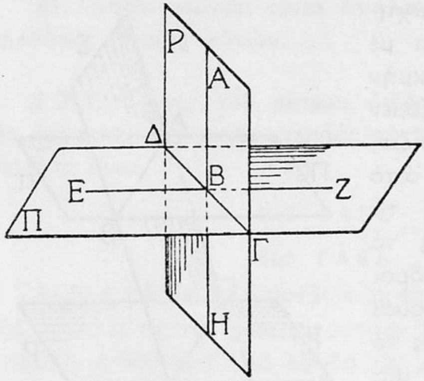
654. Νὰ συγκρίνητε δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ διέδρους γωνίας σχηματιζομένας ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τεμνομένων ὑπὸ τρίτου.

655. Νὰ εὕρητε τὸ ἄθροισμα δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη διέδρων γωνιῶν σχηματιζομένων ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τεμνομένων ὑπὸ τρίτου.

2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΚΑΘΕΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

§ 313. Μία εὐθεῖα ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον Π. Ἄλλο δὲ ἐπίπεδον Ρ διέρχεται ἀπὸ τὴν ΑΒ. Νὰ ἐξετασθῇ, ἂν τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι κάθετα ἢ πλάγια (σχ. 232).

Ἀπὸ τὸν πόδα Β τῆς τομῆς ΓΔ τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ γράφομεν εἰς τὸ Π εὐθεῖαν ΕΒΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ. Ἐπειδὴ ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΑΒ, τὸ ἐπίπεδον ΑΕΖ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ. Ἑπομένως αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ΑΒΕ, ΑΒΖ εἶναι ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι τῶν διέδρων ΑΓΔΕ καὶ ΑΓΔΖ.



Σχ. 232

Εἶναι λοιπὸν αὗται ὀρθαὶ δίεδροι γωνίαι, τὰ δὲ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι κάθετα. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Ἂν μία εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον δι' αὐτῆς εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

§ 314. Δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ τέμνονται κατὰ τὴν ΓΔ καθέτως. Μία δὲ εὐθεῖα ΑΒ τοῦ Ρ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ. Νὰ ἐξετασθῇ, ἂν αὕτη εἶναι κάθετος ἢ πλαγία πρὸς τὸ Π.

Εἰς τὸ ἐπίπεδον Π γράφομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΒΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ καὶ ἐννοοῦμεν, ὡς προηγουμένως, ὅτι αἱ γωνίαι ΑΒΕ, ΑΒΖ εἶναι ἀντίστοιχοι τῶν διέδρων ΑΓΔΕ καὶ ΑΓΔΖ. Ἐπειδὴ δὲ αὗται εἶναι ὀρθαὶ δίεδροι, καὶ αἱ ΑΒΕ, ΑΒΖ εἶναι ὀρθαί, ἡ δὲ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΒΖ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΒ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΓΔ, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Ἂν δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα, πᾶσα εὐθεῖα τοῦ ἑνὸς κάθετος ἐπὶ τὴν τομήν των εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἄλλο ἐπίπεδον.

Πόρισμα Ι. **Ἂν δύο ἐπίπεδα, εἶναι κάθετα, πᾶσα εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ ἓν ἀγομένη ἐκ σημείου τοῦ ἄλλου κεῖται εἰς τὸ δεύτερον τοῦτο ἐπίπεδον.**

Πόρισμα ΙΙ. **Ἡ προβολὴ ἐπιπέδου σχήματος καθέτου ἐπὶ τὸ προβ. ἐπίπεδον εἶναι εὐθ. τμῆμα.**

Πόρισμα ΙΙΙ. **Ἂν δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα Ρ καὶ Σ εἶναι κάθετα ἐπὶ ἄλλο Π, ἡ τομὴ ΑΒ αὐτῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π.**

Ἀσκήσεις

656. Νὰ γράψητε εἰς ἓν ἐπίπεδον μίαν εὐθεῖαν καὶ νὰ ἐξετάσητε, ἂν δι' αὐτῆς διέρχωνται κάθετα ἐπίπεδα ἐπ' αὐτὸ καὶ πόσα.

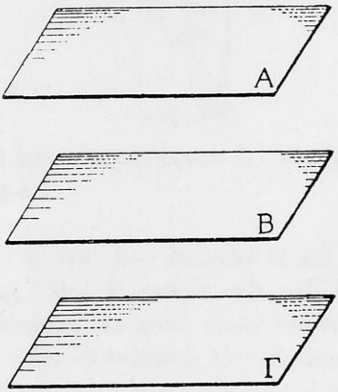
657. Νὰ νοήσητε μίαν εὐθεῖαν πλαγίαν πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον καὶ νά κάμητε τὴν προηγουμένην ἐξέτασιν.

658. Μία εὐθεῖα ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ ἓν ἐπίπεδον Π. Ἄλλο δὲ ἐπίπεδον Ρ μὴ περιέχον τὴν ΑΒ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ Π. Νὰ ἐξετάσητε, ἂν ἡ ΑΒ τέμνῃ ἢ μὴ τὸ Ρ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

1. ΑΙ ΣΤΕΡΕΑΙ ΓΩΝΙΑΙ

§ 315. Ἀμοιβαῖαι θέσεις τριῶν ἐπιπέδων. Ἐμάθομεν εἰς τὰ προηγούμενα ὅτι δύο ἐπίπεδα Α καὶ Β δύνανται νὰ εἶναι παράλληλα ἢ νὰ τέμνωνται.



Σχ. 233

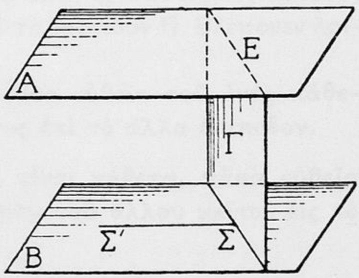
Ἂν ταῦτα εἶναι παράλληλα, ἓν τρίτον ἐπίπεδον Γ παράλληλον πρὸς τὸ Β, θὰ εἶναι παράλληλον καὶ πρὸς τὸ Α (§ 294 Πόρ.) Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

α') Εἶναι δυνατὸν τρία ἐπίπεδα νὰ εἶναι παράλληλα (σχ. 233).

Ἂν δὲ τρίτον ἐπίπεδον Γ τέμνῃ τὸ ἓν τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, θὰ τέμνῃ καὶ τὸ ἄλλο (§ 292. Πόρ.). Ὥστε :

β') Εἶναι δυνατὸν δύο ἐπίπεδα νὰ εἶναι παράλληλα, τὸ δὲ τρίτον νὰ τέμνῃ ταῦτα (σχ. 234).

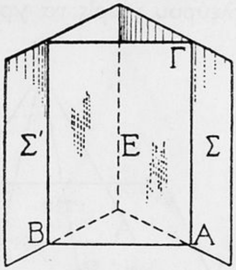
Ἐμάθομεν δὲ ὅτι αἱ τομαὶ Ε καὶ Σ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων Α καὶ Β ὑπὸ τοῦ Γ εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι.



Σχ. 234

Ἔστωσαν ἤδη Α καὶ Γ δύο ἐπίπεδα τεμνόμενα καὶ ἔστω Ε ἡ τομὴ αὐτῶν (σχ. 234). Εἰς τὸ ἐπίπεδον Γ φέρομεν εὐθεῖαν Σ παράλληλον πρὸς τὴν Ε καὶ ἀπὸ ἓν σημεῖον αὐτῆς φέρομεν ἄλλην εὐθεῖαν Σ' παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον Α. Αἱ εὐθεῖαι Σ καὶ Σ' ὁρίζουσιν ἓν ἐπίπεδον Β παράλληλον πρὸς τὸ Α (§ 295). Οὕτως ἀγόμεθα εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν.

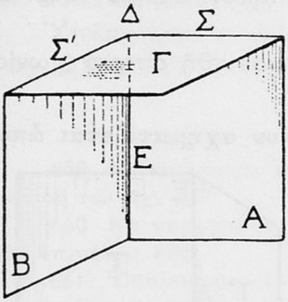
Ἂν ὅμως εἰς ἕκαστον τῶν τεμνομένων ἐπιπέδων Α καὶ Β (σχ. 235) φέρωμεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν τομὴν Ε αὐτῶν, αἱ εὐθεῖαι αὗται Σ καὶ Σ′ εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι (§ 289 Πόρ.). Ὁρίζουσιν ἑπομένως αὗται τρίτον ἐπίπεδον Γ τέμνον ταῦτα καὶ παράλληλον πρὸς τὴν τομὴν Ε αὐτῶν. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :



Σχ. 235

γ′) Εἶναι δυνατὸν δύο ἐπίπεδα νὰ τέμνωνται, τὸ δὲ τρίτον ἐπίπεδον νὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν τομήν των καὶ νὰ τέμνῃ ἀμφότερα ταῦτα.

Εἰς ὅλας τὰς προηγουμένας περιπτώσεις τὰ τρία ἐπίπεδα οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουσι.



Σχ. 236

Ἂν τέλος ἀπὸ ἓν σημεῖον Δ (σχ. 236) τῆς τομῆς Ε δύο ἐπιπέδων Α, Β φέρωμεν εὐθεῖαν Σ εἰς τὸ Α καὶ ἄλλην Σ′ εἰς τὸ Β, ὁρίζεται ὑπ᾽ αὐτῶν τρίτον ἐπίπεδον Γ. Τοῦτο δὲ τέμνει τὰ Α, Β καὶ ἔχει μετ᾽ αὐτῶν κοινὸν σημεῖον τὸ Δ. Καὶ πᾶν ἄλλο ἐπίπεδον τέμνον τὴν Ε εἴς τι σημεῖον Δ τέμνει προφανῶς καὶ τὰ Α, Β κατὰ εὐθείας διερχομένας διὰ τοῦ Δ. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

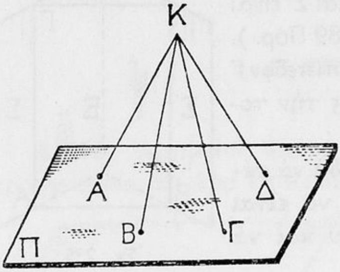
δ′) Εἶναι δυνατὸν τρία ἐπίπεδα νὰ τέμνωνται ἀνὰ δύο καὶ νὰ ἔχωσιν ἓν κοινὸν σημεῖον. Τοῦτο δὲ εἶναι κοινὸν σημεῖον καὶ τῶν τομῶν αὐτῶν.

§ 316. Τί εἶναι στερεὰ γωνία καὶ ποῖα τὰ στοιχεῖα αὐτῆς. Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι εἶναι δυνατὸν τρία ἐπίπεδα Α,Β,Γ, νὰ τέμνωνται ἀνὰ δύο καὶ νὰ διέρχωνται ἀπὸ ἓν σημεῖον Δ, ἀπὸ τὸ ὁποῖον διέρχονται καὶ αἱ τομαὶ αὐτῶν (σχ. 236.)

Ἂν νοήσωμεν μόνον τὰ μεταξὺ τῶν τομῶν αὐτῶν περιεχόμενα μέρη τῶν ἐπιπέδων τούτων, ἀποτελεῖται ὑπ᾽ αὐτῶν ἓν στερεὸν σχῆμα. Τοῦτο λέγεται **στερεὰ γωνία.**

Εἶναι δὲ δυνατὸν καὶ 4 διάφορα ἐπίπεδα νὰ διέρχωνται ἀπὸ ἓν σημεῖον. Τοῦτο ἐννοοῦμεν εὐκόλως ὡς ἑξῆς:

Εἰς ἓν ἐπίπεδον Π ὁρίζομεν τὰς κορυφὰς Α,Β,Γ,Δ ἑνὸς τετραπλεύρου χωρὶς νὰ γράψωμεν τὰς πλευρὰς αὐτοῦ. Ἀπὸ ἓν δὲ σημεῖον Κ ἐκτός τοῦ Π κείμενον φέρομεν τὰς εὐθείας ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ (σχ. 237).



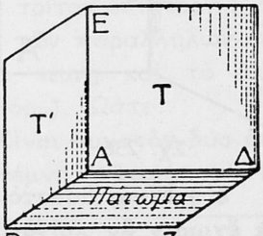
Σχ. 237

Τὰ ἐπίπεδα ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ, ΚΔΑ διέρχονται προφανῶς διὰ τοῦ σημείου Κ.

Ἂν δὲ νοήσωμεν μόνον τὸ μέρος ἑκάστου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν τομῶν αὐτοῦ ὑπὸ τῶν δύο παρακειμένων καὶ ἀφαιρέσωμεν τὸ ἐπίπεδον Π, μένει ἕνα στερεὸν σχῆμα ΚΑΒΓΔ. Καὶ τοῦτο ὀνομάζεται **στερεὰ γωνία.**

Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι δύναται νὰ σχηματισθῇ στερεὰ γωνία μὲ πέντε, ἓξ κ.τ.λ. ἐπίπεδα. Ὥστε:

Στερεὰ γωνία εἶναι σχῆμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἀπὸ τρία ἢ περισσότερα ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ ἕκαστον περατοῦται εἰς τὰς τομὰς αὐτοῦ ὑπὸ τῶν παρακειμένων.



Σχ. 238

Τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα σχηματίζουσι μίαν στερεὰν γωνίαν, λέγονται **ἕδραι** αὐτῆς.

Ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ δὲ τῶν ἑδρῶν αἱ στερεαὶ γωνίαι διακρίνονται εἰς **τριέδρους, τετραέδρους** κ.τ.λ.

Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ἑδρῶν στερεᾶς γωνίας λέγεται **κορυφὴ** αὐτῆς.

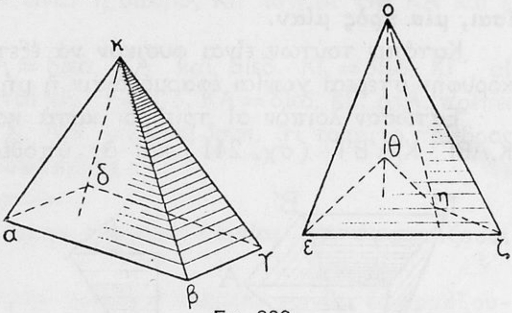
Αἱ τομαὶ τῶν ἑδρῶν μιᾶς στερεᾶς γωνίας λέγονται **ἀκμαὶ** αὐτῆς.

Αἱ γωνίαι τῶν ἀκμῶν ἑκάστης ἕδρας μιᾶς στερεᾶς γωνίας λέγονται καὶ αὐταὶ **ἕδραι ἢ ἐπίπεδοι** γωνίαι τῆς στερεᾶς γωνίας.

Ἡ τρίεδρος στερεὰ γωνία ΑΒΔΕ (σχ. 238) ἔχει ὀρθὰς καὶ τὰς τρεῖς ἕδρας. Διὰ τοῦτο δὲ λέγεται **τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία.**

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι ἑκάστη ἕδρα στερεᾶς γωνίας μὲ τὰς ἑκατέρωθεν αὐτῆς ἕδρας σχηματίζει διέδρους γωνίας.

Ἂν νοήσωμεν ὅτι ἑκάστη ἕδρα τῶν ἀνωτέρω στερεῶν γωνιῶν (σχ. 236, 237, 238). προεκτείνεται κατ' ἀμφοτέρας τὰς διαστάσεις, ἐννοοῦμεν ὅτι ὅλη ἡ στερεὰ γωνία μένει ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τούτου.



Σχ. 239

Δι' αὐτὸ αἱ τοιαῦται στερεαὶ γωνίαι λέγονται **κυρταί.**

Ὑπάρχουσι δὲ καὶ μὴ κυρταὶ στερεαὶ γωνίαι, ὅπως ἡ οεζηθ (σχ. 239).

Ἀσκήσεις

659. Νὰ ὀνομάσητε τὰς ἀκμάς, ἕδρας καὶ διέδρους γωνίας τῆς στερεᾶς γωνίας τοῦ σχ. 237.

660. Νὰ γράψητε τὴν τομὴν τῆς στερεᾶς γωνίας ΑΒΔΕ (σχ. 238) ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΕΒΔ.

661. Ὁδηγούμενοι ἀπὸ τὸ σχῆμα 239 νὰ διακρίνητε ποία διαφορὰ ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων τομῶν κυρτῆς καὶ μὴ κυρτῆς στερεᾶς γωνίας, ἂν αἱ τομαὶ αὗται δὲν διέρχωνται ἀπὸ τὰς κορυφὰς τῶν στερεῶν γωνιῶν.

§ 317. Τί εἶναι κατὰ κορυφὴν ἢ συμμετρικὴ μιᾶς στερεᾶς γωνίας. Ἂν προεκτείνωμεν τὰς ἀκμὰς τυχούσης στερεᾶς γωνίας Ο.ΑΒΓΔ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τῆς κορυφῆς, σχηματίζεται νέα στερεὰ γωνία Ο.Α'Β'Γ'Δ' (σχ. 240). Αὕτη λέγεται **κατὰ κορυφὴν** ἢ **συμμετρικὴ** τῆς Ο.ΑΒΓΔ.

Εὐκόλως δὲ βλέπομεν ὅτι : α') Αἱ ἕδραι τῆς Ο.Α'Β'Γ'Δ' εἶναι, μία πρὸς μίαν, κατὰ κορυφὴν ἐπίπεδοι γωνίαι τῶν ἑδρῶν τῆς Ο.ΑΒΓΔ. Εἶναι λοιπὸν $\widehat{AOB} = A'\widehat{O}B'$, $\widehat{BO\Gamma} = B'\widehat{O}\Gamma'$ κ.τ.λ. Ἤτοι:

Αἱ ἕδραι τῶν κατὰ κορυφὴν στερεῶν γωνιῶν εἶναι ἴσαι, μία πρὸς μίαν.

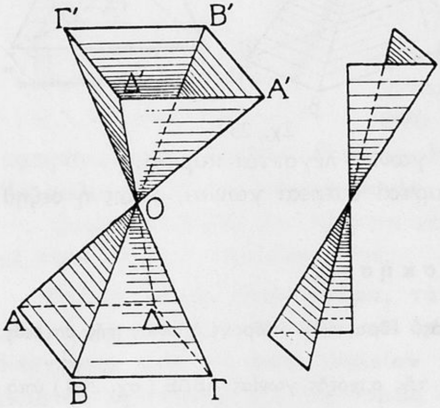
β′) Ὁμοίως αἱ δίεδροι τῆς μιᾶς στερεᾶς γωνίας εἶναι, μία πρὸς μίαν, κατὰ κορυφὴν τῶν διέδρων τῆς ἄλλης.

Ἐννοοῦμεν λοιπὸν ὅτι :

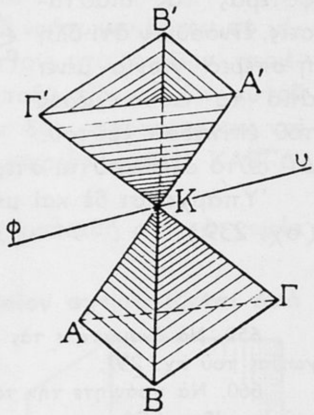
Αἱ δίεδροι γωνίαι τῶν κατὰ κορυφὴν στερεῶν γωνιῶν εἶναι ἴσαι, μία πρὸς μίαν.

Κατόπιν τούτων εἶναι φυσικὸν νὰ ἐξετάσωμεν, ἂν δύο κατὰ κορυφὴν στερεαὶ γωνίαι ἐφαρμόζωσιν ἢ μή.

Ἔστωσαν λοιπὸν αἱ τρίεδροι κατὰ κορυφὴν στερεαὶ γωνίαι Κ.ΑΒΓ, Κ.Α′Β′Γ′ (σχ. 241) καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀκμὴ ΚΒ



Σχ. 240



Σχ. 241

κεῖται ἔμπροσθεν τοῦ ἐπιπέδου ΑΚΓ· ἡ ΚΒ′ τότε θὰ εἶναι ὄπισθεν αὐτοῦ. Ἑπομένως, ἂν ἡ ἕδρα Α′ΚΓ′ στρέφεται περὶ τὴν κορυφὴν Κ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῆς, δύναται νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της ἕδρας ΑΚΓ. Αἱ ἀκμαὶ ὅμως ΚΒ, ΚΒ′ κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ ἐπιπέδου ΑΚΓ καὶ ἑπομένως αἱ στερεαὶ γωνίαι δὲν ἐφαρμόζουσιν. Ἡ αἰτία αὕτη τῆς μὴ ἐφαρμογῆς τῶν σχημάτων τούτων γεννᾷ τὴν ἰδέαν νὰ κάμωμεν τὴν στροφὴν τῆς στερεᾶς γωνίας Κ.Α′Β′Γ′ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ ἔλθῃ ἡ ἀκμὴ ΚΒ′ πρὸς τὸ μέρος τῆς ΚΒ σχετικῶς πρὸς τὴν ἕδραν ΑΚΓ.

Πρὸς τοῦτο γράφομεν τὴν φΚυ διχοτόμον τῶν γωνιῶν Γ′ΚΑ, Α′ΚΓ καὶ νοοῦμεν ὅτι ἡ στερεὰ γωνία Κ.Α′Β′Γ′ στρέφεται περὶ τὴν διχοτόμον ταύτην μέχρις ὅτου ἡ γωνία Α′ΚΓ′ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της ΑΚΓ.

Οὕτω δὲ ἡ ΚΓ′ πίπτει ἐπὶ τῆς ΚΑ καὶ ἡ ΚΑ′ ἐπὶ τῆς ΚΓ. Διὰ νὰ ἐφαρμόσωσι δὲ αἱ στερεαὶ γωνίαι, πρέπει ἡ ἀκμὴ ΚΒ′ νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ ΚΒ. Τοῦτο δὲ γίνεται μόνον, ἂν τὸ ἐπίπεδον ΚΒ′Γ′ συμπέσῃ μὲ τὸ ΚΑΒ καὶ τὸ ΚΑ′Β′ μὲ τὸ ΚΒΓ. Διὰ νὰ γίνωσι δὲ ταῦτα, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι ἡ δίεδρος ΚΓ′ ἴση μὲ τὴν ΚΑ καὶ ἡ ΚΑ′ μὲ τὴν ΚΓ.

Ἐπειδὴ δὲ δίεδ. ΚΑ = δίεδ. ΚΑ′ καὶ δίεδ. ΚΓ = δίεδ. ΚΓ′, αἱ συνθῆκαι αὗται ἀνάγονται εἰς τὴν δίεδ. ΚΑ = δίεδ. ΚΓ. Δηλ. πρέπει δύο δίεδροι γωνίαι τῆς Κ. ΑΒΓ νὰ εἶναι ἴσαι. Ἡ τοιαύτη τρίεδρος στερεὰ γωνία λέγεται **ἰσοσκελής.**

Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι :

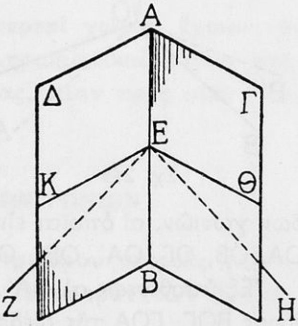
α′) Αἱ κατὰ κορυφὴν στερεαὶ γωνίαι δὲν ἐφαρμόζουσι πάντοτε.

β′) Αἱ κατὰ κορυφὴν τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι ἐφαρμόζουσι μόνον, ἂν εἶναι ἰσοσκελεῖς.

Πόρισμα. **Ἂν δύο δίεδροι γωνίαι τριέδρου στερεᾶς γωνίας εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν ἕδραι αὐτῆς εἶναι ἴσαι.**

2. ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑΙ ΣΤΕΡΕΑΙ ΓΩΝΙΑΙ

§ 318. *Πρόβλημα.* **Ἀπὸ ἓν σημεῖον Ε τῆς ἀκμῆς διέδρου γωνίας ΑΒ ἄγομεν εὐθείας ΕΖ, ΕΗ ἀντιστοίχως καθέτους ἐπὶ τὰς ἕδρας Γ, Δ καὶ ἑκάστην πρὸς τὸ μέρος τῆς ἄλλης ἕδρας. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῆς γωνίας τῶν καθέτων τούτων καὶ τῆς ἀντιστοίχου ἐπιπέδου γωνίας τῆς διέδρου** (σχ. 242).



Σχ. 242

Λύσις. Τὸ ἐπίπεδον ΖΕΗ τῶν εὐθειῶν ΕΖ, ΕΗ εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὰς δύο ἕδρας Γ,Δ (§ 313). Εἶναι ἄρα κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν τομὴν ΑΒ αὐτῶν (§ 314 Πόρ. ΙΙΙ).

Ἂν δὲ ΕΘ, ΕΚ εἶναι αἱ τομαὶ τῶν ἑδρῶν Γ καὶ Δ ὑπ' αὐτοῦ, ἡ γωνία ΚΕΘ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος τῆς διέδρου ΑΒ.

Πρόκειται λοιπὸν νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $\widehat{\mathrm{KE\Theta}} + \widehat{\mathrm{ZEH}}$. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι μία ἐκ τῶν δύο γωνιῶν θὰ εὑρίσκηται ἐντὸς τῆς ἄλλης. Ἂν ἡ ΖΕΗ εἶναι ἐντὸς τῆς ἄλλης, θὰ εἶναι

$$\widehat{\mathrm{KE\Theta}} = \widehat{\mathrm{KEH}} + \widehat{\mathrm{HE\Theta}} = 1 \text{ ὀρθ.} + \widehat{\mathrm{HE\Theta}}$$

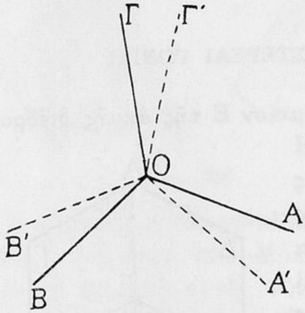
Ἑπομένως $\widehat{\mathrm{KE\Theta}} + \widehat{\mathrm{ZEH}} = 1$ ὀρθ. $+ \widehat{\mathrm{ZEH}} + \widehat{\mathrm{HE\Theta}}$. Ἐπειδὴ δὲ $\widehat{\mathrm{ZEH}} + \widehat{\mathrm{HE\Theta}} = \widehat{\mathrm{ZE\Theta}} = 1$ ὀρθ. ἕπεται ὅτι $\widehat{\mathrm{KE\Theta}} + \widehat{\mathrm{ZEH}} = 2$ ὀρθ. Αἱ γωνίαι δηλ. αὗται εἶναι παραπληρωματικαί.

Ἀσκήσεις

662. Ἂν ἡ ΑΒ εἶναι ἀμβλεῖα δίεδρος γωνία, νὰ ἐξετάσητε, ἂν αἱ κάθετοι ΕΖ, ΕΗ εὑρίσκωνται ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τῆς διέδρου ταύτης γωνίας (σχ. 242).

663. Νὰ κάμητε τὴν αὐτὴν ἐξέτασιν, ἂν ἡ δίεδρος ΑΒ εἶναι ὀξεῖα καὶ ἔπειτα ἂν εἶναι ὀρθή.

§ **319.** *Θεώρημα.* **Ἀπὸ τὴν κορυφὴν τριέδρου στερεᾶς γωνίας Ο.ΑΒΓ ἄγονται εὐθεῖαι ΟΑ′, ΟΒ′, ΟΓ′ ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τὰς ἕδρας ΒΟΓ, ΑΟΓ, ΑΟΒ καὶ ἑκάστη πρὸς τὸ μέρος τῆς τρίτης ἀκμῆς. Σχηματίζεται τότε τρίεδρος Ο. Α′Β′Γ′. Αἱ ἕδραι ἑκατέρας τῶν στερεῶν γωνιῶν Ο.ΑΒΓ Ο.Α′Β′Γ′ εἶναι παραπληρωματικαὶ τῶν πρὸς τὰς διέδρους τῆς ἄλλης ἀντιστοίχων ἐπιπέδων γωνιῶν** (σχ. 243).



Σχ. 243

Ἀπόδειξις. α′) Ἔστωσαν α, β, γ, α′, β′, γ′ τὰ μέτρα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι κατὰ σειρὰν ἀντίστοιχοι τῶν διέδρων ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΑ′, ΟΒ′, ΟΓ′.

Ἐξ ὑποθέσεως αἱ ΟΑ′ ΟΒ′ εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τὰς ἕδρας ΒΟΓ, ΓΟΑ τῆς διέδρου ΟΓ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΟΑ′ φέρεται πρὸς τὸ μέρος τῆς ΟΑ, ἕπεται ὅτι φέρεται καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς ἕδρας ΑΟΓ, ἡ δὲ γωνία ΑΟΑ′ εἶναι ὀξεῖα. Ὁμοίως ἡ ΟΒ′ φέρεται πρὸς τὸ μέρος τῆς ΒΟΓ, ἡ δὲ γωνία ΒΟΒ′ εἶναι ὀξεῖα. Θὰ εἶναι λοιπὸν $\mathrm{A'OB'} + \gamma = 2$ ὀρθ. (§ 318).

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ γωνία ΓΟΓ′ εἶναι ὀξεῖα καὶ ὅτι $B'\widehat{O\Gamma'} + \alpha = 2$ ὀρθ, $A'\widehat{O\Gamma'} + \beta = 2$ ὀρθ.

β′) Ἐπειδὴ αἱ ΟΑ′, ΟΒ′ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΟΓ, αὕτη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν Α′ΟΒ′. καὶ φέρεται πρὸς τὸ μέρος τῆς ΟΓ′, διότι ἡ γωνία ΓΟΓ′ εἶναι ὀξεῖα. Ὁμοίως ἡ ΟΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν Α′ΟΓ′ καὶ φέρεται πρὸς τὸ μέρος τῆς ΟΒ′, ἡ δὲ ΟΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν Β′ΟΓ′ καὶ φέρεται πρὸς τὸ μέρος τῆς ΟΑ′. Ὥστε ἡ Ο.ΑΒΓ σχηματίζεται ἐκ τῆς Ο.Α′Β′Γ′, ὅπως ἡ Ο.Α′Β′Γ′ ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς Ο.ΑΒΓ. Κατὰ δὲ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν θὰ εἶναι:

$$A\widehat{O}B + \gamma' = 2 \text{ ὀρθ.}, \quad B\widehat{O}\Gamma + \alpha' = 2 \text{ ὀρθ.}, \quad A\widehat{O\Gamma} + \beta' = 2 \text{ ὀρθ.}$$

§ 320. Ποῖαι λέγονται παραπληρωματικαὶ τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι. Αἱ προηγούμεναι τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι Ο.ΑΒΓ, Ο.Α′Β′Γ′ λέγονται **παραπληρωματικαὶ** στερεαὶ γωνίαι, ἕνεκα τῆς προηγουμένης ἰδιότητος αὐτῶν. Ὥστε:

Δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι λέγονται παραπληρωματικαί, ἂν αἱ ἕδραι ἑκατέρας εἶναι παραπληρωματικαὶ τῶν ἀντιστοίχων ἐπιπέδων τῶν διέδρων τῆς ἄλλης.

Πόρισμα Ι. **Τῶν παραπληρωματικῶν τριέδρων στερεῶν γωνιῶν αἱ κατὰ κορυφὴν στερεαὶ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.**

Πόρισμα ΙΙ. **Ἂν δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχωσι τὰς ἕδρας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, αἱ παραπληρωματικαὶ αὐτῶν στερεαὶ γωνίαι θὰ ἔχωσι τὰς διέδρους ἴσας, μίαν πρὸς μίαν. Καὶ ἀντιστρόφως.**

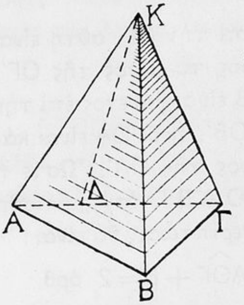
3. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

§ 321. Νὰ συγκριθῇ ἑκάστη ἕδρα τριέδρου στερεᾶς γωνίας Κ.ΑΒΓ πρὸς τὸ ἄθροισμα καὶ πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἄλλων ἑδρῶν αὐτῆς (σχ. 244).

Ἔστω ὅτι ἡ ἕδρα ΑΚΓ εἶναι μεγαλυτέρα ἑκατέρας τῶν ἄλλων. Δυνάμεθα ὅθεν νὰ κατασκευάσωμεν ἐντὸς αὐτῆς γωνίαν ΓΚΔ ἴσην πρὸς τὴν ΒΚΓ. Ἄγομεν ἔπειτα τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΑΔΓ καὶ ἐπὶ τῆς τρίτης ἀκμῆς ὁρίζομεν τμῆμα ΚΒ ἴσον πρὸς ΚΔ.

Ἐκ δὲ τῶν ἴσων τριγώνων ΚΒΓ, ΚΔΓ συμπεραίνομεν ὅτι

$$\Delta\Gamma = B\Gamma$$



Σχ. 244

Ἐπειδὴ δὲ $A\Delta + \Delta\Gamma < AB + B\Gamma$, ἕπεται ὅτι $A\Delta < AB$. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΚΔ, ΑΚΒ ἔχουσι τὴν ΚΑ κοινήν, $K\Delta = KB$ καὶ $A\Delta < AB$.

Ἕνεκα τούτων εἶναι $\widehat{AK\Delta} < \widehat{AKB}$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς ἰσότητος $\widehat{\Delta K\Gamma} = \widehat{BK\Gamma}$ ἕπεται ὅτι

$$\widehat{AK\Delta} + \widehat{\Delta K\Gamma} < \widehat{AKB} + \widehat{BK\Gamma}$$

ἢ
$$\widehat{AK\Gamma} < \widehat{AKB} + \widehat{BK\Gamma} \qquad (1)$$

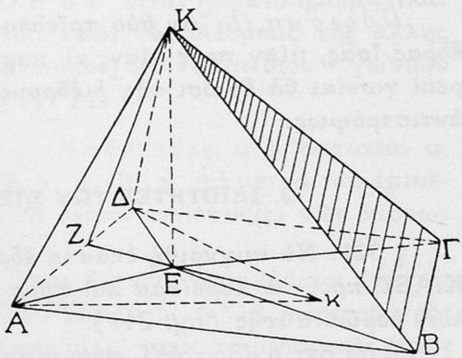
Ἐπειδὴ δὲ ὑπετέθη $\widehat{AKB} < \widehat{AK\Gamma}$ καὶ $\widehat{BK\Gamma} < \widehat{AK\Gamma}$, κατὰ μείζονα λόγον εἶναι $\widehat{AKB} < \widehat{AK\Gamma} + \widehat{BK\Gamma}$ καὶ $\widehat{BK\Gamma} < \widehat{AK\Gamma} + \widehat{AKB}$ (2)

Αἱ ἀνισότητες (1) καὶ (2) ἀληθεύουσι προφανῶς καὶ ἂν αἱ δύο ἢ καὶ τρεῖς ἕδραι εἶναι ἴσαι.

Ἐκ τούτων εὐκόλως ἐννοοῦμεν ὅτι: $\widehat{AKB} > \widehat{AK\Gamma} - \widehat{BK\Gamma}$, $\widehat{BK\Gamma} > \widehat{AK\Gamma} - \widehat{AKB}$, $\widehat{AK\Gamma} > \widehat{AKB} - \widehat{BK\Gamma}$. Ὥστε:

Ἑκάστη ἕδρα τριέδρου στερεᾶς γωνίας εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.

§ 322. Νὰ συγκριθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἑδρῶν κυρτῆς στερεᾶς γωνίας πρὸς τὰς 4 ὀρθὰς γωνίας.



Σχ. 245

Ἔστω κυρτὴ στερεὰ γωνία Κ.ΑΒΓΔ (σχ. 245) καὶ ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι πληροῦνται οἱ ἑξῆς ὅροι: α΄) Ἐπίπεδος τομὴ ΑΒΓΔ αὐτῆς τέμνεται εἰς σημεῖον Ε ἐντὸς αὐτῆς ὑπὸ εὐθείας ΚΕ καθέτου ἐπὶ τὴν τομὴν ταύτην. β΄) Αἱ παρὰ τὰς βάσεις ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ γωνίαι τῶν τριγώνων ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ, ΚΔΑ εἶναι πᾶσαι ὀξεῖαι.

Ἂν εἰς μίαν ἕδραν, π.χ. τὴν ΚΑΔ, φέρωμεν τὴν ΚΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΔ, καὶ ἡ ΕΖ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ κατὰ τὸ β΄ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΚΖ εἶναι ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθ τριγώνου ΚΕΖ, εἶναι ΚΖ $>$ ΕΖ.

Ἂν ἑπομένως νοήσωμεν ὅτι ἡ ἕδρα ΚΑΔ στρέφεται περὶ τὴν ΑΔ, ἕως ὅτου πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ, ἡ ΚΖ θὰ μένῃ διαρκῶς κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ καὶ διὰ τοῦτο θὰ λάβῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΖΕ.

Ἕνεκα δὲ τῆς ἀνισότητος ΚΖ $>$ ΕΖ, ἡ κορυφὴ Κ θὰ πέσῃ εἰς ἓν σημεῖον κ τῆς προεκτάσεως τῆς ΖΕ.

Οὕτω δὲ τὸ Ε εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ τριγώνου κΑΔ καὶ ὡς γνωστὸν (§ 86 Πόρ.) εἶναι $\Delta\widehat{\kappa A} < \Delta\widehat{EA}$ ἢ $\Delta\widehat{KA} < \Delta\widehat{EA}$.

Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι $A\widehat{K}B < A\widehat{E}B$, $B\widehat{K}\Gamma < B\widehat{E}\Gamma$, $\Gamma\widehat{K}\Delta < \Gamma\widehat{E}\Delta$.

Ἐκ τούτων διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι:

$$A\widehat{K}\Delta + A\widehat{K}B + B\widehat{K}\Gamma + \Gamma\widehat{K}\Delta < 4 \text{ ὀρθ.}$$

Γενικὴ ἀπόδειξις τῆς ἰδιότητος ταύτης. Ἂν κυρτὴ στερεὰ γωνία Κ ἔχῃ μ ἕδρας, τυχοῦσα ἐπίπεδος τομὴ ΑΒΓ... Μ αὐτῆς μὴ διερχομένη διὰ τῆς κορυφῆς Κ ἔχει μ πλευράς. Ἑκάστη δὲ τούτων εἶναι βάσις ἀντιστοίχου τριγώνου ἐκ τῶν μ τοιούτων ΚΑΒ, ΚΒΓ, κ.τ.λ. Κατὰ δὲ τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα (§ 321) μεταξὺ τῶν ἑδρῶν τῶν τριέδρων στερεῶν γωνιῶν Α,Β,Γ,Δ,... Μ ἀληθεύουσιν αἱ ἀνισότητες:

$$\Delta\widehat{A}B < K\widehat{A}\Delta + K\widehat{A}B,\quad A\widehat{B}\Gamma < K\widehat{B}A + K\widehat{B}\Gamma$$
$$B\widehat{\Gamma}\Delta < K\widehat{\Gamma}B + K\widehat{\Gamma}\Delta,\quad \Gamma\widehat{\Delta}A < K\widehat{\Delta}\Gamma + K\widehat{\Delta}A \qquad (1)$$

Ἂν δὲ καλέσωμεν α τὸ ἄθροισμα τῶν ἑδρῶν τῆς Κ καὶ προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἀνισότητας (1), ἐννοοῦμεν εὐκόλως ὅτι $(2\mu - 4)$ ὀρθ. $<$ $(2\mu - \alpha)$ ὀρθ., ὅθεν $\alpha < 4$ ὀρθ. Ὥστε:

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἑδρῶν πάσης κυρτῆς στερεᾶς γωνίας εἶναι μικρότερον τῶν 4 ὀρθῶν γωνιῶν.

§ 323. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ὅρια μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων γωνιῶν τριέδρου στερεᾶς γωνίας.

Σύγκρισις. Ἂν δ, δ΄, δ΄΄ εἶναι τὰ μέτρα τῶν διέδρων γωνιῶν π.χ. εἰς μέρη ὀρθῆς διέδρου γωνίας, τὰ μέτρα τῶν ἀντιστοίχων ἐπιπέδων θὰ εἶναι, δ, δ΄, δ΄΄ εἰς μέρη ὀρθῆς ἐπιπέδου γωνίας.

Ἂν δὲ Α, Β, Γ εἶναι τὰ μέτρα τῶν ἑδρῶν τῆς παραπληρωματικῆς στερεᾶς γωνίας εἰς μέρη ὀρθῆς, θὰ εἶναι (§ 319).

$$\delta + A = 2 \text{ ὀρθ.}, \delta' + B = 2 \text{ ὀρθ.}\ \delta'' + \Gamma = 2 \text{ ὀρθ.}$$

Ἐκ τούτων δὲ ἕπεται ὅτι:

$$\delta + \delta' + \delta'' = 6 \text{ ὀρθ.} - (A + B + \Gamma).$$

Ἐπειδὴ δὲ $0 < A + B + \Gamma < 4$ ὀρθ., ἕπεται ὅτι:

$$2 \text{ ὀρθ.} < \delta + \delta' + \delta'' < 6 \text{ ὀρθ.}$$ ἤτοι:

Τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων γωνιῶν τριέδρου στερεᾶς γωνίας εἶναι μεγαλύτερον τῶν δύο ὀρθῶν καὶ μικρότερον τῶν 6 ὀρθῶν.

§ 324. **Νὰ συγκριθῇ τὸ ἄθροισμα ἑκάστης διέδρου στερεᾶς γωνίας καὶ 2 ὀρθῶν διέδρων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων διέδρων τῆς αὐτῆς τριέδρου στερεᾶς γωνίας.**

Λύσις. Ἀπὸ τὰς προηγουμένας ἰσότητας

$$\delta + A = 2 \text{ ὀρθ}, \delta' + B = 2 \text{ ὀρθ.}, \delta'' + \Gamma = 2 \text{ ὀρθ.}$$

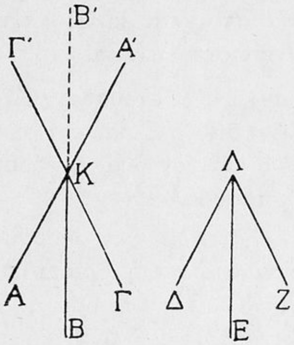
εὑρίσκομεν ὅτι $A = 2$ ὀρθ. $- \delta$, $B = 2$ ὀρθ. $- \delta'$, $\Gamma = 2$ ὀρθ. $- \delta''$. Ἕνεκα τούτων ἡ $A < B + \Gamma$ γίνεται 2 ὀρθ. $- \delta. < 4$ ὀρθ $- (\delta' + \delta'')$. Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι $\delta' + \delta'' < \delta + 2$ ὀρθ. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $\delta + \delta'' < \delta' + 2$ ὀρθ. καὶ $\delta + \delta' < \delta'' + 2$ ὀρθ. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἑκάστη δίεδρος τριέδρου στερεᾶς γωνίας αὐξηθεῖσα κατὰ 2 ὀρθ. διέδρους γωνίας ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.

4. ΑΙ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΕΔΡΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

§ 325. *Θεώρημα Ι.* **Ἂν δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχωσι δύο ἕδρας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένας διέδρους γωνίας ἴσας, αἱ στερεαὶ αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι ἢ ἡ μία ἰσοῦται πρὸς τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ἄλλης, καθ' ὅσον τὰ ἴσα στοιχεῖα αὐτῶν εἶναι ὁμοίως ἢ ἀνομοίως διατεταγμένα.**

Ἔστω ὅτι αἱ τρίεδροι στεραὶ γωνίαι Κ. ΑΒΓ, Λ. ΔΕΖ ἔχουσι $\widehat{AKB} = \widehat{\Delta\Lambda E}$, $\widehat{BK\Gamma} = \widehat{E\Lambda Z}$ καὶ δίεδ. ΚΒ = δίεδ. ΛΕ (σχ. 246). Ἂν παρατηρητὴς ἐξηπλωμένος ἐπὶ τῆς ΚΒ μὲ τὴν κεφαλὴν ἐπὶ τῆς κορυφῆς Κ καὶ βλέπων πρὸς τὴν ἕδραν ΑΚΓ ἔχῃ τὴν $\widehat{AKB}$ ἀριστερὰ τὴν δὲ $\widehat{BK\Gamma}$ δεξιὰ καὶ ἄλλος παρατηρητὴς ἐξηπλωμένος ἐπὶ τῆς ΛΕ μὲ τὴν κορυφὴν ἐπὶ τῆς Λ καὶ πρὸς τὴν ΔΛΖ βλέπων ἔχῃ ἀριστερὰ τὴν $\widehat{ΔΛΕ}$ καὶ δεξιὰ τὴν $\widehat{ΕΛΖ}$, λέγομεν ὅτι τὰ ἴσα στοιχεῖα αὐτῶν εἶναι ὁμοίως διατεταγμένα. Ἂν δὲ ὁ δεύτερος παρατηρητὴς ἔχῃ ἀριστερὰ τὴν $\widehat{ΕΛΖ}$ καὶ δεξιὰ τὴν $\widehat{ΔΛΕ}$, λέγομεν ὅτι τὰ ρηθέντα στοιχεῖα εἶναι ἀνομοίως διατεταγμένα. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν αἱ ρηθεῖσαι τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι. Περὶ τούτου βεβαιούμεθα, ὡς ἑξῆς:



Σχ. 246

Ἀπόδειξις. Νοοῦμεν ὅτι ἡ Λ.ΔΕΖ τίθεται ἐπὶ τῆς Κ.ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ $\widehat{ΔΛΕ}$ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της $\widehat{ΑΚΒ}$ μὲ τὴν ἀκμὴν ΛΕ ἐπὶ τῆς ΚΒ. Τότε ἡ $\widehat{ΕΛΖ}$ φέρεται πρὸς τὸ αὐτὸ μὲ τὴν $\widehat{ΒΚΓ}$ μέρος ὡς πρὸς τὴν ἕδραν ΑΚΒ ἕνεκα τῆς ρηθείσης ὁμοίας διατάξεως τῶν στοιχείων αὐτῶν. Τὸ ἐπίπεδον ΕΛΖ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ΒΚΓ ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν διέδρων ΚΒ, ΛΕ. Ἡ δὲ ἀκμὴ ΛΖ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΚΓ ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν ἑδρῶν ΕΛΖ, ΒΚΓ. Οὕτω δὲ αἱ στερεαὶ αὗται γωνίαι ἐφαρμόζουσιν ἐπ' ἀλλήλας καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσαι. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν σχηματίζομεν τὴν Κ. Α'Β'Γ' κατὰ κορυφὴν τῆς Κ. ΑΒΓ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι: $\widehat{Α'ΚΒ'} = \widehat{ΑΚΒ} = \widehat{ΔΛΕ}$, $\widehat{Β'ΚΓ'} = \widehat{ΒΚΓ} = \widehat{ΕΛΖ}$, δίεδ. ΚΒ' = δίεδ. ΚΒ = δίεδ. ΛΕ. Εἶναι δὲ τὰ ἴσα στοιχεῖα τῶν Κ. Α'Β'Γ', Λ.ΔΕΖ ὁμοίως διατεταγμένα. Ἑπομένως κατὰ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν αὗται εἶναι ἴσαι, ἤτοι ἡ Λ.ΔΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς Κ. ΑΒΓ.

Παρατήρησις. Ἀπὸ τὸν τρόπον τῆς ἐφαρμογῆς τῶν Κ. ΑΒΓ, Λ. ΔΕΖ γίνεται φανερὸν ὅτι $\widehat{ΑΚΓ} = \widehat{ΔΛΖ}$, δίεδ. ΚΑ = δίεδ. ΛΔ καὶ δίεδ. ΚΓ = δίεδ. ΛΖ, ἤτοι αἱ ἴσαι αὗται στερεαὶ γωνίαι ἔχουσιν ἴσα καὶ τὰ ἄλλα ἀπέναντι ἴσων ὁμοειδῆ στοιχεῖα αὐτῶν. Εὐκόλως δὲ ἐννοοῦμεν ὅτι καὶ αἱ Κ. Α'Β'Γ', Λ. ΔΕΖ ἔχουσιν $\widehat{Α'ΚΓ'} = \widehat{ΔΛΖ}$, δίεδ. ΚΑ' = δίεδ. ΛΔ καὶ δίεδ. ΚΓ' = δίεδ. ΛΖ.

§ **326**. *Θεώρημα ΙΙ.* **Ἂν δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι**

ἔχωσι μίαν ἕδραν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας διέδρους γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, αἱ στερεραὶ αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι ἢ ἡ μία ἰσοῦται πρὸς τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ἄλλης, καθ' ὅσον τὰ ἴσα στοιχεῖα αὐτῶν εἶναι ὁμοίως ἢ ἀνομοίως διατεταγμένα. Ἔστωσαν πχ. αἱ τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι Κ. ΑΒΓ καὶ Λ. ΔΕΖ (σχ. 246) ἔχουσαι $\widehat{AK\Gamma} = \widehat{\Delta\Lambda Z}$, δίεδ. ΚΑ = δίεδ. ΛΔ καὶ δίεδ, ΚΓ = δίεδ. ΛΖ καὶ ὅτι τὰ στοιχεῖα ταῦτα εἶναι ὁμοίως διατεταγμένα εἰς τὰς δύο τριέδρους. Εἶναι δὲ αὗται ἴσαι, ὡς ἀκολούθως βεβαιούμεθα.

Ἀπόδειξις. Νοοῦμεν τὴν Λ. ΔΕΖ τεθειμένην ἐπὶ τῆς Κ. ΑΒΓ, οὕτως, ὥστε ἡ ἕδρα ΔΛΖ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΑΚΓ μὲ τὴν ΛΔ ἐπὶ τῆς ΚΑ. Τότε ἡ ἕδρα ΔΛΕ φέρεται πρὸς τὸ αὐτὸ μὲ τὴν ΑΚΒ μέρος, ὡς πρὸς τὴν ΑΚΓ ἕνεκα τῆς ὁμοίας διατάξεως τῶν ἴσων στοιχείων. Τὰ δὲ ἐπίπεδα ΔΛΕ, ΖΛΕ ἐφαρμόζουσιν ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ΑΚΒ, ΓΚΒ ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν διέδρων ΚΑ, ΚΓ πρὸς τὰς ΛΔ, ΛΖ ἀντιστοίχως. Καὶ αἱ τομαὶ δὲ ΚΒ, ΛΕ αὐτῶν θὰ ἀφαρμόσωσιν. Ἑπομένως ἡ Λ. ΔΕΖ ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς Κ. ΑΒΓ, ἤτοι αὗται εἶναι ἴσαι.

Ἂν δὲ τὰ ἴσα στοιχεῖα εἶναι ἀνομοίως διατεταγμένα, κατ' ἀνάλογον πρὸς τὸν ἀνωτέρω τρόπον βεβαιούμεθα ὅτι ἡ Λ. ΔΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Κ. Α΄Β΄Γ΄ κατὰ κορυφὴν τῆς Κ. ΑΒΓ.

Παρατήρησις. Εὐκόλως δὲ ἐννοοῦμεν ὅτι δίεδ. ΚΒ = δίεδ. ΛΕ, $\widehat{AKB} = \widehat{\Delta\Lambda E}$, $\widehat{BK\Gamma} = \widehat{E\Lambda Z}$ κ.τ.λ. ὡς ἀνωτέρω.

§ 327. *Θεώρημα ΙΙΙ.* **Ἂν δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχωσι τὰς ἕδρας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ἴσαι ἢ ἡ μία ἰσοῦται πρὸς τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ἄλλης, καθ' ὅσον αἱ ἴσαι ἕδραι εἶναι ὁμοίως ἢ ἀνομοίως διατεταγμέναι** (σχ. 247).

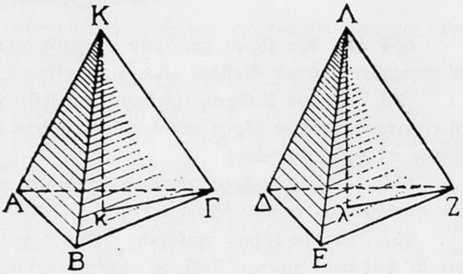
Ἔστω ὅτι αἱ τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι Κ. ΑΒΓ, Λ. ΔΕΖ ἔχουσιν ΑΚΒ = ΔΛΕ, ΒΚΓ = ΕΛΖ, ΑΚΓ = ΔΛΖ καὶ ὅτι αὗται εἶναι ὁμοίως διατεταγμέναι εἰς τὰς δύο τριέδρους. Αἱ στερεαὶ αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Ἀπόδειξις. Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ὁρίζομεν τμήματα ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΛΔ, ΛΕ, ΛΖ πάντα ἴσα καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΚΒ, ΒΚΓ, ΓΚΑ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ ΔΛΕ, ΕΛΖ, ΖΛΔ.

Διὰ ταῦτα δὲ εἶναι ΑΒ = ΔΕ, ΒΓ = ΕΖ, ΓΑ = ΖΔ. Καὶ τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσα.

Ἂν δὲ νοήσωμεν τὰς Κκ, Λλ ἀντιστοίχως καθέτους ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓ, ΔΕΖ παρατηροῦμεν ὅτι: Ἐπειδὴ ΚΑ = ΚΒ = ΚΓ εἶναι καὶ κΑ = κΒ = κΓ. Τὸ κ λοιπὸν εἶναι κέντρον τῆς περὶ τὸ ΑΒΓ περιγεγραμμένης περιφερείας.

Ὁμοίως δὲ βλέπομεν ὅτι καὶ τὸ λ εἶναι κέντρον τῆς περὶ τὸ ΔΕΖ περιγεγραμμένης περιφερείας.



Σχ. 247

Καὶ ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα καὶ αἱ περιφέρειαι αὗται εἶναι ἴσαι καὶ κΓ = λΖ.

Τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΚκΓ, ΛλΖ, εἶναι λοιπὸν ἴσα καὶ διὰ τοῦτο εἶναι Κκ = Λλ.

Ἐὰν λοιπὸν νοήσωμεν ὅτι τὸ σχῆμα ΛΔΕΖ τίθεται οὕτως, ὥστε τὸ τρίγωνον ΔΕΖ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ, τὸ λ θὰ συμπέσῃ μὲ κ καὶ τὸ Λ θὰ φέρεται πρὸς τὸ αὐτὸ μὲ τὸ Κ μέρος ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ, ἕνεκα τῆς ὁμοίας διατάξεως τῶν ἴσων στοιχείων. Ἑπομένως θὰ συμπέσῃ ἡ Λλ μὲ τὴν Κκ καὶ τὸ Λ μὲ τὸ Κ.

Αἱ ἀκμαὶ λοιπὸν ΛΔ, ΛΕ, ΛΖ ἐφαρμόζουσιν ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ καὶ αἱ στερεαὶ γωνίαι ἐφαρμόζουσιν. Εἶναι λοιπὸν αὗται ἴσαι.

Ἂν τὰ προηγούμενα στοιχεῖα εἶναι ἀνομοίως διατεταγμένα, τὰ τῶν Κ.Α′Β′Γ′, Λ. ΔΕΖ εἶναι ὁμοίως ἴσα καὶ ὁμοίως διατεταγμένα. Ἑπομένως ἡ Λ.ΔΕΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Κ. Α′Β′Γ′.

Παρατήρησις. Κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς Λ. ΔΕΖ ἐπὶ τῆς Κ.ΑΒΓ ἢ ἐπὶ τῆς Κ.Α′Β′Γ′, βλέπομεν ὅτι αἱ ἀπέναντι ἴσων ἑδρῶν δίεδροι γωνίαι αὐτῶν ἐφαρμόζουσιν, ἤτοι εἶναι ἴσαι.

§ 328. *Θεώρημα IV.* **Ἂν δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι Κ καὶ Λ ἔχωσι τὰς διέδρους γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, θὰ ἔχωσι καὶ τὰς ἀπέναντι ἕδρας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν καὶ θὰ εἶναι ἴσαι ἢ κατὰ κορυφήν.**

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν Κ′, Λ′ αἱ παραπληρωματικαὶ τῶν Κ καὶ Λ. Γνωρίζομεν (§ 320 Πόρ. II) ὅτι αἱ Κ′, Λ′ θὰ ἔχωσι τὰς ἕδρας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν. Ἕνεκα δὲ τούτου θὰ ἔχωσι καὶ τὰς διέδρους ἴσας, μίαν πρὸς μίαν (§ 327).

Αἱ παραπληρωματικαὶ αὐτῶν Κ καὶ Λ θὰ ἔχωσι τὰς ἕδρας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν (§ 320 Πόρ. II) καὶ θὰ εἶναι ἴσαι ἢ κατὰ κορυφὴν (§ 327).

Ἀσκήσεις

664. Ἂν δύο ἕδραι τριέδρου στερεᾶς γωνίας εἶναι ἴσαι, νὰ συγκριθῶσιν αἱ ἀπέναντι τούτων δίεδροι γωνίαι αὐτῆς.

665. Ἂν δύο δίεδροι τριέδρου στερεᾶς γωνίας εἶναι ἴσαι νὰ συγκριθῶσιν αἱ ἀπέναντι τούτων ἕδραι αὐτῆς. (Ἐργασία μὴ στηριζομένη ἐπὶ τῶν κατὰ κορυφὴν στερεῶν γωνιῶν).

666. Ἂν δύο δίεδροι τριέδρου στερεᾶς γωνίας εἶναι ἄνισοι, νὰ συγκριθῶσιν αἱ ἀπέναντι αὐτῶν ἕδραι αὐτῆς.

667. Ἂν δύο ἕδραι τριέδρου στερεᾶς γωνίας εἶναι ἄνισοι, νὰ συγκριθῶσιν αἱ ἀπέναντι τούτων δίεδροι γωνίαι αὐτῆς.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Ε΄ βιβλίου.

668. Μία εὐθεῖα ΟΓ κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου δύο ἄλλων εὐθειῶν ΟΑ, ΟΒ. Ἓν δὲ σημεῖον Δ κεῖται ἐκτὸς τῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ. Νὰ εὕρητε τὸν γεωμ. τόπον τῶν κοινῶν σημείων τῶν ἐπιπέδων ΟΑΔ, ΟΒΔ, ΟΓΔ.

669. Νὰ εὕρητε τὸν γεωμ. τόπον τῶν σημείων, ὧν ἕκαστον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς κορυφὰς δοθέντος τριγώνου.

670. Δίδεται ἐπίπεδον Π καὶ ἐκτὸς αὐτοῦ τρία σημεῖα Α, Β, Γ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας. Νὰ ἐξετάσητε πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρισθῇ σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου Π τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι ΜΑ = ΜΒ = ΜΓ.

671. Εἰς τὸ κέντρον Κ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ὑψοῦται κάθετος ΚΔ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου τούτου καὶ φέρομεν εὐθεῖαν ΔΕ κάθετον ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΑΒ. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι ὁ ποὺς Ε εἶναι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς ΑΒ.

672. Νὰ εὕρητε τὸν γεωμ. τόπον τῶν σημείων, ὧν ἕκαστον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς τριγώνου ΑΒΓ.

673. Δίδεται ἐπίπεδον Π καὶ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς αὐτό. Νὰ ἐξετάσητε πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρισθῇ ἓν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ Π καὶ διερχόμενον διὰ τῆς Ε.

674. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι Ε καὶ Ε΄. Νὰ ἐξετάσητε πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρισθῶσι δύο ἐπίπεδα παράλληλα καὶ διερχόμενα ἀνὰ ἓν διὰ τῶν εὐθειῶν Ε καὶ Ε.΄

675. Ἓν εὐθ. τμῆμα ΒΑ προβάλλεται ἐπὶ ἓν ἐπίπεδον Π κατὰ τμῆμα Βα, ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ΒΑ. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς κλίσεως τῆς εὐθείας ΑΒ πρὸς τὸ Π.

676. Ἂν ΑΒ εἶναι ἡ ἀπόστασις δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν Ε καὶ Ε΄ καὶ Π τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει δίχα καὶ καθέτως τὴν ἀπόστασιν ΑΒ, νὰ ἀποδεί-

ξητε ὅτι : Ἂν Γ, Γ΄ εἶναι ἀντιστοίχως τυχόντα σημεῖα τῶν Ε, Ε΄, τὸ τμῆμα ΓΓ΄ διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ Π.

677. Δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ τέμνονται κατὰ εὐθεῖαν ΓΔ. Μία δὲ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Ρ καὶ προβάλλεται ἐπὶ τὸ Π κατὰ τὴν εὐθεῖαν αβ. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι αἱ εὐθεῖαι αβ καὶ ΓΔ εἶναι κάθετοι.

678. Νὰ εὕρητε τὸν γεωμ. τόπον τῶν σημείων, ὧν ἕκαστον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς ἕδρας δοθείσης διέδρου γωνίας.

679. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διχοτομοῦσι τάς διέδρους γωνίας μιᾶς τριέδρου στερεᾶς γωνίας, διέρχονται ἀπὸ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

680. Νὰ συγκρίνητε τὰς ἀποστάσεις τῶν ἄκρων τῆς μιᾶς διαγωνίου ΑΓ ἑνὸς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ἀπὸ τυχὸν ἐπίπεδον Π, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὴν ἄλλην διαγώνιον ΒΔ τοῦ αὐτοῦ παραλληλογράμμου

681. Ἔστωσαν α, α΄ αἱ προβολαὶ ἑνὸς σημείου Α ἐπὶ τὰς ἕδρας Ε, Ε΄, μιᾶς διέδρου γωνίας ΕΓΔΕ΄. Ἂν ἡ αβ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ΓΔ εἰς τὸ σημεῖον β αὐτῆς, νὰ ἀποδείξητε ὅτι καὶ ἡ α΄β εἶναι κάθετος ἐπὶ τήν ΓΔ.

682. Ἐκ σημείου β τῆς ἀκμῆς ΓΔ διέδρου γωνίας ΕΓΔΕ΄ ἄγονται εὐθεῖαι βα, βα΄, κάθετοι ἐπὶ τὴν ΓΔ καὶ κείμεναι ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ἑδρῶν Ε, Ε΄. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι δύο σημεῖα α, α΄ αὐτῶν εἶναι προβολαὶ ἑνὸς σημείου Α ἐπὶ τὰς ἕδρας ταύτας.

683. Ἂν μία τουλάχιστον πλευρὰ ὀρθῆς γωνίας εἶναι παράλληλος πρὸς προβολικὸν ἐπίπεδον, νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἡ προβολὴ τῆς ὀρθῆς ταύτης γωνίας εἶναι ὀρθὴ γωνία.

684. Νὰ ἐξετάσητε τίνος εἴδους γωνία εἶναι ἡ προβολὴ ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ ἐπίπεδον, ἂν αἱ πλευραὶ αὐτῆς τέμνωσι τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον.

685. Νὰ εὕρητε τὸν γεωμ. τόπον τῶν σημείων, ὧν ἕκαστον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ δύο εὐθειῶν τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

686. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα τέμνουσι δίχα καὶ καθέτως τὰς ἕδρας τριέδρου στερεᾶς γωνίας, διέρχονται ἀπὸ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

687. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι τά ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἀπὸ τὰς ἀκμὰς καὶ ἀπὸ τὰς διχοτόμους τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν τριέδρου στερεᾶς γωνίας, διέρχονται ἀπὸ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

688. Ἂν μία δίεδρος γωνία τριέδρου στερεᾶς γωνίας εἶναι ὀρθή, αἱ δὲ ἕδραι τῆς στερεᾶς εἶναι ὀξεῖαι, νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἡ τομὴ τῆς στερεᾶς ταύτης γωνίας ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ μίαν ἀκμὴν αὐτῆς εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον.

689. Ἔστω Κ.ΑΒΓ μία τρισορθογώνιος τρίεδρος στερεὰ γωνία καὶ ΑΒΓ τυχοῦσα ἐπίπεδος τομὴ αὐτῆς μὴ διερχομένη διὰ τῆς κορυφῆς Κ. Ἂν κ εἶναι ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς Κ ἐπί τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὸ κ εἶναι ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

690. Ὑπὸ τὰς προηγουμένας προϋποθέσεις νὰ ἀποδείξητε ὅτι μεταξὺ τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΑΒΚ, ΑΒκ ὑφίσταται ἡ ἀναλογία

$$(\text{ΑΒΓ}) : (\text{ΑΚΒ}) = (\text{ΑΚΒ}) : (\text{ΑκΒ}).$$

691. Ὑπὸ τὰς αὐτὰς προϋποθέσεις νὰ ἀποδείξητε ὅτι :

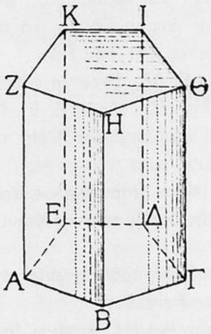
$$(\text{ΑΒΓ})^2 = (\text{ΑΚΒ})^2 + (\text{ΑΚΓ})^2 + (\text{ΒΚΓ})^2 .$$

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'

1. ΤΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ

§ 329. Τί εἶναι πολύεδρα καὶ ποῖα εἶναι τὰ στοιχεῖα αὐτῶν. Παρατηροῦντες τὸ σῶμα ΑΘ (σχ. 248) βλέπομεν ὅτι τοῦτο περικλείεται ἀπὸ ἐπίπεδα ἀπὸ ὅλα τὰ μέρη.



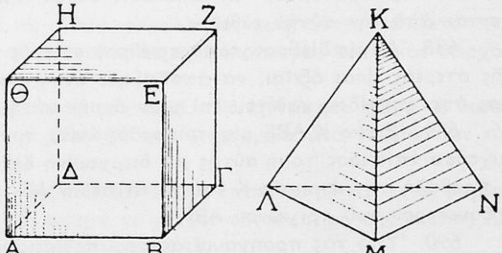
Σχ. 248

Τὸ σῶμα τοῦτο λέγεται **πολύεδρον.** Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὰ σώματα ΑΖ, ΚΛΜΝ (σχ. 249) εἶναι πολύεδρα. Ὥστε: **Πολύεδρον εἶναι σῶμα, τὸ ὁποῖον περικλείεται πανταχόθεν ἀπὸ ἐπίπεδα.**

Τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα περικλείουσιν ἓν πολύεδρον, λέγονται **ἕδραι** αὐτοῦ.

Παρατηροῦμεν ὅτι τρία ἐπίπεδα διερχόμενα ἀπὸ ἓν σημεῖον σχηματίζουσι στερεὰν γωνίαν, ἡ ὁποία δὲν κλείει τὸν χῶρον ἀπὸ ὅλα τὰ μέρη. Χρειάζεται λοιπὸν ἓν τοὐλάχιστον ἐπίπεδον ἀκόμη, διὰ νὰ σχηματισθῇ πολύεδρον. Ἑπομένως δὲν ὑπάρχει πολύεδρον μὲ ἕδρας ὀλιγωτέρας τῶν τεσσάρων.

Ὥστε τὰ πολύεδρα ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑδρῶν διακρίνονται εἰς **τετράεδρα, πεντάεδρα, ἑξάεδρα** κ.τ.λ. Π.χ. τὸ ΚΛΜΝ εἶναι τετράεδρον, τὸ ΑΖ εἶναι ἑξάεδρον (σχ. 249), τὸ ΑΘ ἑπτάεδρον (σχ. 248).



Σχ. 249

Αἱ ἕδραι ἑκάστου πολυέδρου σχηματίζουσι διέδρους καὶ στερεὰς γωνίας. Αὗται ἀνήκουσι προφανῶς καὶ εἰς τὸ πολύεδρον καὶ λέγονται δίεδροι καὶ στερεαὶ γωνίαι τοῦ πολυέδρου.

Ἐπίσης αἱ ἀκμαὶ καὶ αἱ κορυφαὶ τῶν στερεῶν γωνιῶν ἑνὸς πολυέδρου λέγονται ἀκμαὶ καὶ κορυφαὶ τοῦ πολυέδρου τούτου.

Αἱ γωνίαι τῶν ἑδρῶν ἑνὸς πολυέδρου λέγονται **ἐπίπεδοι γωνίαι** αὐτοῦ.

Τὸ εὐθ. τμῆμα ΒΗ (σχ. 249) ὁρίζεται ἀπὸ δύο κορυφὰς ἑνὸς πολυέδρου, αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται εἰς τὴν αὐτὴν ἕδραν. Τοῦτο λέγεται ἰδιαιτέρως **διαγώνιος** τοῦ πολυέδρου. Ὁμοίως τὰ τμήματα ΔΕ, ΓΘ εἶναι διαγώνιοι τοῦ αὐτοῦ πολυέδρου διὰ τὸν αὐτὸν λόγον Ὥστε :

Διαγώνιος πολυέδρου λέγεται πᾶν εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ δύο κορυφὰς αὐτοῦ, αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται εἰς τὴν αὐτὴν ἕδραν.

Ἂν νοήσωμεν ὅτι μία τυχοῦσα ἕδρα τοῦ πολυέδρου ΑΘ (σχ. 248) προεκτείνεται καὶ κατὰ τὰς δύο διαστάσεις αὐτῆς, βλέπομεν ὅτι ὅλον τὸ πολύεδρον μένει πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἕδρας ταύτης. Διὰ τοῦτο τὸ ΑΘ λέγεται **κυρτὸν** πολύεδρον.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὰ σώματα ΑΖ, ΚΛΜΝ (σχ. 249) εἶναι κυρτὰ πολύεδρα. Ὥστε :

Ἓν πολύεδρον λέγεται κυρτόν, ἂν ἑκάστη ἕδρα αὐτοῦ προεκτεινομένη ἀφήνῃ ὁλόκληρον τὸ πολύεδρον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος.

Ἀσκήσεις

692. Νὰ ὀνομάσητε τὰς κορυφάς, ἀκμὰς καὶ διέδρους γωνίας τοῦ τετραέδρου ΚΛΜΝ (σχ. 249).

693. Νὰ ὀνομάσητε τὰς διαγωνίους τοῦ ἑξαέδρου ΑΖ (σχ. 249).

694. Τί ἀξιοπαρατήρητον συμβαίνει εἰς τὸ τετράεδρον ΚΛΜΝ σχετικῶς μὲ τὰς διαγωνίους καὶ διατί ;

695. Προσπαθήσατε νὰ διακρίνητε ἀντιστοιχίας μεταξὺ πολυγώνων καὶ πολυέδρων καὶ τῶν στοιχείων αὐτῶν.

2. ΕΙΔΗ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ – ΠΡΙΣΜΑΤΑ

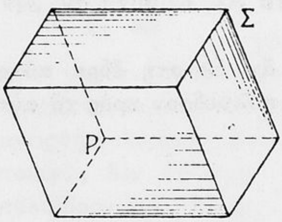
§ 330. **Ποῖα πολύεδρα λέγονται πρίσματα καὶ ποῖα εἶναι τὰ στοιχεῖα αὐτῶν.** Ἔστω τυχὸν κυρτὸν ἐπίπεδον σχῆμα ΑΒΓΔΕ (σχ. 248). Ἂς νοήσωμεν εὐθ. τμήματα ΑΖ, ΒΗ, ΓΘ, ΔΙ, ΕΚ πάντα ἴσα, παράλληλα, ὁμόρροπα καὶ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔΕ.

Ἂν νοήσωμεν καὶ τὰ εὐθ. τμήματα ΖΗ, ΖΚ, ΚΙ, ΙΘ, ΘΗ, σχηματίζονται τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΗΖ, ΒΓΘΗ, ΓΔΙΘ, ΔΕΚΙ, ΑΕΚΖ. Ἀπὸ αὐτὰ ἐννοοῦμεν ὅτι τὰ εὐθ. τμήματα ΖΗ, ΗΘ, ΘΙ, ΙΚ, ΚΖ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα καὶ παράλληλα πρὸς τὰ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ.

Ἕπεται λοιπὸν ὅτι $\widehat{A}=\widehat{Z}$, $\widehat{B}=\widehat{H}$ κ.λ.π., ὅτι αἱ γωνίαι Ζ,Η,Θ, κ.λ.π. κεῖνται εἰς ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ΑΒΓΔΕ καὶ ὅτι αἱ ἕδραι ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΙΚ εἶναι ἴσαι.

Τὸ οὕτω σχηματιζόμενον πολύεδρον λέγεται ἰδιαιτέρως **πρῖσμα.** Δηλαδή:

Πρῖσμα εἶναι πολύεδρον, τοῦ ὁποίου δύο ἕδραι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, αἱ δὲ ἄλλαι εἶναι παραλληλόγραμμα.



Σχ. 250

Αἱ ἴσαι καὶ παράλληλοι ἕδραι ἑνὸς πρίσματος λέγονται **βάσεις** αὐτοῦ. Αἱ δὲ ἄλλαι λέγονται **παράπλευροι ἕδραι.**

Ἂν αἱ βάσεις ἑνὸς πρίσματος εἶναι τρίγωνα, τοῦτο λέγεται **τριγωνικὸν** πρῖσμα.

Ἂν αἱ βάσεις εἶναι τυχόντα τετράπλευρα, τὸ πρῖσμα λέγεται **τετραγωνικὸν** κ.τ.λ.

Ἂν αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι ὅλαι ὀρθογώνια, τὸ πρῖσμα λέγεται **ὀρθόν.**

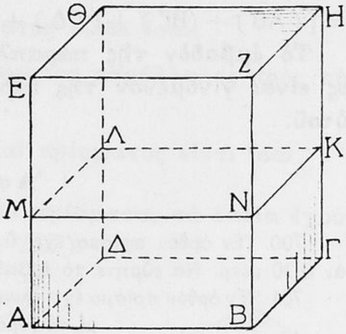
Τὰ μὴ ὀρθὰ πρίσματα λέγονται **πλάγια.** Π.χ. τὸ ΑΘ (σχ. 248) εἶναι ὀρθόν, τὸ δὲ ΡΣ (σχ. 250) εἶναι πλάγιον πρῖσμα.

Ἡ ἀπόστασις τῶν βάσεων ἑνὸς πρίσματος λέγεται **ὕψος** αὐτοῦ.

Αἱ ἐκτὸς τῶν βάσεων πλευραὶ τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν πρίσματος λέγονται ἰδιαιτέρως **πλευραὶ** τοῦ πρίσματος. Π. χ. τὰ τμήματα ΑΖ, ΒΗ, ΓΘ κ.τ.λ. εἶναι πλευραὶ τοῦ πρίσματος ΑΘ (σχ. 248). Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο εἶναι ὀρθὸν πρῖσμα, ἑκάστη πλευρὰ εἶναι καὶ ὕψος αὐτοῦ. Αἱ πλευραὶ π.χ. ΑΖ, ΔΙ διέρχονται ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς διαγωνίου ΑΔ τῆς βάσεως. Αὗται ὁρίζουσι τὸ ἐπίπεδον ΑΔΙΖ (σχ. 248).

Πᾶν τοιοῦτον ἐπίπεδον λέγεται **διαγώνιον ἐπίπεδον** τοῦ πρίσματος.

Ἀπὸ ἓν σημεῖον Κ μιᾶς πλευρᾶς ΓΗ πρίσματος φέρομεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν πλευρὰν ταύτην (σχ. 251). Τοῦτο εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς καὶ τέμνει τὸ πρῖσμα κατὰ τὸ σχῆμα ΚΛΜΝ.



Σχ. 251

Τοῦτο λέγεται **κάθετος τομὴ** τοῦ ΑΗ (σχ. 251).

Ἀσκήσεις

696. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἕκαστον διαγώνιον ἐπίπεδον πρίσματος τέμνει τὰς βάσεις κατὰ διαγωνίους αὐτῶν ἴσας καὶ παραλλήλους.

697. Ἑκάστη βάσις πρίσματος ἔχει ν πλευράς. Νὰ εὕρητε τὸν ἀριθμὸν τῶν διαγωνίων ἐπιπέδων αὐτοῦ.

698. Ἂν δύο διαγώνια ἐπίπεδα ὀρθοῦ πρίσματος τέμνωνται, νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἡ τομὴ αὐτῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς βάσεις.

699. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι πᾶσα κάθετος τομὴ ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις αὐτοῦ.

§ **331.** *Πρόβλημα.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος ἐκ τοῦ ὕψους καὶ τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως αὐτοῦ.**

Λύσις. Ἔστω ΑΗ τυχὸν ὀρθὸν πρῖσμα, Ε τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτοῦ καὶ υ τὸ ὕψος ΑΕ αὐτοῦ (σχ. 251). Εἶναι λοιπὸν

$$\text{Ε} = (\text{ΑΒΖΕ}) + (\text{ΒΓΗΖ}) + (\text{ΓΔΘΗ}) + (\text{ΔΑΕΘ}) \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ παράπλευραι ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια, θὰ εἶναι

$$(ABZE) = (AB)(AE) = (AB) \cdot \upsilon, \quad (B\Gamma HZ) = (B\Gamma) \cdot \upsilon,$$
$$(\Gamma\Delta\Theta H) = (\Gamma\Delta) \cdot \upsilon, \quad (\Delta AE\Theta) = (A\Delta) \cdot \upsilon.$$

Ἡ (1) λοιπὸν γίνεται

$E = [(AB) + (B\Gamma) + (\Gamma\Delta) + (\Delta A)] \cdot \upsilon$, ἤτοι:

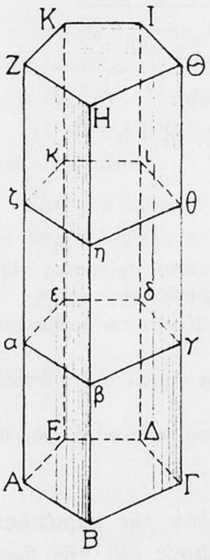
Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι γινόμενον τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις

700. Ἓν ὀρθὸν πρῖσμα ἔχει ὕψος 2 μέτ. καὶ βάσιν τετράγωνον μὲ πλευρὰν 0,30 μέτρ. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτοῦ.

701. Ἓν ὀρθὸν πρῖσμα ἔχει ὕψος, 2,50 μέτρ. καὶ βάσεις ἰσόπλευρα τρίγωνα μὲ πλευρὰν 0,25 μέτρ. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

702. Ἓν ὀρθὸν πρῖσμα ἔχει ὕψος 0,20 μέτρ. παράπλευρον ἐπιφάνειαν 0,048 τετ. μέτρ. καὶ βάσεις ρόμβους. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τῶν ρόμβων τούτων.



Σχ. 252

3. ΓΕΝΙΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΡΙΣΜΑΤΩΝ

§ 332. Νὰ συγκριθῶσι δύο παράλληλοι τομαὶ αβγδε, ζηθικ πρίσματος ΑΘ (σχ. 252).

Αἱ τομαὶ αβ, ζη τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων αβγδε, ζηθικ ὑπὸ τοῦ ΑΒΗΖ εἶναι παράλληλοι. Ἐπειδὴ δὲ καὶ αἱ αζ, βη εἶναι παράλληλοι· τὸ τετράπλευρον αβηζ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἕνεκα δὲ τούτου αἱ πλευραὶ αβ, ζη αὐτοῦ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι αἱ πλευραὶ βγ, γδ, δε, εα εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι καὶ παράλληλοι πρὸς τὰς ηθ, θι, ικ, κζ.

Ἕνεκα δὲ τῆς παραλληλίας ταύτης εἶναι

$$\widehat{\alpha} = \widehat{\zeta}, \quad \widehat{\beta} = \widehat{\eta}, \quad \widehat{\gamma} = \widehat{\theta}, \quad \widehat{\delta} = \widehat{\iota}, \quad \widehat{\varepsilon} = \widehat{\kappa}.$$

Τὰ εὐθ. σχήματα λοιπὸν αβγδε καὶ ζηθικ εἶναι ἴσα. Βλέπομεν δηλ. ὅτι:

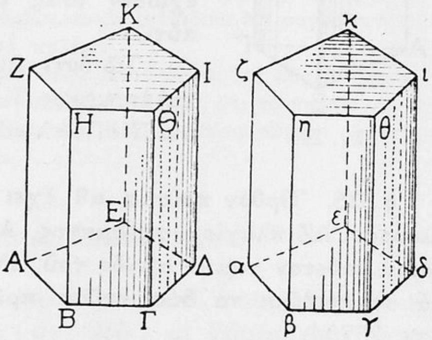
Δύο παράλληλοι τομαὶ πρίσματος εἶναι ἴσαι.

Πόρισμα Ι. **Πᾶσα τομὴ πρίσματος παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ εἶναι ἴση πρὸς αὐτήν.**

Πόρισμα ΙΙ. **Αἱ κάθετοι τομαὶ πρίσματος εἶναι ἴσαι.**

§ 333. Νὰ συγκριθῶσι δύο ὀρθὰ πρίσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη. (σχ. 253).

Ἂν νοήσωμεν ὅτι τὸ ἓν πρῖσμα αι τίθεται ἐπὶ τοῦ ΑΙ οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αβγδε νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΑΒΓΔΕ, ἡ πλευρὰ αζ θὰ γίνῃ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ, εἰς τὸ σημεῖον Α. Θὰ συμπέσῃ λοιπὸν μὲ τὴν ΑΖ. Ἐπειδὴ δὲ ΑΖ = αζ, ἡ κορυφὴ ζ θὰ συμπέσῃ μὲ τὴν Ζ.



Σχ. 253

Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι καὶ αἱ ἄλλαι κορυφαὶ η, θ, ι, κ συμπίπτουσιν ἀντιστοίχως μὲ τὰς Η, Θ, Ι, Κ. Τὰ δύο λοιπὸν πρίσματα ἐφαρμόζουσι καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσα. Ὥστε:

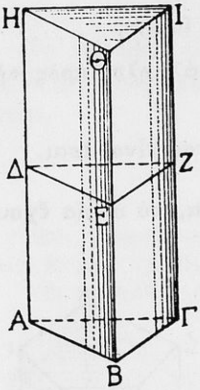
Ἂν δύο ὀρθὰ πρίσματα ἔχωσιν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη, εἶναι ἴσα.

Πόρισμα. **Ἂν δύο ὀρθὰ πρίσματα ἔχωσιν ἴσα ὕψη καὶ ἰσοδυνάμους βάσεις, εἶναι ἰσοδύναμα.**

§ 334. Νὰ ἐξετασθῇ τί πάσχει ἓν ὀρθὸν πρῖσμα, ἂν ἡ μὲν βάσις μείνῃ ἀμετάβλητος, τὸ δὲ ὕψος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν.

Ἔστω ὀρθὸν πρῖσμα ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 254). Ἐπὶ τῶν προεκτάσεων τῶν πλευρῶν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς βάσεως ΔΕΖ ὁρίζομεν τμήματα ΔΗ, ΕΘ, ΖΙ ἴσα πρὸς τὸ ὕψος.

Τὰ πρίσματα ΑΒΓΔΕΖ, ΔΕΖΗΘΙ εἶναι ἴσα (§ 333). Ἑπομένως τὸ ΑΒΓΗΘΙ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΑΒΓΔΕΖ.



Σχ. 254

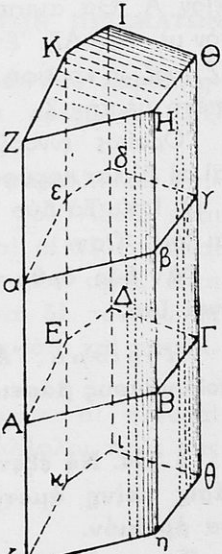
Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι, ἂν τὸ ὕψος τριπλασιασθῇ καὶ τὸ πρίσμα τριπλασιάζεται κ.τ.λ. Ἑπομένως (§ 217) συμπεραίνομεν ὅτι:

Ἂν τὸ ὕψος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ οἱονδήποτε ἀριθμὸν λ καὶ τὸ πρῖσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Πόρισμα. **Ἂν δύο ὀρθὰ πρίσματα ἔχωσιν ἴσας βάσεις, εἶναι ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.**

Τῷ ὄντι, ἂν $υ' : υ = λ$, θὰ εἶναι $υ' = υ \cdot λ$ καὶ ἑπομένως $Π' = Π \cdot λ$, Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι $Π' : Π = λ = υ' : υ$.

§ 335. Ὀρθὸν πρῖσμα αθ ἔχει ὕψος αζ ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΖ πλαγίου πρίσματος ΑΘ καὶ βάσιν κάθετον τομὴν αβγδε τοῦ πλαγίου. Νὰ συγκριθῶσι τὰ δύο ταῦτα πρίσματα (σχ. 255).



Σχ. 255

Ἐπειδὴ εἶναι $αζ = ΑΖ \rangle Αα$, ἡ ἄλλη βάσις ζηθικ τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος κεῖται ἐκτὸς τοῦ πλαγίου. Τὰ πρίσματα λοιπὸν ταῦτα ἀποτελοῦνται ἀπὸ κοινὸν μέρος Αγ καὶ ἀπὸ τὰ μὴ κοινὰ μέρη αθ καὶ ζΓ.

Ἐπειδὴ δὲ $Αα + Αζ = Αα + αΖ$, ἕπεται ὅτι $Αζ = αΖ$.

Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι:

$Βη = βΗ$, $Γθ = γΘ$, $Δι = δΙ$, $Εκ = εΚ$.

Ἂν δὲ νοήσωμεν ὅτι τὸ ζΓ τίθεται ἐπὶ τοῦ αθ, οὕτως ὥστε ἡ βάσις ζηθικ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης αβγδε, βλέπομεν ὅτι ἡ ζΑ γίνεται κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αβγδε καὶ ἑπομένως συμπίπτει μὲ τὴν αΖ καὶ ἡ κορυφὴ Α συμπίπτει μὲ τὴν Ζ.

Ὁμοίως δὲ ἐννοοῦμεν ὅτι αἱ κορυφαὶ Β,Γ,Δ,Ε, συμπίπτουσιν ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν Η,Θ,Ι,Κ. Τὰ μὴ κοινὰ μέρη λοιπὸν ζΓ καὶ αΘ ἐφαρμόζουσι καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσα. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι τὰ δύο πρίσματα ἀποτελοῦνται ἀπὸ μέρη ἴσα, ἓν πρὸς ἕν, ἤτοι εἶναι ἰσοδύναμα. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Πᾶν πλάγιον πρῖσμα εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθὸν πρῖσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν τὴν κάθετον τομὴν τοῦ πλαγίου καὶ ὕψος ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ.

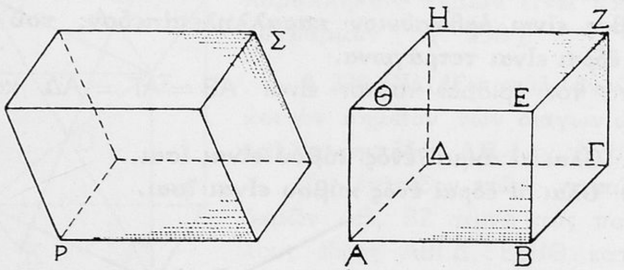
Ἀσκήσεις

703. Ἓν ὀρθὸν πρῖσμα ΑΒΓαβγ ἔχει βάσιν ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. Ἡ πλευρὰ τοῦ πρίσματος τούτου, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α, καὶ τὸ ὕψος ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ὁρίζουσιν ἓν ἐπίπεδον. Νὰ συγκρίνητε τὰ μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα τοῦτο διαιρεῖ τὸ πρῖσμα.

704. Τρεῖς παράλληλοι εὐθεῖαι δὲν κεῖνται πᾶσαι ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου. Ἂν ἐπ' αὐτῶν ὁρισθῶσι τρία τμήματα ἴσα, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πρῖσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰς ταῦτα, εἶναι ἀνεξάρτητον ἀπὸ τὴν θέσιν τῶν ἐπὶ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ἴσων τμημάτων.

4. ΠΕΡΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΩΝ

§ 336. Τί εἶναι παραλληλεπίπεδα καὶ ποῖα εἶναι τὰ εἴδη αὐτῶν. Τοῦ πρίσματος ΡΣ (σχ. 256) αἱ βάσεις εἶναι παραλ-



Σχ. 256

ληλόγραμμα. Ἑπομένως ὅλαι αἱ ἕδραι αὐτοῦ εἶναι παραλληλόγραμμα.

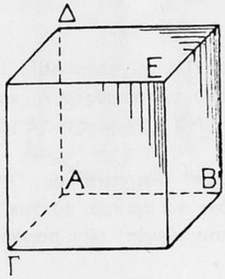
Τὸ πρῖσμα τοῦτο λέγεται ἰδιαιτέρως **παραλληλεπίπεδον**.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὸ πρῖσμα ΑΖ (σχ. 256) λέγεται παραλληλεπίπεδον. Ὥστε:

Παραλληλεπίπεδον εἶναι πρῖσμα, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι παραλληλόγραμμα.

Ἂν αἱ παράπλευροι ἕδραι ἑνὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι ὅλαι ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα, τοῦτο λέγεται γενικῶς **ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον.**

Τοῦ ὀρθοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΖ αἱ βάσεις ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ εἶναι ὀρθογώνια· ἐπομένως ὅλαι αἱ ἕδραι αὐτοῦ εἶναι ὀρθογώνια. Τοῦτο λέγεται ἰδιαιτέρως **ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.** Ὥστε:



Σχ. 257

Ὀρθογώνιον παραλληλλεπίπεδον εἶναι παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια.

Τρεῖς ἀκμαὶ διερχόμεναι ἀπὸ τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου λέγονται **διαστάσεις αὐτοῦ**. Ἡ μία ἀπὸ αὐτὰς λέγεται **μῆκος,** ἡ ἄλλη **πλάτος** καὶ ἡ τρίτη **ὕψος.** Π.χ. τοῦ ΑΖ τὸ μῆκος εἶναι ΑΒ, τὸ πλάτος ΑΔ καὶ τὸ ὕψος ΑΘ (σχ. 256). Αἱ ἕδραι τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ΑΕ (σχ. 257) εἶναι ὅλαι τετράγωνα. Λέγεται δὲ τοῦτο ἰδιαιτέρως **κύβος** ἢ καὶ **κανονικὸν ἑξάεδρον.** Ὥστε:

Κύβος εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι τετράγωνα.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον εἶναι $AB = A\Gamma = A\Delta$ καὶ ἐπομένως:

α΄) Ὅλαι αἱ ἀκμαὶ ἑνὸς κύβου εἶναι ἴσαι.

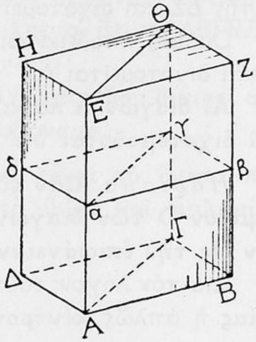
β΄) Ὅλαι αἱ ἕδραι ἑνὸς κύβου εἶναι ἴσαι.

5. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΩΝ

§ 337. **Σχέσις δύο ἀπέναντι ἑδρῶν παραλληλεπιπέδου ΑΘ.** Γνωρίζομεν ὅτι αἱ βάσεις ΑΒΓΔ, ΕΖΘΗ εἶναι ἴσα καὶ παράλληλα παραλληλόγραμμα (σχ. 258).

Ἂς συγκρίνωμεν ἀκόμη δύο ἄλλα ἀπέναντι παραλληλόγραμμα ΑΔΗΕ, ΒΓΘΖ.

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι αἱ πλευραὶ ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, διότι εἶναι ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Δι' ὅμοιον λόγον αἱ ΑΕ, ΕΗ, ΗΔ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι καὶ παράλληλοι πρὸς τὰς ΒΖ, ΖΘ, ΘΓ.



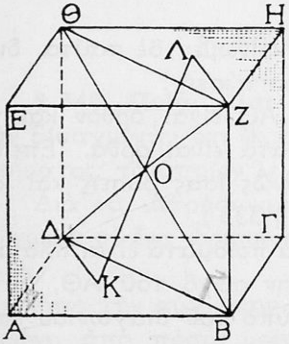
Σχ. 258

Καὶ αἱ γωνίαι δὲ τῶν ἑδρῶν τούτων, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ὑπὸ ἴσων πλευρῶν, εἶναι ἴσαι καὶ τὰ ἐπίπεδα ΑΕΗΔ, ΒΓΘΖ εἶναι παράλληλα (§ 301). Τὰ παραλληλόγραμμα λοιπὸν ταῦτα εἶναι ἴσα καὶ παράλληλα. Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι αἱ ἕδραι ΑΒΖΕ, ΔΓΘΗ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Ὥστε:

Αἱ ἀπέναντι ἕδραι παντὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

Πόρισμα Ι. **Δύο τυχοῦσαι ἀπέναντι ἕδραι παραλληλεπιπέδου δύνανται νά θεωρηθῶσιν ὡς βάσεις αὐτοῦ.**

Πόρισμα ΙΙ. **Πᾶσα τομὴ αβγδ παραλληλεπιπέδου ΑΘ ἔχουσα τὰς κορυφὰς ἐπὶ τεσσάρων παραλλήλων ἀκμῶν εἶναι παραλληλόγραμμον** (σχ. 258).



Σχ. 259

§ 338. Νὰ ἐξετασθῇ, ἂν ὑπάρχῃ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων παραλληλεπιπέδου ΑΗ (σχ. 259).

Τὸ ἐπίπεδον τῶν παραλλήλων ἀκμῶν ΔΘ, ΒΖ τέμνει τὰς παραλλήλους ἕδρας ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κατὰ τὰς παραλλήλους εὐθείας ΒΔ, ΖΘ. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΒΔΘΖ εἶναι παραλληλόγραμμον, αἱ δὲ διαγώνιοι ΔΖ καὶ ΒΘ αὐτοῦ τέμνονται δίχα εἰς τὸ Ο.

Ὁμοίως τὸ ἐπίπεδον τῶν παραλλήλων ἀκμῶν ΔΓ, ΕΖ τέμνει τὰς παραλλήλους ἕδρας ΑΔΘΕ, ΒΓΗΖ κατὰ τὰς παραλλήλους εὐθείας ΔΕ, ΓΖ. Αἱ διαγώνιοι λοιπὸν ΔΖ, ΓΕ τοῦ παραλληλογράμμου ΓΔΕΖ τέμνονται δίχα, ἤτοι καὶ ἡ ΓΕ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον Ο τῆς ΔΖ καὶ διχοτομεῖται ὑπ' αὐτοῦ.

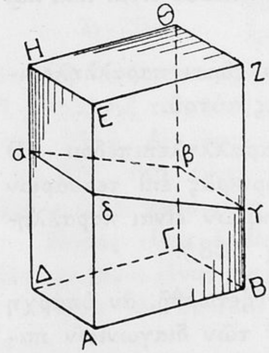
Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ διαγώνιος ΑΗ διέρχεται ἀπὸ τὸ Ο καὶ διχοτομεῖται ὑπ' αὐτοῦ. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Αἱ διαγώνιοι παραλληλεπιπέδου διέρχονται ἀπὸ ἓν σημεῖον καὶ διχοτομοῦνται ὑπ' αὐτοῦ.

Πόρισμα. **Πᾶν εὐθ. τμῆμα ΚΛ διερχόμενον ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον Ο τῶν διαγωνίων παραλληλεπιπέδου καὶ περατούμενον εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ Ο.**

Διὰ τὸν λόγον τοῦτον τὸ σημεῖον Ο λέγεται **κέντρον συμμετρίας** ἢ ἁπλῶς **κέντρον** τοῦ παραλληλεπιπέδου.

§ 339. Σχέσεις τῶν δύο μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα ἓν παραλληλεπίπεδον ΑΘ διαιρεῖται ὑπὸ ἑνὸς διαγωνίου ἐπιπέδου ΑΓΘΕ αὐτοῦ (σχ. 260).



Σχ. 260

Πρῶτον παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἀκμαὶ ΑΕ, ΒΖ, ΓΘ εἶναι ἴσαι, παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι. Ἑπομένως τὸ στερεὸν ΑΒΓΕΖΘ εἶναι τριγωνικὸν πρῖσμα. Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι καὶ τὸ ΑΓΔΕΘΗ εἶναι τριγωνικὸν πρῖσμα.

Διὰ νὰ συγκρίνωμεν δὲ ταῦτα, διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

α') Ἂν τὸ ΑΘ εἶναι ὀρθὸν καὶ τὰ τριγωνικὰ πρίσματα εἶναι ὀρθά. Ἐπειδὴ δὲ ἔχουσι προφανῶς ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη, εἶναι ἴσα (§ 333).

β') Ἂν τὸ ΑΘ εἶναι πλάγιον, καὶ τὰ πρίσματα εἶναι πλάγια. Ἂν δὲ νοήσωμεν τυχοῦσαν κάθετον τομὴν αβγδ τοῦ ΑΘ, αὕτη εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ διαγωνίου ἐπιπέδου ΑΓΘΕ εἰς δύο ἴσα τρίγωνα αβγ, αγδ.

Τὸ αβγ εἶναι κάθετος τομὴ τοῦ πρίσματος ΑΒΓΕΖΘ καὶ ἑπομένως τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθὸν πρῖσμα Π μὲ βάσιν αβγ καὶ ὕψος ἴσον πρὸς ΑΕ (§ 335).

Ὁμοίως τὸ πλάγιον πρῖσμα ΑΓΔΕΘΗ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθὸν πρῖσμα Π′ μὲ βάσιν αγδ καὶ ὕψος ἴσον πρὸς ΑΕ. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ὀρθὰ πρίσματα Π, Π′ εἶναι ἴσα (§ 333), ἕπεται ὅτι τὰ ΑΒΓΕΖΘ, ΑΓΔΕΘΗ εἶναι ἰσοδύναμα. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Ἕκαστον διαγώνιον ἐπίπεδον παραλληλεπιπέδου διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο τριγωνικὰ πρίσματα ἴσα ἢ ἰσοδύναμα.

Πόρισμα. **Πᾶν τριγωνικὸν πρῖσμα εἶναι τὸ ἥμισυ παραλληλεπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ διπλασίαν βάσιν.**

Ἀσκήσεις

705. Ἂν ΑΗ (σχ. 259) εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον μὲ διαστάσεις ΔΑ, ΔΓ, ΔΘ καὶ μίαν διαγώνιον ΔΖ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι :

$$(\Delta Z)^2 = (\Delta A)^2 + (\Delta\Gamma)^2 + (\Delta\Theta)^2.$$

706. Νὰ συγκρίνητε τὰς διαγωνίους ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

707. Νὰ ὁρίσητε τὴν διαγώνιον κύβου συναρτήσει τῆς ἀκμῆς αὐτοῦ.

708. Εἷς κύβος ἔχει διαγώνιον 3 παλαμῶν. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς ἀκμῆς αὐτοῦ.

709. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κύβου εἶναι 24 τετραγωνικαὶ παλάμαι. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου αὐτοῦ.

6. ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΠΡΙΣΜΑΤΩΝ

§ 340. Ποῖαι εἶναι αἱ κυριώτεραι μονάδες ὄγκου. Εἴδομεν εἰς τὴν Εἰσαγωγὴν ὅτι ἕκαστον σῶμα καταλαμβάνει ἓν μέρος τοῦ διαστήματος, τὸ ὁποῖον λέγεται **ὄγκος** τοῦ σώματος τούτου.

Διὰ νὰ μετρήσωμεν τὸν ὄγκον τοῦτον, πρέπει νὰ τὸν συγκρίνωμεν μὲ ἕνα ὡρισμένον ὄγκον, τὸν ὁποῖον λαμβάνομεν ὡς μονάδα.

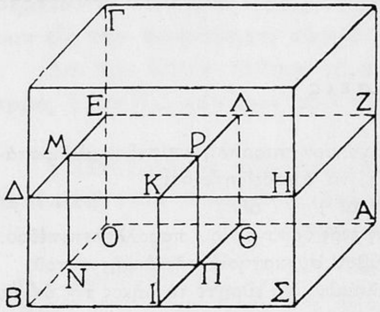
Ἀπὸ τὴν σύγκρισιν αὐτὴν προκύπτει εἷς ἀριθμός. Οὗτος φανερώνει ἀπὸ πόσας μονάδας ἢ καὶ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται ὁ μετρηθεὶς ὄγκος. Αὐτός, ὅπως γνωρίζομεν, εἶναι τὸ μέτρον τοῦ μετρηθέντος ποσοῦ. Λέγεται δὲ ἰδαιτέρως καὶ αὐτὸς ὄγκος τοῦ σώματος.

Εἰς τὸ ἑξῆς, ὅταν θὰ λέγωμεν ὄγκον, θὰ ἐννοοῦμεν αὐτὸν τὸν ἀριθμόν, δηλ. τὸ μέτρον τοῦ σώματος.

Καὶ ἀπὸ τὴν Πρακτικὴν Γεωμετρίαν γνωρίζομεν ὅτι συνήθης μονὰς ὄγκου εἶναι τὸ **κυβικὸν μέτρον** καὶ τὰ μέρη αὐτοῦ **κυβικὴ παλάμη, κυβικὸς δάκτυλος, κυβικὴ γραμμή.**

Εἶναι δὲ ταῦτα κύβοι μὲ ἀκμὴν ἀντιστοίχως 1 μέτρου, 1 παλάμης, 1 δακτύλου, 1 γραμμῆς.

§ **341.** *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἐκ τῶν διαστάσεων αὐτοῦ.**



Σχ. 261

Λύσις. Ἔστω ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΣΓ καὶ διαστάσεις αὐτοῦ αἱ $(ΟΑ) = α$, $(ΟΒ) = β$, $(ΟΓ) = γ$ (σχ. 261).

Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ ὁρίζομεν τμήματα ΟΘ, ΟΝ, ΟΕ ἕκαστον ἴσον πρὸς τὴν μονάδα μήκους. Ἔπειτα ἄγομεν ἐκ τοῦ Ε ἐπίπεδον ΔΕΖ παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΑΟΒ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τὰ ὀρθ. παραλληλεπίπεδα ΟΑΒΓ καὶ ΑΟΒΕ ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν ΟΑΣΒ. Εἶναι λοιπὸν

$$\frac{(ΟΑΒΓ)}{(ΟΑΒΕ)} = \frac{γ}{(ΟΕ)} \quad (\S\ 334 \text{ Πόρ.}).$$

Ἔπειτα φέρομεν ἐκ τοῦ Θ ἐπίπεδον ΙΘΛΚ παράλληλον πρὸς τὴν ἕδραν ΒΟΓ καὶ εὑρίσκομεν ὁμοίως ὅτι $\frac{(ΟΑΒΕ)}{(ΟΘΕΒ)} = \frac{α}{(ΟΘ)}$.

Τέλος ἐκ τοῦ Ν φέρομεν ἐπίπεδον ΝΠΡΜ παράλληλον πρὸς τὴν ἕδραν ΑΟΓ καὶ εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{(ΟΘΕΒ)}{(ΟΘΕΝ)} = \frac{β}{(ΟΝ)}$.

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη τὰς τρεῖς ταύτας ἰσότητας, εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι $\frac{ΟΑΒΓ}{ΟΘΕΝ} = α \cdot β \cdot γ$.

Ἐπειδὴ δὲ ΟΘΕΝ εἶναι ἡ μονὰς τῶν ὄγκων, τὸ α΄ μέλος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ ΣΓ. Εἶναι λοιπὸν $(ΣΓ) = α \cdot β \cdot γ$ (1). Ἤτοι:

Ὁ ὄγκος παντὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι γινόμενον τῶν τριῶν διαστάσεων αὐτοῦ.

Πόρισμα Ι. **Ὁ ὄγκος παντὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.**

Πόρισμα ΙΙ. **Ἂν ἡ ἀκμὴ κύβου εἶναι α, ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι $α^3$.**

Οὕτως, ἐπειδὴ ἡ ἀκμὴ τοῦ κυβικοῦ μέτρου ἔχει μῆκος 10 παλαμῶν, τὸ κυβικὸν μέτρον ἔχει $10^3 = 1000$ κυβ. παλάμας. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι 1 κυβ. παλάμη ἔχει 1000 κυβ. δακτύλους καὶ 1 κυβ. δάκ. ἔχει 1000 κυβ. γραμμάς.

Ἀσκήσεις

710. Ἓν δωμάτιον ἔχει διαστάσεις 4 μέτ., 3 μέτ. καὶ 5 μέτ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τοῦ περιεχομένου ἀέρος.

711. Ἡ αἴθουσα τῆς διδασκαλίας ἑνὸς σχολείου ἔχει διαστάσεις 9 μέτ., 6 μέτ., 4 μέτ. Ἂν εἰς αὐτὴν διδάσκωνται 40 μαθηταί, νὰ εὕρητε πόσον μέρος τοῦ περιεχομένου ἀέρος ἀναλογεῖ εἰς ἕκαστον μαθητήν.

712. Μία δεξαμενὴ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις 2,20 μέτ., 2.60 μέτ., 3 μέτ. Νὰ εὕρητε τὸ βάρος τοῦ ὕδατος, τὸ ὁποῖον χωρεῖ.

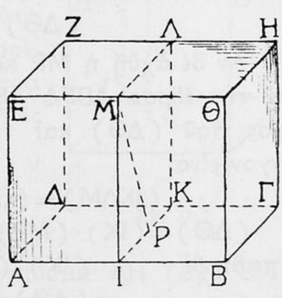
713. Εἷς κύβος ἔχει ἀκμὴν 5 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας καὶ τὸν ὄγκον αὐτοῦ.

714. Εἷς κύβος ἔχει ὄγκον 64 κυβ. ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας του.

715. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας κύβου εἶναι 1,5 τέτ. μέτρ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον του.

716. Ἡ διαγώνιος ἑνὸς κύβου ἔχει μῆκος 1,2 μέτ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτοῦ.

§ 342. *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος ὀρθοῦ ἀλλὰ μὴ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἐκ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους αὐτοῦ.**



Σχ. 262

Λύσις. Ἂν τὸ παραλληλεπίπεδον ΔΘ (σχ. 262) εἶναι ὀρθόν, ἀλλὰ μὴ ὀρθογώνιον, ἡ βάσις ΑΒΓΔ δὲν εἶναι ὀρθογώνιον, αἱ δὲ παράπλευροι ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια. Ἂν λοιπὸν θεωρήσωμεν ὡς βάσεις αὐτοῦ τὰ ὀρθογώνια ΑΔΕΖ, ΒΓΗΘ, τοῦτο θὰ εἶναι πλάγιον πρῖσμα μὲ πλευρὰν ΑΒ.

Ἂν δὲ νοήσωμεν κάθετον τομὴν ΙΚΛΜ, τὸ ΔΘ θὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον Π μὲ βάσιν ΙΚΛΜ καὶ ὕψος ΑΒ (§ 335).

Τώρα παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ΑΒ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΙΚΛΜ, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὰς εὐθείας ΙΜ καὶ ΙΚ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΒΘ, ἕπεται ὅτι ἡ ΙΜ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΘ, ἑπομένως καὶ ἡ ΜΙ κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΒΓΔ. Διὰ τοῦτο δὲ ἡ ΜΙ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΙΚ. Τὸ παραλληλόγραμμον λοιπὸν ΙΚΛΜ εἶναι ὀρθογώνιον, τὸ δὲ Π θὰ εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.

Εἶναι λοιπὸν $(\Delta\Theta) = (\Pi) = (\mathrm{IK\Lambda M}) \cdot (\mathrm{AB})$. (1)

Ἐπειδὴ δὲ $(\mathrm{IK\Lambda M}) = (\mathrm{IK}) \cdot (\mathrm{IM})$, ἡ (1) γίνεται

$$(\Delta\Theta) = (\mathrm{IK}) \cdot (\mathrm{IM}) \cdot (\mathrm{AB}) = (\mathrm{AE}) \cdot [(\mathrm{AB}) \cdot (\mathrm{IK})] \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ δὲ εἴδομεν ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΙΚ.
εἶναι $(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = (\mathrm{AB}) \cdot (\mathrm{IK})$ καὶ ἡ (2) γίνεται

$$(\Delta\Theta) = (\mathrm{AB\Gamma\Delta}) \cdot (\mathrm{AE}) \qquad (3)$$

Συνδυάζοντες τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο μὲ τὸ Πόρ. 1 § 341, βλέπομεν ὅτι:

Ὁ ὄγκος παντὸς ὀρθοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

§ 343. *Πόρισμα III.* **Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἐκ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους αὐτοῦ.**

Λύσις. Ἂν τὸ παραλληλεπίπεδον ΔΘ (σχ. 262) εἶναι πλάγιον καὶ ΙΚΛΜ εἶναι κάθετος τομὴ αὐτοῦ θὰ εἶναι

$$(\Delta\Theta) = (\mathrm{IK\Lambda M}) \cdot (\mathrm{AB}) \qquad (1)$$

Ἂν δὲ ἀχθῇ ἡ ΜΡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΙΚ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΒΓΔ (§ 314). Θὰ εἶναι λοιπὸν τὸ τμῆμα ΜΡ ὕψος τοῦ (ΔΘ) καὶ τοῦ ΙΚΛΜ. Διὰ τὸν τελευταῖον τοῦτον λόγον εἶναι

$(\mathrm{IK\Lambda M}) = (\mathrm{IK}) \cdot (\mathrm{MP})$, ἡ δὲ (1) γίνεται

$$(\Delta\Theta) = (\mathrm{IK}) \cdot (\mathrm{MP}) \cdot (\mathrm{AB}) = [(\mathrm{IK}) \cdot (\mathrm{AB})] \cdot (\mathrm{MP}).$$

Ἐπειδὴ δὲ $(\mathrm{IK}) \cdot (\mathrm{AB}) = (\mathrm{AB\Gamma\Delta})$, ἕπεται ὅτι

$(\Delta\Theta) = (\mathrm{AB\Gamma\Delta}) \cdot (\mathrm{MP})$, ἤτοι:

Ὁ ὄγκος πλαγίου παραλληλεπιπέδου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Γενικὸν Συμπέρασμα. Ἀπὸ τὴν λύσιν τῶν προηγουμένων τριῶν προβλημάτων βλέπομεν γενικῶς ὅτι:

Ὁ ὄγκος παντὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις

717. Ἓν ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον ἔχει ὕψος 8 ἑκατ. καὶ βάσιν ρόμβον μὲ διαγωνίους 6 ἑκατ. καὶ 4 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτοῦ.

718. Ἀπὸ τὸ μέσον Ζ τῆς πλευρᾶς ΑΓ ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν εὐθείας ΖΔ, ΖΕ ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς ΒΓ καὶ ΑΒ αὐτοῦ καὶ μέχρι τῶν ΑΒ, ΒΓ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον ὀρθοῦ παραλληλεπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἔχει ὕψος ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν α ἑκατ. τοῦ τριγώνου καὶ βάσιν τὸ παραλληλόγραμμον ΔΒΕΖ.

719. Ἓν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ ἔχει $(AB) = 2$ παλ., $ΑΔ = 1$ παλ., $A = 45^0$. Ἓν πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἔχει βάσιν τὸ ΑΒΓΔ, ἡ δὲ πλευρὰ ΑΕ αὐτοῦ ἔχει προβολὴν ΑΒ καὶ κλίσιν 45^0 πρὸς τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον ΑΒΓΔ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτοῦ.

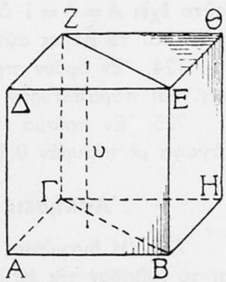
720. Ἓν πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἔχει ὕψος 6 ἑκατ. καὶ βάσιν τετράγωνον μὲ διαγώνιον 6 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτοῦ.

721. Ἓν πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἔχει βάσιν τετράγωνον μὲ πλευρὰν 4 ἑκατ. Ἂν τοῦτο βυθισθῇ εἰς ὕδωρ ἀπεσταγμένον 4^0 Κ, ὑφίσταται ἄνωσιν 60 γραμμαρίων. Νὰ εὕρητε τὸ ὕψος αὐτοῦ.

§ 344. *Πρόβλημα IV.* **Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος Θ πρίσματος ἐκ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους αὐτοῦ.**

Λύσις. Ἔστω πρῶτον τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 263). Ἂν σχηματίσωμεν παραλληλεπίπεδον ΑΘ μὲ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ διπλασίαν βάσιν ΑΒΗΓ, γνωρίζομεν (§ 339 Πόρ.) ὅτι τὸ πρῖσμα ΑΒΓΔΕΖ εἶναι τὸ ἥμισυ αὐτοῦ. Ἑπομένως $Θ = \frac{(ΑΘ)}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ $(ΑΘ) = (ΑΒΗΓ) \cdot υ = 2\,(ΑΒΓ) \cdot υ$, ἕπεται ὅτι:

$$Θ = (ΑΒΓ) \cdot υ \qquad (1)$$

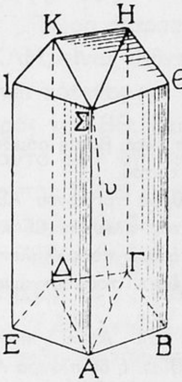


Σχ. 263

Ἔστω ἀκόμη τυχὸν πολυγωνικὸν πρῖσμα ΑΗ (σχ. 264). Τοῦτο διαιρεῖται εἰς τριγωνικὰ πρίσματα μὲ τὰ διαγώνια ἐπίπεδα

ΑΣΓ καὶ ΑΣΔ. Τὰ τριγωνικὰ ταῦτα πρίσματα ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος υ μὲ τὸ ΑΗ καὶ βάσεις τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ.

Ἂν δὲ εἰς ταῦτα ἐφαρμόσωμεν τὴν ἰσότητα (1), εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι (ΑΗ) = (ΑΒΓΔΕ) · υ (2)



Σχ. 264

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Ὁ ὄγκος παντὸς πρίσματος εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Τὸ προηγούμενον λοιπὸν διὰ τὰ παραλληλεπίπεδα γενικὸν συμπέρασμα ἀληθεύει διὰ πᾶν ἐν γένει πρῖσμα.

Πόρισμα Ι. **Ἂν δύο ἰσοϋψῆ πρίσματα ἔχωσιν ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους βάσεις, εἶναι ἰσοδύναμα.**

Πόρισμα ΙΙ. **Δύο ἰσοϋψῆ πρίσματα εἶναι ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν.**

Πόρισμα ΙΙΙ. **Ἂν δύο πρίσματα ἔχωσιν ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους βάσεις, ταῦτα εἶναι ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.**

Ἀσκήσεις

722. Ἓν ὀρθὸν πρῖσμα ἔχει βάσιν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ μὲ καθέτους πλευρὰς 3 ἑκατ. καὶ 4 ἑκατ. τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτοῦ.

723. Ἓν ξύλινον πρῖσμα ἔχει ὕψος 8 ἑκατ. καὶ βάσιν ἓν τραπέζιον ΑΒΓΔ. Τοῦτο ἔχει Α = Δ = 1 ὀρθ., ΑΒ = 5 ἑκατ., ΓΔ = ΑΔ = 4 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον καὶ τὸ βάρος αὐτοῦ, ἂν τὸ ξύλον του ἔχῃ εἰδ. βάρος 0,9.

724. Ἓν ὀρθὸν πρῖσμα ἔχει βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 2,5 ἑκατ. καὶ παράπλευρον ἐπιφάνειαν 15 τετ. ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτοῦ.

725. Ἓν πρῖσμα ἔχει ὕψος 0,40. μέτ. καὶ αἱ βάσεις του εἶναι κανονικὰ ἑξάγωνα μὲ πλευρὰν 0,4. μέτ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Α΄ κεφαλαίου

726. Ἡ διαγώνιος ἑνὸς κύβου ἔχει μῆκος 5 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

727. Ἡ διαφορὰ τῶν ἀκμῶν δύο κύβων εἶναι 0,01 μέτ., τῶν δὲ ὄγκων αὐτῶν 0,000037 κ.μ. Νὰ εὕρητε τοὺς ὄγκους αὐτῶν.

728. Ἓν κυβικὸν δοχεῖον ἔχει ἀκμὴν $\frac{1}{4}$ μέτ. Νὰ εὕρητε τὸ βάρος τοῦ ἐλαίου τὸ ὁποῖον χωρεῖ (Εἰδ. βάρος ἐλαίου 0,915)·

729. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἑνὸς πλαγίου πρίσματος, ἂν ἡ μὲν πλευρὰ αὐτοῦ ἔχει μῆκος 2 παλαμῶν, ἡ δὲ κάθετος τομή του εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον μὲ πλευρὰν 5 ἑκατ.

730. Μία αἴθουσα διδασκαλίας ἔχει διαστάσεις 9 μέτ., 6 μέτ., 4 μέτ. Ἂν εἰς αὐτὴν διδάσκωνται 40 μαθηταί, νὰ εὕρητε πόσον μέρος τοῦ ὀξυγόνου τοῦ ἀέρος αὐτῆς ἀναλογεῖ εἰς ἕκαστον μαθητήν.

731. Μία δεξαμενὴ χωρεῖ 30000 χιλιόγρ. ὕδατος. Τὸ στόμιον αὐτῆς εἶναι ὀρθογώνιον μὲ διαστάσεις 3 μέτ. καὶ 2 μέτ. Νὰ εὕρητε τὸ βάθος αὐτῆς.

732. Μιὰ πλὰξ σάπωνος ἔχει μῆκος 0,14 μέτ., πλάτος δὲ καὶ πάχος ἀνὰ 0,05 μέτ. Νὰ εὕρητε πόσας τοιαύτας πλάκας χωρεῖ ἓν κιβώτιον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐσωτερικὰς διαστάσεις 22 παλ. 10 παλ. καὶ 7 παλ.

733. Ἓν σιδηροῦν πρῖσμα ἔχει ὕψος 12 ἑκατ. καὶ βάσιν ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ ὑποτείνουσαν $5 \cdot \sqrt{2}$ ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ βάρος αὐτοῦ. (Εἰδ. βάρος σιδήρου 7,78).

734. Ἓν πρῖσμα ΑΒΓΖΕΔ πρόκειται νὰ διαιρεθῇ εἰς 3 ἰσοδύναμα μέρη μὲ ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα νὰ διέρχωνται ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΑΖ αὐτοῦ. Νὰ ὁρίσητε τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ πλευρὰ ΒΓ θὰ τμηθῇ ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα ταῦτα.

735. Ἓν ὀρθὸν πρῖσμα ἔχει ὄγκον 1440 κυβ. παλάμας καὶ παράπλευρον ἐπιφάνειαν $480\sqrt{3}$ τετ. παλάμας. Ἂν αἱ βάσεις του εἶναι κανονικὰ ἑξάγωνα νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς αὐτῶν καὶ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος τούτου.

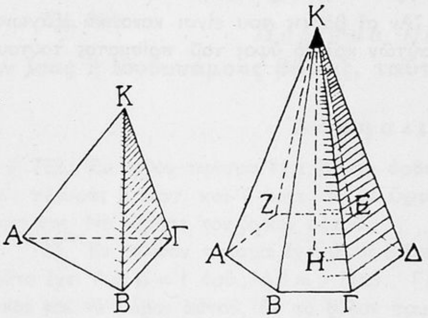
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

1. ΑΙ ΠΥΡΑΜΙΔΕΣ

§ 345. Τί λέγονται πυραμίδες καὶ ποῖα εἶναι τὰ στοιχεῖα αὐτῶν. Ἔστω μία κυρτὴ στερεὰ γωνία Κ (σχ. 265). Ἂν τμήσωμεν αὐτὴν μὲ ἓν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει ὅλας τὰς ἀκμὰς καὶ δὲν διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφήν της, σχηματίζεται ἓν πολύεδρον Κ.ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 265).

Τοῦτο λέγεται ἰδιαιτέρως **πυραμίς.**

Ἂν ἡ στερεὰ γωνία εἶναι τρίεδρος, σχηματίζεται κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἓν τετράεδρον Κ.ΑΒΓ. Καὶ τοῦτο λέγεται πυραμίς. Ὥστε:



Σχ. 265

Πυραμὶς εἶναι πολύεδρον, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν ἑδρῶν κυρτῆς στερεᾶς γωνίας καὶ μιᾶς ἐπιπέδου τομῆς αὐτῆς, ἡ ὁποία τέμνει ὅλας τὰς ἀκμὰς καὶ δὲν διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν αὐτῆς.

Ἡ κορυφὴ Κ τῆς στερεᾶς γωνίας ἀπὸ τὴν ὁποίαν γίνεται μία πυραμίς, λέγεται καὶ **κορυφὴ** τῆς πυραμίδος ταύτης.

Ἡ ἀπέναντι τῆς κορυφῆς ἕδρα μιᾶς πυραμίδος λέγεται **βάσις** αὐτῆς.

Αἱ δὲ ἄλλαι ἕδραι πυραμίδος λέγονται **παράπλευροι** ἕδραι αὐτῆς. Προφανῶς αὗται εἶναι τρίγωνα μὲ κοινὴν κορυφὴν τὴν κορυφὴν τῆς πυραμίδος. Βάσεις δὲ αὐτῶν εἶναι αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος.

Ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς μιᾶς πυραμίδος ἀπὸ τὴν βάσιν αὐτῆς λέγεται **ὕψος** τῆς πυραμίδος ταύτης. Π. χ. ΚΗ εἶναι τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος Κ.ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 265).

Αἱ ἀκμαὶ μιᾶς πυραμίδος, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὴν κορυφήν, λέγονται **πλευραὶ** αὐτῆς. Π.χ. ΚΑ, ΚΒ κ.τ.λ. εἶναι πλευραὶ τῆς πυραμίδος Κ.ΑΒΓΔΕΖ.

Ἂν ἡ βάσις πυραμίδος εἶναι τρίγωνον, τυχὸν τετράπλευρον, πεντάγωνον κ.τ.λ., ἡ πυραμὶς λέγεται ἀντιστοίχως **τριγωνική, τετραγωνική, πενταγωνικὴ κ.τ.λ.**

Μία τριγωνικὴ πυραμίς, π.χ. ἡ Κ.ΑΒΓ, ἔχει 4 ἕδρας, εἶναι δηλ. τετράεδρον. Οἱαδήποτε δὲ ἕδρα αὐτῆς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς βάσις αὐτῆς.

Ἡ βάσις τῆς πυραμίδος Κ.ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 265) εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ. Τὸ δὲ ὕψος ΚΗ διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς βάσεως. Αὐτὴ λέγεται ἰδιαιτέρως **κανονικὴ** πυραμίς. Δηλαδή:

Μία πυραμὶς λέγεται κανονική, ἂν ἡ βάσις αὐτῆς εἶναι κανονικὸν εὐθ. σχῆμα, τὸ δὲ ὕψος τέμνῃ τὴν βάσιν εἰς τὸ κέντρον αὐτῆς.

Ἂν μία τριγωνικὴ πυραμὶς Κ.ΑΒΓ εἶναι κανονικὴ καὶ ὅλαι αἱ ἕδραι αὐτῆς εἶναι ἴσαι, αὕτη λέγεται ἰδιαιτέρως **κανονικὸν τετράεδρον.** Δηλαδή:

Κανονικὸν τετράεδρον εἶναι κανονικὴ τριγωνικὴ πυραμίς, τῆς ὁποίας ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι ἴσαι.

Εἶναι εὐνόητον ὅτι ὅλαι αἱ πλευραὶ κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἴσαι (§ 284). Ἑπομένως αἱ παραπλεύραι ἕδραι αὐτῆς εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα.

Τὸ ὕψος ἑκάστης παραπλεύρου ἕδρας κανονικῆς πυραμίδος λέγεται **ἀπόστημα** αὐτῆς.

Ἀσκήσεις

736. Μία κανονικὴ πυραμὶς ἔχει ὕψος 8 ἑκατ. Ἡ δὲ βάσις αὐτῆς ἔχει ἀκτῖνα 6 ἑκατ. Νὰ εὕρητε πόσον μῆκος ἔχει ἑκάστη πλευρὰ τῆς πυραμίδος ταύτης.

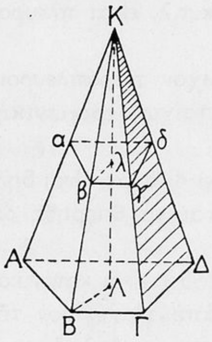
737. Νὰ ἐξετάσητε, ἂν πᾶσα κανονικὴ τριγωνικὴ πυραμὶς εἶναι κανονικὸν τετράεδρον.

738. Νὰ συγκρίνητε ὅλας τὰς ἀκμὰς ἑνὸς κανονικοῦ τετραέδρου. Ἂν δὲ μία ἀκμὴ αὐτοῦ ἔχῃ μῆκος α μονάδων μήκους, νὰ εὕρητε πόσον μῆκος ἔχει τὸ ὕψος αὐτοῦ.

1. ΓΕΝΙΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΥΡΑΜΙΔΩΝ

§ 346. *Θεώρημα.* **Πᾶσα τομὴ αβγδ πυραμίδος Κ.ΑΒΓΔ παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν εἶναι ὁμοία πρὸς αὐτὴν καὶ τέμνει τὰς πλευρὰς καὶ τὸ ὕψος εἰς μέρη ἀνάλογα. Ἂν δὲ λ εἶναι κοινὸν σημεῖον τοῦ ὕψους ΚΛ καὶ τῆς τομῆς αβγδ, θὰ εἶναι.**

(αβγδ) : (ΑΒΓΔ) = (Κλ)² : (ΚΛ)² (σχ. 266).



Σχ. 266

Ἀπόδειξις. α΄) Αἱ πλευραὶ αβ, βγ, γδ, δα τῆς τομῆς αὐτῆς εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ. (§ 293). Τὰ δὲ τρίγωνα Καβ, Κβγ, Κγδ, Κδα εἶναι ἀντιστοίχως ὅμοια πρὸ τὰ ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ, ΚΔΑ. Διὰ τοῦτο εἶναι

$$\frac{Κα}{ΚΑ}=\frac{αβ}{ΑΒ}=\frac{Κβ}{ΚΒ},\quad \frac{Κβ}{ΚΒ}=\frac{βγ}{ΒΓ}=\frac{Κγ}{ΚΓ},\quad \frac{Κγ}{ΚΓ}=\frac{γδ}{ΓΔ}=\frac{Κδ}{ΚΔ},\quad \frac{Κδ}{ΚΔ}=\frac{δα}{ΔΑ}=\frac{Κα}{ΚΑ}.$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι: $$\frac{Κα}{ΚΑ}=\frac{Κβ}{ΚΒ}=\frac{Κγ}{ΚΓ}=\frac{Κδ}{ΚΔ} \qquad (1)$$

καὶ $$\frac{αβ}{ΑΒ}=\frac{βγ}{ΒΓ}=\frac{γδ}{ΓΔ}=\frac{δα}{ΔΑ} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον ΒΚΛ τέμνει τὴν τομὴν καὶ τὴν βάσιν τῆς πυραμίδος κατὰ παραλλήλους εὐθείας βλ, ΒΛ, τὰ τρίγωνα Κβλ, ΚΒΛ εἶναι ὅμοια καὶ ἑπομένως $\frac{Κβ}{ΚΒ}=\frac{Κλ}{ΚΛ}$. Ἐκ ταύτης καὶ τῶν (1) ἕπεται ὅτι:

$$\frac{Κα}{ΚΑ}=\frac{Κβ}{ΚΒ}=\frac{Κγ}{ΚΓ}=\frac{Κδ}{ΚΔ}=\frac{Κλ}{ΚΛ},$$

ἤτοι αἱ πλευραὶ καὶ τὸ ὕψος τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα.

β΄) Τὰ εὐθ. σχήματα αβγδ, ΑΒΓΔ ἔχουσι τὰς γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν (§ 299). Διὰ τοῦτο καὶ διὰ τὴν ἀλήθειαν τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων (2) ταῦτα εἶναι ὅμοια.

γ΄) Ἕνεκα δὲ τῆς ὁμοιότητος ταύτης εἶναι

$$\frac{(αβγδ)}{(ΑΒΓΔ)}=\left(\frac{βγ}{ΒΓ}\right)^2.$$

Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῶν $\frac{Βγ}{ΒΓ}=\frac{Κβ}{ΚΒ}=\frac{Κλ}{ΚΛ}$ ἕπεται ὅτι:

$$(αβγδ) : (ΑΒΓΔ) = (Κλ)^2 : (ΚΛ)^2.$$

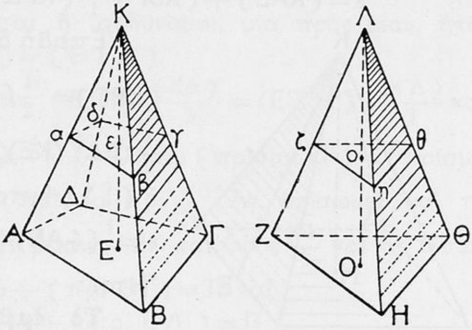
Πόρισμα Ι. **Ἂν δύο ἰσοϋψεῖς πυραμίδες Κ. ΑΒΓΔ, Λ.ΖΗΘ τμηθῶσιν ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων ἀντιστοίχως πρὸς τὰς βάσεις καὶ εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τῶν κορυφῶν, αἱ τομαὶ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς βάσεις.** (σχ. 267).

Παρατηροῦμεν ὅτι

$$\frac{(\alpha\beta\gamma\delta)}{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})} = \left(\frac{\mathrm{K}\varepsilon}{\mathrm{KE}}\right)^2,$$

$$\frac{(\zeta\eta\theta)}{(\mathrm{ZH\Theta})} = \left(\frac{\Lambda o}{\Lambda \mathrm{O}}\right)^2,$$

καὶ λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν τὰς ὑποθέσεις.



Σχ. 267

Πόρισμα ΙΙ. **Ἂν δύο ἰσοϋψεῖς πυραμίδες ἔχωσιν ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους βάσεις καὶ τμηθῶσιν ὑπὸ ἐπιπέδων ἀντιστοίχως παραλλήλων πρὸς τὰς βάσεις καὶ εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τῶν κορυφῶν, αἱ τομαὶ εἶναι ἴσαι ἢ ἰσοδύναμοι.**

Ἀσκήσεις

739. Ἂν ἡ τομὴ αβγδ πυραμίδος Κ.ΑΒΓΔ (σχ. 267) εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς, νὰ εὕρητε τὴν ἀπόστασιν Κα ἐκ τοῦ μήκους τῆς πλευρᾶς ΚΑ.

740. Ἂν Κα: ΚΑ = 3 : 5, ἡ δὲ τομὴ αβγδ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓΔ, νὰ εὕρητε τὸν λόγον αβγδ : ΑΒΓΔ (σχ. 267).

741. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς τομῆς κανονικοῦ τετραέδρου, ἡ ὁποία τέμνει τὸ ὕψος αὐτοῦ δίχα καὶ καθέτως, συναρτήσει τῆς ἀκμῆς αὐτοῦ.

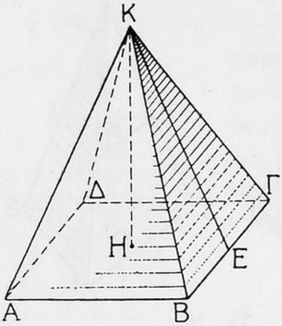
742. Τὸ ὕψος ΚΔ κανονικοῦ τετραέδρου Κ.ΑΒΓ ἐτμήθη καθέτως ὑπὸ ἐπιπέδου εἰς σημεῖον Ε τοιοῦτον, ὥστε ΚΕ : ΕΔ = 2 : 3. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς σχηματισθείσης τομῆς συναρτήσει τῆς ἀκμῆς α αὐτοῦ. Ἐφαρμογὴ διὰ α = 4 ἑκατ.

ΙΙ. ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΠΥΡΑΜΙΔΩΝ

§ **347.** *Πρόβλημα.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ε τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κανονικῆς πυραμίδος ἐκ τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως καὶ τοῦ ἀποστήματος αὐτῆς.**

Λύσις. Ἔστω κανονικὴ πυραμὶς Κ.ΑΒΓΔ καὶ ΚΕ τὸ ἀπόστημα αὐτῆς (σχ. 268.) Εἶναι λοιπὸν

$$\varepsilon = (\text{ΚΑΒ}) + (\text{ΚΒΓ}) + (\text{ΚΓΔ}) + (\text{ΚΔΑ}) \qquad (1)$$



Σχ. 268

Ἐπειδὴ δὲ $(\text{ΚΑΒ}) = \frac{1}{2}(\text{ΑΒ}) \cdot (\text{ΚΕ})$, $(\text{ΚΒΓ}) = \frac{1}{2}(\text{ΒΓ}) \cdot (\text{ΚΕ})$, $(\text{ΚΓΔ}) = \frac{1}{2}(\text{ΓΔ})\,(\text{ΚΕ})$, $(\text{ΚΔΑ}) = \frac{1}{2}(\text{ΑΔ})\,(\text{ΚΕ})$, ἡ (1) γίνεται:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}[(\text{ΑΒ}) + (\text{ΒΓ}) + (\text{ΓΔ} + (\text{ΔΑ})] \cdot (\text{ΚΕ})$$

Ἤτοι:

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κανονικῆς πυραμίδος εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἀπόστημα τῆς πυραμίδος.

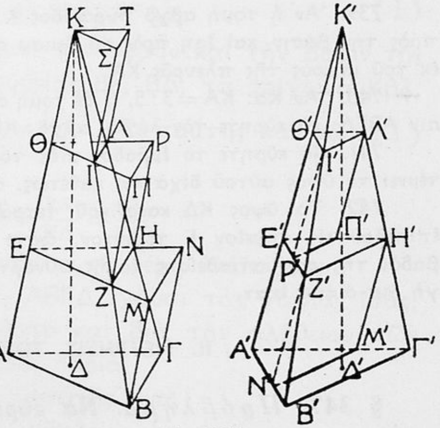
Ἀσκήσεις

743. Ἡ βάσις κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον μὲ πλευρὰν 6 ἑκατ. καὶ τὸ ἀπόστημα αὐτῆς εἶναι 3 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτῆς.

744. Ἡ βάσις κανονικῆς πυραμίδος εἶναι τετράγωνον μὲ πλευρὰν 8 ἑκατ. Τὸ δὲ ὕψος αὐτῆς εἶναι 3 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτῆς.

§ 348. Σχέσεις δύο ἰσοϋψῶν τριγωνικῶν πυραμίδων, ὧν αἱ βάσεις εἶναι ἴσαι ἢ ἰσοδύναμοι.

Ἔστωσαν δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες Κ.ΑΒΓ, Κ΄. Α΄Β΄Γ΄, αἱ ὁποῖαι ἔχουσιν (ΑΒΓ) = (Α΄Β΄Γ΄), ΚΔ = Κ΄Δ΄ καὶ Θ, Θ΄ οἱ ὄγκοι αὐτῶν (σχ. 269).



Σχ. 269

Νοοῦμεν τὰ ὕψη ΚΔ, Κ΄Δ΄ διῃρημένα εἰς 3 π.χ. ἴσα μέρη ἕκαστον καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὰς βάσεις των. Αἱ σχηματιζόμεναι τομαὶ εἶναι ἴσαι ἢ ἰσοδύναμοι, μία πρὸς μίαν, ἤτοι $(ΕΖΗ)=(Ε'Ζ'Η')$, $(ΘΙΛ)=(Θ'Ι'Λ')$.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι: $(ΕΖΗ)\cdot\frac{(ΚΔ)}{3}=(Ε'Ζ'Η')\cdot\frac{(Κ'Δ')}{3}$ καὶ $(ΘΙΛ)\cdot\frac{(ΚΔ)}{3}=(Θ'Ι'Λ')\cdot\frac{(Κ'Δ')}{3}$, ἤτοι (πρῖσμα ΕΡ) = (πρῖσμα Α'Η'), (πρῖσμα ΘΤ) = (πρῖσμα Ε'Λ'). Ἃς νοήσωμεν καὶ τὸ πρῖσμα ΑΝ, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν ΑΒΓ καὶ ὕψος $\frac{ΚΔ}{3}$ καὶ ἂς θέσωμεν (πρ. ΑΝ) + (πρ. ΕΡ) + (πρ. ΘΤ) = Π καὶ
(πρ. Α'Η') + (πρ. Ε'Λ') = Π'.

Ἐκ τούτων δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι:

$$Π-Π'=(\text{πρ. } ΑΝ)=(ΑΒΓ)\cdot\frac{(ΚΔ)}{3}. \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι προφανῶς $Θ<Π$, θὰ εἶναι $Θ-Θ'<Π-Θ'$. Καὶ ἐπειδὴ $Θ'>Π'$, θὰ εἶναι $Π-Θ'<Π-Π'$. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ ἐκ τῆς $Θ-Θ'<Π-Θ'$ ἕπεται κατὰ μείζονα λόγον ὅτι:

$$Θ-Θ'<Π-Π'$$

καὶ ἕνεκα τῆς (1) εἶναι:

$$Θ-Θ'<(ΑΒΓ)\cdot\frac{(ΚΔ)}{3}.$$

Ἂν νοήσωμεν τὰ ὕψη διῃρημένα εἰς ν ἴσα μέρη ἕκαστον καὶ ἐργασθῶμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, εὑρίσκομεν ὅτι:

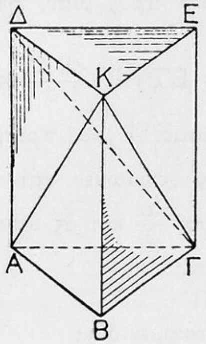
$$Θ-Θ'<(ΑΒΓ)\frac{(ΚΔ)}{ν}.$$

Ἂν δὲ ὅρ $ν=\infty$, θὰ εἶναι ὅρ $(ΑΒΓ)\cdot\frac{(ΚΔ)}{ν}=0$ καὶ ἐπομένως $Θ-Θ'<ε$, ὁσονδήποτε μικρὸς καὶ ἂν εἶναι ὁ ε. Ἐπειδὴ δὲ διὰ τὰς αὐτὰς δύο πυραμίδας ἡ διαφορὰ $Θ-Θ'$ εἶναι σταθερά, διὰ νὰ συμβαίνῃ τοῦτο, πρέπει νὰ εἶναι $Θ-Θ'=0$ καὶ ἐπομένως $Θ=Θ'$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἂν δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ἔχωσιν ἴσα ὕψη καὶ ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους βάσεις, αὗται εἶναι ἴσαι ἢ ἰσοδύναμοι.

§ 349. *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τριγωνικῆς πυραμίδος Κ. ΑΒΓ ἐκ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους υ αὐτῆς** (σχ. 270).

Λύσις. Ἂν φέρωμεν εὐθ. τμήματα ΑΔ, ΓΕ παράλληλα, ὁμόρροπα καὶ ἴσα πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΚ, τὸ τρίγωνον ΔΚΕ εἶναι ἴσον καὶ παράλληλον πρὸς τὸ ΑΒΓ. Τὸ στερεὸν λοιπὸν ΑΒΓΚΔΕ εἶναι τριγωνικὸν πρῖσμα μὲ βάσιν τὴν βάσιν ΑΒΓ τῆς πυραμίδος καὶ ἰσοϋψὲς μὲ αὐτήν.



Σχ. 270

Νοοῦμεν ὅτι διὰ τοῦ ἐπιπέδου ΑΚΓ ἀποσπῶμεν ἀπὸ αὐτὸ τὴν πυραμίδα Κ.ΑΒΓ. Οὕτω μένει ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς Κ.ΑΓΕΔ.

Αὕτη διὰ τοῦ ἐπιπέδου ΔΚΓ διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας Κ.ΑΔΓ, Κ.ΔΓΕ. Αὗται ἔχουσι βάσεις τὰ ἴσα τρίγωνα ΑΓΔ, ΓΔΕ καὶ κοινὸν ὕψος τὴν ἀπόστασιν τῆς κορυφῆς Κ ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον ΑΓΕΔ, Εἶναι λοιπόν:

$$(\text{Κ.ΑΔΓ}) = (\text{Κ.ΔΓΕ}).$$

Ἐπειδὴ δὲ $(\text{Κ.ΔΓΕ}) = (\text{Γ.ΚΔΕ}) = (\text{Κ.ΑΒΓ})$, ἕπεται ὅτι:

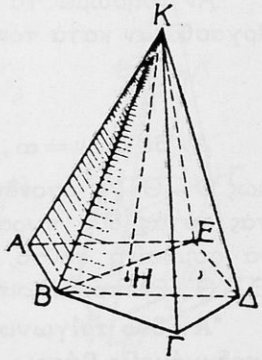
$$(\text{Κ.ΑΒΓ}) = (\text{Κ.ΔΓΕ}) = (\text{Κ.ΑΓΔ}) = \frac{(\text{ΑΒΓΚΔΕ})}{3}$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Πᾶσα τριγωνικὴ πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον πρίσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Ἐπειδὴ δὲ $(\text{ΑΒΓΚΔΕ}) = (\text{ΑΒΓ}) \cdot υ$, ἕπεται ὅτι $(\text{Κ.ΑΒΓ}) = \frac{1}{3}\,(\text{ΑΒΓ}) \cdot υ$, ἤτοι:

Ὁ ὄγκος τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτῆς.



Σχ. 271

§ 350. *Πρόβλημα ΙΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος πολυγωνικῆς πυραμίδος Κ.ΑΒΓΔΕ ἐκ τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ καὶ τοῦ ὕψους ΚΗ αὐτῆς** (σχ. 271).

Λύσις. Τὰ διαγώνια ἐπίπεδα ΚΒΔ, ΚΒΕ διαιροῦσι τὴν πυραμίδα ταύτην εἰς τὰς τριγωνικὰς πυραμίδας Κ.ΒΓΔ, Κ.ΒΔΕ, Κ.ΒΕΑ, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος ΚΗ. Ἂν δὲ εἰς ταύτας ἐφαρμόσωμεν τὴν προηγουμένην ἰδιότητα, εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι : (Κ.ΑΒΓΔΕ) $= \frac{1}{3}$(ΑΒΓΔΕ) · (ΚΗ). Ἤτοι :

Ὁ ὄγκος πάσης πυραμίδος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτῆς.

Ἂν λοιπὸν Β εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τυχούσης πυραμίδος, υ τὸ ὕψος καὶ Θ ὁ ὄγκος αὐτῆς, θὰ εἶναι :

$$\Theta = \frac{1}{3} B \cdot \upsilon$$

Πόρισμα Ι. **Πᾶσα πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον πρίσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.**

Πόρισμα ΙΙ. **Ἂν ἰσοϋψεῖς πυραμίδες ἔχωσιν ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους βάσεις, εἶναι ἴσαι ἢ ἰσοδύναμοι.**

Πόρισμα ΙΙΙ. **Αἱ ἰσοϋψεῖς πυραμίδες εἶναι ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν. Ἂν δὲ ἔχωσιν ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους βάσεις, εἶναι ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.**

Ἀσκήσεις

745. Ἡ βάσις μιᾶς πυραμίδος εἶναι τετράγωνον μὲ πλευρὰν 4 παλαμῶν, τὸ δὲ ὕψος αὐτῆς εἶναι 9 παλάμαι. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτῆς.

746. Μία ξυλίνη πυραμὶς ἔχει βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον μὲ πλευρὰν 3 ἑκατ. καὶ βάρος 37,53 γραμμαρίων. Τὸ δὲ εἰδ. βάρος τοῦ ξύλου αὐτῆς εἶναι 0,9. Νὰ εὕρητε τὸ ὕψος αὐτῆς.

747. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει καθέτους πλευρὰς (ΑΒ) = 15 ἑκατ. (ΑΓ) = 20 ἑκατ. Εἰς τὴν κορυφὴν Α ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ καὶ ὁρίζομεν ἐπ' αὐτῆς τμῆμα ΑΔ = ΒΓ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τῆς πυραμίδος ΔΑΒΓ.

748. Εἰς τὸ κέντρον Κ τετραγώνου ΑΒΓΔ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ καὶ ὁρίζομεν ἐπ' αὐτῆς τμῆμα ΚΕ = ΑΓ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τῆς πυραμίδος Ε.ΑΒΓΔ συναρτήσει τῆς πλευρᾶς α τοῦ τετραγώνου.

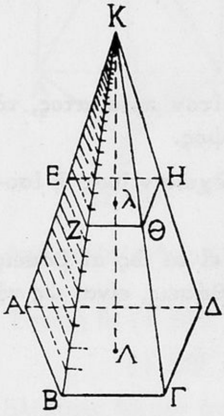
749. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον κανονικοῦ τετραέδρου συναρτήσει τῆς ἀκμῆς α αὐτοῦ.

750. Εἰς τὴν πλευρὰν ΒΓ τῆς βάσεως ΑΒΓ μιᾶς πυραμίδος Κ.ΑΒΓ νὰ ὁρίσητε δύο σημεῖα Δ καὶ Ε τοιαῦτα, ὥστε τὰ ἐπίπεδα ΚΑΔ, ΚΑΕ νὰ διαιρῶσι τὴν πυραμίδα εἰς ἰσοδύναμα μέρη.

751. Μιὰ τριγωνικὴ πυραμὶς Κ.ΑΒΓ ἔχει ὕψος 9 ἑκατ., αἱ δὲ πλευραὶ τῆς βάσεως εἶναι (ΑΒ) = 4 ἑκατ., (ΒΓ) = 6 ἑκατ., (ΑΓ) = 5 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτῆς.

III. ΑΙ ΚΟΛΟΥΡΟΙ ΠΥΡΑΜΙΔΕΣ

§ 351. Τί εἶναι κόλουρος πυραμὶς καὶ ποῖα εἶναι τὰ στοιχεῖα αὐτῆς. Εἰς τυχοῦσαν πυραμίδα Κ.ΑΒΓΔ φέρομεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν αὐτῆς. Μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τῆς τομῆς ΕΖΘΗ περιέχεται ἓν μέρος τῆς πυραμίδος.



Σχ. 272

Τὸ μέρος τοῦτο λέγεται ἰδιαιτέρως **κόλουρος πυραμὶς** (σχ. 272). Ὥστε :

Κόλουρος πυραμὶς εἶναι μέρος πυραμίδος, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῆς βάσεως αὐτῆς καὶ μιᾶς ἐπιπέδου τομῆς παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν.

Ἔχει λοιπὸν πᾶσα κόλουρος πυραμὶς δύο παραλλήλους ἕδρας. Αὗται λέγονται **βάσεις** αὐτῆς. Εἶναι δὲ αἱ βάσεις αὗται ὅμοια εὐθ. σχήματα (§ 346).

Ἐκ τοῦ εἴδους δὲ τῶν βάσεων αἱ κόλ. πυραμίδες διακρίνονται εἰς **τριγωνικάς, τετραγωνικάς, πενταγωνικὰς** κ.τ.λ.

Αἱ ἄλλαι ἕδραι αὐτῆς λέγονται **παράπλευροι** ἕδραι αὐτῆς. Εἶναι δὲ αὗται τραπέζια.

Ἡ ἀπόστασις λΛ τῶν βάσεων ΑΒΓΔ, ΕΖΘΗ κολ. πυραμίδος ΒΗ λέγεται **ὕψος** αὐτῆς.

Τὰ μέρη τῶν πλευρῶν τῆς ἀρχικῆς πυραμίδος, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ τῶν βάσεων κολ. πυραμίδος, λέγονται **πλευραὶ** αὐτῆς.

Π. χ. τὰ εὐθ. τμήματα ΑΕ, ΒΖ, ΓΘ, ΔΗ εἶναι αἱ πλευραὶ τῆς κολούρου πυραμῖδος ΒΗ.

§ 352 *Πρόβλημα.* **Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κολ. πυραμίδος ἐκ τῶν βάσεων καὶ τοῦ ὕψους αὐτῆς.**

Λύσις. Ἔστω Θ ὁ ὄγκος τῆς ἀνωτέρω κολ. πολυγωνικῆς πυραμίδος ΒΗ, (λΛ) = υ τὸ ὕψος αὐτῆς καὶ (ΑΒΓΔ) = Β, (ΕΖΘΗ) = β τὰ ἐμβαδὰ τῶν βάσεων αὐτῆς (σχ. 272). Εἶναι φανερὸν ὅτι : $\Theta = (\text{Κ.ΑΒΓΔ}) - (\text{Κ.ΕΖΘΗ})$. (1)

Ἐπειδὴ δὲ $(K.AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{3} B \cdot (K\Lambda)$ καὶ $(K.EZ\Theta H) = \frac{1}{3} \beta \cdot (K\lambda)$, ἡ (1) γίνεται $\Theta = \frac{1}{3} [B(K\Lambda) - \beta(K\lambda)]$ (2)

Ἐπειδὴ δὲ (§ 346) εἶναι $\frac{B}{\beta} = \left(\frac{K\Lambda}{K\lambda}\right)^2$, ἕπεται κατὰ σειρὰν ὅτι

$$\frac{(K\Lambda)}{(K\lambda)} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{\beta}},\ \frac{(K\Lambda)}{\sqrt{B}} = \frac{(K\lambda)}{\sqrt{\beta}} = \frac{(K\Lambda)-(K\lambda)}{\sqrt{B}-\sqrt{\beta}} = \frac{\upsilon}{\sqrt{B}-\sqrt{\beta}}.$$

Ἑπομένως $(K\Lambda) = \frac{\upsilon \cdot \sqrt{B}}{\sqrt{B}-\sqrt{\beta}}$ καὶ $(K\lambda) = \frac{\upsilon \cdot \sqrt{\beta}}{\sqrt{B}-\sqrt{\beta}}$.

Ἕνεκα τούτων ἡ (2) γίνεται $\Theta = \frac{1}{3} \frac{B\sqrt{B} - \beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{B}-\sqrt{\beta}} \cdot \upsilon$.

Ἂν δὲ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν $(B\sqrt{B} - \beta\sqrt{\beta}) : (\sqrt{B}-\sqrt{\beta})$, εὑρίσκομεν πηλίκον $B + \sqrt{B\beta} + \beta$ καὶ ἑπομένως

$$\Theta = \frac{1}{3}(B + \sqrt{B\beta} + \beta)\,\upsilon.$$

Ἀσκήσεις

752. Μία κόλουρος πυραμὶς ἔχει ὕψος 4 ἑκατ. καὶ βάσεις ἰσόπλευρα τρίγωνα μὲ πλευρὰν 6 ἑκατ. τὸ ἓν καὶ 4 ἑκατ. τὸ ἄλλο. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτῆς.

753. Μία κόλουρος πυραμὶς ἔχει ὕψος 2,5 παλ. καὶ βάσεις τετράγωνα μὲ πλευρὰν 3,75 παλ. τὸ ἓν καὶ 25 ἑκατ. τὸ ἄλλο. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτῆς.

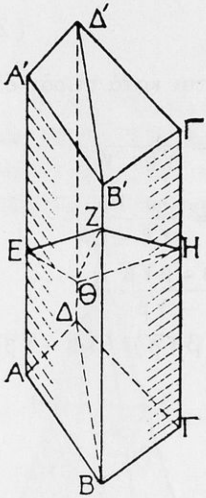
754. Μία πυραμὶς Κ.ΑΒΓ ἔχει βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον μὲ πλευρὰν 5 ἑκατ. καὶ ὕψος 6 ἑκατ. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΚΑ ὁρίζομεν σημεῖον α τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι $K\alpha : \alpha A = 2 : 3$. Ἂν διὰ τοῦ α ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν, νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τῆς ἀποχωριζομένης κολ. πυραμίδος.

755. Ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τῶν βάσεων β, Β κολ. πυραμίδος εἶναι ρ καὶ τὸ ὕψος εἶναι υ. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι ὁ ὄγκος αὐτῆς εἶναι.

$$\frac{1}{3} B\,(1 + \rho + \rho^2)\,\upsilon.$$

2. ΤΑ ΚΟΛΟΒΑ ΠΡΙΣΜΑΤΑ

§ 353. Τί εἶναι κολοβὸν πρῖσμα καὶ ποῖα εἶναι τὰ στοιχεῖα αὐτοῦ. Ἔστω ΑΓ′ τυχὸν πρῖσμα καὶ ΕΖΗΘ μία ἐπίπεδος τομὴ αὐτοῦ, ἡ ὁποία δὲν εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις τοῦ πρίσματος καὶ τέμνει ὅλας τὰς πλευρὰς (σχ. 273).



Σχ. 273

Μεταξὺ τῆς βάσεως ΑΒΓΔ καὶ τῆς τομῆς ταύτης περιέχεται ἓν μέρος ΑΗ τοῦ πρίσματος. Τὸ μέρος τοῦτο λέγεται ἰδιαιτέρως **κολοβὸν πρῖσμα.** Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ τὸ στερεὸν ΕΓ′ εἶναι κολοβὸν πρῖσμα. Ὥστε:

Κολοβὸν πρῖσμα εἶναι μέρος πρίσματος, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ μιᾶς βάσεως καὶ ἐπιπέδου τομῆς αὐτοῦ, ἡ ὁποία δὲν εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις καὶ τέμνει ὅλας τὰς πλευρὰς αὐτοῦ.

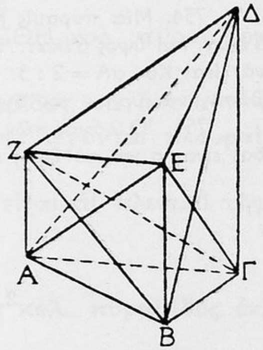
Ἡ βάσις ΑΒΓΔ τοῦ ἀρχικοῦ πρίσματος ΑΓ′ καὶ ἡ ἐπίπεδος τομὴ ΕΖΗΘ αὐτοῦ, λέγονται **βάσεις** τοῦ κολοβοῦ πρίσματος ΑΗ.

Ἂν αἱ βάσεις κολοβοῦ πρίσματος εἶναι τρίγωνα, τυχόντα τετράπλευρα, πεντάγωνα κ.τ.λ., τὸ κολοβὸν πρῖσμα λέγεται ἀντιστοίχως **τριγωνικόν, τετραγωνικόν, πενταγωνικὸν** κ.τ.λ.

Ἂν μία ἐκ τῶν βάσεων τοῦ κολοβοῦ πρίσματος εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς παραλλήλους ἀκμὰς αὐτοῦ, τὸ κολοβὸν πρῖσμα λέγεται **ὀρθὸν** ὡς πρὸς τὴν βάσιν ἐκείνην. Ἂν τὸ κολοβὸν πρῖσμα πρὸς οὐδεμίαν βάσιν εἶναι ὀρθόν, λέγεται **πλάγιον.**

Τὰ μέρη ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ, ΔΘ τῶν πλευρῶν τοῦ ἀρχικοῦ πρίσματος λέγονται **πλευραὶ** τοῦ κολοβοῦ πρίσματος.

§ **354.** *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τριγωνικοῦ κολοβοῦ πρίσματος ΑΒΓΖΕΔ** (σχ. 274).



Σχ. 274

Λύσις. Τὸ ἐπίπεδον ΑΕΓ ἀποχωρίζει ἀπὸ τὸ κολοβὸν πρῖσμα τὴν πυραμίδα Ε.ΑΒΓ. Μένει δὲ ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς Ε.ΑΖΔΓ.

Αὕτη διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΖΕΓ εἰς δύο πυραμίδας Ε.ΖΑΓ, Ε.ΓΔΖ. Εἶναι λοιπὸν (ΑΒΓΖΕΔ) = (Ε.ΑΒΓ) + (Ε.ΖΑΓ) + (Ε.ΓΔΖ) (1)

Ἐπειδὴ δὲ ἡ πλευρὰ ΕΒ ὡς παράλληλος πρὸς τὴν ΑΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΖΑΓ, ἡ πυραμὶς Ε.ΖΑΓ εἶναι ἰσοϋψὴς μὲ τὴν Β.ΖΑΓ. Εἶναι λοιπὸν (Ε.ΖΑΓ) = (Β.ΖΑΓ) = (Ζ.ΑΒΓ). Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι :

$$(\text{Ε.ΓΔΖ}) = (\text{Β.ΓΔΖ}) = (\text{Ζ.ΒΓΔ}) = (\text{Α.ΒΓΔ}) = (\text{Δ.ΑΒΓ}).$$

Ἕνεκα τούτων ἡ (1) γίνεται

$$(\text{ΑΒΓΔΕΖ}) = (\text{Ε.ΑΒΓ}) + (\text{Ζ.ΑΒΓ}) + (\text{Δ.ΑΒΓ}) \qquad (2)$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Ὁ ὄγκος τριγωνικοῦ κολοβοῦ πρίσματος εἶναι ἄθροισμα τῶν ὄγκων τριῶν πυραμίδων, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι κοινὴν τὴν μίαν βάσιν τοῦ κολ. πρίσματος, κορυφὰς δὲ τὰς κορυφὰς τῆς ἄλλης βάσεως.

Ἤδη διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

α′) Ἂν τὸ κολοβὸν πρῖσμα εἶναι ὀρθόν, ὡς πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓ, αἱ πλευραὶ ΕΒ, ΖΑ, ΔΓ εἶναι ἀντιστοίχως ὕψη τῶν πυραμίδων Ε.ΑΒΓ, Ζ.ΑΒΓ, Δ.ΑΒΓ καὶ ἑπομένως :

$$(\text{Ε.ΑΒΓ}) = \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ})\cdot(\text{ΕΒ}),\ (\text{Ζ.ΑΒΓ}) = \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ})\cdot(\text{ΖΑ}),$$

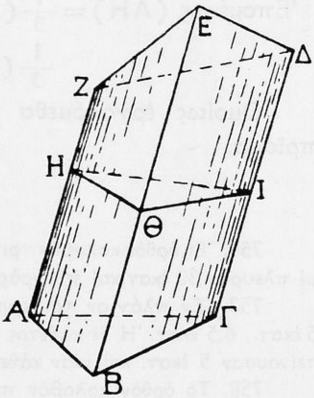
$$(\text{Δ.ΑΒΓ}) = \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ}).(\text{ΔΓ}),$$

ἡ δὲ ἰσότης (2) γίνεται

$$\Theta = \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ})\,[(\text{ΑΖ})+(\text{ΒΕ})+(\text{ΓΔ})] \quad (3).$$

Ἤτοι :

Ὁ ὄγκος ὀρθοῦ κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς ἀντιστοίχου βάσεως ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.



Σχ. 275

β′) Ἄν τὸ κολοβὸν πρῖσμα εἶναι πλάγιον (σχ. 275), διαιροῦμεν αὐτὸ εἰς δύο ὀρθὰ μὲ μίαν κάθετον τομὴν ΗΘΙ. Ἔπειτα εἰς ἕκαστον ἐφαρμόζομεν τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα (3) καὶ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$(\text{ΑΒΓΗΘΙ}) = \frac{1}{3}(\text{ΗΘΙ})\,[(\text{ΑΗ}) + (\text{ΒΘ}) + (\text{ΓΙ})],$$

$$(\text{ΗΘΙΖΕΔ}) = \frac{1}{3}(\text{ΗΘΙ})\,[(\text{ΗΖ}) + (\text{ΘΕ}) + (\text{ΙΔ})].$$

Ἂν δὲ προσθέσωμεν ταύτας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν ὅτι :

$(ΑΒΓΔΕΖ) = \frac{1}{3}(ΗΘΙ)\,[\,(ΑΖ) + (ΒΕ) + (ΓΔ)\,]$, ἤτοι :

Ὁ ὄγκος πλαγίου τριγωνικοῦ κολοβοῦ πρίσματος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς καθέτου τομῆς αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

355. *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος πολυγωνικοῦ κολοβοῦ πρίσματος.**

Λύσις. Διὰ νὰ εὕρωμεν π. χ. τὸν ὄγκον τοῦ τετραγωνικοῦ κολοβοῦ πρίσματος ΑΗ (σχ. 273) νοοῦμεν τὸ διαγώνιον ἐπίπεδον ΒΒ΄Δ΄Δ. Τοῦτο διαιρεῖ τὸ ΑΗ εἰς τὰ τριγωνικὰ κολοβὰ πρίσματα ΑΒΔΕΖΘ καὶ ΒΔΓΖΘΗ. Εὑρίσκομεν ἔπειτα τοὺς ὄγκους τούτων καὶ προσθέτομεν αὐτούς. Οὕτως, ἂν τὸ ΑΗ εἶναι ὀρθόν, θὰ εἶναι :

$$(ΑΒΔΕΖΘ) = \frac{1}{3}(ΑΒΔ)\,[\,(ΑΕ) + (ΒΖ) + (ΔΘ)\,] \text{ καὶ}$$

$$(ΒΔΓΖΘΗ) = \frac{1}{3}(ΒΔΓ)\,[\,(ΒΖ) + (ΔΘ) + (ΓΗ)\,]$$

$$\text{Ἑπομένως } (ΑΗ) = \frac{1}{3}(ΑΒΔ)\,[\,(ΑΕ) + (ΒΖ) + (ΔΘ)\,] + \frac{1}{3}(ΒΔΓ)\,[\,(ΒΖ) + (ΔΘ) + (ΓΗ)\,].$$

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα δι᾽ οἱονδήποτε πολυγωνικὸν κολοβὸν πρῖσμα.

Ἀσκήσεις

756. Ἓν ὀρθὸν κολοβὸν τριγωνικὸν πρῖσμα ἔχει βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον μὲ πλευρὰν 30 ἑκατ. καὶ πλευρὰς 15, 20, 25 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτοῦ.

757. Ἓν πλάγιον τριγωνικὸν κολοβὸν πρῖσμα ἔχει πλευρὰς 4,5 ἑκατ., 5 ἑκατ., 6,5 ἑκατ. Ἡ δὲ κάθετος τομὴ αὐτοῦ εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ ὑποτείνουσαν 5 ἑκατ. καὶ μίαν κάθετον πλευρὰν 3 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον του.

758. Τὸ ὀρθὸν κολοβὸν πρῖσμα ΑΗ (σχ. 273) ἔχει πλευρὰς (ΑΕ) = 3 ἑκατ. (ΒΖ) = 5 ἑκατ., (ΓΗ) = 3,5 ἑκατ,. (ΔΘ) = 1 ἑκατ. Ἡ δὲ βάσις ΑΒΓΔ αὐτοῦ εἶναι τετράγωνον μὲ πλευρὰν 2,5 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον του.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Β΄ κεφαλαίου

759. Μία πυραμὶς ἔχει ὕψος 4 ἑκατ. καὶ βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον μὲ πλευρὰν 6 ἑκατ. Εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὴν κορυφὴν αὐτῆς πρέπει νὰ φέρω-

μεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν, ἵνα ἡ τομὴ αὐτῆς ἔχῃ ἐμβαδὸν 13,5 τετ. ἑκατοστόμετρα ;

760. Μία πυραμὶς ἔχει βάσιν τετράγωνον καὶ ὕψος 2 ἑκατ. Βυθιζομένη εἰς ἀπεσταγμένον ὕδωρ 4^{o} Κ ὑφίσταται ἄνωσιν 6 γραμμαρίων. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τῆς βάσεως αὐτῆς.

761. Ἡ ἐν Αἰγύπτῳ μεγάλη πυραμὶς τοῦ Χέοπος εἶναι κανονικὴ μὲ βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 230,3 μέτ. Ἑκάστη δὲ πλευρὰ αὐτῆς ἔχει μῆκος 219,1 μέτ. Νὰ εὕρητε τὸ ὕψος καὶ τὸν ὄγκον αὐτῆς.

762. Ἓν κολοβὸν τριγωνικὸν πρῖσμα ἔχει ὄγκον 48 κυβ. ἑκατοστόμετρα, κάθετον τομὴν 8 τετ. ἑκατοστομέτρων καὶ πλευρὰς ἀναλόγους πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2,3,4. Νὰ εὕρητε τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τούτων.

763. Ἓν κανονικὸν τετράεδρον Κ.ΑΒΓ ἔχει ἀκμὴν 5 ἑκατ. Ἂν Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς ἀκμῆς ΒΓ, νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς ΚΑΜ αὐτῆς καὶ νὰ συγκρίνητε τὰ δύο στερεά, εἰς τὰ ὁποῖα τοῦτο διαιρεῖται ἀπὸ τὴν τομὴν ταύτην.

764. Αἱ βάσεις μιᾶς κολ. πυραμίδος ἔχουσιν ἐμβαδὰ 16 τετ. ἑκατ. καὶ 4 τετ. ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς μέσης τομῆς αὐτῆς.

765. Νὰ εὕρητε τὸν λόγον τῆς προηγουμένης κολ. πυραμίδος πρὸς ἰσοϋψὲς πρῖσμα τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν τὴν μέσην τομὴν αὐτῆς.

766. Ἡ βάσις πυραμίδος Κ.ΑΒΓ ἔχει ἐμβαδὸν $(3+\sqrt{5})$ τετ. ἑκ. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΚΑ ὁρίζομεν σημεῖον α τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι ΚΑ : Κα = Κα : αΑ. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς αὐτῆς ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ α καὶ παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν.

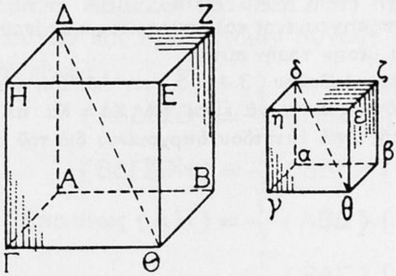
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

ΤΑ ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ

§ 356. **Ποῖα λέγονται ὅμοια πολύεδρα.** Ἔστωσαν δύο κύβοι ΑΕ καὶ αε (σχ, 276). Αἱ ἕδραι ΑΘ, ΘΖ, ΖΗ. κ.τ.λ. εἶναι ἀντιστοίχως ὅμοιαι πρὸς τὰς ἕδρας αθ, θζ, ζη κ.τ.λ. τοῦ ἄλλου, κεῖνται δὲ ὁμοίως πρὸς αὐτάς. Αἱ δὲ ὑπὸ ὁμοίων ἑδρῶν σχηματιζόμεναι στερεαὶ γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἴσαι. Π.χ. αἱ στερεαὶ γωνίαι Θ καὶ θ ἔχουσι τὰς ἕδρας αὐτῶν ἴσας, μίαν πρὸς μίαν· ἂν δὲ αἱ ἕδραι ΑΘ καὶ αθ τεθῶσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, αἱ ἀκμαὶ ΘΕ, θε θὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ. Εἶναι λοιπὸν

$$\Theta = \theta \quad (\S\ 327).$$

Διὰ τοὺς λόγους τούτους οἱ δύο οὗτοι κύβοι λέγονται **ὅμοια πολύεδρα.**



Σχ. 276

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον βλέπομεν ὅτι καὶ δύο κανονικὰ τετράεδρα ἔχουσι τὰς αὐτὰς ἰδιότητας. Εἶναι λοιπὸν καὶ ταῦτα ὅμοια. Ὥστε:

Δύο πολύεδρα λέγονται ὅμοια, ἂν αἱ ἕδραι αὐτῶν εἶναι ὅμοιαι, μία πρὸς μίαν, καὶ κεῖνται ὁμοίως. Αἱ δὲ ὑπὸ ὁμοίων ἑδρῶν σχηματιζόμεναι στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Αἱ ὅμοιαι ἕδραι δύο ὁμοίων πολυέδρων λέγονται **ὁμόλογοι** ἕδραι.

Αἱ ὑπὸ ὁμολόγων ἑδρῶν σχηματιζόμεναι δίεδροι γωνίαι λέγονται **ὁμόλογοι** δίεδροι.

Αἱ κορυφαὶ τῶν ἴσων στερεῶν γωνιῶν λέγονται **ὁμόλογοι** κορυφαί.

Ἐπίσης τὰ ὑπὸ ὁμολόγων κορυφῶν ὁριζόμενα εὐθ. τμήματα λέγονται **ὁμόλογα**. Π.χ. αἱ διαγώνιοι ΔΘ καὶ δθ τῶν ἀνωτέρω κύβων εἶναι **ὁμόλογοι** διαγώνιοι.

Ἂν νοήσωμεν ὅτι αἱ στερεαὶ γωνίαι Α καὶ α (σχ. 276) ἐφαρμόζουσι, βλέπομεν ὅτι αἱ δίεδροι αβ, αγ, αδ ἐφαρμόζουσιν ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ. Ὥστε:

Αἱ ὁμόλογοι δίεδροι γωνίαι δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι ἴσαι.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ ἕδραι ΑΘ, ΘΖ, ΖΗ, κ.τ.λ., εἶναι ἀντιστοίχως ὅμοιαι πρὸς τὰς αθ, θζ, ζη κ.τ.λ., ἕπεται ὅτι:
ΑΒ : αβ = ΒΘ : βθ = ΕΖ : εζ = ΗΔ : ηδ. κ.τ.λ. Βλέπομεν δηλ. ὅτι:

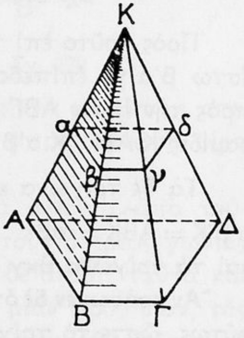
Ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων ἀκμῶν δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι σταθερός.

Λέγεται δὲ οὗτος **λόγος τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν.**

I. ΔΥΟ ΑΛΛΑ ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΟΜΟΙΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

§ 357. *Παράδειγμα I.* Ἔστω τυχοῦσα πυραμὶς Κ.ΑΒΓΔ καὶ αβγδ παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν τομὴ αὐτῆς (σχ. 277).

Γνωρίζομεν (§ 346) ὅτι αἱ ἕδραι τῶν πυραμίδων Κ. ΑΒΓΔ καὶ Κ. αβγδ εἶναι ὅμοιαι μία πρὸς μίαν· εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι κεῖνται καὶ ὁμοίως.



Σχ. 277

Αἱ στερεαὶ γωνίαι π.χ. β καὶ Β σχηματίζονται ἀπὸ ὁμοίας ἕδρας. Ἔχουσι δὲ αὗται τὰς ἕδρας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν. Καὶ ἂν νοήσωμεν ὅτι π.χ. ἡ β μετακινεῖται οὕτως ὥστε ἡ κορυφή της νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν κορυφὴν τῆς Β καὶ ἡ ἕδρα αβγ νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ἕδραν ΑΒΓ, αἱ ἀκμαὶ βΚ καὶ ΒΚ θὰ εὑρίσκωνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ. Αἱ στερεαὶ λοιπὸν γωνίαι εἶναι ἴσαι (§ 327).

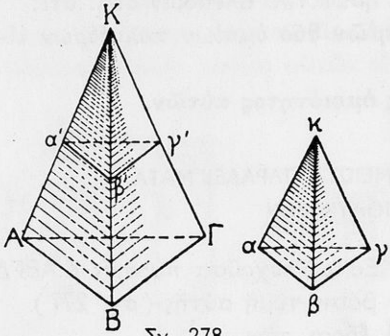
Ὁμοίως βλέπομεν ὅτι καὶ αἱ στερεαὶ γωνίαι α, γ, δ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς Α, Γ, Δ εἶναι δὲ καὶ ἡ Κ κοινή. Αἱ δύο λοιπὸν πυραμίδες Κ.ΑΒΓΔ καὶ Κ. αβγδ εἶναι ὅμοια πολύεδρα. Ὥστε:

Ἂν μία πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν της, ἡ ἀποχωριζομένη πυραμὶς εἶναι ὁμοία πρὸς αὐτήν.

§ **358.** *Παράδειγμα II.* Ἔστω τυχὸν τετράεδρον Κ.ΑΒΓ καὶ μία τρίεδρος στερεὰ γωνία κ. (σχ. 278), ἡ ὁποία ἔχει

$$\delta.\kappa\beta = \delta.\mathrm{KB},\ \widehat{\alpha\kappa\beta} = \widehat{\mathrm{AKB}},\ \widehat{\beta\kappa\gamma} = \widehat{\mathrm{BK\Gamma}}.$$

Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν τῆς κ ἃς λάβωμεν τμήματα κα, κβ, κγ ἀνάλογα πρὸς τὰς πλευρὰς ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ τοῦ τετραέδρου Κ.ΑΒΓ.



Σχ. 278

Ἂν φέρωμεν τὰ εὐθ. τμήματα αβ, βγ, γα σχηματίζεται νέον τετράεδρον κ.αβγ. Τούτου αἱ ἕδραι ακβ, βκγ εἶναι ὅμοιαι πρὸς τὰς ἕδρας ΑΚΒ, ΒΚΓ καὶ κεῖνται ὁμοίως πρὸς αὐτάς. Αἱ δὲ ὑπὸ τῶν ὁμοίων τούτων ἑδρῶν σχηματιζόμεναι δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Θὰ ἐξετάσωμεν, ἂν τὰ τετράεδρα ταῦτα εἶναι ὅμοια ἢ ὄχι.

Πρὸς τοῦτο ἐπὶ τῆς ΚΒ ὁρίζομεν τμῆμα Κβ′ ἴσον πρὸς κβ καὶ ἔστω β′α′γ′ ἐπίπεδος τομὴ τοῦ τετραέδρου Κ.ΑΒΓ παράλληλος πρὸς τὴν ἕδραν ΑΒΓ. Κατὰ τὸ προηγούμενον παράδειγμα αἱ πυραμίδες Κ.ΑΒΓ, Κ.α′β′γ′ εἶναι ὅμοιαι.

Τὰ δὲ τρίγωνα καβ, Κα′β′ ἔχουσιν $\mathrm{K}\beta' = \kappa\beta$ $\widehat{\alpha'\mathrm{K}\beta'} = \widehat{\alpha\kappa\beta}$, $\widehat{\alpha'\beta'\mathrm{K}} = \widehat{\mathrm{ABK}} = \widehat{\alpha\beta\kappa}$. Εἶναι λοιπὸν ταῦτα ἴσα· δι' ὁμοίους λόγους καὶ τὰ τρίγωνα βκγ καὶ β′Κγ′ εἶναι ἴσα.

Ἂν νοήσωμεν δὲ ὅτι τὸ τετράεδρον κ.αβγ τίθεται ἐπὶ τοῦ Κ.α′β′γ′ οὕτως, ὥστε τὸ τρίγωνον καβ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ Κα′β′ μὲ τὴν κβ ἐπὶ τῆς Κβ′. Εὐκόλως ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ τρίγωνον κβγ θὰ ἐφαρμόσῃ εἰς τὸ Κβ′γ′ καὶ τὸ τετράεδρον κ.αβγ εἰς τὸ Κ.α′β′γ′. Ὥστε καὶ τὸ κ.αβγ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ Κ.ΑΒΓ. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Ἂν δύο τετράεδρα ἔχωσι δύο ἕδρας ὁμοίας, μίαν πρὸς μίαν, καὶ ὁμοίως κειμένας, τὰς δὲ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένας διέδρους γωνίας ἴσας, ταῦτα εἶναι ὅμοια.

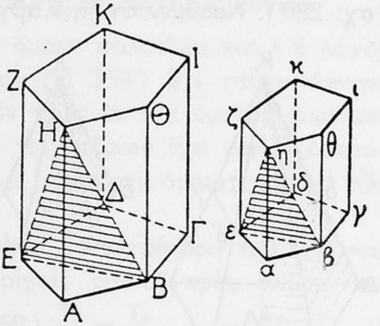
II. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

§ 359. *Θεώρημα.* **Δύο ὅμοια πολύεδρα ἀποτελοῦνται ἀπὸ τετράεδρα ὅμοια, ἓν πρὸς ἓν καὶ ὁμοίως κείμενα.**

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ΑΚ καὶ ακ δύο ὅμοια πολύεδρα (σχ. 279). Τὰ ἐπίπεδα ΕΗΒ καὶ εηβ τῶν κορυφῶν Ε,Η,Β ὁμολόγων πρὸς τὰς ε,η,β ἀποχωρίζουσι τὰ τετράεδρα Η.ΕΑΒ καὶ η.εαβ.

Ταῦτα ἔχουσι α΄) δίεδ. ΗΑ = δίεδ. ηα, διότι εἶναι ὁμόλογοι δίεδροι τῶν ὁμοίων πολυέδρων ΑΚ καὶ ακ.

β΄) Τὰς ἕδρας ΕΗΑ, ΑΗΒ, ὁμοίας καὶ ὁμοίως κειμένας πρὸς τὰς ἕδρας εηα, αηβ, διότι δύο ὅμοια πολύγωνα (π.χ. τὰ ΑΕΖΗ, αεζη) διαιροῦνται ὑπὸ ὁμολόγων διαγωνίων εἰς τρίγωνα ὅμοια, ἓν πρὸς ἕν, καὶ ὁμοίως κείμενα. Κατὰ δὲ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα τὰ τετράεδρα ταῦτα εἶναι ὅμοια.



Σχ. 279

Διὰ τοῦτο δὲ τὰ μετ᾽ αὐτῶν ἀποχωρισθέντα μέρη τῶν στερεῶν γωνιῶν Η,Ε,Β εἶναι ἴσα πρὸς τὰ ἐπίσης ἀποσπασθέντα μέρη τῶν η,ε,β.

Τὰ μένοντα λοιπὸν πολύεδρα ἔχουσι τὰ μένοντα ἀπὸ τούτων μέρη ἴσα, ἓν πρὸς ἕν, καὶ τὰς ἀμεταβλήτους στερεὰς γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, ἐξ ὑποθέσεως. Ἔχουσι δὲ ἀκόμη ταῦτα καὶ τὰς ἕδρας τῶν ἴσων στερεῶν γωνιῶν ὁμοίας, μίαν πρὸς μίαν, τὰς μὲν ἀμεταβλήτους ἐξ ὑποθέσεως, ἀπὸ δὲ τὰς μεταβληθείσας αἱ μὲν ΕΒΓΔ καὶ εβγδ εἶναι ὅμοιαι, διότι εὐκόλως βλέπομεν ὅτι, ἂν φέρωμεν τὰς διαγωνίους ΒΔ, βδ, ἀποτελοῦνται ἀπὸ τρίγωνα ὅμοια, ἓν πρὸς ἕν, καὶ ὁμοίως κείμενα· αἱ δὲ ἄλλαι ὡς ἐξηγήσαμεν ἀνωτέρω.

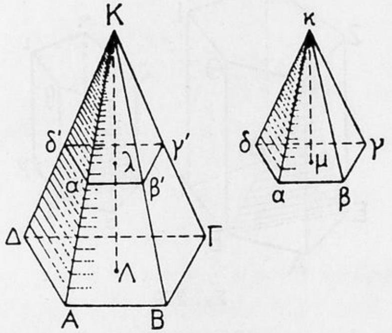
Τέλος καὶ αἱ νέαι ἕδραι ΕΗΒ, εηβ εἶναι ὅμοιαι, διότι εἶναι ὁμόλογοι ἕδραι τῶν ὁμοίων τετραέδρων Η.ΕΑΒ, η.εαβ.

Τὰ μένοντα λοιπὸν πολύεδρα εἶναι ὅμοια. Ἀπὸ αὐτὰ δὲ ὁμοίως ἀποσπῶμεν ἄλλο ζεῦγος ὁμοίων τετραέδρων. Ἀπὸ τὰ ὑπολειπόμενα ὅμοια πολύεδρα ἄλλο ζεῦγος καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, ἕως ὅτου τὰ ὑπολειπόμενα ὅμοια πολύεδρα γίνωσι τετράεδρα.

Πράγματι λοιπὸν τὰ ὅμοια πολύεδρα ἀποτελοῦνται ἀπὸ τετράεδρα ὅμοια, ἓν πρὸς ἕν, καὶ ὁμοίως κείμενα.

§ **360.** *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος δύο ὁμοίων πυραμίδων ἀπὸ τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν.**

Λύσις. Ἔστωσαν αἱ ὅμοιαι πυραμίδες Κ.ΑΒΓΔ, κ.αβγδ (σχ. 280). Νοοῦμεν ὅτι ἡ κ.αβγδ τίθεται ἐπὶ τῆς Κ.ΑΒΓΔ οὕτως,



Σχ. 280

ὥστε ἡ στερεὰ γωνία κ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς Κ, ἡ καβ ἐπὶ τῆς ὁμοίας ΚΑΒ κ.τ.λ. Οὕτως ἡ πυραμὶς κ.αβγδ θὰ ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν Κ.α′β′γ′δ′.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἕδρα π.χ. Κα′β′ εἶναι ἡ ἰδία καβ εἰς ἄλλην θέσιν, ἕπεται ὅτι αἱ ΚΑΒ καὶ Κα′β′ εἶναι ὅμοιαι· ἑπομένως αἱ πλευραὶ α′β′ καὶ ΑΒ εἶναι παράλληλοι.

Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι αἱ β′γ′, γ′δ′, δ′α′ εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ. Ἑπομένως τὰ ἐπίπεδα α′β′γ′δ′, ΑΒΓΔ εἶναι παράλληλα, τὰ δὲ σχήματα ΑΒΓΔ, α′β′γ′δ′ εἶναι ὅμοια.

Ἂν δὲ ἀχθῇ τὸ ὕψος ΚΛ τῆς πυραμίδος Κ.ΑΒΓΔ., τὸ τμῆμα Κλ αὐτῆς θὰ εἶναι ὕψος τῆς πυραμίδος Κ.α′β′γ′δ′ καὶ ἑπομένως Κλ=κμ.

Γνωρίζομεν δὲ (§ 346) ὅτι:

$$\frac{(ΑΒΓΔ)}{(α'β'γ'δ')} = \left(\frac{ΚΛ}{Κλ}\right)^2 \text{ καὶ ἑπομένως } \frac{(ΑΒΓΔ)}{(αβγδ)} = \left(\frac{ΚΛ}{κμ}\right)^2.$$

Ἐπειδὴ δὲ $(Κ.ΑΒΓΔ) = \frac{1}{3}\,(ΑΒΓΔ)\cdot(ΚΛ)$ καὶ

$(κ.αβγδ) = \frac{1}{3}\,(αβγδ)\cdot(κμ)$ ἕπεται ὅτι:

$$\frac{(Κ.ΑΒΓΔ)}{(κ.αβγδ)} = \frac{(ΑΒΓΔ)}{(αβγδ)}\cdot\left(\frac{ΚΛ}{κμ}\right) = \left(\frac{ΚΛ}{κμ}\right)^3 \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ $\frac{\text{ΚΛ}}{\text{κμ}} = \frac{\text{ΚΛ}}{\text{Κλ}} = \frac{\text{ΚΑ}}{\text{Κα}'} = \frac{\text{ΑΒ}}{\alpha'\beta'} = \frac{\text{ΑΒ}}{\alpha\beta}$, ἡ (1) γίνεται

$$\frac{(\text{Κ.ΑΒΓΔ})}{(\text{κ.}\alpha\beta\gamma\delta)} = \left(\frac{\text{ΑΒ}}{\alpha\beta}\right)^3.$$

Βλέπομεν δηλαδὴ ὅτι:

Ὁ λόγος δύο ὁμοίων πυραμίδων ἰσοῦται πρὸς τὸν κύβον τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν.

Πόρισμα. **Δύο ὅμοιαι πυραμίδες εἶναι ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων ἀκμῶν αὐτῶν.**

§ **361.** *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος δύο οἱωνδήποτε ὁμοίων πολυέδρων ἀπὸ τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν.**

Λύσις. Ἔστωσαν Π, Π′ δύο ὅμοια πολύεδρα καὶ λ ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν. Γνωρίζομεν (§ 359) ὅτι ταῦτα ἀποτελοῦνται ἐκ τετραέδρων ὁμοίων, ἓν πρὸς ἓν καὶ ὁμοίως κειμένων. Ἐπειδὴ δὲ ἕκαστον ζεῦγος ὁμοίων τετραέδρων ἔχει κοινὰς ὁμολόγους ἀκμὰς μὲ τὰ πολύεδρα. Π, Π′, ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος καὶ τῶν ὁμοίων τετραέδρων θὰ εἶναι λ.

Ἂν λοιπὸν Τ_1, Τ_2, Τ_3, . . Τ_ν εἶναι τὰ τετράεδρα τοῦ ἑνὸς καὶ $\text{Τ}'_1$, $\text{Τ}'_2$, $\text{Τ}'_3$, . . $\text{Τ}'_\nu$ τὰ ἀντιστοίχως ὅμοια πρὸς ταῦτα τετράεδρα τοῦ ἄλλου, θὰ εἶναι (§ 360) $\frac{\text{Τ}_1}{\text{Τ}'_1} = \frac{\text{Τ}_2}{\text{Τ}'_2} \ldots = \frac{\text{Τ}_\nu}{\text{Τ}'_\nu} = \lambda^3$ καὶ ἑπομένως $\text{Τ}_1 = \text{Τ}'_1 \cdot \lambda^3$, $\text{Τ}_2 = \text{Τ}'_2 \lambda^3, \ldots \text{Τ}_\nu = \text{Τ}'_\nu \cdot \lambda^3$. Ἐκ τούτων δὲ διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι $\Pi = \Pi'.\ \lambda^3$, καὶ ἑπομένως $\Pi : \Pi' = \lambda^3$. Δηλαδή:

Ὁ λόγος δύο ὁμοίων πολυέδρων ἰσοῦται πρὸς τὸν κύβον τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν.

Πόρισμα Ι. **Δύο ὅμοια πολύεδρα εἶναι ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων ἀκμῶν αὐτῶν.**

Πόρισμα ΙΙ. **Ἂν αἱ ἀκμαὶ πολυέδρου πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν λ, αἱ δὲ στερεαὶ γωνίαι αὐτοῦ μείνωσιν ἀμετάβλητοι, τὸ πολύεδρον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ λ³.**

Ἀσκήσεις

767. Εἷς κύβος Κ ἔχει ἀκμὴν διπλασίαν ἀπὸ τὴν ἀκμὴν ἄλλου κύβου κ. Νὰ εὕρητε πόσας φορὰς ὁ Κ εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν κ.

768. Εἷς κύβος ἔχει ἀκμὴν $\sqrt[3]{25}$ ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὴν ἀκμὴν πενταπλασίου κύβου.

769. Μία ἀκμὴ ΚΑ πυραμίδος Κ.ΑΒΓΔ ἔχει μῆκος 8 ἑκατ. Νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τῆς ΚΑ σημεῖον α τοιοῦτον, ὥστε ἡ δι' αὐτοῦ διερχομένη παράλληλος πρὸς τὴν ἕδραν ΑΒΓΔ τομὴ νὰ διαιρῇ τὴν πυραμίδα εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

770. Μία πυραμὶς Κ.ΑΒΓΔ ἔχει ὄγκον 4 κυβ. παλ. καὶ πλευρὰν (ΚΑ) = 3,5 παλάμ. Ὁρίζομεν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ταύτης τμῆμα (Κα) = 2 παλ. καὶ ἄγομεν ἀπὸ τὸ α ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν ἕδραν ΑΒΓΔ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τῆς σχηματιζομένης κολούρου πυραμίδος.

771. Ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει ὄγκον 0,00162 κυβ. μέτρα καὶ διαστάσεις ἀναλόγους πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 3, 4, 5. Νὰ εὕρητε τὰ μήκη τῶν διαστάσεων αὐτῶν εἰς ἑκατοστόμετρα.

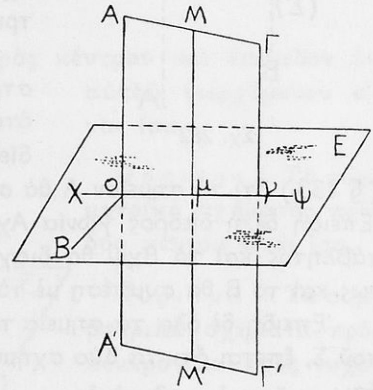
772. Νὰ εὕρητε τὸν λόγον τῶν ἐπιφανειῶν δύο ὁμοίων πολυέδρων ἀπὸ τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν.

773. Εἷς κύβος Κ εἶναι τριπλάσιος ἄλλου κύβου. κ. Νὰ εὕρητε πόσας φορὰς ἡ ἐπιφάνεια τοῦ Κ εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'

ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΕΝ ΤΩ ΧΩΡΩ

§ 362. **Ποῖα λέγονται συμμετρικὰ σημεῖα καὶ σχήματα πρὸς ἐπίπεδον.** Ἐμάθομεν ὅτι: Ἂν μία εὐθεῖα χψ τέμνῃ δίχα καὶ καθέτως ἓν εὐθ. τμῆμα ΑΑ', τὰ ἄκρα Α, Α' λέγονται συμμετρικὰ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ἢ τὸν ἄξονα χψ. Ἂν διὰ τοῦ μέσου Ο τοῦ τμήματος ΑΑ', φέρωμεν καὶ ἄλλην εὐθεῖαν ΟΒ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΑ', τὸ ἐπίπεδον Ε τῶν εὐθειῶν χψ καὶ ΟΒ εἶναι ἐπίσης κάθετον ἐπὶ τὸ τμῆμα ΑΑ' καὶ διχοτομεῖ αὐτό. Διὰ τοῦτο τὰ σημεῖα Α, Α' λέγονται **συμμετρικὰ πρὸς τὸ ἐπίπεδον Ε** (σχ. 281). Δηλαδή:



Σχ. 281

Δύο σημεῖα λέγονται συμμετρικὰ πρὸς ἐπίπεδον, ἂν τοῦτο τέμνῃ δίχα καὶ καθέτως τὴν ἀπόστασιν αὐτῶν.

Τὸ ἐπίπεδον, πρὸς τὸ ὁποῖον ὁρίζονται τὰ συμετρικὰ σημεῖα, λέγεται **ἐπίπεδον συμμετρίας.**

Τὰ συμμετρικὰ τῶν διαφόρων σημείων ἑνὸς σχήματος π.χ. ΑΓ πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον συμμετρίας Ε ἀποτελοῦσιν ἄλλο σχῆμα Α'Γ'. Τοῦτο δὲ λέγεται συμμετρικὸν τοῦ ΑΓ πρὸς τὸ ἐπίπεδον Ε. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι καὶ τὰ συμμετρικὰ τῶν σημείων τοῦ Α'Γ' ἀποτελοῦσι τὸ σχῆμα ΑΓ. Καὶ τοῦτο λοιπὸν εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Α'Γ'. Τὰ δύο δὲ σχήματα ΑΓ, Α'Γ' λέγονται **συμμετρικὰ ἀλλήλων** πρὸς τὸ ἐπίπεδον Ε. Ὥστε:

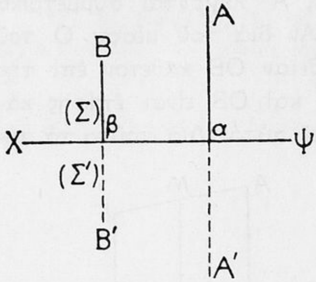
Δύο σχήματα λέγονται συμμετρικὰ πρὸς ἐπίπεδον, ἂν τὰ

πρὸς αὐτὸ συμμετρικὰ ὅλων τῶν σημείων ἑκατέρου εἶναι σημεῖα τοῦ ἑτέρου.

Ὁμοίως ὁρίζονται τὰ συμμετρικὰ σχήματα πρὸς κέντρον ἢ ἄξονα (§ 130, 132).

Ἂν δὲ συμβῇ τὰ πρὸς ἐπίπεδον συμμετρικὰ τῶν σημείων ἑνὸς σχήματος νὰ εἶναι σημεῖα τοῦ αὐτοῦ σχήματος, τὸ σχῆμα τοῦτο εἶναι συμμετρικὸν ἑαυτοῦ. Τὸ δὲ ἐπίπεδον τοῦτο λέγεται **ἐπίπεδον συμμετρίας** τοῦ σχήματος τούτου.

§ 363. Σχέσις τῶν πρὸς ἄξονα συμμετρικῶν σχημάτων.



Σχ. 282

Ἔστωσαν Α, Β δύο τυχόντα σημεῖα ἑνὸς σχήματος Σ καὶ Α΄, Β΄ τὰ συμμετρικὰ αὐτῶν πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα χψ (σχ. 282) Εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ σημεῖα Α΄, Β΄, εἶναι σημεῖα τοῦ σχήματος Σ΄, τὸ ὁποῖον εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Σ πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα.

Ἂς νοήσωμεν ὅτι τὸ σχῆμα Σ στρέφεται περὶ τὸν ἄξονα χψ, ἕως ὅτου τὸ ἡμιεπίπεδον Αχψ διαγράψῃ δίεδρον γωνίαν 180^0. Γνωρίζομεν (§ 133) ὅτι τὸ σημεῖον Α θὰ συμπέσῃ μὲ τὸ συμμετρικόν του Α΄. Ἐπειδὴ δὲ ἡ δίεδρος γωνία ΑχψΒ μένει κατὰ τὴν στροφὴν ἀμετάβλητος καὶ τὸ Βχψ θὰ διαγράψῃ δίεδρον γωνίαν 180^0, ἐπομένως καὶ τὸ Β θὰ συμπέσῃ μὲ τὸ Β΄.

Ἐπειδὴ δὲ ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ Σ΄ εἶναι συμμετρικὰ τῶν σημείων τοῦ Σ, ἕπεται ὅτι τὰ δύο σχήματα ἐφαρμόζουσι. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

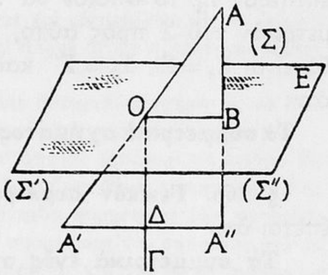
Δύο σχήματα συμμετρικὰ πρὸς ἄξονα εἶναι ἴσα.

§ 364. Σχέσις τῶν συμμετρικῶν σχημάτων ἑνὸς σχήματος πρὸς κέντρον καὶ ἐπίπεδον δι᾽ αὐτοῦ διερχόμενον.

Ἔστω Σ τυχὸν σχῆμα (σχ. 283) καὶ Σ΄, Σ΄΄ τὰ συμμετρικὰ αὐτοῦ ἀντιστοίχως πρὸς κέντρον Ο καὶ πρὸς ἐπίπεδον Ε, εἰς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Ο.

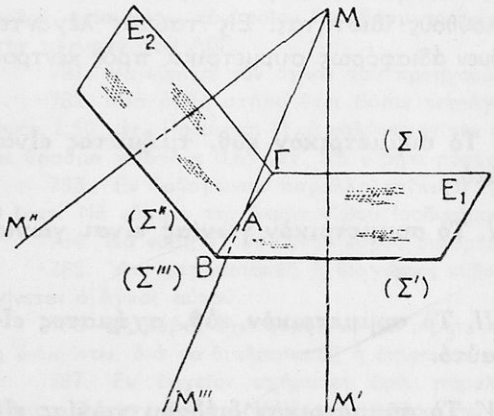
Ἂν Α εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ Σ, τὸ μὲν Α΄ συμμετρικὸν αὐτοῦ πρὸς Ο εἶναι σημεῖον τοῦ Σ', τὸ δὲ Α'' συμμετρικὸν τοῦ Α πρὸς τὸ ἐπίπεδον Ε, θὰ εἶναι σημεῖον τοῦ Σ''.

Ἂν Β εἶναι τὸ ἴχνος τῆς ΑΑ'' εἰς τὸ ἐπίπεδον Ε, θὰ εἶναι ΑΒ = ΒΑ'', ἡ δὲ εὐθεῖα ΟΒ ὁριζομένη ὑπὸ τῶν μέσων τῶν ΑΑ', ΑΑ'' εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν Α'Α''. Ἂν δὲ φέρωμεν τὴν ΟΓ κάθετον ἐπὶ τὸ Ε, αὕτη, ὡς παράλληλος πρὸς τὴν ΑΑ'', θὰ κεῖται εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΑ'Α'' καὶ θὰ τέμνῃ δίχα καὶ καθέτως τὸ τμῆμα Α'Α''. Εἶναι λοιπὸν τὰ σημεῖα Α', Α'' συμμετρικὰ πρὸς τὴν ΟΓ. Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο συμβαίνει δι' ὅλα τὰ σημεῖα τῶν Σ', Σ'', ἕπεται ὅτι ταῦτα εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸν ἄξονα ΟΓ. Κατὰ δὲ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα εἶναι Σ' = Σ''. Ὥστε:



Σχ. 283

Τὰ συμμετρικὰ σχήματα πρὸς κέντρον καὶ ἐπίπεδον δι' αὐτοῦ διερχόμενον εἶναι ἴσα.



Σχ. 284

Πόρισμα I. **Τὰ συμμετρικὰ σχήματος πρὸς δύο κέντρα εἶναι ἴσα.**

Πόρισμα II. **Τὰ συμμετρικὰ σχήματα πρὸς κέντρον καὶ πρὸς τυχὸν ἐπίπεδον εἶναι ἴσα.**

§ 365. Σχέσις τῶν συμμετρικῶν σχήματος πρὸς δύο ἐπίπεδα.

Ἔστωσαν πρῶτον δύο ἐπίπεδα E_1, E_2 τεμνόμενα κατά τινα εὐθεῖαν ΒΓ (σχ. 284). Ἔστωσαν δὲ Σ', Σ'' τὰ πρὸς αὐτὰ συμμετρικὰ ἑνὸς σχήματος Σ. Ἂς θεωρήσωμεν δὲ τυχὸν σημεῖον Α τῆς ΒΓ ὡς κέντρον συμμετρίας. Ἂν

Σ''' εἶναι τὸ πρὸς αὐτὸ συμμετρικὸν τοῦ Σ, θὰ εἶναι $\Sigma''' = \Sigma'$, $\Sigma''' = \Sigma''$ (§ 364). Ἔπεται λοιπὸν ὅτι $\Sigma' = \Sigma''$.

Ἂν δύο ἐπίπεδα E_1, E_2 εἶναι παράλληλα, νοοῦμεν ἄλλο ἐπίπεδον E_3, τὸ ὁποῖον νὰ τέμνῃ αὐτά. Ἂν δὲ Σ_3, εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Σ πρὸς αὐτό, κατὰ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν θὰ εἶναι $\Sigma_3 = \Sigma'$, $\Sigma_3 = \Sigma''$ καὶ ἑπομένως $\Sigma' = \Sigma''$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι:

Τὰ συμμετρικὰ σχήματος πρὸς δύο τυχόντα ἐπίπεδα εἶναι ἴσα.

§ 366. Γενικὸν συμπέρασμα. Ἐξ ὅλων τῶν προηγουμένων ἕπεται ὅτι:

Τὰ συμμετρικὰ ἑνὸς σχήματος πρὸς διάφορα κέντρα καὶ ἐπίπεδα εἶναι ἴσα καὶ μόνον κατὰ τὴν θέσιν διαφέρουσι.

Δι' αὐτὸν τὸν λόγον, ὁσάκις πρόκειται περὶ ἰδιοτήτων τῶν τοιούτων σχημάτων, αἱ ὁποῖαι δὲν σχετίζονται πρὸς τὴν θέσιν αὐτῶν, δυνάμεθα νὰ ἐκλέγωμεν τὸ προσφορώτερον ἐξ αὐτῶν εἶδος συμμετρίας διὰ τὴν ἁπλοποίησιν τῶν σχετικῶν ἀποδείξεων καὶ μάλιστα πρὸς κέντρον ἢ ἐπίπεδον συμμετρίας οἱονδήποτε.

Χρησιμοποιοῦντες τὴν ἐλευθερίαν ταύτην δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν εὐκόλως τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας. Εἰς ταύτας λέγοντες συμμετρικὰ σχήματα νοοῦμεν ἀδιαφόρως συμμετρικὰ πρὸς κέντρον ἢ ἐπίπεδον.

§ 367. *Θεώρημα I.* **Τὸ συμμετρικὸν εὐθ. τμήματος εἶναι εὐθ. τμῆμα ἴσον πρὸς αὐτό.**

§ 368. *Θεώρημα II.* **Τὸ συμμετρικὸν γωνίας εἶναι γωνία ἴση μὲ αὐτήν.**

§ 369. *Θεώρημα III.* **Τὸ συμμετρικὸν εὐθ. σχήματος εἶναι εὐθ. σχῆμα ἴσον μὲ αὐτό.**

§ 370. *Θεώρημα IV.* **Τὸ συμμετρικὸν διέδρου γωνίας εἶναι δίεδρος γωνία ἴση μὲ αὐτήν.**

§ 371. *Θεώρημα V.* **Τὸ συμμετρικὸν στερεᾶς γωνίας εἶναι στερεὰ γωνία ἔχουσα μὲ αὐτὴν ἴσα, ἓν πρὸς ἕν, ὅλα τὰ ὁμοειδῆ στοιχεῖα, ἀλλὰ μὴ ἐφαρμόζουσα πάντοτε ἐπ' αὐτῆς.**

Πόρισμα. **Τὸ συμμετρικὸν πολυέδρου εἶναι πολύεδρον, τὸ ὁποῖον ἔχει μὲ αὐτὸ ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, διέδρους καὶ ἐπιπέδους γωνίας.**

Ἀσκήσεις

774. Ἂν ἓν σχῆμα ἔχῃ ἄξονα συμμετρίας καὶ κέντρον συμμετρίας κείμενον ἐπ᾽ αὐτοῦ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι τοῦτο ἔχει καὶ ἄλλον ἄξονα συμμετρίας κάθετον ἐπὶ τὸν πρῶτον εἰς τὸ κέντρον συμμετρίας.

775. Ἂν δύο κάθετοι εὐθεῖαι εἶναι ἄξονες συμμετρίας σχήματος, νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἡ τομὴ αὐτῶν εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ αὐτοῦ σχήματος.

776. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἡ εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν ὁρίζουσι τὰ κέντρα δύο ἀπέναντι ἑδρῶν ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ.

777. Ἂν δύο κάθετα ἐπίπεδα εἶναι ἐπίπεδα συμμετρίας ἑνὸς σχήματος, νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἡ τομὴ αὐτῶν εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος τούτου.

778. Ἂν ἓν σχῆμα ἔχῃ ἓν ἐπίπεδον συμμετρίας καὶ ἕνα ἄξονα συμμετρίας κείμενον ἐπ᾽ αὐτοῦ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἔχει καὶ ἄλλο ἐπίπεδον συμμετρίας.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ ΣΤ΄ βιβλίου

779. Ἓν ὀρθὸν πρῖσμα ἔχει βάσεις κανονικὰ ἑξάγωνα μὲ πλευρὰν α ἑκατ. καὶ ἐπιφάνειαν $3\alpha^2\,(2+\sqrt{3})$ τετ. ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ ὕψος αὐτοῦ.

780. Ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει πλευρὰν α παλαμῶν. Ἔστωσαν δὲ Δ, Ε, Ζ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ καὶ ὕψος ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ΑΒΓ.

781. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τοῦ προηγουμένου πρίσματος.

782. Μία ὀρθὴ στήλη ἔχει βάσιν τετράγωνον μὲ πλευρὰν 0,5 μέτ. καὶ ὕψος 2,50 μέτ. Πρόκειται δὲ νὰ καλύψωμεν τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν αὐτῆς μὲ ὕφασμα πλάτους 0,65 μέτ. Νὰ εὕρητε πόσον ὕφασμα θὰ χρειασθῶμεν.

783. Ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει διαστάσεις 4 ἑκατ., 6 ἑκατ., 9 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὴν ἀκμὴν κύβου ἰσοδυνάμου πρὸς αὐτό.

784. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον κύβου συναρτήσει τῆς διαγωνίου αὐτοῦ.

785. Ἂν τριπλασιασθῇ ἡ διαγώνιος κύβου, νὰ ἐξετάσητε ποσαπλάσιος γίνεται ὁ ὄγκος αὐτοῦ.

786. Εἷς κύβος ἔχει ἀκμὴν α. Νὰ εὕρητε κατὰ πόσον πρέπει νὰ αὐξηθῇ ἡ ἀκμή του, διὰ νὰ διπλασιασθῇ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ.

787. Ἓν δοχεῖον σχήματος ὀρθ. παραλληλεπιπέδου ἔχει διαστάσεις 2 ἑκατ., 3 ἑκατ., 4 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ βάρος τοῦ ὑδραργύρου, τὸν ὁποῖον χωρεῖ.

788. Νὰ εὕρητε τὴν ἀκμὴν κανονικοῦ τετραέδρου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ κύβον ἀκμῆς 8 ἑκατ.

789. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει πλευρὰς (ΑΒ) = 4 μέτ., (ΒΓ) = 6 μέτ. (ΑΓ) = 5 μέτ. Εἶναι δὲ τοῦτο βάσις πυραμίδος Κ.ΑΒΓ. Ἂν ΑΔ εἶναι ἡ διχο-

τόμος τῆς γωνίας Α αὐτοῦ, νὰ εὕρητε τὸν λόγον τῶν δύο μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ πυραμὶς αὕτη ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΚΑΔ.

790. Μία πυραμὶς ἔχει βάσιν $α^2$ τετ. ἑκ. καὶ ὕψος (ΑΗ) = α ἑκ. Ἂν ΑΜ εἶναι τὸ μεγαλύτερον μέρος τοῦ ΑΗ διῃρημένου εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς αὐτῆς ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν καὶ διερχομένου διὰ τοῦ Μ.

791. Ἓν κανονικὸν τετράεδρον ἔχει ὄγκον $\frac{9}{4}\sqrt{2}$ κυβ. ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς ἀκμῆς αὐτοῦ.

792. Μία πυραμὶς Κ.ΑΒΓΔΕΖ ἔχει βάσιν κανονικὸν ἑξάγωνον πλευρᾶς α ἑκ. καὶ ὕψος 2α ἑκ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον ἑκάστου τῶν μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται αὕτη ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων ΚΑΓ, ΚΑΕ.

793. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τῆς κολούρου πυραμίδος, ἡ ὁποία σχηματίζεται, ἂν ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει δίχα καὶ καθέτως τὸ ὕψος τῆς προηγουμένης πυραμίδος.

794. Ἓν ὀρθὸν πρῖσμα ΑΒΓΑ΄Β΄Γ΄ ἔχει βάσεις ἰσόπλευρα τρίγωνα πλευρᾶς α ἑκ. καὶ ὕψος 2α ἑκ. Ἂν Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΓΓ΄ νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ ΔΑΒΓ.

795. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ ΑΒΔΑ΄Β΄Γ΄, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ προηγουμένου ὀρθοῦ πρίσματος.

796. Ἓν πλάγιον πρῖσμα ἔχει βάσιν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ μὲ καθέτους πλευρὰς (ΑΓ) = 3 ἑκατ., (ΑΒ) = 6 ἑκατ. Ἡ πλευρὰ ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς Α ἔχει μῆκος 10 ἑκατ. καὶ προβάλλεται εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ ἐπὶ τῆς ΑΓ κατὰ τμῆμα (ΑΕ) = 4 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτοῦ.

797. Μία πυραμὶς Κ.ΑΒΓ ἔχει βάσιν ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ὕψος (ΚΑ) = 8 ἑκατ. Ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀγομένη διάμεσος ΑΔ τοῦ ΑΒΓ ἔχει μῆκος 3 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τῆς πυραμίδος ταύτης.

798. Αἱ ἕδραι ΑΒΓ, ΚΒΓ ἑνὸς τετραέδρου Κ.ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα πλευρᾶς α ἑκατ. καὶ σχηματίζουσι δίεδρον γωνίαν 60^0. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τοῦ τετραέδρου τούτου.

799. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διχοτομοῦσι τὰς διέδρους γωνίας τετραέδρου, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

800. Τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα τέμνουσι δίχα καὶ καθέτως τὰς ἀκμὰς τετραέδρου, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

801. Τὰ εὐθ. τμήματα, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τετραέδρου, διχοτομοῦνται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

802. Τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ μίαν ἀκμὴν τετραέδρου καὶ ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς, διαιρεῖ τὸ τετράεδρον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

803. Εἷς κύβος ἀκμῆς α ἑκατ. τέμνεται ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν τῶν στερεῶν γωνιῶν αὐτοῦ. Ἂν ἀφαιρεθῶσιν αἱ πυραμίδες, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι κορυφὰς τὰς κορυφὰς τοῦ κύβου καὶ βάσεις τὰς τομὰς ταύτας, νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τοῦ μένοντος στερεοῦ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ

ΣΩΜΑΤΑ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'

ΣΩΜΑΤΑ ΠΕΡΑΤΟΥΜΕΝΑ ΕΙΣ ΜΕΙΚΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΝ

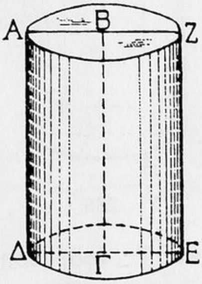
Ι. ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

§ 372. Τί εἶναι κύλινδρος καὶ ποῖα εἶναι τὰ στοιχεῖα αὐτοῦ. Ἔστω ΑΒΓΔ τυχὸν ὀρθογώνιον (σχ. 285). Ἂς νοήσωμεν ὅτι μία πλευρὰ π.χ. ἡ ΒΓ μένει ἀκίνητος, τὸ δὲ ὀρθογώνιον στρέφεται περὶ αὐτὴν κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, ἕως ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην θέσιν του.

Τὸ σύνολον τῶν θέσεων, ἀπὸ τὰς ὁποίας διέρχεται τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο, ἀποτελεῖ ἓν στερεὸν σχῆμα ΑΔΕΖ.

Τοῦτο λέγεται **κύλινδρος.** Ὥστε:

Κύλινδρος εἶναι στερεόν, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἀπὸ ἓν ὀρθογώνιον ἂν τοῦτο στραφῇ κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν περὶ μίαν ἀκίνητον πλευράν του, ἕως ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην θέσιν του.



Σχ. 285

Ἡ ἀκίνητος πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου λέγεται **ἄξων** ἢ **ὕψος** τοῦ σχηματιζομένου κυλίνδρου. Π.χ. ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶναι ὁ ἄξων ἢ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου ΑΔΕΖ (σχ. 285).

Αἱ κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα πλευραὶ ΑΒ, ΔΓ κατὰ τὴν στροφὴν μένουσι κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα καὶ σταθεραὶ κατὰ τὸ μέγεθος. Διὰ τοῦτο γράφουσιν ἴσους κύκλους μὲ κέντρα Β,Γ καὶ καθέτους ἐπὶ τὸν ἄξονα. Οἱ κύκλοι οὗτοι λέγονται **βάσεις** τοῦ κυλίνδρου.

Ἡ πλευρὰ ΑΔ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ, ἡ ὁποία εἶναι ἀπέναντι τοῦ ἄξονος, γράφει μίαν καμπύλην ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ τῶν βάσεων.

Αὕτη λέγεται ἰδιαιτέρως **κυρτὴ ἐπιφάνεια** τοῦ κυλίνδρου.

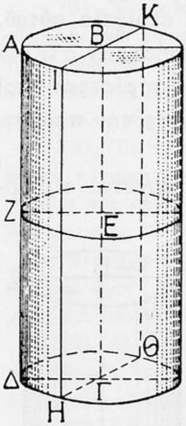
Ἡ δὲ πλευρὰ ΑΔ, ἡ ὁποία γράφει τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν, λέγεται **γενέτειρα** αὐτῆς.

Ὥστε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι μεικτὴ ἐπιφάνεια.

§ 373. Δύο ἀξιοσημείωτοι ἐπίπεδοι τομαὶ κυλίνδρου.

α΄) Ἔστω εὐθεῖα ΕΖ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκίνητον πλευρὰν ΒΓ αὐτοῦ (σχ. 286).

Ἐπειδὴ κατὰ τὴν στροφὴν τοῦ ὀρθογωνίου αὕτη μένει διαρκῶς κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, γράφει ἐπίπεδον κάθετον ἐπ' αὐτὸν καὶ ἐπομένως παράλληλον πρὸς τὰ ἐπίπεδα τῶν βάσεων. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τμῆμα ΕΖ μένει σταθερὸν κατὰ τὸ μέγεθος καὶ ἴσον πρὸς τὴν ΑΒ, τὸ κοινὸν μέρος τοῦ ἐπιπέδου τούτου καὶ τοῦ κυλίνδρου εἶναι κύκλος μὲ κέντρον Ε καὶ ἀκτῖνα ΕΖ = ΑΒ. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :



Σχ. 286

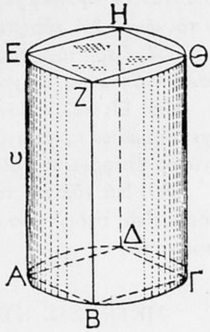
Ἡ τομὴ κυλίνδρου ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα εἶναι κύκλος παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις καὶ ἴσος πρὸς ἑκάστην τούτων.

β΄) Τυχὸν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ ἄξονος κυλίνδρου τέμνει τὰς βάσεις αὐτοῦ κατὰ διαμέτρους ΙΚ, ΗΘ παραλλήλους καὶ ἴσας. Τὸν δὲ κύλινδρον κατὰ τὸ παραλληλόγραμμον ΙΚΘΗ.

Ὅταν κατὰ τὴν στροφὴν τοῦ ΑΒΓΔ ἡ ἀκτὶς ΓΔ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΓΘ, ἡ ΒΑ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς παραλλήλου της ΒΚ καὶ τὸ ΑΒΓΔ ἐπὶ τοῦ ΓΘΚΒ. Ὅταν δὲ ἡ ΓΔ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΓΗ, τὸ ΑΒΓΔ ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ ΓΗΙΒ. Τὸ παραλληγόγραμμον λοιπὸν ΗΘΚΙ εἶναι ὀρθογώνιον διπλάσιον τοῦ ΑΒΓΔ. Ὥστε :

Ἡ τομὴ κυλίνδρου ὑπὸ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὸν ἄξονα αὐτοῦ, εἶναι ὀρθογώνιον διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐσχηματίσθη ὁ κύλινδρος οὗτος.

§ 374. Ποῖα εἶναι ἐγγεγραμμένα καὶ ποῖα περιγεγραμμένα περὶ κύλινδρον πρίσματα. Ἔστω ἓν πρῖσμα ΑΒΓΔΕΖΘΗ (σχ. 287). Αἱ βάσεις ΑΒΓΔ, ΕΖΘΗ τούτου εἶναι ἀνὰ μία, ἐγγεγραμμέναι εἰς τὰς βάσεις ἑνὸς κυλίνδρου ΑΘ.

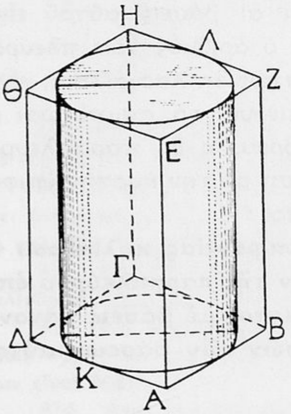


Σχ. 287

Τὸ πρῖσμα τοῦτο λέγεται **ἐγγεγραμμένον** εἰς τὸν κύλινδρον ΑΘ. Οὗτος δὲ λέγεται περιγεγραμμένος περὶ τὸ πρῖσμα. Ὥστε:

Ἓν πρῖσμα λέγεται ἐγγεγραμμένον εἰς κύλινδρον, ἂν αἱ βάσεις τοῦ πρίσματος εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου.

Εἷς δὲ κύλινδρος λέγεται περιγεγραμμένος περὶ πρῖσμα, ἂν τοῦτο εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύλινδρον.



Σχ. 288

Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι:

Ἓν πρῖσμα λέγεται περιγεγραμμένον περὶ κύλινδρον, ἂν αἱ βάσεις τοῦ πρίσματος εἶναι περιγεγραμμέναι περὶ τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου.

Ὁ δὲ κύλινδρος λέγεται **ἐγγεγραμμένος** εἰς τὸ πρῖσμα.

Π. χ. τὸ πρῖσμα ΑΒΓΔΕΖΗΘ (σχ. 288) εἶναι περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύλινδρον ΚΛ καὶ οὗτος εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ πρῖσμα τοῦτο.

Εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ ἐγγεγραμμένα εἰς κύλινδρον καὶ τὰ περιγεγραμμένα περὶ αὐτὸν πρίσματα εἶναι ὀρθὰ πρίσματα.

Ἀσκήσεις

804. Νὰ ὁρίσητε τὰ κοινὰ μέρη τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου καὶ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πρίσματος ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτόν.

805. Νὰ ὁρίσητε τὰ κοινὰ μέρη τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου καὶ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας περιγεγραμμένου πρίσματος.

806. Εἷς κύλινδρος ἔχει ὕψος 6 ἑκατ. καὶ ἡ ἀκτὶς τῶν βάσεων εἶναι 4 ἑκατ. Εἰς αὐτὸν δὲ εἶναι ἐγγεγραμμένον πρῖσμα, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τοῦ πρίσματος τούτου.

807. Περὶ τὸν προηγούμενον κύλινδρον εἶναι περιγεγραμμένον πρῖσμα μὲ βάσεις ἰσόπλευρα τρίγωνα. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτοῦ.

808. Εἰς κύλινδρον ὕψους 10 ἑκατ. καὶ βάσεως μὲ ἀκτῖνα 6 ἑκατ. εἶναι ἐγγεγραμμένον πρῖσμα μὲ βάσεις τετράγωνα. Νὰ εὕρητε τὸν ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος τούτου.

809. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πρίσματος, τὸ ὁποῖον εἶναι περιγεγραμμένον περὶ τὸν προηγούμενον κύλινδρον καὶ ἔχει βάσεις τετράγωνα.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΑΥΤΟΥ

§ 375. Τί λέγεται ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου. Ἔστω πρῖσμα ΑΒΓΔΕΖΘΗ ἐγγεγραμμένον εἰς κύλινδρον ΑΘ (σχ. 287). Ἂς ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι αἱ βάσεις αὐτοῦ εἶναι κανονικὰ εὐθ. σχήματα Ἂν νοήσωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν κανονικῶν τούτων σχημάτων ἀπαύστως διπλασιάζεται, εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ μὲν περίμετροι αὐτῶν τείνουσι νὰ συμπέσωσι μὲ τὰς περιφερείας τῶν βάσεων τοῦ κυλίνδρου, ἡ δὲ παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τείνει νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον:

Ὀνομάζομεν ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸν πρίσματος μὲ βάσεις κανονικὰ πολύγωνα, ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων αὐτοῦ ἀπαύστως διπλασιάζηται.

§ 376. *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ε τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου ΑΘ ἐκ τοῦ ὕψους υ καὶ τῆς περιφερείας Γ τῆς βάσεως αὐτοῦ.**

Λύσις. Ἂς νοήσωμεν πρῖσμα ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύλινδρον μὲ βάσεις κανονικὰ εὐθ. σχήματα καὶ ἂς καλέσωμεν Ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτοῦ.

Ἐμάθομεν δὲ (§ 331) ὅτι $Ε = [(ΑΒ) + (ΒΓ) + (ΓΔ) + (ΔΑ)]\,υ$ ὁσασδήποτε πλευρὰς καὶ ἂν ἔχῃ ἡ βάσις τοῦ πρίσματος. Ἐπομένως, ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τούτων ἀπαύστως διπλασιάζηται, ἡ ἰσότης αὐτὴ θὰ ἐξακολουθῇ ἰσχύουσα. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\text{ὅρ } E = υ . \text{ ὅρ } [(AB) + (BΓ) + (ΓΔ) + (ΔA)].$$

Ἐπειδὴ δὲ ὅρ. $E = ε$ καὶ ὅρ $[(AB) + (BΓ) + (ΓΔ) + (ΔA)] = Γ$ (§ 261), ἕπεται ὅτι $ε = Γ \cdot υ$, ἤτοι:

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου εἶναι γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἂν ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι α, ὡς γνωστὸν εἶναι $Γ = 2πα$ καὶ ἑπομένως

$$ε = 2παυ \qquad (1)$$

§ **377.** *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου ἐκ τοῦ ὕψους υ καὶ τῆς ἀκτῖνος α τῆς βάσεως αὐτοῦ.**

Λύσις. Προφανῶς εἶναι:

$$E = 2παυ + 2πα^2 \quad \text{ἢ} \quad \mathbf{E = 2πα\,(α + υ)} \qquad (1)$$

Ἀσκήσεις

810. Εἷς κύλινδρος ἔχει ὕψος 8 ἑκατ. ἡ δὲ βάσις του ἔχει ἀκτῖνα 5 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας καὶ ὅλης τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

811. Μία κυλινδρικὴ στήλη ἔχει ὕψος 2,40 μέτρα, ἡ δὲ βάσις αὐτῆς ἔχει διάμετρον 0,8 μέτ. Νὰ εὕρητε πόσο ὕφασμα πλάτους 1,40 χρειάζεται διὰ νὰ καλυφθῇ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια αὐτῆς.

812. Νὰ συγκρίνητε τὸν λόγον τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν δύο ἰσοϋψῶν κυλίνδρων πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων αὐτῶν.

813. Νὰ συγκρίνητε τὸν λόγον τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν δύο κυλίνδρων πρὸς τὸν λόγον τῶν ὑψῶν αὐτῶν, ἂν αἱ βάσεις τῶν κυλίνδρων τούτων εἶναι ἴσαι.

814. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν παράλληλον χψ πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ αὐτοῦ. Ἂς νοήσωμεν δὲ ὅτι τὸ τρίγωνον στρέφεται περὶ τὴν χψ, ἕως ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην θέσιν του. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τὴν ὁποίαν θὰ γράψῃ ἡ ΒΓ, ἂν αὐτὴ ἔχῃ μῆκος 10 ἑκατ. τὸ δὲ ὕψος (ΑΔ) = 8 ἑκατ.

§ **378. Τί λέγεται ὄγκος κυλίνδρου.** Ἂν σκεφθῶμεν, ὅπως εἰς τὴν § 375, ἐννοοῦμεν ὅτι:

Ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως πρίσματος ἐγγεγραμμένου εἰς κύλινδρον ἀπαύστως διπλασιάζηται, τὸ πρῖσμα τείνει νὰ συμπέσῃ μὲ τὸν κύλινδρον. Διὰ τοῦτο:

Ὀνομάζομεν ὄγκον κυλίνδρου τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ὁ ὄγκος πρίσματος μὲ βάσεις κανονικὰ πολύγωνα ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύλινδρον, ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως αὐτοῦ ἀπαύστως διπλασιάζηται.

§ 379. *Πρόβλημα III.* **Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος Κ κυλίνδρου ἐκ τοῦ ὕψους υ καὶ τῆς ἀκτῖνος α τῆς βάσεως αὐτοῦ.**

Λύσις. Νοοῦμεν πρῖσμα ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύλινδρον, ἔστω δὲ Θ ὁ ὄγκος καὶ β τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος τούτου καὶ Β τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου.

Γνωρίζομεν ὅτι $\Theta = \beta \cdot \upsilon$, ὁσασδήποτε πλευρὰς καὶ ἂν ἔχῃ ἡ βάσις τοῦ πρίσματος.

Ἂν λοιπὸν νοήσωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τούτων ἀπαύστως διπλασιάζεται, θὰ εἶναι ὅρ $\Theta = \upsilon$. ὅρ β. (1)

Εἶναι δὲ ὅρ. $\Theta = K$, καὶ ἂν ἡ βάσις τοῦ πρίσματος εἶναι κανονικὸν σχῆμα, θὰ εἶναι ὅρ $\beta = B$. Ἑπομένως ἡ (1) γίνεται $K = B \cdot \upsilon$ (2). Ἤτοι:

Ὁ ὄγκος κυλίνδρου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἐπειδὴ δὲ $B = \pi\alpha^2$, ἡ ἰσότης (2) γίνεται $\mathbf{K = \pi\alpha^2 . \upsilon}$ (3)

Ἀσκήσεις

815. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει $\upsilon = 1$ μέτ. καὶ $\alpha = 3$ ἑκατ.

816. Εἷς κύλινδρος ἔχει ὄγκον 10 κυβ. παλάμας καὶ ὕψος 50 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεως.

817. Ἓν κυλινδρικὸν δοχεῖον ἔχει ὕψος 10 ἑκατ. καὶ ἡ διάμετρος τῆς βάσεως εἶναι 10 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ βάρος ἀπεσταγμένου ὕδατος 4^0 Κ. τὸ ὁποῖον χωρεῖ.

818. Νὰ εὕρητε τὸ βάρος τοῦ ἐλαίου εἰδ. βάρος 0,9, τὸ ὁποῖον χωρεῖ τὸ προηγούγενον δοχεῖον.

819. Νὰ συγκρίνητε τὸν λόγον δύο ἰσοϋψῶν κυλίνδρων πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων αὐτῶν.

820. Νὰ συγκρίνητε τὸν λόγον δύο κυλίνδρων πρὸς τὸν λόγον τῶν ὑψῶν αὐτῶν, ἂν αἱ βάσεις τῶν κυλίνδρων τούτων εἶναι ἴσαι.

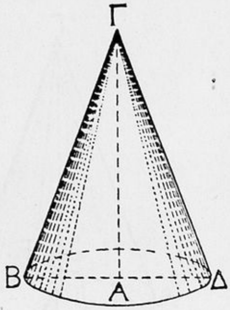
§ 380. Τί εἶναι κῶνος καὶ ποῖα εἶναι τὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.

Ἔστω ΑΒΓ ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον (σχ. 289).

Ἂς νοήσωμεν δὲ ὅτι μία ἀπὸ τὰς καθέτους πλευρὰς αὐτοῦ π. χ. ἡ ΑΓ μένει ἀκίνητος, τὸ δὲ τρίγωνον στρέφεται περὶ αὐτὴν κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, ἕως ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην θέσιν του.

Τὸ σύνολον τῶν θέσεων, ἀπὸ τὰς ὁποίας διέρχεται τοῦτο, ἀποτελεῖ ἓν στερεὸν ΓΒΔ. Τοῦτο δὲ λέγεται **κῶνος.** Ὥστε:

Κῶνος εἶναι στερεόν, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἀπὸ ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἂν τοῦτο στραφῇ κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν περὶ μίαν ἀκίνητον κάθετον πλευρὰν αὐτοῦ, ἕως ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην θέσιν του.



Σχ. 289

Ἡ ἀκίνητος πλευρὰ τοῦ ὀρθ. τριγώνου λέγεται **ἄξων** ἢ **ὕψος** τοῦ κώνου. Π. χ. ΓΑ εἶναι ὁ ἄξων ἢ τὸ ὕψος τοῦ κώνου ΓΒΔ (σχ. 289).

Ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ ΑΒ γράφει κύκλον κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα. Οὗτος ἔχει κέντρον τὴν κορυφὴν Α τῆς ὀρθῆς γωνίας.

Ὁ κύκλος οὗτος λέγεται **βάσις** τοῦ κώνου.

Ἡ ὑποτείνουσα τοῦ στρεφομένου ὀρθ. τριγώνου γράφει μίαν καμπύλην ἐπιφάνειαν. Αὕτη λέγεται ἰδιαιτέρως **κυρτὴ** ἐπιφάνεια τοῦ κώνου. Ἡ δὲ ὑποτείνουσα λέγεται **γενέτειρα** τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἢ καὶ **πλευρὰ** τοῦ κώνου.

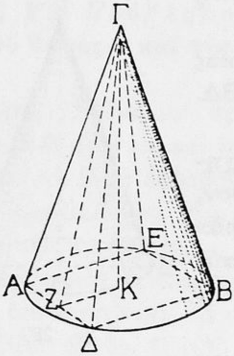
Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου εἶναι λοιπὸν μεικτὴ ἐπιφάνεια.

§ 381. Δύο ἀξιοσημείωτοι ἐπίπεδοι τομαὶ κώνου. Ἂν ἐργασθῶμεν ὅπως εἰς τὴν § 373 διὰ τὸν κύλινδρον, ἐννοοῦμεν εὐκόλως τὰ ἑξῆς:

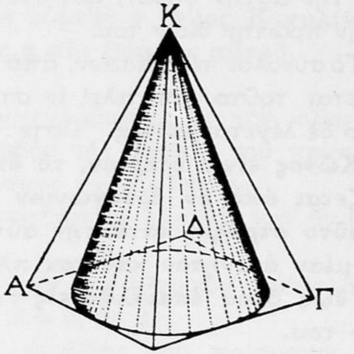
α´) Πᾶσα ἐπίπεδος τομὴ κώνου κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα αὐτοῦ εἶναι κύκλος.

β´) Ἡ τομὴ κώνου ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος αὐτοῦ εἶναι ἰσοσκελὲς τρίγωνον διπλάσιον τοῦ ὀρθ. τριγώνου, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐσχηματίσθη ὁ κῶνος.

§ 382. Ποῖαι λέγονται ἐγγεγραμμέναι πυραμίδες εἰς κῶνον καὶ ποῖαι περιγεγραμμέναι περὶ κῶνον. Ἡ πυραμὶς Γ.ΑΔΒΕ (σχ. 290) ἔχει τὴν αὐτὴν κορυφὴν Γ μὲ τὸν κῶνον ΓΑΒ. Ἡ δὲ βάσις τῆς πυραμίδος ταύτης εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὴν βάσιν τοῦ κώνου.



Σχ. 290



Σχ. 291

Ἡ πυραμὶς αὕτη λέγεται **ἐγγεγραμμένη** εἰς τὸν κῶνον· ὁ δὲ κῶνος οὗτος λέγεται **περιγεγραμμένος** περὶ τὴν πυραμίδα ταύτην.

Ἂν μία πυραμὶς ἔχῃ κοινὴν κορυφὴν μὲ ἕνα κῶνον, ἡ δὲ βάσις αὐτῆς εἶναι περιγεγραμμένη περὶ τὴν βάσιν τοῦ κώνου, ἡ πυραμὶς λέγεται **περιγεγραμμένη** περὶ τὸν κῶνον. Ὁ δὲ κῶνος λέγεται ἐγγεγραμμένος εἰς τὴν πυραμίδα ταύτην (σχ. 291).

Ἀσκήσεις

821. Νὰ ὁρίσητε τὰ κοινὰ μέρη τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου καὶ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πυραμίδος ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτὸν ἢ περιγεγραμμένης περὶ αὐτόν.

822. Μία πυραμὶς ἐγγεγραμμένη εἰς κῶνον ἔχει βάσιν κανονικὸν εὐθ. σχῆμα. Νὰ ἐξετάσητε, ἂν αὕτη εἶναι κανονικὴ ἢ ὄχι. Τὴν αὐτὴν ἐξέτασιν νὰ κάμητε καὶ διὰ τοιαύτην περιγεγραμμένην εἰς κῶνον πυραμίδα.

823. Πῶς δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν κανονικὴν τριγωνικὴν πυραμίδα εἰς δοθέντα κῶνον;

§. 383. Τί λέγεται ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου. Ἔστω ὅτι ἡ βάσις ΑΔΒΕ (σχ. 290) τῆς πυραμίδος Γ.ΑΔΒΕ εἶναι κανονικὸν εὐθ. σχῆμα.

Ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτῆς ἀπαύστως διπλασιάζηται, γνωρίζομεν ὅτι ἡ περίμετρος τῆς βάσεως ταύτης τείνει νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν· τότε δὲ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος θὰ τείνῃ νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου. Διὰ τοῦτο:

Ὀνομάζομεν ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου τὸ ὅριον, εἰς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτὸν κανονικῆς πυραμίδος, ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως αὐτῆς ἀπαύστως διπλασιάζηται.

§ 384. *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ε τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου ἐκ τῆς πλευρᾶς λ καὶ τῆς περιφερείας Γ τῆς βάσεως αὐτοῦ.**

Λύσις. Νοοῦμεν κανονικὴν πυραμίδα Γ.ΑΔΒΕ ἐγγεγραμμένην εἰς κῶνον ΓΑΒ (σχ. 290.) Ἔστω δὲ ΓΖ τὸ ἀπόστημα καὶ Ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτῆς. Ἐμάθομεν (§ 347) ὅτι:

$$E=\frac{1}{2}[(ΑΔ)+(ΔΒ)+(ΒΕ)+(ΕΑ)].(ΓΖ) \qquad (1)$$

ὁσασδήποτε πλευρὰς καὶ ἂν ἔχῃ ἡ βάσις τῆς πυραμίδος. Ἂν δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τούτων ἀπαύστως διπλασιάζηται, θὰ εἶναι

$$\text{ὅρ}\, E=\frac{1}{2}\,\text{ὅρ}\,[(ΑΔ)+(ΔΒ)+(ΒΕ)+(ΕΑ)]\cdot\text{ὅρ}\,(ΓΖ)$$

Ἐπειδὴ δὲ ὅρ $E=ε$, ὅρ $(ΓΖ)=λ$ καὶ

ὅρ $[(ΑΔ)+(ΔΒ)+(ΒΕ)+(ΕΑ)]=Γ$,

ἕπεται ὅτι: $ε=\frac{1}{2}Γ.\,λ.$ Ἤτοι:

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ.

Ἂν α εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως, ἐκ τῆς προηγουμένης ἰσότητος εὑρίσκομεν ὅτι : $\mathbf{\epsilon = \pi\alpha\lambda.}$ (2)

§ **385.** *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κώνου ἐκ τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεως αὐτοῦ.**

Λύσις. Εἶναι φανερὸν ὅτι : $E = \pi\alpha^2 + \pi\alpha\lambda$ ἢ $\mathbf{E = \pi\alpha(\alpha + \lambda)}$.

Ἀσκήσεις

824. Εἷς κῶνος ἔχει $\lambda = 5$ ἑκατ. καὶ $\alpha = 3$ ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του.

825. Εἷς κῶνος ἔχει $\upsilon = 12$ ἑκατ. καὶ $\alpha = 9$ ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

826. Εἷς κύλινδρος καὶ κῶνος ἔχουσιν ἴσας βάσεις. Τὸ δὲ ὕψος τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου. Νὰ συγκρίνητε τὰ ἐμβαδὰ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν.

827. Ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως κυλίνδρου καὶ κώνου εἶναι 6 ἑκατ. Τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου εἶναι 6 ἑκατ. καὶ αἱ κυρταὶ ἐπιφάνειαι αὐτῶν εἶναι ἰσοδύναμοι. Νὰ εὕρητε τὸ ὕψος τοῦ κώνου.

§ **386. Τί λέγεται ὄγκος κώνου.** Ἔστω κανονικὴ πυραμὶς Γ.ΑΔΒΕ ἐγγεγραμμένη εἰς κῶνον (σχ. 290.)

Ἂς νοήσωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως αὐτῆς ἀπαύστως διπλασιάζεται. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ βάσις της τείνει νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν βάσιν τοῦ κώνου, ἡ δὲ πυραμὶς μὲ τὸν κῶνον. Διὰ τοῦτο :

Ὀνομάζομεν ὄγκον κώνου τὸ ὅριον τοῦ ὄγκου ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτὸν κανονικῆς πυραμίδος, ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως αὐτῆς ἀπαύστως διπλασιάζηται.

§ **387.** *Πρόβλημα ΙΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος Κ κώνου ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν Β τῆς βάσεως καὶ ἀπὸ τὸ ὕψος υ αὐτοῦ.**

Λύσις. Νοοῦμεν κανονικὴν πυραμίδα ἐγγεγραμμένην εἰς τὸν κῶνον· ἔστω δὲ Ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως καὶ Θ ὁ ὄγκος αὐτῆς. Γνωρίζομεν ὅτι $\Theta = \frac{1}{3}E \cdot \upsilon$, ὁσασδήποτε πλευρὰς καὶ ἂν ἔχῃ ἡ βάσις αὐτῆς.

Ἂν λοιπὸν νοήσωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως ἀπαύστως διπλασιάζηται, θὰ εἶναι

$$\text{ὅρ } \Theta = \frac{1}{3}\, \upsilon \cdot \text{ὅρ } E.$$

Ἐπειδὴ δὲ ὅρ $\Theta = K$ καὶ ὅρ $E = B$, ἕπεται ὅτι:

$$K = \frac{1}{3}\, B \cdot \upsilon, \text{ ἤτοι:}$$

Ὁ ὄγκος κώνου εἶναι τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἂν δὲ ἀκτὶς τῆς βάσεως κώνου εἶναι α, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται.

$$K = \frac{1}{3}\, \pi\alpha^2 \cdot \upsilon \qquad (1)$$

Ἀσκήσεις

828. Εἷς κῶνος ἔχει $\upsilon = 3$ παλ. καὶ $\alpha = 4$ παλ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτοῦ.

829. Εἷς κῶνος ἔχει $\alpha = 6$ ἑκατ. καὶ $\lambda = 10$ ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτοῦ.

830. Ἓν κωνικὸν δοχεῖον ἔχει ἐσωτερικὴν ἀκτῖνα βάσεως 9 ἑκατ. καὶ ὕψος 12 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ βάρος τοῦ ὑδραργύρου, τὸ ὁποῖον χωρεῖ.

831. Νὰ συγκρίνητε τὸν λόγον δύο ἰσοϋψῶν κώνων πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων.

832. Νὰ συγκρίνητε τὸν λόγον δύο κώνων πρὸς τὸν λόγον τῶν ὑψῶν αὐτῶν, ἂν αἱ βάσεις αὐτῶν εἶναι ἴσαι.

833. Νὰ συγκρίνητε τὸν λόγον τῶν ὑψῶν πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων δύο ἰσοδυνάμων κώνων.

834. Ἓν ὀρθ. τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει (ΑΓ) = 12 ἑκατ. καὶ ὑποτείνουσαν (ΒΓ) = 20 ἑκατ. Νοοῦμεν ὅτι τοῦτο στρέφεται πρῶτον περὶ τὴν ΑΓ καὶ ἔπειτα περὶ τὴν ΑΒ. Νὰ ὑπολογίσητε τὸν λόγον τοῦ πρώτου παραγομένου στερεοῦ πρὸς τὸ δεύτερον.

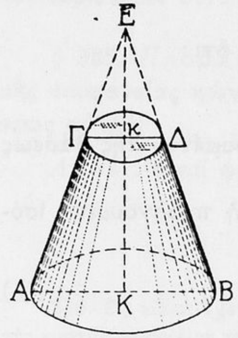
III. ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΚΩΝΟΣ

§ 388. Τί εἶναι κόλουρος κῶνος καὶ ποῖα εἶναι τὰ στοιχεῖα αὐτοῦ. Εἰς δοθέντα κῶνον ΕΑΒ ἂς φέρωμεν τομὴν ΓΔ παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν ΑΒ αὐτοῦ (σχ. 292.)

Μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τῆς τομῆς ταύτης περιέχεται τὸ μέρος ΑΒΔΓ τοῦ κώνου.

Τοῦτο λέγεται **κόλουρος κῶνος.** Ὥστε :

Κόλουρος κῶνος εἶναι μέρος κώνου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τυχούσης ἐπιπέδου τομῆς αὐτοῦ παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν.



Σχ. 292

Γνωρίζομεν δὲ ὅτι ἡ τομὴ αὕτη εἶναι κύκλος. Ὥστε ὁ κόλ. κῶνος περιέχεται μεταξὺ δύο παραλλήλων κύκλων.

Οὗτοι λέγονται **βάσεις** τοῦ κολ. κώνου.

Μεταξὺ αὐτῶν περιέχεται ἓν μέρος τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ ἀρχικοῦ κώνου. Τὸ μέρος τοῦτο λέγεται ἐπίσης **κυρτὴ ἐπιφάνεια** τοῦ κολ. κώνου.

Ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τοῦ κολ. κώνου εἶναι μεικτὴ ἐπιφάνεια.

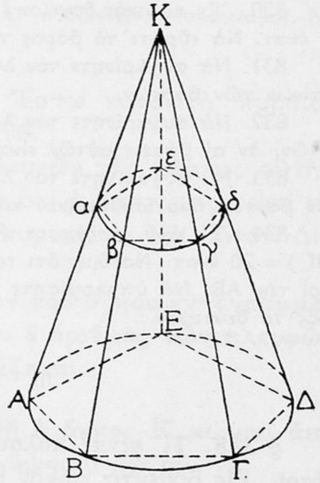
Ἡ ἀπόστασις Κκ τῶν βάσεων κολ. κώνου λέγεται **ὕψος** αὐτοῦ.

Μεταξὺ τῶν βάσεων κολ. κώνου περιέχεται μέρος π.χ. ΑΓ τῆς πλευρᾶς ΕΑ τοῦ ἀρχικοῦ κώνου. Τὸ μέρος τοῦτο ΑΓ λέγεται ἐπίσης **πλευρὰ** τοῦ κώνου.

Τὸ ὕψος Κκ καὶ τυχοῦσα πλευρὰ ΑΓ κολ. κώνου ὁρίζουσιν ἐπίπεδον, διότι προεκτεινόμεναι διέρχονται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Ε.

Τὰ εὐθ. τμήματα Κκ, ΓΑ καὶ αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, κΓ τῶν βάσεων σχηματίζουσιν ὀρθογώνιον τραπέζιον ΚκΓΑ.

Ἂν τοῦτο στραφῇ περὶ τὸ ὕψος Κκ, θὰ γράψῃ τὸν κολ. κῶνον ΑΒΔΓ. Ὥστε καὶ ὁ **κολ. κῶνος εἶναι στερεὸν ἐκ περιστροφῆς.**



Σχ. 293

§ 389. Τί λέγεται ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας καὶ ὄγκος κολ. κώνου. Αἱ βάσεις τῆς κολ. πυραμίδος ΑΒΓΔΕαβγδε (σχ. 293) εἶναι ἐγγεγραμμέναι, ἀνὰ μία, εἰς τὰς βάσεις κολ. κώνου ΑΔδα.

Ἡ κόλουρος αὕτη πυραμὶς λέγεται **ἐγγεγραμμένη** εἰς τὸν κόλουρον κῶνον κ.τ.λ. Ἂν αἱ βάσεις τῆς κολ. πυραμίδος εἶναι κανονικὰ εὐθ. σχήματα καὶ νοήσωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων ἀπαύστως διπλασιάζεται, ἐννοοῦμεν ὅτι:

Ἡ περίμετρος ἑκάστης τῶν βάσεων τείνει νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς ἀντιστοίχου βάσεως τοῦ κολ. κώνου. Ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τείνει νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κολ. κώνου καὶ ἡ κόλ. πυραμὶς μὲ τὸν κόλουρον κῶνον. Ἀγόμεθα λοιπὸν εἰς τοὺς ἑξῆς ὁρισμούς.

Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολ. κώνου λέγεται τὸ ὅριον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτὸν κολ. καν. πυραμίδος, ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων αὐτῆς ἀπαύστως διπλασιάζηται.

Εἶναι δὲ φανερὸν (σχ. 292) ὅτι:

(κυρ. ἐπιφ. ΑΒΓΔ) = (κυρ. ἐπιφ. ΕΑΒ) – (κυρ. ἐπιφ. ΕΓΔ).

Ὄγκος κολ. κώνου λέγεται τὸ ὅριον τοῦ ὄγκου κολ. κανονικῆς πυραμίδος ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτόν, ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων αὐτῆς ἀπαύστως διπλασιάζηται.

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι:

(κολ. κῶνος ΑΒΓΔ) = (κῶνος ΕΑΒ) – (κῶνος ΕΓΔ).

§ **390.** *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ε τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολ. κώνου.**

Ἔστω κῶνος ΚΑΔ καὶ ἐγγεγραμμένη εἰς αὐτὸν κανονικὴ πυραμὶς Κ.ΑΒΓΔΕ (σχ. 293). Ἂν τμήσωμεν τὰ δύο ταῦτα στερεὰ δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῶν βάσεων αὐτῶν, μεταξὺ τούτων καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου περιέχεται ὁ κόλουρος κῶνος Αδ καὶ ἡ κόλουρος κανονικὴ πυραμὶς ΑΒΓΔΕαβγδε.

Ἔστωσαν δὲ Α καὶ α αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων, λ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ κολ. κώνου καὶ ε ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ. Τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς κολ. πυραμίδος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἴσων καὶ ἰσοσκελῶν τραπεζίων ΑΒβα, ΒΓγβ, ΓΔδγ, ΔΕεδ, ΕΑαε, ὧν ἔστω λ, τὸ ὕψος.

Ἐπειδὴ δὲ $(AB\beta\alpha)=\frac{(AB)+(\alpha\beta)}{2}\cdot\lambda_1$,

$(B\Gamma\gamma\beta)=\frac{(B\Gamma)+(\beta\gamma)}{2}\cdot\lambda_1\ldots$, $(EA\alpha\varepsilon)=\frac{(EA)+(\varepsilon\alpha)}{2}\cdot\lambda_1$, ἕπεται ὅτι:

$$E=\frac{1}{2}\Big[[(AB)+(B\Gamma)+\ldots+(EA)]+[(\alpha\beta)+(\beta\gamma)+\ldots+(\varepsilon\alpha)]\Big]\lambda_1.$$

Ἡ ἰσότης αὕτη ἀληθεύει ὁσασδήποτε πλευρὰς καὶ ἂν ἔχῃ ἑκάστη βάσις τῆς κολ. πυραμίδος. Ἑπομένως εἶναι:

ὅρ $E=\frac{1}{2}\Big[$ὅρ $[(AB)+(B\Gamma)+\ldots+(EA)]+$ ὅρ $[(\alpha\beta)+(\beta\gamma)+$ $+\ldots+(\varepsilon\alpha)]\Big]$ ὅρ λ_1. Ἐπειδὴ δὲ ὅρ $E=\varepsilon$, ὅρ $[(AB)+(B\Gamma)+$ $+\ldots+(EA)]=2\pi A$, ὅρ $[(\alpha\beta)+(\beta\gamma)+\ldots+(\varepsilon\alpha)]=2\pi\alpha$ καὶ ὅρ $\lambda_1=\lambda$, ἕπεται ὅτι: $\varepsilon=\frac{1}{2}(2\pi A+2\pi\alpha).\lambda$ (1). Ὥστε:

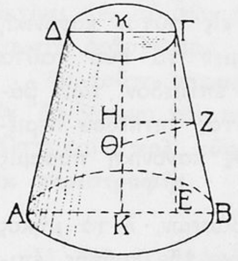
Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολ. κώνου εἶναι γινόμενον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεων ἐπὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ.

Ἐκ δὲ τῆς ἰσότητος (1) προκύπτει εὐκόλως ἡ ἰσότης

$$\boldsymbol{\varepsilon=\pi(A+\alpha)\lambda} \qquad (2)$$

τὴν ὁποίαν συνήθως χρησιμοποιοῦμεν εἰς τὰς ἐφαρμογάς.

§ 391. Δύο ἄλλαι ἀξιοσημείωτοι τύποι διὰ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολ. κώνου.



Σχ. 294

α΄) Ἔστω ΖΗ ἡ διάμεσος τοῦ τραπεζίου ΒΚκΓ (σχ. 294). Ἡ παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις τομή, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον Η λέγεται **μέση τομὴ** τοῦ κολ. κώνου καὶ ἔχει ἀκτῖνα ΗΖ.

Εἶναι δὲ $(HZ)=\frac{A+\alpha}{2}$ καὶ ἑπομένως ἡ ἀνωτέρω ἰσότης (2) γίνεται

$\varepsilon=2\pi(HZ)\lambda$ (3). Ἤτοι:

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολ. κώνου εἶναι γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς μέσης τομῆς ἐπὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ.

β΄) Ἂν φέρωμεν τὴν ΓΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΚΒ καὶ τὴν ΖΘ κάθετον ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ, σχηματίζονται τὰ ὅμοια τρίγωνα ΓΒΕ καὶ ΗΖΘ.

Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι:

$$\frac{ΗΖ}{ΓΕ} = \frac{ΖΘ}{ΒΓ} = \frac{ΖΘ}{λ}$$

καὶ ἑπομένως $(ΗΖ)\,λ = (ΓΕ)\,(ΖΘ) = υ \cdot (ΖΘ)$. Ἡ ἰσότης (3) γίνεται λοιπὸν $ε = 2π\,(ΖΘ)\,υ$ (4). Ἤτοι:

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολ. κώνου εἶναι γινόμενον τοῦ ὕψους αὐτοῦ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία ἔχει ἀκτῖνα τὴν ἐκ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς κάθετον ἐπ' αὐτὴν μέχρι τοῦ ἄξονος.

§ **392.** *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κολ. κώνου.**

Λύσις. Προφανῶς. $\mathbf{Ε = πΑ^2 + πα^2 + π\,(Α + α)\,λ}$.

Ἀσκήσεις

835. Εἷς κολ. κῶνος ἔχει $λ = 10$ ἑκατ., $Α = 6$ ἑκατ., $α = 3$ ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

836. Εἷς κολ. κῶνος ἔχει $ε = 405$ π. τετ. ἑκατ., $λ = 12$ ἑκατ., $Α = 11$ ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὴν ἄλλην ἀκτῖνα.

837. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς ἐπιφανείας τοῦ προηγουμένου κολ. κώνου.

838. Ἂν τὰ στοιχεῖα Α, α ἑνὸς κολ. κώνου διπλασιασθῶσι, νὰ ἐξετάσητε ποίαν μεταβολὴν ὑφίσταται τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

§ **393.** *Πρόβλημα ΙΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος Θ κολούρου κώνου.**

Λύσις. Ἔστω Κ ὁ ὄγκος κανονικῆς κολούρου πυραμίδος ΑΒΓΔΕαβγδε ἐγγεγραμμένης εἰς κόλουρον κῶνον Αδ (σχ. 293). Ἔστωσαν δὲ Α, α αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων καὶ υ τὸ ὕψος τοῦ κολ. κώνου καὶ τῆς κολούρου πυραμίδος. Ἂν (ΑΒΓΔΕ) = Β, (αβγδε) = β, ἐμάθομεν (§ 352) ὅτι:

$$Κ = \frac{1}{3}\left(Β + \sqrt{Ββ} + β\right) \cdot υ.$$

Ἡ ἰσότης αὐτὴ ἀληθεύει, ὁσασδήποτε πλευρὰς καὶ ἂν ἔχωσιν αἱ βάσεις τῆς κολ. πυραμίδος.

Θὰ εἶναι λοιπόν: $ὄρ\ K = \frac{1}{3}(ὄρ\ B + ὄρ\ \sqrt{B\beta} + ὄρ\ \beta)\cdot \upsilon$.

Ἐπειδὴ δὲ $ὄρ\ K = \Theta$, $ὄρ\ B = \pi A^2$, $ὄρ\ \beta = \pi\alpha^2$, $ὄρ\ \sqrt{B\beta}$ $= \sqrt{ὄρ\ B.\ ὄρ\ \beta} = \sqrt{\pi A^2\cdot\pi\alpha^2} = \pi A\alpha$, ἕπεται ὅτι:

$$\Theta = \frac{1}{3}\pi(A^2 + A\alpha + \alpha^2)\upsilon.$$

Ἀσκήσεις

839. Εἷς κολ. κῶνος ἔχει $A = 4$ παλ., $\alpha = 2$ παλ., $\upsilon = 15$ ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτοῦ.

840. Εἷς κολ. κῶνος ἔχει $A = 6$ ἑκατ., $\alpha = 1{,}5$ ἑκατ., $\upsilon = 6$ ἑκατ. Εἶναι δὲ ἐκ ξύλου εἰδ. βάρους 0,9 Νὰ εὕρητε τὸ βάρος αὐτοῦ.

841. Ἓν δοχεῖον ἔχει σχῆμα κολ. κώνου. Ἡ διάμετρος τῆς μιᾶς βάσεως εἶναι 24 ἑκατ., τῆς ἄλλης 12 ἑκατ. καὶ τὸ βάθος του 8 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ βάρος τοῦ ὕδατος τὸ ὁποῖον χωρεῖ.

842. Εἷς κολ. κῶνος ἔχει $\upsilon = 10$ ἑκατ., $A = 15$ ἑκατ., $\alpha = 7{,}5$ ἑκατ. Νοήσατε ἐντὸς αὐτοῦ ἰσοϋψῆ κύλινδρον μὲ βάσιν μίαν βάσιν τοῦ κολ. κώνου. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τοῦ πέριξ αὐτοῦ μέρους τοῦ κολ. κώνου.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Α΄ κεφαλαίου

843. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι ὁ ὄγκος κυλίνδρου εἶναι γινόμενον τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεως.

844. Ἓν ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ ἔχει διαστάσεις $(AB) = \alpha$ ἑκ. καὶ $(A\Delta) = \beta$ ἑκ. Τοῦτο στρέφεται περὶ ἄξονα χψ ἐκτὸς τοῦ ὀρθογωνίου κείμενον, παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ καὶ ἀπέχοντα αὐτῆς ἀπόστασιν γ ἑκ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τοῦ γραφομένου στερεοῦ.

845. Τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $AB = A\Gamma$. Ἔστωσαν δὲ ΑΔ καὶ ΒΕ δύο ὕψη αὐτοῦ. Ἂν τὸ τρίγωνον στραφῇ περὶ τὴν πλευρὰν ΑΓ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει ἡ ΒΓ εἶναι $2\pi\,(A\Delta)\,(\Gamma E)$.

846. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ στρέφεται διαδοχικῶς περὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ τῆς ὀρθῆς γωνίας. Νὰ εὑρεθῇ συναρτήσει τῶν πλευρῶν τούτων ὁ λόγος τῶν γραφομένων στερεῶν.

847. Εἷς κύλινδρος ἔχει ὕψος υ ἑκ. καὶ ἀκτῖνα βάσεως Α ἑκ. Εἷς κῶνος ἔχει κοινὴν μὲ τὸν κύλινδρον βάσιν καὶ κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς ἄλλης βάσεως τοῦ κυλίνδρου. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τοῦ μέρους τοῦ κυλίνδρου, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται πέριξ τοῦ κώνου.

848. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Ο ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΟΒΓ φέρομεν εὐθεῖαν χψ

έν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ τριγώνου καὶ μὴ τέμνουσαν αὐτό. Ἔστω δὲ βγ ἡ ἐπ' αὐτὴν προβολὴ τῆς βάσεως ΒΓ καὶ ΟΖ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου. Ἂν τὸ τρίγωνον στραφῇ περὶ τὴν χψ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει ἡ βάσις ΒΓ, εἶναι 2π (ΟΖ) (βγ).

849 Μία κανονικὴ τεθλ. γραμμὴ στρέφεται περὶ μίαν διάμετρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας, ἥτις δὲν τέμνει αὐτήν. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει αὕτη, εἶναι γινόμενον τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς τεθλ. γραμμῆς ἐπὶ τὸν ἄξονα στροφῆς.

850. Εἷς κύλινδρος εἶναι ἰσοϋψὴς πρὸς δοθέντα κόλ. κῶνον καὶ ἔχει βάσιν τὴν μέσην τομὴν αὐτοῦ. Νὰ εὕρητε τὴν διαφορὰν τῶν ὄγκων αὐτῶν.

851. Νὰ εὕρητε πόσος λευκοσίδηρος χρειάζεται διὰ τὴν κατασκευὴν κυλινδρικοῦ δοχείου ὕψους 0,30 μέτ. καὶ ἀκτῖνος 0,15 μέτ.

852. Νὰ νοήσητε ἓν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα δοθέντος κυλίνδρου, τὸ ὁποῖον τέμνει ἑκάστην βάσιν κατὰ χορδὴν τεταρτημορίου. Νὰ εὕρητε δὲ τὸν λόγον τοῦ μεγαλυτέρου πρὸς τὸ μικρότερον μέρος, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται ὁ κύλινδρος.

853. Ἔστωσαν Κ,Κ΄ τὰ κέντρα τῶν βάσεων ἑνὸς κυλίνδρου, ΑΒ μία χορδὴ τῆς βάσεως Κ καὶ Μ τὸ μέσον αὐτῆς. Νὰ εὕρητε τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν τῶν εὐθειῶν Κ΄Μ καὶ ΑΒ.

854. Δύο σημεῖα Α, Β κεῖνται ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου. Ἂν ἡ ἀπόστασις τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ τέμνῃ αὐτὴν εἰς σημεῖον Δ, νὰ εὕρητε τὸν λόγον ΔΑ : ΔΒ.

855. Ἡ μέση τομὴ ἑνὸς κώνου ἔχει ἐμβαδὸν 31,4159 τετ. ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸν λόγον τοῦ κώνου τούτου πρὸς ἰσοϋψῆ κύλινδρον, ὁ ὁποῖος ἔχει βάσιν τὴν μέσην ταύτην τομήν.

856. Εἷς κύλινδρος ἔχει βάσιν ἰσοδύναμον πρὸς τὴν μέσην τομὴν δοθέντος κώνου καὶ ὕψος ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ. Νὰ συγκρίνητε τὸν ὄγκον αὐτοῦ πρὸς τὸν ὄγκον δευτέρου κώνου, ὅστις ἔχει ὕψος τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεως τοῦ πρώτου καὶ βάσιν ἰσοδύναμον πρὸς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἐκείνου.

857. Ἡ βάσις ἑνὸς κώνου εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν τομὴν αὐτοῦ, ἥτις διέρχεται ἀπὸ τὸν ἄξονα. Νὰ εὕρητε τὸν λόγον υ : α.

858. Εἰς τὴν βάσιν κώνου ἄγομεν δύο καθέτους ἀκτῖνας ΟΑ, ΟΒ καὶ νοοῦμεν τὸ ἐπίπεδον τῆς κορυφῆς Κ καὶ τῶν σημείων Α, Β. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τοῦ μικροτέρου τῶν μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται ὁ κῶνος, ἂν $\alpha = 3$ ἑκατ. καὶ $\upsilon = 4$ ἑκατ.

859. Μία δίεδρος γωνία 90^0 ἔχει ἀκμὴν τὸν ἄξονα δοθέντος κολ. κώνου. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τοῦ μέρους τοῦ κολ. κώνου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν ἑδρῶν αὐτῆς.

860. Εἷς κολ. κῶνος ἔχει ὄγκον Θ, ὕψος υ, βάσεις Β, β καὶ μέσην τομὴν

Β'. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι $\Theta = \frac{1}{6}\upsilon(B + \beta + 4B')$. Νὰ ἐξετάσητε δέ, ἂν ἡ ἰσότης αὕτη ἀληθεύῃ διὰ κύλινδρον καὶ διὰ κῶνον.

861. Εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου καὶ ἐκτὸς αὐτῆς ὁρίζομεν ἓν σημεῖον. Πῶς δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ διέρχηται ἀπὸ αὐτὸ καὶ νὰ ἐφάπτηται τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου τούτου; Νὰ ἐξετάσητε δὲ πόσα ἐπίπεδα τοιαῦτα ἄγονται.

862. Μία χορδὴ ΑΒ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου προβάλλεται εἰς τὴν βάσιν του κατὰ τμῆμα αβ εὐθείας μὴ διερχομένης ἀπὸ τὸ κέντρον Ο τῆς βάσεως. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι ὁ ἄξων καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι ἀσύμβατοι εὐθεῖαι.

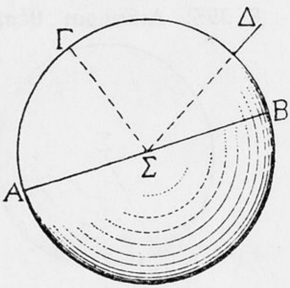
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

Η ΣΦΑΙΡΑ

§ 394. Τί εἶναι σφαῖρα καὶ ποῖα τὰ στοιχεῖα αὐτῆς. Ἔστω ΑΒ ἡ διάμετρος ἑνὸς ἡμικυκλίου ΑΓΒ (σχ. 295). Ἂν νοήσωμεν δὲ ὅτι τοῦτο στρέφεται περὶ τὴν ΑΒ κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, ἕως ὅτου ἐπανέλθῃ, εἰς τὴν πρώτην θέσιν τού.

Τὸ σύνολον ὅλων τῶν θέσεων, ἀπὸ τὰς ὁποίας διέρχεται τοῦτο, σχηματίζει ἓν στερεὸν σῶμα. Τοῦτο λέγεται **σφαῖρα**.

Ἡ στρεφομένη ἡμιπεριφέρεια γράφει τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. Εἶναι δὲ αὕτη καμπύλη ἐπιφάνεια.



Σχ. 295

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν στροφὴν ταύτην ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων τῆς ἡμιπεριφερείας ἀπὸ τὸ κέντρον Σ αὐτῆς δὲν μεταβάλλεται, ἕπεται ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τὸ ἀκίνητον σημεῖον Σ αὐτῆς. Διὰ τοῦτο ὁρίζομεν τὴν σφαῖραν ὡς ἑξῆς:

Σφαῖρα εἶναι στερεόν, τοῦ ὁποίου ἓν σημεῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

Τὸ σημεῖον τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς, λέγεται **κέντρον** αὐτῆς. Οὕτω Σ εἶναι τὸ κέντρον τῆς προηγουμένης σχηματισθείσης σφαίρας (σχ. 295).

Εἶναι εὔκολον νὰ παρατηρήσωμεν τὴν ἀντιστοιχίαν, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ ὁρισμοῦ κύκλου καὶ σφαίρας, περιφερείας κύκλου καὶ ἐπιφανείας σφαίρας.

Ἡ ἀντιστοιχία αὕτη ἐπεκτείνεται καὶ εἰς ἄλλα στοιχεῖα τῶν σχημάτων τούτων. Οὕτως ἑκάστη σφαῖρα ἔχει ἀκτῖνας καὶ διαμέτρους, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται, ὅπως διὰ τὸν κύκλον, ἀρκεῖ ἡ λέξις περιφέρεια νὰ ἀντικατασταθῆ μὲ τὴν λέξιν ἐπιφάνεια. Π.χ. ΣΑ εἶναι ἀκτὶς καὶ ΑΒ εἶναι διάμετρος τῆς σφαίρας Σ (σχ. 295).

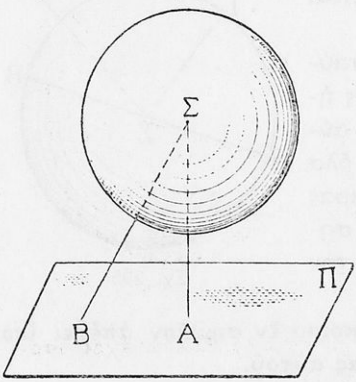
Ἀσκήσεις

863. Νὰ συγκρίνητε α΄) Δύο ἀκτῖνας τῆς αὐτῆς σφαίρας. β΄) Μίαν διάμετρον και μίαν ἀκτῖνα τῆς αὐτῆς σφαίρας. γ΄) Δύο διαμέτρους τῆς αὐτῆς σφαίρας.

864. Νὰ συγκρίνητε τὴν ἀκτῖνα μιᾶς σφαίρας πρὸς τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου αὐτῆς ἀπὸ ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς ἢ ἐντὸς τῆς σφαίρας ταύτης.

865. Δίδεται ἓν σημεῖον Ο καὶ ἓν εὐθ. τμῆμα α. Νὰ ὁρίσητε τὸν γεωμ. τόπον τῶν σημείων Μ τοῦ διαστήματος, διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι ΟΜ = α.

§ 395. Διάφοροι θέσεις σφαίρας πρὸς ἐπίπεδον. Ἡ ἀντιστοιχία κύκλου πρὸς σφαῖραν ἐπεκτείνεται καὶ εἰς τὰς θέσεις κύκλου καὶ εὐθείας πρὸς τὰς θέσεις σφαίρας καὶ ἐπιπέδου. Οὕτως, ἂν ΣΑ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου μιᾶς σφαίρας ἀπὸ ἓν ἐπίπεδον καὶ R ἡ ἀκτὶς αὐτῆς καὶ σκεφθῶμεν, ὅπως εἰς (§ 135 - 138), ἀποδεικνύομεν ὅτι :



Σχ. 296

α΄) Ἂν ΣΑ > R, ἡ σφαῖρα καὶ τὸ ἐπίπεδον οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουσι. Καὶ ἀντιστρόφως (σχ. 296).

β΄) Ἂν ΣΑ = R, ἡ σφαῖρα καὶ τὸ ἐπίπεδον ἔχουσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον. Καὶ ἀντιστρόφως (σχ. 297).

γ΄) Ἂν ΣΑ < R, ἡ σφαῖρα καὶ τὸ ἐπίπεδον ἔχουσι πολλὰ κοινὰ σημεῖα. Καὶ ἀντιστρόφως (σχ. 298).

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὁ πούς Α κεῖται μέσα εἰς τὴν σφαῖραν. Ἐπομένως τὸ ἐπίπεδον Π εἰσχωρεῖ μέσα εἰς τὴν σφαῖραν, ἤτοι τέμνει αὐτήν.

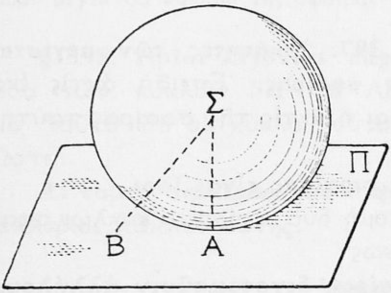
§ 396. Ποῖον εἶναι τὸ σχῆμα τῶν ἐπιπέδων τομῶν σφαίρας. Ἔστωσαν Β, Δ, Γ κτλ. διάφορα κοινὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας σφαίρας Σ καὶ ἐπιπέδου Π, τὸ ὁποῖον τέμνει αὐτὴν (σχ. 298).

Ἔστω δὲ ΣΑ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τὸ Π. Ἐπειδὴ ΣΒ = ΣΔ = ΣΓ κ.τ.λ. ὡς ἀκτῖνες τῆς σφαίρας, θὰ εἶναι καὶ ΑΒ = ΑΔ = ΑΓ κ.τ.λ. Ἐκ τούτων ἕπεται εὐκόλως ὅτι:

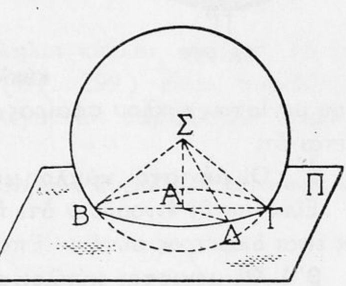
Πᾶσα ἐπίπεδος τομὴ σφαίρας εἶναι κύκλος.

Προφανῶς δὲ **κέντρον τοῦ κύκλου τούτου εἶναι ὁ ποὺς τῆς καθέτου, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς τομῆς.**

Ἂν καλέσωμεν α τὴν ἀκτῖνα ΑΒ τῆς τομῆς ταύτης καὶ πα-



Σχ. 297



Σχ. 298

ρατηρήσωμεν ὅτι τὸ ΣΑΒ εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον, εὑρίσκομεν ὅτι

$$R^2 = \alpha^2 + (\Sigma A)^2 \qquad (1)$$

Ἐκ ταύτης ἕπονται τὰ ἑξῆς:

α΄) Ἂν ΣΑ = R, θὰ εἶναι α = 0, ἤτοι ἡ τομὴ γίνεται σημεῖον.

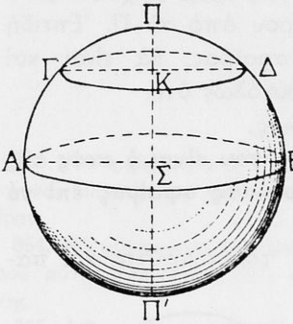
β΄) Ἂν ΣΑ < R, θὰ εἶναι καὶ α < R.

γ΄) Ἂν ΣΑ = 0, θὰ εἶναι α = R

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ἡ τομὴ ἔχει τὴν μεγαλυτέραν τιμήν, ὅταν ὁ ποὺς Α συμπίπτῃ μὲ τὸ κέντρον Σ ἤτοι, ὅταν τὸ ἐπίπεδον τῆς τομῆς διέρχηται ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. Δι' αὐτὸν τὸν λόγον:

Πᾶσα ἐπίπεδος τομὴ σφαίρας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον αὐτῆς, λέγεται μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας ταύτης.

Πρὸς διάκρισιν δὲ τῶν ἄλλων ἐπιπέδων τομῶν ἀπὸ ταύτης ὀνομάζομεν τὰς ἄλλας τομὰς μικροὺς κύκλους. Ἤτοι :



Σχ. 299

Πᾶσα ἐπίπεδος τομὴ σφαίρας, ἡ ὁποία δὲν διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον αὐτῆς, λέγεται μικρὸς κύκλος τῆς σφαίρας ταύτης.

Π.χ. ὁ κύκλος ΒΓ (σχ. 298) εἶναι μικρὸς κύκλος, τῆς σφαῖρας Σ. Ὁμοίως ὁ ΓΔ εἶναι μικρὸς κύκλος, ὁ δὲ ΑΒ μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας Σ (Σχ. 299).

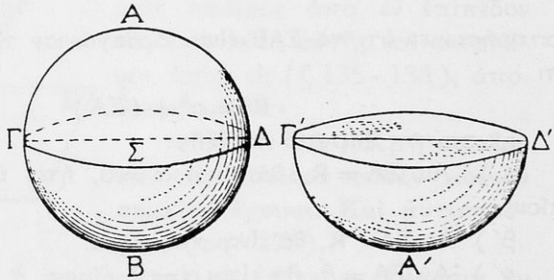
§ 397. Ἰδιότητες τῶν μεγίστων κύκλων σφαίρας. Ἐπειδὴ ἀκτὶς ἑκάστου μεγίστου κύκλου σφαίρας εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας ταύτης, ἕπεται ὅτι :

α′) Οἱ μέγιστοι κύκλοι μιᾶς σφαίρας εἶναι ἴσοι.

Εὐκόλως δὲ ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ τομὴ δύο μεγίστων κύκλων σφαίρας εἶναι διάμετρος αὐτῶν. Ἑπομένως :

β′) Οἱ μέγιστοι κύκλοι σφαίρας διχοτομοῦσιν ἀλλήλους.

Ἔστω ΓΔ μέγιστος κύκλος σφαίρας Σ καὶ ΓΑΔ, ΓΒΔ τὰ δύο μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ σφαῖρα ὑπὸ τοῦ κύκλου τούτου (σχ. 300). Ἔστω δὲ Γ′Α′Δ′ τὸ α′ μέρος ἀνεστραμένον.



Σχ. 300

Ἂς νοήσωμεν δὲ ὅτι τοῦτο τίθεται ἐπὶ τοῦ ΓΒΔ οὕτως, ὥστε ὁ κύκλος Γ′Δ′ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ΓΔ. Ἐπειδὴ ἡ ἀπόστασις τυχόντος σημείου Α′ τῆς ἐπιφανείας Γ′Α′Δ′ ἀπὸ τὸ κέντρον Σ δὲν μεταβάλλεται, τὸ Α′ θὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ΓΒΔ. Τὰ δὲ δύο μέρη ἐφαρμόζουσιν. Ἕπεται λοιπὸν ὅτι :

Πᾶς μέγιστος κύκλος σφαίρας διαιρεῖ αὐτὴν εἰς δύο ἴσα μέρη. Διὰ τοῦτο ταῦτα λέγονται **ἡμισφαίρια.**

Ἀσκήσεις

866. Μία σφαῖρα ἔχει ἀκτῖνα 5 ἑκατ. τὸ δὲ κέντρον ἀπέχει 3 ἑκατ. ἀπὸ μίαν τομὴν αὐτῆς. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς ταύτης καὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας αὐτῆς.

867. Μία ἐπίπεδος τομὴ σφαίρας ἔχει ἐμβαδὸν 36π τετ. ἑκατ. καὶ ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον αὐτῆς 8 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας ταύτης.

868. Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας μιᾶς ἐπιπέδου τομῆς σφαίρας εἶναι 16π. ἑκατ. Τὸ δὲ κέντρον τῆς σφαίρας ἀπέχει ἀπὸ αὐτὴν 6 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας ταύτης.

§ 398. Ποῖοι λέγονται παράλληλοι κύκλοι σφαίρας. Τὰ ἐπίπεδα τῶν κύκλων ΓΔ καὶ ΑΒ (σχ. 299) εἶναι παράλληλα. Διὰ τοῦτο δὲ οἱ κύκλοι οὗτοι λέγονται **παράλληλοι κύκλοι.** Ὥστε:

Αἱ τομαὶ σφαίρας ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων λέγονται παράλληλοι κύκλοι αὐτῆς.

Ἀσκήσεις

869. Εἷς μικρὸς κύκλος σφαίρας ἔχει ἀκτῖνα 9 ἑκατ. καὶ ἀπέχει 8 ἑκατ. ἀπὸ παράλληλον πρὸς αὐτὸν μέγιστον κύκλον τῆς αὐτῆς σφαίρας. Νὰ εὕρητε τὴν ἀκτῖνα τοῦ μεγίστου τούτου κύκλου.

870. Δίδεται εἷς μέγιστος κύκλος σφαίρας ἀκτῖνος 15 ἑκατ. Νὰ εὕρητε εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπ' αὐτοῦ εὑρίσκεται παράλληλος πρὸς αὐτὸν μικρὸς κύκλος ἴσος πρὸς τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ

§ 399. Ποῖα λέγονται ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα σφαίρας. Εἴπομεν προηγουμένως (§ 395) ὅτι, ἂν ΣΑ = R, ἡ σφαῖρα καὶ τὸ ἐπίπεδον Π ἔχουσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον Α (σχ. 297). Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο λέγεται **ἐφαπτόμενον** ἐπίπεδον τῆς σφαίρας. Ὥστε:

Ἓν ἐπίπεδον λέγεται ἐφαπτόμενον σφαίρας, ἂν ἔχῃ μὲ αὐτὴν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον.

Τὸ κοινὸν σημεῖον σφαίρας καὶ ἐφαπτομένου εἰς αὐτὴν ἐπιπέδου λέγεται **σημεῖον ἐπαφῆς.**

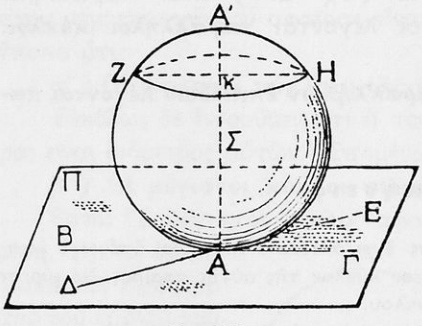
Τὰ ἐφαπτόμενα εἰς σφαῖραν ἐπίπεδα ἔχουσιν ἰδιότητας ἀντιστοίχους πρὸς τὰς ἰδιότητας τῶν ἐφαπτομένων εἰς κύκλον εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἀποδεικνύονται καθ' ὅμοιον τρόπον. Εἶναι δὲ αὗται αἱ ἑξῆς:

α') Ἡ ἀκτὶς σφαίρας, ἡ ὁποία καταλήγει εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον.

β') Τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ μίαν ἀκτῖνα σφαίρας εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς, ἐφάπτεται τῆς σφαίρας ταύτης.

γ') Ἀπὸ ἕκαστον σημεῖον τῆς ἐπιφανείας σφαίρας διέρχεται ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς αὐτὴν καὶ μόνον ἕν.

§ 400 Ποῖαι λέγονται ἐφαπτόμεναι εὐθεῖαι σφαίρας. Ἔστω ἐπίπεδον Π ἐφαπτόμενον σφαίρας Σ καὶ Α τὸ σημεῖον ἐπαφῆς (σχ. 301).



Σχ. 301

Διὰ τοῦ Α διέρχονται διάφοροι εὐθεῖαι ΒΑΓ, ΔΑΕ κ.τ.λ. τοῦ ἐπιπέδου Π. Ὅλα τὰ σημεῖα αὐτῶν (πλὴν τοῦ Α) κεῖνται ἐκτὸς τῆς σφαίρας ὡς σημεῖα τοῦ Π. Ἑκάστη λοιπὸν τούτων ἔχει μὲ τὴν σφαῖραν κοινὸν μόνον τὸ σημεῖον Α. Διὰ τοῦτο δὲ λέγεται **ἐφαπτομένη** τῆς σφαίρας Ὥστε:

Μία εὐθεῖα λέγεται ἐφαπτομένη σφαίρας, ἂν ἔχῃ μὲ αὐτὴν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον.

Ἀσκήσεις

871. Μία εὐθεῖα ΑΑ' εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον Π, τὸ ὁποῖον ἐφάπτεται σφαίρας Σ εἰς τὸ σημεῖον Α. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἡ ΑΑ' διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.

872. Ἓν ἐπίπεδον Π ἐφάπτεται σφαίρας Σ εἰς σημεῖον Α. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὸ κέντρον κύκλου τῆς σφαίρας παραλλήλου πρὸς τὸ Π κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΣΑ.

873. Νὰ εὕρητε τὸν γεωμ. τόπον τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται σφαίρας εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

874. Νὰ ἐξετάσητε πόσα κοινὰ σημεῖα δύναται νὰ ἔχῃ εὐθεῖα καὶ ἐπιφάνεια σφαίρας.

§ 401. Πόσαι καὶ ποῖαι αἱ διάφοροι θέσεις δύο μὴ ὁμοκέντρων σφαιρῶν πρὸς ἀλλήλας. Ἔστωσαν δύο ἡμικύκλια Κ, Κ′ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ κείμενα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς διακέντρου ΚΚ′. Ἂς νοήσωμεν δὲ ὅτι ταῦτα στρέφονται περὶ τὴν ΚΚ′ κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, ἕως ὅτου ἐπανέλθωσιν εἰς τὴν πρώτην θέσιν.

Οὕτω θὰ σχηματισθῶσι δύο σφαῖραι, αἱ ὁποῖαι θὰ ἔχωσι πρὸς ἀλλήλας οἵαν θέσιν ἔχουσι καὶ τὰ ἡμικύκλια Κ, Κ′.

Ἀντιστρόφως. Ἂν διὰ τῆς διακέντρου δύο σφαιρῶν νοήσωμεν τυχὸν ἐπίπεδον, τοῦτο τέμνει αὐτὰς κατὰ μεγίστους κύκλους, τῶν ὁποίων ἡ ἀμοιβαία θέσις εἶναι οἵα καὶ τῶν σφαιρῶν.

Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν ὅτι αἱ δυναταὶ θέσεις δύο σφαιρῶν πρὸς ἀλλήλας εἶναι ὅσαι καὶ οἷαι αἱ θέσεις δύο κύκλων, πρὸς ἀλλήλους. Εὐκόλως δὲ ἐννοοῦμεν ὅτι εἰς ἑκάστην θέσιν αὐτῶν ὑφίσταται μεταξὺ τῶν ἀκτίνων καὶ τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων ἡ αὐτὴ καὶ διὰ τοὺς κύκλους σχέσις.

Οὕτως, ἂν αἱ σφαῖραι Σ, Σ′ εὑρίσκωνται ἑκάστη εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τῆς ἄλλης καὶ οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον, θὰ εἶναι $ΣΣ' > R + R'$ καὶ ἀντιστρόφως κ.τ.λ., ὡς καὶ διὰ δύο κύκλους.

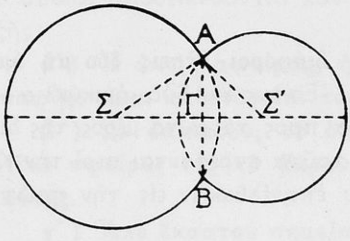
Ἀσκήσεις

875. Νὰ ὁρίσητε τὴν ἀμοιβαίαν θέσιν δύο σφαιρῶν (Σ, R), (Σ′, R′) ἂν εἶναι α′) $(ΣΣ') = 25$ ἑκατ., $R = 12$ ἑκατ., $R' = 10$ ἑκατ. β′) $(ΣΣ') = 28$ ἑκατ. $R = 12$ ἑκατ. $R' = 16$ ἑκατ.

876. Νὰ ὁρίσητε τὴν θέσιν δύο σφαιρῶν, ἂν α′) $(ΣΣ') = 18$ ἑκατ. $R = 26$ ἑκατ., $R' = 8$ ἑκατ. β′) $(ΣΣ') = 20$ ἑκατ., $R = 16$ ἑκατ., $R' = 12$ ἑκατ.

§ 402. *Πρόβλημα.* **Δύο σφαῖραι (Σ, R), (Σ′, R′) τέμνονται ($R > R'$). Νὰ ὁρισθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν κοινῶν σημείων τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν** (σχ. 302).

Ἐπειδὴ αἱ σφαῖραι τέμνονται, εἶναι $R - R' < ΣΣ' < R + R'$. Ἂν δὲ νοήσωμεν τυχὸν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς διακέντρου ΣΣ', τοῦτο τέμνει τὰς σφαίρας κατὰ μεγίστους κύκλους μὲ κέντρα ἀντιστοίχως Σ, Σ', τῶν ὁποίων αἱ περιφέρειαι τέμνονται.



Σχ. 302

Ἂν δὲ Α, Β εἶναι τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῶν, γνωρίζομεν ὅτι ἡ χορδὴ ΑΒ τέμνεται ὑπὸ τῆς ΣΣ', εἰς σημεῖον Γ καθέτως καὶ δίχα. Εἶναι δηλ. ΓΑ = ΓΒ καὶ ἡ ΓΑ κάθετος ἐπὶ τὴν ΣΣ.'

Ἂς νοήσωμεν δὲ ὅτι τὰ ἡμικύκλια, τὰ ὁποῖα περιέχουσι τὸ Α, στρέφονται περὶ τὴν ΣΣ', ἕως ὅτου ἐπανέλθωσιν εἰς τὴν πρώτην θέσιν αὐτῶν. Εἶναι φανερὸν ὅτι ταῦτα θὰ γράψωσι τὰς δοθείσας σφαίρας.

Ἡ εὐθεῖα ΓΑ θὰ μένῃ διαρκῶς κάθετος ἐπὶ τὴν ΣΣ' καὶ ἑπομένως θὰ γράψῃ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΣΣ' εἰς τὸ σημεῖον Γ.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ εὐθ. τμῆμα ΓΑ ἔχει σταθερὸν μέγεθος, τοῦτο γράφει εἰς τὸ προηγούμενον ἐπίπεδον κύκλον μὲ κέντρον Γ. Τὸ δὲ ἄκρον Α τοῦ τμήματος τούτου γράφει τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου τούτου.

Κατὰ τὴν στροφὴν ταύτην αἱ ἀποστάσεις ΣΑ, Σ'Α μένουσιν ἀμετάβλητοι. Εἶναι λοιπὸν ΣΑ = R, Σ'Α = R' εἰς πᾶσαν θέσιν τοῦ Α. Τοῦτο λοιπὸν μένει διαρκῶς εἰς τὴν ἐπιφάνειαν καὶ τῶν δύο σφαιρῶν, ἡ δὲ περιφέρεια, τὴν ὁποίαν γράφει εἶναι κοινὴ γραμμὴ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο σφαιρῶν.

Ἂν δὲ Α' εἶναι τυχὸν κοινὸν σημεῖον τῶν ἐπιφανειῶν τούτων, θὰ εἶναι ΣΑ' = R = ΣΑ, Σ'Α' = R' = Σ'Α καὶ τὰ τρίγωνα ΣΣ'Α, ΣΣ'Α' εἶναι ἴσα. Ἐπειδὴ ὁ ἄξων στροφῆς ΣΣ' εἶναι κοινὴ πλευρὰ τῶν τριγώνων τούτων, τὸ ΣΣ'Α κατὰ τὴν στροφήν του διέρχεται καὶ ἀπὸ τὴν θέσιν ΣΣ'Α', τὸ δὲ Α ἀπὸ τὸ Α'. Εἶναι λοιπὸν καὶ τὸ Α' σημεῖον τῆς περιφερείας, τὴν ὁποίαν γράφει τὸ Α.

Ἐξ ὅλων τούτων ἕπεται ὅτι κοινὰ σημεῖα τῶν ἐπιφανειῶν τῶν σφαιρῶν τούτων εἶναι ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας (Γ, ΓΑ) καὶ μόνον αὐτά. Ὥστε:

Ὁ γεωμ. τόπος τῶν κοινῶν σημείων τῶν ἐπιφανειῶν δύο

τεμνομένων σφαιρῶν εἶναι περιφέρεια, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον κεῖται ἐπὶ τῆς διακέντρου αὐτῶν, τὸ δὲ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν διάκεντρον ταύτην.

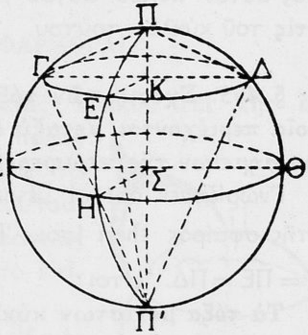
Ἀσκήσεις

877. Δύο σφαῖραι ἔχουσιν ἀκτῖνας $R = 12$ ἑκατ., $R' = 9$ ἑκατ., ἡ δὲ ἀπόστασις τῶν κέντρων εἶναι 15 ἑκατ. Νὰ ἐξετάσητε ἂν τέμνωνται αὗται ἢ ὄχι. Καὶ ἂν τέμνωνται νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς τομῆς αὐτῶν.

878. Τὸ αὐτὸ ζήτημα, ἂν $(ΣΣ') = 16$ ἑκατ. $R = 12$ ἑκατ., καὶ $R' = 8$ ἑκατ.

§. 403. Τί λέγεται ἄξων καὶ πόλοι κύκλου σφαίρας. Ἔστω ΓΔ τυχὼν κύκλος, ὅστις εἶναι ἐπίπεδος τομὴ μιᾶς σφαίρας Σ (σχ. 303).

Ἡ διάμετρος ΠΠ′ τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΓΔ, λέγεται **ἄξων,** τοῦ κύκλου τούτου. Τὰ ἄκρα Π,Π′ τοῦ ἄξονος τούτου λέγονται πόλοι τοῦ κύκλου τούτου. Ὥστε:



Σχ. 303

Ἄξων κύκλου σφαίρας τινὸς λέγεται ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν κύκλον τοῦτον.

Πόλοι κύκλου σφαίρας τινὸς λέγονται τὰ ἄκρα τοῦ ἄξονος αὐτοῦ.

Γνωρίζομεν δὲ (§ 396) ὅτι ὁ ἄξων κύκλου διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον αὐτοῦ.

I. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΟΛΩΝ ΚΥΚΛΟΥ ΣΦΑΙΡΑΣ

§ 404. Σχέσις τῶν ἀποστάσεων ἑκάστου πόλου κύκλου ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας αὐτοῦ.

Ἔστωσαν Π καὶ Π′ οἱ πόλοι τοῦ κύκλου Κ σφαίρας Σ καὶ Γ,Ε,Δ διάφορα σημεῖα τῆς περιφερείας αὐτοῦ (σχ. 303).

Ἐπειδὴ ΚΓ = ΚΕ = ΚΔ. ἕπεται ὅτι :

ΠΓ = ΠΕ = ΠΔ καὶ Π΄Γ = Π΄Ε = Π΄Δ ἤτοι :

Ἕκαστος πόλος κύκλου ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας αὐτοῦ.

Ἀντιστρόφως: Ἂν εἶναι ΠΓ = ΠΕ = ΠΔ, τὸ Π θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου Κ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ἕπεται ὅτι τὸ Π εἶναι πόλος τοῦ κύκλου Κ. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας μόνον ἕκαστος πόλος κύκλου ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας αὐτοῦ.

Ἡ ἀπόστασις σημείου περιφερείας κύκλου ἀπὸ τοῦ ἐγγυτέρου πρὸς αὐτὸν πόλου αὐτοῦ λέγεται **πολικὴ ἀπόστασις** ἢ **πολικὴ ἀκτὶς** τοῦ κύκλου τούτου.

§ 405. Σχέσις τῶν τόξων μεγίστων κύκλων σφαίρας, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ ἑνὸς πόλου κύκλου τινὸς αὐτῆς καὶ τῶν σημείων τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τούτου.

Γνωρίζομεν ὅτι οἱ μέγιστοι κύκλοι. ΠΓΠ΄, ΠΕΠ΄ ΠΔΠ΄ τῆς αὐτῆς σφαίρας εἶναι ἴσοι. Ἐπειδὴ δὲ $\overline{ΠΓ} = \overline{ΠΕ} = \overline{ΠΔ}$. ἕπεται ὅτι $\overset{\frown}{ΠΓ} = \overset{\frown}{ΠΕ} = \overset{\frown}{ΠΔ}$. Ἤτοι :

Τὰ τόξα μεγίστων κύκλων σφαίρας, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ πόλου τινὸς κύκλου σφαίρας καὶ τῶν σημείων τῆς περιφερείας αὐτοῦ, εἶναι ἴσα·

Ἂν Π εἶναι ὁ ἐγγύτερος πρὸς κύκλον ΓΔ πόλος αὐτοῦ, ἕκαστον τῶν τόξων ΠΓ, ΠΕ, ΠΔ κ.τ.λ. λέγεται **σφαιρικὴ ἀκτὶς** τοῦ κύκλου ΓΔ.

§ 406. Εἷς μέγιστος κύκλος ΠΗΠ΄ διέρχεται ἀπὸ τοὺς πόλους Π, Π΄ ἄλλου μεγίστου κύκλου ΖΘ. Νὰ εὑρεθῇ πόσον μέρος τῆς περιφερείας εἶναι τὸ τόξον ΠΗ, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τοῦ κύκλου ΖΘ καὶ τοῦ πόλου Π αὐτοῦ.

Ἐπειδὴ κέντρον τοῦ κύκλου ΠΗΠ΄ εἶναι τὸ Σ, ἡ ὀρθὴ γωνία ΠΣΗ εἶναι ἐπίκεντρος εἰς αὐτόν. Τὸ τόξον λοιπὸν ΠΗ εἶναι **τεταρτημόριον μεγίστου κύκλου.**

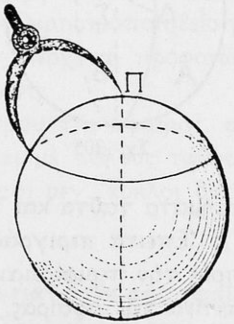
Ἀντιστρόφως: Ἂν $\widehat{\Pi H} = \widehat{\Pi Z} = \frac{1}{4}$ περιφερείας μεγίστων κύκλων ΠΗΠ′, ΠΖΠ′, αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ΠΣΗ, ΠΣΖ εἶναι ὀρθαί. Ἡ δὲ διάμετρος ΠΠ′ ὡς κάθετος ἐπὶ τὰς ἀκτῖνας ΣΗ, ΣΖ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ μεγίστου κύκλου ΖΘ. Τὸ Π λοιπὸν εἶναι πόλος τοῦ ΖΘ. Οὕτω βλέπομεν ὅτι:

Τὰ τόξα μεγίστων κύκλων, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ τῶν σημείων τῆς περιφερείας ἄλλου μεγίστου κύκλου καὶ ἑνὸς πόλου αὐτοῦ, εἶναι τεταρτημόρια μεγίστων κύκλων.

Ἂν δὲ δύο τόξα μεγίστων κύκλων σφαίρας, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξύ τῶν σημείων τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου ΖΘ καὶ ἑνὸς σημείου Π τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, εἶναι τεταρτημόρια, τὸ Π εἶναι πόλος τοῦ ΖΘ.

II. ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

§ 407. Πῶς γράφομεν περιφερείας κύκλου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας. Ἐπειδὴ ἕκαστος πόλος κύκλου σφαίρας ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τούτου, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας περιφερείας, ὅπως καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον.



Σχ. 304

Χρησιμοποιοῦμεν δὲ πρὸς τοῦτο εἰδικὸν διαβήτην μὲ καμπυλωμένα σκέλη. Οὗτος λέγεται **σφαιρικὸς διαβήτης** (σχ. 304).

Στερεοῦμεν δὲ τὰ σκέλη αὐτοῦ οὕτως, ὥστε τὰ ἄκρα των νὰ ἀπέχωσιν ἀλλήλων τόσον, ὅσην θέλομεν πολικὴν ἀκτῖνα.

Ἔπειτα στηρίζομεν τὴν αἰχμὴν τοῦ ἑνὸς σκέλους εἰς ἓν σημεῖον Π τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καὶ περιφέρομεν περὶ αὐτὸ τὸν διαβήτην, ὥστε τὸ ἄκρον τοῦ ἄλλου σκέλους νὰ εὑρίσκηται συνεχῶς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Ἂν δὲ τοῦτο εἶναι ἐφωδιασμένον μὲ γραφίδα, θὰ γράψῃ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας περιφέρειαν κύκλου, τοῦ ὁποίου εἷς πόλος θὰ εἶναι τὸ Π.

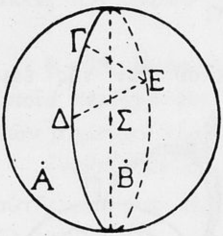
Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ πολικὴ ἀπόστασις, εἰς τὴν ὁποίαν τίθενται τὰ ἄκρα τῶν σκελῶν τοῦ διαβήτου, πρέπει νὰ εἶναι μικρότερα τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας.

§ **408**. *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς δοθείσης σφαίρας.**

Λύσις. Ὁρίζομεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας δύο σημεῖα Α, Β (σχ. 305). Μὲ πόλους δὲ ταῦτα καὶ τὴν αὐτὴν πολικὴν ἀκτῖνα γράφομεν ἐπὶ τῆς σφαίρας δύο τεμνόμενα τόξα· ἔστω δὲ Γ ἓν κοινὸν σημεῖον αὐτῶν.

Ἀλλάσσοντες πολικὴν ἀκτῖνα ὁρίζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ δύο ἄλλα σημεῖα Δ καὶ Ε.

Οὕτω δὲ ἕκαστον ἀπὸ τὰ σημεῖα Γ,Δ,Ε καὶ τὸ κέντρον Σ τῆς σφαίρας ἀπέχει ἴσον τῶν Α καὶ Β. Κεῖνται ἄρα ταῦτα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον τέμνει δίχα καὶ καθέτως τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ.



Σχ. 305

Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τέμνει αὐτὴν κατὰ μέγιστον κύκλον. Τούτου δὲ ἡ περιφέρεια διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Γ,Δ,Ε, ἑπομένως τὸ νοητὸν εὐθ. τρίγωνον ΓΔΕ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτήν. Ἂν δὲ μὲ τὸν σφαιρικὸν διαβήτην ὁρίσωμεν ἐπὶ ἐπιπέδου τμήματα $\gamma\delta = \Gamma\Delta$, $\delta\varepsilon = \Delta E$, $\varepsilon\gamma = E\Gamma$, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον γδε μὲ πλευρὰς τὰ τμήματα ταῦτα καὶ ἑπομένως ἴσον πρὸς τὸ ΓΔΕ.

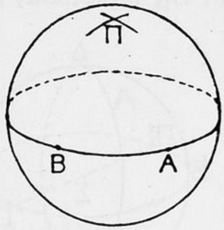
Ἔπειτα περιγράφομεν περὶ τὸ γδε περιφέρειαν· αὕτη ὡς ἴση πρὸς τὴν περιφέρειαν ΓΔΕ ἔχει ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν ζητουμένην ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.

Γραφικὴ ἐφαρμογή. Ἂν τὴν περιφέρειαν διαιρέσωμεν εἰς 4 ἴσα τόξα, ἕκαστον τούτων εἶναι σφαιρικὴ ἀκτὶς μεγίστου κύκλου τῆς δοθείσης σφαίρας. Ἡ δὲ χορδὴ αὐτοῦ εἶναι πολικὴ ἀκτὶς μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας ταύτης. Θέτοντες ἑπομένως τὰ ἐλεύθερα ἄκρα τῶν σκελῶν τοῦ διαβήτου εἰς τοιαύτην πολικὴν ἀπόστασιν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἐπὶ τῆς σφαίρας ταύτης περιφερείας μεγίστων κύκλων αὐτῆς.

§ **409**. *Πρόβλημα ΙΙ.* **Εἰς τὴν ἐπιφάνειαν δοθείσης σφαί-**

ρας ὁρίζονται δύο σημεῖα Α,Β. Νὰ γραφῇ ἐπ' αὐτῆς περιφέρεια μεγίστου κύκλου διερχομένη δι' αὐτῶν (σχ. 306).

Ἀνάλυσις. Ἂν Π εἶναι ὁ πόλος τῆς ζητουμένης περιφερείας, τὰ μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τῶν σημείων Α, Β περιεχόμενα τόξα μεγίστων κύκλων εἶναι τεταρτημόρια περιφερείας. Ἑπομένως τὸ Π ἀπέχει ἀπὸ ἕκαστον τῶν σημείων Α,Β ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὴν χορδὴν τεταρτημορίου μεγίστου κύκλου, τὴν ὁποίαν ὁρίζομεν, ὅπως προηγουμένως εἴπομεν.



Σχ. 306

Σύνθεσις. Γράφομεν, ὡς προηγουμένως (§ 408), περιφέρειαν μεγίστου κύκλου τῆς δοθείσης σφαίρας καὶ ὁρίζομεν τὴν πολικὴν ἀκτῖνα τῶν μεγίστων κύκλων αὐτῆς.

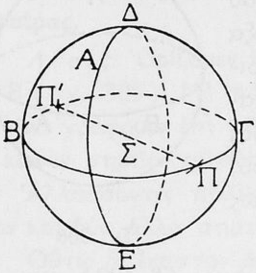
Ἔπειτα μὲ πόλους Α καὶ Β γράφομεν δύο τόξα μεγίστων κύκλων καὶ ὁρίζομεν τὸ ἓν κοινὸν σημεῖον Π αὐτῶν. Μὲ πόλον δὲ Π καὶ τὴν αὐτὴν πολικὴν ἀκτῖνα γράφομεν περιφέρειαν κύκλου.

Οὗτος εἶναι μέγιστος κύκλος ἕνεκα τῆς χρησιμοποιηθείσης πολικῆς ἀκτῖνος. Ἡ δὲ περιφέρεια αὐτοῦ διέρχεται προφανῶς ἀπὸ τὰ σημεῖα Α,Β. Εἶναι ἑπομένως ἡ ζητουμένη.

Ἂν τὰ Α,Β. εἶναι ἄκρα τῆς αὐτῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας, αἱ περιφέρειαι μεγ. κύκλου, αἱ ὁποῖαι γράφονται μὲ πόλους ταῦτα, ταυτίζονται. Εὐκόλως δὲ ἐννοοῦμεν ὅτι ἄπειροι μεγ. κύκλοι διέρχονται ἀπὸ αὐτά.

§ 410. *Πρόβλημα III.* **Εἰς τὴν ἐπιφάνειαν δοθείσης σφαίρας γράφεται περιφέρεια ΒΓ μεγίστου κύκλου καὶ ὁρίζεται σημεῖον Α. Νὰ γραφῇ περιφέρεια μεγίστου κύκλου διερχομένη διὰ τοῦ Α καὶ κάθετος ἐπὶ τὸν κύκλον ΒΓ** (σχ. 307.)

Ἀνάλυσις. Ἔστω ΔΑΕ ἡ ζητουμένη περιφέρεια καὶ Π, Π' οἱ πόλοι τοῦ κύκλου αὐτῆς. Ἐπειδὴ τὸ Σ εἶναι εἰς τὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων ΔΕ καὶ, ΒΓ ὁ ἄξων ΠΣΠ' τοῦ ΔΕ κάθετος ἐπ' αὐτὸν θὰ κεῖται εἰς τὸν κύκλον ΒΓ, διότι οὗτος εἶναι ἐξ ὑποθέσεως κάθετος ἐπὶ τὸ ΔΕ. Οἱ πόλοι ἑπομένως Π καὶ Π' θὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας ΒΓ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ εὐθ. τμῆμα ΠΑ εἶναι πολικὴ ἀκτὶς τοῦ μεγ. κύκλου ΔΕ, θὰ εἶναι χορδὴ τεταρτημορίου μεγ. κύκλου τῆς σφαίρας καὶ ὁρίζεται ἀρχικῶς. Πρέπει λοιπὸν τὸ Π νὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας μεγ. κύκλου, ἥτις γράφεται μὲ πόλον Α καὶ τὴν ρηθεῖσαν πολικὴν ἀκτῖνα.



Σχ. 307

Σύνθεσις. Ὁρίζομεν πρῶτον τὴν πολικὴν ἀκτῖνα τῶν μεγίστων κύκλων τῆς δοθείσης σφαίρας καὶ γράφομεν περιφέρειαν μεγ. κύκλου μὲ πόλον τὸ δοθὲν σημεῖον Α. Οὕτως δὲ ὁρίζονται τὰ κοινὰ σημεῖα Π,Π′ τῆς περιφερείας ταύτης καὶ τῆς ΓΒ. Ἔπειτα δὲ μὲ πόλον ἓν τούτων, π.χ. τὸ Π, γράφομεν περιφέρειαν μεγ. κύκλου. Αὕτη δὲ εἶναι ἡ ζητουμένη.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ΠΑ ἰσοῦται πρὸς τὴν ληφθεῖσαν πολικὴν ἀκτῖνα, ἡ περιφέρεια αὕτη διέρχεται ἀπὸ τὸ Α. Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἄξων ΠΣΠ′ αὐτῆς εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς καὶ κεῖται εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΒΓ, οὗτος εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν κύκλον ΔΕ.

Ἂν τὸ Α εἶναι πόλος τοῦ ΒΓ, εὐκόλως ἐννοοῦμεν ὅτι διέρχονται ἀπὸ αὐτὸ ἄπειροι μεγ. κύκλοι κάθετοι ἐπὶ τὸν ΒΓ.

Ἀσκήσεις

879. Νὰ συγκρίνητε τὴν γωνίαν τῶν ἀξόνων δύο μεγίστων κύκλων σφαίρας πρὸς τὴν ἀντίστοιχον ἐπίπεδον τῆς διέδρου γωνίας αὐτῶν.

880. Ἡ πολικὴ ἀκτὶς τῶν μεγίστων κύκλων σφαίρας εἶναι 12 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας ταύτης.

881. Ἡ σφαιρικὴ ἀκτὶς μεγ. κύκλου σφαίρας ἔχει μῆκος 3 π. παλάμας. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας ταύτης.

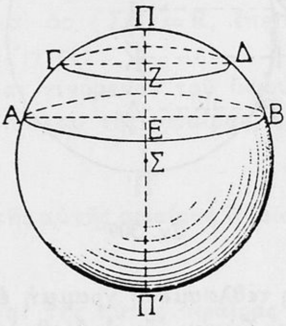
882. Εἰς μέγιστον κύκλον σφαίρας εἶναι ἐγγεγραμμένον τρίγωνον ΔΕΖ (σχ. 305) μὲ πλευρὰν 9, 12, 15 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας ταύτης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

1. ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΤΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

§ 411. Τί εἶναι σφαιρικὴ ζώνη καὶ τί λέγεται ἐμβαδὸν αὐτῆς. α') Ἔστω ΠΓΑΠ'Π τυχὸν ἡμικύκλιον, ΠΠ' ἡ διάμετρος αὐτοῦ, Γ,Α δύο τυχόντα σημεῖα τῆς ἡμιπεριφερείας αὐτοῦ καὶ ΑΕ, ΓΖ αἱ προβάλλουσαι αὐτῶν ἐπὶ τὴν ΠΠ' (σχ. 308).



Σχ. 308

Ἂν τὸ ἡμικύκλιον τοῦτο στραφῇ περὶ τὴν διάμετρον ΠΠ' κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ ἕως ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην θέσιν του, θὰ γράψῃ ὡς γνωστόν, σφαῖραν μὲ κέντρον Σ. Ἡ ἡμιπεριφέρεια αὐτοῦ θὰ γράψῃ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. Τὰ εὐθ. τμήματα ΑΕ, ΓΖ θὰ γράψωσι παραλλήλους κύκλους ΑΒ, ΓΔ μὲ κέντρα ἀντιστοίχως Ε καὶ Ζ. Τὸ δὲ τόξον ΑΓ θὰ γράψῃ ἓν μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν περιφερειῶν τῶν κύκλων ΑΒ,ΓΔ.

Τὸ μέρος τοῦτο λέγεται **σφαιρικὴ ζώνη.**

Καὶ τὸ τόξον ΠΓ γράφει σφαιρικὴν ζώνην, ἡ ὁποία περιέχει τὸν πόλον Π τοῦ κύκλου ΓΔ. Ἂν δὲ θεωρήσωμεν τὸν πόλον Π ὡς κύκλον περιορισθέντα εἰς τὸ κέντρον, λέγομεν γενικῶς ὅτι:

Σφαιρικὴ ζώνη εἶναι μέρος τῆς ἐπιφανείας σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ δύο παραλλήλων κύκλων αὐτῆς.

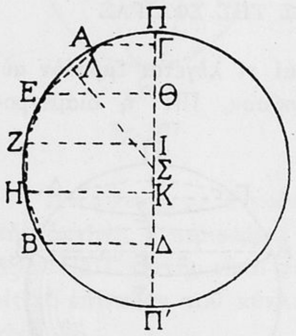
Αἱ περιφέρειαι τῶν κύκλων, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται μία σφαιρικὴ ζώνη, λέγονται **βάσεις** αὐτῆς. Ἡ δὲ ἀπόστασις τῶν ἐπιπέδων τῶν βάσεων μιᾶς σφαιρικῆς ζώνης λέγεται **ὕψος** αὐτῆς.

Π.χ. αἱ περιφέρειαι τῶν κύκλων ΑΒ, ΓΔ εἶναι αἱ βάσεις καὶ ΖΕ τὸ ὕψος τῆς σφαιρικῆς ζώνης ΑΒΔΓ.

Ἡ δὲ σφαιρικὴ ζώνη ΠΓΔ ἔχει κυρίως μίαν βάσιν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΓΔ καὶ ὕψος ΠΖ.

β΄) Εἰς τὸ τόξον ΑΒ ἡμιπεριφερείας ΠΖΠ΄, ἔστω ἐγγεγραμμένη κανονικὴ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΕΖΗΒ (σχ. 309).

Κατὰ τὴν στροφὴν τοῦ ἡμικυκλίου περὶ τὴν διάμετρον ΠΠ΄ αὐτοῦ, ἡ τεθλ. γραμμὴ γράφει μίαν ἐπιφάνειαν. Αὕτη περιβάλλεται ἀπὸ τὴν σφαιρικὴν ζώνην, τὴν ὁποίαν γράφει τὸ τόξον ΑΖΒ καὶ ἀπὸ τὰς βάσεις αὐτῆς.



Σχ. 309

Ἂν δὲ νοήσωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς τεθλασμ. γραμμῆς ἀπαύστως διπλασιάζεται, ἐννοοῦμεν ὅτι αὕτη τείνει νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ τόξον ΑΖΒ, ἡ δὲ γραφομένη ἐπιφάνεια μὲ τὴν σφαιρικὴν ζώνην, τὴν ὁποίαν γράφει τὸ τόξον τοῦτο. Διὰ τοῦτο:

Ὀνομάζομεν ἐμβαδὸν σφαιρικῆς ζώνης τὸ ὅριον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει κανονικὴ τεθλασμένη γραμμὴ ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τόξον τὸ γράφον τὴν ζώνην, ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτῆς ἀπαύστως διπλασιάζηται.

Μετὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον προκύπτει τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα:

§ **412.** *Πρόβλημα.* **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν σφαιρικῆς ζώνης.**

Λύσις. Ἔστω ΑΖΒ τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον γράφει τὴν σφαιρικὴν ζώνην, καὶ Ζ τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς. Ἔστω δὲ ΑΕΖΗΒ κανονικὴ τεθλ. γραμμὴ ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τόξον καὶ Γ,Θ,Ι,Κ,Δ αἱ προβολαὶ τῶν κορυφῶν αὐτῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον ΠΠ΄ τῆς ἡμιπεριφερείας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει τὸ τόξον ΑΖΒ.

Κατὰ τὴν στροφὴν τοῦ ἡμικυκλίου περὶ τὴν ΠΠ΄ ἑκάστη πλευρὰ τῆς τεθλ. γραμμῆς γράφει κυρτὴν ἐπιφάνειαν κολούρου κώνου.

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν δὲ τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης τοιαύτης ἐπιφανείας παρατηροῦμεν ὅτι αἱ κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΕ, ΕΖ κ.τ.λ. διέρχονται ἀπὸ τὸ κέντρον Σ καὶ ὅτι τοῦτο ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς ταύτας.

Ἂν δὲ ἐφαρμόσωμεν τὸν γνωστὸν τύπον (§ 391 β′), εὑρίσκομεν ὅτι :

(ἐπιφ. ΑΕ) = 2 π (ΣΛ) (ΓΘ) · (ἐπιφ. ΖΕ) = 2π (ΣΛ) · (ΘΙ),
(ἐπιφ. ΖΗ) = 2 π (ΣΛ) · (ΙΚ), (ἐπιφ. ΗΒ) = 2π (ΣΛ) · (ΚΔ).

Ἐκ τούτων διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι :

(ἐπιφ. ΑΕΖΗΒ) = 2π (ΣΛ) · (ΓΔ).

Αὕτη ἀληθεύει ὁσασδήποτε πλευρὰς καὶ ἂν ἔχῃ ἡ τεθλασμένη γραμμή. Θὰ εἶναι ἑπομένως :

ὅρ (ἐπιφ. ΑΕΖΗΒ) = 2 π (ΓΔ) ὅρ (ΣΛ).

Ἐπειδὴ δὲ ὅρ (ἐπιφ. ΑΕΖΗΒ) = Ζ καὶ ὅρ (ΣΛ) = R, ἕπεται ὅτι : **Ζ = 2π R (ΓΔ)** (1) Ἤτοι :

Τὸ ἐμβαδὸν σφαιρικῆς ζώνης εἶναι γινόμενον τοῦ ὕψους αὐτῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας, εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται ἡ ζώνη αὕτη.

Πόρισμα I. **Αἱ ἰσοϋψεῖς ζῶναι τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἴσων σφαιρῶν εἶναι ἰσοδύναμοι.**

Πόρισμα II. **Δύο σφαιρικαὶ ζῶναι τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἴσων σφαιρῶν εἶναι ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.**

Ἀσκήσεις

883. Νὰ σχηματίσητε ἡμικύκλιον μὲ διάμετρον (ΠΠ′) = 8 ἑκατ. καὶ νὰ ὁρίσητε ἐπ' αὐτῆς τμῆμα (ΑΒ) = 5 ἑκατ. Ἀπὸ δὲ τὰ σημεῖα Α, Β νὰ φέρητε καθέτους ΑΓ, ΒΔ ἐπὶ τὴν ΠΠ′ μέχρι τῆς ἡμιπεριφερείας. Νὰ εὕρητε δὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης, τὴν ὁποίαν γράφει τὸ τόξον ΓΔ, ἂν τὸ ἡμικύκλιον στραφῇ περὶ τὴν ΠΠ′.

884. Ἓν ἐπίπεδον ἀπέχει $\frac{R}{2}$ ἀπὸ τὸ κέντρον σφαίρας ἀκτῖνος R. Νὰ εὕρητε νὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης τῶν σφαιρικῶν ζωνῶν, εἰς τὰς ὁποίας διαιρεῖται ὑπ' αὐτοῦ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας. Ἐφαρμογὴ διὰ R = 12 ἑκατ.

885. Μία σφαιρικὴ ζώνη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς μέγιστον κύκλον τῆς αὐτῆς σφαίρας. Νὰ εὕρητε τὸ ὕψος αὐτῆς συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας.

886. Νὰ συγκρίνητε μίαν σφαιρικὴν ζώνην μὲ μίαν βάσιν πρὸς κύκλον, ὅστις ἔχει ἀκτῖνα τὴν πολικὴν ἀπόστασιν τῆς βάσεως τῆς ζώνης ἀπὸ τὸν εἰς αὐτὴν περιεχόμενον πόλον τῆς βάσεως ταύτης.

887. Νὰ γράψητε εἰς τὴν ἐπιφάνειαν δοθείσης σφαίρας δύο περιφερείας παραλλήλων κύκλων, διὰ τῶν ὁποίων ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας νὰ διαιρῆται εἰς τρεῖς ἰσοδυνάμους ζώνας.

888. Δύο ἰσοδύναμοι σφαιρικαὶ ζῶναι εὑρίσκονται εἰς ἀνίσους σφαίρας. Νὰ συγκρίνητε τὸν λόγον τῶν ὑψῶν αὐτῶν πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων τῶν σφαιρῶν τούτων.

§ **413. Τί λέγεται ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας καὶ πῶς εὑρίσκεται τοῦτο.** Ἔστω ΑΖΒ τυχὸν τόξον, τὸ ὁποῖον στρεφόμενον περὶ τὴν διάμετρον ΠΠ′ γράφει σφαιρικὴν ζώνην μὲ ὕψος ΓΔ (σχ. 309). Ἂν νοήσωμεν ὅτι τὸ τόξον τοῦτο βαίνει συνεχῶς αὐξανόμενον ἑκατέρωθεν, εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ γραφομένη ζώνη καὶ τὸ ὕψος βαίνουσι συνεχῶς αὐξανόμενα. Ἂν δὲ τὸ τόξον γίνῃ ἡμιπεριφέρεια, γράφεται ὑπ' αὐτῆς ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας καὶ τὸ ὕψος γίνεται ΠΠ′.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ θεωρήσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ὡς σφαιρικὴν ζώνην μὲ ὕψος τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας. Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς ὁρίζεται, ὅπως ὁρίζεται τὸ ἐμβαδὸν σφαιρικῆς ζώνης (§ 411 β′).

Διὰ νὰ εὕρωμεν ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς ἐπιφανείας σφαίρας, ἀρκεῖ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον (1 § 412). Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι

$$E = 4\pi R^2.$$

Ἤτοι: Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τεσσάρων μεγίστων κύκλων αὐτῆς.

Πόρισμα. **Αἱ ἐπιφάνειαι δύο σφαιρῶν εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.**

Ἀσκήσεις

889. Μία σφαῖρα ἔχει ἀκτῖνα 10 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς.

890. Ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας ἔχει ἐμβαδὸν 64π τετραγ. ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς.

891. Μία σφαῖρα Σ ἔχει εἰκοσιπενταπλασίαν ἐπιφάνειαν ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν μιᾶς ἄλλης σφαίρας Σ.′ Νὰ εὕρητε τὸν λόγον τῆς ἀκτῖνος τῆς Σ πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς Σ′.

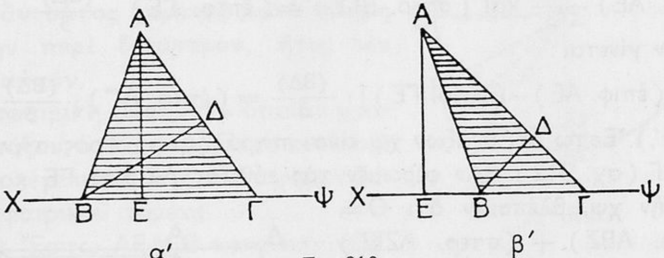
892. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας εἶναι τὰ $\frac{8}{9}$ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου, ὅστις ἔχει $υ = 6$ ἑκατ. καὶ $α = 3$ ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας ταύτης.

893. Εἷς κύλινδρος καὶ σφαῖρα ἔχουσιν ἰσοδυνάμους ἐπιφανείας καὶ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου.

II. ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΣΦΑΙΡΑΣ ΚΑΙ ΜΕΡΩΝ ΑΥΤΗΣ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

§ **414.** *Θεώρημα (Βοηθητικόν).* **Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ στρέφεται περὶ ἄξονα χψ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου, ὅστις διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Β καὶ δὲν τέμνει τὸ τρίγωνον. Ὁ ὄγκος τοῦ ὑπ' αὐτοῦ γραφομένου στερεοῦ εἶναι γινόμενον τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει ἡ πλευρὰ ΑΓ ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ἐπ' αὐτὴν ὕψους ΒΔ.**

Ἀπόδειξις. α'). Ἔστω ὅτι τὸ τρίγωνον στρέφεται περὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ (σχ. 310 α'). Ἂν φέρωμεν τὸ ὕψος ΑΕ, βλέπομεν ὅτι τὸ γραφόμενον στερεὸν ἀποτελεῖται ἀπὸ τοὺς κώνους,



Σχ. 310

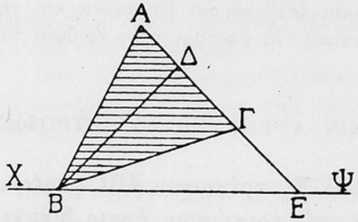
τοὺς ὁποίους γράφουσι τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΕΓ. Θὰ εἶναι λοιπὸν
$$Θ = \frac{1}{3}π(ΑΕ)^2 \cdot (ΒΕ) + \frac{1}{3}π(ΑΕ)^2 \cdot (ΕΓ) =$$
$$\frac{1}{3}π(ΑΕ)^2 \cdot (ΒΓ) \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ (ΑΕ)(ΒΓ) = (ΑΓ)(ΒΔ), ἡ (1) γίνεται
$$Θ = \frac{1}{3}π(ΑΕ)(ΑΓ)(ΒΔ). \qquad (2)$$

Ἀλλὰ π(ΑΕ)(ΑΓ) εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, τὸν ὁποῖον γράφει τὸ τρίγωνον ΑΕΓ. Ἐπειδὴ δὲ αὕτη γράφεται ὑπὸ τῆς ΑΓ, θέτομεν

$$\pi\,(\text{ΑΕ})\,(\text{ΑΓ}) = (\text{ἐπιφ. ΑΓ}),\ \text{ὅτε ἡ (2) γίνεται}$$

$$\Theta = (\text{ἐπιφ. ΑΓ}) \cdot \frac{\text{ΒΔ}}{3},\ \text{ὅ.ἔ.δ.}$$



Σχ. 311

Ἂν τὸ ὕψος ΑΕ εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου (σχ. 310 β') εἶναι $\Theta = \frac{1}{3}\pi\,(\text{ΑΕ})^2\,(\text{ΕΓ}) - \frac{1}{3}\pi(\text{ΑΕ})^2(\text{ΕΒ}) = \frac{1}{3}\pi\,(\text{ΑΕ})^2(\text{ΒΓ})$. Συνεχίζοντες δέ, ὡς προηγουμένως, καταλήγομεν πάλιν εἰς τὸ ἀποδεικτέον.

β') Ἔστω ὅτι ὁ ἄξων χψ καὶ ἡ προέκτασις τῆς πλευρᾶς ΑΓ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ε (σχ. 311). Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι φανερὸν ὅτι $\Theta = (\text{στερ. ΑΒΕ}) - (\text{στερ. ΒΓΕ})$ (3).

Κατὰ δὲ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν εἶναι $(\text{στερ. ΑΒΕ}) = (\text{ἐπιφ. ΑΕ}) \cdot \frac{\text{ΒΔ}}{3}$ καὶ $(\text{στερ. ΒΓΕ}) = (\text{ἐπιφ. ΓΕ}) \cdot \frac{(\text{ΒΔ})}{3}$. Ἡ (3) λοιπὸν γίνεται:

$$\Theta = [(\text{ἐπιφ. ΑΕ}) - (\text{ἐπιφ. ΓΕ})] \cdot \frac{(\text{ΒΔ})}{3} = (\text{ἐπιφ. ΑΓ}) \cdot \frac{(\text{ΒΔ})}{3},\ \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

γ') Ἔστω ὅτι ὁ ἄξων χψ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΓ (σχ. 312). Ἂν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΑΖ καὶ ΓΕ καθέτους ἐπὶ τὴν χψ, βλέπομεν ὅτι

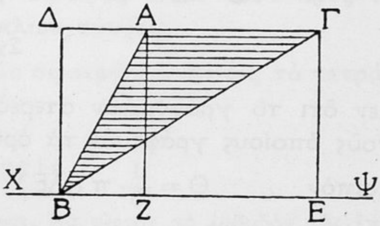
$$\Theta = (\text{στερ. ΑΒΖ}) + (\text{στερ. ΑΖΕΓ}) - (\text{στερ. ΒΓΕ}) \qquad (4)$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι:

$$(\text{στερ. ΑΒΖ}) = \frac{1}{3}\pi\,(\text{ΑΖ})^2 \cdot (\text{ΒΖ}).$$

$$(\text{στερ. ΑΖΕΓ}) = \pi\,(\text{ΑΖ})^2 \cdot (\text{ΖΕ}),$$

$$(\text{στερ. ΒΓΕ}) = \frac{1}{3}\pi\,(\text{ΑΖ})^2 \cdot (\text{ΒΕ}),$$



Σχ. 312

ἡ (4) γίνεται: $\Theta = \frac{1}{3}\pi\,(\text{ΑΖ})^2\,[(\text{ΒΖ}) + 3\,(\text{ΖΕ}) - (\text{ΒΕ})] =$

$$\frac{1}{3}\pi\,(\text{ΑΖ})^2 \cdot 2\,(\text{ΖΕ}) = \frac{1}{3}\,(\text{ΒΔ}) \cdot 2\pi\,(\text{ΑΖ})\,(\text{ΖΕ}).$$

Ἀλλὰ 2π (ΑΖ) (ΖΕ) εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, τὸν ὁποῖον γράφει τὸ ὀρθογώνιον ΑΖΕΓ. Γράφει δὲ ταύτην ἡ πλευρὰ ΑΓ.

Ὥστε 2π (ΑΖ) (ΖΕ) = (ἐπιφ. ΑΖ)· ἄρα ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\Theta = (\text{ἐπιφ. } \mathrm{A\Gamma}) \cdot \frac{(\mathrm{B\Delta})}{3}$, ὅ.ἔ.δ.

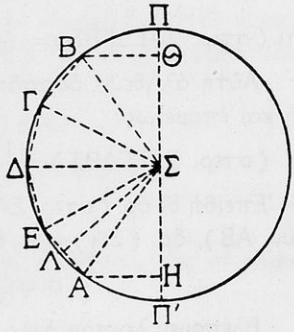
§ 415. Τί λέγεται σφαιρικὸς τομεὺς καὶ πῶς ὁρίζεται ὁ ὄγκος αὐτοῦ. α΄) Ἔστω ΠΔΠ΄Π ἡμικύκλιον μὲ διάμετρον ΠΠ΄ καὶ ΑΣΒ τυχὸν κυκλικὸς τομεὺς αὐτοῦ (σχ. 313).

Ἂν τὸ ἡμικύκλιον στραφῇ περὶ τὴν διάμετρον ΠΠ΄, ἕως ὅτου γράψῃ σφαῖραν, ὁ κυκλικὸς τομεὺς γράφει ἓν μέρος τῆς σφαίρας ταύτης.

Τοῦτο λέγεται ἰδιαιτέρως **σφαιρικὸς τομεύς.** Ὥστε:

Σφαιρικὸς τομεὺς εἶναι στερεόν, τὸ ὁποῖον παράγεται ἀπὸ κυκλικὸν τομέα, ἂν οὗτος στραφῇ κατὰ πλήρη στροφὴν περὶ διάμετρον, ἥτις δὲν τέμνει αὐτόν.

Ἡ σφαιρικὴ ζώνη, τὴν ὁποίαν γράφει τὸ τόξον τοῦ στρεφομένου κυκλικοῦ τομέως, λέγεται **βάσις** τοῦ σχηματιζομένου σφαιρικοῦ τομέως.



Σχ. 313

β΄) Ἔστω ΑΕΔΓΒ κανονικὴ τεθλ. γραμμὴ ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΑΣΒ. Αὕτη μὲ τὰς ἀκτῖνας ΣΑ, ΣΒ ὁρίζει πολυγωνικὸν τομέα ΣΑΕΔΓΒ. Οὗτος ἔχει ὅριον τὸν κυκλικὸν τομέα ΣΑΔΒ, ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς τεθλ. γραμμῆς ἀπαύστως διπλασιάζηται. Κατὰ δὲ τὴν στροφὴν τοῦ ἡμικυκλίου ὁ πολυγωνικὸς οὗτος τομεὺς γράφει ἓν στερεόν, τὸ ὁποῖον ἔχει ὅριον τὸν σφαιρικὸν τομέα. Ἐπομένως:

Ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τομέως ΣΑΔΒ εἶναι τὸ ὅριον τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον γράφεται ἀπὸ τὸν πολυγωνικὸν τομέα ΣΑΕΔΓΒ.

Προκύπτει λοιπὸν φυσικῶς πρὸς λύσιν τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα.

§ **416.** *Πρόβλημα Ι.* **Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος σ σφαιρικοῦ τομέως.**

Λύσις. Ἔστω ΑΒ τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τομέως, ἀπὸ τὸν ὁποῖον σχηματίζεται ὁ σφαιρικὸς τομεὺς (σχ. 313). Ἐγγράφομεν εἰς τὸ τόξον τοῦτο κανονικὴν τεθλ. γραμμὴν ΑΕΔΓΒ καὶ φέρομεν τὰς ἀκτῖνας εἰς τὰς κορυφὰς αὐτῆς.

Εὐκόλως δὲ βλέπομεν ὅτι : (στερ. ΣΑΕΔΓΒΣ) = (στερ. ΣΑΕ) + (στερ. ΣΕΔ) + (στερ. ΣΔΓ) + (στερ. ΣΓΒ).

Ἐπειδὴ (§ 414) εἶναι (στερ. ΣΑΕ) = $\frac{1}{3}$ (ἐπιφ. ΑΕ) · (ΣΛ), (στερ. ΣΕΔ) = $\frac{1}{3}$ (ἐπιφ. ΕΔ) · (ΣΛ), (στερ. ΣΔΓ) = $\frac{1}{3}$ (ἐπιφ. ΔΓ) · (ΣΛ), (στερ. ΣΓΒ) = $\frac{1}{3}$ (ἐπιφ. ΓΒ) · (ΣΛ), ἕπεται ὅτι (στερ. ΣΑΕΔΓΒΣ) = $\frac{1}{3}$ (ἐπιφ. ΑΕΔΓΒ) · (ΣΛ).

Αὕτη ἀληθεύει ὁσασδήποτε πλευρὰς καὶ ἂν ἔχῃ ἡ τεθλ. γραμμὴ καὶ ἑπομένως :

ὅρ. (στερ. ΣΑΕΓΔΒΣ) = $\frac{1}{3}$ ὅρ. (ἐπιφ. ΑΕΔΓΒ) · ὅρ. (ΣΛ).

Ἐπειδὴ δὲ ὅρ. (στερ. ΣΑΕΔΓΒΣ) = σ, ὅρ. (ἐπιφ. ΑΕΔΓΒ) = (σφ. ζών. ΑΒ), ὅρ. (ΣΛ) = R, ἕπεται ὅτι :

$$\sigma = \frac{1}{3} (\text{σφ. ζών. ΑΒ})\, R \qquad (1)$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ τομέως εἶναι τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ.

Ἐπειδὴ δὲ (σφ ζών. ΑΒ) = 2π R · (ΗΘ), ἡ προηγουμένη ἰσότης (1) γίνεται :

$$\sigma = \frac{2}{3}\pi R^2 (\text{ΗΘ}) = \frac{2}{3}\pi R^2 \upsilon \qquad (2)$$

ἂν υ εἶναι τὸ ὕψος τῆς βάσεως τοῦ σφαιρικοῦ τομέως.

Ἀσκήσεις

894. Εἰς κυκλικὸς τομεὺς 90° καὶ ἀκτῖνος 6 ἑκατ. στρέφεται περὶ διάμετρον ΠΠ′ παράλληλον πρὸς τὴν χορδὴν ΓΔ τῆς βάσεως αὐτοῦ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τοῦ σχηματιζομένου σφαιρικοῦ τομέως.

895. Ἡ βάσις κυκλικοῦ τομέως 60^0 ἔχει χορδὴν 12 ἑκατ., ἡ δὲ προβολὴ τῆς χορδῆς ταύτης ἐπί τινα διάμετρον μὴ τέμνουσαν αὐτὸν ἔχει μῆκος 6 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τοῦ σφαιρικοῦ τομέως, ὁ ὁποῖος σχηματίζεται, ἂν ὁ κυκλικὸς οὗτος τομεὺς στραφῇ περὶ τὴν διάμετρον ταύτην.

896. Νὰ γράψητε περιφέρειαν Ο μὲ ἀκτῖνα 10 ἑκατ. καὶ νὰ γράψητε δύο καθέτους διαμέτρους· ΑΒ, ΓΔ. Διὰ τοῦ μέσου τῆς ἀκτῖνος ΟΑ νὰ γράψητε χορδὴν ΕΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΑ. Νὰ εὕρητε ἔπειτα τὸν ὄγκον τοῦ σφαιρικοῦ τομέως, τὸν ὁποῖον σχηματίζει ὁ κυκλικὸς τομεὺς ΟΕΖ στρεφόμενος περὶ τὴν διάμετρον ΓΔ.

§ 417. *Πρόβλημα ΙΙ.* **Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος σφαίρας ἐκ τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς.**

Λύσις. Ἂν σκεφθῶμεν ὅπως εἰς τὴν § 413, ἐννοοῦμεν εὐκόλως ὅτι ἡ σφαῖρα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς σφαιρικὸς τομεὺς μὲ βάσιν ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς καὶ ἑπομένως ὄγκος Σ αὐτῆς εἶναι ὁ ὄγκος τοιούτου τομέως. Ἐπειδὴ δὲ διὰ τοιοῦτον τομέα εἶναι $\upsilon = 2\ R$, ἕπεται ὅτι

$$\Sigma = \frac{2}{3}\pi R^2 . 2R \text{ ἢ } \mathbf{\Sigma} = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ $\Delta = 2R$, ὁ προηγούμενος τύπος γίνεται

$$\mathbf{\Sigma} = \frac{1}{6}\pi \Delta^3 \qquad (2)$$

Πόρισμα. **Δύο σφαῖραι εἶναι πρὸς ἀλλήλας, ὡς οἱ κύβοι τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.**

Ἀσκήσεις

897. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον σφαίρας ἀκτῖνος 4 ἑκατ.

898. Νὰ εὕρητε μὲ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἡ ἀκτὶς σφαίρας, διὰ νὰ ὀκταπλασιασθῇ ὁ ὄγκος αὐτῆς.

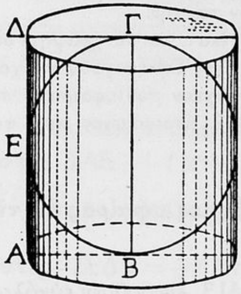
899. Μία σφαῖρα εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς κύβον ἀκμῆς $\left(\frac{5}{3}\cdot\sqrt[3]{36\pi}\right)$ ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας ταύτης.

900. Αἱ ἕδραι κύβου ἐφάπτονται σφαίρας ἥτις λέγεται ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κύβον. Ἂν ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου εἶναι 6 ἑκατ., νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας ταύτης.

901. Μία σφαῖρα ἔχει ὄγκον 36π κυβ. παλάμας. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς.

902. Ἂν ἡ προηγουμένη σφαῖρα εἶναι ἐκ ξύλου καὶ ἔχῃ βάρος 28,8π. χιλιόγραμμα, νὰ εὕρητε τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ξύλου τούτου.

903. Μία σφαῖρα ἐκ σιδήρου εἰδ. βάρους 7,72 ἀφιεμένη ἐλευθέρα ἐντὸς ὕδατος κατέρχεται μὲ δύναμιν 8,96π. γραμμαρίων. Νὰ εὕρητε τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας ταύτης.



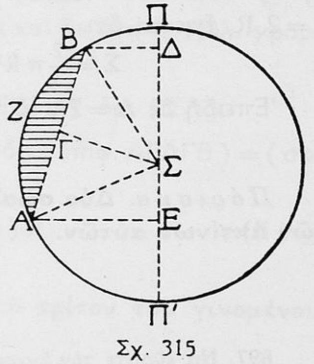
Σχ. 314

904. Εἰς ἓν ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον ἡμικύκλιον ΒΕΓ (σχ. 314). Ἂν τὸ σχῆμα τοῦτο στραφῇ περὶ τὴν διάμετρον ΒΓ τοῦ ἡμικυκλίου, τοῦτο μὲν γράφει σφαῖραν, τὸ δὲ ὀρθογώνιον γράφει περιγεγραμμένον περὶ αὐτὴν κύλινδρον. Νὰ εὕρητε τὸν λόγον τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας πρὸς τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου.

§ 418. Τί εἶναι σφαιρικὸς δακτύλιος καὶ πῶς εὑρίσκεται ὁ ὄγκος αὐτοῦ.

Εἰς δοθὲν ἡμικύκλιον ΠΑΠ′ μὲ διάμετρον ΠΠ′ ἔστω κυκλικὸν τμῆμα ΑΖΒΓΑ, τὸ ὁποῖον δὲν τέμνεται ὑπὸ τῆς διαμέτρου ΠΠ′ (σχ. 315).

Κατὰ τὴν στροφὴν τοῦ ἡμικυκλίου περὶ τὴν ΠΠ′, τὸ κυκλικὸν τμῆμα γράφει ἓν στερεόν. Τοῦτο ἔχει ἐξωτερικὴν ἐπιφάνειαν τὴν σφαιρικὴν ζώνην, τὴν ὁποίαν γράφει τὸ τόξον ΑΖΒ, καὶ ἐσωτερικὴν τὴν ἐπιφάνειαν, τὴν ὁποίαν γράφει ἡ χορδὴ ΑΒ αὐτοῦ τοῦ τόξου.



Σχ. 315

Τὸ στερεὸν τοῦτο λέγεται **σφαιρικὸς δακτύλιος**. Ὥστε:

Σφαιρικὸς δακτύλιος εἶναι στερεόν, τὸ ὁποῖον παράγει κυκλικὸν τμῆμα στρεφόμενον περὶ διάμετρον μὴ τέμνουσαν αὐτό, ἕως ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην θέσιν του.

Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τὸν ὄγκον Δ τοῦ ἀνωτέρω σφαιρικοῦ δακτυλίου, ἀρκεῖ ἀπὸ τὸν ὄγκον σ τοῦ σφαιρικοῦ τομέως, τὸν ὁποῖον γράφει ὁ κυκλικὸς τομεὺς ΣΑΖΒ, νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν ὄγκον σ′ τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον γράφεται ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΣΑΒ.

Ἐπειδὴ δὲ (§ 416) $\sigma = \frac{2}{3}\pi(\Sigma B)^2 \cdot (E\Delta)$,

$$\sigma' = \frac{1}{3}(\text{ἐπιφ. } AB)\,(\Sigma\Gamma) \qquad (\S\, 414)$$

καὶ $\quad (\text{ἐπιφ. } AB) = 2\pi\,(\Sigma\Gamma)\cdot(E\Delta)\cdot$ $\quad$ (§ 391 β′)

ἕπεται ὅτι : $\Delta = \frac{2}{3}\pi\,(E\Delta)\,[\,(\Sigma B)^2 - (\Sigma\Gamma)^2\,] = \frac{2}{3}\pi\,(E\Delta)\cdot(\Gamma B)^2$.

Ἐπειδὴ δὲ $(\Gamma B)^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{(AB)^2}{4}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης

γίνεται $\quad \Delta = \frac{1}{6}\pi\,(AB)^2\cdot(E\Delta) \quad (1)$ $\quad$ Ὥστε :

Ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ δακτυλίου εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὄγκου τοῦ κώνου, ὅστις ἔχει ἀκτῖνα βάσεως τὴν χορδὴν τοῦ κυκλικοῦ τμήματος, ἀπὸ τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ὁ δακτύλιος καὶ ὕψος τὴν προβολὴν τῆς χορδῆς ταύτης, ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς στροφῆς.

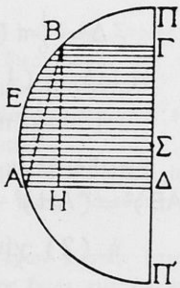
Ἀσκήσεις

905. Εἰς περιφέρειαν Ο ἀκτῖνος 1 παλάμης νὰ ὁρίσητε τεταρτημόριον ΑΒ καὶ νὰ φέρητε τὴν χορδὴν αὐτοῦ. Νὰ εὕρητε ἔπειτα τὸν ὄγκον τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου, ὁ ὁποῖος παράγεται ἂν τὸ σχηματισθὲν κυκλικὸν τμῆμα στραφῇ περὶ τὴν ΟΒ.

906. Ἡ προβολὴ τῆς χορδῆς κυκλικοῦ τμήματος ἐπὶ διάμετρον μὴ τέμνουσαν αὐτὸ ἔχει μῆκος 3 ἑκατ. Ἂν τὸ κυκλικὸν τμῆμα στραφῇ περὶ τὴν διάμετρον ταύτην, ὁ παραγόμενος δακτύλιος ἔχει ὄγκον 108π. κυβ. ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς χορδῆς τοῦ κυκλικοῦ τμήματος.

907. Εἷς σφαιρικὸς δακτύλιος ἔχει ὄγκον 8 π. κυβ. παλ. καὶ ἡ χορδὴ τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ἀπὸ τὸ ὁποῖον παράγεται. ἔχει μῆκος 40 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς προβολῆς τῆς χορδῆς ταύτης ἐπὶ τὸν ἄξονα στροφῆς.

908. Εἰς κύκλον Ο ἀκτῖνος 10 ἑκατ. εἶναι ἐγγεγραμμένον ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ. Τὸ κυκλικὸν τμῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχει χορδὴν τὴν πλευρὰν ΑΓ στρέφεται περὶ τὴν ΟΑ. Νὰ ὑπολογίσητε τὸν ὄγκον τοῦ σχηματιζομένου σφαιρικοῦ δακτυλίου.



Σχ. 316

§ 419. Τί εἶναι σφαιρικὸν τμῆμα καὶ πῶς εὑρίσκεται ὁ ὄγκος αὐτοῦ. α′) Ἔστω ἡμικύκλιον ΠΑΠ′ μὲ διάμετρον ΠΠ′ (σχ. 316). Ἀπὸ δύο σημεῖα Δ, Γ αὐτῆς φέρομεν καθέτους ΔΑ, ΓΒ ἐπὶ τὴν διάμετρον ταύτην μέχρι τῆς ἡμιπεριφερείας. Οὕτω σχηματίζεται τὸ μεικτόγραμμον σχῆμα ΑΔΓΒΕ.

Κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ ἡμικυκλίου περὶ τὴν ΠΠ′ τοῦτο, ὡς γνωρίζομεν, γράφει σφαῖραν Σ, τὸ δὲ ΑΔΓΒΕ γράφει ἓν μέρος τῆς σφαίρας ταύτης. Τοῦτο περιέχεται μεταξὺ τῶν παραλλήλων κύκλων, τοὺς ὁποίους γράφουσι τὰ εὐθ. τμήματα ΔΑ, ΓΒ. Λέγεται δὲ **σφαιρικὸν τμῆμα.** Ὥστε:

Σφαιρικὸν τμῆμα εἶναι μέρος σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ δύο παραλλήλων κύκλων αὐτῆς.

Οἱ κύκλοι, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ἓν σφαιρικὸν τμῆμα, λέγονται **βάσεις** αὐτοῦ. Ἡ δὲ ἀπόστασις τῶν βάσεων ἑνὸς σφαιρικοῦ τμήματος λέγεται ὕψος αὐτοῦ. Π.χ. τὸ προηγουμένως περιγραφὲν σφαιρικὸν τμῆμα ἔχει βάσεις τοὺς κύκλους, οἵτινες γράφονται ἀπὸ τὰ εὐθ. τμήματα ΔΑ, ΓΒ καὶ ὕψος ΓΔ.

Ἂν θεωρήσωμεν τὸ σημεῖον Π ὡς κύκλον περιορισθέντα εἰς τὸ κέντρον του, ἐννοοῦμεν ὅτι καὶ τὸ μεικτόγραμμον σχῆμα ΠΒΓ γράφει σφαιρικὸν τμῆμα. Τοῦτο ἔχει μίαν βάσιν, τὸν ὑπὸ τοῦ ΓΒ γραφόμενον κύκλον καὶ ὕψος ΠΓ.

β΄) Ἂν φέρωμεν τὴν χορδὴν ΑΒ, ἐννοοῦμεν ἀμέσως ὅτι: Ὁ ὄγκος Τ τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος, ὅπερ γράφεται ὑπὸ τοῦ ΑΔΓΒΕ, εἶναι ἄθροισμα τοῦ ὄγκου Δ τοῦ δακτυλίου, τὸν ὁποῖον γράφει τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΑΕΒΑ, καὶ τοῦ ὄγκου Κ τοῦ κολούρου κώνου, τὸν ὁποῖον γράφει τὸ τραπέζιον ΑΔΓΒ Ἤτοι:

$$T = \Delta + K \qquad (1)$$

Ἂν δὲ χάριν συντομίας θέσωμεν $(\mathrm{A\Delta}) = \alpha$, $(\mathrm{B\Gamma}) = \beta$ καὶ $(\Gamma\Delta) = \upsilon$, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\Delta = \frac{1}{6}\pi(\Sigma \mathrm{B})^2.\upsilon, \quad K = \frac{1}{3}\pi(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)\upsilon.$$

Ἡ ἰσότης (1) γίνεται λοιπὸν

$$T = \frac{1}{6}\pi[(\mathrm{AB})^2 + 2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\beta^2]\upsilon. \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΗ προκύπτει ὅτι:

$$(\mathrm{AB})^2 = (\mathrm{AH})^2 + (\mathrm{BH})^2 = (\alpha - \beta)^2 + \upsilon^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + \upsilon^2,$$

ἡ (2) γίνεται $T = \frac{1}{6}\pi[3(\alpha^2 + \beta^2) + \upsilon^3]\upsilon$, ὅθεν

$$T = \frac{1}{2}\pi(\alpha^2 + \beta^2)\upsilon + \frac{1}{6}\pi\upsilon^3 \qquad (3)$$

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι:

α΄) $\frac{1}{2}\pi(\alpha^2 + \beta^2)\upsilon = \frac{1}{2}(\pi\alpha^2\upsilon + \pi\beta^2\upsilon)$, τὸ β΄ δὲ τοῦτο μέλος εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος δύο ἰσοϋψῶν πρὸς τὸ σφαιρικὸν τμῆμα κυλίνδρων. Τούτων ὁ εἷς ἔχει βάσιν τὴν μίαν βάσιν καὶ ὁ ἄλλος τὴν ἄλλην βάσιν τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος.

β′) $\frac{1}{6}\pi\upsilon^3$ εἶναι ὁ ὄγκος σφαίρας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον ἴσην πρὸς τὸ ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος.

Ἀσκήσεις

909. Μία σφαῖρα ἔχει ἀκτῖνα 6 ἑκατ. καὶ τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἀπέχει 4 ἑκατ. ἀπὸ τὸ κέντρον. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον ἑκάστου τῶν σφαιρικῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται ἡ σφαῖρα.

910. Μία σφαῖρα ἀκτῖνος 12 ἑκατ. τέμνεται ὑπὸ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται ἑκατέρωθεν τοῦ κέντρου. Τοῦτο ἀπέχει 6 ἑκατ. ἀπὸ τὸ ἓν ἐπίπεδον καὶ $6\sqrt{3}$ ἑκατ. ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τοῦ μεταξὺ αὐτῶν περιεχομένου σφαιρικοῦ τμήματος.

911. Νὰ λύσητε τὸ αὐτὸ πρόβλημα ἂν τὰ δύο ἐπίπεδα εὑρίσκωνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ κέντρου.

912. Ἡ ἀπόστασις πόλου Π ἑνὸς κύκλου ἀπὸ ἓν σημεῖον τῆς περιφερείας αὐτοῦ ἔχει μῆκος $5\sqrt{2}$ ἑκατ. καὶ κλίσιν 45^0 πρὸς τὸν κύκλον τοῦτον. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν μόνον βάσιν, τὸν κύκλον τοῦτον καὶ περιέχει τὸν πόλον Π.

913. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον σφαίρας ἀπὸ τὸν τύπον (3 § 419).

914. Ἓν σφαιρικὸν τμῆμα μὲ μίαν βάσιν ἔχει ὕψος 3 ἑκατ. καὶ ὄγκον 28,5 π κυβ. ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεως αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Ζ′ βιβλίου

915. Ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει βάσιν (ΒΓ) = α ἑκ. Στρέφεται δὲ τοῦτο περὶ ἄξονα παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν καὶ διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς Α. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τοῦ ὑπ' αὐτοῦ γραφομένου στερεοῦ.

916. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον κυλίνδρου ἂν ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἔχῃ ἐμβαδὸν $\pi\beta^2$ τετρ. ἑκ. καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι α ἑκατ.

917. Εἷς κύλινδρος καὶ εἷς κῶνος ἔχουσι βάσεις ἀκτῖνος α ἑκατ. καὶ ἰσοδυνάμους κυρτὰς ἐπιφανείας. Ὁ κύλινδρος δὲ ἔχει ὕψος υ ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ ὕψος τοῦ κώνου.

918. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι: α′) Δὲν ὑπάρχει κῶνος ἔχων κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἰσοδύναμον πρὸς τὴν βάσιν. β′) Δὲν ὑπάρχει κῶνος ἔχων κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἰσοδύναμον πρὸς ἐπίπεδον τομήν του, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸν ἄξονα.

919. Δύο ἰσοϋψεῖς κύλινδροι ἔχουσι κοινὸν ἄξονα καὶ ὁμοκέντρους βάσεις μὲ ἀκτῖνας Α καὶ α ἑκατ. ($A < \alpha$). Τὸ δὲ κοινὸν ὕψος αὐτῶν εἶναι υ ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν·

920. Δύο ὁμόκεντροι σφαῖραι ἔχουσιν ἀκτῖνας Α καὶ α ἑκατ. ($A > \alpha$). Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τομῆς τῆς ἐξωτερικῆς σφαίρας, ἥτις ἐφάπτεται τῆς ἐσωτερικῆς.

921. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι δύο κύκλοι σφαίρας, ἴσον ἀπέχοντες ἀπὸ τὸ κέντρον, εἶναι ἴσοι.

922. Ἂν δύο κύκλοι σφαίρας εἶναι ἴσοι, νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἀπέχει ἴσον ἀπὸ αὐτούς.

923. Ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας δοθείσης σφαίρας ἀκτῖνος R ὁρίζεται τόξον ΑΒ μεγίστου κύκλου. Νὰ διαιρέσητε τοῦτο εἰς δύο ἴσα μέρη.

924. Ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας δοθείσης σφαίρας ἀκτῖνος R ὁρίζονται τρία σημεῖα Α,Β,Γ. Νὰ γράψητε περιφέρειαν, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ αὐτά.

925. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἀπὸ δύο σημεῖα τῆς ἐπιφανείας σφαίρας μὴ κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς διαμέτρου διέρχεται περιφέρεια μεγίστου κύκλου καὶ μία μόνον.

926. Εἰς σφαῖραν ἀκτῖνος R εἷς κύκλος ἔχει σφαιρικὴν ἀκτῖνα 60^0. Νὰ εὕρητε τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου τούτου.

927. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τοῦ κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει βάσιν τὸν προηγούμενον κύκλον καὶ κορυφὴν τὸν ἐγγύτερον πρὸς αὐτὸν πόλον αὐτοῦ.

928. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, ὅστις ἔχει βάσιν τὸν αὐτὸν προηγούμενον κύκλον καὶ κορυφὴν τὸν ἄλλον πόλον αὐτοῦ.

929. Νὰ γράψητε ἡμιπεριφέρειαν μὲ διάμετρον ΑΒ. Νὰ φέρητε δὲ εἰς αὐτὴν μίαν χορδὴν ΑΓ τοιαύτην, ὥστε ἂν Δ εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ στραφῇ τὸ σχῆμα περὶ τὴν ΑΒ ὁλόκληρον στροφήν, τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΑΓ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΓΔ νὰ γράφωσιν ἰσοδύναμα στερεά.

930. Ὅλαι αἱ κορυφαὶ κύβου ἀκμῆς α ἑκ. κεῖνται εἰς τὴν ἐπιφάνειαν σφαίρας. Αὕτη λέγεται π ε ρ ι γ ε γ ρ α μ μ έ ν η περὶ τὸν κύβον. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας καὶ τὸν ὄγκον αὐτῆς.

931. Ὅταν ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον στρέφηται περὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν καὶ γράφῃ κῶνον, τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων γράφει περιφέρειαν κύκλου. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κώνου τούτου εἶναι γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ταύτης.

932. Νὰ σχηματίσητε ἡμικύκλιον μὲ διάμετρον 16 ἑκατ. καὶ νὰ φέρητε εἰς αὐτὸ χορδὴν παράλληλον πρὸς τὴν διάμετρον καὶ εἰς ἀπόστασιν 4 ἑκατ. ἀπὸ αὐτήν. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν θὰ γράψῃ ἡ χορδὴ αὐτή, ἂν τὸ ἡμικύκλιον στραφῇ περὶ τὴν διάμετρόν του πλήρη στροφήν.

933. Μία σφαῖρα ἔχει ἀκτῖνα α. μέτ. Ἐντὸς αὐτῆς εὑρίσκεται κῶνος μὲ κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ βάσιν μικρὸν κύκλον. Ἡ δὲ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου εἶναι τὸ ἓν δέκατον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ταύτης. Νὰ εὕρητε τὸ ὕψος τοῦ κώνου τούτου.

934. Ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔχει πλευρὰν α μετ. καὶ στρέφεται περὶ μίαν πλευράν του ὁλόκληρον στροφήν. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑπ' αὐτοῦ γραφομένου στερεοῦ.

935. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τοῦ προηγουμένου στερεοῦ.

936. Ἓν κανονικὸν ἡμιεξάγωνον πλευρᾶς α ἑκ. στρέφεται περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχηματιζομένου στερεοῦ.

937. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τοῦ προηγουμένου στερεοῦ.

938. Πῶς δυνάμεθα εἰς δοθεῖσαν σφαῖραν ἀκτῖνος R νὰ γράψωμεν περιφέρειαν ἀκτῖνος α ἑκ.;

939. Νὰ κατασκευάσητε ἓν τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α ἑκ. καὶ ἐκτὸς αὐτοῦ ἰσόπλευρον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ μὲ τὸ τετράγωνον κοινὴν τὴν πλευρὰν ΑΒ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον γράφεται ὑπ' αὐτῶν, ἂν στραφῶσι πλήρη στροφὴν περὶ τὴν πλευρὰν ΓΔ.

940. Ἓν κανονικὸν ἑξάγωνον πλευρᾶς α ἑκ. στρέφεται πλήρη στροφὴν περὶ μίαν πλευράν του. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

941. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει πλευρὰς (ΑΒ) = 6 ἑκατ., (ΒΓ) = 8 ἑκατ., (ΑΓ) = 4 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται, ἂν τοῦτο στραφῇ πλήρη στροφὴν περὶ τὴν ΒΓ.

942. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ στρέφεται πλήρη στροφὴν περὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ καὶ ἔπειτα περὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Ἂν Θ, Θ′ Θ″ εἶναι κατὰ σειρὰν οἱ ὄγκοι τῶν παραγομένων στερεῶν νὰ ἀποδείξητε ὅτι

$$\frac{1}{\Theta^2} = \frac{1}{\Theta'^2} + \frac{1}{\Theta''^2}.$$

943. Νὰ γράψητε ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας ἀκτῖνος R περιφέρειαν, ἡ ὁποία νὰ διαιρῇ τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

944. Εἰς κύκλον Ο ἀκτῖνος 8 ἑκατ. φέρομεν δύο ἐφαπτομένας ΑΒ, ΑΓ τεμνομένας ὑπὸ γωνίαν 60°. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται, ἂν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ στραφῇ περὶ τὴν ΑΟ.

945. Ἓν ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ ἔχει διαστάσεις (ΑΒ) = β ἑκ., (ΑΔ) = α ἑκ. Στρέφεται δὲ περὶ ἄξονα χψ τοῦ ἐπιπέδου του διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς Α καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν διαγώνιον ΑΓ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τοῦ σχηματιζομένου στερεοῦ.

946. Διαιροῦμεν μίαν πλευρὰν κυλίνδρου εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, διὰ δὲ τοῦ σημείου τῆς διαιρέσεως φέρομεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις αὐτοῦ. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο διαιρεῖ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου καὶ τὸν κύλινδρον εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

947. Ἂν κύκλος Ζ διαιρῇ τὴν ἐπιφάνειαν σφαίρας Σ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, νὰ εὑρεθῇ συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R τῆς σφαίρας ὁ ὄγκος τοῦ κώνου, ὅστις ἔχει βάσιν τὸν κύκλον Ζ καὶ κορυφὴν τὸν πόλον Π′ αὐτοῦ, ὅστις εὑρίσκεται εἰς τὸ μεγαλύτερον μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας (σχ. 308).

948. Νὰ προεκβάλητε τὴν πλευρὰν ΒΓ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ κατὰ τμῆμα ΓΔ ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν α αὐτοῦ. Ἀπὸ δὲ τοῦ Δ νὰ φέρητε εὐθεῖαν ΔΧ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΔ. Ἔπειτα δὲ νὰ ὑπολογίσητε συναρτήσει τοῦ α τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον γράφει τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν στραφῇ περὶ τὴν ΔΧ πλήρη στροφήν.

949. Νὰ γράψητε ἡμιπεριφέρειαν μὲ διάμετρον ΑΒ καὶ κέντρον Ο. Ἔπειτα νὰ ὁρίσητε τὸ μέσον Γ τῆς ἀκτῖνος ΟΑ καὶ νὰ φέρητε ἐκ τοῦ Γ εὐθεῖαν ΓΔ μέχρι τῆς ἡμιπεριφερείας τοιαύτην, ὥστε αἱ δύο μικτόγραμμοι ἐπιφάνειαι ΑΓΔ, ΔΓΒ στρεφόμεναι περὶ τὴν ΑΒ νὰ γράφωσιν ἰσοδύναμα στερεά.

950. Νὰ γράψητε ἡμιπεριφέρειαν μὲ διάμετρον ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς διαμέτρου ταύτης νὰ λάβητε τμῆμα ΒΓ καὶ νὰ φέρητε ἐφαπτομένην ΓΔ. Νὰ ὁρισθῇ τὸ τμῆμα ΒΓ, ἂν τὸ εὐθ. τμῆμα ΓΔ γράφῃ διπλασίαν ἐπιφάνειαν ἀπὸ τὴν γραφομένην ὑπὸ τοῦ τόξου ΒΔ, ὅταν τὸ σχῆμα στραφῇ περὶ τὴν ΑΓ ὁλόκληρον στροφήν.

ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΙΣ ΤΗΣ ΕΞΕΛΙΞΕΩΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

§ **420.** Εἰς τὴν εἰσαγωγὴν εἴδομεν ὅτι αἱ πρῶται πρακτικαὶ γνώσεις τῆς γεωμετρίας ἄνευ ἐσωτερικῆς συνοχῆς ἀπετέλουν τέχνην μᾶλλον ἢ ἐπιστήμην. Ἐχρειάζετο μέγα ἅλμα διὰ νὰ φθάσῃ ὁ ἄνθρωπος εἰς τὴν σπουδὴν τῶν σχημάτων καθ' ἑαυτά. Τὴν μεγίστην ταύτην πρόοδον ἐπραγματοποίησεν ἡ φιλοσοφικὴ ἰδιοφυΐα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων.

Οὕτω, πρῶτος ὁ **Θαλῆς ὁ Μιλήσιος** (627 – 547 π.Χ.) ἔδωκε θεωρητικὴν μορφὴν εἰς τὰς γνωστὰς τότε γεωμετρικὰς γνώσεις ἀποδεικνύων λογικῶς τὴν ἀλήθειαν τούτων καὶ νέας ἀνακαλύπτων. Ὑπῆρξεν λοιπὸν οὗτος πρόδρομος καὶ θεωρεῖται **πατὴρ** τῆς Γεωμετρίας.

Εἰς αὐτὸν ἀποδίδονται τὰ θεωρήματα περὶ τῆς ἰσότητος τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν, τῶν παρὰ τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου γωνιῶν, τῆς διχοτομήσεως κύκλου ὑπὸ διαμέτρου, τῆς διαιρέσεως δύο εὐθειῶν εἰς μέρη ἀνάλογα ὑπὸ παραλλήλων εὐθειῶν, τὸ ὅτι ἡ εἰς ἡμικύκλιον ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι ὀρθή.

Μετὰ τὸν Θαλῆν ἀξιοσημείωτον ὤθησιν εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς Γεωμετρίας ἔδωκεν ὁ Πυθαγόρας καὶ οἱ μαθηταὶ αὐτοῦ, **οἱ Πυθαγόρειοι** καλούμενοι. Πλὴν τοῦ θεωρήματος περὶ τῶν πλευρῶν ὀρθ. τριγώνου εἰς τὸν Πυθαγόραν ἀποδίδονται καὶ τὰ ἑξῆς: Περὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν τριγώνου. Ὅτι 6 ἰσόπλευρα τρίγωνα ἢ 4 τετράγωνα ἢ 3 κανονικὰ ἑξάγωνα καλύπτουσιν ἀκριβῶς τὸ ἐπίπεδον πέριξ ἑνὸς σημείου. Εἰκάζεται ἐκ τούτου ὅτι οὗτος ἐγνώριζε πολλὰς ἰδιότητας τῶν κανονικῶν πολυγώνων. Τοῦτο ἄλλως τε ἐπιμαρτυρεῖ καὶ τὸ σῆμα τῶν Πυθαγορείων, τὸ ὁποῖον ἦτο ἀστεροειδὲς κανονικὸν πεντάγωνον.

Πρέπει νὰ δεχθῶμεν ἐπίσης ὅτι οὗτος ἔλυσε τὸ πρόβλημα τῆς χρυσῆς τομῆς, ἐπὶ τοῦ ὁποίου στηρίζεται ὁ ὑπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς κανονικοῦ δεκαγώνου καὶ πενταγώνου. Κατὰ τὸν Πρόκλον, ὁ Πυθαγόρας ἐγνώριζε καὶ τὰ 5 κανονικὰ πολύεδρα, τὰ ὁποῖα ἐκάλει **σχήματα τοῦ κόσμου,** διότι ἐφρόνει ὅτι ταῦτα εἶχον σχέσιν μὲ τὸν κόσμον. Ἡ θεωρία τῶν ὁμοίων σχημάτων ἐσπουδάσθη ἐπιτυχῶς εἰς τὴν Πυθαγόρειον Σχολὴν καὶ τὸ ἀσύμμετρον τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς διαγωνίου τετραγώνου εἶναι ἀνακάλυψις τοῦ Πυθαγόρα.

Μὲ τὰ ὅμοια σχήματα ἠσχολήθη καὶ ὁ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος γεννηθεὶς περὶ τὸ 470 π. Χ. Ἀπέδειξε δὲ πολλὰς ἰδιότητας αὐτῶν. Εἰς αὐτὸν ὀφείλονται τὰ ἑξῆς: Ἡ ἰσότης τῶν εἰς ἴσα τόξα βαινουσῶν ἐγγεγραμμένων γωνιῶν. Ὅτι αὗται εἶναι ὀξεῖαι, ὀρθαὶ ἢ ἀμβλεῖαι, ἂν τὰ ἀντίστοιχα τόξα εἶναι μικρότερα, ἴσα ἢ μεγαλύτερα ἡμιπεριφερείας. Δύο περιφέρειαι εἶναι ὡς αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν καὶ δύο κύκλοι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων των. Εἰς τὸν Ἱπποκράτην ἀποδίδεται ἐπίσης καὶ ἡ ἀποδεικτικὴ μέθοδος τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Οὗτος ἠσχολήθη καὶ μὲ τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου. Διὰ νὰ παρακάμψῃ δὲ τὴν δυσκολίαν αὐτοῦ ἐπεχείρησε νὰ τετραγωνίσῃ τὸν μηνίσκον. Ὅπως ἦτο ἑπόμενον, ἀπέτυχεν μὲν εἰς τὸν κύριον σκοπόν του, ἀνεκάλυψεν ὅμως τὸ θεώρημα τῶν φερωνύμων μηνίσκων (ἄσκ. 599).

Εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τοῦ Πλάτωνος (ἀπὸ 387 π. Χ.) ἐκαλλιεργοῦντο μὲ πολὺ ἐνδιαφέρον τὰ Μαθηματικά. Εἰς τὸν Πλάτωνα ὀφείλεται ἡ ἀνακάλυψις τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου καὶ τῶν γεωμετρικῶν τόπων. Οἱ γεωμέτραι τῆς Ἀκαδημίας διετύπωσαν μὲ ἀκριβολογίαν τοὺς ὁρισμοὺς σημείου, γραμμῆς, ἐπιφανείας, ὄγκου. Περιώρισαν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀξιωμάτων, ἐβελτίωσαν τὰς ἀποδείξεις πολλῶν προτάσεων καὶ νέας διετύπωσαν. Ἡ Ἀκαδημία αὕτη διελύθη τὸ ἔτος 529 μ. Χ. Ὁ ἀντίζηλος τοῦ Πλάτωνος Εὔδοξος ὁ Κνίδιος (407 – 354 π. Χ.) διετύπωσεν ἀκριβῆ θεωρίαν τῶν ἀναλογιῶν καὶ μὲ ἀκρίβειαν ἐπίσης διετύπωσε καὶ ἀπέδειξε τὰς περὶ τοῦ ὄγκου πυραμίδος καὶ κώνου προτάσεις.

Τὴν χρυσῆν ὅμως ἐποχὴν τῆς Γεωμετρίας ἀποτελεῖ ἡ α΄ περίοδος τῆς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ περιφήμου Μαθηματικῆς Σχολῆς.

Κατ' αὐτὴν εἰς τὸ διάστημα ἑνὸς αἰῶνος διεδέχθησαν ἀλλήλους τρεῖς λαμπρότεροι ἐκπρόσωποι τῆς Γεωμετρίας. Ὁ **Εὐκλείδης,** ὁ **Ἀρχιμήδης** καὶ ὁ **Ἀπολλώνιος.**

Ὁ Εὐκλείδης (330 – 270 π. χ.) ἐκλήθη ὑπὸ τοῦ Πτολεμαίου τοῦ Α΄ τοῦ Σωτῆρος νὰ διδάξῃ εἰς τὴν ὑπ' αὐτοῦ ἱδρυθεῖσαν καὶ συντηρουμένην Ἑλληνικὴν Μαθηματικὴν Σχολήν. Τὸ ἔργον τοῦτο ἐξετέλεσε μὲ πολλὴν μεθοδικότητα σχεδὸν μέχρι τοῦ θανάτου του.

Ἔγινεν ὅμως πασίγνωστος καὶ περιώνυμος διὰ τὴν σύνταξιν κλασικοῦ ἔργου του μὲ τὸν τίτλον « Στοιχεῖα ». Εἰς ταῦτα πλὴν τῶν ἰδίων του ἐργασιῶν ἐταξινόμησεν μεθοδικῶς ὅλας τὰς γνώσεις τῶν προγενεστέρων καὶ ἔδωκεν ἀνεπιλήπτους ἀποδείξεις, εἰς ὅσας προτάσεις δὲν εἶχον ἐπιτύχει τοῦτο οἱ προγενέστεροί του. Τὰ « Στοιχεῖα » τοῦ Εὐκλείδου ἀποτελοῦνται ἐκ 15 βιβλίων. Ἐκ τούτων ὅμως μόνον τὰ 13 πρῶτα εἶναι γνήσιον ἔργον τοῦ Εὐκλείδου. Τὸ 14ον ἀποδίδεται εἰς τὸν **Ὑψικλῆν,** τὸ δὲ 15ον κατὰ πᾶσαν πιθανότητα ὀφείλεται εἰς Βυζαντινὸν γεωμέτρην τοῦ 6ου μ. Χ. αἰῶνος.

Τὰ 6 πρῶτα βιβλία πραγματεύονται περὶ τῶν ἐπιπέδων σχημάτων καὶ περὶ ἀναλογιῶν (5ον βιβλίον). Τὰ 7ον, 8ον, 9ον καὶ 10ον πραγματεύονται περὶ ἀριθμῶν. Ταῦτα ἀποτελοῦσι τὴν Ἀριθμητικὴν τοῦ Εὐκλείδου. Τὸ 11ον, 12ον, 13ον ἀποτελοῦσι τὴν Στερεομετρίαν τοῦ Εὐκλείδου. Εἰς τὸ 13ον ἐκ τούτων ἐξετάζει τὰ κανονικὰ πολύεδρα. Τὰ « Στοιχεῖα » τοῦ Εὐκλείδου ἀποτελοῦσιν ἐξαίρετον πρότυπον ἐπιστημονικῆς ἀκριβολογίας. Ἐπὶ 20 αἰῶνας ἀπετέλουν τὸ μοναδικὸν κλασσικὸν ἔργον διὰ τὴν διδασκαλίαν τῆς Γεωμετρίας.

Ὁ Ἀρχιμήδης (287 – 212 π. Χ.) ἦτο ὁ μεγαλύτερος Ἕλλην μαθηματικὸς τῆς ἀρχαιότητος. Ἐγεννήθη εἰς Συρακούσας καὶ πιθανότατα ἐσπούδασεν εἰς Ἀλεξάνδρειαν. Οὗτος ἦτο λίαν πρωτότυπος εἰς τὰς μεθόδους του· δι' ὃ αἱ ἀποδείξεις του φέρουσιν ἴδιον τύπον. Ἐκ τῶν ἔργων τῆς Στοιχειώδους Γεωμετρίας διεσώθη ἓν ἔργον περὶ μετρήσεως τοῦ κύκλου. Εἰς τοῦτο ὑπολογίζει ὅτι $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Διεσώθη ἐπίσης ἓν ἄλλο ἔργον περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. Εἰς αὐτὸ ἀποδεικνύει ὅτι ἡ ἐπιφάνεια σφαίρας εἶναι τετραπλασία μεγίστου κύκλου αὐτῆς καὶ ὅτι ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος σφαίρας εἶναι ἀντιστοίχως πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὸν ὄγκον περιγεγραμμένου κυλίνδρου ὡς 2 : 3. (Πρβλ. σελ. 370, ἄσκησις 904).

Ὁ Ἀρχιμήδης θαυμάζεται ἐπίσης διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ παραβολικοῦ χωρίου διὰ μεθόδου παρεμφεροῦς πρὸς τὴν μετὰ 2000 ἔτη περίπου χρησιμοποιηθεῖσαν ὑπὸ τοῦ Leibnitz καὶ Νεύτωνος μετὰ τὴν Ἀνακάλυψιν τῆς Ἀνωτέρας Ἀναλύσεως. Μὲ τὰς ἐργασίας τοῦ Ἀρχιμήδους συμπληροῦται ἡ Στοιχειώδης Γεωμετρία ὑπὸ τὴν σημερινὴν μορφήν της.

Ὁ μετὰ τὸν Ἀρχιμήδην γνωστότατος γεωμέτρης Ἀπολλώνιος ἔζησεν εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν περὶ τὰ τέλη τοῦ 3ου π.Χ. αἰῶνος καὶ τὰς ἀρχὰς τοῦ 2ου. Τὸ κυριώτερον ἔργον του «Κωνικά» ἀπετελεῖτο ἀπὸ 8 βιβλία, ὧν σώζονται τὰ 7. Εἰς τοῦτο πραγματεύεται περὶ ἐλλείψεως, ὑπερβολῆς καὶ παραβολῆς, αἵτινες εἶναι ἐπίπεδοι τομαὶ κώνου. Ἐκθέτει δὲ καὶ τὰς ἐπ' αὐτῶν ἐρεύνας του μὲ βαθύτητα, ἡ ὁποία ἐκίνησε τὸν θαυμασμὸν τῶν γεωμετρῶν τῆς Ἀναγεννήσεως, κατὰ τὴν ὁποίαν μετεφράσθησαν τὰ ἔργα τῶν Ἑλλήνων μαθηματικῶν.

Ὁ Ἕλλην καὶ Ἀλεξανδρινὸς Μενέλαος κατὰ τὸν 1ον μ. Χ. αἰῶνα μὲ τὸ θεώρημα τῶν διατεμνουσῶν καὶ ὁ Πάππος κατὰ τὸν 3ον μ.Χ. αἰῶνα μὲ τοὺς ἀναρμονικοὺς λόγους ρίπτουσι τὰ σπέρματα τῆς νεωτέρας Γεωμετρίας.

Ἀπὸ τῆς πτώσεως τῆς Ρωμαϊκῆς Αὐτοκρατορίας σχεδὸν μέχρι τῆς Ἀναγεννήσεως οὐδεμία πρόοδος ἐγένετο εἰς τὴν Γεωμετρίαν. Μετὰ τὴν ἅλωσιν ὅμως τῆς Κωνσταντινουπόλεως οἱ φεύγοντες τοὺς Τούρκους λόγιοι Ἕλληνες κατέφυγον εἰς τὴν Δύσιν καὶ ἐγνώρισαν εἰς αὐτὴν τὰ ἔργα τῶν Ἑλλήνων γεωμετρῶν. Ἑπομένως ἤρχισεν ἔκτοτε ζωηροτάτη κίνησις διὰ τὰς Μαθηματικὰς ἐπιστήμας καὶ διὰ τὴν Γεωμετρίαν. Ἡ κατὰ τὸ 1600 ὑπὸ τοῦ Γάλλου μαθηματικοῦ Fr. Viète εἰσαγωγὴ τῶν γραμμάτων εἰς τὴν Ἄλγεβραν καὶ ἡ χρησιμοποίησις αὐτῶν εἰς τὴν Γεωμετρίαν συνετέλεσε τὰ μέγιστα εἰς τὴν ἁπλουστέραν καὶ γενικωτέραν διατύπωσιν τῶν γεωμετρικῶν προβλημάτων. Οὗτος δὲ εἰσήγαγε τὴν ἀλγεβρικὴν λύσιν γεωμετρικῶν προβλημάτων, ὡς τὴν γεωμετρικὴν κατασκευὴν ἀλγεβρικῶν τύπων.

Ἡ κατὰ τὸν 17ον αἰῶνα ἀνακάλυψις τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας ὑπὸ τοῦ Descartes καὶ τοῦ Διαφορικοῦ Λογισμοῦ ὑπὸ τοῦ Νεύτωνος καὶ Leibnitz ἀπερρόφησαν ἐπὶ πολὺ τὴν προσοχὴν τῶν μαθηματικῶν. Ἐν τούτοις μεμονωμένοι μαθηματικοὶ ἠσχολοῦντο καὶ μὲ τὴν καθαρὰν Γεωμετρίαν. Καὶ κατὰ τὸ 1794 ὁ Legendre μὲ τὰ «Στοιχεῖα τῆς Γεωμετρίας» του δίδει εἰς τὴν Γεωμετρίαν σχεδὸν τὴν μορφήν, τὴν ὁποίαν ἔχει σήμερον αὕτη.

Σημειοῦμεν τέλος ὅτι πρῶτος ὁ Γερμανὸς Euler (1707 – 1783) λίαν εὐλήπτως συνεκέντρωσε περὶ τὸν ὁμώνυμόν του κύκλον διαφόρους ἰδιότητας. Οὕτω δὲ ἔθεσε τὰς βάσεις τῆς Γεωμετρίας τοῦ τριγώνου, τὴν ὁποίαν θαυμασίως προήγαγον οἱ νεώτεροι μὲ πρωτοπόρους τοὺς Γάλους Γεωμέτρας Leimoine, Brocard καὶ τὸν Βέλγον γεωμέτρην Neuberg.

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ