ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝ ΤΩι Π. Σ. Π. Α.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΔΙΑ ΤΗΝ ΣΤ΄ ΤΑΞΙΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ ΠΑΛΑΙΟΥ ΤΥΠΟΥ

ΟΕΣΒ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1940

79Ω.

ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝ ΤΩι Π.Σ.Π.Α.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΔΙΑ ΤΗΝ ΣΤ' ΤΑΞΙΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ ΠΑΛΑΙΟΥ ΤΥΠΟΥ

ΟΕΣΒ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
1940

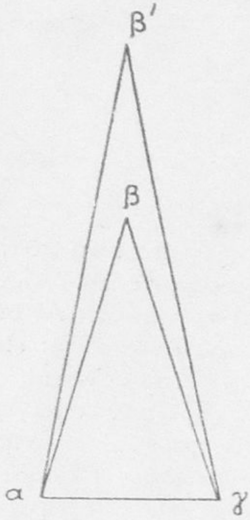
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ἐξ ὅσων εἴδομεν εἰς τὴν Γεωμετρίαν συνάγομεν, ὅτι αὕτη εἰδικώτερον ἀσχολεῖται μὲ τὰς ἰδιότητας τῶν σχημάτων. Ἀλλ' ἐκ τῶν σχημάτων τὸ ἁπλούστερον εἶναι τὸ τρίγωνον. Αἱ δὲ ἰδιότητες ὅλων τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων ἀνάγονται εἰς τὰς ἰδιότητας τοῦ τριγώνου καὶ δι' αὐτοῦ ἀποδεικνύονται.

Ἐκτὸς δὲ τούτου ἡ μέτρησις ὅλων τῶν σχημάτων ἀνάγεται εἰς τὴν μέτρησιν τριγώνου καὶ αἱ πλεῖσται ἐφαρμογαὶ τῆς Θεωρητικῆς Γεωμετρίας, ὅπως εἰς τὴν Τοπογραφίαν, Γεωδαισίαν, Ναυτικήν, Ἀστρονομίαν, κτλ. ἀνάγονται εἰς τὰς ἐφαρμογὰς τοῦ τριγώνου. Εἶναι λοιπὸν ἀνάγκη, ὅταν μᾶς δίδωνται ἱκανὰ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου, νὰ εὑρίσκωμεν τὰ λοιπὰ ἄγνωστα στοιχεῖα αὐτοῦ μετ' ἀκριβείας. Τὰ στοιχεῖα δὲ τοῦ τριγώνου, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ γνωρίζωμεν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ ἄλλα εἶναι :

1) δύο πλευραὶ καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία
2) μία πλευρὰ καὶ δύο γωνίαι
3) δύο πλευραὶ καὶ ἡ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας γωνία
4) αἱ τρεῖς πλευραί.

Ἀλλὰ διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ ἄγνωστα στοιχεῖα τοῦ τριγώνου κατασκευάζομεν πρῶτον τοῦτο καὶ κατόπιν ἐπὶ τοῦ σχήματος μετροῦμεν τὰ ζητούμενα στοιχεῖα. Αἱ γεωμετρικαὶ ὅμως κατασκευαὶ ἕνεκα τῆς ἀτελείας τῶν ὀργάνων ἡμῶν, δὲν εἶναι ἐν τῇ ἐφαρμογῇ ἀκριβεῖς. Ἐπομένως ὑπόκεινται εἰς λάθη, τὰ ὁποῖα εἶναι φανερόν, ὅτι εἶναι σημαντικά, ὅταν ἀναγκαζώμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ ζητούμενον ὑπὸ μικροτέραν κλίμακα. Διότι, ἐὰν ἡ κλῖμαξ εἶναι π. χ. $\frac{1}{10000}$ καὶ ἐπὶ μιᾶς γραμμῆς τοῦ σχεδίου συμβῇ λάθος 0,001 τοῦ μέτρου, τὸ ἐπὶ τῆς πραγματικῆς γραμμῆς λάθος θὰ εἶναι 10 μέτρων. Ἐὰν δὲ συμβῇ λάθος ἐπὶ γωνίας, τότε τὰ λάθη, ἐπὶ τῶν γραμμῶν τῶν ἐξαρτωμένων ἐκ τῆς γωνίας αὐτῆς, εἶναι ἀκόμη σημαντικώτερα. Δυνάμεθα δὲ νὰ συμπεράνωμεν τοῦτο ἐκ τοῦ παρατιθεμένου σχήματος, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ γωνίαι βαγ, βγα καὶ ἡ πλευρὰ αγ ὑποτίθενται ἀκριβεῖς. Ἐὰν λοιπὸν εἰς τὴν χάραξιν τῶν γωνιῶν αὐτῶν συμβῇ λάθος, ἔστω καὶ ὀλίγων λεπτῶν, αἱ αβ καὶ γβ θὰ τμηθοῦν εἰς σημεῖον τι β′, τοιοῦτον ὥστε αἱ αβ′ καὶ γβ′ θὰ διαφέρουν σημαντικῶς τῶν αβ καὶ γβ. Ἡ διαφορὰ δὲ μεταξὺ τῶν ἀκριβῶν γραμμῶν αβ, γβ καὶ τῶν αβ′, γβ′ πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ 10000 θὰ γίνῃ ἀκόμη σημαντικωτέρα.



Ὥστε ἡ διὰ γεωμετρικῆς κατασκευῆς εὕρεσις τοῦ τριγώνου, τοῦ ὁποίου δίδονται τρία στοιχεῖα (ἐξ ὧν τὸ ἓν τοὐλάχιστον εἶναι πλευρά), δὲν εἶναι πρακτικῶς ἀκριβής. Εἶναι λοιπὸν ἀνάγκη νὰ ζητήσωμεν ἄλλον τρόπον, διὰ τοῦ ὁποίου τὰ ζητήματα τὰ σχετικὰ μὲ τὸ τρίγωνον νὰ λύωνται μετὰ τῆς ἀπαιτουμένης ἀκριβείας. Τὸν τρόπον δὲ τοῦτον θὰ τὸν ἐπιτύχωμεν εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν ζητουμένων στοιχείων τοῦ τριγώνου διὰ μεθόδων ἀριθμητικῶν ἤτοι διὰ λογισμοῦ. Εἶναι δυνατὸν δὲ τοῦτο, διότι α) δυνάμεθα νὰ μετροῦμεν τὰ γεωμετρικὰ μεγέθη καὶ ἑπομένως δυνάμεθα νὰ ἐκφράζωμεν τὰς γεωμετρικὰς ἰδιότητας δι᾽ ἀριθμητικῶν σχέσεων καὶ β) μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι μετροῦν τὰ δεδομένα στοιχεῖα τριγώνου καὶ τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι μετροῦν τὰ ζητούμενα, ὑπάρχουν κατ᾽ ἀνάγκην σχέσεις τινες ἀριθμητικαί, διότι οἱ δεύτεροι οὗτοι ἀριθμοὶ εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένοι, ὅταν εἶναι γνωστοὶ οἱ πρῶτοι.

Ἡ ἔρευνα τῶν ἀριθμητικῶν σχέσεων, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν στοιχείων παντὸς τριγώνου, εἶναι ἔργον τῆς τριγωνομετρίας· σκοπὸς δὲ αὐτῆς εἶναι, ὅταν δοθοῦν τρία ἐκ τῶν στοιχείων τούτων (οὐχὶ αἱ τρεῖς γωνίαι), *ἡ διὰ τοῦ λογισμοῦ εὕρεσις τῶν λοιπῶν* (1).

Ἀλλὰ πρὶν εἴδομεν, πῶς ἐπιτυγχάνει τοῦ σκοποῦ αὐτοῦ ἡ τριγωνομετρία, θὰ γνωρίσωμεν τὰ ἑπόμενα.

---

(1) Αἱ πρῶται ἀρχαὶ τῆς τριγωνομετρίας ἀνευρίσκονται εἰς τοὺς Αἰγυπτίους· ἀνεπτύχθη δὲ αὕτη κατόπιν ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων ἀστρονόμων. Οἱ Ἄραβες ὅμως (ἀπὸ τοῦ 10ου μέχρι τοῦ 12ου αἰῶνος) ἤρχισαν νὰ τὴν συστηματοποιοῦν καὶ νὰ τὴν καλλιεργοῦν ὡς αὐτοτελῆ κλάδον. Εἰς τὴν Εὐρώπην δὲ οἱ κυριώτεροι θεμελιωταὶ τῆς τριγωνομετρίας ἦσαν ὁ Regiomontanus (περὶ τὸν 15ον αἰῶνα) καὶ ὁ Viéte (περὶ τὸν 16ον αἰῶνα).

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

Περὶ ἀνυσμάτων.

1. **Ὁρισμοί.** — Τμῆμα εὐθείας, τὸ ὁποῖον θεωρεῖται γραφὲν ὑπὸ σημείου κινηθέντος ἐπ' αὐτῆς ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου τοῦ τμήματος πρὸς τὸ ἄλλο, λέγεται *ἄνυσμα*.

Ἐπὶ παντὸς ἀνύσματος, διακρίνομεν τὴν *ἀρχὴν* (τὸ σημεῖον ἀφ' οὗ ἐξεκίνησε τὸ κινητὸν) τὸ *τέλος* (τὸ σημεῖον εἰς ὃ κατέληξε τὸ κινητὸν) καὶ τὴν *φοράν*, ἥτις εἶναι ἡ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς πρὸς τὸ τέλος. Ἀπαγγέλλεται δὲ πρῶτον τὸ γράμμα τῆς ἀρχῆς.

Κατὰ ταῦτα τὸ ἄνυσμα ΑΒ ἔχει ἀρχὴν τὸ Α, τέλος τὸ Β καὶ φορὰν τὴν ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β,

A ———————————— B

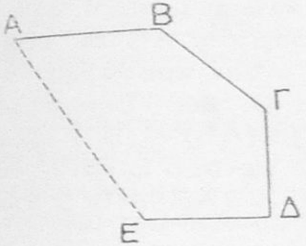
τὸ δὲ ἄνυσμα ΒΑ ἔχει ἀρχὴν τὸ Β τέλος τὸ Α, καὶ φορὰν τὴν ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Α.

2. Δύο ἀνύσματα, ὧν ἡ ἀρχὴ τοῦ ἑνὸς εἶναι πέρας τοῦ ἄλλου, λέγονται *ἀντίθετα*. Τοιαῦτα εἶναι τὰ ΑΒ καὶ ΒΑ.

3. Δύο ἀνύσματα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἢ ἐπὶ παραλλήλων εὐθειῶν κείμενα, ἂν μὲν ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν, λέγονται *ὁμόρροπα*, ἂν δὲ ἀντίθετον, λέγονται *ἀντίρροπα*.

4. Δύο ἀνύσματα παράλληλα (δηλ. κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἢ ἐπὶ παραλλήλων εὐθειῶν) τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ ἐφαρμόσουν, λέγονται *ὁμορρόπως ἴσα*, ἂν ὅμως εἶναι ἀντίρροπα, λέγονται *ἀντιρρόπως ἴσα*.

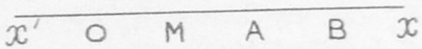
5. Δύο ἢ περισσότερα ἀνύσματα λέγονται *διαδοχικά*, ὅταν τὸ τέλος τοῦ πρώτου εἶναι ἀρχὴ τοῦ δευτέρου, τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἀρχὴ τοῦ τρίτου κ.ο.κ.



Τοιαῦτα εἶναι τὰ AB, BΓ, ΓΔ, ΔE.

6. ***Γεωμετρικὸν ἄθροισμα*** δοθέντων διαδοχικῶν ἀνυσμάτων λέγεται τὸ ἄνυσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου καὶ τέλος τὸ τέλος τοῦ τελευταίου ἀνύσματος. Οὕτω τὸ AE εἶναι τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα τῶν ἀνυσμάτων AB, BΓ, ΓΔ, ΔE.

7. **Μῆκος ἀνύσματος.**—Ἔστω ἄνυσμα AB κείμενον ἐπὶ εὐθείας χ΄χ· ἐὰν ἐπὶ ταύτης (ἢ ἐπὶ ἄλλης εὐθείας παραλλήλου τῇ χ΄χ) λάβωμεν αὐθαιρέτως ἄνυσμά τι OM καὶ θεωρήσωμεν



τοῦτο ὡς μονάδα, ὁ λόγος $\frac{AB}{OM}$ λέγεται ***μῆκος*** τοῦ ἀνύσματος AB καὶ παρίσταται συμβολικῶς οὕτω: (AB)· εἶναι δηλαδὴ $\frac{AB}{OM}=(AB)$. Ἂν τὸ ἄνυσμα AB εἶναι ὁμόρροπον πρὸς τὸ OM, τὸ μῆκος (AB) εἶναι ἀριθμὸς θετικός· εἶναι δὲ ἀρνητικός, ἂν εἶναι ἀντίρροπον. Κατὰ ταῦτα τὰ ὁμορρόπως ἴσα ἀνύσματα παρίστανται ὑπὸ ἀριθμῶν ἴσων, τὰ δὲ ἀντιρρόπως ἴσα ὑπὸ ἀριθμῶν ἀντιθέτων. Ἤτοι εἶναι $(AB)=-(BA)$ καὶ $(AB)+(BA)=0$.

Ἐπίσης ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται, ὅτι ***πᾶν ἄνυσμα τῆς εὐθείας χ΄χ*** (ἢ παραλλήλου πρὸς αὐτὴν) ***παρίσταται δι᾿ ἀριθμοῦ ἐντελῶς ὡρισμένου*** καὶ ἀντιστρόφως ***πᾶς πραγματικὸς ἀριθμὸς δύναται νὰ παριστᾷ ἄνυσμα ὡρισμένον κατὰ μέγεθος καὶ φοράν.***

8. **Θεώρημα.**—***Τὸ μῆκος τοῦ γεωμετρικοῦ ἀθροίσματος δύο διαδοχικῶν ἀνυσμάτων AB καὶ BΓ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν δύο ἀνυσμάτων.***

Ἤτοι εἶναι $(AΓ)=(AB)+(BΓ)$, οἱανδήποτε θέσιν καὶ ἂν ἔχουν τὰ τρία σημεῖα A, B, Γ ἐπὶ τῆς εὐθείας.

Διότι ἐκ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ ἓν πάντως εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων· καὶ ἂν μὲν τὸ Β κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ, τὰ ἀνύσματα ΑΒ, ΒΓ εἶναι ὁμόρροπα καὶ ἡ ἰσότης (ΑΒ)+(ΒΓ)=(ΑΓ) εἶναι προφανής· ἂν δὲ τὸ σημεῖον Γ κεῖται μεταξὺ Α καὶ Β, θὰ εἶναι πάλιν (ΑΓ)+(ΓΒ)=(ΑΒ) ἢ (ΑΓ)+(ΓΒ)+(ΒΓ)=(ΑΒ)+(ΒΓ)· ἤτοι (ΑΓ)=(ΑΒ)+(ΒΓ)· ἂν δὲ τέλος τὸ Α κεῖται μεταξὺ Β καὶ Γ, θὰ εἶναι (ΒΑ)+(ΑΓ)=(ΒΓ) ἢ (ΑΒ)+(ΒΑ)+(ΑΓ)=(ΑΒ)+(ΒΓ)· ἤτοι (ΑΓ)=(ΑΒ)+(ΒΓ).

Α   Β   Γ
Α   Γ   Β
Β   Α   Γ

Ὥστε εἰς πᾶσαν περίπτωσιν εἶναι (ΑΓ)=(ΑΒ)+(ΒΓ).

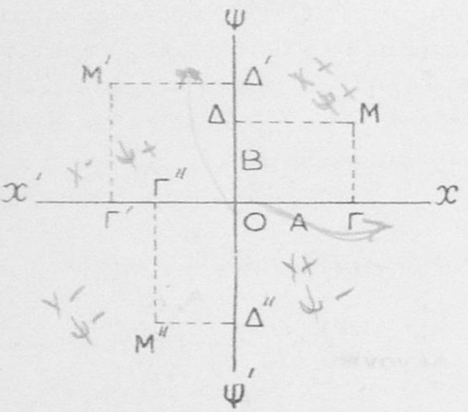
9. **Τετμημέναι σημείων εὐθείας.**—Ἐὰν ἐπὶ τῆς εὐθείας $x'x$ ἐπ' ἄπειρον ἐκτεινομένης λάβωμεν ἀνύσματα ΟΑ, ΟΑ′ ΟΑ″ κτλ. τῆς αὐτῆς ἀρχῆς Ο, μετρηθοῦν δὲ ταῦτα διὰ τοῦ ἀνύσματος ΟΜ, λαμβανομένου ὡς μονάδος, εἶναι φανερόν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $(OA)=\frac{OA}{OM}$, $(OA')=\frac{OA'}{OM}$, $(OA'')=\frac{OA''}{OM}$ κτλ. παριστοῦν κατὰ μέγεθος καὶ φορὰν τὰς ἀποστάσεις τῶν σημείων Α, Α′, Α″ κτλ. ἀπὸ τῆς ἀρχῆς Ο. Οἱ ἀριθμοὶ (ΟΑ), (ΟΑ′), (ΟΑ″) κτλ. ἢ καὶ τὰ ἀνύσματα ΟΑ, ΟΑ′, ΟΑ″ κτλ.. λέγονται ***τετμημέναι*** τῶν σημείων Α,Α′,Α″ κτλ. ἀντιστοίχως. Τὸ δὲ σταθερὸν σημεῖον Ο, ἀπὸ τὸ ὁποῖον μετροῦνται τὰ ἀνύσματα ΟΑ, ΟΑ′ κτλ. λέγεται ἀρχὴ τῶν τετμημένων. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι αἱ τετμημέναι τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα κεῖνται πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ο πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται καὶ τὸ Μ εἶναι θετικαὶ καὶ τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα κεῖνται πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τοῦ Ο, εἶναι ἀρνητικαί. Ἰδιαιτέρως δὲ ἡ τετμημένη τοῦ σημείου Ο εἶναι 0 καὶ τοῦ Μ εἶναι +1. Ὥστε εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς εὐθείας $x'x$ ἀντιστοιχεῖ μία τετμημένη ἐντελῶς ὡρισμένη. Καὶ ἀντιστρόφως εἰς δοθέντα πραγματικὸν ἀριθμὸν α ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον Α τῆς εὐθείας $x'x$ καὶ ἓν μόνον, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην ἴσην μὲ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον· τὸ σημεῖον δὲ τοῦτο κεῖται πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ο πρὸς ὃ κεῖται

x Α″   Ο   Μ   Α   Α′ x

τὸ Μ, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς α εἶναι θετικός, πρὸς τὸ ἄλλο δὲ μέρος τοῦ Ο, ἐὰν ὁ α εἶναι ἀρνητικός.

Σημείωσις. Πᾶσα εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ὁποίας ἡ θετικὴ φορὰ εἶναι ὡρισμένη λέγεται ***ἄξων***.

10. Εὐθύγραμμοι συντεταγμέναι σημείων ἐπιπέδου. — Λαμβάνομεν δύο ἄξονας καθέτους πρὸς ἀλλήλους. Ἔστωσαν δὲ οἱ χ΄Οχ, θετικὴ φορὰ τοῦ ὁποίου ὁρίζεται ἡ ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ χ καὶ ψ΄Οψ, τοῦ ὁποίου θετικὴ φορὰ εἶναι ἡ ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ ψ, ἐπὶ ἑκάστου δὲ τούτων λαμβάνομεν ἀντιστοίχως ἀνύσματα ΟΑ καὶ ΟΒ ἴσα πρὸς $+1$, τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦμεν ὡς μονάδας μήκους.



Ἐὰν ἤδη θέλωμεν νὰ ὁρίσωμεν τὴν θέσιν σημείου τινος Μ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ληφθέντων ἀξόνων, φέρομεν ἐκ τοῦ Μ τὰς ΜΓ καὶ ΜΔ παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας Οψ καὶ Οχ ἀντιστοίχως, ὁπότε ἐπ' αὐτῶν ὁρίζονται τὰ ἀνύσματα ΟΓ καὶ ΟΔ.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν δοθοῦν τὰ ἀνύσματα ΟΓ καὶ ΟΔ, ταῦτα ὁρίζουν ἐντελῶς τὸ σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον εἶναι τομὴ τῶν παραλλήλων πρὸς τοὺς ληφθέντας ἄξονας, τῶν ἀγομένων ἐκ τῶν σημείων Γ καὶ Δ.

Οἱ ἀριθμοὶ (ΟΓ)=χ καὶ (ΟΔ)=ψ (οἱ ὁποῖοι παριστοῦν τὰ ἀνύσματα ΟΓ καὶ ΟΔ μετρηθέντα διὰ τῶν ἄνω μονάδων) ἢ καὶ τὰ ἀνύσματα ΟΓ καὶ ΟΔ λέγονται ***συντεταγμέναι*** τοῦ σημείου Μ καὶ ὁ μὲν χ λέγεται ***τετμημένη*** αὐτοῦ, ὁ δὲ ἄξων χ΄Οχ ἄξων τῶν τετμημένων, ὁ δὲ ψ λέγεται ***τεταγμένη*** αὐτοῦ καὶ ὁ ἄξων ψ΄Οψ ἄξων τῶν τεταγμένων· τὸ δὲ σημεῖον Ο λέγεται ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων.

῞Ωστε εἰς ἕκαστον σημεῖον ἐπιπέδου ἀντιστοιχοῦν δύο ἀριθμοὶ παριστῶντες τὰ μήκη τῶν συντεταγμένων ὡς πρὸς δύο ἄξονας· ἀντιστρόφως δὲ εἰς δοθέντας δύο ἀριθμοὺς ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ ὁποίου συντεταγμέναι εἶναι οἱ δοθέντες ἀριθμοί.

῞Οταν ἀπαγγέλλωμεν τὰς συντεταγμένας χ, ψ σημείου τινος Μ ἀπαγγέλλομεν πρῶτον τὴν τετμημένην χ καὶ ἔπειτα τὴν τεταγμένην ψ, γράφομεν δὲ συμβολικῶς Μ(χ,ψ).

῞Οσα σημεῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν τετμημένην ΟΓ κεῖνται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου τῇ ψ΄Οψ· ὅσα δὲ ἔχουν τὴν αὐτὴν τεταγμένην ΟΔ κεῖνται ἐπὶ παραλλήλου τῇ χ΄Οχ. Τὰ κείμενα ἐπὶ τῆς χ΄Οχ ἔχουν τεταγμένην 0, τὰ δὲ κείμενα ἐπὶ τῆς ψ΄Οψ ἔχουν τετμημένην 0. Τὸ δὲ σημεῖον Ο (ἡ ἀρχὴ) ἔχει συντεταγμένας (0,0).

Οἱ δύο ἄξονες χ΄χ καὶ ψ΄ψ σχηματίζουν περὶ τὸ Ο τέσσαρας γωνίας, τὰ σημεῖα δὲ τῶν συντεταγμένων χ καὶ ψ σημείου τινος Μ ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς γωνίας, ἐν τῇ ὁποίᾳ κεῖται τὸ σημεῖον Μ εἶναι δέ,

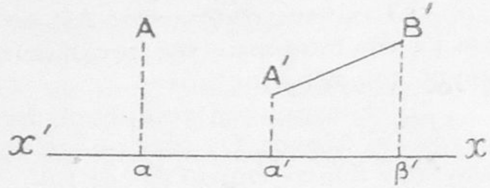
ἐὰν τὸ Μ κεῖται ἐν τῇ γωνίᾳ	χΟψ,	χ θετ.	ψ θετ.
» » » » » » »	χ΄Οψ,	χ ἀρν.	ψ »
» » » » » » »	χ΄Οψ΄,	χ »	ψ ἀρν.
» » » » » » »	ψ΄Οχ,	χ θετ.	ψ »

῞Ωστε γνωρίζοντες τὴν γωνίαν, ἐντὸς τῆς ὁποίας κεῖται τὸ Μ, γνωρίζομεν καὶ τὰ σημεῖα τῶν συντεταγμένων αὐτοῦ· ἀντιστρόφως δέ, ἐὰν γνωρίζωμεν τὰ σημεῖα τῶν συντεταγμένων σημείου τινος Μ, γνωρίζομεν καὶ τὴν γωνίαν ἐντὸς τῆς ὁποίας κεῖται. Οὕτω σημεῖόν τι, οὗ ἀμφότεραι αἱ συντεταγμέναι εἶναι ἀρνητικαί, κεῖται ἐν τῇ γωνίᾳ χ΄Οψ΄ κ.ο.κ.

11. Ὀρθὴ προβολὴ σημείου καὶ ἀνύσματος ἐπὶ ἄξονα.— *Ὀρθὴ προβολὴ σημείου ἐπὶ ἄξονα λέγεται ὁ πούς τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ σημείου ἐπὶ τὸν ἄξονα.*

Οὕτω τοῦ σημείου Α ἡ ὀρθὴ προβολὴ ἐπὶ τὸν ἄξονα χ΄χ λέγεται ὁ ποὺς α τῆς καθέτου Αα ἐπὶ τὸν δοθέντα ἄξονα.

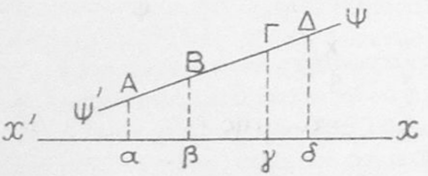
Ὀρθὴ προβολὴ ἀνύσματος ἐπὶ ἄξονα λέγεται τὸ ἄνυσμα τοῦ ἄξονος τούτου, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν καὶ πέρας τὰς προβολὰς τῆς ἀρχῆς καὶ τοῦ πέρατος τοῦ ἀνύσματος.



Οὕτως ὀρθὴ προβολὴ τοῦ ἀνύσματος Α΄Β΄ ἐπὶ τὸν ἄξονα χ΄χ εἶναι τὸ ἄνυσμα α΄β΄.

12. Θεώρημα.— *Ὁ λόγος δύο παραλλήλων ἀνυσμάτων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν προβολῶν αὐτῶν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα.*

Ἔστωσαν αβ καὶ γδ αἱ προβολαὶ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα χ΄χ τῶν ἀνυσμάτων ΑΒ καὶ ΓΔ κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ψ΄ψ. Αἱ εὐθεῖαι ψ΄ψ καὶ χ΄χ τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα ὑπὸ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν Αα, Ββ, Γγ, Δδ κατὰ γνωστὸν Θεώρημα τῆς Γεωμετρίας· ὥστε ἔχομεν $\frac{ΑΒ}{ΓΔ}=\frac{αβ}{γδ}$ τῶν τμημάτων ΑΒ, ΓΔ, αβ, γδ ἀπολύτως θεωρουμένων. Ἐπειδὴ ὅμως, ἂν τὰ ἀνύσματα ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι τῆς αὐτῆς ἢ ἀντιθέτου φορᾶς, θὰ εἶναι καὶ αἱ προβολαὶ αὐτῶν ἀνύσματα τῆς αὐτῆς ἢ ἀντιθέτου φορᾶς, ἔπεται ὅτι $\frac{ΑΒ}{ΓΔ}=\frac{αβ}{γδ}$ καὶ ὅταν τὰ ΑΒ, ΓΔ, αβ, γδ εἶναι ἀνύσματα.



Σημείωσις. Ἐὰν τὰ ἀνύσματα ΑΒ καὶ ΓΔ κεῖνται ἐπὶ παραλλήλων εὐθειῶν, αἱ παράλληλοι Γγ, Δδ, προεκβαλλόμεναι, ὁρίζουν ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται τὸ ἄνυσμα ΑΒ, ἕτερον ἄνυσμα Γ΄Δ΄, οὗ προβολὴ εἶναι ἡ γδ.

13. Πόρισμα.— *Αἱ προβολαὶ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα δύο ἀνυσμάτων ὁμορρόπως ἢ ἀντιρρόπως ἴσων εἶναι ἀνύσματα ὁμορρόπως ἢ ἀντιρρόπως ἴσα.*

Ἀσκήσεις.

1) Τὸ μῆκος ἀνύσματος ΑΒ κειμένου ἐπὶ ἄξονος Οχ ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῆς τετμημένης τῆς ἀρχῆς ἀπὸ τῆς τετμημένης τοῦ πέρατος αὐτοῦ.

2) Ἡ τετμημένη τοῦ μέσου δοθέντος ἀνύσματος ΑΒ κειμένου ἐπὶ ἄξονος Οχ ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τετμημένων τῶν ἄκρων αὐτοῦ Α καὶ Β.

3) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων συντεταγμέναι εἶναι

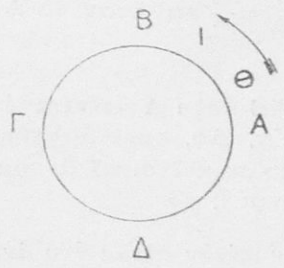
$$(1,2) \quad (4,-3) \quad (-2,-3) \quad \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$$

$$\left(-3\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}\right) \quad (0,5) \quad (-5,0) \quad (0,-6)$$

4) Αἱ συντεταγμέναι σημείου Μ εἶναι (3,5). Ἐκ τοῦ σημείου τούτου Μ ἄγονται αἱ κάθετοι ἐπὶ τοὺς ἄξονας ὡς καὶ ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν ἀρχήν. Ἐὰν ἑκάστη τούτων προεκταθῇ, κατ' ἴσον τμῆμα, ποῖαι εἶναι αἱ συντεταγμέναι τῶν ἄκρων τῶν προεκτάσεων;

ΤΟΞΑ ΚΑΙ ΓΩΝΙΑΙ

14. **Τόξα.**—Ἐὰν κινητὸν ἀναχωρήσῃ ἔκ τινος σημείου περιφερείας, δύναται νὰ διατρέξῃ αὐτὴν κατὰ δύο ἀντιθέτους φοράς, ἤτοι τὴν ΑΘΓΔΑ καὶ τὴν ΑΔΓΘΑ· ἡ πρώτη τὴν ὁποίαν δεικνύει τὸ παρακείμενον βέλος καὶ ἡ ὁποία εἶναι ἀντίθετος πρὸς τὴν κίνησιν τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου, ἂς λέγεται θετικὴ φορά, ἡ δὲ δευτέρα ἀρνητική.



15. Ἐὰν κινητὸν ἀναχωρήσῃ ἔκ τινος σημείου Α περιφερείας καὶ κινούμενον ἐπ' αὐτῆς κατά τινα φοράν, ἔστω τὴν θετικήν, σταματήσῃ εἰς τὸ Ι, λέγομεν, ὅτι ἔγραψεν τὸ τόξον ΑΙ, ἔχον ἀρχὴν τὸ

Α, πέρας τὸ Ι καὶ φορὰν θετικὴν (θετικὸν τόξον)· ἐνῷ ἂν ἐκινήθη κατὰ τὴν ἀντίθετον φοράν, λέγομεν ὅτι ἔγραψε τὸ τόξον ΑΙ ἔχον ἀρχὴν τὸ Α, πέρας τὸ Ι καὶ φορὰν ἀρνητικὴν (ἀρνητικὸν τόξον).

Κατὰ ταῦτα δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τόξα θετικὰ καὶ ἀρνητικά· ἕκαστον δὲ τόξον ὁρίζεται, ὅταν δοθῇ ἡ ἀρχή, τὸ πέρας τοῦ τόξου καὶ ἡ φορά· ἀπαγγέλλεται δὲ πρῶτον τὸ γράμμα τῆς ἀρχῆς.

16. **Μέτρησις τόξου.**—Προκειμένου νὰ μετρήσωμεν τὸ τόξον ΑΙ, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας (ἢ ἄλλης ἴσης) αὐθαιρέτως τόξον τι ΑΘ, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ὡς μονάδα μετρήσεως καὶ συγκρίνομεν πρὸς αὐτό, τὸ ΑΙ.

Ὁ λόγος $\frac{\text{τόξ. ΑΙ}}{\text{τόξ. ΑΘ}}$, ὅστις παρίσταται συμβολικῶς διὰ τοῦ (ΑΙ) λέγεται ***μέτρον*** τοῦ τόξου ΑΙ. Εἶναι δὲ ἀριθμὸς θετικὸς μέν, ἂν τὰ τόξα ΑΙ καὶ ΑΘ ἔχουν τὴν αὐτὴν φορὰν (ὁμόρροπα τόξα) ἀρνητικὸς δέ, ἂν ἔχουν ἀντιθέτους φορὰς (ἀντίρροπα τόξα).

Ὡς μονάδας τόξου λαμβάνομεν συνήθως α) τὴν ***μοῖραν*** ἤτοι τὸ 1/360 τῆς περιφερείας καὶ ἡ ὁποία μοῖρα, ὡς γνωρίζομεν, διαιρεῖται εἰς 60 πρῶτα λεπτά, ἐνῷ ἓν πρῶτον λεπτὸν διαιρεῖται εἰς 60 δεύτερα. β) τὸ ***ἀκτίνιον,*** ἤτοι τὸ τόξον, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος ἰσοῦται πρὸς τὸ τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ, ὁπότε τὸ μὲν μέτρον τῆς περιφερείας εἶναι 2π, τῆς ἡμιπεριφερείας π καὶ τοῦ τεταρτημορίου αὐτῆς π/2 καὶ γ) τὸν ***βαθμόν,*** ἤτοι τὸ 1/400 τῆς περιφερείας. Ὁ βαθμὸς διαιρεῖται εἰς 100 πρῶτα λεπτά, τὸ δὲ πρῶτον λεπτὸν εἰς 100 δεύτερα λεπτά.

Σημείωσις. Πολλάκις εἶναι ἀνάγκη ἐκ τοῦ μέτρου τόξου τινος εἰς σύστημά τι μονάδων, νὰ εὕρωμεν τὸ μέτρον τοῦ αὐτοῦ τόξου εἰς ἄλλο σύστημα μονάδων. Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἔστω τὸ μέτρον τόξου τινος ΑΒ εἰς μοίρας μ, εἰς ἀκτίνια α καὶ εἰς βαθμοὺς β. Ἐπειδὴ δὲ ὁ λόγος δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν ἰσοῦται ὡς γνωστόν, μὲ τὸν λόγον τῶν παριστώντων αὐτὰ ἀριθμῶν, ὅταν μετρηθοῦν διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος, ἕπεται, ὅτι ὁ λόγος τοῦ τόξου ΑΒ πρὸς τὴν περιφέρειαν, εἶναι εἰς μοίρας $\frac{\mu}{360}$, εἰς ἀκτίνια $\frac{\alpha}{2\pi}$ καὶ εἰς βαθμοὺς $\frac{\beta}{400}$· εἶναι ἄρα

$$\frac{\mu}{360}=\frac{\alpha}{2\pi}=\frac{\beta}{400} \text{ ἢ ἁπλούστερον } \frac{\mu}{180}=\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\beta}{200}.$$

Ἐὰν ἑπομένως δίδεται τὸ μέτρον α τοῦ τόξου ΑΒ εὑρίσκομεν, ὅτι τὰ ἄλλα μέτρα αὐτοῦ εἶναι $\mu=\frac{180\alpha}{\pi}$ καὶ $\beta=\frac{200\alpha}{\pi}$

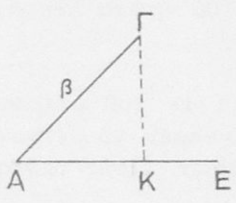
17. Δύο τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας λέγονται *ἴσα* μέν, ὅταν ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον, ἀντίθετα δέ, ἂν τὰ μέτρα αὐτῶν εἶναι ἀντίθετα (ἐννοεῖται ὅτι, ὅταν μετρῶνται διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος).

18. **Διαδοχικὰ** λέγονται δύο ἢ περισσότερα τόξα, ὅταν τὸ πέρας τοῦ πρώτου εἶναι ἀρχὴ τοῦ δευτέρου, τὸ πέρας τοῦ δευτέρου εἶναι ἀρχὴ τοῦ τρίτου κ.ο.κ.

Ἄθροισμα διαδοχικῶν τόξων τῆς αὐτῆς περιφερείας λέγεται τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου καὶ πέρας τὸ πέρας τοῦ τελευταίου τόξου.

Οὕτως (σχ. σελ. 14) (ΑΒ)+(ΒΑ)=0, (ΑΒ)+(ΒΓ=(ΑΓ).

19. **Γωνίαι.**— Ἔστω ἡ γωνία ΕΑΓ, τὴν ὁποίαν ὑποθέτομεν γραφεῖσαν ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΕ, περιστραφείσης, περὶ τὴν κορυφὴν Α, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῆς γωνίας, μέχρις οὗ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΑΓ, κατὰ φορὰν ἀντίθετον τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν ὡρολογίου. Τὴν οὕτω γραφομένην γωνίαν καλοῦμεν θετικήν, ἀρνητικὴν δὲ καλοῦμεν αὐτήν, ἐὰν ἡ ΑΕ περιστραφῇ κατὰ φορὰν ἀντίθετον τῆς προηγουμένης. Ἑπομένως γωνία τις ὁρίζεται ἐντελῶς, ὅταν δοθῇ ἡ ἀρχικὴ θέσις τῆς περιστραφείσης πλευρᾶς, ἡ τελικὴ καὶ ἡ φορά, καθ' ἣν περιεστράφη.



Ἐὰν γωνία τις καταστῇ ἐπίκεντρος, τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχόμενον τόξον εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, καθ' ὅσον ἡ γωνία αὕτη εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητική, ἀντιστρόφως δὲ γωνία τις ἐπίκεντρος εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητική, καθ' ὅσον τὸ εἰς αὐτὴν ἀντιστοιχοῦν τόξον εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν. Ὥστε, ἂν ὡς μονάδα τῶν γωνιῶν λάβωμεν τὴν γωνίαν, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ὡς μονάδα τῶν τόξων τοῦ κύκλου, ἡ εἰς τυχὸν τόξον ΑΒ αὐτοῦ ἀντιστοιχοῦσα ἐπίκεντρος γωνία ΑΟΒ, παρίσταται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ καὶ τὸ τόξον ἀριθμοῦ.

Ἀσκήσεις.

5) Πόσων μοιρῶν εἶναι τόξον 1 ἀκτινίου;

6) Πόσων μοιρῶν εἶναι τόξον 1^{g};

7) Πόσων ἀκτινίων καὶ πόσων βαθμῶν εἶναι τόξον 45°, 60°, 150°, 330°;

8) Πόσων ἀκτινίων εἶναι τόξον 20^{g}, 30^{g}, -60^{g}, -150^{g}, $138^{g}\ 45'$, $225^{g}\ 40'$;

9) Ὁμοίως πόσων ἀκτινίων εἶναι τόξον $37^{\circ}\ 32'\ 25''$, $175^{\circ}\ 35'\ 46''$;

10) Πόσων μοιρῶν εἶναι τόξον $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$ ἀκτινίων;

11) Ὁμοίως πόσων μοιρῶν εἶναι τόξον $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{7\pi}{8}$ ἀκτινίων;

12) Πόσων βαθμῶν εἶναι τόξον $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{7\pi}{8}$ ἀκτινίων;

13) Τριγώνου τινὸς ἡ μία γωνία εἶναι $48^{\circ}\ 37'$, ἡ δὲ ἄλλη $\frac{5\pi}{12}$ ἀκτινίων. Πόσων μοιρῶν ἢ πόσων ἀκτινίων εἶναι ἡ τρίτη γωνία;

14) Τόξον περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος 5 μέτρων ἔχει μῆκος 3,927 μ. Πόσων μοιρῶν καὶ πόσων βαθμῶν εἶναι τὸ τόξον αὐτό;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τόξου ἢ γωνίας.

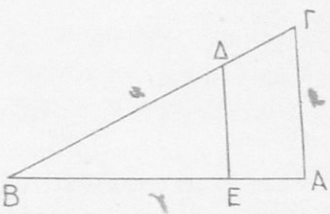
20. Εἰς τὴν εἰσαγωγὴν εἴδομεν, ὅτι σκοπὸς τῆς τριγωνομετρίας εἶναι ἡ εὕρεσις τῶν ἀγνώστων στοιχείων τοῦ τριγώνου

διὰ τοῦ λογισμοῦ. Διὰ νὰ ἴδωμεν δέ, πῶς θὰ ἐπιτύχῃ αὕτη τοῦ σκοποῦ αὐτοῦ, ἂς λάβωμεν ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον ὀρθὴ γωνία εἶναι ἡ Α καὶ εἰς ὃ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ παρίστανται ἀντιστοίχως ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν α, β, γ. Ἀλλ' ἐκ τῆς ἐπιπεδομετρίας γνωρίζομεν τὰς ἑξῆς σχέσεις μεταξὺ τῶν ἓξ στοιχείων αὐτοῦ ἤτοι:

$$Β+Γ=90^\circ$$

$$β^2+γ^2=α^2$$

Καὶ διὰ μὲν τῆς πρώτης σχέσεως εὑρίσκομεν μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ, ὅταν δοθῇ ἡ ἄλλη, διὰ δὲ τῆς δευτέρας εὑρίσκομεν μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, ὅταν μᾶς δοθοῦν αἱ δύο ἄλλαι. Ἀλλ' ἐὰν μᾶς δοθοῦν δύο πλευραὶ π. χ. ἡ α καὶ ἡ β, δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν (διὰ τοῦ λογισμοῦ) μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ π. χ. τὴν Β. Θὰ εἶναι ὅμως τοῦτο δυνατόν, ἐὰν εὑρεθῇ τρόπος, ὥστε εἰς ἑκάστην γωνίαν νὰ ἀντιστοιχῇ εἷς ἀριθμὸς ὡρισμένος, ὁπότε, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, θὰ δυνάμεθα νὰ εὑρίσκωμεν αὐτὴν μετὰ βεβαιότητος. Συνίσταται δὲ ὁ τρόπος οὗτος εἰς τὸ νὰ ἀνάγωμεν τὴν μέτρησιν τῶν γωνιῶν εἰς τὴν μέτρησιν εὐθυγράμμων τμημάτων. Ὅτι δὲ εἶναι δυνατὸν τοῦτο φαίνεται ἐκ τῶν ἑξῆς: Ἔκ τινος σημείου Δ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ τὴν ΔΕ. Ἀλλὰ τότε τὸ τρίγωνον ΕΒΔ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ καὶ ἑπομένως εἶναι $\frac{ΑΓ}{ΒΓ}=\frac{ΕΔ}{ΒΔ}=λ$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ εἰς πᾶν ἄλλο ὀρθογώνιον τρίγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ ὁ λόγος



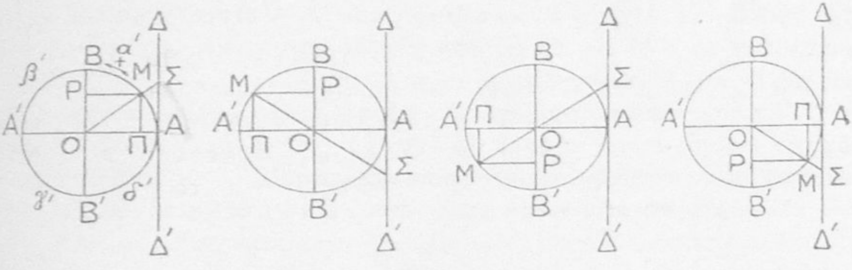
τῆς καθέτου πλευρᾶς τῆς ὁμολόγου τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν ἰσοῦται μὲ λ, ἕπεται ὅτι, ὅταν γνωρίζωμεν τὸν λόγον λ γνωρίζομεν καὶ τὴν γωνίαν Β. Διότι ἐκ τοῦ λόγου λ δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνα ὅμοια πρὸς τὸ ΑΒΓ.

Σημειωτέον ὅμως, ὅτι καὶ ἐκ τοῦ λόγου $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}$ ἢ καὶ ἐκ τοῦ λόγου $\frac{ΑΓ}{ΑΒ}$ δύναται νὰ ὁρισθῇ ἡ γωνία Β. Εἶναι δὲ φανερόν, κατόπιν τῶν ἀνωτέρω, ὅτι καὶ ἐκ τῆς τιμῆς τῆς γωνίας ὁρίζονται οἱ τρεῖς λόγοι $\frac{ΑΓ}{ΒΓ}$, $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}$, $\frac{ΑΓ}{ΑΒ}$.

Ἐκ τούτων λοιπὸν συνάγομεν ὅτι, ὅταν μᾶς δοθοῦν δύο πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου, εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ μία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ διὰ τοῦ λογισμοῦ. Πῶς δὲ γίνεται τοῦτο καὶ πῶς λύονται ὅμοια ζητήματα δι' οἱανδήποτε γωνίαν θὰ ἴδωμεν εἰς τὰ ἑπόμενα.

21. **Τριγωνομετρικὸς κύκλος.**—Τριγωνομετρικὸς κύκλος λέγεται πᾶς κύκλος, ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ὁποίου ἡ θετικὴ φορὰ εἶναι ὡρισμένη καὶ οὗ ἡ ἀκτὶς λαμβάνεται ὡς μονὰς μήκους.

22. **Ἡμίτονον, συνημίτονον καὶ ἐφαπτομένη τόξου.**—Ἔστω τριγωνομετρικὸς κύκλος Ο καὶ τόξον τι αὐτοῦ ΑΜ. Φέρομεν τὴν διάμετρον Α΄Α διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς Α τοῦ δοθέντος τόξου, ἐφ' ἧς ὁρίζομεν ὡς θετικὴν φορὰν τὴν ἐκ τοῦ



Ο πρὸς τὸ Α. Τὴν διάμετρον ταύτην νοοῦμεν στρεφομένην περὶ τὸ σημεῖον Ο, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ κύκλου, κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, μέχρις ὅτου διαγράψῃ γωνίαν ὀρθήν, ὁπότε θὰ λάβῃ τὴν θέσιν Β΄Β· ἡ περιφέρεια τότε θὰ εὑρεθῇ διῃρημένη εἰς τέσσαρα τεταρτημόρια, τὰ ΑΒ, ΒΑ΄, Α΄Β΄ καὶ Β΄Α, τὰ ὁποῖα ὀνομάζομεν ἀντιστοίχως α΄ (πρῶτον), β΄ (δεύτερον), γ΄ (τρίτον) καὶ δ΄ (τέταρτον)· τέλος φέρομεν τὴν Δ΄ΑΔ ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ τόξου Α καὶ ἧς ὡς θετικὴν φορὰν ὁρίζομεν τὴν αὐτὴν μὲ τὴν θετικὴν φοράν, τῆς Β΄ΟΒ, δηλαδὴ τὴν ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Δ. Κατόπιν τούτων παρατηροῦμεν, ὅτι συντεταγμέναι τοῦ πέρατος Μ τοῦ δοθέντος τόξου ΑΜ ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας Α΄ΟΑ καὶ Β΄ΟΒ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ $\frac{\text{ΟΠ}}{\text{ΟΑ}}=(\text{ΟΠ})$ καὶ $\frac{\text{ΟΡ}}{\text{ΟΒ}}=(\text{ΟΡ})$ καὶ ἡ μὲν τετμημένη (ΟΠ) λέγεται *συνημίτονον* τοῦ τόξου ΑΜ, ἡ δὲ τεταγμένη (ΟΡ) λέγεται *ἡμίτονον* αὐτοῦ, ἤτοι εἶναι συν(ΑΜ)=(ΟΠ) καὶ ημ(ΑΜ)=(ΟΡ).

Ἤδη, ἐὰν προεκτείνωμεν τὴν ΟΜ μέχρις, ὅτου συναντήσῃ τὴν ἐφαπτομένην Δ΄ΑΔ εἰς τὸ Σ, ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Σ ἀπὸ τοῦ Α μετρηθεῖσα διὰ τῆς ἀκτῖνος ΟΒ, ἤτοι ἡ τετμημένη τοῦ Σ, $\frac{\text{ΑΣ}}{\text{ΟΒ}}=(\text{ΑΣ})$ λέγεται *ἐφαπτομένη* τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΜ. Ὥστε εἶναι εφ(ΑΜ)=(ΑΣ). Τὸ ημ(ΑΜ) κατὰ τὰ ἐν ἐδαφίῳ 10 λεχθέντα εἶναι θετικὸν μέν, ἂν τὸ τόξον ΑΜ περατοῦται εἰς εἰς τὸ α΄ καὶ β΄ τεταρτημόριον καὶ ἀρνητικόν, ἂν περατοῦται εἰς τὸ γ΄ καὶ δ΄. Ὡς πρὸς τὸ συνημίτονον τοῦ τόξου ΑΜ παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι θετικὸν μέν, ἂν τὸ τόξον περατοῦται εἰς τὸ α΄ καὶ δ΄ τεταρτημόριον, ἀρνητικὸν δέ, ἂν περατοῦται εἰς τὰ δύο ἄλλα, ἐνῷ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ ΑΜ εἶναι θετική, ἂν περατοῦται τὸ ΑΜ εἰς τὸ α΄ καὶ γ΄ καὶ ἀρνητική, ἂν περατοῦται εἰς τὸ β΄ καὶ δ΄ τεταρτημόριον.

Ἐπίσης παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ τόξα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν ἀρχὴν καὶ τὸ αὐτὸ πέρας, ἔχουν τὸ αὐτὸ ἡμίτονον, τὸ αὐτὸ συνημίτονον καὶ τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην.

Ἔχομεν λοιπὸν κατὰ τὰ ἀνωτέρω τὸν ἑξῆς πίνακα:

	α΄	β΄	γ΄	δ΄
ημ(ΑΜ)	+	+	−	−
συν(ΑΜ)	+	−	−	+
εφ(ΑΜ)	+	−	+	−

Σημείωσις α΄. Τὸ ἄνυσμα ΟΡ, ὅπερ μετρούμενον ὡς ἀνωτέρω δίδει τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου ΑΜ, λέγεται καὶ αὐτὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου ΑΜ. Ὁμοίως καὶ τὸ ἄνυσμα ΟΠ λέγεται συνημίτονον τοῦ αὐτοῦ τόξου, ὡς καὶ τὸ ΑΣ λέγεται ἐφαπτομένη αὐτοῦ· λέγονται δὲ τὰ ἀνύσματα ταῦτα ΟΡ, ΟΠ, ΑΣ *τριγωνομετρικαὶ γραμμαὶ* τοῦ τόξου ΑΜ, ἐνῷ τὸ ημ(ΑΜ), συν(ΑΜ) καὶ εφ(ΑΜ) λέγονται *τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ* αὐτοῦ.

Σημείωσις β΄. Ἡ ἐπίκεντρος γωνία ΑΟΜ, μετρουμένη κατὰ τοὺς ὅρους τοῦ ἐδ. 19 παρίσταται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ καὶ τὸ τόξον ΑΜ ἀριθμοῦ. Διὰ τοῦτο ὁ ἀριθμὸς (ΟΡ) λέγεται ἡμίτονον καὶ τῆς γωνίας ΑΟΜ, ὁ (ΟΠ) συνημίτονον αὐτῆς καὶ ὁ (ΑΣ) ἐφαπτομένη·

Γενικῶς ἡμίτονον, συνημίτονον καὶ ἐφαπτομένη γωνίας λέγεται τὸ ημ, τὸ συν., καὶ ἡ εφ τοῦ τόξου τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν γωνίαν ταύτην.

Σημείωσις γ΄. Ἡ διάμετρος Α΄Α, ἐφ' ἧς κεῖνται τὰ συνημίτονα τῶν τόξων ἀρχῆς Α, λέγεται συνήθως *ἄξων τῶν συνημιτόνων*, ἡ διάμετρος Β΄Β δι' ἀνάλογον λόγον λέγεται *ἄξων τῶν ἡμιτόνων* καὶ ἡ ἐφαπτομένη Δ΄ΑΔ *ἄξων τῶν ἐφαπτομένων.*

Σχέσεις μεταξὺ ἡμιτόνου, συνημιτόνου καὶ ἐφαπτομένης παντὸς τόξου.

23. Ἔστω τυχὸν τόξον τὸ ΑΜ (σχ. σελ. 19) διὰ τὸ ὁποῖον ἔχομεν (ΑΜ)=α καὶ τοῦ ὁποίου εἶναι ημα=(ΟΡ), συνα=(ΟΠ) καὶ εφα=(ΑΣ).

α) Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΜΠ λαμβάνομεν $(\text{ΠΜ})^2+(\text{ΟΠ})^2=(\text{ΟΜ})^2$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ἀνύσματα ΠΜ καὶ ΟΡ εἶναι ὁμορρόπως ἴσα, ἔχομεν (ΟΡ)=(ΠΜ) =ημα· ἑπομένως ἡ εὑρεθεῖσα σχέσις γίνεται $(\text{ημ}\alpha)^2+(\text{συν}\alpha)^2=1$ ἢ $\text{ημ}^2\alpha+\text{συν}^2\alpha=1$, ἥτις προδήλως εἶναι ἀληθής, εἰς οἱονδήποτε τεταρτημόριον καὶ ἂν περατοῦται τὸ τόξον ΑΜ.

β) Ἤδη ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΠΜ καὶ ΟΑΣ λαμβάνομεν, εἰς οἱονδήποτε τεταρτημόριον καὶ ἂν περατοῦται τὸ τόξον ΑΜ,

$\frac{\text{ΑΣ}}{\text{ΠΜ}}=\frac{\text{ΟΑ}}{\text{ΟΠ}}$ ἢ $\frac{|\text{ΑΣ}|}{|\text{ημ}\alpha|}=\frac{1}{|\text{συν}\alpha|}$. ἤτοι $|\text{ΑΣ}|=\frac{|\text{ημ}\alpha|}{|\text{συν}\alpha|}$· ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ τὸ (ΑΣ) καὶ τὸ $\frac{\text{ημ}\alpha}{\text{συν}\alpha}$ εἶναι θετικά, ὅταν τὸ Μ κεῖται ἐν τῷ πρώτῳ ἢ τρίτῳ τεταρτημορίῳ, ἀρνητικὰ δὲ ἀμφότερα, ὅταν τὸ Μ κεῖται ἐν τῷ δευτέρῳ ἢ τετάρτῳ τεταρτημορίῳ, ἕπεται, ὅτι ἔχομεν πάντοτε $(ΑΣ)=\frac{ημα}{συνα}$, ἤτοι $εφα=\frac{ημα}{συνα}$.

Ὥστε τὸ ἡμίτονον, τὸ συνημίτονον καὶ ἡ ἐφαπτομένη τόξου τινος α συνδέονται διὰ τῶν δύο ἐξισώσεων

$$ημ^2α+συν^2α=1 \text{ καὶ } εφα=\frac{ημα}{συνα}.$$

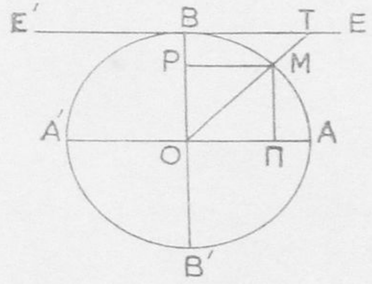
24. Ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω τριῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τόξου τινὸς ἢ γωνίας α, οἵτινες εἶναι θεμελιώδεις, ὑπάρχουν καὶ τρεῖς ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου α, εἶναι δὲ οὗτοι ἀντίστροφοι τῶν προηγουμένων· λέγεται δὲ, ὁ μὲν ἀντίστροφος τῆς ἐφαπτομένης τοῦ α συνεφαπτομένη αὐτοῦ, ὁ ἀντίστροφος τοῦ συνημιτόνου του τέμνουσα αὐτοῦ καὶ ὁ ἀντίστροφος τοῦ ἡμιτόνου του συνδιατέμνουσα αὐτοῦ. Ἤτοι εἶναι

$$σφα=\frac{1}{εφα}=\frac{συνα}{ημα}, \quad τεμνα=\frac{1}{συνα} \text{ καὶ } συνδα=\frac{1}{ημα}.$$

Ἐκ τῶν νέων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ὡς ἴδιος τριγωνομετρικὸς ἀριθμὸς χρησιμοποιεῖται μόνον ἡ συνεφαπτομένη, τῆς ὁποίας δίδομεν κατωτέρω τὴν γεωμετρικὴν παράστασιν.

25. **Γεωμετρικὴ παράστασις τῶν συνεφαπτομένων.**— Ἔστω τόξον τι ΑΜ, δι' ὃ ἔχομεν (ΑΜ)=α καὶ τοῦ ὁποίου εἶναι ημα=(ΟΡ) καὶ συνα=(ΟΠ).

Φέρομεν ἤδη τὴν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας εἰς τὸ πέρας Β τοῦ πρώτου τεταρτημορίου Ε΄ΒΕ, τῆς ὁποίας ὁρίζομεν ὡς



θετικὴν φορὰν τὴν αὐτὴν μὲ τὴν τοῦ ἄξονος τῶν συνημιτόνων, δηλ. τὴν ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Ε· κατόπιν δὲ προεκτείνομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΜ, ἥτις τέμνει τὴν ἀχθεῖσαν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Τ, ὁπότε σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΟΒΤ ὅμοιον πρὸς τὸ ΟΡΜ· ἐκ τῶν ὁμοίων δὲ τούτων τριγώνων λαμβάνομεν $\frac{ΒΤ}{ΡΜ}=\frac{ΟΒ}{ΟΡ}$ ἤτοι $\frac{|ΒΤ|}{|συνα|}=\frac{1}{|ημα|}$ ἢ $|ΒΤ|=\frac{|συνα|}{|ημα|}$· ἀλλὰ καὶ τὸ (ΒΤ) καὶ τὸ $\frac{συνα}{ημα}$

εἶναι ἀμφότερα θετικὰ μέν, ὅταν τὸ Μ κεῖται ἐν τῷ πρώτῳ ἢ τρίτῳ τεταρτημορίῳ, ἀρνητικὰ δέ, ὅταν τὸ Μ κεῖται ἐν τῷ δευτέρῳ ἢ τετάρτῳ· ἑπομένως εἰς οἱονδήποτε τεταρτημόριον καὶ ἂν κεῖται τὸ Μ, ἀληθεύει ἡ σχέσις $(BT)=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$, ἤτοι $(BT)=\sigma\varphi\alpha$.

Οὕτως ὁ ἀριθμὸς σφα συμπίπτει μὲ τὸν ἀριθμόν, ὃν παριστᾷ τὸ ἄνυσμα ΒΤ μετρηθὲν διὰ τῆς ἀκτῖνος. Ἐκ τούτου καὶ τὸ ἄνυσμα ΒΤ λέγεται συνεφαπτομένη τοῦ τόξου α, ἡ δὲ ἐφαπτομένη εἰς τὸ πέρας τοῦ πρώτου τεταρτημορίου λέγεται συνήθως ἄξων τῶν συνεφαπτομένων,

Ἀσκήσεις.

15) Νὰ δειχθῇ, ὅτι δύο τόξα τοῦ αὐτοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, τὰ ὁποῖα μετρηθέντα διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος, ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον, ἔχουν ἴσα ἡμίτονα, συνημίτονα, ἐφαπτομένας καὶ συνεφαπτομένας.

16) Ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ συνεφαπτομένη τοῦ αὐτοῦ τόξου ἔχουν πάντοτε τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

17) $(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)^2=1+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$

18) $\sigma\upsilon\nu^2\alpha(1+\varepsilon\varphi^2\alpha)=1$

19) $\eta\mu^2\alpha-\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1-2\sigma\upsilon\nu^2\alpha=2\eta\mu^2\alpha-1$

20) $\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1=1-2\eta\mu^2\alpha$

21) $\sigma\upsilon\nu^4\alpha-\eta\mu^4\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha$

22) $\eta\mu^2\alpha.\sigma\upsilon\nu^2\beta-\sigma\upsilon\nu^2\alpha.\eta\mu^2\beta=\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\beta$

23) $\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta-\eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta=\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\beta-1$

24) $\frac{1-\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi\alpha}=\frac{\sigma\varphi\alpha-1}{\sigma\varphi\alpha+1}$

25) $1-2\eta\mu^2\alpha=\frac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$

26) $\frac{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\sigma\varphi^2\alpha}=\frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$

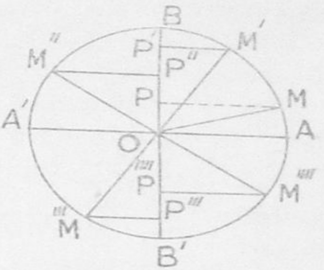
27) $(1+\varepsilon\varphi\alpha)(1+\sigma\varphi\alpha)\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha=(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)^2$

28) $\varepsilon\varphi\alpha(1-\sigma\varphi^2\alpha)+\sigma\varphi\alpha(1-\varepsilon\varphi^2\alpha)=0$

Μεταβολαὶ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τόξου ἢ γωνίας καὶ γραφικὴ παράστασις αὐτῶν.

26. Ἤδη θὰ ἐξετάσωμεν τὰς μεταβολὰς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν γωνίας ΑΟΜ ἢ τόξου ΑΜ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, ὅταν τὸ πέρας Μ ἀναχωροῦν ἀπὸ τοῦ Α καὶ κινούμενον κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, διαγράφῃ ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν, δηλαδή, ὅταν ἡ γωνία ἢ τὸ τόξον αὐξάνῃ συνεχῶς ἀπὸ 0° μέχρι 360°.

27. **Μεταβολαὶ τοῦ ἡμιτόνου.**—Ὅταν τὸ Μ εἶναι εἰς τὸ Α, ἔχομεν (ΑΜ)=0° καὶ τὸ σημεῖον Μ ἔχει τεταγμένην 0 (§ 10). Εἶναι ἄρα ημ0°=0· ὅταν τὸ Μ, ἀναχωροῦν ἐκ τοῦ Α καὶ κινούμενον συνεχῶς, διαγράφῃ τὸ πρῶτον τεταρτημόριον ἡ τεταγμένη τοῦ Μ αὐξάνει ἀπὸ 0 μέχρι τοῦ +1. Ὥστε εἶναι ημ90°=1.



Ἐὰν τὸ Μ ἐξακολουθήσῃ τὴν κίνησίν του καὶ φθάσῃ εἰς τὸ πέρας Α′ τοῦ δευτέρου τεταρτημορίου, ἡ τεταγμένη τοῦ Μ ἐλαττοῦται μεχρι τοῦ 0· ἑπομένως εἶναι ημ180°=0.

Ἐὰν τὸ Μ διαγράψῃ τὸ τρίτον τεταρτημόριον καὶ φθάσῃ εἰς τὸ πέρας αὐτοῦ Β′, εὑρίσκομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὅτι τὸ ἡμίτονον ἐλαττοῦται μέχρι τοῦ —1 καὶ ὅτι εἶναι ημ270°=—1, ἐνῷ, ὅταν τὸ Μ διαγράψῃ τὸ τέταρτον τεταρτημόριον καὶ ἐπανέλθῃ εἰς τὸ Α, τὸ ἡμίτονον αὐξάνει ἀπὸ —1 μέχρι τοῦ 0, ἤτοι εἶναι ημ360°=0=ημ0°.

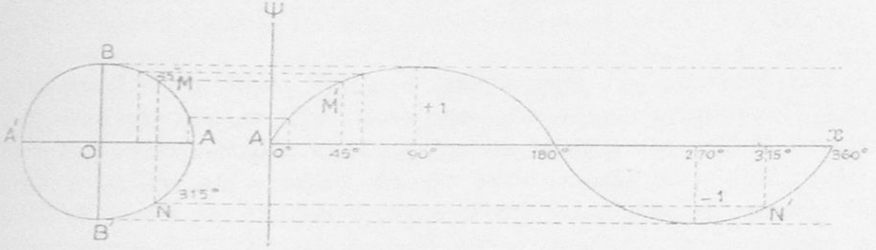
Ὁ κατωτέρω πίναξ δεικνύει συνοπτικῶς τὰς ἀνωτέρω παρατηρηθείσας μεταβολὰς τοῦ ἡμιτόνου.

α	0°	αὐξ	90°	αὐξ	180°	αὐξ	270°	αὐξ	360°
ημα	0	αὐξ	1	ἐλατ	0	ἐλατ.	—1	αὐξ	0

28. **Γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τοῦ ἡμιτόνου.**—Αἱ ἀνωτέρω σημειωθεῖσαι μεταβολαὶ τοῦ ἡμιτόνου τόξου,

ὅταν τοῦτο αὐξάνηται συνεχῶς ἀπὸ 0° μέχρι 360°, παρίστανται γραφικῶς· λαμβάνομεν δὲ τὴν γραφικὴν παράστασιν αὐτῶν ὡς ἑξῆς.

Φέρομεν δύο ἄξονας ὀρθογωνίους, ἔστω τοὺς Αχ καὶ Αψ. Ἐπὶ τοῦ ἄξονος Αχ λαμβάνομεν ἀνύσματα ἀρχῆς Α, ὧν τὰ μήκη εἶναι ἴσα πρὸς τὰ μήκη τῶν ἀντιστοίχων τόξων· ἀπὸ τῶν πε-

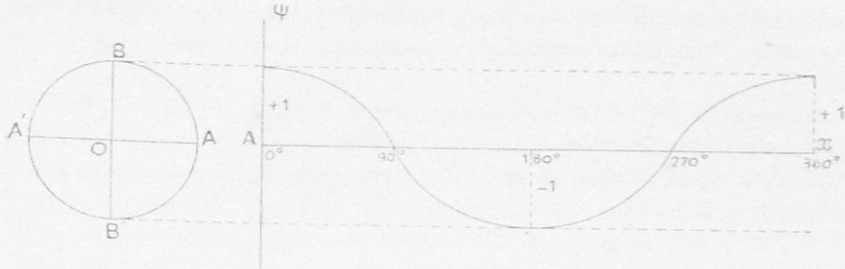


ράτων δὲ τῶν ἀνυσμάτων τούτων ὑψοῦμεν καθέτους καὶ ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν ἀνύσματα, ἀρχὴν ἔχοντα τὰ πέρατα τῶν προηγουμένων, ὁμορρόπως ἴσα πρὸς τὰ ἀνύσματα τῶν ἡμιτόνων τῶν ἀντιστοίχων τόξων. Τὰ πέρατα τῶν ἀντιστοίχων τούτων ἀνυσμάτων εἶναι τὰ σημεῖα μιᾶς καμπύλης, ἥτις δεικνύει τὰς μεταβολὰς τοῦ ἡμιτόνου καὶ ἥτις καμπύλη δεικνύεται εἰς τὸ ἀνωτέρω σχῆμα.

29. **Μεταβολαὶ τοῦ συνημιτόνου.**—Αἱ μεταβολαὶ τοῦ συνημιτόνου γωνίας ἢ τόξου, ὅταν τοῦτο αὐξάνηται ἀπὸ 0° μέχρι 360°, εὑρίσκονται εὐκόλως, καθ' ὃν τρόπον εὑρέθησαν καὶ αἱ μεταβολαὶ τοῦ ἡμιτόνου. Συνοψίζονται δὲ εἰς τὸν κάτωθι πίνακα.

α	0°	αὐξ.	90°	αὐξ.	180°	αὐξ.	270°	αὐξ.	360°
συνα	1	ἐλατ.	0	ἐλατ.	—1	αὐξ.	0	αὐξ.	1

30. **Γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τοῦ συνημιτόνου.**—Ἡ κάτωθι καμπύλη, ἥτις παριστᾷ τὰς ἀνωτέρω μεταβολὰς τοῦ συνημιτόνου, κατασκευάζεται ὁμοίως μὲ τὴν προηγουμένην.



31. **Μεταβολαὶ τῆς ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης.**—Προκειμένου περὶ τῆς ἐφαπτομένης παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν τὸ Μ διαγράψῃ τὸ α΄ τεταρτημόριον, αὕτη αὐξάνεται ἀπὸ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$ (διότι, ὅταν τὸ Μ φθάσῃ εἰς τὸ Β, ἡ ἀκτὶς ΟΜ γίνεται παράλληλος πρὸς τὴν Δ΄ΑΔ), ἤτοι εἶναι $\varepsilon\varphi 0^\circ = 0$ καὶ $\varepsilon\varphi 90^\circ = +\infty$. Ἀλλ' ὅταν τὸ Μ ὑπερβῇ τὸ Β, ἡ ἐφαπτομένη καθίσταται ἀρνητική, οὖσα ὅμως ἀπείρως μεγάλη κατ' ἀπόλυτον τιμήν· δηλαδὴ ἡ ἐφαπτομένη μεταπηδᾷ ἀπὸ τοῦ $+\infty$ εἰς τὸ $-\infty$· αὐξάνει δὲ αὕτη ἀπὸ τοῦ $-\infty$ μέχρι τοῦ 0, ὅταν τὸ Μ διαγράφον τὸ δεύτερον τεταρτημόριον φθάσῃ εἰς τὸ Α΄.

Ὅταν τὸ Μ διαγράψῃ τὸ τρίτον καὶ τέταρτον τεταρτημόριον, παρατηροῦνται αἱ αὐταὶ ὡς ἄνω μεταβολαὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.

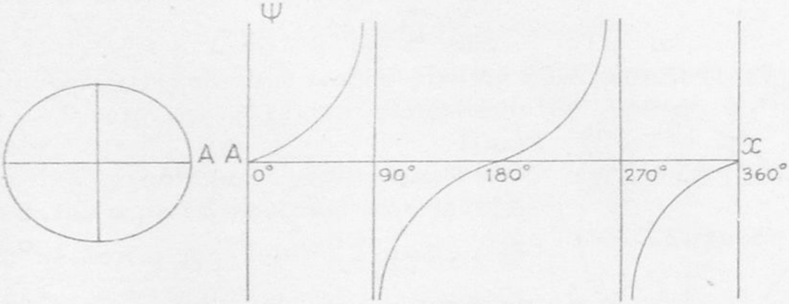
Αἱ μεταβολαὶ τῆς συνεφαπτομένης εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς μεταβολὰς τῆς ἐφαπτομένης ἀλλ' ἡ συνεφαπτομένη μεταβάλλεται ἀντιθέτως τῇ ἐφαπτομένῃ, ἤτοι ἐνῷ ἡ ἐφαπτομένη αὐξάνεται πάντοτε, ἡ συνεφαπτομένη ἐλαττοῦται πάντοτε.

Σημείωσις. Αἱ ἀνωτέρω σημειωθεῖσαι μεταβολαὶ φαίνονται καὶ ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$, $\varepsilon\varphi\alpha . \sigma\varphi\alpha = 1$.

Ὁ κατωτέρω πίναξ δεικνύει συνοπτικῶς τὰς μεταβολὰς τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς συνεφαπτομένης τῆς γωνίας ἢ τοῦ τόξου α.

α	0°	αὐξ.	90°	αὐξ.	180°	αὐξ.	270°	αὐξ.	360°
εφα	0	αὐξ.	$+\infty$ / $-\infty$	αὐξ.	0	αὐξ.	$+\infty$ / $-\infty$	αὐξ.	0
σφα	$+\infty$	ἐλατ.	0	ἐλατ.	$-\infty$ / $+\infty$	ἐλατ.	0	ἐλατ.	$-\infty$

32. **Γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τῆς ἐφαπτομένης.**—Διὰ νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τὰς μεταβολὰς τῆς ἐφαπτομένης φέρομεν δύο ἄξονας ὀρθογωνίους Αχ καὶ Αψ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος Αχ, ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ Α, ἀνύσματα ὧν τὰ μήκη εἶναι ἴσα πρὸς τὰ μήκη τῶν τόξων· ἀπὸ τῶν περάτων δὲ τῶν ἀνυσμάτων τούτων φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὸν ἄξονα Αχ΄, ἐπὶ δὲ τῶν καθέτων τούτων λαμβά-



νομεν ἀνύσματα, ὧν αἱ ἀρχαὶ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἄξονος Αχ, ὁμορρόπως ἴσα πρὸς τὰ ἀνύσματα τῶν ἐφαπτομένων τῶν ἀντιστοίχων τόξων· τὰ πέρατα τῶν τελευταίων τούτων ἀνυσμάτων εἶναι σημεῖα τῆς καμπύλης (ἀσυνεχοῦς), ἥτις δεικνύει τὰς μεταβολὰς τῆς ἐφαπτομένης τόξου, ὅταν τοῦτο μεταβάλλεται ἀπὸ 0° μέχρι 360°.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν τὴν καμπύλην, ἥτις δεικνύει τὰς μεταβολὰς τῆς συνεφαπτομένης τόξου, ὅταν τοῦτο μεταβάλλεται ἀπὸ 0° μέχρι 360°.

Ἀσκήσεις.

29) Νὰ εὑρεθοῦν τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον ἑκάστου τῶν τόξων —90°, —180°, —270°, —360°.

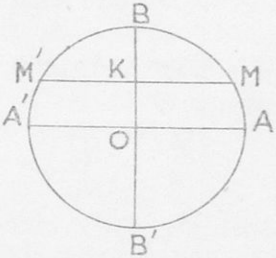
30) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ μεταβολαὶ τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου τόξου, ὅταν τοῦτο μεταβάλληται συνεχῶς ἀπὸ 0° μέχρι —360° καὶ νὰ παρασταθοῦν αὗται γραφικῶς.

31) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ συνεφαπτομένη ἑκάστου τῶν τόξων —90°, —180°, —270°, —360°.

32) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ μεταβολαὶ τῆς ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης τόξου, ὅταν τοῦτο μεταβάλλεται συνεχῶς ἀπὸ 0° μέχρι —360° καὶ νὰ παρασταθοῦν αὗται γραφικῶς.

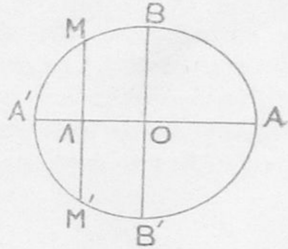
Τόξα καὶ γωνίαι ἀντιστοιχοῦσαι εἰς δοθέντα τριγωνομετρικὸν ἀριθμόν.

33. 1) Ἔστω ὅτι ζητεῖται τόξον, ἔχον δοθὲν ἡμίτονον μ, ἀναγκαίως περιεχόμενον μεταξὺ —1 καὶ 1.

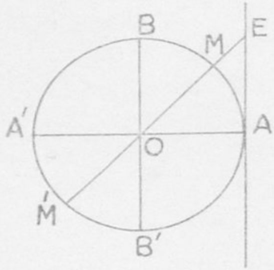


Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ἡμιτόνων ἄνυσμα ΟΚ, ὅπερ ἔχει μῆκος $\frac{OK}{OB}$ ἴσον πρὸς μ καὶ ἐκ τοῦ Κ φέρομεν τὴν χορδὴν Μ′Μ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα Α′Α. Τὰ τόξα ΑΜ καὶ ΑΜ′ εἶναι φανερόν, ὅτι ἔχουν ἡμίτονον ἴσον πρὸς τὸ δοθέν.

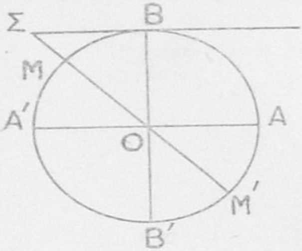
2) Ἐὰν ζητεῖται τόξον, ἔχον δοθὲν συνημίτονον μ, περιεχόμενον ἀναγκαίως μεταξὺ —1 καὶ +1 λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν συνημιτόνων ἄνυσμά τι ΟΛ, ὅπερ ἔχει μῆκος $\frac{O\Lambda}{OA}$ ἴσον πρὸς μ καὶ ἐκ τοῦ Λ φέρομεν χορδὴν Μ′Μ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα Β′Β. Τὰ τόξα ΑΜ καὶ ΑΜ′ ἔχουν προδήλως τὸ δοθὲν συνημίτονον.



3) Ἔστω, ὅτι ζητεῖται τόξον ἔχον δοθεῖσαν ἐφαπτομένην μ. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ἐφαπτομένων ἄνυσμα ΑΕ ἔχον μῆκος $\frac{ΑΕ}{ΟΒ}$ ἴσον πρὸς μ καὶ ἐκ τοῦ Ε φέρομεν εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου Ο, τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ Μ καὶ Μ′. Τὰ τόξα ΑΜ καὶ ΑΜ′ ἔχουν προδήλως τὴν δοθεῖσαν ἐφαπτομένην.



4) Ἐὰν ζητῆται τόξον, ἔχον δοθεῖσαν συνεφαπτομένην μ, λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν συνεφαπτομένων ἄνυσμά τι ΒΣ ἔχον μῆκος $\frac{ΒΣ}{ΟΑ}$ ἴσον πρὸς τὸ μ καὶ ἐκ τοῦ Σ φέρομεν εὐθεῖαν διὰ τοῦ κέντρου Ο τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ Μ καὶ Μ′. Τὰ τόξα ΑΜ καὶ ΑΜ′ εἶναι φανερόν, ὅτι ἔχουν τὴν δοθεῖσαν συνεφαπτομένην.



Ἀσκήσεις.

33) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ τόξα κοινῆς ἀρχῆς, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἡμίτονον ἴσον πρὸς τὸ $\frac{3}{5}$ ἢ $-\frac{3}{7}$.

34) Ὁμοίως τὰ ἔχοντα συνημίτονον $\frac{2}{3}$ ἢ $-\frac{3}{4}$,

35) Ὁμοίως τὰ ἔχοντα ἐφαπτομένην 2 ἢ —3.

36) Ὁμοίως τὰ ἔχοντα συνεφαπτομένην 1 ἢ —1.

Εὕρεσις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τόξου δοθέντος τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν.

34. α) **Ἐκ τοῦ ἡμιτόνου.** — Αἱ εὑρεθεῖσαι ἐξισώσεις $ημ^2α + συν^2α = 1$, $εφα = \frac{ημα}{συνα}$ ὡς καὶ ἡ $σφα = \frac{συνα}{ημα}$ (1) καθιστοῦν

δυνατὴν τὴν εὕρεσιν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τόξου ἢ γωνίας, ὅταν δοθῇ εἷς ἐξ αὐτῶν. Διότι, ἐὰν δοθῇ τὸ ημα, εὑρίσκομεν ἐκ τῆς πρώτης τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων τὸ συνα καὶ κατόπιν ἐκ τῶν δύο ἄλλων τὴν εφα καὶ σφα· ἔχομεν δὲ οὕτω:

$$\text{συν}\alpha = \pm\sqrt{1-\text{ημ}^2\alpha}, \quad \text{εφ}\alpha = \frac{\text{ημ}\alpha}{\pm\sqrt{1-\text{ημ}^2\alpha}},$$

$$\text{σφ}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1-\text{ημ}^2\alpha}}{\text{ημ}\alpha}$$

β) Ἐκ τοῦ συνημιτόνου.—Ὅταν δοθῇ τὸ συνα, εὑρίσκομεν ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1)

$$\text{ημ}\alpha = \pm\sqrt{1-\text{συν}^2\alpha}, \quad \text{εφ}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1-\text{συν}^2\alpha}}{\text{συν}\alpha}$$

$$\text{σφ}\alpha = \frac{\text{συν}\alpha}{\pm\sqrt{1-\text{συν}^2\alpha}}.$$

Παρατήρησις. Ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν, ὅτι ἐκ τοῦ ἡμιτόνου τόξου τινος ἢ ἐκ τοῦ συνημιτόνου του δὲν ὁρίζονται ἐντελῶς οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ αὐτοῦ· διότι εἰς τὸ ἡμίτονον τοῦ α π.χ. βλέπομεν, ὅτι ἀντιστοιχοῦν δύο σειραὶ τιμῶν τῶν ἄλλων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.

$$\text{ἢ} \quad +\sqrt{1-\text{ημ}^2\alpha}, \quad \frac{\text{ημ}\alpha}{+\sqrt{1-\text{ημ}^2\alpha}}, \quad \frac{+\sqrt{1-\text{ημ}^2\alpha}}{\text{ημ}\alpha} \quad \text{καὶ ἢ}$$

$$-\sqrt{1-\text{ημ}^2\alpha}, \quad \frac{\text{ημ}\alpha}{-\sqrt{1-\text{ημ}^2\alpha}}, \quad \frac{-\sqrt{1-\text{ημ}^2\alpha}}{\text{ημ}\alpha}.$$

Ἵνα ὅμως ὁρισθοῦν ἐντελῶς οἱ ζητούμενοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοί, πρέπει νὰ δοθῇ καὶ τὸ τεταρτημόριον, εἰς τὸ ὁποῖον περατοῦται τὸ τόξον.

35. Ἐκ τῆς ἐφαπτομένης.—Ὅταν ἡ ἐφαπτομένη τόξου δοθῇ καὶ τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον αὐτοῦ εἶναι ὡρισμένα κατὰ τὴν ἀπόλυτον τιμήν, διότι συνδέονται διὰ τῶν ἐξισώσεων.

$$ημ^2α+συν^2α=1$$

$$\frac{ημα}{συνα}=εφα.$$

Ἵνα δὲ ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων εὕρωμεν τὰς τιμὰς τῶν ημα καὶ συνα (ὑποθέτοντες γνωστὴν τὴν εφα) λύομεν τὴν δευτέραν ὡς πρὸς τὸ ημα, ὁπότε εὑρίσκομεν ημα=συνα.εφα καὶ ἀντικαθιστῶμεν τὴν τιμὴν τοῦ ημα εἰς τὴν πρώτην· οὕτω προκύπτει

$$(εφα.συνα)^2+συν^2α=1 \text{ ἤ}$$
$$εφ^2ασυν^2α+συν^2α=1, \text{ ἐξ ἧς}$$
$$(1+εφ^2α)συν^2α=1.$$

Ὅθεν $συν^2α=\frac{1}{1+εφ^2α}$ καὶ $συνα=\pm\frac{1}{\sqrt{1+εφ^2α}}$

Ἐπειδὴ δὲ ημα=συνα.εφα, ἔπεται $ημα=\pm\frac{εφα}{\sqrt{1+εφ^2α}}$ (2).

Τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν καὶ θετικῶς καὶ ἀρνητικῶς. Ἀλλ' ὅταν λάβωμεν τὸ ἡμίτονον θετικὸν (ἀρνητικὸν) πρέπει καὶ τὸ συνημίτονον νὰ τὸ λάβωμεν θετικὸν (ἀρνητικὸν), διότι ἐκ τοῦ ημα καὶ συνα πρέπει νὰ προκύπτῃ $\frac{ημα}{συνα}=εφα$.

Ὅτι δὲ τὸ σημεῖον τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου δὲν δύναται νὰ ὁρισθῇ ἐκ τῆς ἐφαπτομένης, γίνεται φανερὸν ἐκ τούτου, ὅτι πρὸς ἑκάστην δοθεῖσαν ἐφαπτομένην ἀντιστοιχοῦν δύο τόξα, περατούμενα εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου καὶ ἔχοντα διὰ τοῦτο ἀντίθετα ἡμίτονα καὶ ἀντίθετα συνημίτονα· οἱ δὲ τύποι (2) πρέπει νὰ δίδουν καὶ τῶν δύο τούτων τόξων τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα.

Τὸ σημεῖον τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ὁρίζομεν, ἐὰν γνωρίζωμεν εἰς ποῖον τεταρτημόριον περατοῦται τὸ τόξον. Διὰ τόξα π.χ. μικρότερα τῶν 90°, ἡ ρίζα πρέπει νὰ λαμβάνηται θετικῶς, διότι ταῦτα ἔχουν θετικὸν συνημίτονον.

Ἡ σφα ἐκ τῆς εφα ὁρίζεται ἀμέσως.

Παρατήρησις. Οἱ τέσσαρες τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ παντὸς τόξου εἴδομεν, ὅτι συνδέονται διὰ τῶν κάτωθι τριῶν ἐξισώσεων

$$ημ^2α + συν^2α = 1$$

$$εφα = \frac{ημα}{συνα} \text{ καὶ } σφα = \frac{συνα}{ημα} \quad (3)$$

καὶ ὅτι δοθέντος τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν προσδιορίζονται ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων καὶ οἱ τρεῖς ἄλλοι (κατὰ τὴν ἀπόλυτον τιμήν). Πᾶσα δὲ ἄλλη ἐξίσωσις, τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ τυχόντος τόξου συνδέουσα, πρέπει ἢ νὰ καταντᾷ ταυτότης ἢ νὰ δίδῃ τὴν πρώτην $ημ^2α + συν^2α = 1$, ὅταν ἐν αὐτῇ ἀντικατασταθοῦν αἱ ἐφαπτόμεναι καὶ αἱ συνεφαπτόμεναι ὑπὸ τῶν τιμῶν αὐτῶν, διότι μεταξὺ τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου τοῦ τυχόντος τόξου αὐτὴ μόνη ἡ ἐξίσωσις ὑπάρχει. Εὑρίσκομεν δὲ ἐξισώσεις τοιαύτας ὁσασδήποτε, ἐὰν συνδυάσωμεν κατὰ ποικίλους τρόπους τὰς τρεῖς ἀρχικὰς ἐξισώσεις (3)· ἀναγράφομεν δ' ἐνταῦθα μόνον τὰς πρωτευούσας ἐξ αὐτῶν·

$$εφα.σφα = 1$$

$$1 + εφ^2α = \frac{1}{συν^2α}$$

$$1 + σφ^2α = \frac{1}{ημ^2α}$$

$$εφα + σφα = \frac{1}{ημα.συνα},$$

τῶν ὁποίων ἡ ἀλήθεια εὐκόλως ἀποδεικνύεται διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως τῶν εφα καὶ σφα διὰ τῶν τιμῶν αὐτῶν.

Ἀσκήσεις.

Νὰ εὑρεθοῦν οἱ λοιποὶ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου α, ὅταν τὸ τόξον α

37) περατοῦται εἰς τὸ α' τεταρτημόριον καὶ εἶναι $ημα = \frac{3}{8}$.

38) » » » β' » » » $ημα = \frac{12}{17}$.

39) περατοῦται εἰς τὸ β΄ τεταρτημόρ. καὶ εἶναι $συνα=-\frac{4}{5}$.

40) » » » γ΄ » » » $εφα=\frac{9}{11}$.

41) » » » δ΄ » » » $εφα=-\frac{3}{4}$.

42) » » » β΄ » » » $εφα=-1$

43) » » » γ΄ » » » $συνα=-\frac{2}{3}$.

44) Ὅταν $συνα=-\frac{1}{2}$ καὶ ημα εἶναι θετικόν

45) Ὅταν $ημα=\frac{3}{5}$ καὶ συνα εἶναι ἀρνητικόν.

46) Ἐὰν $ημα=\frac{3}{5}$ καὶ $συνβ=\frac{40}{41}$ καὶ τὰ τόξα α καὶ β περατοῦνται εἰς τὸ α΄ τεταρτημόριον, εὑρεῖν τὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως $ημα.συνβ+ημβ.συνα$.

47) Ἐὰν $συνα=\frac{7}{25}$ καὶ $συνβ=\frac{40}{41}$, εὑρεῖν τὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως $συνα.συνβ-ημα.ημβ$.

48) Ἐὰν $εφα=\frac{3}{4}$, εὑρεῖν τὴν τιμὴν τῶν παραστάσεων $2ημα.συνα$, $συν^2α-ημ^2α$ καὶ $\frac{\sqrt{1-συνα}}{2}$.

49) Ὁμοίως, ἐὰν $εφβ=\frac{11}{60}$, εὑρεῖν τὴν τιμὴν τῶν παραστάσεων $2ημβ.συνβ$, $συν^2β-ημ^2β$ καὶ $\frac{\sqrt{1+συνβ}}{2}$.

50) Ἐὰν $εφα=\frac{3}{4}$ καὶ $εφβ=\frac{60}{61}$ καὶ τὰ τόξα α καὶ β περατοῦνται εἰς τὸ α΄ τεταρτημόριον, νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν παραστάσεων $ημα.συνβ-ημβ.συνα$ καὶ $συνα.συνβ+ημα.ημβ$.

51) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου α ἐκ τῆς συνεφαπτομένης αὐτοῦ.

52) Ἐὰν $σφα=\frac{14}{9}$, νὰ εὑρεθοῦν οἱ λοιποὶ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου α.

53) Ἐὰν $σφα=\frac{8}{15}$ καὶ $σφβ=\frac{12}{5}$ καὶ τὰ τόξα α καὶ β περα-

3

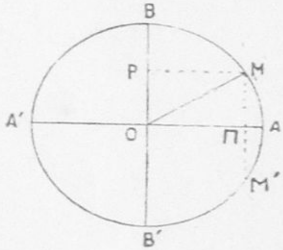
τοῦνται εἰς τὸ α΄ τεταρτημόριον, εὑρεῖν τὴν τιμὴν τῶν παραστάσεων ημα.συνβ+ημβ.συνα καὶ συνα.συνβ—ημα.ημβ.

Εὕρεσις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τόξων τινῶν.

Ἡ εὕρεσις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν διαφόρων τόξων ἀπαιτεῖ πράξεις πολυπλόκους. Δι' ὡρισμένα ὅμως τόξα ἡ εὕρεσις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν των εἶναι εὔκολος, στηρίζεται δὲ αὕτη εἰς τὸ κάτωθι θεώρημα.

36. **Θεώρημα.**—*Τὸ ἡμίτονον παντὸς τόξου θετικοῦ καὶ μικροτέρου τῶν 90° εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς χορδῆς τοῦ διπλασίου τόξου.*

Ἔστω τὸ τόξον ΑΜ, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον τῶν 90° καὶ ΟΠ, ΟΡ αἱ συντεταγμέναι τοῦ πέρατος αὐτοῦ Μ, ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας Α΄ΟΑ καὶ Β΄ΟΒ. Τὰ ἀνύσματα ΟΡ καὶ ΠΜ εἶναι ὁμορρόπως ἴσα· ἐπομένως εἶναι καὶ ημ(ΑΜ)=(ΠΜ). Ἀλλ' ἐὰν τὸ ΠΜ προεκταθῇ πέραν τῆς διαμέτρου, ἐφ' ἣν εἶναι κάθετον μέχρις, ὅτου συναντήσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Μ΄, τὸ Π εἶναι τὸ μέσον τῆς Μ΄Μ καὶ τὸ Α μέσον τοῦ τόξου Μ΄ΑΜ. Ὥστε ἀπεδείχθη ἡ πρότασις.



Στηριζόμενοι ἤδη εἰς τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, εὑρίσκομεν εὐκόλως τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τόξων τινῶν ἐπὶ π.δ. τοῦ τόξου 45°. Διότι πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι, ἂν (ΑΜ)=45°, τὸ τόξον Μ΄ΑΜ εἶναι 90° καὶ ἡ Μ΄ΠΜ εἶναι πλευρὰ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν τριγωνομετρικὸν κύκλον τετραγώνου. Ἐπομένως εἶναι (Μ΄ΠΜ)=$\sqrt{2}$ καὶ (ΠΜ)=$\frac{\sqrt{2}}{2}$, ἤτοι ημ45°=$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ἤδη οἱ λοιποὶ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ αὐτοῦ εὑρίσκονται εὐκόλως καὶ εἶναι:

$$\text{συν}45^\circ=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \text{εφ}45^\circ=1 \text{ καὶ } \text{σφ}45^\circ=1.$$

Ἐργαζόμενοι κατὰ τὸν αὐτὸν ὡς ἄνω τρόπον, εὑρίσκομεν εὐκόλως, ὅτι τὰ ἡμίτονα τῶν τόξων 30°, 60° εἶναι ἀντιστοίχως τὰ ἡμίσυ τῶν πλευρῶν κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν τριγωνομετρικὸν κύκλον, δηλαδὴ εἶναι $ημ30^\circ = \frac{1}{2}$ καὶ $ημ60^\circ = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Ἀσκήσεις.

54) Νὰ συμπληρωθῇ ὁ κάτωθι πίναξ διὰ τῶν ἐλλιπόντων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ ἄνωθι ἑκάστης στήλης τόξου. (Οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων τοῦ πίνακος πρέπει νὰ εἶναι γνωστοὶ ἀπὸ μνήμης).

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
ημα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	—1	0
συνα	1		$\frac{\sqrt{2}}{2}$					
εφα			1					
σφα			1					

55) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν κάτωθι παραστάσεων:

$$ημ^2 30^\circ + ημ^2 45^\circ + ημ^2 60^\circ.$$

καὶ

$$ημ30^\circ . συν60^\circ + συν30^\circ . ημ60^\circ.$$

56) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως

$$συν45^\circ . συν60^\circ + ημ45^\circ . ημ60^\circ.$$

57) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως

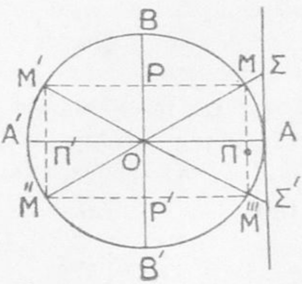
$$εφ^2 30^\circ + εφ^2 45^\circ + εφ^2 60^\circ.$$

58) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ημ18° καὶ κατόπιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ αὐτοῦ.

59) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ τὸ ημ36° καὶ κατόπιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ αὐτοῦ.

Ἁπλαῖ σχέσεις μεταξὺ δύο τόξων καὶ ἀντιστοιχοῦσαι σχέσεις μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν αὐτῶν.

37. Ἔστω τυχὸν τόξον ΑΜ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου Ο. Ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ τὰ σημεῖα Μ΄, Μ΄΄, Μ΄΄΄, συμμετρικὰ τοῦ Μ ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας Α΄Α, Β΄Β καὶ τὸ κέντρον Ο, παρατηροῦμεν κατὰ πρῶτον, ὅτι τὰ τόξα ΑΜ, ΑΜ΄ ἔχουν ἄθροισμα 180°, ἤτοι εἶναι *παραπληρωματικά*· ὅτι τὰ τόξα ΑΜ, ΑΜ΄΄ διαφέρουν κατὰ 180°, τὰ τόξα ΑΜ, ΑΜ΄΄΄ ἔχουν ἄθροισμα 360°, ἐνῷ τὰ τόξα ΑΜ καὶ τὸ ἀντιθέτου φορᾶς ΑΜ΄΄΄ εἶναι ἀντίθετα· ὅλα δὲ τὰ τόξα ταῦτα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχὴν Α καὶ πέρατα τὰ οὕτω ληφθέντα σημεῖα Μ,Μ΄,Μ΄΄,Μ΄΄΄, παρατηροῦμεν, ὅτι ἔχουν τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς ἴσους μὲν κατ᾽ ἀπόλυτον τιμήν, μὲ σημεῖα ὅμως διάφορα, εἰδικῶς δὲ συνάγομεν εὐκόλως ἐκ τοῦ σχήματος, ὅτι



α΄) διὰ τὰ παραπληρωματικὰ τόξα ἔχομεν, ἐὰν (ΑΜ)=α, ὁπότε (ΑΜ΄)=180°—α.

$$ημ(180^{\circ}-α)=ημα$$
$$συν(180^{\circ}-α)=-συνα$$
$$εφ(180^{\circ}-α)=-εφα \text{· ὥστε καὶ}$$
$$σφ(180^{\circ}-α)=-σφα$$

β΄) διὰ τὰ διαφέροντα κατὰ ἡμιπεριφέρειαν (ΑΜ)=α, (ΑΜ΄΄)=180°+α ἔχομεν

$$ημ(180^{\circ}+α)=-ημα$$
$$συν(180^{\circ}+α)=-συνα$$
$$εφ(180^{\circ}+α)=εφα \text{· ἄρα καὶ}$$
$$σφ(180^{\circ}+α)=σφα$$

γ΄) διὰ τὰ τόξα τὰ ἔχοντα ἄθροισμα ὁλόκληρον περιφέρειαν (ΑΜ)=α, (ΑΜ΄΄΄)=360°—α, εὑρίσκομεν

$$ημ(360^{\circ}-α)=-ημα$$
$$συν(360^{\circ}-α)=συνα$$

$$\varepsilon\varphi(360^\circ-\alpha)=-\varepsilon\varphi\alpha \quad \text{ὥστε καὶ}$$
$$\sigma\varphi(360^\circ-\alpha)=-\sigma\varphi\alpha$$

καὶ δ΄) διὰ τὸ (ΑΜ)=α καὶ τὸ ἀρνητικῆς φορᾶς (ΑΜ''')=—α, ἤτοι διὰ τὰ ἀντίθετα τόξα ἔχομεν

$$\eta\mu(-\alpha)=-\eta\mu\alpha$$
$$\sigma\upsilon\nu(-\alpha)=\sigma\upsilon\nu\alpha$$
$$\varepsilon\varphi(-\alpha)=-\varepsilon\varphi\alpha \quad \text{ἄρα καὶ}$$
$$\sigma\varphi(-\alpha)=-\sigma\varphi\alpha$$

38. Αἱ ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαι σχέσεις ἐπιτρέπουν τὴν ἀναγωγὴν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν παντὸς τόξου εἰς τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τόξου μικροτέρου τῶν 90°· διότι, ἂν μὲν εἶναι τὸ τόξον μεταξὺ 90° καὶ 180°, τὸ παραπληρωματικὸν αὐτοῦ εἶναι μεταξὺ 0° καὶ 90°· ἔχουν δὲ ταῦτα ἴσα μὲν ἡμίτονα, ἀντίθετα δὲ τὰ συν, εφ καὶ σφ.

Ἂν δὲ εἶναι μεταξὺ 180° καὶ 270°, ἀφαιροῦμεν ἀπ' αὐτοῦ 180°, ὅτε μένει τόξον μικρότερον τῶν 90°· ἔχουν δὲ τὰ τόξα ταῦτα ἡμίτονα καὶ συνημίτονα ἀντίθετα, ἐφαπτομένας δὲ καὶ συνεφαπτομένας ἴσας· ἂν δὲ τέλος εἶναι μεταξὺ 270° καὶ 360° τὸ πέρας τοῦ ἀντιθέτου αὐτοῦ τόξου ἔχει τὸ αὐτὸ πέρας μετὰ τοῦ τόξου, τὸ ὁποῖον εἶναι διαφορὰ τοῦ δοθέντος ἀπὸ τῶν 360°. Τὸ τόξον δὲ τοῦτο καὶ τὸ δοθὲν ἔχουν συνημίτονα ἴσα, ἀντίθετα δὲ ημ, εφ καὶ σφ.

Παραδείγματα. 1) 145°· τούτου παραπληρωματικὸν εἶναι τὸ τόξον 35°· ὅθεν $\eta\mu 145^\circ=\eta\mu 35^\circ$, $\sigma\upsilon\nu 145^\circ=-\sigma\upsilon\nu 35^\circ$,
$\varepsilon\varphi 145^\circ=-\varepsilon\varphi 35^\circ$, $\sigma\varphi 145^\circ=-\sigma\varphi 35^\circ$.

2) 248°. Τοῦτο διαφέρει τοῦ 180° κατὰ 68°.
Ὅθεν $\eta\mu 248^\circ=-\eta\mu 68^\circ$, $\sigma\upsilon\nu 248^\circ=-\sigma\upsilon\nu 68^\circ$ κλπ.

3) 336°. Λαμβάνομεν τὸ τόξον $360^\circ-336^\circ=24^\circ$.

39. Τόξα συμπληρωματικά.—Ἀλλὰ καὶ οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν μεταξὺ 45° καὶ 90° περιλαμβανομένων τόξων ἀνάγονται εἰς τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῶν μεταξὺ 0° καὶ 45° περιλαμβανομένων, ὡς συνάγεται ἐκ τῶν σχέσεων μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν ***συμπληρωματικῶν τόξων***, ἤτοι δύο τόξων ἐχόντων ἄθροισμα 90° καὶ τὰς ὁποίας δεικνύομεν κατωτέρω.

Ἔστωσαν δύο συμπληρωματικὰ τόξα τὰ (ΑΜ)=α καὶ (ΑΜ′)=90°—α. Ἐὰν φέρωμεν τὴν διχοτόμον Δ′ΟΔ τῆς πρώτης θετικῆς γωνίας ΑΟΒ καὶ παρατηρήσωμεν, ὅτι τὰ τόξα ΑΜ καὶ Μ′Β εἶναι ἴσα (διότι καὶ τὰ ΑΜ′ καὶ Μ′Β εἶναι συμπληρωματικά), εὐκόλως συνάγεται, ὅτι εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον ταύτην Δ′ΟΔ. Ἀλλ' εἶναι: ημ(ΑΜ)=(ΡΜ), ημ(ΑΜ′)=(ΟΡ′), συν(ΑΜ)==(ΟΡ) καὶ συν(ΑΜ′)=(ΟΠ′)=(Ρ′Μ′)· ἂν δὲ περιστραφῇ τὸ ἓν ἡμικύκλιον περὶ τὴν Δ′Δ, μέχρις ὅτου ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ἄλλου, θὰ πέσῃ τὸ Μ ἐπὶ τοῦ Μ′, τὸ Α ἐπὶ τοῦ Β καὶ τὸ Ρ ἐπὶ τοῦ Ρ′, τὸ δὲ Ο θὰ μείνῃ ἀκίνητον. Ἑπομένως οἱ ἀριθμοὶ (ΟΡ) καὶ (ΟΡ′) εἶναι ἴσοι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν καὶ κατὰ σημεῖον, ὡς καὶ οἱ (ΡΜ) καὶ (Ρ′Μ′)· εἶναι ἄρα

$$\text{ημ}(\text{ΑΜ}')=\text{συν}(\text{ΑΜ}) \text{ καὶ } \text{συν}(\text{ΑΜ}')=\text{ημ}(\text{ΑΜ})$$

$$\text{ἤτοι} \quad \text{ημ}(90^0-\alpha)=\text{συν}\alpha$$

$$\text{συν}(90^0-\alpha)=\text{ημ}\alpha.$$

Διὰ τὰς εφα=(ΑΣ) καὶ εφ(90°—α)=ΑΣ′ παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΟΣ καὶ ΑΟΣ′, τὰ ὁποῖα εἶναι ὀρθογώνια, ἔχουν τὴν γωνίαν ΑΟΣ ἴσην τῇ γωνίᾳ ΑΣ′Ο, ἐπειδὴ ἀμφότεραι εἶναι συμπληρώματα τῆς αὐτῆς γωνίας ΑΟΣ′· ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια, οἱ δὲ λόγοι $\frac{\text{ΑΣ}}{\text{ΟΑ}}$, $\frac{\text{ΟΑ}}{\text{ΑΣ}'}$ εἶναι ἴσοι καὶ κατ' ἀπόλυτον τιμὴν καὶ κατὰ σημεῖον· ἔχομεν ἑπομένως $\frac{(\text{ΑΣ})}{(\text{ΟΑ})}=\frac{(\text{ΟΑ})}{(\text{ΑΣ}')}$ ἤτοι (ΑΣ).(ΑΣ′)=1 ἢ εφα.εφ(90°—α)=1· ἐξ αὐτῆς δὲ λαμβάνομεν

$$\text{εφ}(90^0-\alpha)=\text{σφ}\alpha \quad \text{καὶ}$$

$$\text{σφ}(90^0-\alpha)=\text{εφ}\alpha.$$

Ὥστε *ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῶν τόξων, ἅτινα περιέχονται μεταξὺ 0^0 καὶ 45^0.*

40. **Τόξα διαφέροντα κατὰ 90°.**—Ἐὰν εἰς τὰς σχέσεις $ημ(90^0-α)=συνα$ καὶ $συν(90^0-α)=ημα$, θέσωμεν $-α$ ἀντὶ $α$ ἔχομεν:

$$ημ[90^0-(-α)]=συν(-α) \quad \text{καὶ}$$
$$συν[90^0-(-α)]=ημ(-α) \quad \text{ἤτοι ἔχομεν}$$
$$ημ(90^0+α)=συνα \quad \text{καὶ}$$
$$συν(90^0+α)=-ημα, \quad \text{ὁπότε εἶναι}$$
$$εφ(90^0+α)=-σφα$$
$$σφ(90^0+α)=-εφα.$$

41. **Τόξα ἔχοντα ἄθροισμα 270.**—Τὰ τόξα $270^0-α$ καὶ $α$ ἔχουν ἄθροισμα 270. Ἀλλ' εἶναι

$$ημ(270^0-α)=ημ[180^0+(90^0-α)]=-ημ(90^0-α)=-συνα \quad \text{καὶ}$$
$$συν(270^0-α)=συν[180^0+(90^0-α)]=-συν(90^0-α)=-ημα.$$

Ὥστε εἶναι

$$ημ(270^0-α)=-συνα$$
$$συν(270^0-α)=-ημα$$
$$εφ(270^0-α)=σφα \quad \text{καὶ}$$
$$σφ(270^0-α)=εφα.$$

42. **Τόξα διαφέροντα κατὰ 270°.**—Ἐὰν εἰς τὰς προηγουμένας σχέσεις θέσωμεν $-α$ ἀντὶ $α$ εὑρίσκομεν:

$$ημ(270^0+α)=-συνα$$
$$συν(270^0+α)=ημα$$
$$εφ(270^0+α)=-σφα \quad \text{καὶ}$$
$$σφ(270^0+α)=-εφα.$$

43. **Τόξα διαφέροντα κατὰ 360°.**—Τὰ τόξα $360^0+α$ καὶ $α$ διαφέρουν κατὰ 360°. Ἀλλ' εἶναι φανερόν, ὅτι τὰ τόξα ταῦτα ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχὴν καὶ τὸ αὐτὸ πέρας. Ὅθεν εἶναι:

$$ημ(360^0+α)=ημα$$
$$συν(360^0+α)=συνα$$
$$εφ(360^0+α)=εφα \quad \text{καὶ}$$
$$σφ(360^0+α)=σφα.$$

Ἀσκήσεις.

60) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων 120°, 135°, 150°.

61) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων 210°, 225°, 240°, 300°, 315°, 330°.

62) Ὁμοίως ἑκάστου τῶν τόξων -30°, -45°, -60°.

63) Ὁμοίως ἑκάστου τῶν τόξων -150°, -240°, -315°.

64) Ὁμοίως ἑκάστου τῶν τόξων 72°, 54°, -72°, -54°.

65) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἐν παντὶ τριγώνῳ ΑΒΓ εἶναι
$\eta\mu A = \eta\mu(B+\Gamma)$, $\sigma\upsilon\nu B = -\sigma\upsilon\nu(\Gamma+A)$ καὶ $\varepsilon\varphi\Gamma = -\varepsilon\varphi(A+B)$.

66) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἐν παντὶ τριγώνῳ ΑΒΓ εἶναι

$$\eta\mu\frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2},\quad \sigma\upsilon\nu\frac{B}{2} = \eta\mu\frac{\Gamma+A}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} = \sigma\varphi\frac{A+B}{2}.$$

67) Νὰ δειχθῇ, ὅτι

$$\eta\mu 120^\circ.\sigma\upsilon\nu 330^\circ + \sigma\upsilon\nu(-300^\circ).\eta\mu(-330^\circ) = 1.$$

68) Ὁμοίως, ὅτι

$$\sigma\upsilon\nu 210^\circ.\eta\mu 150^\circ - \eta\mu 330^\circ \sigma\upsilon\nu 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

69) Ὁμοίως, ὅτι

$$\eta\mu 150^\circ.\sigma\upsilon\nu 240^\circ - \sigma\upsilon\nu 300^\circ.\eta\mu 210^\circ = 0.$$

70) Ὁμοίως, ὅτι

$$\sigma\varphi 120^\circ + \varepsilon\varphi 210^\circ + \varepsilon\varphi 240^\circ + \varepsilon\varphi 300^\circ = 0.$$

71) Νὰ δειχθῇ ὁμοίως, ὅτι

$$\varepsilon\varphi 225^\circ.\sigma\varphi 135^\circ - \varepsilon\varphi 315^\circ.\sigma\varphi 225^\circ = 0.$$

72) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν παραστάσεων

1) $\sigma\upsilon\nu 120^\circ \eta\mu 30^\circ - \eta\mu 120^\circ \sigma\upsilon\nu 30^\circ$

2) $\eta\mu 300^\circ \sigma\upsilon\nu 60^\circ + \sigma\upsilon\nu 300^\circ \eta\mu 60^\circ$

3) $\dfrac{\sigma\varphi 240^\circ + \sigma\varphi 60^\circ}{1 - \sigma\varphi 240^\circ.\sigma\varphi 60^\circ}$.

73) Ποῖον εἶναι τὸ σημεῖον ἑκάστου τῶν ἀθροισμάτων $\eta\mu 160^\circ + \sigma\upsilon\nu 160^\circ$, $\eta\mu 128^\circ + \sigma\upsilon\nu 128^\circ$, $\eta\mu(-310^\circ) + \sigma\upsilon\nu(-310^\circ)$.

74) Ποῖον εἶναι τὸ σημεῖον ἑκάστης τῶν διαφορῶν $\eta\mu 220^\circ - \sigma\upsilon\nu 220^\circ$, $\eta\mu 115^\circ - \sigma\upsilon\nu 115^\circ$, $\eta\mu(-100^\circ) - \sigma\upsilon\nu(-100^\circ)$.

75) Νὰ δειχθῇ, ὅτι

$\eta\mu\alpha + \eta\mu(90^0 - \alpha) + \eta\mu(180^0 + \alpha) + \eta\mu(270^0 - \alpha) = 0.$

76) Ὁμοίως, ὅτι

$\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu(90^0 + \alpha) + \sigma\upsilon\nu(180^0 + \alpha) + \eta\mu(270^0 + \alpha) = 0.$

77) Νὰ δειχθῇ ὁμοίως, ὅτι

$\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu(270^0 + \alpha) - \eta\mu(270^0 - \alpha) + \sigma\upsilon\nu(180^0 + \alpha) = 0.$

78) Ὁμοίως, ὅτι

$\sigma\varphi\alpha + \varepsilon\varphi(180^0 + \alpha) + \varepsilon\varphi(90^0 + \alpha) + \varepsilon\varphi(360^0 - \alpha) = 0.$

79) Ἡ παράστασις $\dfrac{\varepsilon\varphi(180^0 + x)}{\sigma\varphi(360^0 - x)}$ νὰ ἐκφρασθῇ συναρτήσει τοῦ ημx.

80) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ τόξα, μεταξὺ 0^0 καὶ 360^0, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἡμίτονον $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{1}{2}$.

81) Ὁμοίως τὰ ἔχοντα συνημίτονα $-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

82) Ὁμοίως τὰ ἔχοντα ἐφαπτομένας -1, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

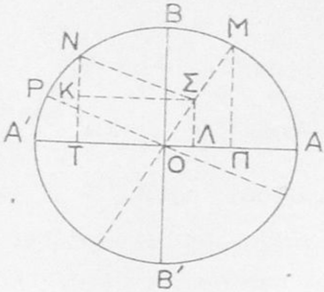
83) Ὁμοίως τὰ ἔχοντα συνεφαπτομένας $-\sqrt{3}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

84) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἡμίτονα καὶ τὰ συνημίτονα τῶν τόξων ἀπὸ 0^0 ἕως 360^0, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὅλα ἐφαπτομένην ἴσην μὲ συν135^0.

Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἀθροίσματος καὶ διαφορᾶς δύο τόξων.

44. **Πρόβλημα.**—***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο τόξων α καὶ β, ἑκάστου τῶν ὁποίων γνωρίζομεν τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον.***

Ἔστω ἓν οἱονδήποτε τόξον α, ἀρχῆς Α καὶ πέρατος Μ, δι' ὃ ἔχομεν συνα=(ΟΠ) καὶ ημα=(ΠΜ) καὶ ὁμοίως ἔστω ἕτερον τόξον β, ἀρχῆς Μ καὶ πέρατος Ν. Ἐὰν ἤδη λάβωμεν δύο ἄξονας ὀρθογωνίους μεταξύ των, τοὺς ΟΜ καὶ ΟΡ καὶ τοιούτους, ὥστε ἡ θετικὴ φορὰ τοῦ ΟΜ νὰ εἶναι ἡ ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ Μ, θὰ ἔχωμεν συνβ=(ΟΣ) καὶ ημβ=(ΣΝ), τέλος τὸ ημ. τοῦ τόξου α+β, οὗ ἡ ἀρχὴ εἶναι τὸ Α καὶ πέρας τὸ Ν, εἶναι (ΤΝ) καὶ τὸ συν. αὐτοῦ εἶναι (ΟΤ) ἤτοι εἶναι



$$\etaμ(α+β)=(ΤΝ) \quad \text{καὶ}$$
$$συν(α+β)=(ΟΤ).$$

Ἀλλ' ἐὰν φέρωμεν τὴν ΣΚ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΑ′ καὶ τὴν ΣΛ κάθετον ἐπ' αὐτήν, ἔχομεν

$$(ΤΝ)=(ΤΚ)+(ΚΝ) \text{ ἤτοι } (ΤΝ)=(ΛΣ)+(ΚΝ) \qquad (1)$$
$$\text{καὶ } (ΟΤ)=(ΛΤ)+(ΟΛ) \text{ ἤτοι } (ΟΤ)=(ΣΚ)+(ΟΛ) \qquad (2)$$

Ἤδη ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΛΣ καὶ ΟΠΜ λαμβάνομεν κατ' ἀπόλυτον τιμὴν καὶ κατὰ σημεῖον τοὺς ἴσους λόγους

$$\frac{(ΛΣ)}{(ΠΜ)}=\frac{(ΟΣ)}{(ΟΜ)}=\frac{(ΟΛ)}{(ΟΠ)} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{ΛΣ}{ημα}=\frac{συνβ}{1}=\frac{(ΟΛ)}{συνα}$$

ἐκ τῶν ὁποίων ἕπεται (ΛΣ)=ημασυνβ καὶ (ΟΛ)=συνασυνβ.

Ἀλλὰ καὶ τὰ τρίγωνα ΚΣΝ καὶ ΟΠΜ εἶναι ὅμοια, ἀφοῦ αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἶναι κάθετοι ἀνὰ δύο· εἰς αὐτὸ ὅμως οἱ λόγοι $\frac{(ΚΝ)}{(ΟΠ)}$ καὶ $\frac{(ΣΝ)}{(ΟΜ)}$, οἱ ὁποῖοι εἶναι μεταξύ των ἴσοι καὶ κατ ἀπόλυτον τιμὴν καὶ κατὰ σημεῖον, εἶναι ἀντίθετοι πρὸς τὸν λόγον $\frac{(ΣΚ)}{(ΠΜ)}$, ἤτοι πρὸς τὸν λόγον $\frac{(ΛΤ)}{(ΠΜ)}$. Κατὰ ταῦτα λοιπὸν ἔχομεν

$$\frac{(ΚΝ)}{(ΟΠ)}=\frac{(ΣΝ)}{(ΟΜ)}=-\frac{(ΛΤ)}{(ΠΜ)}, \quad \text{ἤτοι}$$
$$\frac{(ΚΝ)}{συνα}=\frac{ημβ}{1}=-\frac{(ΛΤ)}{ημα}, \text{ ἐκ τῶν ὁποίων ἕπεται}$$

(ΚΝ)=ημβσυνα καὶ (ΛΤ)=−ημαημβ.

Ἐὰν λοιπὸν εἰς τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) ἀντικαταστήσωμεν τὰ (ΛΣ), (ΚΝ), (ΟΛ) καὶ (ΛΤ) μὲ τὰς εὑρεθείσας τιμάς των, εὑρίσκομεν τοὺς τύπους

$$ημ(α+β)=ημασυνβ+ημβσυνα \qquad (3)$$
$$συν(α+β)=συνασυνβ-ημαημβ \qquad (4)$$

45. Ἤδη τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τῆς διαφορᾶς

$\alpha-\beta$ εὑρίσκεται, ἂν εἰς τοὺς τύπους (3) καὶ (4) ἀντικαταστήσωμεν τὸ β διὰ τοῦ $-\beta$, ὁπότε ἔχομεν

1ον) $\eta\mu(\alpha-\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu(-\beta)+\eta\mu(-\beta)\sigma\upsilon\nu\alpha$ ἤτοι ἐπειδὴ $\sigma\upsilon\nu(-\beta)=\sigma\upsilon\nu\beta$ καὶ $\eta\mu(-\beta)=-\eta\mu\beta$.

$$\eta\mu(\alpha-\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha \qquad (5)$$ καὶ

2ον) $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu(-\beta)-\eta\mu\alpha\eta\mu(-\beta)$ ἤτοι

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta. \qquad (6)$$

46. Ἐὰν οἱ τύποι (3) καὶ (4) διαιρεθοῦν κατὰ μέλη, προκύπτει $\frac{\eta\mu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)}=\frac{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}$ καὶ ἂν τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος ταύτης διαιρέσωμεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν διὰ τοῦ συνασυνβ, προκύπτει

$$\frac{\eta\mu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)}=\frac{\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}+\frac{\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta}}{1-\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}\cdot\frac{\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta}}$$

καὶ ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὰ πηλίκα ὑπὸ τῶν ἴσων πρὸς αὐτὰ ἐφαπτομένων, εὑρίσκομεν τὸν τύπον

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha.\varepsilon\varphi\beta} \qquad (7)$$

διὰ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τὴν ἐφαπτομένην τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta$ τῶν δύο τόξων α καὶ β, ὅταν ἔχωμεν τὰς ἐφαπτομένας αὐτῶν.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν ἐκ τῶν τύπων 5 καὶ 6 τὸν ἑπόμενον τύπον

$$\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha.\varepsilon\varphi\beta} \qquad (8)$$

διὰ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τὴν ἐφαπτομένην τῆς διαφορᾶς τῶν δύο τόξων α καὶ β, ὅταν ἔχωμεν τὰς ἐφαπτομένας αὐτῶν.

Ἀσκήσεις.

85) Ἐὰν $\eta\mu\alpha=\frac{3}{5}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\beta=\frac{9}{41}$ καὶ τὰ τόξα α καὶ β περατοῦνται εἰς τὸ α΄ τεταρτημόριον, εὑρεῖν τὰ $\eta\mu(\alpha+\beta)$ καὶ $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$.

86) Ὁμοίως εὑρεῖν τὰ ημ(α—β) καὶ συν(α+β), ἐὰν $ημα=\frac{15}{17}$ καὶ $συνβ=\frac{12}{13}$.

87) Ἐὰν τὸ πέρας τοῦ τόξου α κεῖται εἰς τὸ πρῶτον τεταρτημόριον καὶ εἶναι $ημα=\frac{5}{13}$, εὑρεῖν τὰ συν(60°—α) καὶ ημ(60°+α).

88) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου 75°(75°=45°+30°).

89) Ὁμοίως νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου 15°(15°=60°—45°).

90) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι,

$$συν(α+β)συνβ+ημ(α+β)ημβ=συνα$$

91) Ὁμοίως νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$ημ(α+β)ημ(α-β)=ημ^2α-ημ^2β$$

92) Ὁμοίως ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$συν(α+β)συν(α-β)=συν^2α+συν^2β-1$$

93) Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι $ημ(45^0-α)=συν(45^0+α)$

94) Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι $ημ(45^0+α)=\frac{ημα+συνα}{\sqrt{2}}$

95) Ὁμοίως ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$ημ(45^0+α)συν(45^0-α)+συν(45^0+α)ημ(45^0-α)=1$$

96) Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$συν(45^0-α)συν(45^0-β)-ημ(45^0-α)ημ(45^0-β)=ημ(α+β)$$

97) Ὁμοίως ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$ημ(45^0+α)συν(45^0-β)+συν(45^0+α)ημ(45^0-β)=συν(α-β)$$

98) Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι

1) $ημ(60^0+α)-ημ(60^0-α)=ημα$

2) $συν(30^0+α)-συν(30^0-α)=-ημα$

99) Ἐὰν $εφα=\frac{1}{70}$ καὶ $εφβ=\frac{1}{99}$ νὰ εὑρεθῇ ἡ εφ(α—β).

100) Ἐὰν τὰ πέρατα τῶν τόξων α καὶ β εἶναι εἰς τὸ α΄ τεταρτημόριον καὶ εἶναι $εφα=\frac{1}{2}$ καὶ $εφβ=\frac{1}{3}$, νὰ εὑρεθῇ πόσων μοιρῶν εἶναι τὸ τόξον α+β,

101) Ἐὰν $εφα = -\frac{3}{4}$ καὶ $συνβ = \frac{12}{37}$ καὶ τὰ τόξα $α$ καὶ $β$ εἶναι ἀμφότερα μικρότερα τῶν 180^0 νὰ εὑρεθῇ ἡ $εφ(α+β)$.

102) Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$εφ(α+β)εφ(α-β) = \frac{εφ^2α - εφ^2β}{1 - εφ^2αεφ^2β}.$$

103) Ὁμοίως ν' ἀποδειχθῇ ὅτι

1) $εφ(45^0+α) = \frac{-1+εφα}{1-εφα}$ καὶ 2) $εφ(α+45^0) = \frac{1+σφα}{1-σφα}$.

104) Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐν παντὶ τριγώνῳ ΑΒΓ εἶναι

$$ημΓσυνΑ + συνΓημΑ = ημΒ$$
$$συνΒσυνΓ - ημΒημΓ = -συνΑ$$

105) Ὁμοίως ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐν παντὶ τριγώνῳ ΑΒΓ εἶναι

$$ημ\frac{Β}{2}συν\frac{Γ}{2} + συν\frac{Β}{2}ημ\frac{Γ}{2} = συν\frac{Α}{2}$$
$$συν\frac{Α}{2}συν\frac{Β}{2} - ημ\frac{Α}{2}ημ\frac{Β}{2} = ημ\frac{Γ}{2}.$$

106) Νὰ δειχθῇ, ὅτι $συν70^0συν15^0 + συν20^0συν75^0 = συν55^0$.

107) Νὰ δειχθῇ, ὅτι εἶναι $σφ(α+β) = \frac{σφα.σφβ-1}{σφα+σφβ}$.

108) Νὰ εὑρεθῇ ἡ $σφ(α-β)$ συναρτήσει τῶν $σφα$ καὶ $σφβ$.

109) Ἐὰν $σφ = \frac{3}{2}$ καὶ $σφβ = \frac{5}{4}$, εὑρεῖν τὰς $σφ(α+β)$ καὶ $σφ(α-β)$.

110) Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι $εφα + εφβ = \frac{ημ(α+β)}{συνασυνβ}$.

111) Ὁμοίως, ὅτι $σφα + σφβ = \frac{ημ(α+β)}{ημαημβ}$.

112) Ὁμοίως, ὅτι $εφα + σφβ = \frac{συν(α-β)}{συναημβ}$.

113) Ὁμοίως, ὅτι $σφα - εφβ = \frac{συν(α+β)}{ημασυνβ}$.

114) Ὁμοίως, ὅτι $1 + εφαεφβ = \frac{συν(α-β)}{συνασυνβ}$.

115) Νὰ δειχθῇ, ὅτι

$$εφ(α+β+γ) = \frac{εφα+εφβ+εφγ-εφαεφβεφγ}{1-εφβεφγ-εφγεφα-εφαεφβ}.$$

Ἐκ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ α εὕρεσις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ 2α καὶ τοῦ $\frac{\alpha}{2}$.

47. Ἐὰν ὑποτεθῇ εἰς τοὺς τύπους 3, 4 καὶ 7 α=β, προκύπτουν οἱ ἑπόμενοι τύποι

$$
\begin{aligned}
&\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha \\
&\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \qquad\qquad (9) \\
&\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha},
\end{aligned}
$$

δι' ὧν εὑρίσκομεν τὸ ἡμίτονον, τὸ συνημίτονον καὶ τὴν ἐφαπτομένην τοῦ διπλασίου τόξου, ὅταν ἔχωμεν τὸ ἡμίτονον, τὸ συνημίτονον καὶ τὴν ἐφαπτομένην τοῦ τόξου.

48. Ὁ δεύτερος τῶν τύπων (9) γράφεται ὡς ἑξῆς

$$
\begin{aligned}
&\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - (1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha) = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \qquad \text{ἤ} \\
&\sigma\upsilon\nu 2\alpha = (1-\eta\mu^2\alpha) - \eta\mu^2\alpha = 1 - 2\eta\mu^2\alpha,
\end{aligned}
$$

ἐκ τῶν τελευταίων δὲ τούτων εὑρίσκομεν

$$
\begin{aligned}
&\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2} \\
&\eta\mu^2\alpha = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2} \qquad\qquad (10)
\end{aligned}
$$

καὶ ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν

$$\varepsilon\varphi^2\alpha = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$$

ἤ, ἐὰν θέσωμεν $\frac{\alpha}{2}$ ἀντὶ α

$$
\begin{aligned}
&\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{2} \quad \text{ἤτοι} \quad \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}} \\
&\eta\mu^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{2} \quad \text{»} \quad \eta\mu\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}} \\
&\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha} \quad \text{»} \quad \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}},
\end{aligned}
$$

εὑρίσκομεν δὲ οὕτως ἐκ τοῦ συνημιτόνου τοῦ τόξου τὸ ἡμίτονον, τὸ συνημίτονον καὶ τὴν ἐφαπτομένην τοῦ ἡμίσεως τόξου.

49. Ἐὰν εἰς τοὺς τύπους (9) ἀντικαταστήσωμεν τὸ α διὰ τοῦ $\frac{\alpha}{2}$ λαμβάνομεν

$$\eta\mu\alpha = 2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2} - \eta\mu^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Ἀλλ' οἱ δύο πρῶτοι τύποι ἐκ τούτων δύνανται νὰ γραφοῦν

$$\eta\mu\alpha = \frac{2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}+\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}},\ \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}-\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}+\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}},$$

ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν τοὺς ἀριθμητὰς καὶ τοὺς παρονομαστὰς διὰ $\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}$, λαμβάνομεν

$$\eta\mu\alpha = \frac{\dfrac{2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}}},\ \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}}-\dfrac{\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}}}$$

$$\text{ἤτοι}\quad \eta\mu\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}\qquad \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Διὰ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν, ὅτι εὑρίσκομεν τὴν εφα, ημα, συνα, συναρτήσει τῆς $\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$.

Ἀσκήσεις.

116) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον 2α, ὅταν εἶναι

1ον) $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{3}{4}$ καὶ 2ον) $\eta\mu\alpha = \frac{7}{11}$.

117) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ τὸ συν2α, ὅταν εἶναι

1ον) $ημα=\frac{4}{5}$ καὶ 2ον) $συνα=\frac{15}{17}$.

118) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων 60^0 καὶ 90^0 ἐκ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν τόξων 30^0 καὶ 45^0.

119) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου 36^0 ἐκ τῶν τοῦ 18^0.

120) Νὰ δειχθῇ, ὅτι εἶναι

$$2ημ40^0.ημ50^0=ημ80^0$$
$$συν^2 20^0-συν^2 70^0=συν40^0.$$

121) Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ παραστάσεις

$$1)\quad 2ημ\frac{5x}{2}συν\frac{5x}{2}$$

$$2)\quad συν^2\frac{8x}{3}-ημ^2\frac{8x}{3}.$$

122) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου $\frac{45^0}{2}$ ἐκ τοῦ συν45^0.

123) Ἐκ τοῦ συνημιτόνου τῶν $\left(\frac{90^0}{4}\right)$ νὰ εὑρεθοῦν τὰ $συν\left(\frac{90^0}{8}\right)$, $συν\left(\frac{90^0}{16}\right)$, ὡς καὶ τὰ ἡμίτονα, αἱ ἐφαπτόμεναι καὶ αἱ συνεφαπτόμεναι αὐτῶν.

124) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἑκάστου τῶν τόξων $\frac{30^0}{2}$, $\frac{30^0}{4}$, $\frac{30^0}{8}$.

125) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ημ2α, ὅταν εἶναι $εφα=\frac{16}{63}$.

126) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ τὸ συν2α, ὅταν εἶναι $εφα=\frac{9}{16}$.

127) Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι

$$2ημ(45^0-α)συν(45^0-α)=συν2α.$$

128) Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι $2συν^2(45^0-α)-1=ημ2α$.

129) Ὁμοίως, ὅτι $\frac{ημ2α}{1+συν2α}=εφα$.

130) Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι $\frac{ημ2α}{1-συν2α}=σφα$.

131) Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι $εφα-σφα=-2σφ2α$.

132) Ὁμοίως, ὅτι $σφ2α=\frac{σφ^2α-1}{2σφα}$.

133) Νὰ δειχθῇ, ὅτι εἶναι $ημ3α=3ημα-4ημ^3α$.

134) Ὁμοίως νὰ δειχθῇ, ὅτι $συν3α=4συν^3α-3συνα$.

135) Ὁμοίως, ὅτι $εφ3α=\frac{3εφα-εφ^3α}{1-3εφ^2α}$.

136) Νὰ δειχθῇ, ὅτι $συν^2α-ημ^2α=συνασυν3α$.

137) Ὁμοίως νὰ δειχθῇ, ὅτι $\frac{εφ^2 2α-εφ^2α}{1-εφ^2 2αεφ^2α}=εφ3αεφα$

Μετασχηματισμοὶ ἀθροισμάτων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν εἰς γινόμενα.

50. Ἐκ τῶν θεμελιωδῶν τύπων (3), (5), (4), (6) τῶν ἐδαφίων 44 καὶ 45

$$ημ(α+β)=ημασυνβ+ημβσυνα$$
$$ημ(α-β)=ημασυνβ-ημβσυνα$$
$$συν(α+β)=συνασυνβ-ημαημβ$$
$$συν(α-β)=συνασυνβ+ημαημβ$$

εὑρίσκομεν εὐκόλως τοὺς ἑξῆς τύπους διὰ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως.

$$\begin{aligned}&ημ(α+β)+ημ(α-β)=2ημασυνβ\\&ημ(α+β)-ημ(α-β)=2συναημβ\qquad(1)\\&συν(α+β)+συν(α-β)=2συνασυνβ\\&συν(α-β)-συν(α+β)=2ημαημβ\end{aligned}$$

Διὰ τῶν ἀνωτέρω τύπων, οἱ ὁποῖοι γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$2ημασυνβ=ημ(α+β)+ημ(α-β).$$
$$2συναημβ=ημ(α+β)-ημ(α-β).$$
$$2συνασυνβ=συν(α+β)+συν(α-β)$$
$$2ημαημβ=συν(α-β)-συν(α+β)$$

παρατηροῦμεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν γινόμενα ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων εἰς ἀθροίσματα καὶ διαφορὰς ὡς ἐπὶ π. δ.

1) $2ημ3ασυνα=ημ4α+ημ2α$

2) $2\sigma\upsilon\nu 7\alpha\sigma\upsilon\nu 2\alpha=\sigma\upsilon\nu 9\alpha+\sigma\upsilon\nu 5\alpha$

3) $2\eta\mu 5\alpha\eta\mu\alpha=\sigma\upsilon\nu 4\alpha-\sigma\upsilon\nu 6\alpha$.

Ἀλλ' ὁ μετασχηματισμός, τοῦ ὁποίου γίνεται μεγαλυτέρα χρῆσις, εἶναι ἐκεῖνος διὰ τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νὰ μετατρέψωμεν ἀθροίσματα ἢ διαφορὰς εἰς γινόμενα· καὶ τοῦτο διότι ὁ μετασχηματισμὸς οὗτος ἐπιτρέπει εὔκολον ἐφαρμογὴν τοῦ λογισμοῦ διὰ τῶν λογαρίθμων.

Πρὸς τοῦτο δίδομεν εἰς τοὺς ἀνωτέρω τύπους (1) διάφορον μορφὴν ὡς ἑξῆς.

Θέτομεν $\alpha+\beta=A$ καὶ $\alpha-\beta=B$, ὁπότε προκύπτει

$$\alpha=\frac{A+B}{2} \quad \text{καὶ} \quad \beta=\frac{A-B}{2},$$

οἱ δὲ ἀνωτέρω τύποι γίνονται

$$\eta\mu A+\eta\mu B=2\eta\mu\frac{A+B}{2}.\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$$

$$\eta\mu A-\eta\mu B=2\eta\mu\frac{A-B}{2}.\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B=2\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}.\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu B-\sigma\upsilon\nu A=2\eta\mu\frac{A+B}{2}.\eta\mu\frac{A-B}{2}.$$

Σημείωσις. Ὁ τελευταῖος τύπος γράφεται ἐνίοτε καὶ ὡς ἑξῆς.

$$\sigma\upsilon\nu A-\sigma\upsilon\nu B=-2\eta\mu\frac{A+B}{2}\eta\mu\frac{A-B}{2}=2\eta\mu\frac{A+B}{2}\eta\mu\frac{B-A}{2}.$$

51. Ἐκ τῶν δύο πρώτων τύπων προκύπτει ὁ ἑξῆς τύπος διὰ τῆς διαιρέσεως

$$\frac{\eta\mu A-\eta\mu B}{\eta\mu A+\eta\mu B}=\frac{2\eta\mu\frac{A-B}{2}.\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}}{2\eta\mu\frac{A+B}{2}.\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}}=\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}\sigma\varphi\frac{A+B}{2},$$

$$\text{ἤτοι} \quad \frac{\eta\mu A-\eta\mu B}{\eta\mu A+\eta\mu B}=\frac{\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}}{\varepsilon\varphi\frac{A+B}{2}}.$$

Σημείωσις. Παραδείγματα μετασχηματισμοῦ ἀθροισμάτων ἢ διαφορῶν ἐφαπτομένων κλπ. εἰς γινόμενα δίδουν αἱ ἀσκήσεις 110—113.

Ἐφαρμογή. Νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς γινόμενα τὰ ἀθροίσματα $1+\sigma\upsilon\nu\alpha$, $1+\varepsilon\varphi\alpha$.

1ον) Ἐπειδὴ $1=\sigma\upsilon\nu 0^0$, ἔχομεν

$$1+\sigma\upsilon\nu\alpha=\sigma\upsilon\nu 0^0+\sigma\upsilon\nu\alpha=2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}=2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}$$

2ον) $1+\varepsilon\varphi\alpha=\varepsilon\varphi 45^0+\varepsilon\varphi\alpha=\frac{\eta\mu(45^0+\alpha)}{\sigma\upsilon\nu 45^0\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{2\eta\mu(45^0+\alpha)}{\sqrt{2}.\sigma\upsilon\nu\alpha}$

$=\frac{\sqrt{2}.\eta\mu(45^0+\alpha)}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$.

Ἀσκήσεις.

138) Νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς ἀθροίσματα τὰ γινόμενα:

$2\eta\mu 35^0\sigma\upsilon\nu 25^0$ $\qquad$ $2\sigma\upsilon\nu 40^0\eta\mu 50^0$

$2\sigma\upsilon\nu 85^0\sigma\upsilon\nu 35^0$ $\qquad$ $2\eta\mu 68^0\eta\mu 22^0$

139) Ὁμοίως τὰ

$\eta\mu 12^0\sigma\upsilon\nu 18^0$ $\qquad$ $\sigma\upsilon\nu 70^0\eta\mu 20^0$

$\sigma\upsilon\nu 22^0 45'.\sigma\upsilon\nu 97^0 15'$ $\qquad$ $\eta\mu 78^0 40'.\eta\mu 71^0 20'$.

140) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι

$$2\sigma\upsilon\nu 50^0.\eta\mu 10^0+2\eta\mu 5^0.\sigma\upsilon\nu 35^0=\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

141) Ὁμοίως νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι

$2\eta\mu 40^0\sigma\upsilon\nu 20^0+2\eta\mu 50^0\eta\mu 20^0=\sqrt{3}$.

142) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως

$2\eta\mu 52^0 30'.\eta\mu 37^0 30'$.

143) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐν παντὶ τριγώνῳ ΑΒΓ εἶναι

$2\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}=\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B$.

144) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$\eta\mu\frac{\alpha}{2}\eta\mu\frac{7\alpha}{2}+\eta\mu\frac{3\alpha}{2}\eta\mu\frac{11\alpha}{2}=\eta\mu 2\alpha\eta\mu 5\alpha$.

145) Ὁμοίως νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$\eta\mu(45^0+\alpha)\eta\mu(45^0-\alpha)=\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2\alpha$.

146) Νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς γινόμενα τὰ

$\eta\mu 30^0+\eta\mu 20^0$ $\qquad$ $\sigma\upsilon\nu 64^0+\sigma\upsilon\nu 24^0$

$\eta\mu 45^0-\eta\mu 25^0$ $\qquad$ $\sigma\upsilon\nu 45^0-\sigma\upsilon\nu 105^0$.

147) Ὁμοίως νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς γινόμενα τὰ
συν66^0+συν21^0 συν$82^0 30'$+συν$9^0 30'$.

148) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ ημ75^0+ημ15^0.

149) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ $\frac{\eta\mu 75^0 - \eta\mu 15^0}{\sigma\upsilon\nu 75^0 + \sigma\upsilon\nu 15^0}$.

150) Νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς γινόμενα τὰ
1—συνα, 1+ημα, 1—ημα.

151) Νὰ δειχθῇ, ὅτι $\frac{\eta\mu 5\alpha - \eta\mu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu 5\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha} = \epsilon\varphi\alpha$.

152) Ὁμοίως νὰ δειχθῇ, ὅτι $\frac{\eta\mu 5\alpha - \eta\mu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu 5\alpha} = \epsilon\varphi\alpha$.

153) Ὁμοίως νὰ δειχθῇ, ὅτι $\frac{\eta\mu\alpha + \eta\mu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \sigma\varphi\frac{\alpha}{2}$.

154) Ὁμοίως νὰ δειχθῇ, ὅτι $\frac{\sigma\upsilon\nu 2\beta - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\eta\mu 2\beta + \eta\mu 2\alpha} = \epsilon\varphi(\alpha - \beta)$.

155) Νὰ δειχθῇ, ὅτι εἶναι ημ50^0—ημ70^0+ημ10^0=0.

156) Ὁμοίως, ὅτι εἶναι
ημ10^0+ημ20^0+ημ40^0+ημ50^0=ημ70^0+ημ80^0.

157) Νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς γινόμενα τὰ ἀθροίσματα
ημα+2ημ2α +ημ3α
συνα+2συν2α+συν3α.

158) Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις
$$\frac{\sigma\upsilon\nu 3x + 2\sigma\upsilon\nu 5x + \sigma\upsilon\nu 7x}{\sigma\upsilon\nu x + 2\sigma\upsilon\nu 3x + \sigma\upsilon\nu 5x}.$$

159) Νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς γινόμενα τὰ
σφα—σφβ, εφα—σφβ 1—εφα.

160) Νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς γινόμενα τὰ
ημα+συνβ, ημα—συνβ (θέτομεν β=90^0—β').

161) Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι
$$\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha} = \sigma\varphi\frac{\alpha+\beta}{2}\sigma\varphi\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

162) Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι
$$\epsilon\varphi 2\alpha - \epsilon\varphi\alpha = \frac{\epsilon\varphi\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}.$$

163) Ἐὰν α+β+γ=180^0, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι
$$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma = 4\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\beta}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\gamma}{2}.$$

164) Ομοίως, ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=180^0$, ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\gamma-1=4\eta\mu\frac{\alpha}{2}\eta\mu\frac{\beta}{2}\eta\mu\frac{\gamma}{2}.$$

165) Ἐὰν ἡ γωνία Γ τοῦ τριγωνου ΑΒΓ εἶναι 60^0 νὰ δειχθῇ, ὅτι $2(\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B)=4\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}+1$.

166) Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐν παντὶ τριγώνῳ ΑΒΓ εἶναι

$$\eta\mu 2A+\eta\mu 2B+\eta\mu 2\Gamma=4\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

Περὶ τριγωνομετρικῶν πινάκων.

Κατασκευὴ τῶν πινάκων.

52. Εἴδομεν εἰς τὴν εἰσαγωγήν, ὅτι διὰ νὰ ἐπιτευχθῇ ὁ σκοπὸς τῆς τριγωνομετρίας πρέπει, νὰ εὑρεθῇ τρόπος ὥστε, εἰς ἑκάστην γωνίαν ἢ τόξον ν' ἀντιστοιχῇ εἷς ἀριθμός, διὰ τοῦ ὁποίου νὰ δυνάμεθα νὰ εὑρίσκωμεν τὴν γωνίαν ἢ τὸ τόξον μετὰ βεβαιότητος. Εἷς τῶν τρόπων τούτων εἶναι νὰ μετρήσωμεν τὰς χορδὰς τῶν τόξων (ἤτοι τὰ ἡμίτονα διπλᾶ) καὶ νὰ κατασκευάσωμεν διὰ τῶν ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους θὰ εὕρωμεν, ἕνα πίνακα, λεγόμενον *πίνακα χορδῶν*. Τοιοῦτος πίναξ, περιέχων τὰ μήκη τῶν χορδῶν τῶν τόξων ἀπὸ μοίρας εἰς μοῖραν προχωρούντων, εὑρίσκεται ἤδη ἐν τῇ μαθηματικῇ συντάξει τοῦ Ἕλληνος ἀστρονόμου Πτολεμαίου.

53. Ἐκ τῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων, οἱ ὁποῖοι εἶναι σήμερον ἐν χρήσει, οἱ μὲν περιέχουν τὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν τῶν τόξων ἀπὸ 0^0-90^0 καὶ λέγονται πίνακες τῶν *φυσικῶν* τιμῶν τῶν τριγωνομετρικῶν γραμμῶν, οἱ δὲ περιέχουν τοὺς λογαρίθμους τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν τόξων ἀπὸ 0^0-90^0 καὶ λέγονται ***λογαριθμικοὶ τριγωνομετρικοὶ πίνακες***.

Εἶναι δὲ οἱ τελευταῖοι οὗτοι πίνακες συνηθεστάτης χρήσεως εἰς τὰ μαθηματικά, διότι συνήθως οἱ λογισμοὶ γίνονται διὰ τῶν λογαρίθμων, ἐνῷ οἱ πρῶτοι πίνακες σπανιώτατα χρησιμοποιοῦνται.

Στηρίζεται δὲ ὁ λογισμὸς τῶν τοιούτων πινάκων (π.χ. τῶν προχωρούντων ἀπὸ λεπτοῦ εἰς λεπτὸν) ἐπὶ τῆς θεμελιώδους σχέσεως $ημ^2α+συν^2α=1$.

Καὶ πράγματι, ἐὰν εὑρεθῇ τὸ ημ1′, ἐξ αὐτῆς εὑρίσκεται ἀμέσως καὶ τὸ συνημίτονον αὐτοῦ. Ἐξ αὐτῶν δὲ διὰ τῶν ἄλλων θεμελιωδῶν τύπων τοῦ ημ(α+β) καὶ τοῦ συν(α+β) εὑρίσκεται τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ τόξου 2′, ἐκ τούτων πάλιν διὰ τῶν αὐτῶν τύπων εὑρίσκεται καὶ τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ ἀθροίσματος 2′+1′, ἤτοι 3′. Ἔπειτα τοῦ ἀθροίσματος 3′+1′ κ.ο.κ. ἐφ' ὅσον θέλομεν.

Ἔχοντες οὕτω τὰ ἡμίτονα καὶ τὰ συνημίτονα εὑρίσκομεν καὶ τὰς ἐφαπτομένας καὶ τὰς συνεφαπτομένας τῶν αὐτῶν τόξων.

54. Λογαριθμικοὶ τριγωνομετρικοὶ πίνακες ὑπάρχουν μὲ 4, 5 ἢ καὶ 7 δεκαδικὰ ψηφία, ἐκ τῶν ὁποίων τελειότεροι εἶναι οἱ τοῦ Dupuis καὶ τοῦ Callet. Ἡμεῖς θὰ περιγράψωμεν τοὺς πενταψηφίους πίνακας τοῦ Dupuis, οἱ ὁποῖοι περιέχουν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἡμιτόνων, συνημιτόνων, ἐφαπτομένων καὶ συνεφαπτομένων ἀπὸ 0^0—90^0 κατὰ λεπτὸν προχωρούντων. Κυρίως ὅμως οἱ τοιοῦτοι πίνακες περιέχουν τοὺς λογαρίθμους τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 0—45^0, ἕνεκα τῆς γνωστῆς ἰδιότητος τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν συμπληρωματικῶν τόξων. Οὕτως, ὅταν ἔχωμεν π.χ. τὸν λογάριθμον τοῦ $ημ30^0$ ἔχομεν συγχρόνως καὶ τὸν λογάριθμον τοῦ $συν60^0$, διότι $ημ30^0=συν60^0$.

55. **Διάταξις τῶν πινάκων** Dupuis.—Αὕτη φαίνεται ἐκ τοῦ πίνακος τῆς ἑπομένης σελίδος.

Αἱ μοῖραι τῶν τόξων ἀπὸ 0^0—45^0 εἶναι γραμμέναι εἰς τὸ ἄνω μέρος τῆς σελίδος, τὰ δὲ πρῶτα λεπτὰ εἰς τὴν πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλην αὐξανόμενα πρὸς τὰ κάτω. Ὁ δὲ λογάριθμος ἑκάστου τῶν τεσσάρων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν (sinus=ἡμιτόνου, tangente=ἐφαπτομένης, contangente=συνεφαπτομένης

	Sin.	D	Tang.	D	Cotg.	Cos.	D	
0	$\overline{1}$,48998	39	$\overline{1}$,51178	43	0,48822	$\overline{1}$,97821	4	60
1	9037	39	1221	43	8779	7817	5	59
2	9076	39	1264	42	8736	7812	4	58
3	9115	38	1306	43	8694	7808	4	57
4	9153	39	1349	43	8641	7804	4	56
5	9192	39	1392	43	8608	7800	4	55
6	9231	38	1435	43	8565	7796	4	54
7	9269	39	1478	42	8522	7792	4	53
8	9308	39	1520	43	8480	7788	4	52
9	9347	38	1563	43	8437	7784	5	51
10	9385	39	1606	42	8394	7779	4	50
11	9424	38	1648	43	8352	7775	4	49
12	9462	38	1691	43	8309	7771	4	48
13	9500	39	1734	42	8266	7767	4	47
14	9539	38	1776	43	8224	7763	4	46
15	9577	38	1819	42	8181	7759	5	45
16	9615	39	1861	42	8139	7754	4	44
17	9654	38	1903	43	8097	7750	4	43
18	9692	38	1946	43	8054	7746	4	42
19	9730	38	1988	43	8012	7742	4	41
20	9768	38	2031	42	7969	7738	4	40
21	9806	38	2073	42	7927	7734	5	39
22	9844	38	2115	42	7885	7729	4	38
23	9882	38	2157	43	7843	7725	4	37
24	9920	38	2200	42	7800	7721	4	36
25	9958	38	2242	42	7758	7717	4	35
26	$\overline{1}$.49996	38	2284	42	7716	7713	5	34
27	$\overline{1}$,50034	38	2326	42	7674	7708	4	33
28	0072	38	2368	42	7632	7704	4	32
29	0110	38	2410	42	7590	7708	4	31
30	$\overline{1}$,50148		$\overline{1}$,52452		0,47548	$\overline{1}$,97696		30
	Cos.		Cotg.		Tang.	Sin.		

καὶ cosinus=συνημιτόνου) εὑρίσκεται γραμμένος ἐκεῖ ὅπου διασταυροῦνται ἡ ὁριζοντία σειρά, ἡ ὁποία ἔχει τὰ πρῶτα λεπτὰ μετὰ τῆς στήλης, ἐπὶ τῆς ὁποίας εὑρίσκεται γραμμένον τὸ ὄνομα τοῦ τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἐπειδὴ δὲ πολλοὶ ἐφεξῆς λογάριθμοι ἔχουν κοινὰ τὰ δύο πρῶτα ψηφία (τὸ χαρακτηριστικὸν καὶ τὰ δέκατα), γράφονται ταῦτα ἅπαξ καὶ νοοῦνται ἐπαναλαμβανόμενα τὰ αὐτά, μέχρις οὗ ἀλλαχθοῦν. Ἐπαναλαμβάνονται ὅμως πρὸς εὐκολίαν τῆς εὑρέσεως αὐτῶν εἰς τὴν ἀρχὴν καὶ εἰς τὸ τέλος ἑκάστης σελίδος. Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον βλέπομεν ὅτι εἶναι

$$\text{λογ ημ}(18^0\ 10')=\overline{1},49385$$
$$\text{λογ εφ}(18^0\ 13')=\overline{1},51734$$
$$\text{λογ σφ}(18^0\ 0')=0.48,822$$
$$\text{λογ συν}(18^0\ 30')=\overline{1},97696$$

Τῶν τόξων τῶν μεγαλυτέρων τῶν 45^0 αἱ μὲν μοῖραι εὑρίσκονται εἰς τὸ κάτω μέρος τῆς σελίδος, τὰ δὲ πρῶτα λεπτὰ αὐτῶν εἰς τὴν τελευταίαν στήλην πρὸς τὰ δεξιὰ αὐξανόμενα πρὸς τὰ ἄνω· ἐγράφησαν δὲ οὕτω τὰ τόξα ταῦτα, ὥστε ἕκαστον νὰ εὑρίσκηται μετὰ τοῦ συμπληρώματος αὐτοῦ εἰς τὴν αὐτὴν σελίδα καὶ οἱ λογάριθμοι τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἀμφοτέρων τῶν συμπληρωματικῶν τόξων νὰ εὑρίσκωνται ἐν μιᾷ καὶ τῇ αὐτῇ ὁριζοντίᾳ σειρᾷ. Τὸ εἶδος τοῦ ἀριθμοῦ διὰ τὰ τόξα αὐτὰ ἐγράφη ὑποκάτω τῶν στηλῶν, ἐγράφη δὲ cos ὑπὸ τὴν στήλην τῶν sin, sin ὑπὸ τὴν στήλην τῶν cos, cotg ὑπὸ τὴν στήλην τῶν tang καὶ τἀνάπαλιν tang ὑπὸ τὴν στήλην τῶν cotg, ἕνεκα τῆς ἰδιότητος τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν συμπληρωματικῶν τόξων.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦταν βλέπομεν, ὅτι εἶναι

$$\text{λογσυν}(71^050')=\overline{1},49385=\text{λογημ}(18^010')$$
$$\text{λογσφ}(71^047')=\overline{1},51734=\text{λογεφ}(18^013')$$
$$\text{λογεφ}(71^060')=0,48822=\text{λογσφ}(18^0\ 0')$$
$$\text{λογημ}(71^030')=\overline{1},97696=\text{λογσυν}(18^030').$$

56. Οἱ λογάριθμοι τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων εἶναι ἀρνητικοὶ ἀριθμοί, διότι ταῦτα εἶναι μικρότερα τῆς μονά-

δος· εἰς τοὺς πίνακας ὅμως ἐτράπησαν εἰς ἄλλους, ἔχοντας τὸ χαρακτηριστικὸν ἀρνητικὸν (Στοιχεῖα Ἀλγέβρας).

Πρὸς τὰ δεξιὰ ἑκάστης στήλης λογαρίθμων ὑπάρχει ἄλλη στήλη, ἐπὶ τῆς κορυφῆς τῆς ὁποίας ὑπάρχει τὸ γράμμα D (Différences)· ἐν αὐτῇ εὑρίσκονται γραμμέναι αἱ διαφοραὶ δύο ἐφεξῆς λογαρίθμων, ἤτοι ἡ αὔξησις ἢ ἡ ἐλάττωσις ἑκάστου λογαρίθμου, ἡ πρὸς τὴν αὔξησιν τοῦ τόξου κατὰ 1′ ἀντιστοιχοῦσα. Τὴν χρῆσιν τῶν διαφορῶν τούτων θὰ ἴδωμεν κατωτέρω.

57. Οἱ λογάριθμοι τῶν ἐφαπτομένων καὶ συνεφαπτομένων ἔχουν τὰς αὐτὰς διαφοράς, διότι ἐκ τῆς ἰσότητος εφα.σφα=1 ἕπεται

$$\text{λογεφα}+\text{λογσφα}=0 \text{ ἢ } \text{λογσφα}=-\text{λογεφα}$$

ἤτοι οἱ λογάριθμοι τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς συνεφαπτομένης τοῦ αὐτοῦ τόξου εἶναι πάντοτε ἀντίθετοι ἀριθμοί· ἐπομένως ἐὰν αὐξηθῇ ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν κατὰ δ, θὰ ἐλαττωθῇ ὁ ἄλλος κατὰ δ.

Χρῆσις τῶν πινάκων.

58. Ἡ χρῆσις τῶν λογαριθμικῶν πινάκων τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν ἑπομένων δύο προβλημάτων.

Πρόβλημα 1ον.—*Δοθέντος τόξου νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος ἑνὸς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν αὐτοῦ.*

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

1) Ἂν τὸ δοθὲν τόξον περιέχῃ μόνον μοίρας καὶ πρῶτα λεπτά, ὁ ζητούμενος λογάριθμος εὑρίσκεται εἰς τοὺς πίνακας ἀμέσως. Οὕτως εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned} &\text{λογ ημ}(75^{0}18') = \overline{1},98555 \\ &\text{λογ συν}(83^{0}15') = \overline{1},07018 \\ &\text{λογ εφ}(14^{0}16') = \overline{1},40531 \\ &\text{λογ σφ}(87^{0}14') = \overline{2},68417. \end{aligned}$$

2) Ἂν τὸ δοθὲν τόξον περιέχῃ καὶ δεύτερα λεπτὰ ὡς π.χ. τὸ τόξον 44⁰17′22′′ καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον

τοῦ ἡμιτόνου του ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Κατὰ πρῶτον παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν τὸ τόξον αὐξάνῃ ἀπὸ 0^0-90^0 τὸ ἡμίτονον αὐξάνει. Ἑπομένως ὁ λογ ημ$(44^0 17' 22'')$ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ λογημ$(44^0 17')$ καὶ μικρότερος τοῦ λογ ημ$(44^0 18')$· ἀλλὰ

$$\text{λογ ημ}(44^0\,17')=\overline{1},84398$$
$$\text{λογ ημ}(44^0\,18')=\overline{1},84411.$$

Ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων τούτων εἶναι 13 (μονάδες τῆς τελευταίας τάξεως), ἀλλὰ καὶ ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἑπομένων εἶναι πάλιν 13 καὶ ἡ διαφορὰ αὕτη δύο ἐφεξῆς λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων ἐπὶ πολὺ διατηρεῖται· ὥστε δυνάμεθα νὰ παραδεχθῶμεν, ὅτι *ἡ αὔξησις τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀνάλογος τῆς αὐξήσεως τῶν τόξων,* ὅτε σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Δι' αὔξησιν ἑνὸς λεπτοῦ ἀπὸ τόξου $44^0\,17'$ εἰς τόξον 44^0 καὶ $18'$ ηὐξήθη ὁ λογάριθμος τοῦ ἡμιτόνου κατὰ 13 (ἑκατοντάκις χιλιοστά)· δι' αὔξησιν $22''$, ἤτοι $\frac{22}{60}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ ἀπὸ τοῦ τόξου $44^0\,17'$ εἰς τὸ δοθὲν τόξον $44^0\,17'\,22''$, ὁ ἄνω λογάριθμος θὰ αὐξηθῇ κατὰ $\frac{22}{60}.13$, ἤτοι κατὰ 5 (περίπου)· ὥστε πρέπει νὰ προσθέσωμεν 5 μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως εἰς τὸν λογημ$(44^0\,17')$, ἵνα εὕρωμεν τὸν λογάριθμον ημ$(44^0\,17'\,22'')$, ἑπομένως εἶναι

$$\text{λογημ}(44^0 17' 22'')=\overline{1},,84403.$$

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον εὑρίσκονται καὶ οἱ ἑπόμενοι λογάριθμοι

1) λογεφ $14^0\;38'\;4'')$.

Ἔχομεν λογεφ$(14^0 38')=\overline{1},41681$, διαφορὰ 52

διὰ $40''$ προστίθενται $\frac{40}{60}.52=35$, (διότι αἱ ἐφαπτόμεναι αὐξάνουν, ὅταν τὸ τόξον αὐξάνῃ).

Ὅθεν λογεφ$(14^0\;38'\;40'')=\overline{1},41716$

2) λογσφ$(8^0\;9'\;10'')$

ἔχομεν λογσφ$(8^0\;9')=0,84402$, διαφορὰ 90 διὰ 10″ ἀφαιροῦνται $\frac{10}{60}$. 90=15 (διότι αἱ συνεφαπτόμεναι ἐλαττοῦνται, ὅταν τὸ τόξον αὐξάνῃ).

῞Οθεν λογεφ(8^0 9′ 10″)=0,84387.

3) λογσυν(69^0 14′ 25″).

῎Εχομεν λογσυν(69^0 14′)=$\bar{1}$,54969, διαφορὰ 33·

διὰ 25″ ἀφαιροῦνται $\frac{25}{60}$.33=14 (διότι τὸ συνημίτονον ἐλαττοῦται, ὅταν τὸ τόξον αὐξάνῃ ἀπὸ 0^0—90^0).

῞Οθεν λογσυν(69^0 14′ 25″)=$\bar{1}$,54955.

Πρόβλημα 2ον.—*Ἐκ τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς τῶν τριγωνοτρικῶν ἀριθμῶν, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀντιστοιχοῦν τόξον* (τὸ τόξον τοῦτο ὑποτίθεται πάντοτε μικρότερον τῶν 90^0).

1) Ἂν ὁ δοθεὶς λογάριθμος περιέχεται εἰς τοὺς πίνακας εἰς τὴν οἰκείαν στήλην, τὸ τόξον εὑρίσκεται ἀμέσως· ἂν π.χ. δοθῇ

λογσυνα=$\bar{1}$,97615

εὑρίσκομεν ἐκ τῶν πινάκων ἀμέσως α=18^0 49^0.

Ὁμοίως, ἂν δοθῇ λογεφχ=0,03060

εὑρίσκομεν ἐκ τῶν πινάκων χ=47^0 1′.

2) Ἂν ὁ δοθεὶς λογάριθμος δὲν ὑπάρχῃ εἰς τοὺς πίνακας, θὰ περιλαμβάνεται μεταξὺ δύο ἐφεξῆς λογαρίθμων τοῦ ρηθέντος ἀριθμοῦ καὶ ἑπομένως τὸ ζητούμενον τόξον θὰ περιλαμβάνηται μεταξὺ τῶν πρὸς αὐτοὺς ἀντιστοιχούντων τόξων, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ εἶναι 1′.

Ἂν π. χ. δοθῇ λογημα=$\bar{1}$,40891

εὑρίσκομεν εἰς τὴν στήλην τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων

$\bar{1}$,40873=λογημ (14^0 51′)

$\bar{1}$,40921=λογημ (14^0 52′)·

ὁ δοθεὶς λογάριθμος $\bar{1}$,40891 περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τούτων, οἵτινες διαφέρουν κατὰ 48. Παραδεχόμενοι δέ, ὡς καὶ πρίν, ὅτι ἡ αὔξησις τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀνάλογος τῆς αὐξήσεως τῶν τόξων, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς· ἂν ὁ λογάριθμος ημ($14^0$51′), ὅστις εἶναι $\bar{1}$,40873, αὐξηθῇ κατὰ 48 (μονάδας τῆς κατωτάτης τάξεως), τὸ τόξον αὐξάνεται κατὰ 1′ ἤτοι 60″· ἂν δὲ ὁ αὐτὸς λογάριθμος αὐξηθῇ μόνον κατὰ 18 (ὅτε γίνεται ἴσος μὲ τὸν δοθέντα) τὸ τόξον θὰ αὐξηθῇ κατὰ $60''.\frac{18}{48}$ ἤτοι κατὰ 22'' περίπου· ὥστε εἶναι α=14° 51' 22''. [1]

Ὁμοίως ἂν δοθῇ λογσυνβ=$\overline{1}$,89885,
εὑρίσκομεν $\overline{1}$,89888=λογσυν(37° 36')
και $\overline{1}$,89879=λογσυν(37° 37'),
ἐπειδὴ δὲ ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων τούτων εἶναι 9, ὁ δὲ δοθεὶς διαφέρει τοῦ πρώτου κατὰ 3, ἕπεται, ὅτι πρέπει νὰ αὐξηθῇ τὸ τόξον 37° 36' κατὰ $\frac{3}{9}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ, ἤτοι κατὰ 20'', ἵνα γίνῃ ἴσον τῷ τόξῳ β. Ὥστε εἶναι β=37° 36' 20''.

Ὁμοίως, ἂν δοθῇ λογεφχ=1,25849
εὑρίσκομεν 1,25708=λογεφ(86° 50')
1,25937=λογεφ(86° 51').

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι, ἂν ὁ λογάριθμος 1,25708 αὐξηθῇ κατὰ 229 (ὅτε γίνεται 1,25937), τὸ ἀντιστοιχοῦν τόξον 86° 50', αὐξάνει κατὰ 1'. Ὥστε, ἂν ὁ αὐτὸς λογάριθμος αὐξηθῇ μόνον κατὰ 141 (ὅτε γίνεται ἴσος μὲ τὸν δοθέντα) θὰ αὐξηθῇ τὸ τόξον κατὰ $60''.\frac{141}{229}$ ἤτοι κατὰ 37'' περίπου· ὥστε εἶναι χ'=86°50'37''

Ἔστω ἤδη λογσφω=0,11101.

---

(1) Ἐπειδὴ λογημ45° = $\overline{1}$, 84949=λογσυν45°, ἕπεται ὅτι, ὅταν ὁ διδόμενος λογάριθμος εἶναι μικρότερος τοῦ $\overline{1}$,84949 τὸ τόξον εἶναι μικρότερον τῶν 45°, ἐὰν δίδεται ὁ λογημ. καὶ μεγαλύτερον τῶν 45°, ἐὰν δίδεται ὁ λογσυν. Ὥστε εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν θὰ ἀναγινώσκωμεν εἰς τοὺς πίνακάς μας ἐν τῇ οἰκείᾳ στήλῃ, πρὸς ἀνεύρεσιν τοῦ δεδομένου λογαρίθμου, ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω καὶ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν θὰ ἀναγινώσκωμεν ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω. Ἀντιστρόφως δὲ θὰ ἀναγινώσκωμεν, ἐὰν ὁ διδόμενος λογάριθμος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ $\overline{1}$,84949. Ἐὰν ζητεῖται τὸ τόξον ἐκ τοῦ λογαρίθμου τῆς ἐφαπτομένης ἢ τῆς συνεφαπτομένης καὶ εἶναι οὗτος ἀρνητικός, τὸ τόξον εἶναι μικρότερον τῶν 45°, ἐὰν ὁ λογάριθμος εἶναι τῆς ἐφαπτομένης καὶ μεγαλύτερον τῶν 45°, ἐὰν εἶναι τῆς συνεφαπτομένης· ἀντιστρόφως δὲ συμβαίνει ἐὰν ὁ διδόμενος λογάριθμος εἶναι θετικός. Κατόπιν τούτων εὐκόλως ἕπεται ἡ φορὰ καθ' ἣν θὰ ἀναγινώσκωμεν εἰς τοὺς πίνακας εἰς ἑκάστην περίπτωσιν.

Ἔχομεν 0,11110=λογσφ(37° 45′), διαφορὰ 26· διὰ διαφορὰν 9 (ἐπὶ ἔλαττον) πρέπει νὰ αὐξηθῇ τὸ τόξον κατὰ $60''.\frac{9}{26}$, ἤτοι κατὰ 21″ περίπου· ὥστε εἶναι ω=37° 45′ 21″.

59. ***Παρατήρησις.*** Ἐνίοτε ἀντὶ νὰ δοθῇ ὁ λογάριθμος τριγωνομετρικοῦ τινος ἀριθμοῦ, δίδεται αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς καὶ ζητεῖται τὸ ἀντιστοιχοῦν τόξον. Τότε διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

1η) Ἂν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι θετικός, εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον αὐτοῦ (ἐκ τοῦ πίνακος, ὅστις περιέχει τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν) καὶ ἐξ αὐτοῦ τὸ τόξον.

Ἂν π.χ. ζητεῖται τὸ τόξον χ, διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι $ημχ=\frac{1}{5}$,

ἔχομεν $λογημχ=λογ\left(\frac{1}{5}\right)=-λογ5=\overline{1},30103$· ὅθεν

$$χ=11^0\ 32'13''.$$

Ὁμοίως, ἂν ζητῆται τὸ τόξον φ, διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι

$$εφφ=\frac{8}{\sqrt{45}}$$

θὰ ἔχωμεν $λογεφφ=λογ8-\frac{1}{2}\,λογ\,45$

$$λογ8=0,90309$$

λογ45=1,65321 $\quad \frac{1}{2}\,λογ45=0,82660$

ὥστε $λογεφφ=0,07649$

καὶ $φ=50^0\ 1'\ 12''.$

2α) Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι ἀρνητικός, τότε ἀντὶ τοῦ ζητουμένου τόξου, εὑρίσκομεν τὸ παραπλήρωμα αὐτοῦ, ἂν ὁ ἀριθμὸς εἶναι συνημίτονον ἢ ἐφαπτομένη ἢ συνεφαπτομένη· διότι τὸ παραπλήρωμα θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν θετικόν· εὑρεθέντος δὲ τοῦ παραπληρώματος αὐτοῦ, εὑρίσκεται ἀμέσως τὸ ζητούμενον τόξον.

Ἐὰν π.χ. δοθῇ $εφω=-4$,

παριστῶντες τὸ παραπλήρωμα τοῦ ω διὰ φ, θὰ ἔχωμεν

$$εφφ=εφ(180^0-ω)=4.$$

Ὅθεν $λογ\,εφφ=λογ4=0,60206$

$$φ=75^0\ 57'\ 50'',$$

ἐπομένως $\omega = 104^\circ\, 2'\, 10''$.

Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς εἶναι ἡμίτονον, τὸ ἀντιστοιχοῦν πρὸς αὐτὸν τόξον θὰ ὑπερβαίνῃ τὰς 180° καὶ ἀφαιροῦντες ἀπ' αὐτοῦ τὰς 180°, θὰ ἔχωμεν τόξον, τοῦ ὁποίου τὸ ἡμίτονον θὰ εἶναι ἀντίθετον τοῦ δοθέντος. Εὑρόντες δὲ τὸ τόξον τοῦτο, προσθέτομεν εἰς αὐτὸ τὰς 180° καὶ ἔχομεν τὸ ζητούμενον.

Ἐὰν π.χ. δοθῇ $ημχ = -\frac{1}{8}$,

θέτομεν $χ = 180^\circ + ω$, ὅτε ἔχομεν $ω = χ - 180^\circ$

καὶ $ημω = ημ(χ - 180^\circ) = \frac{1}{8}$,

ὅθεν $λογημω = λογ\left(\frac{1}{8}\right) = -λογ8$

ἤτοι $λογημω = \overline{1},09691$

ὅθεν $ω = 7^\circ\, 10'\, 51''$

καὶ $χ = 187^\circ\, 10'\, 51''$.

Σημείωσις. Πρὸς ἑκάστην τιμὴν ἑνὸς οἱουδήποτε τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἀντιστοιχοῦν δύο τόξα μικρότερα περιφερείας· ἐκ τούτων τὸ μικρότερον εὑρίσκεται κατὰ τὴν προηγουμένως ἐκτεθεῖσαν μέθοδον, ἐκ δὲ τούτου εὑρίσκεται καὶ τὸ ἄλλο εὐκόλως διὰ τῶν γνωστῶν ἰδιοτήτων τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.

Ἀσκήσεις.

Νὰ εὑρεθῇ

167) ὁ λογ ημ(29° 14′ 32″)

168) ὁ λογ συν(16° 27′ 47″)

169) ὁ λογ ημ(57° 45′ 28″)

170) ὁ λογ συν(65° 24′ 37″)

171) ὁ λογ εφ(22° 37′ 22″)

172) ὁ λογ σφ(17° 45″)

173) ὁ λογ εφ(61° 2′ 48″)

174) ὁ λογ σφ(58° 42′ 35″)

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ τόξα (τὰ μικρότερα τῶν 90°) δι' ἃ δίδεται

175) $λογημα = \overline{1},41745$

176) $λογσυνα = \overline{1},25807$

180) $συνα = \frac{5}{9}$

181) $εφα = 2\frac{1}{4}$

177) $\lambda o\gamma \epsilon\varphi\alpha = 0,31370$ 182) $\sigma\varphi\alpha = 0,875$

178) $\lambda o\gamma\sigma\varphi\alpha = \overline{1},05490$ 183) $\eta\mu\alpha = -\frac{7}{15}$

179) $\eta\mu\alpha = \frac{3}{8}$ 184) $\sigma\varphi\alpha = -3.$

185) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν κάτωθι παραστάσεων

$\beta = 89,25.\eta\mu\ 18^\circ\ 50'$ $\gamma = 112,35.\ \sigma\upsilon\nu 35^\circ\ 25'\ 30''$

$\beta = 5147,8.\epsilon\varphi\ 52^\circ\ 37'\ 20''$ $\gamma = 6009,6.\ \sigma\varphi 29^\circ\ 37'\ 20''.$

186) Ὁμοίως νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν κάτωθι παραστάσεων:

$$\alpha = 58.\ \eta\mu\ 49^\circ\ .\ \sigma\upsilon\nu\ 27^\circ\ 45'$$
$$\beta = 419.\ \eta\mu\ 65^\circ\ 20'.\ \eta\mu\ 39^\circ\ 22'\ 40''$$
$$\gamma = 708.\ \sigma\upsilon\nu\ 51^\circ 18'.\ \sigma\varphi\ 19^\circ 32'\ 35''.$$

187) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν παραστάσεων

$$E = \frac{1}{2}.317,5.429.\ \eta\mu\ 33^\circ\ 27.$$
$$\chi = \frac{4753.\eta\mu\ 45^\circ\ 40'.\sigma\upsilon\nu\ 19^\circ\ 9'}{91,8}.$$

188) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως

$$\frac{31,2^2\ \eta\mu\ 73^\circ\ 10'\ 30''}{\eta\mu\ 46^\circ\ 54'.\ \eta\mu\ 30^\circ 28''}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις καὶ συστήματα.

60. Τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις. — *Ἐξίσωσις περιέχουσα τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς ἀγνώστων γωνιῶν ἢ τόξων καλεῖται τριγωνομετρική.*

Λύσις δὲ ταύτης καλεῖται ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν γωνιῶν ἢ τόξων, αἵτινες τὴν ἐπαληθεύουν.

Παραδείγματα. Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $\eta\mu\chi = 0,2664$· ἔχομεν $\lambda o\gamma\eta\mu\chi = \overline{1},42553$ καὶ

$$\chi = 15^\circ\ 27' \text{ ἢ } 164^\circ\ 33'$$

ἐπειδὴ τὰ παραπληρωματικὰ τόξα ἔχουν τὰ αὐτὰ ἡμίτονα, ἢ $\chi = -344^\circ\ 33'$ ἢ $-195^\circ\ 27'$.

2) Ὁμοίως ἔστω ἡ $2ημ^2χ-3ημχ-2=0$.

Ἐὰν θέσωμεν $ημχ=ψ$, ἔχομεν $2ψ^2-3ψ-2=0$ ἐκ τῆς λύσεως τῆς ὁποίας λαμβάνομεν $ψ=2$ ἢ $-\frac{1}{2}$· ἀλλ' ἡ λύσις $ψ=2$ προφανῶς ἀπορρίπτεται καὶ μένει ἡ $ημχ=-\frac{1}{2}$· ἤτοι εἶναι $χ=-30^\circ$ ἢ 210°, ἢ $χ=330^\circ$ ἢ 150°.

3) Ἔστω πάλιν $2ημχ-εφχ=0$.

Ἔχομεν $2ημχ-\frac{ημχ}{συνχ}=0$ ἢ $ημχ\left(2-\frac{1}{συνχ}\right)=0$.

ὥστε εἶναι $ημχ=0$ ἢ $συνχ=\frac{1}{2}$·

ἐκ τῆς πρώτης λαμβάνομεν $χ=0$ ἢ ±180 καὶ ἐκ τῆς δευτέρας $χ=\pm60^\circ$ ἢ $\pm300^\circ$.

4) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $2συν^2χ+5ημχ-4=0$· εἰς ταύτην θέτομεν $1-ημ^2χ$ ἀντὶ $συν^2χ$ καὶ ἔχομεν $2ημ^2χ-5ημχ+2=0$. Λύοντες ἤδη ταύτην καθ' ὃν τρόπον ἐλύθη ἡ ἐξίσωσις τοῦ παραδ. 2 εὑρίσκομεν $ημχ=2$ ἢ $\frac{1}{2}$· ἀλλ' ἐκ τῶν λύσεων τούτων ἡ $ημχ=2$ ἀπορρίπτεται καὶ μένει ἡ $ημχ=\frac{1}{2}$, ἐξ ἧς λαμβάνομεν $χ=30^\circ$ ἢ 150° ἢ $χ=-330^\circ$ ἢ -210°.

Ἐν τῇ λύσει τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ δοθεῖσα, ἥτις περιέχει δύο τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς μετεσχηματίσθη εἰς ἄλλην ἰσοδύναμον περιέχουσαν ἕνα τοιοῦτον ἀριθμόν. Αἱ λύσεις τὰς ὁποίας ἔδωκεν ἡ τελευταία, εἶναι λύσεις καὶ τῆς δοθείσης.

5) Ἔστω ἡ ἐξίσωσ ς $α.συνχ+β.ημχ=γ$.

Ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης δι' α, λαμβάνομεν $συνχ+\frac{β}{α}ημχ=\frac{γ}{α}$, ἐὰν δὲ τεθῇ $\frac{β}{α}=εφω$, ἔχομεν $συνχ+εφω.ημχ=\frac{γ}{α}$, ἢ $συνχ+\frac{ημω}{συνω}.ημχ=\frac{γ}{α}$ ἤτοι

$συνχ.συνω+ημχ.ημω=\frac{γ}{α}συνω$ ἢ $συν(χ-ω)=\frac{γ}{α}συνω$.

Ἀλλ' ἐκ τῆς ἐξισώσεως $εφω=\frac{β}{α}$ εὑρίσκομεν τὴν ω καὶ συ-

-νεπῶς καὶ τὸ συνω καὶ τὸ συν(χ—ω), ἑπομένως καὶ τὴν χ.

Γωνίαι ὡς ἡ ω, αἵτινες εἰσάγονται, ἵνα εὐκολύνουν τὴν λύσιν τῶν τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων, λέγονται βοηθητικαί.

61. **Συστήματα.** — Κατωτέρω δίδομεν παραδείγματα λύσεως τριγωνομετρικῶν συστημάτων.

1) Ἔστω τὸ σύστημα $\chi+\psi=73^\circ$

$$\eta\mu\chi+\eta\mu\psi=1{,}182.$$

Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις γράφεται $2\eta\mu\frac{\chi+\psi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\chi-\psi}{2}=1{,}182$ ἢ

$$\sigma\upsilon\nu\;\frac{\chi-\psi}{2}=\frac{1{,}182}{2\eta\mu 36^\circ\,30'}.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων εὑρίσκεται $\eta\mu 36^\circ 30'=0{,}\,59483$, ἡ τελευταία ἐξίσωσις γράφεται $\sigma\upsilon\nu\frac{\chi-\psi}{2}=0{,}99356$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\frac{\chi-\psi}{2}=6^\circ 30'$ καὶ $\chi-\psi=13^\circ$ ἢ $\chi-\psi=347^\circ$.

Ἐκ τῆς λύσεως δὲ τῶν συστημάτων

$$\begin{cases}\chi+\psi=73^\circ\\ \chi-\psi=13^\circ\end{cases} \quad \text{ἢ} \quad \begin{cases}\chi+\psi=73^\circ\\ \chi-\psi=347^\circ\end{cases}$$

λαμβάνομεν τὰς τιμὰς τῶν χ καὶ ψ.

2) Ἔστω προσέτι τὸ σύστημα

$$\chi+\psi=\alpha$$

$$\frac{\eta\mu\chi}{\eta\mu\psi}=\beta.$$

Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις γράφεται $\frac{\eta\mu\chi-\eta\mu\psi}{\eta\mu\chi+\eta\mu\psi}=\frac{\beta-1}{\beta+1}$.

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $$\frac{\eta\mu\chi-\eta\mu\psi}{\eta\mu\chi+\eta\mu\psi}=\frac{\varepsilon\varphi\frac{\chi-\psi}{2}}{\varepsilon\varphi\frac{\chi+\psi}{2}}$$

ἡ τελευταία ἐξίσωσις γράφεται $\varepsilon\varphi\frac{\chi-\psi}{2}=\frac{\beta-1}{\beta+1}.\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τόξα, ἅτινα ἔχουν ἐφαπτομένην $\frac{\beta-1}{\beta+1}.\,\varepsilon\varphi\,\frac{\alpha}{2}$.

Γνωρίζοντες επομένως τὰ $\frac{\chi-\psi}{2}$ καὶ $\frac{\chi+\psi}{2}$ εὑρίσκομεν τὰ χ, ψ.

Ἀσκήσεις.

Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

189) $ημχ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ καὶ $ημχ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

190) $συνχ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ καὶ $συνχ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

191) $εφχ=-1$ καὶ $σφχ=1$.

192) $εφ^2χ=\frac{1}{3}$ καὶ $σφ^2χ=3$.

193) $ημχ+ημ5χ=ημ3χ$.

194) $συνχ+συν3χ=2συν2χ$.

195) $(συνχ+ημχ)^2=ημ^2χ$.

196) $συνχ+συν2χ+συν3χ=0$.

197) $2ημ^2χ-3ημχ+1=0$.

198) $2ημ^2χ-5ημχ-3=0$.

199) $2συν^2χ-(2+\sqrt{3}).συνχ+\sqrt{3}=0$.

200) $\frac{συνχ}{ημ^2χ}=\frac{2}{3}$.

201) $2ημ^2χ+\sqrt{3}συνχ+1=0$.

202) $4συν^2χ-4ημχ-1=0$.

203) $2ημχ=εφχ$.

204) $6συν^2χ-5συνχ+1=0$.

205) $2\sqrt{3}.συν^2χ-ημχ=0$.

206) $2ημχημ3χ-ημ^22χ=0$.

207) $εφ^2χ-εφχ-2=0$.

208) $3εφ^2\frac{χ}{2}+2εφ\frac{χ}{2}-1=0$.

209) $εφ^2χ-(1+\sqrt{3})εφχ+\sqrt{3}=0$.

210) $\sqrt{3}.εφχ+\sqrt{3}.σφχ=2$.

211) $εφ^2χ+σφ^2χ-2=0$.

212) $εφ2χεφχ=1$.

213) $α.ημχ+β.συνχ=γ$

214) $\alpha.\sigma\upsilon\nu\chi-\beta.\eta\mu\chi=\gamma$.

215) $5\sigma\upsilon\nu\chi-2\eta\mu\chi=2$.

216) $\sqrt{3}.\sigma\upsilon\nu\chi+\eta\mu\chi=\sqrt{2}$.

217) $(2+\sqrt{3})\sigma\upsilon\nu\chi=1-\eta\mu\chi$.

218) $\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi=\sqrt{2}$.

219) $1+\eta\mu^2\chi=3\eta\mu\chi.\sigma\upsilon\nu\chi$.

Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα

220) $\eta\mu(\chi-\psi)=\frac{1}{2}$.

$\sigma\upsilon\nu(\chi+\psi)=\frac{1}{2}$.

221) $\sigma\upsilon\nu(2\chi+3\psi)=\frac{1}{2}$

$\sigma\upsilon\nu(3\chi+2\psi)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

222) $\chi+\psi=\alpha$

$\eta\mu\chi+\eta\mu\psi=\beta$.

223) $\chi+\psi=75^\circ$.

$\frac{\eta\mu\chi}{\eta\mu\psi}=\sqrt{2}$.

224) $\chi-\psi=60^\circ$

$\frac{\eta\mu\chi}{\eta\mu\psi}=2$.

225) $\chi+\psi=45^\circ$

$\varepsilon\varphi\chi+\varepsilon\varphi\psi=1$.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄

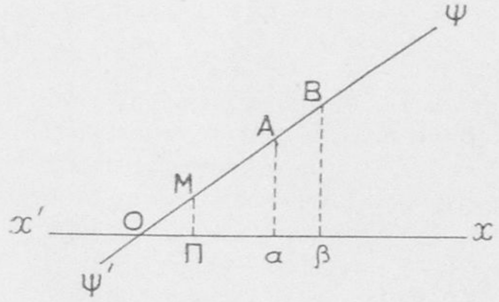
ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΜΕΤΡΗΣΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

Σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων ὀρθογωνίου τριγώνου.

62. Θεώρημα.— *Τὸ μῆκος τῆς προβολῆς ἀνύσματος ἐπὶ ἄξονα ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τοῦ ἀνύσματος ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ θετικὴ φορὰ τοῦ ἄξονος προβολῆς μετὰ τῆς θετικῆς φορᾶς τοῦ ἄξονος, ἐφ' οὗ κεῖται τὸ ἄνυσμα.*.

Ἔστω ψ΄ψ ὁ ἄξων, ἐφ' οὗ κεῖται τὸ ἄνυσμα ΑΒ καὶ αβ



ἡ προβολὴ αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἄξονα χ΄χ· ἔστω δὲ θετικὴ φορὰ τοῦ μὲν πρώτου ἡ ἐκ τοῦ ψ΄ πρὸς τὸ ψ, τοῦ δὲ δευτέρου ἡ ἀπὸ τοῦ χ΄ πρὸς τὸ χ· ἔστω δὲ τέλος ΟΜ ἄνυσμα ἐπὶ τοῦ ψ΄ψ, δι' ὃ θέτομεν (ΟΜ)=+1 καὶ οὗ ἡ προβολὴ ἐπὶ τὸν ἄξονα χ΄χ εἶναι ἡ ΟΠ· ἀλλὰ κατὰ τὸ θεώρημα (12) ἔχομεν $\frac{(AB)}{(OM)}=\frac{(\alpha\beta)}{(O\Pi)}$ ἢ (αβ)=(ΑΒ).(ΟΠ)· ἀλλὰ πάλιν (ΟΠ) εἶναι τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας Οχ, Οψ· ὥστε εἶναι (αβ)=(ΑΒ)συν(Οχ,Οψ).

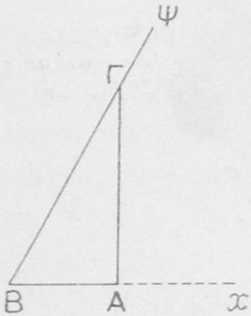
Σημείωσις. Τὰς γωνίας τριγώνου θὰ παριστῶμεν ἐν τοῖς ἑπομένοις διὰ τῶν γραμμάτων Α,Β,Γ, τὰ δὲ μήκη τῶν πλευρῶν διὰ τῶν α,β,γ· διὰ τοῦ α τὴν ἀπέναντι τῆς γωνίας Α πλευράν, διὰ τοῦ β τὴν ἀπέναντι τῆς Β καὶ διὰ τοῦ γ τὴν ἀπέναντι τῆς Γ.

63. **Θεώρημα.**—*Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ μία τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἰσοῦται*

1) μὲ τὴν ὑποτείνουσαν πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι γωνίας ἢ ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς προσκειμένης,

ἢ 2) μὲ τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἀπέναντι γωνίας ἢ ἐπὶ τὴν συνεφαπτομένην τῆς προσκειμένης.

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, οὗ ὀρθὴ γωνία εἶναι ἡ Α· ἐὰν τὰς πλευρὰς ΒΑ καὶ ΒΓ θεωρήσωμεν ὡς κειμένας ἐπὶ τῶν ἀξόνων Βχ καὶ Βψ, ὧν θετικαὶ φοραὶ εἶναι τοῦ μὲν ἡ ἀπὸ τοῦ Β πρὸς τὸ Α, τοῦ δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ Β πρὸς τὸ Γ, τὸ ἄνυσμα ΒΑ εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ ἀνύσματος ΒΓ ἐπὶ τὸν ἄξονα Βχ· ἑπομένως, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα ἔχομεν (ΒΑ)=(ΒΓ)συν(Βχ,Βy) ἢ (ΒΓ)συνΒ, ἤτοι εἶναι γ=α.συνΒ· ἐπειδὴ δὲ εἶναι Β+Γ=
=90°, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται γ=α.ημΓ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν



$$\beta = \alpha.\text{συν}\Gamma$$
$$\beta = \alpha.\text{ημ}B.$$

Ἤδη ἐκ τῶν εὑρεθεισῶν ἰσοτήτων λαμβάνομεν

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha.\text{ημ}B}{\alpha.\text{συν}B} = \text{εφ}B, \text{ ἤτοι } \beta = \gamma.\text{εφ}B \text{ ἢ } \beta = \gamma.\text{σφ}\Gamma.$$

Ὡσαύτως λαμβάνομεν :

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha.\text{ημ}\Gamma}{\alpha.\text{συν}\Gamma} = \text{εφ}\Gamma \text{ ἤτοι } \gamma = \beta.\text{εφ}\Gamma \text{ ἢ } \gamma = \beta.\text{σφ}B.$$

Ἀσκήσεις.

226) Ἐν τριγώνῳ ΑΒΓ ἄγεται ἡ ΑΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ ἡ ΔΕ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι

$$\Gamma E = \beta.\text{συν}^2\Gamma.$$

227) Ἐὰν ἡ ΑΒ εἶναι διάμετρος κύκλου ἀκτῖνος ρ καὶ Γ σημεῖόν τι τῆς ἡμιπεριφερείας καὶ ἡ ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ, ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι $ΑΓ+ΓΔ=2ρημω(1+συνω)$, ἐὰν εἶναι γωνία $ΑΒΓ=ω$.

228) Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΑΒΓ ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι

$$β^2ημ2Γ+γ^2ημ2Β=2βγ.$$

229) Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΑΒΓ ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι

1) $\frac{β}{α+γ}=εφ\frac{Β}{2}$ 2) $\frac{2βγ}{γ^2-β^2}=εφ2Β.$

230) Ὁμοίως, ὅτι εἶναι $συν2Β=\frac{γ^2-β^2}{α^2}$.

231) Ὁμοίως, ὅτι εἶναι $ημ\frac{Β-Γ}{2}=\frac{β-γ}{α.\sqrt{2}}$.

232) Ὁμοίως, ὅτι εἶναι $συν\frac{Β-Γ}{2}=\frac{β+γ}{α\sqrt{2}}$.

233) Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΑΒΓ ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι

1) $συν(Β-Γ)=\frac{2βγ}{β^2+γ^2}$ 2) $συν2Β=\frac{γ^2-β^2}{γ^2+β^2}$.

234) Ὁμοίως ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΑΒΓ εἶναι $\frac{2βγ}{β^2-γ^2}=\frac{συν(Β-Γ)}{συν^2Γ-συν^2Β}=\frac{συν(Β-Γ)}{συν2Γ}$.

235) Ἐὰν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον, ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι $(ΑΓ)ημ\frac{Α}{2}ημ\frac{Β}{2}=(ΒΔ)ημ\frac{Γ}{2}ημ\frac{Δ}{2}$.

236) Τρίγωνον ΑΒΓ μὴ ἰσοσκελὲς, εἶναι ὀρθογώνιον, ὅταν εἶναι $\frac{εφΒ}{εφΓ}=\frac{ημ^2Β}{ημ^2Γ}$.

237) Τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον ἰσοσκελὲς, ὅταν εἶναι $1+σφ(45^\circ-Β)=\frac{2}{1-σφΓ}$ καὶ $2βγ=α^2$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

Ἐπίλυσις ὀρθογωνίων τριγώνων

64. Ἐπίλυσις τριγώνου λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν στοιχείων αὐτοῦ διὰ τοῦ λογισμοῦ, ὅταν δοθοῦν ἱκανὰ ἐξ αὐτῶν (ἰδὲ εἰσαγωγήν).

65. Ἐπίλυσις τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων.— Διὰ νὰ ἐπιλύσωμεν ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον πρέπει νὰ γνωρίζωμεν μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ καὶ μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν του ἢ δύο πλευρὰς αὐτοῦ. Διὰ τοῦτο κατὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων διακρίνωμεν τὰς ἑπομένας τέσσαρας περιπτώσεις.

Περίπτωσις 1η.

66. *Ἐκ τῆς ὑποτεινούσης α ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ μιᾶς τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ, ἔστω τῆς Β, νὰ εὑρεθοῦν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.*

Πρὸς τοῦτο θὰ χρησιμοποιήσωμεν τοὺς τύπους τῆς § 63

$$Γ=90^\circ-Β,\ β=αημΒ,\ γ=ασυνΒ.$$

Ἐκ τοῦ πρώτου εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν Γ ἀμέσως, ἐκ δὲ τῶν ἄλλων, οἱ ὁποῖοι εἶναι λογιστοὶ διὰ τῶν λογαρίθμων εὑρίσκομεν $λογ\,β=λογα+λογημΒ$, $λογ\,γ=λογα+λογσυνΒ$. Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν τὰς πλευρὰς β καὶ γ. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τούτου Ε εἶναι $Ε=\frac{βγ}{2}$ καὶ ἐπειδὴ $β=αημΒ$, $γ=ασυνΒ$, ἔχομεν $Ε=\frac{α^2ημΒσυνΒ}{2}$.

Παράδειγμα. Ἔστωσαν

δεδομένα	α=159,8 μέτρα	ζητούμενα	Γ
	Β=32° 18′ 30″.		β
			α

Πρὸς εὕρεσιν τῆς Γ ἀφαιροῦμεν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν Β ἀπὸ 90° καὶ εὑρίσκομεν

$$\begin{array}{r} Β+Γ=89^\circ\ 59'\ 60'' \\ Β=32^\circ\ 18'\ 30'' \\ \hline Γ=57^\circ\ 41'\ 30'' \end{array}$$

Λογισμὸς τῆς πλευρᾶς β

$$β=αημΒ$$

λογα	= 2,20358
λογημΒ	= $\bar{1}$,72793
λογβ	= 1,93151
καὶ β	= 85,41

Λογισμὸς τῆς πλευρᾶς γ

$$γ=ασυνΒ$$

λογα	= 2,20358
λογσυνΒ	= $\bar{1}$,92695
λογγ	= 2,13053
καὶ γ	= 135,06

Σημείωσις. Ἕκαστος τῶν λογαρίθμων, τοὺς ὁποίους λαμβάνομεν ἀμέσως ἐκ τῶν πινάκων δύναται νὰ διαφέρῃ τοῦ ἀληθοῦς τὸ πολὺ κατὰ ἡμίσειαν μονάδα τῆς τελευταίας τάξεως· διὰ τοῦτο ὁ λογάριθμος β, ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ δύο τοιούτων λογαρίθμων εὑρεθείς, δύναται νὰ διαφέρῃ τοῦ ἀληθοῦς τὸ πολὺ κατὰ μίαν μονάδα τῆς ρηθείσης τάξεως, τοιαύτη δὲ διαφορὰ προξενεῖ (ὡς ἐκ τῶν πινάκων βλέπομεν) λάθος ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ β τὸ πολὺ $\frac{1}{5}$ τοῦ τελευταίου ψηφίου 1· ὥστε τὸ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς β συμβαῖνον λάθος δὲν ὑπερβαίνει τὰ $\frac{2}{1000}$ τοῦ μέτρου. Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς γ συμβαῖνον λάθος δὲν εἶναι μεγαλύτερον τῶν $\frac{3}{1000}$ τοῦ μέτρου.

Περίπτωσις 2α.

67. ***Ἐκ μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, ἔστω τῆς β καὶ μιᾶς τῶν ὀξειῶν αὐτοῦ γωνιῶν, νὰ εὑρεθοῦν τὰ λοιπὰ αὐτοῦ στοιχεῖα.***

Ἐκ τῆς δοθείσης ὀξείας γωνίας εὑρίσκεται ἀμέσως καὶ ἡ ἄλλη, ἑπομένως ἀμφότεραι αἱ ὀξεῖαι γωνίαι δύνανται νὰ ὑποτεθοῦν γνωσταί. Αἱ ἄγνωστοι πλευραὶ α καὶ γ, θὰ εὑρεθοῦν ἐκ τῶν τύπων $\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B}$ καὶ $\gamma = \beta\sigma\varphi B = \frac{\beta}{\varepsilon\varphi B}$,

οἱ ὁποῖοι δίδουν $\lambda o\gamma\alpha = \lambda o\gamma\beta - \lambda o\gamma\eta\mu B$, $\lambda o\gamma\gamma = \lambda o\gamma\beta + \lambda o\gamma\sigma\varphi B$.

Τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι

$$E = \frac{\beta\gamma}{2} = \frac{\beta^2\sigma\varphi B}{2}.$$

Παράδειγμα. Ἔστωσαν

δεδομένα	β=8530,4 μ.	ζητούμενα Γ
	Β=32° 15′	α
		γ

$$\begin{array}{r} B+\Gamma = 89^\circ\ 60^\circ \\ B = 32^\circ\ 15' \\ \hline \Gamma = 57^\circ\ 45' \end{array}$$

Εὕρεσις τῆς ὑποτεινούσης α

$$\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B}$$

λογβ	$= 3{,}93097$
λογημΒ	$= \overline{1}{,}72723$
λογ α	$= 4{,}20374$
καὶ α	$= 15986$

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ

$$\gamma = \beta\sigma\varphi B$$

λογβ	$= 3{,}93097$
λογσφΒ	$+ 0{,}20000$
λογ γ	$= 4{,}13097$
καὶ γ	$= 13520.$

Π ε ρ ί π τ ω σ ι ς 3η.

68. ***Ἐκ τῶν δύο καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου νὰ εὑρεθῇ ἡ ὑποτείνουσα καὶ αἱ δύο ὀξεῖαι γωνίαι αὐτοῦ.***

Πρὸς τοῦτο ἔχομεν τοὺς τύπους

$$\varepsilon\varphi B = \frac{\beta}{\gamma}, \quad \Gamma = 90^\circ - B \quad \text{καὶ} \quad \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2.$$

Ἐκ τοῦ πρώτου ἕπεται λογεφΒ=λογβ—λογγ.

Ἐκ δὲ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκομεν διὰ τῶν λογαρίθμων τὴν γωνίαν Β, ἐξ ἧς καὶ τὴν Γ. Ὁ τὴν ὑποτείνουσαν δίδων τύπος $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ δὲν εἶναι κατάλληλος διὰ τὴν χρῆσιν τῶν λογαρίθμων· διὰ τοῦτο ἀφοῦ εὑρεθῇ ἡ γωνία Β, προσδιορίζεται ἡ ὑποτείνουσα α ἐκ τοῦ τύπου.

$$\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B},$$

ὅστις δίδει λογα=λογβ—λογημΒ.

Τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι $E = \frac{\beta\gamma}{2}$.

Παράδειγμα. Ἔστωσαν

δεδομένα	β=1593,8 μ.	ζητούμενα Β
	γ=8907,3 μ.	Γ
		α

Εὕρεσις τῆς γωνίας Β.

$$\varepsilon\varphi B = \frac{\beta}{\gamma}$$

$$\begin{aligned}
\lambda o \gamma \beta &= 3{,}20244 \\
\lambda o \gamma \gamma &= 3{,}94974 \\
\lambda o \gamma \varepsilon \varphi B &= \bar{1}{,}25270 \\
\text{καὶ } B &= 10^\circ\, 8'\, 42'' \\
\text{ὥστε } \Gamma &= 79^\circ\, 51'\, 18''.
\end{aligned}$$

Εὕρεσις τῆς ὑποτεινούσης.

$$\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B}$$

$$\begin{aligned}
\lambda o \gamma \beta &= 3{,}20244 \\
\lambda o \gamma \eta\mu B &= \bar{1}{,}24585 \\
\lambda o \gamma \alpha &= 3{,}95659 \\
\text{Ὅθεν καὶ } \alpha &= 9048{,}8 \ \mu.
\end{aligned}$$

Περίπτωσις 4η.

69. *Ἐκ τῆς ὑποτεινούσης α καὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας, ἔστω τῆς β, νὰ εὑρεθοῦν ἡ ἄλλη πλευρὰ καὶ αἱ δύο ὀξεῖαι γωνίαι.*

Πρὸς εὕρεσιν τῆς πλευρᾶς γ ἔχομεν τὸν τύπον

$$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta).$$

Ὅθεν
$$2\lambda o \gamma \gamma = \lambda o \gamma(\alpha+\beta) + \lambda o \gamma(\alpha-\beta)$$

καὶ
$$\lambda o \gamma \gamma = \frac{1}{2}\left[\lambda o \gamma(\alpha+\beta) + \lambda o \gamma(\alpha-\beta)\right].$$

Πρὸς εὕρεσιν τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν τὸν τύπον

$$\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{ἢ} \quad \sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν Γ καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἐπειδὴ εἶναι

$$\eta\mu\left(\frac{1}{2}\Gamma\right) = \sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\Gamma}{2}} \quad \text{καὶ} \quad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}\Gamma\right) = \sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\Gamma}{2}},$$

ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν τοῦ συνΓ εἰς τοὺς τύπους τούτους λαμβάνομεν

$$ημ\left(\frac{1}{2}Γ\right)=\sqrt{\frac{α-β}{2α}},\quad συν\left(\frac{1}{2}Γ\right)=\sqrt{\frac{α+β}{2α}}.$$

$$\text{Ὅθεν καὶ } εφ\left(\frac{1}{2}Γ\right)=\sqrt{\frac{α-β}{α+β}}$$

καὶ $$λογ\, εφ\left(\frac{1}{2}Γ\right)=\frac{1}{2}\,[λογ(α-β)-λογ(α+β)].$$

Τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι $Ε=\frac{βγ}{2}$.

Παράδειγμα. Ἔστωσαν

δεδομένα $α=7450,6$ μ. ζητούμενα γ
$β=2971,8$ μ. Γ
Β

$$α+β=10422,4$$
$$α-β=\;\;4478,8$$

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ

$γ=\sqrt{(α+β)(α-β)}$

λογ(α—β)	=3,65116
λογ(α+β)	=4,01797
ἄθροισμα	=7,66913
λογγ	=3,83456
γ	=6832,2

Εὕρεσις τῆς γωνίας Γ

$εφ\frac{1}{2}Γ=\sqrt{\frac{(α-β)}{(α+β)}}$

λογ(α—β)	=3,65116
λογ(α+β)	=4,01797
διαφορὰ	$=\overline{1},63319$
λογεφ$\left(\frac{1}{2}Γ\right)$	$=\overline{1},81659$

καὶ $\frac{1}{2}Γ=33°14'15''$

Ὅθεν $Γ=66°29'30''$
καὶ $Β=23°30'30''$.

Παρατηρήσεις. — Εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν ἀντὶ νὰ εὕρωμεν τὴν γωνίαν ἐκ τοῦ ἡμιτόνου ἢ ἐκ τοῦ συνημιτόνου της, τὴν εὕρωμεν ἐκ τῆς ἐφαπτομένης της, διότι ἡ γωνία προσδιορίζεται ἀκριβέστερον ἐκ τῆς ἐφαπτομένης. Τοῦτο δὲ συμβαίνει διὰ τὸν ἑξῆς λόγον. Ἡ διαφορὰ Δ δύο ἐφεξῆς λογαρίθμων τῶν ἐφαπτομένων ὑπερβαίνει πάντοτε τὰς διαφορὰς δ καὶ θ δύο ἐφεξῆς λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων τοῦ αὐτοῦ τόξου. Ἐὰν λοιπὸν ὁ δοθεὶς λογάριθμος τῆς ἐφαπτομένης ἔχῃ σφάλμα ἴσον πρὸς μίαν μονάδα τῆς τελευταίας τάξεως, τὸ ἐπὶ τῆς γωνίας προξενούμενον λάθος θὰ εἶναι $\frac{60''}{\Delta}$ περίπου (διότι εἰς λάθος Δ μονάδων τῆς εἰρημένης τάξεως ἀντιστοιχεῖ λάθος 60'' ἐπὶ τῆς γωνίας), ἐνῷ τὸ αὐτὸ σφάλμα, ἐὰν συμβῇ εἰς τὸν λογάριθμον τοῦ ἡμιτόνου, θὰ προξενήσῃ ἐπὶ τῆς γωνίας λάθος $\frac{60''}{\delta}$ περίπου, ἐὰν δὲ συμβῇ εἰς τὸν λογάριθμον τοῦ συνημιτόνου, θὰ προξενήσῃ λάθος ἐπὶ τῆς γωνίας $\frac{60''}{\theta}$ περίπου, ταῦτα δὲ εἶναι μεγαλύτερα· διότι, ὡς εἴπομεν, $\delta<\Delta$ καὶ $\theta<\Delta$. Ὥστε μικρὸν σφάλμα τῆς ἐφαπτομένης προξενεῖ μικρὸν λάθος ἐπὶ τῆς γωνίας, ἐνῷ μικρὸν σφάλμα τοῦ ἡμιτόνου (καὶ μάλιστα, ὅταν ἡ γωνία ὀλίγον διαφέρει τῶν 90°) ἢ τοῦ συνημιτόνου (καὶ μάλιστα, ὅταν ἡ γωνία εἶναι μικρὰ) δύναται νὰ προξενήσῃ μέγα λάθος ἐπὶ τῆς γωνίας.

Ὁ δὲ λόγος, δι' ὃν αἱ διαφοραὶ Δ τῶν λογαρίθμων τῶν ἐφαπτομένων ὑπερβαίνουν τὰς διαφορὰς τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων εἶναι ὁ ἑξῆς:

Ἐπειδὴ εἶναι $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi}$,

ἕπεται $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\varphi = \lambda o\gamma\eta\mu\varphi - \lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\varphi$.

Ἐὰν δὲ ἡ γωνία αὐξηθῇ κατὰ 1', ὁ λογάριθμος τοῦ ἡμιτόνου της θ' αὐξηθῇ κατὰ δ, τοῦ δὲ συνημιτόνου θὰ ἐλαττωθῇ κατὰ θ, ἑπομένως ὁ λογάριθμος τῆς ἐφαπτομένης (ὅστις εἶναι πάντοτε ἴσος μὲ τὴν διαφορὰν τῶν δύο πρώτων) θὰ αὐξηθῇ κατὰ $\delta+\theta$· εἶναι λοιπὸν $\Delta=\delta+\theta$.

Ἐκ τούτων λοιπὸν συνάγεται, ὅτι πρέπει πάντοτε, ὅταν πρόκειται νὰ εὑρεθῇ γωνία τις ἐκ τῶν τριγωνομετρικῶν αὐτῆς ἀριθμῶν, νὰ μεταχειριζώμεθα, εἰ δυνατόν, τὴν ἐφαπτομένην.

70. **Ἄλλαι περιπτώσεις.**— Εἰς τὴν § 65 εἴδομεν, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ὁρίζεται ἐντελῶς, ὅταν δοθοῦν ἡ μία πλευρὰ αὐτοῦ καὶ μία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἢ δύο πλευραὶ αὐτοῦ. Ἐν τούτοις ὅμως τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ὁρίζεται ἐντελῶς καὶ ὅταν δοθοῦν δύο γεωμετρικὰ μεγέθη (ὄχι καὶ τὰ δύο γωνίαι) συνδεό-

μενα στενῶς μὲ τὸ τρίγωνον. Οὕτω π. χ. ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ὁρίζεται ἐντελῶς, ὅταν δοθῇ τὸ ὕψος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν καὶ μία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ ἢ ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ καὶ ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν κ. α. Ἐὰν ἐκ τῶν δύο δεδομένων, τὸ ἓν μόνον εἶναι στοιχεῖον τοῦ τριγώνου, θὰ ἐκφράσωμεν τὸ ἄλλο συναρτήσει τῶν στοιχείων τοῦ τριγώνου. Ὁμοίως καὶ ἂν οὐδὲν τῶν δύο δεδομένων εἶναι στοιχεῖον τοῦ τριγώνου, θὰ ἐκφράσωμεν ἀμφότερα συναρτήσει τῶν αὐτῶν στοιχείων.

Παράδειγμα 1ον.— ***Ἐκ τοῦ ὕψους υ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν καὶ ἐκ μιᾶς τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ, ἔστω τῆς Β, νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.***

Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ ΑΔ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ λαμβάνομεν

$$\upsilon=(\text{AB})\eta\mu\text{B}=\gamma\eta\mu\text{B}, \quad \text{ἤτοι} \quad \gamma=\frac{\upsilon}{\eta\mu\text{B}} \quad (1).$$

Ἐπειδὴ δὲ γνωρίζομεν, ὅτι $\beta=\gamma\varepsilon\varphi\text{B}$ καὶ $\alpha=\frac{\gamma}{\sigma\upsilon\nu\text{B}}$, θὰ εἶναι

$$\beta=\frac{\upsilon}{\eta\mu\text{B}}.\varepsilon\varphi\text{B}=\frac{\upsilon}{\sigma\upsilon\nu\text{B}} \ (2) \quad \text{καὶ} \quad \alpha=\frac{\upsilon}{\eta\mu\text{B}\sigma\upsilon\nu\text{B}} \ (3).$$

Οἱ τύποι (1), (2), (3), μετὰ τοῦ τύπου $\Gamma=90^\circ-\text{B}$ λύουν τὸ δοθὲν πρόβλημα.

Παράδειγμα 2ον.— ***Ἐκ τῆς ὑποτεινούσης α ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἐκ τῆς διαφορᾶς δ τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας αὐτοῦ νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.***

Γνωρίζομεν, ὅτι

$\beta=\alpha\eta\mu\text{B}$, $\gamma=\alpha\eta\mu\Gamma$· ὥστε εἶναι $\beta-\gamma=\alpha(\eta\mu\text{B}-\eta\mu\Gamma)$

ἤτοι $\delta=\alpha(\eta\mu\text{B}-\eta\mu\Gamma)$.

Ἀλλ' $\eta\mu\text{B}-\eta\mu\Gamma=2\eta\mu\frac{\text{B}-\Gamma}{2}.\sigma\upsilon\nu\frac{\text{B}+\Gamma}{2}=2\eta\mu\frac{\text{B}-\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu45^\circ$.

Ὥστε εἶναι $\delta=\alpha\sqrt{2}\,\eta\mu\frac{\text{B}-\Gamma}{2}$ καὶ ἑπομένως $\eta\mu\frac{\text{B}-\Gamma}{2}=\frac{\delta}{\alpha\sqrt{2}}$,

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκομεν τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ. Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν αὐτὴν διὰ Δ ἔχομεν

$\frac{\text{B}-\Gamma}{2}=\Delta$. Ἀλλ' εἶναι καὶ $\frac{\text{B}+\Gamma}{2}=45^\circ$.

Ὅθεν $\text{B}=45^\circ+\Delta$ καὶ $\Gamma=45^\circ-\Delta$.

Μετὰ τὴν εὕρεσιν τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ εὑρίσκομεν τὰς καθέτους πλευρὰς β καὶ γ ἐκ τῶν τύπων

$$\beta = \alpha \eta\mu B \text{ καὶ } \gamma = \alpha\sigma\upsilon\nu B.$$

Παράδειγμα 3ον.—*Ἐκ τῶν δύο τμημάτων μ καὶ ν, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου ὑπὸ τοῦ ὕψους ἐπ' αὐτήν, νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.*

Ἔστω ΑΔ τὸ ὕψος. Τότε εἶναι $\mu = (A\Delta)\sigma\varphi B$ καὶ $\nu = (A\Delta)\varepsilon\varphi B$. Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν τὰς δύο αὐτὰς ἰσότητας κατὰ μέλη λαμβάνομεν $\varepsilon\varphi^2 B = \frac{\nu}{\mu}$ ἤτοι $\varepsilon\varphi B = \sqrt{\frac{\nu}{\mu}}$. Εὑρισκομένης διὰ τοῦ τύπου αὐτοῦ τῆς Β εὑρίσκονται ἀμέσως καὶ ἡ Γ· ἐπειδὴ δὲ $\mu + \nu = \alpha$ ἔχομεν $\beta = \alpha\eta\mu B$ καὶ $\gamma = \alpha\sigma\upsilon\nu B$.

Ἀσκήσεις.

238) Ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 428,75 μ. καὶ μία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν εἶναι 40° 32′ 45″. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.

239) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 188 μ., μία δὲ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν εἶναι 18° 14′. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ καὶ τὸ ἐμβαδόν.

240) Ὀρθογωνίου τριγώνου μία τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι 1592,8 μ. ἡ δὲ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία εἶναι $\frac{7}{10}$ τῆς ὀρθῆς. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου.

241) Ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι 587,8 μ. ἡ μία καὶ 798 μ. ἡ ἄλλη. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι καὶ ἡ ὑποτείνουσα.

242) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι διπλασία μιᾶς τῶν ἄλλων πλευρῶν. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι αὐτοῦ.

243) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι τετραπλασία τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐπὶ ταύτην ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου.

244) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 404 μ. ἡ

δὲ ἑτέρα τῶν καθέτων πλευρῶν 125 μ. Νά εὑρεθοῦν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου τούτου.

245) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 580 μ. ὁ δὲ λόγος τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ εἶναι $\frac{7}{13}$. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου.

246) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 450 μ. ὁ δὲ λόγος τῶν ἄλλων πλευρῶν εἶναι $\frac{3}{4}$. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.

247) Χορδὴ τόξου μήκους 173,854 μ. ἀπέχει ἀπὸ τοῦ κέντρου 100 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ τόξον.

248) Τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ΑΒ=25 μ., ΒΓ=34 μ. καὶ τὸ ὕψος ΑΔ=7 μ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου καὶ ἡ τρίτη πλευρά.

249) Ἡ πλευρὰ ρόμβου εἶναι 39 μ. καὶ ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος 72 μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἄλλη διαγώνιος καὶ αἱ γωνίαι τοῦ ρόμβου.

250) Ἰσοσκελές τι τρίγωνον ἔχει τὴν βάσιν ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ ἑκατέρας τῶν ἄλλων πλευρῶν. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι αὐτοῦ.

251) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ βάσις εἶναι 890 μ., ἡ δὲ γωνία τῆς κορυφῆς εἶναι 18°. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

252) Ἡ γωνία τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 50° καὶ τὸ ὕψος, τὸ ἀγόμενον ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας ταύτης εἶναι 146,75μ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.

253) Ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ἡ διχοτόμος τῆς Γ τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἄλλαι πλευραὶ αὐτοῦ, ὅταν γνωρίζωμεν, ὅτι (ΓΑ)=125 μ. καὶ (ΑΔ)=50 μ.

254) Εἰς περιφέρειαν ἀκτῖνος 30 μ. ἄγονται αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῆς ἀπὸ σημείου ἀπέχοντος ἀπὸ τῆς περιφερείας 16 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία τῶν ἀχθεισῶν ἐφαπτομένων.

255) Τῆς γωνίας ΑΟΓ ἡ ΟΑ προβάλλεται ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας ταύτης· ἡ δὲ προβολὴ τῆς ΟΑ προβάλλεται ἐπὶ τὴν

ΟΓ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία ΑΟΓ, δεδομένου, ὅτι ἡ τελευταία προβολὴ εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ΟΑ.

256) Νὰ εὑρεθῇ ἡ προβολὴ εὐθείας γραμμῆς μήκους 35 μέτρων ἐπὶ ἄλλης, μετὰ τῆς ὁποίας σχηματίζει γωνίαν 42° 20′.

257) Ἡ σκιὰ ἑνὸς δένδρου εἶναι 3,75 μ. καὶ τὸ ὕψος τοῦ ἡλίου εἶναι 65° 30′. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ δένδρου.

258) Δύο δυνάμεις 9 χιλιογράμμων καὶ 27 χιλιογράμμων ἔχουσαι τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς εἶναι κάθετοι μεταξύ των. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνισταμένη αὐτῶν καὶ αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζει μετ' αὐτῶν.

259) Δύναμις 125 χιλιογράμμων νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο συνιστώσας καθέτους μεταξύ των, ὅταν σχηματίζῃ μετὰ μιᾶς τούτων γωνίαν 28° 24′.

260) Εἷς, ὁ ὁποῖος ἀπέχει ἀπὸ ἑνὸς πύργου 75 μέτρα, βλέπει αὐτὸν ὑπὸ γωνίαν 35° 40′. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

261) Εἷς παρατηρητὴς ἐπὶ ἀεροπλάνου γνωρίζει, ὅτι ἡ ἀπόστασις δύο στόχων ἐπὶ τῆς γῆς εἶναι εἰς ἀπόστασιν 4 χιλιομέτρων. Ὅταν δὲ εὑρεθῇ κατακορύφως ὑπεράνω ἑνὸς τῶν στόχων, βλέπει τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο στόχων ὑπὸ γωνίαν 12° 30′. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ ἀεροπλάνου ὑπὲρ τὴν γῆν.

262) Εἷς παρατηρητὴς ἐπὶ ἀεροπλάνου, τὸ ὁποῖον ἵπταται εἰς ὕψος ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης 1000 μέτρων, βλέπει ἓν περισκόπιον ὑποβρυχίου ὑπὸ γωνίαν 24° 16′ (γωνία τῆς ὁριζοντίου διευθύνσεως καὶ τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης διὰ τοῦ περισκοπίου καὶ τοῦ παρατηρητοῦ). Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁριζοντία ἀπόστασις τοῦ ὑποβρυχίου ἀπὸ τῆς κατακορύφου τῆς διερχομένης διὰ τοῦ παρατηρητοῦ.

263) Δύο παρατηρηταὶ ἱστάμενοι ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους ἀπέχοντος ἀπ' ἀλλήλων 1000 μέτρα βλέπουν συγχρόνως ἓν ἀεροπλάνον ὑπὸ γωνίαν (ἤτοι τὸ ὕψος αὐτοῦ ὑπὲρ τὴν γῆν) 60° καὶ 45° ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ ἀεροπλάνου.

264) Εἷς βλέπει ἕνα ἀπόκρημνον καὶ κατακόρυφον βράχον ὑπὸ γωνίαν 45°, ἐὰν δὲ πλησιάσῃ τὸν βράχον κατὰ 1000 μέτρα, βλέπει τοῦτον ὑπὸ γωνίαν 60° Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ βράχου

καὶ ἡ ὁριζοντία ἀπόστασις τοῦ παρατηρητοῦ ἀπὸ τοῦ βράχου.

265) Εἷς, ὁ ὁποῖος ἵσταται μεταξὺ δύο δένδρων, καὶ ἐπὶ τῆς διευθύνσεως αὐτῶν, βλέπει τὸ μὲν ἓν ὑπὸ γωνίαν 30°, τὸ δὲ ἄλλο ὑπὸ γωνίαν 60°. Ἐὰν ὅμως πλησιάσῃ τὸ πρῶτον κατὰ 60⁰ μέτρα θὰ ἴδῃ καὶ τὰ δύο δένδρα ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν τῶν 45⁰. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο δένδρων ὡς καὶ τὸ ὕψος ἑκάστου τούτων.

266) Τὸ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν εἶναι 915,12 μ. καὶ μία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ εἶναι 64° 20′40″. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.

267) Τὰ τμήματα, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου ὑπὸ τοῦ ὕψους ἐπ' αὐτήν, εἶναι 896,08 μ. καὶ 616,29 μ. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.

268) Ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 673,12 μ, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν ἄλλων πλευρῶν εἶναι 412,373 μ. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.

269) Ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 627,5 μ., τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἄλλων πλευρῶν εἶναι 878,5 μ. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.

270) Ὀρθογωνίου τριγώνου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 30 τ.μ., ἡ δὲ ὀξεῖα γωνία Α=67° 22′ 48″. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.

271) Ὀρθογωνίου τριγώνου τὸ ἄθροισμα τῶν δύο καθέτων πλευρῶν εἶναι 119 μ., μία δὲ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ 64° 40″. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.

272) Ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ἡ περίμετρος εἶναι 120 μ., ἡ δὲ ὀξεῖα γωνία Β=22° 37′ 12″. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.

273) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ διαφορὰ τῶν δύο καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι 47 μ., μία δὲ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ 32° 46′ 45″. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.

274) Ἡ πλευρὰ κανονικοῦ δωδεκαγώνου εἶναι 20 μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένου κύκλου, ὡς καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐν αὐτῷ.

275) Τοῦ ὡς ἄνω δωδεκαγώνου νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδόν.

276) Νὰ εὑρεθῇ ἡ περίμετρος κανονικοῦ δωδεκαγώνου, ὅταν

γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἶναι 10 μ.

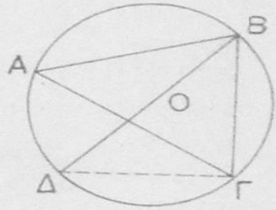
277) Νὰ εὑρεθῇ ἡ περίμετρος κανονικοῦ δωδεκαγώνου, ὅταν ἡ ἀκτὶς τοῦ περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι 1 μέτρον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ

Σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων παντὸς τριγώνου.

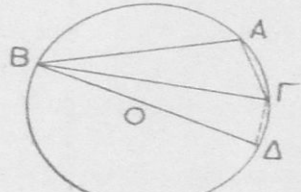
71. **Θεώρημα.**— *Ἐν παντὶ τριγώνῳ αἱ πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἡμίτονα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν.*

Ἤτοι εἶναι $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$.



Ἔστω Ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένου κύκλου Ο καὶ ΒΔ διάμετρος τοῦ κύκλου τούτου, ἡ ὁποία ἢ θὰ τέμνῃ τὸ τρίγωνον (ἐὰν ἡ Α εἶναι ὀξεῖα) ἢ θὰ εἶναι ἐκτὸς αὐτοῦ (ἐὰν ἡ Α εἶναι ἀμβλεῖα).

Ἑπομένως αἱ γωνίαι Α καὶ Δ ἢ θὰ εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικαὶ (Στ. Γεωμ.)· ἀλλ' εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις θὰ ἔχωμεν $\eta\mu A=\eta\mu \Delta$



Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΓΔ λαμβάνομεν

$\alpha=2P\eta\mu\Delta$ ἢ $\alpha=2P\eta\mu A$, ἤτοι $2P=\frac{\alpha}{\eta\mu A}$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι

$$2P=\frac{\beta}{\eta\mu B} \text{ καὶ } 2P=\frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}.$$

Ἑπομένως εἶναι $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$ (1).

72. **Θεώρημα.**— *Ἐν παντὶ τριγώνῳ τὸ τετράγωνον τῆς τυχούσης πλευρᾶς ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλὴν τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν πλευρῶν τούτων,*

πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.

Ἔστω τυχὸν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ. Ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς Α φέρωμεν ἐπὶ τὴν ΒΓ τὴν κάθετον ΑΔ καί, ἂν ἡ γωνία Γ εἶναι ὀξεῖα, κατὰ ἓν θεώρημα τῆς Γεωμετρίας εἶναι

$$(ΑΒ)^2=(ΒΓ)^2+(ΑΓ)^2-2(ΒΓ)(ΔΓ).$$

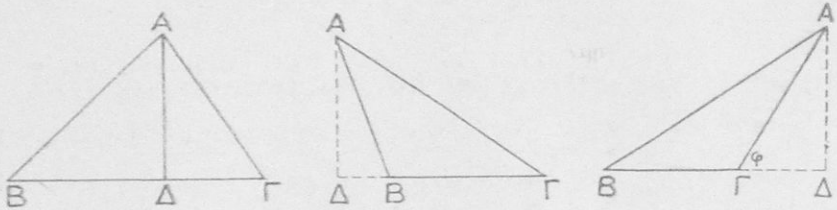
Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ λαμβάνομεν

$$(ΔΓ)=(ΑΓ)συνΓ.$$

Ὥστε ἡ πρώτη ἰσότης γίνεται

$$(ΑΒ)^2=(ΒΓ)^2+(ΑΓ)^2-2(ΒΓ)(ΑΓ)συνΓ, \text{ ἤτοι}$$

$$γ^2 = α^2 + β^2-2αβσυνΓ.$$



Ἐὰν ἡ γωνία Γ εἶναι ἀμβλεῖα, ἡ κάθετος ΑΔ πίπτει ἐκτὸς τοῦ τριγώνου καὶ τότε ἔχομεν ἐκ τῶν στοιχείων τῆς Γεωμετρίας τὴν ἰσότητα.

$$(ΑΒ)^2 = (ΒΓ)^2 + (ΑΓ)^2 + 2(ΒΓ)(ΓΔ) \qquad (1')$$

Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΓΔ ἕπεται $(ΓΔ) = (ΑΓ)συνφ$ καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία φ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς Γ, εἶναι $συνφ = -συνΓ$, ἑπομένως $(ΓΔ) = (ΑΓ)(-συνΓ) =- (ΑΓ)συνΓ$ καὶ ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὴν τιμὴν ταύτην τῆς ΓΔ εἰς τὴν ἰσότητα (1′) εὑρίσκομεν πάλιν.

$$γ^2 = α^2 + β^2 - 2αβσυνΓ.$$

Ἐπειδὴ ἡ πρότασις ἐφαρμόζεται ἐφ' ἑκάστης τῶν πλευρῶν, ἕπεται ὅτι εἶναι :

$$\begin{aligned} α^2&=β^2+γ^2-2βγσυνΑ \\ β^2&=γ^2+α^2-2γασυνΒ \qquad (2) \\ γ^2&=α^2+β^2-2αβσυνΓ \end{aligned}$$

73. **Τύποι τῶν ἡμίσεων γωνιῶν τριγώνου.**—Ἐκ τῶν προηγουμένων τύπων (2) εὑρίσκομεν τὰ συνημίτονα τῶν γωνιῶν τριγώνου συναρτήσει τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, ὁπότε ἔχομεν:

$$\begin{aligned} συνA &= \frac{β^2+γ^2-α^2}{2βγ} \\ συνB &= \frac{α^2+γ^2-β^2}{2αγ} \\ συνΓ &= \frac{α^2+β^2-γ^2}{2αβ}. \end{aligned} \qquad (2')$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ $συνA=1-2ημ^2\frac{A}{2}$ ἔχομεν

$$1-2ημ^2\frac{A}{2}=\frac{β^2+γ^2-α^2}{2βγ} \qquad ἤ$$

$$2ημ^2\frac{A}{2}=1-\frac{β^2+γ^2-α^2}{2βγ} \quad ἤτοι \quad ημ^2\frac{A}{2}=\frac{2βγ-β^2-γ^2+α^2}{4βγ}$$

ἤτοι $$ημ^2\frac{A}{2}=\frac{α^2-(β-γ)^2}{4βγ}=\frac{(α-β+γ)(α+β-γ)}{4βγ}. \qquad (3)$$

Ὁμοίως ἐπειδὴ εἶναι $συνA=2συν^2\frac{A}{2}-1$ ἔχομεν

$$2συν^2\frac{A}{2}-1=\frac{β^2+γ^2-α^2}{2βγ} \qquad ἤ$$

$$2συν^2\frac{A}{2}=\frac{β^2+γ^2-α^2+2βγ}{2βγ}=\frac{(β+γ)^2-α^2}{2βγ} \qquad ἤ$$

$$συν^2\frac{A}{2}=\frac{(α+β+γ)(-σ+β+γ)}{4βγ}. \qquad (4)$$

Ἐὰν δὲ πρὸς συντομίαν θέσωμεν $α+β+γ=2τ$ (ὅτε σημαίνει τὴν ἡμιπερίμετρον τοῦ τριγώνου) καὶ ἀφαιρέσωμεν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς τεθείσης ἰσότητος τὸ 2α, ἔπειτα τὸ 2β καὶ τέλος τὸ 2γ, εὑρίσκομεν:

$$\begin{aligned} -α+β+γ &= 2(τ-α) \\ α-β+γ &= 2(τ-β) \\ α+β-γ &= 2(τ-γ) \end{aligned} \qquad (5)$$

καὶ διὰ τῆς βοηθείας τῶν ἰσοτήτων τούτων οἱ τύποι (3) καὶ (4) γράφονται ὡς ἑξῆς.

$$\eta\mu^2\frac{A}{2}=\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}=\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma} \quad \text{ὅθεν εἶναι}$$

$$\eta\mu\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}$$

μὲ σημεῖον $+$ διότι ἡ γωνία $\frac{A}{2}$ εἶναι πάντοτε ὀξεῖα.

Ἐὰν ἤδη τὰς δύο τελευταίας αὐτὰς ἰσότητας διαιρέσωμεν κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}.$$

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ἐκ τῆς δευτέρας καὶ τρίτης τῶν ἰσοτήτων (2΄) εὑρίσκομεν τὰ $\eta\mu\frac{B}{2}$, $\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$ κα ἐξ αὐτῶν τὰς $\varepsilon\varphi\frac{B}{2}$, $\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}$. Ἔχομεν δὲ οὕτω διὰ τὰ ἡμίτονα τῶν ἡμίσεων γωνιῶν τριγώνου

$$\eta\mu\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}$$

$$\eta\mu\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}{\alpha\gamma}} \qquad (6)$$

$$\eta\mu\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\alpha\beta}}$$

Διὰ τὰ συνημίτονα τῶν ἡμίσεων γωνιῶν αὐτοῦ

$$\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)}{\alpha\gamma}} \qquad (7)$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\gamma)}{\alpha\beta}}$$

Καὶ διὰ τὰς ἐφαπτομένας τῶν ἡμίσεων γωνιῶν ἔχομεν

$$\begin{aligned} εφ\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(τ-β)(τ-γ)}{τ(τ-α)}} \\ εφ\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(τ-α)(τ-γ)}{τ(τ-β)}} \qquad (8) \\ εφ\frac{Γ}{2} &= \sqrt{\frac{(τ-α)(τ-β)}{τ(τ-γ)}}. \end{aligned}$$

Αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι πρέπει εἰς τοὺς τύπους τούτους νὰ λαμβάνωνται θετικῶς· διότι τὰ ἡμίση τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου, ἤτοι αἱ γωνίαι $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}Γ$, εἶναι πάντοτε ὀξεῖαι· ἐπομένως οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ αὐτῶν εἶναι πάντοτε θετικοί.

Σημείωσις. Ἐὰν εἰς τρίγωνον τρέψωμεν τὰ γράμματα τῶν κορυφῶν ἀπὸ Α, Β, Γ εἰς Β, Γ, Α (τὸ Α εἰς Β, τὸ Β εἰς Γ, καὶ τὸ Γ εἰς Α) θὰ τραποῦν ὁμοίως καὶ τὰ γράμματα τῶν πλευρῶν ἀπὸ α, β, γ, εἰς β. γ, α· ἀλλ' οἱ εὑρεθέντες γενικοὶ τύποι (1), (2), (6), (7) καὶ (8), οἱ ἐπὶ τοῦ τυχόντος τριγώνου ἰσχύοντες, πρέπει προφανῶς νὰ ἀληθεύουν καὶ μετὰ τὴν τροπὴν ταύτην· τρέποντες ἄρα τὰ γράμματα, ὡς εἴπομεν, δυνάμεθα ἐξ ἑνὸς τῶν τύπων τούτων νὰ εὕρωμεν τοὺς ὁμοίους του.

74. Θεώρημα.—***Ἐν παντὶ τριγώνῳ ἡ διαφορὰ δύο πλευρῶν ἔχει λόγον πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, ὃν ἔχει καὶ ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν ἀπέναντι γωνιῶν πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τοῦ ἡμιαθροίσματος αὐτῶν.***

Ἤτοι εἶναι

$$\frac{α-β}{α+β} = \frac{εφ\frac{A-B}{2}}{εφ\frac{A+B}{2}}.$$

Πρὸς τοῦτο ἐκ τῶν σχέσεων (1) $\frac{α}{ημA} = \frac{β}{ημB} = \frac{γ}{ημΓ}$ λαμβάνομεν κατὰ τὴν γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἴσων λόγων τὰς ἰσότητας:

$$\frac{\alpha-\beta}{\eta\mu A-\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$$

$$\frac{\alpha+\beta}{\eta\mu A+\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma},$$ ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτει ἤ

$$\frac{\alpha-\beta}{\eta\mu A-\eta\mu B}=\frac{\alpha+\beta}{\eta\mu A+\eta\mu \beta}$$ ἤ

ἤ $$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\eta\mu A-\eta\mu B}{\eta\mu A+\eta\mu B}$$

καὶ κατὰ τὸν τύπον τῆς § 51 ἤ

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}}{\varepsilon\varphi\frac{A+B}{2}} \qquad (9).$$

Σημείωσις. Ἐπειδὴ εἶναι $A+B=180^0-\Gamma$ ἕπεται, ὅτι $\frac{A+B}{2}=90^0-\frac{\Gamma}{2}$ καὶ $\varepsilon\varphi\frac{A+B}{2}=\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}$. Διὰ τοῦτο ὁ τύπος (9) γράφεται συνήθως ὡς ἑξῆς:

$$\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}.\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\varepsilon\varphi\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}.\sigma\varphi\frac{A}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\frac{\Gamma-A}{2}=\frac{\gamma-\alpha}{\gamma+\alpha}.\sigma\varphi\frac{B}{2}.$$

75. *Παρατήρησις.* Αἱ ἐξισώσεις

$$A+B+\Gamma=180^0, \quad \frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} \qquad (\iota)$$

αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ ἓξ στοιχεῖα παντὸς τριγώνου εἶναι βασικαί. Διότι πᾶσα ἄλλη ἐξίσωσις συνδέουσα τὰ ἓξ αὐτὰ στοιχεῖα, πρέπει νὰ καταντᾷ ταυτότης, ὅταν ἐν αὐτῇ ἀντικατασταθοῦν τὰ Γ,α,β ὑπὸ τῶν τιμῶν των, τὰς ὁποίας λαμβάνομεν ἐκ τῶν ἐξισώσεων (ι) ἤτοι ὑπὸ τῶν

$$\Gamma=180^0-A-B, \quad \alpha=\frac{\gamma\eta\mu A}{\eta\mu(A+B)}, \quad \beta=\frac{\gamma\eta\mu B}{\eta\mu(A+B)}$$

διότι, ἂν δὲν συνέβαινε τοῦτο, θὰ συνέδεε τὰ ἐν αὐτῇ περιεχόμενα γ, α, Β. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἄτοπον, διότι ταῦτα οὐδόλως συνδέονται μεταξύ των καὶ δύνανται νὰ μεταβάλλωνται αὐθαιρέτως. Ὥστε πᾶσα ἄλλη ἐξίσωσις περιέχουσα τὰ ἓξ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου προκύπτει μόνον ἐκ καταλλήλου μετασχηματισμοῦ τῶν ἐξισώσεων (ι).

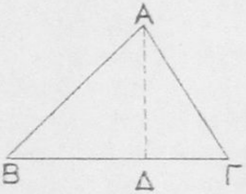
Ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

76. Ἔστω ΑΔ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν βάσιν ΒΓ αὐτοῦ. Τότε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι

$$E=\frac{1}{2}(B\Gamma)(A\Delta)=\frac{1}{2}\alpha(A\Delta).$$

Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ εὑρίσκομεν $(A\Delta)=(A\Gamma)\eta\mu\Gamma=\beta\eta\mu\Gamma$. Ὅθεν ἕπεται $E=\frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma$. (10)

Ἤτοι *τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου δύο τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.*



Ἐὰν δὲ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου συναρτήσει μιᾶς πλευρᾶς αὐτοῦ, π.χ. τῆς α καὶ τῶν παρ' αὐτῇ γωνιῶν Β,Γ εἰς τὸν τύπον (10) ἀντικαθιστῶμεν τὸ β διὰ τοῦ ἴσου του $\frac{\alpha\eta\mu B}{\eta\mu A}$, ὁπότε ἔχομεν

$$E=\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^2\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A} \quad \text{ἤτοι}$$

$$E=\frac{\alpha^2\eta\mu B.\eta\mu\Gamma}{2\eta\mu(B+\Gamma)} \quad (11).$$

Ἐὰν δὲ πάλιν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου συναρτήσει τῶν τριῶν πλευρῶν αὐτοῦ, παρατηροῦμεν, ὅτι $\eta\mu\Gamma=2\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$ ἢ κατὰ τοὺς τύπους (6) καὶ (7)

$$\eta\mu\Gamma=\frac{2}{\alpha\beta}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

καὶ ἂν ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ ημΓ τεθῇ εἰς τὴν ἰσότητα (10) προκύπτει

$$E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} \quad (12).$$

Σημείωσις α'. Ἐὰν τυχὸν τετράπλευρον διαιρεθῇ εἰς τρίγωνα διὰ τῶν διαγωνίων αὐτοῦ καὶ ἐφαρμοσθῇ ἐπ' αὐτῶν ὁ τύπος, (10) εὑρίσκεται ἡ ἑξῆς πρότασις.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου ἰσοῦται τῷ ἡμίσει τοῦ γινομένου τῶν διαγωνίων αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.

Σημείωσις β΄. Ἐκ τῆς ἰσότητος

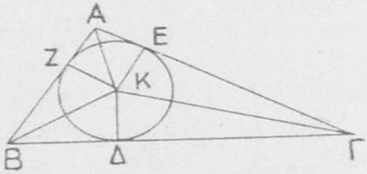
$$2P=\frac{\alpha}{\eta\mu A} \qquad \text{ἕπεται καὶ} \qquad 2P=\frac{\alpha.\beta.\gamma}{\beta.\gamma.\eta\mu A}$$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\beta\gamma\eta\mu A=2E$ συνάγεται

$$4.E.P=\alpha.\beta.\gamma \;\text{ ἢ }\; E=\frac{\alpha.\beta.\gamma}{4P} \qquad (13).$$

Ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

77. Ἔστω K τὸ κέντρον τοῦ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ P ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ. Ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, διαιρεῖται τὸ τρίγωνον εἰς τρία, ἔχοντα βάσεις μὲν τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου, ὕψη δὲ τὰς ἀκτῖνας ΚΔ, ΚΕ, ΚΖ τοῦ κύκλου, αἱ ὁποῖαι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας. Ἐπομένως τὸ ἐμβαδὸν αὐτῶν εἶναι



$\frac{1}{2}\alpha\rho$, $\frac{1}{2}\beta\rho$, $\frac{1}{2}\gamma\rho$. Ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εἶναι

$$E=\frac{1}{2}\rho(\alpha+\beta+\gamma)=\rho.\tau \quad \text{Ὅθεν εἶναι } \rho=\frac{E}{\tau}.$$

Ἐὰν δὲ ἀντικαταστήσωμεν τὸ E ὑπὸ τῆς τιμῆς αὐτοῦ (12), εὑρίσκομεν.

$$\rho=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}} \qquad (13)$$

Σημείωσις. Ἐὰν εἰς τοὺς τύπους (8) πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμητὰς καὶ τοὺς παρονομαστὰς τῶν τριῶν ὑπορρίζων ἀντιστοίχως ἐπὶ (τ—α), (τ—β), (τ—γ) εὐκόλως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\varepsilon\varphi \frac{A}{2} = \frac{\rho}{\tau-\alpha}$$
$$\varepsilon\varphi \frac{B}{2} = \frac{\rho}{\tau-\beta} \quad (14)$$
$$\varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2} = \frac{\rho}{\tau-\gamma}.$$

Ἀσκήσεις.

Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐν παντὶ τριγώνῳ ΑΒΓ εἶναι

278) $$\varepsilon\varphi B = \frac{\beta.\eta\mu\Gamma}{\alpha-\beta.\sigma\upsilon\nu\Gamma}$$

279) $$\frac{\eta\mu(B-\Gamma)}{\eta\mu(B+\Gamma)} = \frac{\beta^2-\gamma^2}{\alpha^2}$$

280) $$\frac{\alpha}{\beta+\gamma} = \frac{\eta\mu\frac{A}{2}}{\eta\mu\left(\Gamma+\frac{A}{2}\right)}$$

281) $$\frac{\alpha}{\beta-\gamma} = \frac{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{\sigma\upsilon\nu\left(\Gamma+\frac{A}{2}\right)}$$

282) $$\frac{1}{\beta.\sigma\upsilon\nu\Gamma-\gamma.\sigma\upsilon\nu\Gamma} = \frac{\alpha}{\beta^2-\gamma^2}$$

283) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 2(\beta\gamma.\sigma\upsilon\nu A+\gamma\alpha.\sigma\upsilon\nu B+\alpha\beta.\sigma\upsilon\nu\Gamma)$

284) $$\frac{\varepsilon\varphi B}{\varepsilon\varphi\Gamma} = \frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{\alpha^2-\beta^2+\gamma^2}$$

285) $(\alpha-\beta)\varepsilon\varphi \frac{A+B}{2} + (\beta-\gamma)\varepsilon\varphi \frac{B+\Gamma}{2} + (\gamma-\alpha)\varepsilon\varphi \frac{\Gamma+A}{2} = 0$

286) Ἐὰν αἱ πλευραὶ τριγώνου εἶναι ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ θὰ εἶναι ἐν τοιαύτῃ προόδῳ καὶ αἱ συνεφαπτόμεναι τῶν ἡμίσεων γωνιῶν αὐτοῦ,

ἤτοι ἐὰν $\alpha+\gamma=2\beta$, θὰ εἶναι καὶ $\sigma\varphi\frac{A}{2}+\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}=2\sigma\varphi\frac{B}{2}$.

287) Ἐὰν μ εἶναι τὸ μῆκος τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ, περατουμένης εἰς τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ΒΓ, ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι

$$\mu(\beta+\gamma)\eta\mu\frac{A}{2} = \beta\gamma\eta\mu A$$

288) Ἐὰν αἱ πλευραὶ τριγώνου εἶναι $\alpha=13$, $\beta=14$, $\gamma=15$ νὰ εὑρεθοῦν τὰ $\eta\mu\frac{A}{2}$, $\eta\mu\frac{B}{2}$, $\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$

289) Ὁμοίως ἐκ τῶν ἄνω δεδομένων νὰ εὑρεθοῦν τὰ

$$\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2},\ \sigma\upsilon\nu\frac{B}{2},\ \sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$$

290) Ἐὰν αἱ πλευραὶ τριγώνου εἶναι $\alpha=8$, $\beta=6$, $\gamma=4$, νὰ εὑρεθοῦν τὰ $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$

291) Ἐὰν αἱ πλευραὶ τριγώνου εἶναι $\alpha=25$, $\beta=52$ καὶ $\gamma=63$, νὰ εὑρεθοῦν αἱ $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}$, $\varepsilon\varphi\frac{B}{2}$, $\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}$

292) Ὁμοίως εὑρεῖν τὰς $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}$, $\varepsilon\varphi\frac{B}{2}$, $\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}$, ὅταν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι $\alpha=287$, $\beta=816$, $\gamma=865$.

293) Ἡ σχέσις $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}$ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\eta\mu A=\frac{\alpha}{\beta}\eta\mu B.$$

Αὕτη δὲ εἶναι ἡ ἰδία μὲ τὸν τύπον $\eta\mu\chi=\kappa\eta\mu\psi$ τῆς διαθλάσεως τοῦ φωτός, ὅπου χ εἶναι ἡ γωνία τῆς προσπτώσεως, ψ ἡ γωνία τῆς διαθλάσεως, καὶ κ ὁ δείκτης τῆς διαθλάσεως ἐξαρτώμενος ἐκ τοῦ περιέχοντος. Κατόπιν τούτου, ἐὰν μία φωτεινὴ ἀκτὶς ἐκ τοῦ ἀέρος εἰσέρχεται εἰς τὸ ὕδωρ ὑπὸ γωνίαν προσπτώσεως 36° νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία τῆς διαθλάσεως τοῦ δείκτου ὄντος $\frac{3}{4}$.

294) Ὅταν ἡ ἀκτὶς μεταβαίνῃ ἐκ τοῦ ἀέρος εἰς τὸ ὕδωρ ὁ δείκτης τῆς διαθλάσεως, εἶναι $\frac{3}{4}$, ὅταν δὲ μεταβαίνῃ ἐκ τοῦ ἀέρος εἰς τὴν ὕαλον ὁ δείκτης εἶναι $\frac{3}{2}$. Νὰ εὑρεθῇ α) ὁ δείκτης τῆς διαθλάσεως, ὅταν ἡ ἀκτὶς μεταβαίνῃ ἐκ τοῦ ὕδατος εἰς τὴν ὕαλον καὶ β) ἡ γωνία τῆς προσπτώσεως ἐντὸς τῆς ὑάλου, ὅταν ἡ γωνία τῆς προσπτώσεως ἐντὸς τοῦ ὕδατος εἶναι 40°.

295) Ἡ διαθλαστικὴ γωνία ΒΟΓ πρίσματος εἶναι 36^0 μία δὲ φωτεινὴ ἀκτὶς ΑΒ ἐκ τοῦ ἀέρος προσπίπτει εἰς τὸ Β ὑπὸ γωνίαν 40^0, ἐξέρχεται δὲ τοῦ πρίσματος κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΓΔ.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία τῆς ἐκτροπῆς τῆς ἀκτῖνος, ἤτοι ἡ ὀξεῖα γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ.

296) Τριγώνου τινος αἱ γωνίαι εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 1,2,3. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρὸς ἀλλήλας σχέσις τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

297) Ἐὰν τριγώνου αἱ γωνίαι τῆς βάσεως εἶναι $112^0\ 30'$ καὶ $22^0\ 30'$, ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ὕψος αὐτοῦ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως.

298) Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐν παντὶ τριγώνῳ εἶναι

$$\alpha = \beta\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu B$$
$$\beta = \gamma\sigma\upsilon\nu A + \alpha\sigma\upsilon\nu\Gamma$$
$$\gamma = \alpha\sigma\upsilon\nu B + \beta\sigma\upsilon\nu A.$$

299) Ἐὰν Δ εἶναι σημεῖον τι τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, οὗ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι Ε, ἡ δὲ γωνία ΑΔΓ παρασταθῇ διὰ τοῦ ω, ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι $(A\Delta) = \frac{2E}{\alpha\eta\mu\omega}$

300) Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι $E = 2P^2\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma$

301) Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι $E = 4P\rho\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$

302) Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι $\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{1}{2P\rho}$

303) Ἐὰν ρ_1, ρ_2, ρ_3 εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΓΒ παρεγγεγραμμένων κύκλων ἔναντι τῶν γωνιῶν Α,Β,Γ ἀντιστοίχως, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι

$$\rho_1 = \frac{E}{\tau-\alpha} \qquad \rho_2 = \frac{E}{\tau-\beta} \qquad \rho_2 = \frac{E}{\tau-\gamma}.$$

304) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι

$$\frac{\rho\rho_1}{\rho_2\rho_3} = \varepsilon\varphi^2\frac{A}{2}$$

305) Ὁμοίως ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι $\rho\rho_1\rho_2\rho_3 = E^2$

Ἐπίλυσις τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων ἐν γένει.

78. Ἐξ ὅσων ἐμάθομεν προηγουμένως συνάγομεν, ὅτι τὸ εὐθύγραμμον τρίγωνον ὁρίζεται ἐντελῶς, ὅταν δοθοῦν:

1) Ἡ μία πλευρὰ αὐτοῦ καὶ δύο γωνίαι (καὶ ἡ πρὸς τὴν πλευρὰν θέσις αὐτῶν).

2) Δύο πλευραὶ καὶ μία γωνία (ἡ ὁποία δύναται νὰ εἶναι ἢ ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν δύο πλευρῶν ἢ ἡ ἀπέναντι εἰς τὴν μεγαλυτέραν ἐξ αὐτῶν), καὶ

3) Αἱ τρεῖς πλευραὶ αὐτοῦ.

Ὥστε κατὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν τριγώνων διακρίνομεν τὰς ἑπομένας τέσσαρας περιπτώσεις.

Περίπτωσις 1η

79. ***Ἐκ μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου, ἔστω τῆς α, καὶ δύο γωνιῶν αὐτοῦ, ἔστω τῶν Β καὶ Γ, νὰ εὑρεθοῦν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.***

Ἐκ τῶν σχέσεων

$$A+B+\Gamma=180^0,\quad \frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$$ εὑρίσκομεν

$$A=180^0-(B+\Gamma)\quad \text{καὶ}\quad \beta=\frac{\alpha\eta\mu B}{\eta\mu A}\quad \gamma=\frac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}.$$

Ἐξ αὐτῶν δὲ λαμβάνομεν τοὺς τύπους τοὺς καταλλήλους διὰ τὴν χρῆσιν τῶν λογαρίθμων

$$\lambda o\gamma\, \beta=\lambda o\gamma\alpha+\lambda o\gamma\eta\mu B-\lambda o\gamma\eta\mu A$$
$$\lambda o\gamma\, \gamma=\lambda o\gamma\alpha+\lambda o\gamma\eta\mu\Gamma-\lambda o\gamma\eta\mu A.$$

Παράδειγμα.— Ἔστωσαν

δεδομένα	$\alpha=752{,}8$ μ.	ζητούμενα	A
	$B=67^0\,33'\,10''$		β
	$\Gamma=79^0\,40'$		γ

Κατὰ πρῶτον εἶναι $B+\Gamma=147^0\,13'\,10''$, ὅθεν γωνία

$$A=180^0-147^0\,13'\,10''=32^0\,46'\,50''$$

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς α

$$\beta=\frac{\alpha\eta\mu B}{\eta\mu A}$$

λογα	$=2{,}87668$
λογημΒ	$=\overline{1}{,}96578$
ἄθροισμα	$=2{,}84246$
λογημΑ	$=\overline{1}{,}73354$
λογβ	$=3{,}10892$
καὶ β	$1285{,}06$

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ

$$\gamma=\frac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$$

λογα	$=2{,}87668$
λογημΓ	$=\overline{1}{,}99290$
ἄθροισμα	$=2{,}86958$
λογημΑ	$=\overline{1}{,}73354$
λογγ	$=3{,}13604$
καὶ γ	$=1367{,}84$

Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ

$$E=\frac{\alpha^2 \eta\mu B \eta\mu \Gamma}{2\eta\mu A}$$

$$\begin{array}{ll}
 & 2\lambda o\gamma\, \alpha = 5{,}75336 \\
\lambda o\gamma\eta\mu B & = 1{,}96578 \\
\lambda o\gamma\eta\mu \Gamma & = 1{,}99290 \\
\text{ἄθροισμα} & = 5{,}71204 \\
 & \\
\lambda o\gamma 2 & = 0{,}30103 \\
\lambda o\gamma\eta\mu A & = 1{,}73354 \\
\text{ἄθροισμα} & = 0{,}03457 \\
 & \\
 & \quad 5{,}71204 \\
 & \quad 0{,}03457 \\
\lambda o\gamma\, E & = 5{,}67747 \\
\quad E & = 475862.5 \ \text{τ. μ.}
\end{array}$$

Περίπτωσις 2α

80. ***Ἐκ δύο πλευρῶν α, β τοῦ τριγώνου καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας εὑρεῖν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.***

Πρὸς εὕρεσιν τῶν ζητουμένων μεταχειριζόμεθα τὸν τύπον

$$\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}.\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}.$$

Ὅθεν $\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}=\lambda o\gamma(\alpha-\beta)+\lambda o\gamma\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}-\lambda o\gamma(\alpha+\beta)$.

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκομεν τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν γωνιῶν Α καὶ Β· παριστῶντες δὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν ταύτην διὰ Δ θὰ ἔχωμεν

$$\frac{A-B}{2}=\Delta,$$

ἀλλὰ καὶ $\frac{A+B}{2}=90^\circ-\frac{\Gamma}{2}$.

Ὅθεν $A=90^\circ-\frac{\Gamma}{2}+\Delta$

καὶ $B=90^\circ-\frac{\Gamma}{2}-\Delta$.

Μετὰ τὴν εὕρεσιν τῶν γωνιῶν Α καὶ Β εὑρίσκομεν καὶ τὴν πλευρὰν γ ἐκ τοῦ τύπου $\gamma = \frac{\alpha \eta\mu \Gamma}{\eta\mu A}$.

Σημείωσις. Ὑπεθέσαμεν, ὅτι αἱ διδόμεναι πλευραὶ α, β εἶναι ἄνισοι. Ἐὰν εἶναι ἴσαι τὸ πρόβλημα λύεται ἁπλούστατα, διότι εἶναι

$$A - B = 90^0 - \frac{\Gamma}{2} \qquad \text{καὶ} \qquad \gamma = 2\alpha\eta\mu\frac{\Gamma}{2}.$$

Παράδειγμα. Ἔστωσαν

δεδομένα	$\alpha = 5827{,}2$ μ.	ζητούμενα	Α
	$\beta = 1309{,}9$ μ.		Β
	$\Gamma = 39^0\ 15'$		γ

$$\alpha + \beta = 7307$$
$$\alpha - \beta = 4487{,}4$$
$$\frac{\Gamma}{2} = 19^0\ 37'\ 30''$$

Εὕρεσις τῶν γωνιῶν Α καὶ Β.

$$\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}.\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}$$

$$\lambda o\gamma(\alpha-\beta) = 3{,}65200$$
$$\lambda o\gamma\ \sigma\varphi\frac{1}{2}\Gamma = \underline{0{,}44785}$$
$$\text{ἄθροισμα} = 4{,}09985$$
$$\lambda o\gamma(\alpha+\beta) = \underline{3{,}86374}$$
$$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2} = 0{,}23611$$

ἐξ οὗ $\frac{A-B}{2} = 59^0\ 61'\ 35''$

ἐπειδὴ δὲ $\frac{A+B}{2} = 70^0\ 22'\ 30'' = 90^0 - \frac{\Gamma}{2}$

εὑρίσκομεν $A = 130^0\ 14'\ 5''$

$B = 10^0\ 30'\ 55''$

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ.

$$\gamma = \frac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$$

λογα	= 3,77064
λογημΓ	= $\bar{1}$.80120
ἄθροισμα	= 3,57184
λογημΑ	= $\bar{1}$.88275
λογ γ	= 3,68909
καὶ γ	= 4887,56.

Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ Ε.

$$2E = \alpha\beta\eta\mu\Gamma$$

λογα	= 3,77064
λογβ	= 3,14916
λοημΓ	= $\bar{1}$,80120
λογ(2Ε)	= 6,72100
2Ε	= 5260120 τ. μ.
Ε	= 2630080 τ. μ.

Π ε ρ ί π τ ω σ ι ς 3η.

81. Ἐκ δύο πλευρῶν α καὶ β τοῦ τριγώνου καὶ τῆς γωνίας Α τῆς ἀπέναντι μιᾶς τῶν πλευρῶν τούτων (τῆς α) εὑρεῖν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.

Ἐκ τοῦ τύπου $\eta\mu B = \frac{\beta\eta\mu A}{\alpha}$ εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν Β. Κατόπιν δὲ εὑρίσκομεν ὅτι $\Gamma = 180^\circ - (A + B)$, τέλος δὲ εὑρίσκομεν τὴν γ ἐκ τοῦ τύπου $\gamma = \frac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$

Διερεύνησις. Διὰ νὰ εἶναι τὸ πρόβλημα τοῦτο δυνατὸν πρέπει τὸ ημΒ νὰ μὴν ὑπερβαίνῃ τὴν μονάδα 1, ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι $\beta\eta\mu A < \alpha$ (8). Ἀλλ' ὅταν συμβαίνῃ τοῦτο θὰ εὕρωμεν εἰς τοὺς πίνακας μίαν γωνίαν Δ μικροτέραν τῶν 90° καὶ τοιαύτην ὥστε $\eta\mu\Delta = \frac{\beta\eta\mu A}{\alpha}$. Ἀλλ' ἐπειδὴ μόνον τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας

Β ἐδόθη πρέπει νὰ λάβωμεν ἢ $B=\Delta$ ὁπότε $\Gamma=180^0-A-\Delta$
» ἢ $B=180^0-\Delta$ » $\Gamma=\Delta-A$.

Ἀλλ' ἵνα αἱ εὑρεθεῖσαι δύο τιμαὶ τῆς γωνίας Γ εἶναι παραδεκταί, πρέπει νὰ εἶναι ἀμφότεραι μικρότεραι τῶν 180^0.

1) Ἀλλ' ἂν εἶναι $\beta<\alpha$, ἐπειδὴ $\eta\mu A<1$ ἔπεται, ὅτι $\beta\eta\mu A<\alpha$. Ὥστε τὸ πρόβλημα εἶναι τότε δυνατόν. Ἀλλ' ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τὴν ἰσότητα $\eta\mu\Delta=\frac{\beta}{\alpha}.\eta\mu A$ τὸ $\frac{\beta}{\alpha}$ εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος 1 (ἐπειδὴ $\beta<\alpha$). Διὰ νὰ ὑπάρχῃ λοιπὸν ἡ ἰσότης αὕτη πρέπει νὰ εἶναι $\eta\mu\Delta<\eta\mu A$, ἐξ οὗ ἔπεται, ὅτι $\Delta<A$· ἄρα ἡ προηγουμένη εὑρεθεῖσα τιμὴ τῆς $\Gamma=\Delta-A$ ὡς ἀρνητικὴ δὲν εἶναι παραδεκτή. Ἐνῷ ἡ πρώτη τιμὴ τῆς $\Gamma=180^0-A-\Delta$, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τιμὴν $B=\Delta$ (ὀξεῖα γωνία) εἶναι παραδεκτή, διότι εἶναι θετικὴ καὶ ὅταν ἡ γωνία Α εἶναι ἀμβλεῖα. Διότι ἡ ἀνισότης $\beta\eta\mu A<\alpha$ δεικνύει, ὅτι ἡ ὀξεῖα γωνία 180^0-A εἶναι μεγαλυτέρα τῆς Δ.

Ὥστε εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν $\beta<\alpha$ τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν.

2) Ἐὰν εἶναι $\alpha=\beta$ θὰ εἶναι καὶ $B=A$· ὥστε $\Gamma=180^0-2A$· ἡ δὲ λύσις αὕτη εἶναι παραδεκτή, ἐὰν ἡ δοθεῖσα γωνία Α εἶναι ὀξεῖα.

3) Ἐὰν τέλος εἶναι $\beta>\alpha$ εἶναι ἀνάγκη νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἀνισότης $\beta\eta\mu A\leq\alpha$. Ὅταν δὲ συμβαίνῃ τοῦτο, παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς :

Εἰς τὴν ἰσότητα $\eta\mu\Delta=\frac{\beta}{\alpha}.\eta\mu A$ (Δ γωνία ὀξεῖα) τὸ $\frac{\beta}{\alpha}$ εἶναι μεγαλύτερον τῆς μονάδος 1. Ὥστε διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης αὕτη πρέπει νὰ εἶναι $\eta\mu\Delta>\eta\mu A$, ἐξ οὗ ἔπεται, ὅτι πρέπει νὰ εἶναι $\Delta>A$. Ὥστε εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ δεδομένη γωνία Α πρέπει νὰ εἶναι ὀξεῖα. Ἀλλὰ τότε ἀμφότεραι αἱ τιμαὶ τῆς Γ ἤτοι αἱ $\Gamma=180^0-A-\Delta$ καὶ $\Gamma=\Delta-A$, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς τιμὰς $B=\Delta$ καὶ $B=180^0-\Delta$, εἶναι παραδεκταί, διότι εἶναι $A+\Delta<180^0$ καὶ ὡς εἴδομεν $\Delta>A$. Ὥστε εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις.

Παρατήρησις. Ἐὰν εἶναι βημΑ=α, τότε ἡ γωνία Δ γίνεται ὀρθή· ὥστε αἱ δύο τιμαὶ τῆς Β (ἑπομένως καὶ τῆς Γ) γίνονται ἴσαι.

Ὁ περιορισμὸς ὁ ἀπαιτούμενος, ἵνα τὸ πρόβλημα λυθῇ δύναται νὰ ἑρμηνευθῇ γεωμετρικῶς ὡς ἑξῆς.

Ἔστω ἡ γωνία ΓΑΕ (σχ. σελ. 16) ἴση τῇ δοθείσῃ Α καὶ καὶ ἡ ΑΓ ἴση τῇ β καὶ ἐκ τοῦ Γ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΕ ἡ ΓΚ· ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΓ$\angle$ εὑρίσκομεν

$$(\Gamma K)=(A\Gamma)\eta\mu A=\beta\eta\mu A.$$

Ὥστε ὁ ῥηθεὶς περιορισμὸς εἶναι ΓΚ$\leq$ α ἤτοι ἡ πλευρὰ α, ἡ εἰς τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ὑποτείνουσα, πρέπει νὰ μὴ εἶναι μικροτέρα τῆς καθέτου, ἥτις καταβιβάζεται ἐκ τοῦ πέρατος τῆς μιᾶς πλευρᾶς, ἥτις ἐλήφθη ἴση τῇ β, ἐπὶ τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς δοθείσης γωνίας.

Τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα εἶναι γνωστὰ καὶ ἐκ τῶν στοιχείων τῆς Γεωμετρίας.

Παράδειγμα 1ον. Ἔστωσαν

δεδομένα	α=893,8 μ.	ζητούμενα	Β
	β=697,4 μ.		Γ
	$A=58^0\ 13'\ 20''$		γ

(1 λύσις ἐπειδὴ α > β)

Εὕρεσις τῆς γωνίας Β.

$$\eta\mu B=\frac{\beta\eta\mu A}{\alpha}$$

λογβ	= 2,84348
λογημΑ	= $\overline{1}$,92947
ἄθροισμα	= 2,77295
λογα	= 2,95124
λογημΒ	= $\overline{1}$,82171

καὶ $B=41^\circ\ 33'\ 8''$

Εὕρεσις τῆς γωνίας Γ.

$$
\begin{array}{rrl}
 & A = & 58^\circ\ 13'\ 20'' \\
 & B = & 41^\circ\ 33'\ \ 8'' \\
\hline
\text{ὅθεν} & A+B = & 99^\circ\ 46'\ 28'' \\
 & \Gamma = & 80^\circ\ 13'\ 32''
\end{array}
$$

Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ.

$$\gamma = \frac{\alpha \eta\mu \Gamma}{\eta\mu A}$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{λογα} & = 2{,}95124 \\
\text{λογημΓ} & = \bar{1}{,}99365 \\
\hline
\text{ἄθροισμα} & = 2{,}94489 \\
\text{λογημΑ} & = \bar{1}{,}92947 \\
\hline
\text{λογγ} & = 3{,}01542
\end{array}
$$

καὶ $\gamma = 1036{,}14$ μ.

Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ Ε.

$$2E = \beta\gamma\eta\mu A$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{λογβ} & = 2{,}84348 \\
\text{λογγ} & = 3{,}01542 \\
\text{λογημΑ} & = \bar{1}{,}92947 \\
\hline
\text{λογ(2Ε)} & = 5{,}78837
\end{array}
$$

$2E = 614286$ τ. μ. καὶ $E = 307143$ τ. μ.

Παράδειγμα 2ον. Ἔστωσαν

δεδομένα	$\alpha = 1873{,}5$ μ.	ζητούμενα	B
	$\beta = 2954$ μ.		Γ
	$A = 35^\circ\ 12'\ 40''$		γ

Εὕρεσις τῆς γωνίας Β.

$$\eta\mu B = \frac{\beta\eta\mu A}{\alpha}$$

λογβ	$=3,47041$
λογημΑ	$=\overline{1},76087$
ἄθροισμα	$=3,23128$
λογα	$=3,27265$
λογημΒ	$=\overline{1},95863$

ὅθεν $B=65^\circ\,25'\,10''$.

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\beta > \alpha$, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν καὶ

$$B=114^\circ\,36'\,50'',$$

ἤτοι τὴν παραπληρωματικὴν τῆς προηγουμένης τιμῆς. Ὥστε ἔχομεν δύο λύσεις.

1η λύσις.	*2α λύσις.*
$B=\;65^\circ\,23'\,10''$	$B=114^\circ\,36'\,50''$
$A=\;35^\circ\,12'\,40''$	$A=\;35^\circ\,12'\,40''$
$A+B=100^\circ\,35'\,50''$	$A+B=149^\circ\,49'\,30''$
ὅθεν $\Gamma=\;79^\circ\,24'\,10''$	ὅθεν $\Gamma=\;30^\circ\,10'\,40''$
Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ.	*Εὕρεσις τῆς πλευρᾶς γ.*
$\gamma=\frac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$	$\gamma=\frac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$
λογα $=3,27265$	λογα $=3,27265$
λογημΓ $=\overline{1},99253$	λογημΓ $=\overline{1},70126$
ἄθροισμα $=3,26518$	ἄθροισμα $=2,97391$
λογημΑ $=\overline{1},76087$	λογημΑ $=\overline{1},76087$
λογγ $=3,50431$	λογγ $=3,21304$
καὶ γ $=3193,9$	καὶ γ $=1633,2$

Παράδειγμα 3ον. Ἔστωσαν τὰ δεδομένα.

$$\alpha=397,5\ \mu.\quad \beta=2549\ \mu.,\quad A=58^\circ\,12'.$$

Εὕρεσις τῆς γωνίας Β.

λογβ	$=3,40637$
λογημΑ	$=\bar{1},92936$
ἄθροισμα	$=3,33573$
λογα	$=\bar{2},59934$
λογημΒ	$=0,73639.$

Ἐπειδὴ ὁ εὑρεθεὶς λογάριθμος τοῦ ἡμιτόνου τῆς Β εἶναι θετικὸς (ὅπερ σημαίνει, ὅτι ἡ παράστασις $\frac{\beta\eta\mu A}{\alpha}$, ἤτοι τὸ ημΒ, ὑπερβαίνει τὴν μονάδα), ἡ γωνία Β δὲν ὑπάρχει καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

Περίπτωσις 4η.

82. ***Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ἐκ τῶν τριῶν πλευρῶν αὐτοῦ.***

Πρὸς τοῦτο μεταχειριζόμεθα τοὺς τύπους

$$\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}},\quad \varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{\tau(\tau-\beta)}}$$

$$\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\tau(\tau-\gamma)}}.$$

Ἐξ αὐτῶν δὲ λαμβάνομεν τοὺς κάτωθι τύπους καταλλήλους διὰ τὴν χρῆσιν τῶν λογαρίθμων.

$$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\,\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\left[\lambda o\gamma(\tau-\beta)+\lambda o\gamma(\tau-\gamma)-\lambda o\gamma\tau-\lambda o\gamma(\tau-\alpha)\right]$$

$$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\,\frac{B}{2}=\frac{1}{2}\left[\lambda o\gamma(\tau-\gamma)+\lambda o\gamma(\tau-\alpha)-\lambda o\gamma\tau-\lambda o\gamma(\tau-\beta)\right]$$

$$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\,\frac{\Gamma}{2}=\frac{1}{2}\left[\lambda o\gamma(\tau-\alpha)+\lambda o\gamma(\tau-\beta)-\lambda o\gamma\tau-\lambda o\gamma(\tau-\gamma)\right].$$

Ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι ἵνα τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν, ἀνάγκη καὶ τὰ τρία ὑπόρριζα νὰ εἶναι θετικά· ἐπειδὴ δὲ εἶναι

$$\tau = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$\tau - \alpha = \frac{1}{2}(-\alpha + \beta + \gamma)$$

$$\tau - \beta = \frac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma)$$

$$\tau - \gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma),$$

ἐὰν ἐκ τῶν δοθεισῶν πλευρῶν ἡ α οὐδεμιᾶς τῶν ἄλλων εἶναι μικροτέρα, οἱ παράγοντες (τ—β), (τ—γ) καὶ ὁ τ θὰ εἶναι θετικοὶ καὶ τὰ ὑπόρριζα θὰ ἔχουν ἑπομένως τὸ σημεῖον τοῦ παράγοντος τ—α, ὅστις διὰ τοῦτο ἀνάγκη νὰ εἶναι θετικός, ἤτοι $\alpha < \beta + \gamma$. Ἐξ οὗ βλέπομεν ὅτι, ἵνα τὸ πρόβλημα λυθῇ, πρέπει οὐδεμία τῶν δοθεισῶν πλευρῶν νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων, ὅταν δὲ συμβαίνῃ τοῦτο, ἐμάθομεν ἐν τοῖς στοιχείοις τῆς Γεωμετρίας, ὅτι τὸ τρίγωνον πάντοτε ὑπάρχει.

Παράδειγμα. Ἔστωσαν

δεδομένα	α=597,8 μ.	ζητούμενα	Α
	β=398,1 μ.		Β
	γ=206 μ.		Γ

Κατὰ πρῶτον εἶναι

$$\alpha + \beta + \gamma = 1201{,}9$$

ὅθεν

$$\tau = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = 600{,}95$$

$$\tau - \alpha = 3{,}15$$

$$\tau - \beta = 202{,}85$$

$$\tau - \gamma = 394{,}95$$

καὶ

$$\lambda o \gamma \tau = 2{,}77883$$

$$\lambda o \gamma (\tau - \alpha) = 0{,}49831$$

$$\lambda o \gamma (\tau - \beta) = 2{,}30718$$

$$\lambda o \gamma (\tau - \gamma) = 2{,}59654$$

Εὕρεσις τῆς γωνίας Α.

$$\varepsilon\varphi \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}{\tau(\tau - \alpha)}}$$

λογ(τ—β)	= 2,30718	λογ τ	= 2,77883
λογ(τ—γ)	= 2,59654	λογ(τ—α)	= 0,49831
ἄθροισμα	= 4,90372	ἄθροισμα	= 3,27714

$$\begin{array}{lr} & 4{,}90372 \\ & 3{,}27714 \\ \hline \text{διαφορὰ} & 1{,}62658 \end{array}$$

$$\text{λογεφ}\frac{A}{2} = 0{,}81329$$

καὶ $\frac{A}{2} = 81^{\circ}\ 15'\ 40'',7$ προσέγγισις $\frac{3}{4}''$

καὶ $A = 162^{\circ}\ 31'\ 21'',4$ προσέγγισις $1''\frac{1}{2}$

Εὕρεσις τῆς γωνίας Β.

$$\text{εφ}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{\tau(\tau-\beta)}}$$

λογ(τ—γ)	= 2,59654	λογ τ	= 2,77883
λογ(τ—α)	= 0,49831	λογ (τ—β)	= 2,30718
ἄθροισμα	= 3,09485	ἄθροισμα	= 5,08601

$$\begin{array}{lr} & 3{,}09485 \\ & 5{,}08601 \\ \hline \text{διαφορὰ} & \bar{2}{,}00884 \end{array}$$

$$\text{λογεφ}\frac{B}{2} = \bar{1}{,}00442$$

καὶ $\frac{B}{2} = 5^{0}\ 46'\ 7''$ προσέγγισις $\frac{1''}{2}$

καὶ $B = 11^{0}\ 32'\ 14''$ » $1''$.

Εὕρεσις τῆς γωνίας Γ.

$$\text{εφ}\frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\tau(\tau-\gamma)}}$$

λογ(τ—α)	= 0,49831	λογτ	= 2,77883
λογ(τ—β)	= 2,30718	λογ(τ—γ)	= 2,59654
ἄθροισμα	= 2,80549	ἄθροισμα	= 5,37537

$$
\begin{array}{lr}
 & 2{,}80549 \\
 & 5{,}37537 \\
\hline
\text{διαφορὰ} & \bar{3}{,}43012
\end{array}
$$

$$\text{λογεφ}\frac{\Gamma}{2} = \bar{2}{,}71506$$

$$\text{καὶ } \frac{\Gamma}{2} = 2^0\ 58'\ 13''\ \text{προσέγγισις } \frac{1}{3}''$$

$$\text{καὶ } \Gamma = 5^0\ 56'\ 26''\ \text{προσέγγισις } \frac{2}{3}''.$$

Σημείωσις. Τὸ ἄθροισμα τῶν εὑρεθεισῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι

$$
\begin{array}{rl}
A = & 162^0\ 31'\ 21'',4 \\
B = & 11^0\ 32'\ 14'' \\
\Gamma = & 5^0\ 56'\ 26'' \\
\hline
A+B+\Gamma = & 180^0\ \ 0'\ \ 1'',4
\end{array}
$$

Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τοῦτο, τὸ ὁποῖον διαφέρει τῶν 180^0 κατὰ $1'',4$ φανερώνει, ὅτι αἱ γινόμεναι πράξεις εἶναι ἀκριβεῖς. Διότι κατὰ τὴν εὕρεσιν τῆς Α τὸ συμβὰν λάθος ἦτο μικρότερον τοῦ $1''\frac{1}{2}$, τὸ δὲ κατὰ τὴν εὕρεσιν τῆς Β μικρότερον τοῦ $1''$, τὸ δὲ κατὰ τὴν εὕρεσιν τῆς Γ μικρότερον τοῦ $\frac{2}{3}''$. Ὥστε τὸ εἰς τὸ ἄθροισμα $A+B+\Gamma$ ὑπάρχον λάθος δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὰ $3''\frac{1}{6}$, ὅπερ ἀληθῶς συμβαίνει.

Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ Ε.

$$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

$$
\begin{array}{rl}
\text{λογ}\ \tau = & 2{,}77883 \\
\text{λογ}(\tau-\alpha) = & 0{,}49831 \\
\text{λογ}(\tau-\beta) = & 2{,}30718 \\
\text{λογ}(\tau-\gamma) = & 2{,}59654 \\
\hline
\text{ἄθροισμα} = & 8{,}18086
\end{array}
$$

$$\text{λογ}E = 4{,}09043 \text{ καὶ } E = 12814{,}8 \text{ τ. μ.}$$

83*. Ἄλλαι περιπτώσεις.—Τὸ εὐθύγραμμον τρίγωνον ὁρίζεται ἐντελῶς ὄχι μόνον κατὰ τὰς περιπτώσεις τῆς § 78, ἀλλὰ καὶ ὅταν δίδωνται τρία γεωμετρικὰ μεγέθη (ὄχι καὶ τὰ τρία γωνίαι) ἀνεξάρτητα, συνδεόμενα στενῶς μὲ τὸ τρίγωνον. Π.χ. ὅταν δίδωνται δύο γωνίαι αὐτοῦ καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένου κύκλου, ἢ δύο γωνίαι καὶ ἡ περίμετρος κ.α. Εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς ἐκφράζομεν τὰ δεδομένα συναρτήσει τῶν στοιχείων τοῦ τριγώνου καὶ προχωροῦμεν εἰς τὴν λύσιν χρησιμοποιοῦντες ἐκ τῶν τύπων, τοὺς ὁποίους εἴδομεν κατὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν τριγώνων, τοὺς καταλλήλους.

Παράδειγμα 1ον. ***Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ γνωρίζομεν δύο γωνίας αὐτοῦ, ἔστω τὰς Α καὶ Β καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένου κύκλου.***

Ἐν πρώτοις ἔχομεν $\Gamma = 180^\circ - (A + B)$. Κατόπιν εὑρίσκομεν ὅτι (σχῆμα σελ. 89) $\alpha = B\Delta + \Delta\Gamma = \rho\left(\sigma\varphi\frac{B}{2} + \sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}\right)$ ἢ

$\alpha = \dfrac{\rho\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}$. Ἐκ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκομεν τὴν πλευρὰν α καὶ κατόπιν εὑρίσκομεν τὰς πλευρὰς β καὶ γ διὰ τὰς ὁποίας εἶναι

$$\beta = \frac{\alpha\eta\mu B}{\eta\mu A} = \frac{\rho\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\eta\mu B}{\eta\mu A\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}} \qquad \text{ἤτοι}$$

$$\beta = \frac{\rho\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}}{\eta\mu\frac{A}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}} \qquad \text{καὶ}$$

$$\gamma = \frac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A} = \frac{\rho\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}} \qquad \text{ἤτοι}$$

$$\gamma = \frac{\rho\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}{\eta\mu\frac{A}{2}\,\eta\mu\frac{B}{2}}.$$

Τὸ ἐμβαδὸν εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου

$$E=\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A=\beta\gamma\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}.$$

Ἐὰν δὲ εἰς τοῦτον ἀντικαταστήσωμεν τὰς πλευρὰς β καὶ γ διὰ τῶν ἄνω εὑρεθεισῶν τιμῶν, εὑρίσκομεν

$$E=\rho^2.\sigma\varphi\frac{A}{2}.\sigma\varphi\frac{B}{2}.\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}=\frac{\rho^2}{\varepsilon\varphi\frac{A}{2}.\varepsilon\varphi\frac{B}{2}.\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}}.$$

Σημείωσις. Οἱ ἄνω εὑρεθέντες τύποι κατάλληλοι διὰ τὴν χρῆσιν τῶν λογαρίθμων λύουν τὸ πρόβλημα τοῦτο, ἐὰν $A+B<180^0$. Διότι αἱ εὑρεθεῖσαι τιμαὶ τῶν πλευρῶν α,β,γ, εἶναι θετικαί. Ἔχει δὲ τοῦτο μίαν λύσιν.

Παράδειγμα 2ον. ***Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, οὗ γνωρίζομεν τὴν περίμετρον 2τ καὶ δύο γωνίας, ἔστω τὰς Α καὶ Β.***

Ἐν πρώτοις ἔχομεν $\Gamma=180^0-(A+B)$. Κατόπιν ἐκ τῶν σχέσεων $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$ καὶ ἐκ τῆς γνωστῆς ἰδιότητος τῶν ἴσων λόγων λαμβάνομεν:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma} \qquad (1)$$

Ἀλλ' $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$, $\eta\mu A=2\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$ καὶ (ἄσκ. 163) $\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma=4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$. Ὥστε ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$\frac{\alpha}{2\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}=\frac{2\tau}{4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}.$$

Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν:

$$\alpha=\frac{\tau.\eta\mu\frac{A}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}\cdot$$ ὁμοίως δὲ εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\beta=\frac{\tau.\eta\mu\frac{B}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}} \text{ καὶ } \gamma=\frac{\tau.\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}}.$$

Τὸ ἐμβαδὸν εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου.

$$E = \beta\gamma\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}.$$

Ἐὰν δὲ εἰς τοῦτον ἀντικαταστήσωμεν τὰς πλευρὰς β καὶ γ διὰ τῶν ἄνω εὑρεθεισῶν τιμῶν, εὑρίσκομεν

$$E = \tau^2.\varepsilon\varphi\frac{A}{2}.\varepsilon\varphi\frac{B}{2}.\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}.$$

Σημείωσις. Ἐὰν $A+B < 180^0$, τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι δυνατόν, διότι αἱ εὑρεθεῖσαι τιμαὶ τῶν α, β, γ εἶναι θετικαί. Ἔχει δὲ τοῦτο μίαν λύσιν.

Παράδειγμα 3ον. ***Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰ τρία ὕψη.***

Ἔστωσαν υ, υ′, υ″, τὰ τρία ὕψη τοῦ τριγώνου ἐπὶ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ α, β, γ ἀντιστοίχως. Ἀλλὰ τότε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εἶναι $E = \frac{1}{2}\alpha\upsilon = \frac{1}{2}\beta\upsilon' = \frac{1}{2}\gamma\upsilon''$. Ὥστε εἶναι

$$\alpha\upsilon = \beta\upsilon' = \gamma\upsilon'' \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{\alpha}{\frac{1}{\upsilon}} = \frac{\beta}{\frac{1}{\upsilon'}} = \frac{\gamma}{\frac{1}{\upsilon''}}.$$

Αἱ σχέσεις δὲ αὗται φανερώνουν, ὅτι αἱ πλευραὶ α, β, γ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἀντίστροφα τῶν ἀντιστοίχων ὑψῶν. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι αὗται ἀνάλογοι καὶ πρὸς τὰ ημΑ, ημΒ, ημΓ ἕπεται, ὅτι

$$\frac{\eta\mu A}{\frac{1}{\upsilon}} = \frac{\eta\mu B}{\frac{1}{\upsilon'}} = \frac{\eta\mu \Gamma}{\frac{1}{\upsilon''}}.$$

Αἱ τελευταῖαι δὲ αὐταὶ σχέσεις δεικνύουν, ὅτι αἱ Α, Β, Γ εἶναι αἱ γωνίαι τριγώνου, τοῦ ὁποίου πλευραὶ εἶναι $\frac{1}{\upsilon}, \frac{1}{\upsilon'}, \frac{1}{\upsilon''}$. Εὑρίσκονται ἑπομένως αὗται κατὰ τὴν τετάρτην περίπτωσιν (§ 82), ὁπότε, ἐὰν θέσωμεν $\frac{1}{\upsilon} = \mu$, $\frac{1}{\upsilon'} = \nu$, $\frac{1}{\upsilon''} = \sigma$, $\mu+\nu+\sigma = 2\lambda$ καὶ παραστήσωμεν διὰ ρ′ τὴν ἀκτῖνα τοῦ εἰς τὸ τρίγωνον τοῦτο ἐγγεγραμμένου κύκλου, θὰ ἔχωμεν τοὺς τύπους

$$\rho' = \sqrt{\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)(\lambda-\sigma)}{\lambda}} \qquad \text{καὶ}$$

$$\varepsilon\varphi\frac{A}{2} = \frac{\rho'}{\lambda-\mu}, \quad \varepsilon\varphi\frac{B}{2} = \frac{\rho'}{\lambda-\nu}, \quad \varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} = \frac{\rho'}{\lambda-\sigma} \quad (§\ 77,\ 13,\ 14).$$

Ἀφοῦ δὲ εὕρωμεν διὰ τῶν τύπων τούτων τὰς γωνίας, εὐκόλως εὑρίσκομεν δι' αὐτῶν καὶ διὰ τῶν γνωστῶν ὕψῶν τὰς πλευρὰς α, β, γ. Ἀλλ' αὗται εὑρίσκονται καὶ ὡς ἑξῆς. Γνωρίζομεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, οὗ πλευραὶ εἶναι αἱ μ, ν, σ εἶναι $E=\frac{1}{2}\mu\nu\eta\mu\Gamma=\lambda\rho'$. Ὥστε εἶναι $\mu\nu.\eta\mu\Gamma=2\lambda\rho'$. Ἐξ ἄλλου ἔχομεν ἐκ τοῦ πρώτου τριγώνου $\upsilon=\beta\eta\mu\Gamma$ καὶ ἐπειδὴ ἐτέθη $\frac{1}{\upsilon}=\mu$, $\frac{1}{\mu}=\beta\eta\mu\,\Gamma$· ἄρα εἶναι $\beta=\frac{1}{\mu\eta\mu\Gamma}=\frac{\nu}{2\lambda\rho'}$. ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $\alpha=\frac{\mu}{2\lambda\rho'}$ καὶ $\gamma=\frac{\sigma}{2\lambda\rho'}$.

Διὰ νὰ λυθῇ τὸ πρόβλημα τοῦτο πρέπει καὶ ἀρκεῖ διὰ τῶν πλευρῶν μ, ν, σ νὰ κατασκευάζεται τρίγωνον. Ἑπομένως πρέπει καὶ ἀρκεῖ, ἵνα ἡ μεγαλυτέρα τῶν πλευρῶν τούτων εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων ἤτοι, τὸ ἀντίστροφον τοῦ μικροτέρου ὕψους νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀντιστρόφων τῶν δύο ἄλλων ὑψῶν.

Ἀσκήσεις.

306) Τριγώνου ΑΒΓ δίδονται $\alpha=145$ μ. $B=74^0\ 40'$ καὶ $\Gamma=38^0\ 25'$. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.

307) Τριγώνου ΑΒΓ δίδονται $B=76^0\ 43'$, $\Gamma=85^0\ 20'$ καὶ $\alpha=475{,}65$ μ. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.

308) Τρίγωνόν τι ἔχει μίαν πλευρὰν ἴσην μὲ 12,5 μ. αἱ δὲ δύο προσκείμεναι γωνίαι εἶναι 18^0 ἡ μία καὶ $98^0\ 12'$ ἡ ἄλλη. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.

309) Τριγώνου τινὸς μία γωνία εἶναι 45^0, αἱ δὲ περιέχουσαι αὐτὴν πλευραὶ εἶναι, ἡ μία 104 μ. καὶ ἡ ἄλλη 892. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.

310) Τριγώνου τινὸς μία γωνία εἶναι 128^0, ἐκ δὲ τῶν πλευρῶν, αἵτινες περιέχουν αὐτήν, ἡ μία εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι τοῦ τριγώνου.

311) Ἐὰν $\alpha=242{,}5$μ., $\beta=143{,}3$μ. καὶ $\Gamma=54^0\ 36'$, νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.

312) Ἐὰν $\beta=130$ μ. $\gamma=63$ μ. καὶ $B=42^0\ 15'\ 30''$ νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.

313) Ἐὰν $\alpha=5374{,}5$μ., $\gamma=1586$μ. καὶ $B=15^0\ 11'$, νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἄλλαι γωνίαι τοῦ τριγώνου.

314) Τριγώνου τινὸς δίδονται αἱ δύο πλευραὶ $\alpha=1542{,}7$ μ. $\beta=894{,}3$ μ. καὶ ἡ γωνία ἡ ἀπέναντι μιᾶς ἐξ αὐτῶν $A''=118^0\ 42'$. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.

315) Τριγώνου τινὸς δίδονται αἱ δύο πλευραὶ $\alpha=16$ μ. καὶ $\beta=25$ μ. καὶ ἡ γωνία $A=33^0\ 15'$. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ λοιπαὶ γωνίαι αὐτοῦ.

316) Τριγώνου τινὸς δίδονται αἱ δύο πλευραὶ $\alpha=45$μ., $\beta=78$ μ. καὶ ημ$A=\frac{2}{3}$. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.

317) Τριγώνου τινὸς αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι 56μ., 65μ. καὶ 33μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ μικροτέρα γωνία αὐτοῦ.

318) Τριγώνου τινὸς αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι 15 μ. 12μ. καὶ 20μ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι αὐτοῦ καὶ αἱ ἀκτῖνες τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κύκλου.

319) Αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ τριγώνου εἶναι 8 μ., 9μ., $\sqrt{217}$ μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ μεγαλυτέρα γωνία τοῦ τριγώνου.

320) Τριγώνου τινὸς αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι $\alpha=1{,}723$ μ., $\beta=0{,}985$ μ., $\gamma=816$ μ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι αὐτοῦ.

321) Αἱ γωνίαι τριγώνου τινὸς εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 9, 13, 14, ἡ δὲ πλευρά, ἡ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας γωνίας εἶναι 150 μ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἄλλαι πλευραί.

322) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι 287 μ., 816 μ. καὶ 865 μ.

323) Τετραπλεύρου τινὸς αἱ διαγώνιοι εἶναι ἡ μία 840 μ., ἡ δὲ ἄλλη 895 μ., ἡ δὲ ἑτέρα τῶν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένων γωνιῶν εἶναι 87^0. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου τούτου.

324) Τριγώνου τινὸς τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 15489 τ.μ., ἡ δὲ περίμετρος 18455 μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου.

325) Ἡ βάσις τριγώνου εἶναι 20 μ., ἡ περίμετρος αὐτοῦ 42 μ. καὶ ἡ γωνία ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως $126^0\ 52'$. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἄλλαι πλευραὶ τοῦ τριγώνου.

326) Ἐκ τῶν δύο γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου, ἐξ ὧν ἡ μία εἶναι

$35^0\,17'\,15''$ καὶ ἡ ἄλλη $62^0\,43'\,30''$ καὶ ἐκ τῆς περιμέτρου αὐτοῦ ἴσης μὲ 240 μ. νὰ εὑρεθοῦν αἱ πλευραὶ καὶ τὸ ἐμβαδόν.

327) Δίδονται τριγώνου τινὸς τὸ ἐμβαδὸν Ε, μία τῶν γωνιῶν Α καὶ ἡ ἑτέρα τῶν περιεχουσῶν αὐτὴν πλευρῶν, ἡ β. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου.

328) Ἡ περίμετρος τριγώνου εἶναι 20 μ., τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ $10\sqrt{3}$ τ. μ. καὶ μία τῶν γωνιῶν 60^0. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

329) Τριγώνου τινὸς μία πλευρὰ α εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ μιᾶς ἄλλης β καὶ ἡ τρίτη γ εἶναι τὰ $\frac{5}{6}$ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς β. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι αὐτοῦ.

330) Τετραπλεύρου τινὸς εἶναι γνωσταὶ αἱ τέσσαρες πλευραὶ καὶ μία γωνία. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ λοιπαὶ γωνίαι αὐτοῦ καὶ τὸ ἐμβαδόν του.

331) Τριγώνου ΑΒΓ εἶναι $A=53^0\,30'$ καὶ $B=98^0\,40'$, ἡ δὲ ἀκτὶς τοῦ περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένου κύκλου 43,75 μ. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.

332) Τριγώνου ΑΒΓ ἡ περίμετρος εἶναι 286 μ., ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι 82 μ., ἡ δὲ γωνία $A=52^0\,12'$. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.

333) Ἡ ἀκτὶς τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι 10,15 μ., ἡ μία πλευρὰ αὐτοῦ εἶναι 15,23 μ. καὶ μία τῶν εἰς ταύτην προσκειμένων γωνιῶν 47^0. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον.

334) Τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον εἶναι γνωσταὶ αἱ τέσσαρες πλευραί. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι αὐτοῦ καὶ τὸ ἐμβαδόν.

335) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τετραπλεύρου, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον καὶ οὗ αἱ πλευραὶ εἶναι 3, 5, 7, 12 μ.

336) Κανονικοῦ δεκαγώνου ἡ πλευρὰ εἶναι 2 μ. Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

337) Ἐὰν υ εἶναι τὸ ὕψος τριγώνου ΑΒΓ ὡς πρὸς τὴν πλευρὰν α, ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι $υ=\frac{α ημ B ημ Γ}{ημ A}$.

338) Ἐὰν δ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $\delta = \frac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma} . \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} = \frac{\alpha \eta\mu B \eta\mu \Gamma}{\eta\mu \frac{A}{2}(\eta\mu B + \eta\mu \Gamma)}$.

339) Ἐὰν μ εἶναι ἡ διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ ἡ ἀγομένη ἐκ τῆς κορυφῆς Α, ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι
$\mu = \frac{1}{2}\sqrt{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma \sigma\upsilon\nu A}$.

340) Ἐὰν ρ εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, ἐγγεγραμμένου κύκλου, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $\rho = \alpha . \frac{\eta\mu \frac{B}{2} \eta\mu \frac{\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2}}$.

341) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗ γνωρίζομεν δύο γωνίας $A = 64^0\ 45'\ 28''$ καὶ $B = 42^o\ 25'\ 17''$ καὶ τὴν ἀκτῖνα $\rho = 2028{,}2$ μ. τοῦ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

342) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗ γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν α, τὴν γωνίαν Α καὶ τὸ ἄθροισμα β+γ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

343) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗ γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν α, τὴν γωνίαν Α καὶ τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν β—γ.

344) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον οὗ τὰ τρία ὕψη εἶναι 4 μ, 5 μ., 6 μ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Προβλήματα.

345) Δύο δυνάμεις 50 καὶ 60 χιλιογράμμων ἐνεργοῦσαι ἐπὶ σώματος ἔχουν τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς καὶ σχηματίζουν γωνίαν 35^0. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνισταμένη αὐτῶν.

346) Δύο δυνάμεις ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης, ἔχουν τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς, ἡ δὲ συνισταμένη αὐτῶν εἶναι 5 χιλιογράμμων. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία τῶν δύο δυνάμεων.

347) Ἡ συνισταμένη δύο δυνάμεων εἶναι 100 χιλιογράμ-

μων, αἱ δὲ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αὗται μετὰ τῆς συνισταμένης, εἶναι 30° καὶ 45°. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ δύο συνιστῶσαι αὐτῆς.

348) Δοθεῖσα δύναμις νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο ἴσας δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι νὰ σχηματίζουν γωνίαν ἴσην μὲ δοθεῖσαν ω.

349) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης σημείου κειμένου ἐπὶ τοῦ παραλλήλου τοῦ διερχομένου διὰ τῶν Ἀθηνῶν, τὴν ὁποίαν ἔχει τοῦτο συνεπείᾳ τῆς περιστροφῆς τῆς γῆς περὶ τὸν ἄξονά της (ἀκτὶς τῆς γῆς=6366 χιλιόμετρα, πλάτος τῶν Ἀθηνῶν 37° 58' 20'' Β).

350) Οἱ βραχίονες ΑΒ καὶ ΑΓ μοχλοῦ ὁμοιογενοῦς σχηματίζουν ὀρθὴν γωνίαν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις ἰσορροπίας αὐτοῦ, ὅταν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ Α καὶ ὅταν (ΑΒ)=0,3 μ. καὶ (ΑΓ)=0,2 μ.

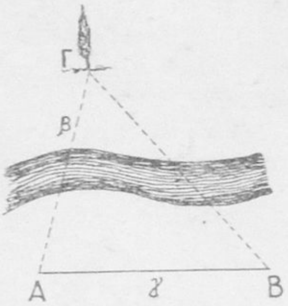
351) Φωτεινὴ ἀκτὶς προσπίπτουσα ἐπὶ ὑάλου μὲ παραλλήλους ἕδρας ὑπὸ γωνίαν 45°, ἐξέρχεται αὐτῆς παραλλήλως πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς προσπτώσεως. Ἐὰν τὸ πάχος τῆς ὑάλου εἶναι 0,03 μ. νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῆς προσπιπτούσης καὶ τῆς ἐξερχομένης ἀκτῖνος (ὁ δείκτης διαθλάσεως ἀέρος-ὑάλου εἶναι $\frac{3}{2}$).

352) Αἱ ἀποστάσεις μεταξὺ τριῶν σημείων Α, Β, Γ εἶναι (ΑΒ)=1 μ., (ΒΓ)=10 μ., (ΓΑ)=18 μ. Ἓν δὲ κάτοπτρον τίθεται εἰς τὸ σημεῖον Β οὕτως, ὥστε μία φωτεινὴ ἀκτὶς προσπίπτουσα ἐπὶ τοῦ κατόπτρου κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΑΒ ἀνακλᾶται κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ΑΒ μετὰ τοῦ κατόπτρου.

353) ΑΒ εἶναι τὸ ὕψος πύργου καὶ ΒΓΔΕ εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ κειμένη ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους. Τὸ ὕψος τοῦ πύργου φαίνεται ἀπὸ τοῦ σημείου Ε ὑπὸ γωνίαν φ, ἀπὸ τοῦ Δ ὑπὸ γωνίαν 2φ καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ὑπὸ γωνίαν 3φ. Ἐὰν δὲ εἶναι (ΕΔ)=25 μέτρα καὶ (ΔΓ)=10 μέτρα, νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ πύργου καὶ ἡ ἀπόστασις ΒΓ.

354) ***Εὑρεῖν τὴν ἀπόστασιν σημείου προσιτοῦ ἀπό τινος, ἀπροσίτου, ἀλλ' ὁρατοῦ.***

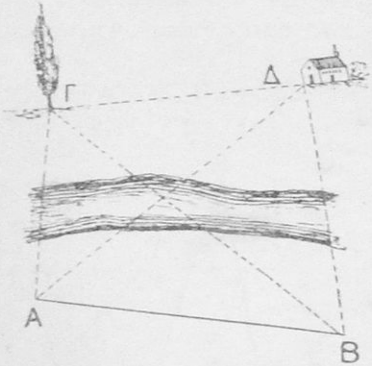
Ἔστω Γ τὸ ἀπρόσιτον σημεῖον καὶ Α τὸ προσιτόν, τὸ ὁποῖον κεῖται μετὰ τοῦ Γ ἐπὶ ὁριζοντίου εὐθείας. Ἐὰν λάβωμεν ἄλλο προσιτὸν σημεῖον Β, κείμενον μετὰ τῶν Α καὶ Γ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Τοῦ τριγώνου αὐτοῦ μετροῦμεν μετὰ τῆς μεγαλυτέρας ἀκριβείας τὴν πλευρὰν ΑΒ καὶ διὰ γωνιομετρικοῦ ὀργάνου τὰς γωνίας ΓΑΒ καὶ ΓΒΑ. Ἔχοντες λοιπὸν τοῦ τριγώνου αὐτοῦ μίαν πλευρὰν γ καὶ τὰς προσκειμένας γωνίας Α καὶ Β, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ τὰ ἄλλα στοιχεῖα αὐτοῦ.



Διὰ τὴν ΑΓ ἔχομεν τὸν τύπον $ΑΓ = ΑΒ\frac{ημΒ}{ημ(Α+Β)}$. Ἐφαρμογή, ὅταν (ΑΒ)=400 μ. γων. ΓΑΒ=60° καὶ γωνία ΓΒΑ=45°.

355) ***Εὑρεῖν τὴν ἀπόστασιν δύο σημείων Γ καὶ Δ ἀπροσίτων, ἀλλ᾽ ὁρατῶν.***

Λαμβάνομεν δύο σημεῖα Α καὶ Β προσιτὰ καὶ κείμενα μετὰ τῶν Γ καὶ Δ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου καὶ κατόπιν μετροῦμεν μετὰ τῆς μεγαλυτέρας ἀκριβείας τὴν ἀπόστασιν ΑΒ καὶ τὰς γωνίας ΔΒΑ, ΓΒΑ, ΓΑΒ καὶ ΔΑΒ. Ἔχοντες τότε ἑκάστου τῶν τριγώνων ΔΑΒ καὶ ΓΑΒ μίαν πλευρὰν ΑΒ καὶ τὰς προσκειμένας πρὸς αὐτὴν γωνίας, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς πλευρὰς ΑΔ καὶ ΑΓ· ἐκ τούτων δὲ καὶ ἐκ τῆς γωνίας ΓΑΔ ὁρίζεται τὸ τρίγωνον ΑΓΔ ἐντελῶς καὶ εὑρίσκεται ἡ ζητουμένη ἀπόστασις ΓΔ. Ἐφαρμογή, ὅταν (ΑΒ)=1000 μ. ΓΑΒ=75°, ΓΒΑ=30°, ΔΒΑ=90°, καὶ ΔΑΒ=45°.

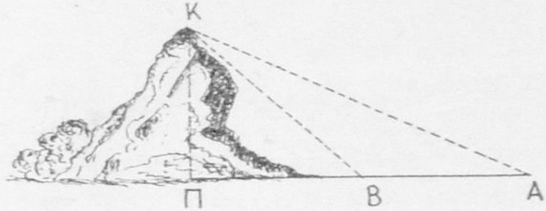


Σημείωσις. Ἐὰν τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου πρέπει νὰ μετρηθῇ καὶ ἡ γωνία

ΓΑΔ, ἡ ὁποία πλέον δὲν εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τῶν γωνιῶν ΓΑΒ καὶ ΔΑΒ.

356) ***Εὑρεῖν τὸ ὕψος βουνοῦ, ἤτοι τὴν ἀπόστασιν τῆς κορυφῆς αὐτοῦ Κ ἀπὸ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἱστάμεθα.***

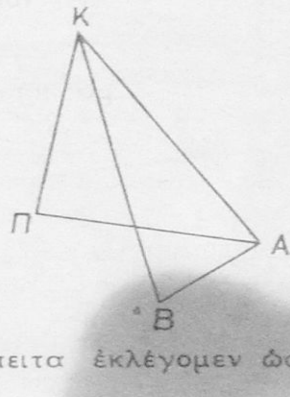
Ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐδάφους, ἐφ' οὗ ἱστάμεθα καὶ ἐξ οὗ φαίνεται ἡ κορυφὴ τοῦ βουνοῦ, μετροῦμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ κειμένην μετὰ τοῦ Κ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου, καὶ τὰς γωνίας ΚΑΒ καὶ ΚΒΑ· εὑρίσκομεν δὲ ἐξ αὐτῶν τὴν ἀπόστασιν ΑΚ. Ἐὰν ἤδη νοήσωμεν τὴν κατακόρυφον ἐκ τοῦ Κ, αὕτη θὰ συναντήσῃ τὴν προέκτασιν τῆς ΑΒ εἴς τι σημεῖον, ἔστω τὸ Π. Τοῦ ὀρθογωνίου λοιπὸν τριγώνου ΑΚΠ γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΑΚ καὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν Α· ὥστε δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν πλευρὰν ΚΠ, ἥτις εἶναι τὸ ὕψος τοῦ βουνοῦ ὑπεράνω τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ἐφ' οὗ ἱστάμεθα.



Ἐφαρμογή, ὅταν (ΑΒ)=100 μ. ΚΑΒ=30^0 καὶ ΚΒΑ=120^0.

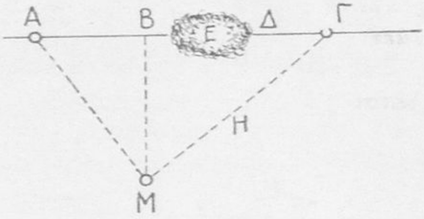
Παρατήρησις. Ἐὰν ἡ ΑΒ δὲν κεῖται μετὰ τοῦ Κ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου, τότε μετροῦμεν τὰς γωνίας ΚΑΒ(=χ), ΚΒΑ(=ψ) καὶ ΚΑΠ(=ω) καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι

$$ΚΠ = ΑΒ.\frac{ημω.ημψ}{ημ(χ+ψ)}.$$



357) ***Ἐπὶ ἐδάφους ἐπιπέδου εὑρεῖν τὴν προεκβολὴν εὐθείας πέραν ἀντικειμένου, ὅπερ ἐμποδίζει νὰ βλέπωμεν τὴν συνέχειαν τῆς εὐθείας.***

Ἔστω ΑΒ ἡ εὐθεῖα, τῆς ὁποίας πρέπει νὰ εὑρεθῇ ἡ προεκβολὴ ὄπισθεν τοῦ ἐμποδίου Ε. Μετροῦμεν τὸ μῆκος ΑΒ, ἔπειτα ἐκλέγομεν ὡς σταθμὸν σημεῖον τι Μ, ἐξ οὗ φαίνεται ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ ὁ ὄπισθεν τοῦ ἐμποδίου τόπος, εἰς τὸν ὁποῖον θὰ εὑρίσκηται ἡ προεκβολὴ τῆς εὐθείας. Μετὰ ταῦτα μετροῦμεν τὰς γωνίας Α καὶ Β τοῦ τριγώνου ΑΒΜ καὶ ἐκ τούτων καὶ ἐκ τῆς ΑΒ προσδιορίζομεν τὴν πλευρὰν ΑΜ. Σύρομεν ἔπειτα ἐπὶ τοῦ ἐδάφους γραμμὴν ἐκ τοῦ Μ πρὸς τὸ μέρος τῆς προεκβολῆς, ἔστω τὴν ΗΜ καὶ μετροῦμεν τὴν γωνίαν αὐτῆς πρὸς τὴν ΜΑ, ἤτοι τὴν ΗΜΑ. Ἐὰν τότε νοήσωμεν τὴν τομὴν Γ τῆς προεκβολῆς καὶ τῆς γραμμῆς ΜΗ, ἔχομεν τοῦ τριγώνου ΓΑΜ μίαν πλευρὰν ΑΜ καὶ τὰς προσκειμένας πρὸς αὐτὴν γωνίας· ὥστε δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος ΜΓ, ἐξ οὗ καὶ τὸ σημεῖον Γ προσδιορίζεται· τέλος ἐκ τοῦ Γ σύρομεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους τὴν γραμμὴν ΓΔ, ἥτις σχηματίζει μετὰ τῆς ΓΜ γωνίαν ἴσην μὲ τὴν τοῦ τριγώνου ΑΓΜ καὶ ἔχομεν τὴν προεκβολὴν τῆς ΑΒ.



358) Ἐκ τῶν ἄκρων μιᾶς βάσεως τὸ ὕψος ἑνὸς πύργου φαίνεται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν ω, ἐκ δὲ τοῦ μέσου αὐτῆς φαίνεται ὑπὸ γωνίαν φ. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν 2α εἶναι τὸ μῆκος τῆς βάσεως, τὸ ὕψος τοῦ πύργου εἶναι

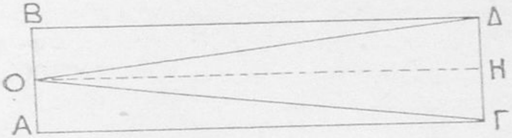
$$\frac{α ημφ . ημω}{\sqrt{ημ(φ+ω) ημ(φ-ω)}}.$$

359) Εἷς παρατηρητὴς ἐπὶ ἀεροστάτου βλέπει ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἕνα στόχον πρὸς νότον ὑπὸ γωνίαν 33^0, ὅταν δὲ τὸ ἀερόστατον ἐκινήθη πρὸς ἀνατολὰς κατὰ 5 χιλιόμετρα εἶδεν ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὕψους τὸν αὐτὸν στόχον ὑπὸ γωνίαν 21^0. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ ἀεροστάτου.

360) Ἓν πλοῖον διευθυνόμενον πρὸς βορρᾶν βλέπει πρὸς δυσμὰς δύο φάρους ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Ἀλλὰ μετὰ μίαν ὥραν ἐκ τῶν φάρων τούτων ὁ μὲν φαίνεται ΝΔ ὁ δὲ ΝΝΔ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τοῦ πλοίου, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἡ ἀπόστασις τῶν δύο φάρων εἶναι 10 χιλιόμετρα.

361) ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος μιᾶς λεωφόρου, ἧς τὸ πλάτος εἶναι γνωστὸν καὶ ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται τὸ πέρας αὐτῆς ἐκ τῆς ἀρχῆς.***

Ἂν ΑΒ εἶναι ἡ ἀρχὴ καὶ ΓΔ τὸ πέρας τῆς λεωφόρου καὶ Ο τὸ μέσον τῆς ΑΒ, ἔχομεν γνωστὰ τὴν ΓΔ(=ΑΒ) καὶ τὴν γωνίαν ΔΟΓ· ἐὰν δὲ ἀχθῇ καὶ ὁ ἄξων ΟΗ τῆς ὁδοῦ, ἔχομεν ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΔΗ

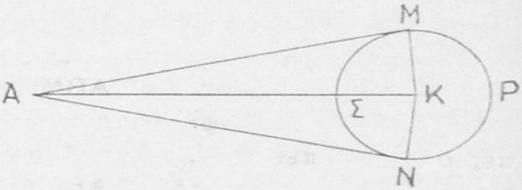


$$(\mathrm{OH})=(\Delta\mathrm{H})\sigma\varphi\,\frac{1}{2}\,(\Delta\mathrm{O}\Gamma).$$

Ἐφαρμογή, ὅταν $(\Gamma\Delta)=30\mu.$, $\Delta\mathrm{O}\Gamma=20^{0}$.

362) ***Ἐκ τῆς ἀποστάσεως δοθέντος σημείου ἀπὸ σφαίρας καὶ ἐκ τῆς γωνίας, ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ἡ σφαῖρα ἀπὸ τοῦ σημείου, εὑρεῖν τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.***

Ἐὰν διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ διὰ τοῦ σημείου Α νοήσωμεν τυχὸν ἐπίπεδον, τοῦτο τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ μέγιστον αὐτῆς κύκλον, ἔστω τὸν ΜΣΝΡ. Ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ κύκλου τούτου ἀχθοῦν ἐφαπτόμεναι ἐκ τοῦ Α, αἱ ΑΜ καὶ ΑΝ καὶ αἱ ἀκτῖνες ΚΝ καὶ ΚΜ, γίνεται ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΚΜΑ, οὗτινος ἔχομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΑΚ καὶ τὴν γωνίαν ΚΑΜ, ἥτις εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης ΜΑΝ(=ω), ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ἡ σφαῖρα ἐκ τοῦ Α.



Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τούτου τριγώνου εὑρίσκομεν νῦν

$$(\mathrm{KM})=(\mathrm{AK})\eta\mu\left(\frac{1}{2}\omega\right).$$

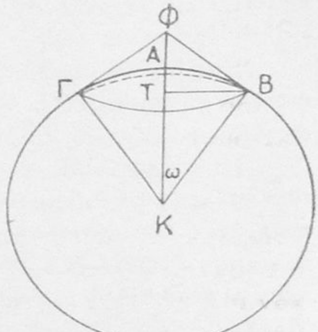
Σημείωσις. Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης εὑρίσκομεν τοὐναντίον καὶ τὴν ἀπόστασιν ΑΚ τῆς σφαίρας ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὅταν ἔχωμεν τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας καὶ τὴν γωνίαν ω, ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ἐκ τοῦ σημείου Α.

Ἐφαρμογή, ὅταν $(\mathrm{AK})=10$ μ. $\mathrm{KAM}=15^{0}$.

363) Δύο τόποι τῆς γῆς βορείου πλάτους 52^0 ἔχουν γεωγραφικὰ μήκη διαφέροντα κατὰ 30^o. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις αὐτῶν.

364) ***Γνωστοῦ ὄντος τοῦ ὕψους φάρου ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης, εὑρεῖν ἐπ' αὐτῆς τὴν μεγίστην ἀπόστασιν, ἀπὸ τῆς ὁποίας φαίνεται τὸ φῶς αὐτοῦ.***

Γνωστόν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς θαλάσσης ἀποτελεῖ σφαῖραν, τῆς ὁποίας ὁ μέγιστος κύκλος ἔχει περιφέρειαν 40000000 μέτρων, ἐπομένως ἀκτῖνα ἔχει ἴσην τῷ $\frac{40000000}{2\pi}$, ἤτοι 6366198 μέτρα περίπου, τὴν ἀκτῖνα δὲ αὐτὴν παριστῶμεν διὰ ρ.



Ἔστω Κ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ταύτης καὶ Φ τὸ φῶς καὶ ΦΑ(=υ) τὸ ὕψος αὐτοῦ εἰς μέτρα ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. Ἐὰν διὰ τῆς ἀκτῖνος ΚΑ νοηθῇ τυχὸν ἐπίπεδον, θὰ τέμνῃ τὴν σφαῖραν κατὰ μέγιστον κύκλον, ἔστω τὸν ΑΒΜ· καὶ ἂν ἀχθῇ ἐκ τοῦ Φ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου τούτου ἡ ΒΦ καὶ περιστραφῇ ἔπειτα ὁ μέγιστος κύκλος περὶ τὴν ΚΦ, φανερὸν εἶναι, ὅτι ἡ ὑπὸ τοῦ τόξου ΑΒ γραφομένη ζώνη περιέχει πάντα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ἀφ' ὧν τὸ φῶς φαίνεται· ὥστε ἡ μεγίστη ἀπόστασις ἀπὸ τῆς ὁποίας φαίνεται τὸ φῶς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, εἶναι ἡ ΑΒ.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόξου ΑΒ, ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ ἡ κεντρικὴ γωνία ω, διότι εἶναι

$$\frac{\text{τοξ.}AB}{40000000}=\frac{\omega}{360} \qquad (\iota)$$

Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΦΚΒ εὑρίσκομεν $(KB)=(K\Phi).\text{συν}\omega$.

Ὅθεν
$$\text{συν}\omega=\frac{(KB)}{(K\Phi)}=\frac{\rho}{\rho+\upsilon}$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης ἕπεται

$$συν\left[\frac{1}{2}ω\right]=\sqrt{\frac{2ρ+υ}{2ρ+2υ}}$$

$$ημ\left[\frac{1}{2}ω\right]=\sqrt{\frac{υ}{2ρ+2υ}}.$$

Ὅθεν
$$εφ\left[\frac{1}{2}ω\right]=\sqrt{\frac{υ}{2ρ+υ}}.$$

Διὰ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν $\frac{1}{2}ω$, ὅθεν καὶ τὴν ω· ταύτης δὲ εὑρεθείσης, εὑρίσκομεν καὶ τὸ τόξον ΑΒ ἐκ τῆς ἰσότητος (ι).

Ἐπειδὴ τὸ ὕψος υ εἶναι συνήθως ἐλάχιστον πρὸς τὴν ἀκτῖνα ρ, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ τόξον ΑΒ εὐκολώτερον ὡς ἑξῆς:

Τὸ τόξον ΑΒ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης ΦΒ καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ ΑΒ· ἐπομένως διαφέρει ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ΦΒ ὀλιγώτερον ἢ ὅσον διαφέρει ἡ χορδή, ἤτοι ὀλιγώτερον ἢ ΦΒ—ΒΑ, ἢ καὶ ὀλιγώτερον τοῦ ὕψους υ (διότι ἐν τῷ τριγώνῳ ΦΑΒ ἡ μία πλευρὰ ΑΦ ὑπερβαίνει τὴν διαφορὰν τῶν ἄλλων).

Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΕΦ εὑρίσκομεν τὴν ἐφαπτομένην ΦΒ.

$$(ΒΦ)=\sqrt{(ΚΦ)^2-(ΚΒ)^2}=\sqrt{(ρ+υ)^2-ρ^2}=\sqrt{2ρυ+υ^2}.$$

ὥστε εἶναι $(τοξ ΑΒ)=\sqrt{2ρυ+υ^2}-μυ$, ἔνθα $0<μ<1$.

Ἀλλ' εἶναι καὶ $\sqrt{2ρυ}+μ'υ=\sqrt{2ρυ+υ^2}$ ἔνθα $0<μ'<1$.

Ὅθεν $(τοξ. ΑΒ)=\sqrt{2ρυ}+(μ'-μ).υ$

Ἐπομένως, ἐὰν θέσωμεν $(τοξ ΑΒ)=\sqrt{2ρυ}$, κάμνομεν λάθος μικρότερον τοῦ ὕψους υ.

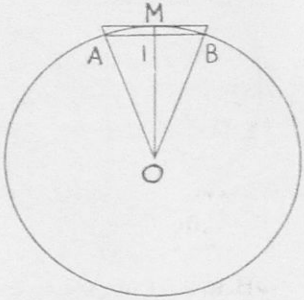
Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι *ἡ μεγίστη ἀπόστασις ἀπὸ τῆς ὁποίας φαίνεται τὸ φῶς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης, εἶναι περίπου ἀνάλογος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ὕψους αὐτοῦ ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης.*

Διὰ $υ=1$ μέτρον, εὑρίσκομεν (τοξ. ΑΒ)=3568μ. περίπου·

Σημείωσις. Ἐν τῇ λύσει τοῦ προβλήματος τούτου δὲν ἐλήφθη ὑπ' ὄψιν ἡ διάθλασις τοῦ φωτὸς ἐν τῷ ἀέρι.

365) *Γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἡ γῆ εἶναι σφαῖρα, τῆς ὁποίας ὁ μέγιστος κύκλος ἔχει περιφέρειαν 40000000 μέτρα, εὑρεῖν τὸ μῆκος τοῦ τόξου μιᾶς μοίρας καὶ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς αὐτοῦ καὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ μέσον αὐτοῦ.*

Ἔστω ΑΒ ἡ χορδὴ καὶ ΣΤ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ εἰρημένου τόξου. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΜΟΤ ἔχομεν ἐν πρώτοις



$$(MT)=\rho.\varepsilon\varphi 30'=\frac{40000000}{2\pi}\varepsilon\varphi 30'$$

λογ 40000000	= 7,6020599 [1]
λογ 2π	= 0,7981798
λογ ρ	= 6,8038801
λογ εφ30′	= $\bar{3}$,9408584
λογ(ΜΤ)	= 4,7447385
ὅθεν ΜΤ	= 55556,96
καὶ ΣΤ	= 111113,92 μ.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΙΟΒ εὑρίσκομεν

$$(IB)=\rho\eta\mu 30'$$

λογ ρ	= 6,8038801
λογημ30′	= $\bar{3}$,9408419
λογ (ΙΒ)	= 4,7447220
ὅθεν (ΙΒ)	= 55554,85 μ.
καὶ (ΑΒ)	= 111109,70 μ.

Τὸ τόξον ΑΒ τῆς μιᾶς μοίρας εἶναι $\frac{40000000}{360}=111111,11$.

Ἐντεῦθεν, ἕπεται (τοξΑΒ)—(ΑΒ)=1,41

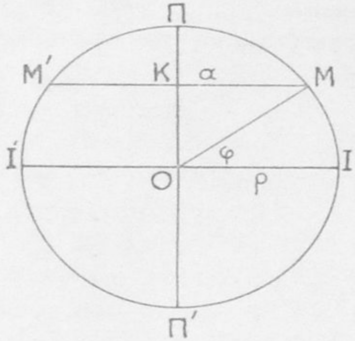
καὶ (ΣΤ)—(τοξΑΒ)=2,81.

Ὥστε τὸ τόξον τῆς μιᾶς μοίρας τῆς μὲν χορδῆς αὐτοῦ ὑπερέχει κατὰ 1 μέτρον καὶ $\frac{41}{100}$ τοῦ μέτρου περίπου, τῆς δὲ ἐφαπτομένης αὐτοῦ εἶναι μικρότερον κατὰ 2,81 περίπου μέτρα.

1) Ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ ἔγινε χρῆσις τῶν ἑπταψηφίων λογαρίθμων τοῦ Callet διὰ τὴν μεγαλυτέραν ἀκρίβειαν αὐτῶν.

366) ***Εὑρεῖν τὴν ἀκτῖνα τοῦ παραλλήλου κύκλου τῆς γηίνης σφαίρας, οὗτινος τὸ γεωγραφικὸν πλάτος εἶναι γνωστόν.***

(Εὑρεῖν τοῦ αὐτοῦ κύκλου τὸ μῆκος τοῦ τόξου μιᾶς μοίρας).



Ἐὰν διὰ τοῦ ἄξονος τῆς Γῆς ΠΠ′ νοήσωμεν ἐπίπεδον, τοῦτο θὰ τέμνῃ τὴν Γῆν μὲν κατὰ μέγιστον κύκλον αὐτῆς, τὸ δὲ ἐπίπεδον τοῦ ἰσημερινοῦ κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΙΙ′, τὸ δὲ ἐπίπεδον τοῦ παραλλήλου κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΜΜ′ παράλληλον τῇ ΙΙ′, θὰ εἶναι δὲ ἡ γωνία ΜΟΙ ἴση τῷ δοθέντι πλάτει φ καὶ ἡ ζητουμένη ἀκτὶς τοῦ παραλλήλου κύκλου εἶναι ἡ ΜΚ=α.

Ἐὰν δὲ ἀχθῇ ἡ ἀκτὶς ΟΜ, γίνεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΚΜ, ἐξ οὗ εὑρίσκομεν (ΚΜ)=α=ρ.συνφ. Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου τούτου εἶναι 2π.ρ.συνφ καὶ τὸ τόξον μιᾶς μοίρας τοῦ παραλλήλου τούτου ἔχει μῆκος

$$\frac{2\pi\rho}{360}\sigma\upsilon\nu\varphi, \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{40000000}{360}\sigma\upsilon\nu\varphi \ \text{ἢ} \ 111111{,}11\sigma\upsilon\nu\varphi.$$

Ὡς παράδειγμα ἔστω φ=38°.

Διὰ τὴν ἀκτῖνα α ἔχομεν α=ρ.συν38°

λογρ	=6,80388 (ἴδε προηγ. πρόβλημα)
λογσυν38°	=1,89653
λογα	=6,70041
καὶ α	=5016625 μέτρα.

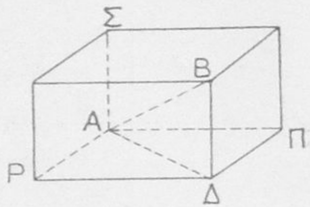
Διὰ τὸ μῆκος τοῦ τόξου 1° ἔχομεν

$$\text{μῆκος τόξου } 1^0 = \frac{40000000}{360}\sigma\upsilon\nu\varphi$$

λογ40000000	=7,60206
λογ360	=2,55630
διαφορὰ	=5,04576
λογσυν38°	=1,89653
ἄθροισμα	4,94229
καὶ τόξον 1°	=87556 μέτρα.

367) ***Ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, οὗτινος εἶναι γνωσταὶ αἱ τρεῖς ἀκμαὶ ΑΠ, ΑΡ, ΑΣ εὑρεῖν τὴν διαγώνιον ΑΒ καὶ τὰς γωνίας αὐτῆς πρὸς τὰς ἀκμάς.***

Ἐὰν νοήσωμεν τὴν διαγώνιον ΑΔ τῆς ἕδρας ΑΠΔΡ, εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΠ (διότι ἡ ἕδρα εἶναι ὀρθογώνιον) $(ΑΔ)^2=(ΑΠ)^2+(ΠΔ)^2=(ΑΠ)^2+(ΑΡ)^2$.



Ἀλλὰ καὶ τὸ τρίγωνον ΒΑΔ εἶναι ὀρθογώνιον, διότι ἡ ΒΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΠΔΡ· ὥστε ἡ γωνία ΒΔΑ εἶναι ὀρθή, ἑπομένως

εἶναι $(ΑΒ)^2=(ΒΔ)^2+(ΑΔ)^2=(ΑΣ)^2+(ΑΔ)^2$

ὅθεν $(ΑΒ)^2=(ΑΠ)^2+(ΑΡ)^2+(ΑΣ)^2$

ἐξ οὗ $(ΑΒ)=\sqrt{(ΑΠ)^2+(ΑΡ)^2+(ΑΣ)^2}$.

Ἐκ τοῦ αὐτοῦ τριγώνου ΑΒΔ εὑρίσκομεν

$$(ΒΔ)=(ΑΒ)συν(ΑΒΔ)$$

καὶ ἐπειδὴ (ΒΔ)=(ΑΣ) καὶ γων.ΑΒΔ=γων.ΒΑΣ,

ἔχομεν $(ΑΣ)=(ΑΒ)συν(ΒΑΣ)$

ὅθεν $συν(ΒΑΣ)=\frac{ΑΣ}{ΑΒ}$.

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκεται ἡ γωνία τῆς διαγωνίου ΑΒ πρὸς τὴν ἀκμὴν ΑΣ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$συν(ΒΑΠ)=\frac{ΑΠ}{ΑΒ} \text{ καὶ } συν(ΒΑΡ)=\frac{ΑΡ}{ΑΒ}.$$

Ἔστω π.χ.

$$(ΑΠ)=3 \qquad (ΑΡ)=1 \qquad (ΑΣ)=2$$

τότε εἶναι $(ΑΒ)=\sqrt{3^2+1^2+2^2}=\sqrt{14}$.

Ὅθεν (Dupuis σελ. 147) ΑΒ=3,74165.

Εὕρεσις τῆς γωνίας ΒΑΠ.

$$συν(ΒΑΠ)=\frac{ΑΠ}{ΑΒ}=\frac{3}{\sqrt{14}}$$

$λογ3=0,47712$

λογ14=1,14613 $\qquad \frac{1}{2}λογ14=0,57306$

$λογσυν(ΒΑΠ)=\overline{1},90406$

καὶ ΒΑΠ=36° 41′ 54″.

Εὕρεσις τῆς γωνίας ΒΑΡ.

$$\text{συν}(\text{ΒΑΡ})=\frac{\text{ΑΡ}}{\text{ΑΒ}}=\frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\text{λογ}\ 1=0$$

$$\frac{1}{2}\text{λογ}\ 14=0{,}57306$$

$$\text{λογσυν}(\text{ΒΑΡ})=\bar{1}{,}42694$$

$$\text{καὶ}\ \text{ΒΑΡ}=74^{\circ}\ 29'55',$$

Εὕρεσις τῆς γωνίας ΒΑΣ.

$$\text{συν}(\text{ΒΑΣ})=\frac{\text{ΑΣ}}{\text{ΑΒ}}=\frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\text{λογ}\,2=0{,}30103$$

$$\frac{1}{2}\text{λογ}\ 14=0{,}57306$$

$$\text{λογ}\,\text{συν}(\text{ΒΑΣ})=\bar{1}{,}72797$$

$$\text{καὶ}\ \text{ΒΑΣ}=57^{\circ}41'\,18''$$

368) Ἐὰν α,β,γ εἶναι αἱ τρεῖς διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ ω ἡ κλίσις τῆς διαγωνίου αὐτοῦ πρὸς τὴν ἕδραν, ἡ ὁποία ἔχει διαστάσεις β,γ, ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι

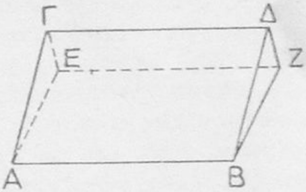
$$\text{ημω}=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}.$$

369) Κανονικὴ πυραμὶς μὲ βάσιν τετράγωγον ἔχει ὕψος υ καὶ πλευρὰν τῆς βάσεως αὐτῆς α. Ἐὰν δὲ ω εἶναι ἡ γωνία μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας καὶ τῆς βάσεως καὶ φ ἡ γωνία δύο παραπλεύρων ἑδρῶν αὐτῆς, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι

$$\text{εφω}=\frac{2\upsilon}{\alpha}\quad \text{καὶ}\quad \text{εφ}\frac{\varphi}{2}=\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{2\upsilon^2}}$$

370) ***Οἰκόπεδον ἐπὶ τῆς πλευρᾶς λόφου κείμενον, ἔχει ὀρθογώνιον σχῆμα μὲ βάσιν ὁριζοντίαν. Ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι β μέτρα, τὸ δὲ ὕψος υ, ἡ δὲ κλίσις τοῦ ἐδάφους πρὸς τὸν ὁρίζοντα εἶναι φ μοιρῶν. Ζητεῖται πόσων τετραγωνικῶν μέτρων θὰ εἶναι τὸ ὁριζόντιον ἔδαφος αὐτοῦ.***

Ἐὰν ἐκ τῆς ὁριζοντίας βάσεως ΑΒ νοήσωμεν ὁριζόντιον ἐπίπεδον καὶ καταβιβάσωμεν ἐπ' αὐτοῦ τὰς καθέτους ΓΕ καὶ ΔΖ ἀπὸ τῶν κορυφῶν τοῦ ὀρθογωνίου, φανερὸν εἶναι, ὅτι τὸ ὁριζόντιον ἔδαφος τοῦ οἰκοπέδου εἶναι ὀρθογώνιον ΑΒΕΖ, ἤτοι ἡ προβολὴ αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τῆς προβολῆς ταύτης εἶναι ἴσον τῷ (ΑΒ).(ΑΕ) ἤτοι β.(ΑΕ)· ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΕΓ ἔχομεν

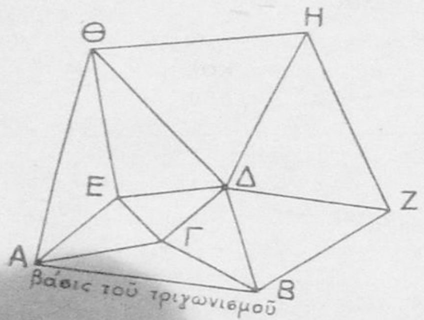


$$(ΑΕ)=(ΑΓ)συνφ=υσυνφ$$

(διότι ἡ γωνία ΓΑΕ ἰσοῦται τῇ γωνίᾳ τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΒΓΔ καὶ ΑΒΕΖ, ἤτοι τῇ φ).

Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΕΖ εἶναι β.υ.συνφ, ἤτοι ἡ προβολὴ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ ἐπὶ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον ἰσοῦται τῷ ὀρθογωνίῳ τούτῳ πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας αὐτοῦ πρὸς τὸν ὁρίζοντα.

Σημείωσις. Μὲ προβολὰς ἐπιπέδων σχημάτων καὶ κυρίως τριγώνων ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ἐργαζόμεθα, ὅταν θέλωμεν νὰ ἀπεικονίσωμεν ἐπὶ χάρτου, ὑπὸ δεδομένην κλίμακα, ἔκτασίν τινα τῆς Γῆς, μὲ τὰς σπουδαιοτέρας ἀνωμαλίας της φυσικὰς ἢ τεχνικάς. Πρὸς τοῦτο ἐκλέγομεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἐπαρκῆ ἀριθμὸν σημείων Α, Β, Γ, Δ, Ε κλπ. καὶ διὰ τῶν εὐθειῶν, διὰ τῶν ὁποίων ὑποτίθεται, ὅτι συνδέονται, διαιρεῖται τὸ ἔδαφος εἰς τρίγωνα ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΔΓΕ κλπ. τοιαῦτα, ὥστε ἐξ ἑκάστης κορυφῆς ἑκάστου τριγώνου νὰ φαίνωνται αἱ δύο ἄλλαι κορυφαὶ καὶ ἐξ οἱουδήποτε σημείου ἐντὸς ἑκάστου τριγώνου νὰ φαίνωνται αἱ τρεῖς κορυφαὶ αὐτοῦ. Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὰ στοιχεῖα ἑκάστου τῶν τριγώνων τούτων, (ὁ προσδιορισμὸς δὲ οὗτος λέγεται *τριγωνισμός*) ἐκλέγομεν

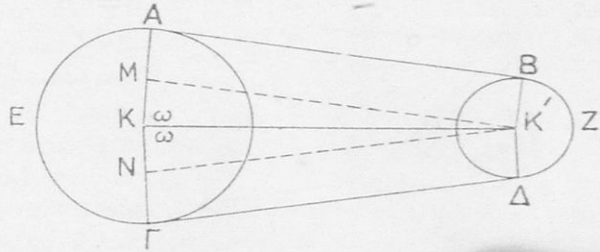


ἐπὶ ἐδάφους, ὅσον τὸ δυνατὸν ὁριζοντίου, μίαν βάσιν ΑΒ, τὴν ὁποίαν μετροῦμεν μετ' ἀκριβείας. Ἔπειτα μετροῦμεν καὶ τὰς γωνίας τῶν διαφόρων τριγώνων π. χ. τὰς ΓΑΒ, ΓΒΑ, ΕΓΑ, ΕΑΓ κλπ.

Κατόπιν τούτων ἐπιλύοντες πρῶτον τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εὑρίσκομεν τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΓΒ. Ἔπειτα δὲ ἐπιλύοντες τὰ τρίγωνα ΑΕΓ καὶ ΒΓΔ, εὑρίσκομεν τὰς πλευρὰς ΑΕ, ΕΓ, ΓΔ καὶ ΒΔ. Προχωροῦντες δὲ οὕτω, προσδιορίζομεν τὰ στοιχεῖα ὅλων τῶν τριγώνων. Πρὸς ἐπαλήθευσιν δὲ τῆς ἐκτελεσθείσης ἐργασίας μετροῦμεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους μίαν πλευρὰν π. χ. τὴν ΗΘ καὶ συγκρίνομεν τὸ οὕτως εὑρεθὲν μῆκος αὐτῆς μὲ τὸ εὑρεθὲν διὰ τοῦ λογισμοῦ. Ἀλλ' ὡς γίνεται ἐν τῇ πράξει ὁ τριγωνισμός, μετροῦμεν ὄχι τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΗΘ π.χ. ἀλλὰ τὰς προβολάς των ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Ὥστε ἐν τῇ πραγματικότητι ἐπιλύομεν τὰς ὁριζοντίας προβολὰς τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΑΓΕ κλπ.

371) ***Δύο τροχοί, τῶν ὁποίων οἱ ἄξονες εἶναι παράλληλοι πρόκειται νὰ περιβληθοῦν δι' ἱμάντος, ὥστε ἡ κίνησις τοῦ ἑνὸς νὰ μεταδίδεται καὶ εἰς τὸν ἄλλον. Ζητεῖται τὸ μῆκος τοῦ καταλλήλου πρὸς τοῦτο ἱμάντος· εἶναι δὲ γνωσταὶ αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο τροχῶν ρ καὶ ρ΄ καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν ἀξόνων αὐτῶν α.***

Νοήσωμεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τοὺς ἄξονας τῶν τροχῶν· τοῦτο θὰ τέμνῃ αὐτοὺς κατὰ δύο κύκλους ΑΕΓ καὶ ΒΖΔ, τῶν ὁποίων εἶναι γνωσταὶ αἱ ἀκτῖνες καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων· τὸν δὲ ἱμάντα θὰ τέμνῃ κατὰ γραμμήν, ἥτις ἀποτελεῖται ἐκ τῶν δύο κοινῶν ἐφαπτομένων ΑΒ, ΓΔ τῶν κύκλων καὶ ἐκ τῶν τόξων ΑΕΓ καὶ ΒΖΔ (διότι ὁ ἱμὰς εἶναι τεταμένος, ὥστε εἰς τὰ μέρη, ἔνθα χωρίζεται ὑφ' ἑκατέρου τῶν τροχῶν, ἐφάπτεται αὐτοῦ). Πρόκειται λοιπὸν νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοξ.ΑΕΓ + τοξ.ΒΖΔ + ΑΒ + ΓΔ.



Ἐκ τῶν κέντρων Κ καὶ Κ′ ἄς ἀχθοῦν αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΚΓ καὶ Κ′Β, Κ′Δ καὶ ἐκ τοῦ Κ′ κέντρου τοῦ μικροτέρου κύκλου, ἡ Κ′Μ παράλληλος τῇ ΒΑ καὶ ἡ Κ′Ν τῇ ΔΓ. Ἐπειδὴ τὸ σχῆμα ΑΒΜΚ′ εἶναι ὀρθογώνιον (ὡς ἔχον ὀρθὰς τὰς γωνίας αὐτοῦ) εἶναι ΑΜ=Κ′Β=ρ· ὥστε ΚΜ=ρ—ρ′ καὶ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου Κ′ΚΜ εὑρίσκομεν

$$\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{\rho-\rho'}{\alpha}$$

ἐξ οὗ εὑρίσκεται ἡ γωνία ω.

Τῆς γωνίας ω εὑρεθείσης, εὑρίσκομεν τὸ τόξον ΑΕΓ ἐκ τῆς ἰσότητος

$$\frac{2\pi\rho}{360}=\frac{\tau o\xi.\,AE\Gamma}{360-2\omega},$$

διότι τὰ τόξα παντὸς κύκλου εἶναι ἀνάλογα τῶν ἐπικέντρων γωνιῶν καὶ εἰς τὸ τόξον ΑΕΓ ἀντιστοιχεῖ ἡ ἐπίκεντρος γωνία $360^0-2\omega$.

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης εὑρίσκομεν

$$(\tau o\xi.\,AE\Gamma)=\frac{180-\omega}{90}.\pi\rho.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν (διότι ἡ γωνία ΒΚ′Δ εἶναι ἴση τῇ ΑΚΓ)

$$(\tau o\xi.\,BZ\Delta)=\frac{\omega}{90}.\pi\rho'.$$

Ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΜΚΚ′ εὑρίσκομεν

$$(K'M)=\sqrt{\alpha^2-(\rho-\rho')^2}$$

εἶναι δὲ $K'M=AB=\Gamma\Delta.$

Ὥστε τὸ ζητούμενον μῆκος εἶναι

$$2\sqrt{\alpha^2-(\rho-\rho')^2}+\frac{180-\omega}{90}.\pi\rho+\frac{\omega}{90}.\pi\rho'.$$

Ἔστω ὡς παράδειγμα:

ρ=0,5 μέτρα ρ′=0,2 μέτρα α=8 μέτρα.

Ἔχομεν ἐν πρώτοις

$$\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{3}{80}$$

$$\begin{aligned}\lambda o\gamma 3 &= 0{,}47712\\ \lambda o\gamma 80 &= 1{,}90309\\ \hline \lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\omega &= \bar{2}{,}57403\end{aligned}$$

καὶ $\omega = 87^\circ\, 51'$ καὶ $180^0 - \omega = 92^\circ\, 9'$

$$(\text{τοξ.}\,ΑΕΓ) = \frac{92 + \frac{9}{60}}{90}.\pi.0{,}5 = 1.608$$

$$(\text{τοξ.}\,ΒΖΔ) = \frac{87 + \frac{51}{60}}{90}.\pi.\,0{,}2 = 0{,}613$$

$$\sqrt{8^2 - \left(\frac{3}{10}\right)^2} = \frac{1}{10}\sqrt{6400 - 9} = \frac{1}{10}\sqrt{6391} = 7{,}994.$$

ὥστε τὸ ζητούμενον μῆκος τοῦ ἱμάντος θὰ εἶναι

$$\begin{array}{rl} 1{,}608 & = (\text{τοξ.}\,ΑΕΓ) \\ 0{,}613 & = (\text{τοξ.}\,ΒΑΔ) \\ 15{,}988 & = (ΑΒ) + (ΓΔ) \\ \hline \text{Τὸ ὅλον}\ \ 18{,}209 & \end{array}$$

Συγκέντρωσις τῶν σπουδαιοτέρων τύπων τῆς τριγωνομετρίας.

Α) Θεμελειώδεις σχέσεις μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν παντὸς τόξου.

$$ημ^2α + συν^2α = 1 \qquad εφα σφα = 1$$

$$εφα = \frac{ημα}{συνα} \qquad σφα = \frac{συνα}{ημα}.$$

Β) Εὕρεσις ἐκ δοθέντος τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ τόξου τῶν τριῶν ἄλλων.

1) Ἐκ τοῦ ημα

$$συνα = \pm\sqrt{1 - ημ^2α}, \qquad εφα = \pm\frac{ημα}{\sqrt{1 - ημ^2α}}, \qquad σφα = \pm\frac{\sqrt{1 - ημ^2α}}{ημα}$$

2) Ἐκ τοῦ συνα

$$ημα = \pm\sqrt{1 - συν^2α}, \qquad εφα = \pm\frac{\sqrt{1 - συν^2α}}{συνα}, \qquad σφα = \pm\frac{συνα}{\sqrt{1 - συν^2α}}$$

3) Ἐκ τῆς εφα

$$ημα = \pm\frac{εφα}{\sqrt{1 + εφ^2α}}, \qquad συνα = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + εφ^2α}}, \qquad σφα = \frac{1}{εφα}$$

4) Ἐκ τῆς σφα

$$ημα = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + σφ^2α}}, \qquad συνα = \pm\frac{σφα}{\sqrt{1 + σφ^2α}}, \qquad εφα = \frac{1}{σφα}.$$

Γ) Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἀθροίσματος ἢ διαφορᾶς δύο τόξων.

$$ημ(α+β)=ημασυνβ+ημβσυνα$$
$$ημ(α-β)=ημασυνβ-ημβσυνα$$
$$συν(α+β)=συνασυνβ-ημαημβ$$
$$συν(α-β)=συνασυνβ+ημαημβ$$
$$εφ(α+β)=\frac{εφα+εφβ}{1-εφαεφβ} \qquad εφ(α-β)=\frac{εφα-εφβ}{1+εφαεφβ}$$
$$σφ(α+β)=\frac{σφασφβ-1}{σφα+σφβ} \qquad σφ(α-β)=\frac{σφασφβ+1}{σφβ-σφα}.$$

Δ) Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου 2α ἐκ τῶν τοῦ α.

$$ημ2α=2ημασυνα \qquad συν2α=συν^2α-ημ^2α$$
$$εφ2α=\frac{2εφα}{1-εφ^2α} \qquad σφ2α=\frac{σφ^2α-1}{2σφα}.$$

Ε) Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου $\frac{α}{2}$ ἐκ τοῦ συνα.

$$ημ\frac{α}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-συνα}{2}} \qquad συν\frac{α}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+συνα}{2}}$$
$$εφ\frac{α}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-συνα}{1+συνα}} \qquad σφ\frac{α}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+συνα}{1-συνα}}.$$

ΣΤ) Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου α ἐκ τῆς εφ $\frac{α}{2}$.

$$ημα=\frac{2εφ\frac{α}{2}}{1+εφ^2\frac{α}{2}} \qquad συνα=\frac{1-εφ^2\frac{α}{2}}{1+εφ^2\frac{α}{2}} \qquad εφα=\frac{2εφ\frac{α}{2}}{1-εφ^2\frac{α}{2}}.$$

Ζ) Μετασχηματισμοὶ ἀθροισμάτων καὶ διαφορῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν εἰς γινόμενα καὶ ἀντιστρόφως.

1) $$ημA+ημB=2ημ\frac{A+B}{2}συν\frac{A-B}{2}$$
$$ημA-ημB=2ημ\frac{A-B}{2}συν\frac{A+B}{2}$$
$$συνA+συνB=2συν\frac{A+B}{2}συν\frac{A-B}{2}$$
$$συνB-συνA=2ημ\frac{A+B}{2}ημ\frac{A-B}{2}$$

2) $$2ημΓσυνΔ=ημ(Γ+Δ)+ημ(Γ-Δ)$$
$$2συνΓημΔ=ημ(Γ+Δ)-ημ(Γ-Δ)$$
$$2συνΓσυνΔ=συν(Γ+Δ)+συν(Γ-Δ)$$
$$2ημΓημΔ=συν(Γ-Δ)-συν(Γ+Δ)$$

3) $$\frac{\eta\mu A-\eta\mu B}{\eta\mu A+\eta\mu B}=\frac{\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}}{\varepsilon\varphi\frac{A+B}{2}}$$

Η) Ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τόξων τινῶν.

$$\eta\mu 0^0=\sigma\upsilon\nu 90^0=0$$

$$\eta\mu 18^0=\sigma\upsilon\nu 72^0=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\eta\mu 30^0=\sigma\upsilon\nu 60^0=\frac{1}{2}$$

$$\eta\mu 36^0=\sigma\upsilon\nu 54^0=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\eta\mu 45^0=\sigma\upsilon\nu 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\eta\mu 54^0=\sigma\upsilon\nu 36^0=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$\eta\mu 60^0=\sigma\upsilon\nu 30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\eta\mu 72^0=\sigma\upsilon\nu 18^0=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\eta\mu 90^0=\sigma\upsilon\nu 0^0=1.$$

Θ) Σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων τριγώνου.

1) Τοῦ ὀρθογωνίου ($A=90^0$)

$\beta=\alpha\eta\mu B=\alpha\sigma\upsilon\nu\Gamma$ $\qquad$ $\beta=\gamma\varepsilon\varphi B=\gamma\sigma\varphi\Gamma$

$\gamma=\alpha\eta\mu\Gamma=\alpha\sigma\upsilon\nu B$ $\qquad$ $\gamma=\beta\varepsilon\varphi\Gamma=\beta\sigma\varphi B$

2) Παντὸς τριγώνου.

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} \qquad \alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A.$$

Ι) Ἐπίλυσις τῶν τριγώνων.

1) Τῶν ὀρθογωνίων.

	Δεδομένα	Τύποι πρὸς εὕρεσιν τῶν ζητουμένων
1η περίπτωσις	α Β	$\Gamma=90^0-B$ $\beta=\alpha\eta\mu B$ $\gamma=\alpha\sigma\upsilon\nu B$ $E=\frac{\alpha^2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu B}{2}=\frac{\alpha^2\eta\mu 2B}{4}$

2α περίπτωσις β, B

$\gamma = 90^{\circ} - B$

$\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B}$

$\gamma = \beta\sigma\varphi B = \frac{\beta}{\varepsilon\varphi B}$

$E = \frac{\beta^2 \sigma\varphi B}{2}$

3η περίπτωσις β, γ

$\varepsilon\varphi B = \frac{\beta}{\gamma}$

$\Gamma = 90^{\circ} - B$

$\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B}$

$E = \frac{\beta\gamma}{2}$

4η περίπτωσις α, β

$\gamma = \sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}$

$\varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$

$B = 90^{\circ} - \Gamma$

$E = \frac{\beta\gamma}{2} = \frac{\beta\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}}{2}$

2) Τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων ἐν γένει.

Δεδομένα Τύποι πρὸς εὕρεσιν τῶν ζητουμένων

1η περίπτωσις α, B, Γ

$A = 180^{0} - (B + \Gamma)$

$\beta = \frac{\alpha\eta\mu B}{\eta\mu A}$

$\gamma = \frac{\alpha\eta\mu \Gamma}{\eta\mu A}$

$E = \frac{\alpha^2 \eta\mu B \eta\mu \Gamma}{2\eta\mu A}$

2α περίπτωσις

α | β | Γ

$$\frac{A+B}{2}=90^0-\frac{\Gamma}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\cdot\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}$$

$$\frac{A-B}{2}=\Delta$$

$$A=90^0-\frac{\Gamma}{2}+\Delta$$

$$B=90^0-\frac{\Gamma}{2}-\Delta$$

$$\gamma=\frac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$$

$$E=\frac{\alpha\beta\eta\mu\Gamma}{2}$$

3η περίπτωσις

α | β | A

$$\eta\mu B=\frac{\beta\eta\mu A}{\alpha}$$

$$\Gamma=180^0-(A+B)$$

$$\gamma=\frac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$$

$$E=\frac{\beta\gamma\eta\mu A}{2}$$

Τὸ πρόβλημα τοῦτο δύναται νὰ ἔχῃ καὶ δύο λύσεις.

4η περίπτωσις

α | β | γ

$$\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}$$

$$\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{\tau(\tau-\beta)}}$$

$$\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\beta)}}$$

$$E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

Ἀκτὶς τοῦ εἰς τὸ τρίγωνον περιγεγραμμένου κύκλου

$$P=\frac{\alpha\beta\gamma}{4E}=\frac{\alpha}{2\eta\mu A}.$$

Ἀκτὶς τοῦ εἰς τὸ τρίγωνον ἐγγεγραμμένου κύκλου

$$\rho=\frac{E}{\tau}=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}$$

ΤΕΛΟΣ

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΑΡΟΡΑΜΑ

Σελὶς 96 στῖχος 3 ἐκ τῶν κάτω· ἀντὶ βημΑ<α γράφε βημΑ≦α

Ἀνάδοχοι ἐκτυπώσεως καὶ βιβλιοδετήσεως Συνοδινὸς καὶ Καβαλλιεράτος, Λέκα 7.
Τύποις Πετροπούλου - Καμαρινοπούλου, Γερμανοῦ Παλαιῶν Πατρῶν 5 β.

ΔΙΑ ΤΗΝ ΠΕΡΙΦ. ΔΙΟΙΚΗΣΕΩΣ ΠΡΩΤΕΥΟΥΣΗΣ

ΔΡΧ. 32.—

ΔΙΑ ΤΑΣ ΕΠΑΡΧΙΑΣ ΔΡΧ. 35.20