ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ Ι. ΚΕΦΑΛΙΑΚΟΥ
ΓΥΜΝΑΣΙΑΡΧΟΥ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Ο. Ε. Σ. Β.

ΤΕΥΧΟΣ Β'

ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΑΣ ΤΗΣ Ζ' ΤΑΞΕΩΣ ΟΚΤΑΤΑΞΙΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Περιέχει τὰς ἀποδείξεις τῶν ἀναποδείκτων πορισμάτων καὶ τὰς λύσεις τῶν ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων τῶν περιεχομένων εἰς τὸ Γ' καὶ Δ' βιβλίον Γεωμετρίας Ν. Νικολάου

Γ' ΕΚΔΟΣΙΣ

ΧΑΡΑΛ. ΚΑΓΙΑΦΑΣ ΠΑΤΡΑΙ ΟΔΟΣ ΕΡΜΟΥ 14 • ΙΩΑΝ. Χ. ΚΑΓΙΑΦΑΣ ΑΘΗΝΑΙ - ΑΙΟΛΟΥ 68 (ΣΤΟΑ ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΠΟΥΛΟΥ)
ΕΜΠΟΡΙΟΝ - ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΧΑΡΤΟΥ - ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ Ι. ΚΕΦΑΛΙΑΚΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
Ο. Ε. Σ. Β.

ΕΚΔΟΣΙΣ Β'

ΤΕΥΧΟΣ Β'.

ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΑΣ ΤΗΣ Ζ' ΤΑΞΕΩΣ ΟΚΤΑΤΑΞΙΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Περιέχει τὰς ἀποδείξεις τῶν ἀναποδείκτων πορισμάτων καὶ τὰς λύσεις τῶν ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων τῶν περιεχομένων εἰς τὸ Γ' καὶ Δ' βιβλίον Γεωμετρίας Ν. Νικολάου

ΒΙΒΛΙΕΚΔΟΤΙΚΟΣ & ΧΑΡΤΕΜΠΟΡΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
ΧΑΡ. ΚΑΓΙΑΦΑΣ • ΙΩ. Χ. ΚΑΓΙΑΦΑΣ
ΠΑΤΡΑΙ — Ἑρμοῦ 14 ΑΘΗΝΑΙ — Λέκκα 12

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.

ΣΗΜΑΣΙΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΜΕΝΩΝ ΣΥΜΒΟΛΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΤΟΜΙΩΝ

$\wedge$: γωνία.

$\frown$: τόξον.

$\perp$: κάθετος, αὕτη εἶναι κάθετος ἐπὶ τήν...

$\parallel$: παράλληλος, αὕτη εἶναι παράλληλος πρὸς τήν...

$=\parallel$: ἴση καὶ παράλληλος.

Θ. Γ. : Θεωρητικὴ Γεωμετρία.

Θ. : Θεώρημα.

Π. : Πόρισμα.

Γ. Τ. : Γεωμετρικὸς τόπος.

ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

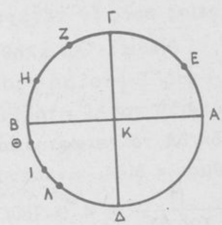
ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α.

Μέτρησις τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων

'Ασκήσεις: Σελ. 153. **311. Νὰ ὁρίσητε εἰς μίαν περιφέρειαν ἕν τόξον μικρότερον τεταρτημορίου καὶ νὰ σχηματίσητε τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ 2 καὶ ἐπὶ $3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$.**

Λύσις: Ἔστω ἡ περιφέρεια Κ καὶ δύο διάμετροι ΑΒ καὶ ΓΔ αὐτῆς κάθετοι μεταξύ των. Ἕκαστον τῶν τόξων ΑΓ, ΓΒ, ΒΔ καὶ ΔΑ εἶναι τεταρτημόριον. Συνεπῶς τὸ τόξον ΑΕ εἶναι μικρότερον τοῦ τεταρτημορίου ΑΓ.



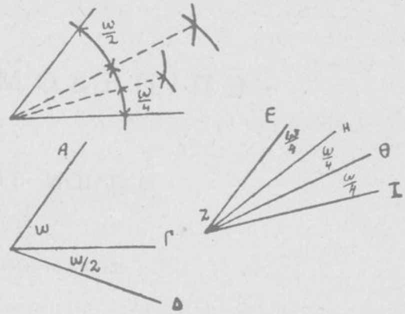
Σχ. 1.

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον τόξΑΕ . 2 λαμβάνομεν, ἀπὸ τοῦ σημείου Γ ἀρχόμενοι, δύο διαδοχικὰ τόξα ΓΖ καὶ ΖΗ ἴσα πρὸς τὸ τόξ ΑΕ. Τὸ τόξ ΓΗ = τόξ ΑΕ . 2.

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον τόξ ΑΕ . $\left(3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$ λαμβάνομεν ἀπὸ τοῦ σημείου Γ τῆς περιφερείας ἀρχόμενοι, τὰ τόξα ΓΖ, ΖΗ, ΗΘ ἴσα μὲ τὸ τόξον ΑΕ, τὸ τόξον ΘΙ ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΕ καὶ τὸ τόξον ΙΛ ἴσον μὲ τὸ τέταρτον τοῦ τόξου ΑΕ. Τότε τόξον ΓΛ = τόξ ΑΕ . $\left(3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$, διότι σχηματίζεται ἀπὸ τὸ ΑΕ καὶ ἀπὸ τὰ μέρη αὐτοῦ, ὅπως σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς $3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα 1 καὶ ἀπὸ τὰ μέρη αὐτῆς.

312. Νὰ γράψητε μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ω καὶ νὰ σχηματίσητε τὸ γινόμενον αὐτῆς ἐπὶ $1\frac{1}{2}$ ἢ ἐπὶ $\frac{3}{4}$.

Λύσις: Ἔστω ω μία δοθεῖσα ὀξεῖα γωνία (σχ. 2). Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον γων $\omega . 1\frac{1}{2}$ κατασκευάζομεν (Προβλ. § 78) γων ΑΒΓ ἴσην μὲ τὴν ληφθεῖσαν ω. Ἔπειτα δὲ μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον Β καὶ πλευρὰν τὴν ΒΓ καὶ πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τῆς γωνίας ΑΒΓ κατασκευάζομεν τὴν γων ΓΒΔ=γων $\frac{\omega}{2}$.



Σχ. 2.

Θὰ εἶναι γωνΑΒΔ=γωνΑΒΓ+ + γων ΓΒΔ = γων ω + + γων $\frac{\omega}{2}$ = γων ω.$\left(1\frac{1}{2}\right)$

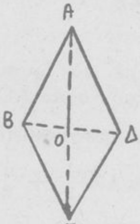
Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον γων ω . $\frac{3}{4}$, διαιροῦμεν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη καὶ κατασκευάζομεν τὰς διαδοχικὰς γωνίας ΕΖΗ, ΗΖΘ, ΘΖΙ ἴσας πρὸς γων $\frac{\omega}{4}$. Θὰ εἶναι γωνΕΖΙ=γωνΕΖΗ+ γωνΗΖΘ+ γωνΘΖΙ=

γων $\frac{\omega}{4}$+ γων $\frac{\omega}{4}$ + γων $\frac{\omega}{4}$ = γων ω . $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)$= γων ω. $\frac{3}{4}$.

Ἀσκήσεις σελ. 154. 313. **Νὰ ὁρίσητε τὸν λόγον μιᾶς περιφερείας πρὸς ἕν τεταρτημόριον αὐτῆς.**

Λύσις: Ἂν κληθῇ Π ἡ περιφέρεια, θὰ εἶναι (σχ. 1) Π = τοξ ΑΓ+ +τοξΓΒ+τοξΒΔ+τοξ ΔΑ=τοξΑΓ+τοξΑΓ+τοξΑΓ+τοξΑΓ=τοξΑΓ . 4, ἐπειδὴ τοξΑΓ=τοξΓΒ=τοξΒΔ=τοξΔΑ, ὡς τεταρτημόρια αὐτῆς. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τεταρτημόριον ΑΓ πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸ θετικὸν ἀριθμὸν 4 δίδει γινόμενον τὴν περιφέρειαν, ἕπεται ὅτι

$\frac{\text{Π}}{\text{τοξ ΑΓ}} = 4.$ (§ 180).



Σχ. 3.

314. **Νὰ ὁρίσητε τὸν λόγον ἑνὸς ρόμβου πρὸς ἕν ἀπὸ τὰ τρίγωνα, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ὑπὸ τῶν διαγωνίων του.**

Λύσις: Γνωρίζομεν, ὅτι αἱ διαγώνιοι ἑνὸς ρόμβου τέμνονται δίχα καὶ καθέτως καὶ διαιροῦσιν αὐτὸν εἰς τέσσαρα ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα. Ἂν ΑΒΓΔ εἶναι ὁ ρόμβος καὶ Ο τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του θὰ εἶναι:

ρομ. ΑΒΓΔ = τριγ. ΑΟΒ + τριγ. ΒΟΓ + τριγ. ΓΟΔ + + τριγ. ΔΟΑ = τριγ.ΑΟΒ + τριγ. ΑΟΒ+ τριγ ΑΟΒ+ + τριγ ΑΟΒ = τριγ. ΑΟΒ . 4. Ἄρα $\frac{\text{ρομ ΑΒΓΔ}}{\text{τριγ ΑΟΒ}} = 4.$

315. Νὰ ὁρίσητε τὸν λόγον μιᾶς ἐγγεγραμμένης γωνίας πρὸς τὴν ἐπίκεντρον, ἡ ὁποία βαίνει εἰς τὸ αὐτὸ τόξον.

Λύσις: Γνωρίζομεν, ὅτι πᾶσα ἐγγεγραμμένη γωνία ΒΑΓ (σχ. 110 Θ Γ.) εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου γωνίας ΒΚΓ, ἡ ὁποία βαίνει εἰς τὸ αὐτὸ τόξον ΒΓ ἤτοι.

$$\text{γων}\,ΑΒΓ = \frac{\text{γων}\,ΒΚΓ}{2} = \text{γων}\,ΒΚΓ.\ \frac{1}{2}.\quad \text{Ἄρα}\ \frac{\text{γων}\,ΑΒΓ}{\text{γων}\,ΒΚΓ} = \frac{1}{2}.$$

Ἰδιότητες τῶν μέτρων τῶν ποσῶν

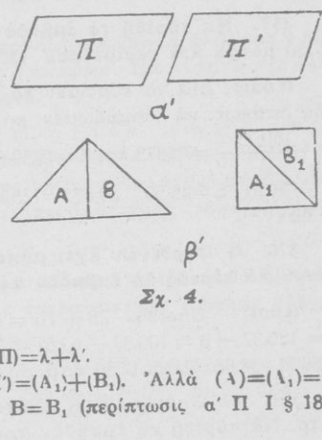
ΠΟΡΙΣΜΑ Ι: *Τα ἴσα ἢ ἰσοδύναμα σχήματα ἔχουσι τὸ αὐτὸ μέτρον, ἄν μετρηθῶσι μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα. Καὶ ἀντιστρόφως.*

α') Ἔστωσαν δύο ἴσα σχήματα Π καὶ Π' (σχ 4α') Θὰ δείξωμεν, ὅτι (Π) = (Π')

Ἀπόδειξις: Ἂν (Π)=λ, θὰ εἶναι καὶ $\frac{Π}{Μ} = λ$ ἢ Π=Μ. λ. Ἐπειδὴ δὲ καὶ Π=Π', θὰ εἶναι καὶ Π'=Μ. λ. ἢ $\frac{Π'}{Μ}$ = (Π')=λ. Ἄρα (Π) = (Π').

β') Ἔστωσαν ἤδη δύο σχήματα Π καὶ Π' (σχ. 4 β'), τὰ ὁποῖα ἀκέραια δὲν ἐφαρμόζουσιν, ἀλλὰ ἐφαρμόζουσιν, ἀφοῦ διαιρεθῶσιν εἰς μέρη, τὸ μὲν Π εἰς τὰ μέρη Α καὶ Β, τὸ δὲ Π' εἰς τὰ μέρη $Α_1$ καὶ $Β_1$.

Ἔστω δὲ Α=$Α_1$ καὶ Β=$Β_1$. Θὰ δείξωμεν ὅτι (Π)=(Π')



Σχ. 4.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ Π=Α+Β θα εἶναι καὶ (Π)=(Α)+(Β) (Θ. Ι. § 181) καὶ ἂν (Α)=λ καὶ (Β)=λ', θὰ εἶναι καὶ (Π)=λ+λ'.

Ἐπειδὴ δὲ Π'=$Α_1$+$Β_1$, θὰ εἶναι (Π')=($Α_1$)+($Β_1$). Ἀλλὰ (Α)=($Α_1$)=λ) ἐπειδὴ Α=$Α_1$ καὶ (Β)=($Β_1$)= λ', ἐπειδὴ Β=$Β_1$ (περίπτωσις α' Π Ι § 181. Ἄρα καὶ (Π')=λ+λ'=(Π).

Ἀντιστρόφως: Ἂν δύο σχήματα Π καὶ Π', μετρηθέντα μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα Μ, ἔχωσιν ἴσα μέτρα, θὰ εἶναι ἢ ἴσα ἢ κατὰ μέρη ἴσα (ἰσοδύναμα.)

Ἀπόδειξις: Διότι, ἀφοῦ (Π)=(Π') θὰ εἶναι καὶ $\frac{Π}{Μ}$ =λ ἢ Π = Μ. λ (1) καὶ $\frac{Π'}{Μ}$ =λ ἢ Π'=Μ λ (2). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι τὰ σχήματα Π καὶ Π ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν αὐτῶν μερῶν τῆς μονάδας Μ καὶ ἑπομένως ἢ εἶναι ἀκέραια ἴσα ἢ κατὰ μέρη ἴσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ. ***Τὸ μέτρον τῆς διαφορᾶς δύο ποσῶν ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἀντιστοίχων μέτρων αὐτῶν.***

Ἔστω Π=Α−Β. Θὰ δείξωμεν, ὅτι (Π)=(Α)−(Β).

Απόδειξις: Ἀφοῦ Π=Α—Β, ἕπεται ὅτι Π+Β=Α καὶ (Π)+(Β)=(Α) (Θ. Ι § 181 Θ. Γ). Ἄρα (Π) = (Α) — (Β)

Ἀσκήσεις σελὶς 161. **316. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν 5,20 μέτρα καὶ ὕψος 3,30 μέτρα.**

Λύσις: Ἂν Ε εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου, β εἶναι τὸ μῆκος τῆς βάσεως καὶ υ τό μῆκος τοῦ ὕψους αὐτοῦ, θὰ εἶναι Ε=β. υ. Ἐκ τούτου διὰ β=5,20 μ. καὶ υ=3,30 ἔχομεν Ε=5,20. 3,30=17,16 τ. μ.

317. Ὁ στῖβος τοῦ Σταδίου Ἀθηνῶν ἔχει μῆκος 204 μ καὶ πλάτος 33 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

Λύσις: Ἔχομεν Ε=β. υ=204.33=6732 τ. μ.

318. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν 5,40 μ.

Λύσις: Ἂν α εἶναι τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τετραγώνου, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θὰ εἶναι $Ε=α^2$. Ἐκ τούτου διὰ α=5,40 ἔχομεν $Ε=5{,}40^2=$ =29,16 τ. μ.=29 τ. μ. 16 τ. παλ.

319. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν 45,50 μέτρα καὶ περίμετρον 150,75 μέτρα.

Λύσις: Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου πρέπει, ἐκτὸς τῆς βάσεως, νὰ γνωρίζωμεν καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Ἐπειδὴ δὲ β+υ= $=\dfrac{150{,}75}{2}$ =75,375 καὶ β=45,50 θὰ εἶναι υ=75,375—45,500=29,875 μέτρ.
Ἄρα Ε=45,50 . 29,875=1359, 3125 τ. μ.=1359 τ. μ. 31 τ. πλ. 25 τ. δάκτ.

320. Ὁ Παρθενὼν ἔχει μῆκος 69,51 μέτρ. καὶ περίμετρον 200,74 μέτρ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

Λύσις: Ἐπειδὴ 2β+2υ=200,74, θὰ εἶναι β+υ=100,37 καὶ υ=100,37—β=100,37—69,51=30,86 μέτρα καὶ συνεπῶς Ε=β. υ= =69,51 . 30,86=2145, 0786 τ. μ.

321. Τὸ Θησεῖον ἔχει πλάτος 13,72 μέτρ. καὶ περίμετρον 90,98 μέτρ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δαπέδου αὐτοῦ.

Λύσις: Ἂν β εἶναι ἡ βάσις αὐτοῦ καὶ υ τὸ πλάτος του, θὰ ἔχωμεν 2β+20=90,98 καὶ β+υ=45,49 Ἐπειδὴ δὲ υ=13,72, θὰ εἶναι β= =45,49—13,72=31,77 μ. καὶ Ε=31,77 . 13,72=435,8844 τ. μ.

322. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει περίμετρον 40,36 μέτρα.

Λύσις: Ἂν α εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, ἡ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι 4α, ὡς ἔχον ἴσας πάσας τὰς πλευρὰς αὐτοῦ. Ἄρα 4α=40,36 καὶ α=10,09 μ. καὶ $Ε=α^2=10{,}09^2=101{,}8081$ τ. μ.

323. Ἓν τετράγωνον ἔχει ἐμβαδὸν 14,0625 τετ. μέτρων. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ.

Λύσις: Ἐπειδὴ $\alpha^2 = E$, ἕπεται ὅτι $\alpha = \sqrt{E} = \sqrt{14,0625} = 3,75$ μ.

324. Ὀρθογώνιον ἔχει ἐμβαδὸν 450 τετρ. μέτρα καὶ βάσιν 30 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου $E = \beta \cdot \upsilon$, διὰ $E = 450$ καὶ $\beta = 30$ ἔχομεν $450 = 30 \cdot \upsilon$ καὶ $\upsilon = 450 : 30 = 15$ μέτρα.

325. Ἓν τετράγωνον ἔχει ἐμβαδὸν 81 τετ. μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου αὐτοῦ.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου $\alpha = \sqrt{E}$ ἂν $E = 81$, ἔχομεν $\alpha = \sqrt{81} = 9$ μ. καὶ συνεπῶς περίμετρος $= 4\alpha = 4 \cdot 9 = 36$ μ.

326. Ἓν ὀρθογώνιον ἔχει ὕψος 20 μ. καὶ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τετράγωνον πλευρᾶς 32 μέτρων. Νὰ εὑρεθῇ ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου τούτου.

Λύσις: Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου πλευρᾶς 32 μ. εἶναι $E = \alpha^2 = 32^2 = 1024$ τ. μέτρα. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράγωνον, ἕπεται ὅτι καὶ τοῦ ὀρθογωνίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 1024 τ.μ. Ἄρα $\beta = E : \upsilon = 1024 : 20 = 51,2$ μ.

327. Μία οἰκοδέσποινα θέλει νὰ στρώσῃ μὲ τάπητα πλάτους 1,80μ. αἴθουσαν μήκους 4,30 μ. καὶ πλάτους 4 μετρων. Νὰ εὕρητε πόσα μέτρα ἀπὸ τὸν τάπητα αὐτὸν θὰ χρειασθῇ.

Λύσις: Τὸ ἐμβαδὸν τῆς αἰθούσης εἶναι $E = 4,30 \cdot 4 = 17,20$ τετ. μέτρα. Ἄρα τόσην ἐπιφάνειαν πρέπει νὰ ἔχῃ καὶ ὁ ἀπαιτούμενος διὰ τὴν στρῶσιν τῆς αἰθούσης τάπης. Ἐπειδὴ δὲ τὸ πλάτος αὐτοῦ εἶναι 1,80 καὶ τὸ ἐμβαδόν του 17,20 τετ. μέτρα, ἕπεται ὅτι $\beta = E : \upsilon = 17,20 : 1,80 = 9\frac{5}{9}$ μέτρα.

328. Εἷς ὀρθογώνιος διάδρομος ἔχει μῆκος 8 μέτρ. καὶ πλάτος 3 μέτρα. Εἶναι δὲ οὗτος ἐστρωμένος μὲ τετραγωνικὰς πλάκας πλευρᾶς 0,20 μ. Νὰ εὕρητε πόσας πλάκας ἔχει.

Λύσις: Θὰ ἔχῃ τόσας τετρ. πλάκας, ὅσον τό ἐμβαδὸν τῆς πλακὸς χωρεῖ εἰς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ διαδρόμου. Ἀλλὰ ἐμβαδὸν διαδρόμου $= 8 \times 3 = 24$ τ. μ. καὶ ἐμβαδὸν πλακὸς $= 0,20 \cdot 0,20 = 0,04$ τετρ. μέτρα καὶ $24 : 0,04 = 2400 : 4 = 600$.

Ἄρα 600 τετρ. πλάκας ἔχει ὁ διάδρομος.

Σελὶς 162. ΠΟΡΙΣΜΑ Ι. *Ἂν δύο παραλληλόγραμμα ἔχωσιν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη, εἶναι ἴσα ἢ ἰσοδύναμα.*

Ἀπόδειξις: Ἀφοῦ τὰ δύο παραλληλόγραμμα ἔχωσιν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη, θὰ ἔχωσι καὶ τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν δηλ. ἴσα μέτρα. Ἀλλὰ ὅταν δύο σχήματα ἔχωσιν ἴσα μέτρα, εἶναι ἢ ἴσα ἢ κατὰ μέρη ἴσα (ἰσοδύναμα) (§ 181 Π. Ι. ἀντίστροφον).

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ. *Ἂν δύο παραλληλόγραμμα ἔχωσιν ἴσας βάσεις εἶναι ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν. Ἂν δὲ ἔχωσιν ἴσα ὕψη, εἶναι ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν.*

Ἔστωσαν Π καὶ Π′ δύο παραλληλόγραμμα ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἄνισα τὰ ὕψη αὐτῶν υ καὶ υ′. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ Π θὰ εἶναι $E=\beta\,.\,\upsilon$ (1) καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ Π′ θὰ εἶναι $E'=\beta\,.\,\upsilon'$ (2). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη, θὰ ἔχωμεν $\frac{E}{E'}=\frac{\beta\,.\,\upsilon}{\beta\,.\upsilon'}=\frac{\upsilon}{\upsilon'}$.

Ἂν δὲ ἔχωσιν ἴσα ὕψη καὶ διαφόρους βάσεις β καὶ β′ καθ' ὅμοιον τρόπον ἔχομεν $\frac{E}{E'}=\frac{\beta\,.\,\upsilon}{\beta'\,.\,\upsilon}=\frac{\beta}{\beta'}$.

Ἀσκήσεις σελ. 162. **329. Ἓν παραλληλόγραμμον ἔχει βάσιν 54,36 μέτρ. καὶ ὕψος ἴσον πρὸς τὸ τρίτον τῆς βάσεως αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.**

Λύσις: Ἂν καλέσωμεν υ τὸ ὕψος αὐτοῦ, θὰ εἶναι $\upsilon=\frac{\beta}{3}=$ $=\frac{54{,}36}{3}=18{,}12$ μέτρα. Ἐκ τοῦ τύπου δὲ $E=\beta\,.\,\upsilon$ εὑρίσκομεν $E=18{,}12\,.\,54{,}36=985{,}0032$ τετρ. μέτρα.

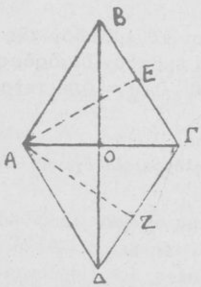
330. Εἷς ρόμβος ἔχει περίμετρον 149,40 μέτρ. ἡ δὲ ἀπόστασις δύο παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι 30,10 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

Λύσις: Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ρόμβου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $E=\beta\,.\,\upsilon$, ἔνθα β ἡ βάσις αὐτοῦ καὶ υ τὸ ὕψος του. Ἀλλὰ τοῦ ρόμβου πᾶσαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι μεταξύ των καὶ αἱ ἀποστάσεις τῶν ἀπέναντι πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι ἴσαι. Ἄρα βάσις αὐτοῦ εἶναι μία ἐκ τῶν πλευρῶν του καὶ ὕψος ἡ ἀπόστασις δύο παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ.

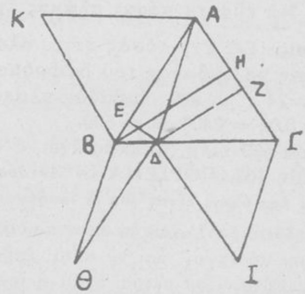
Ἐπειδὴ δὲ $4\beta=149{,}40$ μ., θὰ εἶναι $\beta=149{,}40:4=37{,}35$ καὶ $\upsilon=30{,}10$μ. Συνεπῶς $E=37{,}35\,.\,30{,}10=1124{,}235$ τ.μ.

331. Νὰ ἀποδειχθῶσι μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἐμβαδῶν αἱ ἀσκήσεις 147, 207 καὶ 208.

Λύσις: α′) Ἔστω ὁ ρόμβος ΑΒΓΔ καὶ ΑΕ, ΑΖ αἱ ἀποστάσεις τῶν ἀπέναντι παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ (σχ. 5). Θὰ δείξωμεν τῇ βοη-



Σχ. 5.



Σχ. 6.

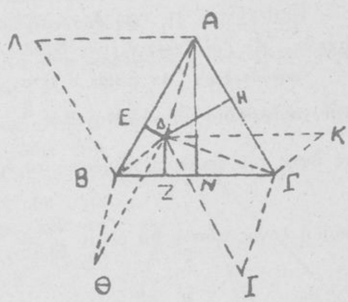
θείᾳ τῶν ἐμβαδῶν, ὅτι ΑΕ=ΑΖ. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ρόμβου εἶναι (ΑΒΓΔ)= =(ΒΓ).(ΑΕ) (1), ἂν ληφθῇ ὡς βάσις ἡ πλευρὰ ΒΓ αὐτοῦ. Ἂν ὅμως ληφθῇ ὡς βάσις ἡ πλευρὰ ΔΓ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θὰ εἶναι (ΑΒΓΔ) =

$=(\Delta\Gamma).(AZ)$ (2). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2), ἕπεται ὅτι $(B\Gamma).(AE)=(\Delta\Gamma).(AZ)$ (3). Ἀλλὰ $B\Gamma=\Delta\Gamma$ καὶ συνεπῶς ἡ (3) γίνεται $(B\Gamma).(AE)=(B\Gamma).(AZ)$ καὶ διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς διὰ $(B\Gamma)$ ἔχομεν $(AE)=(AZ)$.

β') Ἔστω ΑΒΓ (σχ. 6) ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον, Δ τυχὸν σημεῖον τῆς βάσεως αὐτοῦ, ΔΕ, ΔΖ αἱ ἀποστάσεις τοῦ Δ ἀπὸ τὰς ἴσας πλευρὰς αὐτοῦ καὶ ΒΗ τὸ ὕψος του ἐπὶ μίαν τῶν ἴσων πλευρῶν αὐτοῦ. Θὰ δείξωμεν, τῇ βοηθείᾳ τῶν ἐμβαδῶν, ὅτι $BH=\Delta E+\Delta Z$.

Πρὸς τοῦτο φέρομεν τὴν ΑΔ καὶ ἐκ τοῦ Δ τὰς $\Delta\Theta \parallel AB$ καὶ $\Delta I \parallel A\Gamma$· ἐκ δὲ τῶν Α, Β, Γ, τὰς $AK \parallel B\Gamma$, $BK \parallel A\Gamma$, $B\Theta \parallel A\Delta$ καὶ $\Gamma I \parallel A\Delta$. Σχηματίζονται τὰ παραλληλόγραμμα ΑΚΒΓ, ΑΒΘΔ, ΑΔΙΓ, τῶν ὁποίων τὰ ἐμβαδὰ κατὰ σειρὰν εἶναι: $(AKB\Gamma)=(A\Gamma).(BH)$, $(AB\Theta\Delta)=(AB).(\Delta E)$ καὶ $(A\Delta I\Gamma)=(A\Gamma).(\Delta Z)$. Ἀλλὰ εἰς πᾶν παραλληλόγραμμον μία διαγώνιος αὐτοῦ χωρίζει τοῦτο εἰς δύο ἴσα τρίγωνα. Ἄρα $(AKB\Gamma)=2(AB\Gamma)$, $(AB\Theta\Delta)=2(AB\Delta)$ καὶ $(A\Delta I\Gamma)=2(A\Delta\Gamma)$. Ἐπειδὴ δὲ $(AB\Theta\Delta)+(A\Delta I\Gamma)=2(AB\Delta)+2(A\Delta\Gamma)=2[(AB\Delta)+(A\Delta\Gamma)]=2(AB\Gamma)$ καὶ $(AKB\Gamma)=2(AB\Gamma)$, ἕπεται ὅτι $(AKB\Gamma)=(AB\Theta\Delta)+(A\Delta I\Gamma)$ ἢ $(A\Gamma)(BH)=(AB)(\Delta E)+(A\Gamma)(\Delta Z)$. Ἀλλὰ $AB=A\Gamma$ καὶ συνεπῶς $(A\Gamma)(BH)=(A\Gamma)(\Delta E)+(A\Gamma)(\Delta Z)$ καὶ διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς διὰ $(A\Gamma)$ ἔχομεν τὴν σχέσιν $(BH)=(\Delta E)+(\Delta Z)$, τὴν ὁποίαν ἀπεδείξαμεν καὶ εἰς τὴν ἄσκησιν 207 (Τεῦχος Α').

γ') Ἔστω τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 7) καὶ Δ τυχὸν σημεῖον κείμενον ἐντὸς αὐτοῦ. Θὰ δείξωμεν διὰ τῶν ἐμβαδῶν, ὅτι $\Delta E+\Delta Z+\Delta H=AN$.



Σχ. 7.

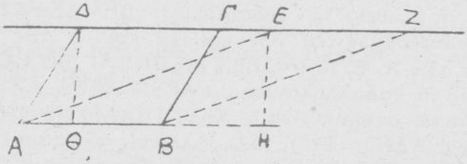
Πράγματι $2(A\Delta B)=(AB\Theta\Delta)$, $2(A\Delta\Gamma)=(A\Delta I\Gamma)$, $2(B\Delta\Gamma)=(B\Delta K\Gamma)$ καὶ $2(A\Delta B)+2(A\Delta\Gamma)+2(B\Delta\Gamma)=2[(A\Delta B)+(A\Delta\Gamma)+(B\Delta\Gamma)]=2(AB\Gamma)$. Ἀλλὰ καὶ $(A\Lambda B\Gamma)=2(AB\Gamma)$. Συνεπῶς $(A\Lambda B\Gamma)=(AB\Theta\Delta)+(A\Delta I\Gamma)+(B\Delta K\Gamma)$ ἢ $(B\Gamma)(AN)=(AB)(\Delta E)+(A\Gamma)(\Delta H)+(B\Gamma).(\Delta Z)$ καὶ ἐπειδὴ $AB=B\Gamma=A\Gamma$, θὰ ἔχωμεν $(B\Gamma)(AN)=(B\Gamma).(\Delta E)+(B\Gamma)(\Delta H)+(B\Gamma)(\Delta Z)$ καὶ διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης διὰ ΒΓ, ἔχομεν $(AN)=(\Delta E)+(\Delta H)+(\Delta Z)$.

312. Διάφορα ἰσοδύναμα παραλληλόγραμμα ἔχουσι κοινὴν βάσιν ὡρισμένην κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος. Νὰ εὑρεθῇ ὁ Γ. Τ. τῶν ἀπέναντι αὐτῆς κορυφῶν αὐτῶν, ἂν δοθῇ ἓν ἀπὸ τὰ παραλληλόγραμμα ταῦτα.

Λύσις: Ἔστω ΑΒΓΔ (σχ. 8) ἓν τῶν ἰσοδυνάμων παραλληλογράμμων, ἔχον ὡς βάσιν τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ ὕψος ΔΘ. Ἂν ΑΕΖΒ εἶναι τυχὸν ἄλλο παραλληλόγραμμον μὲ βάσιν τὴν αὐτὴν ΑΒ καὶ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ, θὰ ἔχωμεν $(AB\Gamma\Delta)=(AEZB)$ ἢ $(AB).(\Delta\Theta)=(AB).(EH)$

καὶ (ΔΘ)=(ΕΗ). Ἄρα αἱ ἀπέναντι τῆς κοινῆς βάσεως αὐτῶν κορυφαὶ ἀπέχουσιν τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἴσον πρὸς τὸ ὕψος ΔΘ τοῦ δοθέντος ἐξ αὐτῶν καὶ συνεπῶς κεῖνται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν κοινὴν βάσιν καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῆς ἴσην πρὸς ΔΘ.

Ἀντιστρόφως : Πᾶν παραλληλόγραμμον ἔχουν βάσιν ΑΒ καὶ τὰς δύο ἄλλας κορυφὰς αὐτοῦ ἐπὶ τῆς ΔΖ ∥ ΑΒ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ



Σχ. 8.

ΑΒΓΔ, διότι ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ἴσα ὕψη. Ἄρα ὁ ζητούμενος Γ. Τ. εἶναι ἡ ΔΖ ∥ ΑΒ.

Σελὶς 163. ΠΟΡΙΣΜΑ Ι. ***Τὰ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη, εἶναι ἴσα ἢ ἰσοδύναμα.***

Ἀπόδειξις : Διότι ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν δηλ. τὸ αὐτὸ μέτρον. Ἀλλὰ δύο σχήματα ἔχοντα τὸ αὐτὸ μέτρον εἶναι ἴσα ἢ ἴσα κατὰ μέρη (ΙΙ. Ι. § 181, ἀντίστροφον).

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ. ***Ἂν δύο τρίγωνα ἔχωσιν ἴσα ὕψη, εἶναι ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν. Ἂν δὲν ἔχωσιν ἴσας βάσεις, εἶναι ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.***

Ἀπόδειξις : Ἂν β καὶ υ εἶναι ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ πρώτου τριγώνου, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι $E=\frac{\beta\,.\,\upsilon}{2}$ (1). Ἂν δὲ β′ καὶ υ εἶναι ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ δευτέρου τριγώνου, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θὰ εἶναι $E'=\frac{\beta'\,.\,\upsilon}{2}$ (2)

καὶ ὁ λόγος αὐτῶν θὰ εἶναι $\frac{E}{E'}=\frac{\frac{\beta\,.\,\upsilon}{2}}{\frac{\beta'\,.\,\upsilon}{2}}=\frac{\beta\,.\,\upsilon}{\beta'\,.\,\upsilon}=\frac{\beta}{\beta'}$. Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι $\frac{E}{E'}=\frac{\upsilon}{\upsilon'}$, ἂν ἔχωσιν ἴσας βάσεις καὶ διάφορα ὕψη.

Ἀσκήσεις σελ. 163. **333. Ἓν τρίγωνον ἔχει βάσιν 240 μέτρα καὶ ὕψος 20 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.**

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου $E=\frac{\beta\,.\,\upsilon}{2}$, ἂν β = 240 μ. καὶ υ = 20 μ. λαμβάνομεν $E=\frac{240.20}{2}=2400$ τ. μ.

334. Μία ἄμπελος ἔχει σχῆμα ὀρθογ. τριγώνου, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν ἐμβαδὸν εἶναι 3 βασιλικὰ στρέμματα, ἡ δὲ μία τῶν καθέτων πλευρῶν 150 μέτ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς αὐτοῦ.

Λύσις: Ἔστω ΑΒΓ ἡ ἄμπελος σχ. ὀρθογωνίου τριγώνου, ἔχουσα ἐμβαδὸν 3 βασιλικὰ στρέμματα καὶ (ΑΒ)=150 μέτρα (σχ. 9).

Ἐπειδὴ τὸ 1 βασιλικὸν στρέμμα ἔχει 1000 τετρ. μέτρα, ἕπεται ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἀμπέλου εἶναι 3000 τ. μ. Ἐκ τοῦ τύπου Ε=(ΑΒ) (ΑΓ): 2 ἔχομεν διὰ τὰς τιμὰς Ε=3000 καὶ (ΑΒ)=150 ὅτι:

$$3000 = \frac{150\,.\,(\text{ΑΓ})}{2} = 75\,.\,(\text{ΑΓ}) \text{ καὶ } (\text{ΑΓ}) = \frac{3000}{75} = 40 \text{ μ.}$$

Ὥστε τὸ μῆκος τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς αὐτοῦ εἶναι 40 μ.

Σχ. 9.

335 Ἓν τριγωνικὸν οἰκόπεδον ἔχει βάσιν 25,60 μ. καὶ ὕψος 13,20 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τοῦ οἰκοπέδου τούτου, ἂν ὁ τετρ. τεκτ. πῆχυς τιμᾶται 3640 δρχ.

Λύσις: Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγωνικοῦ οἰκοπέδου εἶναι $\text{Ε} = \frac{25{,}60 . 13{,}20}{2} =$

$= 25{,}60 \,.\, 6.6 = 163.96$ τ. μ.

Ἀλλὰ τὸ 1 τ. μ. ἔχει $\frac{16}{9}$ τετ. τεκτ. πήχεις καὶ συνεπῶς τὰ 168,96 τ. μ. ἰσοδυναμοῦσι πρὸς $\frac{16}{9} \times 168{,}96 = 300{,}3733$ τετ. τεκτ. πήχεις.

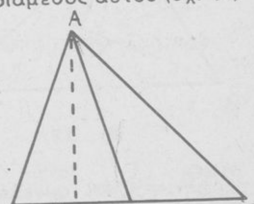
Ἑπομένως ἡ ἀξία τοῦ οἰκοπέδου πρὸς 3640 δρχ. τὸν τετρ. τεκτ. πῆχυν εἶναι 3640 δραχ. $\times$ 300,3733=1.093358,81 δραχ.

336. Νὰ συγκρίνητε τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα μία διάμεσος τριγώνου διαιρεῖ αὐτό.

Λύσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΔ ἡ διάμεσος αὐτοῦ (σχ. 10) Αὕτη χωρίζει τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ.

Ἐπειδὴ ταῦτα ἔχουσι τὰς βάσεις ἐπ' εὐθείας καὶ τὴν αὐτὴν κορυφὴν θὰ ἔχωσι καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΕ. Συνεπῶς $(\text{ΑΒΔ}) = \frac{(\text{ΒΔ})\,.\,(\text{ΑΕ})}{2}$ καὶ

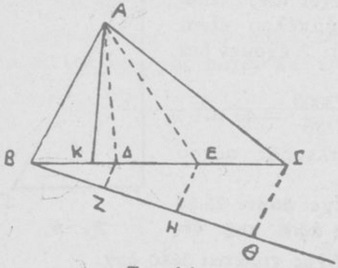
$(\text{ΑΔΓ}) = \frac{(\text{ΔΓ})\,.\,(\text{ΑΕ})}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ (ΒΔ) = (ΔΓ), λόγῳ τῆς διαμέσου, τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων εἶναι ἴσα. Ἄρα καὶ (ΑΒΔ)= =(ΑΔΓ) ἤτοι: *ἡ διάμεσος τριγώνου χωρίζει αὐτὸ εἰς δύο ἰσοδύναμα τρίγωνα.*



Σχ. 10.

337 Νὰ διαιρέσητε ἓν τρίγωνον εἰς τρία μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθειῶν ἀγομένων ἔκ τινος κορυφῆς αὐτοῦ.

Ἀνάλυσις: Ἔστω, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΑΕ διαιροῦσι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 11) εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη δηλαδὴ (ΑΒΔ)=(ΑΔΕ)=(ΑΕΓ). Ἐπειδὴ τὰ τρία τρίγωνα ἔχουσι τὰς βάσεις των ἐπ' εὐθείας καὶ τὴν αὐτὴν κορυφήν, θὰ ἔχωσι καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΚ. Θὰ ἔχωμεν δὲ $(ΑΒΔ)= = \frac{(ΒΔ)(ΑΚ)}{2}$, $(ΑΔΕ)=\frac{(ΔΕ)(ΑΚ)}{2}$ καὶ $(ΑΕΓ)=\frac{(ΕΓ)(ΑΚ)}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ α΄ μέλη τῶν ἄνω ἰσοτήτων ὑπετέθησαν ἴσα, θὰ εἶναι καὶ τὰ δεύτερα μέλη αὐτῶν ἴσα ἤτοι: $\frac{(ΒΔ).(ΑΚ)}{2} = \frac{(ΔΕ)(ΑΚ)}{2} = \frac{(ΕΓ).(ΑΚ)}{2}$ καὶ συνεπῶς $(ΒΔ)=(ΔΕ)= =(ΕΓ)$. Ἤτοι αἱ εὐθεῖαι ΑΔ, ΑΕ διαιροῦσι τὴν βάσιν ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἰς τρία ἴσα μέρη. Ἀλλὰ τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε δύνανται καὶ ἀρχικῶς νὰ ὁρισθῶσι.



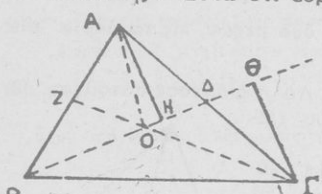
Σχ. 11.

Σύνθεσις: Διαιροῦμεν τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς τρία ἴσα μέρη κατὰ τὸ πρόβλημα Ι § 128 Φέρομεν τὰ εὐθ. τμήματα ΑΔ καὶ ΑΕ, τὰ ὁποῖα διαιροῦσι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τρία μέρη ἰσοδύναμα.

338. Νὰ ὁρίσητε ἐντὸς τριγώνου ἓν σημεῖον τοιοῦτον ὥστε αἱ ἐξ αὐτοῦ πρὸς τὰς κορυφὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι νὰ διαιρῶσιν αὐτὸ εἰς τρία ἰσοδύναμα τρίγωνα.

Ἀνάλυσις: Ἔστω ὅτι εὑρέθη τὸ ζητούμενον σημεῖον κείμενον ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ εἶναι τὸ Ο (σχ 12) τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι $(ΑΒΟ)=(ΒΓΟ)=(ΓΟΑ)$.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΟ καὶ ΒΟΓ ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΟ, θὰ εἶναι ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν ἤτοι $\frac{(ΑΒΟ)}{(ΒΟΓ)}=\frac{(ΑΗ)}{(ΘΓ)}$. Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι καὶ ἰσοδύναμα θὰ εἶναι



Σχ. 12.

$\frac{(ΑΒΟ)}{(ΒΟΓ)}=1$ καὶ συνεπῶς $\frac{(ΑΗ)}{(ΘΓ)}=1$ ἢ $(ΑΗ)=(ΓΘ)$ καὶ $ΑΗ=ΓΘ$. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΗΔ καὶ ΔΘΓ εἶναι ἴσα, διότι $ΑΗ=ΓΘ$ ἐξ ἀποδείξεως καὶ γων $ΗΑΔ=$γων$ΔΓΘ$, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΗ καὶ ΓΘ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΓ. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ $ΑΔ=ΔΓ$ καὶ τὸ σημεῖον Ο κεῖται ἐπὶ τῆς διαμέσου ΒΔ τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὴν πλευρὰν ΑΓ. Ἐὰν ἐργασθῶμεν καθ' ὅμοιον τρόπον καὶ μὲ τὰ τρίγωνα ΟΒΓ καὶ ΑΟΓ, εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ Ο κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς διαμέσου τῆς ἀντιστοιχούσης πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ. Ἄρα θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς τομῆς αὐτῶν. Δύναται συνεπῶς καὶ ἀρχικῶς νὰ προσδιορισθῇ.

Σύνθεσις: Ὁρίζομεν τὰς διαμέσους ΒΔ καὶ ΓΖ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Αὗται τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΟΑ

ΟΒ, ΟΓ. Λέγω, ὅτι αὗται διαιροῦσι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τρία ἰσοδύναμα τρίγωνα.

Ἀπόδειξις: Τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΗΔ καὶ ΓΔΘ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι $A\Delta = \Delta\Gamma$, λόγῳ τῆς διαμέσου καὶ γων $\Gamma\Delta\Theta =$ γων ΔAH, ὡς κατὰ κορυφήν. Ἄρα καὶ $AH = \Gamma\Theta$ καὶ συνεπῶς $(AOB) = (BO\Gamma)$, ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΟ καὶ ἴσα ὕψη. Καθ' ὅμοιον τρόπον δεικνύεται, ὅτι καὶ τρίγωνον $(AO\Gamma) = (BO\Gamma)$. Ἄρα $(AOB) = (BO\Gamma) = (\Gamma OA)$.

339. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἑνὸς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ νὰ ὁρίσητε τυχὸν σημεῖον Ε καὶ νὰ φέρητε τὰς εὐθείας ΑΕ καὶ ΔΕ. Νὰ ἀποδείξητε δέ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ΑΒΕ καὶ ΔΕΓ.

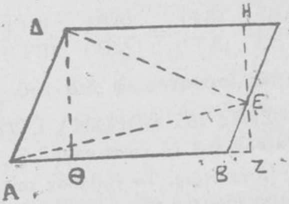
Λύσις: Ἐαν ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου Ε ἡ ΗΖ κάθετος ἐπὶ τὰς παραλλήλους πλευρὰς ΑΒ καὶ ΔΓ τοῦ παραλληλογράμμου, θὰ ἔχωμεν $(ABE) =$

$$= \frac{(AB)}{2} \cdot (EZ) \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad (\Delta E\Gamma) =$$

$$= \frac{(\Delta\Gamma).(HE)}{2} = \frac{(AB)}{2} \cdot (HE) \quad (2) \quad \text{καὶ}$$

$$(ABE) + (\Delta E\Gamma) = \frac{(AB)}{2} [(EZ) + (HE)] =$$

$$= \frac{(AB)}{2} \cdot (HZ) = \frac{1}{2} (AB\Gamma\Delta). \quad \text{Ἄρα}$$



Σχ. 13.

καὶ $(A\Delta E) = \frac{1}{2} (AB\Gamma\Delta)$ καὶ συνεπῶς $(A\Delta E) = (ABE) + (\Delta E\Gamma)$.

Ἀσκήσεις σελὶς 165. **340. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $AB = 2$μ. $(A\Gamma) = 8$ μέτ. καὶ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ἄλλο τρίγωνον Α'Β'Γ', τὸ ὁποῖον ἔχει $A'B' = A'\Gamma'$ καὶ $A' = A$. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς Α'Β'.**

Λύσις: Ἐπειδὴ ἡ γωνία Α' τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ' εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ θὰ ἔχωμεν (§ 191) $\frac{(A'B'\Gamma')}{(AB\Gamma)} =$

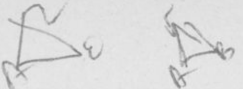
$$\frac{(A'B')\,(A'\Gamma')}{(AB)\,(A\Gamma)} = \frac{(A'B')\,(A'\Gamma')}{2.8}.$$

Ἐπειδὴ ὅμως τὰ τρίγωνα εἶναι ἰσοδύναμα ὁ λόγος $\frac{(A'B'\Gamma')}{(AB\Gamma)} = 1$

καὶ συνεπῶς $\frac{(A'B')\,(A'B')}{16} = 1$ ἢ $(A'B')^2 = 16$ καὶ $(A'B') = 4$ μέτρα.

341. Νὰ κατασκευάσητε ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΔΕΖ ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἄν αἱ κάθετοι πλευραὶ τούτου εἶναι 4 ἑκατ. ἡ μία καὶ 9 ἑκατ. ἡ ἄλλη.

Λύσις: Ἐπειδὴ τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουσιν ἀνὰ μίαν γωνίαν ἴσην, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν αὐτῶν θὰ ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτῶν ἤτοι $\frac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)} = \frac{(\Delta E).(\Delta Z)}{(AB).(A\Gamma)} = 1.$



διότι (ΔΕΖ) = (ΑΒΓ). Ἀλλὰ ΔΕ = ΔΖ καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν $\frac{(\Delta Z)^2}{36} = 1$ ἢ $(\Delta Z)^2 = 36$ τ. ἑκατ. καὶ (ΔΖ)=6 ἑκατ. Ὥστε ἡ πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου θὰ εἶναι 6 ἑκατ. καὶ κατασκευάζεται τοῦτο εὐκόλως.

342. Ἂν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ ἔχωσιν : Α = Α΄ καὶ Β + Β΄ = 2 ὀρθὰς νὰ ἀποδείξητε ὅτι ΒΓ : Β΄Γ΄ = ΑΓ : Α΄ Γ΄.

Λύσις: Ἐπειδὴ Α = Α΄ θὰ ἔχωμεν $\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{(AB)\,(A\Gamma)}{(A'B')\,(A'\Gamma')}$ (1).

Ἐπειδὴ δὲ Β+Β΄=2 ὀρθαί, θὰ ἔχωμεν καὶ $\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{(BA)\,(B\Gamma)}{(B'A')\,(B'\Gamma')}$ (2).

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔπεται ὅτι $\frac{(AB)\,.\,(A\Gamma)}{(A'B')\,(A'\Gamma')} = \frac{(BA)\,(B\Gamma)}{(B'A')\,(B'\Gamma')}$ ἢ

$\frac{(AB)}{(A'B')} \cdot \frac{(A\Gamma)}{(A'\Gamma')} = \frac{(AB)}{(A'B')} \cdot \frac{(B\Gamma)}{(B'\Gamma')}$ (3) καὶ διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος (3) διὰ τοῦ $\frac{(AB)}{(A'B')}$, ἔχομεν ὅτι (ΑΓ):(Α΄Γ΄)=(ΒΓ):(Β΄Γ΄).

Σελὶς 165. ΠΟΡΙΣΜΑ Ι. *Τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου εἶναι γινόμενον τῆς διαμέσου ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

Ἀπόδειξις. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν βάσεων αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος. Ἀλλὰ καὶ ἡ διάμεσος ἑνὸς τραπεζίου εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ. Ἄρα καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εἶναι γινόμενον τῆς διαμέσου αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος.

343. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσεις 50 μέτ. καὶ 30 μέτ., ὕψος δὲ 20 μ.

Λύσις: $E = \frac{(B+\beta)}{2} \cdot \upsilon = \frac{50+30}{2} \cdot 20 = 80\,.\,10 = 800$ τ. μ.

344. Ἐν τραπέζιον ἔχει μίαν βάσιν 65,60 μέτρων, ὕψος 10μ. καὶ ἐμβαδὸν 528 τετρ. μέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς ἄλλης βάσεως αὐτοῦ.

Λύσις: Ἀντικαθιστῶντες τὰς δεδομένας τιμὰς εἰς τὸν τύπον $E = \frac{(B+\beta)}{2} \cdot \upsilon$ ἔχομεν $528 = \frac{(65{,}60+\beta)}{2} \cdot 10$ ἢ $1056 = 656 + 10\beta$ καὶ $10\beta = 1056 - 656 = 400$ καὶ $\beta = 400 : 10 = 40$ μέτρα.

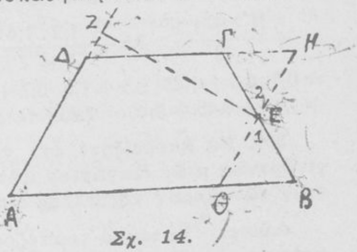
345. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου, τὸ ὁποῖον ἔχει διάμεσον 48,30 μέτρ. καὶ ὕψος 17,50 μέτρα.

Λύσις: Ἐκ τοῦ πορίσματος Ι § 192 ἔχομεν $E = 48{,}30 \times 17{,}50 = 845{,}25$ τετ. μέτρα.

346. Νὰ ἀποδείξητε, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου εἶναι γινόμενον μιᾶς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ μέσου τῆς ἄλλης ἀπὸ ἐκείνης.

Λύσις: Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ (σχ. 14), Ε τὸ μέσον τῆς μὴ παραλλήλου πλευρᾶς αὐτοῦ ΓΒ καὶ ΕΖ ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τῆς ἄλλης μὴ παραλλήλου πλευρᾶς του ΑΔ. Θὰ δείξωμεν ὅτι (ΑΒΓΔ) = = (ΑΔ) (ΕΖ)

Ἐπειδὴ (ΑΔ).(ΕΖ) παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου, ἔχοντος βάσιν τὴν ΑΔ καὶ ὕψος ΕΖ, θὰ προσπαθήσωμεν νὰ μετασχηματίσωμεν τὸ δοθὲν τραπέζιον εἰς ἰσοδύναμον παρ)μον. Πρὸς τοῦτο φέρομεν ἐκ τοῦ Ε τὴν ΘΗ ∥ ΑΔ. Ἐπειδὴ καὶ ΑΒ ∥ ΔΓ, τὸ τετράπλευρον ΑΘΗΔ εἶναι παρ)μον. Τοῦτο καὶ τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ ἔχουσι κοινὸν μὲν μέρος τό ΑΘΕΓΔ καὶ μὴ κοινὰ μέρη, τὸ μὲν τραπέζιον τὸ τρίγωνον ΘΕΒ, τὸ δὲ παρ)μον, τὸ τρίγωνον ΕΓΗ. Ἐπειδὴ ὅμως ΕΒ=ΕΓ ἐξ ὑποθέσεως καὶ γων $Ε_1$=γων $Ε_2$ ὡς κατὰ κορυφὴν καὶ γων ΕΒΘ =γωνΕΓΗ, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΔΗ, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΓΒ, ταῦτα εἶναι ἴσα καὶ συνεπῶς (ΑΒΓΔ)=(ΑΔΗΘ). Ἀλλὰ (ΑΔΗΘ) = = (ΑΔ) (ΕΖ). Συνεπῶς καὶ (ΑΒΓΔ) = (ΑΔ) (ΕΖ).

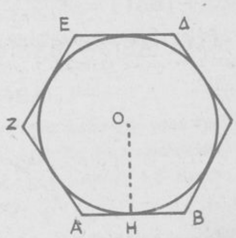


Σχ. 14.

347. Ἑκάστη πλευρὰ ἑξαγώνου ἔχει μῆκος α. Ἐν δὲ σημεῖον αὐτοῦ ἀπέχει ἀπὸ ἑκάστην πλευρὰν $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

Λύσις: Ἔστω τὸ ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 15) πλευρᾶς α καὶ Ο σημεῖον κείμενον ἐντὸς αὐτοῦ καὶ ἀπέχον τῶν πλευρῶν αὐτοῦ $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

Ἐὰν μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΗ γράψωμεν περιφέρειαν, αὕτη θὰ διέλθῃ διὰ τῶν ποδῶν ὅλων τῶν καθέτων, τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Ο ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ ἑξαγώνου, διότι καθ' ὑπόθεσιν αὗται εἶναι ἴσαι. Θὰ ἐφάπτεται δὲ καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ ἑξαγώνου, διότι αὗται εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ἀκτῖνας καὶ εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν. Συνεπῶς τὸ ἑξάγωνον θὰ εἶναι περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος ΟΗ = $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θὰ εἶναι γινόμενον τῆς ἡμιπεριμέτρου του ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἤτοι



Σχ. 15.

$$Ε = \frac{6\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{6\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{2} \text{ τ. μ.}$$

348. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 148 Θ.Γ), ἂν (ΑΗ) = 0,5 ἑκ., (ΑΘ) = 1 ἑκ., (ΘΛ) = 0,5 ἑκ. (ΗΚ) = 3,5 ἑκατ.,

(ΚΔ) = 1,4 ἑκατ., (ΛΔ) = 2,8 ἑκ., (ΒΗ) = 1,2 ἑκ., (ΓΚ) = 1,3 ἑκ., (ΕΛ) = 1 ἑκ. καὶ (ΖΘ) = 0,8 ἑκ.

Λύσις: Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ εἶναι ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τεσσάρων ὀρθογ. τριγώνων καὶ δύο τραπεζίων ἤτοι (ΑΒΓΔΕΖ)=

$$=(ΑΒΗ)+(ΒΗΚΓ)+(ΓΚΔ)+(ΔΕΛ)+(ΛΕΖΘ)+(ΖΘΑ)=\frac{0,5\,.\,1,2}{2}+$$

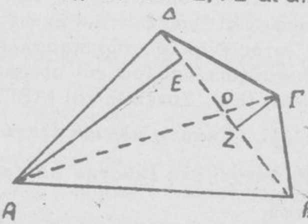
$$+\frac{(1,2+1,3)}{2}\cdot 3,5+\frac{1,3\,.\,1,4}{2}+\frac{2,8\,.\,1}{2}+\frac{1+0,8}{2}\cdot 0,5+\frac{0,8\,.\,1}{2}=$$

$$=0,5\,.\,0,6+1,25\,.\,3,5+1,3\,.\,0,7+1,4+0,9\,.\,0,5+0,4=0,30+4,375+0,91+$$

$$+1,40+0,45+0,40=7,835 \text{ τετρ. ἑκατ.}$$

349. Νὰ ἀποδείξητε, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τραπεζοειδοῦς εἶναι γινόμενον μιᾶς διαγωνίου αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν ἄκρων τῆς ἄλλης διαγωνίου ἀπ' αὐτῆς.

Λύσις: Ἔστω τὸ τραπεζοειδὲς ΑΒΓΔ (σχ. 16) καὶ ΑΕ, ΓΖ αἱ ἀποστάσεις τῶν ἄκρων τῆς διαγωνίου ΑΓ ἀπὸ τῆς ἄλλης διαγωνίου ΔΒ αὐτοῦ.



Σχ. 16.

Ἡ διαγώνιος ΔΒ χωρίζει τὸ τραπεζοειδὲς εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΔΓ, τῶν ὁποίων τὰ ἐμβαδὰ εἶναι :

$$(ΑΒΔ)=\frac{(ΔΒ)\,.\,(ΑΕ)}{2} \quad \text{καὶ} \quad (ΒΔΓ)=$$

$$=\frac{(ΔΒ)\,.\,(ΓΖ)}{2}.$$

Προσθέτομεν ταύτας κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν :

$$(ΑΒΔ)+(ΒΔΓ)=\frac{(ΔΒ)\,.\,(ΑΕ)}{2}+\frac{(ΔΒ)\,.\,(ΓΖ)}{2}=\frac{(ΔΒ)}{2}\left[(ΑΕ)+(ΓΖ)\right]$$

Ἀλλὰ (ΑΒΓ)+(ΒΔΓ)=(ΑΒΓΔ) καὶ συνεπῶς :

$$(ΑΒΓΔ)=(ΔΒ)\cdot\frac{(ΑΕ)+(ΓΖ)}{2}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

Μετρικαὶ σχέσεις μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῶν τριγώνων

Σελὶς 168. 350 **Νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον ἐπὶ μιᾶς εὐθείας καὶ τὴν προβολὴν αὐτοῦ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ταύτην.**

Λύσις: Ἂν Γ εἶναι ἓν σημεῖον τῆς εὐθείας Χ΄Χ (σχ. 149. Θ. Γ.) ἡ προβολὴ γ αὐτοῦ ἐπὶ τὴν Χ΄Χ εἶναι αὐτό, τοῦτο τὸ σημεῖον Γ, διότι ὁ πούς γ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν Χ΄Χ ἐκ τοῦ σημείου Γ συμπίπτει μὲ τὸ σημεῖον Γ.

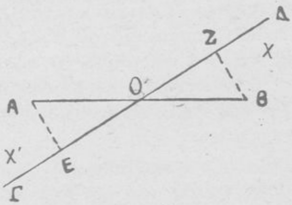
351. Νὰ γράψητε ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ καὶ νὰ ὁρίσητε τὴν προβολὴν τῆς κορυφῆς Β ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΑΓ (Α=1 ὀρθή).

Λύσις: Ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς Β τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΑΓ αὐτοῦ εἶναι ἡ κορυφὴ Α τῆς ὀρθῆς γωνίας του, διότι αὕτη εἶναι ὁ ποὺς τῆς ἀγομένης καθέτου ἐκ τῆς κορυφῆς Β ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΑΓ αὐτοῦ.

352 Νὰ ὁρίσητε ἑκατέρωθεν ἄξονος χ΄χ δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ γράψητε τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ νὰ ὁρίσητε τὰς προβολὰς τῶν δύο μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα τοῦτο διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ προβ ἄξονος χ΄χ.

Λύσις: Ἔστω ὁ ἄξων χ΄χ (σχ. 17) καὶ Α,Β δύο σημεῖα κείμενα ἑκατέρωθεν αὐτοῦ. Ἂν Ο εἶναι τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ τέμνει τὸν προβολικόν ἄξονα χ΄χ, ζητεῖται νὰ ὁρισθῶσιν αἱ προβολαὶ τῶν εὐθ. τμημάτων ΟΑ καὶ ΟΒ ἐπὶ τὸν ἄξονα χ΄χ.

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ὁρίσωμεν τὰς προβολὰς τῶν ἄκρων αὐτῶν ἐπὶ τὸν χ΄χ. Προβολὴ τοῦ σημείου Ο ἐπὶ τὸν ἄξονα χ΄χ εἶναι πάλιν τὸ Ο, διότι τοῦτο κεῖται ἐπὶ τοῦ προβολικοῦ ἄξονος. Προβολαὶ δὲ τῶν σημείων Α καὶ Β εἶναι οἱ πόδες Ε καὶ Ζ τῶν ἀγομένων καθέτων ἐξ αὐτῶν ἐπὶ τὸν χ΄χ.



Σχ. 17.

Ὥστε προβολὴ τοῦ εὐθ. τμήματος ΟΑ ἐπὶ τὸν ἄξονα χ΄χ εἶναι τὸ εὐθ. τμῆμα ΟΕ, τοῦ δὲ ΟΒ εἶναι τὸ ΟΖ.

Σελὶς 169. — ΠΟΡΙΣΜΑ Ι. ***Ὁ λόγος τῶν τετραγώνων τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθ. τριγώνου, ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν προβολῶν αὐτῶν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.***

Ἀπόδειξις: Ἐκ τοῦ σχ. 150 Θ. Γ. ἔχομεν βάσει τοῦ Θ. Ι. § 196, ὅτι $(AB^2) = (B\Gamma)(BH)$ (1) καὶ $(A\Gamma)^2 = (B\Gamma)(H\Gamma)$ (2). Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) ἔχομεν $\frac{(AB)^2}{(A\Gamma)^2} = \frac{(B\Gamma)\,(BH)}{(B\Gamma)\,(H\Gamma)} = \frac{(BH)}{(H\Gamma)}$.

Ἀσκήσεις σελ. 163. **353. Ἡ ὑποτείνουσα ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχει μῆκος 5 ἑκατ. Ἡ δὲ ἐπ' αὐτὴν προβολὴ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς διαιρεῖ αὐτὴν εἰς δύο τμήματα, ὧν τὸ ἓν ἔχει μῆκος 1,8 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὰ μήκη τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ.**

Λύσις: Ἂν ΑΒ, ΑΓ εἶναι αἱ κάθετοι πλευραὶ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 150 Θ. Γ.), ἔχοντος ὑποτείνουσαν (ΒΓ)=5 ἑκατ. καὶ προβολὴν τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν ΒΓ, τὴν (ΒΗ)=1,8 ἑκατ., θὰ ἔχωμεν $(AB)^2=(B\Gamma)(BH)= 5 . 1{,}8= 9$ τετ. ἑκατ. ὅθεν (ΑΒ) = 3 ἑκατ. Ἐπειδὴ (ΒΓ) = 5 ἑκατ. καὶ (ΒΗ) = 1,8 ἑκατ., θὰ εἶναι (ΗΓ) = (ΒΓ) — (ΒΗ) = 5 — 1,8 = 3,2 ἑκ. καὶ $(A\Gamma)^2 = (B\Gamma)(H\Gamma) = 5 . 3{,}2 = 16$ τετ. ἑκατ. καὶ (ΑΓ) = 4 ἑκατ.

354. Ἡ ὑποτείνουσα ὀρθ. τριγώνου ἔχει μῆκος 10 ἑκατ. καὶ μία ἀπὸ τὰς ἄλλας πλευρὰς 6 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὰ μήκη τῶν προβολῶν τῶν καθέτων πλευρῶν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

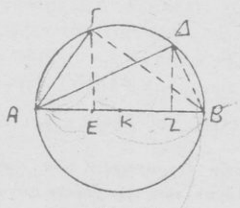
Λύσις: Ἔστω ΑΒΓ (σχ. 150 Θ. Γ.) ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἔχον (ΒΓ)=10 ἑκατ. καὶ (ΑΒ)=6 ἑκατ. Ζητοῦνται τὰ μήκη τῶν προβολῶν ΒΗ καὶ ΗΓ τῶν καθέτων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ.

Ἔχομεν $(ΑΒ)^2 = (ΒΓ).(ΒΗ)$ ἢ $36 = 10.(ΒΗ)$ καὶ $(ΒΗ) = 3{,}6$ ἑκ. καὶ $(ΗΓ) = (ΒΓ) - (ΒΗ) = 10 - 3{,}6 = 6{,}4$ ἑκατ.

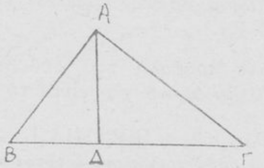
355. Νὰ γράψητε μίαν διάμετρον κύκλου καὶ ἐκ τοῦ ἑνὸς ἄκρου αὐτῆς νὰ γράψητε δύο χορδάς. Νὰ προβάλητε ταύτας ἐπὶ τὴν διάμετρον ταύτην καὶ νὰ συγκρίνητε τὸν λόγον τῶν τετραγώνων αὐτῶν πρὸς τὸν λόγον τῶν προβολῶν των.

Λύσις: Ἔστω ὁ κύκλος Κ (σχ. 18), ΑΒ μία διάμετρος αὐτοῦ, ΑΓ, ΑΔ δύο χορδαὶ αὐτοῦ ἀγόμεναι ἐκ τοῦ ἄκρου Α τῆς διαμέτρου ΑΒ καὶ ΑΕ, ΑΖ αἱ προβολαὶ αὐτῶν ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ.

Ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ ΓΒ καὶ ΔΒ τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα ΑΓΒ καὶ ΑΔΒ εἶναι ὀρθογώνια, διότι αἱ γωνίαι Γ καὶ Δ αὐτῶν εἶναι



Σχ. 18.



Σχ. 19.

ὀρθαί, ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς ἡμικύκλια. Κατὰ τὸ Θ. § 196 θὰ ἔχωμεν: $(ΑΓ)^2 = (ΑΒ).(ΑΕ)$ (1) καὶ $(ΑΔ)^2 = (ΑΒ).(ΑΖ)$ (2). Διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $\frac{(ΑΓ)^2}{(ΑΔ)^2} = \frac{(ΑΒ).(ΑΕ)}{(ΑΒ).(ΑΖ)} = \frac{(ΑΕ)}{(ΑΖ)}$ ὅ.ἔ.δ.

356. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι (ΑΒ)=2(ΑΓ). Νὰ εὕρητε δὲ τὸν λόγον τῆς προβολῆς τῆς ΑΒ πρὸς τὴν προβολὴν τῆς ΑΓ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ.

Λύσις: Ἔστω ΑΒΓ (σχ. 19) ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον (ΑΒ) = = 2.(ΑΓ) καὶ ΒΔ, ΔΓ, αἱ προβολαὶ αὐτῶν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ. Θὰ ἔχωμεν: $(ΑΒ)^2 = (ΒΓ).(ΒΔ)$ (1) καὶ $(ΑΓ)^2 = (ΒΓ).(ΓΔ)$ (2).

Ὅθεν $\frac{(ΒΓ).(ΒΔ)}{(ΒΓ).(ΓΔ)} = \frac{(ΑΒ)^2}{(ΑΓ)^2}$ ἢ $\frac{(ΒΔ)}{(ΓΔ)} = \frac{(2.ΑΓ)^2}{(ΑΓ)^2} = \frac{4\,(ΑΓ)^2}{(ΑΓ)^2} = 4.$

Ὥστε $(ΒΔ) = 4(ΔΓ)$.

Σελὶς 170. ΠΟΡΙΣΜΑ Ι. ***Τὸ τετράγωνον ἑκατέρας τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθ. τριγώνου εὑρίσκεται, ἂν τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης.***

Ἀπόδειξις: Γνωρίζομεν ὅτι $\beta^2+\gamma^2=\alpha^2$ (Θ. § 197). Ἐκ ταύτης ἔχομεν $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$ ἢ $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2$.

ΠΟΡΙΣΜΑ II. *Τὸ τετράγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν τὴν διαγώνιον ἄλλου τετραγώνου, εἶναι διπλάσιον τούτου.*

Ἀπόδειξις: Ἐξ ἑνὸς τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ διαγώνιος δ χωρίζει τὸ τετράγωνον πλευρᾶς α, διὰ τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος ἔχομεν $\delta^2=\alpha^2+\alpha^2=2\alpha^2$.

ΠΟΡΙΣΜΑ III. *Ἡ διαγώνιος τετραγώνου εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ.*

Ἀπόδειξις: Εὕρομεν (Π. II) ὅτι $\delta^2=2\alpha^2$. Ἐκ ταύτης ἔχομεν $\frac{\delta^2}{\alpha^2}=2$ ἢ $\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^2=2$ καὶ $\frac{\delta}{\alpha}=\sqrt{2}$. Ἀλλὰ ἡ $\sqrt{2}$ δὲν εἶναι οὔτε ἀκέραιος οὔτε κλασματικὸς ἀριθμός, ἀλλὰ δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἔχον ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικὰ καὶ καλεῖται ἀσύμμετρος ἀριθμός. Ἡ διαγώνιος ἄρα τετραγώνου καὶ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ δὲν ἔχουσι κοινὸν μέτρον καὶ συνεπῶς εἶναι ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα (§ 183).

Ἀσκήσεις σελὶς 171. **357. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ καθέτους πλευρὰς 6 ἑκατ. καὶ 8 ἑκατ. Νὰ ὑπολογίσητε δὲ τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης αὐτοῦ.**

Λύσις: Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ὀρθῆς γωνίας λαμβάνομεν μήκη (ΑΒ)=6 ἑκατ. καὶ (ΑΓ)=8 ἑκατ., καὶ φέρομεν τὴν ΒΓ. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον οὕτω σχηματίζεται, ἔχομεν δι' ἐφαρμογῆς τοῦ Πυθαγορείου Θεωρήματος: $(ΒΓ)^2=(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2=6^2+8^2=36+64=100$ τετ. ἑκατ. καὶ (ΒΓ) = 10 ἑκατ.

358. Μία ἄμπελος ἔχει σχῆμα ὀρθ. τριγώνου. Τούτου ἡ ὑποτείνουσα ἔχει μῆκος 50 μέτρων καὶ ἡ μία κάθετος πλευρὰ 30 μέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς.

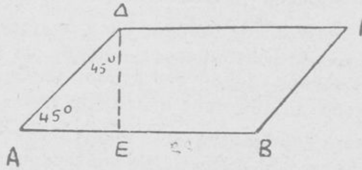
Λύσις: Τῆς ἀμπέλου, σχήματος ὀρθ. τριγώνου, γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν α = 50μ. καὶ τὴν κάθετον πλευρὰν β=30μ. Διὰ τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος ὑπολογίζομεν τὸ μῆκος τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς. Ἔχομεν $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2=50^2-30^2=2500-900=1600$ καὶ $\gamma=\sqrt{1600}=40$μ. Συνεπῶς $E=\frac{\beta\cdot\gamma}{2}=\frac{30\cdot 40}{2}=30\cdot 20=600$ τ. μέτρα.

359. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ὀρθ. τρίγωνον μὲ καθέτους πλευρὰς 9 ἑκατ. καὶ 12 ἑκατ. Νὰ ὑπολογίσητε δὲ τὰ μήκη τῶν προβολῶν αὐτῶν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

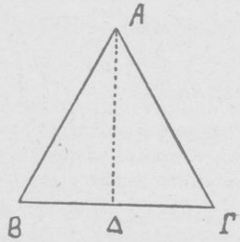
Λύσις: Διὰ τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ὀρθ. τριγώνου. Ἔχομεν $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2=9^2+12^2=81+144=225$ καὶ $\alpha=\sqrt{225}=15$μ. Ἂν δὲ ΒΗ καὶ ΗΓ εἶναι αἱ προβολαὶ τῶν καθέτων πλευρῶν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ (σχ. 150 Θ. Γ.) ἔχομεν $(ΑΒ)^2=(ΒΓ)(ΒΗ)$ καὶ $(ΑΓ)^2=(ΒΓ)(ΗΓ)$ ἢ $9^2=15\cdot(ΒΗ)$, $81=15\cdot(ΒΗ)$ καὶ $(ΒΗ)=81:15=5{,}4$μ. καὶ $144=15\,(ΗΓ)$ ἢ $(ΗΓ)=144:15=9{,}6$ μέτρα

360. Νὰ κατασκευάσητε ἓν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ (ΑΒ) = 28 ἑκατ., (ΑΔ) = 3 ἑκ. καὶ Α = 45°. Νὰ εὕρητε δὲ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

Λύσις: Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 20), ἔχον (ΑΒ) = 28 ἑκατ., (ΑΔ) = 3 ἑκατ. καὶ $\widehat{A} = 45^\circ$. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ αὐτοῦ εἶναι ἀνάγκη νὰ ὑπολογίσωμεν πρῶτον τὸ ὕψος αὐτοῦ ΔΕ. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΕ, ὡς ἔχον Α = 45°, εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ συνεπῶς ΑΕ = ΕΔ. Θέτομεν (ΔΕ) = χ, ὅτε δι' ἐφαρμογῆς τοῦ Πυθαγορείου



Σχ. 20



Σχ 21

θεωρήματος ἔχομεν $(ΑΕ)^2 + (ΔΕ)^2 = (ΑΔ)^2$ ἢ $χ^2 + χ^2 = 3^2$, ἢ $2χ^2 = 9$, $χ^2 = \frac{9}{2}$ καὶ $χ = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = 1{,}5\sqrt{2}$. Ἀντικαθιστῶντες ἤδη εἰς τὸν τύπον $Ε = β \cdot υ$, τὸ $β = 28$ ἑκατ. καὶ $υ = 1{,}5\sqrt{2}$ ἑκατ. ἔχομεν: $Ε = 28 \cdot 1{,}5\sqrt{2} = 42\sqrt{2}$ τετρ. ἑκατ.

361. Ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔχει βάσιν 6 μέτρων καὶ τὰς ἄλλας 10 μέτρα ἑκάστην. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

Λύσις: Ἔστω ΑΒΓ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον (σχ. 21) ἔχον (ΒΓ) = 6 ἑκ. καὶ (ΑΒ) = (ΑΓ) = 10 ἑκ. Ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

Πρὸς τοῦτο θὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ὕψος ΑΔ αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΒ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν (ΑΒ) = 10 ἑκ. καὶ μίαν κάθετον πλευρὰν $(ΒΔ) = \frac{6}{2} = 3$ ἑκατ. ἔχομεν:

$(ΑΔ)^2 = (ΑΒ)^2 - (ΒΔ)^2 = 10^2 - 3^2 = 100 - 9 = 91$ καὶ $(ΑΔ) = \sqrt{91} = 9{,}54$ (καθ' ὑπεροχήν). Τὸ δὲ ἐμβαδὸν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι:

$$\frac{(ΒΓ) \cdot (ΑΔ)}{2} = \frac{6 \cdot 9{,}54}{2} = \frac{57{,}24}{2} = 28{,}62 \text{ τ. μ.}$$

362. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν ἰσοπλεύρου τριγώνου ἀπὸ τὴν πλευρὰν α αὐτοῦ.

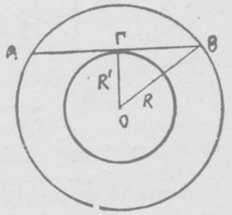
Λύσις: Ἔστω τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 21) πλευρᾶς α. Τὸ ὕψος ΑΔ αὐτοῦ διχοτομεῖ τὴν βάσιν ΒΓ καὶ συνεπῶς εἶναι $(ΒΔ) = (ΔΓ) = \frac{α}{2}$. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΒ ἔχομεν $(ΑΔ)^2 = υ^2 =$

$= \alpha^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{4\alpha^2-\alpha^2}{2} = \frac{3\alpha^2}{4}$ καὶ $A\Delta) = \upsilon = \frac{\alpha}{2}\sqrt{3}$.

$$\text{\char"0388}\!\!\text{Αρα } E = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2} = \frac{\alpha \cdot \frac{\alpha}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}.$$

363. Δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι ἔχουσιν ἀκτῖνας R καὶ R′ (R>R′). Ἂν μία χορδὴ τῆς ἐξωτερικῆς ἐφάπτεται τῆς ἐσωτερικῆς περιφερείας νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ταύτης.

Λύσις: Ἔστωσαν Ο αἱ ὁμόκεντροι περιφέρειαι (σχ. 22) καὶ ΑΒ χορδὴ τῆς ἐξωτερικῆς ἐφαπτομένη τῆς ἐσωτερικῆς περιφερείας εἰς τὸ σημεῖον Γ.



Σχ. 22.

Ἡ ΟΓ ⊥ ΑΒ. ὡς ἀκτὶς καταλήγουσα εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς. Τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΟΓΒ γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν (ΟΒ) = R καὶ τὴν κάθετον πλευρὰν (ΟΓ) = R′. Συνεπῶς $(\Gamma B)^2 = (OB)^2 - (O\Gamma)^2 = R^2 - R'^2$ καὶ $(\Gamma B) = \sqrt{R^2-R'^2}$. Ἀλλὰ (ΑΒ)=2(ΓΒ), διότι ἡ ἐκ τοῦ κέντρου κάθετος ἐπὶ χορδὴν αὐτῆς διχοτομεῖ ταύτην. Ἄρα $(AB) = 2\sqrt{R^2 - R'^2}$.

Ἀσκήσεις σελὶς 172. **364. Ἐν ὀρθ. τρίγωνον ἔχει καθέτους πλευρὰς 6 ἑκατ. καὶ 8 ἑκατ. Νὰ ὑπολογίσητε τὴν ἀπόστασιν τῆς κορυφῆς Α τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀπὸ τὴν ὑποτείνουσαν.**

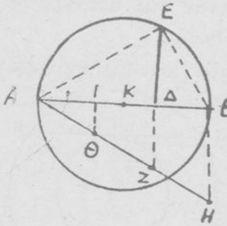
Λύσις: Τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΒΑΓ (σχ. 151. Θ. Γ.) γνωρίζομεν τὰς καθέτους αὐτοῦ πλευρὰς (ΑΒ)=6 ἑκ. καὶ (ΑΓ)=8 ἑκατ. Ἡ ὑποτείνουσα $(B\Gamma) = \sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$. Ἂν ἀχθῇ τὸ ὕψος ΑΔ αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, διαιρεῖ ταύτην εἰς τὰ τμήματα ΒΔ καὶ ΔΓ, τῶν ὁποίων τὰ μήκη εἶναι $(B\Delta) = \frac{(AB)^2}{(B\Gamma)} = \frac{36}{10} = 3{,}6$ ἑκατ. καὶ $(\Delta\Gamma) = 10-3{,}6 = 6{,}4$ ἑκατ. Ἀλλὰ ἐκ τοῦ Θ. § 198 γνωρίζομεν ὅτι $(A\Delta)^2 = (B\Delta).(\Delta\Gamma)$. Συνεπῶς $(A\Delta)^2 = 3{,}6 \cdot 6{,}4 = 23{,}04$ καὶ $(A\Delta) = \sqrt{23{,}04} = 4{,}8$ μέτρα.

365. Τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος τριγωνικοῦ ἀγροῦ διαιρεῖ αὐτὴν εἰς τμήματα 4 μέτρων καὶ 9 μέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀγροῦ τούτου.

Λύσις: Ἂν ΑΒΓ (σχ. 151. Θ. Γ) εἶναι ὁ ὀρθογώνιος τριγωνικὸς ἀγρὸς καὶ ΑΔ εἶναι τὸ ὕψος αὐτοῦ, διαιροῦν τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ εἰς τὰ τμήματα (ΒΔ)=4 μ. καὶ (ΔΓ)=9 μ., τὸ ὕψος του ἐπὶ τὴν ΒΓ θὰ εἶναι $(A\Delta) = \sqrt{(B\Delta).(\Delta\Gamma)} = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$ μέτρα. Ἡ δὲ βάσις αὐτοῦ ΒΓ εἶναι : $(B\Gamma) = (B\Delta) + (\Delta\Gamma) = 4+9 = 13$ μ.

Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι $E = \frac{(B\Gamma).(A\Delta)}{2} = \frac{13 \cdot 6}{2} = 13 \cdot 3 = 39$ τ. μ.

366. **Νὰ γράψητε περιφέρειαν μὲ ἀκτῖνα 3 ἑκατ. καὶ νὰ γράψητε μίαν διάμετρον ΑΒ αὐτῆς. Ἔπειτα νὰ διαιρέσητε αὐτὴν εἰς τρία ἴσα μέρη ΑΓ, ΓΔ, ΔΒ, καὶ ἐκ τοῦ Δ νὰ φέρητε μέχρι τῆς μιᾶς ἡμιπεριφερείας κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Νὰ εὕρητε δὲ τὸ μῆκος τῆς καθέτου ταύτης.**



Σχ. 23.

Λύσις: Ἔστω ἡ περιφέρεια Κ (σχ. 23) καὶ ΑΒ μία διάμετρος αὐτῆς. Ἐπειδὴ ἡ ἀκτὶς αὐτῆς (ΚΑ)=3 ἑκατ., θὰ εἶναι (ΑΒ)=6 ἑκατ. Διαιροῦμεν τὴν διάμετρον ΑΒ εἰς τρία ἴσα μέρη σύμφωνα μὲ τὸ πρόβλημα § 128. Θὰ εἶναι (ΑΓ)= =(ΓΔ)=(ΔΒ)=2 ἑκατ. καὶ (ΑΔ)=4 ἑκ.

Ἂν ἀχθῇ ἡ ΔΕ κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Δ αὐτῆς, καθὼς καὶ αἱ ΕΑ καὶ ΕΒ, τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΕΒ εἶναι ὀρθογώνιον, διότι ἡ γωνία Ε αὐτοῦ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον.

Κατὰ τὸ Θεώρημα δὲ § 198 θὰ ἔχωμεν: $(\text{ΕΔ})^2=(\text{ΑΔ}).(\text{ΔΒ})=4.2$ καὶ $(\text{ΕΔ})=\sqrt{4.2}=2\sqrt{2}$ ἑκ. $=2.1,41=2,82$ ἑκατ.

367. **Ἂν ΑΔ εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς Α ἀπὸ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι:** $\dfrac{1}{(\text{ΑΒ})^2}+\dfrac{1}{(\text{ΑΓ})^2}=\dfrac{1}{(\text{ΑΔ})^2}$.

Ἀνάλυσις: Ἔστω ὅτι εἶναι $\dfrac{1}{(\text{ΑΒ})^2}+\dfrac{1}{(\text{ΑΓ})^2}=\dfrac{1}{(\text{ΑΔ})^2}$. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν πρόσθεσιν εἰς τὸ α΄ μέλος αὐτῆς ἔχωμεν:
$\dfrac{(\text{ΑΓ})^2+(\text{ΑΒ})^2}{(\text{ΑΒ})^2.(\text{ΑΓ})^2}=\dfrac{1}{(\text{ΑΔ})^2}$ ἢ $\dfrac{(\text{ΒΓ})^2}{(\text{ΑΒ})^2.(\text{ΑΓ})^2}=\dfrac{1}{(\text{ΑΔ})^2}$, διότι $(\text{ΑΓ})^2+(\text{ΑΒ})^2=$ $=(\text{ΒΓ})^2$. Ἀλλὰ εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄκρων ὅρων αὐτῆς ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων ὅρων της ἤτοι $(\text{ΒΓ})^2.(\text{ΑΔ})^2=$ $=(\text{ΑΒ})^2.(\text{ΑΓ})^2$ Ἐξάγομεν τὴν τετρ. ρίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς καὶ ἔχομεν $(\text{ΒΓ}).(\text{ΑΔ})=(\text{ΑΒ}).(\text{ΑΓ})$ ·Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀληθές, διότι τὸ (ΒΓ).(ΑΔ) παριστᾷ τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθ. τριγώνου, ἂν ληφθῇ ὡς βάσις αὐτοῦ ἡ ὑποτείνουσα τὸ δὲ (ΑΒ).(ΑΓ) παριστᾷ ἐπίσης τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν αὐτοῦ, ἂν ὡς βάσις ληφθῇ μία τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ, ὅτε ὕψος εἶναι ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ αὐτοῦ.

Σύνθεσις: Ἐπειδὴ εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $(\text{ΒΓ}).(\text{ΑΔ})=(\text{ΑΒ}).(\text{ΑΓ})$ θὰ εἶναι καὶ $(\text{ΒΓ})^2(\text{ΑΔ})^2=(\text{ΑΒ})^2(\text{ΑΓ})^2$. Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης διὰ $(\text{ΑΒ})^2.(\text{ΑΓ})^2.(\text{ΑΔ})^2$ καὶ ἔχομεν:
$\dfrac{(\text{ΒΓ})^2(\text{ΑΔ})^2}{(\text{ΑΒ})^2(\text{ΑΓ})^2(\text{ΑΔ})^2}=\dfrac{(\text{ΑΒ})^2(\text{ΑΓ})^2}{(\text{ΑΔ})^2.(\text{ΑΒ})^2(\text{ΑΓ})^2}$, ἥτις μετὰ τὰς ἁπλοποιήσεις γίνεται $\dfrac{(\text{ΒΓ})^2}{(\text{ΑΒ})^2(\text{ΑΓ})^2}=\dfrac{1}{(\text{ΑΔ})^2}$. Ἀλλὰ $(\text{ΒΓ})^2=(\text{ΑΒ})^2+(\text{ΑΓ})^2$. Ὅθεν $\dfrac{(\text{ΑΒ})^2+(\text{ΑΓ})^2}{(\text{ΑΒ})^2(\text{ΑΓ})^2}=\dfrac{1}{(\text{ΑΔ})^2}$ καὶ διὰ χωρισμοῦ τοῦ κλάσματος τοῦ α΄ μέλους εἰς ἄθροισμα δύο ὁμωνύμων κλασμάτων ἔχομεν:

$\frac{(AB)^2}{(AB)^2\,(A\Gamma)^2} + \frac{(A\Gamma)^2}{(AB)^2\,(A\Gamma)^2} = \frac{1}{(A\Delta)^2}$ καὶ δι' ἁπλοποιήσεως ἑκάστου κλάσματος τοῦ α' μέλους ἔχομεν τὴν ἀλήθειαν τῆς ἀποδεικτέας σχέσεως $\frac{1}{(A\Gamma)^2} + \frac{1}{(AB)^2} = \frac{1}{(A\Delta)^2}$.

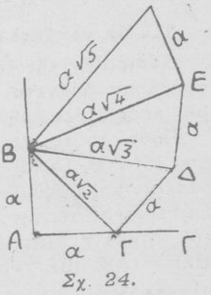
'Ασκήσεις 174. 368. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον διπλάσιον ἀπὸ δοθὲν τετράγωνον.

Λύσις: Ἂν α εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ δοθέντος τετραγώνου καὶ χ ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου νὰ κατασκευασθῇ τοιούτου θὰ ἔχωμεν $\chi^2 = 2\alpha^2 = \alpha^2 + \alpha^2$. Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης ἐννοοῦμεν, ὅτι ἡ πλευρὰ χ τοῦ νέου τετραγώνου εἶναι ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου μὲ καθέτους πλευρὰς ἴσας πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ δοθέντος τετραγώνου.

Β' τρόπος. Φέρομεν μίαν διαγώνιον τοῦ δοθέντος τετραγώνου πλευρᾶς α. Αὕτη θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου νὰ κατασκευασθῇ τετραγώνου. Γνωρίζοντες ἤδη τὴν πλευρὰν αὐτοῦ εὐκόλως τὸ κατασκευάζομεν.

369. Νὰ γράψητε ἓν εὐθ. τμῆμα α καὶ ἔπειτα ἄλλο ἴσον πρὸς $\alpha\sqrt{2}$

Λύσις: Ἂν α εἶναι τὸ δοθὲν εὐθ. τμῆμα, κατασκευάζομεν ὀρθογ. καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ καθέτους πλευρὰς ἴσας πρὸς α (σχ. 24) τὸ ΑΒΓ. Ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ ΒΓ ἔχει μῆκος $\alpha\sqrt{2}$.



Σχ. 24.

370. 'Αφοῦ γράψητε τὸ τμῆμα $\alpha\sqrt{2}$ νὰ γράψητε ἄλλο ἴσον πρὸς $\alpha\sqrt{3}$, $\alpha\sqrt{4}$, $\alpha\sqrt{5}$ κτλ.

Λύσις: Ἐπὶ τὴν ΒΓ (σχ. 24) καὶ εἰς τὸ σημεῖον Γ φέρομεν κάθετον ΓΔ = α καὶ τὴν ΒΔ. Ἐκ τοῦ σχηματισθέντος ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΓΔ ἔχομεν:

$(B\Delta)^2 = (B\Gamma)^2 + (\Delta B)^2 = (\alpha\sqrt{2})^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 + \alpha^2 = 3\alpha^2$ καὶ $(B\Delta) = \alpha\sqrt{3}$.

Ἐπὶ τὴν ΒΔ καὶ εἰς τὸ Δ φέρομεν κάθετον ΔΕ = α. Ἡ ὑποτείνουσα ΒΕ εἶναι ἴση πρὸς $\alpha\sqrt{4}$, ὡς εὐκόλως ἐξάγεται ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΔΕ, κ.ο.κ.

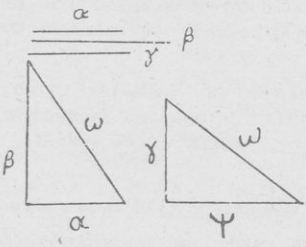
371. Νὰ γράψητε τρία εὐθ. τμήματα α, β, γ καὶ ἔπειτα ἄλλο χ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\chi^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.

Λύσις: Κατασκευάζομεν πρῶτον τετράγωνον ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἐχόντων πλευρὰς α καὶ β καὶ ἔπειτα τετράγωνον ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τούτου καὶ τοῦ τετραγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν γ. Ἡ πλευρὰ τούτου, ἂν κληθῇ χ, θὰ εἶναι τοιαύτη ὥστε $\chi^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$. Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν ὀρθ. τρίγωνον ΑΒΓ μὲ καθέτους πλευρὰς ΑΒ = α καὶ ΑΓ = β. Ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ

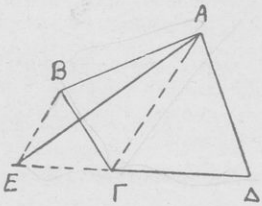
ΒΓ καὶ εἰς τὸ Γ φέρομεν κάθετον ΓΔ=γ. Ἡ ΒΔ εἶναι τὸ ζητούμενον τμῆμα χ (σχ. 24).

372. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα τμήματα α, β, γ νὰ κατασκευάσητε ἄλλο $\psi = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}$.

Λύσις: Ἐκ τῆς $\psi = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}$ λαμβάνομεν δι' ὑψώσεως εἰς τὸ τετράγωνον $\psi^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2$. Θέτομεν $\omega^2 = \alpha^2 + \beta^2$, ὅτε ἔχομεν $\psi^2 = \omega^2 - \gamma^2$. Ἐκ ταύτης ἐννοοῦμεν, ὅτι τὸ ζητούμενον νὰ κατασκευασθῇ εὐθ. τμῆμα ψ εἶναι ἡ μία κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει ὑποτείνουσαν τὸ εὐθ. τμῆμα ω καὶ ἄλλην κάθετον πλευρὰν τὴν γ (σχ. 25).



Σχ. 25.



Σχ. 26.

373. Νὰ γράψητε δύο εὐθ. τμήματα, α, β καὶ ἔπειτα ἄλλο $\chi = \sqrt{\alpha\beta}$.

Λύσις: Ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\chi = \sqrt{\alpha\beta}$ λαμβάνομεν $\chi^2 = \alpha\beta$ καὶ τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ κατασκευάσωμεν τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν ὀρθογώνιον διαστάσεων α καὶ β.

Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν ἐπὶ εὐθείας τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ = α (σχ. 154α' Θ. Γ) καὶ τὸ ΒΕ = β. Μὲ διάμετρον ΑΕ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν καὶ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΕ εἰς τὸ σημεῖον Β μέχρι τῆς ἡμιπεριφερείας, τὴν ΒΖ. Αὕτη εἶναι τὸ ζητούμενον νὰ κατασκευασθῇ εὐθ. τμῆμα χ. Διότι ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΖΕ ἔχομεν:
$(BZ)^2 = (AB).(BE) = \alpha\beta$. Ἀλλὰ $\chi^2 = \alpha\beta$. Ἄρα $(BZ)^2 = \chi^2$ καὶ $BZ = \chi$.

374. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ὀρθογώνιον καὶ ἔπειτα τετράγωνον διπλάσιον αὐτοῦ.

Λύσις: Κατασκευάζομεν πρῶτον τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν ὀρθογώνιον κατὰ τὸ πρόβλημα § 201 καὶ ἔπειτα τετράγωνον διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τούτου, κατὰ τὴν ἄσκησιν 368.

375. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν τραπεζοειδές.

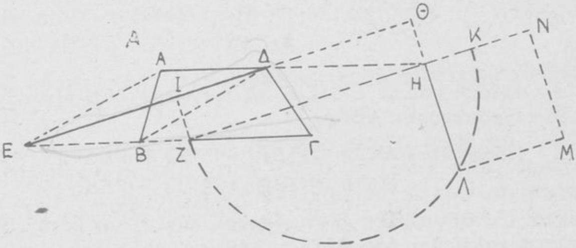
Λύσις: Ἔστω τὸ τραπεζοειδὲς (ΑΒΓΔ) (σχ. 26) Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τραπεζοειδὲς ΑΒΓΔ.

Πρὸς τοῦτο φέρομεν τὴν διαγώνιον ΑΓ, ἥτις ἀποχωρίζει ἀπὸ τὸ τραπεζοειδές, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐκ τῆς κορυφῆς Β φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ, ἥτις τέμνει τὴν πλευρὰν ΓΔ, προεκτεινομένην, εἰς τὸ σημεῖον Ε. Ἂν ἀχθῇ καὶ ἡ ΑΕ, τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΕΔ λέγω, ὅτι εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τραπεζοειδές. Πράγματι (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) καὶ (ΑΕΖ) = (ΑΕΓ) + (ΑΓΔ).

Ἀλλὰ (ΑΒΓ) = (ΑΕΓ), διότι ἔχουσι κοινὴν βάσιν ΑΓ καὶ ἴσα ὕψη, ἕνεκα τῆς παραλληλίας τῶν ΒΕ καὶ ΑΓ. Ἄρα (ΑΒΓΔ) = (ΑΕΔ).

376. **Νὰ κατασκευάσητε τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν τραπέζιον.**

Λύσις: Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ δοθὲν τραπέζιον (σχ. 27). Τοῦτο μετασχη-



Σχ. 27

ματίζομεν εἰς τὸ ἰσοδύναμον τρίγωνον (ἀσκ. 875) ΔΕΓ. Τοῦτο εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖΗΔ καὶ τὸ παρ)μον εἰς τὸ ὀρθογώνιον ΖΙΘΗ· (§ 204). Τὸ δὲ ὀρθογώνιον ΖΙΘΗ εἰς ἰσοδύναμον τετράγωνον (§ 201). Οὕτω θὰ εἶναι (ΑΒΓΔ) = (ΗΛΜΝ).

377. **Νὰ κατασκευάσητε τετράγωνον διπλάσιον δοθέντος τριγώνου.**

Λύσις: Κατασκευάζομεν πρῶτον τετράγωνον ΗΛΜΝ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον ΔΕΓ (σχ. 27) καὶ ἔπειτα τετράγωνον διπλάσιον αὐτοῦ.

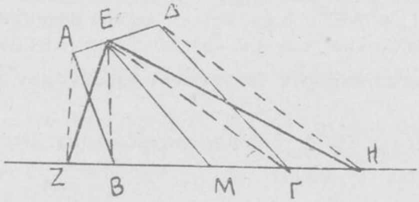
378. **Νὰ κατασκευάσητε δύο ἄνισα ὀρθογώνια καὶ ἔπειτα τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.**

Λύσις: Μετασχηματίζομεν τὰ δοθέντα ὀρθογώνια εἰς ἰσοδύναμα τετράγωνα κατὰ τὸ πρόβλημα τῆς (§ 201). Ἂν δὲ α καὶ β εἶναι αἱ πλευραὶ τῶν ἰσοδυνάμων πρὸς τὰ ὀρθογώνια τετραγώνων, κατασκευάζομεν ὀρθ. τρίγωνον μὲ καθέτους πλευρὰς α καὶ β. Ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου, τὸ ὁποῖον ἔπειτα εὐκόλως κατασκευάζεται.

379. **Νὰ κατασκευάσητε τυχὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Εἰς μίαν πλευρὰν νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον Ε καὶ νὰ φέρητε ἐξ αὐτοῦ μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ διαιρῇ αὐτὸ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.**

Λύσις: Ἔστω ΑΒΓΔ (σχ. 28) τυχὸν τετράπλευρον καὶ Ε σημεῖον κείμενον ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΔ αὐτοῦ. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Ε εὐθεῖα, χωρίζουσα αὐτὸ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

Πρὸς τοῦτο φέρομεν τὰς εὐθείας ΕΒ καὶ ΕΓ καὶ ἐκ τῶν κορυφῶν Α καὶ Δ αὐτοῦ, τὰς ΑΖ καὶ ΔΗ παραλλήλους πρὸς αὐτὰς ἀντιστοί-



Σχ. 28

χως. Ἂν ἀχθῶσι καὶ αἱ ΕΖ, ΕΗ, τὸ τρίγωνον ΖΕΗ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Πράγματι } (ΑΒΓΔ) = (ΑΕΒ) + (ΕΒΓ) + (ΓΕΔ) \\ (ΖΕΗ) = (ΖΒΕ) + (ΕΒΓ) + (ΓΕΗ)\end{array}\right\} \quad (1)$$

Ἀλλὰ (ΑΕΒ) = (ΖΒΕ), διότι ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΕ καὶ τὰς κορυφὰς Α καὶ Ζ ἐπὶ παραλλήλου εὐθείας πρὸς τὴν βάσιν καὶ συνεπῶς ἔχουσι καὶ ἴσα ὕψη. Δι' ὅμοιον λόγον καὶ (ΓΕΔ) = (ΓΕΗ). Τοῦ τριγώνου ΖΕΗ φέρομεν τὴν διάμεσον ΕΜ, τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν πλευρὰν ΖΗ αὐτοῦ. Αὕτη χωρίζει τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἰς δύο μέρη ΑΒΜΕ καὶ ΜΕΔΓ ἰσοδύναμα. Διότι (ΖΕΜ)=(ΖΒΕ)+(ΒΕΜ)=(ΒΑΕ)+ +(ΒΕΜ)=(ΑΒΜΕ). Ἐπίσης (ΜΕΗ)=(ΜΕΓ)+(ΓΕΗ)=(ΜΕΓ)+(ΓΕΔ)=(ΕΜΓΔ)

Ἐπειδὴ δὲ (ΖΕΜ) = (ΜΕΗ) λόγω τῆς διαμέσου ΕΜ θὰ εἶναι καὶ (ΑΒΜΕ) = (ΜΕΔΓ).

Σελὶς 177. ΠΟΡΙΣΜΑ: ***Ἡ γωνία Α τριγώνου ΑΒΓ εἶναι:***

α') ὀρθή, ἂν $(ΒΓ)^2 = (ΑΓ)^2 + (ΑΒ)^2$

β') ὀξεῖα, ἂν $(ΒΓ)^2 < (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2$ καὶ

γ') ἀμβλεῖα, ἂν $(ΒΓ)^2 > (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2$.

Ἀπόδειξις. Διότι ἂν ἦτο ὀξεῖα, θὰ ἦτο $(ΒΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2 - 2(ΑΒ)(ΑΔ)$ (§ 206) δηλ. $(ΒΓ)^2 < (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2$, ὅπερ ἄτοπον, διότι ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν $(ΒΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2$.

Ἂν ἦτο ἡ Α ἀμβλεῖα, θὰ ἦτο $(ΒΓ)^2 > (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2$, ὅπερ ἄτοπον, διότι ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἄρα Α = ὀρθή. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύονται καὶ αἱ περιπτώσεις β' καὶ γ'.

Ἀσκήσεις σελὶς 177.— 380. **Νὰ κατασκευάσητε ἕν τρίγωνον ΑΒΓ μὲ πλευρὰς (ΑΒ) = 3 ἑκατ., (ΑΓ) = 4 ἑκατ. καὶ (ΒΓ) = 5 ἑκατ. Νὰ μετρήσητε τὴν γωνίαν Α αὐτοῦ καὶ νὰ δικαιολογήσητε τὸ μέτρον, τὸ ὁποῖον θὰ εὕρητε.**

Λύσις: Γράφομεν εὐθ. τμῆμα ΒΓ = 5 ἑκατ. καὶ μὲ κέντρα τὰ ἄκρα αὐτοῦ Β καὶ Γ καὶ ἀκτῖνας ἴσας πρὸς 3 ἑκ. καὶ 4 ἑκατ. γράφομεν περιφερείας. Ἓν ἐκ τῶν κοινῶν σημείων αὐτῶν, τὸ Α, ἑνοῦμεν μὲ τὰ Β καὶ Γ καὶ ἔχομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐὰν μετρήσωμεν διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου τὴν γωνίαν Α αὐτοῦ, θὰ εὕρωμεν ὅτι εἶναι 90^0. Εἶναι δὲ ὀρθή, διότι $(ΒΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2$ ἢ $5^2 = 4^2 + 3^2$. (Π. § 207 α').

381. **Ἓν τρίγωνον ἔχει πλευρὰς 4. 5, 6 ἑκατ. Νὰ ἐξετάσητε, ἂν τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον ἢ ὀξυγώνιον ἢ ἀμβλυγώνιον.**

Λύσις: Ἐπειδὴ $6^2 = 36$ καὶ $4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$ καὶ $36 < 41$ εἶναι $6^2 < 4^2 + 5^2$ καὶ συνεπῶς (Π. § 207 β') ἡ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς τοῦ τριγώνου κειμένη γωνία εἶναι ὀξεῖα. Ἄρα καὶ αἱ ἄλλαι γωνίαι αὐτοῦ, ὡς κείμεναι ἀπέναντι μικροτέρων πλευρῶν αὐτοῦ, θὰ εἶναι πολὺ περισσότερον ὀξεῖαι καὶ ἄρα τὸ τρίγωνον μὲ πλευρὰς 4, 5, 6 εἶναι ὀξυγώνιον.

382. **Νὰ κάμητε τὴν ἰδίαν ἐργασίαν μὲ τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰς 7, 9, 12 ἑκατ.**

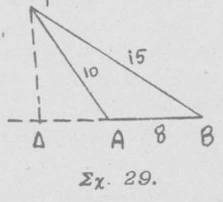
Λύσις: Ἐπειδὴ $12^2 = 144$ καὶ $7^2 + 9^2 = 49 + 81 = 130$ καὶ $144 > 130$ δηλ. $12^2 > 7^2 + 9^2$, ἕπεται ὅτι (Π. § 207 γ') ἡ γωνία τοῦ τριγώνου ἡ κειμένη ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς αὐτοῦ εἶναι ἀμβλεῖα καὶ συνεπῶς τὸ τρίγωνον εἶναι ἀμβλυγώνιον.

383. **Ἂν $α^2 = β^2 + γ^2$, νὰ ἐξετάσητε τί εἶδος τρίγωνον εἶναι τὸ ἔχον πλευρὰς λα, λβ, λγ.**

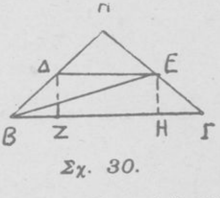
Λύσις: Ἐπειδὴ $α^2 = β^2 + γ^2$, ἐὰν πολ/σωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης ἐπὶ $λ^2$, θὰ εἶναι καὶ $λ^2α^2 = λ^2β^2 + λ^2γ^2$ ἢ $(λα)^2 = (λβ)^2 + (λγ)^2$. Ἐπειδὴ δὲ τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰς λα, λβ, λγ, τὸ τετράγωνον μιᾶς πλευρᾶς του, τῆς λα, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του λβ καὶ λγ, τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον μὲ ὑποτείνουσαν τὴν λα.

384. **Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει (ΑΒ) = 8 ἑκατ. (ΑΓ) = 10 ἑκατ. (ΒΓ) = 15 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς προβολῆς τῆς πλευρᾶς ΑΓ ἐπὶ τὴν ΑΒ.**

Λύσις: Ἐπειδὴ $15^2 = 225$ καὶ $8^2 + 10^2 = 64 + 100 = 164$ καὶ $225 > 164$ δηλ.



Σχ. 29.



Σχ. 30.

$15^2 > 8^2 + 10^2$, ἕπεται ὅτι ἡ γωνία Α εἶναι ἀμβλεῖα καὶ (§ 207) $(ΒΓ)^2 = (ΓΑ)^2 + (ΑΒ)^2 + 2\,(ΑΒ).(ΑΔ)$ ἢ $225 = 100 + 64 + 2\,.\,8\,.\,(ΑΔ) = 164 + 16\,(ΑΔ)$.

Ὅθεν $16\,(ΑΔ) = 225 - 164 = 61$ καὶ $(ΑΔ) = \frac{61}{16} = 3{,}8125$ ἑκατ.

385. Νὰ κατασκευάσητε ἕν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ καὶ νὰ γράψητε ἐντὸς αὐτοῦ εὐθ. τμῆμα ΔΕ παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ καὶ τέμνον τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι $(ΒΕ)^2 = (ΕΓ)^2 + (ΒΓ)\ (ΔΕ)$.

Λύσις: Ἔστω ΑΒΓ (σχ. 30) ἕν ἰσοσκελὲς τρίγωνον (ΑΒ = ΑΓ) καὶ ΔΕ ∥ ΒΓ. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ὀξεῖαι ἤτοι Γ < 1 ὀρθ. καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν (§ 206) ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΕΓ, ὅτι $(ΒΕ)^2 = (ΕΓ)^2 + (ΒΓ)^2 - 2(ΒΓ).(ΗΓ)$ (1).

Ἂν δὲ ἀχθῇ καὶ ἡ ΔΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΕΗΓ καὶ ΔΖΒ εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα ΔΖ = ΕΗ καὶ Β = Γ. Ἄρα ΒΖ = ΗΓ καὶ ΖΗ = ΔΕ. Καὶ ἡ ἰσότης (1) γίνεται:

$$(ΒΕ)^2 = (ΕΓ)^2 + (ΒΓ)^2 - (ΒΓ)(ΒΖ + ΗΓ) = (ΕΓ)^2 + (ΒΓ)^2 - (ΒΓ).(ΒΓ - ΖΗ) =$$
$$= (ΕΓ)^2 + (ΒΓ)^2 - (ΒΓ)(ΒΓ - ΔΕ) = (ΕΓ)^2 + (ΒΓ)^2 - (ΒΓ)^2 + (ΒΓ).(ΔΕ) =$$
$$= (ΕΓ)^2 + (ΒΓ)(ΔΕ).$$

386. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς διαμέσου ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ, ἂν (ΑΒ) = 8 ἑκατ., (ΑΓ) = 12 ἑκατ., (ΒΓ) = 10 ἑκατ.

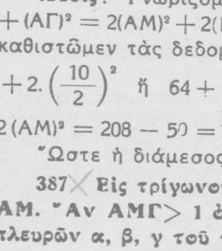
Λύσις: Γνωρίζομεν, ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχομεν $(ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2 = 2(ΑΜ)^2 + 2(ΒΜ)^2$, ἔνθα Μ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Ἀντικαθιστῶμεν τὰς δεδομένας τιμὰς καὶ λαμβάνομεν $8^2 + 12^2 = 2\ (ΑΜ)^2 + 2.\left(\frac{10}{2}\right)^2$ ἢ $64 + 144 = 2(ΑΜ)^2 + 2.25$ ἢ $208 = 2\,(ΑΜ)^2 + 50$ καὶ $2\,(ΑΜ)^2 = 208 - 50 = 158$, $(ΑΜ)^2 = 79$, $(ΑΜ) = \sqrt{79} = 8{,}88$ ἑκατ.

Ὥστε ἡ διάμεσος αὐτοῦ (ΑΜ) = 8,88 ἑκατ.

387. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἄγομεν τὸ ὕψος ΑΔ καὶ τὴν διάμεσον ΑΜ. Ἂν ΑΜΓ > 1 ὀρθ. νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος (ΔΜ) συναρτήσει τῶν πλευρῶν α, β, γ τοῦ τριγώνου τούτου.

Λύσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον (ΑΒΓ) (σχ. 158β' Θ. Γ.), ΑΔ τὸ ὕψος αὐτοῦ καὶ ΑΜ ἡ διάμεσος, τοιαύτη ὥστε ΑΜΓ > 1 ὀρθ. Εὕρομεν (§ 209) ὅτι $(ΑΓ)^2 - (ΑΒ)^2 = 2\,(ΒΓ).(ΔΜ)$ καὶ ἐκ ταύτης, ἂν θέσωμεν (ΑΓ) = β, (ΑΒ) = γ καὶ (ΒΓ) = α, θὰ ἔχωμεν $β^2 - γ^2 = 2α\,(ΔΜ)$ καὶ $(ΔΜ) = \frac{β^2 - γ^2}{2α}$.

388. Νὰ γράψητε δύο ὁμοκέντρους περιφερείας καὶ μίαν διάμετρον ΑΒ τῆς μικροτέρας. Ἂν δὲ Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς μεγαλυτέρας περιφερείας, νὰ ἀποδείξητε, ὅτι τὸ ἄθροισμα $(ΜΑ)^2 + (ΜΒ)^2$ εἶναι ἀνεξάρτητον ἀπὸ τὴν θέσιν τοῦ Μ ἐπὶ τῆς περιφερείας ταύτης.



Σχ. 31.

Λύσις Ἔστω Κ τὸ κέντρον τῶν δοθεισῶν ὁμοκέντρων περιφερειῶν, ΑΒ μία διάμετρος τῆς μικροτέρας περιφερείας καὶ Μ τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς μεγαλυτέρας περιφερείας (σχ. 31).

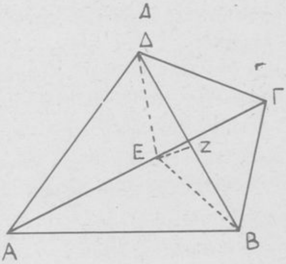
Ἂν ἀχθῶσιν αἱ ΜΑ, ΜΒ, ΜΚ σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΜΒ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ΜΚ εἶναι διάμεσος. Ἐκ τοῦ πρώτου θεωρήματος τῶν διαμέσων τριγώνου

(§ 208) ἔχομεν, ὅτι $(MA)^2 + (MB)^2 = 2(MK)^2 + 2(AK)^2 = 2P^2 + 2\rho^2 = 2(P^2 + \rho^2)$, ἄν P, ρ εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν. Ἐπειδὴ δὲ τὸ $2(P^2 + \rho^2)$ εἶναι σταθερόν, ἕπεται ὅτι καὶ $(MA)^2 + (MB)^2$ εἶναι σταθερὸν διὰ πᾶσαν θέσιν τοῦ σημείου M ἐπὶ τῆς μεγαλυτέρας περιφερείας.

389. **Νὰ ἀποδείξητε τὸ αὐτὸ καὶ ἄν ἡ μὲν AB εἶναι διάμετρος τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας τὸ δὲ M σημεῖον τῆς ἐσωτερικῆς περιφερείας.**

Λύσις: Ἐκ τοῦ τριγώνου M′A′B′ (σχ. 31) ἔχομεν, ὅτι $(M'A')^2 + (M'B')^2 = 2(M'K)^2 + 2(A'K)^2 = 2\rho^2 + 2P^2 = 2(\rho^2 + P^2) =$ σταθερόν. Ἄρα καὶ $(M'A')^2 + (M'B')^2 =$ σταθερόν, διὰ πᾶσαν θέσιν τοῦ M′ ἐπὶ τῆς μικροτέρας περιφερείας.

390. **Ἄν E καὶ Z εἶναι τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΔΒ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι: $(AB)^2 + (B\Gamma)^2 + (\Gamma\Delta)^2 + (\Delta A)^2 = (A\Gamma)^2 + (B\Delta)^2 + 4(EZ)^2$.**



Σχ. 32.

Λύσις: Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ 32) καὶ E, Z τὰ μέσα τῶν διαγωνίων αὐτοῦ ΑΓ καὶ ΒΔ. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἔχομεν $(AB)^2 + (B\Gamma)^2 = 2(BE)^2 + 2(AE)^2$ (1) (§ 208). Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΔΓ ἔχομεν: $(A\Delta)^2 + (\Delta\Gamma)^2 = 2(\Delta E)^2 + 2(AE)^2$ (2). Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) διά προσθέσεως κατὰ μέλη ἔχομεν $(AB)^2 + (B\Gamma)^2 + (\Gamma\Delta)^2 + (\Delta A)^2 = 2(BE)^2 + 2(\Delta E)^2 + 4(AE)^2$ (3).

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΔΕΒ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ EZ εἶναι διάμεσος ἔχομεν $(BE)^2 + (\Delta E)^2 = 2(EZ)^2 + 2(BZ)^2$ καὶ $2(BE)^2 + 2(\Delta E)^2 = 4(EZ)^2 + 4(BZ)^2$ (4).

Η ἰσότης (3) συνεπείᾳ τῆς (4) γίνεται $(AB)^2 + (B\Gamma)^2 + (\Gamma\Delta)^2 + (\Delta A)^2 = 4(EZ)^2 + 4(BZ)^2 + 4(AE)^2$ (5).

Ἀλλὰ $4(BZ)^2 = [2.(BZ)]^2 = (\Delta B)^2$ καὶ $4(AE)^2 = [2.(AE)]^2 = (A\Gamma)^2$ καὶ ἡ ἰσότης (5) γίνεται:

$(AB)^2 + (B\Gamma)^2 + (\Gamma\Delta)^2 + (\Delta A)^2 = (A\Gamma)^2 + (\Delta B)^2 + 4(EZ)^2$.

Ὥστε: ***Εἰς πᾶν τετράπλευρον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν του ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του ηὐξημένον κατὰ τὸ τετραπλάσιον τετράγωνον τοῦ εὐθ. τμήματος, ὅπερ ἑνώνει τὰ μέσα τῶν διαγωνίων αὐτοῦ.***

Ἡ πρότασις αὕτη καλεῖται ***θεώρημα τοῦ* Euler**.

391. **Ἄν ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, νὰ ἀποδείξητε ὅτι $(AB)^2 + (B\Gamma)^2 + (\Gamma\Delta)^2 + (\Delta A)^2 = (A\Gamma)^2 + (B\Delta)^2$.**

Λύσις: Ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου διχοτομοῦνται, τὰ μέσα αὐτῶν συμπίπτουσι καὶ τὸ μῆκος τοῦ εὐθ. τμήματος EZ εἶναι μηδέν. Συνεπῶς τὸ Θ. τοῦ Euler διὰ τὸ παραλληλόγραμμον δίδει: $(AB)^2 + (B\Gamma)^2 + (\Gamma\Delta)^2 + (\Delta A)^2 = (A\Gamma)^2 + (B\Delta)^2 + 4.0 = (A\Gamma)^2 + (B\Delta)^2$.

Σημείωσις. Ἀποδεικνύεται καὶ ἀπ' εὐθείας δι' ἐφαρμογῆς τοῦ πρώτου Θ. τῶν διαμέσων εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ, ὡς εἰς ἄσκησιν 390.

Ἀσκήσεις σελ. 180. **392. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰς 57 μετ., 76 μέτ. καὶ 95 μέτ.**

Λύσις: Γνωρίζομεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου συναρτήσει τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$, ἔνθα α, β, γ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ καὶ τ ἡ ἡμιπερίμετρός του. Ἐπειδὴ $\alpha=57$, $\beta=76$ καὶ $\gamma=95$, θὰ εἶναι $\alpha+\beta+\gamma=$ $=228=2\tau$ καὶ $\tau=114$. Ὅθεν $E=\sqrt{114(114-57)(114-76)(114-95)}=$ $=\sqrt{114.57.38.19}=\sqrt{114.57.2.19.19}=\sqrt{114.114.19.19}=$ $=114.19=2166$ τ. μ.

393. **Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει πλευρὰς (ΑΒ)=42 μ. (ΑΓ) = 56 μ. καὶ (ΒΓ)=70 μ. Νὰ εὕρητε τὸ ὕψος ΒΔ αὐτοῦ. Ποῖον συμπέρασμα προκύπτει περὶ τοῦ τριγώνου τούτου ἀπὸ τὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν θὰ εὕρητε;**

Λύσις: Τὸ ὕψος ΒΔ τριγώνου ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ, ἥτις ἔχει μῆκος β, δίδεται (§ 210 Α') ὑπὸ τοῦ τύπου

$$Y_\beta = \frac{2}{\beta}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}.$$

Ὅθεν $Y_\beta = \frac{2}{56}\sqrt{84.(84-70)(84-56)(84-42)}=$

$$=\frac{2}{56}\sqrt{84.14.28.42}=\frac{2}{56}\sqrt{84.14.2.14.42}=$$

$$=\frac{2}{56}\sqrt{84.14.14.84}=\frac{2}{26}\sqrt{84^2.14^2}=\frac{2}{56}.84.14=$$

$$=\frac{28.84}{56}=\frac{84}{2}=42 \text{ μ.}$$

Ὥστε τὸ ὕψος ΒΔ αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ τὴν πλευρὰν ΑΒ. Ἄρα τοῦτο συμπίπτει μὲ τὴν πλευρὰν ΑΒ, ἥτις ὀφείλει νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον. Ὅτι τοῦτο εἶναι ἀληθὲς ἐξάγεται καὶ ἐκ τῆς σχέσεως $(ΒΓ)^2=(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2$ ἢ $70^2=42^2+56^2=$ $=1764+3136=4900=70^2$.

394. **Ἂν ρ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι:**

$$\rho=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}, \quad \text{ἂν } \alpha+\beta+\gamma=2\tau.$$

Λύσις: Εὕρομεν (§ 194) ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου περιγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος ρ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $E=\tau\rho$, ἔνθα τ ἡ ἡμιπερίμετρος αὐτοῦ. Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου συναρτήσει τῶν πλευρῶν αὐτοῦ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$, ἔνθα τ ἡ ἡμιπερίμετρος αὐτοῦ.

Ἄρα $\tau\rho=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ καὶ $\rho=\frac{\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}{\tau}=$

$$=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau^2}}=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}.$$

Ἀνάλογα ποσὰ

Σελὶς 184 — **395. Ἂν 4 εὐθ. τμήματα γεγραμμένα κατὰ σειρὰν συνιστῶσιν ἀναλογίαν, νὰ ἀποδείξητε, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τῶν ἄκρων εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν μέσων. Καὶ ἀντιστρόφως.**

Λύσις: Ἔστω Κ, Π, Ρ, Σ, 4 εὐθ. τμήματα καὶ $\frac{К}{П} = \frac{Р}{Σ}$ ἡ ἀναλογία τὴν ὁποίαν ταῦτα συνιστῶσι. Γνωρίζομεν (§ 213 Α΄) ὅτι καὶ τὰ μέτρα αὐτῶν, ἄν μετρηθῶσι πάντα μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα, συνιστῶσι τὴν ἀναλογίαν $\frac{(К)}{(П)} = \frac{(Р)}{(Σ)}$. Ὅθεν (§ 213 Β΄) (Κ) . (Σ)=(Π) . (Ρ).
Ἀλλὰ (Κ) . (Σ) παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου ἔχοντος διαστάσεις Κ καὶ Σ, τὸ δὲ (Π) . (Ρ) παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου μὲ διαστάσεις Π καὶ Ρ. Ἄρα τὸ ὀρθογώνιον τῶν ἄκρων εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν μέσων.

Ἀντιστρόφως: Ἂν (Κ) . (Σ) = (Π) . (Ρ), θὰ εἶναι καὶ Κ : Π = Ρ : Σ. Διότι ἄν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης διὰ τοῦ γινομένου (Π) . (Σ) ἔχομεν $\frac{(К).(Σ)}{(П).(Σ)} = \frac{(П).(Р)}{(П).(Σ)}$ ἢ $\frac{(К)}{(П)} = \frac{(Р)}{(Σ)}$. Ἐπειδὴ ὅμως $\frac{(К)}{(П)} = \frac{К}{П}$ (§ 182 Πόρ. 1) καὶ $\frac{(Р)}{(Σ)} = \frac{Р}{Σ}$ θὰ εἶναι καὶ Κ : Π = Ρ : Σ, ἤτοι τὰ εὐθ. τμήματα Κ, Π, Ρ, Σ συνιστῶσιν ἀναλογίαν.

396. **Ἂν τρία εὐθ. τμήματα συνιστῶσι συνεχῆ ἀναλογίαν νὰ ἀποδείξητε, ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ μέσου ἀναλόγου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν ἄκρων. Καὶ ἀντιστρόφως.**

Λύσις: Ἂν Κ, Π, Ρ εἶναι τὰ εὐθ. τμήματα, τὰ ὁποῖα συνιστῶσι τὴν συνεχῆ ἀναλογίαν Κ : Π = Π : Ρ, θὰ εἶναι καὶ (Κ) : (Π) = (Π) : (Ρ) ἢ $(К).(Р) = (П)^2$. Αὐτὴ δεικνύει, ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ μέσου ἀναλόγου Π εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν ἄκρων τμημάτων Κ καὶ Ρ.

Ἀντιστρόφως: Ἂν $(К).(Р) = (П)^2$, θὰ εἶναι $\frac{(К)\,(Р)}{(П)\,(Р)} = \frac{(П)^2}{(П).(Р)}$ καὶ $\frac{(К)}{(П)} = \frac{(П)}{(Р)}$ ἢ $\frac{К}{П} = \frac{П}{Р}$.

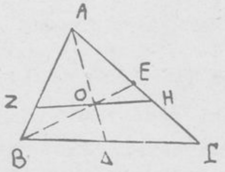
397. **Νὰ γράψητε δύο εὐθ. τμήματα καὶ ἔπειτα νὰ ὁρίσητε τὸ μέσον ἀνάλογον αὐτῶν.**

Λύσις: Ἂν Κ, Ρ, εἶναι δύο εὐθ. τμήματα καὶ καλέσωμεν Π τὸ μέσον ἀνάλογον αὐτῶν, θὰ ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{К}{П} = \frac{П}{Р}$ ἢ $\frac{(К)}{(П)} = \frac{(П)}{(Р)}$ καὶ $(К).(Р) = (П)^2$, Διὰ νὰ ὁρίσωμεν λοιπὸν τὸ μέσον ἀνάλογον τῶν εὐθ τμημάτων Κ, Ρ ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον, ἔχον βάσιν μὲν τὸ εὐθ. τμῆμα Κ καὶ ὕψος τὸ εὐθ. τμῆμα Ρ.

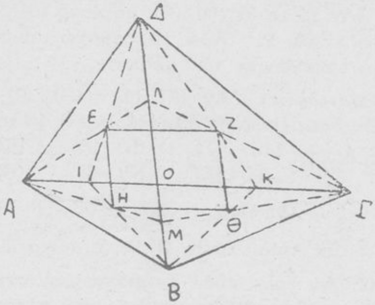
Πρὸς τοῦτο ἐπ' εὐθείας λαμβάνομεν ΑΒ = Κ καὶ ΒΕ = Ρ. Ἐπὶ τῆς ΑΕ, ὡς διαμέτρου, γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν καὶ ἐκ τοῦ Β ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ μέχρι τῆς ἡμιπεριφερείας, τὴν ΒΖ. Αὕτη εἶναι τὸ μέσον ἀνάλογον εὐθ. τμῆμα τῶν Κ καὶ Ρ, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται (§ 201. σχ. 154α' Θ. Γ.)

Ἀσκήσεις σελὶς 189. **398. Ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων τριγώνου ἄγομεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς μίαν πλευράν. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αὕτη διαιρεῖ ἑκατέραν τῶν ἄλλων εἰς τμήματα, τῶν ὁποίων τὸ ἓν εἶναι διπλάσιον τοῦ ἄλλου.**

Λύσις: Ἔστω ΑΒΓ (σχ. 33) ἓν τρίγωνον, Ο τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων αὐτοῦ καὶ ΖΗ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν



Σχ. 33.



Σχ. 34.

ΒΓ αὐτοῦ, ἀγομένη διὰ τοῦ Ο.

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΔΒ, ἐπειδὴ ΟΖ ∥ ΒΔ ἔχομεν $\frac{ΑΖ}{ΖΒ} = \frac{ΑΟ}{ΟΔ}$ (1).

Ἀλλὰ ΑΟ=2(ΟΔ) (§ 129. Θ. Γ.) καὶ (1) γίνεται: $\frac{ΑΖ}{ΖΒ} = \frac{2 . ΟΔ}{ΟΔ} = \frac{2}{1}$ καὶ ΑΖ = 2 . ΖΒ.

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΔΓ ἔχομεν $\frac{ΑΗ}{ΗΓ} = \frac{ΑΟ}{ΟΔ} = \frac{2 . ΟΔ}{ΟΔ} = \frac{2}{1}$ καὶ ΑΗ = ΗΓ . 2.

399. Νὰ ἀποδείξητε, ὅτι τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν διαμέσων τῶν τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα ἓν τετράπλευρον διαιρεῖται ὑπὸ τῶν διαγωνίων του, εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου.

Λύσις: Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 34) καὶ Ε, Ζ, Η, Θ τὰ σημεῖα τομῆς τῶν διαμέσων τῶν τριγώνων ΑΟΔ, ΔΟΓ, ΓΟΒ, ΒΟΑ εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται τοῦτο ὑπὸ τῶν διαγωνίων του.

'Επειδὴ $ΔΕ = ΕΙ.2$ καὶ $ΔΖ = ΖΚ.2$, διὰ διαιρέσεως αὐτῶν κατὰ μέλη, λαμβάνομεν $\frac{ΔΕ}{ΔΖ} = \frac{ΕΙ.2}{ΖΚ.2}$ ἢ $\frac{ΔΕ}{ΔΖ} = \frac{ΕΙ}{ΖΚ}$ καὶ $\frac{ΔΕ}{ΕΙ} = \frac{ΔΖ}{ΖΚ}$.
Εἰς τὸ τρίγωνον ΔΙΚ ἡ ΕΖ τέμνει τὰς πλευρὰς ΔΙ καὶ ΔΚ αὐτοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα καὶ συνεπῶς (§ 218 Π. ΙΙ) εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΙΚ.

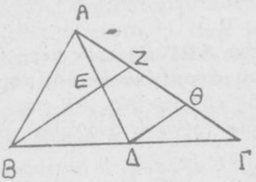
'Ομοίως ἐπειδὴ $ΒΗ = ΗΙ.2$ καὶ $ΒΘ = ΘΚ.2$ θὰ εἶναι :

$$\frac{ΒΗ}{ΗΙ} = 2 \text{ καὶ } \frac{ΒΘ}{ΘΚ} = 2.$$

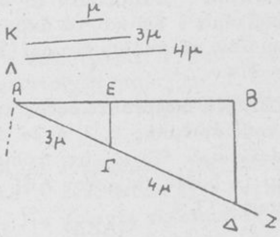
Ἄρα $\frac{ΒΗ}{ΗΙ} = \frac{ΒΘ}{ΘΚ}$ καὶ $ΗΘ \parallel ΙΚ$. 'Επειδὴ δὲ καὶ $ΕΖ \parallel ΙΚ$, θὰ εἶναι καὶ $ΗΘ \parallel ΕΖ$. Καθ' ὅμοιον τρόπον δεικνύομεν ὅτι καὶ $ΖΘ \parallel ΕΗ$ καὶ συνεπῶς τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον.

400. Ἂν Ε εἶναι τὸ μέσον τῆς διαμέσου ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀποδείξητε, ὅτι ἡ ΒΕ διαιρεῖ τὴν ΑΓ εἰς τμήματα ἔχοντα λόγον 1 : 2.

Λύσις: Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον καὶ Ε τὸ μέσον τῆς διαμέσου ΑΔ αὐτοῦ (σχ. 35). Ἂν Ζ εἶναι τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ΒΕ



Σχ. 35.



Σχ. 36.

τέμνει τὴν ΑΓ, καὶ ἀχθῇ ἐκ τοῦ Δ ἡ $ΔΘ \parallel ΕΖ$, ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΔΘ θὰ ἔχωμεν $\frac{ΑΖ}{ΖΘ} = \frac{ΑΕ}{ΕΔ}$ (§ 218 Π. ΙΙ.), διότι $ΕΖ \parallel ΔΘ$. 'Αλλὰ $ΑΕ = ΕΔ$ καὶ συνεπῶς $\frac{ΑΕ}{ΕΔ} = 1$. Ἄρα καὶ $\frac{ΑΖ}{ΖΘ} = 1$ ἢ $ΑΖ = ΖΘ$.

'Εκ τοῦ τριγώνου ΓΒΖ ἔχομεν $\frac{ΓΘ}{ΘΖ} = \frac{ΓΔ}{ΔΒ}$ (§ 218 Π. ΙΙ), διότι $ΔΘ \parallel ΒΖ$. 'Επειδὴ δὲ $ΓΔ = ΔΒ$ ἐξ ὑποθέσεως, θὰ εἶναι καὶ $ΓΘ = ΘΖ$ καὶ ἐπειδὴ $ΘΖ = ΑΖ$, θὰ εἶναι $ΑΖ = ΖΘ = ΘΓ$.

Συνεπῶς $\frac{ΑΖ}{ΖΓ} = \frac{ΑΖ}{2.ΑΖ} = \frac{1}{2}$.

401. Νὰ διαιρέσητε δοθὲν τμῆμα α εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον 3 : 4.

Λύσις: Ἔστω $ΑΒ = α$ δοθὲν εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ζητεῖται νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο τμήματα ἔχοντα λόγον 3 : 4. 'Επειδὴ γνωρίζομεν νὰ διαιρῶμεν εὐθ. τμῆμα εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς ἄλλα δοθέντα εὐθ. τμήματα (§ 219 Π. Ι), διὰ τοῦτο θὰ ἀντικαταστήσωμεν πρῶτον τοὺς ἀριθμοὺς

3 καὶ 4 διὰ τμημάτων ἀναλόγων πρὸς αὐτούς. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν αὐθαιρέτως τυχὸν εὐθ. τμῆμα μ καὶ σχηματίζομεν τὰ εὐθ. τμήματα $K = 3\mu$ καὶ $\Lambda = 4\mu$. Ἄγομεν διὰ τοῦ σημείου Α εὐθεῖαν ΑΖ, ἡ ὁποία σχηματίζει μετ' αὐτῆς γωνίαν καὶ ὁρίζομεν ἐπ' αὐτῆς δύο τμήματα ΑΓ, ΓΔ διαδοχικὰ ὁμόρροπα καὶ ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς $K = 3\mu$. καὶ $\Lambda = 4\mu$. Ἔπειτα σύρομεν τὴν ΒΔ καὶ ἐκ τοῦ Γ, τὴν ΓΕ, παράλληλον πρὸς τὴν ΒΔ. Οὕτω θὰ εἶναι $ΑΕ : ΕΒ = 3 : 4$, διότι

$$\frac{ΑΕ}{ΕΒ} = \frac{ΑΓ}{ΓΔ} \ (\S\ 218\ Π.\ 1) \ \text{ἢ} \ \frac{ΑΕ}{ΕΒ} = \frac{3\mu}{4\mu} = \frac{3}{4}.$$

β') Τρόπος. Ἀνάλυσις: Ἔστω, ὅτι εὑρέθη τὸ ζητούμενον σημεῖον καὶ εἶναι τὸ Ε, τοιοῦτον ὥστε $\frac{ΑΕ}{ΕΒ} = \frac{3}{4}$. Ἀλλάσσομεν τὴν θέσιν τῶν μέσων ὅρων καὶ λαμβάνομεν $\frac{ΑΕ}{3} = \frac{ΕΒ}{4}$.

Ἐκ ταύτης δι' ἐφαρμογῆς τῆς ἰδιότητος ΣΤ' (§ 213) ἔχομεν:

$$\frac{ΑΕ}{3} = \frac{ΕΒ}{4} = \frac{ΑΕ + ΕΒ}{3+4} = \frac{ΑΒ}{7}. \ \text{Ὅθεν} \ ΑΕ = \frac{3}{7} \cdot ΑΕ \ \text{καὶ} \ ΕΒ = \frac{4}{7} \cdot ΑΒ.$$

Σύνθεσις: Διαιροῦμεν τὸ δοθὲν εὐθ. τμῆμα εἰς 7 ἴσα μέρη κατὰ τὸ πρόβλημα § 128 καὶ τὸ ἄκρον τοῦ τρίτου ἐξ ἀρχῆς τμήματος εἶναι τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὸ δοθὲν εὐθ. τμῆμα εἰς μέρη ἔχοντα λόγον 3 : 4.

402. Νὰ διαιρέσητε δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τρία μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 4 δι' εὐθειῶν ἀγομένων ἐκ τῆς κορυφῆς Α.

Ἀνάλυσις: Ἔστω, ὅτι ἤχθησαν αἱ εὐθεῖαι ΑΔ, ΑΕ (σχ. 37) διαιροῦσαι τὸ δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τρία τρίγωνα ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 4.

$$\text{ἤτοι} \ \frac{(ΑΒΔ)}{2} = \frac{(ΑΔΕ)}{3} = \frac{(ΑΕΓ)}{4} \quad (1).$$

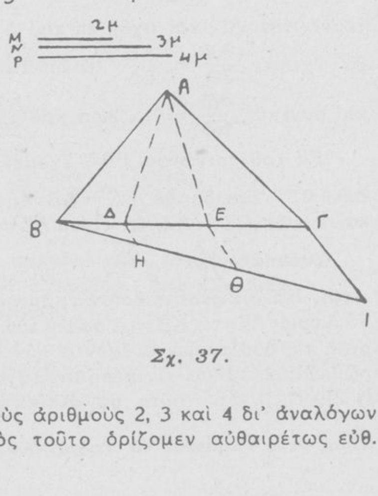
Τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΕ, ΑΕΓ ἔχουσι τὰς βάσεις των ἐπ' εὐθείας καὶ κοινὴν κορυφὴν Α. Ἄρα ἔχουσι καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Ἑπομένως τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν θὰ εἶναι ἀνάλογα τῶν βάσεών των ἤτοι:

$$\frac{(ΑΒΔ)}{(ΒΔ)} = \frac{(ΑΔΕ)}{(ΔΕ)} = \frac{(ΑΕΓ)}{(ΕΓ)} \quad (2).$$

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) διὰ διαιρέσεως λαμβάνομεν

$$\frac{(ΒΔ)}{2} = \frac{(ΔΕ)}{3} = \frac{(ΕΓ)}{4} \quad \text{ἤτοι}$$

αἱ βάσεις αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3 καὶ 4.



Σχ. 37.

Σύνθεσις: Ἀντικαθιστῶμεν τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3 καὶ 4 δι' ἀναλόγων εὐθ. τμημάτων πρὸς αὐτούς. Πρὸς τοῦτο ὁρίζομεν αὐθαιρέτως εὐθ.

τμῆμα μ καὶ σχηματίζομεν τὰ εὐθ. τμήματα Μ, Ν, Ρ ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς 2 μ, 3 μ, 4 μ. Ἔπειτα διαιροῦμεν τὴν βάσιν ΒΓ τοῦ δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ εἰς τρία τμήματα ΒΔ, ΔΕ, ΕΓ ἀνάλογα τῶν Μ, Ν, Ρ κατὰ τὸ πρόβλημα § 219 καὶ φέρομεν τὰ εὐθ. τμήματα ΑΔ, ΑΕ, τὰ ὁποῖα διαιροῦσι τὸ δοθὲν τρίγωνον εἰς τρία μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν. 2, 3, 4, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται.

403. Νὰ κατασκευάσητε ὀρθ. τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν ὑποτείνουσαν α, ἡ δὲ ἐπ' αὐτὴν προβολὴ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς νὰ διαιρῇ αὐτὴν εἰς μέρη ἔχοντα λόγον 2 : 3.

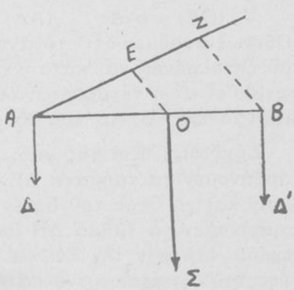
Λύσις: Μὲ διάμετρον τὴν δοθεῖσαν ὑποτείνουσαν α γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν. Ἔπειτα διαιροῦμεν τὴν διάμετρον εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον 2 : 3 (ἄσκ. 401) καὶ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπ' αὐτὴν εἰς τὸ ἄκρον τοῦ α' τμήματος μέχρι τῆς ἡμιπεριφερείας. Τὸ κοινὸν σημεῖον ταύτης καὶ τῆς ἡμιπεριφερείας εἶναι ἡ τρίτη κορυφὴ τοῦ ζητουμένου νὰ κατασκευασθῇ ὀρθ. τριγώνου.

404. Νὰ διαιρέσητε εὐθ. τμῆμα α εἰς τμήματα χ, ψ, ω τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{\chi}{3}=\frac{\psi}{2}=\frac{\omega}{4}$.

Λύσις: Λαμβάνομεν αὐθαιρέτως εὐθ. τμῆμα μ καὶ σχηματίζομεν τρία εὐθ. τμήματα Μ, Ν, Ρ ἴσα ἀντιστοίχως πρὸς 3μ, 2μ. 4μ. Διαιροῦμεν ἔπειτα τὸ δοθὲν εὐθ. τμῆμα α εἰς τρία τμήματα ἀνάλογα τῶν Μ, Ν, Ρ κατὰ τὸ πρόβλημα § 219.

405. Εἰς δύο δοθέντα σημεῖα Α, Β ἐνεργοῦσι, δύο δυνάμεις παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι. Ἡ εἰς τὸ Α ἐνεργοῦσα ἔχει ἔντασιν 4 χιλιογράμμων, ἡ δὲ ἄλλη 5 χιλιογρ. Νὰ ὁρίσητε τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης αὐτῶν.

Λύσις: Ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ δοθέντα σημεῖα καὶ Δ = 4 χιλγρ. καὶ Δ' = 5 χιλγρ. αἱ ἐνεργοῦσαι δυνάμεις εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι (σχ. 38). Ζητεῖται νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ σημεῖον Ο τῆς ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης ΟΣ αὐτῶν.



Σχ. 38

Γνωρίζομεν ἐκ τῆς Φυσικῆς, ὅτι

$\frac{AO}{\Delta'}=\frac{OB}{\Delta}$ ἢ βάσει τῶν δεδομένων

$\frac{AO}{5}=\frac{OB}{4}$. Ἄρα τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς Ο τῆς συνισταμένης αὐτῶν διαιρεῖ τὴν δεδομένην ἀπόστασιν ΑΒ εἰς τμήματα ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 5 καὶ 4. Πρὸς καθορισμὸν τῆς θέσεως αὐτοῦ, ἐπὶ τῆς ΑΒ φέρομεν τὴν ΑΖ, σχηματίζουσαν γωνίαν μετὰ τῆς ΑΒ καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τὰ εὐθ. τμήματα ΑΕ = 5 μ. καὶ ΕΖ = 4 μ. Φερομεν τὴν ΒΖ καὶ ἐκ τοῦ Ε ∥ πρὸς αὐτήν, ἥτις τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Ο. Τοῦτο θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης Σ.

Πράγματι: $\frac{ΑΟ}{ΑΕ} = \frac{ΟΒ}{ΕΖ}$ ἢ $\frac{ΑΟ}{5μ} = \frac{ΟΒ}{4μ}$ ἢ $\frac{ΑΟ}{Δ'} = \frac{ΟΒ}{Δ}$.

406. Ἂν δοθῶσι τρία εὐθ. τμήματα α, β, γ, νὰ γράψητε ἓν εὐθ. τμῆμα χ τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι $(χ) = \frac{(β).(γ)}{(α)}$.

Λυσις: Ἐκ τῆς ἰσότητος $(χ) = \frac{(β).(γ)}{(α)}$, ἔχομεν ὅτι $(α).(χ)=(β).(γ)$ καὶ ἄν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης διὰ τοῦ γινομένου $(β).(χ)$ λαμβάνομεν $\frac{(α).(χ)}{(β).(χ)} = \frac{(β).(γ)}{(β).(χ)}$ ἢ $\frac{(α)}{(β)} = \frac{(γ)}{(χ)}$ καὶ ἐκ ταύτης $\frac{α}{β} = \frac{γ}{χ}$. Ὅθεν τὸ ζητούμενον νὰ γραφῇ εὐθ. τμῆμα χ εἶναι ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν δοθέντων εὐθ. τμημάτων α, β καὶ γ καὶ κατασκευάζεται εὐκόλως, βάσει τοῦ προβλήματος § 220.

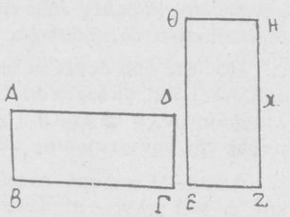
407. Νὰ κατασκευάσητε ὀρθογώνιον μὲ δοθεῖσαν βάσιν καὶ ἰσοδύναμον πρὸς ἄλλο δοθὲν ὀρθογώνιον.

Ἀνάλυσις: Ἔστω, ὅτι κατεσκευάσθη τὸ ζητούμενον ὀρθογώνιον καὶ εἶναι τὸ ΕΖΗΘ (σχ. 39), ἔχον ὡς βάσιν τὴν δοθεῖσαν ΕΖ καὶ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν ὀρθογ. ΑΒΓΔ. Θὰ εἶναι $(ΑΒ).(ΑΔ) = (ΕΖ).(ΘΕ)$.

Ἐκ ταύτης δὲ διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν της διὰ τοῦ γινομένου $(ΑΔ).(ΘΕ)$ λαμβάνομεν

$$\frac{(ΑΒ).(ΑΔ)}{(ΑΔ).(ΘΕ)} = \frac{(ΕΖ).(ΘΕ)}{(ΑΔ).(ΘΕ)}$$

ἢ $\frac{(ΑΒ)}{(ΘΕ)} = \frac{(ΕΖ)}{(ΑΔ)}$ ἢ $\frac{(ΕΖ)}{(ΑΔ)} = \frac{(ΑΒ)}{(ΘΕ)}$.



Σχ. 39.

Ὅθεν ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ ἄγνωστον ὕψος τοῦ ζητουμένου νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογωνίου εἶναι ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῆς δοθείσης βάσεως ΕΖ καὶ τῶν διαστάσεων ΑΒ, ΑΔ τοῦ δοθέντος.

Σύνθεσις: Ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς τῆς γωνίας Δ (σχ. 163 Θ. Γ.) λαμβάνομεν τὰ τμήματα ΔΕ, ΕΖ ἴσα ἀντιστοίχως πρὸς τὴν δοθεῖσαν βάσιν καὶ τὸ ὕψος τοῦ δοθέντος. Ἐπὶ τῆς ἄλλης δὲ πλευρᾶς αὐτῆς λαμβάνομεν τὸ τμῆμα ΔΗ ἴσον πρὸς τὴν βάσιν τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου. Φέρομεν τὴν ΕΗ καὶ τὴν ΖΘ ∥ ΕΗ. Τὸ τμῆμα ΗΘ θὰ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ ζητουμένου νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογωνίου. Ἔχοντες ἤδη τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου κατασκευάζομεν τοῦτο εὐκόλως.

408. Ἂν δοθῶσι δύο εὐθ. τμήματα α καὶ β, νὰ γραφῇ ἄλλο εὐθ. τμῆμα χ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $(α)^2 = (β).(χ)$.

Λύσις : Ἐκ τῆς $(\alpha)^2 = (\beta).(\chi)$ λαμβάνομεν :

$$\frac{(\alpha)^2}{(\alpha).(\chi)} = \frac{(\beta).(\chi)}{(\alpha).(\chi)} \quad \text{ἢ} \quad \frac{(\alpha)}{(\chi)} = \frac{(\beta)}{(\alpha)} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\chi}.$$

Ἐκ ταύτης ἐννοοῦμεν, ὅτι τὸ ζητούμενον νὰ κατασκευασθῇ εὐθ. τμῆμα χ εἶναι ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν εὐθ. τμημάτων β, α καὶ α καὶ εὑρίσκεται εὐκόλως κατὰ τὸ πρόβλημα § 220.

Ἁρμονικὴ διαίρεσις εὐθείας

Ἀσκήσεις σελὶς 192.—**409. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει (ΑΒ) = 8 ἑκ (ΒΓ) = 10 ἑκατ. καὶ (ΑΓ) = 12 ἑκατ. Νὰ ὑπολογισθῶσι τὰ μήκη τῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ πλευρὰ ΒΓ διαιρεῖται ὑπὸ τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν Α.**

Λύσις: Ἔστω ΑΒΓ (σχ. 164 Θ. Γ.) τὸ δοθὲν τρίγωνον καὶ Δ τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ διχοτόμος τῆς Α τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ αὐτοῦ. Γνωρίζομεν ἐκ τοῦ Θ. § 221 ὅτι :

$$\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΔΓ}}{\text{ΑΓ}} \cdot \text{ Ἐκ ταύτης ἔχομεν : } \frac{(\text{ΒΔ})}{(\text{ΑΒ})} = \frac{(\text{ΔΓ})}{(\text{ΑΓ})}.$$

Ἀλλὰ (ΑΒ)=8 ἑκατ. καὶ (ΑΓ)=12 ἑκατ. Συνεπῶς :

$$\frac{(\text{ΒΔ})}{8} = \frac{(\text{ΔΓ})}{12} = \frac{\text{ΒΔ}) + (\text{ΔΓ})}{8+12} = \frac{(\text{ΒΓ})}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \quad \text{καὶ } (\text{ΒΔ}) = \frac{8}{2} =$$

$$= 4 \text{ ἑκατ. καὶ } (\text{ΔΓ}) = \frac{12}{2} = 6 \text{ ἑκατ.}$$

410. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι 2α=β+γ. Νὰ ὑπολογισθῶσι τὰ μήκη τῶν τμημάτων εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ ΒΓ ὑπὸ τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν Α συναρτήσει τῶν β καὶ γ.

Λύσις: Γνωρίζομεν ὅτι $(\text{ΒΔ}) = \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}$ καὶ $(\text{ΔΓ}) = \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}$ (1) (ἐφαρμογὴ Θ. § 221). Ἐπειδὴ $2\alpha=\beta+\gamma$, θὰ εἶναι $\alpha = \frac{\beta+\gamma}{2}$. Εἰς τὰς σχέσεις (1) ἀντικαθιστῶμεν τὸ $\alpha = \frac{\beta+\gamma}{2}$ καὶ ἔχομεν $(\text{ΒΔ}) = \frac{\beta+\gamma}{2} \cdot \frac{\gamma}{\beta+\gamma} = \frac{\gamma}{2}$ καὶ $(\text{ΔΓ}) = \frac{\beta+\gamma}{2} \cdot \frac{\beta}{\beta+\gamma} = \frac{\beta}{2}$.

411. Νὰ διχοτομήσητε τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τῆς ἀσκήσεως 409 καὶ νὰ ὑπολογίσητε τὰς ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς διχοτόμου καὶ τῆς εὐθείας ΒΓ.

Λύσις: Ἂν Ε εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῆς ΒΓ καὶ τῆς διχοτόμου ΑΕ τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας ΒΑΖ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 164 Θ. Γ.), θὰ ἔχωμεν (Θ. § 222) $\frac{\text{ΕΒ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΕΓ}}{\text{ΑΓ}}$. Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν

$$\frac{(\text{ΕΒ})}{\text{ΑΒ})} = \frac{(\text{ΕΓ})}{(\text{ΑΓ})} \text{ ἢ } \frac{(\text{ΕΒ})}{8} = \frac{(\text{ΕΓ})}{12} = \frac{(\text{ΕΓ})-(\text{ΕΒ})}{12-8} = \frac{(\text{ΒΓ})}{4} = \frac{10}{4} \quad \text{καὶ}$$

$\frac{(ΕΒ)}{8} = \frac{10}{4}$ καὶ $\frac{(ΕΓ)}{12} = \frac{10}{4}$. Ἐκ τῆς α΄ τούτων ἔχομεν

$(ΕΒ) = \frac{8 \, . \, 10}{4} = 20$ ἑκατ. καὶ ἐκ τῆς β΄: $(ΕΓ) = \frac{12 \, . \, 10}{4} = 30$ ἑκατ.

412. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει (ΑΒ) = 6 ἑκατ., (ΒΓ) = 10 ἑκατ., καὶ (ΑΓ) = 8 ἑκατ. Νὰ ὑπολογίσητε τὴν ἀπόστασιν τῶν σημείων εἰς τὰ ὁποῖα ἡ εὐθεῖα ΒΓ τέμνεται ἀπὸ τὰς διχοτόμους τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς γωνίας Α.

Λύσις: Ἂν Δ καὶ Ε εἶναι τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ΒΓ τέμνεται ἀπὸ τὰς διχοτόμους τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 164 Θ. Γ.) εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι (ΑΒ) = γ = 6 ἑκ., (ΒΓ) = α = 10 ἑκ. (ΑΓ) = β = 8 ἑκατ., διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος τῆς ΕΔ ἀρκεῖ νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ μήκη τῶν τμημάτων ΒΔ καὶ ΕΔ.

Ἔχομεν: $(ΒΔ) = \frac{αγ}{β+γ} = \frac{10 \, . \, 6}{8+6} = \frac{60}{14} = \frac{30}{7}$ ἑκατ. $= 4 \frac{2}{7}$ ἑκατ.

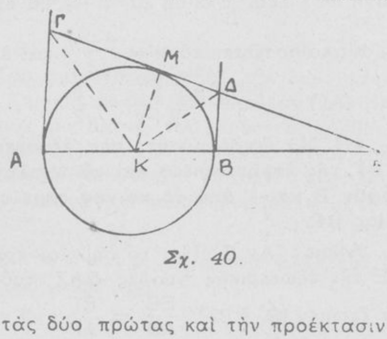
καὶ $(ΕΒ) = \frac{αγ}{β-γ} = \frac{10 \, . \, 6}{2} = 30$ ἑκατ.

Ὅθεν $(ΕΔ) = (ΕΒ) + (ΒΔ) = 30$ ἑκατ. $+ 4 \frac{2}{7}$ ἑκ. $= 34 \frac{2}{7}$ ἑκατ.

Ἀσκήσεις σελὶς 195.— **413. Νὰ ἀποδείξητε, ὅτι ἕκαστον σημεῖον εὐθείας ΒΓ ἔχει ἓν μόνον ἁρμονικὸν συζυγὲς πρὸς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ αὐτῆς.**

Λύσις: Διότι, ἂν Δ εἶναι τυχὸν σημεῖον μεταξὺ Β καὶ Γ (σχ. 165 § 224 Θ. Γ.), τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ σημείου Δ, ὡς πρὸς τὰ Β καὶ Γ εἶναι ἡ τομὴ Ε τῶν εὐθειῶν ΒΓ καὶ ΖΑ. Ἀλλὰ δύο εὐθεῖαι τέμνονται εἰς ἓν μόνον σημεῖον. Ἄρα ἓν μόνον ἁρμονικὸν σημεῖον τοῦ Δ ὑπάρχει, ὡς πρὸς τὰ Β καὶ Γ.

414. Ἀπὸ τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου ΑΒ περιφερείας νὰ φέρητε ἐφαπτομένας εἰς αὐτήν. Ἔπειτα νὰ γράψητε τρίτην ἐφαπτομένην εἰς ἓν σημεῖον Μ τῆς αὐτῆς περιφερείας. Ἂν Γ, Δ, Ε εἶναι σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα αὕτη τέμνει τὰς δύο πρώτας ἐφαπτομένας καὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ εἶναι ἁρμονικὰ συζυγῆ πρὸς τὰ Μ καὶ Ε.

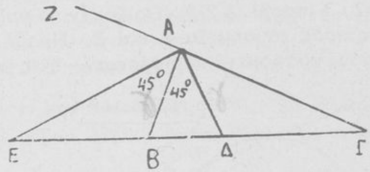


Σχ. 40.

Λύσις: Ἔστω Κ ἡ περιφέρεια (σχ. 40), ΑΒ μία διάμετρος αὐτῆς, ΑΓ καὶ ΒΔ αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς καὶ Γ, Δ. Ε τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ τρίτη ἐφαπτομένη εἰς τυχὸν σημεῖον Μ τῆς περιφερείας τέμνει τὰς δύο πρώτας καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ΑΒ.

Αἱ ΚΔ καὶ ΚΓ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ΜΚΕ καὶ ΜΚΑ, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ πρώτη εἶναι ἐσωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΚΜΕ, ἡ δὲ ΜΚΑ εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ γωνία τῆς α'. Ἄρα αὗται διαιροῦσι τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ΜΕ ἁρμονικῶς ἤτοι τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ εἶναι ἁρμονικὰ συζυγῆ τῶν Μ καὶ Ε.

415. Αἱ διχοτόμοι τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς ὀρθῆς γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ τέμνουσι τὴν εὐθεῖαν ΒΓ εἰς σημεῖα Δ καὶ Ε. Ἂν εἶναι ΑΔ=ΑΒ καὶ ΑΕ=ΑΓ, νὰ ἀποδείξητε, ὅτι $(ΕΒ)^2 = (ΕΓ).(ΔΒ)$.



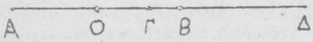
Σχ. 41.

Λύσις: Ἔστω ΒΑΓ (σχ. 41) τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον καὶ ΑΔ, ΑΕ αἱ διχοτόμοι τῆς ὀρθῆς γωνίας Α αὐτοῦ καὶ τῆς παρ' αὐτὴν ἐξωτερικῆς γωνίας ΒΑΖ.

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΑΓ ἔχομεν, λόγῳ τῆς διχοτόμου ΑΕ, ὅτι $\frac{(ΕΒ)}{(ΕΓ)} = \frac{(ΑΒ)}{(ΑΓ)}$ (1). Ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΒ εἶναι διχοτόμος τῆς ἐσωτερικῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου ΔΑΕ. Ἄρα $\frac{(ΕΒ)}{(ΒΔ)} = \frac{(ΑΕ)}{(ΑΔ)}$. Ἀλλὰ ΑΕ=ΑΓ καὶ ΑΔ=ΑΒ ἐξ ὑποθέσεως. Ὅθεν $\frac{(ΕΒ)}{(ΒΔ)} = \frac{(ΑΓ)}{(ΑΒ)}$ ἢ $\frac{(ΒΔ)}{(ΕΒ)} = \frac{(ΑΒ)}{(ΑΓ)}$ (2). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν $\frac{(ΕΒ)}{(ΕΓ)} = \frac{(ΒΔ)}{(ΕΒ)}$ καὶ $(ΕΒ)^2 = (ΕΓ).(ΒΔ)$.

416. Ἂν Ο εἶναι τὸ μέσον εὐθ. τμήματος ΑΒ καὶ τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ πρὸς τὰ Α καὶ Β, νὰ ἀποδείξητε, ὅτι $(ΟΑ)^2 = (ΟΓ).(ΟΔ)$.

Λύσις: Ἔστω ὅτι τὰ Γ, Δ εἶναι ἁρμονικὰ συζυγῆ σημεῖα πρὸς τὰ Α,Β καὶ Ο τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΑΒ (σχ. 42). Θὰ δείξωμεν ὅτι $(ΟΑ)^2 = (ΟΓ).(ΟΔ)$. Ἔχομεν



Σχ. 42.

$\frac{(ΑΓ)}{(ΓΒ)} = \frac{(ΑΔ)}{(ΔΒ)}$ (1). Ἀλλὰ $(ΑΓ) = (ΟΑ) + (ΟΓ)$, $(ΓΒ) = (ΟΒ) - (ΟΓ) = (ΟΑ) - (ΟΓ)$, $(ΑΔ) = (ΟΔ) + (ΟΑ)$ καὶ $(ΒΔ) = (ΟΔ) - (ΟΒ) = (ΟΔ) - (ΟΑ)$ καὶ ἡ (1) γίνεται :

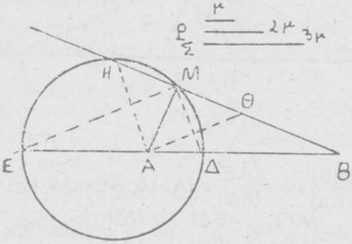
$\frac{(ΟΑ) + (ΟΓ)}{(ΟΑ) - (ΟΓ)} = \frac{(ΟΔ) + (ΟΑ)}{(ΟΔ) - (ΟΑ)}$. Ἀλλὰ εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν μέσων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων.

Ἄρα $[(ΟΑ) + (ΟΓ)].[(ΟΔ) - (ΟΑ)] = [(ΟΑ) - (ΟΓ)]\,[(ΟΔ) + (ΟΑ)]$ ἢ $(ΟΑ)(ΟΔ) + (ΟΓ)(ΟΔ) - (ΟΑ)^2 - (ΟΓ)(ΟΑ) = (ΟΑ)(ΟΔ) - (ΟΓ)(ΟΔ) + (ΟΑ)^2 - (ΟΓ)(ΟΑ)$ καὶ μετὰ τὰς ἀναγωγὰς ἔχομεν $-2(ΟΑ)^2 = -2(ΟΓ)(ΟΔ)$ καὶ $(ΟΑ)^2 = (ΟΓ)(ΟΔ)$. ὅ. ἔ. δ.

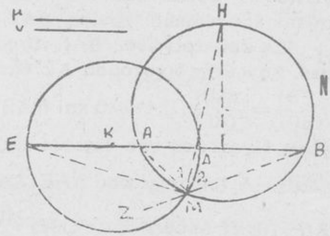
Ἀσκήσεις σελὶς 196. **417. Νὰ γράψητε τὸν γεωμ. τόπον τῶν σημείων Μ, διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι $ΜΑ : ΜΒ = \frac{2}{3}$. Ἔπειτα δὲ τὸν τόπον τῶν σημείων διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι $ΜΒ : ΜΑ = \frac{2}{3}$.**

Λύσις: Γνωρίζομεν ὅτι ὁ Γ. Τ. τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει ἡ σχέσις $\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu} \neq 1$, εἶναι περιφέρεια, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τό εὐθ. τμῆμα ΔΕ, ἔνθα Δ καὶ Ε εἶναι τοιαῦτα, ὥστε $\Delta A : \Delta B = \mu : \nu$ καὶ $EA : EB = \mu : \nu$.

Ἐπειδὴ εἰς τὸ πρόβλημά μας τὰ μ καὶ ν εἶναι ἀριθμοὶ ὁρίζομεν πρῶτον δύο τμήματα Ρ, Σ ἔχοντα λόγον 2 : 3. Διαιροῦμεν κατόπιν τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ εἰς δύο τμήματα ΑΔ καὶ ΔΒ τοιαῦτα, ὥστε $A\Delta : \Delta B = 2 : 3$ (προβλ. § 219). Ὁρίζομεν τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν Ε τοῦ σημείου Δ, ὡς πρὸς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. (Προβλ. § 224). Ἐπὶ τῆς ΔΕ, ὡς διαμέτρου, γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις εἶναι ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος.



Εἰκ. 43.



Εἰκ. 44.

Ἀπόδειξις: Ἂν Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας ταύτης καὶ φέρωμεν τὰς εὐθείας ΑΗ καὶ ΑΘ παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ΜΔ καὶ ΜΕ, θὰ εἶναι $\text{γων}H A\Theta = \text{γων}\Delta M E = 1$ ὀρθὴ καὶ

$EA : EB = M\Theta : MB$ (1) καὶ $A\Delta : \Delta B = MH : MB$ (2). Ἀλλὰ $EA : EB = A\Delta : \Delta B$. Ἄρα καὶ $M\Theta : MB = MH : MB$ καὶ **συνεπῶς** $M\Theta = MH$. Εἰς τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΗΑΘ ἡ ΑΜ εἶναι διάμεσος καὶ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης ΗΘ ἤτοι $MA = MH$. Ἡ ἀναλογία ὅθεν (2) γίνεται $A\Delta : \Delta B = MA : MB$. Ἐπειδὴ δὲ $A\Delta : \Delta B = 2 : 3$ ἐκ κατασκευῆς, θὰ ἔχωμεν $MA : MB = 2 : 3$.

Ἐπειδὴ ἐκ τῆς ἀναλογίας $MB : MA = 2 : 3$ δι' ἀντιστροφῆς ἔχομεν ὅτι $MA : MB = 3 : 2$ ἐργαζόμεθα, ὡς προηγουμένως, διὰ νὰ γράψωμεν τὸν ζητούμενον γεωμ. τόπον, ὅστις θὰ εἶναι περιφέρεια κειμένη δεξιὰ τοῦ μέσου τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ, ἐνῷ ὁ προηγούμενος ἔκειτο ἀριστερὰ αὐτοῦ.

418. Εἰς μίαν περιφέρειαν νὰ ὁρίσητε τόξον ΑΒ. Ἐπ' αὐτοῦ δὲ νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον Μ, τοιοῦτον ὥστε ἡ χορδὴ ΜΑ νὰ εἶναι πρὸς τὴν ΜΒ, ὡς δοθὲν τμῆμα μ πρὸς ἄλλο δοθὲν ν.

Λύσις: Ἔστω περιφέρεια Κ (σχ. 44) καὶ ΑΒ ἓν τόξον αὐτῆς. Ἔστω δὲ ὅτι εὑρέθη τὸ ζητούμενον σημεῖον καὶ εἶναι τὸ Μ τοιοῦτον, ὥστε $MA : MB = \mu : \nu$, ἔνθα μ καὶ ν δοθέντα εὐθ. τμήματα.

Φέρομεν τὴν οιχοτόμον τῆς γωνίας ΑΜΒ τοῦ τριγώνου ΑΜΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν χορδὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Δ. Ἔχομεν $\Delta A : \Delta B =$

= ΜΑ : ΜΒ = μ : ν. Ἂν ἀχθῇ καὶ ἡ διχοτόμος ΜΕ τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας ΑΜΖ θὰ εἶναι ΕΑ : ΕΒ = ΜΑ : ΜΒ = μ : ν. Ἄρα ΔΑ : ΔΒ = = ΕΑ : ΕΒ = μ : ν. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ γωνία ΕΜΔ = 1 ὀρθ., ὡς διχοτόμοι ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικῶν γωνιῶν, τὸ Μ θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ περιφερείας γραφομένης μὲ διάμετρον τὴν ΔΕ. Ἀλλ αὕτη δύναται καὶ ἀρχικῶς νὰ προσδιορισθῇ.

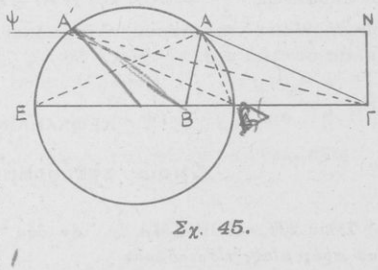
Σύνθεσις: Διαιροῦμεν τὴν χορδὴν ΑΒ εἰς μέρη ἔχοντα λόγον μ : ν διὰ τοῦ σημείου Δ. Εὑρίσκομεν τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ Δ, ὡς πρὸς τὰ Α καὶ Β, τὸ Ε. Ἐπὶ τῆς ΔΕ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις τέμνει τὸ τόξον ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Μ, τοιοῦτον ὥστε ΜΑ : ΜΒ = μ : ν.

Β΄ Τρόπος: Ἂν ἡ διχοτόμος ΜΔ προεκταθῇ πέραν τοῦ Δ θὰ τμήσῃ τὸ ἕτερον τόξον εἰς σημεῖον Η καὶ ἐπειδὴ $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$, θὰ εἶναι καὶ $\overset{\frown}{AH} = \overset{\frown}{HB}$ ἤτοι τὸ Η μέσον τοῦ τόξου ΑΝΒ. Ἀλλὰ τόσον τὸ Δ ὅσον καὶ τὸ Η ὁρίζονται ἀρχικῶς.

Σύνθεσις: Διαιροῦμεν τὴν χορδὴν ΑΒ εἰς τμήματα ΑΔ, ΔΒ ἔχοντα λόγον μ : ν. Φέρομεν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ, ἥτις διχοτομεῖ τὸ τόξον ΑΝΒ, εἰς τὸ Η. Ἡ ΗΔ προεκτεινομένη ὁρίζει τὸ σημεῖον Μ τοιοῦτον ὥστε ΜΑ : ΜΒ = μ : ν. Πράγματι θὰ εἶναι ΜΑ : ΜΒ = ΔΑ : ΔΒ λόγῳ τῆς διχοτόμου ΜΔ. Ἀλλὰ ΔΑ : ΔΒ = μ : ν ἐκ κατασκευῆς. Ἄρα καὶ ΜΑ : ΜΒ = μ : ν.

419. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ μὲ βάσιν ΒΓ ἴσην πρὸς 8 ἑκατ., ὕψος 2 ἑκατ. καὶ ΑΒ : ΑΓ = 3 : 5.

Λύσις: Ἄγνωστος εἶναι ἡ τρίτη κορυφὴ Α, τοῦ τριγώνου, ἥτις πρέπει νὰ πληροῖ τὰ ἑξῆς δύο ἐπιτάγματα. 1) Νὰ ἀπέχῃ τῆς ΒΓ ἀπόστασιν ἴσην πρὸς δύο ἑκατ. καὶ 2) ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων αὐτῆς ἀπὸ τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ νὰ εἶναι ἴσος πρὸς 3 : 5.



Σχ. 45.

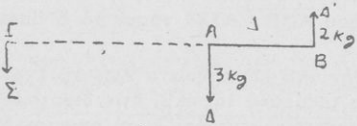
Τὰ σημεῖα τὰ πληροῦντα τὸ α΄ ἐπίταγμα κεῖνται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν ΒΓ καὶ εἰς ἀπόστασιν 2 ἑκατ. αὐτῆς. Τὰ δὲ σημεῖα τὰ πληροῦντα τὸ β΄ ἐπίταγμα κεῖνται ἐπὶ περιφερείας γραφομένης μὲ διάμετρον τὴν ΔΕ, ἔνθα Δ καὶ Ε εἶναι τοιαῦτα, ὥστε ΔΑ : ΔΒ = ΕΑ : ΕΒ = 3 : 5. Ἄρα ἡ ἄγνωστος κορυφὴ θὰ κεῖται ἐπ᾽ ἀμφοτέρων τῶν τόπων.

Σύνθεσις: Ὁρίζομεν τὴν ΒΓ = 8 ἑκατ. Ὑψοῦμεν κάθετον ἐπ᾽ αὐτὴν ΓΝ = 2 ἑκ. καὶ ἐκ τοῦ Ν φέρομεν τὴν Ψ ∥ ΒΓ. Διαιροῦμεν τὴν ΒΓ εἰς τμήματα ΒΔ, ΔΓ τοιαῦτα ὥστε ΔΒ : ΔΓ = 3 : 5. Εὑρίσκομεν τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ Δ πρὸς τὰ Β καὶ Γ, ἔστω Ε. Ἐπὶ τῆς ΔΕ, ὡς διαμέτρου γράφομεν περιφέρειαν, τὴν ὁποίαν ἡ εὐθεῖα Ψ τέμνει ἐν γένει εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Α΄. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄ΒΓ εἶναι λύσεις τοῦ προβλήματος, διότι ἀμφότερα ἔχουσι τὰ δεδομένα στοιχεῖα.

Διερεύνησις: Διὰ νὰ ἔχῃ λύσιν τὸ πρόβλημα, πρέπει ἡ εὐθεῖα Ψ καὶ ἡ περιφέρεια νὰ ἔχωσι κοινὰ σημεῖα. Πρὸς τοῦτο, ἂν τὸ δοθὲν ὕψος εἶναι μικρότερον τῆς ἀκτῖνος τῆς περιφερείας μὲ διάμετρον ΔΕ ἔχομεν δύο λύσεις διακεκριμένας, ἄν τὸ ὕψος εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα, ἔχομεν μίαν λύσιν, ἄν δὲ εἶναι μεγαλύτερον οὐδεμίαν. (Εἰς τὸ σχ. 45 ἀντὶ τῆς Α΄Δ νὰ χαραχθῇ ἡ Α΄Β).

420. Εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐνεργοῦσι δύο παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι δυνάμεις. Ἡ εἰς τὸ σημεῖον Α ἐνεργοῦσα ἔχει ἔντασιν 3 χιλιογράμμων, ἡ δὲ ἄλλη 2 χιλιόγρ. Νὰ ὁρίσητε τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης αὐτῶν.

Λύσις: Ἔστωσαν Δ καὶ Δ΄ (σχ. 46) δύο δυνάμεις ἐνεργοῦσαι εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι. Ἐκ τῆς φυσικῆς γνωρίζομεν, ὅτι τὸ σημεῖον Γ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης αὐτῶν κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ καὶ εἶναι τοιοῦτον, ὥστε $\frac{\Gamma A}{\Gamma B}=\frac{2}{3}$. Ἐκ ταύτης ἐννοοῦμεν ὅτι ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὴν ἀπόστασιν ΑΒ εἰς δύο τμήματα ΑΔ, ΔΒ ἔχοντα λόγον 2 : 3 (ἄσκησις 491) καὶ νὰ εὕρωμεν κατόπιν τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ Δ πρὸς τὰ Α καὶ Β.



Σχ. 46.

Σημείωσις: Ἐκ τῆς $\frac{\Gamma A}{\Gamma B}=\frac{2}{3}$ ἔχομεν $\frac{\Gamma A}{2}=\frac{\Gamma B}{3}=\frac{\Gamma B-\Gamma A}{3-2}=\frac{AB}{1}$ καὶ ἑπομένως $\frac{(\Gamma A)}{2}=(AB)$ καὶ $(\Gamma A)=2(AB)$. Ἀρκεῖ ὅθεν πρὸς ὁρισμὸν τοῦ σημείου Γ ταχύτερον, νὰ λάβωμεν ἀριστερὰ τοῦ Α εὐθ. τμῆμα ΑΓ διπλάσιον τοῦ ΑΒ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

Ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα

Σελὶς 200.—ΠΟΡΙΣΜΑ Ι. ***Ἂν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ὅμοια.***

Ἀπόδειξις: Διότι τότε (§ 122 Π. ΙΙΙ) τὰ δύο τρίγωνα θὰ ἔχωσι καὶ τὰς τρίτας των γωνίας ἴσας καὶ συνεπῶς (§ 229 Θ.) θὰ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας των ἴσας, μίαν πρὸς μίαν.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ. ***Τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος ΑΔ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΓ διαιρεῖ αὐτὸ εἰς τρίγωνα ὅμοια πρὸς ἄλληλα καὶ πρὸς αὐτὸ (σχ. 169 Θ.Γ.)***

Ἀπόδειξις: α) Τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ ἔχουσι Β = ω διότι εἶναι ὀξεῖαι καὶ ἔχουσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀνὰ μίαν καθέτους ἤτοι $BA \perp A\Gamma$ καὶ $B\Gamma \perp A\Delta$ καὶ Γ = φ δι' ὅμοιον λόγον. Ἄρα εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ἀνὰ μίαν ἴσας.

β') Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ ἔχουσι τὴν ὀξεῖαν γωνίαν Β. κοινήν. Ἄρα θὰ ἔχωσι καὶ τὰς ἄλλας ὀξείας γωνίας αὐτῶν ἴσας ἤτοι $\Gamma = \varphi$ καὶ συνεπῶς εἶναι ὅμοια.

γ') Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ ἔχουσι τὴν ὀξεῖαν γωνίαν Γ κοινὴν καὶ $B = \omega$. Ἄρα εἶναι ὅμοια.

ΠΟΡΙΣΜΑ III. ***Ἑκατέρα τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς προβολῆς της ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.***

Ἀπόδειξις: Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{B\Gamma}{AB} = \frac{AB}{B\Delta}$. Ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ ἔχομεν ὅτι $\frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma}{\Delta\Gamma}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ IV. ***Τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος ὀρθ. τριγώνου εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖ τὴν ὑποτείνουσαν.***

Ἀπόδειξις: Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ ἔχομεν:

$$\frac{B\Delta}{A\Delta} = \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}.$$

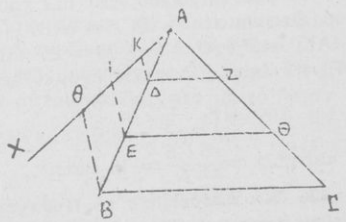
Ἀσκήσεις σελὶς 200.— **421. Νὰ ἐξετάσητε, ἂν δύο ὀρθ. τρίγωνα μὲ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην εἶναι ἢ δὲν εἶναι ὅμοια.**

Λύσις: Εἶναι ὅμοια, διότι τότε ταῦτα θὰ ἔχωσι καὶ τὴν ἄλλην ὀξεῖαν γωνίαν αὐτῶν ἴσην καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἀνὰ μίαν ἴσας.

422. Ὁμοίως νὰ ἐξετάσητε, ἂν δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα μὲ μίαν γωνίαν ἴσην εἶναι πάντοτε ὅμοια.

Λύσις: Ἂν δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἔχωσιν ἴσας τὰς γωνίας Α καὶ Α' τῶν κορυφῶν των, θὰ ἔχωσι τότε ἴσας καὶ τὰς παρὰ τὰς βάσεις αὐτῶν γωνίας Β καὶ Β', Γ καὶ Γ', διότι $B = \Gamma = \frac{2\text{ὀρθ.} - A}{2} = \frac{2\text{ὀρθ.} - A'}{2} = B' = \Gamma'$. Ἄρα ὅμοια. Ἂν ἔχωσι $B = B$ τότε θὰ ἔχωσι καὶ $\Gamma = \Gamma'$ καὶ συνεπῶς $A = A'$ καὶ πάλιν θὰ εἶναι ὅμοια.

423. Νὰ διαιρέσητε τὴν πλευρὰν ΑΒ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἰς τρία ἴσα μέρη ΑΔ, ΔΕ, ΕΒ. Ἔπειτα νὰ φέρητε εὐθεῖαν ΔΖ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, μέχρις οὗ τμήσῃ τὴν ΑΓ εἴς τι σημεῖον Ζ. Νὰ εὕρητε τοὺς λόγους ΑΓ : ΑΖ καὶ ΔΖ : ΒΓ.



Σχ. 47.

Λύσις: Ἔστω ΑΒΓ (σχ. 47) τὸ δοθὲν τρίγωνον. Ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΧ, σχηματιζούσης γωνίαν μὲ τὴν ΑΒ λαμβάνομεν $AK = KI = I\Theta$. Φέρομεν τὴν ΒΘ καὶ ἐκ τῶν σημείων Ι καὶ Κ παραλλήλους πρὸς αὐτήν. Οὕτω ἡ ΑΒ χωρίζεται εἰς τρία ἴσα μέρη ΑΔ, ΔΕ, ΕΒ.

Ἐπειδὴ ἡ ΔΖ ∥ ΒΓ, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΖ εἶναι ὅμοια. Ἄρα $\frac{ΑΓ}{ΑΖ} = \frac{ΒΓ}{ΔΖ} = \frac{ΑΒ}{ΑΔ}$ (1). Ἀλλὰ ΑΒ=ΑΔ . 3 καὶ συνεπῶς $\frac{ΑΒ}{ΑΔ} = 3$.

Ὅθεν $\frac{ΑΓ}{ΑΖ} = 3$ καὶ $\frac{ΒΓ}{ΔΖ} = 3$, ὅτε $\frac{ΔΖ}{ΒΓ} = \frac{1}{3}$.

424. Ἂν τὸ προηγούμενον τρίγωνον ἔχῃ (ΑΒ)= 9 ἑκατ. (ΑΓ) = 10 ἑκ., καὶ (ΒΓ) = 15 ἑκατ., νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ΔΖ. Ἂν δὲ φέρωμεν τὴν ΕΘ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ τέμνουσαν τὴν ΑΓ εἰς τὸ Θ, νὰ εὕρητε καὶ τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ΕΘ.

Λύσις: Ἐκ τῶν ἀναλογιῶν $\frac{ΑΒ}{ΑΔ} = \frac{ΑΓ}{ΑΖ} = \frac{ΒΖ}{ΔΖ}$ ἔχομεν $\frac{(ΑΒ)}{(ΑΔ)} = \frac{(ΑΓ)}{(ΑΖ)} = \frac{(ΒΓ)}{(ΔΖ)}$ ἢ $\frac{9}{3} = \frac{15}{(ΔΖ)}$, ὅτε $9\,(ΔΖ) = 45$ καὶ $(ΔΖ) = 45:9 = 5$ ἑκατ.

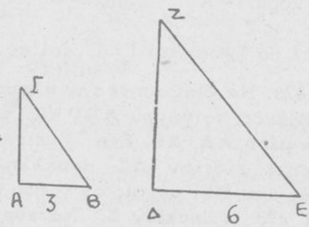
β΄) Ἐπειδὴ ΕΘ ∥ ΒΓ τὰ τρίγωνα ΑΕΘ, ΑΒΓ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ἀνὰ μίαν ἴσας.

Ἑπομένως $\frac{ΕΘ}{ΒΓ} = \frac{ΑΕ}{ΑΒ}$ (1). Ἀλλὰ ΑΕ = 2 . ΑΔ καὶ ΑΒ=3 . ΑΔ καὶ $\frac{ΑΕ}{ΑΒ} = \frac{2}{3}$. Ἡ (1) γίνεται $\frac{(ΕΘ)}{15} = \frac{2}{3}$ καὶ $(ΕΘ) = \frac{2 . 15}{3} = 10$ ἑκ.

425. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ὀρθογ. τρίγωνον ΑΒΓ μὲ καθέτους πλευρὰς (ΑΒ)=3 ἑκατ. καὶ (ΑΓ)=4 ἑκατ. Ἔπειτα εἰς τὴν μίαν πλευρὰν ὀρθῆς γωνίας Δ, νὰ ὁρίσητε τμῆμα (ΔΕ) =6 ἑκατ. καὶ νὰ κατασκευάσητε γωνίαν ΔΕΖ=Β. Νὰ ὑπολογίσητε δὲ το μῆκος τῆς ὑποτεινούσης ΕΖ αὐτοῦ.

Λύσις: Τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΔΕΖ καὶ ΑΒΓ (σχ. 48) εἶναι ὅμοια, διότι ἐκ κατασκευῆς ἔχουσιν ἀνὰ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην, Ε = Β (ἄσκ. 421). Ἄρα θὰ ἔχωσι καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους ἤτοι: $\frac{ΕΖ}{ΒΓ} = \frac{ΔΕ}{ΑΒ} = \frac{ΔΖ}{ΑΓ}$ (1).

Ὑπολογίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΓ διὰ τοῦ Πυθ. Θεωρήματος: $(ΒΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ καὶ (ΒΓ) = 5 ἑκατ. Συνεπῶς ἔχομεν ἐκ τῆς (1) $\frac{(ΕΖ)}{5} = \frac{6}{3}$ καὶ $(ΕΖ) = \frac{5 . 6}{3} = 10$ ἑκατ.



Σχ. 48.

426. Νὰ ἀποδείξητε τὸ Πυθαγόρειον Θεώρημα μὲ τὴν βοήθειαν ὁμοίων τριγώνων (Σχ. 169 Θ. Γ.).

Λύσις: Διὰ τοῦ Π. III § 229 εὕρομεν ὅτι: $\frac{ΒΓ}{ΑΒ} = \frac{ΑΒ}{ΒΔ}$ καὶ $\frac{ΒΓ}{ΑΓ} = \frac{ΑΓ}{ΓΔ}$. Ἐκ τούτων ἔχομεν ὅτι:

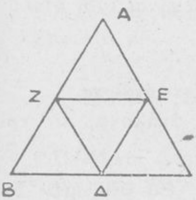
$(AB)^2=(B\Gamma).(B\Delta)$ (1) καὶ $(A\Gamma)^2=(B\Gamma).(\Gamma\Delta)$ (2). Προσθέτομεν κατὰ μελη τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) καὶ ἔχομεν:

$$(AB)^2+(A\Gamma)^2=(B\Gamma).(B\Delta)+(B\Gamma).(\Delta\Gamma)=(B\Gamma)\left[(B\Delta)+(\Delta\Gamma)\right]=$$
$$=(B\Gamma).(B\Gamma)=(B\Gamma)^2.$$

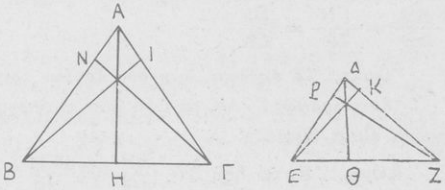
427. Ὁμοίως νὰ ἀποδείξητε τὰ θεωρήματα τῶν (§§ 196, 198).

Λύσις: α') Τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ (σχ. 169 Θ. Γ.) εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὴν ὀξεῖαν γωνίαν Β κοινήν. Ἄρα $\frac{(B\Gamma)}{(AB)}=\frac{(AB)}{(B\Delta)}$ καὶ $(AB)^2=$ $=(B\Gamma).(B\Delta)$. Ἐπίσης τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουσι τὴν ὀξεῖαν γωνίαν Γ κοινήν. Ἄρα $\frac{(B\Gamma)}{(A\Gamma)}=\frac{(A\Gamma)}{(\Gamma\Delta)}$. Ἄρα $(A\Gamma)^2=$ $=(B\Gamma).(\Gamma\Delta)$ (2). Αἱ ἰσότητες (1) καὶ (2) ἐκφράζουσι τὸ Θ. § 196 ὅτι: *Τὸ τετράγωνον ἑκάστης τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθ. τριγώνου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν τὴν ὑποτείνουσαν καὶ ὕψος τὴν προβολὴν αὐτῆς ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.*

β') Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ (σχ. 169 Θ. Γ.) εὕρομεν ὅτι (Π. IV § 229) $\frac{A\Delta}{B\Delta}=\frac{\Delta\Gamma}{A\Delta}$ ἢ $(A\Delta)^2=(B\Delta).(\Delta\Gamma)$. Αὕτη



Σχ. 49.



Σχ. 50.

ἐκφράζει τὸ Θ. § 198 δηλ. *τὸ τετράγωνον τοῦ ὕψους ὀρθ. τριγώνου ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν καὶ ὕψος τὰ δύο τμήματα, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ ὕψος διαιρεῖ τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ.*

Ἀσκήσεις σελ. 201.—**428. Νὰ ὁρίσητε τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τριγώνου καὶ νὰ σχηματίσητε τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει αὐτὰ κορυφάς. Νὰ ἐξετάσητε δὲ ἂν τοῦτο εἶναι ὅμοιον ἢ μὴ πρὸς τὸ πρῶτον.**

Λύσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 49) καὶ ΔΕΖ τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. Γνωρίζομεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ μέσα δύο πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν αὐτοῦ καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς. Ἄρα $ZE=\frac{1}{2}B\Gamma$, $\Delta E=\frac{1}{2}AB$ καὶ $\Delta Z=\frac{1}{2}A\Gamma$ ἢ

$$\frac{ZE}{B\Gamma}=\frac{1}{2},\ \frac{\Delta E}{AB}=\frac{1}{2} \text{ καὶ } \frac{\Delta Z}{A\Gamma}=\frac{1}{2} \text{ ἢ } \frac{ZE}{B\Gamma}=\frac{\Delta E}{AB}=\frac{\Delta Z}{A\Gamma}.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχουσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους εἶναι ὅμοια.

429. Ἂν δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὰ ὕψη τοῦ ἑνὸς εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ὕψη τοῦ ἄλλου. Νὰ ἐξετάσητε δὲ ἂν ἀληθεύῃ καὶ τὸ ἀντίστροφον.

Λύσις: Ἔστω ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (σχ. 50) εἶναι ὅμοια δηλ. ἔχουσι γωνΑ=γωνΔ, γωνΒ=γωνΕ, γωνΓ=γωνΖ καὶ $\frac{ΑΒ}{ΔΕ}=\frac{ΑΓ}{ΔΖ}=$ $=\frac{ΒΓ}{ΕΖ}$· Φέρομεν τὰ ὁμόλογα ὕψη αὐτῶν ΑΗ, ΔΘ, ΒΙ, ΕΚ, ΓΝ, ΖΡ. Τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΒΗ καὶ ΔΕΘ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουσιν ἀνὰ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην, τὴν γωνΒ=γωνΕ ἐξ ὑποθέσεως.

Ἄρα θὰ ἔχωσι καὶ τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους ἤτοι: $\frac{ΑΗ}{ΔΘ}=\frac{ΑΒ}{ΔΕ}$ (1). Ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθ. τριγώνων ΑΝΓ καὶ ΔΡΖ ἔχομεν $\frac{ΓΝ}{ΖΡ}=\frac{ΑΓ}{ΔΖ}$ (2). Ἐπίσης ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθ. τριγωνων ΑΒΙ καὶ ΔΕΚ ἔχομεν $\frac{ΒΙ}{ΕΚ}=\frac{ΑΒ}{ΔΕ}$ (3). Ἐπειδὴ δὲ οἱ δεύτεροι λόγοι τῶν ἰσοτήτων (1), (2), (3) εἶναι ἴσοι καὶ οἱ πρῶτοι αὐτῶν λόγοι θὰ εἶναι ἴσοι ἤτοι: $\frac{ΑΗ}{ΔΘ}=\frac{ΓΝ}{ΖΡ}=\frac{ΒΙ}{ΕΚ}$.

Ὥστε: *Τὰ ὁμόλογα ὕψη δύο ὁμοίων τριγώνων εἶναι ἀνάλογα.*

Ἀντιστρόφως: Ἂν τὰ ὕψη δύο τριγώνων εἶναι ἀνάλογα, τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια.

Λύσις: Ἔστω ἤδη ὅτι $\frac{ΑΗ}{ΔΘ}=\frac{ΓΝ}{ΖΡ}=\frac{ΒΙ}{ΕΚ}$· Θὰ δείξωμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι ὅμοια. Γνωρίζομεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιγινόμενον μιᾶς πλευρᾶς του ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον εἰς αὐτὴν ὕψος. Ἑπομένως ἂν Ε καὶ Ε′ καλέσωμεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἀντιστοίχως θὰ ἔχωμεν:

$$Ε=\frac{1}{2}(ΒΓ).(ΑΗ)=\frac{1}{2}(ΑΓ).(ΒΙ)=\frac{1}{2}(ΑΒ).(ΓΝ) \quad (1) \text{ καὶ}$$

$$Ε'=\frac{1}{2}(ΕΖ).(ΔΘ)=\frac{1}{2}(ΔΖ).(ΕΚ)=\frac{1}{2}(ΔΕ).(ΖΡ) \quad (2).$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) ἔχομεν:

$$\frac{Ε}{Ε'}=\frac{(ΒΓ).(ΑΗ)}{(ΕΖ).(ΔΘ)}=\frac{(ΑΓ).(ΒΙ)}{(ΔΖ).(ΕΚ)}=\frac{(ΑΒ).(ΓΝ)}{(ΔΕ).(ΖΡ)} \text{ ἢ}$$

$$\frac{(ΒΓ)}{(ΕΖ)}\cdot\frac{(ΑΗ)}{(ΔΘ)}=\frac{(ΑΓ)}{(ΑΖ)}\cdot\frac{(ΒΙ)}{(ΕΚ)}=\frac{(ΑΒ)}{(ΔΕ)}\cdot\frac{(ΓΝ)}{(ΖΡ)} \quad (3).$$

Ἀλλὰ $\frac{(ΑΗ)}{(ΔΘ)}=\frac{(ΒΙ)}{(ΕΚ)}=\frac{(ΓΝ)}{(ΖΡ)}$ ἐξ ὑποθέσεως. Διαιροῦντες τὰς ἰσότητας (3) διὰ τῶν ἴσων τούτων λόγων ἔχομεν $\frac{(ΒΓ)}{(ΕΖ)}=\frac{(ΑΓ)}{(ΔΖ)}=\frac{(ΑΒ)}{(ΔΕ)}$ καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους εἶναι ὅμοια.

430. Ἐμάθομεν, ὅτι ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν δύο τριγώνων προκύπτει ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν καὶ ἀντιστρόφως. Νὰ ἐξετάσητε ἂν συμβαίνῃ τοῦτο εἰς τετράγωνον καὶ ὀρθογώνιον μὲ ἀνίσους διαστάσεις. Ἔπειτα εἰς ρόμβον καὶ τετράγωνον.

Λύσις: Τὸ τετράγωνον καὶ τὸ ὀρθογώνιον ἔχουσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας, ὡς ὀρθάς, αἱ πλευραί των ὅμως δὲν εἶναι ἀνάλογοι· διότι ἂν α εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου καὶ β, γ, αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου, οἱ λόγοι $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$ εἶναι διάφοροι μεταξύ των, ἀφοῦ καθ' ὑπόθεσιν $\beta \neq \gamma$. Ἄρα: *τετράγωνον καὶ ὀρθογώνιον δὲν εἶναι ὅμοια σχήματα.*

Ἐπίσης ὁ ρόμβος καὶ τὸ τετράγωνον ἔχουσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους μὲ λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ρόμβου πρὸς μίαν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, ἀλλὰ αἱ γωνίαι αὐτῶν δὲν εἶναι ἴσαι, διότι τοῦ μὲν τετραγώνου εἶναι πᾶσαι ἴσαι, ἐνῷ τοῦ ρόμβου δὲν εἶναι πᾶσαι ἴσαι. Ἄρα: *τετράγωνον καὶ ρόμβος δὲν εἶναι ὅμοια σχήματα.*

Ἀσκήσεις σελὶς 202. **431. Νὰ κατασκευάσητε δύο ὀρθ. τρίγωνα μὲ ἀναλόγους καθέτους πλευράς. Νὰ ἐξετάσητε δέ, ἂν ταῦτα εἶναι ὅμοια ἢ μή.**

Λύσις: Εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουσι καὶ τὰς γωνίας τὰς περιεχομένας ὑπὸ τῶν ἀναλόγων πλευρῶν ἴσας, ὡς ὀρθάς.

432. Νὰ κατασκευάσητε δύο ὅμοια τρίγωνα καὶ νὰ γράψητε δύο ὁμολόγους διαμέσους αὐτῶν. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι αὗται διαιροῦσι ταῦτα εἰς τρίγωνα ὅμοια, ἓν πρὸς ἕν.

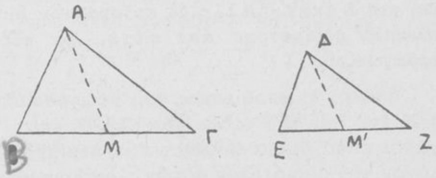
Λύσις: Ἔστωσαν ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ δύο τρίγωνα ὅμοια καὶ ΑΜ καὶ ΔΜ′ δύο ὁμόλογοι διάμεσοι αὐτῶν (σχ. 51). Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι ὅμοια θὰ ἔχωμεν:

$\widehat{A} = \widehat{\Delta}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$, $\widehat{\Gamma} = \widehat{Z}$ καὶ

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}.$$

Ἀλλὰ ΒΓ = 2 ΒΜ καὶ ΕΖ = = 2 ΕΜ′. Συνεπῶς:

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{2 . BM}{2\, EM'} = \frac{BM}{EM'}$$ καὶ



Σχ. 51.

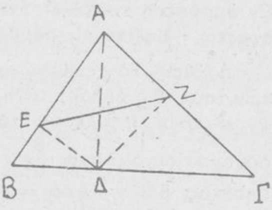
τὰ τρίγωνα ΑΒΜ καὶ ΔΕΜ′ ὡς ἔχοντα γων Β = γων Ε καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὰς πλευρὰς ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια. Ἐπίσης τὰ τρίγωνα ΑΜΓ καὶ ΔΜ′Ζ ἔχουσι γων Γ = γων Ζ καὶ $\frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{M\Gamma}{M'Z}$ καὶ συνεπῶς εἶναι ὅμοια.

433. Νὰ γράψητε τὸ ὕψος ΑΔ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ τὰς ΔΕ, ΔΖ ἀντιστοίχως καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ. Νὰ ἀποδείξητε δέ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΕΖ εἶναι ὅμοια.

Λύσις: Ἔστω ΑΔ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 52) καὶ ΔΕ⊥ΑΒ ΔΖ⊥ΑΓ. Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΔΒ ἔχομεν ὅτι $(ΑΔ)^2=(ΑΒ).(ΑΕ)$ (1) (§ 196), ἐκ δὲ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΔΓ ἔχομεν $(ΑΔ)^2=(ΑΓ).(ΑΖ)$ (2) (§ 196). Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι

$(ΑΒ).(ΑΕ)=(ΑΓ).(ΑΖ)$ ἢ $\frac{ΑΒ}{ΑΖ}=\frac{ΑΓ}{ΑΕ}$.

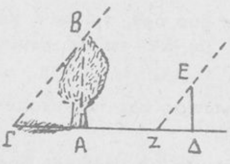
Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΓ καὶ ΑΕΖ ἔχουσι τὴν γωνίαν Α κοινὴν καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἀναλόγους. Ἄρα εἶναι ὅμοια.



Σχ. 52.

434. Πῶς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ κατακόρυφον ὕψος ἑνὸς δένδρου μὲ τὴν χρησιμοποίησιν ὁμοίων τριγώνων;

Λύσις: Ἔστω ΑΒ τὸ κατακόρυφον ὕψος δένδρου (σχ. 53), τὸ ὁποῖον ῥίπτει σκιὰν ΑΓ. Ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ἐμπηγνύομεν κατακόρυφον ῥάβδον ΔΕ γνωστοῦ μήκους, ἡ ὁποία θὰ ῥίπτῃ σκιὰν ΔΖ.



Σχ. 53.

Τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν (αἱ ἀκτῖνες τοῦ ἡλίου ΒΓ, ΕΖ θεωροῦνται παράλληλοι). Ἄρα $\frac{(ΑΒ)}{(ΔΕ)}=\frac{(ΑΓ)}{(ΔΖ)}$ καὶ $(ΑΒ)=\frac{(ΑΓ).(ΔΕ)}{(ΔΖ)}$.

Μετροῦντες ἄρα τὰ μήκη τῶν δύο σκιῶν καὶ τὸ μῆκος τῆς κατακορύφου ῥάβδου, εὑρίσκομεν τὸ κατακόρυφον ὕψος τοῦ δένδρου.

Ἀσκήσεις σελὶς 204.—**435. Αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 5 έκ. καὶ 8 ἑκατ. Ἄλλο δὲ ὀρθογώνιον ὅμοιον πρὸς αὐτὸ ἔχει δεκαπλασίαν περίμετρον ἀπὸ αὐτό. Νὰ εὕρητε τὰς διαστάσεις τοῦ β' ὀρθογωνίου.**

Λύσις: Ἡ περίμετρος τοῦ πρώτου ὀρθογωνίου εἶναι $5+5+8+8=$ $=26$ ἑκ. Τοῦ δὲ β' εἶναι $26\times10=260$ ἑκατ. Ἐπειδὴ ὅμως τὰ δύο ὀρθογώνια εἶναι ὅμοια ὁ λόγος τῶν περιμέτρων των εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν. Ἂν λοιπὸν χ, ψ κληθῶσιν αἱ διαστάσεις τοῦ β' ὀρθογωνίου, θὰ ἔχωμεν $\frac{χ}{5}=\frac{ψ}{8}=\frac{260}{26}=10$. Ἄρα $χ=50$ ἑκ. καὶ $ψ=80$ ἑκατ.

436. **Ἓν τριγωνικὸν οἰκόπεδον ἔχει περίμετρον 98 μέτρων καὶ εἶναι ὅμοιον πρὸς τρίγωνον μὲ πλευρὰς 3 ἑκατ., 5 ἑκατ., 6 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ οἰκοπέδου τούτου.**

Λύσις: Ἂν καλέσωμεν χ, ψ, ω τὰς πλευρὰς τοῦ τριγωνικοῦ οἰκοπέδου, τὰς ὁμολόγους πρὸς τὰς πλευρὰς 3, 5, 6 τοῦ πρὸς αὐτὸ ὁμοίου τριγώνου, θὰ ἔχωμεν $\frac{x}{0,03} = \frac{y}{0,05} = \frac{\omega}{0,05} = \frac{x+y+\omega}{0,03+0,05+0,06} =$

$= \frac{98}{0,14} = \frac{9800}{14} = 700$ καὶ $x=0,03 . 700=21$ μ. $y=0,5 . 700 = 35$ μ. καὶ $\omega=0,06 . 700 = 42$ μ.

437. Ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔχει βάσιν 5 μέτρ. καὶ περίμετρον 21 μέτρων. Ἄλλο τρίγωνον ὅμοιον πρὸς αὐτὸ ἔχει περίμετρον 52,6 μέτ. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου τούτου.

Λύσις: Ἂν x μέτρα εἶναι ἡ βάσις τοῦ β' τριγώνου ὁμοίου πρὸς τὸ πρῶτον, ἐπειδὴ ὁ λόγος δύο ὁμολόγων πλευρῶν αὐτῶν, ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν περιμέτρων των, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{x}{5} = \frac{52,5}{21} \text{ καὶ } x = \frac{52,5 . 5}{21} = \frac{262,5}{21} = 12,5 \text{ μέτρ.}$$

Σελὶς 206. ΠΟΡΙΣΜΑ: ***Ἂν αἱ πλευραὶ εὐθ. σχήματος πολλαπλασιασθῶσιν ὅλαι ἐπὶ λ, αἱ δὲ γωνίαι μείνωσιν ἀμετάβλητοι, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ λ^2.***

Ἀπόδειξις: Τὸ νέον σχῆμα ἔχει τὰς γωνίας αὐτοῦ ἴσας ἀνὰ μίαν πρὸς τὰς γωνίας τοῦ δοθέντος. Ἂν δὲ α' καὶ α εἶναι δύο ὁμόλογοι πλευραὶ αὐτῶν, θὰ εἶναι $\alpha'=\alpha . \lambda$ καὶ $\frac{\alpha'}{\alpha} = \lambda$ ἤτοι εἶναι ὅμοια, μὲ λόγον ὁμοιότητος λ.

Ἀλλ' ἂν Ε' κληθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ νέου εὐθυγράμμου σχήματος καὶ Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πρώτου, ἐπειδὴ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων εὐθ. σχημάτων ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν, θὰ ἔχωμεν $\frac{E'}{E} = \lambda^2$ καὶ $E' = E . \lambda^2$

Ἀσκήσεις σελ. 206.—**438. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον μὲ πλευρὰν 2 ἑκατ. καὶ ἔπειτα ἄλλο ἐννεαπλάσιον αὐτοῦ.**

Λύσις: Γνωρίζομεν, ὅτι τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα εἶναι καὶ ἰσογώνια καὶ συνεπῶς ὅμοια. Ἂν Ε καλέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πρώτου, Ε' τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δευτέρου καὶ x ἑκ. τὴν πλευρὰν αὐτοῦ θὰ ἔχωμεν

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{E'}{E} = 9 \text{ ἢ } \frac{x^2}{4} = 9 \text{ καὶ}$$

$x^2 = 36$ καὶ $x = 6$ ἑκατ. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ κατασκευάσωμεν ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 6 ἑκατ., ἵνα τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι ἐννεαπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ πρώτου ἰσοπλεύρου τριγώνου.

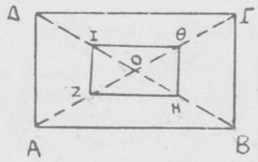
439. **Νὰ εὕρητε τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος ἑνὸς τριγώνου πρὸς ἄλλο διπλάσιον αὐτοῦ.**

Λύσις: Ἂν α εἶναι μία πλευρὰ τοῦ πρώτου τριγώνου καὶ α' ἡ πρὸς αὐτὴν ὁμόλογος πλευρὰ τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος διπλάσιον αὐτοῦ ἐμβαδόν, θὰ ἔχωμεν $\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2 = \frac{1}{2}$ ἢ $\frac{\alpha}{\alpha'} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

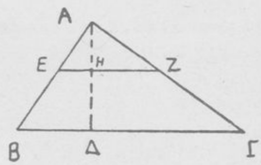
Ὥστε: ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος τοῦ πρώτου τριγώνου πρὸς τὸ ἔχον διπλάσιον ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

440. Ἓν ὀρθογώνιον ἔχει ἐμβαδὸν 24 τετρ. μέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ μέσα τῶν ἡμίσεων τῶν διαγωνίων αὐτοῦ.

Λύσις: Ἔστω ΑΒΓΔ (σχ. 54) ἓν ὀρθογώνιον καὶ Ζ, Η, Θ, Ι τὰ μέσα τῶν ἡμίσεων ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ τῶν διαγωνίων αὐτοῦ ΑΓ καὶ ΒΔ. Ἡ ΖΗ, ἐπειδὴ ἑνώνει τὰ μέσα Ζ καὶ Η τῶν πλευρῶν ΟΑ καὶ ΟΒ τοῦ τριγώνου ΑΟΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς. Δι' ὅμοιον λόγον καὶ $ΙΘ = \| \frac{ΔΓ}{2}$. Ἄρα $ΖΗ = \| ΙΘ$ καὶ τὸ τετράπλευρον ΖΗΘΙ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ὀρθογώνιον, διότι γωνΖΙΘ=γωνΑΔΓ, ὡς ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους. Ἀλλὰ γωνΑΔΓ=1 ὀρθή. Ἄρα καὶ γωνΒΙΘ= =1 ὀρθή. Ἐπειδὴ δὲ καὶ $ΑΒ = 2 . ΖΗ$ καὶ $ΔΑ = 2 . ΖΙ$, θὰ εἶναι $\frac{ΑΒ}{ΖΗ} = 2$ καὶ $\frac{ΔΑ}{ΖΙ} = 2$ ἢ $\frac{ΑΒ}{ΖΗ} = \frac{ΔΑ}{ΖΙ}$. Ἄρα τὰ ὀρθογώνια εἶναι ὅμοια καὶ συνεπῶς $\frac{Ε}{Ε'} = 4$ καὶ ἐπειδὴ $Ε = 24$ θὰ εἶναι $\frac{24}{Ε'} = 4$ ἢ $4\ Ε' = 24$ καὶ $Ε' = 24 : 4 = 6$ τ. μ.



Σχ. 54.



Σχ. 55.

441. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει ἐμβαδὸν 16 τετρ. ἑκατ. καὶ ὕψος $(ΑΔ) = 2\sqrt{3}$ ἑκατ. Νὰ ὁρίσητε ἐπὶ τοῦ ὕψους τούτου ἓν σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε ἂν φέρωμεν ἀπὸ αὐτὸ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ, νὰ ἀποχωρίζηται τρίγωνον 3 τετ. ἑκατ.

Λύσις: Ἔστω ΑΒΓ (σχ. 55) τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐμβαδὸν 16 τετ. ἑκατ. καὶ ὕψος $(ΑΔ) = 2\sqrt{3}$ ἑκατ. Ἂν Η εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον καὶ ἀχθῇ δι' αὐτοῦ ἡ ΕΖ ∥ ΒΓ, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΕΖ εἶναι ὅμοια, διότι Α=Α, Β=Ε καὶ Γ=Ζ. Ἄρα $\frac{(ΑΕΖ)}{(ΑΒΓ)} = \left(\frac{ΑΕ}{ΑΒ}\right)^2 = \left(\frac{ΑΗ}{ΑΔ}\right)^2 = \frac{(ΑΗ)^2}{(ΑΔ)^2}$ ἢ $\frac{3}{16} = \frac{(ΑΗ)^2}{(2\sqrt{3})^2} = \frac{(ΑΗ)^2}{4.3} = \frac{(ΑΗ)^2}{12}$ καὶ $16\ (ΑΗ)^2 = 12 . 3 = 36$ καὶ $(ΑΗ)^2 = \frac{36}{16}$ καὶ $(ΑΗ) = \sqrt{\frac{36}{16}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ ἑκατ. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ λάβωμεν ἐπὶ τοῦ ὕψους ΑΔ καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Α εὐθ. τμῆμα ΑΗ μήκους 1,5 ἑκατ. καὶ διὰ τοῦ ἄκρου Η αὐτοῦ νὰ φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ.

Ἀσκήσεις σελὶς 207. **442. Ἓν ὀρθογώνιον οἰκόπεδον ἔχει διαστάσεις 40 μέτ. καὶ 25 μέτ. Νὰ ἀπεικονίσητε αὐτὸ ὑπὸ κλίμακα $\frac{\ }{1000}$.**

Λύσις: Αἱ διαστάσεις τοῦ σχεδίου θὰ εἶναι 1000 φορὰς μικρότεραι τῶν πραγματικῶν διαστάσεων τοῦ ὀρθογωνίου οἰκοπέδου ἤτοι 40: 1000=0,04 μ καὶ 25 : 1000 = 0,025 μ. Κατασκευάζομεν λοιπὸν ὀρθογώνιον μὲ βάσιν 4 ἑκατ. καὶ ὕψος 2,5 ἑκατ. καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν τὸ σχέδιον τοῦ ὀρθ. οἰκοπέδου.

443. Τὸ τρίγωνον ΔΕΖ (σχ. 173 Θ. Γ.) ἀπεικονίζει ἀγρὸν ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{10000}$. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀγροῦ τούτου.

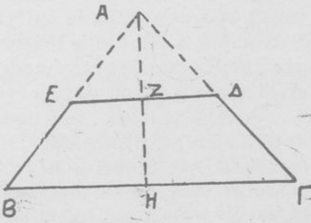
Λύσις: Ἡ βάσις τοῦ τριγώνου ΔΕΖ (σχ. 173 Θ. Γ.) μετρουμένη μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον εἶναι (ΕΖ)=3,5 ἑκατ. καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ 2 ἑκατ. Ἄρα τὸ ἐμβαδόν του εἶναι $\frac{3,5 \cdot 2}{2}$=3,5 τετ. ἑκατ. Ἐπειδὴ ὅμως τοῦτο εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸν ἀπεικονιζόμενον ἀγρὸν μὲ λόγον ὁμοιότητος $\frac{1}{10000}$, ἄν Ε΄ καλέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πραγματικοῦ ἀγροῦ, θὰ ἔχωμεν $\frac{E'}{(\Delta EZ)} = 10000^2 = 100000000$ καὶ $\frac{E'}{3,5} = 100000000$ καὶ
$E' = 3,5 \cdot 100000000 = 350000000$ τετ. ἑκατ. = 35000 τετ. μέτρα=35 βασ. στρέμματα, διότι 10000 τετ. ἑκατ. = 1 τ.μ. καὶ 1000 τετ. μέτρα=1 βασ. στρέμμα.

444. Ἡ πλευρὰ ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ἔχει μῆκος 8 μέτρων. Νὰ ἀπεικονίσητε αὐτὸ μὲ ἄλλο 1000 φορὰς μικρότερον.

Λύσις: Ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὴν πλευρὰν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου μὲ τὸ ὁποῖον θὰ ἀπεικονίσωμεν τὸ πρῶτον. Ἄν χ καλέσωμεν αὐτὴν θὰ ἔχωμεν $\frac{\chi^2}{8^2} = \frac{1}{10000}$, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν $10000\chi^2 = 64$,
$\chi^2 = \frac{64}{10000}$ καὶ $\chi = \sqrt{\frac{64}{10000}} = \frac{8}{100} = 0,08$ μ. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ κατασκευάσωμεν ἰσόπλευρον τρίγωνον μὲ πλευρὰν 8 ἑκατ., ἵνα ἔχωμεν τὸ σχέδιον τοῦ δοθέντος ἰσοπλεύρου τριγώνου.

Σελὶς 208. **445. Νὰ ἀποδείξητε, ὅτι ἡ ὑπὸ τῶν μέσων τῶν βάσεων τραπεζίου ὁριζομένη εὐθεῖα διέρχεται ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του.**

Λύσις: Ἔστω τὸ τραπέζιον ΒΓΔΕ (σχ. 56) καὶ Η, Ζ τὰ μέσα τῶν βάσεων αὐτοῦ ΒΓ καὶ ΔΕ. Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΒΕ, ΗΖ, ΓΔ προεκτεινόμεναι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α.



Σχ. 56.

Ἐπειδὴ ΒΗ = ΗΓ καὶ ΖΕ = ΖΔ θὰ εἶναι καὶ $\frac{BH}{ZE} = \frac{H\Gamma}{Z\Delta} \neq 1$, διότι ἄλλως τὸ τετράπλευρον ΒΓΔΕ θὰ ἦτο παραλληλόγραμμον. Ἐπειδὴ δὲ αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΕΔ καὶ ΒΓ τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα μὲ λόγον $\neq 1$ ὑπὸ τῶν μὴ παραλλήλων εὐθειῶν ΒΕ, ΗΖ, ΓΔ, αὗται προεκτεινόμεναι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α (§ 238 ἀντίστροφον).

446. Μία εὐθεῖα κινεῖται παραλλήλως πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ. Νὰ εὕρητε τὸν γεωμ. τόπον τῶν μέσων τῶν τμημάτων αὐτῆς, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ τῶν ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου τούτου.

Λύσις: Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον (σχ. 56) καὶ ΕΔ μία τυχοῦσα θέσις τῆς παραλλήλου πρὸς τὴν ΒΓ εὐθείας. Ἂν Ζ εἶναι τὸ μέσον ταύτης καὶ Η τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ΑΖ προεκτεινομένη τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἐπειδὴ αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΕΔ καὶ ΒΓ τέμνονται ὑπὸ εὐθειῶν διερχομένων διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α, θὰ τέμνωνται εἰς μέρη ἀνάλογα ἤτοι: $\frac{ΕΖ}{ΒΗ} = \frac{ΖΔ}{ΗΓ} \neq 1$. Ἀλλὰ οἱ ἡγούμενοι ὅροι εἶναι ἴσοι, διότι καθ' ὑπόθεσιν τὸ Ζ εἶναι μέσον τῆς ΕΔ. Ἄρα καὶ οἱ ἑπόμενοι εἶναι ἴσοι ἤτοι ΒΗ=ΗΓ καὶ συνεπῶς ἡ ΑΗ διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ὥστε πᾶν σημεῖον Ζ ἔχον τὴν ἰδιότητα κεῖται ἐπὶ τῆς διαμέσου ΑΗ.

Ἀντιστρόφως: Ἔστω Ζ τυχὸν σημεῖον τῆς διαμέσου ΑΗ. Ἐὰν φέρωμεν ἐξ αὐτοῦ τὴν ΕΔ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ θὰ ἔχωμεν $\frac{ΒΗ}{ΕΖ} = \frac{ΗΓ}{ΖΔ}$. Ἐπειδὴ δὲ ΒΗ = ΗΓ, θὰ εἶναι καὶ ΕΖ = ΖΔ ἤτοι τὸ σημεῖον Ζ εἶναι μέσον εὐθ. τμήματος παραλλήλου πρὸς τὴν ΒΓ καὶ περιεχομένου μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

Ὥστε ὁ ζητούμενος Γ. Τ. εἶναι ἡ διάμεσος ΑΗ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἡ ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ, πρὸς τὴν ὁποίαν εἶναι παράλληλος ἡ κινουμένη εὐθεῖα.

447. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον τριπλάσιον δοθέντος τετραγώνου.

Λύσις: Ἐὰν α εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ δοθέντος τετραγώνου καὶ χ ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου νὰ κατασκευασθῇ, θὰ ἔχωμεν $χ^2 = 3α^2$ ἢ $\frac{χ^2}{α^2} = \frac{3}{1}$. Ἂν δὲ λάβωμεν αὐθαιρέτως εὐθ. τμῆμα ν καὶ ἕτερον μ τριπλάσιον αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν $\frac{χ^2}{α^2} = \frac{μ}{ν}$ καὶ ἐργαζόμεθα κατὰ τὸ πρόβλημα § 239. Πρὸς τοῦτο ὁρίζομεν ἐπ' εὐθείας διαδοχικὰ καὶ ὁμόρροπα τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ (σχ. 176 Θ. Γ.) ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ ὁρισθέντα μ καὶ ν. Μὲ διάμετρον ΑΓ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν καὶ ἐκ τοῦ Β ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ, τέμνουσαν τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἴς τι σημεῖον Δ. Ἐπὶ τῆς εὐθείας δὲ ΔΓ ὁρίζομεν τμῆμα ΔΕ=α καὶ ἄγομεν τὴν ΕΖ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ. Τὸ τμῆμα ΔΖ τῆς εὐθείας ΔΑ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

Ἀπόδειξις: Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΔΖΕ ἔχομεν $(ΔΖ)^2 : (ΔΕ)^2 = (ΖΗ) : (ΗΕ)$ (1). Ἀλλὰ ΖΗ : ΗΕ = ΑΒ : ΒΓ = μ : ν = 3 : 1, ἐπειδὴ αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΓ, ΖΕ τέμνονται ὑπὸ ἀκτίνων δέσμης εὐθειῶν μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Δ καὶ (ΔΕ) = α. Συνεπῶς ἡ (1) γίνεται $(ΔΖ)^2 : α^2 = 3 : 1$ καὶ $(ΔΖ)^2 = 3α^2$.

448. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὰ $\frac{3}{4}$ δοθέντος τετραγώνου.

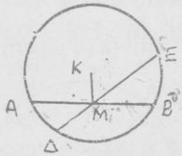
Λύσις : Ἂν α ἡ πλευρὰ τοῦ δοθέντος καὶ χ ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου νὰ κατασκευασθῇ τετραγώνου, θὰ ἔχωμεν :

$\chi^2 = \frac{3}{4}\alpha^2$ ἢ $\frac{\chi^2}{\alpha^2} = \frac{3}{4}$. Ὁρίζομεν αὐθαιρέτως τμῆμα λ καὶ σχηματίζομεν δύο ἄλλα εὐθύγραμμα τμήματα $\mu = 3\lambda$ καὶ $\nu = 4\lambda$, ὅτε ἔχομεν $\frac{\chi^2}{\alpha^2} = \frac{\mu}{\nu}$ καὶ ἐργαζόμεθα, ὡς εἰς προηγουμένην ἄσκησιν 447.

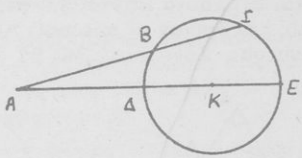
449. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον διπλάσιον δοθέντος ὀρθογωνίου.

Λύσις: Μετασχηματίζομεν πρῶτον τὸ δοθὲν ὀρθογώνιον εἰς ἰσοδύναμον τετράγωνον κατὰ τὸ πρόβλημα § 201 καὶ οὕτῳ ἀναγόμεθα εἰς τὸ πρόβλημα : «*Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἔχον πρὸς δοθὲν τετράγωνον λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον δυο δοθέντων εὐθ. τμημάτων μ καὶ ν*» ἔνθα $\mu = 2\nu$.

Ἀσκήσεις σελὶς 221.— **450. Ἀπὸ τὸ μέσον χορδῆς μήκους 0,40 μ. ἄγεται ἄλλη χορδή, ἡ ὁποία διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ μέσου τούτου εἰς δύο μέρη. Τὸ ἕν ἀπὸ αὐτὰ ἔχει μῆκος 0,2 μέτ. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τοῦ ἄλλου μέρους τῆς χορδῆς ταύτης.**



Σχ. 57.



Σχ. 58.

Λύσις : Ἔστω χορδὴ ΑΒ (σχ. 57) μήκους 0,40μ., Μ τό μέσον αὐτῆς καὶ ΔΕ ἄλλη χορδὴ διερχομένη διὰ τοῦ Μ καὶ χωριζομένη ὑπ' αὐτοῦ εἰς δύο μέρη οὕτως, ὥστε (ΜΔ) = 0,2 μ. Ζητεῖται τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ΜΕ.

Γνωρίζομεν (§ 240) ὅτι (ΜΑ) . (ΜΒ) = (ΜΔ) . (ΜΕ) (1). Ἀλλὰ (ΜΑ) = $= (\text{ΜΒ}) = \frac{(\text{ΑΒ})}{2} = \frac{0{,}40}{2} = 0{,}2$ καὶ (ΜΔ) = 0,2. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἰσότητα (1) ἔχομεν : 0,2 . 0,2 = 0,2 (ΜΕ) καὶ (ΜΕ) = 0,2.

Ὥστε καὶ ἡ χορδὴ ΔΕ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒ. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, διότι τότε ἡ ΚΜ, ὡς ἑνοῦσα τὸ κέντρον Κ μὲ τὸ μέσον Μ τῶν χορδῶν ΑΒ καὶ ΔΕ, θὰ ἦτο κάθετος ἐπ' ἀμφοτέρας. Ἀλλὰ ἐκ σημείου Μ εὐθείας ΚΜ μία καὶ μόνον ἄγεται κάθετος ἐπ' αὐτήν. Συνεπῶς πρέπει ἀντὶ (ΔΜ) = 0,2 νὰ τεθῇ (ΔΜ) = 0,15 ἢ ἄλλος ἀριθμὸς διάφορος τοῦ 0,2.

451. Ἐκ τοῦ σημείου Α ἀπέχοντος 10 ἑκ. τοῦ κέντρου Κ κύκλου ἄγεται εὐθεῖα τέμνουσα τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ΒΓ, ἄν (ΑΒ) = 8 ἑκατ. καὶ ἡ ἀκτὶς εἶναι 3 ἑκατ.

Λύσις : Ἔστω κύκλος Κ (σχ. 58) ἀκτῖνος 3 ἑκατ., σημεῖον Α ἀπέχον τοῦ κέντρου Κ αὐτοῦ 10 ἑκατ., καὶ ΑΒΓ μία τέμνουσα τοιαύτη ὥστε (ΑΒ) = 8 ἑκατ. Ζητεῖται τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ΒΓ.

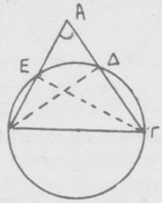
Γνωρίζομεν ὅτι (ΑΒ).(ΑΓ) = (ΑΔ).(ΑΕ) (1). Ἀλλ' ἐπειδὴ (ΑΚ) = 10 ἑκατ. καὶ (ΚΔ) = (ΚΕ) = 3 ἑκατ., θὰ εἶναι (ΑΔ) = 10 − 3 = 7 ἑκατ. καὶ (ΑΕ) = (ΑΚ) + (ΚΕ) = 10 + 3 = 13 ἑκατ. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἰσότητα (1) ἔχομεν :

8.(ΑΓ) = 7.13 = 91 καὶ (ΑΓ) = 91 : 8 = 11, 375 ἑκατ. Ἄρα (ΒΓ) = = (ΑΓ) − (ΑΒ) = 11, 375 ἑκατ. − 8 ἑκατ. = 3, 375 ἑκατ.

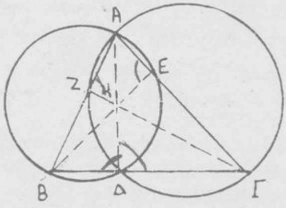
Σημείωσις : Δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν καὶ ἀμέσως τὸν τύπον (ΑΒ).(ΑΓ) = $\delta^2 - \rho^2$ (§ 241), ὅστις δίδει τὴν δύναμιν τοῦ σημείου Α πρὸς τὸν κύκλον Κ καὶ θὰ ἔχωμεν 8.(ΑΓ) = $10^2 - 3^2$ = 100 − 9 = 91 καὶ 8 (8 + ΒΓ) = 91 ἢ 64 + 8 (ΒΓ) = 91 καὶ 8 (ΒΓ) = 91 − 64 = 27 καὶ (ΑΓ) = 27 : 8 = 3, 375 ἑκατ.

452. Ἂν ΒΔ καὶ ΓΕ εἶναι ὕψη τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀποδείξητε, ὅτι (ΑΒ) . (ΑΕ) = (ΑΓ) . (ΑΔ).

Λύσις : Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 59) καὶ ΒΔ, ΓΕ δύο ὕψη αὐτοῦ. Ἐπειδὴ ἡ ΒΓ φαίνεται ἐκ τῶν σημείων Δ καὶ Ε ὑπ' ὀρθὰς γωνίας, ἕπεται ὅτι ταῦτα κεῖνται ἐπὶ περιφερείας κύκλου μὲ διάμετρον τὴν ΒΓ, εἰς τὴν ὁποίαν αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τέμνουσαι. Συνεπῶς (§ 240) θὰ εἶναι (ΑΒ).(ΑΕ) = (ΑΓ).(ΑΔ).



Σχ. 59.



Σχ. 60.

453. Ἂν Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τριγώνου ΑΒΓ καὶ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τὰ ὕψη αὐτοῦ, νὰ ἀποδείξητε, ὅτι :

(ΗΔ) (ΗΑ) = (ΗΕ) (ΗΒ) = (ΗΖ) (ΗΓ).

Λύσις : Ἔστω Η τὸ ὀρθόκεντρον τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 60). Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΕΒ εἶναι ὀρθογώνια μὲ ὑποτείνουσαν τὴν ΑΒ αἱ κορυφαὶ Δ καὶ Ε θὰ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας μὲ διάμετρον τὴν ΑΒ. Εἰς ταύτην τὰ ὕψη ΑΔ καὶ ΒΕ εἶναι χορδαὶ τεμνόμεναι εἰς τὸ Η. Συνεπῶς (§ 240) θὰ εἶναι : (ΑΗ) (ΗΔ) = (ΗΒ) (ΗΕ) (1).

Ἐπίσης, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΖΓ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὀρθογώνια μὲ ὑποτείνουσαν τὴν ΑΓ, αἱ κορυφαὶ Ζ καὶ Δ θὰ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας μὲ διάμετρον τὴν ΑΓ, εἰς τὴν ὁποίαν τὰ ὕψη ΓΖ καὶ ΑΔ εἶναι χορδαὶ τεμνόμεναι εἰς τὸ Η. Συνεπῶς (§ 240) θὰ εἶναι : (ΗΑ) (ΗΔ) = (ΗΓ) (ΗΖ) (2).

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι (ΗΑ) (ΗΔ) = (ΗΒ) (ΗΕ) = (ΗΓ) (ΗΖ).

454. Ἂν τὰ εὐθ. τμήματα α, β, γ, δ συνιστῶσι τὴν ἀναλογίαν $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ καὶ εἶναι γνωστὰ τρία οἱαδήποτε τούτων, νὰ γραφῇ τὸ ὑπολειπόμενον διὰ μεθόδου στηριζομένης ἐπὶ τῆς ἰδιότητος (§ 240).

Λύσις: Ἐπειδὴ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha\delta = \beta\gamma$ ἤτοι τὰ εὐθ. τμήματα α, δ, β, γ εἶναι μέρη δύο χορδῶν κύκλου τεμνομένων ἐντὸς αὐτοῦ. Ἐὰν εἶναι γνωστὰ τὰ α, δ, β ἐργαζόμεθα, ὡς ἀκολούθως, διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ γ. Ἐπ' εὐθείας λαμβάνομεν διαδοχικὰ τμήματα $ΑΟ = \alpha$, $ΟΒ = \delta$. Διὰ τοῦ σημείου Ο φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν $ΟΓ = \beta$.

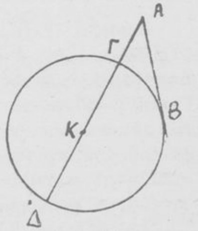
Ἔπειτα γράφομεν τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία, διέρχεται διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ, ἥτις τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΔΓ εἴς τι σημεῖον Δ. Τὸ οὕτως ὁριζόμενον εὐθ. τμῆμα ΟΔ εἶναι τὸ ὑπολειπόμενον εὐθ. τμῆμα γ. Πράγματι ἔχομεν. $(ΟΑ)(ΟΒ) = (ΟΓ)(ΟΔ)$ ἢ $\alpha\delta = \beta.(ΟΔ)$. Ἐπειδὴ ὅμως ἐξ ὑποθέσεως εἶναι καὶ $\alpha\delta = \beta\gamma$, θὰ ἔχωμεν $\beta.(ΟΔ) = \beta\gamma$ ἢ $(ΟΔ) = \gamma$.

Σελὶς 212. ΠΟΡΙΣΜΑ: *Ἂν σημεῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου, ἡ δύναμις αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον τοῦτον ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἐφαπτομένης, ἥτις ἄγεται ἐξ αὐτοῦ εἰς τὸν κύκλον τοῦτον.*

Ἀπόδειξις: Κατὰ τὸ (Θ. ΙΙ § 272) εἶναι $(ΑΒ)^2 = (ΑΓ)(ΑΔ)$ (σχ. 178 Θ. Γ) Ἀλλὰ ἐξ ὁρισμοῦ τὸ σταθερὸν γινόμενον (ΑΓ) (ΑΔ) καλεῖται δύναμις τοῦ σημείου Α πρὸς τὸν κύκλον Κ (§ 241). Ἄρα αὕτη ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἐκ τοῦ Α ἐφαπτομένης πρὸς τὴν περιφέρειαν Κ.

β΄) Τρόπος: Εἴδομεν (§ 241) ὅτι ἡ δύναμις τοῦ Α, κειμένου ἐκτὸς τοῦ κύκλου Κ, εἶναι ἴση μὲ $\delta^2 - \rho^2$, ἔνθα $\delta = (ΑΚ)$ καὶ $\rho =$ ἀκτίς. Ἂν λοιπὸν ἀχθῇ (σχ. 178 Θ. Γ.) ἡ ΑΚ καὶ ΚΒ σχηματίζεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΚ ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν $(ΑΒ)^2 = (ΑΚ)^2 - (ΚΒ)^2 = \delta^2 - \rho^2 =$ δύναμις τοῦ σημείου Α πρὸς τὸν κύκλον Κ.

Ἀσκήσεις σελὶς 211.— **455. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς ἐφαπτομένης ΑΒ κύκλου Κ ἀκτῖνος 8 ἑκατ. ἥτις ἄγεται ἐκ σημείου Α ἀπέχοντος τοῦ κέντρου 12 ἑκατ.**



Σχ. 61.

Λύσις: Γνωρίζομεν, ὅτι $(ΑΒ)^2 = \delta^2 - \rho^2$. Ἀλλὰ $\delta = 12$ ἑκατ. καὶ $\rho = 8$ ἑκατ. Ἄρα $(ΑΒ)^2 = 12^2 - 8^2 = 144 - 64 = 80$ καὶ $(ΑΒ) = \sqrt{80} = \sqrt{5\ 16} = 4\sqrt{5}$ ἑκατ.

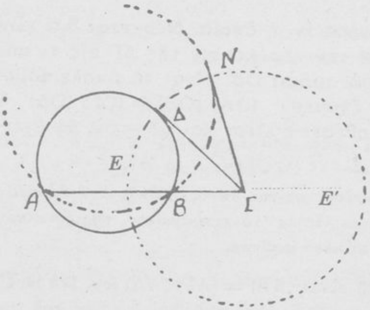
β΄. Τρόπος: Γνωρίζομεν (§ 242), ὅτι $(ΑΒ)^2 = (ΑΓ)(ΑΔ)$ (σχ. 61). Ἀλλὰ $(ΑΓ) = (ΑΚ) - (ΚΓ) = 12$ ἑκατ. $- 8$ ἑκ. $= 4$ ἑκ. καὶ $(ΑΔ) = (ΑΚ) + (ΚΔ) = 12 + 8 = 20$ ἑκατ.

Ἄρα $(ΑΒ)^2 = 4.20 = 80$ καὶ $(ΑΒ) = \sqrt{80} = \sqrt{5.16} = 4\sqrt{5}$ ἑκατ.

456. Ἐπ' εὐθείας δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ. Νὰ εὕρητε τὸν γεωμ. τόπον τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τοῦ Γ εἰς τὰς περιφερείας, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β.

Λύσις: Ἔστωσαν Α, Β, Γ τὰ δοθέντα σημεῖα (σχ. 62) καὶ ΓΔ ἐφαπτομένη ἐκ τοῦ Γ πρὸς τυχοῦσαν περιφέρειαν διερχομένην διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β.

Γνωρίζομεν (§ 242) ὅτι $(ΓΔ^2 = (ΓΑ)(ΓΒ)$. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον $(ΓΑ).(ΓΒ)$ εἶναι σταθερόν, ἀφοῦ ὡρισμένη εἶναι ἡ θέσις τῶν σημείων Α, Β καὶ Γ. Ἄρα καὶ $(ΓΔ) =$ $=$σταθερὸν καὶ τὰ σημεῖα Δ, ὡς ἀπέχοντα σταθερὰν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ σταθερὸν σημεῖον Γ, θὰ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας κύκλου γραφομένης μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα τὴ μέσην ἀνάλογον τῶν γνωστῶν εὐθυγρ. τμητάτων ΓΑ καὶ ΓΒ.

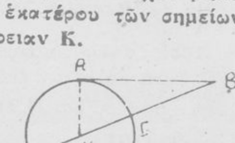


Σχ. 62.

Ἀντιστρόφως: Τυχὸν σημεῖον Ν ταύτης εἶναι σημεῖον ἐπαφῆς ἐφαπτομένης, ἀγομένης ἐκ τοῦ Α πρὸς περιφέρειαν διερχομένην διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β. Διότι ἂν ἀχθῇ ἡ ΓΝ, θὰ εἶναι $(ΓΝ)^2 = (ΓΑ)(ΓΒ)$ ἐκ κατασκευῆς. Ἀλλὰ τότε (Θ. § 242 ἀντίστροφον) ἡ περιφέρεια ἡ διερχομένη διὰ τῶν σημείων Α, Β, Ν ἐφάπτεται τῆς εὐθείας ΓΝ εἰς τὸ Ν. Ἄρα ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος εἶναι ἡ περιφέρεια (Γ, ΓΔ) ἐξαιρέσει τῶν σημείων Ε καὶ Ε' εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ΑΒ, προεκτεινομένη, τέμνει τὴν περιφέρειαν ταύτην.

457. Ἐκ σημείου Α περιφερείας Κ, ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ρ ἄγεται ἐφαπτομένη ταύτης καὶ ὁρίζεται ἐπ' αὐτῆς τμῆμα ΑΒ ἔχον μῆκος 4 ρ. Νὰ εὕρητε τὴν ἀπόστασιν τοῦ Β ἀπὸ ἑκατέρου τῶν σημείων, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ εὐθεῖα ΒΚ τέμνει τὴν περιφέρειαν Κ.

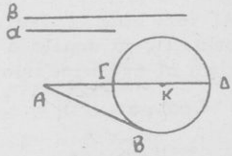
Λύσις: Ἔστω Κ ἡ δοθεῖσα περιφέρεια (σχ. 63) καὶ ΑΒ ἡ ἐφαπτομένη αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον Α μήκους 4ρ, ὅπου ρ ἡ ἀκτίς. Ἂν Γ καὶ Δ εἶναι τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ΚΒ τέμνει τὴν περιφέρειαν Κ θὰ ἔχωμεν ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΚΑΒ: $(ΒΚ)^2 = (ΚΑ)^2 + (ΑΒ)^2 = ρ^2 + (4ρ)^2 = ρ^2 + 16ρ^2 = 17ρ^2$ καὶ $(ΒΚ) = ρ\sqrt{17}$ Ὅθεν $(ΒΓ) = (ΒΚ) - (ΚΓ) = ρ\sqrt{17} - 1 = ρ(\sqrt{17} - 1)$ καὶ $(ΒΔ) = (ΒΚ) + (ΚΔ) = (ΒΚ) + ρ = ρ\sqrt{17} + ρ = ρ(\sqrt{17} + 1)$. Ἐπειδὴ δὲ $\sqrt{17} = 4{,}12$ θὰ εἶναι: $(ΒΓ) = (4{,}12 - 1)\,ρ = 3{,}12\,ρ$ καὶ $(ΒΔ) = 5{,}12ρ$.



Σχ. 63.

458. Νὰ γραφῇ τὸ μέσον ἀνάλογον δύο δοθέντων εὐθ. τμημάτων α καὶ β διὰ μεθόδου στηριζομένης ἐπὶ τῆς ἰδιότητος (§ 242).

Λύσις: Ἔστωσαν α καὶ β τὰ δοθέντα εὐθ. τμήματα καὶ $\alpha<\beta$. Ἂν χ καλέσωμεν τὸ μέσον ἀνάλογον αὐτῶν, θὰ ἔχωμεν $\chi^2=\alpha\beta$. Ἐὰν παραβάλωμεν τὴν σχέσιν ταύτην πρὸς τὴν σχέσιν $(ΑΒ)^2=(ΑΓ)\ (ΑΔ)$, τὴν ὁποίαν εὕρομεν διὰ τοῦ Θ. § 242, ἐννοοῦμεν, ὅτι τὸ εὐθ. τμῆμα χ θὰ εἶναι ἐφαπτομένη περιφερείας ἐκ σημείου Α κειμένου ἐκτὸς αὐτῆς καὶ εἰς τὴν ὁποίαν ἡ μὲν ὅλη τέμνουσα ΑΔ θὰ ἰσοῦται μὲ β, τὸ δὲ ἐκτὸς τῆς περιφερείας μέρος τῆς τεμνούσης, θὰ εἶναι α καὶ συνεπῶς ἡ περιφέρεια θὰ ἔχει διάμετρον β—α.



Σχ. 64.

Κατασκευή. Ἐπ' εὐθείας λαμβάνομεν τμῆμα ΑΔ=β (σχ. 64) καὶ ἕτερον ΑΓ=α. Ἐπὶ τῆς ΓΔ, ὡς διαμέτρου, γράφομεν περιφέρειαν Κ καὶ ἐκ τοῦ σημείου Α φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΑΒ. Αὕτη θὰ εἶναι τὸ μέσον ἀνάλογον τμῆμα τῶν δοθέντων εὐθ. τμημάτων α καὶ β. Διότι $(ΑΒ)^2=(ΑΓ)\ (ΑΔ)$ (Θ. § 242). Ἀλλὰ $(ΑΓ)=\alpha$ καὶ $(ΑΔ)=\beta$. Ὅθεν $(ΑΒ)^2=\alpha\beta$.

Ἀσκήσεις σελὶς 213. **459. Ἓν ὀρθογώνιον ἔχει ἐμβαδὸν 9 τετ. ἑκατ., αἱ δὲ διαστάσεις του διαφέρουσι κατὰ 2 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὰ μήκη τῶν διαστάσεων τούτων.**

Λύσις: Ἂν ΓΔ, ΓΕ εἶναι αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου, γνωρίζομεν ἐκ τοῦ προβλήματος § 243, ὅτι τὰ μήκη αὐτῶν παρέχονται ὑπὸ τῶν τύπων:

$$(ΓΔ)=\frac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2+\delta^2}-\frac{\delta}{2},\quad (ΓΕ)=\frac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2+\delta^2}+\frac{\delta}{2}\quad (1),$$

ὅπου δ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν διαστάσεών του καὶ α ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ δοθὲν ὀρθογώνιον ἐμβαδοῦ 9 τετ. ἑκατ. Εἶναι ὅθεν $\delta=2$ ἑκ. καὶ $\alpha=\sqrt{9}=3$ ἑκατ. καὶ οἱ τύποι (1) δίδουσι:

$$(ΓΔ)=\frac{1}{2}\sqrt{4.3^2+2^2}-\frac{2}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{36+4}-1=\frac{1}{2}\sqrt{40}-1=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4.40}-1=\frac{2}{2}\sqrt{10}-1=\sqrt{10}-1 \text{ ἑκατ.}$$

$$(ΓΕ)=\frac{1}{2}\sqrt{40}+1=\frac{1}{2}\sqrt{4.10}+1=\sqrt{10}+1 \text{ ἑκατ.}$$

460. Δίδονται δύο εὐθ. τμήματα μὲ μήκη 6 ἑκατ. καὶ 4 ἑκατ. Νὰ κατασκευάσητε τὰς ἀπολύτους τιμὰς τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-6\chi-16=0$.

Λύσις: Ἐπειδὴ ἡ διακρίνουσα τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-6\chi-16=0$ εἶναι $6^2-4(-16)=36+64=100>0$, αἱ ρίζαι ρ_1, ρ_2 αὐτῆς εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι. Ἐπειδὴ δὲ $\rho_1 . \rho_2=-16$ καὶ $\rho_1+\rho_2=6$, αὗται εἶναι ἑτερόσημοι καὶ μεγαλυτέρα κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἡ θετική. Ἂν λοιπὸν $\rho_1>0$, τότε $\rho_2<0$ καὶ αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ αὐτῶν θὰ εἶναι ρ_1 καὶ $-\rho_2$ διότι ἑνὸς μὲν θετικοῦ ἀριθμοῦ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ εἶναι ἴση πρὸς αὐτόν, ἑνὸς δὲ ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ του εἶναι ἴση πρὸς τὸν ἀντίθετον αὐτοῦ. Θὰ ἔχωμεν δὲ $\rho_1 - (-\rho_2) = 6$ ἑκατ. καὶ $\rho_1 (-\rho_2) = 16$ τετρ. ἑκατ. Συνεπῶς αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ $\rho_1, -\rho_2$ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 - 6\chi - 16 = 0$, εἶναι αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου ἰσοδυνάμου πρὸς τετράγωνον πλευρᾶς 4 ἑκατ. καὶ τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ εἶναι 6 ἑκατ.

Κατασκευή: Μὲ διάμετρον ΑΒ ἴσην πρὸς 6 ἑκατ. γράφομεν περιφέρειαν Ο (σχ. 179 Θ. Γ.). Εἰς τὸ σημεῖον Α αὐτῆς ἄγομεν ἐφαπτομένην ΑΓ ἴσην πρὸς 4 ἑκατ. καὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΟ, ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε. Τὰ μήκη τῶν εὐθ. τμημάτων ΓΔ καὶ ΓΕ εἶναι αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 - 6\chi - 16 = 0$.

Πράγματι $(\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2 + \delta^2} - \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{4.4^2 + 6^2} - \frac{6}{2} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{100} - 3 = \frac{1}{2}.\ 10 - 3 = 5 - 3 = 2$ καὶ $(\Gamma E) = \frac{1}{2}\sqrt{100} +$

$+ 3 = \frac{1}{2}.\ 10 + 3 = 5 + 3 = 8.$

461. Νὰ κατασκευάσητε ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν ὀρθογώνιον καὶ αἱ διαστάσεις του νὰ ἔχωσι δοθεῖσαν διαφορὰν δ.

Λύσις: Μετασχηματίζομεν τὸ δοθὲν ὀρθογώνιον εἰς ἰσοδύναμον τετράγωνον κατὰ τὸ πρόβλημα § 201 καί, ἄν α εἶναι ἡ πλευρὰ αὐτοῦ κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις ἔχουσι διαφορὰν δ καὶ ἰσοδύναμον πρὸς τετράγωνον πλευρᾶς α (§ 243 Προβλ.).

Ἀσκήσεις σελὶς 215.—**462. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος ἑκατέρου τῶν μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα εὐθ. τμῆμα μήκους α διαιρεῖται εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.**

Λύσις: Ἂν χ κληθῇ τὸ μῆκος τοῦ ἑνὸς εὐθ. τμήματος, τὸ μῆκος τοῦ ἄλλου θὰ εἶναι α — χ καὶ θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\alpha}{\chi} = \frac{\chi}{\alpha - \chi}$ ἢ $\alpha(\alpha - \chi) = \chi^2$, $\alpha^2 - \alpha\chi = \chi^2$ καὶ $\chi^2 + \alpha\chi - \alpha^2 = 0$. Λύοντες ταύτην ἔχομεν: $\chi = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4(-\alpha^2)}}{2} = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2}}{2} =$

$= \frac{-\alpha \pm \sqrt{5\alpha^2}}{2} = \frac{-\alpha + \alpha\sqrt{5}}{2} = \frac{\alpha(-1 + \sqrt{5})}{2}.$

Ἐκ τῶν δύο ριζῶν αὐτῆς δεχόμεθα μόνον τὴν θετικήν, διότι ἀρνητικὰ μεγέθη εἰς τὴν Γεωμετρίαν δὲν θεωροῦμεν καὶ ἔχομεν $\chi = \frac{\alpha(\sqrt{5} - 1)}{2}$. Τὸ ἄλλο δὲ τμῆμα αὐτοῦ ἔχει μῆκος $\alpha - \chi =$

$= \alpha - \frac{\alpha(\sqrt{5} - 1)}{2} = \frac{2\alpha - \alpha\sqrt{5} + \alpha}{2} = \frac{3\alpha - \alpha\sqrt{5}}{2} = \frac{\alpha(3 - \sqrt{5})}{2}.$

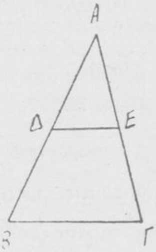
463. Ἂν εὐθεῖα ΔΕ παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ διαιρῇ μίαν τῶν ὑπ' αὐτῆς τεμνομένων πλευρῶν εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, νὰ ἀποδείξητε, ὅτι θὰ διαιρῇ ὁμοίως καὶ τὴν ἄλλην πλευράν.

Λύσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 65) καὶ ΔΕ παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ καὶ τέμνουσα τὴν ΑΒ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τέμνει καὶ τὴν ΑΓ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

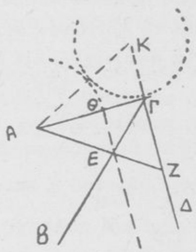
Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\frac{ΑΒ}{ΑΔ} = \frac{ΑΔ}{ΔΒ}$ (1). Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ΔΕ ∥ ΒΓ, εἶναι $\frac{ΑΒ}{ΑΔ} = \frac{ΑΓ}{ΑΕ}$ (2) καὶ $\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ}$ (3) (§ 218 Π. ΙΙ). Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (2) καὶ (3), συνεπείᾳ τῆς (1), ἔχομεν $\frac{ΑΓ}{ΑΕ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ}$ ὅ. ἔ. δ.

464. Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς γωνίας ΒΓΔ νὰ φέρητε εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει πρῶτον τὴν πλευρὰν ΓΒ εἴς τι σημεῖον Ε καὶ ἔπειτα τὴν ΓΔ εἰς τὸ σημεῖον Ζ οὕτως, ὥστε τὸ σημεῖον Ε νὰ διαιρῇ τὸ τμῆμα ΑΖ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

Λύσις: Ἔστω ὅτι $\frac{ΑΖ}{ΑΕ} = \frac{ΑΕ}{ΕΖ}$ (σχ. 66). Ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΑΓ καὶ ἐκ τοῦ Ε παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ ΕΘ, τέμνουσα τὴν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Θ, θὰ εἶναι $\frac{ΑΓ}{ΑΘ} = \frac{ΑΘ}{ΘΓ}$ (ἄσκ. 463). Ἀλλὰ τὸ σημεῖον Θ δύναται καὶ ἀρχικῶς νὰ ὁριοθῇ ἐπὶ τῆς ΑΓ.



Σχ. 65.



Σχ. 66.

Σύνθεσις: Διαιροῦμεν τὴν ΑΓ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον (§ 244 Σύνθεσις) διὰ τοῦ σημείου Θ. Ἐκ τοῦ Θ ἄγομεν κατόπιν παράλληλον εὐθεῖαν πρὸς τὴν πλευρὰν ΓΔ τῆς γωνίας ΒΓΔ, ἥτις τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον Ε. Φέρομεν τὴν ΑΕΖ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ ΘΕ ∥ ΓΖ, θὰ εἶναι $\frac{ΑΖ}{ΑΕ} = \frac{ΑΓ}{ΑΘ}$ (1)

καὶ $\frac{ΑΕ}{ΕΖ} = \frac{ΑΘ}{ΘΓ}$ (2). Ἀλλὰ ἐκ κατασκευῆς εἶναι $\frac{ΑΓ}{ΑΘ} = \frac{ΑΘ}{ΘΓ}$ (3).

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2), συνεπείᾳ τῆς (3), ἔχομεν $\frac{ΑΖ}{ΑΕ} = \frac{ΑΕ}{ΕΖ}$ ὅ. ἔ δ

465. Ἓν τρίγωνον ἔχει πλευρὰς 4 ἑκατ., 6 ἑκατ., 8 ἑκατ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

Λύσις: Γνωρίζομεν (§ 246) ὅτι $R = \frac{αβγ}{4\sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}}$

ἔνθα α, β, γ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου καὶ τ ἡ ἡμιπερίμετρος αὐτοῦ.

Ἐπειδὴ $\alpha = 4$ ἑκατ., $\beta = 6$ ἑκατ., $\gamma = 8$ ἑκατ., θὰ εἶναι

$$2\tau = 4+6+8=18 \text{ ἑκατ. καὶ } \tau=18:2=9 \text{ ἑκ.},$$

$$\tau-\alpha=9-4=5, \quad \tau-\beta=9-6=3 \quad \text{καὶ} \quad \tau-\gamma=9-8=1.$$

$$\text{Ἄρα } R = \frac{4.6.8}{4\sqrt{9.5.3.1}} = \frac{48}{\sqrt{9.15}} = \frac{48}{3\sqrt{15}} = \frac{16}{\sqrt{15}} = \frac{16\sqrt{15}}{15} \text{ ἑκατ.}$$

466. Ἂν τὸ ὀρθογώνιον δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῆς τρίτης πλευρᾶς καὶ τοῦ ἐπ' αὐτὴν ὕψους, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον.

Λύσις: Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον καὶ ΑΔ τὸ ὕψος αὐτοῦ ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ. Καθ' ὑπόθεσιν ἔχομεν : (ΑΒ) . (ΑΓ) = (ΒΓ) . (ΑΔ) (1). Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι τὸ ὀρθογώνιον δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τοῦ μεταξὺ αὐτῶν περιεχομένου ὕψους καὶ τῆς διαμέτρου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας ἤτοι (ΑΒ) . (ΑΓ) = = 2R (ΑΔ) (2). Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι (ΒΓ) . (ΑΔ) = = 2R (ΑΔ) ἢ (ΒΓ) = 2R, ἤτοι ἡ πλευρὰ ΒΓ τοῦ τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὴν διάμετρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ συνεπῶς ἡ γωνία Α αὐτοῦ εἶναι ὀρθή, ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον καὶ τὸ τρίγωνον συνεπῶς ὀρθογώνιον.

467. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι διὰ πᾶν τρίγωνον εἶναι

$$R\rho = \frac{\alpha\beta\gamma}{4\tau} \quad \text{καὶ} \quad R \,.\, Y\alpha \,.\, Y\beta \,.\, Y\gamma = 2E^2.$$

Λύσις: α') Γνωρίζομεν, ὅτι $R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4E}$ (1) (§ 246) καὶ $E = \tau\rho$ (2) (§ 194). Τὴν τιμὴν τοῦ Ε ἐκ τῆς (2) ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) καὶ ἔχομεν $R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4\tau\rho}$ καὶ πολ]ντες ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης ἐπὶ ρ ἔχομεν

$$R\rho = \frac{\alpha\beta\gamma}{4\tau}$$

β') Γνωρίζομεν ὅτι $Y\alpha = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} = \frac{2E}{\alpha}$ (1) (§ 210) $Y\beta = \frac{2E}{\beta}$ (2), $Y\gamma = \frac{2E}{\gamma}$ (3) καὶ $R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4E}$ (4).

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη τῶν ἰσοτήτων (1), (2), (3), (4) ἔχομεν

$$R \,.\, Y\alpha \,.\, Y\beta \,.\, Y\gamma = \frac{\alpha\beta\gamma \,.\, 2E \,.\, 2E \,.\, 2E}{4E \,.\, \alpha \,.\, \beta \,.\, \gamma} = \frac{8\alpha\beta\gamma E^3}{4\alpha\beta\gamma E} = 2E^2.$$

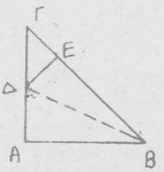
Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Γ' βιβλίου

468. Ἀπὸ τὸ μέσον μιᾶς καθέτου πλευρᾶς ἑνὸς ὀρθ. τριγώνου νὰ φέρητε κάθετον ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν δύο τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ ὑποτείνουσα, ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς.

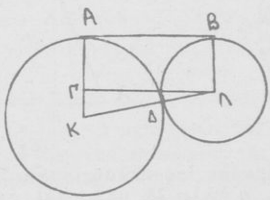
Λύσις: Ἔστω τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 67), Δ τὸ μέσον τῆς καθέτου πλευρᾶς ΑΓ αὐτοῦ καὶ $ΔΕ \perp ΒΓ$. Ἂν ἀχθῇ ἡ ΔΒ σχηματίζονται δύο ὀρθ. τρίγωνα ΔΕΒ καὶ ΔΕΓ, ἐκ τῶν ὁποίων ἔχομεν: $(ΔΒ)^2 = (ΔΕ)^2 + (ΕΒ)^2$ (1) καὶ $(ΔΓ)^2 = (ΔΕ)^2 + (ΕΓ)^2$ (2). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι: $(ΔΒ)^2 - (ΔΓ)^2 = (ΔΕ)^2 + (ΕΒ)^2 - (ΔΕ)^2 - (ΕΓ)^2 = (ΕΒ)^2 - (ΕΓ)^2$,

Ἀλλὰ $ΔΓ = ΔΑ$ ἐξ ὑποθέσεως. Ἄρα $(ΔΒ)^2 - (ΔΑ)^2 = (ΕΒ)^2 - (ΕΓ)^2$ (3) Ἐκ τοῦ τριγώνου ΔΑΒ ἔχομεν $(ΔΒ)^2 - (ΔΑ)^2 = (ΑΒ)^2$. Ὅθεν ἡ ἰσότης (3) γίνεται $(ΑΒ)^2 = (ΕΒ)^2 - (ΕΓ)^2$. ὅ. ἔ. δ.

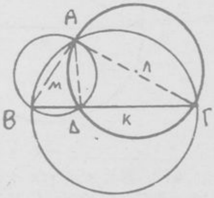
469. Νὰ γράψητε δύο περιφερείας ἐφαπτομένας ἐκτὸς καὶ μίαν κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην αὐτῶν. Νὰ εὕρητε δὲ τὴν ἀπόστασιν τῶν σημείων ἐπαφῆς αὐτῆς συναρτήσει τῶν ἀκτίνων Α καὶ α.



Σχ. 67.



Σχ. 68.



Σχ. 69.

Λύσις: Ἔστωσαν Κ καὶ Λ (σχ. 68) δύο περιφέρειαι ἐφαπτόμεναι ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Δ, ἀκτίνων Α καὶ α, ΑΒ δὲ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν.

Ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου Λ τῆς μικροτέρας περιφερείας ἀχθῇ ἡ $ΓΛ \parallel ΑΒ$, θὰ εἶναι $ΛΓ = ΑΒ$, διότι τὸ σχῆμα ΑΒΛΓ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ $ΚΓ = ΚΑ - ΓΑ = ΚΑ - ΛΒ = Α - α$. Ἐπειδὴ αἱ περιφέρειαι Κ, Λ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς ἡ διάκεντρος αὐτῶν διέρχεται διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς καὶ εἶναι $ΚΛ = ΚΔ + ΔΛ = Α + α$.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΓΛ ἔχομεν $(ΛΓ)^2 = (ΚΛ)^2 - (ΚΓ)^2 = (Α + α)^2 - (Α - α)^2 = (Α + α + Α - α) . (Α + α - Α + α) = 2Α . 2α = 4. Αα$ καὶ $(ΛΓ) = (ΑΒ) = 2\sqrt{Αα}$ ἤτοι:

Ἡ ἐξωτερικὴ κοινὴ ἐφαπτομένη ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τῆς μέσης ἀναλόγου τῶν ἀκτίνων Α καὶ α τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν.

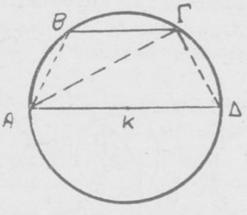
470. Ἂν Δ εἶναι ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς Α ὀρθ. τριγώνου ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ καὶ Α, α, α′ αἱ ἀκτῖνες τῶν περὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΒ, ΑΔΓ περιγεγραμμένων περιφερειῶν, νὰ ἀποδείξητε, ὅτι, $Α^2 = α^2 + α'^2$.

Λύσις: Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΒ, ΑΔΓ (σχ. 69) εἶναι ὀρθογώνια, αἱ ὑποτείνουσαι αὐτῶν ΒΓ, ΑΒ, ΑΓ θὰ εἶναι διάμετροι τῶν περιγεγραμμένων περιφερειῶν εἰς ἕκαστον τούτων καὶ θὰ ἔχωμεν: $(ΒΓ) = 2Α$, $(ΑΒ) = 2α$ καὶ $(ΑΓ) = 2α'$.

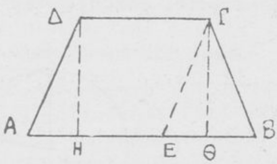
Ἐκ τοῦ ὀρθ. δμως τριγώνου ΑΒΓ ἔχομεν $(ΒΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2$ ἢ $(2Α)^2 = (2α)^2 + (2α')^2$ καὶ $4Α^2 = 4α'^2 + 4α^2$ ἢ $Α^2 = α^2 + α'^2$.

471. Νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον Α εἰς μίαν περιφέρειαν Κ καὶ νὰ φέρητε χορδὴν ΒΓ παράλληλον πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΚΑ. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι : $(ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2 = 4\ (ΚΑ)^2$.

Λύσις: Ἔστω Α τυχὸν σημεῖον περιφερείας Κ (σχ. 70) καὶ ΒΓ χορδὴ αὐτῆς παράλληλος πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΚΑ. Ἂν προεκταθῇ ἡ ἀκτὶς ΚΑ καὶ γίνῃ διάμετρος, ἀχθῶσι δὲ αἱ ΑΓ καὶ ΔΓ, τὸ τρίγωνον ΑΓΔ εἶναι ὀρθογώνιον, διότι ἡ γωνία Γ αὐτοῦ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον. Ἄρα $(ΑΓ)^2 + (ΔΓ)^2 = (ΑΔ)^2$ (1). Ἐπειδὴ ὅμως ΒΓ ∥ ΑΔ, θὰ εἶναι καὶ τόξΔΓ = τοξΑΒ καὶ συνεπῶς χορΔΓ = χορΑΒ καὶ ἡ σχέσις (1) γίνεται $(ΑΓ)^2 + (ΑΒ)^2 = (2ΚΑ)^2 = 4(ΚΑ)^2$ ὅ. ἔ. δ.



Σχ. 70.

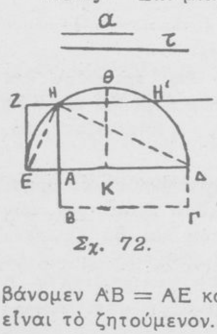


Σχ. 71.

472. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν ἰσοσκελοῦς τραπεζίου τοῦ ὁποίου ἡ μία βάσις εἶναι 50 μέτρα, ἡ ἄλλη 28 μέτ. καὶ ἑκάστη τῶν ἄλλων πλευρῶν 12 μέτρα.

Λύσις: Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ (σχ. 71) ἔχον (ΑΒ)= =50 μ. (ΔΓ)=28 μέτ. καὶ (ΑΔ)=(ΓΒ)=12 μ. Ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ. Πρὸς τοῦτο πρέπει πρῶτον νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν τὴν ΓΕ ∥ ΑΔ. Θὰ εἶναι (ΑΕ)=(ΔΓ)=28 μ. καὶ συνεπῶς (ΕΒ)=22 μ. Ἐπειδὴ δὲ ΑΔ=ΓΒ καὶ ΑΔ=ΓΕ, θὰ εἶναι καὶ ΓΕ=ΓΒ=12 καὶ τὸ τρίγωνον ΓΕΒ ἰσοσκελὲς καὶ $(ΓΘ)^2 = (ΓΒ)^2 - (ΘΒ)^2 = 12^2 - 11^2 = 144 - 121 = 23$.
Ὅθεν $(ΓΘ) = \sqrt{23}$ καὶ $Ε = \left(\frac{Β + β}{2}\right) \cdot υ = \frac{50+28}{2} \cdot \sqrt{23} = 39\sqrt{23}$ τ. μ.

473. Νὰ γράψητε δύο εὐθ. τμήματα α καὶ τ. Ἔπειτα νὰ κατασκευάσητε ἓν ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι (ΑΒΓΔ)= $= α^2$ καὶ ΑΒ + ΒΓ = τ.



Σχ. 72.

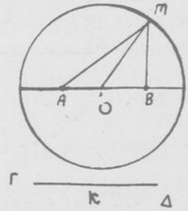
Λύσις: Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν τμῆμα ΕΔ ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν τ. Ἐπ' αὐτῆς, ὡς διαμέτρου, γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν καὶ ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς εἰς τὸ Ε λαμβάνομεν ΕΖ = α καὶ φέρομεν ἐκ τοῦ Ζ παράλληλον πρὸς τὴν ΕΔ, ἥτις τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Η καὶ Η'.

Ἐκ τοῦ Η φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΕΔ, τὴν ΗΑ. Τὰ τμήματα ΕΑ καὶ ΑΔ εἶναι αἱ διαστάσεις τοῦ ζητουμένου νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογωνίου ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ τετράγωνον πλευρᾶς α καὶ μὲ ἄθροισμα διαστάσεων τ. Προεκτείνομεν τὴν ΗΑ πέραν τοῦ Α καὶ λαμβάνομεν ΑΒ = ΑΕ καὶ σχηματίζομεν τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον.

Πράγματι εἶναι $AB + B\Gamma = AE + A\Delta = \tau$ καὶ $(AB\Gamma\Delta) =$
$= (AB)\ (A\Delta) = (AE)\ (A\Delta) = (HA)^2 = (ZE)^2 = \alpha^2$, διότι εἰς τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΕΗΔ τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος ΗΑ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα τοῦτο διαιρεῖ τὴν ὑποτείνουσαν.

Διερεύνησις: Διὰ νὰ εἶναι τὸ πρόβλημα δυνατόν, πρέπει ἡ παράλληλος ἐκ τοῦ Ζ πρὸς τὴν ΕΔ νὰ τέμνῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν ἢ νὰ ἐφάπτηται αὐτῆς δηλ. $ZE \leqq K\Theta$ ἢ $\alpha \leqq \frac{\tau}{2}$.

474. Νὰ ὁρίσητε δύο εὐθ. τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἂν $(AB) = 2\alpha$ καὶ $(\Gamma\Delta) = K$, νὰ εὕρητε τὸν γεωμ. τόπον τῶν σημείων Μ, διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι $(MA)^2 + (MB)^2 = K^2$.



Σχ. 73.

Λύσις: Ἔστω ΑΒ εὐθ. τμῆμα μήκους 2α καὶ ΓΔ ἕτερον εὐθ. τμῆμα μήκους Κ (σχ. 73) καὶ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοιοῦτον, ὥστε $(MA)^2 + (MB)^2 = K^2$. Ἂν συνδέσωμεν τὸ σημεῖον Μ μὲ τὸ μέσον Ο τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ, τὸ πρῶτον θεώρημα τῆς διαμέσου (§ 208) δίδει: $(MA)^2 + (MB)^2 = 2(MO)^2 + 2(AO)^2$ (1). Ἀλλὰ $(MA)^2 + (MB)^2 = K^2$, ὅτε ἡ (1) γίνεται $K^2 = 2(MO)^2 + 2\alpha^2$ ἢ $2(MO)^2 = K^2 - 2\alpha^2$ καὶ $(MO)^2 = \frac{K^2}{2} - \alpha^2$. Ὅθεν $(MO) = \sqrt{\frac{K^2}{2} - \alpha^2}$. Ἐπειδὴ δὲ Κ, α εἶναι δεδομένα καὶ σταθερά, ἕπεται ὅτι καὶ ΜΟ εἶναι σταθερὰ καὶ συνεπῶς τὸ Μ κεῖται ἐπὶ περιφερείας ἐχούσης κέντρον τὸ μέσον Ο τοῦ δοθέντος εὐθ. τμήματος ΑΒ καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς $\sqrt{\frac{K^2}{2} - \alpha^2}$.

Ἀντιστρόφως: Ἔστω ἤδη Μ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας ταύτης. Θὰ δείξωμεν ὅτι $(MA)^2 + (MB)^2 = K^2$.

Πράγματι ἐκ τοῦ τριγώνου ΜΑΒ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ΜΟ εἶναι διάμεσος ἔχομεν $(MA)^2 + (MB)^2 = 2(MO)^2 + 2(OA)^2$. Ἀλλὰ ἐκ κατασκευῆς εἶναι $(MO)^2 = \frac{K^2}{2} - \alpha^2$. Ἄρα $(MA)^2 + (MB)^2 = 2\left(\frac{K^2}{2} - \alpha^2\right) + 2\alpha^2 = K^2 - 2\alpha^2 + 2\alpha^2 = K^2$.

Ὥστε: Ὁ ζητούμενος Γ. Τ. τῶν σημείων Μ διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι $(MA)^2 + (MB)^2 = K^2$ εἶναι περιφέρεια μὲ κέντρον τὸ μέσον Ο τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ $\sqrt{\frac{K^2}{2} - \alpha^2}$.

Διερεύνησις: Διὰ νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἐν λόγῳ περιφέρεια, πρέπει ἡ ἀκτὶς αὐτῆς νὰ εἶναι θετικὴ ἤτοι $\sqrt{\frac{K^2}{2} - \alpha^2} > 0$ ἢ $\frac{K^2}{2} - \alpha^2 > 0$ ἢ $\frac{K^2}{2} > \alpha^2$. Ἐὰν $\frac{K^2}{2} = \alpha^2$, αὕτη καθίσταται σημεῖον, τὸ μέσον Ο τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ. Ἐὰν δὲ $\frac{K^2}{2} < \alpha^2$ τότε περιφέρεια δὲν ὑπάρχει.

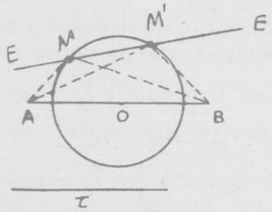
Σημείωσις : Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας τοῦ Γ. Τ. παρατηροῦμεν, ὅτι αὕτη εἶναι κάθετος πλευρὰ ὀρθ. τριγώνου μὲ ὑποτείνουσαν τὸ ἥμισυ τῆς διαγωνίου τετραγώνου πλευρᾶς Κ καὶ τὴν ἄλλην κάθετον πλευρὰν α, ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ δοθέντος εὐθ. τμήματος ΑΒ.

475. Νὰ γράψητε μίαν εὐθεῖαν Ε, ἕν τμῆμα τ καὶ νὰ ὁρίσητε δύο σημεῖα Α, Β ἐκτὸς τῆς Ε κείμενα. Νὰ ὁρίσητε ἔπειτα ἕν σημεῖον Μ τῆς εὐθείας Ε, τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι $(MA)^2+(MB)^2=\tau^2$.

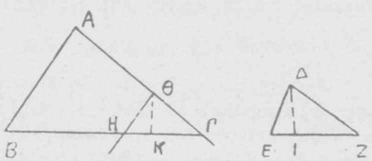
Λύσις : Τὸ ἄγνωστον σημεῖον Μ ὀφείλει νὰ πληροῖ τὰ ἑξῆς ἐπιτάγματα :

1) Νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας Ε καὶ 2) Νὰ εἶναι τοιοῦτον, ὥστε $(MA)^2+(MB)^2=\tau^2$. Ἀλλὰ ὁ Γ. Τ. τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα πληροῦσι τὸ πρῶτον ἐπίταγμα εἶναι ἡ εὐθεῖα Ε, ὁ δὲ Γ. Τ. τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα πληροῦσι τὸ δεύτερον ἐπίταγμα εἶναι (ἄσκ. 474) ἡ περιφέρεια ἡ γραφομένη μὲ κέντρον τὸ μέσον Ο τῆς ἀποστάσεως ΑΒ καὶ ἀκτῖνα $R=\sqrt{\left(\frac{\tau\sqrt{2}}{2}\right)^2-(AO)^2}$. Ἄρα τὸ ζητούμενον σημεῖον Μ θὰ εἶναι ἡ τομὴ τῶν δύο τούτων τόπων.

Κατασκευή : Κατασκευάζομεν τετράγωνον πλευρᾶς τ καὶ φέρομεν τὰς διαγωνίους αὐτοῦ, ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι $\tau\sqrt{2}$. Κατόπιν κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην μὲ ΑΟ καὶ ὑποτείνουσαν ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς διαγωνίου τοῦ τε-



Σχ. 74.



Σχ. 75.

τραγώνου πλευρᾶς Κ. Ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ αὐτοῦ θὰ εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ τόπου. Μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα ταύτην γράφομεν περιφέρειαν καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα ταύτης καὶ τῆς εὐθείας Ε θὰ λύωσι τὸ πρόβλημα.

Διερεύνησις : Ἵνα ὑπάρχῃ σημεῖον Μ τῆς εὐθείας Ε, τοιοῦτον ὥστε $(MA)^2+(MB)^2=\tau^2$ πρέπει αὕτη νὰ τέμνῃ ἢ νὰ ἐφάπτηται τῆς περιφερείας Ο. Πρὸς τοῦτο πρέπει ἡ ἀπόστασις τοῦ Ο ἀπ' αὐτῆς νὰ εἶναι μικροτέρα ἢ ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα R τῆς περιφερείας Ο. Καὶ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχῃ δύο λύσεις, μίαν ἢ καμμίαν.

476. Νὰ γράψητε ἕν εὐθ. τμῆμα. Ἂν καλέσητε α τὸ μῆκος αὐτοῦ νὰ γράψητε ἄλλο εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ μῆκος $\alpha\sqrt{12}$.

Haido
Helene

Λύσις: Ἄν x καλέσωμεν τὸ μῆκος τοῦ ἄλλου εὐθ. τμήματος, θὰ εἶναι $x=\alpha\sqrt{12}$ ἢ $x^2=12\alpha^2=12\alpha.\alpha$ καὶ ἑπομένως τὸ χ θὰ εἶναι τὸ μῆκος τοῦ εὐθ. τμήματος, τὸ ὁποῖον εἶναι μέσον ἀνάλογον τοῦ δοθέντος εὐθ. τμήματος καὶ τοῦ 12πλασίου αὐτοῦ καὶ τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται δι' ἐφαρμογῆς τοῦ προβλήματος § 201 ἢ τῆς ἀσκήσεως 458.

477. Νὰ κατασκευάσητε δύο ἄνισα τρίγωνα. Ἀπὸ ἓν ὡρισμένον σημεῖον μιᾶς πλευρᾶς τοῦ μεγαλυτέρου νὰ γράψητε εὐθεῖαν ἡ ὁποία νὰ ἀποχωρίζῃ ἀπὸ αὐτὸ τρίγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ μικρότερον.

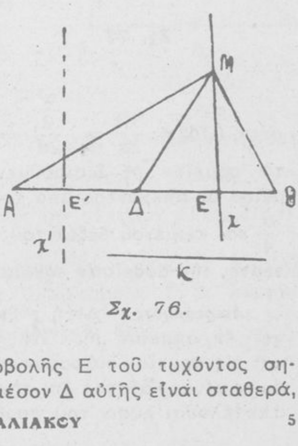
Λύσις: Ἔστωσαν τὰ ἄνισα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ (σχ. 75) καὶ Θ σημεῖον δοθὲν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Θ εὐθεῖα, τοιαύτη ὥστε (ΘΗΓ)=(ΔΕΖ).

Ἄν ἀχθῶσι καὶ τὰ ὕψη ΘΚ καὶ ΔΙ τῶν τριγώνων τούτων, θὰ εἶναι $\frac{1}{2}(\text{ΗΓ}).(\text{ΘΚ})=\frac{1}{2}(\text{ΕΖ}).(\text{ΔΙ})$ ἢ $(\text{ΗΓ}).(\text{ΘΚ})=(\text{ΕΖ}).(\text{ΔΙ})$. Ἐκ ταύτης διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν της διὰ τοῦ γινομένου (ΗΓ). (ΔΙ) ἔχομεν $\frac{(\text{ΗΓ})\,(\text{ΘΚ})}{(\text{ΗΓ})\,(\text{ΔΙ})}=\frac{(\text{ΕΖ})\,(\text{ΔΙ})}{(\text{ΗΓ})\,(\text{ΔΙ})}$ ἢ $\frac{(\text{ΘΚ})}{(\text{ΔΙ})}=\frac{(\text{ΕΖ})}{(\text{ΗΓ})}$ ἤτοι ἡ ΗΓ εἶναι τετάρτη ἀνάλογος τῶν γνωστῶν εὐθ. τμημάτων ΘΚ, ΔΙ, ΕΖ. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ κατασκευασθῇ αὕτη (§ 220), νὰ ληφθῇ κατόπιν ΓΗ ἴση πρὸς ταύτην καὶ νὰ ἀχθῇ ἡ ΘΗ. Τὸ τρίγωνον ΘΗΓ θὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ. Διότι $(\text{ΘΗΓ})=\frac{(\text{ΗΓ}).(\text{ΘΚ})}{2}=$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(\text{ΔΙ}).(\text{ΕΖ})}{(\text{ΘΚ})}\cdot(\text{ΘΚ})=\frac{1}{2}(\text{ΔΙ}).(\text{ΕΖ})=(\text{ΔΕΖ}),$$ διότι ἡ (ΗΓ) ἐκ κατασκευῆς εἶναι $\frac{(\text{ΕΖ}).(\text{ΔΙ})}{(\text{ΘΚ})}$.

478. Δίδεται ἓν εὐθ. τμῆμα Κ καὶ δύο σημεῖα, Α, Β εἰς ἀπόστασιν α. Νὰ εὕρητε τὸν Γ. Τ. τῶν σημείων Μ, διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι $(\text{ΜΑ})^2-(\text{ΜΒ})^2=\text{Κ}^2$.

Λύσις: Ἔστωσαν Α καὶ Β (σχ. 76) τὰ δοθέντα σημεῖα κείμενα εἰς ἀπόστασιν (ΑΒ)=α καὶ Μ ἓν σημεῖον τοῦ τόπου, τοιοῦτον ὥστε $(\text{ΜΑ})^2-(\text{ΜΒ})^2=\text{Κ}^2$. Ἄν Δ εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ καὶ φέρωμεν καὶ τὴν ΜΔ, ἐκ τοῦ τριγώνου ΜΑΒ κατὰ τὸ δεύτερον θεώρημα τῶν διαμέσων ἑνὸς τριγώνου (§ 209) θὰ ἔχωμεν: $(\text{ΜΑ})^2-(\text{ΜΒ})^2=2(\text{ΑΒ}).(\text{ΔΕ})$, ὅπου ΔΕ εἶναι ἡ προβολὴ τῆς διαμέσου ΜΔ ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν $(\text{ΜΑ})^2-(\text{ΜΒ})^2=\text{Κ}^2$. Ἄρα $2(\text{ΑΒ}).(\text{ΔΕ})=\text{Κ}^2$ καὶ $(\text{ΔΕ})=\frac{\text{Κ}^2}{2(\text{ΑΒ})}=\frac{\text{Κ}^2}{2\alpha}=$ σταθερὰ (1).



Σχ. 76.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀπόστασις ΔΕ τῆς προβολῆς Ε τοῦ τυχόντος σημείου Μ τοῦ τόπου ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἀπὸ τὸ μέσον Δ αὐτῆς εἶναι σταθερά, τὸ Μ θὰ κεῖται ἐπὶ εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ εἰς σημεῖον Ε αὐτῆς, ὁριζόμενον ἐκ τῆς σχέσεως (1).

Ἀντιστρόφως: Ἂν Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς καθέτου ταύτης εὐθείας, θὰ δείξωμεν ὅτι $(ΜΑ)^2-(ΜΒ)^2=Κ^2$

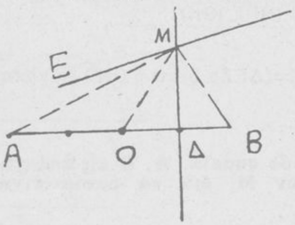
Πράγματι, ἂν ἀχθῶσιν αἱ ΜΑ, ΜΒ, ΜΔ, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸ δεύτερον Θ. τῶν διαμέσων: $(ΜΑ)^2-(ΜΒ)^2=2(ΑΒ).(ΔΕ)=2α.(ΔΕ)$.

Ἀλλὰ $(ΔΕ)=\frac{Κ^2}{2α}$ καὶ συνεπῶς $(ΜΑ)^2-(ΜΒ)^2=2α.\frac{Κ^2}{2α}=Κ^2$

Ἐκ τῆς σχέσεως $(ΔΕ)=\frac{Κ^2}{2α}$ ἔχομεν $\frac{(ΔΕ)}{Κ}=\frac{Κ}{2α}$ ἢ $\frac{2α}{Κ}=\frac{Κ}{(ΔΕ)}$ δηλ. ἡ ΔΕ εἶναι ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν γνωστῶν μεγεθῶν 2α, Κ, Κ καὶ δύναται νὰ κατασκευασθῇ (§ 220).

Σημείωσις: Ἐλήφθη ΜΑ>ΜΒ καὶ ἡ ΜΕ κεῖται δεξιὰ τοῦ μέσου Ο τῆς ΑΒ. Ἂν ληφθῇ ΜΑ<ΜΒ τότε ἡ ΜΕ θὰ κεῖται ἀριστερὰ τοῦ μέσου Ο τῆς ΑΒ. Ἂν δὲ ΜΑ=ΜΒ, τότε αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι χ καὶ χ′ συμπίπτουσι μὲ τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον Ο τῆς ΑΒ.

479. Δίδεται εὐθεῖα, Ε, δύο σημεῖα Α, Β εἰς ἀπόστασιν (ΑΒ) = α καὶ ἐκτὸς τῆς Ε. Νὰ ὁρίσητε ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Μ τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι $(ΜΑ)^2-(ΜΒ)^2=\frac{α}{2}$.



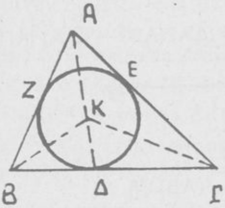
Σχ. 77.

Λύσις: Ἔστω Ε ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ Α, Β (σχ. 77) τὰ δοθέντα σημεῖα εἰς ἀπόστασιν α. Τὸ ἄγνωστον σημεῖον Μ θὰ κεῖται ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐπὶ τῆς εὐθείας Ε καὶ ἀφ' ἑτέρου ἐπὶ τοῦ Γ. Τ. τῶν σημείων διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι $(ΜΑ)^2-(ΜΒ)^2=\frac{α^2}{2}$. Ὁ δεύτερος Γ. Τ. εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ εἰς σημεῖον Δ αὐτῆς ὁριζόμενον ἐκ τῆς σχέσεως $(ΟΔ)=\frac{Κ^2}{2α}=\frac{\frac{α^2}{2}}{2α}=\frac{α^2}{4α}=\frac{α}{4}$. Διὰ νὰ ὁρίσωμεν λοιπὸν τὸ σημεῖον Μ διαιροῦμεν τὴν ΑΒ εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ ἐκ τοῦ σημείου Δ, ἀπέχοντος ἀπὸ τοῦ μέσου Ο τῆς ΑΒ ἀπόστασιν ἴσην μὲ $\frac{α}{4}$ καὶ κειμένου δεξιὰ τοῦ Ο, φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν Ε εἰς τὸ σημεῖον Μ.

Διερεύνησις: Ἂν ἡ εὐθεῖα Ε δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, ὑπάρχει ἓν σημεῖον Μ. Ἂν ὅμως αὕτη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ εἰς σημεῖον διάφορον τοῦ Δ, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον, ἂν ὅμως εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ τότε ὅλα τὰ σημεῖα αὐτῆς ἀποτελοῦσι λύσιν τοῦ προβλήματος.

480. Εἰς ἓν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγράψητε κύκλον Κ. Ἂν δὲ ΑΔ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α, νὰ εὕρητε τὸν λόγον ΑΚ : ΚΔ συναρτήσει τῶν πλευρῶν α, β, γ τοῦ τριγώνου τούτου.

Λύσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 78), ΑΔ, ΒΚ, ΓΚ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν αὐτοῦ. Ὡς γνωστὸν αὗται τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Κ, κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΔΒ, ἐπειδὴ ἡ ΒΚ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Β αὐτοῦ ἔχομεν (§ 221) $\frac{(ΑΚ)}{(ΚΔ)} = \frac{(ΑΒ)}{(ΒΔ)}$ (1).

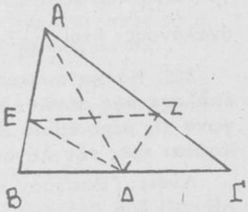


Σχ. 78.

Ἐκ δὲ τοῦ τριγώνου ΑΓΔ, λόγῳ τῆς διχοτόμου ΓΚ τῆς γωνίας Γ αὐτοῦ ἔχομεν $\frac{(ΑΚ)}{(ΚΔ)} = \frac{(ΑΓ)}{(ΓΔ)}$. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) ἕπεται $\frac{(ΑΚ)}{(ΚΔ)} = \frac{(ΑΒ)}{(ΒΔ)} = \frac{(ΑΓ)}{(ΓΔ)} = \frac{(ΑΒ)+(ΑΓ)}{(ΒΔ)+(ΔΓ)} = \frac{(ΑΒ)+(ΑΓ)}{(ΒΓ)} = \frac{γ+β}{α}$. Ὥστε $\frac{(ΑΚ)}{(ΚΔ)} = \frac{β+γ}{α}$.

481. Νὰ γράψητε τὴν διάμεσον ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ καὶ νὰ διχοτομήσητε τὰς γωνίας ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ. Ἂν Ε εἶναι ἡ τομὴ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἀπὸ τὴν α' διχοτόμον καὶ Ζ ἡ τομὴ τῆς πλευρᾶς ΑΓ ἀπὸ τὴν β' διχοτόμον, νὰ ἀποδείξητε, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.

Λύσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 79), ΑΔ ἡ διάμεσος αὐτοῦ, ΔΕ καὶ ΔΖ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ΑΔΒ, ΑΔΓ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΕΖ ∥ ΒΓ.



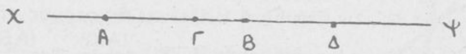
Σχ. 79.

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΔΒ, λόγῳ τῆς διχοτόμου ΔΕ ἔχομεν (§ 221) ὅτι $\frac{ΑΕ}{ΕΒ} = \frac{ΑΔ}{ΒΔ}$ (1). Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΔΓ δι' ὅμοιον λόγον ἔχομεν $\frac{ΑΖ}{ΖΓ} = \frac{ΑΔ}{ΔΓ}$ (2). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) καὶ ἐκ τῆς ΒΔ=ΔΓ, λόγῳ τῆς διαμέσου, ἔχομεν: $\frac{ΑΔ}{ΕΒ} = \frac{ΑΖ}{ΖΓ}$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΕΖ τέμνει τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς μέρη ἀνάλογα θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ (§ 218 Π. ΙΙ ἀντίστροφον).

482. Αὕτη εἶναι ἡ ἰδία μὲ τὴν ἄσκησιν 415 λυθεῖσαν ἀνωτέρω.

483. Ἐπὶ εὐθείας ΑΒ νὰ ὁρίσητε δύο σημεῖα Γ, Δ ἁρμονικὰ συζυγῆ πρὸς τὰ Α, Β. Ἔπειτα νὰ ἀποδείξητε ὅτι, $\frac{2}{(ΒΑ)} = \frac{1}{(ΑΓ)} + \frac{1}{(ΑΔ)}$.

Λύσις: Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν ἁρμονικῶν. συζυγῶν σημείων (§ 223) ἔχομεν: $\frac{(\Gamma A)}{(\Gamma B)}=\frac{(\Delta A)}{(\Delta B)}$ (1). Ἀλλὰ $(\Gamma B)=(AB)-(A\Gamma)$ καὶ $(\Delta B)=(A\Delta)-(AB)$ καὶ ἡ (1) γίνεται $\frac{(\Gamma A)}{(AB)-(A\Gamma)}=\frac{(\Delta A)}{(A\Delta)-(AB)}$ ἢ $(\Gamma A)\left[(A\Delta)-(AB)\right]=$ $=(\Delta A)\left[(AB)-(A\Gamma)\right]$, $(\Gamma A)(A\Delta)-(\Gamma A)(AB)=(\Delta A)(AB)-(\Delta A)(A\Gamma)$ ἢ



Σχ. 80.

$(\Gamma A).(A\Delta)+(\Delta A).(A\Gamma)=(\Delta A).(AB)+(\Gamma A).(AB)$ ἢ
$2(A\Gamma).(A\Delta)=(AB)\left[(A\Delta)+(A\Gamma)\right]$.

Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης διὰ τοῦ γινομένου $(AB).(A\Gamma).(A\Delta)$ καὶ ἔχομεν: $\frac{2(A\Gamma).(A\Delta)}{(AB).(A\Gamma).(A\Delta)}=\frac{(AB)\left[(A\Gamma)+(A\Delta)\right]}{(AB).(A\Gamma).(A\Delta)}$

καὶ $\frac{2}{(AB)}=\frac{(A\Gamma)}{(A\Gamma)\,(A\Delta)}+\frac{(A\Delta)}{(A\Gamma)\,(A\Delta)}=\frac{1}{(A\Delta)}+\frac{1}{(A\Gamma)}$ ὅ. ἔ. δ.

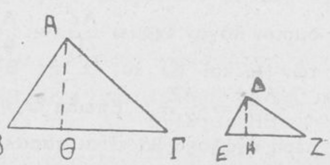
484. Νὰ γράψητε τὰς διαγωνίους ἑνὸς τραπεζίου ΑΒΓΔ καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἡ τομὴ Ε αὐτῶν διαιρεῖ ἑκάστην εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰς βάσεις.

Λύσις: Τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΓΔΕ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας ἀνὰ μίαν. Ἄρα θὰ ἔχωσι καὶ τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους ἤτοι $\frac{AE}{E\Gamma}=\frac{BE}{E\Delta}=\frac{AB}{\Gamma\Delta}$.

485. Νὰ κατασκευάσητε δύο ὅμοια τρίγωνα καὶ νὰ γράψητε δύο ὁμόλογα ὕψη αὐτῶν. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι ταῦτα διαιροῦσι τὰ τρίγωνα εἰς μέρη ὅμοια ἓν πρὸς ἕν, καὶ ὅτι ὁ λόγος τῶν ὑψῶν τούτων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων.

Λύσις: Ἔστωσαν τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (σχ. 81) καὶ ΑΘ, ΔΗ δύο ὁμόλογα αὐτῶν ὕψη.

Τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΘΒ καὶ ΔΕΗ εἶναι ὅμοια, διότι γωνB = γωνE καὶ συνεπῶς $\frac{A\Theta}{\Delta H}=\frac{AB}{\Delta E}$ (1). Ἐπίσης καὶ τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΘΓ καὶ ΔΖΗ εἶναι ὅμοια, διότι γωνΓ = γωνZ ἐξ ὑποθέσεως καὶ συνεπῶς $\frac{A\Delta}{\Delta H}=\frac{A\Gamma}{\Delta Z}$. Ἄρα τὰ τρίγωνα



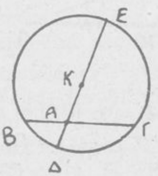
Σχ. 81.

ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ χωρίζονται ὑπὸ τῶν ὁμολόγων ὑψῶν εἰς τρίγωνα ὅμοια ἓν πρὸς ἓν καὶ ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων ὑψῶν ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος $\frac{AB}{\Delta E}$ αὐτῶν.

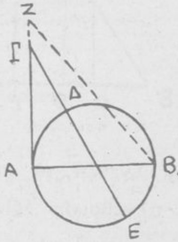
486. Εἰς μίαν περιφέρειαν Κ ἀκτῖνος α νὰ γράψητε μίαν χορδὴν ΒΓ καὶ νὰ ὁρίσητε ἐπ' αὐτῆς ἓν σημεῖον Α. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι $(ΚΑ)^2 + (ΑΒ) . (ΑΓ) = α^2$.

Λύσις: Ἔστω ἡ περιφέρεια Κ (σχ. 82), ΒΓ μία χορδὴ αὐτῆς καὶ Α τυχὸν σημεῖον τῆς ΒΓ. Ἂν ἀχθῇ ἡ ΚΑ καὶ προεκτεινομένη τέμνῃ τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε, θὰ ἔχωμεν (§ 240 Θ. Ι.) ὅτι $(ΑΒ) . (ΑΓ) = (ΑΔ) . (ΑΕ)$ (1).

Ἀλλὰ $(ΑΔ) = (ΚΔ) - (ΚΑ) = α - (ΚΑ)$ καὶ $(ΑΕ) = (ΚΑ) + (ΚΕ) = = (ΚΑ) + α$, ὅτε ἡ (1) γίνεται $(ΑΒ) (ΑΓ) = [α - (ΚΑ)] [α + (ΚΑ)] = = α^2 - (ΚΑ)^2$. Μεταφέρομεν τὸν ὅρον $-(ΚΑ)^2$ εἰς τὸ α' μέλος καὶ ἔχομεν $(ΚΑ)^2 + (ΑΒ).(ΑΓ) = α^2$.



Σχ. 82.



Σχ. 83.

487. Νὰ γράψητε ἓν εὐθ. τμῆμα β καὶ νὰ κατασκευάσητε ὀρθογ. τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία κάθετος πλευρὰ νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ β, ἡ δὲ ἄλλη νὰ εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς β καὶ τῆς ὑποτεινούσης.

Λύσις: Ἔστω β τὸ δοθὲν εὐθ. τμῆμα (σχ. 83). Ἂν καλέσωμεν α τὴν ὑποτείνουσαν καὶ γ τὴν ἄλλην κάθετον πλευρὰν τοῦ ζητουμένου νὰ κατασκευασθῇ ὀρθ. τριγώνου, θὰ ἔχωμεν $γ^2 = α^2 - β^2$ καὶ $\frac{α}{γ} = \frac{γ}{β}$ ἢ $γ^2 = αβ$. Ὅθεν $αβ = α^2 - β^2$ ἢ $α^2 - αβ = β^2$ καὶ $α(α-β) = β^2$. Ἐπειδὴ ὅμως α $(α-β) = α - α + β = β$, ἡ εὕρεσις τῆς ὑποτεινούσης αὐτοῦ α ἀνάγεται εἰς τὸ γνωστὸν πρόβλημα *«Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις διαφέρουσι κατὰ β καὶ ἰσοδύναμον πρὸς τετράγωνον πλευρᾶς β»*.

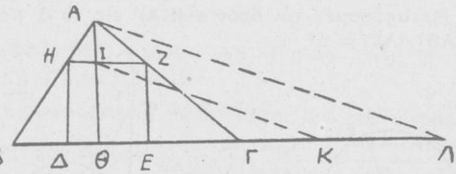
Κατασκευή: Μὲ διάμετρον ΑΒ ἴσην πρὸς τὸ ὁρισθὲν εὐθ. τμῆμα β γράφομεν περιφέρειαν Κ (σχ. 83). Ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον Α λαμβάνομεν (ΑΓ) = β καὶ φέρομεν τὴν διὰ τοῦ Γ διερχομένην διάμετρον, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Κ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε. Τὸ εὐθ. τμῆμα ΓΕ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθ. τριγώνου, τὸ ὁποῖον, γνωρίζοντες ἤδη μίαν κάθετον πλευρὰν β καὶ τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ α, εὐκόλως κατασκευάζομεν.

488. Εἰς ἓν τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον.

Λύσις: *Ἓν τετράγωνον λέγεται ἐγγεγραμμένον εἰς τρίγωνον, ἂν δύο*

μὲν κορυφαὶ αὐτοῦ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου, αἱ δὲ ἄλλαι δύο, ἀνὰ μία, ἐπὶ ἑκάστης τῶν ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ.

Ἔστω ὅτι ἐνεγράφη εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τετράγωνον καὶ εἶναι τὸ ΔΕΖΗ (σχ. 84). Ἐπειδὴ ΗΖ ∥ ΒΓ, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΗΖ εἶναι ὅμοια καὶ συνεπῶς $\frac{ΗΖ}{ΒΓ} = \frac{ΑΙ}{ΑΘ}$ (1), ὅπου ΑΘ, ΑΙ δύο ὁμόλογα αὐτῶν ὕψη. Ἀλλὰ $ΑΙ = ΑΘ - ΙΘ = ΑΘ - ΗΔ = ΑΘ - ΗΖ$ καὶ ἡ (1) γίνεται $\frac{ΗΖ}{ΒΓ} = \frac{ΑΘ - ΗΖ}{ΑΘ}$ (2). Ἂν δὲ θέσωμεν ἀντὶ τῶν



Σχ. 84.

γεωμετρικῶν μεγεθῶν, τὰ μέτρα αὐτῶν $(ΗΖ) = χ$, $(ΒΓ) = α$, $(ΑΘ) = υ$. ἔχομεν τὴν ἀλγεβρικὴν ἐξίσωσιν $\frac{χ}{α} = \frac{υ - χ}{υ}$, ἥτις λυομένη δίδει

$$υχ = αυ - αχ, \quad υχ + αχ = αυ, \quad χ(α + υ) = αυ \quad \text{καὶ} \quad χ = \frac{αυ}{α + υ}.$$

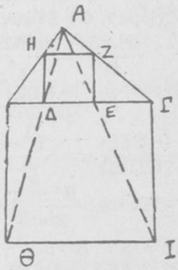
Αὕτη δύναται νὰ γραφῇ καὶ οὕτω: $\frac{χ}{υ} = \frac{α}{α + υ}$ ἐκ τῆς ὁποίας ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ πλευρὰ χ εἶναι τετάρτη ἀνάλογος τῶν $α + υ$, α, υ καὶ δύναται νὰ κατασκευασθῇ.

Κατασκευή : Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ προεκτεινομένης, λαμβάνομεν τμῆμα $ΘΚ = α$ καὶ ἄλλο $ΚΛ = υ$. Φέρομεν τὴν ΑΛ καὶ ἐκ τοῦ Κ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΛ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΘ εἰς τὸ σημεῖον Ι. Ἡ ΘΙ εἶναι ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν τμημάτων $(ΘΛ) = α + υ$, $(ΘΚ) = α$ καὶ $(ΑΘ) = υ$. Διὰ τοῦ Ι ἄγομεν τὴν ΗΖ ∥ ΒΓ καὶ ἐκ τῶν σημείων Η καὶ Ζ καθέτους ἐπὶ τὴν ΒΓ, τὰς ΗΔ, ΖΕ. Τὸ σχηματιζόμενον τετράπλευρον ΔΕΖΗ λέγω, ὅτι εἶναι τὸ ζητούμενον τετράγωνον.

Ἀπόδειξις: Τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον ἐκ κατασκευῆς. Ἐπειδὴ δὲ $ΗΔ = ΘΙ$, θὰ εἶναι αὕτη τετάρτη ἀνάλογος τῶν $α + υ$, α, υ. Ἀλλὰ ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΗΖ ἔχομεν $\frac{ΑΘ}{ΑΙ} = \frac{ΒΓ}{ΗΖ} =$
$= \frac{α}{ΗΖ}$ (1) καὶ ἐκ τῶν παραλλήλων ΑΛ, ΚΙ ἔχομεν $\frac{ΑΘ}{ΑΙ} =$
$= \frac{ΘΛ}{ΚΛ} = \frac{α + υ}{υ}$ (2). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται, ὅτι $\frac{α + υ}{υ} =$
$= \frac{α}{ΗΖ}$ ἢ $\frac{α + υ}{α} = \frac{υ}{(ΗΖ)}$ δηλ. ἡ ΗΖ εἶναι ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν

αὐτῶν τμημάτων $\alpha+\upsilon$, α, υ, ὡς καὶ ἡ ΗΔ. Συνεπῶς $ΗΔ = ΗΖ$ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ἔχον δύο διαδοχικὰς πλευρὰς ἴσας εἶναι τετράγωνον.

β') Τρόπος: Ἔστω ΑΒΓ τὸ δοθὲν τρίγωνον (σχ. 85) καὶ ΗΔΕΖ τὸ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον. Εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὴν ΒΓ καθὼς καὶ τὰς ΑΔ, ΑΕ αἱ ὁποῖαι προεκτεινόμεναι τέμνουσι τὰς ἀχθείσας καθέτους εἰς τὰ σημεῖα Θ καὶ Ι. Τὰ τρίγωνα ΑΗΔ καὶ ΑΒΘ εἶναι ὅμοια, διότι ΗΔ ∥ ΒΘ καθὼς καὶ τὰ ΑΗΖ, ΑΒΓ. Ὅθεν $\frac{ΑΗ}{ΑΒ} = \frac{ΗΔ}{ΒΘ}$ καὶ $\frac{ΑΗ}{ΑΒ} = \frac{ΗΖ}{ΒΓ}$. Συνεπῶς καὶ $\frac{ΗΔ}{ΒΘ} = \frac{ΗΖ}{ΒΓ}$. Ἀλλὰ $ΗΔ = ΗΖ$ ἐξ ὑποθέσεως. Ἄρα καὶ $ΒΘ = ΒΓ$. Ἐκ τῶν ὁμοίων ἐπίσης τριγώνων ΑΕΖ, ΑΙΓ καὶ ΑΗΖ, ΑΒΓ εὑρίσκομεν, ὅτι $ΒΓ = ΓΙ$. Ἄρα τὸ τετράπλευρον ΒΘΙΓ εἶναι τετράγωνον μὲ πλευρὰν ΒΓ.



Σχ. 85.

Σύνθεσις: Ἐπὶ τῆς ΒΓ καὶ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου κατασκευάζομεν τετράγωνον ΒΘΙΓ. Φέρομεν τὰς ΑΘ, ΑΙ, αἱ ὁποῖαι τέμνουσι τὴν ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε. Εἰς ταῦτα ὑψοῦμεν καθέτους καὶ ὁρίζομεν τὰ σημεῖα Η καὶ Ζ. Τὸ τετράπλευρον ΗΔΕΖ εὐκόλως δεικνύεται, ὅτι εἶναι τετράγωνον.

489. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α.

Λύσις: Εὕρομεν προηγουμένως ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\chi = \frac{\alpha\upsilon}{\alpha+\upsilon}$, ὅπου α μία πλευρὰ αὐτοῦ καὶ υ τὸ ἀντιστοιχοῦν πρὸς αὐτὴν ὕψος.

Ἐπειδὴ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου τὸ ὕψος εἶναι $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, ὅπου α ἡ

πλευρὰ αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν $\chi = \dfrac{\alpha.\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}}{\alpha+\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{2\alpha+\alpha\sqrt{3}} = \dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{\alpha(2+\sqrt{3})} =$

$= \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ καὶ συνεπῶς $E = \left(\dfrac{\alpha\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{3\alpha^2}{4+3+4\sqrt{3}} = \dfrac{3\alpha^2}{7+4\sqrt{3}} =$

$= \dfrac{3\alpha^2(7-4\sqrt{3})}{49-16.3} = 3\alpha^2(7-4\sqrt{3})$ τ. μ.

490. Νὰ γράψητε εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις ἑνὸς τραπεζίου, ἡ ὁποία νὰ διαιρῇ αὐτὸ εἰς δύο μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰς ἀντιστοίχους βάσεις αὐτοῦ.

Λύσις: Ἔστω ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ (σχ. 86) καὶ διαιρεῖ αὐτὸ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν βάσεων αὐτοῦ. Ἐὰν Η εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του ΑΔ καὶ ΒΓ, τὰ τρίγωνα ΗΑΒ, ΗΕΖ, ΗΔΓ εἶναι ὅμοια. Ἐπειδὴ ὅμως «Δύο ὅμοια εὐθ. σχήματα εἶναι πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν αὐτῶν» (§ 236) θὰ ἔχωμεν, ἄν θέσωμεν (ΑΒ)=Β, (ΓΔ)=β καὶ (ΕΖ)=χ.

$$\frac{(HAB)}{B^2}=\frac{(HEZ)}{\chi^2}=\frac{(H\Delta\Gamma)}{\beta^2}=\frac{(HAB)-(HEZ)}{B^2-\chi^2}=\frac{(HEZ)-(H\Delta\Gamma)}{\chi^2-\beta^2}$$

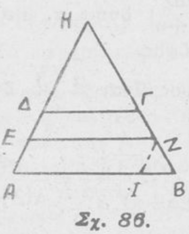
ἢ $\frac{(ABZE)}{B^2-\chi^2}=\frac{(EZ\Gamma\Delta)}{\chi^2-\beta^2}$ ἢ δι' ἐναλλαγῆς τῶν μέσων:

$\frac{(ABZE)}{(EZ\Gamma\Delta)}=\frac{B^2-\chi^2}{\chi^2-\beta^2}$. Ἀλλὰ $\frac{(ABZE)}{(EZ\Gamma\Delta)}=\frac{B}{\beta}$ ἐξ ὑποθέσεως.

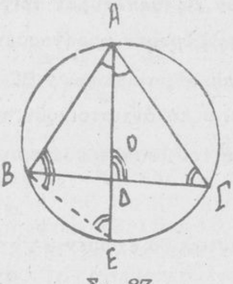
Ὥστε $\frac{B^2-\chi^2}{\chi^2-\beta^2}=\frac{B}{\beta}$. Λύομεν ταύτην ὡς πρὸς χ καὶ ἔχομεν

$(B^2-\chi^2)\,.\,\beta=B(\chi^2-\beta^2)$, $B^2\beta-\beta\chi^2=B\chi^2-B\beta^2$ ἢ $B\chi^2+\beta\chi^2=B^2\beta+B\beta^2$ ἢ $(B+\beta)\chi^2=B\beta(B+\beta)$ καὶ $\chi^2=B\beta$. Ἄρα ἡ χ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο βάσεων τοῦ τραπεζίου καὶ δύναται νὰ κατασκευασθῇ.

Σύνθεσις: Κατασκευάζομεν τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο βάσεων Β καὶ β τοῦ τραπεζίου (§ 201). Κατόπιν ἐπὶ τῆς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα ΑΙ ἴσον μὲ τὴν κατασκευασθεῖσαν μέσην ἀνάλογον καὶ ἐκ τοῦ Ι φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΔ τοῦ τραπεζίου, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἄλλην πλευρὰν αὐτοῦ εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Ἐκ τοῦ Ζ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, τὴν ΖΕ, ἥτις θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη.



Σχ. 86.



Σχ. 87.

491. Νὰ γράψητε τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ νὰ ἀποδείξητε, ὅτι (ΑΒ) (ΑΓ) = (ΑΔ)² + (ΒΔ) (ΔΓ).

Λύσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 87), ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α αὐτοῦ καὶ Ο ἡ περιγεγραμένη εἰς τὸ τρίγωνον περιφέρεια, Ε δὲ τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ διχοτόμος ΑΔ προεκτεινομένη τέμνει αὐτήν. Τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΔΓ ἔχουσι τὴν γωνΒΑΕ=γωνΕΑΓ λόγῳ τῆς διχοτόμου, γωνΓ=γωνΕ, ὡς ἐγγεγραμμέναι βαίνουσαι εἰς τὸ αὐτὸ τόξον ΑΒ καὶ συνεπῶς εἶναι ὅμοια. Ἄρα $\frac{(AB)}{(A\Delta)}=\frac{(AE)}{(A\Gamma)}=$

καὶ (ΑΒ (ΑΓ) = (ΑΔ) (ΑΕ). Ἀλλὰ (ΑΕ) = (ΑΔ) + (ΔΕ) καὶ ἑπομένως :

$(ΑΒ)(ΑΓ) = (ΑΔ)\left[(ΑΔ) + (ΔΕ)\right] = (ΑΔ)^2 + (ΑΔ)(ΔΕ)$ (1).

Ἀλλὰ (ΑΔ) (ΔΕ) = (ΒΔ) (ΔΓ) (§ 240). Συνεπείᾳ ταύτης ἡ (1) γίνεται $(ΑΒ)(ΑΓ) = (ΑΔ)^2 + (ΒΔ)(ΔΓ)$.

Ὥστε· *Τὸ ὀρθογώνιον δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς μεταξὺ αὐτῶν διχοτόμου, ηὐξημένον κατὰ τὸ ὀρθογώνιον τῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ἄλλη πλευρὰ διαιρεῖται ὑπὸ τῆς διχοτόμου ταύτης.*

492. Στηριζόμενοι εἰς τὴν προηγουμένην ἰσότητα νὰ ἀποδείξητε ὅτι $(ΑΔ) = \dfrac{2}{β+γ}\sqrt{βγτ(τ-α)}$.

Λύσις: Ἂν α, β, γ εἶναι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 87) θὰ εἶναι (ἄσκ. 491) $βγ = (ΑΔ)^2 + (ΒΔ)(ΔΓ)$ (1).

Ἀλλά, λόγῳ τῆς διχοτόμου, εἶναι $\dfrac{(ΒΔ)}{γ} = \dfrac{(ΔΓ)}{β} = \dfrac{(ΒΔ)+(ΔΓ)}{γ+β} =$

$= \dfrac{(ΒΓ)}{γ+β} = \dfrac{α}{γ+β}$ καὶ $(ΒΔ) = \dfrac{αγ}{β+γ}$, $(ΔΓ) = \dfrac{αβ}{γ+β}$. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) καὶ ἔχομεν $βγ = (ΑΔ)^2 + \dfrac{αγ}{γ+β}\cdot\dfrac{αβ}{γ+β}$ καὶ $(ΑΔ)^2 =$

$$= βγ - \frac{α^2βγ}{(β+γ)^2} = \frac{βγ(β+γ)^2 - α^2βγ}{(β+γ)^2} = \frac{βγ}{(β+γ)^2}\left[(β+γ)^2 - α^2\right] = \frac{βγ}{(β+γ)^2}\cdot$$

$$(β+γ+α)(β+γ-α) = \frac{βγ}{(β+γ)^2}\left[2τ\,.\,2(τ-α)\right] = \frac{4βγ}{(β+γ)^2}\ τ.(τ-α) \text{ καὶ}$$

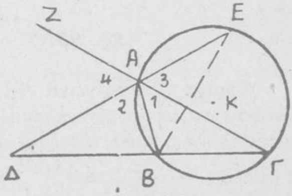
$$(ΑΔ) = \frac{2}{β+γ}\sqrt{βγτ(τ-α)}.$$

493. Ἂν ἡ διχοτόμος ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ ἰσοῦται πρὸς τὸ τμῆμα ΒΔ, νὰ ἀποδείξητε ὅτι $α^2 = β(β+γ)$.

Λύσις: Εὕρομεν (ἄσκ. 491) ὅτι $βγ = (ΑΔ)^2 + (ΒΔ)(ΔΓ)$. Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι (ΑΔ)=(ΒΔ) αὕτη γίνεται: $βγ = (ΒΔ)^2 + (ΒΔ)(ΔΓ) = (ΒΔ)\left[(ΒΔ)+(ΔΓ)\right] = (ΒΔ).(ΒΓ) = (ΒΔ).α$. Ἀλλὰ $(ΒΔ)\ \dfrac{αγ}{β+γ}$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν προηγουμένην ἰσότητα λαμβάνομεν $βγ = \dfrac{α^2γ}{β+γ}$ ἢ $βγ(β+γ) = α^2γ$ καὶ διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ γ ἔχομεν: $β(β+γ) = α^2$ ὅ. ἔ. δ.

494. Νὰ γράψητε τὴν διχοτόμον τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ καὶ νὰ ἀποδείξητε, ὅτι $(ΑΔ)^2 = (ΔΒ)(ΔΓ) - (ΑΒ)(ΑΓ)$

Λύσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 88), ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας ΒΑΖ αὐτοῦ καὶ Ε τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ΑΔ τέμνει τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν Κ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Τὰ τρίγωνα ΕΑΒ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουσι γωνΕ = γων Γ, ὡς ἐγγεγραμμένας βαινούσας εἰς τὸ αὐτὸ τόξον ΑΒ καὶ $\widehat{ΔΑΓ} = \widehat{ΒΑΕ}$, διότι, $\widehat{ΔΑΓ} = \widehat{A_2} + \widehat{A_1} = \widehat{A_4} + \widehat{A_1} = \widehat{A_3} + \widehat{A_1} = \widehat{ΒΑΕ}$.



Σχ. 88.

Συνεπῶς $\frac{ΑΓ}{ΑΕ} = \frac{ΑΔ}{ΑΒ}$ καὶ (ΑΕ) (ΑΔ) = (ΑΒ) (ΑΓ). Ἀλλὰ (ΑΕ) =
= (ΔΕ) — (ΔΑ) καὶ συνεπῶς $[(ΔΕ) - (ΔΑ)]$ (ΔΑ) = (ΑΒ) (ΑΓ) ἢ
(ΔΕ) (ΔΑ) — $(ΑΔ)^2$ = (ΑΒ) (ΑΓ). Ἐπειδὴ δὲ (ΔΕ) (ΔΑ) = (ΔΒ) (ΔΓ)
ἔχομεν (ΔΒ) (ΔΓ)—$(ΑΔ)^2$ = (ΑΒ) (ΑΓ) καὶ $(ΑΔ)^2$ = (ΔΒ) (ΔΓ)—(ΑΒ) (ΑΓ).

495. Στηριζόμενοι εἰς τὴν προηγουμένην ἰσότητα νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ, ἔχει μῆκος

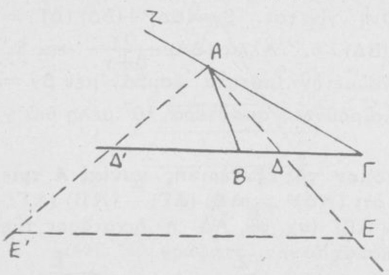
$$(ΑΔ) = \frac{2}{γ-β}\sqrt{βγ\,(τ-β)\,(τ-γ)},\ \text{ἂν } γ > β.$$

Λύσις: Λόγῳ τῆς διχοτόμου ΑΔ, ἔχομεν $\frac{(ΔΒ)}{γ} = \frac{(ΔΓ)}{β} =$
$= \frac{(ΔΒ)-(ΔΓ)}{γ-β} = \frac{α}{γ-β}$ καὶ $(ΔΒ) = \frac{αγ}{γ-β}$, $(ΔΓ) = \frac{βα}{γ-β}$. Ἀντικαθιστῶμεν τὰς τιμὰς αὐτῶν εἰς τὴν ἰσότητα $(ΑΔ)^2$ = (ΔΒ) (ΔΓ) — βγ καὶ
ἔχομεν: $(ΑΔ)^2 = \frac{α^2βγ}{(γ-β)^2} - βγ = \frac{α^2βγ - βγ\,(γ-β)^2}{(γ-β)^2} =$

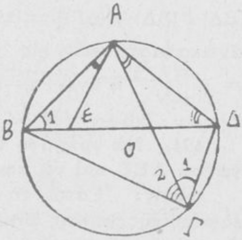
$$= \frac{βγ\left[α^2 - (γ-β)^2\right]}{(γ-β)^2} = \frac{βγ(α+γ-β)\,(α-γ+β)}{(γ-β)} = \frac{4βγ\,(τ-β)\,(τ-γ)}{(γ-β)^2}$$

καὶ $(ΑΔ) = \frac{2}{γ-β}\sqrt{βγ\,(τ-β)\,(τ-γ)}$ ὅ. ἔ. δ.

496. Νὰ γράψητε τὰς διχοτόμους ΑΔ, ΑΔ′ τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων αὐτῶν νὰ λάβητε τμήματα ΔΕ, Δ′Ε′ ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς ΑΔ καὶ ΑΔ′. Ἔπειτα δὲ νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου ΔΕΕ′Δ′ συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.



Σχ. 89.



Σχ. 90.

Λύσις: Τὰ τρίγωνα ΑΕ′Ε καὶ ΑΔΔ′ εἶναι ὅμοια, διότι ἡ ΔΔ′, ὡς ἑνοῦσα τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΕ′ καὶ ΑΕ τοῦ τριγώνου ΑΕ′Ε, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν Ε′Ε καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς.
Συνεπῶς: $\frac{(ΑΔΔ')}{(ΑΕΕ')} = \frac{(ΔΔ')^2}{(ΕΕ')^2} = \frac{(ΔΔ')^2}{(2\,ΔΔ')^2} = \frac{(ΔΔ')^2}{4\,(ΔΔ')^2} = \frac{1}{4}$ καὶ (ΑΕΕ′) =
= 4 (ΑΔΔ′) ἢ (ΔΔ′Ε′Ε) = 3 (ΑΔΔ′) (1).

Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΔΔ′ εἶναι ὀρθογώνιον, διότι ΑΔ ⊥ ΑΔ′ ὡς διχοτόμοι ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικῶν γωνιῶν καὶ $(ΑΔΔ') = \frac{(ΑΔ)(ΑΔ')}{2}$.

Ἀλλὰ ἐκ τῶν ἀσκήσεων 492 καὶ 495 γνωρίζομεν τὰ μήκη τῶν διχοτόμων ΑΔ, ΑΔ′.

$$\text{Ἄρα } (ΑΔΔ') = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{β+γ}\sqrt{βγτ(τ-α)}\cdot\frac{2}{β-γ}\sqrt{βγ(τ-β)(τ-γ)} =$$

$$= \frac{2}{β^2-γ^2}\sqrt{β^2γ^2τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)} = \frac{2βγ}{β^2-γ^2}\sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}$$

Καὶ ἡ (1) γίνεται $(ΔΔ'Ε'Ε') = 3\cdot\frac{2βγ}{β^2-γ^2}\sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)} =$

$= \frac{6βγ}{β^2-γ^2}Ε$, ἄν $β>γ$ καὶ $Ε = (ΑΒΓ)$. ✓

497. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγράψητε τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι (ΑΓ) (ΒΔ) = (ΑΒ) (ΓΔ) + (ΒΓ) (ΑΔ) (Θ. τοῦ Πτολεμαίου).

Λύσις: Ἔστω τὸ ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 99) εἰς κύκλον Ο. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων του ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του. Πρὸς τοῦτο εἰς τὸ τρίγωνον ΒΑΔ φέρομεν τὴν ΑΕ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι γωνΒΑΕ = γων ΓΑΔ.

Τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΒΔ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουσι γωνΒΑΕ = γωνΓΑΔ ἐκ κατασκευῆς καὶ γων $Β_1$ = γων$Γ_1$, ὡς ἐγγεγραμμέναι βαίνουσαι εἰς τὸ αὐτὸ τόξον ΑΔ. Ἄρα $\frac{(ΑΒ)}{(ΑΓ)} = \frac{(ΒΕ)}{(ΔΓ)}$ καὶ (ΑΒ) (ΔΓ) = = (ΑΓ) (ΒΕ) (1). Ἐπίσης τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΕΔ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουσι γωνΒΑΓ=γωνΕΑΔ, (ὡς ἀθροίσματα τῆς κοινῆς γωνίας ΕΑΓ καὶ τῶν παρ' αὐτὴν ἴσων ἐκ κατασκευῆς γωνιῶν ΒΑΕ καὶ ΓΑΔ) καὶ γωνΒΓΑ = γωνΑΔΒ, ὡς ἐγγεγραμμέναι βαίνουσαι εἰς τὸ αὐτὸ τόξον ΑΒ. Ἄρα $\frac{(ΒΓ)}{(ΕΔ)} = \frac{(ΑΓ)}{(ΑΔ)}$ ἢ (ΒΓ) (ΑΔ) = (ΑΓ) (ΕΔ) (2). Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν: (ΑΒ) (ΔΓ) + (ΑΔ) (ΒΓ) = = (ΑΓ) (ΒΕ) + (ΑΓ) (ΕΔ) = (ΑΓ) [(ΒΕ) + (ΕΔ)] = (ΑΓ) (ΒΔ). δ.έ.δ.

498. Περὶ δοθὲν ἰσόπλευρον τρίγωνον νὰ περιγράψητε περιφέρειαν καὶ νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον Μ ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΓ αὐτῆς. Ἔπειτα δὲ νὰ ἀποδείξητε, ὅτι αἱ χορδαὶ ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως

ΜΒ = ΜΑ + ΜΓ.

Σχ. 91.

Λύσις: Ἔστω τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 91) καὶ Κ ἡ περιγεγραμμένη περὶ αὐτὸ περιφέρεια, Μ δὲ σημεῖον τοῦ τόξου ΑΓ.

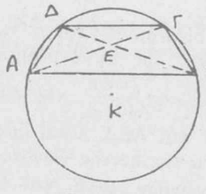
Τὸ τετράπλευρον ΒΓΜΑ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Κ καὶ κατὰ τὸ Θ. τοῦ Πτολεμαίου θὰ ἔχωμεν: (ΜΒ) (ΑΓ) = (ΑΒ) (ΜΓ) +

$+ (\Gamma B)(MA))$ Ἀλλὰ $(AB) = (B\Gamma) = (A\Gamma)$ καὶ συνεπῶς $(MB) = (M\Gamma) + (MA)$.

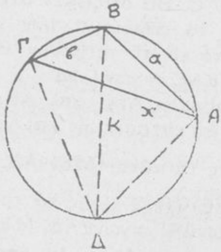
499. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ἰσοσκελὲς τραπέζιον καὶ νὰ ἀποδείξητε, ὅτι αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ εἶναι ἴσαι. Ἔπειτα δὲ νὰ ὑπολογίσητε τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου συναρτήσει τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν τοῦ τραπεζίου.

Λύσις: Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ (σχ. 92). Ἐπειδὴ $\widehat{A} = \widehat{B}$ καὶ $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 2$ὀρθαί, θὰ εἶναι καὶ $\widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 2$ὀρθαὶ καὶ συνεπῶς τοῦτο ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. Ἔστω Κ ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια καὶ ΑΓ, ΒΔ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ. Τὰ τρίγωνα ΕΑΒ καὶ ΕΓΔ εἶναι ἰσοσκελῆ, διότι αἱ παρὰ τὰς βάσεις αὐτῶν γωνίαι εἶναι ἴσαι, ὡς ἐγγεγραμμέναι βαίνουσαι ἐπὶ τῶν ἴσων τόξων ΑΔ καὶ ΓΒ. Ἄρα $EA = EB$ καὶ $E\Gamma = E\Delta$, Συνεπῶς καὶ $EA + E\Gamma = EB + E\Delta$ ἢ $A\Gamma = B\Delta$.

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἐγγεγραμμένον κατὰ τὸ Θ. τοῦ Πτολεμαίου ἔχομεν: $(A\Gamma)(B\Delta) = (AB)(\Gamma\Delta) + (A\Delta)(B\Gamma)$, Ἀλλὰ $A\Gamma = B\Delta$ καὶ $A\Delta = B\Gamma$ καὶ θὰ εἶναι:
$(A\Gamma)^2 = (AB)(\Gamma\Delta) + (A\Delta)^2$ καὶ ἂν Β, β, γ καλέσωμεν τὰς βάσεις καὶ



Σχ. 92.



Σχ. 93.

μίαν τῶν ἴσων πλευρῶν αὐτοῦ θὰ εἶναι $(A\Gamma)^2 = B\beta + \gamma^2$ καὶ $(A\Gamma) = \sqrt{B\beta + \gamma^2}$.

500. Εἰς μίαν περιφέρειαν ἀκτῖνος ρ νὰ ὁρίσητε δύο διαδοχικὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ. Ἂν α εἶναι τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ΑΒ καὶ β τῆς ΒΓ, νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς χορδῆς τοῦ ἀθροίσματος ΑΓ τῶν ΑΒ καὶ ΒΓ.

Λύσις: Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΒΓ δύο διαδοχικὰ τόξα τῆς περιφερείας Κ (σχ. 93), ΑΒ, ΒΓ αἱ χορδαὶ αὐτῶν καὶ ΑΓ ἡ χορδὴ τοῦ τόξου ΑΒΓ. Φέρομεν τὴν διάμετρον ΒΔ καὶ τὰς χορδὰς ΔΓ, ΔΑ. Ἐκ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἔχομεν: $(B\Delta)(\Gamma A) = (A\Delta).(B\Gamma) + (\Gamma\Delta)(AB)$.
Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΒΑΔ ἔχομεν: $(A\Delta)^2 = (B\Delta)^2 - (AB)^2 = 4\rho^2 - \alpha^2$ καὶ $(A\Delta) = \sqrt{4\rho^2 - \alpha^2}$. Ὁμοίως ἐκ τοῦ ΒΓΔ ἔχομεν: $(\Gamma\Delta) = \sqrt{4\rho^2 - \beta^2}$

$$\text{καὶ } 2\rho\,(\Gamma A) = \beta\sqrt{4\rho^2 - \alpha^2} + \alpha\sqrt{4\rho^2 - \beta^2}$$

$$\text{ἢ } (\Gamma A) = \frac{\beta\sqrt{4\rho^2 - \alpha^2} + \alpha\sqrt{4\rho^2 - \beta^2}}{2\rho}.$$

501. **Ἀπὸ τὸ μῆκος α τῆς χορδῆς ἑνὸς τόξου καὶ ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα ρ αὐτοῦ νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς χορδῆς τοῦ διπλασίου τόξου.**

Λύσις: Εἰς τὴν ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαν σχέσιν:

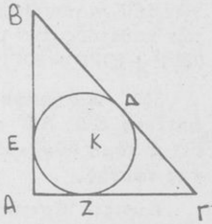
$(ΑΓ)=\dfrac{α\sqrt{4ρ^2-β^2}+β\sqrt{4ρ^2-α^2}}{2ρ}$ θέτομεν $β=α$ καὶ ἔχομεν $(ΑΓ)=$

$$=\frac{α\sqrt{4ρ^2-α^2}+α\sqrt{4ρ^2-α^2}}{2ρ}=\frac{2α\sqrt{4ρ^2-α^2}}{2ρ}=\frac{α\sqrt{4ρ^2-α^2}}{ρ}.$$

502. **Ἐν τραπέζιον ΑΒΓΔ ἔχει βάσεις ΑΒ καὶ ΓΔ, αἱ δὲ διαγώνιοι τέμνονται εἰς σημεῖον Ε. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι (ΕΒΓ) = (ΕΑΔ).**

Λύσις: Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ τραπέζιον (σχ. 92) καὶ Ε τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων του.

Τὰ τρίγωνα ΔΑΒ καὶ ΓΑΒ ἔχουσι τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒ καὶ ἴσα ὕψη, διότι αἱ κορυφαὶ Δ καὶ Γ αὐτῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν. Ἄρα εἶναι ἰσοδύναμα ἤτοι: (ΓΑΒ) = (ΔΑΒ) ἢ (ΒΓΕ) + (ΒΕΑ) = (ΔΑΕ) + (ΒΕΑ). Ἐκ ταύτης ἔχομεν ὅτι (ΓΒΕ) = (ΔΑΕ).



Σχ. 94.

503. **Εἰς ὀρθ. τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγράψητε κύκλον. Ἂν δὲ Δ εἶναι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ, νὰ ἀποδείξητε, ὅτι (ΑΒΓ) = (ΒΔ) . (ΔΓ).**

Λύσις: Ἔστω τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 94) α, β, γ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν αὐτοῦ καὶ Δ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ αὐτοῦ καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου Κ. Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον (ΒΔ) . (ΔΓ) ἢ $(ΒΔ).(ΔΓ)=$ $=\dfrac{βγ}{2}$.

Ἂν Ε καὶ Ζ εἶναι τα σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ἄλλων καθέτων αὐτοῦ πλευρῶν καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου, ἐπειδὴ ΒΔ = ΒΕ, ΑΕ = ΑΖ, ΓΖ = ΓΔ, ὡς ἐφαπτόμεναι ἐκ σημείου ἐκτὸς περιφερείας πρὸς αὐτὴν θὰ ἔχωμεν:

$$ΒΔ+ΒΕ+ΑΖ+ΑΕ+ΓΖ+ΓΔ=α+β+γ=2τ$$
$$\text{ἢ } 2\,ΒΔ+2\,ΑΖ+2ΓΖ=2τ \text{ ἢ } ΒΔ+ΑΖ+ΓΖ=τ$$

ἢ $(ΒΔ)+(ΑΓ)=τ$ ἢ $(ΒΔ)=τ-(ΑΓ)=τ-β$, ἔνθα $τ=\dfrac{α+β+γ}{2}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι: $(ΔΓ)=τ-γ$.

Συνεπῶς $(ΒΔ).(ΔΓ)=(τ-β)(τ-γ)=\left(\dfrac{α+β+γ}{2}-β\right)\left(\dfrac{α+β+γ}{2}-γ\right)=$

$$=\frac{-β+γ}{2}\cdot\frac{α+β-γ}{2}=\frac{α-(β-γ)}{2}\cdot\frac{α+(β-γ)}{2}=\frac{α^2-(β-γ)^2}{4}=$$

$$=\frac{α^2-(β^2+γ^2-2βγ)}{4}=\frac{α^2-(α^2-2βγ)}{4}=\frac{α^2-α^2+2βγ}{4}=$$

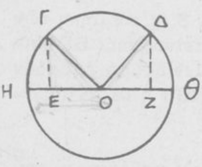
$$=\frac{2βγ}{4}=\frac{βγ}{2}=(ΑΒΓ).$$

504. **Εἰς δοθέντα κύκλον ἀκτῖνος ρ νὰ γράψητε δύο καθέτους ἀκτῖνας ΟΓ, ΟΔ καὶ νὰ προβάλητε αὐτὰς ἐπὶ μίαν διάμετρον. Ἂν δὲ ΟΕ, ΟΖ εἶναι αἱ προβολαὶ αὐτῶν, νὰ ἀποδείξητε ὅτι $(ΟΕ)^2 + (ΟΖ)^2 = ρ^2$.**

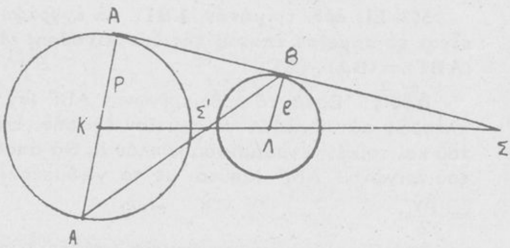
Λύσις: Ἔστω ὁ κύκλος Ο (σχ. 95) ἀκτῖνος ρ, ΟΓ, ΟΔ δύο κάθετοι ἀκτῖνες αὐτοῦ καὶ ΟΕ, ΟΖ αἱ προβολαὶ αὐτῶν ἐπὶ τὴν διάμετρον ΗΘ. Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΟΕΓ ἔχομεν: $(ΟΕ)^2 + (ΕΓ)^2 = (ΟΓ)^2$ (1). Ἀλλὰ τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΟΕΓ καὶ ΟΖΔ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα ΟΓ = ΟΔ καὶ γων ΕΟΓ = γων ΟΔΖ, διότι εἶναι ὀξεῖαι καὶ ἔχουσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν καθέτους ἀνὰ μίαν. Ἄρα (ΓΕ) = (ΟΖ) καὶ ἡ ἰσότης (1) γίνεται $(ΟΕ)^2 + (ΟΖ)^2 = (ΟΓ)^2 = ρ^2$.

505. **Νὰ γράψητε δύο ἀνίσους περιφερείας Κ, Λ καὶ νὰ φέρητε ἀκτῖνας ΚΑ, ΛΒ παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι ἡ τομὴ τῶν εὐθειῶν ΚΛ, ΑΒ εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὰς ἀκτῖνας ταύτας.**

Λύσις: Ἔστωσαν αἱ ἄνισοι περιφέρειαι Κ, Λ (σχ. 96) ΚΑ, ΛΒ δύο παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι ἀκτῖνες αὐτῶν καὶ Σ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν εὐθειῶν ΚΛ καὶ ΑΒ.



Σχ. 95.



Σχ. 96.

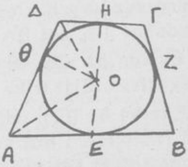
Τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα ΚΑΣ καὶ ΛΒΣ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας ἀνὰ μίαν. Ἄρα θὰ εἶναι $\frac{ΚΣ}{ΚΑ} = \frac{ΛΣ}{ΛΒ}$ καὶ $\frac{ΚΣ}{ΚΑ} = \frac{ΚΣ - ΛΣ}{ΚΑ - ΛΒ} = \frac{ΚΛ}{ΚΑ - ΛΒ}$ καὶ ἄν (ΚΛ)=δ, (ΚΑ) = Ρ καὶ (ΛΒ) = ρ, θὰ εἶναι $(ΚΣ) = \frac{δΡ}{Ρ-ρ}$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ δ, Ρ, ρ εἶναι σταθερά, ἕπεται ὅτι καὶ (ΚΣ) εἶναι σταθερὸν καὶ ἀνεξάρτητον ἀπὸ τὰς ληφθείσας παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους ἀκτῖνας.

506. **Τὸ αὐτὸ καὶ ἄν αἱ παράλληλοι ἀκτῖνες εἶναι ἀντίρροποι.**

Λύσις: Ἂν Σ′ εἶναι ἡ τομὴ τῆς ΚΛ καὶ τῆς Α′Β, ἡ ὁποία συνδέει τὰ ἄκρα τῶν παραλλήλων καὶ ἀντιρρόπων ἀκτίνων ΚΑ′, ΛΒ, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΑ′Σ′, ΛΣ′Β ἔχομεν $\frac{ΚΣ'}{ΚΑ'} = \frac{Σ'Λ}{ΛΒ} =$

$= \frac{K\Sigma' + \Sigma'\Lambda}{KA' + \Lambda B} = \frac{K\Lambda}{P+\rho}$. Ὅθεν $\frac{K\Sigma'}{\rho} = \frac{K\Lambda}{P+\rho}$ καὶ $(K\Sigma') = = \frac{\delta P}{P+\rho} =$ $=$ σταθερόν. Ἄρα καὶ $(K\Sigma') =$ σταθερόν, ἤτοι ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου τομῆς Σ′ τῶν ΚΛ, Α′Β ἀπὸ τοῦ σταθεροῦ σημείου Κ, εἶναι σταθερὰ καὶ συνεπῶς ἀνεξάρτητος τοῦ ζεύγους τῶν θεωρουμένων παραλλήλων καὶ ἀντιρρόπων ἀκτίνων.

507. **Ἂν ἰσοσκελὲς τραπέζιον εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον, νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἡ διάμετρος αὐτοῦ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου.**



Σχ. 97.

Λύσις: Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ (σχ. 97) περιγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο ἀκτῖνος ρ καὶ Ε, Ζ, Η, Θ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ καὶ τῆς περιφερείας Ο. Ἂν ἀχθῶσιν αἱ ΟΔ, ΟΑ, αὗται ὡς διχοτόμοι ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι κάθετοι καθὼς καὶ $O\Theta \perp A\Delta$. Ἄρα (§ 198) θὰ εἶναι $(O\Theta)^2 = (A\Theta)(\Theta\Delta)$ (1)

Ἀλλὰ $(A\Theta) = (AE) = (EB) = \frac{(AB)}{2}$ καὶ $(\Delta\Theta) = (\Delta H) = \frac{(\Delta\Gamma)}{2}$ καὶ ἡ (1)

γίνεται $(O\Theta)^2 = \frac{(AB)}{2} \cdot \frac{(\Gamma\Delta)}{2} = \frac{(AB)(\Gamma\Delta)}{4}$ ἢ $4(O\Theta)^2 = (AB)(\Gamma\Delta)$ ἢ $[2(O\Theta)]^2 = (AB)(\Gamma\Delta)$ καὶ $(EH)^2 = (AB)(\Gamma\Delta)$.

508. **Ἂν ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι αἱ βάσεις τραπεζίου ΑΒΓΔ νὰ ἀποδείξητε, ὅτι $(A\Gamma)^2 + (B\Delta)^2 = (B\Gamma)^2 + (A\Delta)^2 + 2(AB)(\Gamma\Delta)$.**

Λύσις: Γνωρίζομεν (ἄσκ. 390) ὅτι διὰ πᾶν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι $(A\Gamma)^2 + (B\Delta)^2 + 4(EZ)^2 = (AB)^2 + (B\Gamma)^2 + (\Gamma\Delta)^2 + (\Delta A)^2$ (1), ἔνθα Ε, Ζ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων αὐτοῦ. Ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ΕΖ εἰς τὸ τραπέζιον ἰσοῦται μὲ $\frac{(AB) - (\Gamma\Delta)}{2}$ (ἄσκ. 150 τεῦχ. Α′).

$$\text{Συνεπῶς } (EZ)^2 = \left[\frac{(AB) - (\Gamma\Delta)}{2}\right]^2 = \frac{(AB)^2 + (\Gamma\Delta)^2 - 2(AB)(\Gamma\Delta)}{4}$$

καὶ $4(EZ)^2 = (AB)^2 + (\Gamma\Delta)^2 - 2(AB)(\Gamma\Delta)$, ὅτε ἡ σχέσις (1) γίνεται

$$(A\Gamma)^2 + (B\Delta)^2 + (AB)^2 + (\Gamma\Delta)^2 - 2(AB)(\Gamma\Delta) = (AB)^2 + (B\Gamma)^2 + (\Gamma\Delta)^2 + (\Delta A)^2$$

Μετὰ τὰς ἀναγωγὰς καὶ μεταφορὰν ὅρου εἰς τὸ β′ μέλος ἔχομεν: $(A\Gamma)^2 + (B\Delta)^2 = (B\Gamma)^2 + (A\Delta)^2 + 2(AB)(\Gamma\Delta)$.

Ὥστε: *Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων ἑνὸς τραπεζίου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ, ηὐξημένον κατὰ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν βάσεων αὐτοῦ.*

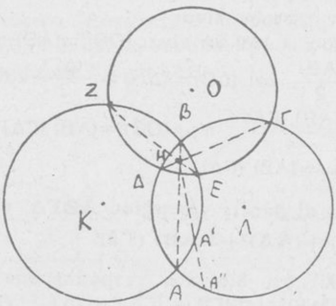
509. **Νὰ γράψητε τρεῖς περιφερείας, αἱ ὁποῖαι νὰ τέμνωνται ἀνὰ δύο. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι αἱ κοιναὶ χορδαὶ αὐτῶν διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον.**

Λύσις: Ἔστωσαν Κ, Λ, Ο (σχ. 98) τρεῖς περιφέρειαι τεμνόμεναι ἀνὰ δύο καὶ ΑΒ, ΓΔ, ΕΒ αἱ κοιναὶ χορδαὶ αὐτῶν. Θὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι αὗται τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Η.

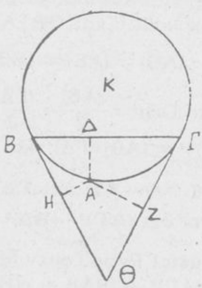
Ἔστω Η τὸ σημεῖον τομῆς τῶν κοινῶν χορδῶν ΓΔ, ΖΕ καὶ ἔστω ὅτι τοῦτο κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου Ο. Τότε τοῦτο θὰ κεῖται μεταξὺ τῶν σημείων Γ καὶ Δ καὶ μεταξὺ τῶν σημείων Ζ καὶ Ε καὶ συνεπῶς θὰ κεῖται καὶ ἐντὸς τῶν κύκλων Κ καὶ Λ.

Φέρομεν τὴν ΒΗ καὶ ἔστω ὅτι αὕτη, προεκτεινομένη, τέμνει τὴν περιφέρειαν Κ εἰς τὸ Α′ καὶ τὴν περιφέρειαν Λ εἰς τὸ Α″. Ἐπειδὴ αἱ χορδαὶ ΓΔ καὶ ΒΑ″ τέμνονται θὰ ἔχωμεν : (ΓΗ) . (ΗΔ) = (ΒΗ) (ΗΑ″) (1). Ἐπειδὴ δὲ καὶ αἱ χορδαὶ ΖΕ καὶ ΒΑ′ τοῦ κύκλου Κ τέμνονται, θὰ ἔχωμεν : (ΖΗ) (ΗΕ) = (ΒΗ) (ΗΑ′) (2).

Ἐπειδὴ δὲ (ΓΗ) (ΗΔ) = (ΖΗ) (ΗΕ), θὰ εἶναι καὶ (ΒΗ) (ΗΑ′) = (ΒΗ) (ΗΑ″) ἢ ΗΑ′=ΗΑ″. Καὶ ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Α′ καὶ Α″ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ Η ἐπὶ τῆς τεμνούσης ΒΗ Α′ Α″, ἕπεται ὅτι ταῦτα συμπίπτουσι.



Σχ. 98.



Σχ. 99.

Ἀλλὰ τὸ Α′ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερίας Κ καὶ τὸ Α″ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας Λ καὶ συνεπῶς πρέπει ἀμφότερα νὰ συμπέσωσιν εἰς τὸ Α, κοινὸν σημεῖον αὐτῶν. Ἄρα ἡ ΒΗ προεκτεινομένη διέρχεται διὰ τοῦ ἑτέρου κοινοῦ σημείου Α τῶν περιφερειῶν Κ καὶ Λ ἤτοι αἱ τρεῖς κοιναὶ χορδαὶ τῶν περιφερειῶν Κ, Λ, Ο διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Η.

510. Εἰς ἓν τόξον ΒΓ νὰ ὁρίσητε σημεῖον Α, νὰ φέρητε τὰς ἀποστάσεις ΑΔ, ΑΗ, ΑΖ τοῦ Α ἀπὸ τὴν χορδὴν ΒΓ καὶ ἀπὸ τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι $(ΑΔ)^2 = (ΑΗ)(ΑΖ)$. *(εἰς τὸ σχ. 99 νὰ ἀχθῶσιν αἱ ΑΒ, ΑΓ).*

Λύσις: Ἔστω περιφέρεια Κ (σχ. 99), Α σημεῖον τοῦ τόξου ΒΓ αὐτῆς, ΒΘ, ΓΘ αἱ ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ αὐτῆς καὶ ΑΔ, ΑΗ, ΑΖ αἱ κάθετοι ἐπὶ τὴν χορδὴν ΒΓ καὶ τὰς ἐφαπτομένας ΒΘ, ΓΘ ἀντιστοίχως. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $(ΑΔ)^2 = (ΑΗ)(ΑΖ)$. Φέρομεν τὰς χορδὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Ἡ γωνία ΑΒΘ ὡς σχηματιζομένη ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης εἰς ἓν ἄκρον αὐτῆς εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐγγεγραμμένην γωνίαν ΒΓΑ, ἡ ὁποία βαίνει εἰς τὸ τόξον ΒΑ, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς πρώτης. Δι' ὅμοιον λόγον εἶναι καὶ γωνΑΓΘ = γωνΓΒΑ. Τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΒΗ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα ἀνὰ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην. Ἄρα $\frac{AB}{AH} = \frac{A\Gamma}{A\Delta}$ ἢ $\frac{AB}{A\Gamma} =$

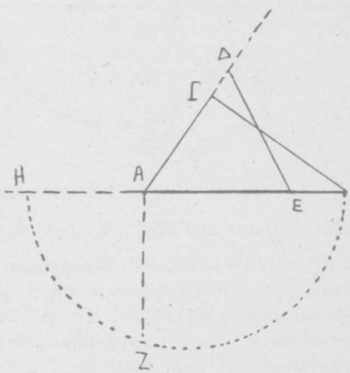
$$= \frac{AH}{A\Delta} \quad (1).$$

Τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΖΓ εἶναι ὅμοια δι' ὅμοιον λόγον Ἄρα $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{A\Delta}{AZ}$ (2). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται: $\frac{A\Delta}{AZ} = \frac{AH}{A\Delta}$ ἢ $(A\Delta)^2 =$

$$= (AZ)\,(AH).$$ ὅ. ἔ. δ.

511. **Νὰ κατασκευάσητε σκαληνὸν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἔπειτα ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ κοινὴν τὴν γωνίαν Α.**

Λύσις: Ἔστω ΑΒΓ τὸ σκαληνὸν τρίγωνον (σχ. 100) καὶ ΑΔΕ (ΑΔ = ΑΕ) τὸ ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, ἔχον τὴν γωνίαν Α αὐτοῦ κοινὴν μετὰ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Γνωρίζομεν (§ 191) ὅτι «*Ἐὰν μία γωνία τριγώνου εἶναι ἴση ἢ παραπληρωματικὴ μιᾶς γωνίας ἄλλου τριγώνου, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν αὐτῶν εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν πλευρῶν, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὰς γωνίας ταύτας*».



Σχ. 100.

Ἄρα: $\frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)} = \frac{(AB).(A\Gamma)}{(A\Delta).(AE)}$.

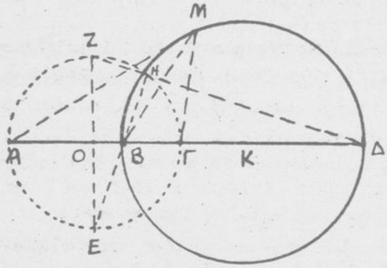
Ἀλλὰ $\frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)} = 1$. Ὅθεν

$\frac{(AB).(A\Gamma)}{(A\Delta)^2} = 1$, διότι $(A\Delta) = (AE)$ καὶ $(A\Delta)^2 = (AB).(A\Gamma)$. Ἑπομένως ἡ ΑΔ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν γνωστῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ καὶ κατασκευάζεται, ὡς φαίνεται εἰς τὸ (σχ. 100).

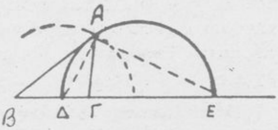
512. **Εἰς μίαν εὐθείαν νὰ ὁρίσητε δύο διαδοχικὰ τμήματα ΑΒ, ΒΓ. Ἔπειτα νὰ εὕρητε τὸν γεωμ. τόπον τῶν σημείων, ἐξ ἑκάστου τῶν ὁποίων ταῦτα φαίνονται ὑπὸ ἴσας γωνίας.**

Λύσις: Ἔστωσαν ΑΓ, ΒΓ τὰ ὁρισθέντα διαδοχικὰ εὐθ. τμήματα (σχ. 101) καὶ Μ ἓν σημεῖον τοῦ τόπου, τοιοῦτον, ὥστε γων ΑΜΒ = = γωνΒΜΓ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΜΓ ἡ ΜΒ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Μ αὐτοῦ καὶ συνεπῶς $\frac{ΜΑ}{ΜΓ} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ λόγος $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}$ εἶναι γνωστός, ἕπεται ὅτι τὸ Μ ἀνήκει εἰς τὸν τόπον τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Γ εἶναι ἴσος πρὸς $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}$. Ἀλλὰ γνωρίζομεν (§ 226 Πρόβλημα ΙΙ) ὅτι ὁ τόπος οὗτος εἶναι περιφέρεια κύκλου, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον ΒΔ, ὅπου Δ εἶναι τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν σημεῖον τοῦ Β πρὸς τὰ Α καὶ Γ.



Σχ. 101.



Σχ. 102.

Διερεύνησις: Ἵνα ὑπάρχῃ περιφέρεια διαμέτρου ΒΔ πρέπει τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ, ΒΓ νὰ εἶναι ἄνισα, ὅτε καὶ $\frac{ΑΒ}{ΒΓ} \neq 1$. Ἐὰν ΑΒ = = ΒΓ, τότε τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν σημεῖον τοῦ Β πρὸς τὰ Α καὶ Γ ἀφανίζεται εἰς τὸ ἄπειρον καὶ ἡ ἁρμονικὴ περιφέρεια ἐκφυλίζεται εἰς τὴν κάθετον εὐθεῖαν ἐπὶ τὴν ΑΓ καὶ εἰς τὸ μέσον Β αὐτῆς, ἡ ὁποία καὶ εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων ἐκ τῶν ὁποίων τὰ τμήματα ΑΒ, ΒΓ φαίνονται ὑπὸ ἴσας γωνίας.

513. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἀπὸ τὸν λόγον $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$ καὶ ἀπὸ τὴν διχοτόμον ΑΔ.

Λύσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 102), τοῦ ὁποίου γνωρίζομε τὴν πλευρὰν ΒΓ, τὴν διχοτόμον ΑΔ καὶ τὸν λόγον $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{μ}{ν}$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ.

Ἄγνωστος εἶναι ἡ κορυφὴ Α αὐτοῦ, ἥτις ὀφείλει νὰ πληροῖ τὰ ἑξῆς δύο ἐπιτάγματα.

1) Ὁ λόγος $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$ τῶν ἀποστάσεων αὐτῆς ἀπὸ τὰ γνωστὰ σημεῖα Γ νὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν δοθέντα λόγον $\frac{μ}{ν}$ καὶ

2) Ἡ ἀπόστασις αὐτῆς ἀπὸ τοῦ σημείου Δ, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὴν ΒΓ κατὰ λόγον δοθέντα $\frac{\mu}{\nu}$ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν διχοτόμον ΑΔ.

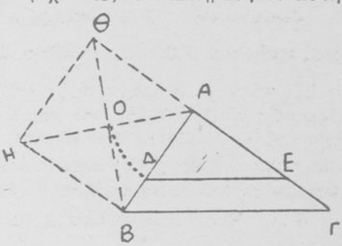
Ὁ τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα πληροῦσι τὸ πρῶτον ἐπίταγμα εἶναι ἡ περιφέρεια ἡ γραφομένη μὲ διάμετρον ΔΕ, ὅπου Δ καὶ Ε τὰ σημεῖα τὰ ὁποῖα διαιροῦσι τὴν πλευρὰν ΒΓ, τὸ μὲν ἐσωτερικῶς, τὸ δὲ ἐξωτερικῶς κατὰ λόγον $\frac{\mu}{\nu}$

Ὁ δὲ τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα πληροῦσι τὸ δεύτερον ἐπίταγμα εἶναι ἡ περιφέρεια ἡ γραφομένη μὲ κέντρον τὸ σταθερὸν σημεῖον Δ καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν διχοτόμον. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἄγνωστος κορυφὴ ὀφείλει νὰ πληροῖ ἀμφότερα τὰ ἐπιτάγματα, θὰ εἶναι ἡ τομὴ τῶν δύο τούτων περιφερειῶν (τόπων).

Κατασκευή: Λαμβάνομεν εὐθ. τμῆμα ΒΓ ἴσον πρὸς τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν τοῦ τριγώνου. Διαιροῦμεν αὐτὸ ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς κατὰ λόγον ἴσον πρὸς τὸν δοθέντα $\frac{\mu}{\nu}$ καὶ ὁρίζομεν τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε. Ἐπὶ τῆς ΔΕ, ὡς διαμέτρου γράφομεν περιφέρειαν. Κατόπιν μὲ κέντρον Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν διχοτόμον γράφομεν ἄλλην περίφέρειαν. Ἑνοῦμεν ἕν τῶν σημείων τομῆς αὐτῶν Α μὲ τὰ Β καὶ Γ καὶ ἔχομεν τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται.

514. Ἐντὸς τριγώνου ΑΒΓ νὰ γράψητε εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία νὰ διαιρῇ αὐτὸ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

Λύσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 103) καὶ ΔΕ ∥ ΒΓ, τοιαύτη ὥστε τὰ μέρη ΑΔΕ καὶ ΔΕΓΒ νὰ εἶναι ἰσοδύναμα. Συνεπῶς (ΑΔΕ)= $=\frac{(ΑΒΓ)}{2}$ ἤ $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{1}{2}$. Ἐπειδὴ ὅμως τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν αὐτῶν, θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου τῶν δύο ὁμολόγων πλευρῶν ἤτοι: $\frac{(ΑΔ)^2}{(ΑΒ)^2}=\frac{1}{2}$ ἤ



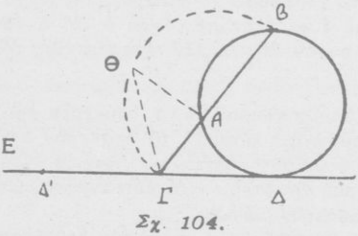
Σχ. 103.

$\frac{(ΑΔ)}{(ΑΒ)}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ καὶ $(ΑΔ)=\frac{ΑΒ}{2}.\sqrt{2}$. Ἐκ ταύτης ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ ΑΔ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς διαγωνίου τετραγώνου πλευρᾶς ΑΒ.

Σύνθεσις: Ἐπὶ τῆς ΑΒ, ὡς πλευρᾶς, κατασκευάζομεν τετράγωνον ΑΒΗΘ. Διχοτομοῦμεν τὴν διαγώνιον αὐτοῦ ΑΗ καὶ μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα ΑΟ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Δ καὶ ἀπὸ τοῦ Δ φέρομεν τὴν ΔΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται.

515. **Νὰ γράψητε περιφέρειαν, ἡ ὁποία νὰ διέρχηται ἀπὸ δύο ὡρισμένα σημεῖα Α, Β καὶ ἐφάπτηται δοθείσης εὐθείας Ε.**

Ἀνάλυσις: Ἔστω ὅτι ἐγράφη ἡ ζητουμένη περιφέρεια, διερχομένη διὰ τῶν δοθέντων σημείων Α, Β καὶ ἐφαπτομένη τῆς δοθείσης εὐθείας Ε εἰς τὸ σημεῖον Δ (σχ. 104). Ἐὰν Γ εἶναι τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ΑΒ προεκτεινομένη τέμνει τὴν εὐθεῖαν Ε, θὰ εἶναι $(ΓΔ)^2 = (ΓΑ) . (ΓΒ)$ (§ 242 Θ. ΙΙ). Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης ἐννοοῦμεν, ὅτι τὸ εὐθ. τμῆμα ΓΔ εἶναι ἡ μέση ἀνάλογος τῶν γνωστῶν τμημάτων ΓΑ, ΓΒ καὶ δύναται νὰ κατασκευασθῇ ἀρχικῶς.



Σχ. 104.

Σύνθεσις: Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, ἡ ὁποία, προεκτεινομένη, τέμνει τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν Ε εἰς τὸ σημεῖον Γ. Κατασκευάζομεν τὴν μέσην ἀνάλογον ΓΘ τῶν ΓΑ καὶ ΓΒ, ὡς εἰς τὸ σχ. 104. Μὲ κέντρον Γ καὶ ἀκτῖνα ΓΘ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Ε εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Δ′.

Γράφομεν τὰς περιφερείας, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τῶν σημείων Α, Β, Δ καὶ Α, Β, Δ′ καὶ ἔχομεν οὕτω δύο λύσεις τοῦ προβλήματος.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $(ΓΔ)^2=(ΓΘ)^2=(ΓΑ) . (ΓΒ)$ ἡ περιφέρεια ἡ διερχομένη διὰ τῶν σημείων Α, Β, Δ ἐφάπτεται τῆς ΓΔ εἰς τὸ Δ (§ 242. Θ. ΙΙ ἀντίστροφον).

Διερεύνησις. Ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχῃ λύσιν πρέπει τὰ δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας Ε.

Ὑπὸ τὸν ὅρον τοῦτον, ἐὰν τὰ σημεῖα Α καὶ Β κεῖνται ἐκτὸς τῆς εὐθείας Ε καὶ δὲν εἶναι ἡ ΑΒ ∥ Ε, τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις. Ἐὰν ΑΒ ∥ Ε, τότε τὸ σημεῖον ἐπαφῆς κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ τῆς δοθείσης εὐθείας Ε καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν, τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῶν Α, Β καὶ τοῦ σημείου τομῆς τῆς Ε ὑπὸ τῆς μεσοκαθέτου τῆς ΑΒ.

Ἂν δὲ τὸ σημεῖον Α κεῖται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας Ε, τότε τοῦτο εἶναι καὶ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς περιφερείας καὶ τῆς Ε καὶ ὑπάρχει μία πάλιν περιφέρεια, ἡ ὁποία ἔχει τὸ κέντρον της ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς.

516. **Νὰ γράψητε περιφέρειαν ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ δύο ὡρισμένα σημεῖα Α, Β καὶ νὰ ἐφάπτηται δοθείσης περιφερείας Κ.**

Ἀνάλυσις: Ἔστω, ὅτι ἐγράφη ἡ ζητουμένη περιφέρεια Ο ἐφαπτομένη τῆς δοθείσης Κ εἰς τὸ σημεῖον Γ αὐτῆς καὶ διερχομένη διὰ τῶν δοθέντων σημείων Α καὶ Β.

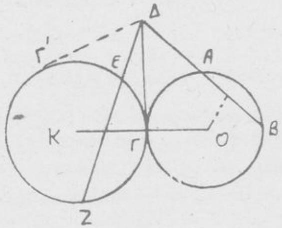
Ἄν Δ εἶναι τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον τέμνει ἡ ΑΒ, προεκτεινομένη, τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην τῶν περιφερειῶν Κ καὶ Ο εἰς τὸ σημεῖον Γ καὶ ἀχθῇ ἡ τέμνουσα ΔΕΖ τῆς περιφερείας Κ θὰ ἔχωμεν: $(\Delta\Gamma)^2=(\Delta A).(\Delta B)$ (1) καὶ $(\Delta\Gamma)^2=(\Delta E).(\Delta Z)$ (2) (§ 242). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔπεται, ὅτι $(\Delta A).(\Delta B)=(\Delta E).(\Delta Z)$ καὶ ἑπομένως τὰ σημεῖα Α, Β, Ε, Ζ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερίας (§ 240 ἀντίστροφον).

Σύνθεσις: Γράφομεν τυχοῦσαν περιφέρειαν διερχομένην διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β καὶ ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὴν δοθεῖσαν Κ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον τομῆς Δ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΕΖ καὶ ἐξ αὐτοῦ ἄγομεν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας Κ, τὴν ΔΓ.

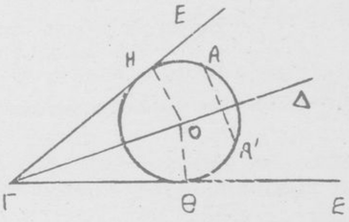
Ἔπειτα φέρομεν τῆς ΚΓ καὶ τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον τῆς τομῆς αὐτῶν Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΑ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις ἐφάπτεται τῆς δοθείσης Κ καὶ διέρχεται καὶ διὰ τῶν σηείων Α καὶ Β.

Διερεύνησις: Ὁ ἀριθμὸς τῶν λύσεων τοῦ προβλήματος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐφαπτομένων, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον Δ πρὸς τὴν δοθεῖαν περιφέρειαν Κ δηλ, δύο, μία ἢ καμμία, καθ᾽ ὅσον τὸ Δ κεῖται ἐκτὸς τῆς περιφερείας Κ ἢ ἐπ᾽ αὐτῆς ἢ ἐντὸς αὐτῆς.

1) Ἐὰν τὰ δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β κεῖνται ἀμφότερα ἐκτὸς τῆς



Σχ. 105



Σχ. 106.

περιφερείας Κ ἢ ἀμφότερα ἐντός, τὸ σημεῖον Δ εἶναι ἐξωτερικὸν καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις.

2) Ἐὰν ἓν τῶν δοθέντων σημείων κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας Κ π.χ. εἰς τὸ Ζ ἢ Ε τότε καὶ τὸ σημεῖον Δ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς Κ εἰς τὸ Ζ ἢ τὸ Ε καὶ ὑπάρχει μία περιφέρεια ἐφαπτομένη τῆς δοθείσης Κ ἐκτὸς μέν, ἂν τὸ ἄλλο τῶν δοθέντων σημείων κεῖται ἐκτὸς τῆς Κ, ἐντὸς δέ, ἂν τὸ ἄλλο τῶν δοθέντων σημείων κεῖται ἐντὸς τῆς Κ.

3) Ἐὰν ἓν τῶν δοθέντων σημείων Α κεῖται ἐντὸς τῆς Κ καὶ τὸ ἄλλο ἐκτὸς αὐτῆς, τότε τὸ σημεῖον Δ κεῖται ἐπὶ τῆς χορδῆς ΕΖ καὶ εἶναι ἐσωτερικὸν τῆς Κ καὶ τὸ πρόβλημα ἀδύνατον.

517. Νὰ γράψητε περιφέρειαν, ἡ ὁποία νὰ διέρχηται ἀπὸ ὡρισμένον σημεῖον Α καὶ νὰ ἐφάπτηται δύο δεδομένων εὐθειῶν Ε καὶ Ε΄.

Ἀνάλυσις: Ἔστω, ὅτι ἐγράφη ἡ ζητουμένη περιφέρεια Ο (σχ. 105) διερχομένη διὰ τοῦ δοθέντος σημείου Α καὶ ἐφαπτομένη τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν Ε καὶ Ε'. Τὸ κέντρον αὐτῆς Ο, ἐπειδὴ ἀπέχει ἴσον τῶν εὐθειῶν Ε καὶ Ε', θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου ἐκείνης τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουσιν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι Ε καὶ Ε', ἐντὸς τῆς ὁποίας εὑρίσκεται τὸ δοθὲν σημεῖον Α. Ἐπὶ πλέον ἡ περιφέρεια Ο διερχομένη διὰ τοῦ σημείου Α, θὰ διέρχηται καὶ διὰ τοῦ συμμετρικοῦ σημείου Α' αὐτοῦ, ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον ΓΔ.

Σύνθεσις: Διχοτομοῦμεν τὴν γωνίαν ΕΓΕ' τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, ἐντὸς τῆς ὁποίας κεῖται τὸ δοθὲν σημεῖον Α. Εὑρίσκομεν τὸ συμμετρικὸν Α' τοῦ δοθέντος σημείου Α, ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον καὶ ἔπειτα γράφομεν περιφέρειαν διερχομένην διὰ τῶν δύο σημείων Α καὶ Α' καὶ ἐφαπτομένην μιᾶς τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν π. χ. τῆς Ε, κατὰ τὴν ἄσκησιν 516.

Ἡ περιφέρεια αὕτη θὰ ἐφάπτεται καὶ τῆς ἄλλης εὐθείας Ε', διότι τὸ κέντρον της κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΓΔ καὶ συνεπῶς ἀπέχει ἴσον τῶν εὐθειῶν Ε καὶ Ε'.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

2(ν-2)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

Κανονικὰ εὐθύγραμμα σχήματα

Ἀσκήσεις σελὶς 220. **518. Ἓν κανονικὸν πολύγωνον ἔχει ν πλευράς. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον ἑκάστης γωνίας αὐτοῦ εἰς μέρη ὀρθῆς.**

Λύσις: Τὸ ἄθροισμα Σ τῶν γωνιῶν ἑνὸς πολυγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει ν πλευρὰς εὕρομεν (§ 113 Θ. Γ.), ὅτι εἶναι τόσαι ὀρθαὶ γωνίαι, ὅσον εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἠλαττωμένον κατὰ 4, ἤτοι: $\Sigma = (2\nu - 4)$ ὀρθαί.

Ἐπειδὴ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου καὶ αἱ ν γωνίαι του εἶναι ἴσαι, ἑκάστη θὰ εἶναι $\frac{2\nu - 4}{\nu}$ ὀρθαί.

519. Νὰ εὕρητε τὸ προηγούμενον μέτρον εἰς μοίρας.

Λύσις: Ἐπειδὴ 1 ὀρθ. $= 90^\circ$ αἱ $\frac{2\nu - 4}{\nu}$ ὀρθ. εἶναι $90^\circ \cdot \frac{2\nu - 4}{\nu}$.

520. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς κεντρικῆς γωνίας ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ ἑνὸς τετραγώνου.

Λύσις: Ἂν ἓν κανονικὸν πολύγωνον ἔχῃ ν πλευράς, περὶ τὸ κέντρον Κ αὐτοῦ σχηματίζονται ν ἴσαι κεντρικαὶ γωνίαι. Ἐπειδὴ δὲ ὅλαι αὗται ἔχουν ἄθροισμα 4 ὀρθ., ἑκάστη θὰ ἰσοῦται μὲ $\frac{4}{\nu}$ ὀρθ. Τοῦ ἰσοπλεύρου λοιπὸν τριγώνου ἡ κεντρικὴ γωνία εἶναι $\frac{4}{3}$ ὀρθ. $=$ $= 90^\circ \cdot \frac{4}{3} = 120^\circ$. Τοῦ δὲ τετραγώνου εἶναι $\frac{4}{4}$ ὀρθ. $=1$ ὀρθ.$=90^\circ$.

521. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς κεντρικῆς γωνίας ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ ὀκταγώνου.

Λύσις: Τοῦ ἑξαγώνου εἶναι $\frac{4}{6}$ ὀρθ. $= 90^0 \cdot \frac{4}{6} = 60^\circ$ καὶ τοῦ ὀκταγώνου εἶναι $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ὀρθ. $= 45^\circ$.

522. Νὰ εὕρητε τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν ἑνὸς κανονικοῦ σχήματος, τὸ ὁποῖον ἔχει κεντρικὴν γωνίαν 36°.

Λύσις: Ἂν ν εἶναι τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, ἡ κεντρικὴ γωνία αὐτοῦ εἰς μοίρας θὰ εἶναι $90^\circ \cdot \frac{4}{\nu}$.

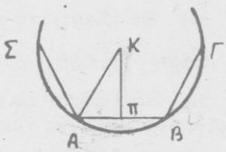
Πρέπει δέ : $\frac{360^\circ}{\nu} = 36$ ἢ $36\nu = 360^\circ$ καὶ $\nu = \frac{360^\circ}{36} = 10$.

523. Ἂν ἓν κανονικὸν εὐθ. σχῆμα ἔχει περισσοτέρας ἀπὸ 4 πλευράς, νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἑκάστη γωνία του εἶναι ἀμβλεῖα.

Λύσις: Ἡ κεντρικὴ γωνία εἶναι $\frac{4}{\nu}$ ὀρθ. Ἂν $\nu > 4$ τότε τὸ κλάσμα $\frac{4}{\nu}$ ὀρθ. <1 ὀρθ. Ἑκάστη δὲ γωνία τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι $\frac{2\nu - 4}{\nu}$ ὀρθ. $= \frac{2\nu}{\nu}$ ὀρθ. $- \frac{4}{\nu}$ ὀρθ. $= 2$ ὀρθ. $- \frac{4}{\nu}$ ὀρθ. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{4}{\nu} < 1$, θὰ εἶναι 2 ὀρθ. $- \frac{4}{\nu}$ ὀρθ. > 1 ὀρθ. δηλ. ἀμβλεῖα.

524. Ἓν κανονικὸν εὐθ. σχῆμα ἔχει ἀκτῖνα 3 ἑκ., ἡ δὲ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένη περιφέρεια ἔχει ἀκτῖνα $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ.

Λύσις: Ἔστω κανονικὸν πολύγωνον ΑΒΓΔ . . . . . Σ, ν πλευρῶν Κ τὸ κέντρον αὐτοῦ, ΚΑ ἡ ἀκτίς του καὶ ΚΠ ἡ ἀκτὶς τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτὸ περιφερείας δηλ. τὸ ἀπόστημά του (σχ. 107). Ἡ ΚΠ, ὡς κάθετος ἐκ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΒ διχοτομεῖ αὐτήν. Συνεπῶς (ΑΒ) = 2 . (ΑΠ). Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΚΠΑ ἔχομεν



Σχ. 107

$(\text{ΑΠ})^2 = (\text{ΚΑ})^2 - (\text{ΚΠ})^2 = 3^2 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 =$
$= 9 - \frac{27}{4} = \frac{36-27}{4} = \frac{9}{4}$ καὶ $(\text{ΚΠ}) = \frac{3}{2}$ καὶ
συνεπῶς $(\text{ΑΒ}) = 2 . (\text{ΚΠ}) = 2 . \frac{3}{2} = 3$ ἑκατ.

525. Ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων δύο κανονικῶν ἑξαγώνων εἶναι 2. Νὰ εὕρητε τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων περιμέτρων καὶ τὸν λόγον τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν.

Λύσις: Ἀφοῦ τὰ κανονικὰ πολύγωνα ἔχουσι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν εἶναι ὅμοια καὶ ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων των, ἤτοι μὲ 2. Ὁ δὲ λόγος τῶν περιμέτρων των ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν 2, ὁ δὲ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν δηλ. 4.

Ἀσκήσεις σελ. 224.—**526. Νὰ εὕρητε τὴν περίμετρον καὶ τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.**

Λύσις: Εὕρομεν, ὅτι $(\text{ΔΓ}) = R\sqrt{2}$ (254). Ἄρα ἡ περίμετρος αὐτοῦ θὰ εἶναι $4(\text{ΑΓ}) = 4R\sqrt{2}$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ $E = (\text{ΑΓ})^2 =$
$= (R\sqrt{2})^2 = 2R^2$.

527. Νὰ εὕρητε τὸ ἀπόστημα τοῦ τετραγώνου ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

Λύσις: Ἔστω τὸ τετράγωνον ΑΓΒΔ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Κ ἀκτῖνος R (σχ. 108) καὶ ΚΕ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΚΕΓ ἔχομεν: $(ΚΕ)^2 = (ΚΓ)^2 - (ΕΓ)^2 = R^2 - \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 =$

$= R^2 - \frac{2R^2}{4} = \frac{4R^2-2R^2}{4} = \frac{2R^2}{4}$ καὶ $(ΚΕ) = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ ἤτοι ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ.

Σχ. 108.

β) τρόπος. Εἰς τὸ τρίγωνον ΒΓΑ ἡ ΚΕ ἑνώνει τὰ δέσα δύο πλευρῶν αὐτοῦ καὶ θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν ΑΓ καὶ θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς. Ἀλλὰ $(ΑΓ) = R\sqrt{2}$. Ἄρα $(ΚΕ) = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

γ') τρόπος. Εἰς τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΒΚΓ ἡ ΚΕ εἶναι διάμεσος ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ ΒΓ καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς Ἄρα (ΚΕ) =

$= \frac{(ΒΓ)}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

528. Ἓν τετράγωνον ἔχει περίμετρον $8\sqrt{2}$ μέτρα. Νὰ εὕρητε τὴν ἀκτῖνα τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

Λύσις: Ἡ πλευρὰ αὐτοῦ εἶναι $8\sqrt{2} : 4 = 2\sqrt{2}$ μέτρα ἤτοι: $R\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ καὶ $R = 2$ μέτρα.

529. Ἓν τετράγωνον ἔχει ἀκτῖνα 3 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδόν του.

Λύσις: Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ ἀνάγκη νὰ εὕρωμεν τὴν πλευρὰν αὐτοῦ. Ἐκ τῆς σχέσεως $(ΑΓ) = R\sqrt{2}$ διὰ $R = 3$ ἑκατ. ἔχομεν $(ΑΓ) = 3\sqrt{2}$ καὶ συνεπῶς $Ε = (ΑΓ)^2 = (3\sqrt{2})^2 = 9 \,.\, 2 = 18$ τετραγ. ἑκατ. = 0,0018 τετρ. μέτρα.

β') Τρόπος: Εὕρομεν (ἄσκ. 526) ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R αὐτοῦ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $Ε = 2R^2$. Ἄρα διὰ $R = 3$ ἑκατ. ἔχομεν $Ε = 2 \cdot 3^2 = 2 \,.\, 9 = 18$ τετρ. ἑκατ.

530. Ἓν τετράγωνον ἔχει ἐμβαδὸν 50 τετ ἑκατοστομέτρων. Νὰ εὕρητε τὴν ἀκτῖνα καὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ.

Λύσις: Ἂν α εἶναι πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, ἐκ τοῦ τύπου $α^2 = Ε$ ἔχομεν $α^2 = 50$ καὶ $α = \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$ ἑκατ. Ἐκ δὲ τοῦ τύπου: $α = R\sqrt{2}$ ἔχομεν $5\sqrt{2} = R\sqrt{2}$ ἢ $R = 5$. Τὸ δὲ ἀπόστημα αὐτοῦ $ρ = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, διότι γνωρίζομεν, ὅτι ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ.

531. Νὰ περιγράψητε τετράγωνον περὶ δοθέντα κύκλον καὶ νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς του συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου αὐτοῦ.

Λύσις: Εἰς τὰς κορυφὰς Α, Γ, Β, Δ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου ΑΓΒΔ (σχ. 185. Θ. Γ.) φέρομεν ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας καὶ οὕτω ἔχομεν τὸ περιγεγγραμμένον τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 2R.

532. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγράψητε καὶ νὰ περιγράψητε κανονικὸν ὀκτάγωνον.

Λύσις: Φέρομεν δύο καθέτους διαμέτρους εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, ὅτε ἡ περιφέρεια αὐτοῦ διαιρεῖται εἰς 4 ἴσα τόξα. Διχοτομοῦμεν ἔπειτα ταῦτα καὶ φέρομεν τὰς χορδὰς τῶν ὀκτὼ ἴσων τόξων εἰς τὰ ὁποῖα διῃρέθη ἡ περιφέρεια, οὕτω ἔχομεν τὸ ἐγγεγραμμένον κανονικὸν ὀκτάγωνον. Εἰς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ φέρομεν ἐφαπτομένας καὶ σχηματίζεται οὕτω τὸ περιγεγγραμμένον κανονικὸν ὀκτάγωνον.

533. Νὰ ἰχνογραφήσητε τὸ σχῆμα 187. Θ. Γ. καὶ νὰ χρωματίσητε τὰ μέρη αὐτοῦ κατὰ βούλησιν.

Λύσις: Φέρομεν δύο καθέτους διαμέτρους εἰς τὸν δοθέντα κύκλον καὶ μὲ κέντρα τὰ ἄκρα τούτων καὶ ἀκτῖνα τῆς δοθείσης περιφερείας γράφομεν τόξα ἐντὸς τοῦ κύκλου κείμενα. Φέρομεν δὲ καὶ τέσσαρας χορδὰς καθέτους ἐπὶ τὰς ληφθείσας διαμέτρους ὡς εἰς τὸ σχῆμα.

534. Νὰ γράψητε ἓν εὐθ. τμῆμα καὶ ἔπειτα μὲ πλευρὰν αὐτὸ νὰ κατασκευάσητε κανονικὸν ἑξάγωνον.

Λύσις: Μὲ κέντρον τυχὸν σημεῖον καὶ ἀκτῖνα τὸ γραφὲν εὐθ. τμῆμα γράφομεν περιφέρειαν κύκλου καὶ ἀπό τινος σημείου αὐτῆς λαμβάνομεν διὰ τοῦ διαβήτου ἓξ διαδοχικὰ τόξα, ἔχοντα χορδὴν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου. Αἱ χορδαὶ αὐτῶν σχηματίζουσι τὸ ἐγγεγραμμένον κανονικὸν ἑξάγωνον.

535. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγράψητε καὶ νὰ περιγράψητε κανονικὸν δωδεκάγωνον.

Λύσις: Διαιροῦμεν πρῶτον τὴν περιφέρειαν τοῦ δοθέντος κύκλου εἰς ἓξ ἴσα τόξα καὶ κατόπιν διχοτομοῦμεν ἕκαστον αὐτῶν. Ἐὰν φέρωμεν τὰς χορδὰς αὐτῶν διαδοχικῶς σχηματίζεται τὸ ἐγγεγραμμένον κανονικὸν δωδεκάγωνον. Αἱ ἐφαπτόμεναι δὲ εἰς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ σχηματίζουσι τὸ περιγεγραμμένον δωδεκάγωνον.

536. Νὰ εὕρητε τὸ ἀπόστημα κανονικοῦ ἑξαγώνου συναρτήσει τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ.

Λύσις: Ἔστω ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 109) τὰ ἐγγεγραμμένον κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ ΚΠ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ.

Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΚΑΠ ἔχομεν :

$(\text{ΚΠ})^2=(\text{ΚΑ})^2-(\text{ΑΠ})^2=R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2=R^2-\frac{R^2}{4}=\frac{4R^2-R^2}{4}=\frac{3R^2}{4}$

καὶ $(\text{ΚΠ})=\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

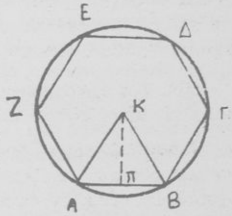
Β' Τρόπος: Γνωρίζομεν ὅτι παντὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς α τὸ ὕψος εἶναι $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Ἐπειδὴ δε $(\text{ΑΒ})=R$ θὰ ἔχωμεν $(\text{ΚΠ})=\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

537. Τὸ ἀπόστημα ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι $3\sqrt{3}$ ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὴν πλευράν του.

Λύσις: Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἀπόστημα τοῦ καν. ἑξαγώνου εἶναι $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. Ὅθεν $\frac{R\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$ ἢ $R\sqrt{3}=6\sqrt{3}$ καὶ $R=6$ ἑκατ. Ἀλλὰ ἡ πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα R. Ἄρα αὕτη εἶναι 6 ἑκατ.

538. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ ἑξαγώνου συναρτήσει τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ.

Λύσις: Τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓξ ἴσα ἰσόπλευρα τρίγωνα πλευρᾶς R. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου συναρτήσει τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ α εἶναι $\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$, τοῦ ἑξαγώνου θὰ εἶναι $\frac{6\alpha^2\sqrt{3}}{4}=$ $=\frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{2}$ καὶ διὰ $\alpha=R$ ἔχομεν $E=\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.



Σχ. 109.

539. Νὰ ἰχνογραφήσητε τὰ σχ. 189 καὶ νὰ χρωματίσητε τὰ μέρη ἑκάστου κατὰ βούλησιν.

Λύσις: α') Διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 6 ἴσα τόξα καὶ ἐγγράφομεν δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα.

β') Διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν εἰς ἓξ ἴσα τόξα καὶ μὲ κέντρα τὰ σημεῖα διαιρέσεως καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας γράφομεν ἓξ τόξα κείμενα ἐντὸς τοῦ κύκλου καὶ περατούμενα εἰς τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ.

γ') Διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 8 ἴσα τόξα καὶ ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω (περ. β').

540. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ περιγράψητε ἰσόπλευρον τρίγωνον

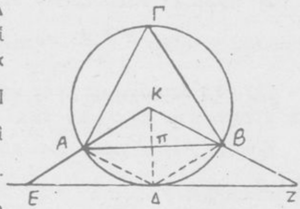
Λύσις: Ἐγγράφομεν εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ φέρομεν ἐφαπτομένας εἰς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ.

541. Νὰ εὕρητε τὸ ἀπόστημα ἰσοπλεύρου τριγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

Λύσις: Ἔστω ΑΒΓ (σχ. 110) τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ ΚΠ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΚΑΠ ἔχομεν: $(\text{ΚΠ})^2=$ $=(\text{ΚΑ})^2-(\text{ΑΠ})^2=R^2-\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{R^2-3R^2}{4}=\frac{R^2}{4}$, καὶ $(\text{ΚΠ})=\frac{R}{2}$.

β' Τρόπος: Τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΚΑΠ ἡ γωνία ΚΑΠ $= 30^\circ$. Συνεπῶς ἡ ἀπέναντι αὐτῆς κειμένη κάθετος πλευρὰ αὐτοῦ θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης R αὐτοῦ ἤτοι $(ΚΠ) = \frac{R}{2}$.

γ' Τρόπος: Τὸ τετράπλευρον ΑΚΒΔ (σχ. 110) εἶναι ῥόμβος πλευρᾶς R καὶ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ διχοτομοῦνται. Ἄρα $(ΚΠ) = \frac{(ΚΔ)}{2} = \frac{R}{2}$ Ἐπειδὴ δὲ ΑΠ εἶναι τὸ ἀπόστημα τοῦ ἑξαγώνου καὶ ἰσοῦται μὲ $\frac{(ΑΒ)}{2}$ ἕπεται ὅτι: *Τὸ ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου, τὸ δὲ ἀπόστημα τοῦ τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κανον. ἑξαγώνου.*



Σχ. 110.

542 Νὰ συγκρίνητε τὴν περίμετρον ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἰσοπλεύρου τριγώνου πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ πέρὶ τὸν αὐτὸν κύκλον περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου.

Λύσις: Τὰ δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα, ἐγγεγραμμένον καὶ περιγεγραμμένον εἶναι κανονικὰ καὶ ἔχουσι τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν. Ἄρα (§ 252) εἶναι ὅμοια καὶ ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν θὰ ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ἀποστημάτων των. Ἀλλὰ τοῦ περιγεγραμμένου τὸ ἀπόστημα εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα R τοῦ κύκλου, τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου εἶναι $\frac{R}{2}$. Ὁ λόγος ἄρα τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν εἶναι

$$\frac{\frac{R}{2}}{R} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$$

Ἂν δὲ Π εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ Π' τοῦ περιγεγραμμένου θὰ ἔχωμεν $\frac{Π}{Π'} = \frac{1}{2}$ ἢ $Π = \frac{Π'}{2}$ δηλ. ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς περιμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου.

543. Νὰ εὕρητε τὴν ἀκτῖνα κύκλου συναρτήσει τῆς πλευρᾶς ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου.

Λύσις: Ἂν α εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου ἔχομεν: $α = R\sqrt{3}$ καὶ συνεπῶς $R = \frac{α}{\sqrt{3}} = \frac{α\sqrt{3}}{3}$.

544. Νὰ περιγράψητε κανονικὸν δεκάγωνον εἰς δοθέντα κύκλον.

Λύσις: Διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν τοῦ δοθέντος κύκλου εἰς 10 ἴσα μέρη (§ 258) καὶ εἰς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας. Οὕτω σχηματίζεται τὸ περιγεγραμμένον κανονικὸν δεκάγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.

545. **Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγράψητε κανονικὸν πεντάγωνον.**

Λύσις: Διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν τοῦ δοθέντος κύκλου εἰς 10 ἴσα μέρη (§ 258 σχ. 191 Θ. Γ.) καὶ φέρομεν κατόπιν τὰς χορδὰς ΑΔ, ΔΖ, ΖΘ, ΘΛ., ΛΑ. Τὸ τόξον ΑΒΔ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ τῆς περιφερείας καὶ ἑπομένως ἡ χορδὴ αὐτοῦ εἶναι πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πενταγώνου.

546. **Νὰ περιγράψητε κανονικὸν πεντάγωνον εἰς δοθέντα κύκλον.**

Λύσις: Εἰς τὰς κορυφὰς Α, Δ, Ζ, Θ, Λ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πενταγώνου ΑΔΖΘΛ (σχ. 191 Θ. Γ.) εἰς τὸν δοθέντα κύκλον φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας, αἱ ὁποῖαι τεμνόμεναι σχηματίζουσι τὸ περιγεγραμμένον κανονικὸν πεντάγωνον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

Μέτρησις περιφερείας καὶ κύκλου

Ἀσκήσεις σελὶς 230.— 547. **Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἀκτῖνος 5 μέτρων.**

Λύσις: Εἶναι $\Gamma = 2\pi R = 2 . 3{,}14159 . 5 = 31{,}4159$ μέτρα.

548. **Νὰ εὕρητε τὴν ἀκτῖνα περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει μῆκος 12,56636 ἑκατ.**

Λύσις: Ἐκ τοῦ $\Gamma = 2\pi R$ ἔχομεν ὅτι $R = \frac{\Gamma}{2\pi}$.

Διὰ $\Gamma = 12{,}56636$ καὶ $\pi = 3{,}14159$ ἔχομεν $R = \frac{12{,}56636}{2 . 3{,}14159} = \frac{12{,}56636}{6{,}28318} =$ $= 2$ ἑκατ.

549. **Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία περιγράφεται περὶ κανονικὸν ἑξάγωνον πλευρᾶς 3 ἑκατ.**

Λύσις: Ἐπειδὴ ἡ πλευρὰ τοῦ κανον. ἑξαγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, θὰ εἶναι $R = 3$ ἑκατ. καὶ $\Gamma = 2\pi R = 2 . 3{,}14159 . 3 = 6 . 3{,}14159 = 18{,}84954$ ἑκατ.

550. **Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἡ ὁποία ἐγγράφεται εἰς τὸ προηγούμενον ἑξάγωνον.**

Λύσις: Ἡ ἀκτὶς τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἰς κανον. ἑξάγωνον πλευρᾶς 3 ἑκατ. γνωρίζομεν, ὅτι ἰσοῦται πρὸς τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. Ἀλλὰ $R = 3$ ἑκατ. καὶ συνεπῶς ἡ ἀκτὶς τῆς ἐγγεγραμ. περιφερείας εἶναι $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ἑκατ. καὶ τὸ μῆκος αὐτῆς $\Gamma = 2 . \pi R =$

$=2 \, . \, 3{,}14159 . \frac{3\sqrt{3}}{2} = 9{,}42477\sqrt{3}$ ἑκατ.

551. Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία περιγράφεται περὶ ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι $6\pi\sqrt{3}$ παλάμαι. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου $\Gamma = 2\pi R$, διὰ $\Gamma = 6\pi\sqrt{3}$ παλ. ἔχομεν:

$6\pi\sqrt{3} = 2\pi R$ καὶ $R = \frac{6\pi\sqrt{3}}{2\pi} = 3\sqrt{3}$ παλ.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ πλευρὰ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος $R = 3\sqrt{3}$ παλ. εἶναι $\alpha = R\sqrt{3}$, θὰ ἔχωμεν: $\alpha = 3\sqrt{3} \, . \sqrt{3} = 3 \, . \, 3 = 9$ παλ.

552. Ἓν τετράγωνον ἔχει πλευρὰν $4\sqrt{2}$ παλαμῶν. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

Λύσις: Γνωρίζομεν, ὅτι ἡ ἀκτὶς R τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τετράγωνον πλευρᾶς α εἶναι $R = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$.

Ἄρα $R = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4$ παλ. καὶ $\Gamma = 2\pi R = 2 \, . \, \pi \, . \, 4 = 8\pi$ παλ. Ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ $\frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ παλ.

Ἄρα $\Gamma = 2 \, . \, 2\sqrt{2} \, . \, \pi = 4\pi\sqrt{2}$ παλ.

553. Νὰ γράψητε δύο περιφερείας καὶ ἔπειτα ἄλλην ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

Λύσις: Ἂν R εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς μιᾶς, R′ τῆς ἄλλης καὶ χ ἡ ἀκτὶς τῆς ζητουμένης νὰ κατασκευασθῇ περιφερείας, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸ πρόβλημα:

$2\pi\chi = 2\pi R + 2\pi R'$ ἤ, $\chi = R + R'$. Ἄρα ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν τὴν νέαν περιφέρειαν μὲ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν δύο δοθεισῶν περιφερειῶν.

554. Νὰ γράψητε μίαν περιφέρειαν καὶ ἄλλην τριπλασίαν αὐτῆς.

Λύσις: Ἂν R εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς πρώτης τὸ μῆκος αὐτῆς $\Gamma = 2\pi R$. Ἂν δὲ χ κληθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς ἄλλης, τὸ μῆκος αὐτῆς θὰ εἶναι $\gamma = 2\pi\chi$. Ἀλλὰ γνωρίζομεν, ὅτι ὁ λόγος δύο περιφερειῶν ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων ἤτοι $\frac{}{\gamma} = \frac{\chi}{R}$. Ἀλλὰ $\frac{\Gamma}{\gamma} = 3$. Ἄρα καὶ $\frac{\chi}{R} = 3$ καὶ $\chi = 3R$. Ἀρκεῖ ἄρα νὰ γράψωμεν τὴν νέαν περιφέρειαν μὲ ἀκτῖνα τριπλασίαν τῆς ἀκτῖνος R τῆς πρώτης περιφερείας.

Σελὶς 232. ΠΟΡΙΣΜΑ: *Ὁ λόγος δύο κύκλων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων αὐτῶν*

Ἀπόδειξις: Ἂν Ε εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς κύκλου καὶ R ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ θὰ ἔχωμεν $E=\pi R^2$ (1). Ἂν δὲ E' εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἄλλου κύκλου καὶ R' ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν $E' = \pi R'^2$ (2). Ὁ λόγος δὲ αὐτῶν θὰ εἶναι

$$\frac{E}{E'} = \frac{\pi R^2}{\pi R'^2} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

Ἀσκήσεις σελὶς 232. 555. **Ἓν κυκλικὸν ἁλώνιον ἔχει ἀκτῖνα 4 μέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.**

Λύσις: Ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον $E = \pi R^2$ διὰ $R=4$ μ καὶ ἔχομεν $E = \pi \,.\, 4^2 = 16\pi$ τετρ. μέτρα.

556. **Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, εἰς τὸ ὁποῖον ἐγγράφεται κανονικὸν ἑξάγωνον πλευρᾶς 2,5 παλαμῶν.**

Λύσις: Γνωρίζομεν, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον κανονικοῦ ἑξαγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ. Ἄρα $R= 2,5$ παλ. καὶ $E = \pi R^2 = \pi \,.\, 2,5^2$ τετρ. παλ. $= 6,25\pi$ τετρ. παλ.

557. **Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἐμβαδὸν 12,56636 τετρ. μέτρα. Νὰ εὕρητε δὲ καὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας αὐτοῦ.**

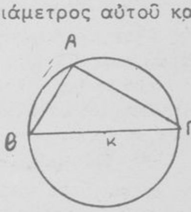
Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου $E = \pi R^2$ ἔχομεν διαδοχικῶς: $R^2 = \dfrac{E}{\pi}$

καὶ $R = \sqrt{\dfrac{E}{\pi}}$. Ὅθεν $R = \sqrt{\dfrac{12,56636}{3,14159}} = \sqrt{4} = 2$ μετ.

Τὸ δὲ μῆκος τῆς περιφερείας αὐτοῦ εἶναι $\Gamma = 2\pi R = 2 \,.\, 2 \,.\, 3,14159 =$ $= 12,56636$ μέτρα.

558. **Ἓν σημεῖον περιφερείας ἀπέχει 6 ἑκατ. ἀπὸ τὸ ἓν ἄκρον μιᾶς διαμέτρου ΒΓ καὶ 8 ἑκατ. ἀπὸ τὸ ἄλλο ἄκρον αὐτῆς. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τούτου.**

Λύσις: Ἔστω ὁ κύκλος Κ (σχ. 111). ΒΓ μία διάμετρος αὐτοῦ καὶ Α σημεῖον τῆς περιφερείας του ἀπέχον 6 ἑκ. ἀπὸ τοῦ Β καὶ 8 ἑκατ. ἀπὸ τοῦ Γ. Τὸ τρίγωνον ΒΑΓ εἶναι ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς καθέτους πλευράς. Ἄρα $(B\Gamma)^2 = (AB)^2 + (A\Gamma)^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$ καὶ $(B\Gamma) = 2R = \sqrt{100} = 10$ ἑκατ. Ἄρα $R = 5$ ἑκατ. καὶ $E = \pi R^2 = \pi \,.\, 5^2 = 25\pi$ τετρ. ἑκατ.



Σχ. 111.

559 **Νὰ σχηματίσητε κύκλον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο δοθέντων κύκλων.**

Λύσις Ἂν καλέσωμεν χ τὴν ἀκτῖνα τοῦ ζητουμένου κύκλου καὶ Κ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ, R, R' τὰς ἀκτῖνας τῶν δοθέντων κύκλων καὶ Ε, Ε' τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν, πρέπει κατὰ τὸ πρόβλημα νὰ ἔχωμεν $K = E + E'$ ἢ $\pi\chi^2 = \pi R^2 + \pi R'^2$ ἢ $\chi^2 = R^2 + R'^2$. Ἐκ ταύτης ἐννοοῦμεν, ὅτι ἡ ἀκτὶς χ εἶναι ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ καθέτους πλευρὰς τὰς ἀκτῖνας R καὶ R' τῶν δοθέντων κύκλων καὶ εὐκόλως κατασκευάζεται (§ 199).

560. Νὰ σχηματίσητε κύκλον ἰσοδύναμον πρὸς τὴν διαφορὰν δύο δοθέντων κύκλων.

Λύσις: Ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω (ἄσκ. 559) εὑρίσκομεν, ὅτι $\chi^2 = R^2 - R'^2$ ἤτοι: Ἡ ἀκτὶς τοῦ ζητουμένου κύκλου εἶναι ἡ μία κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει ὑποτείνουσαν τὴν ἀκτῖνα R τοῦ μεγαλυτέρου ἐκ τῶν δοθέντων κύκλων καὶ ἄλλην κάθετον πλευρὰν τὴν ἀκτῖνα R' τοῦ μικροτέρου τῶν δοθέντων κύκλων καὶ κατασκευάζεται κατὰ τὸ πρόβλημα § 200. Θ. Γ.

561. Εἰς ἓν τετράγωνον νὰ ἐγγράψητε κύκλον. Ἔπειτα νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τούτου συναρτήσει τῆς πλευρᾶς α τοῦ τετραγώνου.

Λύσις: Εὕρομεν (ἄσκησις 531) ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου τετραγώνου εἰς κύκλον ἀκτῖνος R εἶναι 2R ἤτοι $\alpha = 2R$ καὶ

$$R = \frac{\alpha}{2} \text{ καὶ } E = \pi R^2 = \pi \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \pi \frac{\alpha^2}{4}.$$

562. Νὰ εὕρητε συναρτήσει τῆς πλευρᾶς τοῦ προηγουμένου τετραγώνου τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ, ἡ ὁποία κεῖται ἐκτὸς τοῦ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Λύσις: Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου πλευρᾶς α εἶναι α^2, τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἶναι (ἄσκ. 561) $\frac{\pi\alpha^2}{4}$. Ἄρα ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι $\alpha^2 - \frac{\pi\alpha^2}{4} = \frac{\alpha^2}{4}(4 - \pi)$.

Ἀσκήσεις σελὶς 233. **563. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τόξου 50° καὶ ἀκτῖνος 3 μέτρων.**

Λύσις: Ἂν τ καλέσωμεν τὸ μῆκος τοῦ τόξου R τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ, καὶ μ τὸ μέτρον αὐτοῦ εἰς μοίρας ἔχομεν (§ 267 Θ. Γ.) ὅτι

$$\tau = \pi R . \frac{\mu}{180} = \frac{\pi . 3 . 50}{180} = \frac{15\pi}{18} = \frac{5\pi}{6} = \frac{5 . 3{,}14159}{6} = \frac{15{,}70795}{6} =$$
$$= 2{,}61799 \text{ μ.}$$

564. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τόξου 120° ἀκτῖνος 2μ.

Λύσις: Ἔχομεν $\tau = \frac{\pi R \mu}{180} = \frac{\pi . 2 . 120}{180} = \frac{240\pi}{180} = \frac{4\pi}{3} =$

$$= \frac{4 . 3{,}14159}{3} = \frac{12{,}56636}{3} = 4{,}18879 \text{ μέτρα.}$$

565. Ἓν τόξον 60° ἔχει μῆκος π ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.

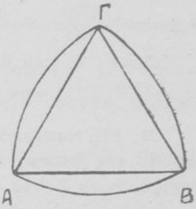
Λύσις: Εἰς τὸν τύπον $\tau = \frac{\pi R \mu}{180}$ θέτομεν $\tau = \pi$, $\mu = 60°$ καὶ ἔχομεν

$$\pi = \pi R . \frac{60}{100} \text{ ἢ } \pi = \frac{\pi R}{3} \text{ καὶ } \pi R = 3\pi \text{ ἢ } R = 3 \text{ ἑκατ.}$$

566. Ἓν τόξον ἀκτῖνος 12 ἑκατ. ἔχει μῆκος 6 π ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον αὐτοῦ.

Λύσις: Ἔχομεν $6\pi = \frac{\pi . 12 . \mu}{180}$ ἢ $6\pi . 180 = 12\pi\mu$, $180^0 = 2\mu$ καὶ $\mu = \frac{180^0}{2} = 90^0$

567. **Νὰ κατασκευάσητε ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς αὐτοῦ καὶ ἀκτῖνα τὴν πλευράν του νὰ γράψητε τρία τόξα μικρότερα ἡμιπεριφερείας καὶ περατούμενα εἰς δύο κορυφὰς τοῦ τριγώνου ἕκαστον. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς ὑπ' αὐτῶν ἀποτελουμένης γραμμῆς ἐκ τῆς πλευρᾶς α.**



Σχ. 112.

Λύσις: Ἔστω ΑΒΓ (σχ. 112) τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α καὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τὰ τόξα μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς αὐτοῦ καὶ ἀκτῖνας τὴν πλευράν του.

Ζητεῖται τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου τοῦ καμπυλογράμμου τριγώνου ΑΒΓ.

Τὸ τόξον ΑΒ ἀνήκει εἰς κύκλον ἀκτῖνος α καὶ ἔχει μέτρον 60^0, τὸ μῆκος δὲ αὐτοῦ εἶναι $\tau = \frac{\pi R \mu}{180} = \frac{\pi . \alpha . 60}{180} = \frac{\pi\alpha}{3}$. Ἄρα $(\widehat{AB}) + (\widehat{B\Gamma}) + (\widehat{A\Gamma}) = 3(\widehat{AB}) = 3 . \frac{\alpha\pi}{3} = \pi\alpha$.

568. **Νὰ κατασκευάσητε κυκλικὸν τομέα 60^0 καὶ ἀκτῖνος 4 ἑκατ. Νὰ εὕρητε δὲ ἔπειτα τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.**

Λύσις: Μὲ κέντρον τυχὸν σημεῖον καὶ ἀκτῖνα 4 ἑκατ. γράφομεν περιφέρειαν. Ἐπὶ τῆς περιφερείας ταύτης λαμβάνομεν τόξον ἔχον χορδὴν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα καὶ φέρομεν τὰς ἀκτῖνας εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ. Οὕτω ἔχομεν κυκλικὸν τομέα 60^0 ἀκτῖνος 4 ἑκατ.

Τὸ ἐμβαδὸν κ αὐτοῦ εἶναι γινόμενον τοῦ μήκους τοῦ τόξου αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος ἤτοι: $\kappa = \tau . \frac{R}{2} = \frac{\pi R\mu}{180^0} . \frac{R}{2} = \frac{\pi R^2 \mu}{360}$.

Διὰ $R = 4$ ἑκατ. καὶ $\mu = 60^0$ ἔχομεν $\kappa = \frac{\pi . 4^2 . 60}{360} = \frac{\pi . 16 . 60}{360} = \frac{16\pi}{6} = \frac{8\pi}{3}$ τετ. ἑκατ.

569. **Μὲ κέντρον τὴν μίαν κορυφὴν ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ ἀκτῖνα τὴν πλευρὰν αὐτοῦ, νὰ γράψητε τόξον περιεχόμενον μεταξὺ τῶν ἄλλων κορυφῶν καὶ μικρότερον ἡμιπεριφερείας. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου τομέως συναρτήσει τῆς πλευρᾶς α τοῦ τριγώνου.**

Λύσις: Ἡ γωνία τοῦ σχηματιζομένου τομέως ἔχει μέτρον 60^0 καὶ ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ $R = \alpha$. Ἄρα $\kappa = \frac{\pi R^2 \mu}{360} = \frac{\pi . \alpha^2 . 60}{360} = \frac{\pi\alpha^2}{6}$.

570. Εἷς κυκλικὸς τομεὺς 30^0 ἔχει ἐμβαδὸν $\frac{3\pi}{4}$ τετρ. παλάμας. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος καὶ τῆς βάσεως αὐτοῦ.

Λύσις: Εἰς τὸν τύπον $\kappa = \frac{\pi R^2 \mu}{360}$ θέτομεν $E = \frac{3\pi}{4}$ καὶ $\mu = 30$, ὅτε ἔχομεν $\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi R^2 . 30}{360}$ ἢ $\frac{3}{4} = \frac{R^2}{12}$, $4R^2 = 36$, $R^2 = 9$ καὶ $R = 3$ παλάμαι.

Ἄρα $\tau = \frac{\pi R \mu}{180} = \frac{\pi . 3 . 30}{180} = \frac{90\pi}{180} = \frac{\pi}{2}$ παλάμαι.

Ὥστε: Ἡ μὲν ἀκτὶς τοῦ τομέως εἶναι 3 παλ. τὸ δὲ μῆκος τῆς βάσεως αὐτοῦ εἶναι $\frac{\pi}{2}$ παλάμαι.

571. Εἰς κυκλικὸν τομέα 90^0 καὶ ἀκτῖνος 5 ἑκατ. νὰ φέρητε τὴν χορδὴν τῆς βάσεως αὐτοῦ. Νὰ ὑπολογίσητε δὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου ἐντὸς αὐτοῦ κυκλικοῦ τμήματος.

Λύσις: Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΓΖΑΓ (σχ. 108) θὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΑΚΓΖΑ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΚΓ. Ἐπειδὴ $(\widehat{A\Gamma}) = 90^0$, θὰ εἶναι (ΑΚΓΖΑ) $= \frac{\Pi R^2}{4} = \frac{\pi . 5^2}{4} = \frac{25\pi}{4}$ τετρ. ἑκατ. καὶ (ΑΚΓ) $= \frac{(AK)(K\Gamma)}{2} = \frac{5 . 5}{2} = \frac{25}{2}$ τετ. ἑκατ. Ὅθεν (ΓΖΑΓ) $= \frac{25\pi^2}{4} - \frac{25}{2} = \frac{25}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ τετρ. ἑκατ. $= 12{,}5\,(1{,}570795 - 1) = 12{,}5 . 0{,}570795$ τετρ. ἑκατ. ἤτοι 7,125 τετρ. ἑκατ. περίπου.

572. Εἷς κυκλικὸς τομεὺς ἔχει ἀκτῖνα 3 μέτρων καὶ ἐμβαδὸν $\frac{9\pi}{4}$ τετρ. μέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς γωνίας αὐτοῦ.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου $\kappa = \pi R^2 . \frac{\mu}{360}$, διὰ $\kappa = \frac{9\pi}{4}$ καὶ $R = 3$ μέτρ. ἔχομεν: $\frac{9\pi}{4} = \pi . 3^2 . \frac{\mu}{360}$ ἢ $\frac{1}{4} = \frac{\mu}{360}$ καὶ $4\mu = 360^0$ καὶ $\mu = \frac{360^0}{4} = 90^0$. Ὥστε τὸ μέτρον τῆς γωνίας αὐτοῦ εἶναι 90^0.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Δ΄ Βιβλίου

573. Νὰ ὁρίσητε ποῖον κανονικὸν εὐθ. σχῆμα ἔχει γωνίαν $\frac{10}{7}$ ὀρθ.

Λύσις: Ἂν ν εἶναι τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ εὐθ. σχήματος, ἑκάστη γωνία αὐτοῦ εἶναι $\frac{2\nu - 4}{\nu}$ ὀρθ. Πρέπει ἄρα $\frac{2\nu - 4}{\nu} = \frac{10}{7}$ ἢ $(2\nu - 4) . 7 = 10\nu$ ἢ $14\nu - 28 = 10\nu$ ἢ $14\nu - 10\nu = 28$, $4\nu = 28$ καὶ $\nu = \frac{28}{4} = 7$.

Ὥστε τοῦ κανονικοῦ ἑπταγώνου ἑκάστη γωνία εἶναι $\frac{10}{7}$ ὀρθ.

574. **Ἓν κανονικὸν εὐθ. σχῆμα ἔχει ἀκτῖνα R, πλευρὰν α καὶ ἀπόστημα ρ. Νὰ ἀποδείξητε, ὅτι $4(R^2-\rho^2)=\alpha^2$.**

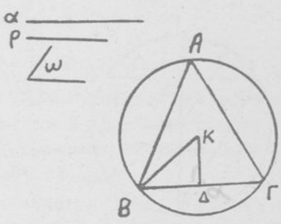
Λύσις: Ἔστω ΒΓ $=\alpha$ (σχ. 113) ἡ πλευρὰ ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου, ΚΒ$=R$ ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ καὶ ΚΔ $=\rho$ τὸ ἀπόστημά του.

Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΚΔΒ ἔχομεν : $(KB)^2=(K\Delta)^2+(B\Delta)^2$ ἢ

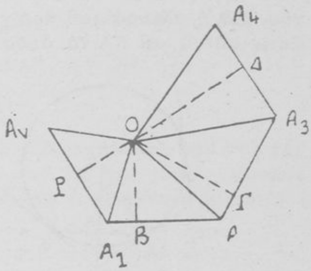
$R^2=\rho^2+\frac{\alpha^2}{4}$ ἢ $4R^2=4\rho^2+\alpha^2$ ἢ $4R^2-4\rho^2=\alpha^2$ καὶ $4(R^2-\rho^2)=\alpha^2$.

575. **Ἐντὸς ἑνὸς κανονικοῦ εὐθυγράμμου σχήματος νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον καὶ νὰ ἀποδείξητε, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπὸ τὰς πλευρὰς εἶναι σταθερόν.**

Λύσις : Ἔστω $A_1\ A_2\ A_3 \ldots, A_\nu$ (σχ. 114) κανονικὸν εὐθ. σχῆμα ν πλευρῶν, Ο τυχὸν σημεῖον ἐντὸς αὐτοῦ καὶ $(OB)=\upsilon_1$, $(O\Gamma)=\upsilon_2$, $(O\Delta)=\upsilon_3, \ldots (OP)=\upsilon_\nu$ αἱ ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ κανονικοῦ σχήματος. Ἐὰν ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ Ο αἱ εὐθεῖαι OA_1, OA_2,



Σχ. 113.



Σχ. 114.

$OA_3, \ldots OA_\nu$ σχηματίζονται ν τρίγωνα, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ πολυγώνου ἤτοι :

$$E=\frac{1}{2}(A_1A_2).\upsilon_1+\frac{1}{2}(A_2A_3)\upsilon_2+\ldots+\frac{1}{2}(A_{\nu-1}.A_\nu)\upsilon_\nu \quad (1).$$

Ἀλλὰ $(A_1A_2)=(A_2A_3)=\ldots\ldots=(A_{\nu-1}A_\nu)=\alpha$ καὶ ἡ (1) γίνεται

$$E=\frac{1}{2}\alpha\upsilon_1+\frac{1}{2}\alpha\upsilon_2+\ldots+\frac{1}{2}\alpha\upsilon_\nu=\frac{1}{2}\alpha(\upsilon_1+\upsilon_2+\ldots+\upsilon_\nu) \text{ ἢ}$$

$$2E=\alpha(\upsilon_1+\upsilon_2+\upsilon_3+\ldots+\upsilon_\nu) \text{ καὶ } \upsilon_1+\upsilon_2+\upsilon_3+\ldots+\upsilon_\nu=\frac{2E}{\alpha}.$$

Ἀλλὰ τῆς ἰσότητος ταύτης τὸ β' μέλος εἶναι σταθερόν, καθ' ὅσον Ε καὶ α εἶναι σταθερά. Ἄρα καὶ $\upsilon_1+\upsilon_2+\upsilon_3+\ldots\ \upsilon_\nu=$ σταθερόν, διὰ πᾶσαν θέσιν τοῦ σημείου Ο ἐντὸς τοῦ πολυγώνου $A_1\ A_2\ A_3 \ldots A_\nu$.

576. **Νὰ ὁρίσητε τὸ ἀπόστημα καὶ τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ εὐθ. σχήματος ἀπὸ τὴν πλευρὰν καὶ ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ.**

Λύσις: Εὕρομεν (ἄσκ. 574) ὅτι $4(R^2-\rho^2)=\alpha^2$, ὅπου R ἡ ἀκτίς, ρ τὸ ἀπόστημα καὶ α ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου. Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης ἔχομεν $4\mathbf{R}^2 - 4\rho^2 = \alpha^2$ ἢ $4\rho^2 = 4\mathbf{R}^2 - \alpha^2$ καὶ

$2\rho = \sqrt{4\mathbf{R}^2 - \alpha^2}$ καὶ $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{4\mathbf{R}^2 - \alpha^2}$.

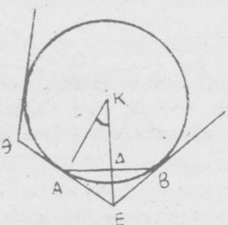
Ἐὰν τὸ κέντρον τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ἑνώσωμεν δι' εὐθειῶν μὲ τὰς κορυφὰς αὐτοῦ, χωρίζεται τοῦτο εἰς ν ἴσα τρίγωνα μὲ βάσιν α καὶ ὕψος $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{4\mathbf{R}^2 - \alpha^2}$.

Τὸ ἐμβαδὸν δὲ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ν τούτων ἴσων τριγώνων καὶ θὰ εἶναι :

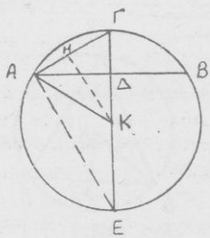
$$E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{1}{2}\sqrt{4\mathbf{R}^2 - \alpha^2} \cdot \nu = \frac{\nu\alpha}{4}\sqrt{4\mathbf{R}^2 - \alpha^2}.$$

577. **Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς κανονικοῦ εὐθ. σχήματος περιγεγραμμένου, εἰς κύκλον ἀκτῖνος R, ἄν ἡ πλευρὰ τοῦ ἀντιστοίχου ἐγγεγραμμένου εἶναι α. Νὰ ἐφαρμόσητε τὸ ἐξαγόμενον εἰς περιγεγραμμένον κανονικὸν ἑξάγωνον ἢ τρίγωνον.**

Λύσις: Ἔστω (ΑΒ) = α (σχ. 115) ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, ΚΑ=**R** ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ καὶ ΚΔ=ρ, τὸ ἀπόστημά του, ΕΘ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, ΚΕ ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ καὶ ΚΑ τὸ ἀπόστημά του.



Σχ. 115.



Σχ. 116.

Τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΚΑΔ καὶ ΚΑΕ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουσι τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ΑΚΕ κοινήν.

Ἄρα $\frac{ΑΕ}{ΑΔ} = \frac{ΚΑ}{ΚΔ}$ ἢ $\frac{(ΑΕ)}{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\mathbf{R}}{\frac{1}{2}\sqrt{4\mathbf{R}^2 - \alpha^2}}$ καὶ $(ΑΕ) = \frac{\alpha\mathbf{R}}{\sqrt{4\mathbf{R}^2 - \alpha^2}}$

καὶ $(ΕΘ) = 2 \cdot (ΑΕ) = \frac{2\alpha\mathbf{R}}{\sqrt{4\mathbf{R}^2 - \alpha^2}}$.

Ἐφαρμογή : α') Διὰ τὸ ἑξάγωνον ἔχομεν **R** = α καὶ συνεπῶς, ἄν χ κληθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου, θὰ εἶναι

$$\frac{2\alpha \cdot \alpha}{\sqrt{4\alpha^2 - \alpha^2}} = \frac{2\alpha^2}{\sqrt{3\alpha^2}} = \frac{2\alpha^2}{\alpha\sqrt{3}} = \frac{2\alpha}{\sqrt{3}} = \frac{2\alpha\sqrt{3}}{3}.$$

β') Διὰ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι $\alpha = \mathbf{R}\sqrt{3}$ καὶ

$$\chi = \frac{2\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}\sqrt{3}}{\sqrt{4\mathbf{R}^2 - \mathbf{R}^2 \cdot 3}} = \frac{2\mathbf{R}^2\sqrt{3}}{\mathbf{R}} = 2\mathbf{R}\sqrt{3} = 2\alpha \quad \text{ἤτοι}$$

ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου εἰς κύκλον ἀκτῖνος R εἶναι διπλασία τῆς πλευρᾶς α τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου.

578. **Ἀπὸ τὴν πλευρὰν α κανονικοῦ εὐθ. σχήματος καὶ ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα R αὐτοῦ νὰ εὕρητε τὴν πλευρὰν τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ εὐθ. σχήματος, τὸ ὁποῖον ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.**

Λύσις: Ἔστω (ΑΒ)=α (σχ. 116) ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει ν πλευρὰς καὶ (ΑΓ) = χ ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.

Ἐπειδὴ τοῦ τριγώνου ΑΚΓ ἡ γωνία ΑΚΓ εἶναι ὀξεῖα ἔχομεν (§ 206) $(ΑΓ)^2 = (ΚΑ)^2 + (ΚΓ)^2 - 2(ΚΓ).(ΚΔ)$.

$$ἢ\ χ^2 = R^2 + R^2 - 2R\cdot\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-α^2} = 2R^2 - R\sqrt{4R^2-α^2}$$

$$καὶ\ χ = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2-α^2}}.$$

β′) τρόπος: Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΓΔ ἔχομεν:

$$(ΑΓ)^2 = (ΑΔ)^2 + (ΔΓ)^2 = \left(\frac{α}{2}\right)^2 + [(ΚΓ)-(ΚΔ)]^2 = \frac{α^2}{4} +$$

$$+\left(R - \frac{1}{2}\sqrt{4R^2-α^2}\right)^2 = \frac{α^2}{4} + R^2 + \frac{1}{4}(4R^2-α^2) - 2R.\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-α^2} =$$

$$= \frac{α^2}{4} + R^2 + R^2 - \frac{α^2}{4} - R.\sqrt{4R^2-α^2} = 2R^2 - R\sqrt{4R^2-α^2}$$

$$καὶ\ (ΑΓ) = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2-α^2}}.$$

579. **Ἀπὸ τὴν πλευρὰν α κανονικοῦ εὐθ. σχήματος καὶ ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα R αὐτοῦ νὰ εὕρητε τὴν πλευρὰν τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ εὐθ. σχήματος, τὸ ὁποῖον ἔχει ἥμισυ ἀριθμὸν πλευρῶν.**

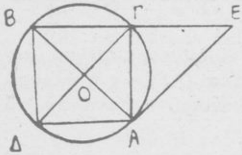
Λύσις: Ἔστω (ΑΓ)=α (σχ. 116) ἡ πλευρὰ τοῦ δοθέντος κανονικοῦ πολυγώνου καὶ (ΑΒ)=χ ἡ πλευρὰ τοῦ ἔχοντος τὸν ἥμισυ ἀριθμὸν πλευρῶν. Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνουΑΓΕ ἔχομεν: (ΑΔ).(ΓΕ)=(ΑΓ).(ΑΕ) (1) διότι ἕκαστον τῶν γινομένων τούτων παριστᾷ τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν αὐτοῦ. Ἀλλὰ $(ΑΕ)^2 = (ΓΕ)^2 - (ΑΓ)^2 = 4R^2 - α^2$ καὶ $(ΑΕ) = \sqrt{4R^2-α^2}$ καὶ ἡ (1) γίνεται:

$$\frac{χ}{2}\cdot 2R = α.\sqrt{4R^2-α^2}\ ἢ\ R\,χ = α\sqrt{4R^2-α^2}\ καὶ\ χ = \frac{α\sqrt{4R^2-α^2}}{R}.$$

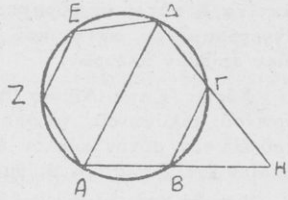
580. **Νὰ ἐγγράψητε εἰς κύκλον τετράγωνον ΑΓΒΔ νὰ προεκτείνητε τὴν πλευρὰν ΒΓ κατὰ τὴν φορὰν Β πρὸς Γ κατὰ τμῆμα ΓΕ ἴσον πρὸς την πλευρὰν ΑΓ. Νὰ γράψητε τὴν εὐθεῖαν ΑΕ καὶ νὰ ἀποδείξητε, ὅτι αὕτη ἐφάπτεται εἰς τὸ Α τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας καὶ ἰσοῦται πρὸς τὴν διάμετρον αὐτῆς.**

Λύσις: Ἐπειδὴ ΓΕ=ΓΑ, τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΑΓΕ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ συνεπῶς γωνΕ=45°. Ἀλλὰ καὶ γωνΑΒΓ=45°. Ὅθεν τὸ τρίγωνον

ΒΑΕ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές. Ἄρα ἡ ΑΕ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας εἰς τὸ Α, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΑ καὶ εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς καὶ (ΕΑ) = (ΑΒ) = 2R.



Σχ. 117.



Σχ. 118.

581. Νὰ ἀποδείξητε, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν Ε περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ ε τοῦ ἀντιστοίχου ἐγγεγραμμένου.

Λύσις: Εὕρομεν (ἄσκ. 577) ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου εἶναι διπλασία τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου. Ἄρα $\frac{E}{\varepsilon} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4$ καὶ $E = 4\,\varepsilon$.

582. Νὰ προεκτείνητε τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΓΔ κανονικοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ, μέχρις οὗ συναντηθῶσιν εἴς τι σημεῖον Η. Νὰ ἀποδείξητε δέ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΔΗ εἶναι ἰσόπλευρον.

Λύσις: Ἐπειδὴ (τοξΔΒ)=60° καὶ (τοξΒΓ)=60° θὰ εἶναι καὶ (τοξΑΒΓ)= =120° καὶ ἡ γωνία ΑΔΗ, ὡς ἐγγεγραμμένη βαίνουσα εἰς τόξον 120°, θὰ ἔχῃ μέτρον τὸ ἥμισυ αὐτοῦ δηλ. 60°. Δι' ὅμοιον λόγον καὶ (γωνΔΑΗ)=60°. Συνεπῶς καὶ (γωνΗ)=60°. Τὸ τρίγωνον ΔΑΗ εἶναι ἰσογώνιον καὶ συνεπῶς ἰσόπλευρον (σχ. 118).

583. Νὰ εὕρητε τὸ ἀπόστημα ΚΗ κανονικοῦ δεκαγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.

Λύσις: Ἔστω ΑΓ ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου δεκαγώνου εἰς κύκλον ἀκτῖνος R (σχ. 116) καὶ ΚΗ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ. Εἰς τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΓΑΕ ἡ ΚΗ, ὡς συνδέουσα τὰ μέσα Κ καὶ Η δύο πλευρῶν αὐτοῦ, θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΕ καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς ἤτοι $(KH) = \frac{1}{2}(AE)$. Ἀλλὰ ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΓΑΕ ἔχομεν:

$(AE)^2 = (\Gamma E)^2 - (A\Gamma)^2$, ἔνθα $(\Gamma E) = 2R$ καὶ $(A\Gamma) = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$ (§ 259).

$$\text{Ἄρα } (AE)^2 = 4R^2 - \frac{R^2}{4}(\sqrt{5} - 1)^2 = \frac{16R^2 - R^2(5 - 2\sqrt{5} + 1)}{4} =$$

$$= \frac{16R^2 - 6R^2 + 2R^2\sqrt{5}}{4} = \frac{10R^2 + 2R^2\sqrt{2}}{4} = \frac{R^2}{4}(10 + 2\sqrt{5})$$

$$\text{καὶ } (AE) = \frac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\,.$$

Ἑπομένως $KH = \frac{1}{2}(AE) = \frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

584. **Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ δεκαγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.**

Λύσις: Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν δέκα τριγώνων ἴσων πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΚΓ (σχ. 116). Ἀλλὰ

$$(AK\Gamma) = \frac{1}{2}(A\Gamma).(KH) = \frac{1}{2}\cdot\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)\cdot\frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{R^2}{16}(\sqrt{5}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \frac{R^2}{16}\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{R^2}{16}\sqrt{(6-2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})} = \frac{R^2}{16}\sqrt{60-20\sqrt{5}+12\sqrt{5}-20} =$$

$$= \frac{R^2}{16}\sqrt{40-8\sqrt{5}} = \frac{R^2}{16}.2\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \frac{R^2}{8}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Συνεπῶς $E = 10\,(AK\Gamma) = \frac{10R^2}{8}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \frac{5R^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

Σημείωσις: Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου ἠδυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ δι᾽ ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου $E = \frac{\nu\alpha}{4}\sqrt{4R^2-\alpha^2}$ (ἄσκ. 576), ὁ ὁποῖος δίδει τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κανονικοῦ πολυγώνου συναρτήσει τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ.

585. **Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς κανονικοῦ ὀκταγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.**

Λύσις: Ἔστω ΑΒ (σχ. 116) ἡ πλευρὰ τετραγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον Κ ἀκτῖνος **R**, ὅτε ΑΓ θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ὀκταγώνου. Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΚΓ εἶναι ὀξεῖα ἔχομεν (§ 206) $(A\Gamma)^2 = (AK)^2 + (K\Gamma)^2 - 2(K\Gamma).(K\Delta) = R^2 + R^2 - 2R.\frac{R\sqrt{2}}{2} =$

$= 2R^2 - R^2\sqrt{2} = R^2(2-\sqrt{2})$, διότι $(K\Delta) = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, ὡς ἀπόστημα τετραγώνου. Ἄρα $(A\Gamma) = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Σημείωσις. Ἐπειδὴ τὸ ὀκτάγωνον ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν καὶ τὸν τύπον (ἄσκ. 578) $(A\Gamma) =$

$= \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2-\alpha^2}}$, ἔνθα $\alpha = R\sqrt{2}$, ὅτε $(A\Gamma) =$

$$= \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2-2R^2}} = \sqrt{2R^2 - R^2\sqrt{2}} = R\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

586. **Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ ὀκταγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.**

Λύσις: Εὕρομεν (ἄσκ 576) ὅτι τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κανονικοῦ πολυγώνου συναρτήσει τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $E = \frac{\nu\alpha}{4}\sqrt{4R^2-\alpha^2}$. Ἐκ τούτου διὰ $\nu = 8$ καὶ $\alpha = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ (πλευρὰ ὀκταγώνου) ἔχομεν:

$$E = \frac{8R\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4} \cdot \sqrt{4R^2 - R^2(2-\sqrt{2})} = 2R\sqrt{2-\sqrt{2}} =$$

$$= \sqrt{4R^2 - 2R^2 + R^2\sqrt{2}} = 2R\sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot R\sqrt{2+\sqrt{2}} =$$

$$= 2R^2\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = 2R^2\sqrt{4-(\sqrt{2})^2} = 2R^2\sqrt{4-2} = 2R^2\sqrt{2}.$$

Σημείωσις. Ἂν (ΑΓ) εἶναι ἡ πλευρὰ κανονικοῦ ὀκταγώνου (σχ. 116) τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΚΓ εἶναι:

$(AK\Gamma) = \frac{1}{2}(K\Gamma)(A\Delta) = \frac{1}{2}R \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{R^2\sqrt{2}}{4}$. Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ ὀκταγώνου $E = 8(AK\Gamma) = 8 \cdot \frac{R^2\sqrt{2}}{4} = 2R^2\sqrt{2}$.

587. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς κανονικοῦ δωδεκαγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.

Λύσις: Ἔστω ΑΓ (σχ. 116) ἡ πλευρὰ κανονικοῦ δωδεκαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον Κ ἀκτῖνος **R** καὶ (ΑΒ) = **R** ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου.

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΚΓ ἔχομεν (§ 206) ὅτι.

$$(A\Gamma)^2 = (AK)^2 + (K\Gamma)^2 - 2(K\Gamma)(K\Delta) = R^2 + R^2 - 2R \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} =$$

$= 2R^2 - R^2\sqrt{3} = R^2(2-\sqrt{3})$, διότι $(K\Delta) = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, ὡς ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου. Ἄρα: $(A\Gamma) = \sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Σημείωσις. Ἐκ τοῦ τύπου $(A\Gamma) = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \alpha^2}}$ εὑρίσκομεν ὁμοίως διὰ $\alpha = R$, ὅτι $(A\Gamma) = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - R^2}} =$

$$= \sqrt{2R^2 - R\sqrt{3R^2}} = \sqrt{2R^2 - R^2\sqrt{3}} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

588. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ δωδεκαγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.

Λύσις: Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ δωδεκαγώνου ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν 12 ἰσοσκελῶν τριγώνων ἴσων πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΚΓ (σχ. 116). Ἀλλὰ $(AK\Gamma) = \frac{1}{2}(K\Gamma) \cdot (A\Delta) = \frac{1}{2}R \cdot \frac{R}{2} = \frac{1}{4}R^2$.

Ὅθεν $E = 12(AK\Gamma) = 12 \cdot \frac{R^2}{4} = 3R^2$.

589. Ἓν τόξον 20° 20′ ἔχει ἀκτῖνα 2 ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος αὐτοῦ.

Λύσις: Ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον (§ 267) $\tau = \pi R \cdot \frac{\mu}{180^0}$ διὰ R=2 ἑκ. καὶ $\mu = 20^0\ 20'$ καὶ ἔχομεν:

$$\tau = \pi \cdot 2 \cdot \frac{20^0\ 20'}{180^0} = 2\pi \cdot \frac{20\frac{1}{3}}{180} = 2\pi \cdot \frac{\frac{61}{3}}{180} = \frac{2\pi \cdot 61}{180 \cdot 3} = \frac{21\pi}{270} \text{ ἑκ.} =$$

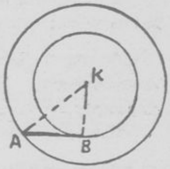
= 0,709 ἑκατ.

590. Ἓν τόξον ἔχει ἀκτῖνα 2 ἑκατ. καὶ μῆκος $\frac{41\pi}{180}$ ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς γωνίας του.

Λύσις: Ὁ τύπος $\tau = \pi R \cdot \frac{\mu}{180}$, διὰ $\tau = \frac{41\pi}{180}$ καὶ $R = 2$ ἑκατ. δίδει $\frac{41\pi}{180} = \pi \cdot \frac{\mu}{180}$ ἢ $41 = 2\mu$ καὶ $\mu = \frac{41}{2} = 20^0, 5 = 20^0\ 30'$

591. Νὰ γράψητε δύο ὁμοκέντρους περιφερείας καὶ ἐκ σημείου Α τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας νὰ φέρητε ἐφαπτομένην ΑΒ τῆς ἐσωτερικῆς περιφερείας (Β σημεῖον ἐπαφῆς). Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεταξὺ αὐτῶν περιεχομένου δακτυλίου συναρτήσει τοῦ τμήματος ΑΒ.

Λύσις: Ἔστωσαν δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι μὲ κέντρον Κ (σχ. 119) καὶ ἀκτῖνας(ΚΑ)=R καὶ (ΚΒ)=R′ καὶ ἡ ΑΒ ἐφαπτομένη τῆς ἐσωτερικῆς περιφερείας εἰς τὸ σημεῖον Β ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου Α τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας. Ζητεῖται νὰ ἐκφρασθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δακτυλίου συναρτήσει τοῦ τμήματος ΑΒ.



Σχ. 119.

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ δακτυλίου εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ μικροτέρου κύκλου ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεγαλυτέρου κύκλου ἤτοι $E = \pi R^2 - \pi R'^2 = \pi (R^2 - R'^2)$.

Ἀλλὰ ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΚΑΒ ἔχομεν $(AB)^2 = (KA)^2 - (KB)^2 = (R^2 - R'^2)$. Ἄρα $E = \pi (AB)^2$.

Ὥστε : *Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κυκλικοῦ δακτυλίου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, ὅστις ἔχει ἀκτῖνα τὴν ἐφαπτομένην, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ σημείου τῆς ἐξωτερικῆς μέχρι σημείου τῆς ἐσωτερικῆς.*

592. Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον εἶναι ἐγγεγραμμένον τετράγωνον καὶ κανονικὸν ἑξάγωνον. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑξαγώνου εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου κατὰ $(3\sqrt{3} - 4)$ τετ. ἑκατ. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τούτου.

Λύσις: Ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R τοῦ κύκλου εἶναι $R\sqrt{2}$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ $(R\sqrt{2})^2 = 2R^2$.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου πλευρᾶς R εἶναι :

$$E = \frac{\nu\alpha}{4}\sqrt{4R^2 - \alpha^2} = \frac{6R}{4}\sqrt{4R^2 - R^2} = \frac{6R\sqrt{3R^2}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$$

Ἀλλὰ κατὰ τὸ πρόβλημα πρέπει :

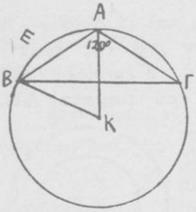
$$\frac{3R^2\sqrt{3}}{2} - 2R^2 = 3\sqrt{3} - 4 \quad \text{ἢ} \quad 3R^2\sqrt{3} - 4R^2 = 2(3\sqrt{3} - 4) \quad \text{ἢ}$$

$R^2(3\sqrt{3} - 4) = 2(3\sqrt{3} - 4)$ καὶ $R^2 = 2$ τετ. ἑκατ. καὶ Ἐμβαδὸν κύκλου $= \pi R^2 = 2\pi$ τετρ. ἑκατοστά.

593. Αἱ ἀκτῖνες δύο κύκλων διαφέρουσι κατὰ 2 παλάμας. Νὰ εὕρητε τὴν διαφορὰν τῶν περιφερειῶν αὐτῶν.

Λύσις: Ἂν R εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς μεγαλυτέρας καὶ R' ἡ ἀκτὶς τῆς μικροτέρας τῶν δύο περιφερειῶν, τὰ μήκη αὐτῶν θὰ εἶναι $2\pi R$ καὶ $2\pi R'$ καὶ ἡ διαφορά των θὰ εἶναι $2\pi R - 2\pi R' = 2\pi(R-R') = 2\pi \,.\, 2 =$ $= 4\pi$ παλ., διότι $R - R' = 2$ παλάμαι.

594. Εἰς ἕνα κύκλον νὰ γράψητε χορδὴν ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα. Ἔπειτα νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν κυκλικῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται ὁ κύκλος, συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου τούτου.



Σχ. 120

Λύσις: Ἔστω ἡ χορδὴ ΑΒ (σχ. 120) ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου Κ. Αὕτη χωρίζει τὸν κύκλον Κ εἰς δύο κυκλικὰ τμήματα ΑΕΒΑ καὶ ΑΓΒΑ, τὰ ἐμβαδὰ τῶν ὁποίων ζητεῖται νὰ προσδιορισθῶσι.

Παρατηροῦμεν, ὅτι (κυκλ. τμήμ. ΑΒΕΑ) $=$ $=$(κυκλ. τομέως ΚΑΕΒ) $-$ (ἰσοπλ. τριγ. ΚΑΒ). Ἀλλ' ἐπειδὴ (ΑΒ) $= R$, θὰ εἶναι (τόξ ΑΒ) $= 60^\circ$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως εἶναι $\frac{\pi R^2}{6}$. Τὸ δὲ ἐμβαδὸν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς R εἶναι $\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$. Ὅθεν (ΑΕΒΑ) $= \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} =$

$$= \frac{2\pi R^2}{12} - \frac{3R^2\sqrt{3}}{12} = \frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}).$$

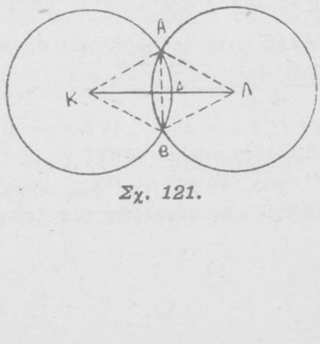
Ἄρα (ΑΓΒΑ) $= \pi R^2 - \frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{12\pi R^2}{12} - \frac{R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12} =$

$$= \frac{R^2}{12}(12\pi - 2\pi + 3\sqrt{3}) = \frac{R^2}{12}(10\pi + 3\sqrt{3}).$$

595. Δύο κύκλοι ἔχουσιν ἀκτῖνα R ἡ δὲ ἀπόστασις ΚΛ τῶν κέντρων των εἶναι $R\sqrt{3}$. Νὰ ἀποδείξητε, ὅτι αἱ περιφέρειαι αὐτῶν τέμνονται. Ἔπειτα δὲ νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κοινῆς ἐπιφανείας τῶν κύκλων τούτων.

Λύσις: Ἔστωσαν οἱ κύκλοι Κ καὶ Λ (σχ. 121) ἀκτῖνος R, τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων ΚΛ $= R\sqrt{3}$. Ἐπειδὴ δὲ $\sqrt{3} < 2$, θὰ εἶναι καὶ $R\sqrt{3} < 2R$ καὶ $0 < R\sqrt{3} < 2R = R + R$.

Ἀλλὰ $0 = R - R$, $R\sqrt{3} =$ (ΚΛ). Ὅθεν $R - R <$ (ΚΛ) $< R + R$ καὶ συνεπῶς αἱ περιφέρειαι Κ καὶ Λ τέμνονται, ἐπειδὴ ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων αὐτῶν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων των καὶ μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.



Σχ. 121.

Ἐπειδὴ δὲ το τρίγωνον ΚΑΛ εἶναι ἰσοσκελὲς (ΚΑ $=$ ΛΑ $= R$) καὶ ἡ ΑΒ $\perp$ ΚΛ, θὰ εἶναι (ΚΔ) $= \frac{(\text{ΚΛ})}{2} =$

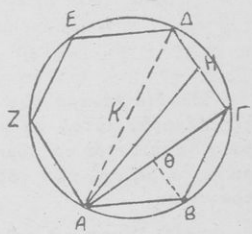
$= \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΚΔΑ ἔχομεν ὅτι :

$(Α Δ)^2 = (ΚΑ)^2 - (ΚΔ)^2 = R^2 - \left(\dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = R^2 - \dfrac{3R^2}{4} = \dfrac{4R^2 - 3R^2}{4} =$

$= \dfrac{R^2}{4}$ καὶ $(ΑΔ) = \dfrac{R}{2}$. Ἄρα $(ΑΒ) = 2(ΑΔ) = 2 \cdot \dfrac{R}{2} = R$ δηλ. ἡ χορδὴ ΑΒ εἶναι πλευρὰ κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν δύο ἴσων κυκλικῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα αὕτη διαιρεῖ τὸ κοινὸν μέρος τῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο κύκλων θὰ εἶναι (ἄσκ. 594) $\dfrac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$. Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τῆς κοινῆς των ἐπιφανείας θὰ

εἶναι $2 \cdot \dfrac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}) = \dfrac{R^2}{6}(2\pi - 5\sqrt{3})$.

596. **Νὰ ὁρίσητε τὸ μέσον Η τῆς πλευρᾶς ΓΔ κανονικοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ καὶ νὰ γράψητε τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΗ. Ἔπειτα δὲ νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ ἑξάγωνον ὑπὸ τοῦ ΑΗ, συναρτήσει τῆς πλευρᾶς α αὐτοῦ.**



Σχ. 122.

Λύσις. Ἔστω τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 122) καὶ Η τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΓΔ αὐτοῦ. Ἂν ἀχθῇ ἡ ΑΗ τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον χωρίζεται εἰς τὰ μέρη ΑΒΓΗ καὶ ΑΗΔΕΖ, τῶν ὁποίων ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν συναρτήσει τῆς πλευρᾶς α αὐτοῦ. Φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΔ καὶ τὴν χορδὴν ΑΓ. Παρατηροῦμεν ὅτι (ΑΒΓΗ)=(ΑΒΓΔ)−(ΔΑΗ) καὶ (ΑΗΔΕΖ)=(ΑΔΕΖ)+(ΑΔΗ). Ἀλλὰ (ΑΒΓΔ)=(ΑΔΕΖ)=(ΑΒΓΔΕΖ) : 2 $= \dfrac{3\alpha^2\sqrt{3}}{4}$. Τὰ τρίγωνα δὲ ΑΔΗ καὶ ΑΓΗ εἶναι ἰσοδύναμα, διότι ἔχουσιν ἴσας βάσεις ΓΗ, ΔΗ καὶ τὴν αὐτὴν κορυφήν. Ἄρα (ΑΔΗ) $= \dfrac{1}{2}$ (ΑΓΔ). Τὸ τρίγωνον ὅμως ΑΓΔ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ αἱ κάθετοι πλευραὶ αὐτοῦ ΑΓ, ΓΔ εἶναι ἡ μὲν ΑΓ πλευρὰ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον Κ, ἡ δὲ ΑΓ πλευρὰ κανον. ἑξαγώνου.

Ἄρα $(ΑΓΔ) = \dfrac{1}{2} R \; R\sqrt{3} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}$ καὶ συνεπῶς $(ΑΔΗ) = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

Ἑπομένως $(ΑΒΓΗ) = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4} - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{2R^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}$

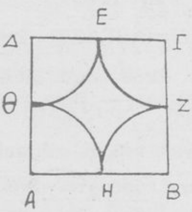
καὶ $(ΑΗΔΕΖ) = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{4R^2\sqrt{3}}{4} = R^2\sqrt{3}$. Ἐπειδὴ δὲ $R = \alpha$ θὰ εἶναι $(ΑΒΓΗ) = \dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}$ καὶ $(ΑΗΔΕΖ) = \alpha^2\sqrt{3}$.

Β' τρόπος: Ἂν ἀχθῇ ἡ ΑΓ τὸ τετράπλ. ΑΒΓΗ χωρίζεται εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΓΗ. Ἐκ τούτων τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ βάσιν ΑΓ ἴσην πρὸς τὴν πλευρὰν ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος α καὶ εἶναι $(ΑΓ)=α\sqrt{3}$, μὲ παρὰ τὴν βάσιν δὲ γωνίας ΒΑΓ καὶ ΑΓΒ ἴσας πρὸς 30^0, διότι γωνΑΒΓ$=120^0$. Ἂν ἀχθῇ τὸ ὕψος αὐτοῦ ΒΘ τοῦτο εἶναι $\frac{α}{2}$, διότι εἶναι πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου κειμένη ἀπέναντι ὀξείας γωνίας 30^0. Ἄρα $(ΑΒΓ) = = \frac{α\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{α}{2}=\frac{α^2\sqrt{3}}{4}$. Τὸ τρίγωνον ΑΓΗ εἶναι ὀρθογώνιον, διότι γωνΑΓΗ = γωνΒΓΗ — γωνΒΓΑ $= 120^0 - 30^0 = 90^0$ καὶ συνεπῶς $(ΑΓΗ)= \frac{1}{2}(ΑΓ)(ΓΗ) = \frac{1}{2}\,α\sqrt{3}\,.\,\frac{α}{2}=\frac{α^2\sqrt{3}}{4}$ καὶ $(ΑΕΓΗ) = =(ΑΒΓ)+(ΑΓΗ)=\frac{α^2\sqrt{3}}{4}+\frac{α^2\sqrt{3}}{4}=\frac{2α^2\sqrt{3}}{4}=\frac{α^2\sqrt{3}}{2}$.

Ἀλλὰ $(ΑΒΓΔΕΖ) = \frac{3α^2\sqrt{3}}{2}$. Συνεπῶς $(ΗΔΕΖΑ) = = (ΑΒΓΔΕΖ) - (ΑΒΓΗ) = \frac{3α^2\sqrt{3}}{2} - \frac{α^2\sqrt{3}}{2} = \frac{2α^2\sqrt{3}}{2} = α^2 . \sqrt{3}$.

597. Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς τετραγώνου καὶ ἀκτῖνα τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ νὰ γράψητε τόξα περιεχόμενα μεταξὺ τῶν πλευρῶν. Ἔπειτα δὲ νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ τῶν τόξων τούτων συναρτήσει τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου.

Λύσις: Ἔστω τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ (σχ. 123) πλευρᾶς α καὶ Η τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΑΒ. Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ, Δ τοῦ τετραγώνου καὶ ἀκτῖνα $(ΑΗ) = \frac{α}{2}$ γράφομεν τὰ τόξα ΗΖ, ΗΘ, ΘΕ, ΕΖ. Ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καμπυλογράμμου τετραπλεύρου ΕΖΗΘ. Παρατηροῦμεν, ὅτι τοῦτο εἶναι διαφορὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐμβαδῶν τῶν τεσσάρων ἴσων κυκλικῶν τομέων ἀπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραγώνου.



Σχ. 123.

Ἐπειδὴ $(ΑΘΗ)= \frac{1}{4}\,π\,.\left(\frac{α}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\,π\cdot\frac{α^2}{4}=\frac{πα^2}{16}$, ἕπεται ὅτι $4\,(ΑΘΗ) = 4\,.\,\frac{πα^2}{16}=\frac{πα^2}{4}$ καὶ συνεπῶς $(ΕΖΗΘ) = α^2 - \frac{πα^2}{4} = =\frac{4α^2 - πα^2}{4}=\frac{α^2}{4}(4-π)$.

598. Τρεῖς ἴσοι κύκλοι Κ, Λ, Ρ ἐφάπτονται ἀνὰ δύο ἐκτός. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ τῶν περιφερειῶν αὐτῶν, συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R αὐτῶν.

Λύσις: Ἔστωσαν Κ, Λ καὶ Ρ (σχ. 124) τρεῖς ἴσοι κύκλοι ἀκτῖνος α, ἐφαπτόμενοι ἐξωτερικῶς ἀνὰ δύο εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ.

Ἐπειδὴ οἱ κύκλοι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς, αἱ διάκεντροι αὐτῶν θὰ διέρχωνται διὰ τῶν σημείων ἀφῆς καὶ θὰ εἶναι: (ΚΛ)=(ΛΡ)=(ΚΡ)==2α καὶ τὸ τρίγωνον ΚΛΡ εἶναι ἰσόπλευρον πλευρᾶς 2α καὶ ἔχει ἐμβαδὸν $\frac{(2\alpha)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \alpha^2\sqrt{3}$ τ. μ.

Τὸ ἐμβαδὸν δὲ τοῦ καμπυλογράμμου τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριῶν ἴσων κυκλικῶν τομέων ΚΑΒ, ΛΑΓ, ΡΒΓ βάσεως 60° καὶ ἀκτῖνος α ἀπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΚΛΡ ἤτοι:

ἐμβαδὸν καμπυλ. τριγώνου ΑΒΓ = (ΚΛΡ) — 3 (τομ. ΑΚΒ) =

$$=\alpha^2\sqrt{3} - 3\cdot\frac{\pi\alpha^2}{6} = \alpha^2\sqrt{3} - \frac{\pi\alpha^2}{2} = \alpha^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right).$$

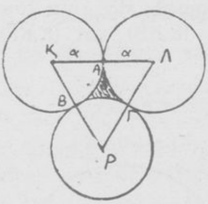
599. **Εἰς δοθὲν ἡμικύκλιον νὰ ἐγγράψητε ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ. Ἔπειτα νὰ γράψητε ἡμιπεριφερείας ἐκτὸς τοῦ τριγώνου μὲ διαμέτρους τὰς καθέτους πλευρὰς αὐτοῦ. Νὰ ἀποδείξητε δέ, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ τῶν τριῶν ἡμιπεριφερειῶν εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (Μηνίσκοι τοῦ Ἱπποκράτους).**

Λύσις: Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 125) εἶναι ὀρθογώνιον ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν: $(ΒΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2$ (1).

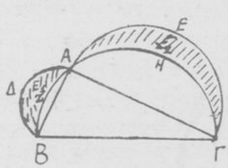
Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) ἐπὶ $\frac{\pi}{8}$

καὶ ἔχομεν: $\frac{\pi\,(ΒΓ)^2}{8} = \frac{\pi\,(ΑΒ)^2}{8} + \frac{\pi\,(ΑΓ)^2}{8}$ ἤτοι:

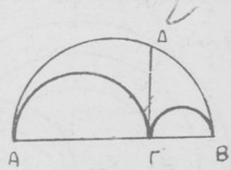
Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἡμικυκλίου διαμέτρου ΒΓ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἡμικυκλίων διαμέτρων ΑΒ καὶ ΑΓ.



Σχ. 124.



Σχ. 125.



Σχ. 126.

Ὅθεν ἔχομεν (ἡμικυκλ. ΒΖΑΗΓ)=(ἡμικυκλ. ΒΔΑΒ) + (ἡμικυκλ. ΑΕΓΑ) ἢ (ΑΒΓ)+(κυκλ. τμήμ. ΒΖΑ) + (κυκλ. τμήμ. ΑΗΓ) = (κυκλ. τμήμ. ΒΖΑ) + +(μην. $Ε_1$)+(κυκλ. τμ. ΑΗΓ)+(μην $Ε_2$) καὶ ἀφαιροῦντες ἀπ' ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς τὰ ἴσα ἔχομεν (ΑΒΓ) = (μην. $Ε_1$) + (μην. $Ε_2$).

600. **Εἰς τὴν διάμετρον ΑΒ δοθέντος ἡμικυκλίου νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον Γ καὶ ἐντὸς τοῦ ἡμικυκλίου νὰ γράψητε ἡμιπεριφερείας μὲ διαμέτρους ΑΓ καὶ ΓΒ. Ἔπειτα δὲ νὰ ὑψώσητε εἰς τὸ Γ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ μέχρι τῆς ἡμιπεριφερείας καὶ νὰ εὕρητε συναρτήσει τῆς καθέτου ταύτης τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ τῶν τριῶν ἡμιπεριφερειῶν. Νὰ ὁρίσητε ἔπειτα τὴν θέσιν τοῦ Γ, εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ μεγίστη τοιαύτη ἐπιφάνεια.**

Λύσις: Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἥτις περιέχεται μεταξὺ τῶν τριῶν ἡμιπεριφερειῶν (σχ. 126) εὑρίσκεται ἐὰν ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἡμικυκλίου διαμέτρου ΑΒ ἀφαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἡμικυκλίων, διαμέτρων ΑΓ καὶ ΓΒ ἤτοι :

$$Ε = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{ΑΒ}{2}\right)^2 - \left[\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{ΑΓ}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{ΓΒ}{2}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\frac{(ΑΒ)^2}{4} - \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\frac{(ΑΓ)^2}{4} - \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\frac{(ΒΓ)^2}{4} =$$

$$= \frac{\pi}{8}\left[(ΑΒ)^2 - (ΑΓ)^2 - (ΓΒ)^2\right] \qquad (1).$$

Ἀλλὰ $ΑΒ = ΑΓ + ΓΒ$ καὶ συνεπῶς $(ΑΒ)^2 = (ΑΓ)^2 + (ΓΒ)^2 + 2(ΑΓ).(ΓΒ)$ καὶ ἡ ἰσότης (1) γίνεται :

$$Ε = \frac{\pi}{8}\left[(ΑΓ)^2 + (ΓΒ)^2 + 2(ΑΓ)\,(ΓΒ) - (ΑΓ)^2 - (ΓΒ)^2\right] = \frac{2\pi}{8}\,(ΑΓ)\,(ΓΒ) =$$

$$= \frac{\pi.(ΑΓ)\,(ΓΒ)}{4} \qquad (2).$$

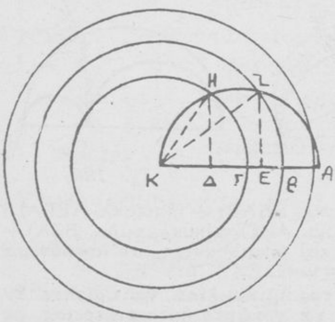
Ἀλλὰ $(ΑΓ)\,(ΓΒ) = (ΓΔ)^2$ καὶ ἡ (2) γίνεται :

$$Ε = \frac{\pi.(ΓΔ)^2}{4} = \pi\cdot\left(\frac{ΓΔ}{2}\right)^2 \text{ ἤτοι :}$$

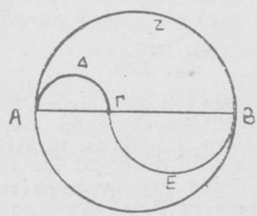
Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ζητουμένης ἐπιφανείας ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου διαμέτρου ΓΔ. Γίνεται δὲ μέγιστον, ὅταν καὶ ἡ ΓΔ γίνῃ μεγίστη. Τοῦτο δὲ συμβαίνει, ἄν ἡ ΓΔ γίνῃ ἀκτὶς τοῦ δοθέντος κύκλου δηλ. ὅταν τὸ σημεῖον Γ κεῖται εἰς τὸ μέσον τῆς διαμέτρου ΑΒ.

601. Νὰ διαιρέσητε δοθέντα κύκλον εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη μὲ ὁμοκέντρους περιφερείας.

Ἀνάλυσις: Ἔστω ὅτι ὁ κύκλος Κ (σχ. 127) διῃρέθη εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη διὰ τῶν ὁμοκέντρων περιφερειῶν (Κ,ΚΒ) καὶ (Κ,ΚΓ).



Σχ. 127.



Σχ. 128.

Ἄν $Ε_1$, $Ε_2$, $Ε_3$ εἶναι τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριῶν κύκλων ἀκτίνων ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ ἀντιστοίχως θὰ ἔχωμεν : $Ε_1 - Ε_2 = Ε_2 - Ε_3 = Ε_3$ (1) καὶ

(§ 264 Π). $\dfrac{Ε_1}{(ΚΑ)^2} = \dfrac{Ε_2}{(ΚΒ)^2} = \dfrac{Ε_3}{(ΚΓ)^2}$ (2).

'Επὶ τῆς ΚΑ, ὡς διαμέτρου, γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν καὶ ἐκ τῶν σημείων Η καὶ Ζ φέρομεν τὰς ΗΔ, ΖΕ καθέτους ἐπὶ τὴν ΚΑ καθὼς καὶ τὰς ΚΗ, ΚΖ. Ἐκ τῶν ὀρθ. τριγώνων ΚΖΑ καὶ ΚΗΑ ἔχομεν (§ 196) ὅτι: $(ΚΒ)^2 = (ΚΖ)^2 = (ΚΑ)\,(ΚΕ)$ (3) καὶ $(ΚΓ)^2 = (ΚΗ)^2 = (ΚΑ)\,(ΚΔ)$ (4).

Ἡ (2), συνεπείᾳ τῶν (3) καὶ (4) γίνεται: $\frac{E_1}{(ΚΑ)^2} = \frac{E_2}{(ΚΑ)\,(ΚΕ)} = \frac{E_3}{(ΚΑ)\,(ΚΔ)}$

ἢ $\frac{E_1}{(ΚΑ)} = \frac{E_2}{(ΚΕ)} = \frac{E_3}{(ΚΔ)}$ ἢ $\frac{E_1 - E_2}{(ΚΑ)-(ΚΕ)} = \frac{E_2 - E_3}{(ΚΕ)-(ΚΔ)} = \frac{E_3}{(ΚΔ)}$

ἢ $\frac{E_1 - E_2}{(ΕΑ)} = \frac{E_2 - E_3}{(ΔΕ)} = \frac{E_3}{(ΚΔ)}$. Ἐπειδὴ δέ, συνεπείᾳ τῆς (1) οἱ ἡγούμενοι ὅροι αὐτῶν εἶναι ἴσοι ἕπεται, ὅτι καὶ οἱ ἑπόμενοι ὅροι θὰ εἶναι ἴσοι ἤτοι: $(ΕΑ) = (ΕΔ) = (ΚΔ)$.

Σύνθεσις: Ἐπι τῆς ΚΑ, ὡς διαμέτρου γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν. Ἔπειτα διαιροῦμεν τὴν ΚΑ εἰς τρία ἴσα μέρη διὰ τῶν σημείων Δ καὶ Ε (§ 128) καὶ ἐκ τούτων ὑψοῦμεν καθέτους ἐπὶ τὴν ΚΑ, αἱ ὁποῖαι τέμνουσι τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Η καὶ Ζ. Μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνας ΚΗ καὶ ΚΖ γράφομεν περιφερείας, αἱ ὁποῖαι διαιροῦσι τὸν δοθέντα κύκλον εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη.

602. **Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ γράψητε μίαν διάμετρον ΑΒ καὶ νὰ ὁρίσητε εἰς αὐτὴν ἕν σημεῖον Γ, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τὴν ἑξῆς ἰδιότητα. Ἂν μὲ διαμέτρους ΑΓ καὶ ΓΒ γράψωμεν ἡμιπεριφερείας ἑκατέρωθεν τῆς ΑΒ, νὰ διαιρῆται ὑπ' αὐτῶν ὁ κύκλος εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον 3:2.**

Ἀνάλυσις: Ἔστω ὅτι εὑρέθη τὸ ζητούμενον σημεῖον Γ (σχ. 128) τοιοῦτον ὥστε νὰ ἔχωμεν: $\frac{(ΑΔΓΕΒΖΑ)}{(ΑΔΓΕΒΗΑ)} = \frac{3}{2}$ (1).

$$\text{Ἀλλὰ } (ΑΔΓΕΒΖΑ) = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{ΑΒ}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{ΓΒ}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{ΑΓ}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{\pi(ΑΒ)^2 + \pi(ΓΒ)^2 - \pi(ΑΓ)^2}{8} = \frac{\pi}{8}\left[(ΑΒ)^2 + (ΓΒ)^2 - (ΑΓ)^2\right] \text{ καὶ}$$

$$(ΑΔΓΕΒΗΑ) = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{ΑΒ}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{ΑΓ}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{ΓΒ}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{\pi(ΑΒ)^2 + \pi(ΑΓ)^2 - \pi(ΓΒ)^2}{8} = \frac{\pi}{8}\left[(ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2 - (ΒΓ)^2\right].$$

Ὅθεν ἡ ἰσότης (1) γίνεται: $\frac{(ΑΒ)^2 + (ΓΒ)^2 - (ΑΓ)^2}{(ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2 - (ΒΓ)^2} = \frac{3}{2}$ (2).

Ἀλλὰ $(ΑΒ)^2 = (ΑΓ + ΓΒ)^2 = (ΑΓ)^2 + (ΓΒ)^2 + 2(ΑΓ)\,(ΓΒ)$. Ἄρα ἡ (2) γίνεται: $\frac{(ΑΓ)^2 + (ΓΒ)^2 + 2(ΑΓ)\,(ΓΒ) + (ΓΒ)^2 - (ΑΓ)^2}{(ΑΓ)^2 + (ΓΒ)^2 + 2(ΑΓ)\,(ΓΒ) + (ΑΓ)^2 - (ΒΓ)^2} = \frac{3}{2}$ ἢ

$$\frac{2\,(ΓΒ)^2 + 2\,(ΑΓ)\,(ΓΒ)}{2\,(ΑΓ)^2 + 2\,(ΑΓ)\,(ΓΒ)} = \frac{3}{2} \text{ ἢ } \frac{2\,(ΓΒ)\,[(ΓΒ) + (ΑΓ)]}{2\,(ΑΓ)\,[(ΑΓ) + (ΓΒ)]} = \frac{3}{2}$$

ἢ μετὰ τὰς ἁπλοποιήσεις $\frac{(ΓΒ)}{(ΓΑ)} = \frac{3}{2}$ ἤτοι τὸ σημεῖον Γ διαιρεῖ τὴν διάμετρον ΑΒ εἰς τμήματα ἔχοντα λόγον 3 : 2.

Σύνθεσις: Διαιροῦμεν τὴν διάμετρον ΑΒ τοῦ δοθέντος κύκλου εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον 3 : 2 μὲ μίαν ἐκ τῶν μεθόδων, τὰς ὁποίας ἀναγράφομεν εἰς ἄσκησιν 401 καὶ ἐπὶ τῶν τμημάτων ΑΓ καὶ ΓΒ γράφομεν ἡμιπεριφερείας ἑκατέρωθεν τῆς ΑΒ. Αὗται χωρίζουσι τὸν κύκλον εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον 3 : 2.

18

1000 26
300 x

$$26 \cdot \frac{3\cancel{00}}{10\cancel{00}} = \frac{78}{10} = 7{,}8$$

ΤΕΛΟΣ