ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ Ι. ΚΕΦΑΛΙΑΚΟΥ
ΓΥΜΝΑΣΙΑΡΧΟΥ

# ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
## ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ
# ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

### Ο. Ε. Σ. Β.

**ΤΕΥΧΟΣ Α΄**

**Περιέχει τὰς ἀποδείξεις τῶν ἀναποδείκτων πορισμάτων καὶ τὰς λύσεις τῶν ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων τῶν περιεχομένων εἰς τὸ Α΄ καὶ Β΄ βιβλίον Γεωμετρίας Ν. Νικολάου**

ΧΑΡΑΛ. ΚΑΓΙΑΦΑΣ — ΙΩΑΝ. Χ. ΚΑΓΙΑΦΑΣ
ΠΑΤΡΑΙ — ΑΘΗΝΑΙ - ΑΙΟΛΟΥ 68
ΟΔΟΣ ΕΡΜΟΥ 14 — (ΣΤΟΑ ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΠΟΥΛΟΥ)
ΕΜΠΟΡΙΟΝ-ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΧΑΡΤΟΥ-ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ Ι. ΚΕΦΑΛΙΑΚΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



# ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
## ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ
# ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
## Ο. Ε. Σ. Β.

**ΤΕΥΧΟΣ Α'. — ΕΚΔΟΣΙΣ Γ'.**

**ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΑΣ ΤΗΣ Ε' & ΣΤ' ΤΑΞΕΩΣ ΟΚΤΑΤΑΞΙΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ**

Περιέχει τὰς ἀποδείξεις τῶν ἀναποδείκτων πορισμάτων καὶ τὰς λύσεις τῶν ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων τῶν περιεχομένων εἰς τὸ Α' καὶ Β' βιβλίον Γεωμετρίας Ν. Νικολάου

ΒΙΒΛΙΕΚΔΟΤΙΚΟΣ & ΧΑΡΤΕΜΠΟΡΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
ΧΑΡ. ΚΑΓΙΑΦΑΣ • ΙΩ. Χ. ΚΑΓΙΑΦΑΣ
ΠΑΤΡΑΙ — Ἑρμοῦ 14 ΑΘΗΝΑΙ — Λέκκα 12

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.

## ΣΗΜΑΣΙΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΜΕΝΩΝ ΣΥΜΒΟΛΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΤΟΜΙΩΝ

$\wedge$ : γωνία.

$\frown$ : τόξον.

$\perp$ : κάθετος, αὕτη εἶναι κάθετος ἐπὶ τήν....

$\parallel$ : παράλληλος, αὕτη εἶναι παράλληλος πρὸς τήν.....

$=\parallel$ : ἴση καὶ παράλληλος.

Θ. Γ. : Θεωρητικὴ Γεωμετρία.

Θ. : Θεώρημα.

Π. : Πόρισμα.

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ὁ πατὴρ τῆς Ἱστορίας, ὁ Ἡρόδοτος, ἀποδίδει εἰς τοὺς Αἰγυπτίους τὴν εὕρεσιν τῆς Γεωμετρίας, λαβόντας ἀφορμὴν ἐκ τοῦ ἑξῆς γεγονότος:

Ἕκαστον ἔτος ὁ ποταμὸς Νεῖλος, κατὰ τὴν περίοδον τῶν βροχῶν, ὑπερχειλίζων, ἐκάλυπτεν ἀπεράντους ἐκτάσεις τῆς Αἰγυπτιακῆς πεδιάδος. Ὅταν δὲ τὰ ὕδατα αὐτοῦ βραδύτερον ἀπεσύροντο, παχὺ στρῶμα ἰλύος (λάσπης) ἠφάνιζε τὰ ὅρια τῶν ἀγρῶν ἑκάστου.

Παρέστη ὅθεν ἀνάγκη νὰ ἀναζητηθῇ τρόπος, ὥστε νὰ γνωρίζῃ ἕκαστος πόσην ἔκτασιν γῆς κατεῖχε καὶ μετὰ τὴν πάροδον τῶν πλημμυρῶν νὰ ἀνακατανέμωνται οἱ ἀγροὶ εἰς τοὺς κατόχους αὐτῶν ἐπακριβῶς.

Οὕτω ἐγεννήθησαν οἱ πρῶτοι ***Γεωμέτραι*** ἢ ***Μετρηταί***, οἱ ὁποῖοι κατὰ πρακτικὸν τελείως τρόπον ἐχρησιμοποίουν τὰς γνώσεις αὐτῶν διὰ τὸν ἀνωτέρω σκοπόν.

Αἱ γνώσεις ὅμως αὐτῶν ἐστεροῦντο ἐσωτερικῆς συνοχῆς καὶ ἐπὶ αἰῶνας παρέμενον αἱ αὐταί, ἄνευ οὐδεμιᾶς ἐπεκτάσεως.

Πρῶτος ὁ Θαλῆς ὁ Μιλήσιος κατὰ τὸν 6ον π. Χ. αἰῶνα, μεταβὰς εἰς Αἴγυπτον διὰ σπουδάς, παραλαμβάνει τὰ πρῶτα τῆς Γεωμετρίας σπέρματα παρὰ τῶν Αἰγυπτίων καὶ μεταφέρει ταῦτα εἰς τὴν Ἑλλάδα, ἱδρύει εἰς τὴν Μίλητον τὴν περίφημον ***Ἰόνιον Σχολὴν*** καὶ ἐπιδίδεται μετὰ ζήλου εἰς τὴν θεωρητικὴν σπουδὴν τῆς Γεωμετρίας. Πλουτίζει αὐτὴν διὰ πολλῶν θεωρημάτων ἐπὶ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας καὶ τῶν ὁμοίων τριγώνων. Δικαίως δὲ θεωρεῖται ὡς ὁ πατὴρ τῆς Γεωμετρίας. Μετ' αὐτὸν ἀκολουθεῖ σειρὰ ὀνομαστῶν Ἑλλήνων φιλοσόφων, ὡς ὁ Πυθαγόρας (580 π. Χ.), ὁ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος (450 π. Χ.), ὁ Πλάτων (403—347 π. Χ.), οἱ ὁποῖοι ἐπινοοῦσι νέας μεθόδους ἐρεύνης καὶ προσθέτουσι πολυαρίθμους ἀνακαλύψεις ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν σχημάτων.

Οἱ κορυφαῖοι τῶν Ἑλλήνων Γεωμετρῶν εἶναι ὁ Εὐκλείδης (300 π. Χ.), ὁ Ἀρχιμήδης (287—212 π. Χ.) καὶ ὁ Ἀπολλώνιος (300 π. Χ.). Ἐκ τούτων ὁ Εὐκλείδης συγκεντρώνει τὴν πλουσίαν ὕλην τὴν δημιουργηθεῖσαν ὑπὸ τῶν προγενεστέρων του, ταξινομεῖ καὶ συστηματοποιεῖ ταύτην μὲ τάξιν καὶ ἀνυπέρβλητον ἐπιστημονικὴν ἀκρίβειαν εἰς τὸ περίφημον σύγγραμμά του ὑπὸ τὴν ἐπωνυμίαν «Τὰ Στοιχεῖα», συγκείμενον ἐκ 13 ἐν ὅλῳ βιβλίων. Τὰ στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου ἐπὶ χιλιετηρίδα καὶ πλέον ἐχρησίμευσαν ὡς ἡ μόνη πηγὴ διδασκαλίας τῆς Γεωμετρίας εἰς ὅλα τὰ ἔθνη τῆς Γῆς. Πάντες δὲ παραδέχονται, ὅτι ἡ ἀληθὴς πατρὶς τῆς Γεωμετρίας εἶναι ἡ χώρα ἡμῶν, ἡ ***Ἑλλάς***, διότι ἐδῶ τὸ πρῶτον αὕτη διεμορφώθη εἰς ἀληθῆ Ἐπιστήμην.

Ἡ Γεωμετρία ἔχει ὡς σκοπὸν τὴν σπουδὴν τῶν διαφόρων γεωμετρικῶν σωμάτων, ὡς πρὸς τὸ σχῆμα καὶ τὴν ἔκτασιν αὐτῶν. Ἀναχωρεῖ δὲ ἐκ τῶν ὁρισμῶν διαφόρων γεωμετρικῶν ἐννοιῶν καὶ ἔκ τινων προτάσεων, τῶν ὁποίων ἡ ἀλήθεια εἶναι φανερὰ καὶ δεχόμεθα αὐτὰς ἄνευ ἀντιρρήσεως, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται ***Ἀξιώματα***.

Ἐκ τούτων δημιουργεῖ νέας προτάσεις, τὰς ὁποίας καλοῦμεν ***Θεωρήματα*** καὶ τῶν ὁποίων ἡ ἀλήθεια γίνεται φανερὰ διὰ σειρᾶς συλλογισμῶν, ἥτις καλεῖται ***Ἀπόδειξις***.

Τὰ Θεωρήματα δέ, τῶν ὁποίων ἡ ἀλήθεια ἐξάγεται ἐκ θεωρήματος, ἀμέσως προηγουμένως ἀποδειχθέντος, λέγονται ***Πορίσματα***.

Σελὶς 19 § 16. **Π ό ρ ι σ μ α.** ***Ἂν τὰ ἄκρα δύο ἐπιπέδων σχημάτων ἐφαρμόζωσι, τὰ σχήματα ταῦτα εἶναι ἴσα.***

**Ἀπόδειξις:** Ἀφοῦ τὰ ἄκρα τῶν δύο ἐπιπέδων σχημάτων ἐφαρμόζωσι, ταῦτα θὰ ἔχωσι τρία κοινὰ σημεῖα, μὴ κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ κατὰ τὸ Θ. § 16, τὰ ἐπίπεδα σχήματα ἔχουσι κοινὰ ὅλα τὰ σημεῖα αὐτῶν. Ἄρα θὰ εἶναι ἴσα, συμφώνως μὲ τὸν ὁρισμόν: **«Δύο σχήματα λέγονται ἴσα, ἂν καταλλήλως, ἐπιτιθέμενα ἐφαρμόζωσι καὶ ἀποτελοῦσιν ἓν μόνον σχῆμα».**

# ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

## ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

### Τὰ κυριώτερα ἐπίπεδα σχήματα.

**Διαγώνιος ἑνὸς εὐθυγράμμου σχήματος λέγεται πᾶν εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον συνδέει δύο κορυφὰς χωρὶς νὰ εἶναι πλευρά.**

**Ἀσκήσεις** σελ. 26. **1. Νὰ εὑρεθῇ διὰ τοῦ προηγουμένου τύπου ὁ ἀριθμὸς τῶν διαγωνίων ἑνὸς τριγώνου καὶ ἑνὸς τετραπλεύρου.**

**Λύσις**: Τὸ πλῆθος τῶν διαγωνίων ἑνὸς εὐθυγράμμου σχήματος δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\delta = \frac{(\nu-3).\nu}{2}$ (1). Διὰ ν=3 ἔχομεν $\delta = \frac{(3-3).3}{2} = \frac{0.3}{2} = 0$ ἤτοι τὸ τρίγωνον δὲν ἔχει διαγωνίους. Τοῦτο, ἄλλως τε προκύπτει καὶ ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς διαγωνίου εὐθυγράμμου σχήματος, καθ' ὅσον δὲν ὑπάρχει διὰ τὸ τρίγωνον εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον νὰ συνδέῃ δύο κορυφάς, χωρὶς νὰ εἶναι πλευρά.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν διαγωνίων ἑνὸς τετραπλεύρου εἰς τὸν τύπον (1) θὰ θέσωμεν $\nu = 4$ καὶ ἔχομεν $\delta = \frac{(4-3).4}{2} = \frac{1.4}{2} = 2$. Ἤτοι: *Πᾶν τετράπλευρον ἔχει δύο διαγωνίους.*

**2. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν διαγωνίων ἑνὸς πενταγώνου, ἑπταγώνου, ὀκταγώνου.**

**Λύσις**: α΄) Ἐπειδὴ τὸ πεντάγωνον ἔχει 5 πλευρὰς ἐκ τοῦ τύπου $\delta = \frac{(\nu-3).\nu}{2}$, διὰ ν=5, ἔχομεν $\delta = \frac{(5-3).5}{2} = \frac{2.5}{2} = 5$ ἤτοι: *τὸ πεντάγωνον ἔχει 5 διαγωνίους.*

β΄) Ἐπειδὴ διὰ τὸ ἑπτάγωνον εἶναι $\nu = 7$ θὰ ἔχωμεν:
$\delta = \frac{(7-3).7}{2} = \frac{4.7}{2} = 14$ ἤτοι: *τὸ ἑπτάγωνον ἔχει 14 διαγωνίους.*

γ') Ἐπειδὴ διὰ τὸ ὀκτάγωνον εἶναι $\nu = 8$, θὰ ἔχωμεν:

$$\delta = \frac{(8-3) \cdot 8}{2} = \frac{5 \cdot 8}{2} = 20$$ ἤτοι: ***τὸ ὀκτάγωνον ἔχει 20 διαγωνίους.***

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β

# Εἴδη γωνιῶν.

Σελὶς 34. **Πόρισμα. I. Ἡ ἀκτίς, ἡ ὁποία καταλήγει εἰς τὸ μέσον τοῦ τόξου μιᾶς ἐπικέντρου γωνίας, διαιρεῖ αὐτὴν εἰς δύο ἴσας γωνίας.**

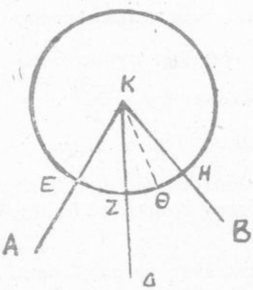
**Ἀπόδειξις:** Διότι αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι βαίνουσιν ἐπὶ ἴσων τόξων τοῦ αὐτοῦ κύκλου εἶναι ἴσαι.

Ἡ εὐθεῖα δέ, ἥτις χωρίζει μίαν γωνίαν εἰς δύο ἴσας γωνίας λέγεται **διχοτόμος** αὐτῆς.

**Πόρισμα II. Ἑκάστη γωνία ἔχει μίαν μόνον διχοτόμον.**

Ἔστω ΑΚΒ μία γωνία καὶ ΚΔ ἡ διχοτόμος αὐτῆς (σχ. 1). Θὰ δείξωμεν, ὅτι αὕτη δὲν δύναται νὰ ἔχῃ καὶ ἄλλην διχοτόμον.

**Ἀπόδειξις:** Καθιστῶμεν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ἐπίκεντρον. Πρὸς τοῦτο μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα τυχοῦσαν γράφομεν περιφέρειαν κύκλου καὶ ἔστωσαν Ε, Ζ, Η τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα αὕτη τέμνει τὰς πλευρὰς τῆς δοθείσης γωνίας καὶ τὴν διχοτόμον αὐτῆς.



*Σχ. 1.*

Ἐπειδὴ γωνΕΚΖ=γωνΖΚΗ, θὰ εἶναι καὶ τόξΕΖ=τόξΖΗ ἤτοι τὸ σημεῖον Ζ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΕΗ.

Ἂν ὑπῆρχε καὶ ἄλλη διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΚΒ π.χ. ἡ ΚΘ θὰ ἦτο καὶ τόξΕΘ=τόξΗΘ ἤτοι τὸ Θ θὰ ἦτο τὸ μέσον τοῦ τόξου ΕΗ.

Ἤτοι τὸ τόξον ΕΗ θὰ εἶχε δύο μέσα, τὰ σημεῖα Ζ καὶ Θ, ὅπερ ἄτοπον, καθ' ὅσον ἐδέχθημεν, ὅτι:

**πᾶν τόξον ἔχει ἓν μόνον μέσον.**

**Πόρισμα III. Ἂν δύο τομεῖς τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἢ ἴσων κύκλων ἔχωσιν ἴσας βάσεις ἢ ἴσας γωνίας, οὗτοι εἶναι ἴσοι.**

Ἔστω ὅτι, οἱ κυκλικοὶ τομεῖς ΑΚΒ καὶ ΓΛΔ τῶν ἴσων κύκλων Κ καὶ Λ (σχ. 24 Θ. Γ.) ἔχουσιν ἴσας τὰς βάσεις αὐτῶν ἤτοι τόξΑΒ = τόξΓΔ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι οὗτοι εἶναι ἴσοι.

**Ἀπόδειξις:** Θέτομεν τὸν κύκλον Λ ἐπὶ τοῦ ἴσου του Κ οὕτως ὥστε νὰ συμπέσωσι τὰ κέντρα αὐτῶν Κ καὶ Λ κ.ὶ τὸ σημεῖον Γ νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Α, τὸ δὲ Δ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β. Τότε καὶ τὸ Δ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Β, διότι τόξΓΔ = τόξΑΒ καὶ ἡ ΓΔ θὰ ἐφαρμόσῃ μὲ τὴν ΑΚ, διότι μεταξὺ δύο σημείων μία εὐθεῖα ἄγεται. Ὁμοίως καὶ ἡ ΔΛ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΚΒ. Καὶ οἱ δύο τομεῖς θὰ ἐφαρμόσωσι, διότι ἐφήρμοσαν τὰ ἄκρα αὐτῶν (§ 16 πόρισμα). Καθ' ὅμοιον τρόπον δεικνύεται, ὅτι οἱ κυκλικοὶ τομεῖς εἶναι ἴσοι καὶ ἐὰν αἱ γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἴσαι.

Σελὶς 38. **Πόρισμα I. Ἂν δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι σχηματίζωσι δύο ἐφεξῆς γωνίας ἴσας, πᾶσαι αἱ γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἴσαι.**

**Ἀπόδειξις:** Διότι αἱ ἄλλαι δύο γωνίαι, ὡς κατὰ κορυφὴν τῶν πρώτων, θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς αὐτάς. Συνεπῶς ὅλαι αἱ γωνίαι αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσαι.

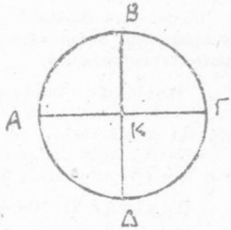
**Ἀσκήσεις** σελὶς 33. **3. Νὰ γράψητε δύο διαμέτρους τυχόντος κύκλου καὶ νὰ συγκρίνητε ἕκαστον τῶν μεταξὺ αὐτῶν τόξων πρὸς τὸ ἀπέναντί του.**

**Λύσις:** Ἔστω ὁ κύκλος Β καὶ δύο τυχοῦσαι διάμετροι αὐτοῦ ΑΓ καὶ ΔΕ (σχ. 26. Θ Γ.). Ζητεῖται νὰ συγκριθῶσι τὰ τόξα ΕΓ καὶ ΑΔ καθὼς καὶ τὰ τόξα ΑΕ καὶ ΔΓ.

Ἐπειδὴ γων. ΑΒΔ = γων. ΕΒΓ, ὡς κατὰ κορυφήν, εἶναι δὲ καὶ ἐπίκεντροι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, θὰ εἶναι καὶ τοξ. ΑΔ = τοξ. ΕΓ. Δι' ὅμοιον λόγον θὰ εἶναι καὶ τοξ ΑΕ = τοξ ΔΓ.

**4. Νὰ συγκρίνητε τὰ τόξα εἰς τὰ ὁποῖα διαιροῦσι μίαν περιφέρειαν δύο διάμετροι αὐτῆς, ἂν δύο ἐφεξῆς γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἴσαι.**

**Λύσις.** Ἂν γων ΑΚΒ = γων ΒΚΓ (σχ. 2), τότε ὅλαι αἱ γωνίαι αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσαι (§ 41. πόρισμα 1). Ἐπειδὴ εἶναι ἐπίκεντροι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον καὶ ἴσαι μεταξύ των, θὰ βαίνωσι καὶ ἐπὶ ἴσων τόξων ἤτοι τοξΑΒ = τοξΒΓ = τοξΓΔ = = τοξ ΔΑ καὶ ἕκαστον θὰ εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς περιφερείας.

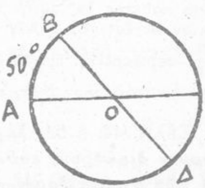


Σχ. 2.

**5. Ἂν ἓν τόξον ΑΒ μιᾶς περιφερείας εἶναι $50^\circ$ νὰ εὕρητε πόσων μοιρῶν εἶναι ἕκαστον ἀπὸ τὰ τόξα, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ περιφέρεια αὕτη, ἂν αἱ ἀκτῖνες ΟΑ καὶ ΟΒ προεκταθῶσι μέχρι τῆς περιφερείας**

**Λύσις:** Ἔστω ὅτι τὸ τόξον ΑΒ τῆς περιφερείας Ο εἶναι $50^\circ$ (σχ. 3). Ἐπειδὴ γωνΑΟΒ = = γων ΔΟΓ, ὡς κατὰ κορυφήν, θὰ εἶναι καὶ τόξον ΓΔ = $50^\circ$. Ἀλλὰ καὶ τόξ ΒΓ = τοξ ΑΔ, διότι αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ΒΟΓ καὶ ΑΟΔ εἶναι ἴσαι ὡς κατὰ κοφυφήν.

Ἀλλὰ τοξ ΑΒ + τοξ ΒΓ = $180^\circ$ ἢ $50^\circ$ + + τοξΒΓ = $180^\circ$ καὶ τοξ ΒΓ = $180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.
Ἄρα τοξ ΓΔ = $50^\circ$ καὶ τοξ ΒΓ = τοξΔΑ = $130^\circ$.



Σχ. 3.

**6. Ἂν ἓν τόξον ΑΒ εἶναι $75^\circ$ καὶ ἓν ἄλλο ΒΓ εἶναι $105^\circ$ καὶ τὰ τόξα ταῦτα δὲν ἔχωσι κοινὸν μέρος νὰ συγκρίνητε τὴν χορδὴν ΑΓ πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου.**

**Λύσις:** Ἐπειδὴ τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΒΓ (σχ. 3) δὲν ἔχουσι κοινὸν μέρος, θὰ εἶναι τὸ ἓν συνέχεια τοῦ ἄλλου καὶ τοξ ΑΒ + τοξ ΒΓ = $75^\circ$ + + $105^\circ$ = $180^\circ$ = ἡμιπεριφέρεια. Συνεπῶς ἡ χορδὴ ΑΓ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου.

**7. Νὰ ἐξετάσητε ἂν αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ (σχ. 25 Θ. Γ.) εἶναι ἐφεξῆς ἢ ὄχι.**

**Λύσις:** Αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ (σχ. 25 Θ. Γ.) δὲν εἶναι ἐφεξῆς, διότι ἔχουσι κοινὴν κορυφὴν καὶ μίαν πλευρὰν κοινὴν τὴν ΑΒ, ἀλλὰ αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ ΒΓ καὶ ΒΔ αὐτῶν δὲν κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς πλευρᾶς ΑΒ, ἀλλὰ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς.

**8. Νὰ ἐξετάσητε πόσας διχοτόμους ἔχει ἑκάστη γωνία.**

**Λύσις:** Ἂν ἡ γωνία καταστῇ ἐπίκεντρος εἰς ἕνα κύκλον, ὑπάρχει ἓν καὶ μόνον μέσον τοῦ τόξου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς. Ἄρα μία καὶ μόνον εὐθεῖα, ἥτις χωρίζει αὐτὴν εἰς δύο ἴσας γωνίας. Ἄρα μίαν καὶ μόνον διχοτόμον ἔχει μία γωνία.

Σελὶς 39 § 43. **Πόρισμα I. Δύο κάθετοι διάμετροι κύκλου διαιροῦσι τὴν περιφέρειαν εἰς 4 ἴσα τόξα (τεταρτημόρια) καὶ τὸν κύκλον εἰς 4 ἴσους κυκλικοὺς τομεῖς (τεταρτοκύκλια).**

**Ἀπόδειξις:** Ἐπειδὴ αἱ διάμετροι ΑΓ καὶ ΒΔ (σχ. 2) εἶναι κάθετοι μεταξύ των, αἱ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζόμεναι γωνίαι εἶναι πᾶσαι ἴσαι. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ ἐπίκεντροι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, τὰ ἀντίστοιχα τόξα αὐτῶν εἶναι ἴσα μεταξύ των.

Ἐπειδὴ δὲ οἱ σχηματιζόμενοι 4 κυκλικοὶ τομεῖς ἔχουν ἴσας τὰς βάσεις αὐτῶν εἶναι ἴσοι (**Πόρισμα III. § 25**).

**Πόρισμα II. Μία ὀρθὴ ἐπίκεντρος γωνία βαίνει ἐπὶ τεταρτημορίου περιφερείας.**

**Ἀπόδειξις.** Ἑκάστη γωνία ἐκ τῶν τεσσάρων γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουσι δύο κάθετοι διάμετροι κύκλου εἶναι ὀρθὴ ἐπίκεντρος γωνία. Ἑκάστη δὲ βαίνει ἐπὶ τεταρτημορίου περιφερείας.

**Πόρισμα III. Ἂν μία ἐπίκεντρος γωνία βαίνῃ ἐπὶ τεταρτημορίου περιφερείας εἶναι ὀρθὴ γωνία.**

Ἔστω ὅτι ἡ ἐπίκεντρος γωνία ΒΑΔ βαίνει ἐπὶ τοῦ τεταρτημορίου περιφερείας (σχ. 28 Θ. Γ.). Θὰ δείξωμεν, ὅτι αὕτη εἶναι ὀρθὴ γωνία.

**Ἀπόδειξις:** Διότι ἂν ἡ γωνία ΒΑΔ δὲν ἦτο ὀρθὴ γωνία, τότε ἡ πλευρὰ ΑΔ αὐτῆς δὲν θὰ ἦτο κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἀλλὰ γνωρίζομεν, ὅτι ἀπὸ ἕκαστον σημεῖον εὐθείας ἄγεται κάθετος ἐπ' αὐτὴν καὶ μία μόνον. Φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ εἰς τὸ σημεῖον Α, ἔστω δὲ ἡ ΑΖ. Τότε ἡ γωνία ΖΑΒ θὰ ἦτο ὀρθὴ καὶ συνεπῶς τόξον ΒΖ $= \frac{1}{4}$ περιφερείας. Ἐπειδὴ δὲ καὶ τοξ ΒΔ $= \frac{1}{4}$ περιφερείας, θὰ ἦτο τοξ ΒΖ = τοξΒΔ.

Ἀλλὰ τοῦτο ἄτοπον διότι τοξ ΒΖ $>$ τοξ ΒΔ.

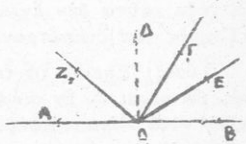
Σελὶς 44. § 52. **Πρόβλημα II.** ***Ἀπὸ ἓν σημεῖον δοθείσης εὐθείας φέρομεν διαφόρους εὐθείας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων διαδοχικῶν γωνιῶν.***

Ἔστω ΑΒ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, Ο ἓν σημεῖον αὐτῆς καὶ ΟΕ, ΟΓ καὶ ΟΖ διάφοροι εὐθεῖαι ἀγόμεναι ἀπὸ τοῦ σημείου Ο πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς.

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα.

γωνΒΟΕ+γωνΕΟΓ+γωνΓΟΖ+γωνΖΟΑ (1)

Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν ΒΟΕ, ΕΟΓ καὶ ΓΟΖ εἶναι ἡ γωνία ΒΟΖ. Ἐπειδὴ δὲ γωνΒΟΖ+γωνΖΟΑ=2 ὀρθαί, ὡς ἐφεξῆς τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα (1) ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας.




*Σχ. 4.*

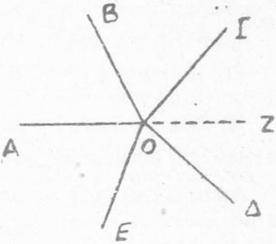
**Πρόβλημα III. Ἀπὸ ἓν σημεῖον ἑνὸς ἐπιπέδου φέρομεν εἰς αὐτὸ διαφόρους εὐθείας. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων διαδοχικῶν γωνιῶν.**

Ἔστωσαν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ καὶ ΟΕ αἱ διάφοροι εὐθεῖαι, τὰς ὁποίας ἐφέρομεν ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο τοῦ ἐπιπέδου.

Ζητεῖται τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον Ο. Προεκτείνομεν τὴν ΑΟ μέχρι σημείου τινὸς Ζ.

Αἱ γωνίαι ΑΟΒ, ΒΟΓ καὶ ΓΟΖ κατὰ τὸ πρόβλημα ΙΙ ἔχουσιν ἄθροισμα δύο ὀρθὰς γωνίας. Αἱ δὲ γωνίαι ΖΟΔ, ΔΟΕ καὶ ΕΟΑ ἔχουσιν ἄθροισμα δύο ὀρθὰς γωνίας.

Ὥστε ὅλαι αἱ γωνίαι περὶ τὸ σημεῖον Ο ἔχουσιν ἄθροισμα 4 ὀρθὰς γωνίας.



Σχ. 5.

Ἀσκήσεις σελὶς 48. **9 Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς ὀρθῆς γωνίας εἰς μοίρας.**

**Λύσις:** Γνωρίζομεν, ὅτι τὸ μέτρον ἐπικέντρου γωνίας ἰσοῦται πρὸς τὸ μέτρον τοῦ ἀντιστοίχου τόξου, ἂν ὡς μονὰς τῶν γωνιῶν ληφθῇ ἡ ἐπίκεντρος γωνία, ἥτις βαίνει ἐπὶ τῆς μονάδος τῶν τόξων.

Ἡ ὀρθὴ ἐπίκεντρος γωνία βαίνει ἐπὶ τοῦ τεταρτημορίου περιφερείας. Ἄρα ἔχει μέτρον, τὸ μέτρον τοῦ τεταρτημορίου ἤτοι: $360^0 : 4 = 90^0$.

**10. Νὰ εὕρητε εἰς μοίρας τὸ μέτρον τοῦ $\frac{1}{2}$, τοῦ $\frac{1}{4}$ τῆς ὀρθῆς γωνίας.**

**Λύσις:** Ἐπειδὴ τὸ μέτρον τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι $90^0$, τὸ μέτρον τοῦ $\frac{1}{2}$ τῆς ὀρθῆς γωνίας θὰ εἶναι $45^0$ καὶ τοῦ $\frac{1}{4}$ τῆς ὀρθῆς γωνίας θὰ εἶναι $22^0\ 30'$.

**11. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον γωνίας $50^0$ εἰς μέρη ὀρθῆς γωνίας.**

**Λύσις:** Τὸ μέτρον μιᾶς μοίρας εἶναι $\frac{1}{90}$ ὀρθῆς. Ἄρα τὸ μέτρον γωνίας $50^0$ θὰ εἶναι $\frac{50}{90}$ ὀρθῆς $= \frac{5}{9}$ τῆς ὀρθῆς.

**12. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον γωνίας $40^0\ 20'$ εἰς μέρη ὀρθῆς γωνίας.**

**Λύσις:** Ἐπειδὴ $40^0\ 20' = \left(40\frac{20}{60}\right)^0 = \left(40\frac{1}{3}\right)^0 = \left(\frac{121}{3}\right)^0$ καὶ $1^0 = \frac{1}{90}$ τῆς ὀρθῆς γωνίας, θὰ ἔχωμεν $40^0\ 20' = \frac{121}{3} \cdot \frac{1}{90} = \frac{121}{270}$ τῆς ὀρθῆς γωνίας.

**13. Ἂν μία γωνία εἶναι $\frac{7}{10}$ τῆς ὀρθῆς, νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς συμπληρωματικῆς καὶ τῆς παραπληρωματικῆς της εἰς μέρη ὀρθῆς καὶ εἰς μοίρας.**

**Λύσις:** α΄) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μέτρον τῆς συμπληρωματικῆς τῆς δοθείσης εἰς μέρη ὀρθῆς, ἀφαιροῦμεν αὐτὴν ἀπὸ 1 ὀρθὴν καὶ ἔχομεν

$1$ ὀρθ. $- \frac{7}{10}$ ὀρθ. $= \frac{10}{10}$ ὀρθ. $- \frac{7}{10}$ ὀρθ. $= \frac{3}{10}$ ὀρθ.

Εἰς μοίρας δὲ θὰ εἶναι $90^0 \cdot \frac{3}{10} = \frac{270^0}{10} = 27^0$.

β΄) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μέτρον τῆς παραπληρωματικῆς τῆς δοθεί σης εἰς μέρη ὀρθῆς ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν αὐτὴν ἀπὸ 2 ὀρθάς, ὅτε ἔχομεν 2 ὀρθ. — $\frac{7}{10}$ ὀρθ. $= \frac{20}{10}$ ὀρθ — $\frac{7}{10}$ ὀρθ. $= \frac{13}{10}$ ὀρθαί.

Εἰς μοίρας δὲ εἶναι $90^0 . \frac{13}{10} = 117^0$.

**14. Μία γωνία ἑνὸς ἑξαγώνου εἶναι $\frac{4}{3}$ τῆς ὀρθῆς. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α αὐτοῦ εἰς μοίρας.**

**Λύσις**: Ἐπειδὴ ἡ γωνία Α καὶ ἡ ἐξωτερική της εἶναι ἐφεξῆς καὶ αἱ μὴ κοιναὶ πλευραί των κεῖνται ἐπ' εὐθείας, θὰ εἶναι παραπληρωματικαί. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ μέτρον τῆς γωνίας Α εἰς μοίρας ἀπὸ τὰς $180^0$.

Θὰ ἔχωμεν $A = \frac{4}{3}$ ὀρθ $= 90^0 . \frac{4}{3} = \frac{360^0}{3} = 120^0$ καὶ ἡ ἐξωτερική της θὰ εἶναι $180^0 - 120^0 = 60^0$.

**15. Μία γωνία Α ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι $\frac{7}{5}$ ὀρθῆς. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α αὐτοῦ.**

**Λύσις**: Τὸ μέτρον τῆς γωνίας Α τοῦ τετραπλεύρου εἰς μοίρας εἶναι $90^0 . \frac{7}{5} = \frac{630^0}{5} = 125^0$. Συνεπῶς ἡ ἐξωτερικὴ γωνία τῆς γωνίας Α αὐτοῦ, ὡς παραπληρωματικὴ τῆς Α θὰ ἔχῃ μέτρον 2 ὀρθ. $- \frac{7}{5}$ ὀρθ. $= \frac{10}{5}$ ὀρθ $- \frac{7}{5}$ ὀρθ $= \frac{3}{5}$ ὀρθ. καὶ εἰς μοίρας $180^0 - 126^0 = 54^0$.

**16. Μία γωνία Α ἑνὸς πενταγώνου εἶναι $108^0$. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α εἰς μοίρας καὶ εἰς μέρη ὀρθῆς.**

**Λύσις**: Ἡ ἐξωτερικὴ γωνία, τῆς γωνίας Α τοῦ πενταγώνου, ὡς παραπληρωματικὴ τῆς δοθείσης, θὰ ἔχῃ μέτρον $180^0 - 108^0 = 72^0$ καὶ εἰς μέρη ὀρθῆς θὰ εἶναι $\frac{72}{90}$ ὀρθ $= \frac{4}{5}$ ὀρθῆς.

**17. Μία ἐξωτερικὴ γωνία Α ἑνὸς πενταγώνου εἶναι $51^0\ 25'\ 43''$. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς ἐσωτερικῆς γωνίας Α αὐτοῦ εἰς μοίρας καὶ εἰς μέρη ὀρθῆς.**

**Λύσις**: Ἐπειδὴ ἡ δοθεῖσα ἐξωτερικὴ γωνία καὶ ἡ ἐσωτερικὴ αὐτῆς εἶναι παραπληρωματικαὶ θὰ ἀφαιρέσωμεν τὰς $51^0\ 25'\ 43''$ ἀπὸ $180^0$ ἤτοι

| | | |
|---|---|---|
| $179^0$ | $59'$ | $60''$ |
| $180^0$ | | |
| $5^0$ | $25'$ | $43''$ |
| $128^0$ | $34'$ | $17''$ |

Ὥστε τὸ μέτρον τῆς ἐσωτερικῆς γωνίας Α εἶναι $128^0\ 34'\ 17''$. Διὰ νὰ εὕρωμεν αὐτὸ εἰς μέρη ὀρθῆς τρέπομεν τὸν συμμιγῆ εἰς μονάδας τῆς τελευταίας του τάξεως καὶ διαιροῦμεν τὸ ἐξαγόμενον διὰ τοῦ γινομένου $3600 \times 90 = 324000$ καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι εἶναι $1 \frac{133947}{324000}$ ὀρθαί.

**18. Ἀπὸ ἓν σημεῖον μιᾶς εὐθείας τοῦ τετραδίου σας νὰ γράψητε εἰς αὐτὸ δύο εὐθείας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς. Νὰ μετρήσητε τὰς δύο ἀπὸ τὰς γωνίας αἱ ὁποῖαι θὰ σχηματισθῶσι καὶ νὰ ὑπολογίσητε τὸ μέτρον τῆς τρίτης.**

**Λύσις**: Ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο μιᾶς εὐθείας ΑΒ τοῦ τετραδίου μας ἄγομεν δύο εὐθείας ΟΓ καὶ ΟΔ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς. Σχηματίζονται αἱ γωνίαι ΑΟΓ, ΓΟΔ καὶ ΔΟΒ, αἱ ὁποῖαι εἶναι διαδοχικαὶ καὶ ἔχουσιν ἄθροισμα 2 ὀρθὰς γωνίας. Μετροῦμεν τὰς δύο γωνίας ΑΟΓ καὶ ΓΟΔ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων αὐτῶν ἀφαιροῦμεν ἀπὸ $180^0$ ἢ ἀπὸ δύο ὀρθὰς καὶ εὑρίσκομεν τὸ μέτρον τῆς γωνίας ΔΟΒ.

**19. Ἀπὸ ἓν σημεῖον Α μιᾶς εὐθείας ΒΓ τοῦ τετραδίου σας νὰ φέρητε πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς δύο εὐθείας ΑΔ, ΑΕ, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι (γων ΒΑΔ)$=25^0$ καὶ (γων ΓΑΕ)$=50^0$. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς γωνίας ΔΑΕ εἰς μέρη ὀρθῆς γωνίας.**

**Λύσις**: Ἐπειδὴ (γων ΒΑΔ) + (γων ΔΑΕ) + (γων ΕΑΓ) = 2 ὀρθαὶ καὶ

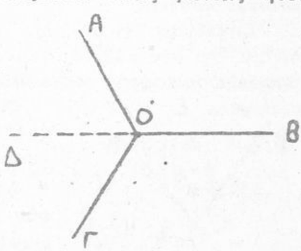
(γων ΒΑΔ) + (γων ΕΑΓ) $= 25^0 + 50^0 = 75^0 = \frac{75}{90}$ ὀρθῆς θὰ ἔχωμεν

(γων ΔΑΕ) $= 2$ ὀρθ. $- \frac{75}{90}$ ὀρθ. $= 2$ ὀρθ. $- \frac{5}{6}$ ὀρθ. $= \frac{12}{6}$ ὀρθ. $- \frac{5}{6}$ ὀρθ. $=$

$= \frac{7}{6}$ ὀρθῆς.

**20. Ἂν τρεῖς εὐθεῖαι ἀγόμεναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου σχηματίζωσιν ἴσας γωνίας νὰ ὑπολογίσητε τὸ μέτρον ἑκάστης τῶν γωνιῶν τούτων. Ἔπειτα νὰ προεκτείνητε μίαν ἀπὸ αὐτὰς μέσα εἰς τὴν γωνίαν τῶν ἄλλων καὶ νὰ ὑπολογίσητε τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν τῆς προεκτάσεως μὲ τὰς ἄλλας δύο εὐθείας.**

**Λύσις**: Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, αἱ ΟΑ, ΟΒ καὶ ΟΓ καὶ σχηματίζουσιν ἴσας γωνίας ἤτοι γων ΑΟΒ = γων ΒΟΓ = γων ΓΟΑ (1).




*Σχ. 6.*

Ἐπειδὴ (γων ΑΟΒ) + (γων ΒΟΓ) + +(γων ΓΟΑ)=4 ὀρθαί, βάσει τῆς (1), θὰ ἔχωμεν 3 (γων ΑΟΒ) = 4 ὀρθαὶ καὶ

(γων ΑΟΒ) $= \frac{4}{3}$ ὀρθ. $= 120^0$.

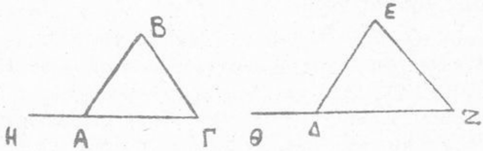
Ἂν ἤδη προεκταθῇ ἡ ΟΒ μέσα εἰς τὴν γωνίαν ΓΟΑ, σχηματίζονται αἱ γωνίαι ΓΟΔ καὶ ΔΟΑ. Αὗται ὡς παραπληρωματικαὶ τῶν ἴσων γωνιῶν ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ (§ 52)· θὰ εἶναι ἴσαι καὶ ἑκάστη θὰ εἶναι $60^0$ δηλ. τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας ΑΟΓ $= 120^0$

**21. Αἱ ἐξωτερικαὶ γωνίαι Α καὶ Δ δύο τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσαι. Να συγκρίνητε τὰς ἐσωτερικὰς γωνίας Α καὶ Δ αὐτῶν.**

**Λύσις**: Ἔστωσαν ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ δύο τρίγωνα καὶ γωνία ΗΑΒ =

= γωνία ΘΔΕ (Σχ. 7). Θὰ ἔχωμεν: γων ΗΑΒ + γων Α = 2 ὀρθαὶ
καὶ γων ΘΔΕ + γων Δ = 2 ὀρθαί.

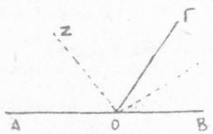
Ἄρα γων ΗΑΒ + γων Α = γων ΘΔΕ + γων Δ καὶ ἀφαιροῦντες




Σχ. 7.

ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος τὰς ἴσας γωνίας ΗΑΒ καὶ ΘΔΕ ἔχομεν γων Α = γων Δ.

**22. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς γωνίας τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι διχοτομοῦσι δύο ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικὰς γωνίας.**




Σχ. 8.

**Λύσις**: Ἔστωσαν αἱ ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικαὶ γωνίαι ΑΟΓ καὶ ΓΟΒ καὶ ΟΖ καὶ ΟΕ αἱ διχοτόμοι αὐτῶν (σχ. 8) Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς γων ΖΟΕ τῶν διχοτόμων αὐτῶν. Ἔχομεν γων ΖΟΕ = γων ΖΟΓ + γων ΓΟΕ (1). Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι γων ΖΟΓ =

$= \frac{\text{γων ΑΟΓ}}{2}$ καὶ γων ΓΟΕ $= \frac{\text{γων ΓΟΒ}}{2}$. Ὅθεν ἡ (1) γίνεται

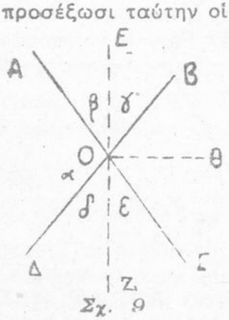
$$\text{γων ΖΟΕ} = \frac{\text{γων ΑΟΓ}}{2} + \frac{\text{γων ΓΟΒ}}{2} = \frac{\text{γων ΑΟΓ} + \text{γων ΓΟΒ}}{2} =$$

$$= \frac{2 \text{ ὀρθαὶ}}{2} = 1 \text{ ὀρθή}.$$

Ἤτοι: *Αἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικῶν γωνιῶν τέμνονται καθέτως.*

**Σημείωσις.** Ἡ ἄσκησις αὕτη χρησιμοποιεῖται συχνὰ διὰ τὴν ἀπόδειξιν ὅτι δύο εὐθεῖαι τέμνονται καθέτως καὶ πρέπει ἰδιαιτέρως νὰ προσέξωσι ταύτην οἱ μαθηταί.

**23. Νὰ καθορίσητε τὸ σχῆμα τῆς γραμμῆς τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦσιν αἱ διχοτόμοι δύο κατὰ κορυφὴν γωνιῶν.**




Σχ. 9

**Λύσις**: *α΄ τρόπος.* Ἔστωσαν αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΓΟΔ καὶ ΟΕ καὶ ΟΖ αἱ διχοτόμοι αὐτῶν ἀντιστοίχως (σχ. 9) Ζητεῖται νὰ καθορισθῇ τὸ εἶδος τῆς γραμμῆς ΕΟΖ.

Πρὸς τοῦτο ἄγομεν τὴν ΟΘ διχοτόμον τῆς γωνίας ΒΟΓ. Αἱ γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ εἶναι ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικαί· συνεπῶς αἱ διχοτόμοι αὐτῶν ΟΕ καὶ ΟΘ τέμνονται καθέτως (ἄσκησις 22). Ὁμοίως αἱ γωνίαι ΒΟΓ καὶ ΓΟΔ εἶναι ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικαὶ καὶ συνεπῶς ΟΘ ⊥ ΟΖ. Αἱ γωνίαι ΕΟΘ καὶ ΘΟΖ εἶναι ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικαὶ καὶ συνεπῶς αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ αὐτῶν ΟΕ καὶ ΟΖ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

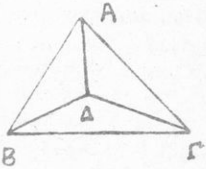
Ἤτοι: *αἱ διχοτόμοι δύο κατὰ κορυφὴν γωνιῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας.*

*β') τρόπος* Ἐπειδὴ ἡ ΔΒ εἶναι εὐθεῖα ἐξ ὑποθέσεως καὶ $\beta=\gamma$ λόγῳ τῆς διχοτόμου ΟΕ καὶ $\delta=\varepsilon$ λόγῳ τῆς διχοτόμου ΟΖ καὶ γων$AOB=$ $=$γων$\Delta O\Gamma$, ὡς κατὰ κορυφήν, θὰ εἶναι $\delta=\gamma$ ὡς ἡμίση ἴσων καὶ $\alpha+\beta+\gamma=2$ ὀρθαί.

Ἀντικαθιστῶμεν τὴν γωνίαν γ μὲ τὴν ἴσην της δ καὶ ἔχομεν $\alpha+\beta+\delta=2$ ὀρθαί. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι διαδοχικαὶ καὶ παραπληρωματικαί, ἕπεται ὅτι αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ αὐτῶν ΟΕ καὶ ΟΖ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἀσκήσεις σελ. 50.— **24. Ἐντὸς τριγώνου ΑΒΓ νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον Δ, νὰ γράψητε τὰ εὐθ. τμήματα ΔΑ, ΔΒ καὶ ΔΓ καὶ νὰ συγκρίνητε τὸ ἄθροισμα ΔΑ+ΔΒ+ΔΓ πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου τούτου.**

**Λύσις**: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ σημεῖον Δ ἐντὸς αὐτοῦ (σχ. 10). Φέρομεν τὰ εὐθ. τμήματα ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ. Ζητεῖται νὰ συγκρίνωμεν τὸ ἄθροισμα ΔΑ+ΔΒ+ΔΓ πρὸς τὴν περίμετρον ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ τοῦ τριγώνου. Βάσει τοῦ Θ. § 61 ἔχομεν




*Σχ. 10.*

$$\Delta A+\Delta B<\Gamma A+\Gamma B$$
$$\Delta B+\Delta\Gamma<\Gamma A+AB$$
$$\Delta\Gamma+\Delta A<AB+B\Gamma$$

Προσθέτομεν κατὰ μέλη: $2\Delta A+2\Delta B+2\Delta\Gamma<2\Gamma A+2\Gamma B+2AB$

ἢ $2(\Delta A+\Delta B+\Delta\Gamma)<2(\Gamma A+\Gamma B+AB)$.

Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἄνω ἀνισότητος διὰ 2 καὶ ἔχομεν

$$\Delta A+\Delta B+\Delta\Gamma<\Gamma A+\Gamma B+AB$$

Ἤτοι: ***Τὸ ἄθροισμα ΔΑ+ΔΒ+ΔΓ εἶναι μικρότερον τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ὅπου δήποτε καὶ ἂν κεῖται τὸ σημεῖον Δ ἐντὸς αὐτοῦ.***

**25. Νὰ συγκρίνητε τὸ προηγούμενον ἄθροισμα πρὸς τὴν ἡμιπερίμετρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.**

**Λύσις**: Ἐπειδὴ ἡ γραμμὴ ΒΔΓ (σχ. 10) εἶναι τεθλασμένη, ἐνῷ ἡ ΒΓ εἶναι εὐθεῖα θὰ ἔχωμεν (§ 10 ἀξίωμα Β') ὅτι:

$$B\Delta+\Delta\Gamma>B\Gamma$$
ὁμοίως $\Delta\Gamma+\Delta A>\Gamma A$

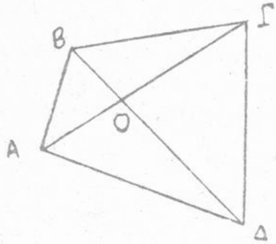
καὶ $\Delta A+\Delta B>AB$

Προσθέτομεν κατὰ μέλη: $2B\Delta+2\Delta\Gamma+2\Delta A>AB+\Gamma A+B\Gamma$

ἢ $2(B\Delta+\Delta\Gamma+\Delta A)>AB+B\Gamma+\Gamma A$

ἢ $B\Delta+\Delta\Gamma+\Delta A>\dfrac{AB+B\Gamma+\Gamma A}{2}$

Ἤτοι: ***Τὸ ἄθροισμα ΔΑ+ΔΒ+ΔΓ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ τριγώνου.***




*Σχ. 11.*

**26. Νὰ συγκρίνητε τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου πρὸς τὴν περίμετρον καὶ τὴν ἡμιπερίμετρον τοῦ τετραπλεύρου τούτου.**

**Λύσις**: Ἔστω ΑΒΓΔ (σχ. 11) ἕν κυρτὸν τετράπλευρον καὶ ΑΓ, ΒΔ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ. Ζητεῖται νὰ συγκρίνωμεν τὸ ἄθροισμα ΒΔ+ΑΓ πρὸς τὴν περίμετρον καὶ τὴν ἡμιπερίμετρον τοῦ τετραπλεύρου τούτου. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἔχομεν $ΑΓ<ΑΒ+ΒΓ$

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΓΔ ἔχομεν $ΒΔ<ΒΓ+ΓΔ$

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΓΔΑ ἔχομεν $ΑΓ<ΓΔ+ΔΑ$

Καὶ ἐκ τοῦ τριγώνου ΔΑΒ ἔχομεν $ΒΔ<ΔΑ+ΒΑ$

Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς ἄνω ἰσότητας καὶ ἔχομεν $2.ΑΓ+2.ΒΔ<2.ΑΒ+2.ΒΓ+2.ΓΔ+2.ΔΑ$ ἢ $2(ΑΓ+ΒΔ)<2(ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ)$ καὶ

$$ΑΓ+ΒΔ<ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ.$$

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΟΒ ἔχομεν $ΑΒ<ΑΟ+ΟΒ$

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΟΓ ἔχομεν $ΒΓ<ΟΒ+ΟΓ$

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΓΟΔ ἔχομεν $ΔΓ<ΟΓ+ΟΔ$

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΔΟΒ ἔχομεν $ΔΑ<ΟΔ+ΟΑ$

Προσθέτομεν κατὰ μέλη : $ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ<2(ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ+ΟΔ)$

ἢ $$\frac{ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ}{2}<ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ+ΟΔ$$

ἢ $$\frac{ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ}{2}<ΑΓ+ΒΔ.$$

Ἤτοι: ***Τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων παντὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι μικρότερον τῆς περιμέτρου αὐτοῦ καὶ μεγαλύτερον τῆς ἡμιπεριμέτρου του.***

Σελὶς 53. **Πόρισμα I. Ἀπὸ σημεῖον κείμενον ἐκτὸς εὐθείας ἀδύνατον νὰ ἀχθῶσι πρὸς αὐτὴν τρεῖς εὐθεῖαι ἴσαι.**

**Ἀπόδειξις**: Διότι, ἂν ἡ μία ἐκ τῶν τριῶν εἶναι κάθετος, θὰ εἶναι αὕτη μικροτέρα τῶν δύο ἄλλων. Ἐὰν δὲ εἶναι πλάγιαι καὶ αἱ τρεῖς ἢ θὰ εὑρίσκωνται καὶ αἱ τρεῖς πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν θὰ εἶναι ἄνισοι ἢ θὰ εὑρίσκωνται δύο πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου καὶ μία πρὸς τὸ ἄλλο. Ἀλλὰ καὶ τότε αἱ δύο, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου, θὰ εἶναι ἄνισοι.

**Πόρισμα II. Περιφέρεια κύκλου καὶ εὐθεῖα γραμμὴ δὲν δύνανται νὰ ἔχωσι κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο.**

**Ἀπόδειξις.** Διότι, ἂν ἡ περιφέρεια καὶ ἡ εὐθεῖα εἶχον τρία κοινὰ σημεῖα, τὰ σημεῖα ταῦτα τῆς εὐθείας θὰ ἀπεῖχον ἴσον ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. Ὅτε θὰ ἤγοντο ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τρεῖς εὐθεῖαι ἴσαι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον (Πόρισμα I).

**Πόρισμα III. Ἡ περιφέρεια κύκλου εἶναι καμπύλη γραμμή.**

**Ἀπόδειξις**: Διότι οὐδὲν μέρος αὐτῆς, ὅσον μικρὸν καὶ ἂν εἶναι, δὲν εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

Σελὶς 54. **Πόρισμα I.** Ἂν ἕν σημεῖον ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα εὐθ. τμήματος κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης εἰς τὸ μέσον τοῦ τμήματος τούτου.

**Ἀπόδειξις.** Διότι, ἂν ἔκειτο ἐκτὸς τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης εἰς τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος, θὰ ἀπεῖχεν ἄνισον ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος τούτου (§ 65). Ἀλλὰ τοῦτο ἄτοπον, διότι ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

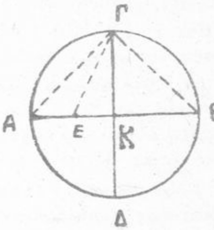
**Πόρισμα ΙΙ. Ἡ κάθετος ἐπὶ μίαν χορδὴν τόξου εἰς τὸ μέσον αὐτῆς διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ τόξου τούτου.**

**Ἀπόδειξις** : Διότι, τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἐπειδὴ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς, κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον αὐτῆς. Ἐπειδὴ δὲ μία καὶ μόνον κάθετος ἄγεται ἀπὸ σημεῖον εὐθείας ἐπ' αὐτήν, ἕπεται ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ἄγεται κάθετος εἰς τὸ μέσον χορδῆς διέρχεται καὶ ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς περιφερείας εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει τὸ τόξον.

**Ἀσκήσεις** σελ. 54. **27. Νὰ ἐξετάσητε πόσαι περιφέρειαι διέρχονται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα.**

**Λύσις** : Ἔστωσαν δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ ΑΒ τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ταῦτα ὁρίζουσι (σχ. 43 Θ. Γ.). Ἐὰν φέρωμεν τὴν κάθετον ΓΔ ἐπὶ τὸ ΑΒ καὶ εἰς τὸ μέσον Δ αὐτοῦ, πᾶν σημεῖον ταύτης ἀπέχει ἴσον τῶν ἄκρων Α καὶ Β τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ. Ἐπομένως, ἐὰν μὲ κέντρον τυχὸν σημεῖον αὐτῆς καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ ἀπὸ τὸ ἓν τῶν ἄκρων Α ἢ Β γράψωμεν περιφέρειαν, αὕτη θὰ διέρχηται διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β. Ὥστε: ***Διὰ δύο σημείων Α καὶ Β διέρχονται ἄπειροι περιφέρειαι.***

**28. Νὰ γράψητε μίαν περιφέρειαν Κ καὶ δύο καθέτους διαμέτρους ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἐπὶ δὲ τῆς ἀκτῖνος ΚΑ νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον Ε καὶ νὰ συγκρίνητε τὸ τμῆμα ΓΕ πρὸς τὴν χορδὴν ΓΑ.**



*Σχ. 12.*

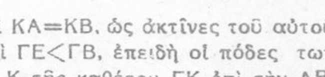
**Λύσις** : Ἔστω ὁ κύκλος Κ καὶ δύο κάθετοι διάμετροι αὐτοῦ ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ 12) καὶ Ε σημεῖόν τι τῆς ἀκτῖνος ΚΑ. Ζητεῖται νὰ συγκριθῇ τὸ τμῆμα ΓΕ πρὸς τὴν χορδὴν ΓΑ.

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Ε καὶ Α κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου ΓΚ καὶ εἶναι ΚΕ<ΚΑ θὰ εἶναι καὶ ΓΕ<ΓΑ (§ 63. Γ').

**29. Νὰ συγκρίνητε τὸ προηγούμενον τμῆμα ΓΕ πρὸς τὴν χορδὴν ΓΒ.**

**Λύσις**: Ἐπειδὴ ΚΕ<ΚΑ (σχ. 12) καὶ ΚΑ=ΚΒ, ὡς ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου, θὰ εἶναι τὸ ΚΕ<ΚΒ. Ἄρα καὶ ΓΕ<ΓΒ, ἐπειδὴ οἱ πόδες των Ε καὶ Β, ἀπέχουσιν ἄνισον τοῦ ποδὸς Κ τῆς καθέτου ΓΚ ἐπὶ τὴν ΑΒ.

**30. Ἀπὸ ἓν σημεῖον Γ ἐκτὸς εὐθείας ΑΒ νὰ φέρητε τὴν ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ δύο ἴσας πλαγίας ΓΕ καὶ ΓΖ. Νὰ συγκρίνητε δὲ τὰς γωνίας ΕΓΔ καὶ ΖΓΔ.**



*Σχ. 13.*

**Λύσις**: Ἔστω ΓΔ ἡ κάθετος ἐκ τοῦ σημείου Γ, κειμένου ἐκτὸς τῆς

ΑΒ, ἐπ' αὐτὴν καὶ ΓΕ=ΓΖ (σχ. 13). Ζητεῖται νὰ συγκριθῶσιν αἱ γωνίαι ΕΓΔ καὶ ΖΓΔ. Ἐπειδὴ ΓΕ=ΓΖ ἐξ ὑποθέσεως, θὰ εἶναι καὶ ΔΕ==ΔΖ. Ἐὰν περιστρέψωμεν τὸ τρίγωνον ΖΓΔ περὶ τὴν ΓΔ κατὰ 180°, ἡ ΔΖ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΔΕ, διότι γωνΓΔΖ = γωνΓΔΕ ὡς ὀρθαὶ καὶ τὸ Ζ θὰ πέσῃ εἰς τὸ Ε, διότι ΔΖ= ΔΕ. Ἄρα καὶ ἡ ΓΖ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΓΕ, διότι ἐφήρμοσαν τὰ ἄκρα των καὶ μεταξὺ δύο σημείων μία μόνον εὐθεῖα ἄγεται. Ἄρα καὶ γωνΖΓΔ=γωνΕΓΔ, διότι καταλλήλως ἐπιτιθέμεναι ἐφαρμόζουσιν.

31. **Ἂν αἱ προηγούμεναι πλάγιαι εἶναι ἄνισοι, νὰ συγκρίνητε πάλιν τὰς γωνίας ΕΓΔ καὶ ΖΓΔ.**

**Λύσις**: Ἔστω ἤδη ΓΕ<ΓΖ, ὅτε καὶ ΔΕ<ΔΖ. Κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ τριγώνου ΖΔΓ περὶ τὴν ΓΔ κατὰ 180° τὸ σημεῖον Ζ θὰ πέσῃ εἰς σημεῖόν τι Ζ' (σχ. 13) καὶ θὰ εἶναι ΔΖ'>ΔΕ.

Ἑπομένως καὶ γωνΖ'ΓΔ>γωνΕΓΔ. Ἐπειδὴ δὲ γωνΖΓΔ=γωνΖ'ΓΔ, θὰ ἔχωμεν ὅτι: γωνΖΓΔ>γωνΕΓΔ.

Σελὶς 55. **Π ό ρ ι σ μ α Ι. Η κοινὴ χορδὴ τῶν περιφερειῶν (Α, ΑΒ) καὶ (Β,ΑΒ) τέμνει καθέτως καὶ εἰς τὸ μέσον τὴν ἀπόστασιν ΑΒ τῶν κέντρων.**

**Λύσις**: Ἔστω, ὅτι αἱ περιφέρειαι μὲ κέντρα Α καὶ Β καὶ ἀκτῖνας ἴσας πρὸς τὴν ΑΒ, τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ' (σχ. 44 Θ. Γ.). Ἐπειδὴ ΓΑ=ΓΒ τὸ σημεῖον Γ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου καὶ εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Ἐπειδὴ καὶ Γ'Α=Γ'Β, ἕπεται ὅτι καὶ τὸ σημεῖον Γ' κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου καὶ εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Επειδὴ δὲ μεταξὺ δύο σημείων Γ καὶ Γ' μία καὶ μόνον διέρχεται εὐθεῖα, ἡ ΓΓ', ἕπεται ὅτι αὕτη εἶναι κοινὴ χορδὴ τῶν δύο περιφερειῶν (Α, ΑΒ) καὶ (Β, ΑΒ) καὶ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως ΑΒ τῶν κέντρων αὐτῶν.

**Ἀ σ κ ή σ ε ι ς** σελ. 56.— **32. Νὰ γραφῆτε ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα καὶ τὴν περιφέρειαν, ἥτις ἔχει διάμετρον αὐτό.**

**Λύσις**: Ἔστω ΑΒ ἓν δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα. Ζητεῖται νὰ γραφῇ περιφέρεια ἔχουσα τοῦτο ὡς διάμετρον.

Τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης νὰ γραφῇ περιφερείας θὰ εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ. Ἀρκεῖ ὅθεν νὰ εὕρωμεν τοῦτο κατὰ τὸ πρόβλημα Ι § 68. Ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ μέσον τοῦτο καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ ἀπὸ ἓν τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος ΑΒ γράφομεν τὴν περιφέρειαν.

33. **Νὰ γράψητε ἓν εὐθ. τμῆμα ΟΑ καὶ τὴν περιφέρειαν (Ο,ΟΑ). Νὰ ὁρίσητε δὲ ἐπ' αὐτῆς ἓν σημεῖον Μ, τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι ΜΟ=ΜΑ.**

**Λύσις**. Μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα ΟΑ γράφομεν μίαν ἄλλην περιφέρειαν. Αὕτη θὰ τέμνῃ τὴν πρώτην εἰς δύο σημεῖα Μ καὶ Μ', διότι ἡ μία διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς ἄλλης. Θὰ εἶναι δὲ ΜΟ=ΜΑ, ὡς ἀκτῖνες ἴσων περιφερειῶν.

34. **Νὰ γράψητε περιφέρειαν κύκλου, νὰ ὁρίσητε ἐπ' αὐτῆς μίαν χορδὴν ΑΒ καὶ νὰ εὕρητε σημεῖον Μ τῆς περιφερείας τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι ΜΑ = ΜΒ.**

**Λύσις**: Ἂν φέρωμεν τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΑΒ, αὕτη θὰ συναντήσῃ τὴν περιφέρειαν, τὴν ὁποίαν ἐγράψαμεν εἰς δύο σημεῖα Μ καὶ Μ'. Ἕκαστον τούτων θὰ ἀπέχῃ ἴσον τῶν ἄκρων Α καὶ Β τῆς χορδῆς ΑΒ, ὡς κείμενον ἐπὶ τῆς καθέτου ΜΜ εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΑΒ καὶ θὰ ἔχωμεν ΜΑ=ΜΒ, καθὼς καὶ ΜΆ=Μ'Β.

**35. Νὰ γράψητε ἓν εὐθ. τμῆμα καὶ νὰ τὸ διαιρέσητε εἰς 4 ἴσα μέρη.**

**Λύσις**: Ἂν ΑΒ εἶναι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, διαιροῦμεν πρῶτον αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη διὰ τοῦ προβλήματος § 67, τὰ ΑΔ καὶ ΔΒ. Ἔπειτα ἕκαστον τῶν τμημάτων ΑΔ καὶ ΔΒ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον διαιροῦμεν εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ οὕτω τὸ ΑΒ θὰ ἔχῃ χωρισθῆ εἰς 4 ἴσα μέρη.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

## Εἴδη τριγώνων.

**Ἀσκήσεις**: Σελὶς 60.—**36. Νὰ κατασκευάσητε εἰς τὸ τετράδιόν σας ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον μὲ πλευρὰν 5 ἑκατ.**

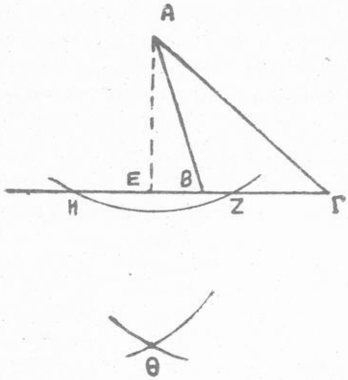
**Λύσις**: Γράφομεν εὐθ. τμῆμα ΑΒ μήκους 5 ἑκατ. Μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα ΑΒ γράφομεν μίαν περιφέρειαν. Ἔπειτα μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν γράφομεν ἄλλην περιφέρειαν. Αὗται θὰ τέμνωνται εἰς δύο σημεῖα Γ καὶ Δ, ἐπειδὴ ἡ μία διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἄλλης. Ἑνοῦμεν ἓν τῶν κοινῶν σημείων Γ ἢ Δ μὲ τὰ ἄκρα τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ καὶ τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ θὰ εἶναι ἰσόπλευρον μὲ πλευρὰν τὴν ΑΒ = 5 ἑκατ

**37. Νὰ κατασκευάσητε ἀπὸ ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ βάσιν 6 ἑκατ καὶ ἑκάστη ἀπὸ τὰς ἄλλας πλευράς αὐτοῦ νὰ εἶναι 4 ἑκατ. Καὶ ἄλλο μὲ τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ ἑκάστη τῶν ἄλλων πλευρῶν νὰ εἶναι 8 ἑκατοστά.**

**Λύσις**: Λαμβάνομεν μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον εὐθ. τμῆμα ΑΒ μήκους 5 ἑκατ. Μὲ κέντρα τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἀκτῖνας ἴσας πρὸς 4 ἑκατ. γράφομεν δύο περιφερείας, αἱ ὁποῖαι θὰ τέμνωνται εἰς δύο σημεῖα Γ καὶ Δ. Ἑνοῦμεν ἓν τουτων π. χ τὸ Γ μὲ τὰ ἄκρα Α καὶ Β τοῦ εὐθ τμήματος ΑΒ, ὅτε τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΓΒ θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον νὰ κατασκευασθῆ ἰσοσκελὲς τρίγωνον. Καθ' ὅμοιον τρόπον κατασκευάζεται καὶ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὰς ἄλλας δύο πλευρὰς ἴσας πρὸς 8 ἑκατ.

**38. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ἀμβλυγώνιον τρίγωνον. Νὰ λάβητε ὡς βάσιν αὐτοῦ μίαν πλευρὰν της ἀμβλείας γωνίας καὶ νὰ γράψητε τὸ ἀντίστοιχον ὕψος.**

**Λύσις**: Ἔστω ΑΒΓ ἓν ἀμβλυγώνιον τρίγωνον ἔχον ἀμβλεῖαν τὴν γωνίαν Β. αὐτοῦ. Ζητεῖται να χαραχθῇ τὸ ὕψος αὐτοῦ, ὡς πρὸς βάσιν τὴν πλευρὰν ΒΓ τῆς ἀμβλείας γωνίας του Β. Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΒΓ πέραν τοῦ Β καὶ μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Α καὶ ἀκτῖνα μεγαλυτέραν τῆς ἀποστάσεως αὐτοῦ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΒΓ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, ἥτις τέμνει την ΒΓ (προεκτεινομένην) εἰς τὰ σημεῖα Η καὶ Ζ. Φέρομεν τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον Ε τῆς χορδῆς ΗΖ, ἥτις προεκτεινομένη διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Α. Τὸ τμῆμα ΑΕ τῆς καθέτου ταύτης εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ὡς πρὸς βάσιν τὴν ΒΓ.




*Σχ. 14.*

**39. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ὀρθογώνιον καὶ ἓν ἀμβλυγώνιον τρίγωνον. Ἔπειτα δε νὰ φέρητε τὴν διάμεσον ἑκάστου, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς μεγαλυτέρας γωνίας αὐτοῦ.**

**Λύσις**: Εὑρίσκομεν τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ἑκάστου τριγώνου, τῆς κειμένης ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας γωνίας αὐτοῦ κατὰ τὸ πρόβλημα 1 § 68 καὶ τοῦτο ἑνοῦμεν μὲ τὴν ἀπέναντι κορυφήν του. -

**40. Νὰ κατασκευάσητε δύο τυχόντα τρίγωνα καὶ νὰ γράψητε ὅλας τὰς διαμέσους αὐτῶν.**

**Λύσις**: Εὑρίσκομεν τὰ μέσα τῶν τριῶν πλευρῶν ἑκάστου τριγώνου, ὡς ἀνωτέρω καὶ ταῦτα ἑνοῦμεν μὲ τὰς κορυφὰς τῶν ἀπέναντι αὐτῶν γωνιῶν καὶ οὕτω ἔχομεν ὅλας τὰς διαμέσους αὐτῶν.

Σελὶς 61. **Πόρισμα Ι. Ἂν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχωσιν ἴσας τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΔΕ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν καὶ τὰς ὀξείας Β καὶ Ε ἴσας, ταῦτα εἶνα ἴσα.**

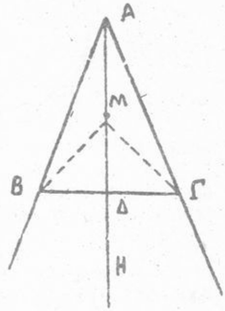
**Ἀπόδειξις**: Ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα θὰ ἔχωσιν ἀκόμη καὶ τὴν γωνΑ=γων Δ ὡς ὀρθάς, θὰ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν.

**Ἀσκήσεις.** Σελὶς 61.—**41. Ἀπὸ ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς εὐθείας ἤχθη ἡ κάθετος ἐπ' αὐτὴν καὶ δύο πλάγιαι. Ἂν αὗται σχηματίζωσιν ἴσας γωνίας μὲ τὴν κάθετον, νὰ συγκριθῶσιν αἱ πλάγιαι αὗται.**

**Λύσις**: Ἔστω ΑΒ μία εὐθεῖα και σημεῖον Γ κείμενον ἐκτὸς αὐτῆς. Φέρομεν τὴν κάθετον ΓΔ ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ δύο πλαγίας πρὸς αὐτήν, τὰς ΓΕ καὶ ΓΖ (σχ. 13). Ἔστω δὲ ὅτι εἶναι γων ΕΓΔ=γωνΖΓΔ Ζητεῖται νὰ συγκριθῶσιν αἱ πλάγιαι ΓΕ καὶ ΓΖ. Σχηματίζονται δύο ὀρθογώνια τρίγωνα τὰ ΕΔΓ καὶ ΓΔΖ. Ταῦτα ἔχουσι τὴν κάθετον πλευρὰν ΓΔ κοινὴν καὶ τὰς προσκειμένας ὀξείας γωνίας ΕΓΔ καὶ ΖΓΔ ἴσας. Ἄρα εἶναι ἴσα. Συνεπῶς θὰ ἔχωσι καὶ τὰ λοιπὰ ὁμοειδῆ στοιχεῖα αὐτῶν ἴσα· ἤτοι ΓΕ = ΕΖ.

**42. Ἀπὸ ἓν τυχὸν σημεῖον Δ τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας Α φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν διχοτόμον ταύτην. Αὕτη τέμνει τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ἀντιστοίχως εἰς σημεῖα Β καὶ Γ. Νὰ συγκρίνητε τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ.**

**Λύσις**: Ἔστω γωνία τις Α καὶ ΑΗ ἡ διχοτόμος αὐτῆς. Ἀπὸ σημεῖον Δ τῆς διχοτόμου ἄγομεν κάθετον ἐπ' αὐτήν, ἥτις τέμνει τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας Α εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. (Σχ. 15). Ζητεῖται νὰ συγκριθῶσι τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ.




*Σχ. 15.*

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΑΔ καὶ ΑΔΓ ἔχουσι μίαν κάθετον πλευράν, τὴν ΑΔ, κοινὴν καὶ τὰς προσκειμένας ὀξείας γωνίας ΒΑΔ καὶ ΔΑΓ ἴσας, λόγῳ τῆς διχοτόμου· ἄρα εἶναι ἴσα καὶ θὰ ἔχωσι καὶ τὰ λοιπὰ ὁμοειδῆ αὐτῶν στοιχεῖα ἴσα. Ἤτοι ΑΒ = ΑΓ.

**43. Ἂν ἡ διχοτόμος ΑΔ τῆς γωνίας Α ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι καὶ ὕψος αὐτοῦ, νὰ συγκρίνητε τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ αὐτοῦ.**

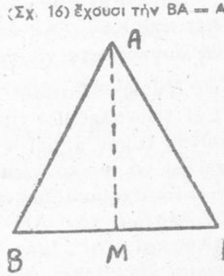
**Λύσις**: Ἐπειδὴ ἡ διχοτόμος ΑΔ τῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 15) εἶναι καὶ ὕψος αὐτοῦ, τὰ σχηματιζόμενα ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΑΔ καὶ ΑΔΓ, ὡς ἔχοντα τὴν μίαν κάθετον πλευρὰν ΑΔ κοινήν, καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν ὀξείας γωνίας ἴσας, θὰ εἶναι ἴσα. Συνεπῶς καὶ αἱ ὑποτείνουσαι αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσαι ἤτοι ΑΒ = ΑΓ.

Σελὶς 61. **Πόρισμα I. Ἂν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχωσι τὰς καθέτους πλευρὰς ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, ταῦτα εἶναι ἴσα.**

**Ἀπόδειξις**: Διότι θὰ ἔχωσι καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας, ὡς ὀρθάς.

**Πόρισμα II. Ἡ διχοτομοῦσα τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν καὶ διχοτομεῖ αὐτήν.**

**Ἀπόδειξις**: Τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα ΒΑΜ καὶ ΑΓΜ (Σχ. 16) ἔχουσι τὴν ΒΑ = ΑΓ ἐξ ὑποθέσεως, τὴν πλευρὰν ΑΜ κοινὴν καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ΒΑΜ καὶ ΜΑΓ ἴσας, ἐπειδὴ ἡ ΑΜ εἶναι διχοτόμος. Ἄρα εἶναι ἴσα καὶ θὰ ἔχωσι καὶ τὰ λοιπὰ ὁμοειδῆ στοιχεῖα αὐτῶν ἴσα ἤτοι ΒΜ = ΜΓ καὶ γων ΒΜΑ = = γων ΑΜΓ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ παραπληρωματικαί, ἑκάστη εἶναι ὀρθή. Ἄρα ἡ διχοτόμος ΑΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν καὶ διχοτομεῖ αὐτήν.

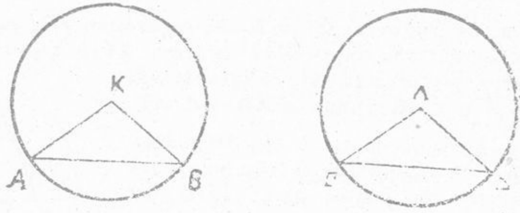



*Σχ. 16.*

**Πόρισμα III. Ἂν δύο τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας ἢ ἴσων περιφερειῶν εἶναι ἴσα καὶ αἱ χορδαὶ αὐτῶν εἶναι ἴσαι.**

Ἔστωσαν Κ καὶ Λ (Σχ. 17) δύο ἴσαι περιφέρειαι καὶ τόξον ΑΒ τῆς Κ ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΓΔ τῆς Λ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι καὶ αἱ χορδαὶ αὐτῶν ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ἴσαι.

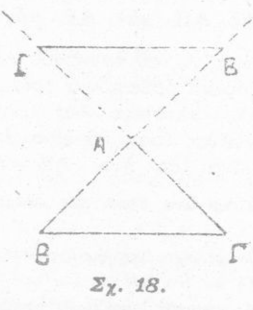
**Απόδειξις** : Φέρομεν τὰς ακτῖνας ΚΑ καὶ ΚΒ, ΛΓ καὶ ΛΔ εἰς τὰ ἄκρα τῶν τόξων Τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα ΑΚΒ καὶ ΓΛΔ ἔχουσι τὴν ΚΑ = ΛΓ, ΚΒ = ΛΔ καὶ γων ΑΚΒ =




*Σχ. 17.*

= γων ΓΛΔ, διότι εἶναι ἐπίκεντροι εἰς ἴσους κύκλους καὶ βαίνουσιν ἐπὶ ἴσων τόξων. Ἄρα εἶναι ἴσα. Συνεπῶς καὶ ΑΒ = ΓΔ, ἐπειδὴ ἀνήκουσιν εἰς τὰ ἴσα τρίγωνα καὶ κεῖνται ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν.

**Ἀσκήσεις** Σελὶς 62. **44. Νὰ προεκτείνητε τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς κορυφῆς Α. Νὰ ὁρίσητε δὲ ἐπ αὐτῶν ἀντιστοίχως τμήματα ΑΒ' καὶ ΑΓ' ἴσα πρὸς τὰ ΑΒ καὶ ΑΓ. Νὰ φέρητε τὸ εὐθ. τμῆμα Β' Γ' καὶ νὰ συγκρίνητε αὐτὸ πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ.**




*Σχ. 18.*

**Λύσις** : Ἔστω ΑΒΓ (Σχ 18) τὸ δοθὲν τρίγωνον καὶ ΑΓ'=ΑΓ καὶ ΑΒ'=ΑΒ. Ζητεῖται νὰ συγκριθῇ τὸ εὐθ. τμῆμα Β' Γ' πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ.

Τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒ Γ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι δύο πλευρὰς ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας ὡς κατὰ κορυφήν, ἤτοι ΑΒ = ΑΒ', ΑΓ=ΑΓ' ἐξ ὑποθέσεως καὶ γων ΒΑΓ = γων Γ'ΑΒ'. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ Β'Γ'=ΒΓ, ὡς πλευραὶ τῶν ἴσων τριγώνων, κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων κατὰ κορυφὴν γωνιῶν.

**45. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν γωνίας Α νὰ ὁρίσητε δύο ἴσα τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ. Ἂν δὲ Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς διχοτόμου αὐτῆς νὰ συγκρίνητε τὰ τμήματα ΜΒ καὶ ΜΓ.**

**Λύσις** : Ἔστω Α δοθεῖσα γωνία καὶ ΑΔ ἡ διχοτόμος αὐτῆς (Σχ. 15). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν της λαμβάνομεν ΑΒ=ΑΓ καὶ ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΑΔ αὐτῆς τυχὸν σημεῖον Μ καὶ φέρομεν τὰ εὐθ. τμήματα ΜΒ καὶ ΜΓ. Ζητεῖται νὰ συγκριθῶσι ταῦτα.

Τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα ΒΑΜ καὶ ΓΑΜ ἔχουσι ΑΒ = ΑΓ ἐξ ὑποθέσεως, τὴν ΑΜ κοινὴν καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ΒΑΜ καὶ ΜΑΓ ἴσας, λόγῳ τῆς διχοτόμου. Ἄρα εἶναι ἴσα καὶ θὰ ἔχωσι καὶ ΒΜ = ΜΓ, ἐπειδὴ ἀνήκουσιν εἰς τὰ ἴσα ταῦτα τρίγωνα καὶ κεῖνται ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν ΒΑΜ καὶ ΜΑΓ

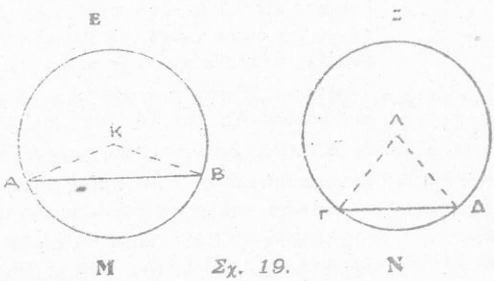
**46. Ἂν ἡ διάμεσος ΑΜ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι καὶ ὕψος αὐτοῦ νὰ ἀποδείξητε, ὅτι τοῦτο εἶναι ἰσοσκελὲς τρίγωνον.**

**Λύσις**: Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον καὶ ΑΜ ἡ διάμεσος αὐτοῦ, ὅτε ΒΜ=ΜΓ καὶ ΑΜ⊥ΒΓ (σχ. 16). Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές. Τὰ σχηματιζόμενα ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΜ καὶ ΑΜΓ ἔχουσι ΑΜ=ΑΜ καὶ ΒΜ=ΜΓ ἤτοι τὰς καθέτους αὐτῶν πλευρὰς ἴσας. Ἄρα εἶναι ἴσα. Συνεπῶς θὰ ἔχωσι καὶ τὰς ὑποτεινούσας αὐτῶν ἴσας ἤτοι ΑΒ=ΑΓ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

Σελὶς 63. **Π ό ρ ι σ μ α Ι. Δύο ἄνισα καὶ μικρότερα ἡμιπεριφερείας τόξα τῆς αὐτῆς περιφερεία ἢ ἴσων περιφερειῶν ἔχουσιν ὁμοίως ἀνίσους χορδάς.**

Ἔστωσαν δύο ἴσαι περιφέρειαι Κ καὶ Λ καὶ δύο τόξα ΑΒ καὶ ΓΔ μικρότερα ἡμιπεριφερείας καὶ τοξΑΒ>τοξΓΔ. Θὰ δείξωμεν ὅτι καὶ χορδὴ ΑΒ>χορδῆς ΓΔ (σχ. 19).

**Ἀπόδειξις.** Ἂν ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΚΒ, ΛΓ καὶ ΛΔ σχηματίζονται δύο τρίγωνα, τὰ ΑΚΒ καὶ ΛΓΔ, τὰ ὁποῖα ἔχουσι δύο πλευρὰς ἴσας ΚΑ=ΛΓ καὶ ΚΒ=ΛΔ, ὡς




*Σχ. 19.*

ἀκτῖνας ἴσων κύκλων καὶ τὰς περιεχομένας γωνίας ἀνίσους, διότι εἶναι ἐπίκεντροι καὶ βαίνουν ἐπὶ ἀνίσων τόξων ἤτοι γωνΑΚΒ>γωνΓΛΔ, διότι τοξΑΒ>τοξΓΔ. Ἄρα (§ 76) θὰ εἶναι αἱ ἄλλαι τω. πλευραὶ ἄνισοι καὶ μεγαλυτέρα ἡ ΑΒ ἡ κειμένη ἀπέναντι μεγαλυτέρας γωνίας ἤτοι χορδὴ ΑΒ>χορδῆς ΓΔ. Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ ἂν τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΓΔ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

**Π ό ρ ι σ μ α ΙΙ. Δύο ἄνισα καὶ μεγαλύτερα ἡμιπεριφερείας τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας ἢ ἴσων περιφερειῶν ἔχουσιν ἀνομοίως ἀνίσους χορδάς.**

Ἔστωσαν τὰ μεγαλύτερα ἡμιπεριφερείας ἄνισα τόξα ΑΕΒ καὶ ΓΖΔ καὶ τοξΑΕΒ<τοξΓΖΔ (σχ 19). Θὰ δείξωμεν, ὅτι καὶ αἱ χορδαὶ αὐτῶν ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ἀνομοίως ἄνισοι ἤτοι ΑΒ>ΓΔ.

**Ἀπόδειξις**: Ἀφοῦ τοξ ΑΕΒ<τοξΓΖΔ, ἕπεται, ὅτι καὶ τοξΑΜΒ>τοξΓΝΔ καὶ μικρότερα ἡμιπεριφερείας. Ἄρα (Πόρισμα Ι.) καὶ χορδὴ ΑΒ>χορδῆς ΓΔ.

**Π ό ρ ι σ μ α ΙΙΙ. Ἂν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχωσιν ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ καὶ ΒΓ>ΕΖ θὰ ἔχωσι καὶ Α>Δ.**

**Ἀπόδειξι**: Διότι, ἂν ἦτο Α=Δ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (σχ. 51 Θ. Γ.) θὰ ἦσαν ἴσα, ὡς ἔχοντα δύο πλευρὰς ἴσας, μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς περιεχομένας ὑπ' αὐτῶν γωνίας ἴσας. Ἀλλὰ τότε θὰ ἦτο καὶ ΒΓ=ΕΖ, ὅπερ ἄτοπον, διότι αντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν ΒΓ>ΕΖ. Ἂν ἦτο Α<Δ, θὰ ἦτο καὶ ΒΓ<ΕΖ (Θ. § 76) ὅπερ ἄτοπον, διότι ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἄρα Α>Δ.

**Π ό ρ ι σ μ α IV. Ἂν δύο χορδαὶ τοῦ αὐτοῦ ἢ ἴσων κύκλων εἶναι ἄνισοι, τὰ μικρότερα ἡμιπεριφερείας ἀντίστοιχα τόξα αὐτῶν εἶναι ὁμοίως ἄνισα. Τὰ δὲ μεγαλύτερα ἡμιπεριφερείας τόξα αὐτῶν εἶναι ἀνομοίως ἄνισα.**

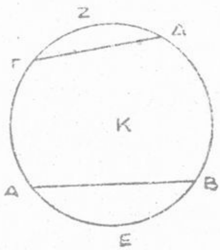
**Ἀπόδειξις**: Ἔστωσαν αἱ ἴσαι περιφέρειαι Κ καὶ Λ καὶ χορδὴ ΑΒ>χορδῆς ΓΔ (σχ. 19). Τὰ τρίγωνα ΑΚΒ καὶ ΓΛΔ ἔχουσι δύο πλευρὰς αὐτῶν ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, ὡς ἀκτῖνος τῶν ἴσων περιφερειῶν καὶ τὰς τρίτας πλευρὰς αὐτῶν ἀνίσους ἐξ ὑποθέσεως ἤτοι ΑΒ>ΓΔ. Ἄρα καὶ γωνΑΚΒ>γωνΓΛΔ καὶ συνεπῶς καὶ τόξΑΒ>τόξΓΔ. Τὰ δὲ τόξα ΑΕΒ καὶ ΓΖΔ εἶναι μεγαλύτερα ἡμιπεριφερείας καὶ τοξΑΕΒ<τοξΓΖΔ, διότι ἂν ἀπὸ ἴσα ἀφαιρεθῶσιν ἄνισα προκύπτουσιν ἀνομοίως ἄνισα.

Σελὶς 63. § 77. **Πόρισμα I.** **Ἂν δύο χορδαὶ μικροτέρων ἡμιπεριφερείας τόξων τῆς αὐτῆς ἢ ἴσων περιφερειῶν εἶναι ἴσαι καὶ τὰ τόξα ταῦτα εἶναι ἴσα.**

Ἔστωσαν Κ καὶ Λ αἱ ἴσαι περιφέρειαι καὶ χορδὴ ΑΒ=χορδὴ ΓΔ (σχ. 17). Θὰ εἶναι καὶ τοξ ΑΒ=τοξΓΔ.

**Ἀπόδειξις**: Διότι τὰ τρίγωνα ΚΑΒ καὶ ΛΓΔ εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα τὰς τρεῖς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας ἀνὰ μίαν. Ἑπομένως θὰ ἔχωσι καὶ γωνΚ=γων Λ ὡς ἀνήκουσαι εἰς τὰ ἴσα τρίγωνα καὶ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων χορδῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἐπίκεντροι καὶ ἴσαι, θὰ βαίνωσιν ἐπὶ ἴσων τόξων. Ἄρα τοξΑΒ=τοξΓΔ.

**Ἀσκήσεις** σελὶς 64.—**47. Νὰ γράψητε μίαν περιφέρειαν καὶ νὰ ὁρίσητε εἰς αὐτὴν δύο ἀνίσους χορδάς. Ἔπειτα δὲ νὰ συγκρίνητε τὰ μεγαλύτερα ἡμιπεριφερείας ἀντίστοιχα τόξα αὐτῶν.**



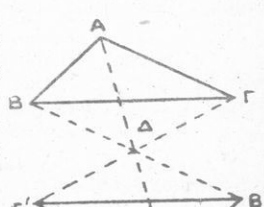
*Σχ. 20.*

**Λύσις**: Ἔστω ἡ περιφέρεια Κ καὶ δύο ἄνισοι χορδαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ 20), ἔστω δὲ χορδὴ ΑΒ>ΓΔ. Ζητεῖται νὰ συγκριθῶσι τὰ μεγαλύτερα ἡμιπεριφερείας τόξα αὐτῶν.

Ἐπειδὴ χορδὴ ΑΒ>χορδῆς ΓΔ, θὰ εἶναι καὶ τόξΑΕΒ>τόξΓΖΔ. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ περιφέρεια— τόξΑΕΒ < περιφερείας —τόξΓΖΔ ἤτοι τοξΑΖΒ<τοξΔΕΓ.

**48. Εἰς τὸ ἐπίπεδον ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον Δ καὶ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ νὰ ὁρίσητε ἀντιστοίχως τμήματα ΔΑ′ ΔΒ′, ΔΓ′ ἴσα, ἓν πρὸς ἓν πρὸς τὰ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ. Νὰ σχηματίσητε τὸ τρίγωνον Α′Β′Γ′ καὶ νὰ συγκρίνητε αὐτὸ πρὸς τὸ ΑΒΓ**

**Λύσις**: Ἔστω ΑΒΓ ἕνα τρίγωνον καὶ Δ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ. Φέρομεν τὰς ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ καὶ προεκτείνοντες αὐτὰς ἀντιθέτως λαμβάνομεν ΔΑ′=ΔΑ, ΔΒ′=ΔΒ καὶ ΔΓ′=ΔΓ. Ἑνοῦμεν τὰ σημεῖα Α′, Β′, Γ′, δι' εὐθ. τμημάτων καὶ θὰ συγκρίνωμεν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ (σχ. 21).



*Σχ. 21.*

Τὰ τρίγωνα ΔΑΒ καὶ ΔΑ′Β′ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι τὰς πλευρὰς ΔΑ = ΔΑ′, ΔΒ = = ΔΒ′ καὶ τὰς περιεχομένας ὑπ' αὐτῶν γωνίας ἴσας, ὡς κατὰ κορυφήν. Ἄρα καὶ ΑΒ = Α′Β′. Δι' ὅμοιον λόγον εἶναι καὶ τὰ τρίγωνα ΔΒΓ καὶ ΔΒ′Γ′ ἴσα καὶ συνεπῶς ΒΓ = Β′Γ′, καθὼς καὶ τὰ τρίγωνα ΔΑΓ καὶ ΔΑ′Γ′ εἶναι ἴσα καὶ συνεπῶς ΑΓ=Α'Γ'. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἔχουσι τὰς τρεῖς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν. Ἄρα εἶναι ἴσα.

Σελὶς 65. **49 Νὰ κατασκευάσητε ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ μία πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας νὰ εἶναι 6 ἑκατ. καὶ ἡ ἄλλη 5 ἑκατ.**

**Λύσις:** Κατασκευάζομεν ὀρθὴν γωνίαν καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῆς ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἀρχόμενοι ὁρίζομεν τμήματα ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα. Ἔπειτα ἑνοῦμεν τὰ πέρατα αὐτῶν δι' εὐθ. τμήματος καὶ οὕτω σχηματίζομεν τὸ ζητούμενον ὀρθ. τρίγωνον.

50. **Νὰ ἐξετάσητε, ἂν μὲ τὰ ἀνωτέρω δοθέντα στοιχεῖα α, β, ω εἶναι δυνατὸν ἢ ὄχι νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον διάφορον τοῦ κατασκευασθέντος ΑΒΓ (§ 79 σχ. 53).**

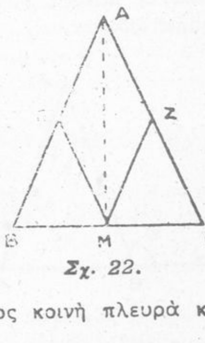
**Λύσις:** Ἂν μὲ τὰ αὐτὰ στοιχεῖα α, β, ω κατασκευάσωμεν καὶ ἄλλο τρίγωνον, τοῦτο θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΒΓ (σχ. 63 Θ. Γ), διότι ἔχουσι δύο πλευρὰς αὐτῶν ἴσας, μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς περιεχομένας ὑπ' αὐτῶν γωνίας ἴσας.

Σελὶς 65. **Πόρισμα Ι. Πᾶν ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσογώνιον.**

**Ἀπόδειξις:** Διότι, ἂν ΑΒΓ εἶναι τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον, θὰ εἶναι ΑΒ=ΑΓ καὶ συνεπῶς γωνΒ=γωνΓ. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ΓΒ=ΓΑ, θὰ εἶναι καὶ γωνΒ=γωνΑ. Ἄρα καὶ γωνΑ=γωνΒ=γωνΓ.

Ἀσκήσεις. Σελὶς 65. **51. Νὰ ὁρίσητε τὸ μέσον Μ τῆς βάσεως ΒΓ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἐπὶ τῶν ἴσων πλευρῶν αὐτοῦ νὰ ὁρίσητε ἴσα τμήματα ΑΕ, ΑΖ. Νὰ γράψητε τὰ εὐθ. τμήματα ΜΕ, ΜΖ καὶ νὰ συγκρίνητε ταῦτα.**

**Λύσις:** Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Μ τὸ μέσον τῆς βάσεως αὐτοῦ ΒΓ (σχ. 22). Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα ΑΕ καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ λαμβάνομεν εὐθ. τμῆμα ΑΖ=ΑΕ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΜΕ καὶ ΜΖ. Σχηματίζονται τὰ τρίγωνα ΒΕΜ καὶ ΖΜΓ. Ταῦτα ἔχουσι τὴν πλευρὰν ΒΜ=ΜΓ, ἐπειδὴ τὸ Μ εἶναι μέσον τῆς ΒΓ, τὴν πλευρὰν ΒΕ=ΖΓ διότι εἶναι ὑπόλοιπα τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ, ἀπὸ τῶν ὁποίων ἀφῃρέθησαν ἴσα, τὰ ΑΕ καὶ ΑΖ καὶ τὴν γωνΒ=γωνΓ, ὡς παρὰ τὴν βάσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου. Ἄρα εἶναι ἴσα καὶ συνεπῶς ΜΕ=ΜΖ, ὡς πλευραὶ τῶν ἴσων τριγώνων ΕΒΜ καὶ ΖΜΓ, κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν αὐτῶν Β καὶ Γ.



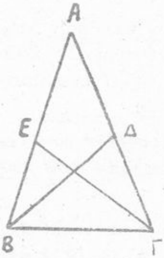
*Σχ. 22.*

*Β' τρόπος:* Ἂν ἀχθῇ ἡ διάμεσος ΑΜ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ, αὕτη θὰ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α ἤτοι γωνΕΑΜ=γωνΜΑΖ.

Τὰ τρίγωνα ΑΕΜ καὶ ΑΖΜ θα εἶναι ἴσα, διότι ΑΕ=ΑΖ ἐκ κατασκευῆς, ΑΜ=ΑΜ ὡς κοινὴ πλευρὰ καὶ γωνΕΑΜ=γωνΜΑΖ. Ἄρα καὶ ΕΜ=ΜΖ.

**52 Νὰ ὁρίσητε τὰ μέσα Δ καὶ Ε ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ. Ἔπειτα νὰ γράψητε καὶ νὰ συγκρίνητε τὰς διαμέσους ΒΔ καὶ ΓΕ αὐτοῦ.**

**Λύσις**: Ἔστω ΑΒΓ (σχ. 23) τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον καὶ Δ καὶ Ε τὰ μέσα τῶν ἴσων πλευρῶν αὐτοῦ, ὁριζόμενα συμφώνως πρὸς τὸ πρόβλημα § 68. Φέρομεν τὰς ΒΔ καὶ ΓΕ. Ζητεῖται νὰ συγκρίνωμεν ταύτας.



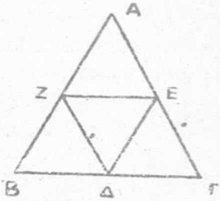
*Σχ. 23.*

Τὰ τρίγωνα ΒΔΓ καὶ ΒΕΓ ἔχουσι τὴν ΒΓ = ΒΓ, ΒΕ = ΓΔ, ὡς ἡμίση τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ καὶ γωνΒ = γωνΓ ὡς παρὰ τὴν βάσιν αὐτοῦ. Ἄρα εἶναι ἴσα καὶ συνεπῶς ΒΔ ΓΕ ἤτοι αἱ διάμεσοι αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τὰς ἴσας πλευρὰς ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσαι.

*Β' τρόπος:* Τὰ τρίγωνα ΑΕΓ καὶ ΑΔΒ ἔχουσι ΑΒ = ΑΓ, ΑΕ = ΑΔ καὶ γωνίαν Α κοινὴν ἄρα εἶναι ἴσα καὶ συνεπῶς ΒΔ = ΕΓ.

**53. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ, νὰ ὁρίσητε τὰ μέσα Δ, Ε, Ζ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ καὶ νὰ ἀποδείξητε, ὅτι τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ἰσόπλευρον.**

**Λύσις**: Ἔστω ΑΒΓ ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ Δ, Ε, Ζ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ (σχ. 24). Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ἰσόπλευρον.



*Σχ. 24.*

Τὰ τρίγωνα ΑΖΕ καὶ ΔΕΓ ἔχουσι τὴν πλευρὰν ΑΖ = ΕΓ, τὴν πλευρὰν ΑΕ = ΔΓ ὡς ἡμίση ἴσων πλευρῶν καὶ γωνΑ = γωνΓ, διότι πᾶν ἰσόπλευρον εἶναι καὶ ἰσογώνιον. Ἄρα θὰ ἔχωσι καὶ ΖΕ = ΕΔ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὰ τρίγωνα ΕΔΓ καὶ ΖΒΔ εἶναι ἴσα καὶ συνεπῶς ΔΕ = ΔΖ. Ἄρα καὶ ΖΕ = ΞΔ = ΔΖ καὶ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ἰσόπλευρον.

**54. Νὰ προεκτείνητε ἑκατέρωθεν τὴν βάσιν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ νὰ συγκρίνητε τὰς ἐξωτερικὰς γωνίας, αἱ ὁποῖαι θὰ σχηματισθῶσιν.**

*Σχ. 25.*

**Λύσις**: Ἔστω ΑΒΓ ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον (σχ. 25) καὶ β καὶ γ αἱ ἐξωτερικαὶ γωνίαι τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν αὐτοῦ Β καὶ Γ. Θὰ ἔχωμεν β+Β = 2 ὀρθαὶ (1), ὡς ἐφεξῆς τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Ἐπίσης Γ+γ = 2 ὀρθαὶ (2) δι' ὅμοιον λόγον. Ἄρα Β+β = Γ+γ (3). Ἀλλὰ γωνΒ = γωνΓ, ὡς παρὰ τὴν βάσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου. Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος (3) τὰ ἴσα Β καὶ Γ ἔχομεν Β + β — Β = Γ + γ — Γ ἢ β = γ ἤτοι αἱ σχηματισθεῖσαι ἐξωτερι καὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Σελὶς 66. **Πόρισμα I. Πᾶν ἰσογώνιον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσόπλευρον.**

**Ἀπόδειξις:** Ἔστω ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον δηλ. ἔχει γωνΑ = ΓωνΒ = γων Γ. Ἐπειδὴ γωνΑ=γωνΒ θὰ εἶναι καὶ ΓΑ=ΓΒ (Θ § 81). Ἐπειδὴ δὲ καὶ γωνΒ=γωνΓ, θὰ εἶναι καὶ ΑΒ=ΓΑ. Ὅθεν ΑΒ=ΒΓ=ΓΑ καὶ τὸ τρίγωνον ἰσόπλευρον.

Ἀσκήσεις σελὶς 66. 55. **Νὰ συγκρίνητε τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον ἔχει ἴσας τὰς ἐξωτερικὰς γωνίας Β καὶ Γ.**

**Λύσις:** Ἔστω, ὅτι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 25) αἱ ἐξωτερικαί του γωνίαι β καὶ γ εἶναι ἴσαι. Τότε θὰ ἔχωμεν Β + β = 2 ὀρθαὶ (1) καὶ Γ + γ = 2 ὀρθαὶ (2). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται, ὅτι Β + β = Γ + γ (3). Ἐπειδὴ δὲ γων β = γων γ ἐξ ὑποθέσεως, θὰ εἶναι γων Β = γων Γ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει δύο γωνίας αὐτοῦ ἴσας θα ἔχῃ καὶ τὰς ἔναντι αὐτῶν πλευρὰς ἴσας ἤτοι ΑΒ = ΑΓ καὶ συνεπῶς εἶναι ἰσοσκελές.

56. **Νὰ συγκρίνητε τὰς τρεῖς πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς ἐξωτερικαὶ γωνίαι μὲ διαφόρους κορυφὰς εἶναι ἴσαι.**

**Λύσις:** Ἀφοῦ αἱ ἐξωτερικαὶ γωνίαι τοῦ τριγώνου εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἐσωτερικαὶ γωνίαι αὐτοῦ, ὡς παραπληρώματα τῶν ἴσων ἐξωτερικῶν, θὰ εἶναι πᾶσαι ἴσαι μεταξύ των καὶ συνεπῶς τὸ τρίγωνον θὰ εἶναι ἰσογώνιον. Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι (πορ. I. § 81) πᾶν ἰσογώνιον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσόπλευρον. Ἄρα τὸ τρίγωνον ἔχει ἴσας τὰς πλευρὰς αὐτοῦ.

57. **Νὰ κατασκευάσητε ἓν ἰσογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΒΓ νὰ εἶναι 6 ἑκατ.**

**Λύσις:** Ἐπειδὴ πᾶν ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσογώνιον, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν ἓν ἰσόπλευρον τρίνωνον ΑΒΓ μὲ πλευρὰν ἴσην πρὸς 6 ἑκατ. Πρὸς τοῦτο χαράσσομεν εὐθ. τμῆμα ΒΓ μήκους 6 ἑκατ. Μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα ΒΓ γράφομεν μίαν περιφέρειαν καὶ μὲ κέντρον Γ καὶ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν γράφομεν ἄλλην περιφέρειαν. Αὗται τέμνονται, ἐπειδὴ ἡ μία διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἄλλης, εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Α'. Ἑνοῦμεν ἓν τῶν κοινῶν σημείων π. χ. τὸ Α μὲ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ δι' εὐθειῶν καὶ τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ συνεπῶς ἰσογώνιον.

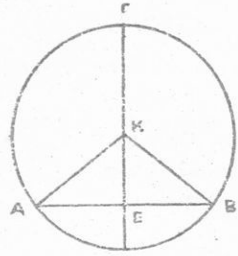
Σελὶς 67. **Πόρισμα I. Τὰ ὕψη ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του καὶ διάμεσοι αὐτοῦ.**

**Ἀπόδειξις:** Διότι τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ βάσιν οἱανδήποτε πλευρὰν αὐτοῦ. Συνεπῶς τὰ ὕψη τὰ ἀγόμενα ἐξ ἑκάστης κορυφῆς αὐτοῦ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του καὶ διάμεσοι συμφώνως πρὸς τὸ Θ. § 82

**Πόρισμα II. Ἡ διάμετρος κύκλου ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ χορδὴν αὐτοῦ, διχοτομεῖ τὴν χορδὴν καὶ τὰ ἀντίστοιχα αὐτῆς τόξα.**

Ἔστω ὁ κύκλος Κ καὶ χορδὴ αὐτοῦ ΑΒ καὶ ἡ διάμετρος ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΒ (σχ. 26). Θὰ δείξωμεν ὅτι ΑΕ = ΕΒ καὶ τοξ ΑΔ = ΔΒ, τοξ ΑΓ = τοξΓΒ.

**Ἀπόδειξις:** Τὸ τρίγωνον ΚΑΒ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ΚΑ=ΚΒ ὡς ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ἡ δὲ διάμετρος ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν αὐτοῦ ΑΒ καὶ διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου Συνεπῶς διχοτομεῖ τὴν βάσιν ΑΒ καὶ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς δηλ. ΑΕ = ΕΒ καὶ γωνΑΚΔ = γωνΔΚΒ Ἐπειδὴ δὲ αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΚΔ καὶ ΔΚΒ εἶναι ἴσαι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, θὰ βαίνωσιν ἐπὶ ἴσων τόξων, ἄρα τόξ ΑΔ=τοξ ΔΒ. Ἀλλὰ καὶ αἱ ἐπίκεντροι ΑΚΓ καὶ ΒΚΓ εἶναι ἴσαι ὡς παραπληρώματα τῶν ἴσων γωνιῶν ΑΚΔ καὶ ΔΚΒ. Συνεπῶς καὶ τοξ ΑΓ = τόξΓΒ.

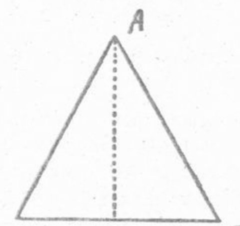



*Σχ. 26.*

**Ἀσκήσεις** σελ. 67. **58. Ἐκ σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου νὰ φέρητε τὴν κάθετον καὶ δύο ἴσας πλαγίας πρὸς αὐτήν. Ἔπειτα νὰ συγκρίνητε τὰς γωνίας, τὰς ὁποίας αἱ πλάγιαι αὗται σχηματίζουσι μὲ τὴν κάθετον.**

**Λύσις:** Ἔστω εὐθεῖα ΑΒ καὶ σημεῖον Γ κείμενον ἐκτὸς αὐτῆς (σχ. 13), ΓΕ δὲ καὶ ΓΖ αἱ ἴσαι πλάγιαι. Τὸ τρίγωνον ΓΕΖ εἶναι ἰσοσκελές, ἡ δὲ ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν αὐτοῦ ΕΖ ἐκ τῆς κορυφῆς του ἀγομένη. Συνεπῶς διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς του ἤτοι γων ΕΓΔ = γων ΔΓΖ.

**59. Ἂν εὐθεῖα ΑΔ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν Α τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀποδείξητε, ὅτι τὸ μεταξὺ τῆς κορυφῆς καὶ τῆς βάσεως τμῆμα ΑΔ εἶναι ὕψος καὶ διάμεσος τοῦ τριγώνου τούτου.**




*Σχ. 27.*

**Λύσις:** Ἔστω ΑΒΓ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον (ΑΒ = ΑΓ) καὶ ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α τῆς κορυφῆς αὐτοῦ (σχ. 27). Θὰ δείξωμεν, ὅτι αὕτη εἶναι καὶ ὕψος καὶ διάμεσος αὐτοῦ.

Τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ ἔχουσι τὴν πλευρὰν ΑΒ = ΑΓ ἐξ ὑποθέσεως, τὴν ΑΔ κοινὴν καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας λόγῳ τῆς διχοτόμου ΑΔ. Ἄρα εἶναι ἴσα καὶ θὰ ἔχωσιν ἴσα καὶ τὰ λοιπὰ ὁμοειδῆ στοιχεῖα αὐτῶν ἤτοι ΒΔ = ΔΓ καὶ συνεπῶς ἡ ΑΔ διάμεσος καθὼς καὶ γωνΒΔΑ = γωνΑΔΓ. Ἐπειδὴ ὅμως αὗται εἶναι ἴσαι καὶ παραπληρωματικαί, ἑκάστη θὰ εἶναι ὀρθὴ γωνία. Ἄρα ἡ ΑΔ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ συνεπῶς ὕψος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ.

**60. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι: Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία τέμνει δίχα καὶ καθέτως τὴν βάσιν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν αὐτοῦ καὶ διχοτομεῖ τὴν ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνίαν του.**

**Λύσις:** Ἔστω ΑΒΓ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον (σχ. 27) καὶ Δ τὸ μέσον τῆς βάσεως αὐτοῦ. Ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον Δ τῆς βάσεώς του ΒΓ ἢ διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς Α αὐτοῦ ἢ δὲν διέρχεται.

Ἔστω, ὅτι δὲν διέρχεται. Τότε φέρομεν τὴν ΑΔ καὶ τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ ἔχουσι τὴν ΑΒ = ΑΓ, ΓΔ = ΔΓ ἐξ ὑποθέσεως καὶ τὴν ΑΔ κοινήν· ἄρα εἶναι ἴσα καὶ θὰ ἔχωσι καὶ γων ΒΔΑ = γων ΑΔΓ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ ἴσαι, ἑκάστη θὰ εἶναι ὀρθὴ καὶ συνεπῶς ΑΔ ⊥ ΒΓ. Ἀλλὰ τότε θὰ ἔχωμεν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Δ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΒΓ δύο εὐθείας καθέτους ἐπ' αὐτήν, ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ εἰς τὸ μέσον Δ αὐτῆς διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς Α αὐτοῦ.

Ἐπειδὴ δὲ ΑΔ ⊥ ΒΓ θὰ ἔχωμεν καὶ γων ΒΑΔ = γων ΔΑΓ ἤτοι διχοτομεῖ καὶ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς αὐτοῦ.

**Ἀσκήσεις.** Σελὶς 68. — 61. **Νὰ κατασκευάσητε γωνίαν 45°**

**Λύσις:** Κατασκευάζομεν ὀρθὴν γωνίαν καὶ διχοτομοῦμεν ταύτην συμφώνως μὲ τὸ πρόβλημα τῆς § 84.

62. **Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ Α = 45°, ΑΒ = 10 ἑκατ. καὶ ΑΓ = 6 ἑκατ.**

**Λύσις:** Κατασκευάζομεν, ὡς ἀνωτέρω, γωνίαν 45°, τὴν ΒΑΓ. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ αὐτῆς λαμβάνομεν τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ = 10 ἑκατ. καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ αὐτῆς λαμβάνομεν τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΓ = 6 ἑκατ. Φέρομεν καὶ τὸ εὐθ. τμῆμα ΒΓ. Τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Μὲ τὰ αὐτὰ στοιχεῖα τρίγωνον διάφορον τοῦ ΑΒΓ δὲν δύναται νὰ κατασκευασθῇ, διότι ὅταν δύο τρίγωνα ἔχουσι δύο πλευρὰς αὐτῶν ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, εἶναι ἴσα.

63. **Νὰ διαιρέσητε δοθὲν τόξον περιφερείας εἰς 4 ἴσα μέρη.**

**Λύσις·** Ἂν ΑΒ εἶναι τὸ δοθὲν τόξον (σχ. 56 Θ. Γ.) φέρομεν τὴν χορδὴν ΑΒ αὐτοῦ καὶ τὴν ΚΔΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, ὅτε τόξ ΑΓ = τόξ ΓΒ (πόρισμα ΙΙ § 82). Ἔπειτα διχοτομοῦμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἕκαστον τῶν τόξων ΑΓ καὶ ΓΒ καὶ οὕτω διαιρεῖται τὸ τόξον ΑΒ εἰς 4 ἴσα τόξα.

64. **Νὰ διαιρέσητε μίαν γωνίαν εἰς 4 ἴσα μέρη.**

**Λύσις:** Καθιστῶμεν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ἐπίκεντρον καὶ διαιροῦμεν τὸ ἀντίστοιχον τόξον αὐτῆς εἰς 4 ἴσα μέρη, ὡς εἰς ἄσκησιν 63. Ἔπειτα φέρομεν τὰς ἀκτῖνας εἰς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως καὶ αἱ σχηματιζόμεναι 4 ἐπίκεντροι γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι, ὡς βαίνουσαι ἐπὶ ἴσων τόξων τῆς αὐτῆς περιφερείας.

Σελὶς 69. **Πόρισμα Ι. § 87. Πᾶν ὀρθογώνιον ἢ ἀμβλυγώνιον τρίγωνον ἔχει δύο ὀξείας γωνίας.**

**Ἀπόδειξις:** Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ τὸ ἄθροισμα δύο γωνιῶν αὐτοῦ εἶναι μικρότερον πάντοτε τῶν 2 ὀρθ. ἤτοι Α+Β < 2 ὀρθ. καὶ Α + Γ < 2 ὀρθ. Ἂν δὲ Α ≧ 1 ὀρθ. τότε θὰ εἶναι 1 ὀρθ+Β < 2 ὀρθ. ἢ Β < 1 ὀρθῆς καθὼς καὶ 1 ὀρθ.+Γ < 2 ὀρθ. καὶ συνεπῶς Γ < 2 ὀρθ - 1 ὀρθ ἢ Γ < 1 ὀρθῆς. Ἄρα αἱ γωνίαι Β καὶ Γ θὰ εἶναι ὀξεῖαι ἂν Α ≧ 1 ὀρθ.

**Πόρισμα II. Αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ὀξεῖαι.**

**Ἀπόδειξις.** Ἂν Β καὶ Γ εἶναι αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου θὰ ἔχωμεν (§ 87) Β+Γ < 2 ὀρθ. Ἐπειδὴ δὲ Β = Γ θὰ ἔχωμεν Β+Β < 2 ὀρθ. ἢ 2Β < 2 ὀρθ. καὶ Β< $\frac{2 \text{ ὀρθ.}}{2}$ καὶ Β = Γ < 1 ὀρθῆς. Ἄρα εἶναι ὀξεῖαι.

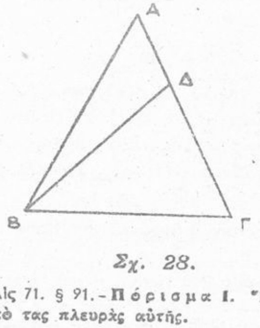
**Ἀσκήσεις σελ. 70. 65. Νὰ συγκρίνητε τὴν ὑποτείνουσαν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου πρὸς ἑκατέραν τῶν ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ.**

**Λύσις:** Ἐπειδή, ἄν δύο γωνίαι τριγώνου εἶναι ἄνισοι, καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν πλευραὶ εἶναι ὁμοίως ἄνισοι, εἰς δὲ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἡ ὀρθὴ γωνία του εἶναι μεγαλυτέρα ἑκάστης τῶν ἄλλων ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ, ἕπεται ὅτι ἡ ὑποτείνουσα, ὡς κειμένη ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας γωνίας αὐτοῦ, θὰ εἶναι μεγαλυτέρα ἑκάστης τῶν καθέτων πλευρῶν του.

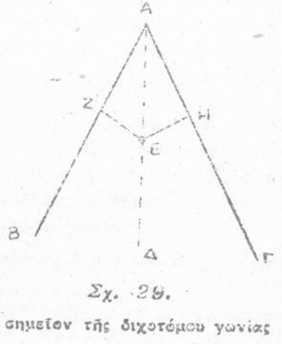
**66. Νὰ κατασκευάσητε ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ μὲ βάσιν ΒΓ. Νὰ συγκρίνητε δὲ τὰς ἀποστάσεις τυχόντος σημείου τῆς πλευρᾶς ΑΓ ἀπὸ τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ.**

**Λύσις:** Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) καὶ Δ τυχὸν σημεῖον τῆς πλευρᾶς ΑΓ αὐτοῦ (σχ. 28). Ζητεῖται νὰ συγκριθῶσι τὰ εὐθ. τμήματα ΔΒ καὶ ΔΓ.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ταῦτα εἶναι πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΔΒΓ καὶ διὰ νὰ τὰ συγκρίνωμεν ἀρκεῖ νὰ ἐξετάσωμεν τὰς γωνίας ΔΒΓ καὶ Γ, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀπέναντι αὐτῶν. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Δ κεῖται μεταξὺ Α καὶ Γ, ἡ ΒΔ κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας ΑΒΓ καὶ συνεπῶς εἶναι γων ΔΒΓ < γων Β. Ἐπειδὴ ὅμως γων Β = γων Γ θὰ εἶναι καὶ γωνΔΒΓ<γων Γ. Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὸ τρίγωνον ΔΒΓ αἱ γωνίαι αὐτοῦ ΔΒΓ καὶ Γ εἶναι ἄνισοι καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν πλευραὶ θὰ εἶναι ὁμοίως ἄνισοι ἤτοι ΔΒ>ΔΓ.




*Σχ. 28.*




*Σχ. 29.*

Σελὶς 71. § 91.- **Πόρισμα I. Ἕκαστον σημεῖον τῆς διχοτόμου γωνίας ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τας πλευρὰς αὐτῆς.**

Ἔστω ΒΑΓ δοθεῖσα γωνία καὶ ΑΔ ἡ διχοτόμος αὐτῆς (σχ. 29), Ε δὲ τυχὸν σημεῖον τῆς διχοτόμου. Φέρομεν τὰς καθέτους ἐκ τοῦ σημείου Ε ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ τῆς δοθείσης γωνίας, τὰς ΕΖ καὶ ΕΗ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αὗται εἶναι ἴσαι.

**'Απόδειξις:** Τὰ σχηματιζόμενα ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΖΕ καὶ ΑΗΕ ἔχουσι τὴν ΑΕ κοινὴν ὑποτείνουσαν αὐτῶν καὶ τὰς προσκειμένας ὀξείας γωνίας ΖΑΕ καὶ ΕΑΗ ἴσας λόγῳ τῆς διχοτόμου· ἄρα εἶναι ἴσα καὶ συνεπῶς ΕΖ=ΕΗ, διότι ἀνήκουσιν εἰς τὰ ἴσα ὀρθ. τρίγωνα καὶ κεῖνται ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν.

Σελὶς 72 § 92. — **Πόρισμα Ι. Τὸ κέντρον κύκλου ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ἴσας χορδὰς αὐτοῦ. Καὶ ἀντιστρόφως.**

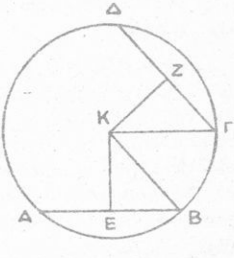
Ἔστω ὁ κύκλος Κ καὶ δύο ἴσαι χορδαὶ αὐτοῦ ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ ΚΕ καὶ ΚΖ αἱ ἀποστάσεις τοῦ κέντρου Κ ἀπὸ τὰς ἴσας χορδὰς ΑΒ καὶ ΓΔ. Θὰ δείξωμεν ὅτι ΚΕ=ΚΖ (σχ. 30).

**'Απόδειξις:** Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΚΕΒ καὶ ΚΖΓ ἔχουσι τὰς ὑποτεινούσας των ΚΒ καὶ ΚΓ ἴσας, ὡς ἀκτῖνας τοῦ αὐτοῦ κύκλου καὶ τὰς καθέτους των πλευρὰς ΕΒ καὶ ΖΓ ἴσας ὡς ἡμίση τῶν ἴσων, ἐξ ὑποθέσεως, χορδῶν ΑΒ καὶ ΔΓ. Ἄρα εἶναι ἴσα καὶ θὰ ἔχωσι καὶ ΚΕ=ΚΖ.

**'Αντιστρόφως** Ἂν αἱ ἀποστάσεις τοῦ κέντρου ἑνὸς κύκλου ἀπὸ δύο χορδὰς αὐτοῦ εἶναι ἴσαι τότε καὶ αἱ χορδαὶ εἶναι ἴσαι.

Ἔστω, ὅτι ΚΕ=ΚΖ (σχ. 30). Θὰ δείξωμεν ὅτι καὶ χορδὴ ΑΒ=χορδὴ ΔΓ.

**'Απόδειξις:** Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΚΕΒ καὶ ΚΖΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ΚΒ καὶ ΚΓ ἴσας καὶ ἀνὰ μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην, τὴν ΚΕ=ΚΖ ἐξ ὑποθέσεως. Ἄρα καὶ ΕΒ = ΖΓ. Ἐπειδὴ δὲ ΑΒ=ΕΒ. 2 καὶ ΓΔ=ΖΓ.2 θὰ εἶναι καὶ ΑΒ=ΓΔ.




*Σχ. 30.*

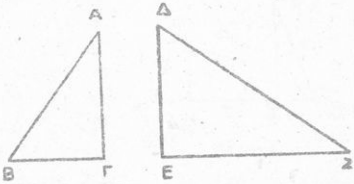
**Πόρισμα ΙΙ. Πᾶν σημεῖον ἴσον ἀπέχον ἀπὸ τῶν πλευρῶν γωνίας κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ταύτης.**

Ἔστω Ε σημεῖόν τι ἀπέχον ἴσον τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ΒΑΓ (σχ. 29) δηλαδὴ ΕΖ=ΕΗ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τοῦτο κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΑΔ τῆς γωνίας ταύτης. Φέρομεν τὴν ΑΕ.

**'Απόδειξις.** Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΖΕ καὶ ΑΗΕ ἔχουσι κοινὴν ὑποτείνουσαν τὴν ΑΕ καὶ ἀνὰ μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην τὴν ΕΖ=ΕΗ ἐξ ὑποθέσεως. Ἄρα εἶναι ἴσα καὶ θὰ ἔχωσι καὶ γων ΖΑΕ=γων ΕΑΗ ἤτοι ἡ ΑΕ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΑΓ.

**Σημείωσις.** Ἡ Β' πρότασις τῆς § 94 Θ. Γ. δὲν εἶναι ἐν γένει ἀληθής. Διότι, ἂν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχωσιν ἀνὰ μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην καὶ ἀνὰ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην, ἀλλ' εἶναι ἡ προσκειμένη ὀξεῖα γωνία εἰς τὴν μίαν ἴση πρὸς τὴν ἀντικειμένην ὀξεῖαν γωνίαν εἰς τὴν ἄλλην κάθετον πλευρὰν τοῦ ἑτέρου ὀρθογωνίου τριγώνου, τότε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα δὲν εἶναι ἴσα.

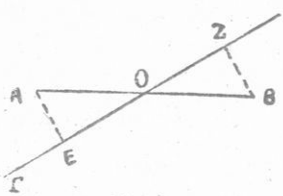
Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχουσι τὴν κάθετον ΑΓ=ΔΕ καὶ γωνΑ=γων Ζ δηλ. ἀνὰ μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην. Ἀλλά, ὡς καὶ εἰς τὸ σχῆμα φαίνεται, ταῦτα δὲν εἶναι ἴσα.




*Σχ. 31.*

**'Ασκήσεις** σελὶς 72. 67. **Νὰ γράψητε τυχοῦσαν εὐθεῖαν διερχομένην ἀπὸ τὸ μέσον ἑνὸς εὐθ. τμήματος. Ἔπειτα νὰ γράψητε τὰς ἀποστάσεις τῶν ἄκρων αὐτοῦ ἀπὸ τῆς εὐθείας καὶ νὰ συγκρίνητε αὐτάς.**

**Λύσις:** Ἔστω εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ Ο τὸ μέσον αὐτοῦ δηλ. ΑΟ=ΟΒ καὶ τυχοῦσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ μέσου αὐτοῦ, ἡ ΓΔ. Ἐκ τῶν



Σχ. 32.

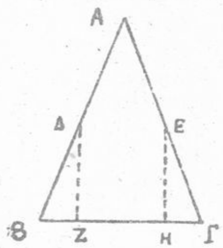
ἄκρων Α καὶ Β τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ φέρομεν τὰς καθέτους ΑΕ καὶ ΒΖ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ. Ζητεῖται νὰ συγκριθῶσιν αὗται. Σχηματίζονται δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, τὰ ΑΟΕ καὶ ΒΖΟ Ταῦτα ἔχουσι τὰς ὑποτεινούσας των ΑΟ καὶ ΟΒ ἴσας ἐξ ὑποθέσεως καὶ τὰς ὀξείας γωνίας ΑΟΕ καὶ ΖΟΒ ἴσας ὡς κατὰ κορυφήν, ἄρα εἶναι ἴσα καὶ συνεπῶς ΑΕ=ΒΖ, ὡς κείμεναι εἰς τὰ ἴσα ταῦτα τρίγωνα ἀπέναντι τῶν ἴσων κατὰ κορυφὴν γωνιῶν.

**68. Νὰ διχοτομήσητε μίαν γωνίαν καὶ ἀπὸ ἕν σημεῖον τῆς διχοτόμου νὰ φέρητε καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς αὐτῆς. Νὰ συγκρίνητε δὲ τὰς ἀποστάσεις τῶν ποδῶν τῶν καθέτων τούτων ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας.**

**Λύσις**: Ἔστω ΒΑΓ μία γωνία, ΑΔ ἡ διχοτόμος αὐτῆς καὶ Ε τυχὸν σημεῖον τῆς διχοτόμου ταύτης. Ἐκ τοῦ Ε φέρομεν τὰς καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας, τὰς ΕΖ καὶ ΕΗ (σχ. 29). Ζητεῖται νὰ συγκρίνωμεν τὰς ἀποστάσεις τῶν ποδῶν Ζ καὶ Η τῶν καθέτων τούτων ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α τῆς γωνίας.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΕΖΑ καὶ ΕΗΑ εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα τὴν ὑποτείνουσαν ΑΕ κοινὴν καὶ τὰς ὀξείας γωνίας ΖΑΕ καὶ ΕΑΗ ἴσας, λόγῳ τῆς διχοτόμου. Ἄρα καὶ ΑΖ=ΑΗ.

**69. Νὰ ὁρίσητε τὰ μέσα τῶν ἴσων πλευρῶν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι ταυτα ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου.**



Σχ. 33.

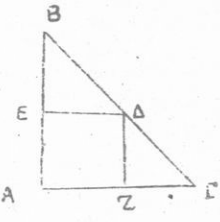
**Λύσις**: Ἔστω ΑΒΓ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον (ΑΒ=ΑΓ) καὶ Δ, Ε τὰ μέσα τῶν ἴσων πλευρῶν αὐτοῦ. Φέρομεν ἐκ τῶν σημείων Δ καὶ Ε τὰς καθέτους ἐπὶ τὴν ΒΓ, τὰς ΔΖ καὶ ΕΗ. Ζητεῖται νὰ συγκριθῶσιν αὗται.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΔΖΒ καὶ ΕΗΓ ἔχουσι τὰς ὑποτεινούσας των ΔΒ καὶ ΕΓ ἴσας, ὡς ἥμιση τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ ἀνὰ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην, τὴν γωνΒ=γωνΓ, ὡς παρὰ τὴν βάσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου. Ἄρα εἶναι ἴσα καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωσι καὶ ΔΖ=ΕΗ.

**70. Νὰ ὁρίσητε τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ νὰ ἀποδείξητε, ὅτι τοῦτο ἀπεχει ἴσον ἀπὸ τὰς ἴσας πλευρὰς αὐτοῦ.**

**Λύσις**: Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΒΑΓ (ΑΒ=ΑΓ) καὶ Δ. τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης αὐτοῦ (σχ. 34). Φέρομεν τὰς καθέτους ἐκ τοῦ σημείου Δ ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΑΒ, τὰς ΔΕ καὶ

ΔΖ. Ζητεῖται νὰ συγκριθῶσιν αὗται. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι σχηματίζονται δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΕΔ καὶ ΔΖΓ. Ταῦτα ἔχουσι τὰς ὑποτεινούσας των ΔΒ καὶ ΔΓ ἴσας ἐξ ὑποθέσεως καὶ ἀνὰ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην, τὴν Β = Γ ὡς παρὰ τὴν βάσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου. Ἄρα εἶναι ἴσα (§ 91) καὶ θὰ ἔχωσι καὶ τὰ λοιπὰ ὁμοειδῆ αὐτῶν στοιχεῖα ἴσα δηλ. ΔΕ = ΔΖ, ἐπειδὴ κεῖνται ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν Β καὶ Γ τῶν ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων.



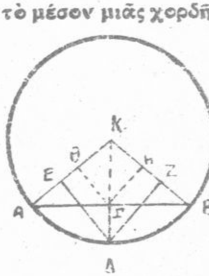
Σχ. 34.

71. **Νὰ ὁρίσητε τὸ μέσον ἑνὸς τόξου περιφερείας, ἔπειτα νὰ γράψητε τὰς ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τὰς εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ καταληγούσας ἀκτῖνας καὶ νὰ τὰς συγκρίνητε.**

**Λύσις**: Ἔστω ΑΒ ἓν τόξον τῆς περιφερείας Κ (σχ. 35). Ἐὰν φέρωμεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν χορδὴν αὐτοῦ καὶ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, αὕτη θὰ διχοτομῇ καὶ τὸ τόξον ΑΒ. Ἔστω δὲ Δ τὸ μέσον τοῦ τόξου. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς ἀποστάσεις τοῦ μέσου Δ τοῦ τόξου ἀπὸ τὰς ἀκτῖνας ΚΑ καὶ ΚΒ, φέρομεν τὰς καθέτους ΔΕ καὶ ΔΖ ἐπ' αὐτάς. Ζητεῖται νὰ συγκρίνωμεν ταύτας. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΚΕΔ καὶ ΚΖΔ ἔχουσι κοινὴν τὴν ὑποτείνουσαν ΚΔ καὶ γωνΕΚΔ = γωνΔΚΒ. διότι εἶναι ἐπίκεντροι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον καὶ βαίνουσιν ἐπὶ ἴσων τόξων. Ἄρα εἶναι ἴσα (§ 91) καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι καὶ ΔΕ = ΔΖ.

72. **Νὰ κάμητε τὴν προηγουμένην ἐργασίαν μὲ τὸ μέσον μιᾶς χορδῆς.**

**Λύσις**: Ἂν ΑΒ εἶναι ἡ χορδὴ καὶ Γ τὸ μέσον αὐτῆς (σχ. 35), ΓΘ δὲ καὶ ΓΗ αἱ ἀποστάσεις τοῦ μέσου τῆς χορδῆς ἀπὸ τὰς ἀκτῖνας, αἱ ὁποῖαι καταλήγουσιν εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς. τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΘΚ καὶ ΓΗΚ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι τὴν ὑποτείνουσαν ΚΓ κοινὴν καὶ τὰς ὀξείας γωνίας ΘΚΓ καὶ ΓΚΗ ἴσας. Ἄρα εἶναι ἴσα καὶ θὰ εἶναι καὶ ΓΘ = ΓΗ.



Σχ. 35.

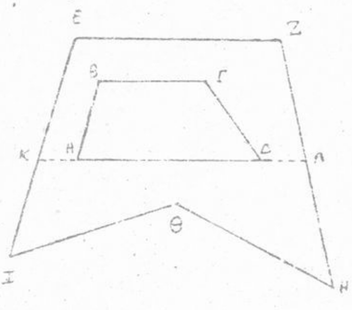
73. **Νὰ κατασκευάσητε ἓν ὀρθογώνιον καὶ σκαληνὸν τρίγωνον καὶ νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον τῆς ὑποτεινούσης, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὰς ἄλλας πλευρὰς αὐτοῦ.**

**Λύσις.** Γνωρίζομεν, ὅτι πᾶν σημεῖον κείμενον ἐπὶ τῆς διχοτόμου γωνίας ἀπέχει ἴσον τῶν πλευρῶν αὐτῆς. Συνεπῶς τὸ ζητούμενον σημεῖον θὰ κεῖται εἰς τὴν τομὴν τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς διχοτόμου τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου καὶ σκαληνοῦ τριγώνου.

## Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Γ' καὶ τοῦ Δ' Κεφαλαίου.

74. **Νὰ συγκρίνητε τὴν περίμετρον παντὸς κυρτοῦ εὐθ. σχήματος πρὸς τὴν περίμετρον ἄλλου εὐθ. σχήματος, τὸ ὁποῖον περικλείει τὸ πρῶτον**

**Λύσις**: Ἔστω τὸ κυρτὸν εὐθ. σχῆμα ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ τὸ εὐθ. σχῆμα ΕΖΗΘΙ (Σχ 37).




*Σχ. 36.*

Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΑΔ τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔ καὶ ἔστωσαν Κ καὶ Λ τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα αὕτη συναντᾷ τὴν περίμετρον τοῦ εὐθ. σχήματος ΕΖΗΘΙ.

Τότε θὰ ἔχωμεν :

ΑΚ+ΚΕ+ΕΖ+ΖΛ+ΛΔ>ΑΒ+ΒΓ+ +ΓΔ (1) ἐπειδὴ ἡ περίμετρος κυρτῆς τεθλασμένης γραμμῆς εἶναι μικροτέρα τῆς περιμέτρου πάσης ἄλλης τεθλασμένης γραμμῆς, ἡ ὁποία ἔχει τὰ αὐτὰ ἄκρα καὶ περιβάλλει αὐτήν.

Ἐπίσης ἐπειδὴ ἡ ΚΑΔΛ εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ ἡ δὲ ΚΙΘΗΛ εἶναι τεθλασμένη καὶ ἔχουσι τὰ αὐτὰ ἄκρα θὰ ἔχωμεν ΚΙ+ΙΘ+ΘΗ+ΗΛ> ΚΑ+ΑΔ+ΔΛ (2). Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν:

ΑΚ+ΚΕ+ΕΖ+ΖΛ+ΛΔ+ΚΙ+ΙΘ+ΘΗ+ΗΛ>ΑΒ+ΒΓ+ΔΓ+ΚΑ+ΑΔ+ΔΛ

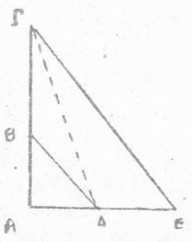
Ἀφαιροῦμεν ἀπ' ἀμφότερα τα μέλη αὐτῆς τὰ ἴσα ΚΑ καὶ ΛΔ καὶ ἔχομεν:

ΚΕ+ΕΖ+ΖΛ+ΛΗ+ΗΘ+ΘΙ+ΙΚ>ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ

Ἐπειδὴ δὲ ΚΕ+ΚΙ=ΙΕ καὶ ΖΛ+ΛΗ=ΖΗ ἡ τελευταία ἀνισότης γίνεται:

ΙΕ+ΕΖ+ΖΗ+ΗΘ+ΘΙ>ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ.

75. **Νὰ σχηματίσητε μίαν ὀρθὴν γωνίαν Α καὶ νὰ ὁρίσητε ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς δύο σημεῖα Β, Γ καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης ἄλλα δύο Δ, Ε, τοιαῦτα ὥστε νὰ εἶναι ΑΒ<ΑΓ καὶ ΑΔ<ΑΕ. Νὰ συγκρίνητε τὰ τμήματα ΒΔ καὶ ΓΕ.**




*Σχ. 37.*

**Λύσις** Ἔστω Α μία ὀρθὴ γωνία καὶ Β, Γ δύο σημεῖα ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς αὐτῆς τοιαῦτα ὥστε ΑΒ<ΑΓ καὶ Δ, Ε δύο σημεῖα ἐπὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς αὐτῆς, τοιαῦτα ὥστε ΑΔ<ΑΕ. Ζητεῖται νὰ συγκριθῶσι τὰ εὐθ. τμήματα ΒΔ καὶ ΓΕ.

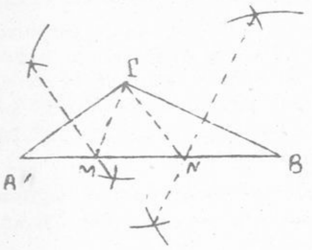
Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΔ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ΒΔ<ΓΔ, ἐπειδὴ ἀμφότεραι εἶναι πλάγιαι ὡς πρὸς τὴν ΔΑ καὶ οἱ πόδες των ἀπέχουσι ἄνισον τοῦ ποδὸς Α τῆς καθέτου, διότι ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΑΒ<ΑΓ.

Ἐπίσης εἶναι ΓΔ<ΓΕ, διότι εἶναι ἀμφότεραι πλάγιαι. ὡς πρὸς τὴν ΓΑ καὶ ΔΑ<ΕΑ.

Ἐπειδὴ δὲ ΒΔ<ΓΔ καὶ ΓΔ<ΓΕ θὰ εἶναι ΒΔ<ΓΕ.

**76. Νὰ γραφῆτε μίαν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ νὰ όρίσητε ἐκτὸς αὐτῆς ἓν σημεῖον Γ. Ἔπειτα νὰ όρίσητε ἐπὶ τῆς ΑΒ ἓν σημεῖον Μ τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι ΜΑ=ΜΓ καὶ ἄλλο σημεῖον Ν τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι ΝΒ=ΝΓ.**

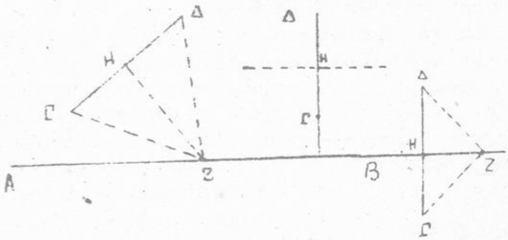
**Λύσις**: Ἔστω μία εὐθεῖα ΑΒ καὶ σημεῖον Γ ἐκτὸς αὐτῆς (σχ. 38). Φέρομεν τὰ εὐθ. τμήματα ΑΓ καὶ ΓΒ καὶ φέρομεν τὰς καθέτους εἰς τὰ μέσα Ε καὶ Δ τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΓ καὶ ΓΒ. Αὗται τέμνουσι τὴν ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν τοιαῦτα, ὥστε νὰ ἔχωμεν ΜΑ=ΜΓ καὶ ΝΒ=ΝΓ, διότι πᾶν σημεῖον κείμενον ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον ἑνὸς εὐθ. τμήματος ἀπέχει ἴσον τῶν ἄκρων αὐτοῦ.




*Σχ. 38.*

**77. Νὰ όρίσητε ἐκτὸς δοθείσης εὐθείας ΑΒ δύο σημεῖα Γ, Δ καὶ νὰ όρίσητε ἐπὶ τῆς ΑΒ σημεῖον Ζ, διὰ τὸ όποῖον εἶναι ΖΓ=ΖΔ.**

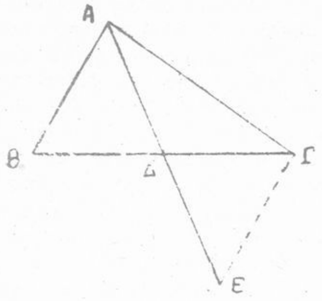
**Λύσις**: Ἔστω ΑΒ ἡ ὁρισθεῖσα εὐθεῖα καὶ Γ, Δ δύο σημεῖα κείμενα ἐκτὸς αὐτῆς. Φέρομεν τὸ εὐθ. τμῆμα ΓΔ. Ἐπειδὴ τὸ ζητούμενον σημεῖον Ζ τῆς ΑΒ πρέπει νὰ ἀπέχῃ ἴσον τῶν ἄκρων τοῦ εὐθ. τμήματος ΓΔ, ὀφείλει νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον αὐτοῦ. Κατασκευάζομεν λοιπὸν τὴν κάθετον ταύτην καὶ τὸ σημεῖον Ζ εἰς τὸ ὁποῖον αὕτη θὰ τμήσῃ τὴν ΑΒ εἶναι τὸ ζητούμενον. Ἐὰν τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ ληφθῶσιν ἐπὶ εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ εἰς ἀνίσους ἀποστάσεις ἐπ' αὐτῆς, τότε τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν· ἐὰν ὅμως κεῖνται εἰς ἴσας ἀποστάσεις, τότε ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ΑΒ εἶναι τοιαῦτα, ὥστε νὰ ἔχωμεν ΖΓ=ΖΔ.




*Σχ. 39.*

**78. Νὰ κατασκευάσητε τυχὸν τρίγωνον. Νὰ φέρητε τὴν διάμεσον ΑΔ αὐτοῦ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς νὰ ὁρίσητε τμῆμα ΔΕ ἴσον πρὸς ΑΔ. Νὰ φέρητε τὸ εὐθ. τμῆμα ΕΓ καὶ νὰ συγκρίνητε αὐτὸ πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ.**

**Λύσις:** Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΔ ἡ διάμεσος αὐτοῦ (σχ. 40)



*Σχ. 40.*

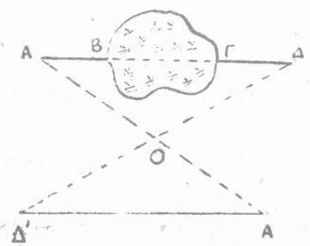
Προεκτείνομεν τὴν διάμεσον ΑΔ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν ΔΕ= =ΔΑ καὶ φέρομεν τὴν ΓΕ. Ζητεῖται νὰ συγκριθῇ τὸ εὐθ. τμῆμα ΓΕ πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ. Τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΔΕΓ ἔχουσι ΒΔ= =ΔΓ ἐξ ὑποθέσεως, ΑΔ=ΔΕ ἐκ κατασκευῆς καὶ γων ΒΔΑ = γων ΓΔΕ, ὡς κατὰ κορυφήν. Ἄρα εἶναι ἴσα καὶ θὰ ἔχωσι καὶ ΓΕ = ΑΒ.

**79. Εἰς τὸ προηγούμενον σχῆμα νὰ συγκρίνητε τὴν γωνίαν ΒΑΔ πρὸς τὴν ΔΕΓ.**

**Λύσις:** Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΔΓΕ εἶναι ἴσα, ὡς ἀπεδείχθη ἀνωτέρω, θὰ ἔχωσι τὰ λοιπὰ ὁμοειδῆ στοιχεῖα αὐτῶν ἴσα, ἤτοι γων ΒΑΔ=γωνΔΕΓ διότι κεῖνται ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν ΒΔ καὶ ΔΓ.

**80. Εἰς μίαν ὁμαλὴν πεδιάδα ὑπάρχει ἓν μικρὸν ἕλος Ε διὰ μέσου τοῦ ὁποίου πρόκειται νὰ διέλθῃ μία εὐθεῖα ὁδὸς ΑΒΓΔ. Πῶς ὁ τοπογράφος Μηχανικος θὰ εὕρῃ το μῆκος τοῦ ἐντὸς τοῦ ἕλους τμήματος αὐτῆς πρὶν ἀποξηρανθῇ τὸ ἕλος**

**Λύσις:** Ἐπὶ τῆς ὁμαλῆς πεδιάδος ἐκλέγομεν σημεῖόν τι Ο, ὥστε ἐξ αὐτοῦ νὰ φαίνωνται δύο σημεῖα τοῦ δρόμου ΑΒΓΔ κείμενα ἑκατέρωθεν τοῦ ἕλους π. χ. τὰ σημεῖα Α καὶ Δ. Χαράσσομεν τὰς εὐθείας ΟΑ καὶ ΟΔ καὶ προεκτείνομεν αὐτὰς ἀντιθέτως καὶ λαμβάνομεν ΟΑ′=ΟΑ καὶ ΟΔ′=ΟΔ, φέρομεν δὲ καὶ τὴν Α′Δ′. Τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα ΟΑΔ καὶ ΟΑ′Δ′ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας Δ′ΟΑ′ καὶ ΔΟΑ ἴσας ὡς κατὰ κορυφὴν ἄρα θὰ εἶναι καὶ Α′Δ′= =ΑΔ. Μετροῦμεν τὴν Α′Δ′ καὶ ἀπὸ τὸ μῆκος αὐτῆς ἀφαιροῦμεν τὰ μήκη τῶν τμημάτων ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν τὸ μῆκος τοῦ ἐντὸς τοῦ ἕλους τμήματος τῆς ὁδοῦ.



*Σχ. 41.*

**81. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι ΑΒ<ΑΓ. Ἔπειτα νὰ φέρητε τὴν διάμεσον ΑΔ καὶ νὰ συγκρίνητε τὰς γωνίας ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ πρὸς ἀλλήλας καὶ ἑκάστην πρὸς τὴν ὀρθὴν γωνίαν.**

**Λύσις:** Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ΑΔ ἡ διάμεσος αὐτοῦ (Σχ. 40) καὶ ΑΒ<ΑΓ. Τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ ἔχουσι ΒΔ=ΔΓ καὶ τὴν πλευρὰν

ΑΔ κοινήν, τὰς δὲ τρίτας των πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀνίσους. Ἄρα καὶ αἱ γωνίαι αὐτῶν, αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἀνίσων πλευρῶν των, θὰ εἶναι ἄνισοι καὶ μικροτέρα θὰ εἶναι ἡ γωνία, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς μικροτέρας πλευρᾶς ἤτοι γων ΑΔΒ $<$ γων ΑΔΓ. Ἐπειδὴ δὲ γωνΑΔΒ $+$ γωνΑΔΓ $=$ 2 ὀρθαί, ὡς ἐφεξῆς, τῶν ὁποιων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, θὰ εἶναι καὶ γωνΑΔΒ $<$ 1 ὀρθ. καὶ γωνΑΔΓ $>$ 1 ὀρθῆς.

**82. Νὰ κατασκευάσητε γωνίαν $22^{\circ}\ 30'$.**

**Λύσις:** Κατασκευάζομεν γωνίαν $90^{\circ}$ καὶ διχοτομοῦμεν ταύτην. Ἔπειτα δὲ διχοτομοῦμεν τὴν μίαν ἐκ τῶν δύο γωνιῶν, τὰς ὁποίας ἐλάβομεν διὰ διχοτομήσεως τῆς ὀρθῆς.

**83. Νὰ διαιρέσητε μίαν περιφέρειαν εἰς 8 ἴσα τόξα.**

**Λύσις:** Φέρομεν πρῶτον δύο καθέτους διαμέτρους τῆς περιφερείας ταύτης, ὅτε αὕτη διαιρεῖται εἰς 4 ἴσα μέρη. Κατόπιν διχοτομοῦμεν ἕκαστον τῶν 4 τούτων ἴσων τόξων καὶ οὕτω χωρίζομεν τὴν περιφέρειαν εἰς 8 ἴσα τόξα.

**84. Ἂν εἰς ἓν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ΑΓ$>$ΑΒ καὶ ΑΔ διάμεσος αὐτοῦ, νὰ ἀποδείξητε, ὅτι $\frac{ΑΓ-ΑΒ}{2} < ΑΔ < \frac{ΑΓ+ΑΒ}{2}$.**

**Λύσις:** Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 40), ΑΔ ἡ διάμεσος αὐτοῦ καὶ ΑΓ$>$ΑΒ. Προεκτείνομεν τὴν διάμεσον ΑΔ αὐτοῦ καὶ λαμβάνομεν ΔΕ$=$ΑΔ καὶ φέρομεν τὴν ΓΕ. Τὰ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΓΔΕ εἶναι ἴσα διότι ἔχουν ΒΔ$=$ΔΓ, ΔΕ$=$ΑΔ καὶ γωνΑΔΒ$=$γωνΕΔΓ. Ἄρα ΓΕ$=$ΑΒ.

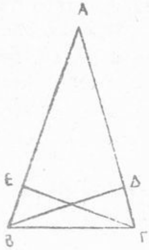
Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΓΕ ἔχομεν, ὅτι ΑΕ$>$ΑΓ$-$ΓΕ καὶ ΑΕ$<$ΑΓ$+$ΓΕ, διότι ἑκάστη πλευρὰ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς των. Ἀλλὰ ΑΕ$=$ΑΔ 2 καὶ ΑΒ$=$ΓΕ. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς δύο ἀνωτέρω ἀνισότητας καὶ ἔχομεν ΑΔ . 2$>$ΑΓ$-$ΑΒ καὶ ΑΔ . 2 $<$ ΑΓ $+$ ΑΒ. Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῶν διὰ τοῦ 2 καὶ λαμβάνομεν ΑΔ$>$ $\frac{ΑΓ\ \ ΑΒ}{2}$ καὶ ΑΔ$<$ $\frac{ΑΓ+ΑΒ}{2}$ ἤτοι $\frac{ΑΓ\ \ ΑΒ}{2} < ΑΔ < \frac{ΑΓ+ΑΒ}{2}$.

**85. Εἰς τὸ προηγούμενον σχῆμα νὰ ἀποδείξητε ὅτι γωνΒΑΔ$>$γωνΔΑΓ.**

**Ἀπόδειξις:** Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΓΔΕ (σχ. 40) εἶναι ἴσα, θὰ εἶναι καὶ γωνΒΑΔ$=$γωνΔΕΓ καὶ ΑΒ$=$ΓΕ. Ἐπειδὴ δὲ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΑΒ$<$ΑΓ θὰ εἶναι καὶ ΓΕ$<$ΑΓ. Εἰς τὸ τρίγωνον δὲ ΑΓΕ, ἐπειδὴ ΑΓ$>$ΓΕ, θὰ εἶναι γωνΓΕΔ$>$γωνΔΑΓ. Ἀλλὰ γωνΔΕΓ$=$γωνΒΑΔ Ἄρα καὶ γωνΒΑΔ$>$γωνΔΑΓ.

**86. Νὰ ἀποδείξητε, ὅτι τὰ ὕψη ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς βάσεως αὐτοῦ, εἶναι ἴσα.**

**Λύσις:** Ἔστω ΑΒΓ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον καὶ ΒΔ ΓΕ τὰ ὕψη αὐτοῦ ἐκ τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ ἐπὶ τὰς ἴσας πλευράς του ΑΒ καὶ ΑΓ (σχ. 42). Θὰ δείξωμεν, ὅτι ταῦτα εἶναι ἴσα.



*Σχ. 42*

***Ἀπόδειξις.*** Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΕΓ καὶ ΒΔΑ ἔχουσι τὰς ὑποτεινούσας των ΑΓ καὶ ΑΒ ἴσας, ὡς ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν Α κοινήν. Ἄρα εἶναι ἴσα καὶ θὰ ἔχωσι καὶ ΒΔ=ΓΕ ἐπειδὴ αὗται κεῖνται ἀπέναντι τῆς κοινῆς των γωνίας Α.

**Σημείωσις.** Τοῦτο ἀποδεικνύεται καὶ ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΒΕΓ καὶ ΒΔΓ, ἅτινα ἔχουσιν ὑποτείνουσαν ΒΓ κοινὴν καὶ γωνΒ=γωνΓ ἄρα ΒΔ=ΓΕ.

**87. Νὰ ἀποδείξητε, ὅτι: Ἂν δύο ὕψη τριγώνου εἶναι ἴσα τοῦτο εἶναι ἰσοσκελὲς τρίγωνον.**

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΓΕ⊥ΑΒ, ΒΔ⊥ΑΓ καὶ ΒΔ=ΓΕ. Θὰ δείξωμεν ὅτι καὶ ΑΒ=ΑΓ δηλ. τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς (σχ. 42).

**Ἀπόδειξις.** Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΔΓ καὶ ΓΕΒ ἔχουσι τὴν ὑποτείνουσαν αὐτῶν ΒΓ κοινὴν καὶ τὰς καθέτους των πλευρὰς ΒΔ καὶ ΓΕ ἴσας ἐξ ὑποθέσεως. Ἄρα εἶναι ἴσα καὶ θὰ ἔχωσι καὶ γωνΒ=γωνΓ, ὡς κειμένας ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν ΓΕ καὶ ΒΔ. Τὸ τρίγωνον δὲ ΑΒΓ, ὡς ἔχον δύο γωνίας αὐτοῦ ἴσας θὰ ἔχῃ καὶ τὰς ἔναντι αὐτῶν πλευρὰς ἴσας, ἤτοι ΑΒ=ΑΓ δηλ. εἶναι ἰσοσκελές.

**88. Νὰ ἀποδείξητε, ὅτι τὰ ὕψη ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι ἴσα καὶ ἀντιστρόφως.**

Ἔστω τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τὰ ὕψη αὐτοῦ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ταῦτα εἶναι ἴσα.

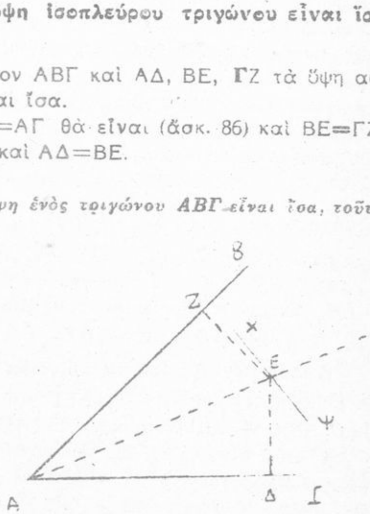
**Ἀπόδειξις.** Ἐπειδὴ εἶναι ΑΒ=ΑΓ θὰ εἶναι (ἄσκ. 86) καὶ ΒΕ=ΓΖ. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ΒΓ=ΑΓ θὰ εἶναι καὶ ΑΔ=ΒΕ.

Ἄρα ΑΔ=ΒΕ=ΓΖ.

**Ἀντιστρόφως**: *Ἂν τὰ τρία ὕψη ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἴσα, τοῦτο εἶναι ἰσόπλευρον.*

Διότι ἀφοῦ ΒΕ=ΓΖ θὰ εἶναι καὶ ΑΒ=ΑΓ (ἄσκ. 87), ἐπειδὴ δὲ ΑΔ=ΓΖ θὰ εἶναι καὶ ΒΓ=ΑΒ. Ἄρα ΑΒ=ΒΓ=ΑΓ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ εἶναι ἰσόπλευρον.

**89. Νὰ κατασκευάσητε μίαν γωνίαν καὶ τυχοῦσαν εὐθεῖαν. Νὰ εὕρητε δὲ ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης ἓν σημεῖον τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ταύτης.**



*Σχ. 43.*

**Λύσις**: Ἔστω γωνία τις ΒΑΓ καὶ τυχοῦσα εὐθεῖα ΧΨ. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΧΨ σημεῖόν τι, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ΒΑΓ.

Ἐπειδὴ πᾶν σημεῖον τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον τῶν πλευρῶν μιᾶς γωνίας κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου αὐτῆς, ἕπεται ὅτι καὶ τὸ ζητούμενον θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ΒΑΔ.

Ἐπειδὴ δὲ θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς ΧΨ, θὰ εἶναι ἡ τομὴ Ε τῆς διχοτόμου ΑΘ τῆς δοθείσης γωνίας καὶ τῆς εὐθείας ΧΨ.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

## Αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι

Σελὶς 77.—§ 99. **Θεώρημα ΙΙ. Ἂν εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης σχηματίζωσι δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας, αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι παράλληλοι.**

Ἔστω, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 67. Θ. Γ.) τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΕΖ σχηματίζουσι δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἤτοι α=δ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αὗται εἶναι παράλληλοι.

**Ἀπόδειξις**: Ἂν αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ ἐτέμνοντο εἰς σημεῖον Η, ἡ ἐξωτερικὴ γωνία δ τοῦ τριγώνου ΗΕΖ θὰ ἦτο ἴση πρὸς τὴν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι α, ὅπερ ἄτοπον, διότι γνωρίζομεν (§ 86) ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ γωνία παντὸς τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα ἑκάστης τῶν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι αὐτῆς γωνιῶν.

**Θεώρημα ΙΙΙ. Ἂν δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι δύο εὐθειῶν τεμνομένων ὑπὸ τρίτης εἶναι παραπληρωματικαί, αἱ εὐθεῖαι ἐκεῖναι εἶναι παράλληλοι.**

**Ἀπόδειξις**. Διότι, ἂν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ ἐτέμνοντο εἰς σημεῖον Η (σχ. 67. Θ. Γ.) θὰ ἔπρεπεν ἐκ τοῦ τριγώνου ΗΕΖ νὰ ἔχωμεν α+γ<2 ὀρθῶν (§ 87). Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἄτοπον, διότι ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν, ὅτι α+γ=2 ὀρθαί. Ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

**Σημείωσις**: Ταῦτα ἀποδεικνύονται ταχύτερον καὶ ὡς πορίσματα τοῦ Θ. § 98.

Ι. Ἂν α=δ, ἐπειδὴ καὶ δ=β ὡς κατὰ κορυφὴν τότε καὶ α=β. Ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ παράλληλοι (Θ. § 98).

ΙΙ. Ἐπειδὴ α+γ=2ὀρθαὶ καὶ γ+β=2ὀρθαὶ ἄρα α=β καὶ (§ 98) αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

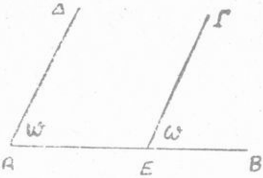
Σελὶς 81. **Πόρισμα Ι. Πᾶσα κάθετος ἐπὶ μίαν τῶν παραλλήλων εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην.**

Ἔστω, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 71 Θ. Γ.) εἶναι παράλληλοι καὶ ὅτι ἡ ΘΖ τέμνει τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν καθέτως, π.χ. τὴν ΑΒ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τέμνει καθέτως καὶ τὴν ΓΔ.

**Ἀπόδειξις**: Ἀφοῦ ἡ ΘΖ τέμνει τὴν ΑΒ, προεκτεινομένη θὰ τέμνῃ καὶ τὴν παράλληλόν της ΓΔ εἰς σημεῖον Ε (§ 103). Ἐπειδὴ δὲ β= 1ὀρθὴ ἐξ ὑποθέσεως καὶ β=α, ἄρα καὶ α=1ὀρθή. Ἄρα καθέτως τέμνει καὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ.

**Ἀσκήσεις.** Σελὶς 81.—90. **Δίδεται εὐθεῖα ΑΒ ἐκτὸς αὐτῆς σημεῖον Γ καὶ γωνία ω Νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τὸ Γ εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν ΑΒ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν ω.**

**Λύσις**: Ἔστω ΑΒ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ σημεῖον Γ κείμενον ἐκτὸς αὐτῆς. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Γ εὐθεῖα σχηματίζουσα μὲ τὴν ΑΒ γωνίαν ω.

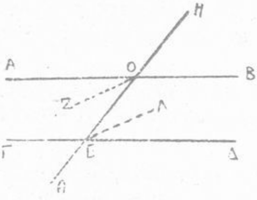



*Σχ. 44.*

Πρὸς τοῦτο μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον Α (σχ. 44) καὶ πλευρὰν τὴν ΑΒ κατασκευάζομεν γωνίαν ΔΑΒ=ω κατὰ τὸ πρόβλημα § 78. Ἔπειτα ἐκ τοῦ σημείου Γ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΔ τὴν ΓΕ. Αὕτη θὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ καὶ θὰ εἶναι γωνία ΓΕΒ=ω, ὡς ἐντός, ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΑΔ καὶ ΓΕ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΒ.

**91. Νὰ γράψητε δύο παραλλήλους εὐθείας καὶ μίαν τέμνουσαν αὐτάς. Νὰ συγκρίνητε δὲ α') δύο ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας αὐτῶν. β) δύο ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίας καὶ γ) δύο ἐντός, ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίας.**

**Λύσις**: Ἔστωσαν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ καὶ ΗΘ ἡ τέμνουσα αὐτὰς (σχ. 45). Ζητεῖται νὰ συγκριθῶσιν αἱ γωνίαι α') ΗΟΒ καὶ ΔΕΘ. β') Αἱ γωνίαι ΔΕΘ καὶ ΑΟΗ καὶ γ') Αἱ γωνίαι ΟΕΔ καὶ ΑΟΗ.




*Σχ. 45.*

α') Ἐπειδὴ γωνΗΟΒ = γωνΟΕΔ καὶ γωνΟΕΔ+γωνΔΕΘ=2 ὀρθαί, ὡς ἐφεξῆς τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας; θὰ εἶναι καὶ γωνΗΟΒ++γωνΔΕΘ=2 ὀρθαὶ ἤτοι: *δύο ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι παραλλήλων εὐθειῶν τεμνομένων ὑπὸ τρίτης εἶναι παραπληρωματικαί.*

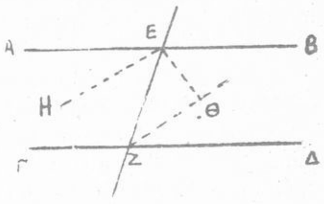
β) Ἐπειδὴ γωνΑΟΗ=γωνΓΕΟ, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ γωνΓΕΟ=γωνΔΕΘ, ὡς κατὰ κορυφὴν θὰ εἶναι καὶ γωνΑΟΗ=γωνΔΕΘ ἤτοι: *δύο ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίαι εἶναι ἴσαι.*

γ') Ἐπειδὴ γωνΟΕΔ+γωνΕΟΒ=2 ὀρθαὶ καὶ γωνΕΟΒ=γωνΑΟΗ, ὡς κατὰ κορυφὴν θὰ εἶναι καὶ γωνΟΕΔ+γωνΑΟΗ=2 ὀρθαὶ ἤτοι παραπληρωματικαί.

**92. Νὰ γράψητε δύο παραλλήλους εὐθείας καὶ μίαν τέμνουσαν αὐτάς. Ἔπειτα νὰ διχοτομήσητε δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας αὐτῶν καὶ νὰ ἀποδείξητε, ὅτι αἱ διχοτόμοι αὐτῶν εἶναι παράλληλοι.**

Ἔστωσαν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΕΖ καὶ ΕΗ, ΖΘ αἱ διχοτόμοι δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνιῶν αὐτῶν (σχ. 46) Θὰ δείξωμεν, ὅτι αὗται εἶναι παράλληλοι.

**'Απόδειξις**: 'Επειδὴ γων ΑΕΖ = γων ΕΖΔ, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν ‖ εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΕΖ, θὰ εἶναι καὶ γων ΗΕΖ = = γων ΕΖΘ, ὡς ἡμίση αὐτῶν. 'Επειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΕΗ καὶ ΖΘ τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΕΖ σχηματίζουσι δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας θὰ εἶναι παράλληλοι (§ 99)



*Σχ. 46.*

93. **Νὰ διχοτομήσητε δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας τῶν προηγουμένων εὐθειῶν καὶ νὰ ἀποδείξητε, ὅτι αἱ διχοτόμοι εἶναι κάθετοι.**

"Εστωσαν ΖΘ καὶ ΕΘ αἱ διχοτόμοι τῶν ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνιῶν ΒΕΖ καὶ ΕΖΔ (σχ. 46). Θὰ δείζωμεν, ὅτι αὗται τέμνονται καὶ καθέτως.

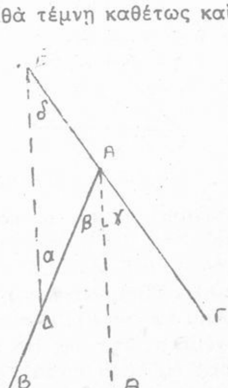
**'Απόδειξις.** 'Εδείξαμεν (ἄσκ. 92) ὅτι ἡ ΕΗ ‖ ΖΘ. 'Επειδὴ δὲ ἡ ΕΘ τέμνει τὴν ΗΕ, προεκτεινομένη θὰ τέμνῃ αὔτη καὶ τὴν παράλληλόν της ΖΘ (§ 103). 'Αλλὰ ἡ ΕΘ⊥ΗΕ, ὡς διχοτόμοι ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικῶν γωνιῶν (ἄσκησις 22). 'Επειδὴ δὲ ἡ ΘΕ τέμνει καθέτως τὴν ΕΗ, θὰ τέμνῃ καθέτως καὶ τὴν παράλληλον πρὸς αὐτὴν ΖΘ. (Π. Ι. § 105).

*Β τρόπος*. 'Επειδὴ γων ΒΕΖ + γων ΕΖΔ = 2 ὀρθαὶ καὶ αἱ εὐθεῖαι ΕΘ καὶ ΖΘ εἶναι διχοτόμοι αὐτῶν, θὰ εἶναι καὶ γων ΘΕΖ + γων ΘΖΕ = = 1 ὀρθή. 'Αλλὰ γων ΘΖΕ = γων ΖΕΗ. 'Αντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα καὶ ἔχομεν γων ΘΕΖ + γων ΖΕΗ = 1 ὀρθή.

'Επειδὴ δὲ ἡ ΘΕ τέμνει καθέτως τὴν ΕΗ, θὰ τέμνῃ καθέτως καὶ τὴν ΖΘ.

94. **Νὰ διχοτομήσητε μίαν γωνίαν Α καὶ ἀπὸ ἕν σημεῖον Δ μιᾶς τῶν πλευρῶν της νὰ φέρητε μίαν παράλληλον πρὸς τὴν διχοτόμον. Νὰ δείξητε ὅτι ἡ παράλληλος αὔτη θὰ τμήσῃ τὴν προέκτασιν τῆς ἄλλης πλευρᾶς εἰς ἕν σημεῖον Ε καὶ ΑΕ = ΑΔ.**

"Εστω ΒΑΓ ἡ γωνία καὶ ΑΘ ἡ διχοτόμος αὐτῆς (σχ. 47). 'Απὸ τὸ σημεῖον Δ τῆς πλευρᾶς ΑΒ αὐτῆς φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΔΕ παράλληλον πρὸς τὴν διχοτόμον ΑΘ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αὔτη τέμνει τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς γωνιας Α, τὴν ΑΓ εἴς τι σημεῖον Ε καὶ ὅτι εἶναι ΑΕ = ΑΔ.



*Σχ. 47.*

**'Απόδειξις.** 'Επειδὴ ἡ ΑΓ τέμνει τὴν ΑΘ θὰ τέμνῃ καὶ τὴν παράλληλον πρὸς αὐτὴν ΔΕ εἴς τι σημεῖον Ε.

'Επειδὴ δὲ α = β, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ΑΘ καὶ ΔΕ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΔ καὶ β = γ, λόγῳ τῆς διχοτόμου ΑΘ θὰ εἶναι καὶ α = γ. Ἀλλὰ γ = δ, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν αὐτῶν παραλλήλων τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΕΓ. Ἄρα α = δ καὶ τὸ τρίγωνον ΕΑΔ εἶναι ἰσοσκελές, ὡς ἔχον δύο γωνίας αὐτοῦ ἴσας Ἄρα καὶ ΑΕ = ΑΔ,

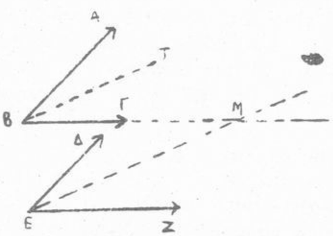
Σελὶς 84.— **95. Νὰ κατασκευάσητε τυχὸν τρίγωνον καὶ νὰ περιγράψητε περὶ αὐτὸ περιφέρειαν.**

**Λύσις.** Ἔστω ΑΒΓ τὸ δοθὲν τρίγωνον (σχ. 74 § 108 Θ. Γ.). Γνωρίζομεν, ὅτι αἱ κάθετοι ἐπὶ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ καὶ εἰς τὰ μέσα αὐτῶν Δ, Ε καὶ Ζ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Κ, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰς τρεῖς κορυφὰς Α, Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου. Ἐὰν δὲ μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα ΚΑ γράψωμεν περιφέρειαν, αὕτη θά διέλθῃ καὶ διὰ τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ αὐτοῦ, διότι ΚΑ = ΚΒ = ΚΓ. Ἄρα ἡ περιφέρεια, θὰ εἶναι περιγεγραμμένη περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ διότι διέρχεται αὕτη ἀπὸ ὅλας τὰς κορυφὰς αὐτοῦ.

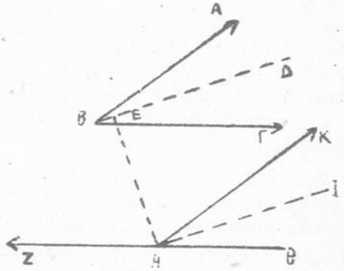
**Ἀσκήσεις** σελὶς 86.— **96. Νὰ κατασκευάσητε δύο ἴσας γωνίας μὲ πλευρὰς παραλλήλους καὶ νὰ διχοτομήσητε αὐτάς. Νὰ ἀποδείξητε δέ, ὅτι αἱ διχοτόμοι εἶναι παράλληλοι.**

Ἔστωσαν δύο γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἴσαι καὶ μὲ πλευρὰς παραλλήλους καὶ ΒΤ, ΕΜ αἱ διχοτόμοι αὐτῶν (σχ. 48). Θὰ δείξωμεν ὅτι ΒΤ ∥ ΕΜ.

**Ἀπόδειξις.** Ἐπειδὴ ἡ ΕΜ τέμνει τὴν εὐθεῖαν ΕΖ θὰ τέμνῃ (προε




*Σχ. 48.*




*Σχ. 49.*

κτεινομένη) καὶ τὴν παράλληλον πρὸς αὐτὴν εὐθεῖαν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Μ. Ἀλλὰ γων ΜΕΖ = γων ΕΜΒ, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΒΓ καὶ ΕΖ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΕΜ. Ἐπίσης γων ΜΕΖ = = γων ΤΒΜ, ὡς ἡμίση τῶν ἴσων ἐξ ὑποθέσεως γωνιῶν ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ. Ἄρα καὶ γων ΤΒΜ = γων ΒΜΕ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ εὐθεῖαι ΒΤ καὶ ΕΜ τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΒΜ σχηματίζουσι δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας αὐτῶν ἴσας θὰ εἶναι παράλληλοι. Ἐὰν αἱ πλευραὶ τῶν γωνιῶν εἶναι παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι ἐργαζόμεθα ὁμοίως.

**97. Νὰ κατασκευάσητε δύο παραπληρωματικὰς γωνίας μὲ παραλλήλους πλευράς. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι αἱ διχοτόμοι αὐτῶν εἶναι κάθετοι.**

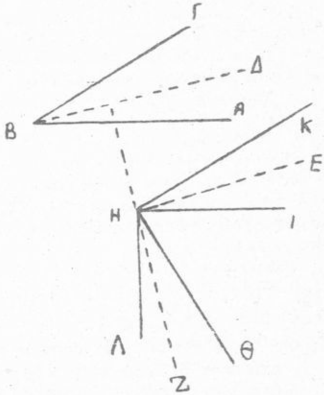
**Λύσις**: Δύο γωνίαι μὲ πλευρὰς παραλλήλους εἶναι παραπληρωματικαί, ἄν δύο μὲν πλευραὶ αὐτῶν εἶναι παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι, αἱ δὲ ἄλλαι δύο εἶναι παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι.

Ἔστωσαν δύο τοιαῦται γωνίαι, αἱ ΑΒΓ καὶ ΖΗΚ (σχ. 49.) Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ διχοτόμοι αὐτῶν τέμνονται καθέτως.

**Ἀπόδειξις**: Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΖΗ, πέραν τοῦ Η, ὅτε σχηματίζεται ἡ γωνία ΚΗΘ, ἥτις ἔχει τὰς πλευρὰς αὐτῆς παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ΑΒΓ. Ἂν δὲ ΗΙ εἶναι ἡ διχοτόμος ταύτης, ὡς ἐδείχθη εἰς προηγουμένην ἄσκησιν, εἶναι αὕτη παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ, διχοτόμον τῆς γων ΑΒΓ. Ἀλλὰ ΗΕ⊥ΗΙ, ὡς διχοτόμοι ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικῶν γωνιῶν. Συνεπῶς ἡ ΗΕ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΒΔ, ἥτις εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΗΙ.

98. **Νὰ κατασκευάσητε δύο ἴσας γωνίας μὲ καθέτους πλευρὰς καὶ νὰ διχοτομήσητε ταύτας. Νὰ ἀποδείξητε δέ, ὅτι αἱ διχοτόμοι αὐτῶν εἶναι κάθετοι.**

Ἔστωσαν αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΛΗΘ ἀμφότεραι ὀξεῖαι καὶ τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ διχοτόμοι αὐτῶν ΒΔ καὶ ΗΖ εἶναι κάθετοι μεταξύ των (σχ. 50).



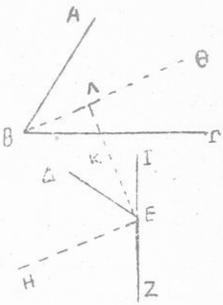
*Σχ. 50.*

**Ἀπόδειξις**: Ἐκ τῆς κορυφῆς Η τῆς γων ΛΗΘ φέρομεν τὰς ΗΚ καὶ ΗΙ παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους πρὸς τὰς πλευρὰς ΒΓ καὶ ΑΒ τῆς γωνίας ΓΒΑ. Θὰ εἶναι (§ 110) γων ΒΑΓ = =γων ΚΗΙ καὶ ΒΔ ∥ ΗΕ (ἔνθα ΗΕ διχοτόμος τῆς γωνίας ΚΗΙ). Ἀλλὰ ΘΗ⊥ΗΚ, ἐπειδὴ ΘΗ⊥ΒΓ καὶ ΗΚ ∥ ΒΓ. Ἄρα γων ΘΗΚ=1 ὀρθὴ ἢ γωνΘΗΕ + γωνΕΗΚ = 1 ὀρθὴ (1). Ἀλλὰ γων ΕΗΚ=γωνΘΗΖ ὡς ἡμίση ἴσων γωνιῶν. Εἰς τὴν ἰσότητα (1) θέτομεν ἀντὶ τῆς γωνίας ΕΗΚ τὴν ἴσην της ΘΗΖ καὶ ἔχομεν γωνΘΗΕ + γων ΘΗΖ=1 ὀρθ. ἢ γων ΖΗΕ=1 ὀρθὴ δηλ. ἡ ΖΗ⊥ΗΕ. Ἐπειδὴ ὅμως ΗΕ ∥ ΒΔ (ἄσκ. 96) θὰ εἶναι καὶ ΖΗ⊥ΒΔ.

Ἂν αἱ γωνίαι εἶναι ἀμφότεραι ἀμβλεῖαι καὶ ἔχουσι τὰς πλευράς των καθέτους ἐργαζόμεθα ὁμοίως.

99. **Νὰ ἐργασθῆτε ὁμοίως μὲ παραπληρωματικὰς γωνίας μὲ καθέτους πλευρὰς καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι αἱ διχοτόμοι αὐτῶν εἶναι παράλληλοι.**

Ἔστω ὅτι αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχουσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν καθέτους καὶ ἡ μὲν ΑΒΓ εἶναι ὀξεῖα ἡ δὲ ΔΕΖ εἶναι ἀμβλεῖα, ὅτε αὗται εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ ΒΘ καὶ ΕΗ αἱ διχοτόμοι αὐτῶν (σχ. 51). Θὰ δείξωμεν ὅτι ΒΘ ∥ ΕΗ. **Ἀπόδειξις:** Προεκτείνομεν τὴν ΕΖ πέραν τοῦ Ε, ὅτε ἡ σχηματιζομένη γωνία ΔΕΙ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΑΒΓ καὶ ἔχει τὰς πλευράς της ἀντιστοίχως καθέτους πρὸς τὰς πλευράς ἐκείνης. Ἂν ΕΚ εἶναι ἡ διχοτόμος αὐτῆς, ὡς ἐδείχθη προηγουμένως, θὰ εἶναι ΕΚ ⊥ ΒΘ. Ἐπειδὴ δὲ ΕΚ ⊥ ΗΕ, ὡς διχοτόμοι ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικῶν γωνιῶν, θὰ εἶναι καὶ ΒΘ ∥ ΗΕ, ἐπειδὴ ἀμφότεραι κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΕΚ·



*Σχ. 51.*

Σελὶς 87. **Πόρισμα I. Αἱ ὀξεῖαι γωνίαι παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι συμπληρωματικαί.**

**Ἀπόδειξις:** Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχομεν ὅτι Α+Β+Γ=2 ὀρθαί. Ἐπειδὴ ὅμως εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι Α=1 ὀρθή, θὰ ἔχωμεν 1 ὀρθ+Β+Γ=2 ὀρθαὶ ἢ Β+Γ=1 ὀρθή.

**Πόρισμα II. Ἑκάστη ἐξωτερικὴ γωνία τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ.**

**Ἀπόδειξις:** Διότι ἂν τ εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ γωνία τῆς γωνίας Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 78 Θ. Γ.) θὰ ἔχωμεν ἀφ' ἑνὸς μὲν τ+Γ=2 ὀρθαί, ἀφ' ἑτέρου Α+Β+Γ=2 ὀρθαί. Ἄρα τ+Γ=Α+Β+Γ καὶ ἀφαιροῦντες τὴν γωνίαν Γ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἔχομεν τ=Α+Β.

**Πόρισμα III. Ἂν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ αἱ ἄλλαι γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἴσαι·**

Ἔστω, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἔχουσιν Α=Α' καὶ Β=Β'. Θὰ δείξωμεν ὅτι καὶ Γ=Γ'.

**Ἀπόδειξις.** Ἐπειδὴ Α+Β+Γ=2 ὀρθαὶ καὶ Α'+Β'+Γ'=2 ὀρθαὶ θὰ εἶναι καὶ Α+Β+Γ=Α'+Β'+Γ'. Ἐὰν δὲ ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης ἀφαιρέσωμεν τὰς ἴσας γωνίας Α καὶ Α', Β καὶ Β', θὰ ἔχωμεν Γ=Γ'.

**Ἀσκήσεις** σελὶς 83—100. **Νὰ εὕρητε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τετραπλεύρου, πενταγώνου, ἑξαγώνου, ὀκταγώνου, δεκαγώνου.**

**Λύσις:** Ἂν καλέσωμεν Κ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς πολυγώνου ἔχοντος ν πλευρὰς ἔχομεν τὸ τύπον Κ=(2ν—4) ὀρθαί. Ἐκ τούτου διὰ ν=4 ἔχομεν Κ=(2.4 4) ὀρθαὶ=(8 - 4) ὀρθαὶ = 4 ὀρθαὶ ἤτοι: *τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τετραπλεύρου εἶναι 4 ὀρθαί.*

Διὰ ν = 5 ἔχομεν Κ = (2 . 5—4) ὀρθ. = (10—4) ὀρθ. = 6 ὀρθ.
Διὰ ν = 6 ἔχομεν Κ = (2 . 6 4) = 12 - 4 = 8 ὀρθαί.
Διὰ ν = 8 ἔχομεν Κ = (2 8 —4) = 16 4 = 12 ὀρθαί.
Διὰ ν = 10 ἔχομεν Κ = (2 10 4) = 20 — 4 = 16 ὀρθαί.

**101. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον καὶ νὰ ὑπολογίσητε τὸ μέτρον ἑκάστης τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ.**

**Λύσις** Γνωρίζομεν, ὅτι εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον αἱ ὀξεῖαι γωνίαι αὐτοῦ εἶναι συμπληρωματικαὶ (πορ. I § 112) ἤτοι Β+Γ=90°. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἰσοσκελές, θὰ εἶναι Β=Γ. Ὅθεν 2Β=90°. καὶ Β=Γ=45° ἢ $\frac{1}{2}$ ὀρθῆς.

**102. Ἂν εἰς ἓν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ΑΒ=ΑΓ καὶ Α=23° 35', νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς γωνίας Β καὶ τῆς Γ.**

**Λύσις:** Εἶναι Α+Β+Γ=180°. Ἐπειδὴ δὲ ΑΒ=ΑΓ, θὰ εἶναι καὶ Β=Γ. Ὅθεν Α+Β+Β=180° ἢ Α+2Β=180° καὶ 2Β=180°—Α=180°—(23°35')= =(179°60'—23°35')=156°25' καὶ Β=(156°25') : 2=78° 12' 30''=Γ.

**103. Ἂν εἰς ἓν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ΑΒ=ΑΓ καὶ Β=40° 20′ 35′′ νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς γωνίας Α αὐτοῦ.**

**Λύσις**: Ἐπειδὴ ΑΒ=ΑΓ, θὰ εἶναι $Β=Γ=40^\circ\ 20'\ 35''$, ὅθεν $Β+Γ = 80^\circ\ 41'\ 10''$. Ἐπειδὴ δὲ $Α=180^\circ-(Β+Γ)$ θὰ ἔχωμεν:

$Α=180^\circ - (80^\circ\ 41'\ 10'') = (179^\circ\ 59'\ 60'') - (80^\circ\ 41'\ 10'') = 99^\circ\ 18'\ 50''$.

**104. Ἂν ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχῃ $Α=\frac{3}{4}$ ὀρθ. καὶ $Β=\frac{2}{5}$ ὀρθ. νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Γ αὐτοῦ.**

**Λύσις**: Γνωρίζομεν, ὅτι $τ=Α+Β$ (Πόρισμα ΙΙ § 112). Ὅθεν

$τ = \frac{3}{4}$ ὀρθ. $+ \frac{2}{5}$ ὀρθ $= \frac{15}{20}$ ὀρθ $+ \frac{8}{20}$ ὀρθ $= \frac{23}{20}$ ὀρθ $= 1\frac{3}{20}$ ὀρθ.

*Β′ τρόπος*: Εὑρίσκομεν τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν Α καὶ Β εἰς μοίρας καὶ ἔχομεν $Α=90^\circ\cdot\frac{3}{4} = (22^\circ\ 30').3 = 67^\circ\ 30'$ καὶ $Β = 90^\circ\cdot\frac{2}{5} = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$, ὅτε $τ = Α+Β = 67^\circ\ 30' + 36^\circ = 103^\circ\ 30'$.

**105. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον ἑκάστης γωνίας ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου εἰς μέρη ὀρθῆς καὶ εἰς μοίρας.**

**Λύσις**: Γνωρίζομεν, ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον εἶναι $Α+Β+Γ=2$ ὀρθ. διὰ δὲ τὸ ἰσόπλευρον, ὅτι $Α=Β=Γ$. Ὅθεν $3Α = 2$ ὀρθ. καὶ $Α = \frac{2}{3}$ ὀρθ. $= 90^\circ\cdot\frac{2}{3} = 60^\circ$.

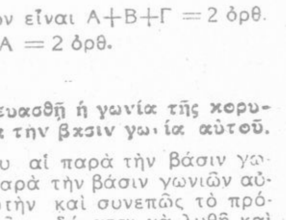
**Ἀσκήσεις** σελὶς 90. **106. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ γωνία τῆς κορυφῆς ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἂν δοθῇ ἡ παρὰ τὴν βάσιν γωνία αὐτοῦ.**

**Λύσις**: Ἐπειδὴ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ μᾶς δίδεται ἡ μία τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν αὐτοῦ, ἔπεται ὅτι καὶ ἡ ἄλλη εἶναι ἴση μὲ αὐτὴν καὶ συνεπῶς τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ πρόβλημα § 114. Τοῦτο δύναται νὰ λυθῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἄγομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Γ (σχ. 52). Μὲ κορυφὴν τὸ Γ καὶ πλευρὰν ΓΑ κατασκευάζομεν γωνίαν ΑΓΔ ἴσην πρὸς τὴν ω. Ἔπειτα μὲ κορυφὴν τὸ Γ καὶ πλευρὰν τὴν ΓΒ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ κατασκευάζομεν γωνίαν ΕΓΒ ἴσην μὲ τὴν ω. Ἡ γωνία ΔΓΕ θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη γωνία τῆς κορυφῆς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

Ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχῃ λύσιν πρέπει ἡ διδομένη γωνία $ω<1$ ὀρθ.

**107. Ἂν δοθῇ ἡ γωνία τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου, νὰ κατασκευασθῇ ἡ παρὰ τὴν βάσιν γωνία αὐτοῦ.**

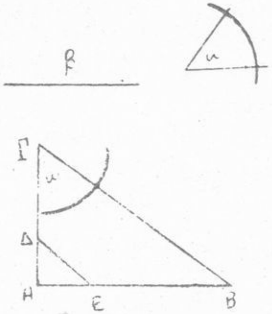



*Σχ. 52.*

**Λύσις**: Ἂν ω εἶναι ἡ δοθεῖσα γωνία τῆς κορυφῆς ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου, κατασκευάζομεν μὲ κορυφὴν τυχὸν σημεῖον Γ εὐθείας ΑΒ (σχ. 52) καὶ πλευρὰν τὴν ΓΑ, γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν ω τὴν ΑΓΔ. Τὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν ταύτης ΔΓΒ διχοτομοῦμεν καὶ ἔχομεν τὴν παρὰ τὴν βάσιν γωνίαν αὐτοῦ.

**108. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἂν δοθῇ μία κάθετος πλευρὰ καὶ μία ὀξεῖα γωνία αὐτοῦ.**

**Λύσις**: Ἔστω β ἡ δοθεῖσα κάθετος πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ ω ἡ δοθεῖσα ὀξεῖα γωνία αὐτοῦ. Ζητεῖται ἐκ τῶν στοιχείων αὐτῶν νὰ κατασκευασθῇ τὸ ὀρθ. τρίγωνον.



*Σχ. 53.*

Ἂν ἡ δοθεῖσα ὀξεῖα γωνία ω εἶναι ἡ προσκειμένη εἰς τὴν κάθετον πλευρὰν β τότε τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ πρόβλημα § 115.

Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν εὐθ. τμῆμα ΑΓ=β καὶ μὲ κορυφὴν τὸ Α καὶ πλευρὰν τὴν ΑΓ κατασκευάζομεν ὀρθὴν γωνίαν, τὴν ΓΑΒ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ ἕτερον ἄκρον Γ καὶ πλευρὰν τὴν ΓΑ κατασκευάζομεν γωνίαν Γ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν ω. Ἡ ἄλλη πλευρὰ ταύτης θὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Β καὶ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα. Ἄλλο διάφορον αὐτοῦ καὶ μὲ τὰ αὐτὰ στοιχεῖα δὲν ὑπάρχει, διότι, ἂν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχωσιν ἀνὰ μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην καὶ τὴν προσκειμένην ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην, εἶναι ἴσα.

Ἐὰν ὅμως ἡ δοθεῖσα γωνία ω εἶναι ἡ ἀντικειμένη ὀξεῖα εἰς τὴν δοθεῖσαν κάθετον πλευρὰν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου τότε τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ πρόβλημα § 116.

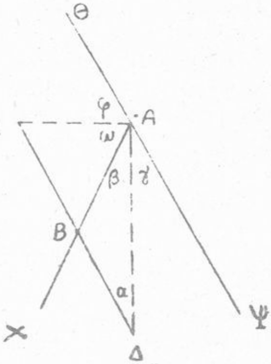
Κατασκευάζομεν ὀρθὴν γωνίαν Α καὶ ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς αὐτῆς ΑΒ λαμβάνομεν τυχὸν εὐθ. τμῆμα ΑΕ, ἐπὶ δὲ τῆς ἄλλης πλευρᾶς αὐτῆς λαμβάνομεν ΑΓ=β. Ἔπειτα μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον Ε καὶ πλευρὰν τὴν ΕΑ κατασκευάζομεν γωνίαν ΑΕΔ=ω καὶ ἐκ τοῦ σημείου Γ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΔΕ ἥτις τέμνει τὴν πλευρὰν ΑΕ εἰς τὸ σημεῖον Β. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι ἔχει τὴν ΑΓ=β ἐκ κατασκευῆς καὶ τὴν ἀπέναντι ὀξεῖαν γωνίαν Β=ω, καθ' ὅσον Β=Ε, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΔΕ καὶ ΓΒ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΒ καὶ Ε = ω ἐκ κατασκευῆς. Ἄρα καὶ Β=ω.

## Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Ε΄ Κεφαλαίου

**109. Ἀπὸ ἓν σημεῖον Β τῆς μιᾶς πλευρᾶς γωνίας Α νὰ φέρητε παράλληλον πρὸς τὴν ἄλλην πλευρὰν καὶ νὰ ὁρίσητε ἐπ' αὐτῆς τμῆμα ΒΔ=ΑΒ ἐντὸς τῆς γωνίας κείμενον. Νὰ ἀποδείξητε δέ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΔ διχοτομεῖ τὴν Α.**

Ἔστω ΧΑΨ ἡ δοθεῖσα γωνία καὶ Β σημεῖόν τι τῆς πλευρᾶς ΑΧ. Φέρομεν ἐξ αὐτοῦ παράλληλον πρὸς τὴν ἄλλην πλευρὰν ΑΨ τῆς δοθείσης γωνίας καὶ λαμβάνομεν τὸ τμῆμα ΒΔ=ΑΒ, φέρομεν δὲ καὶ τὴν ΑΔ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αὕτη διχοτομεῖ τὴν γωνίαν Α.

**Ἀπόδειξις:** Ἐπειδὴ ΒΔ=ΑΒ, ἕπεται ὅτι α=β. Ἐπειδὴ δὲ ΒΔ ∥ ΑΨ ἕπεται ὅτι α=γ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι. Ὅθεν β=γ καὶ ΑΔ διχοτόμος τῆς γωνΑ.




*Σχ. 54.*

**110. Ἂν τὸ τμῆμα ΒΔ, διὰ τὸ ὁποῖον ὁμιλεῖ ἡ προηγουμένη ἄσκησις εἶναι ἐκτὸς τῆς γωνίας Α, νὰ ἀποδείξητε, ὅτι ἡ ΑΔ διχοτομεῖ τὴν παραπληρωματικὴν τῆς γωνίας Α.**

**Λύσις:** Διότι (Σχ. 54) Δ=ω καὶ Δ=φ. Ἄρα καὶ φ=ω ἤτοι ἡ ΑΔ διχοτομεῖ τὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν ΧΑΘ τῆς δοθείσης Α.

**111. Ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τριγώνου ΑΒΓ νὰ φέρητε εὐθεῖαν ΘΛ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ. Ἂν αὕτη τέμνῃ τὴν πλευρὰν ΑΒ εἰς τὸ Θ καὶ τὴν ΒΓ εἰς τὸ Λ, νὰ ἀποδείξητε, ὅτι ΘΛ=ΒΘ+ΓΛ.** (σχ. 73 § 107 Θ. Γ.).

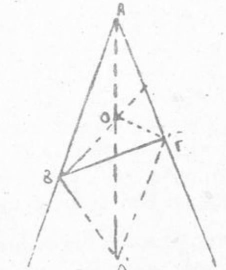
**Λύσις:** Ἐπειδὴ ω=η λόγῳ τῆς διχοτόμου ΒΔ καὶ ω=φ, ὡς γωνίαι ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΘΛ καὶ ΒΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΔ, θὰ εἶναι καὶ η=φ καὶ συνεπῶς ΘΔ=ΘΒ (1).

Ἐπειδὴ γωνΕΓΔ=γωνΔΓΛ λόγῳ τῆς διχοτόμου ΓΔ καὶ γωνΕΓΔ= =γωνΓΔΛ ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ, θὰ εἶναι καὶ γωνΔΓΛ=γωνΓΔΛ καὶ συνεπῶς ΔΛ=ΛΓ (2). Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) καὶ ἔχομεν ΘΔ + ΔΛ = ΘΒ + ΛΓ. Ἀλλὰ ΘΔ + ΔΛ = ΘΛ καὶ συνεπῶς ΘΛ=ΘΒ+ΛΓ.

**112. Νὰ διχοτομήσητε τὰς γωνίας Β καὶ Γ τυχόντος τριγώνου ΑΒΓ. Ἂν δὲ Ο εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διχοτόμων αὐτῶν, νὰ ἀποδείξητε ὅτι γων ΒΟΓ= $=1$ ὀρθ. $+\dfrac{A}{2}$.**

Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον, ΒΟ καὶ ΓΟ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ αὐτοῦ (σχ. 55).

Θὰ δείξωμεν, ὅτι γων ΒΟΓ=1 ὀρθ$+\dfrac{A}{2}$.




*Σχ. 55*

**Ἀπόδειξις:** Ἐκ τοῦ τριγώνου ΟΒΓ ἔχομεν ὅτι γωνΒΟΓ + γωνΟΒΓ + γωνΟΓΒ = 2 ὀρθαὶ ἢ γων ΒΟΓ $+\dfrac{B}{2}+\dfrac{\Gamma}{2}=2$ ὀρθαὶ ἢ

γων ΒΟΓ = 2 ὀρθαὶ $-\dfrac{B+\Gamma}{2}$.

Ἀλλὰ $\frac{B+\Gamma}{2} = 1$ ὀρθ. $- \frac{A}{2}$. Ὅθεν γωνΒΟΓ$=2$ ὀρθ.$-\left(1 \text{ ὀρθ.} - \frac{A}{2}\right) =$
$= 2$ ὀρθ. $- 1$ ὀρθ. $+ \frac{A}{2} = 1$ ὀρθ. $+ \frac{A}{2}$.

**113 Νὰ διχοτομήσητε τὰς ἐξωτερικὰς γωνίας Β καὶ Γ τυχόντος τριγώνου ΑΒΓ. Νὰ ἀποδείξητε, ὅτι αἱ διχοτόμοι αὐτῶν τέμνονται. Ἂν δὲ Ο εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν νὰ ἀποδείξητε, ὅτι**

**γωνΒΟΓ $= 1$ ὀρθὴ $- \frac{A}{2}$.**

**Λύσις**: Ἂν ΒΟ′ καὶ ΓΟ′ εἶναι αἱ διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τυχόντος τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 55), αὗται θὰ τέμνωνται εἴς τι σημεῖον Ο′, διότι γωνΟ′ΒΟ$=1$ ὀρθ. καὶ Ο′ΓΟ$=1$ ὀρθή. Ἄρα Ο′ΒΓ$<1$ ὀρθῆς καὶ ΒΓΟ′$<1$ ὀρθ. ἢ Ο′ΒΓ$+$ΒΓΟ $<2$ ὀρθ.

Ἐπειδὴ δὲ παντὸς τετραπλεύρου τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ εἶναι 4 ὀρθαί, ἕπεται ὅτι τοῦ τετραπλεύρου ΟΒΟ′Γ θὰ εἶναι γωνΒΟΓ $+$ γωνΒΟ′Γ $=2$ ὀρθαί. Ἐπειδὴ δὲ ΒΟΓ $= 1$ ὀρθ $+ \frac{A}{2}$ θὰ εἶναι

καὶ γωνΒΟ′Γ $= 2$ ὀρθ$-\left(1 \text{ ὀρθ.} + \frac{A}{2}\right) = 2$ ὀρθ. $- 1$ ὀρθ. $- \frac{A}{2} =$

$$= 1 \text{ ὀρθ} - \frac{A}{2}.$$

**114. Νὰ ἀποδείξητε, ὅτι: Ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἥτις κεῖται ἀπέναντι τῆς βάσεως αὐτοῦ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν.**

*Σχ. 56.*

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας ΕΑΓ τῆς γωνίας Α τῆς κορυφῆς αὐτοῦ. Θὰ δείξωμεν ὅτι ΑΔ ∥ ΒΓ.

**Ἀπόδειξις**: Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ γωνία παντὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ ἤτοι γωνΕΑΓ $=$ Β $+$ Γ. Ἀλλὰ γωνΕΑΔ $=$ γωνΔΑΓ λόγῳ τῆς διχοτόμου. Συνεπῶς 2.γωνΔΑΓ $=$ Β $+$ $+$ Γ $= 2$Γ ἐπειδὴ Β $=$ Γ καὶ γωνΔΑΓ $=$ γωνΓ. Ἄρα ΑΔ ∥ ΒΓ, διότι τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΑΓ σχηματίζουσι δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας αὐτῶν ἴσας·

**115. Ἂν ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, νὰ ἀποδείξητε, ὅτι τὸ τρίγωνον τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές.**

Ἔστω ὅτι ἡ διχοτόμος ΑΔ τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 56). Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

**Ἀπόδειξις.** Ἐπειδὴ ΑΔ ∥ ΒΓ θὰ εἶναι καὶ γων ΕΑΔ = γων Β ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΑΔ καὶ ΒΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΕΒ. Ἐπίσης γων ΔΑΓ = γων Γ, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν αὐτῶν παραλλήλων τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΓ. Ἐπειδὴ δὲ λόγῳ τῆς διχοτόμου ΑΔ εἶναι γων ΕΑΓ = γων ΔΑΓ, ἕπεται ὅτι καὶ Β = Γ. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

**116. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἂν δοθῇ ἡ βάσις του καὶ ἡ παρ' αὐτὴν γωνία του.**

**Λύσις.** Γνωρίζομεν, ὅτι τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι του εἶναι ἴσαι· ἄρα τοῦ τριγώνου γνωρίζομεν μίαν πλευρὰν καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας καὶ κατασκευάζεται ὡς ἑξῆς:

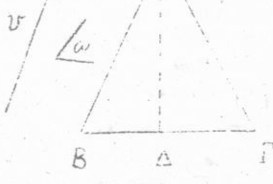
Λαμβάνομεν εὐθ. τμῆμα ΒΓ ἴσον πρὸς τὴν δοθεῖσαν βάσιν. Μὲ κορυφὴν Β καὶ πλευρὰν τὴν ΒΓ κατασκευάζομεν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν. Μὲ κορυφὴν Γ καὶ πλευρὰν ΓΒ κατασκευάζομεν ἑτέραν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΒΓ. Αἱ ἄλλαι δύο πλευραὶ τῶν γωνιῶν τούτων θὰ τέμνωνται εἰς σημεῖον Α καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον. Πράγματι τοῦτο ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα καὶ εἶναι ἰσοσκελές, ὡς ἔχον τὰς παρὰ τὴν βάσιν γωνίας του ἐκ κατασκευῆς ἴσας.

Ἵνα τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατὸν πρέπει ἡ δοθεῖσα γωνία νὰ εἶναι ὀξεῖα.

**117. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον. ἂν δοθῇ ἡ βάσις του καὶ ἡ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία.**

**Λύσις.** Ἐπειδὴ γνωρίζομεν τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, γνωρίζομεν καὶ τὰς παρὰ τὴν βάσιν γωνίας αὐτοῦ καὶ τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ βάσις του καὶ μία τῶν παρ' αὐτὴν γωνιῶν του (ἄσκησις 116).

**118. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον, ἂν δοθῇ τὸ ὕψος του καὶ ἡ παρὰ τὴν βάσιν γωνία του.**



*Σχ. 57.*

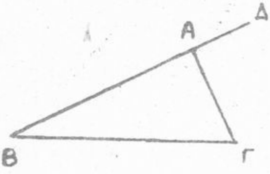
**Λύσις:** Ἂν υ εἶναι τὸ δοθὲν ὕψος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ ω ἡ παρὰ τὴν βάσιν γωνία του, κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΒ (σχ. 57) τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν κάθετον πλευρὰν ΑΔ ἴσην μὲ τὸ δοθὲν ὕψος καὶ προσκειμένην γωνίαν ΒΑΔ ἴσην πρὸς τὴν συμπληρωματικὴν τῆς δοθείσης ω. Ἔπειτα προεκτείνομεν τὴν ΒΔ καὶ λαμβάνομεν τμῆμα ΔΓ = ΔΒ καὶ φέρομεν τὴν ΑΓ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι εἶναι ἰσοσκελές, ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι ὕψος καὶ διάμεσος αὐτοῦ, ἔχει δὲ καὶ τὰ δοθέντα στοιχεῖα ἤτοι ΑΔ = υ καὶ Β = ω, διότι γων ΒΑΔ + γων Β = 90° καὶ γων ΒΑΔ + ω = 90° ἐκ κατασκευῆς. Ἄρα αἱ γωνίαι ω καὶ Β ὡς συμπληρωματικαὶ τῆς αὐτῆς γωνίας ΒΑΔ εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

**119. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον, ἂν δοθῇ τὸ ὕψος καὶ ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνία αὐτοῦ.**

**Λύσις**: Ἐπειδὴ τὸ ὕψος ἐπὶ τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς αὐτοῦ, διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ ζητουμένου τριγώνου ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Κατασκευάζομεν γωνίαν ΒΑΓ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν (σχ. 57). Διχοτομοῦμεν ταύτην καὶ ἐπὶ τῆς διχοτόμου ἀπὸ τοῦ Α ἀρχόμενοι λαμβάνομεν τμῆμα ΑΔ ἴσον μὲ τὸ δοθὲν ὕψος καὶ φέρομεν κάθετον ἐκ τοῦ Δ ἐπὶ τὴν διχοτόμον, ἥτις θὰ τέμνῃ τὰς ἄλλας δύο πλευρὰς τοῦ τριγώνου εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Τὸ τρίγωνον ΒΑΓ, εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α καὶ ὕψος τοῦ τριγώνου, ἔχει δὲ καὶ τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

**120. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἂν δοθῇ ἡ ὑποτείνουσα καὶ μία ὀξεῖα γωνία αὐτοῦ.**



*Σχ. 58.*

**Λύσις**: Λαμβάνομεν εὐθ. τμῆμα ΒΓ ἴσον πρὸς τὴν δοθεῖσαν ὑποτείνουσαν. Μὲ κορυφὴν τὸ Β καὶ πλευρὰν τὴν ΒΓ κατασκευάζομεν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν, τὴν ΓΒΔ (σχ. 58). Ἔπειτα ἐκ τοῦ Γ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΔ, ἥτις τέμνει αὐτήν, ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Α. Τὸ τρίγωνον ΒΓΑ εἶναι τὸ ζητούμενον ὀρθογώνιον, διότι ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ΄

# Τὰ παραλληλόγραμμα

Σελὶς 9?. **Πόρισμα Ι. Ἂν μία γωνία παραλληλογράμμου εἶναι ὀρθὴ καὶ αἱ ἄλλαι γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ὀρθαί.**

**Ἀπόδειξις**: Διότι ἂν ἡ γωνία Α τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ (σχ. 82 Θ.Γ.) εἶναι ὀρθὴ καὶ ἡ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία Γ, ὡς ἴση πρὸς τὴν Α θὰ εἶναι ὀρθή. Ἐπειδὴ δὲ Β+Γ=2 ὀρθαί, ὡς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΓ καὶ Γ=1 ὀρθ. θὰ εἶναι καὶ Β=1 ὀρθὴ καὶ συνεπῶς Δ=1 ὀρθὴ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ἔχει ὅλας του τὰς γωνίας ὀρθάς.

**Πόρισμα ΙΙ. Ἂν δύο προσκείμεναι πλευραὶ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι ὅλαι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι ἴσαι.**

**Ἀπόδειξις**: Γνωρίζομεν, ὅτι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι. Ἂν λοιπὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΘΕΖΗ (σχ. 82 Θ. Γ.) εἶναι ΕΖ = ΘΕ, θὰ εἶναι καὶ ΘΕ=ΘΗ, ἐπειδὴ ΕΖ=ΘΗ καὶ ΘΗ=ΗΖ ἐπειδὴ ΘΕ=ΗΖ. Ἄρα ΕΖ=ΘΕ=ΘΗ=ΗΖ.

**Πόρισμα ΙΙΙ. Παράλληλα εὐθ. τμήματα, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ παραλλήλων εὐθειῶν, εἶναι ἴσα**

**Ἀπόδειξις**: Διότι ταῦτα εἶναι ἀπέναντι πλευραὶ παραλληλογράμμου.

**Πόρισμα IV.** Τὰ μεταξὺ παραλλήλων εὐθειῶν περιεχόμενα τμήματα καθέτων ἐπὶ ταύτας εὐθειῶν εἶναι ἴσα.

**Ἀπόδειξις.** Διότι κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλοι. παράλληλα δὲ εὐθ τμήματα, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ παραλλήλων εὐθειῶν εἶναι ἴσα.

**Ἀσκήσεις** σελὶς 94. **121. Μία πλευρὰ παραλληλογράμμου εἶναι 15 μέτρα, ἡ δὲ περίμετρος 70 μέτρα. Νὰ εὕρητε τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του.**

**Λύσις.** Ἂν ἡ ΕΖ=15 μ (Σχ. 82 Θ. Γ.) τότε καὶ ἡ ἀπέναντι αὐτῆς ΘΗ=15 μ. Ἐπειδὴ δὲ ΕΖ+ΖΗ+ΗΘ+ΘΕ=70 καὶ ΖΗ=ΘΕ, θὰ ἔχωμεν

$$15+ZH+15+ZH=70 \quad \text{ἢ} \quad 2.ZH=70-30 \quad \text{καὶ} \quad 2.ZH=40 \quad \text{καὶ}$$

$$ZH=40:2=20\mu=\Theta E.$$

**122. Μία γωνία παρ/μου εἶναι $\frac{3}{5}$ ὀρθ. Νὰ εὕρητε τὰ μέτρα τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ.**

**Λύσις** · Ἂν εἶναι $E=\frac{3}{5}$ ὀρθῆς (Σχ. 82 Θ. Γ.) τότε καὶ $H=\frac{3}{5}$ ὀρθ.

καὶ συνεπῶς $\Theta+Z=4$ ὀρθ.$-\frac{6}{5}$ ὀρθ $=\frac{20}{5}$ ὀρθ $-\frac{6}{5}$ ὀρθ $=\frac{14}{5}$ ὀρθ.

Ἐπειδὴ δὲ $\Theta=Z$ θὰ εἶναι ἑκάστη $\frac{14}{5}$ ὀρθ $:2=\frac{7}{5}$ ὀρθ.

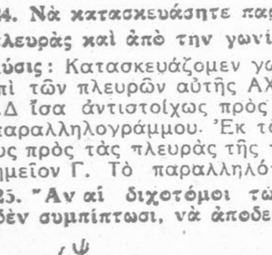
**123. Μία γωνία παραλληλογράμμου εἶναι 35° 20′ 40″. Νὰ εὕρητε τὰ μέτρα τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ.**

**Λύσις**: Ἂν Ε=35° 20′ 40″ (Σχ. 82 Θ. Γ.) τότε καὶ Η=35° 20′ 40″ Ἐπειδὴ δὲ καὶ Ε+Ζ=180° θὰ εἶναι Ζ=180°−(35° 20′ 40″)=(179° 59′ 60″) −(35° 20′ 40″)=144° 39′ 40″ καὶ Θ=144° 39 20″.

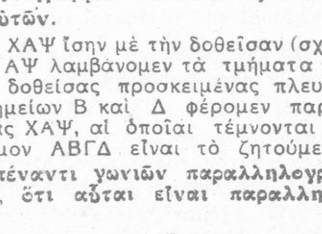
**124. Νὰ κατασκευάσητε παραλληλόγραμμον ἀπὸ δύο προσκειμένας πλευρὰς καὶ ἀπὸ την γωνίαν αὐτῶν.**

**Λύσις**: Κατασκευάζομεν γωνίαν ΧΑΨ ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν (σχ. 59) καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῆς ΑΧ καὶ ΑΨ λαμβάνομεν τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΑΔ ἴσα ἀντιστοίχως πρὸς τὰς δοθείσας προσκειμένας πλευρὰς τοῦ παραλληλογράμμου. Ἐκ τῶν σημείων Β καὶ Δ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ΧΑΨ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Γ. Τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον.

**125. Ἂν αἱ διχοτόμοι τῶν ἀπέναντι γωνιῶν παραλληλογράμμου δὲν συμπίπτωσι, νὰ ἀποδείξητε, ὅτι αὗται εἶναι παράλληλοι.**




*Σχ. 59.*




*Σχ. 60.*

Ἔστω τὸ παραλ/μον ΑΒΓΔ καὶ ΑΕ, ΓΖ αἱ διχοτόμοι τῶν ἀπέναντι αὐτοῦ γωνιῶν Α καὶ Γ. (Σχ. 60). Θὰ δείξωμεν ὅτι αὗται εἶναι παράλληλοι·

**'Απόδειξις.** 'Επειδὴ Α=Γ θὰ εἶναι καὶ γων ΕΑΖ = γων ΕΓΒ, ὡς ἡμίση τῶν ἴσων γωνιῶν. 'Επειδὴ δὲ ΔΓ ∥ ΑΒ, θὰ εἶναι καὶ γων ΕΓΖ = γων ΓΖΒ, ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ.

Ἄρα γωνΕΑΖ=γωνΓΖΒ καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΕ καὶ ΓΖ τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΑΒ σχηματίζουσι δύο ἐντός, ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ἴσας. Ἄρα εἶναι παράλληλοι.

*β'. Τρόπος.* Αἱ γωνίαι Α καὶ Γ εἶναι ἴσαι καὶ ἔχουσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους ἀντιστοίχως. Ἄρα (ἄσκησις 96) αἱ διχοτόμοι αὐτῶν εἶναι παράλληλοι.

**126. Νὰ διχοτομήσητε δύο γωνίας παραλληλογράμμου, αἱ ὁποῖαι πρόσκεινται εἰς μίαν πλευρὰν αὐτοῦ Νὰ ἀποδείξητε δέ, ὅτι αἱ διχοτόμοι αὐτῶν εἶναι κάθετοι.**

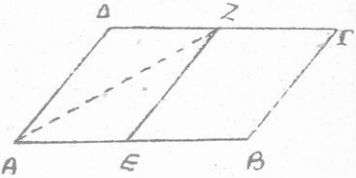
Ἔστωσαν ΑΕ καὶ ΔΗ αἱ διχοτόμοι τῶν προσκειμένων γωνιῶν Α καὶ Δ εἰς τὴν πλευρὰν ΑΔ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. (σχ. 60). Θὰ δείξωμεν, ὅτι αὗται τέμνονται καθέτως.

**'Απόδειξις:** 'Επειδὴ γων ΔΑΕ=γων ΕΑΖ λόγω τῆς διχοτόμου ΑΕ καὶ γωνΕΑΖ=γωνΔΕΑ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΕ, θὰ εἶναι καὶ γων ΔΑΕ = γων ΔΕΑ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ βάσιν τὴν ΑΕ. Συνεπῶς ἡ διχοτόμος ΔΗ τῆς γων τῆς κορυφῆς αὐτοῦ, θὰ τέμνῃ καθέτως τὴν βάσιν ἤτοι ΔΗ ⊥ ΑΕ.

*β'. Τρόπος.* 'Επειδὴ Α + Δ = 2 ὀρθαὶ θὰ εἶναι καὶ $\frac{Α}{2} + \frac{Δ}{2} =$ = 1 ὀρθή. 'Επειδὴ δὲ τοῦ τριγώνου ΑΔΗ δύο γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα μίαν ὀρθήν, ἡ ἄλλη γωνία αὐτοῦ Η πρέπει νὰ εἶναι ὀρθὴ καὶ συνεπῶς αἱ πλευραί της τέμνονται καθέτως.

**127. Νὰ συγκρίνητε τὴν ἀπόστασιν τῶν μέσων δύο ἀπέναντι πλευρῶν παραλληλογράμμου πρὸς μίαν ἀπὸ τὰς ἄλλας πλευράς.**

**Λύσις.** Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ παραλληλόγραμμον καὶ Ε, Ζ τὰ μέσα τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν αὐτοῦ ΑΒ καὶ ΔΓ (σχ. 61). Φέρομεν τὴν ΖΕ καὶ τὴν ΑΖ. Τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα ΑΔΖ καὶ ΑΕΖ ἔχουσι τὴν ΑΖ κοινήν, τὴν ΑΕ=ΔΖ, ὡς ἡμίση τῶν ἴσων ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ παρ)μου καὶ γων ΔΖΑ = γων ΖΑΕ, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΖ. Ἄρα εἶναι ἴσα καὶ θὰ ἔχωσι καὶ ΑΔ=ΖΕ ὡς πλευρὰς τῶν ἴσων τριγώνων, κειμένας ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν ΑΖΔ καὶ ΕΑΖ. Ἄρα: *'Η ἀπόστασις τῶν μέσων τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ εἶναι ἴση μὲ ἑκάστην τῶν ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ.*



*Σχ. 61.*

Σελὶς 94. **Πόρισμα Ι. Ἂν αἱ πλευραὶ τετραπλεύρου εἶναι ὅλαι ἴσαι, τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον.**

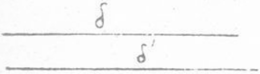
**'Απόδειξις:** Διότι τότε αἱ ἀπέναντι πλευραὶ αὐτοῦ θὰ εἶναι ἴσαι

**Πόρισμα II** Ἂν αἱ γωνίαι τετραπλεύρου εἶναι ὅλαι ὀρθαί, τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον.

**Ἀπόδειξις**: Διότι θὰ ἔχῃ τὰς ἀπέναντι γωνίας αὐτοῦ ἴσας, ὡς ὀρθάς.

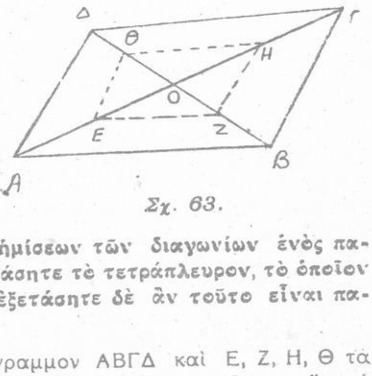
**Ἀσκήσεις**. Σελὶς 95. — **128. Δίδονται δύο εὐθύγραμμα τμήματα δ καὶ δ′. Νὰ κατασκευάσητε παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου μία διαγώνιος νὰ ἰσοῦται πρὸς δ, ἡ ἄλλη πρὸς τὸ δ′ καὶ ἡ γωνία τῶν διαγωνίων τούτων νὰ εἶναι 45°.**

**Λύσις**: Κατασκευάζομεν τρίγωνον ΒΟΓ μὲ πλευρὰς ΟΒ καὶ ΟΓ ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰ ἥμιση τῶν δοθέντων εὐθ. τμημάτων δ καὶ δ′ καὶ περιεχομένην ὑπ' αὐτῶν γωνίαν ἴσην πρὸς 45° (σχ. 62). Προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς ΟΒ καὶ ΟΓ πέραν τοῦ Ο καὶ λαμβάνομεν ΟΔ = ΟΒ καὶ ΟΓ = ΟΑ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΒ, ΓΔ καὶ ΔΑ καὶ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον παραλληλόγραμμον. Ἐπειδὴ τούτου αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ διχοτομοῦνται, εἶναι παραλληλόγραμμον (§ 124), ἔχει δὲ καὶ τὰ δοθέντα στοιχεῖα ἤτοι $ΒΔ = 2 . ΟΒ = 2 . \frac{δ}{2} =$ $= δ$ καὶ $ΑΓ = 2 . ΟΓ = 2 . \frac{δ'}{2} = δ'$ καὶ γωνία αὐτῶν 45° ἐκ κατασκευῆς.





Σχ. 62.




Σχ. 63.

**129. Νὰ ὁρίσητε τὰ μέσα τῶν ἡμίσεων τῶν διαγωνίων ἑνὸς παραλληλογράμμου καὶ νὰ κατασκευάσητε τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ μέσα ταῦτα. Νὰ ἐξετάσητε δὲ ἂν τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον ἢ ὄχι.**

**Λύσις**: Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ Ε, Ζ, Η, Θ τὰ μέσα τῶν ἡμίσεων τῶν διαγωνίων αὐτοῦ (σχ 63). Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἐπειδὴ ΟΓ = ΟΑ θὰ εἶναι καὶ ΟΗ = ΟΕ. Ἐπειδὴ ΟΒ = ΟΔ, θὰ εἶναι καὶ ΟΖ = ΟΘ καὶ τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΕΗ καὶ ΖΘ διχοτομοῦνται (§ 124).

**130. Νὰ ὁρίσητε τὰ μέσα Ε, Ζ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ΑΒ, ΔΓ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Ἔπειτα νὰ γράψητε τὰ εὐθ. τμήματα ΑΖ, ΔΕ καὶ νὰ ἀποδείξητε, ὅτι ταῦτα διχοτομοῦνται.**

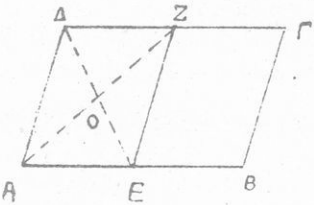
**Λύσις.** Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ Ε, Ζ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ αὐτοῦ. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὰ τμήματα ΑΖ καὶ ΔΕ διχοτομοῦνται (σχ. 64).

Ἐπειδὴ ΑΒ=ΔΓ καὶ Ε, Ζ εἶναι τὰ μέσα αὐτῶν, θὰ εἶναι καὶ ΑΕ=ΔΖ, ὡς ἡμίση τῶν ἴσων πλευρῶν. Ἐπειδὴ δὲ τοῦ τετραπλεύρου ΑΕΖΔ, δύο ἀπέναντι πλευραί, αἱ ΑΕ καὶ ΔΖ, εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἄρα αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ διχοτομοῦνται ἤτοι ΑΟ=ΟΖ καὶ ΕΟ=ΟΔ.

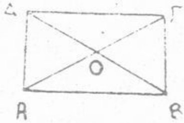
Σελὶς 97. **Θεώρημα Ι. Αἱ διαγώνιοι παντὸς ὀρθογωνίου εἶναι ἴσαι.**

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ (σχ. 65) καὶ ΑΓ, ΒΔ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ. Θὰ δείξωμεν ὅτι ΑΓ=ΒΔ.

**Ἀπόδειξις:** Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΔΑΒ καὶ ΑΒΓ ἔχουσι τὴν




*Σχ. 64.*




*Σχ. 65.*

ΑΔ=ΒΓ καὶ τὴν ΑΒ κοινήν· ἄρα εἶναι ἴσα καὶ συνεπῶς καὶ ΑΓ=ΔΒ.

**Ἀντιστρόφως:** *Ἂν αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι, τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.*

Ἔστω ἤδη ὅτι τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ (σχ. 65) αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι ἴσαι. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.

**Ἀπόδειξις:** Τὰ τρίγωνα ΔΑΒ καὶ ΑΒΓ ἔχουσι τὴν ΑΔ = ΒΓ, τὴν ΑΒ κοινὴν καὶ τὴν ΔΒ=ΑΓ ἐξ ὑποθέσεως. Ἄρα εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς τρεῖς των πλευρὰς ἀνὰ μίαν ἴσας. Συνεπῶς καὶ Α=Β, ὡς κειμένας ἀπέναντι τῶν ἴσων ἐξ ὑποθέσεως πλευρῶν ΑΓ καὶ ΒΔ, τῶν ἴσων τούτων τριγώνων. Ἐπειδὴ δὲ Α+Β=2 ὀρθ. ἕπεται ὅτι Α=1 ὀρθ. καὶ τὸ παραλληλόγραμμον, ὡς ἔχον μίαν γωνίαν ὀρθήν, εἶναι ὀρθογώνιον.

**Θεώρημα ΙΙ. Ἂν πᾶσαι αἱ πλευραὶ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι, αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ τέμνονται καθέτως καὶ διχοτομοῦσι τὰς γωνίας του.**

Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΚΛΜΙ (σχ. 90 Θ.Γ.), ἔχον πάσας τὰς πλευρὰς αὐτοῦ ἴσας. Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΚΜ καὶ ΛΙ εἶναι κάθετοι καὶ διχοτομοῦσι τὰς γωνίας του.

**Ἀπόδειξις:** Ἐπειδὴ τὸ σχῆμα ΚΛΜΙ εἶναι παρ/μον, αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ διχοτομοῦνται ἤτοι ΛΟ=ΟΙ καὶ ΚΟ=ΟΜ. Ἐπειδὴ δὲ ΚΛ = ΚΙ τὸ τρίγωνον ΛΚΙ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἡ ΚΟ, ὡς διερχομένη διὰ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ Κ καὶ τοῦ μέσου Ο τῆς βάσεώς του, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΛΙ καὶ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν Κ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ. Δι' ὅμοιον λόγον καὶ ἡ ΟΜ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν Μ αὐτοῦ. Ἐκ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ΚΙΜ καὶ ΚΛΜ ἐξάγεται, ὡς ἀνωτέρω, ὅτι ἡ ΛΙ διχοτομεῖ τὰς γωνίας Λ καὶ Ι τοῦ παραλληλογράμμου.

**Ἀντιστρόφως**: *Ἂν αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου τέμνωνται καθέτως ἢ διχοτομοῦσι τὰς γωνίας αὐτοῦ, ὅλαι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι ἴσαι.*

**Ἀπόδειξις.** Ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίγωνον ΛΚΙ (σχ. 90 Θ. Γ.) ἡ ΚΟ εἶναι διάμεσος καὶ ὕψος αὐτοῦ (ἢ διχοτόμος καὶ διάμεσος αὐτοῦ), τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές. Ἄρα ΛΚ = ΚΙ καὶ τὸ παραλ/μον, ὡς ἔχον δύο διαδοχικὰς πλευρὰς αὐτοῦ ἴσας, θὰ ἔχῃ ὅλας του τὰς πλευρὰς ἴσας

**Πόρισμα Ι. Αἱ διαγώνιοι παντὸς τετραγώνου εἶναι ισαι, τέμνονται καθέτως καὶ διχοτομοῦσι τὰς γωνίας του.**

**Ἀπόδειξις**: Διότι τὸ τετράγωνον εἶναι ὀρθογώνιον καὶ συνεπῶς αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ εἶναι ἴσαι. Ἀλλὰ τὸ τετράγωνον εἶναι καὶ παραλ)μον ἔχον πάσας τὰς πλευρὰς αὐτοῦ ἴσας, ἄρα (Θ. ΙΙ.) αἱ διαγώνιοί του τέμνονται καθέτως καὶ διχοτομοῦσι τὰς γωνίας του.

**Πόρισμα ΙΙ. Ἂν αἱ διαγώνιοι παραλ)μου εἶναι ἴσαι καὶ τέμνονται καὶ καθέτως, τοῦτο εἶναι τετράγωνον.**

**Ἀπόδειξις**: Ἀφοῦ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ εἶναι ἴσαι, τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον. Ἐπειδὴ δὲ τέμνονται καὶ καθέτως ἔχει πάσας τὰς πλευράς του ἴσας (Θ. ΙΙ ἀντίστροφον Ἄρα εἶναι τετράγωνον.

**Πόρισμα ΙΙΙ.** Ἀποδεικνύεται ὡς τό Π. ΙΙ.

**Ἀσκήσεις** Σελὶς 97.— **131. Νὰ ὁρίσητε τὰς ὁμοιότητας, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουσι**: α') **Μεταξὺ τετραγώνου καὶ ρόμβου** β') **Μεταξὺ τετραγώνου καὶ ἄλλου ὀρθογωνίου.** γ') **Μεταξὺ ὀρθογωνίου καὶ ρομβοειδοῦς.** δ') **Μεταξὺ ρομβου καὶ ρομβοειδοῦς.**

**Λύσις**: α') Τὸ τετράγωνον καὶ ὁ ρόμβος εἶναι παραλ/μα, ἔχουσιν ἴσας πάσας τὰς πλευράς των καὶ αἱ διαγώνιοι αὐτῶν τέμνονται δίχα καὶ καθέτως καὶ διχοτομοῦσι τὰς γωνίας των.

β') Ἔχουσι τὰς γωνίας των ὀρθὰς καὶ αἱ διαγώνιοι αὐτῶν εἶναι ἴσαι καὶ διχοτομοῦνται.

γ') Ἔχουσι μόνον τὰς ἀπέναντι πλευράς των ἴσας καὶ τὰς ἀπέναντι γωνίας ἴσας καὶ αἱ διαγώνιοι αὐτῶν ἁπλῶς διχοτομοῦνται.

δ') Ὡς ἀνωτέρω.

**132. Νὰ ὁρίσητε τὰς διαφοράς, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουσι μεταξὺ τῶν προηγουμένων σχημάτων, ὡς ἀνὰ δύο ἀνεγράφησαν.**

**Λύσις**: α') Τοῦ τετραγώνου ὅλαι του αἱ γωνίαι εἶναι ὀρθαὶ ἐνῷ τοῦ ρόμβου δὲν εἶναι ὀρθαί. Αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσαι, ἐνῷ τοῦ ρόμβου εἶναι ἄνισοι.

β') Τοῦ τετραγώνου ὅλαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι μεταξύ των, ἐνῷ τοῦ ὀρθογωνίου μόνον αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι. Αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραγώνου τέμνονται καθέτως καὶ διχοτομοῦσι τὰς γωνίας αὐτοῦ ἐνῷ τοῦ ὀρθογωνίου οὔτε τέμνονται καθέτως οὔτε διχοτομοῦσι τας γωνίας αὐτοῦ.

γ΄) Αἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἴσαι, ἐνῶ τοῦ ρομβοειδοῦς εἶναι ἄνισοι.

δ΄) Τοῦ ρόμβου αἱ πλευραὶ εἶναι πᾶσαι ἴσαι, ἐνῷ τοῦ ρομβοειδοῦς μόνον αἱ ἀπέναντι εἶναι ἴσαι.

Τοῦ ρόμβου αἱ διαγώνιοι τέμνονται καθέτως καὶ διχοτομοῦσι τὰς γωνίας αὐτοῦ, ἐνῷ τοῦ ρομβοειδοῦς οὔτε τέμνονται καθέτως, οὔτε διχοτομοῦσι τὰς γωνίας αὐτοῦ.

**133. Νὰ συγκρίνητε τὰς γωνίας, τὰς ὁποίας ἑκάστη πλευρὰ ὀρθογωνίου σχηματίζει μὲ τὰς διαγωνίους αὐτοῦ.**

**Λύσις**: Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ καὶ ΑΓ, ΒΔ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ (σχ. 65). Ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἴσαι καὶ διχοτομοῦνται τὰ τρίγωνα ΑΟΒ καὶ ΔΟΓ εἶναι ἴσα καὶ ἰσοσκελῆ. Ἄρα αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας ἡ πλευρὰ ΑΒ, καθὼς καὶ ἡ ΓΔ, σχηματίζει μὲ τὰς διαγωνίους αὐτοῦ εἶναι ἴσαι. Δι' ὅμοιον λόγον καὶ αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουσιν αἱ πλευραὶ ΒΓ καὶ ΑΔ μὲ τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι ἴσαι.

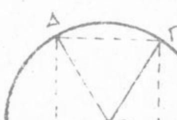
**134. Ἂν μία διαγώνιος ὀρθογωνίου σχηματίζῃ μὲ μίαν πλευρὰν γωνίαν 25° 20′ 30′′ νὰ ὑπολογίσητε τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν τῶν διαγωνίων αὐτοῦ.**

**Λύσις**: Ἂν γων ΓΑΒ = 25° 20′ 30′′ (σχ. 65) τότε καὶ ἡ ἄλλη προσκειμένη εἰς τὴν ΑΒ γωνία θὰ εἶναι 25° 20′ 30′′ (ἄσκ. 133). Ἐπομένως ἡ γωνία τῆς κορυφῆς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΟΑΒ θὰ εἶναι 180° — (50° 41′) = (179° 60′) — (50° 41′) = 129° 19′, ἡ δὲ γωνία ΒΟΓ, ὡς παραπληρωματικὴ τῆς γων ΑΟΒ, θὰ εἶναι 50° 41′.

**135. Νὰ γράψητε δύο διαμέτρους κύκλου καὶ τὰς χορδὰς τῶν τόξων, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ὑπ' αὐτῶν ἡ περιφέρεια. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι τὸ ὑπ' αὐτῶν ἀποτελούμενον εὐθ. σχῆμα εἶναι ὀρθογώνιον.**

**Λύσις**: Ἔστω κύκλος Ο (σχ. 66) καὶ δύο διάμετροι αὐτοῦ ΑΓ καὶ ΒΔ. Φέρομεν τὰς χορδὰς τῶν τόξων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ καὶ ΔΑ καὶ θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνιον.

Πράγματι τοῦτο εἶναι παραλ/μον, διότι αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ διχοτομοῦνται. Εἶναι δὲ καὶ ὀρθογώνιον, διότι αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ εἶναι ἴσαι, ὡς διάμετροι τοῦ κύκλου Ο.



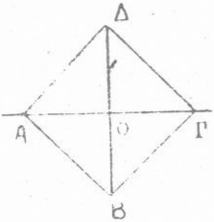

*Σχ. 66.*

**136. Νὰ κατασκευάσητε τετράγωνον ἀπὸ τὴν διαγώνιον αὐτοῦ.**

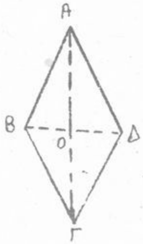
**Λύσις**: Ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσαι καὶ τέμνονται καθέτως, ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως :

Λαμβάνομεν εὐθ. τμῆμα ΑΓ (σχ. 67) ἴσον μὲ τὴν δοθεῖσαν διαγώνιον τοῦ τετραγώνου. Φέρομεν κάθετον εἰς τὸ μέσον αὐτῆς Ο καὶ ἐπ' αὐτῆς ἀπὸ τοῦ Ο λαμβάνομεν τὰ τμήματα ΟΒ καὶ ΟΔ ἴσα πρὸς $\frac{\delta}{2}$. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον τετράγωνον.

Πράγματι, ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ διχοτομοῦνται εἶναι παραλ-




Σχ. 67.




Σχ. 68.

ληλόγραμμον, ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἴσαι καὶ τέμνονται καθέτως, εἶναι τετράγωνον.

**137. Νὰ κατασκευάσητε ρόμβον ἀπὸ τὰς διαγωνίους αὐτοῦ.**

**Λύσις**: Ἔστωσαν α καὶ β τὰ μήκη τῶν δοθεισῶν διαγωνίων τοῦ ζητουμένου νὰ κατασκευασθῇ ρόμβου (σχ. 68). Ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου τέμνονται δίχα καὶ καθέτως, ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως.

Λαμβάνομεν εὐθ. τμῆμα ΒΔ ἴσον πρὸς τὴν δοθεῖσαν διαγώνιον α. Φέρομεν κάθετον εἰς τὸ μέσον αὐτῆς καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου ταύτης λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν τοῦ Ο τὰ εὐθ. τμήματα ΟΑ καὶ ΟΔ ἴσα πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἄλλης δοθείσης διαγωνίου β. Ἑνοῦμεν τὰ ἄκρα Α, Β, Γ, Δ δι' εὐθ. τμημάτων καὶ τὸ σχηματιζόμενον τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ὁ ζητούμενος ρόμβος. Τῷ ὄντι τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ διχοτομοῦνται. Εἶναι δὲ καὶ ρόμβος, διότι αὗται τέμνονται καθέτως.

Σελίς 98. **Πόρισμα I. Ἂν ἐκ τοῦ μέσου μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου ἀχθῇ παράλληλος πρὸς ἄλλην πλευρὰν αὐτοῦ, αὕτη διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς τρίτης πλευρᾶς αὐτοῦ.**

Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον, Δ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΑΒ αὐτοῦ καὶ ΔΕ παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΑΕ = ΕΓ (σχ. 92. Θ. Γ.).

**Ἀπόδειξις.** Ἂν ΖΗ εἶναι ἡ ἐκ τοῦ Α παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, τότε ἐπειδὴ καὶ ΔΕ ∥ ΒΓ θὰ εἶναι αἱ ΖΗ, ΔΕ καὶ ΒΓ παράλληλοι μεταξύ των. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τμήματα ΑΔ, ΔΒ, τὰ περιεχόμενα μεταξὺ τῶν παραλλήλων τούτων εἶναι ἴσα, θὰ εἶναι ἴσα καὶ τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν τμήματα τῆς ΑΓ ἤτοι ΑΕ = ΕΓ. Ὥστε ἡ παράλληλος ΔΕ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον Ε τῆς πλευρᾶς ΑΓ αὐτοῦ.

**Πόρισμα II. Τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὰ μέσα δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν καὶ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς (σχ. 92 Θ. Γ.).**

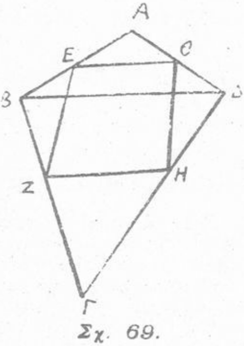
**Ἀπόδειξις.** Τὸ εὐθ. τμῆμα ΔΕ, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὰ μέσα Δ καὶ Ε τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 92 Θ. Γ.) εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν ΒΓ, διότι ἂν δὲν ἦτο τοῦτο παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ φέρωμεν τὴν ΔΕ′ ∥ πρὸς τὴν ΒΓ, θὰ ἦτο ΑΕ′ = Ε′Γ, ὅτε τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΓ, θὰ εἶχε δύο μέσα, ὅπερ ἄτοπον. Ἂν δὲ ἀχθῇ καὶ ΕΘ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, θὰ διέλθῃ αὕτη διὰ τοῦ μέσου Θ τῆς πλευρᾶς ΒΓ καὶ θὰ εἶναι $ΒΘ = ΘΓ = \frac{ΒΓ}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ ΒΘ = ΔΕ, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, ἕπεται ὅτι $ΔΕ \parallel \frac{ΒΓ}{2}$.

**Πόρισμα 111. Ἡ διάμεσος ὀρθογωνίου, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης αὐτοῦ.**

**Ἀπόδειξις:** Διότι ἂν ἐκ τοῦ μέσου Δ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 93 Θ. Γ.) ἀχθῇ ἡ ΔΕ ∥ ΒΑ αὕτη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ μέσου Ε τῆς πλευρᾶς ΑΓ καὶ θὰ τέμνῃ ταύτην καθέτως, ἐπειδὴ $ΒΑ \perp ΑΓ$. Τὸ τρίγωνον δὲ ΑΔΓ θὰ εἶναι ἰσοσκελὲς διότι ἡ ΔΕ εἶναι διάμεσος καὶ ὕψος αὐτοῦ. Ἄρα $ΔΑ = ΔΓ = ΔΒ = \frac{ΒΓ}{2}$.

**Ἀσκήσεις** σελὶς 100. **138. Νὰ ὁρίσητε τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς τετραπλεύρου καὶ νὰ κατασκευάσητε τὸ τετράπλευρον τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς αὐτά. Νὰ ἐξετάσητε δὲ τί εἶδος τετράπλευρον εἶναι τοῦτο.**

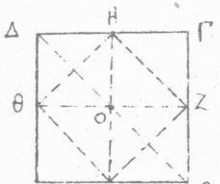
**Λύσις:** Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 69) καὶ Ε, Ζ, Η, Θ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. Φέρομεν τὰ εὐθ. τμήματα ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ καὶ ΘΕ καὶ θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ σχηματιζόμενον τετραπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον.



*Σχ. 69.*

Ἐὰν ἀχθῇ ἡ διαγώνιος ΒΔ σχηματίζονται δύο τρίγωνα, τὰ ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ἡ ΕΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς, ὡς ἑνοῦσα τὰ μέσα τῶν δύο πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΔ αὐτοῦ. Δι' ὅμοιον λόγον καὶ ΖΗ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς. Ἄρα ΕΘ καὶ ΖΗ εἶναι παράλληλοι καὶ ἴσαι καὶ τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ ὡς ἔχον δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους εἶναι παραλληλόγραμμον.

**139. Νὰ γράψητε τὰ εὐθ. τμήματα, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἑνὸς τετραπλεύρου καὶ νὰ συγκρίνητε τὰ τμήματα, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ καθὲν διαιρεῖται ἀπὸ τὸ ἄλλο.**



*Σχ. 70.*

**Λύσις:** Ἂν ἀχθῶσι τὰ εὐθ. τμήματα ΕΗ καὶ ΖΘ (σχ. 69), ταῦτα εἶναι αἱ διαγώνιοι τοῦ παραλ/μου ΕΖΗΘ, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καὶ ὡς διαγώνιοι παραλ/μου διχοτομοῦνται.

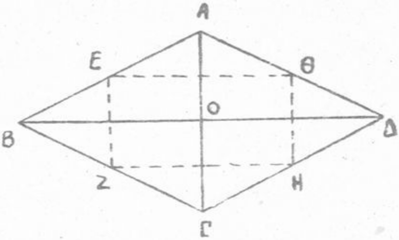
**140. Νὰ ὁρίσητε τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς τετραγώνου καὶ νὰ ἀποδείξητε, ὅτι ταῦτα εἶναι κορυφαὶ ἑνὸς ἄλλου τετραγώνου.**

**Λύσις:** Ἔστω τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ (σχ. 70), καὶ Ε, Ζ, Η, Θ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. Τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι τετράγωνον. Πράγματι τοῦτο εἶναι παραλ/μον, ὡς ἔχον κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ. Ἐπειδὴ δὲ ΗΕ = ∥ ΑΔ καὶ ΘΖ = ∥ ΔΓ καὶ ΑΔ = ΔΓ, θὰ εἶναι καὶ ΗΕ = ΘΖ καὶ συνεπῶς εἶναι ὀρθογώνιον, ἐπειδὴ δὲ $ΗΕ \perp ΘΖ$ εἶναι τετράγωνον.

**141. Νὰ ὁρίσητε τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς ρόμβου καὶ νὰ ἀποδείξητε, ὅτι ταῦτα εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου.**

Ἔστω ὁ ρόμβος ΑΒΓΔ (σχ. 71) καὶ Ε, Ζ, Η, Θ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ταῦτα εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου.

Τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ ἐδείχθη ὅτι εἶναι παραλληλόγραμμον (ἄσκ. 138).

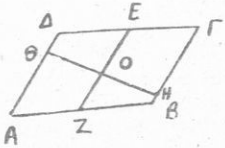


*Σχ. 71.*

Ἐπειδὴ δὲ τοῦ ρόμβου αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ τέμνονται καθέτως καὶ αἱ πλευραὶ ΕΘ καὶ ΕΖ εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς διαγωνίους τοῦ ρόμβου, ἕπεται ὅτι καὶ αὗται τέμνονται καθέτως καὶ συνεπῶς γωνΕ=1 ὀρθή. Καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΕΘΗΖ, ὡς ἔχον μίαν γωνίαν ὀρθὴν εἶναι ὀρθογώνιον.

**142. Νὰ γράψητε τὴν εὐθεῖαν ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν ἑνὸς παραλληλογράμμου καὶ ἕνα τυχὸν εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον καταλήγει εἰς τὰς ἄλλας πλευρὰς αὐτοῦ. Νὰ συγκρίνητε δὲ τὰ τμήματα εἰς τὰ ὁποῖα τοῦτο διαιρεῖται ὑπὸ τῆς πρώτης εὐθείας.**

**Λύσις**: Ἔστω τὸ παρ/μον ΑΒΓΔ καὶ ΕΖ ἡ εὐθεῖα, ἥτις ἑνώνει τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ αὐτοῦ. Φέρομεν καὶ τυχὸν εὐθ. τμῆμα ΗΘ, τὸ ὁποῖον καταλήγει εἰς τὰς ἄλλας πλευρὰς αὐτοῦ ΒΓ καὶ ΑΔ καὶ τέμνεται ὑπὸ τῆς ΕΖ εἰς τὸ σημεῖον Ο. Ζητεῖται νὰ συγκριθῶσι τὰ εὐθ. τμήματα ΟΗ καὶ ΟΘ (σχ. 72).



*Σχ. 72.*

Γνωρίζομεν ὅτι ΕΖ ∥ ΑΔ ∥ ΒΓ. Ἐπειδὴ δὲ ΑΖ=ΖΒ, θὰ εἶναι καὶ ΗΟ=ΟΘ, διότι (§ 127) ἂν τμήματα εὐθείας περιεχόμενα μεταξὺ παραλλήλων εὐθειῶν εἶναι ἴσα καὶ τὰ τμήματα πάσης ἄλλης εὐθείας, τὰ περιεχόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων εἶναι ἴσα.

**143. Νὰ ὁρίσητε ἓν εὐθ. τμῆμα τ καὶ νὰ κατασκευάσητε ἓν τετράγωνον μὲ περίμετρον τ.**

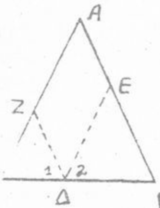
**Λύσις**: Διαιροῦμεν τὸ εὐθ. τμῆμα τ εἰς 4 ἴσα μέρη (ἄσκησις 35) καὶ λαμβάνομεν εὐθ. τμῆμα ΑΒ ἴσον πρὸς τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ τ καὶ φέρομεν εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ καθέτους, ἐπὶ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν τμήματα ἴσα πρὸς $\frac{\tau}{4}$, τὰ ΑΔ καὶ ΒΓ. Φέρομεν καὶ τὸ εὐθ. τμῆμα ΒΓ καὶ οὕτω ἔχομεν τὸ τετράγωνον μὲ περίμετρον τ.

**144. Νὰ κατασκευάσητε ἰσόπλευρον τρίγωνον μὲ περίμετρον δοθὲν εὐθ. τμῆμα τ.**

**Λύσις**: Διαιροῦμεν τὸ δοθὲν εὐθ. τμῆμα τ εἰς τρία ἴσα μέρη κατὰ τὸ πρόβλημα § 128. Ἔπειτα λαμβάνομεν εὐθ. τμῆμα ΑΒ ἴσον πρὸς ἓν τῶν μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διηρέσαμεν τὸ τ καὶ μὲ κέντρα τὰ ἄκρα αὐτοῦ Α καὶ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν $AB = \frac{\tau}{3}$ γράφομεν περιφερείας, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς δύο σημεῖα Γ καὶ Γ'. Ἑνοῦμεν τὸ σημεῖον Γ μὲ τὰ Α καὶ Β καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον νὰ κατασκευαθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον.

## Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ ΣΤ' Κεφαλαίου

**145. Ἀπὸ ἓν σημεῖον Δ τῆς βάσεως ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου νὰ φέρητε παραλλήλους πρὸς τὰς ἄλλας πλευρὰς αὐτοῦ. Νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὸ σχηματιζόμενον παρ/μον ἔχει σταθερὰν περίμετρον ἤτοι ἀνεξάρτητον ἀπὸ τὴν θέσιν τοῦ Δ ἐπὶ τῆς βάσεως.**




*Σχ. 73.*

**Λύσις**: Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 73) καὶ Δ τυχὸν σημεῖον τῆς βάσεως αὐτοῦ ΒΓ. Ἐκ τοῦ σημείου Δ φέρομεν τὴν ΔΕ ∥ ΑΒ καὶ τὴν ΔΖ ∥ ΑΓ. Τὸ σχηματιζόμενον παραλληλόγραμμον ΔΕΑΖ ἔχει περίμετρον σταθεράν.

Τῷ ὄντι τὸ τρίγωνον ΒΖΔ εἶναι ἰσοσκελές, διότι Β=Γ, ὡς γωνίαι παρὰ τὴν βάσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ καὶ $\Gamma = \Delta_1$, ὡς ἐντός, ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΑΓ καὶ ΔΖ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΓ. Ἄρα $B = \Delta_1$ καὶ συνεπῶς ΔΖ=ΒΖ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ τὸ τρίγωνον ΔΕΓ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ καὶ συνεπῶς ΔΕ=ΕΓ.

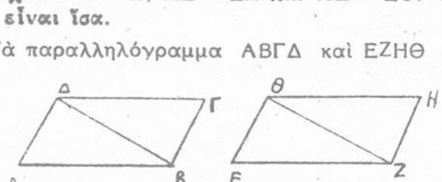
Ἡ περίμετρος τοῦ παραλ/μου ΔΖΑΕ εἶναι :

$$\Delta Z + ZA + AE + E\Delta = BZ + ZA + AE + E\Gamma = BA + A\Gamma = 2.\ AB.$$

Ἐπειδὴ δὲ διὰ πᾶσαν θέσιν τοῦ σημείου Δ ἡ περίμετρος τοῦ παραλ/μου εἶναι πάντοτε διπλασία μιᾶς τῶν ἴσων πλευρῶν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἕπεται ὅτι αὕτη εἶναι σταθερά.

**146. Νὰ κατασκευάσητε δύο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχωσιν Α = Ε, ΑΒ = ΕΖ καὶ ΑΔ = ΕΘ. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι ταῦτα εἶναι ἴσα.**

**Λύσις**: Τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ (σχ. 74) ἔχουσι

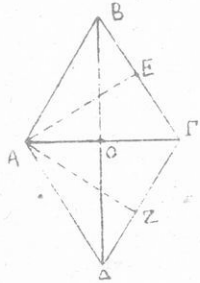



*Σχ. 74.*

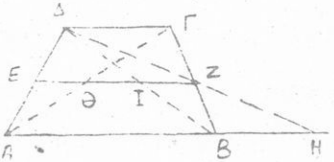
Α=Ε, ΑΒ=ΕΖ καὶ ΑΔ=ΕΘ. Φέρομεν καὶ τὰς διαγωνίους αὐτῶν ΒΔ καὶ ΖΘ. Τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΕΖΘ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὰς περιεχομένας ὑπ' αὐτῶν γωνίας ἴσας. Ἐπειδὴ δὲ ἑκάστη διαγώνιος παραλληλογράμμου χωρίζει αὐτὸ εἰς δύο ἴσα τρίγωνα, ἕπεται ὅτι τριγ. ΑΒΔ = τριγ. ΒΔΓ καὶ τριγ. ΕΖΘ= τρίγ. ΖΘΗ. Ἄρα καὶ τριγ. ΔΒΓ=τριγ. ΖΘΗ. Ἐὰν λοιπὸν θέσωμεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ ἐπὶ τοῦ ΕΖΗΘ ταῦτα θὰ ἐφαρμόσωσι καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσα.

**147. Νὰ ἀποδείξητε, ὅτι ἡ ἀπόστασις δύο παραλλήλων πλευρῶν ρόμβου ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῶν ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ.**

**Λύσις**: Ἔστω ὁ ρόμβος ΑΒΓΔ (σχ. 75) καὶ ΑΕ, ΑΖ αἱ ἀποστάσεις τῶν ἀπέναντι πλευρῶν αὐτοῦ. Θὰ δείξωμεν ὅτι ΑΕ=ΑΖ. Διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΕΒ καὶ ΑΔΖ ἔχουσι τὰς ὑποτεινούσας των ΑΔ καὶ ΑΒ ἴσας, ὡς πλευρὰς τοῦ ρόμβου καὶ τὰς ὀξείας αὐτῶν γωνίας Β καὶ Δ ἴσας, ὡς ἀπέναντι γωνίας τοῦ ρόμβου· ἄρα εἶναι ἴσα καὶ συνεπῶς ΑΕ=ΑΖ.




*Σχ. 75.*




*Σχ 76.*

**148. Νὰ γράψητε τὴν διάμεσον ἑνὸς τραπεζίου καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι αὕτη εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις καὶ ἴση πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα αὐτῶν.**

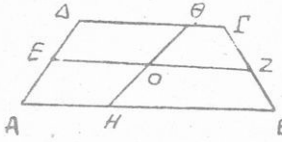
**Λύσις**: Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ καὶ ΕΖ ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ μέσα Ε καὶ Ζ τῶν πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ αὐτοῦ (σχ. 76).

Ἄγομεν τὴν ΔΖ, ἥτις προεκτεινομένη θὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Η, ὡς τέμνουσα καὶ τὴν παράλληλον πρὸς αὐτὴν ΔΓ. Τὰ τρίγωνα ΒΖΗ καὶ ΖΔΓ ἔχουσι τὴν ΒΖ=ΖΓ ἐξ ὑποθέσεως τὴν γωνΒΖΗ==γωνΔΖΓ ὡς κατὰ κορυφὴν καὶ τὴν γωνΖΒΗ = γωνΖΓΔ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΓ. Ἄρα εἶναι ἴσα καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι καὶ ΔΖ=ΖΗ καὶ ΓΔ=ΒΗ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΔΑΗ τὸ εὐθ. τμῆμα ΕΖ, ἐπειδὴ ἑνώνει τὰ μέσα Ε καὶ Ζ τῶν πλευρῶν ΑΔ καὶ ΔΗ αὐτοῦ θὰ εἶναι ‖ πρὸς τὴν ΑΗ καὶ ἴσον πρὸς

$$\frac{ΑΗ}{2} \text{ ἤτοι } ΕΖ = \frac{ΑΗ}{2} = \frac{ΑΒ+ΒΗ}{2} = \frac{ΑΒ+ΔΓ}{2}.$$

**149. Νὰ γράψητε ἓν εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον νὰ καταλήγῃ εἰς τὰς βάσεις ἑνὸς τραπεζίου καὶ νὰ συγκρίνητε τὰ τμήματα εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τοῦτο ἀπὸ τὴν διάμεσον αὐτοῦ.**

**Λύσις**: Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ τραπέζιον, ΕΖ ἡ διάμεσος αὐτοῦ καὶ ΗΘ ἓν εὐθ τμῆμα, τὸ ὁποῖον καταλήγει εἰς τὰς βάσεις αὐτοῦ καὶ τέμνεμνεται ὑπὸ τῆς διαμέσου ΕΖ εἰς τὸ σημεῖον Ο. Θὰ δείξωμεν ὅτι ΟΗ=ΟΘ.



*Σχ. 77.*

Ἐπειδὴ τὰ τμήματα ΑΕ καὶ ΕΔ τῆς εὐθείας ΑΔ τὰ περιεχόμενα μεταξὺ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ΑΒ, ΕΖ, ΔΓ εἶναι ἴσα, θὰ εἶναι ἴσα καὶ τὰ εὐθ. τμήματα ΗΟ καὶ ΟΘ τῆς εὐθείας ΗΘ, τὰ περιεχόμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων (§ 127).

**150. Νὰ ἀποδείξητε, ὅτι τὸ εὐθ. τμῆμα τὸ ὁποῖον ὁρίζουσι τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ἑνὸς τραπεζίου εἶναι παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις καὶ ἴσον πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν αὐτῶν.**

**Λύσις**: Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ καὶ Θ, Ι τὰ μέσα τῶν διαγωνίων αὐτοῦ ΑΓ καὶ ΒΔ (σχ. 76). Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΘΙ εἶναι ∥ πρὸς τὰς βάσεις αὐτοῦ καὶ ἰσοῦται μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν αὐτῶν.

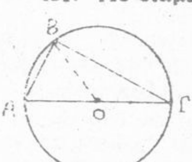
Ἂν ΕΗ εἶναι ἡ διάμεσος τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ, αὕτη εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις αὐτοῦ (ἄσκησις 148). Εἰς τὸ τρίγωνον ΔΑΒ ἡ ΕΖ ἄγεται ἐκ τοῦ μέσου Ε τῆς πλευρᾶς ΑΔ αὐτοῦ ∥ πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ. Ἄρα θὰ διέλθῃ ἐκ τοῦ μέσου Ι τῆς τρίτης πλευρᾶς. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ ΖΙ ἄγεται ἐκ τοῦ μέσου Ζ τῆς πλευρᾶς ΓΒ αὐτοῦ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ. Ἄρα θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ μέσου Θ τῆς πλευρᾶς ΑΓ αὐτοῦ. Συνεπῶς ἡ ΘΙ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΓΒ ἔχομεν ὅτι

$\Theta Z = \frac{AB}{2}$ (1) Ἐκ δὲ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἔχομεν ὅτι $ZI = \frac{\Delta\Gamma}{2}$ (2).

Δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2)

ἔχομεν $\Theta Z - IZ = \frac{AB}{2} - \frac{\Gamma\Delta}{2}$ ἢ $\Theta I = \frac{AB - \Gamma\Delta}{2}$.

**151. Μὲ διάμετρον τὴν ὑποτείνουσαν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου νὰ γράφητε περιφέρειαν κύκλου καὶ νὰ ἀποδείξητε, ὅτι αὕτη διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας.**



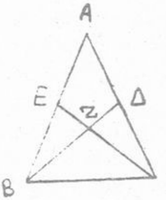
*Σχ. 78.*

**Λύσις**: Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 78) μὲ ὑποτείνουσαν τὴν ΑΓ. Εὑρίσκομεν τὸ μέσον Ο αὐτῆς καὶ μὲ κέντρον τοῦτο καὶ ἀκτῖνα ΟΑ ἢ ΟΓ γράφομεν τὴν περιφέρειαν, ἥτις θὰ ἔχῃ ὡς διάμετρον τὴν ὑποτείνουσαν ΑΓ. Ἡ περιφέρεια αὕτη θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῆς κορυφῆς Β τῆς ὀρθῆς γωνίας, διότι ἂν ἀχθῇ ἡ διάμεσος ΟΒ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας, αὕτη ἰσοῦται πρὸ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης ΑΓ δηλ. ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου.

**152. Νὰ ἀποδείξητε, ὅτι: Ἂν δύο διάμεσοι τριγώνου εἶναι ἴσαι τὸ τρίγωνον τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές.**

**Λύσις:** Ἔστω ὅτι αἱ διάμεσοι ΒΔ καὶ ΓΕ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 79) εἶναι ἴσαι. Θὰ δείξωμεν ὅτι τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές.

Γνωρίζομεν, ὅτι αἱ διάμεσοι παντὸς τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ ἑκάστην κορυφὴν τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου (§ 129 Θ. III).



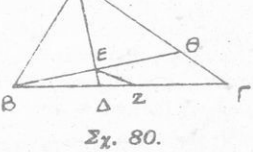
*Σχ. 79*

Ἂν Ζ εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων ΒΔ καὶ ΓΕ, θὰ ἔχωμεν $ΓΖ = \frac{2}{3} ΓΕ$ καὶ $ΒΖ = \frac{2}{3} ΒΔ$ καὶ ἐπειδὴ $ΓΕ = ΒΔ$ θὰ εἶναι καὶ $ΓΖ = ΒΖ$ καὶ $ΖΕ = ΖΔ$. Τὰ τρίγωνα ΓΖΔ καὶ ΒΖΕ ἔχουσι δύο πλευρὰς ἴσας μίαν πρὸς μίαν $ΓΖ = ΒΖ$ καὶ $ΖΔ = ΖΕ$ καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας, ὡς κατὰ κορυφήν. Ἄρα εἶναι ἴσα καὶ θὰ ἔχωσι καὶ τὴν $ΒΕ = ΓΔ$. Ἐπειδὴ δὲ $ΑΒ = 2.ΕΒ$ καὶ $ΑΓ = 2.ΔΓ$, λόγῳ τῶν διαμέσων καὶ $ΕΒ = ΔΓ$, θὰ εἶναι $ΑΒ = ΑΓ$ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὡς ἔχον δύο πλευρὰς ἴσας, θὰ εἶναι ἰσοσκελές.

**153. Νὰ γράψητε τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ νὰ φέρητε ἐκ τῆς κορυφῆς Β κάθετον ἐπὶ τὴν διχοτόμον ταύτην. Ἂν Ε εἶναι ὁ ποὺς τῆς καθέτου ταύτης καὶ Ζ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὸ τμῆμα ΕΖ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ καὶ ἴσον πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ.**

**Λύσις:** Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 80) καὶ ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α αὐτοῦ. Φέρομεν ἐκ τῆς κορυφῆς Β κάθετον ἐπὶ τὴν διχοτόμον ΑΔ καὶ ἔστω Ε ὁ ποὺς αὐτῆς. Ἑνοῦμεν τὸν πόδα Ε μὲ τὸ μέσον Ζ τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

Θὰ δείξωμεν ὅτι $ΕΖ \parallel ΑΓ$ καὶ $ΕΖ = \frac{ΑΓ - ΑΒ}{2}$.



*Σχ. 80.*

Πρὸς τοῦτο προεκτείνομεν τὴν ΒΕ πέραν τοῦ Ε καὶ ἔστω Θ τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον αὕτη τέμνει τὴν πλευρὰν ΑΓ. Τὸ τρίγωνον ΒΑΘ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἡ ΑΕ εἶναι διχοτόμος καὶ ὕψος αὐτοῦ. Ἄρα $ΒΕ = ΕΘ$ καὶ $ΑΒ = ΑΘ$. Εἰς τὸ τρίγωνον ΒΘΓ τὸ εὐθ. τμῆμα ΕΖ, ἐπειδὴ ἑνώνει τὰ μέσα Ε καὶ Ζ δύο πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν ΘΓ καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς ἤτοι

$$ΕΖ = \frac{ΘΓ}{2} = \frac{ΑΓ - ΑΘ}{2} = \frac{ΑΓ - ΑΒ}{2}, \text{ διότι } ΑΘ = ΑΒ.$$

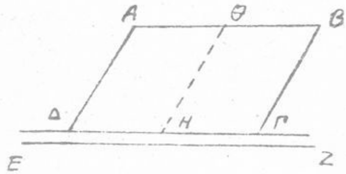
**154. Δύο ἀδελφοὶ ἐκληρονόμησαν ἓν παραλληλόγραμμον οἰκόπεδον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν πλευρὰν ΑΒ παράλληλον πρὸς δημοσίαν**

**ὁδόν, ἡ ὁποία διέρχεται πρὸ αὐτοῦ. Πῶς θὰ γίνῃ δικαία διανομὴ αὐτοῦ μεταξὺ τῶν ἀδελφῶν τούτων ;**

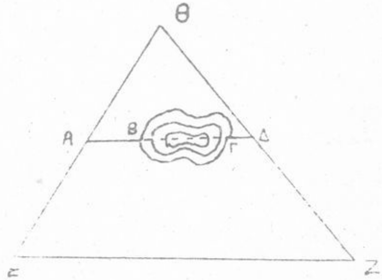
**Λύσις**: Ἵνα ἡ διανομὴ τοῦ οἰκοπέδου μεταξὺ τῶν δύο ἀδελφῶν εἶναι δικαία, πρέπει νὰ διαιρεθῇ τοῦτο εἰς δύο μέρη ἴσα καὶ ἔχοντα καὶ ἴσας τὰς πλευρὰς αὐτῶν πρὸς τὸν δημόσιον δρόμον. Πρὸς τοῦτο ἐκ τοῦ μέσου Η τῆς πλευρᾶς ΔΓ (σχ. 81) τῆς παραλλήλου πρὸς τὸν δημόσιον δρόμον ΕΖ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΔ, τὴν ΗΘ, ἥτις χωρίζει τὸ οἰκόπεδον εἰς δύο ἴσα παραλληλόγραμμα ΑΘΗΔ καὶ ΗΘΒΓ.

**155. Εἰς μίαν πεδιάδα ὑπάρχει λόφος Λ, τὸν ὁποῖον πρόκειται νὰ διασχίσῃ εὐθεῖα σιδηροδρομικὴ γραμμὴ ΑΒΓΔ. Πῶς ὁ μηχανικὸς θὰ χαράξῃ τὴν προέκτασιν ΓΔ αὐτῆς ὄπισθεν τοῦ λόφου, πρὶν γίνῃ ἡ διάτρησις αὐτοῦ :**

**Λύσις**: Ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου Α λαμβάνει ἐπὶ τῆς πεδιάδος δύο ἴσα εὐθ. τμήματα ΑΘ καὶ ΑΕ καὶ τοιαῦτα, ὥστε ἐκ τοῦ ση-




*Σχ. 81.*




*Σχ. 82.*

μείου Θ νὰ βλέπῃ τὸ μέρος τῆς πεδιάδος ὄπισθεν τοῦ λόφου. Ἐκ τοῦ Ε φέρει παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, τὴν ΕΖ καὶ ἑνώνει τὸ Ζ μὲ τὸ Θ. Σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΘΕΖ.

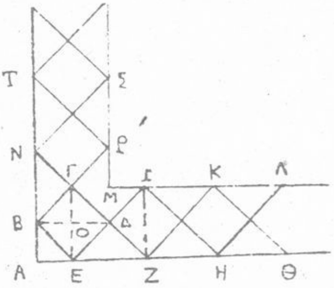
Εὑρίσκει τὸ μέσον Δ τῆς πλευρᾶς ΘΖ αὐτοῦ καὶ φέρει ἐκ τοῦ Δ τὴν εὐθεῖαν ΔΓ παράλληλον πρὸς τὴν ΖΕ.

Αὕτη θὰ εἶναι ἡ προέκτασις τῆς σιδηροδρομικῆς γραμμῆς πέραν τοῦ λόφου Λ, διότι ἡ ἐκ τοῦ μέσου Δ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ ὀφείλει νὰ διέρχηται ἀπὸ τὸ μέσον Α τῆς πλευρᾶς ΘΕ.

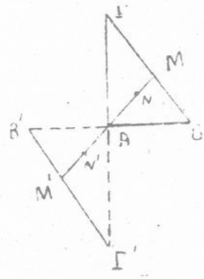
**156 Νὰ ἰχνογραφήσητε τὸ σχῆμα (97 Θ. Γ., τὸ ὁποῖον μία δεσποινὶς πρόκειται νὰ κεντήσῃ εἰς ἓν τραπεζομάνδηλον.**

**Λύσις**: Τὸ σχῆμα ΒΓΔΕ εἶναι τετράγωνον καὶ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΒΔ καὶ ΓΕ εἶναι ἴσαι καὶ τέμνονται καθέτως. Ἀλλὰ ΓΕ=ΙΖ καὶ ΒΔ=ΕΖ, συνεπῶς καὶ ΕΖ=ΙΖ δηλ. ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο παραλλήλων πλευρῶν ΜΛ καὶ ΑΘ. Ἐκ τοῦ τετραγώνου ΑΒΟΕ, ἕπεται ὅτι ΑΕ = ΒΟ δηλ. τὸ ἥμισυ τῆς ἀποστάσεως τῶν δύο παραλλήλων.

Ἐπομένως πρὸς ἰχνογραφησιν τοῦ σχεδίου χαράσσομεν δύο ὀρθὰς γωνίας μὲ πλευρὰς παραλλήλους καὶ ἐκ τῶν κορυφῶν αὐτῶν ἀρχόμενοι λαμβάνομεν τμήματα ΑΕ, ΑΒ, ΜΙ, ΜΡ ἴσα πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἀποστάσεως τῶν πλευρῶν αὐτῶν, τὰ δὲ τμήματα ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΙΚ, ΚΛ,




Σχ. 83.




Σχ. 84.

ΒΝ, ΝΤ, ΡΣ κλπ. ἴσα πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῶν παραλλήλων πλευρῶν καὶ ἑνοῦμεν κατόπιν τὰ ὁρισθέντα σημεῖα, ὡς εἰς τὸ σχῆμα 83.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'

## Συμμετρία ἐν ἐπιπέδῳ

**Ἀσκήσεις** Σελὶς 103. 157. **Νὰ σχηματίσητε τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου πρὸς κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας αὐτοῦ.**

**Λύσις:** Προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 84) πέραν τοῦ Α καὶ λαμβάνομεν ΑΒ'=ΑΒ καὶ ΑΓ'=ΑΓ. Φέρομεν τὸ εὐθ. τμῆμα Β'Γ' Τὸ σχηματισθὲν τρίγωνον ΑΒ'Γ' εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ δοθέντος, ὡς πρὸς κέντρον τὴν κορυφὴν Α τῆς ὀρθῆς γωνίας αὐτοῦ. Διότι πᾶν σημεῖον τῆς ΑΒ ἔχει τὸ συμμετρικόν του ἐπὶ τῆς ΑΒ' καὶ πᾶν σημεῖον τῆς ΑΓ ἔχει τὸ συμμετρικόν του ἐπὶ τῆς ΑΓ' ὡς πρὸς κέντρον τὸ Α. Τυχὸν δὲ σημεῖον τῆς ΒΓ π.χ. τὸ Μ ἔχει τὸ συμμετρικόν του ὡς πρὸς Α ἐπὶ τῆς Β'Γ' διότι τὰ τρίγωνα ΑΒΜ καὶ ΑΒ'Μ' εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα ΑΒ=ΑΒ', γωνΜΑΒ=γωνΜ'ΑΒ' ὡς κατὰ κορυφὴν καὶ γωνΒ=γωνΒ' ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΒ'Γ'. Συνεπῶς ΑΜ=ΑΜ'. Τυχὸν δὲ σημεῖον Ν κείμενον ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἔχει τὸ συμμετρικόν του, ὡς πρὸς κεντρον Α, ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒ'Γ' διότι ἂν Ν' εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Ν, θὰ εἶναι ΑΝ=ΑΝ'. Ἐπειδὴ δὲ $ΑΝ < ΑΜ$ καὶ ΑΜ=ΑΜ' θὰ εἶναι καὶ $ΑΝ < ΑΜ'$ ἢ $ΑΝ' < ΑΜ$ καὶ ἀντιστρόφως. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒ'Γ' εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ ΑΒΓ ὡς πρὸς κέντρον Α.

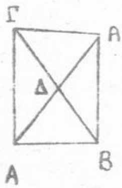
158. **Νὰ σχηματίσητε τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου πρὸς κέντρον τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης αὐτοῦ.**

**Λύσις**: Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Δ τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης αὐτοῦ (σχ. 85). Τὸ συμμετρικὸν τοῦ Β πρὸς κέντρον Δ εἶναι τὸ Γ καὶ τοῦ Γ εἶναι τὸ Β. Φέρομεν καὶ τὴν ΑΔ καὶ προεκτείνομεν αὐτὴν πέραν τοῦ Δ καὶ λαμβάνομεν τὸ εὐθ. τμῆμα ΔΑ΄=ΔΑ. Ἐὰν φέρωμεν τὰς Α΄Γ καὶ Α΄Β τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον Α΄ΒΓ εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ δοθέντος πρὸς κέντρον τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης αὐτοῦ Β. Εἶναι δὲ τοῦτο ὀρθογώνιον τρίγωνον, διότι τὸ τετράπλευρον ΑΒΑ΄Γ εἶαι ὀρθογώνιον, ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ διχοτομοῦνται καὶ εἶναι ἴσαι.

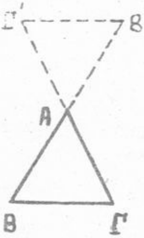
**159. Νὰ σχηματίσητε τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου πρὸς κέντρον τὴν κορυφὴν αὐτοῦ**

**Λύσις**: Ἔστω ΑΒΓ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον (σχ. 86). Προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ πέραν τοῦ Α καὶ λαμβάνομεν ΑΓ΄=ΑΓ καὶ ΑΒ΄=ΑΒ καὶ φέρομεν τὴν Β΄Γ΄ Τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒ΄Γ΄ εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ δοθέντος ὡς πρὸς κέντρον τὴν κορυφὴν Α αὐτοῦ.

**160. Νὰ ὁρίσητε ἕν σημεῖον ἐκτὸς δοθείσης εὐθείας καὶ ν' ἀποδείξητε, ὅτι τὸ συμμετρικὸν αὐτῆς πρὸς αὐτὸ εἶναι εὐθεῖα παράλληλος πρὸς αὐτήν.**




*Σχ. 85.*




*Σχ. 86.*

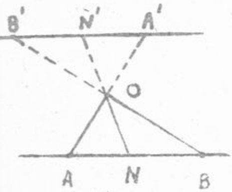
**Λύσις**: Ἔστω εὐθεῖα ΑΒ καὶ σημεῖον Ο ἐκτὸς αὐτῆς (σχ. 87). Ἄν Α΄ καὶ Β΄ εἶναι τὰ συμμετρικὰ τῶν Α καὶ Β ὡς πρὸς κέντρον Ο καὶ φέρωμεν τὴν Α΄ Β΄, σχηματίζονται τὰ τρίγωνα ΑΟΒ καὶ Α΄ΟΒ΄, τὰ ὁποῖα ἔχουσι ΟΑ=ΟΑ, ΟΒ=ΟΒ καὶ γωνΑΟΒ=γωνΑ΄ΟΒ΄ ὡς κατὰ κορυφήν. Ἄρα ταῦτα εἶναι ἴσα καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι γωνΑ=γωνΑ΄

Ἐπειδὴ δὲ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ Α΄Β τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς Α΄Α σχηματίζουσι δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας, εἶναι παράλληλοι. Τυχὸν σημεῖον Ν τῆς εὐθείας ΑΒ ἔχει τὸ συμμετρικόν του πρὸς κέντρον Ο ἐπὶ τῆς Α΄Β΄, διότι ἂν ἀχθῇ ἡ ΝΟ καὶ προεκτεινομένη τέμνει τὴν Α Β΄ εἰς τὸ Ν΄, τὰ τρίγωνα ΑΟΝ καὶ Α΄ΟΝ΄ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα ΟΑ=ΟΑ΄, γωνΑ=γωνΑ΄. ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ Α΄Β΄ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΑ΄ καὶ γωνΑΟΝ=γωνΑ΄ΟΝ΄. Ἄρα ΟΝ=ΟΝ΄. Ἀντιστρόφως πᾶν σημεῖον τῆς Α΄Β΄ ἔχει τὸ συμμετρικόν του πρὸς κέντρον Ο ἐπὶ τῆς ΑΒ. Ἄρα ἡ εὐθεῖα Α΄Β΄ εἶναι τὸ συμμετρικὸν σχῆμα τῆς ΑΒ ὡς πρὸς κέντρον Ο.

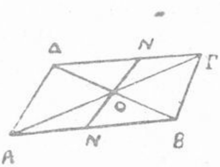
**161. Νὰ ὁρίσητε τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς παραλληλογράμμου πρὸς κέντρον τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων αὐτοῦ. Ποῖον συμπέρασμα περὶ τοῦ σημείου τούτου προκύπτει ἀπὸ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου;**

**Λύσις**: Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 88) καὶ Ο τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ αὐτοῦ. Ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ διχοτομοῦνται, ἕπεται ὅτι ἑκάστη κορυφὴ ἔχει ὡς συμμετρικὸν σημεῖον πρὸς κέντρον Ο τὴν ἀπέναντι αὐτῆς κορυφήν.

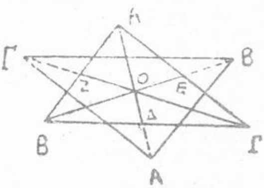
Ἂν δὲ Ν εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς περιμέτρου αὐτοῦ καὶ ἀχθῇ ἡ ΝΟ καὶ προεκτεινομένη τέμνῃ τὴν περίμετρον τοῦ παραλληλογράμμου εἰς τὸ σημεῖον Ν′, θὰ εἶναι ΟΝ=ΟΝ′, ὡς ἐξάγεται ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΟΝΓ καὶ ΟΑΝ′. Ἄρα τὸ Ν′ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Ν πρὸς κέντρον Ο. Ἑπομένως τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι συμμετρικὸν ἑαυτοῦ πρὸς κέντρον τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων του



*Σχ. 87*



*Σχ. 88.*



*Σχ. 89.*

καὶ συνεπῶς τὸ Ο εἶναι κέντρον συμμετρίας αὐτοῦ.

**162. Νὰ προεκτείνητε ἑκάστην διάμεσον τυχόντος τριγώνου πέραν τοῦ ποδὸς αὐτῆς καὶ κατὰ τμῆμα ἴσον πρὸς τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτῆς. Νὰ ἀποδείξητε δέ, ὅτι τὰ ἄκρα τῶν προεκτάσεων τούτων εἶναι κορυφαὶ τριγώνου ἴσου πρὸς τὸ πρῶτον.**

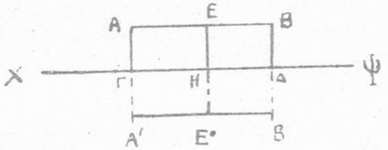
**Λύσις**: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Ο τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων αὐτοῦ (σχ. 89). Προεκτείνομεν τὰς διαμέσους ΑΔ, ΒΕ καὶ ΓΖ πέραν τῶν ποδῶν των καὶ λαμβάνομεν ΔΑ′=ΟΔ, ΕΒ′=ΟΕ καὶ ΖΓ′=ΟΖ καὶ φέρομεν τὰ εὐθ. τμήματα Α Β′, Β′Γ′ καὶ Γ′Α′.

Ἐπειδὴ $ΟΔ = \frac{1}{3}$ ΑΔ καὶ $ΔΑ' = ΟΔ = \frac{1}{3}$ ΑΔ ἕπεται, ὅτι $ΟΑ' = \frac{2}{3}$ ΑΔ. Ἐπειδὴ δὲ καὶ $ΑΟ = \frac{2}{3}$ ΑΔ, ἕπεται ὅτι ΑΟ = ΟΑ′. Ὁμοίως ΒΟ=ΟΒ′ καὶ ΟΓ=ΟΓ′. Ἄρα τὰ σημεῖα Α′, Β′, Γ′ εἶναι τὰ συμμετρικὰ τῶν σημείων Α, Β καὶ Γ πρὸς κέντρον Ο καὶ τὸ τρίγωνον Α′Β′Γ′ εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ ΑΒΓ πρὸς κέντρον Ο. Ἐπειδὴ δὲ δύο σχήματα συμμετρικὰ πρὸς κέντρον εἶναι ἴσα (§ 131) ἕπεται, ὅτι τὸ τρίγωνον Α′Β′Γ′ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΑΒΓ.

**Ἀσκήσεις**. Σελὶς 105. — **163. Νὰ γράψητε εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς δοθέντα ἄξονα καὶ νὰ ὁρίσητε τὸ συμμετρικὸν αὐτῆς πρὸς τὸν ἄξονα τοῦτον.**

**Λύσις**: Ἔστω χψ ὁ ἄξων συμμετρίας καὶ ΑΒ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς αὐτὸν (σχ. 90). Φέρομεν ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β καθέτους ἐπὶ τὸν ἄξονα συμμετρίας καὶ λαμβάνομεν ΓΑ΄=ΓΑ καὶ ΔΒ΄=ΔΒ, ὅτε τὰ σημεῖα Α΄ καὶ Β΄ εἶναι τὰ συμμετρικὰ τῶν Α καὶ Β πρὸς ἄξονα συμμετρίας χψ.

Φέρομεν καὶ τὸ εὐθ. τμῆμα Α΄Β΄. Ἐπειδὴ ΑΒ ∥ χψ, θὰ εἶναι ΑΓ=ΒΔ. Ἐπειδὴ δὲ ΓΑ΄=ΑΓ καὶ ΔΒ΄=ΒΔ θὰ εἶναι καὶ ΓΑ΄ = ΔΒ΄ καὶ παράλληλοι μεταξύ των, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν. Ἄρα τὸ τετράπλευρον ΓΑ΄Β΄Δ εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, ὡς ἔχον δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους. Συνεπῶς θὰ εἶναι καὶ Α΄Β΄ ∥ ΑΒ. Τυχὸν δὲ σημεῖον Ε τῆς ΑΒ ἔχει τὸ συμμετρικόν του ὡς

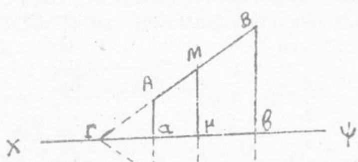


*Σχ. 90.*

πρὸς χψ ἐπὶ τῆς Α΄Β΄. Διότι ἂν ἀχθῇ ἡ ΕΕ΄ κάθετος ἐπὶ τὴν χψ θὰ εἶναι ΕΗ=ΑΓ καὶ ΗΕ΄=ΓΑ΄. Ἀλλὰ ΑΓ = Α΄Γ, ἄρα καὶ ΕΗ = ΗΕ΄ καὶ ἀντιστρόφως. Τὸ συμμετρικὸν λοιπὸν σχῆμα τῆς εὐθείας ΑΒ ∥ χψ πρὸς ἄξονα συμμετρίας χψ εἶναι μία εὐθεῖα παράλληλος πρὸς αὐτὴν καὶ εἰς ἴσην ἀπὸ τοῦ ἄξονος ἀπόστασιν.

**164. Νὰ γράψητε μίαν εὐθεῖαν μὴ παράλληλον πρὸς δοθέντα ἄξονα. Νὰ ὁρίσητε τὸ συμμετρικὸν αὐτῆς πρὸς τὸν ἄξονα τοῦτον καὶ νὰ ἀποδείξητε, ὅτι αἱ συμμετρικαὶ αὗται εὐθεῖαι τέμνουσιν αὐτὸν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον. Ἔπειτα δὲ νὰ συγκρίνητε τὰς γωνίας τῶν εὐθειῶν τούτων μὲ τὸν ἄξονα.**

**Λύσις**: Ἔστω ΑΒ (σχ. 91) μία εὐθεῖα μὴ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας χψ. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ συμμετρικὸν σχῆμα τῆς εὐθείας ΑΒ, ἀρκεῖ νὰ ὁρίσωμεν τὰ συμμετρικὰ σημεῖα δύο σημείων αὐτῆς. Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως ἡ εὐθεῖα ΑΒ δὲν εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας χψ, ἕπεται, ὅτι προεκτεινομένη θὰ τέμνῃ αὐτὸν εἴς τι σημεῖον Γ. Τὸ συμμετρικὸν τοῦ σημείου Γ εἶναι πάλιν τὸ Γ, διότι τοῦτο κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος συμμετρίας. Ἂν δὲ Β΄ εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Β, τότε ἡ εὐθεῖα Β΄Γ εἶναι τὸ συμμετρικὸν σχῆμα τῆς ΑΒ ὡς πρὸς χψ.



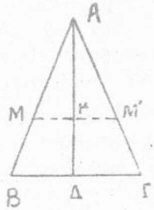
*Σχ. 91.*

Πράγματι ἄν Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς ΑΒ, θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ πρὸς ἄξονα χψ κεῖται ἐπὶ τῆς Β'Γ.

Φέρομεν ἐκ τοῦ Μ τὴν ΜΜ' κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα χψ. Αὕτη θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΒ', ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν χψ. Τὸ τρίγωνον ΓΒΒ' εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἡ ΓΒ εἶναι ὕψος καὶ διάμεσος αὐτοῦ, ἐπομένως γωνβΓΒ=γωνβΓΒ'. Ἐπομένως καὶ τὸ τρίγωνον ΜΓΜ' εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἡ Γμ εἶναι διχοτόμος καὶ ὕψος αὐτοῦ καὶ θὰ εἶναι καὶ διάμεσος ἤτοι Μμ=μΜ'. Ἐπειδὴ ἡ ΜΜ'⊥χψ καὶ διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς χψ, ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον Μ' εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Μ πρὸς ἄξονα συμμετρίας χψ. Ἐπειδὴ δὲ πᾶν σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ ἔχει τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα χψ ἐπὶ τῆς Α'Β', ἕπεται ὅτι ἡ Α'Β' εἶναι τὸ συμμετρικὸν σχῆμα αὐτῆς πρὸς ἄξονα χψ. Τέμνουσι δὲ αὗται τὸν ἄξονα χψ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Γ καὶ σχηματίζουσιν ἴσας γωνίας μὲ αὐτόν.

**165. Νὰ ἀποδείξητε, ὅτι τὸ ὕψος ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ.**

**Λύσις:** Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 92) καὶ ΑΔ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ ὕψος ΑΔ εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι πᾶν σημεῖον τῆς περιμέτρου αὐτοῦ ἔχει τὸ συμμετρικόν του πρὸς ἄξονα ΑΔ ἐπὶ τῆς περιμέτρου τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου.



*Σχ. 92.*

Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς τὸ ὕψος ΑΔ αὐτοῦ διχοτομεῖ τὴν βάσιν ἤτοι ΒΔ = ΔΓ καὶ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Β εἶναι τὸ σημεῖον Γ. Ἄν δὲ Μ εἶναι τυχὸν ἄλλο σημεῖον τῆς περιμέτρου αὐτοῦ καὶ φέρωμεν τὴν ΜΜ' κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΔ, θὰ εἶναι αὕτη παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ καὶ ἐπομένως τὸ τρίγωνον ΑΜΜ' θὰ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ συνεπῶς Μμ=μΜ'. Ἐπειδὴ δὲ τὸ συμμετρικὸν Μ' τυχόντος σημείου Μ τῆς περιμέτρου τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ πρὸς ἄξονα τὸ ὕψος αὐτοῦ ΑΔ εἶναι σημεῖον τῆς ἰδίας περιμέτρου, ἕπεται ὅτι τὸ ὕψος ΑΔ αὐτοῦ εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η'.

### α') Θέσις εὐθείας πρὸς κύκλον

**Ἀσκήσεις. σελ. 108.—166. Νὰ γράψητε τὴν ἐφαπτομένην περιφερείας εἰς ὡρισμένον σημεῖον αὐτῆς.**

**Λύσις:** Ἔστω Κ ἡ δοθεῖσα περιφέρεια καὶ Γ σημεῖον αὐτῆς (σχ. 101 Θ. Γ.). Γνωρίζομεν, ὅτι ἡ κάθετος ἐπὶ μίαν ἀκτῖνα εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ΚΓ καὶ κατόπιν κάθετον ἐπ' αὐτὴν εἰς τὸ σημεῖον Γ.

Διὰ νά φέρωμεν τὴν κάθετον εἰς τὸ σημεῖον Γ ἐπὶ τὴν ΚΓ προεκτείνομεν αὐτὴν κατὰ μῆκος ΓΚ' ἴσον πρὸς ΚΓ καὶ φέρομεν τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΚΚ', κατὰ τὸ πρόβλημα § 68.

**167. Νὰ γράψητε μίαν διάμετρον κύκλου καὶ τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς. Νὰ ἐξετάσητε δὲ ἂν αὗται τέμνωνται ἢ εἶναι παράλληλοι.**

**Λύσις:** Διὰ νὰ γράψωμεν τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου θὰ φέρωμεν τὰς καθέτους ἐπ' αὐτὴν καὶ εἰς τὰ ἄκρα τῆς. Αὗται θὰ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

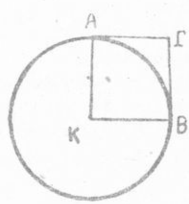
**168. Νὰ καθορίσητε τὴ θεσιν τῆς βάσεως ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου πρὸς τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία γραφεται μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν καὶ ἀκτῖνα τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου τούτου.**

**Λύσις:** Ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια, ἥτις θὰ γραφῇ, θὰ ἔχῃ ἀκτῖνα τὸ ὕψος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἡ δὲ βάσις αὐτοῦ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα καὶ εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς, θὰ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς ἐν λόγῳ περιφερείας.

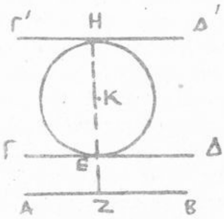
**169. Νὰ γράψητε δύο καθέτους ἀκτῖνας ἑνὸς κύκλου καὶ τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν. Νὰ εὕρητε δὲ τὸ μέτρον τῆς γωνίας τῶν ἐφαπτομένων τούτων.**

**Λύσις:** Ἔστω Κ ὁ κύκλος (σχ. 93) καὶ ΚΑ, ΚΒ δύο κάθετοι ἀκτῖνες αὐτοῦ.

Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας Κ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ



*Σχ. 93.*



*Σχ. 94.*

Β αὐτῆς. Αὗται θὰ τέμνωνται εἴς τι σημεῖον Γ. Ἐπειδὴ ΑΓ⊥ΚΑ καὶ ΚΒ⊥ΚΑ, θὰ εἶναι ΑΓ ∥ ΚΒ. Δι' ὅμοιον λόγον θὰ εἶναι καὶ ΒΓ ∥ ΚΑ καὶ τὸ τετράπλευρον ΚΑΓΒ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ὀρθογώνιον, διότι Κ=1 ὀρθ. Ἄρα καὶ Γ=1 ὀρθὴ=90°.

**170. Νὰ γράψητε εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν ἐφαπτομένην παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.**

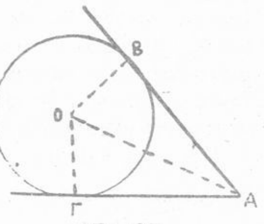
**Λύσις:** Ἔστω ἡ περιφέρεια Κ καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 94). Ζητεῖται νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας Κ παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Πρὸς τοῦτο φέρομεν ἐκ τοῦ κέντρου αὐτῆς Κ κάθετον ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τὴν ΚΖ, ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν Κ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Η. Εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Η φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας αὐτῆς ΓΔ καὶ Γ′ Δ′. Αὗται θὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΗΖ.

**171. Εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν νὰ γράψητε δύο πλαγίας ἀκτῖνας καὶ τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν. Νὰ εὕρητε δὲ ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῆς γωνίας τῶν ἐφαπτομένων τούτων καὶ τῆς γωνίας τῶν ἀκτίνων.**

**Λύσις**: Ἔστω ἡ περιφέρεια Ο, δύο πλάγιαι ἀκτῖνες αὐτῆς ΟΒ καὶ ΟΓ καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν ΒΑ καὶ ΓΑ (σχ. 95).

Τοῦ τετραπλεύρου ΒΟΓΑ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν του εἶναι 4 ὀρθαί.

Ἐπειδὴ ὅμως Β + Γ = 2 ὀρθαί, ἕπεται ὅτι καὶ Ο + Α = 2 ὀρθαί. Ἄρα αἱ γωνίαι τῶν ἀκτίνων ΟΒ, ΟΓ καὶ τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν εἶναι παραπληρωματικαί.



*Σχ. 95*

## β′) Θέσις δύο μὴ ὁμοκέντρων περιφερειῶν

Σελὶς 109. § 140. **Πόρισμα I. Δύο περιφέρειαι δὲν δύνανται νὰ ἔχωσι τρία κοινὰ σημεῖα.**

**Ἀπόδειξις**: Διότι, ἂν αἱ δύο περιφέρειαι εἶχον τρία κοινὰ σημεῖα, θὰ συνέπιπτον καὶ θὰ ἀπετέλουν μίαν μόνην περιφέρειαν.

**Ἀπόδειξις τῶν ἀντιστρόφων θεωρημάτων § 150.**

**1. Ἂν Ρ — ρ < ΚΛ < Ρ + ρ αἱ περιφέρειαι τέμνονται.**

**Ἀπόδειξις**: Διότι, ἄν αἱ περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἐντὸς ἢ ἐκτὸς θὰ εἶναι Ρ  ρ = ΚΛ ἢ Ρ + ρ = ΚΛ, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

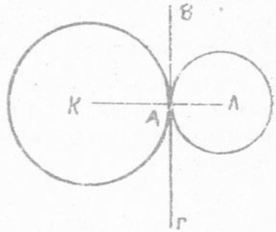
Ἂν αἱ περιφέρειαι δὲν ἔχωσιν οὐδὲν κοινὸν σημεῖον καὶ κεῖται ἡ μία ἐκτὸς τῆς ἄλλης, θὰ εἶναι ΚΛ > Ρ + ρ, ὅπερ ἄτοπον διότι ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν ἢ ΚΛ < Ρ — ρ, ἄν ἡ μία κεῖται ἐντὸς τῆς ἄλλης, ὅπερ ἐπίσης ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἄρα τέμνονται.

**2. Ἂν ΚΛ = Ρ + ρ, αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐκτός.**

**Ἀπόδειξις**: Διότι, ἄν ἐφήπτοντο ἐντὸς θὰ ἦτο ΚΛ = Ρ — ρ, ὅπερ ἄτοπον, διότι ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἂν ἐτέμνοντο, θὰ ἦτο Ρ — ρ < ΚΛ < Ρ + ρ, ὅπερ ἄτοπον, διότι ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἂν δὲν εἶχον κανὲν κοινὸν σημεῖον θὰ ἦτο ΚΛ > Ρ + ρ, ἢ ΚΛ < Ρ + ρ, ὅπερ καὶ πάλιν ἄτοπον. Ἄρα αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐκτὸς κ. ο. κ.

**Ἀσκήσεις** σελὶς 114. **172. Νὰ γράψητε δύο ἐφαπτομένας περιφερείας καὶ νὰ φέρητε ἀπὸ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς εὐθεῖαν ἐφαπτομένην τῆς μιᾶς. Νὰ ἀποδείξητε δέ, ὅτι αὕτη ἐφάπτεται καὶ τῆς ἄλλης.**

**Λύσις**: Ἔστωσαν Κ καὶ Λ δύο ἐφαπτόμεναι περιφέρειαι ἐξωτερικῶς καὶ Α τὸ σημεῖον ἐπαφῆς αὐτῶν (σχ. 96). Φέρομεν καὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας Κ εἰς τὸ σημεῖον Α, τὴν ΑΒ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αὕτη ἐφάπτεται εἰς τὸ Α καὶ τῆς περιφερείας Λ. Ἐπειδὴ αἱ περιφέρειαι Κ καὶ Λ ἔχουσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον Α, τοῦτο θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς διακέντρου αὐτῶν ἤτοι ἡ ΚΑΛ εἶναι εὐθεῖα γραμμή. Ἡ ΓΑΒ, ὡς ἐφαπτομένη τῆς Κ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΛ εἰς τὸ σημεῖον Α. Ὡς κάθετος δὲ ἐπὶ τὴν ΛΑ καὶ εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς, θὰ εἶναι ἐφαπτομένη καὶ τῆς περιφερείας Λ εἰς τὸ σημεῖον Α δηλ. κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν δύο περιφερειῶν. Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ ἄν αἱ περιφέρειαι Κ καὶ Λ ἐφάπτωνται ἐσωτερικῶς.



*Σχ. 96.*

**173. Νὰ ὁρίσητε τὴν ἀμοιβαίαν θέσιν δύο περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι γράφονται μὲ κέντρα Α καὶ Β καὶ ἀκτῖνα $\frac{AB}{2}$.**

**Λύσις:** Ἡ διάκεντρος τῶν περιφερειῶν τούτων εἶναι ἡ ΑΒ.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων αὐτῶν εἶναι $\frac{AB}{2} + \frac{AB}{2} = AB$ καὶ ἰσοῦται μὲ τὴν διάκεντρον, αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐξωτερικῶς.

**174. Μὲ κέντρα Α καὶ Β καὶ ἀκτῖνα μεγαλυτέραν τοῦ $\frac{AB}{2}$ γράφομεν δύο περιφερείας. Νὰ καθορίσητε τὴν ἀμοιβαίαν θέσιν αὐτῶν. Ἔπειτα δὲ νὰ ἐξετάσητε μήπως καὶ μὲ τὴν βοήθειαν τῶν περιφερειῶν τούτων δυνάμεθα νὰ λύσωμεν ἓν γνωστὸν πρόβλημα.**

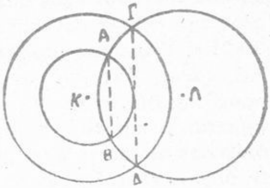
**Λύσις:** Ἄν καλέσωμεν Ρ τὴν ἀκτῖνα τῶν περιφερειῶν, τὰς ὁποίας γράφομεν μὲ κέντρα Α καὶ Β, θὰ ἔχωμεν $Ρ > \frac{AB}{2}$ καὶ συνεπῶς $Ρ + Ρ > AB$ καὶ $Ρ - Ρ = 0$. Ἐπειδὴ δὲ $0 < AB < Ρ + Ρ$, αἱ ἐν λόγῳ περιφέρειαι θὰ τέμνωνται.

Ἐπειδὴ δὲ πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος § 68 ἐγράψαμεν τὴν κοινὴν χορδὴν τῶν περιφερειῶν (Α,ΑΒ) καὶ (Β,ΑΒ), ἕπεται ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ὅτι δυνάμεθα νὰ καθορίσωμεν τὴν κοινὴν χορδήν, ἄν λάβωμεν ὡς ἀκτῖνα οὐχὶ τὴν ΑΒ, ἀλλὰ ἁπλῶς μεγαλυτέραν τοῦ ἡμίσεος αὐτῆς.

**175. Νὰ γράψητε μίαν περιφέρειαν Κ καὶ νὰ ὁρίσητε ἐπ αὐτῆς σημεῖον Α. Νὰ γράψητε δὲ περιφέρειαν ἐφαπτομένην ταύτης εἰς τὸ Α καὶ νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν διάμετρον τῆς Κ.**

**Λύσις:** Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΚΑ καὶ προεκτείνομεν αὐτὴν πέραν τοῦ Α κατὰ μῆκος ΑΛ ἴσον πρὸς τὴν διάμετρον τῆς Κ. Ἔπειτα μὲ κέντρον Λ καὶ ἀκτῖνα ΛΑ γράφομεν περιφέρειαν. Αὕτη θὰ ἐφάπτεται τῆς Κ εἰς τὸ σημεῖον Α, διότι ἡ διάκεντρος ΚΛ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων ΚΑ καὶ ΛΑ, ἔχει δὲ καὶ ἀκτῖνα ΛΑ ἴσην πρὸς τὴν διάμετρον τῆς Κ ἐκ κατασκευῆς.

**176. Νὰ γράψητε δύο ὁμοκέντρους περιφερείας καὶ τρίτην τέμνουσαν αὐτάς. Ἔπειτα νὰ γράψητε τὰς κοινὰς χορδὰς ταύτης καὶ ἑκάστης τῶν πρώτων. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι αὗται εἶναι παράλληλοι.**



*Σχ. 97.*

**Λύσις**: Ἔστω Κ τὸ κέντρον τῶν ὁμοκέντρων περιφερειῶν καὶ Λ τρίτη περιφέρεια τέμνουσα τὰς ὁμοκέντρους εἰς τὰ σημεῖα Α, Β καὶ Γ, Δ (σχ. 97). Φέρομεν τὰς κοινὰς χορδὰς ΑΒ καὶ ΓΔ. Αὗται θὰ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΚΛ. (Νά χαραχθῇ εἰς τὸ σχῆμα 97 ἡ εὐθεῖα ΚΛ).

**Ἀσκήσεις** σελ. 115.—**177. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον μὲ πλευρὰς 3 ἑκατ., 4 ἑκατ., 5 ἑκατ.**

**Λύσις**: Λαμβάνομεν τμῆμα ΒΓ ἴσον πρὸς 5 ἑκατ. Μὲ κέντρα τὰ ἄκρα αὐτοῦ Β καὶ Γ καὶ ἀκτῖνας ἴσας πρὸς 3 ἑκατ. καὶ 4 ἑκατ. γράφομεν περιφερείας κύκλων. Αὗται τέμνονται ἐν γένει εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Α΄. Φέρομεν τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ, ὅτε τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Αἱ γραφεῖσαι περιφέρειαι τέμνονται, διότι $5<3+4$ ἤτοι ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

**178. Νὰ κατασκευάσητε ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ βάσιν 5 ἑκατ. καὶ 8 ἑκατ. ἑκάστην τῶν ἄλλων πλευρῶν.**

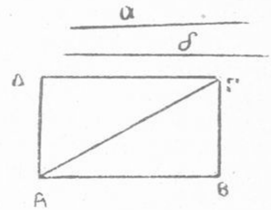
**Λύσις**: Λαμβάνομεν εὐθ. τμῆμα ΒΓ=5 ἑκατ. Μὲ κέντρα τὰ ἄκρα αὐτοῦ Β καὶ Γ καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς 8 ἑκατ. γράφομεν δύο περιφερείας. Αὗται θὰ τέμνωνται, ἐπειδὴ ἡ διάκεντρος εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων καὶ μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν, εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Α΄. Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΒΑ καὶ ΓΑ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον.

**179. Εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν ἀκτῖνος 6 ἑκατ. νὰ ἐγγράψητε ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ βάσιν 4 ἑκατ.**

**Λύσις**: Εἰς τὸν κύκλον ἀκτῖνος 6 ἑκατ. λαμβάνομεν χορδὴν ΒΓ ἴσην μὲ 4 ἑκατ. Φέρομεν τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΒΓ, ἥτις θὰ τέμνῃ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Α΄. Ἑνοῦμεν ταῦτα μὲ τὰ ἄκρα Β καὶ Γ τῆς χορδῆς ΒΓ διὰ τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΒ, ΑΓ, Α΄Β, Α΄Γ. Τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄ΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένα καὶ ἰσοσκελῆ, διότι οἱ πόδες Β καὶ Γ ἀπέχουσιν ἴσον τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΒΓ. Ἐπειδὴ δὲ ταῦτα δὲν εἶναι ἴσα, λέγομεν ὅτι τὸ πρόβλημά μας ἔχει δύο λύσεις.

**180. Νὰ κατασκευάσητε ὀρθογώνιον ἀπὸ μίαν πλευρὰν καὶ ἀπὸ τὴν διαγώνιον αὐτοῦ.**

**Λύσις**: Ἔστω α ἡ δοθεῖσα πλευρὰ καὶ δ ἡ διαγώνιος τοῦ ζητουμένου νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογωνίου (σχ. 98). Κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον μίαν κάθετον πλευράν, τὴν ΑΒ=α καὶ ὑποτείνουσαν ΑΓ=δ. Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, καθὼς καὶ ἐκ τοῦ Α παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ. Αὗται θὰ τέμνωνται εἰς τὸ σημεῖον Δ καὶ τὸ παρ/μον ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνιον, διότι ἔχει μίαν γωνίαν, τὴν Β, ὀρθήν, εἶναι δὲ καὶ τὸ ζητούμενον, διότι ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα α καὶ δ.




*Σχ. 98.*

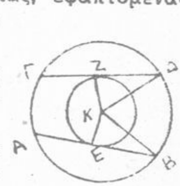
Ἵνα τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν, πρέπει νὰ δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Πρὸς τοῦτο πρέπει α<δ.

## Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τῶν Ζ΄ καὶ Η΄ κεφαλαί

**181. Νὰ γράψητε δύο ὁμοκέντρους περιφερείας καὶ δύο χορδὰς τῆς ἐξωτερικῆς, αἱ ὁποῖαι νὰ ἐφάπτωνται τῆς ἐσωτερικῆς. Ἔπειτα δὲ νὰ συγκρίνητε τὰς χορδὰς ταύτας.**

**Λύσις**: Ἔστωσαν δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι μὲ κέντρον Κ (σχ. 99) καὶ δύο χορδαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας, ἐφαπτόμεναι τῆς ἐσωτερικῆς εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Ζητεῖται νὰ συγκριθῶσιν αὗται.

Πρὸς τοῦτο φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΚΔ, ΚΒ τῆς ἐξωτερικῆς καὶ τὰς ἀκτῖνας ΚΖ καὶ ΚΕ τῆς ἐσωτερικῆς.



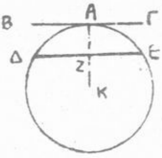

*Σχ. 99.*

Τὰ σχηματισθέντα ὀρθογώνια τρίγωνα ΚΕΒ καὶ ΚΖΔ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι τὰς ὑποτεινούσας των ΚΒ καὶ ΚΔ ἴσας, ὡς ἀκτῖνας τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας καὶ τὰς καθέτους των πλευρὰς ΚΖ καὶ ΚΕ ἴσας, ὡς ἀκτῖνας τῆς ἐσωτερικῆς περιφερείας. Ἄρα θὰ ἔχωσι καὶ ΕΒ=ΖΔ. Ἀλλὰ ΚΖ⊥ΓΔ, ὡς ἀκτὶς καταλήγουσα εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς καὶ ΚΕ⊥ΑΒ δι᾽ ὅμοιον λόγον. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου κάθετος ἐπὶ χορδὴν διχοτομεῖ ταύτην, θὰ εἶναι ΓΖ=ΖΔ καὶ ΑΕ=ΕΒ ἢ ΑΒ=2.ΕΒ καὶ ΓΔ=2.ΖΔ. Ἐπειδὴ δὲ ΕΒ=ΖΔ, θὰ εἶναι καὶ τὰ διπλάσια αὐτῶν ἴσα ἤτοι ΑΒ=ΓΔ.

Ὥστε: *Αἱ χορδαὶ τῆς ἐξωτερικῆς, αἱ ἐφαπτόμεναι τῆς ἐσωτερικῆς εἶναι ἴσαι.*

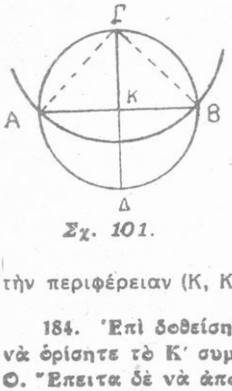
**182. Εἰς μίαν περιφέρειαν νὰ γράψητε μίαν ἐφαπτομένην καὶ μίαν χορδὴν παράλληλον πρὸς αὐτήν. Νὰ ἀποδείξητε δέ, ὅτι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς διχοτομεῖ τὸ ἀντίστοιχον πρὸς την χορδὴν τόξον.**

**Λύσις:** Ἔστω ἡ περιφέρεια Κ (σχ. 100) καὶ ἡ ΒΓ ἐφαπτομένη αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ ἡ χορδὴ ΔΕ ∥ ΒΓ. Θὰ δείξωμεν ὅτι τόξΔΑ=τόξΑΕ. Ἐὰν ἀχθῇ ἡ ἀκτὶς ΚΑ, αὕτη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, συνεπῶς καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλον πρὸς αὐτὴν χορδὴν ΔΕ. Ὡς κάθετος δὲ ἐπὶ τὴν χορδὴν ἐκ τοῦ κέντρου Κ, θὰ διχοτομῇ τὸ ἀντίστοιχον τόξον εἰς τὴν χορδὴν ἤτοι τόξΔΑ = τόξΑΕ.




*Σχ. 100.*

**183. Εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν νὰ γράψητε δύο καθέτους διαμέτρους ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἔπειτα νὰ γράψητε τὴν περιφέρειαν (Γ, ΓΑ), νὰ καθορίσητε τὴν θέσιν τῶν δύο τούτων περιφερειῶν καὶ τὸν λόγον, διὰ τὸν ὁποῖον ἔχουσι τὴν θέσιν ταύτην.**

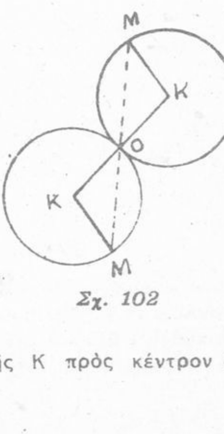



*Σχ. 101.*

**Λύσις:** Ἔστω ἡ περιφέρεια Κ (σχ. 101) καὶ δύο κάθετοι διάμετροι αὐτῆς ΑΒ καὶ ΓΔ. Μὲ κέντρον Γ καὶ ἀκτῖνα ΓΑ γράφομεν περιφέρειαν. Αὕτη θὰ τέμνῃ τὴν περιφέρειαν Κ, διότι ἡ διάκεντρος ΚΓ, ὡς πλευρὰ τοῦ τριγώνου ΑΚΓ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν. Ἐπειδὴ δὲ ΓΑ = ΓΒ, διότι ΚΑ = ΚΒ θὰ διέλθῃ αὕτη καὶ διά τοῦ σημείου Β καὶ ἐπομένως ἡ περιφέρεια (Γ, ΓΑ) θὰ διχοτομῇ τὴν περιφέρειαν (Κ, ΚΑ).

**184. Ἐπὶ δοθείσης περιφερείας Κ νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον Ο καὶ νὰ ὁρίσητε τὸ Κ′ συμμετρικὸν τοῦ Κ πρὸς κέντρον συμμετρίας τὸ Ο. Ἔπειτα δὲ νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὸ συμμετρικὸν τυχόντος σημείου Μ τῆς περιφερείας Κ, εἶναι σημεῖον τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει κέντρον Κ′ καὶ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Κ.**

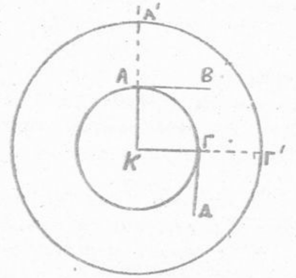
**Λύσις:** Ἔστω Κ (σχ. 102) ἡ δοθεῖσα περιφέρεια καὶ Ο τυχὸν σημεῖον αὐτῆς. Φέρομεν τὴν ΚΟ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς λαμβάνομεν ΟΚ′=ΟΚ, ὅτε τὸ Κ′ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Κ πρὸς κέντρον Ο. Ἔστω ἤδη Μ τυχὸν ἄλλο σημεῖον τῆς περιφερείας Κ καὶ Μ′ τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ πρὸς κέντρον Ο. Τὰ τρίγωνα ΟΚΜ καὶ ΟΚ′Μ′ ἔχουσιν ΟΚ = ΟΚ′, ΟΜ = ΟΜ′ καὶ γων ΜΟΚ = γων Μ′ΟΚ′, ὡς κατὰ κορυφήν. Ἄρα εἶναι ἴσα καὶ συνεπῶς Κ′Μ′=ΚΜ. Ἂν λοιπὸν μὲ κέντρον Κ′ καὶ ἀκτῖνα, τὴν ἀκτῖνα τῆς δοθείσης γράψωμεν περιφέρειαν, αὕτη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Μ′ καὶ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν καὶ ἐπ᾽ αὐτῆς θὰ κεῖνται πάντα τὰ συμμετρικὰ σημεῖα τῆς Κ πρὸς κέντρον Ο.




*Σχ. 102*

**185. Εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν Κ νὰ φέρητε διαφόρους ἐφαπτομένας καὶ νὰ ὁρίσητε τὸ συμμετρικὸν τοῦ Κέντρου Κ πρὸς ἑκάστην τούτων. Νὰ ἀποδείξητε δέ, ὅτι ὅλα τὰ συμμετρικὰ ταῦτα κεῖνται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας.**

**Λύσις:** Ἔστω ἡ περιφέρεια Κ (σχ. 103) καὶ ἐφαπτόμεναι αὐτῆς

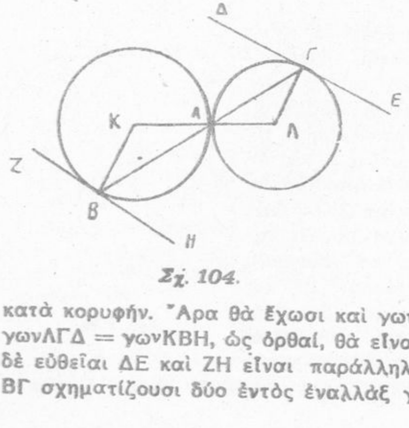



*Σχ. 103.*

εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Γ, αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ. Διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὰ συμμετρικὰ σημεῖα τοῦ Κ, ὡς πρὸς τὰς ἐφαπτομένας, φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΚΑ καὶ ΚΓ εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς Α καὶ Γ καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων αὐτῶν λαμβάνομεν τὰ τμήματα ΑΑ' καὶ ΓΓ' ἴσα πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς δοθείσης περιφερείας Κ. Τὰ σημεῖα Α', Γ' κ.τ.λ., τὰ συμμετρικὰ τοῦ Κ ὡς πρὸς τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας Κ ἀπέχουν ἀπὸ τὸ Κ ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς ἀκτῖνος τῆς δοθείσης περιφερείας. Κεῖνται ἄρα ἐπὶ περιφερείας ὁμοκέντρου τῆς δοθείσης καὶ ἐχούσης ἀκτῖνα διπλασίαν αὐτῆς.

**186. Νὰ γράψητε δύο ἐφαπτομένας περιφερείας καὶ διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς νὰ γράψητε εὐθεῖαν τέμνουσαν τὰς περιφερείας ταύτας. Ἔπειτα νὰ φέρητε ἐφαπτομένην ἑκάστης περιφερείας ἀπὸ τὸ ἐπ' αὐτῆς ἄκρον τῆς τεμνούσης καὶ νὰ ἀποδείξητε, ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι αὗται εἶναι παράλληλοι.**

**Λύσις:** Ἔστωσαν αἱ περιφέρειαι Κ καὶ Λ (σχ. 104) ἐφαπτόμεναι ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ ΒΑΓ μία τέμνουσα αὐτὰς ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ



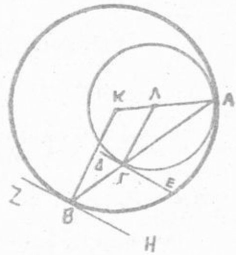

*Σχ. 104.*

καὶ διερχομένη διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς αὐτῶν Α. Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΔΕ καὶ ΖΗ εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ.

Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΔΕ ∥ ΖΗ. Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΚΒ, ΛΓ εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς, καθὼς καὶ τὴν ΚΛ. Τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα ΚΑΒ καὶ ΛΑΓ εἶναι ἰσοσκελῆ καὶ ἔχουσι καὶ γων ΚΑΒ = γων ΛΑΓ, ὡς κατὰ κορυφήν. Ἄρα θὰ ἔχωσι καὶ γωνΚΒΑ=γωνΛΓΑ. Ἐπειδὴ ὅμως γωνΛΓΔ = γωνΚΒΗ, ὡς ὀρθαί, θὰ εἶναι καὶ γωνΑΒΗ = γωνΔΓΑ. Αἱ δὲ εὐθεῖαι ΔΕ καὶ ΖΗ εἶναι παράλληλοι, ἐπειδὴ τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΒΓ σχηματίζουσι δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας.

Ἂν αἱ δοθεῖσαι περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἐσωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α (σχ. 105) καὶ ΑΓΒ εἶναι ἡ τέμνουσα, τὰ τρίγωνα ΑΚΒ καὶ ΑΛΓ εἶναι ἰσοσκελῆ καὶ ἔχουσι κοινὴν τὴν γωνίαν αὐτῶν Α. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ γων ΛΓΑ=γων ΚΒΑ καὶ συνεπῶς ΓΛ ∥ ΚΒ.

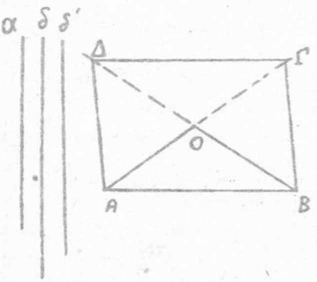
Ἐπειδὴ δὲ ΔΕ⊥ΛΓ θὰ εἶναι ἡ ΔΕ κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλον τῆς ΛΓ, τὴν ΚΒ. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ΖΗ⊥ΚΒ θὰ εἶναι ΔΕ ∥ ΖΗ, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΚΒ.




Σχ. 105.

**187. Νὰ κατασκευάσητε παραλληλόγραμμον ἀπὸ μίαν πλευρὰν καὶ ἀπὸ τὰς διαγωνίους του.**

**Λύσις** Κατασκευάζομεν τρίγωνον ΑΟΒ (σχ. 106) ἔχον πλευρὰς τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν τοῦ παρ/μου καὶ τὰ ἡμίση τῶν δοθεισῶν διαγωνίων (πρόβλημα § 151).

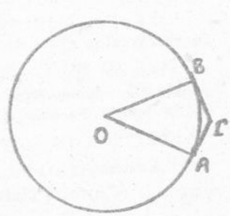



Σχ. 106.

Προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς αὐτοῦ ΑΟ καὶ ΒΟ καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λαμβάνομεν ΟΓ = ΑΟ καὶ ΟΔ = ΟΒ. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ διχοτομοῦνται ἐκ κατασκευῆς καὶ τὸ ζητούμενον, διότι ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα ἤτοι τὴν $AB = \alpha$, τὴν $A\Gamma = 2 . AO = 2 . \frac{\delta}{2} = \delta$ καὶ $B\Delta = 2 . BO = 2 . \frac{\delta'}{2} = \delta'$

Ἵνα εἶναι δυνατὴ ἡ κατασκευὴ τοῦ παρ/μου πρέπει νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ κατασκευὴ τοῦ τριγώνου ΟΑΒ ἤτοι πρέπει $OB - OA < AB < OA + OB$ ἢ $\frac{\delta - \delta'}{2} < \alpha < \frac{\delta + \delta'}{2}$ ἢ $\delta - \delta' < 2\alpha < \delta + \delta'$.

**188. Νὰ κατασκευάσητε μίαν ἐπίκεντρον γωνίαν 45° καὶ νὰ φέρητε ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας εἰς τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς περιφερείας καὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας. Νὰ ὑπολογίσητε δὲ τὴν γωνίαν τῶν ἐφαπτομένων τούτων.**




Σχ. 107.

**Λύσις:** Ἔστωσαν ΒΓ καὶ ΑΓ αἱ ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας Ο (σχ. 107) εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Β τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ΑΟΒ = 45°. Ζητεῖται τὸ μέτρον τῆς γωνίας Γ. Ἐπειδὴ ἐκ τοῦ τετραπλεύρου ΑΟΒΓ ἔχομεν $A + O + B + \Gamma = 4$ ὀρθαὶ καὶ $A + B = 2$ ὀρθαί, θὰ εἶναι καὶ $O + \Gamma = 2$ ὀρθαὶ ἢ $45^\circ + \Gamma = 180^\circ$ καὶ $\Gamma = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

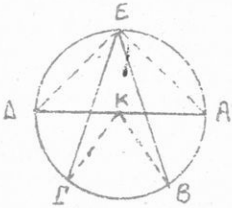
## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ΄.

# 'Εγγεγραμμέναι γωνίαι—'Εγγεγραμμένα καὶ περιγεγραμμένα εὐθύγραμμα σχήματα

Σελίς 118. **Πόρισμα Ι. Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, ἐπὶ ἴσων τόξων βαίνουσιν ἴσαι ἐγγεγραμμέναι γωνίαι.**

"Εστω ὁ κύκλος Κ. (σχ. 108) καὶ ΑΒ, ΓΔ δύο ἴσα τόξα αὐτοῦ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι ΒΕΑ καὶ ΓΕΔ, αἱ ὁποῖαι βαίνουσιν ἐπὶ τῶν ἴσων τούτων τόξων εἶναι ἴσαι.

**'Απόδειξις:** 'Αφοῦ εἶναι τόξ ΑΒ=τόξΓΔ, θὰ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι αἱ βαίνουσαι ἐπὶ τῶν ἴσων τούτων τόξων ἤτοι γωνΑΚΒ=γωνΓΚΔ. 'Επειδὴ δὲ γωνΒΕΑ= $=\frac{\text{γωνΑΚΒ}}{2}$ (1) καὶ γωνΓΕΔ=γων $\frac{\text{ΓΚΔ}}{2}$ (2) καὶ τὰ β' μέλη τῶν (1) καὶ (2) εἶναι ἴσα, ὡς ἡμίση ἴσων καὶ τὰ α' μέλη αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσα ἤτοι γωνΑΕΒ=γωνΓΕΔ.



*Σχ. 108*

**'Αντιστρόφως: "Ισαι ἐγγεγραμμέναι γωνίαι βαίνουσιν ἐπὶ ἴσων τόξων.**

Διότι, ἂν γωνΑΕΒ=γωνΓΕΔ, θα εἶναι καὶ γωνΑΚΒ= =γωνΓΚΔ, ὡς διπλάσιαι τῶν ἴσων ἐγγεγραμμένων γωνιῶν. 'Επειδὴ δὲ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι βαίνουσιν ἐπὶ ἴσων τόξων θὰ εἶναι καὶ τόξΑΒ=τόξΓΔ.

**Πόρισμα ΙΙ "Αν μία ἐγγεγραμμένη γωνία βαίνη ἐπὶ ἡμιπεριφερείας εἶναι ὀρθή.**

"Εστω ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΑΕΔ (σχ. 108) βαίνουσα ἐπὶ ἡμιπεριφερείας. 'Η ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος γωνία αὐτῆς εἶναι ἡ ΑΚΔ, ἥτις ἔχει τὰς πλευράς τη ἐπ' εὐθείας καὶ συνεπῶς εἶναι 180°. 'Η ἐγγεγραμμένη ΑΕΔ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου, ἡ ὁποία βαίνει εἰς τὸ αὐτὸ τόξον. "Αρα εἶναι $\frac{180^\circ}{2}=90^\circ$ δηλ. ὀρθή.

**Πόρισμα ΙΙΙ. "Αν μία ἐγγεγραμμένη γωνία βαίνη ἐπὶ τόξου μικροτέρου ἡμιπεριφερείας εἶναι ὀξεῖα.**

**'Απόδειξις:** 'Αφοῦ ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΑΕΒ (σχ. 108) βαίνη ἐπὶ τόξου μικροτέρου τῆς ἡμιπεριφερίας, ἡ ἀντίστοιχος πίκεντρος ΑΚΒ θὰ εἶναι μικροτέρα τῶν δύο ὀρθῶν καὶ συνεπῶς ἡ ἐγγεγραμμένη μικροτέρα τῆς 1 ὀρθῆς δηλ. ὀξεῖα.

**Πόρισμα IV. "Αν μια ἐγγεγραμμένη γωνία βαίνη ἐπὶ τόξου μεγαλυτέρου ἡμιπεριφερείας εἶναι ἀμβλεῖα.**

"Εστω ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΒΑΓ (σχ. 111 α. Θ. Γ.) βαίνουσα ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΔΓ μεγαλυτέρου ἡμιπεριφερείας. 'Αντίστοιχος ἐπίκεντρος πρὸς αὐτὴν εἶναι ἡ κοίλη γωνία ΒΚΓ>2 ὀρθῶν. Συνεπῶς ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΒΑΓ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μιᾶς ὀρθῆς δηλ. ἀμβλεῖα.

**'Ασκήσεις** σελὶς 119.—18**9. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον ἐγγεγραμμένης γωνίας, ἡ ὁποία βαίνει εἰς τεταρτημόριον περιφερείας.**

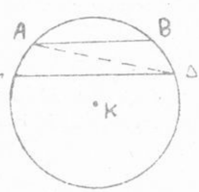
**Λύσις**: 'Η ἐπίκεντρος γωνία, ἡ βαίνουσα εἰς τεταρτημόριον περιφερείας, εἶναι 90°. Συνεπῶς ἡ ἀντίστοιχος ἐγγεγραμμένη, ὡς ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου ταύτης, θὰ εἶναι 45°.

**190. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ γράψητε δύο παραλλήλους χορδὰς καὶ νὰ συγκρίνητε τὰ μεταξὺ αὐτῶν τόξα.**

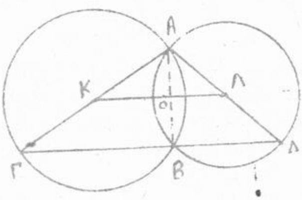
**Λύσις**: Ἔστω ὁ κύκλος Κ (σχ. 109) καὶ ΑΒ, ΓΔ δύο παράλληλοι χορδαὶ αὐτοῦ. Ζητεῖται νὰ συγκριθῶσι τὰ τόξα ΑΓ καὶ ΒΔ.

Ἂν ἀχθῇ καὶ ἡ χορδὴ ΑΔ, αἱ γωνίαι ΒΑΔ καὶ ΑΔΓ εἶναι ἐγγεγραμμέναι καὶ ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΔ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν αὐτόν κύκλον καὶ ἴσαι, θὰ βαίνωσιν ἐπὶ ἴσων τόξων (Π. Ι. § 153).

Ἤτοι τοξ ΑΓ = τοξ ΒΔ.




*Σχ. 109.*




*Σχ. 110.*

**191. Νὰ γράψητε δύο περιφερείας τεμνομένας εἰς σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ γράψητε τὰς διὰ τοῦ Α διερχομένας διαμέτρους ΑΓ, ΑΔ καὶ νὰ ἀποδείξητε, ὅτι ἡ γραμμὴ ΓΒΔ εἶναι εὐθεῖα.**

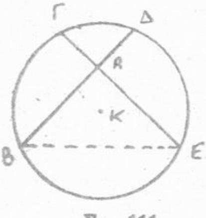
**Λύσις**: Ἔστωσαν Κ καὶ Η δύο περιφέρειαι τεμνόμεναι εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β (σχ. 110). Φέρομεν τὰς διαμέτρους ΑΓ τῆς Κ καὶ ΑΔ τῆς Λ καὶ ἑνοῦμεν τὸ σημεῖον Β μὲ τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ γραμμὴ ΓΒΔ εἶναι εὐθεῖα.

Ἂν ἀχθῇ ἡ κοινὴ χορδὴ ΑΒ, τότε ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένη καὶ βαίνει ἐπὶ ἡμιπεριφερείας ΑΝΓ. Ἄρα εἶναι ὀρθὴ (Π. ΙΙ § 153). Ἀλλὰ καὶ ἡ ἐγγεγραμμένη ΑΒΔ εἶναι ὀρθὴ δι' ὅμοιον λόγον. Συνεπῶς, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ εἶναι ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικαί, αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ αὐτῶν ΒΓ καὶ ΒΔ κεῖνται ἐπ' εὐθείας δηλ. ἡ γραμμὴ ΓΒΔ εἶναι εὐθεῖα.

*β' τρόπος*: Φέρομεν τὴν διάκεντρον ΚΛ. Αὕτη, ὡς γνωστόν, τέμνει δίχα καὶ καθέτως τὴν κοινὴν χορδὴν ΑΒ τῶν δύο περιφερειῶν. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ΒΓ⊥ΑΒ ἕπεται ὅτι ΒΓ ∥ ΚΛ. Δι' ὅμοιον λόγον εἶναι καὶ ΒΔ ∥ ΚΛ. Ἀλλὰ ἐξ ἑνὸς σημείου Β ἐκτὸς εὐθείας ΚΛ κειμένου μία καὶ μόνη ἄγεται παράλληλος πρὸς αὐτήν. Ἄρα ἡ γραμμὴ ΓΒΔ εἶναι εὐθεῖα·

**192. Ἀπὸ σημεῖον Α ἐντὸς κύκλου νὰ φέρητε δύο χορδὰς ΓΑΕ, ΒΑΔ καὶ νὰ ἀποδείξητε, ὅτι π. χ. ἡ γωνία ΓΑΒ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο ἐγγεγραμμένων, τῶν ὁποίων ἡ μία βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΓ, ἡ δὲ ἄλλη ἐπὶ τοῦ ΔΕ.**

**Λύσις**: Ἔστω ὁ κύκλος Κ (σχ. 111) καὶ δύο χορδαὶ ΓΕ καὶ ΒΔ αὐτοῦ διερχόμεναι διὰ τοῦ σημείου Α, κειμένου ἐντὸς αὐτοῦ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι γων ΒΑΓ = γων ΓΕΒ + γωνΕΒΔ.

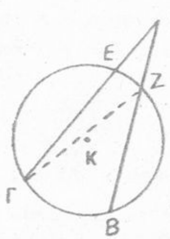


*Σχ. 111.*

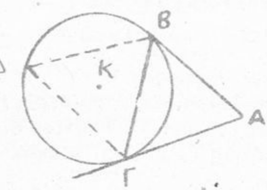
Φέρομεν τὴν χορδὴν ΒΕ καὶ παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ γωνία ΒΑΓ, ὡς ἐξωτερικὴ τοῦ τριγώνου ΒΑΕ, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ ἤτοι γων ΒΑΓ = =γωνΒΕΓ+γωνΕΒΔ. Ἀλλ' ἡ γωνία ΒΕΓ εἶναι ἐγγεγραμμένη καὶ βαίνει εἰς τὸ τόξον ΒΓ, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνΒΑΓ, ἡ δὲ ΕΒΔ εἶναι ἐγγεγραμμένη καὶ βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΕΔ, ἐπὶ τοῦ ὁποίου βαίνει ἡ γωνία ΕΑΔ κατὰ κορυφὴν τῆς πρώτης

**193. Ἀπὸ ἓν σημεῖον Η, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου νὰ φέρητε δύο τεμνούσας ΗΕΓ καὶ ΗΖΒ τῆς περιφερείας. Νὰ συγκρίνητε τὴν γωνίαν αὐτῶν πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἐγγεγραμμένων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι βαίνουσιν ἐπὶ τῶν τόξων ΒΓ καὶ ΖΕ.**

**Λύσις**: Ἔστω ὁ κύκλος Κ (σχ. 112) καὶ σημεῖον Η κείμενον ἐκτὸς αὐτοῦ καὶ ΗΕΓ, ΗΖΒ δύο τέμνουσαι τοῦ κύκλου Κ ἀρχόμεναι ἐκ τοῦ



*Σχ. 112.*



*Σχ. 113.*

σημείου Η. Ζητεῖται νὰ συγκριθῇ ἡ γωνία αὐτῶν ΓΗΒ πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἐγγεγραμμένων γωνιῶν ΓΖΒ καὶ ΕΓΖ. Φέρομεν τὴν χορδὴν ΓΖ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γωνία ΓΖΒ, ὡς ἐξωτερικὴ τοῦ τριγώνου ΓΗΖ, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ ἤτοι γωνΓΖΒ=γωνΓΗΖ+γωνΖΓΗ. Ἑπομένως γωνΓΗΖ= =γωνΓΖΒ—γωνΖΓΗ δηλ. ἡ γωνία τῶν τεμνουσῶν ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῆς ἐγγεγραμμένης, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΕΖ ἀπὸ τῆς ἐγγεγραμμένης, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΓ

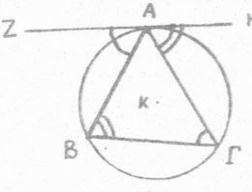
Σελὶς 121 — **Πόρισμα. Ἂν δύο ἐφαπτόμεναι περιφερείας τέμνωνται, τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς.**

Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΑΓ δύο ἐφαπτόμενα τῆς περιφερείας Κ (σχ. 113) τεμνόμεναι εἰς τὸ σημεῖον Α. Θὰ δείξωμεν ὅτι ΑΒ=ΑΓ.

**Ἀπόδειξις**: Ἂν ἀχθῇ ἡ χορδὴ ΒΓ, ἡ συνδέουσα τὰ σημεῖα ἐπαφῆς αὐτῶν, τότε ἡ γωνΓΒΑ=γωνΒΔΓ (§ 155 Θ.) καὶ γωνΒΓΑ = γωνΒΔΓ Ἄρα καὶ γωνΓΒΑ= γωνΒΓΑ καὶ συνεπῶς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ΑΒ=ΑΓ.

Ἀσκήσεις σελὶς 121. **194. Εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν νὰ ἐγγράφητε τρίγωνον ΑΒΓ καὶ νὰ γράφητε τὴν ἐφαπτομένην ΖΑΗ. Νὰ συγκρίνητε δὲ τὴν γωνίαν ΖΑΒ πρὸς τὴν Γ καὶ τὴν ΗΑΓ πρὸς τὴν Β.**

**Λύσις**: Ἡ γωνία ΖΑΒ (σχ. 114), ὡς σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς χορδῆς ΑΒ καὶ ἐφαπτομένης εἰς τὸ ἓν ἄκρον Α αὐτῆς, θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐγγεγραμμένην Γ, ἥτις βαίνει εἰς τὸ τόξον ΑΒ τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς πρώτης. Δι' ὅμοιον λόγον θὰ εἶναι καὶ γων ΗΑΓ = = γων Β.




*Σχ. 114.*

**195. Νὰ ἀποδείξητε, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΚ (σχ. 114 Θ. Γ.) διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΒΑΓ τῶν ἐφαπτομένων καὶ τὴν γωνίαν ΒΚΓ.**

**Λύσις**: Διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΚ καὶ ΑΓΚ (σχ. 114 Θ.Γ.) εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ὑποτείνουσαν ΑΚ κοινὴν καὶ ΚΒ = ΚΓ, ὡς ἀκτῖνας τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Ἄρα θὰ ἔχωσι καὶ γων ΒΑΚ=γων ΚΑΓ καθὼς καὶ γων ΑΚΒ = γων ΑΚΓ καὶ ἑπομένως ἡ *εὐθεῖα ΑΚ διχοτομεῖ καὶ τὴν γωνίαν τῶν ἐφαπτομένων ἐκ τοῦ σημείου Α καὶ τὴν γωνίαν τῶν ἀκτίνων εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς*.

**196. Νὰ εὕρητε τὴν σχέσιν, ἡ ὁποία συνδέει τὰς γωνίας ΒΑΓ καὶ ΒΚΓ τοῦ σχήματος (114 Θ. Γ).**

**Λύσις**: Ἐπειδὴ Β=1 ὀρθὴ καὶ Γ=1 ὀρθή, ἕπεται ἐκ τοῦ τετραπλεύρου ΑΓΚΒ, ὅτι γωνΒΑΓ + γων ΒΚΓ = 2 ὀρθαί, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τετραπλεύρου εἶναι 4 ὀρθαί.

**197. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγράφητε τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν δοθῇ ἡ κορυφὴ Α καὶ αἱ γωνίαι Β καὶ Γ αὐτοῦ.**

**Λύσις:** Ἔστω Κ ὁ δοθεὶς κύκλος (σχ. 114 Θ.Γ.) καὶ Α ἡ δοθεῖσα κορυφὴ τοῦ ὑπὸ κατασκευὴν τριγώνου. Εἰς τὸ σημεῖον Α φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΖΑΗ καὶ μὲ κορυφὴν Α καὶ πλευρὰν τὴν ΑΖ κατασκευάζομεν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν Γ τοῦ τριγώνου καὶ μὲ κορυφὴν Α καὶ πλευρὰν τὴν ΑΗ κατασκευάζομεν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν Β. Ἂν Β καὶ Γ εἶναι τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ ἄλλαι πλευραὶ τῶν γωνιῶν τούτων τέμνωσι τὴν περιφέρειαν Κ καὶ φέρομεν καὶ τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΓ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Διότι εἶναι ἐγγεγραμμένον, ἔχει τὴν δοθεῖσαν κορυφὴν Α καὶ αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς δοθείσας, διότι γων ΖΑΒ=Γ, ὡς σχηματιζομένη ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης εἰς τὸ ἓν ἄκρον αὐτῆς καὶ γωνΗΑΓ=Β, δι' ὅμοιον λόγον.

## Ἰδιότητες τῶν ἐγγεγραμμένων τετραπλεύρων

Σελὶς 122. **Πόρισμα 1. Πᾶν παραλληλόγραμμον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον εἶναι ὀρθογώνιον.**

**Ἀπόδειξις** Διότι, ἀφοῦ τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, αἱ ἀπέναντι γωνίαι αὐτοῦ θὰ εἶναι παραπληρωματικαὶ (§ 158. Θ.). Ἐπειδὴ δὲ εἶναι κα ἴσαι, ἑκάστη θὰ εἶναι μία ὀρθὴ καὶ συνεπῶς ὀρθογώνιον.

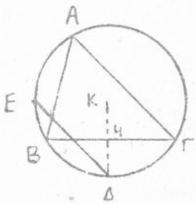
**Πόρισμα ΙΙ. Ἑκάστη γωνία κυρτοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπέναντι ἐξωτερικὴν γωνίαν αὐτοῦ.**

**Ἀπόδειξις** : Διότι ἀμφότεραι εἶναι παραπληρωματικαί τῆς αὐτῆς ἐσωτερικῆς γωνίας.
Σελὶς 123. **Πόρισμα Ι. Πᾶν ὀρθογώνιον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.**
**Ἀπόδειξις** : Διότι αἱ ἀπέναντι γωνίαι αὐτοῦ εἶναι παραπληρωματικαί.

**Πόρισμα ΙΙ. Ἂν μία γωνία κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπέναντι ἐξωτερικὴν γωνίαν αὐτοῦ, τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.**

**Ἀπόδειξις** : Διότι ἡ ἐξωτερικὴ γωνία εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἐσωτερικῆς, ἡ ὁποία ἔχει τὴν αὐτὴν κορυφὴν μὲ αὐτήν. Ἐπομένως ἡ ἐσωτερικὴ καὶ ἡ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία τοῦ κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ συνεπῶς τὸ τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

**Ἀσκήσεις** σελὶς 123.—198. **Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγράψητε τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ νὰ ὁρίσητε τὸ μέσον Δ τοῦ τόξου ΒΓ. Ἔπειτα νὰ φέρητε χορδὴν ΔΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ. Νὰ ἀποδείξητε δε, ὅτι ΔΕ=ΑΒ.**

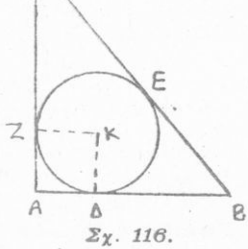


*Σχ. 115.*

**Λύσις** : Ἔστω ὁ κύκλος Κ (σχ. 115) καὶ ΑΒΓ τρίγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτόν. Ἐκ τοῦ κέντρου Κ φέρομεν τὴν κάθετον ΚΗ ἐπὶ τὴν χορδὴν ΒΓ, ἥτις προεκτεινομένη θὰ διχοτομῇ καὶ τὸ τόξον καὶ ἔστω Δ τὸ μέσον αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν τὴν ΔΕ ∥ ΑΓ καὶ θὰ δείξωμεν, ὅτι χορδ ΔΕ = χορδ ΑΒ.

Ἐπειδὴ ΔΕ ∥ ΑΓ, θὰ εἶναι τοξ ΔΓ=τόξ ΑΕ. Ἀλλὰ τοξ ΔΓ=τόξ ΒΔ, διότι Δ εἶναι μέσον τοῦ τόξου ΒΓ. Ἄρα καὶ τόξ ΒΔ = τόξ ΕΑ.
Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης τὸ τόξον ΒΕ, ὅτε ἔχομεν τόξΒΔ+τόξΒΕ=τόξΒΕ+τόξΕΑ ἢ τόξΔΕ=τόξΒΑ, ἄρα καὶ χορδὴ ΔΕ=χορδὴ ΑΒ καθ' ὅσον εἰς ἴσα τόξα τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἀντιστοιχοῦν ἴσαι χορδαί.

199. **Περὶ δοθέντα κύκλον νὰ περιγράψητε ὀρθογώνιον τρίγωνον. Νὰ ἀποδείξητε δέ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ ὑπερβαίνει τὴν ὑποτείνουσαν κατὰ τὴν διάμετρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.**



*Σχ. 116.*

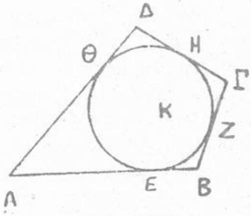
**Λύσις** : Ἔστω ΑΒΓ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Κ (σχ. 116). Θὰ δείξωμεν ὅτι ΓΑ + ΑΒ = = ΓΒ + 2R (ἄν R = ἡ ἀκτίς). Πράγματι εἶναι ΓΑ + ΑΒ = ΓΖ + ΖΑ + ΑΔ + ΔΒ. Ἀλλὰ ΓΖ=ΓΕ καὶ ΔΒ = ΒΕ ὡς ἐφαπτόμεναι περιφερείας ἐκ σημείου ἐκτὸς αὐτῆς. Ἄρα ΓΑ + ΑΒ = ΓΕ + ΖΑ + ΕΒ + ΑΔ = =(ΓΕ + ΕΒ) + ΖΑ + ΑΔ = ΒΓ + ΖΑ + ΑΔ (1).

Ἐὰν φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας ΚΖ καὶ ΚΔ εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς Ζ καὶ Δ, τὸ σχηματιζόμενον τετράπλευρον ΚΖΑΔ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ὡς ἔχον καὶ δύο διαδοχικὰς πλευρὰς ἴσας $ΚΔ = ΚΖ$, εἶναι τετράγωνον καὶ συνεπῶς $ΑΖ = ΑΔ = ΚΔ = R$ καὶ ἡ (1) γίνεται $ΑΒ + ΑΓ = ΒΓ + R + R = ΒΓ + 2R$.

**200. Περὶ δοθέντα κύκλον νὰ περιγράψητε τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ νὰ ἀποδείξητε, ὅτι $ΑΒ + ΓΔ = ΒΓ + ΔΑ$.**

**Λύσις**: Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Κ (σχ. 117) καὶ Ε, Ζ, Η, Θ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ καὶ τῆς περιφερείας.

| | | |
|---|---|---|
| Ἔχομεν | $ΑΕ = ΑΘ$ | ὡς ἐφαπτόμεναι |
| | $ΒΕ = ΒΖ$ | εἰς περιφέρειαν |
| | $ΓΗ = ΓΖ$ | ἐκ σημείων ἐκτὸς |
| | $ΔΗ = ΔΘ$ | αὐτῆς κειμένων. |



Σχ. 117.

Ἄρα:

$ΑΕ + ΒΕ + ΓΗ + ΔΗ = ΑΘ + ΒΖ + ΓΖ + ΔΘ$ (1).

Ἀλλὰ $ΑΕ + ΕΒ = ΑΒ$, $ΒΖ + ΖΓ = ΒΓ$, $ΓΗ + ΗΔ = ΓΔ$ καὶ $ΔΘ + ΘΑ = ΑΔ$.

Συνεπῶς ἡ (1) γίνεται $ΑΒ + ΓΔ = ΒΓ + ΑΔ$.

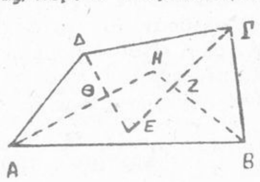
**201. Νὰ συγκρίνητε τὰς πλευρὰς παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον.**

**Λύσις**: Ἂν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 117) τὸ περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Κ ἦτο παραλληλόγραμμον, θὰ εἴχομεν $ΑΒ + ΓΔ = ΒΓ + ΑΔ$. Ἀλλὰ τοῦ παραλληλογράμμου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι, ὅτε ἡ ἀνωτέρω ἰσότης θὰ ἐγίνετο $2\,ΑΒ = 2.ΒΓ$ ἢ $ΑΒ = ΑΓ$ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον θὰ εἶχε δύο διαδοχικὰς πλευρὰς ἴσας.

Ἄρα θὰ ἦτο ρόμβος ἤτοι:

***Πᾶν παραλ)μον περιγεγραμμένον εἰς κύκλον εἶναι ῥόμβος.***

**202. Νὰ διχοτομήσητε τὰς γωνίας ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι, ἂν σχηματίζηται ὑπὸ τῶν διχοτόμων τετράπλευρον, τοῦτο εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.**



Σχ. 118.

**Λύσις**: Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ὑπὸ τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν αὐτοῦ (σχ. 118). Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΗ ἔχομεν ὅτι

$γων\,Η = 2\ ὀρθ - \left(\frac{Α}{2} + \frac{Β}{2}\right)$ (1).

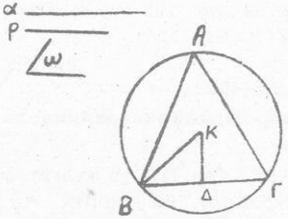
Ἐκ τοῦ τριγώνου ΔΕΓ ἔχομεν $γων\,Ε = 2\ ὀρθ - \left(\frac{Δ}{2} + \frac{Γ}{2}\right)$ (2).

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) ἔχομεν γων Η + γων Ε = 4 ὀρθ $-\left(\frac{A+B+\Gamma+\Delta}{2}\right)$ (3). Ἀλλὰ Α+Β+Γ+Δ = 4 ὀρθαὶ καὶ συνεπῶς $\frac{A+B+\Gamma+\Delta}{2} = 2$ ὀρθαὶ καὶ ἡ ἰσότης (3) γίνεται γων Η + γων Ε = 4 ὀρθαὶ — 2 ὀρθαὶ = 2 ὀρθαί.

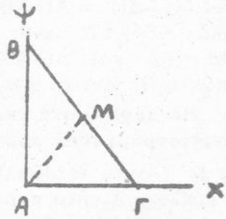
Ἐπειδὴ δὲ τοῦ τετραπλεύρου ΕΖΗΘ δύο ἀπέναντι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, ἕπεται ὅτι τοῦτο εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

**203. Νὰ κατασκευάσητε ἕν τρίγωνον ἀπὸ μίαν πλευράν, ἀπὸ μίαν τῶν εἰς αὐτὴν προσκειμένων γωνιῶν καὶ ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.**

**Λύσις**: Ἔστω ὅτι τοῦ ζητουμένου νὰ κατασκευασθῇ τριγώνου γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν ΒΓ = α, τὴν προσκειμένην γωνίαν Β = ω καὶ τὴν ἀκτῖνα ΚΒ = ρ τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον περιφερείας (σχ. 119). Λαμβάνομεν εὐθ. τμῆμα ΓΒ = α. Ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια ἡ περιγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον θὰ διέρχηται ἀπὸ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ, ἕπεται ὅτι τὸ κέντρον αὐτῆς θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου καὶ




*Σχ. 119.*




*Σχ. 120.*

εἰς τὸ μέσον Δ τῆς ΒΓ. Ἐπειδὴ δὲ θὰ ἀπέχῃ τοῦ σημείου Β ἀπόστασιν ἴσην μὲ ρ θὰ κεῖται τοῦτο καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς γραφομένης μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα ρ. Ἂν Κ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον Δ τῆς ΒΓ καὶ τῆς περιφερείας (Β, ρ,) γράφομεν περιφέρειαν μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα ρ καὶ εἶτα μὲ κορυφὴν τὸ Β καὶ πλευρὰν ΒΓ κατασκευάζομεν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν ω. Ἂν δὲ Α εἶναι τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἄλλη πλευρὰ αὐτῆς τέμνει τὴν περιφέρειαν (Κ, ρ,) τὸ ζητούμενον τρίγωνον εἶναι τὸ ΑΒΓ, διότι εἶναι ἐγγεγραμμένον καὶ ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

## Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Α΄ Βιβλίου

**204. Νὰ κατασκευάσητε ἕν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ ὑποτείνουσα ΒΓ νὰ εἶναι διπλασία ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΑΓ.**

**Λύσις**: Κατασκευάζομεν ὀρθὴν γωνίαν ΧΑΨ (σχ. 120) καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΧ αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα ΑΓ. Ἔπειτα μὲ κέντρον Γ καὶ ἀκτῖνα διπλασίαν τῆς ΑΓ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, ἥτις θὰ τέμνη τὴν ἄλλην κάθετον πλευρὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἴς τι σημεῖον Β, διότι ἡ ἀπόστασις ΓΑ τοῦ κέντρου Γ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΑΨ εἶναι μικρατέρα τῆς ἀκτῖνος. Φέρομεν τὴν ΒΓ, ὅτε τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

**205. Νὰ ἀποδείξητε, ὅτι ἡ μία ἀπὸ τὰς ὀξείας γωνίας τοῦ προηγουμένως κατασκευασθέντος τριγώνου ΑΒΓ εἶναι διπλασία ἀπὸ τὴν ἄλλην.**

**Λύσις**: Ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας Α τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 120) φέρομεν τὴν διάμεσον ΑΜ αὐτοῦ. Ἐπειδὴ ΑΓ $= \frac{ΒΓ}{2}$ ἐκ κατασκευῆς καὶ ΑΜ$= \frac{ΒΓ}{2}$ (Π. ΙΙΙ § 127 Θ. Γ.) ἔπεται ὅτι ΑΓ $=$ $=$ΑΜ$=$ΜΓ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΜΓ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ συνεπῶς ἰσογώνιον ἤτοι Γ $= 60^0$. Ἐπειδὴ ὅμως γων ΑΜΓ $=$ γωνΒ$+$γωνΜΑΒ, ὡς ἐξωτερικὴ τοῦ τριγώνου ΑΜΒ καὶ γωνΒ$=$γωνΜΑΒ, ἐπειδὴ τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές, θὰ εἶναι καὶ γωνΑΜΓ $=$ γωνΒ$+$γωνΒ $=$ 2. γωνΒ. Ἀλλὰ γωνΑΜΓ$=$γωνΓ καὶ συνπῶς γωνΓ $=$ 2. γωνΒ.

Ἤτοι: ***Ἐάν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ μία κάθετος πλευρὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης αὐτοῦ, τότε ἡ ἀπέναντι ταύτης ὀξεῖα γωνία αὐτοῦ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἑτέρας ὀξείας γωνίας του.*** Ἐπειδὴ δὲ Γ $= 60^0$, ἔπεται ὅτι Β$=30^0$.

**206. Ἄν ἡ μία ἀπὸ τὰς ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι διπλασία ἀπὸ τὴν ἄλλην, νὰ ἀποδείξητε ὅτι ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ εἶναι διπλασία ἀπὸ την μικροτέραν πλευράν του.**

**Λύσις**: Ἔστω, ὅτι τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 120) εἶναι Γ$=$2Β. Θὰ δείξωμεν ὅτι ΑΓ$= \frac{ΒΓ}{2}$.

Τοῦ τριγώνου ΑΜΓ εἶναι γωνία ΑΜΓ$=$2Β, ὡς ἐξωτερικὴ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΜΒ.

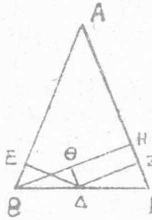
Ἐπειδὴ δὲ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι καὶ Γ$=$2Β, ἔπεται ὅτι γωνΑΜΓ$=$Γ Ἀλλὰ γωνΓ$=$γωνΜΑΓ, διότι τὸ τρίγωνον ΑΜΓ εἶναι ἰσοσκελὲς λόγῳ τῆς διαμέσου ΑΜ, ἥτις ἰσοῦται μὲ ΜΓ. Ἄρα τοῦ τριγώνου ΑΜΓ πᾶσαι αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι δηλ. εἶναι ἰσογώνιον καὶ συνεπῶς ἰσόπλευρον. Ὥστε ΑΓ$=$ΜΓ$= \frac{ΒΓ}{2}$.

Ἤτοι: ***Ἄν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου μία ὀξεῖα γωνία εἶναι 30⁰, τότε ἡ ἀπέναντι αὐτῆς πλευρὰ αὐτοῦ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης.***

**207. Νὰ γράψητε τὰς ἀποστάσεις ΔΕ, ΔΖ τυχόντος σημείου Δ τῆς βάσεως ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ ἀπὸ τὰς ἴσας πλευρὰς αὐτοῦ καὶ την ἀπόστασιν ΒΗ τοῦ ἑνὸς ἄκρου Β τῆς βάσεως ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΒΓ. Νὰ ἀποδείξητε δέ, ὅτι ΔΕ$+$ΔΖ$=$ΒΗ.**

**Λύσις**: Ἔστω ΒΑΓ ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον (σχ. 121), Δ τυχὸν σημεῖον τῆς βάσεως ΒΓ αὐτοῦ, ΔΕ καὶ ΔΖ αἱ ἀποστάσεις τοῦ Δ ἀπὸ τὰς ἴσας πλευρὰς αὐτοῦ ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ ΒΗ τὸ ὕψος του ἐπὶ τὴν ΑΓ. Θὰ δείξωμεν ὅτι ΔΕ$+$ΔΖ$=$ΒΗ.

Ἐκ τοῦ σημείου Δ φέρομεν τὴν ΔΘ$\perp$ΒΗ. Ἐπειδὴ καὶ ΓΗ$\perp$ΒΗ, θὰ εἶναι ΔΘ ∥ ΓΗ καὶ συνεπῶς τὸ τετράπλευρον ΔΘΗΖ εἶναι ὀρθογώνιον.



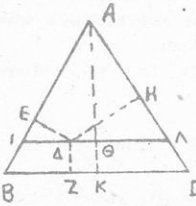
*Σχ. 121*

Ἄρα ΔΖ=ΘΗ (1). Ἐπὶ πλέον θὰ εἶναι γωνΒΔΘ==γωνΓ ὡς ἐντός, ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΔΘ καὶ ΑΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΓ. Ἀλλὰ γωνΓ = γωνΒ, ὡς παρὰ τὴν βάσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου. Ἄρα καὶ γωνΒ=γωνΒΔΘ καὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΕΔ καὶ ΒΘΔ ἔχοντα τὴν ὑποτείνουσαν ΒΔ αὐτῶν κοινὴν καὶ ἀνὰ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην, εἶναι ἴσα. Συνεπῶς ΔΕ = ΒΘ (2). Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) ἔχομεν ΔΖ+ΔΕ=ΒΘ+ΘΗ=ΒΗ ἤτοι:

*Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς τὸ ὕψος αὐτοῦ ἐπὶ μίαν τῶν ἴσων πλευρῶν του.*

**208. Νὰ κατασκευάσητε ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ καὶ νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον Δ ἐντὸς αὐτοῦ. Νὰ γράψητε τὰς ἀποστάσεις ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ τοῦ Δ ἀπὸ τὰς πλευρὰς καὶ τὸ ὕψος ΑΚ τοῦ τριγώνου. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι ΔΕ+ΔΖ+ΔΗ=ΑΚ.**

**Λύσις**: Ἔστω ΑΒΓ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον (σχ. 122), Δ σημεῖον ἐντὸς αὐτοῦ καὶ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ αἱ ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τὰς πλευράς του, ΑΚ δὲ ἓν τῶν ὑψῶν του. Θὰ δείξωμεν ὅτι ΔΕ+ΔΖ+ΔΗ=ΑΚ.



*Σχ. 122.*

Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν τὴν ΙΛ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ. Ἔχομεν ΔΖ=ΘΚ (1), ὡς κάθετοι μεταξὺ παραλλήλων καὶ ΔΕ + ΔΗ = ΑΘ (2) (ἄσκησις 207), ἐπειδὴ τὰ τρία ὕψη τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι ἴσα. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη ΔΖ+ΔΕ+ΔΗ=ΘΚ+ΑΘ=ΑΚ.

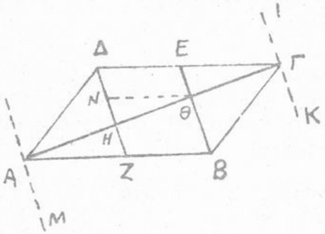
**209. Νὰ γράψητε τὴν διαγώνιον ΑΓ ἑνὸς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Νὰ ὁρίσητε τὰ μέσα Ε καὶ Ζ τῶν πλευρῶν ΓΔ καὶ ΑΒ. Νὰ φέρητε τὰς εὐθείας ΒΕ, ΔΖ καὶ νὰ ἀποδείξητε, ὅτι ἡ διαγώνιος ΑΓ διαιρεῖται ὑπ' αὐτῶν εἰς τρία ἴσα μέρη.**

**Λύσις**: Ἔστω τὸ παραλ)μον ΑΒΓΔ (σχ. 123) καὶ Ζ, Ε τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΔΓ καὶ ΑΒ αὐτοῦ, Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΒΕ καὶ ΔΖ τριχοτομοῦσι τὴν διαγώνιον ΑΓ αὐτοῦ.

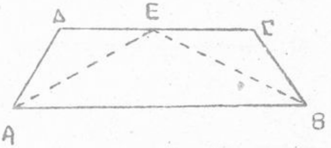
Τὸ τετράπλευρον ΔΕΒΖ ἔχει τὰς δύο ἀπέναντι πλευρὰς αὐτοῦ ΔΕ, ΖΒ ἴσας καὶ παραλλήλους, ὡς ἡμίση ἴσων καὶ παραλλήλων εὐθειῶν. Ἄρα εἶναι παραλ/μον καὶ ΔΖ ∥ ΕΒ. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΓΔΗ, ἐπειδὴ ἡ ΕΘ ἄγεται ἐκ τοῦ μέσου Ε τῆς πλευρᾶς ΓΔ αὐτοῦ, παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΔΗ αὐτοῦ ἔχομεν ΓΘ=ΘΗ. Ἐκ δὲ τοῦ τριγώνου ΑΒΘ δι' ὅμοιον λόγον ἔχομεν ΘΗ=ΗΑ. Ἄρα καὶ ΑΗ=ΗΘ=ΘΓ.

*β') τρόπος:* Ἐδείχθη ἀνωτέρω, ὅτι ΔΖ ∥ ΞΒ. Ἂν ἀχθῇ καὶ ἡ ΙΚ ∥ ΕΒ ἐκ τῆς κορυφῆς Γ, θὰ ἔχωμεν ΓΘ=ΘΗ, διότι ΓΕ = ΕΔ ἐξ ὑποθέσεως (§ 127). Ἂν δὲ ἀχθῇ καὶ ΛΜ ∥ ΔΖ, θὰ ἔχωμεν ΑΗ=ΗΘ, διότι ΑΖ=ΖΒ (§ 127). Ἄρα ΑΗ=ΗΘ=ΘΓ.

*γ' τρόπος:* Ἐὰν ἐκ τοῦ Θ φέρωμεν τὴν ΘΝ ∥ ΔΕ, θὰ εἶναι ΘΝ= =ΔΕ=ΕΓ=ΑΖ καὶ τὰ τρίγωνα ΓΘΕ, ΘΝΗ, ΑΗΖ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα ἀνὰ μίαν πλευρὰν ἴσην ΓΕ = ΘΝ = ΖΑ καὶ τὰς προσκειμένας γωνίας ἀνὰ μίαν ἴσας. Ἄρα καὶ ΑΗ=ΗΘ=ΘΓ.




*Σχ. 123.*




*Σχ. 124.*

**210. Ἂν ἡ μικροτέρα βάσις ΓΔ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου ΑΒΓΔ εἶναι ἴση πρὸς ΑΔ+ΒΓ καὶ Ε εἶναι τὸ μέσον τῆς ΓΔ, νὰ ἀποδείξητε, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΕ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν Α τοῦ τραπεζίου τούτου**

**Λύσις:** Ἔστω ὅτι τοῦ ἰσοσκελοῦς τραπεζίου ΑΒΓΔ (σχ. 124) εἶναι ΓΔ=ΑΔ+ΒΓ καὶ ΓΕ=ΕΔ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΕ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν Α αὐτοῦ.

Ἐπειδὴ τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοσκελές, θὰ ἔχῃ ἴσας τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς αὐτοῦ ἤτοι ΑΔ=ΒΓ. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΔΓ=ΔΑ+ΒΓ καὶ συνεπῶς ΔΓ=2.ΑΔ. Ἀλλὰ καὶ ΔΓ = 2.ΔΕ. Ἄρα 2.ΑΔ=2.ΔΕ ἢ ΑΔ=ΔΕ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ συνεπῶς γωνΔΑΕ=γωνΔΕΑ (1). Ἀλλὰ γωνΔΕΑ=γωνΕΑΒ (2), ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΕ. Ἄρα καὶ γωνΔΑΕ=γωνΕΑΒ δηλ. ἡ ΑΕ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν Α τοῦ τραπεζίου.

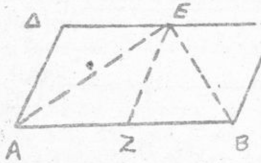
**211. Ἂν ἡ μικροτέρα βάσις ΒΔ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου ΑΒΓΔ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν ΒΓ καὶ ΑΔ, νὰ ἀποδείξητε, ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Α καὶ Β τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον τῆς ΓΔ.**

**Λύσις:** Ἔστω ὅτι ἡ διχοτόμος ΑΕ τῆς γωνίας Α τοῦ ἰσοσκελοῦς τραπεζίου ΑΒΓΔ (σχ. 124) τέμνει τὴν πλευρὰν ΔΓ αὐτοῦ εἰς τὸ σημεῖον Ε. Ἐπειδὴ γωνΔΑΕ = γωνΕΑΒ, λόγῳ τῆς διχοτόμου καὶ γωνΕΑΒ=γωνΔΕΑ, ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ, θὰ εἶναι καὶ γωνΔΑΕ = =γωνΔΕΑ καὶ συνεπῶς ΔΕ=ΔΑ.

Ἐπειδὴ δὲ ΔΓ=ΑΔ+ΒΓ ἢ ΔΕ+ΕΓ=ΔΑ+ΒΓ θὰ εἶναι καὶ ΔΑ+ΕΓ= = ΔΑ+ΒΓ ἢ ΕΓ = ΓΒ καὶ τὸ τρίγωνον ΕΓΒ ἰσοσκελὲς καὶ συνεπῶς γωνΓΕΒ=γωνΓΒΕ. Ἀλλὰ γωνΓΕΒ=γωνΕΒΑ, ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ. Ἄρα γωνΓΒΕ=γωνΕΒΑ καὶ συνεπῶς ἡ ΕΒ διχοτόμος τῆς γωνίας Β τοῦ ἰσοσκελοῦς τραπεζίου ΑΒΓΔ. Ἤτοι: ***Αἱ διχοτόμοι τῶν παρὰ τὴν μεγαλυτέραν βάσιν γωνιῶν ἰσοσκελοῦς τραπεζίου τέμνουσι τὴν ΓΔ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ε.***

**212. Νὰ κατασκευάσητε ἓν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἰς τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι ΑΒ=2. ΒΓ. Νὰ ὁρίσητε ἔπειτα τὸ μέσον Ε τῆς ΓΔ καὶ νὰ φέρητε τὰς εὐθείας ΑΕ καὶ ΒΕ. Νὰ ἀποδείξητε δέ, ὅτι ἡ γωνία ΑΕΒ εἶναι ὀρθή.**

**Λύσις:** Ἔστω ὅτι τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ εἶναι ΑΒ=2. ΒΓ (σχ. 125) καὶ ΔΕ=ΕΓ. Φέρομεν τὰ εὐθ. τμήματα ΑΕ καὶ ΒΕ καὶ θὰ δείξωμεν ὅτι γωνΑΕΒ=1 ὀρθή.




*Σχ. 125.*

Πράγματι, ἂν Ζ εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΑΒ καὶ ἀχθῇ ἡ ΕΖ, τὰ τετράπλευρα ΑΔΕΖ καὶ ΖΕΓΒ εἶναι ρόμβοι, διότι ΒΓ=ΕΓ ἢ ΑΖ=ΔΑ ἐξ ὑποθέσεως καὶ αἱ διαγώνιοι ΑΕ καὶ ΒΕ αὐτῶν εἶναι καὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν των. Ὡς διχοτόμοι δὲ τῶν ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικῶν γωνιῶν ΔΕΖ καὶ ΖΕΓ θὰ τέμνωνται καθέτως ἤτοι ἡ γωνΑΕΒ εἶναι ὀρθή.

*β' τρόπος:* Ἐπειδὴ ΑΕ καὶ ΒΕ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Α καὶ Β τοῦ παραλληλογράμμου, εἶναι δὲ Α + Β = 2 ὀρθαί, ἕπεται ὅτι γωνΕΑΒ+γωνΕΒΑ=1 ὀρθὴ καὶ συνεπῶς καὶ γωνΑΕΒ=1 ὀρθή, ἐπειδὴ παντὸς τριγώνου τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του εἶναι 2 ὀρθαί.

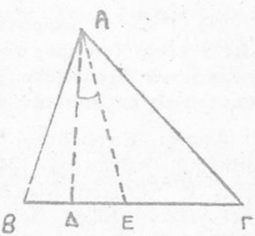
**213. Νὰ γράψητε τὸ ὕψος ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τὴν διχοτόμον ΑΕ. Νὰ ἀποδείξητε δέ, ὅτι γων ΔΑΕ $= \frac{Β-Γ}{2}$, ἂν ΑΓ>ΑΒ.**

**Λύσις:** Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 126), ΑΔ τὸ ὕψος αὐτοῦ καὶ ΑΕ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α. Ἔχομεν γων ΔΑΕ = γων ΒΑΕ — γων ΒΑΔ = $= \frac{Α}{2} - (1\ ὀρθ - Β)$ (1). Ἀλλὰ Α+Β+Γ = = 2 ὀρθ. Συνεπῶς $\frac{Α}{2} + \frac{Β}{2} + \frac{Γ}{2} = 1$ ὀρθὴ καὶ ἡ ἰσότης (1) γίνεται: γων ΔΑΕ=

$$= \frac{Α}{2} - \left(\frac{Α}{2} + \frac{Β}{2} + \frac{Γ}{2} - Β\right) =$$

$$= \frac{Α}{2} - \frac{Α}{2} - \frac{Β}{2} - \frac{Γ}{2} + \frac{2Β}{2} =$$

$= \frac{Β}{2} - \frac{Γ}{2} = \frac{Β-Γ}{2}$, μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων.




*Σελ. 126.*

**214. Νὰ διχοτομήσητε δύο διαδοχικὰς γωνίας Α καὶ Β ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καὶ νὰ ἀποδείξητε, ὅτι ἡ γωνία τῶν διχοτόμων ἰσοῦται πρὸς $\frac{\Gamma+\Delta}{2}$**

**Λύσις**: Ἔστω τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 118) καὶ ΑΗ ΒΗ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Α καὶ Β αὐτοῦ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι γων $H = \frac{\Gamma+\Delta}{2}$.

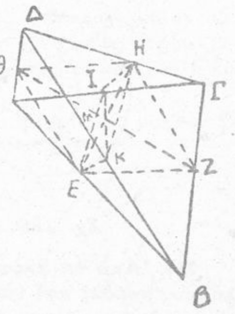
Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΗΒ ἔχομεν ὅτι γων $H = 2$ ὀρθ. $-\left(\frac{A+B}{2}\right)$ (1).

Ἀλλὰ $A+B+\Gamma+\Delta=4$ ὀρθαὶ καὶ $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}+\frac{\Delta}{2}=2$ ὀρθαί.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) ἀντὶ τῶν 2 ὀρθ. τὸ ἄθροισμα $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}+\frac{\Delta}{2}$ καὶ ἔχομεν γων $H=\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}+\frac{\Delta}{2}-\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=$
$=\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}+\frac{\Delta}{2}-\frac{A}{2}-\frac{B}{2}=\frac{\Gamma}{2}+\frac{\Delta}{2}=\frac{\Gamma+\Delta}{2}$.

**215. Νὰ ἀποδείξητε, ὅτι τὰ εὐθ. τμήματα, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν καὶ ἀπὸ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου διέρχονται ἀπὸ ἓν σημεῖον.**

**Λύσις**: Ἔστω τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, Ε, Ζ, Η, Θ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ (σχ. 127) καὶ Ι, Κ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ αὐτοῦ. Τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ, τὸ ἔχον κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ γνωρίζομεν (ἄσκησις 138) ὅτι εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ συνεπῶς αἱ διαγώνιοι ΕΗ, ΘΖ αὐτοῦ διχοτομοῦνται εἰς τὸ σημεῖον Λ. Ἀλλὰ ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἔχομεν ὅτι $EI = \parallel \frac{\Gamma B}{2}$, ἐκ δὲ τοῦ τριγώνου ΔΒΓ ἔχομεν ὅτι $HK = \parallel \frac{\Gamma B}{2}$. Ἄρα καὶ $EI = \parallel HK$ καὶ τὸ τετράπλευρον ΕΚΗΙ εἶναι παρ/μον, ὡς ἔχον δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους. Ἄρα αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΙΚ καὶ ΕΗ διχοτομοῦνται ἤτοι ἡ ΙΚ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον Λ τῆς ΕΗ, ἀπὸ τὸ ὁποῖον διέρχεται καὶ ἡ ΘΖ.

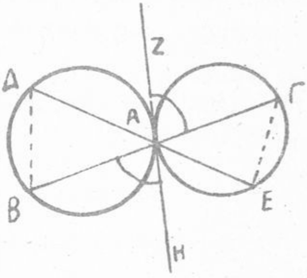



*Σχ. 127.*

**216. Νὰ γράψητε δύο ἐφαπτομένας περιφερείας καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς νὰ φέρητε δύο τεμνούσας τῶν περιφερειῶν τούτων. Νὰ γράψητε τὰς χορδάς, τὰς ὁποίας ὁρίζουν τὰ ἄκρα αὐτῶν καὶ νὰ ἀποδείξητε, ὅτι αὗται εἶναι παράλληλοι.**

**Λύσις**: Ἔστωσαν Κ καὶ Λ δύο περιφέρειαι ἐφαπτόμεναι ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α (σχ. 128) καὶ ΒΑΓ, ΔΑΕ δύο τέμνουσαι αὐτῶν διερχόμεναι διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Α. Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ χορδαὶ ΒΔ καὶ ΓΕ εἶναι παράλληλοι.

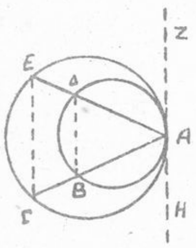
Φέρομεν τὴν κοινὴν αὐτῶν ἐφαπτομένην ΖΗ. Τότε γων ΒΑΗ=γωνΒΔΑ, διότι ἡ μὲν σχηματίζεται ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης, ἡ δὲ εἶναι ἐγγεγραμμένη βαίνουσα εἰς τὸ τόξον τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν της α.·Δι' ὅμοιον λόγον εἶναι γων ΖΑΓ=γων ΓΕΑ. Ἀλλὰ γων ΒΑΗ=γων ΖΑΓ, ὡς κατὰ κορυφήν.



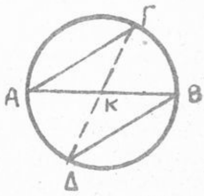
Σχ. 128.

Ἄρα καὶ γων ΒΔΑ = γων ΓΕΑ καὶ συνεπῶς αἱ εὐθεῖαι ΒΔ καὶ ΓΕ παράλληλοι, διότι τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΔΕ σχηματίζουσι δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας αὐτῶν ἴσας.

Ἂν ἐφάπτωνται ἐσωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α (σχ 129) καὶ ΑΒΓ, ΑΔΕ εἶναι αἱ τέμνουσαι καὶ ΖΑΗ ἡ κοινὴ αὐτῶν ἐφαπτομένη, θὰ ἔχωμεν γων ΗΑΓ=γωνΒΔΑ καί γωνΗΑΓ=γωνΓΕΑ. Ἄρα καὶ γων ΒΔΑ= =γωνΓΕΔ καὶ ΓΒ || ΕΓ, διότι τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΑΕ σχηματίζουσι δύο ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ἴσας.



Σχ. 129.



Σχ. 130.

**217. Ἀπὸ τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου κύκλου νὰ φέρητε δύο παραλλήλους χορδὰς καὶ νὰ ἀποδείξητε, ὅτι αὗται εἶναι ἴσαι καὶ τὰ ἄλλα ἄκρα αὐτῶν κεῖνται ἐπὶ διαμέτρου τοῦ αὐτοῦ κύκλου.**

**Λύσις**: Ἔστω ὁ κύκλος Κ (σχ. 130), μία διάμετρος αὐτοῦ ΑΒ καὶ αἱ χορδαὶ ΑΓ καὶ ΒΔ παράλληλοι. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αὗται εἶναι ἴσαι καὶ ὅτι ΓΔ εἶναι διάμετρος.

Ἐπειδὴ ΑΓ || ΒΔ θὰ εἶναι καὶ τοξΒΓ=τοξΑΔ, καθ' ὅσον τὰ μεταξὺ παραλλήλων χορδῶν τοῦ αὐτοῦ κύκλου περιεχόμενα τόξα εἶναι ἴσα.

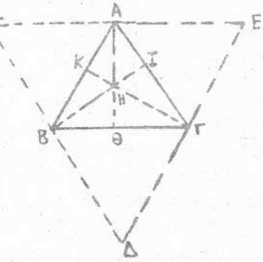
Ἄρα καὶ τοξ ΑΓ=τοξΒΔ, ὡς ὑπόλοιπα τῶν ἴσων ἡμιπεριφερειῶν ΑΓΒ, ΑΔΒ, ἀφ' ὧν ἀφαιροῦνται ἴσα τόξα. Ἄρα καὶ χορδὴ ΑΓ=χορδὴ ΒΔ.

Ἐπειδὴ δὲ τοξ ΑΓ+τοξ ΓΒ=ἡμιπεριφέρεια καὶ τοξΓΒ=τοξΑΔ θὰ εἶναι καὶ τοξ ΑΓ + τοξ ΑΔ = ἡμιπεριφέρεια καὶ συνεπῶς ἡ χορδὴ αὐτοῦ ΔΓ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου Κ.

218. **Νὰ ἀποδείξητε, ὅτι τὰ ὕψη παντὸς τριγώνου διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον.**

**Λύσις**: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 131) καὶ ΑΘ, ΒΙ καὶ ΓΚ τὰ τρία ὕψη αὐτοῦ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ταῦτα διέρχονται δια τοῦ αὐτοῦ σημείου.

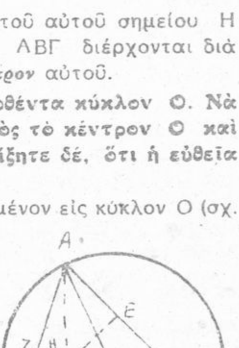
Διὰ τῶν κορυφῶν Α, Β καὶ Γ αὐτοῦ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευρὰς αὐτοῦ. Σχηματίζεται οὕτω τὸ τρίγωνον ΔΕΖ. Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΕ εἶναι παρ/μον, θὰ ἔχωμεν ΒΓ = ΑΕ. Δι' ὅμοιον λόγον καὶ ΒΓ = ΑΖ, ἄρα ΑΕ = ΑΖ ἤτοι τὸ Α εἶναι μέσον τῆς πλευρᾶς ΖΕ τοῦ τριγώνου ΔΕΖ. Ἡ δὲ ΑΘ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΖΕ καὶ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς Α. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ αἱ ΒΙ, ΓΚ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΔΕ καὶ ΔΖ καὶ εἰς τὰ μέσα αὐτῶν Β καὶ Γ. Ἀλλὰ αἱ κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Η (§ 108. Θ.). Ἄρα καὶ τὰ τρία ὕψη τοῦ τριγώνου ΑΒΓ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Η. Τοῦτο καλεῖται *ὀρθόκεντρον* αὐτοῦ.



*Σχ. 131.*

219. **Νὰ ἐγγράψητε τρίγωνον ΑΒΓ εἰς δοθέντα κύκλον Ο. Νὰ ὁρίσητε τὸ Α' συμμετρικὸν τῆς κορυφῆς Α πρὸς τὸ κέντρον Ο καὶ τὸ ὀρθόκεντρον Η τοῦ τριγώνου. Νὰ ἀποδείξητε δέ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΗΑ' διχοτομεῖ τὴν πλευρὰν ΒΓ.**

**Λύσις**: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο (σχ. 132), Α' τὸ συμμετρικὸν τοῦ Α πρὸς κέντρον Ο καὶ Η τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΗΑ' διχοτομεῖ τὴν ΒΓ. Τὸ τετράπλευρον ΗΒΑ'Γ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ εὐθεῖαι ΓΗΖ καὶ Α'Β εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ, ἡ μὲν ΓΖ ὡς ὕψος, ἡ δὲ ΑΒ ὡς πλευρὰ τῆς ἐγγεγραμμένης γωνΑΒΑ εἰς τὸ ἡμικύκλιον ΑΒΑ'ΟΑ. Δι' ὅμοιον λόγον εἶναι καὶ ΒΗΕ ∥ Α'Γ. Τὰ εὐθ τμήματα ΗΑ' καὶ ΒΓ εἶναι διαγώνιοι τούτου καὶ συνεπῶς διχοτομοῦνται ἤτοι ἡ ΗΑ' διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Θ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.



*Σχ. 132.*

220. **Εἰς τὸ προηγούμενον σχῆμα νὰ γράψητε καὶ τὴν ἀπόστασιν ΟΘ τοῦ κέντρου Ο ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΒΓ καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι** $ΟΘ = \frac{ΑΗ}{2}$.

**Λύσις**: Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΗΑ' (σχ. 132) ἡ ΟΘ ἑνώνει τὰ μέσα τῶν δύο πλευρῶν ΑΑ' καὶ ΗΑ' αὐτοῦ. Ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν ΑΗ αὐτοῦ καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς ἤτοι

$$ΟΘ = \frac{ΑΗ}{2}$$

**221. Ἀπὸ ἑκάστην κορυφὴν τριγώνου ΑΒΓ νὰ γράψητε παράλληλον πρὸς τὴν ἀπέναντι πλευράν. Οὕτω σχηματίζεται νέον τρίγωνον τὸ ΔΕΖ. Νὰ ἀποδείξητε, ὅτι τὸ κέντρον τῆς περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένης περιφερείας εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον Η τοῦ ΑΒΓ**

**Λύσις**: Τὰ ὕψη τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 131) ἀπεδείχθη (ἄσκ. 218), ὅτι εἶναι κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΔΕΖ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ κοινὸν σημεῖον Η αὐτῶν ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς κορυφὰς Δ, Ε, Ζ τοῦ τριγώνου ΔΕΖ, ἡ περιφέρεια ἡ γραφομένη μὲ κέντρον Η καὶ ἀκτῖνα ΗΔ, θὰ εἶναι περιγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, διότι θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν κορυφῶν Ζ καὶ Ε αὐτοῦ.

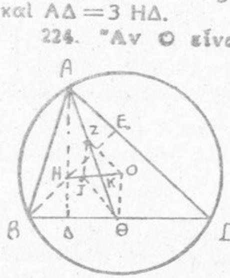
**222. Ἂν Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τριγώνου ΑΒΓ νὰ ἀποδείξητε, ὅτι ἕκαστον τῶν σημείων Α, Β, Γ εἶναι ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ δύο ἄλλα καὶ τὸ Η.**

**Λύσις**: Διότι τοῦ τριγώνου ΒΗΓ (σχ. 131) ὕψη εἶναι τὰ εὐθ. τμήματα ΗΘ, ΒΚ καὶ ΓΙ, τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἄρα ἡ κορυφὴ Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΗΒΓ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ κορυφὴ Β εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΗΑΓ καὶ ἡ κορυφὴ Γ εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΗΒΑ

**223. Ἂν Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ καὶ Δ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΑΔ = 3.ΗΔ.**

**Λύσις**: Γνωρίζομεν, ὅτι τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου τὰ ὕψη εἶναι καὶ διάμεσοι αὐτοῦ. Ἄρα τὸ ὕψος αὐτοῦ ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ, θὰ διέλθῃ ἀπὸ τὸ μέσον Δ αὐτῆς καὶ τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου συμπίπτει μὲ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων αὐτοῦ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων τριγώνου ἀπέχει ἐξ ἑκάστης πλευρᾶς αὐτοῦ τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου, θὰ εἶναι $ΗΔ = \frac{1}{3} ΑΒ$ καὶ ΑΔ = 3 ΗΔ.

**224. Ἂν Ο εἶναι τὸ κέντρον τῆς περὶ τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένης περιφερείας καὶ Η τὸ ὀρθόκεντρον αὐτοῦ, νὰ ἀποδείξητε, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΟΗ διέρχεται ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων τοῦ αὐτοῦ τριγώνου.**



*Σχ. 133.*

**Λύσις**: Ἔστω Ο (σχ. 133) τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, Η τὸ ὀρθόκεντρον αὐτοῦ καὶ ΑΘ ἡ διάμεσος ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν πλευρὰν ΒΓ αὐτοῦ, ἥτις τέμνει τὴν εὐθεῖαν ΗΟ εἰς τὸ σημεῖον Κ.

Ἂν ἀχθῇ ἡ ΟΘ, αὕτη εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΗ καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς. Ἂν δὲ Ζ καὶ Ι εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΚΑ καὶ ΚΗ τοῦ τριγώνου ΚΑΗ ἡ ΖΙ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΗ καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς. Ἄρα ΟΘ=∥ΖΙ καὶ τὸ τετράπλευρον ΟΖΙΘ εἶναι παρ/μον. Συνεπῶς οἱ διανώνιοι αὐτοῦ διχοτομοῦνται ἤτοι ΖΚ=ΚΘ καὶ ΚΙ=ΚΟ. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ΚΖ=ΖΑ θὰ εἶναι ΑΖ = ΖΚ = ΚΘ ἢ ΑΚ= $=\frac{2}{3}$ΑΘ. Ἤτοι ἡ εὐθεῖα ΗΟ τέμνει τὴν διάμεσον ΑΘ εἰς σημεῖον Κ ἀπέχον τῆς κορυφῆς Α τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου. Ἄρα τὸ Κ εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ κεῖται τοῦτο ἐπὶ τῆς εὐθείας ΗΟ, ἥτις καλεῖται εὐθεῖα τοῦ Euler (Ὄϊλερ).

225. **Νὰ ὁρίσητε τὰ μέσα Μ, Π, Ν τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ, τὸ ὀρθόκεντρον Η αὐτοῦ, τὰ μέσα Ρ, Τ, Σ τῶν τμημάτων ΑΗ, ΒΗ, ΓΗ καὶ τοὺς πόδας Δ, Ε, Ζ τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 118 Θ.Γ.). Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι :**

**α) Τὸ τετράπλευρον ΠΝΣΤ εἶναι ὀρθογώνιον.**

**β) Τὰ σημεῖα Ζ καὶ Ε κεῖνται ἐπὶ τῆς περὶ τὸ ΠΝΣΤ περιγεγραμμένης περιφερείας.**

**γ) Τὸ τετράπλευρον ΡΝΜΤ εἶναι ὀρθογώνιον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον μὲ τὸ ΠΝΣΤ.**

**δ) Τὸ Δ κεῖται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας**

**Λύσις**: α) Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΗ (σχ. 118 Θ. Γ.), ἡ ΠΤ ἑνώνει τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΗ αὐτοῦ καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΗ καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΗΓ ἡ ΝΣ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΗ καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς, δι' ὅμοιον λόγον. Ἄρα ΠΤ=∥ΝΣ καὶ τὸ τετράπλευρον ΠΝΣΤ εἶναι παραλλληλόγραμμον. Ἐπειδὴ δὲ ΑΔ⊥ΒΓ καὶ ΤΣ∥ΒΓ, ἕπεται ὅτι ΑΔ⊥ΤΣ. Ἐπειδὴ δὲ ΠΤ∥ΑΔ, ἕπεται ὅτι ΠΤ⊥ΤΣ καὶ συνεπῶς γωνΠΤΣ=1 ὀρθή. Τὸ παραλληλόγραμμον ΠΝΣΤ, ὡς ἔχον μίαν γωνίαν ὀρθὴν εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἑπομένως ἐγγράψιμον εἰς κύκλον μὲ διαμέτρους τὰς διαγωνίους αὐτοῦ ΠΣ καὶ ΤΝ.

β') Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΓΖ⊥ΑΒ, ἡ γωνΣΖΠ=1 ὀρθὴ καὶ τὸ τρίγωνον ΣΖΠ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἑπομένως ἡ περιφέρεια, ἡ ἔχουσα ὡς διάμετρον τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ ΠΣ διέρχεται διὰ τοῦ Ζ. Δι' ὅμοιον λόγον καὶ ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον τὴν ΤΝ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ε. Ἤτοι ἡ περιφέρεια ἡ περιγεγραμμένη περὶ τὸ ὀρθογώνιον ΠΝΣΤ διέρχεται καὶ διὰ τῶν σημείων Ζ καὶ Ε.

γ') Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ ΜΝ=∥ $\frac{ΑΒ}{2}$, ὡς συνδέουσα τὰ μέσα Μ καὶ Ν δύο πλευρῶν αὐτοῦ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΗΒ ἡ ΡΤ=∥ $\frac{ΑΒ}{2}$ δι' ὅμοιον λόγον.

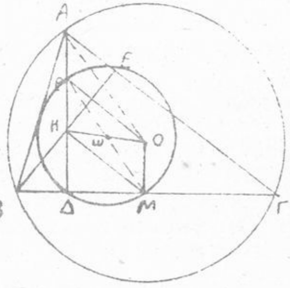
Ἄρα ΜΝ=∥ΡΤ καὶ τὸ τετράπλευρον ΡΝΜΤ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἐπειδὴ δὲ ΓΖ⊥ΑΒ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΝΜ. Ἀλλὰ ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΗΓ, ἕπεται ὅτι ΜΤ ∥ ΓΗΖ καὶ ἡ ΜΝ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΗΖ, θα εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῆς ΜΤ ἤτοι ἡ γωνία ΤΜΝ τοῦ παραλληλογράμμου ΤΜΝΡ εἶναι ὀρθὴ καὶ συνεπῶς τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ὀρθογώνια ΠΝΣΤ καὶ ΡΝΜΤ ἔχουσι κοινὴν τὴν διαγώνιον ΤΝ εἶναι ἐγγράψιμα εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον.

δ') Ἐπειδὴ τρίγωνον ΡΔΜ εἶναι ὀρθογώνιον μὲ ὑποτείνουσαν τὴν διαγώνιον ΡΜ τοῦ ὀρθογωνίου ΡΝΜΤ, ἕπεται ὅτι καὶ τὸ Δ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ ὀρθογώνιον ΡΝΜΤ.

Ὥστε: *Οἱ πόδες Δ, Ε, Ζ τῶν ὑψῶν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, τὰ μέσα Μ, Ν, Π τῶν πλευρῶν αὐτοῦ καὶ τὰ μέσα Ρ, Τ, Σ τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ ὀρθοκέντρου Η κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας*.

Αὕτη καλεῖται *περιφέρεια τῶν 9 σημείων* ἢ *περιφέρεια τοῦ* Euler (*Ὄϊλερ*).

**226. Νὰ ἀποδείξητε, ὅτι κέντρον τῆς περιφερείας τῶν 9 σημείων τριγώνου διχοτομεῖ τὴν ἀπόστασιν τοῦ ὀρθοκέντρου αὐτοῦ ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.**




*Σχ. 134*

**Λύσις**: Ἔστω Ο τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 134) καὶ Η τὸ ὀρθόκεντρον αὐτοῦ. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ κέντρον ω τῆς περιφερείας τῶν 9 σημείων διχοτομεῖ τὴν ΗΟ. Γνωρίζομεν ὅτι ΟΜ = ∥ ΗΡ. Ἄρα τὸ τετράπλευρον ΟΜΗΡ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ συνεπῶς αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΡΜ καὶ ΗΟ διχοτομοῦνται ἤτοι Ρω=ωΜ καὶ Ηω=ωΟ. Ἀλλὰ ΡΜ εἶναι διάμετρος τῆς περιφερείας τῶν 9 σημείων, διότι γωνΡΔΜ = 1 ὀρθὴ καὶ τὸ μέσον ω αὐτῆς εἶναι τὸ κέντρον τῆς περιφερείας τῶν 9 σημείων. Κεῖται ἄρα τοῦτο ἐπὶ τῆς εὐθείας ΗΟ τοῦ Euler (Ὄϊλερ).

**227. Νὰ ἀποδείξητε, ὅτι ἡ διάμετρος τῆς περιφερείας τῶν 9 σημείων τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς περὶ τὸ τρίγωνον τοῦτο περιγεγραμμένης περιφερείας.**

**Λύσις**: Διότι, ἂν φέρωμεν καὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΑ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 134) τὸ τετράπλευρον ΑΡΜΟ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι ΟΜ = ∥ ΑΡ. Συνεπῶς ΜΡ = ΟΑ. Ἀλλὰ ΜΡ εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου τῶν 9 σημείων καὶ ΟΑ ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ ΑΒΓ.

**228. Ἂν Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ νὰ ἀποδείξητε, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΗΒΓ, ΑΗΓ, ΑΒΗ ἔχουσι τὴν αὐτὴν περιφέρειαν τῶν 9 σημείων.**

**Λύσις**: Ἡ περιφέρεια τῶν 9 σημείων τοῦ τριγώνου ΗΒΓ διέρχεται διὰ τῶν μέσων Τ,Μ,Σ τῶν πλευρῶν ΒΗ, ΒΓ καὶ ΓΗ αὐτοῦ (σχ. 118 Θ.Γ.). Ἀλλὰ διὰ τῶν αὐτῶν σημείων διέρχεται καὶ ἡ περιφέρεια τῶν 9 σημείων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ δύο αὗται περιφέρειαι ἔχουσι 3 σημεῖα κοινὰ συμπίπτουσι.

Καθ' ὅμοιον τρόπον δεικνύεται, ὅτι καὶ αἱ περιφέρειαι τῶν 9 σημείων τῶν τριγώνων ΗΑΓ καὶ ΗΑΒ συμπίπτουσι μὲ τὴν περιφέρειαν τῶν 9 σημείων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἄρα καὶ τὰ 4 τρίγωνα ἔχουσι τὴν αὐτὴν περιφέρειαν τῶν 9 σημείων.

**Σημείωσις**: *Ἡ ἀνωτέρω πρότασις φέρει τὸ ὄνομα*: «**Θεώρημα τοῦ Hamilton**».

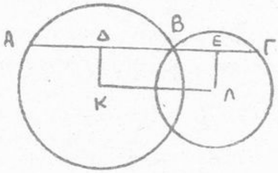
# ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α

### Ἡ ἀναλυτικὴ καὶ συνθετικὴ μέθοδος

**Ἀσκήσεις** σελὶς 129. **229. Ἀπὸ ἓν κοινὸν σημεῖον δύο τεμνομένων περιφερειῶν φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν διάκεντρον αὐτῶν. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπ' αὐτῆς ὁριζομένων χορδῶν εἶναι διπλάσιον ἀπὸ τὴν ἀπόστασιν τῶν κέντρων.**

Ἔστωσαν Κ καὶ Λ (σχ. 135) δύο περιφέρειαι, Β ἓν τῶν κοινῶν σημείων αὐτῶν καὶ ΑΒΓ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν διάκεντρον αὐτῶν ΚΛ. Ζητεῖται νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΑΒ+ΒΓ=2.ΚΛ.




*Σχ. 135.*

**Ἀνάλυσις**: Ἔστω ὅτι ΑΒ+ΒΓ=2.ΚΛ. Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης διὰ 2 καὶ ἔχομεν.

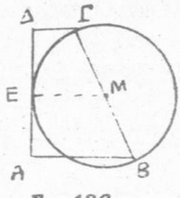
$\frac{ΑΒ}{2}+\frac{ΒΓ}{2}=ΚΛ$ (1). Ἂν δὲ ἐκ τῶν κέντρων Κ καὶ Λ φέρωμεν τὰς καθέτους ΚΔ καὶ ΛΕ ἐπὶ τὰς χορδὰς ΑΒ καὶ ΒΓ θὰ εἶναι ΑΔ = ΔΒ καὶ ΒΕ = ΕΓ ἢ $ΔΒ=\frac{ΑΒ}{2}$ καὶ $ΒΕ=\frac{ΒΓ}{2}$ καὶ ἡ ἰσότης (1) γίνεται ΔΒ + ΒΕ = ΚΛ, ἢ ΔΕ = ΚΛ. Ἀλλὰ εἶναι ΔΕ = ΚΛ, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου ΔΚΛΕ.

**Σύνθεσις**: Φέρομεν ἐκ τῶν κέντρων Κ καὶ Λ καθέτους ἐπὶ τὰς χορδὰς ΑΒ καὶ ΒΓ, τὰς ΚΔ καὶ ΛΕ. Αὗται, ὡς γνωστόν, διχοτομοῦσι τὰς χορδὰς καὶ ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΓ, εἶναι παράλληλοι. Τὸ τετράπλευρον ΔΕΛΚ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ συνεπῶς ΔΕ=ΚΛ, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ αὐτοῦ. Ἀλλὰ ΔΕ=ΔΒ+ΒΕ καὶ συνεπῶς ΔΒ+ΒΕ =ΚΛ.

Ἐπειδὴ δὲ $ΔΒ=\frac{ΑΒ}{2}$ καὶ $ΒΕ=\frac{ΒΓ}{2}$ θὰ ἔχωμεν $\frac{ΑΒ}{2}+\frac{ΒΓ}{2}=ΚΛ$, ἢ ΑΒ+ΒΓ = 2. ΚΛ. ὅ. ἔ. δ.

**230. Εἰς τραπέζιον ΑΒΓΔ ἡ πλευρὰ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς βάσεις ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ ΒΓ=ΑΒ+ΔΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΔ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον ΒΓ.**

Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ (σχ. 136), εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ΔΑ ⊥ ΑΒ καὶ ΑΒ+ΔΓ=ΓΒ. Ζητεῖται νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον τὴν ΒΓ ἐφάπτεται τῆς πλευρᾶς ΔΑ τοῦ τραπεζίου.



*Σχ. 136.*

**Ἀνάλυσις:** Ἔστω, ὅτι ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον τὴν ΒΓ ἐφάπτεται τῆς πλευρᾶς ΔΑ εἰς τὸ σημεῖον Ε. Ἐὰν φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ΜΕ, αὕτη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΑΔ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ, θὰ εἶναι ΜΕ ∥ ΑΒ ∥ ΔΓ.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΜΕ ἄγεται παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου ἐκ τοῦ μέσου Μ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, ἕπεται ὅτι εἶναι ἡ διάμεσος αὐτοῦ. Ἀλλὰ $ΜΕ = ΜΓ = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{ΑΒ+ΓΔ}{2}$.

Ἄρα ἡ διάμεσος τοῦ τραπεζίου ΜΕ θὰ ἰσοῦτο μὲ $\frac{ΑΒ+ΓΔ}{2}$. Ἀλλὰ εἶναι τοῦτο ἀληθὲς (ἄσκ. 148).

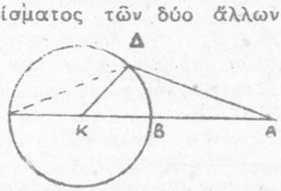
**Σύνθεσις:** Φέρομεν τὴν διάμεσον ΜΕ τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ. Ἔχομεν (ἄσκ. 148) $ΜΕ = \frac{ΑΒ+ΓΔ}{2}$ Ἀλλὰ καὶ $ΜΓ = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{ΑΒ+ΓΔ}{2}$.

Ἄρα ΜΓ=ΜΕ καὶ ἡ περιφέρεια ἡ γραφομένη μὲ διάμετρον τὴν ΒΓ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Ε τῆς πλευρᾶς ΑΔ. Ἐπειδὴ ΑΒ⊥ΑΔ ἐξ ὑποθέσεως καὶ ΜΕ ∥ ΑΒ, ἕπεται ὅτι ΜΕ⊥ΑΔ. Ὅθεν ἡ ΑΔ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας (Μ, ΜΓ), ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΜΕ καὶ εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς.

**231. Νὰ γράψητε περιφέρειαν Κ καὶ νὰ ὁρίσητε ἐκτὸς τοῦ κύκλου σημεῖον Α. Νὰ φέρητε ἔπειτα τὴν εὐθεῖαν ΑΚ, ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα Β καὶ Γ. Ἂν τὸ Β εἶναι μεταξὺ Α καὶ Κ καὶ Δ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας, νὰ ἀποδείξητε, ὅτι ΑΒ<ΑΔ καὶ ΑΓ>ΑΔ.**

Ἔστω ἡ περιφέρεια Κ (σχ. 137) καὶ σημεῖον Α κείμενον ἐκτὸς αὐτῆς. Φέρομεν τὴν τέμνουσαν ΑΚ, ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Ἂν δὲ Δ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας θὰ δείξωμεν ὅτι ΑΒ<ΑΔ καὶ ΑΓ>ΑΔ.

**Ἀνάλυσις.** Ἂν ἦτο ΑΒ<ΑΔ καὶ ἀχθῇ ἡ ΑΚ, θὰ ἦτο καὶ ΑΒ+ΒΚ <ΑΔ+ΔΚ ἢ ΑΚ<ΑΔ+ΔΚ. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀληθές, διότι ἑκάστη πλευρὰ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ.



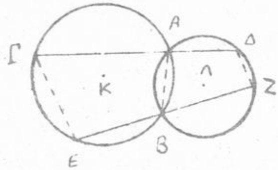
*Σχ. 137.*

**Σύνθεσις.** Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΚΔ ἔχομεν, ὅτι ΑΚ<ΑΔ+ΔΚ ἢ ΑΒ+ΒΚ<ΑΔ+ΔΚ. Ἀφαιροῦμεν ἀπ' ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης τὰ ἴσα εὐθ. τμήματα ΚΒ καὶ ΚΔ καὶ ἔχομεν ΑΒ<ΑΔ.

*β')* Ἂν ἦτο ΑΓ>ΑΔ θὰ ἦτο καὶ ΑΚ+ +ΚΓ>ΑΔ. Ἐπειδὴ δὲ ΚΓ=ΚΔ, θὰ ἦτο καὶ ΑΚ+ΚΔ>ΑΔ. ἀλλὰ τοῦτο ἀληθές.

**Σύνθεσις**: Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΚΔ ἔχομεν ὅτι ΑΚ+ΚΔ>ΑΔ. Ἀλλὰ ΚΓ=ΚΔ. Ὅθεν ΑΚ+ΚΓ>ΑΔ ἢ ΑΓ>ΑΔ.

232. **Ἀπὸ ἕκαστον κοινὸν σημεῖον δύο τεμνομένων περιφερειῶν νὰ φέρητε κοινὴν τέμνουσαν αὐτῶν καὶ νὰ ἀποδείξητε, ὅτι αἱ χορδαί, τὰς ὁποίας ὁρίζουσι τὰ ἄκρα αὐτῶν εἶναι παράλληλοι.**



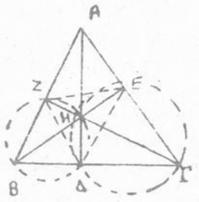
*Σχ. 138.*

**Λύσις**: Ἔστωσαν ΓΔ καὶ ΕΖ αἱ κοιναὶ τέμνουσαι τῶν περιφερειῶν Κ καὶ Λ (σχ. 138) διερχόμεναι διὰ τῶν κοινῶν σημείων Α καὶ Β αὐτῶν ἀντιστοίχως. Θὰ δείξωμεν ὅτι ΓΕ ∥ ΔΖ.

**Ἀνάλυσις.** Ἂν εἶναι ΓΕ ∥ ΔΖ θὰ εἶναι καὶ Ε + Ζ = 2 ὀρθαί, ὡς γωνίαι ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη αὐτῶν τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΕΖ. Ἀλλὰ ἂν ἀχθῇ ἡ κοινὴ χορδὴ ΑΒ, λόγῳ τῶν ἐγγεγραμμένων τετραπλεύρων ΕΒΑΓ καὶ ΑΒΖΔ, θὰ εἶναι Ε = γων ΒΑΔ (Π. ΙΙ § 158) καὶ Ζ = γων ΒΑΓ. Ἐπειδὴ δὲ Ε + Ζ = 2 ὀρθαὶ θὰ εἶναι καὶ γων ΒΑΔ+ +γωνΒΑΓ = 2 ὀρθ. Ἀλλὰ εἶναι τοῦτο ἀληθές, διότι αἱ γωνίαι εἶναι ἐφεξῆς, τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

**Σύνθεσις**: Ἐπειδὴ τὰ τετράπλευρα ΑΒΕΓ καὶ ΑΒΖΔ εἶναι ἐγγεγραμμένα εἰς τοὺς κύκλους Κ καὶ Λ ἀντιστοίχως, θὰ εἶναι Ε=γωνΒΑΔ καὶ Ζ = γων ΒΑΓ. Ἄρα Ε + Ζ = γων ΒΑΔ + γωνΒΑΓ = 2 ὀρθαί. Ἄρα ΓΕ ∥ ΔΖ.

233. **Νὰ ἀποδείξητε, ὅτι τὰ ὕψη τριγώνου διχοτομοῦσι τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν.**



*Σχ 139.*

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 139) καὶ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τὰ ὕψη αὐτοῦ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ταῦτα διχοτομοῦσι τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου ΔΕΖ, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν τοῦ ΑΒΓ.

**Ἀνάλυσις.** Ἔστω, ὅτι εἶναι γων ΖΔΗ = = γων ΗΔΕ (1). Τὰ τετράπλευρα ΒΔΗΖ καὶ ΓΔΗΕ εἶναι ἐγγράψιμα εἰς κύκλον, διότι εἶναι Δ + Ζ = 2 ὀρθ. καὶ Δ + Ε = 2 ὀρθ. λόγῳ τῶν ὑψῶν. Συνεπῶς θὰ εἶναι καὶ γων ΖΔΗ=γωνΖΒΗ (2) ὡς ἐγγεγραμμέναι βαίνουσι εἰς τὸ αὐτὸ τόξον ΖΗ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ α΄ τετράπλευρον, καθὼς καὶ γων ΗΔΕ = γων ΗΓΕ (3), ὡς ἐγγεγραμμέναι βαίνουσαι εἰς τὸ τόξον ΗΕ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας περὶ τὸ τετράπλευρον, ΔΗΕΓ. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1), (2) καὶ (3) ἕπεται ὅτι καὶ γων ΖΒΗ = =γωνΗΓΕ. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀληθές, διότι αὗται εἶναι συμπληρωματικαὶ τῆς αὐτῆς γωνίας Α, ὡς ὀξεῖαι γωνίαι τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΕΒ καὶ ΑΖΓ ἐχόντων κοινὴν τὴν γωνίαν Α

**Σύνθεσις.** Ἐπειδὴ γωνΖΒΗ+γωνΑ=1 ὀρθ. καὶ γωνΖΓΕ+γωνΑ=1ὀρθ. ἕπεται ὅτι καὶ γωνΖΒΗ = γωνΗΓΕ (1). Ἐπειδὴ δὲ τὸ τετράπλευρον

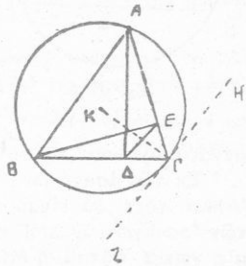
ΖΒΔΗ είναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, διότι Δ+Ζ=2 ὀρθαί, θὰ εἶναι καὶ γωνΖΒΗ=γωνΖΔΗ (2), ὡς ἐγγεγραμμέναι βαίνουσαι εἰς τὸ αὐτὸ τόξον ΖΗ. Ὁμοίως ἐκ τοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου ΗΔΓΕ ἕπεται, ὅτι γωνΗΓΕ=γωνΗΔΕ (3).

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1), (2) καὶ (3) ἕπεται, ὅτι γωνΖΔΗ=γωνΗΔΕ καὶ συνεπῶς τὸ ὕψος ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΖΔΕ τοῦ τριγώνου ΖΔΕ. Κατ' ἀνάλογον ἀκριβῶς τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ τὰ ἄλλα ὕψη ΒΕ καὶ ΓΖ διχοτοῦσι τὰς γωνίας Ε καὶ Ζ τοῦ τριγώνου ΔΕΖ.

Τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, τὸ ἔχον κορυφὰς τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ λέγεται *ὀρθικὸν τρίγωνον* τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

**234. Εἰς δοθέντα κύκλον Κ νὰ ἐγγράψητε τρίγωνον ΑΒΓ καὶ νὰ φέρητε τὰ ὕψη ΑΔ καὶ ΒΕ αὐτοῦ. Νὰ ἀποδείξητε δέ, ὅτι ἡ ἀκτὶς ΚΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ. (Θ.** NAGEL).

Ἔστω ΑΒΓ τὸ ἐγγεγραμμένον τρίγωνον εἰς κύκλον Κ (σχ. 140) καὶ ΑΔ, ΒΕ δύο ὕψη αὐτοῦ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΚΓ⊥ΔΕ.



*Σχ. 140.*

***Ἀνάλυσις :*** Φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΖΗ τῆς περιφερείας Κ εἰς τὸ σημεῖον Γ. Θὰ εἶναι ΚΓ⊥ΖΗ. Ἂν ἦτο καὶ ΚΓ⊥ΔΕ θὰ ἦτο καὶ ΔΕ∥ΖΗ. Ἀλλὰ τότε θὰ ἦτο καὶ γωνΒΓΖ=γωνΕΔΓ, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι τῶν παραλλήλων ΖΗ καὶ ΔΕ, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΓ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τετράπλευρον ΑΒΔΕ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, διότι τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε εἶναι κορυφαὶ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΒΕ καὶ ΑΒΔ μὲ κοινὴν ὑποτείνουσαν τὴν ΑΒ θὰ εἶναι καὶ γωνΕΔΓ=γωνΑ, διότι παντὸς τετραπλεύρου ἐγγραψίμου εἰς κύκλον, ἑκάστη γωνία αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν τῆς ἀπέναντι αὐτῆς γωνίας αὐτοῦ. Συνεπῶς θὰ ἦτο καὶ γωνΑ=γωνΒΓΖ. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀληθές, διότι ἡ γωνΒΓΖ σχηματίζεται ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης εἰς τὸ ἓν ἄκρον αὐτῆς καὶ ἰσοῦται μὲ ἐγγεγραμμένην γωνίαν ἥτις βαίνει εἰς τὸ τόξον τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχόμενον.

**Σύνθεσις**: Ἐπειδὴ γωνΒΓΖ=γωνΑ, ὡς σχηματιζομένη ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης καὶ γωνΑ=γωνΕΔΓ, θὰ εἶναι καὶ γωνΒΓΖ=γωνΕΔΓ

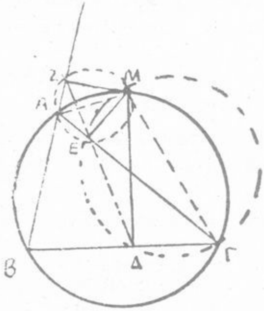
Ἐπειδὴ δὲ αἱ εὐθεῖαι ΔΕ καὶ ΖΗ τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΒΓ σχηματίζουσι δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας αὐτῶν ἴσας, θὰ εἶναι παράλληλοι. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΚΓ, ὡς ἀκτὶς καταλήγουσα εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Γ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΗ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΔΕ, ἥτις εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΖΗ.

**235. Ἀπὸ ἓν σημεῖον τῆς περὶ τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγγραμμένης περιφερείας νὰ φέρητε καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου τοῦ-**

**του. Νὰ ἀποδείξητε δέ, ὅτι οἱ πόδες τῶν καθέτων τούτων κεῖνται ἐπ' εὐθείας (εὐθεῖα** Simson).

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, Μ τυχὸν σημεῖον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας Κ καὶ Δ, Ε, Ζ, οἱ πόδες τῶν ἀγομένων καθέτων ἐκ τοῦ σημείου Μ ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 141).

**Ἀνάλυσις**: Ἂν εἶναι γραμμὴ ΖΕΔ εὐθεῖα, θὰ εἶναι καὶ γωνΑΕΖ= =γωνΔΕΓ, ὡς κατὰ κορυφήν. Ἄγομεν τὰ εὐθ. τμήματα ΜΑ καὶ ΜΓ. Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΕΜΖ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, διότι Ζ+Ε=2 ὀρθαί. Συνεπῶς θὰ εἶναι γωνΑΕΖ= =γωνΑΜΖ (1), ὡς ἐγγεγραμμέναι βαίνουσαι εἰς τὸ αὐτὸ τόξον ΑΖ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΕΜΖ.




*Σχ. 141.*

Ἐπίσης τὸ τετράπλευρον ΕΔΓΜ θὰ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, διότι τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε εἶναι κορυφαὶ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΜΕΓ καὶ ΜΔΓ, ἐχόντων κοινὴν ὑποτείνουσαν τὴν ΜΓ. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ γωνΔΕΓ=γωνΔΜΓ (2), ὡς ἐγγεγραμμέναι βαίνουσαι εἰς τὸ αὐτὸ τόξον ΔΓ.

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων ( ) καὶ (2) ἕπεται, ὅτι καὶ γωνΑΜΖ=γωνΔΜΓ (3). Ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι καὶ γωνΜΓΔ=γωνΜΑΖ, ὡς συμπληρωματικαὶ τῶν ἴσων γωνιῶν ΔΜΓ καὶ ΑΜΖ. Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὸ τετράπλευρον ΜΑΒΓ μία γωνία αὐτοῦ, ἡ ΜΓΔ, εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπέναντι ἐξωτερικὴν ΜΑΖ, θὰ εἶναι τοῦτο ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀληθές.

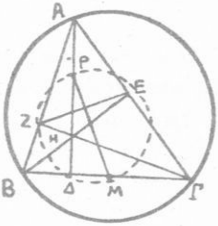
**Σύνθεσις**: Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΜΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Κ, θὰ εἶναι γωνΜΓΔ=γωνΜΑΖ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΜΓΔ καὶ ΜΖΑ, ὡς ἔχοντα ἀνὰ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν αὐτῶν ἴσην, θὰ ἔχωσιν ἴσην καὶ τὴν ἄλλην ὀξεῖαν γωνίαν αὐτῶν ἤτοι γωνΔΜΓ= =γωνΑΜΖ (1). Ἀλλὰ τὸ τετράπλευρον ΑΖΜΕ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον διότι Ε+Ζ=2 ὀρθαί. Ἄρα γωνΑΜΖ=γωνΑΕΖ (2). Δι' ὅμοιον λόγον θὰ εἶναι καὶ γωνΔΜΓ=γωνΔΕΓ (3). Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1), (2) καὶ (3) ἕπεται, ὅτι γων ΑΕΖ=γωνΔΕΓ. Ἀλλὰ γωνΑΕΖ + γωνΖΕΓ = 2 ὀρθαί, ὡς ἐφεξῆς ἔχουσαι τὰς μὴ κοινὰς πλευρὰς αὐτῶν ἐπ' εὐθείας. Ἄρα καὶ γωνΖΕΓ+γωνΓΕΔ =2 ὀρθαὶ καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικαί, αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ αὐτῶν ΖΕ καὶ ΕΔ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἡ εὐθεῖα αὕτη ΖΕΔ λέγεται ***εὐθεῖα τοῦ*** Simson ***ἢ εὐθεῖα τοῦ*** Wallace ***(Οὐάλλας).***

**236. Νὰ φέρητε τὰ ὕψη ΒΕ καὶ ΓΖ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ. Νὰ ὁρίσητε τὸ μέσον Μ τῆς πλευρᾶς ΒΓ καὶ τὸ μέσον Ρ τοῦ τμήματος ΑΗ (Η τὸ ὀρθόκεντρον). Νὰ ἀποδείξητε δέ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΜΡ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΕ.**

Ἔστω Μ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 142), ΒΕ, ΓΖ, ΑΔ τὰ ὕψη του, Η τὸ ὀρθόκεντρον αὐτοῦ καὶ Ρ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΗ. Θὰ δείξωμεν ὅτι ΡΜ⊥ΖΕ.

**Ἀνάλυσις**: Τὰ σημεῖα Μ, Ε, Ρ, Ζ, Δ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῶν 9 σημείων ἢ τοῦ Euler. Συνεπῶς ἡ ΖΕ εἶναι χορδὴ αὐτοῦ, ἡ δὲ ΡΜ διάμετρος, διότι γωνΡΔΜ = 1 ὀρθή. Ἂν δὲ εἶναι ΜΡ⊥ΖΕ θὰ εἶναι καὶ τοξΖΡ=τοξΡΕ. Ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι καὶ γωνΖΔΑ=γωνΑΔΕ. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀληθές, διότι τὰ ὕψη τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ ὀρθικοῦ τριγώνου ΔΖΕ. (ἄσκ. 233). (Εἰς τὸ σχ. 142 νὰ χαραχθῶσι τὰ εὐθ. τμήματα ΔΖ, ΔΕ).

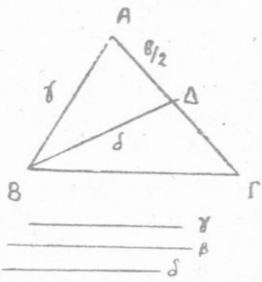


*Σχ. 142.*

**Σύνθεσις**: Ἐπειδὴ γωνΖΔΑ = γωνΑΔΕ, θὰ εἶναι καὶ τοξΖΡ=τοξΡΕ. Ἐπειδὴ δὲ γωνΡΔΜ=1 ὀρθ. ἡ ΡΜ εἶναι διάμετρος καὶ ὡς διερχομένη διὰ τοῦ μέσου Ρ τοῦ τόξου ΖΕ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν αὐτοῦ ΖΕ ἤτοι ΡΜ⊥ΖΕ.

**Ἀσκήσεις σελὶς 132. 237. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ δύο πλευρῶν καὶ τῆς διαμέσου, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν ἀπὸ αὐτάς.**

**Ἀνάλυσις**: Ἔστω ὅτι κατεσκευάσθη τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ εἶναι τὸ ΑΒΓ (σχ. 143), ἔχον τὴν ΑΒ = γ, ΑΓ = β καὶ τὴν διάμεσον ΒΔ = δ. Παρατηροῦμεν, ὅτι τοῦ τριγώνου ΑΒΔ γνωρίζομεν τὰς τρεῖς πλευράς του ἤτοι ΑΒ = γ, ΑΔ = $\frac{\beta}{2}$ καὶ ΒΔ = δ. Δυνάμεθα ἄρα νὰ τὸ κατασκευάσωμεν ἐκ τῶν ἀρχικῶς δοθέντων στοιχείων β, γ καὶ δ (πρόβλ. § 151). Ἐκ τούτου δὲ ὁρίζεται κατόπιν καὶ τὸ ΑΒΓ.



*Σχ. 143.*

**Σύνθεσις**: Κατασκευάζομεν τρίγωνον ΑΒΔ (σχ. 143). μὲ πλευρὰς γ, δ καὶ β/2 (§ 151). Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΑΔ αὐτοῦ κατὰ μῆκος ΔΓ = ΑΔ καὶ φέρομεν τὴν ΒΓ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

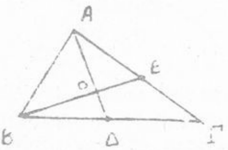
**Ἀπόδειξις**: Τοῦτο ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα ἤτοι ΑΒ = γ, ΑΓ = = 2 . ΑΔ = 2 . $\frac{\beta}{2}$ = β καὶ διάμεσον ἀντιστοιχοῦσαν εἰς μίαν τῶν δοθεισῶν πλευρῶν αὐτοῦ τὴν ΑΓ, ἴσην πρὸς δ.

**Διερεύνησις**: Ἵνα τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν, πρέπει νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ κατασκευὴ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ ἤτοι ἑκάστη πλευρὰ αὐτοῦ νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων καὶ μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν δηλ. $AB - A\Delta < B\Delta < AB + A\Delta$ ἢ

$$\gamma - \frac{\beta}{2} < \delta < \beta + \frac{\beta}{2}.$$

**238. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΒΓ καὶ ἀπὸ τὰς διαμέσους ΑΔ καὶ ΒΕ αὐτοῦ.**

**Ἀνάλυσις:** Ἔστω, ὅτι κατεσκευάσθη τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ εἶναι τὸ ΑΒΓ (σχ. 144), ἔχον τὴν πλευρὰν $B\Gamma = \alpha$ καὶ τὰς διαμέσους $A\Delta = \delta$ καὶ $BE = \delta'$.



*Σχ. 144.*

Ἐπειδὴ αἱ διάμεσοι παντὸς τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ ἑκάστην κορυφὴν τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου, θὰ ἔχωμεν $BO = \frac{2}{3} \cdot BE = \frac{2}{3}\delta'$, $O\Delta = \frac{1}{3} \cdot A\Delta = \frac{1}{3}\delta$ καὶ ἐπὶ πλέον $B\Delta = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}$.

Τοῦ τριγώνου, λοιπὸν ΟΒΔ γνωρίζομεν καὶ τὰς τρεῖς του πλευρὰς καὶ δυνάμεθα νὰ τὸ κατασκευάσωμεν.

**Σύνθεσις:** Κατασκευάζομεν τρίγωνον ΒΔΟ (σχ. 144), ἔχον ὡς πλευρὰς $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\delta}{3}$ καὶ $\frac{2\delta'}{3}$. Προεκτείνομεν εἶτα τὴν πλευρὰν ΒΔ αὐτοῦ καὶ λαμβάνομεν $\Delta\Gamma = B\Delta$ καὶ τὴν ΔΟ καὶ λαμβάνομεν $OA = 2 . \Delta O$ καὶ φέρομεν τὰ εὐθ. τμήματα ΑΓ καὶ ΑΒ. Τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

**Ἀπόδειξις:** Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει τὴν πλευρὰν $B\Gamma = 2 . B\Delta = 2 . \frac{\alpha}{2} = \alpha$, τὴν διάμεσον $A\Delta = AO + O\Delta = 2 . \Delta O + \Delta O = 3 . \Delta O = 3 . \frac{\delta}{3} = \delta$ καὶ ἐπειδὴ ἡ ΒΕ τεμνει τὴν διάμεσον ΑΔ εἰς σημεῖον Ο ἀπέχον τῆς κορυφῆς Α τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου ΑΔ, ἕπεται ὅτι εἶναι ἡ διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν πλευρὰν ΑΓ αὐτοῦ. Εἶναι δὲ ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν δ', διότι $BE = BO + OE = \frac{2\delta}{3} + \frac{\delta'}{3} = \delta'$.

**Διερεύνησις:** Ἵνα τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν, πρέπει νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ κατασκευὴ τοῦ τριγώνου ΒΔΟ Πρὸς τοῦτο πρέπει

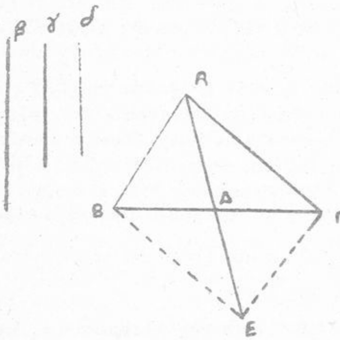
$$\left|\frac{2\delta'}{3} - \frac{\delta}{3}\right| < \frac{\alpha}{2} < \frac{2\delta'}{3} + \frac{\delta}{3}.$$

239. **Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ καὶ ἀπὸ τὴν διάμεσον ΑΔ.**

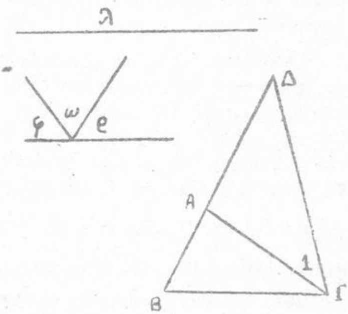
**Ἀνάλυσις:** Ἔστω, ὅτι κατεσκευάσθη τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ εἶναι τὸ ΑΒΓ (σχ. 145), ἔχον τὴν πλευρὰν ΑΒ = γ, τὴν πλευρὰν ΑΓ=β καὶ τὴν μεταξὺ αὐτῶν διάμεσον ΑΔ=δ.

Προεκτείνομεν τὴν διάμεσον ΑΔ καὶ λαμβάνομεν ΔΕ = ΑΔ, φέρομεν δὲ τὰ εὐθ. τμήματα ΓΕ καὶ ΕΒ. Τὸ σχηματιζόμενον τετράπλευρον ΑΒΕΓ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΑΕ καὶ ΒΓ διχοτομοῦνται. Ἄρα εἶναι ΓΕ=ΑΒ=γ καὶ ΑΕ=2.ΑΔ = 2δ. Τοῦ τριγώνου ΑΓΕ γνωρίζομεν λοιπὸν τὰς τρεῖς πλευρὰς καὶ δυνάμεθα νὰ τὸ κατασκευάσωμεν ἐκ τῶν ἀρχικῶς δοθέντων στοιχείων γ, β, δ.

**Σύνθεσις:** Κατασκευάζομεν τρίγωνον ΑΓΕ (σχ. 145) μὲ πλευρὰς



*Σχ. 145.*



*Σχ. 146.*

γ, β καὶ 2δ (πρόβλ. § 151). Φέρομεν τὴν διάμεσον ΓΔ αὐτοῦ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς λαμβάνομεν ΔΒ=ΔΓ, φέρομεν δὲ καὶ τὴν ΑΒ.

Τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

**Ἀπόδειξις:** Τοῦτο ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα, διότι ΑΓ=β,

$$ΑΒ = ΓΕ = γ \text{ καὶ } ΑΔ = \frac{ΑΕ}{2} = \frac{2δ}{2} = δ.$$

**Διερεύνησις.** Ἵνα εἶναι δυνατὴ ἡ λύσις τοῦ προβλήματος, πρέπει νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ κατασκευὴ τοῦ τριγώνου ΑΓΕ. Πρὸς τοῦτο πρέπει

$ΑΓ-ΓΕ<ΑΕ<ΑΓ+ΓΕ$ ἢ $β-γ<2δ<γ+β$ ἂν $β>γ$

ἢ $γ-β<2δ<γ+β$ ἂν $β<γ$.

**Ἀσκήσεις** σελὶς 134.—240. **Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν γωνιῶν καὶ τοῦ ἀθροίσματος ΑΒ+ΑΓ.**

***Περιορισμός*:** Πρέπει ω+φ+ρ=2 ὀρθαί.

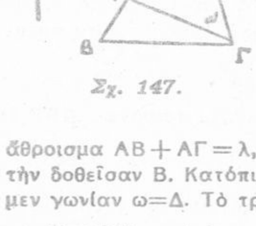
**Ἀνάλυσις:** Ἔστω ὅτι κατεσκευάσθη τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ εἶναι τὸ ΑΒΓ (σχ. 146), ἔχον γωνΑ=γωνφ, γωνΒ = γων ω, γωνΓ=γωνρ καὶ ΑΒ+ΑΓ=λ.

Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΒΑ καὶ λαμβάνομεν ΑΔ = ΑΓ, φέρομεν δὲ καὶ τὴν ΔΓ. Τὸ σχηματισθὲν τρίγωνον ΔΑΓ εἶναι ἰσοσκελές, διότι $ΑΔ=ΑΓ$ καὶ συνεπῶς γων$Δ$ = γων$Γ_1$ (1). Ἀλλὰ γων$Α$ = γων$Δ$ + γων$Γ_1$, ὡς ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΔΑΓ. Ἕνεκα δὲ τῆς (1) θὰ εἶναι γων$Α$ = 2γων$Δ$ καὶ γων$Δ = \frac{\text{γων} Α}{2}$. Ἐπειδὴ καὶ $ΒΔ = ΒΑ + ΑΔ = ΒΑ + ΑΓ = λ$, τὸ τρίγωνον ΔΒΓ εἶναι καὶ ἀρχικῶς κατασκευάσιμον, διότι γνωρίζομεν αὐτοῦ μίαν πλευρὰν καὶ τὰς εἰς αὐτὴν προσκειμένας γωνίας.

**Σύνθεσις:** Κατασκευάζομεν τρίγωνον ΔΒΓ (σχ. 146) ἔχον τὴν πλευρὰν $ΒΔ=λ$ καὶ προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας $Β = ω$ καὶ $Δ = \frac{φ}{2}$. Μὲ κορυφὴν τὸ Γ καὶ πλευρὰν τὴν ΓΔ κατασκευάζομεν γωνίαν $Γ_1$, ἴσην πρὸς τὴν Δ. Ἡ ἄλλη πλευρὰ αὐτῆς τέμνει τὴν ΒΔ εἴς τι σημεῖον Α καὶ τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ λέγω, ὅτι εἶναι τὸ ζητούμενον.

**Ἀπόδειξις:** Εἰς τὸ τρίγωνον ΔΒΓ, ἡ $ΒΔ=ΒΑ+ΑΔ=ΒΑ+ΑΓ=λ$, ὡς ἄθροισμα δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς τρίτης αὐτοῦ πλευρᾶς ΒΓ καὶ συνεπῶς καὶ γων$ΔΓΒ >$ γων$Δ$. Ἄρα ἡ πλευρὰ ΓΑ τῆς γωνίας ΔΓΑ, θὰ κεῖται ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΒΔΓ καὶ θὰ τέμνῃ τὴν ΒΔ εἴς τι σημεῖον Α. Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΓ εἶναι $Δ=Γ_1$, θὰ εἶναι καὶ $ΑΔ=ΑΓ$. Τοῦ τριγώνου δὲ ΑΒΓ θὰ εἶναι $ΑΒ+ΑΓ=ΑΒ+ΑΔ=ΒΔ=λ$, $Β = ω$, $Α = 2Δ = 2 \cdot \frac{φ}{2} = φ$ καὶ $Γ=ρ$, ὡς παραπληρωματικαὶ τῶν ἴσων ἀθροισμάτων $Α+Β$ καὶ $φ+ω$.

**241. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἀπὸ τὴν γωνίαν Β καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα ΑΒ+ΑΓ.**




*Σχ. 147.*

**Ἀνάλυσις:** Ἔστω ὅτι κατεσκευάσθη τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ εἶναι τὸ ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΒΓ, ἡ γωνία Β καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν $ΑΒ + ΑΓ$ εἶναι ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα (σχ. 147).

Σχηματίζομεν, ὡς καὶ εἰς προηγουμένην ἄσκησιν, τὸ τρίγωνον ΔΒΓ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν δύο πλευρὰς ΒΔ καὶ ΒΓ καὶ τὴν περιεχομένην ὑπ' αὐτῶν γωνίαν Β. Εἶναι ἄρα τοῦτο καὶ ἀρχικῶς κατασκευάσιμον.

**Σύνθεσις:** Κατασκευάζομεν τρίγωνον ΔΒΓ μὲ πλευρὰς ΒΔ ἴσην πρὸς τὸ δεδομένον ἄθροισμα $ΑΒ + ΑΓ = λ$, $ΒΓ = α$ καὶ περιεχομένην γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν Β. Κατόπιν μὲ κορυφὴν Γ καὶ πλευρὰν ΓΔ σχηματιζομεν γωνίαν $ω=Δ$. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

**Ἀπόδειξις:** Διότι, τῆς πλευρᾶς $λ=ΑΒ+ΑΓ$ οὔσης μεγαλυτέρας τῆς α, ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς Δ καὶ συνεπῶς ἡ ΓΑ θὰ κεῖται ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΒΓΔ καὶ θὰ τέμνῃ τὴν ΒΔ εἴς τι σημεῖον

A. Ἐπειδὴ δὲ τρίγωνον ΔΑΓ εἶναι ἰσοσκελές, διότι Δ=ω, θὰ εἶναι ΑΔ=ΑΓ καὶ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ εἶναι ΒΓ=α, ΒΑ+ΑΓ= =ΒΑ+ΑΔ=ΒΔ=λ καὶ γωνία Β ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν. Ἄρα ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

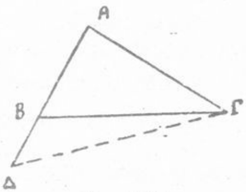
**Διερεύνησις** Ἵνα τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν, πρέπει γωνΔΓΒ>γωνΔ καὶ συνεπῶς ΒΔ>ΒΓ ἢ λ>α.

**242. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἀπὸ την γωνίαν Γ ἢ Β καὶ ἀπὸ τὴν διαφορὰν ΑΓ—ΑΒ.** (υποτιθεται **ΑΓ>ΑΒ**).

**Ἀνάλυσις**: *α) περίπτωσις*. Ἔστω ὅτι κατεσκευάσθη τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ εἶναι τὸ ΑΒΓ (σχ. 148) τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν ΒΓ τὴν γωνιαν Β καὶ τὴν διαφορὰν ΑΓ—ΑΒ, τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ.

Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΑΒ καὶ λαμβάνομεν ΑΔ=ΑΓ, φέρομεν δὲ καὶ τὴν ΔΓ.

Τοῦ σχηματισθέντος τριγώνου ΓΒΔ γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν ΒΓ, τὴν πλευρὰν ΒΔ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν διαφοραν, διότι ΒΔ= =ΑΔ—ΑΒ=ΑΓ— Β καὶ τὴν ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ΓΒΔ ἴσην πρός τὴν παραπληρωματικὴν τῆς δοθείσης γωνίας Β. Εἶναι ἄρα τουτο καὶ ἀρχικῶς κατασκευάσιμον.



*Σχ 148.*

**Σύνθεσις.** Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΓΒΔ (σχ. 148) καὶ εἶτα μὲ κορυφὴν Γ καὶ πλευρὰν τὴν ΓΔ σχηματίζομεν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν Δ καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Β. Ἡ ἄλλη πλευρὰ αὐτῆς τέμνει τὴν ΔΒ, προεκτεινομένην, εἰς τὸ σημεῖον Α. Τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

**Ἀπόδειξις.** Ἐπειδὴ ἡ ΒΓ, ὡς πλευρὰ τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς ΒΔ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ, θὰ εἶναι γωνΔ> γωνΔΓΒ καὶ συνεπῶς ἡ πλευρὰ ΓΑ τῆς σχηματιζομένης θὰ τέμνῃ τὴν ΔΒ πέραν τοῦ Β καὶ θὰ εἶναι ΑΔ>ΒΔ.

Ἔχει δὲ τὴν πλευρὰν ΒΓ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν καὶ ΑΓ—ΑΒ= =ΑΔ—ΑΒ=ΔΒ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν διαφορὰν καὶ γωνίαν Β ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν, διότι Β=2 ὀρθ.—γωνΓΒΔ=2 ὀρθ.—(2 ὀρθ—Β)= =2 ὀρθ.—2 ὀρθ.+Β=Β.

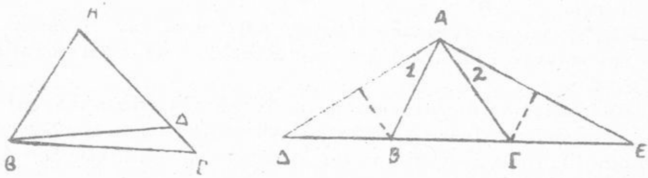
**Διερεύνησις** Ἵνα τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατὸν πρέπει ΒΓ>ΒΔ ἢ ΒΓ>ΑΓ—ΑΒ

**β) Περίπτωσις.** Ἂν δοθῇ ἡ γωνία Γ ἀντὶ τῆς Β, τότε λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΑΓ τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΔ=ΑΒ (σχ. 149), ὅτε τοῦ τριγώνου ΔΒΓ γνωρίζομεν τάς δύο πλευρὰς ΒΓ καὶ ΓΔ=ΑΓ—ΑΔ=ΑΒ καὶ τὴν ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν Γ. Ἄρα εἶναι τοῦτο κατασκευάσιμον καὶ ἀρχικῶς καὶ ἔπειτα προχωροῦμεν, ὡς ἀνωτέρω (περ: α').

**243. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν γωνιῶν καὶ τῆς περιμετρου αὐτοῦ.**

**Περιορισμός.** Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν δοθεισῶν γωνιῶν πρέπει νὰ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς.

**Ἀνάλυσις:** Ἔστω ὅτι κατεσκευάσθη τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ εἶναι τὸ ΑΒΓ (σχ. 150), ἔχον γωνίας ἴσας πρὸς τὰς δοθείσας καὶ τὴν δοθεῖσαν περίμετρον.




*Σχ. 149.* *Σχ. 150.*

Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΒΓ αὐτοῦ ἑκατέρωθεν καὶ λαμβάνομεν ΒΔ=ΑΒ, ΓΕ=ΓΑ καὶ φέρομεν τὰ εὐθ. τμήματα ΑΔ, ΑΕ.

Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελὲς θὰ εἶναι γων $Α_1=Δ$ καὶ $Β=Α_1+Δ=Δ+Δ=2Δ$. Συνεπῶς $Δ=\frac{Β}{2}$. Ὁμοίως ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΓΕ εὑρίσκομεν, ὅτι $Ε=\frac{Γ}{2}$.

Ἐπειδὴ δὲ ΔΕ=ΔΒ+ΒΓ+ΓΕ=ΒΑ+ΒΓ+ΓΑ= ἡ δοθεῖσα περίμετρος, τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι κατασκευάσιμον, διότι γνωρίζομεν μίαν πλευρὰν αὐτοῦ καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας.

**Σύνθεσις.** Κατασκευάζομεν τρίγωνον ΕΑΔ (σχ. 150), ἔχον τὴν πλευρὰν ΔΕ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν περίμετρον καὶ προσκειμένας γωνίας ἴσας πρὸς $\frac{Β}{2}$ καὶ $\frac{Γ}{2}$. Ἔπειτα φέρομεν καθέτους εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΔ καὶ ΑΕ αὐτοῦ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν πλευρὰν ΔΕ εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Ἄγομεν τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

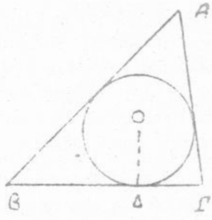
**Ἀπόδειξις.** Ἐπειδὴ τὸ Β κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΔ θὰ εἶναι ΒΔ = ΒΑ καὶ γων $ΑΒΓ=2Δ=2\cdot\frac{Β}{2}=Β$.

Δι' ὅμοιον λόγον εἶναι καὶ ΓΑ=ΓΕ καὶ γων $ΑΓΒ=2\,.\,Ε=2\cdot\frac{Γ}{2}=$ $=Γ$. Ἐπὶ πλέον ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ=ΒΔ+ΓΒ+ΓΕ=ΔΕ ἤτοι ἴση μὲ τὴν δοθεῖσαν περίμετρον καὶ γων ΒΑΓ=Α, ὡς παραπληρωματικαὶ ἴσων ἀθροισμάτων.

**244. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ἀπὸ δύο γωνίας καὶ ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.**

**Περιορισμός.** Πρέπει τὸ ἄθροισμα τῶν δοθεισῶν γωνιῶν νὰ εἶναι μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν.

**Ἀνάλυσις.** Ἔστω ὅτι κατεσκευάσθη τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ εἶναι τὸ ΑΒΓ (σχ. 151), εἰς τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν τὰς γωνίας Β καὶ Γ καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου. Φέρομεν ἐκ τοῦ κέντρου Ο τοῦ κύκλου τούτου τὴν ἀκτῖνα ΟΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ καθὼς καὶ τὰ εὐθ. τμήματα ΟΒ καὶ ΟΓ. Ἐπειδὴ αἱ ΟΒ καὶ ΟΓ εἶναι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ, ἔχομεν ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΔΒ καὶ ΟΔΓ ὅτι



Σχ. 151.

γων ΔΟΒ $= 1$ ὀρθ. $- \frac{B}{2}$ καὶ γωνΔΟΓ $=$

$= 1$ ὀρθ. $- \frac{\Gamma}{2}$. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΒΟΓ δύναται νὰ κατασκευασθῇ ἐκ τῶν ἀρχικῶς διδομένων στοιχείων. (Νὰ χαραχθῶσι τὰ εὐθ. τμήματα ΟΒ καὶ ΟΓ σχ 151).

**Σύνθεσις**: Ἐπὶ τῆς εὐθείας χψ καὶ εἰς τυχὸν σημεῖον Δ αὐτῆς ὑψοῦμεν κάθετον καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν ΔΟ$=$ρ (σχ. 151). Μὲ κορυφὴν τὸ Ο καὶ πλευρὰν ΟΔ κατασκευάζομεν ἑκατέρωθεν αὐτῆς γωνΔΟΓ$=1$ ὀρθ.$-\frac{\Gamma}{2}$ καὶ ΔΟΒ$=1$ ὀρθ.$-\frac{B}{2}$. Ἔπειτα μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΔ γράφομεν περιφέρειαν καὶ ἐκ τῶν σημείων Β καὶ Γ φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΒΑ καὶ ΓΑ πρὸς αὐτήν. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

**Ἀπόδειξις**: Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΔΒΟ ἔχομεν ὅτι

γωνΔΒΟ$=1$ ὀρθ$-$γωνΔΟΒ$=1$ ὀρθ$-\left(1\right.$ ὀρθ$-$ γων$\left.\frac{B}{2}\right)=1$ ὀρθ$-$ 1 ὀρθ $+$

$+\frac{B}{2}=\frac{B}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ εὐθεῖα, ἥτις ἑνώνει τὸ σημεῖον, ἐξ οὗ ἄγονται ἐφαπτόμεναι εἰς ἕνα κύκλον μὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῶν ἐφαπτομένων, θὰ εἶναι γωνΓΒΑ $= 2$ γωνΔΒΟ $=$

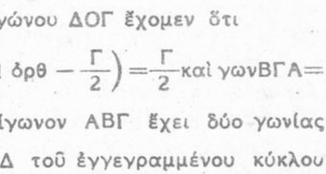
$= 2 \cdot \frac{B}{2} = B$. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΔΟΓ ἔχομεν ὅτι

γωνΔΓΟ$=1$ ὀρθ $-$ γων ΔΟΓ $= 1$ ὀρθ $-\left(1\right.$ ὀρθ $\left.- \frac{\Gamma}{2}\right) = \frac{\Gamma}{2}$ καὶ γωνΒΓΑ$=$

$=2.$γων ΔΓΟ $= 2 \cdot \frac{\Gamma}{2} = \Gamma$. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει δύο γωνίας ἴσας πρὸς τὰς δοθείσας καὶ ἀκτῖνα ΟΔ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν ρ ἐκ κατασκευῆς. Ἄρα εἶναι τὸ ζητούμενον.

**Ἀσκήσεις** σελ. 165.—**245. Νὰ γράψητε κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην δύο ἴσων περιφερειῶν.**

**Ἀνάλυσις**: Ἔστω ὅτι ἐγράφη ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη δύο ἴσων κύκλων Κ καὶ Λ (σχ. 152) καὶ εἶναι ἡ ΑΒ, ἀφήνουσα ἀμφοτέρους τοὺς κύκλους πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς. Φέρομεν τὴν διάκεντρον ΚΛ καὶ τὰς ἀκτῖνας ΚΑ καὶ ΛΒ. Ἐπειδὴ ΚΑ$\perp$ΑΒ καὶ ΛΒ$\perp$ΑΒ, ἕπεται ὅτι ΚΑ$\parallel$ΛΒ, ἐπειδὴ δὲ καὶ ΚΑ$=$ΛΒ



Σχ. 152.

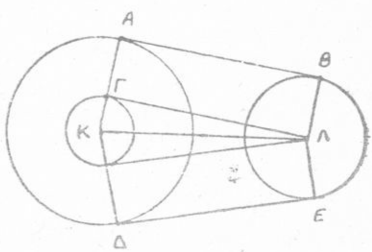
ἐξ ὑποθέσεως, τὸ τετράπλευρον ΚΑΒΛ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ὀρθογώνιον. ὡς ἔχον γωνΑ=1 ὀρθ. Ἄρα ΚΛ ∥ ΑΒ καὶ ΚΑ ⊥ ΚΛ, ΛΒ ⊥ ΚΛ καὶ ὁμόρροποι.

**Σύνθεσις**: Φέρομεν τὴν διάκεντρον ΚΛ καὶ τὰς ἀκτῖνας ΚΑ καὶ ΛΒ καθέτους ἐπὶ τὴν ΚΛ εἰς τὰ σημεῖα Κ καὶ Λ καὶ ὁμορρόπους. Αὗται τέμνουσι τὰς ἴσας περιφερείας Κ καὶ Λ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως. Ἄγομεν τὸ εὐθ τμῆμα ΑΒ Αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη νὰ γραφῇ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη τῶν δύο ἴσων κύκλων Κ καὶ Λ.

**Ἀπόδειξις**: Ἐπειδὴ ΚΑ καὶ ΛΒ εἶναι κάθετοι ἐκ κατασκευῆς ἐπὶ τὴν ΚΛ εἶναι παράλληλοι καὶ ἴσαι, ὡς ἀκτῖνες ἴσων κύκλων. Τὸ τετράπλευρον ΑΚΛΒ εἶναι ὅθεν ὀρθογώνιον καὶ συνεπῶς γωνία Α = = 1 ὀρθὴ καὶ γωνΒ = 1 ὀρθή. Ἡ ΑΒ ὡς κάθετος ἐπὶ τὰς ἀκτῖνας ΚΑ καὶ ΛΒ καὶ εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν εἶναι κοινὴ ἐφαπτομένη.

**246. Νὰ γράψητε κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην δύο ἀνίσων περιφερειῶν.**

**Ἀνάλυσις**: Ἔστω ΑΒ ἡ ζητουμένη κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν δύο δοθέντων ἀνίσων κύκλων Κ καὶ Λ (σχ. 153), ἀφήνουσα ἀμφοτέρους πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς. Φέρομεν τὴν ΚΛ, τὰς ἀκτῖνας ΚΑ καὶ ΛΒ εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς Α καὶ Β καὶ ἐκ τοῦ κέντρου Λ τὴν ΛΓ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ. Τὸ τετράπλευρον ΑΓΛΒ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ συνεπῶς ΓΑ = =ΛΒ καὶ ΚΓ=ΚΑ ΓΑ=ΚΑ—ΛΒ. Ἐὰν δὲ μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα ΚΓ γραφῇ περιφέρεια ἡ ΛΓ θὰ ἐφάπτεται αὐτῆς εἰς τὸ Γ, διότι ἡ ΛΓ ⊥ ΚΓ.



*Σχ. 153.*

Ἡ περιφέρεια (Κ, ΚΓ) δύναται ὅθεν νὰ γραφῇ καὶ ἀρχικῶς, διότι ἔχει γνωστὸν κέντρον καὶ ἀκτῖνα γνωστήν, ἴσην πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν.

Ἐπίσης ὁρίζεται καὶ τὸ σημεῖον Γ, ὡς σημεῖον ἐπαφῆς τῆς ἀγομένης ἐφαπτομένης τῆς περιφερείας (Κ, ΚΓ ἐκ τοῦ κέντρου Λ τῆς ἄλλης δοθείσης περιφερείας. Εἶτα δὲ ὁρίζεται τὸ σημεῖον Α, ὡς ἄκρον τῆς ἀκτῖνος τῆς διερχομένης διὰ τοῦ Γ, καθὼς καὶ τὸ Β, ὡς ἄκρον τῆς παραλλήλου καὶ ὁμορρόπου ἀκτῖνος ΛΒ πρὸς τὴν ΚΑ.

**Σύνθεσις**: Μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων τῶν δύο δοθεισῶν ἀνίσων περιφερειῶν γράφομεν περιφερειαν καὶ ἐκ τοῦ κέντρου Λ τῆς μικροτέρας περιφερείας φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην εἰς αὐτὴν ΛΓ. Ἔπειτα φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΚΓ καὶ προεκτείνομεν αὐτήν, ἕως ὅτου τμήσῃ τὴν περιφέρειαν (Κ. ΚΑ) εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἐκ τοῦ Λ φέρομεν ἀκτῖνα παράλληλον καὶ ὁμόρροπον πρὸς τὴν ΚΑ, τὴν

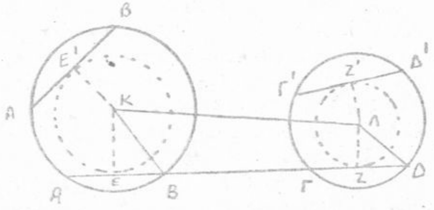
ΑΒ. Τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ εἶναι κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη τῶν δύο περιφερειῶν Κ καὶ Λ.

**Ἀπόδειξις:** Διότι τὸ σχῆμα ΑΓΛΒ εἶναι παραλληλόγραμμον, ὡς ἔχον δύο ἀπέναντι αὐτοῦ πλευρὰς ΓΑ καὶ ΛΒ ἴσας καὶ παραλλήλους καὶ ὀρθογώνιον, διότι γων ΑΓΛ = 1 ὀρθή, ἐπειδὴ γων ΚΓΛ = 1 ὀρθή. Συνεπῶς ΚΑ ⊥ ΑΒ καὶ ΛΒ ⊥ ΑΒ καὶ τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ εἶναι κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν περιφερειῶν Κ καὶ Λ.

**Διερεύνησις:** Ἵνα τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν, πρέπει ἐκ τοῦ σημείου Λ νὰ ἄγωνται ἐφαπτόμεναι εἰς τὴν βοηθητικὴν περιφέρειαν (Κ, ΚΓ). Πρὸς τοῦτο πρέπει τὸ Λ νὰ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου (Κ, ΚΓ) ἢ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ, ἤτοι νὰ εἶναι ΚΛ > ΚΓ ἢ ΚΛ = ΚΓ. Ἐπειδὴ δὲ ΚΓ = ΚΑ — ΛΒ ἐκ κατασκευῆς, πρέπει ΚΛ > ΚΑ — ΛΒ ἢ ΚΛ = ΚΑ — ΛΒ. Καὶ ἂν μὲν ΚΛ > ΚΑ — ΛΒ, ὅτε αἱ δύο δοθεῖσαι περιφέρειαι, τέμνονται ἢ κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων ὑπάρχουσι δύο κοιναὶ ἐξωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι ΑΒ καὶ ΔΕ (σχ. 153). Ἂν δὲ εἶναι ΚΛ = ΚΑ — ΛΒ, ὅτε αἱ δοθεῖσαι περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐντός, ὑπάρχει μία κοινὴ αὐτῶν ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη. Ἂν δὲ ΚΛ < ΚΑ — ΛΒ, ὅτε αἱ δοθεῖσαι περιφέρειαι κεῖνται ἡ μία ἐντὸς τῆς ἄλλης, δὲν ὑπάρχει κοινὴ αὐτῶν ἐφαπτομένη καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

**247. Νὰ γράφητε εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ δύο δοθείσας περιφερείας, αἱ δὲ ἀποστάσεις τῶν κέντρων ἀπὸ αὐτὴν νὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς δοθέντα εὐθ. τμήματα.**

**Ἀνάλυσις:** Ἔστω ΑΔ ἡ τέμνουσα εὐθεῖα τὰς δοθείσας περιφερείας Κ καὶ Λ, οὕτως ὥστε αἱ ἀποστάσεις ΚΕ καὶ ΛΖ τῶν κέντρων Κ καὶ Λ ἀπ' αὐτῆς νὰ εἶναι ἴσαι πρὸς δύο δοθέντα εὐθ. τμήματα (σχ. 154).




*Σχ. 154.*

Ἐπειδὴ ΚΕ ⊥ ΑΒ καὶ ΛΖ ⊥ ΓΔ, ἐὰν γράψωμεν περιφερείας μὲ κέντρα Κ καὶ Λ καὶ ἀκτῖνας ΚΕ καὶ ΛΖ ἀντιστοίχως, αὗται θὰ ἐφάπτωνται τῆς ΑΔ. Θὰ εἶναι ἄρα ἡ ΑΔ κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν δύο τούτων βοηθητικῶν περιφερειῶν.

**Σύνθεσις:** Μὲ κέντρα Κ καὶ Λ τῶν δύο δοθεισῶν περιφερειῶν καὶ ἀκτῖνας ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰς δοθείσας ἀποστάσεις τῶν κέντρων Κ καὶ Λ ἀπὸ τῆς ζητουμένης τεμνούσης γράφομεν περιφερείας καὶ ἔπειτα γράφομεν κοινὴν ἐφαπτομένην αὐτῶν τὴν ΕΖ, ἥτις προεκτεινομένη τέμνει τὰς δοθείσας περιφερείας Κ καὶ Λ, ὁρίζουσα τὴν τέμνουσαν ΑΔ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη.

**Ἀπόδειξις:** Διότι αἱ ἀποστάσεις ΚΕ καὶ ΛΖ τῶν κέντρων Κ καὶ Λ ἀπ' αὐτῆς εἶναι ἴσαι ἐκ κατασκευῆς πρὸς τὰ δοθέντα εὐθ. τμήματα.

**Διερεύνησις**: Ἵνα αἱ γραφόμεναι κοιναὶ ἐφαπτόμεναι τῶν βοηθητικῶν περιφερειῶν (Κ, ΚΕ) καὶ (Λ, ΛΖ) εἶναι τέμνουσαι τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν Κ καὶ Λ, πρέπει αἱ ἀποστάσεις τῶν κέντρων ἀπὸ αὐτὰς νὰ εἶναι μικρότεραι ἀντιστοίχως τῶν ἀκτίνων τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν ἤτοι $ΚΕ<ΚΒ$ καὶ $ΛΖ<ΛΔ$. Ἐὰν δὲ αἱ βοηθητικαὶ περιφέρειαι εἶναι ἐκτὸς ἀλλήλων, ὅτε ἔχουσι 4 κοινὰς ἐφαπτομένας, θὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα καὶ 4 λύσεις. Ἐὰν δὲ αὗται ἐφάπτωνται ἐξωτερικῶς, ὅτε ἔχουσι δύο κοινὰς ἐξωτερικὰς ἐφαπτομένας καὶ μίαν ἐσωτερικήν, τὸ πρόβλημα θὰ ἔχῃ τρεῖς λύσεις. Ἐὰν δὲ τέμνωνται, ὅτε θὰ ἔχωσι δύο κοινὰς ἐξωτερικὰς ἐφαπτομένας καὶ οὐδεμίαν ἐσωτερικήν, τὸ πρόβλημα θὰ ἔχῃ δύο λύσεις κλπ.

**248. Νὰ γράφητε εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ δύο δοθείσας περιφερείας καὶ νὰ ὁρίζωνται ἐπ' αὐτῆς χορδαὶ ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς δοθέντα εὐθ. τμήματα.**

**Ἀνάλυσις**: Ἔστω ΑΔ ἡ τέμνουσα εὐθεῖα τὰς δοθείσας περιφερείας Κ καὶ Λ, τοιαύτη ὥστε νὰ εἶναι αἱ χορδαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς δύο δοθέντα εὐθ. τμήματα (σχ. 154). Ἐὰν φέρωμεν τὰς ἀποστάσεις ΚΕ καὶ ΛΖ τῶν κέντρων Κ καὶ Λ ἐπὶ τὰς χορδὰς ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ γράψωμεν περιφερείας μὲ κέντρα Κ καὶ Λ καὶ ἀκτῖνας ΚΕ καὶ ΖΛ ἀντιστοίχως, αὗται θὰ ἐφάπτωνται τῆς τεμνούσης ΑΔ, ἥτις ὡς ἐκ τούτου θὰ εἶαι κοινὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν. Ἀλλὰ αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν ΚΕ καὶ ΛΖ εἶναι καὶ ἀρχικῶς γνωσταί, ὡς ἀποστάσεις τῶν κέντρων Κ καὶ Λ ἀπὸ τὰς χορδὰς Α'Β' καὶ Γ'Δ' ἀντιστοίχως ἴσων πρὸς τὰ δεδομένα εὐθ. τμήματα.

**Σύνθεσις**: Γράφομεν τυχούσας χορδὰς Α' Β' καὶ Γ' Δ' τῶν κύκλων Κ καὶ Λ, ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰ δοθέντα εὐθ. τμήματα. Φέρομεν τὰς ἀποστάσεις τῶν κέντρων Κ καὶ Λ ἀπὸ αὐτάς, τὰς ΚΕ' καὶ ΛΖ'. Μὲ κέντρα Κ καὶ Λ καὶ ἀκτῖνας ἴσας πρὸς ΚΕ' καὶ ΛΖ' γράφομεν δύο περιφερείας. Ἔπειτα φέρομεν τὴν κοινὴν αὐτῶν ἐφαπτομένην ΑΔ καὶ ἔχομεν τὴν ζητουμένην τέμνουσαν.

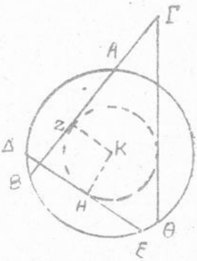
**Ἀπόδειξις**: Ἐπειδὴ $ΚΕ=ΚΕ'$, ὡς ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου, θὰ εἶναι καὶ $ΑΒ=Α'Β'$. Δι' ὅμοιον λόγον θὰ εἶναι καὶ $ΓΔ=Γ'Δ'$. Ἐπειδὴ δὲ αἱ χορδαὶ Α' Β' καὶ Γ' Δ' ἐλήφθησαν ἐκ κατασκευῆς ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰ δοθέντα εὐθ. τμήματα, ἕπεται ὅτι καὶ αἱ χορδαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ, αἱ ὁριζόμεναι ἐπὶ τῆς τεμνούσης ΑΔ ὑπὸ τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν, εἶναι ἴσαι πρὸς αὐτάς.

**Διερεύνησις**: Διὰ νὰ εἶναι τὸ πρόβλημα δυνατόν, πρέπει 1) νὰ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν εἰς τοὺς κύκλους Κ καὶ Λ χορδὰς ἴσας πρὸς τὰ δοθέντα εὐθ. τμήματα καὶ ὡς ἐκ τούτου ταῦτα πρέπει νὰ εἶναι μικρότερα ἀντιστοίχως τῶν διαμέτρων τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν καὶ 2) αἱ δύο βοηθητικαὶ περιφέρειαι νὰ ἔχωσι κοινὴν ἐφαπτομένην δηλ. ἡ μία νὰ μὴν κεῖται ἐντὸς τῆς ἄλλης.

**249. Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Γ νὰ γράφητε εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ δοθεῖσαν περιφέρειαν Α, ἡ δὲ ἐπ' αὐτῆς ὁριζομένη χορδὴ νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα.**

**Ἀνάλυσις**: Ἔστω ὅτι ἐγράφη ἡ ζητουμένη τέμνουσα καὶ εἶναι ἡ ΓΑΒ, τοιαύτη ὥστε νὰ εἶναι ΑΒ = α (ἔνθα α τὸ δοθὲν εὐθ. τμῆμα (σχ. 155).

Λαμβάνομεν καὶ χορδὴν ΔΕ τοῦ κύκλου Κ ἴσην μὲ ΑΒ=α καὶ φέρομεν τὰς ἀποστάσεις ΚΖ καὶ ΚΗ τοῦ κέντρου Κ ἀπὸ τὰς ἴσας χορδὰς ΑΒ καὶ ΔΕ· Θὰ εἶναι ΚΖ=ΚΗ καὶ ἡ περιφέρεια ἡ γραφομένη μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα ΚΖ θὰ ἐφάπτεται τῶν χορδῶν ΑΒ καὶ ΔΕ δηλ. ἡ τέμνουσα ΓΑΒ θὰ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας (Κ,ΚΗ) ἥτις δύναται καὶ ἀρχικῶς νὰ γραφῇ.




*Σχ. 155.*

**Σύνθεσις**: Λαμβάνομεν τυχοῦσαν χορδὴν ΔΕ=α καὶ μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν ΚΗ τοῦ κέντρου Κ ἀπ' αὐτῆς, γράφομεν περιφέρειαν. Ἔπειτα φέρομεν ἐκ τοῦ σημείου Γ τὴν ἐφαπτομένην ΓΑΒ τῆς βοηθητικῆς περιφερείας (Κ, ΚΗ). Αὕτη θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη τέμνουσα.

**Ἀπόδειξις**: Ἂν ἀχθῇ ἡ ἀκτὶς ΚΖ, εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Ζ, αὕτη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΒ Ἐπειδὴ δὲ ΚΖ=ΚΗ, ὡς ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου θὰ εἶναι καὶ ΑΒ=ΔΕ=α.

**Διερεύνησις**: Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν, πρέπει νὰ εἶναι δυνατὸν 1) νὰ ληφθῇ χορδὴ τοῦ κύκλου Κ ἴση πρὸς α ἤτοι πρέπει τὸ δοθὲν εὐθ. τμῆμα νὰ εἶναι μικρότερον τῆς διαμέτρου τῆς δοθείσης περιφερείας Κ καὶ 2) νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς βοηθητικῆς περιφερείας (Κ, ΚΗ) ἐκ τοῦ σημείου. Γ. Πρὸς τοῦτο πρέπει τὸ σημεῖον Γ νὰ κεῖται ἐκτὸς τῆς περιφερείας (Κ, ΚΗ) ἢ ἐπ' αὐτῆς. Καὶ ἂν μὲν κεῖται ἐκτός, θὰ ἔχωμεν δύο λύσεις, τὰς τεμνούσας ΓΑΒ καὶ ΓΙΘ (σχ. 155), ἂν δὲ κεῖται ἐπὶ τῆς βοηθητικῆς περιφερείας θὰ ἔχωμεν μίαν λύσιν.

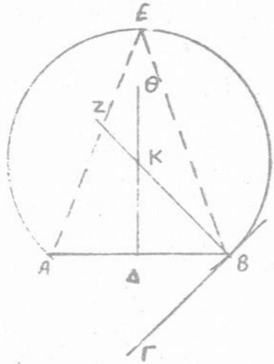
**Ἀσκήσεις** σελ. 136. — **250. Νὰ κατασκευάσητε τμῆμα κύκλου μὲ χορδὴν 6 ἑκατ. καὶ νὰ δέχηται γωνίαν 45°**

**Λύσις**: Λαμβάνομεν μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον εὐθ. τμῆμα ΑΒ=6 ἑκατ. καὶ μὲ κέντρον Β καὶ πλευρὰν ΒΑ κατασκευάζομεν γωνίαν ΑΒΓ ἴσην πρὸς 45° (σχ. 156 . Εἰς τὸ σημεῖον Β τῆς πλευρᾶς ΒΓ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπ' αὐτὴν τὴν ΒΖ, καθὼς καὶ τὴν ΔΘ κάθετον εἰς τὸ μέσον Δ τῆς ΒΑ. Αὗται θὰ τέμνωνται εἴς τι σημεῖον Κ, διότι γωνΘΔΒ+γωνΔΒΖ<2ὀρθ. Ἔπειτα δὲ μὲ κεντρον Κ καὶ ἀκτῖνα ΚΒ γράφομεν τὸ τόξον ΑΕΒ κείμενον ἐκτὸς τῆς γωνίας ΑΒΓ. Τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΑΒΕΑ εἶναι τὸ ζητούμενον.

**Ἀπόδειξις** : Διότι (§ 167) γωνΑΕΒ=γωνΑΒΓ = 45° ἐκ κατασκευῆς, ἔχει δὲ καὶ χορδὴν ἴσην μὲ 6 ἑκατ.

**251. Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα κύκλου μὲ χορδὴν 5 ἑκατ. καὶ νὰ δέχηται γωνίαν 60°.**

**Λύσις**: Κατασκευάζομεν πρῶτον τυχὸν ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ οὕτω ἔχομεν γωνίαν 60°. Ἔπειτα λαμβάνομεν εὐθ. τμῆμα ΑΒ = 5 ἑκ. καὶ μὲ κορυφὴν τὸ Β καὶ πλευρὰν τὴν ΒΑ κατασκευάζομεν γωνίαν ΑΒΓ=60° (σχ. 156) καὶ ἐν συνεχείᾳ ἐργαζόμεθα ὡς εἰς προηγουμένην ἄσκησιν 250.



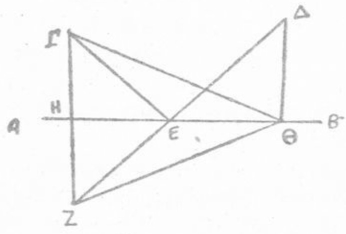
Σχ. 156.

**252. Εἰς δοθέντα κύκλον γράφομεν χορδὴν ΑΒ. Οὕτως ὁ κύκλος διαιρεῖται εἰς δύο κυκλικὰ τμήματα. Ἂν τὸ ἓν ἀπὸ αὐτὰ δέχηται γωνίαν 52° 35′ 20″ νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν δέχεται τὸ ἄλλο.**

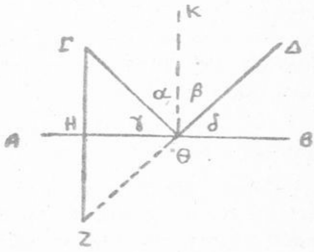
**Λύσις**: Ἐπειδὴ ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία εἰς τὸ ἕτερον κυκλικὸν τμῆμα, τὸ ἔχον χορδὴν ΑΒ, εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας 52° 35′ 20″ θὰ ἔχῃ μέτρον 180°—(52° 35′ 20″) = (179° 59′ 60″)—(52° 35′ 20″)=127° 24′ 40″.

Ἀσκήσεις σελὶς 137. **253. Νὰ ὁρίσητε εἰς τὴν ΑΒ (σχ. 127 Θ. Γ.) ἓν σημεῖον καὶ νὰ ἀποδείξητε, ὅτι ΓΕ+ΕΔ<ΓΘ+ΘΔ.**

**Λύσις**: Ἂν Θ εἶναι ἓν ἄλλο σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ (σχ. 157) διάφορον τοῦ Ε καὶ ἀχθῶσι τὰ εὐθ. τμήματα ΘΓ, ΘΖ καὶ ΘΔ, θὰ ἔχωμεν ἐκ τοῦ τριγώνου ΔΘΖ ὅτι ΖΔ<ΖΘ+ΘΔ ἢ ΖΕ+ΕΔ<ΖΘ+ΘΔ (1). Ἀλλὰ ΕΖ=ΕΓ καὶ ΘΖ=ΘΓ. Ἀντικαθισιῶντες εἰς τὴν ἰσότητα (1) λαμβάνομεν ΓΕ+ΕΔ<ΓΘ+ΘΔ.



Σχ. 157.



Σχ. 158.

**254. Δίδεται, ὡς ἀνωτέρω (σχ. 157 Θ. Γ.) εὐθεῖα ΑΒ καὶ δύο σημεῖα Γ, Δ. Νὰ ὁρίσητε ἐπὶ τῆς ΑΒ σημεῖον Θ τοιοῦτον ὥστε ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΓΘΔ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.**

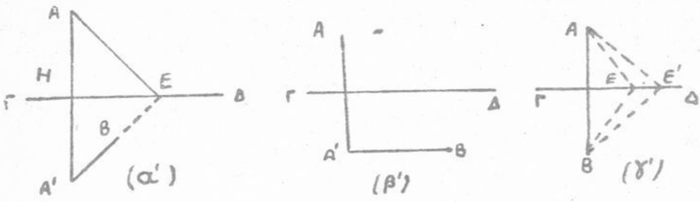
**Λύσις**: Ἂν ἡ διχοτόμος ΘΚ τῆς γωνίας ΓΘΔ (σχ. 158) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, θὰ ἔχωμεν α = β. Ἐπειδὴ δὲ γων ΑΘΚ = = γωνΚΘΒ ὡς ὀρθαί, θὰ εἶναι καὶ γ = δ. Ἄρα τὸ σημεῖον Θ προσδιορίζεται βάσει τοῦ προβλήματος § 168.

**255. Ἂν Φ εἶναι φωτεινὸν σημεῖον καὶ ἔχῃ ὡρισμένην θέσιν πρὸς ἐπίπεδον κάτοπτρον ΑΒ, νὰ ὁρισθῇ τὸ σημεῖον προσπτώσεως φωτεινῆς ἀκτῖνος, την ὁποίαν νὰ δεχθῇ μετὰ την ἀνάκλασίν της ὁ ὀφθαλμος εὑρισκόμενος ἐπίσης εἰς ὡρισμένην θέσιν Δ πρὸ τοῦ κατόπτρου.**

**Λύσις.** Ἂν ΑΒ εἶναι τὸ ἐπίπεδον κάτοπτρον (σχ. 158) καὶ τὸ φωτεινὸν σημεῖον Φ εὑρίσκεται εἰς τὸ Γ, ὁ δὲ ὀφθαλμὸς εἰς τὸ Δ, ἵνα ἡ προσπίπτουσα φωτεινὴ ἀκτὶς ΓΘ ἀνακλωμένη διέλθῃ διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ Δ, πρέπει ἡ γωνία τῆς προσπτώσεως α νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ἀνακλάσεως β ἤτοι ἡ κάθετος ΚΘ εἰς τὸ σημεῖον τῆς προσπτώσεως Θ νὰ διχοτομῇ τὴν γωνίαν ΓΘΔ. Ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι καὶ γ=δ καὶ τὸ σημεῖον Θ ὁρίζεται βάσει τοῦ προβλήματος § 163.

**256. Ἂν δύο δοθέντα σημεῖα Α, Β κεῖνται ἑκατέρωθεν δοθείσης εὐθείας ΓΔ νὰ ὁρίσητε ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Ε, τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι γων ΓΕΑ=γων ΓΕΒ.**

**Λύσις.** Ἔστω δοθεῖσα ΓΔ εὐθεῖα καὶ Α, Β δύο σημεῖα κείμενα




*Σχ. 159*

ἑκατέρωθεν αὐτῆς καὶ Ε σημεῖον τῆς ΓΔ τοιοῦτον ὥστε γων ΓΕΑ = = γων ΓΕΒ.

Ἐκ τοῦ Α φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἥτις ἔστω ὅτι τέμνει τὴν ΕΒ εἰς τὸ σημεῖον Α΄ καὶ τὴν ΓΔ εἰς τὸ Η.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΗΕ καὶ ΗΕΑ΄ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι τὴν κάθετον πλευρὰν ΗΕ κοινὴν καὶ γων ΑΕΗ = γων ΗΕΑ΄ ἐξ ὑποθέσεως. Ἄρα καὶ Α εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Α ὡς πρὸς ἄξονα ΓΔ. Ἀλλὰ τὸ Α΄ προσδιορίζεται καὶ ἀρχικῶς, ἄνευ γνώσεως τοῦ σημείου Ε.

**Σύνθεσις.** Εὑρίσκομεν τὸ συμμετρικὸν σημεῖον τοῦ Α πρὸς τὴν ΓΔ, τὸ Α΄ καὶ τοῦτο ἑνοῦμεν μὲ τὸ Β καὶ τὸ σημεῖον Ε, εἰς τὸ ὁποῖον αὕτη προεκτεινομένη τέμνει τὴν ΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον.

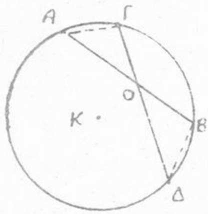
**Διερεύνησις.** Ἂν τὰ σημεῖα Α καὶ Β, κείμενα ἑκατέρωθεν τῆς ΓΔ, ἀπέχουσιν ἴσον ἀπ' αὐτῆς, χωρὶς νὰ κεῖνται καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς καθέτου, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον, διότι ἡ Α΄Β εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ (σχ 159 β). Ἂν ὅμως κεῖνται καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς καθέτου, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀόριστον καὶ πᾶν σημεῖον τῆς ΓΔ εἶναι λύσις αὐτοῦ (σχ. 159 γ)

## Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Α΄ Κεφαλαίου

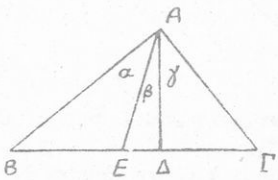
**257. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ γράψητε δύο τεμνομένας καὶ ἴσας χορδὰς. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι τὰ τμήματα αὐτῶν εἶναι ἴσα, ἓν πρὸς ἕν.**

**Ἀνάλυσις.** Ἔστω ὅτι εἶναι ΑΟ=ΟΔ καὶ ΓΟ=ΟΒ (σχ. 160). Φέρομεν καὶ τὰς χορδὰς ΑΓ καὶ ΒΔ. Τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα ΑΟΓ καὶ ΒΟΔ, ὡς ἔχοντα δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὰς περιεχομένας ὑπ' αὐτῶν γωνίας ΑΟΓ καὶ ΒΟΔ ἴσας, ὡς κατὰ κορυφήν, θὰ εἶναι ἴσα καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωσιν ἴσα καὶ τὰ λοιπὰ ὁμοειδῆ στοιχεῖα αὐτῶν ἤτοι ΑΓ=ΒΔ, γων Α=γων Δ καὶ γων Γ=γων Β. Ἐπειδὴ χορ. ΑΓ = χορ. ΒΔ θὰ εἶναι καὶ τοξ ΑΓ = τοξ ΒΔ καὶ ἑπομένως τοξ ΑΓ + τοξ ΓΒ = = τοξ ΒΔ + τοξ ΓΒ ἢ τοξ ΑΓΒ = τοξ ΓΒΔ. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ χορ. ΑΒ=χορ. ΓΔ. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀληθὲς ἐξ ὑποθέσεως.

**Σύνθεσις.** Ἐπειδὴ χορΑΒ=χορΓΔ θὰ εἶναι καὶ τοξ ΑΒΓ=τοξΓΒΔ ἢ τοξ ΑΓ+τοξΓΒ=τοξΓΒ+τοξΒΔ (1). Ἀφαιροῦμεν ἀπ' ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος (1) τὸ αὐτὸ τόξον ΓΒ καὶ ἔχομεν τοξ ΑΓ=τοξΒΔ. Ἄρα καὶ χορΑΓ=χορΒΔ. Τὰ τρίγωνα ΑΟΓ καὶ ΒΟΔ ἔχουσι ΑΓ=ΔΒ, Α=Δ ὡς ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουσαι εἰς τὸ αὐτὸ τόξον ΓΒ καὶ Γ=Β, ὡς ἐγγεγραμμέναι βαίνουσαι εἰς τὸ αὐτὸ τόξον ΑΝΔ. Συνεπῶς εἶναι ἴσα καὶ θὰ ἔχωσι καὶ ΟΑ=ΟΔ καὶ ΟΒ=ΟΓ ὅ. ἔ. δ.




*Σχ. 160.*




*Σχ. 161.*

**258. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ὁρίσητε τὸ μέσον Ε τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ. Ἔπειτα νὰ φέρητε τὸ ὕψος ΑΔ καὶ τὴν διάμεσον ΑΕ. Νὰ ἀποδείξητε δέ, ὅτι γων ΔΑΕ=Γ—Β, ἂν ΑΒ>ΑΓ.**

Ἔστω ΑΒΓ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον ΑΒ>ΑΓ, Ε τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης αὐτοῦ ΒΓ καὶ ΑΔ, ΑΕ τὸ ὕψος καὶ ἡ διάμεσος αὐτοῦ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας Α αὐτοῦ (σχ. 161).

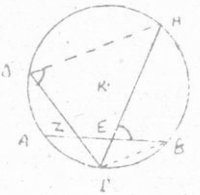
**Λύσις:** Ἐπειδὴ ΑΕ=ΕΒ θὰ εἶναι καὶ α=Β. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τρίγωνον ΑΔΓ εἶναι ὀρθογώνιον θὰ εἶναι γ = 1 ὀρθ — Γ. Εἰς τὴν προφανῆ ἰσότητα α+β+γ=1 ὀρθ. ἀντικαθιστῶμεν τὰς γωνίας α καὶ γ διὰ τῶν ἴσων των καὶ ἔχομεν

Β+β+1 ὀρθ. — Γ = 1 ὀρθ. καὶ β = 1 ὀρθ. — Β — 1 ὀρθ. + Γ = Γ — Β ὅ ἔ.δ

**259. Ἐκ τοῦ μέσου Γ ἑνὸς τόξου ΑΒ νὰ φέρητε δύο χορδὰς ΓΔ, ΓΗ, αἱ ὁποῖαι τέμνουσι τὴν χορδὴν ΑΒ ἀντιστοίχως εἰς σημεῖα Ζ**

**καὶ Ε. Νὰ ἀποδείξητε δέ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΔΖΕΗ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.**

**Ἀνάλυσις.** Ἔστω ὅτι τὸ τετράπλευρον ΔΖΕΗ (σχ. 162) εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. Τότε ἡ ἐσωτερικὴ γωνία Δ αὐτοῦ, θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀπέναντι ἐξωτερικὴν γωνίαν ΗΕΒ (Π. ΙΙ § 158). Ἐπειδὴ ὅμως γωνία ΗΕΒ ἔχει τὴν κορυφήν της ἐντὸς τοῦ κύκλου Κ, θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐγγεγραμμένων γωνιῶν ΗΓΒ καὶ ΑΒΓ καὶ θὰ εἶναι τοξΓΒΗ = τοξΑΓ + τοξΒΗ ἢ τοξΓΒ + τοξΒΗ = τοξΑΓ + τοξΒΗ ἢ τοξΓΒ = τοξΓΑ.



*Σχ. 162.*

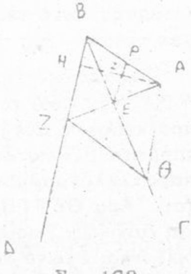
Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀληθὲς ἐξ ὑποθέσεως.

**Σύνθεσις.** Ἐπειδὴ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως τοξΑΓ = τοξΓΒ θὰ εἶναι καὶ τοξΑΓ + τοξΒΗ = τοξΓΒ + τοξΒΗ ἢ τοξΑΓ + τοξΒΗ = τοξΓΒΗ. Συνεπῶς καὶ γωνία ΗΕΒ = γωνΔ καὶ τὸ τετράπλευρον ΔΖΕΗ ὡς ἔχον, μίαν γωνίαν αὐτοῦ ἴσην μὲ τὴν ἀπέναντι ἐξωτερικήν, θὰ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον (Π. ΙΙ § 159).

**260. Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς δοθείσης γωνίας ΓΒΔ νὰ γράψητε εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ εἰς σημεῖον Ε τὴν ΒΓ καὶ εἰς σημεῖον Ζ τὴν ἄλλην καὶ νὰ εἶναι ΑΕ = ΕΖ ἢ ΑΕ . 2 = ΕΖ.**

**Ἀνάλυσις.** Ἔστω ὅτι ἤχθη ἡ ζητουμένη εὐθεῖα ΑΕΖ (σχ. 163) τοιαύτη ὥστε νὰ εἶναι ΑΕ = ΕΖ. Ἂν ἐπὶ τῆς ΒΓ λάβωμεν τμῆμα ΕΘ = ΒΕ καὶ φέρωμεν τὰ εὐθ. τμήματα ΑΘ, ΖΘ, ΑΒ τὸ σχηματιζόμενον τετράπλευρον ΑΒΖΘ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ διχοτομοῦνται. Ἄρα θὰ εἶναι ΑΘ ∥ ΒΔ καὶ ΘΖ ∥ ΑΒ.

**Σύνθεσις.** Ἑνοῦμεν τὸ σημεῖον Α μὲ τὴν κορυφὴν Β τῆς δοθείσης γωνίας διὰ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν ΓΔ τέμνουσαν τὴν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Θ. Ἐκ τοῦ Θ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ τέμνουσαν τὴν ΒΔ εἰς τὸ Ζ. Ἄγομεν τὴν διαγώνιον ΑΒ, ἥτις τέμνει τὴν ΒΘ εἰς τι σημεῖον Ε. Λέγω, ὅτι θὰ εἶναι ΑΕ = ΕΖ.



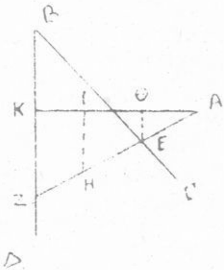
*Σχ. 163.*

**Ἀπόδειξις.** Τὸ τετράπλευρον ΑΒΖΘ, ὡς ἔχον τὰς ἀπέναντι αὐτοῦ πλευρὰς παραλλήλους, εἶναι παρ/μον. Ἄρα αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ διχοτομοῦνται ἤτοι ΑΕ = ΕΖ.

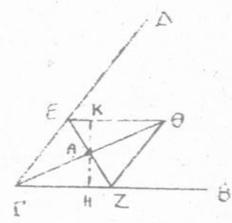
**Σημείωσις.** Ἡ ἀνωτέρω ἄσκησις δύναται νὰ λυθῇ καὶ κατ' ἄλλους τρόπους τοὺς ὁποίους ἁπλῶς ὑποδεικνυομεν. Ἐκ τοῦ μέσου Ρ τῆς γνωστῆς εὐθείας ΑΒ φέρομεν ∥ πρὸς τὴν ΒΔ, ἥτις τέμνει τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς γωνίας εἰς τὸ σημεῖον Ξ. Ἡ ΑΕΖ εἶναι ἡ ζητουμένη.

β΄) Ἐκ τοῦ σημείου Α φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΔ καὶ ἐκ τοῦ μέσου Ι αὐτῆς ∥ ΒΔ, ἥτις ὁρίζει τὸ σημεῖον Ε κ. τ. λ.

Β΄) Ἔστω ὅτι ἤχθη ἡ ζητουμένη εὐθεῖα καὶ εἶναι ἡ ΑΕΖ τοιαύτη, ὥστε ΑΕ. 2 =ΕΖ (σχ. 164). Φέρομεν τὴν ἀπόστασιν τοῦ δοθέντος σημείου Α ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ΒΔ, τὴν ΑΚ. Ἂν δὲ Η εἶναι τὸ μέσον τῆς




*Σχ. 164.*




*Σχ. 165.*

ΕΖ, θὰ ἔχωμεν ΑΕ=ΕΗ=ΗΖ. Ἐὰν δὲ ἐκ τῶν σημείων Α, Ε καὶ Η φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΔ, αὗται θὰ τέμνωσι τὴν ΑΚ εἰς τὰ σημεῖα Α, Θ καὶ Ι καὶ θὰ εἶναι ΑΘ = ΘΙ = ΙΚ (Θ. § 127) Ἐντεῦθεν ἕπεται εὐκόλως ἡ σύνθεσις.

**261. Ἀπὸ σημεῖον Α κείμενον ἐντὸς γωνίας νὰ γράφητε εὐθεῖαν τοιαύτην ὥστε τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τμῆμα αὐτῆς νὰ διχοτομῆται ὑπὸ τοῦ Α.**

**Ἀνάλυσις.** Ἔστω ὅτι ἐγράφη ἡ ζητουμένη εὐθεῖα καὶ εἶναι ἡ ΕΑΖ (σχ. 165) τοιαύτη ὥστε ΕΑ=ΑΖ. Φέρομεν τὴν ΑΓ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς λαμβάνομεν ΑΘ=ΑΓ. Ἐὰν ἀχθῶσι καὶ τὰ εὐθ· τμήματα ΕΘ καὶ ΖΘ τὸ σχηματιζόμενον τετράπλευρον ΓΕΘΖ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΓΘ καὶ ΖΕ διχοτομοῦνται. Ἄρα ΘΕ ∥ ΓΒ καὶ ΘΖ ∥ ΓΔ. Ἀλλὰ τὸ σημεῖον Θ προσδιορίζεται καὶ ἀρχικῶς, χωρὶς νὰ εἶναι γνωστὴ ἡ ΕΖ. Τούτου δὲ ὁρισθέντος, ὁρίζονται ἔπειτα καὶ τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ.

**Σύνθεσις** Φέρομεν τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΓ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτοῦ λαμβάνομεν ΑΘ=ΑΓ. Ἐκ τοῦ Θ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς ΓΒ καὶ ΓΔ τῆς δοθείσης γωνίας, τὰς ΘΕ καὶ ΘΖ. Ἡ ΕΖ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Α καὶ διχοτομεῖται ὑπ' αὐτοῦ.

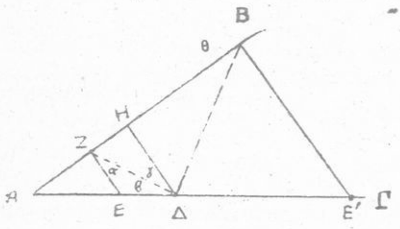
**Ἀπόδειξις.** Τὸ τετράπλευρον ΓΕΘΖ εἶναι παραλληλόγραμμον ὡς ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευρὰς αὐτοῦ παραλληλους ἐκ κατασκευῆς. Συνεπῶς αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΓΘ καὶ ΖΕ διχοτομοῦνται. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ κατασκευῆς εἶναι τὸ Α μέσον τῆς διαγωνίου ΓΘ, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ ΖΕ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Α καὶ διχοτομεῖται ὑπ' αὐτοῦ ἤτοι ΕΑ=ΑΖ.

*Β΄ τρόπος.* **Ἀνάλυσις :** Ἔστω ὅτι ΕΑ = ΑΖ. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὴν ΑΗ κάθετον ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΓΒ τῆς δοθείσης γωνίας, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν παράλληλον ΕΘ, τὴν ἀγομένην ἐκ τοῦ σημείου Ε πρὸς τὴν ΓΒ, εἰς τὸ σημεῖον Κ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΗΖ καὶ ΑΚΕ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα ΑΖ=ΑΕ ἐξ ὑποθέσεως καὶ γωνΗΑΖ= =γωνΚΑΕ ὡς κατὰ κορυφήν. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΑΚ=ΑΗ.

**Σύνθεσις :** Φέρομεν ἐκ τοῦ Α τὴν κάθετον ΑΗ ἐπὶ τὴν ΓΒ Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως ταύτης πέραν τοῦ Α λαμβάνομεν ΑΚ=ΑΗ καὶ ἐκ τοῦ Κ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν ΓΒ, ἥτις τέμνει τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς δοθείσης γωνίας εἰς τὸ σημεῖον Ε. Φέρομεν τὴν ΕΑ, ἥτις προεκτεινομένη ὁρίζει καὶ τὸ σημεῖον Ζ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΓΒ. Ἡ ΕΑΖ εἶναι ἡ ζητουμένη, ὡς εὐκόλως δεικνύεται ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν ὀρθ. τριγώνων ΑΗΖ καὶ ΑΚΕ.

**262. Νὰ κατασκευάσητε γωνίαν ΓΑΒ<1 ὀρθ. καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ νὰ ὁρίσητε ἕν σημεῖον Δ. Ἔπειτα δὲ ἐπὶ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς νὰ ὁρίσητε ἄλλο σημεῖον, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὸ Δ καὶ ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΑΒ.**

**Ἀνάλυσις :** Ἔστω ὅτι εὑρέθη τὸ ζητούμενον σημεῖον ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ τῆς γωνίας ΒΑΓ <1 ὀρ. καὶ εἶναι τὸ Ε (σχ. 166) τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι ΕΖ=ΕΔ. Ἐὰν ἀχθῇ καὶ ἡ ΖΔ, τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι α=β, ὡς παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι αὐτοῦ.




*Σχ. 166*

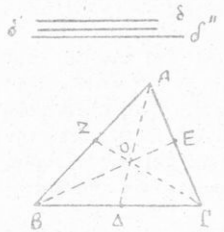
Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν τὴν ΔΗ κάθετον ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΑΒ. Ἐπειδὴ καὶ ἡ ΕΖ εἶναι κάθετος ἐκ κατασκευῆς ἐπὶ τὴν αὐτὴν πλευρὰν ΑΒ, ἕπεται ὅτι ΔΗ || ΖΕ. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ α=γ, ὡς γωνίαι ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΔΗ καὶ ΕΖ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΖΔ. Συνεπῶς καὶ γ=β καὶ ἡ ΔΖ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΕΔΗ, ἥτις καὶ ἀρχικῶς δύναται νὰ προσδιορισθῇ, χωρὶς νὰ γνωρίζωμεν τὴν θέσιν τοῦ σημείου Ε

**Σύνθεσις :** Φέρομεν ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου Δ κάθετον ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΑΒ τῆς δοθείσης γωνίας, τὴν ΔΗ (σχ. 166). Διχοτομοῦμεν τὴν γωνίαν ΑΔΗ καὶ ἔστω Ζ τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ διχοτόμος αὐτῆς τέμνει τὴν ΑΒ. Ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ εἰς τὸ σημεῖον Ζ αὐτῆς, ἥτις θὰ τέμνῃ τὴν ἄλλην πλευρὰν ΑΓ εἴς τι σημεῖον Ε. Τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον.

**Ἀπόδειξις :** Ἐπειδὴ ΔΗ || ΕΖ, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ, θὰ εἶναι γ=α, ὡς γωνίαι ἐντὸς ἐναλλάξ. Ἐπειδὴ δὲ καὶ β=γ, λόγῳ τῆς διχοτόμου ΔΖ, θὰ εἶναι καὶ α=β Συνεπῶς τὸ τρίγωνον ΖΕΔ θὰ εἶναι ἰσοσκελὲς ἤτοι ΖΕ=ΕΔ.

**Διερεύνησις :** Ἂν ἀχθῇ καὶ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΗΔΓ ἡ ΔΘ καὶ ἐκ τοῦ Θ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΒ, θὰ τέμνῃ τὴν ΑΓ εἴς τι ση μεῖον Ε', τὸ ὁποῖον εἶναι ἐπίσης λύσις τοῦ προβλήματος. Ἄρα τοῦτο ἔχει δύο λύσεις ὑπὸ τὸν ὅρον, ὅτι γων$ΒΑΓ < 1$ὀρθ.

**263. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ἀπὸ τὰς διαμέσους αὐτοῦ.**




*Σχ. 167*

**Ἀνάλυσις**: Ἔστω, ὅτι κατεσκευάσθη τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ εἶναι τὸ ΑΒΓ (σχ. 167) ἔχον ὡς διαμέσους ΑΔ, ΒΕ καὶ ΓΖ, τὰ τρία δοθέντα εὐθ. τμήματα δ, δ' καὶ δ'' ἀντιστοίχως.

Ἐπειδὴ αἱ διάμεσοι παντὸς τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἐξ ἑκάστης κορυφῆς τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου, ἕπεται ὅτι εἰς τὸ τρίγωνον ΒΟΓ εἶναι $ΒΟ = \frac{2}{3} ΒΕ = \frac{2}{3} δ'$, $ΟΓ = \frac{2}{3} ΓΖ = \frac{2}{3} δ''$ καὶ $ΟΔ = \frac{1}{3} ΑΔ = \frac{1}{3} δ$. Ἐπειδὴ δε αὐτοῦ γνωρίζομεν δύο πλευρὰς καὶ τὴν περιεχομένην ὑπ' αὐτῶν διάμεσον δυνάμεθα νὰ τὸ κατασκευάσωμεν (ἄσκησις 239).

**Σύνθεσις**: Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΒΟΓ (σχ. 167) ἔχον τὴν ΒΟ ἴσην πρὸς $\frac{2}{3} δ'$, τὴν ΟΓ ἴσην πρὸς $\frac{2}{3} δ''$ καὶ περιεχομένην ὑπ' αὐτῶν διάμεσον $ΟΔ = \frac{1}{3} δ$. Ἔπειτα προεκτείνομεν τὴν ΔΟ, πέραν τοῦ Ο καὶ λαμβάνομεν $ΟΑ = 2. ΟΔ$ καὶ φέρομεν τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ, εἶναι τὸ ζητούμενον.

**Ἀπόδειξις**: Ἐπειδὴ $ΑΟ = 2. ΟΔ$, ἕπεται ὅτι $ΑΔ = 3. ΟΔ$ καὶ $ΟΔ = \frac{ΑΔ}{3}$. Ἄρα $ΑΟ = \frac{2}{3} ΑΔ$ ἤτοι τὸ σημεῖον Ο εἶναι ἡ τομὴ τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ θὰ εἶναι $ΒΟ = \frac{2}{3} ΒΕ$ καὶ $ΓΟ = \frac{2}{3} ΓΖ$.
Ἀλλὰ $ΒΟ = \frac{2}{3} δ'$, $ΓΟ = \frac{2}{3} δ''$ καὶ $ΔΟ = \frac{1}{3} δ$. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\frac{2}{3} δ' = \frac{2}{3} ΒΕ$, $\frac{2}{3} δ'' = \frac{2}{3} ΓΖ$ καὶ $\frac{1}{3} δ = \frac{1}{3} ΑΔ$, ἤτοι $ΒΕ = δ'$, $ΓΖ = δ''$ καὶ $ΑΔ = δ$ δηλ. τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει ὡς διαμέσους τὰ τρία δοθέντα εὐθ. τμήματα, δ, δ' καὶ δ''.

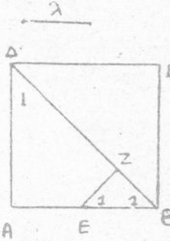
**Διερεύνησις**: Ἵνα τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν, πρέπει νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ κατασκευὴ τοῦ τριγώνου ΒΟΓ. Πρὸς ταῦτο πρέπει (ἄσκ. 239 σχ. 145) νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ κατασκευὴ τοῦ τριγώνου ΑΓΕ ἤτοι

$$\left| \frac{2}{3} δ'' - \frac{2}{3} δ' \right| < \frac{2}{3} δ < \frac{2}{3} δ'' + \frac{2}{3} δ' \quad ἢ \quad \left| δ'' - δ' \right| < δ < δ + δ''$$

**264. Νὰ κατασκευάσητε τετράγωνον ἀπὸ τὴν ἀπόστασιν τοῦ μέσου μιᾶς πλευρᾶς ἀπὸ τὴν διαγώνιον αὐτοῦ.**

**'Ανάλυσις:** Ἔστω, ὅτι κατεσκευάσθη τὸ ζητούμενον τετράγωνον καὶ εἶναι τὸ ΑΒΓΔ (σχ. 168), ἔχον τὴν ἀπόστασιν ΕΖ, τοῦ μέσου Ε τῆς πλευρᾶς ΑΒ, ἀπὸ τῆς διαγωνίου αὐτοῦ ΔΒ, ἴσην μὲ τὸ δοθὲν εὐθ. τμῆμα λ.

'Επειδὴ τοῦ τετραγώνου αἱ διαγώνιοι εἶναι καὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν αὐτοῦ, ἕπεται ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΕΖΒ ἔχει $B_1 = 45^0$. Ἄρα καὶ $E_1 = 45^0$ καὶ συνεπῶς $EZ = ZB = \lambda$. Τοῦτο δυνάμεθα καὶ ἀρχικῶς νὰ τὸ κατασκευάσωμεν.

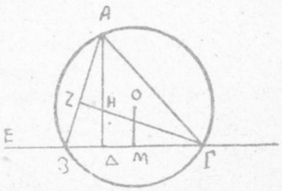



*Σχ. 168.*

**Σύνθεσις:** Κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΕΖΒ (σχ. 168) μὲ καθέτους πλευρὰς ἴσας πρὸς τὸ δοθὲν εὐθ. τμῆμα λ, προεκτείνομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΒΕ αὐτοῦ καὶ λαμβάνομεν ΕΑ = ΕΒ. Ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ ἔστω Δ τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ΒΖ προεκτεινομένη τέμνει αὐτήν. 'Εκ τῶν σημείων Δ καὶ Β ἄγομεν τὰς ΔΓ καὶ ΒΓ παραλλήλους πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΑΔ. Τὸ σχηματισθὲν ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ εἶναι τετράγωνον, διότι τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΔΑΒ ἡ γωνία $B_1 = 45^0$ ἐκ κατασκευῆς, ἄρα καὶ $\Delta_1 = 45^0$ καὶ συνεπῶς ΑΒ = ΑΔ.

**265. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ ἀπὸ τὸ ὀρθόκεντρον Η αὐτοῦ, ἀπὸ τὸ κέντρον 'Ο τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας καὶ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν Ε, ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται ἡ πλευρὰ ΒΓ αὐτοῦ.**

**'Ανάλυσις:** Ἔστω ΑΒΓ (σχ. 169) τὸ ζητούμενον τρίγωνον, ἔχον τὴν πλευράν του ΒΓ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας Ε, Η τὸ ὀρθόκεντρον αὐτοῦ καὶ Ο τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας του. 'Εὰν ἐκ τοῦ κέντρου Ο ἀχθῇ ἡ ΟΜ κάθετος ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ αὐτοῦ θὰ εἶναι $OM = \frac{AH}{2}$ (ἄσκ. 220) καὶ ΑΗ=2.ΟΜ. 'Επειδὴ δὲ ἡ Ε δίδεται καθὼς καὶ τὸ σημεῖον Η, ἡ ΗΔ ὁρίζεται καθὼς καὶ τὸ σημεῖον Α.




*Σχ. 169.*

**Σύνθεσις:** Εὑρίσκομεν τὴν ἀπόστασιν ΟΜ τοῦ κέντρου Ο ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας Ε. 'Εκ τοῦ δοθέντος σημείου Η φέρομεν τὴν ΗΔ κάθετον ἐπὶ τὴν Ε καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς πέραν τοῦ Η λαμβάνομεν ΗΑ = 2. ΟΜ. Ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ δοθὲν Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΑ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις τέμνει τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν Ε εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

**266. Νὰ ὁρισθῇ ἡ εὐθεῖα τοῦ** Simson, **ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν κορυφὴν Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.**

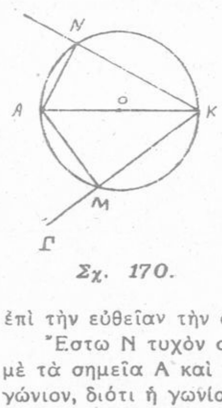
**Λύσις:** Ὡς γνωστόν, εὐθεῖα τοῦ Simson καλεῖται ἡ εὐθεῖα, ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖνται οἱ πόδες τῶν ἀγομένων καθέτων ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ἐκ σημείου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας. Ἄν ὡς τοιοῦτον σημεῖον ληφθῇ ἡ κορυφὴ Α τοῦ τριγώνου, οἱ πόδες τῶν μὲν καθέτων ἐξ αὐτοῦ ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΑΒ συμπίπτουσι μὲ τὸ Α, ὁ ποὺς δὲ τῆς ἐξ αὐτοῦ καθέτου ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ κεῖται ἐπὶ τῆς ΒΓ καὶ εὐθεῖα τοῦ Simson διὰ τὸ σημεῖον Α θὰ εἶναι ἡ ἐξ αὐτοῦ κάθετος ἐπὶ τὴν ἔναντι πλευρὰν δηλ. τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν πλευρὰν ΒΓ αὐτοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

## Γεωμετρικοὶ τόποι

**Ἀσκήσεις** σελὶς 141. **267. Νὰ εὕρητε τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν ποδῶν τῶν καθέτων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ ὡρισμένον σημεῖον Α ἐπὶ τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ ἄλλο ὡρισμένον σημεῖον Κ.**

**Λύσις:** Ἔστωσαν Α καὶ Κ τὰ δοθέντα σημεῖα καὶ ΚΓ τυχοῦσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ σημείου Κ. (σχ. 170). Φέρομεν τὴν ΑΜ⊥ΚΓ. Ζητεῖται ὁ Γ. Τ(1) τοῦ ποδὸς Μ, ὅταν ἡ ΚΓ στρεφομένη περὶ τὸ Κ λαμβάνει πάσας τὰς δυνατὰς θέσεις. Φέρομεν τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΚ, τὸ ὁποῖον συνδέει τὰ σταθερὰ κατὰ θέσιν σημεῖα Α καὶ Κ. Τὸ τρίγωνον ΑΜΚ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ συνεπῶς τὸ Μ θὰ κεῖται ἐπὶ περιφερείας γραφομένης μὲ διάμετρον τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ ΚΑ.



*Σχ. 170.*

**Ἀντιστρόφως:** Πᾶν σημεῖον τῆς περιφερείας Ο ἔχει τὴν ἐν λόγῳ ἰδιότητα ἤτοι εἶναι ὁ ποὺς τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ Α ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τὴν ὁποίαν ὁρίζει τοῦτο μὲ τὸ σημεῖον Κ.

Ἔστω Ν τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας (Ο, ΟΑ). Ἑνοῦμεν τοῦτο μὲ τὰ σημεῖα Α καὶ Κ. Τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΝΚ εἶναι ὀρθογώνιον, διότι ἡ γωνία Ν αὐτοῦ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον. Ἄρα ΑΝ⊥ΚΝ.

Ἑπομένως, ἐπειδὴ πάντα τὰ σημεῖα Μ τὰ ἔχοντα τὴν δεδομένην ἰδιότητα κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας (Ο, ΟΑ) καὶ πᾶν σημεῖον αὐτῆς ἔχει τὴν δεδομένην ἰδιότητα, αὕτη εἶναι ὁ ζητούμενος Γ. Τ.

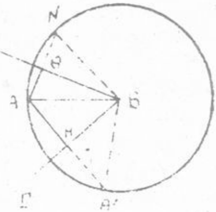
**268. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ εὕρητε τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν συμμετρικῶν τοῦ Α πρὸς τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ Β.**

---

(1) Γ. Τ = Γεωμετρικὸς τόπος.

**Λύσις**: Έστωσαν Α καὶ Β τὰ δοθέντα σημεῖα καὶ ΒΓ τυχοῦσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Β (σχ. 171).

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ συμμετρικὸν τοῦ Α πρὸς ἄξονα ΒΓ φέρομεν τὴν κάθετον ΑΗ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν ΗΑ΄=ΗΑ. Ζητεῖται ἡ γραμμὴ ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖνται τὰ σημεῖα Α΄, ὅταν ἡ ΒΓ λάβῃ πάσας τὰς δυνατὰς θέσεις περὶ τὸ σημεῖον Β.



*Σχ. 171.*

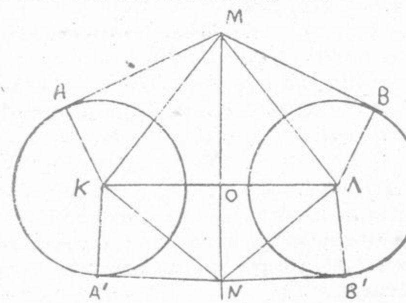
Φέρομεν τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ καὶ ΒΑ΄. Τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΑ΄ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἡ ΒΗ εἶναι ὕψος καὶ διάμεσος αὐτοῦ ἐκ κατασκευῆς· ἄρα ΒΑ=ΒΑ΄. Ἑπομένως τὸ σημεῖον Α΄ ἀπέχει ἀπὸ τὸ σταθερὸν σημεῖον Β σταθερὰν ἀπόστασιν καὶ ἴσην πρὸς τὴν ἀπόστασιν ΒΑ τῶν δύο δοθέντων σημείων. Κεῖται ἄρα τοῦτο ἐπὶ περιφερείας ἐχούσης κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΒ.

**Ἀντιστρόφως:** *Πᾶν σημεῖον τῆς περιφερείας (Β, ΑΒ) εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ σημείου Α, ὡς πρὸς εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ Β.*

Διότι ἂν Ν εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας ταύτης καὶ ἀχθῇ ἡ ΑΝ, θὰ εἶναι αὕτη χορδὴ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου κάθετος ἐπ' αὐτὴν ΒΘ τέμνει αὐτὴν δίχα καὶ καθέτως ἤτοι τὸ Ν εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Α πρὸς ἄξονα ΒΘ.

**269. Δίδονται δύο ἴσαι περιφέρειαι Κ καὶ Λ. Νὰ εὕρητε τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν σημείων, ἀπὸ ἕκαστον τῶν ὁποίων ἄγονται ἴσαι ἐφαπτόμεναι πρὸς αὐτάς.**

**Λύσις**: Έστωσαν Κ καὶ Λ δύο ἴσαι περιφέρειαι (σχ. 172) καὶ σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι ΜΑ = ΜΒ. Φέρομεν τὰ εὐθ. τμήματα ΜΚ, ΚΑ, ΜΛ, ΜΒ. Τὰ σχηματιζόμενα ὀρθογώνια τρίγωνα ΚΑΜ καὶ ΛΒΜ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι ΜΑ=ΜΒ ἐξ ὑποθέσεως καὶ ΚΑ = ΛΒ ὡς ἀκτῖνας ἴσων κύκλων. Ἄρα ΜΚ=ΜΛ καὶ τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΚΛ.



*Σχ. 172.*

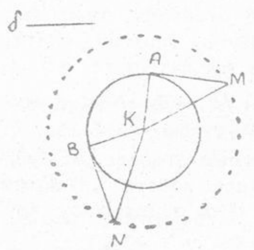
**Ἀντιστρόφως:** Πᾶν σημεῖον τῆς καθέτου ταύτης ἔχει τὴν ἰδιότητα, αἱ ἀγόμεναι ἐξ αὐτοῦ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰς ἴσας περιφερείας Κ καὶ Λ, νὰ εἶναι ἴσαι.

Ἔστω Ν τυχὸν σημεῖον καὶ ΝΑ΄, ΝΒ΄ αἱ ἐξ αὐτοῦ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰς περιφερείας Κ καὶ Λ. Τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΚΑ΄Ν καὶ ΛΒ΄Ν εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι τὰς ὑποτεινούσας των ΝΚ, ΝΛ ἴσας καὶ ἀνὰ μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην ΚΑ′=ΚΒ′ ἄρα καὶ ΝΑ′=ΝΒ′. Ἑπομένως ὁ ζητούμενος Γ. Τ. εἶναι ἡ κάθετος ΜΝ εἰς τὸ μέσον Ο τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων Κ καὶ Λ τῶν δοθεισῶν ἴσων περιφερειῶν.

**Διερεύνησις**: Ἐὰν αἱ δοθεῖσαι περιφέρειαι κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων, τότε πάντα τὰ σημεῖα τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΚΛ εἶναι καὶ σημεῖα τοῦ τόπου. Ἂν ὅμως αἱ περιφέρειαι τέμνωνται, τότε μόνον τὰ σημεῖα τῆς καθέτου ταύτης, τὰ κείμενα ἐκτὸς τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν, εἶναι ὁ ζητούμενος Γ. Τ.

**Ἀσκήσεις** Σελὶς 142.—**270. Δίδεται κύκλος Κ καὶ εὐθ. τμῆμα δ. Νὰ εὕρητε τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν σημείων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἄγονται εἰς τὸν κύκλον τοῦτον ἐφαπτόμεναι ἴσαι πρὸς τὸ δ.**

**Λύσις**: Ἔστω ὁ κύκλος Κ (σχ. 173) καὶ δοθὲν εὐθ. τμῆμα δ. Εἰς τυχὸν σημεῖον Α τῆς περιφερείας Κ φέρομεν ἐφαπτομένην καὶ ἐπ' αὐτῆς ἀπὸ τοῦ Α ἀρχόμενοι λαμβάνομεν τμῆμα ΑΜ. ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν εὐθ. τμῆμα δ. Τὸ Μ εἶναι σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου. Φέρομεν καὶ τὴν ΚΜ, τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΑΜ αἱ κάθετοι πλευραὶ ΚΑ καὶ ΑΜ εἶναι γνωσταὶ καὶ σταθεραί. Ἄρα καὶ ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ ΜΚ εἶναι σταθερὰ καὶ τὸ Μ σημεῖον τοῦ τόπου ἀπέχει σταθερὰν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ σταθερὸν σημεῖον Κ. Κεῖται ἄρα τοῦτο ἐπὶ περιφερείας γραφομένης μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ὑποτείνουσαν ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ καθέτους πλευρὰς τὴν ἀκτῖνα τῆς δοθείσης καὶ τὸ εὐθ. τμῆμα δ.




*Σχ. 173.*

**Ἀντιστρόφως**: Ἔστω Ν τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας (Κ, ΚΜ). Φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΝΒ καὶ τὰς ΚΝ καὶ ΚΒ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΚΒΝ καὶ ΚΑΜ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουσι τὰς ὑποτεινούσας ΚΜ καὶ ΚΝ ἴσας, ὡς ἀκτῖνας τοῦ αὐτοῦ κύκλου καὶ τὰς καθέτους των πλευρὰς ΚΑ καὶ ΚΒ ἴσας, δι' ὅμοιον λόγον. Ἄρα καὶ ΝΒ=ΜΑ=δ.

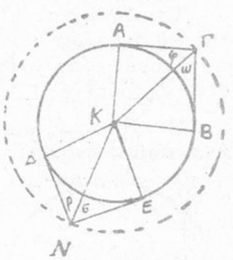
Ὁ ζητούμενος ἄρα Γ. Τ. εἶναι ὁλόκληρος ἡ περιφέρεια (Κ, ΚΜ).

**271. Ἂν δοθῇ κύκλος Κ νὰ κατασκευάσητε ὀρθὴν γωνίαν, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ ἐφάπτονται τοῦ Κ. Ἀπὸ τὸν τρόπον τῆς κατασκευῆς ταύτης θὰ ἐννοήσητε, ὅτι κατασκευάζονται ἄπειροι τοιαῦται γωνίαι. Νὰ εὕρητε τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν κορυφῶν τῶν γωνιῶν τούτων.**

**Λύσις**: Εἴδομεν (ἄσκ. 169) ὅτι, ἐὰν γράψωμεν δύο καθέτους ἀκτῖνας ἑνὸς κύκλου καὶ φέρωμεν τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν, τὸ μέτρον τῆς γωνίας τῶν ἐφαπτομένων τούτων εἶναι $90^0$. Ἐπειδὴ δὲ ἄπειρα ζεύγη καθέτων ἀκτίνων δύνανται νὰ ἀχθῶσιν εἰς τὴν περιφέρειαν Κ, ἕπεται ὅτι καὶ ἄπειροι ὀρθαὶ γωνίαι κατασκευάζονται, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ ἐφάπτονται τῆς περιφερείας Κ.

Ἔστω Γ ἡ κορυφὴ τυχούσης ὀρθῆς γωνίας ΑΒΓ, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ ΓΑ καὶ ΓΒ ἐφάπτονται τῆς περιφερείας Κ (σχ. 174). Τὸ σημεῖον Γ εἶναι σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου.

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΑΚΒΓ εἶναι τετράγωνον, διότι ΚΑ=ΚΒ. Ἐὰν δὲ ἀχθῇ ἡ ΚΓ, αὕτη εἶναι σταθερά, ὡς διαγώνιος τοῦ τετραγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν σταθερὰν καὶ ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΚΑ τοῦ δοθέντος κύκλου.



Σχ. 174.

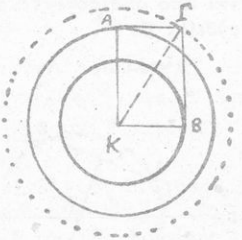
Ἄρα πᾶν σημεῖον Γ, ὡς ἀπέχον σταθερὰν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ κέντρον Κ τοῦ δοθέντος κύκλου, θὰ κεῖται ἐπὶ ὁμοκέντρου περιφερείας, ἥτις γράφεται μὲ ἀκτῖνα τὴν διαγώνιον τετραγώνου πλευρᾶς ἴσης πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ δοθέντος κύκλου Κ.

**Ἀντιστρόφως**: Ἔστω Ν τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας (Κ, ΚΓ). Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΝΔ, ΝΕ εἰς τὴν περιφέρειαν (Κ, ΚΑ) τὰς ἀκτῖνας ΚΔ, ΚΕ εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς Δ καὶ Ε καὶ τὴν ΚΝ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΚΒΓ καὶ ΚΝΕ εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα ΚΝ=ΚΓ, ὡς ἀκτῖνας τοῦ αὐτοῦ κύκλου καὶ ΚΒ=ΚΕ δι' ὅμοιον λόγον. Ἄρα $\omega=\sigma$ (1). Δι' ὅμοιον λόγον εἶναι καὶ $\varphi=\rho$ (2). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι $\omega+\varphi=\rho+\sigma$. Ἐπειδὴ δὲ $\omega+\varphi=1$ ὀρθ., ἕπεται ὅτι καὶ $\rho+\sigma=1$ ὀρθ. Ἤτοι τὸ σημεῖον Ν εἶναι κορυφὴ ὀρθῆς γωνίας, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ ἐφάπτονται τοῦ δοθέντος κύκλου Κ.

Ὥστε ὁ ζητούμενος Γ. Τ. εἶναι ὁλόκληρος ἡ περιφέρεια (Κ, ΚΓ).

272. **Νὰ γράψητε δύο ὁμοκέντρους περιφερείας καὶ νὰ κατασκευάσητε ὀρθὴν γωνίαν, τῆς ὁποίας ἡ μία πλευρὰ νὰ ἐφάπτεται τῆς μιᾶς, ἡ δὲ ἄλλη τῆς ἄλλης περιφερείας. Τοιαῦται γωνίαι δύνανται νὰ κατασκευασθῶσιν ἄπειροι. Νὰ εὕρητε τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν κορυφῶν αὐτῶν.**

**Λύσις**: Γράφομεν δύο ἀκτῖνας ΚΑ καὶ ΚΒ, ἀνὰ μίαν εἰς ἑκάστην τῶν ὁμοκέντρων περιφερειῶν καὶ καθέτους μεταξύ των (σχ. 175). Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν Α καὶ Β, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἴς τι σημεῖον Γ, σχηματίζουσαι ὀρθὴν γωνίαν. Ζητεῖται ὁ γεωμ. τόπος τῶν κορυφῶν Γ τῶν οὕτως σχηματιζομένων ὀρθῶν γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἄπειροι, διότι ἄπειρα εἶναι καὶ τὰ ζεύγη τῶν καθέτων μεταξὺ τῶν ἀκτίνων ΚΑ καὶ ΚΒ.



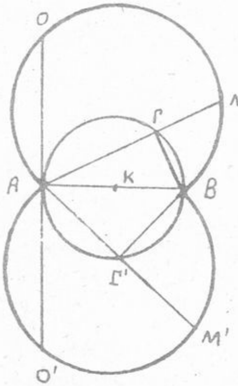
Σχ. 175.

Ἐπειδὴ τὸ σχῆμα ΚΑΓΒ εἶναι ὀρθογώνιον, θὰ εἶναι ΚΑ=ΒΓ. Ἐὰν ἀχθῇ καὶ ἡ διαγώνιος αὐτοῦ ΚΓ, αὕτη ὡς ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ ΚΒ, ΒΓ εἶναι γνωσταὶ καὶ ἴσαι πρὸς τὰς ἀκτῖνας τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν· εἶναι γνωστὴ καὶ σταθερά.

Ἄρα τὸ σημεῖον Γ κεῖται ἐπὶ περιφερείας ὁμοκέντρου πρὸς τὰς δοθείσας ἥτις ἔχει ἀκτῖνα τὴν ὑποτείνουσαν ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ καθέτους πλευρὰς τὰς ἀκτῖνας τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν.

Ἐπειδὴ δὲ καὶ πᾶν σημεῖον τῆς ἐν λόγῳ περιφερείας ἀποδεικνύεται, ὡς ἀνωτέρω (ἄσκ. 271), ὅτι εἶναι κορυφὴ ὀρθῆς γωνίας, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ ἐφάπτονται ἀνὰ μία τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν, ἕπεται ὅτι ὁ ζητούμενος Γ.Τ. εἶναι ὁλόκληρος ἡ περιφέρεια αὕτη.

**273. Νὰ λύσητε τὸ προηγούμενον (§ 172 Θ. Γ.) πρόβλημα, ἂν ἀντὶ ἡμιπεριφερείας γράψωμεν ὁλόκληρον περιφέρειαν.**




*Σχ. 176.*

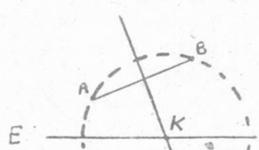
**Λύσις**: Ὅταν τὸ Γ διαγράφῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΑΓΒ (σχ. 176) διὰ τοῦ προβλήματος III (§ 172 Θ. Γ.) εὕρομεν, ὅτι ὁ ζητούμενος Γ.Τ. εἶναι τὸ τόξον ΒΜΟ τοῦ κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον ἔχει χορδὴν τὴν διάμετρον ΑΒ, δέχεται γωνίαν 45° καὶ κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος μὲ τὴν ἡμιπεριφέρειαν.

Ὅταν ὅμως τὸ Γ διαγράφῃ τὴν ἄλλην ἡμιπεριφέρειαν ΑΓ'Β, τὴν κειμένην κάτω τῆς διαμέτρου ΑΒ, καθ' ὅμοιον ἀκριβῶς τρόπον εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ Μ' κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος Ο'Μ'Β, ἔχοντος διάμετρον ΑΒ καὶ δεχομένου γωνίαν 45° (σχ. 176). Ὥστε ὁ ζητούμενος Γ Τ. εἶναι δύο ἴσα τόξα ΒΜΟ καὶ ΒΜ'Ο' συμμετρικὰ πρὸς τὴν χορδὴν ΑΒ καὶ δεχόμενα γων. 45°.

## Χρῆσις τῶν γεωμ. τόπων εἰς τὴν λύσιν προβλημάτων

**Ἀσκήσεις** σελὶς 144.—**274. Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α, Β καὶ ἔχει τὸ κέντρον ἐπὶ δοθείσης εὐθείας Ε.**

**Ἀνάλυσις**: Ἄγνωστον εἶναι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης νὰ γραφῇ περιφερείας, ἡ ὁποία ὀφείλει νὰ πληροῖ δύο ἐπιτάγματα 1) νὰ διέρχηται διὰ τῶν δύο σημείων Α καὶ Β καὶ 2) νὰ ἔχῃ τὸ κέντρον της ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας Ε. Ἀλλὰ ὁ Γ.Τ. τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα πληροῦσι τὸ α' ἐπίταγμα εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ εἰς τὸ μέσον αὐτοῦ. Ὁ Γ.Τ. τῶν σημείων τῶν πληρούντων τὸ β' ἐπίταγμα, εἶναι ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα Ε. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄγνωστον κέντρον ὀφείλει νὰ πληροῖ καὶ τὰ δύο ἐπιτάγματα, θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῶν δύο τόπων καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ἡ τομὴ αὐτῶν.




*Σχ. 177.*

**Σύνθεσις.** Ἄγομεν τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον αὐτοῦ, ἥτις θὰ τέμνῃ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν Ε εἴς τι σημεῖον Κ. Μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα ΚΑ ἢ ΚΒ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις εἶναι προφανῶς ἡ ζητουμένη.

**Διερεύνησις:** Διὰ νὰ ἔχῃ λύσιν τὸ πρόβλημα πρέπει οἱ δύο τόποι νὰ τέμνωνται. Ἐπειδὴ δὲ οὗτοι εἶναι εὐθεῖαι, πρέπει νὰ μὴ εἶναι παράλληλοι. Ἀλλὰ ἡ Ε′ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐκ κατασκευῆς. Συνεπῶς ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα Ε πρέπει νὰ μὴ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα Ε εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς τότε οἱ δύο τόποι συμπίπτουσι καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει ἀπείρους λύσεις, διότι πᾶν σημεῖον τῆς Ε εἶναι κέντρον περιφερείας, διερχομένης διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β.

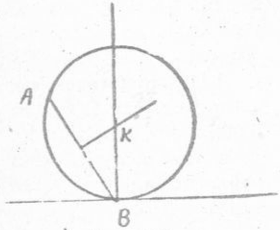
**275. Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ ὡρισμένον σημεῖον Α καὶ ἐφάπτεται δοθείσης εὐθείας Ε εἰς ὡρισμένον σημεῖον Β αὐτῆς.**

**Ἀνάλυσις:** Ἄγνωστον εἶναι τὸ κέντρον Κ (σχ. 178) τῆς ζητουμένης νὰ γραφῇ περιφερείας, ἡ ὁποία ὀφείλει νὰ πληροῖ τὰ ἑξῆς δύο ἐπιτάγματα.

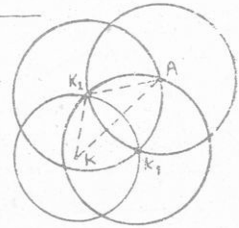
1) Νὰ ἐφάπτηται τῆς δοθείσης εὐθείας Ε εἰς τὸ σημεῖον Β αὐτῆς.

2) Νὰ διέρχηται διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β.

Ἀλλ' ἂν μόνον τὸ πρῶτον ἐπίταγμα πληροῖ, τὸ κέντρον αὐτῆς ἔχει τόπον τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν Ε καὶ εἰς τὸ σημεῖον Β αὐτῆς. Ἂν δὲ μόνον τὸ δεύτερον πληροῖ, τὸ κέντρον αὐτῆς ἔχει τόπον τὴν




*Σχ. 178.*




*Σχ. 179.*

κάθετον εἰς τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ. Ἑπομένως τὸ ζητούμενον κέντρον θὰ εἶναι ἡ τομὴ τῶν δύο τούτων τόπων.

**Διερεύνησις.** Τὸ πρόβλημα θὰ ἔχῃ λύσιν, ἂν οἱ δύο οὗτοι τόποι (εὐθεῖαι) τέμνωνται, θὰ εἶναι δὲ ἀδύνατον, ἂν εἶναι παράλληλοι. Τὸ πρῶτον συμβαίνει, ἂν τὸ δοθὲν σημεῖον Α κεῖται ἐκτὸς τῆς δοθείσης εὐθείας Ε, τὸ δὲ δεύτερον, ἂν τοῦτο κεῖται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας Ε.

**276. Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα α, νὰ διέρχηται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α καὶ νὰ ἔχῃ τὸ κέντρον ἐπὶ δοθείσης περιφερείας Κ.**

**Ἀνάλυσις.** Ἄγνωστον εἶναι τὸ κέντρον $K_1$ (σχ. 179) τῆς ζητουμένης νὰ γραφῇ περιφερείας, ἥτις ὀφείλει νὰ πληροῖ τὰ ἑξῆς δύο ἐπιτάγματα :

1) Νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα α καὶ νὰ διέρχηται καὶ ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον Α.

2) Νὰ ἔχῃ τὸ κέντρον της ἐπὶ τῆς δοθείσης περιφερείας Κ.

Ἂν μόνον τὸ πρῶτον ἐπίταγμα πληροῖ, τὸ κέντρον αὐτῆς ἔχει τόπον τὴν περιφέρειαν, ἥτις γράφεται μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν α.

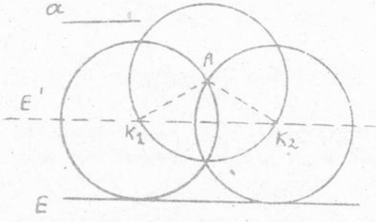
Ἂν δὲ μόνον τὸ δεύτερον ἐπίταγμα πληροῖ, τὸ κέντρον αὐτῆς ἔχει τόπον τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν Κ.

Ἄρα τὸ ζητούμενον κέντρον θὰ εἶναι ἡ τομὴ τῶν δύο αὐτῶν τόπων ἤτοι τὰ σημεῖα $K_1$ καὶ $K_2$. Ἐὰν μὲ κέντρον $K_1$ ἢ $K_2$ καὶ ἀκτῖνα α γράψωμεν περιφέρειαν, αὕτη θὰ διέρχηται ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον Α καὶ θὰ ἔχῃ τὸ κέντρον της ἐπὶ τῆς δοθείσης περιφερείας Κ.

**Διερεύνησις** : Ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχῃ λύσιν πρέπει αἱ δύο περιφέρειαι (τόποι) νὰ τέμνωνται ἢ νὰ ἐφάπτωνται. Πρὸς τοῦτο πρέπει ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων αὐτῶν ΚΑ νὰ εἶναι μικροτέρα ἢ ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῆς δοθείσης περιφερείας Κ καὶ τῆς ἀκτῖνος α τῆς ζητουμένης νὰ γραφῇ περιφερείας. Καὶ ἂν μὲν $KB < KK_1 + \alpha$ ἔχουσι δύο κοινὰ σημεῖα $K_1$ καὶ $K_2$ καὶ τὸ πρόβλημα δύο λύσεις. Ἂν δὲ $KB = KK_1 + \alpha$, ὑπάρχει ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν.

**277. Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχηται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α, νὰ ἐφάπτηται δοθείσης εὐθείας Ε καὶ νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα α.**

**Ἀνάλυσις.** Ἄγνωστον εἶναι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης νὰ γραφῇ περιφερείας, ἥτις ὀφείλει νὰ πληροῖ τὰ ἑξῆς δύο ἐπιτάγματα.




*Σχ. 180.*

1) Νὰ ἐφάπτηται τῆς δοθείσης εὐθείας Ε καὶ νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν α.

2) Νὰ διέρχηται διὰ τοῦ δοθέντος σημείου Α καὶ νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα α.

Ἀλλὰ τὰ σημεῖα τὰ πληροῦντα τὸ πρῶτον ἐπίταγμα κεῖνται ἐπ' εὐθείας Ε' (σχ. 180) παραλλήλου πρὸς τὴν δοθεῖσαν Ε καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῆς ἴσην πρὸς α.

Τὰ δὲ σημεῖα τὰ πληροῦντα τὸ δεύτερον ἐπίταγμα θὰ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας, ἥτις ἔχει κέντρον τὸ δοθὲν σημεῖον Α καὶ ἀκτῖνα α.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄγνωστον κέντρον ὀφείλει νὰ πληροῖ ἀμφότερα τὰ ἐπιτάγματα, θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῶν δύο τόπων καὶ θὰ εἶναι τὰ σημεῖα $K_1$ ἢ $K_2$ τῆς τομῆς αὐτῶν. Ἂν δὲ μὲ κέντρον $K_1$ καὶ ἀκτῖνα α γράψωμεν περιφέρειαν, αὕτη θὰ πληροῖ τὰ δοθέντα ἐπιτάγματα.

**Διερεύνησις.** Ἂν ἡ εὐθεῖα Ε' καὶ ἡ περιφέρεια (Α, α) ἔχωσι δύο κοινὰ σημεῖα $K_1$ καὶ $K_2$ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, τὰς περιφερείας ($K_1$, α) καὶ ($K_2$, α). Τοῦτο συμβαίνει, ἄν ἡ ἀπόστασις τοῦ δοθέντος σημείου Α ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας Ε εἶναι μικροτέρα τῆς 2ας. Ἄν δὲ ἔχωσιν ἕν μόνον κοινὸν σημεῖον, τότε τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν. Τοῦτο συμβαίνει ἄν ἡ ἀπόστασις τοῦ Α ἀπὸ τῆς Ε εἶναι ἴση πρὸς 2α. Ἄν δὲ ἡ ἀπόστασις τοῦ Α ἀπὸ τῆς Ε εἶναι μεγαλυτέρα τῆς 2α, τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν.

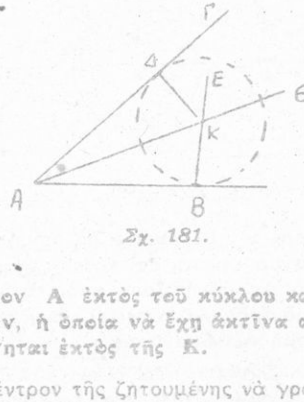
**278. Νὰ κατασκευάσητε μίαν γωνίαν Α καὶ εἰς τὴν μίαν πλευρὰν αὐτῆς νὰ ὁρίσητε ἕν σημεῖον Β. Ἔπειτα νὰ γράψητε μίαν περιφέρειαν, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτηται τῶν δύο πλευρῶν αὐτῆς, τῆς δὲ ΑΒ εἰς τὸ Β.**

**Ἀνάλυσις:** Ἄγνωστον εἶναι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης νὰ γραφῇ περιφερείας, ἡ ὁποία ὀφείλει νὰ πληροῖ τὰ ἑξῆς δύο ἐπιτάγματα.

1) Νὰ ἐφάπτηται τῶν δύο πλευρῶν τῆς δοθείσης γωνίας Α.

2) Νὰ ἐφάπτηται τῆς πλευρᾶς ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Β αὐτῆς.

Τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα πληροῦσι τὸ πρῶτον μόνον ἐπίταγμα εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς δοθείσης γωνίας Α. Τὰ δὲ σημεῖα, τὰ ὁποῖα πληροῦσι τὸ δεύτερον ἐπίταγμα κεῖνται ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΑΒ καὶ εἰς τὸ σημεῖον Β αὐτῆς. Ἄρα τὸ ἄγνωστον κέντρον θὰ εἶναι ἡ τομὴ Κ (σχ. 181) τῶν δύο τόπων ΑΘ καὶ ΒΕ. Ἄν δὲ μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα ΚΒ ἢ ΚΔ γράψωμεν περιφέρειαν, αὕτη θὰ ἐφάπτηται τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας Α καὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ εἰς τὸ Β.



*Σχ. 181.*

**279. Δίδεται περιφέρεια Κ, σημεῖον Α ἐκτὸς τοῦ κύκλου καὶ εὐθ. τμῆμα α. Νὰ γράψητε περιφέρειαν, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα α, νὰ διέρχηται ἀπὸ τὸ Α καὶ νὰ ἐφάπτηται ἐκτὸς τῆς Κ.**

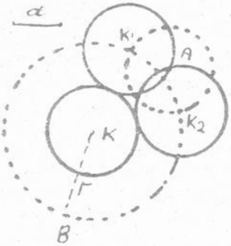
**Ἀνάλυσις:** Ἄγνωστον εἶναι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης νὰ γραφῇ περιφερείας, ἥτις ὀφείλει νὰ πληροῖ τὰ ἑξῆς δύο ἐπιτάγματα.

1) Νὰ διέρχηται διὰ τοῦ σημείου Α καὶ νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα τὸ δοθὲν εὐθ. τμῆμα α.

2) Νὰ ἐφάπτηται τῆς δοθείσης περιφερείας Κ ἐκτὸς καὶ νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα τὸ δοθὲν εὐθ. τμῆμα α.

Ἀλλὰ ἄν μόνον τὸ πρῶτον ἐπίταγμα πληροῖ, τὸ κέντρον αὐτῆς θὰ ἔχῃ τόπον τὴν περιφέρειαν (Α, α). Ἄν δὲ μόνον τὸ δεύτερον ἐπίταγμα πληροῖ, τὸ κέντρον αὐτῆς θὰ ἔχῃ τόπον περιφέρειαν ὁμόκεντρον πρὸς τὴν δοθεῖσαν Κ καὶ ἔχουσαν ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῆς δοθείσης περιφερείας Κ καὶ τῆς ζητουμένης νὰ γραφῇ περιφερείας. Ἄρα τὸ ἄγνωστον κέντρον θὰ εἶναι ἡ τομὴ τῶν δύο αὐτῶν περιφερειῶν.

**Σύνθεσις**: Μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν α γράφομεν περιφέρειαν. Ἔπειτα μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα (σχ. 182) ΚΒ = ΚΓ + + ΓΒ = ΚΓ + α γράφομεν ἄλλην περιφέρειαν. Αὗται τέμνονται ἐν γένει εἰς δύο σημεῖα $K_1$ καὶ $K_2$. Μὲ κέντρον $K_1$ ἢ $K_2$ καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις θὰ εἶναι προφανῶς ἡ ζητουμένη.

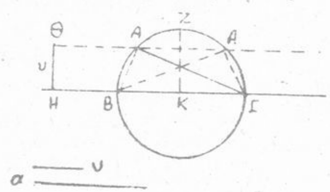


*Σχ. 182.*

**Διερεύνησις**: Ἂν αἱ δύο γραφεῖσαι περιφέρειαι (τόποι) ἔχωσι δύο κοινὰ σημεῖα $K_1$ καὶ $K_2$ τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις. Πρὸς τοῦτο πρέπει ΚΑ<ΚΓ+α+α ἢ ΚΑ<ΚΓ+2α. Ἂν δὲ ἔχωσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν. Πρὸς τοῦτο πρέπει ΚΑ=ΚΓ+2α.

**Ἀσκήσεις** σελ. 146.— **280. Νὰ κατασκευάσητε ὀρθογώνιον τρίγωνον ἀπὸ τὴν ὑποτείνουσαν καὶ ἀπὸ τὸ ἐπὶ ταύτην ὕψος.**

**Ἀνάλυσις**: Ἄγνωστος εἶναι ἡ κορυφὴ Α τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ πληροῖ τὰ δύο ἐπιτάγματα.



*Σχ. 183.*

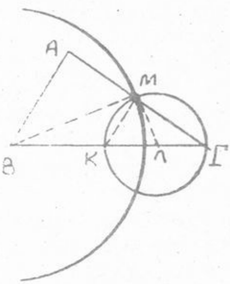
1) Ἐκ τῆς κορυφῆς Α αὐτοῦ νὰ φαίνηται ἡ ὑποτείνουσα ΒΓ ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν. 2) Νὰ ἔχῃ ὕψος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν υ. Τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα πληροῦσι τὸ πρῶτον ἐπίταγμα κεῖνται ἐπὶ περιφερείας κύκλου μὲ διάμετρον τὴν ΒΓ=α. Τὰ δὲ σημεῖα, τὰ ὁποῖα πληροῦσι τὸ δεύτερον ἐπίταγμα κεῖνται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν ΒΓ καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῆς ἴσην πρὸς τὸ δοθὲν υ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἄγνωστος κορυφὴ τοῦ τριγώνου ὀφείλει νὰ πληροῖ καὶ τὰ δύο ἐπιτάγματα, θὰ εἶναι ἡ τομὴ τῶν δύο τόπων.

**Σύνθεσις**: Μὲ διάμετρον εὐθ. τμῆμα ΒΓ=α γράφομεν περιφέρειαν κύκλου (σχ. 183). Ἀπὸ τοῦ σημείου Η, κειμένου ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΓ, ὑψοῦμεν κάθετον ἐπ' αὐτήν, λαμβάνομεν ΗΘ=υ καὶ ἐκ τοῦ Θ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ. Αὕτη τέμνει τὴν περιφέρειαν (Κ, ΚΒ) εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Α′. Τὰ τρίγωνα ΒΑΓ καὶ ΒΑ′Γ ἔχουσι προφανῶς τα δοθέντα στοιχεῖα καὶ ἀποτελοῦσι λύσιν τοῦ προβλήματος.

**Διερεύνησις**: Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν πρέπει υ⩽ΚΖ. Ἂν υ<ΚΖ οἱ τόποι ἔχουσι δύο κοινὰ σημεῖα Α καὶ Α′. Τὰ τρίγωνα ὅμως ΑΒΓ καὶ Α′ΒΓ εἶναι ἴσα καὶ θεωρεῖται, ὅτι ἀποτελοῦσι μίαν λύσιν. Ἂν υ=ΚΖ τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν καὶ τὸ τρίγωνον ἰσοσκελές. Ἂν δὲ υ>ΚΖ, οἱ τόποι δὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

Τὰ αὐτὰ συμπεράσματα ἔχομεν καὶ ἄν πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τῆς ΒΓ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς αὐτὴν εἰς ἀπόστασιν υ.

**281. Νὰ κατασκευάσητε ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ καὶ τῆς διαμέσου ΒΜ = δ.**



*Σχ. 184.*

**Ἀνάλυσις**: Ἔστω ὅτι κατεσκευάσθη τὸ ζητούμενον ὀρθογώνιον τρίγωνον καὶ εἶναι τὸ ΑΒΓ (σχ. 184) ἔχον ὑποτείνουσαν ΒΓ τὴν δοθεῖσαν καὶ διάμεσον ΒΜ = δ.

Ἂν ἐκ τοῦ μέσου Μ τῆς πλευρᾶς ΑΓ αὐτοῦ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ, ἡ ΜΚ, θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ μέσου τῆς τρίτης πλευρᾶς αὐτοῦ ἤτοι ΒΚ = ΚΓ. Ἐπειδὴ δὲ γωνΑ = 1 ὀρθὴ θὰ εἶναι καὶ γωνΚΜΓ = 1 ὀρθή.

Ἄρα τὸ Μ θὰ κεῖται ἐπὶ περιφερείας, ἥτις ἔχει διάμετρον ΚΓ $= \frac{ΒΓ}{2} = \frac{α}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ΒΜ εἶναι γνωστή, τὸ Μ θὰ κεῖται ἐπὶ περιφερείας, ἥτις ἔχει κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα ΒΜ. Ἄρα θὰ εἶναι ἡ τομὴ τῶν δύο αὐτῶν περιφερειῶν.

**Σύνθεσις**: Λαμβάνομεν εὐθ. τμῆμα ΒΓ=α καὶ διχοτομοῦμεν τοῦτο. Ἐπί τῆς ΚΓ, ὡς διαμέτρου, γράφομεν περιφέρειαν κύκλου. Μὲ κέντρον δὲ Β καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς δ γράφομεν ἑτέραν περιφέρειαν. Τὸ κοινὸν σημεῖον Μ αὐτῶν ἑνοῦμεν μὲ τὰ ἄκρα Β καὶ Γ καὶ σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΜΒΓ. Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΜΓ αὐτοῦ καὶ λαμβάνομεν ΜΑ=ΜΓ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

**Ἀπόδειξις**: Ἐπειδὴ τὸ εὐθ. τμῆμα ΚΜ συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν αὐτοῦ, εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ. Ἀλλὰ ΚΜ $\perp$ ΜΓ, διότι γωνΚΜΓ=1 ὀρθ. Ἄρα καὶ γωνΑ=1 ὀρθ. καὶ τὸ τρίγωνον ΒΑΓ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

**Διερεύνησις**: Ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν, πρέπει οἱ δύο τόποι νὰ τέμνωνται. Πρὸς τοῦτο πρέπει ΒΜ—ΛΜ<ΒΛ<ΒΜ+ΛΜ ἢ

$δ - \frac{α}{4} < \frac{α}{2} + \frac{α}{4} < δ + \frac{α}{4}$ ἢ $4δ - α < 2α + α < 4δ + α$ ἢ $4δ < 4α$ (1).

καὶ $2α < 4δ$ (2). Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν $δ < α$, ἐκ δὲ τῆς (2) $\frac{α}{2} < δ$

καὶ συνεπῶς πρέπει $\frac{α}{2} < δ < α$.

**282. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῆς πλευρᾶς ΒΓ. τοῦ ὕψους ΑΔ καὶ τῆς διαμεσου ΑΜ.**

**Ἀνάλυσις**: Ἔστω ὅτι κατεσκευάσθη τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ εἶναι τὸ ΑΒΓ (σχ. 185) ἔχον ΒΓ=α, ΑΔ=υ καὶ ΑΜ=δ:

Παρατηροῦμεν, ὅτι τοῦ ὀρθογωνιου τριγώνου ΑΔΜ, γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΑΜ=δ καὶ μίαν κάθετον πλευρὰν αὐτοῦ ΑΔ = υ Δυνάμεθα ἄρα νὰ κατασκευάσωμεν τοῦτο καὶ ἀρχικῶς.

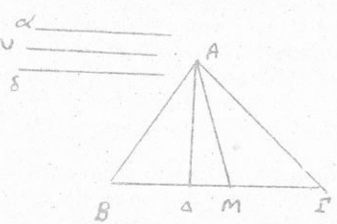
**Σύνθεσις**: Κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΜ (σχ. 185) καὶ προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ΔΜ ἑκατέρωθεν κατὰ τμήματα $ΜΒ = ΜΓ = \frac{α}{2}$. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον.

**Διερεύνησις**: Ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχῃ λύσιν πρέπει νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ κατασκευὴ τοῦ τριγώνου ΔΑΜ. Πρὸς τοῦτο πρέπει $ΑΔ < ΑΜ$ ἢ $υ < δ$. Ἐὰν $ΑΔ = ΑΜ$ ἢ $υ = δ$, τότε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ εἶναι ἰσοσκελές, διότι τὸ ὕψος καὶ ἡ διάμεσος αὐτοῦ ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς Α συμπίπτουσι.

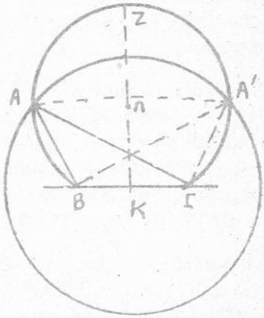
**283. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΒΓ' τὴν διάμεσον ΑΜ καὶ ἀπὸ τὴν γωνίαν Α.**

**Ἀνάλυσις**: Ἄγνωστος εἶναι ἡ τρίτη κορυφὴ τοῦ τριγώνου, ἥτις ὀφείλει νὰ πληροῖ τὰ ἑξῆς δύο ἐπιτάγματα.

1) Νὰ φαίνηται ἐξ αὐτῆς ἡ πλευρὰ ΒΓ ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν Α καὶ




*Σχ. 185.*




*Σχ. 186.*

2) Νὰ ἀπέχῃ αὕτη ἀπὸ τὸ μέσον Κ τῆς πλευρᾶς ΒΓ σταθερὰν ἀπόστασιν, ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν διάμεσον δ.

Ἀλλὰ ὁ Γ. Τ τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, ἀπὸ τὰ ὁποῖα δοθεῖσα εὐθεῖα σταθερὰ κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος φαίνεται ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν Α, εἶναι τὸ τόξον κυκλικοῦ τμήματος ἔχοντος χορδὴν ΒΓ καὶ δεχομένου γωνίαν Α.

Ὁ δὲ Γ. Τ τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἀπέχουσι σταθερὰν ἀπόστασιν δ ἀπὸ σταθερὸν σημεῖον Κ, μέσον τῆς ΒΓ, εἶναι περιφέρεια κύκλου, ἔχουσα κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα δ.

Ἡ ἄγνωστος ἄρα κορυφὴ Α τοῦ τριγώνου, ὡς ὀφείλουσα νὰ πληροῖ ἀμφότερα τὰ ἐπιτάγματα, θὰ κεῖται ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν τόπων τούτων καὶ θὰ εἶναι ἡ τομὴ αὐτῶν.

**Σύνθεσις**: Κατασκευάζομεν τμῆμα κύκλου (σχ. 186), ἔχον χορδὴν $ΒΓ = α$ καὶ δεχόμενον γωνίαν Α. Μὲ κέντρον Κ, τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΒΓ καὶ ἀκτῖνα δ γράφομεν περιφέρειαν τέμνουσαν ἐν γένει τὸ τόξον ΒΖΓ τοῦ κυκλικοῦ τμήματος εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Α'. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἢ Α'ΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

**Διερεύνησις**: Ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχῃ λύσιν, πρέπει ἡ περιφέρεια (Κ, δ) νὰ τέμνῃ τὸ τόξον ΒΖΓ τοῦ τμήματος. Πρὸς τοῦτο 1) ἂν ἡ δοθεῖσα γωνία Α εἶναι ὀξεῖα, ὅτε δ$>\frac{\alpha}{2}$, πρέπει αὕτη νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὸ ὕψος ΚΖ τοῦ τμήματος ἤτοι πρέπει $\frac{\alpha}{2}<\delta\leqslant KZ$. Κι' ἂν μὲν $\frac{\alpha}{2}<KZ$ ὑπάρχουσι δύο τομαὶ Α καὶ Α' καὶ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'ΒΓ ἔχοντα τὰ δοθέντα στοιχεῖα. Ἀλλὰ ἡ ΑΑ', ὡς κοινὴ χορδὴ τῶν περιφερειῶν Κ καὶ Λ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον ΚΛ αὐτῶν, ἐπὶ τὴν ὁποίαν εἶναι κάθετος καὶ ἡ ΒΓ. Ἄρα ΑΑ' ∥ ΒΓ καὶ τοξΑΒ' = τοξΑ'Γ. Συνεπῶς καὶ χορδ. ΑΒ = χορδ. Α'Γ καὶ γωνΒΓΑ = γωνΑΒΓ. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΓ καὶ Α'ΒΓ, ὡς ἔχοντα δύο πλευρὰς ἴσας, μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς περιεχομένας ὑπ' αὐτῶν γωνίας ἴσας, εἶναι ἴσα καὶ θεωροῦνται ὡς μία λύσις τοῦ προβλήματος.

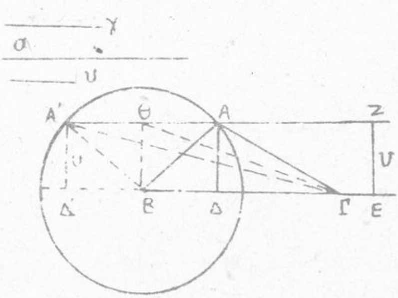
Ἂν δὲ εἶναι $\frac{\alpha}{2}<\delta=KZ$, οἱ δύο τόποι ἐφάπτονται εἰς τὸ σημεῖον Ζ καὶ τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

2) Ἂν ἡ δοθεῖσα γωνία Α εἶναι ἀμβλεῖα, ὅτε $\delta<\frac{\alpha}{2}$, πρέπει νὰ μὴ εἶναι μικροτέρα τοῦ ὕψους τοῦ τμήματος ἤτοι $KZ\leqslant\delta<\frac{\alpha}{2}$ καὶ

3) Ἂν εἶναι ὀρθή, ὅτε $\delta=\frac{\alpha}{2}$, οἱ δύο τόποι συμπίπτουσι καὶ πᾶν σημεῖον τοῦ τόξου ΒΖΓ εἶναι κορυφὴ τριγώνου λύοντος τὸ πρόβλημα

**Ἀσκήσεις 184. 284. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ καὶ ἀπὸ τὸ ὕψος ΑΔ αὐτοῦ.**

**Ἀνάλυσις**: Ἔστω ὅτι κατεσκευάσθη τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ εἶναι τὸ ΑΒΓ (σχ. 187), ἔχον τὴν πλευρὰν ΒΓ = α, τὴν ΑΒ = γ καὶ ὕψος ΑΔ = υ.



*Σχ. 187.*

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ἄγνωστος κορυφὴ Α τοῦ τριγώνου ἀπέχει ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΒΓ ἀπόστασιν σταθερὰν καὶ ἴσην πρὸς τὸ υ. Κεῖται ἄρα αὕτη ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν ΒΓ καὶ εἰς ἀπόστασιν υ ἀπ' αὐτῆς. Ἐπὶ πλέον αὕτη ἀπέχει τοῦ σημείου Β ἀπόστασιν σταθερὰν καὶ ἴσην πρὸς τὸ δοθὲν εὐθ. τμῆμα γ. Κεῖται ἄρα καὶ ἐπὶ περιφερείας γραφομένης μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα γ. Εἶναι συνεπῶς ἡ τομὴ τῶν δύο τούτων τόπων

**Σύνθεσις**: Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς τυχούσης εὐθείας εὐθ. τμῆμα

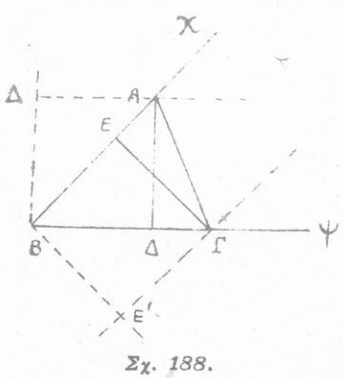
ΒΓ=α καὶ εἰς τυχὸν σημεῖον αὐτῆς ὑψοῦμεν κάθετον ΕΖ = υ καὶ ἐκ τοῦ Ζ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ. Ἔπειτα μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα γ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις τέμνει τὸν πρῶτον τόπον εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Α΄. Ἑνοῦμεν ἕκαστον τούτων μὲ τὰ ἄκρα Β καὶ Γ καὶ τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄ΒΓ εἶναι λύσεις τοῦ προβλήματος, διότι ἔχουσι τὰ δοθέντα στοιχεῖα ἤτοι ΒΓ=α, ΑΒ=Α΄Β=γ καὶ ΑΔ=Α΄Δ΄=ΕΖ=υ.

**Διερεύνησις**: Ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχῃ λύσιν, πρέπει οἱ δύο τόποι (περιφέρεια καὶ εὐθεῖα) νὰ ἔχωσι κοινὸν σημεῖον ἤτοι ΑΔ$\leqslant$ΑΒ. Ἐὰν ΑΔ$<$ΑΒ ἔχομεν δύο λύσεις, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄ΒΓ. Ἐὰν δὲ ΑΔ=ΑΒ=υ, τότε ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα ΑΒ=υ ἐφάπτεται τοῦ ἑτέρου τόπου (εὐθείας) εἰς τὸ σημεῖον Θ καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν, τὸ τρίγωνον ΘΒΓ, ὅπερ εἶναι ὀρθογώνιον.

**285. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ ἀπὸ τὴν γωνίαν Β καὶ ἀπὸ τὰ ὕψη ΑΔ καὶ ΓΕ.**

**Ἀνάλυσις:** Ἔστω, ὅτι κατεσκευάσθη τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ εἶναι τὸ ΑΒΓ (σχ. 188), ἔχον δοθεῖσαν τὴν γωνίαν Β αὐτοῦ καὶ τὰ ὕψη ΑΔ καὶ ΓΕ.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ κορυφὴ Α αὐτοῦ ἀπέχει τῆς πλευρᾶς ΒΓ τῆς δοθείσης γωνίας ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὸ γνωστὸν ὕψος ΑΔ. Κεῖται ἄρα ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν ΒΓ καὶ εἰς ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὸ δοθὲν ὕψος ΑΔ. Ὁμοίως ἡ κορυφὴ Γ κεῖται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ καὶ εἰς ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὸ ἄλλο δοθὲν ὕψος ΓΕ. Δύνανται ἄρα καὶ ἀρχικῶς νὰ προσδιορισθῶσι.



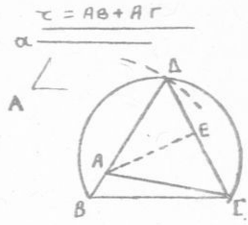
*Σχ. 188.*

**Σύνθεσις:** Κατασκευάζομεν γωνίαν ΧΒΨ, ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν γωνίαν Β. Ἐκ τοῦ σημείου Β ὑψοῦμεν καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΒΨ καὶ ΒΧ ἀντιστοίχως καὶ ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν ΒΔ΄=ΑΔ καὶ ΒΕ΄=ΓΕ. Ἐκ τῶν σημείων Δ΄ καὶ Ε΄ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς ΒΨ καὶ ΒΧ ἀντιστοίχως, αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν αὐτὰς εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Γ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον.

**286. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΒΓ, τὴν γωνίαν Α καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα ΑΒ+ΑΓ.**

**Ἀνάλυσις**: Ἔστω ὅτι κατεσκευάσθη τὸ ζητούμενον τρίγωνον εἶναι τὸ ΑΒΓ (σχ. 189), τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν ΒΓ, τὴν γωνίαν Α καὶ τὸ ἄθροισμα $AB + A\Gamma = \tau$. Προεκτείνομεν τὴν ΒΑ καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς $A\Delta = A\Gamma$, φέρομεν δὲ καὶ τὴν ΔΓ.

Τὸ τρίγωνον ΓΑΔ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ συνεπῶς γων $A\Delta\Gamma$ = γων $A\Gamma\Delta$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΔΑΓ, θὰ ἔχωμεν $A = \Delta +$ γων$A\Gamma\Delta = 2.\Delta$ καὶ $\Delta = \frac{A}{2}$. Ἄρα τὸ Δ κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον ἔχει χορδὴν ΒΓ καὶ δέχεται γωνίαν $\frac{A}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ $B\Delta = BA + A\Delta = BA + A\Gamma = \tau$, ἕπεται ὅτι τὸ Δ κεῖται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὸ δοθὲν ἄθροισμα τ τῶν δύο πλευρῶν. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΒΔΓ δύναται καὶ ἀρχικῶς νὰ κατασκευασθῇ.



*Σχ. 189.*

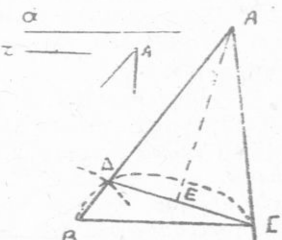
**Σύνθεσις:** Λαμβάνομεν εὐθ. τμῆμα $B\Gamma = \alpha$. Μὲ χορδὴν τὴν ΒΓ γράφομεν τόξον κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον νὰ δέχηται γωνίαν ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης γωνίας Α. Μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τ γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος εἰς τὸ σημεῖον Δ (σχ. 189). Φέρομεν τὰς ΒΔ καὶ ΔΓ καὶ ἐκ τοῦ μέσου Ε τῆς πλευρᾶς ΔΕ φέρομεν κάθετον ἐπ' αὐτήν, ἥτις τέμνει τὴν ΒΔ εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΑΓ σχηματίζεται τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον.

**Ἀπόδειξις:** Τοῦτο ἔχει ΒΓ ἴσην πρὸς τὴν. δοθεῖσαν, ἀπέναντι αὐτῆς γωνίαν $A = 2.\Delta = 2.\frac{A}{2} = A$ καὶ $AB + A\Gamma = AB + A\Delta = B\Delta = \tau$, διότι τὸ τρίγωνον ΓΑΔ εἶναι ἰσοσκελές.

**287. *Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἀπὸ τὴν γωνίαν Α καὶ ἀπὸ τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.***

**Ἀνάλυσις:** Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον (σχ. 189β), τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν $B\Gamma = \alpha$, τὴν γωνίαν Α καὶ τὴν διαφορὰν $AB - A\Gamma = \tau$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

Ἐπὶ τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα $A\Delta = A\Gamma$, ὅτε $B\Delta = AB - A\Delta = AB - A\Gamma = \tau$. Ἐὰν ἀχθῇ καὶ ἡ ΓΔ σχηματίζεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΔΓ. Φέρομεν καὶ τὴν διχοτόμον ΑΕ τῆς γωνίας Α τῆς κορυφῆς αὐτοῦ. Ὡς γνωστόν, θὰ εἶναι $AE \perp \Delta\Gamma$ καὶ γων $B\Delta\Gamma = 1$ ὀρθ. $+ \frac{A}{2}$, ὡς ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΕΔ. Ἐπομένως τὸ σημεῖον Δ κεῖται ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος ἔχοντος χορδὴν $B\Gamma = \alpha$ καὶ δε-



*Σχ. 189 β.*

χόμενον γωνίαν 1 ὀρθ. $+ \frac{A}{2}$, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἐπὶ περιφερείας κύκλου ἔχοντος κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν διαφορὰν τῶν πλευρῶν. Ἄρα τοῦτο κατασκευάζεται. Εἶτα δὲ ὁρίζεται εὐκόλως καὶ ἡ κορυφὴ Α, ὡς τομὴ τῆς ΒΔ (προεκτεινομένης) καὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΓΔ.

**Σύνθεσις**: Λαμβάνομεν εὐθ. τμῆμα ΒΓ = α. Μὲ χορδὴν ΒΓ γράφομεν τόξον κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον δέχεται γωνίαν ἴσην πρὸς 1 ὀρθ. $+ \frac{A}{2}$. Μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν διαφορὰν τ τῶν δύο πλευρῶν τοῦ ζητουμένου τριγώνου γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος εἴς τι σημεῖον Δ. Φέρομεν τὰς ΒΔ καὶ ΓΔ καὶ ἀπὸ τὸ μέσον Ε τῆς ΔΓ ὑψοῦμεν κάθετον, ἥτις τέμνει τὴν ΒΔ (προεκτεινομένην) εἰς τὸ σημεῖον Α. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

**Διερεύνησις**: Ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχῃ λύσιν, πρέπει ἡ πλευρὰ ΒΓ νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων ἤτοι α>τ.

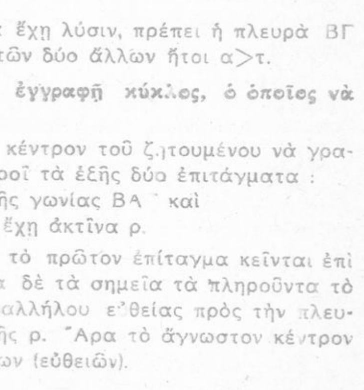
**288. Εἰς δοθεῖσαν γωνίαν Α νὰ ἐγγραφῇ κύκλος, ὁ ὁποῖος νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν ἀκτῖνα ρ.**

**Ἀνάλυσις**: Ἄγνωστον εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου νὰ γραφῇ κύκλου, ὁ ὁποῖος ὀφείλει νὰ πληροῖ τὰ ἑξῆς δύο ἐπιτάγματα :

1) Νὰ ἐφάπτηται τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ΒΑΓ καὶ
2) Νὰ ἐφάπτηται τῆς ΑΕ καὶ νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα ρ.

Πάντα τὰ σημεῖα τὰ πληροῦντα τὸ πρῶτον ἐπίταγμα κεῖνται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α. Πάντα δὲ τὰ σημεῖα τὰ πληροῦντα τὸ δεύτερον ἐπίταγμα κεῖνται ἐπὶ παραλλήλου εὐθείας πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΕ καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῆς ρ. Ἄρα τὸ ἄγνωστον κέντρον θὰ εἶναι ἡ τομὴ τῶν δύο αὐτῶν τόπων (εὐθειῶν).

**Σύνθεσις**: Εἰς τυχὸν σημεῖον Ε τῆς πλευρᾶς ΑΓ (σχ. 190) τῆς δοθείσης γωνίας Α ὑψοῦμεν κάθετον ἐπ' αὐτὴν καὶ λαμβάνομεν ΕΖ = ρ. Ἐκ τοῦ Ζ φέρομεν παράλληλον, τὴν ΖΘ, πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΓ καθὼς καὶ τὴν διχοτόμον ΑΗ τῆς δοθείσης γωνίας Α.



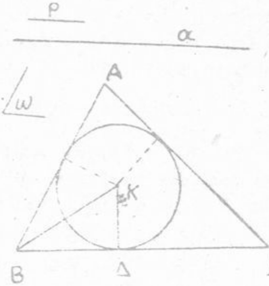
*Σχ. 190.*

Ἡ τομὴ αὐτῶν Κ εἶναι τὸ ζητούμενον κέντρον. Ἐὰν δὲ μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα ρ γράψωμεν περιφέρειαν, αὕτη προφανῶς ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν τῆς δοθείσης γωνίας Α καὶ συνεπῶς εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς αὐτὴν καὶ ἔχει ἀκτῖνα ΚΔ = ΚΛ = ρ.

**Διερεύνησις**: Τὸ πρόβλημα εἶναι πάντοτε δυνατὸν καὶ ἔχει μίαν λύσιν.

**289. Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἀπὸ τὴν γωνίαν Β καὶ ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα ρ τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας.**

**Ἀνάλυσις**: Ἔστω ὅτι κατεσκευάσθη τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ εἶναι τὸ ΑΒΓ (σχ. 191), τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν $ΒΓ = α$, τὴν γωνίαν $Β = ω$ καὶ τὴν ἀκτῖνα $ΚΔ = ρ$ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς αὐτό.



*Σχ 191.*

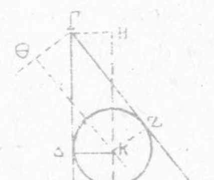
Παρατηροῦμεν, ὅτι τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΔΒ γνωρίζομεν τὴν κάθετον πλευρὰν $ΚΔ = ρ$ καὶ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς κειμένην ὀξεῖαν γωνίαν, ἥτις ἰσοῦται μὲ $\frac{Β}{2} = \frac{ω}{2}$. Ἄρα δυνάμεθα νὰ τὸ κατασκευάσωμεν ἐκ τῶν ἀρχικῶς δεδομένων στοιχείων.

**Σύνθεσις**: Κατασκευάζομεν ὀρθογ. τρίγωνον ΚΔΒ (σχ. 191), ἔχον $ΚΔ = ρ$ καὶ ἀντικειμένην ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην πρὸς $\frac{ω}{2}$. Μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα $ΚΔ = ρ$, γράφομεν περιφέρειαν. Προεκτείνομεν τὴν ΒΔ καὶ λαμβάνομεν $ΒΓ = α$, ἐκ δὲ τῶν σημείων Β καὶ Γ φέρομεν ἐφαπτομένας εἰς τὴν γραφεῖσαν περιφέρειαν, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ οὕτω ὁρίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον.

**Ἀπόδειξις**: Τοῦτο ἔχει τὴν πλευρὰν $ΒΓ = α$ καὶ ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΒΚ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΓΒΑ καὶ γων$ΓΒΚ = \frac{ω}{2}$ ἐκ κατασκευῆς, θὰ εἶναι καὶ γων$ΓΒΑ = 2 .$ γων$ΓΒΚ = 2 . \frac{ω}{2} = ω = Β$.

**290. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἀπὸ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν Γ αὐτοῦ καὶ ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα ρ τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας.**

**Ἀνάλυσις**: Ἔστω ὅτι κατεσκευάσθη τὸ ζητούμενον ὀρθογώνιον τρίγωνον καὶ εἶναι τὸ ΓΑΒ (σχ. 192), τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν γωνίαν Γ καὶ τὴν ἀκτῖνα $ΚΔ = ρ$ τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτὸ περιφερείας.



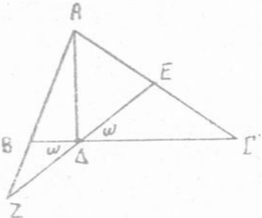
*Σχ. 192.*

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ περιφέρεια Κ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὴν δοθεῖσαν ὀξεῖαν γωνίαν Γ καὶ ἔχει δοθεῖσαν ἀκτῖνα ρ. Ἐὰν δὲ ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΚΔ, ΚΕ εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς Δ καὶ Ε σχηματίζεται τὸ τετράγωνον ΚΔΑΕ καὶ συνεπῶς $ΔΑ = ΚΕ = ρ$.

**Σύνθεσις** Κατασκευάζομεν γωνίαν ΑΓΒ (σχ. 192) ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν Γ. Εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς Γ φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὰς πλευράς της, τὰς ΓΗ καὶ ΓΘ, ἴσας πρὸς τὴν δοθεῖσαν ἀκτῖνα ρ. Ἐκ τῶν σημείων Η καὶ Θ φέρομεν παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΒΓ αὐτῆς. Μὲ κέντρον τὴν τομὴν αὐτῶν Κ καὶ ἀκτῖνα ρ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις προφανῶς εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὴν γωνίαν Γ. Ἐπὶ τῆς ΓΑ καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Δ λαμβάνομεν τὸ εὐθ. τμῆμα $ΔΑ=ρ$ καὶ φέρομεν ἐκ τοῦ Α ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας (Κ, ρ), τὴν ΑΒ. Τὸ τρίγωνον ΓΑΒ εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον.

## Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Β΄ Βιβλίου

**291. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $ΑΒ<ΑΓ$. Ἄγεται τὸ ὕψος ΑΔ καὶ ὁρίζεται τὸ μέσον Ε τῆς πλευρᾶς ΑΓ καὶ ἄγεται ἡ εὐθεῖα ΔΕ. Ἂν Ζ εἶναι ἡ τομὴ ταύτης καὶ τῆς εὐθείας ΑΒ νὰ ἀποδείξητε ὅτι $Ζ=Β-Γ$.**



*Σχ. 193.*

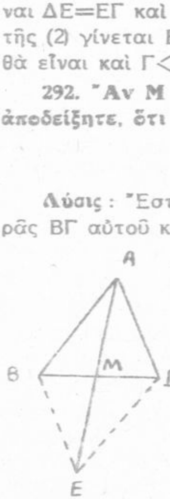
**Λύσις :** Ἔστω ΑΒΓ (σχ. 193) τὸ δοθὲν τρίγωνον, ἔχον $ΑΒ<ΑΓ$, ΑΔ τὸ ὕψος αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ΒΓ, Ε τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΑΓ καὶ Ζ τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ΔΕ (προεκτεινομένη) τέμνει τὴν πλευρὰν ΑΒ (προεκτεινομένην). Θὰ δείξωμεν ὅτι $Ζ=Β-Γ$.

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΔΒΖ ἔχομεν ὅτι $Β=Ζ+ω$ (1), διότι ἡ Β εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία αὐτοῦ.

Ἀλλὰ ω=γων ΕΔΓ, ὡς κατὰ κορυφήν. Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΓ ἡ ΔΕ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως διάμεσος αὐτοῦ, θὰ εἶναι $ΔΕ=ΕΓ$ καὶ συνεπῶς γωνΕΔΓ$=ω=Γ$ (2). Ἡ ἰσότης (1) συνεπείᾳ τῆς (2) γίνεται $Β=Ζ+Γ$ (3). Ἐπειδὴ δὲ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $ΑΒ<ΑΓ$, θὰ εἶναι καὶ $Γ<Β$ καὶ συνεπῶς ἡ (3) δίδει $Ζ=Β-Γ$, ὅ.ἔ.δ.

**292. Ἂν Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀποδείξητε, ὅτι**
**α) Ἂν $ΑΜ>ΒΜ$, θὰ εἶναι $Α<1$ ὀρθ.**
**β) » $ΑΜ<ΒΜ$ » » $Α>1$ ὀρθ.**
**γ) » $ΑΜ=ΒΜ$ » » $Α=1$ ὀρθ.**

**Λύσις :** Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 194), Μ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ αὐτοῦ καὶ $ΑΜ>ΒΜ$. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $Α<1$ ὀρθῆς.



*Σχ. 194.*

Προεκτείνομεν τὴν διάμεσον ΑΜ καὶ λαμβάνομεν $ΜΕ=ΜΑ$, φέρομεν δὲ καὶ τὰ εὐθ. τμήματα ΕΒ, ΕΓ. Τὸ σχηματισθὲν τετράπλευρον ΑΒΕΓ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ διχοτομοῦνται. Ἐπειδὴ δὲ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $ΑΜ>ΒΜ$ θὰ εἶναι καὶ $2.ΑΜ>2.ΒΜ$ ἢ $ΑΕ>ΒΓ$. Τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΒΓ ἔχουσι τὴν ΑΒ κοινήν, $ΒΕ=ΑΓ$ καὶ $ΑΕ>ΒΓ$. Ἄρα θὰ ἔχωσι καὶ γωνΑΒΕ>γωνΒΑΓ (Π. ΙΙΙ § 76). Ἀλλὰ γωνΑΒΕ+γωνΒΑΓ=2 ὀρθαί. Ἂν ἀντὶ τῆς γωνίας ΑΒΕ θέσωμεν τὴν μικροτέραν αὐτῆς γωνίαν ΒΑΓ, θὰ ἔχωμεν γων ΒΑΓ + γων ΒΕΓ < 2 ὀρθ., ἢ 2.γωνΒΑΓ<2 ὀρθ. καὶ γωνΒΑΓ<1 ὀρθ. ἢ $Α<1$ ὀρθ.

β) Ἂν $ΑΜ<ΒΜ$ τότε θὰ εἶναι καὶ $ΑΕ<ΒΓ$ καὶ γωνΑΒΕ < γωνΒΑΓ.

Επειδὴ δὲ θὰ εἶναι καὶ γωνΑΒΕ$+$γωνΒΑΓ$=2$ ὀρθ. ἂν ἀντὶ τῆς γωνίας ΑΒΕ θέσωμεν τὴν μεγαλυτέραν αὐτῆς γωνίαν ΒΑΓ, θὰ ἔχωμεν γωνΒΑΓ$+$γωνΒΑΓ$>2$ ὀρθ. ἢ $2$.γων ΒΑΓ$>2$ ὀρθ. καὶ γωνΒΑΓ$>1$ ὀρθ. Ἀλλὰ γωνΒΑΓ$=$Α. Ἄρα Α$>1$ ὀρθ.

γ') Ἂν ΑΜ$=$ΒΜ θὰ εἶναι καὶ ΑΕ$=$ΒΓ (σχ. 194) καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΕΓ θὰ εἶναι ὀρθογώνιον ὡς ἔχον ἴσας τὰς διαγωνίους αὐτοῦ. Ἄρα Α$=1$ ὀρθ.

**293. Νὰ διατυπώσητε καὶ ἀποδείξητε τὰς ἀντιστρόφους τῶν προηγουμένων σχέσεων.**

**Λύσις:** Ἡ ἀντίστροφος πρότασις τῆς προτάσεως (ἀσκ. 292) εἶναι:

*Ἂν Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ νὰ ἀποδείξητε ὅτι :*

α') *Ἂν Α$<1$ ὀρθ. θὰ εἶναι καὶ ΑΜ$>$ΒΜ.*
β') *Ἂν Α$>1$ ὀρθ. θὰ εἶναι καὶ ΑΜ$<$ΒΜ.*
γ') *Ἂν Α$=1$ ὀρθ. θὰ εἶναι καὶ ΑΜ$=$ΒΜ.*

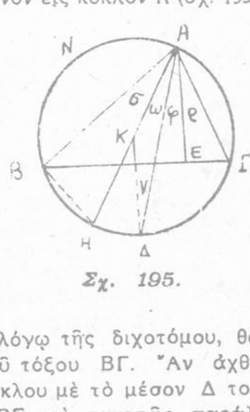
**Ἀπόδειξις:** α') Ἂν ἦτο ΑΜ$\leqslant$ΒΜ, θὰ ἦτο καὶ Α$\geqslant 1$ ὀρθ. (ἄσκ. 292) ὅπερ ἄτοπον, διότι ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν Α$<1$ ὀρθ. Ἄρα ΑΜ$>$ΒΜ.

β') Ἂν ἦτο ΑΜ$\geqslant$ΒΜ θὰ ἦτο καὶ Α$\leqslant 1$ ὀρθ. (ἄσκ. 292), ὅπερ ἄτοπον, διότι ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν Α$>1$ ὀρθ. Ἄρα ΑΜ$<$ΒΜ.

γ') Ἂν ἦτο ΑΜ $\gtrless$ ΒΜ θὰ ἦτο καὶ Α $\gtrless$ 1 ὀρθ., ὅπερ ἄτοπον, διότι ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν Α$=1$ ὀρθ. Ἄρα ΑΜ $=$ ΒΜ.

**294. Εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ περιγράψητε περιφέρειαν Κ. Νὰ φέρητε τὸ ὕψος ΑΕ, τὴν διχοτόμον ΑΔ καὶ τὴν διάμετρον ΑΚΗ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας. Νὰ ἀποδείξητε δὲ ὅτι ἡ ΑΔ διχοτομεῖ καὶ την γωνίαν ΕΑΗ.**

**Λύσις:** Ἔστω ΑΒΓ τρίγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Κ (σχ. 195), ΑΕ τὸ ὕψος αὐτοῦ, ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α καὶ ΑΚΗ ἡ διάμετρος τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\omega=\varphi$. Φέρομεν τὴν χορδὴν ΒΗ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΗ εἶναι ὀρθογώνιον, διότι Β$=1$ ὀρθή, ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον. Ἀλλὰ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΕΓ εἶναι ὀρθογώνιον, διότι ΑΕ$\perp$ΒΓ ἐξ ὑποθέσεως. Ἐπειδὴ δὲ γων Η$=$γωνΓ, ὡς ἐγγεγραμμέναι βαίνουσαι εἰς τὸ αὐτὸ τόξον ΑΝΒ, θὰ εἶναι $\sigma=\rho$, ὡς συμπληρωματικαὶ ἴσων γωνιῶν. Ἀλλὰ $\sigma+\omega=\varphi+\rho$, λόγῳ τῆς διχοτόμου. Ὅθεν $\omega=\varphi$.



*Σχ. 195.*

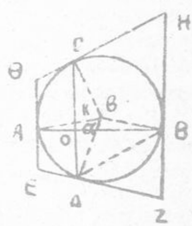
*β' τρόπος.* Ἐπειδὴ γωνΒΑΔ$=$γωνΔΑΓ, λόγῳ τῆς διχοτόμου, θὰ εἶναι καὶ τοξΒΔ$=$τοξΔΓ ἤτοι τὸ Δ μέσον τοῦ τόξου ΒΓ. Ἂν ἀχθῇ ἡ ΚΔ, αὕτη, ὡς ἑνοῦσα τὸ κέντρον Κ τοῦ κύκλου μὲ τὸ μέσον Δ τοῦ τόξου ΒΓ, θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΒΓ καὶ συνεπῶς παράλληλος πρὸς τὴν ΑΕ. Ἄρα $\nu=\varphi$, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων

ΚΔ καὶ ΑΕ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΔ. Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΚΔ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ΚΑ = ΚΔ. Ἄρα ν = ω. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ν = φ, θὰ εἶναι ω = φ.

295. **Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ φέρητε δύο καθέτους χορδὰς καὶ τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν. Νὰ ἀποδείξητε δέ, ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι αὗται σχηματίζουσιν ἐγγράψιμον τετράπλευρον.**

Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ δύο κάθετοι χορδαὶ τοῦ κύκλου Κ τεμνόμεναι εἰς τὸ σημεῖον Ο (σχ. 196) καὶ ΗΖΕΘ τὸ περιγεγραμμένον τετράπλευρον, σχηματιζόμενον ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ ἄκρα τῶν καθέτων χορδῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τοῦτο εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

**Ἀνάλυσις.** Ἔστω ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. Τότε θὰ εἶναι Ε + Η = 2 ὀρθαὶ (§ 158 Θ.). Ἂν ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς, ἐκ τοῦ τετραπλεύρου ΚΑΕΔ ἔχομεν Ε + α = 2 ὀρθαί, διότι Α + Δ = 2 ὀρθαί. Ὁμοίως ἐκ τοῦ τετραπλεύρου ΓΚΒΗ ἔχομεν Η + β = 2 ὀρθαί. Ἄρα Ε + α + + Η + β = 4 ὀρθαί. Ἐπειδὴ δὲ Ε + Η = 2 ὀρθαί, θὰ εἶναι α + β = 2 ὀρθαί. Ἀλλὰ α = = 2 . γωνΑΒΔ, διότι ἡ μὲν α εἶναι ἐπίκεντρος, ἡ δὲ γωνΑΒΔ εἶναι ἐγγεγραμμένη καὶ βαίνουσιν εἰς τὸ αὐτὸ τόξον ΑΔ. Ὁμοίως ἔχομεν β = 2 . γωνΓΔΒ. Ἄρα α + β = 2 . γωνΑΒΔ + 2 . γων ΓΔΒ = 2 ὀρθαὶ ἢ γωνΑΒΔ + γωνΓΔΒ = 1 ὀρθή. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀληθές, διότι ἐξ ὑποθέσεως τὸ τρίγωνον ΒΟΔ εἶναι ὀρθογώνιον.



*Σχ. 196.*

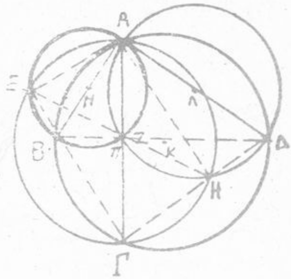
**Σύνθεσις.** Ἐπειδὴ ΑΒ ⊥ ΓΔ, τὸ τρίγωνον ΒΟΔ εἶναι ὀρθογώνιον. Ἄρα γωνΑΒΔ + γωνΓΔΒ = 1 ὀρθ. Ἀλλὰ γωνΑΒΔ = $\frac{\alpha}{2}$ καὶ γων ΓΔΒ = $\frac{\beta}{2}$. Ἄρα $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 1$ ὀρθ. ἢ α + β = 2 ὀρθαί.

Ἀλλ' ἐκ τῶν τετραπλεύρων ΑΕΔΚ καὶ ΓΚΒΗ, ἔχομεν Ε + α = 2 ὀρθαὶ καὶ β + Η = 2 ὀρθαί. Ἄρα Ε + α + β + Η = 4 ὀρθαὶ καὶ ἐπειδὴ α + β = 2 ὀρθαί, θὰ εἶναι καὶ Ε + Η = 2 ὀρθαί, ἤτοι τὸ τετράπλευρον ΖΕΘΗ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον (§ 159).

296. **Ἀπὸ ἓν σημεῖον Α περιφερείας νὰ φέρητε τρεῖς χορδὰς ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ. Ἂν γράψωμεν τὰς περιφερείας, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι διαμέτρους τὰς χορδὰς ταύτας καὶ Ε, Ζ, Η εἶναι τὰ ἄλλα κοινὰ σημεῖα αὐτῶν ἀνὰ δύο λαμβανομένων, νὰ ἀποδείξητε, ὅτι ἡ γραμμὴ ΕΖΗ εἶναι εὐθεῖα.**

**Λύσις.** Ἔστω Κ ἡ δοθεῖσα περιφέρεια καὶ ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ (σχ. 197) τρεῖς χορδαὶ αὐτῆς διερχόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α αὐτῆς.

Ἔστωσαν δὲ Ε, Ζ καὶ Η τὰ ἕτερα κοινὰ σημεῖα τῶν περιφερειῶν τῶν ἐχουσῶν διαμέτρους ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ ἀνὰ δύο λαμβανομένων. Θὰ δείξωμεν ὅτι ταῦτα κεῖνται ἐπ' εὐθείας.



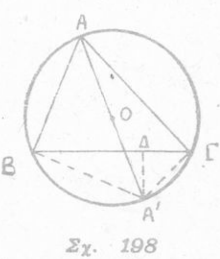
Σχ. 197

Τὸ τρίγωνον ΓΒΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Κ. Ἐπειδὴ διὰ τοῦ ἑνὸς τῶν κοινῶν σημείων Α τῶν περιφερειῶν Λ καὶ Π ἔχουν ἀχθῆ αἱ διάμετροι αὐτῶν ΑΔ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως, τὸ ἄλλο κοινὸν αὐτῶν σημεῖον Η καὶ τὰ ἄκρα Γ καὶ Δ τῶν ἀχθεισῶν διαμέτρων κεῖνται ἐπ' εὐθείας (ἄσκ. 191) καὶ ἡ κοινὴ χορδὴ αὐτῶν $ΑΗ \perp ΓΔ$ ἤτοι τὸ σημεῖον Η εἶναι ὁ πούς τῆς ἀγομένης καθέτου ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΓΔ τοῦ ἐγγεγραμμένου τριγώνου ΒΓΔ ἐκ σημείου Α τῆς περιγεγραμμένης εἰς αὐτὸ περιφερείας Κ. Δι' ὅμοιον λόγον καὶ τὰ σημεῖα Ζ καὶ Ε εἶναι οἱ πόδες τῶν ἀγομένων καθέτων ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΒΔ καὶ ΒΓ τοῦ τριγώνου ΒΔΓ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ τρίγωνον ΒΓΔ.

Ἀλλὰ ἐδείχθη (ἄσκ. 235), ὅτι οἱ τρεῖς οὗτοι πόδες Ε, Ζ, Η κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας (τοῦ Simson ἢ Wallace).

**297. Εἰς δοθέντα κύκλον Ο νὰ ἐγγράψητε τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ νὰ ὁρίσητε τὸ συμμετρικὸν Α΄ τῆς κορυφῆς Α πρὸς κέντρον Ο. Ἔπειτα δὲ νὰ ἀναγνωρίσητε τὴν εὐθεῖαν τοῦ Simson, ἥτις ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὸ Α΄.**

**Λύσις**: Ἔστω ΑΒΓ τὸ ἐγγεγραμμένον τρίγωνον εἰς τὸν κύκλον Ο (σχ. 198) καὶ Α΄ τὸ συμμετρικὸν τῆς κορυφῆς Α πρὸς κέντρον Ο. Ἐπειδὴ ἡ ΑΑ΄ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου Ο, ἐὰν ἀχθῶσι τὰ εὐθ. τμήματα Α΄Β καὶ Α΄Γ, θὰ εἶναι κάθετα ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἀντιστοίχως, διότι γων$ΑΒΑ' =$ γων$ΑΓΑ' = 1$ ὀρθή, ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς ἡμικύκλια. Ἂν δὲ ἀχθῇ καὶ ἡ Α΄Δ κάθετος ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ, τὰ σημεῖα Β Δ, Γ ὁρίζουσι τὴν εὐθεῖαν τοῦ Simson, ἥτις ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὸ Α΄ ἤτοι εὐθεῖα τοῦ Simson πρὸς Α΄ εἶναι ἡ πλευρὰ ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

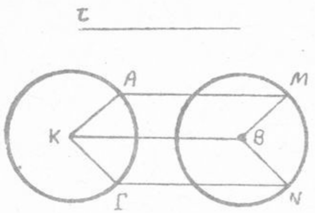


Σχ. 198

**298. Ἀπὸ τὰ σημεῖα δοθείσης περιφερείας Κ ἄγονται εὐθ. τμήματα ἴσα παράλληλα καὶ ὁμόρροπα πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα τ. Νὰ εὕρητε τὸ γεωμ. τόπον τῶν ἄκρων τῶν τοιούτων τμημάτων.**

**Λύσις**: Ἔστω Κ ἡ δοθεῖσα περιφέρεια (σχ. 199) καὶ ΑΜ τυχὸν εὐθ. τμῆμα ἴσον, παράλληλον καὶ ὁμόρροπον πρὸς τὸ δοθὲν εὐθ. τμῆμα τ. Ζητεῖται ὁ τόπος τοῦ ἄκρου Μ, ὅταν τὸ σημεῖον Α διαγράφῃ τὴν περιφέρειαν Κ.

Πρὸς τοῦτο φέρομεν ἐκ τοῦ κέντρου Κ τῆς δοθείσης περιφερείας τὸ εὐθ. τμῆμα ΚΒ ἴσον, παράλληλον καὶ ὁμόρροπον πρὸς τὸ δοθὲν τ καθὼς καὶ τὰ εὐθ. τμήματα ΚΑ καὶ ΒΜ. Τὸ τετράπλευρον ΚΑΜΒ εἶναι παραλληλόγραμμον, ὡς ἔχον ΚΒ= =|| ΑΜ. Ἄρα ΒΜ=ΚΑ=σταθερόν. Ἄρα τὸ Μ θὰ κεῖται ἐπὶ περιφερείας γραφομένης μὲ κέντρον τὸ σταθερὸν σημεῖον Β καὶ ἀκτῖνα, τὴν ἀκτῖνα ΚΑ τῆς δοθείσης περιφερείας Κ.

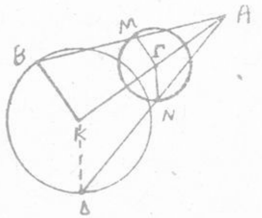


Σχ. 199.

**Ἀντιστρόφως:** Ἂν Ν εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας (Κ,ΒΜ) καὶ φέρωμεν ἐξ αὐτοῦ εὐθ. τμῆμα ΝΓ, ἴσον, παράλληλον καὶ ὁμόρροπον πρὸς τὸ ΒΚ, καὶ τὴν ΚΓ, τὸ τετράπλευρον ΚΒΝΓ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ συνεπῶς ΚΓ=ΒΝ=ΒΜ=ΚΑ. Ἐπειδὴ δὲ ΚΓ=ΚΑ, τὸ σημεῖον Γ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας Κ ἤτοι τὸ Ν εἶναι ἄκρον τμήματος ἴσου παραλλήλου καὶ ὁμορρόπου πρὸς τὸ δοθὲν τ, ἀγομένου ἐκ τοῦ σημείου Γ τῆς δοθείσης περιφερείας. Ἄρα ὁ ζητούμενος Γ. Τ. εἶναι ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας (Β,ΚΑ).

**299. Δίδεται κύκλος Κ καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ ὁρίσητε ἕν σημεῖον Β ἐπὶ τῆς περιφερείας Κ καὶ τὸ μέσον Μ τοῦ τμήματος ΑΒ. Νὰ εὕρητε δὲ τὸν γεωμ. τόπον, τὸν ὁποῖον γράφει τὸ Μ, ἂν τὸ Β γράφῃ τὴν περιφέρειαν.**

**Λύσις:** Ἔστω Κ ἡ δοθεῖσα περιφέρεια (σχ. 200), Α δοθὲν σημεῖον κείμενον ἐκτὸς αὐτῆς, Β τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας Κ καὶ Μ τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΑΒ. Ζητεῖται ὁ Γ. Τ. τοῦ Μ, ὅταν τὸ Β διαγράφῃ τὴν περιφέρειαν.



Σχ. 200.

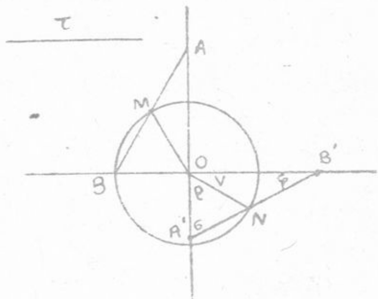
Φέρομεν τὰ εὐθ. τμήματα ΚΑ, ΚΒ καὶ ἐκ τοῦ Μ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΚ. Ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΚ ἡ ΜΓ ἄγεται παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΚ ἐκ τοῦ μέσου Μ τῆς πλευρᾶς ΑΒ θὰ διέλθῃ διὰ μέσου Γ τῆς πλευρᾶς ΑΚ καὶ θὰ εἶναι ἴση πρὸς $\frac{KB}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΚ εἶναι σταθερὰ εὐθεῖα, καὶ τὸ μέσον αὐτῆς Γ εἶναι σταθερὸν σημεῖον. Ἄρα τὸ Μ θὰ ἀπέχῃ σταθερὰν ἀπόστασιν καὶ ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τῆς δοθείσης περιφερείας ἀπὸ τὸ σταθερὸν σημεῖον Γ. Ἄρα θὰ κεῖται ἐπὶ περιφερείας γραφομένης μὲ κέντρον τὸ μέσον Γ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΚ καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς $\frac{KB}{2}$.

**Ἀντιστρόφως:** Ἂν Ν εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας (Γ, ΓΜ) καὶ φέρωμεν τὴν ΑΝ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λάβωμεν ΝΔ=

$=AN$, θὰ εἶναι $ΓN \parallel KΔ$ καὶ $ΓN = \frac{KΔ}{2}$ ἢ $KΔ = 2 . ΓN$. Καὶ ἐπειδὴ $ΓN = \frac{KB}{2}$ ἐκ κατασκευῆς, θὰ εἶναι καὶ $KΔ = 2 . \frac{KB}{2} = KB$ καὶ συνεπῶς τὸ Δ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας K. Ἄρα τὸ N εἶναι μέσον εὐθ. τμήματος ὁριζομένου ὑπὸ τοῦ δοθέντος σημείου A καὶ σημείου Δ τῆς δοθείσης περιφερείας. Ὁ ζητούμενος λοιπὸν Γ. Τ. εἶναι ἡ περιφέρεια $\left(Γ, \frac{KB}{2}\right)$.

**300. Ἓν σταθερὸν εὐθ. τμῆμα τ κινεῖται οὕτως, ὥστε τὰ ἄκρα του εὑρίσκονται πάντοτε ἐπὶ δύο καθέτων εὐθειῶν. Νὰ εὕρητε τὸν γεωμ. τόπον τῶν θέσεων, ἀπὸ τὰς ὁποίας διέρχεται τὸ μέσον αὐτοῦ.**

**Λύσις**: Ἔστω τὸ εὐθ. τμῆμα AB ἴσον μὲ τὸ δοθὲν εὐθ. τμῆμα τ καὶ τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα εὑρίσκονται ἐπὶ τῶν δύο καθέτων εὐθειῶν τεμνομένων εἰς τὸ σημεῖον O (σχ. 201). Ἂν M εἶναι τὸ μέσον αὐτοῦ καὶ ἀχθῇ ἡ OM, θὰ εἶναι $OM = \frac{AB}{2}$ (§ 127 Π. III).



*Σχ. 201.*

Ἐπειδὴ δὲ τὸ σημεῖον O εἶναι σταθερόν, τὸ δὲ σημεῖον M ἀπέχει τοῦ O σταθερὰν ἀπόστασιν $OM = \frac{AB}{2} = \frac{τ}{2}$, ἕπεται ὅτι τὸ M θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας μὲ κέντρον O καὶ ἀκτῖνα $\frac{τ}{2}$.

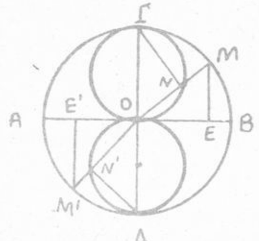
**Ἀντιστρόφως**: Ἂν N εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας $\left(O, \frac{τ}{2}\right)$ θὰ δείξωμεν, ὅτι τοῦτο εἶναι μέσον εὐθ. τμήματος, ἔχοντος τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν τεμνομένων καθέτως εὐθειῶν καὶ ἴσου πρὸς τὸ δοθὲν εὐθ. τμῆμα τ.

Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν $NO = NA'$ καὶ προεκτείνομεν, ἔστω δὲ B' τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ἄλλην κάθετον εὐθεῖαν. Ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ONA' ἔχομεν $ρ = σ$. Ἀλλὰ $ρ + ν = 1$ ὀρθ. καὶ $σ + φ = 1$ ὀρθ. Ἄρα $φ = ν$ καὶ συνεπῶς $NB' = ON$.

Ἐπειδὴ δὲ $NA' = ON$, θὰ εἶναι $NA' = NB' = NO = \frac{τ}{2}$. Ἄρα $A'B' = 2NA' = 2 . NO = 2 . \frac{τ}{2}$. Ὁ ζητούμενος ὅθεν Γ. Τ. εἶναι ἡ περιφέρεια $\left(O, \frac{τ}{2}\right)$.

**301. Ἀπὸ ἓν σημεῖον M περιφερείας O νὰ φέρητε κάθετον ME ἐπὶ ὡρισμένην διάμετρον AB. Εἰς δὲ τὴν ἀκτῖνα OM νὰ ὁρίσητε τμῆμα ON ἴσον πρὸς τὸ ME. Νὰ εὕρητε δὲ τὸν γεωμ. τόπον, τὸν ὁποῖον γράφει τὸ N, ἂν τὸ M γράφῃ τὴν περιφέρειαν O.**

**Λύσις:** Ἔστω μία ὡρισμένη διάμετρος ΑΒ (σχ. 202), ἡ ἀκτὶς ΟΜ, τῆς ὁποίας τὸ ἄκρον Μ διαγράφει τὴν περιφέρειαν, ΜΕ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ΟΝ=ΜΕ. Ζητεῖται ὁ τόπος τοῦ σημείου Ν.




*Σχ. 202.*

Φέρομεν τὴν ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ τὸ εὐθ. τμῆμα ΓΝ. Τὰ τρίγωνα ΟΜΕ καὶ ΟΓΝ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα δύο πλευρὰς ἴσας, μίαν πρὸς μίαν καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην ἤτοι ΟΜ==ΟΓ, ΜΕ=ΟΝ καὶ γωνΟΜΕ = γωνΓΟΜ, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΓΟ καὶ ΜΕ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΟΜ. Ἄρα θὰ ἔχωσι καὶ γωνΓΝΟ=γωνΜΕΟ=1 ὀρθ. Ἤτοι πᾶν σημεῖον Ν, ἔχον τὴν ἰδιότητα, εἶναι κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ ὑποτείνουσαν τὴν ΟΓ, ἐφ' ὅσον τὸ Μ διαγράφῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΒΓΑ. Ἄρα θὰ κεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου μὲ διάμετρον τὴν ΟΓ.

Ὅταν τὸ Μ διαγράφῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΑΔΒ καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ Ν κεῖται ἐπὶ περιφερείας μὲ διάμετρον τὴν ΟΔ.

Ἀντιστρόφως ἂν Ν' εἶναι τυχὸν σημεῖον κείμενον ἐπὶ μιᾶς τῶν δύο τούτων περιφερειῶν μὲ διαμέτρους ΟΓ καὶ ΟΔ καὶ φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ΟΝ'Μ', ἡ ἀπόστασις Μ'Ε' τοῦ σημείου Μ' ἀπὸ τῆς ὡρισμένης διαμέτρου ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὸ εὐθ. τμῆμα ΟΝ.

Πράγματι, τὸ τρίγωνον ΟΝ'Δ εἶναι ὀρθογώνιον, διότι ἡ γωνΟΝ'Δ εἶναι ὀρθή, ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον καὶ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΟΕ'Μ', διότι ἔχουσι ΟΔ'=ΟΜ' καὶ γωνΔΟΝ'=γωνΟΜ'Ε' ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΔΟ καὶ Μ'Ε' τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΟΜ' Ἄρα καὶ ΟΝ'=Μ'Ε'. Ὁ ζητούμενος ἄρα Γ. Τ. τῶν σημείων Ν εἶναι αἱ δύο περιφέρειαι μὲ διαμέτρους ΟΓ καὶ ΟΔ.

**302. Δίδεται περιφέρεια** (Κ. R.). **εὐθεῖα Ε καὶ εὐθ. τμῆμα τ. Νὰ γράψητε περιφέρειαν μὲ ἀκτῖνα τ, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτηται τῆς Ε καὶ τῆς περιφερείας Κ ἐκτός.**

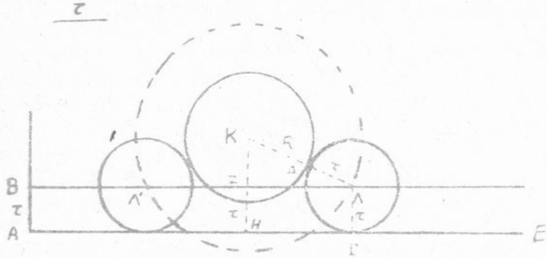
**Ἀνάλυσις:** Ἄγνωστον εἶναι τὸ κέντρον Λ (σχ. 203) τῆς ζητουμένης νὰ γραφῇ περιφερείας, ἥτις ὀφείλει νὰ πληροῖ τὰ ἑξῆς δύο ἐπιτάγματα:

1) Νὰ ἐφάπτηται ἐξωτερικῶς τῆς δοθείσης περιφερείας (Κ, R.) καὶ νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα τ καὶ

2) Νὰ ἐφάπτηται τῆς δοθείσης εὐθείας Ε καὶ νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα τ. Ἀλλὰ πάντα τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα πληροῦσι τὸ πρῶτον ἐπίταγμα κεῖνται ἐπὶ περιφερείας ὁμοκέντρου τῆς δοθείσης μὲ ἀκτῖνα R + τ. Πάντα δὲ τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα πληροῦσι τὸ δεύτερον ἐπίταγμα εἶναι εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῆς τ, κειμένη δὲ πρὸς τὸ μέρος τῆς περιφερείας (Κ, R).

Ἐπειδὴ δέ, ἡ ζητουμένη νὰ γραφῇ περιφέρεια ὀφείλει τὰ πληροῖ ἀμφότερα τὰ ἐπιτάγματα, τὸ κέντρον αὐτῆς θὰ κεῖται ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν τόπων καὶ θὰ εἶναι κοινὸν σημεῖον αὐτῶν.

**Σύνθεσις:** Γράφομεν περιφέρειαν (Κ, R + τ) καὶ εἰς τυχὸν σημεῖον Α τῆς δοθείσης εὐθείας Ε ὑψοῦμεν κάθετον καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβά-




*Σχ. 203*

νομεν τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ=τ. Ἐκ τοῦ Β φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν Ε, ἥτις ἐν γένει τέμνει τὴν περιφέρειαν (Κ, R + τ) εἰς δύο σημεῖα Λ καὶ Λ'. Μὲ κέντρα Λ καὶ Λ' καὶ ἀκτῖνα τ γράφομεν περιφερείας, αἱ ὁποῖαι εἶναι αἱ ζητούμεναι.

**Διερεύνησις:** Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν, πρέπει ἡ περιφέρεια (Κ, R + τ) καὶ ἡ εὐθεῖα ΒΛ'Λ νὰ ἔχωσι κοινὸν σημεῖον ἤτοι πρέπει ἡ ἀπόστασις τοῦ Κ ἀπὸ ταύτης νὰ εἶναι μικροτέρα ἢ ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα R + τ δηλ. $KZ \leqq R+\tau$. Ἐὰν δὲ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης προσθέσωμεν τὰ ἴσα εὐθ. τμήματα ΖΗ καὶ τ, θὰ ἔχωμεν $KZ+ZH+R \leqslant R+\tau+\tau$ ἢ $KH \leqslant R+2\tau$. Ἤτοι πρέπει ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου Κ τῆς δοθείσης περιφερείας (Κ, R) νὰ εἶναι μικροτέρα ἢ ἴση πρὸς τὸ εὐθ. τμῆμα $R+2\tau$.

Καὶ ἂν μὲν $KH < R+2\tau$, τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, τὰς περιφερείας μὲ κέντρα Λ καὶ Λ'. Ἂν δὲ $KH = R+2\tau$ τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν μόνον λύσιν καὶ οὐδεμίαν ἂν $KH > R+2\tau$.

**303. Δίδονται δύο περιφέρειαι καὶ εὐθ. τμῆμα ρ. Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ ἀκτῖνα ρ, ἥτις νὰ ἐφάπτηται τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν ἐκτός.**

Ἔστωσαν Κ καὶ Λ αἱ δοθεῖσαι περιφέρειαι (σχ. 204), R καὶ R' αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν καὶ ρ τυχὸν δοθὲν εὐθ. τμῆμα. Ζητεῖται νὰ γραφῇ περιφέρεια ἀκτῖνος ρ, ἥτις νὰ ἐφάπτηται ἐκτὸς τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν Κ καὶ Λ.

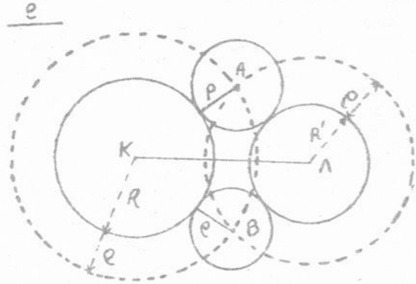
**Ἀνάλυσις.** Ἄγνωστον εἶναι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης νὰ γραφῇ περιφερείας, ἥτις ὀφείλει νὰ πληροῖ τὰ ἑξῆς δύο ἐπιτάγματα:

1) Νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα ρ καὶ νὰ ἐφάπτηται ἐκτὸς τῆς περιφερείας (Κ, R) καὶ 2) νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα ρ καὶ νὰ ἐφάπτηται ἐκτὸς τῆς περιφερείας (Λ, R').

Πάντα τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα πληροῦσι τὸ πρῶτον ἐπίταγμα, κεῖνται ἐπὶ ὁμοκέντρου περιφερείας τῆς Κ μὲ ἀκτῖνα $R+\rho$. Πάντα δὲ τὰ σημεῖα τὰ ὁποῖα πληροῦσι τὸ δεύτερον ἐπίταγμα, κεῖνται ἐπὶ περιφερείας ὁμοκέντρου τῆς Λ καὶ μὲ ἀκτῖνα R + ρ.

Ἄρα τὸ ζητούμενον κέντρον θὰ εἶναι ἡ τομὴ τῶν δύο τούτων περιφερειῶν.

**Σύνθεσις**: Μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα R + ρ γράφομεν μίαν περιφέρειαν. Μὲ κέντρον Λ καὶ ἀκτῖνα R′ + ρ γράφομεν ἑτέραν περιφέρειαν.




*Σχ. 204.*

Αὗται τέμνονται ἐν γένει εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Β. Μὲ κέντρα Α καὶ Β καὶ ἀκτῖνα ρ γράφομεν περιφερείας, ἑκάστη τῶν ὁποίων θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη.

**Διερεύνησις**: Ἂν αἱ περιφέρειαι Κ (R + ρ) καὶ Λ (R + ρ) ἔχωσι δύο κοινὰ σημεῖα, ὑπάρχουσι δύο περιφέρειαι, αἱ (Α, ρ) καὶ (Β, ρ), ἐφαπτόμεναι τῶν δοθεισῶν ἐκτὸς καὶ ἔχουσαι ἀκτῖνα ρ καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις. Πρὸς τοῦτο πρέπει.

$$(R + \rho) - (R' + \rho) < K\Lambda < R + \rho + R' + \rho \quad \text{ἤ}$$
$$R - R' < K\Lambda < R + R' + 2\rho$$

Ἐὰν $R - R' < K\Lambda$, τότε αἱ δοθεῖσαι περιφέρειαι τέμνονται ἢ ἐφάπτονται ἐκτὸς ἢ κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων. Διὰ νὰ εἶναι δὲ καὶ $K\Lambda < R + R' + 2\rho$, πρέπει ἢ $K\Lambda \leqslant R + R'$, ὅτε αἱ δοθεῖσαι τέμνονται ἢ ἐφάπτονται ἐκτὸς ἢ $K\Lambda - (R + R') < 2\rho$, ὅτε κεῖνται αἱ δοθεῖσαι ἐκτὸς ἀλλήλων.

Ἂν αἱ περιφέρειαι (Κ, R + ρ) καὶ (Λ, R′ + ρ) ἔχωσιν ἓν κοινὸν σημεῖον, ὑπάρχει μία μόνον περιφέρεια ἐφαπτομένη τῶν δοθεισῶν ἐκτὸς καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν. Πρὸς τοῦτο πρέπει.

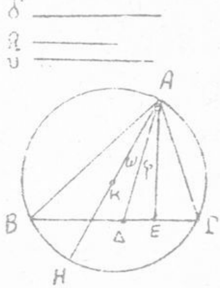
ἢ $K\Lambda = R' + \rho + R + \rho = 2\rho + R + R'$ καὶ $K\Lambda - (R + R') = 2\rho$ ἢ $K\Lambda = (R + \rho) - (R' + \rho) = R - R'$, ὅτε αἱ δοθεῖσαι ἐφάπτονται ἐντός.

**304. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῆς ἀκτῖνος R τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας, τοῦ ὕψους ΑΕ καὶ τῆς διχοτόμου ΑΔ.**

**Ἀνάλυσις.** Ἔστω, ὅτι κατεσκευάσθη τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ εἶναι τὸ ΑΒΓ (σχ. 205), τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν ἀκτῖνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, τὸ ὕψος ΑΕ=υ καὶ τὴν διχοτόμον ΑΔ = δ.

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΕΔ δυνάμεθα νὰ τὸ κατασκευάσωμεν, διότι γνωρίζομεν αὐτοῦ τὴν ὑποτείνουσαν ΑΔ = δ καὶ μίαν κάθετον πλευρὰν ΑΕ = υ.

Ἐπειδὴ δὲ $\varphi = \omega$ (ἄσκ. 294) ὁρίζεται ἡ θέσις τῆς διαμέτρου ΑΗ καὶ ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια καὶ αἱ τομαὶ ταύτης καὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΔΕ δηλ. αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ.



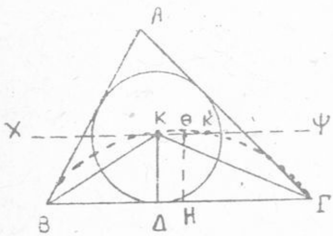
Σχ. 205.

**Σύνθεσις**: Κατασκευάζομεν ὀρθ. τρίγωνον ΑΔΕ (σχ. 205) μὲ ὑποτείνουσαν τὴν δοθεῖσαν διχοτόμον $ΑΔ = δ$ καὶ κάθετον πλευρὰν $ΑΕ = υ$. Μὲ κορυφὴν τὸ Α καὶ πλευρὰν τὴν ΑΔ κατασκευάζομεν γωνίαν ΔΑΗ ἴσην πρὸς τὴν ΕΑΔ καὶ πρὸς τὸ ἕτερον μέρος αὐτῆς. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΗ λαμβάνομεν τὸ εὐθ. τμῆμα $ΑΚ = R$ καὶ μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα $ΚΑ = R$ γράφομεν περιφέρειαν. Αἱ τομαὶ ταύτης καὶ τῆς ΔΕ προεκτεινομένης εἶναι αἱ ἄλλαι κορυφαὶ τοῦ ζητουμένου νὰ κατασκευασθῇ τριγώνου ΑΒΓ.

**Διερεύνησις**: Ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχῃ λύσιν, πρέπει νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ κατασκευὴ τοῦ τριγώνου ΑΔΕ ἤτοι $ΑΔ > ΑΕ$.

305. **Νὰ κατασκευάσητε τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, τῆς γωνίας Α καὶ τῆς ἀκτῖνος ρ τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας.**

**Ἀνάλυσις**: Ἔστω, ὅτι κατεσκευάσθη τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ εἶναι τὸ ΑΒΓ (σχ. 206), τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν ΒΓ, τὴν ἀπέναντι αὐτῆς γωνίαν Α καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου Κ. Ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ ΚΒ, ΚΓ εἶναι διχοτόμοι τῶν δύο ἐσωτερικῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἄρα ἡ γωνία αὐτῶν ΒΚΓ ἰσοῦται μὲ 1 ὀρθ. $+ \frac{A}{2}$ ἄσκ. 112).



Σχ. 206.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ Α εἶναι δεδομένη γωνία, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ γωνία ΒΚΓ εἶναι γνωστὴ καὶ συνεπῶς ἡ κορυφὴ αὐτῆς Κ κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον ἔχει χορδὴν τὴν ΒΓ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην πρὸς 1 ὀρθ. $+ \frac{A}{2}$.

Ἀλλὰ καὶ $ΚΔ \perp ΒΓ$, ὡς ἀκτὶς καταλήγουσα εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Δ καὶ ἴση μὲ τὴν δεδομένην ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου. Ἄρα τὸ Κ κεῖται καὶ ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν ΒΓ καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῆς ἴσην πρὸς ρ.

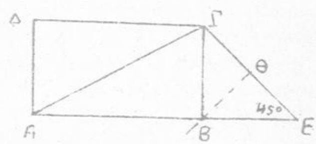
**Σύνθεσις**: Κατασκευάζομεν τόξον κυκλικοῦ τμήματος μὲ χορδὴν τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν ΒΓ, τὸ ὁποῖον νὰ δέχηται γωνίαν 1 ὀρθ $+ \frac{A}{2}$. Φέρομεν εὐθεῖαν ΧΨ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ καὶ εἰς ἀπόστασιν ρ ἀπ' αὐτῆς, ἥτις θὰ τέμνῃ ἐν γένει τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος εἰς δύο σημεῖα Κ καὶ Κ'. Μὲ κέντρον Κ ἢ Κ' καὶ ἀκτῖνα ρ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, ἡ ὁποία θὰ ἐφάπτεται τῆς χορδῆς ΒΓ.

Ἐκ τῶν σημείων Β καὶ Γ φέρομεν ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου Κ, αἱ ὁποῖαι τεμνόμεναι εἰς τὸ σημεῖον Α ὁρίζουσι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον.

**Διερεύνησις**: Ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχῃ λύσιν, πρέπει ἡ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ καὶ εἰς ἀπόστασιν ρ ἀπ' αὐτῆς νὰ τέμνῃ τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος. Πρὸς τοῦτο πρέπει ἡ ἀκτὶς ρ νὰ εἶναι μικροτέρα ἢ ἴση πρὸς τὸ ὕψος ΗΘ τοῦ κυκλικοῦ τμήματος. Καὶ ἂν μὲν εἶναι ρ<ΗΘ ἔχομεν δύο τομὰς Κ καὶ Κ' καὶ δύο τρίγωνα Α'ΒΓ καὶ ΑΒΓ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα. Συνεπῶς τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν. Ἂν δὲ ρ = ΗΘ, τότε ὑπάρχει μία τομὴ Θ καὶ ἓν τρίγωνον ΒΑΓ ἰσοσκελές.

306. **Νὰ κατασκευάσητε ὀρθογώνιον ἀπὸ τὴν περίμετρον καὶ ἀπὸ τὴν διαγώνιον αὐτοῦ.**

**Ἀνάλυσις**: Ἔστω, ὅτι κατεσκευάσθη τὸ ζητούμενον ὀρθογώνιον καὶ εἶναι τὸ ΑΒΓΔ (σχ. 207), τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν διαγώνιον ΑΓ καὶ τὴν περίμετρον αὐτοῦ
ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ = 2τ.



*Σχ. 207.*

Ὡς γνωστόν, ἡ διαγώνιος ΑΓ χωρίζει τὸ ὀρθογώνιον εἰς δύο ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα. Παρατηροῦμεν δέ, ὅτι τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΑΓ καὶ τὸ ἄθροισμα ΑΒ + ΒΓ = τ τῶν καθέτων αὐτοῦ πλευρῶν.

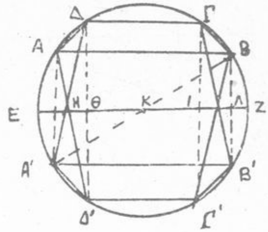
Προεκτείνομεν τὴν ΑΒ καὶ λαμβάνομεν ΒΕ = ΒΓ. Τὸ σχηματισθὲν ὀρθογ. τρίγωνον ΓΒΕ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ συνεπῶς γων Ε = 45° καὶ ΑΕ = ΑΒ + ΒΕ = ΑΒ + ΒΓ = τ. Τοῦ τριγώνου ΓΑΕ γνωρίζομεν δύο πλευρὰς καὶ τὴν ἀπέναντι τῆς μιᾶς τούτων γωνίαν Ε = 45°. Δυνάμεθα ἄρα νὰ κατασκευάσωμεν τοῦτο.

**Σύνθεσις**: Κατασκευάζομεν τρίγωνον ΑΓΕ (σχ. 207) ἔχον δύο πλευρὰς ἴσας πρὸς τὴν δοθεῖσαν ἡμιπερίμετρον τ καὶ τὴν δοθεῖσαν διαγώνιον ΑΓ καὶ γωνίαν ἀπέναντι τῆς διαγωνίου ἴσην πρὸς 45°. Κατόπιν φέρομεν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΓΕ, ἥτις τέμνει τὴν ΑΕ εἰς τὸ σημεῖον Β. Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ Α παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ. Τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ τὸ ζητούμενον.

**Ἀπόδειξις**: Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΓΒΕ ἔχει ΒΘ ⊥ ΓΕ καὶ ΓΘ=ΘΕ, εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἐπειδὴ Ε = 45°, θὰ εἶναι Β = 2Ε = 2. 45°=90°. Ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ὀρθογώνιον. Ἐπειδὴ δὲ ΑΒ+ΒΓ = =ΑΒ+ΒΕ=ΑΕ=τ ἐκ κατασκευῆς, θὰ εἶναι καὶ ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ = =2τ. Ἔχει δὲ καὶ διαγώνιον ΑΓ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν.

307. **Νὰ κατασκευάσητε τραπέζιον ἀπὸ τὰς βάσεις του καὶ ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα R τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας Κ.**

**Ἀνάλυσις**: Ἔστω ὅτι κατεσκευάσθη τὸ ζητούμενον τραπέζιον καὶ εἶναι τὸ ΑΒΓΔ (σχ. 208), τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς δύο βάσεις ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Κ, ἀκτῖνος R. Ἐπειδὴ ΑΒ ‖ ΓΔ, ἕπεται ὅτι καὶ τοξΑΔ=τοξΒΓ καὶ συνεπῶς χορΑΔ = χορΒΓ. Ἄρα τὸ τραπέζιον θὰ εἶναι ἰσοσκελές. Φέρομεν τὴν διάμετρον ΕΖ τοῦ κύκλου Κ, ἥτις εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις ΑΒ καὶ ΓΔ τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ καὶ ἐκ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ καθέτους ἐπὶ τὴν διάμετρον, τὰς ΑΗ, ΒΛ, ΓΙ, ΔΘ. Τὰ εὐθ. τμήματα ΚΗ καὶ ΚΛ εἶναι ἴσα μεταξύ των καὶ




*Σχ. 208.*

ἕκαστον ἴσον πρὸς $\frac{ΑΒ}{2}$. Ὁμοίως τὸ εὐθ. τμῆμα ΚΙ = ΚΘ = $\frac{ΔΓ}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ σημεῖα Η, Θ, Ι, Λ ὁρίζονται καὶ ἀρχικῶς, ἕπεται ἡ ἑξῆς κατασκευή.

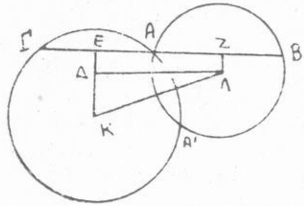
**Σύνθεσις:** Μὲ κέντρον τυχὸν σημεῖον Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν R γράφομεν περιφέρειαν κύκλου καὶ φέρομεν τυχοῦσαν διάμετρον αὐτοῦ, τὴν ΕΖ. Ἐπ' αὐτῆς καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ κέντρου Κ λαμβάνομεν τὰ εὐθ. τμήματα ΚΗ=ΚΛ=μὲ τὸ ἥμισυ τῆς μεγαλυτέρας τῶν δοθεισῶν βάσεων καὶ ΚΘ=ΚΙ=μὲ τὸ ἥμισυ τῆς μικροτέρας τῶν δοθεισῶν βάσεων. Ἐκ τῶν σημείων Η, Λ, Ι, Κ ὑψοῦμεν καθέτους, αἱ ὁποῖαι τέμνουσι τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Α΄, Β καὶ Β΄, Γ καὶ Γ΄ Δ καὶ Δ΄. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΒ, ΔΓ, Α΄Β΄, Δ΄Γ΄ ΔΑ, ΒΓ, Δ΄Α΄, Β΄Γ΄. Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΔΓ, Α΄Β΄, Γ΄Δ΄ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν διάμετρον ΕΖ καὶ συνεπῶς καὶ μεταξύ των παράλληλοι. Πράγματι, ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ ΚΑ΄ καὶ ΚΒ σχηματίζονται δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΚΛ καὶ ΚΗΑ΄, τὰ ὁποῖα ἔχουσι ΚΒ=ΚΑ΄, ΚΛ=ΚΗ καὶ συνεπῶς εἶναι ἴσα. Ἄρα καὶ γωνΒΚΛ = γωνΗΚΑ΄ καὶ ἡ γραμμὴ ΑΚΒ εἶναι εὐθεῖα καὶ διάμετρος τοῦ κύκλου. Ἡ γωνία ἄρα Α΄ΑΒ εἶναι ὀρθή, ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον καὶ ΑΒ ⊥ ΑΑ΄. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ΕΖ ⊥ ΑΑ΄ θὰ εἶναι ΑΒ ‖ ΕΖ. Ὁμοίως δεικνύεται καὶ ὅτι ΔΓ ‖ ΕΖ, Α΄Β΄ ‖ ΕΖ, Δ΄Γ΄ ‖ ΕΖ καὶ συνεπῶς ΑΒ ‖ ΓΔ ‖ Α΄Β΄ ‖ Γ΄Δ΄.

Τὰ τετράπλευρα ἄρα ΑΒΓΔ, Α΄Β΄Γ΄Δ΄ εἶναι τραπέζια καὶ ἔχουσι βάσεις ἴσας πρὸς τὰς δοθείσας, διότι ΑΒ=Α΄Β΄=ΗΛ καὶ ΔΓ=Δ΄Γ΄= =ΙΘ. Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι ἴσα ἀποτελοῦσι μίαν λύσιν.

Ὁμοίως ἂν φέρωμεν καὶ τὰς χορδάς, ΔΑ΄, ΓΒ΄, καὶ Δ΄Α, Γ΄Β ἔχομεν δύο ἄλλα τραπέζια πληροῦντα τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος καὶ ἴσα μεταξύ των. Ἐπομένως τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, τὰ τραπέζια ΑΒΓΔ καὶ ΑΔ΄Γ΄Β.

**308. Δίδονται δύο περιφέρειαι τεμνόμεναι εἰς σημεῖα Α καὶ Α΄. Νὰ φέρητε κοινὴν τέμνουσαν ΓΑΒ, ἴσην πρὸς δοθὲν εὐθ τμῆμα τ.**

**Ανάλυσις**: Ἔστωσαν Κ καὶ Λ (σχ. 209) δύο περιφέρειαι τεμνόμεναι εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Α′ καὶ ΓΑΒ κοινὴ αὐτῶν τέμνουσα, ἴση πρὸς τὸ δοθὲν εὐθ. τμῆμα τ. Ἐκ τῶν κέντρων Κ καὶ Λ φέρομεν καθέτους ΚΕ καὶ ΛΖ ἐπὶ τὰς χορδὰς ΓΑ καὶ ΑΒ. Θὰ εἶναι $ΓΕ=ΕΑ=\frac{ΑΓ}{2}$ καὶ $ΑΖ=ΖΒ=\frac{ΑΒ}{2}$. Συνεπῶς $ΕΖ=ΕΑ+ΑΖ=\frac{ΑΓ}{2}+\frac{ΑΒ}{2}=\frac{ΓΒ}{2}=\frac{τ}{2}$. Ἐὰν δὲ ἀχθῇ καὶ ἡ ΛΔ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΒ, τὸ τετράπλευρον ΛΔΕΖ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ $ΛΔ=ΕΖ=\frac{τ}{2}$. Τοῦ ὀρθογωνίου ἄρα τριγώνου ΚΔΛ γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΚΛ καὶ τὴν κάθετον πλευρὰν ΛΔ καὶ δύναται νὰ κατασκευασθῇ.




*Σχ. 209.*

**Σύνθεσις**: Κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΚΛΔ μὲ ὑποτείνουσαν τὴν διάκεντρον ΚΛ καὶ μίαν κάθετον πλευραν ἴσην πρὸς $\frac{τ}{2}$ καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ΛΔ, τὴν ΓΑΒ. Αὕτη θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη νὰ ἀχθῇ κοινὴ αὐτῶν τέμνουσα.

**Ἀπόδειξις** Διότι ἡ ΚΔ, κάθετος οὖσα ἐπὶ τὴν ΛΔ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῆς ΓΑΒ καὶ συνεπῶς $ΓΑ=2.ΕΑ$. Ἂν δὲ ἀχθῇ καὶ ἡ ΛΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, θὰ εἶναι $ΑΒ=2.ΑΖ$ καὶ συνεπῶς $ΓΑ+ΑΒ=2(ΕΑ+ΑΖ)$ ἢ $ΓΑΒ=2.ΕΖ=2.ΔΛ=2.\frac{τ}{2}=τ$.

**Διερεύνησις**: Ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχῃ λύσιν, πρέπει $ΛΔ<ΚΛ$ ἢ $\frac{τ}{2}<ΚΛ$.

**309. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι Ε καὶ Ε′, ἓν σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτῶν καὶ εὐθ. τμῆμα τ. Νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τὸ Α εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ ἐντὸς τῶν παραλλήλων τμῆμα νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ τ.**

**Ἀνάλυσις**: Ἔστω ὅτι ἤχθη ἡ ζητουμένη εὐθεῖα καὶ εἶναι ἡ ΑΒΓ (σχ. 210) τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι $ΒΓ=τ$.

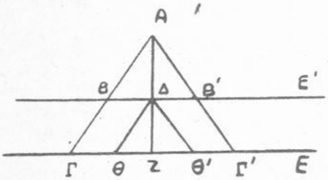
Φέρομεν ἐκ τοῦ σημείου Α τὴν ΑΖ κάθετον πρὸς τὴν Ε καὶ συνεπῶς καὶ πρὸς τὴν Ε′.

Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Δ, εἰς τὸ ὁποῖον αὕτη τέμνει τὴν Ε′, φέρωμεν τὴν ΔΘ ∥ ΒΓ, θὰ εἶναι $ΔΘ=ΒΓ=τ$. Ἄρα τὸ Θ ἀπέχει τοῦ σταθεροῦ σημείου Δ ἀπόστασιν σταθερὰν καὶ ἴσην πρὸς τ. Δύναται ἄρα νὰ ὁρισθῇ καὶ ἀρχικῶς.

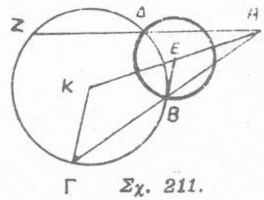
**Σύνθεσις**: Φέρομεν ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου Α κάθετον ἐπὶ τὰς δοθείσας παραλλήλους Ε καὶ Ε′ καὶ μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Δ, εἰς τὸ ὁποῖον αὕτη τέμνει τὴν Ε′ καὶ ἀκτῖνα τ γράφομεν τόξον κύκλου, ὅπερ τέμνει τὴν Ε εἰς τὰ σημεῖα Θ καὶ Θ′. Φέρομεν τὰς ΔΘ καὶ ΔΘ′ καὶ ἐκ τοῦ Α παραλλήλους πρὸς αὐτάς, τὰς ΑΒΓ καὶ ΑΒ'Γ'. Αὗται προφανῶς εἶναι αἱ ζητούμεναι εὐθεῖαι.

**Διερεύνησις**: Ἂν τ>ΔΖ, ὑπάρχουσι δύο τέμνουσαι καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις. Ἂν τ=ΔΖ ὑπάρχει μία μόνον ἡ ΑΔΖ καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν. Ἂν δὲ τ<ΔΖ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον

**310. Δίδεται κύκλος (Κ, R) καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ φέρητε ἀπὸ τὸ Α τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν καὶ τοιαύτην, ὥστε τὸ ἐκτὸς τοῦ κύκλου τμῆμα ΑΒ αὐτῆς νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐντὸς ΒΓ.**



*Σχ. 210.*



*Σχ. 211.*

**Ἀνάλυσις**: Ἔστω Κ ἡ δοθεῖσα περιφέρεια (σχ. 211), Α τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ ΑΒΓ ἡ τέμνουσα τοιαύτη ὥστε νὰ εἶναι ΑΒ=ΒΓ. Φέρομεν τὰς ΑΚ, ΚΓ καὶ ἐκ τοῦ Β παράλληλον πρὸς τὴν ΚΓ, τὴν ΒΕ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΚΓ, ἐπειδὴ ἡ ΒΕ ἄγεται ἐκ τοῦ μέσου Β τῆς πλευρᾶς ΑΓ αὐτοῦ παράλληλος πρὸς τὴν πλευράν του ΚΓ θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ μέσου Ε τῆς τρίτης πλευρᾶς του ΑΚ καὶ θὰ εἶναι $ΒΕ = \frac{ΚΓ}{2} = \frac{R}{2}$. Ἄρα τὸ Β ἀπέχει ἀπὸ τὸ σταθερὸν σημεῖον Ε, μέσον τῆς ΚΑ, σταθερὰν ἀπόστασιν ἴσην πρὸς $\frac{R}{2}$ καὶ προσδιορίζεται ἀρχικῶς.

**Σύνθεσις**: Μὲ κέντρον τὸ μέσον Ε τῆς ἀποστάσεως ΚΑ καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς $\frac{R}{2}$ γράφομεν περιφέρειαν. Αὕτη τέμνει τὴν δοθεῖσαν Κ εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Δ. Φέρομεν τὰς ΑΒΓ καὶ ΑΔΖ, αἱ ὁποῖαι εἶναι τοιαῦται, ὥστε ΑΒ=ΒΓ καὶ ΑΔ=ΔΖ.

## Τέλος Α' τεύχους

15

5

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
ΧΑΡ. ΚΑΓΙΑΦΑ • ΙΩ. ΧΑΡ. ΚΑΓΙΑΦΑ
ΠΑΤΡΑΙ ΑΘΗΝΑΙ

# ΣΧΟΛΙΚΑΙ ΜΕΤΑΦΡΑΣΕΙΣ

*(Μετὰ περιγραφῶν, περιλήψεων καὶ πολλῶν γραμματικῶν, συντακτικῶν καὶ πραγματικῶν παρατηρήσεων).*

Δημοσθένους (Α' 'Ολυνθιακὸς) Μετάφρ. Γεωργοπούλου

*Ὑπὸ Λευκαδίου*

Ἀναγνωστικοῦ Ἀρχαίας Ἑλληνικῆς Γλώσσης
Ἀρριανοῦ Ἀνάβασις Ἀλεξάνδρου
Κικέρωνος Ἐνύπνιον Σκιπίωνος

*Ὑπὸ Ι. ΜΠΑΚΟΠΟΥΛΟΥ*

Λεξικὸν Ἀνωμάλων Ρημάτων
Λατινικὸν Ἀναγνωσματάριον
Πλάτωνος Κρίτων
Ἀρριανοῦ Ἀνάβασις Ἀλεξάνδρου
Ἰσοκράτους πρὸς Δημόνικον καὶ πρὸς Νικοκλέα
Κικέρωνος Ἐνύπνιον Σκιπίωνος

*Ὑπὸ Γ. ΠΑΠΑΟΙΚΟΝΟΜΟΥ*

Λεξικὸν Ἀνωμάλων Ρημάτων

*Ὑπὸ ΑΘ. ΚΕΦΑΛΙΑΚΟΥ*

Λύσεις Θεωρητικῆς Γεωμετρίας (Α' Τεῦχος)
» » » (Β' Τεῦχος)
» » Στερεομετρίας (Γ' Τεῦχος)
Λύσεις Τριγωνομετρίας
Λύσεις Ἀλγέβρας (Α' Τεῦχος)
» » (Β' Τεῦχος)

Μαθηματικὰ Α' Γυμνασίου Γ. Ἀνδρέου
» Β' » »
» Γ' » »
Χημεία Β' » Ν. Κονίδα
Φυσικὴ Β' » »

*Ὑπὸ ΠΑΝ. Π. ΓΑΓΑΤΣΟΥ, Γυμνασιάρχου*

Μετάφρ. ἐκλεκτ. περικοπῶν ἐκ τῆς Π. Διαθήκης. Τ. Α'
» » » ἐκ τῆς Κ. Διαθήκης. Τ. Β'

Ὀρθογραφικὸν Λεξικὸν - *Α. Ὀρεινοῦ*

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΚΘΕΣΕΩΝ Γ. Ὀρεινοῦ Τεῦχος Α'
» » Ἄλκη » Α'
» » Γ. Ὀρεινοῦ » Β'
» » . Σαρρῆ » Β'