ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ ΚΕΦΑΛΙΑΚΟΥ
ΓΥΜΝΑΣΙΑΡΧΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΛΥΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Ο. Ε. Σ. Β.

ΤΕΥΧΟΣ Α'.

ΧΑΡΑΛ. ΚΑΓΙΑΦΑΣ — ΠΑΤΡΑΙ — ΟΔΟΣ ΕΡΜΟΥ 14
ΙΩΑΝ. Χ. ΚΑΓΙΑΦΑΣ — ΑΘΗΝΑΙ · ΑΙΟΛΟΥ 68 (ΣΤΟΑ ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΠΟΥΛΟΥ)
ΕΜΠΟΡΙΟΝ - ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΧΑΡΤΟΥ - ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ ΚΕΦΑΛΙΑΚΟΥ
ΓΥΜΝΑΣΙΑΡΧΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΛΥΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Ο. Ε. Σ. Β.

ΤΕΥΧΟΣ Α'.

ΧΑΡΑΛ. ΚΑΓΙΑΦΑΣ ΙΩΑΝ. Χ. ΚΑΓΙΑΦΑΣ
ΠΑΤΡΑΙ ● ΑΘΗΝΑΙ ΑΙΟΛΟΥ 69
ΟΔΟΣ ΕΡΜΟΥ 14 (ΣΤΟΑ ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΠΟΥΛΟΥ)
ΕΜΠΟΡΙΟΝ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΧΑΡΤΟΥ-ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τῶν συγγραφέων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

Ἐπὶ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς Ἀλγέβρας

Ἀσκήσεις σελίς 11 : **1.** Ἀφοῦ τὰ 10 χιλ/μα τιμῶνται 100 δραχμάς, τὸ 1 χιλ/μον αὐτοῦ θὰ τιμᾶται $\frac{100}{10} = 10$ δρχ. καὶ τὰ 120 χιλιόγραμμα θὰ τιμῶνται δραχ. $10 \;.\; 120 = 1200$ δραχ.

Γενικῶς : Ἂν α χιλιόγραμμα ἐμπορεύματος τιμῶνται β δραχμάς, πόσον θὰ τιμῶνται τὰ γ χιλιόγραμμα αὐτοῦ;

Ἀφοῦ τὰ α χιλιόγραμμα τιμῶνται β δραχμάς, τὸ 1 χιλ/μον θὰ τιμᾶται $\frac{\beta}{\alpha}$ δραχμὰς καὶ τὰ γ χιλιόγραμμα θὰ τιμῶνται $\gamma \;.\; \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma\beta}{\alpha}$ δραχ.

2. Γνωρίζομεν, ὅτι δύο ἀντίστροφοι ἀριθμοὶ ἔχουν γινόμενον τὴν μονάδα. Συνεπῶς ὁ ἀντίστροφος τοῦ 5 εἶναι ὁ $\frac{1}{5}$, διότι $5 \;.\; \frac{1}{5} = 1$.

Ὁμοίως τοῦ $\frac{3}{4}$ εἶναι ὁ $\frac{4}{3}$ καὶ τοῦ 13,5 εἶναι ὁ $\frac{1}{13{,}5} = \frac{10}{135} = \frac{2}{27}$.

Γενικῶς : Δίδονται οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀντίστροφοι αὐτῶν.

Τοῦ α ἀντίστροφος θὰ εἶναι ὁ $\frac{1}{\alpha}$, διότι $\alpha \;.\; \frac{1}{\alpha} = 1$. Ὁμοίως τοῦ β θὰ εἶναι ὁ $\frac{1}{\beta}$ καὶ τοῦ γ θὰ εἶναι ὁ $\frac{1}{\gamma}$, ἂν $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$.

3. Γενικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι π.χ. οἱ α, β, $\frac{\rho}{\sigma}$ κ. ο. κ. Τὰ διπλάσια αὐτῶν θὰ εἶναι $2 \;.\; \alpha$, $2 \;.\; \beta$, $2 \;.\; \frac{\rho}{\sigma}$. Τὰ τριπλάσια αὐτῶν θὰ εἶναι $3 \;.\; \alpha$, $3 \;.\; \beta$, $3 \;.\; \frac{\rho}{\sigma}$ καὶ γενικῶς τὰ νιπλάσια αὐτῶν θὰ εἶναι $\nu \;.\; \alpha$, $\nu \;.\; \beta$, $\nu \;.\; \frac{\rho}{\sigma}$.

4. Τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ α εἶναι $\alpha \;.\; \frac{5}{8} = \frac{5\alpha}{8}$. Τὰ $\frac{\mu}{\nu}$ αὐτοῦ εἶναι $\alpha \;.\; \frac{\mu}{\nu} = \frac{\alpha\mu}{\nu}$.

5. Τὸ ἄθροισμά των εἶναι $\alpha + \beta$, ἡ διαφορὰ τοῦ δευτέρου ἀπὸ τοῦ πρώτου εἶναι $\alpha - \beta$, τὸ γινόμενόν των εἶναι $\alpha \;.\; \beta$ καὶ τὸ πηλίκον τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}$, ἂν $\beta \neq 0$.

6. Γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν Ἀριθμητικήν, ὅτι τὸ κεφάλαιον δίδεται ὑπὸ

τοῦ τύπου: $K = \frac{T \cdot 100}{E \cdot X}$ (ὅταν ὁ χρόνος Χ ἐκφράζεται εἰς ἔτη). Ἂν $T = 3000$ δραχ., $X = 2$ ἔτη καὶ $E = 3\,\%$ τότε $K = \frac{3000 \cdot 100}{3 \cdot 2} =$
$= \frac{300000}{6} = 50000$ δραχ.

Θετικοὶ καὶ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ

7. Ποσὰ ἐπιδεχόμενα ἀντίθεσιν εἶναι: α΄) **Θερμότης** καὶ **ψῦχος.** Ἂν παραστήσωμεν τὴν αὔξησιν τῆς θερμοκρασίας ἑνὸς δωματίου κατὰ 5^0 μὲ τὸν ἀριθμὸν $+5^0$, τότε τὴν ἐλάττωσιν αὐτῆς κατὰ 5^0 θὰ τὴν παραστήσωμεν μὲ τὸν ἀριθμὸν -5^0.

β΄) **Κέρδος** καὶ **ζημία.** Ἂν π. χ. ἔμπορος κερδίσῃ 3000 δραχ. παρίσταται τοῦτο μὲ τὸν $+3000$, ἂν δὲ ζημιωθῇ 3000 δραχ. παρίσταται αὕτη μὲ τὸν ἀριθμὸν -3000 δραχ.

γ΄) **Ἐνεργητικὸν** καὶ **παθητικὸν** μιᾶς ἐπιχειρήσεως. Ἂν ἡ ἐπιχείρησις ἔχει διαθέσιμα μετρητὰ χρήματα ἢ τῆς ὀφείλουν 20000000, θὰ παριστῶμεν αὐτὰ μὲ τὸν ἀριθμὸν $+20000000$. Ἂν δὲ ὀφείλῃ 20000000, θὰ παριστῶμεν αὐτὰ μὲ -20000000 δραχ.

δ΄) **Περιουσία** καὶ **χρέος.** Πᾶν ὅ,τι ἔχει τις παρίσταται μὲ θετικὸν ἀριθμόν, πᾶν δὲ ὅ,τι ὀφείλει παρίσταται μὲ ἀρνητικὸν ἀριθμόν.

ε΄) **Μέλλων χρόνος** καὶ **παρελθὼν χρόνος.** Τὸν μέλλοντα χρόνον ἀπό τινος χρονικῆς στιγμῆς θεωροῦμεν θετικόν, τὸν δὲ παρελθόντα χρόνον θεωροῦμεν ἀρνητικόν, οἱ δὲ ἀριθμοὶ $+5$ ἔτη, -5 ἔτη εἶναι ἀντίθετοι.

8. Ἀντίθετοι τῶν δεδομένων ἀριθμῶν εἶναι κατὰ σειράν:
$-5, -12, +3, +8, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{9}, -\frac{2}{7}, +\frac{4}{9}, -6{,}15 \cdot -7{,}45 \cdot -0{,}12 \cdot 34{,}85.$

9. Ὁμόσημοι: $+16, +\frac{6}{5}, +0{,}44$. Ἑτερόσημοι: $+10, -\frac{17}{9}, +4{,}14$.
Ἀντίθετοι: $+8, -8$. Ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ $+8$ εἶναι ὁ 8. Συμβολικῶς γράφομεν $|+8| = 8$. Ὁμοίως ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ -8 εἶναι 8 καὶ γράφομεν $|-8| = 8$.

10. Αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι κατὰ σειράν:
3, 13, 15, 28, 3,5· $13\frac{5}{8}, \frac{7}{9}$, 17,2 42,18· $\frac{6}{9}, 2\frac{1}{5}$ καὶ συμβολίζονται οὕτω:
$|3| = 3$, $|-13| = 13$, $|-15| = 15$, $|28| = 28$, $|-3{,}5| = 3{,}5$ κ.ο.κ.

11. Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ α εἶναι α, ἂν οὗτος εἶναι θετικὸς ἢ μηδὲν καὶ σημειοῦται $|\alpha| = \alpha$, ἂν δὲ ὁ α εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός, τότε ἡ ἀπόλυτος τιμὴ αὐτοῦ εἶναι ὁ $-\alpha$ καὶ σημειοῦται $|\alpha| = -\alpha$. Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ $-\alpha$ εἶναι α καὶ σημειοῦται $|-\alpha| = \alpha$. Ὁμοίως $|-\beta| = \beta$. Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ $+\beta$ εἶναι β, ἂν οὗτος εἶναι θετικὸς ἢ μηδὲν δηλ. $|+\beta| = \beta$, ἂν δὲ ὁ β εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμὸς τότε $|+\beta| = -\beta$.

12. Ἴσοι ἢ ἰσοδύναμοι πρὸς τὸν $-\frac{1}{2}$ εἶναι οἱ $-\frac{6}{12}, -\frac{10}{20}$. Πρὸς τὸν $\frac{1}{5}$ εἶναι οἱ $\frac{3}{15}, \frac{2}{10}$. Πρὸς τὸν 2 εἶναι οἱ $\frac{10}{5}, \frac{8}{4}$. Πρὸς τὸν 6 οἱ $\frac{12}{2}, \frac{18}{3}$. Πρὸς τὸν -3 οἱ $-\frac{9}{3}, -\frac{12}{4}$.

13. Ἰσοδύναμοι τῶν δοθέντων ἀριθμῶν κατὰ σειρὰν εἶναι οἱ $\frac{12}{2}, -\frac{10}{4}, -\frac{615}{100}, -\frac{13}{4}$.

14. Ἐπειδὴ τὰ τμήματα, ΟΑ′, ΟΒ′, ΟΓ′..... εἶναι ἴσα ἀπολύτως πρὸς τὰ τμήματα ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ,.... ἀλλ' ἔχουν φορὰν ἐπὶ τῆς εὐθείας ἀντίθετον τῆς ΟΑ θὰ παρασταθοῦν διὰ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν -1, -2, -3,.....

15. Ἂν Μ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΟΑ, τότε ὁ ἀριθμὸς $\frac{1}{2}$ θὰ παρίσταται ὑπὸ τοῦ τμήματος ΟΜ. Ὁμοίως ἂν ἐπὶ τοῦ ΟΑ λάβω σημεῖον Π τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι τὸ τμῆμα ΟΠ ἴσον πρὸς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ τμήματος ΟΑ, τότε ὁ ἀριθμὸς $\frac{2}{3}$ θὰ παρίσταται διὰ τοῦ τμήματος ΟΠ. Ὁμοίως ἂν λάβω τὰ μεγέθη ΟΤ, ΟΝ, ΟΛ ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{45}{100}$ τοῦ ΟΑ, τότε ὁ $\frac{2}{5}$ θὰ παρίσταται μὲ τὸ τμῆμα ΟΤ, ὁ $\frac{3}{5}$ μὲ τὸ τμῆμα ΟΝ καὶ ὁ $0{,}45 = \frac{45}{100}$ μὲ τὸ τμῆμα ΟΛ. Ἂν δὲ λάβω τὰ μεγέθη ΟΜ′, ΟΠ′. ΟΤ′, ΟΝ′, ΟΛ′ ἀπολύτως ἴσα πρὸς τὰ προηγούμενα καὶ κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν, τότε ἕκαστον τούτων κατὰ σειρὰν θὰ παριστᾷ τοὺς ἀριθμοὺς $-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}$, $-0{,}45$.

Γραφικὴ παράστασις τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν καὶ σχηματισμὸς τῶν ἀριθμῶν ἐκ τῆς θετικῆς μονάδος

16. Ὁ -5 γίνεται ἐκ τῆς -1, ἐὰν τὴν ἐπαναλάβωμεν ὡς προσθετέον πέντε φορὰς δηλαδὴ $-5 = (-1) + (-1) + (-1) + (-1) + (-1)$. Ἐκ δὲ τῆς θετικῆς μονάδος $+1$, ἐὰν πρῶτον λάβωμεν τὴν ἀντίθετον ταύτης -1 καὶ ταύτην ἐπαναλάβωμεν πέντε φορὰς ὡς προσθετέον.

Ὁ -6 γίνεται ἐκ τῆς -1, ἂν τὴν ἐπαναλάβωμεν ἓξ φορὰς ὡς προσθετέον, ἐκ δὲ τῆς $+1$, ἐὰν πρῶτον λάβωμεν τὴν ἀντίθετον αὐτῆς -1 καὶ αὐτὴν ἐπαναλάβωμεν ἓξ φορὰς ὡς προσθετέον. Ὁμοίως καὶ διὰ τοὺς ἄλλους.

17. Ὁ $-\frac{3}{4}$ γίνεται ἐκ τοῦ $\frac{1}{4}$ τῆς -1, ἐὰν ἐπαναλάβωμεν αὐτὸ τρεῖς φορὰς ἢ ἀπὸ τὴν $+1$, ἐὰν πρῶτον λάβωμεν τὴν ἀντίθετον αὐτῆς — 1 καὶ τὸ τέταρτον ταύτης ἐπαναλάβωμεν τρὶς ὡς προσθετέον.

Ὁ $-\frac{5}{8}$ γίνεται ἐκ τοῦ $\frac{1}{8}$ τῆς — 1, ἐὰν ἐπαναλάβωμεν αὐτὸ πέντε φορὰς ἢ ἀπὸ τὴν + 1, ἐὰν πρῶτον λάβωμεν τὴν ἀντίθετον αὐτῆς — 1 καὶ τὸ ὄγδοον ταύτης ἐπαναλάβωμεν πέντε φοράς.

Ὁ $-\frac{4}{9}$ γίνεται ἐκ τῆς — 1, ἐὰν τὸ ἔννατον αὐτῆς ἐπαναλάβωμεν τέσσαρας φορὰς ἢ ἐκ τῆς + 1, ἐὰν πρῶτον λάβωμεν τὴν ἀντίθετον αὐτῆς — 1 καὶ τὸ ἔννατον ταύτης ἐπαναλάβωμεν τέσσαρας φοράς.

18. Ὁ 0,4 σχηματίζεται ἐκ τοῦ $\frac{1}{10}$ τῆς + 1, ἂν τοῦτο ἐπαναληφθῇ τέσσαρας φοράς. Ὁ δὲ —0,4 γίνεται ἐκ τοῦ $\frac{1}{10}$ τῆς — 1, ἂν τοῦτο ἐπαναληφθῇ τέσσαρας φοράς.

Ὁ 0,45 σχηματίζεται ἀπὸ τὸ ἑκατοστὸν τῆς θετικῆς μονάδος, ἂν τοῦτο ἐπαναληφθῇ 45 φοράς. Ὁ δὲ — 0,45 γίνεται ἀπὸ τὸ ἑκατοστὸν τῆς — 1, ἂν τοῦτο ἐπαναληφθῇ 45 φορὰς κ. ο. κ.

Πράξεις ἐπὶ τῶν Ἀλγεβρικῶν Ἀριθμῶν

Πρόσθεσις

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

Ὁμὰς πρώτη: 19. α') $5+(+3)=+8=|+8|=8$. Διότι οἱ προσθετέοι εἶναι ὁμόσημοι καὶ προσθέτομεν τὰς ἀπολύτους τιμὰς αὐτῶν καὶ θέτομεν τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν ἢ οὐδὲν σημεῖον.

β') $(+7)+(+1,4)=(+8,4)=|+8,4|=8,4$.

γ') $(+4)+(+6)+(+8)=(+10)+(+8)=+18=18$.

δ') $\left(\frac{4}{9}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{4}{9}\right)+\left(+\frac{6}{9}\right)=\left(+\frac{10}{9}\right)=\frac{10}{9}$.

ε') $\left(7\frac{1}{3}\right)+\left(+3\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{22}{3}\right)+\left(+\frac{16}{5}\right)=\left(\frac{110}{15}\right)+$
$+\left(+\frac{48}{15}\right)=+\frac{158}{15}=10\frac{8}{15}$.

στ') $(+3)+\left(+4\frac{1}{2}\right)+\left(+8\frac{1}{4}\right)=(+3)+\left(+\frac{9}{2}\right)+\left(+\frac{33}{4}\right)=$
$=\left(+\frac{12}{4}\right)+\left(+\frac{18}{4}\right)+\left(+\frac{33}{4}\right)=\left(+\frac{63}{4}\right)=+15\frac{3}{4}$.

ζ') $(-4)+(-6)=-10$, διότι ὅταν οἱ προσθετέοι εἶναι ἀρνητικοὶ θέτομεν πρὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπολύτων τιμῶν αὐτῶν τὸ σημεῖον —.

η') $(-10)+\left(-8\frac{1}{2}\right)=\left(-18\frac{1}{2}\right)=-18\frac{1}{2}$.

θ') $(-4)+\left(-3\frac{1}{2}\right)+\left(-7\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{12}{3}\right)+\left(-\frac{7}{2}\right)+\left(-\frac{22}{3}\right)=$

$$=\left(-\frac{24}{6}\right)+\left(-\frac{21}{6}\right)+\left(-\frac{44}{6}\right)=-\frac{89}{6}=-14\frac{5}{6}.$$

ι′) $\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{5}{8}\right)=\left(-\frac{16}{24}\right)+\left(-\frac{15}{24}\right)=-\frac{31}{24}=-1\frac{7}{24}.$

ια′) $(-4{,}5)+(-5{,}3)=-9{,}8.$

ιβ′) $(-4)+(-5)+(+8)+\left(-3\frac{1}{2}\right)$. Ἐδῶ ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς θετικοὺς καὶ ἀρνητικούς. Πρὸς τοῦτο προσθέτομεν χωριστὰ τὰς ἀπολύτους τιμὰς τῶν θετικῶν καὶ χωριστὰ τὰς ἀπολύτους τιμὰς τῶν ἀρνητικῶν προσθετέων καὶ ἀπὸ τὸ μεγαλύτερον ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν ἀφαιροῦμεν τὸ μικρότερον καὶ πρὸ τοῦ ὑπολοίπου θέτομεν τὸ σημεῖον τοῦ μεγαλυτέρου ἀθροίσματος κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἤτοι $\left(-12\frac{1}{2}\right)+(+8)=-4\frac{1}{2}.$

Ὁμὰς δευτέρα. 20. α′) $-5+3=-2$. β′) $+5-8-7+3=$ $=+8-15=-7$. γ′) $-3\frac{1}{2}+5\frac{1}{4}-2\frac{1}{5}=-\frac{7}{2}+\frac{21}{4}-\frac{11}{5}=$

$$=-\frac{70}{20}+\frac{105}{20}-\frac{44}{20}=-\frac{114}{20}+\frac{105}{20}=-\frac{9}{20}.$$

δ′) $(-3-5)+6-7-8=-8+6-7-8=-23+6=-17.$

ε′) $\left(-3+5\frac{1}{2}\right)-3+4-7=+2\frac{1}{2}-3+4-7=+6\frac{1}{2}-10=$

$$=-3\frac{1}{2}.$$

στ′) $(+4-8)-6+7\frac{1}{2}-8\frac{1}{2}-9=-4-6+7\frac{1}{2}-8\frac{1}{2}-9=$

$$=-27\frac{1}{2}+7\frac{1}{2}=-20.$$

ζ′) $(-3{,}5+7{,}4)-8{,}5+6\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=+3{,}9-8{,}5+6{,}5-0{,}75=$

$$=+10{,}40-9{,}25=+1{,}15.$$

η′) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-0{,}25+3{,}7=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{37}{10}=$

$$=-\frac{30}{60}+\frac{20}{60}-\frac{15}{60}+\frac{12}{60}-\frac{15}{60}+\frac{222}{60}=+\frac{254}{60}-\frac{60}{60}=$$

$$=\frac{194}{60}=3\frac{14}{60}=3\frac{7}{30}.$$

Ὁμὰς τρίτη. 21. Παριστῶμεν μὲ θετικοὺς ἀριθμοὺς τὰ κέρδη καὶ μὲ ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς τὰς ζημίας καὶ ἔχομεν:
$+234000-261400+215700-112000=+449700-328400=+121300$
ἤτοι τελικῶς ἐκέρδισεν 121300 δραχ.

22. Παριστῶμεν τὸ ἐνεργητικὸν μὲ θετικὸν ἀριθμὸν καὶ τὸ παθητικὸν μὲ ἀρνητικὸν ἀριθμὸν καὶ ἔχομεν:
$+128000-312400=-184400$. Δηλαδὴ τὸ κεφάλαιον ἐλαττοῦται κατὰ 184400 δραχ.

23. Ἐὰν σημειώσωμεν ὡς θετικοὺς τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι παριστῶσιν αὔξησιν θερμοκρασίας καὶ ὡς ἀρνητικοὺς τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι παριστῶσιν ἐλάττωσιν αὐτῆς θὰ ἔχωμεν :

$$+17{,}6-19{,}1+3{,}1=+20{,}7-19{,}1=+1{,}6^{\circ}.$$

24. Παριστῶμεν μὲ θετικοὺς τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα ἔχει εἰς τὸ ταμεῖον καὶ ὅσα τοῦ ὀφείλουν καὶ μὲ ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ὀφείλει καὶ ἔχομεν :
$+250000-174500-136000-19450+34000+14500+29000=-2450.$
Ἄρα θὰ ὀφείλῃ ἀκόμη 2450 δραχ.

25. Παριστῶμεν μὲ θετικοὺς ἀριθμοὺς ὅσα εἶχε καὶ ὅσα εἰσέπραξε καὶ μὲ ἀρνητικοὺς ἀριθμούς, ὅσα ἐπλήρωσε καὶ ἔχομεν.
$+180000-120000+74000-14800+39400=158600$ δηλ. τοῦ ἔμειναν 158600 δραχ.

26. Παριστῶμεν μὲ θετικοὺς ἀριθμοὺς τὰ διαστήματα τὰ διανυθέντα κατὰ τὴν μίαν διεύθυνσιν καὶ μὲ ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς τὰ διαστήματα τὰ διανυθέντα κατὰ τὴν ἀντίθετον διεύθυνσιν καὶ ἔχομεν :
$+58{,}4-19{,}3+23{,}7-95{,}8=-33$ δηλαδὴ τὸ κινητὸν ἀπέχει τῆς ἀρχῆς κατὰ 33 μ. καὶ εὑρίσκεται πρὸς τὴν ἀρνητικὴν κατεύθυνσιν.

Ἰδιότητες προσθέσεως

27. α') $-3+5-8-7-11-15+6+0-3=+11-47=-36.$ Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ ἄθροισμα, λαμβάνομεν τὸν ἄξονα, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἔχομεν καθορίσει ἀρχὴν κλπ. καὶ ἀναχωροῦντες ἀπὸ τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸν $+11$, προχωροῦμεν ἀριστερὰ αὐτοῦ κατὰ 47 μονάδας καὶ τὸ σημεῖον, ὅπερ εὑρίσκομεν εἶναι τὸ ζητούμενον.

$$\beta')\quad 16-53+47-5-6-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+11=74\frac{2}{5}-64\frac{1}{2}=$$

$=+74\frac{4}{10}-64\frac{5}{10}=+74{,}4-64{,}5=+9{,}9.$ Διὰ νὰ εὕρωμεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὸ ἄθροισμα ἀναχωροῦμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς ἀρχῆς καὶ προχωροῦμεν κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν 9,9 μονάδας, ὅτε τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον φθάνομεν εἶναι τὸ ζητούμενον.

$$\gamma')\quad -\frac{4}{5}+\frac{2}{8}-\frac{3}{4}-5-7-2+1-13=$$

$=-0{,}8+0{,}25-0{,}75-5-7-12+1-13=-38{,}55+1{,}25=-37{,}30.$
Ἀναχωροῦντες ἐκ τῆς ἀρχῆς λαμβάνομεν ἀριστερὰ αὐτῆς 37,30 μονάδας καὶ εὑρίσκομεν οὕτω τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὸ ἄθροισμα ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων. Ὁμοίως καὶ διὰ τὰ λοιπά.

Ἀφαίρεσις

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

Ὁμὰς πρώτη. 28. α′) $8-(-4)=8+(+4)=+12=12$, διότι ἵνα εὕρωμεν τὴν διαφορὰν $8-(-4)$ ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν μειωτέον 8 τὸν ἀντίθετον τοῦ ἀφαιρετέου -4.

β′) $-18-(+19)=-18+(-19)=-37$.

γ′) $-14-(-7)=-14+(+7)=-7$.

δ′) $0{,}9-(-9{,}13)=0{,}9+(+9{,}13)=+10{,}03$.

ε′) $2{,}25-(-1{,}65)=2{,}25+(+1{,}65)=+3{,}90$.

στ′) $2\frac{5}{6}-\left(-3\frac{1}{3}\right)=2\frac{5}{6}+\left(+3\frac{1}{3}\right)=2\frac{5}{6}+\left(+3\frac{2}{6}\right)=$
$=+5\frac{7}{6}=+6\frac{1}{6}$.

ζ′) $9\frac{1}{7}-\left(-7\frac{1}{3}\right)=\left(9\frac{1}{7}\right)+\left(+7\frac{1}{3}\right)=\frac{64}{7}+\left(+\frac{22}{3}\right)=$
$=\frac{64}{7}+\frac{22}{3}=\frac{192}{21}+\frac{154}{21}=\frac{346}{21}=16\frac{10}{21}$.

η′) $(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)=(\alpha+\gamma)+(-\beta-\gamma)=\alpha+\gamma-\beta-\gamma=\alpha-\beta$.

Ὁμὰς δευτέρα: 29. α′) $120+19-(-18)=139-(-18)=139+$
$+(+18)=157$.

β′) $-17-(-4)+(+8)=-17+(+4)+(+8)=-17+(+12)=-5$.

γ′) $-5\frac{1}{2}+\left(-6\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{1}{5}\right)=-5\frac{1}{2}+\left(-6\frac{1}{4}\right)+$
$+\left(+\frac{1}{5}\right)=-5\frac{2}{4}+\left(-6\frac{1}{4}\right)+\left(+\frac{1}{5}\right)=-11\frac{3}{4}+\left(+\frac{1}{5}\right)=$
$=-11\frac{15}{20}+\left(+\frac{4}{20}\right)=-11\frac{11}{20}$.

δ′) $(\alpha-\gamma)-(\beta-\gamma)=\alpha-\gamma+(-\beta+\gamma)=\alpha-\gamma-\beta+\gamma=\alpha-\beta$.

30. α′) $2-7=-5$. β′) $8-10=-2$. γ′) $1{,}5-2{,}2=-0{,}7$. δ′) $15-230=-215$. ε′) $1{,}25-9{,}65=-8{,}40$.

ς′) $\alpha-(\beta+\gamma)=\alpha+(-\beta-\gamma)=\alpha-\beta-\gamma=(\alpha-\beta)-\gamma$.

Ὁμὰς τρίτη: 31. Παριστῶμεν μὲ θετικὸν ἀριθμὸν τὸ ἐνεργητικὸν καὶ μὲ ἀρνητικὸν τὸ παθητικὸν καὶ ἔχομεν $+1564{,}20-(-1564{,}20)=$ $=1564{,}20+(+1564{,}20)=+3128{,}40$. Ἄρα ἡ περιουσία αὐξάνεται κατὰ 3128,40 δραχ.

32. Ἡ περιουσία του μεταβάλλεται κατὰ $-(+15484{,}3)+(-162384{,}70)=$ $=-177869$ δραχ. ἤτοι ἐλαττοῦται κατὰ 177869 δραχ.

33. Τὸ τμῆμα ΒΓ, τὸ ὁποῖον ζητεῖται θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν τμημάτων ΒΑ καὶ ΑΓ. Ἄρα θὰ βαδίσῃ $238+4846=5084$ βήματα ἐκ τοῦ σημείου Β πρὸς τὰ ἀριστερά.

34. Εἶναι φανερόν, ὅτι πρέπει νὰ κερδίσῃ ἀφ' ἑνὸς μὲν ὅσα ἔχασε καὶ ἀφ' ἑτέρου καὶ 8958,65 δραχ. ἤτοι ἐν ὅλῳ

$15016{,}3+8958{,}65=23974{,}95$ δραχ.

Ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα

35. α') $2-3+5-7-6+7-11=-1+5-7-6+7-11=$
$=4-7-6+7-11=-3-6+7-11=-9+7-11=-2-11=-13.$
ἢ $(2+5+7)-(3+7+6+11)=14-27=-13.$

Διὰ νὰ παραστήσωμεν τὸ ἐξαγόμενον γεωμετρικῶς ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Εὑρίσκομεν ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸν ἀριθμὸν $+14$ καὶ προχωροῦμεν ἐξ αὐτοῦ ἀριστερὰ κατὰ 27 μονάδας. Τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον θὰ φθάσωμεν παριστᾷ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν.

β') $-3-2\frac{1}{2}+4-8-7-\frac{4}{5}=-5\frac{1}{2}+4-8-7-\frac{4}{5}=$
$=-1\frac{1}{2}-8-7-\frac{4}{5}=-9\frac{1}{2}-7-\frac{4}{5}=-16\frac{1}{2}-\frac{4}{5}=$
$=-16\frac{13}{10}=-17\frac{3}{10}=-17{,}3.$

γ') $(-1+5-8)+(3-2-7+4)=-7+(-2)=-7-2=-9.$

δ') $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-4\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+5-8\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-4+$
$+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+5-8=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)+(-4+5-8)=$
$=0+0-7=-7.$

ε') $\left(3-5-6-7\frac{1}{2}-3\right)-\left(2-6+4-\frac{1}{2}\right)=3-5-6-7\frac{1}{2}-3+$
$+\left(-2+6-4+\frac{1}{2}\right)=3-5-6-7\frac{1}{2}-3-2+6-4+\frac{1}{2}=-18.$

ς') $-\left(3\frac{1}{2}-4-6\right)+7-\left(3-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}-3\right)=$
$=-3\frac{1}{2}+4+6+7-3+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+3=13\frac{7}{8}.$

36. $3-5-4+7-8-1-15=+(-4-8-1)+3-5+7-15$
καὶ $-(4+8+1)+3-5+7-15.$

37. $-6\frac{1}{2}+7-12-7+5-\frac{3}{4}=-\left(6\frac{1}{2}+12+\frac{3}{4}\right)+7-7+5$
καὶ $-6\frac{1}{2}+7-12-7+5-\frac{3}{4}=+\left(-6\frac{1}{2}-12-\frac{3}{4}\right)+7-7+5.$

Πολλαπλασιασμός

38. Ὁμὰς πρώτη. α') $(-5).(+8)=-40$, διότι τὸ γινόμενον δύο ἑτεροσήμων ἀλγ. ἀριθμῶν ἔχει πρόσημον μὲν —, ἀπόλυτον δὲ τιμὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων.

β') $(+18).(-4)=-72.$ γ') $(-7).(+15)=-105.$ δ') $(-7)(-7)=$

= 49, διότι τὸ γινόμενον δύο ὁμοσήμων ἀλγ. ἀριθμῶν ἔχει τὸ σημεῖον +, ἀπόλυτον δὲ τιμὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων.

ε') $(+8,4) \cdot (-6,5) = -54,6$. στ') $(-9,8) \cdot (8,5) \cdot (4,3) \cdot (2,3) = -823,837$.

ζ') $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta = \gamma \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \delta$, διότι εἰς πᾶν γινόμενον δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν παραγόντων, χωρὶς τὸ γινόμενον νὰ μεταβληθῇ (νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως τῶν παραγόντων).

Ὁμὰς δευτέρα: 39. α') $(-3,9) \cdot (-7,6) = +29,64$.

β') $(9,45) \cdot (-3,5) = -33,11$. γ') $(-9) \cdot (-7) \cdot (-3) = -189$.

δ') $\left(+4\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-3\frac{1}{6}\right) \cdot (-6,8) = \left(+\frac{9}{2}\right) \cdot \left(-\frac{19}{6}\right) \cdot \left(-\frac{68}{10}\right) =$

$= +\frac{11628}{120} = 96\frac{108}{120} = 96\frac{9}{10} = 96,9$.

40. α') $(-16) \cdot 14 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-3\frac{3}{8}\right) =$

$= (-16) \cdot (14) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{27}{8}\right) = -\frac{16 \cdot 14 \cdot 2 \cdot 27}{3 \cdot 8} =$

$= -(2 \cdot 14 \cdot 2 \cdot 9) = -504$.

β') $(-3,1) \cdot (+6) \cdot (+8) \cdot (-7) = +1041,6$.

γ') $(+7) \cdot (-4) \cdot (+8)(+5) = -1120$.

δ') $0,6 \cdot [9,74 - 0,9(+6,5)] \cdot 0,3 = 0,6 \cdot [9,74 - 5,85] \cdot 0,3 =$
$= 0,6 \cdot 3,89 \cdot 0,3 = 0,7002$.

41. α') $(-3) \cdot (-4,1) \cdot (-2) + 8 \cdot (-4,2) \cdot (-5) = -24,6 + 96 = 71,4$.

β') $(-5,1) \cdot (-3,2) \cdot (-1) - 12 \cdot (-3,2) \cdot (-4) \cdot (-7) - 20 =$
$= -16,32 + 1075,2 - 20 = 1038,88$.

42. α') $\frac{5}{8} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (2+5-8) = \frac{15}{160} \cdot (-1) =$

$= -\frac{15}{160} = -\frac{3}{32}$.

β') $(-32) \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0,4\right) - \frac{4}{5} \cdot [0,01 + 0,01(-5,4)] =$

$= (-32) \cdot \left(-\frac{17}{30}\right) - \frac{4}{5} \cdot (-0,044) = \frac{544}{30} + \frac{0,176}{5} = \frac{544}{30} + \frac{176}{5000} = 17\frac{5056}{30000}$

43. $0,53 \cdot (-1,2) \cdot (-3-4) + 19 \cdot (-0,45) = 4,452 - 9,55 = -5,098$.

44. α') $+40$. β') $-\frac{53}{4}$. γ') $\frac{4}{5}$. δ') 0. ε') 0.

στ) Εἰς τὸ δοθὲν γινόμενον ἐφαρμόζομεν πρῶτον τὴν ἰδιότητα τῆς ἀντιμεταθέσεως καὶ ἔπειτα τὴν συνθετικὴν ἰδιότητα καὶ ἔχομεν:
$\alpha.\ \beta.\ \gamma.\ \delta.\ \varepsilon = \alpha.\ \varepsilon.\ \beta.\ \gamma.\ \delta = (\alpha.\ \varepsilon) \cdot \beta.\ \gamma.\ \delta$.

ζ') Εἰς πᾶν γινόμενον δυνάμεθα ἕνα ἢ περισσοτέρους παράγοντας αὐτοῦ νὰ ἀντικαταστήσωμεν μὲ ἄλλους ἔχοντας αὐτὸν ὡς γινόμενον. Ἄρα $(\alpha\beta\gamma) \cdot (\delta.\varepsilon.\zeta.) = \alpha.\beta.\gamma.\delta.\varepsilon.\zeta$.

Διαίρεσις

Ὁμὰς πρώτη. 45. α') $(+2):(-7) = -\frac{2}{7}$, διότι τὸ πηλίκον δύο ἑτεροσήμων σχετικῶν ἀριθμῶν ἔχει πρόσημον μὲν —, ἀπόλυτον δὲ τιμὴν τὸ πηλίκον τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ διαιρετέου διὰ τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ διαιρέτου.

β') $(-45):(+9) = -5$. γ') $(-49):49 = -1$.

δ') $(-1944):(-36) = +54$, διότι τὸ πηλίκον δύο ὁμοσήμων ἀλγ. ἀριθμῶν ἔχει πρόσημον μὲν +, ἀπόλυτον δὲ τιμὴν τὸ πηλίκον τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ διαιρετέου διὰ τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ διαιρέτου.

ε') $(+0{,}95):(+0{,}5) = +1{,}9$. στ') $(-349):1{,}8 = (-349):\frac{18}{10} =$

$= (-349)\cdot\frac{10}{18} = -\frac{3490}{18} = -193\frac{16}{18} = -193\frac{8}{9}$.

ζ') $(-1425):(32{,}1) = -44\frac{42}{107}$. η') $(\alpha\cdot\gamma):(\beta\cdot\gamma) = \frac{\alpha}{\beta}$.

Ὁμὰς δευτέρα : 46. α') $3\frac{2}{3} : \left(-1\frac{4}{9}\right) : 8 = \frac{11}{3} : \left(-\frac{13}{9}\right) : 8 =$

$= \frac{11}{3}\cdot\left(-\frac{9}{13}\right) : 8 = -\frac{99}{39} : 8 = -\frac{99}{312} = -\frac{33}{104}$.

β') $(-9{,}6):0{,}7:6\frac{1}{2} = -\frac{96}{10}:\frac{7}{10}:\frac{13}{2} = -\frac{96}{10}\cdot\frac{10}{7}\cdot\frac{2}{13} = -\frac{192}{91}$.

γ') $(-1):4:(-3):\left(-\frac{1}{3}\right):(+2) = +\frac{1}{12} : -\frac{1}{3} : +2 =$

$= \frac{1}{12}\cdot\left(-\frac{3}{1}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{-3}{24} = -\frac{1}{8}$.

47. α') $(-34):(-9-8) = (-34):(-17) = +\frac{34}{17} = +2$.

β') $(-18):9-(-4):2 = (-18):[9+(+4)]:2 = (-18):(+13):2 =$

$= -\frac{18}{13}:2 = -\frac{9}{13}$.

γ') $(-25):(-5):(-5):(-5) = \frac{25}{5.5.5} = \frac{25}{125} = \frac{1}{5}$.

48. α') Τὸ x, συμφώνως μὲ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως, θὰ ἰσοῦται μὲ $160:(-40) = -4$.

β') Ὁμοίως πρέπει $x = -4$. γ') $x = 4$. δ') $x = 5$. ε') $x = -0{,}6$ καὶ στ') $x = \frac{48}{2592}$.

49. α') $(\alpha:\rho):(\beta:\rho) = \frac{\alpha}{\rho}:\frac{\beta}{\rho} = \frac{\alpha}{\rho}\cdot\frac{\rho}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$.

β') $(\alpha\beta\gamma):\alpha = (\alpha:\alpha).\beta.\gamma = 1.\beta.\gamma = \beta\gamma$.

γ') $(\alpha:\beta):\gamma = \frac{\alpha}{\beta}:\gamma = \frac{\alpha}{\beta\gamma}$.

Ἀλγεβρικὰ κλάσματα

50. $\frac{-25}{-15}=\frac{-5\,.\,5}{-5\,.\,3}=\frac{+5}{5}\cdot\frac{5}{3}=(+1)\cdot\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$.

$\frac{-3}{48}=\frac{(-3)\,.\,1}{3\,.\,16}=\frac{-3}{3}\cdot\frac{1}{6}=(-1)\cdot\frac{1}{16}=-\frac{1}{16}$.

Ὁμοίως διὰ τὰ λοιπὰ εὑρίσκομεν $\frac{11}{4}$, $\frac{5}{35}$, $\frac{1}{25}$.

51. α΄) $\frac{2}{-3}$, $\frac{-5}{8}$, $\frac{1}{-2}$. Τὸ Ε. Κ. Π. τῶν παρονομαστῶν ἀπολύτως εἶναι τὸ 24. Τὰ πηλίκα τοῦ 24 διὰ τῶν παρονομαστῶν εἶναι ἀντιστοίχως —7, 3, —12. Πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον ὅρον ἑκάστου κλάσματος ἀντιστοίχως ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον καὶ ἔχομεν τὰ ἰσοδύναμα αὐτῶν κλάσματα $\frac{-16}{24}$, $\frac{-15}{24}$, $\frac{-12}{24}$

β΄) Ε. Κ. Π. τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παρονομαστῶν εἶναι 180. Τὰ δὲ πηλίκα αὐτοῦ δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν εἶναι 45, 20, 90, 36 καὶ τὰ ἰσοδύναμα πρὸς τὰ δοθέντα κλάσματα εἶναι τὰ

$\frac{-135}{180}$, $\frac{-80}{180}$, $\frac{90}{180}$, $\frac{108}{180}$.

γ΄) $\frac{\overset{3}{\frown}\!\!-11}{15}$, $\frac{\overset{-1}{\frown}\!32}{-44}$, $\frac{\overset{15}{\frown}\!2}{3}$, $\frac{\overset{9}{\frown}\!7}{5}$. Ε. Κ. Π. = 45.

$\frac{-33}{45}$, $\frac{-32}{45}$, $\frac{30}{45}$, $\frac{63}{45}$.

δ΄) Ε. Κ. Π. =1800 καὶ τὰ ἰσοδύναμα κλάσματα εἶναι:

$\frac{-675}{1800}$, $\frac{-288}{1800}$, $\frac{400}{1800}$, $\frac{600}{1800}$.

ε΄) Ε. Κ. Π. = 168. Τὰ ἰσοδύναμα κλάσματα εἶναι:

$\frac{-120}{168}$, $\frac{32}{168}$, $\frac{-112}{168}$, $\frac{-105}{168}$, $\frac{84}{168}$.

στ΄) Ε. Κ. Π. = 24. Τὰ ἰσοδύναμα κλάσματα εἶναι:

$\frac{-12}{24}$, $\frac{8}{24}$, $\frac{-20}{24}$, $\frac{-21}{24}$, $\frac{6}{24}$.

Δυνάμεις

51α. α΄) $(-6)^3=(-6)\,.\,(-6)\,.\,(-6)=-216$.

β΄) $(-9)^2=(-9)\,.\,(-9) \qquad =+81$.

γ΄) $(+8)^5=(+8)\,.\,(+8)\,(+8)\,.\,(+8)\,.\,(+8)=+32768$.

δ΄) $(-3)^3=(-3)\,.\,(-3)\,.\,(-3)=-27$.

ε΄) $(-7)^5=(-7)\,.\,(-7)\,.\,(-7)\,.\,(-7)\,.\,(-7)=-16807$.

ϛ΄) $(-1)^3=(-1)\,.\,(-1)\,.\,(-1)=-1$.

52. Ἡ δύναμις $(-4)^4$ ἔχουσα ἄρτιον ἐκθέτην εἶναι ἀριθμὸς θετικός. Ὁμοίως ὅλαι αἱ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἔχουσιν ἄρτιον ἐκθέτην εἶναι ἀριθμοὶ θετικοί. Ἡ δύναμις ὅμως $(-5)^3$, ἡ ὁποία ἔχει ἐκθέτην περιττὸν εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός. Ὁμοίως καὶ ὅλαι αἱ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι περιττὸν ἐκθέτην εἶναι ἀριθμοὶ ἀρνητικοί.

Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων

52΄. α΄) $(-2)^2 . (-2)^3 = (-2)^{2+3} = (-2)^5 = -32.$

β΄) $(-3)^4 . (-3)^2 = (-3)^{4+2} = (-3)^6 = +729.$

γ΄) $(-5)^2 . (-5)^3 = (-5)^{2+3} = (-5)^5 = -3125.$

δ΄) $(1,5)^3 . (1,5)^2 = (1,5)^{3+2} = (1,5)^5 = 7,69375.$

ε΄) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2+3+4} = \left(-\frac{1}{2}\right)^9 = -\frac{1}{512}.$

ς΄) $(-5,1)^3 . (-5,1)^4 = (-5,1)^{3+4} = (-5,1)^7 = -3419,94651.$

ζ΄) $0,5^5 . 0,5^{10} . 0,5^3 = 0,5^{5+10+3} = 0,5^{18}.$

53. α΄) $[(-2)^2]^3 = (-2)^{2 \cdot 3} = (-2)^6 = 64.$

β΄) $[(-3)^2]^2 = (-3)^{2 \cdot 2} = (-3)^4 = 81.$

γ΄) $[(-1)^2]^3 = (-1)^{2 \cdot 3} = (-1)^6 = +1.$

δ΄) $[(-1)^3]^3 = (-1)^{3 \cdot 3} = (-1)^9 = -1.$

ε΄) $\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^2\right]^2 = \left(-\frac{3}{5}\right)^{2 \cdot 2} = \left(-\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625}.$

στ΄) $[[(-10)^2]^3]^5 = (-10)^{2 \cdot 3 \cdot 5} = (-10)^{30}.$

54. α΄) $[(0,2)^2]^4 = (0,2)^8 = 0,00000256.$

β΄) $[(0,4)^2]^2 = 0,4^4 = 0,0256.$

γ΄) $[(1,5)^2]^3 = (1,5)^{2 \cdot 3} = (1,5)^6 = 11,390625.$

δ΄) $[(0,5)^2]^3 = (0,5)^6 = 0,015625.$

ε΄) $[(-3)^4]^2 = (-3)^8 = 6561.$

στ΄) $\left[\left(-\frac{4}{5}\right)^2\right]^3 = \left(-\frac{4}{5}\right)^6 = \frac{4096}{15625}.$

ζ΄) $\left[\left[(-5)^2\right]^3\right]^2 = (-5)^{12} = 244140625.$

η΄) $\left[\left[\left(-\frac{4}{9}\right)^2\right]^3\right]^5 = \left(-\frac{4}{9}\right)^{30}.$

55. α΄) $[(-2) . (-3)]^2 = (-2)^2 . (-3)^2 = 4 . 9 = 36.$

β΄) $[(-5) . (-4)]^2 = (-5)^2 . (-4)^2 = 25 . 16 = 400.$

γ΄) $[(+1) . (-2)]^4 = (+1)^4 . (-2)^4 = 1 . 16 = 16.$

δ΄) $[(-1) . (-2) . (-3)]^2 = (-1)^2 . (-2)^2 . (-3)^2 = 1 . 4 . 9 = 36.$

ε΄) $[2 . 3 . (-4) . (-2)]^2 = 2^2 . 3^2 . (-4)^2 . (-2)^2 = 4 . 9 . 16 . 4 = 2304.$

στ') $[(-2)\,(-3)\,.\,4\,.\,1\,.\,0{,}5)]^3 = (-2)^3\,.\,(-3)^3\,.\,4^3\,.\,1^3\,.\,0{,}5^3 =$
$= (-8)\,.\,(-27)\,.\,64\,.\,1\,.\,0{,}125 = 1728.$

ζ') $[(-1)\,.\,(-2)\,.\,(+3)]^2 = (-1)^2\,.\,(-2)^2\,.\,(+3)^2 = 1\,.\,4\,.\,9 = 36.$

η') $\left[\left(-\frac{5}{8}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\right]^3 = \left(-\frac{5}{8}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{5^3}{8^3}\cdot\frac{2^3}{3^3} = -\frac{125}{512}\cdot\frac{8}{27} =$
$= -\frac{125}{1728}.$

θ') $\left[\left(\frac{5}{8}\right)\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\right]^2 = \left(\frac{5}{8}\right)^2\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{5^2}{8^2}\cdot\frac{4^2}{9^2} = \frac{25}{64}\cdot\frac{16}{81} = \frac{25}{324}.$

ι') $\left[(-5)^2.(-6)^2\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\right]^2 = (-5)^4.(-6)^4\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)^2 =$
$= 625\,.\,46656\cdot\frac{25}{81} = 625\,.\,576\,.\,25.$

ια') $\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4}{9}\cdot\frac{16}{81}\cdot\frac{1}{4} =$
$= \frac{16}{729}.$

ιβ') $\left[2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{9}\cdot(-0{,}1)\right]^2 = 2^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^2\cdot(-0{,}1)^2 =$
$= 4\cdot\frac{16}{25}\cdot\frac{4}{81}\cdot 0{,}01 = \frac{256}{202500}.$

ιγ') $\left[\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{-3}{7}\cdot 0{,}4\right]^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^3\cdot\left(\frac{-3}{7}\right)^3\cdot 0{,}4^3 =$
$= \frac{8}{125}\cdot\frac{64}{729}\cdot\frac{-27}{343}\cdot 0{,}064 = -\frac{32768}{1157625000}.$

ιδ') $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)^3\right]^4 = \left(\frac{3}{4}\right)^8\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{12}\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)^{12}.$

56. α') $x^2\,.\,x^3 = x^{2+3} = x^5.$ β') $y^3\,.\,y^4 = y^{3+4} = y^7.$

γ') $x^6\,.\,x = x^6\,.\,x^1 = x^7.$ δ') $(-x^4)^2 = (-x^4)\,.\,(-x^4) = x^8.$

ε') $(-\beta^6)^3 = (-\beta^6)\,.\,(-\beta^6)\,.\,(-\beta^6) = -(\beta^6\,.\,\beta^6\,.\,\beta^6) = -\beta^{18}.$

στ') $x^2\,.\,x^1 = x^{2+1} = x^3.$ ζ') $x^{2\nu}\,.\,x\,.\,(-x)^{2\nu} = x^{2\nu}\,.\,x\,.\,(+x^{2\nu}) =$
$= x^{2\nu+1+2\nu} = x^{4\nu+1}.$

η') $x^{2\nu-1}\,.\,x\,(-x) = -(x^{2\nu-1}\,.\,x^1\,.\,x^1) = -x^{2\nu-1+1+1} = -x^{2\nu+1}.$

θ') $x^{2\nu}\,(-x)^3 = x^{2\nu}\,(-x^3) = -(x^{2\nu}\,.\,x^3) = -(x^{2\nu}\,.\,x^3) = -x^{2\nu+3}.$

ι') $x^{2\nu-1}\,.\,x^{2\nu}\,.\,y^{3\mu-1}\,.\,y^2 = x^{2\nu-1+2\nu}\,.\,y^{3\mu-1+2} = x^{4\nu-1}\,.\,y^{3\mu+1}.$

57. α') $(4\alpha\beta)^2 = 4^2\,.\,\alpha^2\,.\,\beta^2 = 16\alpha^2\beta^2.$

β') $(-3xy)^3 = (-3)^3\,.\,x^3\,y^3 = -27x^3y^3.$

γ') $(5x^2)^2 = 5^2.\,(x^2)^2 = 25x^4.$ δ') $(-xy\omega)^1 = -x^1y^1\omega^1 = -xy\omega.$

ε') $\left(-\frac{2}{3}\,x^2y\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2\cdot(x^2)^2\,.\,y^2 = \frac{4}{9}\,x^4y^2.$

στ') $\left(-\frac{1}{5}\,xy^2\right)^3 = \left(-\frac{1}{5}\right)^3 x^3\,(y^2)^3 = -\frac{1}{125}\,x^3y^6.$

ζ') $\left(-\frac{3}{4}x^2\right)^0 = 1.$ η') $\left(\frac{5}{8}x^{2\nu}\right)^0 = 1.$

θ') $\left(\frac{5}{8}x^2y\right)^3 \cdot (4\alpha\beta)^0 \cdot (3\alpha^2\beta^3)^2 = \frac{125}{512}x^6y^3 \cdot 1 \cdot 9 \cdot \alpha^4 \cdot \beta^6 =$

$$= \frac{1125}{512}x^6y^3\alpha^4\beta^6.$$

58. α') $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2 = 4.$

β') $(-2)^5 : (-2)^3 = (-2)^{5-3} = (-2)^2 = 4.$

γ') $(-7)^4 = 2401.$ δ') $(-3)^3 = -27.$ ε') $\left(-\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}.$

ς') $(-5{,}3)^2 = 28{,}09.$ ζ') $(-3)^3 \cdot 5^3 \cdot 7^3 = -1157625.$

η') $[(-1)\cdot(-3)\cdot 5 \cdot 7]^{10} : [(-1)(-3)\cdot 5\cdot 7]^5 = [(-1)(-3)\cdot 5\cdot 7]^5 =$
$= (-1)^5 \cdot (-3)^5 \cdot 5^5 \cdot 7^5 = (-1)\cdot(-243)\cdot 3125 \cdot 16807.$

Δυνάμεις μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους ἀρνητικοὺς

59. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν θὰ ἔχωμεν :

α') $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}.$ β') $(3{,}5)^{-2} = \frac{1}{3{,}5^2} = \frac{1}{12{,}25}.$

γ') $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}.$ δ') $20^{-2} = \frac{1}{20^2} = \frac{1}{400}.$

ε') $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{\frac{3^2}{4^2}} = \frac{1}{\frac{9}{16}} = \frac{16}{9}.$

ς') $\left(-\frac{1}{8}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1^2}{8^2}} = \frac{1}{\frac{1}{64}} = 64.$

ζ') $(-1)^{-2\nu} = \frac{1}{(-1)^{2\nu}} = \frac{1}{1^{2\nu}} = \frac{1}{1} = 1.$

η') $(-1)^{-(2\nu+1)} = \frac{1}{(-1)^{2\nu+1}} = \frac{1}{-1^{2\nu+1}} = \frac{1}{-1} = -1.$

60. α') $(-1)^{-3} = \frac{1}{(-1)^3} = \frac{1}{-1} = -1.$

β') $(-0{,}01)^{-4} = \frac{1}{(-0{,}01)^4} = \frac{1}{0{,}01^4} = \frac{1}{0{,}00000001} = 100000000.$

γ') $\frac{1}{2^{-3}} = \frac{1}{\frac{1}{2^3}} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8.$

δ') $\frac{1}{5^{-2}} = \frac{1}{\frac{1}{5^2}} = \frac{1}{\frac{1}{25}} = \frac{25}{1} = 25.$

ε') $\frac{1}{(-7)^{-4}} = \frac{1}{\frac{1}{(-7)^4}} = \frac{1}{\frac{1}{2401}} = 2401.$

61. α') Διὰ x = 1 ἔχομεν: $5^{1-1}+7^{1}+3^{1-1}=5^{0}+7^{1}+3^{0}=1+7+1=9$.

Διὰ x = − 2 ἔχομεν: $5^{-2-1}+7^{-2}+3^{-2-1}=5^{-3}+7^{-2}+3^{-3}=\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{3^3}=\frac{1}{125}+\frac{1}{49}+\frac{1}{27}$.

Διὰ x = − 3 ἔχομεν: $5^{-3-1}+7^{-3}+3^{-3-1}=5^{-4}+7^{-3}+3^{-4}=\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{3^4}=\frac{1}{625}+\frac{1}{343}+\frac{1}{81}$.

β') Διὰ x = 1 ἔχομεν: $\left(\frac{1}{3}\right)^{2\cdot 1-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3\cdot 1-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^{4\cdot 1}=$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^{0}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}-\left(\frac{1}{4}\right)^{4}=1+\frac{1}{4}-\frac{1}{256}=1\,\frac{63}{256}.$$

Διὰ x = 2 ἔχομεν: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-6-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-8}=$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^{-6}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-7}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-8}=\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{6}}+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{7}}-\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^{8}}=$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{3^6}}+\frac{1}{\frac{1}{2^7}}-\frac{1}{\frac{1}{4^8}}=3^6+2^7-4^8.$$

Διὰ x = − 3 εὑρίσκομεν: $3^{8}+2^{10}-4^{12}$.

62. $2^5 . 2 . 2^0 . 2^{-2}=2^{5+1+0-2}=2^4=16$. $4^{-3} . 4^{+3}=4^{-3+3}=4^0=1$.

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{1}{0,1}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{3}}+\frac{1}{\left(\frac{1}{0,1}\right)^{3}}=\frac{1}{\frac{-8}{27}}\cdot\frac{1}{\frac{1}{0,001}}=$$

$$=\frac{(-27) . 0,001}{8}=\frac{-27}{8000}.$$

63. α') $\alpha^{-3} . \alpha^{-4} . \alpha^{0} . \alpha^{5}=\alpha^{-3-4+0+5}=\alpha^{-2}=\frac{1}{\alpha^2}$.

β') $2^3 . 2^0 . 2^4 . 2^{-8}=2^{3+0+4-8}=2^{-1}=\frac{1}{2^1}=\frac{1}{2}$.

γ') $(7^{-8} : 7^{-9}) . 3^{-2}=7^{-8}\cdot\frac{1}{7^{-9}}\cdot 3^{-2}=7^{-8} . 7^{+9} . 3^{-2}=$

$$=7^1\cdot\frac{1}{3^2}=\frac{7}{9}.$$

δ') $(2\alpha\beta)^{-3}=\frac{1}{(2\alpha\beta)^3}=\frac{1}{8\alpha^3\beta^3}$.

ε') $x^{\nu} . x^{2\nu} : x^{\nu}=x^{\nu+2\nu} : x^{\nu}=x^{\nu+2\nu-\nu}=x^{2\nu}$.

στ') $5^2 : 5^{-4}=5^{2-(-4)}=5^{2+4}=5^6$.

ζ') $(3\alpha^{-3} . \beta^{-2} . \gamma^{-4})^{-2} . (-2\alpha^2 . \beta^{-2})^2=\frac{1}{(3\alpha^{-3} . \beta^{-2} . \gamma^{-4})^2}\cdot 4\alpha^4 . \beta^{-4}=$

$$=\frac{1}{9\alpha^{-6} . \beta^{-4} . \gamma^{-8}}\cdot 4\alpha^4 . \beta^{-4}=\frac{1}{9\cdot\frac{1}{\alpha^6}\cdot\frac{1}{\gamma^8}}\cdot 4\alpha^4=\frac{4 . \alpha^{10} . \gamma^{8}}{9}.$$

64. α΄) $5 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^3 + 13 \cdot 2^3 - 11 \cdot 2^{-3} = 16 \cdot 2^3 - 11 \cdot \frac{1}{2^3} =$

$= 16 \cdot 8 - \frac{11}{8} = \frac{16 \cdot 64 - 11}{8} = \frac{1013}{8} = 126 \frac{5}{8}$.

β΄) $4 \cdot 6^3 - 5 \cdot (-6)^3 + 7 \cdot (-6)^3 + 9 \cdot (-6)^3 + 13 \cdot 6^3 =$
$= 4 \cdot 216 - 5 \cdot (-216) + 7 \cdot (-216) + 9 \cdot (-216) + 13 \cdot 216 =$
$= 17 \cdot 216 + 11\,(-216) = 216 \cdot [17 - 11] = 216 \cdot 6 = 1296$.

γ΄) $5 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^5 - 7 \cdot 2^5 + 8 \cdot 2^9 + 11 \cdot 2^5 = (-3 - 7 + 11) \cdot 2^5 +$
$+ 5 \cdot 2^4 + 8 \cdot 2^9 = 2^5 + 5 \cdot 2^4 + 8 \cdot 2^9 = 32 + 80 + 8 \cdot 512 =$
$= 32 + 80 + 4096 = 4208$.

δ΄) $0{,}75\alpha^5 - 0{,}5\alpha^4 - 0{,}9\alpha^5 + 0{,}7\alpha^4 + 0{,}8\alpha^5 - 1{,}2\alpha^4 =$
$= 0{,}75 \cdot 5^5 - 0{,}5 \cdot 5^4 - 0{,}9 \cdot 5^5 + 0{,}7 \cdot 5^4 + 0{,}8 \cdot 5^5 - 1{,}2 \cdot 5^4 = 1406{,}25$.

65. α΄) $32 \cdot 4^{-3} = 32 \cdot \frac{1}{4^3} = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$.

β΄) $81 \cdot 3^{-5} = 81 \cdot \frac{1}{3^5} = 81 \cdot \frac{1}{243} = \frac{81}{243} = \frac{1}{3}$.

γ΄) $\frac{2^{-5}}{4^{-3}} = \frac{\frac{1}{2^5}}{\frac{1}{4^3}} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{64}} = \frac{64}{32} = 2$.

δ΄) $\frac{3^{-6}}{9^{-3}} = \frac{3^{-6}}{(3^2)^{-3}} = \frac{3^{-6}}{3^{-6}} = 1$.

ε΄) $\frac{10^{-3}}{10^{-2}} = \frac{\frac{1}{10^3}}{\frac{1}{10^2}} = \frac{10^2}{10^3} = \frac{1}{10}$.

στ΄) $\frac{(-6)^{-2}}{(-9)^{-2}} = \frac{\frac{1}{(-6)^2}}{\frac{1}{(-9)^2}} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{81}} = \frac{81}{36} = \frac{9}{4}$.

ζ΄) $\frac{(-10)^{-4}}{(-15)^{-2}} = \frac{\frac{1}{(-10)^4}}{\frac{1}{(-15)^2}} = \frac{\frac{1}{10000}}{\frac{1}{225}} = \frac{225}{10000} = 0{,}0225$.

η΄) $\frac{5}{5^{-2}} + \frac{10}{10^{-1}} + \frac{10^{-2}}{10^{-3}} - 100^2 = \frac{5}{\frac{1}{5^2}} + \frac{10}{\frac{1}{10}} + \frac{\frac{1}{10^2}}{\frac{1}{10^3}} - 100^2 =$

$= 5 \cdot 5^2 + 10 \cdot 10 + 10 - 100^2 = 125 + 100 + 10 - 10000 =$
$= 235 - 10000 = -9765$.

Ἀνισότητες

66. Ἔστωσαν οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β καὶ $\alpha < \beta$. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\alpha^{-\mu} > \beta^{-\mu}$, ἂν μ εἶναι θετικός. Ἐπειδὴ α καὶ β εἶναι θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν αβ θὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμός. Ἐὰν λοιπὸν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς δοθείσης ἀνισότητος $\alpha<\beta$ διὰ τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ $\alpha\beta$, αὔτη διατηρεῖται ἤτοι:

$\frac{\alpha}{\alpha\beta}<\frac{\beta}{\alpha\beta}$ ἢ $\frac{1}{\beta}<\frac{1}{\alpha}$. Ἐὰν δὲ τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος $\frac{1}{\beta}<\frac{1}{\alpha}$, ὑψώσωμεν εἰς τὴν θετικὴν δύναμιν μ λαμβάνομεν: $\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\mu}<\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\mu}$

ἢ $\frac{1}{\beta^{\mu}}<\frac{1}{\alpha^{\mu}}$ ἢ $\beta^{-\mu}<\alpha^{-\mu}$ ἢ $\alpha^{-\mu}>\beta^{-\mu}$.

Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ἀρνητικοί, τότε διακρίνομεν δύο περιπτώσεις καθ' ὅσον ὁ μ εἶναι ἄρτιος ἢ περιττὸς ἀριθμός.

α΄) **Ἔστω ὁ μ ἄρτιος δηλ. $\mu=2K$.** Τότε, ἐπειδὴ $\alpha<\beta$ καὶ οἱ α, β εἶναι ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ καὶ ἐκ δύο ἀρνητικῶν μικρότερος εἶναι ὁ ἀπολύτως μεγαλύτερος, θὰ ἔχωμεν $|\alpha|>|\beta|$ ἢ $\alpha^2>\beta^2$, ὅπου τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος $\alpha^2>\beta^2$ εἶναι πλέον θετικοὶ ἀριθμοί. Συμφώνως δὲ πρὸς τὸ προηγούμενον θὰ ἔχωμεν: $(\alpha^2)^{-\kappa}<(\beta^2)^{-\kappa}$ ἢ $\alpha^{-2\kappa}<\beta^{-2\kappa}$ ἢ $\alpha^{-\mu}<\beta^{-\mu}$ καθ' ὅσον $2\kappa=\mu$ ἐξ ὑποθέσεως. Ἄρα εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἀνισότης διατηρεῖται.

β΄) **Ἔστω ὅτι μ εἶναι περιττὸς δηλ. $\mu=2K+1$.** Τότε ἐπειδὴ $|\alpha|>|\beta|$ θὰ ἔχωμεν $|\alpha|^{-\mu}<|\beta|^{-\mu}$. Ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ α καὶ β εἶναι ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ θὰ εἶναι $|\alpha|=-\alpha$ καὶ $|\beta|=-\beta$, ἔνθα οἱ ἀριθμοὶ $-\alpha$, $-\beta$ θὰ εἶναι θετικοὶ καὶ θὰ ἔχωμεν $-\alpha^{-\mu}<-\beta^{-\mu}$ ἢ $\alpha^{-\mu}>\beta^{-\mu}$ ἤτοι ἡ ἀνισότης ἑτεροστρέφεται.

67. α΄) Ἐπειδὴ $\alpha>1$, θὰ εἶναι $\frac{1}{\alpha}<1$. Ἐὰν δὲ τὴν ἀνισότητα ταύτην πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη μὲ τὸν ἑαυτόν της θὰ ἔχωμεν: $\frac{1}{\alpha^2}<1$ ἢ $\alpha^{-2}<1$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ $\alpha^{-3}<1$ καὶ γενικῶς $\alpha^{-\mu}<1$, ἔνθα ὁ μ εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός.

β΄) Ἐπειδὴ $\alpha<1$ καὶ ὁ α εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς θὰ εἶναι $\frac{1}{\alpha}>1$. Ἐὰν δὲ τὴν ἀνισότητα ταύτην πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη μὲ τὸν ἑαυτόν της θὰ ἔχωμεν: $\frac{1}{\alpha^2}>1$ ἢ $\alpha^{-2}>1$. Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι $\alpha^{-3}>1$ καὶ γενικῶς $\alpha^{\mu}>1$ ἔνθα ὁ μ εἶναι ἀκέραιος ἀρνητικὸς ἀριθμός.

γ΄) Ἐπειδὴ εἶναι $\alpha>1$ καὶ ὁ α θετικός, θὰ εἶναι καὶ $\frac{1}{\alpha}<1$ ἢ $\alpha^{-1}<\alpha^{0}$. Πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη ταύτης κατὰ σειρὰν ἐπὶ $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\alpha^2}$, $\frac{1}{\alpha^3}$ ..... καὶ θὰ ἔχωμεν:

$\frac{1}{\alpha^2}<\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\alpha^3}<\frac{1}{\alpha^2}$, $\frac{1}{\alpha^4}<\frac{1}{\alpha^3}$ κ. ο. κ. Ἄρα $\alpha^{-2}<\alpha^{-1}$, $\alpha^{-3}<\alpha^{-2}$, $\alpha^{-4}<\alpha^{-3}$....., ἢ $\alpha^{-4}<\alpha^{-3}<\alpha^{-1}$. Ἂν ἤδη πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος $\frac{1}{\alpha}<1$ διαδοχικῶς ἐπὶ α, α^2, α^3...,. εὑρίσκομεν: $1<\alpha<\alpha^2<\alpha^3$ ..... ἢ $\alpha^0<\alpha^1<\alpha^2<$.....

Ἐπομένως $\alpha^{-4} < \alpha^{-3} < \alpha^{-2} < \alpha^{-1} < \alpha^{0} < \alpha^{1} < \alpha^{2} < \ldots$ καθ' ὅσον $\alpha^{-1} < \alpha^{0}$.

68. Ἐπειδὴ εἶναι $\alpha < 1$ καὶ α θετικὸς ἀριθμὸς θὰ εἶναι $\frac{1}{\alpha} > 1$. Ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη αὐτῆς διαδοχικῶς ἐπὶ $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\alpha^3}, \ldots$ θὰ ἔχωμεν $\frac{1}{\alpha^2} > \frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\alpha^3} > \frac{1}{\alpha^2}$ κ.ο.κ. ἢ $\alpha^{-2} > \alpha^{-1}$, $\alpha^{-3} > \alpha^{-2}$ κ.ο.κ.

Ἐὰν δὲ τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος $\frac{1}{\alpha} > 1$ πολλαπλασιάσωμεν διαδοχικῶς ἐπὶ $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots$ θὰ ἔχωμεν: $1 = \alpha^0 > \alpha^1 > \alpha^2 > \alpha^3 > \ldots$ Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\frac{1}{\alpha} > 1$ ἢ $\alpha^{-1} > 1$ ἢ $\alpha^{-1} > \alpha^0$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha^{-3} > \alpha^{-2} > \alpha^{-1} > \alpha^0 > \alpha^1 > \alpha^2 > \ldots$

69. α') Ἐκ τῆς ἀνισότητος $-8 > -23$ διὰ διαιρέσεως τῶν μελῶν της διὰ τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ 2 θὰ ἔχωμεν: $\frac{-8}{2} > \frac{-23}{2}$ ἢ $-4 > -11{,}5$.

β') Ἐκ τῆς αὐτῆς ἀνισότητος διὰ διαιρέσεως τῶν μελῶν της διὰ τοῦ ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ $-\frac{1}{5}$ θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{-8}{-\frac{1}{5}} < \frac{-23}{-\frac{1}{5}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{8}{\frac{1}{5}} < \frac{23}{\frac{1}{5}} \quad \text{ἢ} \quad 40 < 115$$

γ') Ὁμοίως $\frac{-8}{-0{,}58} < \frac{-23}{-0{,}58}$ ἢ $\frac{800}{58} < \frac{2300}{58}$.

70. α') Ἵνα εὕρωμεν τὰς τιμὰς τοῦ x, διὰ τὰς ὁποίας ἀληθεύει ἡ ἀνισότης $-5x > 30$ θὰ διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης διὰ τοῦ ἀριθμοῦ -5, ὅτε ἡ ἀνισότης ἑτεροστρέφεται ἤτοι:

$\frac{-5x}{-5} < \frac{30}{-5}$ ἢ $x < -6$ δηλαδὴ αὕτη ἀληθεύει, ἂν ὁ x λάβῃ τὰς τιμὰς $-7, -8, -9$, κ. ο. κ.

β') Ἐκ τῆς ἀνισότητος $3x < 39$ διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν της διὰ τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ 3 ἔχομεν $\frac{3x}{3} < \frac{39}{3}$ ἢ $x < 13$.

Ἄρα αὕτη ἀληθεύει διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x τὰς μικροτέρας τοῦ 13 π. χ. διὰ $x = 12$ ἢ 11 ἢ 10 κ. ο. κ.

γ') $(-3)(-2) \cdot x > -4{,}8 \cdot (-22)$. Δι' ἐκτελέσεως τῶν πράξεων εἰς ἕκαστον μέλος ταύτης ἔχομεν $6x > 105{,}6$. Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν τὰ μέλη ταύτης διὰ τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ 6, ὅτε ἡ φορὰ διατηρεῖται, θὰ ἔχωμεν $\frac{6x}{6} > \frac{105{,}6}{6}$ ἢ $x > 17{,}6$ ἤτοι ἀληθεύει διὰ $x = 18, 19, 19\frac{1}{2}$ κ. ο. κ.

71. α') Ἐκ τῆς $\frac{3x}{4} < -\frac{5}{8}$, ὡς ἀνωτέρω, εὑρίσκομεν ὅτι

$$x < \frac{-\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}} \text{ ἢ } x < -\frac{20}{24} \text{ ἢ } x < -\frac{5}{6}.$$

β΄) Ἐκ τῆς $-0{,}6x < -32$ εὑρίσκομεν: $\frac{-0{,}6x}{-0{,}6} > \frac{-32}{-0{,}6}$

$$\text{ἢ } x > \frac{32}{0{,}6} \text{ ἢ } x > \frac{320}{6} \text{ ἢ } x > 53\frac{1}{3}.$$

γ΄) Ἐκ τῆς $-0{,}8\,(-3)\,.\,x < 120\,.\,\frac{4}{5}$ εὑρίσκομεν δι' ἐκτελέσεως τῶν πράξεων εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη της:

$2{,}4x < 96$ ἢ $\frac{2{,}4x}{2{,}4} < \frac{96}{2{,}4}$ ἢ $x < \frac{960}{24}$ ἢ $x < 40$.

δ΄) Ἐκ τῆς $\left(-\frac{2}{3}\right).\,(-0{,}6)\,.\,x < \left(-\frac{2}{5}\,.\,0{,}4\right).\,(-0{,}2)$,

εὑρίσκομεν: $0{,}4\,x < \frac{0{,}16}{5}$ ἢ $0{,}4\,x < 0{,}032$ ἢ $x < \frac{0{,}032}{0{,}4}$ ἢ $x < 0{,}08$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ.

Περὶ ἀλγεβρικῶν παραστάσεων

72. α΄) Ἡ παράστασις $9\alpha^2\beta - \alpha\beta^2$ εἶναι **ρητή**, διότι ἐπὶ οὐδενὸς τῶν γραμμάτων της εἶναι σημειωμένη ρίζα τις καὶ **ἀκεραία**, διότι δὲν περιέχει διαίρεσιν διὰ γράμματος.

β΄) Ἡ παράστασις $\sqrt{23\alpha^2\beta}$ εἶναι **ἄρρητος**, διότι ἔχει σημειωθῆ ἐξαγωγὴ ρίζης ἐπὶ τῶν γραμμάτων της.

γ΄) Ἡ παράστασις $8\sqrt{x\cdot y} - 9\alpha$ εἶναι ὁμοίως **ἄρρητος.**

δ΄) Ἡ παράστασις $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{18\beta^2}{\gamma}$ εἶναι **ρητὴ** καὶ **κλασματική**, διότι περιέχει διαίρεσιν διὰ γραμμάτων της.

73. α΄) Ἡ παράστασις $\sqrt{\alpha^2}$ εἶναι φαινομενικῶς ἄρρητος, διότι $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$.

β΄) Ὁμοίως καὶ ἡ $\sqrt{(\alpha+\beta)^2} = \alpha+\beta$ εἶναι **ρητή.**

γ΄) Ἐπειδὴ $\frac{7\gamma}{\sqrt[3]{\delta^3}} = \frac{7\gamma}{\delta}$, αὕτη εἶναι φαινομενικῶς **ἄρρητος**, οὐσιαστικῶς ὅμως εἶναι **ρητή.**

Αἱ παραστάσεις $\sqrt[3]{8\alpha^6\beta^3}$, $\sqrt[4]{(\alpha+\beta)^8}$, $\frac{8\sqrt{\alpha\beta^2}}{\sqrt{\alpha}}$ εἶναι φαινομενικῶς ἄρρητοι, οὐσιαστικῶς δὲ ρηταί, διότι ἑκάστη τούτων εἶναι ἰσοδύναμος ἀντιστοίχως μὲ τὰς $2\alpha^2\beta$, $(\alpha+\beta)^2$, 8β, αἱ ὁποῖαι εἶναι **ρηταί.**

74. α΄) Ἐπειδὴ $\frac{9\alpha^2\beta}{5\alpha} = \frac{9\alpha\beta}{5}$, αὕτη εἶναι φαινομενικῶς **κλασματική**, οὐσιαστικῶς ὅμως **ἀκεραία**, διότι δὲν περιέχει διαίρεσιν διὰ γράμματος.

β΄) Ἐπειδὴ $\frac{16\alpha(\alpha-\beta)^2}{(\alpha-\beta)} = 16\alpha(\alpha-\beta)$, εἶναι ἀκεραία.

γ΄) Ἐπειδὴ $\frac{6\gamma^2 \cdot x \cdot y^2}{5\gamma \cdot x \cdot y^2} = \frac{6\gamma}{5}$, εἶναι οὐσιαστικῶς **ἀκεραία.**

δ΄) Ἡ $\frac{8\alpha^2+\beta}{\alpha\cdot\beta}$ εἶναι **κλασματικὴ ρητή.**

Περὶ μονωνύμων

75. α΄) $3\alpha^2\beta^3$ ἀριθμητικὸς συντελεστὴς ὁ 3, κύριον ποσὸν τὸ $\alpha^2\beta^3$.
β΄) $-5\alpha^4\beta^5$ » » ὁ -5 » » τὸ $\alpha^4\beta^5$.
γ΄) $-\alpha$ » » ὁ -1 » » τὸ α.

δ') $-3xy^3$ ἀριθμητικὸς συντελεστὴς ὁ -3 κύριον ποσὸν τὸ xy^3
ε') $2x^2$ » » ὁ 2 » » τὸ x^2
στ') $-\frac{4}{5}x^3$ » » ὁ $-\frac{4}{5}$ » » τὸ x^3
ζ') $-\frac{x^3}{4}$ » » ὁ $-\frac{1}{4}$ » » τὸ x^3
η') $-0{,}1 \,.\, x^2$ » » ὁ $-0{,}1$ » » τὸ x^2
θ') $-4{,}56x^3$ » » ὁ $-4{,}56$ » » τὸ x^3
ι') $-\frac{3}{4}\alpha^2$ » » ὁ $-\frac{3}{4}$ » » τὸ α^2

ια') $-\frac{5}{8}\alpha^2 \,.\, 5\beta \,.\, (-3)\,\beta^2 = 25\alpha^2\beta^3$. Ἀριθμητικὸς συντελεστὴς εἶναι ὁ 75 καὶ κύριον ποσὸν εἶναι τὸ $\alpha^2\beta^3$.

76. α') $\frac{5}{8}\alpha\beta$. Ἀριθμητικὸς συντελεστὴς αὐτοῦ εἶναι ὁ $\frac{5}{8}$ καὶ συντελεστὴς αὐτοῦ ὡς πρὸς α εἶναι ὁ $\frac{5\beta}{8}$.

β') $-\frac{x}{3}$. Ἀριθμητικὸς συντελεστὴς εἶναι ὁ $-\frac{1}{3}$.

γ') $-\frac{21}{4}x^3$. Ἀριθμ. συντελεστὴς εἶναι ὁ $-\frac{21}{4}$.

δ') ὁ 3,4. ε') Ἀριθμητικὸς συντελεστὴς εἶναι ὁ $\frac{5}{6}$ καὶ συντελεστὴς ὡς πρὸς β^2 εἶναι ὁ $\frac{5\alpha}{6}$.

77. α') $2\,(-3)\,.\,4y = -24y$ συντελεστὴς τοῦ y εἶναι ὁ -24.

β') $-25 \,.\, \alpha \,.\, 6 \,.\, \beta = (-25)\,.\,6\,.\,\alpha\,.\,\beta = -150\alpha\beta$. Ἀριθμητικὸς συντελεστὴς αὐτοῦ εἶναι ὁ -150, συντελεστὴς τοῦ α εἶναι ὁ -150β καὶ τοῦ β εἶναι ὁ -150α.

γ') $2 \,.\left(-\frac{4}{3}\right)x\,.\,(-7)\,y = 2\,.\left(-\frac{4}{3}\right).\,(-7)\,.\,x\,.\,y = \frac{56}{3}xy$. Ἀριθμητικὸς συντελεστὴς αὐτοῦ εἶναι ὁ $\frac{56}{3}$, συντελεστὴς τοῦ x εἶναι ὁ $\frac{56}{3}\,.\,y$ καὶ τοῦ y εἶναι ὁ $\frac{56}{3}\,.\,x$.

δ') $\frac{3\alpha^2\beta}{4\alpha\gamma} = \frac{3\alpha\beta}{4\gamma}$. Ἀριθμητικὸς συντελεστὴς αὐτοῦ εἶναι ὁ $\frac{3}{4}$. Συντελεστὴς τοῦ α εἶναι ὁ $\frac{3\beta}{4\gamma}$ καὶ τοῦ β εἶναι ὁ $\frac{3\alpha}{4\gamma}$.

ε') $-\frac{4x}{y}$. Ἀριθμητικὸς συντελεστὴς αὐτοῦ εἶναι ὁ -4, συντελεστὴς τοῦ x εἶναι ὁ $-\frac{4}{y}$.

στ') $-\frac{5x^2}{y^2}$. Ἀριθμητικος συντελεστὴς αὐτοῦ εἶναι ὁ -5 καὶ συντελεστὴς τοῦ x^2 εἶναι ὁ $-\frac{5}{y^2}$.

ζ') $-\frac{2}{5}x^2 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)y = \left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)x^2y = \frac{6}{40}x^2y$. Ἀριθμητικὸς συντελεστὴς αὐτοῦ εἶναι ὁ $\frac{6}{40}$, συντελεστὴς τοῦ x^2 εἶναι ὁ $\frac{6}{40}y$ καὶ τοῦ y ὁ $\frac{6}{40}x^2$.

η') $\frac{2}{3} \cdot x(-4) \cdot (3\alpha x) = \frac{2}{3} \cdot (-4) \cdot 3 \cdot x \cdot x\alpha = -8x^2\alpha$. Ἀριθμητικὸς συντελεστὴς αὐτοῦ εἶναι ὁ -8, συντελεστὴς τοῦ x^2 εἶναι ὁ -8α καὶ τοῦ α ὁ $-8x^2$.

78. α') $15\alpha^2\beta\gamma^2$. Τοῦτο εἶναι 2ου βαθμοῦ ὡς πρὸς α, 1ου βαθμοῦ ὡς πρὸς β, 2ου βαθμοῦ ὡς πρὸς γ, 3ου βαθμοῦ ὡς πρὸς α καὶ β καὶ 5ου βαθμοῦ ὡς πρὸς α, β, γ.

β') $121\alpha^3\beta^2\gamma$. Τοῦτο εἶναι 3ου βαθμοῦ ὡς πρὸς α, 2ου βαθμοῦ ὡς πρὸς β, 1ου βαθμοῦ ὡς πρὸς γ, 5ου βαθμοῦ ὡς πρὸς α καὶ β καὶ 6ου βαθμοῦ ὡς πρὸς α, β, γ.

γ') $-24\alpha\beta^3\gamma^4$. Τοῦτο εἶναι 1ου βαθμοῦ ὡς πρὸς α, 3ου βαθμοῦ ὡς πρὸς β, 4ου βαθμοῦ ὡς πρὸς γ, 4ου βαθμοῦ ὡς πρὸς α, β καὶ 8ου βαθμοῦ ὡς πρὸς α, β, γ.

δ') $-13\alpha^3\beta^2\gamma^4$. Τοῦτο εἶναι 3ου βαθμοῦ ὡς πρὸς α, 2ου βαθμοῦ ὡς πρὸς β, 4ου βαθμοῦ ὡς πρὸς γ, 5ου βαθμοῦ ὡς πρὸς α, β καὶ 9ου βαθμοῦ ὡς πρὸς α, β, γ.

79. Ἀκέραια εἶναι τὰ α') $-24y$. β') $-150\alpha\beta$. γ') $\frac{56xy}{3}$ ζ') $\frac{6}{40}x^2y$ καὶ η') $-8\alpha x^2$.

Τὸ $-24y$ εἶναι μηδενικοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς α, διότι δύναται νὰ γραφῇ $-24y\alpha^0$, μηδενικοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς β, ὡς πρὸς x, ὡς πρὸς α καὶ β, πρώτου δὲ βαθμοῦ ὡς πρὸς y καθὼς καὶ ὡς πρὸς x καὶ y.

Τὸ $-150\alpha\beta$ εἶναι πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς α, πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς β, μηδενικοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς x, ὡς πρὸς y, δευτέρου δὲ βαθμοῦ, ὡς πρὸς α καὶ β καὶ μηδενικοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y.

Τὸ $\frac{6}{40}x^2y$ εἶναι μηδενικοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς α, ὡς πρὸς β, ὡς πρὸς α καὶ β, δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς y καὶ τρίτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y.

Τὸ $-8\alpha x^2$ εἶναι πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς α, μηδενικοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς β, δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, μηδενικοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς y, πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς α καὶ β καὶ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y.

Ἀναγωγὴ ὁμοίων μονωνύμων

80. α') $9\mu + 4\mu = 13\mu$. β') $-10\mu + (-6\mu) = -16\mu$.
γ') $-4\mu + 6\mu = 2\mu$, δ') $5\mu + (-9\mu) = -4\mu$.
ε') $8\alpha + \alpha + 9\alpha = (8+1+9)\alpha = 18\alpha$.

στ′) $\rho - 7\rho + (6\rho - 3\rho) = \rho - 7\rho + 3\rho = (1 - 7 + 3)\,\rho = -3\rho.$

ζ′) $7x + (-8x) + 6x + x = (7 - 8 + 6 + 1)\,x = 6x.$

η′) $9\alpha + (-6\alpha + \alpha) = 9\alpha + (-5\alpha) = (9 - 5)\,\alpha = 4\alpha.$

θ′) $-x + 9x + [(-6x) + 9x] = -x + 9x + 3x = (-1 + 9 + 3)x = 11x$

81. α′) $3x^2 - 5x^2 + 8x^2 - 3x^2 = (3 - 5 + 8 - 3)\,x^2 = 3x^2.$

β′) $4\alpha x^3 - 4\beta x^3 - 5\gamma x^3 = (4\alpha - 4\beta - 5\gamma)\,.\,x^3.$

γ′) $3\alpha^2\beta x^2 - 2\alpha^2\beta x^3 - 6\alpha^2\beta x$. Ταῦτα εἶναι ὅμοια ὡς πρὸς $\alpha^2\beta$ καὶ ἔχουν ἄθροισμα τὸ μονώνυμον $(3x^2 - 2x^3 - 6x)\,\alpha^2\,.\,\beta.$

δ′) $4xy^3 - 5x^2y^3 + 3x^3y^3 - 10x^4y^3$. Ταῦτα εἶναι ὅμοια ὡς πρὸς xy^3 καὶ ἔχουν ἄθροισμα τὸ $(4 - 5x + 3x^2 - 10x^3)\,.\,xy^3.$

ε′) $\frac{5}{2}x^2 + 3\alpha x - \frac{7}{2}\alpha^2 - 2x^2 + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{5}{2}x^2 - 2x^2 + 3\alpha x +$

$+ \alpha x - \frac{7}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{1}{2}x^2 + 4\alpha x - \frac{6}{2}\alpha^2 = 0{,}5x^2 + 4\alpha x - 3\alpha^2.$

82. Τὸ ἄθροισμά των εἶναι :

$$7\frac{3}{4}\,x^2\psi - x + 19\frac{3}{8}\,\varphi^2 + 1{,}75x - 8\frac{3}{8}\,\psi +$$

$$+ 5\frac{5}{12}\,x - 1 + 125\psi - 0{,}25x^2\psi + 0{,}625\varphi^2 = \left(7\frac{3}{4} - 0{,}25\right)x^2\psi +$$

$$+ \left(-1 + 1{,}75 + 5\frac{5}{12}\right)x + \left(19\frac{3}{8} + 0{,}625\right)\varphi^2 + \left(-8\frac{3}{8} + 125\right)\psi - 1.$$

83. α′) $3\alpha^2\beta + 3\alpha^2\beta + 0{,}35\alpha^2\beta - 0{,}5\alpha^2\beta = 5{,}85\alpha^2\beta.$

$-8x\psi^3 + 32x\psi^3 - 0{,}25x\psi^3 = 23{,}75x\psi^3.$

β′) $30\,xy^2 + 16\,xy^2 = 46\,xy^2.$

$-24\,\alpha^2\beta^3\gamma - 12{,}3\,\alpha^2\beta^3\gamma - 0{,}75\alpha^2\beta^3\gamma = -37{,}05\alpha^2\beta^3\gamma.$

Σημ. Τὸ μονώνυμον $-24\alpha^2\beta^8\gamma$ νὰ γίνῃ $-24\alpha^2\beta^3\gamma$.

γ′) $-6\alpha^2\beta\gamma + 12\alpha^2\beta\gamma - 7\alpha^2\beta\gamma - 3{,}6\alpha^2\beta\gamma + 0{,}3\alpha^2\beta\gamma + 7{,}5\alpha^2\beta\gamma =$
$= 3{,}2\alpha^2\beta\gamma.$

Ἀριθμητικὴ τιμὴ ἀλγεβρικῆς παραστάσεως

84. α′) $-6x + 7y + (-3x) = -6\,.\,3 + 7\,.\,4 + (-3)\,.\,3 =$
$= -18 + 28 - 9 = 1.$

β′) $-9x + (-7y) + (-3y) + (-6x) = -15x - 10y =$
$= (-15)\,.\,3 - 10\,.\,(-4) = -45 + 40 = -5.$

85. α′) $\alpha^3 - 6\alpha^2\beta + \beta^3 = 2^3 - 6\,.\,2^2\,.\,6 + 6^3 = 8 - 6\,.\,4\,.\,6 + 216 =$
$= 8 - 144 + 216 = 224 - 144 = 80.$

β′) $\frac{(\alpha + \beta)(\alpha - 3\beta)}{6\alpha - 2\beta} = \frac{(2 + 5)(2 - 3\,.\,5)}{6\,.\,2 - 2\,.\,5} = \frac{7\,.\,(2 - 15)}{12 - 10} =$

$= \frac{7\,.\,(-13)}{2} = \frac{-91}{2} = -45{,}5.$

86. α′) $(\alpha + \beta)\left[\alpha^2 - (\beta^2 - 6\alpha\gamma)\right] = (-5 + 2)\,.\,\left[(-5)^2 - 2^2 + 6\,.\,(-5)\,.\,(-3)\right] =$
$= (-3)\,.\,\left[25 - 4 + 90\right] = (-3)\,.\,(+111) = -333.$

β′) $\sqrt{\alpha^3 - 2\beta} - 4\gamma - 2\sqrt{4\alpha^2 + \beta}\,.\,(\alpha + \gamma) =$

$= \sqrt{9^2 - 2.(-4)} - 4.3 - 2\sqrt{4.9^2 + (-4)}.(9+3) =$
$= \sqrt{729+8} - 12 - 2\sqrt{4.81-4}.12 =$
$= \sqrt{737} - 12 - 2\sqrt{320}.12 = \sqrt{737} - 12 - 24\sqrt{320}.$

87. Διὰ τοῦ συμβολισμοῦ φ (x), ὁ ὁποῖος ἀναγιγνώσκεται φὶ τοῦ x, παριστάνομεν κάθε παράστασιν, περιέχουσαν τὸ γράμμα x. Τότε φ (2) [φὶ τοῦ 2] σημαίνει τὴν ἀριθμητικὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἡ παράστασις, ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὴν τὸ x μὲ τὸν 2.

Ἐπειδὴ $\varphi(x) = 3^x$, ἂν θέσωμεν ὅπου $x = 2$ θὰ ἔχωμεν:
$\varphi(2) = 3^2 = 9$. Ὁμοίως $\varphi(4) = 3^4 = 81$ καὶ
$\varphi(6) = 3^6 = 729$. Ἄρα $\varphi(2).\varphi(4) = 9.81 = 729 = \varphi(6)$.

88. Ἐπειδὴ $\varphi(x) = 4x^2 + 4x - 3$ θὰ εἶναι $\varphi(5) = 4.5^2 + 4.5 - 3 = 4.25 + 4.5 - 3 = 100 + 20 - 3 = 117$.

Ἐπειδὴ δὲ $y(x) = 9(x+8)$ θὰ εἶναι $y(5) = 9(5+8) = 9.13 = 117$. Ἄρα $\varphi(5) = y(5)$.

89. Ἐπειδὴ $\varphi(x, y, z) = (x+y+z)(x+y-z)(x-y-z)$ θὰ εἶναι $\varphi(0, 1, 2) = (0+1+2)).(0+1-2).(0-1-2) = 3.(-1).(-3) = 9$ καὶ $\varphi(0, -1, -2) = (0-1-2).(0-1+2).(0+1+2) = (-3).1.3 = -9$. Ἄρα $\varphi(0,1,2) + \varphi(0,-1,-2) = 9 + (-9) = 0$.

Σημείωσις: *Ὁ συμβολισμὸς $\varphi(0, 1, 2)$ σημαίνει τὴν ἀριθμητικὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἡ παράστασις $\varphi(x, y, z)$, ὅταν ἀντικαταστήσωμεν τὸ $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$. Ὁμοίως σκεπτόμεθα καὶ διὰ τὸν συμβολισμὸν $\varphi(0, -1, -2)$.*

Περὶ πολυωνύμων

90. α΄) Τὸ πολυώνυμον $3\alpha^2x^4 - 6\alpha x^5 - 28\alpha^3x^3 + 27\alpha^6 + x^6 - 54\alpha^5x + 9\alpha^4x^2$ εἶναι ἕκτου βαθμοῦ ὡς πρὸς α, ἕκτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ ἕκτου βαθμοῦ ὡς πρὸς α καὶ x. Διατάσσεται δὲ οὕτω:

$$x^6 - 6\alpha x^5 + 3\alpha^2x^4 - 28\alpha^3x^3 + 9\alpha^4x^2 - 54\alpha^5x + 27\alpha^6.$$

β΄) Τὸ πολυώνυμον τοῦτο εἶναι ἕκτου βαθμοῦ καὶ ὡς πρὸς α καὶ ὡς πρὸς x καὶ ὡς πρὸς αx. Διατάσσεται δὲ οὕτω:

$$= -3x^6 + 7\alpha x^5 - 0{,}7\alpha^2x^4 - \alpha^3x^3 + 0{,}7\alpha^4x^2 + 27\alpha^5x - \alpha^6.$$

γ΄) Εἶναι πέμπτου βαθμοῦ ὡς πρὸς α (διότι ἀνάγονται εἰς 0 οἱ ὅροι $7\alpha^6$, $-7\alpha^6$), ἕκτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ ὡς πρὸς αx. Διατάσσεται δὲ οὕτω: $16x^6 + \frac{2}{3}\alpha x^5 + \frac{1}{12}\alpha^2x^4 - 11\alpha^3x^3 - 7\alpha^4x^2 + 15\alpha^5x.$

δ΄) Τοῦτο εἶναι ἕκτου βαθμοῦ ὡς πρὸς α, x, αx. Διατάσσεται δὲ οὕτω: $-3x^6 - \frac{5}{2}\alpha^2x^4 + 6\alpha^3x^3 + 11\alpha^5x + 3\alpha^6.$

Σημ. Ὁ ὅρος $6\alpha^3$ νὰ διορθωθῇ εἰς $6\alpha^3x^3$.

Πράξεις ἐπὶ τῶν πολυωνύμων

Πρόσθεσις πολυωνύμων

91. Διατάσσομεν κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον καὶ προσθέτομεν κατὰ στήλας.

α')
$$\begin{array}{rrr} 2\alpha & -5\beta & +2\gamma \\ 2\alpha & +3\beta & +\gamma \\ -3\alpha & & -2\gamma \\ \hline \alpha & -2\beta & +\gamma \end{array}$$

β')
$$\begin{array}{rrr} 2x^2 & -2xy & +3y^2 \\ -2x^2 & +5xy & +4y^2 \\ x^2 & -2xy & -6y^2 \\ \hline x^2 & +xy & +y^2 \end{array}$$

γ')
$$\begin{array}{rrrr} 2\alpha\beta & +3\alpha\gamma & +6\alpha\beta\gamma & \\ -5\alpha\beta & & -5\alpha\beta\gamma & +2\beta\gamma \\ 3\alpha\beta & & & -2\beta\gamma \\ \hline & 3\alpha\gamma & +\alpha\beta\gamma & \end{array}$$

δ')
$$\begin{array}{rrr} \frac{2}{3}x^2 & +\frac{1}{3}xy & -\frac{1}{4}y^2 \\ -x^2 & -\frac{2}{3}xy & +2y^2 \\ \frac{2}{3}x^2 & -xy & -\frac{5}{4}y^2 \\ \hline \frac{1}{3}x^2 & -\frac{4}{3}xy & +\frac{2}{4}y^2 \end{array}$$

ε')
$$\begin{array}{rrr} \frac{5}{8}x^2 & -\frac{1}{3}xy & +\frac{3}{8}y^2 \\ -\frac{3}{4}x^2 & +\frac{14}{15}xy & -y^2 \\ \frac{1}{2}x^2 & -xy & +\frac{1}{5}y^2 \\ \hline \frac{3}{8}x^2 & -\frac{6}{15}xy & -\frac{17}{40}y^2. \end{array}$$

Ἀφαίρεσις ἀλγεβρικῶν παραστάσεων

92. Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ δοθείσης παραστάσεως δοθὲν πολυώνυμον, γράφομεν κατόπιν αὐτῆς τοὺς ὅρους τοῦ ἀφαιρετέου καθένα μὲ τὸ ἀντίθετον πρόσημόν του καὶ ἔχομεν μετὰ τὰς ἀναγωγάς:

α') $x^2-xy+2y^2-(4x^2+3xy+3y^2)=x^2-xy+2y^2-4x^2-3xy-3y^2=$
$=-3x^2-4xy-y^2.$

β') $\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3-(\alpha^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2-\beta^3)=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+$
$+\beta^3-\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=6\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2+2\beta^3.$

γ') $\alpha^2x^2+4\alpha xy-3\alpha\beta y^2-(4\alpha\beta y^2-5\alpha xy+2\alpha^2)=$
$=\alpha^2x^2+4\alpha xy-3\alpha\beta y^2-4\alpha\beta y^2+5\alpha xy-2\alpha^2=\alpha^2x^2+$
$+9\alpha xy-7\alpha\beta y^2-2\alpha^2.$

δ') $10\alpha^\mu-15\beta^\nu-\gamma^\rho+5\delta^\lambda-(-9\alpha^\mu+2\beta^\nu-\gamma^\rho-5\delta^\lambda)=$
$=10\alpha^\mu-15\beta^\nu-\gamma^\rho+5\delta^\lambda+9\alpha^\mu-2\beta^\nu+\gamma^\rho+5\delta^\lambda=$
$=19\alpha^\mu-17\beta^\nu+10\delta^\lambda.$

ε') $4y^2+x^2-4xy+4y-3x+4-(y^2+x^2+2xy-4y-2x)=$
$=4y^2+x^2-4xy+4y-3x+4-y^2-x^2-2xy+4y+2x=$
$=3y^2-6xy+8y-x+4.$

93. $2{,}5x^2 + 3\alpha x - \frac{7}{9}\alpha^2 - (2x^2 - \alpha x - 0{,}5\alpha^2) = 2{,}5x^2 +$
$+ 3\alpha x - \frac{7}{9}\alpha^2 - 2x^2 + \alpha x + 0{,}5\alpha^2 = 0{,}5x^2 + 4\alpha x - \frac{5}{18}\alpha^2.$

94. $\frac{x^2}{4} - 6x + \frac{9}{15} - \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{3x}{9} + \frac{1}{5}\right) =$
$= \frac{x^2}{4} - 6x + \frac{9}{15} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{8} + \frac{3x}{9} - \frac{1}{5} =$
$= \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{51}{9}x + \frac{6}{15} = \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{8} - 5\frac{2}{3}x + \frac{2}{5}.$

Περὶ παρενθέσεων καὶ ἀγκυλῶν

95. α′) $3x - (7x - 5y) = 3x - 7x + 5y = -4x + 5y =$
$= (-4) \cdot 3 + 5 \cdot 3 = -12 + 15 = 3.$

β′) $3x + 6y - 9\omega + (14x - 7y + 9\omega) = 3x + 6y - 9\omega + 14x - 7y + 9\omega =$
$= 17x - y$ καὶ διὰ $x = 6$, $y = 3$ εὑρίσκομεν:
$17 \cdot 6 - 3 = 102 - 3 = 99.$

γ′) $\theta - (\mu - \nu) = x + 9y - 6\omega - [(4x - 7y + 2\omega) - (x + y + \omega)] =$
$= x + 9y - 6\omega - (4x - 7y + 2\omega) + x + y + \omega =$
$= x + 9y - 6\omega - 4x + 7y - 2\omega + x + y + \omega = -2x + 17y - 7\omega.$

96. α′) $\alpha - [\alpha - [\alpha - (\alpha - 1)]] = \alpha - \alpha + [\alpha - (\alpha - 1)] =$
$= \alpha - \alpha + \alpha - \alpha + 1 = 1$ καὶ ἡ τιμή της εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ α.

β′) $5{,}8\alpha^2 - 8{,}2\alpha^2 - (\alpha^2 - 0{,}4) + 0{,}6 = 5{,}8\alpha^2 - 8{,}2\alpha^2 - \alpha^2 + 0{,}4 +$
$+ 0{,}6 = -3{,}4\alpha^2 + 1$ καὶ διὰ $\alpha = 2$ ἔχομεν:
$-3{,}4 \cdot 2^2 + 1 = (-3{,}4) \cdot 4 + 1 = -13{,}6 + 1 = -12{,}6.$

γ′) $-[-[-(-x)]] - [-(-y)] = +[-(-x)] + (-y) = -(-x) +$
$+ (-y) = +(+x) + (-y) = x - y$ καὶ διὰ $x = y = -1$ ἔχομεν:
$-1 - (-1) = -1 + 1 = 0.$

δ′) $-[+[+(-x)]] - [-[+[-(-x)]]] = -[+(-x)] +$
$+ [+[-(-x)]] = -(-x) + [-(-x)] = +(+x) - (-x) =$
$= x + x = 2x$ καὶ διὰ $x = 2$ ἔχομεν: $2 \cdot 2 = 4.$

ε′) $-[-[-(\beta + \gamma - \alpha)]] + [-[-(\alpha - \beta + \gamma)]] =$
$= +[-(\beta + \gamma - \alpha)] - [-(\alpha - \beta + \gamma)] = -(\beta + \gamma - \alpha) + (\alpha - \beta + \gamma) =$
$= -\beta - \gamma + \alpha + \alpha - \beta + \gamma = 2\alpha - 2\beta$ καὶ διὰ $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = -1$
ἔχομεν: $2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 2 - 0 = 2.$

97. α′) Τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι:

$$\begin{array}{r}
2 \qquad - 2x^2 + 7x^3 - 9x^4 + x^5 \\
x + 2x^2 - 3x^3 + 4x^4 - x^5 \\
x^2 + 2x^3 - 3x^4 + 4x^5 \\
\hline
2 + x + x^2 + 6x^3 - 8x^4 + 4x^5
\end{array}$$

β') Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων εἶναι $2 + x + 4x^3 - 5x^4$ καὶ ἡ διαφορὰ τούτου ἀπὸ τοῦ τρίτου εἶναι :

$x^2 + 2x^3 - 3x^4 + 4x^5 - (2 + x + 4x^3 - 5x^4) =$
$= x^2 + 2x^3 - 3x^4 + 4x^5 - 2 - x - 4x^3 + 5x^4 = x^2 - 2x^3 + 2x^4 +$
$+ 4x^5 - 2 - x = 4x^5 + 2x^4 - 2x^3 + x^2 - x - 2.$

γ) Ἡ διαφορὰ τοῦ δευτέρου ἀπὸ τοῦ πρώτου εἶναι :

$2 - 2x^2 + 7x^3 - 9x^4 + x^5 - (x + 2x^2 - 3x^3 + 4x^4 - x^5) =$
$= 2 - 2x^2 + 7x^3 - 9x^4 + x^5 - x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4 + x^5 =$
$= 2 - x - 4x^2 + 10x^3 - 13x^4 + 2x^5$ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῆς καὶ τοῦ τρίτου πολυωνύμου θὰ εἶναι :

$2 - x - 4x^2 + 10x^3 - 13x^4 + 2x^5 + x^2 + 2x^3 - 3x^4 + 4x^5 =$
$= 2 - x - 3x^2 + 12x^3 - 16x^4 + 6x^5.$

Ὁμὰς τρίτη : 98. α') $x^2 + (7x^3 - 3x - 5) = x^2 - (-7x^3 + 3x + 5)$

β') $-5x^4 + [-(3x^3 - 8x^2) - 6x + 9] = -5x^4 - [(3x^3 - 8x^2) + 6x - 9].$

γ') $13x + (-16x^2 + 19x^3 - 14\alpha + 5\gamma) = 13x - (16x^2 - 19x^3 + 14\alpha - 5\gamma).$

99. Ἂν $x = 3\alpha^2 - 2\alpha\beta + 5\beta^2$, $y = 7\alpha^2 - 8\alpha\beta + 5\beta^2$, $\omega = 9\alpha^2 - 5\alpha\beta + 3\beta^3$ καὶ $\varphi = 11\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2$ θὰ ἔχωμεν :

$$\alpha')\quad x + y + \varphi + \omega = \left\{\begin{array}{llll} 3\alpha^2 & -2\alpha\beta & +5\beta^2 & \\ 7\alpha^2 & -8\alpha\beta & +5\beta^2 & \\ 9\alpha^2 & -5\alpha\beta & & +3\beta^3 \\ 11\alpha^2 & -3\alpha\beta & -4\beta^2 & \\ \hline 30\alpha^2 & -18\alpha\beta & +6\beta^2 & +3\beta^3 \end{array}\right.$$

$$\beta')\quad x - y - \varphi + \omega = \left|\begin{array}{llll} 3\alpha^2 & -2\alpha\beta & +5\beta^2 & \\ -7\alpha^2 & +8\alpha\beta & -5\beta^2 & \\ -9\alpha^2 & +5\alpha\beta & & -3\beta^3 \\ 11\alpha^2 & -3\alpha\beta & -4\beta^2 & \\ \hline -2\alpha^2 & +3\alpha\beta & -4\beta^2 & -3\beta^3 \end{array}\right.$$

γ') $y - (x + \omega - \varphi) = 7\alpha^2 - 8\alpha\beta + 5\beta^2 - [(3\alpha^2 - 2\alpha\beta + 5\beta^2) + (9\alpha^2 - 5\alpha\beta +$
$+ 3\beta^3) - (11\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2)] = 7\alpha^2 - 8\alpha\beta + 5\beta^2 - (3\alpha^2 - 2\alpha\beta + 5\beta^2) - (9\alpha^2 - 5\alpha\beta +$
$+ 3\beta^3) + (11\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2) = 7\alpha^2 - 8\alpha\beta + 5\beta^2 - 3\alpha^2 + 2\alpha\beta - 5\beta^2 - 9\alpha^2 +$
$+ 5\alpha\beta - 3\beta^3 + 11\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 6\alpha^2 - 4\alpha\beta - 4\beta^2 - 3\beta^3.$

Ὁμὰς τετάρτη. 100. Ἐπειδὴ εἰς τὴν πρώτην τάξιν φοιτοῦν α μαθηταὶ καὶ εἰς τὴν δευτέραν φοιτοῦν β ὀλιγώτεροι, ἕπεται, ὅτι εἰς τὴν δευτέραν φοιτοῦν $\alpha - \beta$ μαθηταί. Εἰς τὴν τρίτην δὲ φοιτοῦν $\alpha - 2\beta$ μαθηταί. Ἄρα αἱ τρεῖς τάξεις ἔχουν μαθητὰς $\alpha + (\alpha - \beta) + (\alpha - 2\beta) =$
$= \alpha + \alpha - \beta + \alpha - 2\beta = 3\alpha - 3\beta.$

Αἱ δύο πρῶται τάξεις ἔχουν ἐν ὅλῳ μαθητὰς $\alpha + \alpha - \beta = 2\alpha - \beta$. Ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν $\alpha - 2\beta$ καὶ ἔχομεν :
$2\alpha - \beta - (\alpha - 2\beta) = 2\alpha - \beta - \alpha + 2\beta = \alpha + \beta$. Ἤτοι : αἱ δύο πρῶται τάξεις ἔχουν $\alpha + \beta$ μαθητὰς περισσοτέρους τῆς τρίτης.

101. Ἐπειδὴ ὁμοῦ ἔχουν μ δραχμὰς καὶ ὁ Α ἔχει x δραχ. ἕπεται ὅτι ὁ Β θὰ ἔχῃ $(\mu - x)$ δραχμάς. Ἂν ὁ Α δώσῃ εἰς τὸν Β 3 δραχμάς, τότε οὗτος θὰ ἔχῃ $x - 3$ δραχ. καὶ ὁ Β θὰ ἔχῃ $(\mu - x + 3)$ δραχμάς.

102. Ἐπειδὴ ὁ Α ἔχει μ δραχμὰς καὶ ὁ Β ἔχει τριπλασίας δραχμὰς ἀπὸ τὸν Α, ὁ Β θὰ ἔχῃ 3μ δραχ. ὁ δὲ Γ ὡς ἔχων διπλασίας δραμὰς τοῦ Β, θὰ ἔχῃ δραχ. $3\mu \,.\, 2 = 6\mu$ δραχ. Καὶ οἱ τρεῖς δὲ μαζὶ θὰ ἔχωσι $\mu + 3\mu + 6\mu = 10\mu$ δραχμάς.

Γινόμενον ἀκεραίων μονωνύμων

103. α΄) $x^7(-x^3)\, y^6 y^4 = -x^{10} \,.\, y^{10}$. β΄ $(-x^4 \,.\, x) \,.\, \alpha^3 \,.\, \alpha^5 \,.\, \alpha^2 = -x^5 \,.\, \alpha^{10}$
γ΄) $(x^2)^2 \,.\, (\beta^3)^4 = x^4\beta^{12}$. δ΄) $x^{\nu+2} \,.\, x^{2\nu} \,.\, x = x^{\nu+2+2\nu+1} = x^{3\nu+3}$.
ε΄) $x^{3\nu+1} \,.\, x \,.\, x^{2\nu-2} \,.\, x^2 = x^{3\nu+1+1+2\nu-2+2} = x^{5\nu+2}$
στ΄) $\alpha^x\,(-2\alpha^{2x-1}) = -2\alpha^{x+2x-1} = -2\alpha^{3x-1}$.
ζ΄) $(-x \,.\, y \,.\, \omega)\ (x^2 \,.\, y^2 \,.\, \omega^2) = -x^3 \,.\, y^3 \,.\, \omega^3$.
η΄) $(-7xy\omega) \,.\, (4x^2y^2) = -28x^3y^3\omega$.

104. α΄) $(-2{,}5\ \alpha^2\beta x)^2 = (-2{,}5)^2 \,.\, (\alpha^2)^2 \,.\, \beta^2 \,.\, x^2 = 6{,}25\alpha^4\beta^2x^2$.
β΄) $(-0{,}3\ \alpha\beta\gamma^2)^3 = (-0{,}3)^3 \,.\, \alpha^3 \,.\, \beta^3 \,.\, (\gamma^2)^3 = -0{,}027\ \alpha^3\ \beta^3\ \gamma^6$.
γ΄) $(-2\alpha\beta^2\gamma x^2)^4 = (-2)^4 \,.\, \alpha^4 \,.\, (\beta^2)^4 \,.\, \gamma^2 \,.\, (x^2)^4 = 16\alpha^4\beta^8\gamma^2x^8$.

105. α΄) $\alpha^x(-\alpha^{2x-1}) = -\alpha^{x+2x-1} = -\alpha^{3x-1}$.
β΄) $(-x^{\nu-1} \,.\, y^{\mu-3}) \,.\, (-x^{\nu-1} \,.\, y^{\mu-1}) = x^{\nu-1+\nu-1} \,.\, y^{\mu-3+\mu-1} =$
$= x^{2\nu-2} \,.\, y^{2\mu-4}$.

γ΄) Διὰ νὰ ὑψώσωμεν μονώνυμον εἰς δύναμιν μὲ ἀκέραιον ἐκθέτην ὑψοῦμεν τὸν ἀριθμητικὸν συντελεστὴν αὐτοῦ καὶ ἕκαστον τῶν γραμμάτων του χωριστὰ εἰς τὴν δύναμιν ταύτην καὶ πολλαπλασιάζομεν τὰ ἐξαγόμενα.

Π. χ. α΄) $(6\alpha\beta^2)^2 = 6^2 \,.\, \alpha^2 \,.\, (\beta^2)^2 = 36\alpha^2\beta^4$.

β΄) $\left(\dfrac{3}{4}\,x^3y\right)^3 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^3 \cdot (x^3)^3 \,.\, y^3 = \dfrac{3^3}{4^3}\,x^9y^3 = \dfrac{27}{64}\,x^9y^3$.

γ΄) $(25\alpha^2\beta^2\gamma)^5 = 25^5 \,.\, (\alpha^2)^5 \,.\, (\beta^2)^5 \,.\, \gamma^5 = 25^5\ \alpha^{10}\ \beta^{10}\ \gamma^5$.

Γινόμενον πολυωνύμου ἐπὶ μονώνυμον

Ὁμὰς πρώτη : 106. α΄) $3\alpha x\,(\alpha^2 - 4\alpha x + x^2) = 3\alpha^3 x - 12\alpha^2x^2 + 3\alpha x^3$ καὶ διὰ $x = -1$, $\alpha = 2$ εὑρίσκομεν : $3 \,.\, 2^3 \,.\, (-1) - 12 \,.\, 2^2 \,.\, (-1)^2 +$
$+ 3 \,.\, 2 \,.\, (-1)^3 = 3 \,.\, 8 \,.\, (-1) - 12 \,.\, 4 \,.\, 1 + 3 \,.\, 2 \,.\, (-1) = -24 - 48 - 6 = -78$.

β΄) $(3\alpha + 7\beta)\alpha - (9\beta - 5\alpha)\beta = 3\alpha^2 + 7\alpha\beta - (9\beta^2 - 5\alpha\beta) =$
$= 3\alpha^2 + 7\alpha\beta - 9\beta^2 + 5\alpha\beta = 3\alpha^2 + 12\alpha\beta - 9\beta^2$ καὶ διὰ $\alpha = 2$, $\beta = -3$
εὑρίσκομεν : $3 \,.\, 2^2 + 12 \,.\, 2 \,.\, (-3) - 9 \,.\, (-3)^2 = 3 \,.\, 4 + 12 \,.\, 2 \,.\, (-3) - 9 \,.\, 9 =$
$= 12 - 72 - 81 = -141$.

γ΄) $(3\alpha^2 + 7\beta^2)\alpha\beta - (9\alpha^2 - 8\beta^2)\alpha 3 = 3\alpha^3\beta + 7\alpha\beta^3 - 9\alpha^3\beta + 8\alpha\beta^3 =$
$= -6\alpha^3\beta + 15\alpha\beta^3$ καὶ ἄν $\alpha = -1$, $\beta = -2$ εὑρίσκομεν :
$-6 \,.\, (-1)^3 \,.\, (-2) + 15 \,.\, (-1) \,.\, (-2)^3 = (-6) \,.\, (-1)\ (-2) + 15 \,.\, (-1) \,.\, (-8) =$
$= -12 + 120 = 108$.

δ΄) $(3\alpha^2\beta^3 + 7\beta^2) \,.\, 3\alpha^2\beta^2 - (9\alpha^3\beta^3 - 8\beta^2) \,.\, 2\alpha^2\beta^3 =$
$= 9\alpha^4\beta^5 + 21\alpha^2\beta^4 - 18\alpha^5\beta^6 + 16\alpha^2\beta^5$ καὶ ἄν $\alpha = -1$, $\beta = -2$
εὑρίσκομεν : $9 \,.\, (-1)^4 \,.\, (-2)^5 + 21 \,.\, (-1)^2 \,.\, (-2)^4 - 18\ (-1)^5 \,.\, (-2)^6 +$
$+ 16 \,.\, (-1)^2 \,.\, (-2)^5 = 9 \,.\, 1 \,.\, (-32) + 21 \,.\, 1 \,.\, 16 - 18 \,.\, (-1) \,.\, 64 + 16 \,.\, 1 \,.\, (-32) =$
$= -283 + 335 + 1152 - 512 = 1483 - 800 = 688$.

Ὁμὰς δευτέρα : 107. Ὁ πρῶτος εἰς τ ἡμέρας θὰ διανύσῃ $(\alpha + \mu) \,.\, \tau$ χιλιόμετρα. Ἐπειδὴ δὲ ὁ δεύτερος ἑκάστην ἡμέραν διανύει $(\alpha + \mu - 2)$

χιλιόμετρα, εἰς τ ἡμέρας θὰ διανύσῃ $(\alpha+\mu-2)$. τ χιλιόμετρα. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ πόσον ἀπέχουν μετὰ τ ἡμέρας θὰ προσθέσωμεν τὰ διανυθέντα ὑπ' αὐτῶν διαστήματα εἰς τ ἡμέρας, διότι προχωροῦν κινούμενοι ἀντιθέτως ἤτοι ἀπέχουν $(\alpha+\mu)\,\tau+(\alpha+\mu-2)\,.\,\tau=\alpha\tau+\mu\tau+\alpha\tau+\mu\tau-2\tau=2\alpha\tau+2\mu\tau-2\tau$ χιλιόμετρα.

108. Ἀφοῦ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ διψηφίου ἀριθμοῦ εἶναι α καὶ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων του εἶναι μ, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων του θὰ εἶναι $\alpha-\mu$ καὶ ἐπειδὴ 1 δεκὰς ἔχει 10 μονάδας ὁ ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ ἐν συνόλῳ μονάδας $(\alpha-\mu)\,10+\mu=10\alpha-10\mu+\mu=10\alpha-9\mu$. Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ, οὗτος θὰ ἔχῃ ἤδη μ δεκάδας καὶ $\alpha-\mu$ μονάδας καὶ μονάδας ἐν ὅλῳ $10\mu+(\alpha-\mu)=10\mu+\alpha-\mu=9\mu+\alpha$ καὶ θὰ αὐξηθῇ κατὰ $9\mu+\alpha-(10\alpha-9\mu)=9\mu+\alpha-10\alpha+9\mu=18\mu-9\alpha$ μονάδας.

109. Ἀφοῦ ὁ α' διανύει 30 χιλ. κάθε ἡμέραν, εἰς τ ἡμέρας θὰ διανύσῃ 30 τ. χλμ. Ὁ β' ἐπειδὴ ἀνεχώρησε μ ἡμέρας βραδύτερον τοῦ α' θὰ κινηθῇ ἐπὶ $(\tau-\mu)$ ἡμέρας μὲ γ χλμ. ἡμερησίως καὶ θὰ διανύσῃ $\gamma\,.\,(\tau-\mu)$ χιλμ.. Μετὰ τ ἡμέρας θὰ ἀπέχουν $30\,\tau-\gamma(\tau-\mu)=30\,\tau-\gamma\tau+\gamma\mu$ χιλιόμετρα.

Γινόμενον πολυωνύμων

Ἀσκήσεις σελὶς 71. 110. Διατάσσομεν ταῦτα κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ πολλαπλασιάζομεν ὡς κάτωθι:

α')

$$\begin{array}{r} x^2+4x+3 \\ -x^2+1 \\ \hline -x^4-4x^3-3x^2 \qquad\qquad \\ +x^2+4x+3 \\ \hline -x^4-4x^3-2x^2+4x+3 \end{array}$$

Διὰ $x=-1$ εὑρίσκομεν:

$-(-1)^4-4(-1)^3-2(-1)^2+4(-1)+3=-(+1)-4(-1)-2\,.\,(+1)+4(-1)+3=-1+4-2-4+3=0.$

β')

$$\begin{array}{r} x^2+2x+2 \qquad\qquad \\ x^2-5x+3 \qquad\qquad \\ \hline x^4+2x^3+2x^2 \qquad\qquad\quad \\ -5x^3-10x^2-10x \qquad \\ +3x^2+6x+6 \\ \hline x^4-3x^3-5x^2-4x+6 \end{array}$$

Ἂν $x=-1$ εὑρίσκομεν:

$(-1)^4-3(-1)^3-5(-1)^2-4(-1)+6=1-3(-1)-5\,.\,1-4(-1)+6=1+3-5+4+6=9.$

γ')

$$\begin{array}{r} x^3-2x^2+8 \qquad\qquad \\ x^2-2x-2 \qquad\qquad \\ \hline x^5-2x^4 \qquad +8x^2 \qquad\qquad \\ -2x^4+4x^3 \qquad -16x \qquad \\ -2x^3+4x^2 \qquad -16 \\ \hline x^5-4x^4+2x^3+12x^2-16x-16 \end{array}$$

Ἂν $x=3$ εὑρίσκομεν:

$3^5-4\,.\,3^4+2\,.\,3^3+12\,.\,3^2-16\,.\,3-16=243-4.81+2.27+12.9-16\,.\,3-16=243-324+54+108-48-16=405-388=17.$

δ')

$$\begin{array}{r} 5\alpha^3+3\alpha^2-2\alpha-1 \qquad\qquad \\ -4\alpha^2 \qquad +\alpha-3 \qquad\qquad \\ \hline -20\alpha^5-12\alpha^4+8\alpha^3+4\alpha^2 \qquad\qquad\quad \\ +5\alpha^4+3\alpha^3-2\alpha^2-\alpha \qquad \\ -15\alpha^3-9\alpha^2+5\alpha+3 \\ \hline -20\alpha^5-7\alpha^4-4\alpha^3-7\alpha^2+5\alpha+3 \end{array}$$

Ἂν $x=3$ εὑρίσκομεν:

$-20\,.\,3^5-7\,.\,3^4-4.3^3-7.3^2+5.3+3=-20\,.\,243-7\,.\,81-4.27-7.9+5.3+3=-4860-567-108-63+15+3=-5580.$

111. α′) $(4\alpha^{2\nu+4} + 6\alpha^{\nu+3} + 9\alpha^2)(2\alpha^{\nu+4} - 3\alpha^3) = 8\alpha^{2\nu+4+\nu+4} +$
$+ 12\alpha^{\nu+3+\nu+4} + 18\alpha^{2+\nu+4} - 12\alpha^{2\nu+4+3} - 18\alpha^{\nu+3+3} - 27\alpha^5 = 8\alpha^{3\nu+8} +$
$12\alpha^{2\nu+7} + 18\alpha^{\nu+6} - 12\alpha^{2\nu+7} - 18\alpha^{\nu+6} - 27\alpha^5 = 8\alpha^{3\nu+8} - 27\alpha^5.$

β′) $(x^{12} - x^4y^2 + x^6y^4 - x^3y^6 + y^8)\,.\,(x^3 + y^2) =$
$= x^{15} - x^7y^2 + x^9y^4 - x^6y^6 + x^3y^8 + x^{12}y^2 - x^4y^4 + x^6y^6 - x^3y^8 + y^{10} =$
$= x^{15} + x^{12}y^2 + x^9y^4 - x^7y^2 - x^4y^4 + y^{10}.$

γ′) $(\alpha^\mu - \beta\alpha^{\mu-1}\,.\,x + \gamma\,.\,\alpha^{\mu-2}x^2)\,.\,(x^{2-\mu} + \beta\,.\,\alpha^{1-\mu}\,.\,x - \gamma\alpha^\mu x^2) =$
$= \alpha^\mu x^{2-\mu} - \beta\alpha^{\mu-1}x^{3-\mu} + \gamma\alpha^{\mu-2}x^{4-\mu} + \beta\alpha x - \beta^2\alpha^0x^2 +$
$+ \gamma\beta\alpha^{-1}x^3 - \gamma\alpha^{2\mu}x^2 + \gamma\beta\alpha^{2\mu-1}x^3 - \gamma^2\alpha^{2\mu-2}x^4.$

δ′) $\left[x^{\alpha(\beta-1)} + y^{\beta(\alpha-1)}\right]\cdot\left[x^{\alpha(\beta-1)} - y^{\beta(\alpha-1)}\right] = x^{\alpha(\beta-1)+\alpha(\beta-1)}$
$+ y^{\beta(\alpha-1)}x^{\alpha(\beta-1)} - x^{\alpha(\beta-1)}y^{\beta(\alpha-1)} - y^{\beta(\alpha-1)+\beta(\alpha-1)} = x^{2\alpha(\beta-1)} - y^{2\beta(\alpha-1)}$

ε′) $(x^4 + x^3 - x^2 + x + 1)(x - 1)(x + 2)(x + 1) =$
$= (x^4 + x^3 - x^2 + x + 1)(x^3 + 2x^2 - x - 2) =$
$= x^7 + 3x^6 - 4x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2.$

ς′) $(2\alpha + \beta - 3\gamma)\,.\,(2\alpha + \beta + 3\gamma)(\beta - 3\gamma - 2\alpha)$. Πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὰ δύο πρῶτα πολυώνυμα καὶ εὑρίσκομεν:
$(2\alpha + \beta - 3\gamma)(2\alpha + \beta + 3\gamma) = 4\alpha^2 + 2\alpha\beta + 6\alpha\gamma + 2\alpha\beta +$
$+ \beta^2 + 3\beta\gamma - 6\alpha\gamma - 3\beta\gamma - 9\gamma^2 = 4\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 - 9\gamma^2.$

Τὸ γινόμενον $4\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 - 9\gamma^2$ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ τρίτον πολυώνυμον καὶ ἔχομεν:
$(4\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 - 9\gamma^2)\,.\,(\beta - 3\gamma - 2\alpha) = 4\alpha^2\beta - 12x^2\gamma - 8\alpha^3 +$
$+ 4\alpha\beta^2 - 12\alpha\beta\gamma - 8\alpha^2\beta + \beta^3 - 3\beta^2\gamma - 2\alpha\beta^2 - 9\beta\gamma^2 + 27\gamma^3 + 18\alpha\gamma^2 =$
$= -8\alpha^3 + \beta^3 + 27\gamma^3 - 4\alpha^2\beta + 4\alpha\beta^2 - 9\gamma^2\beta - 12\alpha^2\gamma - 3\beta^2\gamma - 2\beta^2\alpha + 18\gamma^2\alpha - 12\alpha\beta\gamma.$

112. Ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ ἔχομεν:
$(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) = \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 + \alpha^2\delta^2 + \beta^2\delta^2$. Προσθέτομεν καὶ ἀφαιροῦμεν τὸν ὅρον $2\alpha\beta\gamma\delta$ καὶ ἔχομεν: $(\alpha^2 + \beta^2\,(\gamma^2 + \delta^2) = \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2 +$ $+ 2\alpha\beta\gamma\delta + \alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma\delta = (\gamma\alpha + \beta\delta)^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma)^2$ ἢ κατ' ἄλλην διάταξιν τῶν ὅρων $(\alpha\gamma - \beta\delta)^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)^2$.

113. Ἀντικαθιστῶμεν τὴν δοθεῖσαν τιμὴν τοῦ x καὶ ἔχομεν:
$x^3 - 8y^3 - 27\omega^3 - 18xy\omega = (2y + 3\omega)^3 - 8y^3 - 27\omega^3 - 18(2y + 3\omega)y\omega =$
$= (2y)^3 + 3\,.\,(2y)^2\,.\,3\omega + 3\,.\,2y\,.\,(3\omega)^2 + (3\omega)^3 - 8y^3 - 27\omega^3 - 36y^2\omega - 54y\omega^2 =$
$= 8y^3 + 36y^2\omega + 54y\omega^2 + 27\omega^3 - 8y^3 - 27\omega^3 - 36y^2\omega - 54y\omega^2 = 0$
μετὰ τὰς ἀναγωγάς.

114. Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης ἰσότητος ἔχομεν:
$(\alpha - \beta)^2 + 2\beta^2 + (\beta - \gamma)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + 2\beta^2 + \beta^2 - 2\beta\gamma + \gamma^2 =$
$= \alpha^2 + 4\beta^2 - 2\beta(\alpha + \gamma) + \gamma^2$ καὶ ἐπειδὴ $\alpha + \gamma = 2\beta$
ἔχομεν: $\alpha^2 + 4\beta^2 - 2\beta(\alpha + \gamma) + \gamma^2 = \alpha^2 + 4\beta^2 - 2\beta\,.\,2\beta + \gamma^2 =$
$= \alpha^2 + 4\beta^2 - 4\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2 + \gamma^2.$

115. Ἐκ τῆς $x + y = 1$, ἂν προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη της τὸ $-x$ λαμβάνομεν: $x + y - x = 1 - x$ ἢ $y = 1 - x$. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸ α′ μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος ὅπου y τὸ $1 - x$ καὶ ἔχομεν: $x^3(1 - x + 1) - (1 - x)^3\,.\,(x + 1) - x + 1 - x =$

$= x^3 (2 - x) - (1 - x)^3 (x + 1) - 2x + 1 =$
$= 2x^3 - x^4 - (1 - 3x + 3x^2 - x^3)(x + 1) - 2x + 1 =$
$= 2x^3 - x^4 - x + 3x^2 - 3x^3 + x^4 - 1 + 3x - 3x^2 + x^3 - 2x + 1$
$= 3x^3 - 3x^3 - x^4 + x^4 + 3x^2 - 3x^2 + 3x - 3x - 1 + 1 = 0.$

116. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸ α' μέλος τῆς ἀποδεικτέας σχέσεως ὅπου x τὸ $\alpha - \beta$ καὶ ἔχομεν:
$(x - \alpha)^2 + (x - \alpha)(2\beta - \gamma) - \beta\gamma + \beta^2 = (\alpha - \beta - \alpha)^2 + (\alpha - \beta - \alpha) . (2\beta - \gamma) -$
$+ \beta\gamma + \beta^2 = (-\beta)^2 - \beta(2\beta - \gamma) - \beta\gamma + \beta^2 =$
$= \beta^2 - 2\beta^2 + \beta\gamma - \beta\gamma + \beta^2 = 2\beta^2 - 2\beta^2 + \beta\gamma - \beta\gamma = 0.$

117. Τὸ $\varphi(x_1 + 1) = 3(x_1 + 1)^2 - (x_1 + 1) + 1 =$
$= 3(x_1^2 + 2x_1 + 1) - x_1 - 1 + 1 = 3x_1^2 + 6x_1 + 3 - x_1 - 1 + 1 =$
$= 3x_1^2 + 5x_1 + 3$. Τὸ $\varphi(x_1) = 3x_1^2 - x_1 + 1$.
Τὸ $\varphi(0) = 3 . 0^2 - 3 . 0 + 1 = 1$.
Ἄρα $\varphi(x_1 + 1) - \varphi(x_1) - 2\varphi(0) = 3x_1^2 + 5x_1 + 3 - (3x_1^2 - x_1 + 1) - 2 . 1 =$
$= 3x_1^2 + 5x_1 + 3 - 3x_1^2 + x_1 - 1 - 2 = 6x_1$ μετὰ τὰς δυνατὰς ἀναγωγὰς τῶν ὁμοίων ὅρων.

118. α') Ἐπειδὴ $\varphi(x) = 3x^2 + 7x$, τὸ $\varphi(x + 1) = 3(x + 1)^2 + 7(x + 1) =$
$= 3(x^2 + 2x + 1) + 7x + 7 = 3x^2 + 6x + 3 + 7x + 7 = 3x^2 + 13x + 10.$
Ἄρα $\varphi(x + 1) - \varphi(x) = 3x^2 + 13x + 10 - (3x^2 + 7x) =$
$= 3x^2 + 13x + 10 - 3x^2 - 7x = 6x + 10 = y(x).$
β') Ἐπειδὴ $y(x) = 6x + 10$ εἶναι $y(x + 1) = 6(x + 1) + 10 =$
$= 6x + 6 + 10 = 6x + 16$. Ἄρα $y(x + 1) - y(x) = 6x + 16 - (6x + 10) =$
$= 6x + 16 - 6x - 10 = 6.$

119. α') Ἔχω διαδοχικῶς: $(\tau - \alpha)^2 + (\tau - \beta)^2 + (\tau - \gamma)^2 =$
$= (\tau^2 - 2\alpha\tau + \alpha^2) + (\tau^2 - 2\beta\tau + \beta^2) + (\tau^2 - 2\tau\gamma + \gamma^2) =$
$= 3\tau^2 - 2\tau(\alpha + \beta + \gamma) + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3\tau^2 - 2\tau . (2\tau) + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 =$
$= 3\tau^2 - 4\tau^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \tau^2$ καθ' ὅσον $\alpha + \beta + \gamma = 2\tau$.
β') $(\tau - \alpha)^3 + (\tau - \beta)^3 + (\tau - \gamma)^3 + 3\alpha\beta\gamma = (\tau^3 - 3\alpha\tau^2 + 3\alpha^2\tau - \alpha^3) +$
$+ (\tau^3 - 3\beta\tau^2 + 3\beta^2\tau - \beta^3) + (\tau^3 - 3\tau^2\gamma + 3\tau\gamma^2 - \gamma^3) + 3\alpha\beta\gamma =$
$= 3\tau^3 - 3\tau^2(\alpha + \beta + \gamma) + 3\tau(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \alpha^3 - \beta^3 - \gamma^3 + 3\alpha\beta\gamma =$
$$= 3\tau^3 - 3\tau^2 . (2\tau) + 3 . \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \cdot (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \alpha^3 - \beta^3 - \gamma^3 + 3\alpha\beta\gamma =$$
$$= 3\tau^3 - 6\tau^3 + \frac{3}{2}(\alpha^3 + \alpha\beta^2 + \alpha\gamma^2 + \beta\alpha^2 + \beta^3 + \beta\gamma^2 + \gamma\alpha^2 + \gamma\beta^2 + \gamma^3) -$$
$$+ (\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma) = -3\tau^3 + \frac{1}{2}(3\alpha^3 + 3\beta^3 + 3\gamma^3 + 3\alpha\beta^2 +$$
$$+ 3\alpha^2\beta + 3\beta\gamma^2 + 3\beta^2\gamma + 3\alpha\gamma^2 + 3\alpha^2\gamma) - \frac{1}{2}(2\alpha^3 + 2\beta^3 + 2\gamma^3 - 6\alpha\beta\gamma) =$$
$$= -3\tau^3 + \frac{1}{2}(3\alpha^3 - 2\alpha^3 + 3\beta^3 - 2\beta^3 + 3\gamma^3 - 2\gamma^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 +$$
$$+ 3\alpha\gamma^2 + 3\alpha^2\gamma + 3\beta\gamma^2 + 3\beta^2\gamma + 6\alpha\beta\gamma) = -3\tau^3 + \frac{1}{2}(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 +$$
$$+ 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + 3\alpha\gamma^2 + 3\alpha^2\gamma + 3\beta^2\gamma + 3\beta\gamma^2 + 6\alpha\beta\gamma) =$$
$$= -3\tau^3 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)^3 = -3\tau^3 + \frac{1}{2}(2\tau)^3 = -3\tau^3 + 4\tau^3 = \tau^3,$$

καθ' ὅσον $(\alpha+\beta+\gamma)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+3\beta^2\gamma+3\beta\gamma^2+3\alpha\gamma^2+3\alpha^2\gamma+$ $+6\alpha\beta\gamma$, ὡς εὑρίσκομεν εὐκόλως ἂν γράψωμεν τὸ $(\alpha+\beta+\gamma)^3=$ $=[(\alpha+\beta)+\gamma]^3$ καὶ ἀναπτύξωμεν κατὰ τὸν κανόνα τοῦ κύβου ἀθροίσματος δύο μονωνύμων.

γ') Ἐκτελῶ τὰς πράξεις εἰς τὸ α' μέλος καὶ λαμβάνω

$2(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)+\alpha(\tau-\beta)(\tau-\gamma)+\beta(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)+\gamma(\tau-\alpha).(\tau-\beta)=$

$=2\tau^3-2\tau^2(\alpha+\beta+\gamma)+2\tau(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-2\alpha\beta\gamma+$

$+\alpha\tau^2-\alpha\tau(\beta+\gamma)+\alpha\beta\gamma+\beta\tau^2-\beta\tau(\alpha+\gamma)+\alpha\beta\gamma+\gamma\tau^2-\gamma\tau(\alpha+\beta)+$

$+\alpha\beta\gamma=2\tau^3-2\tau^2.2\tau+2\tau(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-2\alpha\beta\gamma+\tau^2(\alpha+\beta+\gamma)+$

$+3\alpha\beta\gamma-\tau(\alpha\beta+\alpha\gamma)-\tau(\alpha\beta+\beta\gamma)-\tau(\alpha\gamma+\beta\gamma)=$

$=-2\tau^3+2\tau(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+2\tau^3+\alpha\beta\gamma-2\tau(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=\alpha\beta\gamma.$

120. Τὸ α' μέλος γίνεται $\alpha^4+\beta^4+(\alpha+\beta)^2.(\alpha+\beta)^2=$

$=\alpha^4+\beta^4+(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)(\alpha+\beta)^2=\alpha^4+\beta^4+(\alpha^2+\beta^2).(\alpha+\beta)^2+$

$+2\alpha\beta(\alpha+\beta)^2=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2+(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta(\alpha+\beta)^2=$

$=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2+(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)=$

$=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2+(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)+4\alpha^2\beta^2=$

$=(\alpha^2+\beta^2)^2+2\alpha^2\beta^2+(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)=$

$=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)+2\alpha^2\beta^2+(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)^2=$

$(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)^2+2\alpha^2\beta^2+(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)^2=2(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)^2+$

$+2\alpha^2\beta^2=2\alpha^2\beta^2+2(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)^2$

121. α') Ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις εἰς τὸ α' μέλος καὶ λαμβάνομεν

$\alpha^5+\alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3+\beta^5-\alpha^3\beta^2-\alpha^2\beta^3=\alpha^5+\beta^5.$

β') Τὸ α' μέλος γίνεται μετὰ τὰς πράξεις :

$y^3-3y^2\omega+3y\omega^2-\omega^3+x^3-3x^2y+3xy^2-y^3+$

$+3(x-y).(xy-\omega x-y\omega+\omega^2)=x^3-\omega^3-3x^2\omega+3x\omega^2=(x-\omega)^3.$

122. Τὸ α' μέλος γράφεται $\alpha^4+\beta^4-2\alpha^2\beta^2+4\alpha^2\beta^2=$

$=\alpha^4+\beta^4+2\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+\beta^2)^2.$

123. Ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις καὶ λαμβάνομεν $x^2y-x^2\omega+$ $+y^2\omega-y^2x+\omega^2x-\omega^2y+(y-\omega)(\omega x-\omega y-x^2+xy)=$ $=x^2y-x^2\omega+y^2\omega-y^2x+\omega^2x-\omega^2y+y\omega x-\omega y^2-yx^2+$ $+xy^2-\omega^2x+\omega^2y+\omega x^2-\omega xy=0.$

Διαίρεσις ἀκεραίων μονωνύμων

124. α') $9\mu^4y^5:-3\mu^2y^2=-3\mu^2y^3.$

β') $-121\,x^5y^5:11x^2y^4=-11x^3y.$

γ') $0{,}5x^2y^3:-0{,}2xy=-2{,}5xy^2.$

δ') $0{,}45\alpha^2\beta^3\gamma^4:0{,}9\beta^3\gamma^3=0{,}5\alpha^2\beta^0\gamma^1=0{,}5\alpha^2\gamma.$

ε') $-12\mu^4\nu^5:16\mu^4\nu=-\dfrac{12}{16}\mu^0\nu^4=-\dfrac{3}{4}\nu^4=-0{,}75\nu^4.$

στ') $4\alpha\beta^4:0{,}25\alpha\beta^5\gamma\delta^4=\dfrac{4\alpha\beta^4}{0{,}25\alpha\beta^5\gamma\delta^4}=\dfrac{16}{\beta\gamma\delta^4}.$

ζ') $\dfrac{7}{9}\alpha^5\beta^4\gamma^3:0{,}8\alpha^5\beta^5=-\dfrac{7\alpha^5\beta^4\gamma^3}{9\,.\,0{,}8\alpha^5\beta^5}=\dfrac{-7\gamma^3}{7{,}2\beta}=$

$=-\dfrac{70\gamma^3}{72\beta}=-\dfrac{35\gamma^3}{36\beta}.$

Διαίρεσις πολυωνύμου διὰ μονωνύμου

125. α΄) $(14x^3y^2-28x^4y^2):2x^2y^2=7x-14x^2$ καὶ ἑπομένως
$14x^3y^2-28x^4y^2=2x^2y^2.(7x-14x^2)$. Διὰ $x=2$, $y=-2$ εὑρίσκομεν:
$14.2^3.(-2)^2-28.2^4(-2)^2=2.2^2(-2)^2.(7.2-14.2^2)$ ἢ $14.8.4-28.16.4=$

$$=2.4.4(14-14.4) \text{ ἢ } 448-2792=32(14-56) \text{ ἢ}$$

$$-1344=32.(-42) \text{ ἢ } -1344=-1344$$

β΄) $(x+y)(\alpha+\beta):(x+y)=\alpha+\beta$ καὶ $(x+y)(\alpha+\beta)=(x+y)(\alpha+\beta)$.
Διὰ $x=y=4$, $\alpha=\beta=1$ ἔχομεν: $(4+4)(1+1)=(4+4)(1+1)$ ἢ

$$8.2=8.2 \text{ ἢ } 16=16.$$

γ΄) $(8\alpha^4\beta^2-16\alpha^3\beta^3+24\alpha^2\beta^4-12\alpha^2\beta^2):(-4\alpha^2\beta^2)=-2\alpha^2+4\alpha\beta-6\beta^2+3$
καὶ διαιρετέος $=(-4\alpha^2\beta^2)(-2\alpha^2+4\alpha\beta-6\beta^2+3)$. Διὰ $\alpha=3$, $\beta=2$ εὑρίσκομεν, ὡς ἀνωτέρω: $-2160=-2160$.

δ΄) $(x^{\mu+2}.y^{\nu}+2x^{\mu+1}.y^{\nu+1}-x^{\mu}.y^{\nu+2}):x^{\mu}.y^{\nu}=$

$$=x^{\mu+2-\mu}.y^{\nu-\nu}+2x^{\mu+1-\mu}.y^{\nu+1-\nu}-x^{\mu-\mu}.y^{\nu+2-\nu}=$$

$$x^2.y^0+2x^1.y^1-x^0\,y^2=x^2+2xy-y^2.$$

126. α΄) $\alpha x+\beta x=(\alpha+\beta).x$ (ἐξάγομεν τὸν κοινὸν παράγοντα ἐκτὸς παρενθέσεως).

β΄) $49\alpha\beta+63\alpha=7\alpha.(7\beta+9)$.

γ΄) $56xy-72x\omega=8x(7y-9\omega)$.

δ΄) $0{,}35\alpha\beta-0{,}49\alpha\gamma=0{,}7\alpha(0{,}5\beta-0{,}7\gamma)$.

ε΄) $2{,}3\alpha^4\beta^5-2{,}5\alpha^5\beta^4=\alpha^4\beta^4(2{,}3\beta-2{,}5\alpha)$.

στ΄) $\alpha^3x^3y+3\alpha^2\beta x^2y+3\alpha\beta^2xy^2-xy^4=xy(\alpha^3x^2+3\alpha^2\beta x+3\alpha\beta^2y-y^3)$

ζ΄) $12\frac{2}{3}\alpha^3\beta-14{,}25\alpha^4\beta^7-15\frac{5}{6}\alpha^5\beta^5+11\frac{1}{12}\alpha^6\beta^4=$

$$=\alpha^3\beta\left(12\frac{2}{3}-14{,}25\alpha\beta^6-15\frac{5}{6}\alpha^2\beta^4+11\frac{1}{12}\alpha^3\beta^3\right).$$

Διαίρεσις πολυωνύμου διὰ πολυωνύμου

127. α΄)

$$\begin{array}{l r|l}
 & 2x^3-7x^2-7x+4 & 2x-1 \\
 & -2x^3+x^2 & x^2-3x-5 \text{ (πηλίκον)} \\ \hline
\text{(α΄ μερικὸν ὑπόλ.)} & -6x^2-7x+4 & \\
 & 6x^2-3x & \\ \hline
\text{(β΄ μερικὸν ὑπόλ.)} & -10x+4 & \\
 & +10x-5 & \\ \hline
\text{(τελικὸν ὑπόλοιπον)} & -1 &
\end{array}$$

Δοκιμή. $(2x-1)\ (x^2-3x-5)-1=2x^3-7x^2-7x+4.$

β')

$$
\begin{array}{rrrr|l}
6x^3 & +2x^2 & +11x & +10 & 3x-2 \\ \cline{5-5}
-6x^3 & +4x^2 & & & 2x^2+2x+5 \\ \cline{1-4}
 & 6x^2 & +11x & +10 & \\
 & -6x^2 & +4x & & \\ \cline{2-4}
 & & 15x & +10 & \\
 & & -15x & +10 & \\ \cline{2-4}
 & & & 20 &
\end{array}
$$

Δοκιμή : $(3x-2)\ (2x^2+2x+5)+20=6x^3+2x^2+11x+10.$

γ')

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & +x^2 & & +1 & x^2+x+1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & -x^3 & -x^2 & & & x^2-x+1 \\ \cline{1-5}
 & -x^3 & & & +1 & \\
 & +x^3 & +x^2 & +x & & \\ \cline{2-5}
 & & x^2 & +x & +1 & \\
 & & -x^2 & -x & -1 & \\ \cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

δ')

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -6x^2 & +12x & -8 & x^2-4x+4 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +4x^2 & -4x & & x-2 \\ \cline{1-4}
 & -2x^2 & +8x & -8 & \\
 & 2x^2 & -8x & +8 & \\ \cline{1-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

ε')

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
10x^5 & -21x^4 & & -10x^2 & -40x & & 5x^2-3x+8 \\ \cline{7-7}
-10x^5 & +6x^4 & -16x^3 & & & & 2x^3-3x^2-5x-\frac{1}{5} \\ \cline{1-6}
 & -15x^4 & -16x^3 & -10x^2 & -40x & & \\
 & +15x^4 & -9x^3 & +24x^2 & & & \\ \cline{2-6}
 & & -25x^3 & +14x^2 & -40x & & \\
 & & 25x^3 & -15x^2 & +40x & & \\ \cline{3-6}
 & & & -x^2 & & & \\
 & & & +x^2 & -\frac{3x}{5} & +\frac{8}{5} & \\ \cline{4-6}
 & & & & -\frac{3x}{5} & +\frac{8}{5} &
\end{array}
$$

στ′)

$$
\begin{array}{l|l}
\alpha^{10} \qquad\qquad +\alpha^5 \qquad\qquad +1 & \alpha^2+\alpha+1 \\
-\alpha^{10}-\alpha^9-\alpha^8 & \hline \alpha^8-\alpha^7+\alpha^5-\alpha^4+ \\
\hline
-\alpha^9-\alpha^8 \qquad +\alpha^5 \qquad\qquad +1 & +\alpha^3-\alpha+1 \\
+\alpha^9+\alpha^8+\alpha^7 & \\
\hline
+\alpha^7 \quad +\alpha^5 \qquad\qquad +1 & \\
-\alpha^7-\alpha^6-\alpha^5 & \\
\hline
-\alpha^6 \qquad\qquad +1 & \\
+\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4 & \\
\hline
\alpha^5+\alpha^4 \qquad\qquad +1 & \\
-\alpha^5-\alpha^4-\alpha^3 & \\
\hline
-\alpha^3 \qquad\qquad +1 & \\
+\alpha^3+\alpha^2+\alpha & \\
\hline
\alpha^2+\alpha+1 & \\
-\alpha^2-\alpha-1 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

ζ′) Εὑρίσκομεν πηλίκον $\alpha^2+2\alpha\beta+3\beta^2$ καὶ τελικὸν ὑπόλοιπον $4\alpha\beta^3-2\beta^4$.

η′) Πηλίκον $x^4-4x^3-9x^2-14x-19$, ὑπόλοιπον $-24x+20$.

ϑ′) Πηλίκον $x^3-4x^2+11x-24$, ὑπόλοιπον 0.

128.

$$
\begin{array}{l|l}
x^{3\nu}-3x^{2\nu}y^\nu+3x^\nu y^{2\nu}-y^{3\nu} & x^\nu-y^\nu \\
-x^{3\nu}+x^{2\nu}y^\nu & \hline x^{2\nu}-2x^\nu y^\nu+y^{2\nu} \\
\hline
-2x^{2\nu}y^\nu+3x^\nu y^{2\nu}-y^{3\nu} & \\
+2x^{2\nu}y^\nu-2x^\nu y^{2\nu} & \\
\hline
x^\nu y^{2\nu}-y^{3\nu} & \\
-x^\nu y^{2\nu}+y^{3\nu} & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

β′)

$$
\begin{array}{l|l}
3\alpha^{4x}+14\alpha^{3x} \qquad\qquad +9\alpha^x+2 & \alpha^{2x}+5\alpha^x+1 \\
-3\alpha^{4x}-15\alpha^{3x}-3\alpha^{2x} & \hline 3\alpha^{2x}-\alpha^x+2 \\
\hline
-\alpha^{3x}-3\alpha^{2x}+9\alpha^x+2 & \\
+\alpha^{3x}+5\alpha^{2x}+\alpha^x & \\
\hline
2\alpha^{2x}+10\alpha^x+2 & \\
-2\alpha^{2x}-10\alpha^x-2 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

γ')

$$
\begin{array}{l|l}
x^{8\nu} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -y^{8\rho} & x^{5\nu}-x^{4\nu}y^{\rho}+x^{\nu}y^{4\rho}-y^{5\rho} \\
\cline{2-2}
-x^{8\nu}+x^{7\nu}y^{\rho}-x^{4\nu}y^{4\rho}+x^{3\nu}y^{5\rho} & x^{3\nu}+x^{2\nu}y^{\rho}+x^{\nu}y^{2\rho}+y^{3\rho} \\
\hline
\quad x^{7\nu}y^{\rho}-x^{4\nu}y^{4\rho}+x^{3\nu}y^{5\rho} \qquad -y^{8\rho} & \\
-x^{7\nu}y^{\rho}+x^{6\nu}y^{2\rho}-x^{3\nu}y^{5\rho}+x^{2\nu}y^{6\rho} & \\
\hline
\quad x^{6\nu}y^{2\rho}-x^{4\nu}y^{4\rho}+x^{2\nu}y^{6\rho}-y^{8\rho} & \\
-x^{6\nu}y^{2\rho}+x^{5\nu}y^{3\rho}-x^{2\nu}y^{6\rho}+x^{\nu}y^{7\rho} & \\
\hline
\quad x^{5\nu}y^{3\rho}-x^{4\nu}y^{4\rho}+x^{\nu}y^{7\rho}-y^{8\rho} & \\
-x^{5\nu}y^{3\rho}+x^{4\nu}y^{4\rho}-x^{\nu}y^{7\rho}+y^{8\rho} & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

δ') $(\alpha^{4\mu}+4\alpha^{2\mu}x^{2\nu}+16y^{4\nu}) : (\alpha^{2\mu}+2\alpha^{\mu}x^{\nu}+4x^{2\nu}) =$
$= \alpha^{2\mu}-2x^{\nu}\alpha^{\mu}+4x^{2\nu}$.

ε') $(x^{\mu+\nu}\,.\,y^{\nu}-4x^{\mu+\nu-1}y^{2\nu}-27x^{\mu+\nu-2}y^{3\nu}+42x^{\mu+\nu-3}\,.\,y^{4\nu}):$
$:(x^{\mu}+3x^{\mu-1}\,.\,y^{\nu}-6x^{\mu-2}y^{2\nu}) = x^{\nu}y^{\nu}-7x^{\nu-1}y^{2\nu}$.

129. Γνωρίζομεν, ὅτι εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν ἰσχύει ἡ ἰσότης $\Delta = \delta\,.\,\pi$, ὅπου Δ εἶναι ὁ διαιρετέος, δ ὁ διαιρέτης καὶ π τὸ πηλίκον. Ἔστωσαν ἤδη μ, ν, λ οἱ βαθμοὶ διαιρετέου, διαιρέτου καὶ πηλίκου, ὅτε θὰ ἔχωμεν: $\mu=\nu+\lambda$, ἐξ ἧς $\lambda=\mu-\nu$. Π.χ.

1) $(x^3+y^3):(x+y)=x^2-xy+y^2$. Εἶναι $\mu=3$, $\nu=1$, ὅτε $\lambda=3-1=2$.

2) $(x^{\mu}+x^{\mu-\rho}+3x^{\rho}+3):(x^{\rho}+1)=x^{\mu-\rho}+3$. Εἶναι $\mu=\mu$, $\nu=\rho$ ὅτε $\lambda=\mu-\rho$.

3) $(\alpha^{10}+\alpha^5+1):(\alpha^2+\alpha+1)=\alpha^8-\alpha^7+\alpha^5-\alpha^4+\alpha^3-\alpha+1$. Εἶναι $\mu=10$, $\nu=2$, ὅτε $\lambda=10-2=8$.

Ὑπόλοιπον διαιρέσεως διὰ $\chi \pm \alpha$ ἢ διὰ $\alpha\chi \pm \beta$

130. α') $(2x^2+x-9):(x-2)$. Ἵνα εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως θέτομεν εἰς τὸν διαιρετέον, ὅπου x τὴν τιμὴν 2, ἥτις μηδενίζει τὸν διαιρέτην καὶ ἔχομεν:

$$\upsilon = 2\,.\,2^2+2-9=2\,.\,4+2-9=8+2-9=1.$$

β') $(x^2+6x+7):(x+2)$. Θέτομεν εἰς τὸν διαιρετέον ἀντὶ $x=-2$ καὶ ἔχομεν: $\upsilon=(-2)^2+6\,.\,(-2)+7=-1$.

γ') $(x^4+17x^3-63x-33):(x-0{,}5)$. Θέτομεν ἀντὶ $x=0{,}5$ καὶ ἔχομεν: $\upsilon=0{,}5^4+17\,.\,0{,}5^3-68\,.\,0{,}5-33=0{,}0625+17\,.\,0{,}125-68\,.\,0{,}5-33=$
$=0{,}0625+2{,}125-34-33=-64{,}8125$.

δ') Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι: $\upsilon=27\left(\mp\frac{1}{3}\right)^3\pm 1=27\left(\mp\frac{1}{27}\right)\pm 1=$
$=\mp 1\pm 1=0$.

131. α') Ὁ διαιρέτης $3x-4$ μηδενίζεται διὰ $x=\frac{4}{3}$ καὶ συνεπῶς

$$\upsilon = 81\left(\frac{4}{3}\right)^4-256=81\,.\,\frac{256}{81}-256=0.$$

β') Ὁ διαιρέτης $2\alpha\pm\beta$ μηδενίζεται διὰ $\alpha=\mp\frac{\beta}{2}$ καὶ συνεπῶς

$$\upsilon=8\,.\,\left(\mp\frac{\beta}{2}\right)^3\pm\beta^3=8\,.\,\left(\mp\frac{\beta^3}{8}\right)\pm\beta^3=\mp\beta^3\pm\beta^3=0.$$

γ') Ὁ διαιρέτης $2x + 3$ μηδενίζεται διὰ $x = -\frac{3}{2}$ καὶ συνεπῶς
$υ = 32 . \left(-\frac{3}{2}\right)^5 + 343 = 32 . \left(-\frac{243}{32}\right) + 343 = -243 + 343 = 100.$

δ') Ὁμοίως εὑρίσκομεν:
$υ = 64 . \left(-\frac{3}{2}\right)^6 - 1 = 64 . \left(+\frac{3^6}{2^6}\right) - 1 = 64 . \left(+\frac{729}{64}\right) - 1 =$
$= 729 - 1 = 728.$

Σημ. Τὸ $64α^6 - 1$ νὰ γραφῇ $64x^6 - 1$.

ε') Ὁ διαιρέτης $1 + x$ μηδενίζεται διὰ $x = -1$ καὶ συνεπῶς $υ = 1 + (-1)^9 = 1 - 1 = 0.$

στ') Ὁ διαιρέτης $α^2 + β^2$ μηδενίζεται ἂν ἀντὶ $α^2$ τεθῇ $-β^2$, ὁ δὲ διαιρετέος $α^{10} + β^{10}$ γράφεται: $(α^2)^5 + (β^2)^5$ καὶ συνεπῶς $υ = (-β^2)^5 + (β^2)^5 = -β^{10} + β^{10} = 0.$

ζ') Ὁ διαιρέτης μηδενίζεται ἂν τεθῇ $α^4 = β^4$ καὶ ὁ διαιρετέος γράφεται: $(α^4)^3 - (β^4)^3$ καὶ συνεπῶς $υ = (β^4)^3 - (β^4)^3 = β^{12} - β^{12} = 0.$

η') Ὁ διαιρέτης μηδενίζεται ἂν τεθῇ $x^3 = -y^3$ καὶ ὁ διαιρετέος γράφεται: $(x^3)^5 + (y^3)^5$ καὶ συνεπῶς $υ = (-y^3)^5 + (y^3)^5 = -y^{15} + y^{15} = 0.$

θ') Ὁ διαιρέτης μηδενίζεται ἂν τεθῇ $x^3 = -y^2$ καὶ ὁ διαιρετέος γράφεται: $(x^3)^5 + y^{10}$ καὶ συνεπῶς $υ = (-y^2)^5 + y^{10} = -y^{10} + y^{10} = 0.$

ι') Ὁ διαιρέτης μηδενίζεται ἂν τεθῇ $x^6 = y^6$ καὶ ὁ διαιρετέος γράφεται: $(x^6)^3 - y^{18}$ ἄρα $υ = (y^6)^3 - y^{18} = y^{18} - y^{18} = 0.$

132. α') Ὁ διαιρετέος γράφεται: $(y^ν)^μ - 1$ καὶ ἂν τεθῇ $y^ν = 1$ ἔχομεν: $υ = 1^μ - 1 = 1 - 1 = 0.$

β') Ὁ διαιρετέος γράφεται: $(μ^3)^4 - ν^{12}$ καὶ διὰ $μ^3 = ν^3$ ἔχομεν: $υ = (ν^3)^4 - ν^{12} = ν^{12} - ν^{12} = 0.$

γ') Διὰ $α = -β$ ἔχομεν: $υ = (-β)^{2ν+μ} + β^{2ν+μ}.$

δ') Ὁ διαιρετέος γράφεται: $(y^3)^4 - ω^4$ καὶ διὰ $y^3 = -ω$ ἔχομεν: $υ = (-ω)^4 - ω^4 = ω^4 - ω^4 = 0.$

ε') Ὁ διαιρετέος γράφεται: $(x^π)^4 - 1$ καὶ διὰ $x^π = 1$ ἔχομεν: $υ = 1^4 - 1 = 0.$

Πηλίκα τῶν διαιρέσεων $(χ^μ \pm α^μ) : (χ \pm α)$

133. α') Διὰ $α = -β$ εὑρίσκομεν: $υ = (-β)^3 + β^3 = β^3 - β^3 = 0$ καὶ πηλίκον $α^2 - αβ + β^2.$

β') Διὰ $α = β$ εὑρίσκομεν: $υ = β^3 - β^3 = 0$ καὶ πηλίκον $α^2 + αβ + β^2.$

γ') Διὰ $α = -β$ εὑρίσκομεν: $υ = (-β)^2 - β^2 = β^2 - β^2 = 0$ καὶ πηλίκον $α - β.$

134. α') Γράφεται: $(α + β)^3 : (α + β)^2 = (α + β)^{3-2} = α + β$ καὶ $υ = 0.$

β') Γράφεται: $(α - β)^3 : (α - β)^2 = (α - β)^{3-2} = α - β$ καὶ $υ = 0.$

135. α') $(x^6 + y^6) : (x + y)$. Διὰ $x = -y$ ἔχομεν: $υ = (-y)^6 + y^6 = y^6 + y^6 = 2y^6$ καὶ πηλίκον: $x^5 - x^4y + y^2x^3 - y^3x^2 + y^4x - y^5.$

β') $(x^6 - y^6) : (x - y)$. Διὰ $x = y$ ἔχομεν: $υ = y^6 - y^6 = 0$ καὶ πηλίκον: $x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5.$

γ') $υ = 0$ καὶ πηλίκον $x^2 - xy + y^2.$

δ') $υ = 0$ καὶ πηλίκον $x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4.$

ε') $υ = 0$ καὶ πηλίκον $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$.
ϛ') $υ = 2α^3$ καὶ πηλίκον $x^2 + xα + α^2$.

136. α') Εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως $(x^3 - α^3) : (x - α)$
β') » » » » $(x^5 - 1) : (x + 1)$
γ') » » » » $(x^4 - 1) : (x - 1)$
δ') » » » » $(α^4 - β^4) : (α - β)$
ε') » » » » $(x^5 + α^5) : (x + α)$

137. Ὁ διαιρετέος γράφεται $(α^ν)^5 - (β^ν)^5$ καὶ ἂν θέσωμεν $α^ν = β^ν$ ἔχομεν: $υ = β^{5ν} - β^{5ν} = 0$ καὶ πηλίκον $(α^ν)^4 + (α^ν)^3 β^ν + (α^ν)^2 (β^ν)^2 + α^ν (β^ν)^3 + (β^ν)^4 = α^{4ν} + α^{3ν}β^ν + α^{2ν}β^{2ν} + α^ν β^{3ν} + β^{4ν}$

138. $(7^ρ + 1) : 8 = (7^ρ + 1) : (7 + 1)$. Ἂν εἰς τὸν διαιρετέον θέσωμεν ἀντὶ 7 τὸ -1 ἔχομεν: $υ = (-1)^ρ + 1$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ ρ εἶναι περιττὸς θετικὸς θὰ εἶναι $υ = -1 + 1 = 0$ καὶ πηλίκον $7^{ρ-1} - 7^{ρ-2} + 7^{ρ-3} \ldots\ldots + 1^{ρ-1}$.

Ὅμοιαι πρὸς αὐτὴν διαιρέσεις εἶναι καὶ αἱ $(5^ν + 1) : 6$, $(9^λ + 1) : 10$, ὅπου ν, λ εἶναι θετικοὶ ἀκέραιοι περιττοὶ ἀριθμοί.

139. Ἵνα τὸ $(α + β + γ)^μ - α^μ - β^μ - γ^μ$ διαιρῆται διὰ τοῦ $α + β$ πρέπει νὰ μηδενίζεται, ἂν θέσωμεν εἰς αὐτὸ ἀντὶ $α = -β$. Πράγματι $υ = (-β + β + γ)^μ - (-β)^μ - β^μ - γ^μ = γ^μ - (-β)^μ - β^μ - γ^μ$. Ἐπειδὴ δὲ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι μ θετικὸς ἀκέραιος περιττὸς θὰ εἶναι: $(-β)^μ = -β^μ$ καὶ συνεπῶς $υ = γ^μ - (-β^μ) - β^μ - γ^μ = γ^μ + β^μ - β^μ - γ^μ = 0$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι τοῦτο διαιρεῖται καὶ μὲ $α + γ$, $β + γ$.

140. Ἔστω ὅτι τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $φ(x)$ διαιρεῖται διὰ τῶν διωνύμων $x - α$, $x - β$, $x - γ$, ὅπου α, β, γ, εἶναι διάφοροι ἀλλήλων ἀριθμοὶ καὶ διὰ $x - α$ δίδει πηλίκον $π_1(x)$. Θὰ ἔχωμεν: $φ(x) = (x - α) . π_1(x)$ (1). Αὕτη, ὡς ταυτότης, ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x ἄρα καὶ διὰ $x = β$, ὁπότε ἔχομεν: $φ(β) = (β - α) . π_1(β)$. Ἀλλὰ $φ(β) = 0$, διότι τὸ $φ(x)$ διαιρεῖται ἐξ ὑποθέσεως διὰ $x - β$. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν: $0 = (β - α) . π_1(β)$. Ἐκ ταύτης, ἐπειδὴ $β - α \neq 0$, διότι τὰ α καὶ β ὑπετέθησαν διάφορα ἀλλήλων προκύπτει $π_1(β) = 0$.

Ἀφοῦ $π_1(β) = 0$ τὸ πολυώνυμον $π_1(x)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x - β$ καὶ ἂν $π_2(x)$ εἶναι τὸ πηλίκον θὰ ἔχωμεν: $π_1(x) = (x - β) π_2(x)$ (2). Αὕτη ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x. Ἄρα καὶ διὰ $x = γ$ καὶ ἔχομεν: $π_1(γ) = (γ - β) π_2(γ)$ καὶ ἐπειδὴ $π_1(γ) = 0$ καὶ $γ - β \neq 0$ θὰ εἶναι $π_2(γ) = 0$ δηλαδὴ τὸ πολυώνυμον $π_2(x)$ διαιρεῖται διὰ $x - γ$ καὶ ἂν $π_3(x)$ εἶναι τὸ πηλίκον θὰ ἔχωμεν: $π_2(x) = (x - γ) . π_3(x)$ (3). Συνεπῶς ἐκ τῶν (1), (2) καὶ (3) ἔχομεν: $φ(x) = (x - α) . π_1(x) = (x - α)(x - β) π_2(x) = (x - α)(x - β)(x - γ) . π_3(x)$. Ἡ ἰσότης αὕτη μᾶς λέγει, ὅτι τὸ πολυώνυμον $φ(x)$ διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου $(x - α)(x - β)(x - γ)$ καὶ δίδει πηλίκον $π_3(x)$. Ἀντιστρόφως, ἂν τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $φ(x)$ διαιρῆται διὰ τοῦ γινομένου $(x - α)(x - β)(x - γ)$ καὶ $π_3(x)$ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως θὰ ἔχωμεν:
$φ(x) = (x - α)(x - β)(x - γ) . π_3(x)$. Θέτοντες εἰς τὴν ἰσότητα ταύτην

ἀντὶ x τὸ α, εὑρίσκομεν: $\varphi(\alpha) = (\alpha - \alpha)\ (\alpha - \beta)\ (\alpha - \gamma)\ \pi_3(\alpha)$ καὶ ἐπειδὴ $\alpha - \alpha = 0$, θὰ εἶναι $\varphi(\alpha) = 0$. Ἐπειδὴ $\varphi(\alpha) = 0$, ἕπεται ὅτι τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $\varphi(x)$ διαιρεῖται διὰ $x - \alpha$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι διαιρεῖται καὶ διὰ $x - \beta$, $x - \gamma$.

Ἀνάλυσις ἀκεραίας ἀλγεβρικῆς παραστάσεως εἰς γινόμενον

Α΄) Δι' ἐξαγωγῆς κοινοῦ παράγοντος

141. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην θέτομεν τὸν κοινὸν παράγοντα ἐκτὸς παρενθέσεως καὶ ἐντὸς αὐτῆς γράφομεν τὰ πηλίκα ἑκάστου ὅρου τῆς παραστάσεως διὰ τοῦ κοινοῦ παράγοντος.

α΄) $8\alpha^2\beta - 6\alpha^3 + 4\alpha\beta = 2\alpha(4\alpha\beta - 3\alpha^2 + 2\beta)$.

β΄) $4\alpha x^2y - 82y^2 - 4xy = 2y(2\alpha x^2 - 41y - 2x)$.

γ΄) $2\alpha^2\beta^2\gamma^3(4\alpha - 2\beta\gamma + \gamma)$. δ΄) $5\alpha^3(3x - 2y + \omega)$.

ε΄) $\alpha^2\gamma y^2(\alpha y + 2\gamma - y^2)$. ϛ΄) $\beta\gamma^3(3\beta^2\gamma + 2\beta - 6\gamma)$.

ζ΄) $x^2y^2\ (\omega - xy\omega^2 + y)$ η΄) $\alpha\beta^2\gamma(\gamma^2 - 2\alpha + 3\alpha\beta\gamma)$.

θ΄) $6\alpha^2(1-2\alpha)$. ι΄) $x^2(3-7x^2)$. ια΄) $8xy\ (xy + 2\omega - 3xy\omega^2)$.

142 Β΄) Καθ' ὁμάδας. Κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην χωρίζομεν τοὺς ὅρους εἰς ὁμάδας, ἐκ δύο, τριῶν ἢ περισσοτέρων ὅρων, ὥστε οἱ ὅροι ἑκάστης ὁμάδος νὰ ἔχωσι κοινὸν παράγοντα. Τρέπομεν ἑκάστην ὁμάδα εἰς γινόμενον δι' ἐξαγωγῆς κοινοῦ παράγοντος καὶ οὕτω λαμβάνομεν παράστασιν, τῆς ὁποίας ὅλοι οἱ ὅροι ἔχουν κοινὸν παράγοντα, τὸν ὁποῖον καὶ ἐξάγομεν ἐκτὸς παρενθέσεως.

α΄) $\alpha x^2 + \alpha^2 x + \alpha + x = (\alpha x^2 + \alpha^2 x) + (\alpha + x) =$
$= \alpha x(x+\alpha) + (x+\alpha) = (x+\alpha)\ (\alpha x+1)$.

β΄) $x^3 - x^2\omega - xy^2 + y^2\omega = (x^3 - x^2\omega) + (-xy^2 + y^2\omega) =$
$= x^2(x-\omega) - y^2(x-\omega) = (x-\omega)\ (x^2-y^2) = (x-\omega)\ (x+y)\ (x-y)$.

γ΄) $\alpha\beta x - \alpha\beta y + \gamma\delta x - \gamma\delta y = (\alpha\beta x - \alpha\beta y) + (\gamma\delta x - \gamma\delta y) =$
$= \alpha\beta\ (x-y) + \gamma\delta\ (x-y) = (x-y)\ (\alpha\beta + \gamma\delta)$.

δ΄) $\alpha x^2 - \beta x^2 + \alpha - \beta = (\alpha x^2 - \beta x^2) + (\alpha - \beta) = x^2\ (\alpha-\beta) + (\alpha-\beta) =$
$= (\alpha-\beta)\ (x^2+1)$.

ε΄) 1) $\alpha^2\gamma + \beta^2\delta + \beta^2\gamma + \alpha^2\delta = \gamma\ (\alpha^2 + \beta^2) + \delta\ (\alpha^2 + \beta^2) = (\alpha^2 + \beta^2)\ (\gamma+\delta)$.

2) $\alpha^2\gamma - \beta^2\delta - \beta^2\gamma + \alpha^2\delta = (\alpha^2\gamma - \beta^2\gamma) + (\alpha^2\delta - \beta^2\delta) =$
$= \gamma(\alpha^2 - \beta^2) + \delta(\alpha^2 - \beta^2) = (\alpha^2 - \beta^2)\ (\gamma + \delta) = (\alpha-\beta)\ (\alpha+\beta)\ (\gamma+\delta)$,
καθ' ὅσον $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)\ (\alpha - \beta)$.

στ΄) 1) $\alpha^2\gamma + \alpha\gamma^2 + \alpha\beta\gamma + \beta\gamma^2 = \alpha\gamma\ (\alpha + \gamma) + \beta\gamma(\alpha + \gamma) =$
$= (\alpha + \gamma)\ (\alpha\gamma + \beta\gamma) = (\alpha + \gamma).\ \gamma.\ (\alpha + \beta)$.

2) $\alpha^2\gamma + \alpha\gamma^2 - \alpha\beta\gamma - \beta\gamma^2 = \alpha\gamma(\alpha + \gamma) - \beta\gamma\ (\alpha + \gamma) =$
$= (\alpha + \gamma)\ (\alpha\gamma - \beta\gamma) = (\alpha + \gamma).\ \gamma.\ (\alpha - \beta)$.

ζ΄) $1 + \gamma - \gamma^2xy - \gamma^3xy = (1 + \gamma) - \gamma^2xy(1 + \gamma) = (1 + \gamma).\ (1 - \gamma^2xy)$

η΄) $6x^3 - 10xy^3 - 15y^4 + 9x^2y = (6x^3 + 9x^2y) - (10xy^3 + 15y^4) =$
$= 3x^2(2x + 3y) - 5y^3(2x + 3y) = (2x + 3y) \cdot (3x^2 - 5y^3)$.

θ') $2x(x-y)-6\alpha x+6\alpha y=2x(x-y)-6\alpha(x-y)=(x-y)(2x-6\alpha)=$
$=2\,.\,(x-y)\,.\,(x-3\alpha)$.

ι') $x^3+2(x^2-1)-1=(x^3-1)+2(x^2-1)=(x-1)(x^2+x+1)+$
$+2(x-1)(x+1)=(x-1)\,.\left[x^2+x+1+2(x+1)\right]=(x-1)\;(x^2+3x+3)$.

ια') $\alpha x+\beta x-\gamma x+\alpha y+\beta y-\gamma y=(\alpha x+\beta x-\gamma x)+(\alpha y+\beta y-\gamma y)=$
$=x(\alpha+\beta-\gamma)+y(\alpha+\beta-\gamma)=(x+y)(\alpha+\beta-\gamma)$.

ιβ') $\alpha^5+2(\alpha^3+1)+1=(\alpha^5+1)+2(\alpha^3+1)=(\alpha+1)(\alpha^4-\alpha^3+\alpha^2-\alpha+1)+$
$+2\,.\,(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=(\alpha+1)(\alpha^4-\alpha^3+\alpha^2-\alpha+1+2\alpha^2-2\alpha+2)=$
$=(\alpha+1)(\alpha^4-\alpha^3+3\alpha^2-3\alpha+3)$.

143. Κατὰ τὴν 3ην μέθοδον ἐργαζόμεθα οὕτω: Ἂν δύο ἐκ τῶν τριῶν ὅρων τοῦ τριωνύμου εἶναι τέλεια τετράγωνα, ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἑκάστου τούτων. Ταύτας πολλαπλασιάζομεν καὶ τὸ γινόμενον διπλασιάζομεν καὶ ἂν τοῦτο ἰσοῦται ἀπολύτως μὲ τὸν ἀπομένοντα ὅρον, τότε τὸ δοθὲν τριώνυμον εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος μὲν τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν τῶν δύο τελείων τετραγώνων, ἂν ὁ ἀπομένων ὅρος ἔχῃ πρὸ αὐτοῦ τὸ +, μὲ τὸ τετράγωνον δὲ τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν, ἂν ὁ ἀπομένων ὅρος ἔχῃ πρὸ αὐτοῦ τὸ —.

α') 1) $\mu^2\nu^2+16\mu\nu\alpha^2+64\alpha^4$. Οἱ ὅροι $\mu^2\nu^2$ καὶ $64\alpha^4$ εἶναι τέλεια τετράγωνα καὶ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἑκάστου τούτων εἶναι $\mu\nu$, $8\alpha^2$. Τὸ γιόμενον αὐτῶν εἶναι $8\mu\nu\alpha^2$ καὶ τὸ διπλάσιον γινόμενον εἶναι $16\mu\nu\alpha^2$ ἤτοι ὁ ἀπομένων ὅρος, ὅστις πρὸ αὐτοῦ ἔχει τὸ σημεῖον +. Ἄρα ἡ δοθεῖσα παράστασις ἰσοῦται μὲ $(\mu\nu+8\alpha^2)^2$.

2) $\mu^2\nu^2-16\mu\nu\alpha^2+64\alpha^4=(\mu\nu-8\alpha^2)^2$.

β') $\alpha^2\beta^4\gamma^6\pm2\alpha\beta^2\gamma^3x^8+x^{16}=(\alpha\beta^2\gamma^3\pm x^8)^2$.

γ') $x^6\pm34x^3+289=(x^3\pm17)^2=(x^3\pm17)\,.\,(x^3\pm17)$.

δ') $(x+y)^2-4\omega(x+y)+4\omega^2=\left[(x+y)-2\omega\right]^2=(x+y-2\omega)\,.\,(x+y-2\omega)$

ε') $(\alpha-\beta)^2-6(\alpha-\beta)\gamma^3+9\gamma^6=\left[(\alpha-\beta)-3\gamma^3\right]^2=$
$=(\alpha-\beta-3\gamma^3)\,.\,(\alpha-\beta-3\gamma^3)$.

στ') $(\varphi+\omega^2)^2+8\varphi+8\omega^2=(\varphi+\omega^2)^2+8(\varphi+\omega^2)=$
$=(\varphi+\omega^2)(\varphi+\omega^2+8)$.

144. α') $\alpha^2\beta^2-1^2=(\alpha\beta+1)(\alpha\beta-1)$. β') $4\alpha^2-49\beta^2=(2\alpha+7\beta)(2\alpha-7\beta)$.

γ') $121\alpha^2-36\beta^2=(11\alpha+6\beta)(11\alpha-6\beta)$.

δ') $49^{14}-y^{12}=(49^7+y^6)(49^7-y^6)=(7^{14}+y^6)(7^7+y^3)(7^7-y^3)$.

ε') $81\alpha^4\beta^2-\gamma^4=(9\alpha^2\beta+\gamma^2)(9\alpha^2\beta-\gamma^2)$.

στ') $4\alpha^2\gamma-9\gamma^3=\gamma(4\alpha^2-9\gamma^2)=\gamma(2\alpha+3\gamma)(2\alpha-3\gamma)$.

ζ') $20\alpha^3\beta^2-5\alpha\beta^2=5\alpha\beta^2(4\alpha^2-1)=5\alpha\beta^2(2\alpha+1)(2\alpha-1)$.

η') $3\alpha^5-12\alpha^3\gamma^2=3\alpha^3(\alpha^2-4\gamma^2)=3\alpha^3(\alpha+2\gamma)(\alpha-2\gamma)$.

θ') $1-400x^2=(1+20x^2)(1-20x^2)$.

ι') $4x^{16}-y^{20}=(2x^8+y^{10})(2x^8-y^{10})$.

ια') $9x^2-\alpha^6=(3x+\alpha^3)(3x-\alpha^3)$.

ιβ') $16x^{17}-9xy^6=x(16x^{16}-9y^6)=x(4x^8+3y^3)(4x^8-3y^3)$.

145. α') $\beta^2-x^2+4\alpha x-4\alpha^2=\beta^2-(x^2-4\alpha x+4\alpha^2)=\beta^2-(x-2\alpha)^2=$
$=(\beta+x-2\alpha)(\beta-x+2\alpha)$.

β') $\alpha^2-x^2-y^2-2xy=\alpha^2-(x^2+y^2+2xy)=\alpha^2-(x+y)^2=$
$=(\alpha+x+y)(\alpha-x-y)$.

γ') $\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-16\alpha^2\beta^2=(\alpha+\beta)^2-16\alpha^2\beta^2=(\alpha+\beta+4\alpha\beta)(\alpha+\beta-4\alpha\beta)$.

δ') $4x^2-9\alpha^2+6\alpha-1=4x^2-(9\alpha^2-6\alpha+1)=4x^2-(3\alpha-1)^2=$
$=(2x+3\alpha-1)(2x-3\alpha+1)$.

ε') $x^4-x^2-2x-1=x^4-(x^2+2x+1)=x^4-(x+1)^2=(x^2+x+1)(x^2-x-1)$.

στ') $2xy-x^2+\alpha^2-y^2=\alpha^2-(x^2+y^2-2xy)=\alpha^2-(x-y)^2=$
$=(\alpha+x-y)(\alpha-x+y)$.

ζ') $\alpha^{4\nu}+2\alpha^{2\nu}\beta^{2\nu}-\gamma^{2\nu}+\beta^{4\nu}=(\alpha^{2\nu}+\beta^{2\nu})^2-\gamma^{2\nu}=$
$=(\alpha^{2\nu}+\beta^{2\nu}+\gamma^{\nu})(\alpha^{2\nu}+\beta^{2\nu}-\gamma^{\nu})$.

η') $x^{2\nu}-2x^{\nu}y^{\nu}+y^{2\nu}-4\omega^{2\nu}=(x^{\nu}-y^{\nu})^2-(2\omega^{\nu})^2=$
$=(x^{\nu}-y^{\nu}+2\omega^{\nu})(x^{\nu}-y^{\nu}-2\omega^{\nu})$.

θ') $\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2+2\alpha\beta-2\gamma\delta=(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)-(\gamma^2+\delta^2+2\gamma\delta)=$
$=(\alpha+\beta)^2-(\gamma+\delta)^2=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha+\beta-\gamma-\delta)$.

ι') $\alpha^2-x^2+2(\alpha\beta-3xy)+\beta^2-9y^2=\alpha^2-x^2+2\alpha\beta-6xy+\beta^2-9y^2=$
$=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-(x^2+6xy+9y^2)=(\alpha+\beta)^2-(x+3y)^2=$
$=(\alpha+\beta+x+3y)(\alpha+\beta-x-3y)$.

ια') $\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2-2(\alpha\delta-\beta\gamma)=\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2-2\alpha\delta+2\beta\gamma=$
$=(\alpha^2+\delta^2-2\alpha\delta)-(\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma)=(\alpha-\delta)^2-(\beta-\gamma)^2=(\alpha-\delta+\beta-\gamma)(\alpha-\delta-\beta+\gamma)$.

ιβ') $4(\alpha\delta+\beta\gamma)^2-(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2)^2=$
$=\left[2(\alpha\delta+\beta\gamma)+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2\right].\left[2(\alpha\delta+\beta\gamma)-\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\delta^2\right]=$
$=(2\alpha\delta+2\beta\gamma+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2)(2\alpha\delta+2\beta\gamma-\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\delta^2)=$
$=\left[(\alpha^2+\delta^2+2\alpha\delta)-(\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma)\right]\left[(\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma)-(\alpha^2+\delta^2-2\alpha\delta)\right]=$
$=\left[(\alpha+\delta)^2-(\beta-\gamma)^2\right]\left[(\beta+\gamma)^2-(\alpha-\delta)^2\right]=$
$=(\alpha+\delta+\beta-\gamma)(\alpha+\delta-\beta+\gamma)(\beta+\gamma+\alpha-\delta)(\beta+\gamma-\alpha+\delta)$.

146. α') $9\alpha^4+26\alpha^2\beta^2+25\beta^4=9\alpha^4+30\alpha^2\beta^2+25\beta^4-4\alpha^2\beta^2=$
$=(3\alpha^2+5\beta^2)^2-(2\alpha\beta)^2=(3\alpha^2+5\beta^2+2\alpha\beta)(3\alpha^2+5\beta^2-2\alpha\beta)$.

β') $4x^4-21x^2y^2+9y^4=(4x^4-12x^2y^2+9y^4)-9x^2y^2=$
$=(2x^2-3y^2)^2-(3xy)^2=(2x^2-3y^2+3xy)(2x^2-3y^2-3xy)$.

γ') $\lambda^4+\lambda^2+1=(\lambda^4+2\lambda^2+1)-\lambda^2=(\lambda^2+1)^2-\lambda^2=$
$=(\lambda^2+1+\lambda)(\lambda^2+1-\lambda)$.

δ') $4\alpha^4-13x^2+1=(4\alpha^4-4\alpha^2+1)-9\alpha^2=$
$=(2\alpha^2-1)^2-(3\alpha)^2=(2\alpha^2-1+3\alpha)(2\alpha^2-1-3\alpha)$.

ε') $4x^4-37x^2y^2+9y^4=(4x^4-12x^2y^2+9y^4)-25x^2y^2=$
$=(2x^2-3y^2)^2-(5xy)^2=(2x^2-3y^2+5xy)(2y^2-3y^2-5xy)$.

στ') $\alpha^8+\beta^4=\alpha^8+\beta^4+2\alpha^4\beta^2-2\alpha^4\beta^2=(\alpha^4+\beta^2)^2-(\sqrt{2}\,\alpha^2\beta)^2=$
$=\left(\alpha^4+\beta^2+\alpha^2\beta\sqrt{2}\right)\left(\alpha^4+\beta^2-\alpha^2\beta\sqrt{2}\right)$.

ζ') $\alpha^4+\alpha^2y^2+y^4=\alpha^4+2\alpha^2y^2+y^4-\alpha^2y^2=$
$=(\alpha^2+y^2)^2-(\alpha y)^2=(\alpha^2-y^2+\alpha y)(\alpha^2+y^2-\alpha y)$.

η') $25x^4+31x^2y^2+16y^4=25x^4+40x^2y^2+16y^4-9x^2y^2=$
$=(5x^2+4y^2)^2-(3xy)^2=(5x^2+4y^2+3xy)(5x^2+4y^2-3xy)$.

θ') $\alpha^4+4\beta^4=\alpha^4+4\alpha^2\beta^2+4\beta^4-4\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+2\beta^2)^2-(2\alpha\beta)^2=$
$=(\alpha^2+2\beta^2+2\alpha\beta)(\alpha^2+2\beta^2-2\alpha\beta)$.

ι') $9\alpha^8-15\alpha^4+1=(9\alpha^8+1-6\alpha^4)-9\alpha^4=$
$=(3\alpha^4-1)^2-(3\alpha^2)^2=(3\alpha^4-1-3\alpha^2)(3\alpha^4-1+3\alpha^2)$.

ια΄) $16\alpha^4 - 17\alpha^2 + 1 = (16\alpha^4 + 1 - 8\alpha^2) - 9\alpha^2 = (4\alpha^2 - 1)^2 - (3\alpha)^2 =$
$= (4\alpha^2 - 1 - 3\alpha)(4\alpha^2 - 1 + 3\alpha).$

ιβ΄) $16\lambda^4 + \gamma^4 = (16\lambda^4 + 8\lambda^2\gamma^2 + \gamma^4) - 8\lambda^2\gamma^2 = (4\lambda^2 + \gamma^2)^2 - (\sqrt{8}\lambda\gamma)^2 =$
$= (4\lambda^2 + \gamma^2 + \lambda\gamma\sqrt{8})(4\lambda^2 + \gamma^2 - \lambda\gamma\sqrt{8}).$

ιγ΄) $\alpha^2 + 17\alpha - 390 = \alpha^2 + 30\alpha - 13\alpha - 390 = \alpha(\alpha + 30) - 13(\alpha + 30) =$
$= (\alpha + 30)(\alpha - 13).$

ιδ΄) $\alpha^2 - 7\alpha\beta + 10\beta^2 = \alpha^2 - 5\alpha\beta - 2\alpha\beta + 10\beta^2 =$
$= \alpha(\alpha - 5\beta) - 2\beta(\alpha - 5\beta) = (\alpha - 5\beta)(\alpha - 2\beta).$

147. α΄) $4x^2 + 13x + 3 = \dfrac{4^2x^2 + 4 \cdot 13x + 4 \cdot 3}{4} = \dfrac{16x^2 + 52x + 12}{4} =$

$= \dfrac{16x^2 + 48x + 4x + 12}{4} = \dfrac{16x(x+3) + 4(x+3)}{4} = \dfrac{(x+3)(16x+4)}{4} =$

$= \dfrac{(x+3) \cdot 4(4x+1)}{4} = (x+3)(4x+1).$

β΄) $6x^2 + 17x + 12 = 6x^2 + 8x + 9x + 12 =$
$= 2x(3x + 4) + 3(3x + 4) = (3x + 4)(2x + 3).$

γ΄) $11\alpha^2 - 23\alpha\beta + 2\beta^2 = 11\alpha^2 - 22\alpha\beta - \alpha\beta + 2\beta^2 =$
$= 11\alpha(\alpha - 2\beta) - \beta(\alpha - 2\beta) = (\alpha - 2\beta)(11\alpha - \beta).$

δ΄) 1) $x^3 + 64 = (x+4)(x^2 - 4x + 16)$ 2) $x^3 - 64 = (x-4)(x^2 + 4x + 16).$

ε΄) 1) $343 + x^3 = (7+x)(49 - 7x + x^2)$ 2) $343 - x^3 = (7-x)(7^2 + 7x + x^2).$

ς΄) 1) $\alpha^3\beta^3 + 343 = (\alpha\beta + 7)(\alpha^2\beta^2 - 7\alpha\beta + 7^2).$
2) $\alpha^3\beta^3 - 343 = (\alpha\beta - 7)(\alpha^2\beta^2 + 7\alpha\beta + 7^2).$

ζ΄) 1) $8\alpha^3 + \beta^6 = (2\alpha + \beta^2)(4\alpha^2 - 2\alpha\beta^2 + \beta^4).$
2) $8\alpha^3 - \beta^6 = (2\alpha - \beta^2)(4\alpha^2 + 2\alpha\beta^2 + \beta^4).$

η΄) $(216\mu^3 \pm \nu^6) = (6\mu \pm \nu^2)(36\mu^2 \mp 6\mu\nu^2 + \nu^4).$

148. α΄) $(x+y)^2 - 1 - xy(x+y+1) = (x+y+1)(x+y-1) - xy(x+y+1) =$
$= (x+y+1)(x+y-1-xy) = (x+y+1)[x(1-y) - (1-y)] = (x+y+1)(1-y)(x-1).$

β΄) $\alpha^4 - \beta^4 + 2\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2) = (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2) + 2\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2) =$
$= (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta) = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)^3.$

γ΄) $(x^2 - 4)^2 - (3x - 2)(x+2)^2 = (x+2)^2(x-2)^2 - (3x-2)(x+2)^2 =$
$= (x+2)^2\left[(x-2)^2 - (3x-2)\right] = (x+2)^2(x^2 - 7x + 6) =$
$= (x+2)^2(x^2 - x - 6x + 6) = (x+2)^2\left[x(x-1) - 6(x-1)\right] =$
$= (x+2)^2(x-1)(x-6).$

δ΄) $\alpha^2\gamma^2 + \beta\gamma - \beta - \alpha^2\gamma = \alpha^2\gamma(\gamma - 1) + \beta(\gamma - 1) = (\gamma - 1)(\alpha^2\gamma + \beta).$

ε΄) $x(x+2) - y(2+y) = x^2 + 2x - 2y - y^2 = x^2 - y^2 + 2x - 2y =$
$= (x+y)(x-y) + 2(x-y) = (x-y)(x+y+2).$

στ΄) $\alpha^3 - \beta^3 + \alpha^2\beta - \alpha\beta^2 - \alpha + \beta = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 +$
$+ \alpha\beta(\alpha - \beta) - (\alpha - \beta) = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + \alpha\beta - 1) =$
$= (\alpha - \beta)\left[\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 1\right] = (\alpha - \beta)\left[(\alpha + \beta)^2 - 1\right] =$
$= (\alpha - \beta)(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta - 1).$

ζ΄) $4x + 4\alpha\nu + x^2 - 4\alpha^2 - \nu^2 + 4 = (x^2 + 4x + 4) - (4\alpha^2 + \nu^2 + 4\alpha\nu) =$
$= (x+2)^2 - (2\alpha + \nu)^2 = (x + 2 + 2\alpha + \nu)(x + 2 - 2\alpha - \nu).$

η΄) $x^4y^4 - 4x^2 + 4 - y^2 - 4x^2y^2 + 4xy = (x^4y^4 - 4x^2y^2 + 4) - (4x^2 + y^2 - 4xy) =$

$=(x^2y^2-2)^2-(2x-y)^2=(x^2y^2-2+2x-y)\ (x^2y^2-2-2x+y).$

θ') $x^2y+3xy^2-3x^3-y^3=x^2(y-3x)-y^2(y-3x)=$
$=(x^2-y^2)\ (y-3x)=(x-y)\ (x+y)\ (y-3x).$

ι') $\alpha\beta\ (x^2+1)+x\,(\alpha^2+\beta^2)=\alpha\beta x^2+\alpha\beta+\alpha^2x+\beta^2x=$
$=\alpha x\ (\beta x+\alpha)+\beta\ (\alpha+\beta x)=(\alpha x+\beta)\ (\beta x+\alpha).$

ια') $\pi\nu\ (\mu^2+1)+\mu(\pi^2+\nu^2)=\pi\nu\mu^2+\pi\nu+\mu\pi^2+\mu\nu^2=$
$=\mu\pi\ (\mu\nu+\pi)+\nu\ (\mu\nu+\pi)=(\mu\nu+\pi)\ (\mu\pi+\nu).$

Μ. Κ. Δ. καὶ Ε. Κ. Π.

149. α') $121\alpha^2=11^2\alpha^2$, $168\alpha^4\beta^2=2^3\,.\,3\,.\,7\,.\,\alpha^4\beta^2$ — Μ. Κ. Δ. α^2.

β') $36\alpha^3x=2^2\,.\,3^2\,.\,\alpha^3\,.\,x$, $28x^3y=2^2\,.\,7\,.\,x^3y$ — Μ. Κ. Δ. $2^2\,.\,x$

γ') $(x-1)^2\ (x+2)^3$, $(x-1)\ (y+3)^3$ — Μ. Κ. Δ. $x-1.$

δ') $35x^2\ (\mu+\nu)^2\ (\mu-\nu)^3$, $20x^2\ (\mu+\nu)^2\ (\mu-\nu)^2$, $45x^4\ (\mu+\nu)^3\ (\mu-\nu)^3$ — Μ. Κ. Δ. $5x^2\ (\mu+\nu)^2\ (\mu-\nu)^2.$

ε') $x^3+2x^2-3x=x\,(x^2+2x-3)=x\,(x+3)\ (x-1)$
$2x^3+5x^2-3x=x\ (2x^2+5x-3)=x\,(2x-1)\ (x+3)$ — Μ. Κ. Δ. $x\,(x+3).$

στ') $1-x\quad=1-x$
$(1-x^2)^2\quad=(1+x)^2\ (1-x)^2$ — Μ. Κ. Δ. $(1-x).$
$(1-x)^3\quad=(1-x)^3$

ζ') $x^4+\alpha x^3+\alpha^3x+\alpha^4=x^3(x+\alpha)+\alpha^3(x+\alpha)=$
$=(x+\alpha)\ (x^3+\alpha^3)=(x+\alpha)^2\ (x^2-\alpha x+\alpha^2)$
$x^4+\alpha^2x^2+\alpha^4=(x^2+\alpha^2)^2-\alpha^2x^2=(x^2+\alpha^2+\alpha x)\ (x^2+\alpha^2-\alpha x).$
Μ. Κ. Δ. $x^2-\alpha x+\alpha^2.$

150. α') $18x\ (\alpha+2\beta)^2=2\,.\,3^2\,.\,x\,(\alpha+2\beta)^2$
$9xy\ (\alpha+2\beta)^2\ (\alpha-2\beta)=3^2xy\ (\alpha+2\beta)^2\ (\alpha-2\beta)$
$18x^2y^2(\alpha-2\beta)^2=2.3^2\ x^2y^2(\alpha-2\beta)^2$ Ε. Κ. Π.$=2.3^2x^2y^2(\alpha+2\beta)^2(\alpha-2\beta)^2$

β') $3x^4+3x=3x\,(x+1)\ (x^2-x+1)$, $5x^3-5x=5x\ (x+1)\ (x-1)$
$10x^2+10x=10x\ (x+1).$
Ε. Κ. Π. $=2\,.\,3\,.\,5\,.\,x\,(x+1)\ (x-1)\ (x^2-x+1).$

γ') $14\ \alpha^4\,(\alpha^3-\beta^3)=2\,.\,7\,.\,\alpha^4\ (\alpha-\beta)\ (\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$
$21\ \alpha^2\beta^2(\alpha-\beta)^3=3\,.\,7\,.\,\alpha^2\beta^2(\alpha-\beta)^3$
$6\ \alpha^5\beta(\alpha-\beta)\ (\alpha^2-\beta^2)=2\,.\,3\,.\,\alpha^5\beta\ (\alpha-\beta)^2\,.\,(\alpha+\beta)$
Ε. Κ. Π. $=2\,.\,3\,.\,7\,.\,\alpha^5\,.\,\beta^2\ (\alpha-\beta)^3\ (\alpha+\beta)\ (\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2).$

δ') $\mu^3\nu-\mu\nu^3=\mu\nu\ (\mu+\nu)\ (\mu-\nu)$
$\mu^2+\mu\nu-2\nu^2=(\mu+2\nu)\ (\mu-\nu)$
$\mu^2-\mu\nu-2\nu^2=(\mu-2\nu)\ (\mu+\nu)$ — Ε. Κ. Π. $\mu\nu\ (\mu+\nu)\ (\mu-\nu)\ (\mu-2\nu)\ (\mu+2\nu).$

ε') $x^4-(\pi^2+1)\ x^2+\pi^2=(x+1)\ (x-1)\ (x+\pi)\ (x-\pi)$
$x^4-(\pi+1)^2x^2+2(\pi+1)\pi x-\pi^2=x^4-\pi^2x^2-2\pi x^2-x^2+2\pi^2x+2\pi x-\pi^2=$
$=2\pi x(\pi-x)-x^2(\pi^2-x^2)-(\pi-x)^2=(\pi-x)\ [2\pi x-x^2(\pi+x)-(\pi-x)]=$
$=(\pi-x)\ (2\pi x-x^2\pi-x^3-\pi+x)=(\pi-x)\ (\pi x+\pi x-\pi x^2-x^3-\pi+x)=$

$=(\pi-x)\,[\pi(x-1)-\pi x(x-1)-x(x^2-1)]=(\pi-x)\,(x-1)\,(\pi-\pi x-x^2-x)=$
$=(x-\pi)\,(x-1)\,(\pi x+x^2+x-\pi)$
ἄρα Ε. Κ. Π. $=(x+1)\,(x-1)\,(x+\pi)\,(x-\pi)\,(\pi\chi+x^2+x-\pi)$.

Ἀλγεβρικὰ ρητὰ κλάσματα

151. α') $\dfrac{16\alpha^2\beta^2}{18\alpha\beta^2}=\dfrac{2^4.\alpha^2.\beta^2}{2.3^2.\alpha\beta^2}=\dfrac{8\alpha}{9}$ (Μ. Κ. Δ. = ὁ $5\alpha\beta^2$).

β') $\dfrac{45\alpha^2\beta^2\gamma^2}{9\alpha^2\beta^2\gamma}=5\gamma$ (Μ. Κ. Δ. $=9\alpha^2\beta^2\gamma$).

γ') $\dfrac{46x^2y^2}{39x^3y^5}=\dfrac{46}{39xy^3}$ (Μ. Κ. Δ. $=x^2y^2$).

δ') $\dfrac{98xy-24y^3}{24x^2-32xy}=\dfrac{2y(49x-12y^2)}{7x(3x-4y)}=\dfrac{y(49x-12y^2)}{4x(3x-4y)}$ καὶ Μ.Κ.Δ. ὁ 2

ε') $\dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2}=\dfrac{(x-y)\,(x^2+xy+y^2)}{(x-y)\,(x+y)}=\dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y}$ Μ. Κ. Δ. ὁ $x-y$

στ') $\dfrac{x^2-y^2}{x^3-y^3}=\dfrac{(x+y)\,(x-y)}{(x+y)\,(x^2-xy+y^2)}=\dfrac{x-y}{x^2-xy+y^2}$ Μ. Κ. Δ. $(x+y)$

ζ') $\dfrac{x^4-6561}{x^2-81}=\dfrac{(x^2+81)\;(x^2-81)}{(x^2-81)}=x^2+81$
(Μ. Κ. Δ. $=x^2-81$).

η') $\dfrac{\alpha\beta\gamma+9\beta\gamma-5\gamma^2}{2\alpha\beta\delta\rho+18\beta\delta\rho-10\gamma\delta\rho}=\dfrac{\gamma(\alpha\beta+9\beta-5\gamma)}{2\delta\rho\,(\alpha\beta+9\beta-5\gamma)}=\dfrac{\gamma}{2\rho\delta}$
(Μ. Κ. Δ $=(\alpha\beta+9\beta-5\gamma)$.

θ') $\dfrac{\alpha x+\beta y+\alpha y+\beta x}{\alpha y+2\beta x+2\alpha x+\beta y}=\dfrac{x\,(\alpha+\beta)+y\,(\alpha+\beta)}{y\,(\alpha+\beta)+2x\,(\alpha+\beta)}=$
$=\dfrac{(\alpha+\beta)\,(x+y)}{(\alpha+\beta)\,(y+2x)}=\dfrac{x+y}{y+2x}$ (Μ. Κ. Δ. $=\alpha+\beta$)

ι') $\dfrac{\alpha\beta}{(\gamma-\alpha)\,(\gamma-\beta)}+\dfrac{\beta\gamma}{(\alpha-\gamma)\,(\alpha-\beta)}+\dfrac{\gamma\alpha}{(\beta-\gamma)\,(\beta-\alpha)}=$
$=\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha-\gamma)\,(\beta-\gamma)}+\dfrac{\beta\gamma}{(\alpha-\gamma)\,(\alpha-\beta)}-\dfrac{\alpha\gamma}{(\beta-\gamma)\,(\alpha-\beta)}$
Ε. Κ. Π. τὸ $(\alpha-\beta)\,(\alpha-\gamma)\,(\beta-\gamma)$ ὅτε ἔχομεν:
$\dfrac{\alpha\beta(\alpha-\beta)+\beta\gamma(\beta-\gamma)-\alpha\gamma(\alpha-\gamma)}{(\alpha-\beta)\,(\alpha-\gamma)\,(\beta-\gamma)}=\dfrac{\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+\beta^2\gamma-\beta\gamma^2-\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2}{(\alpha-\beta)\,(\alpha-\gamma)\,(\beta-\gamma)}=$
$=\dfrac{\alpha\beta(\alpha-\beta)+\gamma^2(\alpha-\beta)-\gamma(\alpha^2-\beta^2)}{(\alpha-\beta)\,(\alpha-\gamma)\,(\beta-\gamma)}=\dfrac{(\alpha-\beta)\,(\alpha\beta+\gamma^2-\gamma\alpha-\gamma\beta)}{(\alpha-\beta)\,(\alpha-\gamma)\,(\beta-\gamma)}=$
$=\dfrac{(\alpha-\beta)[\alpha(\beta-\gamma)-\gamma(\beta-\gamma)]}{(\alpha-\beta)\,(\beta-\gamma)\,(\alpha-\gamma)}=\dfrac{(\alpha-\beta)\,(\beta-\gamma)\,(\alpha-\gamma)}{(\alpha-\beta)\,(\beta-\gamma)\,(\alpha-\gamma)}=1$

ια') $\dfrac{\alpha(\alpha-\beta)^2+4\alpha^2\beta+\beta(\alpha+\beta)^2}{\alpha(\alpha-\beta)+2\alpha\beta+\beta(\alpha+\beta)}=\dfrac{\alpha^3-2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+4\alpha^2\beta+\beta\alpha^2+2\alpha\beta^2+\beta^3}{\alpha^2-\alpha\beta+2\alpha\beta+\alpha\beta+\beta^2}=$
$=\dfrac{\alpha\,(\alpha+\beta)^2+\beta\,(\alpha+\beta)^2}{\alpha\,(\alpha+\beta)+\beta\,(\alpha+\beta)}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2\,(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)\,(\alpha+\beta)}=\alpha+\beta.$

ιβ') $\dfrac{x^3+2x^2+2x+1}{x^3+3x^2+3x+1}=\dfrac{(x+1)\,(x^2-x+1)+2x(x+1)}{(x+1)\,(x^2-x+1)+3x(x+1)}=$

$$= \frac{(x+1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2+2x+1)} = \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}.$$

152. α') Εὑρίσκομεν τὸ Ε. Κ. Π. τῶν παρονομαστῶν. Τοῦτο εἶναι $x(x+1)(x-1)$. Τὰ ἰσοδύναμα λοιπὸν κλάσματα πρὸς τὰ ἀρχικὰ εἶναι κατὰ σειράν.

$$\frac{x}{x(x+1)(x-1)}, \quad \frac{(x+1)(x-1)}{x(x+1)(x-1)}, \quad \frac{x(x+1)}{x(x+1)(x-1)}, \quad \frac{x(x+1)}{x(x+1)(x-1)}$$

τὰ ὁποῖα εἶναι ὁμώνυμα ὁ παρανομαστὴς τοῦ α) κλάσματος νά διερεθῇ εἰς x^2-1.

β') Τὸ Ε. Κ. Π. εἶναι $72x^4y^4$ καὶ τὰ ἰσοδύναμα κλάσματα εἶναι:

$$\frac{24\mu x^2y^2}{72x^4y^4}, \quad \frac{9\nu x^3y}{72x^4y^4}, \quad \frac{8\rho y}{72x^4y^4}, \quad \frac{18x^3}{72x^4y^4}.$$

γ') Ταῦτα γράφονται:

$$\frac{\alpha^2}{(x+2)(x-2)(x-1)}, \quad \frac{\alpha}{(x+2)(x+1)}, \quad \frac{\alpha}{(x-3)(x-1)}$$ καὶ τὰ ἰσοδύναμα

εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι εἶναι:

$$\frac{\alpha^2(x+1)(x-3)}{(x+2)(x-2)(x-1)(x+1)(x-3)}, \quad \frac{\alpha(x-2)(x-1)(x-3)}{\text{Ε. Κ. Π.}}, \quad \frac{3(x+2)(x-2)(x+1)}{\text{Ε. Κ. Π.}}$$

δ') Ταῦτα γράφονται $\frac{x^2}{\rho\mu(\alpha+\mu)}, \quad \frac{x}{\alpha\rho^2(\alpha+\mu)}, \quad \frac{1}{\rho^3(\alpha+\mu)(\alpha-\mu)}$

Ε. Κ. Π. $= \alpha\rho^3\mu(\alpha+\mu)(\alpha-\mu)$ καὶ τὰ ἰσοδύναμα εἶναι:

$$\frac{\alpha\rho^2x^2(\alpha-\mu)}{\text{Ε. Κ. Π.}}, \quad \frac{\rho\mu x(\alpha+\mu)}{\text{Ε. Κ. Π.}}, \quad \frac{\alpha\mu}{\text{Ε. Κ. Π.}}$$

Περὶ τῶν παραστάσεων $\frac{\alpha}{0}$ καὶ $\frac{0}{0}$

153. α') Θέτομεν ὅπου $x=0$ εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος καὶ λαμβάνομεν $\frac{0}{0}$ δηλ. ἀόριστον μορφήν. Ἀλλὰ τοῦτο γράφεται $\frac{x^3+2x^4}{4} = \frac{x(x^2+2x^3)}{x} = x^2+2x^3$. Διὰ τῆς ἁπλοποιήσεως αἴρομεν τὴν ἀοριστίαν καὶ θέτοντες ὅπου $x=0$ λαμβάνομεν ὡς ἀληθῆ τιμὴν τοῦ κλάσματος τὴν τιμὴν 0.

β') Ἔχομεν $\frac{(y^2+\alpha^2)(y^2-\alpha^2)}{y^2-\alpha^2} = y^2+\alpha^2$ ὅτε διὰ $y=\alpha$ λαμβάνομεν ὡς ἀληθῆ τιμὴν τοῦ κλάσματος $\alpha^2+\alpha^2=2\alpha^2$.

γ') $\frac{x^2-\alpha^2}{x^3-\alpha^3} = \frac{(x-\alpha)(x+\alpha)}{(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)} = \frac{x+\alpha}{x^2+\alpha x+\alpha^2}$ καὶ διὰ $x=\alpha$ εὑρίσκομεν $\frac{2\alpha}{3\alpha^2} = \frac{2}{3\alpha}$.

δ') $\frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha^2-\beta^2} = \frac{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha^2-\beta^2} = \alpha^2+\beta^2$ καὶ διὰ $\alpha=\beta$ λαμβάνομεν $2\beta^2$.

ε') $\frac{(x^2+2\alpha x+\alpha^2)(x-\alpha)}{x^2-\alpha^2} = \frac{(x+\alpha)^2(x-\alpha)}{(x+\alpha)(x-\alpha)} =$
$= x+\alpha$ καὶ διὰ $x=\alpha$ γίνεται 2α.

στ') $\frac{x^4-\alpha^4}{x-\alpha} = \frac{(x-\alpha)(x^3+\alpha x^2+\alpha^2 x+\alpha^3)}{x-\alpha} = x^3+\alpha x^2+$
$+\alpha^2 x+\alpha^3$ καὶ διὰ $x=\alpha$ λαμβάνομεν $4\alpha^3$.

ζ') $\frac{x^2-3x+5}{x^2-2x+1}$. Τοῦτο διὰ $x=1$ γίνεται $\frac{3}{0}$ ἄρα τείνει πρὸς τὸ ∞.

η') $\frac{\alpha^3+1}{\alpha^2-1} = \frac{(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)}{(\alpha+1)(\alpha-1)} = \frac{\alpha^2-\alpha+1}{\alpha-1}$, ὅπερ διὰ $\alpha=1$ γίνεται $\frac{1}{0}$ ἤτοι τείνει εἰς ∞.

θ') Θέτομεν ἀντὶ $\beta=\alpha-x$ ὅτε τοῦ x τείνοντος εἰς τὸ 0 τὸ β τείνει εἰς τὸ α, ἡ δὲ παράστασις γίνεται $\frac{\sqrt[3]{\alpha}\sqrt{x}+\sqrt{(2\alpha-x)x}}{\sqrt{(2\alpha-x)x}+\alpha^2 x} =$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt{2\alpha-x}\right)\sqrt{x}}{\left(\sqrt{2\alpha-x}+\alpha^2\sqrt{x}\right)\sqrt{x}} = \frac{\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt{2\alpha-x}}{\sqrt{2\alpha-x}+\alpha^2\sqrt{x}}$$ καὶ διὰ $x=0$ γίνεται

$\frac{\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{2\alpha}}$ ἀλλ' ἐπειδὴ $\alpha=\beta$ ἔχομεν τελικῶς $\frac{\sqrt[3]{\beta}+\sqrt{2\beta}}{\sqrt{2\beta}} =$

$$= \frac{\sqrt[3]{\beta}\cdot\sqrt{2\beta}+2\beta}{2\beta}.$$

Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις κλασμάτων

154. α') Εὑρίσκομεν τὸ Ε. Κ. Π. τῶν παρονομαστῶν, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ προσθέτομεν. Ἤτοι : Ε. Κ Π. $=(2x+5)(3x+17)$.

Ἄρα $\frac{2}{2x+5}+\frac{4}{3x+17}-\frac{2(5x+12)}{(2x+5).(3x+17)} = \frac{2(3x+17)}{(2x+5)(3x+17)}+$

$$+\frac{4(2x+5)}{(2x+5)(3x+17)}-\frac{2(5x+12)}{(2x+5)(3x+17)} =$$

$$= \frac{6x+34+8x+20-10x-24}{(2x+5)(3x+17)} = \frac{4x+30}{(2x+5)(5x+17)}.$$

Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν διδομένων εἶναι διὰ $x=2$

$$\frac{2}{2.2+5}+\frac{4}{3.2+17}-\frac{2.(5.2+12)}{(2.2+5).(3.2+17)} = \frac{2}{9}+\frac{4}{23}-\frac{44}{9.23} =$$

$$= \frac{2.23}{9.23}+\frac{4.9}{9.23}-\frac{44}{9.23} = \frac{46}{207}+\frac{36}{207}-\frac{44}{207} = \frac{38}{207}.$$

Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ἐξαγομένου διὰ $x=2$ εἶναι $\frac{4.2+30}{9.23} = \frac{38}{207}$.

β') Ἐπειδὴ $(\alpha-\beta).(\alpha-\gamma) = -(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)$, $(\beta-\gamma)(\beta-\alpha) =$
$=-(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)$ καὶ $(\beta-\alpha)(\gamma-\beta) = [-(\alpha-\beta)].[-(\beta-\gamma)] =$
$=(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)$ τὰ δοθέντα κλάσματα γράφονται οὕτω :

$$-\frac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)}+\frac{\alpha\gamma}{(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)}+\frac{\beta\gamma}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}.$$

Ε. Κ. Π. $=(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$.

καὶ ἔχομεν : $-\frac{\alpha\beta(\beta-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}+\frac{\alpha\gamma(\gamma-\alpha)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}+$

$$+\frac{\beta\gamma(\gamma-\alpha)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=\frac{-\alpha\beta^2+\alpha\beta\gamma+\alpha\gamma^2-\alpha^2\gamma+\beta\gamma^2-\alpha\beta\gamma}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=$$

$$=\frac{\alpha\gamma^2-\alpha\beta^2+\beta\gamma^2-\alpha^2\gamma}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$$

Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν διδομένων ἄν $\alpha=1$, $\beta=7$, $\gamma=2$ εἶναι

$$\frac{1.7}{(1-7)(1-2)}-\frac{1.2}{(7-2)(7-1)}+\frac{7.2}{(7-1)(2-7)}=\frac{7}{(-6).(-1)}-\frac{2}{5.6}+$$

$$+\frac{14}{6.(-5)}=\frac{7}{6}-\frac{2}{30}-\frac{14}{30}=\frac{35}{30}-\frac{16}{30}=\frac{19}{30}.$$

Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ἐξαγομένου εἶναι :

$$\frac{1.2^2-1.7^2+7.2^2-1^2.2}{(1-7)(7-2)(2-1)}=\frac{4-49+28-2}{(-6).5.1}=\frac{-19}{-30}=\frac{19}{30}.$$

Σημ. Νὰ γραφῇ ἀντὶ $\beta=1$, τὸ $\beta=7$ διότι διὰ $\beta=1$ καὶ $\alpha=1$ τὰ κλάσματα δὲν ἔχουν ἔννοιαν.

γ') Ἐπειδὴ $x^2-2x+1=(x-1)^2$ τὸ δοθὲν ἄθροισμα γράφεται :

$$\frac{1-2x}{3(x-1)^2}+\frac{1+x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{6(x+1)}\cdot\ \text{Ε.Κ.Π.}=6.(x-1)^2(x+1).(x^2+1)$$

Καὶ θὰ ἔχωμεν : $\frac{2(1-2x)(x+1)(x^2+1)}{\text{Ε. Κ. Π.}}+\frac{3(1+x^2)(x-1)^2}{\text{Ε. Κ. Π.}}+$

$$+\frac{(x-1)^2.(x^2+1)}{\text{Ε. Κ. Π.}}=\frac{-4x^3-6x^2-4x+6}{6(x+1)(x-1)^2(x^2+1)}.$$

Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν διδομένων διὰ $x=2$ εἶναι :

$$\frac{1-2.2}{3(2^2-2.2+1)}+\frac{1+2}{2(2^2+1)}+\frac{1}{6(2+1)}=\frac{-3}{3}+\frac{3}{10}+\frac{1}{18}=$$

$$=\frac{-3.30}{3.30}+\frac{3.9}{10.9}+\frac{1.5}{18.5}=\frac{-90}{90}+\frac{27}{90}+\frac{5}{90}=-\frac{58}{90}=-\frac{29}{45}.$$

Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ἐξαγομένου διὰ $x=2$ εἶναι :

$$\frac{-4.2^3-6.2^2-4.2+6}{6.(2+1)(2-1)^2(2^2+1)}=\frac{-32-24-8+6}{6.3.1.5}=\frac{-58}{90}=-\frac{29}{45}.$$

δ') Γράφομεν τὰ κλάσματα ὡς ἑξῆς :

$$\frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{\gamma(\alpha^2-\gamma^2)}-\frac{(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)}{\gamma(\alpha+\gamma)^2}-\frac{28}{\alpha^2-\gamma^2}-\frac{3}{\alpha+\gamma}=$$

$$=\frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{\gamma(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)}-\frac{(\alpha-\gamma)}{\gamma(\alpha+\gamma)}-\frac{28}{(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)}-\frac{3}{\alpha+\gamma}.$$

Ε. Κ. Π. εἶναι τὸ $\gamma(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)$ ὅτε θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{\gamma(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)}-\frac{(\alpha-\gamma)^2}{\gamma(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)}-\frac{28\gamma}{\gamma(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)}-\frac{3\gamma(\alpha-\gamma)}{\gamma(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)}=$$

$$=\frac{\alpha^2+\alpha\gamma-\alpha^2+2\alpha\gamma-\gamma^2-28\gamma-3\alpha\gamma+3\gamma^2}{\alpha(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)}=$$

$$=\frac{2\gamma^2-28\gamma}{\gamma(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)}=\frac{2\gamma(\gamma-14)}{\gamma(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)}=\frac{2(\gamma-14)}{(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)}.$$

ε') Γράφομεν τὰ κλάσματα ὡς ἑξῆς :

$$\frac{x^3y-xy^3}{(x^3+y^3)(x^3-y^3)}+\frac{x}{x^3-y^3}-\frac{y}{x^3+y^3}=$$

$$= \frac{x^3y - xy^3 + x(x^3+y^3) - y(x^3-y^3)}{(x^3+y^3)(x^3-y^3)} = \frac{x^4+y^4}{x^6-y^6}.$$

ς') Ἔχομεν διαδοχικῶς :

$$\frac{x^2-(2y-3\omega)^2}{(3\omega+x)^2-4y^2} + \frac{4y^2-(3\omega-x)^2}{(x+2y)^2-9\omega^2} + \frac{\omega^2-x^2}{x+\omega} =$$

$$= \frac{(x+2y-3\omega)(x-2y+3\omega)}{(3\omega+x+2y)(3\omega+x-2y)} + \frac{(2y+3\omega-x)(2y-3\omega+x)}{(x+2y+3\omega)(x+2y-3\omega)} + \frac{(\omega+x)(\omega-x)}{x+\omega} +$$

$$= \frac{x+2y-3\omega}{3\omega+x+2y} + \frac{2y+3\omega-x}{x+2y+3\omega} + \omega - x = \frac{x+2y-3\omega+2y+3\omega-x}{x+2y+3\omega} +$$

$$+ \omega - x = \frac{4y}{x+2y+3\omega} + \omega - x.$$

ζ') Ἔχομεν διαδοχικῶς : $[\text{Ε. Κ. Π.} = (x+y)(x-y)(x^2+y^2)]$

$$\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y} - \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{y^2-x^2} = \frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y} - \frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2}{x^2-y^2} =$$

$$= \frac{x(x+y)(x^2+y^2) - y(x-y)(x^2+y^2) - x^2(x+y)(x-y) - y^2(x^2+y^2)}{(x+y)(x-y)(x^2+y^2)} = \frac{2x^2y^2}{x^4-y^4}$$

η') Ἔχομεν ὡς Ε. Κ. Π. $2(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$. Ἐκτελοῦμεν τὴν ἐν τῇ ἀγκύλῃ ἀφαίρεσιν καὶ ἔχομεν: $\frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{\alpha^2+\beta^2} - \frac{1}{\alpha-\beta} = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2-\alpha^2-\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha-\beta)}$

Ἄρα τὸ κλάσμα γίνεται :

$$\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)} - \frac{\alpha+\beta}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)} - \frac{1}{2} - \frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2-\alpha^2-\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha-\beta)} =$$

$$= \frac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha-\beta)} - \frac{1}{\alpha-\beta} - \frac{1}{2} - \frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2-\alpha^2-\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha-\beta)} =$$

$$= \frac{2(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)}{2(\alpha^2+\beta^2)(\alpha-\beta)} - \frac{2(\alpha^2+\beta^2)}{2(\alpha^2+\beta^2)(\alpha-\beta)} - \frac{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha-\beta)}{2(\alpha^2+\beta^2)(\alpha-\beta)} +$$

$$- \frac{2(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2-2\alpha^2-2\beta^2}{2(\alpha^2+\beta^2)(\alpha-\beta)} =$$

$$= \frac{2\alpha^2-2\alpha\beta-2\beta^2-2\alpha^2-2\beta^2-\alpha^3+\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+\beta^3-2\alpha^3+2\alpha^2\beta-2\beta^3+2\alpha\beta^2+2\alpha^2+2\beta^2}{2(\alpha^2+\beta^2)(\alpha-\beta)} =$$

$$= \frac{-3\alpha^3-2\alpha\beta+\alpha\beta^2+3\alpha^2\beta-\beta^3+2\alpha^2+2\beta^2}{2(\alpha^2+\beta^2)(\alpha-\beta)}.$$

155. Ἂν θέσωμεν ὅπου $\varphi(x)$, $\pi(x)$, $y(x)$, $\omega(x)$ τὰ ἴσα των ἡ δοθεῖσα παράστασις γίνεται : $\frac{\pi(x)\,\omega(x)}{\varphi(x)\,\omega(x)-\pi(x)\,y(x)} =$

$$= \frac{(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)-(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{[(x^2+4)+2x][(x^2+4)-2x]}{16} =$$

$$= \frac{(x^2+4)^2-4x^2}{16} = \frac{x^4+4x^2+16}{16}.$$

Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις κλασμάτων

156. α') $\frac{\alpha x+\alpha y}{\gamma x-\gamma y} \cdot \frac{\gamma x^2-\gamma y^2}{\beta x+\beta y} = \frac{\alpha(x+y)}{\gamma(x-y)} \cdot \frac{\gamma(x+y)(x-y)}{\beta(x+y)} =$

$$= \frac{\alpha(x+y)\,\gamma(x+y)(x-y)}{\gamma(x-y)\,\beta(x+y)} = \frac{\alpha(x+y)}{\beta}.$$

β') $\dfrac{3x^2-6xy+3y^2}{x+y}\cdot\dfrac{x^3+y^3}{6(x-y)}=\dfrac{3(x-y)^2}{x+y}\cdot\dfrac{(x+y)\,(x^2-xy+y^2)}{6\,(x-y)}=$

$=\dfrac{3(x-y)^2\,(x+y)\,(x^2-xy+y^2)}{(x+y)\;6(x-y)}=\dfrac{(x-y)\,(x^2-xy+y^2)}{2}.$

γ') $\left(1+\dfrac{x^4-2x^2y^2+y^4}{4x^2y^2}\right)(x^4-2x^2y^2+y^4)=$

$=\dfrac{4x^2y^2+x^4-2x^2y^2+y^4}{4x^2y^2}\cdot(x^4-2x^2y^2+y^4)=$

$=\dfrac{(x^2+y^2)^2}{4x^2y^2}\cdot(x^2-y^2)^2=\dfrac{(x^4-y^4)^2}{4x^2y^2}.$

δ') Ἔχομεν $\dfrac{\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\delta+\beta\delta}{\alpha\gamma-\beta\gamma-\alpha\delta+\beta\delta}=\dfrac{\gamma(\alpha+\beta)+\delta(\alpha+\beta)}{\gamma(\alpha-\beta)-\delta(\alpha-\beta)}=$

$=\dfrac{(\alpha+\beta)\,(\gamma+\delta)}{(\alpha-\beta\,(\gamma-\delta)}$ διὰ τὸν α′ παράγοντα. Διὰ τὸν β′ παράγοντα λαμβάνομεν: $\dfrac{\gamma(\alpha-\beta)+\delta(\alpha-\beta)}{\gamma(\alpha+\beta)-\delta(\alpha+\beta)}=\dfrac{(\alpha-\beta)\,(\gamma+\delta)}{(\alpha+\beta)\,(\gamma-\delta)}.$

Ἄρα ἔχομεν: $\dfrac{(\alpha+\beta)\,(\gamma+\delta)}{(\alpha-\beta)\,(\gamma-\delta)}\cdot\dfrac{(\alpha-\beta)\,(\gamma+\delta)}{(\alpha+\beta)\,(\gamma-\delta)}=\dfrac{(\gamma+\delta)^2}{(\gamma-\delta)^2}.$

ε') $\dfrac{\alpha^2+2\alpha\beta}{\alpha^2+4\beta^2}\cdot\dfrac{\alpha\beta-2\beta^2}{\alpha^2-4\beta^2}=\dfrac{\alpha(\alpha+2\beta)}{\alpha^2+4\beta^2}\cdot\dfrac{\beta\,(\alpha-2\beta)}{(\alpha+2\beta)\,(\alpha-2\beta)}=\dfrac{\alpha\beta}{\alpha^2+4\beta^2}.$

στ') $\left(\alpha^4-\dfrac{\alpha^2}{x^2}\right)\cdot\dfrac{\alpha^2x^2+\alpha\beta x^2}{\alpha x+1}\cdot\dfrac{\alpha x}{\alpha^2-\beta^2}=$

$=\dfrac{\alpha^2(\alpha^2x^2-1)}{x^2}\cdot\dfrac{\alpha x^2\,(\alpha+\beta)}{\alpha x+1}\cdot\dfrac{\alpha x}{(\alpha+\beta)\,(\alpha-\beta)}=\dfrac{\alpha^2(\alpha x+1)\,(\alpha x-1)\,\alpha x^2(\alpha+\beta)\alpha x}{x^2(\alpha x+1)\,(\alpha+\beta)\,(\alpha-\beta)}=$

$=\dfrac{\alpha^4x(\alpha x-1)}{\alpha-\beta}.$

ζ') $\left(\alpha+1+\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(\alpha-1+\dfrac{1}{\alpha}\right)\cdot\dfrac{\alpha^3(\alpha^2-1)}{\alpha^6-1}=$

$=\dfrac{(\alpha^2+\alpha+1)}{\alpha}\cdot\dfrac{(\alpha^2-\alpha+1)}{\alpha}\cdot\dfrac{\alpha^2(\alpha+1)\,(\alpha-1)}{(\alpha^3+1)\,(\alpha^3-1)}=$

$=\dfrac{(\alpha^2+\alpha+1)}{\alpha}\cdot\dfrac{(\alpha^2-\alpha+1)}{\alpha}\cdot\dfrac{\alpha^2(\alpha+1)\,(\alpha-1)}{(\alpha+1)\,(\alpha^2-\alpha+1)\,(\alpha-1)\,(\alpha^2+\alpha+1)}=1.$

η') Ἔχομεν $\left(2+\dfrac{\mu}{\mu-3}\right)\left(\dfrac{9-\mu^2}{4-\mu^2}\right)\left(\dfrac{2-\mu}{\mu^2+\mu-6}\right)-\dfrac{2}{\mu+2}=$

$=\dfrac{2\mu-6+\mu}{\mu-3}\cdot\dfrac{(3+\mu)\,(3-\mu)}{(2+\mu)\,(2-\mu)}\cdot\dfrac{2-\mu}{(\mu+3)\,(\mu-2)}-\dfrac{2}{\mu+2}=$

$=\dfrac{3(\mu-2)}{\mu-3}\cdot\dfrac{(3+\mu)\,(\mu-3)}{(2+\mu)\,(\mu-2)}\cdot\dfrac{2-\mu}{(\mu+3)\,(\mu-2)}-\dfrac{2}{\mu+2}=\dfrac{3(2-\mu)}{(\mu+2)\,(\mu-2)}=$

$=\dfrac{2}{\mu+2}=-\dfrac{3}{\mu+2}-\dfrac{2}{\mu+2}=-\dfrac{5}{\mu+2}.$

157. Ἀρχικῶς ἐξοδεύει $\dfrac{5\lambda}{3}$, κατόπιν $\dfrac{5\lambda}{7}$ καὶ τέλος $\dfrac{20\lambda}{9}$ ἐκ τοῦ ἀρχικοῦ ποσοῦ τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς 5λ. Ἄρα ἐν ὅλῳ ἐξοδεύει $\dfrac{5\lambda}{3}+\dfrac{5\lambda}{7}+\dfrac{20\lambda}{9}=5\lambda\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{4}{9}\right)=\dfrac{58}{63}\cdot5\lambda$ ἤτοι τὰ $\dfrac{58}{63}$ τοῦ ποσοῦ 5λ καὶ τοῦ μένουν $\frac{63}{63}$ (5λ) — $\frac{58}{63}$ (5λ) $= \frac{5}{63}$ (5λ).

158. Ἀρχικῶς ἐξοδεύει $\frac{\beta-1}{4}$ καὶ τοῦ ἔμειναν $\frac{3(\beta-1)}{4}$. Ἐκ τούτων ἐξοδεύει τὰ $\frac{3}{7}$ δηλαδὴ τὰ $\frac{3}{7}\cdot\frac{3(\beta-1)}{4}=\frac{9(\beta-1)}{28}$. Ἄρα ἐν ὅλῳ ἐξοδεύει $\frac{\beta-1}{4}+\frac{9(\beta-1)}{28}=\frac{16(\beta-1)}{28}$, ἑπομένως θὰ μείνουν $\frac{12(\beta-1)}{28}$ ἢ $\frac{3(\beta-1)}{8}$.

159. Τὰ ἔξοδά του εἶναι συνολικῶς $90000+\frac{(\alpha-90000).4}{9}=$ $=\frac{4\alpha}{9}-50000$. Συνεπῶς θὰ τοῦ μείνουν $\frac{5\alpha}{9}+50000$.

160. Κατ' ἀρχὰς χάνει $\frac{2\gamma}{7}$ δρχ. κατόπιν χάνει $\frac{2\gamma}{7}+1=\frac{2\gamma+7}{7}$. Ἄρα ἐν ὅλῳ χάνει $\frac{2\gamma}{7}+\frac{2\gamma+7}{7}=\frac{4\gamma+7}{7}$ θὰ τοῦ μείνουν δὲ $\gamma-\frac{4\gamma+7}{7}=\frac{3\gamma-7}{7}$.

161. Ἀπὸ τὴν α' τρέχουν $\frac{7}{5}$ ὀκ. κατὰ δλ. ἐκ τῆς β' $\frac{9}{4}$ ὀκ. κατὰ δλ. Εἰς τ (δλ) ἐκ τῆς α' θὰ τρέξουν $\frac{7\tau}{5}$ καὶ ἐκ τῆς δευτέρας $\frac{9(\tau-2)}{4}$.

Συνεπῶς καὶ ἀπὸ τὰς δύο θὰ τρέξουν :

$$\frac{7\tau}{5}+\frac{9(\tau-2)}{4}=\frac{28\tau+45(\tau-2)}{20}=\frac{73\tau-90}{20}.$$

162. α') $\frac{12xy^2}{7\alpha^2\beta}:\frac{8x^2y}{25\alpha\beta^2}=\frac{12xy^2}{7\alpha^2\beta}\cdot\frac{25\alpha\beta^2}{8x^2y}=\frac{12.25xy^2.\alpha\beta^2}{7.8.\alpha^2\beta.x^2y}=$ $=\frac{75\beta y}{14\alpha x}$ μὲ ἀριθμ. τιμὴν $\frac{225}{28}$.

β') $\frac{12\alpha^2}{5\beta^2\gamma^3}:\frac{3\alpha\beta^2}{10\gamma^2}=\frac{12\alpha^2}{5\beta^2\gamma^3}\cdot\frac{10\gamma^2}{3\alpha\beta^2}=\frac{8\alpha}{\beta^4\gamma}$ μὲ ἀριθμ. τιμὴν $\frac{16}{243}$.

γ') $\alpha^3:\left(\alpha^3:\frac{\alpha}{\beta}\right)=\alpha^3:\left(\alpha^3.\frac{\beta}{\alpha}\right)=\alpha^3:\alpha\beta=\alpha^3\,\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{\alpha^3}{\alpha\beta}=\frac{\alpha^2}{\beta}$.

Διὰ $\alpha=-3$, $\beta=-3$ εὑρίσκω -3.

δ') $\frac{9\gamma^2}{28\alpha^3\beta^2}:\left(\frac{12\alpha^2\beta}{7\gamma^2}:4\beta^2\gamma\right)=\frac{9\gamma^2}{28\alpha^3\beta^2}:\left(\frac{12\alpha^2\beta}{7\gamma^2}\cdot\frac{1}{4\beta^2\gamma}\right)=$ $=\frac{9\gamma^2}{28\alpha^3\beta^2}:\frac{3\alpha^2}{7\beta\gamma^3}=\frac{9\gamma^2}{28\alpha^3\beta^2}\cdot\frac{7\beta\gamma^3}{3\alpha^2}=\frac{3\gamma^5}{4\alpha^5\beta}$ μὲ ἀριθμ. τιμήν : $-\frac{1}{12}$.

ε') $\frac{\alpha}{\alpha^3+\beta^3}:\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}-\frac{\alpha}{\beta}+1\right)=\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)\ (\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)}:\frac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{\beta^2}=$

$$=\frac{\alpha\beta^2}{(\alpha+\beta)\ (\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)^2}.$$

στ') $\frac{\alpha^2-\beta^2}{x^2-y^2}:\frac{\alpha^4-\beta^4}{x^4-2x^2\,y^2+y^4}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{x^2-y^2}\cdot\frac{(x^2-y^2)^2}{(\alpha^2+\beta^2)\ (\alpha^2-\beta^2)}=\frac{x^2-y^2}{\alpha^2+\beta^2}$.

ζ') $\dfrac{\alpha^2+\alpha x+\alpha y+xy}{\alpha^2-\alpha x-\alpha y+xy} : \dfrac{\alpha^2-\alpha x+\alpha y-xy}{\alpha^2+\alpha x-\alpha y-xy} =$

$= \dfrac{(\alpha+x)(\alpha+y)}{(\alpha-x)(\alpha-y)} \cdot \dfrac{(\alpha+x)(\alpha-y)}{(\alpha-x)(\alpha+y)} = \dfrac{(\alpha+x)^2}{(\alpha-x)^2}$. ἀριθμ. τιμὴ $= 4$.

η') $\left(\dfrac{2x}{x^2+1} + \dfrac{2x}{x^2-1}\right) : \left(\dfrac{x}{x^2+1} - \dfrac{x}{x^2-1}\right) =$

$= \dfrac{2x(x^2-1)+2x(x^2+1)}{x^4-1} : \dfrac{x(x^2-1)-x(x^2+1)}{x^4-1} =$

$= \dfrac{4x^3}{x^4-1} : \dfrac{-2x}{x^4-1} = \dfrac{4x^3}{x^4-1} \cdot \dfrac{x^4-1}{-2x} = -2x^2.$

θ') $\left[\dfrac{\alpha^3}{\beta^3} - \dfrac{\beta^3}{\alpha^3} - 3\left(\dfrac{\alpha^2}{\beta^2} + \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}\right) + 5\right] : \left(\dfrac{\alpha}{\beta} - 1 - \dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2 =$

$= \left[\dfrac{\alpha^6-\beta^6}{\alpha^3\beta^3} - 3 \cdot \dfrac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha^2\beta^2} + 5\right] : \left(\dfrac{\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2}{\alpha\beta}\right)^2 =$

$= \dfrac{\alpha^6-\beta^6-3(\alpha^4+\beta^4)\alpha\beta+5\alpha^3\beta^3}{\alpha^3\beta^3} \cdot \dfrac{\alpha^2\beta^2}{(\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2)^2} =$

$= \dfrac{(\alpha^6-3\alpha^5\beta+5\alpha^3\beta^3-3\alpha\beta^5-\beta^6)\alpha^2\beta^2}{\alpha^3\beta^3(\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2)^2} = \dfrac{\alpha^6-3\alpha^5\beta+5\alpha^3\beta^3-3\alpha\beta^5-\beta^6}{\alpha\beta(\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2)^2}.$

Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ $\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2$ εὑρίσκομεν πηλίκον $\alpha^4-2\alpha^3\beta-\alpha^2\beta^2+2\alpha\beta^3+\beta^4$.

Ἄρα τὸ κλάσμα ἁπλοποιεῖται καὶ διὰ $\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2$ καὶ εὑρίσκομεν τελικῶς: $\dfrac{\alpha^4-2\alpha^3\beta-\alpha^2\beta^2+2\alpha\beta^3+\beta^4}{\alpha\beta(\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2)}$.

ι') Ὑπολογίζομεν ἑκάστην παρένθεσιν χωριστὰ καὶ εὑρίσκομεν.

Ἀπὸ τὴν α': $\dfrac{(x-\alpha)^3+(x+\alpha)^3}{(x+\alpha)^2(x-\alpha)^2} = \dfrac{2x(x^2+3\alpha^2)}{(x+\alpha)^2(x-\alpha)^2}$.

Ἀπὸ τὴν β': $\dfrac{x^2+3\alpha^2}{(x+\alpha)^2(x-\alpha)^2}$. Ἄρα τελικῶς ἔχομεν:

$\dfrac{2x(x^2+3\alpha^2)}{(x+\alpha)^2(x-\alpha)^2} : \dfrac{x^2+3\alpha^2}{(x+\alpha)^2(x-\alpha)^2} = \dfrac{2x(x^2+3\alpha^2)}{(x+\alpha)^2(x-\alpha)^2} \cdot \dfrac{(x+\alpha)^2(x-\alpha)^2}{x^2+3\alpha^2} = 2x.$

ια') $\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+2\beta} - \dfrac{\alpha}{\alpha-2\beta}\right) : \dfrac{2\alpha^2}{\alpha^2-4\beta^2} = \dfrac{\alpha(\alpha-2\beta)+\alpha(\alpha+2\beta)}{\alpha^2-4\beta^2} : \dfrac{2\alpha^2}{\alpha^2-4\beta^2} =$

$= \dfrac{2\alpha^2}{\alpha^2-4\beta^2} \cdot \dfrac{\alpha^2-4\beta^2}{2\alpha^2} = 1.$

163. Κατόπιν τῆς α' αὐξήσεως ἔχει $\alpha + \dfrac{\alpha}{5} = \dfrac{6\alpha}{5}$ δραχ. Ἀπὸ αὐτὰ ἐξοδεύει τὰ 0,25 ἢ $\dfrac{1}{4}$ ἤτοι $\dfrac{6\alpha}{5} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{3\alpha}{10}$ ὅτε θὰ τοῦ μείνουν: $\dfrac{6\alpha}{5} - \dfrac{3\alpha}{10} = \dfrac{9\alpha}{10}$. Κατόπιν δὲ τῆς δευτέρας αὐξήσεως κατὰ τὸ ἥμισυ αὐτῶν θὰ ἔχῃ: $\dfrac{9\alpha}{10} + \dfrac{9\alpha}{10} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{27\alpha}{20}$ δραχ.

164. Πρὶν ἢ ἐξοδεύσῃ τὰς 5000 δραχ. ἔχει: $\alpha + \dfrac{\alpha}{4} = \dfrac{5\alpha}{4}$ δραχ.

Μετὰ δὲ $\frac{5\alpha}{4} - 5000$ δραχ. Κατόπιν δὲ τῆς δευτέρας αὐξήσεως θὰ ἔχῃ:

$$\frac{5\alpha}{4} - 5000 + \frac{1}{4}\left(\frac{5\alpha}{4} - 5000\right) = \frac{5}{4}\left(\frac{5\alpha}{4} - 5000\right) = \frac{25\alpha}{16} - \frac{25000}{4} =$$

$= \frac{25\alpha}{16} - 6250$. Ἄρα τελικὰ θὰ τοῦ μείνουν: $\frac{25\alpha}{16} - 6250 - 5000 =$

$$= \frac{25\alpha}{16} - 11250.$$

165. Κατ' ἀρχὰς ἐπώλησε $\frac{16\alpha+30}{2} + 1 = 8(\alpha+2)$ αὐγά, ὅτε θὰ τοῦ ἔμειναν $8\alpha + 14$.

Τὴν δευτέραν φορὰν ἐπώλησε $\frac{8\alpha+14}{2} + 1 = 4\alpha + 8$ καὶ τοῦ ἔμειναν $4\alpha+6$. Τὴν τρίτην φορὰν ἐπώλησε $\frac{4\alpha+6}{2} + 1 = 2\alpha+4$ καὶ τοῦ ἔμειναν $2\alpha+2$. Τὴν τελευταίαν φορὰν ἐπώλησε $\frac{2\alpha+2}{2} + 1 = \alpha + 2$ καὶ τοῦ ἔμειναν α.

Σύνθετα κλάσματα

166. α') Ὁ ἀριθμητὴς εἶναι $\frac{x}{\mu} + \frac{y}{\mu} = \frac{x+y}{\mu}$. Ἄρα θὰ ἔχωμεν:

$\frac{x+y}{\mu} : \frac{\omega}{\mu} = \frac{x+y}{\omega} \cdot \frac{\mu}{\omega} = \frac{x+y}{\omega}$. (Ἀριθμητ. τιμὴ $= 2$).

β') Ὑπολογίζομεν χωριστὰ τὸν ἀριθμητὴν καὶ χωριστὰ τὸν παρονομαστὴν καὶ ἔχομεν: $\frac{3\mu+2\nu}{\mu+\nu} : \frac{\mu+2\nu}{\mu+\nu} = \frac{3\mu+2\nu}{\mu+\nu} \cdot \frac{\mu+\nu}{\mu+2\nu} = \frac{3\mu+2\nu}{\mu+2\nu}$ (ἀριθ. τιμὴ ἀδύνατος).

$$\gamma')\quad \frac{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} - 1}{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} + 1} = \frac{\frac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}{\frac{\alpha-\beta+\alpha+\beta}{\alpha+\beta}} =$$

$$= \frac{2\beta(\alpha+\beta)}{2\alpha(\alpha-\beta)} = \frac{\beta(\alpha+\beta)}{\alpha(\alpha-\beta)} \left(\text{Ἀριθ. τιμὴ } \frac{3}{2}\right).$$

$$\delta')\quad \frac{\frac{x+1}{x-1}}{x - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x+1}{x-1}}{\frac{x^2-1}{x}} = \frac{(x+1)\,x}{(x-1)\,(x^2-1)} = \frac{(x+1)\,x}{(x-1)\,(x+1)\,(x-1)} =$$

$$= \frac{x}{(x-1)^2} \left(\text{Ἀριθ. τιμὴ } \frac{4}{9}\right).$$

$$\varepsilon')\quad \frac{x+y}{x+y+\frac{1}{x+y+\frac{1}{x-y}}} = \frac{x+y}{x+y+\frac{1}{\frac{x^2-y^2+1}{x-y}}} =$$

$$= \frac{x+y}{x+y+\dfrac{x-y}{x^2-y^2+1}} = \frac{x+y}{\dfrac{(x+y)(x^2-y^2+1)+(x-y)}{x^2-y^2+1}} =$$

$$= \frac{(x+y)(x^2-y^2+1)}{(x+y)(x^2-y^2+1)+(x-y)}. \quad \left(\text{'Αριθ. τιμὴ} = \frac{12}{13}\right).$$

ς') Ὑπολογίζομεν πρῶτον τὸν παρονομαστὴν ἤτοι :

$$3(x+y) - \frac{8xy}{x+y} = \frac{3(x+y)^2-8xy}{x+y} = \frac{3x^2+3y^2-2xy}{x+y}.$$

Κατόπιν κατὰ σειρὰν οἱ παράγοντες τοῦ ἀριθμητοῦ γίνονται :

$$x-y-\frac{4y^2}{x-y} = \frac{(x-y)^2-4y^2}{x-y} = \frac{x^2-3y^2-2xy}{x-y}$$

$$x+y-\frac{4x^2}{x+y} = \frac{(x+y)^2-4y^2}{x+y} = \frac{y^2-3x^2+2xy}{x+y}$$

καὶ συνεπῶς ἔχομεν : $\dfrac{x^2-3y^2-2xy}{x-y} \cdot \dfrac{y^2-3x^2+2xy}{x+y} : \dfrac{3x^2+3y^2-2xy}{x+y} =$

$$= \frac{(x^2-3y^2-2xy)(y^2-3x^2+2xy)}{(x-y)(3x^2+3y^2-2xy)}. \quad \text{'Αριθ. τιμὴ} = \frac{21}{11}.$$

167. α) Ὁ ἀριθμητὴς γίνεται : $\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma} - \dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\beta} = \dfrac{(\alpha-\beta)^2-(\beta-\gamma)^2}{(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)}$, ὁ

δὲ παρονομαστὴς ἐπίσης : $\dfrac{\alpha-\beta-1}{\alpha-\beta} - \dfrac{\beta-\gamma-1}{\beta-\gamma} = \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta} - \dfrac{1}{\alpha-\beta} +$

$$-\left(\frac{\beta-\gamma}{\beta-\gamma} - \frac{1}{\beta-\gamma}\right) = 1 - \frac{1}{\alpha-\beta} - 1 + \frac{1}{\beta-\gamma} = \frac{1}{\beta-\gamma} - \frac{1}{\alpha-\beta} =$$

$= \dfrac{\alpha-\beta-\beta+\gamma}{(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)} = \dfrac{\alpha+\gamma-2\beta}{(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)}$ ἄρα τὸ κλάσμα γίνεται : $\dfrac{(\alpha-\beta)^2-(\beta-\gamma)^2}{\alpha+\gamma-2\beta} =$

$$= \frac{(\alpha-\gamma)(\alpha+\gamma-2\beta)}{\alpha+\gamma-2\beta} = \alpha-\gamma.$$

β') Ὑπολογίζομεν πρῶτον τὸν ἀριθμητὴν ἤτοι :

$\dfrac{1-(xy-y\omega)^2}{(xy-1)^2-y^2\omega^2} = \dfrac{(1+xy-y\omega)(1-xy+y\omega)}{(xy-1-y\omega)(xy-1+y\omega)}$, ὁ παρανομαστὴς ἐπί-

σης γίνεται : $\dfrac{(y\omega-1)^2-x^2y^2}{(xy-y\omega)^2-1} = \dfrac{(y\omega-1-xy)(y\omega-1+xy)}{(xy-y\omega+1)(xy-y\omega-1)}$. Ἄρα τὸ κλάσμα

δίδει μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν $-\dfrac{(1-xy+y\omega)(xy-\omega y+1)}{(xy+y\omega-1)^2}$.

γ') Ὁ ἀριθμητὴς γίνεται $\dfrac{(y\omega+\omega x+xy+xy\omega)}{xy\omega}$.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ παρονομαστὴς γίνεται ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμητήν, τὸ κλάσμα ἰσοῦται μὲ 1.

168. Θέτομεν ἀντὶ φ(x), φ(y) τὰ ἴσα των, ὅτε ἔχομεν :

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{y-1}{y+1} = \frac{(x-1)(y+1)-(x+1)(y-1)}{(x+1)(y+1)} = \frac{2(x-y)}{(x+1)(y+1)}$$

διὰ τὸν ἀριθμητὴν καὶ $1 + \dfrac{x-1}{x+1} \cdot \dfrac{y-1}{y+1} =$

$= \dfrac{(x+1)(y+1)+(x-1)(y-1)}{(x+1)(y+1)} = \dfrac{2xy+2}{(x+1)(y+1)}$ διὰ τὸν παρονομαστήν.

Ὅτε τελικῶς εὑρίσκομεν: $\dfrac{x-y}{xy+1}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

Ἐξισώσεις α΄ βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον

169. α΄) $x+17=8x+1$. Χωρίζομεν γνωστοὺς ἀπὸ ἀγνώστους ἤτοι: $x-8x=1-17$. Κάμνομεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ ἔχομεν: $-7x=$ $=-16$. Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως διὰ τοῦ συντελεστοῦ -7 τοῦ ἀγνώστου καὶ ἔχομεν: $\frac{-7x}{-7}=\frac{-16}{-7}$ ἢ $x=\frac{16}{7}$.

Ἐπαλήθευσις: Διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν, ὅτι ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ $x=\frac{16}{7}$ εἶναι ἡ ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἀντικαθιστῶμεν **εἰς τὴν ἀρχικῶς δοθεῖσαν ἐξίσωσιν** τὸν ἄγνωστον x μὲ τὴν τιμὴν ταύτην καὶ ἂν ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ α΄ μέλους αὐτῆς ἰσοῦται μὲ τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ β΄ μέλους της, τότε ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ τοῦ x εἶναι ἡ ρίζα τῆς ἐξισώσεως, ἄλλως ἐγένετο σφάλμα κατὰ τὴν πορείαν τῶν πράξεων καὶ πρέπει ἐκ νέου ἐξ ἀρχῆς καὶ μετὰ προσοχῆς νὰ ἐπαναληφθῶσιν αἱ πράξεις.

Ἤτοι α΄ μελος: $\frac{16}{7}+17=\frac{16}{7}+\frac{119}{7}=\frac{135}{7}=19\frac{2}{7}$.

β΄ μέλος: $8\cdot\frac{16}{7}+1=\frac{128}{7}+1=\frac{128}{7}+\frac{7}{7}=\frac{135}{7}=19\frac{2}{7}$.

Συνεπῶς ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ $x=\frac{16}{7}$ εἶναι λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, διότι καὶ τὸ α΄ μέλος αὐτῆς καὶ τὸ β΄ μέλος της λαμβάνουν τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν $19\frac{2}{7}$ διὰ $x=\frac{16}{7}$.

β΄) $5x-4=38-x$. Ἐφαρμόζοντες τὴν πορείαν τῆς § 110 ἔχομεν διαδοχικῶς: $5x+x=38+4$ ἢ $6x=42$ ἢ $\frac{6x}{6}=\frac{42}{6}$ ἢ $x=7$.

Ἐπαλήθευσις: 1ον μέλος: $5x-4=5.7-4=35-4=31$.
2ον μέλος: $38-x=38-7=\quad 31$.

Συνεπῶς ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ $x=7$ εἶναι ἡ ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

170. α΄) $6x+25=31+2x$. Ἔχομεν διαδοχικῶς: $6x-2x=31-25$. ἢ $4x=6$ ἢ $\frac{4x}{4}=\frac{6}{4}$ ἢ $x=\frac{3}{2}=1{,}5$.

Ἐπαλήθευσις: 1ον μέλος: $6x+25=6.1{,}5+25=9+25=34$.
2ον μέλος: $31+2x=31+2.1{,}5=31+3=34$.

Συνεπῶς ἡ ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι $x = 1{,}5$.

β') $4(3x+5) - 60 = 2x$. Ἐκτελοῦμεν τὰς σημειωμένας πράξεις καὶ ἔχομεν διαδοχικῶς: $12x + 20 - 60 = 2x$ ἢ $12x - 2x = 60 - 20$ ἢ $10x = 40$ ἢ $\frac{10x}{10} = \frac{40}{10}$ ἢ $x = 4$.

Ἐπαλήθευσις: 1ον μέλος: $4(3x+5) - 60 = 4(3 \cdot 4 + 5) - 60 =$
$= 4(12+5) - 60 = 4 \cdot 17 - 60 = 68 - 60 = 8$.
2ον μέλος: $2x = 2 \cdot 4 = 8$.

Ἄρα ἡ ρίζα της εἶναι $x = 4$.

171. α') $11(2x - 15) - x = 6$. Ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις καὶ ἔχομεν: $22x - 165 - x = 6$. Χωρίζομεν γνωστοὺς ὅρους ἀπὸ ἀγνώστους: $22x - x = 165 + 6$. Κάμνομεν ἀγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων: $21x = 171$. Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως διὰ τοῦ συντελεστοῦ 21 τοῦ ἀγνώστου x καὶ ἔχομεν:

$$\frac{21x}{21} = \frac{171}{21} \text{ ἢ } x = \frac{57}{7} \text{ (κατόπιν ἁπλοποιήσεως διὰ 3).}$$

Ἐπαλήθευσις: Διὰ $x = \frac{57}{7}$ 1ον μέλος: $11(2x - 15) - x =$
$= 11 \cdot \left(2 \cdot \frac{57}{7} - 15\right) - \frac{57}{7} = 22 \cdot \frac{57}{7} - 15 \cdot 11 - \frac{57}{7} = (22-1) \cdot \frac{57}{7} - 165 =$
$= 21 \cdot \frac{57}{7} - 165 = 3 \cdot 57 - 165 = 171 - 165 = 6$. Ἐπειπὴ καὶ τὸ 2ον μέλος εἶναι 6 ἕπεται, ὅτι ἡ ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι $x = \frac{57}{7}$.

172. $\alpha x = \alpha + 1 + x$. Ἔχομεν διαδοχικῶς: $\alpha x - x = \alpha + 1$ ἢ $(\alpha - 1)x = \alpha + 1$ ἢ $\frac{(\alpha-1) \cdot x}{\alpha-1} = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$ ἢ $x = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$ ἂν $\alpha - 1 \neq 0$.

Ἐπαλήθευσις: Διὰ $x = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$ ἔχομεν:

1ον μέλος: $\alpha x = \alpha \frac{\alpha+1}{\alpha-1} = \frac{\alpha \cdot (\alpha+1)}{\alpha-1} = \frac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}$

2ον μέλος: $\alpha+1+x = \alpha+1+\frac{\alpha+1}{\alpha-1} = \frac{(\alpha+1)(\alpha-1)+(\alpha+1)}{\alpha-1}$

$= \frac{(\alpha+1)(\alpha-1+1)}{\alpha-1} = \frac{(\alpha+1) \cdot \alpha}{\alpha-1} = \frac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}$. Ἄρα ἡ ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι: $x = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$.

173. α') $4\alpha^2 x - 1 = x + 2\alpha$. Ἔχομεν διαδοχικῶς: $4\alpha^2 x - x = 2\alpha + 1$ ἢ $(4\alpha^2 - 1) \cdot x = 2\alpha + 1$ καὶ ἂν $4\alpha^2 - 1 \neq 0$ τότε $x =$
$= \frac{2\alpha+1}{4\alpha^2-1} = \frac{2\alpha+1}{(2\alpha+1)(2\alpha-1)} = \frac{1}{2\alpha-1}$.

Ἐπαλήθευσις: 1ον μέλος: $4\alpha^2 x - 1 = 4\alpha^2 \cdot \frac{1}{2\alpha-1} - 1 = \frac{4\alpha^2}{2\alpha-1} - 1 =$
$= \frac{4\alpha^2 - 2\alpha + 1}{2\alpha-1}$.

2ον μέλος : $x + 2\alpha = \frac{1}{2\alpha-1} + 2\alpha = \frac{1}{2\alpha-1} + \frac{2\alpha(2\alpha-1)}{2\alpha-1} =$

$= \frac{1+4\alpha^2-2\alpha}{2\alpha-1} = \frac{4\alpha^2-2\alpha+1}{2\alpha-1}$. Ἄρα ἡ ρίζα εἶναι :

$x = \frac{1}{2\alpha-1}$ ἄν $4\alpha^2 - 1 \neq 0$.

β) $\beta x + \alpha x = 1$. Ἔχομεν διαδοχικῶς :

$(\beta+\alpha)x = 1$ καὶ ἄν $\beta + \alpha \neq 0$ τότε $x = \frac{1}{\beta+\alpha}$.

Ἐπαλήθευσις : 1ον μέλος : $\beta x + \alpha x = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta} = 1$.
Ἐπειδὴ καὶ τὸ 2ον μέλος εἶναι 1, ἕπεται ὅτι ἡ ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι : $x = \frac{1}{\alpha+\beta}$, ἄν $\alpha + \beta \neq 0$.

174. $\frac{3x-1}{4} - \frac{2x+1}{3} - \frac{4x-5}{5} = 4$. Ἀπαλείφομεν τοὺς παρονομαστάς. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ Ε. Κ. Π. 60 τῶν παρονομαστῶν αὐτῆς καὶ λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν :

$15(3x-1) - 20(2x+1) - 12(4x-5) = 4 \cdot 60$.

Ἐκτελοῦμεν τὰς σημειωμένας πράξεις εἰς τὰ μέλη αὐτῆς καὶ ἔχομεν : $45x - 15 - 40x - 20 - 43x + 60 = 240$.

Χωρίζομεν τοὺς ἀγνώστους ὅρους αὐτῆς ἀπὸ τοὺς γνωστοὺς καὶ ἔχομεν : $45x - 40x - 43x = 240 + 15 + 20 - 60$. Ἐκτελοῦμεν τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων αὐτῆς καὶ ἔχομεν : $-43x = 215$. Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης διὰ τοῦ συντελεστοῦ -43 τοῦ x καὶ ἔχομεν : $\frac{-43x}{-43} = \frac{215}{-43}$ ἢ $x = -5$.

Ἐπαλήθευσις : Διὰ $x = -5$ τὸ 1ον μέλος δίδει :

$$\frac{3.(-5)-1}{4} - \frac{2.(-5)+1}{3} - \frac{4(-5)-5}{5} = \frac{-15-1}{4} - \frac{-10+1}{3} - \frac{-20-5}{5} =$$

$= \frac{-16}{4} - \frac{-9}{3} - \frac{-25}{5} = -4 - (-3) - (-5) = -4 + 3 + 5 = 4$. Ἐπειδὴ καὶ τὸ βον μέλος της εἶναι 4 ἕπεται, ὅτι ἡ ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι : $x = -5$.

175. $2 - \frac{7x-1}{6} = 3x - \frac{19x+3}{4}$. Ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω ἔχομεν διαδοχικῶς : $2 \cdot 12 - 2(7x-1) = 12 \cdot 3x - 3(19x+3)$ ἢ $24 - 14x + 2 =$ $= 36x - 57x - 9$ ἢ $-14x + 57x - 36x = -9 - 24 - 2$ ἢ $7x = -35$

ἢ $\frac{7x}{7} = \frac{-35}{7}$ ἢ $x = -5$.

Ἐπαλήθευσις : Διὰ $x = -5$ ἔχομεν : 1ον μέλος : $2 - \frac{7.(-5)-1}{4} =$

$$= 2 - \frac{-35-1}{6} = 2 - \frac{-36}{6} = 2 - (-6) = 2 + 6 = 8.$$

2ον μέλος : $3 \cdot (-5) - \frac{19(-5)+3}{4} = -15 - \frac{-95+3}{4} =$

$= -15 - \frac{-92}{4} = -15 - (-23) = -15 + 23 = 8.$ Ἄρα ἡ ρίζα εἶναι :
$x = -5.$

176. $\frac{5x+1}{3} + \frac{19x+7}{9} - \frac{3x-1}{2} = \frac{7x-1}{6}$. Ε.Κ.Π. $= 18$.

Ἔχομεν διαδοχικῶς : $6(5x+1) + 2(19x+7) - 9(3x-1) = 3(7x-1)$

ἢ $30x + 6 + 38x + 14 - 27x + 9 = 21x - 3$

ἢ $30x + 38x - 27x - 21x = -3 - 6 - 14 - 9$ ἢ $20x = -32$

ἢ $\frac{20x}{20} = -\frac{32}{20}$ ἢ $x = -\frac{8}{5} = -1{,}6.$

Ἐπαλήθευσις : $\frac{5 \cdot (-1{,}6)+1}{3} + \frac{19 \cdot (-1{,}6)+7}{9} - \frac{3 \cdot (-1{,}6)-1}{2} =$

$= \frac{-8+1}{3} + \frac{-30{,}4+7}{9} - \frac{-4{,}8-1}{2} = \frac{-7}{3} + \frac{-23{,}4}{9} + \frac{5{,}8}{2} =$

$= -\left(\frac{7}{3} + \frac{234}{90} - \frac{58}{20}\right) = -\left(\frac{420}{180} + \frac{468}{180} - \frac{522}{180}\right) = -\left(\frac{888-522}{180}\right)$

$= -\frac{366}{180} = -\frac{122}{60}.$

2ον μέλος : $\frac{7(-1{,}6)-1}{6} = \frac{-11{,}2-1}{6} = \frac{-12{,}2}{6} = \frac{-122}{60}.$

Ἄρα $x = -1{,}6.$

177. $11 - \left(\frac{3x-1}{4} + \frac{2x+1}{3}\right) = 10 - \left(\frac{2x-5}{3} + \frac{7x-1}{8}\right).$

Ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις καὶ ἔχομεν :

$11 - \frac{3x-1}{4} - \frac{2x+1}{3} = 10 - \frac{2x-5}{3} - \frac{7x-1}{8}$. Ε. Κ. Π. $= 24$.

Ἔχομεν διαδοχικῶς : $11 \cdot 24 - 6(3x-1) - 8(2x+1) =$
$= 240 - 16x + 40 - 21x + 3$ ἢ $-18x - 16x + 16x + 21x = 240 + 40 +$
$+ 3 - 264 - 6 + 8$ ἢ $3x = 21$ ἢ $\frac{3x}{3} = \frac{21}{3}$ ἢ $x = 7.$

Ἐπαλήθευσις : 1ον μέλ. $11 - \left(\frac{3 \cdot 7-1}{4} + \frac{2 \cdot 7+1}{3}\right) = 11 - \left(\frac{21-1}{4} + \frac{14+1}{3}\right) =$

$= 11 - \left(\frac{20}{4} + \frac{15}{3}\right) = 11 - (5+5) = 11 - 10 = 1.$

2ον μέλος : $10 - \left(\frac{2 \cdot 7-5}{3} + \frac{7 \cdot 7-1}{8}\right) = 10 - \left(\frac{14-5}{3} + \frac{49-1}{8}\right) =$

$= 10 - \left(\frac{9}{3} + \frac{48}{8}\right) = 10 - (3+6) = 10 - 9 = 1.$ Ἄρα $x = 7.$

Διερεύνησις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi + \beta = 0$

178. α') $\frac{3}{2}x - 5 + x = \frac{x-10}{2} + 2x$. Ε. Κ. Π. $= 2$ καὶ ἔχομεν διαδοχικῶς : $3x - 10 + 2x = x - 10 + 4x$ ἢ $3x + 2x - x - 4x = 10 - 10$

ἢ $0 . x = 0$. Ἐπειδὴ $\alpha = 0$ καὶ $\beta = 0$ ἕπεται ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ταὐτότης δηλαδὴ ἐπαληθεύεται διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x ἢ ἔχει ἄπειρον πλῆθος ριζῶν.

β′) $2x-5 = \frac{x+7}{2} + \frac{3x}{2}$. Ε. Κ. Π. $= 2$ καὶ ἔχομεν διαδοχικῶς:

$4x-10=x+7+3x$ ἢ $4x-x-3x=10+7$ ἢ $0 . x = 17$ καὶ ἐπειδὴ $\alpha = 0$ καὶ $\beta=17 \neq 0$ ἕπεται ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δὲν ἔχει καμμίαν ρίζαν καὶ συνεπῶς εἶναι ἀδύνατος.

γ′) $\frac{x-\alpha}{2} + \frac{x+\beta}{3} = \frac{5x}{6} - 1$. Ε. Κ. Π. $= 6$. Ἔχομεν διαδοχικῶς:

$3(x-\alpha) + 2(x+\beta) = 5x - 6$ ἢ $3x-3\alpha+2x+2\beta = 5x - 6$

ἢ $5x-5x=3\alpha-2\beta-6$ ἢ $0 . x = 3\alpha - 2\beta - 6$ καὶ ἂν μὲν $3\alpha - 2\beta - 6 \neq 0$ ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος, ἂν δὲ $3\alpha - 2\beta - 6 = 0$ τότε $0 . x = 0$ καὶ εἶναι ταυτότης ἢ ἀόριστος ἐξίσωσις.

δ′) $\frac{x}{\alpha} + \frac{x}{\beta} + 1 = \frac{(\alpha+\beta)x+\alpha\beta}{\alpha\beta}$. Ε. Κ. Π. $= \alpha\beta$ καὶ ἔχομεν διαδοχικῶς: $\beta x+\alpha x+\alpha\beta=\alpha x+\beta x+\alpha\beta$ ἢ $\alpha x - \alpha x + \beta x - \beta x = \alpha\beta - \alpha\beta$ ἢ $0 . x = 0$ καὶ συνεπῶς αὕτη εἶναι ταυτότης.

ε′) $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} - 3 = 2x - 7$. Ε.Κ.Π. $= 15$ καὶ ἔχομεν διαδοχικῶς:

$5x+3x-45 = (2x-7) . 15$ ἢ $5x + 3x - 45 = 30x - 105$ ἢ

$5x+3x-30x = 45 - 105$ ἢ $-22x = -60$ ἢ $22x=60$ καὶ $x = \frac{60}{22} = \frac{30}{11}$.

Ἄρα αὕτη ἔχει ὡρισμένην ρίζαν.

ϛ′) $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} + 5 = \frac{5x}{6} + 2$. Ε. Κ. Π. $=6$ καὶ ἔχομεν:

$2x + 3x + 30 = 5x + 12$ ἢ $2x + 3x - 5x = -30 + 12$ ἢ $0 . x = -18$ καὶ ἐπειδὴ $\alpha = 0$ καὶ $\beta = -18 \neq 0$ αὕτη εἶναι ἀδύνατος.

179. Ἐκ τῆς $\frac{\alpha x - \beta}{3} + \frac{x}{2} = 3x - \alpha$ ἔχομεν διαδοχικῶς:

$2\alpha x - 2\beta + 3x = 18x - 6\alpha$ ἢ $2\alpha x + 3x - 18x = 2\beta - 6\alpha$

ἢ $2\alpha x - 15x = 2\beta - 6\alpha$ ἢ $(2\alpha - 15)\, x = 2\beta - 6\alpha$.

α′) Ἵνα ἔχῃ ἡ δοθεῖσα μίαν μόνον λύσιν πρέπει: $2\alpha - 15 \neq 0$ ἢ $2\alpha \neq 15$ ἢ $\alpha \neq \frac{15}{2} = 7,5$. Εἶναι δὲ αὕτη ἡ $x = \frac{2\beta - 6\alpha}{2\alpha - 15}$.

β′) Ἵνα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος πρέπει: $2\alpha - 15 = 0$ καὶ $2\beta - 6\alpha \neq 0$ ἢ $\alpha = 7,5$ καὶ $\beta \neq 3\alpha = 3 . 7,5 = 22,5$.

γ′) Ἵνα αὕτη ἔχῃ ἀπείρους λύσεις πρέπει: $2\alpha - 15 = 0$ καὶ $2\beta - 6\alpha = 0$ δηλ. $\alpha = 7,5$ καὶ $\beta = 22,5$.

180. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\frac{\alpha x - 1}{3} + \frac{x+1}{2} = 4$ εὑρίσκομεν διαδοχικῶς: $2\alpha x - 2 + 3x + 3 = 24$ ἢ $2\alpha x + 3x = 24 - 3 + 2$ ἢ $(2\alpha + 3) . x = 23$. Ἵνα αὕτη εἶναι ἀδύνατος, πρέπει: $2\alpha + 3 = 0$ δηλ.

$$2\alpha = -3 \text{ καὶ } \alpha = -\frac{3}{2} = -1,5.$$

181. α΄) $27x - 5(2x - 5) = 6(3x - 5) + 5(2x - 1)$. Ἔχομεν διαδοχικῶς: $27x - 10x + 25 = 18x - 30 + 10x - 5$ ἢ $27x - 10x - 18x - 10x = -30 - 5 - 25$ ἢ $-11x = -60$ ἢ $11x = 60$ καὶ $x = \frac{60}{11}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν δοθεῖσαν ὅπου x τὴν τιμὴν $\frac{60}{11}$ καὶ μετὰ τὰς πράξεις εὑρίσκομεν εἰς ἕκαστον μέλος $\frac{1295}{11}$.

β΄) $\frac{2(3x-5)}{3} - \frac{25(x+2)}{12} = \frac{5(3x+2)}{2} - 71$. Ἔχομεν διαδοχικῶς: $\frac{6x-10}{3} - \frac{25x+50}{12} = \frac{15x+10}{2} - 71$ ἢ $24x - 40 - 25x - 50 = = 90x + 60 - 852$ ἢ $24x - 25x - 90x = 40 + 50 + 60 - 852$ ἢ $-91x = -702$ ἢ $91x = 702$ καὶ $x = \frac{702}{91}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν δοθεῖσαν ὅπου x τὴν τιμὴν $\frac{702}{91}$ καὶ εὑρίσκομεν εἰς ἕκαστον μέλος $741 : 91$.

γ΄) $x - \left(\frac{x}{2} - \frac{2x}{3}\right) - \left(\frac{3x}{4} + \frac{2x}{3}\right) - \frac{5x}{6} = 66$. Ἔχομεν διαδοχικῶς: $x - \frac{x}{2} + \frac{2x}{3} - \frac{3x}{4} - \frac{2x}{3} - \frac{5x}{6} = 66$. Ε.Κ.Π.$=12$.

$$12x - 6x + 8x - 9x - 8x - 10x = 792 \text{ ἢ } -13x = 792 \text{ ἢ }$$
$$\frac{-13x}{-13} = \frac{792}{-13} \text{ ἢ } x = -\frac{792}{13}.$$

δ΄) $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{6}\right)$. Ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις καὶ ἔχομεν: $x^2 + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9} = x^2 + \frac{x}{2} - \frac{x}{6} - \frac{1}{12}$ ἢ

$$x^2 - x^2 + \frac{2x}{3} + \frac{x}{6} - \frac{x}{2} = -\frac{1}{9} - \frac{1}{12} \text{ ἢ}$$
$$\frac{2x}{3} + \frac{x}{6} - \frac{x}{2} = -\frac{1}{9} - \frac{1}{12}. \text{ Ε. Κ. Π.} = 36$$
$$24x + 6x - 18x = -4 - 3 \text{ ἢ } 12x = -7 \text{ καὶ } x = -\frac{7}{12}.$$

ε΄) $\frac{1}{(x-1)(x-2)} - \frac{1}{(x-1)(x-3)} + \frac{19}{(x-3)(x-4)} = \frac{19}{(x-2)(x-4)}$.

Ἐξαλείφομεν τοὺς παρονομαστάς. Ε. Κ. Π. αὐτῶν εἶναι τὸ $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός. Ἔχομεν διαδοχικῶς: $(x-3)(x-4) - (x-2)(x-4) + 19(x-1)(x-2) = 19(x-1)(x-3)$ ἢ $x^2 - 7x + 12 - x^2 + 6x - 8 + 19x^2 - 57x + 33 = 19x^2 - 76x + 57$ ἐξ ἧς $x = \frac{5}{6}$.

στ΄) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{4(x-1)}{x^2(x-2)^2} + \frac{4}{x^2(x-2)} = 0$.

Τὸ Ε. Κ. Π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι $x^2(x-2)^2$, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ εἶναι διάφορον τοῦ μηδενὸς δηλ. νὰ εἶναι $x \neq 0$ καὶ $x \neq 2$. Δι' ἀπαλοιφῆς τῶν παρονομαστῶν ἔχομεν: $(x-2)^2 - x^2 - 4(x-1) + 4(x-2) = 0$ ἢ $x^2 - 4x + 4 - x^2 - 4x + 4 + 4x - 8 = 0$ ἢ $x^2 - x^2 - 4x - 4x + 4x = -4 - 4 + 8$ ἢ $4x = 0$ καὶ $x = 0$.

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ τιμὴ $x = 0$ μηδενίζει τὸ Ε. Κ. Π. τῶν παρονομαστῶν, ἕπεται, ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δὲν ἔχει ῥίζαν ἤτοι εἶναι ἀδύνατος.

182. α΄) $(\alpha+\beta)x + (\alpha-\beta)x = 2\alpha^2$. Ἔχομεν διαδοχικῶς: $(\alpha+\beta+\alpha-\beta)x = 2\alpha^2$ ἢ $2\alpha x = 2\alpha^2$ καὶ ἂν $\alpha \neq 0$ τότε $x = \dfrac{2\alpha^2}{2\alpha} = \alpha$, ἂν δὲ $\alpha = 0$ τότε $0x = 0$ καὶ ἡ ἐξίσωσις ταυτότης.

Ἐπαλήθευσις: Διὰ $x = \alpha$ ἔχομεν: 1ον μέλος: $(\alpha+\beta)\cdot\alpha + (\alpha-\beta)\cdot\alpha = \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha^2 - \alpha\beta = 2\alpha^2$ καὶ 2ον μέλος $2\alpha^2$. Ἄρα ἡ ῥίζα εἶναι $x = \alpha$.

β΄) Αὕτη πρέπει νὰ διορθωθῇ εἰς $(\alpha^2+\beta^2)x + 2\alpha\beta x = \alpha^3 - \beta^3$ ὅτε ἔχομεν διαδοχικῶς: $(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)x = \alpha^3-\beta^3$ ἢ $(\alpha+\beta)^2 x = \alpha^3 - \beta^3$ ἢ ἂν $\alpha+\beta \neq 0$ δηλ. $\alpha \neq -\beta$ ἡ ἐξίσωσις ἔχει μίαν ῥίζαν, τὴν $x = \dfrac{\alpha^3-\beta^3}{(\alpha+\beta)^2}$. Ἐὰν ὅμως $\alpha = -\beta$ θὰ εἶναι $\alpha^3 = (-\beta)^3 = -\beta^3$ καὶ ἡ ἐξίσωσις γίνεται $0\cdot x = -2\beta^3$ καὶ ἂν $\beta \neq 0$ αὕτη εἶναι ἀδύνατος.

γ΄) $2\mu(x-\mu) - 2\nu(\nu-x) = (\mu+\nu)^2 - (\mu-\nu)^2$.
Δι' ἐκτελέσεως τῶν πράξεων ἔχομεν διαδοχικῶς:
$2\mu x - 2\mu^2 - 2\nu^2 + 2\nu x = \mu^2 + 2\mu\nu + \nu^2 - \mu^2 + 2\mu\nu - \nu^2$ ἢ
$2\mu x + 2\nu x = 2\mu^2 + 2\nu^2 + \mu^2 + 2\mu\nu + \nu^2 - \mu^2 + 2\mu\nu - \nu^2$ ἢ
$2(\mu+\nu)x = 2\mu^2 + 2\nu^2 + 4\mu\nu$ ἢ $2(\mu+\nu)x = 2(\mu^2 + 2\mu\nu + \nu^2)$ ἢ
$2(\mu+\nu)x = 2(\mu+\nu)^2$ ἢ $(\mu+\nu)x = (\mu+\nu)^2$.
Ἐὰν $\mu+\nu \neq 0$ δηλ. ἐὰν $\mu \neq -\nu$ ἡ ἐξίσωσις ἔχει τὴν ῥίζαν $x = \dfrac{(\mu+\nu)^2}{\mu+\nu} = \mu+\nu$.

Ἐὰν δὲ $\mu+\nu = 0$ δηλ. ἐὰν $\mu = -\nu$ τότε ἔχομεν: $0\cdot x = 0$ δηλ. ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀόριστος ἢ ταυτότης.

δ΄) $(x+1)^2 - \alpha(5 - 2\alpha - x) = (x-2\alpha)^2 + 5$. Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις ἔχομεν διαδοχικῶς: $x^2 + 2x + 1 - 5\alpha + 2\alpha^2 + \alpha x = x^2 - 4\alpha x + 4\alpha^2 + 5$ ἢ $x^2 - x^2 + 2x + \alpha x + 4\alpha x = 4\alpha^2 + 5 - 1 + 5\alpha - 2\alpha^2$ ἢ $(2+5\alpha)x = 2\alpha^2 + 5\alpha + 4$. (1).

α΄) Ἐὰν $5\alpha + 2 \neq 0$ δηλ. ἐὰν $5\alpha \neq -2$ ἢ $\alpha \neq -\dfrac{2}{5}$ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει τὴν ῥίζαν: $x = \dfrac{2\alpha^2+5\alpha+4}{2+5\alpha}$.

Ἐὰν $2+5\alpha = 0$ δηλ. ἐὰν $\alpha = -\dfrac{2}{5}$ ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0\cdot x = 2\cdot\left(-\dfrac{2}{5}\right)^2 + 5\left(-\dfrac{2}{5}\right) + 4 = 2\cdot\dfrac{4}{25} + (-2) + 4 = \dfrac{8}{25} + 2 = \dfrac{58}{25} \neq 0$ ἤτοι αὕτη εἶναι ἀδύνατος.

ε΄) $\dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{x}{\alpha+\beta} = 2\alpha + \beta$. Ε. Κ. Π. $\alpha(\alpha+\beta)$, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ εἶναι διάφορον τοῦ μηδενὸς δηλ. $\alpha \neq 0$ καὶ $\alpha \neq = \beta$. Ἀπαλείφοντες παρονομαστὰς κ. τ. λ. ἔχομεν διαδοχικῶς :

$(\alpha + \beta)x + \alpha x = (2\alpha + \beta)\,\alpha(\alpha + \beta)$. ἢ $(\alpha + \beta + \alpha)x = (2\alpha + \beta)\alpha\,(\alpha + \beta)$
ἢ $(2\alpha + \beta)x = (2\alpha + \beta)\alpha\,(\alpha + \beta)$ (1).

καὶ ἄν $2\alpha + \beta \neq 0$ τότε ἔχει ρίζαν $x = \dfrac{(2\alpha + \beta)\,(\alpha + \beta)\,.\,\alpha}{2\alpha + \beta}$

ἢ $x = (\alpha + \beta)\alpha$.

Ἄν ὅμως $2\alpha + \beta = 0$ τότε ἡ (1) γίνεται $0\,.\,x = 0$ δηλ. ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει ἄπειρον πλῆθος ριζῶν (ἀόριστος).

στ') $\dfrac{\beta x + \alpha}{2\alpha^2\beta} + \dfrac{x-1}{3\beta^2} = \dfrac{2\beta^2 + 5\alpha^2}{6\alpha^2\beta\,(\alpha-\beta)}$. Ε. Κ. Π. $6\alpha^2\beta^2\,(\alpha-\beta)$ καὶ πρέπει νὰ εἶναι $\alpha \neq 0$, καὶ $\alpha \neq \beta$.

Ἔχομεν διαδοχικῶς : $3\beta(\alpha-\beta)\,(\beta x + \alpha) + 2\alpha^2(\alpha-\beta)\,(x-1) = \beta(2\beta^2 + 5\alpha^2)$.

ἢ $3\alpha\beta^2 x - 3\beta^3 x + 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 + 2\alpha^3 x - 2\alpha^2\beta x - 2\alpha^3 + 2\alpha^2\beta = 2\beta^3 + 5\alpha^2\beta$

ἢ $3\alpha\beta^2 x - 3\beta^3 x + 2\alpha^3 x - 2\alpha^2\beta x = -3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + 2\alpha^3 - 2\alpha^2\beta + 2\beta^3 + 5\alpha^2\beta$

ἢ $(3\alpha\beta^2 - 3\beta^3 + 2\alpha^3 - 2\alpha^2\beta)x = 3\alpha\beta^2 + 2\alpha^3 + 2\beta^3$

καὶ $x = \dfrac{3\alpha\beta^2 + 2\alpha^3 + 2\beta^3}{3\alpha\beta^2 - 3\beta^3 + 2\alpha^3 - 2\alpha^2\beta}$ ἄν $3\alpha^2\beta - 3\beta^3 + 2\alpha^3 - 2\alpha^2\beta \neq 0$

ζ') $\dfrac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{\alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1} = \dfrac{\alpha x + \beta}{\alpha_1 x + \beta_1}$. Ἐὰν ἀπαλλάξωμεν τῶν παρονομαστῶν λαμβάνομεν : $(\alpha_1\gamma - \alpha\gamma_1)x = \beta\gamma_1 - \gamma\beta_1$

ἐξ ἧς ἄν $\alpha_1\gamma - \alpha\gamma_1 \neq 0$ ἔχομεν : $x = \dfrac{\beta\gamma_1 - \gamma\beta_1}{\alpha_1\gamma - \alpha\gamma_1}$, ἄν $\alpha_1\gamma - \alpha\gamma_1 = 0$ καὶ $\beta\gamma_1 - \gamma\beta_1 \neq 0$ εἶναι ἀδύνατος, ἄν δὲ $\alpha_1\gamma - \alpha\gamma_1 = 0$ καὶ $\beta\gamma_1 - \gamma\beta_1 = 0$ εἶναι ἀόριστος.

η') $\dfrac{8\alpha}{(x+2)^2} + \dfrac{8\beta}{(x-2)^2} - \dfrac{(\alpha+\beta)x^4}{(x^2-4)^2} = -(\alpha+\beta)$. Ε.Κ.Π. $= (x+2)^2\,(x-2)^2$.

Πρέπει δὲ $x \neq -2$ καὶ $\neq 2$. Δι' ἀπαλοιφῆς τῶν παρονομασνῶν κ.τ.λ. ἔχομεν διαδοχικῶς :

$8\alpha\,(x-2)^2 + 8\beta\,(x+2)^2 - (\alpha+\beta)x^4 = -(\alpha+\beta)\,(x^2-4)^2$ ἢ

μετὰ τὰς πράξεις $32\,(\alpha-\beta)\,x = 32\alpha + 32\beta + 16\alpha + 16\beta$ καὶ ἄν $\alpha - \beta \neq 0$ τότε $x = \dfrac{48\alpha + 48\beta}{32\,(\alpha-\beta)} = \dfrac{48(\alpha+\beta)}{32(\alpha-\beta)} = \dfrac{3\,(\alpha+\beta)}{2\,(\alpha-\beta)}$. Ἄν ὅμως $\alpha = \beta$ τότε ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος, καθ' ὅσον γίνεται $0\,.\,x = 96\alpha$, ἄν $\alpha \neq 0$. Ἄν ὅμως $\alpha = \beta = 0$ τότε εἶναι ταυτότης.

Ἐφαρμογὴ τῶν ἐξισώσεων εἰς τὴν λύσιν προβλημάτων

183. Ἄν x ὁ ζητούμενος θὰ ἔχωμεν : $2x + 5 = 3x - 19$ ὅτε $x = 24$.

184. Ἄν x ὁ ζητούμενος θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν : $4x - 2 = 3x + 17$ ὅτε $x = 19$.

185. Ἄν x ὁ ζητούμενος θὰ ἔχωμεν: $\dfrac{6+x}{17+x} = \dfrac{1}{3}$ ὅτε $x = -\dfrac{1}{2}$.

186. Ἂν x ὁ ζητούμενος, ὁ λόγος τῶν δύο πρώτων θὰ εἶναι: $\frac{-5+x}{6+x}$

καὶ ὁ ἄλλος λόγος θὰ εἶναι $\frac{8+x}{x}$ ὅτε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{-5+x}{6+x}=\frac{8+x}{x} \text{ ἢ } x=-\frac{48}{19}.$$

187. Ἂν x ὁ ζητούμενος θὰ ἔχωμεν: $x-\left(\frac{x}{3}+4\right)=\frac{5x}{6}-8$ ἣν λύοντες εὑρίσκομεν: $x=24$.

188. Ἂν x ὁ ζητούμενος θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{29-x}{42-x}=0{,}5 \quad \text{ἐξ ἧς } x=16$$

189. Ἂν x ὁ ζητούμενος θὰ ἔχωμεν: $\frac{2x}{3}+\frac{3x}{4}=170$ ἄρα $x=120$.

190. Ἔστω ὅτι πρέπει νὰ ἀναμείξῃ x ὀκάδας. Τότε τὸ μεῖγμα θὰ εἶναι ἐν ὅλῳ $(100+x)$ ὀκ. καὶ θὰ κοστίζῃ $(100+x)\,.\,2150$ δρχ. Αἱ 100 ὅμως ὀκάδες πρὸς 1950 δραχ. τὴν ὀκᾶν κοστίζουν $100\,.\,1950$ δραχ. αἱ δὲ x κοστίζουν 2900x δραχ. Συνεπῶς ἐπειδὴ ἡ τιμὴ τῶν δύο εἰδῶν πρέπει νὰ εἶναι ἡ αὐτὴ εἴτε ληφθοῦν χωριστὰ εἴτε ἀναμειχθοῦν θὰ ἔχωμεν: $(100+x)2150=100\,.\,1950+2900x$. Λύοντες ταύτην εὑρίσκομεν: $x=26\frac{2}{3}$ ὀκ.

191. Ἔστω x ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὸν α΄ τόπον. Τὸ α΄ κινητὸν διήνυσε τὴν ἀπόστασιν ταύτην εἰς χρόνον $\frac{x}{5}$ ὥρ., τὸ δὲ δεύτερον τὴν ὑπόλοιπον ἀπόστασιν $60-x$ εἰς $\frac{60-x}{5{,}5}$ ὥρας. Ὅτε ἔχομεν $\frac{x}{5}=\frac{60-x}{5{,}5}$ ἐξ ἧς λαμβάνομεν: $x=28\frac{4}{7}$ χλμ.

192. Ἔστω x αἱ ζητούμεναι ὀκ. ὕδατος. Τὸ νέον κρᾶμα θὰ εἶναι $40+x$ ὀκ. καὶ θὰ περιέχῃ τὸ αὐτὸ ἅλας, ὅπερ εἶχε καὶ τὸ α΄ κρᾶμα. Ἐπειδὴ ὅμως 30 ὀκ. τοῦ νέου θὰ περιέχουν 2 ὀκ. ἅλατος ἕπεται ὅτι αἱ $40+x$ θὰ περιέχουν $\frac{(40+x)\,.\,2}{30}$ ὀκ. ἅλατος. Ἀλλὰ αὐτὸ τὸ ἅλας εἶναι ἴσον μὲ 3,4 ὀκ. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν: $\frac{(40+x)\,.\,2}{30}=3{,}4$ ἣν λύοντες εὑρίσκομεν: $x=11$ ὀκ. ὕδατος.

193. Ἔστω x ἡ ἀξία τοῦ κτήματος θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{3x}{5}+250000=\frac{3x}{4}-200000$$

ὅτε $x=3000000$ δραχ.

194. Ἔστω x χιλιόμ. ἡ ταχύτης τῆς ἄλλης ἀτμαμάξης, ἐπειδὴ αὕτη ἐκινήθη 20^{λ} πρὶν κινήσῃ ἡ πρώτη καὶ ἐπὶ 2 ὥρ. καὶ 20^{λ} ἀκόμη μέχρι συναντήσεώς των δηλ. ἐν ὅλῳ ἐπὶ 2 ὥρ. καὶ 40^{λ} θὰ διήνυσε:

$$2\frac{40}{60}\,.\,x=2\frac{2}{3}\quad x=\frac{8x}{3}\text{ χλμ.}$$

Ἡ πρώτη κινεῖται μόνον ἐπὶ 2 ὥρ. 20λ δηλαδὴ ἐπὶ $2\frac{20}{60}=2\frac{1}{3}$ ὥρ. καὶ διανύει 48 χλμ. $.\,2\frac{1}{3}=48$ χλμ. $.\,\frac{7}{3}$. Ἐπειδὴ ὅμως θὰ συναντηθοῦν θὰ διανύσουν ἴσα διαστήματα ἤτοι : $\frac{8x}{3}=48\,.\,\frac{7}{3}$ ἤτοι $x=42$ χλμ.

195. Ἔστω ὅτι ἡ δεξαμενὴ θὰ πληρωθῇ εἰς x ὥρας. Ἐπειδὴ ὁ α' κρουνὸς εἰς 12 ὥρας πληροῖ ὅλην τὴν δεξαμενήν, εἰς 1 ὥραν θὰ πληρώσῃ τὸ $\frac{1}{12}$ αὐτῆς καὶ εἰς x ὥρας τὰ $\frac{x}{12}$ αὐτῆς. Ὁ β' εἰς x ὥρας θὰ πληρώσῃ τὰ $\frac{x}{10}$, ὁ δὲ γ' τὰ $\frac{x}{30}$. Τοιουτοτρόπως θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν: $\frac{x}{12}+\frac{x}{10}+\frac{x}{30}=1$ καὶ λύοντες λαμβάνομεν $x=4\frac{8}{13}$ ὥρ.

196. Ἔστω, ὅτι ἡ ἀξία τῆς ἐνδυμασίας εἶναι x δραχ. Ὁ μὲν ἐτήσιος μισθὸς τοῦ ὑπηρέτου ἀποτελεῖται ἀπὸ (6000000+x) δραχ. καὶ ὁ μηνιαῖος θὰ εἶναι $\frac{6000000+x}{12}$ καὶ διὰ 8 μῆνας θὰ λάβῃ $\frac{8\,(6000000+x)}{12}$ δραχ. Ἀλλὰ ἔλαβε διὰ τὸ χρονικὸν τοῦτο διάστημα 5000000 δραχ. Ἄρα ἔχομεν : $\frac{8\,(6000000+x)}{12}=5000000$· λύοντες εὑρίσκομεν $x=1600000$ δρχ.

197. Ἐπειδὴ ἔχομεν 147 λευκοὺς ψήφους, οἱ ὑποψήφιοι ἔλαβον $12400-147=12253$ ψήφους. Ἄν παραστήσωμεν μὲ x τὰς ψήφους τοῦ ἐκλεγέντος τότε αἱ τοῦ ἀποτυχόντος θὰ εἶναι $12253-x$. Οὕτω ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $x-5153=12253-x$, ὅτε $x=8703$ ψήφους.

198. Ἔχομεν : $x-\frac{x}{7}=120$, ἄρα $x=140$.

199. Ἔχομεν : $\frac{3x}{5}+7=34$ ἐξ οὗ $x=45$.

200. Ἔχομεν : $\frac{x}{3}+2=23$, ὅτε $x=63$.

201. Ἔστω x ὁ ἀριθμός, τότε ὁ x—3 θὰ διαιρῆται διὰ 7 ἢ 9. Τὸ πηλίκον διὰ 7 θὰ εἶναι $\frac{x-3}{7}$ καὶ διὰ 9 θὰ εἶναι $\frac{x-3}{9}$, ὅτε ἔχομεν : $\frac{x-3}{7}-\frac{x-3}{9}=4$. Ἐξ οὗ $x=129$.

202. Ἔστω ὅτι εἶχε x πορτοκάλια, ἐφ' ὅσον ἐπώλησε τὰ $\frac{3}{5}$ αὐτῶν τοῦ ἔμειναν τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτῶν δηλ $\frac{2x}{5}$. Ἄν εἰς ταῦτα προσθέσωμεν 33 πορτοκάλια, τὰ ὁποῖα ἠγόρασε θὰ ἔχωμεν $\frac{2x}{5}+33$, ἀλλὰ αὐτὰ ὑπερβαίνουν τὰ ἀρχικὰ κατὰ 9 δηλαδὴ θὰ ἔχωμεν: $\frac{2x}{5}+33=x+9$ ὅτε λύοντες λαμβάνομεν $x=40$ πορτοκάλια.

203. Ἔστω x τὰ ἔτη, καθ' ἅ ἔζησε. Θὰ ἔχωμεν : $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$, λύοντες λαμβάνομεν $x=84$.

204. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ x τὴν ἡλικίαν τῆς κόρης, ἡ τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι 3x καὶ θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν: $x + 3x = 6x - 28$, ὅτε $x = 14$, ὅτε ἡ τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι $3 . 14 = 42$ ἔτη.

205. Ἂν x ἡ ἡλικία τοῦ μικροτέρου ἀδελφοῦ τότε τοῦ δευτέρου θὰ εἶναι $x + 2$ καὶ τοῦ γ' θὰ εἶναι $x + 4$, ὅτε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $x+(x+2)+(x+4)=24$ ὅτε $x = 6$ καὶ τῶν δύο ἄλλων θὰ εἶναι 8, 10 ἔτη.

206. Ἔχομεν εὐκόλως: $16 + x = \frac{40+x}{3}$, ἐξ ἧς $x = -4$, δηλαδὴ τοῦτο συνέβη πρὸ 4 ἐτῶν.

207. Ἔστω x ὁ α' ἀριθμός, τότε ὁ β' θὰ εἶναι $2x + 1$ καὶ ὁ τρίτος $(2x+1) . 3 + 3 = 6x + 6$. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν:
$x + (2x+1) + (6x+6) = 70$, ἐξ ἧς $x = 7$. Ὅτε ὁ α' εἶναι ὁ 7, ὁ β' ὁ 15 καὶ ὁ γ' ὁ 48.

208. Ἔστω ὅτι ἕκαστος ἐργάζεται x ὥρας τῆς ἡμέρας ὅτε εἰς 3 ἡμέρας θὰ ἐργασθῇ 3x ὥρ. διὰ τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ἔργου. Ἄρα ἕκαστος ἐργάτης ἐξ αὐτῶν θὰ χρειασθῇ διὰ τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ἔργου $3x . 15$ ἢ 45x ὥρ. Οἱ 16 ἐργάται διὰ τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ἔργου χρειάζονται $4 . 9 = 36$ ὥρας καὶ ἄρα ὁ εἷς διὰ τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ἔργου χρειάζεται $36 . 16$ ὥρας καὶ διὰ τὸ $\frac{1}{5}$ θὰ χρειασθῇ $36 . 16 : 2$ καὶ διὰ τὰ $\frac{3}{5}$ θὰ χρειασθῇ $(36 . 16 . 3) : 2$.

Ὥστε θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν: $45x = \frac{36 . 16 . 3}{2}$ ἐξ ἧς $x = 19 \frac{1}{5}$ ὥρ.

Ἡ λύσις αὕτη δὲν εἶναι δεκτή, ὡς ὑπερβαίνουσα τὰ ὅρια τῆς δυνατῆς ἐργασίας.

209. Θὰ ἔχωμεν: $58 + x = 2 (28 + x)$ ἐξ ἧς $x = 2$.

210. Ἐὰν x τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων, τότε τὸ τῶν μονάδων θὰ εἶναι 2x. Ὁ ἀριθμὸς μὲ x δεκάδας καὶ 2x μονάδας γράφεται: $10x+2x$. Ἂν ἐναλλαγῇ ἡ τάξις τῶν ψηφίων ὁ ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ 2x δεκάδας καὶ x μονάδας ὅτε θὰ γράφεται: $2x . 10 + x = 20x + x$. Θὰ πρέπῃ συνεπῶς $(20x+x)-36=10x+2x$ ἐξ ἧς $x=4$ ὅτε ὁ ζητούμενος εἶναι ὁ 48. Πρέπει x θετικὸς καὶ ἀκέραιος καὶ μικρότερος τοῦ 10 ἤτοι $0 < x \leqslant 9$.

211. Ἔστω x τὸ ψηφίον τῶν μονάδων, τὸ τῶν δεκάδων θὰ εἶναι $12-x$ καὶ ὁ ἀριθμὸς γράφεται $(12-x) . 10+x$. Μετὰ τὴν ἐναλλαγὴν θὰ ἔχωμεν: $10 . x + (12-x)$, διότι τώρα ὁ νέος ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ x δεκάδας καὶ $12-x$ μονάδας. Συνεπῶς ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:
$(12-x)\ 10 + x - 18 = 10x + 12 - x$ ὅτε $x = 5$, ὁ δὲ ἀριθμὸς εἶναι 75.

212. Ἂν x αἱ ἡμέραι καθ' ἃς τελειώνουν ἀμφότεροι τὸ ἔργον, τότε ὁ πρῶτος εἰς α ἡμ. τελειώνει τὸ ἔργον, εἰς 1 ἡμέραν τελειώνει τὸ $\frac{1}{\alpha}$ τοῦ ἔργου καὶ εἰς x ἡμέρας τὰ $\frac{x}{\alpha}$ τοῦ ἔργου. Ὁμοίως ὁ δεύτερος τὰ

$\frac{x}{\beta}$ τοῦ ἔργου. Ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν: $\frac{x}{\alpha}+\frac{x}{\beta}=1$, ὅτε $x=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ ἄν $\alpha+\beta\neq 0$.

213. Ἔστω x μέτρα ἡ διανυθεῖσα ἀπόστασις. Οἱ ἐμπρόσθιοι τροχοὶ θὰ κάμουν $\frac{x}{\alpha}$ στροφάς, οἱ δὲ ὀπίσθιοι $\frac{x}{\beta}$ καὶ συμφώνως πρὸς τὸ πρόβλημα $\frac{x}{\alpha}-\nu=\frac{x}{\beta}$, ὅτε $x=\frac{\alpha\beta\nu}{\beta-\alpha}$. ἄν $\beta-\alpha\neq 0$, ἐνῷ ἄν $\alpha=\beta$ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον.

214. Ἔστω x δραχ. τὸ εἰσόδημά του, τότε θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν: $\frac{x}{\nu}+\frac{x}{\alpha}+\frac{x}{\beta}+\frac{x}{\gamma}+\mu=x$ ἣν λύοντες εὑρίσκομεν:

$$x=\frac{-\alpha\beta\gamma\mu\nu}{\alpha\beta\gamma+\beta\gamma\tau+\alpha\gamma\nu+\alpha\beta\nu-\alpha\beta\gamma\nu}.$$

Διὰ τὰ δεδομένα εὑρίσκομεν $x=240000$ δραχ.

215. Ἐφ' ὅσον εἰς η ἡμέρας θὰ διανύσῃ α χιλ. εἰς 1 ἡμ. θὰ πρέπῃ νὰ διανύσῃ $\frac{\alpha}{\eta}$ χλμ. καὶ εἰς β ἡμέρας $\frac{\alpha\beta}{\eta}$ χλμ. Συνεπῶς μένουν ἀκόμη $\left(\alpha-\frac{\alpha\beta}{\eta}\right)$ χλμ., τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ διανύσῃ εἰς $(\eta-\beta-\gamma)$ ἡμ. Ἔστω τώρα x τὸ διάστημα, ὅπερ διανύει καθ' ἡμέραν, θὰ ἔχωμεν:

$(\eta-\beta-\gamma)\,.\,x=\alpha-\frac{\alpha\beta}{\eta}$ ἣν λύοντες λαμβάνομεν $x=\frac{\alpha\eta-\alpha\beta}{\eta(\eta-\beta-\gamma)}$.

Διὰ τὰ ἀντίστοιχα δεδομένα ἔχομεν $x=22\frac{11}{12}$ χλμ.

216. Ἔστω x τὸ μερίδιον τοῦ Α τότε τὸ τοῦ Β θὰ εἶναι:

$\frac{B}{\Gamma}=\frac{\mu}{\nu}$ ἢ $\frac{x}{B}=\frac{\mu}{\nu}$ ἢ $B=\frac{\nu x}{\mu}$. Τοῦ Γ θὰ εἶναι:

$$\frac{B}{\Gamma}=\frac{\rho}{\lambda} \text{ ἢ } \frac{\frac{\nu x}{\mu}}{\Gamma}=\frac{\rho}{\lambda} \text{ ἢ } \Gamma=\frac{\lambda\nu x}{\rho\mu},$$

Ἄρα θὰ ἔχωμεν: $x+\frac{\nu x}{\mu}+\frac{\lambda\nu x}{\rho\mu}=\alpha$ δηλ. $x=\frac{\alpha\mu\rho}{\mu\rho+\nu\rho+\lambda\nu}$

τοῦ $B=\frac{\nu}{\mu}\cdot\frac{\alpha\mu\rho}{\mu\rho+\nu\rho+\gamma\nu}$ καὶ τοῦ $\Gamma=\frac{\lambda\nu}{\rho\mu}\cdot\frac{\alpha\mu\rho}{\mu\rho+\nu\rho+\lambda\nu}$.

217. Ἔστω x τὸ α΄ κεφάλαιον, τότε τὸ ἄλλο θὰ εἶναι $\kappa-x$. Τὸ πρῶτον μὲ ε % δίδει ἐτήσιον τόκον $\frac{\varepsilon x}{100}$ καὶ τὸ ἄλλο πρὸς ε΄ % δίδει $\frac{(\kappa-x)\varepsilon'}{100}$. Ἄρα θὰ ἔχωμεν: $\frac{\varepsilon x}{100}+\frac{(\kappa-x)\varepsilon'}{100}=\tau$. Λύοντες εὑρίσκομεν $x=\frac{100\,\tau-\kappa\varepsilon'}{\varepsilon-\varepsilon'}$, ἄν $\varepsilon-\varepsilon'\neq o$. Τὸ ἄλλο κεφάλαιον θὰ εἶναι $\frac{\kappa\varepsilon-100\,\tau}{\varepsilon-\varepsilon'}$.

218. Ἄν x αἱ ἡμέραι καθ' ἅς καὶ οἱ τρεῖς ἐργάται θὰ τελειώσουν τὸ ἔργον, τότε ὁ πρῶτος εἰς x ἡμέρας θὰ τελειώσῃ τὰ $\frac{x}{2}$ αὐτοῦ, ὁ δεύτερος τὰ $\frac{x}{\nu}$ αὐτοῦ καὶ ὁ τρίτος τὰ $\frac{2x}{2\mu+\nu}$ αὐτοῦ. Συνεπῶς ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν: $\frac{x}{2}+\frac{x}{\nu}+\frac{2x}{2\mu+\nu}=1$,

ἣν λύοντες λαμβάνομεν: $x=\frac{2\nu^2-4\mu\nu}{\nu^2+2\mu\nu+4\mu+6\nu}$.

219. Ἔστω x τὸ κεφάλαιον. Ἡ ἐξωτερική του ὑφαίρεσις θὰ εἶναι διὰ ν ἡμέρας καὶ πρὸς ε %$_0$ $\frac{\varepsilon\nu x}{36000}$. Ἡ ἐσωτερική του θὰ εἶναι:

$\frac{\varepsilon\nu x}{36000+\varepsilon\nu}$. Συνεπῶς ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\varepsilon\nu x}{36000}-\frac{\varepsilon\nu x}{36000+\varepsilon\nu}=\alpha$,

ἐξ ἧς ἔχομεν $x=\frac{36000\alpha\,(36000+\varepsilon\nu}{\varepsilon^2\nu^2}$.

220. Ἂν ἐξ ἀρχῆς εἶχε x αὐγά, πωληθέντων τῶν $\frac{1}{2}$ θὰ μείνουν $\frac{x}{2}$ καὶ ἐπειδὴ ἐπωλήθη καὶ $\frac{1}{2}$ τοῦ αὐγοῦ θὰ μείνουν: $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=\frac{x-1}{2}$.

Μετὰ τὴν δευτέραν πώλησιν θὰ μείνουν: $\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{x-3}{4}$.

Μετὰ τὴν τρίτην θὰ μείνουν: $\frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{4}\right)-\frac{1}{2}=\frac{x-7}{8}$. Καὶ τέλος μετὰ τὴν τετάρτην πώλησιν θὰ μείνουν $\frac{1}{2}\left(\frac{x-7}{8}\right)-\frac{1}{2}=\frac{x-15}{16}$ Ἄρα $\frac{x-15}{16}=1$ καὶ $x=31$ αὐγά.

221. Ἂν x τὰ αὐγὰ τὰ ὁποῖα εἶχε, θὰ εἰσέπραττε ἐξ αὐτῶν 500x δραχ. Ἐπειδὴ ἔσπασαν 3 ἔμειναν (x — 3), ὅτε θὰ εἰσέπραττε ἐκ τούτων 600 (x — 3). Ἀλλὰ τότε πρέπει: $500x=600\,(x-3)$, ἐξ ἧς $x=18$ αὐγά.

222. Ἂν καὶ αἱ τρεῖς γεμίσουν τὴν δεξαμενὴν εἰς x ὥρας, τότε ἡ πρώτη εἰς 3 ὥρας θὰ γεμίσῃ τὰ $\frac{x}{3}$ τῆς δεξαμενῆς, ἡ δευτέρα τὰ $\frac{x}{4}$ καὶ ἡ τρίτη τὰ $\frac{x}{6}$ αὐτῆς. Ἄρα θὰ πρέπῃ: $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{6}=1$. ἐξ ἧς $x=1$ ὥρα 20 λ.

223. Ἂν ὁ β΄ διανύσῃ x χλμ., ὁ α΄ ἕως ὅτου συναντήσῃ τὸν δεύτερον θὰ διανύσῃ $12\,.\,60=720$ χλμ., διότι θὰ κινῆται ἐπὶ $4+8=12$ ἡμέρας, ὁ δεύτερος εἰς τὰς 8 ἡμέρας θὰ διανύσῃ 8x χλμ. Καὶ ἐπειδὴ θὰ συναντηθοῦν θὰ πρέπῃ: $8x=720$ ἄρα $x=90$ χλμ.

224. Ἂν συναντηθοῦν εἰς x ἡμέρας θὰ ἔχωμεν:

$$50x+55x=575 \quad \text{ἢ} \quad x=5\,\frac{10}{21}\ \text{ἡμερ.}$$

225. Ἂν τὸ β΄ κινητὸν συναντήσῃ τὸ α΄ μετὰ $x^{\delta\lambda}$ ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεώς του τότε τὸ πρῶτον θὰ κινῆται ἐπὶ $(x+3)^{\delta\lambda}$ καὶ τὸ ἄλλο ἐπὶ $x^{\delta\lambda}$.

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ταχύτης τοῦ α′ εἶναι $32 : 4 = 8$ μ. κατὰ δλ καὶ τοῦ ἄλλου $60 : 5 = 12$ μ. κατὰ δλ. ἕπεται ὅτι θὰ ἔχωμεν:

$$8(x + 3) = 12x \quad \text{ἐξ ἧς} \quad x = 6 \text{ δλ.}$$

226. Ἂν ἡ β′ ἁμαξοστοιχία φθάσῃ τὴν α′ μετὰ x ὥρ. ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεώς της τότε ἡ μὲν πρώτη θὰ κινηθῇ ἐπὶ $(x + 1)$ ὥρας καὶ ἡ ἄλλη ἐπὶ x ὥρας καὶ θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν: $50x = 30(x + 1)$ ἐξ ἧς $x = 1\frac{1}{2}$ ὥρ.

227. α′) Ἔστω ὅτι μετὰ x ὥρ. ὁ α′ θὰ προηγῆται τοῦ β′ κατὰ 12 χιλμ. Ἄρα ὁ α′ θὰ δανύσῃ 12x χλμ. ὁ δὲ β′, ὅστις θὰ κινηθῇ ἐπὶ $(x - 3)$ ὥρας, θὰ διανύσῃ $16(x - 3)$ χλμ. Ἵνα ὅμως αἱ ἀποστάσεις γίνωνται ἴσαι πρέπει εἰς τὰ διανυθέντα χλμ. τοῦ β′ νὰ προστεθῶσι καὶ 12 χιλμ ἀκόμη, ἤτοι θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν: $16(x - 3) + 12 = 12x$ ἐξ ἧς $x = 9$ ὥρ. δηλ. ὁ α′ θὰ προηγῆται τοῦ ἄλλου μετὰ 9 ὥρας.

β′) Ὁμοίως σκεπτόμενοι λαμβάνομεν: $16(x - 3) = 12x + 50$ ἐξ ἧς $x = 24{,}5$ ὥρ.

228. Ἂν ὁ β′ ἀναχωρήσῃ μετὰ x ὥρ. ἐπειδὴ οὗτος θὰ κινῆται ἐπὶ 3 ὥρας, ἵνα φθάσῃ τὸν α′ θὰ διανύσῃ $3 \cdot 16 = 48$ χλμ. Ὁ α′ θὰ κινῆται ἐπὶ $x+3$ ὥρας καὶ θὰ διανύσῃ $12(x+3)$ χλμ. Ἄρα $12(x+3)=48$. ὅτε $x=1$ ὥρ.

229. α′) Ἔστω ὅτι θὰ συναντηθοῦν μετὰ x δλ. Τὸ α′ θὰ διανύσῃ αx μοίρας καὶ τὸ β′ βx μοίρας. Ἂν κινοῦνται ἀντιθέτως θὰ συναντηθοῦν ὅταν θὰ ἔχουν διανύσῃ μίαν περιφέρειαν ἤτοι: $\alpha x + \beta x = 360^\circ$, ἐξ ἧς $x = \frac{360^\circ}{\alpha + \beta}$.

β′) Ἂν κινοῦνται ὁμορρόπως τὸ α′ θὰ πρέπῃ νὰ διανύσῃ μίαν περιφέρειαν ἐπὶ πλέον τοῦ β′, ἵνα συναντηθῶσιν, ἤτοι: $\alpha x - \beta x = 360^\circ$, ἐξ ἧς $x = \frac{360^\circ}{\alpha - \beta}$, ἐφ' ὅσον βεβαίως $\alpha \neq \beta$.

230. Ἂν θὰ συναντηθοῦν μετὰ x χρόνον τὸ α′ θὰ διανύσῃ $\frac{x}{t_1}$ μέρος τῆς περιφερείας, τὸ β′ δὲ $\frac{x}{t_2}$ ὅτε ἂν κινοῦνται ὁμορρόπως θὰ πρέπῃ τὸ ταχύτερον νὰ διανύσῃ διὰ $1^{\text{ην}}$, $2^{\text{αν}}$, ... $\nu^{\text{ην}}$ φορὰν 1, 2, ... ν περιφερείας περισσοτέρας τοῦ ἄλλου ἤτοι: $\frac{x}{t_2} - \frac{x}{t_1} = 1$ (τὸ β′ ταχύτερον) ἢ $\frac{x}{t_2} - \frac{x}{t_1} = 2$ ἢ ... $\frac{x}{t_2} - \frac{x}{t_1} = \nu$.

Ἐξ ὧν ἔχω: $x = \frac{t_1 t_2 \nu}{t_1 - t_2}$ ἂν $(t_1 \neq t_2)$.

Διὰ κίνησιν ἀντίθετον θὰ ἔχω: $\frac{x}{t_1} + \frac{x}{t_2} = \nu$. Ἐξ ἧς $x = \frac{t_1 t_2 \nu}{t_1 + t_2}$.

231. Ὁ ὡροδείκτης εἰς 1 ὥραν διανύει 5 διαιρέσεις τοῦ ὡρολογίου, ὁ λεπτοδείκτης 60 διαιρέσεις, ἄρα ἂν εἰς x ὥρας συναντηθοῦν οἱ δεῖκται, ὁ ὡροδείκτης θὰ διανύσῃ 5 x διαιρέσεις καὶ ὁ λεπτοδείκτης 60 x ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ λεπτοδείκτης ὡς ταχύτερος θὰ διανύσῃ μίαν πλήρη περιφέρειαν ἐπὶ πλέον δηλ. 60 διαιρέσεις θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$5x + 60 = 60x \quad \text{ἐξ ἧς} \quad x = 1\frac{1}{11} \text{ ὥρ.}$$

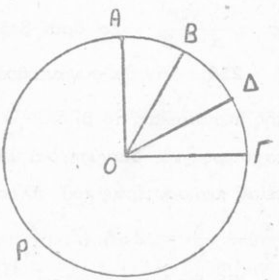
232. Ἔστω μετὰ x ὥρας, ὅτι θὰ λάβῃ χώραν τὸ ζητούμενον. Θὰ πρέπῃ ἀναλόγως πρὸς τὸ προηγούμενον πρόβλημα νὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν:
$60x - 5x = 15$ (διότι 1 ὀρθὴ $= 15$ διαιρέσεις) ἐξ ἧς $x = \frac{3}{11}$ ὥρας.

Διὰ δευτέραν φορὰν θὰ συμβῇ τοῦτο, ὅταν ὁ λεπτοδείκτης εὑρίσκεται πρὸ τῆς 12 ὥρας ὅτε θὰ ἔχῃ διανύσῃ 45 διαιρέσεις ἐπὶ πλέον τοῦ ὡροδείκτου, ὅτε: $60x - 5x = 45$ καὶ συνεπῶς $x = \frac{9}{11}$. Διὰ τρίτην φορὰν $60x - 5x = 75$ κ. ο. κ.

233. Ἔστω ὅτι μετὰ x ὥρας θὰ σχηματίζουν τὴν γωνίαν τῶν α^0. Ὁ λεπτοδείκτης εἰς 1 ὥρ. θὰ διανύσῃ $360x$ μοίρας (ἀφοῦ εἰς 1 ὥραν διατρέχει ὅλην τὴν περιφέρειαν). Ὁ ὡροδείκτης διανύει εἰς 1 ὥραν 30^0 καὶ εἰς x ὥρας $30x$ μοίρας. Ἄρα $360x - 30x = \alpha$ ἤτοι $x = \frac{\alpha}{330}$. Διὰ τὴν δευτέραν φορὰν ὁ λεπτοδείκτης θὰ ἔχῃ διατρέξῃ $360 - \alpha$ μοίρας ἐπὶ πλέον τοῦ ὡροδείκτου καὶ θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$360x - 30x = 360 - \alpha \quad \text{ἐξ ἧς} \quad x = \frac{360 - \alpha}{330}.$$

234. Ἂν ὁ ὡροδείκτης διανύσῃ τὸ τόξον ΑΒ, ὁ λεπτοδείκτης θὰ διανύσῃ τὸ τόξον ΑΓ καὶ ὁ δευτερολεπτοδείκτης τὸ τόξον ΑΔ μὲ μίαν περιφέρειαν ἐπὶ πλέον (ὡς ταχύτερος). Ἂν Δ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΒΓ θὰ πρέπῃ: $ΑΔ = ΑΒ + ΒΔ$ καὶ $ΑΔ = ΑΓ - ΔΓ$, διὰ προσθέσεως τούτων ἔχομεν: $ΑΔ = \frac{ΑΒ + ΑΓ}{2}$ (1) (διότι $ΒΔ = ΔΓ$). Ἔστω τώρα x ὁ χρόνος καθ' ὃν θὰ λάβῃ χώραν τὸ ζητούμενον. Τότε τόξον $ΑΒ = 5x$, τόξον $ΑΓ = 60x$ καὶ τόξον $ΑΒΡΑΔ = 3600x$ διαιρέσεις.



Ἄρα ἡ (1) δίδει $ΑΔ = \frac{5x + 60x}{2}$

καὶ συνεπῶς $3600x = 60 + \frac{5x + 60x}{2}$

ἐξ ἧς $x = 1\frac{780}{1427}$ δλ.

235. Ἔστω ὅτι τὸ λαγωνικὸν θὰ φθάσῃ τὴν ἀλώπεκα μετὰ x πηδήματά του. Εἰς τὸ χρονικὸν τοῦτο διάστημα ἡ ἀλώπηξ θὰ διανύσῃ $\frac{9x}{6}$ πηδήματα καὶ τὰ 60 καθ' ἃ προηγεῖται ἤτοι: $\frac{9x}{6} + 60$.

Ἐπειδὴ ὅμως 7 πηδήματα ἀλώπεκος ἰσοδυναμοῦν πρὸς 3 τοῦ λαγωνικοῦ τὰ $\frac{9x}{6} + 60$ θὰ ἀντιστοιχοῦν πρὸς $\left(\frac{9x}{6} + 60\right)\frac{3}{7}$ τοῦ λαγωνικοῦ. Ἄρα θὰ ἔχωμεν: $\left(\frac{9x}{6} + 60\right)\frac{3}{7} = x$ ἐξ ἧς $x = 72$.

Περὶ συναρτήσεων

236. Κατανάλωσις καὶ κέρδος, τὸ διάστημα συνάρτησις τῆς ταχύτητος, ἡ ἀμοιβὴ ἐργάτου εἶναι συνάρτησις τοῦ χρόνου ἐργασίας του. Ἡ ἀξία ἐμπορεύματος συνάρτησις τοῦ βάρους του.

237. Τὸ διάστημα ποὺ διανύει σῶμά τι, κατὰ τὴν πτῶσιν του εἰς τὸ κενὸν εἶναι συνάρτησις τοῦ χρόνου. Ἡ δύναμις εἶναι συνάρτησις τῆς ἐπιταχύνσεως, ἣν προσδίδει αὕτη ἐπὶ τοῦ σώματος ἐφ οὗ ἐνεργεῖ.

Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου εἶναι συνάρτησις τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς. Τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου εἶναι συνάρτησις τοῦ ὕψους του ἢ τῆς βάσεώς του ἢ καὶ τῶν δύο ὁμοῦ.

238. α΄) $y = 3x + 6$.

Διὰ $x = 1$	$y = 3 \,.\, 1 + 6 = 9$
$x = 2$	$y = 3 \,.\, 2 + 6 = 12$
$x = 3$	$y = 3 \,.\, 3 + 6 = 15$
$x = 4$	$y = 3 \,.\, 4 + 6 = 18$
$x = 5$	$y = 3 \,.\, 5 + 6 = 21$
$x = -1$	$y = 3 \,.\, (-1) + 6 = 3$
$x = -2$	$y = 3 \,.\, (-2) + 6 = 0$
$x = -3$	$y = 3 \,.\, (-3) + 6 = -3$
$x = -\,^1/_4$	$y = 3 \,.\, (-^1/_4) + 6 = \frac{21}{4}$

β΄) Τῆς $y = 8x - 25$

Διὰ $x = 1$	$y = 8 \,.\, 1 - 25 = -17$
$x = 2$	$y = 8 \,.\, 2 - 25 = -9$
$x = 3$	$y = 8 \,.\, 3 - 25 = -1$
$x = 4$	$y = 8 \,.\, 4 - 25 = +7$
$x = 5$	$y = 8 \,.\, 5 - 25 = +15$
$x = -1$	$y = 8 \,.\, (-1) - 25 = -33$
$x = -2$	$y = 8 \,.\, (-2) - 25 = -41$
$x = -3$	$y = 8 \,.\, (-3) - 25 = -49$
$x = -\frac{1}{4}$	$y = 8 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - 25 = -27$

γ΄) Τῆς $y = x$ Διὰ $x = 1$ $y = 1$
$x = 2$ $y = 2$ κ. ο. κ.

δ΄) Τῆς $y = -x$.
Διὰ $x = 1$ $y = -1$ $x = 2$ $y = -2$ κ.ο.κ.

239. α΄) Τῆς $y = \frac{3x}{4} - 62$

Διὰ $x = 1$ $y = \frac{3 \,.\, 1}{4} - 62 = -\frac{245}{4}$

$x = 2$ $y = \frac{3 \,.\, 2}{4} - 62 = -\frac{121}{2}$ κ. ο. κ.

β΄) Τῆς $y = \frac{x^2}{2} - 3x - 7$

Διὰ $x = 1$ $y = \frac{1^2}{2} - 3 \,.\, 1 - 7 = -\frac{19}{2}$

$x = 2$ $y = \frac{2^2}{2} - 3 \,.\, 2 - 7 = -11$ κ. ο. κ.

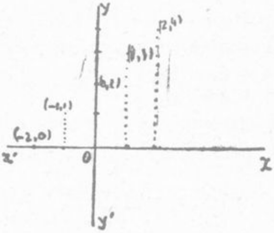
240. α') Τῆς $y = \frac{4x^2}{19} + \frac{3x}{8} + 9.$

Διὰ $x = 1 \quad y = \frac{4 \cdot 1^2}{19} + \frac{3 \cdot 1}{8} + 9 = \frac{1457}{12}$ κ. ο. κ.

β') τῆς $y = 600 - 35x^2 + \frac{13x}{15}$

Διὰ $x = 1 \quad y = 600 - 35 \cdot 1^2 + \frac{13 \cdot 1}{15} = 565 \frac{13}{15}$ κ. ο. κ.

241. Σχηματίζομεν τοὺς ὀρθογωνίους ἄξονας Ox, Oy καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ ἑκάστου τούτων τὴν μονάδα μήκους. Σημειοῦμεν δὲ κάθε σημεῖον, οὗ ὁρίζομεν τὰς συντεταγμένας του ὡς κατωτέρω.



α') τῆς $y = x + 2.$

Διὰ $x=0$ ἔχω $y=2$ ἤτοι τὸ σημεῖον M_1 (0,2)

Διὰ $x=1$ ἔχω $y=3$ ἤτοι τὸ σημεῖον M_2 (1,3).

Διὰ $x=2$ ἔχω $y=4$ δηλαδὴ τὸ σημεῖον M_3 (2,4).

Διὰ $x = -1$, $y=1$ ἄρα τὸ M_4 (−1,1)

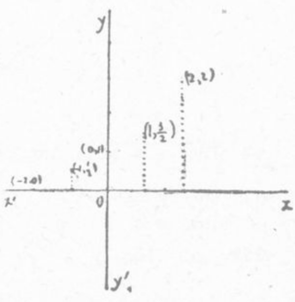
Διὰ $x = -2$, $y=0$ ἄρα τὸ M_5 (−2,0).

β') Τῆς $y = \frac{x}{2} + 1$

Διὰ $x = 0$, $y = 1$ ἄρα ἔχω τὸ σημεῖον (0,1). Διὰ $x = 1$ ἔχω $y = \frac{3}{2}$ ἄρα τὸ σημεῖον $\left(1, \frac{3}{2}\right)$. Διὰ $x = 2$ ἔχω $y = 2$ ἄρα τὸ σημεῖον (2,2). Διὰ $x = -1$ $y = 1/2$ ἤτοι τὸ σημεῖον $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

Διὰ $x = -2$, $y = 0$ ἤτοι τὸ σημεῖον (−2,0) ὁμοίως παριστῶμεν διὰ σημείων καὶ τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν τῆς x καὶ y, τῆς συναρτήσεως

$$y = \frac{3x}{4} - 2.$$

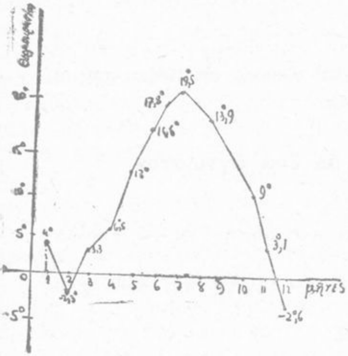


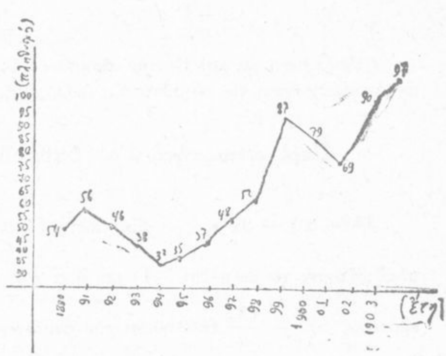
242. Ἐργαζόμεθα ὡς καὶ προηγουμένως.

243. Ὁμοίως.

244. Ἡ παραστατικὴ γραμμὴ τῆς θερμοκρασίας τῆς πόλεως εἶναι ἡ κατωτέρω ἀριστερὰ ἀπεικονιζομένη.

245. Ὁμοίως ἡ πορεία τῆς αὐξήσεως τοῦ πληθυσμοῦ παρίσταται ὑπὸ τῆς γραμμῆς τοῦ κατωτέρω δεξιὰ σχήματος.

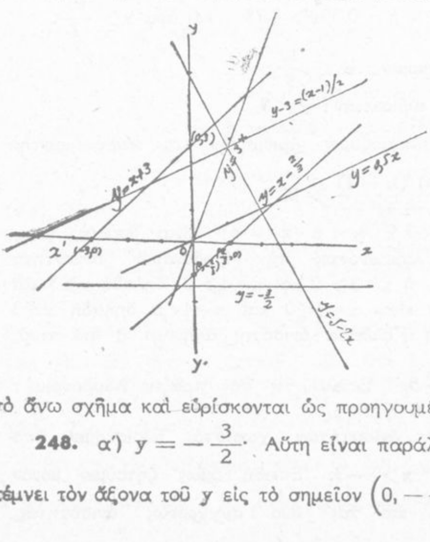




Γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $\psi = \alpha x + \beta$

246. α΄) Ἡ $y = 3x$. Θέτομεν $x = 0$ ὅτε $y = 0$ ἄρα αὕτη διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων. Ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν ἓν ἀκόμη σημεῖον αὐτῆς. Θέτομεν πρὸς τοῦτο π. χ. $x = 1$ ὅτε $y = 3$, ὅτε θὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον (1 · 3). (Βλέπε τὸ κατωτέρω σχῆμα).

β΄) Ἡ $y = x + 3$. Θέτομεν $x = 0$ ὅτε $y = 3$, ἤτοι διέρχεται διὰ τοῦ σημείου (0 · 3). Θέτομεν $y = 0$ ὅτε $x = -3$ ἄρα διέρχεται καὶ διὰ τοῦ σημείου (—3 · 0). Ἄρα ὁρίζεται τελείως. (Βλέπε τὸ αὐτὸ σχῆμα).



γ΄) Ἡ $y = 0{,}5x$. Διὰ $x = 0$ ἔχω $y = 0$ ἄρα διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς· ἀρκεῖ ἀκόμη ἓν σημεῖον. Θέτω πρὸς τοῦτο $x = 1$ ὅτε $y = 0{,}5$ ἄρα διέρχεται καὶ διὰ τοῦ σημείου (1 · 0,5). (Εἰς τὸ αὐτὸ σχῆμα).

247. α΄) $y = x - \dfrac{2}{3}$

β΄) $y = \dfrac{x}{2} - x = -\dfrac{x}{2}$

γ΄) $y = -\dfrac{5x}{6} - \dfrac{1}{8}$.

Αὗται ἀπεικονίζονται εἰς τὸ ἄνω σχῆμα καὶ εὑρίσκονται ὡς προηγουμένως.

248. α΄) $y = -\dfrac{3}{2}$. Αὕτη εἶναι παράλληλος τοῦ ἄξονος τῶν **x** καὶ τέμνει τὸν ἄξονα τοῦ **y** εἰς τὸ σημεῖον $\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$

β') $y = 5 - 2x$.

γ') $y - 3 = \frac{x-1}{2}$ ἢ $y = \frac{x+5}{2}$.

('Εργάζομαι ὡς καὶ εἰς τὴν ἄσκησιν 244 καὶ εὑρίσκω τὰς εὐθείας ταύτας, ὡς ἀπεικονίζονται εἰς τὸ αὐτό, ὡς ἄνω, σχῆμα).

Περὶ ἀνισοτήτων α' βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον

249. α') $-3x > \frac{5}{3}$. Ἐκ ταύτης ἔχομεν $-9x > 5$ ἢ $9x < -5$ (πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη ἐπὶ -1) καὶ ἄρα $x < -\frac{5}{9}$ δηλαδὴ πᾶς ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ $-\frac{5}{9}$ ἐπαληθεύει τὴν ἀνισότητα.

β') $-4x - 9 > 0$ ἢ $-4x > 9$ ἢ $4x < -9$ ἢ $x < -\frac{9}{4}$.

γ') $0{,}5x + 5 > 0$ ἢ $0{,}5x > -5$ ἢ $x > -\frac{5}{0{,}5}$ ἢ $x > -10$.

δ') $-9x - 18 < 0$ εὑρίσκομεν: $x > -2$.

ε') $9x + 7 > 0$ εὑρίσκομεν: $x > -\frac{7}{9}$.

στ') $-7x - 48 > 0$ εὑρίσκομεν: $x < -\frac{48}{7}$.

ζ') $0{,}6x - 5 > 0{,}25(x - 1)$ ἢ $0{,}6x - 5 > 0{,}25x - 0{,}25$.

ἢ $0{,}6x - 0{,}25x > 5 - 0{,}25$ ἢ $0{,}35x > 4{,}75$ καὶ ἄρα $x > \frac{95}{7}$.

η') $-9x + 32 > 0$ εὑρίσκομεν: $x < \frac{32}{9}$.

θ') $0{,}5x - 1 > 0{,}7x - 1$ εὑρίσκομεν: $x < 0$.

ι') $\frac{x-3}{x-4} > 0$. Πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ $x - 4$ ὅτε λαμβάνομεν $\frac{(x-3)(x-4)}{(x-4)^2} > 0$.

Ἐπειδὴ δὲ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ $x \neq 4$ ὁ $(x-4)^2$ εἶναι θετικός, ἀπαλείφομεν τοὺς παρονομαστὰς λαμβάνοντες τὴν ἰσοδύναμον ἀνισότητα $(x-3)(x-4) > 0$. Ἤδη πρέπει ἢ $x-3 > 0$ καὶ $x-4 > 0$ δηλαδὴ $x > 3$ καὶ $x > 4$ ὅτε ἀρκεῖ $x > 4$ ἢ πρέπει νὰ εἶναι $x-3 < 0$ καὶ $x-4 < 0$ δηλαδὴ $x < 3$ καὶ $x < 4$ ὅτε ἀρκεῖ $x < 3$. Δηλαδὴ ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἀληθεύει ἢ διὰ τιμὰς τοῦ $x > 4$ ἢ διὰ τιμὰς τοῦ $x < 3$.

ια') $(x+1)^2 < x^2 + 3x - 5$. Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις λαμβάνομεν: $x^2 + 2x + 1 < x^2 + 3x - 5$ ἢ $-x < -6$ ἢ $x > 6$.

50. Λύομεν ἑκάστην τῶν ἀνισοτήτων χωριστά. Εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν α'. $x < \frac{1}{2}$ καὶ ἀπὸ τὴν β'. $x > -3$. Ἐπειδὴ ὅμως ζητοῦμεν μόνον ἀκεραίας τιμὰς ἐπαληθευούσας καὶ τὰς δύο συγχρόνως ἀνισότητας, αὗται εἶναι οἱ ἀκέραιοι οἱ κείμενοι μεταξὺ 1/2 καὶ -3 δηλαδὴ οἱ -2, -1, 0.

251. Ἀπὸ τὴν σχέσιν $(AM)+(BM)=2\alpha$ ἔχομεν: $(AM)=2\alpha-(BM)$. Ἀλλὰ διὰ νὰ εἶναι $(AM)>0$ πρέπει καὶ $2\alpha-(BM)>0$ δηλαδὴ $2\alpha>(BM)$. Ἂν θέλωμεν $(AM)<0$ τότε πρέπει καὶ $2\alpha-(BM)<0$ ὅτε $2\alpha<(BM)$. Ἐὰν τὸ $(AM)=0$ τότε $2\alpha-(BM)=0$ ἄρα $(BM)=2\alpha$. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα ἐὰν θέλωμεν $(BM)>0$ ὅτε $2\alpha-(AM)>0$ κλπ.

Ἔστω τώρα ὅτι $(AB)=2\gamma$. Ἔχομεν $(AM)+(BM)>(AB)$ ἀπὸ τὸ τρίγωνον AMB, δηλαδὴ $(AM)+(BM)>2\gamma$ καὶ $(AM)>2\gamma-(BM)$. Ἂν λοιπὸν $2\gamma-(BM)>0$ τότε $(BM)<2\gamma$ ἐνῷ εἶναι $(AM)>0$ ἀφοῦ τοῦτο εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $2\gamma-(BM)$ ὅπερ τίθεται >0.

252. Ἔστω ὅτι εἶναι $t_1>t_1'$ καὶ $t_2>t_2'$. Ὅταν τὸ κάθε κινητὸν θὰ ἔχῃ τὴν μεγίστην αὐτοῦ ταχύτητα τότε ἵνα συναντηθοῦν χρειάζονται προφανῶς τὸν ἐλάχιστον χρόνον. Ἔστω ἤδη x τὸ διανυθὲν ὑπὸ τοῦ α' κινητοῦ διάστημα, μετὰ ταχύτητος t_1, ὁ χρόνος ὅστις χρειάζεται ἵνα διανυθῇ τοῦτο εἶναι $\frac{x}{t_1}$. Τὸ ἄλλο κινητὸν διήνυσε διάστημα $\alpha-x$ μετὰ ταχύτητος t_2 ὅτε ὁ πρὸς τοῦτο ἀπαιτηθεὶς χρόνος εἶναι $\frac{\alpha-x}{t_2}$. Ἐπειδὴ δὲ ὑπετέθη, ὅτι ἀναχωροῦν συγχρόνως θὰ ἔχωμεν $\frac{x}{t_1}=\frac{\alpha-x}{t_2}$, ἥν λύοντες εὑρίσκομεν: $x=\frac{t_1}{t_1+t_2}$.

Τὸ α' κινητὸν ἐχρειάσθη λοιπὸν $\frac{\alpha t_1}{t_1+t_2}:t_1=\frac{\alpha}{t_1+t_2}$ χρόνον. Ἂν λοιπὸν τὰ κινητὰ ἔχουν τὴν ἐλαχίστην των ταχύτητα t_1', t_2' θὰ ἔχωμεν διὰ τὸ α' κινητὸν ὡς χρόνον ἀπαιτηθέντα $\frac{\alpha}{t_1'+t_2'}$. Ὅταν ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ κεῖται μεταξὺ t_1 καὶ t_1' τοῦ α' καὶ μεταξὺ t_2 καὶ t_2' τοῦ β' τότε ἡ συνάντησις αὐτῶν θὰ γίνῃ μεταξὺ τῶν χρόνων $\frac{\alpha}{t_1+t_2}$ καὶ $\frac{\alpha}{t'_1+t'_2}$ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ σημείου ἀναχωρήσεως τοῦ α' κινητοῦ, κειμένην μεταξὺ τῶν ἀποστάσεων $\frac{\alpha t_1}{t_1+t_2}$ καὶ $\frac{\alpha t_1'}{t_1'+t_2'}$.

253. Ἔστω $\alpha=\beta$ καὶ $\gamma>\delta$. Τότε θὰ δείξωμεν ὅτι $\alpha-\gamma<\beta-\delta$. Πράγματι ἐκ τῆς $\gamma>\delta$ ἔχομεν $\gamma-\delta>0$, ἄρα $\gamma-\delta=$ θετ., ἀφαιροῦμεν τὰς ἰσότητας $\alpha=\beta$ καὶ $\gamma-\delta=$ θετ. κατὰ μέλη ὅτε ἔχομεν: $\alpha-\gamma+\delta=\beta-$ θετ. ἢ $\alpha-\gamma+\delta-\beta=-$ θετ. ἢ $(\alpha-\gamma)-(\beta-\delta)=$ $=-$ θετ., ὅτε $\alpha-\gamma<\beta-\delta$.

β') Ἔχομεν $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}>2$. Τὸ θεωροῦμεν ὡς ἀληθὲς καὶ πολ/μεν τὰ μέλη ἐπὶ τὸν θετικὸν ἀριθμὸν αβ. Θὰ ἔχωμεν τότε $\alpha^2+\beta^2>2\alpha\beta$ ἢ $\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta>0$ ἢ $(\alpha-\beta)^2>0$, ὅπερ ἂν $\alpha\neq\beta$ ἀληθεύει ὡς τετράγωνον ἀριθμοῦ. Ἄρα θὰ ἀληθεύῃ καὶ ἡ δοθεῖσα.

254. Ἔστω $\alpha=\beta$ καὶ $\gamma>\delta$. Ἔχομεν $\gamma>\delta$. Διαιροῦμεν τὰ μέλη διὰ τοῦ θετικοῦ γδ (ὑποθέτομεν $\gamma\delta>0$) ὅτε λαμβάνομεν $\frac{1}{\delta}>\frac{1}{\gamma}$ καὶ τώρα πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη ἐπὶ α λαμβάνομεν:

$$\frac{\alpha}{\delta} > \frac{\alpha}{\gamma} \text{ ἢ } \frac{\beta}{\delta} > \frac{\alpha}{\gamma} \text{ διότι ἔχομεν } \alpha = \beta.$$

255. Γράφομεν $\dfrac{\mu x+\nu-\kappa x+\lambda}{\alpha+\beta} < \dfrac{\mu x-\nu+\kappa x-\lambda}{\alpha-\beta}$

ἢ $\dfrac{(\alpha-\beta)\,(\mu x+\nu-\kappa x+\lambda)-(\alpha+\beta)\,(\mu x-\nu+\kappa x-\lambda)}{\alpha^2-\beta^2} < 0$

ἢ $\dfrac{(\alpha\nu+\alpha\lambda-\alpha\kappa x-\beta\mu x)}{\alpha^2-\beta^2} < 0$ ἢ $(\alpha^2-\beta^2)\,(\alpha\nu+\alpha\lambda-\alpha\kappa x-\beta\mu x) < 0$

ὅτε ἂν εἶναι $\alpha^2 > \beta^2$ τότε $\alpha\nu+\alpha\lambda-\alpha\kappa x-\beta\mu x < 0$ ἢ $x(\alpha\kappa+\beta\mu) > \alpha\nu+\alpha\lambda$

ἄρα ἂν $\alpha\kappa+\beta\mu > 0$ ἔχω $x > \dfrac{\alpha\nu+\alpha\lambda}{\alpha\kappa+\beta\mu}$, ἂν δὲ $\alpha\kappa+\beta\mu < 0$ τότε

$x < \dfrac{\alpha\nu+\alpha\lambda}{\alpha\kappa+\beta\mu}$. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα ἂν $\alpha^2 < \beta^2$.

256. α') Ἀναχωροῦμεν ἀπὸ τὴν προφανῆ σχέσιν $(\alpha-\beta)^2 > 0$ ἢ $\alpha^2+\beta^2 > 2\alpha\beta$. Ἐπίσης $\alpha^2+\gamma^2 > 2\alpha\gamma$ καὶ $\beta^2+\gamma^2 > 2\beta\gamma$. Προσθέτοντες τὰς τρεῖς ταύτας κατὰ μέλη καὶ ἁπλοποιοῦντες διὰ 2 εὑρίσκομεν:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 > \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma.$$

β') Ἐπειδὴ $|\alpha-\beta| < \gamma$, $|\beta-\gamma| < \alpha$, $|\gamma-\alpha| < \beta$, ὡς μήκη πλευρῶν τριγώνου, θὰ ἔχωμεν: $(\alpha-\beta)^2 < \gamma^2$, $(\beta-\gamma)^2 < \alpha^2$, $(\gamma-\alpha)^2 < \beta^2$

ἢ $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2 < \gamma^2+\alpha^2+\beta^2$ ὅτε:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 < 2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\alpha\gamma.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV.

Λύσις συστημάτων διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν

257. α') $\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 10 \\ 4x + y &= 9 \end{aligned}\right\} \begin{array}{r} 1 \\ -4 \end{array}$

Πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς α' ἐξισώσεως ἐπὶ 1, τῆς δὲ ἄλλης ἐπὶ **— 4,** διατάσσοντες τὴν πρᾶξιν ὡς ἄνω. Ἔχομεν μετὰ τὰς πράξεις τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 10 \\ -16x - 4y &= -36 \end{aligned}$$

καὶ ἀθροίζοντες κατὰ μέλη ἔχομεν: $-13x = -26$ ἢ $x = 2$. Κατόπιν τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ x θέτομεν εἰς οἱανδήποτε τῶν δοθεισῶν καὶ εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ ἄλλου ἀγνώστου· θέτοντες π. χ. ὅπου $x = 2$ εἰς τὴν α' λαμβάνομεν: $3 . 2 + 4y = 10$ ἢ $4y = 4$, ὅτε $y = 1$.

Ἐπαλήθευσις : Θέτομεν τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τῶν x, y εἰς ἀμφοτέρας καὶ λαμβάνομεν: $3 . 2 + 4 . 1 = 10$ καὶ $4 . 2 + 1 = 9$.

β') $\dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{4} = 6$

$\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{6} = \dfrac{17}{3}$

Μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρανομαστῶν λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 72 \\ 3x + 2y &= 68 \end{aligned}\right\} \begin{array}{r} 3 \\ -2 \end{array} \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς α' ἐπὶ 3 καὶ τὰ τῆς β' ἐξισώσεως ἐπὶ — 2. Ἔχομεν οὕτω τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$$\begin{aligned} 6x + 9y &= 216 \\ -6x - 4y &= -136 \\ \hline 5y &= 80, \end{aligned}$$

Ἀθροίζομεν κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν: ... ἐξ ἧς $y = 16$. Τὴν τιμὴν ταύτην θέτοντες εἰς μίαν τῶν δοθεισῶν, ἢ εἰς μίαν τῶν (1) λαμβάνομεν: $2x + 3 . 16 = 72$ ἐξ ἧς $x = 12$. Ἡ ἐπαλήθευσις γίνεται εὐκόλως.

γ') $\dfrac{x}{13} - \dfrac{y}{7} = 6x - 10y - 8 = 0.$

Ἔχομεν θέτοντες ἕκαστον τῶν α' μελῶν ἴσον πρὸς 0.

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{13} - \frac{y}{7} &= 0 \\ 6x - 10y - 8 &= 0 \end{aligned}\right| \quad ἢ \quad \left.\begin{aligned} 7x - 13y &= 0 \\ 6x - 10y &= 8 \end{aligned}\right\} \begin{array}{r} 6 \\ -7 \end{array} \quad ἢ$$

$$\begin{aligned} 42x - 73y &= 0 \\ -42x + 70y &= -56 \\ \hline -8y &= -56 \end{aligned}$$

ἐξ ἧς $y = 7$, ὅτε διὰ ἀντικαταστάσεως εἰς μίαν τῶν δοθεισῶν εὑρίσκομεν: $x = 13$.

258. α')

$$\begin{array}{rl|l} & 2x+3y=5\sqrt{3}+\sqrt{2} & \sqrt{3}+\sqrt{2} \\ & (\sqrt{3}+\sqrt{2})x+(\sqrt{3}-\sqrt{2})y=2 & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{ἢ} & 2(\sqrt{3}+\sqrt{2})x+3(\sqrt{3}+\sqrt{2})y=(5\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \\ & -2(\sqrt{3}+\sqrt{2})x-2(\sqrt{3}-\sqrt{2})y=-4 \\ \hline & (\sqrt{3}+5\sqrt{2})y=13+6\sqrt{6} \end{array}$$

ὅτε: $y = \dfrac{13+6\sqrt{6}}{\sqrt{3}+5\sqrt{2}}$ καὶ $x = \dfrac{4\sqrt{6}-7}{\sqrt{3}+5\sqrt{2}}$.

β')

$$\begin{array}{l|l} 7{,}2x+3{,}6y=54 & 2{,}3 \\ 2{,}3x+5{,}9y=22 & -7{,}2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{ἢ} & 7{,}2.2{,}3x+3{,}6.2{,}3y=54.2{,}3 \\ & -7{,}2.2{,}3x-7{,}2.5{,}9y=-22.7{,}2 \\ \hline & -34{,}20y=-34{,}20 \end{array}$$

ἐξ ἧς $y = 1$ ὅτε $x = 7$.

259. α') $(x+5)(y+7)-(x+1)(y-9)=12$

$$2x+10-(3y+1)=0.$$

Ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις καὶ μετὰ τὰς ἀναγωγὰς λαμβάνομεν, διατάσσοντες ὡς πρὸς x, y, τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$$\begin{array}{l|l} 4x+y=-8 & 3 \\ 2x-3y=-9 & 1 \end{array} \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{l} 12x+3y=-24 \\ 2x-3y=-9 \\ \hline 14x \qquad =-33 \end{array}$$

ἄρα $x = -\dfrac{33}{14}$, ὅτε εὐκόλως ἕπεται καὶ ἡ τιμὴ τοῦ $y = \dfrac{10}{7}$.

β') Μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν καὶ τὰς καταλλήλους ἀναγωγὰς λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$$\begin{array}{l|l} 17x-37y=39 & 27 \\ 27x-43y=18 & -17 \end{array}$$

ἐξ οὗ εὐκόλως εὑρίσκομεν: $y = -\dfrac{747}{268}$, $x = -\dfrac{1011}{268}$.

260.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha x+\beta y=\alpha^3+\beta^3+2\alpha^2\beta \\ \beta x+\alpha y=\alpha^3-\beta^3+2\alpha^2\beta \end{array}\right| \quad (1)$$

Ἀθροίζομεν ταύτας κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν:

$$(\alpha+\beta)x+(\beta+\alpha)y=2\alpha^3+4\alpha^2\beta$$

ἢ $(\alpha+\beta)(x+y)=2\alpha^2(\alpha+2\beta)$

ἢ $x+y=\dfrac{2\alpha^2(\alpha+2\beta)}{\alpha+\beta}$ (2) ἐφ' ὅσον $\alpha+\beta \neq 0$.

Ἀφαιροῦντες τώρα τὰς (1) κατὰ μέλη λαμβάνομεν:

$$(\alpha-\beta)x+(\beta-\alpha)y=2\beta^3$$

ἢ $(\alpha-\beta)x-(\alpha-\beta)y=2\beta^3$

ἢ $(\alpha-\beta)(x-y=2\beta^3$ καὶ $x-y=\dfrac{2\beta^3}{\alpha-\beta}$ (3) ἐφ' ὅσον $\alpha-\beta \neq 0$

Ἤδη λύομεν τὸ σύστημα τῶν (2), (3) τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ (1). Πρὸς τοῦτο ἀθροίζομεν ταύτας κατὰ μέλη, ὅτε λαμβάνομεν

$2x = \frac{2\alpha^2(\alpha+2\beta)}{\alpha+\beta} + \frac{2\beta^3}{\alpha-\beta}$, ἐξ ἧς εὐκόλως ἕπεται ἡ τιμὴ τοῦ x ἤτοι :

$x = \frac{\alpha^4+\alpha^3\beta-2\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+\beta^4}{\alpha^2-\beta^2}$. Δι' ἀφαιρέσεως δὲ κατὰ μέλη τῶν (2), (3), ἕπεται καὶ ἡ τιμὴ τοῦ y ἤτοι $y = \frac{\alpha^4+\alpha^3\beta-2\alpha^2\beta^2-\alpha\beta^3-\beta^4}{\alpha^2-\beta^2}$.

261. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 0$. Τοῦτο εἶναι προφανῶς ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν $3x-7y=37$. Ἐκ τούτου δὲ ἕπεται καὶ τὸ

$$\begin{array}{l|l} 4x+3y=0 & 28x+21y=0 \\ 3x-7y=37 & 9x-21y=111 \\ \hline & 37x \qquad =111 \end{array}$$

ὅτε $x = \frac{111}{37} = 3$. Εὐκόλως δὲ εὑρίσκομεν : $y = -4$.

262. $\frac{x+3}{5} = \frac{8-y}{4} = \frac{3(x+y)}{8}$.

Ἔχομεν τὸ ἰσοδύναμον ἐξισοῦντες τὰ δύο τελευταῖα πρὸς τὸ α΄ ἤτοι :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x+3}{5} = \frac{8-y}{4} \\ \frac{x+3}{5} = \frac{3(x+y)}{8} \end{array}\right| \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{l|r} 4x+5y=28 & -3 \\ 7x+15y=24 & 1 \end{array}$$

ἀπαλείφοντες τὸν y διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου τῶν 5 καὶ 15, συντελεστῶν τοῦ y, θὰ ἔχωμεν εὐκόλως :

$x = 12$ καὶ $y = -4$.

263. $$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{6,1} + \frac{y}{4,2} = 6,4 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{6,5} = \frac{17,5}{3} \end{array}\right\} \text{ἢ} \quad \begin{array}{l} \frac{10x}{61} + \frac{10y}{42} = 6,4 \\ \frac{x}{4} + \frac{10y}{65} = \frac{175}{30} \end{array} \quad \text{ἢ}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{100x}{61} + \frac{100y}{42} = 64 \\ \frac{x}{4} + \frac{2y}{13} = \frac{35}{6} \end{array}\right\}$$

Ἀπαλείφοντες τώρα τοὺς παρονομαστὰς λύομεν τὸ σύστημα κατὰ τὰ γνωστὰ καὶ εὑρίσκομεν : $x = \frac{8078840}{6855}$ καὶ $y = \frac{128537,6}{1855}$

264. $$\left.\begin{array}{l} \alpha x+\beta y=\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2 \\ \beta x+\alpha y=\alpha^2+\beta^2 \end{array}\right\} (1)$$

Ἀθροίζοντες κατὰ μέλη λαμβάνομεν : (ἄσκησις 260).

$(\alpha+\beta)(x+y) = 2\alpha^2+2\alpha\beta = 2\alpha(\alpha+\beta)$

ὅτε, ἂν $\alpha+\beta \neq 0$, ἔχομεν : $x+y=2\alpha$. (2)

Ἀφαιροῦντες τὰς (1) κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$(\alpha-\beta)(x-y) = 2\alpha\beta-2\beta^2 = 2\beta(\alpha-\beta)$ ὅτε, ἂν $\alpha-\beta \neq 0$, λαμβάνομεν :

$x-y=2\beta$ (3).

Ἔχομεν συνεπῶς τὸ ἰσοδύναμον σύστημα τῶν (2), (3)

$x + y = 2\alpha$ ὅτε διὰ προσθαφαιρέσεως τούτων

$x - y = 2\beta$ κατὰ μέλη λαμβάνομεν : $x=\alpha+\beta$ καὶ $y=\alpha-\beta$.

265. $\left.\begin{array}{l}(\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)y=\alpha^2+\beta^2\\(\alpha-\beta)x+(\alpha+\beta)y=\alpha^2-\beta^2\end{array}\right\}$ (1) Προσθέτοντες αὐτὰς κατὰ μέλη λαμβάνομεν : $2\alpha x+2\alpha y=2\alpha^2$ ὅτε, ἂν $\alpha\neq0$, λαμβάνομεν : $x+y=\alpha$ (2)

Ὁμοίως ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (1) λαμβάνομεν :

$2\beta x-2\beta y=2\beta^2$ ὅτε ἂν $\beta\neq0$ $x-y=\beta$ (3). Εὐκόλως τώρα ἐκ τῶν (2) καὶ (3) λαμβάνομεν : $x = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

266. $\alpha(x-y) + \beta(x+y) = 4\alpha\beta$

$(\alpha-\beta)x - \beta y = \alpha y.$

Ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις καὶ λαμβάνομεν :

$$\alpha x - \alpha y + \beta x + \beta y = 4\alpha\beta$$
$$\alpha x - \beta x - \beta y - \alpha y = 0$$

$$\text{ἢ}\quad \begin{array}{l|l}(\alpha+\beta)x + (\beta-\alpha)y = 4\alpha\beta & \beta+\alpha\\(\alpha-\beta)x - (\beta+\alpha)y = 0 & \beta-\alpha\end{array}$$

Δηλαδὴ ἀπαλείφομεν τὸν y, ὅτε εὐκόλως λαμβάνομεν: $x = \alpha + \beta$ καὶ κατόπιν $y = \alpha - \beta$.

267. α΄) $\left.\begin{array}{l}\alpha(x+\beta) = 2\beta y\\\beta(x+\alpha) - \beta^2 = \beta y\end{array}\right\}$ Διατάσσομεν τὸ σύστημα ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους του καὶ λαμβάνομεν :

$$\left.\begin{array}{l}\alpha x - 2\beta y = -\alpha\beta\\\beta x - \beta y = \beta^2 - \alpha\beta\end{array}\right|\begin{array}{c}1\\-2\end{array}\quad\text{ἢ}\quad\begin{array}{r}\alpha x - 2\beta y = -\alpha\beta\\-2\beta x + 2\beta y = 2\alpha\beta - 2\beta^2\\\hline\end{array}$$

$$\text{ἢ}\quad(\alpha-2\beta)x = \alpha\beta - 2\beta^2$$

ἐξ ἧς $(\alpha-2\beta)x = \beta(\alpha-2\beta)$ καὶ συνεπῶς ἂν $\alpha - 2\beta \neq 0$ θὰ ἔχωμεν : $x = \beta$, ὅτε εὐκόλως εὑρίσκομεν: $y = \alpha$.

β΄) $\left.\begin{array}{l}(\alpha+\beta)x - \alpha y = \alpha^2\\\beta x - (\alpha-\beta)y = \beta^2\end{array}\right|\begin{array}{l}\alpha-\beta\\-\alpha\end{array}$

Ἔχομεν: $$\begin{array}{rl}(\alpha^2-\beta^2)x - \alpha(\alpha-\beta)y &= \alpha^2(\alpha-\beta)\\-\alpha\beta x + \alpha(\alpha-\beta)y &= -\alpha\beta^2\\\hline\end{array}$$

$$\text{ἢ}\quad(\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2)x = \alpha^3 - \alpha^2\beta - \alpha\beta^2$$
$$\text{ἢ}\quad(\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2)x = \alpha(\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2)$$

ὅτε ἂν $\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2\neq0$ θὰ ἔχωμεν: $x=\alpha$, ὅτε εὐκόλως εὑρίσκομεν καὶ $y=\beta$.

Σημ. Καλὸν θὰ εἶναι ὁ μαθητὴς νὰ κάμνῃ ἑκάστοτε τὰς ἐπαληθεύσεις τῶν συστημάτων ἀφ' ἑνὸς μὲν διὰ τὸν ἔλεγχον τῶν ἐξαγομένων, τὰ ὁποῖα προκύπτουν ἀπὸ τὴν λύσιν ἑνὸς συστήματος, ἀφ' ἑτέρου δέ, ἵνα ἐξασκῆται καὶ ἀποκτᾷ εὐχέρειαν περὶ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων.

Λύσις συστημάτων διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀντικαταστάσεως

268. α΄) $7x = 18 + \frac{5y}{3}$

$0{,}75x + 2y = 15$

Λύομεν τὴν πρώτην ὡς πρὸς x καὶ λαμβάνομεν $x = \frac{18}{7} + \frac{5y}{21}$.

Τὴν τιμὴν ταύτην ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν καὶ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$$\left| \begin{aligned} 0{,}75\left(\frac{18}{7} + \frac{5y}{21}\right) + 2y &= 15 \\ x = \frac{18}{7} + \frac{5y}{21} & \end{aligned} \right. \quad \text{ἢ} \quad \left| \begin{aligned} \frac{3}{4}\left(\frac{18}{7} + \frac{5y}{21}\right) + 2y &= 15 \\ x = \frac{18}{7} + \frac{5y}{21} & \quad (1) \end{aligned} \right.$$

Ἡ πρώτη τῶν τελευταίων τούτων μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων καὶ ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν δίδει $162 + 15y + 168y = 1260$, ἐξ ἧς $y = 6$, ὅτε ἐκ τῆς ἄλλης τῶν (1) λαμβάνομεν : $x = 4$,

β΄) $\begin{aligned} x &= \alpha + y \\ \lambda x + \mu y &= \nu \end{aligned}$ Θέτομεν τὴν τιμὴν τοῦ x ἐκ τῆς α΄ εἰς τὴν β΄ τῶν δοθεισῶν καὶ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$\left.\begin{aligned} x &= \alpha + y \\ \lambda(\alpha + y) + \mu y &= \nu \end{aligned}\right|$ Ἐκ τούτων ἡ δευτέρα λυομένη ὡς πρὸς y μᾶς παρέχει τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου y ἤτοι $y = \frac{\nu - \alpha\lambda}{\lambda + \mu}$, ἐὰν $\lambda + \mu \neq 0$.

Ἤδη ἐκ τῆς πρώτης τῶν δοθεισῶν λαμβάνομεν καὶ τὴν τιμὴν τοῦ x

ἤτοι: $x = \alpha + \frac{\nu - \alpha\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{\alpha\mu + \nu}{\lambda + \mu}$.

γ΄) $\left.\begin{aligned} \alpha x &= \alpha^2 - \beta y \\ \alpha x - \beta y &= \beta^2 \end{aligned}\right\}$.

Λύομεν τὴν α΄ ὡς πρὸς x καὶ λαμβάνομεν: $x = \frac{\alpha^2 - \beta y}{\alpha}$, ἂν $\alpha \neq 0$.

Τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x εἰσάγομεν εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος καὶ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$$\left| \begin{aligned} x &= \frac{\alpha^2 - \beta y}{\alpha} \\ \alpha\left(\frac{\alpha^2 - \beta y}{\alpha}\right) - \beta y &= \beta^2 \end{aligned} \right| \quad \text{ἢ} \quad \left| \begin{aligned} x &= \frac{\alpha^2 - \beta y}{\alpha} \\ \alpha^2 - \beta y - \beta y &= \beta^2 \end{aligned} \right\}$$

Ἐκ τῆς δευτέρας λαμβάνομεν: $y = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\beta}$, ἂν $\beta \neq 0$ ὅτε εὐκόλως ἔχομεν καὶ τὴν τιμὴν τοῦ x, ἥτις εἶναι $x = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha}$, ἂν $\alpha \neq 0$.

269. α΄) $\left.\begin{aligned} y &= 3\alpha - \frac{x}{2} \\ \frac{2y}{5} - x &= 2\beta \end{aligned}\right\}$ Ἀντικαθιστῶμεν τὴν τιμὴν τοῦ y ἐκ τῆς α΄ εἰς τὴν β΄ ἐξίσωσιν τῶν δοθεισῶν καὶ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} y &= 3\alpha - \frac{x}{2} \\ \frac{2}{5}\left(3\alpha - \frac{x}{2}\right) - x &= 2\beta \end{aligned}\right\}$$

'Εκ τῆς β' λαμάνομεν :

$$\frac{6\alpha}{5} - \frac{2x}{10} - x = 2\beta$$

$$\text{ἢ } x = \frac{6\alpha - 10\beta}{6}$$

Εὐκόλως ἤδη ἐκ τῆς πρώτης δι' ἀντικαταστάσεως τῆς εὑρεθείσης τιμῆς τοῦ x, λαμβάνομεν : $y = 3\alpha - \frac{6\alpha - 10\beta}{12} = \frac{15\alpha + 5\beta}{6}$.

β') $\left.\begin{aligned} x &= 4\alpha - y \\ \frac{x+y}{3} - \frac{x-y}{2} &= \alpha \end{aligned}\right\}$ Ἔχομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα $\left.\begin{aligned} x &= 4\alpha - y \\ -x + 5y &= 6\alpha \end{aligned}\right\}$ (1).

Εἰσάγομεν τὴν τιμὴν τοῦ x ἐκ τῆς α' εἰς τὴν δευτέραν ἐκ τῶν (1) καὶ εὑρίσκομεν : $-4\alpha + y + 5y = 6\alpha$ ἢ $y = \frac{5\alpha}{3}$.

Εὐκόλως δὲ εὑρίσκομεν : $x = \frac{7\alpha}{3}$.

γ') $\left.\begin{aligned} \frac{x}{9} &= \frac{y}{3} \\ 2x + 3y &= 5 \end{aligned}\right\}$ Ἔχομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα $\begin{aligned} x &= 3y \\ 2x + 3y &= 5 \end{aligned}$

Εἰσάγοντες τὴν τιμὴν τοῦ x ἐκ τῆς α' εἰς τὴν β' λαμβάνομεν :

$6y + 3y = 5$ ἢ $y = \frac{5}{9}$, ὅτε εὐκόλως ἕπεται $x = \frac{5}{3}$.

Λύσις συστημάτων διὰ τῆς μεθόδου τῆς συγκρίσεως

270. α') $\begin{aligned} 3x + 5y &= 20 \\ 3x + 10y &= 0 \end{aligned}$

Λύομεν ἑκάστην τούτων ὡς πρὸς x καὶ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα :

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{20 - 5y}{3} \\ x &= \frac{-10y}{3} \end{aligned}\right\}$$

Συγκρίνοντες λαμβάνομεν : $\frac{20 - 5y}{3} = \frac{-10y}{3}$ ἐξ ἧς $y = -4$.

'Ακολούθως δὲ εὐκόλως εὑρίσκομεν καὶ τὴν τιμὴν τοῦ x ἤτοι :

$$x = \frac{40}{3}.$$

β') $\left.\begin{aligned} \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} &= 1 \\ \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} &= 1 \end{aligned}\right\}$

Λύομεν ὡς πρὸς x ἀμφοτέρας καὶ λαμβάνομεν :

$$x = \alpha - \frac{\alpha y}{\beta} \quad \text{καὶ} \quad x = \alpha + \frac{\alpha y}{\beta}.$$

Συγκρίνοντες λαμβάνομεν $\alpha - \frac{\alpha y}{\beta} = \alpha + \frac{\alpha y}{\beta}$ ἢ $\alpha\beta - \alpha y = \alpha\beta + \alpha y$ ἢ $2\alpha y = 0$, ἐξ ἧς (ἄν $\alpha \neq 0$) $y = 0$. Εὐκόλως ἤδη ἕπεται $x = \alpha$.

γ') $\alpha x - \beta y = \gamma(\alpha - \beta)$

$x + y = \gamma$

Λύομεν ἑκάστην τούτων ὡς πρὸς x καὶ εὑρίσκομεν :

$$x = \frac{\gamma(\alpha - \beta) + \beta y}{\alpha} \quad \text{ἄν } \alpha \neq 0$$

$$x = \gamma - y$$

Διὰ συγκρίσεως τούτων λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$\frac{\gamma(\alpha - \beta) + \beta y}{\alpha} = \gamma - y, \text{ ἐξ ἧς } y = \frac{\beta\gamma}{\alpha + \beta}, \quad \text{ἄν } \alpha + \beta \neq 0$$

εὐκόλως δὲ ἔχομεν καὶ τὴν τιμὴν τοῦ x ἤτοι $x = \gamma - \frac{\beta\gamma}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha + \beta}$.

δ') $\frac{x}{\alpha + \beta} + \frac{y}{\alpha - \beta} = 2\alpha$ (1) $\quad \frac{x - y}{2\alpha\beta} = \frac{x + y}{\alpha^2 + \beta^2}$ (2)

Ἡ (1) γράφεται $(\alpha - \beta)x + (\alpha + \beta)y = 2\alpha(\alpha^2 - \beta^2)$ (3)

Ἡ (2) ἐπίσης γράφεται : $(\alpha^2 + \beta^2)(x - y) = (x + y)\,2\alpha\beta$

ἢ $(\alpha^2 + \beta^2)x - (\alpha^2 + \beta^2)y - 2\alpha\beta x - 2\alpha\beta y = 0$

ἢ $(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta)x - (\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta)y = 0$ ἢ $(\alpha - \beta)^2 x - (\alpha + \beta)^2 y = 0$

ἢ $x = \frac{(\alpha + \beta)^2 y}{(\alpha - \beta)^2}$ (ἄν $\alpha - \beta \neq 0$) (4).

Τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x εἰσάγομεν εἰς τὴν (3) καὶ λαμβάνομεν :

$$(\alpha - \beta) \cdot \frac{(\alpha + \beta)^2 y}{(\alpha - \beta)^2} + (\alpha + \beta)y = 2\alpha(\alpha^2 - \beta^2)$$

ἢ $\frac{(\alpha + \beta)^2 y}{\alpha - \beta} + (\alpha + \beta)y = 2\alpha(\alpha^2 - \beta^2)$

ἢ $(\alpha + \beta)^2 y + (\alpha^2 - \beta^2)y = 2\alpha(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha - \beta)$

ἢ $y = \frac{2\alpha(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha - \beta)}{2\alpha(\alpha + \beta)} = (\alpha - \beta)^2$.

Εὐκόλως δὲ τώρα ἐκ τῆς (4) λαμβάνομεν : $x = (\alpha + \beta)^2$.

ε') $x + y = \alpha + \beta$ (1)

$\beta x + \alpha y = 2\alpha\beta$ (2).

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν : $y = \alpha + \beta - x$ καὶ εἰσάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ y εἰς τὴν (2) εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ $x = \alpha$. Εὐκόλως δὲ εὑρίσκομεν $y = \beta$.

ϛ') $\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} = \alpha^2\beta$

$\frac{x}{\alpha^2} + \frac{y}{\beta^2} = -\beta^2$

Ἔχομεν μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν :

$$\begin{array}{l|l} \beta x - \alpha y = \alpha^2\beta^2 & \alpha \\ \beta^2 x + \alpha^2 y = -\alpha^2\beta^4 & 1 \end{array} \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{r} \alpha\beta x - \alpha^2 y = \alpha^3\beta^2 \\ \beta^2 x + \alpha^2 y = -\alpha^2\beta^4 \\ \hline (\alpha\beta + \alpha^2)x = \alpha^3\beta^2 - \alpha^2\beta^4 \end{array}$$

ἢ $\beta(\alpha + \beta)x = \alpha^2\beta^2(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$ ὅτε, ἄν $\beta(\alpha + \beta) \neq 0$, λαμβάνομεν :

$x = \alpha^2\beta(\alpha - \beta)$. Εὐκόλως ἤδη ἕπεται καὶ ἡ τιμὴ τοῦ $y = -\alpha\beta^2$.

271. α΄) Λύοντες τοῦτο διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀπαλοιφῆς διὰ προσθέσεως, λαμβάνομεν :

$$\begin{aligned} -4x + 13y &= 10 \\ 12x - 26y &= 3 \end{aligned} \qquad \text{ἐξ οὗ} \quad x = \frac{23}{4} \quad \text{καὶ} \quad y = \frac{33}{13}.$$

β΄) $$\frac{5x + 7y}{3x + 11} = \frac{13}{7}$$
$$\frac{11x + 27}{7x + 6y} = \frac{19}{11}$$

Ἀπαλείφομεν τοὺς παρονομαστὰς καὶ λαμβάνομεν :

$$7(5x + 7y) = 13(3x + 11)$$
$$11(11x + 27) = 19(7x + 6y)$$

Ἐκτελοῦντες δὲ τὰς πράξεις καὶ διατάσσοντες ὡς πρὸς x καὶ y λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα : $$\begin{aligned} -4x + 49y &= 143 \\ 12x + 114y &= 297 \end{aligned}$$

Λύοντες τώρα τοῦτο διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀπαλοιφῆς λαμβάνομεν :

$$x = -\frac{583}{248}, \qquad y = \frac{242}{87}$$

γ΄) $(\alpha + \beta)x + (\alpha - \beta)y = 2\alpha\beta \quad (1)$
$(\alpha + \gamma)x + (\alpha - \gamma)y = 2\alpha\gamma \quad (2)$

Λύομεν τὴν α΄ ὡς πρὸς x καὶ λαμβάνομεν :

$$x = \frac{2\alpha\beta - (\alpha - \beta)y}{\alpha + \beta} \quad (\text{ἂν} \quad \alpha + \beta \neq 0).$$

Τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x θέτομεν εἰς τὴν (2) καὶ ἔχομεν :

$$(\alpha + \gamma) \cdot \frac{2\alpha\beta - (\alpha - \beta)y}{\alpha + \beta} + (\alpha - \gamma)y = 2\alpha\gamma$$

ἢ $2\alpha\beta(\alpha + \gamma) - (\alpha + \gamma)(\alpha - \beta)y + (\alpha + \beta)(\alpha - \gamma)y = 2\alpha\gamma(\alpha + \beta)$

ἢ $-2\alpha\gamma y + 2\alpha\beta y = -2\alpha^2\beta + 2\alpha^2\gamma$ ἢ $2\alpha(\beta - \gamma)y = 2\alpha^2(\gamma - \beta)$

καὶ ἂν $\alpha(\beta - \gamma) \neq 0$, εὑρίσκομεν : $y = -\alpha$.

Εὐκόλως ἤδη ἕπεται καὶ ἡ τιμὴ τοῦ $x = \alpha$.

Λύσις Β΄ : Τὸ σύστημα γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\alpha(x + y) + \beta(x - y) = 2\alpha\beta$$
$$\alpha(x + y) + \gamma(x - y) = 2\alpha\gamma$$

Ἐὰν δὲ θεωρήσωμεν βοηθητικοὺς ἀγνώστους τὰς παραστάσεις $x + y$ καὶ $x - y$, δηλαδή, ἂν θέσωμεν βοηθητικῶς $x + y = P$ καὶ $x - y = \Lambda$ (1) θὰ λάβωμεν :

$$\alpha P + \beta\Lambda = 2\alpha\beta$$
$$\alpha P + \gamma\Lambda = 2\alpha\gamma.$$

Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο, ὡς πρὸς ἀγνώστους τὰ P, Λ, διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀπαλοιφῆς διὰ τῆς προσθέσεως, εὑρίσκομεν : $P = 0$ καὶ $\Lambda = 2\alpha$.

Συνεπῶς, ἀναφερόμενοι εἰς τὰς σχέσεις (1), λαμβάνομεν ἤδη πρὸς λύσιν τὸ σύστημα :

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 0 \\ x - y &= 2\alpha \end{aligned}\right| \quad \text{Ἐξ οὗ εὐκόλως ἕπεται, ὅτι} \quad \begin{aligned} x &= \alpha \\ y &= -\alpha. \end{aligned}$$

δ΄) Βλέπε 270 δ΄.

ε') Μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$$\begin{array}{l|l} (\beta-\alpha)x-(\alpha+\beta)y=\alpha^2\beta(\beta^2-\alpha^2) & \beta+\alpha \\ (\beta^2-\alpha^2)x+(\alpha^2+\beta^2)y=-\beta^2(\beta^4-\alpha^4) & -1 \end{array}$$

Πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐπὶ $\beta+\alpha$ καὶ τῆς δευτέρας ἐπὶ -1 καὶ μετὰ τὴν πρόσθεσιν κατὰ μέλη λαμβάνομεν:

$$\left[(\alpha^2-\beta^2)-(\alpha+\beta)^2\right]y=\alpha^2\beta(\beta^2-\alpha^2)(\beta+\alpha)-\beta^2(\beta^4-\alpha^4)$$

$$\text{ἐξ ἧς } y=\frac{(\alpha^2-\beta^2)\ (\alpha^3+\beta^3+2\alpha^2\beta)}{2\beta}\ (\text{ἂν } \beta\neq 0)$$

Εὐκόλως δὲ δι' ἀντικαταστάσεως εὑρίσκομεν καὶ τὴν τιμὴν τοῦ

$$x \text{ ἤτοι: } x=\frac{-(\alpha+\beta)^2\left[\alpha^3+\beta^3+2\alpha^3\beta-2\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)\right]}{2\beta}\ (\beta\neq 0).$$

στ') Προσθέτοντες ταύτας κατὰ μέλη λαμβάνομεν:

$$2\alpha x=\alpha^2+\beta^2 \text{ ἐξ ἧς } x=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha} \text{ ἄν } \alpha\neq 0.$$

Εὐκόλως δὲ εὑρίσκομεν: $y=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{2\beta}$ $(\beta\neq 0)$.

ζ') Ἐργαζόμενοι διὰ τῆς πρώτης μεθόδου ἀπαλοιφῆς διὰ τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν πολ)ντες τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἐπὶ μ καὶ τῆς δευτέρας ἐπὶ β.

Εὐκόλως δὲ εὑρίσκομεν: $x=\dfrac{\beta\delta+\gamma\mu}{\alpha\mu+\beta\lambda}$, $y=\dfrac{\gamma\lambda-\alpha\delta}{\alpha\mu+\beta\lambda}$, ἄν $\alpha\mu+\beta\lambda\neq 0$.

η') Μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν ἔχομεν: $55x-35y=-87$ $-105x+101y=73$, λύοντες δὲ τοῦτο διὰ τῆς α' τῶν μεθόδων λαμβάνομεν: $x=\dfrac{2582}{3370}$, $y=\dfrac{512}{337}$.

272. α') Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων καὶ διάταξιν τοῦ συστήματος ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους του λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$$\begin{aligned} -6x-5y&=5 \\ x-3y&=0 \end{aligned}$$

ὅπερ λύομεν διὰ τῆς α' μεθόδου καὶ εὑρίσκομεν: $y=-\dfrac{5}{23}$, $x=-\dfrac{15}{23}$

β') Εὐκόλως λαμβάνομεν: $y=\dfrac{1}{\beta}$ $(\beta\neq 0)$ καὶ $x=\dfrac{2\beta-\alpha}{\beta^2}$.

γ') Μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν καὶ διάταξιν τοῦ συστήματος λαμβάνομεν εὐκόλως: $x=1$, $y=2$.

δ') Ἐργαζόμεθα διὰ τῆς α' μεθόδου καὶ εὑρίσκομεν:

$$y=-\alpha^2,\ x=\alpha^2 \text{ ἄν } \alpha\neq 0,\ \beta^2-\gamma^2\neq 0.$$

ε') Λύομεν ἑκάστην τῶν ἐξισώσεων ὡς πρὸς x καὶ λαμβάνομεν: $x=\dfrac{(1-y)\ (\alpha+\beta)}{\alpha-\beta}$ ἐκ τῆς πρώτης, ἐκ δὲ τῆς δευτέρας $x=\dfrac{(1-y)\ (\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}$.

Διὰ συγκρίσεως τούτων ἔχομεν: $\dfrac{(1-y)\ (\alpha+\beta)}{\alpha-\beta}=\dfrac{(1-y)\ (\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}$

ὅτε, ἄν $\alpha-\beta\neq 0$, $\alpha+\beta\neq 0$, εὑρίσκομεν: $(1-y)(\alpha+\beta)^2=(1-y)(\alpha-\beta)^2$

$$\text{ἢ } (1-y)\left[(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2\right]=0 \qquad \text{ἢ } (1-y)\,4\alpha\beta=0$$

ὅτε, ἂν $\alpha\beta \neq 0$, θὰ ἔχωμεν: $1-y=0$. ὅτε $y=1$.
Ἂν ὅμως $\alpha=0$ ἢ $\beta=0$ τοῦτο εἶναι ἀόριστον.

Δι' ἀντικαταστάσεως τώρα εὑρίσκομεν καὶ τὴν τιμὴν τοῦ $x=0$.

στ) Ἀπαλείφομεν τοὺς παρανομαστὰς καὶ λύομεν τοῦτο διὰ μιᾶς τῶν γνωστῶν μας μεθόδων, ὅτε εὑρίσκομεν: $x=1$ καὶ $y=2$.

ζ) Ἀπαλείφομεν τοὺς παρανομαστὰς καὶ λαμβάνομεν:

$$559\,x - 934\,y = -1782$$
$$4885\,x - 2525\,y = +3630$$

τὸ ὁποῖον λύομεν εὐκόλως καὶ εὑρίσκομεν: $x=\dfrac{1109130}{3151115}$ $y=\dfrac{6675900}{3151115}$

η) Ἐκ τῆς β' ἐξισώσεως λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τοῦ x τὴν ὁποίαν ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν α' ἐξίσωσιν καὶ εὑρίσκομεν:

$$y=\frac{\beta(\alpha^2-\alpha\gamma)+\alpha^2-\alpha\gamma+\gamma^2-\alpha\beta}{\alpha^2-\alpha\gamma} \quad \text{ἂν } \alpha\neq 0 \text{ καὶ } \alpha\neq\gamma.$$

Εὐκόλως δὲ κατόπιν εὑρίσκομεν καὶ τὴν τιμὴν τοῦ x.

Διερεύνησις τοῦ γενικοῦ συστήματος

$$\alpha x+\beta y=\gamma$$
$$\alpha_1 x+\beta_1 y=\gamma_1.$$

273. α) Σχηματίζομεν τὴν παράστασιν $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=\lambda^2-1$. Συνεπῶς ἂν $\lambda^2\neq 1$ δηλαδὴ $\lambda\neq 1$ ἢ $\lambda\neq -1$, τότε ἔχομεν λύσιν διὰ μὲν τὸν x τὴν $x=\dfrac{1}{1-\lambda^2}$ καὶ διὰ τὸν y τὴν $y=\dfrac{2-2\lambda^2-\lambda}{1-\lambda^2}$.

Ἂν $\lambda=1$ τότε τὸ σύστημα γίνεται: $\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=3 \end{cases}$

καὶ εἶναι συνεπῶς ἀδύνατον.

Ἂν $\lambda=-1$ τότε $\left|\begin{array}{l} x-y=-2 \\ x-y=-1 \end{array}\right.$ ἤτοι καὶ πάλιν ἀδύνατον.

β) Σχηματίζομεν τὴν παράστασιν $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=$

$= -\lambda + 2(\lambda - 1) = \lambda - 2$. Ἂν λοιπὸν $\lambda \neq 2$ τότε ἔχομεν : λύσιν τὴν $x = -1$ καὶ $y = -\lambda$. Ἂν ὅμως $\lambda = 2$ τὸ σύστημα γίνεται : $\left|\begin{array}{l} x - y = 1 \\ x - y = 1 \end{array}\right.$ δηλαδὴ ἀνάγεται εἰς μίαν μόνον ἐξίσωσιν, ἤτοι εἶναι ἀόριστον.

γ') Σχηματίζομεν τὴν παράστασιν $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = \lambda + 4(3\lambda - 1) = 13\lambda - 4$. Συνεπῶς ἂν εἶναι $13\lambda - 4 \neq 0$ δηλ. $\lambda \neq \frac{4}{13}$ ἔχομεν μίαν λύσιν τὴν

$$x = \frac{(3\lambda - 1)(4 - \lambda)}{13\lambda - 4} \quad \text{καὶ} \quad y = \frac{\lambda - 4}{13\lambda - 4}$$

Ἂν ὅμως $\lambda = \frac{4}{13}$ τότε τὸ σύστημα γίνεται : $\left|\begin{array}{l} 13x - y = 0 \\ 13x - y = 12 \end{array}\right.$ ἄρα εἶναι ἀδύνατον.

δ') Διατάσσομεν τὸ σύστημα ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους x, y καὶ λαμβάνομεν : $\left.\begin{array}{l} -2x + y = \lambda \\ -x + 3y = \lambda + 3 \end{array}\right|$

Ἐπειδὴ δὲ $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = 5 \neq 0$ ἕπεται ὅτι τὸ σύστημα ἔχει πάντοτε ὡρισμένην λύσιν τὴν $x = \frac{3 - 2\lambda}{5}$ καὶ $y = \frac{\lambda + 6}{5}$

ε') Σχηματίζομεν τὴν παράστασιν $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = 1 - \lambda$.

Συνεπῶς ἐὰν $1 - \lambda \neq 0$ δηλ. $\lambda \neq 1$, τότε ἔχομεν ὡρισμένην λύσιν

$$x = -1 \quad \text{καὶ} \quad y = 1 + \lambda.$$

Ἂν ὅμως $\lambda = 1$ τότε ἀμφότεραι αἱ ἐξισώσεις ἀνάγονται εἰς μίαν τὴν $x + y = 1$ καὶ τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον.

στ') Σχηματίζομεν τὴν παράστασιν : $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = -\lambda^2 + 3$. Ἐὰν συνεπῶς $-\lambda^2 + 3 \neq 0$ τότε ἔχομεν ὡρισμένας τιμὰς διὰ τοὺς x, y, τὰς

$$x = \frac{-1}{3 - \lambda^2} \quad \text{καὶ} \quad y = \frac{\lambda^3 - \lambda^2 - 3\lambda + 1}{3 - \lambda^2}.$$

Ἐὰν ὅμως $-\lambda^2 + 3 = 0$ ἢ $\lambda^2 - 3 = 0$ ἢ $\lambda = \pm\sqrt{3}$ τότε τὸ σύστημα δύναται νὰ εἶναι ἢ ἀδύνατον ἢ ἀόριστον.

Σχηματίζομεν τώρα τὴν παράστασιν $\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma = \lambda^3 - \lambda^2 - 3\lambda + 1$.

Διὰ $\lambda = \pm\sqrt{3}$ εὑρίσκομεν : $\lambda^3 - \lambda^2 - 3\lambda + 1 \neq 0$,

Ἄρα διὰ $\lambda = \pm\sqrt{3}$ τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

274. α') Ἐπειδὴ $\frac{3}{-3} = \frac{-5}{5} \neq \frac{2}{7}$ τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι ἀδύνατον.

β') Ἐπειδὴ $\frac{2}{5} \neq \frac{7}{21} = \frac{4}{12}$ τοῦτο ἔχει ὡρισμένην λύσιν ἤτοι :

$$x = 0, \quad y = \frac{4}{7}.$$

γ') Διατάσσομεν τὸ σύστημα καὶ ἔχομεν : $\begin{array}{l} 3x + 2y = 6 \\ 7x + 2y = 6 \end{array}$

Καὶ ἐπειδὴ τώρα $\frac{3}{7} \neq \frac{2}{2} = \frac{6}{6}$ τὸ σύστημα ἔχει ὡρισμένην λύσιν ἤτοι : $x = 0$, $y = 3$.

δ') Διατάσσομεν τὸ σύστημα καὶ λαμβάνομεν :

$$\begin{array}{l|} 4x + 3y = -12 \\ 4x + 3y = 30 \end{array} \quad \text{ἐπειδὴ δὲ } \frac{4}{4} = \frac{3}{3} \neq \frac{-12}{30}$$

τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

ε') Διατάσσομεν τὸ σύστημα καὶ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμόν του :

$$\begin{array}{l|} 2\alpha x - \beta y = 3 \\ 3\alpha x - \beta y = 12 \end{array}$$

Ἐπειδὴ $\frac{2\alpha}{3\alpha} \neq \frac{-\beta}{-\beta} \neq \frac{3}{12}$ (ἐκτὸς ἂν $\alpha = 0$ καὶ $\beta = 0$ ὅτε εἶναι ἀδύνατον) τὸ σύστημα ἔχει ὡρισμένην λύσιν $x = \frac{9}{\alpha}$, $y = \frac{15}{\beta}$.

στ') Διατάσσομεν, μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων, καὶ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα : $\begin{array}{l} \beta x + \alpha y = \alpha\beta \\ \beta x + \alpha y = \alpha\beta. \end{array}$

Τοῦτο εἶναι ἀόριστον διότι : $\frac{\beta}{\beta} = \frac{\alpha}{\alpha} = \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta}$.

275. α') Λύομεν τὴν α' ἐξίσωσιν ὡς πρὸς x καὶ λαμβάνομεν :

$$x = \frac{5\beta - \alpha + 3y}{2}.$$

Εἰσάγομεν τὴν τιμὴν τοῦ x εἰς τὴν ἄλλην καὶ εὑρίσκομεν :

$\frac{3(5\beta - \alpha + 3y)}{2} - 2y = \alpha + 5\beta$ ἐξ ἧς $y = \alpha - \beta$, εὐκόλως δὲ $x = \alpha + \beta$.

Ἐπειδὴ δὲ $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = -4 + 9 = 5 \neq 0$ τοῦτο πάντοτε ὡρισμένην λύσιν.

β') Διατάσσομεν τὸ σύστημα ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους x, y καὶ λαμβάνομεν :

$$\begin{array}{l|} (\alpha+\beta - 4\alpha\beta)x + (\beta - \alpha)y = 0 \\ (\alpha - \beta)x - (\alpha+\beta)y = 0 \end{array}$$

Λύομεν τώρα τοῦτο διὰ τῆς μεθόδου τῆς συγκρίσεως καὶ εὑρίσκομεν : $x = 0$ καὶ $y = 0$ ὅταν $-(\alpha - \beta)^2 + (\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 4\alpha\beta) \neq 0$.

Ἂν ὅμως ἡ τελευταία αὐτὴ παράστασις ἰσοῦται μὲ 0 τότε τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον.

γ') Εὐκόλως εὑρίσκομεν : $x = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta$ καὶ $y = \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$.

δ') Διατάσσομεν τὸ σύστημα ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους του x, y καὶ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν :

$$\begin{array}{l|l} \alpha x - (\alpha + \beta)y = -\alpha\beta - \beta^2 & \beta \\ \beta x + (\alpha - \beta)y = \alpha^2 + \alpha\beta & -\alpha \end{array}$$

Ἀπαλείφοντες δηλ. τὸν x εὑρίσκομεν : $y = \alpha + \beta$ ἂν $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Εὐκόλως δὲ εὑρίσκομεν καὶ $x = \alpha + \beta$.

Ἐὰν ὅμως $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ δηλ. $\alpha = 0$, $\beta = 0$ τοῦτο εἶναι ἀόριστον.

ε') Διατάσσομεν τοῦτο ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους του x, y καὶ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$$\beta x + \alpha y = 2\alpha\beta$$
$$\alpha x + \beta y = 2\alpha\beta$$

Διὰ προσθέσεως αὐτῶν κατὰ μέλη λαμβάνομεν:

$$(\alpha + \beta) x + (\alpha + \beta) y = 4\alpha\beta \quad ἤ \quad x + y = \frac{4\alpha\beta}{\alpha + \beta} \quad (1)$$

ἂν $\alpha + \beta \neq 0$. Ὁμοίως δὲ δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν:

$$(\beta - \alpha) x - (\beta - \alpha) y = 0 \quad ἤ \quad (\beta - \alpha)(x - y) = 0.$$

Ἐκ ταύτης τώρα ἕπεται ὅτι, ἂν $\beta = \alpha$ τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον, ἐὰν ὅμως $\beta \neq \alpha$ τότε $x - y = 0$ ἤτοι $x = y$. Ἤδη ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν: $2x = \dfrac{4\alpha\beta}{\alpha + \beta}$,

ἢ $x = \dfrac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}$ ὅτε. ἀφοῦ $x = y$, θὰ εἶναι καὶ $y = \dfrac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}$.

στ') Εὐκόλως εὑρίσκομεν $x + y = 2\alpha^2$ ἐκ τῆς πρώτης, ὅτε $x = 2\alpha^2 - y$. Τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x φέρομεν εἰς τὴν ἄλλην ἐξίσωσιν καὶ εὑρίσκομεν: (ἂν $\alpha - \beta \neq 0$), $y = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta - 1)$. Ὅτε $x = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha - \beta$.

Προβλήματα γραφικῶν κατασκευῶν

276. α') Τὴν ἀπόστασιν (ΡΜ)=131 χλμ. διανύει τὸ αὐτοκίνητον εἰς χρόνον $(15^{\omega}\ 57^{\lambda}) - (13^{\omega}\ 5^{\lambda}) - (5^{\lambda} + 4^{\lambda} + 3^{\lambda} + 2^{\lambda} + 1^{\lambda}) = 2^{\omega\rho}\ 37^{\lambda} = \dfrac{157}{60}$ τῆς ὥρας, ἄνευ σταθμεύσεων. Συνεπῶς ἡ ταχύτης τοῦ αὐτοκινήτου θὰ εἶναι $131 : \dfrac{157}{60} = 50\dfrac{10}{157}$ χιλμ.

Συνεπῶς τοῦτο διανύει.

α') τὴν ἀπόστασιν (ΡΑ)=51 χλμ. εἰς χρόνον $51 : \dfrac{7860}{157} = 1^{\omega}\ 1^{\lambda}$

β') » » (ΑΒ)=15 » » » $15 : \dfrac{7860}{157} = 18^{\lambda}$

γ') » » (ΒΓ)=14 » » » $14 : 50\dfrac{10}{157} = 17^{\lambda}$

δ') » » (ΓΔ)=15 » » » $15 : 50\dfrac{10}{157} = 18^{\lambda}$

ε') » » (ΔΕ)=27 » » » $27 : 50\dfrac{10}{157} = 34^{\lambda}$

Ἵνα τώρα παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν πορείαν τοῦ αὐτοκινήτου χρησιμοποιοῦμεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα ἀντιστοιχίας ὡρῶν καὶ χιλιομέτρων.

x (ὧραι)	y (χιλιομ.)	Ἀντίστοιχοι θέσεις τοῦ κινητοῦ
$(13^{\omega}\ 5^{\lambda})$	0	Ρ
$(13^{\omega}\ 5^{\lambda}) + (1^{\omega}\ 1^{\lambda}) = 14^{\omega}\ 6^{\lambda}$	51	Α
$(14^{\omega}\ 6^{\lambda}) + (\ 5^{\lambda}) = 14^{\omega}\ 11^{\lambda}$	51	Α'
$(14^{\omega}\ 11^{\lambda}) + (\ 18^{\lambda}) = 14^{\omega}\ 29^{\lambda}$	65	Β
$(14^{\omega}\ 29^{\lambda}) + (\ 4^{\lambda}) = 14^{\omega}\ 33^{\lambda}$	66	Β'
$(14^{\omega}\ 33^{\lambda}) + (\ 17^{\lambda}) = 14^{\omega}\ 50^{\lambda}$	80	Γ
$(14^{\omega}\ 50^{\lambda}) + (\ 3^{\lambda}) = 14^{\omega}\ 53^{\lambda}$	80	Γ'
$(14^{\omega}\ 53^{\lambda}) + (\ 18^{\lambda}) = 15^{\omega}\ 11^{\lambda}$	95	Δ
$(15^{\omega}\ 11^{\lambda}) + (\ 2^{\lambda}) = 15^{\omega}\ 13^{\lambda}$	95	Δ'
$(15^{\omega}\ 13^{\lambda}) + (\ 34^{\lambda}) = 15^{\omega}\ 47^{\lambda}$	122	Ε
$(15^{\omega}\ 47^{\lambda}) + (\ 1^{\lambda}) = 15^{\omega}\ 48^{\lambda}$	122	Ε'
$(15^{\omega}\ 57^{\lambda})$	131	Μ'

Συνεπῶς ἡ πορεία τοῦ αὐτοκινήτου παρίσταται διὰ τῆς τεθλασμένης γραμμῆς ΡΑΑ'ΒΒ'ΓΓ'ΔΔ'ΕΕ'Μ ὡς καὶ εἰς τὸ ἀνάλογον σχῆμα τοῦ βιβλίου.

Ἡ ἁμαξοστοιχία διανύει τὴν ἀπόστασιν (ΡΜ) = 131 χλμ. (ἄνευ σταθμεύσεων) ἡ πορεία τῆς ὁποίας παρίσταται ὑπὸ τῆς εὐθείας γραμμῆς Ρ' Μ' ὡς δεικνύει ὁ πίναξ.

x (ὧραι)	y (χιλιομ)	ἀντίστοιχοι θέσεις τοῦ κινητοῦ
$15^{\omega}\ 25^{\lambda}$	0	Ρ'
$16^{\omega}\ 5^{\lambda}$	131	Μ'

β') Ἐργαζόμεθα ἀναλόγως πρὸς τὸ προηγούμενον πρόβλημα. Ἡ ἁμαξοστοιχία β' θὰ διανύσῃ (ἄνευ σταθμεύσεων) τὴν ἀπόστασιν (ΜΡ) = 131 χλμ. εἰς χρόνον $(15^{\omega}\ 45^{\lambda}) - (13^{\omega}\ 30^{\lambda}) - (2^{\lambda} + 3^{\lambda} + 4^{\lambda} + 5^{\lambda}) =$ $= 2^{\omega\rho}\ 11^{\lambda} = \frac{131}{60}$ τῆς ὥρας. Συνεπῶς ἡ ταχύτης της εἶναι $131 : \frac{131}{60} =$ $= 60$ χιλμ.

Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι διανύει:

α') Τὴν ἀπόστασιν (ΜΔ) = 35 χλμ. εἰς χρόνον $35 : 60 = 35^{\lambda}$
β') » » (ΔΓ) = 15 » » » $15 : 60 = 15^{\lambda}$
γ') » » (ΓΒ) = 14 » » » $14 : 60 = 14^{\lambda}$
δ') » » (ΒΑ) = 15 » » » $15 : 60 = 15^{\lambda}$

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς πορείας τῆς β' ἁμαξοστοιχίας καταρτίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

x (ὧραι)	y (χιλιομ.)	Ἀντίστοιχοι θέσεις κινητοῦ
$13^{\omega}\ 20^{\lambda}$	131	Μ''
$13^{\omega}\ 20^{\lambda} + 36^{\lambda} = 13^{\omega}\ 56^{\lambda}$	95	$Δ'_1$
$13^{\omega}\ 56^{\lambda} + 2^{\lambda} = 13^{\omega}\ 58^{\lambda}$	95	$Δ_1$
$13^{\omega}\ 58^{\lambda} + 15^{\lambda} = 14^{\omega}\ 13^{\lambda}$	80	$Γ'_1$
$14^{\omega}\ 13^{\lambda} + 3^{\lambda} = 14^{\omega}\ 16^{\lambda}$	80	$Γ_1$
$14^{\omega}\ 16^{\lambda} + 14^{\lambda} = 14^{\omega}\ 30^{\lambda}$	66	B'_1
$14^{\omega}\ 30^{\lambda} + 4^{\lambda} = 14^{\omega}\ 34^{\lambda}$	66	B_1
$14^{\omega}\ 34^{\lambda} + 15^{\lambda} = 14^{\omega}\ 49^{\lambda}$	51	A'_1
$14^{\omega}\ 49^{\lambda} + 5^{\lambda} = 14^{\omega}\ 54^{\lambda}$	51	A_1
$15^{\omega}\ 45^{\lambda}$	0	Ρ''

Ἄρα ἡ πορεία τῆς ἁμαξοστοιχίας θὰ παρίσταται διὰ τῆς τεθλασμένης Μ'' $Δ_1'$ $Δ_1$ $Γ_1'$ $Γ_1$ B_1' B_1 A_1' A_1 Ρ''.

Περὶ τῆς τρίτης ἁμαξοστοιχίας, παρατηροῦμεν ὅτι θὰ διανύῃ τὴν ἀπόστασιν (ΜΡ) = 131 χλμ. (χωρὶς σταθμεύσεις) εἰς χρόνον :

$$15^{\omega}\ 55^{\lambda} - 14^{\omega} - 3^{\lambda} = 1^{\omega}\ 52^{\lambda} = \frac{112}{60} \text{ τῆς ὥρας.}$$

Η ταχύτης συνεπῶς αὐτῆς εἶναι $131 : \frac{122}{60} = 70\frac{5}{28}$ χιλμ.

Ἄρα τὴν ἀπόστασιν (ΜΑ) = 80 χλμ. διανύει εἰς χρόνον $30 : 70\frac{5}{28} = 1^{\omega}\ 8^{\lambda}$

Διὰ τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς πορείας τῆς τρίτης ἁμαξοστοιχίας καταρτίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα.

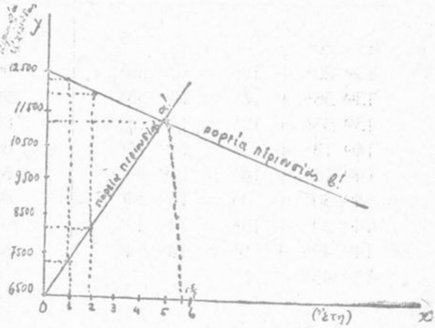
x (ὧραι)	y (χιλιομ.)	ἀντίστοιχοι θέσεις κινητοῦ
14^{ω}	131	Μ''
$14^{\omega} + 1^{\omega}\ 8^{\lambda} = 15^{\omega}\ 8^{\lambda}$	51	A'_2
$15^{\omega}\ 8^{\lambda} + 3^{\lambda} = 15^{\omega}\ 11^{\lambda}$	51	A_2
$15^{\omega}\ 55^{\lambda}$	0	Ρ'''

Ἡ πορεία λοιπὸν τῆς ἁμαξοστοιχίας θὰ παρίσταται ὑπὸ τῆς τεθλασμένης γραμμῆς Μ''' A'_2 A_2 Ρ'''.

277. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ περιουσίαι των θὰ εἶναι ἴσαι μετὰ x ἔτη. Τότε συμφώνως πρὸς τὸ πρόβλημα ἡ περιουσία τοῦ α' θὰ εἶναι : $6500000 + 800000x$, τοῦ δὲ β' $12500000 - 250000x$. Θὰ ἔχωμεν συνεπῶς τὴν ἐξίσωσιν : $6500000 + 800000x = 12500000 - 250000x$ ἐξ ἧς λαμβάνομεν : $x = 5\frac{5}{7}$ ἔτη. **Ὥστε μετὰ $5\frac{5}{7}$ ἔτη αἱ περιουσίαι τοῦ α' καὶ β' θὰ εἶναι ἴσαι.**

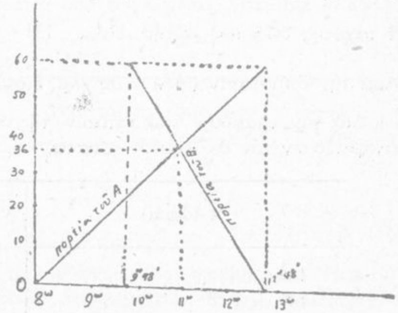
Ἡ λύσις αὐτὴ συμφωνεῖ καὶ μὲ τὴν ἀπάντησιν τὴν ὁποίαν δίδει ἡ γραφικὴ λύσις τοῦ προβλήματος (βλέπε σχῆμα κατωτέρω).

Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς πορείας τῆς περιουσίας τοῦ α' καὶ τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς πορείας τῆς περιουσίας τοῦ β' (ὡς ἐν τῷ σχήματι φαίνεται). Αὗται τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην $5\frac{5}{7}$ ἔτη ἐνῷ τεταγμένην ἔχει :



$6500 + \frac{800 \times 120}{21}$ δραχ. δηλαδὴ τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ ἕκαστος, ὅταν αἱ περιουσίαι των γίνουν ἴσαι.

278. Ὁ α' ποδηλάτης εἰς $13^{\omega} - 8^{\omega} = 5^{\omega}$ διανύει τὴν ἀπόστασιν (ΜΝ) = 60 χιλμ., ἄρα θὰ ἔχῃ ὡριαίαν ταχύτητα 60 : 5 = 12 χιλμ. Ὁ α' ποδηλάτης ἐκινήθη μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὸ β' ἐπὶ 3 ὥρας (δηλ. $11^{\omega} - 8^{\omega} = 3^{\omega}$) καὶ συνεπῶς ἔχει διανύσει μέχρι τῆς στιγμῆς ἐκείνης $12 \times 3 = 36$ χιλμ. Ἤδη ὁ β' ποδηλάτης μέχρις ὅτου συναντηθῇ μετὰ τοῦ α' ἐκινήθη ἐπὶ $1^{\omega}\,12^{\lambda} = \frac{6}{5}$ ὥρ. $(11^{\omega} - 9^{\omega}\,48^{\lambda} = 1^{\omega}\,12^{\lambda} = \frac{5}{6}^{\omega\rho})$ καὶ ἔχει διανύσει ἀπόστασιν 60—36=24 χλμ. ἀπὸ τῆς $9^{\omega}\,48^{\lambda}$ μέχρι τῆς 11 ὥρας. Ἡ ταχύτης συνεπῶς αὐτοῦ εἶναι $24 : \frac{6}{5} = 20$ χιλμ. Ὁ χρόνος τώρα, ὃν χρειάζεται ὁ β', ἵνα φθάσῃ ἀπὸ τοῦ σημείου Ν μέχρι τοῦ Ο εἶναι 60 : 20 = 3 ὥρ. Φθάνει λοιπὸν εἰς τὰς $9^{\omega}\,48^{\lambda} + 3^{\omega} = 12$ ὥρ. 48^{λ}. Γραφικῶς ταῦτα ἀποδίδονται διὰ τοῦ ἀνωτέρου σχήματος.



279. Ἐπειδὴ ἀνὰ 10 λ. συναντᾷ καὶ μίαν ἅμαξαν, θὰ συναντήσῃ 14 ἐν ὅλῳ ἁμάξας ἐρχομένας ἐκ τοῦ Β, δηλ. τὰς τῶν $7^{\omega}\,40^{\lambda}$, $7^{\omega}\,50^{\lambda}$, 8^{ω} ... Τοῦτον θὰ συναντήσουν ὀκτὼ ἐν ὅλῳ ἅμαξαι ἐρχόμεναι ἐκ τοῦ Α ἤτοι αἱ τῶν $8^{\omega}\,20^{\lambda}$, $8^{\omega}\,30^{\lambda}$, $8^{\omega}\,40^{\lambda}$ .... ἀνὰ 10^{λ}.

Ἑκάστη πορεία εἰς τὴν γραφικὴν παράστασιν θὰ ἀποδοθῇ δι' εὐς γραμμῆς (καὶ τῶν ἁμαξῶν καὶ τοῦ ταχυδρόμου). Ἡ γραφικὴ λύσις δ γίνεται εὐκόλως.

280 α') $\begin{array}{l} 4x - 5y = 1 \\ x + 2y = 2 \end{array} \Bigg|$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον τομῆς τῶν εὐθειῶν κατασκευάζομεν ἑκάστην τῶν εὐθειῶν τῶν διδομένων ὑπὸ ἑκάστης τῶν ἐξισώσεων :

$$4x - 5y = 1 \quad \text{καὶ} \quad x + 2y = 2.$$

Ἐκ τοῦ σχήματος δὲ εὑρίσκομεν τὰς συντεταγμένας τῆς τομῆς αἳ ὁποῖαι εἶναι : $x = \frac{12}{13}$, $y = \frac{7}{13}$. Συνεπῶς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ἐν λόγῳ εὐθειῶν ἔχει συντεταγμένας $\left(\frac{12}{13}, \frac{7}{13}\right)$.

β') Εὑρίσκομεν ὡς ἀνωτέρω ὅτι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν ἔχει συντεταγμένας : $\left(\frac{20}{9}, \frac{20}{27}\right)$ ὡς δίδει ἡ λύσις τοῦ συστήματος δηλαδή : $x = \frac{20}{9}$, $y = \frac{20}{27}$.

γ') Λύομεν τὸ σύστημα καὶ εὑρίσκομεν : $x = \frac{1775}{1493}$, $y = \frac{964}{1493}$

ἄρα τὸ σημεῖον τομῆς τῶν εὐθειῶν ἔχει συντεταγμένας : $\left(\frac{1775}{1493}, \frac{964}{1493}\right)$.

δ') Ἀπαλείφομεν τοὺς παρονομαστὰς καὶ λαμβάνομεν μετὰ τὴν διάταξιν τῶν ὅρων τὸ ἰσοδύναμον σύστημα : $\begin{array}{l} 7x - 3y = 19 \\ x - 2y = 0 \end{array}$

Κατασκευάζομεν ἀκολούθως τὰς εὐθείας, τὰς ὁποίας παριστᾷ ἑκάστη τῶν ἐξισώσεων καὶ εὑρίσκομεν διὰ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος, ὅτι τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν ἔχει συντεταγμένας : $\left(\frac{38}{11}, \frac{19}{11}\right)$.

ε') Ἀντὶ τοῦ δοθέντος συστήματος ἔχομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα :

$$\begin{array}{l} 10x - 10y = 189 \\ x - 7y = 0 \end{array}$$

Ἀφοῦ δὲ κατασκευάσωμεν τὰς εὐθείας εὑρίσκομεν ὅτι αἱ συντεταγμέναι τοῦ κοινοῦ σημείου εἶναι : $x = \frac{441}{20}$ $y = \frac{63}{20}$.

στ') Ἀντὶ τοῦ δοθέντος συστήματος ἔχομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα :

$$\begin{array}{l} x + y = 3 \\ y - 2x = 2 \end{array}$$

Κατασκευάζοντες τὰς εὐθείας εὑρίσκομεν ὡς συντεταγμένας τοῦ κοινοῦ σημείου $x = \frac{1}{3}$ $y = \frac{8}{3}$.

Συστήματα ἐξισώσεων α' βαθμοῦ μὲ περισσοτέρους τῶν δύο ἀγνώστους :

Ἀσκήσεις 281. Λύομεν τὴν α' ὡς πρὸς 2y, ὁμοίως τὴν δευτέραν καὶ τρίτην καὶ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα :

$$2y = 14 - x - 3\omega$$
$$2y = 14 - 4x - 2\omega$$
$$2y = 13 - 3x - 2\omega$$

Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν :

$$14 - x - 3\omega = 14 - 4x - 2\omega$$
$$\text{καὶ} \quad 14 - x - 3\omega = 13 - 3x - 2\omega$$

Λύομεν τώρα αὐτὰς ὡς πρὸς ω καὶ εὑρίσκομεν : $\omega = 3x$ καὶ $\omega = 1 + 2x$.
Ἄρα θὰ εἶναι : $3x = 1 + 2x$ ὅτε $x = 1$. Ὁπότε εὐκόλως ἔπονται :

$$\omega = 3 . 1 = 3 \quad \text{καὶ} \quad y = \frac{14 - 1 - 3 . 3}{2} = 2.$$

282. α΄) Μεταξὺ τῆς α΄ καὶ τῆς β΄ τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων ἀπαλείφομεν τὸν ἄγνωστον x, ὁμοίως καὶ μεταξὺ τῆς α΄ καὶ γ΄ τὸν αὐτὸν ἄγνωστον. Οὕτω εὑρίσκομεν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν τοῦ ὁποίου αἱ δύο ἐξισώσεις εἶναι :

$$55y - 61\omega = 80$$
$$33y - 34\omega = 61$$

περιέχουσαι μόνον τοὺς ἀγνώστους y, ω. Ἡ λύσις αὐτοῦ διά τινος τῶν γνωστῶν μεθόδων δίδει ὡς τιμὰς τῶν y καὶ ω τὰς $y = 7$ καὶ $\omega = 5$. Ἐκεῖθεν δὲ ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς μίαν τῶν δοθεισῶν εὑρίσκομεν : $x = 8$.

β΄) Ἀπαλείφομεν τοὺς παρονομαστὰς καὶ διατάσσομεν τὸ σύστημα ὡς πρὸς x, y, ω καὶ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα :

$$13x - 9y + 21\omega = 0$$
$$8x - 11y - 36\omega = 0$$
$$x + y + \omega = 128.$$

Τὸ λύομεν τώρα διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀντικαταστάσεως. Πρὸς τοῦτο λύομεν τὴν α΄ ὡς πρὸς y καὶ λαμβάνομεν : $y = \frac{13x + 21\omega}{9}$.

Φέρομεν τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ y εἰς τὰς δύο ἄλλας καὶ λαμβάνομεν μετὰ τὰς πράξεις :

$$\left.\begin{aligned} 71x + 555\omega &= 0 \\ 11x + 15\omega &= 576 \end{aligned}\right| \quad (\alpha).$$

Τοῦτο μὲ μίαν τῶν δοθεισῶν ἀποτελεῖ ἰσοδύναμον σύστημα πρὸς τὸ δοθέν.

Τὸ σύστημα (α) λύομεν εὐκόλως καὶ εὑρίσκομεν τὰς ἑξῆς τιμάς :

$$x = \frac{444}{7}, \quad y = \frac{2544}{35}, \quad \omega = -\frac{284}{35}.$$

γ΄) Διὰ προσθέσεως τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων τοῦ συστήματος κατὰ μέλη λαμβάνομεν : $\omega - 3x - y = -2$. Ὁμοίως τώρα ἀπαλείφομεν τὸν φ μεταξὺ δ΄ καὶ γ΄. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς δ΄ ἐπὶ 2 καὶ προσθέτομεν τὸ ἐξαγόμενον κατὰ μέλη μὲ τὴν γ΄ λαμβάνοντες : $-7\omega - x + 2y = -12$. Ὁμοίως πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς δ΄ ἐπὶ 3 καὶ προσθέτομεν τὸ ἐξαγόμενον μὲ τὴν α΄ κατὰ μέλη, εὑρίσκοντες : $-9\omega - 5x + 7y = -14$. Ἄρα ἔχομεν τὸ σύστημα :

$$\left.\begin{aligned} \omega - 3x - y &= -2 \\ -7\omega - x + 2y &= -12 \\ -9\omega - 5x + 7y &= -14 \end{aligned}\right| \quad (\alpha)$$

τὸ ὁποῖον μὲ μίαν τῶν δοθεισῶν ἀποτελεῖ ἰσοδύναμον σύστημα πρὸς τὸ δοθέν. Τὸ σύστημα (α) λύομεν ὡς ἑξῆς:

Πολ]μεν τὰ μέλη τῆς α' ἐπὶ 7 καὶ προσθέτομεν τὸ ἐξαγόμενον μὲ τὰ μέλη τῆς β' ὅτε λαμβάνομεν: $-22x - 5y = -26$. (1)

Πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς β' ἐπὶ -9 καὶ τὰ μέλη τῆς γ' ἐπὶ 7 καὶ προσθέτομεν τὰ δύο ἐξαγόμενα κατὰ μέλη λαμβάνοντες:

$$-26x + 31y = 10. \quad (2)$$

Τὸ σύστημα τῶν (1) καὶ (2) δίδει λυόμενον $x = \frac{27}{29}$ καὶ $y = \frac{32}{29}$. Κατόπιν δὲ ἐκ τῆς α' τῶν (α) εὑρίσκομεν τὸ ω καὶ ἀκολούθως ἐκ μιᾶς τῶν δοθεισῶν καὶ τὸν φ, ἤτοι $\omega = \frac{55}{29}$ καὶ $\varphi = \frac{120}{29}$.

$$\text{δ)} \quad \left.\begin{aligned} x - y + \omega &= 7 \\ 2x &= \omega \\ 8y &= 5\omega \end{aligned}\right\}$$

Ἡ β' τῶν δοθεισῶν δίδει $x = \frac{\omega}{2}$ καὶ ἡ γ' δίδει $y = \frac{5\omega}{8}$.

Τὰς τιμὰς ταύτας εἰσάγομεν εἰς τὴν α' τῶν δοθεισῶν καὶ λαμβάνομεν $\frac{\omega}{2} - \frac{5\omega}{8} + \omega = 7$ ἐξ ἧς μετὰ τὰς πράξεις εὑρίσκομεν: $\omega = 8$. Εὐκόλως τώρα ἕπονται αἱ τιμαὶ $x = 4$, $y = 5$.

ε') Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς α' καὶ γ' καὶ εὑρίσκομεν $14y + 6\varphi = 9$. Προσθέτομεν τώρα τὰς α καὶ β' κατὰ μέλη καὶ εὑρίσκομεν: $-2x + 10y + 3\omega + 4\varphi = 11$. Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ταύτην ἀφαιροῦμεν τὰ μέλη τῆς δ' καὶ λαμβάνομεν $2x - 5\varphi = 4$. Ἔχομεν τώρα ἀπαλείφοντες τὸν ω μεταξὺ α' καὶ β' $5x + 38y + 35\varphi = 40$ (1).

Οὕτω ἔχομεν: $y = \frac{9 - 6\varphi}{14}$, $x = \frac{4 + 5\varphi}{2}$ (2) καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) λαμβάνομεν: $5 \cdot \frac{4 + 5\varphi}{2} + 38 \cdot \frac{9 - 6\varphi}{14} + 35\varphi = 40$ ἐξ ἧς μετὰ τὰς πράξεις $\varphi = \frac{78}{437}$. Εὐκόλως δὲ ἐκ τῶν (2) εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν x καὶ y ἤτοι $x = \frac{1069}{437}$, $y = \frac{495}{874}$. Ἔκ τινος δὲ τῶν δοθεισῶν εὑρίσκομεν ἀκολούθως καὶ τὴν τιμὴν τοῦ ω ἤτοι: $\omega = \frac{136}{437}$.

ϛ') Λαμβάνομεν σύστημα ἰσοδύναμον, μὲ ἀκεραίους συντελεστάς, πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων ἐπὶ 10. Ἤτοι τὸ

$$\left.\begin{aligned} 5x + 3y &= 6{,}5 \\ 4x - 2\omega &= 22{,}2 \\ 3y + 4\omega &= 5{,}7 \end{aligned}\right| \quad (1)$$

Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὴν α' καὶ γ' ἀπαλείφομεν τὸν y καὶ λαμβάνομεν: $5x - 4\omega = 0{,}8$, ἥτις μετὰ τῆς β' δίδει τὸ σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} 4x - 2\omega &= 22{,}2 \\ 5x - 4\omega &= 0{,}8 \end{aligned}\right| \quad (2)$$

ὅπερ μὲ μίαν ἐκ τῶν (1) ἀποτελεῖ ἰσοδύναμον σύστημα πρὸς τὸ δοθέν. Τὸ (2) λυόμενον εὐκόλως δίδει $x = \frac{436}{30}$, $\omega = \frac{539}{30}$ ὅτε εὐκόλως ἐκ τῆς γ' τῶν (1) λαμβάνομεν $y = -\frac{1985}{90}$.

ζ') Τὸ σύστημα τὸ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν εἶναι:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 200 \\ 3y + \omega &= 300 \\ 4\omega + x &= 400 \end{aligned}\right\}$$

Τὸ λύομεν διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀντικαταστάσεως. Πρὸς τοῦτο λύομεν τὴν β' ὡς πρὸς y καὶ ἔχομεν $y = \frac{300 - \omega}{3}$ καὶ ἐκ τῆς γ' $x = 400 - 4\omega$. Τὰς τιμὰς ταύτας τῶν x καὶ y εἰσάγομεν εἰς τὴν α' τῶν (1) καὶ λαμβάνομεν

$$2\,(400 - 4\omega) + \frac{300 - \omega}{3} = 200.$$

Ἐξ ἧς μετὰ τὰς πράξεις εὑρίσκομεν: $\omega = 84$. Ἀκολούθως δὲ ἐκ τῶν ἄλλων ἐξισώσεων εὑρίσκομεν εὐκόλως $x = 64$, $y = 72$.

Ὁμὰς δευτέρα. 283. α') Τὸ λύομεν διὰ τοῦ τεχνάσματος τῆς προσθέσεως. Ἤτοι προσθέτομεν κατὰ μέλη καὶ λαμβάνομεν:

$$(\alpha + 2)\,(x + y + \omega) = \alpha^2 + 3\alpha + 2$$

$$\text{ἢ } (\alpha + 2)\,(x + y + \omega) = (\alpha + 2)\,(\alpha + 1)$$

Καὶ ἂν $\alpha \neq -2$ ἔχομεν: $x + y + \omega = \alpha + 1$.

Ἐκ ταύτης ἀφαιροῦμεν ἑκάστην τῶν δοθεισῶν καὶ λαμβάνομεν:

$$x = \frac{\alpha^2 - \alpha - 1}{\alpha - 1},\ y = \frac{2\alpha - 1}{\alpha - 1},\ \omega = -1\ (\text{ἂν } \alpha \neq 1).$$

Μὲ $\alpha = -2$ τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον καὶ μὲ $\alpha = 1$ εἶναι ἀδύνατον.

β') Λύομεν τὴν β' καὶ γ' ὡς πρὸς y καὶ x συναρτήσει τοῦ ω ἤτοι:

$$y = \gamma + \omega \quad \text{καὶ} \quad x = (\alpha + \beta)\,(\alpha + \beta + 1) - (\alpha + \beta)\,\omega.$$

Τὰς τιμὰς ταύτας τῶν y καὶ x φέρομεν εἰς τὴν α' τῶν δοθεισῶν καὶ λαμβάνομεν μετὰ τὰς πράξεις τὴν τιμὴν τοῦ ω ἤτοι:

$$\omega = \frac{\alpha\,(1 - \alpha^2 - \alpha\beta) + \beta - \gamma}{1 - \alpha^2 - \alpha\beta} \quad \text{ὅταν } 1 - \alpha^2 - \alpha\beta \neq 0.$$

Ἀκολούθως ἔχομεν καὶ τὰς τιμὰς τῶν x καὶ y ἤτοι:

$$y = \gamma + \frac{\alpha\,(1 - \alpha^2 - \alpha\beta) + \beta - \gamma}{1 - \alpha^2 - \alpha\beta}$$

$$x = (\alpha + \beta)\left[\alpha + \beta + 1 - \frac{\alpha\,(1 - \alpha^2 - \alpha\beta) + \beta - \gamma}{1 - \alpha^2 - \alpha\beta}\right]$$

γ') Ἔχομεν πρὸς λύσιν τό: $$\left|\begin{aligned} &\alpha x + \beta y + \gamma\omega = 3\alpha\beta\gamma \\ &\frac{x}{\alpha^{-1}} = \frac{y}{\beta^{-1}} = \frac{\omega}{\gamma^{-1}} \end{aligned}\right.$$

Ἡ δευτέρα σειρὰ τῶν ἰσοτήτων γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$\frac{\alpha x}{1} = \frac{\beta y}{1} = \frac{\gamma \omega}{1}$ καὶ δυνάμει τῆς γνωστῆς ἰδιότητος τῶν ἴσων λόγων καθ' ἣν προσθέτοντες ἡγουμένους καὶ ἑπομένους ἔχομεν νέον κλάσμα ἴσον πρὸς ἕκαστον τῶν δοθέντων, λαμβάνομεν :

$$\frac{\alpha x}{1} = \frac{\beta y}{1} = \frac{\gamma \omega}{1} = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma \omega}{1+1+1} = \frac{3\alpha\beta\gamma}{3} = \alpha\beta\gamma$$

ἢ συγκρίνοντες ἕκαστον τῶν τριῶν πρώτων ὅρων μὲ τὸν τελευταῖον λαμβάνομεν :

$$\left.\begin{array}{l} \alpha x = \alpha\beta\gamma \\ \beta y = \alpha\beta\gamma \\ \gamma\omega = \alpha\beta\gamma \end{array}\right| \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{l} x = \beta\gamma \\ y = \alpha\gamma \quad \text{ἄν} \quad \alpha \neq 0, \ \beta \neq 0 \ \ \gamma \neq 0. \\ \omega = \alpha\beta \end{array}$$

δ') Ἡ πρώτη σειρὰ τῶν ἰσοτήτων γράφεται :

$$\frac{x}{\frac{1}{\alpha}} = \frac{y}{\frac{1}{\beta}} = \frac{\omega}{\frac{1}{\gamma}} = \frac{x+y+\omega}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}} = \frac{x+y+\omega}{\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma}}$$

(δυνάμει τῆς προτάσεως ἣν ἀνεφέρομεν ἀνωτέρω).

Ἐπειδὴ ὅμως ἔχομεν : $x+y+\omega = \frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma}$, ἡ ἀνωτέρω σειρὰ ἰσοτήτων δίδει : $\alpha x = \beta y = \gamma\omega = 1$,

ἐξ ἧς $x = \frac{1}{\alpha}$, $y = \frac{1}{\beta}$, $\omega = \frac{1}{\gamma}$, ἄν $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$.

ε') Θέτομεν βοηθητικῶς : $x+y+\omega = \varphi$ (1). Καὶ τὸ σύστημα γίνεται :

$$\left.\begin{array}{l} x + \alpha(\varphi - x) = K \\ y + \beta(\varphi - y) = \lambda \\ \omega + \gamma(\varphi - \omega) = \mu \end{array}\right| \quad (2).$$

Αἱ ἀνωτέρω δίδουν : $x + \alpha\varphi - \alpha x = K$ ἢ $x(1-\alpha) = K - \alpha\varphi$ καὶ ἄν $1 \neq \alpha$ θὰ ἔχωμεν : $x = \frac{K - \alpha\varphi}{1-\alpha}$. Ἀναλόγως δὲ ἔχομεν : $y = \frac{\lambda - \beta\varphi}{1-\beta}$ $(1 \neq \beta)$ καὶ $\omega = \frac{\mu - \gamma\varphi}{1-\gamma}$ $(1 \neq \gamma)$. Τὰς τιμὰς ταύτας τῶν x, y, ω συναρτήσει τοῦ φ φέρομεν εἰς τὴν (1) καὶ λαμβάνομεν :

$$\frac{K - \alpha\varphi}{1-\alpha} + \frac{\lambda - \beta\varphi}{1-\beta} + \frac{\mu - \gamma\varphi}{1-\gamma} = \varphi$$

ἥτις λυομένη ὡς πρὸς φ δίδει :

$$\varphi = \frac{K(1-\beta)(1-\gamma) + \lambda(1-\alpha)(1-\gamma) + \mu(1-\alpha)(1-\beta)}{1 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma + 2\alpha\beta\gamma}$$

Ἄν καλέσωμεν χάριν συντομίας τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ φ ἔστω Δ θὰ ἔχωμεν διὰ τῶν ἄνω ἐκφράσεων τῶν x, y, ω τὰς τιμάς των, ἤτοι :

$$x = \frac{K - \alpha\Delta}{1-\alpha}, \quad y = \frac{\lambda - \beta\Delta}{1-\beta}, \quad \omega = \frac{\mu - \gamma\Delta}{1-\gamma}.$$

στ') Μεταξὺ τῆς α' καὶ β' ἀπαλείφομεν τὸν x, ὡς ἐπίσης καὶ μεταξὺ α' καὶ γ' καὶ εὑρίσκομεν :

$$\left.\begin{array}{l} (K\lambda - 1)\,y + (\lambda^2 - K)\,\omega = \alpha\lambda - \beta \\ (K^2 - \lambda)\,y + (K\lambda - 1)\,\omega = \alpha K - \gamma \end{array}\right| \quad (1).$$

Μεταξὺ τῶν δύο τούτων ἀπαλείφομεν τώρα τὸν y καὶ λαμβάνομεν :

$$\omega = \frac{(K^2 - \lambda)(\alpha\lambda - \beta) - (K\lambda - 1)(\alpha K - \gamma)}{(K^2 - \lambda)(\lambda^2 - K) - (K\lambda - 1)^2} \text{ ἄν } (K^2 - \lambda)(\lambda^2 - K) - (K\lambda - 1)^2 \neq 0.$$

Ἐὰν τώρα θέσωμεν τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ ω εἰς τὴν (1) εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ y καὶ ἀκολούθως διὰ ἀντικαταστάσεως εἰς μίαν τῶν δοθεισῶν εὑρίσκομεν καὶ τὴν τιμὴν τοῦ x.

ζ') Λύομεν τοῦτο μὲ τὴν μέθοδον τῆς ἀντικαταστάσεως. Ἤτοι λύομεν τὴν α' ὡς πρὸς y καὶ ἔχομεν $y = -x - \omega$. Τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ y ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν β' ἐξίσωσιν τῶν δοθεισῶν καὶ λαμβάνομεν :

$$(\beta - \alpha)x + (\beta - \gamma)\omega = 0 \text{ ἐξ ἧς ἔχομεν: } \omega = \frac{(\beta - \alpha)x}{\gamma - \beta} \quad (2).$$

Ἐὰν τώρα λύσωμεν τὴν α' ὡς πρὸς ω θὰ λάβωμεν : $\omega = -x - y$ καὶ θέτοντες πάλιν εἰς τὴν β' τῶν δοθεισῶν εὑρίσκομεν μετὰ τὰς πράξεις :

$$y = \frac{(\gamma - \alpha)x}{\beta - \gamma}.$$

Τὰς τιμὰς ταύτας τῶν ω καὶ y τῇ βοηθείᾳ τοῦ x φέρομεν εἰς τὴν γ' τῶν δοθεισῶν καὶ ἔχομεν ἐξίσωσιν μονον τοῦ x. Αὕτη λύεται εὐκόλως καὶ

δίδει ὡς τιμὴν τοῦ x τὴν $x = \dfrac{1}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}$.

Αἱ τιμαὶ τῶν λοιπῶν ἀγνώστων εὑρίσκονται ἐκ τῶν (1) καὶ (2)

καὶ εἶναι $y = \dfrac{1}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)}$ $\omega = \dfrac{1}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$.

η') Τὸ λύομεν μὲ τὴν μέθοδον προσθέσεως. Πολλαπλασιάζομεν πρὸς τοῦτο τὰ μέλη τῆς α' ἐπὶ γ καὶ τὸ ἐξαγόμενον ἀφαιροῦμεν κατὰ μέλη ἀπὸ τὴν β'. Οὕτω ἀπαλείφομεν τὸν ἄγνωστον ω λαμβάνοντες :

$x(\alpha - \gamma) + y(\beta - \gamma) = K - \gamma$ (1). Πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς β' ἐπὶ γ καὶ ἀφαιροῦμεν κατὰ μέλη μὲ τὴν γ' λαμβάνοντες :

$$\alpha(\alpha - \gamma)x + \beta(\beta - \gamma)y = K^2 - K\gamma \quad (2).$$

Αἱ ἐξισώσεις (1), (2) καὶ μία τῶν δοθεισῶν δίδουν ἰσοδύναμον σύστημα πρὸς τὸ δοθέν. Θὰ λύσωμεν τὸ ἐπὶ μέρος σύστημα τῶν (1), (2). Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς (1) ἐπὶ β καὶ τὸ ἐξαγόμενον ἀφαιροῦμεν κατὰ μέλη μὲ τὴν (2) ὅτε λαμβάνομεν :

$\alpha(\alpha - \gamma)x - \beta(\alpha - \gamma)x = K(K - \gamma) - \beta(K - \gamma)$ ἐξ ἧς $x[\alpha(\alpha - \gamma) - \beta(\alpha - \gamma)] =$

$= (K - \gamma)(K - \beta)$ ἢ $x = \dfrac{(K - \gamma)(K - \beta)}{(\alpha - \gamma)(\alpha - \beta)}$, ἄν $\alpha \neq \gamma$ καὶ $\alpha \neq \beta$.

Ἂν τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x θέσωμεν εἰς τὴν (1) εὑρίσκομεν μετὰ τὰς πράξεις : $y = \dfrac{(K - \gamma)(K - \alpha)}{(\beta - \gamma)(\beta - \alpha)}$ ἄν $\beta \neq \gamma$ καὶ τέλος ἔκ τινος τῶν δοθεισῶν εὑρίσκομεν : $\omega = \dfrac{(K - \alpha)(K - \beta)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$.

Γενικῶς, ἵνα ὑπάρχῃ λύσις δέον: $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$.

Λύσις συστημάτων διὰ τεχνασμάτων

Ἀσκήσεις : 284. α') Ἐφαρμόζομεν τὸ τέχνασμα τῶν ἴσων λόγων. Ἤτοι πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ α' κλάσματος ἐπὶ 3, τοῦ β' ἐπὶ 2 καὶ τοῦ γ' ἐπὶ 1 καὶ θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{x}{6}=\frac{y}{3}=\frac{\omega}{18}=\frac{3x}{18}=\frac{2y}{6}=\frac{\omega}{18}=\frac{3x+2y+\omega}{18+6+18}=\frac{3x+2y+\omega}{42}.$$

Ἐπειδὴ ὅμως δίδεται $3x+2y+\omega=34$ θὰ ἔχωμεν: $\frac{x}{6}=\frac{y}{3}=\frac{\omega}{18}=\frac{34}{42}.$

Συγκρίνοντες ἕκαστον λόγον μὲ τὸν τελευταῖον λαμβάνομεν:

$$x=\frac{34}{42}\cdot 6=\frac{34}{7},\qquad y=\frac{17}{7},\qquad \omega=\frac{102}{7}.$$

β') Ἐὰν $xy\neq 0$ καὶ διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς β' διὰ xy θὰ λάβωμεν: $\frac{y}{2xy}+\frac{x}{3xy}=\frac{2xy}{xy}$ ἢ $\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}=2.$ Ἄρα θὰ ἔχωμεν πρὸς λύσιν τὸ σύστημα: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$ καὶ $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{y}=2.$

Θέτομεν βοηθητικῶς $\frac{1}{x}=\varphi$ καὶ $\frac{1}{y}=\omega$ καὶ λαμβάνομεν:

$$\begin{aligned}\varphi+\omega&=5\\ \frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{3}\omega&=2\end{aligned}\qquad \text{ἢ}\qquad \begin{aligned}\varphi+\omega&=5\\ 3\varphi+2\omega&=12.\end{aligned}$$

Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη ταύτας ἀφοῦ πολ/μεν τὴν α' ἐπὶ 2 λαμβάνομεν: $\varphi=2$ ὅτε $\omega=3$, ἄρα $\frac{1}{x}=2$ καὶ $\frac{1}{y}=3$ καὶ $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}.$

γ') Ἐφαρμόζομεν τὸ θεώρημα τῶν ἴσων λόγων. Ἔχομεν:

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{\omega}{\gamma}=\frac{\varphi}{\delta}=\frac{\alpha x}{\alpha^2}=\frac{\beta y}{\beta^2}=\frac{\gamma\omega}{\gamma^2}=\frac{\delta\varphi}{\delta^2}=\frac{\alpha x+\beta y+\gamma\omega+\delta\varphi}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}=$$

$$=\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}=\frac{\alpha}{\beta(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)}.$$ Συγκρίνοντες τοὺς 4 πρώτους λόγους μὲ τὸν τελευταῖον λαμβάνομεν:

$$x=\frac{\alpha^2}{\beta(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)},\quad y=\frac{\alpha\beta}{\beta\,(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)}$$

$$\omega=\frac{\alpha\gamma}{\beta(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)},\quad \varphi=\frac{\alpha\delta}{\beta(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)}$$

δ') Χρησιμοποιοῦμεν βοηθητικοὺς ἀγνώστους. Θέτομεν πρὸς τοῦτο $\frac{1}{x}=x'$, $\frac{1}{y}=y'$, $\frac{1}{\omega}=\omega'$ καὶ τὸ σύστημα γίνεται

$$\left.\begin{aligned}x'+y'&=\frac{1}{12}\\ y'+\omega'&=\frac{1}{20}\\ \omega'+x'&=\frac{1}{15}\end{aligned}\right\}$$

Εἰς τοῦτο ἐφαρμόζομεν τὸ τέχνασμα προσθέσεως. Ἤτοι προσθέτομεν ἁπάσας κατὰ μέλη καὶ ἀφοῦ διαιρέσωμεν τὰ μέλη διὰ 2, ἀφαιροῦμεν ἐκ τοῦ ἐξαγομένου κατὰ μέλη ἑκάστην τῶν δοθεισῶν.

Δηλαδὴ διὰ τῆς προσθέσεως λαμβάνομεν: $x'+y'+\omega'=\frac{1}{10}.$

Καὶ μὲ ἀφαίρεσιν ἑκάστης τῶν δοθεισῶν λαμβάνομεν:

$x' = \frac{1}{20}$, $y' = \frac{1}{30}$, $\omega' = \frac{1}{60}$ ἄρα $\frac{1}{x} = \frac{1}{20}$, $\frac{1}{y} = \frac{1}{30}$, $\frac{1}{\omega} = \frac{1}{60}$.
καὶ συνεπῶς : $x = 20$, $y = 30$, $\omega = 60$.

ε') Προσθέτομεν τὰς δοθείσας κατὰ μέλη καὶ λαμβάνομεν :
$\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{\omega} = \lambda + \mu + \nu$ (1). Ἐκ ταύτης ἀφαιροῦμεν ἑκάστην τῶν δοθεισῶν καὶ εὑρίσκομεν : $\frac{2\gamma}{\omega} = \mu + \nu$ ἢ $\omega = \frac{2\gamma}{\mu+\nu}$, ἂν $\mu + \nu \neq 0$.

Ἀναλόγως εὑρίσκομεν καὶ τὰς τιμὰς τῶν λοιπῶν ἀγνώστων ἤτοι :

$$y = \frac{2\beta}{\lambda + \nu} \qquad x = \frac{2\alpha}{\lambda + \mu}.$$

ϛ') Ἐὰν ὑποθέσωμεν $x y \omega \neq 0$ καὶ διαιρέσωμεν τὰ μέλη ἑκάστης διὰ $x y \omega$ θὰ λάβωμεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{\omega} = 12$$
$$\frac{3}{x} - \frac{4}{y} + \frac{5}{\omega} = 15$$
$$\frac{4}{x} - \frac{3}{y} + \frac{2}{\omega} = 13$$

Θέτομεν τώρα βοηθητικῶς $\frac{1}{x} = x'$, $\frac{1}{y} = y'$, $\frac{1}{\omega} = \omega'$ καὶ λαμβάνομεν :

$$\left.\begin{array}{l} x' + y' + \omega' = 12 \\ 3x' - 4y' + 5\omega' = 15 \\ 4x' - 3y' + 2\omega' = 13 \end{array}\right\}$$

Τοῦτο λύομεν διὰ τῶν γνωστῶν μεθόδων (ἀπαλοιφῆς) καὶ εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν x', y', ω',

$$\text{ἤτοι } x' = \frac{9}{2}, \quad y' = 4, \quad \omega' = \frac{7}{2}$$

$$\text{ἄρα } \frac{1}{x} = \frac{9}{2}, \quad \frac{1}{y} = 4, \quad \frac{1}{\omega} = \frac{7}{2}$$

$$\text{Καὶ ἄρα } x = \frac{2}{9}, \quad y = \frac{1}{4}, \quad \omega = \frac{2}{7}.$$

ζ') Καλοῦμεν ἕκαστον τῶν ἴσων γινομένων Κ καὶ θὰ ἔχωμεν:
$\mu x = K$ ὅτε $x = \frac{K}{\mu}$ $(\mu \neq 0)$ καὶ ἀναλόγως $y = \frac{K}{\nu}$, $\omega = \frac{K}{\rho}$ $(\nu, \rho) \neq (0, 0)$. Τὰς τιμὰς ταύτας τῶν x, y, ω θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x + \beta y + \gamma \omega = \delta$ καὶ λαμβάνομεν: $\frac{\alpha K}{\mu} + \frac{\beta K}{\nu} + \frac{\gamma K}{\rho} = \delta$
ἢ $(\alpha\nu\rho + \beta\mu\rho + \gamma\mu\nu)\,K = \mu\nu\rho\delta$ καὶ ἂν $\alpha\nu\rho + \beta\mu\rho + \gamma\mu\nu \neq 0$

$$\text{ἔχομεν: } K = \frac{\mu\nu\rho\delta}{\alpha\nu\rho + \beta\mu\rho + \gamma\mu\nu}.$$

Τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ Κ φέρομεν εἰς τὰς προηγουμένας ἐξισώσεις ὡς πρὸς x, y, ω λαμβάνοντες κατὰ σειράν :

$$x = \frac{\delta\nu\rho}{\alpha\nu\rho + \beta\mu\rho + \gamma\mu\nu}, \quad y = \frac{\delta\mu\rho}{\alpha\nu\rho + \beta\mu\rho + \gamma\mu\nu}, \quad \omega = \frac{\delta\mu\nu}{\alpha\nu\rho + \beta\mu\rho + \gamma\mu\nu}$$

η') Θέτομεν βοηθητικῶς $\left.\begin{array}{l} 3x-2y+1=\varphi \\ x+2y-3=\omega \end{array}\right\}$ (1)

Καὶ τὸ σύστημα γίνεται:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{\varphi}+\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{5}{12} \\ -\dfrac{1}{\varphi}+\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{1}{12} \end{array}\right\}$$

Διὰ προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη λαμβάνομεν:

$\dfrac{2}{\omega}=\dfrac{6}{12}$ ἢ $\omega=4$. Ὅτε $\varphi=6$. Ἤδη τὸ σύστημα (1) γίνεται:

$$\begin{array}{l} 3x-2y+1=6 \\ x+2y-3=4 \end{array} \quad ἢ \quad \begin{array}{l} 3x-2y=5 \\ x+2y=7 \end{array}$$

Διὰ προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη ἔχομεν: $4x=12$ ὅτε $x=3$. Εὐκόλως δὲ ἕπεται $y=2$.

θ') Ἀφαιροῦμεν τὰς δύο πρώτας κατὰ μέλη καὶ λαμβάνομεν: $(\alpha-\beta)y+(\alpha^2-\beta^2)\omega+(\alpha^3-\beta^3)=0$ ἢ ἄν $\alpha-\beta\neq 0$ ἁπλοποιοῦντες διὰ $\alpha-\beta$ ἔχομεν τελικῶς: $y+(\alpha+\beta)\omega+(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=0$ (1).

Ἀφαιροῦμεν ἤδη τὰς α' καὶ γ' κατὰ μέλη καὶ λαμβάνομεν (ἐὰν πάλιν ὑποθέσωμεν $\alpha-\gamma\neq 0$), $y+(\alpha+\gamma)\omega+(\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2)=0$ (2).

Δι' ἀφαιρέσεως τώρα τῶν (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\left[(\alpha+\beta)-(\alpha+\gamma)\right]\omega+\left[(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-(\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2)\right]=0$$
$$ἢ \quad (\beta-\gamma)\omega+\alpha\beta+\beta^2-\alpha\gamma-\gamma^2=0$$
$$ἢ \quad (\beta-\gamma)\omega+\alpha(\beta-\gamma)+(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)=0$$

καὶ ἄν $\beta-\gamma\neq 0$ ἔχομεν: $\omega+\alpha+\beta+\gamma=0$ ἢ $\omega=-(\alpha+\beta+\gamma)$. Θέτομεν τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὴν (1) καὶ μετὰ τὰς πράξεις εὑρίσκομεν: $y=\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma$ ἐκ τῆς α' δὲ τῶν δοθεισῶν $x=-\alpha\beta\gamma$.

ι') Ἀντιστρέφομεν τὰ μέλη τῶν δοθεισῶν ἰσοτήτων καὶ λαμβάνομεν,

$$\frac{5x}{xy}+\frac{4y}{xy}=\frac{1}{3}$$
$$\frac{3y}{y\omega}+\frac{5\omega}{y\omega}=\frac{1}{7}$$
$$\frac{2\omega}{\omega x}+\frac{3x}{\omega x}=\frac{1}{6}$$

ἢ $\left.\begin{array}{l} \dfrac{5}{y}+\dfrac{4}{x}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{3}{\omega}+\dfrac{5}{y}=\dfrac{1}{7} \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{\omega}=\dfrac{1}{6} \end{array}\right\}$ Θέτομεν βοηθητικῶς $\dfrac{1}{x}=x'$, $\dfrac{1}{y}=y'$, $\dfrac{1}{\omega}=\omega'$.

καὶ τὸ σύστημα γίνεται:

$$\left.\begin{array}{l} 5y'+4x'=\dfrac{1}{3} \\ 3\omega'+5y'=\dfrac{1}{7} \\ 2x'+3\omega'=\dfrac{1}{6} \end{array}\right\} \quad ἢ \text{ καὶ } \left.\begin{array}{r} 15y'+12x'=1 \\ 21\omega'+35y'=1 \\ 12x'+18\omega'=1 \end{array}\right\}$$

Τοῦτο λύεται εὐκόλως κατὰ τὰ γνωστά, ὅτε λαμβάνομεν:

$x' = \frac{5}{84}$, $y' = \frac{2}{105}$, $\omega' = \frac{1}{63}$ καὶ συνεπῶς: $x = \frac{84}{5}$, $y = \frac{105}{2}$, $\omega = 63$.

ια') Διαιροῦμεν τὰ ἴσα ἑκάστης τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων ἀντιστοίχως διὰ xy, xω, yω, καὶ εὑρίσκομεν μετὰ τὰ ἁπλοποιήσεις:

$$\left.\begin{aligned} \frac{3}{y} + \frac{7}{x} &= 23 \\ \frac{3}{x} + \frac{8}{\omega} &= 38 \\ \frac{5}{\omega} - \frac{6}{y} &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Θέτομεν τώρα βοηθητικῶς $\frac{1}{x} = x'$, $\frac{1}{y} = y'$, $\frac{1}{\omega} = \omega'$ καὶ τὸ σύστημα γίνεται:

$$\begin{aligned} 3y' + 7x' &= 23 \\ 3x' + 8\omega' &= 38 \\ 5\omega' - 6y' &= 2 \end{aligned}$$

Τοῦτο λύεται κατὰ τὰ γνωστὰ καὶ δίδει τιμὰς $x' = 2$, $y' = 3$, $\omega' = 4$, ὅτε τὰ ἀντίστροφα αὐτῶν θὰ εἶναι αἱ τιμαὶ τῶν x, y, ω ἤτοι:

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{3}, \quad \omega = \frac{1}{4}.$$

Σημ. Εἰς τὸ βιβλίον νὰ διορθωθῇ ἡ β' ἐξίσωσις ὡς ἑξῆς:

$$3\omega + 8x = 33x\omega.$$

Ὁμὰς δευτέρα 285. α') Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} (\rho + \mu)x - (\rho - \mu)y &= 2\nu\rho \\ (\mu + \nu)y - (\mu - \nu)\omega &= 2\mu\rho \\ (\nu + \rho)\omega - (\nu - \rho)x &= 2\mu\nu \end{aligned}\right\}$$

Λύομεν τὴν γ' ὡς πρὸς ω καὶ λαμβάνομεν:

$$\omega = \frac{2\mu\nu + (\nu - \rho)x}{\nu + \rho} \qquad \text{ἂν} \quad \rho + \nu \neq 0.$$

Θέτομεν τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὴν β' τῶν δοθεισῶν καὶ λαμβάνομεν:

$$(\mu + \nu)y - (\mu - \nu) \cdot \frac{2\mu\nu + (\nu - \rho)x}{\nu + \rho} = 2\mu\rho$$

ἢ $(\mu + \nu)(\nu + \rho)y - (\mu - \nu)2\mu\nu - (\nu - \rho)(\mu - \nu)x = 2\mu\rho(\nu + \rho)$

ἢ $(\mu\nu + \nu^2 + \mu\rho + \nu\rho)y - (\mu\nu - \nu^2 - \mu\rho + \nu\rho)x = 2\mu\rho(\nu + \rho) + 2\mu\nu(\mu - \nu)$

ἢ $(\nu^2 + \mu\rho)(x + y) - (\mu\nu + \nu\rho)(x - y) = 2\mu\rho(\nu + \rho) + 2\mu\nu(\mu - \nu)$.(1).

Ἡ πρώτη γράφεται: $\mu(x + y) + \rho(x - y) = 2\nu\rho$ (2).

Θέτομεν βοηθητικῶς $x + y = A$

$x - y = B.$

Καὶ τὸ σύστημα τῶν (1) καὶ (2) γίνεται:

$$\begin{aligned} (\nu^2 + \mu\rho)A - \nu(\mu + \rho)B &= 2\mu\rho(\nu + \rho) + 2\mu\nu(\mu - \nu) \\ \mu A + \rho B &= 2\nu\rho. \end{aligned}$$

Λύομεν τὴν δευτέραν ὡς πρὸς B καὶ λαμβάνομεν: $B = \frac{2\nu\rho - \mu A}{\rho}$ (3).

Τὴν τιμὴν ταύτην εἰσάγομεν εἰς τὴν προηγουμένην καὶ εὑρίσκομεν:

$$\left[(\nu^2 + \mu\rho)\rho + (\mu\nu + \nu\rho)\mu\right]A = 2\rho\left[\mu\rho(\nu + \rho) + \mu\nu(\mu - \nu) + \nu(\mu\nu + \nu\rho)\right] \Rightarrow$$

$= 2\rho\,[\mu\nu\rho + \mu\rho^2 + \mu\nu^2 - \mu\nu^2 + \mu\nu^2 + \nu^2\rho] = 2\rho\,[\rho(\nu^2 + \mu\rho) + \mu(\mu\nu + \nu\rho)]$ καὶ συνεπῶς ἄν $\rho(\nu^2 + \mu\rho) + \mu(\mu\nu + \nu\rho) \neq 0$ θὰ ἔχωμεν: $A = 2\rho$ ὅτι ἐκ τῆς (3) εὐκόλως λαμβάνομεν: $B = \dfrac{2\rho\nu - 2\mu\rho}{\rho} = 2(\nu - \mu)$.

Ἄρα ἔχομεν πρὸς λύσιν τὸ σύστημα:

$$\begin{array}{l|l} x + y = 2\rho & \text{Τοῦτο δίδει διὰ τὰ } x,\, y \\ x - y = 2(\nu - \mu) & x = \rho + \nu - \mu, \quad y = \rho - \nu + \mu \end{array}$$

Εὐκόλως δὲ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν τελευταίαν τῶν δοθεισῶν εὑρίσκομεν: $\omega = \nu - \rho + \mu$.

β') Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο θεωροῦμεν πρὸς στιγμὴν ὡς ἀγνώστους τὰ μ, ν, ρ καὶ ὡς γνωστοὺς τὰ x, y, ω καὶ τοῦτο, διότι τὸ ἐν λόγῳ σύστημα ἔχει τὴν μορφὴν τοῦ προηγουμένου μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι ἔχουν ἐναλλαγῇ οἱ γνωστοὶ διὰ τῶν ἀγνώστων καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀφοῦ τὸ θεωροῦμεν μὲ ἀγνώστους τὰ μ, ν, ρ λύοντες τοῦτο ὡς τὸ προηγούμενον θὰ εὕρωμεν:

$$\mu = \omega + y - x$$
$$\nu = \omega + x - y$$
$$\rho = y - \omega + x$$

Προσθέτοντες ἤδη ταύτας ἀνὰ δύο κατὰ μέλη λαμβάνομεν:

$$2x = \nu + \rho \quad \text{ἢ} \quad x = \frac{\nu + \rho}{2} \quad \text{καὶ ἀναλόγως:} \quad y = \frac{\mu + \rho}{2},$$
$$\omega = \frac{\mu + \nu}{2}.$$

286. Ἐὰν ὑποθέσωμεν $xy\omega \neq 0$, τότε διαιροῦντες τὰ μέλη ἑκάστης τῶν ἐξισώσεων διὰ $xy\omega$ καὶ ἁπλοποιοῦντες λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν σύστημα:

$$\frac{3}{x} + \frac{2}{y} - \frac{1}{\omega} = 1$$
$$\frac{30}{x} + \frac{12}{\omega} - \frac{18}{y} = 13$$
$$\frac{18}{\omega} + \frac{24}{x} - \frac{42}{y} = 5$$

Θέτομεν: $\dfrac{1}{x} = x', \dfrac{1}{y} = y', \dfrac{1}{\omega} = \omega'$ καὶ τὸ σύστημα γίνεται:

$$3x' + 2y' - \omega' = 1$$
$$20x' + 12\omega' - 18y' = 13$$
$$18\omega' + 24x' - 42y' = 5$$

Τοῦτο λύεται εὐκόλως καὶ λαμβάνομεν: $x' = \dfrac{1}{3}, y' = \dfrac{1}{2}, \omega' = 1.$

Ἄρα: $x = 3, \; y = 2, \; \omega = 1.$

287. Θεωροῦμεν ὡς βοηθητικοὺς τὰς ἀγνώστους παραστάσεις:

$$\frac{1}{2x + 3y}, \quad \frac{1}{2x - 3\omega} \quad \text{καὶ} \quad \frac{1}{5y - 4\omega}.$$

θέτοντες: $\frac{1}{2x+3y}=x'$, $\frac{1}{2x-3\omega}=y'$, $\frac{1}{5y-4\omega}=\omega'$ ότε τὸ σύστημα γίνεται:

$$42x' - 9y' = \frac{33}{8}$$
$$28x' - 15\omega' = \frac{1}{2}$$
$$4y' - 5\omega' = 0$$

ἢ μετὰ τὰς πράξεις:
$$336x' - 72y' = 33$$
$$56x' - 30\omega' = 1$$
$$4y' - 5\omega' = 0.$$

Τοῦτο λύεται διὰ τῶν γνωστῶν μας ἤδη μεθόδων ἀπαλοιφῆς καὶ δίδει:

$$x' = \frac{5}{28},\ y' = \frac{3}{8},\ \omega' = \frac{3}{10}$$ ὅτε:

$$2x + 3y = \frac{28}{5}$$
$$2x - 3\omega = \frac{8}{3}$$
$$5y - 4\omega = \frac{10}{3}$$

Λύομεν καὶ τοῦτο διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀντικαταστάσεως ἤτοι τὴν β' ὡς πρὸς x συναρτήσει τοῦ ω καὶ τὴν γ' ὡς πρὸς y συναρτήσει τοῦ ω, ἅς τιμάς των φέρομεν εἰς τὴν α' καὶ εὑρίσκομεν τὸν ω.

Ἤτοι: $\omega = \frac{14}{81}$. Αἱ τιμαὶ τῶν λοιπῶν ἀγνώστων εἶναι: $x = \frac{43}{27}$ $y = \frac{326}{405}$.

ε) $$\frac{4\sqrt{5}-20}{\frac{2}{3}\sqrt{10}-5\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{4\sqrt{5}-20}{\frac{2}{3}\sqrt{10}-\frac{5\sqrt{2}}{2}} = \frac{24\sqrt{5}-120}{4\sqrt{10}-15\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{(24\sqrt{5}-120)(4\sqrt{10}-15\sqrt{2})}{(4\sqrt{10})^2-(15\sqrt{2})^2} = \frac{96\sqrt{50}-840\sqrt{10}+1800\sqrt{2}}{-290} =$$

$$= \frac{840\sqrt{10}-96\sqrt{50}-1800\sqrt{2}}{290}$$

στ) $$\frac{5-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{(5-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{5-5\sqrt{2}-\sqrt{2}+2}{1-2} = \frac{7-6\sqrt{2}}{-1} = \frac{6\sqrt{2}-7}{1} = 6\sqrt{2}-7$$

ζ) $$\frac{8\sqrt{12}-12\sqrt{6}}{4\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{4.3}-12.\sqrt{2.3}}{4\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}-12\sqrt{2}.\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{(16-12\sqrt{2})\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{16-12\sqrt{2}}{4} = 4-3\sqrt{2}$$

η) $$\frac{6}{1+\sqrt{2}} = \frac{6(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{6(1-\sqrt{2})}{1-2} = \frac{6(1-\sqrt{2})}{-1} = \frac{(\sqrt{2}-1)6}{1} = 6(\sqrt{2}-1)$$

288. Κάθε ἐξίσωσις τοῦ δοθέντος συστήματος, ὡς εἴδομεν εἰς τὰ προηγούμενα παριστᾷ εὐθεῖαν γραμμήν, εἰς ὀρθογώνιον ἀξονικὸν σύστημα συντεταγμένων. Ἄρα αἱ δύο ἐξισώσεις τοῦ συστήματος παριστοῦν δύο εὐθείας.

Ἂν λοιπὸν τὸ σύστημα ἔχῃ μίαν κοινὴν λύσιν, αὕτη θὰ ἐπαληθεύῃ ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις ἤτοι τὸ σημεῖον τὸ ἔχον συντεταγμένας τὴν λύσιν τοῦ συστήματος θὰ κεῖται ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν εὐθειῶν ἤτοι αἱ ἐν λόγῳ εὐθεῖαι τέμνονται. Ἂν τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον ἤτοι ἂν ἔχῃ ἀπείρους λύσεις, ἄπειρα κοινὰ σημεῖα τῶν εὐθειῶν ὑπάρχουν καὶ αἱ εὐθεῖαι συμπίπτουν. Ἂν τὸ σύστημα δὲν ἔχῃ καμμίαν λύσιν (ἀδύνατον) τότε αἱ δύο εὐθεῖαι θὰ εἶναι παράλληλοι.

289. Ἐπειδὴ κάθε μία ἀπὸ τὰς τρεῖς ἐξισώσεις α' βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y παριστᾷ εὐθεῖαν, ἕπεται ὅτι ἂν καὶ αἱ τρεῖς ἐξισώσεις ἐπαληθεύωνται διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι θὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, δηλ. τοῦ σημείου οὗ συντεταγμέναι εἶναι αἱ τιμαὶ τῶν x, y.

Προβλήματα πρωτοβαθμίων συστημάτων

290. Ἂς παραστήσωμεν μὲ x τὸν ἀριθμὸν τῶν μήλων τοῦ α' καὶ μὲ y τὸν ἀριθμὸν τῶν μήλων τοῦ β'.

Ἂν τὸ β' δώσῃ τὸ ἥμισυ τῶν μήλων του εἰς τὸ α' τότε αὐτὸ θὰ ἔχῃ : $x+\frac{y}{2}$, ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν : $x+\frac{y}{2}=40$. Ὅταν δὲ τὸ α' δώσῃ τὸ ἥμισυ τῶν μήλων του εἰς τὸ β' τότε αὐτὸ θὰ ἔχῃ : $y+\frac{x}{2}$ καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν : $y+\frac{x}{2}=35$.

Λύοντες τώρα τὸ σύστημα λαμβάνομεν : $x=30$ καὶ $y=20$.

291. Ἔστωσαν x, y οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί. Θὰ ἔχωμεν συνεπῶς τὸ σύστημα : $x-3y=0$ καὶ $2x-3y=42$.

Λύοντες τοῦτο εὑρίσκομεν : $y=14$ καὶ $x=42$.

292. Ἔστωσαν x, y οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί. Θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα : $2x-3y=5$ καὶ $2x-25=15y$. Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο λαμβάνομεν : $x=0$, $y=-5/3$.

293. Ἔστω x τὸ βάρος τοῦ χρυσοῦ καὶ y τὸ βάρος τοῦ ἀργύρου τοῦ περιεχομένου εἰς τὸν στέφανον, ὅτε θὰ ἔχωμεν : $x+y=7465$ (1). Εἶναι γνωστὸν δὲ ὅτι ὁ χρυσὸς χάνει εἰς τὸ ὕδωρ τὰ 0,052 τοῦ βάρους του καὶ συνεπῶς τὸ βάρος x τοῦ χρυσοῦ τοῦ περιεχομένου εἰς τὸν στέφανον θὰ χάσῃ $0{,}052x$. Ἀναλόγως τὸ βάρος y τοῦ ἀργύρου θὰ χάσῃ $0{,}095y$. Συμφώνως λοιπὸν πρὸς τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν : $0{,}052y+0{,}095y=467$ (2). Λύομεν τὸ σύστημα (1) καὶ (2) καὶ εὑρίσκομεν :

$$y=1833\frac{1}{43} \quad \text{καὶ} \quad x=5631\frac{42}{43}.$$

294. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ Α εἶχε x δραχμὰς καὶ ὁ Β y δραχμάς, τότε, ὅταν ὁ Α δώσῃ μ δραχμὰς εἰς τὸν Β, θὰ ἔχῃ ὁ Β $(y+\mu)$ δραχμάς, ὁ δὲ Α θὰ ἔχῃ $(x-\mu)$ δραχμάς.

Ἐπειδὴ δὲ τότε τὰ χρήματα τοῦ Β εἶναι νιπλάσια τῶν τοῦ Α, θὰ ἔχωμεν : $y+\mu=\nu(x-\mu)$ (1).

Ὅταν τώρα ὁ Β δώσῃ εἰς τὸν Α μ δραχμάς, θὰ ἔχῃ ὁ Α τότε $(x+\mu)$ δραχ. καὶ ὁ Β θὰ ἔχῃ $(y-\mu)$ δραχ. Τώρα ὅμως τὰ χρήματα τοῦ Α εἶναι νιπλάσια τοῦ Β καὶ ἔχομεν : $x+\mu=\nu(y-\mu)$ (2).

Ἐὰν λύσωμεν τὸ σύστημα τῶν (1) καὶ (2), θὰ εὕρωμεν :

$$x=\frac{\mu+\nu^2\mu+2\nu\mu}{\nu^2-1}=\frac{\mu(\nu+1)}{\nu-1} \quad \text{ἐὰν} \quad \nu\neq 1.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν : $y=\frac{\mu(\nu+1)}{\nu-1}$.

295. Ἔστω x ἡ ταχύτης τοῦ α' καὶ y ἡ ταχύτης τοῦ β'. Εἰς t^{δ} τὸ α' θὰ διανύσῃ tx μέτρα καὶ τὸ β' ty μέτρα.

Ἀλλὰ τὰ κινητὰ κινοῦνται ἀντιθέτως καὶ διήνυσαν ὅλην τὴν ἀπόστασιν α ὅτε θὰ ἔχωμεν : $tx+ty=\alpha$ (1).

"Οταν ὅμως κινοῦνται κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν τὸ α' διανύει β μέτρα περισσότερα τοῦ β', ὅτε ἔχομεν : $tx - ty = \beta$ (2).

Λύοντες τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1), (2) λαμβάνομεν :

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2t}, \quad y = \frac{\alpha-\beta}{2t}, \quad \text{πρέπει } \alpha > \beta.$$

296. "Εστω x ἡ ταχύτης τοῦ α' καὶ y ἡ ταχύτης τοῦ β'. Εἰς λ_1, ὥρ. τὸ μὲν α' θὰ διανύσῃ $\lambda_1 x$ μέτρα, τὸ δὲ β' $\lambda_1 y$ μέτρα.

Ἐπειδὴ κινοῦνται ἀντιθέτως καὶ συναντῶνται θὰ διανύσουν ὅλην τὴν ἀπόστασιν τῶν τόπων καὶ ἔχομεν : $\lambda_1 x + \lambda_1 y = \alpha$.

Ἐπίσης τὸ α' εἰς λ_2 ὥρας θὰ διανύσῃ $\lambda_2 x$ μέτρα, τὸ δὲ β' θὰ διανύσῃ $\lambda_2 y$ μέτρα.

Ἐπειδὴ ὅμως τώρα κινοῦνται κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, διὰ νὰ συναντήσῃ τὸ α' τὸ β' πρέπει νὰ διανύσῃ ἀπόστασιν α μέτρα περισσότερον τοῦ β' καὶ ἔχομεν : $\lambda_2 x - \lambda_2 y = \alpha$.

Ἐὰν λύσωμεν τὸ σύστημα τῶν ἄνω ἐξισώσεων εὑρίσκομεν :

$$x = \frac{\alpha(\lambda_1 + \lambda_2)}{2\lambda_1\lambda_2}, \quad y = \frac{\alpha(\lambda_2 - \lambda_1)}{2\lambda_1\lambda_2}. \quad \text{Πρέπει } \lambda_2 > \lambda_1.$$

297. "Εστωσαν x ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνδρῶν καὶ y ὁ ἀριθμὸς τῶν γυναικῶν. Θὰ ἔχωμεν : $x + y = \alpha$. Οἱ μὲν ἄνδρες ἐπλήρωσαν γx δρχ., αἱ δὲ γυναῖκες δy δραχμάς. Θὰ ἔχωμεν τώρα : $\gamma x + \delta y = \beta$. Ἐὰν λύσωμεν τὸ σύστημα τῶν δύο ἄνω ἐξισώσεων εὑρίσκομεν :

$$x = \frac{\alpha\delta - \beta}{\delta - \gamma}, \quad y = \frac{\beta - \alpha\gamma}{\delta - \gamma}.$$

ἂν $\delta - \gamma \neq 0$. Πρέπει συγχρόνως οἱ x, y νὰ εἶναι θετικοὶ καὶ ἀκέραιοι.

Ἐφαρμόζοντες τὰς δεδομένας τιμὰς εὑρίσκομεν $x = 2{,}5$, $y = 4{,}5$, ἥτις λύσις ἀπορρίπτεται.

Προβλήματα μὲ περισσοτέρους τῶν δύο ἀγνώστους

Ὁμὰς πρώτη : 298. "Ας καλέσωμεν x, y, ω τὰ ποσὰ ἑκάστου. "Οταν ὁ α' διπλασιάσῃ τὰ χρήματα τῶν ἄλλων τότε, ὁ α' θὰ ἔχῃ : $x - y - \omega$, ὁ β' $2y$ καὶ ὁ γ' 2ω. "Οταν ὁ β' διπλασιάσῃ τὰ χρήματα τῶν δύο ἄλλων, τότε θὰ ἔχουν κατὰ σειράν :

ὁ α' $2(x - y - \omega)$ ἢ $2x - 2y - 2\omega$

ὁ β' $2y - (x - y - \omega) - 2\omega$ ἢ $3y - x - \omega$ ὁ γ' 4ω.

"Οταν τώρα ὁ γ' διπλασιάσῃ τὰ χρήματα τῶν δύο ἄλλων τότε θὰ ἔχουν κατὰ σειράν :

ὁ α' $2(2x - 2y - 2\omega) = 4x - 4y - 4\omega$

ὁ β' $2(3y - x - \omega) = 6y - 2x - 2\omega$

ὁ γ' $4\omega - (2x - 2y - 2\omega) - (3y - x - \omega) = 7\omega - x - y$.

Ἀλλὰ εἰς τὸ τέλος ἕκαστος εὑρέθη μὲ 160000 δραχ.

Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν τὰς ἐξισώσεις :

$$4x - 4y - 4\omega = 160000$$
$$6y - 2x - 2\omega = 160000$$
$$7\omega - x - y = 160000$$

Λύομεν τὸ σύστημα καὶ λαμβάνομεν: $\omega = 80000$, $x = 260000$, $y = 140000$.

299. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x, y, ω τὰς δραχ. τὰς ὁποίας εἶχε ἕκαστος τῶν τριῶν ἀνθρώπων θὰ ἔχωμεν τὰς ἑξῆς ἐξισώσεις:

$$x + \frac{5y}{8} = 64000000$$

$$y + \frac{8\omega}{9} = 6\,1000000$$

$$\omega + \frac{x}{2} + \frac{3y}{16} = 64000000$$

Ἐὰν λύσωμεν τὸ ἀνωτέρω σύστημα θὰ λάβωμεν: $x = 44000000$, $y = 32000000$, $\omega = 36000000$.

300. Ἔστω ὅτι ἡ α′ εἶχε x αὐγά, ἡ β′ y αὐγὰ καὶ ἡ τρίτη ω αὐγά. Θὰ ἔχωμεν τότε: $x + y + \omega = 360$. Ἐὰν ἡ α′ ἔδιδε τὸ $\frac{1}{7}$ τῶν ἰδικῶν της αὐγῶν δηλ. τὰ $\frac{x}{7}$ εἰς τὴν β′ τότε θὰ τῆς ἔμενον τὰ $\frac{6x}{7}$ τῶν αὐγῶν της. Ἂν δὲ ἡ γ′ ἔδιδε τὸ $\frac{1}{13}$ τῶν ἰδικῶν της εἰς τὴν β′ δηλ. τὰ $\frac{\omega}{13}$ θὰ τῆς ἔμενον τὰ $\frac{12\omega}{13}$ τῶν ἰδικῶν της. Συνεπῶς ἡ β′ θὰ εἶχε τότε: $y + \frac{x}{7} + \frac{\omega}{13}$. Ἀλλὰ τότε θὰ εἶχον καὶ αἱ τρεῖς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν αὐγῶν δηλαδή: $\frac{6x}{7} = y + \frac{x}{7} + \frac{\omega}{13} = \frac{12\omega}{13} = 120$

$$\text{ἢ} \quad \frac{6x}{7} = 120, \quad y + \frac{x}{7} + \frac{\omega}{13} = 120, \quad \frac{12\omega}{13} = 120.$$

Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο εὑρίσκομεν:

$$x = 140 \qquad y = 90 \qquad \omega = 130.$$

301. Ἔστω x τὸ ψηφίον τῶν μονάδων, y τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ ω τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων. Συμφώνως πρὸς τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμεν τὰς ἐξισώσεις:

$$x + y + \omega = 17 \qquad (1)$$

$$\omega = 2x \qquad (2)$$

Ὁ ἀριθμὸς ὁ ἔχων ω ἑκατοντάδας, y δεκάδας καὶ x μονάδας γράφεται: $100\omega + 10y + x$.

Ἐὰν τὰ ψηφία τοῦ ἐν λόγῳ ἀριθμοῦ ἐναλλαγοῦν ὁ προκύπτων ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ x ἑκατοντάδας, y δεκάδας καὶ ω μονάδας καὶ συνεπῶς θὰ γράφεται: $100x + 10y + \omega$. Τότε δὲ συμφώνως πρὸς τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν: $100\omega + 10y + x - 396 = 100x + 10y + \omega$ (3).

Θὰ πρέπῃ x, y, ω ἀκέραιοι θετικοὶ μικρότεροι τοῦ 10.

Λύοντες τὸ σύστημα τῶν (1), (2), (3) εὑρίσκομεν: $x = 4$, $y = 5$, $\omega = 8$ καὶ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 854.

302. Ἔστω x, y, ω οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ θὰ ἔχωμεν συμφώνως πρὸς τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος:

$$\left.\begin{aligned} x + \frac{y+\omega}{2} &= 120 \\ y + \frac{x+\omega}{15} &= 62 \\ x + y + \omega &= 190. \end{aligned}\right\}$$

Λύοντες τὸ ἀνωτέρω σύστημα λαμβάνομεν :

$$x = 50, \qquad y = 63\frac{3}{4} \qquad \omega = 76\frac{1}{4}.$$

303. Ἂς καλέσωμεν x τὸ ἐπιτόκιον τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ α' κεφάλαιον καὶ y τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ β' κεφάλαιον.

Αἱ 5400000 δρχ. τοκιζόμεναι πρὸς $x\,\%$ ἐπὶ 1 ἔτος θὰ δώσουν τόκον

$$\frac{5400000 \cdot x \cdot 1}{100} \quad \text{ἢ} \quad 54000x \quad \text{δραχμάς.}$$

Αἱ 6500000 τοκιζόμεναι πρὸς $y\,\%$ ἐπὶ 1 ἔτος θὰ φέρουν τόκον

$$\frac{6500000 \cdot y \cdot 1}{100} = 65000y \ \text{δραχ.}$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο αὐτῶν τόκων ἐδόθη ἴσον πρὸς 384000 δρχ. ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν : $54000x + 65000y = 384000$ (1).

Ἀναλόγως θὰ ἔχωμεν ὅτι 5400000 δρχ. πρὸς $y\,\%$ θὰ δώσουν ἐτήσιον τόκον $54000y$ δρχ. καὶ οἱ 6500000 δρχ. πρὸς $x\,\%$ θὰ δώσουν ἐτήσιον τόκον $65000x$ δρχ. καὶ ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$54000y + 65000x = 339500 \quad (2).$$

Διὰ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$x = 3{,}5\,\% \quad \text{καὶ} \quad y = 3\,\%.$$

304. Ἔστωσαν x, y, ω τὰ ζητούμενα μερίδια θὰ ἔχωμεν τὰς ἐξισώσεις : $x + y + \omega = 8100000$, $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, $\frac{y}{\omega} = \frac{3}{4}$.

Τὸ σύστημα τοῦτο λύεται ὡς ἑξῆς :

Ἡ β' δίδει : $x = \frac{2y}{3}$ καὶ ἡ τρίτη : $\omega = \frac{4y}{3}$.

Τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν x καὶ ω εἰσάγωμεν εἰς τὴν α' ἐξίσωσιν καὶ ἔχομεν ἐξίσωσιν μὲ ἄγνωστον τὸν y. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εὑρίσκομεν: $y = 2700000$, ὁπότε ἐκ τῶν ἄλλων ἐξισώσεων εὐκόλως εὑρίσκομεν τὰ τιμὰς τῶν ἄλλων ἀγνώστων ἤτοι :

$$x = 1800000 \qquad \omega = 3600000.$$

305. Ἂς ὑποτεθῇ ὅτι τὸ μέτρον τοῦ α' εἴδους ἐτιμᾶτο x δραχ. καὶ τοῦ β' εἴδους y δραχ. Τὰ 5 μέτρα τοῦ α' θὰ ἐτιμῶντο $5x$ δραχ. καὶ τὰ 6 μέτρα τοῦ β' θὰ ἐτιμῶντο $6y$ δρχ. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ πραγματικὴ ἀξία τῶν ἀγορασθέντων ὑφασμάτων ἦτο 120000 δραχ. ἔχομεν :

$$5x + 6y = 120000 \quad (1)$$

Ἐὰν ὅμως γίνῃ ἐναλλαγὴ τῶν εἰδῶν τὰ 6μ. θὰ τιμῶνται $6x$ δραχ. καὶ τὰ 5μ. θὰ τιμῶνται $5y$ δρχ. Ἄρα θὰ ἔχωμεν :

$$6x + 5y = 122000 \quad (2)$$

Διὰ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν : $x = 12000$, $y = 10000$.

306. Γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν Φυσικήν, ὅτι ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης δύο δυνάμεων αἱ ὁποῖαι ἐνεργοῦν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ εἶναι ὁμόρροποι ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντάσεων τῶν συνιστωσῶν, ἂν δὲ εἶναι ἀντίρροποι μὲ τὴν διαφοράν. Ἂν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ x, y τὰς ἐντάσεις τῶν ζητουμένων δυνάμεων θὰ ἔχωμεν προφανῶς τὸ σύστημα :

$$x + y = 16$$
$$x - y = 2$$

Λύοντες εὑρίσκομεν : $x = 9$ Kg καὶ $y = 7$ Kg.

307. Ἔστω ὅτι ὁ Α εἶχε x ἀριθμὸν μήλων καὶ ὁ Β y ἀριθμὸν μήλων. Ὅταν ὁ Β δώσῃ 10 ἐκ τῶν ἰδικῶν του τότε ὁ μὲν Α θὰ ἔχῃ : $x + 10$ καὶ ὁ Β : $y - 10$. Ἀλλὰ τότε συμφώνως πρὸς τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν :

$$x + 10 = 1{,}5\,(y - 10) \quad (1)$$

Ὅταν τώρα ὁ Α δώσῃ 10 μῆλα εἰς τὸν Β τότε ὁ μὲν Α θὰ ἔχῃ : $x - 10$ καὶ ὁ Β : $y + 10$ ὁπότε θὰ ἔχωμεν πάλιν τὴν ἐξίσωσιν :

$$4\,(x - 10) = y + 10 \quad (2).$$

Λύοντες τὸ σύστημα τῶν (1), (2) εὑρίσκομεν : $x = 20$, $y = 30$.

Ὁμὰς τρίτη (Κινήσεως). 308. Ἐὰν καλέσωμεν x τὴν ταχύτητα τοῦ α′ καὶ y τὴν ταχύτητα τοῦ β′ τότε ἐπειδὴ τὰ κινητὰ διήνυσαν ἀπόστασίν τινα, θὰ διήνυσαν αὐτὴν εἰς χρόνον τινὰ t. Ἤτοι τὸ α′ διήνυσε διάστημα tx καὶ τὸ β′ διάστημα ty. Ἐπειδὴ δὲ κινούμενα ἀντιθέτως συνηντήθησαν, θὰ διήνυσαν ὅλην τὴν ἀπόστασιν ἤτοι : $tx + ty = 1500$ (1). Ἀλλὰ τὸ α′ εἶχε διατρέξει 300 μ. περισσότερα τοῦ β′ δηλαδή : $tx - ty = 300$ (2).

Ἐὰν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) διαιρέσωμεν κατὰ μέλη, ἀπαλείφομεν τὸν βοηθητικὸν ἄγνωστον τοῦ χρόνου t ἤτοι :

$$\frac{t\,(x + y)}{t\,(x - y)} = \frac{1500}{300} \quad \text{ἢ} \quad \frac{x + y}{x - y} = \frac{15}{3}$$

$$\text{ἢ} \quad x + y = 5\,(x - y) \quad \text{ἢ} \quad 6y = 4x \quad \text{καὶ} \quad \frac{x}{y} = \frac{3}{2}.$$

309. Ἔστω ἡ ταχύτης τοῦ α′ κινητοῦ x καὶ ἡ ταχύτης τοῦ β′ y. Τὸ α′ κινητὸν εἰς t_1 δλ. θὰ διανύσῃ διάστημα t_1x καὶ τὸ β′ t_1y. Ἐπειδὴ ὅμως συνηντήθησαν εἰς t_1 δλ. θὰ διήνυσαν ὅλην τὴν ἀπόστασιν δ ἤτοι :

$$t_1x + t_1y = \delta \quad (1).$$

Ὅταν ἡ ταχύτης τοῦ α′ αὐξηθῇ κατὰ λ °/₀ δηλαδὴ κατὰ $\frac{\lambda x}{100}$, θὰ γίνῃ, ἀπὸ x ὅπου ἦτο προηγουμένως, $x + \frac{\lambda x}{100}$. Τοῦ δὲ β′ θὰ ἐλαττωθῇ κατὰ $\frac{\lambda_1 y}{100}$ καὶ θὰ γίνῃ : $y - \frac{\lambda_1 y}{100}$.

Ἀλλὰ τότε ἡ συνάντησις θὰ γίνῃ εἰς t_2 δλ, ὅτε τὸ α′ κινητὸν θὰ διήνυσε : $\left(x + \frac{\lambda x}{100}\right) t_2$ διάστημα καὶ τὸ β′ θὰ διήνυσε : $\left(y - \frac{\lambda_1 y}{100}\right) t_2$ διάστημα. Πάλιν δὲ τότε θὰ ἔχωμεν :

$$\left(x + \frac{\lambda x}{100}\right) t_2 + \left(y - \frac{\lambda_1 y}{100}\right) t_2 = \delta \quad (2).$$

Λύομεν τώρα τὸ σύστημα τῶν (1) καὶ (2). Πρὸς τοῦτο λύομεν τὴν (1) ὡς πρὸς x καὶ ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (2).

Εὑρίσκομεν δὲ μετὰ τὰς πράξεις :

$$x = \frac{\delta\lambda_1 t_2 - 100\delta t_2 + 100\delta t_1}{(\lambda + \lambda_1)\, t_1 t_2} \qquad y = \frac{100t_2 + \lambda\delta t_2 - 100\delta t_1}{(\lambda + \lambda_1)\, t_1 t_2}.$$

310. Ἔστω ὅτι τὸ α΄ εἰς 1 δλ διανύει τόξον x^0 καὶ τὸ β΄ εἰς 1 δλ διανύει τὸ τόξον y^0.

Τὸ α΄ κινητὸν εἰς 3 δλ θὰ διανύσῃ τόξον $3x^0$ καὶ τὸ β΄ θὰ διανύσῃ τόξον $3y^0$. Ἐπειδὴ ὅμως κινοῦνται ἀντιθέτως θὰ διανύσουν τὸ τόξον τῶν 45^0 ἤτοι : $3x + 3y = 45$ (1).

Ὅταν ὅμως κινοῦνται κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν τότε τὸ α΄ θὰ διανύσῃ εἰς 5δλ τόξον $5x^0$ καὶ τὸ β΄ τόξον $5y^0$. Ἀλλὰ ἐπειδὴ θὰ συναντηθοῦν, τὸ ἓν θὰ διανύσῃ περισσότερον τοῦ ἄλλου τόξον 45^0 ἤτοι :

$$5x - 5y = 45 \quad (2).$$

Λύοντες τὸ σύστημα τῶν (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν : $x = 12^0$ καὶ $y = 3^0$.

Ὁμὰς τετάρτη : 311. Ἂς καλέσωμεν x τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τοῦ ζητουμένου διψηφίου καὶ y τὸ ψηφίον τῶν μονάδων του. Προφανῶς θὰ ἔχωμεν ὡς πρώτην ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος τήν : $x = \frac{2y}{3}$ (1).

Ἀριθμὸς ὅμως ἔχων x δεκάδας καὶ y μονάδας γράφεται $10x + y$. Ἂν ἐναλλάξωμεν τὰ ψηφία του ἤτοι ἂν ἔχωμεν y δεκάδας καὶ x μονάδας ὁ ἀριθμὸς θὰ εἶναι : $10y + x$. Ἀλλὰ συμφώνως πρὸς τὸ πρόβλημα ὁ $10y + x$ εἶναι κατὰ 18 μεγαλύτερος τοῦ $10x + y$, ἤτοι $10y + x = 10x + y + 18$ (2). Λύοντες τὸ σύστημα τῶν (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν : $x = 4$ $y = 6$ καὶ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 46.

312. Ἐπειδὴ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι τριψήφιος, περιεχόμενος μεταξὺ 400 καὶ 500 θὰ ἔχῃ ὡς ψηφίον ἑκατοντάδων τὸ 4. Ἔστω τώρα x τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων του καὶ y τὸ ψηφίον τῶν μονάδων του. Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων θὰ εἶναι : $4 + x + y = 9$ (1).

Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ὡς ἔχων 4 ἑκατοντάδας, x δεκάδας καὶ y μονάδας γράφεται : $4.100 + x\,10 + y$ ἤτοι $400 + 10x + y$.

Ὅταν ἀντιστραφῇ ἡ τάξις τῶν ψηφίων του θὰ ἔχωμεν y ἑκατοντάδας, x δεκάδας καὶ 4 μονάδας καὶ ὁ ἀριθμὸς γράφεται :

$100y + 10x + 4$. Ἀλλὰ τότε θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$100y + 10x + 4 = \frac{36}{47}(400 + 10x + y) \qquad (2).$$

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν (1) καὶ (2) καὶ εὑρίσκομεν : $x = 2$, $y = 3$ καὶ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 423.

313. Ἔστω x τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων τοῦ ζητουμένου τριψηφίου, y τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ ω τὸ ψηφίον τῶν μονάδων του.

Συμφώνως πρὸς τὸ πρόβλημα θὰ πρέπῃ νὰ ἔχωμεν :

$$x = \frac{y + \omega}{3} \qquad (1)$$

$$y = \frac{\omega + x}{2} \qquad (2)$$

Ὁ ἀριθμὸς ὁ ἔχων x ἑκατοντάδας, y δεκάδας καὶ ω μονάδας γράφεται:

$$100x + 10y + \omega.$$

Ὁ ἀντεστραμμένος θὰ ἔχῃ ω ἑκατοντάδας, y δεκάδας καὶ x μονάδας καὶ συνεπῶς γράφεται : $100\omega + 10y + x$.

Ἀλλὰ ὁ τελευταῖος οὗτος εἶναι κατὰ 198 μεγαλύτερος τοῦ προηγουμένου (ζητουμένου) ἤτοι θὰ ἔχωμεν τὴν τρίτην ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος:

$$100\omega + 10y + x = 100x + 10y + \omega + 198 \qquad (3).$$

Διατάσσομεν τὸ σύστημα τῶν (1), (2), (3) κατὰ τὰ γνωστὰ καὶ λύοντες τοῦτο εὑρίσκομεν : $x=3$, $y=4$, $\omega=5$ καὶ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 345·

314. Ἔστω x τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τοῦ ζητουμένου διψηφίου καὶ y τὸ ψηφίον τῶν μονάδων του. Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν αὐτὸς γράφεται : $10x + y$.

Ὅταν μεταξὺ τοῦ x καὶ y παρεμβάλλω τὸ 4, ὁ ἀριθμὸς θὰ τραπῇ εἰς τριψήφιον, ὅστις θὰ ἔχῃ ψηφίον ἑκατοντάδων τὸ x, δεκάδων τὸ 4 καὶ μονάδων τὸ y καὶ συνεπῶς αὐτὸς γράφεται : $100x+10 \cdot 4 + y$.

Συμφώνως πρὸς τὸ πρόβλημα τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι 604 ἤτοι :

$$10x + y + 100x + 40 + y = 604 \qquad (1).$$

Κατὰ τὴν ταυτότητα δὲ τῆς διαιρέσεως καθ' ἣν $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$, θὰ ἔχωμεν ὡς δευτέραν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος :

$$100x + 40 + y = 9\,(10x + y) + 34 \qquad (2).$$

Λύοντες τώρα τὸ σύστημα τῶν (1), (2) λαμβάνομεν ὡς τιμὰς τῶν x, y τὰς $x = 5$, $y = 7$. Ὁ ζητούμενος λοιπὸν ἀριθμὸς εἶναι ὁ 57.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

Περὶ τῶν ριζῶν τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν

315. α') Ἂν ὁ δείκτης ν τῆς ρίζης εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς δηλ. $\nu = 2\lambda$, τότε : $\sqrt[\nu]{1} = \sqrt[2\lambda]{1} = \pm 1$, διότι $(\pm 1)^{2\lambda} = 1$.

Ἂν δὲ ὁ δείκτης ν εἶναι περιττὸς ἀριθμὸς δηλ. $\nu = 2\lambda + 1$ τότε $\sqrt[\nu]{1} = \sqrt[2\lambda+1]{1} = +1$, διότι μόνον $(+1)^{2\lambda+1} = 1$, ἐνῷ $(-1)^{2\lambda+1} = -1$.

β') Πᾶσα ρίζα τοῦ μηδενὸς εἶναι μηδέν, διότι πᾶσα δύναμις τοῦ μηδενὸς (διάφορος τοῦ μηδενὸς) εἶναι μηδέν.

316. Ἔχομεν συμφώνως πρὸς τοὺς γνωστοὺς κανόνας ἐξαγωγῆς ρίζης $\sqrt{9} = \pm 3$, $\sqrt{36} = \pm 6$, $\sqrt{64} = \pm 8$, $\sqrt{-64} =$ οὐδεμίαν ρίζαν.

317. Ἔχομεν $3 - \sqrt{4} = 3 - (\pm 2) = 1$ ἢ 5. (Κανονικῶς μόνον ἡ τιμὴ 1 εἶναι ἡ ἁρμόζουσα, διότι κατὰ τὴν § 146 ἐκ τῶν δύο ριζῶν ἀρτίας τάξεως θετικοῦ ἀριθμοῦ, θεωροῦμεν μόνον τὴν θετικήν).

Ὁμοίως $\alpha + \sqrt{\alpha^2} = \alpha \pm \alpha = 2\alpha$ ἢ 0. (Κανονικῶς μόνον ἡ τιμὴ 2α ἁρμόζει). Ὁμοίως : $\alpha + \sqrt[3]{\beta^3} = \alpha + \beta$.

318. Τὸ α' μέλος $\sqrt{\alpha^2} = \pm \alpha$ ἀδιαφόρως ἂν ὁ α εἶναι θετικὸς ἢ ἀρνητικός, ἐνῷ τὸ β' μέλος ἔχει μόνον τὸ σῆμα +. Ἄρα ἡ ἰσότης δὲν εἶναι τελείως ἀκριβής.

319. Τὸ α' μέλος $\sqrt[6]{(\alpha^2)^6}$ ἔχει δύο ρίζας ἀντιθέτους τὰς $\pm\alpha^2$, ἐνῷ τὸ β' μέλος ὅπερ εἶναι α^2 ἔχει μίαν μόνον τιμὴν θετικήν. Συνεπῶς διὰ νὰ εἶναι τελείως ἀκριβὴς ἡ ἰσότης, πρέπει νὰ θεωρῶμεν μόνον τὰς θετικὰς τιμὰς τῶν ριζῶν.

320. α') Τὰ ἐν λόγῳ ἐξαγόμενα εἶναι :

$$\sqrt{4} + \sqrt[4]{16} + \sqrt[3]{-27} - \sqrt[5]{-32} = 2+2-3+2=3.$$

Ἐδῶ παρατηροῦμεν ὅτι θεωροῦμεν μόνον τὰς θετικὰς τιμὰς τῶν ριζῶν, ὡς θὰ γίνεται πάντοτε κατωτέρω καὶ ὡς εἴπομεν καὶ διὰ τὴν ἄσκησιν 317.

β') Ἔχομεν $\sqrt{4} + \sqrt[3]{8} - \sqrt[4]{16} = 2+2-2=2$.

γ') Ἔχομεν $\sqrt[3]{27} - \sqrt[5]{-32} = 3 - (-2) = 5$.

δ') Ἔχομεν $\sqrt[3]{(\alpha\beta)^5} = \sqrt[3]{\alpha^5\beta^5} = \alpha\beta\,\sqrt[3]{(\alpha\beta)^2}$ ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω).

ε') $\sqrt[3]{x^4y^4} = \sqrt[3]{x^3y^3 . xy} = xy\,\sqrt[3]{xy}$

στ') Ὁμοίως $\sqrt[3]{56} + \sqrt{-8} = \sqrt[3]{7.8} + \sqrt{4(-2)} = 2\sqrt[3]{7} + 2\sqrt{-2}$

ζ') Ὁμοίως $\sqrt{125} - \sqrt{64} = \sqrt{5^2 . 5} - \sqrt{8^2} = 5\sqrt{5} - 8$.

η') Ὁμοίως $(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2}) = 3^2 - (\sqrt{2})^2 = 7$.

θ') $\sqrt[3]{\alpha^2} = \sqrt[3]{\alpha^2}$.

320. Ἔχομεν δι' ἑκάστην τῶν παραστάσεων τὰ κάτωθι ἐξαγόμενα:

α') $\sqrt[3]{\alpha^5} = \sqrt[3]{\alpha^3 . \alpha^2} = \alpha \sqrt[3]{\alpha^2}$

$\sqrt[3]{\alpha^6} = \sqrt[3]{(\alpha^2)^3} = \alpha^2.$

$\sqrt[5]{\alpha^{25}} = \sqrt[5]{(\alpha^5)^5} = \alpha^5.$

$\sqrt[\nu]{\alpha^{2\nu}} = \sqrt[\nu]{(\alpha^2)^\nu} = \alpha^2.$

$\sqrt{5^4} = \sqrt{(5^2)^2} = 5^2 = 25.$

$\sqrt[3]{4^5} = \sqrt[3]{(2^2)^5} = \sqrt[3]{2^{10}} = \sqrt[3]{2^9 . 2} = 8 \sqrt[3]{2}.$

β') $\sqrt[5]{9^{10}} = \sqrt[5]{(9^2)^5} = 9^2 = 81.$

$\sqrt[11]{8^{22}} = \sqrt[11]{(8^2)^{11}} = 8^2 = 64.$

$\sqrt[\nu]{\alpha^{2\nu}} = \sqrt[\nu]{(\alpha^2)^\nu} = \alpha^2.$

$\sqrt[2\nu+1]{\alpha^{4\nu+2}} = \sqrt[2\nu+1]{(\alpha^2)^{2\nu+1}} = \alpha^2.$

γ') $\sqrt[3]{64^2} = \sqrt[3]{(4^3)^2} = \sqrt[3]{(4^2)^3} = 4^2 = 16.$

$\sqrt{125^4} = \sqrt{(5^3)^4} = 5^6$

$\sqrt[5]{\pm 32^3} = \sqrt[5]{\pm (2^5)^3} = \pm 2^3 = \pm 8.$

δ') $\sqrt{(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)^3} = \sqrt{[(\alpha-\beta)^2]^3} = (\alpha-\beta)^3$

$\sqrt{(\alpha^2 + 4\alpha\beta + 4\beta^2)^4} = (\alpha^2 + 4\alpha\beta + 4\beta^2)^2 = (\alpha + 2\beta)^4$

$\sqrt{(4\alpha^2 + 20\alpha\beta + 25\beta^2)^6} = \sqrt{(2\alpha + 5\beta)^{12}} = (2\alpha + 5\beta)^6.$

ε') $\sqrt[3]{(\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3)^2} = \sqrt[3]{(\alpha+\beta)^{3\cdot 2}} = (\alpha+\beta)^2$

$\sqrt{(8\alpha^6 + 12\alpha^2\beta + 6\alpha\beta^2 + \beta^3)^3} = \sqrt{(2\alpha+\beta)^{3\cdot 3}} = \sqrt{(2\alpha+\beta)^8 . (2\alpha+\beta)} =$

$= (2\alpha + \beta) \sqrt[4]{(2\alpha + \beta)}.$

ς') $7 : \sqrt{7} = \dfrac{7}{\sqrt{7}} = \dfrac{7\sqrt{7}}{\sqrt{7} . \sqrt{7}} = \dfrac{7\sqrt{7}}{7} = \sqrt{7}$

$\dfrac{11}{\sqrt{11}} = \dfrac{11 . \sqrt{11}}{\sqrt{11} . \sqrt{11}} = \dfrac{11\sqrt{11}}{11} = \sqrt{11}$

$\dfrac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha+\beta}} = \dfrac{(\alpha+\beta)\sqrt{\alpha+\beta}}{\sqrt{\alpha+\beta}\,\sqrt{\alpha+\beta}} = \dfrac{(\alpha+\beta)\sqrt{\alpha+\beta}}{\sqrt{(\alpha+\beta)^2}} = \sqrt{\alpha+\beta}$

$\dfrac{\alpha - 1}{\sqrt{\alpha-1}} = \dfrac{(\alpha-1)\sqrt{\alpha-1}}{\sqrt{\alpha-1}\,\sqrt{\alpha-1}} = \dfrac{(\alpha-1)\sqrt{\alpha-1}}{\alpha-1} = \sqrt{\alpha-1}$

321. Ἔχομεν διαδοχικῶς α') $\sqrt{54} + 3\sqrt{24} - \sqrt{6} =$

$= \sqrt{9 . 6} + 3\sqrt{4 . 6} - \sqrt{6} = 3\sqrt{6} + 6\sqrt{6} - \sqrt{6} = 8\sqrt{6}.$

β') $\sqrt{45\alpha^3} + \sqrt{125\alpha^3} - \sqrt{320\alpha^3} = \sqrt{9\alpha^2 . 5\alpha} +$

$+ \sqrt{25\alpha^2 . 5\alpha} - \sqrt{64\alpha^2 . 5\alpha} = 3\alpha\sqrt{5\alpha} + 5\alpha\sqrt{5\alpha} - 8\alpha\sqrt{5\alpha} = 0.$

γ') $\sqrt{\frac{11^4 \cdot 5}{7^2}} + \sqrt{\frac{12^2 \cdot 5^3}{7 \cdot 13^4}} \cdot 13^2 - \sqrt{\frac{11^2 \cdot 13^2}{7 \cdot 5^3}} = \frac{11^2}{7}\sqrt{5} +$
$+ 13^2 \cdot \frac{12 \cdot 5}{7 \cdot 13^2}\sqrt{\frac{5}{7}} - \frac{11 \cdot 13}{5}\sqrt{\frac{1}{7}} = \frac{121}{7}\sqrt{5} + \frac{60}{7}\sqrt{\frac{5}{7}} - \frac{143}{5}\sqrt{\frac{1}{7}}$.

322. Ἔχομεν κατὰ σειρὰν ἐφαρμόζοντες τοὺς γνωστοὺς κανόνας:

α') $x\sqrt{x-1} = \sqrt{x^2(x-1)}$ β') $3\sqrt{5} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45}$

γ') $\alpha\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} = \sqrt{\alpha^2 \cdot \frac{\beta}{\alpha}} = \sqrt{\alpha\beta}$ δ') $2\sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{4 \cdot \frac{6}{2}} = \sqrt{12}$.

ε') $7\sqrt{\frac{1}{49}} = \sqrt{7^2 \cdot \frac{1}{49}} = \sqrt{\frac{49}{49}} = \sqrt{1} = 1$.

323. Τὸ Ε. κ. π. τῶν δεικτῶν εἶναι τὸ 6. Θὰ ἔχωμεν λοιπόν:

α') $\sqrt[2\cdot3]{\alpha^3}$, $\sqrt[3\cdot2]{\alpha^2}$, $\sqrt[6\cdot1]{\alpha^1}$, ἢ $\sqrt[6]{\alpha^3}$, $\sqrt[6]{\alpha^2}$, $\sqrt[6]{\alpha}$.

β') Ε.κ.π. εἶναι τὸ 12 καὶ θὰ ἔχωμεν: $\sqrt[4\cdot3]{\alpha^3}$, $\sqrt[6\cdot2]{\alpha^2}$, $\sqrt[12\cdot1]{\gamma^1}$
ἢ $\sqrt[12]{\alpha^3}$, $\sqrt[12]{\alpha^2}$, $\sqrt[12]{\gamma}$.

γ') Ε.κ.π. εἶναι τὸ 6. Θὰ ἔχωμεν: $\sqrt[3\cdot2]{\alpha^2}$, $\sqrt[6\cdot1]{\beta}$, $\sqrt[2\cdot3]{\gamma^3}$
ἢ $\sqrt[6]{\alpha^2}$, $\sqrt[6]{\beta}$, $\sqrt[6]{\gamma^3}$.

324. α') $\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$

β') $\sqrt[6]{48} = \sqrt[6]{16 \cdot 3} = \sqrt[6]{16} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{2^4} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{3}$.

γ') $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 3$, δ') $\sqrt[2\mu]{\alpha^\mu} = \sqrt{\alpha}$.

325. α') $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{5 \cdot 20} = \sqrt{100} = 10$.

β') $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4 \cdot 2} = \sqrt[3]{8} = 2$.

γ') Τὰς τρέπομεν εἰς ρίζας τοῦ αὐτοῦ δείκτου, ἤτοι:

$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{30} = \sqrt[12]{5^4} \cdot \sqrt[12]{30^3} = \sqrt[12]{5^4 \cdot 30^3}$

δ') Ὁμοίως: $\sqrt[4]{\alpha^2} \cdot \sqrt[5]{\alpha} = \sqrt[20]{\alpha^{10}} \cdot \sqrt[20]{\alpha^4} = \sqrt[20]{\alpha^{14}}$

ε') Ὁμοίως: $\sqrt[3]{xy} \cdot \sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt[6]{x^2 y^2} \cdot \sqrt[6]{\frac{x^3}{y^3}} = \sqrt[6]{\frac{x^5}{y}}$

στ') Ὁμοίως: $\sqrt[3]{2\alpha} \cdot \sqrt[4]{5\alpha\beta} \cdot \sqrt[3]{3\beta} = \sqrt[12]{16\alpha^4}\,\sqrt[12]{125\alpha^3\beta^3}\,\sqrt[12]{81\beta^4} =$
$= \sqrt[12]{16 \cdot 125 \cdot 81 \cdot \alpha^7 \cdot \beta^7}$.

ζ') Ὁμοίως: $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{5^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{125 \cdot 4} = \sqrt[6]{500}$.

326. Ἔχομεν κατὰ σειράν:

α') $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{24}{2}} = \sqrt{12}$

β') $\frac{\sqrt[3]{7000}}{\sqrt[3]{875}} = \sqrt[3]{8} = 2$.

γ') $\dfrac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{\dfrac{x^4}{x}} = \sqrt[3]{x^3} = x.$

δ') $\dfrac{\sqrt[3]{6\alpha^4}}{\sqrt[3]{2\alpha}} = \sqrt[3]{\dfrac{6\alpha^4}{2\alpha}} = \sqrt[3]{3\alpha^3} = \alpha\sqrt[3]{3}.$

327. α') Ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα τοῦ τετραγώνου ἀθροίσματος πολλῶν προσθετέων καὶ εὑρίσκομεν :

$$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma})^2 = (\sqrt{\alpha})^2 + (\sqrt{\beta})^2 + (\sqrt{\gamma})^2 +$$
$$+ 2\sqrt{\alpha}\,.\,\sqrt{\beta} - 2\sqrt{\alpha}\,.\,\sqrt{\gamma} - 2\sqrt{\beta}\,.\,\sqrt{\gamma} =$$
$$= \alpha + \beta + \gamma + 2\sqrt{\alpha\beta} - 2\sqrt{\alpha\gamma} - 2\sqrt{\beta\gamma}$$

β') Ἔχομεν διαδοχικῶς : $(2\sqrt{x} + 8\sqrt[3]{x^2})\,.\,\sqrt[3]{x} =$
$= 2\sqrt{x}\,.\,\sqrt[3]{x} + 8\sqrt[3]{x^2}\,.\,\sqrt[3]{x} = 2\sqrt[6]{x^3}\,.\,\sqrt[6]{x^2} + 8\sqrt[3]{x^3} = 2\sqrt[6]{x^5} + 8x.$

γ') Ὁμοίως $(\sqrt{\alpha} + \sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[4]{\alpha})\,.\,\sqrt[4]{\alpha} =$
$= \sqrt{\alpha}\,.\,\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[3]{\alpha}\,.\,\sqrt[4]{\alpha} - \sqrt[4]{\alpha}\,.\,\sqrt[4]{\alpha} = \sqrt[4]{\alpha^3} + \sqrt[12]{\alpha^7} - \sqrt[4]{\alpha^2}.$

328. Ἔχομεν συμφώνως πρὸς τὴν θεωρίαν :

α') $\dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,.\,\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}.$

β') $\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{(1+\sqrt{3})\,.\,\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,.\,\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}+3}{3}.$

γ') $\dfrac{\alpha}{\sqrt[3]{\beta}} = \dfrac{\alpha\sqrt[3]{\beta^2}}{\sqrt[3]{\beta}\,.\,\sqrt[3]{\beta^2}} = \dfrac{\alpha\,.\,\sqrt[3]{\beta^2}}{\beta}.$

δ') $\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} = \dfrac{4\,.\,\sqrt{2}\,.\,\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3}\,.\,\sqrt[3]{3^2}} = \dfrac{4\,.\,\sqrt[6]{72}}{3}.$

ε') $\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{(x-\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})} = \dfrac{(x-\sqrt{x^2-1})^2}{x^2-(\sqrt{x^2-1})^2} =$

$= \dfrac{x^2+x^2-1-2x\sqrt{x^2-1}}{1} = \dfrac{2x^2-1-2x\sqrt{x^2-1}}{1} = 2x^2-1-2x\sqrt{x^2-1}.$

329. α') $\alpha^{3\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{7}{2}} = \sqrt{\alpha^7}$, ἤτοι σημαίνει ρίζαν ἔχουσαν δείκτην τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλασματικοῦ ἐκθέτου, καὶ ὡς ἐκθέτην τοῦ ὑπορρίζου τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλασματικοῦ ἐκθέτου.

β) $\alpha^{4\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{9}{2}} = \sqrt{\alpha^9}.$

γ') $\alpha^{-\frac{3}{8}} = \dfrac{1}{\alpha^{\frac{3}{8}}} = \dfrac{1}{\sqrt[8]{\alpha^3}}.$

δ) $32^{-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{12}} = 32^{-\frac{3}{4\,.\,12}} = 32^{-\frac{1}{16}} = \frac{1}{32^{\frac{1}{16}}} = \frac{1}{\sqrt[16]{32}}$.

330. α) $\left(3-2^{-\frac{1}{3}}\right).\left(3-2^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(3-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\left(3-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$

$= 9-\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}\,.\,\sqrt{2}} = 9-\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt[3]{2^2}}{2}+\frac{\sqrt[6]{2}}{2}$

β) $\left(\alpha+\beta^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\alpha-\beta^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(\alpha+\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)\left(\alpha-\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right) = \alpha^2-\frac{1}{\beta}$

γ) $\left(2^{-\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}}\right)\left(2^{-\frac{1}{2}}-3^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$

δ) $\left(2^{-\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}}+1\right)^2 = 2^{-\frac{2}{2}}+3^{-\frac{2}{2}}+1+2\,.\,2^{-\frac{1}{2}}\,.\,3^{-\frac{1}{2}}+$
$+2\,.\,2^{-\frac{1}{2}}+2\,.\,3^{-\frac{1}{2}} = 2^{-1}+3^{-1}+1+2\,.\,\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{2}}+$
$+\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+1+\frac{2}{\sqrt{6}}+\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{11}{6}+\frac{2\sqrt{6}}{6}+$
$+\frac{2\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{11+2\sqrt{6}+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}}{6}.$

ε) $\alpha^{0,8}\,.\,\alpha^{1,4}\,.\,\alpha^{-0,2} = \alpha^{0,8+1,4-0,2} = \alpha^{2}.$

στ) $x^{\frac{3}{4}} : x^{-\frac{2}{3}} = \frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{-\frac{2}{3}}} = x^{\frac{2}{4}}\,.\,x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}} = x^{\frac{17}{12}} =$

$= \sqrt[12]{x^{17}} = x\,.\,\sqrt[12]{x^5}.$

ζ) $x^{-\frac{2}{3}} : x^{\frac{4}{5}} = \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{4}{5}}} = x^{-\frac{2}{3}}\,.\,x^{-\frac{4}{5}} = x^{-\frac{2}{3}-\frac{4}{5}} =$

$= x^{-\frac{22}{15}} = \frac{1}{\sqrt[15]{x^{22}}} = \frac{1}{x\cdot\sqrt[15]{x^7}}.$

η) $\alpha^{\frac{1}{4,2}} : \alpha^{-0,8} = \alpha^{\frac{1}{4,2}-(-0,8)} = \alpha^{\frac{1}{4,2}+0,8} = \alpha^{\frac{10}{42}+\frac{8}{10}} =$

$$=\alpha^{\frac{5}{21}+\frac{4}{5}}=\alpha^{\frac{109}{105}}=\sqrt[105]{\alpha^{109}}.$$

θ') $\alpha^{-1,4}:\alpha^{1,2}=\alpha^{-1,4-(+1,2)}=\alpha^{-2,6}=\alpha^{-\frac{26}{10}}=$

$$=\frac{1}{\alpha^{\frac{13}{5}}}=\frac{1}{\sqrt[5]{\alpha^{13}}}=\frac{1}{\alpha^2\sqrt[5]{\alpha^3}}.$$

ι') $8^{\frac{4}{5}}4^{-\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{8^4}\,\frac{1}{\sqrt[5]{4}}=\sqrt[5]{\frac{8^4}{4}}=\sqrt[5]{2^{10}}=4.$

331. α') $\left(\alpha^{-\frac{1}{1}}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(\alpha^{-1}\right)^{\frac{1}{4}}=\alpha^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha}}.$

β') $\left(\alpha^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}=\alpha^{-\frac{6}{12}}=\alpha^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\alpha^{1/2}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$

γ') $\left(\alpha^{-\frac{5}{6}}\right)^{-\frac{4}{5}}.\alpha^{-\frac{3}{4}}=\alpha^{+\frac{20}{30}}.\alpha^{-\frac{3}{4}}=\alpha^{\frac{2}{3}-\frac{3}{4}}=\alpha^{-\frac{1}{12}}=$

$$=\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{12}}}=\frac{1}{\sqrt[12]{\alpha}}.$$

δ') $25^{\frac{7}{2}}.16^{-\frac{13}{4}}=\sqrt{25^7}.\frac{1}{16^{\frac{13}{4}}}=\sqrt{25^7}.\frac{1}{\sqrt[4]{16^3}}=$

$$=\sqrt[4]{25^{14}}.\frac{1}{\sqrt[4]{16^3}}=\sqrt[4]{\frac{25^{14}}{16^3}}=\frac{5^7}{2^3}.$$

ε') $49^{-2\frac{1}{2}}.9^{-5\frac{1}{2}}=49^{-\frac{5}{2}}.9^{-\frac{11}{2}}=\frac{1}{49^{\frac{5}{2}}}\cdot\frac{1}{9^{\frac{11}{2}}}=$

$$=\frac{1}{\sqrt{49^5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{9^{11}}}=\frac{1}{7^5}\cdot\frac{1}{3^{11}}=\frac{1}{7^5.3^{11}}.$$

στ') $\frac{49^{-\frac{7}{2}}.5^{-\frac{13}{4}}}{256^{\frac{13}{4}}.256^{-\frac{9}{4}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{49^7}}\ \frac{1}{\sqrt[4]{5^{13}}}}{\sqrt[4]{256^{13}}.\frac{1}{\sqrt[4]{256^9}}}=$

$$=\frac{\frac{1}{7^7\sqrt[4]{5^{13}}}}{\sqrt{\frac{256^{13}}{256^9}}}=\frac{\frac{1}{7^7\sqrt{5^{13}}}}{\sqrt[4]{256^4}}=\frac{1}{7^7.256.\sqrt[4]{5^{13}}}.$$

ζ') $\frac{36^{-5\frac{1}{2}}+169^{-4\frac{1}{2}}}{8^{-5\frac{1}{3}}+27^{-4\frac{1}{3}}}=\frac{36^{-\frac{11}{2}}+169^{-\frac{9}{2}}}{8^{-\frac{16}{3}}+27^{-\frac{13}{3}}}=$

$$\frac{\dfrac{1}{\sqrt{36^{11}}}+\dfrac{1}{\sqrt{169^{9}}}}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{8^{16}}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{27^{13}}}}=\frac{\dfrac{1}{6^{11}}+\dfrac{1}{13^{9}}}{\dfrac{1}{2^{16}}+\dfrac{1}{3^{13}}}=\frac{\dfrac{13^{9}+6^{11}}{6^{11}\,.\,13^{9}}}{\dfrac{3^{13}+2^{16}}{2^{16}\,.\,3^{13}}}=$$

$$=\frac{(13^{9}+6^{11})\,2^{16}\,.\,13^{13}}{(3^{13}+2^{16})\,6^{11}\,.\,13^{9}}.$$

η') $$\frac{125^{-2\frac{1}{3}}+49^{6\frac{1}{2}}}{144^{-3\frac{1}{2}}-64^{2\frac{1}{2}}}=\frac{125^{-\frac{7}{3}}+49^{\frac{13}{2}}}{144^{-\frac{7}{2}}-64^{\frac{5}{2}}}=$$

$$=\frac{\dfrac{1}{\sqrt[3]{125^{7}}}+\sqrt{49^{13}}}{\dfrac{1}{\sqrt{144^{7}}}-\sqrt{64^{5}}}=\frac{\dfrac{1}{5^{7}}+7^{13}}{\dfrac{1}{12^{7}}-8^{5}}=\frac{(1+7^{13}\,.\,5^{7})\,12^{7}}{(1-8^{5}\,.\,12^{7})\,5^{7}}.$$

332. α') $$\frac{x+\sqrt{\psi}}{x-\sqrt{\psi}}=\frac{(x+\sqrt{\psi})\,(x+\sqrt{\psi})}{(x-\sqrt{\psi})\,(x+\sqrt{\psi})}=\frac{(x+\sqrt{\psi})^{2}}{x^{2}-\psi}=$$

$$=\frac{x^{2}+2x\sqrt{\psi}+\psi}{x^{2}-\psi}.$$

β') $$\frac{\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}}{\alpha+\sqrt{\beta}}=\frac{(\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha})\,(\alpha-\sqrt{\beta})}{(\alpha+\sqrt{\beta})\,(\alpha-\sqrt{\beta})}=$$

$$=\frac{\alpha^{2}\sqrt{\beta}-\alpha\beta+\alpha\beta\sqrt{\alpha}-\beta\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha^{2}-\beta}.$$

γ') $$\frac{x\,.\,\psi}{\sqrt{\psi^{3}}-\sqrt{\psi^{2}\chi}}=\frac{x\psi\,(\sqrt{\psi^{3}}+\sqrt{x\psi^{2}})}{(\sqrt{\psi^{3}}-\sqrt{x\psi^{2}})\,(\sqrt{\psi^{3}}+\sqrt{x\psi^{2}})}=$$

$$=\frac{x\psi\,(\sqrt{\psi^{3}}+\sqrt{x\psi^{2}})}{\psi^{3}-x\psi^{2}}=\frac{x\psi\sqrt{\psi^{2}}\;(\sqrt{\psi}+\sqrt{x})}{\psi^{2}\,(\psi-x)}=\frac{x\psi^{2}\,(\sqrt{\psi}+\sqrt{x})}{\psi^{2}\,(\psi-x)}=$$

$$=\frac{x\,(\sqrt{\psi}+\sqrt{x})}{\psi-x}.$$

δ') $$\frac{\sqrt{\alpha+\beta}+\sqrt{\alpha-\beta}}{\sqrt{\alpha+\beta}-\sqrt{\alpha-\beta}}=\frac{(\sqrt{\alpha+\beta}+\sqrt{\alpha-\beta})^{2}}{(\sqrt{\alpha+\beta})^{2}-(\sqrt{\alpha-\beta})^{2}}=$$

$$=\frac{\alpha+\beta+\alpha-\beta+2\sqrt{(\alpha+\beta)\,(\alpha-\beta)}}{(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)}=\frac{2\alpha+2\sqrt{\alpha^{2}-\beta^{2}}}{2\beta}=\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^{2}-\beta^{2}}}{\beta}$$

Περὶ ρίζης τῶν μονωνύμων

Ἀσκήσεις 333. α′) $\sqrt{64\alpha^4\gamma^2\beta^8} = \sqrt{8^2(\alpha^2)^2.\gamma^2.(\beta^4)^2} = \pm 8\alpha^2\gamma\beta^4$.

β′) $\sqrt{\dfrac{4\alpha^2\beta^2\gamma}{9}} = \pm\dfrac{2\alpha\beta}{3}\sqrt{\gamma}$.

γ′) $\sqrt{\dfrac{\beta^3\gamma^3\delta^5}{4\alpha^4}} = \sqrt{\dfrac{\beta^2\gamma^2\delta^4\,\beta\gamma\delta}{4\alpha^4}} = \pm\dfrac{\beta\gamma\delta^2}{2\alpha^2}\sqrt{\beta\gamma\delta}$.

δ′) $\sqrt{\dfrac{32\alpha^2\beta^4\gamma^2}{45\delta^4\varepsilon^6}} = \sqrt{\dfrac{16\alpha^2.\beta^4\gamma^2.2}{3^2\delta^2\varepsilon^6 5}} = \pm\dfrac{4\alpha\beta^2\gamma}{3\delta^2\varepsilon^3}\sqrt{\dfrac{2}{5}}$

ε′) $\sqrt{\dfrac{125\alpha^3\beta^4\gamma^6}{64}} = \sqrt{\dfrac{5^2.\alpha^2\beta^4\gamma^6.5\alpha}{8^2}} = \pm\dfrac{5\alpha\beta^2\gamma^3}{8}\sqrt{5\alpha}$.

ϛ′) $\sqrt{\dfrac{9x^2y^4}{64\alpha^4\beta^2}} = \pm\dfrac{3xy^2}{8\alpha^2\beta}$

ζ′) $\sqrt{\dfrac{3\alpha^2\beta^3\gamma\eta^6}{16\varepsilon^2\delta^3\theta^8}} = \sqrt{\dfrac{\alpha^2\beta^2\eta^6\,3\beta\gamma}{16\varepsilon^2\delta^2\theta^8.\delta\varepsilon}} = \pm\dfrac{\alpha\beta\eta^3}{4\varepsilon\delta\theta^4}\sqrt{\dfrac{3\beta\gamma}{\delta\varepsilon}}$

334. α′) $\sqrt[3]{8\alpha^6\beta^9\gamma} = \sqrt[3]{2^3(\alpha^2)^3(\beta^3)^3(\gamma^3)} = 2\alpha^2\beta^3\gamma^3$.

β′) $\sqrt[3]{-64\alpha^6\beta^3\gamma^9} = \sqrt[3]{(-4)^3.(\alpha^2)^3.\beta^3(\gamma^3)^3} = -4\alpha^2\beta\gamma^3$

γ′) $\sqrt[3]{-\dfrac{8\alpha^3\beta^5\gamma^6}{125\delta^3\varepsilon^2}} = \sqrt[3]{-\dfrac{8\alpha^3\beta^3\gamma^6.\beta^2}{125\delta^3.\varepsilon^2}} = -\dfrac{2\alpha\beta\gamma^2}{5\delta}\sqrt[3]{\dfrac{\beta^2}{\varepsilon^2}}$

δ′) $\sqrt[3]{\dfrac{8\alpha^3\beta\gamma^6}{27\beta^4\varepsilon^4}} = \sqrt[3]{\dfrac{8\alpha^3\gamma^6.\beta}{27\beta^3\varepsilon^3.\beta\varepsilon}} = \dfrac{2\alpha\gamma^2}{3\beta\varepsilon}\sqrt[3]{\dfrac{1}{\varepsilon}}$

Περὶ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν

Ἀσκήσεις: 335. Ἔστω ὑπάρχει εἷς ἀριθμὸς κλασματικὸς π. χ. τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ οὗ ἡ τρίτη δύναμις ἰσοῦται μὲ 7 δηλ. $\frac{\alpha^3}{\beta^3} = 7$. Ἀλλὰ α, β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὁπότε καὶ αἱ δυνάμεις αὐτῶν, κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς Ἀριθμ. θὰ εἶναι πρῶται πρὸς ἀλλήλας. Ἄρα ἀδύνατον νὰ διαιρῇ ὁ β^3 τὸν α^3 καὶ νὰ δίδῃ πηλίκον τὸν ἀκέραιον 7. Ἄρα οὔτε κλασματικὸς ἀριθμὸς ὑπάρχει τοῦ ὁποίου ἡ τρίτη δύναμις νὰ ἰσοῦται μὲ τὸν 7. Ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ 7 θὰ εἶναι $\sqrt[3]{7} = 1{,}912\ldots$

336. Ὁμοίως ὡς ἀνωτέρω σκεπτόμενοι ἔχομεν ὅτι, ἂν ὑπάρχῃ κλασματικὸς ἀριθμὸς ἔστω π. χ. τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ τοῦ ὁποίου ἡ νυοστὴ δύναμις νὰ ἰσοῦται μὲ τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν Α, θὰ πρέπῃ $\frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu} = A$. Ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ α, β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ οἱ α^ν, β^ν θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Συνεπῶς ὁ β^ν δὲν διαιρεῖ τὸν α^ν καὶ εἶναι ἀδύνατος ἡ ὑπόθεσίς μας.

337. Ὁ ἀριθμὸς 3,568 εἶναι ὅριον τοῦ 3,567999.... διότι εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ ἑνὸς χωρὶς αὐτὸς ὁ ἴδιος νὰ εἶναι καὶ μικρότερος τοῦ ἄλλου.

Π. χ. Ὁ ἀριθμὸς 3,568 εἶναι ὅριον τοῦ 3,567999.... διότι εἶναι μικρότερος καὶ τοῦ 3,567999.... Ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ $3{,}568 - 8{,}56798 = 0{,}00002$ ἐνῶ ἡ διαφορὰ $3{,}568 - 3{,}567999\ldots = 0{,}00001\ldots$ ἄρα εἶναι μικρότερος καὶ τοῦ 3,567999.

Διὰ νὰ ἐξετάσωμεν τώρα ποῖος εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 18,1557..... καὶ 18,145291.... παρατηροῦμεν ὅτι ὁ πρῶτος εἶναι μεγαλύτερος ἐπειδὴ περιέχει τὰς μονάδας τοῦ β'. καὶ ἄλλας ἐπὶ πλέον.

338. Ἔχομεν εὐκόλως $3{,}14124\ldots + 0{,}68455\ldots + 1{,}72354\ldots + 12{,}53652\ldots = 18{,}0359\ldots$

339. α') $\sqrt{19} + \sqrt{3} = 4{,}35886\ldots + 1{,}73205\ldots = 6{,}0909\ldots$

β') $\sqrt{19} - \sqrt{3} = 4{,}35886\ldots - 1{,}73205\ldots = 2{,}6268\ldots$

340. Ἔχομεν $3{,}542754\ldots - 6{,}37245\ldots = - 2{,}8297\ldots$

341. α') $\sqrt{5} - \sqrt{2} = 2{,}336\ldots - 4{,}414\ldots = 0{,}822\ldots$

β') $\sqrt{2} - \sqrt{7} = 1{,}414\ldots - 2{,}6457\ldots = - 1{,}2315\ldots$

Περὶ φανταστικῶν καὶ μιγάδων ἀριθμῶν

Ἀσκήσεις: 342. α') Ὁ μιγὰς 2—0,74i παρίσταται μὲ τὸ σημεῖον τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας 2 καὶ — 0,74 καὶ εὑρίσκεται γραφικῶς πολὺ εὔκολα, ὅπως ἀναγράφεται εἰς τὰ παραδείγματα τοῦ βιβλίου.

β') Ὁ μιγὰς $5+3i$ παρίσταται διὰ τοῦ σημείου τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας 5 καὶ 3.

γ') Ὁμοίως ὁ μιγὰς $6-3i$ παρίσταται μὲ τὸ σημεῖον ὅπερ ἔχει συντεταγμένας 6 καὶ -3.

δ') Ὁμοίως ὁ $-0,75-0,62i$ μὲ τὸ σημεῖον $(-0,75 \cdot -0,62)$.

ε') Ὁμοίως ὁ μιγὰς $2+4i$ μὲ τὸ σημεῖον $(2 \cdot 4)$.

στ') Ὁμοίως ὁ μιγὰς $3-4i$ μὲ τὸ σημεῖον $(3 \cdot -4)$.

ζ') Ὁμοίως $(2, -0,64) = 2-0,64i$ μὲ τὸ σημεῖον $(2, -0,64)$.

η') Ὁμοίως $(-6, -3) = -6-3i$ μὲ τὸ σημεῖον $(-6' -3)$.

343. Τὰ ἀθροίσματα τῶν πρώτου καὶ δευτέρου εἶναι $(2-0,74i) + (5+3i) = 7-2,26i$.

τοῦ πρώτου καὶ τρίτου $(2-0,74i)+(6-3i) = 8-3,74i$

τοῦ πρώτου καὶ τετάρτου $(2-0,74i)+(-0,75-0,62i) = 1,25-1,36i$.

» β' καὶ γ' $(5+3i)+(6-3i) = 11$.

» β' καὶ δ' $(5+3i)+(-0,75-0,62i) = 4,25+2,38i$.

» γ' καὶ δ' $(6-3i)+(-0,75-0,62i) = 5,25-3,62i$

Εὑρίσκομεν τώρα τὰς διαφοράς:

Τοῦ α' καὶ β' εἶναι $(2-0,74i)-(5+3i) = -3-3,74i$

» α' καὶ γ' εἶναι $(2-2,74i)-(6-3i) = -4+0,26i$

» α' καὶ δ' εἶναι $(2+0,74i)-(-0,75-0,62i) = 2,75-0,1$

» β' καὶ γ' εἶναι $(5+3i)-(6-3i) = -1+6i$

» β' καὶ δ' εἶναι $(5+3i)-(-0,75-0,62i) = 5,75+3,62i$

Εὑρίσκομεν τώρα τὰ γινόμενα:

Τοῦ α' καὶ β εἶναι $(2-0,74i).(5+3i) = 10+6i-3,7i+2,22 = 12,22+2,3i$

Τοῦ α' καὶ γ' εἶναι $(2-0,74i).(6-3i) = 12-4,44i-6i-2,22 = 9,78-10,44i$.

Τοῦ α' καὶ δ' εἶναι $(2-0,74i)(-0,75-0,62i) = -1,5+0,555i-1,24i-0,4588 = -1,9588-0,685i$

Τοῦ β' καὶ γ' εἶναι $(5+3i)(6-3i) = 30-15i+18i+9 = 39+3i$

Τοῦ β' καὶ δ' εἶναι $(5+3i)(-0,75-0,62i) =$

$= -3,75-2,25i-3,1i+1,86 = -1,89-5,35i$

Τοῦ γ' καὶ δ' εἶναι $(6-3i)(-0,75-0,62i) =$

$= 4,5+2,25i-3,72i-1,86 = 2,64-1,74i$.

Εὑρίσκομεν τώρα τὰ πηλίκα:

$$\frac{2-0,74i}{5+3i} = \frac{(2-0,74i)(5-3i)}{(5+3i)(5-3i)} = \frac{7,18-9,7i}{34} = \frac{7,18}{34} - \frac{9,7}{34}i$$

$$\frac{2-0.74i}{6-3i} = \frac{(2-0,74i)(6+3i)}{45} \text{ κ.λ.π.}$$

$$\frac{2-0,74i}{-0,75-0,62i} = \frac{(2-0,74i)(-0,74+0,62i)}{0,75^2+0,62^2} \text{ κ.λ.π.}$$

$$\frac{5+3i}{6-3i} = \frac{(5+3i)(6+3i)}{45} \text{ κ.λ.π.}$$

$$\frac{6-3i}{-0,75-0,62i} = \frac{(6-3i)(-0,75+0,62i)}{0,75^2+0,62^2} \text{ κ.λ.π.}$$

344. α') $(5,3)\,(7,3) = (5+3i)\,(7+3i) = 35 + 15i + 21i - 9 = 26 + 36i$

β') $(2,2)^2 = (2+2i)^2 = 4 + 8i - 4 = 8i$

γ') $(2,-7)\,(9,-2) = (2-7i)\,(9-2i) = 18-63i-4i-14 = 4-67i$

δ') $(6,7)\,(6,-7) = (6+7i)\,(6-7i) = 36+49 = 85.$

345. α') $(11,8)\,(11,-8) = (11+8i)\,(11-8i) = 121+64 = 185.$

β') $(14+15i)\,(14-15i) = 196+225 = 421.$

γ') $(3+i\sqrt{2})\,(4-3i\sqrt{2}) = 12 + 4i\sqrt{2} - 9i\sqrt{2} +$
$+ 6 = 18 - 5i\sqrt{2}$

δ') $$\frac{8-7i\sqrt{3}}{5+4i\sqrt{3}} = \frac{(8-7i\sqrt{3})\,(5-4i\sqrt{3})}{(5+4i\sqrt{3})\,(5-4i\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{40-35i\sqrt{3}-32i\sqrt{3}-84}{25+48} =$$

$$= \frac{-44-67i\sqrt{3}}{73} = -\frac{44}{73} - \frac{67\sqrt{3}}{73}\,i$$

10