ΧΡΗΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
τ. Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν
ἐν τῷ Πειραματικῷ Σχολείῳ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν

ΛΥΣΕΙΣ
ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ
ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ
ΑΛΓΕΒΡΑΣ
ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ ΤΟΥ Ο.Ε.Δ.Β.

Ἐκτὸς τῶν λύσεων περιέχει: Παρατηρήσεις ἐπὶ τῶν ἐννοιῶν τῆς Ἀλγέβρας. Σημειώσεις ἐπὶ σημαντικῶν ζητημάτων. Κανόνας, τύπους, πίνακας καὶ ὁδηγίας διὰ τὴν ταχυτέραν λύσιν ζητημάτων τῆς Ἀλγέβρας.

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ «ΕΣΤΙΑΣ»
ΙΩΑΝΝΟΥ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & ΣΙΑΣ Α. Ε.
38 - ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ - 38

ΑΛΛΑΓΑΙ ΤΟΥ ΑΥΞΟΝΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΤΗΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ 1956

Οἱ αὔξοντες ἀριθμοὶ τῶν λύσεων τῶν ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων τῆς 'Αλγέβρας εἶναι τῆς ἐκδόσεως 1953. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἰς τὴν ἔκδοσιν 1956 ἀλλάζουν ὡς κάτωθι:

Αἱ ἀσκήσεις ἀπὸ 1 ἕως 51 φέρουν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Αἱ ἀσκήσεις 51α, 52α, 53α φέρουν ἀντιστοίχως τοὺς ἀριθμοὺς 52, 53, 54.

Αἱ ἀσκήσεις ἀπὸ 53 ἕως 144 φέρουν ἀριθμοὺς ηὐξημένους κατὰ 2, δηλαδὴ ἀρχίζουν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 55 καὶ τελειώνουν εἰς τὸν 146.

Αἱ ἀσκήσεις ἀπὸ 145 ἕως 170 φέρουν ἀριθμοὺς ηὐξημένους κατὰ 1 δηλαδὴ ἀρχίζουν ἀπὸ τὸν 146 καὶ τελειώνουν εἰς τὸν 171.

Αἱ ἀσκήσεις 171, 172 φέρουν τὸν ἀριθμὸν 172.

Ἡ ἄσκησις 173 φέρει τὸν ἀριθμὸν 173.

Αἱ ἀσκήσεις 174, 175 φέρουν τὸν ἀριθμὸν 174.

Αἱ ἀσκήσεις ἀπὸ 176 ἕως 232 φέρουν ἀριθμοὺς ἠλαττωμένους κατὰ 1, δηλαδὴ ἀρχίζουν ἀπὸ τὸν 175 καὶ τελειώνουν εἰς τὸν 231.

Αἱ ἀσκήσεις 231 (δευτέρα 231), 232, 233 φέρουν ἀντιστοίχως τοὺς ἀριθμοὺς 232, 233, 234.

Αἱ ἀσκήσεις ἀπὸ 236 ἕως 266 φέρουν ἀριθμοὺς ἠλαττωμένους κατὰ 1, δηλαδὴ ἀρχίζουν ἀπὸ τὸν 235 καὶ τελειώνουν εἰς τὸν 265.

Αἱ ἀσκήσεις α') καὶ β') τῆς 267 φέρουν ἀντιστοίχως τοὺς ἀριθμοὺς 266, 267.

Αἱ ἀσκήσεις ἀπὸ 268 ἕως 285 ἔχουν τοὺς αὐτοὺς ἀριθμούς.

Αἱ ἀσκήσεις 286, 287 εἶναι ἀντιστοίχως αἱ γ') καὶ δ') τῆς ἀσκήσεως 285.

Αἱ ἀσκήσεις ἀπὸ 288 ἕως 320 φέρουν ἀριθμοὺς ἠλαττωμένους κατὰ 2, δηλαδὴ ἀρχίζουν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 286 καὶ τελειώνουν εἰς τὸν 318.

Αἱ ἀσκήσεις ἀπὸ 320 ἕως 670 (τελευταία ἄσκησις), φέρουν ἀριθμού ἠλαττωμένους κατὰ 1, δηλαδὴ ἀρχίζουν ἀπὸ τὸν 319 καὶ τελειώνουν εἰς τὸ 669.

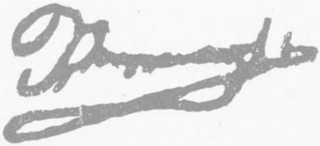
ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
Τ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΟΥ ΠΕΙΡ. ΣΧΟΛ. ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΛΥΣΕΙΣ
ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ
ΑΛΓΕΒΡΑΣ
ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ ΤΟΥ Ο.Ε.Σ.Β.

Ἐκτὸς τῶν λύσεων περιέχει: Παρατηρήσεις ἐπὶ τῶν ἐννοιῶν τῆς Ἀλγέβρας. Σημειώσεις ἐπὶ σημαντικῶν ζητημάτων. Κανόνας, τύπους, πίνακας καὶ ὁδηγίας διὰ τὴν ταχυτέραν λύσιν ζητημάτων τῆς Ἀλγέβρας.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ„
ΙΩΑΝΝΟΥ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & Σ[ΙΑΣ] Α.Ε.
38 - ΟΔΟΣ ΤΣΩΡΤΣΙΛ - 38

Τὰ γνήσια ἀντίτυπα φέρουν τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως καὶ τὴν σφραγῖδα τοῦ Βιβλιοπωλείου τῆς «Ἑστίας».



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Ἡ ἄλγεβρα εἶναι γενικὴ ἀριθμητικὴ ἡ ὁποία ἀσχολεῖται μὲ τοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὰ ἐπ' αὐτῶν ζητήματα. Χρησιμοποιεῖ δὲ γράμματα διὰ τὴν παράστασιν ἀριθμῶν καὶ ποσῶν, ἐργάζεται μὲ τύπους καὶ ἔχει εἰσαγάγει τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμούς. Οὕτω δὲ γενικεύει καὶ ἁπλουστεύει τὰ προβλήματα.

Ἀσκήσεις. *1.* Ἂν χ εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός, εὑρίσκομεν μὲ τὴν ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν, ὅτι $\chi=10\,000$ δρχ. $\times\frac{120}{10}=120\,000$ δρχ. *Γενικεύοντες* δὲ λέγομεν, ***ἂν α ὀκάδες ἐμπορεύματος τιμῶνται β δρχ., πόσον τιμῶνται γ ὀκάδες αὐτοῦ;*** Εὑρίσκομεν δὲ ὡς ἄνω ὅτι τιμῶνται

$$\chi=\beta \text{ δρχ.} \cdot \frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\beta\cdot\gamma}{\alpha} \text{ δρχ.}$$

2. Ἀντίστροφος τοῦ 5 εἶναι ὁ $\frac{1}{5}$, τοῦ $\frac{3}{4}$ ὁ $\frac{4}{3}$ καὶ τοῦ $13{,}5=\frac{135}{10}=$ $=\frac{27}{2}$ ὁ $\frac{2}{27}$, διότι $5\cdot\frac{1}{5}=1$, $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=1$ καὶ $\frac{27}{2}\cdot\frac{2}{27}=1$. *Γενικῶς* δέ, ἀντίστροφος τοῦ α εἶναι ὁ $\frac{1}{\alpha}$, τοῦ $\frac{1}{\alpha}$ εἶναι ὁ $\frac{\alpha}{1}=\alpha$ καὶ τοῦ $\frac{\gamma}{\delta}$ ἀντίστροφος εἶναι ὁ $\frac{\delta}{\gamma}$.

3. Ἔστω οἱ γενικοὶ ἀριθμοὶ α, β, $\frac{\gamma}{\delta}$. Τὰ διπλάσια αὐτῶν εἶναι $\alpha\cdot 2$, $\beta\cdot 2$, $\frac{\gamma}{\delta}\cdot 2$, τὰ ὁποῖα γράφονται συνηθέστερον 2α, 2β, $2\cdot\frac{\gamma}{\delta}$. Τὰ τριπλάσια αὐτῶν εἶναι $\alpha\cdot 3$, $\beta\cdot 3$, $\frac{\gamma}{\delta}\cdot 3$ τὰ ὁποῖα γράφονται 3α, 3β, $3\cdot\frac{\gamma}{\delta}$ καὶ τριπλάσια αὐτῶν εἶναι $\alpha\nu$, $\beta\nu$, $\frac{\gamma}{\delta}\cdot\nu$.

4. Παριστάνονται μὲ $\frac{5}{8}\cdot\alpha$ καὶ $\frac{\mu}{\nu}\cdot\alpha$.

5. Εἶναι ἀντιστοίχως $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha\beta$, $\alpha:\beta$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta}$.

6. Ὁ τύπος τοῦ κεφαλαίου εἰς ἔτη εἶναι $K=\frac{T\cdot 100}{X\cdot E}$. Οὕτως, ἂν $X=3$ ἔτη, $E=8\,\%$ καὶ $T=48\,000$ δρχ. εἶναι $K=\frac{48\,000\cdot 100}{3\cdot 8}=200\,000$ δρχ.

Θετικοὶ καὶ ἀρνητικοὶ ἀριθμοί.

Ἀσκήσεις. 7. *Θερμότης καὶ ψῦχος.* Θερμοκρασία $+5^0$ (ἄνωθεν τοῦ μηδενὸς) καὶ -5^0 (κάτωθεν τοῦ μηδενός).

Ἐνεργητικὸν ἐπιχειρήσεως, π. χ. $+5\,000\,000$ δρχ. *Παθητικὸν* αὐτῆς $-5\,000\,000$ δρχ.

Κέρδος, π.χ. $+800$ λίραι. *Ζημία*, -800 λίραι.

Περιουσία, π.χ. $+10\,000\,000$ δρχ. *Χρέος*, $-10\,000\,000$ δρχ.

Μέλλων χρόνος, π. χ. $+8$ ὧραι (μετὰ μεσημβρίαν). *Παρελθὼν* χρόνος, -8 ὧραι (πρὸ μεσημβρίας). Μεσημβρία 0.

8. Εἶναι οἱ -5, -12, 3, 8, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{9}$, $-\frac{2}{7}$, $\frac{4}{9}$, $-6{,}15$, $-7{,}45$, $-0{,}12$, $34{,}85'$.

9. *Ὁμόσημοι*, 5, 3,8· $\frac{7}{8}$ ἢ οἱ $-0{,}9 \cdot -7\frac{1}{8}$, -15.

Ἀντίθετοι, $+6$ καὶ -6. Ἀπόλυτοι τιμαὶ αὐτῶν εἶναι αἱ $|+6| = 6$ καὶ $|-6| = 6$.

10. Εἶναι $|3| = 3$, $|-13| = 13$, $|-15| = 15$, $|28| = 28$, $|-3{,}5| = 3{,}5$ $\left|13\frac{5}{8}\right| = 13\frac{5}{8}$, $\left|-\frac{7}{9}\right| = \frac{7}{9}$ κλπ.

11. Εἶναι $|\alpha| = \alpha$, $|-\alpha| = \alpha$, $|-\beta| = \beta$ καὶ $|+\beta| = \beta$, ἐὰν οἱ α, β εἶναι θετικοί, καὶ $|\alpha| = -\alpha$, $|-\alpha| = -\alpha$, $|-\beta| = -\beta$ καὶ $|+\beta| = -\beta$ ἐὰν οἱ α καὶ β εἶναι ἀρνητικοί.

12. Εἶναι οἱ $-\frac{4}{8} = -0{,}5\left(=-\frac{1}{2}\right)$, $\frac{2}{10} = \frac{3}{15}\left(=\frac{1}{5}\right)$, $\frac{4}{2} = \frac{20}{10}\ (=2)$, $\frac{18}{3} = \frac{12}{2}\ (=6)$, $-\frac{15}{5} = -\frac{24}{8}\ (=-3)$.

13. Εἶναι $6 = \frac{24}{4}$, $-2{,}5 = -2\frac{1}{2}$, $-6{,}15 = -6\frac{3}{20}$, $-3\frac{1}{4} = -3{,}25$.

14. Ἐπειδὴ τὰ τμήματα ΟΑ καὶ ΟΑ′ εἶναι ἀπολύτως ἴσα καὶ τὸ ΟΑ τὸ παριστάνομεν μὲ τὸν ἀριθμὸν $+1$, τὸ μὲ ἀντίθετον φορὰν ΟΑ′ θὰ τὸ παραστήσωμεν μὲ τὸν ἀριθμὸν -1, ἀντίθετον τοῦ $+1$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι τὰ ΟΒ′, ΟΓ′,... θὰ τὰ παραστήσωμεν μὲ τοὺς ἀριθμοὺς -2, -3,...

15. Θὰ διαιρέσωμεν τὸ θετικὸν τμῆμα ΟΑ, τὸ ὁποῖον παρίσταται μὲ τὴν μονάδα 1, εἰς 2 ἴσα μέρη, ἢ εἰς 3, ἢ εἰς 5, ἢ εἰς 100 ἴσα μέρη. Τότε τὸ 1 μέρος, τὰ 2 μέρη, ἢ τὰ 2 καὶ 3, ἢ τὰ 45 ἴσα μέρη, θὰ παρίστανται ἀντιστοίχως μὲ τοὺς δοθέντας ἀριθμούς. Ἐὰν δὲ ἐργασθῶμεν ὁμοίως ἐπὶ τοῦ τμήματος ΟΑ′, τὸ ὁποῖον παρίσταται διὰ τῆς ἀρνητικῆς μονάδος -1, θὰ λάβωμεν τὰ μεγέθη τὰ ὁποῖα θὰ παρίστανται μὲ τοὺς ἀριθμοὺς $-\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{5}$, $-\frac{3}{5}$ καὶ $-0{,}45$.

Γραφικὴ παράστασις τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν.

Ἀσκήσεις. *16*. Ὁ —5 σχηματίζεται ἐκ τῆς —1, ὅταν ἐπαναληφθῇ αὕτη 5 φοράς. Σχηματίζεται δὲ ἐκ τῆς +1, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὸ πρόσημον αὐτῆς, ὁπότε θὰ γίνῃ —1 καὶ ταύτην τὴν ἐπαναλάβομεν 5 φοράς. Ὁμοίως σχηματίζονται καὶ οἱ ἄλλοι δοθέντες ἀριθμοί.

17. Θὰ λάβωμεν τὸ τέταρτον τῆς —1, τὸ ὁποῖον θὰ ἐπαναλάβωμεν τρεῖς φοράς, ἢ θὰ λάβωμεν τὴν +1 κατόπιν τὴν ἀντίθετον αὐτῆς —1 καὶ ἀκολούθως τὸ τέταρτον αὐτῆς θὰ τὸ ἐπαναλάβωμεν τρεῖς φοράς. Ὁμοίως τὸ ὄγδοον τῆς —1 ἢ τὸ ἔνατον αὐτῆς θὰ τὸ ἐπαναλάβωμεν 5 φορὰς ἢ 4 φορὰς κλπ.

18. Ἐὰν ἐπαναλάβωμεν τὸ δέκατον τῆς + 1 τέσσαρας φορὰς θὰ λάβωμεν τὸν ἀριθμὸν 0,4. Ἐὰν δὲ λάβωμεν τὴν ἀντίθετον —1 καὶ τὸ δέκατον αὐτῆς τὸ ἐπαναλάβωμεν τέσσαρας φορὰς θὰ λάβωμεν τὸν ἀριθμὸν —0,4. Ὁμοίως δὲ θὰ ἐργασθῶμεν ἐπὶ τῶν ἄλλων ἀριθμῶν. Ὡς πρὸς τὸν ἀριθμὸν 1,25 παρατηροῦμεν ὅτι οὗτος σχηματίζεται, ἐὰν λάβωμεν τὴν μονάδα +1 ἅπαξ καὶ κατόπιν ἐπαναλάβωμεν τὸ ἑκατοστὸν αὐτῆς 25 φοράς.

Πράξεις μὲ σχετικοὺς ἀριθμούς.

Πρόσθεσις.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.— *Ὁμὰς πρώτη.* *19*. α') $5+3=8$, β') $+7+1{,}4=+8{,}4=8{,}4$.

γ) $+4+6+8=18$, δ') $\frac{4}{9}+\frac{2}{3}=\frac{10}{9}$ ε') $+7\frac{1}{3}+3\frac{1}{5}=10\frac{8}{15}$.

στ') $+3+4\frac{1}{2}+8\frac{1}{4}=15\frac{3}{4}$ ζ') $-4-6=-10$ η') $-10-8\frac{1}{2}=$

$=-18\frac{1}{2}$ θ') $-4-3\frac{1}{2}-7\frac{1}{3}=-14\frac{5}{6}$ ι') $-\frac{2}{3}-\frac{5}{8}=-\frac{31}{24}=$

$=-1\frac{7}{24}$ ια') $-4{,}5-5{,}3=-9{,}8$.

ιβ') $-4-5+8-3\frac{1}{2}=-9+8-3\frac{1}{2}=-1-3\frac{1}{2}=-4\frac{1}{2}$.

***Ὁμὰς δευτέρα.* *20*.** α') $-5+3=-2$ β') $+5-8-7+3=-3-7+3=-7$ $=-10+3=-7$.

γ') $-3\frac{10}{20}+5\frac{5}{20}-2\frac{4}{20}=1\frac{15}{20}-2\frac{4}{20}=-\frac{9}{20}$.

δ') $=-8+6-7-8=-2-7-8=-17$,

ε') $=2\frac{1}{2}-3+4-7=-\frac{1}{2}+4-7=3\frac{1}{2}-7=-3\frac{1}{2}$.

στ') $= -4 - 6 + 7\frac{1}{2} - 8\frac{1}{2} - 9 = -10 + 7\frac{1}{2} - 8\frac{1}{2} - 9 = -$

$= -2\frac{1}{2} - 8\frac{1}{2} - 9 = -20.$

ζ') $= 3{,}9 - 8{,}5 + 6\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -4{,}6 + 6{,}5 - 0{,}75 = 1{,}9 - 0{,}75 = 1{,}15.$

η') $= -\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - 0{,}25 + 3{,}7 = -\frac{5}{12} + \frac{1}{5} - 0{,}25 + 3{,}7 =$

$= -\frac{13}{60} - 0{,}25 + 3{,}7 = -\frac{7}{15} + 3{,}7 = \frac{97}{30}.$

Ὁμὰς τρίτη. Εἰς τὰ προβλήματα 21 ἕως 25 τῆς ὁμάδος αὐτῆς, τὰ κέρδη, τὸ ἐνεργητικόν, τὴν θερμοκρασίαν ὑπεράνω τοῦ μηδενός, ὡς καὶ ἐκείνην ἥτις προκύπτει ἀπὸ τὴν θέρμανσιν, τὸ ἔχειν εἰς τὸ ταμεῖον καὶ λαμβάνειν, τὰ παριστάνομεν μὲ θετικοὺς ἀριθμούς, τὰ δὲ ἀντίθετα αὐτῶν ποσὰ τὰ παριστάνομεν μὲ ἀρνητικοὺς ἀριθμούς. Οὕτω δὲ ἔχομεν :

21. +234 000—216 400+215 700—112 000=+121 300. Ὥστε ἐκέρδισε τελικῶς 121 300 δρχ.

22. +128 000—312 400=—184 400. Ὥστε ἐμειώθη τὸ κεφάλαιον κατὰ 184 400 δρχ.

23. $+17{,}6^0 - 19^0{,}1 + 3{,}1^0 = +1{,}6^0$. Ἡ θερμοκρασία λοιπὸν ηὐξήθη κατὰ $1{,}6^0$.

24. +250 000—174 500—136 000—19 450+34 000+14 500+29 000=2450 Ὥστε θὰ τοῦ χρειασθοῦν ἀκόμη 2450 δρχ.

25. 180 000—120 000+74 000—14 800+39 400=+158 600 δρχ, ὅπερ εἶναι καὶ τὸ ποσὸν ποὺ τοῦ ἔμεινεν.

26. Εἶναι $+58{,}4 - 19{,}3 + 23{,}7 - 95{,}8 = +39{,}1 + 23{,}7 - 95{,}8 = +62{,}8 - 95{,}8 = -33$ μ. Ὥστε τὸ κινητὸν εὑρίσκεται ἀριστερὰ τοῦ Ο εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ αὐτοῦ 33 μ.

Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως.

Ἀσκήσεις. *27.* α') Ἄθροισμα θετικῶν προσθετέων +5+6=+11 καὶ ἄθροισμα ἀρνητικῶν, —3 —8 —7 —11 —15 —3 = —47. Τελικὸν ἄθροισμα —47+11+0=—36. Κατόπιν τούτου, ἂν ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν (§ 7) λάβωμεν σημεῖον Α (πρὸς τ' ἀριστερὰ τοῦ Ο) τοιοῦτον ὥστε (ΟΑ)=—47 καὶ κατόπιν λάβωμεν ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Β (πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ Α) τοιοῦτον ὥστε (ΑΒ)=+11, θὰ εἶναι (ΟΒ)=—36. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ εἰς τὰς ἄλλας ἀσκήσεις, ὁδηγούμενοι ἐκ τῶν ἀθροισμάτων τῶν θετικῶν προσθετέων των, ὡς καὶ τῶν ἀρνητικῶν των.

β') $+74\frac{2}{5} - 64\frac{1}{2} = 9\frac{9}{10}$, γ') $-28\frac{11}{20} + 1\frac{1}{4} = -27\frac{3}{10}$,

δ') $= -41{,}9 + 17{,}18 = -24{,}72$, ε') $-33{,}15 + 0{,}25 = -32{,}90.$

Ἀφαίρεσις.

Ἀσκήσεις. *Ὁμὰς πρώτη.* *28.* α′) $8-(-4)=8+(+4)=12$.
β′) $-18-(+19)=-18+(-19)=-37$. γ′) $=-14+(+7)=-7$.
δ′) $=0{,}9+(+9{,}13)=10{,}03$. ε′) $2{,}25+(+1{,}65)=3{,}90$.
στ′) $2\frac{5}{6}+\left(+3\frac{1}{3}\right)=6\frac{1}{6}$. ζ′) $=9\frac{1}{7}+\left(+7\frac{1}{3}\right)=16\frac{10}{21}$.
η′) $(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)=(\alpha+\gamma)+(-\beta-\gamma)=\alpha+\gamma-\beta-\gamma=\alpha-\beta$, διότι $\gamma-\gamma=0$.
Ὁμὰς δευτέρα. *29.* α′) $=120+19+18=157$. β′) $=-17+4+8=-5$.
γ′) $=-5\frac{1}{2}-6\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=-11\frac{3}{4}+\frac{1}{5}=-11\frac{11}{20}$.
δ′) $(\alpha-\gamma)-(\beta-\gamma)=(\alpha-\gamma)+(-\beta+\gamma)=\alpha-\gamma-\beta+\gamma=\alpha-\beta$.
30. α′) $=-5$ β′) $=-2$ γ′) $=-0{,}7$ δ′) $=-215$ ε′) $=-8{,}40$.
στ′) $\alpha-(\beta+\gamma)=\alpha+(-\beta-\gamma)=\alpha-\beta-\gamma=(\alpha-\beta)-\gamma$.
Ὁμὰς τρίτη. *31.* Ἔστω α δρχ. τὸ ἐνεργητικόν του καὶ β δρχ. τὸ παθητικόν του. Τότε ἡ περιουσία του εἶναι $(\alpha-\beta)$ δρχ. Ἀλλ' ἐὰν τὸ ἐνεργητικόν του γίνῃ $\alpha+1564{,}20$ τὸ δὲ παθητικόν του γίνῃ $\beta-1564{,}20$, ἡ περιουσία του θὰ εἶναι $\alpha+1564{,}20-(\beta-1564{,}20)=\alpha+1564{,}20+(-\beta+1564{,}20)=$ $=\alpha+1564{,}20-\beta+1564{,}20=(\alpha-\beta)+3128{,}40$. Ὥστε ἡ περιουσία του ηὐξήθη κατὰ 3128,20 δρχ.

32. Ἐργαζόμενοι ὡς ἄνω ἔχομεν $\alpha-15484{,}3-(\beta+162384{,}70)=\alpha-$ $-15484{,}3+(-\beta-162384{,}70)=\alpha-\beta-15484{,}3-162384{,}70=(\alpha-\beta)-$ -177869. Ὥστε ἡ περιουσία του ἠλαττώθη κατὰ 177869 δρχ.

33. Θὰ βαδίσῃ πρὸς τ' ἀριστερὰ 238 μ. διὰ νὰ φθάσῃ πάλιν εἰς τὸ Α. Ἐπειδὴ δὲ πρέπει νὰ εἶναι (ΑΓ)=4846 μ. θὰ βαδίσῃ ἐν ὅλῳ $238+4846=5084$ μ. ἵνα φθάσῃ εἰς τὸ Γ (ἀριστερὰ τοῦ Α).

34. Πρέπει νὰ κερδίσῃ τὰς δραχμὰς ποὺ ἔχασε καὶ ἀκόμη 8958,65 δρχ. Ὥστε πρέπει νὰ κερδίσῃ $8958{,}65+15016{,}3=23974{,}95$ δρχ.

Ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα.

Ἀσκήσεις. *35.* α′) Ἐπειδὴ $2+5+7=14$, $-3-7-6-11=-27$, τὸ δοθὲν ἄθροισμα ἰσοῦται μὲ $14-27=-13$. Ἤδη ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν λαμβάνομεν σημεῖον Α (δεξιὰ τοῦ Ο) τοιοῦτον ὥστε $(ΟΑ)=+14$ καὶ κατόπιν σημεῖον Β (ἀριστερὰ τοῦ Α) τοιοῦτον ὥστε $(ΑΒ)=-27$. Οὕτω θὰ εἶναι $(ΟΒ)=-13$. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ εἰς τὰς ἄλλας ἀσκήσεις (βλέπε ἄσκ. 27, α′).

β′) $-3-2{,}5-8-7-0{,}8=-21{,}3$. Ζητ. ἄθροισμα $-21{,}3+4=-17{,}3$.
γ′) $-4+5-8=-7$, $3-2-7+4=-2$. Ζητ. ἄθροισμα $-7-2=-9$.
δ′) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-4+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+5-8=-4+5-8=-7$, διότι $-\frac{1}{2}+$ $+\frac{1}{2}=0$ καὶ $\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$.

ε') $3-5-6-7\frac{1}{2}-3-2+6-4+\frac{1}{2}=-5-7-2-4=-18,$

ἢ $\left(-18\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)=-18\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=-18.$

στ') $-3\frac{1}{2}+4+6+7-3+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+3=13\frac{7}{8}.$

36. $+(-4-8-1)-(-3+5-7+15).$

37. $7-7+5-\left(6\frac{1}{2}+12+\frac{3}{4}\right)$ ἢ $7-7+5+\left(-6\frac{1}{2}-12-\frac{3}{4}\right).$

Πολλαπλασιασμός.

Τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου δύο σχετικῶν ἀριθμῶν εὑρίσκεται κατὰ τὸν κάτωθι κανόνα (τῶν σημείων).

$+\cdot+=+$ $\qquad -\cdot-=+$

$+\cdot-=-$ $\qquad -\cdot+=-$

Ἀσκήσεις. *Ὁμὰς πρώτη. 38.* α') $=-40.$ β') $=-72.$ γ') $=-105.$ δ') $=49.$ ε') $=-54{,}60.$ στ') $=823{,}837.$

ζ') Τοῦτο προκύπτει ἐκ τῆς § 27. Διότι ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ γινομένου εἶναι τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων, τὸ ὁποῖον, ὡς ἐμάθομεν εἰς τὴν ἀριθμητικήν, δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀλλαχθῇ ἡ τάξις των. Τὸ δὲ σημεῖον τοῦ γινομένου δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν τάξιν τῶν παραγόντων, ἀλλ' ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων αὐτοῦ. Ὥστε εἶναι $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta=\gamma\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\delta.$

Σημείωσις. Τὸν κανόνα ***τῶν σημείων*** πλὴν ἐπὶ πλὴν = σύν, ὁ Ἕλλην μαθηματικὸς Διόφαντος τὸν διετύπωσεν ὡς ἑξῆς: «λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὕπαρξιν».

39. ***Ὁμὰς δευτέρα.*** α') $=29{,}64.$ β') $=-33{,}11.$ γ') $=-189.$ δ') $=96{,}9.$

40. α') $=-504$ β') $1041{,}6$ γ') -1120
δ') $0{,}18(9{,}74-5{,}85)=0{,}18\cdot3{,}89=0{,}7002.$

41. α') $=-24{,}6+96=71{,}4$ β') $-16{,}32-(-1075{,}2)-20=$
$=-16{,}32+1075{,}2-20=1038{,}88.$

42. α') $=\frac{3}{32}\cdot(-1)=-\frac{3}{32}$ β') $=(-32)\cdot\left(-\frac{17}{30}\right)-0{,}008-0{,}054=$
$=18{,}133-0{,}062=18{,}071.$

43. $=0{,}53\cdot(-1{,}2)\cdot(-7)+19\cdot(-0{,}45)=4{,}452-8{,}55=-4{,}098.$

44. α') $=40$ β') $=-5\frac{3}{4}$ γ') $=11{,}7$ δ' $=0$ ε') $=0.$

στ') Κατὰ τὴν ἰδιότητα ζ' τῆς ἀσκήσεως 38 εἶναι $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta\cdot\varepsilon=\alpha\cdot\varepsilon\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta\cdot$ Ἀλλ' οἱ δύο πρῶτοι παράγοντες α καὶ ε ἔχουν γινόμενον $(\alpha\cdot\varepsilon)$. Ἀντικαθιστῶμεν λοιπὸν τούτους διὰ τοῦ γινομένου των, ὁπότε ἔχομεν $\alpha\cdot\varepsilon\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta=(\alpha\cdot\varepsilon)\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta.$
Ὥστε $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta\cdot\varepsilon=(\alpha\cdot\varepsilon)\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta.$

ζ') Τὸ (αβγ) εἶναι γινόμενον τῶν παραγόντων του α, β, γ. Οὕτως εἶναι (αβγ)=α . β . γ. Ὁμοίως εἶναι (δεζ) = δ . ε . ζ. Ὥστε (αβγ) · (δεζ)=α · β · γ · δ · ε · ζ.

Διαίρεσις.

Τὸ σημεῖον τοῦ πηλίκου δύο σχετικῶν ἀριθμῶν, εὑρίσκεται κατὰ τὸν κάτωθι κανόνα :

$$+ : + = + \qquad - : - = +$$
$$+ : - = - \qquad - : + = -$$

Ἀσκήσεις. *Ὁμὰς πρώτη.* *45.* α') $=-\frac{2}{7}$ β') $=-5$ γ') -1 δ') $=54$. ε') $=1{,}9$ στ') $=-193\frac{8}{9}$ ζ') $=44{,}396$. η') Ἔστω $\frac{\alpha}{\beta}=\delta$, τότε θὰ εἶναι διαδοχικῶς :

$$\alpha=\beta\delta, \quad \alpha\gamma=\beta\delta\cdot\gamma, \quad \alpha\gamma=(\beta\gamma)\delta. \quad \text{Ὥστε } \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}=\delta, \quad \text{ἤτοι } \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}.$$

Ὁμὰς δευτέρα. *46.* α') $=3\frac{2}{3}:\left(-1\frac{4}{9}\right)=-\frac{33}{13}$ καὶ $-\frac{33}{13}:8=-\frac{33}{104}$

β') $(-9{,}6):0{,}7=-\frac{96}{7}$ καὶ $\left(-\frac{96}{7}\right):6\frac{1}{2}=\left(-\frac{96}{7}\right):\frac{13}{2}=\left(-\frac{96}{7}\right)\cdot\frac{2}{13}=-2\frac{10}{91}$

γ') $(-1):4=-\frac{1}{4}$, $\left(-\frac{1}{4}\right):(-3)=\frac{1}{12}$, $\frac{1}{12}:\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{3}{12}=-\frac{1}{4}$

καὶ $\left(-\frac{1}{4}\right):2=-\frac{1}{8}$.

47. α') $(-34):(-17)=2$ β') $(-18):9=-2$, $(-4):2=-2$ καὶ $(-2)-(-2)=-2+2=0$, γ') $(-25):(-5)=5$, $5:(-5)=-1$ καὶ $(-1):(-5)=\frac{1}{5}$.

48. α') $\chi=160:(-40)=-4$, β') $\chi=24:(-6)=-4$ γ') $\chi=48:12=4$ δ) $\chi=(-15):(-3)=5$, ε') $\chi=(-18{,}84):31{,}4=-0{,}6$, στ') $\chi=\frac{7}{12}:\left(-\frac{36}{7}\right)=-\frac{49}{432}$.

49. α') Κατὰ τὴν ἰδιότητα η') τῆς ἀσκήσεως 45 εἶναι :

$$\alpha:\beta=\left(\alpha\cdot\frac{1}{\varrho}\right):\left(\beta\cdot\frac{1}{\varrho}\right), \text{ ἤτοι } \alpha:\beta=(\alpha:\varrho):(\beta:\varrho).$$

β') Εἶναι $(\alpha\beta\gamma)=\alpha\beta\gamma$, ἤτοι $(\alpha\beta\gamma)=\alpha\cdot(\beta\gamma)$ καὶ ἑπομένως $(\alpha\beta\gamma):\alpha=\beta\gamma$

γ') Ἐὰν $\alpha:(\beta\gamma)=\delta$, εἶναι $\alpha=(\beta\gamma)\delta$, ἤτοι $\alpha=\beta\cdot(\gamma\delta)$. Ὅθεν $\alpha:\beta=(\gamma\delta)$, ἤτοι $(\alpha:\beta)=\gamma\cdot\delta$ καὶ κατὰ συνέπειαν $(\alpha:\beta):\gamma=\delta$. Ὅθεν :

$$\alpha:(\beta\gamma)=(\alpha:\beta):\gamma.$$

Κλάσματα ἀλγεβρικά.

Ἀσκήσεις. *50.* $\frac{-25}{-15}=\frac{25}{15}=\frac{5}{3}$, $\frac{-3}{48}=-\frac{3}{48}=-\frac{1}{16}$,

$$\frac{-121}{-4\cdot 11}=\frac{(-1)\cdot 121}{(-1)\cdot 4\cdot 11}=\frac{121}{4\cdot 11}=\frac{11\cdot 11}{4\cdot 11}=\frac{11}{4}$$

$$\frac{5}{-8}\cdot\frac{4}{-9}\cdot\frac{1}{2}=\left(-\frac{5}{8}\right)\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{5\cdot 4\cdot 1}{8\cdot 9\cdot 2}=\frac{5}{36}$$

$$\frac{3}{-2}\cdot\frac{-8}{5}\cdot\frac{2}{-11}\cdot\frac{11}{-120}=\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{8}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{11}\right)\cdot\left(-\frac{11}{120}\right)=$$

$$=\frac{3\cdot 8\cdot 2\cdot 11}{2\cdot 5\cdot 11\cdot 120}=\frac{1}{25}.$$

51. α΄) Ἐπειδὴ $\frac{2}{-3}=-\frac{2}{3}=(-1)\cdot\frac{2}{3}$, $\frac{-5}{8}=(-1)\cdot\frac{5}{8}$, $\frac{1}{-2}=$ $=(-1)\cdot\frac{1}{2}$, τρέπομεν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{2}$. Ἀλλὰ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν 3, 8, 2 εἶναι ὁ 24 καὶ $24:3=8$, $24:8=3$ καὶ $24:2=12$. Οὕτως εἶναι $\frac{2}{3}=\frac{16}{24}$, $\frac{5}{8}=\frac{15}{24}$, $\frac{1}{2}=\frac{12}{24}$ καὶ κατὰ συνέπειαν τὰ ζητούμενα κλάσματα εἶναι τὰ $-\frac{16}{24}$, $-\frac{15}{24}$, $-\frac{12}{24}$. Ὁμοίως δὲ ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι τὰ ζητούμενα ὁμώνυμα κλάσματα τῶν ἄλλων ἀσκήσεων εἶναι :

β΄ $-\frac{135}{180}$, $-\frac{80}{180}$, $\frac{90}{180}$, $\frac{108}{180}$, γ΄) $-\frac{33}{45}$, $-\frac{32}{45}$, $\frac{30}{45}$, $\frac{63}{45}$

δ΄) $-\frac{675}{1800}$, $-\frac{288}{1800}$, $\frac{400}{1800}$, $\frac{600}{1800}$,

ε΄) $-\frac{120}{168}$, $\frac{32}{168}$, $-\frac{112}{168}$, $-\frac{105}{168}$, $\frac{84}{168}$,

στ΄) $-\frac{12}{24}$, $\frac{8}{24}$, $-\frac{20}{24}$, $-\frac{21}{24}$, $\frac{6}{24}$.

Δυνάμεις.

Ἀσκήσεις. *51α.* $(-6)^3=(-6)(-6)(-6)=-216$ β΄ $(-9)(-9)=81$
γ΄) $(+8)(+8)(+8)(+8)(+8)=32\,768$, δ΄) $(-3)(-3)(-3)=-27$
ε΄) $(-7)(-7)(-7)(-7)(-7)=-16\,807$, στ΄) $(-1)(-1)(-1)=-1$.
52. π.δ. $(-4)^2=(-4)(-4)=16$, $(-4)^4=(-4)(-4)(-4)(-4)=256$
$(-4)^3=(-4)(-4)(-4)=-64$, $(-4)^5=(-4)(-4)(-4)(-4)(-4)=-1024$ κ.ο.κ.

Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων.

Ἀσκήσεις. *52α* α′) $(-2)^{2+3}=(-2)^5=-32$, β′) $(-3)^{4+2}=(-3)^6=729$,
γ′) $(-5)^{2+3}=(-5)^5=-3125$, δ′) $(1,5)^{3+2}=1,5^5=7,59375$,

ε′) $\left(-\frac{1}{2}\right)^9$, στ′) $(-5,1)^7$, ζ′) $0,5^{18}$.

53. α′) $[(-2)^2]^3=(-2)^6=64$, β′) $=(-3)^4=81$, γ′) $=(-1)^6=1$,
δ′) $=(-1)^9=-1$, ε′) $=\left(-\frac{3}{5}\right)^4=\frac{81}{625}$, στ′) $(-10)^{30}$.

54. α′) $(0,2)^8=0,00000256$, β′) $(0,4)^4=0,0256$, γ′) $(1,5)^6$,
δ′) $(0,5)^6\cdot(-3)^8\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)^6$, ε′) $=(-5)^{12}$, στ′) $\left(-\frac{4}{9}\right)^{30}$.

55. α′) $=(-2)^2\cdot(-3)^2=4\cdot 9=36$ ἢ $6^2=36$, β′) $(-5)^3\cdot(-4)^3=$
$=(-125)\cdot(-64)=8000$ ἢ $20^3=8000$, γ′) $(+1)^4\cdot(-2)^4=1\cdot 16=16$,
δ′) $(-1)^2\cdot(-2)^2\cdot(-3)^2=1\cdot 4\cdot 9=36$, ε′) $2^2\cdot 3^2(-4)^2\cdot(-2)^2=4\cdot 9\cdot 16\cdot 4=2304$.
στ′ $(-2)^3\cdot(-3)^3\cdot 4^3\cdot 1^3\cdot 0,5^3=(-8)\cdot(-27)\cdot 64\cdot 1\cdot 0,125=1728$.
ζ′) $(-1)^2\cdot(-2)^2\cdot(+3)^2=1\cdot 4\cdot 9=36$.

η′) $\left(-\frac{5}{8}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3=\left(-\frac{125}{512}\right)\cdot\frac{8}{27}=-\frac{125}{1728}$.

θ′) $\left(\frac{5}{8}\right)^3\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)^3=\frac{125}{512}\cdot\left(-\frac{64}{729}\right)=-\frac{125}{5832}$.

ι′) $(-5)^4\cdot(-6)^6\cdot\left(-\frac{5}{9}\right)^2=5^4\cdot 2^6\cdot 3^6\cdot\frac{5^2}{3^4}=5^6\cdot 2^6\cdot 3^2=9\,000\,000$.

ια′) $\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{4}{9}\cdot\frac{16}{81}\cdot\frac{1}{4}=\frac{16}{729}$.

ιβ′) $2^2\cdot\frac{4^2}{5^2}\cdot\frac{2^2}{9^2}\cdot(-0,1)^2=\frac{16}{50\,625}$.

ιγ′) $\frac{2^3}{5^3}\cdot\frac{4^3}{9^2}\cdot\frac{(-3)^3}{7^3}(0,4)^3$, ιδ′) $\left(\frac{3}{4}\right)^8\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{12}\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)^{12}$.

56. α′) χ^8, β′) ψ^7, γ′) χ^7, δ′) χ^8, ε′) $-\beta^{18}$, στ′) χ^3.
ζ′) $\chi^{2\nu+1}\cdot(-\chi)^{2\nu}=\chi^{2\nu+1}\cdot\chi^{2\nu}=\chi^{4\nu+1}$.
η′) $\chi^{2\nu-1+1}\cdot(-\chi)=\chi^{2\nu}\cdot(-\chi)=-\chi^{2\nu+1}$.
θ′) $-\chi^{2\nu+3}$, ι′) $\chi^{2\nu-1+2\nu}\cdot\psi^{3\mu-1+2}=\chi^{4\nu-1}\cdot\psi^{3\mu+1}$.

57. α′) $4^2\cdot\alpha^2\cdot\beta^2=16\alpha^2\beta^2$, β′) $(-3)^3\cdot\chi^3\cdot\psi^3=-27\chi^3\psi^3$, γ′) $5^2\cdot\chi^4=25\chi^4$.
δ′) $-\chi\psi\omega$, ε′) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2\chi^4\psi^2=\frac{4}{9}\chi^4\psi^2$, στ′) $=-\frac{1}{125}\cdot\chi^3\psi^6$.

ζ′) 1, η′) 1, θ′) $\frac{125}{512}\cdot\chi^6\cdot\psi^3\cdot 1\cdot 9\cdot\alpha^4\cdot\beta^6=\frac{1125}{512}\chi^6\psi^3\alpha^4\beta^6$.

58. α΄) $2^{5-3}=2^2$, β΄) $(-2)^{5-3}=(-2)^2$, γ΄) $(-7)^{9-5}=(-7)^4$, δ΄) $(-3)^3$.

ε΄) $\left(-\frac{3}{7}\right)^2$, στ΄) $(-5{,}3)^2$, ζ΄) $(-3\cdot5\cdot7)^3$, η΄) $[(-1)\cdot(-3)\cdot5\cdot7]^5$.

59. $\frac{1}{5^3}$, $\frac{1}{(3{,}5)^2}$, $\frac{1}{7^2}$, $\frac{1}{20^2}$, $\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\left(\frac{4}{3}\right)^2$, $\frac{1}{\left(-\frac{1}{8}\right)^2}=$

$=\left(-\frac{8}{1}\right)^2=64$, $\frac{1}{(-1)^{2\nu}}=1$, $\frac{1}{(-1)^{2\nu+1}}=-1$.

60. $\frac{1}{(-1)^3}$, $\frac{1}{(-0{,}01)^4}$, $1:\frac{1}{2^3}=2^3$, $1:\frac{1}{5^2}=5^2$, $1:\frac{1}{(-7)^4}=(-7)^4$.

61. α΄) Διὰ $\chi=1$ εἶναι $5^0+7^1+3^0=1+7+1=9$.

Διὰ $\chi=-2$ εἶναι $5^{-3}+7^{-2}+3^{-3}=\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{3^3}$ καὶ διὰ $\chi=-3$,

εἶναι $5^{-4}+7^{-3}+3^{-4}=\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{3^4}$.

β΄) Εἶναι κατὰ σειράν:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^4=1+\frac{1}{4}-\frac{1}{256}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-6}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-7}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-8}=3^6+2^7-4^8 \quad \text{καὶ}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-8}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-10}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-12}=3^8+2^{10}-4^{12}.$$

62. $2^{5+1+0-2}=2^4$, $4^{-3+3}=4^0=1$, $\left(-\frac{3}{2}\right)^3\cdot(0{,}1)^3$.

63. α΄) $\alpha^{-2-4+0+5}=\alpha^{-1}=\frac{1}{\alpha}$, β΄) $2^{-1}=\frac{1}{2}$, γ΄) (7^{-8+9}).

$\cdot\frac{1}{3^3}=\frac{7}{3^3}$, δ΄) $\frac{1}{(2\alpha\beta)^3}$, ε΄) $\chi^{\nu+2\nu-\nu}=\chi^{2\nu}$, στ΄) $5^{2+4}=5^6$,

ζ΄) $3^{-2}\cdot\alpha^6\cdot\beta^{-2}\cdot\gamma^4\cdot\gamma^8\cdot(-2)^2\cdot\alpha^4\cdot\beta^{-4}=3^{-2}\cdot(-2)^2\cdot\alpha^6\cdot\alpha^4\cdot\beta^{-2}\cdot\beta^{-4}\cdot\gamma^4\cdot\gamma^8=$

$=\frac{1}{3^2}\cdot(-2)^2\cdot\alpha^{10}\frac{1}{\beta^6}\cdot\gamma^{12}$.

64. α΄) $(5+7-9+13)\cdot2^3-11\cdot\frac{1}{2^3}=16\cdot8-\frac{11}{8}=\frac{1013}{8}=126\frac{5}{8}$.

β΄) $4\cdot6^3+5\cdot6^3-7\cdot6^3-9\cdot6^3+13\cdot6^3=(4+5-7-9+13)\cdot6^3=6\cdot6^3=$
$=6^4=1296$.

γ΄) $(5-3\cdot2-7\cdot2+8\cdot2^5+11\cdot2)\cdot2^4=(5+1\cdot2+8\cdot32)\cdot2^4=263\cdot2^4=4208$.

δ΄) $0{,}65\alpha^5-1\cdot\alpha^4=(0{,}65\cdot\alpha-1)\cdot\alpha^4=(3{,}25-1)\cdot5^4=2{,}25\cdot5^4=1406{,}25$.

65. α΄) $32\cdot\frac{1}{4^3}=\frac{32}{64}=\frac{1}{2}$ ἢ $2^5\cdot2^{-6}=2^{-1}=\frac{1}{2}$ β΄) $3^4\cdot3^{-5}=$

$= \frac{1}{3}$ γ') $\frac{1}{2^5} : \frac{1}{4^3} = \frac{1}{2^5} : \frac{1}{2^6} = 2$ ἢ $\frac{4^3}{2^5} = \frac{2^6}{2^5} = 2$ ἢ $2^{-5} . 4^3 =$

$= 2^{-5} . 2^6 = 2$ δ') $3^{-6} . 9^3 = 3^{-6} . 3^6 = 3^0 = 1$ ε') $10^{-3} . 10^2 = 10^{-1} = 0{,}1$

στ') $\frac{(-9)^2}{(-6)^2} = \frac{81}{36} = \frac{9}{4}$ ζ') $\frac{(-15)^2}{(-10)^4} = 0{,}0225$ η') $5 . 5^2 + 10 . 10^1 + \frac{10^3}{10^2} -$

$- 10^4 = 125 + 100 + 10 - 10\,000 = 235 - 10\,000 = -9765.$

Περὶ ἀνισοτήτων μεταξὺ σχετικῶν ἀριθμῶν.

Ἀσκήσεις.— *66*. Τὸ πρῶτον μέρος τῆς προτάσεως ἀπεδείχθη εἰς τὴν § 48. Ἤδη ἔστω ὅτι οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ἀρνητικοί, ὅτι $\alpha > \beta$ καὶ ὁ μ ἀκέραιος θετικός. Τότε, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον αβ εἶναι θετικόν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ἐπὶ $\frac{1}{\alpha\beta}$, θὰ ἔχωμεν $\frac{\alpha}{\alpha\beta} > \frac{\beta}{\alpha\beta}$ ἢ $\frac{1}{\beta} > \frac{1}{\alpha}$, ἤτοι $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι (§ 42) ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ $\frac{1}{\alpha}$ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ $\frac{1}{\beta}$, ἤτοι $\left|\frac{1}{\alpha}\right| > \left|\frac{1}{\beta}\right|$ καὶ κατὰ συνέπειαν:

$$\left|\frac{1}{\alpha}\right|^\mu > \left|\frac{1}{\beta}\right|^\mu \quad (\iota).$$

Ἀλλ' ἐὰν ὁ μ εἶναι ἄρτιος, εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ἀνισότης (ι) ὑφίσταται, ἐάν, ἀντὶ τῶν ἀπολύτων τιμῶν, λάβωμεν τὰς ἀρνητικὰς τιμὰς $\frac{1}{\alpha}$ καὶ $\frac{1}{\beta}$. Ὥστε εἶναι $\frac{1}{\alpha^\mu} > \frac{1}{\beta^\mu}$, ἤτοι $\alpha^{-\mu} > \beta^{-\mu}$. Ἀλλ' ἐὰν ὁ μ εἶναι περιττὸς ἀριθμός, τὰ ἐξαγόμενα τῶν δυνάμεων $\frac{1}{\alpha^\mu}$, $\frac{1}{\beta^\mu}$, ἐὰν λάβωμεν τὰς ἀρνητικὰς τιμὰς $\frac{1}{\alpha}$ καὶ $\frac{1}{\beta}$ θὰ εἶναι ἀρνητικά, καὶ ἑπομένως ὁ ἀπολύτως μεγαλύτερος εἶναι μικρότερος, ἤτοι εἶναι:

$$\frac{1}{\alpha^\mu} < \frac{1}{\beta^\mu}, \text{ ἤτοι } \alpha^{-\mu} < \beta^{-\mu}.$$

Ὥστε ἐὰν τὰ μέλη ἀνισότητος εἶναι ἀριθμοὶ ἀρνητικοὶ καὶ τὰ ὑψώσωμεν εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν μὲ ἐκθέτην ἀρνητικόν, ἡ ἀνισότης μένει, ἐὰν ὁ ἐκθέτης εἶναι ἄρτιος, ἀντιστρέφεται δέ, ἐὰν οὗτος εἶναι περιττός.

Π. δ. Εἶναι $-2 > -3$, $(-2)^{-2} > (-3)^{-2}$, $(-2)^{-3} < (-3)^{-3}$.

$$\frac{1}{(-2)^2} > \frac{1}{(-3)^2} \qquad \frac{1}{(-2)^3} < \frac{1}{(-3)^3}$$

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{9} \qquad -\frac{1}{8} < -\frac{1}{27}.$$

Σημείωσις. Ὅταν τὰ μέλη ἀνισότητος εἶναι ἑτερόσημα καὶ τὰ ὑψώσωμεν εἰς ἀρτίαν θετικὴν δύναμιν, τὰ ἐξαγόμενα δὲν ὑπόκεινται εἰς ὡρισμένον κανόνα. Π. χ. ἀπὸ τὰς ἀνισότητητας $-4 < 3$ $-4 < 5$ καὶ $-4 < 4$ ἐὰν τὰς ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τὰς ἀνισότητας $16>9$, $16<25$ καὶ $16=16$.

67. α΄) Ἐὰν ὁ μ εἶναι ἀκέραιος ἀρνητικός, ὁ ἀντίθετός του μ΄ εἶναι ἀκέραιος θετικός. Ἐπομένως εἶναι $α^μ = \frac{1}{α^{μ'}}$. Ἀλλ' ὁ παρονομαστὴς $α^{μ'}$, ὡς γινόμενον μ΄ παραγόντων ἴσων μὲ α μεγαλυτέρου τῆς μονάδος 1, εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος 1. Ὥστε:

$$\frac{1}{α^{μ'}} > 1, \text{ ἤτοι } α^μ < 1.$$

β΄) Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ παρονομαστὴς $α^{μ'}$ εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος 1. Ὥστε $\frac{1}{α^{μ'}} < 1$, ἤτοι $α^μ > 1$.

γ΄) Ἐπειδὴ $α>1$, εἶναι (§ 47) $α^2>α$, $α^3>α^2$. Ἑπομένως εἶναι:

$$\frac{1}{α^3} < \frac{1}{α^2} < \frac{1}{α} < 1 < α < α^2 < α^3,$$

$$\text{ἤτοι} \quad α^{-3} < α^{-2} < α^{-1} < α^0 < α < α^2 < α^3.$$

68. Ἐὰν $0<α<1$, θὰ εἶναι (§ 47) $α^2<α$, $α^3<α^2$, $\frac{1}{α^3} > \frac{1}{α^2}$ κλπ. ὡς ἀνωτέρω. Ὥστε $α^{-3} > α^{-2} > α^{-1} > α^0 > α > α^2 > α^3$.

69. α΄) $(-8):2 > (-23):2$, ἤτοι $-4 > -11{,}5$.

β΄) $(-8):\left(\frac{-1}{5}\right) < (-23):\left(\frac{-1}{5}\right)$ ἢ $40 < 115$.

γ΄) $(-8):(-0{,}58) < (-23):(-0{,}58)$ ἢ $800 < 2\,300$.

70. Εἶναι (§ 47) $\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot(-5)\cdot χ < \left(-\frac{1}{5}\right)\cdot 30$, ἤτοι $χ < -6$

$$\frac{1}{3}\cdot 3\cdot χ < \frac{1}{3}\cdot 39, \text{ ἤτοι } χ < 13$$

$$\frac{1}{(-3)(-2)}\cdot(-3)(-2)\cdot χ > \frac{1}{(-3)(-2)}\cdot(-4{,}8)\cdot(-22), \text{ ἤτοι } χ > 17{,}6.$$

71. Εὑρίσκομεν ὁμοίως ὡς ἄνω κατὰ σειράν:

$$χ < -\frac{5}{6}, \quad χ > 53\frac{1}{3}, \quad χ < 40 \text{ καὶ } χ < 0{,}08.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΠΕΡΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Ἀσκήσεις.—*72*. α΄) Ρητή, διότι ἐπὶ οὐδενὸς τῶν γραμμάτων της εἶναι σημειωμένη ρίζα, καὶ ἀκεραία, διότι δὲν περιέχει διαίρεσιν διὰ γράμματος.

β΄) Ἄρρητος, διότι εἶναι σημειωμένη ρίζα ἐπὶ τοῦ γράμματος β, $(\sqrt{α^2} = α)$.

γ') Ἄρρητος, διότι εἶναι σημειωμένη ρίζα ἐπὶ τῶν γραμμάτων χ καὶ ψ.

δ') Κλασματική, διότι εἶναι ρητὴ καὶ περιέχει διαίρεσιν διὰ τῶν γραμμάτων β καὶ γ.

73. Ἐπειδὴ $\sqrt{\alpha^2}=\alpha$, $\sqrt{(\alpha+\beta)^2}=\alpha-\beta$ καὶ $\sqrt[3]{\delta^3}=\delta$, αἱ δοθεῖσαι παραστάσεις εἶναι φαινομενικῶς ἄρρητοι, ἀλλ' εἰς τὴν πραγματικότητα εἶναι ρηταί. Φαινομενικῶς ἄρρητοι εἶναι καὶ αἱ παραστάσεις
$\sqrt{(\alpha-\beta)^2}$, $\sqrt{(\alpha+\beta-\gamma)^2}$, $\sqrt[4]{\alpha^4}$, $\sqrt[3]{(\alpha+\beta)^3}$ κλπ.

74. α') Ἀκεραία, διότι $\dfrac{9\alpha^2\beta}{5\alpha}=\dfrac{9}{5}\alpha\beta$.

β') Ἀκεραία, διότι ἰσοῦται μὲ $16\alpha(\alpha-\beta)$.

γ') Ἀκεραία, διότι ἰσοῦται μὲ $\dfrac{6\gamma}{5}$, δ') Κλασματική.

Περὶ μονωνύμων.

75. α') 3 (συντελεστὴς) καὶ $\alpha^2\beta^2$ (κύριον ποσόν). β') -5 καὶ $\alpha^4\beta^5$.
γ') -1 καὶ α. δ') -3 καὶ $\chi\psi^3$. ε') 2 καὶ χ^2. στ') $-\dfrac{4}{5}$ καὶ χ^3.

ζ') $-\dfrac{1}{4}$ καὶ χ^3, η') 0,1 καὶ χ^2, θ') $-4{,}56$ καὶ χ^3.

ι') $-\dfrac{3}{4}$ καὶ α^2, ια') $\left(-\dfrac{5}{8}\right)\cdot 5\cdot(-8)=25$ συντελεστὴς καὶ $\alpha^2\beta\cdot\beta^2=\alpha^2\beta^3$ κύριον ποσόν.

76. α') Ἀριθμ. συντ. $\dfrac{5}{8}$ καὶ συντ. τοῦ α, ὁ $\dfrac{5}{8}\beta$, β') $-\dfrac{1}{3}$.
γ') Ὁ συντ. $-21/4$ τοῦ μονωνύμου εἶναι καὶ συντ. τοῦ χ^3.
δ') 3,4, ε') 5/6 ἀριθμ. συντ. καὶ 5α/6 συντ. τοῦ β^2.

77. α') Συντ. τοῦ μονωνύμου καὶ τοῦ ψ ὁ -24.

β') Συντ. ὁ -150 καὶ -150α συντ. τοῦ β.

γ') $\dfrac{56}{3}$ ἀριθ. συντ., $\dfrac{56}{3}\psi$ συντ. τοῦ χ καὶ $\dfrac{56}{3}\chi$ συντ. τοῦ ψ.

δ') $\dfrac{3}{4}$ ἀριθ. συντ., $\dfrac{3\beta}{4\gamma}$ συντ. τοῦ α καὶ $\dfrac{3\alpha}{4\gamma}$ συντ. τοῦ β.

ε') ἀριθ. συντ. ὁ -4 καὶ συντ. τοῦ χ ὁ $-\dfrac{4}{\psi}$.

στ') ἀριθ. συντ. ὁ -5 καὶ συντ. τοῦ χ^2 ὁ $-\dfrac{5}{\psi^2}$.

ζ') ἀριθ. συντ. ὁ $\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{3}{20}$ καὶ συντ. τοῦ χ^2 ὁ $\frac{3\psi}{20}$

καὶ τοῦ ψ ὁ $\frac{3\chi^2}{20}$.

η') ἀριθ. συντ. ὁ $\frac{2}{3}\cdot(-4)\cdot 3=-8$ καὶ συντ. τοῦ α ὁ $-8\chi^2$

καὶ τοῦ χ^2 ὁ -8α.

78. α') 2ου πρὸς α, 1ου πρὸς β, 2ου πρὸς γ, 3ου πρὸς α καὶ β, 5ου πρὸς α, β, γ.

β') 3ου πρὸς α, 2ου πρὸς β, 1ου πρὸς γ, 5ου πρὸς α καὶ β, 6ου πρὸς α, β, γ.

γ') 1ου πρὸς α, 3ου πρὸς β, 4ου πρὸς γ, 4ου πρὸς α καὶ β, 8ου πρὸς α, β, γ.

δ') 3ου, 2ου, 4ου πρὸς α, β, γ ἀντιστοίχως, 5ου πρὸς α καὶ β, 9ου πρὸς α, β, γ.

79. Ἀκέραια εἶναι τά:

α') -24ψ βαθμοῦ 1ου πρὸς ψ καί 0 πρὸς τὰ ἄλλα γράμματα.

β') $-150\alpha\beta$ βαθμοῦ 1ου πρὸς α,β· 2ου πρὸς αβ καὶ 0 πρὸς τὰ ἄλλα γράμματα.

γ') $\frac{56}{3}\chi\psi$ βαθμοῦ 1ου πρὸς χ, ψ· 2ου πρὸς χψ καὶ 0 πρὸς τὰ ἄλλα γράμματα.

ζ') $\frac{3}{20}\chi^2\psi$ βαθμοῦ 2ου πρὸς χ· 1ου πρὸς ψ καὶ 0 πρὸς τὰ ἄλλα γράμματα.

η') $-8\alpha\chi^2$ βαθμοῦ 1ου πρὸς α· 2ου πρὸς χ καὶ 0 πρὸς τὰ ἄλλα γράμματα.

Ἀναγωγὴ ὁμοίων μονωνύμων.

Ἀσκήσεις. *80.* α') 13μ β') -16μ γ') 2μ δ') -4μ ε') 18α στ') -3ϱ ζ') 6χ η') 4α θ') 11χ.

81. α') $3\chi^2$ β') $(4\alpha-4\beta-5\gamma)\chi^3$ γ') $\alpha^2\beta\chi(3\chi-2\chi^2-6)$.

δ') $(4-5\chi+3\chi^2-10\chi^3)\chi\psi^3$ ε') $\frac{1}{2}\chi^2+4\alpha\chi-3\alpha^2$.

82. $7\frac{3}{4}\chi^2\psi-0{,}25\chi^2\psi=7{,}50\chi^2\psi$, $-\chi+1{,}75\chi+5\frac{5}{12}\chi=\frac{37}{6}\chi$,

$19\frac{3}{8}\varphi^2+0{,}625\varphi^2=20\varphi^2$ $-8\frac{3}{8}\psi-1{,}125\psi=-9{,}5\psi$.

Ἄθροισμα: $7{,}50\chi^2\psi+\frac{37}{6}\chi+20\varphi^2-9{,}5\psi$.

83. α') $3\alpha^2\beta+3\alpha^2\beta+0{,}35\alpha^2\beta-0{,}5\alpha^2\beta=5{,}85\alpha^2\beta$.

$-8\chi\psi^3+32\chi\psi^3-0{,}25\chi\psi^3=23{,}75\psi^3$.

β') $46\chi\psi^2$ καὶ $-37{,}05\alpha^2\beta^3\gamma$, γ') $3{,}2\alpha^2\beta\gamma$·

Αριθμητικὴ τιμὴ ἀλγεβρικῆς παραστάσεως.

Ἀσκήσεις. *84.* α′) $-9\chi+7\psi=-9\cdot 3+7\cdot 4=-27+28=1.$

β′) $-15\chi+(-10\psi)=-15\cdot 3+(-10)(-4)=-45+40=-5.$

85. α′) $2^3-6\cdot 2^2\cdot 6+6=8-144+216=80.$

β′) $\dfrac{(2+5)(2-3\cdot 5)}{6\cdot 2-2\cdot 5}=\dfrac{7\cdot(-13)}{12-10}=\dfrac{-91}{2}=-45\dfrac{1}{2}.$

Σημείωσις: Κατὰ τὴν εὕρεσιν τῆς τιμῆς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως ἐκτελοῦμεν γενικῶς πρῶτον τοὺς πολλαπλασιασμοὺς καὶ τὰς διαιρέσεις καὶ ἔπειτα τὰς προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις. Ἐὰν περιέχῃ ὅρους κλασματικούς, ἐκτελοῦμεν τὰς σημειουμένας πράξεις χωριστὰ εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ χωριστὰ εἰς τὸν παρονομαστήν. Ἐπίσης, ἐὰν ἔχῃ παρενθέσεις ἢ ἀγκύλας, ἐκτελοῦμεν χωριστὰ τὰς πράξεις ἐπὶ τῶν παραστάσεων, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται ἐντὸς τῶν παρενθέσεων ἢ τῶν ἀγκυλῶν. Τέλος ἐὰν ἔχῃ ριζικά, ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις τὰς ὑπὸ τὰ ριζικά.

86. α′) $(-5+2)\cdot[(-5)^2-[2^2-6(-5)(-3)]=(-3)[25-(4-90)]=$ $=(-3)\cdot(25+86)=(-3)\cdot 111=-333.$

β′) $\sqrt{9^3-2\cdot(-4)}-4\cdot 3-2\sqrt{4\cdot 9^2+(-4)}\cdot(9+3)=\sqrt{737}-12-24\sqrt{320}.$

87. Εἶναι $\varphi(2)=3^2$, $\varphi(4)=3^4$ καὶ $\varphi(2)\cdot\varphi(4)=3^6=\varphi(6).$

88. Εἶναι $\varphi(5)=4\cdot 5^2+4\cdot 5-3=100+20-3=117$ καὶ

$\psi(5)=9(5+8)=9\cdot 13=117.$ Ὥστε $\varphi(5)=\psi(5).$

89. Εἶναι $\varphi(0,1,2)=(0+1+2)(0+1-2)(0-1-2)=3\cdot(-1)\cdot(-3)=9$

$\varphi(0,-1,-2)=(0-1-2)(0-1+2)\cdot(0+1+2)=-3\cdot 1\cdot 3=-9.$

Ὅθεν $\varphi(0,1,2)+\varphi(0,-1,-2)=9+(-9)=0.$

Περὶ πολυωνύμων.

Ἀσκήσεις. *90*. Εἶναι 6ου βαθμοῦ πρὸς α, πρὸς χ καὶ πρὸς α καὶ χ.

Ζητουμένη διάταξις. α′) $\chi^6-6\alpha\chi^5+3\alpha^2\chi^4-28\alpha^3\chi^3+9\alpha^4\chi^2-54\alpha^5\chi+$ $+27\alpha^6.$

β′) Εἶναι 6ου βαθμοῦ πρὸς α, πρὸς χ καὶ πρὸς α καὶ χ.

Ζ. διάταξις $-3\chi^6+7\alpha\chi^5-0{,}7\alpha^2\chi^4-\alpha^3\chi^3+0{,}7\alpha^4\chi^2+27\alpha^5\chi-\alpha^6.$

γ′) Ἐπειδὴ $7\alpha^6-7\alpha^6=0$, **τὸ πολ. εἶναι 6ου β. πρὸς χ, 5ου πρὸς α καὶ 6ου πρὸς α καὶ χ.**

Ζ. διάταξις, $16\chi^6+\dfrac{2}{3}\alpha\chi^5+\dfrac{1}{12}\alpha^2\chi^4-11\alpha^3\chi^3-7\alpha^4\chi^2+15\alpha^5\chi.$

δ′) Εἶναι 6ου βαθμοῦ πρὸς α, πρὸς χ, πρὸς α καὶ χ.

Ζ. διάταξις $-3\chi^6-\dfrac{5}{2}\alpha^2\chi^4+6\alpha^3+11\alpha^5\chi+3\alpha^6.$

Πράξεις ἐπὶ τῶν πολυωνύμων.

Ἀλγεβρικὸς λογισμός. Σκοπὸς αὐτοῦ.—Ὅταν μίαν ἀλγεβρικὴν παράστασιν μετασχηματίζωμεν εἰς ἄλλην ἴσην, δυνάμει τῶν ἰδιοτήτων τῶν πράξεων, ἐκτελοῦμεν *ἀλγεβρικὴν πρᾶξιν*. Τὸ σύνολον δὲ τῶν ἀλγεβρικῶν πράξεων λέγεται *ἀλγεβρικὸς λογισμός*.

Ὁ ἀλγεβρικὸς λογισμός, ἤτοι αἱ ἀλγεβρικαὶ πράξεις, γίνονται ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων ὄχι διὰ νὰ εὕρωμεν ἓν ἀριθμητικὸν ἐξαγόμενον, ὡς γίνεται εἰς τὴν ἀριθμητικήν, ἀλλὰ διὰ νὰ μετασχηματίσωμεν τὰς παραστάσεις εἰς ἄλλας ἴσας, ἀλλ' *ἁπλουστέρας*. *Ὁ μετασχηματισμὸς δὲ οὗτος τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων εἶναι εἷς τῶν κυριωτέρων σκοπῶν τῆς ἀλγέβρας.*

Πρόσθεσις πολυωνύμων.

Ἀσκήσεις. *91.* α΄) Τὰ δοθέντα πολυώνυμα εἶναι ἀνηγμένα. Γράφομεν λοιπὸν πρὸς εὐκολίαν, τὸ ἓν κάτωθι τοῦ ἄλλου, ὥστε οἱ ὅμοιοι ὅροι αὐτῶν νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην καὶ προσθέτομεν κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 60). Οὕτως εὑρίσκομεν $2α+2α-3α=α$, $-5β+3β=-2β$ καὶ $2γ+γ-2γ=γ$. Ὥστε τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι $α-2β+γ$. Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν, ὅτι τὰ ζητούμενα ἀθροίσματα τῶν ἄλλων ἀσκήσεων εἶναι:

β΄) $χ^2+χψ+ψ^2$, γ΄) $αγ+αβγ$, δ΄) $\frac{χ^2}{3}-\frac{4χψ}{3}+\frac{ψ^2}{2}$, ε΄) $\frac{3χ^2}{8}-\frac{2χψ}{5}-\frac{17ψ^2}{40}$.

Ἀφαίρεσις ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.

Ἀσκήσεις. Ἀλλάζομεν τὰ πρόσημα τῶν ὅρων τῆς ἀφαιρετέας παραστάσεως καὶ προσθέτομεν ὡς ἄνω. Οὕτως εὑρίσκομεν:

92. α΄) $-3χ^2-4χψ-ψ^2$. β΄) $6α^2β+6αβ^2$. γ΄) $α^2χ^2+9αχψ-7αβψ^2-2α^2$. δ΄) $19α^μ-17β^ν+10δ^λ$. ε΄) $3ψ^2-6χψ+8ψ-χ+4$.

93. $0{,}5χ^2+4αχ-\frac{5}{18}α^2$.

94. $\frac{χ^3}{4}+\frac{χ^2}{8}-\frac{17χ}{3}+\frac{2}{5}$.

Περὶ παρενθέσεων καὶ ἀγκυλῶν.

Ἀσκήσεις. *95.* *Ὁμὰς πρώτη.* α΄) $3χ-7χ+5ψ=-4χ+5ψ=-4\cdot3+5\cdot3=3$.
β΄) $17χ-ψ=17\cdot6-3=102-3=99$.
γ΄) $μ-ν=4χ-7ψ+2ω-χ-ψ-ω=3χ-8ψ+ω$.
θ΄) $-(μ-ν)=χ+9ψ-6ω-3χ+8ψ-ω=-2χ+17ψ-7ω$.

96. *Ὁμὰς δευτέρα*. α′) $\alpha-\alpha+[\alpha-(\alpha-1)]=\alpha-(\alpha-1)=\alpha-\alpha+1=1$.
β′) $5{,}8\alpha^2-8{,}2\alpha^2-\alpha^2+0{,}4+0{,}6=-3{,}4\alpha^2+1=-3{,}4\cdot 4+1=-12{,}6$.
γ′) $[-(-\chi)]+(-\psi)=\chi-\psi=-1-(-1)=-1+1=0$.
δ′) $-[+(-\chi)]+[+[-(-\chi)]=-(-\chi)+[-(-\chi)]=\chi+\chi=4$.
ε′) $[-(\beta+\gamma-\alpha)]-[-(\alpha-\beta+\gamma)]=-\beta-\gamma+\alpha+\alpha-\beta+\gamma=-2\beta+2\alpha=2$.

97. α′) $2+\chi+\chi^2+6\chi^3-8\chi^4+4\chi^5$, β′) $2+\chi+4\chi^3-5\chi^4$ καὶ $-2-\chi+\chi^2-2\chi^3+2\chi^4+4\chi^5$, γ′) $(\chi^2+2\chi^3-3\chi^4+4\chi^5)+$ $+(2-\chi-4\chi^2+10\chi^3-13\chi^4+2\chi^5)=2-\chi-3\chi^2+12\chi^3-16\chi^4+6\chi^5$.

98. *Ὁμὰς τρίτη*. $\chi^2+(7\chi^2-3\chi-5)$, $-5\chi^4+[-(3\chi^3-8\chi^2)-6\chi+9]$, $13\chi+(-16\chi^2+19\chi^3-14\alpha+5\gamma)$, $\chi^2-(-7\chi^2+3\chi+5)$,

$-5\chi^4-[(3\chi^3-8\chi^2)+6\chi-9]$. $13\chi-(16\chi^2-19\chi^3+14\alpha-5\gamma)$.

99. α′) $30\alpha^2-18\alpha\beta+6\beta^2+3\beta^3$, β′) $-2\alpha^2+8\alpha\beta-4\beta^2-3\beta^3$, γ′) $6\alpha^2-4\alpha\beta-4\beta^2-3\beta^3$.

100. 1η τάξ. α μαθ., 2α τάξ. $(\alpha-\beta)$ μαθ., 3η τάξ. $(\alpha-2\beta)$ μάθ.
Αἱ τρεῖς τάξεις ὁμοῦ ἔχουν $\alpha+\alpha-\beta+\alpha-2\beta=3\alpha-3\beta$ μαθ.
Αἱ δύο πρῶται τάξεις ἔχουν περισσοτέρους τῆς τρίτης $\alpha+\alpha-\beta-(\alpha-2\beta)=2\alpha-\beta-\alpha+2\beta=\alpha+\beta$ μαθ.

101. Ὁ Α ἔχει χ καὶ ὁ Β ἔχει $(\mu-\chi)$ δρχ. Ὥστε τελικῶς ὁ Α θὰ ἔχῃ $(\chi-3)$ δρχ. καὶ ὁ Β $\mu-\chi+3$ δρχ.

102. Ὁ Α ἔχει μ δρχ., ὁ Β ἔχει 3μ δρχ. καὶ ὁ Γ ἔχει 6μ δρχ. Οἱ δὲ τρεῖς ἔχουν $\mu+3\mu+6\mu=10\mu$ δρχ.

Γινόμενον ἀκεραίων μονωνύμων.

Ἀσκήσεις. *103*. α′) $(-1)\cdot\chi^{7+3}\cdot\psi^{6+4}=-\chi^{10}\psi^{10}$ β′) $-\chi^5\cdot\alpha^{10}$ γ′) $\chi^4\cdot\beta^{12}$
δ′) $\chi^{3\nu+3}$ ε′) $\chi^{5\nu+2}$ στ′) $-2\alpha^3\chi^{-1}$ ζ′) $-\chi^3\psi^3\omega^3$ η′) $-28\chi^3\psi^3\omega$.

104. α′) $(-2{,}5)^2\cdot(\alpha^2)^2\cdot\beta^2\cdot\chi^2=6{,}25\alpha^4\beta^2\chi^2$ β′) $-0{,}027\alpha^3\beta^3\gamma^6$, γ′) $16\alpha^4\beta^8\gamma^4\chi^8$.

105. α′) $-\alpha^3\chi^{-1}$ β′) $\chi^{2\nu-2}\cdot\psi^{2\mu-4}$, γ′) Πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἐκθέτας τῶν παραγόντων τοῦ μονωνύμου ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἐκθέτην (ἄσκ. 104). Π.χ.

$$(6\alpha\beta^2)^2=6^2\cdot\alpha^2\cdot\beta^4,\quad \left(\frac{3}{4}\chi^3\psi\right)^3=\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\chi^9\cdot\psi^3 \quad \text{καὶ} \quad (25\alpha^2\beta^2\gamma)^5=$$
$$=25^5\cdot\alpha^{10}\cdot\beta^{10}\cdot\gamma^5.$$

Γινόμενον πολυωνύμου ἐπὶ μονώνυμον.

Ἀσκήσεις. *Ὁμὰς πρώτη*. *106*. α′) $3\alpha^3\chi-12\alpha^2\chi^2+3\alpha\chi^3=3\cdot2^3\cdot(-1)-$ $-12\cdot2^2\cdot(-1)^2+3\cdot2\cdot(-1)^3=-24-48-6=-78$.
β′) $3\alpha^2+7\alpha\beta-9\beta^2+5\alpha\beta=3\alpha^2+12\alpha\beta-9\beta^2=12-72-81=-141$.
γ′) $3\alpha^3\beta+7\alpha\beta^3-9\alpha^3\beta+8\alpha\beta^3=-6\alpha^3\beta+15\alpha\beta^3=-12+120=108$.

δ') $9α^4β^5+21α^2β^4-18α^5β^6+16α^2β^5=-288+336+1152-512=688$.

Ὁμὰς δευτέρα. 107. Διανύουν εἰς τ ἡμέρας ὁ α' $(α+μ)\cdot τ=ατ+μτ$ χλμ. καὶ ὁ β' $(α+μ-2)τ=ατ+μτ-2τ$ χλμ. Ὥστε μετὰ τ ἡμέρας θὰ ἀπέχουν: $ατ+μτ+ατ+μτ-2τ=2ατ+2μτ-2τ=2τ(α+μ-1)$ χλμ.

108. Τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι $α-μ$. Ὥστε ὁ δοθεὶς διψήφιος ἔχει $10(α-μ)+μ=10α-10μ+μ=10α-9μ$ μονάδας.

Ἐὰν ὅμως ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ψηφίων, ὁ νέος διψήφιος θὰ ἔχῃ $10μ+α-μ=9μ+α$ μονάδας καὶ θὰ διαφέρουν οἱ δύο κατὰ $9μ+α-10α+9μ=$ $=18μ-9α=9(2μ-α)$ μονάδας.

Παρατήρησις. Ἐὰν $2μ>α$ ὁ ἀριθμὸς θὰ αὐξηθῇ κατὰ $9(2μ-α)$ μονάδας· θὰ ἐλαττωθῇ δὲ κατὰ τὰς μονάδας αὐτὰς ἐὰν $2μ<α$.

109. Ὁ α' ἐβάδισε ἐπὶ τ ἡμ., $30\cdot τ$ χλμ., ὁ δὲ β' ἐβάδισεν ἐπὶ $τ-μ$ ἡμ., $γ(τ-μ)$ χλμ. Ὥστε ἀπέχουν $30τ-γ(τ-μ)=30τ-γτ+γμ$ χλμ.

Γινόμενον πολυωνύμων.

Ἀσκήσεις.—*110*. α') $-χ^4-4χ^3-2χ^2+4χ+3=-(-1)^4-4(-1)^3-2(-1)^2+$

$+4(-1)+3=-1+4-2-4+3=0$.

$χ^2+4χ+3=(-1)^2+4(-1)+3=1-4+3=0$

$1-χ^2=1-(-1)^2=1-1=0$ καὶ $0\cdot 0=0$.

β') $χ^4-3χ^3-5χ^2-4χ+6=(-1)^4-3(-1)^3-5(-1)^2-4(-1)+6=9$, $χ^2+$ $+2χ+2=1-2+2=1$, $χ^2-5χ+3=1+5+3=9$ καὶ $9\cdot 1=9$.

γ') $χ^5-4χ^4+2χ^3+12χ^2-16χ-16=243-324+54+108-48-16=17$ καὶ $27-18+8=17$, $9-6-2=1$ καὶ $17\cdot 1=17$.

δ') $-20α^5-7α^4-4α^3-7α^2+5α+3$ κλπ.

111. α') $8α^{3ν+8}-27α^5=8-27=-19$ καὶ $19\cdot(-1)=-19$.

β') $χ^{15}+ψ^{10}=-1+1=0$ καὶ $χ^{12}-χ^9ψ^2+χ^6ψ^4-χ^3ψ^6+ψ^8=1+1+$ $+1+1+1=5$, $χ^6+ψ^2=-1+1=0$ καὶ $5\cdot 0=0$.

γ') $α^μ\cdot χ^{2-μ}-β\cdot α^{μ+1}\cdot χ^{3-μ}+γ\cdot α^{μ-2}\cdot χ^{4-μ}+β\cdot γ\cdot α^{2μ-1}\cdot χ^3-$ $-γ^2\cdot α^{2μ-2}\cdot χ^4+βγα^{-1}\cdot χ^3-γ\cdot α^{2μ}\cdot χ^2-β^2α^2χ^2+βαχ$.

δ') $χ^{2α(β-1)}-ψ^{2β(α-1)}=χ^{2(2-1)}-ψ^{4(1-1)}=χ^2-1$

$χ^{α(β-1)}+ψ^{β(α-1)}=χ+1$, $χ^{α(β-1)}-ψ^{β(α-1)}=χ-1$ καὶ $(χ+1)(χ-1)=χ^2-1$.

ε') $(χ^4+χ^3-χ^2+χ+1)(χ^3+2χ^2-χ-2)=χ^7+3χ^6-4χ^4+2χ^3+3χ^2-3χ-2$.

στ') $-8α^3+β^3+27γ^3-4α^2β+2αβ^2-12α^2γ+18αγ^2-9βγ^2-3γβ^2-12αγβ$.

Ἀξιοσημείωτοι πολλαπλασιασμοί.

Ἀσκήσεις. *112*. 1) $(α^2+β^2)\cdot(γ^2+δ^2)=α^2γ^2+α^2δ^2+β^2γ^2+β^2δ^2$.

2) $(αγ+βδ)^2+(αδ-βγ)^2=α^2γ^2+2αβγδ+β^2δ^2+α^2δ^2-2αβγδ+$ $+β^2γ^2=α^2γ^2+α^2δ^2+β^2γ^2+β^2δ^2$.

3) $(αγ-βδ)^2+(αδ+βγ)^2=α^2γ^2-2αβγδ+β^2δ^2+α^2δ^2+2αβγδ+β^2γ^2=$ $=α^2γ^2+α^2δ^2+β^2γ^2+β^2δ^2$.

Οὕτω δὲ βλέπομεν ὅτι τὰ εὑρεθέντα ἐξαγόμενα εἶναι ἴσα.

Ἄλλος τρόπος: Γράφομεν τὸ ἐξαγόμενον 1) ὡς ἑξῆς:

$(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)=(\alpha^2\gamma^2-2\cdot\alpha\gamma\cdot\beta\delta+\beta^2\delta^2)+(\alpha^2\delta^2+2\cdot\alpha\delta\cdot\beta\gamma+\beta^2\gamma^2)=$
$=(\alpha\gamma-\beta\delta)^2+(\alpha\delta+\beta\gamma)^2.$

113. Εἶναι $\chi^3=(2\psi+3\omega)^3$, ἤτοι $\chi^3=8\psi^3+3\cdot(2\psi)^2\cdot3\omega+3\cdot2\psi\cdot(3\omega)^2+$
$+(3\omega)^3=8\psi^3+36\psi^2\omega+54\psi\omega^2+27\omega^3=8\psi^2+18\psi\omega(2\psi+3\omega+27\omega^3=8\psi^3+$
$+18\chi\psi\omega+27\omega^3$. Ὅθεν $\chi^3-8\psi^3-18\chi\psi\omega=0$.

114. $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+2\beta^2+\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2=\alpha^2-2\beta(\alpha+\gamma)+4\beta^2+\gamma^2=$
$=\alpha^2-4\beta^2+4\beta^2+\gamma^2=\alpha^2+\gamma^2$.

115. Ἐπειδὴ $\psi=1-\chi$, ἔχομεν $\chi^3(2-\chi)-(1-\chi)^2\cdot(1+\chi)-2\chi+1=$
$=2\chi^3-\chi^4-1+2\chi-2\chi^3+\chi^4-2\chi+1=0$.

116. Εἶναι $(-\beta)^2+(-\beta)\cdot(2\beta-\gamma)-\beta\gamma+\beta^2=\beta^2-2\beta^2+\beta\gamma-\beta\gamma+\beta^2=0$.

117. Εἶναι $\varphi(\chi_1+1)=3(\chi_1+1)^2-(\chi_1+1)+1=3\chi_1^2+6\chi_1+3-\chi_1-1+$
$+1=3\chi_1^2+5\chi_1+3$ καὶ $2\varphi(0)=2$. Ὅθεν:

$$\varphi(\chi_1+1)-\varphi(\chi_1)-2\varphi(0)=3\chi_1^2+5\chi_1+3-3\chi_1^2+\chi_1-1-2=6\chi_1.$$

118. $\varphi(\chi+1)-\varphi(\chi)=3(\chi+1)^2+7(\chi+1)-(3\chi^2+7\chi)=3\chi^2+6\chi+$
$+3+7\chi+7-3\chi^2-7\chi=6\chi+10=\psi(\chi)$.

119. α') Εἶναι $\tau^2-2\alpha\tau+\alpha^2+\tau^2-2\beta\tau+\gamma^2+\tau^2-2\gamma\tau+\gamma^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+$
$+3\tau^2-2\tau(\alpha+\beta+\gamma)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+3\tau^2-4\tau^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\tau^2$.

β') Ἐὰν θέσωμεν $\tau-\alpha=\chi$, $\tau-\beta=\psi$ καὶ $\tau-\gamma=z$ ἔχομεν

$$(\chi+\psi+z)^3=\chi^3+\psi^3+z^3+3\chi\psi(\chi+\psi)+3(\chi+\psi)\cdot(\chi+\psi+z)z$$

ἀλλὰ $3\chi\psi(\chi+\psi)+3(\chi+\psi)(\chi+\psi+z)z=3(\chi+\psi)(\chi\psi+\chi z+\psi z+z^2)=3(\chi+\psi)$
$[\chi(\psi+z)+z(\psi+z]=3(\chi+\psi)(\psi+z)(\chi+z)$.

Ἑπομένως εἶναι:

$[(\tau-\alpha)+(\tau-\beta)+(\tau-\gamma]^3=(\tau-\alpha)^3+(\tau-\beta)^3+(\tau-\gamma)^3+3(\tau-\alpha+\tau-\beta)$
$(\tau-\beta+\tau-\gamma)(\tau-\alpha+\tau-\gamma)$.

Ἀλλὰ $\tau-\alpha+\tau-\beta+\tau-\gamma=3\tau-(\alpha+\beta+\gamma)=3\tau-2\tau=\tau$.

$-\alpha+\tau-\beta=2\tau-(\alpha+\beta)=\gamma$, $\tau-\beta+\tau-\gamma=\alpha$ καὶ $\tau-\alpha+\tau-\gamma=\beta$.

Ὅθεν: $\tau^3=(\tau-\alpha)^3+(\tau-\beta)^3+(\tau-\gamma)^3+3\alpha\beta\gamma$.

γ') Εἶναι $(\tau-\beta)(\tau-\gamma[2(\tau-\alpha)+\alpha]+(\tau-\alpha)[\beta(\tau-\gamma)+\gamma(\tau-\beta)]$.

$=(\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\beta+\gamma)+(\tau-\alpha)[\tau(\beta+\gamma)-2\beta\gamma]$.

$=(\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\beta+\gamma)+\tau(\tau-\alpha)(\beta+\gamma)-2\beta\gamma(\tau-\alpha)$.

$=(\beta+\gamma)[(\tau-\beta)(\tau-\gamma)+\tau(\tau-\alpha)]-2\beta\gamma(\tau-\alpha)$.

$=(\beta+\gamma)[(2\tau^2-\tau(\alpha+\beta+\gamma)+\beta\gamma]-2\beta\gamma(\tau-\alpha)$.

$=(\beta+\gamma)[(2\tau^2-2\tau^2+\beta\gamma)-2\beta\gamma(\tau-\alpha)$.

$=(\beta+\gamma)\beta\gamma-2\beta\gamma(\tau-\alpha)=\beta\gamma(\beta+\gamma-2\tau+2\alpha)=\alpha\beta\gamma$.

120. Εἶναι $(\alpha^2+\beta^2)^2=\alpha^4+\beta^4+2\alpha^2\beta^2$. Ἑπομένως ἔχομεν:

$$\alpha^4+\beta^4+(\alpha+\beta)^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2\beta^2+(\alpha+\beta)^4+2\alpha^2\beta^2 \quad (\iota)$$

Ἀλλὰ $(\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)=(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2$. Τὸ 2ον λοιπὸν μέλος τῆς ἰσότητος (ι) γίνεται:

$(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2+(\alpha+\beta)^4+2\alpha^2\beta^2=(\alpha+\beta)^2[(\alpha-\beta)^2+(\alpha+\beta)^2]+2\alpha^2\beta^2=2(\alpha^2+\beta^2)\cdot$
$\cdot(\alpha+\beta)^2+2\alpha^2\beta^2$.

121. α') Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εἰς τὸ 2ον μέλος εὑρίσκομεν:

$$\alpha^5+\alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3+\beta^5-\alpha^3\beta^2-\alpha^2\beta^3=\alpha^5+\beta^5.$$

β') Ἐὰν θέσωμεν $\psi-\omega=\alpha,\ \chi-\psi=\beta$, ἔχομεν:

$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$, ἤτοι $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$.

Ἐπειδὴ δὲ $\alpha+\beta=\psi-\omega+\chi-\psi=\chi-\omega$, τὸ α' μέλος τῆς δοθείσης ἰσότητος γίνεται:

$$(\chi-\omega)^3-3(\psi-\omega)(\chi-\psi)(\chi-\omega)+3(\chi-\psi)(\chi-\omega)(\psi-\omega)=(\chi-\omega)^3.$$

122. Ἔχομεν $\alpha^4-2\alpha^2\beta^2+\beta^4+4\alpha^2\beta^2=\alpha^4+2\alpha^2\beta^2+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2$.

123.

$$\begin{array}{ll} \chi^2(\psi-\omega)+\psi^2(\omega-\chi)+\omega^2(\chi-\psi) = & \chi^2\psi-\chi^2\omega+\psi^2\omega-\psi^2\chi+\omega^2\chi-\omega^2\psi \\ (\psi-\omega)(\omega-\chi)(\chi-\psi) & =-\chi^2\psi+\chi^2\omega-\psi^2\omega+\psi^2\chi-\omega^2\chi+\omega^2\psi. \\ \hline \text{ἄθροισμα} & 0 \end{array}$$

Διαίρεσις ἀκεραίων μονωνύμων.

Ἀσκήσεις *124.* α') Ἐπειδὴ (§ 69) $9:(-3)=-3$, $\mu^4:\mu^2=\mu^2$ καὶ $\psi^5:\psi^2=\psi^3$, εἶναι $9\mu^4\psi^5:-3\mu^2\psi^2=-3\mu^2\psi^3$. Ὁμοίως δὲ εὑρίσκομεν ὅτι τὰ πηλίκα τῶν ἄλλων ἀσκήσεων εἶναι β') $-11\chi^3\psi$ γ') $-2{,}5\chi\psi^2$.

δ') $0{,}5\alpha^2\gamma$ ε') $-0{,}75\nu^4$ στ') $\dfrac{16}{\beta\gamma\delta^4}$ ζ') $-\dfrac{35\gamma^2}{36\beta}$.

Διαίρεσις πολυωνύμου διὰ μονωνύμου.

Ἀσκήσεις. *125.* α') Ἐπειδὴ $14\chi^3\psi^2:2\chi^2\psi^2=7\chi$ καὶ $-28\chi^4\psi^2:2\chi^2\psi^2=-14\chi^2$ τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι $7\chi-14\chi^2$. Ὥστε, $14\chi^3\psi^2-28\chi^4\psi^2=2\chi^2\psi^2\cdot(7\chi-14\chi^2)$.

Εἶναι δὲ $14\chi^3\psi^2-28\chi^4\psi^2=14\cdot2^3\cdot(-2)^2-28\cdot2^4\cdot(-2)^2=14\cdot8\cdot4-28\cdot16\cdot4=448-1792=-1344$ ἢ $2\chi^2\cdot\psi^2\cdot(7\chi-14\chi^2)=2\cdot2^2\cdot(-2)^2\cdot[7.2-14\cdot(-2)^2]=32\cdot(14-56)=32\cdot(-42)=-1344$.

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εἰς τὰς ἄλλας ἀσκήσεις εὑρίσκομεν:

β') πηλ.$=\alpha+\beta$, $(\chi+\psi)\cdot(\alpha+\beta)=(\chi+\psi)\cdot(\alpha+\beta)$ καὶ $(\chi+\psi)(\alpha+\beta)=(4+4)\cdot(1+1)=16$.

γ') πηλ. $-2\alpha^2+4\alpha\beta-6\beta^2+3$ καὶ διαιρέτης ἐπὶ πηλίκον $=-4\cdot3^2\cdot2^2\cdot(-2\cdot3^2+4\cdot3\cdot2-6\cdot2^2+3)=-4\cdot9\cdot4\cdot(-18+24-24+3)=(-144)\cdot(-15)=2160$.

δ') πηλ. $\chi^2+2\chi\psi-\psi^2$. Διὰ δὲ $\chi=4$, $\psi=1$ καὶ $\mu=\nu=-1$ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον εἶναι $4^{-1}\cdot1^{-1}\cdot(4^2+2\cdot4\cdot1-1^2)=\dfrac{1}{4}\cdot23=\dfrac{23}{4}$.

126. α') $(\alpha+\beta)\chi$, β') $7\alpha(7\beta+9)$, γ') $8\chi(7\psi-9\omega)$, δ') $7\alpha(0{,}05\beta-0{,}07\gamma)$.
ε') $\alpha^4\beta^4(2{,}3\beta-2{,}5\alpha)$, στ') $\chi\psi(\alpha^3\chi^2+3\alpha^2\beta\chi+3\alpha\beta^2\psi-\psi^3)$.

ζ') $\alpha^3\beta\left(12\dfrac{2}{3}-14{,}25\alpha\beta^6-15\dfrac{5}{6}\alpha^2\beta^4+11\dfrac{1}{12}\alpha^3\beta^3\right)$.

Διαίρεσις πολυωνύμου διὰ πολυωνύμου.

Ἀσκήσεις.— *127.* α')

$$\begin{array}{r|l} 2\chi^3-7\chi^2-7\chi+4 & 2\chi-1 \\ \cline{2-2} -2\chi^3+\chi^2 \quad\quad\quad & \chi^2-3\chi-5 \ (\pi\eta\lambda.) \\ \hline -6\chi^2-7\chi \quad & \\ +6\chi^2-3\chi \quad & \\ \hline -10\chi+4 & \\ +10\chi-5 & \\ \hline \text{ὑπόλ.} \ -1 & \end{array}$$

Δοκιμή.
$$\begin{aligned} (2\chi-1)(\chi^2-3\chi-5)-1 &= 2\chi^3-6\chi^2-10\chi \\ &\quad\ -\chi^2+3\chi+5 \\ &\quad\quad\quad\quad\quad -1 \\ &= 2\chi^3-7\chi^2-7\chi+4 \end{aligned}$$

β') Πηλ. $2\chi^2+2\chi+5$. Ὑπόλ. 20. ***Δοκιμή.*** $(3\chi-2)(2\chi^2+2\chi+5)+20=$ $=6\chi^3+2\chi^2+11\chi+10$.

γ)

$$\begin{array}{r|l} \chi^4+\chi^2+1 & \chi^2+\chi+1 \\ \cline{2-2} -\chi^4-\chi^3-\chi^2 & \chi^2-\chi+1 \ (\pi\eta\lambda.) \\ \hline -\chi^3 \quad\quad +1 & \\ +\chi^3+\chi^2+\chi & \\ \hline \chi^2+\chi+1 & \\ -\chi^2-\chi-1 & \\ \hline \text{ὑπόλ.} \ 0 & \end{array}$$

Δοκιμή.
$$\begin{aligned} (\chi^2-\chi+1)(\chi^2+\chi+1) &= \\ &= \chi^4+\chi^3+\chi^2 \\ &\quad\ -\chi^3-\chi^2-\chi \\ &\quad\quad\quad\ \ \chi^2+\chi+1 \\ &= \chi^4+\chi^2+1. \end{aligned}$$

δ') Πηλ. $\chi-2$. Ὑπ. 0. ***Δοκιμή.*** $(\chi^2-4\chi+4)(\chi-2)=\chi^3-6\chi^2+12\chi-8$.

ε')

$$\begin{array}{r|l} 10\chi^5-21\chi^4-10\chi^2-40\chi & 5\chi^2-3\chi+8 \\ \cline{2-2} -10\chi^5+6\chi^4-16\chi^3 \quad\quad\quad\quad & 2\chi^3-3\chi^2-5\chi-\frac{1}{5} \ (\pi\eta\lambda.) \\ \hline -15\chi^4-16\chi^3-10\chi^2-40\chi & \\ -15\chi^4-9\chi^3+24\chi^2 \quad\quad & \\ \hline -25\chi^3+14\chi^2-40\chi & \\ +25\chi^3-15\chi^2+40\chi & \\ \hline -\chi^2 \quad\quad\quad & \\ +\chi^2-{}^3/_5\chi+{}^8/_5 & \\ \hline \text{ὑπ.}-{}^3/_5\chi+{}^8/_5 & \end{array}$$

Δοκιμή.
$$\begin{aligned} (5\chi^2-3\chi+8)(2\chi^3-3\chi^2-5\chi-{}^1/_5)-{}^3/_5\chi+{}^8/_5 &= \\ = 10\chi^5-15\chi^4-25\chi^3-\chi^2 & \\ -6\chi^4+9\chi^3+15\chi^2+{}^3/_5\chi & \\ +16\chi^3-24\chi^2-40\chi-{}^8/_5 & \\ -{}^3/_5\chi+{}^8/_5 & \\ = 10\chi^5-21\chi^4 \quad\quad -10\chi^2-40\chi & \end{aligned}$$

στ')

$$
\begin{array}{l|l}
\alpha^{10} \qquad\qquad +\alpha^5+1 & \alpha^2+\alpha+1 \\
\cline{2-2}
-\alpha^{10}-\alpha^9-\alpha^8 & \alpha^8-\alpha^7+\alpha^5-\alpha^4+\alpha^3-\alpha+1 \\
\cline{1-1}
\quad -\alpha^9-\alpha^8+\alpha^5+1 & \\
\quad +\alpha^9+\alpha^8+\alpha^7 & \\
\cline{1-1}
\qquad \alpha^7 \quad +\alpha^5+1 & \\
\qquad -\alpha^7-\alpha^6-\alpha^5 & \\
\cline{1-1}
\qquad -\alpha^6 \qquad +1 & \\
\qquad +\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4 & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad \alpha^5+\alpha^4 \quad +1 & \\
\qquad\quad -\alpha^5-\alpha^4-\alpha^3 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad -\alpha^3 \quad +1 & \\
\qquad\qquad +\alpha^3+\alpha^2+\alpha & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\quad \alpha^2+\alpha+1 & \\
\qquad\qquad\quad -\alpha^2-\alpha-1 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\quad \text{ὑπόλ. } 0 &
\end{array}
$$

Δοκιμή. $(\alpha^2+\alpha+1)(\alpha^8-\alpha^7+\alpha^5-\alpha^4+\alpha^3-\alpha+1)=$

$$
\begin{aligned}
&=\alpha^{10}-\alpha^9 \quad +\alpha^7-\alpha^6+\alpha^5 \quad -\alpha^3+\alpha^2 \\
&\qquad \alpha^9-\alpha^8 \quad +\alpha^6-\alpha^5 \qquad\quad -\alpha^2+\alpha \\
&\qquad\quad +\alpha^8-\alpha^7 \quad +\alpha^5 \quad +\alpha^3 \quad -\alpha+1 \\
\hline
&=\alpha^{10}+\alpha^5+1.
\end{aligned}
$$

ζ) Πηλ. $\alpha^2+2\alpha\beta+3\beta^2$. Ὑπ. $4\alpha\beta^3-2\beta^4$. Δοκ. $(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)(\alpha^2+2\alpha\beta+$ $+3\beta^2)+4\alpha\beta^3-2\beta^4=\alpha^4+\beta^4$.

η') Θὰ διαιρέσωμεν $(\chi^6-6\chi^5+1):(\chi^2-6\chi+1)$ καὶ θὰ εὕρωμεν πηλίκον $\chi^4-4\chi^3-9\chi^2-14\chi-19$ καὶ ὑπ. $-24\chi+20$. Ἡ δοκιμὴ κατὰ τὰ γνωστά.

Σημείωσις. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν μὲ τὰ πολυώνυμα ὡς ἐδόθησαν, ἤτοι διατεταγμένα κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος χ, θὰ ἴδωμεν ὅτι αὕτη δὲν θὰ τελειώσῃ ποτὲ καὶ θὰ εὕρωμεν πηλίκον $1-4\chi-9\chi^2-$ $-14\chi^3\ldots$, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ δυνάμεις τοῦ χ βαίνουν συνεχῶς αὐξανόμεναι. Διὰ τοῦτο προτιμώτερον εἶναι εἰς τὴν διαίρεσιν πολυωνύμων νὰ διατάσσωμεν ταῦτα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος, διότι οὕτως ἡ ἀτελὴς διαίρεσις διακόπτεται, ὅταν φθάσωμεν εἰς ὑπόλοιπον βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου (§ 75).

θ') Πηλ. $\chi^3-4\chi^2+11\chi-24$, ὑπ. 0. Δοκιμὴ ὡς προηγουμένως.

Ὁμὰς δευτέρα.- 128. α') Ὁ 1ος ὅρος τοῦ πηλίκου εἶναι $\chi^{2\nu}(=\chi^{3\nu}:\chi^\nu=$ $=\chi^{3\nu-\nu})$. Ὁ 2ος δὲ ὅρος αὐτοῦ εἶναι $-2\chi^\nu\,\psi^\nu\ (=-2\chi^{2\nu}\cdot\psi^\nu:\chi^\nu=-2\chi^{2\nu-\nu}\cdot\psi^\nu)$. Ὁ 3ος δὲ καὶ τελευταῖος ὅρος τοῦ πηλίκου εἶναι $\psi^{2\nu}(=\chi^\nu\,\psi^{2\nu}:\chi^\nu=\chi^{\nu-\nu}\cdot\psi^{2\nu})$. Τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 0. Ὥστε. Πηλ. $\chi^{2\nu}-2\chi^\nu\,\psi^\nu+\psi^{2\nu}$.

β') Θὰ διαιρέσωμεν $(3\alpha^{4\chi}+14\alpha^{3\chi}+9\alpha^\chi+2):(\alpha^{2\chi}+5\alpha^\chi+1)$ καὶ θὰ εὕρωμεν πηλ. $3\alpha^{2\chi}-\alpha^\chi+2$ καὶ ὑπ. 0.

γ') Πηλίκου 1ος ὅρος $=\chi^{8\nu}:\chi^{5\nu}=\chi^{8\nu-5\nu}=\chi^{3\nu}$, 2ος ὅρος $=\chi^{7\nu}\cdot\psi^\rho:\chi^{5\nu}=$ $=\chi^{2\nu}\cdot\psi^\rho$, 3ος ὅρος $=\chi^{6\nu}\cdot\psi^{2\rho}:\chi^{5\nu}=\chi^\nu\cdot\psi^{2\rho}$, 4ος ὅρος $=\chi^{5\nu}\cdot\psi^{3\rho}:\chi^{5\nu}=$ $=\psi^{3\rho}$. ὑπόλ. $=0$. Ὥστε πηλ. $=\chi^{3\nu}+\chi^{2\nu}\cdot\psi^\rho+\chi^\nu\cdot\psi^{2\rho}+\psi^{3\rho}$.

δ') Πηλ. $\alpha^{2\mu}-2\alpha^\mu\cdot\chi^\nu+4\chi^{2\nu}$. Ὑπ. 0. ε') Πηλ. $\chi^\nu\cdot\psi^\nu-7\chi^{\nu-1}\cdot\psi^{2\nu}$. Ὑπόλ. 0.

Ὁμὰς τρίτη. – *129.* Ἔστω μ, ν καὶ ρ οἱ βαθμοὶ τοῦ διαιρετέου, τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου ἀντιστοίχως, τελείας διαιρέσεως. Ἀλλ' ὁ βαθμὸς τοῦ διαιρετέου, ὅστις εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον εἶναι (§ 67) ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου. Ὥστε εἶναι $\mu=\nu+\rho$ καὶ $\rho=\mu-\nu$. Ἀλλ' ἀληθεύει τοῦτο καὶ εἰς τὴν ἀτελῆ διαίρεσιν, διότι τὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ προστίθεται εἰς τὸ ὡς ἄνω γινόμενον, δὲν μεταβάλλει τὸν βαθμὸν τούτου. Π. δ. εἰς τὴν διαίρεσιν τῆς § 75, τὸ πηλίκον εἶναι 2ου βαθμοῦ ὅστις εἶναι διαφορὰ τοῦ 4ου βαθμοῦ τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ 2ου βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου. Ὁμοίως τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως, α') τῆς ἀσκήσεως 126 εἶναι 2ου βαθμοῦ, ὁ δὲ βαθμὸς τοῦ διαιρετέου εἶναι 3 καὶ ὁ τοῦ διαιρέτου 1. Ὁμοίως τῆς ἰδίας ἀσκήσεως τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως, η') εἶναι βαθμοῦ 4ου= =6ουβαθ. – 2ουβαθ.

Ὑπόλοιπον διαιρέσεως διὰ $\chi\pm\alpha$ ἢ διὰ $\alpha\chi\pm\beta$.

Ἀσκήσεις. *130. (σελὶς 82).* — α') ὑπ.$=2\cdot2^2+2-9=1$, β') ὑπ.$=(-2)^3+6(-2)+7=-1$, γ') ὑπ.$=(0{,}5)^4+17(0{,}5)^6-68\cdot(0{,}5)-33=-64{,}8125$, δ') 1) τῆς $(27\chi^3+1):(3\chi+1)$ ὑπ.$=27\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^3+1=-1+1=0$. 2) τῆς $(27\chi^3+1):(3\chi-1)$, ὑπ.$=27\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+1=2$ 3) τῆς $(27\chi^3-1):(3\chi+1)$ ὑπ.$=27\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^3-1=-2$, 4) τῆς $(27\chi^3-1):(3\chi-1)$ ὑπ. $27\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3-1=0$.

131. α') $81\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^4-256=81\cdot\frac{256}{81}-256=0$. β') Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν ἄσκησιν 128, δ') εὑρίσκομεν 1) $8\cdot\left(-\frac{\beta}{2}\right)^3+\beta^3=0$, 2) $8\cdot\left(\frac{\beta}{2}\right)^3+\beta^3=2\beta^3$, 3) $8\cdot\left(-\frac{\beta}{2}\right)^3-\beta^3=-2\beta^3$ καὶ 4) $8\cdot\left(\frac{\beta}{2}\right)^3-\beta^3=0$.

γ') $32\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^5+343=-243+343=100$, δ') $64\left(-\frac{3}{2}\right)^6-1==729-1=728$, ε') $(-1)^9+1=0$, στ') Ἐὰν θέσωμεν $\chi=\alpha^2$ καὶ $\psi=\beta^2$, ἡ δοθεῖσα διαίρεσις ἀνάγεται εἰς τὴν $(\chi^5+\psi^5):(\chi+\psi)$, ἧς τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $(-\psi)^5+\psi^5=0$, ζ') Ἐδῶ ἡ διαίρεσις ἀνάγεται εἰς τὴν $(\chi^3-\psi^3):(\chi-\psi)$, τῆς ὁποίας τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $\psi^3-\psi^3=0$.

η') Ἐὰν θέσωμεν $\varphi=\chi^3$ καὶ $\omega=\psi^3$, ἡ δοθεῖσα διαίρεσις ἀνάγεται εἰς τὴν $(\varphi^5+\omega^5):(\varphi+\omega)$, ἧς τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $(-\omega)^5+\omega^5=0$.

θ') Ἐὰν θέσωμεν $\chi^3=\varphi$ καὶ $\psi^2=\omega$, ἡ διαίρεσις αὕτη ἀνάγεται εἰς τὴν $(\varphi^5+\omega^5):(\varphi+\omega)$, ἧς τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $(-\omega)^5+\omega^5=0$.

ι') Ἡ διαίρεσις αὕτη ἀνάγεται εἰς τὴν $(\varphi^3-\omega^3):(\varphi-\omega)$, ἧς τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $\omega^3-\omega^3=0$.

132. α') $(1)^{\mu\nu}-1=1-1=0$. β') Ἐὰν θέσωμεν $\mu^3=\chi$ καὶ $\nu^3=\psi$, ἔχομεν $(\chi^4-\psi^4):(\chi-\psi)$ καὶ ὑπ.$=\psi^4-\psi^4=0$. γ') Εἶναι ὑπ.$=(-\beta)^{2\nu+\mu}+\beta^{2\nu+\mu}=0$ ἐὰν μ περιττὸς καὶ $2\beta^{2\nu+\mu}$ ἐὰν μ ἄρτιος. δ') Ἐὰν θέσωμεν

$\psi^3=\chi$, ἔχομεν $(\chi^4-\omega^4):(\chi+\omega)$ καὶ ὑπ. $=(-\omega)^4-\omega^4=0$. ε') Εἶναι ὑπ. $=$ $=(1)^{4\pi}-1=1-1=0$.

Πηλίκα τῶν διαιρέσεων $(\chi^\mu \pm \alpha^\mu):(\chi\pm\alpha)$.

Ἀσκήσεις. *133*. α') Πηλ. $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$. ὑπ. 0. β') Π. $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ ὑπ. 0. γ') Πηλ. $\alpha-\beta$. ὑπ. 0.

***134*.** α') $(\alpha+\beta)^3:(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)$. ὑπ. 0. β') $(\alpha-\beta)^3:(\alpha-\beta)^2=\alpha-\beta$. ὑπ. 0.

***135*.** α') Πηλ. $\chi^5-\chi^4\psi+\chi^3\psi^2-\chi^2\psi^3+\chi\psi^4-\psi^5$. ὑπ. $2\psi^6$.
β') Πηλ. $\chi^5+\chi^4\psi+\chi^3\psi^2+\chi^2\psi^3+\chi\psi^4+\psi^5$. ὑπ. 0.
γ') Πηλ. $\chi^2-\chi\psi+\psi^2$. ὑπ. 0. δ') Πηλ. $\chi^4-\chi^3\psi+\chi^2\psi^2-\chi\psi^3+\psi^4$. ὑπ. 0.
ε') Πηλ. $\chi^6-\chi^5+\chi^4-\chi^3+\chi^2-1$. ὑπ. 0. στ') Πηλ. $\chi^2+\chi\alpha+\alpha^2$. Ὑπ. $2\alpha^3$.

***136*.** α') Τῆς διαιρέσεως $(\chi^3-\alpha^3):(\chi-\alpha)$, β') τῆς $(\chi^3+1):(\chi+1)$. γ') τῆς $(\chi^4-1):(\chi-1)$, δ') τῆς $(\alpha^4-\beta^4):(\alpha-\beta)$, ε') τῆς $(\chi^5+\alpha^5):(\chi+\alpha)$.

***137*.** Πρὸς εὐκολίαν ὑποθέτομεν κατ' ἀρχὰς $\nu=1$, ὁπότε ἔχομεν τὴν διαίρεσιν $(\alpha^5-\beta^5):(\alpha-\beta)$, ἧς τὸ πηλίκον εἶναι: $\alpha^4+\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+\beta^4$. Ὥστε τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι:

$$\alpha^{4\nu}+\alpha^{3\nu}\cdot\beta^\nu+\alpha^{2\nu}\cdot\beta^{2\nu}+\alpha^\nu\cdot\beta^{3\nu}+\beta^{4\nu}.$$

***138*.** Ὁ ϱ, ὡς θετικὸς ἀριθμὸς καὶ περιττός, ἔχει τὴν μορφὴν $\varrho=2\nu+1$. Ὥστε ἔχομεν τὴν διαίρεσιν: $(7^{2\nu+1}+1^{2\nu+1}):(7+1)$, ἥτις εἶναι τελεία, διότι $(-1)^{2\nu+1}+1=-1+1=0$, ἧς τὸ πηλίκον εἶναι:

$$7^{2\nu}-7^{2\nu-1}+7^{2\nu-2}-\ldots-7\cdot1^{2\nu-1}+1^{2\nu}.$$

Ὁμοίως ἡ διαίρεσις $(11^\varrho+1):12$, ὅπου $\varrho=2^\nu+1$, γράφεται: $(11^{2\nu+1}+$ $+1):(11+1)$. Εἶναι δὲ αὕτη τελεία καὶ δίδει πηλίκον $11^{2\nu}-11^{2\nu-1}+$ $+11^{2\nu-2}-\ldots+1$.

***139*.** Ἐὰν εἰς τὸ πολυώνυμον $(\alpha+\beta+\gamma)^\mu-\alpha^\mu-\beta^\mu-\gamma^\mu$ ἀντὶ τοῦ α θέσωμεν $-\beta$, ἔχομεν $(-\beta+\beta+\gamma)^\mu-(-\beta)^\mu-\beta^\mu-\gamma^\mu$, ἤτοι: $\gamma^\mu-(-\beta)^\mu-\beta^\mu-\gamma^\mu$. Ἀλλὰ ὅταν ὁ μ εἶναι περιττὸς καὶ θετικὸς ἀριθμός, ἤτοι ὅταν $\mu=2^\nu+1$, θὰ εἶναι $(-\beta)^{2\nu+1}=-\beta^{2\nu+1}$. Ὥστε ἡ τιμὴ τοῦ δοθέντος πολυωνύμου δι' $\alpha=-\beta$ εἶναι $\gamma^{2\nu+1}+\beta^{2\nu+1}-\beta^{2\nu+1}-\gamma^{2\nu+1}=0$, ἤτοι τὸ πολυώνυμον τοῦτο εἶναι διαιρετὸν δι' $\alpha+\beta$. (§ 78). Ἐνῷ ἐὰν $\mu=2\nu$, ἡ τιμὴ τοῦ πολυωνύμου δι' $\alpha=-\beta$ εἶναι $-2\beta^{\nu+1}$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἐὰν μ περιττός, τὸ δοθὲν πολυώνυμον εἶναι διαιρετὸν δι' $\alpha+\gamma$ καὶ διὰ $\beta+\gamma$, διότι τοῦτο γίνεται 0, ὅταν ἀντὶ τοῦ α ἢ ἀντὶ τοῦ β θέσωμεν $-\gamma$.

***140*.** 1) Ἔστω ὅτι τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $\Pi(\chi)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ γινομένου $(\chi-\alpha)(\chi-\beta)(\chi-\gamma)$ καὶ δίδει πηλίκον τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $\pi(\chi)$. Τότε θὰ εἶναι:

$$\Pi(\chi)=(\chi-\alpha)(\chi-\beta)(\chi-\gamma)\cdot\pi(\chi).$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ $\Pi(\alpha)=0$, ἕπεται ὅτι τὸ $\Pi(\chi)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $\chi-\alpha$ (§ 78). Ὁμοίως ἐπειδὴ $\Pi(\beta)=0$ ἢ $\Pi(\gamma)=0$, τὸ $\Pi(\chi)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $\chi-\beta$ ἢ $\chi-\gamma$.

2) Ἀντιστρόφως δέ· ἔστω ὅτι τὸ $\Pi(\chi)$ εἶναι διαιρετὸν χωριστὰ διὰ $\chi-\alpha$,

$\chi-\beta$, $\chi-\gamma$. Ἔστω δὲ ἐπίσης ὅτι $\Pi(\chi):(\chi-\alpha)=\pi(\chi)$ ὅπου $\pi(\chi)$ εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον.

Ἀλλὰ τότε εἶναι $\Pi(\chi)=(\chi-\alpha)\cdot\pi(\chi)$ (1). Ἀλλὰ καθ' ὑπόθεσιν τὸ $\Pi(\chi)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $\chi-\beta$. Ὥστε εἶναι $\Pi(\beta)=0$, ἤτοι $(\beta-\alpha)\pi(\beta)=0$. Ἐπειδὴ δὲ $\beta\neq\alpha$. ἤτοι $\beta-\alpha\neq0$, εἶναι $\pi(\beta)=0$. Ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι τὸ $\pi(\chi)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $\chi-\beta$. Ἐὰν $\pi(\chi):(\chi-\beta)=\pi_1(\chi)$, ὅπου $\pi_1(\chi)$ εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον, ἔχομεν $\pi(\chi)=(\chi-\beta)\pi_1(\chi)$, ὁπότε ἡ ἰσότης (1) γίνεται $\Pi(\chi)=(\chi-\alpha)\cdot\cdot(\chi-\beta)\cdot\pi_1(\chi)\cdot$ (2). Ἀλλὰ τὸ $\Pi(\chi)$ εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ $\chi-\gamma$. Ὥστε εἶναι $\Pi(\gamma)=(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\pi_1(\gamma)=0$.

Ἐπειδὴ δὲ $\gamma-\alpha\neq0$ καὶ $\gamma-\beta\neq0$, ἕπεται $\pi_1(\gamma)=0$. Ἑπομένως τὸ $\pi_1(\chi)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $\chi-\gamma$. Ἐὰν δὲ $\pi_1(\chi):(\chi-\gamma)=\pi_2(\chi)$, ὅπου $\pi_2(\chi)$ ἀκέραιον πολυώνυμον, εἶναι $\pi_1(\chi)=(\chi-\gamma)\cdot\pi_2(\chi)$ ὥστε: $\Pi(\chi):(\chi-\alpha)(\chi-\beta)(\chi-\gamma)=\pi_2(\chi)$, ἤτοι τὸ $\Pi(\chi)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ γινομένου $(\chi-\alpha)(\chi-\beta)(\chi-\gamma)$. Ἡ δοθεῖσα λοιπὸν πρότασις ἀπεδείχθη.

Ἀνάλυσις ἀκεραίας ἀλγεβρικῆς παραστάσεως εἰς γινόμενον.

Ἀσκήσεις. — ***141.*** *α')* $2\alpha(4\alpha\beta-3\alpha^2+2\beta)$ β') $2\psi(2\alpha\chi^2-41\psi-2\chi)$

γ') $2\alpha^2\beta^2\gamma^2(4\alpha-2\beta\gamma+\gamma)$ δ') $5\alpha^3(3\chi-2\psi+\omega)$

ε') $\alpha^2\gamma\psi^2(\alpha\psi+2\gamma-\psi^2)$ στ') $\beta\gamma^3(3\beta^2\gamma+2\beta-6\gamma)$

ζ') $\chi^2\psi^2\omega(\omega-\chi\psi\omega^2+\psi)$ η') $\alpha\beta^2\gamma(\gamma-2\alpha+3\alpha\beta\gamma)$

θ') $6\alpha^2(1-2\alpha)$ ι') $\chi^2(3-7\chi^2)$

ια') $8\chi\psi(\chi\psi+2\omega-3\chi\psi\omega^2)$.

142. α') $\alpha\chi(\chi+\alpha)+(\chi+\alpha)=(\chi+\alpha)(\alpha\chi+1)$

β') $\chi^2(\chi-\omega)-\psi^2(\chi-\omega)=(\chi-\omega)(\chi^2-\psi^2)=(\chi-\omega)(\chi+\psi)(\chi-\psi)$

γ') $\alpha\beta(\chi-\psi)+\gamma\delta(\chi-\psi)=(\chi-\psi)(\alpha\beta+\gamma\delta)$

δ') $\chi^2(\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)=(\alpha-\beta)(\chi^2+1)$

ε') $\gamma(\alpha^2\pm\beta^2)+\delta(\alpha^2\pm\beta^2)=(\alpha^2\pm\beta^2)(\gamma+\delta)\;\begin{cases}(\alpha^2+\beta^2)(\gamma+\delta)\\(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\gamma+\delta)\end{cases}$

στ') $\gamma^2(\alpha\pm\beta)+\alpha\gamma(\alpha\pm\beta)=\gamma(\alpha\pm\beta)(\gamma+\alpha)$

ζ') $(1+\gamma)-\gamma^2\chi\psi(1+\gamma)=(1+\gamma)(1-\gamma^2\chi\psi)$

η') $3\chi^2(2\chi+3\psi)-5\psi^3(2\chi+3\psi)=(2\chi+3\psi)(3\chi^2-5\psi^3)$

θ') $2\chi(\chi-\psi)-6\alpha(\chi-\psi)=2(\chi-\psi)(\chi-3\alpha)$

ι') $(\chi^3-1)+2(\chi^2-1)=(\chi^2+\chi+1)(\chi-1)+2(\chi+1)(\chi-1)=$

$=(\chi-1)(\chi^2+\chi+1+2\chi+2)=(\chi-1)(\chi^2+3\chi+3)$

ια') $\chi(\alpha+\beta-\gamma)+\psi(\alpha+\beta-\gamma)=(\alpha+\beta-\gamma)(\chi+\psi)$

ιβ') $(\alpha^5+1)+2(\alpha^3+1)=(\alpha+1)(\alpha^4-\alpha^3+\alpha^2-\alpha+1)+2(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=$
$=(\alpha+1)(\alpha^4-\alpha^3+3\alpha^2-3\alpha+3)$.

143. α′) $(\mu\nu \pm 8\alpha^2)^2$, β′) $(\alpha\beta^2\gamma^3 \pm \chi^8)^2$, γ′) $(\chi^3 \pm 17)^2$,

δ′) $[(\chi+\psi)-2\omega)]^2$, ε′) $[(\alpha-\beta)-3\gamma^3]^2$,

στ′) $(\varphi+\omega^2)^2+8(\varphi+\omega^2) = (\varphi+\omega^2)(\varphi+\omega^2+8)$.

144. α′) $(\alpha\beta-1)(\alpha\beta+1)$ β′) $(2\alpha-7\beta)(2\alpha+7\beta)$ γ′) $(11\alpha-6\beta)(11\alpha+6\beta)$

δ′) $(7^{14}-\psi^6)(7^{14}+\psi^6) = (7^7-\psi^3)(7^7+\psi^3)(7^{14}+\psi^6)$

ε′) $(9\alpha^2\beta-\gamma^2)(9\alpha^2\beta+\gamma^2)$ στ′) $\gamma(2\alpha-3\gamma)(2\alpha+3\gamma)$

ζ′) $5\alpha\beta^2\cdot(2\alpha-1)(2\alpha+1)$ η′) $3\alpha^3(\alpha-2\gamma)(\alpha+2\gamma)$

ϑ′) $(1-20\chi^2)(1+20\chi^2)$ ι′) $(2\chi^8-\psi^{10})(2\chi^8+\psi^{10})$

ια′) $(3\chi-\alpha^3)(3\chi+\alpha^3)$ ιβ′) $\chi(4\chi^8-3\psi^3)(4\chi^8+3\psi^3)$.

145. α′) $\beta^2-(\chi^2-4\alpha\chi+4\alpha^2) = \beta^2-(\chi-2\alpha)^2=(\beta+\chi-2\alpha)(\beta-\chi+2\alpha)$

β′) $\alpha^2-(\chi^2+2\chi\psi+\psi^2) = \alpha^2-(\chi+\psi)^2=(\alpha+\chi+\psi)(\alpha-\chi-\psi)$

γ′) $(\alpha+\beta)^2-(4\alpha\beta)^2 = (\alpha+\beta-4\alpha\beta)(\alpha+\beta+4\alpha\beta)$

δ′) $4\chi^2-(9\alpha^2-6\alpha+1)= 4\chi^2-(3\alpha-1)^2=(2\chi+3\alpha-1)(2\chi-3\alpha+1)$

ε′) $\chi^4-(\chi^2+2\chi+1) = \chi^4-(\chi+1)^2=(\chi^2+\chi+1)(\chi^2-\chi-1)$

στ′) $\alpha^2-(\chi^2-2\chi\psi+\psi^2) = \alpha^2-(\chi-\psi)^2= (\alpha+\chi-\psi)(\alpha-\chi+\psi)$

ζ′) $(\alpha^{2\nu}+\beta^{2\nu})^2-\gamma^{2\nu} = (\alpha^{2\nu}+\beta^{2\nu}+\gamma^\nu)(\alpha^{2\nu}+\beta^{2\nu}-\gamma^\nu)$

η′) $(\chi^\nu-\psi^\nu)^2-4\omega^{2\nu} = (\chi^\nu-\psi^\nu+2\omega^\nu)(\chi^\nu-\psi^\nu-2\omega^\nu)$

ϑ′) $(\alpha+\beta)^2-(\gamma+\delta)^2=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha+\beta-\gamma-\delta)$

ι′) $(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)-(\chi^2+6\chi\psi+9\psi^2) = (\alpha+\beta)^2-(\chi+3\psi)^2=$

$= (\alpha+\beta+\chi+3\psi)(\alpha+\beta-\chi-3\psi)$

ια′) $(\alpha-\delta)^2-(\beta-\gamma)^2=(\alpha-\delta+\beta-\gamma)(\alpha-\delta-\beta+\gamma)$

ιβ′) $[2(\alpha\delta+\beta\gamma)+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2]\,[2(\alpha\delta+\beta\gamma)-\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\delta^2) =$

$=[(\alpha+\delta)^2-(\beta-\gamma)^2]\cdot[(\beta+\gamma)^2-(\alpha-\delta)^2] =$

$= (\alpha+\delta+\beta-\gamma)(\alpha+\delta-\beta+\gamma)(\alpha-\delta+\beta+\gamma)(-\alpha+\delta+\beta+\gamma)$.

146. α′) $9\alpha^4+30\alpha^2\beta^2+25\beta^4-4\alpha^2\beta^2 = (3\alpha^2+5\beta^2)^2-(2\alpha\beta)^2 = (3\alpha^2+$ $+5\beta^2+2\alpha\beta)(3\alpha^2+5\beta^2-2\alpha\beta)$.

β′) $4\chi^4-12\chi^2\psi^2+9\psi^4-9\chi^2\psi^2 = (2\chi^2-3\psi^2)^2-(3\chi\psi)^2= (2\chi^2-3\psi^2+3\chi\psi)\cdot$ $\cdot(2\chi^2-3\psi^2-3\chi\psi)$.

γ′) $\lambda^4+2\lambda^2+1-\lambda^2 = (\lambda^2+1)^2-\lambda^2 = (\lambda^2+\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1)$.

δ′) $4\alpha^4-4\alpha^2+1-9\alpha^2 = (2\alpha^2-1)^2-(3\alpha)^2 = (2\alpha^2+3\alpha-1)(2\alpha^2-3\alpha-1)$.

ε′) $4\chi^4-12\chi^2\psi^2+9\psi^4-25\chi^2\psi^2 = (2\chi^2-3\psi^2)^2-25\chi^2\psi^2 = (2\chi^2-3\psi^2+5\chi\psi)\cdot$ $\cdot(2\chi^2-3\psi^2-5\chi\psi)$.

στ′) $\alpha^8+\beta^4+2\alpha^4\beta^2-2\alpha^4\beta^2 = (\alpha^4+\beta^2)^2-(\sqrt{2}\alpha^2\beta)^2=(\alpha^4+\beta^2+\alpha^2\beta\sqrt{2})$ $(\alpha^4+\beta^2-\alpha^2\beta\sqrt{2})$.

ζ′) $\alpha^4+\psi^4+2\alpha^2\psi^2-\alpha^2\psi^2 = (\alpha^2+\psi^2)^2-\alpha^2\psi^2 = (\alpha^2+\psi^2+\alpha\psi)\ (\alpha^2+\psi^2-\alpha\psi)$

η′) $25\chi^4+40\chi^2\psi^2+16\psi^4-9\chi^2\psi^2= (5\chi^2+4\psi^2)^2-9\chi^2\psi^2=(5\chi^2+4\psi^2+3\chi\psi)\cdot$ $\cdot(5\chi^2+4\psi^2-3\chi\psi)$.

ϑ′) $\alpha^4+4\beta^4+4\alpha^2\beta^2-4\alpha^2\beta^2 = (\alpha^2+2\beta^2)^2-4\alpha^2\beta^2 = (\alpha^2+2\beta^2+2\alpha\beta)(\alpha^2+$ $+2\beta^2-2\alpha\beta)$.

ι') $9\alpha^8-6\alpha^4+1-9\alpha^4=(3\alpha^4-1)^2-9\alpha^4=(3\alpha^4+3\alpha^2-1)(3\alpha^4-3\alpha^2-1)$.

ια') $16\alpha^4-8\alpha^2+1-9\alpha^2=(4\alpha^2-1)^2-9\alpha^2=(4\alpha^2+3\alpha-1)(4\alpha^2-3\alpha-1)$.

ιβ') $16\lambda^4+\gamma^4+8\lambda^2\gamma^2-8\lambda^2\gamma^2=(4\lambda^2+\gamma^2)^2-(\lambda\gamma\sqrt{8})^2=(4\lambda^2+\gamma^2+\lambda\gamma\sqrt{8})(4\lambda^2+$ $+\gamma^2-\lambda\gamma\sqrt{8})$.

ιγ') Ἐπειδὴ $17\alpha=30\alpha+(-13\alpha)$ καὶ $-390=30\cdot(-13)$, ἔχομεν $\alpha^2+17\alpha-$ $-390=\alpha^2+30\alpha-13\alpha-30\cdot13=\alpha(\alpha-13)+30(\alpha-13)=(\alpha-13)(\alpha+30)$.

ιδ') Ἐπειδὴ $-7\beta=(-5\beta)+(-2\beta)$ καὶ $10\beta^2=(-5\beta)\cdot(-2\beta)$ ἔχομεν $\alpha^2-5\alpha\beta-2\alpha\beta+(-5\alpha\beta)(-2\alpha\beta)=\alpha(\alpha-2\beta)-5\beta(\alpha-2\beta)=(\alpha-2\beta)(\alpha-5\beta)$.

147. α') Ἔχομεν $4\cdot\left(\chi^2+\frac{13\chi}{4}+\frac{3}{4}\right)$. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{13}{4}=3+\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{3}{4}=3\cdot\frac{1}{4}$ εἶναι $\chi^2+\frac{13\chi}{4}+\frac{3}{4}=\chi^2+3\chi+\frac{\chi}{4}+$

$$+3\cdot\frac{1}{4}=\chi\left(\chi+\frac{1}{4}\right)+3\left(\chi+\frac{1}{4}\right)=(\chi+3)\left(\chi+\frac{1}{4}\right)=$$

$=\frac{(\chi+3)(4\chi+1)}{4}$. Ὥστε εἶναι $4\chi^2+13\chi+3=4\cdot\frac{(\chi+3)(4\chi+1)}{4}=(\chi+3)(4\chi+1)$.

β') Ἐπειδὴ $6\chi^2+17\chi+12=6\cdot(\chi^2+\frac{17}{6}\chi+2)$ καὶ $\frac{17}{6}=\frac{3}{2}+\frac{4}{3}$ καὶ $2=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}$, εἶναι $\chi^2+\frac{17}{6}\chi+2=\chi^2+\frac{3}{2}\chi+\frac{4}{3}\chi+\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}=$

$$=\chi\left(\chi+\frac{4}{3}\right)+\frac{3}{2}\left(\chi+\frac{4}{3}\right)=\left(\chi+\frac{4}{3}\right)\left(\chi+\frac{3}{2}\right)=\frac{(3\chi+4)(2\chi+3)}{6}.$$

Ὥστε ἡ δοθεῖσα παράτασις τρέπεται εἰς τὸ γινόμενον $(3\chi+4)(2\chi+3)$.

γ') Εἶναι $11\left(\alpha^2-\frac{23}{11}\alpha\beta+\frac{2}{11}\beta^2\right)$ καὶ $-\frac{23}{11}\beta=(-2\beta)+$

$$+\left(-\frac{1}{11}\beta\right),\quad \frac{1}{11}\beta^2=(-\beta)\cdot\left(-\frac{1}{11}\beta\right). \text{ Ὅθεν :}$$

$$11\alpha^2-23\alpha\beta+2\beta^2=11\cdot(\alpha-2\beta)\cdot\left(\alpha-\frac{\beta}{11}\right)=(\alpha-2\beta)(11\alpha-\beta).$$

δ') $\chi^3+64=\chi^3+4^3$. Ἐπειδὴ δὲ $(\chi^3+4^3):(\chi+4)=\chi^2-4\chi+16$ ἔπεται ὅτι $\chi^3+64=(\chi^2-4\chi+16)(\chi+4)$.

Ὁμοίως εἶναι $\chi^3-64=\chi^3-4^3=(\chi-4)(\chi^2+4\chi+16)$.

ε') Εἶναι $343+\chi^3=7^3+\chi^3=(7+\chi)(7^2-7\chi+\chi^2)$

καὶ $343-\chi^3=7^3-\chi^3=(7-\chi)(7^2+7\chi+\chi^2)$

στ') Εἶναι $\alpha^3\beta^3+7^3=(\alpha\beta+7)(\alpha^2\beta^2-7\alpha\beta+49)$

καὶ $\alpha^3\beta^3-7^3=(\alpha\beta-7)(\alpha^2\beta^2+7\alpha\beta+49)$

ζ') Εἶναι $8\alpha^3+\beta^6=(2\alpha)^3+(\beta^2)^3=(2\alpha+\beta^2)(4\alpha^2-2\alpha\beta^2+\beta^4)$

καὶ $8\alpha^3-\beta^6=(2\alpha)^3-(\beta^2)^3=(2\alpha-\beta^2)(4\alpha^2+2\alpha\beta^2+\beta^4)$

η') Εἶναι $216\mu^3+\nu^6=(6\mu)^3+(\nu^2)^3=(6\mu+\nu^2)(36\mu^2-6\mu\nu^2+\nu^4)$

καὶ $216\mu^3-\nu^6=(6\mu)^3-(\nu^2)^3=(6\mu-\nu^2)(36\mu^2+6\mu\nu^2+\nu^4)$.

148. α') Ἐπειδὴ $(\chi+\psi)^2-1=(\chi+\psi+1)(\chi+\psi-1)$, εἶναι $(\chi+\psi+1)\cdot$
$\cdot(\chi+\psi-1)-\chi\psi(\chi+\psi+1)=(\chi+\psi+1)(\chi+\psi-1-\chi\psi)=$
$=(\chi+\psi+1)[\chi(1-\psi)-(1-\psi)]=(\chi+\psi+1)(1-\psi)(\chi-1)$.

β') $(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)+2\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)=(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)=$
$=(\alpha^2-\beta^2)(\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)^3$.

γ') Ἐπειδὴ $\chi^2-4=(\chi+2)(\chi-2)$, ἔχομεν:
$(\chi+2)^2(\chi-2)^2-(3\chi-2)(\chi+2)^2=(\chi+2)^2[(\chi-2)^2-(3\chi-2)]=(\chi+2)^2(\chi^2-7\chi+6)$.
Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι $-7=(-1)+(-6)$ καὶ $6=(-1)\cdot(-6)$.
Ὥστε $\chi^2-7\chi+6=(\chi-1)(\chi-6)$. Ἑπομένως ἡ δοθεῖσα παράστασις ἀναλύεται εἰς τὸ γινόμενον $(\chi+2)^2(\chi-1)(\chi-6)$.

δ') $\alpha^2\gamma(\gamma-1)+\beta(\gamma-1)=(\gamma-1)(\alpha^2\gamma+\beta)$.

ε') $2\chi+\chi^2-2\psi-\psi^2=(\chi-\psi)(\chi+\psi)+2(\chi-\psi)=(\chi-\psi)(\chi+\psi+2)$.

στ') $(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+\alpha\beta(\alpha-\beta)-(\alpha-\beta)=$
$=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+\alpha\beta-1)=(\alpha-\beta)(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-1)=$
$=(\alpha-\beta)[(\alpha+\beta)^2-1]=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta-1)$.

ζ') $(\chi^2+4\chi+4)-(4\alpha^2-4\alpha\nu+\nu^2)=(\chi+2)^2-(2\alpha-\nu)^2=$
$=(\chi+2+2\alpha-\nu)(\chi+2-2\alpha+\nu)$.

η') $(\chi^4\psi^4-4\chi^2\psi^2+4)-(4\chi^2-4\chi\psi+\psi^2)=(\chi^2\psi^2-2)^2-(2\chi-\psi)^2=$
$=(\chi^2\psi^2-2+2\chi-\psi)(\chi^2\psi^2-2-2\chi+\psi)$.

θ') $\psi(\chi^2-\psi^2)-3\chi(\chi^2-\psi^2)=(\chi^2-\psi^2)(\psi-3\chi)=(\chi-\psi)(\chi+\psi)(\psi-3\chi)$.

ι') $\alpha\beta\chi^2+\alpha\beta+\alpha^2\chi+\beta^2\chi=\beta\chi(\alpha\chi+\beta)+\alpha(\alpha\chi+\beta)=(\alpha\chi+\beta)(\alpha+\beta\chi)$.

ια') $\pi\nu\mu^2+\pi\nu+\mu\pi^2+\mu\nu^2=\mu\pi(\mu\nu+\pi)+\nu(\mu\nu+\pi)=(\mu\nu+\pi)(\mu\pi+\nu)$.

Μ.Κ.Δ. καὶ Ε.Κ.Π. ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.

Κανόνες τῆς ἀριθμητικῆς. 1) Ὁ μ. κ. δ. δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εἶναι γινόμενον, τὸ ὁποῖον περιέχει τοὺς κοινοὺς πρώτους παράγοντας αὐτῶν καὶ ἕκαστον μὲ τὸν ἐλάχιστον ἐκθέτην. 2) Τὸ ε.κ.π. δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εἶναι γινόμενον, τὸ ὁποῖον περιέχει ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντας αὐτῶν (κοινοὺς καὶ μὴ κοινούς) ***καὶ ἕκαστον μὲ τὸν μέγιστον ἐκθέτην.***

Ἀσκήσεις.— *149.* α') $121=11^2$, $168=2^3\cdot3\cdot7$. Ὥστε μ.κ.δ. $=\alpha^2$.

β') $36=2^2\cdot3^2$, $28=2^2\cdot7$. μ.κ.δ $=4\chi$.

γ') Μ.κ.δ $=\chi-1$, δ') Τὸ $35\chi^2(\chi+\nu)^2$ διορθωτέον εἰς $35\chi^2(\mu+\nu)^2$, ὁπότε μ.κ.δ $=(\mu+\nu)^2$.

ε') Ἐπειδὴ $\chi^3+2\chi^2-3\chi=\chi(\chi^2+2\chi-3)=\chi(\chi-1)(\chi+3)$
καὶ $2\chi^3+5\chi^2-3\chi=\chi(2\chi^2+5\chi-3)=\chi(2\chi-1)(\chi+3)$
εἶναι μ.κ.δ $=\chi(\chi+3)$.

στ') Ἐπειδὴ $(1-\chi^2)^2=(1-\chi)^2(1+\chi)^2$, μ.κ.δ $=1-\chi$.

ζ') Ἐπειδὴ $\chi^4 + \alpha\chi^3 + \alpha^3\chi + \alpha^4 = \chi^3(\chi+\alpha) + \alpha^3(\chi+\alpha) = (\chi+\alpha)(\chi^3+\alpha^3) = (\chi+\alpha)(\chi+\alpha)(\chi^2-\alpha\chi+\alpha^2)$ καὶ $\chi^4+\alpha^2\chi^2+\alpha^4 = \chi^4+2\alpha^2\chi^2+\alpha^4-\alpha^2\chi^2 = (\chi^2+\alpha^2)^2 - (\alpha\chi)^2 = (\chi^2+\alpha^2+\alpha\chi)(\chi^2+\alpha^2-\alpha\chi)$ εἶναι μ.κ δ $= \chi^2 - \alpha\chi + \alpha^2$.

150. $18 \cdot \chi^2\psi^2 \cdot (\alpha+2\beta)^2 \cdot (\alpha-2\beta)^2$. β') Εἶναι $3\chi^4+3\chi = 3\chi(\chi^3+1) = 3\chi(\chi+1)(\chi^2-\chi+1)$, $5\chi^3-5\chi = 5\chi(\chi^2-1) = 5\chi(\chi+1)(\chi-1)$ καὶ $10\chi^2+10\chi = 2 \cdot 5 \cdot \chi \cdot (\chi+1)$. Ὥστε ἐ.κ.π. $= 30\chi(\chi+1)(\chi-1)(\chi^2-\chi+1)$. γ') Ἐπειδὴ $\alpha^3-\beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$ καὶ $\alpha^2-\beta^2 = (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$, εἶναι ἐ.κ.π. $= 42\alpha^4\beta^2 (\alpha-\beta)^3 \cdot (\alpha+\beta) \cdot (\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$. δ') Εἶναι $\mu^3\nu-\mu\nu^3 = \mu\nu(\mu-\nu)(\mu+\nu)$, $\mu^2+\mu\nu-2\nu^2 = (\mu-\nu)(\mu+2\nu)$ καὶ $\mu^2-\mu\nu-2\nu^2 = (\mu+\nu)(\mu-2\nu)$. Ὅθεν ἐ.κ.π. $= \mu\nu(\mu-\nu)(\mu+\nu)(\mu-2\nu)(\mu+2\nu) = \mu\nu(\mu^2-\nu^2)(\mu^2-4\nu^2)$. ε') Εἶναι $\chi^4-(\pi^2+1\chi)^2+\pi^2 = (\chi^2-1)(\chi^2-\pi^2)$ καὶ $\chi^4-(\pi+1)^2\chi^2+2(\pi+1)\pi\chi-\pi^2 = \chi^4-[(\pi+1)^2\chi^2 - 2(\pi+1)\pi\chi+\pi^2)] = \chi^4-[(\pi+1)\chi-\pi]^2 = [\chi^2+(\pi+1)\chi-\pi]\cdot[\chi^2-(\pi+1)\chi+\pi] = [\chi^2+(\pi+1)\chi-\pi]\cdot(\chi-\pi)(\chi-1)$. Ὅθεν ἐ.κ.π. $= (\chi-1)(\chi-\pi)(\chi+1)(\chi+\pi)[\chi^2+(\pi+1)\chi-\pi] = (\chi^2-1)(\chi^2-\pi^2)[\chi^2+(\pi+1)\chi-\pi]$.

Περὶ ἀλγεβρικῶν ῥητῶν κλασμάτων.

Ἀσκήσεις — *151*. α') Μ.κ.δ. τῶν ὅρων $2\alpha\beta^2$. Ὥστε $\dfrac{16\alpha^2\beta^2 : 2\alpha\beta^2}{18\alpha\beta^2 : 2\alpha\beta^2} = \dfrac{8\alpha}{9}$

β') $\dfrac{45\alpha^2\beta^2\gamma^2 : 9\alpha^2\beta^2\gamma}{9\alpha^2\beta^2\gamma : 9\alpha^2\beta^2\gamma} = 5\gamma$, γ') $\dfrac{46\chi^2\psi^2 : \chi^2\psi^2}{39\chi^3\psi^5 : \chi^2\psi^2} = \dfrac{46}{39\chi\psi^3}$.

δ') $\dfrac{2\psi(49\chi-12\psi^2)}{8\chi(3\chi-4\psi)} = \dfrac{\psi(49\chi-12\psi^2)}{4\chi(3\chi-4\psi)}$ ε') $\dfrac{(\chi-\psi)(\chi^2+\chi\psi+\psi^2)}{(\chi-\psi)(\chi+\psi)} =$

$= \dfrac{\chi^2+\chi\psi+\psi^2}{\chi+\psi}$, στ') $\dfrac{(\chi-\psi)(\chi+\psi)}{(\chi+\psi)(\chi^2-\chi\psi+\psi^2)} = \dfrac{\chi-\psi}{\chi^2-\chi\psi+\psi^2}$.

ζ') $\dfrac{\chi^4-9^4}{\chi^2-9^2} = \dfrac{(\chi^2-9^2)(\chi^2+9^2)}{\chi^2-9^2} = \chi^2+81$,

η') $\dfrac{\gamma(\alpha\beta+9\beta-5\gamma)}{2\delta\varrho(\alpha\beta+9\beta-5\gamma)} = \dfrac{\gamma}{2\delta\varrho}$, θ') $\dfrac{\alpha(\chi+\psi)+\beta(\chi+\psi)}{\alpha(2\chi+\psi)+\beta(2\chi+\psi)} =$

$$= \frac{(\chi+\psi)(\alpha+\beta)}{(2\chi+\psi)(\alpha+\beta)} = \frac{\chi+\psi}{2\chi+\psi},$$

ι') $\dfrac{\alpha\beta(\alpha-\beta)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)} + \dfrac{\beta\gamma(\beta-\gamma)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)} - \dfrac{\gamma\alpha(\alpha-\gamma)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)} =$

$$= \frac{\alpha\beta(\alpha-\beta)+\beta\gamma(\beta-\gamma)-\gamma\alpha(\alpha-\gamma)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)} = \frac{\beta\gamma(\beta-\gamma)+\alpha(\alpha\beta-\beta^2-\alpha\gamma+\gamma^2)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)}$$

ἀλλ' ὁ ἀριθμητὴς ἰσοῦται μὲ $\beta\gamma(\beta-\gamma)+\alpha[\alpha(\beta-\gamma)-(\beta^2-\gamma^2)] = \beta\gamma(\beta-\gamma)+\alpha\cdot(\beta-\gamma)(\alpha-\beta-\gamma) = (\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha) = (\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)$· ὥστε τὸ δοθὲν ἰσοῦται μὲ 1.

ια') $\dfrac{\alpha[(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta]+\beta(\alpha+\beta)^2}{\alpha(\alpha-\beta+2\beta)+\beta(\alpha+\beta)} = \dfrac{\alpha(\alpha+\beta)^2+\beta(\alpha+\beta)^2}{\alpha(\alpha+\beta)+\beta(\alpha+\beta)} = \dfrac{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)} = \alpha+\beta$.

ιβ') Ὁ παρονομαστὴς εἶναι ἀνάπτυγμα τοῦ $(\chi+1)^3$. Ὁ ἀριθμητὴς ἐπειδὴ γίνεται 0 διὰ $\chi=-1$ διαιρεῖται διὰ $\chi+1$ καὶ δίδει πηλίκον $\chi^2+\chi+1$. Ὥστε τὸ δοθὲν κλάσμα ἰσοῦται μέ:

$$\frac{(\chi+1)(\chi^2+\chi+1)}{(\chi+1)^3}=\frac{\chi^2+\chi+1}{(\chi+1)^2}.$$

152. α') Ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν $\chi(\chi-1)(\chi+1)=\chi(\chi^2-1)$. Ὥστε τὰ δοθέντα κλάσματα τρέπονται εἰς τὰ ὁμώνυμα:

$$\frac{\chi}{\chi(\chi^2-1)},\quad \frac{\chi^2-1}{\chi(\chi^2-1)},\quad \frac{\chi(\chi+1)}{\chi(\chi^2-1)},\quad \frac{\chi(\chi-1)}{\chi(\chi^2-1)}.$$

β' Ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν $72\chi^4\psi^4$ καὶ τὰ ζητούμενα ὁμώνυμα κλάσματα εἶναι $\frac{24\mu\chi^2\psi^2}{72\chi^4\psi^4},\ \frac{9\nu\chi^3\psi}{72\chi^4\psi^4},\ \frac{8\rho\psi}{72\chi^4\psi^4},\ \frac{18\chi^2}{72\chi^4\psi^4}.$

γ') Ἐπειδὴ $\chi^2-4=(\chi-2)(\chi+2)$ καὶ $\chi^2-4\chi+3=(\chi-1)(\chi-3)$, τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι $(\chi-1)(\chi-2)(\chi+2)(\chi+1)(\chi-3)=(\chi^2-1)(\chi^2-4)(\chi-3)$.

Ὅθεν: $\frac{\alpha^2(\chi+1)(\chi-3)}{(\chi^2-1)(\chi^2-4)(\chi-3)},\ \frac{\alpha(\chi-1)(\chi-2)(\chi-3)}{(\chi^2-1)(\chi^2-4)(\chi-3)},\ \frac{3(\chi^2-4)(\chi+1)}{(\chi^2-1)(\chi^2-4)(\chi-3)}.$

δ') Ἐπειδὴ $\rho(\alpha\mu+\mu^2)=\rho\mu(\alpha+\mu)$, $\rho^2(\alpha^2-\alpha\mu)=\rho^2\alpha(\alpha-\mu)$ καὶ $\rho^3(\alpha^2-\mu^2)=$ $=\rho^3(\alpha+\mu)(\alpha-\mu)$, τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι $\alpha\mu\rho^3(\alpha+\mu)(\alpha-\mu)=$ $\alpha\mu\rho^3(\alpha^2-\mu^2)$ καὶ τὰ ζητούμενα ὁμώνυμα κλάσματα εἶναι

$$\frac{\alpha\rho^2\chi^2(\alpha-\mu)}{\alpha\mu\rho^3(\alpha^2-\mu^2)},\quad \frac{\mu\rho\chi(\alpha+\mu)}{\alpha\mu\rho^3(\alpha^2-\mu^2)},\quad \frac{\alpha\mu}{\alpha\mu\rho^3(\alpha^2-\mu^2)}.$$

Περὶ τῶν παραστάσεων $\frac{0}{0}$ καὶ $\frac{\alpha}{0}$.

Ἀσκήσεις. 153. Διὰ $\chi=0$, λαμβάνομεν τὴν ἀόριστον τιμὴν $\frac{0}{0}$. Ἀλλ' ἐπειδὴ $\frac{\chi^3+2\chi^4}{\chi}=\frac{\chi^3(1+2\chi)}{\chi}=\chi^2(1+2\chi)$, ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ δοθέντος κλάσματος ὅταν $\chi=0$ εἶναι 0.

β') Εἶναι $\frac{(\psi^2-\alpha^2)(\psi^2+\alpha^2)}{\psi^2-\alpha^2}=\psi^2+\alpha^2=2\alpha^2$, ὅταν $\psi=\alpha$.

γ') $\frac{(\chi-\alpha)(\chi+\alpha)}{(\chi-\alpha)(\chi^2+\alpha\chi+\alpha^2)}=\frac{\chi+\alpha}{\chi^2+\alpha\chi+\alpha^2}=\frac{2}{3\alpha}$, ὅταν $\chi=\alpha$.

δ') $\frac{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2-\beta^2}=\alpha^2+\beta^2=2\beta^2$, ὅταν $\alpha=\beta$.

ε') $\frac{(\chi+\alpha)^2(\chi-\alpha)}{(\chi-\alpha)(\chi+\alpha)}=\chi+\alpha=2\alpha$, ὅταν $\chi=\alpha$.

στ') $\frac{(\chi^2-\alpha^2)(\chi^2+\alpha^2)}{\chi-\alpha}=(\chi+\alpha)(\chi^2+\alpha^2)=2\alpha\cdot 2\alpha^2=4\alpha^3$, ὅταν $\chi=\alpha$.

ζ') καὶ η') Εἶναι $\frac{3}{0}=\infty$ καὶ $\frac{(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)}{(\alpha+1)(\alpha-1)}=\frac{1}{0}=\infty$.

θ') Ἡ λύσις τῆς ἀσκήσεως αὐτῆς προϋποθέτει τὴν γνῶσιν τῶν ἰδιοτήτων τῶν ριζῶν (σελ. 162).

Οὕτω διαιροῦντες ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ

$\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ εὑρίσκομεν: $$\frac{\frac{\sqrt[3]{\alpha(\alpha-\beta)}}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}+1}{1+\frac{\alpha^2(\alpha-\beta)}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}}$$

Ἀλλ' εἶναι $$\frac{\sqrt[3]{\alpha(\alpha-\beta)}}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}=\sqrt[6]{\frac{\alpha^2(\alpha-\beta)^2}{(\alpha-\beta)^3(\alpha+\beta)^3}}=\sqrt[6]{\frac{\alpha^2}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)^3}}.$$

Ἡ τιμὴ δὲ τοῦ ὑπορρίζου τούτου ὅταν $\alpha=\beta$ εἶναι $\frac{\alpha^2}{0}=\infty$. Ἐξ ἄλλου δὲ εἶναι $\frac{\alpha^2(\alpha-\beta)}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}=\alpha^2.\sqrt{\frac{(\alpha-\beta)^2}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}}=\alpha^2.\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$. Ἡ τιμὴ δὲ τοῦ ὑπορρίζου ὅταν $\alpha=\beta$ εἶναι $\frac{0}{2\alpha}=0$. Ὥστε ἡ τιμὴ τοῦ δοθέντος κλάσματος ὅταν $\alpha=\beta$ εἶναι $\frac{\infty+1}{1}=\infty$.

Ἄλλος τρόπος. Θέτοντες εἰς τὴν παράστασιν $\alpha-\chi$ ἀντὶ β, ἔχομεν

$$\frac{\sqrt[3]{\alpha\chi}+\sqrt{(2\alpha-\chi)\chi}}{\sqrt{(2\alpha-\chi)\chi}+\alpha^2\chi}=\frac{\sqrt[3]{\alpha}.\sqrt[3]{\chi}+\sqrt{(2\alpha-\chi)}\cdot\sqrt{\chi}}{\sqrt{(2\alpha-\chi)}\cdot\sqrt{\chi}+\alpha^2\sqrt{\chi}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{\alpha}\cdot\sqrt[6]{\chi^2}+\sqrt{(2\alpha-\chi)}\cdot\sqrt[6]{\chi^3}}{\sqrt{(2\alpha-\chi)}\cdot\sqrt[6]{\chi^3}+\alpha^2\sqrt[6]{\chi^3}}=\frac{\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt{(2\alpha-\chi)}\cdot\sqrt[6]{\chi}}{(\sqrt{2\alpha-\chi}\cdot+\alpha^2)\cdot\sqrt[6]{\chi}}.$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ ἐθέσαμεν $\beta=\alpha-\chi$, ὅταν $\chi=0$, θὰ εἶναι $\alpha=\beta$. Τότε ὅμως ὁ ἀριθμητὴς τοῦ τελευταίου κλάσματος ἰσοῦται μὲ $\sqrt[3]{\beta}$, ὁ δὲ παρονομαστὴς αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ 0. Ὅθεν ἡ ζητουμένη τιμὴ εἶναι $\frac{\sqrt[3]{\beta}}{0}=\infty$.

Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις ἀλγεβρικῶν κλασμάτων.

Ἀσκήσεις.- *154*. α') $\frac{2(3\chi+17)+4(2\chi+5)-2(5\chi+12)}{(2\chi+5)(3\chi+17)}=\frac{4\chi+30}{(2\chi+5)(3\chi+17)}=$

$=\frac{38}{207}$ καὶ $\frac{2}{9}+\frac{4}{23}-\frac{44}{9.23}=\frac{46+36-44}{207}=\frac{38}{207}$.

β') $$\frac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\alpha\gamma}{(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)}+\frac{\beta\gamma}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}=$$

$$=\frac{\alpha\beta(\beta-\gamma)+\alpha\gamma(\alpha-\gamma)+\beta\gamma(\alpha-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}=\frac{\alpha\beta^2+\alpha\gamma^2-\alpha\gamma^2-\beta\gamma^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}=\frac{19}{30}$$

$$\kappa\alpha\grave{\iota}\quad \frac{7}{6}-\frac{2}{30}+\frac{14}{-30}=\frac{7}{6}-\frac{2}{30}-\frac{14}{30}=\frac{19}{30}.$$

γ′) $$\frac{1-2\chi}{3(\chi-1)^2}+\frac{1+\chi}{2(\chi^2+1)}+\frac{1}{6(\chi+1)}=$$

$$=\frac{2(1-2\chi)(\chi^2+1)(\chi+1)+3(1+\chi)(\chi-1)^2(\chi+1)+(\chi-1)^2(\chi^2+1)}{6(\chi-1)^2(\chi^2+1)(\chi+1)}=$$

$$=\frac{-4\chi^3-6\chi^2-4\chi+6}{6(\chi-1)(\chi^4-1)}=-\frac{58}{90}\quad \kappa\alpha\grave{\iota}\quad \frac{-3}{3}+\frac{3}{10}+\frac{1}{18}=-\frac{58}{90}.$$

δ′) $$\frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{\gamma(\alpha^2-\gamma^2)}-\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\gamma(\alpha+\gamma)^2}-\frac{28}{\alpha^2-\gamma^2}-\frac{3}{\alpha+\gamma}=$$

$$=\frac{\alpha}{\gamma(\alpha-\gamma)}-\frac{\alpha-\gamma}{\gamma(\alpha+\gamma)}-\frac{28}{\alpha^2-\gamma^2}-\frac{3}{\alpha+\gamma}=$$

$$=\frac{\alpha(\alpha+\gamma)-(\alpha-\gamma)^2-28\gamma-3\gamma(\alpha-\gamma)}{\gamma(\alpha^2-\gamma^2)}=\frac{2(\gamma-14)}{\alpha^2-\gamma^2}.$$

ε′) $$\frac{\chi^3\psi-\chi\psi^3+\chi(\chi^3+\psi^3)-\psi(\chi^3-\psi^3)}{\chi^6-\psi^6}=\frac{\chi^4+\psi^4}{\chi^6-\psi^6}.$$

στ′) $$\frac{\chi+2\psi-3\omega}{\chi+2\psi+3\omega}+\frac{-\chi+2\psi+3\omega}{\chi+2\psi+3\omega}+\omega-\chi=\frac{4\psi}{\chi+2\psi+3\omega}+\omega-\chi$$

ζ′) $$\frac{\chi(\chi+\psi)(\chi^2+\psi^2)-\psi(\chi-\psi)(\chi^2+\psi^2)-\chi^2(\chi^2-\psi^2)-\psi^2(\chi^2+\psi^2)}{(\chi^2-\psi^2)(\chi^2+\psi^2)}=\frac{2\chi^2\psi^2}{\chi^4-\psi^4}.$$

η′) Ἡ ἄσκησις αὕτη διορθωτέα εἰς τὴν $\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^4-\beta^4}-\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2-\beta^2}-$

$-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}-\frac{1}{\alpha-\beta}\right)$, ὁπότε γράφεται $\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^4-\beta^4}-\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2-\beta^2}-\frac{\alpha^2-\beta^2}{2[\alpha^2+\beta^2)}+$

$$+\frac{1}{2(\alpha-\beta)}=\frac{2(\alpha^3+\beta^3)-2(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha^2-\beta^2)^2+(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)}{2(\alpha^4-\beta^4)=2(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}=$$

$=\frac{2(\alpha^3+\beta^3)-(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)^2}{2(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}$. Ἀλλ' ἐπειδὴ

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$, ὁ ἀριθμητὴς ἰσοῦται μὲ

$$(\alpha+\beta)[2(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)-(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)]=$$

$$=(\alpha+\beta)[(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)-(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)]=(\alpha+\beta)[(\alpha-\beta)^2-(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)]=$$

$$=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2[1-(\alpha+\beta)]=(\alpha^2-\beta^2)(\alpha-\beta)(1-\alpha-\beta).$$

Ὥστε τὸ δοθὲν κλάσμα ἰσοῦται μὲ $\frac{(\alpha-\beta)(1-\alpha-\beta)}{2(\alpha^2+\beta^2)}$.

155. Εἶναι $\frac{[(\chi^2+4)+2\chi]\cdot[(\chi^2+4)-2\chi]}{(\chi+2)(\chi^2-2\chi+4)-(\chi^2+2\chi+4)(\chi-2)}=\frac{(\chi^2+4)^2-4\chi^2}{(\chi^3+8)-(\chi^3-8)}=$

$$=\frac{\chi^4+4\chi^2+16}{16}.$$

Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις ἀλγεβρικῶν κλασμάτων.

Ἀσκήσεις. *Ὁμὰς πρώτη.* — ***156.*** α′) $\dfrac{\alpha(\chi+\psi)\cdot\gamma(\chi^2-\psi^2)}{\gamma(\chi-\psi)\cdot\beta(\chi+\psi)}=\dfrac{\alpha(\chi+\psi)}{\beta}$.

β′) $\dfrac{3(\chi-\psi)^2(\chi^3+\psi^3)}{6(\chi+\psi)(\chi-\psi)}=\dfrac{3(\chi-\psi)^2\cdot(\chi+\psi)(\chi^2-\chi\psi+\psi^2)}{6(\chi+\psi)(\chi-\psi)}=\dfrac{(\chi-\psi)(\chi^2-\chi\psi+\psi^2)}{2}$

γ′) $\dfrac{4\chi^2\psi^2+\chi^4-2\chi^2\psi^2+\psi^4}{4\chi^2\psi^2}\cdot(\chi^2-\psi^2)^2=\dfrac{(\chi^2+\psi^2)^2(\chi^2-\psi^2)^2}{4\chi^2\psi^2}=\dfrac{(\chi^4-\psi^4)^2}{4\chi^2\psi^2}$

δ′) $\dfrac{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)}{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}\cdot\dfrac{(\alpha-\beta)(\gamma+\delta)}{(\alpha+\beta)(\gamma-\delta)}=\dfrac{(\gamma+\delta)^2}{(\gamma-\delta)^2}$

ε′) $\dfrac{\alpha(\alpha+2\beta)\cdot\beta(\alpha-2\beta)}{(\alpha^2+4\beta^2)(\alpha^2-4\beta^2)}=\dfrac{\alpha\beta(\alpha^2-4\beta^2)}{(\alpha^2+4\beta^2)(\alpha^2-4\beta^2)}=\dfrac{\alpha\beta}{\alpha^2+4\beta^2}$

στ′) $\dfrac{\alpha^2(\alpha^2\chi^2-1)\cdot\alpha\chi^2(\alpha+\beta)\,\alpha\chi}{\chi^2\cdot(\alpha\chi+1)(\alpha^2-\beta^2)}=\dfrac{\alpha^4\chi(\alpha\chi-1)}{\alpha-\beta}$

ζ′) Ἐπειδὴ $\left(\alpha+1+\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}-1\right)=\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2-1=$

$=\dfrac{\alpha^4+\alpha^2+1}{\alpha^2}$ καὶ $\alpha^6-1=(\alpha^2-1)(\alpha^4+\alpha^2+1)$ τὸ ἐξαγόμενον ἰσοῦται μὲ 1.

η′) $2+\dfrac{\mu}{\mu-3}=\dfrac{2\mu-6+\mu}{\mu-3}=\dfrac{3\mu-6}{\mu-3}=\dfrac{3(\mu-2)}{\mu-3}$

$\dfrac{9-\mu^2}{4-\mu^2}=\dfrac{\mu^2-9}{\mu^2-4}=\dfrac{(\mu+3)(\mu-3)}{(\mu+2)(\mu-2)}$

$\dfrac{2-\mu}{\mu^2+\mu-6}=\dfrac{2-\mu}{(\mu-2)(\mu+3)}=-\dfrac{1}{\mu+3}$.

Ἡ δοθεῖσα λοιπὸν παράστασις ἰσοῦται μὲ

$-\dfrac{3(\mu-2)}{(\mu-3)}\cdot\dfrac{(\mu+3)(\mu-3)}{(\mu+2)(\mu-2)}\cdot\dfrac{1}{(\mu+3)}-\dfrac{2}{(\mu+2)}=-\dfrac{3}{\mu+2}-\dfrac{2}{\mu+2}=-\dfrac{5}{\mu+2}$

Ὁμὰς δευτέρα. ***157.*** Ἐξοδεύει 1ον) $5\lambda\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{5\lambda}{3}$, 2ον) $5\lambda\cdot\dfrac{1}{7}=$ $=\dfrac{5\lambda}{7}$ καὶ 3ον) $5\lambda\cdot\dfrac{4}{9}=\dfrac{20\lambda}{9}$. Ὥστε τοῦ ἔμειναν $5\lambda-\left(\dfrac{5\lambda}{3}+\dfrac{5\lambda}{7}+\right.$ $\left.+\dfrac{20\lambda}{9}\right)=5\lambda-\dfrac{290\lambda}{63}=\dfrac{25\lambda}{63}$.

158. Πρῶτον ὑπόλοιπον $(\beta-1)-\dfrac{(\beta-1)}{4}=\dfrac{3(\beta-1)}{4}$. Ἐκ τοῦ ὑπολοίπου δὲ τούτου ἐξοδεύει τὰ $\dfrac{3(\beta-1)}{4}\cdot\dfrac{3}{7}=\dfrac{9(\beta-1)}{28}$. Ὥστε τοῦ ἔμειναν

$\dfrac{3(\beta-1)}{4}-\dfrac{9(\beta-1)}{28}=\dfrac{21(\beta-1)}{28}-\dfrac{9(\beta-1)}{28}=\dfrac{12(\beta-1)}{28}=\dfrac{3(\beta-1)}{7}$.

159. Πρῶτον ὑπόλοιπον $\alpha-90\,000$ δρχ. Ἐξ αὐτοῦ δὲ ἐξοδεύει

$(\alpha - 90\,000) \cdot \frac{4}{9} = \frac{4\alpha}{9} - 40\,000$ δρχ. Ὥστε τοῦ μένουν $\alpha - 90\,000$ δρχ.$-$
$-\left(\frac{4\alpha}{9} - 40\,000\right) = \alpha - 90\,000 - \frac{4\alpha}{9} + 40\,000 = \frac{5\alpha}{9} - 50\,000$ δρχ.

160. Πρῶτον ὑπόλοιπον $\frac{5\gamma}{7}$. Ἐξ αὐτοῦ δὲ χάνει τὰ $\frac{5\gamma}{7} \cdot \frac{2}{5} +$ $+ 1000$ δρχ. $= \frac{2\gamma}{7} + 1000$ δρχ. Τοῦ ἔμειναν λοιπὸν $\frac{5\gamma}{7} - \left(\frac{2\gamma}{7} + 1000\right) =$ $= \frac{3\gamma}{7} - 1000$ δρχ.

161. Ἀπὸ τὴν πρώτην βρύσιν εἰς 1^δ τρέχουν $\frac{7}{5}$ ὀκ. καὶ εἰς τ^δ τρέχουν $\frac{7\tau}{5}$ ὀκ. Ἐξ ἄλλου ἀπὸ τὴν δευτέραν βρύσιν εἰς $(\tau - 2)^\delta$ τρέχουν $\frac{9(\tau-2)}{4}$ ὀκ. Οὕτως ἐκ τῶν δύο θὰ τρέξουν $\frac{7\tau}{5} + \frac{9(\tau-2)}{4} = \frac{73\tau - 90}{20}$ ὀκ.

Ὁμὰς τρίτη. 162. α′) $\frac{12\chi\psi^2}{7\alpha^2\beta} \cdot \frac{25\alpha\beta^2}{8\chi^2\psi} = \frac{75\psi\beta}{14\alpha\chi} = \frac{75 \cdot 3}{14 \cdot 2} = \frac{225}{28}$ καὶ

$\frac{12}{7 \cdot 2^2 \cdot 3} : \frac{8}{25 \cdot 2 \cdot 3^2} = \frac{1}{7} : \frac{4}{25 \cdot 9} = \frac{225}{28}$.

β′) $\frac{12\alpha^2}{5\beta^2\gamma^3} \cdot \frac{10\gamma^2}{3\alpha\beta^2} = \frac{8\alpha}{\beta^4\gamma} = \frac{16}{243}$ καὶ $\frac{12 \cdot 2^2}{5 \cdot 3^2 3^3} : \frac{3 \cdot 2 \cdot 3^2}{10 \cdot 3^2} = \frac{16}{405} : \frac{3}{5} = \frac{16}{243}$.

γ′) $\frac{\alpha^3}{\alpha^2} : \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^3}{\alpha^2} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \beta = -3$ καὶ $(-3)^3 : \left((3)^2 : \frac{-3}{-3}\right) = -3$.

δ′) $\frac{9\gamma^2}{28\alpha^3\beta^2} : \frac{3\alpha^2}{7\beta\gamma^3} = \frac{9\gamma^2}{28\alpha^3\beta^2} \cdot \frac{7\beta\gamma^3}{3\alpha^2} = \frac{3\gamma^5}{4\alpha^5\beta} = \frac{3(-3)^5}{4(-3)^5 \cdot (-3)} = -\frac{1}{4}$.

ε′) $\frac{\alpha}{\alpha^3+\beta^3} : \frac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\alpha^3+\beta^3} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2} =$

$= \frac{\alpha}{\alpha^3+\beta^3} \cdot \frac{\beta^2(\alpha+\beta)}{\alpha^3+\beta^3} = \frac{\alpha\beta^2(\alpha+\beta)}{(\alpha^3+\beta^3)^2}$.

στ′) $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\chi^2-\psi^2} : \frac{\alpha^4-\beta^4}{(\chi^2-\psi^2)^2} = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\chi^2-\psi^2} \cdot \frac{(\chi^2-\psi^2)^2}{\alpha^4-\beta^4} = \frac{\chi^2-\psi^2}{\alpha^2+\beta^2}$.

ζ′) $\frac{(\alpha+\chi)(\alpha+\psi)}{(\alpha-\chi)(\alpha-\psi)} : \frac{(\alpha-\chi)(\alpha+\psi)}{(\alpha+\chi)(\alpha-\psi)} = \frac{(\alpha+\chi)^2}{(\alpha-\chi)^2} = \frac{(1+3)^2}{(1-3)^2} = \frac{16}{4} = 4$.

η′) $\frac{4\chi^3}{\chi^4-1} : \frac{-2\chi}{\chi^4-1} = -2\chi^2$.

θ′) $\frac{\alpha^6-\beta^6-3(\alpha^4+\beta^4)\alpha\beta+5\alpha^3\beta^3}{\alpha^3\beta^3} : \frac{(\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2)^2}{\alpha^2\beta^2} =$

$= \frac{\alpha^6-\beta^6-3\alpha\beta(\alpha^4+\beta^4)+5\alpha^3\beta^3}{\alpha\beta(\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2)^2}$. **Ἀλλὰ** τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ $\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2$ εἶναι $\alpha^4-2\alpha^3\beta-\alpha^2\beta^2+2\alpha\beta^3+\beta^4$. Τοῦτο δὲ τὸ πηλίκον ἂν διαιρεθῇ πάλιν διὰ τοῦ $\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2$, θὰ δώσῃ νέον πηλίκον $\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2$. Ὥστε τὸ ζητούμενον ἐξαγόμενον εἶναι $\dfrac{\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2}{\alpha\beta}$

ι΄) $\dfrac{(\chi-\alpha)^3+(\chi+\alpha)^3}{(\chi+\alpha)^2\cdot(\chi-\alpha)^2} : \dfrac{(\chi-\alpha)^2-(\chi^2-\alpha^2)+(\chi+\alpha)^2}{(\chi+\alpha)^2\cdot(\chi-\alpha)^2} =$

$$= \frac{(\chi-\alpha)^3+(\chi+\alpha)^3}{(\chi-\alpha)^2-(\chi^2-\alpha^2)+(\chi+\alpha)^2} = \frac{2\chi(\chi^2+3\alpha^2)}{\chi^2+3\alpha^2} = 2\chi.$$

ια΄) $\dfrac{2\alpha^2}{\alpha^2-4\beta^2} : \dfrac{2\alpha^2}{\alpha^2-4\beta^2} = 1.$

Ὁμὰς τετάρτη. ***163.*** Ἐξοδεύει $\left(\alpha+\dfrac{\alpha}{5}\right)\cdot 0{,}25\alpha = 0{,}25\alpha+0{,}05\alpha = 0{,}30\alpha.$

Τοῦ μένουν $\alpha+\dfrac{\alpha}{5}-0{,}30\alpha = \alpha+0{,}2\alpha-0{,}30\alpha = 0{,}90\alpha$, τὰ ὁποῖα αὐξάνει κατὰ $0{,}90\alpha\cdot 0{,}5 = 0{,}45$. Ὥστε εἰς τὸ τέλος ἔχει $0{,}90\alpha+0{,}45 = 1{,}35\alpha$.

164. Πρῶτον ὑπόλοιπον $\alpha+0{,}25\alpha-5000 = 1{,}25\alpha-5000$, τὸ ὁποῖον αὐξάνει κατὰ $(1{,}25\alpha-5000)\cdot 0{,}25 = 0{,}3125\alpha-1250$.

Ἔχων οὕτω $1{,}25\alpha-5000+0{,}3125\alpha-1250 = 1{,}5625\alpha-6250$.

Ὥστε εἰς τὸ τέλος εἶχε $1{,}5625\alpha-11250$ δρχ.

165. 1) Ἐπώλησε $8\alpha+15+1$ αὐγὰ καὶ τοῦ ἔμειναν $8\alpha+14$
2) » $4\alpha+8$ » » » » $4\alpha+6$
3) » $2\alpha+4$ » » » » $2\alpha+2$
4) » $\alpha+2$ » » » » α αὐγά.

Σύνθετα κλάσματα.

Ἀσκήσεις.— *166.* α΄) $\dfrac{\chi+\psi}{\mu} : \dfrac{\omega}{\mu} = \dfrac{\chi+\psi}{\mu}\cdot\dfrac{\mu}{\omega} = \dfrac{\chi+\psi}{\omega} = \dfrac{4+4}{4} = 2.$

β΄) $\dfrac{2\mu+\nu+\mu+\nu}{\mu+\nu} : \dfrac{\mu+\nu+\nu}{\mu+\nu} = \dfrac{3\mu+2\nu}{\mu+\nu}\cdot\dfrac{\mu+\nu}{\mu+2\nu} = \dfrac{3\mu+2\nu}{\mu+2\nu} = \dfrac{12+4}{4+4} = 2.$

γ΄) $\dfrac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{\alpha-\beta} : \dfrac{\alpha-\beta+\alpha+\beta}{\alpha+\beta} = \dfrac{2\beta(\alpha+\beta)}{2\alpha(\alpha-\beta)} = \dfrac{\beta(\alpha+\beta)}{\alpha(\alpha-\beta)} =$

$$= \frac{1\cdot(3+1)}{3\cdot(3-1)} = \frac{4}{3\cdot 2} = \frac{2}{3}.$$

δ΄) $\dfrac{\chi+1}{\chi-1} : \dfrac{\chi^2-1}{\chi} = \dfrac{(\chi+1)\cdot\chi}{(\chi-1)(\chi^2-1)} = \dfrac{(\chi+1)\chi}{(\chi-1)(\chi+1)(\chi-1)} =$

$$= \frac{\chi}{(\chi-1)^2} = \frac{4}{(4-1)^2} = \frac{4}{9}.$$

ε΄) Ἐπειδὴ $\chi+\psi+\dfrac{1}{\chi-\psi} = \dfrac{(\chi+\psi)(\chi-\psi)+1}{\chi-\psi} = \dfrac{\chi^2-\psi^2+1}{\chi-\psi}$, ὁ παρονομαστὴς τοῦ δοθέντος κλάσματος ἰσοῦται μὲ $\chi+\psi+\frac{\chi-\psi}{\chi^2-\psi^2+1}=$

$=\frac{(\chi+\psi)(\chi^2-\psi^2+1)+(\chi-\psi)}{\chi^2-\psi^2+1}$. Ἑπομένως τὸ δοθὲν κλάσμα ἰσοῦται μὲ

$\frac{(\chi+\psi)(\chi^2-\psi^2+1)}{(\chi+\psi)(\chi^2-\psi^2+1)+(\chi-\psi)}$.

στ΄) Εἶναι $\chi-\psi-\frac{4\psi^2}{\chi-\psi}=\frac{(\chi-\psi)^2-4\psi^2}{\chi-\psi}=\frac{(\chi-\psi+2\psi)(\chi-\psi-2\psi)}{\chi-\psi}=$

$=\frac{(\chi+\psi)(\chi-3\psi)}{\chi-\psi}$. Ἐξ ἄλλου εἶναι

$$\chi+\psi-\frac{4\chi^2}{\chi+\psi}=\frac{(\chi+\psi)^2-4\chi^2}{\chi-\psi}=\frac{(\chi+\psi-2\chi)(\chi+\psi+2\chi)}{\chi-\psi}=$$

$$=\frac{(\psi-\chi)(3\chi+\psi)}{\chi-\psi} \quad \text{καὶ} \quad 3(\chi+\psi)-\frac{8\chi\psi}{\chi+\psi}=\frac{3(\chi+\psi)^2-8\chi\psi}{\chi+\psi}.$$

Ὥστε τὸ δοθὲν κλάσμα ἰσοῦται μὲ

$$-\frac{(\chi-3\psi)(3\chi+\psi)(\chi+\psi)}{3(\chi+\psi)^2-8\chi\psi}=-\frac{(\chi-3\psi)(3\chi+\psi)(\chi+\psi)}{3\chi^2-2\chi\psi+3\psi^2}=-\frac{-1\cdot7\cdot3}{3\cdot9-8\cdot2}=\frac{21}{11}.$$

167. α΄) $\frac{(\alpha-\beta)^2-(\beta-\gamma)^2}{(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)}:\frac{(\alpha-\beta-1)(\beta-\gamma)-(\beta-\gamma-1)(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}=$

$$=\frac{(\alpha-\beta)^2-(\beta-\gamma)^2}{(\alpha-\beta-1)(\beta-\gamma)-(\beta-\gamma-1)(\alpha-\beta)}=\frac{(\alpha-\beta+\beta-\gamma)(\alpha-\beta-\beta+\gamma)}{\alpha-2\beta+\gamma}=$$

$$=\frac{(\alpha-\gamma)(\alpha-2\beta+\gamma)}{\alpha-2\beta+\gamma}=\alpha-\gamma.$$

β΄) $\frac{1-(\chi\psi-\psi\omega)^2}{(\chi\psi-1)^2-(\psi\omega)^2}\cdot\frac{(\chi\psi-\omega\psi)^2-1}{(\psi\omega-1)^2-(\chi\psi)^2}=$

$$=\frac{(1+\chi\psi-\psi\omega)(1-\chi\psi+\psi\omega)(\chi\psi-\omega\psi+1)(\chi\psi-\omega\psi-1)}{(\chi\psi-1+\psi\omega)(\chi\psi-1-\psi\omega)(\psi\omega-1+\chi\psi)(\psi\omega-1-\chi\psi)} \qquad (1)$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ $\chi\psi-1-\psi\omega=-(1-\chi\psi+\psi\omega)$ καὶ $\psi\omega-1-\chi\psi=-(1+\chi\psi-$

$-\psi\omega)$ τὸ κλάσμα (1) ἁπλοποιεῖται εἰς τὸ $\frac{(\chi\psi-\omega\psi+1)(\chi\psi-\omega\psi-1)}{(\chi\psi+\psi\omega-1)^2}$

ἢ εἰς τὸ $-\frac{(1+\chi\psi-\omega\psi)(1-\chi\psi+\omega\psi)}{(\chi\psi+\psi\omega-1)^2}=-\frac{1-(\chi\psi-\omega\psi)^2}{(\chi\psi+\psi\omega-1)^2}$.

γ΄) $\frac{(\chi+1)\psi\omega-(\psi-1)\chi\omega+(\omega+1)\chi\psi}{\chi\psi\omega+\psi\omega+\chi\omega+\chi\psi}=\frac{\chi\psi\omega+\psi\omega+\chi\omega+\chi\psi}{\chi\psi\omega+\psi\omega+\chi\omega+\chi\psi}=1.$

168. Εἶναι $\frac{\frac{\chi-1}{\chi+1}-\frac{\psi-1}{\psi+1}}{1+\frac{(\chi-1)(\psi-1)}{(\chi+1)(\psi+1)}}=\frac{(\chi-1)(\psi+1)-(\chi+1)(\psi-1)}{(\chi+1)(\psi+1)+(\chi-1)(\psi-1)}=\frac{\chi-\psi}{\chi\psi+1}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ

Σημείωσις.— Κατὰ τὸν IX αἰῶνα ὁ διάσημος Ἄραψ μαθηματικὸς Al-Khwarizmy ἐδημοσίευσε βιβλίον μὲ τὸν τίτλον «Al-djebr» ἢ «al-moukabalah», εἰς τὸ ὁποῖον ἔδιδε τοὺς κανόνας νέας μεθόδου πρακτικοῦ ὑπολογισμοῦ. Ἐξ αὐτῶν οἱ γενικώτεροι ἦσαν ἡ al-djebr ἤτοι (§ 103) ἡ μεταφορὰ ὅρου τινὸς ἐξισώσεως ἐκ τοῦ ἑνὸς μέλους αὐτῆς εἰς τὸ ἄλλο μὲ ἠλλαγμένον τὸ πρόσημόν του καὶ ἡ al-moukabalah ἤτοι ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων. Οὕτως ὁ πρῶτος κανὼν τοῦ Al-Khwarizmy ἔδωσε τὸ ὄνομά του εἰς τὴν Ἄλγεβραν ἥτις κατέστη ἡ βάσις τῶν νεωτέρων μαθηματικῶν.

Ἀσκήσεις. *169*. α′) $17-1=8\chi-\chi$, $16=7\chi$ καὶ $\chi=16/7$.

β) $5\chi+\chi=38+4$, $6\chi=42$ καὶ $\chi=7$.

170. α′) $4\chi=6$ καὶ $\chi=3/2$, β′) $12\chi-2\chi=60-20$ καὶ $\chi=4$.

171. $22\chi-\chi=6+165$, $21\chi=171$, $7\chi=57$, $\chi=57/7$.

172. $\alpha\chi-\chi=\alpha+1$, $\chi(\alpha-1)=\alpha+1$ καὶ $\chi=(\alpha+1):(\alpha-1)$ ἂν $\alpha\neq1$.

173. α′) $4\alpha^2\chi-\chi=2\alpha+1$, $\chi(4\alpha^2-1)=2\alpha+1$ καὶ $\chi=\dfrac{2\alpha+1}{4\alpha^2-1}=$

$$=\frac{2\alpha+1}{(2\alpha+1)(2\alpha-1)}=\frac{1}{2\alpha-1},\ \text{ἂν}\ 4\alpha^2-1\neq0,$$

β′) $\chi(\beta+\alpha)=1$ καὶ $\chi=\dfrac{1}{\alpha+\beta}$, ἐὰν $\alpha+\beta\neq0$.

174. $(3\chi-1)\cdot3\cdot5-(2\chi+1)\cdot4\cdot5-(4\chi-5)\cdot4\cdot3=4\cdot4\cdot3\cdot5$
$45\chi-15-40\chi-20-48\chi+60=240$.
$45\chi-40\chi-48\chi=-60+240+15+20$, $-43\chi=215$ καὶ $\chi=215:(-43)=-5$.

175. $12\cdot2-(7\chi-1)\cdot2=12\cdot3\chi-(19\chi+3)\cdot3$, $24-14\chi+2=36\chi-57\chi-9$,
$-14\chi-36\chi+57\chi=-24-2-9$, $7\chi=-35$ καὶ $\chi=-5$.

176. $(5\chi+1)\cdot6+(19\chi+7)\cdot2-(3\chi-1)\cdot9=(7\chi-1)\cdot3$
$30\chi+6+38\chi+14-27\chi+9=21\chi-3$, $20\chi=-32$ καὶ $\chi=-8/5$.

177. $11\cdot24-(3\chi-1)6-(2\chi+1)8=10\cdot24-(2\chi-5)8-(7\chi-1)\cdot3$
$264-18\chi+6-16\chi-8=240-16\chi+40-21\chi+3$
$5\chi=21$ καὶ $\chi=21/5$.

Διερεύνησις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta=0$.

Ἀσκήσεις. *178*. α′) $3\chi-10+2\chi=\chi-10+4\chi$, $5\chi-5\chi=10-10$, $0\cdot\chi=0$, ἤτοι $0=0$. Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει ἀπείρους τὸ πλῆθος ῥίζας, ἤτοι εἶναι ταυτότης ἢ ἀπροσδιόριστος.

β) $(2\chi-5)\cdot 2=\chi+7+3\chi$, $4\chi-10=4\chi+7$, $0\cdot\chi=17$, ἤτοι $0=17$. Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος.

γ′) $3(\chi-\alpha)+2(\chi+\beta)=5\chi-6$, $3\chi-3\alpha+2\chi+2\beta=5\chi-6$, $0\cdot\chi=3\alpha-2\beta-6$(ι). Ὥστε, ἂν $3\alpha-2\beta-6=0$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ταυτότης, ἂν δὲ $3\alpha-2\beta-6\neq 0$ αὕτη εἶναι ἀδύνατος.

δ′) $\beta\chi+\alpha\chi+\alpha\beta=(\alpha+\beta)\chi+\alpha\beta$, $(\alpha+\beta)\chi-(\alpha+\beta)\chi=\alpha\beta-\alpha\beta$ καὶ $0\cdot\chi=0$ (ταυτότης).

ε′) $5\chi+3\chi-45=30\chi-105$, $22\chi=60$ καὶ $\chi=30/11$.

στ′) $2\chi+3\chi+30=5\chi+12$, $0\cdot\chi=-18$, ἤτοι $0=-18$ (ἀδύνατος).

179. $2(\alpha\chi-\beta)+3\chi=18\chi-6\alpha$, $2\alpha\chi-2\beta+3\chi=18\chi-6\alpha$
$2\alpha\chi+3\chi-18\chi=2\beta-6\alpha$, $(2\alpha-15)\chi=2(\beta-3\alpha)$.

Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις 1) ἔχει μίαν λύσιν, ἂν $2\alpha-15\neq 0$, ἤτοι ἂν $\alpha\neq 15/2$, 2) εἶναι ταυτότης, ἂν $2\alpha-15=0$ καὶ $\beta-3\alpha=0$, ἤτοι ἂν $\alpha=15/2$ καὶ $\beta=3\alpha=45/2$ καὶ 3) εἶναι ἀδύνατος, ἂν $2\alpha-15=0$ καὶ $\beta-3\alpha\neq 0$.

180. $2(\alpha\chi-1)+3(\chi+1)=6\cdot 4$, $2\alpha\chi-2+3\chi+3=24$ καὶ $(2\alpha+3)\chi=23$. Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις θὰ εἶναι ἀδύνατος, ἂν $2\alpha+3=0$, ἤτοι ἂν $\alpha=-3/2$. Ἂν δὲ $\alpha\neq -3/2$, θὰ ἔχῃ μίαν λύσιν τὴν $\chi=23:(2\alpha+3)$.

181. α′) $27\chi-10\chi+25=18\chi-30+10\chi-5$, $-11\chi=-60$ καὶ $\chi=60:11$.

Ἐπαλήθευσις. $27\cdot\frac{60}{11}-5\left(2\cdot\frac{60}{11}-5\right)=\frac{1620}{11}-\frac{325}{11}=\frac{1295}{11}$ καὶ

$6\left(3\cdot\frac{60}{11}-5\right)+5\left(2\cdot\frac{60}{11}-1\right)=\frac{750}{11}+\frac{545}{11}=\frac{1295}{11}$.

β′) $4\cdot 2\cdot(3\chi-5)-25(\chi+2)=6\cdot 5\cdot(3\chi+2)-12\cdot 71$
$24\chi-40-25\chi-50=90\chi+60-852$, $-91\chi=-702$ καὶ $\chi=702:91$. Ἐπαληθεύοντες δὲ ὡς ἄνω εὑρίσκομεν $1482:182=1482:182$.

γ′) $12\chi-6\chi+8\chi-9\chi-8\chi-10\chi=792$, $-13\chi=792$ καὶ $\chi=-(792:13)$.

δ′) $\chi^2+\frac{2\chi}{3}+\frac{1}{9}=\chi^2-\frac{\chi}{6}+\frac{\chi}{2}-\frac{1}{12}$. Ὥστε ὁ ὅρος χ^2 ἀπαλείφεται.

Ἔχομεν δὲ $24\chi+4=-6\chi+18\chi-3$, $12\chi=-7$ καὶ $\chi=-7/12$.

ε′) $(\chi-3)(\chi-4)+(\chi-2)(\chi-4)-19(\chi-1)(\chi-2)=19(\chi-1)(\chi-3)$. Ἀλλ᾽ ὅταν ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις μετὰ τὰς ἀναγωγὰς θὰ ἔχῃ τὸν ὅρον $36\chi^2$, ἤτοι θὰ εἶναι 2ου βαθμοῦ πρὸς χ, τὴν ὁποίαν ἐδῶ δὲν δυνάμεθα νὰ λύσωμεν.

στ′) $(\chi-2)^2-\chi^2-4(\chi-1)+4(\chi-2)=0$

$\chi^2-4\chi+4-\chi^2-4\chi+4+4\chi-8=0$, $-4\chi=0$ καὶ $\chi=0$.

Ἡ δοθεῖσα ὅμως ἐξίσωσις διὰ $\chi=0$, δὲν ἔχει τιμὴν ὡρισμένην, διότι ὁ ὅρος $\frac{1}{\chi^2}=\frac{1}{0}=\infty$.

182. α′) Εὑρίσκομεν $(\alpha+\beta+\alpha-\beta)\chi=2\alpha^2$, $2\alpha\chi=2\alpha^2$ καὶ $\chi=\alpha$, ἂν $\alpha\neq 0$.
Ἐπαλήθευσις. $(\alpha+\beta)\alpha+(\alpha-\beta)\alpha=\alpha^2+\alpha\beta+\alpha^2-\alpha\beta=2\alpha^2$.

β′) $2\alpha\beta\chi=\alpha^3-\alpha^2-\beta^2-\beta^3$ καὶ $\chi=(\alpha^3-\alpha^2-\beta^2-\beta^2):2\alpha\beta$, ἂν $\alpha\beta\neq0$.

γ′) $2\mu\chi-2\mu^2-2\nu^2+2\nu\chi=4\mu\nu$, $2(\mu+\nu)\chi=2(\mu+\nu)^2$, καὶ $\chi=\mu+\nu$, ἂν $\mu+\nu\neq0$.

δ′) $\chi^2+2\chi+1-5\alpha+2\alpha^2+\alpha\chi=\chi^2-4\alpha\chi+4\alpha^2+5$, $(5\alpha+2)\chi=2\alpha^2+5\alpha+4$ καὶ $\chi=(2\alpha^2+5\alpha+4):(5\alpha+2)$, ἂν $5\alpha+2\neq0$

ε′) $(\alpha+\beta)\chi+\alpha\chi=\alpha(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)$.

$(2\alpha+\beta)\chi=\alpha(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)$ καὶ $\chi=\alpha(\alpha+\beta)$, ἐὰν $2\alpha+\beta\neq0$.

στ′) $3\beta(\alpha-\beta)(\beta\chi+\alpha)+2\alpha^2(\alpha-\beta)(\chi-1)=\beta(2\beta^2+5\alpha^2)$ [ἐ.κ.π. $6\alpha^2\beta^2(\alpha-\beta)$]

καὶ $\chi=\dfrac{2\alpha^3+6\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2+2\beta^3}{2\alpha^3-2\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-3\beta^3}$, ἂν ὁ παρονομαστὴς εἶναι $\neq0$.

ζ′) $(\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma)(\alpha_1\chi+\beta_1)=(\alpha_1\chi^2+\beta_1\chi+\gamma_1)(\alpha\chi+\beta)$

$$\alpha\alpha_1\chi^3+(\alpha_1\beta+\alpha\beta_1)\chi^2+\alpha_1\gamma\chi+\beta\beta_1\chi+\beta_1\gamma=$$
$$=\alpha\alpha_1\chi^2+(\alpha_1\beta+\alpha\beta_1)\chi^2+\alpha\gamma_1\chi+\beta\beta_1\chi+\beta\gamma_1.$$ Ὅθεν:

$(\alpha_1\gamma-\alpha\gamma_1)\chi=\beta\gamma_1-\beta_1\gamma$ καὶ $\chi=\dfrac{\beta\gamma_1-\beta_1\gamma}{\alpha_1\gamma-\alpha\gamma_1}$, ἐὰν $\alpha_1\gamma-\alpha\gamma_1\neq0$. Ἄλλως εἶναι ἀδύνατος ἐὰν καὶ $\beta\gamma_1-\beta_1\gamma\neq0$ καὶ ἀπροσδιόριστος, ἐὰν καὶ $\beta\gamma_1-\beta_1\gamma=0$.

η′) $8\alpha(\chi-2)^2+8\beta(\chi+2)^2-(\alpha+\beta)\chi^4=-(\alpha+\beta)(\chi^2-4)^2$

$32(\alpha-\beta)\chi=48(\alpha+\beta)$ καὶ $\chi=\dfrac{3(\alpha+\beta)}{2(\alpha-\beta)}$. ἐὰν $\alpha\neq\beta$.

Ἐφαρμογὴ τῶν ἐξισώσεων εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων.

Παρατηρήσεις καὶ ὁδηγίαι.— Εἴδομεν προηγουμένως, ὅτι σκοπὸς τῆς ἀλγέβρας εἶναι ἡ λύσις τῶν προβλημάτων κατὰ τρόπον ἁπλοῦν καὶ γενικόν· καὶ ἁπλουστεύει μὲν αὐτὴ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων, διότι χρησιμοποιεῖ γράμματα, τὴν γενικεύει δὲ 1ον) ***διότι εἰσάγει νέους ἀριθμοὺς*** (εἴδομεν ὅτι εἰσήγαγε τοὺς ἀρνητικοὺς) καὶ 2ον) ***διότι ἀνάγει τὴν λύσιν αὐτῶν εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεων.***

Ἐπομένως διὰ νὰ λύσωμεν εἰς τὴν ἄλγεβραν ἕνα πρόβλημα πρέπει νὰ σχηματίσωμεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτοῦ. Γενικοὶ κανόνες διὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς ἐξισώσεως ἢ τῶν ἐξισώσεων, αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν λύσιν ἑνὸς προβλήματος δὲν ὑπάρχουν, διότι ἡ ποικιλία τῶν προβλημάτων εἶναι πολὺ μεγάλη. Ἐκεῖνο ὅμως τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν εἶναι: ὅτι ὁ σχηματισμὸς ἐξισώσεως προβλήματός τινος, δὲν εἶναι παρὰ μία μετάφρασις ἐκ τῆς γραπτῆς ἢ προφορικῆς γλώσσης εἰς τὴν ἀλγεβρικὴν γλῶσσαν.

Οὕτω τοῦ προβλήματος «νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ διπλάσιον αὐξηθὲν κατὰ 5 ἰσοῦται μὲ τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ μεῖον 19» ἡ ἐξίσωσις $2\chi+5=3\chi-19$ εἶναι ἡ μετάφρασις αὐτοῦ εἰς τὴν γλῶσσαν τῆς ἀλγέβρας. Οἱ ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι εἰς ἕνα πρόβλημα παριστάνουν ποσά, μετροῦνται μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα. Οὕτως ἐὰν πρόκειται π.χ. περὶ ἀποστάσεων, θὰ μετροῦνται μὲ μέτρα, ἢ μὲ χιλιόμετρα κλπ. Ἐὰν πρόκειται περὶ χρόνου, θὰ μετροῦνται μὲ ὥρας ἢ μὲ πρῶτα λεπτὰ κ.λ.π.

Ἀφοῦ σχηματίσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ἢ τὰς ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος καὶ προβῶμεν εἰς τὴν λύσιν αὐτῶν, πρέπει νὰ κάμωμεν τὴν ἐπαλήθευσιν τῆς λύσεως εἰς τὸ πρόβλημα.

Προβλήματα πρὸς λύσιν. — ***183***. Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Τότε δὲ θὰ εἶναι $2\chi+5=3\chi-19$ καὶ $\chi=24$. Πράγματι δὲ ἔχομεν $2\cdot24+5=$ $=3\cdot24-19$, ἤτοι $53=53$.

184. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι $4\chi-2=3\chi+16$ καὶ $\chi=18$.

185. Ἐδῶ ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\dfrac{6+\chi}{17+\chi}=\dfrac{1}{3}$ καὶ $\chi=-\dfrac{1}{2}$.

186. Ἡ ἐξίσωσις εἶναι $\dfrac{-5+\chi}{6+\chi}=\dfrac{8+\chi}{\chi}$ καὶ $\chi=-\dfrac{48}{19}$.

187. Ἡ ἐξίσωσις εἶναι $\chi-\dfrac{\chi}{3}-4=\dfrac{5\chi}{6}-8$ καὶ $\chi=24$.

188. Ἐδῶ εἶναι $\dfrac{29-\chi}{42-\chi}=\dfrac{1}{2}$ καὶ $\chi=16$.

189. Ἐδῶ εἶναι $\dfrac{2\chi}{3}+\dfrac{3\chi}{4}=170$ καὶ $\chi=120$.

190. Ἔστω ὅτι θὰ ἀναμείξῃ χ ὀκάδας τῶν 2900 δρχ. κατ' ὀκᾶν. Τότε αἱ 100 ὀκάδες ἀξίζουν 1950 δρχ. $\times$ 100 = 195000 δρχ.
αἱ χ » » 2900χ » καὶ ὅλον τὸ μεῖγμα ἤτοι
αἱ $(100+\chi)$ » » $2150\cdot(100+\chi)$ δρχ. Πρέπει δὲ νὰ εἶναι:

$$195000+2900\cdot\chi=2150(100+\chi)$$

καὶ ὁ χ θετικὸς ἀριθμός. Λύοντες ἤδη τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν

$\chi=26\dfrac{2}{3}$ ὀκ. Ἡ λύσις δὲ αὕτη εἶναι δεκτή.

191. Ἔστω Α καὶ Β οἱ τόποι, ὡς καὶ ὅτι τὰ κινητὰ θὰ συναντηθοῦν εἰς ἀπόστασιν χ χιλιομέτρων ἀπὸ τοῦ τόπου Α. Ὥστε τὸ πρῶτον κινητὸν θὰ διανύσῃ ἀπόστασιν χ χλμ. τὸ δὲ δεύτερον θὰ διανύσῃ ἀπόστασιν $60-\chi$ χλμ. Οἱ χρόνοι ὅμως καθ' οὓς θὰ διανύσουν τὰς ἀποστάσεις αὐτὰς εἶναι ἴσοι· ἀλλ' ὁ πρῶτος θὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασίν του εἰς $\dfrac{\chi}{5}$ ὥρας, ὁ δὲ δεύτερος θὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασίν του εἰς $\dfrac{60-\chi}{5,5}$ ὥρας. Ὥστε πρέπει νὰ εἶναι $\dfrac{\chi}{5}=$ $=\dfrac{60-\chi}{5,5}$ καὶ ὁ χ θετικὸς ἀριθμός. Λύοντες ἤδη τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=28\dfrac{4}{7}$ χλμ.

192. Ἔστω ὅτι θὰ ρίψωμεν χ ὀκ. καθαροῦ ὕδατος. Τότε αἱ $40+\chi$ ὀκ. θὰ περιέχουν 3,4 ὀκ. ἅλατος, αἱ δὲ 30 ὀκ. θὰ περιέχουν $\dfrac{3,4\cdot30}{40+\chi}=2$ ὀκ. ἅλατος. Πρέπει δὲ ὁ χ νὰ εἶναι ἀριθμὸς θετικός. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν τὴν δεκτὴν λύσιν $\chi=11$ ὀκ.

193. Ἔστω ὅτι τὸ κτῆμα κοστίζει χ δρχ. Τότε ἡ ἐξίσωσις εἶναι $\frac{3\chi}{5}+250\,000=\frac{3\chi}{4}-200\,000$ καὶ $\chi=3\,000\,000$ δρχ.

194. Ἔστω χ χλμ. ἡ ταχύτης τῆς ἄλλης καθ' ὥραν. Αὕτη ἔτρεξεν ἐπὶ 2 ὥρ.40π$=2\frac{2}{3}$ ὥρας, διάστημα $\chi\cdot 2\frac{2}{3}$ χιλ. ἡ δὲ βραδύτερον ἀναχωρήσασα ἔτρεξεν ἐπὶ $2\frac{1}{3}$ ὥρας, διάστημα $48\cdot 2\frac{1}{3}$ χλμ. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι τὰ διανυθέντα διαστήματα εἶναι ἴσα. Ὥστε πρέπει νὰ εἶναι $2\frac{2}{3}\chi=48\cdot 2\frac{1}{3}$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τὴν δεκτὴν λύσιν $\chi=42$ χλμ.

195. Ἔστω ὅτι ἡ δεξαμενὴ θὰ πληρωθῇ εἰς χ ὥρας. Τότε ἕκαστος τῶν τριῶν κρουνῶν εἰς χ ὥρας θὰ πληρώσῃ τὰ $\frac{\chi}{12}$, $\frac{\chi}{10}$ καὶ $\frac{\chi}{30}$ τῆς δεξαμενῆς ἀντιστοίχως. Ὥστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\chi}{12}+\frac{\chi}{10}+\frac{\chi}{30}=1$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\chi=\frac{60}{13}$ ὥρ.$=4\frac{8}{13}$ ὥρ.

196. Ἔστω ὅτι ἡ ἐνδυμασία ἐτιμᾶτο χ δραχμάς. Τότε ὁ μηνιαῖος μισθὸς ἦτο $\frac{6\,000\,000+\chi}{12}$ καὶ ἑπομένως εἰς 8 μῆνας ἔλαβε $\frac{(6\,000\,000+\chi)\cdot 8}{12}=5\,000\,000$. Εὑρίσκομεν δὲ ὅτι $\chi=1\,500\,000$ δρχ.

197. Ἔστω ὅτι ὁ ἀποτυχὼν ἔλαβε χ ψήφους, ὁπότε ὁ ἐκλεγεὶς ἔλαβε $5153+\chi$ ψήφους. Οὕτως ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $5153+\chi+\chi=12\,400-147$. Πρέπει δὲ νὰ εἶναι ὁ χ ἀκέραιος θετικὸς ἀριθμός. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν τὴν δεκτὴν λύσιν $\chi=3550$. Ὥστε ὁ ἐκλεγεὶς ἔλαβε $5153+3550=8703$ ψήφους. Εἶναι δὲ $8703+3550+147=12\,400$.

198. Ἂν ὁ ὅμιλος ἔχει χ μέλη θὰ εἶναι $\chi-\frac{\chi}{7}=120$, ἤτοι $\frac{6\chi}{7}=120$ καὶ $\chi=\frac{120\cdot 7}{6}=140$ (λύσις δεκτή).

199. Ἂν χ ὁ ζητούμενος (θετικὸς) ἀκέραιος, θὰ εἶναι $\frac{\chi}{5}\cdot 3+7=34$ καὶ $\chi=45$.

200. Ἂν χ ὁ ζητούμενος (θετικὸς) ἀκέραιος, θὰ εἶναι $\frac{\chi}{3}+2=23$ καὶ $\chi=63$.

201. Ἂν χ εἶναι ὁ ζητούμενος (θετικὸς) ἀκέραιος, τὰ ἀκέραια πηλίκα εἶναι $\frac{\chi-3}{7}$ καὶ $\frac{\chi-3}{9}$. Ὥστε εἶναι $\frac{\chi-3}{7}-\frac{\chi-3}{9}=4$ καὶ $\chi=129$.

202. Ἔστω ὅτι εἶχεν ἐξ ἀρχῆς χ πορτοκάλια. Ἀλλ' ἀφοῦ ἐπώλησε τὰ

$\frac{3\chi}{5}$, τοῦ ἔμειναν $\frac{2\chi}{5}$. Ὥστε πρέπει νὰ εἶναι $\chi+9=\frac{2\chi}{5}+33$ καὶ ὁ χ ἀκέραιος θετικός. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν τὴν δεκτὴν λύσιν $\chi=40$.

203. Ἔστω ὅτι ὁ Διόφαντος ἔζησε χ ἔτη. Τότε ἔζησε $\frac{\chi}{6}$ ὡς παιδίον, $\frac{\chi}{12}$ ὡς νεανίας, $\frac{\chi}{7}+5$ νυμφευμένος μέχρι τῆς γεννήσεως τοῦ υἱοῦ του. Ἐπειδὴ δὲ ὁ υἱὸς ἔζησε $\frac{\chi}{2}$ ἔτη, ὁ Διόφαντος ἔζησε ἀπὸ τῆς γεννήσεως τοῦ υἱοῦ του, ἄλλα $\frac{\chi}{2}+4$ ἔτη. Ὥστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$\frac{\chi}{6}+\frac{\chi}{12}+\frac{\chi}{7}+5+\frac{\chi}{2}+4=\chi$ καὶ $\chi=84$. Ἡ λύσις δὲ αὕτη εἶναι δεκτή, διότι δὲν ὑπερβαίνει τὴν δυνατὴν ἡλικίαν τοῦ ἀνθρώπου.

204. Ἐὰν ἡ ἡλικία τῆς κόρης εἶναι χ ἔτη, ἡ τοῦ πατρὸς εἶναι 3χ ἔτη. Ὥστε ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι $3\chi+\chi+28=(3\chi)\cdot 2$, ἐξ ἧς $\chi=14$. Ὥστε ὁ πατὴρ εἶναι $3\cdot 14=42$ ἐτῶν.

205. Ἂν ὁ μεσαῖος εἶναι χ ἐτῶν, ὁ μεγαλύτερος εἶναι $\chi+2$ ἐτῶν καὶ ὁ μικρότερος $\chi-2$ ἐτῶν. Οὕτω δὲ εἶναι $\chi+2+\chi+\chi-2=24$ καὶ $\chi=8$. Ὥστε οἱ τρεῖς ἀδελφοὶ εἶναι 10, 8 καὶ 6 ἐτῶν.

206. Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ἐτῶν, θετικὸς ἂν τὰ ἔτη εἶναι τοῦ μέλλοντος χρόνου καὶ ἀρνητικὸς ἂν εἶναι τοῦ παρελθόντος. Τότε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $40+\chi=3\cdot(16+\chi)$ ἐξ ἧς $\chi=-4$. Ὥστε πρὸ τεσσάρων ἐτῶν ἡ ἡλικία τῆς θυγατρὸς ἦτο τὸ τρίτον τῆς ἡλικίας τοῦ πατρός.

207. Ἔστω χ ὁ πρῶτος τῶν τριῶν ἀριθμῶν. Τότε ὁ δεύτερος ἰσοῦται μὲ $2\chi+1$, ὁ δὲ τρίτος ἰσοῦται μὲ $(2\chi+1)3+3$. Ἑπομένως εἶναι $\chi+(2\chi+1)+(2\chi+1)\cdot 3+3=70$ καὶ $\chi=7$. Ὥστε οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ εἶναι κατὰ σειρὰν 7, 15 καὶ 48.

208. Ἔστω ὅτι οἱ 15 ἐργάται πρέπει νὰ ἐργάζωνται χ ὥρας καθ' ἡμέραν. Τότε οὗτοι θὰ τελειώσουν τὸ ἔργον μὲ ἐργασίαν $15\cdot 3\cdot \chi=45\chi$ ὡρῶν. Ἀλλ' οἱ 16 ἐργάται ἐκτελοῦν τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ἔργου μὲ ἐργασίαν $4\cdot 9\cdot 16=576$ ὡρῶν καὶ ἑπομένως ὅλον τὸ ἔργον θὰ τὸ ἐξετέλουν μὲ ἐργασίαν 1440 ὡρῶν. Ὥστε εἶναι $45\chi=1440$ καὶ $\chi=32$ ὧραι. Ἀλλ' ἡ λύσις αὕτη δὲν εἶναι δεκτή.

209. Ἔστω μετὰ χ ἔτη, ὁπότε θὰ εἶναι $58+\chi=2(28+\chi)$ καὶ $\chi=2$.

210. Ἔστω χ τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων, ὁπότε τὸ ψηφίον τῶν μονάδων εἶναι 2χ. Ὥστε ὁ ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ $10\chi+2\chi=12\chi$ μονάδας. Ἀλλ' ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ψηφίων, ὁ ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ $2\chi\cdot 10+\chi=20\chi+\chi=21\chi$ μονάδας. Ὥστε πρέπει νὰ εἶναι $21\chi=12\chi+36$, ὁ δὲ χ νὰ εἶναι θετικὸς ἀκέραιος καὶ μονοψήφιος ἀριθμός. Λύονυες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν τὴν δεκτὴν λύσιν $\chi=4$. Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 48. Πράγματι δὲ εἶναι $84=48+36$.

211. Ἐὰν χ εἶναι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων, τὸ τῶν δεκάδων θὰ εἶναι $12-\chi$. Ὥστε ὁ ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ $(12-\chi)\cdot 10+\chi$ μονάδας, ὁ δὲ δι' ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων θὰ ἔχῃ $10\chi+12-\chi$ μονάδας. Πρέπει δὲ νὰ εἶναι $(12-\chi)\cdot 10+\chi-18=10\chi+12-\chi$, καὶ ὁ χ θετικὸς ἀκέραιος καὶ μονοψήφιος ἀριθμός. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν τὴν δεκτὴν λύσιν $\chi=5$. Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 75. Πράγματι δὲ εἶναι $75-18=57$.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη. (Γενικά). 212. Ἔστω εἰς χ ἡμέρας. Ἐπειδὴ ὁ πρῶτος τελειώνει τὸ ἔργον εἰς α ἡμέρας, εἰς χ ἡμέρας τελειώνει τὰ $\frac{\chi}{\alpha}$ τοῦ ἔργου καὶ ὁ δεύτερος εἰς χ ἡμέρας τελειώνει τὰ $\frac{\chi}{\beta}$ τοῦ ἔργου. Ὥστε παριστῶντες τὸ ὅλον ἔργον διὰ 1, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\chi}{\alpha}+\frac{\chi}{\beta}=1$. Ὥστε, $\chi=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$.

213. Ἔστω χ μέτρα ἡ διανυθεῖσα ἀπόστασις. Τότε αἱ περιστροφαὶ εἶναι $\frac{\chi}{\alpha}$ τῶν ἐμπροσθίων καὶ $\frac{\chi}{\beta}$ τῶν ὀπισθίων. Πρέπει δὲ νὰ εἶναι $\frac{\chi}{\alpha}-\frac{\chi}{\beta}=\nu$ καὶ ὁ χ θετικὸς ἀριθμός. Λύοντες εὑρίσκομεν $\chi=\frac{\alpha\beta\nu}{\beta-\alpha}$. Ἀλλ' ἡ λύσις αὕτη εἶναι παραδεκτὴ ἐὰν $\beta>\alpha$ (οἱ α καὶ β πρέπει νὰ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, ὁ δὲ ν θετικὸς ἀκέραιος).

214. Ἔστω χ δρχ. τὸ εἰσόδημά του. Τότε ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι $\frac{\chi}{\nu}+\frac{\chi}{\alpha}+\frac{\chi}{\beta}+\frac{\chi}{\gamma}+\mu=\chi$. Πρέπει δὲ ὁ χ, ὡς καὶ οἱ ἀριθμοὶ ν, α, β, γ, μ, νὰ εἶναι ὅλοι θετικοὶ ἀριθμοί. Λύοντες εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{\nu\alpha\beta\gamma\mu}{\nu\alpha\beta\gamma-\alpha\beta\gamma-\nu\beta\gamma-\nu\alpha\gamma-\nu\alpha\beta}.$$ Μερικὴ περίπτωσις:

$$\chi=\frac{3\cdot4\cdot6\cdot8\cdot300\,000}{3\cdot4\cdot6\cdot8-4\cdot6\cdot8-3\cdot6\cdot8-3\cdot4\cdot8-4\cdot4\cdot6}=2\,400\,000 \text{ δρχ.}$$

215. Ἔστω ὅτι ὀφείλει νὰ διανύῃ χ χλμ. καθ' ἡμέραν. Ὁ ταξειδιώτης διανύει ἀρχικῶς $\frac{\alpha}{\eta}$ χλμ. τὴν ἡμέραν καὶ ἐπὶ β ἡμέρας διήνυσε $\frac{\alpha\beta}{\eta}$ χλμ. Ὥστε τοῦ ἀπομένουν νὰ διανύσῃ $\alpha-\frac{\alpha\beta}{\eta}=\frac{\alpha\eta-\alpha\beta}{\eta}$ χλμ. εἰς $\eta-\beta-\gamma$ ἡμέρας. Ὥστε εἰς μίαν ἡμέραν θὰ διανύῃ $\chi=\frac{\alpha\eta-\alpha\beta}{\eta}:(\eta-\beta-\gamma)=$

$$=\frac{\alpha(\eta-\beta)}{\eta(\eta-\beta-\gamma)} \text{ χλμ.}$$

Μερικὴ περίπτωσις: $\chi=\frac{300(18-7)}{18(18-7-3)}=\frac{300\cdot 11}{18\cdot 8}=22\frac{11}{12}$ χλμ.

216. Ἔστω ὅτι ὁ Β ἔλαβε χ. Τότε ὁ Α ἔλαβε $\frac{\mu\chi}{\nu}$, ὁ δὲ Γ ἔλαβε $\frac{\lambda\chi}{\varrho}$.
Ὥστε εἶναι $\chi+\frac{\mu\chi}{\nu}+\frac{\lambda\chi}{\varrho}=\alpha$ καὶ $\chi=\frac{\alpha\nu\varrho}{\nu\varrho+\mu\varrho+\lambda\nu}$. Ἔλαβε λοιπὸν ὁ Α $\frac{\alpha\mu\varrho}{\nu\varrho+\mu\varrho+\lambda\nu}$ καὶ ὁ Γ $\frac{\alpha\lambda\nu}{\nu\varrho+\mu\varrho+\lambda\nu}$.

217. Ἐὰν χ εἶναι τὸ πρῶτον κεφάλαιον, τὸ δεύτερον εἶναι Κ—χ. Τότε ὁ ἐτήσιος τόκος τοῦ πρώτου εἶναι $\frac{\chi\varepsilon}{100}$ καὶ ὁ τοῦ δευτέρου εἶναι $\frac{(K-\chi)\varepsilon'}{100}$.

Οὕτω δὲ πρέπει νὰ εἶναι $\frac{\chi\varepsilon}{100}+\frac{(K-\chi)\varepsilon'}{100}=\tau$ καὶ ὁ χ θετικός. Λύοντες εὑρίσκομεν $(\varepsilon-\varepsilon')\chi=100\tau-K\varepsilon'$ (ι), ὁπότε ἐὰν $\varepsilon\neq\varepsilon'$ ἔχομεν τὴν λύσιν $\chi=\frac{100\tau-K\varepsilon'}{\varepsilon-\varepsilon'}$. Ὥστε τὸ δεύτερον κεφάλαιον εἶναι $K-\chi=\frac{K\varepsilon-100\tau}{\varepsilon-\varepsilon'}$.

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἐὰν $\varepsilon>\varepsilon'$ θὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν ἐὰν $100\tau>K\varepsilon'$. Ἐὰν δὲ $\varepsilon<\varepsilon'$, πρέπει νὰ εἶναι $100\tau<K\varepsilon'$.

218. Ἔστω εἰς χ ἡμέρας. Τότε εἰς χ ἡμέρας ὁ α′ ἐργάτης τελειώνει τὰ $\frac{\chi}{2}$ τοῦ ἔργου, ὁ β′ τὰ $\frac{\chi}{\nu}$ τοῦ ἔργου καὶ ὁ τρίτος ἐργάτης, ὅστις τελειώνει τὸ ἔργον εἰς $\mu+\frac{\nu}{2}=\frac{2\mu+\nu}{2}$ ἡμέρας, τελειώνει εἰς χ ἡμέρας τὰ $\frac{2\chi}{2\mu+\nu}$ τοῦ ἔργου. Οὕτως ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν: $\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{\nu}+\frac{2\chi}{2\mu+\nu}=1$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\chi=\frac{2\nu(2\mu+\nu)}{(2\mu+\nu)\nu+2(2\mu+3\nu)}$.

219. Ἔστω χ τὸ κεφάλαιον. Τότε ἡ ἐξ. ὑφαίρεσις εἶναι (Πίν. λογαρίθμων νέα ἔκδοσις Χρ. Μπαρμαστάθη σελὶς 173) $\frac{2\chi\nu}{36\,000}$ καὶ ἡ ἐσωτερικὴ $\frac{2\chi\nu}{36\,000+2\nu}$. Ὥστε πρέπει νὰ εἶναι $\frac{2\chi\nu}{36\,000}-\frac{2\chi\nu}{36\,000+2\nu}=\alpha$ καὶ ὁ χ θετικός. Λύοντες εὑρίσκομεν τὴν δεκτὴν λύσιν $\chi=\frac{36\,000(36\,000+2\nu)\alpha}{4\nu^2}$.

Ὁμὰς δευτέρα. *220.* Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν αὐγῶν. Ὥστε τῆς μένουν αὐγὰ τὴν

1ην φορὰν) $\chi-\left(\frac{\chi}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\chi}{2}-\frac{1}{2}$.

2αν φορὰν) $\frac{\chi}{2}-\frac{1}{2}-\left(\frac{\chi}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\chi}{4}-\frac{3}{4}$.

3ην φορὰν) $\frac{\chi}{4}-\frac{3}{4}-\left(\frac{\chi}{8}-\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\chi}{8}-\frac{7}{8}$ καὶ τὴν

4ην φορὰν) $\frac{\chi}{8}-\frac{7}{8}-\left(\frac{\chi}{16}-\frac{7}{16}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\chi}{16}-\frac{15}{16}$.

Ὥστε πρέπει νὰ εἶναι $\frac{\chi}{16}-\frac{15}{16}=1$ καὶ ὁ χ ἀκέραιος θετικός. Λύοντες εὑρίσκομεν $\chi=31$.

221. Ἔστω ὅτι εἶχε χ αὐγά. Τότε θὰ εἰσέπραττε 500χ δραχμάς. Ἀλλ' εἰσέπραξε 600(χ—3) δρχ. Ὥστε πρέπει νὰ εἶναι $600(\chi-3)=500\chi$ καὶ ὁ χ ἀκέραιος θετικός. Λύοντες εὑρίσκομεν $\chi=18$.

222. Ἔστω εἰς χ ὥρας. Τότε εἰς τὰς ὥρας αὐτὰς πληροῦν ἡ πρώτη τὰ $\frac{\chi}{3}$ τῆς δεξαμενῆς, ἡ δευτέρα τὰ $\frac{\chi}{4}$ καὶ ἡ τρίτη τὰ $\frac{\chi}{6}$ τῆς δεξαμενῆς. Ὥστε πρέπει νὰ εἶναι $\frac{\chi}{3}+\frac{\chi}{4}+\frac{\chi}{6}=1$ καὶ ὁ χ θετικὸς ἀριθμός. Λύοντες εὑρίσκομεν $\chi=\frac{12}{9}=1\frac{1}{3}$ ὥρας.

223. ***Ὁμὰς τρίτη. (Κινήσεως)*** Ἔστω ὅτι ὁ δεύτερος διανύῃ χ χλμ. τὴν ἡμέραν. Ὁ πρῶτος εἰς 4 ἡμ + 8ἡμ = 12 ἡμ. θὰ διανύσῃ 60.12=720 χλμ. καὶ ὁ δεύτερος εἰς 8 ἡμ. θὰ διανύσῃ 8χ χλμ. Ὥστε εἶναι $8\chi=720$ καὶ $\chi=90$.

224. Ἔστω ὅτι θὰ συναντηθοῦν μετὰ χ ἡμέρας. Ὥστε θὰ εἶναι $50\chi+55\chi=575$ καὶ $\chi=5\frac{10}{21}$ ἡμ.

225. Ἔστω ὅτι τὸ δεύτερον θὰ συναντήσῃ τὸ πρῶτον μετὰ χδ. ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς του. Τότε τὸ πρῶτον σῶμα τὸ ὁποῖον ἐπὶ 3δ. εἶχε διανύσει $\frac{32.3}{4}=24$ μ. θὰ διανύσῃ ἐπὶ χδ ἄλλα $\frac{32\chi}{4}=8\chi$ μέτρα. Ἀλλὰ μετὰ τὰ χδ τὸ δεύτερον θὰ διανύσῃ $\frac{60\chi}{5}=12\chi$ μέτρα. Ἐπειδὴ δὲ τὰ διανυθέντα διαστήματα ὑπ' ἀμφοτέρων τῶν σωμάτων εἶναι ἴσα θὰ εἶναι $24+8\chi=12\chi$ καὶ $\chi=6$. Ὥστε τὸ δεύτερον σῶμα θὰ συναντήσῃ τὸ πρῶτον μετὰ 6δ καὶ εἰς ἀπόστασιν 72 μέτρων ἀπὸ τοῦ σημείου Α.

226. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος (βλ. πρόβλ. 223) εἶναι $30+30\chi=50\chi$ καὶ $\chi=1\frac{1}{2}$ ὥρας. Θὰ συναντηθοῦν δὲ εἰς ἀπόστασιν 75 χλμ. ἀπὸ τοῦ τόπου Α.

227. Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς προηγουμένας δύο ἀσκήσεις εὑρίσκομεν διὰ τὸ α) τὴν ἐξίσωσιν $36+12\chi=16\chi+12$ καὶ $\chi=6$ ὥρας· καὶ διὰ τὸ β) τὴν ἐξίσωσιν $36+12\chi=16\chi-50$ καὶ $\chi=21\frac{1}{2}$ ὧραι.

Ὥστε τὰ ζητούμενα εἶναι $6+3=9$ ὧραι καὶ $21\,^1/_2+3=24\,^1/_2$ ὧραι.

228. Ἔστω μετὰ χ ὥρας. Τότε ὁ πρῶτος ποδηλάτης εἰς χ+3 ὥρας θὰ διανύσῃ 12(χ+3) χλμ. καὶ ὁ δεύτερος εἰς 3 ὥρας θὰ διανύσῃ 16 . 3 χλμ. Ὥστε εἶναι $12(\chi+3)=16.3$ καὶ $\chi=1$. Ὥστε ὁ δεύτερος ποδηλάτης θ' ἀναχωρήσῃ ἐκ τοῦ τόπου Α τὴν 11ην πρωϊνήν.

229. Ἔστω ὅτι θὰ συναντηθοῦν μετὰ χδ. Τότε α') ἂν διευθύνωνται ἀντιθέτως θὰ ἔχουν διατρέξει ὁμοῦ, ὅταν θὰ συναντηθοῦν, ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν, ἤτοι 360^0. Ὥστε θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha\chi+\beta\chi=360$ καὶ $\chi=\frac{360}{\alpha+\beta}$.

β') Ἂν διευθύνωνται πρὸς τὴν αὐτὴν φοράν, ὅταν θὰ συναντηθοῦν, τὸ ταχύτερον κινητόν, δηλαδὴ τὸ κινητὸν τὸ διανῦον α^0 εἰς 1δ., θὰ ἔχῃ διατρέξῃ 360^0 ἐπὶ πλέον τοῦ ἄλλου. Ὥστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha\chi-\beta\chi=360$ καὶ $\chi=\frac{360}{\alpha-\beta}$, ἐὰν $\alpha\neq\beta$.

230. Ἔστω ὅτι θὰ συναντηθοῦν διὰ πρώτην φορὰν μετὰ χδ. Τότε τὸ πρῶτον κινητὸν θὰ διατρέξῃ τὰ $\frac{\chi}{\tau_1}$ τῆς περιφερείας καὶ τὸ δεύτερον τὰ $\frac{\chi}{\tau_2}$ αὐτῆς, εἶναι δὲ $\frac{\chi}{\tau_2}>\frac{\chi}{\tau_1}$. Ἐὰν δὲ τὰ κινητὰ κινοῦνται πρὸς τὴν αὐτὴν φορὰν ἔχομεν (ἄσκ. 227) τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\chi}{\tau_2}-\frac{\chi}{\tau_1}=1$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\chi=\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1-\tau_2}$, ἐὰν δὲ ταῦτα κινοῦνται κατὰ τὴν ἀντίθετον φορὰν ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\chi}{\tau_2}+\frac{\chi}{\tau_1}=1$, ἐξ ἧ εὑρίσκομεν $\chi=\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}$.

Διὰ 2αν φορὰν θὰ συναντηθοῦν τὰ κινητὰ μετὰ $2.\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1-\tau_2}$ καὶ $2.\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}$ ἀντιστοίχως ἀπὸ τῆς πρώτης ἀναχωρήσεως καὶ διὰ 3ην φορὰν θὰ συναντηθοῦν μετὰ $3.\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1-\tau_2}$ καὶ $3.\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}$ καὶ τὴν νυοστὴν φορὰν θὰ συναντηθοῦν μετὰ $\nu.\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1-\tau_2}$ καὶ $\nu.\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}$ δεύτερα λεπτά.

231. Ἐδῶ ἔχομεν τὸ προηγούμενον πρόβλημα εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς κινήσεως πρὸς τὴν αὐτὴν φοράν. Ἑπομένως ἐὰν τὸ χ παριστᾷ ὥρας, οἱ δεῖκται τῶν ὡρολογίων θὰ συμπέσουν μετὰ ὥρας $\chi=\frac{\chi_1\chi_2}{\tau_1-\tau_2}$, ὅπου $\tau_1=12\tau_2$ καὶ $\tau_2=1$ ὥρα, διότι ἡ ταχύτης τοῦ δείκτου τῶν πρώτων λεπτῶν εἶναι δωδεκαπλασία τῆς ταχύτητος τοῦ δείκτου τῶν ὡρῶν.

Ὥστε εἶναι $\chi=\frac{12\tau_2\cdot\tau_2}{12\tau_2-\tau_2}=\frac{12\tau_2}{12-1}=\frac{12}{11}$ ὥρας $=1$ ὥρ. $5\frac{5}{11}$ π.

Ἄλλος τρόπος λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς: Εἰς 1 ὥραν ὁ δείκτης τῶν πρώτων λεπτῶν διατρέχει 60 διαιρέσεις τῆς πλακὸς τοῦ ὡρολογίου καὶ ὁ δείκτης τῶν ὡρῶν διατρέχει 5 διαιρέσεις. Ἤδη ἔστω χ αἱ ὧραι μετὰ τὰς ὁποίας θὰ ἔχῃ γίνει ἡ πρώτη σύμπτωσις τῶν δεικτῶν. Ἀλλὰ τότε ὁ λεπτοδείκτης θὰ ἔχῃ διατρέξῃ 60 διαιρέσεις ἐπὶ πλέον τοῦ ὡροδείκτου. Ὥστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$60\chi-5\chi=60 \text{ καὶ } \chi=\frac{60}{55}=\frac{12}{11} \text{ ὥρας.}$$

232. Ὅταν ὁ ὡροδείκτης καὶ ὁ λεπτοδείκτης σχηματίζουν ὀρθὴν γωνίαν, μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχουν 15 διαιρέσεις. Ἤδη ἔστω ὅτι μετὰ μεσημβρίαν ὁ ὡροδείκτης ἔκαμε χ διαιρέσεις. Τότε ὁ λεπτοδείκτης ἔκαμε 12χ διαιρέσεις. Ἐπειδὴ δὲ οἱ δεῖκται σχηματίζουν διὰ πρώτην φορὰν ὀρθὴν γωνίαν ἔχομεν $12\chi - \chi = 15$, $11\chi = 15$ καὶ $\chi = \frac{15}{11}$ καὶ $12\chi = \frac{15.12}{11} = 16\frac{4}{11}$. Ἤτοι μετὰ $16\frac{4}{11}$ πρῶτα λεπτὰ σχηματίζουν οἱ δεῖκται ὀρθὴν γωνίαν διὰ πρώτην φοράν. Διὰ νὰ σχηματίσουν δὲ οἱ δεῖκται οὗτοι ὀρθὴν γωνίαν διὰ δευτέραν φοράν, πρέπει νὰ σχηματίσουν ἀπὸ τῆς μεσημβρίας κυρτὴν γωνίαν τριῶν ὀρθῶν. Τότε δὲ θὰ ἔχωμεν $12\chi - \chi = 45$, $\chi = \frac{45}{11}$ καὶ $12\chi = \frac{45.12}{11} = \frac{15.12}{11}.3 = 16\frac{4}{11}\cdot 3 = 49\frac{1}{11}$, ἤτοι μετὰ $49\frac{1}{11}$ πρῶτα λεπτὰ ἀπὸ τῆς μεσημβρίας θὰ σχηματίσουν οἱ δεῖκται οὗτοι ὀρθὴν γωνίαν διὰ δευτέραν φοράν.

Ὁμοίως διὰ νὰ σχηματίσουν ὁ ὡροδείκτης καὶ ὁ λεπτοδείκτης ὀρθὴν γωνίαν διὰ τρίτην φοράν, πρέπει νὰ σχηματίσουν ἀπὸ τῆς μεσημβρίας κυρτὴν γωνίαν πέντε ὀρθῶν. Τότε δὲ θὰ ἔχωμεν $12\chi - \chi = 75$, $\chi = \frac{75}{11}$ καὶ $12\chi = \frac{75.12}{11} = \frac{15.12}{11}.5 = 16\frac{4}{11}.5 = 81\frac{9}{11}$. Ὥστε μετὰ 1 ὥρ 21 $\frac{9}{11}$ π. θὰ σχηματίσουν ἀπὸ τῆς μεσημβρίας οἱ δεῖκται οὗτοι ὀρθὴν γωνίαν διὰ τρίτην φοράν. Ἐξακολουθοῦντες οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι διὰ νυοστὴν φορὰν θὰ σχηματίσουν ὀρθὴν γωνίαν μετὰ $16\frac{4}{11}\cdot(2\nu-1)$ πρῶτα λεπτὰ ἀπὸ τῆς μεσημβρίας.

231. Διὰ νὰ σχηματίσουν ὁ ὡροδείκτης καὶ ὁ λεπτοδείκτης γωνίαν α^0 πρέπει νὰ ὑπάρχουν μεταξὺ αὐτῶν $\frac{\alpha\cdot 60}{360} = \frac{\alpha}{6}$ διαιρέσεις.

Κατόπιν τούτων τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ προηγούμενον. Οὕτω θὰ ἔχωμεν:

διὰ 1ην φορὰν $12\chi - \chi = \frac{\alpha}{6}$, $\chi = \frac{\alpha}{66}$ καὶ $12\chi = \frac{\alpha\cdot 12}{66} = \frac{2\alpha}{11}$

διὰ 2αν φορὰν $12\chi - \chi = \frac{360-\alpha}{6}$, $\chi = \frac{360-\alpha}{66}$ καὶ $12\chi = \frac{(360-\alpha)12}{66} = \frac{2(360-\alpha)}{11}$.

232. Ἔστω ὅτι ὁ ὡροδείκτης διέτρεξε τὸ τόξον ΑΒ καὶ ὁ λεπτοδείκτης διέτρεξε τὸ τόξον ΑΓ. Ἐὰν δὲ Δ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΒΓ, ὁ δείκτης τῶν δευτερολέπτων θὰ γράψῃ ὁλόκληρον τὴν πλάκα, ἤτοι 60 διαιρέσεις καὶ τὸ τόξον ΑΔ. Ἀλλ' εἶναι:

$$\widehat{A\Delta} = \widehat{AB} + \frac{\widehat{B\Gamma}}{2} = \frac{2\cdot\widehat{AB} + \widehat{B\Gamma}}{2} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{AB} + \widehat{B\Gamma}}{2} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{A\Gamma}}{2}.$$

Ἤδη ἔστω ὅτι ὁ ὡροδείκτης ἔκαμε χ διαιρέσεις μετὰ μεσημβρίαν. Τότε ὁ λεπτοδείκτης ἔκαμε 12χ διαιρέσεις καὶ ὁ δείκτης τῶν δευτερολέπτων ἔκαμε

720χ διαιρέσεις. Οὕτως ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν: $720\chi = 60 + \frac{\chi + 12\chi}{2}$. καὶ $\chi = \frac{120}{1427}$. Ὥστε ὁ δείκτης τῶν δευτερολέπτων θὰ διχοτομήσῃ τὴν γωνίαν μετὰ $60 + \frac{13}{2} \cdot \frac{120}{1427} = 60\frac{780}{1427}$ δεύτερα λεπτὰ ἀπὸ τῆς μεσημβρίας.

233. Ἔστω ὅτι μετὰ χ πηδήματα θὰ φθάσῃ ὁ κύων τὴν ἀλώπεκα. Ἀλλ' ἀφοῦ ὅταν ὁ κύων κάμνῃ 6 πηδήματα ἡ ἀλώπηξ κάμνει 9, ὅταν ὁ κύων κάμνῃ χ πηδήματα, ἡ ἀλώπηξ θὰ προχωρήσῃ κατὰ $\frac{9\chi}{6} = \frac{3\chi}{2}$ πηδήματα. Ὥστε ἡ ἀπόστασις τῶν χ πηδημάτων τοῦ κυνὸς ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπόστασιν τῶν $60 + \frac{3\chi}{2}$ πηδημάτων τῆς ἀλώπεκος. Ἀλλὰ 7 πηδήματα τῆς ἀλώπεκος ἰσοδυναμοῦν μὲ 3 πηδήματα τοῦ κυνός. Ἑπομένως τὰ $60 + \frac{3\chi}{2}$ πηδήματα τῆς ἀλώπεκος ἰσοδυναμοῦν μὲ $3 \cdot \left(60 + \frac{3\chi}{2}\right) : 7 = \frac{180}{7} + \frac{9\chi}{14}$ πηδήματα τοῦ κυνός. Ἐπομένος ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι:

$$\chi = \frac{180}{7} + \frac{9\chi}{14} \text{ καὶ } \chi = 72.$$

Περὶ συναρτήσεων.

Ἀσκήσεις. *236.* Ὁ χρόνος καθ' ὃν περατοῦται ἓν ἔργον εἶναι συνάρτησις τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργατῶν, ὅταν τὸ ποσὸν ἐργασίας ἑκάστου εἶναι σταθερόν. Ἡ ἀμοιβὴ τῆς ἐργασίας ἐργάτου, ὅστις πληρώνεται μὲ τὴν ὥραν, εἶναι συνάρτησις τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὡρῶν ἐργασίας. Ἡ ἀξία ὡρισμένου ὑφάσματος εἶναι συνάρτησις τοῦ μήκους αὐτοῦ.

237. Ὁ χρόνος καθ' ὃν κινητόν τι διανύει ὡρισμένον διάστημα εἶναι συνάρτησις τῆς ταχύτητος αὐτοῦ.

Τὸ διάστημα ὡς καὶ ἡ ταχύτης σωμάτων πιπτόντων ἐλευθέρως ἐν τῷ κενῷ εἶναι συνάρτησις τοῦ χρόνου τῆς πτώσεως.

Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου εἶναι συνάρτησις τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.

Τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, οὗ τὸ ὕψος εἶναι σταθερόν, εἶναι συνάρτησις τῆς βάσεως αὐτοῦ. Εἶναι δὲ τοῦτο συνάρτησις τοῦ ὕψους, ὅταν ἡ βάσις του εἶναι σταθερά. Ὅταν δὲ ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος εἶναι μεταβλητά, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εἶναι συνάρτησις τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους αὐτοῦ

238. Διὰ $\chi=1$, $\psi=$α') $3 \cdot 1+6=9$	β') $8 \cdot 1-25=-17$	γ') 1	δ') -1
» $\chi=2$, $\psi=$α') $3 \cdot 2+6=12$	β') $8 \cdot 2-25=-9$	γ') 2	δ') -2
» $\chi=3$, $\psi=$α') $3 \cdot 3+6=15$	β') $8 \cdot 3-25=-1$	γ') 3	δ') -3
» $\chi=4$, $\psi=$α') $3 \cdot 4+6=18$	β') $8 \cdot 4-25=7$	γ') 4	δ') -4
» $\chi=5$, $\psi=$α') $3 \cdot 5+6=21$	β') $8 \cdot 5-25=15$	γ') 5	δ') -5

Διὰ $\chi=-1$, $\psi=$α′) $3\cdot(-1)+6=3$ β′) $8\cdot(-1)-25=-33$ γ′) -1 δ′) 1

» $\chi=-2$, $\psi=$α′) $3\cdot(-2)+6=0$ β′) $8\cdot(-2)-25=-41$ γ′) -2 δ′) 2

» $\chi=-3$, $\psi=$α′) $3\cdot(-3)+6=-3$ β′) $8\cdot(-3)-25=-49$ γ′) -3 δ′) 3

» $\chi=-\frac{1}{4}$, $\psi=$α′) $3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+6=\frac{21}{4}$ β′) $8\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)-25=-27$

γ′) $-\frac{1}{4}$ δ′) $\frac{1}{4}$.

239. Διὰ $\chi=1$, $\psi=$ α′) $\frac{3}{4}\cdot 1-62=-\frac{245}{4}$ β′) $\frac{1^2}{2}-3\cdot 1-7=$

$=-9\frac{1}{2}=-\frac{19}{2}$

Διὰ $\chi=2$, $\psi=$ α′) $\frac{3}{4}\cdot 2-62=-\frac{121}{2}$ β′) $\frac{2^2}{2}-3\cdot 2-7=-11$

» $\chi=3$, $\psi=$ α′) $\frac{3}{4}\cdot 3-62=-\frac{239}{4}$ β′) $\frac{3^2}{2}-3\cdot 3-7=-\frac{23}{2}$

» $\chi=4$, $\psi=$ α′) $\frac{3}{4}\cdot 4-62=-59$ β′) $\frac{4^2}{2}-3\cdot 4-7=-11$

» $\chi=5$, $\psi=$ α′) $\frac{3}{4}\cdot 5-62=-\frac{233}{4}$ β′) $\frac{5^2}{2}-3\cdot 5-7=-\frac{19}{2}$

Διὰ $\chi=-1$, $\psi=$ α′) $\frac{3}{4}\cdot(-1)-62=-\frac{251}{4}$ β′) $\frac{(-1)^2}{2}-3\cdot(-1)-7=-\frac{7}{2}$

» $\chi=-2$, $\psi=$ α′) $\frac{3}{4}\cdot(-2)-62=-\frac{127}{2}$ β′) $\frac{(-2)^2}{2}-3\cdot(-2)-7=1$

» $\chi=-3$, $\psi=$ α′) $\frac{3}{4}\cdot(-3)-62=-\frac{257}{4}$ β′) $\frac{(-3)^2}{2}-3\cdot(-3)-7=\frac{13}{2}$

» $\chi=-\frac{1}{4}$, $\psi=$ α′) $\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)-62=-\frac{995}{16}$ β′) $\left(-\frac{1}{4}\right)^2\cdot 2-3\cdot$

$\left(-\frac{1}{4}\right)-7=-\frac{199}{32}$.

240. Διὰ $\chi=1$, $\psi=$ α′) $\frac{4}{19}\cdot 1^2+\frac{3}{8}\cdot 1+9=\frac{1457}{152}$

β′) $600-35\cdot 1^2+\frac{13}{15}\cdot 1=\frac{8488}{15}$

» $\chi=2$, $\psi=$ α′) $\frac{4}{19}\cdot 4+\frac{3}{8}\cdot 2+9=\frac{1610}{152}$

β′) $600-35\cdot 4+\frac{13}{15}\cdot 2=\frac{6926}{15}$

» $\chi=3$, $\psi=$ α′) $\frac{4}{19}\cdot 9+\frac{3}{8}\cdot 3+9=\frac{1727}{152}$

β′) $600-35\cdot 9+\frac{13}{15}\cdot 3=\frac{1438}{5}$

Διὰ $\chi=4$, $\psi=$ α') $\frac{4}{19}\cdot 16+\frac{3}{8}\cdot 4+9=\frac{2108}{152}$

β') $600-35\cdot 16+\frac{13}{15}\cdot 4=\frac{652}{15}$

» $\chi=5$, $\psi=$ α') $\frac{4}{19}\cdot 25+\frac{3}{8}\cdot 5+9=\frac{2453}{152}$

β') $600-35\cdot 25+\frac{13}{15}\cdot 5=-\frac{812}{3}$

» $\chi=-1$, $\psi=$ α') $\frac{4}{19}\cdot(-1)^2+\frac{3}{8}\cdot(-1)+9=\frac{1343}{152}$

β') $600-35\cdot(-1)^2+\frac{13}{15}\cdot(-1)=\frac{8462}{15}$

» $\chi=-2$, $\psi=$ α') $\frac{4}{19}\cdot 4-\frac{3}{8}\cdot 2+9=\frac{1382}{152}$

β') $600-35\cdot 4-\frac{13}{15}\cdot 2=\frac{6874}{15}$

» $\chi=-3$, $\psi=$ α') $\frac{4}{19}\cdot 9-\frac{3}{8}\cdot 3+9=\frac{1485}{15}$

β') $600-35\cdot 9-\frac{13}{15}\cdot 3=\frac{1412}{5}$

» $\chi=-\frac{1}{4}$, $\psi=$ α') $\frac{4}{19}\cdot\frac{1}{16}-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}+9=\frac{5423}{608}$

β') $600-35\cdot\frac{1}{16}-\frac{13}{15}\cdot\frac{1}{4}=\frac{143323}{240}$

241. α') Τῆς συναρτήσεως $\psi=\chi+2$, τὰ ζεύγη εἶναι $\chi=0$, $\psi=2$· $\chi=1$, $\psi=3$· $\chi=2$, $\psi=4$· $\chi=-1$, $\psi=1$· $\chi=-2$, $\psi=0$. Οὕτως ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων Οχ, Οψ θὰ σημειωθοῦν τὰ σημεῖα (0, 2), (1, 3), (2, 4), (—1, 1), (—2, 0).

β') Εἰς τὴν $\psi=\frac{1}{2}\chi+1$ τὰ ζεύγη εἶναι, $\chi=0$, $\psi=1$· $\chi=1$, $\psi=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$ $\chi=2$, $\psi=2$· $\chi=-1$, $\psi=\frac{1}{2}$, $\chi=-2$, $\psi=0$ καὶ τὰ σημεῖα εἶναι (0 1), (1, 3/2), (2, 2), (—1, 1/2), (—2, 0).

γ') Τῆς $\psi=3\chi/4-2$, τὰ ζεύγη εἶναι $\chi=0$, $\psi=-2$· $\chi=1$, $\psi=-1^1/_4$, $\chi=2$, $\psi=-1/2$· $\chi=-1$, $\psi=-2^3/_4$· $\chi=-2$, $\psi=-3^1/_2$ καὶ τὰ σημεῖα εἶναι (0,—2), (1,—$1^1/_4$), (2,—1/2), (—1,—$2^3/_4$), (—2,—$3^1/_2$).

242. Τῆς συναρτήσεως $\psi=3\chi/4-2\chi^2/_5$, τὰ ζεύγη εἶναι $\chi=0$, $\psi=0$· $\chi=1$, $\psi=3/4-2/5=7/20$· $\chi=2$, $\psi=6/4-8/5=-1/10$· $\chi=3$, $\psi=9/4-18/5=$ $=-27/20$· $\chi=4$, $\psi=12/4-3^2/_5=-17/5$ καὶ τὰ σημεῖα εἶναι (0, 0) (1, 7/20) κλπ.

243. α') Τῆς $\psi={}^1/_2\chi^2-\chi^5$ τὰ ζεύγη εἶναι $\chi=0$, $\psi=0$· $\chi=-1$, $\psi=$ $=1/2-(-1)=3/2$· $\chi=-2$, $\psi=34$· $\chi=2{,}1$ καὶ $\psi=-38{,}636$· $\chi=5{,}2$ καὶ $\psi=$ $=-3788{,}52$. Τὰ σημεῖα δὲ εἶναι (0, 0), (—1, 3/2) κλπ.

β') Τῆς $\psi=-{}^3/_4\chi^2+5=-0{,}75\chi^2+5$, τὰ ζεύγη εἶναι $\chi=0$, $\psi=5$· $\chi=-1$,

$\psi=4^1/_4$· $\chi=-2$, $\psi=2$· $\chi=2{,}1$ καὶ $\psi=1{,}69$· $\chi=5{,}2$ καὶ $\psi=-15{,}28$. Τὰ δὲ σημεῖα εἶναι (0, 5), $(-1, 4^1/_4)$ κλπ.

244 .καὶ **245**. Θὰ ἐργασθῶμεν ὡς εἰς τὴν § 124.

Γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $\psi=\alpha\chi+\beta$.

246. α΄) Διὰ $\chi=0$ εἶναι $\psi=0$ καὶ διὰ $\chi=1$, $\psi=3$. Ἡ ζητουμένη λοιπὸν εὐθεῖα διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς Ο καὶ διὰ τοῦ σημείου Μ (1,3).

β΄) Διὰ $\chi=0$ εἶναι $\psi=3$ καὶ διὰ $\psi=0$, $\chi=-3$. Ὥστε ἡ ζ. εὐθεῖα τέμνει τοὺς ἄξονας καὶ διέρχεται διὰ τῶν σημείων των Μ(0,3) καὶ $M_1(-3,0)$.

γ΄) Διὰ $\chi=0$ εἶναι $\psi=0$ καὶ διὰ $\chi=1$, $\psi=0{,}5$. Ὥστε ἡ ζ. εὐθεῖα διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς καὶ διὰ τοῦ σημείου Μ(1·0,5).

247. α΄) Διὰ $\chi=0$ εἶναι $\psi=-\frac{2}{3}$ καὶ διὰ $\psi=0$, $\chi=\frac{2}{3}$. Ὥστε ἡ ζ. εὐθεῖα τέμνει τοὺς ἄξονας εἰς τὰ σημεῖα Μ(0,—2/3) καὶ $M_1(2/3,0)$.

β΄) Εἶναι $\psi=-\chi/2$. Ὥστε ἡ ζ. εὐθεῖα διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς (0,0) καὶ διὰ τοῦ σημείου Μ(1,—1/2).

γ΄) Διὰ $\chi=0$ εἶναι $\psi=-1/8$ καὶ διὰ $\psi=0$, $\chi=-3/20$. Ὥστε ἡ ζ. εὐθεῖα τέμνει τοὺς ἄξονας εἰς τὰ σημεῖα Μ(0,—1/8) καὶ $M_1(-3/20,0)$.

248. α΄) Εἶναι εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν χ, διερχομένη διὰ τοῦ σημείου Μ(0,—3/2) τοῦ ἄξονος τῶν ψ.

β΄) Τέμνει τοὺς ἄξονας εἰς τὰ σημεῖα Μ(0,5) καὶ $M_1(5/2,0)$.

γ΄) Τέμνει τοὺς ἄξονας εἰς τὰ σημεῖα $M(0,2^1/_2)$ καὶ $M_1(-5,0)$.

Περὶ ἀνισοτήτων α΄ βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.

Ἀσκήσεις. 249. α΄) $-9\chi>5$, $9\chi<-5$ καὶ $\chi<-5/9$.

β΄) $-4\chi>9$, $4\chi<-9$ καὶ $\chi<-9/4$.

γ΄) $0{,}5\chi>-5$ καὶ $\chi>-5:0{,}5$, ἤτοι $\chi>-10$.

δ΄) $-9\chi<18$, $9\chi>-18$ καὶ $\chi>-2$. ε΄) $9\chi>-7$ καὶ $\chi>-7/9$.

στ΄) $-7\chi>48$, $7\chi<-48$ καὶ $\chi<-6^6/_7$.

ζ΄) $0{,}6\chi-5>0{,}25\chi-0{,}25$, $0{,}6\chi-0{,}25\chi>5-0{,}25$.

$0{,}35\chi>4{,}75$ καὶ $\chi>\frac{475}{35}$, ἤτοι $\chi>13^4/_7$.

η΄) $\chi<3^5/_9$, ϑ΄) $-2\chi>0$ καὶ $\chi<0$.

ι΄) Ἵνα τὸ κλάσμα τοῦτο εἶναι θετικὸν πρέπει οἱ ὅροι του νὰ εἶναι ὁμόσημοι, ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι ἢ $\chi-3>0$ καὶ $\chi-4>0$ ἢ $\chi-3<0$ καὶ $\chi-4<0$. Θὰ εἶναι δὲ οἱ ὅροι του ἀμφότεροι θετικοὶ ἐὰν $\chi>4$ καὶ ἀμφότεροι οἱ ὅροι θὰ εἶναι ἀρνητικοί, ἐὰν $\chi<3$.

ια΄) Ἔχομεν $\chi^2+2\chi+1<\chi^2+3\chi-5$ καὶ $\chi>6$.

250. Ἡ πρώτη ἀνισότης ἐπαληθεύεται διὰ $\chi<\frac{1}{2}$ καὶ ἡ δευτέρα διὰ

$\chi > -3$. Ὥστε οἱ ζητούμενοι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ οἱ μεγαλύτεροι τοῦ -3 καὶ μικρότεροι τοῦ $1/2$, εἶναι οἱ $-2, -1, 0$.

251. Φέρομεν τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΑΒ, καὶ θεωροῦμεν τὴν ΑΒ καὶ τὴν ἀχθεῖσαν κάθετον ὡς ἄξονας συντεταγμένων. Οὕτως αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων Α καὶ Β εἶναι $A(\gamma,0)$ καὶ $B(-\gamma,0)$. Ἐὰν δὲ αἱ συντεταγμέναι τοῦ Μ εἶναι αἱ χ καὶ ψ, ἔχομεν $(AM)=\sqrt{(\chi-\gamma)^2+\psi^2}$ καὶ $(BM)=\sqrt{(\chi+\gamma)^2+\psi^2}$. Οὕτως ἐὰν τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον, ἤτοι ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ψ, θὰ εἶναι $M(0,\psi)$ ὁπότε $(BM)=(AM)=\sqrt{\gamma^2+\psi^2}=$ $=\sqrt{\gamma^2+\alpha^2-\gamma^2}=\alpha$. Ἐὰν δὲ τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΒ θὰ εἶναι $M(\chi,0)$. Ὥστε τότε τὸ ΑΜ θὰ λάβῃ τὴν ἐλαχίστην τιμὴν $\alpha-\gamma$, τὸ δὲ ΒΜ τὴν μεγίστην τιμὴν $\alpha+\gamma$.

252. Ἔστω ὅτι αἱ ταχύτητες εἶναι εἰς ὥρας καὶ ὅτι $\tau_1<\tau'_1$ καὶ $\tau_2<\tau'_2$. Ἤδη ἔστω ὅτι τὰ δύο κινητά, κινούμενα μὲ τὰς μικροτέρας ταχύτητας, συναντῶνται μετὰ χ ὥρας. Θὰ ἔχωμεν δὲ τότε τὴν ἐξίσωσιν $\tau_1\chi+\tau_2\chi=\alpha$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\chi=\frac{\alpha}{\tau_1+\tau_2}$, ὁπότε ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου τῆς συναντήσεώς των ἀπὸ τοῦ Α θὰ εἶναι $\frac{\alpha\tau_1}{\tau_1+\tau_2}$. Ἤδη ἔστω ὅτι τὰ δύο κινητά, κινούμενα μὲ τὰς μεγαλυτέρας ταχύτητας, συναντῶνται μετὰ χ_1 ὥρας. Τότε θὰ ἔχωμεν $\tau'_1\chi_1+\tau'_2\chi_1=\alpha$ καὶ $\chi_1=\frac{\alpha}{\tau'_1+\tau'_2}$, ἡ δὲ ἀπόστασις τοῦ σημείου τῆς συναντήσεώς των ἀπὸ τοῦ Α θὰ εἶναι $\frac{\alpha\tau'_1}{\tau'_1+\tau'_2}$. Ὥστε θὰ συναντηθοῦν μεταξὺ τῶν χρόνων $\frac{\alpha}{\tau_1+\tau_2}$ καὶ $\frac{\alpha}{\tau'_1+\tau'_2}$ καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Α μεταξὺ τῶν ἄνω εὑρεθεισῶν.

253. α′) Ἔστω ἡ ἰσότης $A=B$ καὶ ἡ ἀνισότης $\alpha>\beta$, ἐξ ἧς $\alpha-\beta>0$. Τότε ἐὰν $\alpha-\beta=\delta$, θὰ εἶναι $\alpha=\beta+\delta$. Ἐὰν δὲ τὰ μέλη τῆς τελευταίας αὐτῆς ἰσότητος τὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὰ μέλη τῆς $A=B$ εὑρίσκομεν $A-\alpha=B-\beta-\delta$. Ἑπομένως εἶναι φανερὸν ὅτι εἶναι $A-\alpha<B-\beta$.

β′) Ἐπειδὴ εἶναι $(\alpha-\beta)^2>0$, ἕπεται ὅτι $\alpha^2+\beta^2>2\alpha\beta$. Ὥστε, διαιροῦντες τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος αὐτῆς διὰ τοῦ θετικοῦ $\alpha\beta$, ἔχομεν: $\frac{\alpha^2}{\alpha\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha\beta}>2$, ἤτοι $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}>2$.

254. Ἔστω $A=B$ καὶ $\alpha>\beta$, ὅπου α καὶ β ἔχουν τὸ αὐτὸ πρόσημον. Τότε εἶναι $\alpha=\beta+\delta$ καὶ $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta+\delta}$. Ἀλλὰ τότε εἶναι $\frac{A}{\alpha}<\frac{B}{\beta}$. Π. χ. $20=20$ καὶ $5>4$· τότε εἶναι $\frac{20}{5}<\frac{20}{4}$, ἤτοι $4<5$· ἐὰν δὲ ἔχωμεν $-4>-5$, θὰ εἶναι $\frac{20}{-4}<\frac{20}{-5}$, ἤτοι $-5<-4$. Ἐνῷ ἐὰν ἔχωμεν $-5<4$, θὰ ἔχωμεν $\frac{20}{-5}<\frac{20}{4}$, ἤτοι $-4<5$.

255. 1) Ἂν $\beta\mu+\alpha k>0$, θὰ εἶναι α΄) $\alpha^2-\beta^2<0$, ἐὰν $(\alpha^2-\beta^2)(\beta\mu+\alpha k)<0$ καὶ β΄) $\alpha^2-\beta^2>0$ εἰς τὴν ἐναντίαν περίπτωσιν.

Ὥστε ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ἐπὶ $\alpha^2-\beta^2$ θὰ ἔχωμεν:

α΄) $(\alpha-\beta)(\mu\chi+\nu)-(\alpha+\beta)(k\chi-\lambda)>(\alpha+\beta)(\mu\chi-\nu)+(\alpha-\beta)(k\chi-\lambda)$, ἤτοι

$2\alpha(\nu+\lambda)>2\chi(\beta\mu+\alpha k)$ καὶ $\chi<\dfrac{\alpha(\nu+\lambda)}{\alpha k+\beta\mu}$.

β΄) Ἐὰν $\alpha^2-\beta^2>0$ θὰ εὕρωμεν $\chi>\dfrac{\alpha(\nu+\lambda)}{\alpha k+\beta\mu}$.

2) Ἂν $\beta\mu+\alpha k<0$, θὰ εὕρωμεν διὰ τὴν περίπτωσιν α΄ τὴν προηγουμένην τιμὴν τῆς β΄ καὶ διὰ τὴν περίπτωσιν β΄ θὰ εὕρωμεν τὴν προηγουμένην τιμὴν τῆς α΄.

256. α΄) Ἐπειδὴ (ἄσκ. 251,β΄) $(\alpha-\beta)^2>0$, $(\beta-\gamma)^2>0$ καὶ $(\gamma-\alpha)^2>0$, εἶναι $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha^2)>0$, ἤτοι:

$2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)>0$ ἢ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$.

β΄) Ἐὰν $\alpha>\beta>\gamma$ εἶναι $\alpha-\beta<\gamma$, $\beta-\gamma<\alpha$ καὶ $\alpha-\gamma<\beta$. Ἀλλὰ τότε εἶναι $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\alpha-\gamma)^2<\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ ἤτοι:

$2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)<\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ καὶ

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2<2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Λύσις συστήματος δύο ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους.— 1) Διατάσσομεν τὰς ἐξισώσεις εἰς τρόπον ὥστε οἱ ὅμοιοι ὅροι νὰ εὑρίσκωνται ὁ εἷς κάτωθεν τοῦ ἄλλου.

2) Ἐκλέγομεν τὸν ἀπαλειπτέον ἄγνωστον.

3) Καθιστῶμεν κοινὸν συντελεστὴν τοῦ ἀπαλειπτέου ἀγνώστου εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις τὸ ε.κ.π. τῶν συντελεστῶν αὐτοῦ εἰς αὐτὰς καὶ πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα ἑκάστην τῶν ἐξισώσεων ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ ε.κ.π. διαιρεθέντος διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἀγνώστου ἐν τῇ αὐτῇ ἐξισώσει.

4) Ἂν ὁ προκύπτων κοινὸς συντελεστὴς τοῦ ἀπαλειπτέου ἀγνώστου ἔχῃ ἀντίθετα πρόσημα εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις, προσθέτομεν αὐτὰς κατὰ μέλη, ὅτε ὁ ἄγνωστος ἀπαλείφεται· ἂν δὲ ἔχῃ τὸ αὐτὸ πρόσημον εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις, ἀλλάσσομεν τὰ πρόσημα πάντων τῶν ὅρων τῆς μιᾶς τῶν ἐξισώσεων καὶ ἔπειτα προσθέτομεν.

5) Λύομεν τὴν προκύπτουσαν ἐξίσωσιν καὶ εὑρίσκομεν οὕτω τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου ἐν αὐτῇ.

6) Ἀντικαθιστῶμεν τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν εἰς μίαν τῶν ἀρχικῶν ἐξισώσεων καὶ εὑρίσκομεν οὕτω τὴν τιμὴν τοῦ δευτέρου ἀγνώστου.

7) Ἐπαληθεύομεν τὸ δοθὲν σύστημα, ἀντικαθιστῶντες τοὺς ἀγνώστους διὰ τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν.

Μέθοδος τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν.

Ἀσκήσεις. 257.

α')
$$\begin{array}{l} 3\chi+4\psi=10 \\ 4\chi+\psi=9 \end{array} \;\; \text{ἐπὶ} \;\; \begin{array}{r} -1)\;-3\chi-4\psi=-10 \\ 4)\;16\chi+4\psi=\;\;36 \\ \hline 13\chi\;\;=\;\;26 \end{array} \;\Bigg|\; \begin{array}{l} \chi=26:13=2 \text{ καὶ} \\ 4\cdot 2+\psi=9 \text{ ἢ } \psi=1 \end{array}$$

Ἐπαλήθευσις. $3\cdot 2+4\cdot 1=6+4=10$ καὶ $4\cdot 2+1=9$.

β')
$$\begin{array}{l} \frac{\chi}{6}\cdot 12+\frac{\psi}{4}\cdot 12=6\cdot 12 \\ \frac{\chi}{4}\cdot 12+\frac{\psi}{6}\cdot 12=\frac{17}{3}\cdot 12 \end{array} \;\Bigg|\; \begin{array}{l} 2\chi+3\psi=72 \\ 3\chi+2\psi=68 \end{array} \;\; \text{ἐπὶ} \;\; \begin{array}{r} -2)\;-4\chi-6\psi=-144 \\ 3)\;9\chi+6\psi=\;\;204 \\ \hline 5\chi=60 \end{array} \;\Bigg|\; \begin{array}{l} \chi=60:5=12 \text{ καὶ} \\ \frac{12}{6}+\frac{\psi}{4}=6 \text{ ἢ} \\ \psi=16 \end{array}$$

Ἐπαλήθευσις. $\frac{12}{6}+\frac{16}{4}=6$ καὶ $\frac{12}{4}+\frac{16}{6}=\frac{17}{3}$.

γ')
$$\begin{array}{l} 7\chi-13\psi=0 \\ 6\chi-10\psi=8 \end{array} \;\; \text{ἐπὶ} \;\; \begin{array}{r} -6)\;-42\chi+78\psi=0 \\ 7)\;42\chi-70\psi=56 \end{array} \;\Bigg|\; \begin{array}{l} 8\psi=56,\; \psi=7 \\ \text{καὶ}\quad \chi=13 \end{array}$$

258. α')
$$\begin{array}{l} \text{ἐπὶ } -(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \\ \qquad 3 \end{array} \;\Bigg|\; \begin{array}{l} -2(\sqrt{3}-\sqrt{2})\chi-3(\sqrt{3}-\sqrt{2})\psi=-(\sqrt{3}-\sqrt{2})(5\sqrt{3}+\sqrt{2}) \\ 3(\sqrt{3}+\sqrt{2})\chi+3(\sqrt{3}-\sqrt{2})\psi=6 \\ \hline (\sqrt{3}+5\sqrt{2})\chi=-7+4\sqrt{6}. \end{array}$$

Ὅθεν

$$\chi=\frac{-7+4\sqrt{6}}{\sqrt{3}+5\sqrt{2}}=\frac{(-7+4\sqrt{6})(\sqrt{3}-5\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+5\sqrt{2})(\sqrt{3}-5\sqrt{2})}=\sqrt{3}-\sqrt{2},\quad \psi=\frac{13+6\sqrt{6}}{\sqrt{3}+5\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

β') Διαιροῦντες τὰ μέλη τῆς πρώτης διὰ 3,6 εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον αὐτῆς, $2\chi+\psi=15$. Οὕτως ἔχομεν τὸ σύστημα:

$$\begin{array}{l} 2\chi+\psi=15 \\ 2{,}3\chi+5{,}9\psi=22 \end{array} \;\; \text{ἐπὶ} \;\; \begin{array}{r} 5{,}9)\;11{,}8\chi+5{,}9\psi=88{,}5 \\ -1)\;-2{,}3\chi-5{,}9\psi=-22 \\ \hline 9{,}5\chi=66{,}5 \end{array} \;\Bigg|\; \begin{array}{l} \chi=7 \quad \text{καὶ} \\ \psi=15-2\cdot 7=1 \end{array}$$

259 α') Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$$\begin{array}{l} 4\chi+\psi=-8 \\ 2\chi-3\psi=-9 \end{array} \;\; \text{ἐπὶ} \;\; \begin{array}{r} 3)\;12\chi+3\psi=-24 \\ 1)\;2\chi-3\psi=-\;\,9 \end{array} \;\Bigg|\; \begin{array}{l} 14\chi=-33,\; \chi=-33/14 \text{ καὶ} \\ \psi=-8+4\cdot 33/14=10/7. \end{array}$$

β') Τὸ δοθὲν σύστημα ἀνάγεται εἰς τὸ $1{,}7\chi-3{,}7\psi=3{,}9$ καὶ $2{,}7\chi-4{,}3\psi=1{,}8$, ἐξ οὗ εὑρίσκομεν $\chi=-1011/268$ καὶ $\psi=-747/268$.

260.
$$\begin{array}{r} \alpha^2\chi+\alpha\beta\psi=\alpha^4+2\alpha^3\beta+\alpha\beta^3 \\ -\beta^2\chi-\alpha\beta\psi=-\alpha^3\beta-2\alpha^2\beta^2+\beta^4 \\ \hline (\alpha^2-\beta^2)\chi=\alpha^4+\alpha^3\beta-2\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+\beta^4 \end{array} \;\Bigg|\; \begin{array}{l} \chi=\frac{\alpha^4+\alpha^3\beta-2\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+\beta^4}{\alpha^2-\beta^2} \text{ καὶ} \\ \psi=\frac{\alpha^4+\alpha^3\beta-2\alpha^2\beta^2-\alpha\beta^3-\beta^4}{\alpha^2-\beta^2} \end{array}$$

261. Ἔχομεν τὸ σύστημα $\chi/3+\psi/4=0$ καὶ $3\chi-7\psi-37=0$, ἐξ οὗ

$$\begin{array}{ll|l} 4\chi+3\psi=0 \quad \text{ἐπὶ} & 7) \; 28\chi+21\psi=0 & \chi=111:37=3 \text{ καὶ} \\ 3\chi-7\psi=37 & 3) \; \underline{9\chi-21\psi=111} & \psi=-4. \\ & \quad 37\chi \qquad =111 & \end{array}$$

262. Ἔχομεν τὸ σύστημα $\frac{\chi+3}{5}=\frac{8-\psi}{4}$, $\frac{\chi+3}{5}=\frac{3(\chi+\psi)}{8}$, ἐξ οὗ εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμόν του $4\chi+5\psi=28$ καὶ $7\chi+15\psi=24$ καὶ τοῦ ὁποίου αἱ λύσεις εἶναι $\chi=12$, $\psi=-4$.

263. Τὸ δοθὲν σύστημα ἀνάγεται εἰς τὸ $4{,}2\chi+6{,}1\psi=163{,}968$, $19{,}5\chi+$ $+12\psi=455$ ἐξ οὗ εὑρίσκομεν $\chi=80788{,}4:68{,}55$ καὶ $\psi=1286{,}376:68{,}55$.

264. α) $\alpha^2\chi+\alpha\beta\psi=\alpha^3+2\alpha^2\beta-\alpha\beta^2$

ἐπὶ β) $-\beta^2\chi-\alpha\beta\psi=-\alpha^2\beta-\beta^3$

$$(\alpha^2-\beta^2)\chi=\alpha^3+\alpha^2\beta-\alpha\beta^2-\beta^3=\alpha^3-\beta^3+\alpha^2\beta-\alpha\beta^2=$$
$$=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+\alpha\beta(\alpha-\beta)=(\alpha-\beta)(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)^2$$

Ὅθεν $\quad \chi=\frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)^2}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}=\alpha+\beta$. Κατόπιν δὲ εὑρίσκομεν $\psi=\alpha-\beta$.

265. Προσθέτοντες τὰς ἐξισώσεις τοῦ δοθέντος συστήματος κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν $2\alpha\chi+2\alpha\psi=2\alpha^2$, ἤτοι $\chi+\psi=\alpha$· ἀφαιροῦντες δὲ αὐτὰς κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν $\chi-\psi=\beta$. Οὕτως ἐκ τοῦ ἰσοδυνάμου συστήματος $\chi+\psi=\alpha$, $\chi-\psi=\beta$ εὑρίσκομεν $\chi=(\alpha+\beta):2$ καὶ $\psi=(\alpha-\beta):2$.

266. Τὸ σύστημα ἀνάγεται εἰς τὸ $(\alpha+\beta)\chi-(\alpha-\beta)\psi=4\alpha\beta$ καὶ $(\alpha-\beta)\chi-(\alpha+\beta)\psi=0$, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $\chi=\alpha+\beta$ καὶ $\psi=\alpha-\beta$.

267. α′) Τὸ σύστημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ $\alpha\chi-2\beta\psi=-\alpha\beta$ καὶ $\beta\chi-\beta\psi=\beta^2-\alpha\beta$, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $\chi=\beta$ καὶ $\psi=\alpha$.

β′) Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο εὑρίσκομεν $\chi=\alpha$ καὶ $\psi=\beta$.

Μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως.

Ἀσκήσεις. *268.* α′) Ἐκ τῆς α′ εὑρίσκομεν $\chi=\frac{18}{7}+\frac{5\psi}{21}$. Θέτοντες δὲ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χ εἰς τὴν β′ ἔχομεν, $0{,}75\cdot\left(\frac{18}{7}+\frac{5\psi}{21}\right)+2\psi=15$

$54+5\psi+56\psi=420$, $\psi=6$ καὶ $\chi=\frac{18}{7}+\frac{30}{21}=\frac{54+30}{21}=4$. Αἱ τιμαὶ δὲ αὗται ἐπαληθεύουν τὸ δοθὲν σύστημα.

β′) Θέτοντες τὴν τιμὴν τοῦ χ ἐκ τῆς α′ εἰς τὴν β′ εὑρίσκομεν $\lambda(\alpha+\psi)+$ $+\mu\psi=\nu$, ἐξ ἧς $\psi=(\nu-\alpha\lambda):(\lambda+\mu)$. Οὕτω δὲ ἡ α′ δίδει $\chi=\alpha+(\nu-\alpha\lambda):(\lambda+\mu)=$ $=(\nu+\alpha\mu):(\lambda+\mu)$. Αἱ τιμαὶ δὲ αὗται ἐπαληθεύουν τὸ δοθὲν σύστημα.

γ′) Ἐκ τῆς α′ εὑρίσκομεν $\chi=(\alpha^2-6\psi):\alpha(1)$, ὁπότε ἡ β′ γίνεται

$\alpha^2-\beta\psi-\beta\psi=\beta^2$, ἐξ ἧς $\psi=(\alpha^2-\beta^2):2\beta$. Οὕτω δὲ ἡ (1) δίδει $\chi=(\alpha^2+\beta^2):2\alpha$.

269. α') Θέτοντες εἰς τὴν β' τὴν τιμὴν τοῦ ψ ἐκ τῆς α' εὑρίσκομεν $\frac{2}{5}\left(3\alpha-\frac{\chi}{2}\right)-\chi=2\beta$, ἐξ ἧς $\chi=\frac{6\alpha-10\beta}{6}=\frac{3\alpha-5\beta}{3}$. Οὕτω δὲ ἡ α' δίδει $\psi=3\alpha-\frac{3\alpha-5\beta}{6}=\frac{15\alpha+5\beta}{6}$.

β') Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις ἀνάγεται εἰς τὴν $5\psi-\chi=6\alpha$. Ὅθεν εἶναι $5\psi-(4\alpha-\psi)=6\alpha$, $\psi=5\alpha/3$ καὶ $\chi=4\alpha-5\alpha/3=7\alpha/3$.

γ') Εἶναι $\chi=3\psi$ καὶ $2\cdot3\psi+3\psi=5$. Ὥστε $\psi=5/9$ καὶ $\chi=5/3$.

Μέθοδος τῆς συγκρίσεως.

Ἀσκήσεις. ***Ὁμὰς πρώτη.*** *270.* α') Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως $3\chi=20-5\psi$ καὶ $3\chi=-10\psi$. Ὥστε $20-5\psi=-10\psi$, $\psi=-4$ καὶ $3\chi=40$, ἤτοι $\chi=40/3$.

β') Εὑρίσκομεν ὡς ἄνω $\chi/\alpha=1-\psi/\beta$, $\chi/\alpha=1+\psi/\beta$. Ὅθεν $1-\psi/\beta=$ $=1+\psi/\beta$, ἐξ ἧς $\psi=0$, ὁπότε $\chi/\alpha=1$, ἤτοι $\chi=\alpha$.

γ') Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως

$$\chi=\frac{\beta\psi+\gamma(\alpha-\beta)}{\alpha} \quad \text{καὶ} \quad \chi=\gamma-\psi. \quad \text{Ὥστε:}$$

$$\frac{\beta\psi+\gamma(\alpha-\beta)}{\alpha}=\gamma-\psi, \quad \psi=\frac{\beta\gamma}{\alpha+\beta} \quad \text{καὶ} \quad \chi=\gamma-\frac{\gamma\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\alpha\gamma}{\alpha+\beta}.$$

δ') Ἐκ τῶν ἐξισώσεων εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως:

$$\chi=\frac{2\alpha(\alpha^2-\beta^2)-(\alpha+\beta)\psi}{\alpha-\beta} \quad \text{καὶ} \quad \chi=\frac{(\alpha+\beta)^2\cdot\psi}{(\alpha-\beta)^2}. \quad \text{Ὥστε εἶναι:}$$

$$\frac{2\alpha(\alpha^2-\beta^2)-(\alpha+\beta)\psi}{\alpha-\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2\cdot\psi}{(\alpha-\beta)^2}, \quad \psi=(\alpha-\beta)^2 \quad \text{καὶ} \quad \chi=(\alpha+\beta)^2.$$

ε') Εἶναι $\chi=\alpha+\beta-\psi$ καὶ $\chi=\frac{2\alpha\beta-\alpha\psi}{\beta}$. Ὥστε εἶναι:

$$\alpha+\beta-\psi=\frac{2\alpha\beta-\alpha\psi}{\beta}, \quad \psi=\beta \quad \text{καὶ} \quad \chi=\alpha.$$

στ') Εὑρίσκομεν ἐκ τῶν ἐξισώσεων ἀντιστοίχως:

$$\psi=\frac{\beta\chi}{\alpha}-\alpha^2\beta^2 \quad \text{καὶ} \quad \psi=-\beta^4-\frac{\beta^2\chi}{\alpha^2}. \quad \text{Ὥστε εἶναι:}$$

$$\frac{\beta\chi}{\alpha}-\alpha^2\beta^2=-\beta^4-\frac{\beta^2\chi}{\alpha^2}, \quad \chi=\alpha^2\beta(\alpha-\beta) \quad \text{καὶ} \quad \psi=-\alpha\beta^3.$$

Ὁμὰς δευτέρα. *271.* α') Τὸ σύστημα τοῦτο μετὰ τὰς πράξεις δίδει τὸ ἰσοδύναμον

$$\begin{array}{r|l|l} -4\chi+13\psi=10 & \text{ἐξ οὗ} \quad -8\chi+26\psi=20 & \chi=23/4 \quad \text{καὶ} \\ 12\chi-26\psi=3 & \qquad\quad \underline{12\chi-26\psi=3} & \psi=33/13 \\ & \qquad\qquad 4\chi=23 & \end{array}$$

β') Τὸ σύστημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ $-4\chi+49\psi=143$, $12\chi+114\psi==297$, τὸ ὁποῖον λύοντες διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν εὑρίσκομεν $\chi=-583/248$ καὶ $\psi=242/87$.

γ') Ἀφαιροῦντες τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $\chi-\psi=2\alpha$. Οὕτως ἡ πρώτη ἐξίσωσις αὐτοῦ ἥτις γράφεται $\alpha(\chi+\psi)+\beta(\chi-\psi)==2\alpha\beta$, δίδει $\alpha(\chi+\psi)+2\alpha\beta=2\alpha\beta$, ἤτοι $\alpha(\chi+\psi)=0$. Ἐπειδὴ δὲ $\alpha\neq 0$, ἕπεται $\chi+\psi=0$. Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα $\chi-\psi=2\alpha$, καὶ $\chi+\psi=0$, εὑρίσκομεν $\chi=\alpha$ καὶ $\psi=-\alpha$.

δ') Τὸ σύστημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ

$$(\alpha-\beta)\chi+(\alpha+\beta)\psi=2\alpha(\alpha^2-\beta^2)$$
$$(\alpha-\beta)^2\chi-(\alpha+\beta)^2\psi=0\cdot$$

λύοντες δὲ τοῦτο διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν εὑρίσκομεν

$$\chi=(\alpha+\beta)^2 \quad \text{καὶ} \quad \psi=(\alpha-\beta)^2.$$

ε') Πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς $\alpha^{\eta\varsigma}$ ἐξισώσεως ἐπὶ $\dfrac{1}{\beta+\alpha}$ εὑρίσκομεν $\dfrac{\chi}{(\alpha+\beta)^2}-\dfrac{\psi}{\beta^2-\alpha^2}=\dfrac{\alpha^2\beta}{\beta+\alpha}$. Ἂν δὲ ταύτην καὶ τὴν $\beta^{\alpha\nu}$ ἐξίσωσιν τοῦ δοθέντος συστήματος προσθέσωμεν κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$\chi\left[\frac{1}{(\alpha+\beta)^2}+\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\right]=\frac{\alpha^2\beta}{\alpha+\beta}-\beta^2, \text{ ἤτοι :}$$

$$\chi=\frac{\beta(\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2)(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)}{2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}\cdot \text{ Κατόπιν δὲ εὑρίσκομεν}$$

$$\psi=\frac{\beta(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^3+2\alpha^2\beta+\beta^3)}{2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}.$$

στ') Ἔχομεν $\alpha\chi=\alpha^2-\beta\psi$ καὶ $\alpha\chi=\beta^2+\beta\psi$. Ὅθεν :

$$\alpha^2-\beta\psi=\beta^2+\beta\psi, \quad \psi=\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\beta} \quad \text{καὶ} \quad \chi=\frac{\alpha^2-\beta\psi}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}\cdot$$

ζ') Ἔχομεν $\chi=\dfrac{\gamma-\beta\psi}{\alpha}$ καὶ $\chi=\dfrac{\delta+\mu\psi}{\lambda}\cdot$ Ὅθεν :

$$\frac{\gamma-\beta\psi}{\alpha}=\frac{\delta+\mu\psi}{\lambda}, \quad \psi=\frac{\gamma\lambda-\alpha\delta}{\alpha\mu+\beta\lambda} \quad \text{καὶ} \quad \chi=\frac{\gamma\mu+\beta\delta}{\alpha\mu+\beta\lambda}\cdot$$

η') Τὸ σύστημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ $55\chi-85\psi=-87$ καὶ $-105\chi+101\psi=73$, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $\chi=\dfrac{258{,}2}{337}$ καὶ $\psi=\dfrac{512}{337}\cdot$

272. α') Τὸ σύστημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ $-16\chi+23\psi=16$ καὶ $20\chi-42\psi=13$, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $\chi=-\dfrac{971}{212}$ καὶ $\psi=-\dfrac{132}{53}\cdot$

β') Ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν $\psi=1/\beta$ καὶ κατόπιν ἐκ τῆς δευτέρας εὑρίσκομεν $\chi=(2\beta-\alpha)/\beta^2$.

γ') Τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ $3\psi+4\chi=10$ καὶ $20\psi+9\chi=49$, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $\chi=1$ καὶ $\psi=2$.

δ') Ἐργαζόμενοι κατὰ τὰ γνωστὰ εὑρίσκομεν $\chi=\alpha^2$ καὶ $\psi=-\alpha^2$.

ε') Ἔχομεν $\left.\begin{array}{l}(\alpha-\beta)\chi+(\alpha+\beta)\psi=\alpha+\beta\\(\alpha+\beta)\chi+(\alpha-\beta)\psi=\alpha-\beta\end{array}\right\}\ \chi=0,\quad \psi=1.$

στ') Ἔχομεν $\left.\begin{array}{l}(\alpha-\beta)\chi=\alpha\psi-1\\\beta\chi=(\beta-\alpha)\psi+1\end{array}\right\}\ \dfrac{(\alpha-\beta)}{\beta}=\dfrac{\alpha\psi-1}{(\beta-\alpha)\psi+1}$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\psi=\dfrac{\alpha}{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}$ καὶ κατόπιν $\chi=\dfrac{\beta}{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}$.

ζ') Εἶναι τὸ αὐτὸ σύστημα μὲ τὸ προηγούμενον γ'.

η') Τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ $55{,}9\chi-93{,}4\psi=-178{,}2$ καὶ $-48{,}85\chi+25{,}25\psi=36{,}3$, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{1109{,}13}{3151{,}115}\quad \text{καὶ}\quad \psi=\frac{6675{,}90}{3151{,}115}.$$

θ') Θέτοντες εἰς τὴν α' ἐξίσωσιν ἀντὶ τοῦ χ τὴν τιμήν του ἐκ τῆς β' εὑρίσκομεν μετὰ τὰς πράξεις $\psi=\dfrac{\alpha\beta(1-\alpha)+\gamma(\alpha\beta-\gamma)}{\alpha(\gamma-\alpha)}$ καὶ κατόπιν

$$\chi=\frac{\gamma(\alpha-\gamma\beta)-\alpha\beta(1+\gamma)}{\gamma(\gamma-\alpha)}.$$

Διερεύνησις τοῦ συστήματος τῆς μορφῆς $\left\{\begin{array}{l}\alpha\chi+\beta\psi=\gamma\\\alpha_1\chi+\beta_1\psi=\gamma_1\end{array}\right.$

Ἀσκήσεις. ***273.*** α') Ἐπειδὴ $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=\lambda^2-1$, τὸ σύστημα ἔχει μίαν λύσιν ἐὰν $\lambda\neq\pm1$. Αὕτη δὲ εἶναι ἡ

$$\chi=-\frac{1}{\lambda^2-1}\quad \text{καὶ}\quad \psi=\frac{2\lambda^2+\lambda-2}{\lambda^2-1}.$$

Ἐὰν $\lambda=1$ ἢ -1 τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον, διότι εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως τὰ συστήματα:

$$\begin{array}{l}\chi+\psi=2\\\chi+\psi=3\end{array}\quad \text{καὶ}\quad \begin{array}{l}-\chi+\psi=2\\\chi-\psi=-1\end{array}\quad \text{ἤτοι τὸ}\quad \begin{array}{l}\chi-\psi=-2\\\chi-\psi=-1\end{array}$$

β') Τὸ σύστημα τοῦτο δίδει τὴν λύσιν $\chi=-1$ καὶ $\psi=-\lambda$. Ὥστε εἶναι τοῦτο δυνατὸν διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς παραμέτρου λ καὶ διὰ τὴν τιμὴν $(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=\lambda-2)$, $\lambda=2$. Διότι αἱ ἀληθεῖς τιμαὶ τῶν $\chi=-\dfrac{\lambda-2}{\lambda-2}$ καὶ $\psi=-\dfrac{\lambda(\lambda-2)}{\lambda-2}$ διὰ $\lambda=2$ εἶναι $\chi=-1$ καὶ $\psi=-2$. Καὶ πράγματι· διότι διὰ $\chi=-1$ καὶ $\psi=-\lambda=-2$ τὸ δοθὲν σύστημα δίδει $2=2$ καὶ $1=1$, ἤτοι τὸ δοθὲν σύστημα ἐπαληθεύεται.

γ') Ἐπειδὴ $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=1\cdot\lambda-(-4)(3\lambda-1)=13\lambda-4$, τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει μίαν λύσιν ἐὰν $\lambda\neq\frac{4}{13}$, τὴν $\chi=-\frac{(\lambda-4)(3\lambda-1)}{13\lambda-4}$, $\psi=\frac{\lambda-4}{13\lambda-4}$. Ἐὰν $\lambda=\frac{4}{13}$ τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

δ') Ἔχομεν τὸ σύστημα $2\chi-\psi=-\lambda$ καὶ $\chi-3\psi=-(\lambda+3)$. Ἐπειδὴ δὲ $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=-5$ τὸ σύστημα τοῦτο ἔχει μίαν λύσιν, δι' οἱανδήποτε τιμὴν τῆς λ καὶ εἶναι αὕτη ἡ $\chi=-\frac{2\lambda-3}{5}$, $\psi=\frac{\lambda+6}{5}$.

ε') Ἐδῶ εἶναι $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=1-\lambda$. Ὥστε ἐὰν $\lambda\neq1$ τὸ σύστημα ἔχει μίαν λύσιν τὴν $\chi=\frac{\lambda-1}{1-\lambda}=-1$ καὶ $\psi=\frac{1-\lambda^2}{1-\lambda}=1+\lambda$. Ἐὰν $\lambda=1$ τὸ σύστημα γίνεται $\chi+\psi=1$ καὶ $\chi+\psi=1$. Ἑπομένως τοῦτο εἶναι ἀόριστον.

στ') Ἔχομεν $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=-\lambda^2+3$. Ὥστε ἐὰν $\lambda\neq\sqrt{3}$ τὸ σύστημα ἔχει ἓν μόνον σύστημα λύσεων τὸ $\chi=\frac{-1}{-\lambda^2+3}=\frac{1}{\lambda^2-3}$, $\psi=\frac{\lambda^3-\lambda^2-3\lambda+1}{-\lambda^2+3}$. Ἐὰν $\lambda=\sqrt{3}$ τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

274. α') Τὸ σύστημα τοῦτο, ὅπερ γράφεται $3\chi-5\psi=2$, $3\chi-5\psi=-7$ ἀμέσως φαίνεται ὅτι εἶναι ἀδύνατον.

β') Ἐπειδὴ $\frac{2}{5}\neq\frac{7}{21}=\frac{4}{12}$ (διότι $7\cdot12=4\cdot21$) τὸ σύστημα ἔχει μίαν λύσιν τὴν $\chi=0$, $\psi=4/7$.

γ') Τὸ σύστημα τοῦτο γράφεται $3\chi+2\psi=6$, $7\chi+2\psi=6$. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{3}{7}\neq\frac{1}{1}=\frac{6}{6}$ τοῦτο ἔχει μίαν λύσιν τὴν $\chi=0$, $\psi=3$.

δ') Τὸ σύστημα τοῦτο γράφεται $4\chi+3\psi=-12$ καὶ $4\chi+3\psi=30$. Εἶναι ἑπομένως τοῦτο ἀδύνατον.

ε') Τὸ σύστημα τοῦτο γράφεται $2\alpha\chi-\beta\psi=3$, $3\alpha\chi-\beta\psi=12$. Ἐὰν δὲ $\alpha\neq0$ καὶ $\beta\neq0$ εἶναι $\frac{2\alpha}{3\alpha}\neq\frac{\beta}{\beta}$, ἤτοι $\frac{2}{3}\neq1$. Ὥστε τότε τὸ σύστημα ἔχει μίαν λύσιν τὴν $\chi=9/\alpha$, $\psi=15/\beta$. Ἐὰν $\alpha,\beta=0$ τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατσν. Ὁμοίως τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον καὶ ἐὰν ὁ εἷς τῶν α καὶ β εἶναι μηδέν.

στ') Τὸ σύστημα τοῦτο ὅπερ γράφεται $\beta\chi+\alpha\psi=\alpha\beta$, $\beta\chi+\alpha\psi=\alpha\beta$, ἀμέσως φαίνεται ὅτι εἶναι ἀόριστον.

275. α') Ἐπειδὴ $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=-4+9=5\neq0$ τὸ σύστημα ἔχει μίαν λύσιν τὴν $\chi=5(\alpha+\beta):5=\alpha+\beta$ καὶ $\psi=5(\alpha-\beta):5=\alpha-\beta$.

β') Τὸ σύστημα τοῦτο γράφεται

$$(\alpha+\beta-4\alpha\beta)\chi-(\alpha-\beta)\psi=0$$
$$(\alpha-\beta)\chi-(\alpha+\beta)\psi=0.$$

Οὕτως ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις (§ 134) $[(\alpha-\beta)^2-(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-4\alpha\beta)]\chi=0$ καὶ $[(\alpha-\beta)^2-(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-4\alpha\beta)]\psi=0$, διότι ἐδῶ εἶναι $\gamma=0$ καὶ $\gamma_1=0$. Ἑπομένως, ἂν ὁ κοινὸς συντελεστὴς τῶν χ καὶ ψ εἶναι $\neq0$, τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει τὴν λύσιν $\chi=0$, $\psi=0$. Θὰ εἶναι δὲ τοῦτο ἀόριστον, ἂν ὁ κοινὸς συντελεστὴς τῶν χ καὶ ψ εἶναι 0.

γ′) Ἐπειδὴ $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=3\cdot3-(-1)(-1)=8$, τὸ σύστημα ἔχει μίαν λύσιν τὴν $\chi=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$, $\psi=\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$.

δ′) Τὸ σύστημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ
$$\alpha\chi-(\alpha+\beta)\psi=-\beta(\alpha+\beta)$$
$$\beta\chi+(\alpha-\beta)\psi=+\alpha(\alpha+\beta).$$

Ἐπειδὴ δὲ $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=\alpha(\alpha-\beta)+\beta(\alpha+\beta)=\alpha^2+\beta^2$, θὰ ἔχῃ τοῦτο μίαν λύσιν ἐὰν $\alpha,\beta\neq0$, ἡ ὁποία εἶναι
$$\chi=\frac{\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3}{\alpha^2+\beta^2}=\alpha+\beta \quad \text{καὶ} \quad \psi=\frac{\alpha^2(\alpha+\beta)+\beta^2(\alpha+\beta)}{\alpha^2+\beta^2}=\alpha+\beta.$$

Ἐὰν $\alpha,\beta=0$ τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον.

ε′) Τὸ σύστημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ $\beta\chi+\alpha\psi=2\alpha\beta$, $\alpha\chi+\beta\psi=2\alpha\beta$, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=\beta^2-\alpha^2$. Ἐὰν λοιπὸν $\beta\neq\alpha$ τὸ σύστημα ἔχει μίαν λύσιν, τὴν $\chi=\dfrac{2\alpha\beta(\beta-\alpha)}{\beta^2-\alpha^2}=\dfrac{2\alpha\beta}{\beta+\alpha}$ καὶ $\psi=\dfrac{2\alpha\beta(\beta-\alpha)}{\beta^2-\alpha^2}=\dfrac{2\alpha\beta}{\beta+\alpha}$. Ἐὰν δὲ $\alpha,\beta=0$ ἢ $\beta=\pm\alpha$, τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι ἀόριστον.

στ′) Τὸ σύστημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ
$$\chi+\psi=\frac{2\beta\gamma\alpha^2(\alpha-2\beta+3\gamma)}{\beta\gamma(\alpha-2\beta+3\gamma)}=2\alpha^2$$
$$\alpha\chi+\beta\psi=\alpha^3-\beta^3+\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)^2$$

Ἐπειδὴ δὲ $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=\beta-\alpha$, θὰ ἔχῃ μίαν λύσιν ἐὰν $\beta\neq\alpha$.

Εἶναι δὲ αὕτη ἡ $\chi=\dfrac{(\beta^3-\beta^2\alpha+\alpha^2\beta-\alpha^3)-(\beta-\alpha)^2}{\beta-\alpha}$.

Ἐπειδὴ ὅμως $\dfrac{\beta^4-\alpha^4}{\beta+\alpha}=\beta^3-\beta^2\alpha+\alpha^2\beta-\alpha^3$, ἔχομεν:
$$\chi=\frac{(\beta^4-\alpha^4)-(\beta-\alpha)^2(\beta+\alpha)}{\beta^2-\alpha^2}=\frac{(\beta^4-\alpha^4)-(\beta^2-\alpha^2)(\beta-\alpha)}{\beta^2-\alpha^2}=(\beta^2+\alpha^2)-$$
$$-(\beta-\alpha)=\alpha^2+\beta^2+\alpha-\beta.$$

Εἶναι δὲ καὶ $\psi=\dfrac{-(\beta^3-\beta^2\alpha-\beta\alpha^2+\alpha^3)+(\alpha-\beta)^2}{\beta-\alpha}=$
$$=\frac{-(\beta^2-\alpha^2)(\beta-\alpha)+(\alpha-\beta)^2}{\beta-\alpha}=(\alpha^2-\beta^2)+(\alpha-\beta)=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1).$$

Προβλήματα γραφικῶν κατασκευῶν.

276 α′) Ἐπειδὴ $5+4+3+2+1=15$ λ, τὸ αὐτοκίνητον διήνυσε τὴν ἀπόστασιν (ΡΜ)=131 χλ/τρα εἰς χρόνον 15 ὥρ 57 λ—13 ὥρ 5 λ—15 λ=15 ὥρ 57 λ—13 ὥρ 20 λ=2 ὥρ 37 λ. Ἡ ταχύτης του λοιπὸν καθ' ὥραν εἶναι $131:2\dfrac{37}{60}=131:\dfrac{157}{60}=$ $=50\,{}^{10}/_{157}$ χλ/τρα. Ἂν ἤδη τὰς ἀποστάσεις (ΡΑ)=51, (ΑΒ)=66—51=15, (ΒΓ)=80—66=14, (ΓΔ)=95—80=15 καὶ (ΔΕ)=122—95=27 χλ/τρα τὰς διαιρέσωμεν διὰ $50\,{}^{10}/_{157}$, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ αὐτοκίνητον τὰς διήνυσεν ἀντιστοίχως εἰς 1 ὥρ 1 λ, 18 λ, 17 λ, 18 λ καὶ 32 λ περίπου. Ὥστε εἰς τὸν σταθμὸν Α φθάνει τὸ αὐτοκίνητον τὴν 13 ὥρ 5 λ+1 ὥρ 1 λ=14 ὥρ 6 λ καὶ ἐκκινεῖ ἐξ αὐτοῦ τὴν 14 ὥρ 6 λ+5 λ (ὅσα ἐστάθμευσε)=14 ὥρ 11 λ, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸν σταθμὸν Β τὴν 14 ὥρ 11 λ+18 λ=14 ὥρ 29 λ. Ἐκκινεῖ δὲ ἐκ τοῦ Β τὴν 14 ὥρ 29 λ+4 λ=14 ὥρ 33 λ, φθάνει εἰς τὸν Γ τὴν 14 ὥρ 33 λ+17λ=14 ὥρ 50 λ καὶ ἀναχωρεῖ ἐξ αὐτοῦ τὴν 14 ὥρ 50 λ+3 λ=14 ὥρ 53 λ. Ὁμοίως φθάνει εἰς τοὺς σταθμοὺς Δ, Ε καὶ ἀναχωρεῖ ἐξ αὐτῶν εἰς τὰς ὥρας 14 ὥρ 53 λ+18 λ= =15 ὥρ 11 λ, 15 ὥρ 11 λ + 2 λ = 15 ὥρ 13 λ, 15 ὥρ 13 λ + 32 λ = 15 ὥρ 45 λ, 15 ὥρ 45 λ+1 λ=15 ὥρ 46 λ. Ἐργαζόμενοι ἤδη ὡς τὴν § 136 θὰ εὕρωμεν ὅτι ἡ πορεία τοῦ αὐτοκινήτου παρίσταται ὑπὸ τεθλασμένης γραμμῆς, ἐνῷ ἡ τῆς ἁμαξοστοιχίας παρίσταται ὑπὸ εὐθείας.

β′) Ἡ β′ ἁμαξοστοιχία τὴν ἀπόστασιν (ΜΡ)=131 χλ/τρα τὴν διανύει εἰς 15 ὥρ 45 λ—13 ὥρ 20 λ—14 λ=15 ὥρ 45 λ—13 ὥρ 34 λ=2 ὥρ 11 λ. Ἡ ταχύτης λοιπὸν αὐτῆς καθ' ὥραν εἶναι $131 : 2\,{}^{11}/_{60} = 131 : {}^{131}/_{60} = 60$ χλ/τρα. Ἑπομένως διανύει αὕτη τὰς ἀποστάσεις (ΜΔ)=(ΜΡ)—(ΔΡ)=131—95=36, (ΔΓ)=15, (ΓΒ)= = 14, (ΒΑ) = 15 χλ/τρα ἀντιστοίχως εἰς 36 : 60 = 36 λ, 15 λ, 14 λ, 15 λ. Ἡ γ′ ἁμαξοστοιχία διανύει τὴν ἀπόστασιν (ΜΡ) = 131 χλ/τρα εἰς 15 ὥρ 55 λ— — 14 ὥρ — 3 = 1 ὥρ 52 λ. Οὕτως ἡ ταχύτης αὐτῆς καθ' ὥραν εἶναι $131 : 1\,{}^{52}/_{60} = 131 : 1\,{}^{13}/_{15} = 70\,{}^{5}/_{28}$ χλ/τρα. Ἑπομένως τὴν ἀπόστασιν (ΜΑ)= =(ΜΡ)—(ΑΡ)=131—51=80 χλ/τρα τὴν διανύει εἰς $80 : 70\,{}^{5}/_{28} = 1$ ὥρ 8 λ περίπου. Κατόπιν τούτου διὰ τὴν ζητουμένην γραφικὴν παράστασιν ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τὴν § 136.

277. Ἂν αἱ περιουσίαι γίνουν ἴσαι μετὰ χ ἔτη, ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι 6500000+800000χ=12500000—250000χ. Αὕτη δὲ ἔχει τὴν λύσιν $χ=600 : 105=40 : 7=5\,{}^{5}/_{7}$ ἔτη. Τὴν αὐτὴν δὲ λύσιν εὑρίσκομεν καὶ γραφικῶς. Διότι αὕτη θὰ εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν δύο εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι παριστάνουν γραφικῶς τὰς μεταβολὰς τῶν περιουσιῶν.

278. Ὁ ποδηλάτης Α διήνυσε τὴν ἀπόστασιν (ΜΝ) = 60 χλ/τρα εἰς 13—8=5 ὥρ. Ὥστε ἡ ταχύτης του εἶναι 60 : 5=12 χλ/τρα τὴν ὥραν καὶ κατὰ συνέπειαν ἂν συνήντησε τὸν ποδηλάτην Β εἰς σημεῖον Γ, ἡ ἀπόστασις ΜΓ ἥτις διηνύθη ὑπὸ τοῦ Α εἰς 11—8=3 ὥρας εἶναι 12 · 3=36 χλ/τρα. Ὅθεν (ΝΓ)= =60—36=24 χλ/τρα. Ἐπειδὴ δὲ τὰ 24 αὐτὰ χλ/τρα, διηνύθησαν ὑπὸ τοῦ Β εἰς 11 ὥρ— 9 ὥρ 48λ=1 ὥρ. 12 λ, ἕπεται ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ Β εἶναι $24 : 1\,{}^{12}/_{60} = 24 : 1\,{}^{1}/_{5} = 20$ χλ/τρα τὴν ὥραν. Ὥστε ὁ Β διανύει τὴν ἀπόστασιν (ΜΝ)=60 χλ/τρα εἰς 60 : 20=3 ὥρας καὶ κατὰ συνέπειαν φθάνει εἰς τὸν Μ τὴν 9 ὥρ 48λ+3 ὥρ = 12 ὥρ 48 λ. Κατόπιν τούτων ἡ γραφικὴ λύσις τοῦ προβλήματος εἶναι εὔκολος (§ 136).

279. α′) Αἱ ἅμαξαι διανύουν τὴν γραμμὴν ΑΒ εἰς 8 : 12 = 2/3 ὥρας, ἤτοι εἰς 40 λ. Ἡ ἅμαξα ἡ ἀναχωρήσασα ἐκ τοῦ Β τὴν 6ην ὥραν, φθάνει εἰς Α τὴν 6 ὥρ 40 λ. Αἱ δὲ ἑπόμεναι φθάνουν εἰς Α τὴν 6 ὥρ 50 λ, τὴν 7ην ὥραν κ.ο.κ. ἀνὰ 10 λ. Ὥστε ὁ πεζοπόρος τὴν πρώτην ἅμαξαν τὴν ὁποίαν συνήντησεν ἐρχομένην ἐκ τοῦ Β εἶναι ἡ φθάσασα εἰς τὸ Α τὴν 8 ὥρ 20 λ. Ἐπειδὴ δὲ ὁ πεζοπόρος διανύει τὴν ἀπόστασιν ΑΒ εἰς 8 : 4=2 ὥρας, θὰ φθάσῃ εἰς Β τὴν 10 ὥρ καὶ 15 λ. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἀπὸ τῆς 8 ὥρ 20 λ θὰ συναντᾷ ἀνὰ 10 λ ἁμάξας ἐκ τοῦ Β, ἕπεται ὅτι μέχρις ὅτου φθάσῃ εἰς τὸ Β θὰ συναντήσῃ 14 ἁμάξας.

β') Ἡ πρώτη ἅμαξα ἐκ τοῦ Α ἥτις θὰ συναντήσῃ τὸν πεζοπόρον, θὰ εἶναι ἡ ἀναχωροῦσα τὴν 8 ὥρ 20 λ, ἡ δὲ τελευταία θὰ εἶναι ἡ ἀναχωροῦσα τὴν 9 ὥρ 30 λ (καὶ φθάνουσα εἰς τὸ Β τὴν 9 ὥρ 30 λ+40 λ=10 ὥρ 10 λ). Ὥστε αἱ ἅμαξαι ἐκ τοῦ Α αἱ ὁποῖαι θὰ συναντήσουν τὸν πεζοπόρον εἶναι 8, διότι αἱ ἀνὰ 10 λ ἀναχωρήσεις μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ τελευταίας εἶναι 6. Κατόπιν τούτων ἡ γραφικὴ λύσις τοῦ προβλήματος εἶναι εὔκολος.

280. α') Λύοντες τὸ σύστημα $4\chi-5\psi=1$ καὶ $\chi+2\psi=2$, εὑρίσκομεν $\chi={}^{12}/_{13}$, $\psi={}^{7}/_{13}$. Ἤδη ἂν κατασκευάσωμεν τὴν εὐθεῖαν $4\chi-5\psi=1$ ὡς καὶ τὴν $\chi+2\psi=2$, θὰ ἴδωμεν ὅτι αὗται τέμνονται εἰς σημεῖον Μ οὗ αἱ συντεταγμέναι εἶναι Μ $({}^{12}/_{13}, {}^{7}/_{13})$.

β') Ἡ λύσις τοῦ συστήματος αὐτοῦ εἶναι $\chi={}^{20}/_{9}$, $\psi=20/27$· κατασκευάζοντες δὲ τὰς εὐθείας $0{,}75\chi-9\psi+5=0$, $\chi-3\psi=0$, θὰ ἴδωμεν ὅτι αὗται τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Μ μὲ συντεταγμένας Μ $({}^{20}/_{9}, {}^{20}/_{27})$.

γ') Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι αἱ ὁποῖαι παριστάνουν τὰς ἐξισώσεις τοῦ δοθέντος συστήματος τέμνονται εἰς σημεῖον μὲ συντεταγμένας

$$\chi=1775/1493, \quad \psi=964/1493.$$

δ') Ἐδῶ εὑρίσκομεν ὡς συντεταγμένας τοῦ σημείου τῆς τομῆς τὰς $\chi=$ $={}^{38}/_{11}$, $\psi={}^{19}/_{11}$.

ε') Αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τῆς τομῆς εἶναι $\chi={}^{441}/_{20}$, $\psi={}^{63}/_{20}$.

στ') Τὸ ἰσοδύναμον σύστημα εἶναι $2\chi-\psi=-2$, $\chi+\psi=3$, τὸ δὲ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν ἔχει συντεταγμένας $\chi={}^{1}/_{3}$, $\psi={}^{8}/_{3}$.

Συστήματα ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ μὲ περισσοτέρους τῶν δύο ἀγνώστους.

Ἀσκήσεις. *281*. Ἔχομεν:

$$2\psi=14-\chi-3\omega$$
$$2\psi=14-4\chi-2\omega$$
$$2\psi=13-3\chi-2\omega.$$

Ὅθεν εἶναι: $14-\chi-3\omega=14-4\chi-2\omega$

$$14\chi-\chi-3\omega=13-3\chi=2\omega$$

Λύοντες ἤδη τὰς δύο ταύτας ἐξισώσεις πρὸς τὸ ω εὑρίσκομεν $\omega=3\chi$ καὶ $\omega=1+2\chi$. Ὅθεν εἶναι $3\chi=1+2\chi$, $\chi=1$, $\omega=3\cdot1=3$ καὶ $\psi=\dfrac{14-1-3\cdot3}{2}=2$.

282 α') Ἀπαλείφοντες τὸν χ μεταξὺ $α^{ης}$ καὶ $β^{ας}$, ὡς καὶ μεταξὺ $α^{ης}$ καὶ $γ^{ης}$ ἐξισώσεως, εὑρίσκομεν τὸ σύστημα $55\psi-61\omega=38$, $33\psi-34\omega=61$, τὸ ὁποῖον δίδει $\psi=7$ καὶ $\omega=5$. Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν ἐκ μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ δοθέντος συστήσματος $\chi=8$.

β') Τὸ σύστημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ ἰσοδύναμον

$$-13\chi+9\psi-21\omega=0$$
$$-8\chi+11\psi+36\omega=0$$
$$\chi+\psi+\omega=128$$

'Απαλείφοντες δὲ τὸν χ μεταξὺ α' καὶ γ', ὡς καὶ μεταξὺ β' καὶ γ' ἐξισώσεως, εὑρίσκομεν τὸ σύστημα $11\psi-4\omega=832$, $19\psi+44\omega=1024$, ὅπερ δίδει $\psi=\frac{2544}{35}$ καὶ $\omega=-\frac{284}{35}$. Κατόπιν δὲ εὑρίσκομεν $\chi=\frac{444}{7}$.

Ἐπαλήθευσις : Αἱ ἀρχικαὶ ἐξισώσεις δίδουν κατὰ σειράν:

$$\frac{7308}{9396}=\frac{7}{9},\quad \frac{6496}{7308}=\frac{8}{9}\quad \text{καὶ}\quad \frac{414}{7}+\frac{2544}{35}-\frac{284}{35}=128.$$

γ') 'Απαλείφοντες τὸν φ μεταξὺ α^{ης} καὶ β^{ας}, α^{ης} καὶ γ^{ης}, ὡς καὶ α^{ης} καὶ δ^{ης}, εὑρίσκομεν τὸ σύστημα:

$$\begin{aligned} 7\chi-8\psi-3\omega&=-8\\ -3\chi-\psi+\omega&=-2 \quad (\iota)\\ -5\chi+7\psi-9\omega&=-14 \end{aligned}$$

Ἤδη ἀπαλείφοντες τὸν ω μεταξὺ α^{ης} καὶ β^{ας}, α^{ης} καὶ γ^{ης} εὑρίσκομεν τὸ σύστημα $2\chi+11\psi=14$, $26\chi+31\psi=10$ ὅπερ δίδει: $\chi=\frac{27}{29}$ καὶ $\psi=\frac{32}{29}$.

Κατόπιν, ἐκ μιᾶς τῶν ἐξισώσεων (ι) εὑρίσκομεν $\varphi=\frac{55}{29}$ καὶ τέλος ἐκ μιᾶς τῶν ἀρχικῶν ἐξισώσεων εὑρίσκομεν $\varphi=\frac{120}{29}$.

δ') Ἐκ τῶν δύο τελευταίων ἐξισώσεων εὑρίσκομεν $\chi=\frac{\omega}{2}$, $\psi=\frac{5\omega}{8}$ καὶ κατόπιν ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως, ἡ ὁποία ἤδη γράφεται $\frac{\omega}{2}-\frac{5\omega}{8}+\omega=7$, εὑρίσκομεν $\omega=8$. Ὅθεν $\chi=\frac{\omega}{2}=4$ καὶ $\psi=5$.

ε') 'Απαλείφοντες διαδοχικῶς τὸν φ εὑρίσκομεν τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} -30\chi+66\psi+35\omega&=75\\ -6\chi+30\psi+4\omega&=15\\ -7\chi+4\psi+5\omega&=1 \end{aligned}$$

'Απαλείφοντες δὲ ἤδη διαδοχικῶς τὸν χ εὑρίσκομεν τὸ σύστημα $28\psi-5\omega=0$, $186\psi-2\omega=99$, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $\psi=\frac{495}{874}$, $\omega=\frac{1386}{437}$.

Κατόπιν δὲ εὑρίσκομεν κατὰ τὰ γνωστὰ $\chi=\frac{1069}{437}$, $\varphi=\frac{78}{437}$.

στ') 'Απαλείφοντες τὸν χ μεταξὺ α^{ης} καὶ β^{ας} ἐξισώσεως εὑρίσκομεν $1{,}2\psi+\omega=-8{,}5$, ἥτις μετὰ τῆς γ^{ης} ἀποτελεῖ σύστημα, ἐξ οὗ εὑρίσκομεν $\omega=\frac{53{,}9}{3}$ καὶ $\psi=-\frac{198{,}5}{9}$. Κατόπιν δὲ εὑρίσκομεν $\chi=\frac{43{,}6}{3}$.

ζ') Τὸ σύστημα ἀνάγεται εἰς τό:

$$2\chi+\psi=200,\quad 3\psi+\omega=300,\quad 4\omega+\chi=400.$$

'Απαλείφοντες δὲ τὸν χ μεταξὺ $α^{ης}$ καὶ $γ^{ης}$ ἐξισώσεως, εὑρίσκομεν $\psi-8\omega=-600$, ἥτις μετὰ τῆς δευτέρας ἀποτελεῖ σύστημα ὅπερ δίδει $\psi=72$ καὶ $\omega=84$. Κατόπιν δὲ εὑρίσκομεν $\chi=64$.

283. α') 'Απαλείφοντες τὸν ψ διαδοχικῶς εὑρίσκομεν τὸ σύστημα

$$(\alpha^2-1)\chi+(\alpha-1)\omega=\alpha^3-3\alpha^2$$
$$(\alpha-1)\chi-(\alpha-1)\omega=\alpha^2-2$$

Ἤδη προσθέτοντες τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος τούτου κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $(\alpha^2+\alpha-2)\chi=\alpha^3-2\alpha^2-2$ καὶ

$$\chi=\frac{\alpha^3-2\alpha^2-2}{\alpha^2+\alpha-2}=\frac{\alpha^3-2\alpha^2-2}{(\alpha-1)(\alpha+2)}.$$

Κατόπιν εὑρίσκομεν ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως

$$\frac{\alpha^3-2\alpha^2-2}{\alpha+2}-(\alpha^2-2)=(\alpha-1)\omega \quad \text{καὶ} \quad \omega=\frac{-2(2\alpha+1)}{\alpha+2}.$$

Τέλος δὲ ἐκ μιᾶς τῶν δοθεισῶν εὑρίσκομεν $\psi=\dfrac{3\alpha^3+2\alpha^2-2}{\alpha^2+\alpha-2}$.

β') 'Απαλείφοντες τὸν ψ μεταξὺ $α^{ης}$ καὶ $β^{ας}$ ἐξισώσεως εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν, ἡ ὁποία μετὰ τῆς τρίτης ἀποτελεῖ τὸ σύστημα:

$$\alpha\chi+\omega=(\alpha+\beta)(\alpha+1)-\gamma$$
$$\chi+(\alpha+\beta)\omega=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)$$

ὅπερ δίδει
$$\chi=\frac{(\alpha+\beta)[(\alpha^2+\alpha\beta-1)-\gamma]}{\alpha^2+\alpha\beta-1}$$
$$\omega=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta-1)+\gamma}{\alpha^2+\alpha\beta-1}$$

ἀκολούθως δὲ ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως εὑρίσκομεν:

$$\psi=\frac{(\alpha^2+\alpha\beta-1)(\alpha+\beta+\gamma)+\gamma}{\alpha^2+\alpha\beta-1}.$$

γ') Τὸ δοθὲν σύστημα γράφεται:

$$\alpha\chi+\beta\psi+\gamma\omega=3\alpha\beta\gamma, \quad \alpha\chi=\gamma\omega \quad \text{καὶ} \quad \beta\psi=\gamma\omega\cdot$$

ὥστε ἡ πρώτη ἐξίσωσις γίνεται

$$\gamma\omega+\gamma\omega+\gamma\omega=3\alpha\beta\gamma, \quad 3\gamma\omega=3\alpha\beta\gamma. \text{ Ὅθεν:}$$
$$\omega=\alpha\beta, \quad \psi=\alpha\gamma \quad \text{καὶ} \quad \chi=\beta\gamma.$$

δ') 'Εκ τῶν ἐξισώσεων $\alpha\chi=\gamma\omega$ καὶ $\beta\psi=\gamma\omega$ λαμβάνομεν $\chi=\dfrac{\gamma\omega}{\alpha}$.

καὶ $\psi=\dfrac{\gamma\omega}{\beta}$. Ὥστε ἡ τρίτη ἐξίσωσις γίνεται:

$\dfrac{\gamma\omega}{\alpha}+\dfrac{\gamma\omega}{\beta}+\omega=\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma}$. 'Επειδὴ δὲ τὸ πρῶτον μέλος ἰσοῦται μὲ

$$\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}+1\right)\omega=\frac{\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta}{\alpha\beta}\cdot\omega \text{ ἔπεται, } \omega=\frac{1}{\gamma}.$$

$$\text{Ὅθεν:} \quad \psi=\frac{1}{\beta} \quad \text{καὶ} \quad \chi=\frac{1}{\alpha}.$$

ε΄) Τὸ σύστημα τοῦτο ὅπερ γράφεται

$$\chi+\alpha\psi+\alpha\omega=k$$
$$\beta\chi+\ \psi+\beta\omega=\lambda$$
$$\gamma\chi+\gamma\psi+\ \omega=\mu$$

θὰ τὸ λύσωμεν διὰ τῆς μεθόδου τοῦ Bézout. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων ἐπὶ ϑ καὶ ζ ἀντιστοίχως καὶ κατόπιν προσθέτομεν τὰς προκυπτούσας ἐξισώσεις καὶ τὴν τρίτην κατὰ μέλη. Οὕτω δὲ λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$(\vartheta+\beta\zeta+\gamma)\chi+(\alpha\vartheta+\zeta+\gamma)\psi+(\alpha\vartheta+\beta\zeta+1)\omega=k\vartheta+\lambda\zeta+\mu. \qquad (1)$$

Κατόπιν ἐξισοῦντες μὲ 0 ἕκαστον τῶν συντελεστῶν τῶν ψ καὶ ω, εὑρίσκομεν ἀφ' ἑνὸς μὲν τὴν ἐξίσωσιν:

$$(\vartheta+\beta\zeta+\gamma)\chi=k\vartheta+\lambda\zeta+\mu \qquad (2)$$

καὶ ἐξ ἄλλου τὸ σύστημα:

$$\alpha\vartheta+\ \zeta+\gamma=0$$
$$\alpha\vartheta+\beta\zeta+1=0$$

ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν: $\vartheta=\dfrac{1-\beta\gamma}{\alpha(\beta-1)}$ καὶ $\zeta=\dfrac{\gamma-1}{\beta-1}$.

Ἤδη θέτοντες τὰς τιμὰς τῶν ϑ καὶ ζ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν

$$\left(\frac{1-\beta\gamma}{\alpha(\beta-1)}+\frac{\beta(\gamma-1)}{(\beta-1)}+\gamma\right)\chi=\frac{k(1-\beta\gamma)}{\alpha(\beta-1)}+\frac{\lambda(\gamma-1)}{(\beta-1)}+\mu$$

$$\text{καὶ}\quad \chi=\frac{k(1-\beta\gamma)+\alpha\lambda(\beta-1)+\alpha\mu(\beta-1)}{(1-\beta\gamma)+\alpha\beta(\gamma-1)+\alpha\gamma(\beta-1)}.$$

Κατόπιν ἐξισοῦντες μὲ 0 τοὺς συντελεστὰς τῶν χ καὶ ω τῆς ἐξισώσεως (1) εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$(\alpha\vartheta+\zeta+\gamma)\psi=k\vartheta+\lambda\zeta+\mu \qquad (3)$$

καὶ τὸ σύστημα $\quad \vartheta+\beta\zeta+\gamma=0$

$$\alpha\vartheta+\beta\zeta+1=0$$

ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $\vartheta=\dfrac{\gamma-1}{\alpha-1}$ καὶ $\zeta=\dfrac{1-\alpha\gamma}{\beta(\alpha-1)}$.

Οὕτω δὲ θέτοντες τὰς τιμὰς ταύτας τῶν ϑ καὶ ζ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) εὑρίσκομεν μετὰ τὰς πράξεις

$$\psi=\frac{\lambda(1-\alpha\gamma)+\beta\gamma(\gamma-1)+\beta\mu(\alpha-1)}{(1-\alpha\gamma)+\alpha\beta(\gamma-1)+\beta\gamma(\alpha-1)}.$$

Τέλος διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ω, ἐξισοῦμεν μὲ 0 τοὺς συντελεστὰς τῶν χ καὶ ψ τῆς ἐξισώσεως (1), ὁπότε εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν: $(\alpha\vartheta+\beta\zeta+1)\omega=k\vartheta+\lambda\zeta+\mu$ (4) καὶ τὸ σύστημα:

$$\vartheta+\beta\zeta+\gamma=0$$
$$\alpha\vartheta+\ \zeta+\gamma=0$$

ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $\vartheta=\dfrac{\gamma(1-\beta)}{\alpha\beta-1}$ καὶ $\zeta=\dfrac{\gamma(1-\alpha)}{\alpha\beta-1}$.

Οὕτω δὲ ἐκ τῆς ἐξισώσεως (4) εὑρίσκομεν:

$$\omega = \frac{\mu(1-\alpha\beta)+k\gamma(\beta-1)+\lambda\gamma(\alpha-1)}{(1-\alpha\beta)+\alpha\gamma(\beta-1)+\beta\gamma(\alpha-1)}.$$

στ΄) Ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν ἐξίσωσιν:

$$(\vartheta+\lambda\zeta+k)\chi+(k\vartheta+\zeta+\lambda)\psi+(\lambda\vartheta+k\zeta+1)\omega = \alpha\vartheta+\beta\zeta+\gamma \qquad (1)$$

κατόπιν δὲ εὑρίσκομεν ὁμοίως ὡς ἄνω:

1ον) $$(\vartheta+\lambda\zeta+k)\chi=\alpha\vartheta+\beta\zeta+\gamma \qquad (2)$$

καὶ ἐκ τοῦ συστήματος $k\vartheta+\zeta+\lambda=0$, $\lambda\vartheta+k\zeta+1=0$ εὑρίσκομεν $\vartheta=\frac{1-k\lambda}{k^2-\lambda}$, $\psi=\frac{\lambda^2-k}{k^2-\lambda}$, ὁπότε ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2) εὑρίσκομεν:

$$\chi=\frac{\alpha(1-k\lambda)+\beta(\lambda^2-k)+\gamma(k^2-\lambda)}{(1-k\lambda)+\lambda(\lambda^2-k)+k(k^2-\lambda)}.$$

2ον) $$(k\vartheta+\zeta+\lambda)\psi=\alpha\vartheta+\beta\zeta+\gamma \qquad (3)$$

καὶ $\vartheta+\lambda\zeta+k=0$, $\lambda\vartheta+k\zeta+1=0$. Ὅθεν $\vartheta=\frac{k^2-\lambda}{\lambda^2-k}$, $\zeta=\frac{1-\lambda k}{\lambda^2-k}$, ὁπότε ἐκ τῆς ἐξισώσεως (3) εὑρίσκομεν

$$\psi=\frac{\beta(1-k\lambda)+\gamma(\lambda^2-k)+\alpha(k^2-\lambda)}{(1-k\lambda)+\lambda(\lambda^2-k)+k(k^2-\lambda)}.$$

3ον) $$(\lambda\vartheta+k\zeta+1)\omega=\alpha\vartheta+\beta\zeta+\gamma \qquad (4)$$

καὶ $\vartheta+\lambda\zeta+k=0$, $k\vartheta+\zeta+\lambda=0$. Ὅθεν $\vartheta=\frac{\lambda^2-k}{1-k\lambda}$, $\zeta=\frac{k^2-\lambda}{1-k\lambda}$

ὁπότε ἐκ τῆς ἐξισώσεως (4) εὑρίσκομεν

$$\omega=\frac{\gamma(1-k\lambda)+\alpha(\lambda^2-k)+\beta(k^2-\lambda)}{(1-k\lambda)+\lambda(\lambda^2-k)+k(k^2-\lambda)}.$$

ζ΄) Ἐργαζόμενοι ὁμοίως ὡς ἄνω διὰ τῆς μεθόδου τοῦ Bézout εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν ἐξίσωσιν

$$[\vartheta+(\beta+\gamma)\zeta+\beta\gamma]\chi+[\vartheta+(\alpha+\gamma)\zeta+\alpha\gamma]\psi+[\vartheta+(\alpha+\beta)\zeta+\alpha\beta]\omega=1 \qquad (1)$$

κατόπιν δὲ ὁμοίως ὡς ἄνω εὑρίσκομεν

1ον $[\vartheta+(\beta+\gamma)\zeta+\beta\gamma]\chi=1$ (2) καὶ ἐκ τοῦ συστήματος $\vartheta+(\alpha+\gamma)\zeta+\alpha\gamma=0$, $\vartheta+(\alpha+\beta)\zeta+\alpha\beta=0$ εὑρίσκομεν $\zeta=-\alpha$, $\vartheta=\alpha^2$, ὁπότε ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2) εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{1}{\alpha^2-\alpha(\beta+\gamma)+\beta\gamma}=\frac{1}{\alpha(\alpha-\beta)-\gamma(\alpha-\beta)}=\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$

2ον) Ὁμοίως δὲ ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τὰ δύο προηγούμενα π. δ. εὑρίσκομεν

$$\psi=\frac{1}{\beta^2-\beta(\alpha+\gamma)+\alpha\gamma}=\frac{1}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} \quad \text{καὶ}$$

$$\omega=\frac{1}{\gamma^2-\gamma(\alpha+\beta)+\alpha\beta}=\frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

η΄) Ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τὰ προηγούμενα π. δ. διὰ τῆς μεθόδου τοῦ Bézout εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(\vartheta+\alpha\zeta+\alpha^2)\chi+(\vartheta+\beta\zeta+\beta^2)\psi+(\vartheta+\gamma\zeta+\gamma^2)\omega=\vartheta+k\zeta+k^2$$

Ἔπειτα δὲ εὑρίσκομεν

1) Τὴν τιμὴν τοῦ χ, θέτοντες $\vartheta+\beta\zeta+\beta^2=0$, $\vartheta+\gamma\zeta+\gamma^2=0$, ὁπότε ἔχομεν $\vartheta=\beta\gamma$, $\zeta=-(\beta+\gamma)$. Οὕτω δὲ ἐκ τῆς ἐξισώσεως $(\vartheta+\alpha\zeta+\alpha^2)\chi=\vartheta+k\zeta+k^2$ εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{\beta\gamma-k(\beta+\gamma)+k^2}{\beta\gamma-\alpha(\beta+\gamma)+\alpha^2}=\frac{(k-\beta)(k-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$

2) Ὁμοίως θέτοντες $\vartheta+\alpha\zeta+\alpha^2=0$ καὶ $\vartheta+\gamma\zeta+\gamma^2=0$ εὑρίσκομεν $\vartheta=\alpha\gamma$, $\zeta=-(\alpha+\gamma)$ καὶ $\psi=\dfrac{\vartheta+k\zeta+k^2}{\vartheta+\beta\zeta+\beta^2}=\dfrac{\alpha\gamma-k(\alpha+\gamma)+k^2}{\alpha\gamma-\beta(\alpha+\gamma)+\beta^2}=\dfrac{(k-\alpha)(k-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}$.

3) Τέλος θέτοντες $\vartheta+\alpha\zeta+\alpha^2=0$ καὶ $\vartheta+\beta\zeta+\beta^2=0$ εὑρίσκομεν $\vartheta=\alpha\beta$, $\zeta=-(\alpha+\beta)$ καὶ

$$\omega=\frac{\vartheta+k\zeta+k^2}{\vartheta+\gamma\zeta+\gamma^2}=\frac{\alpha\beta-k(\alpha+\beta)+k^2}{\alpha\beta-\gamma(\alpha+\beta)+\gamma^2}=\frac{(k-\alpha)(k-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}.$$

Λύσις συστημάτων διὰ τεχνασμάτων.

Ἀσκήσεις.— *284.* α΄) Ἔχομεν $\dfrac{3\chi}{18}=\dfrac{2\psi}{6}=\dfrac{\omega}{18}=\dfrac{3\chi+2\psi+\omega}{18+6+18}=\dfrac{34}{42}$.

Ὅθεν $\chi=\dfrac{34.18}{42.3}=\dfrac{34}{7}$, $\psi=\dfrac{34.6}{42.2}=\dfrac{17}{7}$ καὶ $\omega=\dfrac{34.18}{42}=\dfrac{102}{7}$.

β΄) Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι $\chi,\ \psi\neq 0$. Κατόπιν εὑρίσκομεν $\chi+\psi=5\chi\psi$ καὶ $3\chi+2\psi=12\chi\psi$. Διαιροῦντες ἤδη τὰς δύο αὐτὰς ἐξισώσεις κατὰ μέλη εὑρίσκομεν: $\dfrac{\chi+\psi}{3\chi+2\psi}=\dfrac{5}{12}$, ἤτοι: $12(\chi+\psi)=5(3\chi+2\psi)$ ἢ $2\psi=3\chi$ καὶ ἑπομένως $\chi=\dfrac{2\psi}{3}$. Ἀντικαθιστῶντες ἤδη τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χ εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν ἐκ τῶν δοθεισῶν, εὑρίσκομεν $\dfrac{3}{2\psi}+\dfrac{1}{\psi}=5$, $\dfrac{3}{2\psi}+\dfrac{2}{2\psi}=5$, $\dfrac{5}{2\psi}=5$ καὶ $\psi=\dfrac{1}{2}$. Ἑπομένως εἶναι καὶ $\chi=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$.

γ΄) Ἔχομεν $\dfrac{\alpha\chi}{\alpha^2}=\dfrac{\beta\psi}{\beta^2}=\dfrac{\gamma\omega}{\gamma^2}=\dfrac{\delta\varphi}{\delta^2}=\dfrac{\alpha\chi+\beta\psi+\gamma\omega+\delta\varphi}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}=\dfrac{\alpha}{\beta(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)}$

Ὅθεν: $\chi=\dfrac{\alpha^2}{\beta(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)}$, $\psi=\dfrac{\alpha\beta}{\beta(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)}$

$$\omega=\frac{\alpha\gamma}{\beta(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)},\quad \varphi=\frac{\alpha\delta}{\beta(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)}$$

δ΄) Προσθέτοντες τὰς τρεῖς ἐξισώσεις κατὰ μέλη εὑρίσκομεν:

$\dfrac{2}{\chi}+\dfrac{2}{\psi}+\dfrac{2}{\omega}=\dfrac{1}{5}$, ἤτοι $\dfrac{1}{\chi}+\dfrac{1}{\psi}+\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{1}{10}$ (ι).

Ἤδη ἀφαιροῦμεν κατὰ μέλη ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (ι) διαδοχικῶς τὰς δοθείσας ἐξισώσεις. Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν $\frac{1}{\omega}=\frac{1}{10}-\frac{1}{12}=\frac{1}{60}$, ἤτοι $\omega=60$, $\frac{1}{\chi}=$ $=\frac{1}{20}$, ἤτοι $\chi=20$ καὶ $\frac{1}{\psi}=\frac{1}{30}$, ἤτοι $\psi=30$.

ε') Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις α$^{\eta\nu}$ καὶ β$^{\alpha\nu}$, α$^{\eta\nu}$ καὶ γ$^{\eta\nu}$, β$^{\alpha\nu}$ καὶ γ$^{\eta\nu}$ εὑρίσκομεν κατὰ σειράν:

$$\frac{2\alpha}{\chi}=\lambda+\mu,\ \frac{2\beta}{\psi}=\lambda+\nu \text{ καὶ } \frac{2\gamma}{\omega}=\mu+\nu.$$

Ὅθεν εἶναι: $\chi=\frac{2\alpha}{\lambda+\mu}$, $\psi=\frac{2\beta}{\lambda+\nu}$ καὶ $\omega=\frac{2\gamma}{\mu+\nu}$.

στ') Διαιροῦντες τὰ μέλη καὶ τῶν τριῶν ἐξισώσεων διὰ χψω εὑρίσκομεν:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\psi}+\frac{1}{\omega}=12 \\ &\frac{3}{\chi}-\frac{4}{\psi}+\frac{5}{\omega}=15 \qquad (\iota) \\ &\frac{4}{\chi}-\frac{3}{\psi}+\frac{2}{\omega}=13 \end{aligned}$$

Ἤδη προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς δύο πρώτας ἐξισώσεις εὑρίσκομεν $\frac{4}{\chi}-\frac{3}{\psi}+\frac{6}{\omega}=27$, ἐὰν δὲ ἀπὸ τὰ μέλη ταύτης ἀφαιρέσωμεν τὴν τρίτην ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\frac{4}{\omega}=14$, $\frac{1}{\omega}=\frac{7}{2}$ καὶ $\omega=\frac{2}{7}$.

Κατόπιν προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς δύο τελευταίας ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (ι) εὑρίσκομεν:

$$\frac{7}{\chi}-\frac{7}{\psi}+\frac{7}{\omega}=28, \text{ ἤτοι } \frac{1}{\chi}+\frac{1}{\psi}+\frac{1}{\omega}=4.$$

Ἐὰν δὲ ταύτην ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὴν πρώτην ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\frac{2}{\psi}=8$, $\frac{1}{\psi}=4$ καὶ $\psi=\frac{1}{4}$. Τέλος ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως τοῦ συστήματος (ι) εὑρίσκομεν: $\frac{1}{\chi}=12-4-\frac{7}{2}=\frac{9}{2}$, ἤτοι $\chi=\frac{2}{9}$.

ζ') Ἐπειδὴ $\mu\chi=\dfrac{\alpha\chi}{\frac{\alpha}{\mu}}$, $\nu\psi=\dfrac{\beta\psi}{\frac{\beta}{\nu}}$, καὶ $\varrho\omega=\dfrac{\gamma\omega}{\frac{\gamma}{\varrho}}$

ἔχομεν: $$\frac{\alpha\chi}{\frac{\alpha}{\mu}}=\frac{\beta\psi}{\frac{\beta}{\nu}}=\frac{\gamma\omega}{\frac{\gamma}{\varrho}}=\frac{\alpha\chi+\beta\psi+\gamma\omega}{\frac{\alpha}{\mu}+\frac{\beta}{\nu}+\frac{\gamma}{\varrho}}=\frac{\delta}{\frac{\alpha}{\mu}+\frac{\beta}{\nu}+\frac{\gamma}{\varrho}}$$

Ὅθεν: $$\chi=\frac{\delta}{\mu\left(\frac{\alpha}{\mu}+\frac{\beta}{\nu}+\frac{\gamma}{\varrho}\right)}, \text{ ἤτοι } \chi=\frac{\delta\nu\varrho}{\alpha\nu\varrho+\beta\mu\varrho+\gamma\mu\nu},$$

$$\psi=\frac{\delta}{\nu\left(\frac{\alpha}{\mu}+\frac{\beta}{\nu}+\frac{\gamma}{\varrho}\right)}, \quad \text{ἤτοι} \quad \psi=\frac{\delta\mu\varrho}{\alpha\nu\varrho+\beta\mu\varrho+\gamma\mu\nu},$$

$$\omega=\frac{\delta}{\varrho\left(\frac{\alpha}{\mu}+\frac{\beta}{\nu}+\frac{\gamma}{\varrho}\right)}, \quad \omega=\frac{\delta\mu\nu}{\alpha\nu\varrho+\beta\mu\varrho+\gamma\mu\nu}.$$

η΄ Προσθέτοντες καὶ ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος, εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως $\frac{2}{\chi+2\psi-3}=\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{2}{3\chi-2\psi+1}=\frac{1}{3}$, ἤτοι εὑρίσκομεν τὸ σύστημα $\chi+2\psi=7$, $3\chi-2\psi=5$, ὅπερ δίδει $\chi=3$ καὶ $\psi=2$.

θ΄) Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς δύο πρώτας ἐξισώσεις καὶ ἔπειτα τὴν $\alpha^{\eta\nu}$ καὶ $\gamma^{\eta\nu}$ εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως $(\alpha-\beta)\psi+(\alpha^2-\beta^2)\omega=-(\alpha^3-\beta^3)$, $(\alpha-\gamma)\psi+(\alpha^2-\gamma^2)\omega=-(\alpha^3-\gamma^3)$, ἤτοι $\psi+(\alpha+\beta)\omega=-(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$,

$$\psi+(\alpha+\gamma)\omega=-(\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2).$$

Ἤδη ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς εὑρεθείσας ἐξισώσεις εὑρίσκομεν $(\alpha+\beta-\alpha-\gamma)\omega=(\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2)-(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$, ἤτοι $(\beta-\gamma)\omega=\alpha(\gamma-\beta)+(\gamma+\alpha)(\gamma-\beta)$ καὶ $\omega=-(\alpha+\beta+\gamma)$. Ὥστε εἶναι $\psi=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta)-(\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2)$, ἤτοι $\psi=\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma$.

Τέλος ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν

$$\chi=(\alpha+\beta+\gamma)\alpha^2-\alpha(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)-\alpha^3, \quad \text{ἤτοι} \quad \chi=-\alpha\beta\gamma.$$

ι΄) Τὸ σύστημα τοῦτο γράφεται:

$$\frac{5\chi+4\psi}{\chi\psi}=\frac{1}{3} \qquad \frac{5}{\psi}+\frac{4}{\chi}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{3\psi+5\omega}{\psi\omega}=\frac{1}{7}, \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{3}{\omega}+\frac{5}{\psi}=\frac{1}{7} \quad (\iota)$$

$$\frac{2\omega+3\chi}{\omega\chi}=\frac{1}{6} \qquad \frac{2}{\chi}+\frac{3}{\omega}=\frac{1}{6}.$$

Οὕτως ἐκ τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (ι) εὑρίσκομεν δι' ἀφαιρέσεως $\frac{4}{\chi}-\frac{3}{\omega}=\frac{4}{21}$. Ἐὰν δὲ ταύτην προσθέσωμεν μὲ τὴν τρίτην εὑρίσκομεν $\chi=84/5$. Ἀκολούθως δὲ εὑρίσκομεν $\omega=63$ καὶ $\psi=105/2$.

ια΄) Ἡ 2α ἐξίσωσις τοῦ συστήματος διορθωτέα εἰς $3\omega+8\chi=38\omega\chi$, ὁπότε ἂν διαιρέσωμεν τὰ μέλη ἑκάστης τῶν ἐξισώσεων αὐτοῦ ἀντιστοίχως διὰ $\chi\psi$, $\omega\chi$, $\psi\omega$, εὑρίσκομεν τὸ σύστημα $\frac{3}{\psi}+\frac{7}{\chi}=23$, $\frac{3}{\chi}+\frac{8}{\omega}=38$, $\frac{5}{\omega}-\frac{6}{\psi}=2$. Ἀλλ' ἐκ τῶν δύο τελευταίων ἐξισώσεων αὐτοῦ λαμβάνομεν $\frac{15}{\chi}+\frac{40}{\omega}=190$, $-\frac{40}{\omega}+\frac{48}{\psi}=-16$ καὶ ἐξ αὐτῶν διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $\frac{48}{\psi}+\frac{15}{\chi}=174$. Ἀλλ' αὕτη μετὰ τῆς $\frac{3}{\psi}+\frac{7}{\chi}=23$ ἀποτελεῖ σύστημα, ὅπερ λυόμενον δίδει $\frac{1}{\chi}=2$ καὶ $\frac{1}{\psi}=3$ ἤτοι $\chi=\frac{1}{2}$, $\psi=\frac{1}{3}$. Κατόπιν δὲ εὑρίσκομεν $\omega=\frac{1}{4}$.

285. α') Ἀπαλείφοντες κατὰ τὰ γνωστὰ τὸν ψ μεταξὺ 1ης καὶ 2ας ἐξισώσεως εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν, ἥτις μετὰ τῆς 3ης ἀποτελεῖ τὸ σύστημα.

$$(\mu+\nu)(\varrho+\mu)\chi-(\varrho-\mu)(\mu-\nu)\omega=2\varrho[\nu(\mu+\nu)+\mu(\varrho-\mu)]$$

$$-(\nu-\varrho)\chi+(\nu+\varrho)\omega=2\mu\nu \qquad (\iota)$$

ὅπερ λυόμενον δίδει

$$\chi=\frac{\mu^2\nu(\nu-\mu)+\varrho^2\mu(\varrho-\mu)+\nu^2\varrho(\varrho+\nu)+2\mu\nu\varrho^2}{\mu^2\nu+\varrho^2\mu+\nu^2\varrho+\mu\nu\varrho}.$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος τούτου ἀναλύεται εἰς γινόμενον τοῦ παρονομαστοῦ του ἐπὶ $\varrho+\nu-\mu$, ἕπεται ὅτι $\chi=\varrho+\nu-\mu$. Θέτοντες ἤδη τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χ εἰς τὴν 2αν ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος (ι) εὑρίσκομεν $\omega=-\varrho+\nu+\mu$ καὶ κατόπιν ἐκ τῆς 1ης τῶν ἐξισώσεων (ἢ ἐκ τῆς 2ας) τοῦ δοθέντος συστήματος, εὑρίσκομεν $\psi=\varrho-\nu+\mu$.

β') Τὸ σύστημα τοῦτο, ἂν λάβωμεν ὡς ἀγνώστους τὰ μ, ν, ϱ, λύεται ὡς τὸ προηγούμενον. Οὕτως εὑρίσκομεν $\mu=\omega+\psi-\chi$, $\nu=\omega-\psi+\chi$, $\varrho=-\omega+\psi+\chi$. Προσθέτοντες ἤδη τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς κατὰ μέλη ἀνὰ δύο εὑρίσκομεν $\mu+\nu=2\omega$, ἤτοι $\omega=\frac{\mu+\nu}{2}$, $\mu+\varrho=2\psi$, ἤτοι $\psi=\frac{\mu+\varrho}{2}$ καὶ $\nu+\varrho=2\chi$, ἤτοι $\chi=\frac{\nu+\varrho}{2}$.

286. Διαιροῦντες τὰ μέλη καὶ τῶν τριῶν ἐξισώσεων διὰ $\chi\psi\omega$ εὑρίσκομεν τὸ σύστημα :

$$\frac{3}{\chi}+\frac{2}{\psi}-\frac{1}{\omega}=1$$

$$\frac{30}{\chi}-\frac{18}{\psi}+\frac{12}{\omega}=13$$

$$\frac{24}{\chi}-\frac{42}{\psi}+\frac{18}{\omega}=5$$

Ἐὰν δὲ ἀπαλείψωμεν τὸ $\frac{1}{\omega}$ μεταξὺ α^{ης} καὶ β^{ας} ὡς καὶ μεταξὺ α^{ης} καὶ γ^{ης} ἐξισώσεως εὑρίσκομεν τὸ σύστημα

$$\frac{66}{\chi}+\frac{6}{\psi}=25, \quad \frac{78}{\chi}-\frac{6}{\psi}=23$$

τοῦ ὁποίου αἱ ἐξισώσεις προστιθέμεναι κατὰ μέλη δίδουν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{144}{\chi}=48$, ἐξ ἧς $\chi=3$. Κατόπιν δὲ εὑρίσκομεν $\psi=2$ καὶ $\omega=1$.

287. Ἐκ τῆς γης ἐξισώσεως λαμβάνομεν $\dfrac{12}{2\chi-3\omega}=\dfrac{15}{5\psi-4\omega}$ (1)

Οὕτως αἱ δύο πρῶται ἐξισώσεις γίνονται:

$$\frac{42}{2\chi+3\psi}-\frac{9}{2\chi-3\omega}=\frac{33}{8},\qquad \frac{28}{2\chi+3\psi}-\frac{12}{2\chi-3\omega}=\frac{1}{2}\qquad (2)$$

Ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ συστήματος τούτου ἀπαλείψωμεν τὸ $\dfrac{1}{2\chi+3\psi}$ εὑρίσκομεν μετὰ τὰς ἁπλοποιήσεις τὴν ἐξίσωσιν: $\dfrac{2}{2\chi-3\omega}=\dfrac{3}{4}$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $6\chi-9\omega=8$. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν $2\chi-3\omega=\dfrac{8}{3}$, ἡ ἐξίσωσις (1) μᾶς δίδει τὴν $15\psi-12\omega=10$, ἡ δὲ πρώτη ἐξίσωσις τοῦ συστήματος (2) δίδει τὴν $15\psi+10\chi=20$.

Οὕτω λοιπὸν ἔχομεν τὸ σύστημα: $6\chi-9\omega=8$, $15\psi-12\omega=10$ καὶ $15\psi+10\chi=20$, τὸ ὁποῖον, λυόμενον κατὰ τὰ γνωστά, δίδει τὰς τιμὰς

$$\chi=\frac{43}{27},\qquad \psi=\frac{326}{405}\quad \text{καὶ}\quad \omega=\frac{14}{81}.$$

288. Ὅλα τὰ σημεῖα τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι πρὸς δύο ὀρθογωνίους ἄξονας ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$ κεῖνται ἐπὶ εὐθείας Ε. Ὁμοίως ὅλα τὰ σημεῖα τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι πρὸς τοὺς αὐτοὺς ὀρθογωνίους ἄξονας ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha_1\chi+\beta_1\psi=\gamma_1$ κεῖνται ἐπὶ ἄλλης εὐθείας E_1. Ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι πᾶν ζεῦγος τιμῶν (χ,ψ) ὅπερ ἐπαληθεύει ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις τοῦ δοθέντος συστήματος, ἀποτελεῖ τὰς συντεταγμένας σημείου ὅπερ κεῖται ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν εὐθειῶν Ε καὶ E_1.

Ἑπομένως ἐὰν ἓν μόνον τοιοῦτον ζεῦγος ὑπάρχῃ, ἤτοι ἐὰν τὸ σύστημα ἐπιδέχεται μίαν μόνην λύσιν, αἱ εὐθεῖαι Ε καὶ E_1 ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, ἤτοι αὗται τέμνωνται.

Ἐὰν δὲ τοιαῦτα ζεύγη ὑπάρχουν ἄπειρα τὸ πλῆθος, ἤτοι ἐὰν τὸ σύστημα ἔχῃ ἄπειρον πλῆθος λύσεων, αἱ εὐθεῖαι Ε καὶ E_1 συμπίπτουν. Ἐὰν δὲ οὐδὲν τοιοῦτον ζεῦγος τιμῶν (χ,ψ) ὑπάρχῃ, ὅπερ νὰ ἐπαληθεύῃ τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος, ἤτοι ἐὰν τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, αἱ εὐθεῖαι Ε καὶ E_1 οὐδὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον, ἤτοι αὗται εἶναι παράλληλοι

289. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εὐκόλως ἕπεται ὅτι αἱ τρεῖς εὐθεῖαι τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ τρεῖς ἐξισώσεις ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, ἐὰν ἓν μόνον σύστημα τιμῶν (χ,ψ) τὰς ἐπαληθεύει.

Προβλήματα πρωτοβαθμίων συστημάτων.

290. Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν μήλων τοῦ αου παιδίου καὶ ψ ὁ τοῦ δευτέρου. Τότε θὰ ἔχωμεν $\chi+\dfrac{\psi}{2}=40$ καὶ $\psi+\dfrac{\chi}{2}=35$.

Πρέπει δὲ οἱ ἀριθμοὶ χ καὶ ψ νὰ εἶναι θετικοὶ ἀκέραιοι.

Λύοντες τὸ σύστημα εὑρίσκομεν $\chi=30$ καὶ $\psi=20$.

'Επαλήθευσις. $30+\frac{20}{2}=40$ καὶ $20+\frac{30}{2}=35$.

291. Ἔστω χ ὁ α^ος^ καὶ ψ ὁ β^ος^ ἀριθμός. Τότε ἔχομεν $\chi=3\psi$ καὶ $2\chi-3\psi=42$. Ὅθεν $\chi=42$ καὶ $\psi=14$.

292. Ἐδῶ εἶναι $2\chi-3\psi=5$ καὶ $2\chi-25=15\psi$. Ὅθεν $\chi=0$ καὶ $\psi=-5/3$.

293. Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν γραμμαρίων τοῦ χρυσοῦ καὶ ψ ὁ τοῦ ἀργύρου. Ὥστε εἶναι $\chi+\psi=7465$ (1). Ἐπειδὴ δὲ ὁ χρυσὸς χάνει εἰς τὸ ὕδωρ τὰ 52 χιλιοστὰ τοῦ βάρους του, ἕπεται ὅτι ὁ ἐν τῷ στεφάνῳ χρυσὸς θὰ χάσῃ εἰς τὸ ὕδωρ $0{,}052\chi$ γραμμάρια. Ὁμοίως δὲ ὁ ἄργυρος θὰ χάσῃ εἰς τὸ ὕδωρ $0{,}095\psi$ γραμμάρια. Ὥστε εἶναι $0{,}052\chi+0{,}095\psi=467$ (2). Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) εὑρίσκομεν $\chi=5631\frac{42}{43}$ γραμ. καὶ $\psi=1833\frac{1}{43}$ γραμ.

294. Ἔστω χ αἱ ἐξ ἀρχῆς δραχμαὶ τοῦ Α καὶ ψ αἱ τοῦ Β. Ὅταν ὁ Α δώσῃ εἰς τὸν Β μ δραχμάς, ὁ Α θὰ ἔχῃ $\chi-\mu$, ὁ δὲ Β θὰ ἔχῃ $\psi+\mu$. Ἐὰν δὲ ὁ Β δώσῃ εἰς τὸν Α μ δραχμάς, θὰ ἔχῃ ὁ Α $\chi+\mu$ καὶ ὁ Β θὰ ἔχῃ $\psi-\mu$. Οὕτως αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶναι $\psi+\mu=\nu(\chi-\mu)$ καὶ $\chi+\mu=\nu(\psi-\mu)$, αἵτινες λυόμεναι δίδουν:

$$\chi=\mu(\nu+1):(\nu-1) \text{ καὶ } \psi=\mu(\nu+1):(\nu-1).$$

295. Ἔστω χ ἡ ταχύτης τοῦ ταχυτέρου κινητοῦ καὶ ψ ἡ ταχύτης τοῦ ἄλλου. Τότε εἰς t δευτερόλεπτα διέτρεξαν διαστήματα $t\chi$ καὶ $t\psi$. Ὥστε εἶναι $\tau\chi+t\psi=\alpha$ καὶ $t\chi=t\psi+\beta$. Λύοντες τὸ σύστημα εὑρίσκομεν $\chi=\frac{\alpha+\beta}{2t}$ καὶ $\psi=\frac{\alpha-\beta}{2t}$. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχῃ λύσιν πρέπει νὰ εἶναι $\alpha>\beta$.

296. Ἔστω χ ἡ ταχύτης τοῦ ταχυτέρου κινητοῦ καὶ ψ ἡ ταχύτης τοῦ ἄλλου. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν διέτρεξαν διαστήματα $\lambda_1\chi$ καὶ $\lambda_1\psi$· εἶναι δὲ $\lambda_1\chi+\lambda_1\psi=\alpha$.

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν διέτρεξαν διαστήματα $\lambda_2\chi$ καὶ $\lambda_2\psi$, εἶναι δὲ $\lambda_2\chi-\lambda_2\psi=\alpha$. Ὥστε ἔχομεν τὸ σύστημα:

$$\chi+\psi=\frac{\alpha}{\lambda_1} \text{ καὶ } \chi-\psi=\frac{\alpha}{\lambda_2}$$

ὅπερ λυόμενον δίδει: $\chi=\alpha\cdot\frac{\lambda_2+\lambda_1}{2\lambda_2\lambda_1}$ καὶ $\psi=\alpha\cdot\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2\lambda_2\lambda_1}$.

Ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχῃ λύσιν πρέπει νὰ εἶναι $\lambda_2>\lambda_1$.

297. Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνδρῶν καὶ ψ ὁ τῶν γυναικῶν. Ὥστε ἔχομεν ἀμέσως $\chi+\psi=\alpha$. Ἐξ ἄλλου ἐπειδὴ οἱ χ ἄνδρες ἐπλήρωσαν $\gamma\chi$ δραχμάς, αἱ δὲ γυναῖκες ἐπλήρωσαν $\delta\psi$ δραχμάς, ἔχομεν $\gamma\chi+\delta\psi=\beta$. Ὥστε ἔχομεν τὸ σύστημα $\chi+\psi=\alpha$ καὶ $\gamma\chi+\delta\psi=\beta$. Πρέπει δὲ οἱ ἀριθμοὶ χ καὶ ψ νὰ εἶναι ἀκέραιοι θετικοί. Λύοντες τὸ ἀνωτέρω σύστημα εὑρίσκομεν $\chi = \frac{\beta-\alpha\delta}{\gamma-\delta}$ καὶ $\psi = \frac{\alpha\gamma-\beta}{\gamma-\delta}$, ἐὰν $\gamma \neq \delta$.

Εἰς τὴν μερικὴν περίπτωσιν εὑρίσκομεν :

$\chi = \frac{260000-7 \cdot 30000}{50000-30000} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ καὶ $\psi = 4\frac{1}{2}$. Ἡ λύσις ὅμως αὕτη ἀπορρίπτεται.

Προβλήματα μὲ περισσοτέρους τῶν δύο ἀγνώστους.

298. Ἔστω ὅτι ἕκαστος εἶχε χ, ψ, ω δραχμάς. Ὅταν ὁ 1ος ἐδιπλασίασε τὰ χρήματα τῶν δύο ἄλλων, ἕκαστος τούτων εἶχε δρχ.

$$\chi-\psi-\omega \qquad 2\psi \qquad 2\omega$$

ὅταν ὁ 2ος ἐδιπλασίασε τὰ χρήματα τῶν δύο ἄλλων, ἕκαστος εἶχε

$$2\chi-2\psi-2\omega, \qquad 2\psi-\chi+\psi+\omega-2\omega=3\psi-\chi-\omega, \qquad 4\omega$$

Ὅταν ὁ 3ος ἐδιπλασίασε τὰ χρήματα τῶν δύο ἄλλων, ἕκαστος εἶχε

$$4\chi-4\psi-4\omega, \quad 6\psi-2\chi-2\omega, \quad 4\omega-2\chi+2\psi+2\omega-3\psi+\chi+\omega=7\omega-\chi-\psi.$$

Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὸ τέλος ἕκαστος εὑρέθη μὲ 160000 δραχμάς, ἔχομεν τὸ σύστημα :

$$\begin{array}{lcl} 4\chi-4\psi-4\omega=160000 & & \chi-\psi-\omega=40000 \\ 6\psi-2\chi-2\omega=160000 & \text{ἢ} & -\chi+3\psi-\omega=80000 \\ 7\omega-\chi-\psi=160000 & & -\chi-\psi+7\omega=160000 \end{array}$$

ὅπερ λυόμενον δίδει : $\chi=260000, \quad \psi=140000, \quad \omega=80000.$

299. Ἔστω χ, ψ, ω οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἰς ἑκατομμύρια. Τότε αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶναι :

$$\chi+\frac{5\psi}{8}=64, \quad \psi+\frac{8\omega}{9}=64, \quad \omega+\frac{\chi}{2}+\frac{3\psi}{16}=64 \quad \text{ἢ}$$

$$8\chi+5\psi=512, \qquad 9\psi+8\omega=576, \qquad 16\omega+8\chi+3\psi=1024.$$

Ἤδη ἀπαλείφοντες τὸν ω μεταξὺ τῶν δύο τελευταίων ἐξισώσεων εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $15\psi-8\chi=128$ ἥτις μετὰ τῆς πρώτης ἀποτελεῖ σύστημα ὅπερ δίδει $\psi=32$, $\chi=44$. Τέλος εὑρίσκομεν $\omega=36$.

300. Ἔστω ὅτι εἶχον ἡ α^{η} χ, ἡ β^{α} ψ καὶ ἡ γ^{η} ω αὐγά. Ὥστε εἶναι $\chi+\psi+\omega=360$ (1).

Κατόπιν εἰς τὴν $\alpha^{\eta\nu}$ ἐπειδὴ ἔδωκε τὰ $\frac{\chi}{7}$ τῶν αὐγῶν της ἀπέμειναν $\frac{6\chi}{7}$, εἰς τὴν $\gamma^{\eta\nu}$ ἐπειδὴ ἔδωκε τὰ $\frac{\omega}{13}$ ἀπέμειναν $\frac{12\omega}{13}$ ἐνῷ ἡ β^{α} εἶχε $\psi+\frac{\chi}{7}+\frac{\omega}{13}$.

Ὥστε εἶναι : $\frac{6\chi}{7}=\psi+\frac{\chi}{7}+\frac{\omega}{13}$, ἤτοι $\frac{5\chi}{7}=\psi+\frac{\omega}{13}$ (2) καὶ $\frac{6\chi}{7}=\frac{12\omega}{13}$, ἤτοι $\chi=\frac{14\omega}{13}$.

Ἤδη ἐὰν τὴν τιμὴν αὐτὴν τῆς χ θέσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) λαμβάνομεν $\frac{70\omega}{91}=\psi+\frac{\omega}{13}$, ἤτοι $\psi=\frac{63\omega}{91}$. Κατόπιν τούτων ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $\frac{14\omega}{13}+\frac{63\omega}{91}+\omega=360$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\omega=\frac{360.91}{252}=\frac{360.13}{36}=130$.

Οὕτω δὲ εἶναι $\chi=\frac{14\ 130}{14}=140$ καὶ $\psi=\frac{63.130}{91}=\frac{9.130}{13}=90$.

301. Ἔστω χ τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων, ψ τὸ τῶν δεκάδων καὶ ω τὸ ψηφίον τῶν μονάδων. Τότε δὲ κατὰ τὸ πρόβλημα ἔχομεν:

$$\chi+\psi+\omega=17. \quad (1)$$

$$\chi=2\omega. \quad (2)$$

$100\chi+10\psi+\omega-396=100\omega+10\psi+\chi$. Ἀλλὰ αὕτη γράφεται:

$99\chi-99\omega=396$ ἢ $\chi-\omega=4$, ἤτοι $\chi=4+\omega$ (3).

Οὕτως ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) εὑρίσκομεν: $4+\omega=2\omega$, ἤτοι $\omega=4$. Ὅθεν $\chi=4+\omega=8$ καὶ $\psi=17-\chi-\omega=17-8-4=5$. Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 854.

302. Ἂν οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ χ, ψ, ω, θὰ ἔχωμεν

$$\begin{array}{lcl} \chi+\psi+\omega=190 & & \chi+\psi+\omega=190 \\ \chi+\frac{\psi+\omega}{2}=120 & \text{ἢ} & 2\chi+\psi+\omega=240 \\ \psi+\frac{\chi-\omega}{15}=62 & & 15\psi+\chi-\omega=930 \end{array}$$

Οὕτως ἂν ἀπὸ τὴν βαν ἐξίσωσιν ἀφαιρέσωμεν τὴν αην κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $\chi=50$. Ἂν δὲ ἔπειτα προσθέσωμεν τὴν αην μὲ τὴν γην εὑρίσκομεν $2\chi+16\psi=1120$. Ὅθεν $16\psi=1120-100=1020$. ἤτοι $\psi=63\frac{3}{4}$ καὶ $\omega=190-\psi-\chi=190-63\frac{3}{4}-50=190-113\frac{3}{4}=76\frac{1}{4}$.

303. Ἔστω χ τὸ ἐπιτόκιον τοῦ αου κεφαλαίου καὶ ψ τὸ τοῦ βου. Τότε οἱ τόκοι των εἰς 1 ἔτος εἶναι $\frac{5\,400\,000 \cdot 1 \cdot \chi}{100}=54000\chi$ καὶ $\frac{6\,500\,000 \cdot 1 \cdot \psi}{100}=65\,000\psi$ ἀντιστοίχως. Ἀλλ' ἂν ἐναλλαχθοῦν τὰ ἐπιτόκια οἱ τόκοι των εἰς 1 ἔτος θὰ εἶναι $54\,000\psi$ καὶ $65\,000\chi$.

Οὕτω κατὰ τὸ πρόβλημα ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις:

$$\begin{array}{lcl} 54\,000\chi+65\,000\psi=384\,000 & \text{ἢ} & 54\chi+65\psi=384 \\ 54\,000\psi+65\,000\chi=389\,500 & & 65\chi+54\psi=389{,}5 \end{array}$$

Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν εὑρίσκομεν $\chi=3{,}5$, $\psi=3$.

304. Ἂν τὰ μερίδια εἶναι χ, ψ, ω, ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις

$\chi+\psi+\omega=8\,100\,000$, $\frac{\chi}{\psi}=\frac{2}{3}$, $\frac{\psi}{\omega}=\frac{3}{4}$. Οὕτως ἐκ τῶν δύο τελ ταίων ἐξισώσεων εὑρίσκομεν $\chi = 2\psi/3$, $\omega = 4\psi/3$, ὁπότε ἡ πρώτη δίδει τὴν ἐξίσωσιν $2\psi/3 + \psi + 4\psi/3 = 8\,100\,000$, ἐξ ἧς $\psi = 2\,700\,000$. Ὅθεν $\chi = 1\,800\,000$, $\omega = 3\,600\,000$.

305. Ἔστω χ δρχ. ἡ τιμὴ τοῦ μέτρου τοῦ αου ὑφάσματος, καὶ ψ δρχ. ἡ τιμὴ τοῦ βου. Ἐπομένως ἡ τιμὴ τῶν 5 μ. τοῦ αου εἶναι 5χ δρχ. καὶ ἡ τιμὴ τῶν 6 μ. τοῦ βου εἶναι 6ψ δρχ. Ἡ ὅλη δὲ ἀξία αὐτῶν ὡς ὀρθῶς ὑπελογίσθη ἦτο 122 000 δρχ. Ἀλλ' ὁ ἔμπορος ἔδωσεν εἰς τὸν ἀγοραστὴν 6 μ. τοῦ αου καὶ 5 τοῦ βου ἀξίας ἐν ὅλῳ $6\chi + 5\psi$ δρχ., μικροτέρας τῆς ἐν ὅλῳ πρώτης ἀξίας κατὰ 2000 δρχ. Ἤτοι ὁ ἀγοραστὴς ἔλαβεν ὑφάσματα ἀξίας ἐν ὅλῳ $6\chi + 5\psi = 120\,000$ δρχ. (1), ἐνῷ συνεφώνησε νὰ ἀγοράσῃ ὑφάσματα ἀξίας $5\chi + 6\psi = 122\,000$ δρχ. (2) ἃς καὶ κατέβαλεν. Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν $\chi = 10\,000$, $\psi = 12\,000$.

306. Ἐὰν χ kg εἶναι ἡ ἔντασις τῆς μιᾶς καὶ ψ kg ἡ ἔντασις τῆς ἄλλης δυνάμεως ἔχομεν $\chi + \psi = 16$, ὅταν ἐνεργοῦν ὁμορρόπως (ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας) καὶ $\chi - \psi = 2$, ὅταν ἐνεργοῦν ἀντιρρόπως. Λύοντες εὑρίσκομεν $\chi = 9$ καὶ $\psi = 7$.

307. Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν μήλων τοῦ Α καὶ ψ ὁ τοῦ Β. Ἂν ὁ Α λάβῃ 10 μῆλα ἀπὸ τὸν Β, ὁ Α θὰ ἔχῃ τότε $\chi + 10$, ἐνῷ ὁ Β θὰ ἔχῃ $\psi - 10$ καὶ θὰ εἶναι $\chi + 10 = 1{,}5(\psi - 10)$. Ἀλλ' ἂν ὁ Β λάβῃ 10 μῆλα ἀπὸ τὸν Α, θὰ εἶναι $\psi + 10 = 4 \cdot (\chi - 10)$. Λύοντες εὑρίσκομεν $\chi = 20$ καὶ $\psi = 30$.

308. Ἔστω χ ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου κινητοῦ καὶ ψ ἡ τοῦ δευτέρου. Ἀλλὰ τὸ πρῶτον διήνυσε 900 μ. καὶ τὸ δεύτερον 600 μ. Οἱ χρόνοι δὲ καθ' οὓς διήνυσαν τὰ διαστήματα ταῦτα εἶναι ἴσοι. Οὕτως ἐπειδὴ χρόνος = διάστημα : ταχύτητος, εἶναι $\dfrac{900}{\chi} = \dfrac{600}{\psi}$ καὶ ὁ ζητούμενος λόγος εἶναι

$$\frac{\chi}{\psi} = \frac{900}{600} = \frac{3}{2}.$$

309. Ἔστω χ ἡ ταχύτης τοῦ ἑνὸς κινητοῦ καὶ ψ ἡ τοῦ ἄλλου. Τὸ πρῶτον εἰς χρόνον t_1 διέτρεξε διάστημα $t_1\chi$ καὶ τὸ ἄλλο εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον διέτρεξε διάστημα $t_1\psi$. Ὥστε εἶναι $t_1\chi + t_1\psi = \delta$ (1).

Κατόπιν ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου ἔγινε $\chi + \dfrac{\lambda\chi}{100} = \dfrac{(100+\lambda)\chi}{100}$,

ἡ δὲ τοῦ δευτέρου ἔγινε $\psi - \dfrac{\lambda_1\psi}{100} = \dfrac{(100-\lambda_1)\psi}{100}$. Ὥστε τότε ἔχομεν

$$\frac{(100+\lambda)t_2}{100} \cdot \chi + \frac{(100-\lambda_1)t_2}{100}\psi = \delta \quad (2).$$

Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν:

$$\chi = \frac{\delta[\lambda_1 t_2 + 100(t_1 - t_2)]}{(\lambda+\lambda_1)t_1 t_2}, \quad \psi = \frac{\delta[\lambda t_2 - 100(t_1 - t_2)]}{(\lambda+\lambda_1)t_1 t_2}.$$

Διερεύνησις. Ἐὰν $t_1 > t_2$ θὰ εἶναι $\chi > 0$ ἵνα δὲ εἶναι καὶ $\psi > 0$ πρέπει νὰ εἶναι $\lambda t_2 > 100(t_1 - t_2)$.

Ἐὰν $t_1 < t_2$ θὰ εἶναι $\psi > 0$ ἵνα δὲ εἶναι καὶ $\chi > 0$, πρέπει νὰ εἶναι $\lambda_1 t_2 > 100(t_2 - t_1)$, ἤτοι $\lambda_1 t_2 < 100(t_1 - t_2)$.

310. Ἔστω Α καὶ Β τὰ ἄκρα τοῦ τόξου καὶ χ, ψ οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ μοιρῶν. Τὰ κινητά, ἀναχωροῦντα ἐκ τῶν ἄκρων Α καὶ Β, δύνανται νὰ κινοῦνται ἀντιθέτως καὶ νὰ διανύσουν ἢ τὸ μικρότερον τόξον τῶν 45^0 ἢ τὸ μεγαλύτερον τῶν $360^0-45^0=315^0$. Εἰς τὴν α^{ην} περίπτωσιν ἔχομεν τὸ σύστημα $3χ+3ψ=45$ καὶ $5χ-5ψ=45$, ἐξ οὗ εὑρίσκομεν $χ=12^0$ καὶ $ψ=3^0$. Εἰς τὴν β^{αν} περίπτωσιν ἔχομεν τὸ σύστημα $3χ+3ψ=315$ καὶ $5χ-5ψ=315$, ἐξ οὗ εὑρίσκομεν $χ=84^0$ καὶ $ψ=21^0$.

311. Ἔστω χ τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ ψ τὸ τῶν μονάδων. Τότε εἶναι $χ=2ψ/3$ καὶ $10χ+ψ+18=10ψ+χ$, ἤτοι $9χ-9ψ=-18$ ἢ $χ-ψ=-2$. Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν εὑρίσκομεν $χ=4$ καὶ $ψ=6$. Ὁ ζητούμενος λοιπὸν ἀριθμὸς εἶναι ὁ 46.

312. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ εἶναι 4. Ὥστε ἂν χ εἶναι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ ψ τὸ τῶν μονάδων, θὰ ἔχωμεν $χ+ψ=5$ (1) καὶ $100ψ+10χ+4=\frac{36}{47}(100\cdot 4+10χ+ψ)$, ἤτοι $110χ+4664ψ=14212$ (2). Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν $χ=2$ καὶ $ψ=3$. Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 423.

313. Ἐὰν χ εἶναι τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων, ψ τὸ τῶν δεκάδων καὶ ω τὸ τῶν μονάδων, ἔχομεν:

$$χ=\frac{ψ+ω}{3},\quad ψ=\frac{χ+ω}{2} \text{ καὶ } 100χ+10ψ+ω+198=100ω+10ψ+χ, \text{ ἤτοι}$$

$χ-ω=-2$. Ὥστε ἔχομεν τὸ σύστημα $3χ=ψ+ω$, $2ψ=χ+ω$ καὶ $χ=ω-2$.

Αἱ δύο πρῶται λοιπὸν ἐξισώσεις γίνονται $ψ=2ω-6$, $2ψ=3ω-2$ ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν $ω=5$, $ψ=4$ καὶ κατόπιν $χ=3$. Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 345.

314. Ἔστω χ τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ ψ τὸ τῶν μονάδων. Τότε ὁ ἀριθμὸς εἶναι $10χ+ψ$. Ἐὰν παρεμβάλωμεν μεταξὺ τῶν χ καὶ ψ τὸ ψηφίον 4, τοῦτο θὰ εἶναι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τοῦ νέου ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποίου τὸ ψηφίον τῶν μονάδων θὰ εἶναι ψ καὶ τὸ τῶν ἑκατοντάδων θὰ εἶναι χ. Ὥστε ὁ νέος ἀριθμὸς θὰ εἶναι ὁ $100χ+40+ψ$. Ἑπομένως αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶναι:

$$\begin{aligned} 100χ+40+ψ+10χ+ψ&=604 \\ 100χ+40+ψ&=(10χ+ψ)9+34 \end{aligned} \quad \text{ἢ} \quad \begin{aligned} 55χ+ψ&=282 \\ 5χ-4ψ&=-3 \end{aligned}$$

Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα τοῦτο εὑρίσκομεν $χ=5$ καὶ $ψ=7$. Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 57.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ἀσκήσεις.—*315*. Ἐὰν ὁ δείκτης ν τῆς ρίζης εἶναι ἄρτιος, ἡ νυοστὴ ρίζα τῆς 1 εἶναι ἡ $+1$ ἢ ἡ -1, διότι $(+1)^\nu = +1$ καὶ $(-1)^\nu = +1$. Ἐὰν ὁ δείκτης ν τῆς ρίζης εἶναι περιττός, ἡ νυοστὴ ρίζα εἶναι ἡ $+1$, διότι $(+1)^\nu = +1$, ἐνῷ $(-1)^\nu = -1$. Ὡς πρὸς τὸ 0 παρατηροῦμεν ὅτι πᾶσα δύναμις τοῦ 0 εἶναι 0.

316. $\sqrt{9} = \pm 3$, $\sqrt{36} = \pm 6$, $\sqrt{+64} = \pm 8$, $\sqrt{-64}$ δὲν ὑπάρχει. $\sqrt[3]{+125} = 5$ καὶ $\sqrt[3]{-125} = -5$.

317. $3 - \sqrt{4} = 3 - (\pm 2) = 3 \mp 2$, ἤτοι 1 ἢ 5, $\alpha + \sqrt{\alpha^2} = \alpha \pm \alpha$, ἤτοι 2α ἢ 0 καὶ $\alpha + \sqrt[3]{\beta^3} = \alpha + \beta$.

318. Ἡ $\sqrt{\alpha^2}$ ἔχει δύο τιμὰς ἀντιθέτους τὰς $+\alpha$ καὶ $-\alpha$. Ἤτοι εἶναι $\sqrt{\alpha^2} = \pm \alpha$. Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἰσότης οὔτε πλήρης εἶναι, οὔτε ἀκριβής.

319. Ἐπειδὴ $(+\alpha^2)^6 = \alpha^{12}$ καὶ $(-\alpha^2)^6 = \alpha^{12}$, ἡ δοθεῖσα ἰσότης θὰ εἶναι τελείως ἀκριβής, ἐὰν ἐκ τῶν δύο ριζῶν τῆς $\sqrt[6]{(\alpha^2)^6}$ λάβωμεν μόνον τὴν θετικήν. Οὕτω δὲ κατωτέρω θὰ λαμβάνωμεν μόνον τὰς θετικὰς ρίζας ἀρτίας τάξεως.

320. α΄) $+2+2-3-(-2)=3$, β΄) $2+2-2=2$, γ΄) $3-(-2)=5$,

δ΄) $\sqrt[3]{(\alpha\beta)^3 \cdot (\alpha\beta)^2} = \alpha\beta \cdot \sqrt[3]{(\alpha\beta)^2}$, ε΄) $\sqrt[3]{(\chi\psi)^3 \cdot (\chi\psi)} = \chi\psi \cdot \sqrt[3]{\chi\psi}$.

στ΄) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 7} + \sqrt{2^2 \cdot (-2)} = 2 \cdot \sqrt[3]{7} + 2\sqrt{-2}$, ζ΄) $\sqrt{(5^2) \cdot 5} - \sqrt{64} =$

$= +5\sqrt{5} - 8$, η΄) $3^2 - (\sqrt{2})^2 = 9 - 2 = 7$, θ΄) $\sqrt[3]{\alpha^3 \cdot \frac{1}{\alpha}} = \alpha \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{\alpha}}$.

320₁ α΄) $\sqrt[3]{\alpha^5} = \sqrt[3]{\alpha^3 \cdot \alpha^2} = \alpha \cdot \sqrt[3]{\alpha^2}$, $\sqrt[3]{\alpha^6} = \alpha^2$, $\sqrt[5]{\alpha^{25}} = \alpha^5$,

$\sqrt[\nu]{\alpha^{2\nu}} = \alpha^2$, $\sqrt{5^4} = 5^2$, $\sqrt[3]{4^5} = \sqrt[3]{2^{10}} = \sqrt[3]{2^9 \cdot 2} = 2^3 \cdot \sqrt[3]{2}$.

β΄) $\sqrt[5]{9^{10}} = 9^2 = 3^4$, $\sqrt[11]{8^{22}} = 8^2$, $\sqrt[\nu]{\alpha^{2\nu}} = \alpha^2$, $\sqrt[2\nu+1]{\alpha^{4\nu+2}} = \alpha^2$.

γ΄) $\sqrt[3]{64^2} = \sqrt[3]{(8^2)^2} = \sqrt[3]{(2^6)^2} = \sqrt[3]{2^{12}} = 2^4$, $\sqrt[9]{125^4} = \sqrt[9]{5^{12}} =$

$= \sqrt[3]{5^4} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 5} = 5 \cdot \sqrt[3]{5}$ $\sqrt[5]{\pm 32^3} = \sqrt[5]{\pm 2^{15}} = \pm 2^3$.

δ΄) $\sqrt{(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)^3} = \sqrt{(\alpha-\beta)^6} = (\alpha - \beta)^3$

$\sqrt{(\alpha^2 + 4\alpha\beta + 4\beta^2)^4} = \sqrt{(\alpha + 2\beta)^8} = (\alpha + 2\beta)^4$

$\sqrt{(4\alpha^2 + 20\alpha\beta + 25\beta^2)^6} = \sqrt{(2\alpha + 5\beta)^{12}} = (2\alpha + 5\beta)^6$.

ε΄) $\sqrt[3]{(\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3)^2} = \sqrt[3]{(\alpha+\beta)^6} = (\alpha+\beta)^2$

$\sqrt{(8\alpha^3 + 12\alpha^2\beta + 6\alpha\beta^2 + \beta^3)^3} = \sqrt{(2\alpha+\beta)^{3.3}} = \sqrt{(2\alpha+\beta)^9}$.

στ΄) $7 : \sqrt{7} = \sqrt{7^2} : \sqrt{7} = (\sqrt{7})^2 : \sqrt{7} = \sqrt{7}$.

$11 : \sqrt{11} = (\sqrt{11})^2 : \sqrt{11} = \sqrt{11}$, $\alpha : \sqrt{\alpha} = (\sqrt{\alpha})^2 : \sqrt{\alpha} = \sqrt{\alpha}$

$(\alpha+\beta) : \sqrt{\alpha+\beta} = (\sqrt{\alpha+\beta})^2 : \sqrt{\alpha+\beta} = \sqrt{\alpha+\beta}$, $(\alpha-1) : \sqrt{\alpha-1} = \sqrt{\alpha-1}$.

321. α′) $\sqrt{96} + 3 \cdot \sqrt{4.6} - \sqrt{6} = 3\sqrt{6} + 6\sqrt{6} - \sqrt{6} = 8\sqrt{6}$

β′) $\sqrt{45\alpha^3} + \sqrt{125\alpha^3} - \sqrt{320\alpha^3} = 3\alpha\sqrt{5\alpha} + \boxed{5\alpha\sqrt{5\alpha}} - 8\alpha\sqrt{5\alpha} = 0$

γ′) $$\frac{11^2}{7} \cdot \sqrt{5} + \frac{12 \cdot 5 \cdot \sqrt{5}}{7 \cdot 13^2 \cdot \sqrt{7}} \cdot 13^2 - \frac{11 \cdot 13}{5\sqrt{7}} =$$

$$= \frac{11^2\sqrt{5}}{7} + \frac{12 \cdot 5 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{7}}{7 \cdot 7} - \frac{11 \cdot 13 \cdot \sqrt{7}}{5 \cdot 7}$$

322. α′) $\sqrt{\chi^2(\chi-1)}$, β′) $\sqrt{3^2 \cdot 5}$, γ′) $\sqrt{\alpha^2 \cdot \frac{\beta}{\alpha}} = \sqrt{\alpha\beta}$

δ′) $\sqrt{2^2 \cdot \frac{6}{2}} = \sqrt{12}$ ε′) $\sqrt{7^2 \cdot \frac{1}{49}} = \sqrt{1} = 1$.

323. α′) $\sqrt[6]{\alpha^3}$, $\sqrt[6]{\alpha^2}$, $\sqrt[6]{\alpha}$ β′) $\sqrt[12]{\alpha^3}$, $\sqrt[12]{\beta^2}$, $\sqrt[12]{\gamma}$ γ′) $\sqrt[6]{\alpha^2}$, $\sqrt[6]{\beta}$, $\sqrt[6]{\gamma^3}$.

324. α′) $\sqrt[4]{2^4 \cdot 2^2} = 2 \cdot \sqrt[4]{2^2}$, β′) $\sqrt[6]{48} = \sqrt[6]{2^4 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{6} =$
$= \sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{6}$.

γ′) $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2$ δ′) $\sqrt[2\mu]{\alpha^\mu} = \sqrt{\alpha}$.

325. α′) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{100} = 10$, β′) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} = 2$.

γ′) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{30} = \sqrt[12]{5^4} \cdot \sqrt[12]{30^3} = \sqrt[12]{5^4 \cdot 30^3}$.

δ′) $\sqrt[4]{\alpha^2} \cdot \sqrt[5]{\alpha} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt[5]{\alpha} = \sqrt[10]{\alpha^5} \cdot \sqrt[10]{\alpha^2} = \sqrt[10]{\alpha^7}$.

ε′) $\sqrt[3]{\chi\psi} \cdot \sqrt{\frac{\chi}{\psi}} = \sqrt[6]{\chi^2\psi^2} \cdot \sqrt[6]{\frac{\chi^3}{\psi^3}} = \sqrt[6]{\frac{\chi^5}{\psi}}$.

στ′) $\sqrt[3]{2\alpha} \cdot \sqrt[4]{5\alpha\beta} \cdot \sqrt[3]{3\beta} = \sqrt[3]{6\alpha\beta} \cdot \sqrt[4]{5\alpha\beta} = \sqrt[12]{6^4\alpha^4\beta^4} \cdot \sqrt[12]{5^3\alpha^3\beta^3} =$
$= \sqrt[12]{6^4 \cdot 5^3 \cdot \alpha^7 \cdot \beta^7}$.

ζ′) $\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{5^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{5^3 \cdot 2^2} = \sqrt[6]{500}$

326. α′) $\sqrt{24} : \sqrt{2} = \sqrt{24 : 2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

β′) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{7000} : \sqrt[3]{875} = 10 \cdot \sqrt[3]{7} : 5 \cdot \sqrt[3]{7} = 2$.

γ′) $\sqrt[3]{\chi^4} : \sqrt[3]{\chi} = \sqrt[3]{\chi^3} = \chi$, δ′) $\sqrt[3]{6\alpha^4} : \sqrt[3]{2\alpha} = \sqrt[3]{3\alpha^3} = \alpha \cdot \sqrt[3]{3}$.

327. α′) $(\sqrt{\alpha})^2 + (\sqrt{\beta})^2 + (\sqrt{\gamma})^2 + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} - 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\gamma} - 2\sqrt{\beta}\sqrt{\gamma} =$
$= \alpha + \beta + \gamma + 2(\sqrt{\alpha\beta} - \sqrt{\alpha\gamma} - \sqrt{\beta\gamma})$.

β′) $2\sqrt{\chi} \cdot \sqrt[3]{\chi} + 8 \cdot \sqrt[3]{\chi^2}\sqrt[3]{\chi} = 2 \cdot \sqrt[6]{\chi^3} \cdot \sqrt[6]{\chi^2} + 8 \cdot \sqrt[3]{\chi^3} = 2 \cdot \sqrt[6]{\chi^5} + 8\chi$.

γ′) $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt[4]{\alpha} - \sqrt[4]{\alpha}\sqrt[4]{\alpha} = \sqrt[4]{\alpha^3} + \sqrt[12]{\alpha^7} - \sqrt{\alpha}$.

328. α') $\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, β') $\frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}+3}{3}$

γ') $\frac{\alpha\cdot\sqrt[3]{\beta^2}}{\sqrt[3]{\beta}\cdot\sqrt[3]{\beta^2}}=\frac{\alpha\cdot\sqrt[3]{\beta^2}}{\sqrt[3]{\beta^3}}=\frac{\alpha\cdot\sqrt[3]{\beta^2}}{\beta}$, δ') $\frac{4\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3^2}}=\frac{4\cdot\sqrt[6]{2^3\cdot3^4}}{3}$.

ε') $\frac{(\chi-\sqrt{\chi^2-1})(\chi-\sqrt{\chi^2-1})}{(\chi+\sqrt{\chi^2-1})(\chi-\sqrt{\chi^2-1})}=\frac{(\chi-\sqrt{\chi^2-1})^2}{\chi^2-(\chi^2-1)}=(\chi-\sqrt{\chi^2-1})^2$.

Δυνάμεις μὲ ἐκθέτας κλασματικούς.

329. α') $\alpha^{3\frac{1}{2}}=\alpha^{\frac{7}{2}}=\sqrt{\alpha^7}$, $\boxed{\text{β') } \alpha^{4\frac{1}{2}}=\sqrt{\alpha^9}}$, γ') $\alpha^{-\frac{3}{8}}=\frac{1}{\alpha^{\frac{3}{8}}}=$

$=\frac{1}{\sqrt[8]{\alpha^3}}$, δ') $32^{-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{12}}=32^{-\frac{1}{16}}=\frac{1}{32^{\frac{1}{16}}}=\frac{1}{\sqrt[16]{32}}=\frac{1}{\sqrt[16]{2^5}}$.

330. α') $3\cdot3-3\cdot2^{-\frac{1}{2}}-3\cdot2^{-\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}=9-3\left(2^{-\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{3}}\right)+$

$+2^{-\frac{5}{6}}=9-3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)+\frac{1}{\sqrt[6]{2^5}}=9-3\cdot\left(\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}}\right)+\frac{1}{\sqrt[6]{2^5}}=$

$=9-3\cdot\left(\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2^5}}\right)+\frac{1}{\sqrt[6]{2^5}}$.

β') $\left(\alpha+\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)\cdot\left(\alpha-\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)=\alpha^2-\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)^2=\alpha^2-\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha^2\beta-1}{\beta}$

γ') $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{2}-$

$-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

δ') $\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^2+\left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^2+1^2+2\cdot2^{-\frac{1}{2}}\cdot3^{-\frac{1}{2}}+2\cdot2^{-\frac{1}{2}}\cdot1+2\cdot3^{-\frac{1}{2}}\cdot1=$

$=2^{-1}+3^{-1}+1+2^{\frac{1}{2}}\cdot3^{-\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}+2\cdot3^{-\frac{1}{2}}=$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\sqrt{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}=1\frac{5}{6}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\sqrt{2}$

ε′) $\alpha^{0,8+1,4-0,2}=\alpha^2$, στ′) $\chi^{\frac{3}{4}-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\chi^{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}=\chi^{\frac{17}{12}}=\sqrt[12]{\chi^{17}}=\chi\cdot\sqrt[12]{\chi^5}$.

ζ′) $\chi^{-\frac{2}{3}-\frac{4}{5}}=\chi^{-\frac{22}{15}}=\dfrac{1}{\sqrt[15]{\chi^{22}}}=\dfrac{1}{\chi\cdot\sqrt[15]{\chi^7}}$.

η′) $\alpha^{\frac{1}{4,2}+0,8}=\alpha^{\frac{5}{21}+\frac{4}{5}}=\alpha^{\frac{109}{105}}$

θ′) $\alpha^{-1,4-1,2}=\alpha^{-2,6}=\alpha^{-\frac{13}{5}}=1:\alpha^{\frac{13}{5}}$.

ι′) $(2^3)^{\frac{4}{5}}\cdot(2^2)^{-\frac{1}{5}}=2^{\frac{12}{5}}\cdot2^{-\frac{2}{5}}=2^{\frac{12}{5}-\frac{2}{5}}=2^{\frac{10}{5}}=2^2$.

331. α′) $\alpha^{-\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{\alpha}}$, β′) $\alpha^{-\frac{6}{12}}=\alpha^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

γ′) $\alpha^{\frac{2}{3}}\cdot\alpha^{-\frac{3}{4}}=\alpha^{\frac{2}{3}-\frac{3}{4}}=\alpha^{-\frac{1}{12}}=\dfrac{1}{\sqrt[12]{\alpha}}$.

δ′) $25^{\frac{7}{2}}\cdot16^{-\frac{13}{4}}=(5^2)^{\frac{7}{2}}\cdot(2^4)^{-\frac{13}{4}}=5^7\cdot2^{-13}=5^7:2^{13}$.

ε′) $(7^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot(3^2)^{-\frac{11}{2}}=7^{-5}\cdot3^{-11}=1:7^5\cdot3^{11}$.

στ′) $(7^2)^{-\frac{7}{2}}\cdot5^{-\frac{13}{3}}:(2^8)^{\frac{13}{4}}\cdot(2^8)^{-\frac{9}{2}}=7^{-7}\cdot5^{-\frac{13}{3}}:2^{26}\cdot2^{-36}=$

$=7^{-7}\cdot5^{-\frac{13}{3}}:2^{-10}=2^{10}:7^7\cdot5^{\frac{13}{3}}$.

ζ′) $\dfrac{(6^2)^{-\frac{11}{2}}+(13^2)^{-\frac{9}{2}}}{(2^3)^{-\frac{1}{3}}+(3^3)^{-\frac{13}{3}}}=\dfrac{6^{-11}+13^{-9}}{2^{-1}+3^{-13}}$

η′) $\dfrac{(5^3)^{-\frac{7}{3}}+(7^2)^{\frac{13}{2}}}{(12^2)^{-\frac{7}{2}}-(2^6)^{\frac{5}{2}}}=\dfrac{5^{-7}+7^{13}}{12^{-7}-2^{15}}$.

332. α′) $\dfrac{(\chi+\sqrt{\psi})(\chi+\sqrt{\psi})}{(\chi-\sqrt{\psi})(\chi+\sqrt{\psi})}=\dfrac{(\chi+\sqrt{\psi})^2}{\chi^2-\psi}$.

β′) $\dfrac{(\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha})(\alpha-\sqrt{\beta})}{\alpha^2-\beta}$ γ′) $\dfrac{\chi(\sqrt{\psi}+\sqrt{\chi})}{\psi-\chi}$.

δ′) $\dfrac{(\sqrt{\alpha+\beta}+\sqrt{\alpha-\beta})^2}{(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)}=\dfrac{(\sqrt{\alpha+\beta}+\sqrt{\alpha-\beta})^2}{2\beta}=\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\beta}$.

$\dfrac{a^2-b^2}{2b}$

ε') $\dfrac{(4\sqrt{5}-20)\left(\frac{3}{2}\sqrt{1}+5\sqrt{-\frac{1}{2}}\right)}{\frac{9}{4}\cdot(1)-25\left(-\frac{1}{2}\right)}$ στ') $\dfrac{(5-\sqrt{-2})(1-\sqrt{-2})}{1-(-2)}$

ζ') $\dfrac{(8\sqrt{-12}-12\sqrt{-6})\sqrt{-3})}{4(\sqrt{-3})(\sqrt{-3})}=\dfrac{(8\sqrt{-12}-12\sqrt{-6})(\sqrt{-3})}{4\cdot(-3)}$.

Σημείωσις. Ἐπειδὴ $\sqrt{-3}$ δὲν ὑπάρχει ἢ ἄλλως ἐπειδὴ ἡ $\sqrt{-3}$ δὲν εἶναι πραγματική, ἡ ἰδιότης τῆς § 151 δὲν δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ. Οὕτω δὲν δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-3}=\sqrt{(-3)(-3)}=\sqrt{9}=\pm 3$. Οὕτως εἶναι $(\sqrt{-2})^2=-2$ καὶ ὄχι $(\sqrt{-2})^2=\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=\pm 2$.

η') $\dfrac{6(1-\sqrt{-2})}{1-(-2)}=\dfrac{6(1-\sqrt{-2})}{3}=2(1-(\sqrt{-2})$.

Περὶ τῆς ρίζης μονωνύμων.

333. α') $8\alpha^2\gamma\beta^4$ β') $\dfrac{2}{3}\cdot\alpha\beta\sqrt{\gamma}$ γ') $\dfrac{\beta\gamma\delta^2\sqrt{\beta}\cdot\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{\delta}}{2\alpha^2}=\dfrac{\beta\gamma\delta^2\sqrt{\beta\gamma\delta}}{2\alpha^2}$

δ') $\dfrac{4\sqrt{2}\,\alpha\beta^2\gamma}{3\sqrt{5}\,\delta^2\varepsilon^3}$ ε') $\dfrac{5\sqrt{5}}{8}\alpha\beta^2\gamma^3\sqrt{\alpha}$ στ') $\dfrac{3\chi\psi^2}{8\alpha^2\beta}$ ζ') $\dfrac{\sqrt{3\alpha\beta\eta^3\sqrt{\beta\gamma}}}{4\varepsilon\delta\vartheta^4\sqrt{\varepsilon\delta}}$.

334. Σκεπτόμενοι ὡς εἰς τὴν § 156 συνάγομεν ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν κυβικὴν ρίζαν ἀκεραίου μονωνύμου, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τοὺς ἐκθέτας τῶν παραγόντων αὐτοῦ διὰ τοῦ 3. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι:

α') $\sqrt[3]{2^3\alpha^6\beta^9\gamma^9}=2\alpha^2\beta^3\gamma^3$. Ὁμοίως δὲ εὑρίσκομεν ὅτι αἱ κυβικαὶ ρίζαι τῶν ἄλλων μονωνύμων εἶναι:

β') $-4\alpha^2\beta\gamma^3$ γ') $-\dfrac{2\alpha\beta\gamma^2\cdot\sqrt[3]{\beta^2}}{5\delta\sqrt{\varepsilon^2}}$ δ') $\dfrac{2\alpha\gamma^2\cdot\sqrt[3]{\beta}}{3\beta\varepsilon\cdot\sqrt[3]{\beta\varepsilon}}=\dfrac{2\alpha\gamma^2}{3\beta\varepsilon\cdot\sqrt[3]{\varepsilon}}$.

Περὶ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

335. (333). Ἔστω ὅτι ὑπάρχει ἀριθμὸς δεκαδικὸς κοινὸς ἢ περιοδικός, ὅστις δύναται νὰ παρασταθῇ μὲ τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\dfrac{\lambda}{\mu}$, τοῦ ὁποίου ὁ κύβος ἰσοῦται μὲ 7. Ἤτοι ἔστω ὅτι $\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^3=7$, ἤτοι $\dfrac{\lambda^3}{\mu^3}=7$. Ἀλλ' ἡ ἰσότης αὕτη δεικνύει ὅτι τὸ $\lambda^3=\lambda.\lambda.\lambda.$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $\mu^3=\mu.\mu.\mu.$ καὶ ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι 7. Ἀλλ' ἵνα τὸ γινόμενον λ.λ.λ. εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ γινομένου μ.μ.μ. πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ γινόμενον λ.λ.λ. νὰ περιέχῃ τοὺς παράγοντας τοῦ μ.μ.μ. ἤτοι τὸ λ νὰ περιέχῃ τοὺς παράγοντας τοῦ μ. Ἀλλ' ἀφοῦ τὸ κλάσμα $\frac{\lambda}{\mu}$ εἶναι ἀνάγωγον οἱ ἀριθμοὶ λ καὶ μ οὐδένα ἔχουν κοινὸν παράγοντα. Ὥστε οὔτε ἀκέραιος, οὔτε κλασματικὸς ἐν γένει ἀριθμὸς ὑπάρχει τοῦ ὁποίου ὁ κύβος τὰ εἶναι ἴσος μὲ 7. Ὥστε ἡ $\sqrt[3]{7}$ εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος. Εὑρίσκεται δὲ κατὰ τὰ ἐν τῇ § 159 ὅτι $\sqrt[3]{7} = 1{,}912\ldots$ Κατὰ προσέγγισιν ὅμως χιλιοστοῦ λαμβάνεται $\sqrt[3]{7} = 1{,}913$. Βλέπε *πίνακας* λογαρίθμων (νέα ἔκδοσις) Χρ. Μπαρμπαστάθη σελ. 44.

336. Ἔστω α **ἀκέραιος θετικὸς ἀριθμὸς** ὅστις δὲν ἔχει νυοστὴν ρίζαν ἀκέραιον ἀριθμόν. Ἂς ἴδωμεν δὲ μήπως ἔχει τοιαύτην ρίζαν τὸ κλάσμα $\frac{\lambda}{\mu}$ τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν ἀνάγωγον. Ἤτοι ὑποθέτομεν ὅτι
$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^\nu = \alpha$, ἤτοι $\frac{\lambda^\nu}{\mu^\nu} = \alpha$ (ι). Σκεπτόμενοι ὅμως ὡς εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, **θὰ ἴδωμεν** ὅτι ὁ λ^ν δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ μ^ν. Ὥστε ἡ ἰσότης (1) εἶναι **ἀδύνατος**.

337. **α')** Εἶναι $\text{ὅρ}(3{,}567999\ldots) = \text{ὅρ}(3{,}567 + 0{,}000999\ldots) =$
$= \text{ὅρ}3{,}567 + \text{ὅρ}(0{,}000999\ldots)$ (§ 158,β').

Ἀλλὰ τὸ ὅριον τοῦ **σταθεροῦ ἀριθμοῦ** 3,567 **εἶναι** αὐτὸς οὗτος ὁ 3,567· ἐξ ἄλλου δὲ εἶναι $\text{ὅρ}0{,}000999\ldots = 0{,}001$ (§ 160). Ὅθεν
$\text{ὅρ}(3{,}567999\ldots) = 3{,}567 + 0{,}001 = 3{,}568$.

β) Εἶναι $18{,}1557\ldots > 18{,}145291\ldots$ διότι ὁ πρῶτος περιέχει τὰς μονάδας τοῦ δευτέρου **καὶ ἄλλας ἀκόμη**.

338. Εἶναι $3{,}14124 + 0{,}68456 + 1{,}72354 + 12{,}53652 = 18{,}08586$. Ὥστε τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι 18,0859.

339. Εἶναι [Πίνακες λογαρίθμων (νέα ἔκδοσις) Χρ. Μπαρμπαστάθη, σελὶς 43] $\sqrt{19} = 4{,}35889\ldots$ καὶ $\sqrt{3} = 1{,}73205\ldots$ Ὥστε εἶναι: $\sqrt{19} + \sqrt{3} = 4{,}359 + 1{,}732 = 6{,}091$ **καὶ** $\sqrt{19} - \sqrt{3} = 2{,}627$.

340. Εἶναι $-2{,}8297$.

341. Εἶναι $\sqrt{5} - \sqrt{2} = 2{,}236 - 1{,}414 = 0{,}822$
καὶ $\sqrt{2} - \sqrt{7} = 1{,}414 - 2{,}646 = -1{,}232$.

Περὶ φανταστικῶν καὶ μιγάδων ἀριθμῶν.

Ἀρχικῶς οἱ φανταστικοὶ ἀριθμοὶ ἐθεωροῦντο, ὡς ***«ψευδεῖς», «σοφιστικοί», «ἀδύνατοι»*** ἀριθμοί. Ἀργότερον ὅμως διὰ τῶν ἐργασιῶν διασήμων μαθηματικῶν **ἀπεδείχθη** ἡ ἐξαιρετικὴ χρησιμότης αὐτῶν τόσον εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν μαθηματικῶν ἐπιστημῶν, ὅσον καὶ εἰς πρακτικὰς ἐφαρμογὰς **αὐτῶν**.

Κατωτέρω δίδομεν πίνακα τύπων σχετικῶν μὲ τοὺς φανταστικοὺς καὶ μιγάδας ἀριθμοὺς καὶ τὰς πράξεις ἐπ' αὐτῶν.

$$i = \sqrt{-1}, \qquad \sqrt{-\alpha} = i\sqrt{\alpha}$$

$i^1=i, \quad i^2=-1, \quad i^3=-i, \quad i^4=+1$ κ.ο.κ. γενικῶς δὲ

$$i^{4\nu}=+1, \quad i^{4\nu+1}=i, \quad i^{4\nu+2}=-1, \quad i^{4\nu+3}=-i$$

ὅπου ν ἀκέραιος θετικὸς ἀριθμός.

$$i^{-1}=-i, \quad i^{-\nu}=(-i)^{\nu}, \quad i^0=1$$

$$(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$$

$$(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i$$

$$(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\beta\gamma+\alpha\delta)i$$

$$(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=\alpha^2+\beta^2$$

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$$

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma-\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)}{(\gamma-\delta i)(\gamma+\delta i)}=\frac{\alpha\gamma-\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\gamma^2+\delta^2}i$$

$$\frac{\alpha+\beta i}{\alpha-\beta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\alpha+\beta i)}{(\alpha-\beta i)(\alpha+\beta i)}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}i$$

Ἀσκήσεις. ***342.*** α΄) Γράφομεν $2-0{,}74i=(2 \cdot -0{,}74)$. Ἡ γραφὴ δὲ αὕτη σημαίνει ὅτι ὁ μιγὰς ἀριθμὸς παριστάνεται μὲ τὸ σημεῖον, ὅπερ ἔχει τετμημένην 2 καὶ τεταγμένην $-0{,}74$ Καὶ τὸ εὑρίσκομεν ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τὴν § 170.

Ὁμοίως γράφομεν β΄) $5+3i=(5 \cdot 3)$, γ΄) $6-3i=(6 \cdot -3)$,

δ΄) $-0{,}75-0{,}62i=(-0{,}75 \cdot -0{,}62)$, ε΄) $2+4i=(2 \cdot 4)$

στ΄) $3-4i=(3 \cdot -4)$, ζ΄) $2-0{,}64i=(2 \cdot -0{,}64)$,

η΄) $5+2i=(5 \cdot 2)$, θ΄) $-6-3i=(-6 \cdot -3)$.

343. $(2-0{,}74i)+(5+3i)=(2+5)+(3-0{,}74)i=7+2{,}26i$

$(2-0{,}74i)-(5+3i)=(2-5)-(-0{,}74-3)i=-3+3{,}74i$

$(2-0{,}74i)(5+3i)=[2\cdot5-(-0{,}74)\cdot3]+[(-0{,}74)\cdot5+2\cdot3]i=12{,}22+2{,}30i.$

$$\frac{2-0{,}74i}{5+3i}=\frac{(2-0{,}74i)(5-3i)}{(5+3i)(5-3i)}=\frac{7{,}78-9{,}70i}{5^2+3^2}=\frac{7{,}78-9{,}70i}{34} \text{ κ.ο.κ.}$$

344. α΄) $(5+3i)\cdot(7+3i)=(35-9)+(21+15)i=26+36i.$

β΄) $(2+2i)^2=2^2+2\cdot2\cdot2i+2^2i^2=4+8i-4=8i.$

γ΄) $(2-7i)(9-2i)=(2\cdot9-7\cdot2)-(7\cdot9+2\cdot2)i=4-67i.$

δ΄) $(6+7i)(6-7i)=6^2+7^2=85.$

345. α΄) $(11+8i)(11-8i)=11^2+8^2=185.$

β΄) $(14+15i)\cdot(14-15i)=14^2+15^2=421.$

γ΄) $(3+i\sqrt{2})(4-3i\sqrt{2})=3\cdot4+4i\sqrt{2}-9i\sqrt{2}-3\cdot2\cdot i^2=18-5i\sqrt{2}.$

δ΄) $$\frac{8-7i\sqrt{3}}{5+4i\sqrt{3}}=\frac{(8-7i\sqrt{3})(5-4i\sqrt{3})}{(5+4i\sqrt{3})(5-4i\sqrt{3})}=\frac{(40-84)-(35\sqrt{3}+32\sqrt{3})i}{5^2+(4\sqrt{3})^2}=$$

$$=\frac{-44-67i\sqrt{3}}{73}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΠΕΡΙ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\gamma=0$.

Τύποι : $\alpha\chi^2+\gamma=0$, $\varrho_1=+\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$, $\varrho_2=-\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$

$\chi^2+\beta=0$, $\varrho_1=+\sqrt{-\beta}$, $\varrho_2=-\sqrt{-\beta}$.

Ἀσκήσεις. *346.* α') Ἔχομεν $4\chi^2-\chi^2=6+3$ καὶ $3\chi^2=9$, ἤτοι $\chi^2=3$. Ὅθεν $\chi=\pm\sqrt{3}$, ἤτοι $\varrho_1=\sqrt{3}$ καὶ $\varrho_2=-\sqrt{3}$.

Ἐπαλήθευσις. 1) Μὲ τὴν ρίζαν $\varrho_1=\sqrt{3}$. Τότε εἶναι $4\cdot(\sqrt{3})^2-3=4\cdot3-3=12-3=9$ καὶ $(\sqrt{3})^2+6=3+6=9$.

2) Μὲ τὴν ρίζαν $-\sqrt{3}$. Τότε εἶναι $4\cdot(-\sqrt{3})^2-3=4\cdot3-3=9$ καὶ $(-\sqrt{3})^2+6=3+6=9$.

β') $9\chi^2-3\chi^2=15+0{,}2$, ἤτοι $6\chi^2=15{,}2$, $\chi^2=15{,}2/6=7{,}6/3$. Ὅθεν $\chi=\pm\sqrt{7{,}6/3}$

Ἐπαλήθευσις. Εἶναι $9\cdot(\pm\sqrt{7{,}6/3})^2-0{,}2=9\cdot7{,}6/3-0{,}2=3\cdot7{,}6-0{,}2=$ $=22{,}8-0{,}2=22{,}6$ καὶ $3\cdot(\pm\sqrt{7{,}6/3})^2+15=3\cdot7{,}6/3+15=7{,}6+15=22{,}6$.

γ') Ἀπαλείφοντες τοὺς παρονομαστὰς εὑρίσκομεν $9\chi^2+(\chi-9)\cdot4=4\chi$, $9\chi^2+4\chi-36=4\chi$, $9\chi^2-36=0$. Ὅθεν $\chi^2=36:9=4$ καὶ $\chi=\pm2$.

Ἐπαλήθευσις. 1) Διὰ $\chi=2$, ὁπότε ἔχομεν $\frac{9\cdot2}{4}+\frac{(2-9)}{2}=1$

2) Διὰ $\chi=-2$, ὁπότε $\frac{9\cdot(-2)}{4}+\frac{(-2-9)}{-2}=-\frac{9}{2}+\frac{11}{2}=\frac{2}{2}=1$.

347. α') Ἀπαλείφοντες τοὺς παρονομαστὰς εὑρίσκομεν, $6(\chi^2-\alpha^2)-15(\chi^2-\beta^2)=10$, $6\chi^2-6\alpha^2-15\chi^2+15\beta^2=10$, $15\beta^2-6\alpha^2-10=9\chi^2$, $\chi^2=(15\beta^2-6\alpha^2-10):9$ καὶ $\chi=\pm\sqrt{15\beta^2-6\alpha^2-10}:3$.

Ἐπαλήθευσις. $\left(\frac{15\beta^2-6\alpha^2-10}{9}-\alpha^2\right)\cdot\frac{1}{5}-\left(\frac{15\beta^2-6\alpha^2-10}{9}-\beta^2\right)\frac{1}{2}=$

$$=\frac{15\beta^2-6\alpha^2-10-9\alpha^2}{45}-\frac{15\beta^2-6\alpha^2-10-9\beta^2}{18}=\frac{3\beta^2-3\alpha^2-2}{9}-\frac{3\beta^2-3\alpha^2-5}{9}=$$

$$=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}.$$

β') $\chi^2-7^2=32$, $\chi^2=49+32$, $\chi^2=81$ καὶ $\chi=\pm9$.

Ἐπαλήθευσις. $(\pm9)^2-7^2=81-49=32$.

γ') $7\cdot(4\chi^2-5^2)=44$, $4\cdot7\chi^2-175=44$, $4\cdot7\chi^2=219$. Ὅθεν $\chi^2=\frac{219}{4\cdot7}$ καὶ

$$\chi=\pm\frac{\sqrt{219}}{2\sqrt{7}}.$$

'Επαλήθευσις. $7\cdot\left(4\cdot\frac{219}{4\,.\,7}-25\right)=7\cdot\left(\frac{219}{7}-25\right)=219-175=44.$

δ') $8\,.\left(9\chi^2-\frac{1}{4}\right)=946,\ 72\chi^2-2=946,\ \chi^2=948:72=79:6$ καὶ $\chi=\pm\sqrt{\frac{79}{6}}.$

'Επαλήθευσις. $8\left(9\,.\,\frac{79}{6}-\frac{1}{4}\right)=8\,.\left(3\,.\,\frac{79}{2}-\frac{1}{4}\right)=3\,.\,4\,.\,79-2=$
$=948-2=946.$

ε') $\chi^2=12+2\sqrt{11}\ [=2(6+\sqrt{11})]$ καὶ

$\chi=\pm\sqrt{12+2\sqrt{11}}\ [=\pm\sqrt{2}(\sqrt{6+\sqrt{11}})].$

'Επαλήθευσις. $(12+2\sqrt{11})-12-2\sqrt{11}=(12+2\sqrt{11})-(12+2\sqrt{11})=0.$

348. α') $\frac{4\chi^2}{9}-\frac{9\chi^2}{25}=171,\quad 100\chi^2-81\chi^2=171\,.\,9\,.\,25,$

$19\chi^2=19\,.\,9\,.\,9\,.\,25,\quad \chi^2=9\,.\,9\,.\,25$ καὶ $\chi=\pm(3\,.\,3\,.\,5)=\pm45.$

'Επαλήθευσις. $\frac{4\,.\,9\,.\,9\,.\,25}{9}-\frac{9\,.\,9\,.\,9\,.\,25}{25}=900-729=171.$

β') $(63+2\chi-\chi^2)+(63-2\chi-\chi^2)=76,\quad 2\chi^2=50,\quad \chi^2=25$ καὶ $\chi=\pm5.$

'Επαλήθευσις. 1) Διὰ $\chi=5$, ὁπότε ἔχομεν $12\cdot4+2\cdot14=48+28=76.$
2) Διὰ $\chi=-5$, ὁπότε λαμβάνομεν $2\cdot14+12\,.\,4=76.$

γ') 'Επειδὴ $1-\chi^4=(1-\chi^2)(1+\chi^2)$, ἔχομεν $\frac{1+\chi^2}{1-\chi^2}\cdot(1-\chi^4)-\frac{1}{1-\chi^4}\cdot(1-\chi^4)=$
$=\frac{1-\chi^2}{1+\chi^2}\cdot(1-\chi^4)$, ἤτοι $(1+\chi^2)^2-1=(1-\chi^2)^2,\quad 4\chi^2=1$ καὶ $\chi=\pm\frac{1}{2}\cdot$

'Επαλήθευσις. 'Επειδὴ $\chi^2=\frac{1}{4}$ καὶ $\chi^4=\frac{1}{16}$, εἶναι $\frac{1+\chi^2}{1-\chi^2}-\frac{1}{1-\chi^4}=$

$$=\frac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}-\frac{1}{1-\frac{1}{16}}=\frac{5}{3}-\frac{16}{15}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}\ \text{καὶ}\ \frac{1-\chi^2}{1+\chi^2}=\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{3}{5}\cdot$$

Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi=0$.

Τύποι : $\alpha\chi^2+\beta\chi=0,\quad \rho_1=0,\quad \rho_2=-\frac{\beta}{\alpha},$

$\chi^2+\gamma\chi=0,\quad \rho_1=0,\quad \rho_2=-\gamma.$

'Ασκήσεις. ***349.*** α') $6\chi^2+7\chi^2=12\chi.\quad 13\chi^2-12\chi=0,\quad \chi(13\chi-12)=0.$
Ὅθεν $\chi=0$ ἢ $13\chi-12=0$, ἤτοι $\chi=12/13.$

'Επαλήθευσις. Διὰ $\chi=0$ εἶναι $0=0$ καὶ διὰ $\chi=12/13$ εἶναι

$6\chi^2+7\chi^2=6\cdot\frac{12^2}{13^2}+7\cdot\frac{12^2}{13^2}=13\cdot\frac{12^2}{13^2}=\frac{12^2}{13}$ καὶ $12\chi=12\cdot\frac{12}{13}=\frac{12^2}{13}$

β') $\frac{3}{4}\chi^2 = \frac{6\chi}{3} = 2\chi$, $\frac{3}{4}\chi^2 - 2\chi = 0$, $\chi\left(\frac{3}{4}\chi - 2\right) = 0$ Ὅθεν $\chi = 0$ ἢ $\frac{3\chi}{4} - 2 = 0$, ἤτοι $\chi = 8/3$.

Ἐπαλήθευσις. Διὰ $\chi = 0$ εἶναι $0 = 0$ καὶ διὰ $\chi = 8/3$ εἶναι $3/4 \cdot \chi^2 = 3/4 \cdot 8^2/3^2 = 16/3$ καὶ $2\chi = 2 \cdot 8/3 = 16/3$.

γ') $\frac{\chi^2}{\alpha} + \frac{\chi}{\alpha} = \frac{\chi^2}{\alpha\beta} + \frac{\chi}{\beta}$, $\beta\chi^2 - \chi^2 = \alpha\chi - \beta\chi$, $\chi^2(\beta - 1) = \chi(\alpha - \beta)$, $\chi^2(\beta-1) - \chi(\alpha - \beta) = 0$, $\chi[\chi(\beta - 1) - (\alpha - \beta)] = 0$. Ὅθεν $\chi = 0$ ἢ $\chi(\beta - 1) - (\alpha - \beta) = 0$ ἤτοι $\chi = \frac{\alpha - \beta}{\beta - 1}$.

Ἐπαλήθευσις. Διὰ $\chi = 0$ εἶναι $0 = 0$ καὶ διὰ $\chi = \frac{\alpha - \beta}{\beta - 1}$ εἶναι

$$\frac{\chi^2}{\alpha} + \frac{\chi}{\alpha} = \frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha(\beta-1)^2} + \frac{(\alpha-\beta)}{\alpha(\beta-1)} = \frac{(\alpha-\beta)^2 + (\alpha-\beta)(\beta-1)}{\alpha(\beta-1)^2} =$$

$$\frac{(\alpha-\beta)[\alpha-\beta+\beta-1]}{\alpha(\beta-1)^2} = \frac{(\alpha-\beta)(\alpha-1)}{\alpha(\beta-1)^2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\chi^2}{\alpha\beta} + \frac{\chi}{\beta} = \frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha\beta(\beta-1)^2} +$$

$$+ \frac{(\alpha-\beta)}{\beta(\beta-1)} = \frac{(\alpha-\beta)^2 + \alpha(\alpha-\beta)(\beta-1)}{\alpha\beta(\beta-1)^2} = \frac{(\alpha-\beta)[(\alpha-\beta) + \alpha(\beta-1)]}{\alpha\beta(\beta-1)^2} =$$

$$= \frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\beta+\alpha\beta-\alpha)}{\alpha\beta(\beta-1)^2} = \frac{(\alpha-\beta)\cdot\beta(\alpha-1)}{\alpha\beta(\beta-1)^2} = \frac{(\alpha-\beta)(\alpha-1)}{\alpha(\beta-1)^2}.$$

δ') Ἀπαλείφοντες τοὺς παρονομαστὰς εὑρίσκομεν $\chi - (\alpha - \beta)\chi = (\alpha+\beta)(\chi^2 - \chi)$, $\chi - (\alpha - \beta)\chi = (\alpha+\beta)\chi^2 - (\alpha+\beta)\chi$, $(\alpha+\beta)\chi^2 - (\alpha+\beta)\chi + (\alpha-\beta)\chi - \chi = 0$, $(\alpha+\beta)\chi^2 - [(\alpha+\beta) - (\alpha-\beta) + 1]\chi = 0$, $(\alpha+\beta)\chi^2 - (2\beta+1)\chi = 0$, $\chi[(\alpha+\beta)\chi - (2\beta+1)] = 0$. Ὅθεν $\chi = 0$ ἢ $(\alpha+\beta)\chi - (2\beta+1) = 0$, ἤτοι $\chi = \frac{2\beta+1}{\alpha+\beta}$.

Ἐπαλήθευσις. Διὰ $\chi = 0$ εἶναι $0 = 0$ καὶ διὰ

$\chi = \frac{2\beta+1}{\alpha+\beta}$ εἶναι $\chi - (\alpha-\beta)\chi = \frac{2\beta+1}{\alpha+\beta} - \frac{(\alpha-\beta)(2\beta+1)}{\alpha+\beta} = \frac{(2\beta+1)(1-\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}$

καὶ $(\alpha+\beta)(\chi^2 - \chi) = (\alpha+\beta)\left[\frac{(2\beta+1)^2}{(\alpha+\beta)^2} - \frac{2\beta+1}{\alpha+\beta}\right] =$

$$= \frac{(\alpha+\beta)(2\beta+1)[(2\beta+1) - (\alpha+\beta)]}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{(2\beta+1)(1-\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}.$$

ε') Τὸ β^2 τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ 2ου μέλους νὰ διορθωθῇ εἰς β^4. Τότε δὲ ἔχομεν: $\frac{[(\alpha-\chi)^2 + (\chi-\beta)^2] \cdot [(\alpha-\chi)^2 - (\chi-\beta)^2]}{(\alpha-\chi)^2 - (\chi-\beta)^2} = \frac{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha^2-\beta^2}$,

ἤτοι: $(\alpha-\chi)^2 + (\chi-\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$ ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν: $\chi[\chi - (\alpha+\beta)] = 0$. Ὅθεν $\chi = 0$ ἢ $\chi - (\alpha+\beta) = 0$ ἤτοι $\chi = \alpha+\beta$.

Ἐπαλήθευσις. Τὸ $\alpha^{ον}$ μέλος τῆς δοθείσης ἐξισώσεως διὰ $\chi = 0$, γίνεται

$\frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha^2-\beta^2}=\beta^{ον}$ μέλος καὶ διὰ $\chi=\alpha+\beta$, γίνεται $\frac{(\alpha-\alpha-\beta)^4-(\alpha+\beta-\beta)^4}{(\alpha-\alpha-\beta)^2-(\alpha+\beta-\beta)^2}=$
$=\frac{(-\beta)^4-\alpha^4}{(-\beta)^2-\alpha^2}=\frac{\beta^4-\alpha^4}{\beta^2-\alpha^2}=\frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha^2-\beta^2}=\beta^{ον}$ μέλ.

350. α') Ἔχομεν $3,3\chi^2-0,8\chi=-6,8\chi$ ἤτοι $3,3\chi^2+6\chi=0$ ἢ $\chi(3,3\chi+6)=0$. Ὅθεν $\chi=0$ ἢ $3,3\chi+6=0$ ἤτοι $\chi=-6/3,3=-60/33=-20/11$.

Ἐπαλήθευσις. Διὰ $\chi=0$ εἶναι $0=0$ καὶ διὰ $\chi=-20/11$ εἶναι

$$3,3\chi^2-0,8\chi=\frac{33}{10}\cdot\frac{20^2}{11^2}+\frac{8}{10}\cdot\frac{20}{11}=\frac{3\cdot20^2+8\cdot20}{10\cdot11}=\frac{136}{11}\quad \text{καὶ}$$

$$-6,8\chi=\frac{68}{10}\cdot\frac{20}{11}=\frac{136}{11}.$$

β') $2,2\chi^2-8,4\chi=0$, $\chi(2,2\chi-8,4)=0$. Ὅθεν $\chi=0$ ἢ $2,2\chi-8,4=0$, ἤτοι $\chi=8,4/2,2=42/11$.

Ἐπαλήθευσις. Διὰ $\chi=0$ εἶναι $0=0$ καὶ διὰ $\chi=42/11$ εἶναι

$$2,2\chi^2-8,4\chi=\frac{22}{10}\cdot\frac{42^2}{11^2}-\frac{84}{10}\cdot\frac{42}{11}=\frac{2\cdot42^2-84\cdot42}{10\cdot11}=$$

$$=\frac{2\cdot42^2-2\cdot42\cdot42}{10\cdot11}=\frac{0}{10\cdot11}=0.$$

Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$.

Τύποι : $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0,\ \varrho_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha},\ \varrho_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ (1)

$\alpha\chi^2+2\beta\chi+\gamma=0,\ \varrho_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}{\alpha},\ \varrho_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}{\alpha}$ (2)

$\chi^2+\pi\chi+k=0,\ \varrho_1=-\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-4k},\ \varrho_2=-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-4k}$ (3)

Ἀσκήσεις. *Ὁμὰς πρώτη. 351.* α') Εἶναι $3\chi^2-3\chi-8=0$ καὶ (τύπος 1)

$$\chi=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4\cdot3\cdot(-8)}}{2\cdot3}=\frac{3\pm\sqrt{9+96}}{6}=\frac{3\pm\sqrt{105}}{6}.$$

Ὅθεν $\varrho_1=\frac{3+\sqrt{105}}{6},\quad \varrho_2=\frac{3-\sqrt{105}}{6}.$

Ἐπαλήθευσις τῆς α' ῥίζης ϱ_1.

$$3\cdot\left(\frac{3+\sqrt{105}}{6}\right)^2-3\cdot\left(\frac{3+\sqrt{105}}{6}\right)=3\cdot\frac{9+6\sqrt{105}+105}{36}-\frac{3+\sqrt{105}}{2}=$$

$$=3\cdot3\cdot\frac{3+2\sqrt{105}+35}{36}-\frac{3+\sqrt{105}}{2}=$$

$$=\frac{3+2\sqrt{105}+35}{4}-\frac{6+2\sqrt{105}}{4}=\frac{38-6}{4}=8.$$

Ὁμοίως γίνεται καὶ ἡ ἐπαλήθευσις τῆς ρίζης ϱ_2.

β΄) Εἶναι $9\chi^2-2\chi-75=0$ καὶ (τύπος 2)

$$\chi=\frac{1\pm\sqrt{1^2+9\cdot75}}{9}=\frac{1\pm\sqrt{676}}{9}=\frac{1\pm26}{9}.$$

Ὅθεν $\varrho_1=\frac{1+26}{9}=3,\ \varrho_2=\frac{1-26}{9}=-\frac{25}{9}.$

Ἐπαλήθευσις τῆς ρίζης ϱ_2. Τότε τὸ α΄ μέλος ἰσοῦται μὲ

$$3\cdot\left(-\frac{25}{9}\right)^2-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{25}{9}\right)=3\cdot\frac{25^2}{81}+\frac{50}{27}=\frac{25^2+25\cdot2}{27}=\frac{25\cdot(25+2)}{27}=25.$$

γ΄) Ἔχομεν $4\chi^2-3\chi=12\chi+4,\ 4\chi^2-15\chi-4=0$

καὶ (τύπ. 1) $\chi=\frac{15\pm\sqrt{15^2+4\cdot4\cdot4}}{8}=\frac{15\pm\sqrt{289}}{8}=\frac{15\pm17}{8}.$

Ὅθεν $\varrho_1=\frac{15+17}{8}=4,\quad \varrho_2=\frac{15-17}{8}=-\frac{1}{4}.$

δ΄) Ἔχομεν $\chi=\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot2}}{2}=\frac{1\pm3}{2}$. Ὅθεν $\varrho_1=2$ καὶ $\varrho_2=-1$.

352. α΄) Ἔχομεν $\frac{1}{\chi^2}-\frac{12}{\chi}+27=0$, ἤτοι $27\chi^2-12\chi+1=0$ καὶ

$$\chi=\frac{6\pm\sqrt{36-27}}{27}=\frac{6\pm3}{27}=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}\quad ἢ\quad \frac{3}{27}=\frac{1}{9}.$$

β΄) Εἶναι $\frac{9}{\chi^2}-\frac{21}{\chi}+12=0,\ 12\chi^2-21\chi+9=0,\ 4\chi^2-7\chi+3=0.$

Ὅθεν $\chi=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{8}=\frac{7\pm1}{8}=1$ ἢ $\frac{3}{4}$.

γ΄) Τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι 0 ἐὰν εἷς τῶν παραγόντων του εἶναι 0. Ὥστε θὰ εἶναι ἢ $\chi-1=0$, ἤτοι $\chi=1$ ἢ $\chi-2=0$, ἤτοι $\chi=2$.

δ΄) Εἶναι $\chi^2=2\sqrt{3}\chi-3,\quad \chi^2-2\sqrt{3}\chi+3=0$ καὶ (τύπ. 2) $\chi=\sqrt{3}\pm$ $\pm\sqrt{3-3}=\sqrt{3}$, ἤτοι $\varrho_1=\varrho_2=\sqrt{3}$.

ε΄) Εἶναι $\chi=\frac{-\sqrt{17}\pm\sqrt{17-4\cdot\sqrt{3}\sqrt{5}}}{2\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{17}\pm\sqrt{17-4\sqrt{15}}}{2\sqrt{3}}.$

στ΄) Εἶναι $(\chi^2-2\chi+1)-(9\chi^2+48\chi+64)=4\chi^2+20\chi+25,\quad \chi^2-2\chi+1-$ $-9\chi^2-48\chi-64=4\chi^2+20\chi+25$, ἤτοι $12\chi^2+70\chi+88=0$ ἢ $6\chi^2+35\chi+44=0$

καὶ $\chi=\frac{35\pm\sqrt{35^2-4\cdot6\cdot44}}{12}=\frac{-35\pm\sqrt{1125-1056}}{12}=\frac{-35\pm\sqrt{169}}{12}=$

$=\frac{-35\pm13}{12}$. Ὅθεν $\varrho_1=\frac{-35+13}{12}=\frac{-22}{12}=-\frac{11}{6}$ καὶ

$\varrho^2=\frac{-35-13}{12}=-4.$

ζ') $36\chi^2-12\chi+1+9\chi^2+24\chi+16-(25\chi^2-4)=53$ ἤτοι

$20\chi^2+12\chi-32=0$ ἢ $5\chi^2+3\chi-8=0$ καὶ $\chi=\frac{-3\pm\sqrt{9+160}}{10}=\frac{-3\pm\sqrt{169}}{10}=$

Ὅθεν $\varrho_1=\frac{-3+13}{10}=1$, $\varrho_2=\frac{-3-13}{10}=-\frac{16}{10}=-\frac{8}{5}$.

η') Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται $\frac{1}{\chi^2}+\frac{1}{\chi(\chi-1)}-\frac{1}{(\chi-1)^2}=0$, ἐξ ἧς

$(\chi-1)^2+\chi(\chi-1)-\chi^2=0$, ἤτοι $\chi^2-2\chi+1+\chi^2-\chi-\chi^2=0$, ἢ $\chi^2-3\chi+1=0$.

Ὅθεν $\chi=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, ἤτοι $\varrho_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\varrho^2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

θ') Ἔχομεν $\frac{2\chi^2+8\chi}{2}-\frac{\chi^2}{4}=320$, ἐξ ἧς $3\chi^2+16\chi-1280=0$.

Ὅθεν (τυπ. 2) $\chi=\frac{-8\pm\sqrt{64+3\cdot1280}}{3}=\frac{-8\pm\sqrt{3904}}{3}=\frac{-8\pm\sqrt{64\cdot61}}{3}=$

$=\frac{-8\pm8\sqrt{61}}{3}$.

ι') Εἶναι $\chi^2-2(1+\sqrt{5})\chi+1=0$, $\chi=(1+\sqrt{5})\pm\sqrt{(1+\sqrt{5})^2-1}=$
$=(1+\sqrt{5})\pm\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

Ὁμὰς δευτέρα. 353. α') Εἶναι $\chi=\frac{-9\alpha\pm\sqrt{81\alpha^2+40\alpha^2}}{2}=$

$=\frac{-9\alpha\pm\sqrt{121\alpha^2}}{2}=\frac{-9\alpha\pm11\alpha}{2}$. Ὅθεν $\varrho_1=(-9\alpha+11\alpha):2=2\alpha:2=\alpha$,
$\varrho_2=(-9\alpha-11\alpha):2=-20\alpha:2=-10\alpha$.

β') Εἶναι $\chi=\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+3\alpha^2}=\alpha\pm\sqrt{4\alpha^2}=\alpha\pm2\alpha$, ἤτοι $\varrho_1=\alpha+2\alpha=3\alpha$,
$\varrho_2=\alpha-2\alpha=-\alpha$.

γ') Εἶναι $\chi^2-5\alpha\chi-50\alpha^2=0$, $\chi=(5\alpha\pm\sqrt{25\alpha^2+200\alpha^2}):2=$
$=(5\alpha\pm\sqrt{225\alpha^2}):2=(5\alpha\pm15\alpha):2$. Ὅθεν $\varrho_1=(5\alpha+15\alpha):2=20\alpha:2=10\alpha$
$\varrho_2=(5\alpha-15\alpha):2=-10\alpha:2=-5\alpha$.

δ') Εἶναι $\chi^2+\alpha\chi-\alpha^2\beta(\beta-1)=0$, $\chi=\frac{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+4\alpha^2\beta(\beta-1)}}{2}=$

$=\frac{-\alpha\pm\alpha\sqrt{1+4\beta^2-4\beta}}{2}=\frac{-\alpha\pm\alpha\sqrt{(2\beta-1)^2}}{2}=\frac{-\alpha\pm\alpha(2\beta-1)}{2}$.

Ὅθεν, $\varrho_1=\frac{-\alpha+\alpha(2\beta-1)}{2}=\alpha(\beta-1)$, $\varrho_2=\frac{-\alpha-\alpha(2\beta-1)}{2}=-\alpha\beta$.

ε') Εἶναι $\chi=(\alpha+8)\pm\sqrt{(\alpha+8)^2-32\alpha}=(\alpha+8)\pm\sqrt{\alpha^2+16\alpha+64-32\alpha}=$

$=(\alpha+8)\pm\sqrt{\alpha^2-16\alpha+64}=(\alpha+8)\pm\sqrt{(\alpha-8)^2}=(\alpha+8)\pm(\alpha-8)$.

Ὅθεν $\varrho_1=\alpha+8+\alpha-8=2\alpha$, $\varrho_2=\alpha+8-\alpha+8=16$.

στ') Εἶναι $\chi=(\alpha+\beta)\pm\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=(\alpha+\beta)\pm\sqrt{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}=$

$=(\alpha+\beta)\pm\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=(\alpha+\beta)\pm(\alpha-\beta)=2\alpha$ ἢ 2β.

ζ') Εἶναι $\chi^2-(\alpha+\beta+1)\chi+1=0$, $\chi=\left[(\alpha+\beta+1)\pm\sqrt{(\alpha+\beta+1)^2-4}\right]:2$.

η') Ἔχομεν $\dfrac{4\chi^2-4\chi\beta+\beta^2}{2\chi-\alpha+\beta}=\beta$, ἐξ ἧς $4\chi^2-4\chi\beta+\beta^2=2\beta\chi-\alpha\beta+\beta^2$, ἤτοι $4\chi^2-6\beta\chi+\alpha\beta=0$. Ὅθεν (τυπ. 2) $\chi=\left(3\beta\pm\sqrt{9\beta^2-4\alpha\beta}\right):4$.

θ') Ἔχομεν $\dfrac{\alpha^2\chi^2}{\beta^2}-\dfrac{2\alpha\chi}{\gamma}+\dfrac{\beta^2}{\gamma^2}=0$, ἐξ ἧς $\alpha^2\gamma^2\chi^2-2\alpha\beta^2\gamma\chi+\beta^4=0$.

Ὅθεν (τύπ. 2) $\chi=\left(\alpha\beta^2\gamma\pm\sqrt{\alpha^2\beta^4\gamma^2-\alpha^2\beta^4\gamma^2}\right):\alpha^2\gamma^2=\alpha\beta^2\gamma:\alpha^2\gamma^2=\beta^2:\alpha\gamma$.

ι') Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἐκ τῆς ἀναλογίας $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}$ προκύπτει ἡ $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\dfrac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta}$. Οὕτως ἐκ τῆς δοθείσης ἀναλογίας προκύπτει

$$\frac{(\alpha^2+\alpha\chi+\chi^2)+(\alpha^2-\alpha\chi+\chi^2)}{(\alpha^2+\alpha\chi+\chi^2)-(\alpha^2-\alpha\chi+\chi^2)}=\frac{(\alpha^2+1)+(\alpha^2-1)}{(\alpha^2+1)-(\alpha^2-1)},\ \text{ἤτοι}$$

$$\frac{\alpha^2+\alpha\chi+\chi^2+\alpha^2-\alpha\chi+\chi^2}{\alpha^2+\alpha\chi+\chi^2-\alpha^2+\alpha\chi-\chi^2}=\frac{\alpha^2+1+\alpha^2-1}{\alpha^2+1-\alpha^2+1}\quad \text{ἢ}$$

$$\frac{2\alpha^2+2\chi^2}{2\alpha\chi}=\frac{2\alpha^2}{2}\quad \text{ἢ}\quad \frac{\alpha^2+\chi^2}{\alpha\chi}=\alpha^2,\ \text{ἢ τέλος}\quad \chi^2-\alpha^3\chi+\alpha^2=0.$$

$$\text{Ὅθεν}\ \ \chi=\frac{\alpha^3\pm\sqrt{\alpha^6-4\alpha^2}}{2}=\frac{\alpha^3\pm\alpha\sqrt{\alpha^4-4}}{2}=\frac{\alpha\left(\alpha^2+\sqrt{\alpha^4-4}\right)}{2}.$$

ια') Ἔστω ϱ_1 ἡ κοινὴ ρίζα. Ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι $\alpha\varrho_1^2+\beta\varrho_1+\gamma=0$ καὶ $\alpha_1\varrho_1^2+\beta_1\varrho_1+\gamma_1=0$. Ἀλλ' ἂν θέσωμεν $\varrho_1^2=\varrho_2$, ἔχομεν τὴν μορφὴν

$$\alpha\varrho_2+\beta\varrho_1=-\gamma$$
$$\alpha_1\varrho_2+\beta_1\varrho_1=-\gamma_1$$

συστήματος δύο ἐξισώσεων α^{ου} βαθμοῦ, μὲ δύο ἀγνώστους ϱ_2, ϱ_1 τὸ ὁποῖον λυόμενον κατὰ τὰ γνωστὰ δίδει $\varrho_2=\varrho_1^2=\dfrac{\beta\gamma_1-\beta_1\gamma}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}$ καὶ $\varrho_1=\dfrac{\gamma\alpha_1-\gamma_1\alpha}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}$.

Ὅθεν $\dfrac{\beta\gamma_1-\beta_1\gamma}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}=\dfrac{(\gamma\alpha_1-\gamma_1\alpha)^2}{(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)^2}$, ἤτοι $\dfrac{(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)^2\cdot(\beta\gamma_1-\beta_1\gamma)}{(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)}=(\gamma\alpha_1-\gamma_1\alpha)^2$

$$\text{ἢ}\quad (\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)\cdot(\beta\gamma_1-\beta_1\gamma)=(\gamma\alpha_1-\gamma_1\alpha)^2$$

354. α') Ἔχομεν

$$4\chi^2-23\chi+\left(\frac{23}{4}\right)^2=\left(\frac{23}{4}\right)^2-30,\ \left(2\chi-\frac{23}{4}\right)^2=\frac{529-480}{16}=\frac{49}{16}$$

$$\text{καὶ}\quad 2\chi-\frac{23}{4}=\pm\frac{7}{4},\ \text{ἤτοι}\ \chi=\frac{23\pm7}{8}=\frac{15}{4}\quad \text{ἢ}\quad 4.$$

β') Καθιστῶμεν τὸν συντελεστὴν τοῦ χ^2 τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου καὶ ἐργαζόμεθα ἔπειτα ὡς ἀνωτέρω. Οὕτω δὲ ἔχομεν :

$$9\chi^2-15\chi=-6, 9\chi^2-15\chi+\left(\frac{15}{6}\right)^2=\left(\frac{15}{6}\right)^2-6, \left(3\chi-\frac{15}{6}\right)^2=\frac{225-216}{36}=\frac{9}{36}$$

καὶ $3\chi-\frac{15}{6}=\pm\frac{3}{6}$. Ὅθεν $\chi=\frac{15\pm3}{18}=1$ ἢ $\frac{2}{3}$.

355. α΄) $\chi(\chi^2-\chi-2)=0$. Ὅθεν θὰ εἶναι $\chi=0$ ἢ $\chi^2-\chi-2=0$, ἤτοι

$$\chi=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm3}{2}=2 \text{ ἢ } -1.$$

β΄) $4\chi^2(\chi-1)-(\chi-1)=0$, $(\chi-1)(4\chi^2-1)=0$. Ὅθεν θὰ εἶναι ἢ $\chi-1=0$, ἤτοι $\chi=1$ ἢ $4\chi^2-1=0$, ἤτοι $\chi=\pm\frac{1}{2}$.

γ΄) Τὸ α^{ον} μέλος ὅπερ γράφεται $\chi^3+3\cdot\chi^2\cdot3+3\cdot\chi\cdot3^2+3^3$ βλέπομεν ὅτι εἶναι ἀνάπτυγμα τοῦ $(\chi+3)^3$. Ὅθεν $(\chi+3)^3=0$, ἤτοι $\chi+3=0$ καὶ $\chi=-3$ ρίζα τριπλῆ).

356. α΄) $(\chi^3+1)+\alpha\chi(\chi+1)=0$, $(\chi+1)(\chi^2-\chi+1)+\alpha\chi(\chi+1)=0$

$(\chi+1)(\chi^2-\chi+1+\alpha\chi)=0$, $(\chi+1)[\chi^2-(1-\alpha)\chi+1]=0$.

Ὅθεν $\chi+1=0$, ἤτοι $\chi=-1$ καὶ $\chi^2-(1-\alpha)\chi+1=0$,

ἤτοι $\chi=\frac{(1-\alpha)\pm\sqrt{(1-\alpha)^2-4}}{2}=\frac{(1-\alpha)\pm\sqrt{\alpha^2-2\alpha-3}}{2}$

β΄) $(\chi^3-1)-\lambda(\chi^2-2\chi+1)=0$, $(\chi^3-1)-\lambda(\chi-1)^2=0$

$(\chi-1)[\chi^2+\chi+1)-\lambda(\chi-1)]=0$. Ὅθεν $\chi-1=0$, ἤτοι $\chi=1$ καὶ

$\chi^2+\chi+1-\lambda\chi+\lambda=0$, $\chi^2-(\lambda-1)\chi+(\lambda+1)=0$,

ἤτοι $\chi=\frac{(\lambda-1)\pm\sqrt{(\lambda-1)^2-4(\lambda+1)}}{2}=\frac{(\lambda-1)\pm\sqrt{\lambda^2-6\lambda-3}}{2}$

γ΄) $(\chi^3+2^3)+3(\chi-2)(\chi+2)=0$ $(\chi+2)(\chi^2-2\chi+4)+3(\chi-2)(\chi+2)=0$

$(\chi+2)(\chi^2+\chi-2)=0$. Ὅθεν $\chi+2=0$, ἤτοι $\chi=-2$ καὶ $\chi^2+\chi-2=0$,

ἤτοι $\chi=(-1\pm\sqrt{1+8}):2=(-1\pm3):2=-2$ καὶ 1.

357. α΄) $\chi^2(\chi+\alpha)+\alpha(\chi+\alpha)=0$, $(\chi+\alpha)(\chi^2+\alpha)=0$. Ὅθεν $\chi+\alpha=0$,

ἤτοι $\chi=-\alpha$ καὶ $\chi^2+\alpha=0$, ἤτοι $\chi=\pm\sqrt{-\alpha}=\pm i\sqrt{\alpha}$.

β΄) $\chi(\chi^3+1)+4\chi^2(\chi+1)=0$, $\chi(\chi+1)(\chi^2-\chi+1)+4\chi^2(\chi+1)=0$

$\chi(\chi+1)(\chi^2-\chi+1+4\chi)=0$. Ὅθεν $\chi=0$, $\chi+1=0$, ἤτοι $\chi=-1$ καὶ

$\chi^2+3\chi+1=0$, ἤτοι $\chi=\frac{-3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

γ΄) $\alpha^4[(\alpha+\chi)^4-\chi^4]=0$ καὶ ἐπειδὴ $\alpha\neq0$, ἔχομεν

$[(\alpha+\chi)^2+\chi^2]$ $[(\alpha+\chi)^2-\chi^2]=0$, ἤτοι $(\alpha+\chi)^2+\chi^2=0$, $2\chi^2+2\alpha\chi+\alpha^2=0$ καὶ

$\chi=\frac{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-2\alpha^2}}{2}=\frac{\alpha\pm\alpha i}{2}$, $(\alpha+\chi)^2-\chi^2=0$, $2\alpha\chi+\alpha^2=0$ καὶ $\chi=-\alpha/2$.

358. α′) $\chi^4(\chi-1)-(\chi-1)=0$, $(\chi-1)(\chi^4-1)=0$. $(\chi-1)(\chi^2-1)(\chi^2+1)=0$. Ὅθεν $\chi=1$, $\chi=\pm1$ καὶ $\chi=\pm i$.

β′) $(\chi^6+2^6)-12\chi^2(\chi^2-4)=0$, $(\chi^2-4)(\chi^4+4\chi^2+16)-12\chi^2(\chi^2-4)=0$, $(\chi^2-4)(\chi^4-8\chi^2+16)=0$, $(\chi^2-4)(\chi^2-4)^2=0$, $(\chi^2-4)^3=0$, καὶ $\chi^2-4=0$, ἤτοι $\chi=\pm2$ (τριπλαῖ ρίζαι).

γ′) $(\chi^3\pm1)+\alpha(\chi\pm1)=0$, $(\chi\pm1)(\chi^2\mp\chi+1)+\alpha(\chi\pm1)=0$ $(\chi\pm1)[\chi^2\mp\chi+(1+\alpha)]=0$. Ὅθεν $\chi=\mp1$ καὶ $\chi=\left(\pm1\pm\sqrt{1-4(1+\alpha)}\right):2$.

Ἐξισώσεις λυόμεναι μὲ βοηθητικοὺς ἀγνώστους.

Ἀσκήσεις.—*359.* Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις, ἂν θέσωμεν $6\chi-1=\omega$, γράφεται $\omega^2-11\omega+28=0$, ἐξ ἧς $\omega=\left(11\pm\sqrt{121-112}\right):2=(11\pm3):2=7$ ἢ 4. Ὅθεν $6\chi-1=7$· ὥστε $\chi=8/6$ ἢ $6\chi-1=4$, ὁπότε $\chi=5/6$.

360. Θέτοντες $\chi-7=\omega$, ἔχομεν $2\omega^2+4\omega-2=0$, ἢ $\omega^2+2\omega-1=0$, ἐξ ἧς $\omega=-1\pm\sqrt{1+1}=-1\pm\sqrt{2}$. Ὅθεν $\chi-7=-1\pm\sqrt{2}$, ὁπότε $\chi=6\pm\sqrt{2}$.

361. Ἐπειδὴ $\chi^2-0{,}25=\chi^2-\frac{1}{4}=\frac{4\chi^2-1}{4}=\frac{(2\chi-1)(2\chi+1)}{4}$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται $(\chi+1)^2+2\cdot\frac{(2\chi-1)(2\chi+1)}{4(2\chi-1)}+\frac{1}{2}=8{,}75$ ἢ $(\chi+1)^2+$ $+\frac{2\chi+1}{2}+\frac{1}{2}=8{,}75$ ἢ $(\chi+1)^2+(\chi+1)-8{,}75=0$. Οὕτω θέτοντες $\chi+1=\omega$, ἔχομεν $\omega^2+\omega-8{,}75=0$, $\omega=\left(-1\pm\sqrt{1+4\cdot8{,}75}\right):2=$ $=\left(-1\pm\sqrt{1+35}\right):2=(-1\pm6):2$, δηλαδὴ $\chi+1=(-1\pm6):2=5/2$ ἢ $-7/2$. Ὅθεν $\chi=-1+5/2=3/2$ ἢ $\chi=-1-7/2=-9/2$.

362. Θέτοντες $2\chi-\alpha=\omega$, ἔχομεν $\omega^2-\beta\omega-2\beta^2=0$, $\omega=\left(\beta\pm\sqrt{\beta^2+8\beta^2}\right):2=(\beta\pm3\beta):2=2\beta$ ἢ $-\beta$. Ὅθεν $2\chi-\alpha=2\beta$ καὶ ἑπομένως $\chi=(\alpha+2\beta):2$ ἢ $2\chi-\alpha=-\beta$, ὁπότε $\chi=(\alpha-\beta):2$.

363. Ἂν θέσωμεν $3\chi-2\alpha+\beta=\omega$, ἔχομεν $\omega^2+2\beta\omega-(\alpha^2-\beta^2)=0$, ἐξ ἧς $\omega=-\beta\pm\sqrt{\beta^2+\alpha^2-\beta^2}=-\beta\pm\alpha$. Ὅθεν $3\chi-2\alpha+\beta=-\beta+\alpha$, ὁπότε $\chi=(3\alpha-2\beta):3$ ἢ $3\chi-2\alpha+\beta=-\beta-\alpha$, ὁπότε $\chi=(\alpha-2\beta):3$.

364. Ἂν θέσωμεν $\chi^2+3=\omega$, ἔχομεν $\omega^2-7\omega-60=0$, $\omega=\left(7\pm\sqrt{49+240}\right):2=(7\pm17):2=12$ ἢ -5. Ὅθεν $\chi^2+3=12$ ὁπότε $\chi^2=9$ καὶ $\chi=\pm3$, ἢ $\chi^2+3=-5$, ὁπότε $\chi^2=-8$ καὶ $\chi=\pm2i\sqrt{2}$.

365. Θέτοντες $\chi^2+7\chi=\omega$, ἔχομεν $\omega^2-6\omega-61=0$ καὶ $\omega=$ $=3\pm\sqrt{9+61}=3\pm\sqrt{70}$. Ὅθεν $\chi^2+7\chi=3+\sqrt{70}$, δηλαδὴ $\chi^2+7\chi-$

$(3+\sqrt{70})=0$, ὁπότε $\chi=\left[-7\pm\sqrt{49+4(3+\sqrt{70})}\right]:2$ ἢ $\chi^2+7\chi-(3-\sqrt{70})=0$, ὁπότε $\chi=\left[-7\pm\sqrt{49+4(3-\sqrt{70})}\right]:2$.

366. Ἔχομεν $(\chi^2-7\chi)^2-13(\chi^2-7\chi)-13\cdot18+270=0$, $(\chi^2-7\chi)^2-13(\chi^2-7\chi)+36=0$. Οὕτως ἂν θέσωμεν $\chi^2-7\chi=\omega$, ἡ ἐξίσωσις αὕτη γράφεται $\omega^2-13\omega+36=0$. ἐξ ἧς $\omega=(13\pm\sqrt{169-144}):2=(13\pm5):2=9$ ἢ 4. Ὅθεν $\chi^2-7\chi=9$, ἤτοι $\chi^2-7\chi-9=0$, ὁπότε $\chi=(7\pm\sqrt{49+36}):2=(7\pm\sqrt{85}):2$ ἢ $\chi^2-7\chi-4=0$, ὁπότε $\chi=(7\pm\sqrt{49+16}):2=(7\pm\sqrt{65}):2$.

367. Ἔχομεν $\left(2\chi-\dfrac{3}{\chi}+2+2\right)\left(2\chi-\dfrac{3}{\chi}+2\right)-35=0$. Ἐὰν δὲ θέσωμεν $2\chi-\dfrac{3}{\chi}+2=\psi$, ἔχομεν $(\psi+2)\cdot\psi-35=0$, $\psi^2+2\psi-35=0$, ἐξ ἧς $\psi=5$ ἢ -7. Ὅθεν $2\chi-\dfrac{3}{\chi}+2-5=0$, $2\chi^2-3\chi-3=0$, ἤτοι: $\chi=(3\pm\sqrt{33}):4$ ἢ $2\chi-\dfrac{3}{\chi}+2+7=0$, $2\chi^2+9\chi-3=0$ ἤτοι: $\chi=(-9\pm\sqrt{105}):4$.

368 Θέτοντες $\dfrac{\chi-1}{2\chi+3}=\psi$, εὑρίσκομεν $5\psi^2-26\psi+5=0$, καὶ $\psi=5$ ἢ $\dfrac{1}{5}$. Ὅθεν $\dfrac{\chi-1}{2\chi+3}=5$, καὶ $\chi=-\dfrac{16}{9}$ ἢ $\dfrac{\chi-1}{2\chi+3}=\dfrac{1}{5}$ καὶ $\chi=\dfrac{8}{3}$.

Περὶ τοῦ εἴδους τῶν ριζῶν τῆς $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$.

Ἀσκήσεις. *Ὁμὰς πρώτη.* ***369.*** α′) Ἐπειδὴ $\beta^2-4\alpha\gamma=15^2-4\cdot16=225-64=161>0$, αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι.

β′) $\beta^2-4\alpha\gamma=4^2-68=-52<0$. Ἄρα αἱ ρίζαι μιγάδες συζυγεῖς.

γ′) $\beta^2-4\alpha\gamma=9^2-4\cdot1\cdot(-7)=9^2+28>0$. Ρίζαι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι. Ἄλλως τε εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, ὅταν τὰ α καὶ γ εἶναι ἑτερόσημα αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, διότι τότε $\alpha\gamma<0$, ἤτοι $-\alpha\gamma>0$ καὶ κατὰ συνέπειαν $\beta^2-4\alpha\gamma>0$.

δ′) Ἐδῶ εἶναι $\alpha\gamma=1\cdot(-21)=-21<0$. Ὥστε αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι.

ε′) Εἶναι $\chi^2+7\chi-1=0$. Οὕτως $\alpha\gamma=1\cdot(-3)=-3<0$ καὶ ἑπομένως ρίζαι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι.

στ′) Εἶναι $\chi^2-2\chi-3=0$. Οὕτως $\alpha\gamma=1\cdot(-3)=-3<0$ καὶ ἑπομένως ρίζαι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι.

370. α′) Εἶναι $\alpha^2(\chi-\delta)+\beta^2(\chi-\gamma)=(\chi-\gamma)(\chi-\delta)$, $\chi^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma+\delta)\chi+(\alpha^2\delta+\beta^2\gamma+\gamma\delta)=0$. Οὕτως ἡ ὑπόρριζος ποσότης (ἡ διακρίνουσα Δ) εἶναι $(\alpha^2+\beta^2+\gamma+\delta)^2-4(\alpha^2\delta+\beta^2\gamma+\gamma\delta)$, ἤτοι

$\beta^2-4\alpha\gamma=15^2-4\cdot16=$ $\chi^2-15\chi+16=0$ $\Rightarrow$ $\chi_{1,2}=\dfrac{15\pm\sqrt{15^2-4\cdot16}}{2}$

$\alpha^4+\beta^4+\gamma^2+\delta^2+2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma+2\alpha^2\delta+2\beta^2\gamma+2\beta^2\delta+2\gamma\delta \quad -4\alpha^2\delta-4\beta^2\gamma \quad -4\gamma\delta=$
$=(\alpha^4+\beta^4+\gamma^2+\delta^2-2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma-2\alpha^2\delta-2\beta^2\gamma+2\beta^2\delta-2\gamma\delta)+4\alpha^2\beta^2=$
$=(\alpha^2-\beta^2+\gamma-\delta)^2+(2\alpha\beta)^2$. Ἀλλ' ἡ ποσότης αὕτη, ὡς ἄθροισμα δύο τετραγώνων εἶναι θετική, καὶ ἐπομένως αἱ ῥίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι πραγματικαί.

β') Ἡ διακρίνουσα εἶναι $\Delta=(\beta\gamma)^2+4\alpha^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)>0$. Ὥστε ῥίζαι πραγματικαί.

γ') Ἔχομεν Ρ. πραγματικάς, διότι $\Delta=\pi^2+8\pi^2>0$.

δ') Ἐκ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως προκύπτει ἡ

$$\alpha(\chi-\beta)(\chi-\gamma)+\beta(\chi-\alpha)(\chi-\gamma)+\gamma(\chi-\alpha)(\chi-\beta)=0 \quad \text{ἢ}$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)\chi^2-[\alpha(\beta+\gamma)+\beta(\alpha+\gamma)+\gamma(\alpha+\beta)]\chi+3\alpha\beta\gamma=0, \quad \text{ἧς εἶναι}$$

$$\Delta=[\alpha(\beta+\gamma)+\beta(\alpha+\gamma)+\gamma(\alpha+\beta)]^2-12\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=$$

$$=[2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)]^2-12\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-6\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=$$

$$=2\alpha^2\beta^2+2\beta^2\gamma^2+2\gamma^2\alpha^2-2\alpha^2\beta\gamma-2\alpha\beta^2\gamma-2\alpha\beta\gamma^2=$$

$$=(\alpha\beta-\beta\gamma)^2+(\beta\gamma-\gamma\alpha)^2+(\gamma\alpha-\alpha\beta)^2>0. \quad \text{Ὥστε ῥίζαι πραγματικαί.}$$

371. Δίδεται $\beta^2-\alpha\gamma>0$. Τῆς δὲ δευτέρας ἐξισώσεως εἶναι

$$\Delta=(\alpha+\beta+\gamma)^2-[2\beta(\alpha+\gamma)+3\alpha\gamma]=$$

$$=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma-2\alpha\beta-2\beta\gamma-3\alpha\gamma=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\gamma=$$

$$=\alpha^2+\gamma^2+(\beta^2-\alpha\gamma)>0. \quad \text{Ὥστε ρ. πραγματικαί.}$$

372. Δίδεται $\beta^2-\alpha\gamma>0$, ἡ δὲ δευτέρα ἐξίσωσις ἥτις γράφεται $(\beta^2-\alpha\gamma)\chi^2+2\alpha\gamma\chi-1=0$, ἔχει $\Delta=\alpha^2\gamma^2+(\beta^2-\alpha\gamma)>0$. Ὅθεν ρ. πρ.

373. α') Εἶναι $\Delta=25\alpha^2-16\alpha^2=9\alpha^2$ καὶ $\sqrt{\Delta}=\pm 3\alpha$. Ὥστε ρ. ῥηταί.

β') $\Delta=\beta^2+24\beta^2=25\beta^2$ καὶ $\sqrt{\Delta}=\pm 5\beta$. Ὥστε ρ. ῥηταί.

γ') $\Delta=(\alpha^2\beta^2+\gamma^2)^2-4\alpha^2\beta^2\gamma^2=(\alpha^2\beta^2-\gamma^2)^2$. Ὅθεν ρ. ῥηταί.

374. α') $\Delta=(\alpha+\beta)^2-(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)=(\alpha+\beta)^2-[(\alpha+\beta)^2-\gamma^2]=\gamma^2$. Ὥστε ρ. ῥηταί.

β') $\Delta=4\alpha^2(\alpha\gamma^2+\beta\delta^2)^2-(4\alpha^2-9\gamma^2\delta^2)(\alpha\gamma^2+\beta\delta^2)^2=$

$$=(\alpha\gamma^2+\beta\delta^2)^2\cdot(4\alpha^2-4\alpha^2+9\gamma^2\delta^2)=(\alpha\gamma^2+\beta\delta^2)^2\cdot(3\gamma\delta)^2. \quad \text{Ὅθεν ρ. ῥηταί.}$$

375. α') $\Delta=\alpha^4+8\alpha^4=9\alpha^4=(3\alpha^2)^2$. Ὅθεν ρ. σύμμετροι.

β') $\Delta=(\gamma+4)^2-16\gamma=(\gamma-4)^2$. Ὅθεν ρ. σύμμετροι.

γ') Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις, ἥτις γράφεται $2\gamma\chi^2-(\alpha\beta+4\gamma\delta)\chi+2\alpha\beta\delta=0$

ἔχει $\Delta=(\alpha\beta+4\gamma\delta)^2-16\alpha\beta\gamma\delta=(\alpha\beta-4\gamma\delta)^2$. Ὥστε ρ. σύμμετροι.

δ') $\Delta=(3\alpha-5k)^2+60\alpha k=(3\alpha+5k)^2$. Ὥστε ρ. σύμμετροι.

376. α') $\Delta=\pi^2-4k=\pi^2-4\left(\dfrac{\pi^2}{4}-\dfrac{\lambda^2}{4}\right)=\pi^2-\pi^2+\lambda^2=\lambda^2$. Ὅθεν ρ. σύμμετροι.

β') $\Delta=\pi^2-4k=\left(\lambda+\frac{k}{\lambda}\right)^2-4k=\lambda^2+2k+\left(\frac{k}{\lambda}\right)^2-4k=\left(\lambda-\frac{k}{\lambda}\right)^2$.
Ὅθεν ρ. σύμμετροι.

377. α') $\Delta=\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta^2=-\alpha^2\beta^2<0$. Ὅθεν ρ. φ. (ρίζαι φανταστικαί).

β') $\Delta=\alpha^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=-(\beta^2+\gamma^2)<0$. Ὅθεν ρ. φ.

γ') $\Delta=\alpha\beta-17\alpha\beta=-16\alpha\beta<0$, ἐπειδὴ $\alpha\beta>0$, διότι ἄλλως ἡ πρώτη δύναμις τοῦ χ θὰ εἶχε συντελεστὴν $-2i\sqrt{\alpha\beta}$. Ὅθεν ρ. φ.

δ') $\Delta=\alpha^2-(\alpha^2+\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2)=-(\beta-\gamma)^2<0$. Ὅθεν ρ. φ.

378. Ἡ ἐξίσωσις αὔτη ἀληθεύει διὰ πραγματικὰς τιμὰς τοῦ χ, ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι εἶναι 0, ἤτοι ἐὰν $\alpha\chi+\beta=0$ καὶ $\alpha_1\chi+\beta_1=0$, ἤτοι ἐὰν $-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{\beta_1}{\alpha_1}$. Ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=0$. Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις, ὅταν $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta\neq 0$ ἔχει ρ. φ.

379. Δίδεται $\beta^2-\alpha\gamma<0$, ἡ δὲ 2α ἐξίσωσις ἔχει $\Delta=(\alpha+\beta)^2-\alpha(2\beta+\gamma+\alpha)=\beta^2-\alpha\gamma<0$. Ὅθεν ρ. φ.

380. Δίδεται $16\alpha^2(\alpha^2-\beta^2)<0$, ἤτοι $\alpha^2-\beta^2<0$. Ἡ δὲ 2α ἐξίσωσις ἔχει $\Delta=4\beta^2(\beta^2-\alpha^2)=-4\beta^2(\alpha^2-\beta^2)>0$. Ὅθεν αὔτη ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους.

Ὁμὰς δευτέρα. *381*. α') Πρὸς τοῦτο πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $(5\mu+2)^2-8\mu(4\mu+1)=0$, ἤτοι $7\mu^2-12\mu-4=0$ καὶ $\mu=(6\pm\sqrt{36+28}):7=(6\pm 8):7=2$ ἢ $-2/7$.

β') Ὁμοίως πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $(2\mu-1)^2+2\mu(3\mu-2)=0$, $10\mu^2-8\mu+1=0$ καὶ $\mu=(4\pm\sqrt{16-10}):10=(4\pm\sqrt{6}):10$.

γ') Ὁμοίως ἔχομεν $9(\mu-1)^2-4(\mu+1)(\mu-1)=0$, $5\mu^2-18\mu+13=0$ καὶ $\mu=(9\pm\sqrt{81-65}):5=(9\pm 4):5=13/5$ ἢ 1.

δ') Ὁμοίως ἔχομεν $\mu^2-4(2\mu-3)(\mu-1)=0$, $7\mu^2-20\mu+12=0$ καὶ $\mu=(10\pm\sqrt{100-84}):7=(10\pm 4):7=2$ ἢ 6/7.

Σχέσεις συντελεστῶν καὶ ριζῶν τῆς $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$.

Ἀσκήσεις.—*Ὁμὰς πρώτη*. *382*. Εἶναι $\rho_1+\rho_2=-\beta/\alpha=4/2=2$ καὶ $\rho_1\rho_2=\gamma/\alpha=-3/2$.

β') $\rho_1+\rho_2=-\beta/\alpha=-8/3$ καὶ $\rho_1\rho_2=\gamma/\alpha=-12/3=-4$.

γ') $\rho_1+\rho_2=-\beta/\alpha=7$ καὶ $\rho_1\rho_2=10$.

383. α') Ἔχομεν $\chi^2+2\alpha\chi-3\alpha^2=0$. Ὅθεν $\rho_1+\rho_2=-2\alpha$ καὶ $\rho_1\rho_2=-3\alpha^2$.

β') Ἔχομεν $\chi^2-4\alpha\chi+3\alpha^2=0$. Ὅθεν $\rho_1+\rho_2=4\alpha$ καὶ $\rho_1\rho_2=3\alpha^2$.

384. α') Ἐδῶ εἶναι $\rho_1+\rho_2=5$. Ὥστε ἂν $\rho_1=2$, θὰ εἶναι $2+\rho_2=5$, ἤτοι $\rho_2=3$.

Δυνάμεθα ὅμως νὰ εἴπωμεν, ὅτι ἐπειδὴ $\varrho_1\varrho_2=6$ καὶ $\varrho_1=2$, θὰ εἶναι $2\cdot\varrho_2=6$, ἤτοι $\varrho_2=6:2=3$.

β΄) Ἔστω $\varrho_1=1/3$. Τότε ἐπειδὴ $\varrho_1\varrho_2=1$, θὰ εἶναι $\varrho_2=1:\varrho_1=$ $=1:1/3=3$.

γ΄) Ἔστω $\varrho_1=\alpha$. Τότε ἐπειδὴ $\varrho_1+\varrho_2=\alpha+\beta$, θὰ εἶναι $\varrho_2=\beta$.

Ὁμὰς δευτέρα. 385. α΄) Εἶναι $\varrho_1-\varrho_2=\dfrac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}-$

$$-\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}+\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{2\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=$$

$$=\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{\alpha}.$$

β΄) Ἀφοῦ αἱ ϱ_1 καὶ ϱ_2 εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, θὰ εἶναι $\alpha\varrho_1^2+\beta\varrho_1+\gamma=0$ καὶ $\alpha\varrho_2^2+\beta\varrho_2+\gamma=0$. Προσθέτοντες ἤδη κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $\alpha(\varrho_1^2+\varrho_2^2)+\beta(\varrho_1+\varrho_2)+2\gamma=0$ ἢ $\alpha(\varrho_1^2+\varrho_2^2)-$ $-\dfrac{\beta^2}{\alpha}+2\gamma=0$. Ὅθεν $\varrho_1^2+\varrho_2^2=\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}-\dfrac{2\gamma}{\alpha}$, ἤτοι $\varrho_1^2+\varrho_2^2=\dfrac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}$ (1).

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν $\alpha\varrho_1^3+\beta\varrho_1^2+\gamma\varrho_1=0$, $\alpha\varrho_2^3+\beta\varrho_2^2+\gamma\varrho_2=0$. Ὅθεν

$$\alpha(\varrho_1^3+\varrho_2^3)+\beta(\varrho_1^2+\varrho_2^2)+\gamma(\varrho_1+\varrho_2)=0$$

$$\alpha(\varrho_1^3+\varrho_2^3)+\frac{\beta^3-2\alpha\beta\gamma}{\alpha^2}-\frac{\beta\gamma}{\alpha}=0,\ \text{καὶ}\ \varrho_1^3+\varrho_2^3=\frac{3\alpha\beta\gamma-\beta^3}{\alpha^3}\ (2).$$

386. Ἐὰν εἰς τοὺς προηγουμένους εὑρεθέντας τύπους θέσωμεν $\alpha=1$, $\beta=\pi$ καὶ $\gamma=k$, εὑρίσκομεν:

$\varrho_1+\varrho_2=-\pi$, $\varrho_1\varrho_2=k$, $\varrho_1-\varrho_2=\sqrt{\pi^2-4k}$, $\varrho_1^2+\varrho_2^2=\pi^2-2k$, $\varrho_1^3+\varrho_2^3=3k\pi-\pi^3$.

387. Κατὰ τοὺς ἀνωτέρω τύπους ἔχομεν: α΄) $\varrho_1^2+\varrho_2^2=\pi^2-2k=$ $=81-20=61$.

β΄) $\varrho_1^2+\varrho_2^2=\pi^2-2k=25-2(-7)=25+14=39$.

γ΄) $\varrho_1^2+\varrho_2^2=(\beta^2-2\alpha\gamma):\alpha^2=(49+36):9=85:9$.

388. Ἐδῶ πρέπει νὰ εἶναι $\varrho_1^2+\varrho_2^2=\pi^2-2k=\mu$, ἤτοι $(\lambda-2)^2+2(\lambda+3)=\mu$. Οὕτως εὑρίσκομεν $\lambda^2-2\lambda+(10-\mu)=0$ καὶ $\lambda=1\pm\sqrt{1^2-(10-\mu)}=1\pm\sqrt{\mu-9}$. Ὅθεν $\mu-9\geqslant0$, ἤτοι $\mu\geqslant9$.

389. Ἐδῶ πρέπει νὰ εἶναι $\varrho_1:\varrho_2=\lambda$, ἤτοι $\varrho_1=\lambda\varrho_2$. Ἀλλ' ἐκ τῆς σχέσεως αὐτῆς καὶ ἐκ τῶν σχέσεων $\varrho_1+\varrho_2=-\beta$ καὶ $\varrho_1\varrho_2=\gamma$, ἔχομεν $\lambda\varrho_2+\varrho_2=-\beta$ καὶ $\lambda\varrho_2^2=\gamma$· ἀλλ' ἐκ τῆς πρώτης τούτων εὑρίσκομεν $\varrho_2(1+\lambda)=-\beta$, ἤτοι $\varrho_2=-\dfrac{\beta}{1+\lambda}$ καὶ ἑπομένως $\varrho_2^2=\dfrac{\beta^2}{(1+\lambda)^2}$ (1)· ἐκ δὲ τῆς δευτέρας εὑρίσκομεν $\varrho_2^2=\dfrac{\gamma}{\lambda}$ (2). Οὕτως αἱ (1) καὶ (2) δίδουν τὴν ζητουμένην σχέσιν $\dfrac{\gamma}{\lambda}=$ $=\dfrac{\beta^2}{(1+\lambda)^2}$.

390. Ὅταν αἱ ρίζαι ϱ_1 καὶ ϱ_2 τῆς $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ εἶναι ἀνάλογοι τῶν μ καὶ ν, ἔχομεν $\frac{\varrho_1}{\mu}=\frac{\varrho_2}{\nu}$, ἤτο $\varrho_1=\frac{\mu}{\nu}\varrho_2$. Ἐργαζόμενοι δὲ ὡς ἀνωτέρω εὑρίσκομεν $\frac{\mu}{\nu}\varrho_2+\varrho_2=-\frac{\beta}{\alpha}$, καὶ $\frac{\mu}{\nu}\varrho_2{}^2=\frac{\gamma}{\alpha}$. Ἀλλ' ἡ πρώτη τούτων δίδει $\varrho_2=-\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\nu}{\mu+\nu}$ καὶ ἐπομένως $\varrho_2{}^2=\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\frac{\nu^2}{(\mu+\nu)^2}$ (1), ἡ δὲ δευτέρα δίδει $\varrho_2{}^2=\frac{\gamma\nu}{\alpha\mu}$ (2). Οὕτως ἐκ τῶν (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν $\frac{\beta^2\nu^2}{\alpha^2(\mu+\nu)^2}=\frac{\gamma\nu}{\alpha\mu}$ ἤτοι $\alpha\gamma(\mu+\nu)^2=\beta^2\mu\nu$. Αὕτη δὲ ἡ σχέσις εἶναι ἡ ζητουμένη.

391. Εἶναι (ἄσκ. 385, α') $\varrho_1-\varrho_2=\sqrt{\beta^2-4\gamma}$. Ἐδῶ δὲ δέον νὰ εἶναι $\sqrt{\beta^2-4\gamma}=4$, ἤτοι $\beta^2-4\gamma=16$ (1). Ἐξ ἄλλου δὲ εἶναι $\varrho_1{}^3-\varrho_2{}^3=(\varrho_1-\varrho_2)\cdot(\varrho_1{}^2+\varrho_1\varrho_2+\varrho_2{}^2)$ (2). Ἀλλ' ἐπειδὴ $\varrho_1{}^3-\varrho_2{}^3=208$, $\varrho_1-\varrho_2=4$, $\varrho_1\varrho_2=\gamma$ καὶ $\varrho_1{}^2+\varrho_2{}^2=\beta^2-2\gamma$ (ἄσκ. 386), ἔχομεν ἐκ τῆς (2) $4(\beta^2-2\gamma+\gamma)=208$, ἢ $4(\beta^2-\gamma)=208$, $\beta^2-\gamma=52$ καὶ $\beta^2=52+\gamma$ (3)· ἀλλ' ἡ (1) δίδει $\beta^2=4\gamma+16$. Ὅθεν $4\gamma+16=52+\gamma$, $3\gamma=36$ καὶ $\gamma=12$ καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ (3) δίδει $\beta^2=64$ καὶ $\beta=\pm 8$.

392. Εἶναι $\varrho_1\varrho_2=\frac{\nu}{\alpha-\beta}$ καὶ $\varrho_1+\varrho_2=-\frac{2(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha-\beta}=-2(\alpha+\beta)$.

1) Ἐὰν $\varrho_1=\varrho_2$, ἔχομεν $\varrho_1{}^2=\frac{\nu}{\alpha-\beta}$ καὶ $2\varrho_1=-2(\alpha+\beta)$, ἤτοι $\varrho_1=-(\alpha+\beta)$ καὶ $\varrho_1{}^2=(\alpha+\beta)^2$. Ὅθεν $\nu:(\alpha-\beta)=(\alpha+\beta)^2$ καὶ $\nu=(\alpha+\beta)^2\cdot(\alpha-\beta)$. 2) Ἐὰν $\varrho_1\varrho_2=1$, θὰ εἶναι $\nu:(\alpha-\beta)=1$, ἤτοι $\nu=\alpha-\beta$.

393. 1) Διὰ νὰ εἶναι αἱ ρίζαι μιγαδικαί, πρέπει νὰ εἶναι $5^2-3\gamma<0$, ἤτοι $\gamma>25:3$ καὶ 2) Διὰ νὰ ἔχουν αὗται γινόμενον $-0{,}75$, πρέπει νὰ εἶναι $\gamma:3=-0{,}75$, ἤτοι $\gamma=-2{,}25$.

394. α') $\varrho_1=\varrho_2$. Τότε $\Delta=0$, ἤτοι $4^2-\gamma=0$ καὶ $\gamma=16$.
β') $\varrho_1=3\varrho_2$. Τότε $3\varrho_2+\varrho_2=8$, ἤτοι $\varrho_2=2$ καὶ $3\varrho_2\cdot\varrho_2=\gamma$, ἤτοι $\gamma=12$.
γ') $\varrho_1\cdot\varrho_2=\pm 1$. Τότε $\gamma=\pm 1$.

395. α') $3\varrho_1=4\varrho_2+3$. Τότε $\frac{4\varrho_2+3}{3}+\varrho_2=8$, ἤτοι $\varrho_2=3$ καὶ $\frac{4\varrho_2+3}{3}\cdot\varrho_2=\gamma$, ἤτοι $\gamma=15$. β') $\varrho_1{}^2+\varrho_2{}^2=40$. Τότε $\pi^2-2k=40$, ἤτοι $8^2-2\gamma=40$, $2\gamma=64-40=24$ καὶ $\gamma=12$.

Περὶ τοῦ προσήμου τῶν ριζῶν τῆς $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$.

396. α') $\Delta=4^2-12>0$. Ρίζαι πραγματικαί. $\varrho_1\varrho_2=12$. Ρίζαι ὁμόσημοι. $\varrho_1+\varrho_2=8$. Ρ. θετικαί. β') Ρ. πραγματικαί. $\varrho_1\varrho_2=-50:6$. Ρ. ἑτερόσημοι. $\varrho_1+\varrho_2=15:6$. Μεγαλυτέρα ἀπολύτως ἡ θετική. γ) Ρ. πραγματικαί. $\varrho_1\varrho_2=-1:7$. [illegible] όσημοι. $\varrho_1+\varrho_2=14:7=2$. Μεγαλυτέρα ἀπολύτως ἡ θετική.

$4^2-16)0$

16

397. α′) Ρ. πραγματικαί. $\varrho_1\varrho_2=-2:7$. Ρ. ἑτερόσημοι. $\varrho_1+\varrho_2=5:7$ Μεγαλυτέρα ἀπολύτως ἡ θετική. β′) Ρ. πραγματικαί. $\varrho_1\varrho_2=-4$. Ρ. ἑτερόσημοι. $\varrho_1+\varrho_2=3$. Ἀπολύτως μεγαλυτέρα ἡ θετική. γ′) Ὡς ἡ προηγουμένη ἄσκησις β′. δ′) $\Delta=3^2-4\cdot 9=9-36<0$. Ρίζαι μιγαδικαί. Ὥστε περὶ τοῦ προσήμου τῶν ριζῶν δὲν δύναται νὰ γίνῃ λόγος. ε′) Ὡς ἡ προηγουμένη ἄσκησις δ′. στ′) Ρ. πραγματικαί. $\varrho_1\varrho_2=-1:5$. Ρ. ἑτερόσημοι. $\varrho_1+\varrho_2=15:5=3$. Ἀπολύτως μεγαλυτέρα ἡ θετική.

Τροπὴ τριωνύμου $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ εἰς γινόμενον κλπ. καὶ εὕρεσις τριωνύμου β′ βαθμοῦ ἐκ τῶν ριζῶν του.

Ἀσκήσεις: ***Ὁμὰς πρώτη.*** *398.* α′) $\chi=(9\pm\sqrt{9^2-4\cdot18}):2=(9\pm3):2$. $\varrho_1=6$, $\varrho_2=3$. Ὅθεν $\chi^2-9\chi+18=(\chi-6)(\chi-3)$. β′) $\varrho_1=-1$, $\varrho_2=-3$. Ὅθεν $\chi^2+4\chi+3=(\chi+1)(\chi+3)$. γ′) $2\chi^2+3\chi-2=2\left(\chi-\frac{1}{2}\right)(\chi+2)=(2\chi-1)(\chi+2)$. δ′) $2(\chi+3)^2$. ε′) $(\chi+1)(\chi-5)$. στ′) $(\chi-2)(\chi-3)$.

399. α′) Ἐπειδὴ $\chi^2-5\chi+6=(\chi-2)(\chi-3)$ καὶ $\chi^2-7\chi+10=(\chi-2)(\chi-5)$ τὸ κλάσμα γράφεται $(\chi-2)(\chi-3)/(\chi-2)(\chi-5)=(\chi-3)/(\chi-5)$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν. β′) $(\chi+1)(\chi+3)/(\chi+1)(\chi-5)=(\chi+3)/(\chi-5)$. γ′) $(\chi+3)(\chi+7)/2(\chi+3)^2=(\chi+7)/2(\chi+3)$.

Ὁμὰς δευτέρα. *400.* α′) $(\chi-3)\cdot\left(\chi-\frac{1}{2}\right)=0$, $(\chi-3)(2\chi-1)=0$, $2\chi^2-7\chi+3=0$ ἢ καὶ ἄλλως. Θὰ σχηματίσωμεν ἐξίσωσιν 2ου βαθμοῦ, τῆς ὁποίας ὁ ὅρος χ^2 θὰ ἔχῃ συντελεστὴν τὴν μονάδα, ὁ ὅρος χ θὰ ἔχῃ συντελεστὴν τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν μὲ ἀντίθετον σημεῖον καὶ σταθερὸν ὅρον τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν. Οὕτως ἐπειδὴ $\varrho_1+\varrho_2=3{,}5$ καὶ $\varrho_1\cdot\varrho_2=1{,}5$ θὰ ἔχωμεν $\chi^2-3{,}5\chi+1{,}5=0$, ἤτοι $2\chi^2-7\chi+3=0$.

β′) $[\chi-(3+\sqrt{2})]\cdot[\chi-(3-\sqrt{2})]=0$, $[(\chi-3)-\sqrt{2}]\cdot[(\chi-3)+\sqrt{2}]=0$, $(\chi-3)^2-2=0$ καὶ τέλος $\chi^2-6\chi+7=0$, ἢ ἐπειδὴ $\varrho_1+\varrho_2=6$ καὶ $\varrho_1\cdot\varrho_2=(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=9-2=7$, $\chi^2-6\chi+7=0$.

γ′) Ἐπειδὴ $\varrho_1+\varrho_2=8$ καὶ $\varrho_1\cdot\varrho_2=16-5=11$, ἔχομεν $\chi^2-8\chi+11=0$.

δ′) Ἐπειδὴ $\varrho_1+\varrho_2=i\sqrt{2}-i\sqrt{2}=0$ καὶ $\varrho_1\cdot\varrho_2=-i^2\cdot2=2$, ἔχομεν $\chi^2+2=0$.

ε′) $\varrho_1+\varrho_2=\alpha+\beta+\alpha-\beta=2\alpha$ καὶ $\varrho_1\varrho_2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$ καὶ $\chi^2-2\alpha\chi+\alpha^2-\beta^2=0$.

στ′) $\varrho_1+\varrho_2=2\alpha$, $\varrho_1\cdot\varrho_2=\alpha^2-\beta$ καὶ $\chi^2-2\alpha\chi+\alpha^2-\beta=0$.

ζ′) $\varrho_1+\varrho_2=2\alpha$, $\varrho_1\varrho_2=\alpha^2+\beta$ καὶ $\chi^2-2\alpha\chi+\alpha^2+\beta=0$.

η′) $\varrho_1+\varrho_2=2\alpha$, $\varrho_1\varrho_2=\alpha^2-\alpha$ καὶ $\chi^2-2\alpha\chi+\alpha^2-\alpha=0$.

401. α′) $(2\chi-5)(\chi-15)-72\chi^2=27\chi(\chi-15)$ ἢ $97\chi^2-370\chi-75=0$.

$(x-3)^2=x^2-\cancel{2x}\,3^2-2$

Ὅθεν $\varrho_1+\varrho_2=370:97$ καὶ $\varrho_1\varrho_2=-75:97$. Ἡ ζητουμένη λοιπὸν ἐξίσωσις εἶναι ἡ $\chi^2-\left(\frac{370-75}{97}\right)\chi-\frac{370}{97}\cdot\frac{75}{97}=0$ ἢ $97^2\chi^2-295\cdot97\chi-370\cdot75=0$.

β') $\chi^2-2\sqrt{3}\cdot\chi+3=0$, $\varrho_1+\varrho_2=2\sqrt{3}$, $\varrho_1\cdot\varrho_2=3$ καὶ $\chi^2-(2\sqrt{3}+3)\chi+6\sqrt{3}=0$.

γ') $\chi^2+\alpha\beta^2\cdot\frac{(\chi-\alpha)}{\beta-\alpha}=2\alpha\beta\chi-2\alpha^2\beta^2$, $(\beta-\alpha)\chi^2+\alpha\beta^2\chi-\alpha^2\beta^2=$ $=2\alpha\beta(\beta-\alpha)\chi-2\alpha^2\beta^2(\beta-\alpha)$, $(\beta-\alpha)\chi^2+\alpha\beta(2\alpha-\beta)\chi+\alpha^2\beta^2(2\beta-2\alpha-1)=0$.

Οὕτως ἔχομεν $\varrho_1+\varrho_2=-\frac{\alpha\beta(2\alpha-\beta)}{\beta-\alpha}=\frac{\alpha\beta^2-2\alpha^2\beta}{\beta-\alpha}$ καὶ $\varrho_1\cdot\varrho_2=$ $=\frac{\alpha^2\beta^2(2\beta-2\alpha-1)}{\beta-\alpha}$. Ὅθεν ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶναι ἡ

$$\chi^2-\left[\frac{\alpha\beta^2-2\alpha^2\beta+\alpha^2\beta^2(2\beta-2\alpha-1)}{\beta-\alpha}\right]\chi+\frac{(\alpha\beta^2-2\alpha^2\beta)\cdot\alpha^2\beta^2(2\beta-2\alpha-1)}{(\beta-\alpha)^2}=0.$$

402. Ἐπειδὴ $\varrho_1^2+\varrho_2^2=\frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}=\frac{17-2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{3}$ καὶ $(\varrho_1^2\varrho_2^2)=$ $=(\varrho_1\varrho_2)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{5}{3}$, ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶναι ἡ

$$\chi^2-\frac{17-2\sqrt{15}}{3}\chi+\frac{5}{3}=0,\quad ἢ\quad 3\chi^2-(17-2\sqrt{15})\chi+5=0.$$

403. α') Ἔχομεν $2\chi^2-2\alpha\chi-\alpha^2=0$, καὶ (ἄσκ. 385, β)

$\varrho_1^3+\varrho_2^3=\frac{3\cdot2\cdot(-2\alpha)\,(-\alpha^2)-(-2\alpha)^3}{2^3}=\frac{12\alpha^3+8\alpha^3}{8}=\frac{5\alpha^3}{2}$ καὶ

$(\varrho_1^3\cdot\varrho_2^3)=(\varrho_1\varrho_2)^3=\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right)^3=-\frac{\alpha^6}{8}$, ἡ ζ. ἐξ. εἶναι $\chi^2-\frac{5\alpha^3}{2}\chi-\frac{\alpha^6}{8}=$ $=0$ ἢ $8\chi^2-20\alpha^3\chi-\alpha^6=0$.

β') Εἶναι $\varrho_1^3+\varrho_2^3=3\cdot1\cdot\alpha\cdot[-\alpha^2\beta(\beta+1)]-\alpha^3=-\alpha^3(3\beta^2+3\beta+1)$ καὶ $(\varrho_1\cdot\varrho_2)^3=-\alpha^6\beta^3(\beta+1)^3$. Ὅθεν ἡ ζ. ἐξ. εἶναι ἡ

$$\chi^2+\alpha^3(3\beta^2+3\beta+1)\chi-\alpha^6\beta^3(\beta+1)^3=0.$$

404 Ἐπειδὴ $\varrho_1+\varrho_2=14:7$ καὶ $\varrho_1=-5$, εἶναι $\varrho_2=14:7+5=49:7$, ἤτοι $\varrho_1\varrho_2=-245:7$. Ὅθεν ἡ ζ. ἐξ. εἶναι ἡ

$$\chi^2-\frac{14}{7}\chi-\frac{245}{7}=0,\quad ἤτοι\ ἡ\quad 7\chi^2-14\chi-245=0.$$

405 α') Εἶναι (ἄσκ. 385 καὶ 386) $\chi_1^2+\chi_2^2=(\beta^2-2\alpha\gamma):\alpha^2=\pi^2-2k$ καὶ $\chi_1^2\chi_2^2=\gamma^2:\alpha^2=k^2$ Ὅθεν $\alpha^2\chi^2-(\beta^2-2\alpha\gamma)\chi+\gamma^2=0$ καὶ $\chi^2-(\pi^2-2k)\chi+k^2=0$.

β') Ἐπειδὴ $-\chi_1^2-\chi_2^2=-(\chi_1^2+\chi_2^2)$ καὶ $(-\chi_1^2)\cdot(-\chi_2^2)=\chi_1^2\chi_2^2$, ἔχομεν ὡς ἄνω $\alpha^2\chi^2+(\beta^2-2\alpha\gamma)\chi+\gamma^2=0$ ἢ $\chi^2+(\pi^2-2k)\chi+k^2=0$.

γ') Εἶναι $\chi_1^2\chi_2+\chi_1\chi_2^2=\chi_1\chi_2(\chi_1+\chi_2)=\frac{\gamma}{\alpha}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=-\beta\gamma:\alpha^2=-k\pi$ καὶ

$$\chi_1^2\chi_2 \cdot \chi_1\chi_2^2=\chi_1^3 \cdot \chi_2^3=(\chi_1\chi_2)^3=\gamma^3 : \alpha^3=k^3.$$

Ὅθεν ἡ ζ. ἐξ. εἶναι ἡ $\alpha^3\chi^2+\alpha\beta\gamma\chi+\gamma^3=0$ ἢ $\chi^2+k\pi\chi+k^3=0$.

δ') $\chi_1+2\chi_2+2\chi_1+\chi_2=3(\chi_1+\chi_2)=-3\beta : \alpha=-3\pi$ καὶ $(\chi_1+2\chi_2)(2\chi_1+\chi_2)=$
$=2(\chi_1+\chi_2)+\chi_1\chi_2=2\beta^2 : \alpha^2+\gamma : \alpha=(2\beta^2+\alpha\gamma) : \alpha^2=2\pi^2+k.$

Ὅθεν ἡ ζ. ἐξ. εἶναι ἡ $\alpha\chi^2+3\alpha\beta\chi+(2\beta^2+\alpha\gamma)=0$ ἢ $\chi^2+3\pi\chi+(2\pi^2+k)=0$.

ε') $\chi_1-2\chi_2+\chi_2-2\chi_1=-(\chi_1+\chi_2)=\beta : \alpha=\pi$ καὶ $(\chi_1-2\chi_2)(\chi_2-2\chi_1)=$
$=\chi_1\chi_2-2(\chi_1-\chi_2)^2=\gamma : \alpha-2(\beta^2-4\alpha\gamma) : \alpha^2=(\alpha\gamma-2\beta^2+8\alpha\gamma) : \alpha^2=$
$=(9\alpha\gamma-2\beta^3) : \alpha^2=-(9k-2\pi^2)$. Ὅθεν ἡ ζ. ἐξ. εἶναι

$$\alpha^2\chi^2-\alpha\beta\chi+(9\alpha\gamma-2\beta^2)=0 \quad ἢ \quad \chi^2-\pi\chi+(9k-2\pi^2)=0.$$

στ') $\chi_1^2+\chi_2+\chi_1+\chi_2^2=(\chi_1+\chi_2)+(\chi_1^2+\chi_2^2)=-\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}=$

$=\dfrac{\beta^2-2\alpha\gamma-\alpha\beta}{\alpha^2}=\pi^2-2k-\pi$ καὶ $(\chi_1^2+\chi_2)(\chi_1+\chi^2_2)=(\chi_1^3+\chi^3_2)+\chi_1^2\chi_2^2+$

$+\chi_1\chi_2=\dfrac{3\alpha\beta\gamma-\beta^3}{\alpha^3}+\dfrac{\gamma^2}{\alpha^2}+\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{3\alpha\beta\gamma-\beta^3+\alpha\gamma^2+\alpha^2\gamma}{\alpha^3}=3k\pi-\pi^3+k^2+k.$

Ὅθεν εἶναι $\alpha^3\chi^3-\alpha(\beta^2-2\alpha\gamma-\alpha\beta)\chi+(3\alpha\beta\gamma-\beta^3+\alpha\gamma^2+\alpha^2\gamma)=0$

ἢ $\chi^2-(\pi^2-2k-\pi)\chi+(3k\pi-\pi^3+k^2+k)=0$.

ζ') καὶ η'). Ἐδῶ προφανῶς ἐκ τῶν δύο ριζῶν τῆς ζητουμένης ἐξισώσεως ἡ μία εἶναι ἡ ζ' καὶ ἡ ἄλλη ἡ η'. Ὅθεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι

$(\alpha+\gamma)(\chi_1^2+\chi_2^2)=(\alpha+\gamma)\cdot\dfrac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}=(1+k)(\pi^2-2k)$, τὸ δὲ γινόμενον αὐτῶν εἶναι

$$(\alpha\gamma)(\chi_1^4+\chi_2^4)+(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2)\chi_1^2\chi_1^2+(\beta\gamma-\alpha\beta)\chi_1\chi_2(\chi_1^2-\chi_2^2)=$$

$$\alpha\gamma[(\chi_1^2+\chi_2)^2-2\chi_1^2\chi_2^2]+(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2)(\chi_1\chi_2)^2+(\beta\gamma-\alpha\beta)\chi_1\chi_2(\chi_1+\chi_2)(\chi_1-\chi_2)=$$

$$=\alpha\gamma\left[\frac{(\beta^2-2\alpha\gamma)^2}{\alpha^4}-2\cdot\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right]+(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2)\frac{\gamma^2}{\alpha^2}+(\beta\gamma-\alpha\beta)\cdot\frac{\gamma}{\alpha}\cdot\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{\alpha}=k[(\pi^2-2k)^2-2k^2]+(1-\pi^2+k^2)\cdot k^2-(\pi k-\pi)k\pi\sqrt{\pi^2-4k}\cdot$$

Γνωρίζοντες ἤδη τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν σχηματίζομεν τὴν ζητουμένην ἐξίσωσιν κατὰ τὰ γνωστά.

θ') Εἶναι $\dfrac{\chi_1}{\chi_2^3}+\dfrac{\chi_2}{\chi_1^3}=\dfrac{\chi_1^4+\chi_2^4}{(\chi_1\chi_2)^3}=\dfrac{(\chi_1^2+\chi_2^2)^2-2\chi_1^2\chi_2^2}{(\chi_1\chi_2)^3}=$

$$=\left[\left(\frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}\right)^2-2\cdot\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right] : \frac{\gamma^3}{\alpha^3}=\frac{(\beta^2-2\alpha\gamma^2)^2-2\alpha^2\gamma^2}{\alpha\gamma^3}=\frac{(\pi^2-2k)^2-2k^2}{k^3}.$$

$$\text{καὶ} \quad \frac{\chi_1}{\chi_2^3}\cdot\frac{\chi_2}{\chi_1^3}=\frac{1}{\chi_1^2\chi_2^2}=\frac{\alpha^2}{\gamma^2}=\frac{1}{k^2}.$$

Γνωρίζοντες ἤδη τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν σχηματίζομεν τὴν ζητουμένην ἐξίσωσιν κατὰ τὰ γνωστά.

ι') Εἶναι $\dfrac{\chi_1+\chi_2}{2\chi_2}+\dfrac{\chi_1+\chi_2}{2\chi_1}=\dfrac{(\chi_1+\chi_2)^2}{2\chi_1\chi_2}=\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}:\dfrac{2\gamma}{\alpha}=\dfrac{\beta^2}{2\alpha\gamma}=\dfrac{\pi^2}{2k}$

$$\text{καὶ}\quad \left(\frac{\chi_1+\chi_2}{2\chi_1}\right)\cdot\frac{(\chi_1+\chi_2)}{2\chi_2}=\frac{(\chi_1+\chi_2)^2}{4\chi_1\chi_2}=\frac{\beta^2}{4\alpha\gamma}=\frac{\pi^2}{4k}$$

Ὅθεν: $4\alpha\gamma\chi^2-2\beta^2\chi+\beta^2=0=4k\chi^2-2\pi^2\chi+k^2$.

406. α') Αὕτη γράφεται: $\alpha^2(\chi_1{}^2+\chi_2{}^2)+2\alpha\beta(\chi_1+\chi_2)+2\beta^2=$

$$=\alpha^2\left(\frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}\right)-2\alpha\beta\cdot\frac{\beta}{\alpha}+2\beta^2=\beta^2-2\alpha\gamma.$$

β') Ἔχομεν $\beta^2(\chi_1\chi_2)^2+\beta\gamma(\chi_1{}^2+\chi_2{}^2)+\gamma^2=\dfrac{\beta^2\gamma^2}{\alpha^2}+\beta\gamma\left(\dfrac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}\right)+\gamma^2=$

$$=[\beta^2\gamma^2+\beta\gamma(\beta^2-2\alpha\gamma)+\alpha^2\gamma^2]:\alpha^2.$$

γ) Ἔχομεν $\dfrac{1}{(\gamma\chi_1+\beta)^2}+\dfrac{1}{(\gamma\chi_2+\beta)^2}=\dfrac{(\gamma\chi_2+\beta)^2+(\gamma\chi_1+\beta)^2}{(\gamma\chi_1+\beta)^2\cdot(\gamma\chi_2+\beta)^2}=$

$$=\frac{\gamma^2(\chi_1{}^2+\chi_2{}^2)+2\beta\gamma\,(\chi_1+\chi_2)+2\beta^2}{[\gamma^2\chi_1\chi_2+\beta\gamma(\chi_1+\chi_2)+\beta^2]^2}$$

$$=\left[\gamma^2\cdot\left(\frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}\right)-2\beta\gamma\cdot\frac{\beta}{\alpha}+2\beta^2\right]:\left(\gamma^2\cdot\frac{\gamma}{\alpha}-\beta\gamma\cdot\frac{\beta}{\alpha}+\beta^2\right)^2=$$

$$=[\gamma^2(\beta^2-2\alpha\gamma)-2\alpha\beta^2\gamma+2\alpha^2\beta^2]:(\gamma^3-\beta^2\gamma+\alpha^2\beta)^2.$$

407. Εἶναι $\chi_1{}^2(\chi_1-\chi_2)+\chi_2(\chi_1-\chi_2)=(\chi_1-\chi_2)(\chi_1{}^2+\chi_2{}^2)=$

$$=\frac{\sqrt{12^2-4.5.1}}{5}\cdot\frac{12^2-2.5.1}{5^2}=\frac{\sqrt{144-20}\cdot(144-10)}{125}$$

408. Εἶναι $-(\chi_1+\chi_2)(\chi_1-\chi_2):\chi_1\chi_2=-2\sqrt{4-144}:36=$

$$=-2\sqrt{-140}:36=-2i\sqrt{35}:9.$$

Πρόσημα τοῦ $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ διὰ πραγματικὰς τιμὰς τοῦ χ.

Ἀσκήσεις. *409.* α') $2\chi^2-16\chi+24=2(\chi-2)(\chi-6)$. Ὥστε τὸ τριώνυμον τοῦτο διὰ $6<\chi<2$, ἤτοι διὰ πραγματικὰς τιμὰς τοῦ χ ἐκτὸς τῶν ριζῶν εἶναι θετικὸν (διότι $\alpha=2>0$) καὶ ἀρνητικὸν διὰ $2<\chi<6$, ἤτοι διὰ πραγματικὰς τιμὰς τοῦ χ μεταξὺ τῶν ριζῶν.

β') Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἐπειδὴ $-2\chi^2+16\chi-24=-2(\chi-2)(\chi-6)$ τὸ τριώνυμον τοῦτο εἶναι ἀρνητικὸν διὰ $6<\chi<2$ (διότι $\alpha=-2<0$) καὶ θετικὸν διὰ $2<\chi<6$.

γ') $=2(\chi-4)(\chi-4)=2(\chi-4)^2$. Θετικὸν διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τοῦ $\chi\neq4$.

δ') $=0{,}75\left[\chi-\left(4+\dfrac{2\sqrt{33}}{3}\right)\right]\cdot\left[\chi-\left(4-\dfrac{2\sqrt{33}}{3}\right)\right]$. Θετ. διὰ

$4+\dfrac{2\sqrt{33}}{3}<\chi<4-\dfrac{2\sqrt{33}}{3}$ καὶ ἀρν. διὰ $4-\dfrac{2\sqrt{33}}{3}<\chi<4+\dfrac{2\sqrt{33}}{3}$.

$$ε') = \left(χ - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(χ + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right). \text{ Θετ. διὰ } \frac{\sqrt{5}-1}{2} < χ < -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

καὶ ἀρν. διὰ $-\frac{\sqrt{5}+1}{2} < χ < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

$$στ') = 2\left(χ - \frac{3+\sqrt{15}}{2}\right)\left(χ - \frac{3-\sqrt{15}}{2}\right). \text{ Θετ. διὰ } \frac{3+\sqrt{15}}{2} < χ < \frac{3-\sqrt{15}}{2}$$

καὶ ἀρν. διὰ $\frac{3-\sqrt{15}}{2} < χ < \frac{3+\sqrt{15}}{2}$.

$$ζ') = \left(χ - \frac{7+\sqrt{53}}{2}\right)\left(χ - \frac{7-\sqrt{53}}{2}\right). \text{ Θετ. διὰ } \frac{7+\sqrt{53}}{2} < χ < \frac{7-\sqrt{53}}{2} \text{ κλπ.}$$

410. α') $= -2(χ+4)^2$. Ἀρν. διὰ πᾶσαν πραγμ. τιμὴν τοῦ $χ \neq -4$.
β') $= 2[χ-(4+2i)] \cdot [χ-(4-2i)]$. Θετ. διὰ πᾶσαν πραγ τιμὴν τοῦ χ.
γ') $= -2[χ-(4+2i)] \cdot [χ-(4-2i)]$. Ἀρν. διὰ πᾶσαν πραγ. τιμὴν τοῦ χ.

$$δ') = -1\left(χ - \frac{\sqrt{17}-3}{2}\right)\left(χ + \frac{\sqrt{17}+3}{2}\right). \text{ Ἀρν. διὰ}$$

$\frac{\sqrt{17}-3}{2} < χ < -\frac{\sqrt{17}+3}{2}$ καὶ θετ. διὰ $-\frac{\sqrt{17}+3}{2} < χ < \frac{\sqrt{17}-3}{2}$.

Θέσις ἀριθμοῦ (πραγματικοῦ) ὡς πρὸς τὰς ρίζας τριωνύμου.

Ἀσκήσεις. *411.* α') Θέτομεν $ψ=χ^2+3χ-4$. Ρίζαι πραγματικαὶ καὶ
1') Διὰ $χ=1$ εἶναι $ψ=0$. Ὥστε τὸ 1 εἶναι ρίζα.

2') Διὰ $χ=7$, εἶναι $ψ=66$, ὁμόσημον τοῦ α. Ὥστε ὁ 7 κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν. Ἐπειδὴ δὲ $7 > -\frac{3}{2}$, ὁ 7 εἶναι μεγαλύτερος τῆς μεγαλυτέρας ρίζης.

3') Διὰ $χ=5$, εἶναι $ψ=36$ κλπ. ὡς ἀνωτέρω, διὰ $χ=7$.

4') Διὰ $χ=-5$ εἶναι $ψ=6$ » » » $χ=7$.

5') Διὰ $χ=-1$ εἶναι $ψ=-6$, ἑτερόσημον τοῦ α. Ὥστε ὁ -1 εἶναι ἐντὸς τῶν ριζῶν.

β') Θέτομεν $ψ=2χ^2+7χ-1$. Ρίζαι πραγματικαί, καὶ

1') Διὰ $χ=1$ εἶναι $ψ=8$, ὁμόσημον τοῦ α. Ὥστε τὸ 1 κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν. Ἐπειδὴ δὲ $1 > -\frac{7}{4}$, τὸ 1 μεγαλύτερον τῆς μεγαλυτέρας ρίζης.

2') Διὰ $χ=7$, $ψ=146$ κλπ. ὡς ἄνω. 3') Διὰ $χ=5$, $ψ=84$ κλπ. ὡς ἄνω.

4') Διὰ $χ=-5$, $ψ=14$. Ὥστε ὁ -5 ἐκτὸς τῶν ριζῶν καὶ < τῆς μικροτέρας ρίζης, διότι $-5 < -7:4$.

5') Διὰ $χ=-1$, $ψ=-6$. Ὥστε ὁ -1 ἐντὸς τῶν ριζῶν.

γ') Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι τῆς $\chi^2-4\chi+3=0$, ὁ 1 εἶναι ρίζα, οἱ δὲ 7, 5· —5· —1 ἐκτὸς τῶν ριζῶν της.

412. α') $\psi = 2\chi^2 - 6\chi + 1$. Ρίζαι πραγματικαί. 1') Διὰ $\chi = 3/4$, $\psi = -19/4$. Τὸ 3/4 μεταξὺ τῶν ριζῶν 2') Διὰ $\chi = -1$, $\psi = 9$. Τὸ -1 ἐκτὸς τῶν ριζῶν καὶ < τῆς μικροτέρας ρίζης ἐπειδὴ $-1 < 3/2$. 3') Διὰ $\chi=0{,}5$, $\psi=-1{,}5$. Τὸ 0,5 ἐκτὸς τῶν ριζῶν. 4') Διὰ $\chi=-0{,}25$, $\psi=2{,}625$. Τὸ $-0{,}25$ ἐκτὸς τῶν ριζῶν καὶ < τῆς μικροτέρας ρίζης, διότι $-0{,}25<3/2$.

β') $\psi = -\chi^2 + \chi - 4$. Ρίζαι μιγάδες. Σύγκρισις μεταξὺ πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ μιγάδων δὲν ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ.

γ') $\psi = 7\chi^2 - 4\chi - 1$. Ρίζαι πραγματικαί. 1') Διὰ $\chi = 3/4$, $\psi = -1/16$. Τὸ 3/4 ἐντὸς τῶν ριζῶν. 2') Διὰ $\chi = -1$, $\psi = 10$. Τὸ -1 μικρότερον τῆς μικροτέρας ρίζης, διότι $10<2/7$. 3') Διὰ $\chi=0{,}5$, $\psi=-1{,}25$. Τὸ 0,5 μεταξὺ τῶν ριζῶν. 4') Διὰ $\chi = -0{,}25$, $\psi = 0{,}4375$. Τὸ $-0{,}25$ ἐκτὸς τῶν ριζῶν καὶ < τῆς μικροτέρας ρίζης, διότι $0{,}4375 < 2/7$.

δ') $\psi = \frac{\chi^2}{2} - \frac{\chi}{3} - 1$. Ρίζαι πραγματικαί. 1') Διὰ $\chi=3/4$, $\psi=-31/32$ Τὸ 3/4 μεταξὺ τῶν ριζῶν. 2') Διὰ $\chi= -1$, $\psi= -1/6$. Τὸ -1 μεταξὺ τῶν ριζῶν. 3') Διὰ $\chi = 0{,}5$, $\psi = -25/24$. Τὸ 0,5 μεταξὺ τῶν ριζῶν. 4') Διὰ $\chi = -0{,}25 = -1/4$, $\psi = -85/96$. Τὸ $-0{,}25$ μεταξὺ τῶν ριζῶν.

ε') $\psi=3\chi^2 + 6\chi - 4$. Ρίζαι πραγματικαί. 1) Διὰ $\chi=3/4$, $\psi=35/16$. Τὸ 3/4 ἐκτὸς τῶν ριζῶν καὶ > τῆς μεγαλυτέρας ρίζης, διότι $3/4 > -1$. 2') Διὰ $\chi=-1$, $\psi=-7$. Τὸ -1 μεταξὺ τῶν ριζῶν. 3') Διὰ $\chi = 0{,}5=1/2$, $\psi=-0{,}25$. Τὸ 0,5 ἐντὸς τῶν ριζῶν. 4') Διὰ $\chi= -0{,}25 = -1/4$, $\psi=-85/16$. Τὸ $-0{,}25$ ἐντὸς τῶν ριζῶν.

στ') $\psi=-\chi^2-7\chi-2$. Ρίζαι πραγματικαί. 1') Διὰ $\chi = 3/4$, $\psi = -125/16$, ὁμόσημον τοῦ $\alpha=-1$. Τὸ 3/4 ἐκτὸς τῶν ριζῶν καὶ > τῆς μεγαλυτέρας ρίζης, διότι $3/4> -7/2$. 2') Διὰ $\chi= -1$, $\psi=4$. Τὸ -1 μεταξὺ τῶν ριζῶν. 3') Διὰ $\chi = 0{,}5$, $\psi=-5{,}75$. Τὸ 0,5 μεταξὺ τῶν ριζῶν καὶ > τῆς μεγαλυτέρας ρίζης διότι $0{,}5> -7/2$. 4') Διὰ $\chi = -0{,}25=-1/4$, $\psi=-5/16$. Τὸ $-0{,}25$ ἐκτὸς τῶν ριζῶν καὶ > τῆς μεγαλυτέρας ρίζης διότι $-1/4> -5/16$.

ζ') $\psi= \frac{\chi^2}{4} - \frac{\chi}{2} - 1$. Ρίζαι πραγματικαί. 1') Διὰ $\chi = 3/4$, $\psi = -79/64$, ἑτερόσημον τοῦ $\alpha=1/4$. Τὸ 3/4 μεταξὺ τῶν ριζῶν. 2') Διὰ $\chi=-1$, $\psi=-1/4$. Τὸ -1 μεταξὺ τῶν ριζῶν. 3') Διὰ $\chi=0{,}5$, $\psi=-19/16$. Τὸ 0,5 μεταξὺ τῶν ριζῶν. 4') Διὰ $\chi=-0{,}25$, $\psi=-55/64$. Τὸ $-0{,}25$ μεταξὺ τῶν ριζῶν.

η') $\psi=4\chi-7\chi+1$. Ρίζαι πραγματικαί. 1') Διὰ $\chi=3/4$, $\psi=-2$. Τὸ 3/4 μεταξὺ τῶν ριζῶν. 2') Διὰ $\chi=-1$, $\psi=12$. Τὸ -1 ἐκτὸς τῶν ριζῶν καὶ < τῆς μικροτέρας ρίζης, διότι $-1<7/8$. 3') Διὰ $\chi=0{,}5$, $\psi=-1{,}5$. Τὸ 0,5 μεταξὺ τῶν ριζῶν. 4') Διὰ $\chi=-0{,}25$, $\psi=3$. Τὸ $-0{,}25$ ἐκτὸς τῶν ριζῶν καὶ < τῆς μικροτέρας ρίζης διότι $-0{,}25<7/8$.

θ') $\psi=0{,}5\chi^2+0{,}6\chi-1$. Ρίζαι πραγματικαί. 1') Διὰ $\chi=3/4$, $\psi=-43/160$. Τὸ 3/4 μεταξὺ τῶν ριζῶν. 2') Διὰ $\chi=-1$, $\psi=-1{,}1$. Τὸ -1 μεταξὺ τῶν ριζῶν. 3') Διὰ $\chi=0{,}5$, $\psi=-0{,}575$. Τὸ 0,5 μεταξὺ τῶν ριζῶν. 4') Διὰ $\chi=-0{,}25$ $\psi=-1{,}11875$. Τὸ $-0{,}25$ μεταξὺ τῶν ριζῶν.

Εὕρεσις τῶν ριζῶν τῆς $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ κατὰ προσέγγισιν.

'Ασκήσεις. ***413.*** α') Διὰ $\chi=0$, $\psi=3$ καὶ διὰ $\chi=1$, $\psi=-1$. Ὥστε ἡ μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως περιέχεται μεταξὺ 0 καὶ 1. Διὰ $\chi=0{,}5$, $\psi=0{,}75$. Ὥστε ἡ ρίζα περιέχεται μεταξὺ 0,5 καὶ 1. Διὰ $\chi=0{,}6$, $\psi=0{,}36$ καὶ $\chi=0{,}7$, $\psi=-0{,}01$. Ὥστε ἡ ρίζα αὕτη περιέχεται μεταξὺ 0,6 καὶ 0,7. 'Εργαζόμενοι δὲ ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἄλλη ρίζα περιέχεται μεταξὺ 4,3 καὶ 4,4.

β') 'Εργαζόμενοι ὁμοίως ὡς ἄνω εὑρίσκομεν ὅτι ἡ μία ρίζα περιέχεται μεταξὺ 0,4 καὶ 0,5 καὶ ἡ ἄλλη μεταξὺ 1,5 καὶ 1,6.

γ') Ἡ μία ρίζα περιέχεται μεταξὺ 1,3 καὶ 1,4 καὶ ἡ ἄλλη μεταξὺ $-2{,}9$ καὶ $-2{,}8$.

δ') Διὰ $\chi=0$, $\psi=-1$ καὶ διὰ $\chi=1$, $\psi=2$. Ὥστε μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως περιέχεται μεταξὺ 0 καὶ 1. Διὰ $\chi=0{,}5=1/2$, $\psi=7/8$. Ὥστε ἡ ρίζα αὕτη περιέχεται μεταξὺ 0 καὶ 0,5. Διὰ $\chi=0{,}25=1/4$, $\psi=5/64$. Ὥστε ἡ ρίζα περιέχεται μεταξὺ 0 καὶ 0,25. Διὰ $\chi=0{,}2$, $\psi=-0{,}112$. Ὅθεν ἡ ρίζα αὕτη περιέχεται μεταξὺ 0,20 καὶ 0,25. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις αὕτη ὡς 3ου βαθμοῦ ἔχει τρεῖς ρίζας. Αἱ ἄλλαι ὅμως δύο ρίζαι αὐτῆς εἶναι φανταστικαί.

ε') Ἡ μία ρίζα περιέχεται μεταξὺ 0,6 καὶ 0,7 καὶ ἡ ἄλλη μεταξὺ $-3{,}7$ καὶ $-3{,}6$.

στ') Ἡ μία ρίζα περιέχεται μεταξὺ 0,5 καὶ 1 καὶ αἱ ἄλλαι δύο εἶναι φανταστικαί.

ζ') Διὰ $\chi=1$, $\psi=-1$ καὶ διὰ $\chi=2$, $\psi=5$. Ὥστε μία τῶν ριζῶν περιέχεται μεταξὺ 1 καὶ 2. Διὰ $\chi=1{,}5=3/2$, $\psi=15/16$. Ὥστε ἡ ρίζα αὕτη περιέχεται μεταξὺ 1 καὶ 1,5 κλπ.

η') Διὰ $\chi=-1$, $\psi=0$. Ὥστε ἡ -1 εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως καὶ ἐπομένως (§ 78) τὸ πολυώνυμον τοῦ 1ου μέλους εἶναι διαιρετὸν διὰ $\chi+1$ καὶ δίδει πηλίκον $\chi^3-\chi^2-2\chi+1=\varphi$. Τοῦτο δὲ διὰ $\chi=0$, δίδει $\varphi=1$ καὶ διὰ $\chi=1$, δίδει $\varphi=-1$. Ὥστε ἡ μία τῶν ριζῶν περιέχεται μεταξὺ 0 καὶ 1 κλπ.

Λύσις ἀνισότητος $\beta^{ου}$ βαθμοῦ.

'Ασκήσεις. ***414.*** α') $\psi=(\chi-1)(\chi+4)$. 'Επειδὴ δὲ $\alpha=1>0$, θὰ εἶναι $\psi>0$ διὰ $1<\chi<-4$.

β') $\psi=\left(\chi-\dfrac{\sqrt{33}-3}{2}\right)\left(\chi+\dfrac{\sqrt{33}+3}{2}\right)$. Ὅθεν $\psi>0$, ὅταν:

$$\frac{\sqrt{33}-3}{2}<\chi<-\frac{\sqrt{33}+3}{2}.$$

γ') Αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $2\chi^2-3\chi+8<0$. Ἀλλὰ τὸ τριώνυμον τοῦ α^ου μέλους ἔχει ρίζας μιγάδας. Ἐπειδὴ δὲ $\alpha=2>0$, εἶναι τοῦτο θετικὸν διὰ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ χ. Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἀνισότης εἶναι ἀδύνατος.

415. α') Ἐπειδὴ $\psi=\chi^2-12\chi+32=(\chi-4)(\chi-8)$, ἡ ἀνισότης $\psi>0$, ἀληθεύει διὰ $8<\chi<4$ καὶ ἐπειδὴ $\psi'=\chi^2-13\chi+22=(\chi-2)(\chi-11)$ ἡ $\psi'<0$ ἀληθεύει διὰ $2<\chi<11$. Ἑπομένως αἱ δοθεῖσαι ἀνισότητες συναληθεύουν διὰ $2<\chi<4$ καὶ διὰ $8<\chi<11$.

β') $\psi=\chi^2-3\chi-2=\left(\chi-\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\left(\chi-\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$. Ὥστε ἡ $\psi>0$ ἀληθεύει διὰ $\frac{3+\sqrt{17}}{2}<\chi<\frac{3-\sqrt{17}}{2}$, καὶ ἐπειδὴ

$\psi'=4\chi^2+5\chi+1=4(\chi+1)\left(\chi+\frac{1}{4}\right)$, ἡ $\psi'<0$ ἀληθεύει διὰ $-1<\chi<-1/4$.

Ὥστε αἱ δύο ἀνισότητες συναληθεύουν διὰ $-1<\chi<\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

416. α') Ἔχομεν $\frac{(\chi-1)(\chi-2)}{(\chi-3)(\chi-4)}-1>0$, ἤτοι $\frac{2(2\chi-5)}{(\chi-3)(\chi-4)}>0$. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ σημεῖον τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν, εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ γινόμενον αὐτῶν, ἔχομεν $\psi=2(2\chi-5)(\chi-3)(\chi-4)>0$. Εἶναι δὲ $\psi>0$ διὰ $\chi>4$, διότι τότε καὶ οἱ τρεῖς παράγοντες οἱ περιέχοντες τὸ χ εἶναι θετικοί, ἢ $5/2<\chi<3$, διότι τότε οἱ δύο τελευταῖοι παράγοντες εἶναι ἀρνητικοί, καὶ $2\chi-5>0$. Ἑπομένως $\psi>0$.

β') Ἐκ τῆς δοθείσης ἀνισότητος προκύπτει ἡ

$$(\chi^2-3\chi+2)(\chi^2+3\chi-2)>0, \quad \text{ἤτοι ἡ}$$

$$(\chi-1)(\chi-2)\left(\chi-\frac{\sqrt{17}-3}{2}\right)\left(\chi+\frac{\sqrt{17}+3}{2}\right)>0, \quad (\iota)$$

διότι αἱ ρίζαι τοῦ ἀριθμητοῦ εἶναι 1, 2 καὶ αἱ τοῦ παρονομαστοῦ $\frac{\sqrt{17}-3}{2}$ καὶ $-\frac{\sqrt{17}+3}{2}$.

Ἀλλ' ἐκ τῶν τεσσάρων αὐτῶν ριζῶν μεγαλυτέρα εἶναι ἡ 2 καὶ μικροτέρα ἡ $-\frac{\sqrt{17}+3}{2}$. Ὥστε διὰ $\chi>0$ καὶ διὰ $\chi<-\frac{\sqrt{17}+3}{2}$, τὸ γινόμενον τῶν τεσσάρων παραγόντων τοῦ α^ου μέλους τῆς ἀνισότητος (ι) εἶναι θετικόν, ἤτοι διὰ τὰς τιμὰς αὐτὰς τοῦ χ, ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἐπαληθεύεται. Ἀλλ' αὕτη ἐπαληθεύεται καὶ διὰ $\frac{\sqrt{17}-3}{2}<\chi<1$, διότι οὕτως οἱ δύο πρῶτοι παράγοντες εἶναι ἀρνητικοὶ καὶ οἱ δύο δεύτεροι θετικοί. γ') Αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $\frac{-15\chi^2+48\chi+7}{(3-\chi)(5\chi+1)}>0$ ἢ μὲ τὴν $(15\chi^2-48\chi-7)(\chi-3)(5\chi+1)>0$. Ἐπειδὴ δὲ αἱ

$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\frac{+13\pm 9}{2}$

$\frac{13+9}{2}=$

$\frac{13-9}{2}$

ρίζαι τοῦ 1ου παράγοντος εἶναι $\frac{24\pm\sqrt{681}}{15}$, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἐπαληθεύεται διὰ $\chi<-1/5$ καὶ διὰ $\frac{24-\sqrt{681}}{15}<\chi<3$.

417. α΄) Διὰ $\chi>\gamma$ ἢ $\alpha<\chi<\beta$. β΄) Διὰ $\chi>\delta$ ἢ $\chi<\alpha$ ἢ $\beta<\chi<\gamma$.

418. α΄) $=2\chi(2\chi^2-5\chi+9)<0$. Ἀληθεύει διὰ $\chi<0$, διότι αἱ ρίζαι τοῦ $2\chi^2-5\chi+9$ εἶναι μιγάδες καὶ ἑπομένως τοῦτο εἶναι πάντοτε θετικὸν (ἐπειδὴ $\alpha=2>0$).

β΄) $\chi(3\chi^2-5\chi+2)>0$, ἤτοι $\chi(\chi-1)(3\chi-2)>0$. Ὅθεν $\chi>1$ ἢ $0<\chi<2/3$.

γ΄) $\chi(\chi^2-\chi+4)>0$. Ὅθεν $\chi>0$, διότι αἱ ρίζαι τοῦ $\chi^2-\chi+4$ εἶναι μιγάδες.

419. Διὰ ρίζας πραγματικὰς πρέπει νὰ εἶναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma>0$ καὶ διὰ ρίζας μιγάδας πρέπει νὰ εἶναι $\Delta<0$. Ἀλλὰ $\Delta=(\mu-1)^2-4\mu(2\mu-8)=$ $=-7\mu^2+30\mu+1$· ἔχει δὲ τὸ τριώνυμον τοῦτο ρίζας $(15\pm\sqrt{232}):7$. Ὥστε διὰ ρίζας πραγματικὰς θὰ ἔχωμεν: $(15-\sqrt{232}):7<\mu<(15+\sqrt{232}):7$ καὶ μιγάδας διὰ $(15+\sqrt{232}):7<\mu<(15-\sqrt{232}).7$ (διότι $\alpha=-7$).

420. Ἔχομεν $\chi^2+(2\lambda+1)\chi-19>0$ καὶ $\alpha=1>0$. Συμβαίνει ὅθεν τὸ ζητούμενον, ὅταν τὸ τριώνυμον τοῦ πρώτου μέλους ἔχει ρίζας μιγάδας, ἤτοι ὅταν $(2\lambda+1)^2+4\cdot19<0$. Ἀλλὰ τὸ $(2\lambda+1)^2+76$ εἶναι θετικὸν διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ λ. Ὥστε τὸ ζητούμενον εἶναι ἀδύνατον.

Εὕρεσις μεγίστου ἢ ἐλαχίστου τριωνύμου βου βαθμοῦ.

Ἀσκήσεις. *421.* α΄) Ἐπειδὴ $\alpha=-1<0$, ἔχομεν μέγιστον, ὅταν $\chi=-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{4}{2(-1)}=2$ καὶ τοῦτο εἶναι $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}=-\frac{16-4(-1)3}{4.(-1)}=7$.

β΄) Ἐπειδὴ $\alpha=19>0$, ἔχομεν ἐλάχιστον, ὅταν $\chi=7:28$ καὶ τοῦτο εἶναι $-(49-228):76=179:76$.

γ΄) Ἐλάχιστον τὸ $-(49+52):4=-101:4$, ὅταν $\chi=7:2$.

δ΄) Ἐλάχιστον τὸ $-(1+420):60$, ὅταν $\chi=-1:30$.

ε΄) Μέγιστον τὸ $-(9-24):-4=-15:4$, ὅταν $\chi=3:2$.

στ΄) Ἐλάχιστον τὸ $-[0,25^2+4\cdot9,5.2]:38=-76,0625:38$, ὅταν $\chi=0,25:19=1:76$.

Γραφικαὶ παραστάσεις τῶν συναρτήσεων $\psi=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ καὶ $\psi=\frac{\alpha\chi+\beta}{\gamma\chi+\delta}$

Ἀσκήσεις. *422.* **α΄) Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου εἶναι $\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$ Γίνεται δὲ τοῦτο $\psi=-3$, διὰ $\chi=0$. Ἐπειδὴ δὲ $\alpha=1>0$, τοῦτο ἔχει ἐλάχιστον $-13/4$, ὅταν $\chi=1:2$. Ὥστε ἡ παριστάνουσα τὸ ψ καμπύλη εἶναι παραβολὴ**

υσα τὸν ἄξονα τῶν χ εἰς τὰ σημεῖα $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}, 0\right), \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, 0\right)$ καὶ τὸν ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον (0,—3).

β΄) Ἐδῶ εἶναι $\varrho_1=(7+\sqrt{13}):6$, $\varrho_2=(7-\sqrt{13}):6$ καὶ διὰ $\chi=0$ εἶναι $\psi=3$. Ἔχει δὲ τὸ ψ ἐλάχιστον τὸ $-13:12$, ὅταν $\chi=7:6$.

Ὥστε ἡ καμπύλη εἶναι παραβολὴ τέμνουσα τὸν ἄξονα τῶν χ εἰς τὰ σημεῖα $\left(\frac{7+\sqrt{13}}{6}, 0\right), \left(\frac{7-\sqrt{13}}{6}, 0\right)$ καὶ τὸν ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον (0,3).

γ΄) Εἶναι $\varrho_1=0$, $\varrho_2=-8$, $\psi=0$ διὰ $\chi=0$ καὶ ἐλάχιστον

$-(\beta^2-4\alpha\gamma):4\alpha=-(8^2):4=-16$, ὅταν $\chi=-\beta:2\alpha=-8:2=-4$.

Ἡ καμπύλη λοιπὸν εἶναι παραβολὴ τέμνουσα τὸν ἄξονα τῶν χ εἰς τὰ σημεῖα (0,0), (—8,0) καὶ τὸν ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον (0,0). Ὥστε ἡ καμπύλη αὕτη διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων.

δ΄) Τὸ τριώνυμον τοῦ δευτέρου μέλους ἔχει ῥίζας μιγάδας. Εἶναι δὲ $\psi=-1$, ὅταν $\chi=0$ καὶ μέγιστον $-(\beta^2-4\alpha\gamma):4\alpha=$

$$=-\left(\frac{4}{25}-4\cdot\frac{3}{4}\cdot 1\right):4\left(\frac{-3}{4}\right)=\frac{71}{25}:-3=-\frac{71}{75}, \text{ ὅταν}$$

$$\chi=-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{2}{5}:-\frac{3}{2}=\frac{4}{15} \text{ κλπ. ὡς ἄνω.}$$

423. Ἐὰν θέσωμεν $\psi=\chi^2$ καὶ εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ἀντικαταστήσωμεν τὸ χ^2 διὰ τοῦ ψ, ἔχομεν τὸ σύστημα $\psi=\chi^2$, $\psi-7\chi+11=0$. Ἡ πρώτη ἐξίσωσις $\psi=\chi^2$, παριστᾷ παραβολὴν διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων μὲ τοὺς κλάδους πρὸς τὰ ἄνω καὶ συμμετρικὴν πρὸς τὸν ἄξονα τῶν ψ, διότι διὰ $\chi=0, \pm1, \pm2, \pm3$ κλπ. εἶναι $\psi=0, 1, 4, 9$ κλπ. Ἡ δευτέρα $\psi-7\chi+11=0$ παριστᾷ εὐθεῖαν τέμνουσαν τὸν ἄξονα τῶν χ εἰς τὸ σημεῖον (7/11,0) καὶ τὸν ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον (0,—11). Αἱ δὲ συντεταγμέναι τῶν κοινῶν σημείων τῆς ὡς ἄνω παραβολῆς καὶ εὐθείας ἐπαληθεύουν ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις καὶ ἑπομένως αἱ τετμημέναι τῶν κοινῶν αὐτῶν σημείων εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, τὰς ὁποίας οὕτως εὑρίσκομεν γραφικῶς, ἤτοι λύομεν γραφικῶς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν.

424. Παριστᾷ περιφέρειαν κύκλου μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων καὶ ἀκτῖνα $\sqrt{25}=5$.

425. Ἡ $\psi=\chi^2$ εἴδομεν προηγουμένως (ἄσκ. 423) τί παραβολὴν παριστάνει. Ἡ δὲ $\chi=\psi^2$ διὰ $\psi=0, \pm1, \pm2, \pm3$ κλπ. δίδει $\chi=0,1,4,9$, κλπ. Ὥστε ἡ ἐξίσωσις αὕτη παριστᾷ παραβολὴν διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων, μὲ τοὺς κλάδους πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ συμμετρικὴν πρὸς τὸν ἄξονα τῶν χ. Ὡς δὲ βλέπομεν εἰς τὰς τιμὰς χ καὶ ψ (ἄσκ. 423 καὶ ἀνωτέρω) αἱ παραβολαὶ αὗται ἔχουν κοινὰ μόνον τὰ σημεῖα (0,0), (1,1), ἤτοι αὗται ἔχουν μόνον μίαν κοινὴν χορδήν.

426. Διὰ $\chi=0, \pm1, \pm2, \pm3$ κλπ. εἶναι $\frac{\chi^2}{8}=\psi=0, \frac{1}{8}, \frac{4}{8}, \frac{9}{8}$ καὶ διὰ $\psi=0, \pm1, \pm2, \pm3$ εἶναι $-\psi^2=\chi=0, -1, -4, -9$ κλπ. Ὥστε αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις παριστάνουν παραβολὰς αἱ ὁποῖαι ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχουν, τὸ (0,0), ἤτοι τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων.

427. Ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω, εὑρίσκομεν ὅτι αἱ παραβολαὶ τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων, καὶ ὅτι ἡ μία περιέχεται ἐντὸς τῆς ἄλλης.

428. Εἶναι τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τοῦ κύκλου, μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων μὲ ἀκτῖνα $\sqrt{100}=10$ καὶ τῆς εὐθείας $\chi+\psi=5$.

429. α′) Αὕτη παριστᾷ ὑπερβολήν, τῆς ὁποίας οἱ κλάδοι διέρχονται διὰ τῶν σημείων:

$$\begin{matrix}\chi=1, & 2, & 3\ldots \\ \psi=-1, & -\frac{1}{2}, & -\frac{1}{3}\ldots\end{matrix} \quad \text{καὶ} \quad \begin{matrix}\chi=-1, & -2, & -3\ldots, \\ \psi=1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}\ldots\end{matrix}$$

β′) Ὁμοίως οἱ κλάδοι τῆς ὑπερβολῆς $\psi=2/\chi$ διέρχονται διὰ τῶν σημείων:

$$\begin{matrix}\chi=1, & 2, & 3\ldots \\ \psi=2, & 1, & 2/3\ldots\end{matrix} \quad \text{καὶ} \quad \begin{matrix}\chi=-1, & -2, & -3\ldots \\ \psi=-2, & -1, & -2/3\ldots\end{matrix}$$

Ὁμοίως δὲ εὑρίσκομεν καὶ τὰ σημεῖα διὰ τῶν ὁποίων διέρχονται οἱ κλάδοι τῶν ὑπερβολῶν γ′), δ′), ε′) καὶ στ′).

430. Ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν.

431. α′) Εἶναι (§ 196) $\alpha=2, \beta=-1, \gamma=2, \delta=1$. Ὅθεν:

$$\frac{\alpha}{\gamma}=1, \quad \frac{\delta}{\gamma}=\frac{1}{2}, \quad \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2}=\frac{-2-2}{4}=-1. \text{ Ὥστε } \chi_1\psi_1=-1.$$

Ἡ ἐξίσωσις δὲ αὕτη πρὸς τοὺς νέους ἄξονας $\chi_1 O \psi_1$ παριστᾷ ὑπερβολὴν (ἄσκ. 429, α′). Ὁμοίως δὲ ἐργαζόμεθα καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων διδομένων συναρτήσεων, παρατηροῦντες ὅτι ἡ συνάρτησις στ′) $\chi\psi+2\chi-3\psi+1=0$, γράφεται $\psi(\chi-3)=-2\chi-1$, ἤτοι $\psi=\frac{-2\chi-1}{\chi-3}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΑΓΟΜΕΝΑΙ ΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΟΥΣ

Διτετράγωνοι ἐξισώσεις.

Ἀσκήσεις. *432.* α′) $9\chi^4-10\chi^2+1=0$, $\chi^2=\frac{5\pm\sqrt{25-9}}{9}=\frac{5\pm4}{9}=1$ καὶ /9 καὶ $\chi=\pm1$ καὶ $\pm1/3$.

β') $\chi^4-26\chi^2+25=0$, $\chi^2=13\pm\sqrt{169-25}=13\pm 12=25$ καὶ 1. Ὅθεν. $\chi=\pm 5$ καὶ ± 1.

γ') $10\chi^4-\chi^2-21=0$, $\chi^2=\left(1\pm\sqrt{1+840}\right):20=(1\pm 29):20=3/2$ καὶ $-7/5$. Ὅθεν $\chi=\pm\sqrt{3/2}$ καὶ $\chi=\pm i\sqrt{7/5}$.

δ') $\chi^4-6\chi^2-7=0$, $\chi^2=3\pm\sqrt{9+7}=7$ καὶ -1. Ὅθεν $\chi=\pm\sqrt{7}$ καὶ $\pm i$.

ε') $\chi^2+\dfrac{9}{\chi^2}=6{,}25$, $\chi^4-6{,}25\chi^2+9=0$, $4\chi^4-25\chi^2+36=0$, $\chi^2=$
$=\left(25\pm\sqrt{625-576}\right):8=(25\pm 7):8=4$ καὶ $9/4$. Ὅθεν $\chi=\pm 2$ καὶ $\pm 3/2$.

στ') $9+\dfrac{1}{\chi^4}-\dfrac{10}{\chi^2}=0$, $9\chi^4-10\chi^2+1=0$, $\chi^2=\left(5\pm\sqrt{25-9}\right):9=$
$=(5\pm 4):9=1$ καὶ $1/9$. Ὅθεν $\chi=\pm 1$ καὶ $\pm 1/3$

ζ') $\dfrac{1}{\chi}+\dfrac{\chi}{\chi^2+2}=\dfrac{\chi}{2}$, $2(\chi^2+2)+2\chi^2=\chi^2(\chi^2+2)$, $\chi^4-2\chi^2-4=0$,
$\chi^2=1\pm\sqrt{1+4}=1\pm\sqrt{5}$ καὶ $\chi=\pm\sqrt{1\pm\sqrt{5}}$.

η') $\chi^2(\chi^2-4)=20$, $\chi^4-4\chi^2-20=0$, $\chi^2=2\pm\sqrt{4+20}=2\pm 2\sqrt{6}$ καὶ $\chi=\pm\sqrt{2\pm 2\sqrt{6}}$

θ') $2(\chi^2+1)(\chi^2+2)-5(\chi^2-1)(\chi^2-2)-30=0$, $2(\chi^4+3\chi^2+2)-5(\chi^4-3\chi^2+2)-$
$-30=0$ $\chi^4-7\chi^2+12=0$, $\chi^2=(7\pm 1):2=4$ καὶ 3. Ὅθεν $\chi=\pm 2$ καὶ $\pm\sqrt{3}$.

433. α') $\chi^2=\dfrac{(\alpha^2\beta^2+1)\pm\sqrt{(\alpha^2\beta^2+1)^2-4\alpha^2\beta^2}}{2\alpha}=$
$=\dfrac{(\alpha^2\beta^2+1)\pm(\alpha^2\beta^2-1)}{2\alpha}=\alpha\beta^2$ καὶ $\dfrac{1}{\alpha}$. Ὅθεν $\chi=\pm\beta\sqrt{\alpha}$ καὶ $\pm 1/\sqrt{\alpha}$.

β') $\chi^4-2(\alpha^2+\beta^2)\chi^2-(\alpha^4+\beta^4-2\alpha^2\beta^2)=0$. ἢ $\chi^4-2(\alpha^2+\beta^2)\chi^2-(\alpha^2-\beta^2)^2=0$, $\chi^2=(\alpha^2+\beta^2)\pm\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)^2-(\alpha^2-\beta^2)^2}$. Ἀλλ' ἡ ὑπόρριζος ποσότης γράφεται $(\alpha^2+\beta^2+\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2-\alpha^2+\beta^2)=2\alpha^2\cdot 2\beta^2=4\alpha^2\beta^2$. Ὅθεν:

$$\chi^2=\alpha^2+\beta^2\pm 2\alpha\beta=(\alpha\pm\beta)^2 \text{ καὶ } \chi=\pm(\alpha+\beta) \text{ καὶ } \pm(\alpha-\beta).$$

γ') $4\chi^4-17\gamma^3\chi^2+4\gamma^6=0$, $\chi^2=\left(17\gamma^3\pm\sqrt{289\gamma^6-64\gamma^6}\right):8=$
$=(17\gamma^3\pm 15\gamma^3):8=4\gamma^3$ καὶ $\gamma^3/4$. Ὅθεν $\chi=\pm 2\gamma\sqrt{\gamma}$ καὶ $\pm\gamma\sqrt{\gamma}/2$.

δ') $\chi^4-2(\alpha^2+\beta^2)\chi^2+(\alpha^4+\beta^4)=0$, $\chi^2=(\alpha^2+\beta^2)\pm$
$\pm\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)^2-(\alpha^4+\beta^4)}=(\alpha^2+\beta^2)\pm\alpha\beta\sqrt{2}$. Ὅθεν $\chi=\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2\pm\alpha\beta\sqrt{2}}$.

434. α') $\alpha^2\pm\dfrac{\alpha^2\beta^2}{\chi^2}=\beta^2+\chi^2$, $\chi^4-(\alpha^2-\beta^2)\chi^2\mp\alpha^2\beta^2=0$
$\chi^2=\left(\alpha^2-\beta^2\pm\sqrt{(\alpha^2-\beta^2)^2\pm 4\alpha^2\beta^2}\right):2$. Ὥστε ἡ ὑπόρριζος ποσότης εἶναι

1) $\alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 + 4\alpha^2\beta^2 = (\alpha^2+\beta^2)^2$, ὁπότε $\chi^2 = [\alpha^2 - \beta^2 \pm (\alpha^2+\beta^2)] : 2 = \alpha^2$ ἢ $-\beta^2$ καὶ $\chi = \pm\alpha$ ἢ $\pm\beta i$ καὶ 2) $\alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 - 4\alpha^2\beta^2 =$

$= \alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4$. ὁπότε $\chi = \pm\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \pm \sqrt{\alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4}} : \sqrt{2}$.

β΄) $\dfrac{1}{3\chi^4} - \dfrac{2\beta}{3\chi^2} = \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$, $3\beta^2\chi^4 + 2\alpha^2\beta\chi^2 - \alpha^2 = 0$,

$\chi^2 = \left(-\alpha^2\beta \pm \sqrt{\alpha^4\beta^2 + 3\alpha^2\beta^2}\right) : 3\beta^2$ καὶ $\chi = \left(\pm\sqrt{-\alpha^2 \pm \alpha\sqrt{\alpha^2+3}}\right) : \sqrt{3}\cdot\beta$.

γ΄) $\dfrac{59\chi^2}{\alpha^2} - \dfrac{2\chi^4}{\alpha^4} = 225$. $2\chi^4 - 59\alpha^2\chi^2 + 225\alpha^2 = 0$,

$\chi^2 = \left(59\alpha^2 \pm \sqrt{59^2\alpha^4 - 1800\alpha^4}\right) : 4 = (59\alpha^2 \pm 41\alpha^2) : 4 = 25\alpha^2$ καὶ $9\alpha^2/2$.
Ὅθεν $\chi = \pm 5\alpha$ καὶ $\pm 3\alpha/\sqrt{2}$.

δ΄) $\chi^2 = (\mu^2\nu^2 + \varrho^2) \pm \sqrt{(\mu^2\nu^2+\varrho^2)^2 - (\mu^2\nu^2-\varrho^2)^2}$. Ἀλλ' ἡ ὑπόρριζος ποσότης γράφεται
$(\mu^2\nu^2 + \varrho^2 + \mu^2\nu^2 - \varrho^2)(\mu^2\nu^2 + \varrho^2 - \mu^2\nu^2 + \varrho^2) = 2\mu^2\nu^2 \cdot 2\varrho^2 = 4\mu^2\nu^2\varrho^2$. Ὅθεν: $\chi^2 = \mu^2\nu^2 + \varrho^2 \pm 2\mu\nu\varrho = (\mu\nu \pm \varrho)^2$ καὶ $\chi = \pm(\mu\nu + \varrho)$ καὶ $\pm(\mu\nu - \varrho)$.

ε΄) $\chi^2 = \left[\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta\gamma) \pm \sqrt{\alpha^2\beta^2\gamma^2(\alpha+\beta\gamma)^2 - 4(\alpha\beta\gamma)^3}\right] : 2$. Ἀλλ' ἡ ὑπόρριζος ποσότης γράφεται: $\alpha^2\beta^2\gamma^2(\alpha^2 + \beta^2\gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma - 4\alpha\beta\gamma) = \alpha^2\beta^2\gamma^2(\alpha - \beta\gamma)^2$. Ὅθεν $\chi^2 = [\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta\gamma) \pm \alpha\beta\gamma(\alpha-\beta\gamma)] : 2 = \alpha^2\beta\gamma$ ἢ $\alpha\beta^2\gamma^2$ καὶ διὰ τοῦτο $\chi = \pm\alpha\sqrt{\beta\gamma}$ ἢ $\pm\beta\gamma\sqrt{\alpha}$.

Τροπὴ τοῦ τριωνύμου $\alpha\chi^4 + \beta\chi^2 + \gamma$ εἰς γινόμενον παραγόντων.

Ἀσκήσεις. *Ὁμὰς πρώτη.* **435.** α΄) $\chi^2 = \left(5 \pm \sqrt{25-16}\right) : 4 = 2$ ἢ $1/2$.
Ὅθεν $4\chi^4 - 10\chi^2 + 4 = 4(\chi^2 - 2)\left(\chi^2 - \dfrac{1}{2}\right) =$

$$= 4(\chi - \sqrt{2})(\chi + \sqrt{2})\left(\chi - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\chi + \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

β΄) $7\chi^4 - 35\chi^2 + 28 = 7(\chi^4 - 5\chi^2 + 4) = 7(\chi^2 - 4)(\chi^2 - 1) = 7(\chi-2)(\chi+2)(\chi-1)(\chi+1)$.

γ΄) $\psi^2 = \left[(\alpha^4+\beta^4) \pm \sqrt{(\alpha^4+\beta^4)^2 - 4\alpha^4\beta^4}\right] : 2\alpha^2\beta^2 = [(\alpha^4+\beta^4) \pm (\alpha^4 - \beta^4)] : 2\alpha^2\beta^2 = \alpha^2/\beta^2$ ἢ β^2/α^2 καὶ $\psi = \pm\dfrac{\alpha}{\beta}$, ἢ $\pm\dfrac{\beta}{\alpha}$. Ὅθεν τὸ δοθὲν τριώνυμον ἀναλύεται εἰς τὸ γινόμενον:

$$\alpha^2\beta^2\left(\psi - \frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\psi + \frac{\alpha}{\beta}\right)\cdot\left(\psi - \frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\psi + \frac{\beta}{\alpha}\right) =$$
$$= (\beta\psi - \alpha)(\beta\psi + \alpha)(\alpha\psi - \beta)(\alpha\psi + \beta).$$

δ΄) $\psi^2 = 2\alpha\beta \pm \sqrt{4\alpha^2\beta^2 + (\alpha^2 - \beta^2)^2} = 2\alpha\beta \pm (\alpha^2 - \beta^2) = (\alpha+\beta)^2$ ἢ $-(\alpha-\beta)^2$ καὶ $\psi = \pm(\alpha+\beta)$ ἢ $\pm i(\alpha - \beta)$. Κατόπιν τούτων τὸ ζητούμενον γινόμενον εὑρίσκεται κατὰ τὰ γνωστά.

ε΄) $\psi^2=[-\lambda^2(\alpha^2-\beta^2)\pm\sqrt{\lambda^4(\alpha^2-\beta^2)^2+4\lambda^4\alpha^2\beta^2}]:2\lambda^4$. Ἀλλ᾽ ἡ ὑπόρριζος ποσότης γίνεται $\lambda^4[(\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2]=\lambda^4(\alpha^2+\beta^2)^2$. Ὅθεν:
$\psi^2=[-\lambda^2(\alpha^2-\beta^2)\pm\lambda^2(\alpha^2+\beta^2)]:2\lambda^4=\beta^2/\lambda^2$ ἢ $-\alpha^2/\lambda^2$ καὶ $\psi=\pm\beta/\lambda$ ἢ $\pm\alpha i/\lambda$ κτλ.

στ΄) $\psi^2=[(\alpha+1)\alpha\pm\sqrt{(\alpha+1)^2\cdot\alpha^2-4\alpha^3}]:2$ Ἐπειδὴ ἡ ὑπόρριζος ποσότης γίνεται $\alpha^2[(\alpha+1)^2-4\alpha]=\alpha^2(\alpha-1)^2$, εἶναι $\psi^2=[(\alpha+1)\alpha\pm(\alpha-1)\alpha]=\alpha^2$ ἢ α καὶ $\psi=\pm\alpha$ ἢ $\pm\sqrt{\alpha}$ κλπ.

436. α) Ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶναι ἡ $(\chi-3)(\chi+3)(\chi-1)(\chi+1)=$
$=(\chi^2-9)(\chi^2-1)=\chi^4-10\chi^2+9=0$.

β΄) Ὁμοίως ἔχομεν $(\chi-\alpha)(\chi+\alpha)(\chi-\sqrt{\alpha})(\chi+\sqrt{\alpha})=(\chi^2-\alpha^2)(\chi^2-\alpha)=$
$\chi^4-\alpha(\alpha+1)\chi^2+\alpha^3=0$.

γ΄) $[\chi^2-(0,5)^2]\cdot[\chi^2-(4i)^2]=(\chi^2-0,25)(\chi^2+16)=\chi^4+15,75\chi^2-4=0$.

δ΄) $(\chi^2-9)(\chi^2+1)=\chi^4-8\chi^2-9=0$

Ὁμὰς δευτέρα. 437. α΄) $(\chi^2+1)(\chi^2-4/9)=\chi^4+5/9\chi^2-4/9=9\chi^4+5\chi^2-4=0$.

β΄) $[\chi^2-(0,2)^2][\chi^2-(0,75)^2]=\chi^4-(0,04+0,5625)\chi^2+0,04\,.\,0,5625=$
$=\chi^4-0,6025\chi^2+0,0225=0$, γ΄) $\chi^4-5\alpha^2\chi^2+4\alpha^4=0$.

δ΄) $[\chi^2-(\alpha-i)^2][\chi^2-(\alpha+i)^2]=\chi^4-[(\alpha+i)^2+(\alpha-i)^2]\chi^2+(\alpha-i)^2(\alpha+i)^2=$
$=\chi^4-2(\alpha^2-1)\chi^2+(\alpha^2+1)^2=0$.

ε΄) $[\chi^2-(0,75)^2][\chi^2-(2i)^2]=(\chi^2-0,5625)(\chi^2+4)=\chi^4+3,4375\chi^2+2,25=0$.

στ΄) $(\chi^2-4)(\chi^2+9)=\chi^4+5\chi^2-36=0$.

Ὁμὰς τρίτη. 438. Εἶναι $\alpha\chi^4+\beta\chi^2+\gamma=\alpha(\chi-\varrho_1)(\chi-\varrho_2)(\chi-\varrho_2)(\chi-\varrho_4)$.

1΄) $\alpha>0$. Ἐὰν $\chi<\varrho_1$ ἢ $\chi>\varrho_2$, οἱ τέσσαρες παράγοντες μὲ τὸ χ ἔχουν γινόμενον θετικόν. Ὥστε τὸ πρόσημον τοῦ τριωνύμου εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ πρόσημον τοῦ α. Τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει καὶ ὅταν $\varrho_2<\chi<\varrho_3$, διότι οἱ δύο τελευταῖοι παράγοντες εἶναι ἀρνητικοί, ἐνῷ οἱ ἄλλοι εἶναι θετικοί. Ἐὰν $\varrho_1<\chi<\varrho_2$ ἢ $\varrho_3<\chi<\varrho_4$, τρεῖς τῶν παραγόντων εἶναι ἀρνητικοί. Ὅθεν τὸ πρόσημον τοῦ τριωνύμου εἶναι ἀντίθετον τοῦ α. Ὅταν δύο ρίζαι εἶναι φανταστικαὶ ἢ μιγαδικαί, τὸ γινόμενον τῶν σχετικῶν μὲ αὐτὰς παραγόντων, ὡς ἄθροισμα δύο τετραγώνων, εἶναι πάντοτε θετικόν. Ὥστε τὸ πρόσημον τοῦ τριωνύμου ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ προσήμου τοῦ γινομένου τῶν ἄλλων παραγόντων. Ἐὰν καὶ αἱ τέσσαρες ρίζαι τοῦ τριωνύμου εἶναι φανταστικαὶ ἢ μιγαδικαί, τὸ τριώνυμον εἶναι πάντοτε θετικόν.

2΄) $\alpha<0$. Ἐὰν $\chi<\varrho_1$ ἢ $\chi>\varrho_2$ ἢ $\varrho_2<\chi<\varrho_3$, τὸ τριώνυμον ἔχει τὸ πρόσημον τοῦ α καὶ ἀντίθετον αὐτοῦ, ἐὰν $\varrho_1<\chi<\varrho_2$ ἢ $\varrho_3<\chi<\varrho_4$. Ὅταν αἱ δύο ρίζαι εἶναι φανταστικαὶ ἢ μιγαδικαί, τὸ πρόσημον τοῦ τριωνύμου ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ προσήμου τοῦ γινομένου τῶν παραγόντων τῶν μὴ σχετικῶν μὲ αὐτάς. Ἐὰν καὶ αἱ τέσσαρες ρίζαι εἶναι φανταστικαὶ ἢ μιγαδικαί, τὸ τριώνυμον εἶναι ἀρνητικόν.

439. α΄) Κατὰ πρῶτον παρατηροῦμεν ὅτι $\lambda\neq 2$, διότι ἐὰν $\lambda=2$ ἡ ἐξίσωσις αὕτη θὰ κατήντα 2ου βαθμοῦ. Κατόπιν τούτων εὑρίσκομεν τὰς ρίζας τῆς δευτεροβαθμίου, ἥτις προκύπτει ἐκ τῆς διτετραγώνου. Ἐὰν δὲ θέσωμεν $\chi^2 = \psi$, θὰ ἔχωμεν:

$$\psi = \frac{-2(\lambda+3) \pm \sqrt{4(\lambda+3)^2-(\lambda-2)(\lambda-1)}}{\lambda-2}.$$ Ἐὰν δὲ $\Delta = 4(\lambda+3)^2 -$

$-(\lambda-2)(\lambda-1) = 0$, θὰ ἔχωμεν $\psi = \dfrac{-2(\lambda+3)}{\lambda-2}$ καὶ $\chi = \pm\sqrt{\dfrac{-2(\lambda+3)}{\lambda-2}}$.

Θὰ εἶναι δὲ τὸ χ πραγματικόν, ἤτοι ἡ διτετράγωνος θὰ ἔχῃ δύο πραγματικὰς ῥίζας διπλᾶς, ἐὰν $-2(\lambda+3)(\lambda-2)>0$, ἤτοι ἐὰν $-3<\lambda<2$ καὶ φανταστικὰς ἐὰν $2<\lambda<-3$.

Ἐὰν $\Delta = 4(\lambda+3)^2-(\lambda-2)(\lambda-1) = 3\lambda^2+27\lambda+34 \neq 0$, θὰ εὕρωμεν τὰς ῥίζας αὐτοῦ αἱ ὁποῖαι εἶναι $\lambda = \dfrac{-27 \pm \sqrt{321}}{6}$. Οὕτω τὸ τριώνυμον $3\lambda^2+$ $+27\lambda+34$, θὰ εἶναι ἀρνητικόν, ἤτοι ἡ δευτεροβάθμιος θὰ ἔχῃ ῥίζας μιγάδας, ἐὰν $\dfrac{-27+\sqrt{321}}{6} > \lambda > -\dfrac{27+\sqrt{321}}{6}$. Ἀλλὰ τότε καὶ αἱ τέσσαρες ῥίζαι τῆς διτετραγώνου θὰ εἶναι μιγάδες. Ἐὰν ὅμως

$\dfrac{-27+\sqrt{321}}{6} < \lambda < -\dfrac{27+\sqrt{321}}{6}$, τὸ ἐν λόγῳ τριώνυμον θὰ εἶναι θετικόν, ἤτοι ἡ δευτεροβάθμιος θὰ ἔχῃ ῥίζας πραγματικάς. Καὶ ἐὰν μὲν αἱ τιμαὶ τοῦ λ τῆς περιπτώσεως αὐτῆς καθιστοῦν τὰ $(\lambda-2)$ καὶ $(\lambda-1)$ ὁμόσημα καὶ αἱ τέσσαρες ῥίζαι τῆς διτετραγώνου θὰ εἶναι πραγματικαί, διότι ἀμφότεραι αἱ ῥίζαι τῆς δευτεροβαθμίου θὰ εἶναι θετικαί. Ἐὰν δὲ καθιστοῦν τὰ $(\lambda-2)$ καὶ $(\lambda-1)$ ἑτερόσημα, αἱ ῥίζαι τῆς δευτεροβαθμίου θὰ εἶναι ἑτερόσημοι καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ διτετράγωνος θὰ ἔχῃ δύο ῥίζας πραγματικὰς καὶ δύο μιγάδας.

439. β′) Ἐὰν θέσωμεν $\chi^2 = \psi$, ἔχομεν:

$$\psi = \frac{(3\lambda+4) \pm \sqrt{(3\lambda+4)^2-4(\lambda+1)^2}}{2}.$$ Ἐὰν δὲ $\Delta = (3\lambda+4)^2-4(\lambda+1)^2 =$ $= 5\lambda^2+16\lambda+12 = 0$, θὰ εἶναι $\psi = \dfrac{3\lambda+4}{2}$, ἤτοι $\chi = \pm\sqrt{\dfrac{3\lambda+4}{2}}$. Θὰ εἶναι δὲ τὸ χ πραγματικὸν ἐὰν $\lambda > -4/3$. Ἐάν $\Delta \neq 0$, θὰ εὕρωμεν τὰς ῥίζας τοῦ τριωνύμου $5\lambda^2+16\lambda+12$ αἱ ὁποῖαι εἶναι -2 καὶ $-\dfrac{6}{5}$.

Ὥστε τοῦτο θὰ εἶναι θετικόν, ἤτοι αἱ ῥίζαι ψ θὰ εἶναι πραγματικαὶ ἐὰν $-\dfrac{6}{5} < \lambda < -2$ καὶ μιγαδικαὶ ἐὰν $-2 < \lambda < -\dfrac{6}{5}$ ὁπότε καὶ αἱ τέσσαρες ῥίζαι τῆς διτετραγώνου, θὰ εἶναι μιγαδικαί. Ἐὰν δὲ αἱ πραγματικαὶ ῥίζαι τοῦ ψ εἶναι ἀμφότεραι θετικαὶ καὶ αἱ τέσσαρες ῥίζαι τῆς διτετραγώνου εἶναι πραγματικαί, ἐνῷ ἐὰν αἱ ῥίζαι αὗται τοῦ ψ εἶναι ἑτερόσημοι, αἱ δύο μόνον ῥίζαι τῆς διτετραγώνου θὰ εἶναι πραγματικαί.

440. Πρέπει δηλαδὴ νὰ εἶναι $\sqrt{(\lambda+1)^2-8(\lambda^2+3)} : 2 = 1$, ἤτοι

$\sqrt{\lambda^4-6\lambda^2-23}=2$, $\lambda^4-6\lambda^2-23=4$, ἤτοι $\lambda^4-6\lambda^2-27=0$. Ἀλλὰ τότε εἶναι $\lambda^2=3+\sqrt{9+27}=3\pm6=9$ ἢ -3, ἤτοι $\lambda=\pm3$ ἢ $\pm i\sqrt{3}$.

Τροπὴ διπλῶν τινων ριζικῶν εἰς ἁπλᾶ.

Ἀσκήσεις. ***441.*** Ἐδῶ εἶναι $\Gamma=\sqrt{A^2-B}=\sqrt{25-24}=1$. Ὅθεν

$$\sqrt{5+\sqrt{24}}=\sqrt{\frac{5+1}{2}}+\sqrt{\frac{5-1}{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

β′) $\sqrt{7+\sqrt{48}}=\sqrt{\frac{7+1}{2}}+\sqrt{\frac{7-1}{2}}=2+\sqrt{3}$.

γ′) $\sqrt{8+\sqrt{48}}=\sqrt{\frac{8+4}{2}}+\sqrt{\frac{8-4}{2}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

δ′) $\sqrt{\alpha^2+\beta+\sqrt{4\alpha^2\beta}}$. Ὅθεν $\Gamma=\sqrt{A^2-B}=\sqrt{(\alpha^2+\beta)^2-4\alpha^2\beta}=$

$=\sqrt{(\alpha^2-\beta)^2}=\alpha^2-\beta$. Καὶ διὰ τοῦτο εἶναι:

$$\sqrt{\alpha^2+\beta+2\alpha\sqrt{\beta}}=\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta+\alpha^2-\beta}{2}}+\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta-\alpha^2+\beta}{2}}=\alpha+\sqrt{\beta}.$$

ε′) $\sqrt{2\alpha+\sqrt{4(\alpha^2-\beta^2)}}=\sqrt{\frac{2\alpha+2\beta}{2}}+\sqrt{\frac{2\alpha-2\beta}{2}}=\sqrt{\alpha+\beta}+\sqrt{\alpha-\beta}$.

στ′) $\sqrt{\alpha+\beta-\sqrt{4\alpha\beta}}=\sqrt{\frac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2}}-\sqrt{\frac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2}}=\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$.

ζ′) $\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\sqrt{\frac{\gamma^2(\alpha^2-\gamma^2)}{4}}}$. Ὅθεν $A^2-B=\frac{\alpha^4}{16}-\frac{\alpha^2\gamma^2}{4}+\frac{\gamma^4}{4}=\left(\frac{\alpha^2}{4}-\frac{\gamma^2}{2}\right)^2$,

ἤτοι $\Gamma=\frac{\alpha^2}{4}-\frac{\gamma^2}{2}$ καὶ κατὰ συνέπειαν $\frac{A+\Gamma}{2}=\frac{\alpha^2-\gamma^2}{4}$ καὶ $\frac{A-\Gamma}{2}=\frac{\gamma^2}{4}$.

Τὸ ζητούμενον λοιπὸν εἶναι $\frac{\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}{2}+\frac{\gamma}{2}$.

η′) $\sqrt{\chi+\chi\psi-\sqrt{4\chi^2\psi}}=\sqrt{\frac{\chi+\chi\psi+\chi-\chi\psi}{2}}-\sqrt{\frac{\chi+\chi\psi-\chi+\chi\psi}{2}}=\sqrt{\chi}-\sqrt{\chi\psi}$.

θ′) $\sqrt{3+\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{3+2}{2}}+\sqrt{\frac{3-2}{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}$.

Ἐξισώσεις μὲ ριζικὰ β′ καὶ ἀνωτέρας τῆς β′ τάξεως.

Ἀσκήσεις. ***442.*** Ἔχομεν $\sqrt{\chi+8}=14$, $\chi+8=14^2$, καὶ $\chi=196-8=188$. Η ρίζα δὲ αὕτη ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν ἢ ἁρμόζει εἰς τὴν δοθεῖσαν.

β′) Ἔχομεν $3\chi+7=3^3=27$ καὶ $\chi=(27-7):3=20:3$. Ἡ δὲ λύσις αὕτη ἁρμόζει.

γ′) $4\chi-40=10^3$ καὶ $\chi=1040:4=260$. Τὴν ἐπαληθεύει.

δ′) $\chi+9=25(\chi-3)$ καὶ $\chi=7/2$. Ἐπαληθεύει.

ε′) $10\chi-4=7\chi+11$ καὶ $\chi=5$. Ἐπαληθεύει.

443. α′) $32+\chi=(16-\sqrt{\chi})^2$, $\sqrt{\chi}=7$ καὶ $\chi=49$. Ἐπαληθεύει.

β′) $\frac{15}{4}+\chi=\left(\frac{3}{2}+\chi\right)^2$, $2\chi^2+4\chi-3=0$ καὶ $\chi=\frac{-2\pm\sqrt{10}}{2}$. Αἱ ῥίζαι δὲ αὗται ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν.

γ′) $(\sqrt{\chi}-\sqrt{\chi-5})^2=\chi+(\chi-5)+2\sqrt{\chi(\chi-5)}=5$, $\sqrt{\chi(\chi-5)}=\chi-5$ καὶ $\chi(\chi-5)=(\chi-5)^2$, ἤτοι $5\chi=25$ καὶ $\chi=5$. Τὴν ἐπαληθεύει.

δ′) Ἔχομεν $(\chi+20)+(\chi-1)-2\sqrt{(\chi+20)(\chi-1)}=23^2$, $\chi-255=$ $=\sqrt{(\chi+20)(\chi-1)}$, $(\chi+20)(\chi-1)=(\chi-255)^2$, $\chi=65045/529$. Δὲν τὴν ἐπαληθεύει.

ε′) Ἔχομεν $\sqrt{\chi+15}=1-\chi$, $\chi+15=(1-\chi)^2$, $\chi^2-3\chi-14=0$. Ἐκ τῶν ῥιζῶν της τὴν ἐπαληθεύει μόνον ἡ $(3-\sqrt{65}):2$.

στ′) Ἔχομεν $(\sqrt{\chi}-3)(\sqrt{\chi}-2)=(\sqrt{\chi}+1)(\sqrt{\chi}+3)$, $3=9\sqrt{\chi}$, $\sqrt{\chi}=1:3$ καὶ $\chi=1:9$. Αὕτη δὲ ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν.

ζ′) Εἶναι $1+\sqrt{1-\chi}=3-3\sqrt{1-\chi}$, $\sqrt{1-\chi}=1:2$, $1-\chi=1:4$ καὶ $\chi=3/4$. Τὴν ἐπαληθεύει

444. α′) Ἔχομεν $(\alpha+\sqrt{\chi})+(\alpha-\sqrt{\chi})+2\sqrt{(\alpha+\sqrt{\chi})(\alpha-\sqrt{\chi})}=\chi$, $2\sqrt{\alpha^2-\chi}=\chi-2\alpha$, $4(\alpha^2-\chi)=(\chi-2\alpha)^2$ καὶ $\chi^2-4(\alpha-1)\chi=0$. Ὅθεν $\chi=0$ καὶ καὶ $\chi=4(\alpha-1)$. Ἐκ τούτων ἡ $\chi=4(\alpha-1)$ ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, ἡ δὲ $\chi=0$, ἐπαληθεύει τὴν συζυγῆ $\sqrt{\alpha+\sqrt{\chi}}-\sqrt{\alpha-\sqrt{\chi}}=\sqrt{\chi}$.

β′) Πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος τοῦ 1ου μέλους ἐπὶ συζυγῆ παράστασιν τοῦ παρονομαστοῦ, ὁπότε ἔχομεν

$$\frac{(\sqrt{\chi-\alpha}+\sqrt{\chi-\beta})^2}{(\chi-\alpha)-(\chi-\beta)}=\frac{2\chi-\alpha-\beta}{2\alpha},\ \text{ἤτοι}$$

$$\frac{2\chi-(\alpha+\beta)+2\sqrt{(\chi-\alpha)(\chi-\beta)}}{\beta-\alpha}=\frac{2\chi-(\alpha+\beta)}{2\alpha},\ \text{ἤτοι}$$

$$\sqrt{(\chi-\alpha)(\chi-\beta)}=[2\chi-(\alpha+\beta)]\cdot[\beta-3\alpha]:4\alpha.$$

Ἤδη ὑψοῦμεν τὰ μέλη τῆς τελευταίας αὐτῆς ἐξισώσεως εἰς τὸ τετράγωνον καὶ προχωροῦμεν εἰς τὴν λύσιν της κατὰ τὰ γνωστά.

γ′) $\sqrt{\chi^2+3\chi+10}=\chi+2$, $\chi^2+3\chi+10=(\chi+2)^2$, καὶ $\chi=6$.

δ′) Ἔχομεν $(3\chi+4)(12\chi-23)=(6\chi-4)^2$ καὶ $\chi=4$.

ε′) Ἔχομεν $(\chi+7)+(\chi+5)-2\sqrt{(\chi+7)(\chi+5)}=4$, $\sqrt{(\chi+7)(\chi+5)}=\chi+4$, $(\chi+7)(\chi+5)=(\chi+4)^2$, καὶ $\chi=-19/4$. Ἡ λύση αὐτὴ δὲν ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, ἀλλὰ τὴν συζυγῆ της $\sqrt{\chi+7}+\sqrt{\chi+5}=2$.

στ′) Ἔχομεν $\sqrt{29\chi+6}=15-\sqrt{29\chi-9}$, καὶ $29\chi+6=225+29\chi-$

$-9-30\sqrt{29\chi-9}$, ἤτοι $30\sqrt{29\chi-9}=210$, $\sqrt{29\chi-9}=7$ καὶ $29\chi-9=49$. Ὅθεν $\chi=2$.

ζ') $(9\chi-2)^2=25(6\chi^2-7\chi-8)$, ἤτοι $69\chi^2-139\chi-204=0$ κλπ.

η') Ἔχομεν $8\chi+13-8\sqrt{\chi^2-11\chi+14}=81$, $2\chi-17=2\sqrt{\chi^2-11\chi+14}$, $(2\chi-17)^2=4(\chi^2-11\chi+14)$, ἤτοι $24\chi=233$ καὶ $\chi=233/24$.

ϑ') Ὑψοῦντες διαδοχικῶς εἰς τὸ τετράγωνον, εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν $\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{\chi}}}=3$, $\sqrt{3+\sqrt{\chi}}=2$, $\sqrt{\chi}=1$ καὶ $\chi=1$.

ι') Εὑρίσκομεν $1-\sqrt{1-\chi}+\sqrt{\chi}=1^2$, ἤτοι $\sqrt{\chi}=\sqrt{1-\chi}$, $\chi=1-\chi$ καὶ $\chi=1/2$.

ια') Ἐὰν θέσωμεν $\chi-\alpha=\omega$ καὶ $\chi+\alpha=\varphi$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται $\sqrt[3]{\omega\varphi}=\sqrt[3]{\omega}+\sqrt[3]{\varphi}-1$, ἤτοι $\sqrt[3]{\omega}\sqrt[3]{\varphi}-\sqrt[3]{\omega}-(\sqrt[3]{\varphi}-1)=0$. $\sqrt[3]{\omega}(\sqrt[3]{\varphi}-1)-(\sqrt[3]{\varphi}-1)=0$ καὶ τέλος $(\sqrt[3]{\varphi}-1)(\sqrt[3]{\omega}-1)=0$. Ὅθεν $\sqrt[3]{\varphi}=1$. ἤτοι $\varphi=1$ καὶ $\sqrt[3]{\omega}=1$, ἤτοι $\omega=1$. Ὥστε $\chi-\alpha=1$, ἤτοι $\chi=1+\alpha$ καὶ $\chi+\alpha=1$ ἤτοι $\chi=1-\alpha$. Ἀμφότεραι δὲ αἱ λύσεις αὗται ἁρμόζουν εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν.

445. α') Ἐὰν θέσωμεν $\chi+19=\omega$ καὶ $10\chi+45=\varphi$, ἔχομεν: $\sqrt[3]{\chi}+\sqrt[3]{\omega}=\sqrt[3]{\varphi}$, ὁπότε ἐὰν ὑψώσωμεν εἰς τὸν κύβον ἔχομεν: $\chi+\omega+3\cdot\sqrt[3]{\chi^2}\cdot\sqrt[3]{\omega}+3\cdot\sqrt[3]{\chi}\cdot\sqrt[3]{\omega^2}=\varphi$ καὶ $3\cdot\sqrt[3]{\chi\omega}(\sqrt[3]{\chi}+\sqrt[3]{\omega})=\varphi-\chi-\omega$, ἤτοι $3\cdot\sqrt[3]{\chi\omega\varphi}=\varphi-\chi-\omega$ καὶ $27\chi\omega\varphi=(\varphi-\chi-\omega)^3$, ἤτοι $27\chi(\chi+19)(10\chi+45)=(8\chi+26)^3$ κλπ.

β') Ἐὰν γράψωμεν $\sqrt[3]{\chi}+\sqrt[3]{\chi-1}=-\sqrt[3]{\chi+2}$ καὶ ἐργασθῶμεν ὡς ἄνω, εὑρίσκομεν $3\chi\omega\varphi=(\varphi+\chi+\omega)^3$, ἤτοι $3\chi(\chi-1)(\chi+2)=(3\chi+1)^3$.

γ') Ἔχομεν $\dfrac{\sqrt{1+\beta\chi}}{\sqrt{1-\beta\chi}}=\dfrac{4+\alpha\chi}{1-\alpha\chi}$, $\dfrac{1+\beta\chi}{1-\beta\chi}=\dfrac{(4+\alpha\chi)^2}{(1-\alpha\chi)^2}$, $(1-2\alpha\chi+\alpha^2\chi^2)(1+\beta\chi)=(16+8\alpha\chi+\alpha^2\chi^2)(1-\beta\chi)$, ἢ $2\alpha^2\beta\chi^3+6\alpha\beta\chi^2-(10\alpha-17\beta)\chi-15=0$. Ἡ ἐξίσωσις δὲ αὕτη εἶναι, ὡς βλέπομεν τρίτου βαθμοῦ τὴν ὁποίαν δὲν δυνάμεθα νὰ λύσωμεν.

δ') Ἔχομεν $\sqrt{\alpha\chi}-5=0{,}5\sqrt{\alpha\chi-0{,}5}$, $(\sqrt{\alpha\chi}-5)^2=0{,}25(\alpha\chi-0{,}5)$, ἤτοι $\alpha\chi+25-10\sqrt{\alpha\chi}=0{,}25\alpha\chi-0{,}125$, ἤτοι $0{,}75\alpha\chi+25{,}125=10\sqrt{\alpha\chi}$, $(0{,}75\alpha\chi+25{,}125)^2=100\alpha\chi$ κλπ.

Ἀντίστροφοι καὶ διώνυμοι ἐξισώσεις.

Ἀσκήσεις.—*446*. α') Ἔχομεν $\chi^2(\chi+1)+(\chi+1)=0$ καὶ $(\chi+1)(\chi^2+1)=0$. Ὅθεν $\chi+1=0$, ἤτοι $\chi=-1$ καὶ $\chi^2+1=0$, ἤτοι $\chi=\pm i$.

β') $\chi^2(\chi+1)-(\chi+1)=0$ καὶ $(\chi+1)(\chi^2-1)=0$. Ὅθεν $\chi+1=0$, ἤτοι $\chi=-1$ καὶ $\chi^2-1=0$, ἤτοι $\chi=\pm1$ (ἡ ρίζα -1 διπλῆ).

γ') Τὸ α' μέλος εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $(\chi+1)^3$. Ὅθεν: $(\chi+1)^3=0$, ἤτοι $\chi+1=0$ καὶ $\chi=-1$ (ρίζα τριπλῆ).

δ′) $(\chi^3-1)+3\chi(\chi-1)=0$, $(\chi-1)(\chi^2+\chi+1+3\chi)=0$, $(\chi-1)(\chi^2+4\chi+1)=0$. Ὅθεν $\chi-1=0$, ἤτοι $\chi=1$ καὶ $\chi^2+4\chi+1=0$, ἤτοι $\chi=-2\pm\sqrt{3}$.

ε′) $(\chi^3+1)+2\chi(\chi+1)=0$, $(\chi+1)(\chi^2-\chi+1+2\chi)=0$, $(\chi+1)(\chi^2+\chi+1)=0$. Ὅθεν $\chi+1=0$, ἤτοι $\chi=-1$ καὶ $\chi^2+\chi+1=0$, ἤτοι $\chi=(-1\pm i\sqrt{3}):2$.

στ′) $(\chi^3+1)-3\chi(\chi+1)=0$, $(\chi+1)(\chi^2-\chi+1-3\chi)=0$, $(\chi+1)(\chi^2-4\chi+1)=0$. Ὅθεν $\chi=-1$ καὶ $\chi=2\pm\sqrt{3}$.

ζ′) $(\chi^3-1)-2\chi(\chi-1)=0$, $(\chi-1)(\chi^2+\chi+1-2\chi)=0$, $(\chi-1)(\chi^2-\chi+1)=0$ καὶ $\chi=1$ ἢ $\chi=(1\pm i\sqrt{3}):2$.

η′) $3(\chi^3+1)-7\chi(\chi+1)=(\chi+1)(3\chi^2-3\chi+3-7\chi)=0$ $(\chi+1)(3\chi^2-10\chi+3)=0$ καὶ $\chi=-1$ ἢ $\chi=3$ ἢ $1/3$.

ϑ′) $2(\chi^4-1)+5\chi(\chi^2-1)=(\chi^2-1)[2(\chi^2+1)+5\chi]=0$ ἢ $(\chi^2-1)(2\chi^2+5\chi+2)=0$. Ὅθεν $\chi=\pm1$ καὶ $\chi=-2$ ἢ $-1/2$.

ι′) $5(\chi^4-1)+26\chi(\chi^2-1)=0$, $(\chi^2-1)(5\chi^2+5+26\chi)=0$. Ὅθεν $\chi=\pm1$ καὶ $\chi=-5$ ἢ $-1/5$.

ια′) $(\chi^4-1)-4\chi(\chi^2-1)=0$, $(\chi^2-1)(\chi^2+1-4\chi)=0$, $\chi=\pm1$ ἢ $\chi=2\pm\sqrt{3}$.

ιβ′) Διαιροῦντες διὰ χ^2 εὑρίσκομεν $\chi^2+\chi-4+\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}=0$, ἤτοι: $\left(\chi^2+\frac{1}{\chi^2}\right)+\left(\chi+\frac{1}{\chi}\right)-4=0$ (ι). Ἐὰν δὲ θέσωμεν $\chi+\frac{1}{\chi}=\psi$, ἔχομεν $\chi^2+\frac{1}{\chi^2}=\psi^2-2$. Ὅθεν ἡ ἐξίσωσις (ι) γίνεται $\psi^2+\psi-6=0$, ὁπότε $\psi=2$ ἢ -3. Οὕτω δὲ ἔχομεν $\chi+\frac{1}{\chi}=2$ καὶ $\chi+\frac{1}{\chi}=-3$, ἤτοι $\chi^2-2\chi+1=0$, $(\chi-1)^2=0$ καὶ $\chi=1$ καὶ $\chi^2+3\chi+1=0$, ἤτοι $\chi=(-3\pm\sqrt{5}):2$

ιγ′) Ἐργαζόμενοι ὡς ἄνω εὑρίσκομεν $3\left(\chi^2+\frac{1}{\chi^2}\right)+\left(\chi+\frac{1}{\chi}\right)-24=0$, $3(\psi^2-2)+\psi-24=0$, $3\psi^2+\psi-30=0$ καὶ $\psi=3$ καὶ $-10/3$. Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν τὸ χ ἐκ τῶν ἐξισώσεων $\chi+\frac{1}{\chi}=3$ καὶ $\chi+\frac{1}{\chi}=-\frac{10}{3}$, ἤτοι ἐκ τῶν ἐξισώσεων $\chi^2-3\chi+1=0$ καὶ $3\chi^2+10\chi+3=0$. Οὕτως εὑρίσκομεν $\chi=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ ἢ -3 ἢ $-\frac{1}{3}$.

ιδ′) Ἔχομεν ὁμοίως ὡς ἄνω $2\left(\chi^2+\frac{1}{\chi^2}\right)+\left(\chi+\frac{1}{\chi}\right)-17=0$, $2(\psi^2-2)+\psi-17=0$, $2\psi^2+\psi-21=0$ καὶ $\psi=3$ ἢ $-7/2$. Ὥστε $\chi+\frac{1}{\chi}=3$ καὶ $\chi+\frac{1}{\chi}=-\frac{7}{2}$, ἤτοι $\chi^2-3\chi+1=0$ καὶ $2\chi^2+7\chi+2=0$. Ὅθεν $\chi=(3\pm\sqrt{5}):2$ καὶ $\chi=(-7\pm\sqrt{33}):4$.

ιε') Ἔχομεν ὁμοίως $\left(\chi^2+\frac{1}{\chi^2}\right)-5\left(\chi+\frac{1}{\chi}\right)+8=0$, $(\psi^2-2)-5\psi+8=0$,

$\psi^2-5\psi+6=0$ καὶ $\psi=3$ ἢ 2. Ὥστε $\chi+\frac{1}{\chi}=3$ ἢ $\chi+\frac{1}{\chi}=2$, ἤτοι $\chi^2-3\chi+1=0$ καὶ $\chi^2-2\chi+1=0$ κλπ.

ιστ') Ἔχομεν $\left(\chi^2+\frac{1}{\chi^2}\right)-2\left(\chi+\frac{1}{\chi}\right)+2=0$ κλπ. ὡς ἄνω.

447. α') Ἔχομεν $1813(\chi^2+1)^2=25(\chi^2+\chi+1)(\chi+1)^2$

$1813\chi^4+3626\chi^2+1813=25\chi^4+75\chi^3+300\chi^2+75\chi+25$

$1788\chi^4-75\chi^3+3326\chi^2-75\chi+1788=0$

$1788\left(\chi^2+\frac{1}{\chi^2}\right)-75\left(\chi+\frac{1}{\chi}\right)+3326=0$

$1788(\psi^2-2)-75\psi+3326=0$ κλπ. ὡς προηγουμένως.

β') $\chi^5(135-78\chi)=135\chi-78$, $78\chi^6-135\chi^5+135\chi-78=0$

$78(\chi^6-1)-135\chi(\chi^4-1)=0$. Ὅθεν:

$78(\chi^2-1)(\chi^4+\chi^2+1)-135\chi(\chi^2-1)(\chi^2+1)=0$

$(\chi^2-1)(78\chi^4-135\chi^3+78\chi^2-135\chi+78)=0$

$(\chi^2-1)\cdot\left[78\left(\chi^2+\frac{1}{\chi^2}\right)-135\left(\chi+\frac{1}{\chi}\right)+78\right]=0$

$(\chi^2-1)[78(\psi^2-2)-135\psi+78]=0$ κλπ.

γ') $\chi^4(6\chi-11)=11\chi-6$, $6(\chi^5+1)-11\chi(\chi^3+1)=0$ (ι).

Ἀλλ' ἐπειδὴ $\chi^5+1=(\chi^4-\chi^3+\chi^2-\chi+1)(\chi+1)$ καὶ $\chi^3+1=$ $=(\chi^2-\chi+1)(\chi+1)$, οἱ ὅροι τῆς ἐξισώσεως (ι) ἔχουν κοινὸν παράγοντα τὸν $\chi+1$ (1) ὅστις πολλαπλασιάζεται;

$$\text{ἐπὶ}\quad 6\chi^4-6\chi^3+6\chi^2-6\chi+6-11\chi^3+11\chi^2-11\chi=$$

$=6\chi^4-17\chi^3+17\chi^2-17\chi+6$ (2). Ἐὰν δὲ ἐξισώσωμεν τοὺς παράγοντας (1) καὶ (2) μὲ μηδέν, καὶ λύσωμεν ἔπειτα τὰς ἐξισώσεις $\chi+1=0$, $6(\psi^2-2)-$ $-17\psi+17=0$ καὶ $\chi+\frac{1}{\chi}=\psi$, κατὰ τὰ γνωστά, εὑρίσκομεν τὰς ζητουμένας ῥίζας.

δ') $15\chi^2(\chi+1)-4(\chi^2+1)(\chi^3+1)=0$, $15\chi^2(\chi+1)-4(\chi^2+1)(\chi+1)(\chi^2-\chi+1)=0$

$(\chi+1)[15\chi^2-4(\chi^2+1)(\chi^2-\chi+1)]=0$, $(\chi+1)(4\chi^4-4\chi^3-7\chi^2-4\chi+4)=0$

$$(\chi+1)\left[4\left(\chi^2+\frac{1}{\chi^2}\right)-4\left(\chi+\frac{1}{\chi}\right)-7\right]=0 \text{ κλπ.}$$

ε') $13(\chi^2-\chi+1)^2=9(\chi^4-\chi^3+\chi^2-\chi-1)$

$$13(\chi^4-2\chi^3+3\chi^2-2\chi+1)=9(\chi^4-\chi^3+\chi^2-\chi+1)$$

$$4\chi^4-17\chi^3+30\chi^2-17\chi+4=0$$

$4\left(\chi^2+\frac{1}{\chi^2}\right)-17\left(\chi+\frac{1}{\chi}\right)+30=0$, $4(\psi^2-2)-17\psi+30=0$ κλπ.

448. α') $\chi^3 \pm 343 = \chi^3 \pm 7^3 = 0$. Καὶ ἐκ μὲν τῆς $\chi^3 - 7^3 = 0$, εὑρίσκομεν $(\chi-7)(\chi^2+7\chi+7^2) = 0$, ἤτοι $\chi = 7$ καὶ $\chi = \left(-7 \pm \sqrt{7^2 - 4\cdot 7^2}\right) : 2 = \left(-7 \pm 7i\sqrt{3}\right) : 2$. Ἐκ δὲ τῆς $\chi^3 + 7^3 = 0$, εὑρίσκομεν $(\chi+7)(\chi^2-7\chi+7^2) = 0$, ἤτοι $\chi = -7$ καὶ $\chi = \left(7 \pm 7i\sqrt{3}\right) : 2$.

β') $8\chi^3 \pm 125 = (2\chi)^3 \pm 5^3 = 0$ ἢ ἐὰν θέσωμεν $2\chi = \psi$, $\psi^3 \pm 5^3 = 0$. Ὥστε ἐκ τῆς $\psi^3 - 5^3 = 0$, εὑρίσκομεν $(\psi-5)(\psi^2+5\psi+5^2) = 0$, ἤτοι $\psi = 5$, δηλαδὴ $\chi = 5/2$ καὶ $\psi = \left(-5 \pm 5i\sqrt{3}\right) : 2$ δηλαδὴ $\chi = \left(-5 \pm 5i\sqrt{3}\right) : 4$.

Ἐκ δὲ τῆς $\psi^3 + 5^3 = 0$, εὑρίσκομεν $(\psi+5)(\psi^2-5\psi+5^2) = 0$, ἤτοι $\psi = -5$ καὶ $\psi = \left(5 \pm 5i\sqrt{3}\right) : 2$, δηλαδὴ $\chi = -5/2$ ἢ $\chi = \left(5 \pm 5i\sqrt{3}\right) : 4$.

γ') Ἐπειδὴ $\chi^3 \pm 1331 = \chi^3 \pm 11^3 = 0$, εὑρίσκομεν ὡς ἀνωτέρω τὰς ἐξισώσεις $(\chi-11)(\chi^2+11\chi+11^2) = 0$ καὶ $(\chi+11)(\chi^2-11\chi+11^2) = 0$.

Ὥστε $\chi = 11$, $\chi = \left(-11 \pm 11i\sqrt{3}\right) : 2$, $\chi = -11$, $\chi = \left(11 \pm 11i\sqrt{3}\right) : 2$.

δ') $9(\chi-1)(\chi^2+\chi+1) = 7(\chi+1)(\chi^2-\chi+1)$, $2\chi^3 = 16$, $\chi^3 - 2^3 = 0$ καὶ $(\chi-2)(\chi^2+2\chi+4) = 0$. Ὅθεν $\chi = 2$ καὶ $\chi = -1 \pm i\sqrt{3}$.

ε') $\dfrac{2-\chi^2+2+\chi^2}{2-\chi^2-2-\chi^2} = \dfrac{\chi^3-4\chi^2+9+\chi^3+4\chi^2+9}{\chi^3-4\chi^2+9-\chi^3-4\chi^2-9}$, $-\dfrac{2}{\chi^2} = -\dfrac{\chi^3+9}{4\chi^2}$,

$\chi^3+9 = 8$ καὶ $\chi^3+1 = 0$, ἤτοι $(\chi+1)(\chi^2-\chi+1) = 0$. Ὅθεν $\chi = -1$ καὶ $\chi = \left(1 \pm i\sqrt{3}\right) : 2$.

στ') $\dfrac{9\chi^3+7}{2} - \chi^3 + \dfrac{(\chi^3-2)}{7} = 36$, $63\chi^3+49-14\chi^3+2\chi^3-4 = 504$

$51\chi^3 - 459 = 0$, $\chi^3 - 9 = 0$, $\chi^3 - (\sqrt[3]{9})^3 = 0$, ἢ ἐὰν θέσωμεν $\sqrt[3]{9} = \psi$, $\chi^3 - \psi^3 = 0$, $(\chi-\psi)(\chi^2+\chi\psi+\psi^2) = 0$. Ὅθεν $\chi = \psi$, ἤτοι $\chi = \sqrt[3]{9}$ καὶ $\chi = \left(-\psi \pm \psi i\sqrt{3}\right) : 2 = \sqrt[3]{9}\left(-1 \pm i\sqrt{3}\right) : 2$.

449. α') $\chi^5 - (\chi^5+5\chi^3+8\chi^2+40) + 4\chi^3+8\chi^2+32 = 0$, $\chi^3+2^3 = 0$, $(\chi+2)(\chi^2-2\chi+4) = 0$. Ὅθεν $\chi = -2$ καὶ $\chi = 1 \pm i\sqrt{3}$.

β') $4(5\chi^3-4)(9\chi^3+20) = 96\cdot 4(4\chi^3+12) + 96\chi^3(5\chi^3-4)$

$180\chi^6+256\chi^3-320 = 480\chi^6+1152\chi^3+4608$, $75\chi^6+224\chi^3+1232 = 0$, ἢ ἐὰν θέσωμεν $\chi^3 = \psi$, $75\psi^2+224\psi+1232 = 0$. Οὕτως εὑρίσκομεν τὸν ψ καὶ ἀκολούθως τὸν χ ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\chi = \sqrt[3]{\psi}$.

450. α') Ἐπειδὴ $\alpha^{-\gamma} = \dfrac{1}{\alpha^\gamma}$ καὶ $1 - \alpha^{-\gamma} = \dfrac{\alpha^\gamma - 1}{\alpha^\gamma}$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται $\dfrac{1}{1-\alpha^\gamma} - \dfrac{\alpha^\gamma}{1-\alpha^\gamma} = \left(\dfrac{\alpha}{\chi}\right)^3$, ἤτοι $\dfrac{1-\alpha^\gamma}{1-\alpha^\gamma} = \left(\dfrac{\alpha}{\chi}\right)^3$,

$1 = \left(\dfrac{\alpha}{\chi}\right)^3$, $1 = \dfrac{\alpha^3}{\chi^3}$. Ὅθεν $\chi^3 = \alpha^3$, $\chi^3 - \alpha^3 = 0$ καὶ $(\chi-\alpha)(\chi^2+\alpha\chi+\alpha^2) = 0$.

Ὅθεν $\chi = \alpha$ καὶ $\chi = \left(-\alpha \pm \alpha i\sqrt{3}\right) : 2$.

β') $\frac{\chi^3}{1-\alpha^\gamma}+\frac{\chi^3}{1-\alpha^{-\gamma}}=1,\ \chi^3\left(\frac{1}{1-\alpha^\gamma}+\frac{1}{1-\alpha^{-\gamma}}\right)=1.$ ἤτοι (προηγουμένη ἄσκ. α'), $\chi^3=1,\ \chi^3-1=0,\ (\chi-1)(\chi^2+\chi+1)=0.$ Ὅθεν $\chi=1$ καὶ $\chi=(-1\pm i\sqrt{3}):2.$

γ') Ἐκ τῆς $\chi^4-1=0$, εὑρίσκομεν $(\chi^2-1)(\chi^2+1)=0,\ (\chi-1)(\chi+1)(\chi^2+1)=0$, ἤτοι $\chi=1,\ \chi=-1$ καὶ $\chi=\pm i$.

Ἐκ δὲ τῆς $\chi^4+1=0$, εὑρίσκομεν $\chi^4+2\chi^2+1-2\chi^2=0,\ (\chi^2+1)^2-2\chi^2=0,\ (\chi^2+1-\chi\sqrt{2})(\chi^2+1+\chi\sqrt{2})=0.$ Ὅθεν $\chi^2-\chi\sqrt{2}+1=0$ καὶ $\chi=(\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}):2$ ἢ $\chi^2+\chi\sqrt{2}+1=0$ καὶ $\chi=(-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}):2.$

δ') $\chi^5\pm1024=\chi^5\pm4^5$. Οὕτως ἐκ τῆς $\chi^5-4^5=0$, εὑρίσκομεν $(\chi-4)(\chi^4+4\chi^3+4^2\chi^2+4^3\chi+4^4)=0$ Ὅθεν $\chi-4=0$, ἤτοι $\chi=4$ καὶ $\chi^4+4\chi^3+4^2\chi^2+4^3\chi+4^4=0$. Διαιροῦντες ἤδη ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς διὰ $4^2\chi^2$, εὑρίσκομεν $\left(\frac{\chi^2}{4^2}+\frac{4^2}{\chi^2}\right)+\left(\frac{\chi}{4}+\frac{4}{\chi}\right)+1=0.$ (ι). Ἐὰν δὲ θέσωμεν $\frac{\chi}{4}+\frac{4}{\chi}=\psi$, εὑρίσκομεν $\frac{\chi^2}{4^2}+\frac{4^2}{\chi^2}=\psi^2-2$. Ὅθεν ἡ ἐξίσωσις (ι), γίνεται $\psi^2-2+\psi+1=0,\quad \psi^2+\psi-1=0$ καὶ $\psi=(-1\pm\sqrt{5}):2$. Οὕτω δὲ ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\chi}{4}+\frac{4}{\chi}=\psi$.

Διὰ τὴν ἐξίσωσιν $\chi^5+4^5=0$, ἔχομεν $(\chi+4)(\chi^4-4\chi^3+4^2\chi^2-4^3\chi+4^4)=0$. Οὕτω λαμβάνομεν τὴν λύσιν $\chi=-4$ καὶ τὰς ἄλλας λύσεις ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\chi^4-4\chi^3+4^2\chi^2-4^3\chi+4^4=0$, ἥτις γράφεται $\left(\frac{\chi^2}{4^2}+\frac{4^2}{\chi^2}\right)-\left(\frac{\chi}{4}+\frac{4}{\chi}\right)+1=0$ κλπ. ὡς ἀνωτέρω.

ε') Ἐὰν εἰς τὴν προηγουμένην λύσιν θέσωμεν 1 ἀντὶ 4, θὰ εὕρωμεν τὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\chi^5\pm1=0$.

στ') $\chi^6\pm3^6=0$, ἢ ἐὰν θέσωμεν $\chi=3\psi$, ἔχομεν $3^6\psi^6\pm3^6=0$ ἢ $3^6.(\psi^6\pm1)=0$. Ὅθεν $\psi^6\pm1=0$. Οὕτως ἔχομεν

$\psi^6-1=(\psi^2-1)\cdot(\psi^4+\psi^2+1)=0$ καὶ $\psi=\pm1$ ἢ $\psi=\sqrt{\frac{(-1)\pm i\sqrt{3}}{2}}$, ἤτοι $\chi=\pm3$ κλπ.

Ὁμοίως δὲ ἔχομεν $\psi^6+1=(\psi^2+1)(\psi^4-\psi^2+1)=0$ κλπ.

ζ') $\chi^{2\nu+1}-1=(\chi-1)(\chi^{2\nu}+\chi^{2\nu-1}+\ldots+\chi+1)=0$

$\chi\quad +1=(\chi+1)(\chi^{2\nu}-\chi^{2\nu-1}+\chi^{2\nu-2}-\ldots+1)=0$

Οὕτως ἔχομεν $\chi=1$ κλπ. ὡς καὶ $\chi=-1$ κλπ

η') $\chi^7-1=(\chi-1)(\chi^6+\chi^5+\chi^4+\chi^3+\chi^2+\chi+1)=0$

$\chi^7+1=(\chi+1)(\chi^6-\chi^5+\chi^4-\chi^3+\chi^2-\chi+1)=0$

Ὅθεν $\chi=1$ κλπ. ὡς καὶ $\chi=-1$ κλπ.

θ') $\chi^{2\nu}-1=(\chi-1)(\chi^{2\nu-1}+\chi^{2\nu-2}+\ldots+1)=0.$ Ὅθεν $\chi=1$ κλπ. $\chi^{2\nu}+1=0$. Ἐδῶ ἡ δύναμις τοῦ χ, ὡς ἀρτία, οὐδέποτε δύναται νὰ δώσῃ ἐξαγόμενον -1, ὥστε νὰ ἔχωμεν $-1+1=0$. Ὥστε ἡ ἐξίσωσις αὕτη δὲν ἔχει πραγματικὰς ῥίζας.

ι') $\chi^4\pm256=\chi^4\pm4^4=0$, ἢ ἐὰν θέσωμεν $\chi=4\psi$ καταλήγομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\psi^4\pm1=0$, τὴν ὁποίαν λύομεν κατὰ τὰ γνωστὰ (ἄνω ἄσκ. γ').

ια') $\chi^5\pm3125=0=\chi^5\pm5^5=0$, ἥτις λύεται ὡς ἡ ἄνω δ'.

ιβ') $\chi^{10}-1=(\chi-1)(\chi^9+\chi^8+\ldots+1)$, ἤτοι $\chi=1$ κλπ.
$\chi^{10}+1=0$. Εἶναι ὡς ἡ $\chi^{2\nu}+1=0$ τῆς ἄνω θ'.

ιγ') $\chi^6\pm1=0$. Λύεται ὡς ἡ $\psi^6\pm1$ τῆς ἄνω στ'.

ιδ') $\chi^4\pm14641=\chi^4\pm11^4=0$, ἢ ἐὰν θέσωμεν $\psi=11\psi$ καταλήγομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\psi^4\pm1=0$, ὁμοίαν μὲ τὴν ἄνω γ'.

ιε') $\chi^{12}-1=(\chi^6-1)(\chi^6+1)=0$. Ἡ $\chi^6+1=0$ δὲν ἔχει πραγματικὰς ῥίζας, ἡ δὲ $\chi^6-1=0$, εἶναι ὁμοία μὲ τὴν ἄνω ε'.

Ἀσκήσεις α' καὶ β' βαθμοῦ ὡς πρὸς τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ ἀγνώστου.

Ἀσκήσεις. *451.* α') Εἶναι $|\chi|=7/3$, ἄρα $\chi_1=7/3$ καὶ $\chi_2=-7/3$ καὶ ἰσοδύναμος μὲ τὴν $\chi^2=49/9$, β') $\chi_1=5/6$, $\chi_2=-5/6$ καί $\chi^2=25/36$, γ') $|\chi|=-4/3$. Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἀδύνατος, διότι ὁ θετικὸς ἀριθμὸς $|\chi|$ δὲν δύναται νὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν εὑρεθέντα ἀρνητικόν.

δ') $\chi=-(-3):(2+7)=3:9=1:3$ ε') $|\chi|=-4$. Ἀδύνατος.

στ') $\chi=4:2=2$.

452. α') $|\chi|=(5\pm\sqrt{37}):2$. Δεκτὴ ῥίζα ἡ $|\chi|=(5+\sqrt{37}):2$. Ὥστε $\chi=\pm(5\pm\sqrt{37}):2$, β') $|\chi|=(5\pm1):2=3$ ἢ 2. Ὅθεν $\chi=\pm3$ καὶ $\chi=\pm2$. γ') Δεκτὴ ῥίζα ἡ $|\chi|=(5\pm\sqrt{41}):2$. Ὅθεν $\chi=\pm(5+41):2$, δ') $4|\chi|^2-3|\chi|-8=0$. Δεκτὴ ῥίζα ἡ $|\chi|=(3+\sqrt{137}):8$. Ὅθεν $\chi=\pm(3+\sqrt{137}):8$.

453. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη γράφεται $\alpha|\chi|=-(\gamma+\chi)$ ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\alpha^2\chi^2=(\gamma+\chi)^2$, ἤτοι $(\alpha^2-1)\chi^2-2\gamma\chi-\gamma^2=0$. Οὕτως, ἐὰν $|\alpha|=\pm1$ ἔχομεν

$$\chi=\frac{\gamma\pm\sqrt{\gamma^2+(\alpha^2-1)\gamma^2}}{\alpha^2-1}=\frac{\gamma\pm\gamma\alpha}{\alpha^2-1}=\frac{\gamma(1-\alpha)}{\alpha^2-1}.\ \text{Ὥστε}\ \chi=\frac{\gamma}{\alpha-1}\ \text{καὶ}\ \chi=-\frac{\gamma}{\alpha+1}.$$

Κατόπιν τούτων παρατηροῦμεν διὰ τὴν $\chi=\frac{\gamma}{\alpha-1}$, ὅτι ἐὰν $\chi<0$ καὶ $\frac{\gamma}{\alpha-1}<0$, ἡ ζητουμένη ῥίζα εἶναι ἡ $-\frac{\gamma}{\alpha-1}$. Διὰ δὲ τὴν $\chi=-\frac{\gamma}{\alpha+1}$ παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν $\chi>0$ καὶ $\frac{\gamma}{\alpha+1}<0$, ἡ ζητουμένη ῥίζα εἶναι ἡ $-\frac{\gamma}{\alpha+1}$.

Συστήματα δευτέρου καὶ ἀνωτέρου βαθμοῦ.

454. α') Ἐκ τῆς β' ἐξισώσεως εὑρίσκομεν $\chi=(1+3\psi):4$, ὁπότε ἡ α' γίνεται $3(1+3\psi)\cdot\psi+13\psi^2=25$, $22\psi^2+3\psi-25=0$ καὶ

$\psi=(-3\pm\sqrt{9+2200}):44=(-3\pm47):44=1$ ἢ $-25:22$. Ὅθεν $\chi=1$ ἢ $-53:88$ ἀντιστοίχως.

β') Ἔχομεν $\chi=3+2\psi$ καὶ $(3+3\psi)(6+7\psi)=180$, ἤτοι $7\psi^2+13\psi-54=0$. Ὅθεν $\psi=2$ ἢ $-27:7$ καὶ ἀντιστοίχως $\chi=7$ ἢ $-33:7$.

γ') Ἔχομεν $\chi(\chi-\psi)+4\psi^2=\frac{3}{2}$ καὶ $\chi-\psi=\frac{5}{4}$, ἤτοι $\frac{5\chi}{4}+4\psi^2=\frac{3}{2}$ καὶ $\chi=\psi+\frac{5}{4}=\frac{4\psi+5}{4}$. Ἑπομένως ἡ πρώτη ἐξίσωσις τοῦ συστήματος τού-του γίνεται $64\psi^2+20\psi+1=0$. Ὅθεν $\psi=-1/4$ ἢ $-1/16$ καὶ ἀντιστοίχως $\chi=1$ ἢ $19/16$.

δ') Ἔχομεν $\psi=9-\chi$ καὶ $(2-\chi)(18-\chi)=91$ ἢ $\chi^2-20\chi-55=0$. Ὅθεν $\chi=10\pm\sqrt{155}$ καὶ ἀντιστοίχως $\psi=-1\mp\sqrt{155}$.

ε') Τὸ σύστημα τοῦτο γίνεται $(\chi+\psi)^2=48$ καὶ $\chi-\psi=1$. Οὕτως ἐκ τῆς $α^{ης}$ εὑρίσκομεν $\chi+\psi=\pm\sqrt{48}$. Ἑπομένως ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὰ συστήματα:

$$\begin{array}{ll} \chi+\psi=\sqrt{48} & \chi+\psi=-\sqrt{48} \\ \chi-\psi=1 & \chi-\psi=1 \\ \hline \chi=(1+\sqrt{48}):2 & \chi=(1-\sqrt{48}):2 \\ \psi=(-1+\sqrt{48}):2 & \psi=-(1+\sqrt{48}):2 \end{array}$$

στ') Ἔχομεν $\psi=2\chi$ καὶ $2\chi^2-7\chi+3=0$, $\chi=3$ ἢ $1/2$ καὶ ἀντιστοίχως $\psi=6$ ἢ 1.

ζ') Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $\chi=5+\psi$, ὁπότε ἡ $α^η$ γίνεται $\psi^2+6\psi+9=0$. Ὅθεν $\psi=-3$ καὶ $\chi=2$ (ρίζαι διπλαῖ).

η') Ἐκ τῆς $2^{ας}$ λαμβάνομεν $\chi=\frac{3\psi+2}{2}$ ὁπότε ἡ $1^η$ γίνεται $31\psi^2-14\psi-96=0$. Ὅθεν $\psi=(7\pm\sqrt{49+2976}):31=(7\pm55):31=2$ ἢ $-48:31$ καὶ ἀντιστοίχως $\chi=4$ ἢ $-41:31$.

θ') Διαιροῦντες κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $\frac{(\chi+1)(\chi+10)}{(\chi-1)(\chi-10)}=-\frac{9}{2}$, ἤτοι $\chi^2-7\chi+10=0$, $\chi=5$ ἢ 2 καὶ ἀντιστοίχως $\psi=3$ ἢ $3:2$.

455. α') Ἐὰν εἰς τὰ μέλη τῆς $1^{ης}$ ἐξισώσεως προσθέσωμεν τὸ $2\cdot\frac{\chi}{\alpha}\cdot\frac{\psi}{\beta}$, αὕτη γίνεται $\left(\frac{\chi}{\alpha}+\frac{\psi}{\beta}\right)^2=2+2\cdot\frac{\chi}{\alpha}\cdot\frac{\psi}{\beta}$ (ι).

Ἐπειδὴ δὲ ἡ $2^α$ γράφεται $\frac{\chi}{\alpha}+\frac{\psi}{\beta}=0$, ἡ (ι) γίνεται:

$0=2+2\cdot\frac{\chi}{\alpha}\cdot\frac{\psi}{\beta}$. Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν $\psi=-\frac{\alpha\beta}{\chi}$. Ὥστε εἶναι $\frac{\chi}{\alpha}-\frac{\alpha}{\chi}=0$, $\chi^2=\alpha^2$ καὶ $\chi=\pm\alpha$, ὁπότε $\psi=\mp\beta$.

β') Ἡ 1η ἐξίσωσις γράφεται $\alpha\chi(\chi+\psi)+\beta\psi(\chi+\psi)=0$ ἤτοι:

$(\chi+\psi)(\alpha\chi+\beta\psi)=0$, καὶ ἑπομένως $\chi+\psi=0$ ἢ $\alpha\chi+\beta\psi=0$. Οὕτως ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὰ συστήματα:

1) $\chi+\psi=0$, $\alpha\chi-\beta\psi=2\alpha\beta$ καὶ 2) $\alpha\chi+\beta\psi=0$, $\alpha\chi-\beta\psi=2\alpha\beta$.

Ἐκ τοῦ 1) εὑρίσκομεν $\chi=-\psi$, $-(\alpha+\beta)\psi=2\alpha\beta$ καὶ $\psi=-\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$.

Ὥστε $\chi=\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$. Ἐκ δὲ τοῦ 2) εὑρίσκομεν $\chi=\beta$ καὶ $\psi=-\alpha$.

γ') Ἔχομεν $\chi=\dfrac{\psi\beta}{\alpha}$ καὶ $\dfrac{\psi^2\beta^2}{\alpha^4}+\dfrac{\psi^2}{\beta^2}=1$, $\psi^2=\dfrac{\beta^2\alpha^4}{\alpha^4+\beta^4}$ καὶ

$$\psi=\pm\frac{\alpha^2\beta}{\sqrt{\alpha^4+\beta^4}}\cdot \text{ Ὅθεν } \chi=\pm\frac{\alpha\beta^2}{\sqrt{\alpha^4+\beta^4}}.$$

δ') $\chi=2\alpha-\psi$ καὶ $(2\alpha\beta-\beta)(2\alpha-\psi)^2+(2\alpha+\beta)\psi^2=4\alpha^3$

$(\beta+1)\psi^2-2\beta(2\alpha+1)\psi+2\alpha^2(2\beta-1)=0$. Οὕτως εὑρίσκομεν τὸν ψ καὶ ἀκολούθως τὸν χ ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\chi=2\alpha-\psi$.

ε') Ἔχομεν $\chi=1-\alpha\psi$ καὶ $(1-\alpha\psi)^2+2\alpha\psi^2=\alpha^2+1$.

$$(\alpha+2)\psi^2-2\psi-\alpha=0,\quad \psi=\left(1\pm\sqrt{1+\alpha(\alpha+2)}\right):(\alpha+2)$$

$$\text{καὶ}\quad \chi=\left(2\mp\alpha\sqrt{1+\alpha(\alpha+2)}\right):(\alpha+2).$$

στ') Ἔχομεν $\psi=\dfrac{(12\alpha-13-3\chi)}{2}$, $2\chi^2-\dfrac{3\chi(12\alpha-13-3\chi)}{2}=$

$$=15\alpha+10\alpha^3,\quad 13\chi^2-3(12\alpha-13)\chi-10\alpha(3+2\alpha^2)=0,$$

$$\chi=\left[3(12\alpha-13)\pm\sqrt{9(12\alpha-13)^2+520\alpha(3+2\alpha^2)}\;\right]:26.$$

Ὅθεν $\psi=\left[(12\alpha-13)\cdot 17\mp\sqrt{9(12\alpha-13)^2+520\alpha(3+3\alpha^2)}\;\right]:52.$

456. α') Ἐκ τῆς 1ης ἔχομεν $(\chi+\psi+\alpha-\beta)(\chi-\psi+\alpha+\beta)=4(\alpha^2-\beta^2)$, ἤτοι $(\chi+\psi+\alpha-\beta)\cdot 2(\alpha+\beta)=4(\alpha^2-\beta^2)$ ἢ $\chi+\psi+(\alpha-\beta)=2(\alpha-\beta)$ ἢ $\chi+\psi=\alpha-\beta$. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ ἐκ τῆς $\chi-\psi=\alpha+\beta$, εὑρίσκομεν $\chi=\alpha$, $\psi=-\beta$.

β') Ἔχομεν $\chi=\alpha+\beta-\psi$ καὶ $(2\alpha+\beta-\psi)^2+(\psi+\beta)^2=4(\alpha^2+\beta^2)$, $\psi^2-2\alpha\psi+2\alpha\beta-\beta^2=0$ καὶ $\psi=2\alpha-\beta$ ἢ β καὶ ἀντιστοίχως $\chi=2\beta-\alpha$ ἢ α.

457. α') Διὰ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη λαμβάνομεν $\chi^2-\psi^2=4\alpha\beta$ καὶ $(\chi-\psi)^2=4\beta^2$, ὁπότε ἔχομεν $(\chi-\psi)(\chi+\psi)=4\alpha\beta$ (ι) καὶ $\chi-\psi=\pm 2\beta$. Οὕτως ἐκ τῆς (ι) εὑρίσκομεν $\chi+\psi=\pm 2\alpha$.

Ὥστε ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὰ ἑξῆς συστήματα:

$\chi+\psi=2\alpha$	$\chi+\psi=-2\alpha$	$\chi+\psi=2\alpha$	$\chi+\psi=-2\alpha$
$\chi-\psi=2\beta$	$\chi-\psi=2\beta$	$\chi-\psi=-2\beta$	$\chi-\psi=-2\beta$
$\chi=\alpha+\beta$	$\chi=\beta-\alpha$	$\chi=\alpha-\beta$	$\chi=-(\beta+\alpha)$
$\psi=\alpha-\beta$	$\psi=-(\beta+\alpha)$	$\psi=\alpha+\beta$	$\psi=\beta-\alpha$

β') Ἔχομεν $\chi=(\gamma-\beta\psi):\alpha$, ὁπότε ἐκ τῆς 1ης λαμβάνομεν:
$(\alpha^3+\beta^3)^2\psi^2-2\beta^2\gamma(\alpha^3+\beta^3)\psi+\beta^4\gamma^2=0$. Ὅθεν $\psi=\beta^2\gamma:(\alpha^3+\beta^3)$ καὶ $\chi=\alpha^2\gamma$.

γ') Ἡ 2α γίνεται $(\chi+1)\chi+\frac{\alpha}{2}\left(\chi-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\alpha}{4}(5\alpha+4)$, ἤτοι:
$4\chi^2+2(2+\alpha)\chi-2\alpha(3\alpha+2)=0$ καὶ $\chi=\alpha$ ἢ $-(3\alpha+2):2$, ὁπότε ἔχομεν ἀντιστοίχως: $\psi=\pm\alpha:2$ ἢ $\psi=\pm i\sqrt{\alpha(2\alpha+1)}:2$.

458. α') Ἔχομεν $\psi^2=-(2\alpha\chi^2-\alpha^2)$ καὶ $\chi^2-2\alpha(2\alpha\chi^2-\alpha^2)=$
$=\alpha\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)$. Ὥστε $(2-8\alpha^2)\chi^2=2\alpha^2+\alpha-8\alpha^3$. Οὕτως εὑρίσκομεν τὸν χ καὶ κατόπιν τὸν ψ.

β') Ἐκ τῆς 2ας λαμβάνομεν $\psi^2=2\alpha(\lambda+1)^2\chi$, ὁπότε ἡ 1η γίνεται $2\alpha(\lambda+1)^2\chi=2\alpha(\lambda+1)\chi+\alpha^2\lambda(\lambda+1)$ καὶ ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν: $\chi=\alpha:2$, ὁπότε $\psi=\pm\alpha(\lambda+1)$.

γ') Ἡ πρωτη γίνεται $\frac{\alpha^2}{\chi^2}+\frac{\beta^2\gamma^2\chi}{2\beta^2\gamma^2\chi}=2$. Ὅθεν:

$$\chi=\pm\frac{\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{ καὶ } \psi=\pm\beta\gamma\sqrt{\pm\frac{\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}.$$

459. α') Ἐκ τῆς 1ης εὑρίσκομεν $\left(\frac{\beta\chi}{\alpha}\right)^2=\psi^2+\beta^2$, ὁπότε ἡ 2α γίνεται $\psi^2+\beta^2=2\gamma\psi+\beta^2-\gamma^2$, $\psi^2-2\gamma\psi+\gamma^2=0$ καὶ $\psi=\gamma$. Ὥστε: $\chi=\pm\alpha\sqrt{\gamma^2+\beta^2}:\beta$.

β') Ἐὰν θέσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ χ ἐκ τῆς 2ας ἐξισώσεως εἰς τὴν 1ην εὑρίσκομεν: $\left(\frac{\psi^2}{\alpha\beta^2\gamma^2}\right)^2\cdot\psi^2+\psi^2=2\psi^2$ καὶ $\psi^2\left[\left(\frac{\psi^2}{\alpha\beta^2\gamma^2}\right)^2-1\right]=0$. Ὥστε ἢ $\psi=0$ ἢ $\left(\frac{\psi^2}{\alpha\beta^2\gamma^2}\right)^2=1$, ἤτοι $\psi^2=\alpha\beta^2\gamma^2$ καὶ $\psi=\pm\beta\gamma\sqrt{\alpha}$. Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως $\chi=0$ ἢ α.

460. α') Ἀφαιροῦντες εὑρίσκομεν $4\beta^2\chi=0$, $\chi=0$ καὶ $\psi=\pm\beta$.

β') Ἐκ τῆς 1ης λαμβάνομεν $\chi^2=\frac{\alpha(\psi^2-\beta^2)}{2\beta^2}$, ὁπότε ἡ 2α γίνεται
$\frac{\psi^2-\beta^2}{\beta^2}+\frac{\psi}{2\sqrt{2}}=\frac{\alpha+\beta}{2}$, ἤτοι $2\sqrt{2}\,\psi^2+\beta^2\psi-\beta^2(2+\alpha+\beta)\sqrt{2}=0$ καὶ
$\psi=\frac{-\beta^2\pm\sqrt{\beta^4+16(2+\alpha+\beta)\beta^2}}{4\sqrt{2}}$. Ἀκολούθως δὲ εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ χ.

γ') Θέτοντες εἰς τὴν 1ην ἐξίσωσιν τὴν τιμὴν τοῦ ψ^2 ἐκ τῆς δευτέρας εὑρίσκομεν $\frac{\chi^2}{(\alpha+\beta)^2}+\frac{\chi}{(\alpha+\beta)^2}-\chi=0$, ἤτοι $\chi\left[\frac{\chi}{(\alpha+\beta)^2}+\frac{1}{(\alpha+\beta)^2}-1\right]=0$. Ὅθεν

$\chi=0$ ἢ $\chi=(\alpha+\beta)^2-1$. Ἀκολούθως δὲ εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως $\psi=0$ ἢ $\psi=\pm\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\sqrt{(\alpha+\beta)^2-1}$.

461. α΄) Ἔχομεν $\chi=\frac{3\psi}{5}$ καὶ $\frac{9\psi^2}{25}+\psi^2=100$, ἤτοι $\psi=\pm 50:\sqrt{34}$ καὶ $\chi=\pm 30:\sqrt{34}$.

β΄) Εὑρίσκομεν ὁμοίως ὡς ἄνω $\chi=\frac{9\psi}{5}$, $\frac{81\psi^2}{25}-\psi^2=56$, ἤτοι $\psi=\pm 5$ καὶ $\chi=\pm 9$.

γ΄) Ἐκ τῆς αης λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $\chi(5\chi-74\psi)=0$, ἥτις δίδει τὰς λύσεις $\chi=0$ ἢ $\chi=74\psi/5$. Οὕτως ἐκ τῆς βας εὑρίσκομεν $\psi=\pm 2i\sqrt{2}/\sqrt{3}$ ἢ $\psi=\pm 4/\sqrt{541,6}$ καὶ $\chi=\pm 296/\sqrt{541,6}$.

462. α΄) Ἐκ τῆς 2ας εὑρίσκομεν $\chi=7\psi/3$, ὁπότε ἡ 1η γίνεται $79\psi^2=684$. Ὅθεν $\psi=\pm\sqrt{684:79}$ καὶ $\chi=(\pm 7\sqrt{684:79}):3$.

β΄) Ἐκ τῆς 2ας ἐξισώσεως $(\chi+\psi):(\chi-\psi)=8:3$, εὑρίσκομεν $\chi=11\psi/5$, ὁπότε ἡ 1η γίνεται $\psi^2=25$. Ὅθεν $\psi=\pm 5$ καὶ $\chi=\pm 11$.

γ΄) Διαιροῦντες εὑρίσκομεν $\frac{\chi+4}{\psi+9}=\frac{\chi}{\psi}$. Ὅθεν $4\psi=9\chi$ καὶ $\psi=9\chi:4$. Οὕτως ἡ 1η γίνεται $(\chi+4)^2=9\chi^2:4$, ἤτοι $5\chi^2-32\chi-64=0$ καὶ $\chi=8$ ἢ $-8:5$, καὶ ἀντιστοίχως $\psi=18$ ἢ $-18:5$.

δ΄) Διαιροῦντες εὑρίσκομεν $\frac{\chi+\psi}{\chi-\psi}=2$, ἤτοι $\chi=3\psi$. Οὕτως ἡ 2α γίνεται $\psi^3=27$. Ὅθεν $\psi=3$ καὶ $\chi=9$.

ε΄) Διαιροῦντες εὑρίσκομεν $\frac{2\chi-3\psi}{3\chi+\psi}=\frac{1}{7}$, ἤτοι $\chi=2\psi$. Οὕτως ἡ 1η γίνεται $\psi^3=64$. Ὅθεν $\psi=4$ καὶ $\chi=8$.

463. α΄) Προσθέτοντες καὶ ἀφαιροῦντες εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως $\chi^2-\psi^2=24$ καὶ $(\chi-\psi)^2=4$. Οὕτως ἐκ τούτων διὰ διαιρέσεως εὑρίσκομεν $(\chi+\psi):(\chi-\psi)=6$, ἤτοι $\chi=7\psi:5$, τότε δὲ ἡ 2α γίνεται $2\psi^2=50$. Ὅθεν $\psi=\pm 5$ καὶ $\chi=\pm 7$.

β΄) Ἐκ τῆς 2ας εὑρίσκομεν $\chi=\frac{\psi^2+8}{\psi}$ (ι). Οὕτω δὲ ἡ 1η γίνεται $2\psi^4-57\psi^2+64=0$ καὶ $\psi=(\pm\sqrt{57\pm\sqrt{2737}}):2$. Ἀκολούθως δὲ εὑρίσκομεν τὸ χ ἐκ τῆς (ι).

γ΄) Ἔχομεν $\psi=\frac{236}{\chi}$ καὶ $\chi^2+\frac{236^2}{\chi^2}=57$, ἤτοι $\chi^4-57\chi^2+236^2=0$. Οὕτως εὑρίσκομεν τὸν χ καὶ κατόπιν τὸν ψ.

δ΄) Ἔχομεν $\chi^2+\psi^2+2\chi\psi=125+100$, $(\chi+\psi)^2=15^2$.
$\chi^2+\psi^2-2\chi\psi=125-100$, $(\chi-\psi)^2=5^2$. Ὅθεν:

$$\begin{array}{llll} \chi+\psi=15, & \chi+\psi=-15, & \chi+\psi=15, & \chi+\psi=-15 \\ \chi-\psi=5 & \chi-\psi=-5 & \chi-\psi=-5 & \chi-\psi=5 \\ \hline \chi=10,\ \psi=5 & \chi=-10,\ \psi=-5 & \chi=5,\ \psi=10 & \chi=-5,\ \psi=-10 \end{array}$$

ε') Ἔχομεν ὡς ἄνω $(\chi+\psi)^2=17^2$, $(\chi-\psi)^2=7^2$, ἤτοι $\chi+\psi=\pm 17$ καὶ $\chi-\psi=\pm 7$. Ὅθεν $\chi=12$, $\psi=5$ ἢ $\chi=5$, $\psi=12$ ἢ $\chi=-12$, $\psi=-5$ ἢ $\chi=-5$, $\psi=-12$.

στ') Ἔχομεν $\chi^2+\psi^2=\frac{25}{36}$, $2\chi\psi=\frac{2}{3}=\frac{24}{36}$. Ὅθεν
$(\chi+\psi)^2=\left(\frac{7}{6}\right)^2$, $(\chi-\psi)^2=\left(\frac{1}{6}\right)^2$, $\chi+\psi=\pm\frac{7}{6}$ καὶ $\chi-\psi=\pm\frac{1}{6}$.
Οὕτως δὲ εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{2}{3},\ \psi=\frac{1}{2}.\quad \chi=\frac{1}{2},\ \psi=\frac{2}{3}.\quad \chi=-\frac{2}{3},\ \psi=-\frac{1}{2},$$
$$\chi=-\frac{1}{2},\quad \psi=-\frac{2}{3}.$$

ζ') Ἀφαιροῦντες ἔχομεν $\psi-\chi=60$, ἤτοι $\psi=60+\chi$. Οὕτως ἡ 2α γίνεται $\chi^2+\chi(60+\chi)+\chi=61$, $2\chi^2+61\chi-61=0$.
καὶ $\chi=(-61\pm\sqrt{61^2+488}):4$. Ὅθεν $\psi=(179\pm\sqrt{61^2+488}):4$.

η') Προσθέτοντες καὶ ἀφαιροῦντες λαμβάνομεν $(\chi+\psi)^2=17^2$, ἤτοι $\chi+\psi=\pm 17$ (1) καὶ $\chi^2-\psi^2=85$, ἤτοι $(\chi+\psi)(\chi-\psi)=85$ ἢ $\pm 17(\chi-\psi)=85$, ἤτοι $\chi-\psi=\pm 5$ (2).
Οὕτως ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν $\chi=11$, $\psi=6$ καὶ $\chi=-11$, $\psi=-6$.

464. α') Ἔχομεν $(\chi-3\psi)^2=16$, $\chi^2+9\psi^2-6\chi\psi=16$, $136-6\chi\psi=16$ καὶ $\chi\psi=20$, ἤτοι $\chi=20:\psi$. Οὕτως ἡ 2α γίνεται $3\psi^2+4\psi-20=0$ καὶ $\psi=2$ ἢ $-10:3$. Ὅθεν $\chi=10$ ἢ -6.

β') Ἔχομεν $\chi+\psi=\frac{5\pm\sqrt{25+800}}{8}=\frac{5\pm5\sqrt{33}}{8}$

καὶ $\chi-\psi=\frac{-3\pm\sqrt{9+55}}{5}=\frac{-3\pm8}{5}=1$ ἢ $-\frac{11}{5}$

Οὕτω δὲ ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων εὑρίσκομεν τὰ χ καὶ ψ κατὰ τὰ γνωστά.

γ') Διαιροῦντες εὑρίσκομεν $\chi^2+\chi\psi+\psi^2=7$. Ἐξ ἄλλου ἐκ τῆς 2ας λαμβάνομεν $\chi^2+\psi^2=2\chi\psi+1$. Ἑπομένως εἶναι $\chi\psi=2$, ἤτοι $\psi=\frac{2}{\chi}$. Καὶ διὰ τοῦτο ἡ 2α ἐξίσωσις γίνεται $\chi-\frac{2}{\chi}=1$, ἤτοι $\chi^2-\chi-2=0$. Ὅθεν $\chi=2$ ἢ -1 καὶ $\psi=1$ ἢ -2.

δ') Ἐργαζόμενοι ὡς ἄνω εὑρίσκομεν $\chi^2+\chi\psi+\psi^2=\frac{\alpha}{\beta}$, $\chi^2+\psi^2=$

$=2\chi\psi+\beta^2$. Ὥστε $3\chi\psi=\frac{\alpha}{\beta}-\beta^2$, ἤτοι $\psi=\frac{\alpha-\beta^3}{3\beta\chi}$ καὶ διὰ τοῦτο ἡ 2α ἐξίσωσις γίνεται $3\beta\chi^2-3\beta^2\chi-(\alpha-\beta^3)=0$ καὶ

$$\chi=\frac{3\beta^2\pm\sqrt{9\beta^4+12\beta(\alpha-\beta^3)}}{6\beta}=\frac{3\beta^2\pm\sqrt{3\beta(4\alpha-\beta^3)}}{6\beta}$$

Ὅθεν $$\psi=\chi-\beta=\frac{-3\beta^2\pm\sqrt{3\beta(4\alpha-\beta^3)}}{6\beta}.$$

ε') Ἐκ τῆς 2ας λαμβάνομεν $\chi^2+\psi^2+2\chi\psi=9$, ἤτοι $\chi^2+\psi^2=9-2\chi\psi$. Ἐὰν δὲ καὶ ταύτης τὰ μέλη ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον εὑρίσκομεν $\chi^4+\psi^4+2\chi^2\psi^2=81+4\chi^2\psi^2-36\chi\psi$. Οὕτως ἔχοντες ὑπ' ὄψιν καὶ τὴν 1ην ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi^2\psi^2-18\chi\psi+32=0$. Ὅθεν $\chi\psi=9\pm\sqrt{81-32}=16$ ἢ 2. Οὕτω γνωρίζοντες τὸ ἄθροισμα $\chi+\psi=3$ καὶ τὸ γινόμενον $\chi\psi=16$ ἢ 2 εὑρίσκομεν τὰ χ καὶ ψ ἐκ τῶν ἐξισώσεων $\varphi^2-3\varphi+16=0$ καὶ $\varphi^2-3\varphi+2=0$.

Ἐκ τῆς πρώτης τούτων εὑρίσκομεν $\varphi=\frac{3\pm\sqrt{9-64}}{2}=\frac{3\pm i\sqrt{55}}{2}$, ἐκ δὲ τῆς δευτέρας $\varphi=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm1}{2}$. Ὥστε $\chi=\frac{3\pm i\sqrt{55}}{2}$ (ἢ ψ) καὶ $\psi=\frac{3-i\sqrt{55}}{2}$ (ἢ χ) καὶ $\chi=2$ (ἢ ψ) καὶ $\psi=1$ (ἢ χ).

στ') Ἐργαζόμενοι ἀκριβῶς ὡς ἀνωτέρω εὑρίσκομεν διὰ χ, ψ

$$\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3\beta^2+\sqrt{8\alpha+8\beta^4}},\quad \frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3\beta^2+\sqrt{8\alpha+8\beta^4}} \qquad (1)$$

ἢ $$\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3\beta^2-\sqrt{8\alpha+8\beta^4}},\quad \frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3\beta^2-\sqrt{8\alpha+8\beta^4}} \qquad (2)$$

Διερεύνησις. Ἡ λύσις (2) ἀποτελεῖται ἐκ μιγάδων **ἀριθμῶν**, ἡ δὲ (1) ἀποτελεῖται ἐκ πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἐὰν $\sqrt{8\alpha+8\beta^4}\geqq 3\beta^2$, ἤτοι ἂν $8\alpha+8\beta^4\geqslant 9\beta^4$ ἢ ἂν $\alpha\geqslant\beta^4:8$.

η') Ὑψοῦντες τὴν 2αν ἐξίσωσιν πρῶτον εἰς τὸν κύβον καὶ ἔπειτα εἰς τὸ τετράγωνον εὑρίσκομεν $\chi^3+\psi^3+3\chi\psi(\chi+\psi)=\beta^3$ (1) καὶ $\chi^2+\psi^2+2\chi\psi=\beta^2$ (2). Ἐὰν δὲ αὐτὰς τὰς πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη εὑρίσκομεν τὴν πέμπτην δύναμιν τῆς 2ας ἐξισώσεως, ἤτοι: $\chi^5+\psi^5+5\chi\psi(\chi^3+\psi^3)+10\chi^2\psi^2(\chi+\psi)=\beta^5$.

Ἐὰν δὲ εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἀντικαταστήσωμεν τὸ ἄθροισμα $\chi^5+\psi^5$ ὑπὸ τοῦ ἴσου του α, τὸ $\chi^3+\psi^3$ ἐκ τῆς (1) ὑπὸ τοῦ ἴσου του $\beta^3-3\chi\psi(\chi+\psi)$ καὶ τέλος τὸ $\chi+\psi$ ὑπὸ τοῦ ἴσου του β εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $(\chi\psi)^2-\beta^2(\chi\psi)=\frac{\alpha-\beta^5}{5\beta}$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν

$$\chi\psi=\frac{\beta^2}{2}-\sqrt{\frac{4\alpha+\beta^5}{20\beta}} \quad ἢ \quad \frac{\beta^2}{2}+\sqrt{\frac{4\alpha+\beta^5}{20\beta}} \qquad (3)$$

Καὶ ἂν μὲν λάβωμεν τὸ πρῶτον χψ εὑρίσκομεν ἐξ αὐτοῦ καὶ ἐκ τοῦ $\chi+\psi=\beta$, ὡς χ καὶ ψ τοὺς ἀριθμοὺς

$$\frac{\beta}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-\beta^2+\sqrt{\frac{4\alpha+\beta^5}{5\beta}}} \qquad (4)$$

'Εὰν δὲ λάβωμεν τὸ δεύτερον $\chi\psi$, εὑρίσκομεν ὡς χ καὶ ψ, τοὺς ἀριθμοὺς (4) εἰς οὓς ὅμως τὸ σημεῖον $+$ τοῦ ὑπορρίζου γίνεται $-$, ἑπομένως τὸ δεύτερον τοῦτο ζεῦγος τῶν χ, ψ εἶναι μιγάδες.

465. α') Ὑψοῦντες τὴν 1ην ἐξίσωσιν εἰς τὸ τετράγωνον εὑρίσκομεν $\chi^2+\psi^2+2\chi\psi=441+\chi\psi-42\sqrt{\chi\psi}$, ἤτοι $257+\chi\psi=441-42\sqrt{\chi\psi}$ ἢ $\chi\psi+42\sqrt{\chi\psi}-184=0$. Ὅθεν $\sqrt{\chi\psi}=-21\pm\sqrt{441+184}=-21\pm25=4$ ἢ -46, ἤτοι $\chi\psi=16$ ἢ 2116. Ἐξ ἄλλου ἐκ τῆς 1ης ἐξισώσεως τοῦ συστήματος εὑρίσκομεν $\chi+\psi=17$ ἢ 57. Γνωρίζοντες οὕτω τὸ ἄθροισμα $\chi+\psi$ καὶ τὸ γινόμενον $\chi\psi$, εὑρίσκομεν τὰ χ,ψ κατὰ τὰ γνωστά.

β') Ἐκ τῆς 2ας ἐξισώσεως $3\chi^2\psi^2-2{,}5\chi\psi-275=0$, εὑρίσκομεν $\chi\psi=\left(1{,}25\pm\sqrt{1{,}25^2+825}\right):3=10$ ἢ $-55:6$. Ἐξ ἄλλου ἐκ τῆς 1ης εὑρίσκομεν $5(\chi^2+\psi^2)+14\chi\psi+1479=0$, ἤτοι $5(\chi^2+\psi^2)+140+1479=0$ ἢ $5(\chi^2+\psi^2)-14\cdot55/6+$ $+1479=0$. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων λαμβάνομεν τὸ ἄθροισμα $\chi^2+\psi^2$, ἐπειδὴ δὲ γνωρίζομεν καὶ τὸ γινόμενον $\chi\psi$, τὸ διπλασιάζομεν πρῶτον καὶ κατόπιν εὑρίσκομεν τὰ $\chi^2+\psi^2+2\chi\psi=(\chi+\psi)^2$ καὶ $\chi^2+\psi^2-2\chi\psi=(\chi-\psi)^2$.

Οὕτως εὑρίσκομεν τὰ $\chi+\psi$, $\chi-\psi$ καὶ ἀκολούθως τὰ χ, ψ.

γ') Ἐκ τῆς 2ας ἐξισώσεως εὑρίσκομεν τὸ $\chi\psi$, ἐκ δὲ τῆς 1ης, ἥτις γράφεται $(\chi+\psi-2)+\sqrt{\chi+\psi-2}-12=0$, εὑρίσκομεν τὸ $\sqrt{\chi+\psi-2}$ καὶ ἐξ αὐτοῦ τὸ $\chi+\psi$. Οὕτως ἐκ τοῦ ἀθροίσματος $\chi+\psi$ καὶ ἐκ τοῦ γινομένου $\chi\psi$ εὑρίσκομεν τὰ χ,ψ.

466. α') Ἡ β^{α} ἐξίσωσις δίδει $\chi^2+\psi^2=17\chi\psi/4$ (1) ὁπότε ἐκ τῆς $\alpha^{\eta\varsigma}$ εὑρίσκομεν $(17\chi\psi/4)^2=\chi^2+\psi^2+273$, ἐξ ἧς λαμβάνομεν τὴν δεκτὴν λύσιν $\chi\psi=4$ (2). Οὕτως ἡ (1) γίνεται $\chi^2+\psi^2=17$. Ὅθεν $\chi^2+\psi^2+2\chi\psi=17+8=25$, $(\chi+\psi)^2=5^2$ καὶ $\chi+\psi=\pm5$ (3). Οὕτως ἐκ τῶν (2) καὶ (3) εὑρίσκομεν διὰ χ καὶ ψ τὰς λύσεις 4 καὶ 1, ὡς καὶ τὰς -1 καὶ -4. β') Ἂν $\chi\neq\psi$, ἡ α^{η} δίδει $\chi+\psi=21$, ἤτοι $\psi=21-\chi$, ὁπότε ἐκ τῆς $\beta^{\alpha\varsigma}$ εὑρίσκομεν $5\chi^2-85\chi-2=0$. Οὕτως εὑρίσκομεν τὸ χ καὶ κατόπιν τὸ ψ. γ') Ἡ β^{α} δίδει $\chi^2+3\psi\chi-40\psi^2=0$, ἐξ ἧς λύοντες πρὸς χ εὑρίσκομεν $\chi=5\psi$ ἢ -8ψ. Θέτοντες ἤδη διαδοχικῶς τὰς τιμὰς αὐτὰς τοῦ χ εἰς τὴν $\alpha^{\eta\nu}$ ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν τὸ ψ καὶ κατόπιν τὸ χ.

467. α') Τὸ δοθὲν σύστημα γράφεται $(\chi^2-\chi\psi+\psi^2)(\chi+\psi)=973$ καὶ $(\chi^2-\chi\psi+\psi^2)-7(\chi+\psi)-90=0$. Ὥστε ἡ 1η τούτων δίδει $\chi^2-\chi\psi+\psi^2=973:(\chi+\psi)$, ὁπότε ἡ 2α γίνεται $7(\chi+\psi)^2+90(\chi+\psi)-973=0$. Ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν τὸ $\chi+\psi$ καὶ ἀκολούθως εὑρίσκομεν τὸ $\chi\psi$ ἐκ τῆς 2ας ἐξισώσεως τοῦ συστήματος. Οὕτω δὲ προχωροῦμεν εἰς τὴν λύσιν κατὰ τὰ γνωστά.

β') Ἡ 2α ἐξίσωσις γράφεται $\sqrt{\psi}\cdot\sqrt{\chi^3}+\sqrt{\psi}\cdot\sqrt{\psi^3}=364$, ἤτοι $\sqrt{\psi}\left(\sqrt{\chi^3}+\sqrt{\psi^3}\right)=364$, ὁπότε ἐκ ταύτης καὶ ἐκ τῆς 1ης εὑρίσκομεν $\dfrac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{\psi}}=\dfrac{273}{364}=\dfrac{273:7}{364:7}=\dfrac{39}{52}$, ἤτοι $\dfrac{\chi}{\psi}=\dfrac{1521}{2704}$, ἤτοι $\chi=\dfrac{1521}{2704}\cdot\psi$. Ἐὰν ἤδη τὴν τιμὴν αὐτὴν τῆς χ θέσωμεν εἰς τὴν 1ην ἐξίσωσιν ἥτις γράφεται $\chi^2+\psi^2=273$ θὰ εὕρωμεν τὸν ψ καὶ κατόπιν τὸν χ.

γ') Ἐκ τῆς 3ης ἥτις γράφεται $\chi+\psi=29-\omega$. Εὑρίσκομεν $\chi^2+\psi^2+2\chi\psi=841-58\omega+\omega^2$ ἢ ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν καὶ τὰς ἄλλας δύο ἐξισώσεις, $289-\omega^2+144=841-58\omega+\omega^2$, ἤτοι $\omega^2-29\omega+204=0$ καὶ $\omega=17$ ἢ 12. Ὅθεν ἔχομεν 1) $\chi\psi=72$ καὶ $\chi+\psi=29-17=12$ καὶ 2) $\chi\psi=72$ καὶ $\chi+\psi=29-12=17$. Καὶ διὰ μὲν τὴν περίπτωσιν 1) τὰ χ,ψ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\varphi^2-12\varphi+72=0$ αἱ ὁποῖαι εἶναι $6\pm6i=6(1\pm i)$, διὰ δὲ τὴν 2) τὰ χ,ψ εἶναι ρίζαι τῆς $\varphi^2-17\varphi+72=0$, αἱ ὁποῖαι εἶναι 8 καὶ 9.

468. α΄) Ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τὴν ἄσκησιν 467 εὑρίσκομεν:

$$\frac{\sqrt{\chi}(\sqrt{\chi^3}-\sqrt{\psi^3})}{\sqrt{\psi}(\sqrt{\chi^3}-\sqrt{\psi^3})}=\frac{585}{234}=\frac{585:117}{234:117}=\frac{5}{2},\ \text{ἤτοι}\ \frac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{\psi}}=\frac{5}{2},\quad \frac{\chi}{\psi}=\frac{25}{4}\cdot$$

Ὅθεν $\sqrt{\chi}=\dfrac{5\sqrt{\psi}}{2}$ καὶ $\chi=\dfrac{25\psi}{4}$, ὁπότε ἡ 1η ἐξίσωσις γίνεται

$$\frac{625\psi^2}{16}-\frac{5\psi^2}{2}=585,\ \frac{585\psi^2}{16}=585\ \text{καὶ}\ \psi=\pm4,\ \text{ὁπότε}\ \chi=\pm25.$$

β΄) Ἐκ τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων εὑρίσκομεν $\chi^2+\psi^2+2\chi\psi=40+2\omega$, ἤτοι $(\chi+\psi)^2=40+2\omega$, ἢ $8^2=40+2\omega$ καὶ $\omega=12$. Οὕτω δὲ ἔχομεν $\chi+\psi=8$, $\chi\psi=12$, ὁπότε τὰ χ, ψ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\varphi^2-8\varphi+12=0$, αἱ ὁποῖαι εἶναι 6 καὶ 2.

γ΄) Διὰ προσθέσεως τῶν τριῶν ἐξισώσεων κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $\chi^2+\psi^2+\omega^2-\chi\psi-\psi\omega-\omega\chi=25$, ἐὰν δὲ ἀπὸ ταύτης ἀφαιρέσωμεν διαδοχικῶς τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος, εὑρίσκομεν $\psi(\psi-\omega)=0$ (1) $\chi^2-\omega\chi-9=0$ (2) καὶ $\omega^2-\chi\psi=16$ (3). Οὕτως ἐκ τῆς (1) εὑρίσκομεν $\psi=0$ καὶ $\psi=\omega$. Ἀλλ' ἂν $\psi=0$, ἡ (3) δίδει $\omega=\pm4$, ὁπότε ἐκ τῆς (2) εὑρίσκομεν $\chi=\pm2\pm\sqrt{13}$. Ἐὰν δὲ $\psi=\omega$ αἱ (2) καὶ (3) γίνονται $\chi^2-\chi\psi=9$ καὶ $\psi^2-\chi\psi=16$, ὁπότε διὰ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως $(\psi-\chi)^2=25$, ἤτοι $\psi-\chi=\pm5$ καὶ $\psi^2-\chi^2=7$, ἤτοι $(\psi-\chi)(\psi+\chi)=7$ ἢ $\psi+\chi=\pm\dfrac{7}{5}\cdot$ Καὶ διὰ τοῦτο εἶναι:

$$\psi=\frac{16}{5}=\omega,\ \chi=-\frac{9}{5}\quad \text{ἢ}\quad \psi=-\frac{16}{5}=\omega\quad \text{καὶ}\quad \chi=\frac{9}{5}\cdot$$

Προβλήματα ἐξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ.

469. Ἐὰν χ καὶ ψ εἶναι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶναι $\chi+\psi=\chi\psi$ καὶ $\chi\psi=\dfrac{\chi}{\psi}\cdot$ Ἀλλ' ἡ τελευταία αὕτη γράφεται $\chi\left(\psi-\dfrac{1}{\psi}\right)=0$. Ὅθεν ἢ $\chi=0$, ὁπότε $\psi=0$ ἢ $\psi-\dfrac{1}{\psi}=0$, ἤτοι $\psi^2=1$ καὶ $\psi=\pm1$. Ἀλλὰ διὰ $\psi=1$ ἔχομεν: $\chi+1=1$, ἤτοι $\chi=0$ καὶ διὰ $\psi=-1$ ἔχομεν $\chi-1=-\chi$, ἤτοι $\chi=\dfrac{1}{2}\cdot$ Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἡ λύσις $\chi=0$, $\psi=0$ καθιστᾷ τὸ πρόβλημα ἀπροσδιόριστον.

470. Ἐὰν χ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἔχομεν $0{,}5\chi+5=36:(0{,}3\chi-25)$, ἤτοι $0{,}15\chi^2-11\chi-161=0$ ἢ $3\chi^2-220\chi-3220=0$. Ὥστε $\chi=(110\pm16\sqrt{85}):3$.

471. Οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι τῆς μορφῆς $2\chi-1$ καὶ $2\chi+1$. Ὥστε $(2\chi-1)^2+(2\chi+1)^2=202$, ἤτοι $8\chi^2+2=202$, $\chi^2=25$ καὶ $\chi=\pm5$ καὶ διὰ τοῦτο οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ 9 καὶ 11 ἢ οἱ -11 καὶ -9.

472. Ἐὰν οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ $\chi-1$, χ καὶ $\chi+1$ ἔχομεν $\chi(\chi-1)(\chi+1)=15\chi$, ἤτοι $\chi(\chi^2-1)-15\chi=0$ ἢ $\chi(\chi^2-16)=0$. Ὅθεν ἢ $\chi=0$, ὁπότε οἱ ἀριθμοὶ εἶναι $-1, 0, 1$ ἢ $\chi=\pm4$, ὁπότε οἱ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ 3, 4, 5 ἢ οἱ $-5, -4, -3$.

473. Ἐὰν τὸ ἓν μέρος εἶναι χ τὸ ἄλλο θὰ εἶναι $27-\chi$. Ὥστε εἶναι $4\chi^2+5(27-\chi)^2=1620$, ἤτοι $\chi^2-30\chi+225=0$ καὶ $\chi=15$ καὶ $27-\chi=12$.

474. Ἐὰν χ, ψ αἱ διαστάσεις καὶ $\chi>\psi$ ἔχομεν $\chi^2+\psi^2=17^2=289$ καὶ $\chi\psi=120$, ἤτοι $2\chi\psi=240$. Ὅθεν $(\chi+\psi)^2=529=23^2$ καὶ $(\chi-\psi)^2=49=7^2$. Ὅθεν $\chi+\psi=23$ καὶ $\chi-\psi=7$, ἤτοι $\chi=15$ μ. καὶ $\psi=8$ μ.

475. Ἔχομεν ὡς ἄνω $\chi^2+\psi^2=25^2$ καὶ $\chi:\psi=3:4$ ἤτοι $\chi=3\psi:4$. Ὅθεν $9\psi^2+16\psi^2=10000$, $\psi=20$ καὶ $\chi=15$.

476. Ἔχομεν $\chi-\psi=14$ καὶ $\chi\psi=1632$, ἤτοι $(\psi+14)\psi=1632$. $\psi^2+14\psi-1632=0$ καὶ $\chi=48$ ἢ -34, ὁπότε εἶναι $\psi=34$ ἢ -48.

477. Ἔχομεν $\chi-5\sqrt{\chi}=500$ καὶ $\sqrt{\chi}=(5+\sqrt{25+2000}):2=25$, διότι $\sqrt{\chi}>0$. Ὅθεν $\chi=625$.

478. Ἐὰν χ ἡ ἡλικία του θὰ εἶναι $\chi^2=16(\chi+12)$, ἤτοι $\chi^2-16\chi-192=0$ καὶ $\chi=24$, διότι $\chi>0$.

479. Ἐὰν ἡ μία τὴν γεμίζει εἰς χ ὥρας, ἡ ἄλλη τὴν γεμίζει εἰς $\chi+27$ ὥρας. Ὥστε εἰς 18 ὥρας, ἡ πρώτη θὰ γεμίσῃ τὰ $18:\chi$ τῆς δεξαμενῆς, ἡ δὲ ἄλλη θὰ γεμίσῃ τὰ $18:(\chi+27)$ αὐτῆς. Ἑπομένως εἶναι $\dfrac{18}{\chi}+\dfrac{18}{\chi+27}=1$, ἤτοι $\chi^2-9\chi-486=0$, $\chi=27$ καὶ $\chi+27=54$ (διότι $\chi>0$).

480. Ἐὰν χ εἶναι ἡ βάσις, τὸ ὕψος θὰ εἶναι $9\chi:16$. Οὕτω $9\chi^2:16=99^2$, $\chi^2=99^2.16:9$ καὶ $\chi=99.4:3=132$ μ. Ὅθεν τὸ ὕψος εἶναι $9.132:16=297:4=74{,}25$ μ.

481. Εἶναι $\chi^2+\psi^2=51^2$ καὶ $\dfrac{\chi}{\psi}=\dfrac{8}{15}$, ἤτοι $\chi=\dfrac{8\psi}{15}$. $289\psi^2=15^2.51^2$, $\psi=45$ μ. καὶ $\chi=24$ μ.

Προβλήματα γενικά.

Ἀσκήσεις. *482*. Ἔχομεν $\dfrac{\chi}{\mu}\cdot\dfrac{\chi}{\nu}=\alpha$, $\chi^2=\alpha\mu\nu$ καὶ $\chi=\pm\sqrt{\alpha\mu\nu}$. Θὰ εἶναι δὲ τὸ χ πραγματικόν, ἐὰν $\alpha\mu\nu>0$.

483. Ἔχομεν $\mu\chi\cdot\nu\chi=\alpha$, $\chi^2=\dfrac{\alpha}{\mu\nu}$ καὶ $\chi=\pm\sqrt{\dfrac{\alpha}{\mu\nu}}$. Θὰ εἶναι δὲ τὸ χ πραγματικὸν ἐὰν $\alpha:\mu\nu>0$, ἤτοι $\alpha\mu\nu>0$.

484. Ἐὰν χ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐτῶν, τὸ ἐπιτόκιον εἶναι $\chi-\delta$. Τότε δὲ εἶναι $\dfrac{\alpha\cdot\chi\cdot(\chi-\delta)}{100}=\tau$, ἤτοι $\alpha\chi^2-\alpha\delta\chi-100\tau=0$ (1) καὶ

$\chi=(\alpha\delta\pm\sqrt{\alpha^2\delta^2+400\alpha\tau}):2\alpha$.

Διερεύνησις. Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι. Εἶναι δὲ καὶ ἑτερόσημοι, διότι τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν εἶναι ἀρνητικόν. Ἀλλ' ἐκ τούτων δεκτὴ εἶναι ἡ θετική. Εἰς τὴν μερικὴν δὲ περίπτωσιν εὑρίσκομεν $\chi=6$.

485. Ἐὰν χ εἶναι τὰ ἔτη καὶ ψ τὸ ἐπιτόκιον, ἔχομεν :

$$\frac{\alpha\chi\psi}{100}=\tau \ (1) \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha(\chi+\mu)(\psi-\varepsilon)}{100}=\tau.$$

Ὥστε $\chi\psi=(\chi+\mu)(\psi-\varepsilon)$, ἤτοι $\mu\psi-\varepsilon\chi-\varepsilon\mu=0$ καὶ $\chi=(\mu\psi-\varepsilon\mu):\varepsilon$. Ἐὰν ἤδη τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χ θέσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν $\alpha\mu\psi^2-\alpha\mu\varepsilon\psi-$ $-100\varepsilon\tau=0$ (2) καὶ $\psi=\left(\alpha\mu\varepsilon\pm\sqrt{\alpha^2\mu^2\varepsilon^2+400\alpha\mu\varepsilon\tau}\right):2\alpha\mu$.

Διερεύνησις. Ἐπειδὴ α, μ, ε, τ εἶναι θετικά, αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικαί. Ἀλλ' ἐπειδὴ αὗται εἶναι ἑτερόσημοι (ἄσκ. 484), ἐκ τούτων δεκτὴ εἶναι ἡ θετική. Εἰς τὴν μερικὴν περίπτωσιν εὑρίσκομεν $\psi=5$.

486. Ἐὰν χ εἶναι τὸ πρῶτον κεφάλαιον, τὸ ἄλλο θὰ εἶναι $\chi+\delta$ καὶ ἐὰν τὸ ἐπιτόκιον τοῦ πρώτου εἶναι ψ, τὸ ἐπιτόκιον τοῦ ἄλλου εἶναι $\psi-\varepsilon$. Ὥστε ἔχομεν :

$$\frac{\chi\psi\nu_1}{100}=\tau_1 \ \text{καὶ} \ \frac{(\chi+\delta)(\psi-\varepsilon)\nu_2}{100}=\tau_2, \ \text{ἤτοι :}$$

$$\chi\psi=\frac{100\tau_1}{\nu_1} \ (1) \quad \text{καὶ} \quad (\chi+\delta)(\psi-\varepsilon)=\frac{100\tau_2}{\nu_2} \ (2).$$

Ἤδη ἐκ τῆς (2) εὑρίσκομεν τὸ χψ τὸ ὁποῖον ἐξισοῦμεν μὲ τὴν τιμήν του ἐκ τῆς (1). Ἐκ τῆς νέας δὲ ἐξισώσεως εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ ψ, τὴν ὁποίαν θέτομεν εἰς τὴν (1). Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν τὸ χ καὶ κατόπιν τὸ $\chi+\delta$.

487. Ἔστω ὅτι ἠγοράσθησαν χ μ. πρὸς ψ δραχμὰς τὸ μέτρον. Τότε δὲ ἔχομεν

$\psi\chi=\alpha$ (1) καὶ $(\psi-\beta)(\chi+\gamma)=\alpha$· ὅθεν $\psi\chi=(\psi-\beta)(\chi+\gamma)$ καὶ $\psi=(\beta\chi+\beta\gamma):\gamma$. Οὕτως ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $\beta\chi^2+\beta\gamma\chi-\alpha\gamma=0$, καὶ $\chi=\left(-\beta\gamma\pm\sqrt{\beta^2\gamma^2+4\alpha\beta\gamma}\right):2\beta$, ὁπότε $\psi=\alpha:\chi$. Ἡ διερεύνησις ὁμοία μὲ τὴν τῆς ἀσκήσεως 484.

488. Ἐὰν $\alpha>\beta>\gamma$ καὶ χ τὸ ζητούμενον μῆκος, θὰ ἔχωμεν $(\alpha+\chi)^2=(\beta+\chi)^2+(\gamma+\chi)^2$, ἤτοι $\chi^2+2(\beta+\gamma-\alpha)\chi+\beta^2+\gamma^2-\alpha^2=0$ καὶ $\chi=-(\beta+\gamma-\alpha)\pm\sqrt{(\beta+\gamma-\alpha)^2-(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)}=\alpha-(\beta+\gamma)\pm\sqrt{2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$.

489. Ἔστω Μ τὸ ζητούμενον σημεῖον τῆς ΣΣ′, (ΣΣ′)=δ καὶ (ΣΜ)=χ. Ἐὰν τῆς εὐθείας ΣΣ′ ὁρίσωμεν ὡς θετικὴν φορὰν τὴν ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ ὑποθέσωμεν $\delta>0$, οἱανδήποτε θέσιν καὶ ἂν ἔχῃ τὸ Μ ἐπὶ τῆς εὐθείας, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸ γνωστὸν θεώρημα τοῦ Chasles (βλέπε «Μεγάλην Ἐπίπεδον Τριγωνομετρίαν» Χρ. Μπαρμπαστάθη σελὶς 39) τὴν σχέσιν $(\text{ΜΣ}')=\delta-\chi$. Ἀλλ' ἐὰν α^2 εἶναι τὸ ποσὸν τοῦ φωτός, ποὺ δέχεται ἐκ τοῦ Σ τὸ σημεῖον τὸ ἀπέχον ἀπ' αὐτοῦ ἀπόστασιν 1, καὶ διὰ τοῦ β^2 τὸ ὅμοιον ποσὸν τοῦ φωτεινοῦ σημείου Σ′, τὸ Μ δέχεται ἐκ τοῦ Σ ποσὸν φωτὸς $\alpha^2:\chi^2$ καὶ ἐκ τοῦ Σ′ ποσὸν φωτὸς $\beta^2:(\delta-\chi)^2$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ποσὰ ταῦτα εἶναι ἴσα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha^2:\chi^2=\beta^2:(\delta-\chi)^2$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\alpha : \chi = \beta : (\delta - \chi)$ ἢ $\alpha : \chi = -\beta : (\delta - \chi)$, ὁπότε $\chi = \alpha\delta : (\alpha + \beta)$ (1) ἢ $\chi = \alpha\delta : (\alpha - \beta)$ (2).

Διερεύνησις. Ἡ λύσις (1) εἶναι πάντοτε θετική. Ἐπειδὴ δὲ $\alpha : (\alpha + \beta) < 1$, ἕπεται $\chi < \delta$. Ὥστε πάντοτε ὑπάρχει μεταξὺ Σ καὶ Σ′ σημεῖον τι Μ ἐξ ἴσου φωτιζόμενον ὑπ᾽ αὐτῶν. Καὶ 1) ἂν $\alpha = \beta$, τότε εἶναι $\chi = \delta : 2$, ἤτοι τὸ Μ εἶναι μέσον τῆς ΣΣ′, 2) ἂν $\alpha > \beta$, εἶναι $\chi > \delta : 2$ καὶ τότε τὸ Μ κεῖται πλησιέστερον τοῦ Σ′, 3) ἂν εἶναι $\alpha < \beta$, εἶναι $\chi < \delta : 2$, καὶ τότε τὸ Μ εἶναι πλησιέστερον τοῦ Σ. Ὥστε, ἂν $\alpha \neq \beta$, τὸ Μ κεῖται πλησιέστερον πρὸς τὸ ἀσθενέστερον σημεῖον.

Ἡ λύσις (2) ἤτοι ἡ $\chi = \alpha\delta : (\alpha - \beta)$ ὑπάρχει μόνον ὅταν $\alpha \neq \beta$. Καὶ ἂν $\alpha < \beta$ ἡ λύσις εἶναι ἀρνητική, ἤτοι ὑπάρχει σημεῖον ἐξ ἴσου φωτιζόμενον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Σ καὶ τὸ σημεῖον τοῦτο ὑπάρχει πέραν τοῦ Σ′, ἂν $\alpha > \beta$, διότι τότε $\alpha : (\alpha - \beta) > 1$, ἤτοι $\chi > \delta$.

490. Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ ζητούμενον τραπέζιον εἰς ὃ ἡ βάσις ΑΒ εἶναι διάμετρος τοῦ ἡμικυκλίου ἀκτῖνος ϱ, ὁπότε $(\mathrm{AB}) = 2\varrho$· εἶναι δὲ $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{B\Gamma}$, διότι αἱ παράλληλοι ΑΒ καὶ ΓΔ, ὁρίζουν ἐπὶ τῆς περιφερείας ἴσα τόξα. Ὥστε ἐὰν φέρωμεν τὰς καθέτους ΔΖ καὶ ΓΗ ἐπὶ τὴν ΑΒ, εἶναι ΑΖ=ΒΗ καὶ διὰ τοῦτο $2\tau = \mathrm{AB} + 2 \cdot \mathrm{A\Delta} + \mathrm{\Gamma\Delta} = \mathrm{AB} + 2 \cdot \mathrm{A\Delta} + \mathrm{AB} - 2 \cdot \mathrm{AZ}$, ἤτοι $\tau = \mathrm{AB} + \mathrm{A\Delta} - \mathrm{AZ} = 2\varrho + \chi - (\mathrm{AZ})$ (ι) ἐὰν θεωρήσωμεν ὡς ἄγνωστον τὴν πλευρὰν ΑΔ. Ἀλλὰ τότε ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΒ ἔχομεν $(\mathrm{A\Delta})^2 = (\mathrm{AB}) \cdot (\mathrm{AZ})$, ἤτοι $(\mathrm{AZ}) = \chi^2 : 2\varrho$ καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ (ι) γίνεται $\chi^2 - 2\varrho\chi + 2\tau\varrho - 4\varrho^2 = 0$, ὁπότε $\chi = \varrho \pm \sqrt{5\varrho^2 - 2\varrho\tau}$. Ἀλλὰ διὰ νὰ ὑπάρχῃ λύσις πρέπει νὰ εἶναι: $2\varrho\tau \leqslant 5\varrho^2$, ἤτοι $2\tau \leqslant 5\varrho$.

491. α′) Ἡ ζητουμένη σχέσις εἶναι ἡ $(\mathrm{MA})^2 + (\mathrm{MB})^2 + (\mathrm{M\Gamma})^2 = k^2 (1)$. Ἀλλ᾽ ἐὰν ἐκ τοῦ Μ φέρωμεν τὰς ΜΔ καὶ ΜΕ καθέτως ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, ἡ ΜΑ εἶναι διαγώνιος τοῦ ὀρθογωνίου ΜΔΑΕ καὶ ἑπομένως εἶναι

$$(\mathrm{MA})^2 = (\mathrm{A\Delta})^2 + (\mathrm{M\Delta})^2 = (\mathrm{ME})^2 + (\mathrm{M\Delta})^2.$$

Ἐξ ἄλλου εἶναι $(\mathrm{MB})^2 = (\mathrm{M\Delta})^2 + (\mathrm{\Delta B})^2 = (\mathrm{M\Delta})^2 + (\mathrm{AB} - \mathrm{ME})^2$ καὶ

$(\mathrm{M\Gamma})^2 = (\mathrm{ME})^2 + (\mathrm{\Gamma E})^2 = (\mathrm{ME})^2 + (\mathrm{A\Gamma} - \mathrm{M\Delta})^2$. Ὥστε ἐὰν $(\mathrm{B\Gamma}) = \alpha$, $(\mathrm{\Gamma A}) = \beta$ καὶ $(\mathrm{AB}) = \gamma$, θέσωμεν δὲ $(\mathrm{M\Delta}) = \chi$ καὶ $(\mathrm{ME}) = \psi$, ἡ σχέσις (1) γίνεται $\psi^2 + \chi^2 + \chi^2 + (\gamma - \psi)^2 + \psi^2 + (\beta - \chi)^2 = k^2$ (2). Ἀκόμη δὲ ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων ΒΔΜ καὶ ΑΒΓ λαμβάνομεν: $(\mathrm{M\Delta}) : (\mathrm{A\Gamma}) = (\mathrm{B\Delta}) : (\mathrm{AB})$, ἤτοι $\chi : \beta = (\gamma - \psi) : \gamma$ (3). Οὕτως ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) εὑρίσκομεν τὰ χ καὶ ψ. Τότε δὲ ἐκ τῆς κορυφῆς Α, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΑΒ, τμῆμα ΑΔ ἴσον μὲ ψ (ἢ ἐπὶ τῆς ΑΓ τμῆμα ΑΕ ἴσον μὲ χ) καὶ ἐκ τοῦ Δ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἧς ἡ τομὴ μετὰ τῆς ΒΓ ὁρίζει τὸ ζητούμενον σημεῖον Μ.

β′) Ἐδῶ ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $(\mathrm{M\Delta})(\mathrm{ME}) = \lambda^2$, ἤτοι τὴν $\chi\psi = \lambda^2$. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως (3), εὑρίσκομεν τὰ χ καὶ ψ.

γ′) Ἐδῶ ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2 + \psi^2 = \mu^2$· ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ ἐκ τῆς (3) εὑρίσκομεν τὰ χ καὶ ψ.

492. Ἐὰν χ καὶ ψ εἶναι αἱ κάθετοι πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχομεν νὰ λύσωμεν α΄) τὸ σύστημα $χ^2+ψ^2=α^2$ καὶ $χ+ψ=λ$. β΄) τὸ $χ^2+ψ^2=α^2$ καὶ $χψ=αυ$, καὶ γ΄) ἐὰν $φ$ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα, τὸ σύστημα $χ+ψ+φ=2τ$, $χ^2+ψ^2=ω^2$ καὶ $χψ=ωυ$.

493. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ $χ$ καὶ $χ+3$, ἔχομεν

$$χ(χ+3)=54, \quad χ^2+3χ-54=0 \quad \text{καὶ} \quad χ=6 \quad \text{ἢ} \quad -9.$$

494. Ἔχομεν $(χ-1)^2-χ=29$, $χ^2-3χ-28=0$ καὶ $χ=7$ ἢ -4.

495. Ἔχομεν $χψ=2$ καὶ $\frac{1}{χ}+\frac{1}{ψ}=\frac{17}{12}$, ἤτοι $χψ=2$, $12χ+$ $+12ψ=17χψ=34$. Ἐπειδὴ δὲ $ψ=2:χ$ ἡ δευτέρα ἐξίσωσις γίνεται $6χ^2-17χ+12=0$, ὁπότε $χ=\frac{4}{3}$ ἢ $\frac{3}{2}$ καὶ ἀντιστρόφως $ψ=\frac{3}{2}$ ἢ $\frac{4}{3}$

496. Τὸ κλάσμα εἶναι $\frac{χ-4}{χ}$, ἡ δὲ ἐξίσωσις εἶναι $\frac{χ-4+7}{χ-5}-$ $-\frac{χ-4}{χ}=\frac{16}{15}$, ἤτοι $4χ^2-65χ+75=0$ καὶ $χ=15$ ἢ $5:4$. Οὕτω τὸ ζητούμενον κλάσμα εἶναι 11/15. Ὅπερ προκύπτει ἐκ τῆς $χ=15$, διότι ἡ ἄλλη τιμὴ τοῦ $χ$ δίδει κλάσμα $-11/5$, ὕπερ γίνεται $-3:0$.

497. Ἂν τὸ χλγραμ. τοῦ καφὲ ἐκόστισε $χ$ δραχμάς, ἠγόρασε $\frac{160\,000}{χ}$ χλγ. καφὲν καὶ $\frac{180\,000}{χ+5000}$ χλγ. τέϊον. Ὥστε $\frac{160\,000}{χ}-\frac{180\,000}{χ+5000}=40$, ἤτοι $χ^2+5500χ-20\,000\,000=0$ καὶ δεκτὴ τιμὴ $χ=2500$ δρχ.

498. Ἐὰν $χ$ ἦσαν οἱ ἄνδρες, αἱ γυναῖκες ἦσαν $χ-3$. Ἀλλὰ τότε ἕκαστος ἀνὴρ καὶ ἑκάστη γυνὴ ἐπλήρωσαν ἀντιστοίχως $\frac{175000}{χ}$ καὶ $\frac{80000}{χ-3}$. Οὕτως εἶναι $\frac{175000}{χ}-\frac{80000}{χ-3}=5000$, ἤτοι $χ^2-22χ+105=0$, $χ=15$ ἢ 7 καὶ ἀντιστοίχως, $χ-3=12$ ἢ 4.

499. Ἔστω $χ$ οἱ ἄνδρες καὶ $ψ$ αἱ γυναῖκες. Τότε εἶναι:

$$χ+ψ=27 \text{ καὶ } \frac{210000}{χ}-\frac{420000}{ψ}=15000, \text{ ἤτοι:}$$

$$15000χψ+420000χ-210000ψ=0, \text{ ἤτοι } χψ+28χ-14ψ=0.$$

Ἐπειδὴ δὲ $ψ=27-χ$, ἡ ἐξίσωσις αὕτη γίνεται $χ^2-69χ+378=0$, ἐξ ἧς $χ=63$ ἢ 6. Ἀλλ' ἡ λύσις $χ=63$ προφανῶς ἀπορρίπτεται καὶ μένει ἡ $χ=6$. Ὥστε οἱ ἄνδρες ἦσαν 6 καὶ αἱ γυναῖκες $27-6=21$.

500. Ἔχομεν $χ+\sqrt{χ}=272$ ἤτοι $χ+\sqrt{χ}-272=0$ καὶ $\sqrt{χ}=$ $=(-1\pm\sqrt{1+1088}):2=-17$ ἢ 16. Ἀλλ' ἐκ τῶν ριζῶν τούτων δεκτὴ εἶναι ἡ $\sqrt{χ}=16$, ὁπότε $χ=256$, διότι ἡ ἄλλη ρίζα $-\sqrt{χ}=17$ ἐξ ἧς $χ=289$ ἐπαληθεύει τὴν συζυγῆ $χ-\sqrt{χ}=272$.

501. Ἔστω $χ$ ὁ ἀριθμὸς τῶν σημείων Α, Β, Γ κλπ. Τότε ἐξ ἑκάστου σημείου δυνάμεθα νὰ φέρωμεν $χ-1$ εὐθείας καὶ ἐπομένως ἐξ ὅλων τῶν σημείων δυνάμεθα νὰ φέρωμεν $χ(χ-1)$ εὐθείας ἐν ὅλῳ. Ἀλλ' οὕτως ὑπολογίζομεν π.χ. καὶ τὴν εὐθεῖαν ἡ ὁποία ἤχθη ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β καὶ τὴν ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Α. Ὥστε αἱ εὐθεῖαι εἶναι πράγματι ἐν ὅλῳ $\chi(\chi-1):2$. Οὕτω δὲ ἔχομεν $\chi(\chi-1):2=78$ καὶ $\chi^2-\chi-156=0$ καὶ $\chi=13$, διότι ἡ τιμὴ $\chi=-12$ δὲν εἶναι δεκτή.

502. Ἂν χ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου ἐξ ἑκάστης τούτων ἄγονται $\chi-3$ διαγώνιοι καὶ κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν εἶναι $\chi(\chi-3)=208$, $\chi^2-3\chi-208=0$ καὶ $\chi=16$ (ἡ ἄλλη ρίζα δὲν εἶναι δεκτή).

503. Ἂν χ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ α΄ πολυγώνου, ὁ τοῦ β΄ θὰ εἶναι $\chi-6$, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν διαγωνίων των εἶναι ἀντιστοίχως

$$\frac{\chi(\chi-3)}{2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{(\chi-6)(\chi-6-3)}{2}.$$

Ὥστε εἶναι
$$\frac{\chi(\chi-3)}{2}=\frac{(\chi-6)(\chi-9)}{2}\cdot\frac{10}{3}$$

ἤτοι $7\chi^2-141\chi+540=0$ καὶ $\chi=15$.

504. Ἂν χ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, ἔχομεν $(\chi+3)^2=2{,}25\chi^2$ ἤτοι $1{,}25\chi^2-6\chi-9=0$ καὶ $\chi=6$.

505. Ἂν χ εἶναι ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ τριγώνου, ἡ ἄλλη εἶναι $0{,}75\chi$. Ἀλλὰ τότε εἶναι $\frac{1}{2}\cdot\chi\cdot 0{,}75\chi=150$, ἤτοι $\chi^2=400$ καὶ $\chi=20$.

506. Ἂν χ εἶναι ἡ βάσις, ἕκαστον σκέλος θὰ εἶναι $\chi-19$ καὶ τὸ ὕψος $\chi-8$. Εἶναι δὲ $(\chi-8)^2=(\chi-19)^2-\chi^2:4$, ἤτοι

$$\chi^2+88\chi-1188=0 \quad \text{καὶ} \quad \chi=-44+\sqrt{3124}.$$

507. Ἔχομεν $\chi(\chi-4)=192$, $\chi^2-4\chi-192=0$ καὶ $\chi=16$.

508. Αἱ διαγώνιοι ρόμβου, αἵτινες ἐδῶ εἶναι χ καὶ $\chi+14$ τέμνονται δίχα καὶ καθέτως. Ὥστε ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ὅπερ σχηματίζουν τὰ ἡμίση τῶν διαγωνίων μετὰ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ρόμβου λαμβάνομεν

$$\left(\frac{\chi}{2}\right)^2+\left(\frac{\chi+14}{2}\right)^2=17^2,$$

ἤτοι $\chi^2+14\chi-480=0$ καὶ $\chi=16$.

509. Τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο ἔχει διαγώνιον τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου, ἥτις εἶναι 25 μ. Ὥστε ἔχομεν $\chi^2+(\chi-17)^2=25^2$, ἤτοι

$$\chi^2-17\chi-168=0 \quad \text{καὶ} \quad \chi=24.$$

510. Ἂν χ καὶ ψ αἱ πλευραὶ τῶν τετραγώνων, αἱ διαγώνιοι τούτων εἶναι $\chi\sqrt{2}$ καὶ $\psi\sqrt{2}$. Ὥστε ἔχομεν τὸ σύστημα $\chi^2+\psi^2=8621$ καὶ $2\chi\psi=8540$, ἤτοι $(\chi+\psi)^2=8621+8540=131^2$, ἐξ οὗ $\chi=70$, $\psi=61$.

511. Ἂν εἰς χ ὥρας γεμίζῃ ἡ 1η βρύση τὴν δεξαμενήν, εἰς 2,4 ὥρας γεμίζει τὰ $\frac{2{,}4}{\chi}$ αὐτῆς· ὁμοίως, ἐὰν ἡ 2α βρύση εἰς ψ ὥρας γεμίζῃ τὴν δεξαμενήν, εἰς 2,4 ὥρας γεμίζει τὰ $\frac{2{,}4}{\psi}$ αὐτῆς. Οὕτως ἔχομεν τὸ σύστημα $\psi-\chi=2$ καὶ $\frac{2{,}4}{\chi}+\frac{2{,}4}{\psi}=1$, ἤτοι $\chi\psi-2{,}4\chi-2{,}4\psi=0$, ἢ ἐπειδὴ $\psi=2+\chi$,

$\chi(2+\chi)-2,4\chi-2,4(2+\chi)=0$ ἢ $\chi^2-2,8\chi-4,8=0$ καὶ $\chi=4$ καὶ $-1,2$ (μὴ δεκτή). Ὥστε $\psi=4+2=6$.

512. Ἔστω χ ἡ κατάθεσις τοῦ 1ου καὶ ψ ἡ τοῦ 2ου. Εἶναι δὲ τὰ κέρδη τῶν δύο ὁμοῦ 2700000—2000000=700000 δραχμ. Ἀλλ' ἐὰν τὸ κέρδος τῆς 1 δραχμῆς εἰς 1 μῆνα ἀποτελεῖ ἓν μερίδιον, αἱ χ δραχμαὶ εἰς 2 μῆνας ἀποτελοῦν 2χ μερίδια καὶ αἱ ψ δραχμαὶ εἰς 8 μῆνας ἀποτελοῦν 8ψ μερίδια. Ὥστε αἱ 700000 δραχμαὶ κέρδους ἀποτελοῦν $2\chi+8\psi$ μερίδια καὶ ἐπομένως ὁ 1ος ἐκέρδισε $\frac{700000 \cdot 2\chi}{2\chi+8\psi}$, ὁ δὲ δεύτερος ἐκέρδισε $\frac{700000 \cdot 8\psi}{2\chi+8\psi}$, ἐπειδὴ δὲ οὗτος ἔλαβε κέρδος καὶ κατάθεσιν 900000 δραχμάς, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\psi+\frac{700000 \cdot 8\psi}{2\chi+8\psi}=900000$, ἐπειδὴ δὲ $\chi=2000000-\psi$, ἔχομεν $\psi+\frac{700000 \cdot 8\psi}{4000000+6\psi}=$ $=900000$, ἐξ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὴν δεκτὴν ρίζαν $\psi=500000$. Ὅθεν $\chi=1500000$.

513. Ἔστω χ τὸ 1ον κεφάλαιον ὅπερ ἐτοκίσθη εἰς ψ μῆνας· ὥστε εἶναι $\frac{6\chi\psi}{1200}=1280000$, ἤτοι $\chi\psi=256000000$ (1). Ἀλλὰ τότε τὸ 2ον κεφάλαιον εἶναι $30000000-\chi$ καὶ ἐτοκίσθη ἐπὶ $\psi-4$ μῆνας. Ὥστε εἶναι

$$\frac{6(30000000-\chi)(\psi-4)}{1200}=840000,$$

ἤτοι
$$(30000000-\chi)(\psi-4)=168000000 \quad (2).$$

Ἤδη εὑρίσκομεν τὰ χ καὶ ψ ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εἰς τὰς ὁποίας πρὸς εὐκολίαν ἐκφράζομεν τὰς δραχμὰς εἰς ἑκατομμύρια. Οὕτως ἔχομεν $\chi\psi=256$, $(30-\chi)(\psi-4)=168$. Ἐκ τῆς 2ας τούτων εὑρίσκομεν $30\psi-\chi\psi-120+4\chi=168$ ἢ ἐπειδὴ $\chi\psi=256$ (3) εὑρίσκομεν $15\psi+2\chi=272$ καὶ $\psi=\frac{272-2\chi}{15}$. Ἤδη ἐὰν τὴν τιμὴν ταύτην τῆς ψ θέσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) εὑρίσκομεν $\chi^2-136\chi+1920=0$ καὶ $\chi=68\pm\sqrt{2704}=68\pm54=122$ ἢ 14, ἤτοι 122000000 ἢ 14000000. Ἀλλ' ἐκ τῶν λύσεων τούτων ἡ 1η προφανῶς δὲν εἶναι δεκτή. Ὥστε τὸ 1ον κεφάλαιον εἶναι 14000000 καὶ τὸ 2ον 30000000—14000000=16000000.

514. Ἂν χ καὶ ψ εἶναι ὁ 1ος καὶ ὁ 3ος ἀριθμός, ὁ 2ος καὶ ὁ 4ος εἶναι $\chi-4$ καὶ $\psi-3$. Οὕτω δὲ ἔχομεν $\chi:(\chi-4)=\psi:(\psi-3)$ καὶ $\chi^2+(\chi-4)^2+$ $+\psi^2+(\psi-3)^2=62,5$. Ἀλλ' οὕτως ἐκ τῆς 1ης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν $\psi=3\chi:4$ ὁπότε ἡ 2α γίνεται $\chi^2-4\chi-12=0$ ἐξ ἧς $\chi=6$ ἢ -2 καὶ ἀντιστοίχως $\psi=3\chi:4=9/2$ ἢ $-3/2$. Ὥστε οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ 6, 2, 9/2 καὶ 3/2 ἢ οἱ —2, —6, —3/2 καὶ —9/2.

515. Ἂν χ εἶναι αἱ δεκάδες καὶ ψ αἱ μονάδες, ὁ ἀριθμὸς εἶναι $10\chi+\psi$. Ὥστε εἶναι $(10\chi+\psi):\chi\psi=16:3$ καὶ $10\chi+\psi-9=10\psi+\chi$. Αἱ ἐξισώσεις δὲ αὗται γίνονται $16\chi\psi-30\chi-3\psi=0$ καὶ $\chi-\psi=1$, ἐξ ἧς $\chi=1+\psi$. Οὕτω δὲ ἔχομεν $16(1+\psi)\psi-30(1+\psi)-3\psi=0$, ἤτοι $\psi=(17\pm\sqrt{2209}):32=\psi=$

$=(17\pm 47):32=2$ ἢ $-15:16$. Ἀλλ' ἡ 2α ρίζα προφανῶς δὲν γίνεται δεκτή. Ὥστε ἔχομεν $\psi=2$ καὶ $\chi=1+\psi=3$, ἤτοι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 32.

516. Ἔστω χ τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων, ψ τὸ τῶν δεκάδων καὶ φ τὸ τῶν μονάδων. Οὕτως ἔχομεν: $\psi^2=\chi\varphi$, $(100\chi+10\psi+\varphi):(\chi+\psi+\varphi)=124:7$ καὶ $100\chi+10\psi+\varphi=100\varphi+10\psi+\chi-594$, ἤτοι ἔχομεν τὸ σύστημα: $\psi^2=\chi\varphi$, $64\chi-6\psi-13\varphi=0$ καὶ $\chi-\varphi=-6$ ἐξ ἧς $\chi=\varphi-6$, ὁπότε ἡ 2α ἐξίσωσις γίνεται $64(\chi-6)-6\psi-13\varphi=0$, ἐξ ἧς $\psi=(17\varphi-128):2$. Οὕτω δὲ ἡ $\psi^2=\chi\varphi$ γίνεται: $(17\varphi-128)^2=4(\varphi-6)\varphi$, ἤτοι $285\varphi^2-4328\varphi+16384=0$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τὴν δεκτὴν λύσιν $\varphi=8$. Ὥστε $\chi=8-6=2$ καὶ $\psi=4$. Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 248.

517. Εἶναι $\psi^2=\chi\varphi$, $\chi+\psi+\varphi=21$ καὶ $\chi^2+\psi^2+\varphi^2=189$. Ὥστε $(\chi+\psi+\varphi)^2=21^2$, ἤτοι $\chi^2+\psi^2+\varphi^2+2\chi\psi+2\chi\varphi+2\psi\varphi=441$ (ι). Ἐὰν δὲ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν 1ην καὶ 3ην ἐξίσωσιν ἡ (ι) γίνεται $\psi(\chi+\psi+\varphi)=126$, ἤτοι $21\psi=126$ καὶ $\psi=6$. Οὕτως αἱ δύο πρῶται ἐξισώσεις γίνονται $\chi\varphi=36$ καὶ $\chi+\varphi=15$ καὶ διὰ τοῦτο τὰ χ, φ εἶναι ρίζαι τῆς $\omega^2-15\omega+36=0$, ἤτοι εἶναι $\chi=12$ καὶ $\varphi=3$ ἢ $\chi=3$ καὶ $\varphi=12$.

518. Ἔστω ὅτι ἡ 1η βρύσις γεμίζει τὴν δεξαμενὴν εἰς χ ὥρας καὶ ἡ 2α εἰς ψ ὥρας. Ἑπομένως εἰς 6 ὥρας γεμίζουν τὰ $\frac{6}{\chi}$ καὶ $\frac{6}{\psi}$ τῆς δεξαμενῆς ἡ 1η καὶ ἡ 2α ἀντιστοίχως. Ὅθεν $\frac{6}{\chi}+\frac{6}{\psi}=1$ (1).

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὴν δεξαμενὴν τρέχει τὸ ὕδωρ μόνον ἐκ τῆς 1ης βρύσεως ἐπὶ $\frac{3\psi}{5}$ ὥρας. Κατ' αὐτὰς δὲ γεμίζει αὕτη τὰ $\frac{3\psi}{5\chi}$ τῆς δεξαμενῆς. Ὥστε ὑπολείπεται νὰ γεμίσῃ μόνη ἡ 2α βρύσις τὰ $1-\frac{3\psi}{5\chi}=\frac{5\chi-3\psi}{5\chi}$ τῆς δεξαμενῆς. Ἀλλ' ἐὰν ἠνοίγοντο μαζύ, ἡ 1η θὰ ἐγέμιζε εἰς 6 ὥρας τὰ $\frac{2}{3}\cdot\frac{5\chi-3\psi}{5\chi}$ τῆς δεξαμενῆς. Ἀλλ' ὡς εἴδομεν ἐν ἀρχῇ, ἡ 1η εἰς 6 ὥρας γεμίζει τὰ $\frac{6}{\chi}$ τῆς δεξαμενῆς. Ὥστε ἔχομεν $\frac{6}{\chi}=\frac{2(5\chi-3\psi)}{15\chi}$ (2). Ἤδη εὑρίσκομεν τὰ χ καὶ ψ ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) αἵτινες γράφονται $6\chi+6\psi=\chi\psi$ καὶ $90=10\chi-6\psi$, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τὰς δεκτὰς λύσεις $\chi=15$ καὶ $\psi=10$.

519. Κατὰ τοὺς τύπους τῆς Φυσικῆς «βλέπε Πίνακας Λογαρίθμων, (νέα ἔκδοσις), Χρ. Μπαρμπαστάθη σελὶς 207—208», ἐδῶ ἔχομεν $s=\frac{1}{2}gt^2$, ὅπου s τὸ διάστημα, $g=9{,}80$ καὶ t ὁ χρόνος εἰς δεύτερα λεπτά. Οὕτως ἔχομεν $44{,}1=9{,}8\cdot t^2:2$, ἤτοι $t=3\delta$.

520. Ἔχομεν ὁμοίως ὡς ἄνω $125{,}5=9{,}80\cdot t^2:2$, ἤτοι $t=5\delta$ (διότι ὁ χρόνος τῆς ἀνόδου ἰσοῦται μὲ τὸν χρόνον τῆς καθόδου).

521. Ἐδῶ ἔχομεν $\upsilon_0=\sqrt{2gh}$, ὅπου υ_0 ἡ ἀρχικὴ ταχύτης, καὶ h τὸ ὕψος, ἤτοι $\upsilon_0=\sqrt{2.9{,}8.122{,}5}=\sqrt{2401}=49$.

522. Ἐδῶ ἔχομεν $h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$, ἤτοι $1460=185t-\frac{1}{2}\cdot 9{,}80t^2$. καὶ $4.9t^2-185t+1460=0$ κλπ.

523. Ἔστω χ ἡ πίεσις τῆς σφαίρας ἥτις ἐνεργεῖ καθέτως ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον. Τὸ βάρος ὅμως τοῦ σώματος (ἡ συνισταμένη) ἔχει διεύθυνσιν κατακόρυφον, ἡ δὲ δύναμις ἣν ἰσορροπεῖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον. Οὕτως αἱ τρεῖς αὐταὶ δυνάμεις συνιστοῦν ὀρθογώνιον τρίγωνον καὶ ἑπομένως εἶναι $\chi=\sqrt{41^2-9^2}=40$.

524. Ἐδῶ ἔχομεν τὸν τύπον $s=\frac{1}{2}gt^2\eta\mu\omega$, ὅπου s εἶναι τὸ μῆκος τοῦ ἐπιπέδου καὶ ω ἡ κλίσις αὐτοῦ, καὶ $\eta\mu\omega=\frac{10}{39{,}3}$.

Ὅθεν $39{,}3=\frac{1}{2}\cdot 9{,}8\cdot\frac{10}{39{,}3}\cdot t^2$ ἢ $t=\frac{39{,}3}{7}=5{,}61\delta$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

ΠΡΟΟΔΟΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ

Ἀσκήσεις. *525*. Αἱ α΄) β΄) γ΄) δ΄) αὔξουσαι διότι $\omega>o$ καὶ αἱ ε΄) στ΄) φθίνουσαι, διότι $\omega<o$.

526. Ἔχομεν α΄) $\tau=9+9\cdot 4=45$ β΄) $\tau=-3+9\cdot 2=15$ γ΄) $\tau=\alpha+7\cdot 3\beta=$ $=\alpha+21\beta$.

527. Ἔχομεν $231=\alpha+9\omega$ καὶ $2681=\alpha+19\omega$, ἤτοι $231-9\omega=2681-19\omega$ ἐξ ἧς $\omega=245$ καὶ $\alpha=-1974$.

528. Ἐπειδὴ $\tau=\alpha+(\nu-1)\omega$, εἶναι $\omega=\frac{\tau-\alpha}{\nu-1}=\frac{3{,}2-0{,}2}{6-1}=\frac{3}{5}$.

529. Εἶναι $\alpha=\tau-(\nu-1)\omega=6{,}25-9\cdot 0{,}75=-0{,}5$.

530. Εἶναι $\nu=(\tau-\alpha):\omega+1=(9-3):2+1=4$.

531. Εἶναι $\tau=6{,}35+19\cdot(-0{,}25)=1{,}6$.

532. Εἶναι $\omega=(\tau-\alpha):(\nu-1)=(25-4):(8-1)=3$ καὶ ἑπομένως ἔχομεν τὴν πρόοδον 4, 7, 10 . . . . . 22, 25.

533. Ὁμοίως εἶναι $\omega=(2-1):(11-1)=1:10$ καὶ ἑπομένως ἡ πρόοδος εἶναι $1\cdot 1{,}1\cdot 1{,}2\cdot\ldots 1{,}9\cdot 2$.

534. Ἐκ τῶν κτυπημάτων τοῦ ὡρολογίου εἰς τὸ δωδεκάωρον ἔχομεν τὴν πρόοδον 1,2,3,. . . 11,12, ἧς οἱ ὅροι ἔχουν ἄθροισμα $(1+12)\cdot 12:2=78$. Ἑπομένως τὰ κτυπήματα εἰς ἓν ἡμερονύκτιον εἶναι $78\cdot 2=156$.

535. Ἐὰν εἰς τὴν ταυτότητα $(\alpha+1)^3=\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1$ τεθῇ κατὰ σειρὰν $\alpha=1,2,3,\ldots\nu$ καὶ προστεθῶσι κατὰ μέλη αἱ προκύπτουσαι ἰσότητες εὑρίσκεται ἡ ἰσότης: $(\nu+1)^3=1^3+3(1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+\nu^2)+3(1+2+3\ldots+\nu)+\nu$.

Ἐπειδὴ δὲ $1+2+3+\ldots+\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$, ἕπεται $3(1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2)=$
$=(\nu+1)^3-\frac{3}{2}\nu(\nu+1)-(\nu+1)$ καὶ $1^2+2+3^2+\ldots-\nu^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{1\cdot2\cdot3}=\Sigma_2$.

536. Ἐάν εἰς τὴν ταυτότητα $(\alpha+1)^4=\alpha^4+4\alpha^3+6\alpha^2+4\alpha+1$ τεθῇ κατὰ σειρὰν $\alpha=1, 2, 3, \ldots \nu$ λαμβάνομεν·

$$\begin{array}{l}
1^4=\ldots\ldots\ldots 1\\
2^4=1^4+4\cdot1^3+6\cdot1^2+4\cdot1+1\\
3^4=2^4+4\cdot2^3+6\cdot2^2+4\cdot2+1\\
4^4=3^4+4\cdot3^3+6\cdot3^2+4\cdot3+1\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(\nu+1)^4=\nu^4+4\cdot\nu^3+6\cdot\nu^2+4\cdot\nu+1
\end{array}$$

Ἤδη προσθέτομεν τὰς ἰσότητας κατὰ μέλη· μετὰ δὲ τὰς ἀναγωγὰς εὑρίσκομεν

$(\nu+1)^4=4(1^3+2^3+\ldots+\nu^3)+6(1^2+2^2+\ldots+\nu^2)+4(1+2+\ldots+\nu)+\nu+1$ (1) καὶ ἐπειδὴ εἶναι (ἄσκ. 529)· $1+2+3+\ldots+\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ καὶ

$1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{1\cdot2\cdot3}$ ἡ ταυτότης (1) μετὰ τὰς ἀντικαταστάσεις γράφεται

$(\nu+1)^4=4(1^3+2^3+\ldots+\nu^3)+\nu(\nu+1)(2\nu+1)+(2\nu+1)(\nu+1)$ ἢ

$(\nu+1)^4=4(1^3+2^3+\ldots+\nu^3)+(2\nu+1)(\nu+1)^2$· ἄρα εἶναι

$1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3=\frac{(\nu+1)^4-(2\nu+1)(\nu+1)^2}{4}=\frac{(\nu+1)^2\cdot\nu^2}{4}$ ἢ

$1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3=\left[\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right]^2=(1+2+\ldots+\nu)^2$.

537. α') Ἔχομεν τὴν πρόοδον 1, 2, 3 ... 24,25. Ὥστε

$$\Sigma=(1+25)\cdot25:2=325.$$

β') Ἐδῶ γνωρίζομεν τὰ $\alpha=1$, $\omega=2$ καὶ $\nu=30$. Ὥστε

$\Sigma=[2\alpha+(\nu-1)\omega]\nu:2=(2\cdot1+29\cdot2)\cdot30:2=60\cdot30:3=30^2=900.$

γ') Ἐπειδὴ $\alpha=2$, $\omega=2$, $\nu=40$, εἶναι

$$\Sigma=(2\cdot2+39\cdot2]\cdot20=82\cdot20=1640.$$

538. Ἐπειδὴ $\alpha=-1$ καὶ $\tau=-\nu$, εἶναι $\Sigma=(-1-\nu)\nu:2=-(1+\nu)\nu:2$.

539. Εἶναι $1014=(12+144)\cdot\nu:2$. Ὅθεν

$\nu=1014\cdot2:(12+144)=2028:156=13.$

540. Ἐκ τοῦ τύπου $\Sigma=[2\alpha+(\nu-1)\omega]\nu:2$ εὑρίσκομεν
$\omega=[(2\Sigma:\nu]-2\cdot\alpha]:(\nu-1)=[(2\cdot567:14)-2\cdot8]:(14-1)=(81-16):13=65:13=5.$

541. Ἐκ τοῦ τύπου $\Sigma=(\alpha+\tau)\nu:2$ εὑρίσκομεν $\alpha=(2\Sigma:\nu)-\tau=(728\cdot2:16)-63=91-63=28$. Ἤδη ἐκ τοῦ τύπου $\tau=\alpha+(\nu-1)\omega$ εὑρίσκομεν $\omega=(\tau-\alpha):(\nu-1)=(63-28):(16-1)=35:15=7/3$.

542. Ἐκ τοῦ τύπου $\tau=\alpha+(\nu-1)\omega$ εὑρίσκομεν $\alpha=\tau-(\nu-1)\omega=15-(\nu-1)(-12)=3+12\nu$, ὁπότε ἐκ τοῦ τύπου $\Sigma=(\alpha+\tau)\nu:2$ λαμβάνομεν $456=(3+12\nu+15)\nu:2$, ἤτοι $12\nu^2+18\nu-912=0$ ἢ $2\nu^2+3\nu-152=0$ καὶ $\nu=8$, διότι ἡ ἄλλη λύσις $-19/2$ δὲν εἶναι δεκτή.

543. Αἱ 12 διαδοχικαὶ δόσεις εἶναι 10 000, 15 000, 20 000 κλπ. Ὅθεν $\Sigma=[2.10\,000+11\cdot 5000]\cdot 12:2=450\,000$.

544. Οἱ ὅροι 2ος, 4ος, 7ος καὶ 11ος εἶναι ἀντιστοίχως $\alpha+\omega$, $\alpha+3\omega$, $\alpha+6\omega$ καὶ $\alpha+10\omega$. Ὥστε $(\alpha+\omega)+(\alpha+6\omega)=92$ καὶ $(\alpha+3\omega)+(\alpha+10\omega)=71$, ἤτοι $2\alpha+7\omega=92$ καὶ $2\alpha+13\omega=71$. Ὥστε $13\omega-7\omega=71-92$, ἤτοι $\omega=-7/2=-3{,}5$ καὶ ἑπομένως $\alpha=58{,}25$. Οὕτως οἱ ἄνω ὅροι εἶναι κατὰ σειρὰν $\alpha+\omega=58{,}25-3{,}5=54{,}75$, $\alpha+3\omega=47{,}75$, $\alpha+6\omega=37{,}25$ καὶ $\alpha+10\omega=23{,}25$.

545. Ἡ πρόοδος εἶναι α, $\alpha+\omega$, $\alpha+2\omega \ldots \alpha+11\omega$. Ὥστε ἔχομεν $(\alpha+4\omega)+(\alpha+5\omega)+(\alpha+6\omega)+(\alpha+7\omega)=74$, ἢ τὰ $2\alpha+11\omega=37$ (1) ὡς καὶ $\alpha(\alpha+11\omega)=70$ (2). Οὕτως ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν $\alpha^2-37\alpha+70=0$ καὶ $\alpha=35$ ἢ 2. Ὥστε $\omega=3$ ἢ -3, ἤτοι ἡ ζ. πρόοδος εἶναι ἡ 35, 32, 29 ... 2 ἢ ἡ 2, 5, 8, ... 35.

546. Ἐὰν χ εἶναι ὁ 3ος ὅρος, οἱ πέντε ὅροι εἶναι οἱ $\chi-2\omega$, $\chi-\omega$, χ, $\chi+\omega$, $\chi+2\omega$. Ὥστε εἶναι $\chi-2\omega+\chi-\omega+\chi+\chi+\omega+\chi+2\omega=40$, ἤτοι $\chi=8$ καὶ $(8-2\omega)\cdot(8-\omega)\cdot 8\cdot(8+\omega)\cdot(8+2\omega)=12\,320$, ἢ $(64-4\omega^2)(64-\omega^2)\cdot 8=12\,320$, $(64-4\omega^2)(64-\omega^2)=1540$, $\omega^4-80\omega^2+639=0$. Ὅθεν $\omega^2=71$ ἢ 9, ἤτοι $\omega=\pm\sqrt{71}$ ἢ ± 3. Ὥστε οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ

$$8-6=2,\quad 8-3=5,\quad 8,\quad 8+3=11,\quad 8+6=14 \quad \text{ἢ}$$

$$8-2\sqrt{71},\quad 8-\sqrt{71},\quad 8,\quad 8+\sqrt{71},\quad 8+2\sqrt{71}.$$

547. Εἶναι $\omega=\dfrac{\nu-1}{\nu}=1=-\dfrac{1}{\nu}$, $\tau=1+(\nu-1)\cdot\left(-\dfrac{1}{\nu}\right)=\dfrac{1}{\nu}$ καὶ $\Sigma=\left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)\cdot\nu:2=(\nu+1):2$.

548. Ἂν οἱ τέσσαρες ὅροι τῆς προόδου εἶναι οἱ $\chi-3\omega$, $\chi-\omega$, $\chi+\omega$ καὶ $\chi+3\omega$, ἔχομεν $(\chi-3\omega)+(\chi-\omega)+(\chi+\omega)+(\chi+3\omega)=20$, ἤτοι $4\chi=20$ καὶ $\chi=5$. Ὅθεν εἶναι $\dfrac{1}{5-3\omega}+\dfrac{1}{5-\omega}+\dfrac{1}{5+\omega}+\dfrac{1}{5+3\omega}=\dfrac{25}{24}$, ἤτοι:

$$\frac{(25-\omega^2)(5+3\omega)+(25-9\omega^2)(5+\omega)+(25-9\omega^2)(5-\omega)+(25-\omega^2)(5-3\omega)}{(25-9\omega^2)(25-\omega^2)}=\frac{25}{24}$$

ἢ $9\omega^4-154\omega^2+145=0$. Ὅθεν $\omega^2=(77\pm 68):9=\dfrac{145}{9}$ ἢ 1 καὶ $\omega=\pm\dfrac{145}{3}$ ἢ ± 1. Ὥστε δ' $\omega=1$ ἔχομεν $5-3=2$, $5-1=4$, $5+1=6$ καὶ $5+3=8$.

549. Εἶναι (ἄσκ. 530) $\Sigma_1{}^2=\left[\dfrac{(\nu+1)\nu}{2}\right]^2=\Sigma_3$.

550. Ἂν εἰς τὴν ταυτότητα $(3\alpha-2)^2=9\alpha^2-12\alpha+4$, θέσωμεν κατὰ σειρὰν $\alpha=1$, 2, 3 ... ν καὶ προσθέσωμεν ἔπειτα τὰ ἐξαγόμενα κατὰ μέλη εὑρί-

σκομεν $1^2+4^2+7^2+\ldots+(3\nu-2)^2=9(1^2+2^2+\ldots+\nu^2)-12(1+2+\ldots+\nu)+$
$+4\nu=9\cdot\dfrac{\nu\cdot(\nu+1)(2\nu+1)}{1\cdot2\cdot3}-12\cdot\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}+4\nu=\dfrac{\nu[3(\nu+1)(2\nu-3)+8]}{2}$.

551. Ἐργαζόμενοι ὁμοίως ὡς ἄνω εἰς τὴν ταυτότητα $(2\alpha-1)^2=4\alpha^2-4\alpha+1$ εὑρίσκομεν $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2\nu-1)^2=4(1^2+2^2+\ldots+\nu^2)-4(1+2+\ldots+\nu)=$

$$=4\cdot\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{1\cdot2\cdot3}-4\cdot\frac{\nu(\nu+1)}{2}+\nu=\frac{2\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{3}-2\nu(\nu+1)+\nu=$$

$$=2\nu(\nu+1)\left(\frac{2\nu+1}{3}-1\right)+\nu=\frac{4\nu(\nu^2-1)+3\nu}{3}=\frac{\nu(4\nu^2-1)}{3}.$$

552. Ἐργαζόμενοι ὁμοίως εἰς τὴν ταυτότητα $\alpha(\alpha+1)=\alpha^2+\alpha$, εὑρίσκομεν $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+\nu(\nu+1)=(1^2+2^2+\ldots\nu^2)+(1+2+\ldots+\nu)=$

$$=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{1\cdot2\cdot3}+\frac{\nu(\nu+1)}{2}=\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{3}.$$

553. Ἐργαζόμενοι ὁμοίως εἰς τὴν ταυτότητα $(2\alpha)^2=4\alpha^2$ εὑρίσκομεν $2^2+4^2+6^2+\ldots+(2\nu)^2=4(1^2+2^2+\ldots+\nu^2)=4\cdot\dfrac{(\nu+1)(2\nu+1)}{1\cdot2\cdot3}=$
$=\dfrac{2\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{3}$.

Γεωμετρικαὶ πρόοδοι.

Ἀσκήσεις. *554*. Αἱ α΄) β΄) γ΄) ε΄) αὔξουσαι διότι $|\omega|>1$ καὶ αἱ δ΄) στ΄) φθίνουσαι διότι $|\omega|<1$.

555. Εἶναι $\tau=\alpha\omega^{\nu-1}=2\cdot3^{7-1}=2\cdot3^6.=2\cdot729=1458$.

556. $\omega^{\nu-1}=\tau:\alpha$, $\omega^4=144:9=16$ καὶ $\omega=\sqrt[4]{16}=\pm2$.

557. $\omega^{\nu-1}=\tau:\alpha$, $\omega^8=256$ καὶ $\omega=\pm2$.

558. $\alpha=\tau:\omega^{\nu-1}=27{,}2:\dfrac{27{,}2^6}{25{,}9^6}=\dfrac{25{,}9^6}{27{,}2^5}$.

559. Ἐπειδὴ $\omega=12:6=2$, εἶναι $3072=6\cdot2^{\nu-1}$, ἤτοι $512=2^{\nu-1}$ ἢ $2^9=2^{\nu-1}$. Ὥστε $9=\nu-1$ καὶ $\nu=10$.

560. Ἐὰν ἐργασθῶμεν ὡς εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν δὲν θὰ εὕρωμεν δυνάμεις ἴσας μὲ βάσεις ἴσας. Ὥστε τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι ἀδύνατον.

561. Ἔχομεν $13=\alpha\omega^3$, $117=\alpha\omega^5$ καὶ $9477=\alpha\omega^{\nu-1}$. Ἐκ τῶν δύο πρώτων διὰ διαιρέσεως εὑρίσκομεν $\omega^2=9$, ἤτοι $\omega=\pm3$.

Ὥστε ἡ πρώτη δίδει $\alpha=\pm13/27$. Διὰ δὲ $\omega=3$, ἑπομένως διὰ $\alpha=13/27$ ἡ τρίτη δίδει $3^{\nu-1}=19683=3^9$, ἤτοι $\nu-1=9$ καὶ $\nu=10$.

562. Εἶναι $12=\alpha\omega^2$, $384=\alpha\omega^7$. Ὥστε $\omega^5=384:12=32$, ἤτοι $\omega^5=2^5$ καὶ $\omega=2$.

563. α΄) $\Sigma=\dfrac{\alpha(\omega^\nu-1)}{\omega-1}=\dfrac{25[(-3)^7-1]}{-3-1}=25\cdot547=13675$.

β') Εἶναι $5103 = 7\omega^6$, $\omega^6 = 729$, $\omega^6 = 3^6$ καὶ $\omega = 3$. Ὅθεν:

$$\Sigma = 7(3^7-1):(3-1) = 7 \cdot 1093 = 7651.$$

γ') Ἐκ τοῦ τύπου $\tau = \alpha\omega^{\nu-1}$ εὑρίσκομεν $\alpha = 2946 : 0{,}337^{12}$ καὶ ἔπειτα ἐκ τοῦ τύπου $\Sigma = (\tau\omega - \alpha):(\omega-1)$ εὑρίσκομεν:

$$\Sigma = \left(2946 \cdot 0{,}337 - \frac{2946}{0{,}337^{12}}\right):(0{,}337-1) =$$

$$= \frac{2946 \cdot (0{,}337^{13}-1)}{0{,}337} : (-0{,}663).$$

564. α') Ἔχομεν $\tau = 4 \cdot 4^{\nu-1}$ καὶ $5460 = (4\tau-4):(4-1)$. Ἐκ τῆς δευτέρας εὑρίσκομεν $\tau = 4096$. Ἀκολούθως δὲ ἐκ τῆς πρώτης εὑρίσκομεν

$$4^{\nu-1} = 1024, \text{ ἤτοι } 4^{\nu-1} = 4^5. \text{ Ὥστε } \nu-1 = 5 \text{ καὶ } \nu = 6.$$

β') Ἐπειδὴ $\Sigma = (\tau\omega - \alpha):(\omega-1)$, ἤτοι $54155{,}8 = (\tau.\ 108-4{,}6):(108-1)$ εἶναι $\tau = (54155{,}8 \cdot 107 + 4{,}6) : 108 = 5794675{,}2 : 108 = 53654{,}4$. Ὥστε ἐκ τοῦ τύπου $\tau = \alpha\omega^{\nu-1}$ εὑρίσκομεν $108^{\nu-1} = 53654{,}4 : 4{,}6 = 11664 = 108^2$. Ὅθεν $\nu-1 = 2$, ἤτοι $\nu = 3$.

γ') Ἔχομεν ὡς ἄνω, $2555 = (1280 \cdot \omega - 5):(\omega-1)$, ἤτοι $(2555-1280)\cdot\omega = 2555-5$, δηλαδὴ $\omega = 2550 : 1275 = 2$ καὶ $1280 = 5 \cdot 2^{\nu-1}$, ἤτοι $2^{\nu-1} = 1280 : 5 = 256 = 2^8$. Ὅθεν $\nu-1 = 8$ καὶ $\nu = 9$.

565. α') Εἶναι $\omega = 1/3 : 1/2 = 2/3$ καὶ $\Sigma = 1/2 : (1-2/3) = 3/2$.

β') Εἶναι $\omega = 1/4$ καὶ $\Sigma = 1/4 : (1-1/4) = 1/3$.

γ') Εἶναι $\omega = -4/3 : 2 = -2/3$ καὶ $\Sigma = 1/2 : (1+2/3) = 6/5$.

δ') Εἶναι $\alpha = 86/100$, $\omega = 1/100$ καὶ $\Sigma = 86/100 : 99/100 = 86/99$.

566. Εἶναι $\omega = \sqrt[\mu+1]{\tau : \alpha} = \sqrt[18]{5279{,}4 : 13{,}7}$. Ὥστε ἡ ζητουμένη πρόοδος εἶναι ἡ $\alpha = 13{,}7$, $\alpha\omega = 13{,}7 \cdot \sqrt[18]{5279{,}5 : 13{,}7}$, $\alpha\omega^2 =$

$$= 13{,}7 \cdot \sqrt[18]{5279{,}5^2 : 13{,}7^2}, \ldots$$

Ἐξ ἄλλου εἶναι $\Sigma = \left(5279{,}5 \cdot \sqrt[18]{5279{,}5 : 18{,}7} - 13{,}7\right):$

$$:\left(\sqrt[18]{5279{,}5 : 13{,}7} - 1\right).$$

567. Εἶναι $384 = \alpha \cdot 2^7$, ἤτοι $\alpha = 384 : 2^7 = 3 \cdot 2^7 : 2^7 = 3$ καὶ ἑπομένως $\Sigma = (384 \cdot 2 - 3) : (2-1) = 765$.

568. α') Ἡ δοθεῖσα σειρὰ ἀναλύεται εἰς ἄπειρον πλῆθος προόδων ὡς αἱ κατωτέρω, ἑκάστης τῶν ὁποίων δίδεται τὸ ἄθροισμα.

α) $$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

β) $$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\gamma)\qquad \frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

$$\delta)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots=\frac{1}{8}\ \text{κ.ο.κ.}$$

Τὸ ζητούμενον λοιπὸν ἄθροισμα εἶναι

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

β') Εἶναι $\omega=\frac{1}{2}:\frac{1}{2-\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ καὶ

$$\Sigma=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}:\left(1-\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}:\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{(\sqrt{2}+1)\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)^2}{2-1}=4+3\sqrt{2}.$$

569. α') Εἶναι $\omega=\beta\alpha^{\nu-1}:\alpha^{\nu}=\beta:\alpha$ καὶ $\Sigma=\alpha^{\nu+1}:(\alpha-\beta)$.

β') Εἶναι $\omega=\beta:\alpha$ καὶ $\Sigma=\alpha^2:(\alpha-\beta)$.

570. α') Ἐὰν α ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου εἶναι $\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$, ἡ πλευρὰ τοῦ ἑπομένου εἶναι $\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\alpha}{2}$, ἡ τοῦ ἄλλου εἶναι $\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\alpha\sqrt{2}}{4}$ κ.ο.κ.

Ὥστε τὰ ἐμβαδὰ τῶν τετραγώνων τούτων εἶναι κατὰ σειρὰν α^2, $\frac{\alpha^2}{2}$, $\frac{\alpha^2}{4}$, $\frac{\alpha^2}{8}\ldots$ ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι $\alpha^2:\left(1-\frac{1}{2}\right)=2\alpha^2$.

Ἐξ ἄλλου αἱ περίμετροι τῶν τετραγώνων τούτων εἶναι κατὰ σειρὰν 4α, $2\alpha\sqrt{2}$, 2α, $\alpha\sqrt{2}\ldots$ ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι

$$4\alpha:\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=8\alpha:(2-\sqrt{2})=4\alpha(2+\sqrt{2}).$$

β') Ἐὰν α ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἡ τοῦ πρώτου ἐγγεγραμμένου εἶναι $\alpha:2$, ἡ τοῦ ἑπομένου $\alpha:4$, ἡ τοῦ ἄλλου $\alpha:8$ κ.ο.κ.

Ἔχομεν λοιπὸν τὰ ἐμβαδὰ $\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$, $\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{16}$, $\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{64}\ldots$ ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι $\dfrac{\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{3}$. Ἐνῷ τὸ ἄθροισμα τῶν περιμέτρων εἶναι $3\alpha:\left(1-\frac{1}{2}\right)=6\alpha$.

571. Ἔστω ϱ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου· τότε ἡ πλευρὰ τοῦ πρώτου τετραγώνου εἶναι $\varrho\sqrt{2}$, ἡ ἀκτὶς τοῦ δευτέρου κύκλου εἶναι $\frac{\varrho\sqrt{2}}{2}$, ἡ δὲ πλευρὰ τοῦ δευτέρου τετραγώνου εἶναι $\frac{\varrho\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}=\varrho$· ἐπίσης ἡ ἀκτὶς τοῦ τρίτου κύκλου εἶναι $\frac{\varrho\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\varrho}{2}$ καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ τρίτου τετραγώνου εἶναι $\frac{\varrho\sqrt{2}}{2}$ κ.ο.κ.

Τὰ ἐμβαδὰ λοιπὸν τῶν ὡς ἄνω κύκλων εἶναι $\pi\varrho^2, \frac{\pi\varrho^2}{2}, \frac{\pi\varrho^2}{4}\ldots$ καὶ ἔχουν ἄθροισμα $\pi\varrho^2 : \left(1-\frac{1}{2}\right)=2\pi\varrho^2$.

Ἐπίσης τὰ ἐμβαδὰ τῶν τετραγώνων εἶναι $2\varrho^2, \varrho^2, \frac{\varrho^2}{2}\ldots$ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι $2\varrho^2 : \left(1-\frac{1}{2}\right)=4\varrho^2$.

572. Ἂν α ἡ μικροτέρα γωνία εἰς μοίρας καὶ ω ὁ λόγος τῆς προόδου εἶναι $\chi\omega^3=9\chi\omega$, ἤτοι $\omega^2=9$ ἢ $\omega=3$. Ὅθεν:

$$\alpha+\alpha\cdot 3+\alpha\cdot 3^2+\alpha\cdot 3^3=360, \text{ ἤτοι } 40\alpha=360 \text{ καὶ } \alpha=9.$$

Ὥστε αἱ γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου εἶναι 9°, 27°, 81°, 243°.

573. Ἂν α ὁ πρῶτος ὅρος καὶ ω ὁ λόγος, ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις

$$\alpha+\alpha\omega+\alpha\omega^2=221 \text{ καὶ } \alpha\omega^2-\alpha=136.$$

Ὥστε $\frac{\alpha+\alpha\omega+\alpha\omega^2}{\alpha\omega^2-\alpha}=\frac{221}{136}$, ἤτοι $\frac{1+\omega+\omega^2}{\omega^2-1}=\frac{13}{8}$ ἢ $5\omega^2-8\omega-21=0$.

Ὥστε $\omega=\left(4\pm\sqrt{16+105}\right):5=(4\pm11):5=3$ ἢ $-7/5$ καὶ ἀντιστοίχως $\alpha=17$ ἢ $425/3$. Οἱ ζητούμενοι λοιπὸν ἀριθμοὶ εἶναι οἱ 17, 51, 153 ἢ οἱ $425/3$, $-595/3$, $833/3$.

574. Ἔχομεν ὁμοίως ὡς ἄνω $\alpha+\alpha\omega+\alpha\omega^2=248$, $\alpha\omega^2-\alpha=192$, $\frac{1+\omega+\omega^2}{\omega^2-1}=\frac{31}{24}$, $7\omega^2-24\omega-55=0$, $\omega=(12\pm23):7=5$ ἢ $-11/17$ καὶ ἀντιστοίχως $\alpha=8$ ἢ $392/3$. Ὥστε ἔχομεν τοὺς ὅρους:

8, 30, 200, ἢ τοὺς $392/3$, $-616/3$, $968/3$.

575. Ἔστω ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots \mu, \varkappa, \lambda, \tau$ ἐκ ν ὅρων, ἧς ὁ λόγος ω. Ἀλλὰ κατὰ πρῶτον παρατηροῦμεν ὅτι $\beta=\alpha\omega$ καὶ $\lambda=\tau/\omega$. Ὅθεν $\alpha\tau=\beta\lambda$, ὁμοίως δὲ ἀποδεικνύεται ὅτι $\alpha\tau=\beta\lambda=\gamma\varkappa=\delta\mu=\ldots$

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι $(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta\ldots\mu\cdot\varkappa\cdot\lambda\cdot\tau)^2=[(\alpha\tau)\cdot(\beta\lambda)\cdot(\gamma\varkappa)\ldots$ $\ldots(\gamma\varkappa)\cdot(\beta\lambda)\cdot(\alpha\tau)]^2=(\alpha\tau)^\nu$, διότι οἱ ἴσοι παράγοντες $(\alpha\tau), (\beta\lambda), (\gamma\varkappa)\ldots$ εἶναι ν τὸ πλῆθος. Ἑπομένως εἶναι $(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\ldots\varkappa\cdot\lambda\cdot\tau)=\sqrt{(\alpha\tau)^\nu}$

576. α') Οἱ ἀντίστροφοι τῶν ὅρων τῆς ἁρμονικῆς προόδου ἀποτελοῦν τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον 1, 2, 3.... Ὥστε ἡ ζ. ἁρμονικὴ πρόοδος εἶναι ἡ 1, 1/2, 1/3... 1/20.

β') Ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος εἶναι ἡ 2, 4, 6, ... 40 καὶ ἡ ἀντίστοιχος ἁρμονικὴ εἶναι ἡ 1/2, 1/4, 1/6 ... 1/40.

γ') Ὁμοίως ἔχομεν τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον 1, 3, 5, ... 39 καὶ τὴν ἀντίστοιχον ἁρμονικὴν 1, 1/3, 1/5 .... 1/39.

577. Ἐδῶ ἔχομεν $\omega = \frac{40-4}{18+1} = \frac{36}{19}$, καὶ ἑπομένως τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον 4, $4\frac{36}{19} = \frac{112}{19}$, $\frac{148}{19}$, ... 40 καὶ τὴν ἀντίστοιχον ἁρμονικὴν 1/4' 19/112, 19/148 ... 1/40.

Λογάριθμοι.

Ἀσκήσεις. *578*. α') Ἐπειδὴ 15=3 . 5, εἶναι λογ15=λογ3+λογ5.

β') Ἐπειδὴ 55=5 . 11 εἶναι λογ55=λογ5+λογ11.

γ') Ἐπειδὴ $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ εἶναι λογ$\left(2\frac{1}{3}\right)$= λογ7—λογ3.

δ') Ἐπειδὴ $49=7^2$ εἶναι λογ49=λογ(7^2)=2λογ7.

ε') Ἐπειδὴ $\sqrt{20}=2^{\frac{1}{2}}$ εἶναι λογ $\sqrt{20}=\frac{1}{2}$λογ20.

στ') Ἐπειδὴ $\sqrt{647^3}=647^{\frac{3}{2}}$ εἶναι λογ $\sqrt{647^3}=\frac{3}{2}$λογ647.

ζ') Εἶναι λογ32^6=6λογ32.

η') Ἐπειδὴ 140=5 . 7 . 4, εἶναι λογ140=λογ5+λογ7+λογ4.

579. Τὰ ζητούμενα χαρακτηριστικὰ εἶναι κατὰ σειράν:

α') 1, β') 3, γ') 0, δ') $\overline{1} \cdot \overline{3} \cdot 2 \cdot 3$, ε') $\overline{3} \cdot 2 \cdot 3$, στ') $2 \cdot 3 \cdot 5$

ζ') 0 $\left(\text{διότι } \frac{13}{3}\right) = 4{,}33\ldots$ η') $\overline{2}$ $\left(\text{διότι } \frac{1}{50} = 0{,}02\right)$

ϑ') 1 $\left(\text{διότι } 62\frac{2}{3}\right) = 62{,}66\ldots$ ι') 0 $\left(\text{διότι } 2\frac{1}{7} = 2{,}142\ldots\right)$

Ὁμοίως εἶναι λογ0,045 = $\overline{2}$, ... καὶ λογ40 = 1, ...

580. Τὰ ἀκέραια ψηφία εἶναι ἀντιστοίχως: 4, 6, 8, 2, 1, 13.

581. Τὸ ζ. σημαντικὸν ψηφίον μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν ἔχει ἀντιστοίχως τὴν τάξιν: 1ην, 2αν, 3ην, 5ην, 9ην.

582. Οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν 80 : 10, 80 : 100, 80 : 1000 ... τῶν 80 . 10, 80 . 100, 80 . 1000 ... ἔχουν ὅλοι τὸ αὐτὸ δεκαδικὸν μέρος.

583. Ἐπειδὴ 0,70586 = λογ8, ἔπεται ὅτι 1,70586 = λογ80, $\overline{1}$,70586 = = λογ0,8, $\overline{2}$,70586 = λογ0,08 καὶ $\overline{3}$,70586 = λογ0,008.

10

584. $\begin{array}{r} 2,34987 \\ \overline{6},97852 \\ 9,82057 \\ \hline 7,14896 \end{array}$

585. $\begin{array}{r} \overline{8},30467. \\ \overline{3},98090, \\ \hline \overline{6},32377 \end{array}$ $\begin{array}{r} \overline{3},86564 \\ \overline{9}.93726 \\ \hline 5,92838 \end{array}$

586. $\overline{9},30942 \cdot 3 = \overline{27},92826$, $\overline{9},30942 \times 7 = \overline{61},16594$

$\overline{9},30942 \cdot 42 = -9 \times 42 + 0,30942 \times 42 = \overline{366},99564$.

587. α΄) $(-9+0,93642) : 8 = (-16+7,93642) : 8 = \overline{2},99205$.

β΄) $\overline{9},93642 : 9 = \overline{1},10405$.

γ΄) $(-9+0,93642) : 12 = (-12+3,93652) : 12 = \overline{1},03280$.

588. λογ0,003817 $= \overline{3},58172$, λογ1,141 $= 0,05729$, λογ0,0845 $=$ $= \overline{2},92686$, λογ1203$=3,08027$, λογ13,07$=1,11628$, λογ0,0004124$= \overline{4},61532$.

589. α΄) λογ95348$=4,97928+0,00004 \cdot 0,8 = 4,97931$.

β΄) λογ6,8372 $= 0,83487 + 0,00006 \cdot 0,2 = 0,83488$.

γ΄) λογ0,98629 $= \overline{1},99396+0,00005 \cdot 0,9 = \overline{1},99400$

δ΄) λογ968,375$=2,98601+0,00004 \cdot 0,75 = 2,98604$.

ε΄) λογ0,0364598$=\overline{2},56170+0,00012 \cdot 0,98 = \overline{2},56182$.

στ΄) λογ6,3347 $= 0,80173$. ζ΄) λογ326,537 $= 2,51393$.

η΄) λογ5278,37 $= 3,72250$. ϑ΄) λογ15389,45 $= 4,18723$.

590. α΄) $3,63147 =$ λογ$(4280+3 : 11) =$ λογ(4280,27). Ἐπομένως 0,63147 $=$ λογ4,28027, ἤτοι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 4,28027.

β΄) Ἐὰν λογχ$=1,72127$, εἶναι $χ = 52,6344$.

γ΄) Ἐὰν λογχ$=0,68708$, εἶναι $χ = 4,865$.

δ΄) λογχ$=\overline{3},92836$ καὶ $χ=0,00847933$.

ε΄) λογχ$=\overline{4},38221$ καὶ $χ=0,000241106$.

στ΄) λογχ$=\overline{3},70032$ καὶ $χ=0,00501555$.

591. α΄) Ἐὰν $χ=0,4326^3$ εἶναι λογχ $= 3 \cdot$ λογ0,4326 $= 3 \cdot \overline{1},63609 =$ $= \overline{2},90827$ καὶ $χ = 0,08096$.

β΄) Ἐὰν $χ = \sqrt[3]{12}$ εἶναι λογχ $= \frac{1}{3} \cdot$ λογ 12 $= \frac{1}{3} \cdot 1,07918 = 0,35973$ καὶ $χ = 2,28942$.

γ΄) λογχ$=$(λογ0,7776) : $5 = \overline{1},89076 : 5 = (\overline{5}+4,89076) : 5 =$ $= \overline{1},97815$, καὶ $χ = 0,95094$.

δ΄) λογχ$=$λογ13 : $5 = 1,11394 : 5 = 0,22279$ καὶ $χ=1,67027$.

ε΄) Ἂν θέσωμεν $χ = 875,6348 \cdot 62,82407$, ἔχομεν λογχ $= 2,94233 +$ $+ 1,79813 = 4,74046$ καὶ $χ=55012,5$. Ὅθεν τὸ γινόμενον εἶναι $-55012,5$.

στ΄) λογχ $=$ (λογ25,3696 : 15)$-$λογ0,0893462 $= (1,40431) : 15) -$ $- \overline{2},95107 = 0,09362 - \overline{2},95107 = 1,14255$ καὶ $χ=13,8852$.

592. Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\Gamma = 2R\pi$. Ὅθεν $\log\Gamma = \log 2{,}51075 + \log 3{,}1416 = 0{,}39980 + 0{,}49715 = 0{,}89695$ καὶ $\Gamma = 7{,}88767$ δ.

593. Εἶναι $\omega = \sqrt[\nu+1]{\beta : \alpha} = \sqrt[9]{23437500 : 12} = \sqrt[9]{1953125} = \sqrt[9]{5^9} = 5$. (Βλέπε Πίνακας λογαρίθμων (νέα ἔκδοσις) Χρ. Μπαρμπαστάθη σελὶς 42). Ὅθεν ἡ ζ. πρ. εἶναι ἡ 12, 60, 300 ... 2347500.

594. Ἐκ τοῦ τύπου $\delta = \frac{1}{2} gt^2$ λαμβάνομεν $t = \sqrt{2\delta : g} = \sqrt{9620 : 9{,}8} = \sqrt{981{,}63} = 31{,}3$ δεύτερα λεπτά.

Περὶ ἐκθετικῶν καὶ λογαριθμικῶν ἐξισώσεων.

595. α΄) Ἐπειδὴ $\alpha^{\chi+\mu} = \alpha^{2\mu}$ $(\alpha \neq 0)$ εἶναι $\chi+\mu = 2\mu$ καὶ $\chi = \mu$.

β΄) Ὁμοίως, ἐπειδὴ $\alpha^{3\chi+2} = \alpha^{\chi+4}$ $(\alpha \neq 0)$ εἶναι $3\chi+2 = \chi+4$ καὶ $\chi = 1$.

γ΄) Εἶναι $\gamma^{2-5\chi} = \gamma^{\chi+3}$, $2-5\chi = \chi+3$ καὶ $\chi = -1/6$ $(\gamma \neq 0)$.

δ΄) Εἶναι $(2\chi+1)(3\chi+4) = (3\chi+1)(2\chi+5)$, ἤτοι $-6\chi = 1$ καὶ $\chi = -1/6$.

ε΄) Εἶναι $\mu(\chi+3) = \chi+2\nu$ καὶ $\chi = (2\nu-3\mu) : (\mu-1)$.

596. α΄) Εἶναι $\alpha^{2\chi+3} \cdot \alpha^{3\chi+1} = \alpha^{5\chi+6}$. Ὅθεν $5\chi+4 = 5\chi+6$, ἤτοι $0=2$. Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος.

β΄) Εἶναι $2^{2\chi} = 2^5$, $2\chi = 5$ καὶ $\chi = 2{,}5$.

γ΄) Εἶναι $(-2)^\chi = (-2)^4$, καὶ $\chi = 4$.

δ΄) Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι 2ου βαθμοῦ πρὸς 5^χ. Ὅθεν $5^\chi = (-7 \pm \sqrt{49+1800}) : 2 = (-7 \pm 43) : 2 = -25$ ἢ 18. Ὅθεν $5^\chi = 18$ καὶ $\chi = \log 18 : \log 5$ κλπ. Ἡ λύσις $5^\chi = -25$ δὲν εἶναι δεκτή, διότι πᾶσα δύναμις τοῦ 5 εἶναι θετικὸς ἀριθμός.

ε΄) Ἔχομεν $\alpha^{\frac{1}{\chi}} = \alpha^\chi$, $\frac{1}{\chi} = \chi$, $\chi^2 = 1$ καὶ $\chi = \pm 1$ $(\alpha \neq 0)$.

στ΄) Ἔχομεν $2^\chi \cdot 2^3 + 4^\chi \cdot 4 - 320 = 0$ ἤτοι $2^{2\chi} + 2 \cdot 2^\chi - 80 = 0$ καὶ $2^\chi = -1 \pm \sqrt{81} = 8$ ἢ -10. Ὅθεν $2^\chi = 2^3$ καὶ $\chi = 3$, διότι ἡ ἄλλη λύσις δὲν εἶναι δεκτή.

597. α΄) Ἔχομεν $2^{2\chi} + 2^\chi - 272 = 0$ καὶ $2^\chi = 16 = 2^4$. Ὅθεν $\chi = 4$.

β΄) Αὕτη γράφεται $\log\chi = \log(24 : 3)$. Ὅθεν $\chi = 8$.

γ΄) Ἔχομεν $2^{2\chi} + 2 \cdot 2^\chi - 80 = 0$ καὶ $\chi = 3$ (προηγ. ἄσκησις γ΄).

δ΄) Εἶναι $\log\chi^5 - \log\left(\frac{\chi}{2}\right)^3 = \log\left(\frac{8\chi^5}{\chi^3}\right) = \log 288$. Ὅθεν $8\chi^2 = 288$, $\chi^2 = 36$ καὶ $\chi = \pm 6$.

ε΄) Εἶναι $\log\chi = \log\left(\frac{192 \cdot 3}{4}\right)$. Ὅθεν $\chi = \frac{192 \cdot 3}{4} = 144$.

598. α΄) Εἶναι $\alpha^{2\chi+3\psi}=\alpha^8$, ἤτοι $2\chi+3\psi=8$ | $\chi=1/2$
καὶ $\alpha^{2\chi-3\psi}=\alpha^{-6}$ » $2\chi-3\psi=-6$ | $\psi=7/3$

β΄) Εἶναι $5^{3\chi+4\psi}=5^{18}$ » $3\chi+4\psi=18$ | $\chi=2$
καὶ $5^{2\chi-7\psi}=5^{-17}$ » $2\chi-7\psi=-17$ | $\psi=3$.

γ΄) Ἐπειδὴ $\lambda o\gamma(\chi-\psi)=3=\lambda o\gamma 1000$, εἶναι $\chi-\psi=1000$. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ ἐκ τῆς $\chi+\psi=95$, εὑρίσκομεν $\chi=547,5$ καὶ $\psi=-452,5$.

599. α΄) Ἐκ τῆς $\lambda o\gamma(\chi\psi)=2=\lambda o\gamma 100$, εὑρίσκομεν $\chi\psi=100$. Οὕτως ἐκ ταύτης καὶ ἐκ τῆς 1ης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν $\chi=20$ καὶ $\psi=5$.

β΄) Ἐκ τῆς 2ας ἐξισώσεως ἥτις γράφεται $\lambda o\gamma(\chi\psi)=3=\lambda o\gamma 1000$, εὑρίσκομεν $\chi\psi=1000$. Αὕτη δὲ μετὰ τῆς $5\chi^2-3\psi^2=11300$ δίδει τὰς δεκτὰς λύσεις $\chi=50$ καὶ $\psi=20$.

600. α΄) Ἐπειδὴ $3^{11}=177147$ [Πίν. Λογαρίθμων (νέα ἔκδοσις) Χρ. Μπαρμπαστάθη σελὶς 42] εἶναι $3^\chi=3^{11}$, ἤτοι $\chi=11$.

β΄) Ἐνταῦθα ἔχομεν $\frac{\chi}{2}\lambda o\gamma 3=\lambda o\gamma 768$, ἤτοι $\frac{\chi}{2}=\frac{2,88536}{0,47712}$ ἢ $\chi=2,88536:0,23856=12,095$.

γ΄) Εἶναι $3^{\sqrt{\chi}}=3^5$. Ὅθεν $\sqrt{\chi}=5$ καὶ $\chi=25$.

601. α΄) Λαμβάνομεν $(3\chi-2)\lambda o\gamma 24=\lambda o\gamma 10\,000$ ἤτοι
$3\chi-2=4:1,38021=2,898$, $3\chi=4,9881$ καὶ $\chi=1,6327$.

β΄ Εἶναι $5^{\chi^2-3\chi}=5^4$. Ὅθεν $\chi^2-3\chi=4$, $\chi^2-3\chi-4=0$ καὶ $\chi=4$ ἢ -1.

γ΄) Εἶναι $\chi^{\chi^2-7\chi+12}=1=\chi^0$ Ὅθεν $\chi^2-7\chi+12=0$ καὶ $\chi=4$ ἢ 3.

602. **α΄) Εἶναι** $6^{\chi^4-18\chi^2+81}=6^5$. **Ὅθεν** $\chi^4-18\chi^2+81=0$ **καὶ** $\chi=\pm3$.

β΄) Γράφομεν $\alpha^{1+3+5+...+(2\chi-1)}=\nu$ **(1). Ὥστε τῆς ἀριθμητικῆς προόδου** $1+3+5+...+(2\chi-1)$ **ὁ τελευταῖος ὅρος ἰσοῦται μὲ** $2\chi-1=1+(\nu-1)\cdot 2$. **Ὅθεν** $\nu=\chi$ **καὶ ἑπομένως τὸ ἄθροισμα αὐτῆς ἰσοῦται μὲ** $\Sigma=\left(\frac{1+2\chi-1}{2}\right)\cdot\chi=\chi^2$.

Ὥστε ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $\alpha^{\chi^2}=\nu$, $\chi^2=\lambda o\gamma\nu:\lambda o\gamma\alpha$ καὶ $\chi=+\sqrt{\lambda o\gamma\nu:\lambda o\gamma\alpha}$.

603. α΄) Ἐκ τῆς 2ας ἐξισώσεως ἥτις γράφεται $\lambda o\gamma(\chi\psi)^2=\lambda o\gamma 100$, εὑρίσκομεν $(\chi\psi)^2=100$ Ὅθεν $2\chi^2\psi^2=200$ καὶ 1) $\chi^4+2\chi^2\psi^2+\psi^4=841$ ἤτοι $(\chi^2+\psi^2)^2=29^2$ (1) καὶ 2) $\chi^4-2\chi^2\psi^2+\psi^4=441$ ἤτοι $(\chi^2-\psi^2)^2=21^2$ (2). Οὕτως ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν $\chi^2+\psi^2=29$ καὶ $\chi^2-\psi^2=21$ καὶ ἐκ τούτων $\chi=\pm5$, $\psi=\pm2$.

β΄) Ἔχομεν $\lambda o\gamma\chi+\lambda o\gamma\psi=\frac{3}{2}$ | $2\lambda o\gamma\chi=2$, $\lambda o\gamma\chi=1$ καὶ $\chi=10$

$\lambda o\gamma\chi-\lambda o\gamma\psi=\frac{1}{2}$ | $2\lambda o\gamma\psi=1$, $\lambda o\gamma\psi=\frac{1}{2}$ καὶ $\psi=10^{\frac{1}{2}}$.

γ΄) Ἐκ τῆς 1ης ἐξισώσεως ἥτις γράφεται $\lambda o\gamma(\chi\psi)=\lambda o\gamma 1000$, **εὑρίσκομεν** $\chi\psi=1000$. **Αὕτη δὲ μετὰ τῆς 2ας δίδει τὰς λύσεις** $\chi=50$ **καὶ** $\psi=20$.

604. α΄) Ἐκ τῆς 1ης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν $\lambda o\gamma\left(\frac{\chi}{5}\right):2=\frac{1}{2}$.

$\lambda o\gamma\left(\frac{\chi}{5}\right)=1=\lambda o\gamma 10$ καὶ ἐπομένως $\frac{\chi}{5}=10$, ἤτοι $\chi=50$.

Ἐξ ἄλλου ἐπειδὴ $1,50515=\lambda o\gamma 32$, ἐκ τῆς 2ας ἐξισώσεως ἔχομεν $\lambda o\gamma(\chi^3\psi^2)=\lambda o\gamma 32$, ἤτοι $\chi^3\psi^2=32$, $\psi^2=32:50^3=32:125000=16:62500$. Ὅθεν $\psi=4/250=0,016$.

β) Ἔχομεν ὡς ἄνω $\lambda o\gamma\frac{\chi}{5}=\lambda o\gamma 10$ καὶ $\chi=50$. Ὡς καὶ $\lambda o\gamma(\chi^3\psi^2)=\lambda o\gamma 32$ ἤτοι $\psi=0,016$.

Προβλήματα ἀνατοκισμοῦ.

Ἀσκήσεις. *605.* Εἶναι $\Sigma=\alpha(1+\tau)^\nu=5600000(1,05)^{100}$ καὶ $\lambda o\gamma\Sigma=$ $=\lambda o\gamma 5600000+100\lambda o\gamma 1,05=6,74819+2,11900=8,86719$. Ὅθεν $\Sigma=736533333$.

606. Εἶναι $\Sigma=750000(1,045)^{20}$ καὶ $\lambda o\gamma\Sigma=5,87506+20\cdot 0,01912=$ $=5,87506+0,38240=6,25746$. Ὅθεν $\Sigma=1809083$.

607. Εἰς τὸ τέλος τῶν 8 ἐτῶν τὸ κεφάλαιον γίνεται $\Sigma=1\,000\,000\,000\cdot$ $\cdot(1,04)^8$. Ἐπειδὴ δὲ $(1,04)^8=1,368569$ (Π. Λογ. Χρ. Μπαρμπαστάθη σελὶς 36) εἶναι $\Sigma=1\,368\,569\,000$. Κατόπιν τούτων εὑρίσκομεν τὸν ἁπλοῦν τόκον τοῦ Σ πρὸς 4 % διὰ 8 μῆνας, ὃν προσθέτομεν εἰς τὸ Σ. Τέλος ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἀφαιροῦμεν τὸ 1 000 000 000.

608. Ἔχομεν $\alpha=\Sigma:(1+\tau)^\nu=3730850:(1,035)^{20}$. Ὅθεν $\lambda o\gamma\alpha=$ $=\lambda o\gamma 3730850-20\lambda o\gamma 1,035=6,57181-20\cdot 0,01494=6,57181-0,29880=6,27301$ καὶ $\alpha=1875043$.

609. Ἐκ τοῦ τύπου $\Sigma=\alpha(1+\tau)^\nu\cdot(360+\tau\eta):360$, εὑρίσκομεν $\alpha=45896000\cdot 360:1,08^{15}\cdot 376,8$ καὶ $\lambda o\gamma\alpha=(7,66177+2,55630)-(15\cdot 0,03342+$ $+2,57611)=10,21807-3,07741=7,14066$ καὶ $\alpha=13824840$.

610. Ἔχομεν $\alpha=\Sigma:(1+\tau)^\nu=20\,000\,000:1,02^{36}$ καὶ $\lambda o\gamma\alpha=7,30103-$ $-36\cdot 0,00860=7,30103-0,30960=6,99143$ καὶ $\alpha=9804600$.

611. Ἔχομεν $(1+\tau)^\nu=\Sigma:\alpha$, ἤτοι $(1+\tau)^{15}=1166900:625000$. Ὥστε $\lambda o\gamma(1+\tau)=(\lambda o\gamma 1166900-\lambda o\gamma 625000):15=(6,06703-5,79588):15=0,27115:15=$ $=0,01808$ καὶ $1+\tau=1,0425$. Ὅθεν $\tau=0,425$ καὶ $E=4,25$ %.

612. Ὁμοίως ἔχομεν $(1+\tau)^{22}=224770:10000=22,477$. Ὅθεν $\lambda o\gamma(1+\tau)=$ $=\lambda o\gamma 22,477:22=1,35174:22=0,06144$ καὶ $1+\tau=1,152$. Ὥστε $\tau=0,152$ καὶ $E=15,2$ %.

613. Εἶναι $\Sigma=\alpha(1+\tau)^\nu$, ἤτοι $4\alpha=\alpha(1+\tau)^\nu$, $(1+\tau)=4$. Ὅθεν $(1+\tau)^{31}=4$, $\lambda o\gamma(1+\tau)=\lambda o\gamma 4:31=0,60206:31=0,01942$ καὶ $1+\tau=1,0457$. Ὥστε $\tau=0,0457$ καὶ $E=4,57$ %.

614. Ἐκ τοῦ τύπου $\Sigma=\alpha(1+\tau)^\nu$, εὑρίσκομεν $\lambda o\gamma\Sigma=\lambda o\gamma\alpha+\nu\lambda o\gamma(1+\tau)$. Ὥστε $\nu=(\lambda o\gamma\Sigma-\lambda o\gamma\alpha):\lambda o\gamma(1+\tau)=(\lambda o\gamma 56000000-\lambda o\gamma 3580000):\lambda o\gamma(1,045)=$

$(7,74819-6,55388):0,01912=1,19431:0,01912=62$ ἔτη καὶ μέρος τοῦ ἔτους. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ὑπόλοιπον 0,00887 τῆς διαιρέσεως εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ $1+\frac{\eta\tau}{360}$, ἤτοι εἶναι $\lambda o\gamma\left(1+\frac{\eta\tau}{360}\right)=0,00887$. Ἐργαζόμενοι δὲ οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μέρος τοῦ ἔτους εἶναι 165 ἡμέραι. Ἀλλὰ ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ 0,00887 ἐπὶ 360 καὶ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 0,01912 θὰ εὕρωμεν 164 ἡμέρας. Ἡ διαφορὰ δὲ τῆς μιᾶς ἡμέρας (ἢ ἔστω 2 καὶ 3 ἡμερῶν) εἰς ζητήματα ἀνατοκισμοῦ, ὅστις διαρκεῖ ἔτη, θεωρεῖται ἀσήμαντος. Διὰ τοῦτο εἰς ὅμοια ζητήματα, πρὸς εὐκολίαν προτιμᾶται ὁ δεύτερος τρόπος τῆς εὑρέσεως τοῦ μέρους τοῦ ἔτους.

615. Ὁμοίως ὡς ἄνω ἔχομεν
$\nu=(\lambda o\gamma 969800-\lambda o\gamma 630000):\lambda o\gamma(1,04)=(5,98668-5,79934):0,01703=$
$0,18734:0,01703=11$ ἔτη.

616. Ἔχομεν $2\alpha=\alpha(1+\tau)^{\nu}$, ἤτοι $2=(1,035)^{\nu}$ καὶ
$\nu=\lambda o\gamma 2:\lambda o\gamma 1,035=0,30103:0,01494=20\frac{223}{1494}$ ἔτη$=20$ ἔτη 53 ἡμέραι (ἄσκ. 614). Ἐξακολουθοῦμεν δὲ ὁμοίως.

617. Μετὰ ἓν ἔτος ὁ πληθυσμὸς θὰ εἶναι $\alpha+\frac{\alpha}{80}=\alpha\left(1+\frac{1}{80}\right)=$
$=\alpha(1,0125)$, μετὰ δύο ἔτη οὗτος θὰ εἶναι $\alpha(1,0125)^2$ καὶ μετὰ ν ἔτη ὁ πληθυσμὸς Σ θὰ εἶναι $\Sigma=\alpha(1,0125)^{\nu}$. Ἐὰν δὲ $\Sigma=2\alpha$, θὰ ἔχωμεν $2\alpha=\alpha(1,0125)^{\nu}$, ἤτοι $2=(1,0125)^{\nu}$ καὶ $\nu=\lambda o\gamma 2:\lambda o\gamma 1,0125=0,30103:0,00540=55\frac{403}{540}$ ἔτη $=55$ ἔτη 169 ἡμέραι.

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ ὅταν $\Sigma=3\alpha$.

618. Ἐπειδὴ $160:8000=1:50=0,02$, μετὰ ἓν ἔτος ὁ πληθυσμὸς θὰ εἶναι τὰ $49\cdot 0,02=0,98$ τοῦ ἀρχικοῦ καὶ μετὰ ν ἔτη θὰ εἶναι τὰ $(0,98)^{\nu}$ αὐτοῦ. Οὕτως ἔχομεν $5000=8000\cdot(0,98)^{\nu}$, ἤτοι $(0,98)^{\nu}=\frac{5}{8}=0,625$ καὶ

$\nu=\lambda o\gamma 0,625:\lambda o\gamma 0,98=\bar{1},79588:\bar{1},99123=-0,20412:-0,00877=20412:877=$
$=23\frac{241}{877}$ ἔτη.

Προβλήματα ἴσων καταθέσεων καὶ χρεωλυσίας.

Ἀσκήσεις. *619.* Κατὰ τὸν τύπον τῶν ἴσων καταθέσεων ἔχομεν $\Sigma=350\,000(1,04)(1,04^{20}-1):0,04$. Ἐπειδὴ δὲ $350\,000:0,04=8\,750\,000$ καὶ $1,04^{20}=2,191$ (Πίνακες Χρ. Μπαρμπαστάθη, νέα ἔκδοσις, σελὶς 36) ἔχομεν $\Sigma=8\,750\,000\cdot 1,04\cdot 1,191$ καὶ $\lambda o\gamma\Sigma=6,94201+0,01703+0,07591=7,03495$ καὶ $\Sigma=10\,838\,000$.

620. Ὁμοίως ὡς ἄνω ἔχομεν $13\,210\,000=1\,000\,000(1,05)(1,05^{\nu}-1):0,05$, ἤτοι $1321 \cdot 0{,}05 = 105(1{,}05^{\nu} - 1)$ καὶ $\lambda o\gamma(1{,}05^{\nu} - 1) = \lambda o\gamma 1321 + \lambda o\gamma 0{,}05 - \lambda o\gamma 105 = 3{,}12090 + \overline{2}{,}69897 - 2{,}02119 = \overline{1}{,}79868$. Ὅθεν $1{,}05^{\nu} - 1 = 0{,}629043$, ἤτοι $1{,}05^{\nu} = 1{,}629043$. Οὕτως ἔχομεν $\nu = \lambda o\gamma\, 1{,}629043 : \lambda o\gamma 1{,}05 = 0{,}21192 : 0{,}2119 = 10$ ἔτη.

621. Ἐδῶ ἔχομεν τὸν τύπον $\Sigma = \alpha[(1+\tau)^{\nu} - 1] : \tau$. Εἶναι δὲ $(1+\tau)^{\nu} = 1{,}035^3$ καὶ $3\lambda o\gamma 1{,}035 = 3 \cdot 0{,}01494 = 0{,}04482$. Ὥστε $1{,}035^3 = 1{,}1087$. Ὅθεν $\Sigma = 20000000 \cdot 0{,}1087 : 0{,}035$ καὶ $\lambda o\gamma\Sigma = 7{,}30103 + \overline{1}{,}03623 - \overline{2}{,}54407 = 7{,}79319$ καὶ $\Sigma = 62114286$.

622. Ἐδῶ ἔχομεν $\alpha = \Sigma\tau : (1+\tau)[(1+\tau)^{\nu} - 1]$, ἤτοι $\alpha = 250000000 \cdot 0{,}05 : 1{,}05[1{,}05^{21} - 1] = 12500000 : 1{,}05 \cdot 1{,}786$ (Πίνακες σελὶς 36). Ὅθεν $\lambda o\gamma\alpha = 7{,}09691 - (0{,}02119 + 0{,}25188) = 6{,}82384$ καὶ $\alpha = 6665571$.

623. Ἐκ τοῦ τύπου τῆς χρεωλυσίας εὑρίσκομεν $\chi = 100000000000 \cdot 0{,}04 \cdot 1{,}04^{50} : (1{,}04^{50} - 1)$. Ἐπειδὴ οε (Πίνακες σελὶς 36) $1{,}04^{50} = 7{,}107$, εἶναι $\chi = 4000000000 \cdot 7{,}107 : 6{,}107 = 28428000000 : 6{,}107$ καὶ $\lambda o\gamma\chi = 10{,}45375 - 0{,}78583 = 9{,}66792$. Ὅθεν $\chi = 4655000000$.

624. Ἐκ τοῦ τύπου τῆς χρεωλυσίας εὑρίσκομεν $\alpha = 318000(1{,}045^{30} - 1) : 0{,}045 \cdot 1{,}045^{30} = 318000 \cdot 2{,}745 : 0{,}045 \cdot 3{,}745$. Ὅθεν $\lambda o\gamma\alpha = (5{,}50243 + 0{,}43854) - (\overline{2}{,}65321 + 0{,}57345) = 5{,}94097 - \overline{1}{,}22666 = 6{,}71431$ καὶ $\alpha = 5179750$.

625. Ἐκ τοῦ τύπου τῆς χρεωλυσίας εὑρίσκομεν $(1+\tau)^{\nu} = \chi : (\chi - \alpha\tau) = 3000000 : (3000000 - 45000000 \cdot 0{,}05) = 3000000 : (3000000 - 2250000) = 3000000 : 750000 = 4$. Ὅθεν $\nu = \lambda o\gamma 4 : \lambda o\gamma 1{,}05 = 0{,}60206 : 0{,}02119 = 28$ ἔτη καὶ μέρος τοῦ ἔτους. Ὥστε τὸ χρέος θὰ ἐξοφληθῇ μὲ 28 ὁλοκλήρους δόσεις καὶ ἀκόμη μὲ ἓν ποσὸν μικρότερον τοῦ χρεωλυσίου.

626. Ἐπειδὴ ἡ διάρκεια τοῦ δανείου εἶναι 20 ἔτη, αἱ δὲ δόσεις θὰ εἶναι 15 ἔχομεν $\alpha(1{,}045)^{20} = 46130000(1{,}045^{15} - 1) : 0{,}045$ (Πίνακες σελὶς 36) $\alpha \cdot 2{,}412 = 46130000 \cdot 0{,}935 : 0{,}045$ καὶ $\alpha = 46130000 \cdot 0{,}935 : 0{,}045 \cdot 2{,}412$. Ὅθεν $\lambda o\gamma\alpha = (7{,}66398 + \overline{1}{,}97081) : (\overline{2}{,}65321 + 0{,}38238) = 7{,}63479 - \overline{1}{,}03559 = 8{,}59920$ καὶ $\alpha = 397372727$.

627. Ἔχομεν ὁμοίως ὡς ἄνω $\alpha(1{,}0375)^{13} = 158800000 \cdot (1{,}0375^{10} - 1) : 0{,}0375$. Ἀλλὰ $13\lambda o\gamma 1{,}0375 = 13 \cdot 0{,}01599 = 0{,}20787$ καὶ $10\lambda o\gamma 1{,}0375 = 10 \cdot 0{,}01599 = 0.15990$, Ὅθεν $1{,}0375^{13} = 1{,}614$ καὶ $1{,}0375^{10} = 1{,}445$ Ὥστε εἶναι

$$\alpha = 158800000 \cdot 0{,}445 : 0{,}0375 \cdot 1{,}614$$ καὶ

$\lambda o\gamma\alpha = (8{,}20085 + \overline{1}{,}64836) - (\overline{2}{,}57403 + 0{,}20790) = 7{,}84921 - \overline{2}{,}78193 = 9{,}06728$ καὶ $\alpha = 1167534595$.

628. Ἔχομεν ὁμοίως ὡς ἄνω $\chi = 1500000000 \cdot 0{,}0375 \cdot 0{,}0375^{20} : (1{,}0375^{15} - 1)$.

Ἀλλὰ $20\lambda o\gamma 1{,}0375 = 20 \cdot 0{,}01599 = 0{,}31980$.
καὶ $15\lambda o\gamma 1{,}0375 = 15 \cdot 0{,}01599 = 0{,}23985$.
Ὅθεν $1{,}0375^{20} = 2{,}088$ καὶ $1{,}0375^{15} = 1{,}737$.
Ὥστε $\chi = 1500000000 \cdot 0{,}0375 \cdot 2{,}088 : 0{,}737$.

$\lambda o\gamma\chi = 9{,}17609 + \overline{2}{,}57403 + 0{,}31973 - \overline{1}{,}86747 = 8{,}06985 - \overline{1}{,}86747 = 8{,}20238$ καὶ $\chi = 159359259$.

629. Ἡ λύσις του δίδεται εἰς τὴν Ἄλγεβραν.

630. Τὰ 20000000 προῆλθον ἀπὸ τὸν ἀνατοκισμὸν ποσοῦ α πρὸς 4 %ἐπὶ 6 ἔτη. Ὅθεν, $20000000 = \alpha \cdot (1{,}04)^6$, $\lambda o\gamma\alpha = \lambda o\gamma 20000000 - 6\lambda o\gamma 1{,}04 = 7{,}30103 - 6 \cdot 0{,}01703 = 7{,}30103 - 0{,}10218 = 7{,}19885$ καὶ $\alpha = 15807037$. Ἀλλ' ἂν κατέθετε χ δραχμὰς ἐπὶ 5 ἔτη εἰς τὴν ἀρχὴν αὐτῶν πρὸς 4 %, θὰ ἐλάμβανεν εἰς τὸ τέλος τοῦ 5ου ἔτους α δραχμάς. Ὥστε πρέπει νὰ εἶναι $15807037 = \chi(1{,}04^5 - 1) : 0{,}04$, ἤτοι $\chi = 15807037 \cdot 0{,}04 : 0{,}2167$. Ὅθεν $\lambda o\gamma\chi = 7{,}19885 + \overline{2}{,}60206 - \overline{1}{,}33586 = 5{,}80091 - \overline{1}{,}33586 = 6{,}46505$ καὶ $\chi = 2917737$.

631. Ἔχομεν κατὰ πρῶτον $\Sigma_1 = \dfrac{\alpha(1+\tau)[(1+\tau)^\nu - 1]}{\tau} =$

$$= \frac{1250000 \cdot 1{,}06 \cdot (1{,}06^7 - 1)}{0{,}06} = \frac{1250000 \cdot 1{,}06 \cdot 0{,}504}{0{,}06} = 1250000 \cdot 1{,}06 \cdot 8{,}4.$$

Ὅθεν $\lambda o\gamma\Sigma_1 = 6{,}09691 + 0{,}02531 + 0{,}92428 = 7{,}04650$ καὶ $\Sigma_1 = 11130000$. Ἀλλὰ τὸ ποσὸν τοῦτο ἀνατοκίζεται πρὸς 6 % ἐπὶ ἄλλα 5 ἤτη καὶ δίδει τὸ ποσὸν $\Sigma_2 = 11130000 \cdot (1{,}06)^5$. Ὅθεν $\lambda o\gamma\Sigma_2 = 7{,}04650 + 5 \cdot 0{,}02531 = 7{,}04650 + 0{,}12655 = 7{,}17305$ καὶ $\Sigma_2 = 14895333$.

632. Ἐκ τοῦ τύπου $\Sigma = \dfrac{\alpha(1+\tau)[(1+\tau)^\nu - 1]}{\tau}$, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $10200000 = \dfrac{1000000(1+\tau)[(1+\tau)^8 - 1]}{\tau}$, ἥτις ὡς βλέπομεν εἶναι 8ου βαθμοῦ πρὸς τ καὶ τὴν ὁποίαν ἑπομένως δὲν δυνάμεθα νὰ λύσωμεν. Θὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸ τ διὰ προσεγγίσεων. Οὕτως ἐὰν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν θέσωμεν $\tau = 0{,}05$, τὸ 2ον μέλος αὐτῆς εὑρίσκομεν ὅτι θὰ δώσῃ $1000000 \cdot 1{,}05 \cdot (1{,}05^8 - 1) : 0{,}05 = 1000000 \cdot 1{,}05 \cdot 0{,}477 : 0{,}05 = 1000000 \cdot 21 \cdot 0{,}477 = 10017000$, ἤτοι μικρότερον τοῦ 10200000. Ἀλλ' ἐὰν θέσωμεν $\tau = 0{,}055$ θὰ ἴδωμεν ὅτι τὸ 2ον μέλος δίδει ποσὸν μεγαλύτερον τοῦ 10200000. Ὥστε τὸ ζητούμενον ἐπιτόκιον κεῖται μεταξὺ 5 % καὶ 5,5 %.

633. Ἐκ τοῦ τύπου $\Sigma = \dfrac{\alpha[(1+\tau)^\nu - 1}{\tau}$, εὑρίσκομεν $(1+\tau)^\nu - 1 = \Sigma\tau : \alpha$, ἤτοι $1{,}055^\nu - 1 = 2457839000 \cdot 0{,}055 : 1000000 = 2457{,}839 \cdot 0{,}055$. Ὅθεν $\lambda o\gamma[1{,}055^\nu - 1) = \lambda o\gamma 2457{,}839 + \lambda o\gamma 0{,}055 = 3{,}39055 + \overline{2}{,}74036 = 2{,}13091$ καὶ $1{,}055^\nu - 1 = 135{,}78$. Ὥστε $1{,}055^\nu = 136{,}78$, $\nu = \lambda o\gamma 136{,}78 : \lambda o\gamma 1{,}055 = 2{,}13603 : 0{,}02325 = 91\,\dfrac{2025}{2325}$. Ὥστε αἱ καταθέσεις θὰ εἶναι 91 καὶ ἀκόμη μία μικροτέρα τοῦ 1 000 000.

634. Ἐκ τοῦ ἄνω τύπου εὑρίσκομεν $\alpha = \Sigma\tau : [(1+\tau)^\nu - 1] = 10000000 \cdot 0{,}05 : (1{,}05^5 - 1) = 500000 : 0{,}276 = 500000000 : 276 = 1811594$.

635. Ἔχομεν ὡς ἄνω $\alpha = 15000000 \cdot 0{,}06 : (1{,}06^3 - 1) = 900000 : 0{,}191 = 900\,000\,000 : 191 = 4712010$.

636. Ἐκ τοῦ τύπου $\alpha(1+\tau)^\nu = \dfrac{\chi[(1+\tau)^\nu - 1]}{\tau}$ λαμβάνομεν $(1+\tau)^\nu = \chi : (\chi - \alpha\tau)$ ἤτοι $1{,}03^\nu = 1000000 : (1000000 - 20000000 \cdot 0{,}03) = = 1000000 : 400000 = 5 : 2 = 2{,}5$. Ὅθεν $\nu = \lambda o\gamma 2{,}5 : \lambda o\gamma 1{,}03 = 0{,}39794 : : 0{,}01284 = 39794 : 1284 = 30$ δόσεις ἑξαμήνους καὶ ἀκόμη μίαν μικροτέραν τούτων.

637. Τὸ χρεωλύσιον ὅπερ πρέπει νὰ καταθέτῃ ἐπὶ 8 ἔτη πρὸς 7 % διὰ νὰ ἐξοφληθῇ τὸ δάνειον τῶν 25000000 ἰσοῦται μὲ $\chi = \alpha\tau(1+\tau)^\nu : [(1+\tau)^\nu - 1] = = 25000000 \cdot 0{,}07 \cdot 1{,}07^8 : (1{,}07^8 - 1)$.

Ἐπειδὴ δὲ $8\lambda o\gamma 1{,}07 = 8 \cdot 0{,}02938 = 0{,}23504$ εἶναι $1{,}07^8 = 1{,}718$, εἶναι $\chi = 25000000 \cdot 0{,}07 \cdot 1{,}718 : 0{,}718$, $\lambda o\gamma\chi = 7{,}39794 + \bar{2}{,}84510 + 0{,}23504 - \bar{1}{,}85612 = = 6{,}47808 - \bar{1}{,}85612 = 6{,}62196$ καὶ $\chi = 4187545$. Ὥστε ἐπλήρωσε $4187545 \cdot 5 = = 20937725$ καὶ χρεωστεῖ $25000000 - 20937725 = 4062275$ σὺν τῷ τόκῳ τοῦ ποσοῦ αὐτοῦ ἐπὶ 3 μῆνας πρὸς 7 %, ὅστις τόκος ἰσοῦται μὲ $4062275 \cdot 3 \cdot 7 : 1200 = = 71090$. Ὥστε ἡ τελευταία δόσις θὰ εἶναι $4062275 + 71090 = 4133365$.

638. Εὑρίσκομεν ὁμοίως ὡς ἄνω $\chi = 20008000 \cdot 0{,}06 \cdot 1{,}06^{20} : (1{,}06^{20} - 1) = = 20008000 \cdot 0.06 \cdot 3{,}207 : 2{,}207$ καὶ $\lambda o\gamma\chi = 7{,}30121 + \bar{2}{,}77815 + 0{,}50610 - 0{,}34380 = = 6{,}58546 - 0{,}30380 = 6{,}24166$ καὶ $\chi = 1744440$. Ἀλλὰ τὰ χρεωλύσια μέχρι τοῦ 1950 εἶναι 8. Ὥστε ἐπλήρωσεν $1744440 \cdot 8 = 13955520$ καὶ χρεωστεῖ $20008000 - 13955520 = 6052480$, σὺν τῷ τόκῳ τοῦ ποσοῦ αὐτοῦ ἐπὶ 5 μῆνας πρὸς 6 % (διότι ἀπὸ τῆς τελευταίας δόσεως μέχρι τῆς 1ης Ὀκτωβρίου 1950 μεσολαβοῦν 5 μῆνες). Εἶναι δὲ ὁ τόκος οὗτος ἴσος μὲ $6052480 \cdot 5 \cdot 6 : 1200 = = 151312$. Ὥστε θὰ πληρώσῃ ἐν ὅλῳ $6052480 + 151312 = 6206792$.

639 Εἶναι (ἄσκ. 636) $1{,}07^\nu = 10000000 : (10000000 - - 100000000 \cdot 0{,}07 = 10000000 : 3000000 = 10 : 3$. Ὅθεν $\nu = (\lambda o\gamma 10 - \lambda o\gamma 3) : : \lambda o\gamma 1{,}07 = (1 - 0{,}47712) : 0{,}02938 = 0{,}52288 : 0{,}02938 = 52288 : 2938 = 17{,}79$. Ὥστε αἱ δόσεις θὰ εἶναι 17 καὶ ἀκόμη μία, μικροτέρα τούτων.

640. Ἐκ τοῦ τύπου $\alpha(1+\tau)^\nu = \chi[(+\tau)^\nu - 1] : \tau$ εὑρίσκομεν διαδοχικῶς: $\alpha\tau(1+\tau)^\nu = \chi[(1+\tau)^\nu - 1]$.

$$\frac{\alpha}{\chi} = \frac{(1+\tau)^\nu - 1}{\tau(1+\tau)^\nu}, \quad \frac{\alpha}{\chi} = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau(1+\tau)^\nu} \text{ καὶ τέλος}$$

$$\frac{\alpha}{\chi} = \frac{1}{\tau}\left(1 - \frac{1}{(1+\tau)^\nu}\right).$$ Ἐπειδὴ δὲ $\dfrac{\alpha}{\chi} = \dfrac{250000000}{14553000} = 17{,}18$ καὶ

$\nu = 15$ εἶναι $\dfrac{1}{\tau}\left(1 - \dfrac{1}{(1+\tau)^{15}}\right) = 17{,}18$. Ἐργαζόμεθα δὲ ὡς εἰς τὴν ἄσκησιν 632.

641. Ἐκ τοῦ τύπου τῆς χρεωλυσίας εὑρίσκομεν $\alpha = \chi[(1+\tau)^\nu - 1] : : \tau(1+\tau)^\nu = 10\,000\,000 \cdot (1{,}05^{20} - 1) : 0{,}05 \cdot 1{,}05^{20} = 10\,000\,000 \cdot 1{,}6533 : 0{,}05 \cdot . 2{,}6533 = 16\,533\,000 : 0{,}132665$. Ὅθεν $\lambda o\gamma\alpha = \lambda o\gamma 16\,533\,000 - \lambda o\gamma 0{,}132665 = = 7{,}21835 - \bar{1}{,}12275 - 8{,}09560$ καὶ $\alpha = 124622854$.

642 Θέτομεν $210\,000\,000\,000 = s_1$, $7{,}5 : 1000 = 0{,}0075 = \alpha$ καὶ $0{,}05 = \tau$.

Τότε ἀφοῦ εἰς τὸ μέσον τοῦ 1ου ἔτους εἰσπράττομεν s_1 δραχμάς, εἰς τὸ μέσον τῶν ἑπομένων ἐτῶν τῆς 1ης πενταετίας εἰσπράττομεν $s_1+as_1=s_1(1+\alpha)$, $s_1+2as_1=s_1(1+2\alpha)$, $s_1+3as_1=s_1(1+3\alpha)$ καὶ $s_1(1+4\alpha)$. Τὰ ποσὰ δὲ ταῦτα ἀνατοκιζόμενα πρὸς 5 % δίδουν ἐν ὅλῳ εἰς τὸ τέλος τῆς 1ης πενταετίας τὸ ποσόν:

$$S_1=s_1(1+\tau)^{4,5}+s_1(1+\alpha)(1+\tau)^{3,5}+s_1(1+2\alpha)(1+\tau)^{2,5}+s_1(1+3\alpha)(1+\tau)^{1,5}+s_1(1+4\alpha)\cdot$$
$$\cdot(1+\tau)^{0,5}=s_1\sqrt{1+\tau}[(1+\tau)^4+(1+\alpha)(1+\tau)^3+(1+2\alpha)(1+\tau)^2+(1+3\alpha)(1+\tau)+$$
$$(1+4\alpha)]=s_1\sqrt{1+\tau}\,\frac{[(1+\tau)^5-1](\alpha+\tau)-5\alpha\tau}{\tau^2}=s_1\cdot k,$$

ἐὰν διὰ τοῦ k παραστήσωμεν τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων, οἱ ὁποῖοι πολλαπλασιάζουν τὸ s_1, Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ μέσον τοῦ 1ου ἔτους τῆς βας πενταετίας εἰσπράτομεν $s_1+\frac{s_1}{3}=s_2$ δρχ., εἰς τὸ μέσον τοῦ 1ου ἔτους τῆς γης πενταετίας εἰσπράττομεν $s_1+\frac{2s_1}{3}=s_3$ δραχμάς, καὶ εἰς τὸ μέσον τῆς δης πενταετίας εἰσπράττομεν $s_1+\frac{3s_1}{3}=2s_1=s_4$ δραχμάς. Ἐὰν δὲ ἐργασθῶμεν ὁμοίως ὡς ἄνω, εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὸ τέλος τῆς βας, γης καὶ δης πενταετίας θὰ λάβωμεν ἀντιστοίχως s_2k, s_3k, s_4k. Οὕτως ὑπολογίζοντες τὴν παράστασιν k εὑρίσκομεν εὐκόλως τὰ ζητούμενα.

Περὶ ἀκολουθιῶν ἀριθμῶν καὶ περὶ ὁρίων.

Ἀσκήσεις.—*643*. Τῆς ἀκολουθίας $1, 3, 3^2, 3^3 \ldots 3^\nu, \ldots$ κατώτερος φραγμὸς εἶναι πᾶς ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ $\chi^\nu=3^\nu$, ἐνῷ ἀνώτερος φραγμὸς αὐτῆς δὲν ὑπάρχει. Διότι ὁ 3^ν αὐξάνεται ἀπεριορίστως μετὰ τοῦ ν.

***644*.** 1) Ἐὰν ἀκολουθίας, ἥτις τείνει πρὸς τὸ ∞, οἱ ὅροι ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς εἶναι ὅλοι ἀρνητικοί, ταύτης ὑπάρχει ἀνώτερος φραγμός. Οὗτος δὲ εἶναι πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς μεγαλύτερος ὅλων τῶν θετικῶν ὅρων τῆς ἀκολουθίας. Ἑπομένως ἐὰν ἡ ἀκολουθία αὕτη οὐδένα θετικὸν ὅρον ἔχῃ, πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι ἀνώτερος φραγμὸς αὐτῆς.

2) Ἐὰν ἀκολουθίας, ἥτις τείνει πρὸς τὸ ∞, οἱ ὅροι ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς εἶναι ὅλοι θετικοί, ταύτης δὲν ὑπάρχει ἀνώτερος φραγμός. Διότι πάντοτε εὑρίσκεται ὅρος αὐτῆς μεγαλύτερος παντὸς δοθέντος θετικοῦ ἀριθμοῦ, ὁσονδήποτε μεγάλου.

3) Ἐὰν ἀκολουθία, ἥτις τείνει πρὸς τὸ ∞, ἔχει ἄπειρον πλῆθος ὅρων θετικῶν, ὡς καὶ ἄπειρον πλῆθος ὅρων ἀρνητικῶν, ἡ δὲ ἀκολουθία τῶν πρώτων τείνει πρὸς τὸ ∞, ὡς καὶ ἡ ἀκολουθία τῶν δευτέρων, ἡ δοθεῖσα ἀκολουθία πάλιν δὲν ἔχει ἀνώτερον φραγμόν, ὡς εἴδομεν εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν.

4) Ἡ ἀκολουθία $-1, +1, -1, +1, \ldots (-1)^\nu$ εἶναι ἀπροσδιόριστος, ἤτοι εἰς οὐδένα ἀριθμὸν τείνει. Διότι ἐὰν θέσωμεν $S_\nu=1-1+1-1+\ldots+(-1)^\nu$, εἶναι φανερὸν ὅτι $S_{2\lambda}=0$ καὶ $S_{2\lambda+1}=0$. Οὕτως ἐφ' ὅσον λαμβάνομεν ὅρους ὁλοὲν περισσοτέρους εὑρίσκομεν ἀθροίσματα ἐναλλὰξ 1 καὶ 0.

645. α') Ὁ 1ος ὅρος τῆς ἀκολουθίας $\chi_\nu = \nu^2 \cdot 5^\nu$ εἶναι $\chi_1 = 1^1 \cdot 5^1 = 5$ καὶ ὁ 10ος ὅρος αὐτῆς εἶναι $\chi_{10} = 10^2 \cdot 5^{10}$. β') Ὁ 5ος ὅρος τῆς ἀκολουθίας $\chi_\nu = \dfrac{3^\nu}{\sqrt{\nu} - (-1)^\nu}$ εἶναι $\chi^5 = \dfrac{3^5}{\sqrt{5} + 1^5}$. γ') Ὁ 7ος ὅρος τῆς $\chi_\nu = \dfrac{\nu+3}{\nu^2+1}$ εἶναι $\chi_7 = \dfrac{7+3}{7^2+1} = \dfrac{10}{50} = \dfrac{1}{5}$.

646. Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς η πρέπει νὰ εἶναι τοιοῦτος ὥστε ἂν $\nu > \eta$, θὰ εἶναι $1 : \nu^2 < 0{,}35$, ἤτοι $\nu^2 > 1 : 0{,}35 = 100 : 35$ καὶ ἑπομένως $\nu > 10 : \sqrt{35} = 10\sqrt{35} : 35$. Ὥστε ἐὰν λάβωμεν ὡς ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ η, μίαν τιμὴν μεγαλυτέραν τοῦ $10\sqrt{35} : 35$ π.χ. $\eta = 2$, διὰ $\nu > 2$ θὰ εἶναι $1 : \nu^2 < 0{,}35$.

Ὁμοίως ἵνα $1 : \nu^2 < 0{.}00001$, ἤτοι ἵνα $\nu^2 > 10^5$ ἢ $\nu > 100\sqrt{10}$ ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ὡς $\eta = 316$, ὁπότε διὰ $\nu > 316$ θὰ εἶναι $1 : \nu^2 < 0{,}00001$.

647. Ἂν $\text{ὅρ}\chi_\nu = \alpha$, θὰ εἶναι $\text{ὅρ}(\chi_\nu - \alpha) = 0$ καὶ ἑπομένως ἐὰν λ σταθερὸς ἀριθμός, θὰ εἶναι $\text{ὅρ}[\lambda(\chi_\nu - \alpha)] = 0$.

1) Ἂν $\text{ὅρ}\chi_\nu = \alpha$ καὶ $\text{ὅρ}\chi_\nu{}' = \beta$, θὰ εἶναι $\text{ὅρ}(\chi_\nu - \alpha) = 0$, $\text{ὅρ}(\chi_\nu{}' - \beta) = 0$ καὶ κατὰ συνέπειαν $\text{ὅρ}[\chi_\nu + \chi_\nu{}') - (\alpha + \beta)] = 0$.

2) Ἐπειδὴ $\text{ὅρ}(\chi_\nu - \alpha) = 0$ καὶ $\text{ὅρ}(\chi_\nu{}' - \beta) = 0$, ἕπεται $\text{ὅρ}[(\chi_\nu - \alpha) \cdot (\chi_\nu{}' - \beta)] = 0$ ἤτοι $\text{ὅρ}(\chi_\nu \chi_\nu{}' - \alpha\chi_\nu{}' - \beta\chi_\nu + \alpha\beta) = \text{ὅρ}(\chi_\nu \chi_\nu{}' - \alpha\beta - \alpha\beta + \alpha\beta) = 0$ ἢ $\text{ὅρ}(\chi_\nu \chi_\nu{}' - \alpha\beta) = 0$ δηλαδὴ $\text{ὅρ}(\chi_\nu \chi_\nu{}') = \alpha\beta$.

3) Βλέπε περὶ ὁρίου τοῦ πηλίκου δύο μεταβλητῶν ποσῶν.

648. Ἐκ τῆς ἀνισότητος $\left| 6 + \dfrac{\nu}{\nu+1} - 7 \right| < 0{,}0025$, εὑρίσκομεν $\left| \dfrac{-1}{\nu+1} \right| < 0{,}0025$, ἤτοι $\dfrac{1}{\nu+1} < 0{,}0025$ ἢ $\nu > \dfrac{1}{0{,}0025} - 1 = \dfrac{0{,}9975}{0{,}0025} = 399$.

Ὥστε ἂν λάβωμεν $\eta = 400$, διὰ $\nu \geqslant 400$ θὰ εἶναι $\left| 6 + \dfrac{\nu}{\nu+1} - 7 \right| < 0{.}0025$.

649. Ὁμοίως ἐκ τῆς ἀνισότητος $\left| 6 + \dfrac{\nu}{\nu+1} - 7 \right| < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ εὑρίσκομεν $\nu > \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$. Ἂν λοιπὸν λάβωμεν ὡς η ἀριθμὸν θετικὸν μεγαλύτερον τοῦ $\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ διὰ $\nu \geqslant \eta$ θὰ εἶναι $\left| 6 + \dfrac{\nu}{\nu+1} - 7 \right| < \varepsilon$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ θετικὸς ε, δύναται νὰ εἶναι ὁσονδήποτε μικρός, ἕπεται ὅτι $\text{ὅρ}\left(6 + \dfrac{\nu}{\nu+1} - 7 \right) = 0$ ἤτοι $\text{ὅρ}\left(6 + \dfrac{\nu}{\nu+1} \right) = 7$.

650. Ἵνα ἡ ἀκολουθία $\chi_\nu = 5 + \dfrac{1}{\nu}$ ἔχει ὅριον τὸ 5, ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\text{ὅρ}(\chi_\nu - 5) = \text{ὅρ}\left(5 + \dfrac{1}{\nu} - 5 \right) = \dfrac{1}{\nu} = 0$ ὅπερ πράγματι συμβαίνει.

Ὁμοίως ἵνα $\text{ὅρ}\,\psi_\mu = \text{ὅρ}\left(6 - \dfrac{1}{\mu^2}\right) = 6$, ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\text{ὅρ}\,(\psi_\mu - 6) = \text{ὅρ}\left(6 - \dfrac{1}{\mu^2} - 6\right) = -\dfrac{1}{\mu^2} = 0$, ὅπερ πράγματι συμβαίνει.

651. α′) Ἐὰν θέσωμεν $\psi = 1 - \frac{2}{\chi} + \frac{5}{\chi^2}$, ἔχομεν ὅρ ψ = ὅρ $1 - \frac{2}{\text{ὅρ}\chi} + \frac{5}{\text{ὅρ}\chi^2}$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ὅρ $\chi = 1$, εἶναι ὅρ $\psi = 1 - 2 + 5 = 4$. β′) Ὁμοίως ἔχομεν ὅρ ψ = ὅρ $1 + (7 :$ ὅρ $\chi^2) = 1 + (7 : 4) = 11 : 4$. γ′) Εἶναι ὅρ $\psi = 3$ ὅρ $\chi + 6$ ὅρ $\chi^2 = 3 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 0$. δ′) ὅρ ψ = ὅρ$(\chi^2 + 1)$: ὅρ$(\chi + 3)$ = =(ὅρ $\chi^2+1)$: (ὅρ $\chi+3)=[(-2)^2+1] : [(-2)+3]=5$.

652. α′) Εἶναι ὅρ ψ = [ὅρ $(\chi-k)^2 - 2k$ ὅρ χ^3] : ὅρ $\chi \cdot$ (ὅρ $\chi + k)=[(0-k)^2 - 2k \cdot 0^3] : 0(0+k)=k^2 : 0=\infty$. β′) ὅρ $\psi=5$: ὅρ $(3\chi^2+5\chi)=5 : (3 \cdot \infty^2+5 \cdot \infty) = 5 : \infty) = 0$. γ′) Εἶναι $\psi=\chi^2\left(\alpha + \frac{\beta}{\chi} + \frac{\gamma}{\chi^2}\right)$ καὶ ὅρ $\psi = \infty^2(\alpha+0+0) = \alpha \cdot \infty = \pm\infty\left(\alpha \gtrless 0\right)$. δ′) Ὁμοίως εἶναι ὅρ $\psi=\infty^5(-\alpha^2 + 0 + 0)=-\alpha^2 \cdot \infty = -\infty$. ε′) Εἶναι ὅρ ψ=ὅρ $(2+3 : \chi)=2+3 : 0=2+\infty = \infty$. στ′) Εἶναι

ὅρ ψ=ὅρ $(5\chi - 5)=5 \cdot \infty - 5=\infty - 5=\infty$.

653. α′) Ὅταν τὸ χ τείνῃ πρὸς τὸ 5 ἐκ τιμῶν ἐλασσόνων (δηλαδὴ ἐκ τιμῶν $\chi<5$) τότε εἶναι $1 :$ ὅρ$(\chi-5)=-\infty$. β′) Ὅταν τὸ χ τείνῃ πρὸς τὸ 5 ἐκ τιμῶν μειζόνων, εἶναι $1 :$ ὅρ$(\chi-5)=+\infty$.

654. 1) Δι' ὅρ $\chi = 3$ εἶναι ὅρ$(3\chi^2 - 5) = 22$. 2) Δι' ὅρ $\psi = 2$ εἶναι ὅρ$\left(\frac{2}{\psi^2} + 4\psi\right) = 8\frac{1}{2}$. 3) Δι' ὅρ$\omega=0$, εἶναι ὅρ$(2\omega^2-4\omega-5)=-5$. Ὥστε τὸ ζητούμενον ὅριον ἰσοῦται μὲ $22+8\frac{1}{2}-5=25\frac{1}{2}$.

655. Εἶναι ὅρ$\left(\frac{2}{\chi} - \frac{5}{\psi^2}+4\omega^2\right)= \frac{2}{\infty} - \frac{5}{2^2} + 4(-3)^2 = 0 - \frac{5}{4} + 36 = 34\,{}^3/_4$.

656. Εἶναι ὅρ $\frac{3\chi^2-2\omega^3+4\psi}{2\chi^2-5} = \frac{75-0-12}{50-5} = \frac{63}{45} = \frac{7}{5}$.

657. α′) Εἶναι ὅρ $\frac{\chi^2-5\chi+6}{\chi-3}$ =ὅρ $\frac{(\chi-2)(\chi-3)}{\chi-3}$ =ὅρ$(\chi-2)=3-2=1$.

β′) ὅρ $\frac{\chi^3+\chi-1}{\chi^5-4\chi+2} = \frac{3^3+3-1}{3^5-4 \cdot 3+2} = \frac{11}{233}$.

Περὶ παραγώγων.

Ἀσκήσεις.— *658.* α′) Εἶναι $\psi'=(\chi^3-2\chi+5)'+(3\chi^2-8\chi-1)'=(3\chi^2-2)+(6\chi-8)=3\chi^2+6\chi-10$ β′) εἶναι $\psi'=15\chi^2+4\chi-3-4\chi+4=15\chi^2+1$ γ′) $\psi'=(2\alpha\chi+\beta)+(2\alpha\chi-\beta)+(2\alpha\chi)+0=6\alpha\chi$ δ′) $\psi'=(\chi-3)'(\chi-4)+(\chi-3)(\chi-4)' = 1\cdot(\chi-4)+(\chi-3)\cdot 1=2\chi-7$ ε′) $\psi'=(\chi^2+3)'\cdot(2\chi^2-3\chi+1)+(\chi^2+3)(2\chi^2-3\chi+1)' = 2\chi\cdot(2\chi^2-3\chi+1)+(\chi^2+3)(4\chi-3)=8\chi^3-9\chi^2+14\chi-9$ στ′) $\psi'=(2\chi-1)'\cdot(3\chi+1)(4\chi-2)+(2\chi-1)\cdot(3\chi+1)'\cdot(4\chi-2)+(2\chi-1)\cdot(3\chi+1)\cdot(4\chi-2)'=24\chi^2-4\chi-4+$

$+24\chi^2-24\chi+6+24\chi^2-4\chi-4=72\chi^2-32\chi-2$ ζ') $\psi'=(\chi^3)'\cdot(2\chi^2-5)(3\chi^3-1)+\chi^3\cdot$
$\cdot(2\chi^2-5)\cdot(3\chi^3-1)+\chi^3(2\chi^2-5)(3\chi^3-1)'=3\chi^2\cdot(2\chi^2-5)(3\chi^3-1)+\chi^3\cdot4\chi\cdot(3\chi^3-1)+$
$+\chi^3\cdot(2\chi^2-5)\cdot9\chi^2=3\chi^2(6\chi^5-15\chi^3-2\chi^2+5)+12\chi^7-4\chi^4+18\chi^7-45\chi^5$ κλπ.

η') Εἶναι $\psi'=\dfrac{(\chi^2-1)\cdot1'-1\cdot(\chi^2-1)'}{(\chi^2-1)^2}=\dfrac{(\chi^2-1)\cdot0-1\cdot2\chi}{(\chi^2-1)^2}=-\dfrac{2\chi}{(\chi^2-1)^2}$.

θ') $\psi'=\dfrac{(\chi+1)\cdot\chi'-\chi(\chi+1)'}{(\chi+1)^2}=\dfrac{(\chi+1)\cdot1-\chi\cdot1}{(\chi+1)^2}=\dfrac{1}{(\chi+1)^2}$.

ι') $\psi'=\dfrac{(4\chi-6)\cdot(3\chi-3)'-(3\chi-3)(4\chi-6)'}{(4\chi-6)^2}=\dfrac{(4\chi-6)\cdot3-(3\chi-3).}{(4\chi-6)^2}=$

$=-\dfrac{6}{(4\chi-6)^2}$ ια') $\psi'=\dfrac{(3\chi-1)^2\cdot[\chi(\chi-3)]'-\chi(\chi-3)\cdot[3\chi-1)^{2\,\prime}}{(3\chi-1,^4}=$

$=\dfrac{(3\chi-1)^2\cdot(2\chi-3)-\chi(\chi-3)(18\chi-6)}{(3\chi-1)^4}=\dfrac{21\chi^2+2\chi-3}{(3\chi-1)^4}$

ιβ') $\psi'=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(\chi^2-3\chi-5)'}{\sqrt{\chi^2-3\chi-5}}=\dfrac{2\chi-3}{2\sqrt{\chi^2-3\chi-5}}$

ιγ') $\psi'=(3\chi)'-(4\sqrt{\chi})'=3-\dfrac{4}{2\sqrt{\chi}}=3-\dfrac{2}{\sqrt{\chi}}$.

ιδ') $\psi'=(2\chi^2-3)'+(3\sqrt{\chi^2-2\chi})'=4\chi+\dfrac{3(2\chi-2)}{2\sqrt{\chi^2-2\chi}}$.

659. α') $\psi'=15\chi^2-6\chi+2$ καὶ $\psi''=30\chi-6$.

β') $\psi'=30\chi^5-21\chi^2+3$ καὶ $\psi''=150\chi^4-42\chi$.

γ') $\psi'=3(2\chi-3)^2\cdot(2\chi-3)'=6(2\chi-3)^2$ καὶ $\psi''=12\cdot(2\chi-3)\cdot(2\chi-3)'=$
$=24(2\chi-3)$.

δ') $\psi'=\dfrac{(1-\chi)'}{2\sqrt{1-\chi}}=\dfrac{-1}{2\sqrt{1-\chi}}$ καὶ $\psi''=$

$=\dfrac{(2\sqrt{1-\chi})\cdot(-1)'-(-1)\cdot(2\sqrt{1-\chi})'}{4(1-\chi)}=\left[(2\sqrt{1-\chi})\cdot0+2\cdot\dfrac{-1}{2\sqrt{1-\chi}}\right]:$

$:4(1-\chi)=-\dfrac{1}{4(1-\chi)\sqrt{1-\chi}}=-1:4(1-\chi)^{\frac{3}{2}}$

ε') $\psi'=\dfrac{(\chi+2)\cdot(\chi^2+3)'-(\chi^2+3)(\chi+2)'}{(\chi+2)^2}=\dfrac{(\chi+2)\cdot2\chi-(\chi^2+3)}{(\chi+2)^2}=$

$=\dfrac{\chi^2+4\chi-3}{(\chi+1)^2}$, $\psi''=\dfrac{(\chi+2)^2\cdot(2\chi+4)-(\chi^2+4\chi-3)\cdot2(\chi+2)}{(\chi+2)^4}=\dfrac{14(\chi+2)}{(\chi+2)^4}=$

$=\dfrac{14}{(\chi+2)^3}$ στ') $\psi'=\dfrac{(3\chi^2+5)'}{2\sqrt{3\chi^2+5}}=\dfrac{6\chi}{2\sqrt{3\chi^2+5}}=\dfrac{3\chi}{\sqrt{3\chi^2+5}}$

$$\psi''=\frac{\sqrt{3\chi^2+5}\cdot(3\chi)'-3\chi\cdot\left(\sqrt{3\chi^2+5}\right)'}{3\chi^2+5}=\left[\sqrt{3\chi^2+5}\cdot 3-3\chi\cdot\frac{3\chi}{\sqrt{3\chi^2+5}}\right]:$$

$$:(3\chi^2+5)=[3(3\chi^2+5)-9\chi^2]:[(3\chi^2+5)\sqrt{3\chi^2+5}]=15:(3\chi^2+5)^{\frac{3}{2}}$$

660. α') $\psi'=\alpha\sigma\upsilon\nu\chi$, $\psi''=-\alpha\eta\mu\chi$ β') $\psi'=2\sigma\upsilon\nu 2\chi$, $\psi''=-4\eta\mu 2\chi$,

γ') $\psi'=-\eta\mu 7\chi\cdot(7\chi)'=-7\eta\mu 7\chi$, $\psi''=-49\sigma\upsilon\nu 7\chi$ δ') $\psi'=\dfrac{3}{\sigma\upsilon\nu^2(3\chi)}$

$$\psi''=\frac{\sigma\upsilon\nu^2(3\chi)\cdot 3'-3\sigma\upsilon\nu^2(3\chi)'}{\sigma\upsilon\nu^4(3\chi)}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2(3\chi)\cdot 0-3\cdot 2\sigma\upsilon\nu 3\chi\cdot(-3)\eta\mu 3\chi}{\sigma\upsilon\nu^4(3\chi)}=$$

$$=\frac{18\eta\mu 3\chi\,\sigma\upsilon\nu 3\chi}{\sigma\upsilon\nu^4(3\chi)}=\frac{18\eta\mu 3\chi}{\sigma\upsilon\nu^3(3\chi)}.$$ ε') $\psi'=\dfrac{-1\cdot(4\chi)'}{\eta\mu^2(4\chi)}=\dfrac{-4}{\eta\mu^2(4\chi)}$ καὶ

$$\psi''=\frac{0-(-4)\eta\mu^2(4\chi)'}{\eta\mu^4(4\chi)}=\frac{4\cdot 2\sigma\upsilon\nu 4\chi\eta\mu 4\chi(4\chi)'}{\eta\mu^4(4\chi)}=\frac{32\sigma\upsilon\nu 4\chi\eta\mu 4\chi}{\eta\mu^4(4\chi)}=\frac{32\sigma\upsilon\nu 4\chi}{\eta\mu^3(4\chi)},$$

στ') $\psi'=2\tau\varepsilon\mu\chi(\tau\varepsilon\mu\chi)'=2\tau\varepsilon\mu\chi\cdot\left(\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi}\right)'=2\cdot\tau\varepsilon\mu\chi\cdot\dfrac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}=2\tau\varepsilon\mu^2\chi\varepsilon\varphi\chi.$

$\psi''=2[\tau\varepsilon\mu^2\chi(\varepsilon\varphi\chi)'+\varepsilon\varphi\chi\cdot(\tau\varepsilon\mu^2\chi)']=2\cdot(\tau\varepsilon\mu^2\chi\cdot\tau\varepsilon\mu^2\chi+\varepsilon\varphi\chi\cdot 2\tau\varepsilon\mu^2\chi\varepsilon\varphi\chi)=$
$=2\tau\varepsilon\mu^2\chi(\tau\varepsilon\mu^2\chi+2\varepsilon\varphi^2\chi)=2\tau\varepsilon\mu^2\chi[\tau\varepsilon\mu^2\chi+2(\tau\varepsilon\mu^2\chi-1)]=2\tau\varepsilon\mu^2\chi(3\tau\varepsilon\mu^2\chi-2).$

ζ') $\psi'=2\sigma\tau\varepsilon\mu\chi\cdot(\sigma\tau\varepsilon\mu\chi)'=2\sigma\tau\varepsilon\mu\chi\cdot\left(\dfrac{1}{\eta\mu\chi}\right)'=2\sigma\tau\varepsilon\mu\chi\cdot\left(-\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu^2\chi}\right)=-2\sigma\tau\varepsilon\mu^2\chi\sigma\varphi\chi$

$\psi''=-2[\sigma\tau\varepsilon\mu^2\chi\cdot(\sigma\varphi\chi)'+\sigma\varphi\chi(\sigma\tau\varepsilon\mu^2\chi)']=-2[\sigma\tau\varepsilon\mu^2\chi\cdot(-1-\sigma\varphi^2\chi)+$
$+\sigma\varphi\chi\cdot(-2\sigma\tau\varepsilon\mu^2\chi\sigma\varphi\chi)]=2(\sigma\tau\varepsilon\mu^2\chi+\sigma\tau\varepsilon\mu^2\chi\sigma\varphi^2\chi+2\sigma\tau\varepsilon\mu^2\chi\sigma\varphi^2\chi)=2\sigma\tau\varepsilon\mu^2\chi(3\sigma\varphi^2\chi+$
$1)=2\sigma\tau\varepsilon\mu^2\chi[3(\sigma\tau\varepsilon\mu^2\chi-1)+1]=2\sigma\tau\varepsilon\mu^2\chi(3+\sigma\tau\varepsilon\mu^2\chi-2).$

η') $\psi'=2\eta\mu\chi(\eta\mu\chi)'=2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi=\eta\mu 2\chi$ καὶ $\psi''=(2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi)'=2[\eta\mu\chi\cdot(-\eta\mu\chi)+$
$+\sigma\upsilon\nu\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi]=2(\sigma\upsilon\nu^2\chi-\eta\mu^2\chi)=2\sigma\upsilon\nu 2\chi.$

θ') $\psi'=3\sigma\upsilon\nu^2\chi(\sigma\upsilon\nu\chi)'=-3\sigma\upsilon\nu^2\chi\eta\mu\chi$ καὶ $\psi''=-3[\sigma\upsilon\nu^2\chi(\eta\mu\chi)'+$
$+\eta\mu\chi(\sigma\upsilon\nu^2\chi)']=-3(\sigma\upsilon\nu^3\chi+2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi(-\eta\mu\chi))=-3(\sigma\upsilon\nu^3\chi-2\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu\chi)=$
$=-3[\sigma\upsilon\nu^3\chi-2(1-\sigma\upsilon\nu^2\chi)\sigma\upsilon\nu\chi]=-3\sigma\upsilon\nu\chi(3\sigma\upsilon\nu^2\chi-2).$

ι') $\psi'=(\chi^3)'\eta\mu 3\chi+\chi^3(\eta\mu 3\chi)'=3\chi^2\eta\mu 3\chi+\chi^3\cdot 3\sigma\upsilon\nu 3\chi=3\chi^2(\eta\mu 3\chi+\chi\sigma\upsilon\nu 3\chi)$
$\psi''=(3\chi^2)'\cdot(\eta\mu 3\chi+\chi\sigma\upsilon\nu 3\chi)+3\chi^2(\eta\mu 3\chi+\chi\sigma\upsilon\nu 3\chi)'=6\chi(\eta\mu 3\chi+\chi\sigma\upsilon\nu 3\chi)+$
$+3\chi^2(3\sigma\upsilon\nu 3\chi+\sigma\upsilon\nu 3\chi-3\chi\eta\mu 3\chi)=18\chi^2\sigma\upsilon\nu 3\chi-3\chi(3\chi^2-2)\eta\mu 3\chi.$

ια') $\psi'=(\chi^2)'\sigma\upsilon\nu^2\chi+\chi^2(\sigma\upsilon\nu^2\chi)'=2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi-\chi^2\eta\mu 2\chi=\chi(2\sigma\upsilon\nu^2\chi-\chi\eta\mu 2\chi)$
$\psi''=\chi'\cdot(2\sigma\upsilon\nu^2\chi-\chi\eta\mu 2\chi)+\chi(2\sigma\upsilon\nu^2\chi-\chi\eta\mu 2\chi)'=(2\sigma\upsilon\nu^2\chi-\chi\eta\mu 2\chi)+$
$+\chi(-2\chi\eta\mu 2\chi-\eta\mu 2\chi-2\chi\sigma\upsilon\nu 2\chi)=(2\sigma\upsilon\nu^2\chi-\chi\eta\mu 2\chi)-\chi(3\eta\mu 2\chi+2\chi\sigma\upsilon\nu 2\chi).$

ιβ') $\psi'=2\chi\varepsilon\varphi 3\chi+\dfrac{3\chi^2}{\sigma\upsilon\nu^2(3\chi)}$ καὶ $\psi''=2\varepsilon\varphi 3\chi+\dfrac{6\chi}{\sigma\upsilon\nu^2(3\chi)}+$

$$+\frac{6\chi\sigma\upsilon\nu^2(3\chi)+3\chi^2\eta\mu 6\chi}{\sigma\upsilon\nu^4(3\chi)}.$$

ιγ') $\psi' = \dfrac{(\eta\mu\chi)'}{2\sqrt{\eta\mu\chi}} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi}{2\sqrt{\eta\mu\chi}}$ καὶ

$$\psi'' = \left(2\sqrt{\eta\mu\chi}\cdot(-\eta\mu\chi) - \sigma\upsilon\nu\chi\cdot\frac{2\sigma\upsilon\nu\chi}{2\sqrt{\eta\mu\chi}}\right) : 4\eta\mu\chi =$$

$$= (-4\eta\mu^2\chi - 2\sigma\upsilon\nu^2\chi) : 8\eta\mu\chi\sqrt{\eta\mu\chi} = -(2\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi) : 4\eta\mu\chi\sqrt{\eta\mu\chi}.$$

ιδ') $\psi' = \dfrac{(\sigma\upsilon\nu\chi)'}{2\sqrt{\sigma\upsilon\nu\chi}} = \dfrac{-\eta\mu\chi}{2\sqrt{\sigma\upsilon\nu\chi}}$ καὶ

$$\psi'' = \left(-2\sigma\upsilon\nu\chi\sqrt{\sigma\upsilon\nu\chi} + \eta\mu\chi\cdot\frac{-2\eta\mu\chi}{2\sqrt{\sigma\upsilon\nu\chi}}\right) :$$

$$: 4\sigma\upsilon\nu\chi = -(2\sigma\upsilon\nu^2\chi + \eta\mu^2\chi) : 4\sigma\upsilon\nu\chi\sqrt{\sigma\upsilon\nu\chi}.$$

ιε') $\psi' = -\eta\mu\sqrt{\chi^2+1}\cdot(\sqrt{\chi^2+1})' = \dfrac{-2\chi\eta\mu\sqrt{\chi^2+1}}{2\sqrt{\chi^2+1}} = \dfrac{-\chi\eta\mu\sqrt{\chi^2+1}}{\sqrt{\chi^2+1}}$

$$\psi'' = \frac{-\sqrt{\chi^2+1}\cdot(\chi\eta\mu\sqrt{\chi^2+1})' + \chi\eta\mu\sqrt{\chi^2+1}\cdot(\sqrt{\chi^2+1})'}{\chi^2+1} =$$

$$= \left[-\sqrt{\chi^2+1}\cdot\left(\eta\mu\sqrt{\chi^2+1} + \chi\cdot\frac{2\chi\sigma\upsilon\nu\sqrt{\chi^2+1}}{2\sqrt{\chi^2+1}}\right) + \chi\eta\mu\sqrt{\chi^2+1}\cdot\frac{2\chi}{2\sqrt{\chi^2+1}}\right] : (\chi^2+1).$$

661. α') $\psi=\chi+3$. 1) Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι ὡρισμένη καὶ συνεχὴς διὰ ὅλας τὰς τιμὰς τῆς χ. 2) Ἐπειδὴ $\psi'=1$ (σταθερὰ) καὶ θετική, ἡ ψ εἶναι σταθερῶς αὔξουσα (δηλαδὴ δὲν ἔχει μέγιστον ἢ ἐλάχιστον). 3) Δι' ὅρχ$=+\infty$ εἶναι ὅρψ$=+\infty$ καὶ δι' ὅρχ$=-\infty$ εἶναι ὅρψ$=-\infty$. Ὥστε τὸ διώνυμον ψ αὐξάνει ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$, ὅταν τὸ χ αὐξάνῃ ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$. 4) Ἡ γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τῆς ψ εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ τέμνουσα τοὺς ἄξονας εἰς τὰ σημεῖα (0,3) καὶ (−3,0) μὲ συντελεστὴν κατευθύνσεως τὴν μονάδα 1, (συντελεστὴν τοῦ χ).

β') $\psi=-3\chi+1$. 1) Ἡ ψ ὡρισμένη καὶ συνεχὴς δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῆς χ. 2) Ἐπειδὴ $\psi'=-3$ (σταθερὰ) καὶ ἀρνητική, ἡ ψ εἶναι σταθερῶς φθίνουσα. 3) Δι' ὅρχ$=+\infty$ εἶναι ὅρψ$=-\infty$ καὶ δι' ὅρχ$=-\infty$, ὅρψ$=+\infty$. Ὥστε ἡ ψ ἐλαττοῦται ἀπὸ τοῦ $+\infty$ ἕως τὸ $-\infty$, ὅταν τὸ χ αὐξάνῃ ἀπὸ τοῦ $-\infty$ ἕως τὸ $+\infty$. 4) Ἡ ψ παριστᾷ εὐθεῖαν τέμνουσαν τοὺς ἄξονας εἰς τὰ σημεῖα (0,1) καὶ (1/3,0) μὲ συντελεστὴν κατευθύνσεως −3.

γ') $\psi=\chi^3+3$. 1) Ἡ ψ ὡρισμένη καὶ συνεχὴς διὰ ὅλας τὰς τιμὰς τῆς χ. 2) Ἡ $\psi'=3\chi^2$ γίνεται 0 διὰ $\chi=0$ χωρὶς νὰ ἀλλάξῃ σημεῖον, διότι δι' ὅλας τὰς ἄλλας τιμὰς τοῦ χ εἶναι θετική. Ἐπομένως ἡ ψ εἶναι σταθερῶς αὔξουσα. 3) Διὰ χ ἀπὸ $-\infty$ ἕως 0 ἡ ψ αὐξάνεται ἀπὸ τοῦ $-\infty$ ἕως 3 καὶ διὰ χ ἀπὸ 0 ἕως $+\infty$, ἡ ψ ἐξακολουθεῖ νὰ αὐξάνῃ ἀπὸ τοῦ 3 ἕως $+\infty$. 4) Ὥστε ἡ καμπύλη ἣν παριστᾷ ἡ ψ (τρίτου βαθμοῦ διότι καὶ ἡ ψ εἶναι τρίτου βαθμοῦ) τέμνει τὸν ἄξονα τῶν χ ἅπαξ, εἰς τὸ σημεῖον $(-\sqrt[3]{3},0)$ ἤτοι ἡ συνάρτησις ψ ἔχει μίαν μόνον ρίζαν πραγματικήν, καὶ τὸν ἄξονα τῶν ψ τὸν τέμνει εἰς τὸ σημεῖον (0,3).

δ΄) $\psi=\chi^2-5\chi+6$. 1) Ἡ ψ ὡρισμένη καὶ συνεχὴς δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῆς χ. 2) Ἡ $\psi'=2\chi-5$ γίνεται 0 διὰ $\chi=5/2$, ἐνῷ ἀλλάζει σημεῖον ἀπὸ τοῦ ἀρνητικοῦ (ὅταν $\chi<5/2$) εἰς τὸ θετικὸν (ὅταν $\chi>5/2$), διότι δι' $\text{ὅρ}\chi=\pm\infty$ εἶναι $\text{ὅρ}\psi=\text{ὅρ}\chi^2=+\infty$. Ὥστε διὰ $\chi=5/2$ ἡ ψ ἔχει ἐλάχιστον ἴσον μὲ $\chi^2-5\chi+6=(5/2)^2-5\cdot(5/2)+6=-1/4$. 3)Ἡ συνάρτησις ψ τῆς μορφῆς $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ γνωρίζομεν ὅτι παριστᾷ παραβολὴν (καμπύλην 2ου βαθμοῦ) τέμνουσαν τὸν ἄξονα τῶν χ εἰς τὰ σημεῖα (3,0) καὶ (2,0) ἐνῷ τὸν ἄξονα τῶν ψ τὸν τέμνει εἰς τὸ σημεῖον (0,6).

ε΄) $\psi=\chi^3-8$. Ὁμοία μὲ τὴν ἀνωτέρω γ΄, διότι $\psi'=3\chi^2$. Ἡ καμπύλη ἣν παριστᾷ ἡ ψ, τέμνει τὸν ἄξονα τῶν χ εἰς τὸ σημεῖον $(\sqrt[3]{8},0)$ ἤτοι εἰς τὸ σημεῖον (2,0) καὶ τὸν ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον (0,−8)

στ΄) $\psi=\chi(\chi-1)^2=\chi(\chi^2-2\chi+1)=\chi^3-2\chi^2+\chi$. Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι ὡρισμένη καὶ συνεχὴς δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ χ. 2) Ἡ $\psi'=3\chi^2-4\chi+1$ γίνεται 0 διὰ $\chi=1/3$ καὶ $\chi=1$. Ἀλλ' ὅταν τὸ χ διέρχεται διὰ τῆς τιμῆς $1/3$ (ἤτοι ἀπὸ μικρότερον τοῦ $1/3$ γίνεται μεγαλύτερον αὐτοῦ) ἡ ψ΄ ἀπὸ θετικὴ γίνεται ἀρνητική, ἐνῷ ὅταν τὸ χ διέρχεται διὰ τῆς τιμῆς 1, ἡ ψ΄ ἀπὸ ἀρνητικὴ γίνεται θετική, διότι δι' $\text{ὅρ}\chi=\pm\infty$ ἔχομεν $\text{ὅρ}\psi=\pm\infty$ ἀντιστοίχως. Ὥστε ἡ ψ ἔχει ἓν μέγιστον ἴσον μὲ $(1/3)^3-2(1/3)^2+1/3=4/27$ καὶ ἓν ἐλάχιστον ἴσον μὲ $1^3-2\cdot1^2+1=0$. 3) Ἐπειδὴ δὲ διὰ $\chi=0$ εἶναι $\psi=0$ καὶ διὰ $\psi=0$ εἶναι $\chi=0$ καὶ $\chi=1$ ἡ καμπύλη ἣν παριστᾷ ἡ ψ διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων καὶ ἔχει μετὰ τοῦ ἄξονος χ κοινὸν σημεῖον τὸ (1,0)

ζ΄) $\psi=\chi^2+3\chi+2$. Ὁμοία μὲ τὴν ἄνω δ΄. Ἡ $\psi'=2\chi+3$, γίνεται μηδὲν διὰ $\chi=-3/2$ μεταβαίνουσα ἐκ τοῦ ἀρνητικοῦ (διὰ $\chi<-3/2$) εἰς τὸ θετικὸν (διὰ $\chi>-3/2$). Ὥστε ἡ ψ ἔχει ἐλάχιστον ἴσον μὲ $(-3/2)^2+3(-3/2)+$ $+2=-1/4$. Ἡ παραβολὴ ἣν παριστᾷ ἡ ψ, τέμνει τὸν ἄξονα τῶν χ εἰς τὰ σημεῖα (−1,0) καὶ (−2,0), τὸν δὲ ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον (0,2).

η΄) $\psi=\chi^3-5\chi-4$. Ὁμοία μὲ τὴν ἄνω στ΄. Ἡ $\psi'=3\chi^2-5$ γίνεται μηδὲν διὰ $\chi=-\sqrt{5/3}$ καὶ $\chi=+\sqrt{5/3}$, ἐνῷ ἡ $\psi''=6\chi$ διὰ μὲν $\chi=-\sqrt{5/3}$ γίνεται $-6\sqrt{5/3}<0$, διὰ δὲ $\chi=+\sqrt{5/3}$ γίνεται $6\sqrt{5/3}>0$. Ὥστε διὰ $\chi=$

$$=-\sqrt{\frac{5}{3}} \text{ ἡ ψ ἔχει μέγιστον ἴσον μὲ } \left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^3-5\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)-$$

$$-4=\frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}-4 \text{ καὶ διὰ } \chi=\sqrt{\frac{5}{3}}, \text{ ἡ ψ ἔχει ἐλάχιστον ἴσον μὲ}$$

$$-\frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}-4.$$

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι $\psi=\chi^3-5\chi-4=(\chi+1)(\chi^2-\chi-4)$. Ὥστε διὰ $\psi=0$, εἶναι $\chi=-1$ καὶ $\chi=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$, ἐνῷ διὰ $\chi=0$ εἶναι $\psi=-4$. Ἑπομένως ἡ καμπύλη (τρίτου βαθμοῦ) ἣν παριστᾷ ἡ ψ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν χ εἰς τὰ σημεῖα $(-1,0)$, $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2},0\right)$ καὶ $\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2},0\right)$, ἐνῷ τὸν ἄξονα τῶν ψ τὸν τέμνει εἰς τὸ σημεῖον $(0,-4)$.

662. α΄) $\psi=\chi^2-3\chi+2$. Ἡ $\psi'=2\chi-3$ γίνεται μηδὲν διὰ $\chi={}^3/_2$ μεταβαίνουσα ἐκ τοῦ ἀρνητικοῦ (διὰ $\chi<{}^3/_2$) εἰς τὸ θετικὸν (διὰ $\chi>{}^3/_2$). Ἑπομένως διὰ $\chi={}^3/_2$ ἡ ψ ἔχει ἐλάχιστον ἴσον μὲ $({}^3/_2)^2-3({}^3/_2)+2=-1/4$.

β΄) $\psi=3\chi^3+2\chi^2$. Ἡ $\psi'=9\chi^2+4\chi$ γίνεται 0 διὰ $\chi=0$ καὶ $\chi=-{}^4/_9$. Ἀλλ' ἡ $\psi''=18\chi+4$ διὰ $\chi=0$, γίνεται $4>0$ καὶ διὰ $\chi=-{}^4/_9$ γίνεται $-4<0$. Ὥστε ἡ ψ διὰ $\chi=0$ ἔχει ἐλάχιστον ἴσον μὲ $3\cdot0+4\cdot0=0$ καὶ διὰ $\chi=-{}^4/_9$ ἔχει μέγιστον ἴσον μὲ $3\cdot(-{}^4/_9)^3+2(-{}^4/_9)^2={}^{96}/_{729}={}^{32}/_{243}$.

γ΄) $\psi=\chi^3-36\chi$. Ἡ $\psi'=3\chi^2-36$ γίνεται μηδὲν διὰ $\chi=-\sqrt{12}$ καὶ $\chi=+\sqrt{12}$. Ἡ $\psi''=6\chi$ διὰ $\chi=-\sqrt{12}$ γίνεται ἀρνητικὴ καὶ διὰ $\chi=+\sqrt{12}$ γίνεται θετική. Ὥστε ἡ ψ διὰ $\chi=-\sqrt{12}$ ἔχει μέγιστον καὶ διὰ $\chi=+\sqrt{12}$ ἔχει ἐλάχιστον.

663. α΄) $\psi=\dfrac{\chi^3-3\chi^2+4\chi-2}{\chi^3+7\chi^2-5\chi-3}$ διὰ $\chi=1$ λαμβάνει τὴν ἀπροσδιόριστον μορφὴν $\psi=\dfrac{0}{0}$. Ἀλλ' ὁ λόγος τῶν παραγώγων τῶν ὅρων εἶναι $\dfrac{3\chi^2-6\chi+4}{3\chi^2+14\chi-5}$.

Ὥστε δι' ὅρχ=1 εἶναι $\text{ὅρψ}=\text{ὅρ}\,\dfrac{\chi^3-3\chi^2+4\chi-2}{\chi^3+7\chi^2-5\chi-3}=\text{ὅρ}\,\dfrac{3\chi^2-6\chi+4}{3\chi^2+14\chi-5}=$

$=\dfrac{3-6+4}{3+14-5}=\dfrac{1}{12}$.

β΄) Ἡ $\psi=\dfrac{\chi^3-5\chi^2+7\chi-3}{\chi^3-\chi^2-5\chi-3}$, διὰ $\chi=3$ λαμβάνει τὴν ἀπροσδιόριστον μορφὴν $\dfrac{0}{0}$. Ἀλλ' ὁ λόγος τῶν παραγώγων εἶναι $\dfrac{3\chi^2-10\chi+7}{3\chi^2-2\chi-5}$.

Ὥστε δι' ὅρχ = 3 εἶναι $\text{ὅρψ}=\text{ὅρ}\,\dfrac{3\chi^2-10\chi+7}{3\chi^2-2\chi-5}=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$.

γ΄) Ἡ $\psi=\dfrac{\chi^3-3\chi^2+4}{\chi^3-2\chi^2-4\chi+8}$ διὰ $\chi=2$ γίνεται $\dfrac{0}{0}$. Ἀλλὰ δι' ὅρχ = 2 εἶναι $\text{ὅρψ}=\text{ὅρ}\,\dfrac{3\chi^2-6\chi}{3\chi^2-4\chi-4}=\dfrac{0}{0}$. Ὥστε δι' ὅρχ = 2 αἱ δεύτεροι παράγωγοι ἔχουν ὅρ $\dfrac{6\chi-6}{6\chi-4}=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$. Ἑπομένως δι' ὅρχ=2 εἶναι ὅρψ $=\dfrac{3}{4}$.

δ΄) Ἡ $\psi=\dfrac{\chi^3-3\chi^2+4}{3\chi^3-18\chi^2+36\chi-24}$ διὰ $\chi=2$ γίνεται $\dfrac{0}{0}$. Ἀλλ' ἐπειδὴ δι' $\text{ὅρ}\chi=2$ εἶναι $\text{ὅρ}\dfrac{3\chi^2-6\chi}{9\chi^2-36\chi+36}=\dfrac{0}{0}$, λαμβάνομεν τὸ

$\text{ὅρ}\dfrac{6\chi-6}{18\chi-36}=\dfrac{6}{0}=\infty.$

Σημείωσις. Περισσότερα περὶ ἀπροσδιορίστων μορφῶν καὶ σχετικὰς ἀσκήσεις βλέπε «***Συμπλήρωμα τῆς Ἀλγέβρας***» Χρ. Μπαρμπαστάθη σελ. 71 - 74.

664. α') $\psi=3\chi$, $\psi'=3$ καὶ $d\psi=3d\chi$. β') $\psi'=21\chi^2$ καὶ $d\psi=21\chi^2d\chi$.

γ') $\psi'=6\chi-5$ καὶ $d\psi=(6\chi-5)d\chi$. δ') $\psi'=\dfrac{(\chi+1)\cdot3-3\chi\cdot1}{(\chi+1)^2}=\dfrac{3}{(\chi+1)^2}$ καὶ

$d\psi=\dfrac{3d\chi}{(\chi+1)^2}$. ε') $\psi'=\dfrac{(\chi^2+1)\cdot2\chi-(\chi^2-3)\cdot2\chi}{(\chi^2+1)^2}=\dfrac{8\chi}{(\chi^2+1)^2}$ καὶ $d\psi=\dfrac{8\chi d\chi}{(\chi^2+1)^2}$.

στ') $\psi'=\dfrac{6\chi}{2\sqrt{3\chi^2}}=\dfrac{3\chi}{\sqrt{3\chi^2}}$ καὶ $d\psi=\dfrac{3\chi d\chi}{\sqrt{3\chi^2}}$. ζ') $d\psi=\dfrac{(\chi-1)d\chi}{\sqrt{\chi^2-2\chi+1}}$.

665. α') $\int3\chi d\chi=\dfrac{3\chi^{1+1}}{1+1}+c=\dfrac{3\chi^2}{2}+c$. β') $=\dfrac{9\chi^3}{3}+c$.

γ') $=\dfrac{\chi^{-4+1}}{-4+1}+c=\dfrac{\chi^{-3}}{-3}+c=-\dfrac{1}{3\chi^3}+c$ δ') $=\dfrac{\chi^{-4}}{-4}+c=-\dfrac{1}{4\chi^4}+c$.

ε') $=\dfrac{1}{2\chi^2}+c$.

στ') $7\int\chi^{-5}d\chi=-7/4\chi^4+5$. ζ') $\int3\chi^2d\chi+\int2\chi^2d\chi-\int5\chi d\chi+\int6d\chi=3\chi^4/4+2\chi^2/3-$ $-5\chi^2/2+6\chi+c$. η') $=6\chi^4/4-7\chi^3/3-3\chi^2/2+c$. θ') Θέτομεν $\chi+2=\psi$, ὁπότε $d\chi=d\psi$.

Ὥστε τὸ ζητούμενον ἰσοῦται μὲ $\dfrac{\psi^4}{4}+c=\dfrac{(\chi+2)^4}{4}+c$.

ι') Ἔχομεν ὡς ἄνω $\int(\chi-1)^3d\chi=\dfrac{(\chi-1)^4}{4}+c$.

ια') $\int(\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi)d\chi=\int\eta\mu\chi d\chi+\int\sigma\upsilon\nu\chi d\chi=-\sigma\upsilon\nu\chi+\eta\mu\chi+c$.

ιβ') $\int\sigma\upsilon\nu2\chi d\chi$. Θέτομεν $2\chi=\psi$, ὁπότε $2d\chi=d\psi$. Ὥστε $\int\sigma\upsilon\nu2\chi d\chi=$

$=\dfrac{1}{2}\int\sigma\upsilon\nu\psi.d\psi=\dfrac{1}{2}\eta\mu\psi+c=\dfrac{1}{2}\eta\mu2\chi+c$. ιγ') Ἔχομεν ὁμοίως ὡς ἄνω

$\int\eta\mu2\chi d\chi=-\dfrac{1}{2}\sigma\upsilon\nu2\chi+c$. ιδ') Ὁμοίως εἶναι $\int\sigma\upsilon\nu3\chi d\chi=\dfrac{1}{3}\eta\mu3\chi+c$.

ιε') $\int\eta\mu3\chi d\chi=-\dfrac{1}{3}\sigma\upsilon\nu3\chi+c$.

666. Ἡ παραβολὴ $\psi=\chi^2-5\chi+6$ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν χ εἰς τὰ σημεῖα A(2,0) καὶ B(3,0). Ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου ὅπερ ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ τμήματος AB τοῦ ἄξονος τῶν χ καὶ τῆς καμπύλης AB ἰσοῦται μὲ $E=$

$\int_2^3(\chi^2-5\chi+6)d\chi=\left(\dfrac{\chi^3}{3}-\dfrac{5\chi^2}{2}+6\chi+c\right)_2^3=\dfrac{1}{3}(3^3-2^3)-\dfrac{5}{2}(3^2-2^2)+6(3-2^2)$

$=\dfrac{1}{3}\cdot19-\dfrac{5}{2}\cdot5+6=-\dfrac{1}{6}\cdot$ ἐκ τοῦ ἐξαγομένου δὲ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι ἡ καμπύλη ΑΒ κεῖται κάτωθι τοῦ ἄξονος τῶν χ. ἤτοι τὸ ἐν λόγῳ μεικτό. γραμμον χωρίον κεῖται κάτωθεν τοῦ ἄξονος τῶν χ. οὗ τὸ ἐμβαδὸν κατὰ συνθήκην θεωρεῖται ὡς ἀρνητικόν.

667. Ἡ παραβολὴ $\psi=\chi^2-6\chi+5$ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν χ εἰς τὰ σημεῖα Α′ (1,0) καὶ Α (5,0), τὸν δὲ ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον Β (0,5). Ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεικτογράμμου χωρίου ΟΑ′Β ἰσοῦται μὲ

$$E=\int_0^1(\chi^2-6\chi+6\chi+5)d\chi=\left(\frac{\chi^3}{3}-\frac{6\chi^2}{2}+5\chi+c\right)_0^1=\frac{1}{3}-\frac{6}{2}+$$

$+5=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι μεικτόγραμμον χωρίον ΟΑΒ δὲν ὑπάρχει.

669. Ἐνταῦθα ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου ὅπερ ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ τόξου τῆς ἡμιτονοειδοῦς $\psi=\eta\mu\chi$, ἀπὸ 0 ἕως π καὶ τοῦ τμήματος τοῦ ἄξονος τῶν χ ὅπερ ὁρίζεται ὑπὸ τῶν $\chi=0$ καὶ $\chi=\pi$. Ὥστε ἔχομεν

$$E=\int_0^\pi \eta\mu\chi d\chi=[-\sigma\upsilon\nu\chi+c]_0^\pi=(-\sigma\upsilon\nu\pi)-(\sigma\upsilon\nu 0)=1+1=2.$$

670. Ἔχομεν ὁμοίως ὡς ἄνω:

$$E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu\chi d\chi=(\eta\mu\chi+c)_0^{\frac{\pi}{2}}=\eta\mu\frac{\pi}{2}-\eta\mu 0=1-0=1.$$

ΤΕΛΟΣ

$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x^2}-2b=\frac{b^2}{a^2}=$

$\frac{1}{3x^2}\cdot\frac{1}{x^2}-\frac{2b}{3x^2}=\frac{b^2}{a^2}=$

$=\frac{1}{3x^4}-\frac{2b}{3x^2}=\frac{b^2}{a^2}=\quad a^2-2bx^2=3x^4b^2=$

$=3x^4b^2+2a^2bx^2-a^2=0 \Rightarrow$

$3b^2x^4+2a^2bx^2-a^2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2=y \Rightarrow x^4=y \Rightarrow$

$\Rightarrow 3b^2y+2a^2by-a^2=$

$\frac{-2a^2by\pm\sqrt{(2a^2by)^2-4(3b^2y)\cdot}}{2(3b^2y)}=$

$125 - 64 = 161, 70 \Rightarrow$

$225 - 64 = 161$

$2x+3 = x^2 \Rightarrow$

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^2 \cdot 4 \cdot 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 + 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$

$\beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4 \cdot 17 =$

$= 16 - 68 \Rightarrow$

$= -52 < 0$

$17 \times 4 = 68$

$68 - 16 = 52$

$2x+3 = x^2 \Rightarrow$

$x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 3 \Rightarrow$

$4 - 12 \Rightarrow$

$-8 < 0$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\Rightarrow$

ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΣ

1) ΜΕΓΑΛΗ ΕΠΙΠΕΔΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ. Εἰσαγωγή. Τριγωνομετρικαὶ συναρτήσεις καὶ ταυτότητες. Ἐξισώσεις καὶ ἀνισότητες. Τριγωνομετρικὰ συστήματα. Ἀντίστροφοι κυκλικαὶ συναρτήσεις. Ἀπαλοιφή. Ἐπιλύσεις. Μέγιστα καὶ ἐλάχιστα. Ἀπροσδιόριστοι μορφαί. Ἐφαρμογαὶ εἰς τὴν Τοπογραφίαν, Φυσικήν, Ναυτιλίαν, Ἀεροπλοΐαν, Κοσμογραφίαν, κ.ἄ. Ποικίλαι καὶ ἐκλεκταὶ ἀσκήσεις μεθ' ἕκαστον κεφάλαιον. Ἀσκήσεις ἐπὶ ἀπολύτων τιμῶν.

Εἶναι πολύτιμον βοήθημα καὶ χρησιμώτατον εἰς τοὺς μαθητὰς τῶν γυμνασίων πρακτικῆς καὶ κλασσικῆς κατευθύνσεως καὶ εἰς τοὺς ὑποψηφίους τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν.

2) ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΑΥΤΩΝ. Εἶναι αἱ 1270 ἀσκήσεις, αἱ περιεχόμεναι εἰς τὴν ὡς ἄνω Μεγάλην Ἐπίπεδον Τριγωνομετρίαν. Ὑποβοηθοῦν δὲ μεγάλως τὴν προπαρασκευὴν τῶν ὑποψηφίων διὰ τὰς ἀνωτάτας Σχολάς.

3) ΜΕΓΑΛΗ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. **Μέρος πρῶτον:** Ἐπιπεδομετρία. **Μέρος δεύτερον:** Στερεομετρία. Περιέχουν πλήρη τὴν ὕλην τοῦ ἀναλυτικοῦ προγράμματος, συμπληρωμένην διὰ νεωτέρας ὕλης ἀπαραιτήτου καὶ 1961 ἐκλεκτὰς ἀσκήσεις.

4) ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ, μὲ τὰς ἀποδείξεις καὶ λύσεις αὐτῶν. **Τεύχη τρία.** Περιέχουν τὰς ἀσκήσεις τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου μέρους τῆς ὡς ἄνω μεγάλης Θεωρητικῆς Γεωμετρίας.

5) ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ἢ ΜΕΓΑΛΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ. Περιέχει ὅλην τὴν ὕλην τὴν ἀπαραίτητον εἰς τοὺς μαθητὰς τῶν Γυμνασίων πρακτικῆς καὶ εἰς τοὺς ὑποψηφίους διὰ τὰς Ἀνωτάτας Σχολάς.

6) ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ.

7) ΠΙΝΑΚΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ (νέα ἔκδοσις) τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν τόξων. Ἐκτὸς τούτων περιέχει τοὺς πίνακας τῶν φυσικῶν τιμῶν καὶ τῶν ἓξ τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων καὶ 29 ἄλλους χρησίμους πίνακας καὶ μέγαν ἀριθμὸν τύπων ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, Ἀλγέβρας, Γεωμετρίας, Τριγωνομετρίας (ἐπιπέδου καὶ σφαιρικῆς), Μηχανικῆς, Φυσικῆς καὶ Κοσμογραφίας. Ἀκόμη δὲ περιέχει παραγώγους καὶ ἀρχικὰς συναρτήσεις.

ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΣ

8) ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ **τοῦ Ὀργανισμοῦ Ἐκδόσεως Διδακτικῶν Βιβλίων.** Ἐκτὸς τῶν λύσεων περιέχουν: Τὰς ἀποδείξεις τῶν ἀναποδείκτων θεωρημάτων καὶ πορισμάτων αὐτῆς. Παρατηρήσεις ἐπὶ τῶν γεωμετρικῶν ἐννοιῶν καὶ μεθόδων. Πίνακας τύπων καὶ ὁδηγίας διὰ τὴν ταχυτέραν λύσιν γεωμετρικῶν ζητημάτων.

9) ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ **τοῦ Ὀργανισμοῦ Ἐκδόσεως Διδακτικῶν Βιβλίων,** καὶ μὲ παρατηρήσεις ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν ἐννοιῶν, κανόνας, πίνακας τύπων καὶ ὁδηγίας ὡς ἀνωτέρω.

10) ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ **τοῦ Ὀργανισμοῦ Ἐκδόσεως Διδακτικῶν Βιβλίων,** καὶ μὲ παρατηρήσεις καὶ γενικεύσεις τῶν ἐννοιῶν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν, πίνακας τύπων καὶ ὁδηγίας.

11) ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ ΚΟΣΜΟΓΡΑΦΙΑΣ **τοῦ Ὀργανισμοῦ Ἐκδόσεως Διδακτικῶν Βιβλίων.** Περιέχουν μὲ τρόπον ἁπλοῦν καὶ σύντομον καὶ μὲ τὰ νεώτερα δεδομένα καὶ τὴν ὕλην τῆς Κοσμογραφίας.

12) ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ καὶ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ **τοῦ Ο.Ε.Δ.Β.** καὶ μὲ παρατηρήσεις, πρακτικοὺς κανόνας, τύπους, ὁδηγίας καὶ ἀριθμητικοὺς πίνακας διὰ τὴν εὐκολωτέραν λύσιν τῶν ζητημάτων.

ΧΡ. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ - ΑΠ. ΣΤΑΥΡΑΚΑ

13) ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ, πρὸς χρῆσιν τῶν ὑποψηφίων διὰ τὴν Σχολὴν Ὑπομηχανικῶν (Μικρὸν Πολυτεχνεῖον), τὴν Γεωπονικήν, τὴν Ἀνωτάτην Ἐμπορικήν, τὴν σχολὴν τῶν Βιομηχανικῶν Σπουδῶν, τῶν Ἐμποροπλοιάρχων, τὰς Τραπέζας, τὸ Ι.Κ.Α. κλπ.

14) ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ.

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ"
ΙΩΑΝΝΟΥ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & ΣΙΑΣ Α.Ε.
38 ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ 38