ΝΙΚΟΛΑΟΥ Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΑΡΙΣΤΟΒΑΘΜΙΟΥ ΔΙΔΑΚΤΟΡΟΣ ΚΑΙ Τ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΔΙΑ ΤΑΣ ΚΑΤΩΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΙΣ
ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ 1964

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΝΙΚΟΛΑΟΥ Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΑΡΙΣΤΟΒΑΘΜΙΟΥ ΔΙΔΑΚΤΟΡΟΣ ΚΑΙ Τ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΔΙΑ ΤΑΣ ΚΑΤΩΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΙΣ
ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ 1964

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

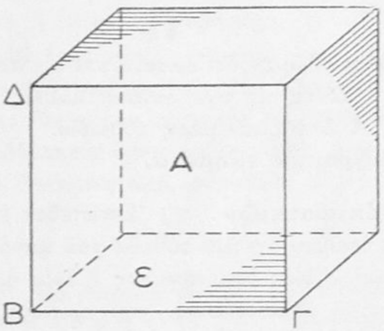
1. Τί εἶναι διάστημα, ὄγκος καὶ σχῆμα ἑνὸς σώματος. Ὅλοι ἐννοοῦμεν ὅτι γύρω μας ἐξαπλοῦται μία ἀπέραντος ἔκτασις. Ὀνομάζομεν δὲ αὐτὴν **διάστημα.**

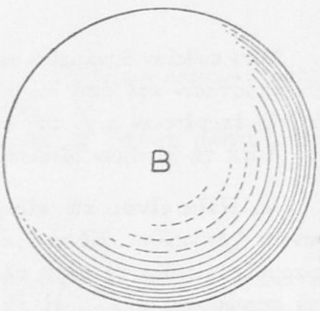
Εἰς τὸ διάστημα τοῦτο εἶναι σκορπισμένα ὅλα τὰ σώματα τῆς φύσεως. Δηλ. ἡ Γῆ, ὁ Ἥλιος, ἡ Σελήνη καὶ πολυπληθεῖς ἄλλοι ἀστέρες.

Κάθε σῶμα καταλαμβάνει ἓν μέρος ἀπὸ τὸ διάστημα. Τὸ μέρος τοῦτο τὸ ὀνομάζομεν **ὄγκον** τοῦ σώματος.

Ὁ ὄγκος κάθε σώματος ἐκτείνεται ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιά, ἀπὸ κάτω πρὸς τὰ ἄνω καὶ ἀπὸ ὄπισθεν πρὸς τὰ ἔμπροσθεν. Δι' αὐτὸ λέγομεν ὅτι:

Κάθε σῶμα ἔχει τρεῖς διαστάσεις.





Σχ. 1

Διάφορα σώματα π. χ. ἓν μῆλον, μία κασσετίνα ἔχουσι διάφορον ἐξωτερικὴν μορφὴν ἢ **σχῆμα.**

Εἰς τὸ χαρτὶ ἢ εἰς τὸν πίνακα παριστάνομεν τὰ σώματα μὲ εἰκόνας. Καὶ αὐτὰς τὰς εἰκόνας τὰς ὀνομάζομεν σχήματα. Π.χ. αἱ εἰκόνες Α καὶ Β (σχ. 1) εἶναι σχήματα.

2. Τί εἶναι ἐπιφάνεια ἑνὸς σώματος. Ἂν παρατηρήσωμεν ἓν σῶμα ἀπὸ ὅλα τὰ μέρη του, βλέπομεν ὅλα τὰ ἄκρα του. Αὐτὰ τὰ ἄκρα ὅλα μαζὶ ἀποτελοῦσι τὴν **ἐπιφάνειαν** αὐτοῦ. Λέγομεν δηλ. ὅτι:

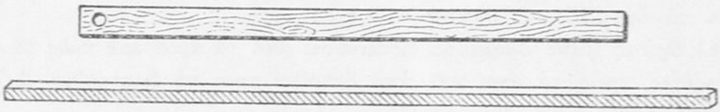
Ἐπιφάνεια ἑνὸς σώματος εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἄκρων του.

Ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς σώματος χωρίζει αὐτὸ ἀπὸ τὸ πέριξ διάστημα.

Κάθε ἐπιφάνεια ἔχει δύο διαστάσεις.

3. Τί εἶναι εὐθεῖα γραμμή. Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι ἓν πολὺ ἁπλοῦν σχῆμα. Π.χ. ἡ τομὴ τῶν ἐσωτερικῶν ἐπιφανειῶν δύο τοίχων τῆς αἰθούσης μας εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

Εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κανόνος (χάρακος) βλέπομεν 4 εὐθείας γραμμάς. Ὅλοι δὲ γνωρίζομεν πῶς χαρακώνομεν τὰ τετράδιά μας μὲ ὁδηγοὺς αὐτὰς τὰς εὐθείας τοῦ κανόνος.



Κανόνες
Σχ. 2

Μίαν εὐθεῖαν δυνάμεθα νὰ τὴν φαντασθῶμεν ὅτι ἐκτείνεται εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη. Ὥστε εἰς τὸν κανόνα καθὼς καὶ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν π.χ. τοῦ σώματος Α βλέπομεν μέρη εὐθειῶν.

Αὐτὰ τὰ λέγομεν ἰδιαιτέρως **εὐθύγραμμα τμήματα.**

4. Ποῖα εἶναι τὰ εἴδη τῶν ἐπιφανειῶν. α΄) Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἢ ἐπίπεδον. Εἶναι εὔκολον νὰ ἴδωμεν ὅτι μία εὐθεῖα τοῦ κανόνος ἐφαρμόζει εἰς ὅλα τὰ μέρη τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς ὑαλοπίνακος ἢ ἑνὸς ὁμαλοῦ πατώματος κ.τ.λ. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑαλοπίνακος, τοῦ πατώματος κ.τ.λ. λέγεται **ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἢ ἐπίπεδον.** Δηλαδή.

Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἢ ἐπίπεδον εἶναι μία ἐπιφάνεια, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἐφαρμόζει πανταχοῦ.

Ἐφαρμογή. Ὅταν ὁ ξυλουργὸς θέλῃ νὰ κάμῃ ἐπίπεδον μίαν σανίδα, ἀπὸ καιροῦ εἰς καιρὸν παρατηρεῖ, ἂν μία εὐθεῖα τοῦ κανόνος ἐφαρμόζῃ εἰς ὅλα τὰ μέρη τῆς σανίδος.

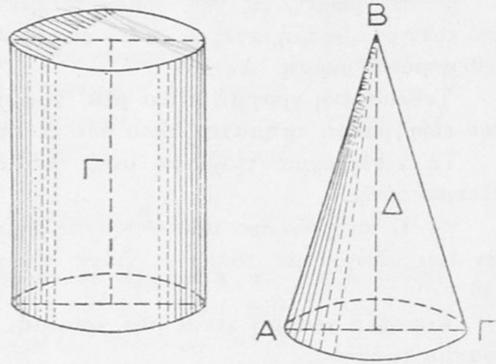
β΄) Τεθλασμένη ἢ πολυεδρικὴ ἐπιφάνεια. Μὲ τὸν κανόνα βεβαιούμεθα ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σώματος Α (σχ. 1) ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδα, ἀλλὰ ὅλη ὁμοῦ δὲν εἶναι ἐπίπεδον. Αὐτὴ λέγεται **τεθλασμένη ἢ πολυεδρικὴ ἐπιφάνεια.** Δηλαδή:

Τεθλασμένη ἢ πολυεδρικὴ ἐπιφάνεια εἶναι μία ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδα, ἀλλὰ δὲν εἶναι ἐπίπεδον.

Ἂν ἓν σῶμα ἔχῃ κλειστὴν πολυεδρικὴν ἐπιφάνειαν, λέγεται **πολύεδρον**. Π. χ. τὸ σῶμα Α (σχ. 1) εἶναι **πολύεδρον**. Τὰ ἐπίπεδα μέρη τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς πολυέδρου λέγονται **ἕδραι** αὐτοῦ.

γ΄) Καμπύλη ἐπιφάνεια. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σώματος Β (Σχ. 1) δὲν ἔχει ἐπίπεδα μέρη· αὕτη λέγεται **καμπύλη ἐπιφάνεια.** Δηλαδή :

Καμπύλη ἐπιφάνεια εἶναι μία ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία δὲν ἔχει ἐπίπεδα μέρη.



Σχ. 3

δ΄) Μεικτὴ ἐπιφάνεια. Αἱ ἐπιφάνειαι τῶν σωμάτων Γ καὶ Δ (σχ. 3) ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἐπίπεδα καὶ καμπύλα μέρη. Αὗται λέγονται **μεικταὶ ἐπιφάνειαι.** Δηλαδή :

Μεικτὴ ἐπιφάνεια εἶναι μία ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδα καὶ καμπύλα μέρη.

Ἀσκήσεις

1. Νὰ ὁρίσητε τὸ εἶδος τῆς ἐπιφανείας μιᾶς ὄψεως ἑνὸς φύλλου χάρτου τοῦ τετραδίου σας ἢ τὸ εἶδος τῆς ἐπιφανείας μιᾶς θήκης διὰ τὰ μολυβδοκόνδυλά σας (κασσετίνας).
2. Νὰ ὁρίσητε τὸ εἶδος τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς βώλου, ἑνὸς τεμαχίου σωλῆνος θερμάστρας.
3. Νὰ ὀνομάσητε διάφορα ἀντικείμενα καὶ νὰ ὁρίσητε τὸ εἶδος τῆς ἐπιφανείας τοῦ καθ' ἑνός.

5. Τί εἶναι γραμμαὶ καὶ ποῖα εἶναι τὰ εἴδη αὐτῶν. Ἐμάθομεν (§ 3) ὅτι ἡ τομὴ τῶν ἐσωτερικῶν ἐπιφανειῶν δύο τοίχων τῆς αἰθούσης μας εἶναι εὐθεῖα γραμμή. Καὶ ἡ τομὴ ὅλης τῆς ἐσωτερικῆς ἐπιφανείας τῶν τοίχων ἀπὸ τὸ πάτωμα λέγεται γραμμή.

Ἐπίσης γραμμὴ λέγεται καὶ ἡ τομὴ τῶν δύο εἰδῶν τῆς ἐπιφανείας τοῦ σώματος Δ (Σχ. 3). Ὥστε :

Ἡ τομὴ δύο ἐπιφανειῶν εἶναι γραμμή.

Μία γραμμὴ ἔχει μόνον μίαν διάστασιν.

α′) Ἁπλουστέρα ἀπὸ τὰς γραμμὰς εἶναι **ἡ εὐθεῖα γραμμὴ** (§ 3).

β′) Ἡ γραμμή, εἰς τὴν ὁποίαν τελειώνει τὸ πάτωμα ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθύγραμμα τμήματα, ἀλλὰ δὲν εἶναι εὐθεῖα γραμμή. Αὐτὴ λέγεται **τεθλασμένη γραμμή**. Δηλαδή:

Τεθλασμένη γραμμὴ εἶναι μία γραμμή, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθύγραμμα τμήματα, ἀλλὰ δὲν εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα μιᾶς τεθλασμένης γραμμῆς λέγονται **πλευραὶ** αὐτῆς.

γ′) Ἡ τομὴ τῶν δύο εἰδῶν τῆς ἐπιφανείας τοῦ σώματος Δ (σχ. 3) δὲν ἔχει εὐθύγραμμα τμήματα. Αὐτὴ λέγεται **καμπύλη γραμμή**. Δηλαδή:

Καμπύλη γραμμὴ εἶναι μία γραμμή, ἡ ὁποία δὲν ἔχει εὐθύγραμμα τμήματα.

δ′) Αἱ γραμμαὶ τοῦ σχήματος 4 ἀποτελοῦνται ἀπὸ εὐθείας καὶ ἀπὸ καμπύλας γραμμάς. Διὰ τοῦτο αὐταὶ λέγονται **μεικταὶ** γραμμαί. Ὥστε:

Σχ. 4

Μεικτὴ γραμμὴ εἶναι μία γραμμή, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθείας καὶ καμπύλας γραμμάς.

Ἀσκήσεις

4. Νὰ ὁρίσητε τὸ εἶδος τῆς γραμμῆς, εἰς τὴν ὁποίαν τελειώνει μία ἕδρα τοῦ κυτίου μὲ τὰς κιμωλίας.

5. Νὰ ὁρίσητε τί γραμμὴν σχηματίζει κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ γράμματα Δ, Σ, Ο, Ω.

6. Νὰ τεντώσητε ἓν λεπτὸν νῆμα εἰς τὴν ἐπιφάνειαν μιᾶς μπάλας καὶ νὰ ὁρίσητε τὸ εἶδος τῆς γραμμῆς, τὴν ὁποίαν τότε σχηματίζει τοῦτο.

6. Περιληπτικὸς πίναξ ἐπιφανειῶν καὶ γραμμῶν.

Εἴδη ἐπιφανειῶν	Εἴδη γραμμῶν
α′. Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἢ ἐπίπεδον.	α′. Εὐθεῖα γραμμή.
β′. Τεθλασμένη ἐπιφάνεια.	β′. Τεθλασμένη γραμμή.
γ′. Καμπύλη ἐπιφάνεια.	γ′. Καμπύλη γραμμή.
δ′. Μεικτὴ ἐπιφάνεια.	δ′. Μεικτὴ γραμμή.

7. Τί εἶναι σημεῖον. Ἡ τομὴ Β τῶν γραμμῶν ΒΓ καὶ ΒΔ (σχ. 1) εἶναι σημεῖον. Καὶ αἱ τομαὶ τῶν γραμμῶν τοῦ σχ. 4 εἶναι σημεῖα. Ὥστε :

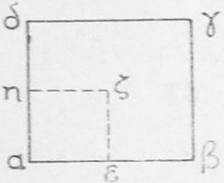
Σημεῖον εἶναι μία τομὴ δύο γραμμῶν.

Εἰς τὸ χαρτὶ καὶ εἰς τὸν πίνακα παριστάνομεν ἓν σημεῖον μὲ μίαν στιγμήν. Πλησίον αὐτῆς γράφομεν ἓν γράμμα. Μὲ αὐτὸ ὀνομάζομεν τὸ σημεῖον. Π.χ. τὸ σημεῖον Α (σχ. 5).

Σχ. 5

Τὸ σημεῖον οὐδεμίαν διάστασιν ἔχει.

8. Τί εἶναι ἴσα καὶ τί ἄνισα σχήματα. α′) Ἓν πολύεδρον, π.χ. τὸ Α (σχ. 1), ὅταν τεθῇ ἐπάνω εἰς τὸ τραπέζι μας, σκεπάζει ἓν μέρος αβγδ (σχ. 6) τῆς ἐπιφανείας του. Εἰς αὐτὸ ἐφαρμόζει ἀκριβῶς ἡ ἕδρα ε τοῦ πολυέδρου Α. Δι' αὐτὸ τὰ σχήματα αβγδ καὶ ε λέγονται ἴσα. Δηλαδή :



Σχ. 6

Δύο σχήματα λέγονται ἴσα, ἂν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐφαρμόσωσιν, ὥστε νὰ ἀποτελέσωσιν ἓν σχῆμα.

Ἂν δὲ ἓν ἄλλο σχῆμα ἐφαρμόζῃ ἀκριβῶς εἰς τὸ αβγδ, αὐτὸ θὰ ἐφαρμόζῃ ἀκριβῶς καὶ εἰς τὸ ε. Ἐννοοῦμεν λοιπὸν ὅτι :

Ὅσα σχήματα εἶναι ἴσα πρὸς ἓν ἄλλο, θὰ εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσα.

Τὸ σχῆμα αεζη καλύπτει ἕνα μέρος τοῦ αβγδ. Δι' αὐτὸ τὸ αεζη λέγεται **μικρότερον** ἀπὸ τὸ αβγδ· τοῦτο δὲ **μεγαλύτερον** ἀπὸ τὸ αεζη (σχ. 6). Μαζὶ δὲ τὰ δύο αὐτὰ σχήματα λέγονται **ἄνισα** σχήματα. Δηλαδή :

Δύο σχήματα εἶναι ἄνισα, ἂν τὸ ἓν ἐφαρμόζῃ εἰς ἓν μέρος τοῦ ἄλλου.

9. Εἰς ποῖα εἴδη χωρίζομεν τὰ σχήματα. α′) Ὅλα τὰ σημεῖα μιᾶς ἕδρας ἑνὸς πολυέδρου εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (§ 4α′). Δι' αὐτὸ ἡ ἕδρα αὕτη λέγεται **ἐπίπεδον σχῆμα.** Δηλαδή :

Ἐπίπεδον σχῆμα εἶναι ἓν σχῆμα, τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ σημεῖα εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

β′) Τὰ σημεῖα μιᾶς κασσετίνας δὲν εὑρίσκονται ὅλα μαζὶ εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Λέγεται δὲ τὸ σχῆμα τῆς κασσετίνας **στερεὸν σχῆμα.** Δηλαδή :

Στερεὸν σχῆμα εἶναι ἓν σχῆμα, τοῦ ὁποίου τὰ σημεῖα δὲν εὑρίσκονται ὅλα εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

Π.χ. ἓν μῆλον, ἓν τόπι, μιὰ πέτρα εἶναι στερεὰ σχήματα.

Ἀσκήσεις

7. Νὰ δηλώσητε, ἂν τὸ μελανοδοχεῖον σας, ὁ κονδυλοφόρος σας, εἶναι ἐπίπεδον ἢ στερεὸν σχῆμα.
8. Νὰ γράψητε ἓν κεφαλαῖον δέλτα καὶ ἓν κεφαλαῖον πῖ καὶ νὰ ὁρίσητε, ἂν αὐτὰ εἶναι στερεὰ ἢ ἐπίπεδα σχήματα.
9. Νὰ δηλώσητε, ἂν ἓν μεταλλικὸν νόμισμα εἶναι ἐπίπεδον ἢ στερεὸν σχῆμα.

10. Ποῖα εἶναι τὰ κυριώτερα στερεὰ σχήματα. Ἀπὸ τὰ στερεὰ σχήματα κυριώτερα εἶναι τὰ ἑξῆς:

α′) Τὰ πολύεδρα. Τὰ σχήματα Α, Β, Γ, Δ, Ε (σχ. 7) εἶναι ὅλα πολύεδρα. Ἐμάθομεν (§ 4β′), ὅτι κάθε πολύεδρον ἔχει τεθλασμένην ἐπιφάνειαν.

Κάθε ἕδρα ἑνὸς πολυέδρου περικλείεται ἀπὸ εὐθύγραμμα τμήματα. Αὐτὰ λέγονται **ἀκμαὶ** τοῦ πολυέδρου.

Τὰ σημεῖα ἑνὸς πολυέδρου, ἀπὸ τὰ ὁποῖα διέρχονται τρεῖς ἢ περισσότεραι ἀκμαί, λέγονται **κορυφαὶ** τοῦ πολυέδρου. Π.χ. τὰ σημεῖα α καὶ β τοῦ πολυέδρου Α εἶναι δύο κορυφαὶ αὐτοῦ.

Τὰ πολύεδρα Α, Β, Γ, λέγονται ἰδιαιτέρως **πρίσματα.**

Ἂν ἐργασθῶμεν, ὅπως εἴπομεν εἰς τὴν § 8, μὲ τὸ πρῖσμα Γ, βλέπομεν ὅτι αἱ δύο ἀπέναντι ἕδραι αὐτοῦ εἶναι ἴσαι.

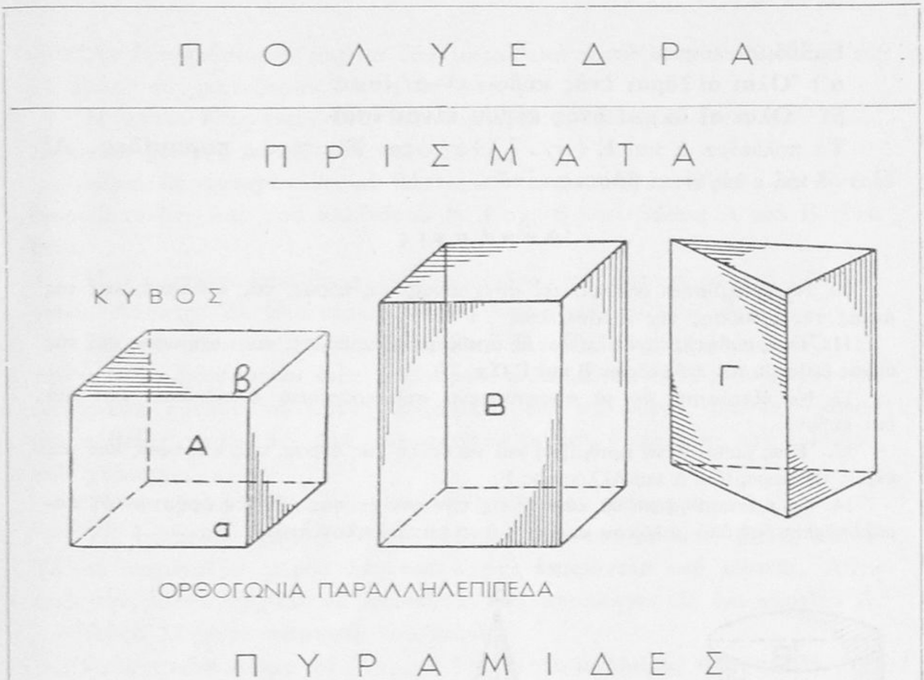
Αὐταὶ λέγονται **βάσεις** αὐτοῦ.

Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι δύο τυχοῦσαι ἀπέναντι ἕδραι τοῦ Α ἢ τοῦ Β εἶναι ἴσαι.

Αὐτὰ λέγονται ἰδιαιτέρως **ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα.** Τὸ κυτίον μὲ τὰς κιμωλίας π.χ. εἶναι ἓν **ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.**

Ἰδιαιτέρως δὲ βεβαιούμεθα ὁμοίως ὅτι τὸ Α ἔχει ὅλας τὰς ἕδρας ἴσας. Καὶ μὲ τὸν διαβήτην ἀναγνωρίζομεν ὅτι τοῦτο ἔχει ἴσας καὶ ὅλας τὰς ἀκμάς του.

Τὸ Α λέγεται ἰδιαιτέρως **κύβος.** Κύβος π.χ. εἶναι τὸ γνωστὸν ζάρι τῶν παιγνιδίων.


ΠΟΛΥΕΔΡΑ
ΠΡΙΣΜΑΤΑ
ΚΥΒΟΣ
β
Α
α
Β
Γ
ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΑ
ΠΥΡΑΜΙΔΕΣ
Δ
δ
Ε
ε

Σχ. 7

Ἐμάθομεν λοιπὸν ὅτι :

α΄) Ὅλαι αἱ ἕδραι ἑνὸς κύβου εἶναι ἴσαι.

β) Ὅλαι αἱ ἀκμαὶ ἑνὸς κύβου εἶναι ἴσαι.

Τὰ πολύεδρα Δ καὶ Ε (σχ. 7) λέγονται ἰδιαιτέρως **πυραμίδες.** Αἱ ἕδραι δ καὶ ε λέγονται **βάσεις** αὐτῶν.

Ἀσκήσεις

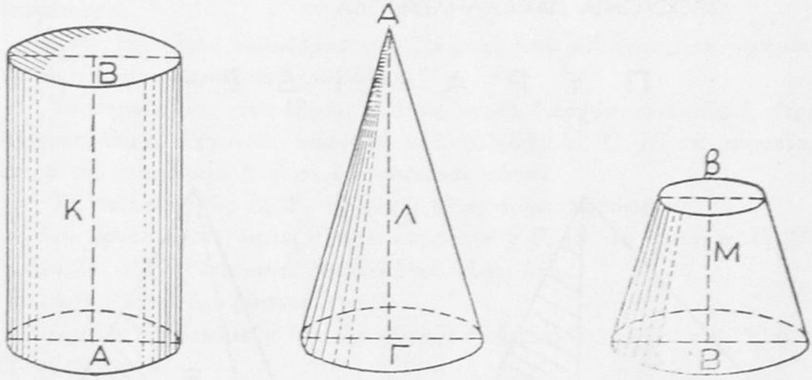
10. Νὰ ἀριθμήσητε δεικνύοντες συγχρόνως τὰς ἕδρας, τὰς κορυφὰς καὶ τὰς ἀκμὰς τῆς αἰθούσης τῆς διδασκαλίας.

11. Ἕνας μαθητὴς ἂς δείξῃ καὶ ἂς ἀριθμήσῃ τὰς ἕδρας, τὰς κορυφὰς καὶ τὰς ἀκμὰς ἑκάστου τῶν πολυέδρων Β καὶ Γ (Σχ. 7).

12. Νὰ ἐξετάσητε, ἂν τὰ προηγούμενα συμπεράσματα ἀληθεύωσι καὶ διὰ ἕνα κύβον.

13. Ἕνας μαθητὴς νὰ ἀριθμήσῃ καὶ νὰ δείξῃ τὰς ἕδρας, τὰς κορυφὰς καὶ τὰς ἀκμὰς τῆς πυραμίδος Δ καὶ ἄλλος τῆς Ε.

14. Νὰ προσπαθήσητε νὰ κάμητε εἰς τὴν οἰκίαν σας ἀπὸ ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἀπὸ μαλακὸν κηρὸν ἢ ἀπὸ κατάλληλον πηλόν.



Κύλινδρος Κῶνος Κόλουρος Κῶνος

Σχ. 8

β΄) Σχήματα μὲ μεικτὴν ἐπιφάνειαν. Τὰ στερεὰ σχήματα Κ, Λ, Μ, (σχ. 8) ἔχουσι μεικτὴν ἐπιφάνειαν.

Τὸ Κ λέγεται **κύλινδρος.** Π.χ. ὁ σωλὴν μιᾶς θερμάστρας εἶναι κύλινδρος.

Ἂν ἐφαρμόσωμεν μερικὰ ἴσα μεταλλικὰ νομίσματα τὸ ἓν ἐπάνω εἰς τὸ ἄλλο, σχηματίζομεν ἕνα κύλινδρον.

Ἡ κάτω ἐπιφάνεια τοῦ 1ου νομίσματος καὶ ἡ ἄνω τοῦ τελευταίου λέγονται **βάσεις** αὐτοῦ τοῦ κυλίνδρου.

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι αἱ βάσεις αὗται εἶναι ἴσαι. Εὔκολα δὲ (§ 8) ἐννοοῦμεν ὅτι καὶ τοῦ κυλίνδρου Κ (σχ. 8) αἱ βάσεις Α καὶ Β εἶναι ἴσαι.

Ἡ καμπύλη ἐπιφάνεια ἑνὸς κυλίνδρου περιέχεται μεταξὺ τῶν βάσεων. Λέγεται δὲ ἰδιαιτέρως **κυρτὴ** ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου.

Μὲ τὸν κανόνα βεβαιούμεθα ὅτι: Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἐφαρμόζει εἰς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς κυλίνδρου, ἀλλὰ μόνον κατὰ μίαν διεύθυνσιν. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ μεταχειριζώμεθα ἕνα κύλινδρον, διὰ νὰ γράφωμεν εὐθείας γραμμάς. Διὰ τὸν σκοπὸν τοῦτον ὑπάρχουσι καὶ κυλινδρικοὶ χάρακες.

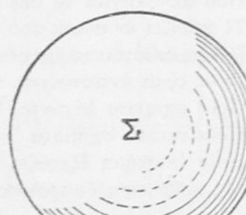
Τὸ στερεὸν σχῆμα Λ (σχ. 8) λέγεται **κῶνος**.

Τὸ ἐπίπεδον μέρος Γ τῆς ἐπιφανείας του λέγεται **βάσις** αὐτοῦ. Τὸ δὲ καμπύλον μέρος λέγεται κυρτὴ **ἐπιφάνεια τοῦ κώνου**. Αὕτη ἀπὸ τὴν βάσιν ἀρχίζει νὰ στενοῦται καὶ καταλήγει εἰς ἕνα σημεῖον Α.

Αὐτὸ λέγεται **κορυφὴ** τοῦ κώνου.

Τὸ στερεὸν σῶμα Μ (σχ. 8) λέγεται **κόλουρος κῶνος**. Αἱ γλάστραι, οἱ κουβάδες, μερικὰ ποτήρια εἶναι κόλουροι κῶνοι.

Ὁ κόλουρος κῶνος ἔχει δύο ἀνίσους βάσεις Β καὶ β καὶ μίαν κυρτὴν ἐπιφάνειαν μεταξὺ τῶν βάσεων.



Σχ. 9

γ) Σφαῖρα. Τὸ στερεὸν σχῆμα Σ (σχ. 9) λέγεται **σφαῖρα**. Τὸ ἐλαστικὸν τόπι σας, οἱ βῶλοι τῶν παιγνιδίων σας κ.τ.λ. εἶναι σφαῖραι.

Ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας εἶναι **καμπύλη** ἐπιφάνεια.

Ἀσκήσεις

15. Ἕνας μαθητὴς νὰ λάβῃ ἀπὸ τὴν συλλογὴν τῶν στερεῶν σχημάτων τοῦ σχολείου μας ἕνα κύλινδρον καὶ νὰ δείξῃ τὰ στοιχεῖα αὐτοῦ, τὰ ὁποῖα ἐμάθομεν.

16. Τὸ ἴδιον δι' ἕνα κῶνον καὶ δι' ἕνα κόλουρον κῶνον.

17. Νὰ προσπαθήσητε νὰ ἴδητε, ἂν μία εὐθεῖα τοῦ κανόνος ἐφαρμόζῃ εἰς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς κώνου ἢ ἑνὸς κολούρου κώνου.

18. Νὰ τεντώσητε ἐπάνω εἰς τὴν ἐπιφάνειαν μιᾶς σφαίρας ἓν λεπτὸν νῆμα καὶ νὰ ὁρίσητε τὸ εἶδος τῆς γραμμῆς, τὴν ὁποίαν ἀποτελεῖ τότε τοῦτο.

19. Νὰ ἐξετάσητε, ἂν αἱ κυρταὶ ἐπιφάνειαι τῶν κυλίνδρων, τῶν κώνων καὶ τῶν κολούρων κώνων εἶναι στερεὰ ἢ ἐπίπεδα σχήματα.

11. Τί εἶναι Γεωμετρία. Εἰς τὰ προηγούμενα ἐγνωρίσαμεν στερεὰ σχήματα καὶ ἐπάνω εἰς αὐτὰ διάφορα ἐπίπεδα σχήματα.

Ὅλα τὰ σχήματα, ἐπίπεδα καὶ στερεά, ἐξετάζονται λεπτομερῶς ἀπὸ τὴν **Γεωμετρίαν**.

Ἓν μέρος τῆς Γεωμετρίας ἐξετάζει τὰ ἐπίπεδα σχήματα· λέγεται δὲ τοῦτο **Ἐπιπεδομετρία**.

Ἡ Ἐπιπεδομετρία ἐξετάζει τὰ ἐπίπεδα σχήματα χωρὶς νὰ λαμβάνῃ ὑπ' ὄψιν τὰ σώματα, εἰς τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται ταῦτα.

Τὸ ἄλλο μέρος τῆς Γεωμετρίας ἐξετάζει τὰ στερεὰ σχήματα καὶ λέγεται **Στερεομετρία**. Αὔτη σπουδάζει τὰ στερεὰ σχήματα χωρὶς νὰ λαμβάνῃ ὑπ' ὄψιν ἀπὸ ποίαν ὕλην εἶναι κατασκευασμένα αὐτά.

Ἐρωτήσεις

Ποῦ εὑρίσκονται τὰ σώματα τῆς φύσεως;
Τί χωρίζει ἓν σῶμα ἀπὸ τὸ πέριξ διάστημα;
Πόσας διαστάσεις ἔχει ἓν σῶμα, πόσας μία ἐπιφάνεια καὶ πόσας μία γραμμή;
Ποῖα εἶναι ἀντιστοίχως τὰ εἴδη τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῶν γραμμῶν;
Ποῖα σχήματα λέγονται ἴσα καὶ ποῖα ἄνισα;
Ποῖα στερεὰ σχήματα ἐγνωρίσαμεν ἕως τώρα;
Ποία ἐπιστήμη ἐξετάζει τὰ σχήματα;
Εἰς ποῖα μέρη διαιρεῖται ἡ ἐπιστήμη αὕτη καὶ εἰς τί ὀφείλεται ἡ διαίρεσις αὕτη;

ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΑΙ ΓΡΑΜΜΑΙ

12. Πόσαι εὐθεῖαι γραμμαὶ διέρχονται ἀπὸ δύο σημεῖα. Εἰς μίαν ἀπὸ τὰς εὐθείας γραμμὰς ἑνὸς χαρακωμένου τετραδίου ὁρίζομεν δύο σημεῖα Α καὶ Β (σχ. 10). Ἔπειτα προσπαθοῦμεν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος νὰ γράψωμεν καὶ ἄλλην μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ περνᾷ ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Βλέπομεν ὅμως ὅτι δὲν κατορθώνομεν τοῦτο, διότι τὸ μολύβι γράφει τὴν ἰδίαν εὐθεῖαν.

Σχ. 10

Ἐννοοῦμεν λοιπὸν ὅτι :

Ἀπὸ δύο σημεῖα μία μόνον εὐθεῖα γραμμὴ διέρχεται.

Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ ὀνομάζωμεν μίαν εὐθεῖαν μὲ τὰ γράμματα δύο σημείων της. Π.χ. εὐθεῖα ΑΒ εἶναι ἡ μόνη εὐθεῖα, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β (σχ. 10).

13. Μὲ ποίους ἀκόμη τρόπους χαράσσομεν εὐθείας γραμμάς.

α΄) Εἰς μικρὰς ἐδαφικὰς ἐκτάσεις, π.χ. εἰς προαύλια, εἰς κήπους κ.τ.λ. χαράσσομεν εὐθείας γραμμὰς ὡς ἑξῆς :

Εἰς δύο σημεῖα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα θέλομεν νὰ περάσῃ ἡ εὐθεῖα, ἐμπήγομεν δύο πασσάλους. Εἰς αὐτοὺς δένομεν ἓν νῆμα καλὰ τεντωμένον. Ἔπειτα σύρομεν ἕνα αἰχμηρὸν πάσσαλον κατὰ μῆκος τοῦ νήματος, ὥστε ἡ αἰχμὴ νὰ χαράσσῃ τὸ ἔδαφος. Τοιουτοτρόπως εἰς τὸ ἔδαφος χαράσσεται ἡ εὐθεῖα γραμμή, τὴν ὁποίαν θέλομεν.

β΄) Οἱ τεχνῖται χαράσσουν εὐθείας γραμμὰς εἰς μίαν σανίδα ὡς ἑξῆς :

Μεταξὺ δύο σημείων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα θέλουν νὰ περάσῃ ἡ εὐθεῖα, τεντώνουσιν ἓν νῆμα χρωματισμένον μὲ νωπὸν χρῶμα.

Ἔπειτα σηκώνουν αὐτὸ ὀλίγον κατὰ τὸ μέσον του περίπου καὶ τὸ ἀφήνουν ἔπειτα νὰ πέσῃ ἀποτόμως εἰς τὴν σανίδα. Τὸ χρῶμα, τὸ ὁποῖον θὰ κολλήσῃ εἰς τὴν σανίδα, σχηματίζει εὐθεῖαν γραμμήν.

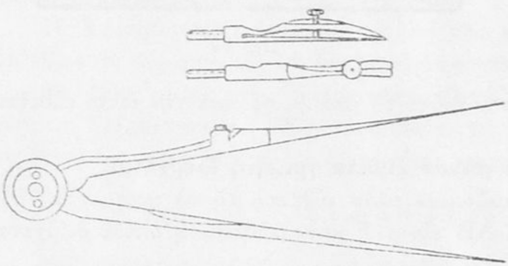
Ἀσκήσεις

20. Νὰ ὁρίσητε εἰς τὸ τετράδιόν σας ἀπὸ δύο σημεῖα καὶ νὰ γράψητε τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία περνᾶ ἀπὸ αὐτά.

21. Μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς νήματος χρωματισμένου μὲ τὴν κόνιν τῆς κιμωλίας νὰ γράψητε μίαν εὐθεῖαν ἐπάνω εἰς τὸ πάτωμα.

22. Νὰ ὁρίσητε εἰς τὸ τετράδιόν σας τρία σημεῖα, τὰ ὁποῖα νὰ μὴ εὑρίσκωνται εἰς μίαν εὐθεῖαν. Ἔπειτα νὰ γράψητε τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ ὅλα τὰ ζεύγη αὐτῶν.

14. Τί εἶναι διαβήτης. Ὁ διαβήτης εἶναι ὄργανον ξύλινον ἢ μετάλλινον (σχ. 11). Ἀποτελεῖται δὲ ἀπὸ δύο ἴσα σκέλη. Δύο δὲ ἄκρα αὐτῶν συνδέονται μεταξύ των μὲ ἕνα κοχλίαν (βίδαν). Πέριξ τοῦ κοχλίου τούτου δύνανται νὰ στρέφωνται τὰ σκέλη τοῦ διαβήτου, ὥστε τὸ ἄνοιγμα αὐτῶν νὰ γίνηται μεγαλύτερον ἢ μικρότερον, ὅσον θέλομεν.



Σχ. 11

Ἐπίσης μὲ τὸν κοχλίαν δυνάμεθα νὰ στερεώσωμεν τὰ σκέλη, ὥστε νὰ μὴ ἀλλάζῃ τὸ ἄνοιγμα αὐτῶν.

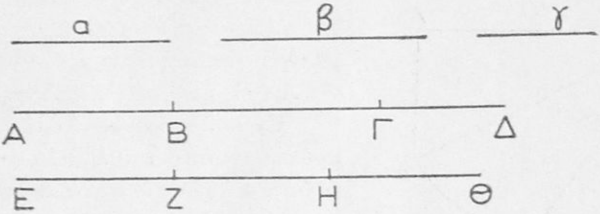
Τὰ ἐλεύθερα ἄκρα τῶν σκελῶν εἶναι ὀξεῖαι αἰχμαὶ ἢ εἰς τὸ ἓν προσαρμόζεται εἴς γραμμοσύρτης ἢ μία γραφὶς ἢ κιμωλία.

15. Μία πρώτη χρῆσις τοῦ διαβήτου. Μὲ τὸν διαβήτην λαμβάνομεν εἰς μίαν εὐθεῖαν ἓν τμῆμα ΑΒ ἴσον πρὸς ἄλλο εὐθύγραμμον τμῆμα α (σχ. 12).

Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ συγκρίνωμεν δύο εὐθύγραμμα τμήματα, διὰ νὰ ἴδωμεν, ἂν αὐτὰ εἶναι ἴσα ἢ ἄνισα, ποῖον εἶναι τὸ μεγαλύτερον καὶ ποῖον μικρότερον. Βλέπομεν π.χ. ὅτι $ΑΒ = α$, $β > α$, $γ < β$ (σχ. 12).

16. Τί εἶναι ἄθροισμα εὐθυγράμμων τμημάτων. Εἰς ἓν φύλλον χάρτου ἢ εἰς τὸν πίνακα γράφομεν τρία π.χ. εὐθύγραμμα τμήματα α,β,γ, καὶ χωριστὰ ἀπὸ αὐτὰ μίαν εὐθεῖαν ΑΔ (σχ. 12).

῞Επειτα μὲ τὸν διαβήτην ὁρίζομεν εἰς τὴν ΑΔ τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, τὸ ἓν παραπλεύρως ἀπὸ τὸ ἄλλο καὶ νὰ εἶναι ΑΒ = α, ΒΓ = β,



Σχ. 12

ΓΔ = γ. Ἀπὸ αὐτὰ σχηματίζεται τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΔ.

Αὐτὸ λέγεται ἄθροισμα τῶν α, β, γ. Εἶναι δηλαδή :

$$\alpha + \beta + \gamma = \text{ΑΔ}.$$

Εἰς τὸ ἴδιον σχῆμα εἶναι ΕΖ = α, ΖΗ = α, ΗΘ = α. Τὸ ΕΗ λοιπὸν εἶναι α+α καὶ λέγεται διπλάσιον τοῦ α, τὸ δὲ ΕΘ εἶναι α+α+α καὶ λέγεται τριπλάσιον τοῦ α κ.τ.λ.

Ἀντιστρόφως τὸ α εἶναι $\frac{1}{2}$ τοῦ ΕΗ, $\frac{1}{3}$ τοῦ ΕΘ κ.τ.λ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν μιᾶς τεθλασμένης γραμμῆς λέγεται ἰδιαιτέρως **περίμετρος** αὐτῆς.

17. Τί εἶναι διαφορὰ δύο ἀνίσων εὐθυγράμμων τμημάτων. Εἰς τὸ σχ. 12 εἶναι ΑΓ 〉 α καὶ ΑΒ = α. Ἂν ἀπὸ τὸ ΑΓ ἀποχωρίσωμεν τὸ ΑΒ, μένει τὸ τμῆμα ΒΓ.

Αὐτὸ εἶναι διαφορὰ τοῦ α ἀπὸ τοῦ ΑΓ. Εἶναι δηλ. ΑΓ — α = ΒΓ.

Ἀσκήσεις

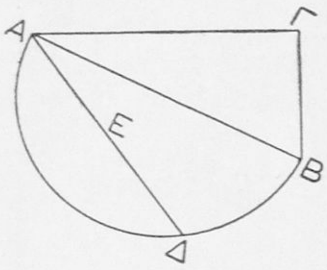
23. Νὰ γράψητε ἀπὸ δύο ἄνισα εὐθύγραμμα τμήματα καὶ νὰ σχηματίσητε τὸ ἄθροισμα καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

24. Νὰ γράψητε ἀπὸ μίαν τεθλασμένην γραμμὴν μὲ τρεῖς πλευράς. Ἡ δευτέρα νὰ εἶναι διπλασία καὶ ἡ τρίτη τριπλασία ἀπὸ τὴν πρώτη. Ἔπειτα νὰ σχηματίσητε τὴν περίμετρον αὐτῆς.

25. Νὰ σχηματίσητε τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων πλευρῶν τῆς προηγουμένης τεθλασμένης γραμμῆς καὶ νὰ συγκρίνητε αὐτὸ πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν αὐτῆς.

26. Νὰ γράψητε ἀπὸ δύο εὐθείας, αἱ ὁποῖαι νὰ ἀρχίζωσιν ἀπὸ ἓν σημεῖον Α. Ἔπειτα εἰς τὴν μίαν νὰ λάβητε δύο ἴσα τμήματα ΑΒ, ΒΓ καὶ εἰς τὴν ἄλλην ὁμοίως δύο ἴσα τμήματα ΑΔ, ΔΕ. Ἔπειτα νὰ γράψητε τὰ τμήματα ΒΔ καὶ ΓΕ καὶ νὰ τὰ συγκρίνητε.

18. Ποία γραμμὴ μεταξὺ δύο σημείων εἶναι μικροτέρα. Ἀπὸ τὴν καθημερινὴν πεῖραν γνωρίζομεν ὅλοι, ὅτι συντομώτερον μεταβαίνομεν ἀπὸ ἓν σημεῖον Α εἰς ἄλλο Β, ἂν ἀκολουθῶμεν τὴν εὐθεῖαν, ΑΒ, παρὰ ἄλλην γραμμήν, π.χ. ΑΓΒ, ἢ ΑΔΒ ἢ ΑΕΔΒ (σχ. 13). Ὥστε :



Σχ. 13

Ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα εἶναι μικρότερον ἀπὸ κάθε ἄλλην γραμμήν. ἡ ὁποία ἔχει τὰ αὐτὰ ἄκρα.

Διὰ τὸν λόγον τοῦτον τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ λέγεται **ἀπόστασις** τῶν σημείων Α καὶ Β.

19. Πῶς μετροῦμεν ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα καὶ τί εἶναι μῆκος αὐτοῦ. Διὰ νὰ μετρήσωμεν ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα, συγκρίνομεν αὐτὸ πρὸς ἓν ὡρισμένον καὶ γνωστὸν εὐθ. τμῆμα. Τὸ τμῆμα τοῦτο ὀνομάζομεν **μονάδα.** Μὲ τὴν σύγκρισιν δὲ αὐτὴν εὑρίσκομεν ἕνα ἀριθμόν· αὐτὸς φανερώνει ἀπὸ πόσας μονάδας ἢ καὶ ἀπὸ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται τὸ μετρηθὲν τμῆμα.

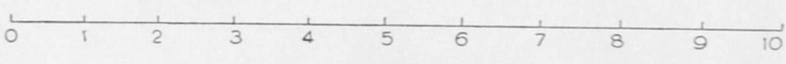
Ὁ ἀριθμὸς οὗτος λέγεται **μῆκος** αὐτοῦ τοῦ τμήματος.

Αἱ δὲ μονάδες, μὲ τὰς ὁποίας μετροῦμεν τὰς γραμμάς, λέγονται **μονάδες μήκους.**

20. Ποῖαι εἶναι αἱ συνηθέστεραι μονάδες μήκους. Συνηθεστέρα μονὰς μήκους εἶναι τὸ **μέτρον** ἢ ὁ **βασιλικὸς πῆχυς.**

Τὸ μέτρον διαιρεῖται εἰς δέκα ἴσα μέρη· αὐτὰ λέγονται **παλάμαι.**

Ἡ παλάμη (σχ. 14) διαιρεῖται εἰς δέκα ἴσα μέρη, τοὺς **δακτύλους** (πόντους).



Σχ. 14

Ὁ δάκτυλος διαιρεῖται εἰς δέκα ἴσα μέρη, τὰς **γραμμάς.**

Ὥστε : 1 μετ. = 10 παλ. = 100 δακ. = 1000 γραμ.
1 παλ. = 10 δακ. = 100 γραμ.
1 δακ. = 10 γραμ.

Ἡ παλάμη λοιπὸν εἶναι $\frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου. Δι' αὐτὸ λέγεται καὶ **δεκατόμετρον.** Ὁ δάκτυλος εἶναι $\frac{1}{100}$ τοῦ μέτρου· λέγεται δὲ καὶ **ἑκατοστόμετρον.** Ἡ γραμμὴ εἶναι $\frac{1}{1000}$ τοῦ μέτρου· λέγεται δὲ καὶ **χιλιοστόμετρον.** Εἰς τὴν πρᾶξιν μεταχειριζόμεθα τὸ **διπλοῦν ὑποδεκάμετρον** μὲ δύο παλάμας ἢ μὲ 20 ἑκατοστόμετρα καὶ τὴν **ταινίαν** μὲ μῆκος 10 ἢ 20 μέτρων συνήθως. Διὰ τὰς μεγάλας ἀποστάσεις μεταχειριζόμεθα τὸ **στάδιον** ἢ τὸ **χιλιόμετρον** = 1000 μέτρα καὶ τὸ μυριάμετρον = 10 στάδια = 10000 μέτρα.

Ἀσκήσεις

27. Νὰ εὕρητε πόσας παλάμας, πόσους δακτύλους καὶ πόσας γραμμὰς ἔχουσιν 8 μέτρα, ἔπειτα 12 μέτρα, ἔπειτα 3,45 μέτρα.

28. Νὰ εὕρητε πόσα ἑκατοστόμετρα καὶ πόσα χιλιοστόμετρα ἔχουσιν 8,4 παλάμαι.

29. Νὰ εὕρητε πόσα μέτρα ἀποτελοῦσι 30 παλάμαι καὶ πόσα 15 παλάμαι.

30. Νὰ εὕρητε πόσα μέτρα ἀποτελοῦσι 500, ἔπειτα 425, ἔπειτα 3167,4 ἑκατοστόμετρα.

31. Νὰ εὕρητε πόσας παλάμας ἀποτελοῦσιν 800, ἔπειτα 64 καὶ ἔπειτα 7 χιλιοστόμετρα.

32. Νὰ γράψητε ἀπὸ μίαν εὐθεῖαν καὶ νὰ ὁρίσητε εἰς αὐτὴν ἓν τμῆμα μήκους 5 ἑκατοστομέτρων, ἓν ἄλλο μήκους 120 χιλιοστομέτρων καὶ τρίτον 1,3 παλάμας.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Α΄ κεφαλαίου.

33. Νὰ γράψητε ἀπὸ δύο ἄνισα εὐθύγραμμα τμήματα καὶ νὰ μετρήσητε αὐτά.

34. Νὰ μετρήσῃ κάθε μαθητὴς τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος τοῦ τετραδίου του.

35. Νὰ μετρήσητε μὲ τὴν ταινίαν τὸ πλάτος τῆς θύρας τῆς αἰθούσης μας καὶ ἔπειτα τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος τῆς αἰθούσης.

36. Νὰ ἐκτιμήσητε μὲ τοὺς ὀφθαλμούς σας τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος τοῦ μελανοπίνακος. Ἔπειτα δὲ νὰ μετρήσητε αὐτὰ πρὸς ἔλεγχον.

37. Νὰ κάμητε τὴν ἰδίαν ἐργασίαν διὰ τὸ ὕψος τῆς ἕδρας καὶ διὰ τὸ πλάτος ἑνὸς παραθύρου.

38. Ὁμοίαν ἐργασίαν νὰ κάμῃ κάθε μαθητὴς εἰς τὴν οἰκίαν του διὰ τὸ μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος τῆς κλίνης του. Διὰ τὸ μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος τῆς τραπεζαρίας. Διὰ τὸ πλάτος καὶ ὕψος τῶν βαθμίδων τῆς κλίμακος τῆς οἰκίας του.

39. Μία τεθλασμένη γραμμὴ ἔχει τρεῖς πλευράς. Ἡ α΄ ἔχει μῆκος 0,05 μέτρου,

ἡ β΄ εἶναι διπλασία καὶ ἡ γ΄ τριπλασία ἀπὸ τὴν α΄. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος αὐτῆς τῆς τεθλασμένης γραμμῆς.

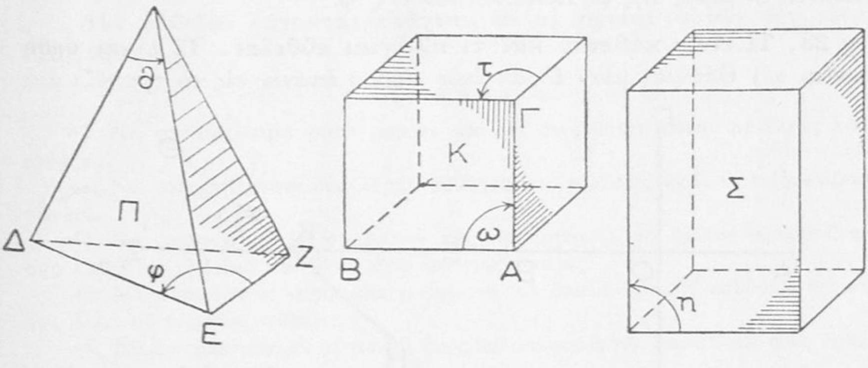
40. Μία τεθλασμένη γραμμὴ ἔχει 4 πλευράς. Ἡ α΄ ἔχει μῆκος 0,60 μέτρου, ἡ β΄ εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς α΄, ἡ γ΄ τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς α΄ καὶ ἡ δ΄ εἶναι ἴση πρὸς τὴν α΄. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου αὐτῆς.

41. Μία τεθλασμένη γραμμὴ μὲ τρεῖς πλευρὰς ἔχει περίμετρον 56 ἑκατοστομέτρων. Ἡ μία πλευρά της ἔχει μῆκος 30 ἑκατοστομέτρων, αἱ δὲ ἄλλαι εἶναι ἴσαι. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος ἑκάστης τῶν ἴσων τούτων πλευρῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

ΓΩΝΙΑΙ. ΚΑΘΕΤΟΙ ΚΑΙ ΠΛΑΓΙΑΙ ΕΥΘΕΙΑΙ

21. Τί εἶναι γωνία καὶ ποῖα εἶναι τὰ στοιχεῖα αὐτῆς. Αἱ ἀκμαὶ ΑΒ καὶ ΑΓ ἑνὸς κύβου Κ (σχ. 15) ἀρχίζουσιν ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α καὶ δὲν σχηματίζουσι μίαν εὐθεῖαν. Αὐταὶ σχηματίζουσιν ἓν ἐπίπεδον σχῆμα. Τοῦτο λέγεται **γωνία.** Τὴν ὀνομάζομεν δὲ γωνίαν Α ἢ ω ἢ $\widehat{ΒΑΓ}$ ἢ $\widehat{ΓΑΒ}$.



Σχ. 15

Καὶ αἱ ἀκμαὶ ΕΔ, ΕΖ τοῦ πολυέδρου Π σχηματίζουσι γωνίαν ΔΕΖ ἢ φ. Ὥστε:

Γωνίαι εἶναι ἓν σχῆμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἀπὸ δύο εὐθείας, αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουν ἀπὸ ἓν σημεῖον καὶ δὲν ἀποτελοῦσι μίαν εὐθεῖαν.

Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ, ἀπὸ τὰς ὁποίας σχηματίζεται ἡ γωνία Α λέγονται **πλευραὶ** αὐτῆς.

Τὸ δὲ κοινὸν σημεῖον Α τῶν πλευρῶν λέγεται **κορυφὴ** αὐτῆς τῆς γωνίας.

22. Ποῖαι γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ ποῖαι ἄνισοι. Σύμφωνα μὲ ὅσα ἐμάθομεν (§ 8) διὰ τὰ ἴσα καὶ ἄνισα σχήματα ἐννοοῦμεν ὅτι :

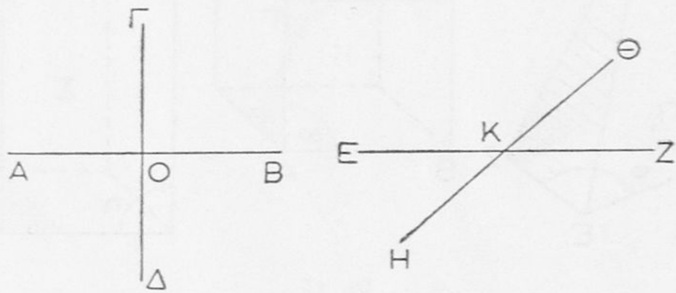
α΄) Δύο γωνίαι λέγονται ἴσαι, ἂν δύνανται νὰ ἐφαρμόζωσιν, ὥστε νὰ σχηματίζωσι μίαν γωνίαν.

Ἂς τοποθετήσωμεν π.χ. τὴν γωνίαν η τοῦ κυτίου Σ μὲ τὰς κιμωλίας ἐπάνω εἰς τὴν γωνίαν ω τοῦ κύβου Κ. Νὰ προσέξωμεν δὲ νὰ ἔλθη ἡ κορυφὴ τῆς η ἐπάνω εἰς τὴν κορυφὴν Α καὶ ἡ μία πλευρὰ τῆς η ἐπάνω εἰς τὴν ΑΓ. Θὰ ἴδωμεν τότε ὅτι ἡ ἄλλη πλευρὰ τῆς η θὰ ἔλθη ἐπάνω εἰς τὴν ΑΒ. Ἡ δὲ γωνία η ἐφαρμόζει ἀκριβῶς εἰς τὴν ω. Εἶναι λοιπὸν η = ω.

β′) Δύο γωνίαι λέγονται ἄνισοι, ἂν ἡ μία ἐφαρμόζῃ εἰς ἓν μέρος τῆς ἄλλης.

Ἂν π.χ. ἡ γωνία τ τοῦ κύβου Κ τεθῇ ἐπάνω εἰς τὴν γωνίαν φ τοῦ πολυέδρου Π, ὅπως προηγουμένως, ἡ η ἐπὶ τῆς ω, βλέπομεν ὅτι ἡ τ καλύπτει ἓν μέρος τῆς φ. Εἶναι λοιπὸν τ < φ.

23. Τί εἶναι κάθετοι καὶ τί πλάγιαι εὐθεῖαι. Τί εἶναι ὀρθὴ γωνία. α′) Θέτομεν μίαν ἕδραν ἑνὸς κύβου ἐπάνω εἰς τὸ τραπέζι μας



Σχ. 16

(ἢ εἰς τὸν πίνακα). Ἔπειτα σύρομεν ἓν μολύβι (ἢ τὴν κιμωλίαν) κατὰ μῆκος δύο τεμνομένων πλευρῶν τῆς ἕδρας ταύτης. Ἂν δὲ ἀποσύρωμεν τὸν κύβον καὶ προεκτείνωμεν τὰς χαραχθείσας εὐθείας πέραν τῆς τομῆς Ο αὐτῶν, σχηματίζονται 4 γωνίαι (σχ. 16).

Εἶναι εὔκολον νὰ βεβαιωθῶμεν ὅτι μία γωνία ω τοῦ κύβου ἐφαρμόζει εἰς κάθε μίαν ἀπὸ αὐτάς. Εἶναι λοιπὸν αἱ 4 γωνίαι ὅλαι ἴσαι. Αἱ δὲ **εὐθεῖαι**, ἀπὸ τὰς ὁποίας σχηματίζονται αἱ ἴσαι αὗται γωνίαι, λέγονται **κάθετοι** εὐθεῖαι. Δηλαδή :

Δύο εὐθεῖαι λέγονται κάθετοι, ἂν αἱ γωνίαι αὐτῶν εἶναι ὅλαι ἴσαι.

Κάθε δὲ μία ἀπὸ τὰς 4 γωνίας τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ (σχ. 16) λέγεται **ὀρθὴ** γωνία. Δηλαδή :

Μία γωνία λέγεται ὀρθή, ἂν αἱ πλευραί της εἶναι κάθετοι.

Εὔκολα δὲ παρατηροῦμεν ὅτι ὅλαι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ω, τ, η κ.τ.λ. ἑνὸς κύβου ἢ ἄλλου ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου Σ (σχ. 15) ἐφαρμόζουσιν εἰς μίαν ὀρθὴν γωνίαν π.χ. τὴν ΑΟΓ. Ἐννοοῦμεν λοιπὸν ὅτι:

Αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ἑνὸς κύβου ἢ ἄλλου ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ὅλαι ὀρθαὶ γωνίαι.

β'. Μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς κύβου ἢ ἑνὸς φύλλου τετραδίου βεβαιούμεθα ὅτι αἱ γωνίαι τῶν εὐθειῶν ΕΖ, ΗΘ (σχ. 16) δὲν εἶναι ὅλαι ἴσαι. Αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι λέγονται **πλάγιαι εὐθεῖαι**. Δηλαδή :

Δύο εὐθεῖαι λέγονται πλάγιαι, ἂν αἱ γωνίαι αὐτῶν δὲν εἶναι ὅλαι ἴσαι.

Ἀσκήσεις

42. Νὰ σχηματίσητε μίαν γωνίαν καὶ νὰ ὀνομάσητε αὐτὴν μὲ ὅλους τοὺς τρόπους.

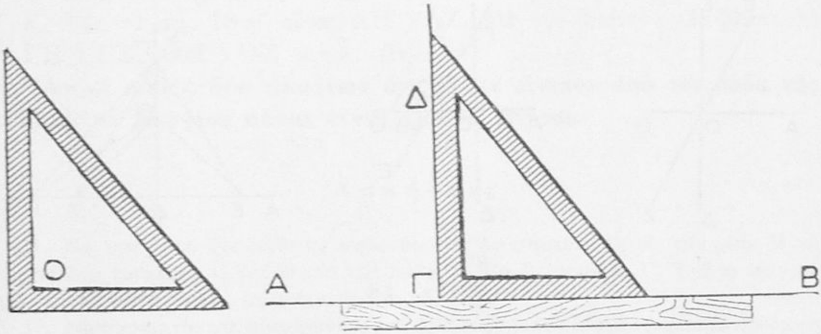
43. Νὰ τοποθετήσητε δύο λεπτὰ εὐθύγραμμα σύρματα, ὥστε νὰ σχηματίζωσι γωνίαν.

44. Νὰ ὀνομάσητε ἓν σύμβολον τῆς ἀριθμητικῆς, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἀπὸ καθέτους εὐθείας καὶ ἄλλα ἀπὸ πλαγίας εὐθείας.

45. Νὰ ὀνομάσητε κεφαλαῖα γράμματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν καθέτους εὐθείας καὶ ἄλλα μὲ πλαγίας εὐθείας.

46. Νὰ ἐκτιμήσητε, ἂν αἱ γωνίαι ἑνὸς ὑαλοπίνακος τῶν παραθύρων εἶναι ὀρθαὶ ἢ ὄχι καὶ νὰ βεβαιωθῆτε περὶ αὐτοῦ.

47. Νὰ κάμητε ὁμοίαν ἐργασίαν διὰ τὰς γωνίας τοῦ πατώματος.



Σχ. 17

24. Τί εἶναι γνώμων καὶ εἰς τί μᾶς χρησιμεύει. Ὁ γνώμων (σχ. 17) εἶναι ἓν ὄργανον ἀπὸ ξύλον ἢ καὶ ἀπὸ μέταλλον. Τοῦτο ἔχει δύο πλευρὰς καθέτους καὶ τὸ χρησιμοποιοῦμεν, διὰ νὰ γράφωμεν καθέτους εὐθείας.

Πρὸς τοῦτο θέτομεν μίαν ἀπὸ τὰς καθέτους πλευράς του εἰς μίαν εὐθεῖαν ΑΒ, ἡ δὲ ἄλλη κάθετος πλευρά του νὰ διέρχηται ἀπὸ ἓν σημεῖον Γ ἢ Δ. Ἔπειτα σύρομεν τὴν γραφίδα κατὰ μῆκος τῆς δευτέρας ταύτης καθέτου πλευρᾶς.

Τοιουτοτρόπως γράφομεν μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον ἐκεῖνο Γ ἢ Δ καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

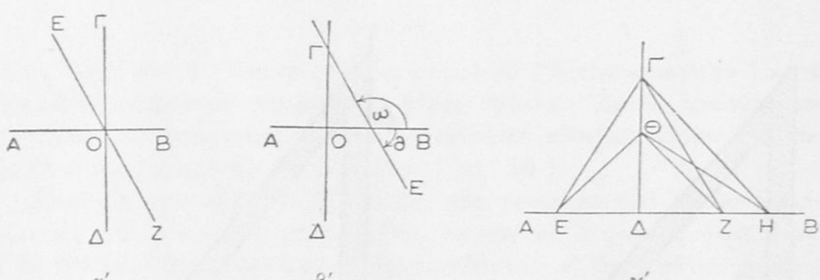
Ἀσκήσεις

48. Νὰ γράψητε ἀπὸ μίαν εὐθεῖαν καὶ νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον αὐτῆς καὶ ἄλλο ἐκτὸς αὐτῆς. Ἔπειτα ἀπὸ κάθε ἓν ἀπὸ αὐτὰ τὰ σημεῖα νὰ φέρητε εὐθεῖαν κάθετον εἰς τὴν πρώτην.

49. Νὰ γράψητε ἓν μεγάλο κεφαλαῖον δέλτα καὶ ἀπὸ μίαν κορυφήν του νὰ φέρητε κάθετον εἰς τὴν ἀπέναντι πλευράν.

50. Εἷς μαθητὴς νὰ γράψῃ τυχαίως δύο εὐθείας εἰς τὸν πίνακα. Νὰ ἐκτιμήσητε δέ, ἂν αὗται εἶναι κάθετοι ἢ πλάγιαι καὶ νὰ βεβαιωθῆτε ἔπειτα περὶ αὐτοῦ μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ γνώμονος.

25. Ποίας ἰδιότητας ἔχουσιν αἱ κάθετοι καὶ αἱ πλάγιαι εὐθεῖαι. α΄). Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 18 α΄), εἶναι κάθετοι. Ἂν



Σχ. 18

στρέψωμεν πολὺ ὀλίγον τὴν ΓΔ πέριξ τοῦ σημείου Ο, βλέπομεν ὅτι δύο ἀπὸ τὰς γωνίας των γίνονται μεγαλύτεραι καὶ δύο μικρότεραι.

Αἱ εὐθεῖαι λοιπὸν γίνονται πλάγιαι.

Ἂν ἡ στροφὴ τῆς ΓΔ γίνῃ πέριξ ἀπὸ ἄλλο σημεῖον Γ αὐτῆς, θὰ ἔλθῃ εἰς ἄλλην θέσιν ΓΕ (σχ. 18 β′). Μὲ τὸν γνώμονα δὲ βεβαιούμεθα ὅτι ω $>$ 1 ὀρθ. θ $<$ 1 ὀρθ.

Αἱ αὐθεῖαι λοιπὸν ΑΒ καὶ ΓΕ εἶναι πλάγιαι.

Ἀπὸ ὅλα αὐτὰ ἐννοοῦμεν ὅτι :

Ἀπὸ ἓν σημεῖον διέρχεται μία μόνον κάθετος ἐπὶ μίαν εὐθεῖαν.

β′) Δι᾽ αὐτὸν τὸν λόγον :

Εὐθεῖαι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν οὐδέποτε συναντῶνται.

Τὰ κοινὰ σημεῖα μιᾶς εὐθείας ΑΒ καὶ ἄλλων εὐθειῶν λέγονται πόδες αὐτῶν. Π. χ. τὸ σημεῖον Ο (σχ. 18 α′) εἶναι πούς τῆς ΓΔ καὶ τῆς ΕΖ.

γ′) Ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ διέρχεται ἡ ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ διάφοροι ἄλλαι ΓΕ, ΓΖ, ΓΗ (σχ. 18 γ′). Μὲ τὸν διαβήτην δὲ βλέπομεν ὅτι ΓΔ $<$ ΓΕ, ΓΔ $<$ ΓΖ κ.τ.λ. Δηλαδή :

Τό κάθετον τμῆμα ΓΔ εἶναι μικρότερον ἀπὸ κάθε τμῆμα πλάγιον πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, τὸ ὁποῖον ἀρχίζει ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ.

Δι᾽ αὐτὸ τὸ κάθετον τμῆμα ΓΔ λέγεται ἀπόστασις τοῦ σημείου Γ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ.

δ′) Ἂν ΔΕ = ΔΖ, μὲ τὸν διαβήτην βλέπομεν ὅτι

ΓΕ = ΓΖ, ΘΕ = ΘΖ κ.τ.λ. Δηλαδή :

Κάθε σημεῖον τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα αὐτοῦ.

ε′. Εἰς τὸ σχ. 18 γ′ εἶναι ΔΗ $>$ ΔΖ. Μὲ τὸν διαβήτην δὲ βλέπομεν ὅτι ΓΗ $>$ ΓΖ, ΘΗ $>$ ΘΖ κ.τ.λ. Δηλαδή :

Ἂν οἱ πόδες δύο πλαγίων ἀπέχωσιν ἄνισον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου, αἱ πλάγιαι αὗται εἶναι ὁμοίως ἄνισοι.

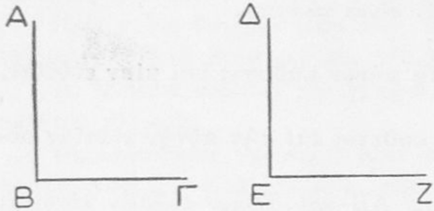
Ἀσκήσεις

51. Νὰ γράψητε δύο εὐθείας καθέτους εἰς ἓν σημεῖον Ο, εἰς τὴν μίαν δὲ νὰ ὁρίσητε δύο τμήματα ΟΑ, ΟΒ ἴσα καὶ ἐκτὸς αὐτῶν ἓν σημεῖον Γ. Ἔπειτα νὰ γράψητε καὶ νὰ συγκρίνητε τὰ τμήματα ΓΑ καὶ ΓΒ.

52. Νὰ σχηματίσητε μίαν γωνίαν καὶ ἀπὸ ἓν σημεῖον αὐτῆς νὰ φέρητε καθέτους ἐπὶ τὰς πλευράς της. Νὰ ἐξετάσητε δὲ ἂν εἶναι δυνατὸν αὐταὶ αἱ κάθετοι νὰ σχηματίζωσι μίαν εὐθεῖαν.

53. Νὰ ὁρίσητε εἰς τὸ τετράδιόν σας ἓν σημεῖον Α καὶ νὰ γράψητε μίαν εὐθεῖαν εἰς ἀπόστασιν 0,05 μέτ. ἀπὸ τὸ Α.

26. Τί προκύπτει ἀπὸ τὴν σύγκρισιν δύο ὀρθῶν γωνιῶν. Διὰ νὰ συγκρίνωμεν δύο ὀρθὰς γωνίας Β καὶ Ε (σχ. 19), θέτομεν τὴν μίαν ἐπάνω εἰς τὴν ἄλλην. Προσέχομεν δὲ νὰ ἔλθῃ ἡ κορυφὴ Ε ἀπάνω εἰς τὴν κορυφὴν Β καὶ ἡ πλευρὰ ΕΖ ἐπάνω εἰς τὴν ΒΓ. Βλέπομεν τότε ὅτι καὶ ἡ πλευρὰ ΕΔ ἔρχεται ἐπάνω εἰς τὴν ΒΑ καὶ αἱ γωνίαι ἐφαρμόζουσι. Εἶναι λοιπὸν Β = Ε. Δηλαδή :

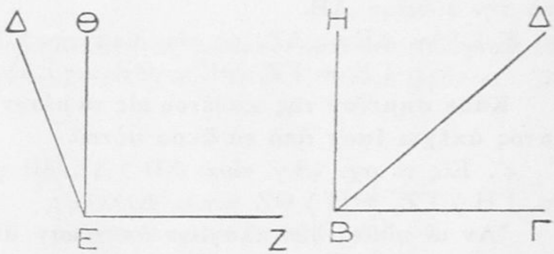


Σχ. 19

Αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Πρὸς τὴν ὀρθὴν γωνίαν συγκρίνονται αἱ ἄλλαι γωνίαι, ὅπως ἀμέσως θὰ ἴδωμεν.

27. Τί εἶναι ὀξεῖαι καὶ τί ἀμβλεῖαι γωνίαι. α΄) Ἂν εἰς τὴν γωνίαν θ τοῦ πολυέδρου Π (σχ. 15) θέσωμεν τὴν ὀρθὴν γωνίαν τοῦ γνώμονος, βλέπομεν ὅτι θ $<$ 1 ὀρθῆς. Λέγεται δὲ ἡ θ **ὀξεῖα** γωνία. Ὁμοίως εἶναι $\widehat{\Delta B \Gamma}$ $<$ τῆς ὀρθῆς $\widehat{H B \Gamma}$ (σχ. 20) καὶ ἑπομένως ἡ $\widehat{\Delta B \Gamma}$ εἶναι **ὀξεῖα** γωνία. Ὥστε :



Σχ. 20

Ὀξεῖα γωνία εἶναι μία γωνία μικροτέρα ἀπὸ τὴν ὀρθὴν γωνίαν.

β΄) Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον βλέπομεν ὅτι φ $>$ 1 ὀρθῆς (σχ. 15). Λέγεται δὲ ἡ φ **ἀμβλεῖα** γωνία. Καὶ ἡ $\widehat{\Delta E Z}$ εἶναι ἀμβλεῖα, διότι εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς γωνίας ΘΕΖ (σχ. 20). Ὥστε :

Ἀμβλεῖα γωνία εἶναι μία γωνία μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ὀρθὴν γωνίαν.

Ἀσκήσεις

54. Νὰ γράψητε δύο τεμνομένας εὐθείας καὶ νὰ ἐκτιμήσητε τὸ εἶδος κάθε

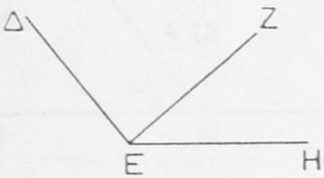
γωνίας αὐτῶν. Ἔπειτα δὲ μὲ τὸν γνώμονα νὰ ἐξελέγξητε τὴν ἀκρίβειαν τῆς ἐκτιμήσεώς σας.

5. Ἀπὸ ἓν σημεῖον μιᾶς ὀρθῆς γωνίας νὰ φέρητε καθέτους πρὸς τὰς πλευρὰς της. Ἔπειτα νὰ ἐκτιμήσητε τὸ εἶδος τῆς γωνίας τῶν καθέτων τούτων καὶ νὰ ἐξελέγξητε τὴν ἐκτίμησίν σας.

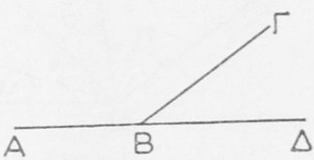
56. Νὰ κάμητε ὁμοίαν ἐργασίαν μὲ ὀξεῖαν γωνίαν.

28. Τί εἶναι ἐφεξῆς καὶ τί διαδοχικαὶ γωνίαι. α΄) Αἱ γωνίαι ΔΕΖ καὶ ΖΕΗ (σχ. 21 α΄) ἔχουσι τὴν αὐτὴν κορυφὴν Ε, κοινὴν τὴν πλευρὰν ΕΖ καὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς ἀπὸ τὰ δύο μέρη τῆς ΕΖ. Αὗται αἱ γωνίαι λέγονται **ἐφεξῆς γωνίαι**. Διὰ τοὺς ἰδίους λόγους καὶ αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΓΒΔ (σχ. 21 β΄) εἶναι ἐφεξῆς. Ὥστε :

Δύο γωνίαι εἶναι ἐφεξῆς, ἂν ἔχωσι τὴν αὐτὴν κορυφὴν καὶ μίαν κοινὴν πλευρὰν καὶ τὰς ἄλλας ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς.

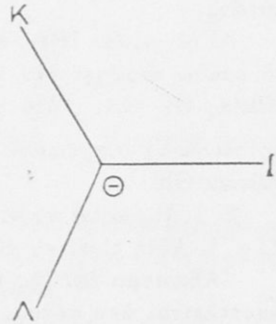


Σχ. 21 α΄



Σχ. 21 β΄

β΄) Ἀπὸ τὴν κορυφὴν μιᾶς γωνίας ΑΒΓ καὶ μέσα εἰς αὐτὴν φέρομεν διαφόρους εὐθείας ΒΔ, ΒΕ, ΒΖ (σχ. 22 α΄). Τοιουτοτρόπως σχηματίζομεν διαφόρους γωνίας η, θ, ι, κ. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι κάθε μία ἀπὸ αὐτὰς καὶ ἡ ἑπομένη ἢ ἡ προηγουμένη εἶναι ἐφεξῆς γωνίαι. Αἱ γωνίαι η, θ, ι, κ, ὅλαι μαζί, λέγονται **διαδοχικαὶ γωνίαι.** Ὥστε :



Σχ. 21 γ΄

Γωνίαι περισσότεραι ἀπὸ δύο λέγονται διαδοχικαί, ἂν κάθε μία καὶ ἡ ἑπομένη ἢ ἡ προηγουμένη εἶναι ἐφεξῆς γωνία.

Ἀσκήσεις

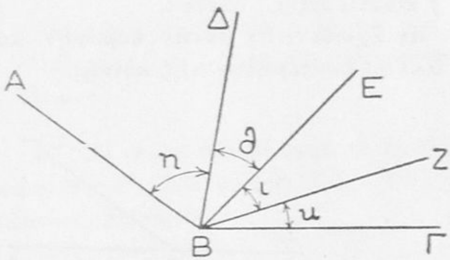
57. Νὰ σχηματίσητε δύο ἐφεξῆς γωνίας μὲ κοινὴν πλευρὰν μίαν ὡρισμένην εὐθεῖαν.

58. Νὰ γράψητε δύο τεμνομένας εὐθείας καὶ νὰ ὀνομάσητε τὰ ζεύγη τῶν ἐφεξῆς γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ἀπὸ αὐτάς.

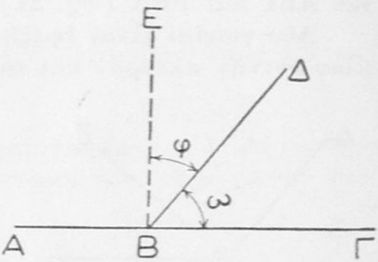
59. Πῶς λέγονται ὅλαι μαζὶ αἱ γωνίαι τῶν προηγουμένων εὐθειῶν;

60. Νὰ ἐξετάσητε, ἂν αἱ γωνίαι ΔΕΖ καὶ ΔΕΗ (σχ. 21 α΄) εἶναι ἐφεξῆς ἢ ὄχι.

29. Τί εἶναι ἄθροισμα γωνιῶν. α΄) Αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ΔΕΖ, ΖΕΗ ἀποτελοῦσι μαζὶ τὴν γωνίαν ΔΕΗ (σχ. 21 α΄). Αὐτὴ περιέχει



Σχ. 22 α



Σχ. 22 β

τὴν κοινὴν πλευρὰν ΕΖ τῶν γωνιῶν ΔΕΖ, ΖΕΗ. Λέγεται δὲ ἄθροισμα αὐτῶν.

Αἱ δὲ γωνίαι ΙΘΚ, ΚΘΛ (σχ. 21 γ΄) ἀποτελοῦσι μαζὶ ἓν σχῆμα, τὸ ὁποῖον περιέχει τὴν κοινὴν πλευρὰν ΘΚ καὶ περιορίζεται ἀπὸ τὰς εὐθείας ΘΙ, ΘΛ. Αὐτὸ τὸ σχῆμα τὸ ὀνομάζομεν ἐπίσης γωνίαν. Δὲν πρέπει δὲ νὰ συγχέωμεν αὐτὴν μὲ τὴν $\widehat{ΙΘΛ}$, ἡ ὁποία δὲν περιέχει τὴν εὐθεῖαν ΘΚ.

β΄) Αἱ γωνίαι η, θ, ι, κ μαζὶ ἀποτελοῦσι τὴν γωνίαν ΑΒΓ (σχ. 22 α΄). Αὐτὴ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν η, θ, ι, κ. Ὥστε :

Ἄθροισμα ἐφεξῆς ἢ διαδοχικῶν γωνιῶν εἶναι ἡ γωνία, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ αὐτάς.

Αἱ ἐφεξῆς ὅμως γωνίαι ΑΒΔ, ΔΒΓ (σχ. 22 β΄) δὲν ἀποτελοῦσι μίαν γωνίαν. Ἀποτελοῦνται ὅμως αὐταὶ ἀπὸ τὰς δύο ὀρθὰς $\widehat{ΑΒΕ}$ καὶ $\widehat{ΕΒΓ}$.

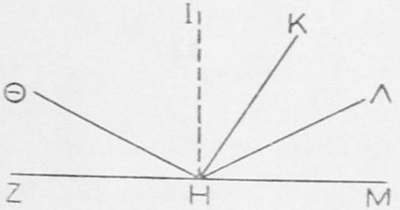
Εἶναι λοιπὸν $\widehat{AB\Delta} + \widehat{\Delta B\Gamma} = 2$ ὀρθαί.

Ὁμοίως (σχ. 23 α′) ἐννοοῦμεν ὅτι $\widehat{ZH\Theta} + \widehat{\Theta HK} + \widehat{KH\Lambda} + \widehat{\Lambda HM} = \widehat{ZHI} + \widehat{IHM} = 2$ ὀρθ. Δηλαδή :

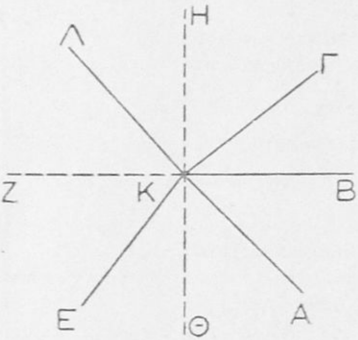
Ἂν ἀπὸ ἓν σημεῖον εὐθείας φέρωμεν μίαν ἢ περισσοτέρας εὐθείας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς, αἱ σχηματιζόμεναι ἐφεξῆς ἢ διαδοχικαὶ γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα 2 ὀρθὰς γωνίας.

Ὁμοίως (σχ. 23 β′) : $\widehat{AKB} + \widehat{BK\Gamma} + \widehat{\Gamma K\Lambda} + \widehat{\Lambda KE} + \widehat{EKA} = \widehat{ZKH} + \widehat{HKB} + \widehat{BK\Theta} + \widehat{\Theta KZ} = 4$ ὀρθαί. Δηλαδή :

Ἂν ἀπὸ ἓν σημεῖον ἑνὸς ἐπιπέδου φέρωμεν εἰς αὐτὸ διαφόρους εὐθείας, αἱ σχηματιζόμεναι διαδοχικαὶ γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα 4 ὀρθὰς γωνίας.



Σχ. 23 α′



Σχ. 23 β′

γ′) Διὰ νὰ προσθέσωμεν τυχούσας γωνίας, θέτομεν αὐτὰς τὴν μίαν παραπλεύρως ἀπὸ τὴν ἄλλην, ὥστε νὰ γίνωσι διαδοχικαὶ καὶ ἀναγνωρίζομεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, ὅπως προηγουμένως.

30. Τί εἶναι συμπληρωματικαὶ καὶ τί παραπληρωματικαὶ γωνίαι. Ἐπειδὴ $\omega + \varphi$ εἶναι ἡ ὀρθὴ γωνία ΕΒΓ (σχ. 22 β′), αἱ γωνίαι ω καὶ φ λέγονται **συμπληρωματικαὶ** γωνίαι.

Ἐπειδὴ δὲ $\widehat{\omega} + \widehat{AB\Delta} = 2$ ὀρθαί, αἱ γωνίαι ω καὶ ΑΒΔ λέγονται **παραπληρωματικαὶ** γωνίαι. Ὥστε :

Δύο γωνίαι εἶναι συμπληρωματικαί, ἂν ἔχωσιν ἄθροισμα 1 ὀρθὴν γωνίαν.

Δύο δὲ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, ἂν ἔχωσιν ἄθροισμα 2 ὀρθὰς γωνίας.

31. Τί εἶναι διαφορὰ δύο ἀνίσων γωνιῶν. Ἀπὸ μίαν γωνίαν π. χ. ἀπὸ τὴν ΑΒΔ ἀποκόπτομεν τὴν γωνίαν ΑΒΕ, ἡ ὁποία ἔχει μὲ τὴν ΑΒΔ κοινὴν τὴν πλευρὰν ΑΒ (σχ. 22 β′). Μένει δὲ ἡ γωνία ΕΒΔ. Αὐτὴ εἶναι ἡ διαφορὰ τῆς γωνίας ΑΒΕ ἀπὸ τὴν γωνίαν ΑΒΔ, ἤτοι $\widehat{AB\Delta} - \widehat{ABE} = \widehat{EB\Delta}$.

Ἀσκήσεις

61. Νὰ σχηματίσητε μίαν ὀξεῖαν γωνίαν καὶ ἔπειτα τὴν συμπληρωματικήν της.

62. Ἂν μία γωνία εἶναι $\frac{1}{5}$ ὀρθῆς, νὰ εὕρητε πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς ἔχει ἡ συμπληρωματική της.

63. Νὰ σχηματίσητε μίαν γωνίαν καὶ ἔπειτα τὴν συμπληρωματικήν της.

64. Ἂν μία γωνία εἶναι $\frac{3}{8}$ ὀρθῆς νὰ εὕρητε πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς ἔχει ἡ παραπληρωματική της.

65. Ἂν μία γωνία εἶναι $1 + \frac{3}{8}$ ὀρθῆς, νὰ εὕρητε πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς ἔχει ἡ παραπληρωματική της.

66. Νὰ ὁρίσητε τὸ εἶδος τῆς συμπληρωματικῆς μιᾶς ὀξείας γωνίας.

67. Νὰ ὁρίσητε τὸ εἶδος τῆς παραπληρωματικῆς μιᾶς ὀξείας καὶ ἔπειτα μιᾶς ἀμβλείας γωνίας.

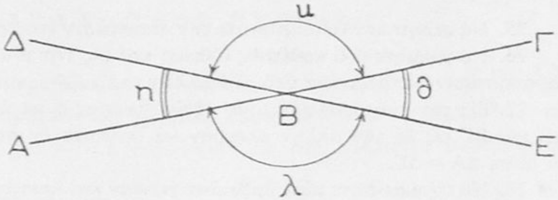
68. Ἀπὸ ἓν σημεῖον μιᾶς εὐθείας φέρομεν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς δύο εὐθείας. Ἂν συμβῇ αἱ σχηματιζόμεναι τρεῖς διαδοχικαὶ γωνίαι νὰ εἶναι ἴσαι, νὰ εὕρητε πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς εἶναι κάθε μία.

69. Ἂν συμβῇ μία ἀπὸ τὰς προηγουμένας γωνίας νὰ εἶναι $\frac{3}{8}$ ὀρθῆς, αἱ δὲ ἄλλαι ἴσαι, νὰ εὕρητε πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς ἔχει κάθε μία ἀπὸ αὐτάς.

70. Ἀπὸ ἓν σημεῖον τοῦ πίνακος φέρομεν εἰς αὐτὸν τρεῖς εὐθείας. Ἂν συμβῇ αἱ τρεῖς διαδοχικαὶ γωνίαι νὰ γίνωσιν ἴσαι, νὰ εὕρητε πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς εἶναι κάθε μία.

32. Τί εἶναι κατὰ κυρυφὴν γωνίαι. Γράφομεν δύο τεμνομένας εὐθείας ΑΒΓ, ΔΒΕ (σχ. 24) καὶ παρατηροῦμεν ὅτι αἱ πλευραὶ μιᾶς ἀπὸ τὰς γωνίας η καὶ θ αὐτῶν εἶναι προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης. Ὀνομάζομεν δὲ αὐτὰς **κατὰ κορυφὴν γωνίας.** Διὰ τὸν ἴδιον λόγον καὶ αἱ κ καὶ λ εἶναι κατὰ κορυφὴν γωνίαι. Ὥστε :

Δύο γωνίαι λέγονται κατὰ κορυφήν, ἂν αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης.



Σχ. 24

Ἂν εἰς τὴν γωνίαν η προσθέσωμεν τὴν κ ἢ τὴν λ, εὑρίσκομεν ἄθροισμα 2 ὀρθὰς (§ 29 β′).

Εἶναι λοιπὸν κ = λ. Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι η = θ. Δηλαδή :

Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Ἀσκήσεις

71. Νὰ σχηματίσητε μίαν γωνίαν καὶ ἔπειτα ἄλλην ἴσην μὲ αὐτήν.

72. Νὰ ὁρίσητε τὸ εἶδος τῆς κατὰ κορυφὴν μιᾶς ὀξείας ἢ ὀρθῆς γωνίας.

73. Μία ἀπὸ τὰς γωνίας 2 τεμνομένων εὐθειῶν εἶναι $\frac{1}{2}$ ὀρθῆς. Νὰ εὕρητε ἀπὸ πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς ἀποτελεῖται κάθε μία ἀπὸ τὰς ἄλλας.

74. Νὰ νοήσητε ὅτι ἡ γωνία η (σχ. 24) στρέφεται πέριξ τῆς κορυφῆς Β, ὅπως στρέφονται οἱ δεῖκται ἑνὸς ὡρολογίου. Ἂν δὲ ἡ στροφὴ σταματήσῃ, ὅταν ἡ πλευρὰ ΒΔ εὑρεθῇ εἰς τὴν ΒΕ, νὰ ὁρίσητε τὴν θέσιν τῆς ΒΑ.

Ἐρωτήσεις

Τί εἶναι γωνία καὶ ποῖα εἶναι τὰ στοιχεῖα αὐτῆς;

Τί εἶναι κάθετοι καὶ τί πλάγιαι εὐθεῖαι;

Ποῖα εἶναι τὰ εἴδη τῶν γωνιῶν;

Τί εἶναι ἐφεξῆς γωνίαι;

Τί εἶναι διαδοχικαὶ γωνίαι;

Τί εἶναι κατὰ κορυφὴν γωνίαι;

Τί ἐμάθομεν διὰ τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας;

Ποῖαι γωνίαι λέγονται συμπληρωματικαὶ καὶ ποῖαι παραπληρωματικαί;

Εἰς ποίαν περίπτωσιν τὸ ἄθροισμα γωνιῶν εἶναι δύο ὀρθαὶ καὶ εἰς ποίαν εἶναι 4 ὀρθαί;

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Β' κεφαλαίου

75. Νὰ φέρητε καὶ νὰ μετρήσητε τὴν ἀπόστασιν ἑνὸς σημείου ἀπὸ μίαν εὐθεῖαν.

76. Νὰ γράψητε δύο καθέτους εὐθείας καὶ εἰς τὴν μίαν νὰ ὁρίσητε δύο σημεῖα εἰς ἀπόστασιν 3 ἑκατοστῶν ἀπὸ τὴν ἄλλην.

77. Εἰς τὴν μίαν πλευρὰν μιᾶς ὀξείας γωνίας Α νὰ ὁρίσητε δύο ἴσα τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ εἰς δὲ τὴν ἄλλην πλευρὰν νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι ΔΑ = ΔΓ.

* 78. Νὰ σχηματίσητε μίαν ἀμβλεῖαν γωνίαν καὶ ἔπειτα τὴν διαφορὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀπὸ αὐτήν.

79. Μία γωνία εἶναι $\frac{1}{6}$ ὀρθῆς. Νὰ εὕρητε τὴν διαφορὰν αὐτῆς ἀπὸ τὴν συμπληρωματικήν της.

* 80. Ἂν μία γωνία εἶναι διπλασία ἀπὸ τὴν παραπληρωματικήν της, νὰ εὕρητε πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς ἔχει κάθε μία ἀπὸ αὐτὰς τὰς παραπληρωματικὰς γωνίας.

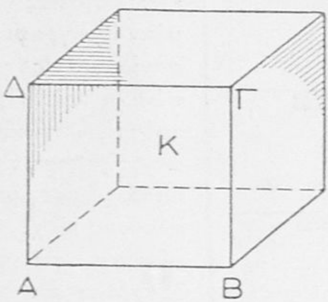
81. Ἂν μία γωνία εἶναι $\frac{3}{4}$ ὀρθῆς, νὰ εὕρητε τὴν διαφορὰν αὐτῆς ἀπὸ τὴν παραπληρωματικήν της.

82. Ἀπὸ ἓν σημεῖον Β τῆς μιᾶς πλευρᾶς ὀξείας γωνίας Α νὰ φέρητε κάθετον ἐπὶ τὴν ἄλλην πλευράν. Νὰ ἐκτιμήσητε δὲ μὲ τὸν ὀφθαλμόν σας τὸ εἶδος τῆς γωνίας τῆς καθέτου ταύτης μὲ τὴν πλευρὰν ΑΒ.

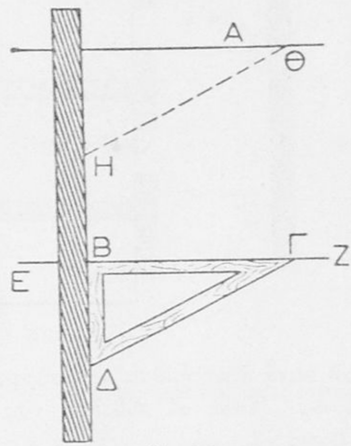
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ ΕΥΘΕΙΑΙ

33. Τί εἶναι παράλληλοι εὐθεῖαι. Αἱ ἀκμαὶ ΑΔ καὶ ΒΓ ἑνὸς κύβου Κ (σχ. 25) εὑρίσκονται εἰς μίαν ἕδραν καὶ εἶναι κάθετοι εἰς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ αὐτῆς (§ 23). Γνωρίζομεν δὲ ὅτι οὐδέποτε συναντῶνται



Σχ. 25



Σχ. 26

αὗται (§ 25 β'). Δι' αὐτοὺς τοὺς λόγους αἱ ἀκμαὶ ΑΔ καὶ ΒΓ λέγονται **παράλληλοι εὐθεῖαι.** Δηλαδή :

Δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, ἂν εἶναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ οὐδέποτε συναντῶνται.

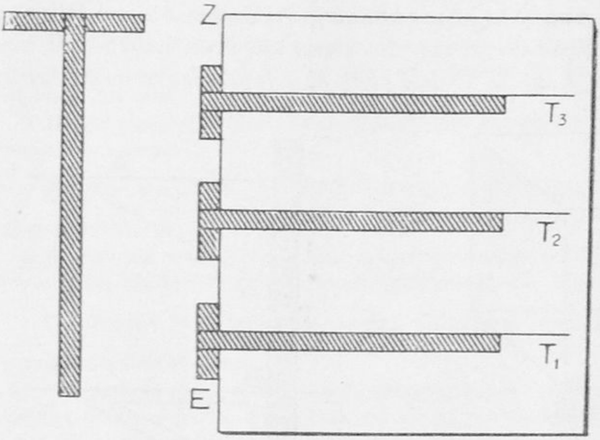
Νὰ δείξητε εἰς τὴν αἴθουσαν παραλλήλους εὐθείας.

34. Πρόβλημα Ι. **Ἀπὸ ἓν σημεῖον Α νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς μίαν εὐθεῖαν ΕΖ** (Σχ. 26).

Λύσις. Εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς ΕΖ καὶ τοῦ Α φέρομεν τὸν γνώμονα μὲ τὴν μίαν κάθετον πλευρὰν ΒΓ εἰς τὴν ΕΖ. Παραπλεύρως δὲ καὶ εἰς ἐπαφὴν μὲ τὴν ἄλλην κάθετον πλευρὰν ΒΔ θέτομεν τὸν κανόνα.

Ἔπειτα κρατοῦμεν τὸν κανόνα ἀκίνητον καὶ μεταθέτομεν τὸν γνώμονα οὕτως ὥστε ἡ πλευρὰ ΒΔ νὰ ὀλισθαίνῃ κατὰ μῆκος τοῦ κανόνος. Ὅταν δὲ τὸ Α εὑρεθῇ εἰς τὴν ΒΓ, σταματῶμεν τὸν γνώμονα καὶ σύρομεν τὴν γραφίδα κατὰ μῆκος τῆς ΒΓ. Τοιουτοτρόπως γράφομεν τὴν ζητουμένην εὐθεῖαν. (Διατί ;).

35. Τί εἶναι τό ταῦ καὶ εἰς τί τὸ χρησιμοποιοῦμεν. Τὸ ταῦ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἀνίσους καὶ καθέτους κανόνας. Ὁ μικρότερος κανὼν λέγεται **κεφαλή,** ὁ δὲ μαγαλύτερος **βραχίων** καὶ στερεοῦται μὲ τὴν κεφαλὴν εἰς τὸ μέσον της (σχ. 27).



Σχ. 27

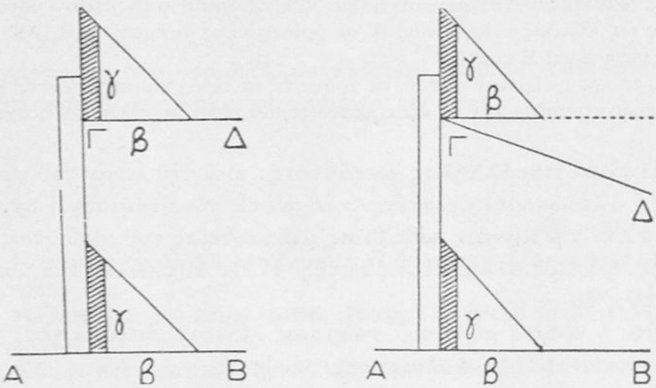
Μὲ τὸ ταῦ γράφομεν παραλλήλους εὐθείας εἰς μίαν ἰχνογραφικὴν σανίδα, εἰς τὸν πίνακα κτλ. Πρὸς τοῦτο ὀλισθαίνομεν τὴν κεφαλὴν κατὰ μῆκος μιᾶς πλευρᾶς π. χ. τοῦ πίνακος μὲ τὸν βραχίονα ἐπ' αὐτοῦ (σχ. 27). Σταματῶμεν δὲ τὸ ταῦ κατὰ διαστήματα καὶ σύρομεν τὴν κιμωλίαν κατὰ μῆκος τοῦ βραχίονος. Ὅλαι αἱ εὐθεῖαι, τὰς ὁποίας γράφομεν, εἶναι παράλληλοι. (Διατί ;).

36. Πῶς βεβαιούμεθα ἂν δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι ἢ ὄχι. Ποῖον εἶναι τὸ Εὐκλείδειον αἴτημα. Τοποθετοῦμεν (σχ. 28) τὸν γνώμονα καὶ τὸν κανόνα, ὅπως καὶ κατὰ τὴν λύσιν τοῦ προηγουμένου προβλήματος (§ 34). Δηλαδὴ μὲ τὴν μίαν κάθετον πλευρὰν β εἰς τὴν μίαν εὐθεῖαν ΑΒ κ.τ.λ. Μετακινοῦμεν ἔπειτα τὸν γνώμονα, ὥστε ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ γ νὰ ὀλισθαίνῃ κατὰ μῆκος τοῦ κανόνος. Παύομεν δὲ τὴν κίνησιν, ὅταν ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας εὑρεθῇ εἰς ἓν σημεῖον Γ τῆς ἄλλης εὐθείας ΓΔ.

Ἂν τότε ἡ πλευρὰ β συμπίπτῃ μὲ τὴν ΓΔ, αὐτὴ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ. Ἂν δὲ ἡ β συμπίπτῃ μὲ ἄλλην εὐθεῖαν ΓΕ, αὐτὴ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ὄχι ἡ ΓΔ. Παραδεχόμεθα δηλ. ὅτι :

Ἀπὸ ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐκτὸς μιᾶς εὐθείας ἄγεται μία μόνον παράλληλος πρὸς αὐτήν.

Ἡ πρότασις αὕτη ὀφείλεται εἰς τὸν Ἕλληνα μαθηματικὸν Εὐκλείδην (330 - 275 π. Χ.) καὶ λέγεται **Εὐκλείδειον αἴτημα.**



Σχ. 28

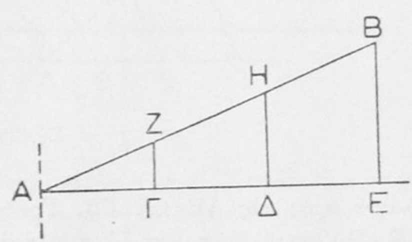
Ἀσκήσεις

83. Νὰ γράψητε ἀπὸ τρεῖς παραλλήλους εὐθείας καὶ ἔπειτα ἄλλας τρεῖς παραλλήλους, αἱ ὁποῖαι νὰ τέμνωσι τὰς πρώτας.

84. Νὰ ὁρίσητε ἀπὸ τρία σημεῖα, τὰ ὁποῖα νὰ μὴ κεῖνται εἰς μίαν εὐθεῖαν. Ἔπειτα ἀπὸ κάθε ἓν νὰ γράψητε παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν τῶν δύο ἄλλων.

85. Νὰ γράψητε μίαν εὐθεῖαν καὶ δύο παραλλήλους πρὸς αὐτήν. Νὰ ἐλέγξητε δέ, ἂν αὐταὶ εἶναι παράλληλοι μεταξύ των ἢ ὄχι.

37. Πρόβλημα ΙΙ. **Νὰ διαιρεθῇ ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ εἰς τρία ἴσα μέρη.** (σχ. 29).



Σχ. 29

Λύσις. Γράφομεν μίαν εὐθεῖαν ΑΕ, ἡ ὁποία νὰ σχηματίζῃ γωνίαν μὲ τὴν ΑΒ. Ἔπειτα ὁρίζομεν εἰς τὴν ΑΕ τρία ἴσα καὶ διαδοχικὰ τμήματα ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ. Φέρομεν δὲ τὴν ΒΕ καὶ παραλλήλους πρὸς αὐτὴν τὰς ΓΖ καὶ ΔΗ. Μὲ τὸν διαβήτην δὲ βεβαιούμεθα ὅτι ΑΖ = ΖΗ = ΗΒ.

Ἀσκήσεις

86. Νὰ γράψητε ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα καὶ νὰ ὁρίσητε τὸ μέσον αὐτοῦ.

87. Εἰς τὰς πλευρὰς μιᾶς γωνίας Α νὰ ὁρίσητε δύο τμήματα ΑΒ, ΑΓ καὶ νὰ ὁρίσητε τὰ μέσα Δ καὶ Ε αὐτῶν,

88. Εἰς τὸ προηγούμενον σχῆμα νὰ γράψητε τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΒΓ καὶ ΔΕ. Νὰ συγκρίνητε ταῦτα καὶ νὰ ἐξακριβώσητε, ἂν εἶναι παράλληλα ἢ ὄχι.

38. Τί εἶναι παράλληλος μετάθεσις. Διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τῆς § 34 ἐδώσαμεν ὡρισμένην κίνησιν εἰς τὸν γνώμονα (σχ. 26).

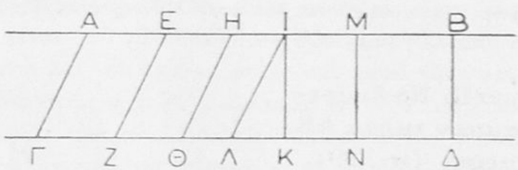
Κατ' αὐτὴν τὴν κίνησιν κάθε θέσις μιᾶς εὐθείας τοῦ γνώμονος εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς ἄλλας θέσεις αὐτῆς. Π. χ. αἱ εὐθεῖαι ΓΔ καὶ ΗΘ εἶναι παράλληλοι.

Δι' αὐτὸ ἡ κίνησις αὐτὴ τοῦ γνώμονος λέγεται **παράλληλος μετάθεσις τοῦ γνώμονος.**

Ἡ πλευρὰ τοῦ κανόνος, εἰς τὴν ὁποίαν ὀλισθαίνει μία πλευρὰ τοῦ γνώμονος λέγεται **ὁδηγός.**

Καὶ ἡ κίνησις τοῦ ταῦ (σχ. 27) εἶναι παράλληλος μετάθεσις αὐτοῦ μὲ ὁδηγὸν ΕΖ.

39. Τί εἶναι ἀπόστασις δύο παραλλήλων εὐθειῶν. Μεταξὺ δύο παραλλήλων εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 30) γράφομεν διάφορα εὐθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΛ παράλληλα μεταξύ των καὶ



Σχ. 30

πλάγια πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ. Γράφομεν ἐπίσης ἄλλα τμήματα ΙΚ, ΜΝ, ΒΔ παράλληλα μεταξύ των καὶ κάθετα πρὸς τὴν ΑΒ. Μὲ τὸν γνώμονα βλέπομεν ὅτι αὐτὰ εἶναι κάθετα καὶ εἰς τὴν ΓΔ.

Μὲ τὸν διαβήτην βλέπομεν ὅτι : ΑΓ = ΕΖ = ΗΘ = ΙΛ καὶ ΙΚ = ΜΝ = ΒΔ. Δηλαδή :

Παράλληλα εὐθύγραμμα τμήματα μεταξὺ παραλλήλων εὐθειῶν εἶναι ἴσα.

Ἐπειδὴ δὲ ΙΚ < ΙΛ (§ 25 γ'), τὸ τμῆμα ΙΚ λέγεται ἀπόστασις τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Δηλαδή :

Ἀπόστασις δύο παραλλήλων εὐθειῶν εἶναι ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα κάθετον πρὸς αὐτὰς καὶ περατούμενον εἰς αὐτάς.

Ἀσκήσεις

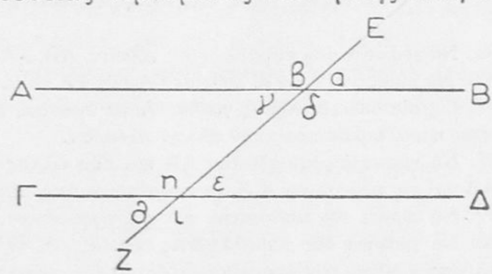
89. Νὰ γράψητε καὶ νὰ μετρήσητε τὴν ἀπόστασιν δύο παραλλήλων εὐθειῶν τοῦ τετραδίου σας.

90. Νὰ γράψητε δύο παραλλήλους εὐθείας. Ἔπειτα νὰ γράψητε καὶ νὰ μετρήσητε τὴν ἀπόστασιν αὐτῶν.

*91. Νὰ γράψητε μίαν εὐθεῖαν καὶ μίαν παράλληλον πρὸς αὐτὴν εἰς ἀπόστασιν 3 ἑκατοστομέτρων.

*92. Νὰ γράψητε δύο παραλλήλους εὐθείας καὶ ἄλλην παράλληλον πρὸς αὐτὰς καὶ εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ αὐτάς.

*40. Πῶς σχετίζονται αἱ γωνίαι, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ἀπὸ δύο παραλλήλους εὐθείας τεμνομένας ὑπὸ τρίτης πλαγίως.



Σχ. 31.

Αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνονται πλαγίως ὑπὸ τῆς ΕΖ (σχ. 31). Ἀπὸ αὐτὰς σχηματίζονται 4 ὀξεῖαι γωνίαι α, γ, ε, θ καὶ 4 ἀμβλεῖαι β, δ, η, ι. Ἂν ὑποβάλωμεν τὴν ε εἰς παράλληλον μετάθεσιν μὲ ὁδηγὸν ΕΖ, βλέπομεν ὅτι ἐφαρμόζει εἰς τὴν α. Εἶναι λοιπὸν $\alpha = \varepsilon$. Ἐπειδὴ δὲ $\alpha = \gamma$, $\varepsilon = \theta$ (§ 32), ἐννοοῦμεν ὅτι $\alpha = \gamma = \varepsilon = \theta$. Δηλαδή :

Αἱ ὀξεῖαι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ἀπὸ δύο παραλλήλους εὐθείας τεμνομένας πλαγίως ὑπὸ ἄλλης, εἶναι ἴσαι.

Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι $\eta = \beta = \delta = \iota$. Δηλαδή :

Καὶ αἱ ἀμβλεῖαι γωνίαι τοιούτων εὐθειῶν εἶναι ἴσαι.

Ἀσκήσεις

93. Ἂν $\alpha = \frac{1}{2}$ ὀρθῆς (σχ. 31), νὰ εὕρητε πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς ἔχει κάθε μία ἀπὸ τὰς γωνίας τοῦ ἰδίου σχήματος.

94. Ἂν μία ἀπὸ τὰς γωνίας, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ἀπὸ δύο παραλλήλους εὐθείας τεμνομένας ὑπὸ τρίτης εἶναι $1\frac{1}{4}$ ὀρθῆς, νὰ εὕρητε πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς ἔχει κάθε μία ἀπὸ τὰς ἄλλας γωνίας αὐτῶν.

95. Ἂν μία ἀπὸ τὰς γωνίας, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ἀπὸ δύο παραλλήλους εὐθείας τεμνομένας ὑπὸ τρίτης, εἶναι διπλασία ἀπὸ μίαν ἄλλην ἀπὸ αὐτάς, νὰ εὕρητε πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς ἔχει κάθε μία ἀπὸ αὐτάς.

Ἐρωτήσεις

Τί εἶναι παράλληλοι εὐθεῖαι;

Ποῖα ὄργανα μᾶς βοηθοῦσι νὰ γράψωμεν παραλλήλους εὐθείας;

Τί λέγει τὸ Εὐκλείδειον αἴτημα;

Τί εἶναι ἀπόστασις δύο παραλλήλων εὐθειῶν;

Τί γνωρίζετε διὰ τὰς γωνίας, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ἀπὸ δύο παραλλήλους εὐθείας τεμνομένας ὑπὸ τρίτης πλαγίως.;

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Γ' κεφαλαίου

96. Νὰ γράψητε δύο παραλλήλους εὐθείας ΑΒ, ΓΔ καὶ ἄλλην ΕΖ κάθετον πρὸς τὴν ΑΒ. Νὰ διακρίνητε, ἂν αἱ εὐθεῖαι ΓΔ καὶ ΕΖ εἶναι κάθετοι ἢ πλάγιαι.

97. Εἰς μίαν πλευρὰν μιᾶς γωνίας Α νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον Β καὶ νὰ φέρητε ἀπὸ αὐτὸ παράλληλον πρὸς τὴν ἄλλην πλευράν.

98. Νὰ γράψητε μίαν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ δύο ἄλλας ΓΔ, ΕΖ παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΒ καὶ εἰς ἀπόστασιν 4 ἑκατοστομέτρων ἀπὸ αὐτήν.

99. Νὰ εὕρητε τὴν ἀπόστασιν τῶν προηγουμένων εὐθειῶν ΓΔ καὶ ΕΖ.

100. Νὰ γράψητε δύο παραλλήλους εὐθείας καὶ τὴν ἀπόστασιν αὐτῶν. Ἔπειτα νὰ διαιρέσητε αὐτὴν τὴν ἀπόστασιν εἰς τρία ἴσα μέρη.

101. Νὰ εὕρητε τὸ ἄθροισμα μιᾶς ὀξείας καὶ μιᾶς ἀμβλείας γωνίας ἀπὸ τὰς σχηματιζομένας ὑπὸ δύο παραλλήλων εὐθειῶν τεμνομένων ὑπὸ τρίτης.

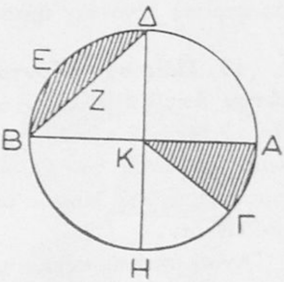
* 102. Ἂν μία ἀπὸ τὰς γωνίας δύο παραλλήλων εὐθειῶν τεμνομένων ὑπὸ τρίτης εἶναι 0,4 ὀρθῆς, νὰ εὕρητε πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς ἔχει κάθε μία ἀπὸ τὰς ἄλλας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'

1. Ο ΚΥΚΛΟΣ

41. Τί εἶναι κύκλος καὶ ποῖα εἶναι τὰ στοιχεῖα αὐτοῦ. Τὸ ἐπίπεδον μέρος τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κώνου περικλείεται ἀπὸ μίαν καμπύλην γραμμήν. Τοιαύτην καμπύλην γραμμὴν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν εἰς ἓν ἐπίπεδον ὡς ἑξῆς :

Στερεώνομεν τὰ σκέλη τοῦ διαβήτου μας, ὥστε νὰ μὴ μεταβάλληται ἡ γωνία αὐτῶν. Ἔπειτα στηρίζομεν τὴν αἰχμὴν τοῦ ἑνὸς σκέλους εἰς ἓν σημεῖον Κ τοῦ ἐπιπέδου καὶ περιφέρομεν τὸν διαβήτην εἰς τρόπον, ὥστε ἡ γραφὶς τοῦ ἄλλου σκέλους νὰ ἐγγίζῃ συνεχῶς τὸ ἐπίπεδον.



Σχ. 32

Τοιουτοτρόπως ἡ γραφὶς γράφει μίαν καμπύλην ΑΔΒΓ (σχ. 32).

Αὐτὴ ἡ καμπύλη λέγεται **περιφέρεια.**

Τὸ δὲ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ αὐτήν, λέγεται **κύκλος.**

Ἀπὸ τὸν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον ἐγράψαμεν τὴν περιφέρειαν, ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ σημεῖον Κ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας. Δι' αὐτὸ τὸ Κ λέγεται **κέντρον** τῆς περιφερείας καὶ τοῦ κύκλου. Ὥστε :

Κύκλος εἶναι ἓν ἐπίπεδον μέρος, τοῦ ὁποίου ἓν σημεῖον (τὸ κέντρον) ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς, ἀπὸ τὴν ὁποίαν περικλείεται.

Ἡ δὲ γραμμή, ἀπὸ τὴν ὁποίαν περικλείεται εἷς κύκλος, λέγεται περιφέρεια αὐτοῦ. Τὰ τμήματα ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ κ.τ.λ. (σχ. 32) ἀρχίζουσιν ἀπὸ τὸ κέντρον καὶ τελειώνουν εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου Κ. Αὐτὰ λέγονται **ἀκτῖνες** τοῦ κύκλου. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα δὲ ἐννοοῦμεν ὅτι :

Ὅλαι αἱ ἀκτῖνες ἑνὸς κύκλου εἶναι ἴσαι.

Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΚΑ διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον Κ καὶ τελειώνει εἰς τὴν περιφέρειαν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη.

Τοῦτο λέγεται **διάμετρος** τοῦ κύκλου. Καὶ τὸ τμῆμα ΔΚΗ εἶναι διάμετρος. Ἐπειδὴ δὲ κάθε διάμετρος ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἀκτῖνας, ἐννοοῦμεν ὅτι :

Ὅλαι αἱ διάμετροι ἑνὸς κύκλου εἶναι ἴσαι.

42. Εἰς τί διαιρεῖ τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειαν μία διάμετρος. Εἰς ἓν φύλλον χάρτου γράφομεν μίαν περιφέρειαν καὶ μίαν διάμετρον. Κόπτομεν τὸν κύκλον κατὰ τὴν διάμετρον ταύτην καὶ θέτομεν τὸ ἓν μέρος ἐπάνω εἰς τὸ ἄλλο. Μὲ μικρὰν προσοχὴν κατορθώνομεν νὰ ἐφαρμόσωσι τὰ δύο ταῦτα μέρη ἀκριβῶς τὸ ἓν ἐπάνω εἰς τὸ ἄλλο. Ἐννοοῦμεν λοιπὸν ὅτι :

Μία διάμετρος ἑνὸς κύκλου χωρίζει αὐτὸν καὶ τὴν περιφέρειάν του εἰς ἴσα μέρη.

Αὐτὰ τὰ μέρη τοῦ κύκλου λέγονται **ἡμικύκλια.** Τὰ δὲ μέρη τῆς περιφερείας λέγονται **ἡμιπεριφέρειαι.**

43. Πῶς σχετίζονται δύο κύκλοι ἢ δύο περιφέρειαι μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα. Εἰς ἓν φύλλον χάρτου γράφομεν δύο περιφερείας μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα. Ἀποχωρίζομεν ἔπειτα τὸν ἕνα κύκλον καὶ τὸν θέτομεν ἐπάνω εἰς τὸν ἄλλον, ὥστε νὰ συμπέσωσι τὰ κέντρα των. Βλέπομεν δὲ ὅτι οἱ κύκλοι οὗτοι ἐφαρμόζουσιν ἀκριβῶς. Ἀπὸ αὐτὸ ἐννοοῦμεν ὅτι :

Ἂν αἱ ἀκτῖνες κύκλων εἶναι ἴσαι, οἱ κύκλοι οὗτοι εἶναι ἴσοι καὶ αἱ περιφέρειαι αὐτῶν εἶναι ἐπίσης ἴσαι.

Ἀσκήσεις

103. Νὰ γράψητε ἀπὸ μίαν περιφέρειαν μὲ ἀκτῖνα 4 ἑκατοστομέτρων καὶ νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου αὐτῆς.

104. Εἷς μαθητὴς νὰ γράψῃ εἰς τὸν πίνακα μίαν περιφέρειαν μὲ ἀκτῖνα 0,3 μετ. καὶ νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου.

105. Νὰ γράψητε μίαν περιφέρειαν μὲ κέντρον ἓν σημεῖον Κ. Νὰ ὁρίσητε ἔπειτα ἓν σημεῖον Α μέσα εἰς τὸν κύκλον καὶ ἓν ἄλλο Β ἔξω ἀπὸ αὐτόν. Νὰ συγκρίνητε δὲ τὴν ἀπόστασιν ΚΑ καὶ τὴν ΚΒ πρὸς τὴν ἀκτῖνα.

106. Νὰ γράψητε μίαν περιφέρειαν καὶ δύο καθέτους διαμέτρους. Ἔπειτα δὲ νὰ ἀποπερατώσητε τὴν ἰχνογράφησιν τοῦ σχ. 33 καὶ νὰ χρωματίσητε τὰ μέρη αὐτοῦ μὲ 3 χρώματα κατὰ βούλησιν.

44. Ποῖα μέρη διακρίνομεν εἰς ἕνα κύκλον καὶ εἰς μίαν περιφέρειαν. α΄) Τὸ μέρος ΒΕΔ τῆς περιφερείας (σχ. 34) λέγεται **τόξον.** Δηλαδή :

Τόξον εἶναι ἓν μέρος μιᾶς περιφερείας.

Καὶ κάθε ἡμιπεριφέρεια εἶναι λοιπὸν τόξον.

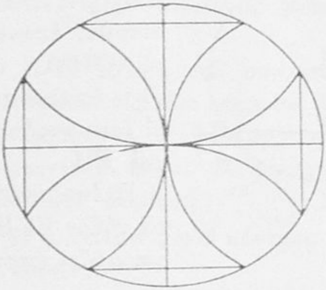
Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΔ λέγεται **χορδὴ** τοῦ τόξου ΒΕΔ καὶ τοῦ τόξου ΒΓΑΔ. Δηλαδή :

Χορδὴ ἑνὸς τόξου εἶναι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὰ ἄκρα αὐτοῦ.

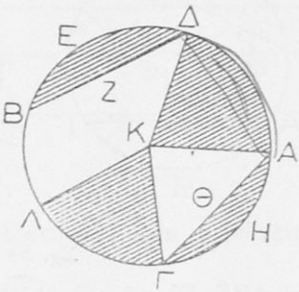
β′) Μεταξὺ ἑνὸς τόξου ΔΕΒ καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ περιέχεται ἓν μέρος ΔΖΒΕΔ τοῦ κύκλου. Τοῦτο λέγεται **κυκλικὸν τμῆμα.**

Καὶ τὸ μέρος ΑΗΓΘΑ εἶναι **κυκλικὸν τμῆμα.** Ὥστε :

Κυκλικὸν τμῆμα εἶναι μέρος ἑνὸς κύκλου, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ ἓν τόξον καὶ ἀπὸ τὴν χορδὴν αὐτοῦ.



Σχ. 33



Σχ. 34

γ′) Μεταξὺ τοῦ τόξου ΑΔ καὶ τῶν ἀκτίνων ΚΑ, ΚΔ ὑπάρχει ἓν μέρος ΑΚΔ τοῦ κύκλου. Τοῦτο λέγεται **κυκλικὸς τομεύς.** Καὶ τὸ μέρος ΑΚΓΗΑ εἶναι κυκλικὸς τομεύς. Ὥστε :

Κυκλικὸς τομεὺς εἶναι μέρος ἑνὸς κύκλου, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ ἓν τόξον καὶ ἀπὸ ἀκτῖνας, αἱ ὁποῖαι καταλήγουσιν εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ.

Τὸ τόξον ἑνὸς κυκλικοῦ τομέως λέγεται **βάσις** αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις

107. Νὰ ἐξετάσητε πόσας χορδὰς ἔχει ἓν τόξον.

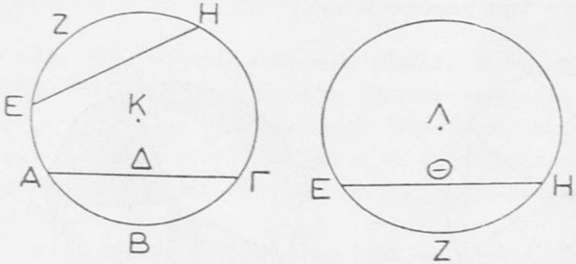
108. Νὰ γράψητε μίαν περιφέρειαν μὲ ἀκτῖνα 0,04 μέτρου καὶ νὰ χωρίσητε τὸν κύκλον εἰς δύο κυκλικὰ τμήματα μὲ μίαν χορδὴν 0,06 μέτρου.

109. Νὰ γράψητε δύο διαμέτρους ἑνὸς κύκλου καὶ νὰ ὁρίσητε εἰς τί χωρίζεται ὁ κύκλος ἀπὸ αὐτάς.

110. Νὰ σχηματίσητε ἕνα κυκλικὸν τομέα, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις νὰ ἔχῃ χορδὴν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα.

111. Νὰ συγκρίνητε τὴν χορδὴν μιᾶς ἡμιπεριφερείας πρὸς τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς.

45. Πῶς σχετίζονται τὰ τόξα μιᾶς περιφερείας ἢ ἴσων περιφερειῶν, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ἴσας χορδὰς καὶ αἱ χορδαὶ ἴσων τόξων. α′) Εἰς μίαν περιφέρειαν Κ ἢ εἰς δύο ἴσας περιφερείας Κ καὶ Λ ὁρίζομεν δύο ἴσας χορδὰς ΑΓ καὶ ΕΗ (σχ. 35). Ἀποκόπτομεν ἔπειτα τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΕΖΗΘΕ καὶ τὸ θέτομεν ἐπάνω εἰς τὸ ΑΒΓΑ, ὥστε νὰ ἐφαρμόσωσιν αἱ ἴσαι χορδαὶ ΑΓ καὶ ΕΗ.



Σχ. 35

Βλέπομεν δὲ ὅτι τὸ τόξον ΕΖΗ ἐφαρμόζει ἀκριβῶς εἰς τὸ ΑΒΓ. Εἶναι λοιπὸν $\widehat{ΑΒΓ} = \widehat{ΕΖΗ}$. Καὶ τὰ ὑπόλοιπα δὲ τόξα τῶν περιφερειῶν τούτων εἶναι ἴσα (§ 43). Ὥστε :

Τὰ τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας ἢ ἴσων περιφερειῶν, τὰ ὁποῖα ἔχουσιν ἴσας χορδάς, εἶναι ἴσα ἂν ἀμφότερα εἶναι μικρότερα ἢ μεγαλύτερα ἡμιπεριφερείας.

Ἀπὸ αὐτὸ ἐννοοῦμεν ὅτι :

Διὰ νὰ ὁρίσωμεν ἴσα τόξα εἰς μίαν περιφέρειαν ἢ εἰς ἴσας περιφερείας, ἀρκεῖ νὰ ὁρίσωμεν δύο ἴσας χορδὰς μὲ τὸν διαβήτην.

β′) Ἂν δύο ἴσα τόξα ΑΒΓ, ΕΖΗ ἐφαρμόσωσι τὸ ἓν ἐπάνω εἰς τὸ ἄλλο, βλέπομεν ὅτι αἱ χορδαὶ αὐτῶν ἐφαρμόζουσιν. Εἶναι λοιπὸν ΑΓ = ΕΗ. Ὥστε :

Τὰ ἴσα τόξα ἔχουσιν ἴσας χορδάς.

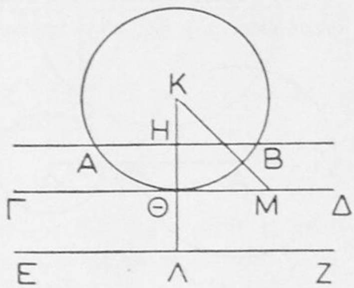
Ἀσκήσεις

112. Εἰς μίαν περιφέρειαν νὰ ὁρίσητε ἓν τόξον μικρότερον ἡμιπεριφερείας μὲ χορδὴν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα. Νὰ προσπαθήσητε δὲ νὰ ἴδητε πόσας φορὰς χωρεῖ εἰς τὴν περιφέρειαν ἓν τοιοῦτον τόξον.

113. Εἰς ἕνα κύκλον νὰ γράψητε δύο ἴσας χορδὰς καὶ τὰς ἀποστάσεις τοῦ κέντρου ἀπὸ αὐτάς. Ἔπειτα δὲ νὰ συγκρίνητε αὐτὰς τὰς ἀποστάσεις.

114. Εἰς μίαν περιφέρειαν νὰ ὁρίσητε δύο τόξα ΑΒ καὶ ΑΒΓ μικρότερα ἡμιπεριφερείας καὶ νὰ συγκρίνητε τὰς χορδὰς αὐτῶν.

46. Ποῖαι εἶναι αἱ δυναταὶ θέσεις μιᾶς εὐθείας καὶ μιᾶς περιφερείας. Εἰς μίαν ἀκτῖνα ΚΘ (σχ. 36) ὁρίζομεν ἓν σημεῖον Η, εἰς δὲ τὴν προέκτασιν αὐτῆς ἔξω ἀπὸ τὸν κύκλον ἓν ἄλλο Λ. Ἀπὸ δὲ τὰ σημεῖα Η, Θ, Λ, φέρομεν εὐθείας ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ καθέτους εἰς τὴν ΚΛ. Τοιουτοτρόπως βλέπομεν ὅτι :



Σχ. 36

α΄) Ἡ εὐθεῖα ΑΒ συναντᾷ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Β. Λέγεται δὲ αὐτὴ **τέμνουσα** τῆς περιφερείας. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι ΚΗ ‹ ΚΘ. Δηλαδή :

Ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ μίαν τέμνουσαν εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα.

β΄) Ἡ εὐθεῖα ΓΔ ἔχει μὲ τὴν περιφέρειαν κοινὸν μόνον τὸ σημεῖον Θ. Διότι ἓν ἄλλο σημεῖον τῆς ΓΔ, π. χ. τὸ Μ, εἶναι ἔξω ἀπὸ τὸν κύκλον, ἐπειδὴ εἶναι ΚΜ › ΚΘ (§ 25 γ΄).

Ἡ εὐθεῖα ΓΔ λέγεται **ἐφαπτομένη** τῆς περιφερείας. Τὸ δὲ σημεῖον Θ λέγεται **σημεῖον ἐπαφῆς.** Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι :

Ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ μίαν ἐφαπτομένην εἶναι ἀκτίς.

γ΄) Ἡ εὐθεῖα ΕΖ οὐδὲν ἔχει κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν περιφέρειαν. Εἶναι δὲ ΚΛ › ΚΘ.

Ἀπὸ ὅλα αὐτὰ βλέπομεν ὅτι :

Μία εὐθεῖα δυνατὸν νὰ τέμνῃ μίαν περιφέρειαν ἢ νὰ ἐφάπτηται αὐτῆς ἢ νὰ μὴ ἔχῃ κοινὸν σημεῖον μὲ αὐτήν.

Ἀσκήσεις

115. Νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον εἰς μίαν περιφέρειαν καὶ νὰ φέρητε τὴν ἐφαπτομένην εἰς αὐτό.

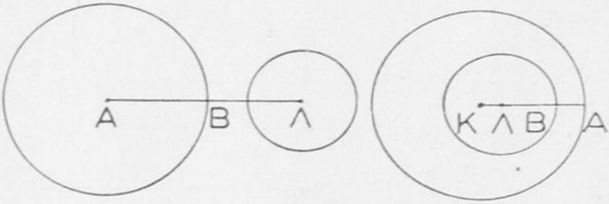
116. Νὰ γράψητε μίαν διάμετρον ἑνὸς κύκλου καὶ νὰ φέρητε τὰς ἐφαπτομένας

εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς. Νὰ ἐξακριβώσητε δέ, ἂν αὗται εἶναι παράλληλοι ἢ τέμνωνται.

117. Νὰ γράψητε μίαν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ ἐκτὸς αὐτῆς νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον Κ. Ἔπειτα νὰ γράψητε μίαν περιφέρειαν μὲ κέντρον Κ, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ΑΒ νὰ εἶναι ἐφαπτομένη.

118. Εἰς μίαν εὐθεῖαν ΑΒ νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον Γ καὶ νὰ γράψητε δύο περιφερείας μὲ ἀκτῖνα δύο ἑκατοστομέτρων, εἰς τὰς ὁποίας ἡ ΑΒ νὰ ἐφάπτηται εἰς τὸ Γ.

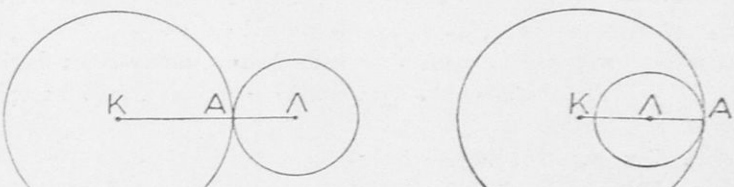
47. Ποῖαι εἶναι αἱ δυναταὶ θέσεις δύο μὴ ὁμοκέντρων περιφερειῶν. α′) Εἰς τὴν προέκτασιν μιᾶς ἀκτῖνος ΑΒ ἑνὸς κύκλου Α ὁρίζομεν ἓν σημεῖον Λ. Ἔπειτα γράφομεν μίαν περιφέρειαν μὲ κέντρον Λ καὶ ἀκτῖνα μικροτέραν τῆς ΛΒ (σχ. 37 α′). Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι αἱ δύο περιφέρειαι δὲν ἔχουσι κοινὰ σημεῖα καὶ ὁ εἷς κύκλος εἶναι ὅλος ἔξω ἀπὸ τὸν ἄλλον.



α′ Σχ. 37 β′

Ἡ εὐθεῖα ΑΛ διέρχεται ἀπὸ τὰ κέντρα καὶ διὰ τοῦτο λέγεται **διάκεντρος** τῶν κύκλων τούτων.

β′) Εἰς τὴν ἀκτῖνα ΚΑ ὁρίζομεν δύο σημεῖα, Λ, Β μὲ τὸ Λ πλησιέστερον πρὸς τὸ Κ. Γράφομεν πάλιν περιφέρειαν μὲ κέντρον Λ καὶ



α′ β′

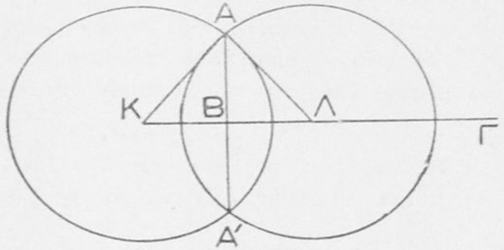
Σχ. 38

ἀκτῖνα ΛΒ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι καὶ αὐτὴ δὲν ἔχει κοινὰ σημεῖα μὲ τὴν περιφέρειαν Κ. Ὁ κύκλος Λ ὅμως εἶναι ὅλος μέσα εἰς τὸν Κ (σχ. 37 β′).

γ′) Εἰς τὴν προέκτασιν μιᾶς ἀκτῖνος ΚΑ ἐκτὸς τοῦ κύκλου ορίζομεν ἓν σημεῖον Λ καὶ γράφομεν τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον Λ καὶ ἀκτῖνα ΛΑ (σχ. 38 α′).

Τώρα βλέπομεν ὅτι αἱ περιφέρειαι ἔχουσι κοινὸν μόνον τὸ σημεῖον Α καὶ ἕκαστος κύκλος εἶναι ἔξω ἀπὸ τὸν ἄλλον.

Λέγομεν δὲ ὅτι οἱ κύκλοι οὗτοι **ἐφάπτονται ἐκτὸς** εἰς τὸ σημεῖον Α. Τοῦτο δὲ λέγεται **σημεῖον ἐπαφῆς**.



Σχ. 39

δ′) Ἂν ὁρίσωμεν τὸ Λ ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΚΑ (σχ. 38 β′), πάλιν αἱ περιφέρειαι Κ καὶ Λ ἔχουσι κοινὸν σημεῖον μόνον τὸ Α, ἀλλ' ὁ κύκλος Λ εἶναι μέσα εἰς τὸ Κ.

Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι οὗτοι **ἐφάπτονται ἐντός**.

ε′) Εἰς μίαν περιφέρειαν Κ ὁρίζομεν ἓν σημεῖον Α καὶ φέρομεν εὐθεῖαν ΚΛ, ἡ ὁποία νὰ μὴ περνᾷ ἀπὸ τὸ Α (σχ. 39). Ἔπειτα γράφομεν τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον Λ καὶ ἀκτῖνα ΛΑ.

Βλέπομεν δὲ ὅτι αὐτὴ καὶ ἡ Κ ἔχουσι κοινὰ σημεῖα τὸ Α καὶ ἓν ἄλλο Α′. Δι' αὐτὰς λέγομεν ὅτι **τέμνονται.**

Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΑ′ εἶναι χορδὴ τόξων καὶ τῶν δύο περιφερειῶν. Διὰ συντομίαν ὀνομάζομεν αὐτὴν **κοινὴν χορδὴν** τῶν τεμνομένων περιφερειῶν.

Ἀσκήσεις

119. Νὰ ὁρίσητε εἰς τὸ τετράδιόν σας δύο σημεῖα Κ καὶ Λ εἰς ἀπόστασιν 5 ἑκατοστομέτρων. Ἔπειτα νὰ γράψητε περιφερείας μὲ κέντρα Κ καὶ Λ καὶ ἀκτῖνα 2 ἑκατοστομέτρων. Νὰ παρατηρήσητε δὲ ποίαν θέσιν ἔχουσιν οἱ δύο κύκλοι μεταξύ των.

120. Νὰ κάμητε τὴν ἰδίαν ἐργασίαν ἀλλὰ μὲ ἀκτῖνα 3 ἑκατοστῶν τοῦ μέτρου.

121. Εἰς μίαν εὐθεῖαν τοῦ πίνακος νὰ ὁρίσητε ἓν σημεῖον Α καὶ νὰ γράψητε δύο περιφερείας ἐφαπτομένας ἐκτὸς εἰς τὸ Α καὶ μὲ ἀκτῖνα 1 παλάμης τὴν μίαν καὶ 5 ἑκατοστομέτρων τὴν ἄλλην.

122. Εἰς ἕνα κύκλον νὰ γράψητε μίαν διάμετρον ΑΒ. Ἔπειτα νὰ γράψητε τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα ΑΒ. Νὰ παρατηρήσητε δὲ ποίαν θέσιν ἔχουσι μεταξύ των οἱ δύο κύκλοι.

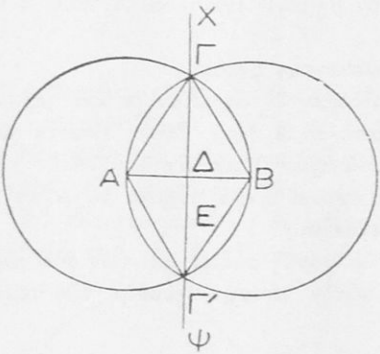
48. Πῶς ἡ διάκεντρος καὶ ἡ κοινὴ χορδὴ δύο περιφερειῶν τέμνονται. Ἡ διάκεντρος ΚΛ καὶ ἡ κοινὴ χορδὴ δύο περιφερειῶν Κ καὶ Λ τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον Β (σχ. 39). Μὲ κατάλληλα δὲ ὄργανα βλέπομεν ὅτι ΑΒ = ΒΑ′ καὶ $\widehat{ABK}$ = 1 ὀρθή. Δηλαδή :

Ἡ κοινὴ χορδὴ δύο περιφερειῶν τέμνεται καθέτως καὶ εἰς τὸ μέσον ἀπὸ τὴν διάκεντρον αὐτῶν. Ἂν δὲ εἶναι ΚΑ = ΛΑ, βλέπομεν ὁμοίως ὅτι πάλιν $\widehat{ABK}$ = 1 ὀρθὴ καὶ ΚΒ = ΒΛ. Δηλαδή :

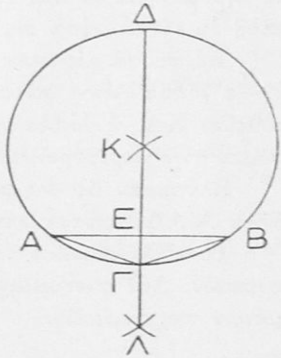
Ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων δύο ἴσων περιφερειῶν τέμνεται καθέτως καὶ εἰς τὸ μέσον ἀπὸ τὴν κοινὴν χορδὴν αὐτῶν.

49. Ἐφαρμογαί. Πρόβλημα Ι. **Νὰ γραφῇ ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία τέμνει εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ εἰς τὸ μέσον καὶ καθέτως.**

Λύσις. Ὁδηγούμενοι ἀπὸ τὰ προηγούμενα γράφομεν δύο περι-



Σχ. 40



Σχ. 41

φερείας μὲ κέντρα τὰ ἄκρα Α, Β καὶ ἀκτῖνα ΑΒ (σχ. 40). Αὗται βλέπομεν ὅτι τέμνονται. Φέρομεν ἔπειτα τὴν κοινὴν χορδὴν ΓΓ′ καὶ γνωρίζομεν ὅτι αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα (§ 48).

Ἡ ἀκτὶς τῶν περιφερειῶν τούτων εἶναι δυνατὸν νὰ διαφέρῃ ἀπὸ τὴν ΑΒ, ἀρκεῖ μόνον νὰ τέμνωνται αἱ περιφέρειαι.

Ἂν π. χ. τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ εἶναι χορδὴ ἑνὸς τόξου κύκλου Κ (σχ. 41), δυνάμεθα νὰ γράψωμεν περιφερείας μὲ κέντρα Α, Β καὶ ἀκτῖνα ΚΑ. Αὗται τέμνονται εἰς τὸ κέντρον Κ καὶ εἰς ἓν ἄλλο σημεῖον

Λ. Ἡ ζητουμένη λοιπὸν εὐθεῖα εἶναι ΚΛ. Τοιουτοτρόπως βλέπομεν ὅτι :

Ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον μιᾶς χορδῆς διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον.

Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι ἡ ΚΛ τέμνει τὴν περιφέρειαν Κ εἰς δύο σημεῖα Γ καὶ Δ. Μὲ τὸν διαβήτην δὲ βλέπομεν ὅτι ἡ χορδὴ ΑΓ = χορδὴ ΓΒ καὶ ἐννοοῦμεν ὅτι $\widehat{A\Gamma}=\widehat{B\Gamma}$. Ὁμοίως βλέπομεν ὅτι $\widehat{A\Delta}=\widehat{B\Delta}$. Ὥστε:

Ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον μιᾶς χορδῆς, διχοτομεῖ τὰ ἀντίστοιχα τόξα.

Ἀσκήσεις

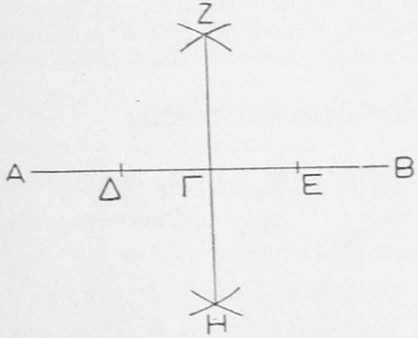
123. Νὰ γράψητε ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα καὶ περιφέρειαν μὲ διάμετρον αὐτὸ τὸ τμῆμα.

124. Νὰ γράψητε ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα καὶ νὰ τὸ διαιρέσητε εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη.

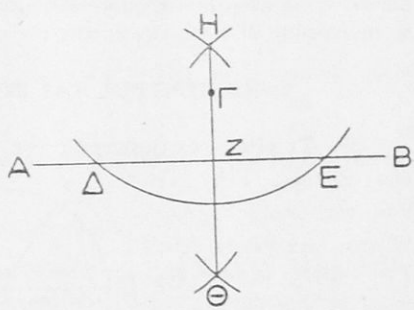
125. Νὰ ὁρίσητε ἓν τόξον καὶ νὰ τὸ διαιρέσητε εἰς δύο καὶ ἔπειτα εἰς 4 ἴσα μέρη.

50. Πρόβλημα ΙΙ. **Ἀπὸ ἓν σημεῖον Γ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα κάθετος εἰς μίαν εὐθεῖαν ΑΒ.**

Λύσις. α΄) Ἂν τὸ Γ εἶναι εἰς τὴν ΑΒ, ὁρίζομεν εἰς αὐτὴν δύο ἴσα



Σχ. 42

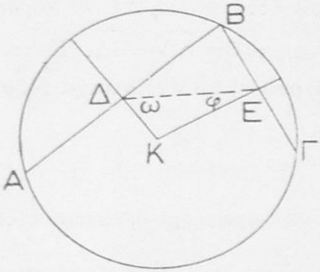


Σχ. 43

τμήματα ΓΔ, ΓΕ καὶ φέρομεν τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΔΕ (σχ. 42).

β΄) Ἂν τὸ Γ εἶναι ἔξω ἀπὸ τὴν ΑΒ, γράφομεν μίαν περιφέρειαν μὲ κέντρον Γ, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἰς δύο σημεῖα Δ, Ε (σχ. 43).

Ἔπειτα γράφομεν τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΔΕ. Γνωρίζομεν δὲ ὅτι αὐτὴ διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον Γ καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.



Σχ. 44

51. Πρόβλημα ΙΙΙ. **Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχηται ἀπὸ τρία σημεῖα Α, Β, Γ, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται εἰς μίαν εὐθεῖαν.** (σχ. 44).

Λύσις. Ἐμάθομεν (§ 49) ὅτι αἱ κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν χορδῶν ΑΒ καὶ ΒΓ διέρχονται ἀπὸ τὸ κέντρον Κ. Γράφομεν λοιπὸν αὐτὰς τὰς καθέτους καὶ ὁρίζομεν τὴν τομὴν Κ αὐτῶν. Ἔπειτα γράφομεν περιφέρειαν μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα ΚΑ.

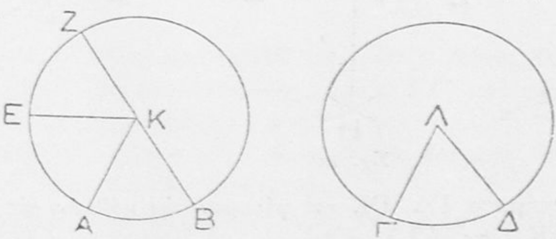
Ἀσκήσεις

126. Νὰ σχηματίσητε μίαν γωνίαν καὶ εἰς τὰς πλευρὰς αὐτῆς νὰ ὁρίσητε ἀπὸ ἓν σημεῖον. Ἔπειτα νὰ γράψητε περιφέρειαν, ἡ ὁποία νὰ διέρχηται ἀπὸ αὐτὰ τὰ σημεῖα καὶ ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας.

127. Εἰς τὴν μίαν πλευρὰν μιᾶς ὀρθῆς γωνίας Α νὰ ὁρίσητε ἓν τμῆμα ΑΒ μήκους 0,04 μέτρου καὶ εἰς τὴν ἄλλην ἓν τμῆμα ΑΓ μήκους 0,03 μέτρου. Νὰ γράψητε ἔπειτα τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α,Β,Γ. Νὰ συγκρίνητε δὲ τὴν χορδὴν ΒΓ πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας.

2. ΕΠΙΚΕΝΤΡΟΙ ΚΑΙ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑΙ ΓΩΝΙΑΙ

52. Τί εἶναι ἐπίκεντρος γωνία. Εἰς ἕνα κύκλον Κ γράφομεν δύο ἀκτῖνας ΚΑ, ΚΒ, ἀπὸ τὰς ὁποίας σχηματίζεται μία γωνία ΑΚΒ (σχ. 45). Αὐτὴ ἔχει κορυφὴν τὸ κέντρον Κ καὶ διὰ τοῦτο λέγεται **ἐπίκεντρος γωνία.**



Σχ. 45

Μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιέχεται ἓν τόξον ΑΒ· αὐτὸ λέγεται **ἀντίστοιχον τόξον** τῆς ἐπικέντρου γωνίας ΑΚΒ.

Συνήθως δὲ λέγομεν ὅτι ἡ γωνία ΑΚΒ βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ.
Ὁμοίως ἡ ΓΛΔ εἶναι ἐπίκεντρος γωνία καὶ βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΓΔ. Ὥστε :

Ἐπίκεντρος γωνία εἶναι μία γωνία, ἡ ὁποία ἔχει κορυφὴν τὸ κέντρον ἑνὸς κύκλου. Μία δὲ ἐπίκεντρος γωνία βαίνει ἐπὶ τοῦ ἀντιστοίχου τόξου δηλ. ἐπὶ τοῦ τόξου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευτῶν της.

53. Πῶς σχετίζονται αἱ ἐπίκεντροι γων.α., ὁποῖαι βαίνουσιν εἰς ἴσα τόξα. Καὶ ἀντιστρόφως. Εἰς ἓν φύλλον χάρτου γράφομεν δύο ἴσας περιφερείας Κ καὶ Λ (σχ. 45). Ἔπειτα ὁρίζομεν εἰς αὐτὰς δύο ἴσα τόξα ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΚΑ, ΚΒ, ΛΓ, ΛΔ. Διὰ νὰ συγκρίνωμεν τὰς ἐπικέντρους γωνίας ΑΚΒ καὶ ΓΛΔ, ἀποχωρίζομεν τὸν κυκλικὸν τομέα ΛΓΔ καὶ τὸν θέτομενἐπάνω εἰς τὸν ΑΚΒ. Ἂν προσέξωμεν νὰ ἐφαρμόσωσι τὰ ἴσα τόξα ΑΒ καὶ ΓΔ, βλέπομεν ὅτι καὶ αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ἐφαρμόζουσι. Εἶναι λοιπὸν $\widehat{ΑΚΒ} = \widehat{ΓΛΔ}$.

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον φθάνομεν εἰς τὸ συμπέρασμα τοῦτο καὶ ἐὰν τὰ ἴσα τόξα εὑρίσκονται εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν Κ. Ὥστε :

α΄. Εἰς ἕνα κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους εἰς ἴσα τόξα βαίνουσιν ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι.

Ἂν δὲ εἶναι $\widehat{ΑΚΒ} = \widehat{ΓΛΔ} = \widehat{ΕΚΖ}$, κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον βλέπομεν ὅτι $\overset{\frown}{ΑΒ} = \overset{\frown}{ΓΔ} = \overset{\frown}{Ε}$

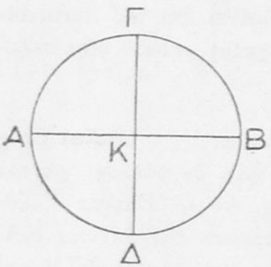
β΄. Εἰς ἕνα κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι βαίνουσιν εἰς ἴσα τόξα.

Ἀπὸ τὰς ἰδιότητας αὐτὰς ἐννοοῦμεν ὅτι :

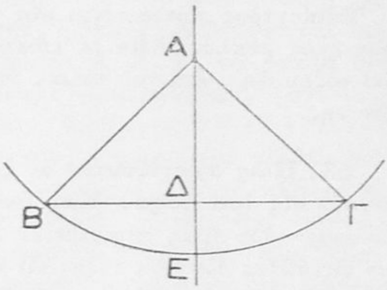
γ΄. Εἰς ἓν τόξον διπλάσιον ἢ τριπλάσιον κ.τ.λ. ἀπὸ ἓν ἄλλο τόξον τῆς αὐτῆς ἢ ἴσων περιφερειῶν βαίνει διπλασία ἢ τριπλασία κ.τ.λ. ἐπίκεντρος γωνία.

54. Ἐφαρμογαί. Πρόβλημα 1. **Νὰ διαιρεθῇ μία περιφέρεια Λ εἰς 4 ἴσα τόξα** (Σχ. 46).

Λύσις. Γράφομεν δύο καθέτους διαμέτρους ΑΚΒ, ΓΚΔ. Αὗται χωρίζουσι τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ τόξα ΑΓ, ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ. Εἶναι δὲ ταῦτα ἴσα (§ 53 β′) καὶ λέγονται **τεταρτημόρια** τῆς περιφερείας.



Σχ. 46



Σχ. 47

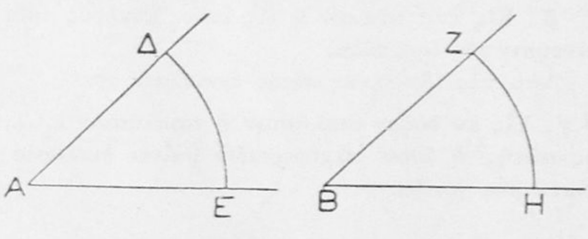
55. Πρόβλημα ΙΙ. **Νὰ διαιρεθῇ μία γωνία Α εἰς δύο ἴσας γωνίας** (Σχ. 47).

Λύσις. Καθιστῶμεν τὴν γωνίαν Α ἐπίκεντρον καὶ γράφομεν τὴν ΑΕ κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΒΓ τοῦ ἀντιστοίχου τόξου.

Γνωρίζομεν ὅτι (§ 49) $\widehat{\mathrm{BE}} = \widehat{\mathrm{E\Gamma}}$ καὶ ἑπομένως $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = \mathrm{E}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma$. Ἡ εὐθεῖα ΑΕ διαιρεῖ λοιπὸν τὴν γωνίαν ΒΑΓ εἰς δύο ἴσας γωνίας. Διὰ τοῦτο δὲ ἡ ΑΕ λέγεται **διχοτόμος** τῆς $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma$.

56. Πρόβλημα ΙΙΙ. **Νὰ σχηματισθῇ μία ἴση πρὸς ἄλλην γωνίαν Α** (Σχ. 48).

Λύσις. Καθιστῶμεν τὴν γωνίαν Α ἐπίκεντρον καὶ ἔστω ΕΔ τὸ ἀντίστοιχον τόξον. Ἔπειτα γράφομεν μίαν περιφέρειαν μὲ κέντρον ἓν σημεῖον Β καὶ ἀκτῖνα ΑΔ. Εἰς αὐτὴν τὴν περιφέρειαν ὁρίζομεν ἓν τόξον ΗΖ ἴσον πρὸς τὸ



Σχ. 48

ΕΔ καὶ φέρομεν τὰς ἀκτίνας ΒΗ καὶ ΒΖ. Ἡ γωνία ΗΒΖ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Α. (Διατί ;).

Ἀσκήσεις

128. Νὰ σχηματίσητε μίαν γωνίαν ἴσην πρὸς $\frac{1}{2}$ ὀρθῆς.
129. Νὰ σχηματίσητε μίαν γωνίαν καὶ νὰ τὴν διαιρέσητε εἰς 4 ἴσας γωνίας.
130. Νὰ σχηματίσητε μίαν γωνίαν ἴσην πρὸς τὰ $\frac{3}{4}$ ὀρθῆς.

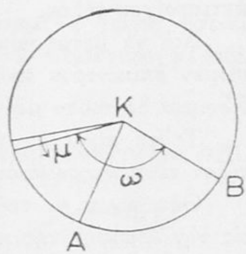
57. Πῶς μετροῦμεν τὰ τόξα καὶ τὰς γωνίας. α′) Διὰ νὰ μετρήσωμεν ἓν τόξον, πρέπει νὰ συγκρίνωμεν αὐτὸ πρὸς ἓν ὡρισμένον τόξον. Τοῦτο λέγεται **μονὰς** τῶν τόξων.

Ἀπὸ τὴν σύγκρισιν δὲ αὐτὴν προκύπτει εἷς ἀριθμός. Αὐτὸς λέγεται **μέτρον** τοῦ τόξου καὶ φανερώνει ἀπὸ πόσας μονάδας ἢ καὶ ἀπὸ πόσα μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται τὸ μετρηθὲν τόξον.

Πολὺ συνηθισμένη μονὰς τῶν τόξων εἶναι τὸ $\frac{1}{360}$ τῆς περιφερείας. Τοῦτο λέγεται **μοῖρα** (^{0}).

Αὕτη διαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται **πρῶτα λεπτὰ** (′). Τὸ δὲ πρῶτον λεπτὸν διαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ **δεύτερα λεπτὰ** (″).

Π. χ. τὸ $\frac{1}{4}$ μιᾶς περιφερείας ἔχει μέτρον 90^0, τὸ $\frac{1}{8}$ ἔχει 45^0, τὸ $\frac{1}{16}$ ἔχει $22^0\,30'$.



Σχ. 49

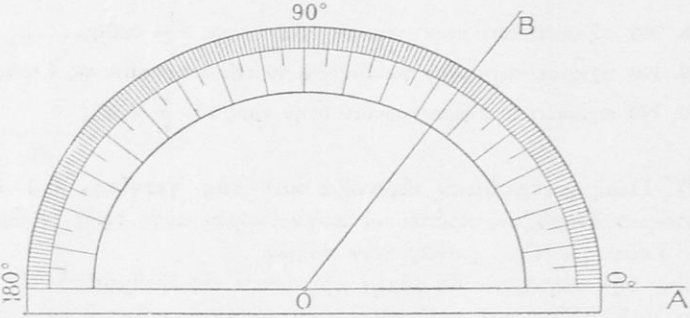
Ὁμοίως διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν γωνίαν, συγκρίνομεν αὐτὴν πρὸς ὡρισμένην γωνίαν, ἡ ὁποία λέγεται **μονὰς τῶν γωνιῶν**.

Ἀπὸ τὴν σύγκρισιν δὲ αὐτὴν προκύπτει εἷς ἀριθμός. Αὐτὸς λέγεται **μέτρον** τῆς γωνίας. Φανερώνει δὲ ἀπὸ πόσας μονάδας ἢ καὶ ἀπὸ πόσα μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται ἡ μετρηθεῖσα γωνία.

Μέχρι τοῦδε ἐλαμβάνομεν ὡς μονάδα γωνιῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν. Ὅταν π. χ. λέγωμεν ὅτι μία γωνία εἶναι $\frac{1}{2}$ ὀρθῆς, ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι τὸ μέτρον αὐτῆς.

῎Αλλη συνήθης μονὰς τῶν γωνιῶν εἶναι ἡ ἐπίκεντρος γωνία, ἡ ὁποία βαίνει εἰς τόξον 1^0. Αὕτη δὲ λέγεται γωνία 1^0.

᾿Απὸ ὅσα δὲ προηγουμένως (§ 53 γ′) ἐμάθομεν, ἐννοοῦμεν τὰ ἑξῆς : ῞Οσας φορὰς ἓν τόξον 1^0 χωρεῖ εἰς ἓν ἄλλο τόξον ΑΒ, τόσας



Σχ. 50

φορὰς ἡ γωνία μ μιᾶς μοίρας χωρεῖ εἰς τὴν γωνίαν ω (σχ. 49). Δηλαδή :

Τὸ μέτρον μιᾶς ἐπικέντρου γωνίας εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μέτρον τοῦ ἀντιστοίχου τόξου.

Διὰ νὰ μετρήσωμεν λοιπὸν μίαν γωνίαν, ἀρκεῖ νὰ τὴν καταστήσωμεν ἐπίκεντρον καὶ νὰ μετρήσωμεν τὸ ἀντίστοιχον τόξον. Κατορθώνομεν δὲ τοῦτο μὲ τὸ **μοιρογνωμόνιον** (σχ. 50).

Τοῦτο εἶναι ἓν ἡμικύκλιον συνήθως μεταλλικόν, τοῦ ὁποίου τὸ τόξον εἶναι διῃρημένον εἰς 180 μοίρας ἠριθμημένας ἀπὸ 0^0 ἕως 180^0.

Θέτομεν π. χ. τοῦτο ἐπάνω εἰς μίαν γωνίαν ΑΟΒ μὲ τὸ κέντρον εἰς τὴν κορυφήν της καὶ εἰς τὴν μίαν πλευρὰν ΟΑ νὰ ἔλθῃ ἡ ἀκτίς, ἡ ὁποία τελειώνει εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς ἡμιπεριφερείας. ῾Ο ἀριθμὸς διαιρέσεως, ἀπὸ τὸν ὁποῖον διέρχεται ἡ ἄλλη πλευρὰ ΟΒ, εἶναι τὸ μέτρον τῆς γωνίας ΑΟΒ.

᾿Ασκήσεις

131. Νὰ μετρήσητε ὅλοι τὴν γωνίαν ΑΚΒ τοῦ σχήματος 49 τοῦ βιβλίου σας.

132. Νὰ σχηματίσητε ἀπὸ μίαν ὀξεῖαν καὶ ἀπὸ μίαν ἀμβλεῖαν γωνίαν καὶ νὰ μετρήσητε αὐτάς.

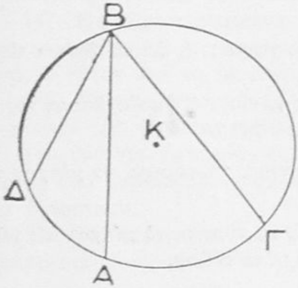
133. Νὰ εὕρητε εἰς μοίρας τὸ μέτρον τῆς ὀρθῆς γωνίας, ἔπειτα δὲ τοῦ $\frac{1}{2}$ καὶ τοῦ $\frac{1}{3}$ αὐτῆς.

134. Νὰ εὕρητε εἰς μοίρας τὸ μέτρον τῶν $\frac{2}{5}$ τῆς ὀρθῆς καὶ ἔπειτα τῆς $1\frac{5}{8}$ ὀρθῆς.

135. Νὰ εὕρητε πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς εἶναι γωνία 40^0, 65^0, 120^0.

136. Νὰ εὕρητε πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς εἶναι γωνία $50^0 30'$.

58. Τί εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον γωνία. Ἀπὸ ἓν σημεῖον Β μιᾶς περιφερείας Κ φέρομεν δύο χορδὰς ΒΑ καὶ ΒΓ (σχ. 51).



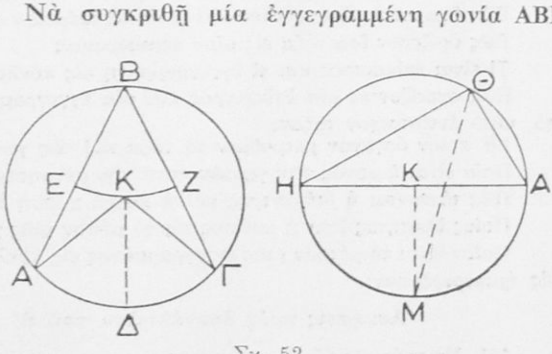
Σχ. 51

Ἡ γωνία ΑΒΓ αὐτῶν λέγεται **ἐγγεγραμμένη** εἰς τὸν κύκλον Κ. Αὕτη **βαίνει** εἰς τὸ τόξον ΑΓ, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν της. Ὥστε :

Μία γωνία λέγεται ἐγγεγραμμένη εἰς ἕνα κύκλον, ἂν ἡ μὲν κορυφὴ αὐτῆς κεῖται εἰς τὴν περιφέρειαν, αἱ δὲ πλευραί της εἶναι χορδαὶ τόξων τῆς αὐτῆς περιφερείας.

Μία δὲ ἐγγεγραμμένη γωνία βαίνει εἰς τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν της.

59. Πρόβλημα Ι. **Νὰ συγκριθῇ μία ἐγγεγραμμένη γωνία ΑΒΓ πρὸς τὴν ἐπίκεντρον ΑΚΓ, ἡ ὁποία βαίνει εἰς τὸ αὐτὸ τόξον ΑΔΓ** (σχ. 52 α′).



Σχ. 52.

Λύσις. Καθιστῶμεν τὴν ΑΒΓ ἐπίκεντρον εἰς κύκλον μὲ ἀκτῖνα ΒΚ. Μὲ τὴν βοήθειαν δὲ τοῦ διαβήτου βλέπομεν ὅτι τὸ ἀντίστοιχον τόξον ΕΖ χωρεῖ δύο φορὰς ἀκριβῶς εἰς τὸ τόξον ΑΔΓ. Ἐννοοῦμεν λοιπὸν ὅτι :

α') Μία ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον γωνία εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου γωνίας, ἡ ὁποία βαίνει εἰς τὸ αὐτὸ τόξον.

Ἀπὸ τὸ συμπέρασμα δὲ αὐτὸ ἐννοοῦμεν ἀκόμη ὅτι :

β') Αἱ ἐγγεγραμμέναι εἰς κύκλον γωνίαι, αἱ ὁποῖαι βαίνουσιν εἰς τὸ αὐτὸ τόξον ἢ ἴσα τόξα, εἶναι ἴσαι.

Ἡ ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κύκλον Κ γωνία ΗΘΛ (σχ. 52 β') βαίνει εἰς τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΗΜΛ. Μὲ τὸν γνώμονα δὲ βλέπομεν ὅτι αὕτη εἶναι **ὀρθὴ γωνία.**

Ἀσκήσεις

137. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον μιᾶς ἐγγεγραμμένης γωνίας, ἡ ὁποία βαίνει εἰς ἓν τεταρτημόριον περιφερείας.

138. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον μιᾶς ἐγγεγραμμένης γωνίας, ἡ ὁποία βαίνει εἰς τόξον $42^0\ 30'$ καὶ μιᾶς ἄλλης, ἡ ὁποία βαίνει εἰς τόξον $54^0\ 24'\ 40''$.

139. Ἂν μία ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι $\frac{2}{3}$ ὀρθῆς, νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς ἐπικέντρου, ἡ ὁποία βαίνει εἰς τὸ αὐτὸ τόξον.

140. Ἂν μία ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι $25^0\ 30'$, νὰ εὕρητε τὸ μέτρον εἰς μέρη ὀρθῆς τῆς ἐπικέντρου γωνίας, ἡ ὁποία βαίνει εἰς τὸ αὐτὸ τόξον.

Ἐρωτήσεις

Τί εἶναι κύκλος καὶ ποῖα τὰ κυριώτερα στοιχεῖα αὐτοῦ;

Ποῖα μέρη τῆς περιφερείας καὶ τοῦ κύκλου ἐμάθομεν;

Πῶς διαιροῦμεν ἕνα κύκλον καὶ μίαν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη;

Πῶς ὁρίζομεν ἴσα τόξα εἰς μίαν περιφέρειαν;

Τί εἶναι ἐπίκεντρος καὶ τί ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον γωνία;

Πῶς σχετίζονται μία ἐπίκεντρος καὶ μία ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον γωνία μὲ τὸ αὐτὸ ἀντίστοιχον τόξον;

Μὲ ποῖον ὄργανον μετροῦμεν τὰ τόξα καὶ τὰς γωνίας;

Ποία εἶναι ἡ μονὰς τῶν γωνιῶν κατὰ τὴν μέτρησιν ταύτην;

Πῶς τέμνονται ἡ διάκεντρος καὶ ἡ κοινὴ χορδὴ δύο περιφερειῶν;

Ποίας ἰδιότητας ἔχει ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον μιᾶς χορδῆς;

Ποῖον εἶναι τὸ μέτρον μιᾶς ἐγγεγραμμένης εἰς κύκλον γωνίας, ἡ ὁποία βαίνει εἰς ἡμιπεριφέρειαν;

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Δ' κεφαλαίου

141. Νὰ γράψητε δύο ὁμοκέντρους περιφερείας μὲ ἀκτῖνας 5 ἑκατοστομέτρων

καὶ 2 ἑκατοστομέτρων. Νὰ γράψητε μίαν ἀκτῖνα τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας καὶ νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τοῦ τμήματος αὐτῆς, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν περιφερειῶν.

142. Ἡ διάμετρος ἑνὸς κύκλου εἶναι 0,06 μέτρου. Νὰ εὕρητε πόσον ἀπέχει τὸ κέντρον ἀπὸ μίαν ἐφαπτομένην αὐτοῦ.

143. Νὰ ὁρίσητε εἰς τὸ τετράδιόν σας δύο σημεῖα Κ καὶ Λ εἰς ἀπόστασιν 2 ἑκατοστομέτρων. Ἔπειτα νὰ γράψητε μίαν περιφέρειαν μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα 5 ἑκατοστομέτρων καὶ ἄλλην μὲ κέντρον Λ καὶ ἀκτῖνα 2 ἑκατοστομέτρων. Νὰ παρατηρήσητε δὲ ποίαν θέσιν ἔχουσι μεταξύ των οἱ κύκλοι Κ καὶ Λ.

144. Μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς μεταλλικοῦ νομίσματος νὰ γράψητε ἓν τόξον καὶ ἔπειτα νὰ εὕρητε τὸ κέντρον αὐτοῦ.

145. Εἰς ἕνα κύκλον νὰ γράψητε δύο χορδὰς εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ κέντρον. Ἔπειτα δὲ νὰ συγκρίνητε αὐτάς.

146. Εἰς μίαν περιφέρειαν νὰ ὁρίσητε δύο ἄνισα τόξα καὶ νὰ συγκρίνητε τὰς ἐπικέντρους γωνίας, αἱ ὁποῖαι βαίνουσιν εἰς αὐτά.

147. Εἰς μίαν περιφέρειαν νὰ ὁρίσητε τόξον μὲ χορδὴν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα καὶ μικρότερον ἡμιπεριφερείας. Ἔπειτα νὰ σχηματίσητε κυκλικὸν τομέα μὲ βάσιν αὐτὸ τὸ τόξον καὶ νὰ μετρήσητε τὴν γωνίαν αὐτοῦ.

148. Μία ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον γωνία ἔχει μέτρον $18^0\ 38'\ 35''$. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τοῦ ἀντιστοίχου τόξου.

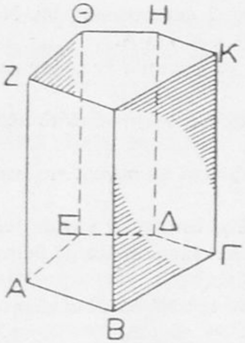
149. Νὰ γράψητε μίαν διάμετρον εἰς ἕνα κύκλον Κ καὶ ἀπὸ τὰ ἄκρα αὐτῆς νὰ φέρητε δύο παραλλήλους χορδάς. Ἔπειτα δὲ νὰ συγκρίνητε τὰς γωνίας αὐτῶν μὲ τὴν διάμετρον.

150. Νὰ φέρητε τὰς ἀκτῖνας εἰς τὰ ἄκρα τῶν προηγουμένων χορδῶν καὶ νὰ διακρίνητε τὸ εἶδος τῆς γραμμῆς, τὴν ὁποίαν σχηματίζουσιν αὗται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄

1. ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

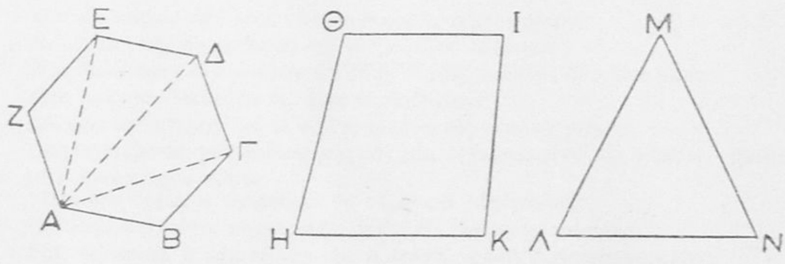
60. Τί εἶναι εὐθύγραμμα σχήματα καὶ ποῖα εἶναι τὰ στοιχεῖα αὐτῶν. Ἐμάθομεν (§ 10) ὅτι αἱ ἕδραι ἑνὸς πολυέδρου, π. χ. τοῦ ΑΚ (σχ. 53), εἶναι ἐπίπεδα σχήματα, τὰ ὁποῖα περικλείονται ἀπὸ εὐθύγραμμα τμήματα. Δι' αὐτὸ αἱ ἕδραι αὗται λέγονται **εὐθύγραμμα σχήματα.** Καὶ τὰ σχήματα 54 εἶναι εὐθύγραμμα σχήματα. Ὥστε :



Σχ. 53

Εὐθύγραμμον σχῆμα εἶναι μέρος ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ εὐθύγραμμα τμήματα.

Αὐτὰ τὰ τμήματα λέγονται **πλευραί.** Π. χ. ΛΜ, ΜΝ, ΝΛ εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ ΛΜΝ. Αἱ πλευραὶ ἑνὸς εὐθυγράμμου σχήματος σχηματίζουσι γωνίας· αὗται λέγονται γωνίαι τοῦ εὐθυγράμμου σχήματος. Αἱ δὲ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν τούτων λέγονται κορυφαὶ καὶ τοῦ εὐθυγράμμου σχήματος. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι ἕνα εὐθύγραμμον σχῆμα ἔχει τὸ αὐτὸ



Σχ. 54

πλῆθος πλευρῶν, γωνιῶν καὶ κορυφῶν. Π. χ. τὸ ΛΜΝ ἔχει τρεῖς πλευράς, τρεῖς γωνίας καὶ τρεῖς κορυφάς. Διὰ τοῦτο δὲ λέγεται **τρίπλευρον** ἢ συνηθέστερον **τρίγωνον.**

Τὸ ΗΘΙΚ(σχ. 54) εἶναι τετράπλευρον, ἡ ἕδρα ΑΒΓΔΕ (σχ. 53) εἶναι πεντάγωνον, τὸ ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 54) εἶναι ἑξάγωνον κ.τ.λ.

Τὰ πεντάγωνα, ἑξάγωνα κ.τ.λ. λέγονται **πολύγωνα.**

Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΓ ἑνώνει δύο μὴ διαδοχικὰς κορυφὰς τοῦ ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 54). Λέγεται δὲ **διαγώνιος** αὐτοῦ. Καὶ τὰ τμήματα ΑΔ, ΑΕ εἶναι διαγώνιοι τοῦ ΑΒΓΔΕΖ. Δηλαδή :

Διαγώνιος ἑνὸς εὐθυγράμμου σχήματος εἶναι ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον ἑνώνει δύο μὴ διαδοχικὰς κορυφάς.

Ἕνα τρίγωνον π. χ. τὸ ΛΜΝ οὐδεμίαν διαγώνιον ἔχει. (Διατί ;).

Τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν ἑνὸς εὐθυγράμμου σχήματος λέγεται **περίμετρος** αὐτοῦ. Ἂν π. χ. αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου εἶναι 4, 3,5 καὶ 3 ἑκατοστόμετρα, ἡ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι $4 + 3{,}5 + 3 = 10{,}5$ ἑκατοστόμετρα.

Ἀσκήσεις

151. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου τοῦ ΗΘΙΚ (σχ. 54).

152. Νὰ γράψητε ἕνα τετράπλευρον· ἔπειτα δὲ νὰ γράψητε καὶ νὰ μετρήσητε τὰς διαγωνίους του.

153. Νὰ σχηματίσητε ἀπὸ ἕνα πεντάγωνον καὶ νὰ γράψητε ὅλας τὰς διαγωνίους του μὲ ἐστιγμένας γραμμάς.

2. ΤΡΙΓΩΝΑ

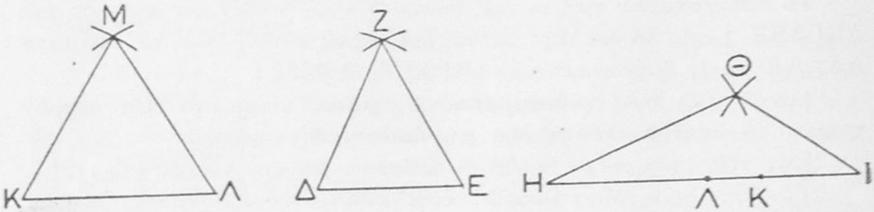
61. Ποῖα εἶναι τὰ εἴδη τῶν τριγώνων. α΄) Μὲ ἀκτῖνα ἕνα τμῆμα ΚΛ καὶ μὲ κέντρα Κ, Λ γράφομεν δύο περιφερείας. Ἀπὸ ἕνα κοινὸν σημεῖον Μ αὐτῶν φέρομεν τὰ τμήματα ΜΚ, ΜΛ. Τὸ τρίγωνον ΜΚΛ ἔχει ἴσας ὅλας τὰς πλευράς του. Δι' αὐτὸ δὲ λέγεται **ἰσόπλευρον** τρίγωνον (σχ. 55).

Ὁμοίως μὲ κέντρα Δ, Ε καὶ ἀκτῖνα διάφορον ἀπὸ τὸ ΔΕ γράφομεν δύο περιφερείας καὶ σχηματίζομεν ἕνα τρίγωνον ΔΕΖ μὲ δύο μόνον ἴσας πλευράς. Τοῦτο λέγεται **ἰσοσκελὲς** τρίγωνον.

Τέλος μὲ κέντρα Η, Ι καὶ ἀνίσους ἀκτῖνας ΗΚ, ΙΛ γράφομεν δύο περιφερείας καὶ σχηματίζομεν ἓν τρίγωνον ΗΘΙ μὲ ἀνίσους ὅλας τὰς πλευράς του. Τοῦτο λέγεται **σκαληνὸν** τρίγωνον.

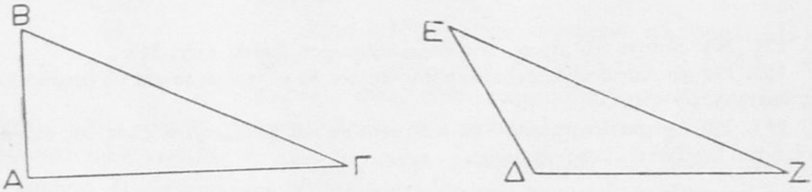
β΄) Αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΚΛΜ εἶναι ὅλαι ὀξεῖαι· διὰ τοῦτο δὲ αὐτὸ λέγεται **ὀξυγώνιον** τρίγωνον.

Ἡ γωνία Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 56) εἶναι ὀρθή. Δι' αὐτὸ δὲ τοῦτο λέγεται **ὀρθογώνιον** τρίγωνον. Ὁ γνώμων λοιπὸν εἶναι ἕνα



Σχ. 55

ὀρθογώνιον τρίγωνον. Ἡ πλευρὰ ΒΓ, ἡ ὁποία εἶναι ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας, λέγεται **ὑποτείνουσα** τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.



Σχ. 56

Ἀνατολικὸν ἀέτωμα

Δυτικὸν ἀέτωμα

Ἡ γωνία Δ τοῦ ΔΕΖ (σχ. 56) εἶναι ἀμβλεῖα καὶ τοῦτο λέγεται **ἀμβλυγώνιον** τρίγωνον. Τὰ ἀετώματα τοῦ Ναοῦ τοῦ Διὸς εἰς τὴν Ὀλυμπίαν εἶναι ἀμβλυγώνια καὶ ἰσοσκελῆ τρίγωνα.

Ἀσκήσεις

154. Νὰ σχηματίσητε ἀπὸ ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον μὲ πλευρὰν 3 ἑκατοστῶν τοῦ μέτρου καὶ νὰ εὕρητε τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ.

155. Νὰ σχηματίσητε ἀπὸ ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ πλευρὰς 5, 3, 5 ἑκατοστῶν τοῦ μέτρου. Νὰ εὕρητε τὴν περίμετρον αὐτοῦ καὶ νὰ διακρίνητε τὸ εἶδος τῶν γωνιῶν του.

156. Νὰ σχηματίσητε ἀπὸ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ καθέτους πλευρὰς 3 καὶ 4 ἑκατοστῶν τοῦ μέτρου. Ἔπειτα δὲ νὰ μετρήσητε τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ.

157. Ἡ περίμετρος ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγωνικοῦ ἀγροῦ εἶναι 182,25 μέτρα. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς του.

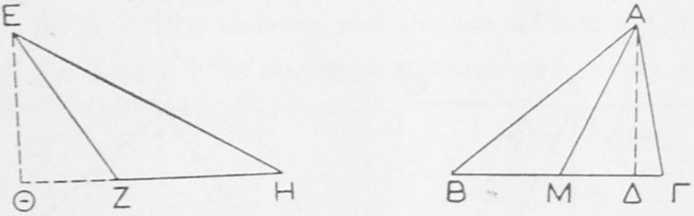
158. Ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔχει περίμετρον 93,80 μέτρα, ἡ δὲ μία ἀπὸ τὰς ἴσας πλευρὰς ἔχει μῆκος 36,75. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῶν ἄλλων πλευρῶν του.

62. Ποῖα ἄλλα ἀξιοσημείωτα στοιχεῖα ἔχουσι τὰ τρίγωνα. α΄) Μία ἀπὸ τὰς πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 57), π. χ. ἡ ΒΓ, λέγεται **βάσις** αὐτοῦ.

Ἡ ἀπόστασις ΑΔ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς Α ἀπὸ τὴν βάσιν ΒΓ λέγεται **ὕψος** τοῦ τριγώνου.

Ἂν ἡ ΖΗ εἶναι βάσις τοῦ ἀμβλυγωνίου τριγώνου ΕΖΗ, ὕψος αὐτοῦ θὰ εἶναι τὸ τμῆμα ΕΘ.

Συνήθως ὡς βάσις ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΔΕΖ (σχ. 55) λαμ-



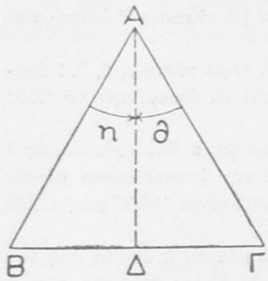
Σχ. 57

βάνεται ἡ ἄνισος πρὸς τὰς ἄλλας πλευρὰς ΔΕ αὐτοῦ. Ὡς βάσις δὲ καὶ ὕψος ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 56) λαμβάνονται αἱ κάθετοι πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΓ αὐτοῦ.

β΄) Ἡ ἀπόστασις ΑΜ μιᾶς κορυφῆς Α ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς λέγεται **διάμεσος** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἂν εἰς ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 58) φέρωμεν τὸ ὕψος

ΑΔ, μὲ τὴν βοήθειαν καταλλήλων ὀργάνων βλέπομεν ὅτι ΒΔ = ΔΓ



Σχ. 58

καὶ η = θ. Ὥστε :

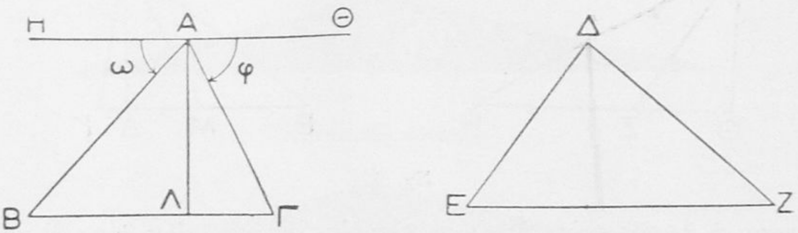
Τὸ ὕψος ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου καὶ διχοτόμος τῆς ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνίας.

Ἂν ἐργασθῶμεν ὁμοίως μὲ ὅλα τὰ ὕψη ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου, βλέπομεν ὅτι κάθε ὕψος αὐτοῦ ἔχει τὰς προηγουμένας ἰδιότητας.

Ἀσκήσεις

159. Νὰ ὁρίσητε πόσα ὕψη καὶ πόσας διαμέσους ἔχει ἕνα τρίγωνον.
160. Νὰ μετρήσητε τὸ ὕψος ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 58).
161. Νὰ συγκρίνητε τὸ ὕψος ΑΔ καὶ τὴν διάμεσον ΑΜ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 57).
162. Νὰ σχηματίσητε ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον καὶ νὰ γράψητε τὴν διάμεσον, ἡ ὁποία ἀρχίζει ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας. Νὰ συγκρίνητε δὲ αὐτὴν πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν.

63. Ποίας ἰδιότητας ἔχουσιν ὅλα τὰ τρίγωνα. α′) Σχηματίζομεν τὸ ἄθροισμα δύο πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 57) π. χ.



Σχ. 59

τῶν ΑΓ καὶ ΒΓ. Ἂν συγκρίνωμεν αὐτὸ μὲ τὴν ΑΒ, βλέπομεν ὅτι ΑΒ < ΑΓ + ΒΓ. Δηλαδή :

Μία πλευρὰ ἑνὸς τριγώνου εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων. (§ 18).

β') Ἀποχωρίζομεν τὰς γωνίας Β καὶ Γ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ἀπὸ φύλλον χάρτου καὶ θέτομεν αὐτὰς παραπλεύρως ἀπὸ τὴν Α δηλ. τὴν Β εἰς τὴν ω καὶ τὴν Γ εἰς τὴν φ (σχ. 59). Βλέπομεν δὲ ὅτι αἱ πλευραὶ ΗΑ καὶ ΑΘ ἀποτελοῦσι μίαν εὐθεῖαν. Εἰς τὴν θέσιν δὲ ταύτην αἱ γωνίαι Β, Α, Γ, ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὰς ὀρθὰς ΗΑΛ, ΛΑΘ. Εἶναι δηλαδή : $A + B + \Gamma = 2$ ὀρθαί, ἤτοι :

Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι 2 ὀρθαὶ γωνίαι.

Δι' ἕνα ἄλλο τρίγωνον ΔΕΖ (σχ. 59) εἶναι ὁμοίως $\Delta + E + Z =$ 2 ὀρθαὶ καὶ διὰ τοῦτο $A + B + \Gamma = \Delta + E + Z$. Ἂν δὲ εἶναι $A = \Delta$ καὶ $\Gamma = Z$, εὔκολα ἐννοοῦμεν ὅτι καὶ $B = E$. Δηλαδή :

Ἂν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, θὰ ἔχωσιν ἴσας καὶ τὰς ἄλλας γωνίας.

Ἀσκήσεις

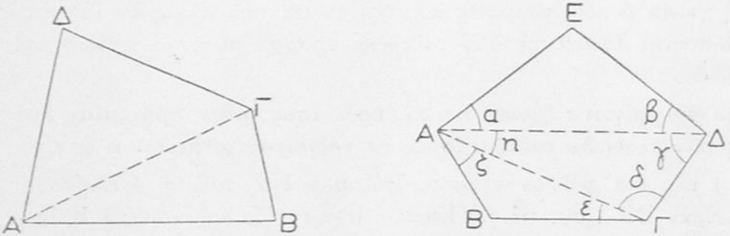
163. Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $A = 90^0$. Νὰ εὕρητε τὸ ἄθροισμα $B + \Gamma$ καὶ νὰ ὁρίσητε τὸ εἶδος τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ.

164. Ἂν ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχῃ $A = 90^0$, $B = \frac{4}{5}$ ὀρθῆς, νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς Γ εἰς μοίρας.

165. Ὁμοίως, ἂν $A = 90^0$, $B = 38^0\ 15'\ 20''$, νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς Γ.

166. Ἂν ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχῃ $A = 46^0\ 18'\ 20''$ καὶ $B = \Gamma$, νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς Β καὶ τῆς Γ.

64. Πρόβλημα Ι. **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς εὐθυγράμμου σχήματος.**



Σχ. 60

Λύσις. Εἰς ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 60) φέρομεν μίαν διαγώνιον ΑΓ καὶ διαιροῦμεν αὐτὸ εἰς 2 ἢ (4 — 2) τρίγωνα. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων ἀποτελοῦσι τὰς γωνίας τοῦ τετραπλεύρου, ἐννοοῦμεν ὅτι :

Α + Β + Γ + Δ = 2 ὀρθαὶ × (4 — 2) = (2 × 4) — 4 ὀρθαὶ = 4 ὀρθαί.

Τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ (σχ. 60) μὲ τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ διαιρεῖται εἰς 3 ἢ (5 — 2) τρίγωνα. Βλέπομεν δὲ ὅτι :

Α + Β + Γ + Δ + Ε = 2 ὀρθαὶ × (5 — 2) = (2 × 5) — 4 ὀρθαὶ = 6 ὀρθαί. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσας ὀρθὰς γωνίας ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς εὐθυγράμμου σχήματος, ἀφαιροῦμεν τὸν 4 ἀπὸ τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν του.

Ἀσκήσεις

167. Νὰ εὕρητε πόσας μοίρας ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τετραπλεύρου καὶ ἔπειτα ἑνὸς πενταγώνου.

168. Νὰ εὕρητε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς ἑξαγώνου, ἑνὸς ὀκταγώνου καὶ ἑνὸς δεκαγώνου.

169. Ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς εὐθυγράμμου σχήματος εἶναι 10 ὀρθαὶ νὰ εὕρητε πόσας πλευρὰς ἔχει αὐτό.

3. ΓΕΝΙΚΑΙ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΔΥΟ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

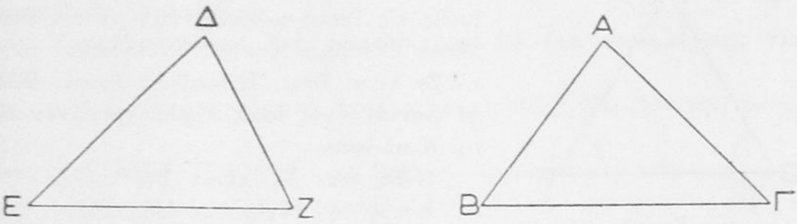
65. Εἰς ποίας περιπτώσεις δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα. α΄) Εἰς ἕνα φύλλον χάρτου σχηματίζομεν ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ μίαν γωνίαν Δ ἴσην μὲ τὴν Α (σχ. 61). Ἔπειτα εἰς τὰς πλευρὰς τῆς Δ ὁρίζομεν τμήματα ΔΕ = ΑΒ καὶ ΔΖ = ΑΓ καὶ φέρομεν τὸ τμῆμα ΕΖ.

Ἀποχωρίζομεν δὲ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ καὶ τὸ θέτομεν εἰς τὸ ΑΒΓ, ὥστε ἡ γωνία Δ νὰ ἐφαρμόσῃ εἰς τὴν Α μὲ τὴν πλευρὰν ΕΔ ἐπὶ τῆς ΑΒ. Βλέπομεν δὲ ὅτι τὰ δύο τρίγωνα ἐφαρμόζουσιν ἀκριβῶς καὶ ἐννοοῦμεν ὅτι :

Ἂν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας, μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς γωνίας τῶν πλευρῶν τούτων ἴσας, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.

β΄) Εἰς ἕνα φύλλον χάρτου ὁρίζομεν ἕνα τμῆμα ΕΖ ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ (σχ. 61). Ἔπειτα σχηματίζομεν γωνίαν Ε ἴσην μὲ τὴν Β καὶ Ζ = Γ καὶ τὰς δύο πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κοινῆς πλευρᾶς ΕΖ. Ἂν δὲ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ θέσωμεν εἰς τὸ ΑΒΓ, ὥστε ἡ πλευρὰ ΕΖ νὰ ἐφαρμόσῃ εἰς τὴν ΒΓ μὲ τὸ Ε εἰς τὸ Β, βλέπομεν ὅτι τὰ τρίγωνα ἐφαρμόζουσιν. Ἐννοοῦμεν λοιπὸν ὅτι :

Ἂν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, ταῦτα εἶναι ἴσα.



Σχ. 61

γ´) Ἂν ὁρίσωμεν ΕΖ = ΒΓ καὶ γράψωμεν μίαν περιφέρειαν μὲ κέντρον Ε καὶ ἀκτῖνα ΑΒ καὶ ἄλλην μὲ κέντρον Ζ καὶ ἀκτῖνα ΑΓ, σχηματίζομεν ἔπειτα εὐκόλως ἕνα τρίγωνον ΔΕΖ. Τοῦτο ἔχει ἀκόμη ΔΕ = ΑΒ καὶ ΔΖ = ΑΓ. Ἂν δὲ τὸ θέσωμεν εἰς τὸ ΑΒΓ, βλέπομεν ὅτι ταῦτα ἐφαρμόζουσιν. Ἐννοοῦμεν λοιπὸν ὅτι:

Ἂν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς πλευρὰς ἴσας ἀνὰ μίαν, ταῦτα εἶναι ἴσα.

Γενικὴ παρατήρησις. Ἀπὸ τὸν τρόπον τῆς ἐφαρμογῆς τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἰς ὅλας τὰς προηγουμένας περιπτώσεις βλέπομεν ὅτι:

Εἰς δύο ἴσα τρίγωνα ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν κεῖνται ἴσαι πλευραί. Ἀπέναντι δὲ ἴσων πλευρῶν κεῖνται ἴσαι γωνίαι.

Ἀσκήσεις

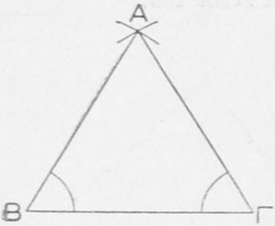
170. Νὰ σχηματίσητε δύο ὀρθογώνια τρίγωνα μὲ τὰς καθέτους πλευρὰς ἴσας, μίαν πρὸς μίαν. Νὰ συγκρίνητε δὲ τὰς ὑποτεινούσας αὐτῶν.

171. Εἰς τὰς προεκτάσεις τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ νὰ ὁρίσητε τμῆμα ΑΔ ἴσον μὲ ΑΒ καὶ ἄλλο ΑΕ ἴσον μὲ ΑΓ. Ἔπειτα νὰ συγκρίνητε τὰ τμήματα ΒΓ καὶ ΔΕ.

172. Εἰς περιφέρειαν Κ νὰ ὁρίσητε δύο ἴσα τόξα ΑΒ καὶ ΒΓ. Νὰ φέρητε δὲ τὰς χορδὰς αὐτῶν καὶ τὰς ἀκτῖνας ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ καὶ νὰ συγκρίνητε τὰ τρίγωνα ΑΚΒ καὶ ΒΚΓ.

173. Εἰς τὰς πλευρὰς μιᾶς γωνίας Α νὰ ὁρίσητε δύο ἴσα τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ. Νὰ γράψητε ἔπειτα τὴν διχοτόμον ΑΔ αὐτῆς καὶ τὰ τμήματα ΒΔ, ΓΔ. Νὰ συγκρίνητε δὲ ταῦτα.

66. Πρόβλημα Ι. **Νὰ συγκριθῶσιν αἱ γωνίαι ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ** (σχ. 62).



Σχ, 62

Λύσις. Καθιστῶμεν αὐτὰς ἐπικέντρους εἰς ἴσους κύκλους καὶ μὲ τὸν διαβήτην βλέπομεν ὅτι τὰ ἀντίστοιχα τόξα αὐτῶν εἶναι ἴσα. Ἐννοοῦμεν λοιπὸν ὅτι : **Αἱ γωνίαι ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι ὅλαι ἴσαι.**

Κάθε μία δὲ εἶναι $180^0 : 3 = 60^0$. Δι' αὐτὸν τὸν λόγον ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον λέγεται καὶ **ἰσογώνιον.**

Ἀσκήσεις

174. Νὰ σχηματίσητε μίαν γωνίαν 60^0 καὶ ἔπειτα μίαν 30^0.

175. Νὰ διαιρέσητε μίαν ὀρθὴν γωνίαν εἰς τρία μέρη ἴσα.

176. Νὰ σχηματίσητε ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον καὶ νὰ συγκρίνητε τὰς ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίας του.

177. Νὰ σχηματίσητε ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ γωνίαν 30^0 ἀπέναντι τῆς βάσεως. Ἔπειτα δὲ νὰ εὕρητε τὰ μέτρα τῶν ἄλλων γωνιῶν του.

178. Ἂν ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ ἔχῃ ΑΒ = ΒΓ καὶ Β = 40^0, νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς Γ καὶ τῆς Α.

179. Νὰ σχηματίσητε ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ μὲ Α = 90^0 καὶ Β = 40^0 καὶ νὰ συγκρίνητε τὴν πλευρὰν ΑΓ μὲ τὴν ὑποτείνουσαν.

180. Ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει ΑΒ = ΒΓ καὶ Γ = 50^0. Νὰ εὕρητε τὰ μέτρα τῶν ἄλλων γωνιῶν του.

4. ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

67. Ποῖα εἶναι τὰ εἴδη τῶν τετραπλεύρων. α΄) Ἐμάθομεν ὅτι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ μιᾶς ἕδρας ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι παράλληλοι. Δι' αὐτὸ κάθε ἕδρα ἀπὸ αὐτὰς λέγεται **παραλληλόγραμμον.**

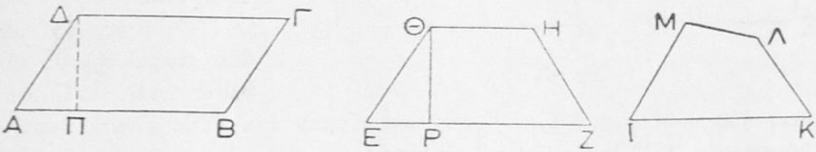
Ὁμοίως, ἂν δύο παραλλήλους εὐθείας ΑΒ, ΓΔ τμήσωμεν μὲ ἄλλας δύο παραλλήλους ΑΔ, ΒΓ, σχηματίζομεν ἓν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 63). Ὥστε :

Παραλληλόγραμμον εἶναι ἕνα τετράπλευρον μὲ τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους.

β΄) Ἂν τὰς παραλλήλους εὐθείας ΕΖ καὶ ΘΗ τμήσωμεν μὲ τὰς μὴ παραλλήλους εὐθείας ΕΘ, ΖΗ, σχηματίζομεν ἕνα τετράπλευρον ΕΖΗΘ (σχ. 63) μὲ δύο μόνον παραλλήλους πλευράς. Τοῦτο λέγεται **τραπέζιον.** Δηλαδή :

Τραπέζιον εἶναι ἕνα τετράπλευρον μὲ δύο παραλλήλους πλευράς.

γ΄) Γράφομεν δύο μὴ παραλλήλους εὐθείας ΙΚ, ΛΜ καὶ τέμνομεν



Σχ. 63

αὐτὰς μὲ δύο ἄλλας ΙΜ, ΚΛ ἐπίσης μὴ παραλλήλους. Σχηματίζομεν τοιουτοτρόπως ἕνα τετράπλευρον ΙΚΛΜ (σχ. 63), τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει παραλλήλους πλευράς. Αὐτὸ λέγεται **τραπεζοειδές.** Ὥστε :

Τραπεζοειδὲς εἶναι ἕνα τετράπλευρον χωρὶς παραλλήλους πλευράς. Διάμεσος λέγεται ἡ εὐθεῖα πού ἑνώνει τὰ δύο μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν.

68. Ποῖα εἶναι τὰ στοιχεῖα τῶν παραλληλογράμμων καὶ τῶν τραπεζίων. Μία ἀπὸ τὰς πλευρὰς ἑνὸς παραλληλογράμμου ὀνομάζεται **βάσις** αὐτοῦ. Ἡ δὲ ἀπόστασις τῆς βάσεως ἀπὸ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν λέγεται ὕψος αὐτοῦ. Π. χ. ἂν ἡ ΒΑ ληφθῇ ὡς βάσις τοῦ ΑΒΓΔ (σχ. 63), **ὕψος** αὐτοῦ θὰ εἶναι τὸ τμῆμα ΔΠ.

Αἱ παράλληλοι πλευραὶ ἑνὸς τραπεζίου λέγονται **βάσεις** αὐτοῦ. Ἡ δὲ ἀπόστασις τῶν βάσεων τραπεζίου λέγεται **ὕψος** αὐτοῦ. Π. χ. ΕΖ καὶ ΘΗ εἶναι αἱ βάσεις καὶ ΘΡ τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου ΕΖΗΘ (σχ. 63).

Ἀσκήσεις

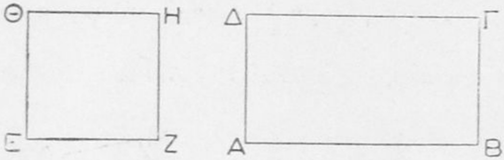
181. Νὰ σχηματίσητε εἰς τὸ τετράδιόν σας ἀπὸ ἕνα παραλληλόγραμμον, ἀπὸ ἕνα τραπέζιον καὶ ἀπὸ ἕνα τραπεζοειδές. Ἔπειτα νὰ γράψητε καὶ νὰ μετρήσητε τὸ ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου καὶ τοῦ τραπεζίου.

182. Νὰ σχηματίσητε ἀπὸ ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ Α = 60°, ΑΒ = 4 ἑκατμ. καὶ ΑΔ = 2 ἑκατμ.

183. Νὰ σχηματίσητε εἰς τὸν πίνακα ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ Α = 30°, βάσιν (ΑΒ) = 2 παλάμας καὶ ὕψος 12 ἑκατοστόμετρα.

184. Νὰ σχηματίσητε ἀπὸ ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ μὲ βάσεις (ΑΒ) = 8 ἑκατοστόμετρα, (ΓΔ) = 4 ἑκατοστόμετρα καὶ ὕψος νὰ εἶναι ἡ πλευρὰ ΑΔ ἴση πρὸς 2 ἑκατοστόμετρα.

69. Ποῖα εἶναι τὰ εἴδη τῶν παραλληλογράμμων. α΄) Αἱ ἕδραι ἑνὸς κυτίου εἶναι παραλληλόγραμμα μὲ ὀρθὰς τὰς γωνίας των. Δι' αὐτὸ αἱ ἕδραι αὗται λέγονται **ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα** ἢ ἁπλῶς **ὀρθογώνια**.



Σχ. 64

Ὁμοίως, ἂν εἰς δύο παραλλήλους εὐθείας ΑΒ, ΔΓ φέρωμεν δύο καθέτους ΑΔ, ΒΓ, σχηματίζομεν ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 64). Ὥστε :

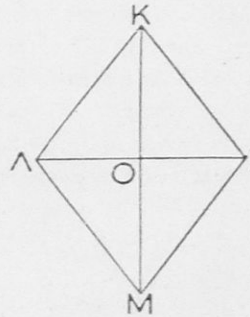
Ὀρθογώνιον εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμον μὲ ὀρθὰς ὅλας τὰς γωνίας του.

Κάθε ἕδρα ἑνὸς κύβου εἶναι ὀρθογώνιον μὲ ἴσας ὅλας τὰς πλευρὰς του. Μία τοιαύτη ἕδρα λέγεται **τετράγωνον.**

Ὁμοίως εἰς τὰς πλευρὰς μιᾶς ὀρθῆς γωνίας Ε ὁρίζομεν δύο ἴσα τμήματα ΕΖ, ΕΘ καὶ φέρομεν τὴν ΖΗ παράλληλον πρὸς τὴν ΕΘ, τὴν δὲ ΘΗ παράλληλον πρὸς τὴν ΕΖ. Τοιουτοτρόπως γίνεται ἕνα ὀρθογώνιον ΕΖΗΘ μὲ ἴσας τὰς πλευράς του, δηλ. ἕνα τετράγωνον (σχ. 64). Ὥστε :

Τετράγωνον εἶναι ἕνα ὀρθογώνιον μὲ ἴσας ὅλας τὰς πλευράς του.

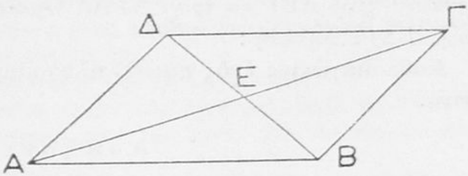
Ἀπὸ δύο τεμνομένας πλευρὰς ἑνὸς ὀρθογωνίου ἡ μία εἶναι ἡ βάσις, ἡ δὲ ἄλλη τὸ ὕψος αὐτοῦ. Ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος ἑνὸς ὀρθογωνίου μαζὶ λέγονται **διαστάσεις** αὐτοῦ. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι αἱ διαστάσεις ἑνὸς τετραγώνου εἶναι ἴσαι.



Σχ. 65

β΄) Εἰς τὰς πλευρὰς μιᾶς ὀξείας γωνίας Κ ἢ ἀμβλείας, ὁρίζομεν δύο ἴσα τμήματα καὶ συνεχίζομεν ὅπως προηγουμένως. Τοιουτοτρόπως σχηματίζομεν ἕνα παραλληλόγραμμον ΚΛΜΙ (σχ. 65). Μὲ τὸν διαβήτην βεβαιούμεθα ὅτι ὅλαι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι ἴσαι. Μὲ τὸν γνώμονα δὲ βλέπομεν ὅτι δύο γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ὀξεῖαι καὶ δύο ἀμβλεῖαι. Αὐτὸ λέγεται **ρόμβος.** Δηλαδή :

Ρόμβος εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμον μὲ ἴσας ὅλας τὰς πλευράς του καὶ μὲ 2 ὀξείας καὶ 2 ἀμβλείας γωνίας.



Σχ. 66

γ΄) Εἰς τὰς πλευρὰς μιᾶς μὴ ὀρθῆς γωνίας Α ὁρίζομεν δύο ἄνισα τμήματα ΑΒ, ΑΔ. Ἂν δὲ συνεχίσωμεν, ὅπως προηγουμένως, σχηματίζομεν ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 66). Μὲ κατάλληλα δὲ ὄργανα βλέπομεν ὅτι αἱ πλευραί του δὲν εἶναι ὅλαι ἴσαι· καὶ δύο γωνίαι του εἶναι ὀξεῖαι καὶ δύο ἀμβλεῖαι. Τοῦτο λέγεται **ρομβοειδές.** Δηλαδή :

Ρομβοειδὲς εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ δὲν εἶναι ὅλαι ἴσαι, δύο δὲ γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ὀξεῖαι καὶ δύο ἀμβλεῖαι.

Ἀσκήσεις

185. Νὰ ἀναγνωρίσητε ποῖαι ὁμοιότητες καὶ ποῖαι διαφοραὶ μεταξὺ τετραγώνου καὶ ρόμβου προκύπτουσιν ἀπὸ τοὺς προηγουμένους ὁρισμούς.
186. Τὸ αὐτὸ διὰ ρομβοειδῆ καὶ ὀρθογώνια (μὴ τετράγωνα).
187. Τὸ αὐτὸ διὰ ρόμβον καὶ ρομβοειδές.
188. Τὸ αὐτὸ διὰ τετράγωνον καὶ ρομβοειδές.

70. Ποίας ἰδιότητας ἔχουσιν ὅλα τὰ παραλληλόγραμμα.

α΄. Μὲ τὸν διαβήτην βλέπομεν ὅτι εἰς κάθε παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 66) εἶναι ΑΒ = ΓΔ, ΑΔ = ΒΓ. Δηλαδή :

Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ἑνὸς παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι.

β΄. Ἂν τὰς ἀπέναντι γωνίας Α καὶ Γ καταστήσωμεν ἐπικέντρους εἰς ἴσους κύκλους, βλέπομεν κατὰ τὰ γνωστά, ὅτι Α = Γ. Ὁμοίως βλέπομεν ὅτι καὶ Β = Δ. Δηλαδή :

Αἱ ἀπέναντι γωνίαι παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι.

γ΄. Ἂν συγκρίνωμεν τὰ τμήματα τῶν διαγωνίων ἑνὸς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ (σχ. 66), βλέπομεν ὅτι ΑΕ = ΕΓ καὶ ΒΕ = ΕΔ. Δηλαδή :

Αἱ διαγώνιοι ἑνὸς παραλληλογράμμου διχοτομοῦνται.

δ΄. Ἀπὸ ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ ἀπὸ φύλλον χάρτου ἀπο-

17 15 16

χωρίζομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἂν δὲ τὸ θέσωμεν εἰς τὸ ΑΓΔ, βεβαιούμεθα ὅτι τρίγ. ΑΒΓ = τρίγ. ΑΓΔ. Ὁμοίως βλέπομεν ὅτι τρίγ. ΑΒΔ = τρίγ. ΒΔΓ. Δηλαδή :

Κάθε διαγώνιος ἑνὸς παραλληλογράμμου χωρίζει αὐτὸ εἰς ἴσα τρίγωνα.

Ἀσκήσεις

189. Ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ ἔχει (ΑΒ) = 0,35 μέτρου καὶ (ΒΓ) = 0,12 μέτρου. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου αὐτοῦ.

190. Νὰ σχηματίσητε ἕνα ὀρθογώνιον μὲ βάσιν 7 ἑκατοστόμετρα καὶ περίμετρον 24 ἑκατοστόμετρα.

191. Ἕνα ὀρθογώνιον οἰκόπεδον ἔχει περίμετρον 87,20 μέτρα καὶ βάσιν 25,40 μέτρα. Νὰ εὕρητε πόσον μῆκος ἔχει τὸ ὕψος του.

192. Μία ὀρθογώνιος ἄμπελος ἔχει βάσιν 68,80 μέτρα καὶ ὕψος 24,20 μέτρα. Νὰ εὕρητε πόσον θὰ στοιχίσῃ ἡ περίφραξις αὐτῆς πρὸς 20 δρχ. τὸ μέτρον.

193. Νὰ σχηματίσητε ἕνα ρόμβον μὲ μίαν γωνίαν 45° καὶ πλευρὰν 4 ἑκατοστομέτρων. Ἔπειτα νὰ εὕρητε τὴν περίμετρον καὶ τὰ μέτρα τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ.

71. Μὲ ποίους ἄλλους τρόπους σχηματίζομεν παραλληλόγραμμον. α΄. Εἰς δύο παραλλήλους εὐθείας ὁρίζομεν δύο ἴσα τμήματα ΑΒ, ΓΔ καὶ συμπληρώνομεν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 66). Ἔπειτα μὲ τὸν γνωστὸν (§ 36) τρόπον βεβαιούμεθα ὅτι καὶ αἱ πλευραὶ ΑΔ, ΒΓ εἶναι παράλληλοι. Τὸ ΑΒΓΔ εἶναι λοιπὸν παραλληλόγραμμον. Ἀπὸ τὴν ἐργασίαν αὐτὴν μανθάνομεν ὅτι :

Ἂν δύο πλευραὶ ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον.

γ΄. Εἰς μίαν ἀπὸ τὰς δύο τεμνομένας εὐθείας εἰς ἕνα σημεῖον Ε, ὁρίζομεν δύο ἴσα τμήματα ΕΑ, ΕΓ καὶ εἰς τὴν ἄλλην ἄλλα δύο ΕΒ, ΕΔ ἐπίσης ἴσα. Σχηματίζομεν ἔπειτα τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ βεβαιούμεθα, ὅπως προηγουμένως, ὅτι αἱ ἀπέναντι πλευραί του εἶναι παράλληλοι καὶ τὸ σχῆμα ἑπομένως εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἀπὸ αὐτὰ μανθάνομεν ὅτι :

Ἂν αἱ διαγώνιοι ἑνὸς τετραπλεύρου διχοτομοῦνται, αὐτὸ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἀσκήσεις

194. Εἰς μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν τοῦ τετραδίου σας νὰ ὁρίσητε ἕνα σημεῖον Γ καὶ εἰς τὴν ἄλλην ἕνα τμῆμα (ΑΒ) = 5 ἑκατοστόμετρα. Ἔπειτα νὰ σχηματίσητε ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ.

195. Νὰ σχηματίσητε ἕνα παραλληλόγραμμον μὲ μίαν διαγώνιον 12 ἑκατοστ. τὴν ἄλλην 8 ἑκατοστ. καὶ μίαν γωνίαν αὐτῶν 45°.

196. Νὰ γράψητε τὰς διαγωνίους ἑνὸς τετραγώνου. Ἔπειτα νὰ συγκρίνητε αὐτὰς καὶ νὰ ὁρίσητε τὸ εἶδος τῶν γωνιῶν των.

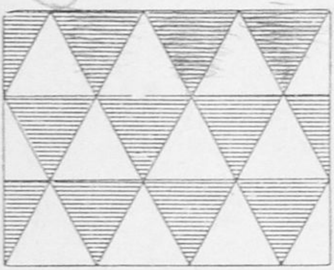
197. Νὰ ἐπαναλάβητε τὴν ἰδίαν ἐργασίαν μὲ ἕνα ρόμβον.

198. Νὰ δηλώσητε ποῖαι ὁμοιότητες καὶ ποῖαι διαφοραὶ μεταξὺ τῶν διαγωνίων ρόμβου καὶ τετραγώνου προκύπτουσιν ἀπὸ τὴν λύσιν τῶν δύο προηγουμένων ἀσκήσεων.

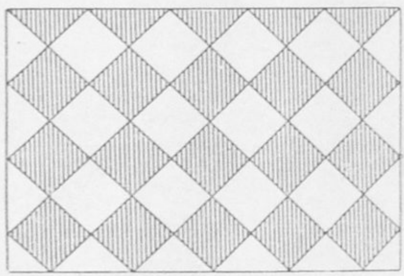
199. Ἀπὸ τὴν τομὴν δύο εὐθειῶν νὰ ὁρίσητε εἰς αὐτὰς 4 ἴσα τμήματα. Ἔπειτα νὰ σχηματίσητε τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ ἄκρα αὐτῶν καὶ νὰ διακρίνητε τὸ εἶδος αὐτοῦ μὲ τὴν βοήθειαν καταλλήλων ὀργάνων.

200. Νὰ ἐπαναλάβητε τὴν ἰδίαν ἐργασίαν, ἀλλὰ τὰ ἴσα τμήματα τῆς μιᾶς εὐθείας νὰ εἶναι μικρότερα ἀπὸ τὰ ἴσα τμήματα τῆς ἄλλης.

72. Τί εἶναι κανονικὰ σχήματα. Γνωρίζομεν ὅτι αἱ πλευραὶ

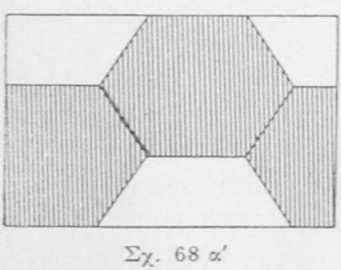


Σχ. 67 α′

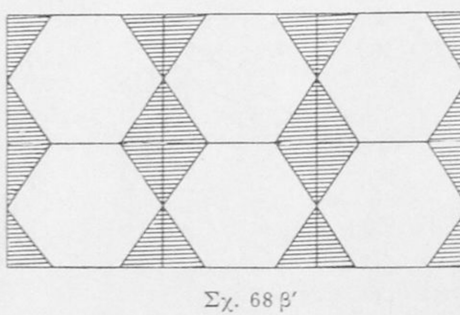


Σχ. 67 β′

ἑνὸς τετραγώνου εἶναι ἴσαι καὶ αἱ γωνίαι του εἶναι ἐπίσης ἴσαι. Δι᾽ αὐτοὺς τοὺς λόγους τὸ τετράγωνον λέγεται **κανονικὸν σχῆμα.**



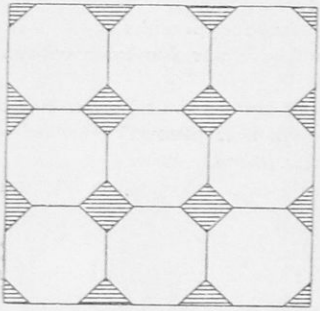
Σχ. 68 α′



Σχ. 68 β′

Διὰ τοὺς ἰδίους λόγους καὶ ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι κανονικὸν σχῆμα. Ὥστε :

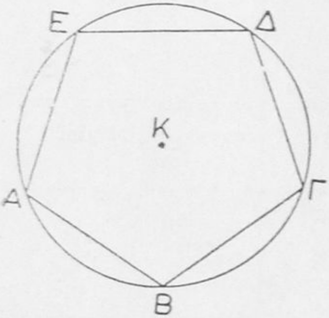
Ἕνα εὐθύγραμμον σχῆμα εἶναι κανονικόν, ἂν ὅλαι αἱ πλευραί του εἶναι ἴσαι καὶ ὅλαι αἱ γωνίαι του εἶναι ἴσαι.



Σχ. 69

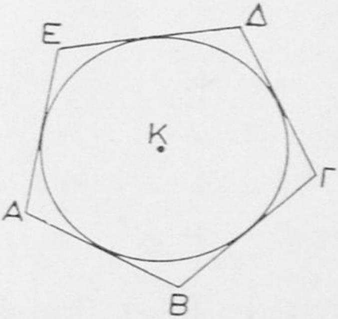
Αἱ πλάκες, μὲ τὰς ὁποίας στρώνομεν διαδρόμους, μαγειρεῖα κ.τ.λ. εἶναι κανονικὰ σχήματα. Π. χ. τὸ σχῆμα 67 α′ δεικνύει ἐπίστρωσιν μὲ τριγωνικάς, τὸ δὲ 67 β′ μὲ τετραγωνικὰς πλάκας. Τὸ σχ. 68 α′ δεικνείει στρῶσιν μὲ ἑξαγωνικάς, τὸ δὲ 68 β′ μὲ ἑξαγωνικὰς καὶ τριγωνικὰς καὶ τὸ 69 μὲ ὀκταγωνικὰς καὶ τετραγωνικὰς πλάκας.

73. Πῶς ἐγγράφομεν καὶ περιγράφομεν εἰς κύκλον ἕνα κανονικὸν εὐθύγραμμον σχῆμα. α′) Εἰς μίαν περιφέρειαν ὁρίζομεν κατὰ σειρὰν διάφορα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, καὶ φέρομεν τὰς χορδὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ.



α′

Σχ. 70



β′

Τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα ΑΒΓΔΕ λέγεται **ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον.** Ἡ δὲ περιφέρεια τοῦ κύκλου λέγεται **περιγεγραμμένη** περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ (σχ. 70 α′).

Ἂν τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εἶναι ἴσα (σχ. 70 α′), αἱ πλευραὶ τοῦ εὐθυγράμμου σχήματος ΑΒΓΔΕ θὰ εἶναι ἴσαι, ὡς χορδαὶ ἴσων τόξων. Καὶ αἱ γωνίαι του δὲ Α, Β κ.τ.λ. εἶναι ἐπίσης ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς κύκλον καὶ βαίνουσιν εἰς ἴσα τόξα, δηλ. εἰς τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς περιφερείας ἡ κάθε μία. Εἶναι λοιπὸν τοῦτο **κανονικὸν σχῆμα.** Ὥστε :

Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν εἰς ἕνα κύκλον ἓν κανονικὸν εὐθύγραμμον σχῆμα, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς ἴσα τόξα καὶ νὰ φέρωμεν τὰς χορδὰς αὐτῶν.

Τὸ κέντρον τοῦ κύκλου λέγεται καὶ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ σχήματος.

β′) Ἂν εἰς τὰ σημεῖα διαιρέσεως μιᾶς περιφερείας (σχ. 70 β′) φέρομεν ἐφαπτομένας αὐτῆς, σχηματίζομεν ἕνα εὐθύγραμμον σχῆμα ΑΒΓΔΕ. Τοῦτο λέγεται **περιγεγραμμένον** περὶ τὸν κύκλον. Ὁ δὲ κύκλος λέγεται **ἐγγεγραμμένος** εἰς τὸ ΑΒΓΔΕ. Ἂν τὰ τόξα τῆς περιφερείας εἶναι ἴσα, μὲ τὸν διαβήτην βλέπομεν ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ ΑΒΓΔΕ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ γωνίαι του εἶναι ἐπίσης ἴσαι. Εἶναι λοιπὸν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ΑΒΓΔΕ **κανονικὸν σχῆμα.**

Ἀσκήσεις

201. Εἰς ἕνα κύκλον νὰ ἐγγράψητε ἓν τετράγωνον.

202. Εἰς ἕνα κύκλον νὰ περιγράψητε ἓν τετράγωνον καὶ νὰ συγκρίνητε τὴν πλευράν του πρὸς τὴν διάμετρον.

203. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς γωνίας ἑνὸς κανονικοῦ ὀκταγώνου καὶ ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου.

74. Πρόβλημα Ι. **Νὰ ἐγγράψητε εἰς ἕνα κύκλον ἓν κανονικὸν ἑξάγωνον.**

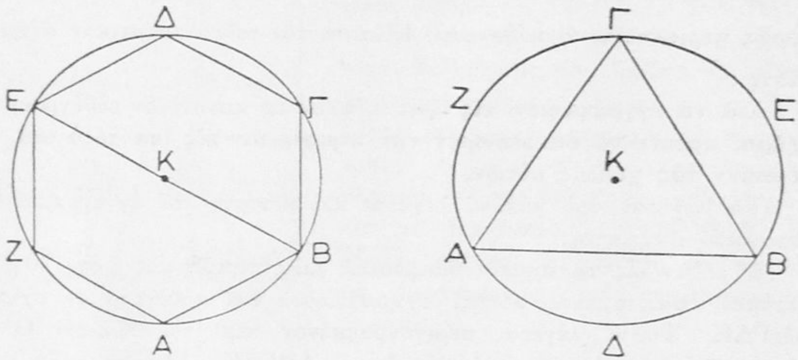
Λύσις. Ἐπαναλαμβάνομεν τὴν λύσιν τῆς ἀσκήσεως 112 καὶ ἐννοοῦμεν ὅτι :

Ἡ πλευρὰ ἑνὸς ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου.

Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν λοιπὸν ἕνα κανονικὸν ἑξάγωνον, γράφομεν ἓξ διαδοχικὰς χορδὰς ἴσας πρὸς τὴν ἀκτῖνα (Σχ. 71 α′).

75. Πρόβλημα ΙΙ. **Νὰ ἐγγραφῇ εἰς ἕνα κύκλον ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον.**

Λύσις. Διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν εἰς ἓξ ἴσα τόξα ΑΔ, ΔΒ, ΒΕ, ΕΓ, ΓΖ, ΖΑ, (σχ. 71 β′) καὶ ἄγομεν τὰς χορδὰς τῶν τόξων ΑΔΒ, ΒΕΓ, ΓΖΑ.

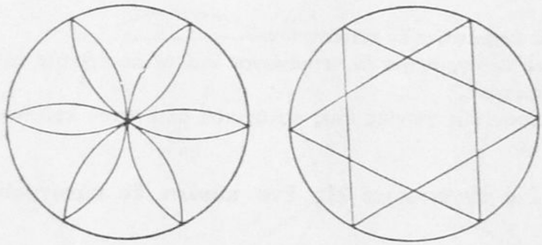


α′ Σχ. 71 β′

Ἀσκήσεις

204. Εἰς ἕνα κύκλον νὰ ἐγγράψητε καὶ νὰ περιγράψητε ἀπὸ ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον. Ἔπειτα δὲ νὰ συγκρίνητε τὰς πλευρὰς αὐτῶν.

205. Εἰς ἕνα κύκλον νὰ ἐγγράψητε ἕνα κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον. Νὰ συγκρίνητε δὲ τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου ἀπὸ τὴν πλευρὰν τοῦ ἑνὸς πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἄλλου.



Σχ. 72

206. Νὰ ἰχνογραφήσητε τὰ σχήματα 72 τοῦ βιβλίου σας καὶ νὰ τὰ χρωματίσητε κατ᾽ ἀρέσκειαν.

Ἐρωτήσεις

Τί εἶναι εὐθύγραμμον σχῆμα;
Ποῖα τὰ εἴδη τῶν τριγώνων;
Εἰς ποίας περιπτώσεις εἶναι δύο τρίγωνα ἴσα;

Πῶς ἄλλως λέγεται τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ διατί;

Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς εὐθυγράμμου σχήματος;

Ποῖα εἶναι τὰ εἴδη τῶν τετραπλεύρων;

Ποῖα εἶναι τὰ εἴδη τῶν παραλληλογράμμων;

Τί εἶναι κανονικὸν εὐθύγραμμον σχῆμα;

Ποῖα τετράπλευρα καὶ ποῖα τρίγωνα εἶναι κανονικά;

Πῶς ἐγγράφομεν εἰς κύκλον κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ πῶς ἔπειτα ἰσόπλευρον τρίγωνον;

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Ε′ κεφαλαίου

207. Νὰ σχηματίσητε ἀπὸ ἕνα τρίγωνον μὲ πλευρὰς 3, 2, 2 ἑκατοστομέτρων καὶ νὰ διακρίνητε τὸ εἶδος τῶν γωνιῶν του.

208. Νὰ σχηματίσητε ἀπὸ ἕνα ρόμβον μὲ μίαν γωνίαν 60^0 καὶ πλευρὰν 0,03 μέτρου. Νὰ μετρήσητε ἔπειτα τὰς διαγωνίους του καὶ νὰ εὕρητε τὰ μέτρα τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ.

209. Ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔχει περίμετρον 60,40 μέτρα καὶ βάσιν 18,60 μ. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῶν ἄλλων πλευρῶν του.

210. Ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνία ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι $86^0\ 20'\ 18''$ Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῶν ἄλλων γωνιῶν του.

211. Νὰ σχηματίσητε ἕνα τρίγωνον μὲ διαγώνιον 0,06 μέτρου.

212. Νὰ σχηματίσητε ἕνα ρόμβον μὲ διαγωνίους 0,08 καὶ 0,06 μέτρου.

213. Νὰ διχοτομήσητε μίαν γωνίαν· ἔπειτα νὰ γράψητε καὶ νὰ συγκρίνητε τὰς ἀποστάσεις ἑνὸς σημείου αὐτῆς ἀπὸ τὰς πλευρὰς αὐτῆς.

214. Νὰ ἐξετάσητε, ἂν ἕνα ἰσοσκελὲς ἢ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον δύναται νὰ εἶναι κανονικὸν σχῆμα.

215. Τὸ αὐτὸ δι᾽ ἕνα ρόμβον καὶ δι᾽ ἕνα ρομβοειδές.

216. Εἰς ἕνα κύκλον νὰ ἐγγράψητε ἕνα κανονικὸν ὀκτάγωνον.

217. Νὰ περιγράψητε ἕνα κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς ἕνα κύκλον.

218. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς γωνίας ἑνὸς κανονικοῦ δωδεκαγώνου.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

76. Τί σημαίνει νὰ μετρήσωμεν μίαν ἐπιφάνειαν. Διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν ἐπιφάνειαν, τὴν συγκρίνομεν πρὸς μίαν ὡρισμένην ἐπιφάνειαν. Αὐτὴν τὴν λέγομεν **μονάδα τῶν ἐπιφανειῶν.**

Ἀπὸ τὴν σύγκρισιν δὲ αὐτὴν εὑρίσκομεν ἕνα ἀριθμόν. Αὐτὸς λέγεται **ἐμβαδὸν** τῆς ἐπιφανείας καὶ φανερώνει ἀπὸ πόσας μονάδας ἢ καὶ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται ἡ μετρηθεῖσα ἐπιφάνεια.

Τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἐπιφανείας ΑΒΓΔ θὰ τὸ παριστάνωμεν οὕτως : (ΑΒΓΔ).

77. Ποῖαι εἶναι αἱ μονάδες τῶν ἐπιφανειῶν. Συνηθεστέρα μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν εἶναι τὸ **τετραγωνικὸν μέτρον.**

Τοῦτο εἶναι ἕνα τετράγωνον μὲ πλευρὰν 1 μέτρου. Διαιρεῖται δὲ εἰς 100 τετράγωνα μὲ πλευρὰν 1 παλάμης.

Αὐτὰ λέγονται **τετραγωνικαὶ παλάμαι.** Κάθε τετραγωνικὴ παλάμη διαιρεῖται εἰς 100 τετράγωνα μὲ πλευρὰν 1 δακτύλου (σχ. 73).

Αὐτὰ λέγονται **τετραγωνικοὶ δάκτυλοι** ἢ **τετραγωνικὰ ἑκατοστόμετρα.** Καθὲν ἀπὸ αὐτὰ διαιρεῖται εἰς 100 **τετραγωνικὰς γραμμάς, τετραγωνικὰ χιλιοστόμετρα** ἢ (τετ. χιλ.). Ὥστε :

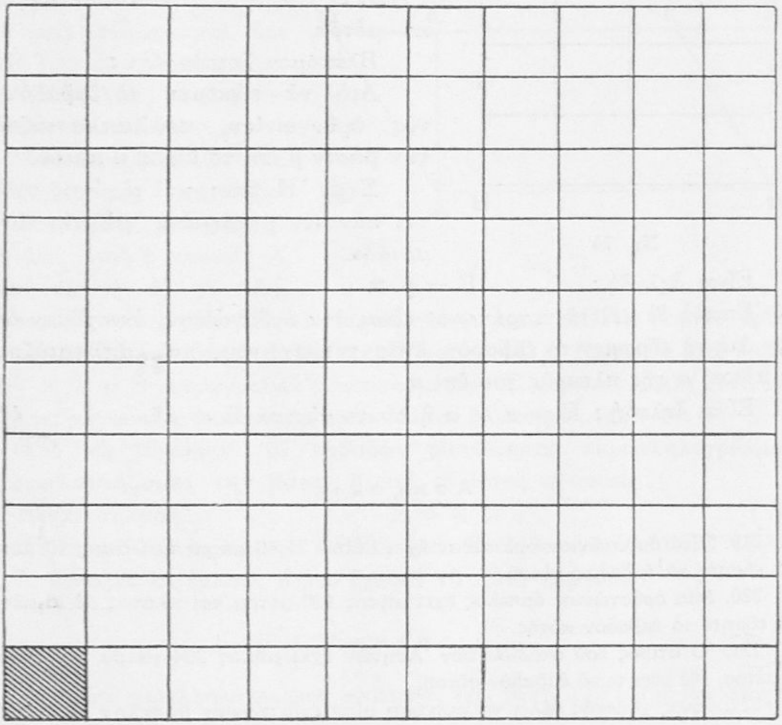
1 τετρ. μετ. = 100 τετρ. παλ. = 10 000 τετρ. ἑκ. = 1 000 000 τετρ. χιλ.
1 τετρ. παλ. = 100 τετρ. ἑκ. = 10 000 τετρ. χιλ.
1 τετρ. ἑκ. = 100 τετρ. χιλ.

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ἀγρῶν, ἀμπέλων κ.τ.λ. οἱ ἀγρόται μεταχειρίζονται τὸ **βασιλικὸν στρέμμα** = 1000 τετραγωνικὰ μέτρα καὶ τὸ **παλαιὸν στρέμμα** = 1270 τετραγωνικὰ μέτρα.

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν οἰκοπέδων μεταχειριζόμεθα ἐνίοτε καὶ τὸν **τεκτονικὸν τετραγωνικὸν πῆχυν** = $\frac{9}{16}$ τετραγωνικοῦ μέτρου.

Διὰ τὰς μεγάλας ἐπιφανείας μεταχειριζόμεθα τὸ **τετραγωνικὸν χιλιόμετρον.** Αὐτὸ εἶναι ἕνα τετράγωνον μὲ πλευρὰν 1 χιλιομέτρου καὶ ἔχει 1 000 000 τετραγωνικὰ μέτρα.

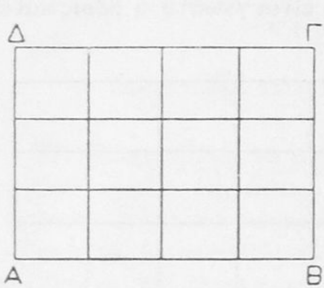
78. Μέτρησις τῶν παραλληλογράμμων. Πρόβλημα Ι. **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου, ἂν εἶναι γνωστὴ ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.**



Ἡ τετραγωνικὴ παλάμη διῃρημένη εἰς 100 τετρ. δακτύλους.
Σχ. 73

Λύσις. Μετροῦμεν τὰς διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ (σχ. 74) καὶ εὑρίσκομεν (ΑΒ) = 4 ἑκατοστόμετρα καὶ (ΑΔ) = 3 ἑκατοστόμετρα. Ἔπειτα διαιροῦμεν τὴν βάσιν εἰς 4 καὶ τὸ ὕψος εἰς 3 ἴσα μέρη. Ἀπὸ δὲ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως κάθε μιᾶς φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ἄλλην. Βλέπομεν δὲ ὅτι τὸ ὀρθογώνιον διῃρέθη εἰς $4 \times 3 = 12$ τετραγωνικὰ ἑκατοστόμετρα. Εἶναι λοιπὸν (ΑΒΓΔ) = $4 \times 3 = 12$ τετραγ. ἑκατοστόμετρα.

Ἂν ἕνα ὀρθογώνιον προαύλιον ΑΒΓΔ ἔχῃ (ΑΒ) = 5 μέτρα κα (ΑΔ) = 3 μέτρα κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ἐννοοῦμεν ὅτι :



Σχ. 74

(ΑΒΓΔ) = 5 × 3 = 15 τετραγωνικὰ μέτρα.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου, πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν β ἐπὶ τὸ ὕψος υ αὐτοῦ.

Σημ. Ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος νοοῦνται πάντοτε μετρημένα μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.

Εἶναι δηλαδή : $E = \beta \times \upsilon$

Ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ τετράγωνον εἶναι ἕνα ὀρθογώνιον, ἐννοοῦμεν ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου, πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος α τῆς πλευρᾶς του ἐπὶ α.

Εἶναι δηλαδή : $E = \alpha \times \alpha$ ἢ συντομώτερα $E = \alpha^2$. (2)

Ἀσκήσεις

219. Ἕνα ὀρθογώνιον οἰκόπεδον ἔχει βάσιν 25,40 μέτρα καὶ ὕψος 10 μέτρα. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

220. Μία ὀρθογώνιος ἄμπελος ἔχει μῆκος 100 μέτρα καὶ πλάτος 32,25 μέτρα. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς.

221. Ὁ στίβος τοῦ σταδίου τῶν Ἀθηνῶν ἔχει μῆκος 204 μέτρα καὶ πλάτος 33 μέτρα. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

222. Ἕνας χωρικὸς θέλει νὰ φυτεύσῃ μίαν ὀρθογώνιον ἄμπελον μὲ ἐμβαδὸν 600 τετραγωνικῶν μέτρων. Ἂν τὸ μῆκος αὐτῆς εἶναι 30 μέτρα, νὰ εὕρητε πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ πλάτος τῆς ἀμπέλου.

223. Ἕνας γεωργὸς ἠγόρασεν ἕνα ὀρθογώνιον ἀγρὸν μήκους 50 μέτρων καὶ πλάτους 30 μέτρων πρὸς 1350 δραχ. τὸ βασιλικὸν στρέμμα. Νὰ εὕρητε πόσα χρήματα ἔδωκεν.

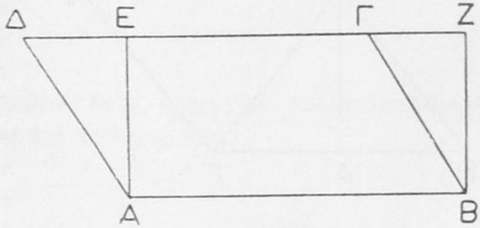
224. Ἕνα τετραγωνικὸν οἰκόπεδον ἔχει πλευρὰν 16,40 μέτρα. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

225. Μία τετραγωνικὴ ἄμπελος ἔχει περίμετρον 209,50 μέτρα. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς.

226. Ἡ αἴθουσα ὑποδοχῆς μιᾶς οἰκίας ἔχει μῆκος 5 μέτρα καὶ πλάτος 4 μέτρα. Ἡ οἰκοδέσποινα θέλει νὰ στρώσῃ αὐτὴν μὲ τάπητα πλάτους 2 μέτρων. Νὰ εὕρητε πόσα μέτρα ἀπὸ αὐτὸν πρέπει νὰ ἀγοράσῃ.

79. Πρόβλημα ΙΙ. **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς μὴ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, ἂν εἶναι γνωστὴ ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.**

Λύσις. Μετροῦμεν τὴν βάσιν ΑΒ καὶ τὸ ὕψος ΑΕ ἑνὸς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ (σχ. 75) καὶ εὑρίσκομεν ὅτι (ΑΒ) = 4 ἑκατοστόμετρα καὶ (ΑΕ) = 2 ἑκατοστόμετρα.



Σχ. 75

Ἂν τὸ τρίγωνον ΑΔΕ ὑποβληθῇ εἰς παράλληλον μετάθεσιν μὲ ὁδηγὸν ΔΓ, ἕως ὅτου ἡ κορυφὴ Α φθάσῃ εἰς τὴν Β, τὸ ΑΔΕ ἔρχεται εἰς τὸ ΒΓΖ. Τὸ δὲ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ γίνεται ὀρθογώνιον ΑΒΖΕ μὲ βάσιν (ΑΒ) καὶ ὕψος (ΑΕ). Τοῦτο δὲ ἔχει ἐμβαδὸν $4 \times 2 = 8$ τετραγωνικὰ ἑκατοστόμετρα. Εἶναι λοιπὸν καὶ (ΑΒΓΔ) = 8 τετραγωνικὰ ἑκατοστόμετρα. Ὥστε βλέπομεν πάλιν ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν οἱουδήποτε παραλληλογράμμου, πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν β ἐπὶ τὸ ὕψος υ αὐτοῦ.

Εἶναι δηλαδή : $$E = \beta \times \upsilon \qquad (3)$$

Τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΖΕ λέγονται ἰσοδύναμα σχήματα, διότι ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν.

Ἀσκήσεις

227. Ἕνα παραλληλόγραμμον οἰκόπεδον ἔχει βάσιν 12,5 μέτρα καὶ ὕψος 5,7 μέτρα. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

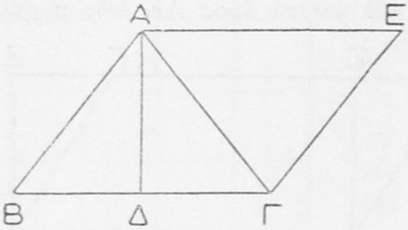
228. Ἕνας παραλληλόγραμμος ἀγρὸς ἔχει βάσιν 56,4 μέτρα καὶ ὕψος 33,70 μέτρα. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν του.

229. Τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν ἑνὸς παραλληλογράμμου κήπου εἶναι 28,45 μέτρα, ἡ δὲ ἀπόστασις αὐτῶν εἶναι 8,5 μέτρα. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

230. Ἕνας παραλληλόγραμμος ἀγρὸς ἔχει ἐμβαδὸν 5 βασιλικῶν στρεμμάτων καὶ βάσιν 100 μέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ ὕψος αὐτοῦ.

80. Μέτρησις τριγώνου. Πρόβλημα ΙΙΙ. **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, ἂν εἶναι γνωστὴ ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.** (Σχ. 76).

Λύσις. Διὰ μετρήσεως εὑρίσκομεν (ΒΓ) = 3 ἑκατοστόμετρα καὶ (ΑΔ) = 2 ἑκατοστόμετρα.



Σχ. 76

Ἔπειτα φέρομεν εὐθεῖαν ΑΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ ἄλλην ΓΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ. Τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΕ ἔχει βάσιν ΒΓ, ὕψος ΑΔ καὶ ἐμβαδὸν $3 \times 2 = 6$ τετραγωνικὰ ἑκατοστόμετρα. Ἐπειδὴ δὲ (ΑΒΓ) = (ΑΒΓΕ) : 2 (§ 70 δ') ἐννοοῦμεν ὅτι :

$$(\text{ΑΒΓ}) = \frac{3 \times 2}{2} = 3 \text{ τετραγωνικὰ ἑκατοστόμετρα.}$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν Ε ἑνὸς τριγώνου, πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν β ἐπὶ τὸ ὕψος υ αὐτοῦ, καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενον διὰ 2.

Εἶναι δηλαδὴ $\text{Ε} = \frac{\beta \times \upsilon}{2}$ (4).

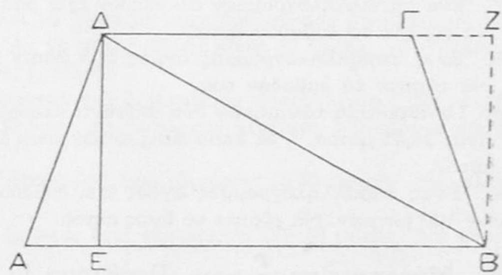
Ἀσκήσεις

231. Νὰ σχηματίσητε ἀπὸ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ καθέτους πλευρὰς 4 ἑκατοστομέτρων καὶ 3 ἑκατοστομέτρων καὶ νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδόν του.

232. Ἡ μία ἀπὸ τὰς καθέτους πλευρὰς ἑνὸς γνώμονος εἶναι 0,3 μέτρου καὶ ἡ ἄλλη 0,15 μέτρου. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδόν του.

233. Ἕνα τριγωνικὸν οἰκόπεδον μὲ βάσιν 40,80 μέτρα καὶ ὕψος 28,60 μέτρα ἐξετιμήθη πρὸς 125 δρχ. τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Νὰ εὕρητε τὴν ἀξίαν του.

81. Μέτρησις τραπεζίου. Πρόβλημα IV. **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου ΑΒΓΔ, ἂν εἶναι γνωσταὶ αἱ βάσεις καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ** (σχ. 77).



Σχ. 77

Λύσις. Διὰ μετρήσεως εὑρίσκομεν ὅτι (ΑΒ) = 6 ἑκατοστόμετρα, (ΔΓ) = 4 ἑκατοστόμετρα καὶ (ΔΕ)=3 ἑκατοστόμετρα. Φέρομεν ἔπειτα τὴν διαγώνιον ΒΔ καὶ βλέπομεν ὅτι $(\text{ΑΒΔ}) = \frac{6 \times 3}{2}$ καὶ $(\text{ΒΓΔ}) = \frac{4 \times 3}{2}$.

Ἀπὸ αὐτὰ δὲ εὑρίσκομεν ὅτι $(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{6 \times 3}{2} + \frac{4 \times 3}{2}$ ἢ συντομώτερα $(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{6 + 4}{2} \times 3 = 15$ τετραγωνικὰ ἑκατοστόμετρα.

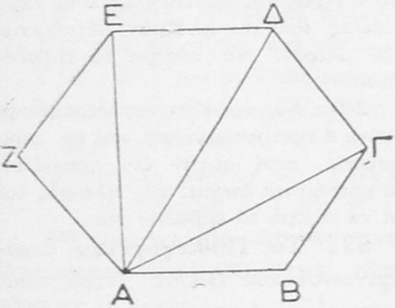
Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου πολλαπλασιάζομεν τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος του.

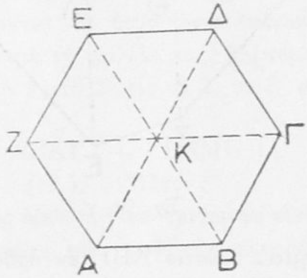
Εἶναι δηλαδή : $$\text{Ε} = \frac{\text{Β} + \beta}{2} \times \upsilon \qquad (5)$$

Ἀσκήσεις

234. Νὰ σχηματίσητε ἀπὸ ἕνα τραπέζιον μὲ βάσεις 4 ἑκατοστόμετρα καὶ 3 ἑκατοστόμετρα καὶ ὕψος 2 ἑκατοστόμετρα. Ἔπειτα δὲ νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδόν του.



Σχ. 78 α'



Σχ. 78 β'

235. Ἕνας ἀγρὸς ἔχει σχῆμα τραπεζίου μὲ Β=85 μέτρα, β=62,5 μέτρα καὶ υ=20 μέτρα. Νὰ εὕρητε πόσα βασιλικὰ στρέμ. εἶναι τὸ ἐμβαδόν του.

236. Μία ἄμπελος ἔχει σχῆμα τραπεζίου καὶ Ε=1265 βασιλικὰ στρέμματα, Β=60,40 μέτρα καὶ β=40,80 μέτρα. Νὰ εὕρητε τὸ ὕψος αὐτῆς.

237. Ἕνα οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα τραπεζίου. Τοῦτο ἔχει υ=20 μέτρα, Β=40 μέτρα καὶ β=30 μέτρα. Νὰ εὕρητε τὴν ἀξίαν του πρὸς 180 δρχ. τὸ τετραγωνικὸν μέτρον.

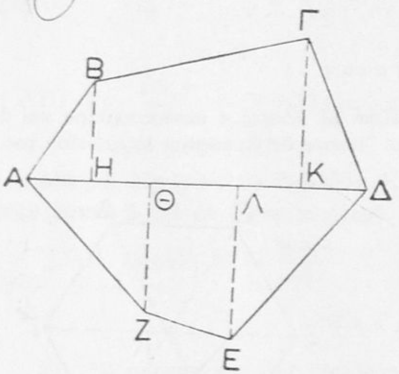
81. Μέτρησις οἱουδήποτε εὐθυγράμμου σχήματος. Πρόβλημα V. **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς οἱουδήποτε εὐθυγράμμου σχήματος.**

Λύσις. α'. Διαιροῦμεν τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα εἰς τρίγωνα (σχ. 78 α' καὶ β') καὶ προσθέτομεν τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν.

β'. Φέρομεν τὴν μεγαλυτέραν διαγώνιον καὶ ἀπὸ τὰς ἄλλας κορυφὰς καθέτους εἰς αὐτὴν (σχ. 78 γ'). Ἔπειτα δὲ προσθέτομεν τὸ ἐμβαδὸν ὅλων τῶν σχημάτων, τὰ ὁποῖα σχηματίζονται.

Ἀσκήσεις

238. Ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος ἑνὸς τετραπλεύρου ἀγροῦ ἔχει μῆκος 80 μέτρα. Μία κορυφὴ ἀπέχει ἀπὸ αὐτὴν 5 μέτρα καὶ ἡ ἄλλη 35 μέτρα. Νὰ εὕρητε ἀπὸ πόσα βασιλικὰ στρέμματα ἀποτελεῖται ὁ ἀγρὸς αὐτός.



Σχ. 78 γ'

239. Ἕνα κανονικὸν ἑξάγωνον ἔχει πλευρὰν 0,30 μέτρου. Ἡ δὲ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας ἀπὸ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ εἶναι 0,26 μέτρου. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

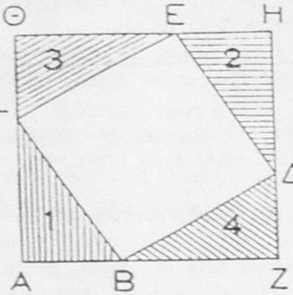
240. Νὰ γράψητε περιφέρειαν μὲ ἀκτῖνα 4 ἑκατοστομέτρων καὶ νὰ περιγράψητε περὶ αὐτὴν ἓν τραπέζιον. Νὰ μετρήσητε ἔπειτα τὰς πλευράς του καὶ νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδόν του.

83. Τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα. Ἔστω ΑΒΓ ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον καὶ ΒΔΕΓ τετράγωνον μὲ πλευρὰν τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ τοῦ τριγώνου (σχ. 79 α'). Προεκτείνομεν τὰς καθέτους πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ καὶ ἀπὸ τὴν κορυφὴν Δ φέρομεν τὴν ΗΔΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ ἀπὸ δὲ τὴν κορυφὴν Ε φέρομεν τὴν ΗΕΘ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ.

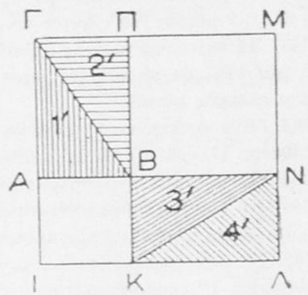
Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου καὶ τοῦ γνώμονος βεβαιούμεθα ὅτι τὸ ΑΖΗΘ εἶναι τετράγωνον καὶ ὅτι ΒΖ = ΑΓ. Ἑπομένως τοῦτο ἔχει πλευρὰν ΑΖ = ΑΒ + ΑΓ.

Κατασκευάζομεν ἔπειτα εἰς ἓν φύλλον χάρτου ἕνα τετράγωνον ΙΛΜΓ μὲ πλευρὰν ΙΛ = ΙΚ + ΚΛ = ΑΒ + ΑΓ (σχ. 79 β'). Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι (ΙΛΜΓ) = (ΑΖΗΘ).

Ἂν δὲ ἐντὸς τοῦ ΙΛΜΓ σχηματίσωμεν τετράγωνον ΑΒΚΙ μὲ πλευρὰν ΙΚ = ΑΒ καὶ προεκτείνωμεν τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΚΒ αὐτοῦ ἐντὸς τοῦ τετραγώνου ΙΛΜΓ, σχηματίζεται τὸ τετράγωνον ΒΝΜΠ μὲ πλευρὰν ΒΠ = ΓΑ. Ἐκτὸς δὲ αὐτοῦ γίνονται καὶ δύο ὀρθογώνια



Σχ. 79 α'



Σχ. 79 β'

ΒΚΛΝ, ΑΒΠΓ. Φέρομεν ἔπειτα τὴν διαγώνιον ΚΝ τοῦ πρώτου καὶ τὴν ΒΓ τοῦ δευτέρου καὶ οὕτω σχηματίζονται τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα 1', 2', 3', 4'. Ἂν δὲ ἀποχωρίσωμεν ταῦτα μὲ τὸ ψαλίδι μας, βλέπομεν εὐκόλως ὅτι τὸ 1' ἐφαρμόζει ἀκριβῶς εἰς τὸ 1, τὸ 2' εἰς τὸ 2, τὸ 3' εἰς τὸ 3 καὶ τὸ 4' εἰς τὸ 4.

Ἐννοοῦμεν λοιπὸν ὅτι (ΒΓΕΔ) = (ΑΒΚΙ) + (ΒΝΜΠ).

ἢ $(ΒΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2$ (1). Ἤτοι :

Τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ.

Τὴν ἰδιότητα αὐτὴν ἀνεκάλυψεν ὁ Ἕλλην Φιλόσοφος καὶ Μαθηματικὸς Πυθαγόρας (580 — 500 π. Χ.). Διὰ τοῦτο δὲ αὕτη λέγεται **Πυθαγόρειον θεώρημα.**

Ἐφαρμογαί. Ἂν π. χ. (ΑΒ) = 3 ἑκατοστόμετρα, (ΑΓ) = 4 ἑκατοστόμετρα, ἡ ἰσότης (1) γίνεται $(ΒΓ)^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ καὶ ἑπομένως $(ΒΓ) = \sqrt{25} = 5$ ἑκατοστόμετρα.

Ἂν δὲ (ΒΓ) = 10 ἑκατοστόμετρα, (ΑΒ) = 6 ἑκατοστόμετρα ἡ (1) γίνεται $10^2 = 6^2 + (ΑΓ)^2$ ἢ $100 = 36 + (ΑΓ)^2$.

Ἐπειδὴ δὲ $100 = 36 + 64$, ἐννοοῦμεν ὅτι $(ΑΓ)^2 = 64$ καὶ ἑπομένως $(ΑΓ) = \sqrt{64} = 8$ ἑκατοστόμετρα.

Ἀσκήσεις

241. Ἡ μία κάθετος πλευρὰ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχει μῆκος 12 μέτρα καὶ ἡ ἄλλη 9 μέτρα. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης αὐτοῦ.

242. Ἡ ὑποτείνουσα ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχει μῆκος 20 ἑκατοστομέτρων καὶ ἡ μία κάθετος πλευρὰ 16 ἑκατοστομέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς αὐτοῦ.

243. Ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει ἐμβαδὸν 150 τετραγωνικὰ μέτρα, ἡ δὲ μία κάθετος πλευρὰ αὐτοῦ ἔχει μῆκος 20 μέτρα. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς καὶ τῆς ὑποτεινούσης.

244. Νὰ εὕρητε τὴν ἀπόστασιν τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ προηγουμένου τριγώνου ἀπὸ τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ.

245. Νὰ κατασκευάσητε ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ μὲ γωνίαν Β 30^0 καὶ ὑποτείνουσαν 10 ἑκατοστομέτρων. Νὰ μετρήσητε τὴν πλευρὰν ΑΓ καὶ ἔπειτα νὰ ὑπολογίσητε τὸ μῆκος τῆς ΑΒ. Μετὰ ταῦτα δὲ νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τούτου καὶ τὴν ἀπόστασιν τῆς κορυφῆς Α ἀπὸ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ.

246. Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου εἶναι 15 ἑκατοστόμετρα. Μία δὲ χορδὴ αὐτοῦ ἔχει μῆκος 18 ἑκατοστομέτρων. Νὰ εὕρητε τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου ἀπὸ τὴν χορδὴν ταύτην.

247. Τὸ κέντρον ἑνὸς κύκλου ἀπέχει 16 ἑκατοστόμετρα ἀπὸ μίαν χορδὴν 24 ἑκατοστομέτρων. Νὰ εὕρητε πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος.

16
×16
96
16
256

400
−256
144

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ

84. Πρόβλημα I. **Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος μιᾶς περιφερείας, ἂν εἶναι γνωστὴ ἡ διάμετρος αὐτῆς.**

Λύσις. Καλύπτομεν ἀκριβῶς μίαν φορὰν μὲ ἕνα λεπτὸν νῆμα τὴν περιφέρειαν ἑνὸς κύκλου ἀπὸ χονδρὸν χαρτόνι ἀκτῖνος π. χ. 5 ἑκατοστομέτρων. Μετροῦμεν τὸ νῆμα καὶ εὑρίσκομεν μῆκος 31,4 ἑκατοστόμετρα. Καὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας λοιπὸν εἶναι 31,4 ἑκατοστόμετρα. Ἡ διάμετρος δὲ εἶναι 10 ἑκατοστόμετρα. Βλέπομεν δὲ ὅτι :

$$31,4 : 10 = 3,14$$

Ἂν ἐργασθῶμεν κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον καὶ μὲ ἄλλας περιφερείας, π. χ. μὲ τὴν περιφέρειαν μιᾶς κυκλικῆς τραπέζης, τῆς βάσεως ἑνὸς κυλινδρικοῦ βάζου κ.τ.λ., εὑρίσκομεν πηλίκον 3,14 πάντοτε. Δηλαδή :

Τὸ πηλίκον τοῦ μήκους μιᾶς περιφερείας διὰ τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου της εἶναι 3,14.

Ἀπὸ τοῦτο δὲ ἐννοοῦμεν ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος Γ περιφερείας πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος δ τῆς διαμέτρου της ἐπὶ 3,14.

Εἶναι δηλαδή : $\Gamma = \delta \times 3,14.$

Ἂν δὲ α εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος, θὰ εἶναι

$$\delta = \alpha \times 2 \text{ καὶ } \Gamma = 2 \times \alpha \times 3,14. \qquad (1)$$

Σημείωσις. Ἡ θεωρητικὴ Γεωμετρία διδάσκει ὅτι τὸ προηγούμενον πηλίκον ἔχει ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία. Διὰ τὰς συνήθεις ὅμως ἐφαρμογὰς ἀρκεῖ ὁ 3,14. Ἂν δὲ εἰς μερικὰ ζητήματα θέλωμεν μεγαλυτέραν ἀκρίβειαν, θεωροῦμεν ὡς πηλίκον τὸν 3,14159.

Ἀσκήσεις

248. Ἡ περιφέρεια μιᾶς τραπέζης ἔχει διάμετρον 1 μέτρου. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος αὐτῆς.

249. Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς τροχοῦ εἶναι 0,8 μέτρου. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του.

250. Ἕνας τροχὸς ἔχει περιφέρειαν 15,70 μέτρα. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.

251. Ἕνας τροχὸς μὲ μίαν στροφὴν διανύει 2,512 μέτρα. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος του.

85. Πρόβλημα II. **Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ἑνὸς τόξου 50^0 μιᾶς περιφερείας 8 μέτρων.**

Λύσις. Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι τὸ ἥμισυ αὐτῆς τῆς περιφερείας θὰ ἔχῃ μῆκος 4 μέτρων. Τὸ τέταρτον 2 μέτρα κ.τ.λ. Δηλ. τὸ μῆκος τόξου εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὸ μέτρον του.

Ἀπὸ δὲ τὴν διάταξιν

Τόξον	360^0	ἔχει	μῆκος	8 μέτρα
»	50^0	»	»	τ

εὑρίσκομεν ὅτι $\tau = 8 \times \frac{50}{360} = 1{,}111$ μέτρα. Ὥστε :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος τ ἑνὸς τόξου μ^0, πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος Γ ὅλης τῆς περιφερείας ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{360}$.

Εἶναι δηλαδή :

$$\tau = \Gamma \times \frac{\mu}{360}.$$

Ἀσκήσεις

252. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος ἑνὸς τόξου 15^0, ἂν ἀνήκῃ εἰς περιφέρειαν 40 μέτρων.

253. Μία περιφέρεια ἔχει ἀκτῖνα 2,5 μέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τόξου 28 αὐτῆς.

254. Ἕνα τόξον 35^0 ἔχει μῆκος 32 μέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του.

89. Πρόβλημα III. **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου, ἂν εἶναι γνωστὴ ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ.**

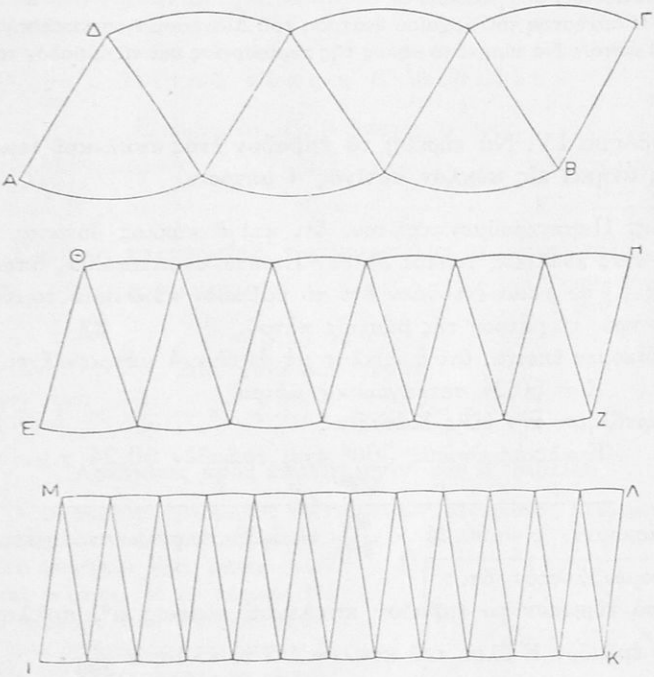
Λύσις. Σχηματίζομεν μερικοὺς ἴσους κύκλους Κ ἀπὸ φύλλον χάρτου. Ἔπειτα ἕνα ἀπὸ αὐτοὺς διαιροῦμεν εἰς 6, ἄλλον εἰς 12, ἄλλον εἰς 24 κ.τ.λ. ἴσους τομεῖς.

Ἀποχωρίζομεν ἔπειτα τοὺς τομεῖς ἑκάστου κύκλου καὶ θέτομεν αὐτοὺς τὸν ἕνα παραπλεύρως ἀπὸ τὸν ἄλλον, οὕτως ὥστε ἡ κορυφὴ ἑκάστου νὰ εἶναι πρὸς τὸ μέρος τῆς βάσεως τοῦ ἑπομένου. Τοιουτοτρόπως σχηματίζομεν τὰ σχήματα ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, ΙΚΛΜ κ.τ.λ. (σχ. 80).

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι κάθε ἕνα ἀπὸ αὐτὰ ἔχει τὸ ἴδιον ἐμβαδὸν μὲ τὸν κύκλον Κ, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐσχηματίσθη.

Κάθε μία δὲ ἀπὸ τὰς γραμμὰς ΑΒ, ΕΖ, ΙΚ κ.τ.λ. ἔχει τὸ ἴδιον μῆκος μὲ τὴν ἡμιπεριφέρειαν αὐτοῦ.

Μὲ μικρὰν δὲ προσοχὴν διακρίνομεν ὅτι : Ἐφ' ὅσον ὁ ἀριθμὸς τῶν τομέων γίνεται μεγαλύτερος, τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἀπὸ αὐτούς, πλησιάζει περισσότερον πρὸς ὀρθογώνιον μὲ ὕψος τὴν ἀκτῖνα καὶ βάσιν ἰσομήκη πρὸς τὴν ἡμιπεριφέρειαν.



Σχ. 80

Ἐννοοῦμεν λοιπὸν ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν Ε ἑνὸς κύκλου, πολλαπλασιάζομεν τὴν ἡμιπεριφέρειαν ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ.

Εἶναι δηλαδὴ $Ε = α \times 3{,}14 \times α = α^2 \times 3{,}14$. Ἤτοι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, πολλαπλασιάζομεν τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ ἐπὶ 3,14.

Ἂν π.χ. εἷς κύκλος ἔχῃ ἀκτῖνα 2 μέτρων, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θὰ εἶναι $2^2 \times 3{,}14 = 12{,}56$ τετραγωνικὰ μέτρα.

Ἀσκήσεις

255. Εἷς κύκλος ἔχει ἀκτῖνα 3 μέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

256. Ἕνα κυκλικὸν ἁλώνιον ἔχει ἀκτῖνα 5 μέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

257. Ἡ περιφέρεια ἑνὸς κύκλου ἔχει μῆκος 15,70 μέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τούτου.

258. Ἡ ὀρχήστρα τοῦ ἀρχαίου θεάτρου τοῦ Διονύσου ἦτο κυκλικὴ μὲ διάμετρον 19,61 μέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου αὐτῆς.

Πρόβλημα IV. **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κυκλικοῦ τομέως 45⁰, ὁ ὁποῖος ἀνήκει εἰς κύκλον ἀκτῖνος 4 μέτρων.**

Λύσις. Παρατηροῦμεν πρῶτον, ὅτι καὶ ὁ κύκλος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἕνας κυκλικὸς τομεὺς 360^0. Ἔπειτα σκεπτόμεθα, ὅπως προηγουμένως (§ 85) καὶ ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὸ μέτρον τῆς βάσεως αὐτοῦ.

Εὑρίσκομεν ἔπειτα, ὅτι ὁ κύκλος μὲ ἀκτῖνα 4 μέτρων ἔχει

$$E = 50{,}24 \text{ τετραγωνικὰ μέτρα}$$

καὶ καταρτίζομεν τὴν ἑξῆς διάταξιν :

Κυκλικὸς τομεὺς 360^0 ἔχει ἐμβαδὸν 50,24 τ.μ.
» » 45^0 » » ε

καὶ εὑρίσκομεν $\varepsilon = 50{,}24 \times \dfrac{45}{360} = 6{,}28$ τετραγωνικὰ μέτρα.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως μ⁰, πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν Ε ὅλου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὸ κλάσμα $\dfrac{\mu}{360}$.

Εἶναι δηλαδὴ $$\varepsilon = E \times \frac{\mu}{360}$$

Σημείωσις. Γνωρίζομεν (§ 85) ὅτι τόξον 45^0 τῆς προηγουμένης περιφερείας ἔχει μῆκος $\tau = 2 \times 3{,}14 \times 4 \times \dfrac{45}{360}$ μέτρα.

Ἂν δὲ τὸ μῆκος τοῦτο πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος, εὑρίσκομεν ὅτι :

$2 \times 3{,}14 \times 4 \times \dfrac{45}{360} \times \dfrac{4}{2} = 6{,}28$ δηλ. τὸ προηγούμενον ἐμβαδόν.

Εἶναι λοιπόν : $$\varepsilon = \tau \times \frac{\alpha}{2}.$$

Ἀσκήσεις

259. Εἷς κύκλος ἔχει ἐμβαδὸν 28,16 τετραγωνικῶν μέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως 100^0 αὐτοῦ.

260. Νὰ σχηματίσητε ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ μὲ πλευρὰν 3 ἑκατοστομέτρων. Ἔπειτα νὰ γράψητε ἕνα τόξον μικρότερον ἡμιπεριφερείας μὲ κέντρον Α, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ χορδὴν ΒΓ. Νὰ εὕρητε δὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως, ὁ ὁποῖος θὰ σχηματισθῇ.

Πίναξ τύπων Β΄ Βιβλίου

Ε ἐμβαδόν, Β, β βάσεις, υ ὕψος

Διὰ παραλληλόγραμμον: $E = B \times \upsilon$

Διὰ τρίγωνον: $E = \frac{B \times \upsilon}{2}$

Διὰ τραπέζιον: $E = \frac{B + \beta}{2} \times \upsilon$

α ἀκτίς, Γ μῆκος περιφερείας, τ μῆκος τόξου, μ μέτρον τόξου.

$$\Gamma = 2 \times 3{,}14 \times \alpha \qquad \tau = \Gamma \times \frac{\mu}{360}$$

$$E = 3{,}14 \times \alpha^2$$

Διὰ κυκλικὸν τομέα

$$\varepsilon = E \times \frac{\mu}{360} = \alpha^2 \times 3{,}14 \times \frac{\mu}{360} = \tau \times \frac{\alpha}{2}$$

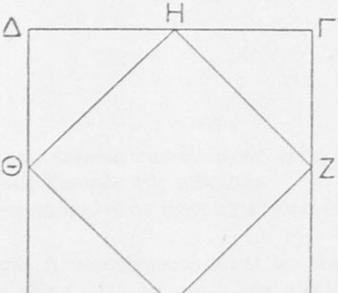
Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Β΄ Βιβλίου

261. Ὁ Παρθενὼν ἔχει μῆκος 69,51 μέτρων καὶ πλάτος 30,86 μέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δαπέδου αὐτοῦ.

262. Τὸ Θησεῖον ἔχει μῆκος 31,77 μέτρων καὶ πλάτος 13,73 μέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δαπέδου αὐτοῦ.

263. Ἕνα ὀρθογώνιον ἀγρόκτημα ἔχει ἐμβαδὸν 3675,6 τετραγωνικῶν μέτρων καὶ βάσιν 100 μέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ ὕψος καὶ τὴν περίμετρον αὐτοῦ.

264. Ἕνας ὀρθογώνιος διάδρομος ἔχει μῆκος 8 μέτρων καὶ πλάτος 5 μέτρων. Οὗτος εἶναι στρωμένος μὲ τετραγωνικὰς πλάκας μὲ πλευρὰν 2 παλαμῶν. Νὰ εὕρητε πόσας πλάκας ἔχει οὗτος.



Σχ. 81

265. Ἕνα ὀρθογώνιον οἰκόπεδον ἐπωλήθη πρὸς 30 δρχ. τὸν τεκτονικὸν τετραγωνικὸν πῆχυν. Τοῦτο δὲ ἔχει βάσιν 150 μέτρων καὶ πλάτος 63 μέτρων. Νὰ ὕρητε τὴν ἀξίαν του.

266. Τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ (σχ. 81) ἔχει πλευρὰν 4 ἑκατοστομέτρων. Τὰ δὲ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ εἶναι μέσα τῶν πλευρῶν του. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΕΖΗΘ.

267. Ἕνα κυκλικὸν ἁλώνιον ἔχει ἀκτῖνα 3,5 μέτρα. Πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ τσιμεντοκονίαμα πρὸς 10 δρχ. τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Νὰ εὕρητε πόσα χρήματα θὰ ἐξοδευθῶσι πρὸς τοῦτο.

268. Ἀπὸ δύο ὁμοκέντρους περιφερείας ἡ μία ἔχει ἀκτῖνα 5 ἑκατοστομέτρων καὶ ἡ ἄλλη 3 ἑκατοστομέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ αὐτῶν.

269. Ἕνα δωμάτιον ἔχει διαστάσεις 5 μέτρα καὶ 3,60 μέτρα. Πρόκειται δὲ νὰ στρωθῇ μὲ σανίδας καθαροῦ μήκους 1,80 μέτρων καὶ πλάτους 0,25 μέτρων. Νὰ εὕρητε πόσαι σανίδες θὰ χρειασθῶσι.

270. Οἱ ἐμπρόσθιοι τροχοὶ μιᾶς ἁμάξης κάμνουσιν ἀπὸ 1000 στροφάς, ὅταν ἡ ἅμαξα διανύῃ 3140 μέτρα. Νὰ εὕρητε τὴν ἀκτῖνα αὐτῶν τῶν τροχῶν.

271. Γύρω ἀπὸ μίαν κυκλικὴν τράπεζαν διαμέτρου 1,95 μέτρων κάθηνται 8 ἄνθρωποι. Νὰ εὕρητε πόσον μέρος τῆς περιφερείας ἀναλογεῖ διὰ κάθε ἕνα.

272. Ἕνας χωρικὸς ἠγόρασε μίαν ἄμπελον πρὸς 620 δραχ. τὸ βασιλικὸν στρέμμα. Ἡ ἄμπελος ἔχει σχῆμα τραπεζίου μὲ ὕψος 45 μέτρων καὶ βάσεις 30 μέτρων τὴν μίαν καὶ 36 μέτρων τὴν ἄλλην. Νὰ εὕρητε πόσα χρήματα ἔδωσεν.

273. Εἷς κυκλικὸς τομεὺς 150^0 ἔχει ἀκτῖνα 0,25 μέτρου. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς βάσεως καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

274. Νὰ γράψητε μίαν περιφέρειαν μὲ ἀκτῖνα 0,25 μέτρου καὶ ἄλλην μὲ διπλασίαν ἀκτῖνα. Νὰ εὕρητε τὰ μήκη τῶν περιφερειῶν τούτων καὶ νὰ συγκρίνητε αὐτάς.

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'

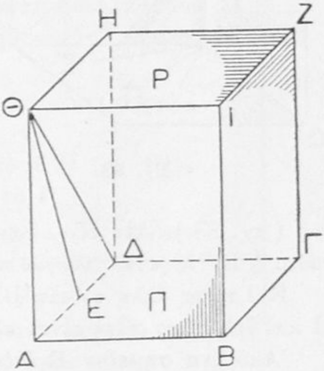
1. ΘΕΣΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

88. Ποῖαι αἱ θέσεις μιᾶς εὐθείας πρὸς ἕνα ἐπίπεδον. Ἡ ἀκμὴ ΑΒ τοῦ πολυέδρου ΑΖ (σχ. 82) κεῖται εἰς τὸ ἐπίπεδον Π. Ἡ ΘΙ δὲν συναντᾷ τὸ Π, ὅσον καὶ ἂν προεκταθῶσι.

Διὰ τοῦτο ἡ ΘΙ λέγεται παράλληλος πρὸς τὸ Π.

Ἡ ἀκμὴ ΑΘ ἔχει μὲ τὸ Π ἕνα μόνον κοινὸν σημεῖον Α. Ἂν δὲ προεκταθῇ αὕτη, διαπερᾷ τὸ Π, ἤτοι τέμνει αὐτό. Τὸ σημεῖον Α λέγεται πούς τῆς εὐθείας ΑΘ. Ὥστε:

Μία εὐθεῖα δυνατὸν νὰ εὑρίσκηται εἰς ἕνα ἐπίπεδον ἢ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτὸ ἢ νὰ τέμνῃ αὐτό.



Σχ. 82

Ἀσκήσεις

275. Νὰ δείξητε μέσα εἰς τὴν αἴθουσάν μας εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὸ πάτωμα καὶ ἄλλας παραλλήλους πρὸς διαφόρους πλευρὰς τῆς αἰθούσης.

276. Νὰ τεντώσητε ἕνα νῆμα, ὥστε νὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ πάτωμα καὶ ἔπειτα πρὸς μίαν πλευρὰν τῆς αἰθούσης.

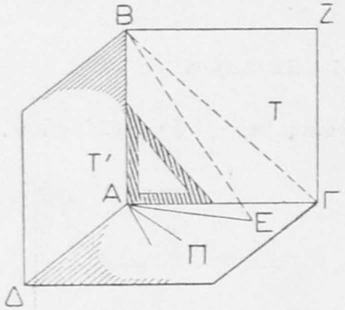
277. Νὰ τοποθετήσητε τὸν γνώμονα, ὥστε ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν πίνακα. Ἔπειτα οὕτως, ὥστε αὕτη νὰ τέμνῃ τὸν πίνακα.

278. Δείξατε εὐθείας, αἱ ὁποῖαι νὰ τέμνωσι τὸ πάτωμα καὶ ἄλλας νὰ τέμνωσι μίαν πλευρὰν τῆς αἰθούσης.

89. Ποῖαι εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι ἢ πλάγιαι πρὸς ἕνα ἐπίπεδον. Μὲ τὸν γνώμονα βεβαιούμεθα, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ τοῦ τοίχου

Τ τῆς αἰθούσης μας εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΓ καὶ ΑΔ τοῦ πατώματος Π (σχ. 83).

Ἂν δὲ περιστρέψωμεν τὸν γνώμονα περὶ τὴν ΑΒ βλέπομεν, ὅτι ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ τοῦ γνώμονος εὑρίσκεται διαρκῶς εἰς τὸ πάτωμα.



Σχ. 83

Εἶναι λοιπὸν ἡ ΑΒ κάθετος πρὸς ὅλας τὰς εὐθείας τοῦ πατώματος, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α. Δι' αὐτὸ ἡ ΑΒ λέγεται **κάθετος** ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π τοῦ πατώματος.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Ἂν μία εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας ἑνὸς ἐπιπέδου, αὕτη εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο.

Ἡ εὐθεῖα ΒΓ τοῦ τοίχου Τ εἶναι (πλαγία πρὸς τὴν ΑΓ τοῦ πατώματος (σχ. 83). Δὲν εἶναι λοιπὸν αὕτη κάθετος εἰς τὸ πάτωμα. Διὰ τοῦτο ἡ ΒΓ λέγεται πλαγία πρὸς τὸ Π.

Καὶ πᾶσα ἄλλη εὐθεῖα ΒΕ εἶναι πλαγία πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΕ τοῦ Π καὶ διὰ τοῦτο αὕτη εἶναι πλαγία καὶ πρὸς τὸ Π. Ὥστε :

Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Β διέρχεται μία μόνον εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ ἕνα ἐπίπεδον Π.

Ἐπειδὴ δὲ ΒΑ $<$ ΒΓ, ΒΑ $<$ ΒΕ κ.τ.λ. τὸ κάθετον τμῆμα ΒΑ λέγεται **ἀπόστασις** τοῦ σημείου Β ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον Π.

Ἀσκήσεις

279. Δείξατε εἰς τὴν αἴθουσάν μας εὐθείας καθέτους ἐπὶ τὸ πάτωμα καὶ ἄλλας καθέτους ἐπὶ τὴν δεξιάν σας πλευράν.

280. Νὰ τοποθετήσητε τὸν γνώμονα, ὥστε ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ νὰ εἶνα κάθετος πρὸς τὸ πάτωμα. Ἔπειτα κάθετος πρὸς τὸν πίνακα.

281. Νὰ τοποθετήσητε τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ γνώμονος πλαγίως πρὸς τὸ πάτωμα, ἔπειτα πρὸς τὴν ἔμπροσθέν σας πλευράν.

90. Ποῖα ἐπίπεδα εἶναι κατακόρυφα καὶ ποῖα ὁριζόντια. Ἡ εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 83) ἔχει τὴν διεύθυνσιν τοῦ νήματος τῆς στάθμης. Λέγεται δὲ αὕτη **κατακόρυφος εὐθεῖα.**

Καὶ πᾶν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ μίαν κατακόρυφον, λέγεται **κατακόρυφον ἐπίπεδον.** Τὰ ἐπίπεδα Τ, Τ′ (σχ. 83) π.χ. εἶναι κατακόρυφα ἐπίπεδα.

Ἂν δὲ ἕνα ἐπίπεδον εἶναι κάθετον εἰς μίαν κατακόρυφον, λέγεται **ὁριζόντιον ἐπίπεδον.** Τὸ πάτωμα Π (σχ. 83) π.χ. εἶναι ἕνα ὁριζόντιον ἐπίπεδον.

2. ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ

91. α′) Ποῖα ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα. Ἡ ὀροφὴ καὶ τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου οὐδέποτε συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν φαντασθῶμεν αὐτὰ προεκτεινόμενα. Διὰ τοῦτο αὐτὰ λέγονται **παράλληλα ἐπίπεδα.**

Ὁμοίως τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ (σχ. 82), εἶναι παράλληλα ἐπίπεδα.

Ἡ δὲ ἀκμὴ ΑΘ, ἥτις εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π (σχ. 82), εἶναι διὰ τὸν ἴδιον λόγον κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ Ρ.

Ἐπειδὴ δὲ ΘΑ < ΘΔ, ΘΑ < ΘΕ κ.τ.λ., τὸ τμῆμα ΘΑ λέγεται ἀπόστασις τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων Π καὶ Ρ (σχ. 82). Δηλαδή :

Ἀπόστασις δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, λέγεται τὸ μεταξὺ αὐτῶν τμῆμα μιᾶς εὐθείας καθέτου πρὸς αὐτά.

Ἀσκήσεις

282. Νὰ δείξητε εἰς τὴν αἴθουσαν διάφορα ζεύγη παραλλήλων ἐπιπέδων.

283. Νὰ τοποθετήσητε τὸν γνώμονα παραλλήλως πρὸς τὸ πάτωμα καὶ ἔπειτα πρὸς μίαν πλευρὰν τῆς αἰθούσης.

92. Ποῖα ἐπίπεδα λέγονται τεμνόμενα ἐπίπεδα. Τὰ ἐπίπεδα Τ καὶ Τ′ (σχ. 83) ἔχουσι κοινὰ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ΑΒ. Αὐτὰ λέγονται **τεμνόμενα** ἐπίπεδα καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ λέγεται **τομὴ** αὐτῶν. Δηλαδή :

Δύο ἐπίπεδα λέγονται τεμνόμενα, ἂν ἔχωσι κοινὰ σημεῖα.

Εἰς τὰ διάφορα τεμνόμενα ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα παρατηροῦμεν βλέπομεν ὅτι :

Ἡ τομὴ δύο ἐπιπέδων εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

93. Τί εἶναι δίεδρος γωνία. Τὰ τεμνόμενα ἐπίπεδα Τ καὶ

Τ′ (σχ. 83) σταματῶσιν εἰς τὴν τομὴν ΑΒ αὐτῶν. Τοιουτοτρόπως δὲ σχηματίζουσιν ἕνα σχῆμα, τὸ ὁποῖον λέγεται **δίεδρος γωνία.**

Ταύτην ὀνομάζομεν δίεδρον ΑΒ ἢ ΤΑΒΤ′ ἢ ΤΑΒΤ.

Τὰ ἐπίπεδα Τ καὶ Τ′ λέγονται **ἕδραι** αὐτῆς. Ἡ δὲ τομὴ ΑΒ τῶν ἑδρῶν τούτων λέγεται ἀκμὴ τῆς διέδρου γωνίας.

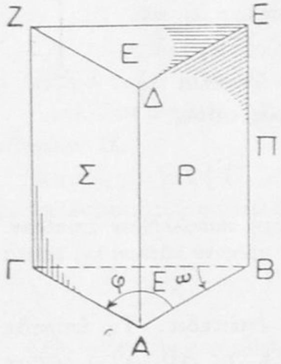
Καὶ αἱ ἕδραι ΑΒΙΘ καὶ ΒΓΖΙ τοῦ πολυέδρου ΑΖ (σχ. 82) σχηματίζουσι δίεδρον γωνίαν μὲ ἀκμὴν ΒΙ.

Αἱ ἕδραι Τ καὶ Τ′ τῆς διέδρου ΑΒ, ἑνὸς δωματίου τέμνονται ἀπὸ τὸ πάτωμα κατὰ τὰς εὐθείας ΑΓ καὶ ΑΔ (σχ. 83). Ἐπειδὴ τὸ πάτωμα εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ γωνία ΓΑΔ τῶν τομῶν ΑΓ καὶ ΑΔ λέγεται **ἀντίστοιχος ἐπίπεδος τῆς διέδρου** ΑΒ.

Ἐπειδὴ δὲ ΔΑΓ = 1 ὀρθὴ καὶ ἡ δίεδρος ΑΒ λέγεται **ὀρθὴ δίεδρος γωνία.** Αἱ δὲ ἕδραι μιᾶς ὀρθῆς διέδρου γωνίας λέγονται **κάθετα ἐπίπεδα.**

Τὰ ἐπίπεδα λοιπὸν Τ καὶ Τ′ εἶναι **κάθετα ἐπίπεδα.** Ἐπίσης τὸ Τ καὶ τὸ πάτωμα Π εἶναι **κάθετα ἐπίπεδα.**

Εὐκόλως βλέπομεν ὅτι μία ὀρθὴ δίεδρος γωνία ἑνὸς κυτίου π.χ. ἐφαρμόζει ἀκριβῶς εἰς μίαν δίεδρον γωνίαν ἑνὸς δωματίου. Εἶναι λοιπὸν αἱ **ὀρθαὶ δίεδροι γωνίαι ἴσαι.**



Σχ. 84

Ἡ δίεδρος γωνία ΒΕ τοῦ πολυέδρου Π (σχ. 84) καταλαμβάνει ἕνα μέρος μιᾶς ὀρθῆς διέδρου π. χ. ἑνὸς κυτίου. Εἶναι λοιπὸν δίεδρος ΒΕ 〈 1 ὀρθῆς διέδρου. Λέγεται δὲ αὕτη **ὀξεῖα δίεδρος γωνία** καὶ ἔχει ἀντίστοιχον ἐπίπεδον τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ω.

Ὁμοίως βλέπομεν ὅτι δίεδρος ΑΔ 〉 1 ὀρθῆς διέδρου. Λέγεται δὲ ἡ ΑΔ **ἀμβλεῖα δίεδρος γωνία** καὶ ἔχει ἀντίστοιχον ἐπίπεδον τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν φ (σχ. 84).

Αἱ ἕδραι μιᾶς ὀξείας ἢ ἀμβλείας διέδρου λέγονται **πλάγια** ἐπίπεδα. Τὰ ἐπίπεδα π.χ. Ρ καὶ Σ εἶναι πλάγια ἐπίπεδα.

Ἀσκήσεις

284. Νὰ δείξητε καὶ νὰ ἀριθμήσητε τὰς διέδρους γωνίας καὶ τὰς ἀκμὰς τῆς αἰθούσης μας.

285. Νὰ δείξητε μίαν δίεδρον γωνίαν μὲ μίαν ἕδραν τὸ πάτωμα. Ἔπειτα δὲ νὰ δείξητε τὴν ἀντίστοιχον ἐπίπεδον αὐτῆς.

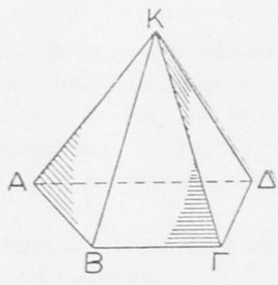
286. Δείξατε εἰς τὴν αἴθουσαν κατακόρυφα καὶ ὁριζόντια ἐπίπεδα. Ἔπειτα δὲ διάφορα ζεύγη καθέτων ἐπιπέδων.

287. Νὰ τοποθετήσητε κατακορύφως τὸ ἐπίπεδον τοῦ γνώμονος καὶ ἔπειτα καθέτως ἢ πλαγίως πρὸς τὸν πίνακα.

94. Ποῖον σχῆμα γίνεται ἀπὸ τρία ἢ περισσότερα τεμνόμενα ἐπίπεδα. Ἡ ὀροφὴ τῆς αἰθούσης μας καὶ τὰ ἐπίπεδα Τ καὶ Τ′ αὐτῆς (σχ. 83) διέρχονται ἀπὸ ἕνα σημεῖον Β καὶ κάθε ἕνα σταματᾷ εἰς τὰς τομὰς αὐτοῦ ἀπὸ τὰ ἄλλα. Τοιουτοτρόπως γίνεται ἀπὸ αὐτὰ ἕνα σχῆμα, τὸ ὁποῖον λέγεται **στερεὰ γωνία.**

Τὰ τρία ἐπίπεδα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα γίνεται αὕτη, λέγονται ἕδραι αὐτῆς καὶ αὐτὴ ἰδιαιτέρως λέγεται **τρίεδρος στερεὰ γωνία.**

Τὸ κοινὸν σημεῖον Β τῶν ἑδρῶν λέγεται **κορυφὴ** τῆς στερεᾶς. γωνίας. Συνήθως μίαν στερεὰν γωνίαν ὀνομάζομεν μὲ τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς. Εἰς τὸ πολύεδρον ΚΑΒΓΔ (σχ. 85) αἱ 4 ἕδραι, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ σημεῖον Κ, σχηματίζουσιν ἕνα σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἐπίσης λέγεται στερεὰ γωνία. Αὐτὴ ὅμως λέγεται τετράεδρος στερεὰ γωνία. Ὑπάρχουσι δὲ καὶ πεντάεδροι, ἑξάεδροι κ.τ.λ. στερεαὶ γωνίαι.



Σχ. 85

Εἰς μίαν στερεὰν γωνίαν βλέπομεν διέδρους γωνίας, ἀκμὰς καὶ ἐπιπέδους γωνίας. Αἱ δίεδροι γωνίαι σχηματίζονται ἀπὸ ἕδρας τῆς στερεᾶς γωνίας. Κάθε δὲ ἐπίπεδος γωνία ἀπὸ δύο ἀκμὰς τῆς αὐτῆς ἕδρας.

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς στερεᾶς γωνίας Α (σχ. 83) εἶναι καὶ αἱ τρεῖς ὀρθαί. Δι' αὐτὸ αὕτη λέγεται **τρισορθογώνιος** στερεά γωνία.

Ἀσκήσεις

288. Νὰ δείξητε στερεὰς γωνίας μέσα εἰς τὴν αἴθουσάν μας.

289. Νὰ ὀνομάσητε τὰς ἐπιπέδους γωνίας μιᾶς στερεᾶς γωνίας Κ (σχ. 85).

290. Νὰ ὀνομάσητε τὰς ἀκμὰς καὶ τὰς διέδρους γωνίας τῆς αὐτῆς στερεᾶς γωνίας Κ (σχ. 85).

Ἐρωτήσεις

Ποῖαι αἱ δυναταὶ θέσεις μιᾶς εὐθείας πρὸς ἕνα ἐπίπεδον;
Ποῖαι αἱ δυναταὶ θέσεις ἑνὸς ἐπιπέδου πρὸς ἄλλο ἐπίπεδον;
Ποῖα ἐπίπεδα λέγονται παράλληλα καὶ ποῖα τεμνόμενα;
Τί εἶναι δίεδρος γωνία καὶ τί στερεὰ γωνία ;
Ποῖα ἐπίπεδα εἶναι κάθετα;
Τί εἶναι τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία;
Τί εἶναι κατακόρυφος;
Τί εἶναι κατακόρυφα καὶ τί εἶναι ὁριζόντια ἐπίπεδα;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'

1. ΠΟΛΥΕΔΡΑ

95. Τί Εἶναι πολύεδρα καὶ ποῖα εἶναι τὰ στοιχεῖα αὐτῶν. Ἐγνωρίσαμεν ἕως τώρα πολλὰ πολύεδρα καὶ παρετηρήσαμεν διάφορα στοιχεῖα αὐτῶν. Ὅλα αὐτά, τὰ ὁποῖα ἐμάθομεν, θὰ τὰ ἐπαναλάβωμεν συγκεντρωμένα ὡς ἑξῆς :

Πολύεδρον εἶναι ἕνα σῶμα, τὸ ὁποῖον ἀπὸ ὅλα τὰ μέρη **περικλείεται ἀπὸ ἐπίπεδα.**

Αὐτὰ τὰ ἐπίπεδα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα περικλείεται ἕνα πολύεδρον, λέγονται **ἕδραι** αὐτοῦ.

Ἕνα πολύεδρον λοιπὸν ἔχει **τεθλασμένην** ἢ **πολυεδρικὴν** ἐπιφάνειαν.

Αἱ τεμνόμεναι ἕδραι ἑνὸς πολυέδρου σχηματίζουσι τὰς διέδρους καὶ στερεὰς γωνίας αὐτοῦ.

Αἱ ἀκμαὶ καὶ αἱ κορυφαὶ αὐτῶν λέγονται **ἀκμαὶ** καὶ **κορυφαὶ** τοῦ πολυέδρου.

Αἱ γωνίαι ἑκάστης ἕδρας πολυέδρου λέγονται **ἐπίπεδοι γωνίαι** αὐτοῦ.

2. ΤΑ ΚΥΡΙΩΤΕΡΑ ΕΙΔΗ ΤΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

Ι. ΠΡΙΣΜΑΤΑ

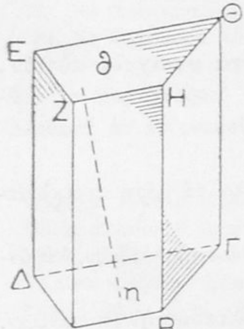
96. Τί εἶναι πρίσματα καὶ ποῖα εἶναι τὰ στοιχεῖα αὐτῶν. Αἱ ἕδραι Ε τοῦ πολυέδρου Π (σχ. 84) εἶναι παράλληλοι. Κατὰ δὲ τὸν γνωστὸν (§ 8) τρόπον βλέπομεν, ὅτι εἶναι καὶ ἴσαι. Αἱ ἄλλαι ἕδραι τοῦ πολυέδρου τούτου εἶναι παραλληλόγραμμα. Τὸ πολύεδρον τοῦτο λέγεται **πρῖσμα.** Διὰ τοὺς ἰδίους λόγους καὶ τὸ πολύεδρον ΑΘ (σχ. 86) εἶναι πρῖσμα. Ὥστε:

Πρῖσμα εἶναι ἕνα πολύεδρον, τὸ ὁποῖον ἔχει δύο ἕδρας ἴσας καὶ παραλλήλους, αἱ δὲ ἄλλαι ἕδραι εἶναι παραλληλόγραμμα.

Αἱ ἴσαι καὶ παράλληλοι ἕδραι ἑνὸς πρίσματος λέγονται **βάσεις** αὐτοῦ. Ἡ δὲ ἀπόστασις τῶν βάσεων ἑνὸς πρίσματος λέγεται **ὕψος** αὐτοῦ. Π.χ. ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ εἶναι αἱ βάσεις καὶ ηθ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος ΑΘ (σχ. 86).

Τὸ πρῖσμα Π (σχ. 84) ἔχει τριγωνικὰς βάσεις, λέγεται δὲ **τριγωνικὸν** πρῖσμα.

Αἱ βάσεις τοῦ πρίσματος ΑΘ (σχ. 86) εἶναι τετράπλευρα· αὐτὸ δὲ λέγεται **τετραγωνικὸν πρῖσμα.**



Σχ. 86

Ὁμοίως ὑπάρχουσι **πενταγωνικά, ἑξαγωνικὰ** κ.τ.λ. πρίσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι βάσεις πεντάγωνα, ἑξάγωνα κ.τ.λ.

Ὅσαι ἕδραι ἑνὸς πρίσματος εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν βάσεων, λέγονται **παράπλευροι ἕδραι** αὐτοῦ.

Ὅλαι αἱ παράπλευροι ἕδραι τοῦ πρίσματος Π (σχ. 84) εἶναι ὀρθογώνια. Δι' αὐτὸ λέγεται τοῦτο **ὀρθὸν** πρῖσμα.

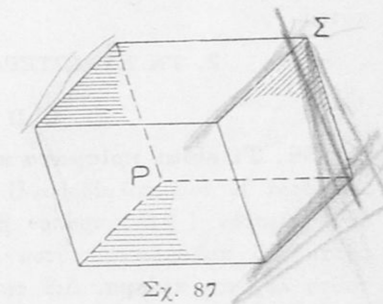
Τοῦ πρίσματος ΑΘ (σχ. 86) αἱ παράπλευροι ἕδραι δὲν εἶναι ὅλαι ὀρθογώνια. Τοῦτο δὲ λέγεται **πλάγιον** πρῖσμα. Ὥστε:

Ἕνα πρῖσμα εἶναι ὀρθόν, ἂν ὅλαι αἱ παράπλευροι ἕδραι του εἶναι ὀρθογώνια.

Τὰ μὴ ὀρθὰ πρίσματα εἶναι πλάγια.

Αἱ ἀκμαὶ ΑΖ, ΒΗ κ.τ.λ. τοῦ πρίσματος ΑΘ (σχ. 86) περιέχονται μεταξὺ τῶν βάσεων αὐτοῦ καὶ λέγονται ἰδιαιτέρως **πλευραὶ** αὐτοῦ.

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι μία πλευρὰ ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος π.χ. τοῦ Π (σχ. 84) εἶναι καὶ ὕψος αὐτοῦ).



Σχ. 87

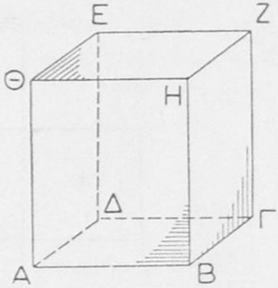
Ἀσκήσεις

291. Νὰ ἀριθμήσητε τὰς κορυφὰς ἑνὸς τριγωνικοῦ, ἑνὸς τετραγωνικοῦ κ.τ.λ. πρίσματος. Νὰ κάμητε δὲ ἕνα κανόνα, μὲ τὸν ὁποῖον νὰ εὑρίσκωμεν ἀμέσως τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν τῶν πρισμάτων ἀπὸ τὸ εἶδος τῶν βάσεων αὐτοῦ.

292. Ὁμοίως διὰ τὸ πλῆθος τῶν ἀκμῶν τῶν πρισμάτων.

293. Ἐπίσης διὰ τὸ πλῆθος τῶν ἑδρῶν τῶν πρισμάτων.

97. Τί εἶναι παραλληλεπίπεδα καὶ ποῖα εἶναι τὰ εἴδη αὐτῶν. Ὅλαι αἱ ἕδραι τοῦ πρίσματος ΡΣ (σχ. 87) εἶναι παραλληλόγραμμα. Λέγεται δὲ τοῦτο ἰδιαιτέρως **παραλληλεπίπεδον.** Διὰ τὸν ἴδιον λόγον καὶ τὸ πρῖσμα ΑΖ (σχ. 88) εἶναι παραλληλεπίπεδον. Ὥστε:



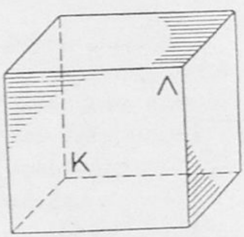
Σχ. 88

Παραλληλεπίπεδον εἶναι ἕνα πρῖσμα, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι παραλληλόγραμμα.

Ὅλαι αἱ ἕδραι τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΖ (σχ. 88) εἶναι ὀρθογώνια. Δι᾽ αὐτὸ δὲ τοῦτο λέγεται ἰδιαιτέρως **ὀρθωγώνιον παραλληλεπίπεδον.** Δηλαδή:

Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον εἶναι ἕνα παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια.

Αἱ ἀκμαὶ ΑΒ, ΑΔ, ΑΘ ἀρχίζουν ἀπὸ μιαν κορυφὴν Α τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ΑΖ (σχ. 88) καὶ λέγονται **διαστάσεις** αὐτοῦ. Ἰδιαιτέρως ἡ μία (ΑΒ) λέγεται **μῆκος,** ἡ ἄλλη (ΑΔ) λέγεται **πλάτος** καὶ ἡ τρίτη (ΑΘ) εἶναι τὸ **ὕψος** αὐτοῦ.



Σχ. 89

Ὅλαι αἱ ἕδραι τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ΚΛ (σχ. 89) εἶναι **τετράγωνα.** Τοῦτο δὲ λέγεται ἰδιαιτέρως **κύβος.** Ὥστε :

Κύβος εἶναι ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι τετράγωνα.

Μὲ τὸν διαβήτην βλέπομεν ὅτι :

Αἱ διαστάσεις ἑνὸς κύβου εἶναι ἴσαι.

Ὁμοίως ὅτι :

Ὅλαι αἱ ἀκμαὶ ἑνὸς κύβου εἶναι ἴσαι.

Ἀπὸ αὐτὸ δὲ ἐννοοῦμεν ὅτι :

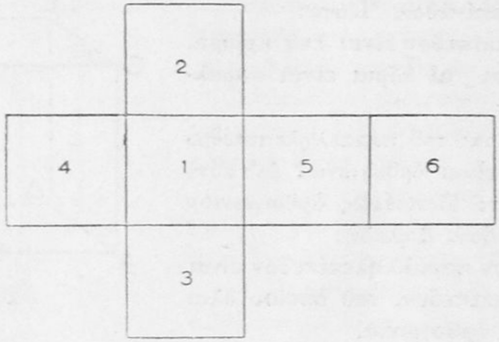
Ὅλαι αἱ ἕδραι ἑνὸς κύβου εἶναι ἴσαι (§ 10).

Ἀσκήσεις

294. Νὰ ἐξετάσητε, ἂν ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθὸν ἢ πλάγιον πρῖσμα.

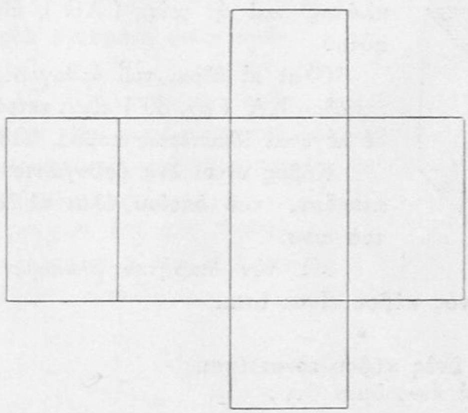
295. Νὰ ἐξετάσητε, ἂν ἕνα ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον δύναται νὰ μὴ εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.

296. Ἂν ἕνας κύβος ἔχῃ ὕψος 5 ἑκατοστομέτρων, νὰ εὕρητε τὸ ἄθροισμα τῶν διαστάσεων αὐτοῦ.



Σχ. 90

297. Ἂν τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀκμῶν ἑνὸς κύβου εἶναι 0,60 μέτρου, νὰ εὕρητε τὸ μῆκος μιᾶς ἐκ τῶν ἀκμῶν αὐτοῦ.



Σχ. 91

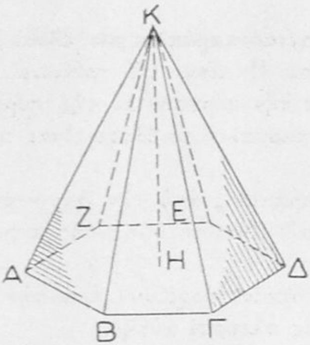
298. Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ σχήματος 90 νὰ κάμητε ἕνα κύβον ἀπὸ χαρτόνι.

299. Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ σχήματος 91 νὰ κάμητε ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἀπὸ χαρτόνι.

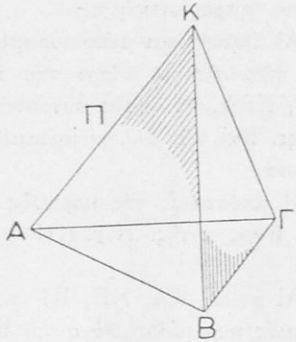
Π. ΠΥΡΑΜΙΔΕΣ

98. Τί εἶναι πυραμίδες καὶ ποῖα εἶναι τὰ στοιχεῖα αὐτῶν. Τὸ πολύεδρον ΚΑΔ (σχ. 92 α′) περικλείεται ἀπὸ τὰς ἕδρας μιᾶς στερεᾶς γωνίας Κ καὶ ἀπὸ μίαν ἐπίπεδον τομὴν ΑΒΓΔΕΖ, ἡ ὁποία τέμνει ὅλας τὰς ἀκμὰς τῆς Κ.

Αὐτὸ τὸ πολύεδρον λέγεται ἰδιαιτέρως **πυραμίς.**



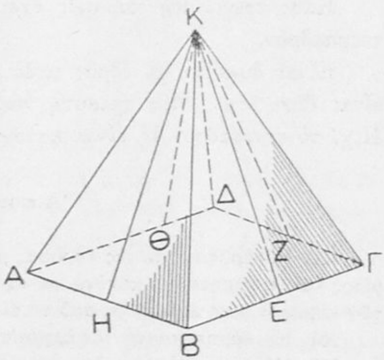
Σχ. 92 α'



Σχ. 92 β'

Διὰ τοὺς ἰδίους λόγους καὶ τὸ πολύεδρον Π (σχ. 92 β') εἶναι πυραμίς. Ὥστε :

Πυραμὶς εἶναι ἕνα πολύεδρον, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ τὰς ἕδρας μιᾶς στερεᾶς γωνίας καὶ ἀπὸ μίαν ἐπίπεδον τομήν της, ἡ ὁποία τέμνει ὅλας τὰς ἀκμὰς αὐτῆς.



Σχ. 92 γ'

Ἡ κορυφὴ τῆς στερεᾶς γωνίας, ἀπὸ τὴν ὁποίαν γίνεται μία πυραμίς, λέγεται **κορυφὴ** καὶ τῆς πυραμίδος. Τὸ σημεῖον Κ π.χ. εἶναι κορυφὴ τῆς πυραμίδος ΚΑΔ.

Ἡ ἕδρα ΑΒΓΔΕΖ κεῖται ἀπέναντι τῆς κορυφῆς καὶ λέγεται βάσις τῆς πυραμίδος ΚΑΔ. Ὁμοίως ἡ ἕδρα ΑΒΓ (σχ. 92 β') εἶναι ἡ **βάσις** τῆς πυραμίδος Π. Ὥστε:

Βάσις μιᾶς πυραμίδος εἶναι ἡ ἕδρα αὐτῆς, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι ἀπὸ τὴν κορυφήν της.

Ἡ πυραμὶς Π ἔχει βάσιν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ λέγεται **τριγωνικὴ πυραμίς.**

Ἡ Κ.ΑΒΓΔ (σχ. 92 γ′) ἔχει βάσιν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ λέγεται **τετραγωνικὴ** κ.τ.λ.

Αἱ ἄλλαι ἕδραι μιᾶς πυραμίδος λέγονται **παράπλευροι** ἕδραι αὐτῆς. Π.χ. παράπλευροι ἕδραι τῆς πυραμίδος Π εἶναι τὰ τρίγωνα ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΑ, τὰ ὁποῖα συναντῶνται εἰς τὴν κορυφὴν Κ τῆς πυραμίδος ταύτης. Καὶ τῶν ἄλλων πυραμίδων αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι τοιαῦτα τρίγωνα.

Ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς μιᾶς πυραμίδος ἀπὸ τὴν βάσιν της λέγεται **ὕψος** αὐτῆς. Π.χ. ΚΗ (σχ. 92 α′) εἶναι τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΚΑΔ.

Αἱ ἀκμαὶ ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ κ.τ.λ. αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουν ἀπὸ τὴν κορυφὴν μιᾶς πυραμίδος, λέγονται ἰδιαιτέρως **πλευραὶ** αὐτῆς.

Ἡ βάσις ΑΒΓΔΕΖ τῆς πυραμίδος ΚΑΔ εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον, τὸ δὲ ὕψος ΚΗ συναντᾷ τὴν βάσιν εἰς τὸ κέντρον της. Δι' αὐτὸ αὐτὴ λέγεται **κανονικὴ πυραμίς.** Ὥστε :

Μία πυραμὶς εἶναι κανονική, ἂν ἔχῃ βάσιν κανονικὸν εὐθύγραμμον σχῆμα καὶ τὸ ὕψος συναντᾷ τὴν βάσιν εἰς τὸ κέντρον της.

Κάθε τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει 4 ἕδρας· λέγεται δὲ διὰ τοῦτο καὶ **τετράεδρον.**

Εἶναι δυνατὸν αἱ ἕδραι μιᾶς κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος νὰ εἶναι ὅλαι ἴσαι. Μία τοιαύτη πυραμὶς λέγεται **κανονικὸν τετράεδρον.** Π.χ. τὸ τετράεδρον Π εἶναι κανονικὸν (σχ. 92 β′).

Ἀσκήσεις

300. Νὰ ἀριθμήσητε τὰς κορυφὰς μιᾶς τριγωνικῆς, τετραγωνικῆς κ.τ.λ. πυραμίδος καὶ νὰ κάμητε ἕνα κανόνα, μὲ τὸν ὁποῖον νὰ εὑρίσκωμεν ἀμέσως τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν μιᾶς πυραμίδος ἀπὸ τὸ εἶδος τῆς βάσεώς της.

301. Νὰ κάμητε αὐτὴν τὴν ἐργασίαν διὰ τὸ πλῆθος τῶν ἑδρῶν τῶν πυραμίδων.

302. Νὰ κάμητε ὁμοίαν ἐργασίαν διὰ τὸ πλῆθος τῶν ἀκμῶν τῶν πυραμίδων.

303. Νὰ συγκρίνητε τὴν δίεδρον γωνίαν τῆς βάσεως καὶ μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας μιᾶς πυραμίδος πρὸς μίαν ὀρθὴν δίεδρον γωνίαν π.χ. ἑνὸς κυτίου.

304. Ἡ βάσις μιᾶς πυραμίδος εἶναι κανονικὸν εὐθύγραμμον σχῆμα. Νὰ ἐξετάσητε, ἂν ἀρκῇ τοῦτο, διὰ νὰ εἶναι ἡ πυραμὶς κανονική.

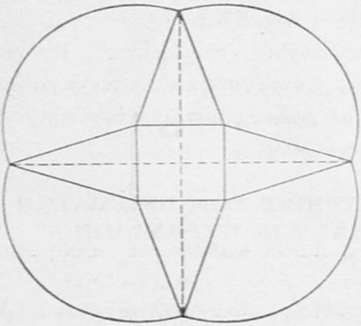
305. Νὰ συγκρίνητε μὲ τὸν διαβήτην τὰς πλευρὰς μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος.

306. Νὰ συγκρίνητε ὅλας τὰς ἀκμὰς ἑνὸς κανονικοῦ τετραέδρου.

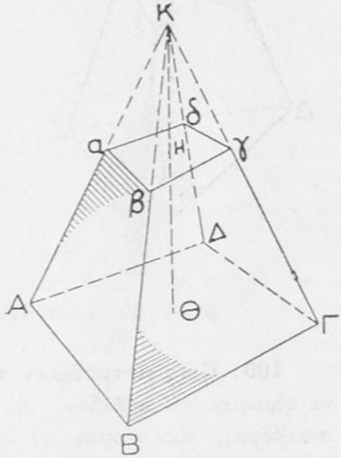
307. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκμῶν ἑνὸς κανονικοῦ τετραέδρου εἶναι 0,30 μέτρου. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος μιᾶς ἀκμῆς του.

308. Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ σχήματος 93 νὰ κατασκευάσητε μίαν πυραμίδα ἀπὸ χαρτόνι.

99. Πῶς δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν μίαν κόλουρον πυραμίδα. Ἐπάνω εἰς τὰς παραπλεύρους ἕδρας μιᾶς πυραμίδος, π.χ. τῆς Κ.ΑΒΓΔ (σχ. 94 α′) ἀπὸ ξύλον χαράσσομεν εὐθείας αβ, βγ, γδ, δα,



Σχ. 93



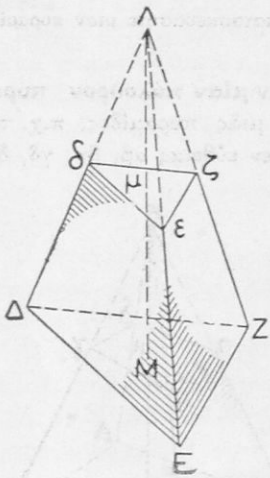
Σχ. 94 α

τὴν α′ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, τὴν β′ πρὸς τὴν ΒΓ κ.τ.λ. Ἔπειτα μὲ προσοχὴν ἕνας ξυλουργὸς κόπτει τὴν πυραμίδα κατὰ τὴν γραμμὴν αβγδ. Ἂν δὲ ἀποχωρήσωμεν τὴν πυραμίδα Κ.αβγδ, μένει ἕνα στερεὸν Βδ. Αὐτὸ λέγεται **κόλουρος πυραμίς.**

Στηρίζομεν αὐτὴν μὲ τὴν ἕδραν ΑΒΓΔ εἰς τὴν τράπεζάν μας καὶ εἰς τὴν ἕδραν αβγδ θέτομεν ἕνα μέγα ἐπίπεδον χαρτόνι. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι τοῦτο εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν ἀπέναντι ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν τῆς τραπέζης. Ἐννοοῦμεν λοιπὸν ὅτι ἡ τομὴ αβγδ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἕδραν ΑΒΓΔ.

Ὁμοίως ἀπὸ τὴν ἄλλην πυραμίδα Λ.ΔΕΖ (σχ. 94 β′) δυνάμεθα νὰ ἀποχωρήσωμεν μίαν πυραμίδα Λ.δεζ καὶ μένει μία κόλουρος πυραμὶς μὲ παραλλήλους ἕδρας ΔΕΖ καὶ δεζ. Ὥστε :

Κόλουρος πυραμὶς εἶναι ἕνα μέρος πυραμίδος, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ μιᾶς ἐπιπέδου τομῆς αὐτῆς παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν της.



Σχ. 94 β′

Αἱ παράλληλοι ἕδραι μιᾶς κολούρου πυραμίδος λέγονται **βάσεις** αὐτῆς.

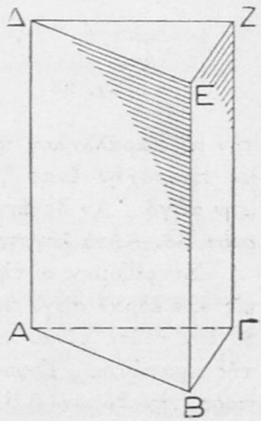
Ἡ δὲ ἀπόστασις τῶν βάσεων λέγεται ὕψος τῆς κολούρου πυραμίδος.

Π.χ. ΑΒΓΔ καὶ αβγδ εἶναι αἱ βάσεις καὶ ΗΘ εἶναι τὸ ὕψος τῆς κολούρου πυραμίδος Βδ (σχ. 94 α′).

Αἱ κόλουροι πυραμίδες λέγονται τριγωνικαί, τετραγωνικαί, πενταγωνικαὶ κ.τ.λ. ἂν αἱ βάσεις αὐτῶν εἶναι τρίγωνα, τετράπλευρα κλπ.

3. ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΠΡΙΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΠΥΡΑΜΙΔΩΝ

100. Πῶς μετροῦμεν τὰς ἐπιφανείας τῶν πολυέδρων. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς πολυέδρου, εὑρίσκομεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἑδρῶν καὶ προσθέτομεν αὐτά. Ἰδιαιτέρως προσέχομεν τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις.



Σχ. 95

101. Πρόβλημα Ι. **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος, ἂν εἶναι γνωστὴ ἡ περίμετρος τῆς βάσεως καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.**

Λύσις. Μετροῦμεν τὸ ὕψος καὶ τὰς πλευρὰς τῆς βάσεως ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος (σχ. 95) καὶ εὑρίσκομεν (ΑΔ) = 4 ἑκατοστόμετρα, (ΑΒ) = 2 ἑκατ. (ΒΓ) = 1 ἑκατ. καὶ (ΑΓ) = 2,5 ἑκατ.

Ἡ περίμετρος λοιπὸν τῆς βάσεως εἶναι
2 + 1 + 2,5 = 5,5 ἑκατ. Τὰ δὲ ἐμβαδὰ τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν εἶναι

(ΑΒΕΔ) = 2 × 4, (ΒΓΖΕ) = 1 × 4, (ΑΓΖΔ) = 2,5 × 4 τετ. έκατ. Ἡ παράπλευρος λοιπὸν ἐπιφάνεια ἔχει ἐμβαδόν :

$$\varepsilon = (2 \times 4) + (1 \times 4) + (2{,}5 \times 4).$$

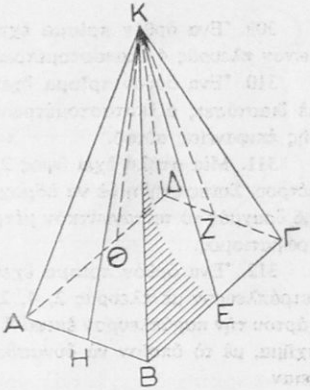
Ἐπειδὴ δὲ καὶ $(2+1+2{,}5) \times 4 = (2\times4)+(1\times4+(2{,}5\times4)$, ἐννοοῦμεν ὅτι $\varepsilon = (2 + 1 + 2{,}5) \times 4 = 5{,}5 \times 4 = 22$ τετραγωνικὰ ἑκατοστόμετρα. Ὥστε :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ε τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος, πολλαπλασιάζομεν τὴν περίμετρον Π τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος Υ αὐτοῦ.

Εἶναι δηλ. $\varepsilon = \Pi \times \Upsilon$.

Ἂν δὲ κάθε βάσις ἔχῃ ἐμβαδὸν β, ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος ἔχει ἐμβαδόν :

$$E = (\Pi \times \Upsilon) + (\beta \times 2).$$



Σχ. 96.

102. Πρόβλημα ΙΙ. **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κανονικῆς πυραμίδος, ἂν εἶναι γνωστὴ ἡ περίμετρος τῆς βάσεως καὶ τὸ ὕψος μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας αὐτῆς.**

Λύσις. Μετροῦμεν μίαν πλευρὰν ΑΒ τῆς βάσεως μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος (σχ. 96) καὶ εὑρίσκομεν π.χ. (ΑΒ) = 3 ἑκατοστόμετρα. Φέρομεν ἔπειτα καὶ μετροῦμεν τὰ ὕψη ΚΗ, ΚΕ, ΚΖ, ΚΘ τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν καὶ βλέπομεν ὅτι ὅλαι ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος π.χ. 5 ἑκατοστομέτρων. Εὑρίσκομεν λοιπὸν ὅτι $(\text{ΚΑΒ}) = \frac{3\times5}{2}$ τετραγωνικὰ ἑκατ. καὶ ὅλη ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια ἔχει ἐμβαδὸν $\varepsilon = \frac{(3\times5)}{2} \times 4 = (3\times4) \times \frac{5}{2} = 30$ τετραγ. ἑκ. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος, πολλαπλασιάζομεν τὴν περίμετρον Π τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους υ μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας της.

Εἶναι δηλαδή : $\varepsilon = \Pi \times \frac{\upsilon}{2}$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τὸ ἐμβαδὸν Ε ὅλης τῆς ἐπιφανείας, προσθέτομεν εἰς τὸ ε τὸ ἐμβαδὸν β τῆς βάσεως.

Εἶναι δηλαδή : $E = (\Pi \times \frac{\upsilon}{2}) + \beta.$

Ἡ προηγουμένη π.χ. πυραμὶς ἔχει $E = 30 + 9 = 39$ τετραγ. ἑκατ.

Ἀσκήσεις

309. Ἕνα ὀρθὸν πρῖσμα ἔχει ὕψος 7 ἑκατοστομέτρων καὶ βάσιν ἕνα τετράγωνον πλευρᾶς 4 ἑκατοστομέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

310. Ἕνα ὀρθὸν πρῖσμα ἔχει ὕψος 5 ἑκατοστομέτρων καὶ βάσιν ὀρθογώνιον μὲ διαστάσεις 6 ἑκατοστομέτρων καὶ 4 ἑκατοστομέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

311. Μία στήλη ἔχει ὕψος 2,5 μέτρων καὶ βάσιν τετράγωνον μὲ πλευρὰν 0,50 μέτρου. Συνεφωνήθη δὲ νὰ ὑδροχρωματισθῇ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια αὐτῆς πρὸς 1,6 δραχμὰς τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Νὰ εὕρητε πόσον θὰ στοιχίσῃ αὐτὸς ὁ ὑδροχρωματισμός.

312. Ἕνα ὀρθὸν πρῖσμα ἔχει ὕψος 5 ἑκατοστομέτρων. Ἡ δὲ βάσις του εἶναι τετράπλευρον μὲ πλευρὰς 2, 4, 2, 3 ἑκατοστομέτρων. Νὰ ἀναπτύξητε ἐπὶ φύλλου χάρτου τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν αὐτοῦ. Δηλ. εἰς ἕνα φύλλον χάρτου νὰ κάμητε σχῆμα, μὲ τὸ ὁποῖον νὰ δύνασθε νὰ καλύψητε ἀκριβῶς τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν.

103. Τί σημαίνει νὰ μετρήσωμεν ἕνα σῶμα καὶ ποῖαι εἶναι αἱ μονάδες τῶν ὄγκων. Νὰ μετρήσωμεν ἕνα σῶμα σημαίνει νὰ εὕρωμεν πόσον μέρος τοῦ διαστήματος καταλαμβάνει αὐτὸ τὸ σῶμα. Διὰ νὰ εὕρωμεν τοῦτο, πρέπει νὰ συγκρίνωμεν αὐτὸ πρὸς τὸ μέρος τοῦ διαστήματος, τὸ ὁποῖον καταλαμβάνει ἕνα ὡρισμένον σῶμα.

Τὸ μέρος τοῦτο ὀνομάζομεν **μονάδα.** Ἀπὸ τὴν σύγκρισιν δὲ αὐτὴν εὑρίσκομεν ἕνα ἀριθμόν.

Αὐτὸς λέγεται **ὄγκος** τοῦ σώματος, καὶ φανερώνει ἀπὸ πόσας μονάδας ἢ καὶ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται τὸ μετρηθὲν σῶμα.

Αἱ δὲ μονάδες, μὲ τὰς ὁποίας ἐκφράζομεν τὸν ὄγκον, λέγονται **μονάδες ὄγκων** ἢ **ὀγκομετρικαὶ μονάδες.**

Συνήθεις μονάδες ὄγκων εἶναι αἱ ἑξῆς :

α') Τὸ κυβικὸν μέτρον. Τοῦτο εἶναι ἕνας κύβος μὲ ἀκμὴν 1 μέτρου.

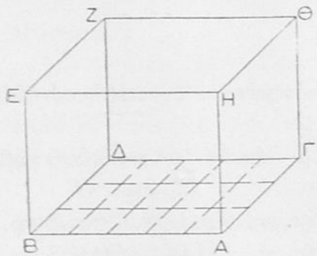
β') Ἡ κυβικὴ παλάμη. Αὐτὴ εἶναι ἕνας κύβος μὲ ἀκμὴν 1 παλάμης.

γ') Ὁ κυβικὸς δάκτυλος. Αὐτὸς εἶναι ἕνας κύβος μὲ ἀκμὴν 1 δακτύλου.

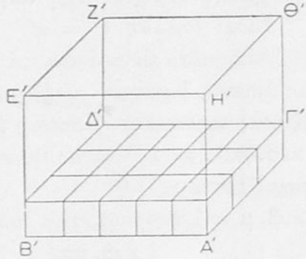
δ') Ἡ κυβικὴ γραμμή. Αὐτὴ εἶναι ἕνας κύβος μὲ ἀκμὴν 1 χιλιοστομέτρου.

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΟΓΚΟΥ ΤΩΝ ΠΡΙΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΠΥΡΑΜΙΔΩΝ

104. Πρόβλημα Ι. **Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.**



Σχ. 97 α'



Σχ. 97 β'

Λύσις. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἕνα κυτίον ΒΘ ἔχει διαστάσεις (ΒΑ) = 5 ἑκ., (ΒΔ) = 3 ἑκ. καὶ (ΒΕ) = 4 ἑκ. (σχ. 97 α').

Γνωρίζομεν (§ 78) νὰ διαιρέσωμεν τὴν βάσιν ΑΒΓΔ εἰς $5 \times 3 = 15$ τετραγωνικὰ ἑκατοστόμετρα. Εἰς ἕκαστον ἀπὸ αὐτὰ τὰ τετράγωνα τοποθετοῦμεν ἕνα κυβικὸν δάκτυλον.

Ἀπὸ τοὺς 15 δὲ αὐτοὺς κυβικοὺς δακτύλους σχηματίζεται μία πλὰξ Α'Δ' ὕψους 1 ἑκατοστομέτρου. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὕψος τοῦ κυτίου εἶναι 4 ἑκατοστομέτρων, χωροῦσιν εἰς αὐτὸν 4 τοιαῦται πλάκες ἢ $15 \times 4 = 60$ κυβικοὶ δάκτυλοι.

Ἂν αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 3 μέτρων, 4 μέτρων, 5 μέτρων, ὁμοίως, εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ὄγκος του εἶναι $15 \times 4 = 60$ κυβικὰ μέτρα. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον Θ ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν β ἐπὶ τὸ ὕψος υ αὐτοῦ.

Εἶναι δηλαδὴ $\Theta = \beta \times \upsilon$.

Ἐπειδὴ δὲ $\beta = 3 \times 5$, εἶναι $\Theta = 3 \times 5 \times 4$. Δηλαδή :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον Θ ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου,

πολλαπλασιάζομεν τὰς τρεῖς διαστάσεις α, β, γ αὐτοῦ, ὅταν εἶναι μετρημέναι μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.

Εἶναι δηλαδὴ $\Theta = \alpha \times \beta \times \gamma$.

Ἐπειδὴ ὁ κύβος εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν καὶ εἰς αὐτὸν τὸν προηγούμενον κανόνα.

Ἂν π. χ. ἕνας κύβος ἔχῃ ἀκμὴν 4 παλαμῶν, θὰ ἔχῃ ὄγκον.

$\Theta = 4 \times 4 \times 4 = 64$ κυβικὰς παλάμας. Ὥστε :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον Θ ἑνὸς κύβου μὲ ἀκμὴν α, εὑρίσκομεν τὴν τρίτην δύναμιν τῆς ἀκμῆς του.

Εἶναι δηλαδὴ $\Theta = \alpha^3$.

Ἀπὸ αὐτὸ ἐννοοῦμεν τὰ ἑξῆς :

Ἐπειδὴ 1 μέτρον = 10 παλάμαι, τὸ κυβικὸν μέτρον ἔχει $10^3 = 1\,000$ κυβικὰς παλάμας. Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι :

1 κυβ. παλ. = 10^3 = 1 000 κυβ. δακ. καὶ 1 κυβ. δάκ. = 10^3 = 1 000 κυβ. γραμ. Ὥστε :

1 κυβ. μ. = 1 000 κυβ. παλ. = 1 000 000 κυβ. δάκ. = 1 000 000 000 κυβ. γρ.
1 κυβ. παλ. = 1 000 κυβ. δάκ. = 1 000 000 κυβ. γρ.
1 κυβ. δάκ. = 1 000 κυβ. γρ.

Ἡ κυβικὴ παλάμη λέγεται συνήθως **κυβικὸν δεκατόμετρον**, ὁ δὲ κυβικὸς δάκτυλος λέγεται καὶ **κυβικὸν ἑκατοστόμετρον**.

Ἀσκήσεις

313. Μία αἴθουσα ἔχει διαστάσεις 6, 4, 5 μέτρων. Νὰ εὕρητε πόσον ὄγκον ἀέρος χωρεῖ.

314. Ἕνα κυτίον ἔχει διαστάσεις 20, 9,5, 8,5 ἑκατοστομέτρων. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον του.

315. Μία δεξαμενὴ εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον μὲ διαστάσεις 3 μέτ., 5 μέτ., 3,5 μέτ. Νὰ εὕρητε πόσον ὄγκον ὕδατος χωρεῖ.

316. Μία τετραγωνικὴ πλατεῖα ἔχει πλευρὰν 80 μέτρων. Πρόκειται δὲ νὰ στρωθῇ μὲ σκῦρα εἰς ὕψος 0,30 μέτρου προτοῦ περάσῃ ἀπὸ αὐτὰ ὁ ὁδοστρωτήρ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τῶν σκύρων, τὰ ὁποῖα θὰ χρειασθῶσι.

317. Μία ἀποθήκη ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις 6 μέτρων, 4 μέτρων, 3 μέτρων. Νὰ εὕρητε πόσα κιλὰ σίτου χωρεῖ (1 κιλὸν = $\frac{1}{10}$ κυβικοῦ μέτρου).

318. Μία σχολικὴ αἴθουσα ἔχει διαστάσεις 6 μέτρων, 5,5 μέτρων, 5 μέτ. Εἰς αὐτὴν διδάσκονται 40 μαθηταί. Νὰ εὕρητε πόσα κυβικὰ μέτρα ἀπὸ τὸν ἀέρα αὐτῆς ἀναλογοῦσιν εἰς κάθε μαθητήν.

105. Ποῖαι εἶναι αἱ συνηθέστεραι μονάδες βάρους. Ὅλα τὰ πολιτισμένα κράτη μεταχειρίζονται τὰς ἑξῆς μονάδας βάρους :

α΄. Τὸ γραμμάριον, ἤτοι τὸ βάρος ἑνὸς κυβικοῦ ἑκατοστομέτρου ὕδατος (4^0 K ἀπεσταγμένου).

β΄. Τὸ χιλιόγραμμον, ἤτοι τὸ βάρος μιᾶς κυβικῆς παλάμης ὕδατος (4^0 K ἀπεσταγμένου). Ἔχει δὲ τὸ χιλιόγραμμον 1 000 γραμμάρια.

γ΄. Τὸν τόννον, ἤτοι τὸ βάρος ἑνὸς κυβικοῦ μέτρου ὕδατος (4^0 K ἀπεσταγμένου). Ἔχει δὲ 1 τόννος 1 000 χιλιόγραμμα ἢ 1 000 000 γραμμάρια.

Σύμφωνα μὲ αὐτά, τὰ 5 κυβικὰ ἑκατοστόμετρα ὕδατος (4^0 K ἀπεσταγμένου) ἔχουσι βάρος 5 γραμμαρίων. Ὁμοίως 20 κυβικαὶ παλάμαι τοιούτου ὕδατος ἔχουσι βάρος 20 χιλιόγραμμα καὶ 4 κυβικὰ μέτρ. τοιούτου ὕδατος ἔχουσι βάρος 4 τόν. Βλέπομεν δηλ. ὅτι :

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος φανερώνει τὸν ὄγκον ὕδατος (4^0 K ἀπεσταγμένου), αὐτὸς φανερώνει καὶ τὸ βάρος τοῦ ὕδατος τούτου.

Πρέπει ὅμως νὰ προσέχωμεν εἰς τὰ ἑξῆς :

Εἰς κυβικὰ ἑκατοστόμετρα ἀντιστοιχοῦσι γραμμάρια, εἰς κυβικὰς παλάμας ἀντιστοιχοῦσι χιλιόγραμμα, εἰς κυβικὰ μέτρα ἀντιστοιχοῦσι τόννοι.

Σημείωσις : Εἰς τὸ ἑξῆς, ὕδωρ θὰ ἐννοοῦμεν τὸ ἀπεσταγμένον καὶ 4^0 Κελσίου.

Ἀσκήσεις

319. Ἕνα δοχεῖον σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχει διαστάσεις 10 ἑκατοστομέτρων, 8 ἑκατοστομέτρων καὶ 15 ἑκατοστομέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ βάρος τοῦ ὕδατος, τὸ ὁποῖον χωρεῖ εἰς τὸ δοχεῖον αὐτό.

320. Ἕνας τεχνίτης θέλει νὰ κάμῃ μίαν ὑδαταποθήκην (ντεπόζιτο) σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἡ ὁποία νὰ χωρῇ 960 χιλιόγραμμα ὕδατος. Ἡ βάσις αὐτῆς θὰ ἔχῃ διαστάσεις 1,20 μέτρων καὶ 0,80 μέτρου. Νὰ εὕρητε πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ βάθος αὐτῆς.

321. Ἕνα δοχεῖον ἔχει βάσιν τετράγωνον, μὲ πλευρὰν 15 ἑκατοστομέτρων καὶ χωρεῖ 4,5 χιλιόγραμμα ὕδατος. Νὰ εὕρητε τὸ βάθος αὐτοῦ.

106. Τί εἶναι εἰδικὸν βάρος ἑνὸς σώματος. Ἕνας σιδηροῦς κύβος ἀκμῆς 5 ἑκατοστομέτρων ἔχει βάρος 973,75 γραμμαρίων.

Ὕδωρ δὲ μὲ τὸν αὐτὸν ὄγκον, δηλ. 125 κυβικῶν ἑκατοστομέτρων ἔχει βάρος 125 γραμμαρίων.

Εἶναι λοιπὸν ὁ σιδηροῦς κύβος βαρύτερος ἀπὸ τὸ ὕδωρ τοῦτο 973,75 : 125 = 7,79 φοράς.

Ὁ ἀριθμὸς 7,79 λέγεται **εἰδικὸν βάρος** τοῦ σιδήρου. Ὥστε :

Εἰδικὸν βάρος ε ἑνὸς σώματος, λέγεται τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, ἄν διαιρέσωμεν τὸ βάρος Β ἑνὸς μέρους ἀπὸ αὐτὸ μὲ τὸ βάρος β ἴσου ὄγκου ὕδατος.

Εἶναι δηλαδή : ε = Β : β.

Ἡ Φυσικὴ διδάσκει διαφόρους τρόπους, μὲ τοὺς ὁποίους εὑρίσκομεν τὰ εἰδικὰ βάρη τῶν σωμάτων. Ἀπὸ αὐτὴν δανειζόμεθα τὸν ἀκόλουθον πίνακα τῶν εἰδικῶν βαρῶν τῶν κυριωτέρων σωμάτων.

Λευκόχρυσος	21,50	Ὑδράργυρος	13,59	Θεῖον	2,07
Χρυσὸς	19,30	Ἔλαιον	0,92	Ὕαλος	2,60
Μόλυβδος	11,35	Οἰνόπνευμα	0,974	Πτελέα	0,80
Ἄργυρος	10,45	Ὕδωρ	1	Ἐλάτη	0,56
Χαλκὸς	8,85	Θαλάσ. ὕδωρ	1,026	Ὀξυὰ	0,75
Σίδηρος	7,79	Πάγος	9,9167	Δρῦς	0,70
Φελλὸς	0,24	Ἀτμοσφ. ἀὴρ	0,0013	Καρυδιὰ	0,66
		Μάρμαρον	2,65	Λεύκη	0,36

107. Πῶς σχετίζεται τὸ βάρος ἑνὸς σώματος μὲ τὸν ὄγκον αὐτοῦ καὶ μὲ τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ. Ἀπὸ τὴν προηγουμένην ἰσότητα 973,75 : 125 = 7,79 εὑρίσκομεν ὅτι : 973,75 = 125 × 7,79.

Ἐνθυμούμεθα δὲ (§ 105) ὅτι ὁ ἀριθμὸς 125 φανερώνει καὶ τὸν ὄγκον εἰς κυβικοὺς δακτύλους τοῦ ὕδατος ἢ τοῦ σιδήρου καὶ ἐννοοῦμεν ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ βάρος Β ἑνὸς σώματος, πολλαπλασιάζομεν τὸν ὄγκον Θ ἐπὶ τὸ εἰδικὸν βάρος ε αὐτοῦ.

Εἶναι δηλαδή : Β = Θ × ε.

Ἀπὸ δὲ τὴν ἰσότητα 973,75 = 125 × 7,79 εὑρίσκομεν ὅτι :

973,75 : 7,79 = 125. Ἤτοι :

Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον ἑνός σώματος, ἄν διαιρέσωμεν τό βάρος διὰ τοῦ εἰδικοῦ βάρους αὐτοῦ.

Εἶναι δηλαδή : Θ = Β : ε.

Εἰς αὐτὰς τὰς πράξεις πρέπει νὰ ἐνθυμούμεθα ὅτι τὸ Β φανερώνει γραμμάρια, ἂν τὸ Θ φανερώνῃ κυβικοὺς δακτύλους κ.τ.λ. (§ 105).

Ἀσκήσεις

322. Ἕνα κυβικὸν δοχεῖον ἔχει ἐσωτερικὴν ἀκμὴν 0,5 μέτρου. Νὰ εὕρητε τὸ βάρος τοῦ ὑδραργύρου, τὸν ὁποῖον χωρεῖ.

323. Τὸ μαρμάρινον βάθρον ἑνὸς ἀγάλματος ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις 1,5 μέτρων, 1 μέτρου, 0,5 μέτρου. Νὰ εὕρητε τὸ βάρος αὐτοῦ.

324. Νὰ εὕρητε τὸ βάρος τοῦ ἀέρος, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται μέσα εἰς τὴν αἴθουσαν τῆς διδασκαλίας.

325. Ἓν γεωμετρικὸν σχῆμα ἀπὸ ἐλάτην ἔχει βάρος 26,8 γραμμαρίων. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον του.

326. Ἕνα ποτήριον εἶναι γεμᾶτον μὲ ἔλαιον· θέτομεν μέσα εἰς αὐτὸ ἕνα σιδηροῦν κύβον μὲ ἀκμὴν 2 ἑκατοστομέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ βάρος τοῦ ἐλαίου, τὸ ὁποῖον θὰ χυθῇ.

327. Ἕνα κυβικὸν δοχεῖον ἀκμῆς 4 ἑκατοστομέτρων χωρεῖ 60,8 γραμμ. οἴνου. Νὰ εὕρητε τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ οἴνου τούτου.

108. Πρόβλημα ΙΙ. **Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς πρίσματος, ἂν εἶναι γνωστὴ ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.**

Λύσις. Ἕνα ξύλινον ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον μὲ βάσιν 12 τετραγωνικῶν ἑκατοστομέτρων καὶ ὕψος 8 ἑκατοστομέτρων ἔχει ὄγκον $12 \times 8 = 96$ κυβικῶν ἑκατοστομέτρων. Ἕνα ἄλλο πρῖσμα ἀπὸ τὸ αὐτὸ ξύλον ἔχει ἐπίσης βάσιν 12 τετραγωνικῶν ἑκατοστομέτρ. καὶ ὕψος 8 ἑκ. Θέλομεν δὲ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον αὐτοῦ.

Ἂν ζυγίσωμεν τὰ δύο αὐτὰ σώματα, εὑρίσκομεν ὅτι ἔχουσι τὸ αὐτὸ βάρος. Ἐπειδὴ δὲ ἔχουσι καὶ τὸ αὐτὸ εἰδικὸν βάρος, θὰ ἔχωσι καὶ τὸν ἴδιον ὄγκον. Δηλ. καὶ τὸ πρῖσμα ἔχει ὄγκον $12 \times 8 = 96$ κυβικῶν ἑκατοστομέτρων.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον Θ ἑνὸς πρίσματος, πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν Β ἐπὶ τὸ ὕψος υ αὐτοῦ.

Εἶναι δηλαδή : $\Theta = B \times \upsilon$.

Ἀσκήσεις

328. Ἕνα πρῖσμα ἔχει βάσιν 20 τετραγων. ἑκατοστομέτρων καὶ ὕψος 10,5 ἑκατοστομέτρων. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτοῦ.

329. Τὸ μαρμάρινον βάθρον τοῦ μνημείου τοῦ Λυσικράτους εἶναι ὀρθὸν τετραγωνικὸν πρῖσμα. Τοῦτο ἔχει ὕψος 3 μέτρων καὶ βάσιν τετράγωνον μὲ πλευρὰν 4 μέτρων. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τοῦ βάθρου τούτου.

330. Ἕνα ὀρθὸν τριγωνικὸν πρῖσμα ἀπὸ μάρμαρον ἔχει ὕψος 2,5 μέτρων. Ἡ δὲ βάσις του εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ καθέτους πλευρὰς 0,5 μέτρου κάθε μίαν. Νὰ εὕρητε μὲ πόσον βάρος πιέζεται τὸ ἔδαφος, εἰς τὸ ὁποῖον στηρίζεται.

331. Ἕνα πρῖσμα ἔχει ὄγκον 250 κυβικῶν παλαμῶν καὶ βάσιν 1 000 τετραγ. ἑκ. Νὰ εὕρητε πόσα μέτρα εἶναι τὸ ὕψος του.

332. Παραλληλεπίπεδον ἔχει ὄγκον 34,5 κυβικῶν ἑκατοστομέτρων καὶ ὕψος 10 ἑκ. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του.

109. Πρόβλημα III. **Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος μιᾶς πυραμίδος, ἂν εἶναι γνωστὴ ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος της.**

Λύσις. Ἕνα ξύλινον πρῖσμα μὲ βάσιν 12 τετραγωνικῶν ἑκατοστομέτρων καὶ ὕψος 6 ἑκ. ἔχει ὄγκον $12 \times 6 = 72$ κυβικῶν ἑκ. Μία πυραμὶς ἀπὸ τὸ ἴδιον ξύλον ἔχει ἐπίσης βάσιν 12 τετρ. ἑκ. καὶ ὕψος 6 ἑκ. Θέλομεν δὲ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον αὐτῆς.

Πρὸς τοῦτο ζυγίζομεν καὶ τὰ δύο αὐτὰ σώματα καὶ εὑρίσκομεν ὅτι τὸ πρῖσμα ἔχει τριπλάσιον βάρος ἀπὸ τὴν πυραμίδα. Ἐπειδὴ δὲ ἔχουσι τὸ αὐτὸ εἰδικὸν βάρος, ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ὄγκου τοῦ πρίσματος, δηλ.

$\frac{12 \times 6}{3} = 24$ κυβ. ἑκ.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον Θ μιᾶς πυραμίδος, πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν Β ἐπὶ τὸ ὕψος υ καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 3.

Εἶναι δηλαδή : $\Theta = \frac{\beta \times \upsilon}{3}$

Ἀσκήσεις

333. Μία πυραμὶς ἔχει ὕψος 0,20 μέτ. καὶ βάσιν ὀρθογώνιον μὲ διαστάσεις 0,12 μέτρ. καὶ 0,30 μέτρ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτῆς.

334. Μία πυραμὶς ἔχει ὕψος 1,5 μέτρων καὶ βάσιν τετράγωνον μὲ πλευρὰν 0,6 μέτρου. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτῆς.

335. Μία πυραμὶς ἀπὸ ἐλάτην ἔχει ὕψος 6 ἑκατοστομέτρων καὶ βάσιν ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ καθέτους πλευρὰς 4 ἑκατοστομέτρων καὶ 3 ἑκατοστομέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ βάρος αὐτῆς.

336. Μία πυραμὶς ἔχει ὄγκον 50 κυβικῶν ἑκατοστομέτρων καὶ βάσιν 20 τεραγων. ἑκατοστομέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ ὕψος αὐτῆς.

Ἐρωτήσεις

Τί εἶναι πολύεδρον;
Ποῖα εἶναι τὰ κυριώτερα στοιχεῖα ἑνὸς πολυέδρου;
Τί εἶναι πρῖσμα;
Εἰς ποῖα εἴδη διαιροῦνται αἱ ἕδραι ἑνὸς πρίσματος;
Ποῖα πρίσματα εἶναι ὀρθὰ καὶ ποῖα εἶναι πλάγια;
Τί εἶναι παραλληλεπίπεδον;
Τί εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον;
Τί εἶναι πυραμὶς καὶ ποῖα τὰ στοιχεῖα μιᾶς πυραμίδος;
Ποῖαι πυραμίδες λέγονται κανονικαί;
Τί εἶναι κανονικὸν τετράεδρον;

Πίναξ τύπων Γ΄ κεφαλαίου

Υ ὕψος
ε ἐμβαδὸν παραπλεύρου ἐπιφανείας
Π Περίμετρος βάσεως
υ ὕψος μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας κανονικῆς πυραμίδος
B ἐμβαδὸν βάσεως
Θ ὄγκος
α, β, γ, αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Διὰ ὀρθὸν πρῖσμα	$\varepsilon = \Pi \times \Upsilon$
Διὰ κανονικὴν πυραμίδα	$\varepsilon = \Pi \times \frac{\upsilon}{2}$
Διὰ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον	$\Theta = \alpha \times \beta \times \gamma = B \times \upsilon$
Διὰ πᾶν πρῖσμα	$\Theta = B \times \upsilon$
Διὰ πυραμίδα	$\Theta = \frac{B \times \upsilon}{3}$

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν Β΄ κεφαλαίου

337. Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ σχήματος 98 (σελ. 125) νὰ κάμητε ἕνα τριγωνικὸν πρῖσμα ἀπὸ χαρτόνι.

338. Μία στήλη ἔχει ὕψος 2,50 μέτρων καὶ βάσιν τετράγωνον μὲ πλευρὰν 0,40 μέτρου. Νὰ εὕρητε πόσον ὕφασμα πλάτους 0,40 μέτρου χρειάζεται, διὰ νὰ καλυφθῇ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια αὐτῆς.

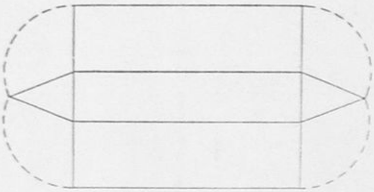
339. Μία δεξαμενὴ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Τὸ στόμιον αὐτῆς ἔχει διαστάσεις 3,5 μέτρ. καὶ 2,5 μέτρ. Νὰ εὕρητε πόσον βάθος πρέπει νὰ ἔχῃ, διὰ νὰ χωρῇ 3,5 τόνν. ὕδατος.

340. Ἕνα κιβώτιον ἔχει ἐσωτερικὸν μῆκος 2,20 μέτρων, πλάτος 1 μέτρου καὶ

ὕψος 0,70 μέτρου. Τοῦτο εἶναι γεμᾶτον μὲ πλάκας σάπωνος. Κάθε δὲ πλὰξ ἔχει μῆκος 0,14 μέτρου, πλάτος δὲ καὶ ὕψος 0,05 μέτρου. Νὰ εὕρητε πόσας πλάκας ἔχει.

341. Εἰς ἕνα δοχεῖον γεμᾶτον μὲ ὕδωρ βυθίζεται ἕνας χάλκινος κύβος μὲ ἀκμὴν 3 ἑκατοστομέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ βάρος τοῦ ὕδατος, τὸ ὁποῖον θὰ χυθῇ.

342. Μία ὁμὰς ἐργατῶν ἔσκαψε μίαν τάφρον μήκους 30 μέτρων, πλάτους 0,80 μέτρου καὶ βάθους 2 μέτρων. Εἶχον δὲ συμφωνήσει νὰ πληρωθῶσι 10 δραχμὰς κατὰ κυβικὸν μέτρον. Νὰ εὕρητε πόσα χρήματα ἔλαβον.



Σχ. 98

343. Ἕνα πρῖσμα καὶ μία πυραμὶς ἀπὸ τὸ αὐτὸ ξύλον ἔχουσιν ἰσοδυνάμους βάσεις καὶ ἴσα βάρη. Τὸ δὲ πρῖσμα ἔχει ὕψος 3 ἑκατοστομέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος.

344. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς τετραγωνικῆς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι 14,4 τετραγωνικῶν ἑκατοστομέτρων. Ἡ δὲ πλευρὰ τῆς βάσεως ἔχει μῆκος 2 ἑκατοστομέτρων. Νὰ εὕρητε τὴν ἀπόστασιν τῆς κορυφῆς αὐτῆς ἀπὸ μίαν πλευρὰν τῆς βάσεώς της.

345. Ἕνας κρουνὸς ἀποδίδει 2 κυβικὰ ἑκατοστόμετρα ὕδατος κατὰ δευτερόλεπτον. Νὰ εὕρητε εἰς πόσον χρόνον γεμίζει οὗτος μίαν δεξαμενὴν μὲ διαστάσεις 3,5 μέτρων, 3 μέτρων, 2,5 μέτρων.

346. Τὸ ὕδωρ τοῦ προηγουμένου ζητήματος εἶναι τῆς δεξαμενῆς τοῦ Μαραθῶνος καὶ κοστίζει 2 δραχ. κατὰ κυβικὸν μέτρον. Νὰ εὕρητε πόσα χρήματα θὰ χρειασθῶσι, διὰ νὰ γεμίσῃ ἐκείνη ἡ δεξαμενή.

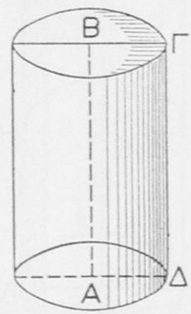
347. Ἕνα τεμάχιον θείου ἔχει βάρος 24,84 χιλιόγραμμα. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

ΣΤΕΡΕΑ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

Α' ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

110. Πῶς γεννᾶται ἕνας κύλινδρος. Σχηματίζομεν ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ ἀπὸ χονδρὸν χαρτόνι ἢ καὶ ἀπὸ λεπτὴν σανίδα, ὅπως π. χ. τὸ κάλυμμα τοῦ κυτίου μὲ τὰς κιμωλίας (σχ. 99). Τοποθετοῦμεν δὲ αὐτὸ οὕτως, ὥστε μία πλευρὰ ΑΔ αὐτοῦ νὰ εἶναι ἐπάνω εἰς τὸ τραπέζι μας, αἱ δὲ ΑΒ καὶ ΓΔ νὰ εἶναι κάθετοι ἐπ' αὐτό.



Σχ. 99

Ἔπειτα κρατοῦμεν τὴν πλευρὰν ΑΒ ἀκίνητον καὶ στρέφομεν πέριξ αὐτῆς καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τὸ ὀρθογώνιον, ἕως ὅτου γυρίσῃ εἰς τὴν πρώτην θέσιν του.

Αἱ θέσεις, ἀπὸ τὰς ὁποίας θὰ περάσῃ τοῦτο, ὅλαι μαζὶ ἀποτελοῦσιν ἕνα στερεὸν σχῆμα.

Τοῦτο λέγεται **κύλινδρος.** Ὥστε :

Κύλινδρος εἶναι ἕνα στερεόν, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἀπὸ ἕνα ὀρθογώνιον, ἂν στραφῇ περὶ μίαν ἀκίνητον πλευράν του καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, ἕως ὅτου γυρίσῃ εἰς τὴν πρώτην θέσιν του.

Ἡ ἀκίνητος πλευρὰ ΑΒ τοῦ ὀρθογωνίου λέγεται **ὕψος** ἢ καὶ **ἄξων** τοῦ κυλίνδρου.

Αἱ κάθετοι εἰς τὸν ἄξονα πλευραὶ ΑΔ καὶ ΒΓ γράφουσι δύο ἴσους καὶ παραλλήλους κύκλους. Οὗτοι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα καὶ λέγονται **βάσεις** τοῦ κυλίνδρου.

Μεταξὺ τῶν βάσεων ἑνὸς κυλίνδρου ὑπάρχει μία καμπύλη ἐπιφάνεια. Αὐτὴ λέγεται ἰδιαιτέρως **κυρτὴ** ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου. Γράφεται δὲ αὕτη ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΓΔ τοῦ ὀρθογωνίου, ἡ ὁποία εἶναι ἀπέναντι τοῦ ἄξονος. Διὰ τοῦτο δὲ ἡ ΓΔ λέγεται **γενέτειρα** τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας.

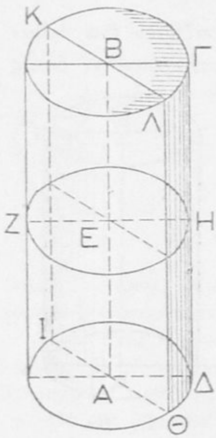
Ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τοῦ κυλίνδρου εἶναι **μεικτὴ ἐπιφάνεια.**

Ἂν ἀπὸ ἕνα κύλινδρον ἀπὸ ἴσα μεταλλικὰ νομίσματα ἀφαιρέσωμεν μερικά, παρουσιάζεται ἕνας κύκλος Ε (σχ. 100) κάθετος εἰς τὸν ἄξονα καὶ ἴσος πρὸς μίαν βάσιν του.

Ἐννοοῦμεν λοιπὸν ὅτι :

Ἡ τομὴ ἑνὸς κυλίνδρου ἀπὸ ἕνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα εἶναι κύκλος ἴσος πρὸς τὴν βάσιν του.

Ἂν κόψωμεν ἕνα κύλινδρον μὲ ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὸν ἄξονα, βλέπομεν ὅτι :



Σχ. 100

Ἡ τομὴ εἶναι ἕνα ὀρθογώνιον ΘΙΚΛ διπλάσιον ἐκείνου, ἀπὸ τὸ ὁποῖον παρήχθη ὁ κύλινδρος.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

111. Πρόβλημα Ι. **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου.**

Λύσις. Περιτυλίσσομεν μίαν φορὰν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς κυλίνδρου μὲ ἕνα λεπτὸν φύλλον χάρτου. Ἂν δὲ ἀνοίξωμεν πάλιν τὸ φύλλον τοῦτο, βλέπομεν ὅτι εἶναι ἕνα ὀρθογώνιον ΔΓΖΕ, τὸ ὁποῖον ἔχει ὕψος ΓΔ δηλ. τὸ ὕψος π. χ. 5 ἑκατοστομέτρων τοῦ κυλίνδρου (σχ. 101).

Τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας καὶ ἔχει τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν μὲ αὐτήν. Ἔχει λοιπὸν ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἐμβαδόν, $\varepsilon = (\Delta E) \times 5$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΔΕ ἐκάλυπτε προηγουμένως τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως ἀκριβῶς, ἔχει μῆκος ἴσον μὲ τὸ μῆκος Γ τῆς περιφερείας ταύτης.

Εἶναι λοιπὸν $\varepsilon = \Gamma \times 5$. Δηλαδή :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου, πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος υ αὐτοῦ.

Ἂν ἡ βάσις τοῦ κυλίνδρου ἔχῃ ἀκτῖνα α, θὰ εἶναι :

$$\Gamma = 2 \times \alpha \times 3{,}14 \text{ καὶ } \varepsilon = 2 \times \alpha \times 3{,}14 \times \upsilon.$$

Ὅλη δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἔχει ἐμβαδόν :

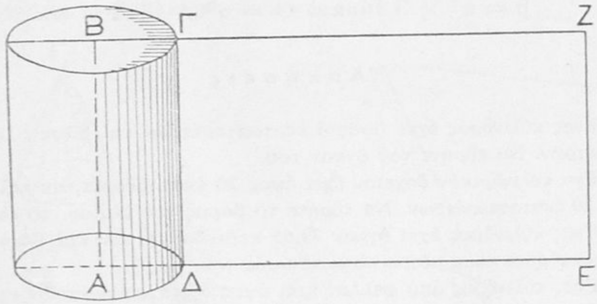
$$E = (2 \times \alpha \times 3{,}14 \times \upsilon) + 2\alpha^2 \times 3{,}14$$

ἢ συντομώτερον : $E = 2 \times \alpha \times 3{,}14 \times (\alpha + \upsilon)$.

Ἂν π.χ. $\alpha = 2$ ἑκατοστόμετρα, $\upsilon = 5$ ἑκατοστόμετρα, θὰ εἶναι $\varepsilon = 2 \times 2 \times 3{,}14 \times 5 = 62{,}8$ τετ.ἑκ. καὶ $E = 2 \times 2 \times 3{,}14 \times 7 = 87{,}92$ τ. ἑκ.

Ἀσκήσεις

348. Ἕνας κύλινδρος ἔχει ὕψος 8 ἑκατοστομέτρων καὶ βάσεις μὲ ἀκτῖνα 2 ἑκατοστομέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του καὶ ἔπειτα ὅλης τῆς ἐπιφανείας.



Σχ. 101

349. Μία κυλινδρικὴ στήλη ἔχει ὕψος 2,5 μέτρων καὶ βάσεις μὲ ἀκτῖνα 0,30 μέτρου. Νὰ εὕρητε πόσον θὰ στοιχίσῃ ὁ ὑδροχρωματισμὸς αὐτῆς πρὸς 16 δραχμὰς τὸ τετραγωνικὸν μέτρον.

350. Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κυλίνδρου ἔχει ἐμβαδὸν 314 τετραγωνικῶν ἑκατοστομέτρων καὶ ἡ ἀκτὶς τῶν βάσεων εἶναι 5 ἑκατοστόμετρα. Νὰ εὕρητε τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου τούτου.

351. Τὸ οἴκημα, εἰς τὸ ὁποῖον στεγάζεται τὸ μεγαλύτερον ἀπὸ τὰ τηλεσκόπια τοῦ Ἀστεροσκοπείου τῶν Ἀθηνῶν ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα κυλινδρικὸν πύργον μὲ ἐσωτερικὴν διάμετρον 7,40 μέτρων καὶ ὕψος 2,8 μέτρων. Καλύπτεται δὲ οὗτος ἀπὸ ἕνα περιστρεφόμενον θόλον. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐσωτερικῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ πύργου τούτου ἄνευ τοῦ θόλου.

112. Πρόβλημα ΙΙ. **Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς κυλίνδρου, ἂν εἶναι γνωστὴ ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.**

Λύσις. Ἕνας κύλινδρος ἀπὸ πτελέαν μὲ ὕψος 10 ἑκατοστομέτρων καὶ βάσιν μὲ διάμετρον 5 ἑκατοστομέτρων ἔχει βάρος 157 γραμμαρίων. Ἐπειδὴ δὲ τὸ εἰδικὸν βάρος τῆς πτελέας εἶναι 0,8 ὁ κύλινδρος ἔχει ὄγκον $\Theta = 157 : 0{,}8 = 196{,}25$ κυβικῶν ἑκατοστομέτρων. Ἡ βάσις δὲ τοῦ κυλίνδρου τούτου ἔχει ἐμβαδὸν

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 \times 3{,}14 = 19{,}625.$$

καὶ παρατηροῦμεν, ὅτι $19{,}625 \times 10 = 196{,}25$.

Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον Θ ἑνὸς κυλίνδρου, πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν β ἐπὶ τὸ ὕψος υ αὐτοῦ.

Εἶναι δηλαδή : $\Theta = \beta \times \upsilon$.

Ἂν λοιπὸν ἕνας κύλινδρος ἔχῃ βάσεις μὲ ἀκτῖνα α, θὰ εἶναι

$$\beta = \alpha^2 \times 3{,}14 \text{ καὶ } \Theta = \alpha^2 \times 3{,}14 \times \upsilon.$$

Ἀσκήσεις

352. Ἕνας κύλινδρος ἔχει ὕψος 4 ἑκατοστομέτρων καὶ βάσεις μὲ ἀκτῖνα 2,4 ἑκατοστομέτρων. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον του.

353. Ἕνα κυλινδρικὸν δοχεῖον ἔχει ὕψος 20 ἑκατοστομέτρων καὶ πυθμένα μὲ διάμετρον 20 ἑκατοστομέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ βάρος τοῦ ἐλαίου, τὸ ὁποῖον χωρεῖ.

354. Ἕνας κύλινδρος ἔχει ὄγκον 79,65 κυβικῶν μέτρων καὶ βάσιν 7,85 τετρ. παλάμας. Νὰ εὕρητε πόσα μέτρα εἶναι τὸ ὕψος του.

355. Ἕνας κύλινδρος ἀπὸ φελλὸν ἔχει ὕψος 3 ἑκατοστομέτρων καὶ βάσεις μὲ ἀκτῖνα 1,5 ἑκατοστομέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ βάρος του.

356. Ὁ πυθμὴν ἑνὸς φρέατος ἔχει διάμετρον 1,20 μέτρων. Τὸ ὕδωρ εἰς αὐτὸ ἔχει ὕψος 2,30 μέτρων. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τοῦ ὕδατος τούτου.

357. Νὰ εὕρητε πόσον πρέπει νὰ ὑψωθῇ τὸ ὕδωρ εἰς τὸ προηγούμενον φρέαρ, διὰ νὰ αὐξηθῇ ὁ ὄγκος του κατὰ 5,6 κυβικὰ μέτρα.

Β΄. ΚΩΝΟΣ

113. Πῶς γεννᾶται ἕνας κῶνος. Στηρίζομεν ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ μία πλευρὰ ΑΒ τῆς ὀρθῆς γωνίας νὰ εἶναι εἰς τὸ τραπέζι μας, ἡ δὲ ἄλλη ΑΓ νὰ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτὸ (σχ. 102).

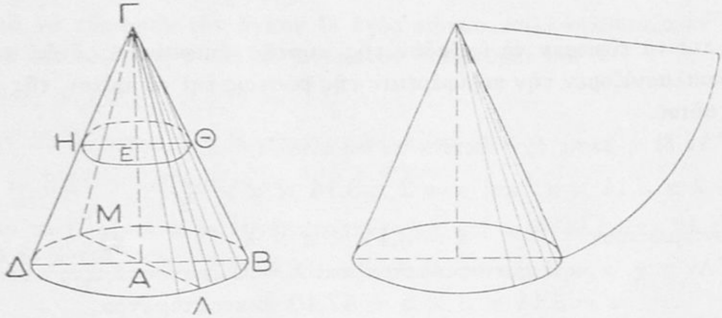
Ἔπειτα κρατοῦμεν τὴν ΑΓ ἀκίνητον καὶ στρέφομεν πέριξ αὐτῆς τὸ τρίγωνον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, ἕως ὅτου γυρίσῃ εἰς τὴν πρώτην θέσιν του. Αἱ θέσεις, ἀπὸ τὰς ὁποίας θὰ περάσῃ τοῦτο, ὅλαι μαζί, σχηματίζουσιν ἕνα στερεόν. Αὐτὸ λέγεται **κῶνος**. Ὥστε :

Κῶνος εἶναι ἕνα στερεὸν σῶμα, τὸ ὁποῖον γίνεται ἀπὸ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἂν τοῦτο στραφῇ περὶ μίαν ἀκίνητον πλευρὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας του κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ ἕως ὅτου γυρίσῃ εἰς τὴν πρώτην θέσιν.

Ἡ ἀκίνητος πλευρὰ ΑΓ λέγεται **ὕψος** ἢ **ἄξων** τοῦ κώνου. Τὸ δὲ ἄκρον Γ τοῦ ἄξονος λέγεται **κορυφὴ** τοῦ κώνου.

Ἡ ἄλλη πλευρὰ ΑΒ τῆς ὀρθῆς γωνίας γράφει ἕνα κύκλον μὲ κέντρον Α, κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα. Αὐτὸς ὁ κύκλος λέγεται **βάσις** τοῦ κώνου.

Ἡ δὲ ὑποτείνουσα ΒΓ γράφει μίαν καμπύλην ἐπιφάνειαν. Αὐτὴ λέγεται ἰδιαιτέρως **κυρτὴ** ἐπιφάνεια τοῦ κώνου. Ἡ δὲ ΒΓ λέγεται **γενέτειρα** αὐτῆς καὶ **πλευρὰ** τοῦ κώνου.



Σχ. 102

Ἂν κόψωμεν ἕνα κῶνον μὲ ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν, βλέπομεν ὅτι ἡ τομὴ εἶναι ἕνας κύκλος, π. χ. ΗΘ. Αὐτὴ ἡ τομὴ γίνεται βαθμηδὸν μικροτέρα, ὅταν πλησιάζῃ πρὸς τὴν κορυφήν, ὅπου γίνεται σημεῖον.

Ἂν κόψωμεν τὸν κῶνον μὲ ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὸν ἄξονα, βλέπομεν ὅτι ἡ τομὴ εἶναι ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΓΛΜ. Αὐτὸ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΑΛ καὶ ΓΑΜ, μὲ τὰ ὁποῖα ἐφαρμόζει κατὰ σειρὰν τὸ ΑΒΓ κατὰ τὴν περιστροφήν του.

Ἡ τομὴ λοιπὸν ΓΛΜ εἶναι τρίγωνον διπλάσιον ἀπὸ τὸ ΑΒΓ.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΚΩΝΟΥ

114. Πρόβλημα Ι. **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ε τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κώνου, ἂν εἶναι γνωστὴ ἡ πλευρὰ καὶ ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως αὐτοῦ.**

Λύσις. Μετροῦμεν τὴν πλευρὰν καὶ τὴν περιφέρειαν Γ τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου καὶ εὑρίσκομεν π. χ. $\lambda = 6$ ἑκατοστόμετρα καὶ $\Gamma = 12{,}56$ ἑκατοστόμετρα.

Καλύπτομεν ἔπειτα ἀκριβῶς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου τούτου μὲ ἕνα λεπτὸν φύλλον. Ἔπειτα ἀνοίγομεν τὸ φύλλον καὶ βλέπομεν ὅτι τὸ ἀνάπτυγμα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας εἶναι ἕνας κυκλικὸς τομεὺς μὲ ἀκτῖνα 6 ἑκατοστομέτρων καὶ μὲ βάσιν 12,56 ἑκατοστομέτρων (σχ. 102).

Εἶναι λοιπὸν $\varepsilon = 12{,}56 \times \frac{6}{2} = 37{,}68$ τετρ. ἑκ. (§ 87, Σημ.).

Ὥστε :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κώνου, πολλαπλασιάζομεν τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ.

Ἂν δὲ ἡ βάσις ἔχῃ ἀκτῖνα α, θὰ εἶναι :

$\Gamma = 2 \times 3{,}14 \times \alpha$ καὶ $\varepsilon = 2 \times 3{,}14 \times \alpha \times \frac{\lambda}{2}$

ἢ συντομώτερον $\varepsilon = 3{,}14 \times \alpha \times \lambda$.

Ἂν π. χ. $\alpha = 3$ ἑκατοστόμετρα καὶ $\lambda = 5$ ἑκατοστόμετρα θὰ εἶναι

$\varepsilon = 3{,}14 \times 3 \times 5 = 47{,}10$ ἑκατοστόμετρα.

Ὅλη δὲ ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς κώνου ἔχει ἐμβαδόν :

$E = (3{,}14 \times \alpha \times \lambda) + (3{,}14 \times \alpha^2)$ ἢ $E = 3{,}14 \times \alpha \times (\alpha + \lambda)$.

Ἡ ἐπιφάνεια π. χ. τοῦ προηγουμένου κώνου ἔχει ἐμβαδὸν

$E = 3{,}14 \times 3 \times 8 = 75{,}36$ τετραγωνικὰ ἑκατοστόμετρα.

Ἀσκήσεις

358. Ἕνας κῶνος ἔχει πλευρὰν 10 ἑκατοστομέτρων καὶ βάσιν μὲ ἀκτῖνα 5 ἑκ. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

359. Ἕνας κῶνος ἔχει πλευρὰν 50 ἑκατοστομέτρων καὶ βάσιν μὲ ἀκτῖνα 30 ἑκ. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας του.

360. Ἕνας κῶνος ἔχει βάσιν μὲ ἀκτῖνα 2 παλαμῶν καὶ κυρτὴν ἐπιφάνειαν 31,4 τετρ. παλ. Νὰ εὕρητε πόσα μέτρα εἶναι ἡ πλευρά του.

115. Πρόβλημα ΙΙ. **Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς κώνου, ἂν εἶναι γνωστὴ ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος του.**

Λύσις. Γεμίζομεν μὲ ὕδωρ ἕνα κωνικὸν ποτήριον μὲ ἐσωτερικὸν ὕψος 10 π. χ. ἑκατοστομέτρων καὶ στόμιον 28,26 τετραγωνικῶν ἑκατοστομέτρων. Ἂν ζυγίσωμεν τὸ ὕδωρ τοῦτο, εὑρίσκομεν ὅτι ἔχει βάρος 94,2 γραμμαρίων. Ὁ ὄγκος λοιπὸν αὐτοῦ, δηλ. τοῦ ἐσωτερικοῦ τοῦ ποτηρίου, εἶναι 94,2 κυβικὰ ἑκατοστόμετρα.

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι ἕνας κύλινδρος μὲ τὸ ἴδιον ὕψος καὶ βάσιν, ἔχει ὄγκον $28{,}26 \times 10 = 282{,}6$ κυβικῶν ἑκατοστομέτρων. Ἐπειδὴ δὲ $282{,}6 : 94{,}2 = 3$, ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ κύλινδρος ἔχει τριπλάσιον ὄγκον ἀπὸ τὸν κῶνον καὶ ἀντιστρόφως ὁ κῶνος ἔχει ὄγκον

$$94{,}2 = 282{,}6 : 3 = \frac{28{,}26 \times 10}{3}$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον Θ ἑνὸς κώνου, πολλαπλασιάζομεν τὴν βάσιν β ἐπὶ τὸ ὕψος υ καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 3.

Εἶναι δηλαδή : $\Theta = \dfrac{\beta \times \upsilon}{3}$

Ἂν δὲ ἡ βάσις ἔχῃ ἀκτῖνα α, θὰ εἶναι

$\beta = 3{,}14 \times \alpha^2$ καὶ $\Theta = \dfrac{3{,}14 \times \alpha^2 \times \upsilon}{3}$

Ἂν π. χ. εἶναι $\alpha = 10$ ἑκατοστόμετρα καὶ $\upsilon = 20$ ἑκατ., θὰ εἶναι $\Theta = \dfrac{3{,}14 \times 10^2 \times 20}{3} = 2093{,}33$ κυβικὰ ἑκατοστόμετρα.

Ἀσκήσεις

361. Ἕνας κῶνος ἔχει ὕψος 1,2 παλαμῶν καὶ βάσιν 28,26 τετραγωνικῶν παλαμῶν. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτοῦ.

362. Ἕνας κῶνος ἔχει ὄγκον 94,2 κυβικῶν παλαμῶν καὶ βάσιν 28,26 τετραγωνικῶν παλαμῶν. Νὰ εὕρητε τὸ ὕψος αὐτοῦ.

363. Ἕνας σιδηροῦς κῶνος ἔχει ὕψος 0,04 μέτρου καὶ ἀκτῖνα βάσεως 0,02 μέτρου. Νὰ εὕρητε τὸ βάρος του.

364. Ἕνας μολύβδινος κῶνος ἔχει βάρος 23843 γραμμαρίων καὶ βάσιν μὲ διάμετρον 20 ἑκατοστομέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ ὕψος αὐτοῦ.

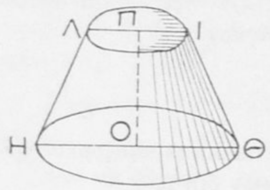
365. Ἕνας κῶνος ἔχει ὕψος 20 ἑκατοστομέτρων, ἡ δὲ περιφέρεια τῆς βάσεως εἶναι 25,12 παλάμαι. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτοῦ.

Γ΄. ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΚΩΝΟΣ

116. Τί εἶναι κόλουρος κῶνος καὶ πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος του. Μεταξὺ τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου καὶ μιᾶς τομῆς αὐτοῦ παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν (§ 113) περιέχεται ἕνα μέρος τοῦ κώνου τούτου. Τοῦτο λέγεται **κόλουρος κῶνος.** Τὸ στερεὸν π. χ. ΗΘΙΛ (σχ. 103) εἶναι κόλουρος κῶνος.

Οἱ δύο κύκλοι Ο καὶ Π, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται οὗτος, λέγονται **βάσεις** αὐτοῦ.

Ἡ δὲ ἀπόστασις ΟΠ τῶν βάσεων λέγεται ὕψος τοῦ κολ. κώνου. Μεταξὺ τῶν βάσεων περιέχεται ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου καὶ μέρη ΙΘ, ΛΗ κ.τ.λ. τῶν πλευρῶν τοῦ ἀρχικοῦ κώνου. Ταῦτα λέγονται ἐπίσης **πλευραὶ** τοῦ κολούρου κώνου.



Σχ. 103

Πρακτικῶς δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ε τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας, οὐδὲ τὸν ὄγκον Θ ἑνὸς κολούρου κώνου. Δι' αὐτὸ δανειζόμεθα ἀπὸ τὴν θεωρητικὴν Γεωμετρίαν τὰ ἑξῆς συμπεράσματα αὐτῆς :

Εἰς αὐτὰ Α καὶ α εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων ἑνὸς κολούρου κώνου, λ ἡ πλευρὰ καὶ υ τὸ ὕψος αὐτοῦ :

Α′) $\varepsilon = (\mathrm{A} + \alpha) \times \lambda \times 3{,}14$

καὶ ἑπομένως ὅλη ἡ ἐπιφάνεια ἔχει ἐμβαδόν :

$$\mathrm{E} = (\mathrm{A} + \alpha) \times \lambda \times 3{,}14 + (\mathrm{A}^2 + \alpha^2) \times 3{,}14.$$

Β′) $\Theta = \frac{1}{3} \times (\mathrm{A}^2 + \mathrm{A} \times \alpha + \alpha^2) \times \upsilon \times 3{,}14.$

Ἂν π.χ. Α = 8 ἑκατ., α=4 ἑκατ., λ=5 ἑκατ., υ = 3 ἑκατ., θὰ εἶναι

$\varepsilon = (8 + 4) \times 5 \times 3{,}14 = 188{,}4$ τετ. ἑκ.,

$\mathrm{E} = 188{,}4 + (64 + 16) \times 3{,}14 = 439{,}6$ τετ. ἑκ.

καὶ ὁ ὄγκος $\Theta = \frac{1}{3} \times (64 + 32 + 16) \times 3 \times 3{,}14 = 359{,}68$ κυβ. ἑκ.

Ἀσκήσεις

366. Ἕνας κόλουρος κῶνος ἔχει λ = 5 ἑκατοστομέτρων, Α = 12 ἑκατοστομέτρων, α = 3 ἑκατοστομέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας καὶ ὅλης τῆς ἐπιφανείας του.

367. Ἕνας κόλουρος κῶνος ἔχει Α = 0,6 μέτρου, α = 0,3 μέτρου καὶ υ = 0,4 μέτρου. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον του.

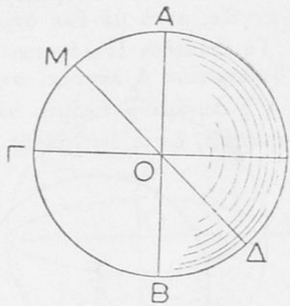
368. Ἕνας κουβᾶς ἔχει βάθος $\frac{4}{3}$ παλάμης. Ἡ διάμετρος τοῦ μὲν στομίου εἶναι 6 παλάμαι, τοῦ δὲ πυθμένος 2 παλάμαι. Νὰ εὕρητε τὸ βάρος τοῦ ὕδατος, τὸ ὁποῖον χωρεῖ.

Δ′ ΣΦΑΙΡΑ

117. Πῶς γεννᾶται μία σφαῖρα καὶ ποῖα εἶναι τὰ στοιχεῖα αὐτῆς. Στηρίζομεν εἰς τὸ τραπέζι μας ἕνα ἡμικύκλιον ΑΒΓ ἀπὸ χονδρὸν χαρτόνι οὕτως, ὥστε ἡ διάμετρος ΑΒ αὐτοῦ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ τραπέζι καὶ νὰ ἐγγίζῃ αὐτὸ μὲ τὸ ἄκρον Β αὐτῆς (σχ. 104).

Ἔπειτα κρατοῦμεν τὴν ΑΒ ἀκίνητον καὶ στρέφομεν πέριξ αὐτῆς τὸ ἡμικύκλιον κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, ἕως ὅτου γυρίσῃ εἰς τὴν πρώτην θέσιν του.

Αἱ θέσεις, ἀπὸ τὰς ὁποίας θὰ περάσῃ, ὅλαι μαζί, ἀποτελοῦσιν ἕνα στερεόν. Τοῦτο ὀνομάζεται **σφαῖρα.**



Σχ. 104

Λέγομεν λοιπὸν ὅτι τὸ ἡμικύκλιον στρεφόμενον γράφει σφαῖραν.

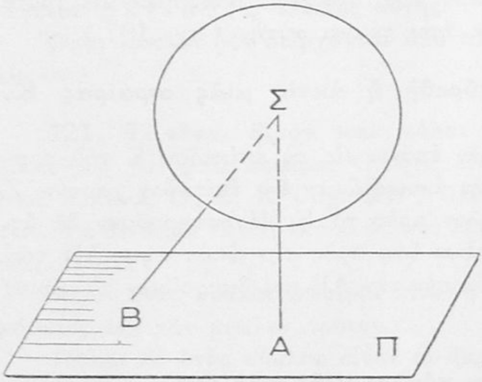
Ἡ δὲ ἡμιπεριφέρεια γράφει τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία εἶναι **καμπύλη** ἐπιφάνεια.

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν στροφὴν ταύτην τὸ σχῆμα τοῦ ἡμικυκλίου δὲν μεταβάλλεται, τὸ κέντρον Ο αὐτοῦ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Δι' αὐτὸ τὸ Ο λέγεται **κέντρον** τῆς σφαίρας. Ὥστε :

Σφαῖρα εἶναι ἕνα στερεόν, τοῦ ὁποίου ἓν σημεῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας του.

Τὰ τμήματα ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ κ.τ.λ. λέγονται **ἀκτῖνες** τῆς σφαίρας. Τὰ δὲ ΑΟΒ, ΜΟΔ κ.τ.λ. λέγονται **διάμετροι** τῆς σφαίρας.

Αἱ ἀκτῖνες καὶ αἱ διάμετροι μιᾶς σφαίρας ὁρίζονται καὶ σχετίζονται, ὅπως καὶ αἱ ἀκτῖνες καὶ αἱ διάμετροι ἑνὸς κύκλου. Μόνον ἀντὶ περιφερείας θὰ λέγωμεν **ἐπιφάνειαν.**



Σχ. 105

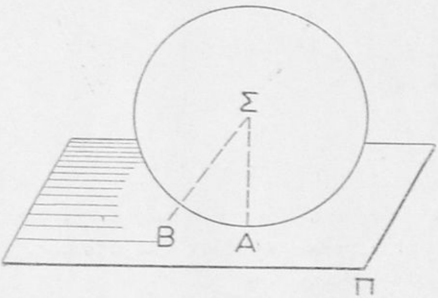
118. Ποίας θέσεις δύναται νὰ λάβῃ μία σφαῖρα πρὸς ἕνα ἐπίπεδον.

α') Ὅταν κρατῶμεν μίαν σφαῖραν Σ ὑπεράνω ἀπὸ τὸ τραπέζι μας, βλέπομεν ὅτι αὕτη οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχει μὲ τὸ ἐπίπεδον Π αὐτοῦ (σχ. 105).

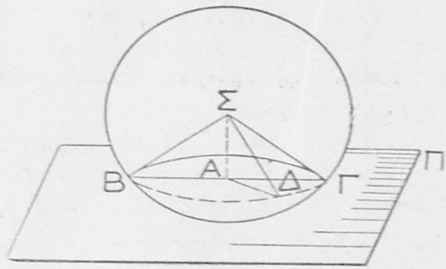
β΄) Ὅταν δὲ ἀκουμβῶμεν τὴν σφαῖραν εἰς τὸ τραπέζι, βλέπομεν ὅτι ἐγγίζει αὐτὸ μὲ ἕνα σημεῖον Α (σχ. 106).

Τὸ ἐπίπεδον Π λέγεται τότε **ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον** τῆς σφαίρας, τὸ δὲ σημεῖον Α λέγεται σημεῖον **ἐπαφῆς.**

γ΄) Δυνάμεθα ἀκόμη νὰ θέσωμεν τὴν σφαῖραν παραπλεύρως ἀπὸ τὸ τραπέζι, ὥστε ἕνα μέρος αὐτῆς νὰ εἶναι ἐπάνω ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον Π



Σχ. 106



Σχ. 107

τοῦ τραπεζιοῦ καὶ ἕνα ὑποκάτω ἀπὸ αὐτό. Ἂν τότε φαντασθῶμεν ὅτι τὸ Π προεκτείνεται πρὸς τὸ μέρος τῆς σφαίρας, ἐννοοῦμεν ὅτι τοῦτο εἰσχωρεῖ μέσα εἰς τὴν σφαῖραν, ἤτοι τέμνει αὐτὴν (σχ. 107).

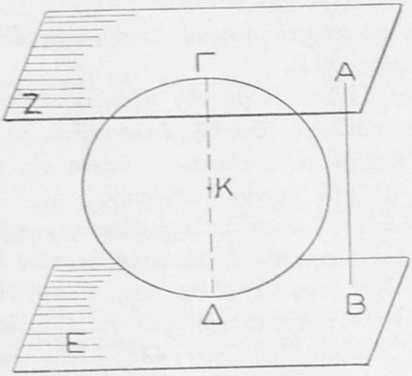
119. Πρόβλημα Ι. **Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς μιᾶς σφαίρας Κ.** (σχ. 108).

Λύσις. Θέτομεν τὴν σφαῖραν ἐπάνω εἰς τὸ ἐπίπεδον Ε τοῦ τραπεζίου μας. Ἐπάνω δὲ εἰς αὐτὴν ἀκουμβῶμεν ἕνα ἐπίπεδον χαρτόνι Ζ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ Ε. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι ἡ διάμετρος ΓΔ τῆς σφαίρας εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπόστασιν ΑΒ τῶν ἐπιπέδων Ζ καὶ Ε. Μετροῦμεν λοιπὸν τὴν ΑΒ καὶ διαιροῦμεν τὸ μῆκος αὐτῆς διὰ 2.

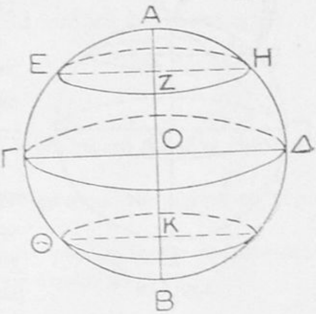
120. Τί εἶναι παράλληλοι κύκλοι μιᾶς σφαίρας.

Εἰς ἕνα ἡμικύκλιον ΑΓΒ (σχ. 109) γράφομεν διαφόρους εὐθείας ΕΖ, ΓΟ, ΘΚ κ.τ.λ. καθέτους ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ. Ὅταν τὸ ἡμικύκλιον στρέφεται περὶ τὴν ΑΒ, διὰ νὰ γράψῃ τὴν σφαῖραν Ο, αἱ εὐθεῖαι αὗται γράφουσι κύκλους, καθέτους ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν εἶναι παράλληλα, οὗτοι λέγονται **παράλληλοι κύκλοι.**

Ὁ κύκλος, τὸν ὁποῖον γράφει ἡ ἀκτὶς ΟΓ, διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον



Σχ. 108



Σχ. 109

τῆς σφαίρας καὶ εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τοὺς παραλλήλους πρὸς αὐτὸν Ζ, Κ κ.τ.λ., διότι ΟΓ > ΖΕ, ΟΓ > ΚΘ κ.τ.λ. Δι' αὐτό :

Ἕνας κύκλος μιᾶς σφαίρας, ὁ ὁποῖος διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον της, λέγεται μέγιστος κύκλος αὐτῆς.

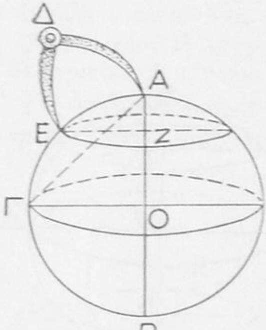
Ὅσοι κύκλοι δὲν διέρχονται ἀπὸ τὸ κέντρον, λέγονται μικροὶ κύκλοι.

121. Τί εἶναι ἄξων καὶ πόλοι κύκλου μιᾶς σφαίρας. Ἡ διάμετρος ΑΒ μιᾶς σφαίρας Ο, ἥτις εἶναι κάθετος ἐπὶ τοὺς παραλλήλους κύκλους Ο, Ζ, Κ (σχ. 109), λέγεται ἄξων τῶν κύκλων τούτων. Τὰ δὲ ἄκρα Α καὶ Β τοῦ ἄξονος λέγονται πόλοι τῶν κύκλων τούτων. Ὥστε :

Ἄξων ἑνὸς κύκλου σφαίρας εἶναι ἡ διάμετρος αὐτῆς, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν κύκλον τοῦτον.

Πόλοι δὲ ἑνὸς κύκλου εἶναι τὰ ἄκρα τοῦ ἄξονος αὐτοῦ.

122. Τί εἶναι σφαιρικὸς διαβήτης καὶ εἰς τί χρησιμεύει. Τὸ ὄργανον Δ (σχ. 110) εἶναι ἕνας διαβήτης μὲ καμπυλωμένα σκέλη. Κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ ἡμικυκλίου ΑΒΓ περὶ τὴν ΑΒ (§ 117) στηρίζομεν τὸ ἄκρον τοῦ ἑνὸς σκέλους εἰς τὸ Α καὶ τὸ ἄλλο π. χ. εἰς τὸ Ε. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς στροφῆς τὰ ἄκρα τῶν σκελῶν τοῦ διαβήτου μένουσι διαρκῶς εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Ε.



Σχ. 110

Δηλ. τὸ κινητὸν ἄκρον αὐτοῦ διαγράφει τὴν περιφέρειαν Ζ.

Δυνάμεθα λοιπὸν μὲ τὸν σφαιρικὸν διαβήτην νὰ γράψωμεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας περιφερείας κύκλων, ὅπως εἰς τὸ ἐπίπεδον μὲ τὸν κοινὸν διαβήτην.

Διὰ νὰ γράψωμεν δὲ περιφέρειαν μεγίστου κύκλου, πρέπει ἡ ἀπόστασις τῶν ἄκρων τοῦ διαβήτου νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν χορδὴν ΑΓ ἑνὸς τεταρτημορίου περιφερείας μεγίστου κύκλου. Ὁρίζομεν δὲ αὐτὴν τὴν ἀπόστασιν, ἀφοῦ εὕρωμεν τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας (§ 119) καὶ γράψωμεν εἰς ἕνα ἐπίπεδον περιφέρειαν μεγίστου κύκλου κ.τ.λ.

123. Τί εἶναι σφαιρικὴ ζώνη. Μεταξὺ δύο παραλλήλων κύκλων, π. χ. τῶν Ζ καὶ Κ (σχ. 109) περιέχεται ἕνα μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Τοῦτο λέγεται **σφαιρικὴ ζώνη.**

Αἱ περιφέρειαι τῶν κύκλων, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται μία σφαιρικὴ ζώνη λέγονται **βάσεις** αὐτῆς.

Ἡ δὲ ἀπόστασις ΖΚ τῶν βάσεων λέγεται **ὕψος** τῆς ζώνης.

Καὶ τὸ μέρος ΑΕΗ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας Ο εἶναι σφαιρικὴ ζώνη μὲ μίαν βάσιν Ζ καὶ ὕψος ΑΖ.

Εἰς τὴν γεωγραφίαν θὰ μάθωμεν ὅτι εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς Γῆς διακρίνομεν 5 ἀξιοσημειώτους ζώνας.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

124. Πρόβλημα Ι. **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος μιᾶς σφαίρας, ἂν εἶναι γνωστὴ ἡ ἀκτὶς αὐτῆς.**

Λύσις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο δὲν δυνάμεθα νὰ λύσωμεν πρακτικῶς.

Δανειζόμεθα λοιπὸν ἀπὸ τὴν θεωρητικὴν Γεωμετρίαν τὰ ἑξῆς συμπεράσματα αὐτῆς :

$$E = 4 \times 3{,}14 \times \alpha^2, \qquad \Theta = \frac{4}{3} \times 3{,}14 \times \alpha^3.$$

Ἂν π.χ. $\alpha = 6$ ἑκ. θὰ εἶναι $E = 4 \times 3{,}14 \times 36 = 452{,}16$ τετ. ἑκατ. καὶ $\Theta = \frac{4}{3} \times 3{,}14 \times 216 = 904{,}32$ κυβικὰ ἑκατοστόμετρα.

Ἀσκήσεις

369. Μία σφαῖρα ἔχει ἀκτῖνα 0,30 μέτρου. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας καὶ τὸν ὄγκον της.

370. Μία μολυβδίνη σφαῖρα ἔχει ἀκτῖνα 0,10 μέτρου. Νὰ εὕρητε τὸ βάρος αὐτῆς.

371. Εἰς ἕνα δοχεῖον γεμᾶτον ἔλαιον ἀφήνομεν μίαν σιδηρᾶν σφαῖραν ἀκτῖνος 0,01 μέτρου. Νὰ εὕρητε τὸ βάρος τοῦ ἐλαίου, τὸ ὁποῖον θὰ χυθῇ.

Πίναξ τύπων Γ΄ κεφαλαίου

Διὰ κύλινδρον

$$\varepsilon = 2 \times 3{,}14 \times \alpha \times \upsilon,\ E = 2 \times 3{,}14 \times \alpha \times (\alpha + \upsilon),\ \Theta = \beta \times \upsilon = 3{,}14 \times \alpha^2 \times \upsilon.$$

Διὰ κῶνον

$$\varepsilon = 3{,}14 \times \alpha \times \lambda,\ E = 3{,}14 \times \alpha \times (\lambda + \alpha),\ \Theta = \frac{3{,}14 \times \alpha^2 \times \upsilon}{3}$$

Διὰ κόλουρον κῶνον

$$\varepsilon = 3{,}14 \times (A + \alpha) \times \lambda,\ E = 3{,}14 \times (A + \alpha) \times \lambda + 3{,}14 \times (A^2 + \alpha^2)$$

$$\Theta = \frac{1}{3} \times 3{,}14 \times (A^2 + A \times \alpha + \alpha^2) \times \upsilon$$

Διὰ σφαῖραν

$$E = 4 \times 3{,}14 \times \alpha^2, \quad \Theta = \frac{4}{3} \times 3{,}14 \times \alpha^3.$$

Ἀσκήσεις

372. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος 0,2 μέτρου καὶ βάσιν μὲ διάμετρον 0,2 μέτρου.

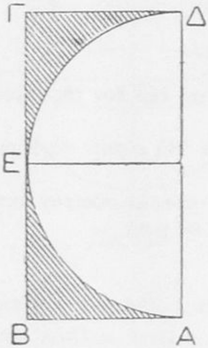
373. Ἕνας κῶνος ἔχει πλευρὰν 0,2 μέτρου καὶ βάσιν ἴσην πρὸς τὴν βάσιν τοῦ προηγουμένου κυλίνδρου. Νὰ συγκρίνητε τὰ ἐμβαδὰ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν.

374. Πρόκειται νὰ κατασκευασθῇ ἕνας κυλινδρικὸς κάδος χωρητικότητος

5000 ὀκάδων ὕδατος μὲ βάσιν 3,2 τετραγωνικῶν μέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ ὕψος αὐτοῦ.

375. Ἕνας κύλινδρος ἔχει ὕψος 0,15 μέτρου καὶ βάσεις μὲ διάμετρον 0,85 μέτρου. Ἕνας κῶνος ἔχει βάσιν τὴν μίαν βάσιν τοῦ κυλίνδρου τούτου καὶ κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς ἄλλης βάσεως αὐτοῦ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τοῦ μέρους τοῦ κυλίνδρου, τὸ ὁποῖον εἶναι πέριξ τοῦ κώνου.

376. Νὰ σχηματίσητε ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ (σχ. 111) μὲ διαστάσεις (ΑΒ) = 2 ἑκατοστόμετρα καὶ (ΑΔ) = 4 ἑκατοστόμετρα. Μέσα δὲ εἰς αὐτὸ νὰ γράψητε ἡμιπεριφέρειαν μὲ διάμετρον ΑΔ. Νὰ φαντασθῆτε τώρα ὅτι τὸ ΑΒΓΔ στρέφεται περὶ τὴν ΑΔ, ἕως ὅτου γυρίσῃ εἰς τὴν πρώτην θέσιν του. Νὰ ὑπολογίσητε δὲ τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον θὰ γράψῃ τὸ σκιασμένον μέρος τοῦ ὀρθογωνίου.



Σχ. 111

377. Μία σφαῖρα ἔχει ἀκτῖνα 10 ἑκατοστομέτρων. Ἕνας δὲ κῶνος ἔχει βάσιν ἕνα μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας καὶ κορυφὴν ἕνα πόλον τῆς βάσεως. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τοῦ κώνου τούτου.

378. Μία σφαῖρα ἔχει ἀκτῖνα 15 ἑκατοστομέτρων καὶ ἕνας μικρὸς κύκλος αὐτῆς ἔχει ἀκτῖνα 8 ἑκατοστομέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει βάσιν τὸν κύκλον τοῦτον καὶ κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.

379. Ἕνας κόλουρος κῶνος ἔχει $Α = 24$ ἑκατοστόμετρα, $α = 12$ ἑκατοστόμετρα καὶ $λ = 15$ ἑκατοστόμετρα. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του

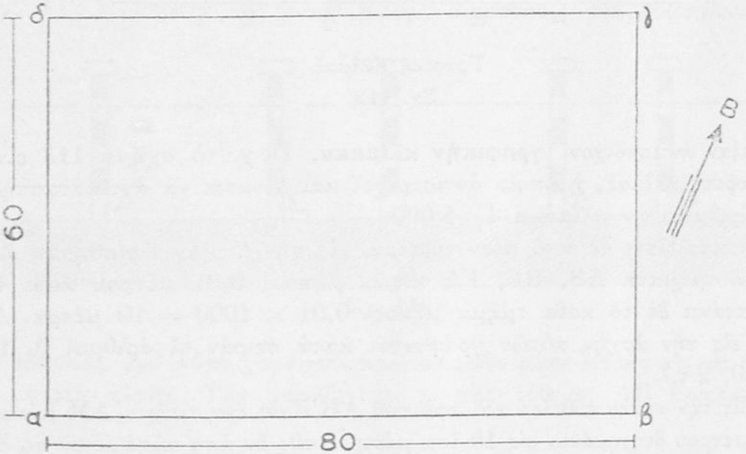
380. Μία σφαῖρα ἔχει ἀκτῖνα 10 ἑκατοστομέτρων. Ἕνας δὲ μικρὸς κύκλος αὐτῆς ἀπέχει 6 ἑκατοστόμετρα ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τούτου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄

ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΕΠΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

ΚΛΙΜΑΚΕΣ

125. Τί εἶναι ἀριθμητικὴ κλῖμαξ. Ὅλοι γνωρίζομεν ὅτι ὁ χάρτης μιᾶς χώρας παριστάνει αὐτὴν πολὺ μικροτέραν ἀπὸ ὅ,τι εἶναι, διὰ νὰ χωρῇ εἰς αὐτόν. Λέγομεν δὲ ὅτι ὁ χάρτης μιᾶς χώρας **εἶναι τὸ σχέδιον** αὐτῆς ὑπὸ **σμίκρυνσιν.** Ὁμοίως ὁ μηχανικὸς εἰς ἕνα φύλλον



Σχ. 112

χάρτου ἀπεικονίζει π. χ. ἕνα ὀρθογώνιον οἰκόπεδον ὑπὸ σμίκρυνσιν. Πρὸς τοῦτο κάμνει τὰς διαστάσεις αὐτοῦ π. χ. 1 000 φορὰς μικροτέρας. Διὰ νὰ φανερώσῃ τοῦτο, γράφει ὑποκάτω :

Κλῖμαξ 1 : 1 000

Ὁ ἀριθμὸς 1 : 1 000 ἢ $\frac{1}{1\,000}$ λέγεται **ἀριθμητικὴ κλῖμαξ.**

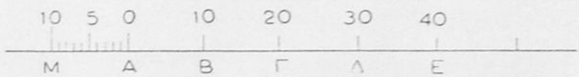
Αἱ συνήθεις κλίμακες εἶναι :

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1\,000}, \text{ κ.λ.π. ἢ } \frac{1}{5}, \frac{1}{50}, \frac{1}{500} \text{ κ.λ.π.}$$

Τὸ σχῆμα π. χ. αβγδ (σχ. 112) εἶναι τὸ σχέδιον ἑνὸς οἰκοπέδου ὑπὸ κλίμακα 1 : 1 000. Ἀπὸ αὐτὸ ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ οἰκόπεδον τοῦτο ἔχει διαστάσεις 0,08 × 1 000 = 80 μέτρα καὶ 0,06 × 1 000 = 60 μέτρα, ὡς ἀναγράφονται καὶ ἐν τῷ σχεδίῳ. Δηλαδή :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος μιᾶς γραμμῆς ἑνὸς σχήματος, πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος τῆς ἀντιστοίχου γραμμῆς τοῦ σχεδίου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τῆς ἀριθμητικῆς κλίμακος.

126. Τί εἶναι γραφικὴ κλῖμαξ καὶ εἰς τί μᾶς χρησιμεύει. Πολλὰ σχέδια ἀντὶ ἀριθμητικῆς κλίμακος ἢ καὶ μαζὶ μὲ αὐτὴν ἔχουσι



Γραφικὴ Κλῖμαξ
Σχ. 113

καὶ μίαν ἀντίστοιχον **γραφικὴν κλίμακα.** Π. χ. τὸ σχῆμα 113 εἶναι ἡ γραφικὴ κλῖμαξ, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ καὶ δύναται νὰ ἀντικαταστήσῃ τὴν ἀριθμητικὴν κλίμακα 1 : 1 000.

Ἀποτελεῖται δὲ ἀπὸ μίαν εὐθεῖαν, εἰς τὴν ὁποίαν ὡρίσθησαν διαδοχικὰ τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ κ.τ.λ. μήκους 0,01 μέτρου κάθε ἕν. Παριστάνει δὲ τὸ κάθε τμῆμα μῆκος 0,01 × 1000 = 10 μέτρα. Δι' αὐτὸ εἰς τὴν ἀρχὴν αὐτῶν γράφονται κατὰ σειρὰν οἱ ἀριθμοὶ 0, 10, 20, 30, κ.τ.λ.

Εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν καὶ πρὸ τοῦ ΑΒ εἶναι ἕνα τμῆμα ΑΜ μήκους 0,01 μέτρου διῃρημένον εἰς 10 ἴσα μέρη. Κάθε ἓν ἀπὸ αὐτὰ εἶναι τὸ δέκατον τοῦ ΑΒ καὶ παριστάνει εὐθύγραμμον τμῆμα μήκους $10 \times \frac{1}{10} = 1$ μέτρον. Δι' αὐτὸ ἀριθμοῦνται μὲ τοὺς ἀριθμούς, 1, 2, 3..., 10 ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Μ.

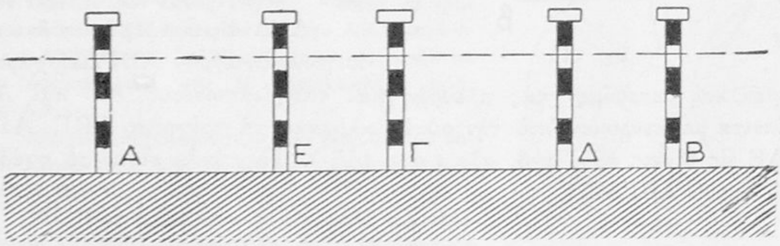
Μὲ τὴν κλίμακα αὐτὴν ἐκτελοῦμεν τὰς ἑξῆς δύο ἐργασίας :

1ον. Μεταφέρομεν εἰς τὸ σχέδιον ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα μήκους π. χ. 37 μέτρων.

Πρὸς τοῦτο θέτομεν τὸ ἄκρον τοῦ ἑνὸς σκέλους τοῦ διαβήτου εἰς τὴν διαίρεσιν 30 καὶ τὸ ἄλλο εἰς τὴν διαίρεσιν 7 τοῦ τμήματος ΑΜ. Αὐτὴν δὲ τὴν ἀπόστασιν τῶν ἄκρων τῶν σκελῶν τοῦ διαβήτου μεταφέρομεν εἰς τὸ σχέδιον.

2ον. Εὑρίσκομεν τὸ μῆκος ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος, τὸ ὁποῖον εἰς τὸ σχέδιον παριστάνεται μὲ ἕνα τμῆμα αβ. Πρὸς τοῦτο μὲ τὸν διαβήτην μεταφέρομεν αὐτὸ εἰς τὴν γραφικὴν κλίμακα μὲ τὸ ἓν ἄκρον εἰς τὸ Ο καὶ τὸ ἄλλο πρὸς τὸ Β. Ἂν τοῦτο πέσῃ ἀκριβῶς π. χ. εἰς τὴν διαίρεσιν 20, τὸ ζητούμενον μῆκος εἶναι 20 μέτρα. Ἂν δὲ πέσῃ π. χ. μεταξὺ 20 καὶ 30, θέτομεν τὸ ἕνα ἄκρον εἰς τὴν διαίρεσιν 20 καὶ τὸ ἄλλο πρὸς τὸ μέρος τοῦ ΑΜ. Ἂν τοῦτο πέσῃ εἰς τὴν διαίρεσιν π. χ. 6 τοῦ ΑΜ, τὸ ζητούμενον μῆκος εἶναι $20 + 6 = 26$ μέτρα.

127. Πῶς χαράσσομεν εὐθείας γραμμὰς εἰς τὸ ἔδαφος καὶ πῶς μετροῦμεν αὐτάς. Διὰ νὰ κάμῃ ὁ μηχανικὸς τὸ σχέδιον αβγδ (σχ. 112), ἔπρεπε νὰ γνωρίζῃ τὰς διαστάσεις τοῦ οἰκοπέδου ἐπὶ



Σχ. 114

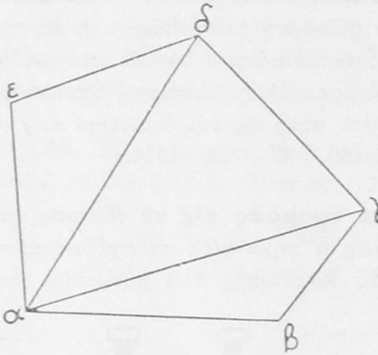
τοῦ ἐδάφους. Δι' αὐτὸ χαράσσει πρῶτον κάθε μίαν διάστασιν καὶ ἔπειτα μετρεῖ αὐτήν. Τὴν χάραξιν π. χ. τῆς εὐθείας ΑΒ ἐκτελεῖ ὡς ἑξῆς :

Εἰς τὸ Β τοποθετεῖται ἕνα κατακόρυφον ἀκόντιον. Ἔπειτα ὁ μηχανικὸς ἱστάμενος εἰς τὸ Α νεύει εἰς τὸν βοηθόν του νὰ τοποθετήσῃ δεύτερον ἀκόντιον Δ, τὸ ὁποῖον νὰ ἀποκρύπτῃ ἀπὸ τὸν μηχανικὸν τὸ ἀκόντιον Β. Ἔπειτα ὁμοίως τοποθετεῖ ἄλλο Γ, τὸ ὁποῖον νὰ ἀποκρύπτῃ τὰ ἄλλα καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρι τοῦ ἀκοντίου Α (σχ. 114).

Οἱ πόδες τῶν ἀκοντίων τούτων ὁρίζουσι τὴν εὐθεῖαν ΑΒ.

Ἡ δὲ μέτρησις τοῦ τμήματος ΑΒ γίνεται ἔπειτα εὔκολα μὲ τὴν ταινίαν μήκους 20 ἢ 30 μέτρων.

128. Πῶς γίνεται ἡ μεταφορὰ εὐθυγράμμου σχήματος εἰς τὸ ἐπίπεδον σχεδιάσεως. Εἴδομεν προηγουμένως (§ 125) ὅτι, διὰ νὰ μεταφέρῃ ὁ μηχανικὸς ἕνα ὀρθογώνιον οἰκόπεδον εἰς τὸ ἐπίπεδον σχεδιάσεως, κατασκευάζει εἰς αὐτὸ ἕνα ὀρθογώνιον μὲ διαστάσεις 1 000 π. χ. φορὰς μικροτέρας.



Σχ. 115

Διὰ νὰ μεταφέρωμεν ἕνα τρίγωνον μὲ πλευρὰς 500, 400, 700 μέτρων ὑπὸ κλίμακα 1 : 10 000, κατασκευάζομεν εἰς τὸ ἐπίπεδον σχεδιάσεως ἕνα τρίγωνον μὲ πλευράς.

$$500 : 10\,000 = 0{,}05$$
$$400 : 10\,000 = 0{,}04$$
καὶ $$700 : 10\,000 = 0{,}07 \text{ μετ.}$$

Διὰ νὰ μεταφέρωμεν ἕνα πολυγωνικὸν ἀγρὸν ΑΒΓΔΕ, χαράσσομεν καὶ μετροῦμεν τὰς πλευρὰς καὶ τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΑΔ. Ἔπειτα μεταφέρομεν ὑπὸ τὴν αὐτὴν κλίμακα τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ εἰς θέσεις αβγ, αγδ, αδε (σχ. 115). Τὸ αβγδε εἶναι τὸ σχέδιον τοῦ ἀγροῦ ΑΒΓΔΕ.

Ἀσκήσεις

381. Νὰ σχηματίσητε τὴν γραφικὴν κλίμακα, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς ἀριθμητικὴν κλίμακα 1 : 100 καὶ ἔπειτα εἰς 1 : 10 000.

382. Νὰ μεταφέρητε ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα 200 μέτρων ὑπὸ κλίμακα 1 : 10 000.

383. Ἡ πλευρὰ ΑΒ ἑνὸς ἀγροῦ μετεφέρθη εἰς αβ (σχ. 115) ὑπὸ κλίμακα 1 : 1 000. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς ΑΒ.

384. Ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔχει πλευρὰν 1200 μέτρων. Νὰ μεταφέρητε αὐτὸ ὑπὸ κλίμακα 1 : 1 000.

385. Τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 76) τοῦ βιβλίου σας παριστάνει μίαν ἄμπελον ὑπὸ κλίμακα 1 : 100. Νὰ εὕρητε τὴν βάσιν, τὸ ὕψος καὶ τὸ ἐμβαδόν τῆς ἀμπέλου ταύτης.

Ἀσκήσεις πρὸς γενικὴν ἐπανάληψιν

386. Μία γωνία εἶναι διπλασία ἀπὸ τὴν συμπληρωματικήν της. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον ἑκατέρας τῶν γωνιῶν τούτων.

387. Μέσα εἰς μίαν ὀρθὴν γωνίαν νὰ φέρητε μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ ἀποχω-

ρίζη ἀπὸ αὐτὴν τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτῆς. Νὰ εὕρητε τὸ μέτρον τῆς γωνίας τῆς εὐθείας ταύτης μὲ τὴν προέκτασιν μιᾶς πλευρᾶς τῆς ὀρθῆς γωνίας. (Δύο περιπτώσεις).

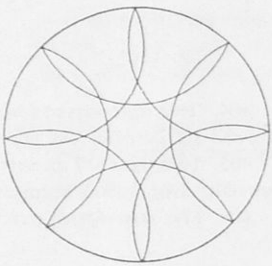
388. Νὰ γράψητε τὴν ἀπόστασιν ΑΔ ἑνὸς σημείου Α ἀπὸ μίαν εὐθεῖαν ΒΓ καὶ μίαν πλαγίαν ΑΕ πρὸς αὐτήν. Νὰ διαιρέσητε ἔπειτα τὸ τμῆμα ΑΔ εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως νὰ φέρητε παραλλήλους πρὸς τὴν ΒΓ. Νὰ συγκρίνητε δὲ τὰ τμήματα, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται τὸ ΑΕ.

389. Νὰ γράψητε δύο ὁμοκέντρους περιφερείας μὲ ἀκτῖνα 6 καὶ 3 ἑκατοστομέτρων καὶ δύο ἀκτῖνας τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας. Ἔπειτα νὰ γράψητε καὶ νὰ συγκρίνητε τὰς χορδὰς τῶν μεταξὺ αὐτῶν τόξων.

390. Νὰ ἐξετάσητε, ἂν αἱ προηγούμεναι χορδαὶ εἶναι παράλληλοι ἢ ὄχι.

391. Εἰς ἕνα κύκλον Κ νὰ φέρητε δύο ἀκτῖνας ΚΑ, ΚΒ, ὥστε $\widehat{AKB} = 45^0$. Νὰ φέρητε ἐφαπτομένας ΔΑ, ΔΒ καὶ νὰ μετρήσητε τὴν γωνίαν Δ. Ἔπειτα δὲ νὰ συγκρίνητε τὰ τμήματα ΔΑ, ΔΒ.

392. Νὰ γράψητε μίαν περιφέρειαν Κ καὶ μίαν εὐθεῖαν ΑΒ ἐκτὸς τῆς Κ. Ἔπειτα νὰ γράψητε εὐθεῖαν ΚΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Βοηθούμενοι δὲ ἀπὸ τὴν κάθετον αὐτὴν νὰ γράψητε δύο ἐφαπτομένας τῆς Κ παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΒ.



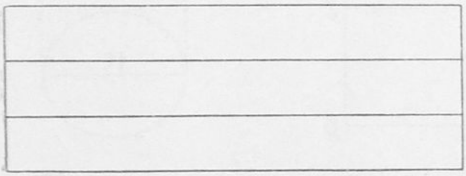
Σχ. 116

393. Νὰ διχοτομήσητε δύο ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικὰς γωνίας καὶ νὰ μετρήσητε τὴν γωνίαν τῶν διχοτόμων.

394. Ἕνα τετραγωνικὸν οἰκόπεδον μὲ περίμετρον 122 μέτρων ἐπωλήθη πρὸς 18 δραχμὰς τὸν τεκτονικὸν τετραγωνικὸν πῆχυν. Νὰ εὕρητε τὴν ἀξίαν του.

395. Νὰ σχηματίσητε ἕνα τρίγωνον μὲ βάσιν 6 ἑκατοστομέτρων καὶ ὕψος 4 ἑκατοστομέτρων. Νὰ φέρητε τὴν διάμετρον εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως καὶ νὰ συγκρίνητε τὰ δύο τρίγωνα, εἰς τὰ ὁποῖα θὰ διαιρεθῇ τὸ πρῶτον.

396. Νὰ σχηματίσητε ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ μὲ Α = 45^0, βάσιν (ΑΒ)=6 ἑκατοστομέτρ., ὕψος (ΔΕ) = 4 ἑκατοστομέτρων. Ἔπειτα δὲ νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ καὶ τοῦ τριγώνου ΑΔΕ.



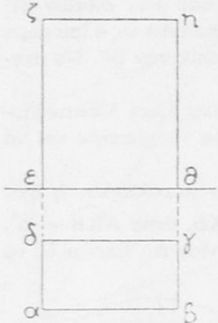
Σχ. 117

397. Ἓν τετράγωνον οἰκόπεδον ἔχει ἐμβαδὸν 225 τετραγωνικῶν μέτρων. Περιεφράχθη δὲ μὲ συρματόπλεγμα πρὸς 30 δραχμὰς τὸ μέτρον. Νὰ εὕρητε πόσον ἐστοίχισεν ἡ περίφραξις αὐτη.

398. Μία τριγωνικὴ ἄμπελος ἔχει βάσιν 127 μέτρων καὶ ὕψος 40 μέτρων. Ἐ-

πωλήθη δὲ αὕτη πρὸς 1200 δραχ. τὸ παλαιὸν στρέμμα. Νὰ εὕρητε τὴν ἀξίαν της.

399. Ὀρθογώνιον οἰκόπεδον μὲ διαστάσεις 25 μέτρων καὶ 8,20 μέτρων ἠγοράσθη πρὸς 88,5 δραχ. τὸν τετραγωνικὸν τεκτονικὸν πῆχυν. Νὰ εὕρητε τὴν ἀξίαν του.



Σχ. 118

400. Ἕνα κυκλικὸν ἁλώνιον ἔχει ἐμβαδὸν 113,04 τετραγωνικὰ μέτρα. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας αὐτοῦ.

401. Νὰ ἰχνογραφήσητε τὸ σχῆμα 116 καὶ νὰ χρωματίσητε τὰ διάφορα μέρη αὐτοῦ κατ' ἀρέσκειαν.

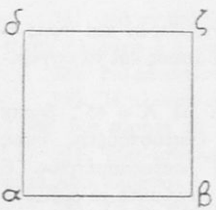
402. Μία σιταποθήκη ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ ὕψος 4 μέτρων καὶ βάσιν τετράγωνον. Χωρεῖ δὲ αὕτη 810 κιλὰ σίτου. Νὰ εὕρητε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τῆς βάσεως.

403. Μία ὀρθογώνιος ταράτσα ἔχει διαστάσεις 4,5 μέτρων καὶ 3,5 μέτρων. Ἐκαλύφθη δὲ μὲ ὡπλισμένον σκυροκονίαμα πάχους 0,20 μέτρου πρὸς 500 δραχ. κατὰ κυβικὸν μέτρον. Νὰ εὕρητε πόσον ἐστοίχισε.

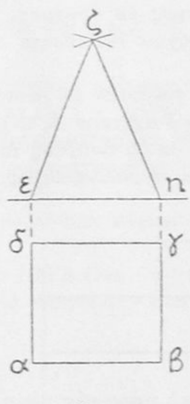
404. Ἕνα πρισματικὸν τεμάχιον πάγου ἔχει βάσιν 0,60 τετραγωνικοῦ μέτρου καὶ ὕψος 1,2 μέτρων. Νὰ εὕρητε τὸ βάρος του.

405. Τὸ σχῆμα 117 παριστᾷ ὑπὸ κλίμακα 1 : 10 τὸ ἀνάπτυγμα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ταύτης.

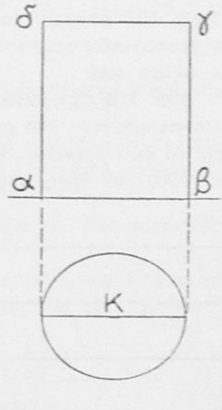
406. Μία κυλινδρικὴ στήλη ἔχει ὕψος 2 μέτρων. Ἡ δὲ κυρτὴ ἐπιφάνεια αὐτῆς



Σχ. 119



Σχ. 120



121

ἐκαλύφθη μὲ 6,28 μέτρα ὑφάσματος πλάτους 1 μέτρου. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτῆς τῆς στήλης.

407. Ἡ μαρμαρίνη πλὰξ μιᾶς σιφωνιέρας ἔχει διαστάσεις 1 μέτρου, 0,80 μέτρου, 0,02 μέτρου. Νὰ εὕρητε τὸ βάρος αὐτῆς.

408. Ἕνας κόλουρος κῶνος ἔχει ὕψος 4 ἑκατοστομ., Α = 6 ἑκατοστομέτρων καὶ α = 3 ἑκατοστομ. Μέσα εἰς αὐτὸν ὑπάρχει ἕνας κύλινδρος μὲ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσεις μὲ ἀκτῖνα 3 ἑκατοστομέτρ. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον τοῦ μέρους τοῦ κολούρου κώνου, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ κυλίνδρου.

409. Ἡ βάσις ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μετεφέρθη εἰς τὸ αβγδ (σχ. 118), μία δὲ παράπλευρος ἕδρα εἰς τὸ εζηθ ὑπὸ κλίμακα 1 : 10. Νὰ εὕρητε τὸν ὄγκον αὐτοῦ.

410. Τὸ αβζδ (σχ. 119) εἶναι τὸ σχέδιον μιᾶς ἕδρας ἑνὸς κύβου ὑπὸ κλίμακα 1 : 10. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας καὶ τὸν ὄγκον αὐτοῦ τοῦ κύβου.

411. Τὸ αβγδ (σχ. 120) παριστάνει τὴν βάσιν μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος, τὸ δὲ εζη μίαν παράπλευρον ἕδραν αὐτῆς ὑπὸ κλίμακα 1 : 5. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς τῆς πυραμίδος.

412. Ὁ κύκλος Κ (σχ. 121) παριστάνει τὴν βάσιν μιᾶς κυλινδρικῆς στήλης, τὸ δὲ ὀρθογώνιον αβγδ μίαν τομὴν αὐτῆς, διερχομένην διὰ τοῦ ἄξονος αὐτῆς. Καὶ τὰ δύο δὲ ὑπὸ κλίμακα 1 : 100. Νὰ εὕρητε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας καὶ τὸν ὄγκον αὐτῆς.

413. Ἕνας κύκλος μιᾶς σφαίρας ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον της 12 μέτρα καὶ ἔχει περιφέρειαν μήκους 54,52 μέτρων. Νὰ ἀπεικονίσητε μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας ταύτης ὑπὸ κλίμακα 1 : 100.

Ἐπιμελητὴς ἐκδόσεως Γ. ΣΤ. ΝΤΟΥΦΕΞΗΣ (ἀπ. Δ.Σ. 10070/17-12-63)

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

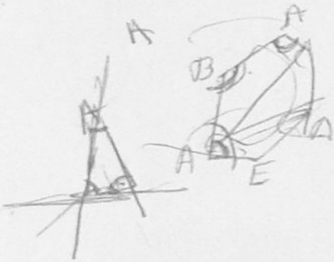
ΒΙΒΛΙΟΝ Α'

Τὰ ἀντίτυπα τοῦ βιβλίου φέρουν τὸ κάτωθι βιβλιόσημον εἰς ἀπόδειξιν τῆς γνησιότητος αὐτῶν.

Ἀντίτυπον στερούμενον τοῦ βιβλιοσήμου τούτου θεωρεῖται κλεψίτυπον. Ὁ διαθέτων, πωλῶν ἢ χρησιμοποιῶν αὐτὸ διώκεται κατὰ τὰς διατάξεις τοῦ ἄρθρου 7 τοῦ νόμου 1129 τῆς 15)21 Μαρτίου 1949 (Ἐφ. Κυβ. 1946, Α′ 108).

ΕΚΔΟΣΙΣ Γ′, 1964 (I) — ΑΝΤΙΤΥΠΑ 60.000 — (ἀριθ. Συμβ. 1196) 20 - 12 - 63

Ἐκτύπωσις - Βιβλιοδεσία : ΙΩ. ΚΑΜΠΑΝΑ Ο. Ε. Φιλαδελφείας 4 — Ἀθῆναι



$5 \times 2 - 4 = 6 \angle$

$180 \times 3 = 540$

$180 - 90 = 90 \div 2 = 45^\circ$

A' A, B B'

$\times 5$

$112{,}5^\circ$

BB AA ΓΓ

$60^\circ \cdot \angle 90$

66

389
16ος

37110
Ε11