ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΙΩΑΝΝΟΥ Γ. ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΟΥ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΟΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Τ. ΔΙΔΑΣΚΑΛΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝ ΤΩΙ ΠΑΚΕΠΙΣΤΗΜΙΩΙ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ''ΑΡΙΣΤ. Φ. ΠΑΛΛΑΣ,,

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΤΑ ΣΥΝΤΟΜΟΥ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ

ΑΘΗΝΑΙ 1966

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΙΩΑΝΝΟΥ Γ. ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΟΥ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΟΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Τ. ΔΙΔΑΣΚΑΛΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝ ΤΩΙ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΩ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ "ΑΡΙΣΤ. Φ. ΠΑΛΛΑΣ"

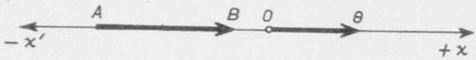
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΤΑ ΣΥΝΤΟΜΟΥ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ

ΑΘΗΝΑΙ 1966

ΒΑΣΙΚΑΙ ΤΙΝΕΣ ΕΝΝΟΙΑΙ ΤΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΑΞΩΝ. Ἔστω ἀπεριόριστος εὐθεῖα $x'x$ καί ἐπί ταύτης ἕν ὡρισμένον σημεῖον Ο. Εἶναι φανερόν ὅτι, ἐάν ἕν κινητόν ἀναχωρήσῃ ἐκ τοῦ Ο καί κινηθῇ ἐπί τῆς εὐθείας $x'x$ κατά δύο τρόπους, δύναται νά ἐπιτελέσῃ μίαν τοιαύτην κίνησιν ἤ νά ὁδεύσῃ πρός τό x ἤ πρός τό x'. Τήν φοράν τήν ἐκ τοῦ Ο πρός τό x κατά συνθήκην λαμβάνομεν ὡς θετικήν, τήν δέ ἐκ τοῦ Ο πρός τό x' ὡς ἀρνητικήν. Τό σημεῖον Ο ὀνομάζομεν συνήθως ἀφετηρίαν. Ἐπί τῆς εὐθείας $x'x$ λαμβάνομεν ἀκόμη ἕν εὐθύγραμμον τμῆμα ΟΘ θετικῆς φορᾶς, τό ὁποῖον ὀνομάζομεν μοναδιαῖον διάνυσμα καί τότε τήν εὐθεῖαν $x'x$ ἐπί τῆς ὁποίας ἔχομεν ὁρίσει τήν ἀφετηρίαν Ο φοράς θετικήν καί ἀρνητικήν ὡς καί τό μοναδιαῖον διάνυσμα τήν ὀνομάζομεν ἄξονα.



Ἤτοι: «Ἄξων ἤ προσανατολισμένη εὐθεῖα καλεῖται μία εὐθεῖα ἐπί τῆς ὁποίας ἔχομεν ὁρίσει ἕν ὡρισμένον σημεῖον Ο ὡς ἀφετηρίαν, ἔχομεν ὁρίσει θετικήν καί ἀρνητικήν φοράν καί μοναδιαῖον διάνυσμα».

Πολλάκις ὁ ἄξων ὁρίζεται καί διά μόνου τοῦ μοναδιαίου διανύσματος.

ΔΙΑΝΥΣΜΑ. Καλοῦμεν διάνυσμα ΑΒ τήν εὐθύγραμμον τροχιάν, τήν ὁποίαν διαγράφει κινητόν ἐπί ἄξονος $x'x$ ἀναχωροῦν ἐκ τοῦ Α καί τερματίζον εἰς τό Β. Τοῦτο παριστῶμεν διά τοῦ συμβόλου $\overline{AB}$.

ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΝ ΜΕΤΡΟΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ. Καλοῦμεν ἀλγεβρικόν μέτρον ἑνός διανύσματος $\overline{AB}$ τόν λόγον τοῦ διανύσματος πρός τό μοναδιαῖον τοιοῦτον καί παριστῶμεν τοῦτο διά τοῦ συμβόλου $(\overline{AB})$. Ἤτοι ἔχομεν $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{O\Theta}} = (\overline{AB})$. Τό ἀλγεβρικόν μέτρον ἑνός διανύσματος εἶναι ἀριθμός θετικός ἐάν τό διάνυσμα εἶναι θετικῆς φορᾶς καί ἀρνητικός, ἐάν εἶναι ἀρνητικῆς.

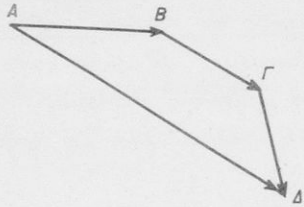
ΜΗΔΕΝΙΚΟΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑ. Καλοῦμεν μηδενικόν διάνυσμα καί παριστῶμεν τοῦτο διά τοῦ συμβόλου $\overline{O}$ τό διάνυσμα τοῦ ὁποίου ἡ ἀρχή συμπίπτει μέ τό πέρας. Εἶναι προφανές ὅτι $(\overline{O}) = 0$.

ΔΙΕΥΘΥΝΣΙΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ. Καλοῦμεν διεύθυνσιν διανύσματος τόν ἄξονα ἐπί τοῦ ὁποίου ἐγένετο ἡ κίνησις καί παρήχθη τό διάνυσμα ἤ οἱανδήποτε ἄλλην παράλληλον εὐθεῖαν πρός τοῦτον. Δεχόμεθα τουτέστιν ὅτι μία δέσμη παραλλήλων εὐθειῶν ὁρίζει μίαν διεύθυνσιν. Τόν ἄξονα ἐπί τοῦ ὁποίου ἐγένετο ἡ κίνησις καί παρήχθη τό διάνυσμα καλοῦμεν συνήθως καί <u>φορέα</u> ἤ <u>στήριγμα</u> τοῦ διανύσματος.

ΙΣΟΤΗΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ. Δύο διανύσματα θά λέγωνται ἴσα, ἐάν εἶναι τῆς αὐτῆς διευθύνσεως, τῆς αὐτῆς φορᾶς καί τοῦ αὐτοῦ ἀλγεβρικοῦ μέτρου. Διά δύο τοιαῦτα διανύσματα $\overline{AB}$ καί $\overline{\Gamma\Delta}$ γράφομεν τήν ἰσότητα $\overline{AB} = \overline{\Gamma\Delta}$.

ΕΛΕΥΘΕΡΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ. Ἐλεύθερα καλοῦνται τά διανύσματα τά ὁποῖα δύνανται νά μετακινηθοῦν παραλλήλως πρός ἑαυτά, ὥστε νά ἔχουν ὡς ἀρχήν τό τυχόν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ἤ τοῦ χώρου. Ἐν τοῖς ἑπομένοις, ὅταν ὁμιλῶμεν περί διανυσμάτων θά ἐννοῶμεν ἐλεύθερα διανύσματα.

ΔΙΑΔΟΧΙΚΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ. Δύο ἤ περισσότερα διανύσματα τά ὀνομάζομεν διαδοχικά, ὅταν τό πέρας ἑκάστου συμπίπτει μέ τήν ἀρχήν τοῦ ἑπομένου. Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην τό διάνυσμα τό



έχον ἀρχήν, τήν ἀρχήν τοῦ πρώτου καί πέρας, τό πέρας τοῦ τελευταίου ὀνομάζομεν γεωμετρικόν ἄθροισμα ἤ συνισταμένην τῶν δοθέντων διανυσμάτων καί γράφομεν:

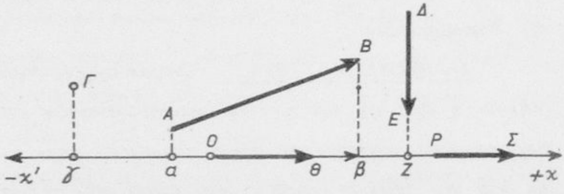
$$\overline{AB} + \overline{B\Gamma} + \overline{\Gamma\Delta} = \overline{A\Delta}$$

Διά δύο ἤ περισσότερα διανύσματα μή διαδοχικά, ὀνομάζομεν γεωμετρικόν ἄθροισμα τό γεωμετρικόν ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν διανυσμάτων τῶν ἴσων πρός τά δοθέντα.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ὁρίζομεν τά ἀντίθετα διανύσματα ὡς τά διανύσματα τά ἔχοντα γεωμετρικόν ἄθροισμα τό μηδενικόν διάνυσμα, σημειοῦμεν δέ τότε $\overline{AB} + \overline{\Gamma\Delta} = \overline{0}$. Ἐκ τοῦ τοιούτου ὁρισμοῦ τῶν ἀντιθέτων διανυσμάτων προκύπτει ὅτι, ὅταν δύο διανύσματα εἶναι ἀντίθετα καί καταστοῦν διαδοχικά διά παραλλήλου μεταφορᾶς τοῦ ἑνός ἐξ αὐτῶν, τό πέρας τοῦ δευτέρου θά συμπέσῃ μέ τήν ἀρχήν τοῦ πρώτου. Συνεπῶς, ἵνα δύο διανύσματα εἶναι ἀντίθετα θά πρέπει νά εἶναι τῆς αὐτῆς διευθύνσεως καί ἀντιθέτων ἀλγεβρικῶν μέτρων. Ἐάν δηλαδή ἔχωμεν $\overline{AB} + \overline{\Gamma\Delta} = \overline{0}$, τότε $(\overline{AB}) + (\overline{\Gamma\Delta}) = 0$ ἤ $(\overline{AB}) = -(\overline{\Gamma\Delta})$.

ΠΕΡΙ ΠΡΟΒΟΛΩΝ

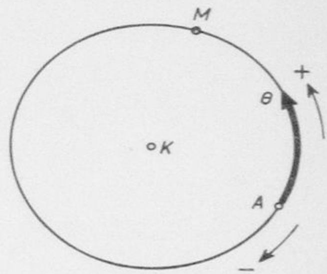
Δοθέντος ἑνός ἄξονος $x'x$ καί ἑνός σημείου Γ, ὀνομάζομεν ὀρθήν προβολήν τοῦ σημείου Γ ἐπί τόν ἄξονα $x'x$ τόν πόδα γ τῆς καθέτου ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ Γ ἐπί τόν ἄξονα $x'x$. <u>Ὀρθήν προβολήν διανύσματος $\overline{AB}$ ὀνομάζο-</u>



μεν τό διάνυσμα $\overline{αβ}$ τό ἔχον ἀρχήν τήν προβολήν τῆς ἀρχῆς καί πέρας τήν προβολήν τοῦ πέρατος. Εἶναι φανερόν ὅτι, ἐάν ἕν διάνυσμα $\overline{ΔΕ}$ εἶναι κάθετον ἐπί τόν ἄξονα, ἔχει ὡς προβολήν τό μηδενικόν διάνυσμα. Ἐάν, πάλιν, ἕν διάνυσμα κεῖται ἐπί τοῦ ἄξονος, ἔχει ὡς προβολήν τόν ἑαυτόν του.

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑ
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΤΟΞΑ

Ἔστω περιφέρεια Κ καί ἐπ' αὐτῆς ἕν ὡρισμένον σημεῖον Α. Ἐάν ἐκ τοῦ Α ἀναχωρήσῃ κινητόν καί κινηθῇ ἐπί τῆς περιφερείας, τοῦτο θά ἀκολουθήσῃ τροχιάν ἤ σύμφωνον πρός τήν κίνησιν τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου, τήν ὁποίαν κατά συνθήκην λαμβάνομεν ὡς ἀρνητικήν, ἤ ἀντίθετον ἀπό τήν κίνησιν τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου, τήν ὁποίαν λαμβάνομεν ὡς θετικήν. Ἐπί τῆς περιφερείας Κ λαμβάνομεν ἀκόμη ἕν τόξον $\overset{\frown}{Αθ}$ θετικῆς φορᾶς ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν τόξων. Τοῦτο ὀνομάζομεν μοναδιαῖον διανυσματικόν τόξον. Μίαν τοιαύτην περιφέρειαν ἐπί τῆς ὁποίας ἔχομεν ὁρίσει ἕν σημεῖον Α ὡς ἀφετηρίαν θετικήν καί ἀρνητικήν φοράν ὡς καί μοναδιαῖον διανυσματικόν τόξον ὀνομάζομεν προσανατολισμένην περιφέρειαν.



<u>ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΤΟΞΑ.</u> Ὀνομάζομεν διανυσματικόν τόξον κάθε τροχιάν ἤ δρόμον τόν ὁποῖον κάμνει κινητόν ἐπί προσανατολισμένης περιφερείας κινούμενον κατά τήν αὐτήν φοράν, ἀρχίζον τήν κίνησιν ἐκ τοῦ Α. Ἐάν ἡ κίνησις γίνῃ κατά τήν θετικήν φοράν τό τόξον

λογίζεται ὡς θετικόν, ἐάν ἡ κίνησις γίνῃ κατ᾽ ἀρνητικήν τό τόξον λογίζεται ὡς ἀρνητικόν.

<u>ΜΕΤΡΟΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΤΟΞΟΥ.</u> Μέτρον ἑνός διανυσματικοῦ τόξου ὀνομάζομεν τόν λόγον τοῦ διανυσματικοῦ τόξου πρός τό μοναδιαῖον τοιοῦτον. Τοῦτο ἐκφράζομεν διά τῆς ἰσότητος $\frac{\overset{\frown}{AM}}{\overset{\frown}{A\Theta}} = (\overset{\frown}{AM})$.

Ὡς καί εἰς τό μέτρον διανύσματος, τό μέτρον ἑνός διανυσματικοῦ τόξου εἶναι ἀριθμός θετικός ἐάν τό ληφθέν τόξον εἶναι θετικῆς φορᾶς καί ἀριθμός ἀρνητικός ἐάν εἶναι ἀρνητικῆς.

Ἔστω ἤδη ἡ προσανατολισμένη περιφέρεια Κ, ἡ ἀφετηρία αὐτῆς Α καί ἕν σημεῖον Μ ἐπ᾽ αὐτῆς. Εἶναι φανερόν ὅτι διανυσματικά τόξα μέ ἀρχήν Α καί πέρας τό Μ ὑπάρχουν ἄπειρα ἀφοῦ ἐξ ὁρισμοῦ διανυσματικόν τόξον ὠνομάσαμεν μίαν οἱανδήποτε τροχιάν ἐπί τῆς προσανατολισμένης περιφερείας μέ ἀφετηρίαν κινήσεως τό Α καί πέρας τό Μ καί ἐπειδή ἡ κίνησις ἐκ τοῦ Α πρός τό Μ δυναται νά γίνῃ κατά δύο τρόπους, διανυσματικά τόξα ἀρχῆς Α καί πέρατος Μ ὑπάρχουν ἄπειρα θετικά καί ἄπειρα ἀρνητικά. Ἀπό ὅλα τά τόξα ἀρχῆς Α καί πέρατος Μ, τό τόξον τό παραγόμενον, ὅταν τό κινητόν ἀναχωρήσῃ ἐκ τοῦ Α, κινηθῇ κατά θετικήν φοράν, συναντήσῃ τό Μ διά πρώτην φοράν καί σταματήσῃ τήν κίνησιν, ὀνομάζεται <u>πρῶτον θετικόν</u> ἤ <u>πρωτεῦον</u>. Τό μέτρον τοῦ πρώτου θετικοῦ θά εἶναι βεβαίως, κατά τόν ὁρισμόν μας, ἀριθμός θετικός.

Ἔστω ἤδη ὅτι ἕν κινητόν ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ Α, κινεῖται κατά θετικήν φοράν, συναντᾷ τό Μ διά $\nu^{\underline{\eta\nu}}$ φοράν καί σταματᾷ τήν κίνησιν. Τό οὕτω παραγόμενον τόξον ὀνομάζομεν $\nu^{\underline{o\nu}}$ θετικόν. Ἄν πάλιν τό κινητόν ἀναχωρήσῃ ἐκ τοῦ Α, κινηθῇ κατ᾽ ἀρνητικήν φοράν, συναντήσῃ τό Μ διά $\nu^{\underline{\eta\nu}}$ φοράν καί σταματήσῃ τήν κίνησιν, τό οὕτω παραχθέν τόξον ὀνομάζομεν $\nu^{\underline{o\nu}}$ ἀρνητικόν.

Ἐάν τώρα ὑποθέσωμεν ὅτι λαμβάνομεν ὡς μοναδιαῖον διανυσματικόν τόξον τό τόξον τῆς μιᾶς μοίρας καί εἶναι α° τό μέτρον τοῦ πρώτου θετικοῦ διανυσματικοῦ τόξου $\overset{1}{\widehat{AM}}$ διά τό δεύτερον θετικόν θά ἔχωμεν $(\overset{2}{\widehat{AM}}) = \alpha^\circ + 360^\circ$, διά τό τρίτον $(\overset{3}{\widehat{AM}}) = \alpha^\circ + 2\cdot 360^\circ$ καί γενικῶς διά τό νο̄ν $(\overset{\nu}{\widehat{AM}}) = \alpha^\circ + (\nu-1)\cdot 360^\circ$. Διά τό πρῶτον ἀρνητικόν $\overleftarrow{AM}$ ἔχομεν $(\overset{1}{\widehat{AM}}) = \alpha^\circ - 360^\circ$, διά τό δεύτερον $(\overset{2}{\widehat{AM}}) = \alpha^\circ - 2\cdot 360^\circ$ καί διά τό νο̄ν $(\overset{\nu}{\widehat{AM}}) = \alpha^\circ - \nu\cdot 360^\circ$. Γενικῶς τό μέτρον οἱουδήποτε διανυσματικοῦ τόξου ἀρχῆς Α καί πέρατος Μ θετικοῦ ἤ ἀρνητικοῦ ἐκφράζεται ὡς ἄθροισμα τοῦ μέτρου τοῦ πρώτου θετικοῦ σύν ἀκέραιον πολλαπλάσιον τοῦ μέτρου περιφερείας. Ἔχομεν δηλαδή:

$$(\widehat{AM}) = \alpha^\circ + K\cdot 360^\circ$$

ἔνθα Κ ἀκέραιος θετικός ἤ ἀρνητικός. Εἰς τήν περίπτωσιν κατά τήν ὁποίαν ὡς μοναδιαῖον διανυσματικόν τόξον λαμβάνομεν τό τόξον τοῦ ἑνός ἀκτινίου ἤ τοῦ ἑνός βαθμοῦ ἔχομεν:

$$(\widehat{AM}) = \alpha + 2K\pi \qquad ἤ \qquad (\widehat{AM}) = \beta + K.400$$

Ἀπό τήν γνωστήν πρότασιν τῆς Γεωμετρίας, κατά τήν ὁποίαν «ὁ λόγος δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν ἰσοῦται μέ τόν λόγον τῶν μέτρων τῶν μεγεθῶν μετρηθέντων διά τῆς αὐτῆς μονάδος» ἔχομεν τάς σχέσεις:

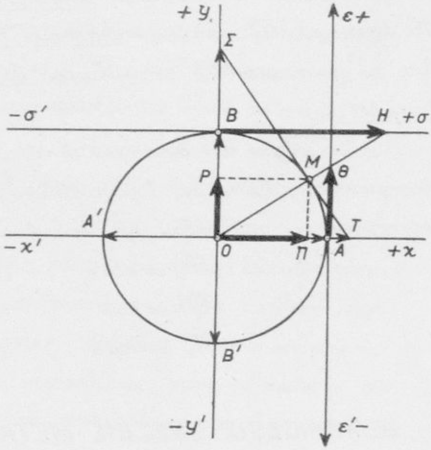
$$\frac{\widehat{AM}}{\widehat{P}} = \frac{\mu}{360} = \frac{\beta}{400} = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\omega}{24} \qquad ἤ \qquad \frac{\mu}{180} = \frac{\beta}{200} = \frac{\alpha}{\pi} = \frac{\omega}{12}$$

ἔνθα $\widehat{P}$ ἡ προσανατολισμένη περιφέρεια

τῇ βοηθείᾳ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νά μετατρέπωμεν τάς μοίρας εἰς ἀκτίνια ἤ τά ἀκτίνια εἰς βαθμούς κ.λ.π. . . .

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Θεωροῦμεν προσανατολισμένην περιφέρειαν Ο καί ἄξονα $x'Ox$ διερχόμενον διά τοῦ κέντρου αὐτῆς Ο καί διά τῆς ἀφετηρίας Α τῶν τόξων. Ἐπί τούτου λαμβάνομεν ὡς ἀφετηρίαν τό Ο, φοράν θετικήν τήν ἐκ τοῦ Ο πρός τό x καί ἀρνητικήν τήν ἐκ τοῦ Ο πρός τό x', μοναδιαῖον διάνυσμα τήν ἀκτῖνα ΟΑ. Τόν ἄξονα τοῦτον ὀνομάζομεν ἄξονα τῶν συνημιτόνων ἤ ἄξονα τῶν τεμνουσῶν ἤ ἄξονα τῶν τετμημένων. Ἐν συνεχείᾳ λαμβάνομεν δεύτερον ἄξονα κάθετον ἐπί τόν προηγούμενον εἰς τό O τόν y'Oy μέ ἀφετηρίαν τό O καί μοναδιαῖον διάνυσμα τήν ἀκτῖνα OB. Τοῦτον ὀνομάζομεν ἄξονα τῶν ἡμιτόνων ἤ τῶν συντεμνουσῶν ἤ τῶν τεταγμένων. Ἀκολούθως λαμβάνομεν τρίτον ἄξονα ἐφαπτόμενον τῆς περιφερείας εἰς τό A καί ἐπί τούτου λαμβάνομεν ἀφετηρίαν τό A καί μοναδιαῖον διάνυσμα τήν ἀκτῖνα OB. Τοῦτον ὀνομάζομεν ἄξονα τῶν ἐφαπτομένων. Τέλος λαμβάνομεν τέταρτον ἄξονα ἐφαπτόμενον εἰς τό B μέ ἀφετηρίαν τό B καί μοναδιαῖον διάνυσμα τήν ἀκτῖνα OA. Τοῦτον ὀνομάζομεν ἄξονα τῶν συνεφαπτομένων.



Μίαν τοιαύτην προσανατολισμένην περιφέρειαν, ἐφοδιασμένην μέ τούς ἀνωτέρω ἄξονας, ὀνομάζομεν τριγωνομετρικόν κύκλον.

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΕΝΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΤΟΞΟΥ

Ἐπί τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου θεωροῦμεν διανυσματικόν τόξον AM. Τήν ἀκτῖνα OM, ἥτις καταλήγει εἰς τό πέρας τοῦ τόξου, καλοῦμεν τελικήν διανυσματικήν ἀκτῖνα καί τήν θεωροῦμεν ὡς διάνυσμα ἀρχῆς O καί πέρατος M. Τήν ὀρθήν προβολήν τῆς ἀκτῖνος ταύτης ἐπί τοῦ ἄξονος τῶν συνημιτόνων $\overline{O\Pi}$ καλοῦμεν διάνυσμα συνημιτόνου τοῦ τόξου ΑΜ. Τήν προβολήν τῆς ἀκτῖνος ΟΜ ἐπί τοῦ ἄξονος τῶν ἡμιτόνων $\overline{OP}$ καλοῦμεν διάνυσμα ἡμιτόνου τοῦ τόξου ΑΜ. Τό διάνυσμα τό ἔχον ἀρχήν τό Α καί πέρας τό σημεῖον τομῆς Θ τῆς τελικῆς ἀκτῖνος προεκτεινομένης μέ τόν ἄξονα τῶν ἐφαπτομένων ὀνομάζομεν διάνυσμα ἐφαπτομένης τοῦ τόξου ΑΜ. Τό διάνυσμα ΒΗ μέ ἀρχήν τό Β καί πέρας τό σημεῖον τομῆς τῆς τελικῆς ἀκτῖνος μέ τόν ἄξονα τῶν συνεφαπτομένων ὀνομάζομεν διάνυσμα συνεφαπτομένης τοῦ τόξου $\widehat{AM}$. Τό διάνυσμα $\overline{OT}$ καλοῦμεν διάνυσμα τεμνούσης τοῦ τόξου $\widehat{AM}$ καί, τέλος, τό διάνυσμα $\overline{O\Sigma}$ ὀνομάζομεν διάνυσμα συντεμνούσης τοῦ τόξου ΑΜ.

Τά μέτρα τῶν ἀνωτέρω διανυσμάτων ὀνομάζομεν κατά σειράν συνημίτονον, ἡμίτονον, ἐφαπτομένην, συνεφαπτομένην, τέμνουσαν, συντέμνουσαν τοῦ τόξου $\widehat{AM}$ καί θέτομεν :

$$(\overline{O\Pi}) = \sigma\upsilon\nu\,\alpha \quad , \quad (\overline{OP}) = \eta\mu\,\alpha$$
$$(\overline{A\Theta}) = \varepsilon\varphi\,\alpha \quad , \quad (\overline{BH}) = \sigma\varphi\,\alpha$$
$$(\overline{OT}) = \tau\varepsilon\mu\,\alpha \quad , \quad (\overline{O\Sigma}) = \sigma\tau\varepsilon\mu\,\alpha$$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΕΝΟΣ ΤΟΞΟΥ

Αἱ θεμελιώδεις σχέσεις μετάξύ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἑνός τόξου εἶναι αἱ ἀκόλουθοι :

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \quad , \quad \varepsilon\varphi\, x = \frac{\eta\mu\, x}{\sigma\upsilon\nu\, x} \quad , \quad \sigma\varphi\, x = \frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{\eta\mu\, x}$$
$$\tau\varepsilon\mu\, x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\, x} \quad , \quad \sigma\tau\varepsilon\mu\, x = \frac{1}{\eta\mu\, x}$$
$$\eta\mu\, x = \pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 x} \quad , \quad \eta\mu\, x = \frac{\varepsilon\varphi\, x}{\pm\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 x}} \quad , \quad \eta\mu\, x = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\sigma\varphi^2 x}}$$
$$\eta\mu\, x = \frac{\pm\sqrt{\tau\varepsilon\mu^2 x-1}}{\tau\varepsilon\mu\, x} \quad , \quad \eta\mu\, x = \frac{1}{\sigma\tau\varepsilon\mu\, x}$$
$$\sigma\upsilon\nu\, x = \pm\sqrt{1-\eta\mu^2 x} \quad , \quad \dots\dots\dots \quad , \quad \dots\dots\dots$$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΚΑΝΟΝΕΣ ΚΑΙ ΤΥΠΟΙ ΤΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

Ὡς εἶναι γνωστόν, ἐκ τῶν τριῶν κλάδων τῶν στοιχειωδῶν μαθηματικῶν - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ - ΑΛΓΕΒΡΑΣ - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ - οἱ ὁποῖοι ἐξετάζονται εἰς τάς ἀνωτάτας σχολάς, ὁ εὐκολώτερος εἶναι ἡ Τριγωνομετρία. Καί τοῦτο διότι ὁ κλάδος οὗτος, κατά κύριον λόγον, στηρίζεται εἰς ἕνα περιωρισμένον ἀριθμόν τύπων. Τούς τύπους τούτους, τούς ὁποίους ὅλα τά ἑλληνικά βιβλία Τριγωνομετρίας ἔχουν ἐντός τετραγωνιδίων, ὁ ὑποψήφιος δι' ἀνωτάτην σχολήν ὀφείλει νά γνωρίζῃ ἀπταίστως.

Ἐκτός ὅμως τοῦ τυπολογίου, τό ὁποῖον, ὅπως ἐλέχθη, πρέπει ὁ ὑποψήφιος νά γνωρίζῃ καλῶς, ὑπάρχουν καί ὀλίγοι κανόνες μεγάλης σημασίας διά τήν Τριγωνομετρίαν. Τούτους, ὅταν ὁ ὑποψήφιος γνωρίζῃ καί δύναται νά χειρίζεται καταλλήλως, τότε τό πλεῖστον τῶν θεμάτων Τριγωνομετρίας ἀνάγεται εἰς ἁπλᾶς ἀσκήσεις, δυναμένας νά λυθοῦν ἐντός ἐλαχίστου χρονικοῦ διαστήματος. Μερικούς ἀπό αὐτούς ἀναφέρομεν κατωτέρω καί ἐφιστῶμεν ἰδιαιτέρως τήν προσοχήν τοῦ ἀναγνώστου μας.

<u>Συνιστῶμεν, εἰ δυνατόν, τήν ἀποστήθισιν τούτων.</u>

<u>ΚΑΝΩΝ 1ος</u>

Ἐπί ταυτοτήτων, αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς γωνίας τριγώνου, σχεδόν πάντοτε ἀντικαθιστῶμεν τό ἡμίτονον τῆς μιᾶς γωνίας μέ τό ἡμίτονον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, ἤ τό συνημίτονον μιᾶς γωνίας μέ τό ἀντίθετον συνημίτονον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων λόγῳ τῆς παραπληρωματικότητος. Ἐπίσης τό ἡμίτονον τοῦ ἡμίσεος μιᾶς γωνίας διά τοῦ συνημιτόνου τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν δύο ἄλλων ἢ τό συνημίτονον τοῦ ἡμίσεος μιᾶς γωνίας διά τοῦ ἡμιτόνου τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν δύο ἄλλων λόγῳ τῆς συμπληρωματικότητος. Κάμνομεν δηλαδή χρῆσιν μιᾶς ἤ περισσοτέρων τῶν κάτωθι σχέσεων:

$\eta\mu A = \eta\mu(B+\Gamma)$	$\eta\mu B = \eta\mu(\Gamma+A)$	$\eta\mu \Gamma = \eta\mu(A+B)$
$\sigma\upsilon\nu A = -\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)$	$\sigma\upsilon\nu B = -\sigma\upsilon\nu(\Gamma+A)$	$\sigma\upsilon\nu \Gamma = -\sigma\upsilon\nu(A+B)$
$\varepsilon\varphi A = -\varepsilon\varphi(B+\Gamma)$	$\varepsilon\varphi B = \ldots\ldots$	$\varepsilon\varphi \Gamma = \ldots\ldots$
$\eta\mu\frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}$	$\eta\mu\frac{B}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma+A}{2}$	$\eta\mu\frac{\Gamma}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}$
$\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = \eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}$	$\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2} = \eta\mu\frac{\Gamma+A}{2}$	$\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} = \eta\mu\frac{A+B}{2}$
$\varepsilon\varphi\frac{A}{2} = \sigma\varphi\frac{B+\Gamma}{2}$	$\varepsilon\varphi\frac{B}{2} = \ldots\ldots$	$\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} = \ldots\ldots$

ΚΑΝΩΝ 2ος

Ἐπί ταυτοτήτων, είς τάς ὁποίας ἐμφανίζονται τετράγωνα ἡμιτόνων ἤ συνημιτόνων οἱωνδήποτε τόξων ἤ γωνιῶν ἤ κύβοι ἡμιτόνων ἤ συνημιτόνων, ἐπιτυγχάνομεν ἄριστα ἀποτελέσματα ἐκφράζοντες τά τετράγωνα τῶν ἡμιτόνων καί συνημιτόνων συναρτήσει τοῦ συνημιτόνου τοῦ διπλασίου τόξου, τούς δέ κύβους συναρτήσει τοῦ ἡμιτόνου ἤ συνημιτόνου τοῦ ἁπλοῦ τόξου καί τοῦ τριπλασίου αὐτοῦ. Χρησιμοποιοῦμεν δηλαδή τούς τύπους:

$$\eta\mu^2 x = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2} \qquad \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$$

$$\eta\mu^3 x = \frac{3\eta\mu x - \eta\mu 3x}{4} \qquad \sigma\upsilon\nu^3 x = \frac{3\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 3x}{4}$$

ΚΑΝΩΝ 3ος

Ἐπί ταυτοτήτων ἤ καί ἐπιλύσεων τριγώνου περιεχουσῶν πλήν τῶν γωνιακῶν στοιχείων καί γραμμικά τοιαῦτα, ἐκφράζομεν τά γραμμικά στοιχεῖα συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καί τῶν γωνιῶν, ἀκολούθως ἐξαλείφομεν τήν ἀκτῖνα καί φθάνομεν είς σχέσεις μόνον μεταξύ τῶν γωνιακῶν στοιχείων. Χρησιμοποιοῦμεν δηλαδή τούς τύπους:

$a=2R\eta\mu A$ $\quad\beta=\dots\dots$ $\quad\gamma=\dots\dots$ $\quad E=2R^2\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma$

$\rho=4R\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$ $\quad\rho_a=4R\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$ $\quad\rho_\beta=\dots\dots$ $\quad\rho_\gamma=\dots\dots$

$\upsilon_a=2R\eta\mu B\eta\mu\Gamma$ $\quad\upsilon_\beta=\dots\dots$ $\quad\upsilon_\gamma=\dots\dots$

$\delta_a=2R\dfrac{\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}$ $\quad\delta_\beta=\dots\dots$ $\quad\delta_\gamma=\dots\dots$

$D_a=2R\cdot\dfrac{\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\left|\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\right|}$ $\quad D_\beta=\dots\dots$ $\quad D_\gamma=\dots\dots$

$\mu_a^2=4R^2\cdot\left[2(\eta\mu^2B+\eta\mu^2\Gamma)-\eta\mu^2A\right]$ $\quad\mu_\beta^2=\dots\dots$ $\quad\mu_\gamma^2=\dots\dots$

ΚΑΝΩΝ 4ος

Ὅταν ζητῆται ν᾽ἀποδειχθῇ ὅτι ἕν τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον ἤ ἰσοσκελές ἤ ἰσόπλευρον, προσπαθοῦμεν ἐκ τῶν δοθεισῶν σχέσεων νά φθάσωμεν εἰς ἕν γινόμενον παραγόντων ἴσον πρός τό μηδέν, ὁπότε ἐκ τοῦ μηδενισμοῦ ἑνός ἤ περισσοτέρων παραγόντων συνάγομεν τό ζητούμενον.

ΚΑΝΩΝ 5ος

Εἰς τριγωνομετρικά θέματα, εἰς τά ὁποῖα ἐμφανίζονται σχήματα καί δή πολύπλοκα, κατά κανόνα κάμνομεν χρῆσιν τοῦ θεωρήματος τῶν ἡμιτόνων ἤ τοῦ θεωρήματος τῶν συνημιτόνων ἤ καί ἀμφοτέρων, ὡς καί τῶν σχέσεων:

$\beta=a\eta\mu B=a\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$, $\gamma=a\eta\mu\Gamma=a\sigma\upsilon\nu B$, $\beta=\gamma\varepsilon\varphi B=\gamma\sigma\varphi\Gamma$

τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου. Κάμνομεν, δηλαδή, χρῆσιν τῶν σχέσεων:

$\dfrac{a}{\eta\mu A}=\dfrac{\beta}{\eta\mu B}=\dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}=2R$, $a^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu A$, $\beta^2=\dots$, $\gamma^2=\dots$

$\sigma\upsilon\nu A=\dfrac{\beta^2+\gamma^2-a^2}{2\beta\gamma}$, $\sigma\upsilon\nu B=\dots\dots$, $\sigma\upsilon\nu\Gamma=\dots$

ΚΑΝΩΝ 6ος

Ἐπί πολυπλόκων σχημάτων συνήθως κάμνομεν χρῆσιν βοηθητικῶν στοιχείων γωνιακῶν ἤ γραμμικῶν, τά ὁποῖα ἐν συνεχείᾳ ἀπαλείφομεν καί οὕτω φθάνομεν εἰς τάς ζητουμένας σχέσεις.

ΚΑΝΩΝ 7ος

Προκειμένου περί ἀντιστρόφων κυκλικῶν συναρτήσεων ἤ ταυτοτήτων κατ᾽ἀρχήν, ἐάν παρουσιάζονται τόξα διαφόρων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν, τρέπομεν ταῦτα εἰς τόξα τοῦ αὐτοῦ τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ καί, ἀκολούθως, χρησιμοποιοῦμεν κυρίως τούς ἑξῆς τύπους:

$$\text{τοξ ημ}\,x \pm \text{τοξ ημ}\,y = \text{τοξ ημ}\left[x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\right]$$

$$\text{τοξ εφ}\,x \pm \text{τοξ εφ}\,y = \text{τοξ εφ}\,\frac{x \pm y}{1 \mp xy}$$

$$\text{τοξ σφ}\,x \pm \text{τοξ σφ}\,y = \text{τοξ σφ}\,\frac{xy \mp 1}{y \pm x}$$

Οἱ ἀνωτέρω τύποι, ὡς καί οἱ ὑπόλοιποι οἱ ὁποῖοι προκύπτουν ἐκ τῶν διαφόρων κυκλικῶν συναρτήσεων ὡς ὁ $\text{τοξ εφ}\,x + \frac{1}{2}\,\text{τοξ εφ}\,\frac{2x}{1-x^2}$ κλπ., ἰσχύουν ἐφ᾽ ὅσον τά θεωρούμενα τόξα ἀναφέρονται εἰς τό διάστημα $-\frac{\pi}{2} \dots +\frac{\pi}{2}$ ἔνθα αἱ ἀντίστροφοι κυκλικαί συναρτήσεις

$$z = \text{τοξ ημ}\,x \quad , \quad z = \text{τοξ εφ}\,x \quad , \quad z = \text{τοξ σφ}\,x$$

εἶναι μονότιμοι. Συνήθως τάς πρωτευούσας τιμάς τῶν τοξ εφx, τοξ σφx, τοξ ημx, αἱ ὁποῖαι περιέχονται εἰς τό διάστημα $-\frac{\pi}{2} \dots +\frac{\pi}{2}$, παριστῶμεν διά τῶν συμβόλων:

$$\Pi.T.\,\text{τοξ εφ}\,x \quad \text{ἤ} \quad \text{τοξ}_0\,\text{εφ}\,x$$

Ἐάν τώρα ἐπιχειρήσωμεν νά μετρήσωμεν τούς τύπους οἱ ὁποῖοι διαλαμβάνονται εἰς τό πρῶτον τυχόν βιβλίον Τριγωνομετρίας θά καταληφθῶμεν ὑπό δέους, ὅταν μάλιστα εἶναι τίς πρωτόπειρος καί ἀμύητος εἰς τά τοιαῦτα, δεδομένου ὅτι θά φθάσωμεν εἰς ἕνα πολύ μεγάλον ἀριθμόν.

Προσεκτικωτέρα πάντως ἐξέτασις τῶν πραγμάτων θά μᾶς ἀποκαλύψη ὅτι ὁ εὑρεθείς ἀριθμός δύναται νά ὑποβιβασθῇ εἰς τό ἥμισυ πολλάκις δέ καί εἰς τό ἕν τρίτον, καθ᾽ ὅσον οἱ πλεῖστοι ἐκ τῶν τύπων αὐτῶν προκύπτουν ὁ εἷς ἐκ τοῦ ἄλλου διά κυκλικῆς ἐναλλαγῆς τῶν γραμμάτων $\alpha, \beta, \gamma \,/\, A, B, \Gamma$. Π.χ., προκειμένου νά ἐνθυμούμεθα τούς χρησιμωτάτους εἰς τήν Τριγωνομετρίαν τύπους:

$$\varepsilon\varphi A = \frac{4E}{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}, \quad \varepsilon\varphi B = \frac{4E}{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}, \quad \varepsilon\varphi \Gamma = \frac{4E}{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}$$

$$\sigma\varphi A = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{4E}, \quad \sigma\varphi B = \frac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{4E}; \quad \sigma\varphi \Gamma = \frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{4E}$$

ἀρκεῖ νά ἐνθυμούμεθα τόν πρῶτον ἐξ αὐτῶν. Οἱ ὑπόλοιποι προκύπτουν διά κυκλικῆς ἐναλλαγῆς τῶν γραμμάτων καί δι' ἀντιστροφῆς.

Τούς τύπους τῆς Τριγωνομετρίας δυνάμεθα νά χωρίσωμεν εἰς δύο μεγάλας κατηγορίας:

α) Τούς τύπους ἐκείνους τῶν ὁποίων ἡ ἀποστήθισις δέν εἶναι ἀπαραίτητος ἀλλά μόνον ἡ ἁπλῆ γνῶσις τῆς ἐξαγωγῆς αὐτῶν, καί

β) Τούς τύπους ἐκείνους τούς ὁποίους ὀφείλομεν νά ἐνθυμούμεθα καλῶς, νά ἔχωμεν ἐναργῆ εἰκόνα αὐτῶν καί νά δυνάμεθα νά τούς χρησιμοποιῶμεν ἀνά πᾶσαν στιγμήν καταλλήλως εἰς τό ἑκάστοτε παρουσιαζόμενον θέμα.

Πέραν τῶν κλασσικῶν τύπων ὑπάρχουν καί ἀσκήσεις τινές εὔκολοι κατά τό πλεῖστον, σπουδαιόταται ὅμως ὡς βοηθητικαί διά τήν λύσιν ἄλλων πολύ δυσκολωτέρων.

Κατωτέρω παραθέτομεν μερικάς ὁμάδας τύπων τῶν ὁποίων ἡ γνῶσις εἶναι πλέον ἤ ἀπαραίτητος διά τήν λύσιν καί τῶν στοιχειωδεστέρων ζητημάτων τῆς Τριγωνομετρίας.

<u>Ο Μ Α Σ Α!</u>

$$\eta\mu(\alpha+\beta) = \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\,\eta\mu\beta, \quad \eta\mu(\alpha-\beta) = \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha\,\eta\mu\beta$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta, \quad \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta$$

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta}, \quad \varepsilon\varphi(\alpha-\beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta}$$

$$\sigma\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta - 1}{\sigma\varphi\beta - \sigma\varphi\alpha}, \quad \sigma\varphi(\alpha-\beta) = \frac{\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta + 1}{\sigma\varphi\beta - \sigma\varphi\alpha}$$

<u>Ο Μ Α Σ Β!</u>

Ἔκφρασις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τυχόντος τόξου x συναρτήσει τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ ἡμίσεος τόξου.

1) $ημx = 2ημ\frac{x}{2}\,συν\frac{x}{2}$ 2) $συν x = συν^2\frac{x}{2} - ημ^2\frac{x}{2}$

3) $συν x = 1 - 2ημ^2\frac{x}{2}$ 4) $συν x = 2συν^2\frac{x}{2} - 1$

5) $ημ x = \frac{2εφ\frac{x}{2}}{1+εφ^2\frac{x}{2}}$ 6) $συν x = \frac{1-εφ^2\frac{x}{2}}{1+εφ^2\frac{x}{2}}$

7) $εφ x = \frac{2εφ\frac{x}{2}}{1-εφ^2\frac{x}{2}}$ 8) $ημ^2\frac{x}{2} = \frac{1-συν x}{2}$

9) $συν^2\frac{x}{2} = \frac{1+συν x}{2}$ 10) $ημ\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-συν x}{2}}$

11) $συν\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+συν x}{2}}$ 12) $εφ\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-συν x}{1+συν x}}$

Ο Μ Α Σ Γ!

Τύποι μετατροπῆς ἀθροισμάτων καί διαφορῶν ἡμιτόνων καί συνημιτόνων εἰς γινόμενα:

$ημA + ημB = 2ημ\frac{A+B}{2}\,συν\frac{A-B}{2}$, $ημA - ημB = 2συν\frac{A+B}{2}\,ημ\frac{A-B}{2}$

$συνA + συνB = 2συν\frac{A+B}{2}\,συν\frac{A-B}{2}$, $συνA - συνB = 2ημ\frac{A+B}{2}\,ημ\frac{B-A}{2}$

Ο Μ Α Σ Δ!

Τύποι μετατροπῆς γινομένων εἰς ἀθροίσματα ἤ διαφοράς:

$ημA\,συνB = \frac{1}{2}\left[ημ(A+B)+ημ(A-B)\right]$, $συνA\,ημB = \frac{1}{2}\left[ημ(A+B)-ημ(A-B)\right]$

$ημA\,ημB = \frac{1}{2}\left[συν(A-B)-συν(A+B)\right]$, $συνA\,συνB = \frac{1}{2}\left[συν(A-B)+συν(A+B)\right]$

Ο Μ Α Σ Ε!

Ἔκφρασις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν γωνιῶν τριγώνου συναρτήσει τῶν πλευρῶν:

$ημ\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(τ-β)(τ-γ)}{βγ}}$, $ημ\frac{B}{2} = \dots$, $ημ\frac{Γ}{2} = \dots$

$συν\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{τ(τ-α)}{βγ}}$, $συν\frac{B}{2} = \dots$, $συν\frac{Γ}{2} = \dots$

$εφ\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(τ-β)(τ-γ)}{τ(τ-α)}}$, $εφ\frac{B}{2} = \dots$, $εφ\frac{Γ}{2} = \dots$

$σφ\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{τ(τ-α)}{(τ-β)(τ-γ)}}$, $σφ\frac{B}{2} = \dots$, $σφ\frac{Γ}{2} = \dots$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Κατωτέρω παρατίθενται μερικαί ἁπλαῖ ἀσκήσεις αἵτινες χρησιμοποιοῦνται ὡς βοηθητικαί διά τήν λύσιν ἄλλων δυσκολωτέρων.

1. Νά δειχθῇ ὅτι ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη ἵνα δύο τόξα $\widehat{AM}$ καί $\widehat{AN}$ ἔχουν τά αὐτά πέρατα εἶναι

$$(\widehat{AM}) - (\widehat{AN}) = 2K\pi$$

2. Νά δειχθῇ ὅτι ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη ἵνα δύο τόξα $\widehat{AM}$ καί $\widehat{AN}$ ἔχουν πέρατα συμμετρικά ὡς πρός τόν ἄξονα τῶν συνημιτόνων εἶναι

$$(\widehat{AM}) + (\widehat{AN}) = 2K\pi$$

3. Νά δειχθῇ ὅτι ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη ἵνα δύο τόξα $\widehat{AM}$ καί $\widehat{AN}$ ἔχουν πέρατα συμμετρικά ὡς πρός τόν ἄξονα τῶν ἡμιτόνων εἶναι

$$(\widehat{AM}) + (\widehat{AN}) = (2K+1)\pi$$

4. Νά δειχθῇ ὅτι ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη ἵνα δύο τόξα $\widehat{AM}$ καί $\widehat{AN}$ ἔχουν πέρατα συμμετρικά ὡς πρός τό κέντρον τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου εἶναι

$$(\widehat{AM}) - (\widehat{AN}) = (2K+1)\pi$$

Αἱ ἀνωτέρω τέσσαρες ἀσκήσεις εἶναι βασικαί διά τήν λύσιν τῶν ἁπλῶν τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων :

$$\eta\mu x = a \quad , \quad \sigma\upsilon\nu x = a \quad , \quad \varepsilon\varphi x = a \quad , \quad \sigma\varphi x = a$$

5. Νά δειχθῇ ἡ ταυτότης: $\varepsilon\varphi a - \sigma\varphi a = -2\sigma\varphi 2a$. Ἡ ἐν λόγῳ ἄσκησις ἐπιτρέπει, σύν τοῖς ἄλλοις, καί τόν εὔκολον ὑπολογισμόν τῶν σειρῶν:

$$\varepsilon\varphi a + \frac{1}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{a}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{\nu-1}}\cdot\varepsilon\varphi\frac{a}{2^{\nu-1}} \quad , \quad \varepsilon\varphi a + 2\varepsilon\varphi 2a + \ldots + 2^{\nu-1}\cdot\varepsilon\varphi(2^{\nu-1}a)$$

6. Νά δειχθῇ ἡ ταυτότης: $\eta\mu^2 A - \eta\mu^2 B = \eta\mu(A+B)\cdot\eta\mu(A-B)$. Τῆς ἀνωτέρω ἁπλῆς ἀσκήσεως αἱ ἐφαρμογαί ἐν τοῖς ἑπομένοις εἶναι πλεῖσται ὅσαι.

7. Ἐάν $A+B+\Gamma = K\,180°$, νά δειχθοῦν αἱ σχέσεις:

$$\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\Gamma = \varepsilon\varphi A\cdot\varepsilon\varphi B\cdot\varepsilon\varphi\Gamma \quad , \quad \sigma\varphi A\cdot\sigma\varphi B+\sigma\varphi B\cdot\sigma\varphi\Gamma+\sigma\varphi\Gamma\cdot\sigma\varphi A = 1$$

8. Ἐάν $\alpha+\beta+\gamma = (2K+1)\,90°$, νά δειχθοῦν αἱ σχέσεις:

$$\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\gamma = \sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta\cdot\sigma\varphi\gamma \quad , \quad \varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta+\varepsilon\varphi\beta\cdot\varepsilon\varphi\gamma+\varepsilon\varphi\gamma\cdot\varepsilon\varphi\alpha = 1$$

9. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι διά κάθε τρίγωνον ἔχομεν:

$$E = \frac{1}{2}\beta\gamma\,\eta\mu A = \frac{1}{2}\gamma\alpha\,\eta\mu B = \frac{1}{2}\alpha\beta\,\eta\mu\Gamma$$

Οἱ ἀνωτέρω τύποι ἐμβαδῶν ἑνός τριγώνου ἐκφράζονται διά τοῦ ἀκολούθου κανόνος:

«Τό ἐμβαδόν ἑνός τριγώνου ἰσοῦται μέ τό ἥμισυ τοῦ γινομένου δύο πλευρῶν αὐτοῦ ἐπί τό ἡμίτονον τῆς περιεχομένης γωνίας», εἶναι δέ ἐκ τῶν σπουδαιοτέρων τύπων ἐμβαδοῦ ὡς καί ὁ $E = 2R^2\,\eta\mu A\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma$.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΘΕΜΕΛΙΩΔΩΝ ΤΟΞΩΝ

Ἀπαραίτητος, σύν τοῖς ἄλλοις, εἶναι καί ἡ τελεία γνῶσις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν κάτωθι θεμελιωδῶν τύπων:

$$0°,\ 90°,\ 180°,\ 270°,\ 30°,\ 45°,\ 60°,\ 18°,\ 15°,\ 22°30'$$

οἱ ὁποῖοι ἐμφανίζονται εἰς πλεῖστα ὅσα θέματα τριγωνομετρίας.

10. Νά ὁρισθῇ ἡ τιμή τῆς γωνίας A διά τήν ὁποίαν ἡ ἐξίσωσις

$$x^4+\frac{1}{3}\,\eta\mu A\cdot x^2+\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}}{200} = 0$$

νά ἔχῃ ρίζας εὑρισκομένας εἰς ἀριθμητικήν πρόοδον.

11. Νά δειχθῇ ὅτι

$$\frac{\eta\mu x}{2\sigma\upsilon\nu x-1}+\frac{2\eta\mu 2x}{2\sigma\upsilon\nu 2x-1}+\dots+\frac{2^{\nu-1}\eta\mu 2^{\nu-1}x}{2\sigma\upsilon\nu 2^{\nu-1}x-1} = \frac{2^{\nu}\eta\mu 2^{\nu}x}{2\sigma\upsilon\nu 2^{\nu}x+1}-\frac{\eta\mu x}{2\sigma\upsilon\nu x+1}$$

12. Νά εὑρεθοῦν τά τόξα τά συναληθεύοντα τάς σχέσεις

$$-3\pi < x < 2\pi \qquad \frac{2\,|\sigma\upsilon\nu x|-1}{\eta\mu\,|x|-1} < 3$$

13. Εἰς ἰσοσκελές τραπέζιον ΑΒΓΔ δίδεται ἡ μία βάσις $(AB)=2a$, τό μῆκος ἑκάστης τῶν ἴσων πλευρῶν $(B\Gamma)=(A\Delta)=\beta$ καί ζητεῖται νά ὑπολογισθῇ ἡ τιμή τῆς γωνίας $\widehat{AB\Gamma}=x$, ὥστε τό ἐμβαδόν τοῦ τραπεζίου νά γίνεται μέγιστον. Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ν' ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ διαγώνιοι εἶναι κάθετοι ἐπί τάς ἴσας πλευράς δηλ. $A\Gamma \perp A\Delta$ καί $B\Delta \perp B\Gamma$.

14. Ἐπί περιφερείας ἀκτῖνος R λαμβάνομεν δύο καθέτους ἄξονας $x'Ox$, $y'Oy$. Ἐπί τοῦ ἡμιάξονος Ox λαμβάνομεν δύο σημεῖα A καί B ὥστε $R<a<\beta$ $(a=OA,\ \beta=OB)$ ὡς καί μεταβλητόν σημεῖον M. Θέτομεν $xOM=\theta$ καί $AMB=\varphi$. Νά εὑρεθῇ ἡ τιμή τῆς γωνίας θ διά τήν ὁποίαν ἡ εφ φ γίνεται μέγιστον.

15. Δύο πύργοι AA', BB' φαίνονται ὁ εἷς ἀπό τήν βάσιν τοῦ ἄλλου ὑπό γωνίας λ καί 2λ, ἀπό δέ τό μέσον τῆς ἀποστάσεως αὐτῶν, ἥτις ἔστω a, φαίνονται ὑπό γωνίας συμπληρωματικάς. Νά εὑρεθοῦν τά ὕψη αὐτῶν.

16. Ἐάν $\Delta a, \Delta\beta, \Delta\gamma, \Delta A, \Delta B, \Delta\Gamma$ εἶναι αἱ ἀπειροσταί αὐξήσεις τῶν πλευρῶν καί τῶν γωνιῶν ἑνός τριγώνου, νά δειχθοῦν αἱ σχέσεις:

$$\frac{\Delta B}{\beta}-\frac{\Delta\Gamma}{\gamma}=\text{σφ}B\cdot\Delta B-\text{σφ}\Gamma\cdot\Delta\Gamma$$

$$a\cdot\Delta A=a\,\text{συν}\,\Gamma\cdot\Delta B+a\,\text{συν}\,B\cdot\Delta\gamma+\beta\gamma\,\text{ημ}\,A\cdot\Delta A$$

17. Κύκλος ἀκτῖνος a χωρίζεται εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη ὑπό κυκλικοῦ τόξου ἀκτῖνος $2a\,\text{συν}\,\theta$ ἔχοντος τό κέντρον του ἐπί τῆς περιφερείας τοῦ πρώτου κύκλου. Ἐάν ἡ γωνία θ ἐκφράζεται εἰς ἀκτίνια καί περιέχεται μεταξύ $0 \ldots \frac{\pi}{2}$, νά δειχθῇ ὅτι:

$$2\theta\,\text{συν}\,2\theta-\text{ημ}\,2\theta+\frac{\pi}{2}=0$$

18. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $a=\upsilon_a$. Νά εὑρεθοῦν τά ὅρια τοῦ λόγου $\frac{\beta}{\gamma}=\lambda$.

19. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπό τῶν πλευρῶν ἑνός κανονικοῦ ν-γώνου ἑνός σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου του παρέχεται ὑπό τοῦ τύπου $S = \nu \cdot \left[R^2 \text{συν}^2 \frac{\pi}{\nu} + \frac{1}{2}(OM)^2\right]$ ἔνθα R ἡ ἀκτίς τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας καί Ο τό κέντρον.

20. Νά εὑρεθοῦν τά S_ν τῶν κάτωθι σειρῶν

$$a_\nu = \text{τοξ σφ} \frac{\nu^2}{2} \quad , \quad a_\nu = \text{τοξ σφ}\left[\frac{1}{a} + \nu(\nu+1)a\right]$$

21. Ἐάν τοξ εφy = 5 τοξ εφx, νά εὑρεθῇ τό y ὡς ρητή συνάρτησις τοῦ x καί ἀκολούθως νά δειχθῇ ὅτι ἡ εφ18° εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως

$$5t^4 - 10t^2 + 1 = 0$$

22. Δίδεται περιφέρεια διαμέτρου (ΑΒ) = 2ρ καί αἱ ἐφαπτόμεναι (ε_1) καί (ε_2) εἰς τά Α καί Β ὡς καί σημεῖον Μ ἐπί τῆς διαμέτρου. Ζητεῖται νά ἀχθῇ ἐφαπτομένη ὥστε τό μεταξύ τῆς (ε_1) καί (ε_2) περιεχόμενον τμῆμα αὐτῆς νά φαίνεται ἐκ τοῦ Μ ὑπό τήν ἐλαχίστην γωνίαν.

23. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Διά τῶν κορυφῶν αὐτοῦ φέρομεν τάς εὐθείας Α'Β', Β'Γ', Γ'Α', ὥστε νά εἶναι $\widehat{A\Gamma A'} = \widehat{BAB'} = \widehat{\Gamma B\Gamma'} = x$. Ζητεῖται νά ὁρισθῇ ἡ τιμή τῆς γωνίας x ὥστε τό ἐμβαδόν (Α'Β'Γ') νά γίνῃ ἐλάχιστον.

24. Νά εὑρεθῇ τό ἄθροισμα S_ν, ὅταν $a_\nu = \text{τοξ εφ} \frac{1}{2\nu^2}$.

25. Δίδεται περιφέρεια κέντρου Κ καί σημεῖον Ο ἐκτός αὐτῆς. Φέρομεν τήν ἐφαπτομένην (ΟΑ) = α καί τέμνουσαν ΟΒΓ. Νά εὑρεθῇ ἡ θέσις τῆς ΟΒΓ ὥστε τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου νά γίνῃ μέγιστον.

26. Δίδεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΑΒ ($\hat{O} = 90°$) εἰς τό ὁποῖον ὁ λόγος $\frac{OA}{OB} = m > 0$, m = δοθέν. Ἑνοῦμεν τάς κορυφάς Α, Β μέ ἕν σημεῖον Μ τῆς διχοτόμου ΟΖ τῆς ὀρθῆς γωνίας καί θέτομεν $\widehat{OAM} = x$, $\widehat{OBM} = y$. Νά δειχθῇ ὅτι μεταξύ τῶν γωνιῶν x καί y ὑπάρχει ἡ σχέσις:

$$m\ \varepsilon\varphi x\cdot(1+\varepsilon\varphi y)=\varepsilon\varphi\, y\,(1+\varepsilon\varphi x)$$

καί ἐν συνεχείᾳ νά μορφωθῇ ἡ ἐξίσωσις ἡ ὁποία δίδει τό x ὅταν $x=2y$ καί νά εὑρεθῇ ἡ συνθήκη τήν ὁποίαν πρέπει νά πληροῖ ὁ m ὥστε νά ὑπάρχῃ ἐπί τῆς ΟΖ σημεῖον Μ ὥστε νά εἶναι $x=2y$.

27. Ἐάν $x+y=a$ καί $xy=\beta$, νά εὑρεθῇ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως

$$Z=\varepsilon\varphi\left[\frac{1}{2}\,\tau o\xi\,\eta\mu\,\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\,\tau o\xi\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{1-y^2}{1+y^2}\right]$$

συναρτήσει τῶν a, β.

28. Ἐάν Ο εἶναι τό κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου τριγώνου ΑΒΓ καί θ τό ὀρθόκεντρον, νά δειχθῇ ὅτι

$$(O\theta)^2=2\rho^2-4R^2\,\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu \Gamma$$

29. Ἐάν x_1, x_2, εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$\eta\mu^2 2a\cdot x^2-2\,(1-\sigma\upsilon\nu 2a\,\sigma\upsilon\nu 2\beta)x+\eta\mu^2\beta=0$$

νά γίνουν λογισταί διά τῶν λογαρίθμων αἱ παραστάσεις $\sqrt{x_1}\pm\sqrt{x_2}$.

30. Νά εὑρεθῇ τό ἐλάχιστον τοῦ ἀθροίσματος $\Sigma\,\varepsilon\varphi A\cdot\varepsilon\varphi B$, ἔνθα Α, Β, Γ γωνίαι τριγώνου.

31. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ἀληθεύουν αἱ σχέσεις:

$$(KO)=R\sqrt{1-8\eta\mu\frac{A}{2}\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}\quad,\qquad (KO_a)=R\cdot\sqrt{1+8\eta\mu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}$$

32. Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$x=\tau o\xi\,\varepsilon\varphi\left[2\varepsilon\varphi^2 x\right]-\frac{1}{2}\,\tau o\xi\,\eta\mu\left[\frac{3\eta\mu\,2x}{5+4\,\sigma\upsilon\nu 2x}\right]$$

33. Νά εὑρεθοῦν τά τόξα τά συναληθεύοντα τάς σχέσεις:

$$0<x<\frac{\pi}{2}\quad,\qquad \varepsilon\varphi x\,\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\,\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{2}\right)-3>0$$

$$\left[\varepsilon\varphi^3 x-\varepsilon\varphi^2 x+\varepsilon\varphi x-1\right]\cdot\left[1-\frac{x^2}{2}\right]-\frac{4}{\varepsilon\varphi\left[\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right]-\varepsilon\varphi x}=0$$

34. Δίδεται κυρτόν τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Θέτομεν $A\widehat{B}\Delta=\varphi_1$, $\Delta\widehat{B}\Gamma=\varphi_2$, $\Gamma\widehat{\Delta}B=\varphi_3$, $B\widehat{\Delta}A=\varphi_4$. Νά δειχθῇ ὅτι ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη ἵνα τοῦ-

το εἶναι περιγράψιμον, εἶναι

$$εφ\frac{φ_1}{2}\cdot εφ\frac{φ_3}{2} = εφ\frac{φ_2}{2}\cdot εφ\frac{φ_4}{2}$$

35. Ἐάν εἰς τρίγωνον ἀληθεύει ἡ σχέσις $\frac{ρ}{2}=\frac{ρ_α}{12}=\frac{R}{5}$, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τό τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον.

36. Δύο τρίγωνα $A_1B_1Γ_1$, $A_2B_2Γ_2$ ἔχουν τήν αὐτήν πλευράν $(A_1B_1)=(A_2B_2)=γ$ κατά θέσιν καί μέγεθος καί τήν αὐτήν γωνίαν $\widehat{B}_1=\widehat{B}_2=\widehat{B}$ ὁμοίως κατά θέσιν καί μέγεθος, ὡς καί $(A_1Γ_1)=(A_2Γ_2)=β$. Νά ὑπολογισθῇ τό ἄθροισμα καί τό γινόμενον τῶν $α_1$, $α_2$, συναρτήσει τῶν δεδομένων $β$, $γ$, B.

37. Μέ τά δεδομένα τῆς ἀσκήσεως (36) νά δειχθῇ ὅτι:

$$α_1-α_2=\pm 2\sqrt{β^2-γ^2ημ^2B} \quad , \quad ημ\frac{A_1-A_2}{2}=\frac{α_1-α_2}{2β}$$

38. Μέ τά δεδομένα τῆς ἀσκήσεως (36) νά δειχθῇ ὅτι:

$$(α_1-α_2)^2+(α_1+α_2)^2\cdot εφ^2B=4β^2$$

39. Ἐάν εἰς τήν ἄσκησιν (36) εἶναι $α_1=3α_2$, νά δειχθῇ ὅτι $2β=γ\cdot\sqrt{1+3ημ^2B}$. Ἐάν δέ $Γ_2=2Γ_1$, τότε $2γημB=β\sqrt{3}$.

40. Ἐάν δύο τρίγωνα πληροῦν τά δεδομένα τῆς ἀσκήσεως (36) καί ἔχουν λόγον ἐμβαδῶν $\frac{3}{2}$, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $25(γ^2-β^2)=24γ^2συν^2B$.

41. Μέ τά δεδομένα τῆς ἀσκήσεως (36), ἐάν εἶναι $A_1=2A_2$, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$4γ^3ημ^2B=β^2(β+3γ)$$

42. Δίδεται ἰσοσκελές τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τό ὁποῖον $\widehat{B}=\widehat{Γ}=80°$. Διά τῆς κορυφῆς Β φέρομεν τήν ΒΝ τέμνουσαν τήν ΑΓ εἰς τό Ν καί τήν ΓΜ τέμνουσαν τήν ΑΒ εἰς τό Μ. Ἐάν $Γ\widehat{B}N=50°$ καί $B\widehat{Γ}M=60°$, νά ὑπολογισθῇ ἡ τιμή τῆς γωνίας $φ=Γ\widehat{M}N$ ἄνευ τῆς χρήσεως λογαρίθμων.

43. Διά σημείου Ρ τῆς προεκτάσεως διαμέτρου ΑΒ κύκλου Ο, ἄγεται τυχοῦσα εὐθεῖα ΡΓ. Ἐπί τῆς περιφερείας, εἰς τό Γ, κάθετος ἐπ' αὐτήν ἡ

ΓΔ (Δ σημεῖον τῆς διαμέτρου). Ἐάν $\widehat{B\Gamma P} = a$, νά δειχθῆ ἡ σχέσις:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu^2 a}{PA} + \frac{\eta\mu^2 a}{PB} = \frac{1}{P\Delta}$$

44. Εἰς κανονικόν ἑπτάγωνον ΑΒΓΔΕΖΗ ν' ἀποδειχθῆ ὅτι:

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{A\Gamma} + \frac{1}{A\Delta}$$

45. Δίδονται τρεῖς ἡμιευθεῖαι Ox, Oy, Oz, διά τάς ὁποίας ἔχομεν $\widehat{xOy} = \widehat{yOz} = 60°$. Ἐάν P, M, K εἶναι τρία σημεῖα κείμενα ἀντιστοίχως ἐπί τῶν ἡμιευθειῶν Ox, Oy, Oz, νά δειχθῆ ὅτι ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη ἵνα ταῦτα κεῖνται ἐπ' εὐθείας εἶναι:

$$\frac{1}{OM} = \frac{1}{OP} + \frac{1}{OK}$$

46. Δίδεται πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ μέ μήκη πλευρῶν $(AB) = a$, $(B\Gamma) = \beta$, $(\Gamma\Delta) = \gamma$, $(\Delta E) = \delta$, $(EA) = \varepsilon$. Ἐάν διά S παραστήσωμεν τό ἐμβαδόν τοῦ πενταγώνου, ν' ἀποδειχθῆ ὅτι:

$$2S = a\beta\,\eta\mu(\bar{a},\bar{\beta}) + a\gamma\,\eta\mu(\bar{a},\bar{\gamma}) + a\delta\,\eta\mu(\bar{a},\bar{\delta}) + \beta\gamma\,\eta\mu(\bar{\beta},\bar{\gamma}) + \beta\delta\,\eta\mu(\bar{\beta},\bar{\delta}) + \gamma\delta\,\eta\mu(\bar{\gamma},\bar{\delta})$$

ἔνθα πρό ἑνός τοὐλάχιστον τῶν προσθετέων ὑπάρχει τό πρόσημον (—).

47. Ἐάν $x = \frac{2\pi}{13}$, νά δειχθῆ:

α) $\sigma\upsilon\nu\, x\; \sigma\upsilon\nu\, 2x \ldots \sigma\upsilon\nu\, 6x = -\frac{1}{2^6}$ καί

β) $[\sigma\upsilon\nu\, 2x + \sigma\upsilon\nu\, 3x]\cdot[\sigma\upsilon\nu\, 4x + \sigma\upsilon\nu\, 6x]\cdot[\sigma\upsilon\nu\, 8x + \sigma\upsilon\nu\, 12x] = \frac{1}{8}$

καί γενικῶς, ἐάν $x = \frac{2\pi}{2\nu+1}$, νά δειχθῆ ὅτι:

$$\sigma\upsilon\nu\, x\; \sigma\upsilon\nu\, 2x \ldots \sigma\upsilon\nu(\nu x) = \pm\frac{1}{2^\nu}.$$

48. Εἰς κύκλον ἀκτῖνος $R \leq 2$ θεωροῦμεν τόξον ἐκπεφρασμένον εἰς ἀκτίνια. Ἐάν τοῦτο πληροῖ τήν σχέσιν $a < \frac{1}{4} R^{\frac{8}{3}} \cdot \varepsilon^{\frac{1}{3}}$, ν' ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ διαφορά μεταξύ τόξου καί χορδῆς εἶναι μικροτέρα τοῦ ε.

49. Ἐάν x_1, x_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$\eta\mu^2 2a \cdot x^2 - 2(1 - \sigma\upsilon\nu\, 2a\; \sigma\upsilon\nu\, 2\beta)x + \eta\mu^2 2\beta = 0$$

νά γίνουν λογισταί διά τῶν λογαρίθμων αἱ παραστάσεις $\sqrt{x_1}$, $\pm\sqrt{x_2}$.

50. Νά δειχθῇ ὅτι ὁ τύπος $\gamma=\beta\,\sigma\upsilon\nu A \pm \sqrt{\alpha^2-\beta^2\eta\mu^2 A}$ δύναται νά γραφῇ καί ὡς ἑξῆς:

$$\gamma=\alpha\,\eta\mu\,(\theta \pm A)\,\sigma\tau\epsilon\mu\,A$$

ἔνθα $\eta\mu\theta=\frac{\beta}{\alpha}\eta\mu A.$

51. Εἰς κάθε τρίγωνον νά δειχθῇ ὅτι $\epsilon\varphi\frac{B-\Gamma}{2}=\epsilon\varphi(45^\circ-\theta)\cdot\sigma\varphi\frac{A}{2}$, ἔνθα $\epsilon\varphi\theta=\frac{\gamma}{\beta}$. Νά εὑρεθῇ ἡ $\frac{B-\Gamma}{2}$, ὅταν $\beta=321$ μ., $\gamma=436$ μ., $A=119^\circ 15'$.

52. Ἐάν εἰς τρίγωνον εἶναι $\alpha=4$, $\beta=5$, $\gamma=6$, νά δειχθῇ ὅτι $\widehat{\Gamma}=2A$.

53. Εἰς κάθε τρίγωνον νά δειχθῇ ὅτι:

$$\frac{\alpha}{\beta\gamma}+\frac{\sigma\upsilon\nu A}{\alpha}=\frac{\beta}{\gamma\alpha}+\frac{\sigma\upsilon\nu B}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha\beta}+\frac{\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\gamma}$$

54. Νά δειχθῇ ὅτι: $\beta^2(\sigma\varphi A+\sigma\varphi B)=\gamma^2(\sigma\varphi A+\sigma\varphi\Gamma)$

55. Νά δειχθῇ ὅτι: $\dfrac{\beta\,\tau\epsilon\mu B+\gamma\,\tau\epsilon\mu\Gamma}{\epsilon\varphi B+\epsilon\varphi\Gamma}=\dfrac{\gamma\,\tau\epsilon\mu\Gamma+\alpha\,\tau\epsilon\mu A}{\epsilon\varphi\Gamma+\epsilon\varphi A}$

56. Νά δειχθῇ ὅτι: $\eta\mu^2 A+\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma\,\sigma\upsilon\nu A=\dfrac{2E^2\cdot(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{\alpha^2\cdot\beta^2\cdot\gamma^2}$

57. Νά δειχθῇ ὅτι: $\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu(A-B)\,\sigma\upsilon\nu\Gamma}{1+\sigma\upsilon\nu(A-\Gamma)\,\sigma\upsilon\nu B}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+\gamma^2}$

58. Νά δειχθῇ ὅτι: $\alpha\,\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma+\beta\,\sigma\upsilon\nu\Gamma\,\sigma\upsilon\nu A+\gamma\,\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B=\dfrac{2E\eta\mu A}{\alpha}$.

59. Ἐάν $\beta+\gamma=2\alpha$, νά δειχθῇ ὅτι $4E=3\alpha^2\,\epsilon\varphi\frac{A}{2}$.

60. Ἐάν $\alpha^2=\beta(\beta+\gamma)$, νά δειχθῇ ὅτι $A=2B$.

61. Διά κάθε τρίγωνον νά δειχθῇ ὅτι:

α) $\gamma^2=\alpha^2\sigma\upsilon\nu 2B+\beta^2\sigma\upsilon\nu 2A+2\alpha\beta\,\sigma\upsilon\nu(A-B)$

β) $\dfrac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\,\sigma\varphi\dfrac{A}{2}+\dfrac{\beta+\gamma}{\beta-\gamma}\,\epsilon\varphi\dfrac{A}{2}=2\,\sigma\tau\epsilon\mu\,(B-\Gamma)$

γ) $\alpha(1+2\,\sigma\upsilon\nu 2A)\,\sigma\upsilon\nu 3B+\beta(1+2\,\sigma\upsilon\nu 2B)\,\sigma\upsilon\nu 3A=\gamma(1+2\,\sigma\upsilon\nu 2\Gamma)$

62. Ἐάν εἰς τρίγωνον ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B+\eta\mu A\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma=1$$

νά δειχθῇ ὅτι $A=B=45^\circ$

63. Ἐάν δύο κανονικά πολύγωνα μέ πλῆθος πλευρῶν ν καί 2ν ἔχουν ἴσας περιμέτρους, νά δειχθῇ ὅτι ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των εἶναι:

$$\text{συν}\frac{\pi}{\nu} : \text{συν}^2\frac{\pi}{\nu}$$

64. Νά ἐκφρασθῇ διά συμμετρικοῦ τύπου ἡ παράστασις

$$\frac{E}{\alpha}+\rho\,\text{συν}A-R\,\text{συν}^2A$$

65. Νά δειχθῇ ἡ ταυτότης: $\alpha\,\text{ημ}B\,\text{ημ}\Gamma+\beta\,\text{ημ}\Gamma\,\text{ημ}A+\gamma\,\text{ημ}A\,\text{ημ}B=\frac{3E}{R}$.

66. Νά δειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ἀληθεύει ἡ σχέσις:

$$\alpha^2\text{συν}^2A=\beta^2\text{συν}^2B+\gamma^2\text{συν}^2\Gamma+2\beta\gamma\,\text{συν}B\,\text{συν}\Gamma\,\text{συν}2A$$

Κατόπιν τούτου νά δειχθῇ ὅτι, ἐάν εἰς τρίγωνον ἀληθεύει ἡ σχέσις:

$$\beta^2+\gamma^2=\alpha^2+\sqrt{2}\,\beta\gamma$$

θά ἀληθεύῃ καί ἡ $\quad \alpha^2\text{συν}^2A=\beta^2\text{συν}^2B+\gamma^2\text{συν}^2\Gamma$

67. Νά λυθῇ καί διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$\text{συν}^2x-2m\,\text{συν}x+4m^2+2m-1=0$$

68. Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$\text{συν}^3x-\text{ημ}x\,\text{συν}x-\text{ημ}^3x=1$$

69. Ἐάν ἕν τόξον θ ἐκφράζεται εἰς ἀκτίνια καί διά τοῦ συμβόλου $\left[\frac{\alpha}{\beta}\right]$ συμβολίσωμεν τόν μικρότερον ἀκέραιον ἀπό τό κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ὅταν $\beta\neq 1$ καί τόν ἀκέραιον τόν ὁποῖον παριστᾶ τό κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ὅταν $\beta=1$, νά δειχθῇ ὅτι:

α) $\text{ημ}\frac{\theta}{2}=(-1)^{\left[\frac{\theta}{2\pi}\right]}\sqrt{\frac{1-\text{συν}\theta}{2}}$, β) $\text{συν}\frac{\theta}{2}=(-1)^{\left[\frac{\theta+\pi}{2\pi}\right]}\sqrt{\frac{1+\text{συν}\theta}{2}}$

70. Νά δειχθῇ ὅτι ἐάν $\text{τοξεφ}\,\alpha+\text{τοξεφ}\,\beta+\text{τοξεφ}\,\gamma=\frac{\pi}{2}$, τότε $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$ καί ἐάν $\text{τοξσυν}\,\alpha+\text{τοξσυν}\,\beta+\text{τοξσυν}\,\gamma=\pi$, τότε $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta\gamma=1$.

71. Νά δειχθῇ ἡ σχέσις:

$$\text{τοξ συν}\frac{\beta+\alpha\,\text{συν}x}{\alpha+\beta\,\text{συν}x}=2\,\text{τοξ εφ}\left[\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}}\cdot\text{εφ}\frac{x}{2}\right]$$

72. Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$\text{τοξ εφ}\,x + \text{τοξ εφ}\,\frac{2x}{1-x^2} = \frac{\pi}{3}$$

73. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τήν ἡμιευθεῖαν ΑΚ τέμνουσαν τήν πλευράν ΒΓ εἰς το θ. Διά τῶν κορυφῶν Β καί Γ φέρομεν ἀντιστοίχως ἐπί τήν ΑΚ τάς καθέτους ΒΕ καί ΓΖ, θέτομεν $\widehat{BA\Theta} = x$. Ζητεῖται νά ὑπολογισθῇ ἡ τιμή τῆς γωνίας x, ὥστε τό ἐμβαδόν τοῦ τετραπλεύρου ΒΕΓΖ νά γίνεται μέγιστον.

74. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι x καί y καί σημεῖον Ρ ἐκτός αὐτῶν. Διά τοῦ Ρ φέρομεν κάθετον ἐπί τάς y, x τήν ΡΒΑ τέμνουσαν τάς y καί x ἀντιστοίχως εἰς τά Β καί Α. Ἐάν φέρωμεν καί ἄλλην κοινήν κάθετον πρός τάς x, y τήν $A'B'$, ζητεῖται νά εὑρεθῇ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπό τῆς ΑΒ πρέπει νά ἀχθῇ αὕτη ὥστε τό εὐθύγραμμον τμῆμα $A'B'$ νά φαίνεται ἀπό τό Ρ ὑπό τήν μεγίστην δυνατήν γωνίαν.

75. Ἐπί τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$ κυκλικοῦ τομέως ΑΟΒ ἀκτῖνος R καί κεντρικῆς γωνίας $a < 90°$, λαμβάνομεν σημεῖον Μ. Φέρομεν τήν ΜΚ κάθετον πρός τήν ἀκτῖνα ΟΑ καί τήν ΜΝ παράλληλον πρός ταύτην. Διά τοῦ Ν φέρομεν ἐπί τήν ΟΑ τήν κάθετον ΝΡ. Ἐάν $\widehat{AOM} = x$, ζητεῖται νά ὑπολογισθῇ ἡ τιμή τῆς γωνίας x ὥστε τό ἐμβαδόν τοῦ ἐγγεγραμμένου ὀρθογωνίου ΡΚΜΝ νά γίνῃ μέγιστον.

76. Ἐάν διά τοῦ Π_ν παραστήσωμεν τήν περίμετρον κανονικοῦ ν-γώνου περιγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος R καί διά τοῦ E_ν τήν περίμετρον κανονικοῦ ν-γώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τόν αὐτόν κύκλον, νά ἀποδειχθοῦν αἱ σχέσεις $\Pi_\nu > \Pi_{\nu+1}$, $E_\nu > E_{\nu+1}$.

77. Δύο κύκλοι ἀκτίνων R καί R', ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς. Ἐάν a εἶναι ἡ γωνία τῶν κοινῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων των, ν' ἀποδειχθῇ ἡ σχέσις

$$(R+R')^2 \text{ημ}\,a = 4(R-R')\sqrt{RR'}$$

78. Νά εὑρεθῇ τό ἄθροισμα $S_\nu = a_1 + a_2 + \ldots a_\nu$ ὅταν $a_\nu = \text{τοξ}\,\text{σφ}(1+\nu+\nu^2)$.
[Στηριχθῆτε εἰς τήν ταυτότητα $\text{τοξ}\,\text{εφ}(\nu+1) - \text{τοξ}\,\text{εφ}\nu = \text{τοξ}\,\text{σφ}(1+\nu+\nu^2)$].

79. Νά εὑρεθῇ τό S_ν ὅταν $a_\nu = \text{τοξ}\,\text{σφ}\dfrac{\nu^2}{8}$.

80. Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{\text{ημ}x} + \sqrt{\text{συν}x} = \lambda$.

81. Δύο περιφέρειαι κέντρων O καί O' καί ἀκτίνων R καί R' ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τό A. Ἐάν M εἶναι ἕν σημεῖον τῆς πρώτης περιφερείας καί θέσωμεν $\widehat{AOM} = x$ (τό x ἐκφράζεται εἰς ἀκτίνια) λάβωμεν δέ τήν $O'M$, ἡ ὁποία τέμνει τήν O' εἰς τό M', ζητεῖται νά εὑρεθῇ τό ὅριον $\text{ορ.}\dfrac{MM'}{(\text{τοξ}\,AM)^2}$, ὅταν τό $x \to 0$.

82. Διά κάθε φυσικόν $\nu \geq 2$, νά δειχθῇ ἡ ἀνισότης:

$$\frac{\nu\,\text{εφ}\dfrac{\pi}{\nu} - (\nu+1)\,\text{εφ}\dfrac{\pi}{\nu+1}}{(\nu+1)\text{ημ}\dfrac{\pi}{\nu+1} - \nu\,\text{ημ}\dfrac{\pi}{\nu}} > 1.$$

83. Δίδεται ἄξων $x'Ox$ καί διάνυσμα $\overline{OA}$ σχηματίζον μέ τόν ἄξονα $x'Ox$ γωνίαν φ. Ἐάν a εἶναι τό μέτρον τοῦ διανύσματος OA καί θεωρήσωμεν καί δεύτερον διάνυσμα $\overline{AB}$ μέτρου a καί διά τό ὁποῖον νά ἔχωμεν $\widehat{\overline{OA}, \overline{AB}} = \varphi$, ζητεῖται νά ὑπολογισθῇ ἡ τιμή τῆς γωνίας φ, ὥστε τό μέτρον τῆς προβολῆς τοῦ διανύσματος $\overline{OB}$ ἐπί τοῦ ἄξονος $x'Ox$ νά εἶναι μ (διερεύνησις).

84. Νά εὑρεθοῦν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$\sqrt{1+\text{εφ}\omega} + \sqrt{2(1+\text{τεμ}\,\omega)} = \sqrt{1-\text{εφ}\omega}$$

αἱ περιλαμβανόμεναι εἰς τό διάστημα $-4\pi < \omega < -\pi$

85. Εἰς τά ἄκρα εὐθυγράμμου τμήματος $(AB = \lambda)$ ὑψοῦμεν τάς καθέτους $(AA') = (BB') = a$. Ζητεῖται εἰς ποίαν θέσιν πρέπει νά τοποθετηθῇ ἐπί τοῦ AB εὐθύγραμμον τμῆμα $(\Gamma\Delta) = \mu$, ὥστε ἀπό τοῦ σημείου A' νά φαίνεται ὑπό διπλασίαν γωνίαν ἐκείνης ὑπό τήν ὁποίαν φαίνεται ἐκ τοῦ B'.

86. Νά εὑρεθῆ τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς

$$\text{τοξ εφ}\frac{4}{1+3\cdot 4}+\text{τοξ εφ}\frac{6}{1+8\cdot 9}+\text{τοξ εφ}\frac{8}{1+15\cdot 16}+\dots$$

87. Ἐντός τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν σημεῖον Ο τοιοῦτον ὥστε νά ἔχωμεν

$$\widehat{OAB}=\widehat{OB\Gamma}=\widehat{O\Gamma A}=\omega$$

Νά δειχθοῦν τότε αἱ κάτωθι σχέσεις:

α) $\text{στεμ}^2\omega=\text{στεμ}^2A+\text{στεμ}^2B+\text{στεμ}^2\Gamma$

β) $\text{σφ}\,\omega=\text{σφ}A+\text{σφ}B+\text{σφ}\Gamma$

γ) $(\text{σφ}\omega-\text{σφ}A)(\text{σφ}\omega-\text{σφ}B)(\text{σφ}\omega-\text{σφ}\Gamma)=\text{στεμ}A\cdot\text{στεμ}B\cdot\text{στεμ}\Gamma$

δ) $\text{ημ}^3\omega=\text{ημ}(A-\omega)\,\text{ημ}(B-\omega)\,\text{ημ}(\Gamma-\omega)$

88. Ἐάν α, β, γ εἶναι πλευραί τριγώνου ΑΒΓ καί Α, Β, Γ αἱ γωνίαι αὐτοῦ, νά δειχθῆ ὅτι διά τυχοῦσαν γωνίαν (θ) ἰσχύει

$$\gamma\,\text{συν}(A-\theta)+\alpha\,\text{συν}(\Gamma+\theta)=\beta\,\text{συν}\theta$$

89. Ἐάν Κ εἶναι τό κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας, Ο τό κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τρίγωνον ΑΒΓ καί Α΄, Β΄, Γ΄ αἱ τομαί τῶν διχοτόμων ΑΚ, ΒΚ, ΓΚ μέ τήν περιγεγραμμένην περιφέρειαν, θέσωμεν δέ $AK\cdot A'K=BK\cdot B'K=\Gamma K\cdot\Gamma'K=R^2-z^2$, νά ἀποδειχθῆ ἡ σχέσις $\frac{1}{R-Z}+\frac{1}{R+Z}=\frac{1}{\rho}$.

90. Εἰς δοθέν τρίγωνον ΑΒΓ νά ὑπολογισθῆ ἡ γωνία $\widehat{\overline{AA^1},\overline{KO}}$.

91. Διά κάθε τόξον x διά τό ὁποῖον $0<x<\frac{\pi}{2}$, νά δειχθῆ ἡ ἀνισότης:

$$\frac{\text{εφ}x}{x}>\frac{x}{\text{ημ}x}$$

92. Εἰς ἕν ἑξάγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον ἀκτῖνος R, τά μήκη τῶν πλευρῶν εἶναι ἐναλλάξ λ καί μ. Νά ἀποδειχθῆ τότε ὅτι

$$3R^2=\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2$$

93. Ἐάν $\text{συν}\alpha+\text{συν}\beta+\text{συν}\gamma=0$, $\text{ημ}\alpha+\text{ημ}\beta+\text{ημ}\gamma=0$.
νά ἀποδειχθῆ ὅτι:

$$\sigma\upsilon\nu 3\alpha+\sigma\upsilon\nu 3\beta+\sigma\upsilon\nu 3\gamma=3\,\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta+\gamma)\quad,\quad \eta\mu 3\alpha+\eta\mu 3\beta+\eta\mu 3\gamma=3\,\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma)$$

[Ἐφαρμόσατε τήν ταυτότητα $K^3+\Lambda^3+M^3-3K\Lambda M=(K+\Lambda+M)\cdot(\ldots\ldots)$].

94. Ἐάν $A+B+\Gamma=180°$, νά δειχθοῦν αἱ ταυτότητες:

α) $\eta\mu^3 A+\eta\mu^3 B+\eta\mu^3\Gamma=3\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{3A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{3B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{3\Gamma}{2}$

β) $\eta\mu^2\frac{A}{2}+\eta\mu^2\frac{B}{2}+\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2}+2\eta\mu\frac{A}{2}\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}=1.$

95. Ἐάν $x+y+z=2S$, νά δειχθῇ ἡ ταυτότης:

$$\sigma\upsilon\nu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 y+\sigma\upsilon\nu^2 z+2\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y\,\sigma\upsilon\nu z-1=4\sigma\upsilon\nu S\,\sigma\upsilon\nu(S-x)\,\sigma\upsilon\nu(S-y)\,\sigma\upsilon\nu(S-z)$$

96. Νά δειχθῇ ὅτι ἐάν αἱ ἐξισώσεις:

$$\alpha\,\sigma\upsilon\nu(A-3\theta)=2\beta\,\sigma\upsilon\nu^3\theta \qquad \text{καί} \qquad \alpha\,\eta\mu(A-3\theta)=2\beta\,\eta\mu^3\theta$$

εἶναι συμβιβασταί, θά ἀληθεύῃ ἡ σχέσις:

$$2\beta^2+\alpha\beta\,\sigma\upsilon\nu A=\alpha^2$$

97. Νά δειχθῇ ὅτι $\tau o\xi\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y}{1+\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y}=2\,\tau o\xi\,\varepsilon\varphi\left[\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{y}{2}\right]$

98. Νά εὑρεθοῦν αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\sqrt{\pi^2-4x^2}=\tau o\xi\,\eta\mu[\sigma\upsilon\nu x]$, αἱ πληροῦσαι τήν σχέσιν $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$.

99. Νά γίνῃ ἡ ἀπαλοιφή τοῦ τόξου θ μεταξύ τῶν ἐξισώσεων

$$\frac{x}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\theta+\frac{y}{\beta}\eta\mu\theta=1 \qquad x\,\eta\mu\theta-y\,\sigma\upsilon\nu\theta=\sqrt{\alpha^2\eta\mu^2\theta+\beta^2\sigma\upsilon\nu^2\theta}$$

100. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι $x'x$ καί $y'y$ καί δύο σημεῖα A καί B ἀπέχοντα ἴσον ἀπό τάς $x'x$ καί $y'y$. Ἐάν α εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν δύο σημείων, ζητεῖται νά ἀχθῇ διά τοῦ A τέμνουσα τήν $x'x$ εἰς τό M καί τήν $y'y$ εἰς τό N, ὥστε τό εὐθύγραμμον τμῆμα νά φαίνεται ἀπό τό B ὑπό γωνίαν $45°$. Νά ληφθῇ ὡς βοηθητική γωνία ἡ $\widehat{BAM}=\omega$.

101. Νά γίνῃ ἡ ἀπαλοιφή τοῦ τόξου θ μεταξύ τῶν ἐξισώσεων:

$$\frac{x}{\sigma\upsilon\nu\theta+K\cdot\sigma\upsilon\nu A}=\frac{\alpha}{\eta\mu\theta}=\frac{\beta}{1+K\sigma\upsilon\nu(\theta+A)}$$

ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι $\beta^2=\alpha^2(1-K^2)$.

102. Νά δειχθῇ ὅτι ἐάν $συν^2A+συν^2B+συν^2Γ-2συνA\,συνB\,συνΓ=1$, τότε:

$$A\pm B\pm Γ=2νπ$$

103. Νά δειχθῇ ὅτι ἐάν $συνA+συνB+συνΓ=1+4ημ\frac{A}{2}ημ\frac{B}{2}ημ\frac{Γ}{2}$, τότε:

$$A\pm B\pm Γ=(4ν\pm 1)\cdot π$$

104. Ἐαν $A+B+Γ=π$, νά δειχθῇ ἡ ταυτότης:

$$εφ\left(\frac{π}{4}-\frac{A}{4}\right)\cdot εφ\left(\frac{π}{4}-\frac{B}{4}\right)\cdot εφ\left(\frac{π}{4}-\frac{Γ}{4}\right)=\frac{ημ\frac{A}{2}+ημ\frac{B}{2}+ημ\frac{Γ}{2}-1}{συν\frac{A}{2}+συν\frac{B}{2}+συν\frac{Γ}{2}}$$

105. Δίδεται τρίγωνον $ABΓ$ καί σημεῖον O τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου. Ἐάν $α, β, γ$ εἶναι τά μήκη τῶν πλευρῶν καί x, y, z αἱ ἀποστάσεις τοῦ O ἀπό τῶν κορυφῶν $A, B, Γ$ νά δειχθῇ ἡ σχέσις:

$$(x^2+y^2-γ^2)\cdot(y^2+z^2-α^2)\cdot(z^2+x^2-β^2)=2x^2y^2z^2+x^2y^2(x^2+y^2)+$$
$$+y^2z^2(y^2+z^2)+z^2x^2(z^2+x^2)+x^2α^4+y^2β^4+z^2γ^4-2x^2y^2(α^2+β^2)-$$
$$-2y^2z^2(β^2+γ^2)-2z^2x^2(γ^2+α^2)$$

106. Ἐάν $A, B, Γ$ εἶναι γωνίαι τριγώνου, νά ἀποδειχθῇ ἡ σχέσις:

$$2(ημ^2A\,ημ^2B+ημ^2B\,ημ^2Γ+ημ^2Γ\,ημ^2A)=4ημ^2A\,ημ^2B\,ημ^2Γ+ημ^4A+ημ^4B+ημ^4Γ$$

107. Νά γίνῃ ἡ ἀπαλοιφή τοῦ τόξου $θ$ μεταξύ τῶν ἐξισώσεων:

$$x\,ημθ-y\,συνθ=\sqrt{x^2+y^2} \qquad \frac{συν^2θ}{β^2}+\frac{ημ^2θ}{α^2}=\frac{1}{x^2+y^2}$$

108. Νά γίνῃ ἡ ἀπαλοιφή τοῦ τόξου $θ$ μεταξύ τῶν ἐξισώσεων:

$$x=εφθ+εφ2θ \qquad y=σφθ+σφ2θ$$

109. Ἐάν $α\,συνx\,συνy+β\,ημx\,ημy=γ$, $α\,συνy\,συνz+β\,ημy\,ημz=γ$

$$α\,συνz\,συνx+β\,ημz\,ημx=γ$$

καί τά τόξα x, y, z ἔχουν διάφορα πέρατα, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $αβ+βγ+γα=0$.

110. Δίδεται τετράγωνον $ABΓΔ$ καί ἐντός αὐτοῦ σημεῖον O. Ἐάν $\widehat{AOB}=α$, $\widehat{BOΓ}=β$, $\widehat{ΓOΔ}=γ$, $\widehat{ΔOA}=δ$, νά δειχθῇ ἡ σχέσις:

$$\frac{1}{σφα+σφγ}+\frac{1}{σφβ+σφδ}=1$$

111. Νά δειχθῇ ὅτι $E=\dfrac{(\tau-\alpha)^2 \eta\mu A+(\tau-\beta)^2 \eta\mu B+(\tau-\gamma)^2 \eta\mu \Gamma}{2\left(\eta\mu^2 \frac{A}{2}+\eta\mu^2 \frac{B}{2}+\eta\mu^2 \frac{\Gamma}{2}\right)}$

112. Ἐάν αἱ γωνίαι A, B, Γ ἑνός τριγώνου πληροῦν τήν σχέσιν:

$$\varepsilon\varphi^2 A+\varepsilon\varphi^2 B+\varepsilon\varphi^2 \Gamma<(\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu \Gamma)^2$$

νά δειχθῇ ὅτι τό τρίγωνον εἶναι ἀμβλυγώνιον.

113. Νά δειχθῇ ὅτι ἐάν $\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu(\nu\alpha+\beta)=\eta\mu\beta\, \eta\mu(\nu\beta+\alpha)$, $0<\nu<1$, $0<\alpha+\beta<\pi$, τότε $\alpha=\beta$.

114. Διά πᾶν τρίγωνον $AB\Gamma$ ν᾽ ἀποδειχθῇ ὅτι $E=R \cdot r'$, ἔνθα r' ἡ ἡμιπερίμετρος τοῦ ὀρθικοῦ του τριγώνου.

115. Νά δειχθῇ ὅτι ἐάν $\dfrac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha+\beta+\gamma}=\gamma^2$ καί $\eta\mu A \cdot \eta\mu B=\eta\mu^2(A+B)$, τό τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον.

116. Νά εὑρεθῇ πόσας τό πολύ τιμάς δύναται νά λάβῃ ἡ παράστασις:

$$\pi=\sigma\upsilon\nu\left[\frac{1}{3}\, \tau o\xi\, \eta\mu \lambda\right]$$

καί ἐν συνεχείᾳ νά ὑπολογισθῇ τό γινόμενον ὅλων αὐτῶν τῶν τιμῶν.

117. Νά ὁρισθοῦν τά α, β ὥστε ἡ παράστασις $\dfrac{\alpha\eta\mu x+\beta\eta\mu 2x+\eta\mu 3x}{x^5}$ νά ἔχῃ ὅριον ὅταν $x \longrightarrow 0$. Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην νά ὑπολογισθῇ τό ἐν λόγῳ ὅριον.

118. Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$\tau o\xi\, \sigma\upsilon\nu x+\tau o\xi\, \eta\mu 2x=-\tau o\xi\, \varepsilon\varphi\left[\frac{1}{x} \cdot \sqrt{\frac{8x^4-5x^2+1}{5-8x^2}}\right]$$

119. Νά δειχθῇ ὅτι ἡ σειρά:

$$\sigma\upsilon\nu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 2x+\sigma\upsilon\nu^2 3x+\ldots+\sigma\upsilon\nu^2(\nu x)+\ldots$$

εἶναι ἀναδρομική τρίτης τάξεως.

120. Μέ πλευράς τάς πλευράς ἑνός ὀξυγωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζομεν ἐξωτερικῶς αὐτοῦ τετράγωνα. Ἐάν A', B', Γ' εἶναι τά κέντρα τῶν τετραγώνων τούτων καί καλέσωμεν E' τό ἐμβαδόν τοῦ

τριγώνου $A'B'\Gamma'$, νά δειχθῇ ἡ σχέσις:

$$\frac{2E'}{E} = 2 + σφA + σφB + σφΓ$$

121. Ἐάν μεταξύ τῶν γωνιῶν x, θ ὑφίστανται αἱ σχέσεις:

$$ημ\,x = εφ\frac{\theta}{2} \quad , \quad ημ\,\theta = σφ\frac{x}{2}$$

νά δειχθῇ ὅτι $συν\,x = συν\,\theta = 0$.

122. Ἐπί τῶν πλευρῶν τριγώνου $ABΓ$ καί ἐξωτερικῶς αὐτοῦ κατασκευάζομεν ἰσόπλευρα τρίγωνα. Ἐάν υ_α, υ_β, υ_γ εἶναι τά ὕψη τῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων καί μ_α, μ_β, μ_γ αἱ διάμεσοι τοῦ τριγώνου $ABΓ$, νά δειχθοῦν αἱ σχέσεις:

$$\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \upsilon_\alpha^2 + \upsilon_\beta^2 + \upsilon_\gamma^2 \quad , \quad \mu_\alpha^4 + \mu_\beta^4 + \mu_\gamma^4 = \upsilon_\alpha^4 + \upsilon_\beta^4 + \upsilon_\gamma^4$$

123. Ἐάν θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 εἶναι τέσσαρες λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\,συν\,4\theta + \beta\,ημ\,4\theta = \gamma$, μή διαφέρουσαι κατά πολλαπλάσιον περιφερείας, νά δειχθῇ ἡ σχέσις:

$$εφ\theta_1 \cdot εφ\theta_2 \cdot εφ\theta_3 \cdot εφ\theta_4 = 1$$

124. Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\quad 27x^3 - 18x - 4\sqrt{2} = 0$

125. Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\quad 2τοξ\,εφ(συν x) = τοξ\,εφ\left(\frac{1}{ημ x}\right)$

126. Ἐάν θ_1, θ_2 εἶναι δύο λύσεις τῆς ἐξισώσεως:

$$\alpha\,συν(\theta + A) + \beta\,ημ(\theta - A) = \gamma$$

μή διαφέρουσαι κατά πολλαπλάσιον περιφερείας, νά δειχθοῦν αἱ σχέσεις:

$$συν(\theta_1 + \theta_2) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)συν\,2A}{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\,ημ\,2A} \quad , \quad συν^2\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = \frac{\gamma^2}{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\,ημ\,2A}$$

127. Ἐάν $0 < x$, $y < \pi$, νά εὑρεθῇ τό μέγιστον τῆς παραστάσεως:

$$\omega = ημ x + ημ y + ημ(x + y)$$

128. Δίδεται ὀρθογώνιον τρίγωνον $ABΓ$ καί τό ἐπί τήν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ $BΓ$ ὕψος AH. Ἐπί τῶν BA, AH, $ΓA$ λαμβάνομεν τά σημεῖα

Λ, K, M ὥστε $B\Lambda = AK = \Gamma M = x$ καὶ ὥστε τὸ τρίγωνον $K\Lambda M$ νὰ εἶναι ὀρθογώνιον ν' ἀποδειχθῇ τότε ὅτι $x = 2\rho$.

129. Ἐὰν $|\alpha| + |\beta| = 1$ ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $\left[|\alpha| + \frac{1}{|\alpha|}\right]^2 + \left[|\beta| + \frac{1}{|\beta|}\right]^2 \geqq \frac{25}{2}$

130. Ἐὰν $0 < x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu < \pi$, νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\eta\mu x_1 \cdot \eta\mu x_2 \cdot \ldots \cdot \eta\mu x_\nu \leqq \eta\mu^\nu \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu}{\nu}$$

131. Νὰ εὑρεθῇ πόσας τὸ πολὺ διαφορετικὰς τιμὰς λαμβάνει ἡ παράστασις:

$$A = \eta\mu\left[\frac{1}{3}\,\tau o\xi\,\sigma\upsilon\nu\,\lambda\right]$$

ὅταν $-1 < \lambda < 1$ καί, ἀκολούθως, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν τιμῶν τούτων.

132. Ἐὰν A, B, Γ γωνίαι τριγώνου, νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma-A}{2} > \eta\mu A\, \eta\mu B\, \eta\mu \Gamma$$

133. Δίδεται περιφέρεια κέντρου O καὶ ἀκτῖνος R καὶ σημεῖον A ἐκτὸς αὐτῆς. Διὰ τοῦ A φέρομεν τὴν τέμνουσαν $AB\Gamma$. Νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\varepsilon\varphi\frac{\widehat{AOB}}{2} \cdot \varepsilon\varphi\frac{\widehat{AO\Gamma}}{2} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}\nu$$

134. Ἐὰν A, B, Γ γωνίαι τριγώνου, νὰ δειχθοῦν αἱ κάτωθι ἰσότητες:

α) $\left[1+\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)\right] \cdot \left[1+\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)\right] \cdot \left[1+\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\Gamma}{2}\right)\right] =$

$$= 2 + 2\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\Gamma}{2}\right)$$

β) $\left(1+\varepsilon\varphi\frac{A}{4}\right)\left(1+\varepsilon\varphi\frac{B}{4}\right)\left(1+\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{4}\right) = 2 + 2\,\varepsilon\varphi\frac{A}{4}\,\varepsilon\varphi\frac{B}{4}\,\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{4}$

135. Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ἀληθεύει ἡ σχέσις:

$$\alpha^2\sigma\upsilon\nu 2B + \beta^2\sigma\upsilon\nu 2A + 2\alpha\beta\,\sigma\upsilon\nu(A-B) = \gamma^2$$

136. Νὰ δειχθῇ ἡ σχέσις:

$$\eta\mu^2 x + \eta\mu^2 y + \eta\mu^2 z + \eta\mu^2(x+y+z) = 2 - 2\,\sigma\upsilon\nu(x+y)\,\sigma\upsilon\nu(y+z)\,\sigma\upsilon\nu(z+x)$$

137. Ἐὰν x, y, z εἶναι τρεῖς πραγματικοὶ ἀριθμοί, διὰ τοὺς ὁποίους $x \cdot y \cdot z \neq 0$, ν' ἀποδειχθῇ ἡ σχέσις:

$$x^2+y^2+z^2 \geqq 2yz\,συν A+2zx\,συν B+2xy\,συν Γ$$

ἔνθα $A, B, Γ$ γωνίαι τριγώνου.

138. Νά δειχθῇ ὅτι ἐάν αἱ γωνίαι ἑνός τριγώνου πληροῦν τήν σχέσιν:

$$ημ3A+ημ3B+ημ3Γ+3(ημ2A+ημ2B+ημ2Γ)=3(ημA+ημB+ημΓ)$$

τό τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον.

139. Ἐάν $\dfrac{ημ(A-3θ)}{ημ^3θ}=\dfrac{συν(A-3θ)}{συν^3θ}=μ$, ν᾿ ἀποδειχθῇ ὅτι: $μ^2+μ\,συνA=2$.

140. Ἐάν $A, B, Γ$ εἶναι αἱ γωνίαι τάς ὁποίας σχηματίζει εὐθύγραμμον τμῆμα OM μέ τάς ἀκμάς $Oα$, $Oβ$, $Oγ$ στερεᾶς τρισορθογωνίου γωνίας καί x, y, z μία τριάς πραγματικῶν ἤ φανταστικῶν ἀριθμῶν, ν᾿ ἀποδειχθῇ ἡ σχέσις:

$$|x+y+z| \leqq \sqrt{|x\cdot τεμA|^2+|y\cdot τεμB|^2+|z\cdot τεμΓ|^2}$$

141. Νά δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις:

$$συν^4x+συν^4\left(x+\frac{π}{4}\right)+συν^4\left(x+\frac{2π}{4}\right)+συν^4\left(x+\frac{3π}{4}\right)$$

ἔχει τιμήν ἀνεξάρτητον τοῦ x. Ἐπίσης νά δειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ἀληθεύει ἡ σχέσις:

$$α^3συν(B-Γ)+β^3συν(Γ-A)+γ^3συν(A-B)=3αβγ$$

142. Ἐάν E εἶναι τό ἐμβαδόν τριγώνου $ABΓ$ καί E_1 τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφάς τά σημεῖα ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου μέ τούς παρεγγεγραμμένους κύκλους, ν᾿ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$E_1=2E\,ημ\frac{A}{2}\,ημ\frac{B}{2}\,ημ\frac{Γ}{2}$$

143. Τετραπλεύρου περιγεγραμμένου περί κύκλον ἀκτῖνος 3μ., αἱ τρεῖς πλευραί κατά σειράν ἔχουν μήκη 12, 8, 6 μέτρα. Νά εὑρεθῇ τό μῆκος τῆς τετάρτης πλευρᾶς καί αἱ γωνίαι αὐτοῦ.

144. Νά δειχθῇ ὅτι ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη ἵνα ἕν τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον, εἶναι αἱ γωνίαι αὐτοῦ νά πληροῦν τήν σχέσιν:

$$\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma = \sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma + 1$$

145. Ἐάν ν φυσικός ἀριθμός καί $0 < x < 90°$, νά δειχθῇ ὅτι:

$$\eta\mu(\nu x) < \nu\,\eta\mu x$$

146. Ἐάν ΑΚ καί ΑΛ εἶναι δύο εὐθεῖαι, αἵ ὁποῖαι τριχοτομοῦν τήν γωνίαν Α τριγώνου ΑΒΓ, ΒΚ καί ΒΜ τήν γωνίαν Β καί ΓΜ, ΓΛ τήν γωνίαν Γ, νά δειχθῇ ὅτι τό τρίγωνον ΚΛΜ εἶναι ἰσόπλευρον.

147. Νά δειχθῇ ὅτι ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη ἵνα ἕν τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τό Α, εἶναι αἱ γωνίαι Β καί Γ αὐτοῦ νά πληροῦν τήν σχέσιν:

$$\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma = 1 + 2\sqrt{2}\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$$

148. Ἐάν τρεῖς γωνίαι Α, Β, Γ πληροῦν τήν σχέσιν:

$$\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma = 4\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$$

νά δειχθῇ ὅτι θά ἀληθεύῃ μία τῶν κάτωθι σχέσεων

$$A + B + \Gamma = (4K+1)\pi \qquad \text{ἤ} \qquad \varepsilon\varphi\frac{A+B-\Gamma}{4}\,\varepsilon\varphi\frac{A-B+\Gamma}{4}\,\varepsilon\varphi\frac{-A+B+\Gamma}{4} = 1$$

149. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α. Διά τῆς κορυφῆς Β φέρομεν τήν ΒΔ τέμνουσαν τήν πλευράν ΑΓ εἰς τό Δ. Ἐάν $x = \widehat{\Gamma B \Delta}$ καί ἐκ τοῦ Δ φέρωμεν τάς καθέτους ΔΕ καί ΔΖ ἐπί τάς πλευράς ΒΓ καί ΒΑ, νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τοῦ τετραπλεύρου ΒΕΔΖ συναρτήσει τῆς x καί, ἀκολούθως, νά ὑπολογισθῇ ἡ γωνία x ὥστε $E = \frac{\mu a^2}{2}$ (Διερεύνησις).

150. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καί σημεῖον Ο ἐπί τῆς ΑΒ. Θέτομεν $(\Gamma O) = x$, $(OA = a)$, $(OB = \beta)$, $\widehat{OA\Gamma} = \omega$, $\widehat{OB\Gamma} = \theta$. Νά δειχθῇ τότε ὅτι:

$$x^2 = \frac{a^2\eta\mu^2\omega + \beta^2\eta\mu^2\theta - 2a\beta\,\eta\mu\omega\,\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu(\omega+\theta)}{\eta\mu^2(\omega+\theta)}$$

151. Νά εὑρεθοῦν εἰς ἀκτίνια τά τόξα τά ἐπαληθεύοντα τάς σχέσεις:

$$-4\pi < x < -3\pi \quad (1) \quad , \quad (x^2+22x+120)(2\eta\mu 3x-\sqrt{3}) > 0 \quad (2)$$

152. Ἐάν x, y, z εἶναι αἱ ἀποστάσεις σημείου M τῆς περί τρίγωνον $AB\Gamma$ περιγεγραμμένης περιφερείας ἀπό τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, νά δειχθῇ ἡ ἰσότης:

$$yz\,\eta\mu A + zx\,\eta\mu B + xy\,\eta\mu \Gamma = 0$$

ἔνθα πρό ἑνός τοὐλάχιστον τῶν προσθετέων ὑπάρχει τό πρόσημον $(-)$.

153. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$ καί ἐπί τῆς εἰς τοῦτο ἐγγεγραμμένης περιφερείας σημεῖον M. Ἐάν x, y, z εἶναι αἱ ἀποστάσεις τοῦ M ἀπό τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, νά δειχθῇ ἡ ἰσότης:

$$\sqrt{x}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} + \sqrt{y}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2} + \sqrt{z}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} = 0$$

ἔνθα πρό ἑνός προσθετέου ὑπάρχει τό πρόσημον $(-)$.

154. Ἐάν αἱ γωνίαι A, B, Γ τριγώνου πληροῦν τήν σχέσιν:

$$\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma = 1$$

νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ περί τό τρίγωνον περιγεγραμμένη περιφέρεια τέμνεται ὀρθογωνίως ὑπό τῆς περιφερείας τοῦ Euler τοῦ ἰδίου τριγώνου.

155. Νά δειχθῇ ὅτι ἐάν ἔχῃ ἔννοιαν ἡ παράστασις:

$$x = -\frac{\beta}{a}\,\sigma\upsilon\nu^2\left[\frac{1}{4}\,\tau o\xi\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\beta^2-8a\gamma}{\beta^2}\right]$$

αὕτη εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως $ax^2+\beta x+\gamma=0$.

156. Νά δειχθῇ ὅτι τά μεταξύ $0 \ldots \frac{\pi}{2}$ τόξα x, τά ἱκανοποιοῦντα τήν σχέσιν $\varepsilon\varphi(\sigma\varphi x) = \sigma\varphi(\varepsilon\varphi x)$, παρέχονται ὑπό τοῦ τύπου:

$$x = \frac{1}{2}\,\tau o\xi\,\eta\mu\left[\frac{4}{(2\nu+1)\pi}\right] \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

157. Νά δειχθῇ ὅτι διά $\nu = 2\lambda$

$$\sigma\upsilon\nu(\nu x) = 2^{\nu-1}\sigma\upsilon\nu^{\nu} x + \ldots + (-1)^{\lambda}\cdot 1$$

ἐνῷ διά $\nu = 2\lambda+1$

$$\sigma\upsilon\nu(\nu x) = 2^{\nu-1}\sigma\upsilon\nu^{\nu} x + \ldots + (-1)^{\lambda}\cdot\nu\cdot\sigma\upsilon\nu\, x$$

Ἐν συνεχείᾳ τούτου καί δι᾽ ἀντικαταστάσεως τοῦ x διά $\frac{\pi}{2}-y$, νά δειχθῇ ὅτι καὶ τὸ ημ(νx), ὅταν $\nu=2\lambda+1$ ἀναπτύσσεται εἰς πολυώνυμον ὡς πρὸς ημx βαθμοῦ ν.

158. Ἐὰν αἱ γωνίαι x, θ συνδέωνται διὰ τῶν σχέσεων $\eta\mu x = \varepsilon\varphi\frac{\theta}{2}$, $\eta\mu\theta = \varepsilon\varphi\frac{x}{2}$, νὰ δειχθῇ ὅτι $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta = 0$ ἤ $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta = 1$.

159. Δίδεται τετράγωνον ΟΑΒΓ πλευρᾶς α. Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν ἐντὸς τοῦ τετραγώνου τεταρτοκύκλιον, ἀκολούθως γράφομεν περιφέρειαν Λ ἐφαπτομένην τοῦ τεταρτοκυκλίου καὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας Β, τέλος γράφομεν περιφέρειαν Κ ἐφαπτομένην τοῦ τεταρτοκυκλίου τῆς περιφερείας Λ καὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἀκτὶς y τῆς περιφερείας Κ παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$y=\frac{a}{4}\left(1-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{8}\right)^2$$

160. Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ πληροῦν τὴν σχέσιν $\beta(a+\gamma)=a^2+\gamma^2$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$ εὑρίσκονται εἰς γεωμετρικὴν πρόοδον, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον.

161. Ἐὰν τεθῇ $2\sigma\upsilon\nu\theta = a+\frac{1}{a}$, ἔνθα $a=x+iy$ τῇ βοηθείᾳ τῆς ταυτότητος:

$$\sigma\upsilon\nu(\nu+1)\theta = 2\sigma\upsilon\nu(\nu\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu(\nu-1)\theta$$

καὶ διὰ τῆς τελείας ἐπαγωγῆς νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$2\sigma\upsilon\nu(\nu\theta) = a^{\nu}+\frac{1}{a^{\nu}}.$$

162. Δίδεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($A=90°$), εἰς τὸ ὁποῖον ἡ πλευρὰ $(AB)=\gamma$ εἶναι σταθερά. Φέρομεν τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος ΑΗ. Ἐὰν Ο τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ζητεῖται νὰ ὁρισθῇ ἡ τιμὴ τῆς ὀξείας γωνίας Β, ὥστε τὸ τμῆμα ΗΟ νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ. Νὰ γίνῃ ἡ σχετικὴ διερεύνησις καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν λύσεων.

163. Μία συνάρτησις $y=\sigma(x)$ θὰ ὀνομάζεται περιοδικὴ ὅταν ὑπάρχῃ σταθερὰ ποσότης c, διὰ τὴν ὁποίαν $\sigma(x)=\sigma(x+c)=\sigma(x+2c)=\ldots$

τὴν μικροτέραν τιμὴν τῆς σταθερᾶς $c \neq 0$ ὀνομάζομεν περίοδον τῆς συναρτήσεως $y = \sigma(x)$. Κατόπιν τούτου, νὰ ἐξετασθῇ ἐὰν αἱ κάτωθι συναρτήσεις:

$$y = \frac{\varepsilon\varphi x + \eta\mu 3x}{\sigma\upsilon\nu 2x} \qquad\qquad y = \frac{\sigma\varphi x + \sigma\upsilon\nu 3x}{\eta\mu 5x}$$

εἶναι περιοδικαὶ καὶ ποία ἡ περίοδος ἑκάστης.

164. Ἐὰν A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, εἶναι αἱ γωνίαι κυρτοῦ πενταγώνου, νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τοῦ ἀθροίσματος $\eta\mu A_1 + \eta\mu A_2 + \eta\mu A_3 + \eta\mu A_4 + \eta\mu A_5$.

165. Νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\tau\varepsilon\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta + \tau\varepsilon\mu^2\theta\,\sigma\upsilon\nu 2\theta + \ldots + \tau\varepsilon\mu^{\nu-1}\theta\,\sigma\upsilon\nu(\nu-1)\theta = \frac{\eta\mu(\nu\theta)}{\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}\theta} - 1.$$

166. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον x^7+1 ἀναλύεται εἰς γινόμενον δευτεροβαθμίων πολυωνύμων μὲ πραγματικοὺς συντελεστὰς καὶ ἑνὸς πρωτοβαθμίου.

167. Ἀπὸ τῶν τριῶν κορυφῶν ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τρεῖς παραλλήλους εὐθείας. Ἐὰν μ, ν εἶναι αἱ ἀποστάσεις τῆς μεσαίας παραλλήλου ἀπὸ τῶν δύο ἄλλων καὶ E τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\sqrt{3}\cdot E = \mu^2 + \mu\nu + \nu^2$$

168. Ἐὰν x_1, x_2 εἶναι δύο διαδοχικαὶ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$\eta\mu 4x + \eta\mu 6x + \eta\mu 12x = 0$$

μικρότεραι τῶν 360°, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $x_2 - x_1 < 180°$.

169. Ἐὰν $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ εἶναι τρεῖς διακεκριμέναι λύσεις τῆς ἐξισώσεως:

$$\alpha\,\eta\mu\theta + \beta\,\sigma\upsilon\nu\theta + \gamma\,\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta = 0$$

ν' ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\eta\mu(\theta_1+\theta_2) + \eta\mu(\theta_2+\theta_3) + \eta\mu(\theta_3+\theta_1) = 0$$

170. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ μεταξὺ $0 \ldots \frac{\pi}{2}$ λύσεις τοῦ συστήματος:

$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu 2y \qquad\qquad \eta\mu 2x = \sigma\upsilon\nu y$

171. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ, διά τῶν κορυφῶν αὐτοῦ φέρομεν τάς εὐθείας AA', BB', $\Gamma\Gamma'$, τεμνομένας εἰς ἕν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου. Θέτομεν $\widehat{A'A\Gamma} = x$, $\widehat{B'BA} = y$, $\widehat{\Gamma'\Gamma B} = z$, $\widehat{BAA'} = x'$, $\widehat{\Gamma BB'} = y'$, $\widehat{A\Gamma\Gamma'} = z'$. Ζητεῖται ν' ἀποδειχθῆ ἡ σχέσις:

$$\eta\mu x\, \eta\mu y\, \eta\mu z = \eta\mu x'\, \eta\mu y'\, \eta\mu z' \qquad (1)$$

Νά δειχθῆ προσέτι ὅτι ἰσχύει καί τό ἀντίστροφον, δηλαδή ἐάν ἰσχύη ἡ (1), αἱ εὐθεῖαι AA', BB', $\Gamma\Gamma'$ διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

172. Νά ἐπιλυθῆ τρίγωνον ἐκ τῆς πλευρᾶς a τῆς διαμέτρου μ_a καί τῆς θετικῆς διαφορᾶς $B - \Gamma = \omega$.

173. Δύο κινητά Α καί Β κινοῦνται κατά τήν αὐτήν φοράν ὁμαλῶς καί ἐπί δύο εὐθειῶν παραλλήλων. Ἡ εὐθεῖα ΑΒ σχηματίζει μέ σταθεράν διεύθυνσιν γωνίαν μεταβλητήν, ἡ ὁποία λαμβάνει τήν τιμήν a εἰς χρόνον O, τήν τιμήν β εἰς χρόνον K καί τήν τιμήν γ εἰς χρόνον $K+\lambda$. Νά εὑρεθῆ ἡ γωνία τῆς διευθύνσεως τῆς ἀκολουθουμένης ὑπό τῶν κινητῶν κατά τήν σταθεράν διεύθυνσιν.

174. Δίδεται γωνία $\widehat{xOy} = \theta$ καί ἐντός τοῦ ἀνοίγματος τῆς γωνίας σημεῖον Μ. Ἐπί τῶν πλευρῶν Ox καί Oy λαμβάνομεν τά σημεῖα Α, Β ὥστε νά εἶναι $(OA) = (OB) = a$ καί $\widehat{xAM} = \varphi$, $\widehat{MBy} = \omega$. Ζητεῖται νά ὑπολογισθοῦν τά μήκη ΜΑ, ΜΒ συναρτήσει τῶν δοθέντων στοιχείων. Νά γίνη ἐφαρμογή τῶν εὑρεθέντων τύπων διά $\theta = 90^\circ$, $\omega = 75^\circ$, $\varphi = 60^\circ$. Ἐπανερχόμενοι εἰς τήν γενικήν περίπτωσιν, ὑπολογίσατε τάς γωνίας ω, φ, ὥστε τό τετράπλευρον ΟΑΜΒ νά εἶναι ἐγγράψιμον καί ὁ λόγος $\frac{AM}{BM}$ νά ἔχη δοθεῖσαν τιμήν K.

175. Ἐάν εἰς τρίγωνον μία γωνία εἶναι 40° ἤ 24°, νά δειχθῆ ὅτι θά ἰσχύη μία τῶν ἀκολούθων σχέσεων:

$$συν 9A + συν 9B + συν 9Γ = 1 \quad , \quad συν 15A + συν 15B + συν 15Γ = 1$$

176. Νά λυθῆ ἡ ἐξίσωσις:

$$σφ(τοξημ x) = συν\left(τοξεφ \frac{1}{2}\right)$$

177. Νά λυθῆ τό σύστημα:

$$ημ x + ημ y = 0 \qquad συν x \, συν y = \frac{1}{2}$$

178. Ἐάν $0 \leqq θ \leqq \frac{π}{2}$, νά δειχθοῦν αἱ σχέσεις:

$$ημ θ = \frac{\sqrt{1+ημ 2θ} - \sqrt{1-ημ 2θ}}{2} \quad , \quad συν θ = \frac{\sqrt{1+ημ 2θ} + \sqrt{1-ημ 2θ}}{2}$$

179. Νά ἐπιλυθῆ τετράπλευρον ἐκ δύο διαδοχικῶν πλευρῶν καί τῶν γωνιῶν.

180. Νά ἐπιλυθῆ τρίγωνον ἐκ τῶν ἑξῆς στοιχείων $α$, A, $\frac{β-γ}{υ_α} = K$ καί νά γίνῃ ἡ σχετική διερεύνησις.

181. Νά ἐπιλυθῆ τετράπλευρον περιγράψιμον εἰς κύκλον ἐκ τῶν τριῶν πλευρῶν καί μιᾶς γωνίας αὐτοῦ.

182. Νά γίνῃ ἡ ἀπαλοιφή τῶν x, y, z μεταξύ τῶν ἐξισώσεων:

$$x = y\, συν γ + z\, συν β \quad , \quad y = z\, συν α + x\, συν γ \quad , \quad z = x\, συν β + y\, συν α$$

τό δέ ἐξαγόμενον νά τραπῆ εἰς γινόμενον.

183. Νά δειχθῆ ὅτι ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη ἵνα τρία τόξα $θ_1$, $θ_2$, $θ_3$ ἔχουν ἄθροισμα περιττόν πολλαπλάσιον τοῦ $\frac{π}{2}$ εἶναι:

$$εφ θ_1 \cdot εφ θ_2 + εφ θ_2 \cdot εφ θ_3 + εφ θ_3 \cdot εφ θ_1 = 1$$

184. Νά δειχθῆ ὅτι $ορ \dfrac{ν\, εφ \frac{π}{ν} - (ν+1)\, εφ \frac{π}{ν+1}}{(ν+1)\, ημ \frac{π}{ν+1} - ν\, ημ \frac{π}{ν}} = 2$ ὅταν $ν \longrightarrow \infty$

185. Δίδεται τραπέζιον ΑΒΓΔ ἔνθα αἱ παράλληλοι βάσεις αὐτοῦ ΑΒ καί ΓΔ ἔχουν μήκη $(AB) = α$, $(ΓΔ) = γ$. Ἐάν αἱ μή παράλληλοι πλευραι καί αἱ διαγώνιοι ἔχουν μήκη ἀντιστοίχως $(BΓ) = β$, $(ΔA) = δ$,

$(A\Gamma)=y$, $(B\Delta)=x$, νά δειχθοῦν αἱ σχέσεις:

$$x^2+y^2=\beta^2+\delta^2+2\alpha\gamma \quad , \quad \frac{x^2-y^2}{\beta^2-\delta^2}=\frac{\alpha+\gamma}{\alpha-\gamma}$$

186. Ἐάν ἕν τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$, $(AB)=\alpha$, $(B\Gamma)=\beta$, $(\Gamma\Delta)=\gamma$, $(\Delta A)=\delta$ εἶναι ἐγγράψιμον καί περιγράψιμον εἰς κύκλον, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἀκτίς τοῦ εἰς τοῦτο ἐγγεγραμμένου κύκλου παρέχεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$R=\frac{2\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$$

187. Δίδεται τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$, $(AB)=\alpha$, $(B\Gamma)=\beta$, $(\Gamma\Delta)=\gamma$, $(\Delta A)=\delta$, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραί AB καί $\Gamma\Delta$, προεκτεινόμεναι, τέμνονται εἰς τό M. Ἐάν $B\widehat{M\Gamma}=y$, νά δειχθοῦν αἱ σχέσεις:

$$\delta^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta\,\sigma\upsilon\nu B-2\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu\Gamma-2\alpha\gamma\,\sigma\upsilon\nu y$$

$$2\alpha\gamma\,\sigma\upsilon\nu y=x^2+y^2-(\beta^2+\delta^2)$$

188. Ἐπί μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν σημεῖον O καί ἑκατέρωθεν αὐτοῦ τά εὐθύγραμμα τμήματα $(OA)=\alpha$, $(OB)=\beta$. Φέρομεν κατόπιν περιφέρειαν ἀκτῖνος ρ, ἐφαπτομένην τῆς εὐθείας εἰς τό O καί ἐπί τῆς περιφερείας τυχόν σημεῖον M. Θέτομεν $O\widehat{M}A=x$, $O\widehat{M}B=y$. Ζητεῖται νά εὑρεθῇ σχέσις μεταξύ τῶν x, y ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ M. Νά εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ M ὥστε $x=y$, καθώς καί ἡ θέσις τοῦ M ὥστε $x=2y$.

189. Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν ἀγροῦ σχήματος τετραπλεύρου, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ πλευραί $(A\Delta)=160\,\mu$, $(\Gamma\Delta)=\frac{320}{\sqrt{3}}\,\mu$ καί αἱ γωνίαι $A\widehat{\Delta}\Gamma=\frac{\pi}{2}$, $A\widehat{B}\Delta=\Gamma\widehat{B}\Delta=\frac{\pi}{6}$.

190. Ἐπί δύο καθέτως τεμνομένων εὐθειῶν εἰς τό O λαμβάνομεν $OA=OB=3{,}5\,\mu$ καί $OA'=OB'=5\,\mu$. Σύρομεν κατόπιν τάς εὐθείας AB' καί $A'B$ ὡς καί τήν $O\Gamma\Gamma'$ ὥστε $A\widehat{O}\Gamma=30^\circ$. Ἐάν Γ εἶναι τό σημεῖον τομῆς τῆς $O\Gamma$ μέ τήν AB' καί Γ' τό σημεῖον τομῆς τῆς $O\Gamma$

μέ τήν ΒΑ', φέρωμεν δέ ἀκόμη καί τήν (ΟΚ) = 8μ κάθετον ἐπί τό ἐπίπεδον τῶν ΟΑ, ΟΒ, ζητεῖται νά ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραί καί αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΚΓΓ'.

191. Τριγώνου ΑΒΓ ἡ γωνία Α εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως

$$(1-\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2})\cdot\eta\mu x = 2\eta\mu\frac{x}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{x}{2}$$

ὁ δέ λόγος τῆς διαφορᾶς τῶν περιεχουσῶν ταύτην πλευρῶν πρός τήν ἑτέραν ἐξ αὐτῶν εἶναι ἴσος πρός $1+\sqrt{3}$. Τέλος, ἡ ἀκτίς τοῦ περί τό τρίγωνον περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι ἴση πρός $\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$. Νά ἐπιλυθῆ τό τρίγωνον.

192. Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν εὐθεῖαν ἥτις τέμνει τήν διαγώνιον ΔΒ εἰς τό Ε καί τήν πλευράν ΓΔ εἰς τό Ζ. Νά ὑπολογισθῆ ἡ γωνία $\widehat{\Delta AE}$ ὥστε νά εἶναι:

$$3(EZ)^2+(AE)^2 = 2\sqrt{3}\cdot(AE)\cdot(EZ)$$

193. Εἰς τετράπλευρον ΑΒΓΔ δίδονται αἱ τρεῖς πλευραί (ΑΒ) = α, ΑΔ = β, (ΒΓ) = γ καί αἱ γωνίαι Α καί Β, τάς ὁποίας παριστῶμεν μέ x, y. Νά ὑπολογισθῆ ἡ πλευρά ΓΔ καί αἱ γωνίαι Γ καί Δ, ὡς καί ὁ λόγος τῆς ΓΔ πρός τήν ΑΒ, ὅταν:

$$\beta = \alpha\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \quad \gamma = \frac{\alpha}{2}, \quad x = 36^\circ \;; \quad y = 108^\circ$$

194. Δοθέντος τριγώνου ΒΑΓ ὀρθογωνίου εἰς τό Α, νά ὑπολογισθοῦν τά μήκη ΒΔ = x, ΓΕ = y τῶν καθέτων ἐπί τό ἐπίπεδον ΑΒΓ (πρός τό αὐτό μέρος τοῦ ἐπιπέδου), εἰς τρόπον ὥστε ἡ γωνία ΔΑΕ νά ἔχῃ δοθεῖσαν τιμήν α καί τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου ΔΑΕ νά ἰσοῦται πρός δοθεῖσαν ποσότητα μ^2.

195. Νά ἐκφρασθῆ τό $\sigma\upsilon\nu^\nu x$ συναρτήσει τῶν:

$$\sigma\upsilon\nu x,\ \sigma\upsilon\nu 2x,\ \ldots,\ \sigma\upsilon\nu(\nu x)$$

196. Να ἐκφρασθῆ τό κλάσμα $\frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu(x-\alpha)\eta\mu(x-\beta)\eta\mu(x-\gamma)}$ ὑπό τήν μορφήν:

$$A\sigma\varphi(x-\alpha)+B\sigma\varphi(x-\beta)+\Gamma\sigma\varphi(x-\gamma)+\Delta$$

ἔνθα τά A, B, Γ, Δ νά εἶναι ἀνεξάρτητα τοῦ x.

197. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ ὀρθογώνιον εἰς τό Α, ἔστω ΑΗ τό ὕψος τό ἀγόμενον πρός τήν ὑποτείνουσαν. Νά ὁρισθῇ ἡ γωνία Β ὥστε νά ἀληθεύῃ ἡ σχέσις

$$\frac{1}{AB}+\frac{2}{A\Gamma}=\frac{\mu}{AH}$$

ἔνθα μ θετικός. Νά γίνῃ ἡ σχετική διερεύνησις.

198. Ἑνός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τά μήκη τῶν πλευρῶν ΑΒ καί ΒΓ εἶναι ἀντιστοίχως 5 μ καί 13 μ, τῆς δέ διαγωνίου ΒΔ 12 μ. Διά τῆς κορυφῆς Α φέρομεν ἄξονα $y'y$, σχηματίζοντα μέ τήν ΑΒ γωνίαν x. Ζητεῖται νά ὁρισθῇ ἡ τιμή τῆς γωνίας x, ὥστε ὁ ὄγκος ὁ παραγόμενος διά περιστροφῆς τοῦ παραλληλογράμμου περί τόν ἄξονα $y'y$ νά γίνεται μέγιστος.

199. Δίδεται κύκλος κέντρου Ο καί ἀκτῖνος ρ. Ἐάν ἡ πλευρά ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, ἐγγεγραμμένου εἰς τόν κύκλον, διέρχεται διά μέσου τῆς ἀκτῖνος ΟΑ, νά δειχθῇ ὅτι ἀληθεύει μία τῶν σχέσεων:

α) $2\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)=\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)$, β) $\varepsilon\varphi B\cdot\varepsilon\varphi\Gamma=\frac{1}{3}$, γ) $E=-\frac{1}{2}\rho^2\eta\mu 2A$

Νά δειχθῇ ἀκόμη ὅτι ἑκάστη τούτων εἶναι ἰσοδύναμος πρός ἑκάστην τῶν δύο ἄλλων καί ὅτι, ἐάν ἰσχύῃ μία τῶν ἀνωτέρω σχέσεων, τότε ἡ ΒΓ θά διέρχεται διά τοῦ μέσου τῆς ἀκτῖνος ΟΑ.

200. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις:

$$\mu x^2-\mu\lambda x+\lambda=0$$

Νά εὑρεθῇ σχέσις τήν ὁποίαν πρέπει νά ἐπαληθεύουν οἱ συντελεσταί μ καί λ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, ἵνα αἱ δύο ρίζαι αὐτῆς εἶναι ἡ μία τό ἡμίτονον καί ἡ ἄλλη ἡ ἐφαπτομένη τοῦ αὐτοῦ τόξου α. Νά ὑπολογισθοῦν, ἐν συνεχείᾳ, συναρτήσει τοῦ συντελεστοῦ μ τά ημα καί συνα καί, τέλος, ὁ συντελεστής μ συναρτήσει τοῦ τόξου α.

201. Κύλινδρος διαμέτρου d στηρίζεται μέ τόν ἄξονά του ὁριζόντιον ἐπί δύο ἐπιπέδων τεμνομένων ἐπί τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου OO' καί σχηματιζόντων γωνίας α, β μετ᾽ αὐτοῦ. Ἐάν x εἶναι τό ὑπέρ τό ὁριζόντιον ἐπίπεδον ὕψος τοῦ ἀνωτάτου σημείου A τοῦ κυλίνδρου, ν᾽ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\frac{d}{x} = 1 - \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{\beta}{2}$$

202. Νά δειχθῇ ὅτι τοῦ x αὐξανομένου ἀπό 0 ἕως $\frac{\pi}{2}$, καί ὁ λόγος $\frac{x}{\eta\mu x}$ βαίνει ὁμοίως αὐξανόμενος, νά δειχθῇ δηλ. ἡ σχέσις:

$$\frac{x+\varepsilon}{\eta\mu(x+\varepsilon)} > \frac{x}{\eta\mu x}$$

203. Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$\tau o\xi\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) + \tau o\xi\,\varepsilon\varphi\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

καθώς καί ἡ ἐξίσωσις:

$$\eta\mu\, 9x = \sigma\upsilon\nu\, 4x$$

204. Δίδονται ἐπί μιᾶς εὐθείας 4 σημεῖα M, N, P, Π ὥστε νά εἶναι $(MN) = 4\ \mu$, $(NP) = 2\ \mu$, $(P\Pi) = 6\ \mu$. Νά εὑρεθοῦν τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ἐκ τῶν ὁποίων τά τρία τμήματα MN, NP, $P\Pi$ νά φαίνωνται ὑπό τήν αὐτήν γωνίαν x καί νά ὑπολογισθῇ ἡ γωνία αὐτη.

205. Δίδεται κύκλος ἀκτῖνος ρ καί εἰς αὐτόν τρίγωνον ἐγγεγραμμένον $AB\Gamma$ γωνίας Γ ἀμβλείας καί $B > A$. Ἐάν ἡ πλευρά AB τέμνῃ τήν ἀκτῖνα $O\Gamma$ εἰς τό μέσον E καί ἀχθῇ ἡ ἐκ τοῦ Γ διάμεσος ΓM τοῦ τριγώνου, νά ἐκφρασθοῦν συναρτήσει τῆς γωνίας $\theta = \widehat{\Gamma M B}$ αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

206. Δίδονται οἱ θετικοί ἀριθμοί α, β ἔνθα $\alpha < \beta$. Θεωροῦμεν τήν ἀκολουθίαν $\alpha_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $\beta_1 = \sqrt{\alpha_1\beta} \ldots\ \alpha_\nu = \frac{\alpha_{\nu-1}+\beta_{\nu-1}}{2}$, $\beta_\nu = \sqrt{\alpha_\nu\beta_{\nu-1}}$, ἔνθα $\alpha = \beta\,\sigma\upsilon\nu\,\omega$ $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$. Νά δειχθῇ ὅτι $\beta_\nu = \beta\,\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2^2}\ldots\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2^\nu}$ καί ὅτι $o\rho\,\beta_\nu = \beta\cdot\frac{\eta\mu\omega}{\omega}$. Ποῖον τό ὅριον τοῦ α_ν ὅταν $\nu \to \infty$;

207. Δύο χορδαί κύκλου αἱ ΑΒ καί ΓΔ τέμνονται ὀρθογωνίως. Ἐάν $(AB)=\alpha$, $(\Gamma\Delta)=\gamma$, $(\Gamma B)=\beta$, $(A\Delta)=\delta$, νά ἀποδειχθῇ ἡ σχέσις:

$$(\beta^2-\delta^2)^2=(\alpha\delta-\beta\gamma)^2+(\alpha\beta-\gamma\delta)^2$$

208. Νά ὑπολογισθῇ τό ἄθροισμα:

$$\varepsilon\varphi^2 x\cdot\varepsilon\varphi 2x+\frac{1}{2}\varepsilon\varphi^2 2x\cdot\varepsilon\varphi 2^2 x+\ldots+\frac{1}{2^\nu}\varepsilon\varphi^2(2^\nu x)\cdot\varepsilon\varphi(2^{\nu+1}x)$$

209. Δίδεται παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἰς τό ὁποῖον θέτομεν $\widehat{\Gamma AB}=\alpha$, $\widehat{A\Gamma B}=\beta$, $\widehat{\Delta BA}=\gamma$, $\widehat{B\Delta A}=\delta$. Ἐάν y εἶναι ἡ ὀξεῖα γωνία τῶν διαγωνίων αὐτοῦ, νά δειχθοῦν αἱ σχέσεις:

$$\sigma\varphi\alpha-\sigma\varphi\gamma=\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\delta=2\sigma\varphi(\alpha+\beta)\quad,\quad \sigma\varphi\alpha-\sigma\varphi\beta=\sigma\varphi\gamma-\sigma\varphi\delta=2\sigma\varphi y$$

210. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καί ἐντός αὐτοῦ σημεῖον Ο, ἀπό τό ὁποῖον αἱ πλευραί α, β, γ φαίνονται ἀντιστοίχως ὑπό γωνίας x, y, z. Ζητεῖται νά ὑπολογισθοῦν αἱ ἀποστάσεις τοῦ Ο ἀπό τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου συναρτήσει τῶν στοιχείων τοῦ τριγώνου καί τῶν γωνιῶν x, y, z.

211. Αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως:

$$\varepsilon\varphi^4 x+K\varepsilon\varphi^3 x+\lambda\varepsilon\varphi^2 x+\mu\varepsilon\varphi x+(\lambda+1)^2=0$$

εἶναι γωνίαι κυρτοῦ τραπεζίου. Νά ὁρισθοῦν τά K, λ, μ ὥστε αἱ μή παράλληλοι πλευραί αὐτοῦ νά τέμνωνται ὑπό γωνίαν φ.

212. Νά προσδιορισθοῦν ὁ θετικός ρ καί ὁ πραγματικός φ_0 ἵνα ἰσχύῃ ἡ ταυτότης: $\quad 12\sigma\upsilon\nu x+5\eta\mu x=\rho\,\sigma\upsilon\nu(x+\varphi_0)$

213. Νά δειχθοῦν αἱ ταυτότητες:

$$\sigma\upsilon\nu 5x=16\sigma\upsilon\nu^5 x-20\sigma\upsilon\nu^3 x+5\sigma\upsilon\nu x$$

$$\sigma\upsilon\nu 6x=32\sigma\upsilon\nu^6 x-48\sigma\upsilon\nu^4 x+18\sigma\upsilon\nu^2 x-1$$

$$\sigma\upsilon\nu 7x=64\sigma\upsilon\nu^7 x-112\sigma\upsilon\nu^5 x+56\sigma\upsilon\nu^3 x-7\sigma\upsilon\nu x$$

214. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἔστω Ι τό κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καί Δ, Ε, Ζ τά σημεῖα ἐπαφῆς τούτου μέ τάς πλευράς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ.

Ἐάν ρ εἶναι ἡ ἀκτίς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τό τρίγωνον $AB\Gamma$ καί ρ_1, ρ_2, ρ_3 αἱ ἀκτῖνες τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων εἰς τά τετράπλευρα $AZIE$, $B\Delta IZ$, $\Gamma EI\Delta$ ἀντιστοίχως, ν' ἀποδειχθῇ ἡ σχέσις:

$$\frac{\rho_1}{\rho-\rho_1}+\frac{\rho_2}{\rho-\rho_2}+\frac{\rho_3}{\rho-\rho_3}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2\rho}$$

215. Νά ἀποδειχθῇ ἡ ἀνισότης:

$$x-\eta\mu x<\frac{x^3}{6} \qquad \text{ἔνθα} \qquad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

216. Ἐάν $A+B+\Gamma=180^\circ$ καί $\varepsilon\varphi\frac{3A}{4}\cdot\varepsilon\varphi\frac{3B}{4}=\varepsilon\varphi\frac{3\Gamma}{4}$, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\varepsilon\varphi\frac{3A}{4}+\varepsilon\varphi\frac{3B}{4}+\varepsilon\varphi\frac{3\Gamma}{4}=\sigma\varphi\frac{3A}{4}+\sigma\varphi\frac{3B}{4}+\sigma\varphi\frac{3\Gamma}{4}$$

217. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις:

$$\eta\mu(\theta+\alpha)+\eta\mu(\theta+\beta)+\eta\mu(\alpha+\beta)=0$$

Ἐάν θ_1, θ_2 εἶναι δύο διακεκριμέναι λύσεις, λύσεις δηλαδή μή διαφέρουσαι κατά πολλαπλάσιον περιφερείας, νά δειχθῇ ἡ σχέσις:

$$\eta\mu(\theta_1+\theta_2)+\eta\mu(\theta_1+\beta)+\eta\mu(\theta_2+\beta)=0$$

218. Ἐάν Z εἶναι τό κέντρον βάρους τριγώνου $AB\Gamma$ καί R_α, R_β, R_γ αἱ ἀκτῖνες τῶν περί τά τρίγωνα $ZB\Gamma$, $Z\Gamma A$, ZAB περιγεγραμμένων κύκλων, νά δειχθῇ ἡ σχέσις:

$$\frac{\alpha^2(\beta^2-\gamma^2)}{R_\alpha^2}+\frac{\beta^2(\gamma^2-\alpha^2)}{R_\beta^2}+\frac{\gamma^2(\alpha^2-\beta^2)}{R_\gamma^2}=0$$

219. Νά δειχθῇ ἡ ταυτότης:

$$E=\frac{2}{3}R^2\cdot\left[\eta\mu^3A\,\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)+\eta\mu^3B\,\sigma\upsilon\nu(\Gamma-A)+\eta\mu^3\Gamma\,\sigma\upsilon\nu(A-B)\right]$$

220. Διά κάθε τόξον θ ἐκπεφρασμένον εἰς ἀκτίνια, νά δειχθῇ ὅτι ἰσχύει ἡ ἀνισότης:

$$\eta\mu(\sigma\upsilon\nu\,\theta)<\sigma\upsilon\nu(\eta\mu\,\theta)$$

221. Ἐάν $A+B+\Gamma=180^\circ$ καί $K=4\lambda$ ἤ $4\lambda+2$, νά δειχθῇ ἡ ταυτότης:

$$\sigma\upsilon\nu KA+\sigma\upsilon\nu KB+\sigma\upsilon\nu K\Gamma=\varepsilon_1+4\varepsilon_2\,\sigma\upsilon\nu\frac{KA}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{KB}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{K\Gamma}{2}$$

ἔνθα $\varepsilon_1=\pm 1$, $\varepsilon_2=\pm 1$. Ἄν πάλιν $K=4\lambda+1$ ἤ $4\lambda+3$, τότε ἔχομεν:

$$\sigma\upsilon\nu KA+\sigma\upsilon\nu KB+\sigma\upsilon\nu K\Gamma=\varepsilon_1+4\varepsilon_2\,\eta\mu\frac{KA}{2}\,\eta\mu\frac{KB}{2}\,\eta\mu\frac{K\Gamma}{2}$$

222. Ἐάν $\alpha=\frac{\pi}{20}$, νά δειχθῇ ὅτι:

$$\eta\mu^4\alpha+\eta\mu^4 3\alpha+\eta\mu^4 7\alpha+\eta\mu^4 9\alpha+\eta\mu^4 11\alpha+\eta\mu^4 13\alpha+\eta\mu^4 17\alpha+\eta\mu^4 19\alpha=\frac{13}{4}$$

223. Νά δειχθῇ ὅτι διά κάθε τόξον θ, διά τό ὁποῖον $0<\theta<\pi$, ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$2\left(\eta\mu\frac{\theta}{2}+\eta\mu\frac{\theta}{2^2}+\ldots+\eta\mu\frac{\theta}{2^\nu}\right)\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2^2}+\ldots+\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2^\nu}\right)>\sqrt[\nu]{\eta\mu\theta\cdot\eta\mu\frac{\theta}{2}\ldots\eta\mu\frac{\theta}{2^{\nu-1}}}$$

224. Μέ διαμέτρους τάς πλευράς α, β, γ τριγώνου ΑΒΓ γράφομεν περιφερείας. Ἐάν δ εἶναι ἡ διάμετρος τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῶν τριῶν τούτων περιφερειῶν ἐξωτερικῶς, ν᾽ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\sqrt{\frac{\delta}{\tau-\alpha}-1}+\sqrt{\frac{\delta}{\tau-\beta}-1}+\sqrt{\frac{\delta}{\tau-\gamma}-1}=\sqrt{\frac{\tau}{\delta-\tau}}$$

225. Ἐάν εἰς τόν αὐτόν κύκλον εἶναι π_ν, $\pi_{2\nu}$ αἱ περίμετροι κανονικῶν πολυγώνων μέ ν καί 2ν πλευράς περιγεγραμμένων καί ϖ_ν, $\varpi_{2\nu}$ αἱ περίμετροι κανονικῶν πολυγώνων ἐγγεγραμμένων εἰς τόν κύκλον τοῦτον, ν᾽ ἀποδειχθῇ ἡ ἀνισότης:

$$\pi_{2\nu}-\varpi_{2\nu}<\frac{1}{4}(\pi_\nu-\varpi_\nu) \qquad (1)$$

226. Δύο περιφέρειαι κείμεναι ἐπί δύο καθέτων ἐπιπέδων ἔχουν κοινήν διάμετρον ΑΒ. Ἐάν Ο εἶναι τό κοινόν κέντρον καί ἀχθοῦν αἱ ἀκτῖνες ΟΓ τῆς πρώτης καί ΟΔ τῆς δευτέρας ὥστε $\widehat{A O\Gamma}=\alpha>90^\circ$, $\widehat{AO\Delta}=\beta<90^\circ$, νά ὑπολογισθῇ ἡ γωνία ΔΟΓ συναρτήσει τῶν α, β.

227. Ἐάν AA_1, BB_1 εἶναι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Α καί Β τριγώνου ΑΒΓ καί θέσωμεν $\widehat{\Gamma A_1 B_1}=\varphi$, νά ἀποδειχθῇ ἡ σχέσις:

$$\varepsilon\varphi\,\varphi=\frac{\eta\mu B+\eta\mu\Gamma}{1+\sigma\upsilon\nu B-\sigma\upsilon\nu\Gamma}$$

228. Νά λάβῃ τήν ἁπλουστέραν δυνατήν μορφήν ἡ παράστασις:

$$K=\tau o\xi\,\varepsilon\varphi\left(\frac{x\,\sigma\upsilon\nu\theta}{1-x\,\eta\mu\theta}\right)-\tau o\xi\,\varepsilon\varphi\left(\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{x-\eta\mu\theta}\right)$$

229. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καί ἡ ἐγγεγραμμένη εἰς τοῦτο περιφέρεια Ο. Ἐάν Ρ, Σ, Τ εἶναι τά σημεῖα ἐπαφῆς τῆς περιφερείας Ο μέ τάς πλευράς τοῦ τριγώνου ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἀντιστοίχως, ν' ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ ἀκτίς ΟΣ, προεκτεινομένη, διέρχεται διά τοῦ σημείου τομῆς τῶν ΡΤ καί ΑΜ, ἔνθα ΑΜ ἡ διάμεσος ἡ ἀγομένη ἐκ τῆς κορυφῆς Α.

230. Ἐάν $\alpha\,\text{συν}x+\beta\,\text{συν}y+\gamma\,\text{συν}z=0$, $\alpha\,\text{ημ}x+\beta\,\text{ημ}y+\gamma\,\text{ημ}z=0$,

$$\alpha\,\text{τεμ}x+\beta\,\text{τεμ}y+\gamma\,\text{τεμ}z=0$$

ν' ἀποδειχθῆ ὅτι: $\alpha\pm\beta\pm\gamma=0$

231. Νά ἐπιλυθῆ τρίγωνον ἐκ τῶν κάτωθι σχέσεων:

$$\beta=\alpha\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \quad ; \quad \gamma=\beta(2-\sqrt{3}) \quad , \quad \beta\gamma=1$$

232. Ἐάν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι Ν τό κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ Euler καί x, y, z αἱ ἀποστάσεις τούτου ἀπό τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ, ν' ἀποδειχθῆ ὅτι:

$$x^2+y^2+z^2=R^2\left\{\frac{11}{4}+2\,\text{συν}A\,\text{συν}B\,\text{συν}\Gamma\right\}$$

233. Δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ ($A=90°$), εἰς τό ὁποῖον $\alpha=2\mu$ καί $B=30°$, νά εὑρεθῆ ἐπί τοῦ τόξου ΒΕΓ σημεῖον Μ ὥστε τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπό τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου νά εἶναι Κ. Νά ληφθῆ ὡς βοηθητική ἡ γωνία $\widehat{BOM}=x$ (Διερεύνησις).

234. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ δίδεται ἡ γωνία Α, ἡ ἀπέναντι αὐτῆς πλευρά α καί τό ἄθροισμα $A\Gamma+2\cdot AB=S$. Ζητεῖται:

α) Ν' ἀποδειχθῆ ὅτι ἐάν x παριστᾶ τήν πλευράν ΑΒ αὕτη ἐπαληθεύει τήν σχέσιν:

$$(5+4\,\text{συν}A)x^2-2S\cdot x\cdot(2+\text{συν}A)+S^2-A^2=0 \qquad (1)$$

β) Νά εὑρεθοῦν αἱ συνθῆκαι τάς ὁποίας πρέπει νά πληροῖ ὁ x ὥστε νά εἶναι πλευρά τριγώνου μέ τά ἀνωτέρω δεδομένα.

γ) Νά εὑρεθοῦν αἱ τιμαί τοῦ S ἵνα τό πρόβλημα ἔχῃ μίαν λύσιν ὡς καί αἱ τιμαί τοῦ S ἵνα τό πρόβλημα ἔχῃ δύο λύσεις.

235. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$ καί ἐντός αὐτοῦ σημεῖον K. Ἐάν O_1, O_2, O_3 εἶναι τά κέντρα τῶν περιγεγραμμένων κύκλων περί τά τρίγωνα $BK\Gamma$, ΓKA, AKB καί θέσωμεν $AK=x$, $BK=y$, $\Gamma K=z$, $\widehat{BK\Gamma}=\theta$, $\widehat{\Gamma KA}=\varphi$, $\widehat{AKB}=\omega$, ν' ἀποδειχθῇ ἡ σχέσις:

$$4R\,\eta\mu\theta\,\eta\mu\varphi\,\eta\mu\omega = x\,\eta\mu\theta + y\,\eta\mu\varphi + z\,\eta\mu\omega$$

ἔνθα R ἡ ἀκτίς τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας περί τό τρίγωνον $O_1O_2O_3$.

236. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$ καί ἐντός αὐτοῦ σημεῖον K. Διά τοῦ K φέρομεν τάς εὐθείας KA', KB', $K\Gamma'$ τεμνούσας τάς $B\Gamma$, ΓA, AB εἰς τά σημεῖα A', B', Γ' καί τοιαύτας ὥστε $\widehat{KA'\Gamma}=\widehat{KB'A}=\widehat{K\Gamma'B}=x$. Ἐάν $\widehat{AA'\Gamma}=\theta_\alpha$, $\widehat{BB'A}=\theta_\beta$, $\widehat{\Gamma\Gamma'B}=\theta_\gamma$, ν' ἀποδειχθῇ ἡ σχέσις:

$$\sigma\varphi\,\theta_\alpha + \sigma\varphi\,\theta_\beta + \sigma\varphi\,\theta_\gamma = \sigma\varphi\,x \qquad (1)$$

237. Θεωροῦμεν τά τρίγωνα μέ σταθεράν τήν πλευράν $B\Gamma=\alpha$ καί σταθερόν τό ἄθροισμα $\beta+\gamma=K$. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τό γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν B καί Γ ἀπό τῆς διχοτόμου τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας A εἶναι σταθερόν.

238. Ἐάν $\sigma\upsilon\nu(\beta-\gamma)+\sigma\upsilon\nu(\gamma-\alpha)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=-\frac{3}{2}$ (1), ν' ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\sigma\upsilon\nu(\nu\alpha)+\sigma\upsilon\nu(\nu\beta)+\sigma\upsilon\nu(\nu\gamma)=0 \qquad (2),\quad \text{ὅταν } \nu\neq \pi o\lambda.3$$

καί

$$\sigma\upsilon\nu(\nu\alpha)+\sigma\upsilon\nu(\nu\beta)+\sigma\upsilon\nu(\nu\gamma)=3\,\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\alpha+\nu\beta+\nu\gamma}{3} \qquad (3),\quad \text{ὅταν } \nu=\pi o\lambda.3$$

239. Δύο περιφέρειαι ἀκτίνων R_1, R_2 ἐφάπτονται εἰς τό σημεῖον A. Διά τοῦ A φέρομεν τήν χορδήν AB τῆς πρώτης καί $A\Gamma$ τῆς δευτέρας, ὥστε $\widehat{BA\Gamma}=\alpha$. Ζητεῖται ἡ θέσις τῆς σταθερᾶς γωνίας α ὥστε τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ νά γίνεται μέγιστον.

240. Νά λυθῇ καί διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + \mu = 0$$

241. Εἰς σφαῖραν ἀκτῖνος R περιγράφομεν κῶνον. Ἐάν Σ εἶναι ἡ κορυφή τοῦ κώνου καί O τό κέντρον τῆς σφαίρας, νά ὁρισθῇ ἡ τιμή τῆς γωνίας $x=\widehat{O\Sigma\Gamma}$, ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ κώνου νά γίνῃ ἐλάχιστος (ἔνθα $\Sigma\Gamma$ εἶναι γενέτειρα τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου).

242. Δίδεται ἡμιπεριφέρεια κέντρου O καί διαμέτρου $AB=2R$. Κατασκευάζομεν δύο περιφερείας K_1, K_2, ἐφαπτομένας τῆς ἡμιπεριφερείας τῆς διαμέτρου AB καί μεταξύ των ἐξωτερικῶς εἰς τό σημεῖον H. Ἐάν x εἶναι ἡ γωνία τήν ὁποίαν σχηματίζει ἡ κοινή ἐσωτερική ἐφαπτομένη τῶν K_1, K_2 μέ τήν διάμετρον AB, ζητεῖται νά ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτῖνες R_1, R_2 τῶν περιφερειῶν K_1, K_2, συναρτήσει τῆς γωνίας x καί τῆς R. Κατόπιν τούτου νά ὑπολογισθῇ ἡ τιμή τῆς γωνίας x ὥστε τό ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν περιφερειῶν K_1, K_2 νά γίνεται μέγιστον ἤ ἐλάχιστον.

243. Νά εὑρεθῇ τό ὅριον τῆς παραστάσεως:

$$y=\frac{\text{συν}3x}{\pi-2x} \qquad \text{ὅταν} \quad x\longrightarrow\frac{\pi}{2}$$

καί

$$z=\frac{1-x}{\text{συν}\frac{\pi x}{2}} \qquad \text{ὅταν} \quad x\longrightarrow 1$$

244. Ἀφοῦ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί A καί B, ὥστε νά ἰσχύῃ ἡ ταυτότης:

$$\frac{1}{\text{ημ}a}=A\,\text{σφ}\frac{a}{2}+B\,\text{σφ}\,a$$

νά ὑπολογισθῇ, ἐν συνεχείᾳ, τό ἄθροισμα:

$$S_\nu=\frac{1}{\text{ημ}a}+\frac{1}{\text{ημ}2a}+\dots+\frac{1}{\text{ημ}2^\nu a}$$

245. Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$\text{εφ}(\text{σφ}x)=\text{σφ}(\text{εφ}x)$$

246. Νά δειχθῇ ὅτι:

$$\text{εφ}9^\circ-\text{εφ}27^\circ-\text{εφ}63^\circ+\text{εφ}81^\circ=4$$

247. Νά κατασκευασθῇ ἡ καμπύλη $y=x-\text{ημ}x$ καί νά μελετηθῇ ἡ μεταβολή τῆς συναρτήσεως $y=x\,\text{ημ}x$ εἰς τό διάστημα $0\dots+\infty$.

248. Πλοῖον κινεῖται πρός βορρᾶν. Κατά τινα στιγμήν καί ἐνῷ εὑρίσκεται εἰς θέσιν Ν βλέπει δύο φάρους Ρ, Κ πρός δυσμάς. Μετά πάροδον μιᾶς ὥρας ἡ ἀπόστασις τῶν δύο φάρων, ἡ ὁποία εἶναι 8 χιλιόμετρα, φαίνεται ὑπό γωνίαν $\frac{\pi}{8}$. Νά εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τοῦ πλοίου. (Ἡ ταχύτης ὑποτίθεται ὁμαλή).

249. Νά ἐπιλυθῇ τραπέζιον τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ γωνίαι καί αἱ διαγώνιοι.

250. Δίδεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($A = 90°$), τοῦ ὁποίου ἡ ὑποτείνουσα ἔχει μῆκος 2μ καί ἡ γωνία $B = 30°$. Νά εὑρεθῇ ἐπί τοῦ τόξου ΒΕΓ τοῦ περί τό τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένου κύκλου σημεῖον Μ, τοῦ ὁποίου τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπό τῶν τριῶν πλευρῶν νά ἔχῃ μῆκος λ (Διερεύνησις). Νά ληφθῇ ὡς βοηθητική ἡ γωνία $\widehat{BOM} = x$.

251. Δίδεται σφαῖρα ἀκτῖνος R. Τέμνομεν ταύτην δι' ἐπιπέδου καί εἰς ἀπόστασιν h ἀπό τοῦ κέντρου. Ζητεῖται νά ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις h ὥστε ἐάν V_1 εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ μονοβασικοῦ σφαιρικοῦ τμήματος μέ βάσιν τήν τομήν καί V_2 ὁ ὄγκος τοῦ περιγεγραμμένου κώνου τοῦ ἐφαπτομένου εἰς τήν τομήν, νά ἰσχύῃ ἡ σχέσις $V_2 = \mu \cdot V_1$.

252. Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu^3 a\, \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^3 a\, \eta\mu x = 0$$

253. Δίδεται ἰσοσκελές τρίγωνον ΟΑΒ, ἔνθα $OA = OB = 1$. Ἐάν x καί y αἱ γωνίαι τάς ὁποίας σχηματίζουν αἱ πλευραί ΟΑ καί ΟΒ μέ σταθεράν διεύθυνσιν ΟΔ καί αἱ γωνίαι x, y πληροῦν τήν σχέσιν:

$$\varepsilon\varphi\frac{x}{2} \cdot \varepsilon\varphi\frac{y}{2} = K = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}\nu$$

ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ πλευρά ΒΑ διέρχεται διά σταθεροῦ σημείου Γ τῆς (ΟΔ).

254. Ἐάν εἰς τρίγωνον ἀληθεύῃ ἡ σχέσις $\tau < 2R + \rho$, νά προσδιορισθῇ τό εἶδος τοῦ τριγώνου.

255. Κυκλική δεξαμενή φαίνεται ἀπό ἀπρόσιτον σημεῖον A ὑπό γωνίαν a καί ἀπό ἄλλο σημεῖον B κείμενον ἐπί τῆς ΓA καί μεταξύ A καί Γ, ἔνθα Γ τό σημεῖον ἐπαφῆς τῆς ὀπτικῆς ἀκτῖνος τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ σημείου A πρός τήν δεξαμενήν ὑπό γωνίαν β. Ἐάν d εἶναι ἡ ἀπόστασις AB καί ἡ $A\Gamma$ κεῖται ἐπί τοῦ αὐτοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου μετά τῶν χειλέων τῆς δεξαμενῆς, ζητεῖται νά ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς τῆς δεξαμενῆς.

256. Ἐάν $0<x_1, x_2, \ldots, x_\nu<\pi$, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\eta\mu x_1+\eta\mu x_2+\ldots+\eta\mu x_\nu \leqq \nu\,\eta\mu\frac{x_1+x_2+\ldots+x_\nu}{\nu}$$

257. Ἐάν $\eta\mu a+\eta\mu\beta+\eta\mu\gamma=0$, $\sigma\upsilon\nu a+\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\gamma=0$, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\sigma\upsilon\nu(\nu a)+\sigma\upsilon\nu(\nu\beta)+\sigma\upsilon\nu(\nu\gamma)=0 \qquad \text{ὅταν } \nu\neq 3\kappa.$$

258. Ἐάν $\eta\mu(a+\beta+\gamma+\delta)=0$, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\eta\mu(a+\gamma)\cdot\eta\mu(a+\delta)=\eta\mu(\beta+\delta)\cdot\eta\mu(\beta+\gamma)$$

259. Νά εὑρεθῇ ἡ συνθήκη ἵνα αἱ ἐξισώσεις:

$$a_1\sigma\upsilon\nu x+\beta_1\eta\mu x=\gamma_1 \quad , \quad a_2\sigma\upsilon\nu x+\beta_2\eta\mu x=\gamma_2$$

ἔχουν τάς αὐτάς λύσεις.

260. Δίδεται τρίγωνον $AB\Gamma$ εἰς τό ὁποῖον φέρομεν τό ὕψος $A\Delta$. Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν ἐπί τάς AB καί $A\Gamma$ τάς καθέτους ΔZ καί ΔE. Διά τῶν Z καί E φέρομεν ἐπί τό ὕψος τάς καθέτους EE' καί ZZ'. Ἐάν Λ_1 καί Λ_2 εἶναι αἱ τομαί τῶν $(\Delta Z, E'B)$ καί $(\Delta E, Z'\Gamma)$, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ $\Lambda_1\Lambda_2$ εἶναι παράλληλος πρός τήν $B\Gamma$.

261. Ἐάν A, B, Γ εἶναι γωνίαι τριγώνου, ν' ἀποδειχθῇ ἡ σχέσις:

$$\varepsilon\varphi^\nu A+\varepsilon\varphi^\nu B+\varepsilon\varphi^\nu\Gamma \geqq 3(\sqrt{3})^\nu$$

262. Αἱ πλευραί a, β, γ $(a>\beta>\gamma)$ ἑνός τριγώνου $AB\Gamma$ ἀποτελοῦν ἀριθμητικήν πρόοδον δοθέντος λόγου λ. Ζητεῖται:

α) Νά ἀποδειχθῇ ἡ σχέσις: $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\frac{1}{3}$

β) Ἐάν ρ εἶναι ἡ ἀκτίς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι: $\rho=\dfrac{2\lambda}{3(\varepsilon\varphi\frac{A}{2}-\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2})}$ καί

γ) Νά ἐπιλυθῇ τό τρίγωνον ἐκ τοῦ λόγου λ καί τῆς σχέσεως $\rho=\frac{\lambda}{\sqrt{3}}\varepsilon\varphi\varphi$ ἔνθα φ δοθεῖσα γωνία.

263. Ἐάν Α, Β, Γ εἶναι γωνίαι τριγώνου, νά δειχθῇ ἡ ταυτότης:

$$\frac{\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\Gamma}{(\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma)^2}=\frac{\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}}{2\sigma\upsilon\nu A\cdot\sigma\upsilon\nu B\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma}$$

264. Νά εὑρεθοῦν αἱ τιμαί τοῦ μ διά τάς ὁποίας αἱ ἐξισώσεις:

$$\eta\mu x+(3+\sqrt{3})\mu\,\sigma\upsilon\nu x=1\quad,\quad \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=\mu$$

νά ἔχουν κοινήν ρίζαν. Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην νά εὑρεθῇ ἡ τιμή τοῦ x.

265. Νά λυθῇ καί διερευνηθῇ τό σύστημα:

$$\eta\mu y=\lambda\,\eta\mu x \qquad\qquad 2\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y=1$$

266. Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+\varepsilon\varphi x)^3=\eta\mu^3x+\sigma\upsilon\nu^3x+\varepsilon\varphi^3x$$

267. Δίδεται τεταρτοκύκλιον ΑΟΒ, ἀκτῖνος R καί σημεῖον Γ ἐπί τῆς ἀκτῖνος ΟΑ ($Ο\Gamma=\gamma$). Εἰς τό Γ φέρομεν κάθετον ἐπί τήν ἀκτῖνα ΟΑ τέμνουσαν τό τόξον ΑΒ εἰς τό Δ. Νά εὑρεθῇ ἐπί τοῦ τόξου ΑΔ σημεῖον Μ ὥστε τοῦτο νά εἶναι μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΕΦ, ἔνθα Ε καί Φ εἶναι ἀντιστοίχως τά σημεῖα εἰς τά ὁποῖα ἡ ἐφαπτομένη εἰς τό Μ τέμνει τάς προεκτάσεις τῶν ΟΑ καί ΓΔ. Νά ληφθῇ ὡς βοηθητική γωνία ἡ $\widehat{AOM}=x$.

268. Τά μήκη τῶν πλευρῶν ἑνός τριγώνου εἶναι $a=2$, $\beta=\sqrt{6}$, $\gamma=\sqrt{3}+1$. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι αὐτοῦ ἄνευ τῆς χρήσεως λογαρίθμων.

269. Δίδονται δύο εὐθεῖαι $x'x$, $y'y$ ἀπέχουσαι ἀπόστασιν d. Δι' ἑνός

ὡρισμένου σημείου O τῆς πρώτης φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὴν δευτέραν εἰς τὸ B καὶ σχηματίζουσαν μετὰ τῆς πρώτης γωνίαν ω. Κατόπιν μὲ πλευρὰν τὴν OΓ καὶ κορυφὴν Γ κατασκευάζομεν γωνίαν $\widehat{O\Gamma\Delta} = 2\omega$ καὶ τέλος διὰ τοῦ O φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ τέμνουσαν ταύτην εἰς τὸ M. Ζητεῖται ὁ γεωμ. τόπος τοῦ M.

270. Δίδεται ἡ συνάρτησις:

$$f(x) = \left[\lambda - \frac{\beta\,\eta\mu\,x}{\eta\mu(a+x)}\right]\left[\lambda + \frac{\beta\,\eta\mu\,x}{\eta\mu(a-x)}\right]$$

καὶ ζητεῖται νὰ ὁρισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ λ συναρτήσει τῶν α, β, ὥστε διὰ κάθε πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x, μὴ μηδενίζουσαν τοὺς παρονομαστάς, ἡ συνάρτησις $f(x)$ νὰ ἔχῃ τιμὴν σταθερὰν (ὑποτίθεται $\beta \neq 0$ καὶ $\eta\mu\,2a \neq 0$).

271. Ἐὰν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ x, y, z πληροῦν τὴν σχέσιν:

$$x+y+z = xyz$$

θὰ πληροῦν καὶ τήν:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \geq \frac{3}{4}$$

272. Ἐὰν αἱ σχέσεις:

$$a\,\eta\mu^2 x + \beta\,\sigma\upsilon\nu^2 x = m \quad , \quad \beta\,\eta\mu^2 y + a\,\sigma\upsilon\nu^2 y = n \quad , \quad a\,\varepsilon\varphi x = \beta\,\varepsilon\varphi y$$

εἶναι συμβιβασταί, νὰ δειχθῇ ὅτι μεταξὺ τῶν a, β, m, n θὰ ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

273. Ἐὰν τὰ τόξα $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ πληροῦν τὰς σχέσεις:

$$0 < x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu < \frac{\pi}{2} \qquad (1)$$

$$\sigma\upsilon\nu\,x_1 + \sigma\upsilon\nu\,x_2 + \ldots + \sigma\upsilon\nu\,x_\nu < 1 \qquad (2)$$

θὰ πληροῦν καὶ τήν:

$$\sqrt[2\nu]{1-(\sigma\upsilon\nu\,x_1 + \sigma\upsilon\nu\,x_2 + \ldots + \sigma\upsilon\nu\,x_\nu)^2} < \eta\mu\,\frac{x_1+x_2+\ldots+x_\nu}{\nu} \qquad (3)$$

274. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὅριον τῆς παραστάσεως:

$$\frac{2\eta\mu x - \varepsilon\varphi 2x}{x^3} \qquad \text{ὅταν } \quad \sigma\varphi x = 0$$

275. Νά δειχθῆ ὅτι:

α) $\varepsilon\varphi^2\frac{\pi}{11} + \varepsilon\varphi^2\frac{2\pi}{11} + \varepsilon\varphi^2\frac{3\pi}{11} + \varepsilon\varphi^2\frac{4\pi}{11} + \varepsilon\varphi^2\frac{5\pi}{11} = 55$ καί

β) $\tau\varepsilon\mu^2\frac{\pi}{9} + \tau\varepsilon\mu^2\frac{3\pi}{9} + \tau\varepsilon\mu^2\frac{5\pi}{9} + \tau\varepsilon\mu^2\frac{7\pi}{9} = 40$

276. Νά εὑρεθῇ τό ὅριον τῆς παραστάσεως:

$$\frac{x - \tau o\xi\,\eta\mu x}{\eta\mu^3 x} \qquad \text{ὅταν } \quad x \longrightarrow 0$$

277. Ἐάν εἰς τρίγωνον ἀληθεύει ἡ σχέσις $\tau > 2R + \rho$, νά δειχθῇ ὅτι τοῦτο εἶναι ὀξυγώνιον.

278. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐάν δύο διχοτόμοι ἑνός τριγώνου εἶναι ἴσαι, τό τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

279. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι διά κάθε τόξον x, διά τό ὁποῖον $0 < x < \frac{\pi}{2}$, θά ἰσχύῃ:

$$x - \eta\mu x < \varepsilon\varphi x - x$$

280. Νά λυθῇ ἡ ἀνισότης:

$$\left|\tau o\xi\ \eta\mu\frac{\sqrt{3}}{2}\right| < \frac{17\pi}{5}$$

281. Δίδεται κύκλος ἀκτῖνος R. Εἰς τοῦτον ἐγγράφομεν ἰσοσκελές τρίγωνον $AB\Gamma$. Ἐάν $B\Gamma = \alpha$ εἶναι ἡ βάσις καί A ἡ γωνία τῆς κορυφῆς, ζητεῖται νά ὁρισθῇ ἡ τιμή τῆς γωνίας A ὥστε τό ἄθροισμα $\alpha + \upsilon_\alpha$ νά γίνεται μέγιστον.

282. Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$\eta\mu^{14}x + \sigma\upsilon\nu^{14}x = \frac{169}{64}\,\sigma\upsilon\nu^6(2x)$$

283. Δίδεται κανονικον ἑπτάγωνον $AB\Gamma\Delta EZH$. Νά δειχθοῦν αἱ σχέσεις:

$$A\Delta^2 = A\Gamma\cdot(AB + A\Gamma) \qquad \text{καί} \qquad A\Gamma^2 - AB^2 = A\Gamma(A\Delta - AB)\,.$$

284. Νά ὑπολογισθῇ τό ἄθροισμα τῆς σειρᾶς:

$$\tau\varepsilon\mu^2 x + 2^2 \tau\varepsilon\mu^2(2x) + 2^4 \tau\varepsilon\mu^2(2^2 x) + \ldots + 2^{2(\nu-1)} \tau\varepsilon\mu^2(2^{\nu-1}x)$$

285. Νά δειχθῇ ὅτι:

$$\text{ορ}\,\frac{\eta\mu\frac{\pi}{2\nu} + \eta\mu\frac{2\pi}{2\nu} + \ldots + \eta\mu\frac{\nu\pi}{2\nu}}{\frac{\pi}{2\nu} + \frac{2\pi}{2\nu} + \ldots + \frac{\nu\pi}{2\nu}} = \frac{8}{\pi^2}$$

286. Δίδεται τετράεδρον $A'AB\Gamma$, εἰς τό ὁποῖον $A'A \perp AB\Gamma$. Ἐάν ω εἶναι ἡ δίεδρος γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπό τῶν ἑδρῶν $A'B\Gamma$ καί $AB\Gamma$, νά ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς R τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας περί τό τετράεδρον συναρτήσει τῶν στοιχείων τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ καί τῆς γωνίας ω.

287. Νά ἐπιλυθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν κάτωθι σχέσεων:

$$\alpha+\beta+\gamma=\lambda \quad , \quad \eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma = \frac{\sqrt{2}+3}{2} \quad , \quad 2B = A+\Gamma$$

288. Ἐάν τό πολυώνυμον:

$$x^3 + x^2\cdot \varepsilon\varphi A + x\cdot \varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi\Gamma$$

εἶναι τέλειος κῦβος ὡς πρός x, νά δειχθῇ ὅτι:

$$\varepsilon\varphi A\cdot\varepsilon\varphi B\cdot\varepsilon\varphi\Gamma = 9$$

289. Κανονική πυραμίς μέ βάσιν τετράγωνον ἔχει ὕψος υ καί πλευράν τῆς βάσεως a. Ἐάν ω εἶναι ἡ γωνία μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας μέ τήν βάσιν καί φ ἡ γωνία δύο διαδοχικῶν παραπλεύρων ἑδρῶν, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{2\upsilon}{a} \qquad \text{καί} \qquad \varepsilon\varphi\frac{\varphi}{2} = \sqrt{1+\frac{a^2}{2\upsilon^2}}$$

290. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι διά κάθε τρίγωνον ἀληθεύει ἡ σχέσις:

$$a^2\sigma\varphi A + \beta^2\sigma\varphi B + \gamma^2\sigma\varphi\Gamma = 4E$$

291. Νά λυθῇ τό σύστημα:

$$\eta\mu 5x - \eta\mu y = 0 \quad , \quad \varepsilon\varphi 3x\cdot\varepsilon\varphi 4y = 1$$

292. Ἐάν $\tau\varepsilon\mu\, 2A = 2 + \tau\varepsilon\mu\, A$, νά δειχθῇ ὅτι:

$$\sigma\upsilon\nu\, 2A + \sigma\upsilon\nu\, 3A = 0$$

293. Νά ὑπολογισθῇ τό ἄθροισμα S_ν τῆς σειρᾶς τῆς ὁποίας:

$$a_\nu = 2^\nu \sigma\tau\varepsilon\mu\,(2^\nu\theta)\cdot \sigma\varphi\,(2^\nu\theta)$$

294. Νά εὑρεθῇ τό ὅριον τῆς παραστάσεως:

$$\frac{x\,\eta\mu x + 1 - \sigma\upsilon\nu x}{x^2} \qquad \text{διά } x \to 0$$

295. Ἀφοῦ ἀποδειχθῇ πρῶτον ἡ σχέσις:

$$\eta\mu(\nu a) = \eta\mu^\nu a\left\{A_1\, \sigma\varphi^{\nu-1}a - A_3\, \sigma\varphi^{\nu-3}a + A_5\, \sigma\varphi^{\nu-5}a - + \ldots\right\}$$

ἔνθα $A_1, A_2, A_3, \ldots$ εἶναι οἱ συντελεσταί τοῦ ἀναπτύγματος $(x-1)^\nu$. Ἐν συνεχείᾳ νά δειχθῇ ὅτι:

α) Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως:

$$A_1 x^\mu - A_3 x^{\mu-1} + A_5 x^{\mu-2} - + \ldots = 0$$

εἶναι $x_\kappa = \sigma\varphi^2 \frac{\kappa\pi}{\nu}$, ὅταν $\nu = 2\mu + 1$

β) Νά εὑρεθῇ τό: $\sum\limits_{\kappa=1}^{\mu} x_\kappa$.

γ) Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$\eta\mu a < a < \varepsilon\varphi a \qquad \text{ὅταν} \qquad 0 < a < \frac{\pi}{2}$$

νά δειχθῇ ὅτι:

$$\frac{1}{6}(\nu-1)(\nu-2) < \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\nu}{\mu\pi}\right)^2 < \frac{1}{6}(\nu+1)(\nu+2)$$

δ) Νά εὑρεθῇ τό ὅριον τοῦ ἀθροίσματος:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{\mu^2} \qquad \text{ὅταν } \mu \to \infty$$

296. Ἐάν Ζ εἶναι τό σημεῖον ἐπαφῆς τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας Ο τριγώνου ΑΒΓ καί φέρωμεν τήν περιφέρειαν (C_1) ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῆς ΒΓ εἰς τό Ζ καί τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας περί τό τρίγωνον ΑΒΓ πρός τό μέρος τῆς κορυφῆς Α, νά δειχθῇ ὅτι ἡ ἀκτίς ταύτης εἶναι $x = \frac{E}{a}$. Ἐνῷ τῆς περιφερείας (C_2), τῆς ἐφαπτομένης τῆς ΒΓ εἰς τό Ζ καί τῆς περιγεγραμμένης τοῦ ΑΒΓ ἀπό τό ἕτερον

μέρος εἶναι $y = \frac{E}{\alpha} \cdot \varepsilon\varphi^2 \frac{A}{2}$.

297. Νά εὑρεθῇ τό ὅριον τῆς παραστάσεως:

$$\frac{x^2 - \eta\mu^2 3x}{x \cdot \varepsilon\varphi\, 7x} \qquad \text{ὅταν} \quad x \longrightarrow 0$$

298. Δίδεται κανονικόν πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς περιφέρειαν ἀκτῖνος R. Ἐάν $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ εἶναι αἱ κορυφαί τοῦ πολυγώνου καί $A_1', A_2', \ldots, A_\nu'$ αἱ προβολαί τυχόντος σημείου M τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας ἀντιστοίχως ἐπί τῶν πλευρῶν A_1A_2, $A_2A_3, \ldots$, νά ὑπολογισθοῦν τά ἀθροίσματα:

α) $(\overline{A_1A_1'}) + (\overline{A_2A_2'}) + \ldots + (\overline{A_\nu A_\nu'})$

β) $(\overline{A_1A_1'})^2 + (\overline{A_2A_2'})^2 + \ldots + (\overline{A_\nu A_\nu'})^2$

299. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τ. τῶν σημείων $M(x, y)$ διά τά ὁποῖα ἀληθεύει ἡ σχέσις:

$$x \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi + y\eta\mu\varphi \leq \quad \text{διά κάθε} \quad \varphi \in \pi$$

300. Δίδονται αἱ περιφέρειαι $(K_1 R_1)$, $(K_2 R_2)$ καί ἐπί τῆς διακέντρου αὐτῶν K_1K_2 σταθερόν σημεῖον Σ. Διά τοῦ Σ φέρομεν τήν τέμνουσαν $H_1Z_1\Sigma Z_2H_2$ τῶν περιφερειῶν K_1, K_2, φέρομεν ἀκόμη καί τάς ἐφαπτομένας εἰς τά σημεῖα Z_1, H_1, Z_2, H_2. Ἐάν P_1 εἶναι ἡ τομή τῶν δύο πρώτων καί P_2 τῶν δύο ἄλλων καί εἶναι H ἡ τομή τῶν K_1K_2, P_1P_2, θέσωμεν δέ $\hat{\omega} = \widehat{\Sigma H P_1}$ καί $\hat{x} = \widehat{H\Sigma Z_1}$, νά δειχθῇ ὅτι $\varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi x = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}\nu$.

301. Εἰς τρίγωνον $AB\Gamma$ ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τό κέντρον O τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας μέ τό κέντρον K τῆς περιγεγραμμένης, τέμνει τό ἐκ τῆς κορυφῆς A ἀγόμενον ὕψος εἰς σημεῖον Δ. Νά δειχθῇ τότε ὅτι:

$$(K\Delta) = (KO) \cdot \sigma\tau\varepsilon\mu \frac{A}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{B - \Gamma}{2}$$

302. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ κοινή χορδή τῆς εἰς τό τρίγωνον $AB\Gamma$ περιγεγραμμένης περιφερείας καί τῆς παρεγγεγραμμένης εἰς τήν πλευράν α, παρέχεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$x=\frac{\sqrt{\rho_a^3\cdot(4R-\rho_a)}}{\sqrt{R\cdot(R+2\rho_a)}}$$

303. Ἐάν $0<x,\ y,\ z<180^\circ$, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\eta\mu x\cdot\eta\mu y\cdot\eta\mu z \geqq \eta\mu(x+y-z)\cdot\eta\mu(x+z-y)\cdot\eta\mu(y+z-x)$$

304. Ἐάν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί x, y πληροῦν τάς σχέσεις:

$$x^3=9(x+1) \quad , \quad y^3=9(y+1) \qquad x<y<0$$

νά δειχθῇ τότε ὅτι θά πληροῦν καί τήν:

$$x+7=(y-1)^2$$

305. Νά δειχθῇ ὅτι διά κάθε τόξον x ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$(\sigma\tau\epsilon\mu^{2\nu}x-1)\cdot(\tau\epsilon\mu^{2\nu}x-1)\geqq(1+2+3+\ldots+\nu)^2$$

306. Δίδεται περιφέρεια (O,R) καί ἡ ἐφαπτομένη εἰς τό σημεῖον αὐτῆς A, διά τοῦ O φέρομεν τήν ἀκτῖνα $O\Theta$, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τήν ἐφαπτομένην εἰς τό σημεῖον B. Εἰς τό B φέρομεν κάθετον ἐπί τήν OB τέμνουσαν τήν ἀκτῖνα OA εἰς τό Z. Μέ διάμετρον τήν OZ γράφομεν περιφέρειαν τέμνουσαν τήν O εἰς τά Δ καί Δ'. Ζητεῖται νά εὑρεθῇ ἡ $\Delta\Delta'$ συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R καί τῆς γωνίας $x=\widehat{AOB}$. Ἐν συνεχείᾳ νά ὁρισθῇ ἡ τιμή τῆς γωνίας x ὥστε $\Delta\Delta'=BB'$, ἔνθα B' τό ἕτερον σημεῖον τομῆς τῆς ἐφαπτομένης εἰς τό A καί τῆς περιφερείας διαμέτρου OZ.

307. Νά εὑρεθῇ τό μέγιστον τῆς παραστάσεως:

$$y=[\eta\mu x]^{\frac{11+6\sqrt{3}}{26}}\cdot\left(\sigma\upsilon\nu^4x+\sigma\upsilon\nu^2x+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{8}}$$

308. Ἐάν O εἶναι τό σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων AM καί BN τριγώνου $AB\Gamma$ καί θέσωμεν $\widehat{BOM}=\varphi$, νά δειχθῇ ἡ σχέσις:

$$3\sigma\varphi\,\varphi=2\sigma\varphi B+2\sigma\varphi A-\sigma\varphi\Gamma$$

309. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον O.

Ἐπί τοῦ τόξου ΒΜΓ λαμβάνομεν τυχόν σημεῖον Μ καί συνδέομεν τοῦτο μέ τάς κορυφάς Α, Β, Γ. Ἐάν $Α_1$, $Β_1$, $Γ_1$ εἶναι αἱ τομαί τῶν ΑΜ, ΒΜ, ΓΜ, ἀντιστοίχως, μέ τάς πλευράς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ, νά δειχθῇ ὅτι τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου $Α_1Β_1Γ_1$ εἶναι διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

310. Ἐάν αἱ θετικαί γωνίαι Α, Β πληροῦν τάς σχέσεις:

$$3ημ^2Α + 2ημ^2Β = 1 \qquad (1)$$

$$3ημ2Α - 2ημ2Β = 0 \qquad (2)$$

θά πληροῦν καί μίαν τῶν ἑπομένων:

$$2Β + Α = 90^\circ + Κ\cdot 360 \qquad ἤ \qquad 2Β + Α = 270^\circ + Κ\cdot 360$$

311. Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$εφx = (2+\sqrt{3})\,εφ\frac{x}{3}$$

312. Ἐάν $ημx = \dfrac{ημα + ημβ}{1 + ημα\cdot ημβ}$, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$εφ\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \pm\, εφ\left(\frac{\pi}{4} + \frac{α}{2}\right)\cdot εφ\left(\frac{\pi}{4} + \frac{β}{2}\right)$$

313. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Φέρομεν τό ὕψος ΑΑ' καί ἐπί τούτου λαμβάνομεν τυχόν σημεῖον Μ, φέρομεν τάς ΒΜΖ καί ΓΜΗ, ἔνθα Ζ καί Η αἱ τομαί τῶν ΒΜ καί ΓΜ μέ τάς ΑΓ καί ΑΒ. Ἐάν διά τό τυχόν σημεῖον Μ ἀληθεύῃ ἡ σχέσις ΒΖ = ΓΗ νά δειχθῇ ὅτι τό τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

314. Νά εὑρεθῇ τό ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς σειρᾶς τῆς ὁποίας ὁ γενικός ὅρος παρέχεται ὑπό τοῦ τύπου

$$α_ν = συν^ν β \cdot ημ(α + νβ)$$

καί νά δειχθῇ ὅτι τοῦτο εἶναι ἴσον μέ $εφβ\cdot συνα$.

315. Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ μέ πλευράν τήν ΑΒ καί κορυφάς τάς Α καί Β σχηματίζομεν τάς γωνίας ΜΑΒ = ΜΒΑ = 15°, νά δειχθῇ ὅτι τό τρίγωνον ΔΜΓ εἶναι ἰσόπλευρον.

316. Νά δειχθοῦν αἱ κάτωθι ἰσότητες:

$$\text{τοξ εφ}\frac{1}{2}+\text{τοξ εφ}\frac{1}{5}+\text{τοξ εφ}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$

$$\text{τοξ εφ}\frac{1}{3}+\text{τοξ εφ}\frac{1}{5}+\text{τοξ εφ}\frac{1}{7}+\text{τοξ εφ}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$

$$\text{τοξ εφ}\frac{1}{2K-1}-\text{τοξ εφ}\frac{1}{2K+1}=\text{τοξ εφ}\frac{1}{2K^2}$$

317. Νά εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι τιμαί τῶν a, β, διά τάς ὁποίας:

$$\text{τοξ ημ}\frac{a}{\sqrt{5}}+\text{τοξ ημ}\frac{\beta}{\sqrt{5}}=\frac{\pi}{2}$$

318. Ἐάν $\text{ημ}x=\frac{a-\beta}{a+\beta}$, νά ὑπολογισθῇ ἡ $\text{εφ}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$

319. Ἐάν εἰς τρίγωνον ἀληθεύει ἡ σχέσις:

$$a^4+\beta^4+\gamma^4=2a^2\cdot(\beta^2+\gamma^2)$$

τότε θά εἶναι $A=45^\circ$ ἤ 135°.

320. Νά λυθῇ καί διερευνηθῇ ὡς πρός λ ἡ ἐξίσωσις:

$$1+\lambda\,\text{ημ}2x-\text{συν}4x=0$$

Νά εὑρεθοῦν αἱ λύσεις ταύτης ὅταν $\lambda=-\sqrt{3}$.

321. Δίδονται τά ἀθροίσματα:

$$x=\text{συν}3a+\text{συν}5a+\text{συν}7a+\text{συν}11a$$

$$y=\text{συν}a+\text{συν}9a+\text{συν}13a+\text{συν}15a$$

ἔνθα $17a=\pi$. Νά ὑπολογισθοῦν τά x, y ἀφοῦ προηγουμένως δειχθοῦν αἱ ἰσότητες:

$$x+y=\frac{1}{2}\quad,\quad xy=-1$$

322. Νά λυθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισότητες:

$$\frac{2\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})\text{ημ}x+\sqrt{6}-1}{4\text{ημ}^2x-1}<1 \qquad (\alpha)$$

$$\text{ημ}2x+\text{συν}2x>\sqrt{2}\,\text{ημ}x \qquad (\beta)$$

323. Θεωροῦμεν τό σύστημα:

$$\text{συν}x=\lambda\,\text{συν}2y\quad,\quad\text{συν}y=\lambda\,\text{συν}2x$$

α) Νά εὑρεθοῦν αἱ λύσεις τοῦ συστήματος ὅταν συνx = συνy.

β) Νά εὑρεθοῦν αἱ ὑπόλοιποι λύσεις. Νά γίνῃ ἡ σχετική διερεύνησις.

324. Δίδεται περιφέρεια κέντρου Ο καί διάμετρος αὐτῆς ΑΒ. Ἐπί τῆς διαμέτρου ΑΒ καί ἑκατέρωθεν τοῦ Ο λαμβάνομεν δύο σταθερά σημεῖα Ε καί Ζ καί ἐπί τῆς περιφερείας μεταβλητόν σημεῖον Μ. Φέρομεν τάς ΜΕ καί ΜΖ αἵτινες, προεκτεινόμεναι, συναντοῦν τήν περιφέρειαν ἀντιστοίχως εἰς τά σημεῖα Η καί Θ. Ζητεῖται ν' ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\frac{ME}{EH} + \frac{MZ}{Z\Theta} = \text{σταθερόν}$$

325. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι:

$$15\,\eta\mu 2x - 9\,\sigma\upsilon\nu 2x = 5$$

νά ὑπολογισθῇ ἡ εφ$3x$.

35