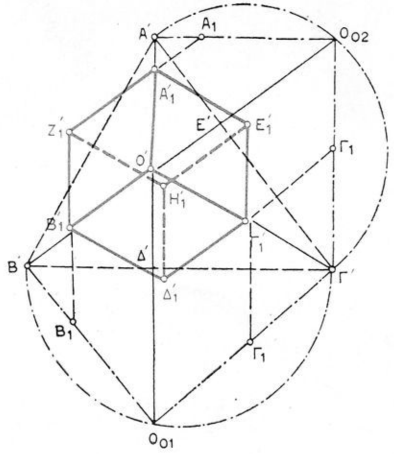


ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

τοῦ ἐγκεκριμένου Σχολικοῦ βιβλίου
Ε′ & ΣΤ′ Γυμνασίου

ΥΠΟ

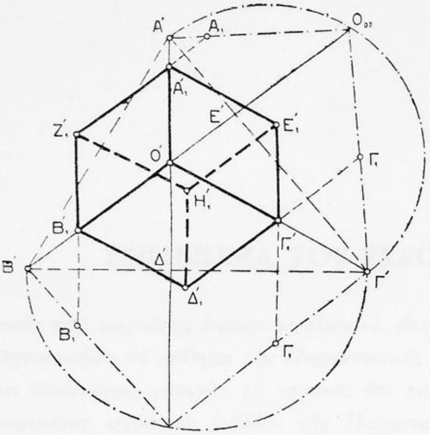
ΠΑΝΤ. ΞΑΓΟΡΑΡΗ

ΕΠΙΜΕΛΗΤΟΥ ΤΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
ΕΝ ΤΩ, Ε. Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΩ,

ΕΚΔΟΣΕΙΣ Α. ΚΑΡΑΒΙΑ

ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ 58 ΑΘΗΝΑΙ

1969



ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

τοῦ ἐγκεκριμένου Σχολικοῦ βιβλίου
Ε΄ & ΣΤ΄ Γυμνασίου

ΥΠΟ
ΠΑΝΤ. ΞΑΓΟΡΑΡΗ
ΕΠΙΜΕΛΗΤΟΥ ΤΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
ΕΝ ΤΩ, Ε. Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΩ,

ΕΚΔΟΣΕΙΣ Α. ΚΑΡΑΒΙΑ
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ 58 ΑΘΗΝΑΙ
1969

ΣΗΜΕΙΩΜΑ ΤΟΥ ΕΚΔΟΤΟΥ

Σκοπὸς τῆς παρούσης ἐκδόσεως εἶναι νὰ βοηθήσῃ τὸν μαθητὴν εἰς τὸ νὰ συνειδητοποιήσῃ τὸ μάθημα τῆς Παραστατικῆς Γεωμετρίας.

Εἶναι ἰδιαιτέρως εὐτυχὲς τὸ γεγονὸς ὅτι τὰς λύσεις τῶν ἀσκήσεων τοῦ ἐγκεκριμένου σχολικοῦ βιβλίου τῆς Παραστατικῆς Γεωμετρίας (συγγραφεὺς Παν. Λαδόπουλος καθηγητὴς Ε.Μ. Πολυτεχνείου) ἐπεξειργάσθη ὁ κ. Παντελῆς Ξαγοράρης ἐκ τῶν στενωτέρων συνεργατῶν τοῦ συγγραφέως καὶ ἐπιμελητής του εἰς τὴν ἕδραν τῆς Παραστατικῆς Γεωμετρίας ἐν τῷ Πολυτεχνείῳ.

Αἱ λύσεις τῶν ἀσκήσεων εἶναι σύντομοι, σαφεῖς καὶ ἁπλαῖ. Ὁ συγγραφεὺς κ. Παντ. Ξαγοράρης ἐπέτυχε νὰ μεταφέρῃ ἐδῶ καὶ νὰ διατηρήσῃ τὸ πνεῦμα τὸ ὁποῖον διέπει τὸ σχολικὸν βιβλίον τῆς Παραστατικῆς Γεωμετρίας.

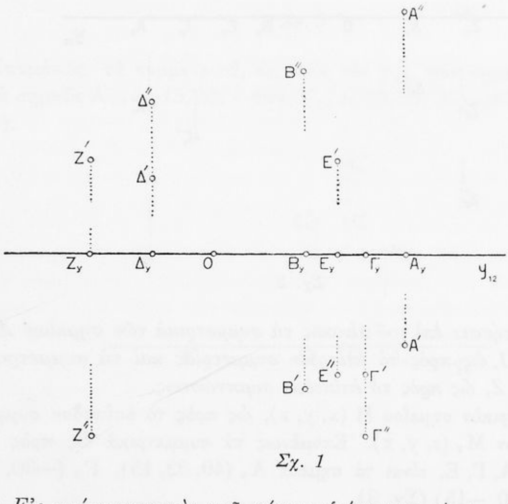
ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ
ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑ ΔΥΟ ΠΡΟΒΟΛΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

Παράστασις καὶ ἀμοιβαῖαι θέσεις τῶν θεμελιωδῶν γεωμετρικῶν στοιχείων

§ 1. Προβλήματα ἐπὶ τοῦ καθορισμοῦ τῆς θέσεως σημείου ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα προβολῆς συμμετρίας καὶ συμπτώσεως

1) *Παραστήσατε ἐπὶ τοῦ πίνακος τὰ σημεῖα :* Α (15, 32, 40), Β (22, 15, 30), Γ (20, 25, —30), Δ (—12, —10, 25), Ε (—15, 20, —20) Ζ (—15, —20, —30).



Σχ. 1

2) *Εἰς ποίας περιοχὰς τοῦ χώρου εὑρίσκονται τὰ σημεῖα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.*

Τὰ σημεῖα Α καὶ Β εὑρίσκονται εἰς τὴν περιοχὴν Ι

Τὰ σημεῖα Γ καὶ Ε εὑρίσκονται εἰς τὴν περιοχὴν IV

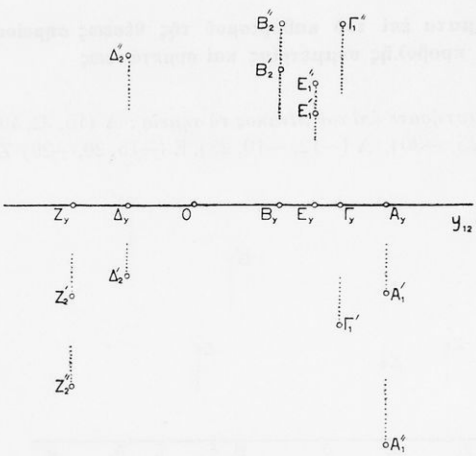
Τὸ σημεῖον Δ εὑρίσκεται εἰς τὴν περιοχὴν II

Τὸ σημεῖον Z εὑρίσκεται εἰς τὴν περιοχὴν III.

3) Παραστήσατε ἐπὶ τοῦ πίνακος τὰ συμμετρικὰ τῶν σημείων A, Γ, B, τῆς ἀσκήσεως I, ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον προβολῆς καὶ τὰ συμμετρικὰ τῶν σημείων B, Δ, Z, ὡς πρὸς τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον προβολῆς.

Τὸ συμμετρικὸν σημείου M (x, y, z), ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον προβολῆς εἶναι τὸ σημεῖον M_1 (x, y, — z). Ἑπομένως, τὰ συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ e_1 τῶν σημείων A, Γ, E, εἶναι τὰ σημεῖα A_1 (15, 32, —40), $Γ_1$ (20, 25, 30) καὶ E_1 (—15, 20, 20) (Σχ. 2).

Τὸ συμμετρικὸν σημείου M (x, y, z), ὡς πρὸς τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον προβολῆς, εἶναι τὸ σημεῖον M_1 (—x, y, z). Ἑπομένως τὰ συμμετρικά, ὡς πρὸς τὸ e_2, τῶν σημείων B, Δ, Z, εἶναι τὰ σημεῖα B_2 (—22, 15, 30), $Δ_2$ (12, —10, 25) καὶ Z_2 (15, —20, —30) (Σχ. 2).



Σχ. 2

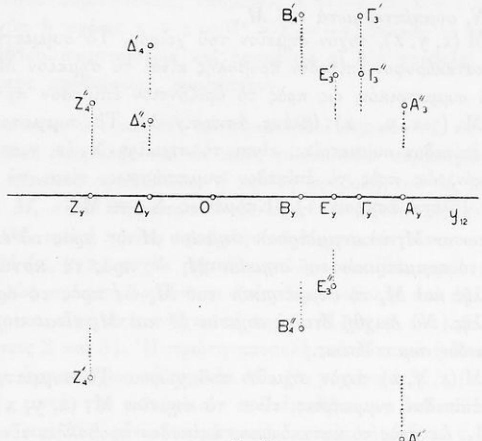
4) Παραστήσατε ἐπὶ τοῦ πίνακος τὰ συμμετρικὰ τῶν σημείων A, Γ, B, τῆς ἀσκήσεως 1, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας καὶ τὰ συμμετρικὰ τῶν σημείων B, Δ, Z, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως.

Τὸ συμμετρικὸν σημείου M (x, y, z), ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας, εἶναι τὸ σημεῖον M_3 (z, y, x). Ἑπομένως τὰ συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ e_{13}, τῶν σημείων A, Γ, E, εἶναι τὰ σημεῖα A_3 (40, 32, 15), $Γ_3$ (—30, 25, 20) καὶ E_3 (—20, 20, —15) (Σχ. 3).

Τὸ συμμετρικὸν σημείου M (x, y, z), ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως, εἶναι τὸ σημεῖον M_4 (—z, y, —x). Ἑπομένως, τὰ συμμετρικά, ὡς πρὸς τὸ e_{24}, τῶν σημείων B, Δ, Z, εἶναι τὰ σημεῖα B_4 (—30, 15, —22), $Δ_4$ (—25, —10, 12) καὶ Z_4 (30, —20, 15) (Σχ. 3).

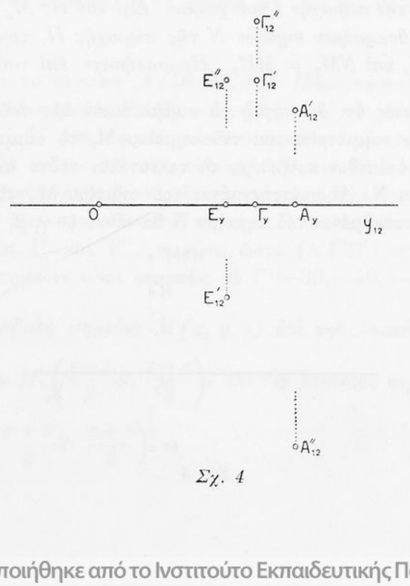
5) Παραστήσατε ἐπὶ τοῦ πίνακος τὰ συμμετρικὰ τῶν σημείων Α,Γ,Ε, τῆς ἀσκήσεως 1, ὡς πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}.

Τὸ συμμετρικὸν σημείου Μ (x, y, z), ὡς πρὸς τὸν ἄξονα θὰ εἶναι τὸ σημεῖον M_{12} (—x, y, — z).



Σχ. 3

Ἑπομένως, τὰ συμμετρικά, ὡς πρὸς τὸν y_{12}, τῶν σημείων Α, Γ, Ε, θὰ εἶναι τὰ σημεῖα A_{12} (—15, 32, —40), Γ_{12} (—20, 25, 30) καὶ E_{12} (15, 20, 20) (Σχ. 4).



Σχ. 4

6) Ἔστωσαν N_1 τὸ συμμετρικὸν σημείου M ὡς πρὸς τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον, M_2 τὸ συμμετρικὸν τοῦ M_1 ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον προβολῆς, N_1 τὸ συμμετρικὸν τοῦ M ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας καὶ N_2 τὸ συμμετρικὸν τοῦ N_1 ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ σημεῖον N_2 συμπίπτει μετὰ τοῦ M_2.

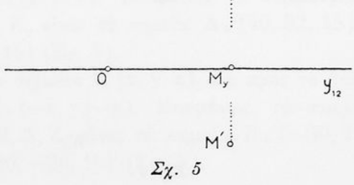
Ἔστω $M(x, y, z)$, τυχὸν σημεῖον τοῦ χώρου. Τὸ συμμετρικὸν τοῦ M, ὡς πρὸς τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον προβολῆς εἶναι τὸ σημεῖον $M_1(-x, y, z)$ τούτου δὲ τὸ συμμετρικόν, ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον προβολῆς, εἶναι τὸ σημεῖον $M_2(-x, y, -z)$ (βλέπε ἄσκησιν 3). Τὸ συμμετρικὸν τοῦ M, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας, εἶναι τὸ σημεῖον $N_1(z, y, x)$, τούτου δὲ τὸ συμμετρικόν, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως, εἶναι τὸ σημεῖον N_2 $(-x, y, -z)$ (βλέπε ἄσκησιν 4). Ἑπομένως $N_2 \equiv M_2$.

7) Ἔστωσαν M_1 τὸ συμμετρικὸν σημείου M ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας, M_2 τὸ συμμετρικὸν τοῦ σημείου M_1 ὡς πρὸς τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον προβολῆς καὶ M_3 τὸ συμμετρικὸν τοῦ M_2 ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον προβολῆς. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα M καὶ M_3 εἶναι συμμετρικά, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως.

Ἔστω $M(x, y, z)$ τυχὸν σημεῖον τοῦ χώρου. Τὸ συμμετρικὸν τοῦ M, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας, εἶναι τὸ σημεῖον $M_1(z, y, x)$. Τὸ συμμετρικὸν τοῦ M_1, ὡς πρὸς τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον προβολῆς, εἶναι τὸ σημεῖον $M_2(-z, y, x)$, τούτου δὲ τὸ συμμετρικόν, ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον προβολῆς, εἶναι τὸ σημεῖον $M_3(-z, y, -x)$. Ἀλλὰ τὰ σημεῖα M καὶ M_3 εἶναι συμμετρικά, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως, (βλέπε ἀσκήσεις 3 καὶ 4).

8) Ἔστωσαν M_y ἡ προβολὴ ἐπὶ τοῦ ἄξονος y_{12} σημείου $M(\alpha, \beta, \gamma)$, εὑρισκομένου εἰς τὴν περιοχὴν I τοῦ χώρου. Ἐπὶ τοῦ εἰς M_y καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα ἐπιπέδου, θεωροῦμεν σημεῖον N τῆς περιοχῆς II, τοιοῦτον ὥστε γων. MM_yN = 1 ὀρθή, καὶ $NM_y = MM_y$ Παραστήσατε ἐπὶ τοῦ πίνακος τὸ σημεῖον N.

Εἶναι προφανὲς ὅτι ἂν ληφθῇ τὸ συμμετρικὸν M_3 τοῦ σημείου M, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας καὶ τοῦ σημείου M_3 τὸ συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον προβολῆς, τὸ τελευταῖον τοῦτο σημεῖον συμπίπτει μετὰ τοῦ σημείου N. Αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου M_3 εἶναι (γ, β, α) καὶ ἑπομένως αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου N θὰ εἶναι $(-\gamma, \beta, \alpha)$.



Σχ. 5

9) Διὰ νὰ συμπίπτουν ἐπὶ τοῦ πίνακος σχεδιάσεως αἱ δύο προβολαὶ σημείου $M(x, y, z)$ τοῦ χώρου, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις $x + z = 0$.

Ἔστωσαν M′ καὶ M″ αἱ δύο προβολαὶ τοῦ σημείου M. Ἐὰν τὸ σημεῖον M καὶ M ἐπὶ τοῦ πίνακος σχεδιάσεως συμπίπτουν, τὸ σημεῖον M θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμπτώσεως, ἑπομένως $x = -z \Rightarrow x + z = 0$.

Ἐὰν ἰσχύῃ ἡ σχέσις $x + z = 0 \Rightarrow x = -z$, δηλαδὴ τὸ σημεῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμπτώσεως καὶ ἑπομένως αἱ δύο προβολαὶ M′ καὶ M″, ἐπὶ τοῦ πίνακος σχεδιάσεως, συμπίπτουν.

10) Ἔστωσαν M_1 καὶ M_2 τὰ συμμετρικὰ σημείου M, ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον προβολῆς καὶ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἐπὶ τοῦ πίνακος σχεδιάσεως, ἡ πρώτη προβολὴ τοῦ M_1 καὶ ἡ δευτέρα προβολὴ τοῦ M_2 εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}, ἐνῷ ἡ δευτέρα προβολὴ τοῦ M_1 καὶ ἡ πρώτη προβολὴ τοῦ M_2 συμπίπτουν.

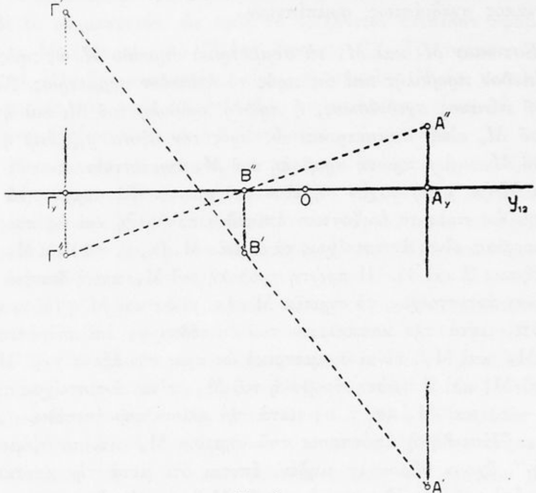
Ἔστω M (x, y, z) τυχὸν σημεῖον τοῦ χώρου. Τὰ συμμετρικὰ τοῦ σημείου τούτου ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον προβολῆς καὶ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας, εἶναι ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα M_1 (x, y, —z) καὶ M_2 (z, y, x) (βλέπε ἀσκήσεις 2 καὶ 3). Ἡ πρώτη προβολὴ τοῦ M_1, καὶ ἡ δευτέρα προβολὴ τοῦ M_2, εἶναι ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα M'_1 (x, y, o) καὶ M''_2 (o, y, x). Εἶναι προφανὲς ὅτι, μετὰ τὴν κατάκλισιν τοῦ ἐπιπέδου e_2 ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1, τὰ σημεῖα M_1' καὶ M_2'' εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}. Ἡ δευτέρα προβολὴ τοῦ M_1 καὶ ἡ πρώτη προβολὴ τοῦ M_2', εἶναι ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα M_1'' (o, y, —z) καὶ M_2' (z, y, o) μετὰ τὴν κλίσιν τοῦ ἐπιπέδου e_2 ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1. Ἐπειδὴ ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου M_2' καὶ τὸ ὑψόμετρον τοῦ σημείου M_1'' ἔχουν ἄθροισμα μηδέν, ἕπεται ὅτι μετὰ τὴν κατάκλισιν τοῦ ἐπιπέδου e_2 ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1 τὰ σημεῖα M_1'' καὶ M'_2 θὰ συμπέσουν (βλέπε ἄσκησιν 9).

11) Δίδεται τὸ σημεῖον A (50, 20, 10). Παραστήσατε τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ, ὡς πρὸς τὸ σημεῖον B (10, —10, 0).

Ἔστω Γ (Γ′, Γ″) τὸ συμμετρικὸν τοῦ σημείου A, ὡς πρὸς τὸ σημεῖον B. Τὸ σημεῖον Γ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας AB καὶ θὰ εἶναι (AΓB) = 1. Ἐπειδὴ δὲ ὁ μερικὸς λόγος διατηρεῖται κατὰ τὴν ὀρθὴν προβολήν, ἕπεται ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ τῶν προβολῶν τοῦ σημείου Γ, θὰ ληφθοῦν ἐπὶ τῶν A′B′ καὶ A″B″ τὰ σημεῖα Γ′ καὶ Γ″, τοιαῦτα ὥστε (A′Γ′B′) = (A″Γ″B″) = 1. Τὸ ζητούμενον σημεῖον εἶναι συνεπῶς τὸ Γ (—30, —40, —10) (σχ. 6).

12) Ἡ προβολὴ σημείου $M(x, y, z)$ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμπτώσεως εἶναι τὸ σημεῖον $M_1\left(\frac{x-z}{2}, y, \frac{z-x}{2}\right)$, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμμετρίας δὲ εἶναι τὸ σημεῖον $M_2\left(\frac{x+z}{2}, y, \frac{x+z}{2}\right)$.

α′) Τὸ συμμετρικὸν τοῦ σημείου Μ (x, y, z), ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας, εἶναι τὸ σημεῖον M_3 (x, y, z) (βλέπε ἄσκησιν 4). Ἐπειδὴ δὲ ἡ προβολὴ M_1 (x_1, y, z) τοῦ σημείου Μ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμμετρίας εἶναι μέσον τοῦ τμήματος Μ M_3, αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου M_1, θὰ δίδωνται ὑπὸ τῶν τύπων : $x_1 = \frac{x+z}{2}$, $y_1 = y$ καὶ $z_1 = \frac{z+x}{2}$.



Σχ. 6

β′) Τὸ συμμετρικὸν τοῦ σημείου Μ (x, y, z), ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως, εἶναι τὸ σημεῖον Μ (βλέπε ἄσκησιν 4). Ἐπειδὴ δὲ ἡ προβολὴ Μ τοῦ σημείου Μ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμπτώσεως εἶναι μέσον τοῦ τμήματος Μ M_4, αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου M_2 θὰ δίδωνται ὑπὸ τῶν τύπων :

$x_2 = \frac{x-z}{2}$, $y_2 = y$ καὶ $z_2 = \frac{z-x}{2}$, ἐπομένως $x_2 = -z_2 = \frac{x-z}{2}$.

13) Παραστήσατε τὰς ὀρθὰς προβολὰς δοθέντος σημείου Μ (Μ′, Μ″), ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων συμμετρίας καὶ συμπτώσεως.

Ἐὰν Μ (x, y, z) τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ M_1 (x_1, y_1, z_1), M_2 (x_2, y_2, z_2) αἱ προβολαὶ τοῦ Μ ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων συμμετρίας καὶ συμπτώσεως. Κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν θὰ ἔχωμεν : $x_1 = \frac{x+z}{2}$, $y_1 = y$, $z_1 = \frac{x+z}{2}$ καὶ

$x_2 = \frac{x-z}{2}$, $y_2 = y$, $z_2 = \frac{z-x}{2}$.

Εἰς τὸ Σχ. 7 ἐλήφθη Μ (30, 10, 15), ὁπότε $x_1 = 22{,}5$, $y_1 = 10$, $z_1 = 22{,}5$ καὶ $x_2 = 7{,}5$, $y_2 = 10$, $z_2 = -7{,}5$.

§ 2. Προβλήματα ἐπὶ τῆς παραστάσεως καὶ τοῦ καθορισμοῦ τῆς θέσεως εὐθείας ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα προβολῆς, συμμετρίας καὶ συμπτώσεως

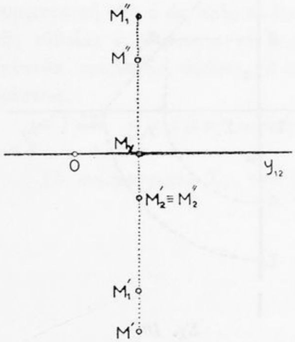
14) Ἐπὶ δοθείσης διὰ τῶν προβολῶν τῆς εὐθείας, παραστήσατε σημεῖον δοθέντος ὑψομέτρου ἢ δοθείσης ἀποστάσεως.

Ἔστω z τὸ δοθὲν ὑψόμετρον σημείου Μ κειμένου ἐπὶ τῆς δοθείσης διὰ τῶν προβολῶν τῆς α′ καὶ α″ εὐθείας α.

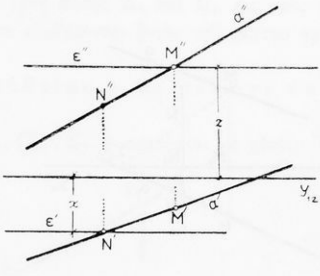
Ἐφόσον ἡ α″ εἶναι ὁ τόπος τῶν προβολῶν τῶν σημείων τῆς εὐθείας α ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_2, αἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων τῆς α″ ἀπὸ τοῦ ἄξονος y_{12} εἶναι τὰ ὑψόμετρα τῶν ἀντιστοίχων σημείων τῆς εὐθείας α.

Πρὸς εὕρεσιν, ἑπομένως, τοῦ ζητουμένου σημείου Μ ἐπὶ τῆς εὐθείας α, θεωροῦμεν ἐπὶ τοῦ πίνακος σχεδιάσεως, τὴν παράλληλον ε″ πρὸς τὸν ἄξονα y_{12} τὴν ἀπέχουσαν αὐτοῦ ἀπόστασιν z. Τὸ σημεῖον τομῆς τῶν εὐθειῶν ε″ καὶ α″ εἶναι ἡ δευτέρα προβολὴ Μ″ τοῦ ζητουμένου σημείου Μ. Εἰς τὸ Σχ. 8 δίδεται ἡ κατασκευὴ τοῦ σημείου Μ (Μ′, Μ″).

Ἔστω τώρα x ἡ δοθεῖσα ἀπόστασις σημείου Ν κειμένου ἐπὶ τῆς δοθείσης



Σχ. 7



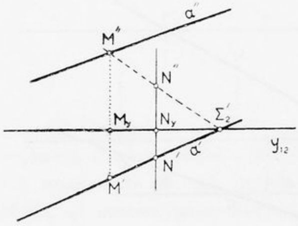
Σχ. 8

εὐθείας α (α′, α″). Ἐφόσον ἡ α′ εἶναι ὁ τόπος τῶν προβολῶν τῶν σημείων τῆς εὐθείας α ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1, αἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων τῆς α′ ἀπὸ τοῦ ἄξονος y_{12} εἶναι αἱ ἀποστάσεις τῶν ἀντιστοίχων σημείων τῆς εὐθείας α. Πρὸς εὕρεσιν, ἑπομένως, τοῦ ζητουμένου σημείου Ν ἐπὶ τῆς εὐθείας α, θεωροῦμεν ἐπὶ τοῦ πίνακος σχεδιάσεως, τὴν παράλληλον ε′ πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}, τὴν ἀπέχουσαν ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀπόστασιν x. Τὸ σημεῖον τομῆς τῶν εὐθειῶν ε′ καὶ α′ εἶναι ἡ πρώτη προβολὴ Ν′ τοῦ ζητουμένου σημείου Ν. Εἰς τὸ Σχ. 8 δίδεται ἡ κατασκευὴ τοῦ σημείου Ν (Ν′, Ν″).

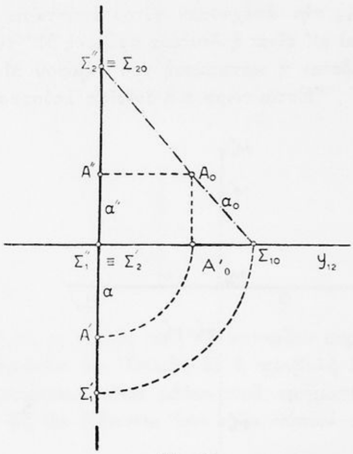
15) Ἐπὶ δοθείσης διὰ τῶν προβολῶν τῆς εὐθείας, παραστήσατε σημεῖον, τοῦ ὁποίου τὸ ὑψόμετρον καὶ ἡ ἀπόστασις, ἔχουν δοθέντα λόγον.

Ἔστω M (x, y, z) τὸ ζητούμενον ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας α (α′, α′′) σημεῖον, τοῦ ὁποίου ὁ λόγος τῶν συντεταγμένων x καὶ z εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον δύο δοθέντων τμημάτων κ καὶ λ. Ἐὰν M′ καὶ M′′ αἱ προβολαὶ τοῦ M (Σχ. 9) θὰ ἔχωμεν $\frac{\overline{M_yM'}}{\overline{M_yM''}} = \frac{\kappa}{\lambda}$.

Πρὸς κατασκευὴν τοῦ σημείου M ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Θεωροῦμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12} καὶ ἔστωσαν N′ καὶ N_y τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα τέμνει αὕτη τὴν εὐθεῖαν α′ καὶ τὸν ἄξονα y_{12}. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης σημεῖον N′′ τοιοῦτον ὥστε $\frac{\overline{N_yN'}}{\overline{N_yN''}} = \frac{\kappa}{\lambda}$. Διὰ τοῦ σημείου N′′ φέρομεν εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τῆς προβολῆς Σ_2' τοῦ δευτέρου



Σχ. 9



Σχ. 10

ἴχνους τῆς εὐθείας α, τέμνουσαν τὴν προβολὴν α′′ αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον M′′. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι ἡ δευτέρα προβολὴ τοῦ ζητουμένου σημείου M (M′, M′′), διότι $\frac{\overline{M_yM'}}{\overline{M_yM''}} = \frac{\overline{N_yN'}}{\overline{N_yN''}} = \frac{\kappa}{\lambda}$.

16) Γνωστῆς οὔσης τῆς προβολῆς σημείου δοθείσης ἐγκαρσίας εὐθείας, νὰ παρασταθῇ ἡ δευτέρα προβολὴ αὐτῆς.

Ἔστω A′ ἡ πρώτη προβολὴ σημείου A κειμένου ἐπὶ τῆς δοθείσης ἐγκαρσίας εὐθείας α (Σχ.10). Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς δευτέρας προβολῆς A′′ τοῦ σημείου

A ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς : Κατακλίνομεν τὸ ἐπίπεδον, τὸ διερχόμενον διὰ τῆς ἐγκαρσίας εὐθείας α, τὸ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_2 καὶ ἔστω α_0 ἡ κατάκλισις τῆς εὐθείας α. Μεταφέρομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος y_{12} τὸ σημεῖον A′ καὶ ἐν συνεχείᾳ κατασκευάζομεν τὴν κατάκλισιν A_0, ἐπὶ τῆς α_0, τοῦ σημείου A. Ἐκ τοῦ σημείου δὲ τούτου εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον A″, δευτέραν προβολὴν τοῦ σημείου A.

17) Παραστήσατε τὰ σημεῖα τομῆς κατακορύφου εὐθείας α, μετὰ τῶν ἐπιπέδων συμμετρίας καὶ συμπτώσεως.

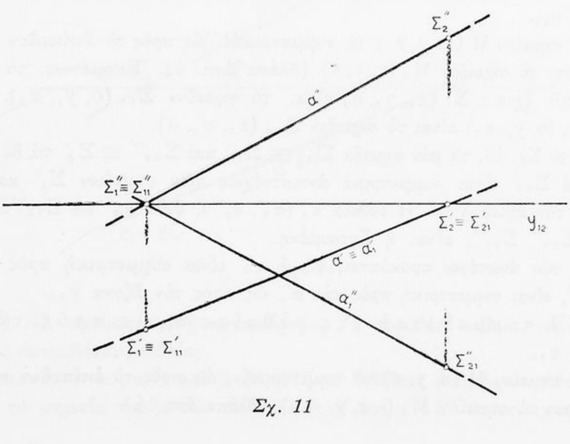
Ἔστωσαν α′ ἡ πρώτη προβολὴ τῆς κατακορύφου εὐθείας α, M (M′, M″) καὶ N (N′, N″) τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα ἡ εὐθεῖα α τέμνει ἀντιστοίχως τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας, καὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως. Ἐὰν x ἡ ἀπόστασις καὶ τὸ z τὸ ὑψόμετρον τοῦ σημείου M, θὰ ἔχωμεν $x = z$, δηλαδὴ $\overline{M'' M_y} = \overline{M_y M'}$, ἔνθα $M' \equiv \alpha'$. Διὰ τὸ σημεῖον N θὰ εἶναι $N' \equiv N'' \equiv \alpha'$.

18) Δίδεται εὐθεῖα α (α′, α″). Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ συμμετρικαὶ αὐτῆς ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα προβολῆς καὶ τὰ ἐπίπεδα συμμετρίας καὶ συμπτώσεως.

Διὰ νὰ κατασκευασθῇ ἡ συμμετρικὴ τῆς εὐθείας α πρὸς τυχὸν ἐπίπεδον p τοῦ χώρου, ἀρκεῖ νὰ κατασκευασθοῦν τὰ συμμετρικὰ M_p καὶ N_p δύο σημείων M καὶ N τῆς εὐθείας α, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον p. Ἡ εὐθεῖα $\alpha_p \equiv M_p N_p$ εἶναι συμμετρικὴ τῆς α ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον p. Ἀντὶ νὰ ληφθοῦν δύο τυχόντα σημεῖα τῆς εὐθείας α, δύνανται νὰ ληφθοῦν τὰ ἴχνη αὐτῆς Σ_1 καὶ Σ_2, ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα προβολῆς, ἐφόσον τὰ ἴχνη ταῦτα εὑρίσκονται ἐντὸς τοῦ χάρτου σχεδιάσεως.

α′) Ἡ συμμετρικὴ τῆς εὐθείας α ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον e_1.

Τὸ συμμετρικὸν Σ_{11} τοῦ ἴχνους Σ_1 (Σ_1', Σ_1'') συμπίπτει μὲ αὐτό. Τὸ

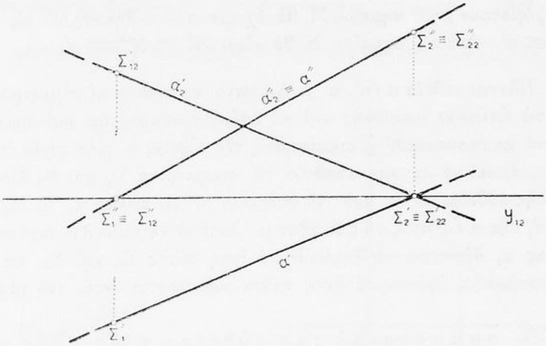


Σχ. 11

συμμετρικὸν Σ_{21} τοῦ ἴχνους $\Sigma_2\,(\Sigma_2', \Sigma_2'')$ ἔχει τὴν μὲν πρώτην προβολὴν $\Sigma'_{21} \equiv \Sigma'_2$, τὴν δὲ δευτέραν προβολὴν Σ''_{21} συμμετρικὴν τῆς Σ''_2, ὡς πρὸς τὸν ἄξονα y_{12} (Σχ. 11). Ἡ εὐθεῖα $\alpha_1\,(\alpha_1', \alpha_1'')$, ἔνθα $\alpha_1' \equiv \alpha' \equiv \Sigma'_{11}\,\Sigma'_{21}$ καὶ $\alpha_1'' \equiv \Sigma''_{11}\,\Sigma''_{21}$, εἶναι ἡ ζητουμένη.

β΄) Ἡ συμμετρικὴ τῆς εὐθείας α, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον e_2.

Τὸ συμμετρικὸν Σ_{22} τοῦ ἴχνους $\Sigma_2\,(\Sigma_2', \Sigma_2'')$ συμπίπτει μὲ αὐτό. Τὸ συμμετρικὸν Σ_{12} τοῦ ἴχνους $\Sigma_1\,(\Sigma_1', \Sigma_1'')$ ἔχει τὴν μὲν πρώτην προβολὴν Σ_{12} συμμετρικὴν πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}, τὴν δὲ δευτέραν προβολὴν $\Sigma_{12}'' \equiv \Sigma''_1$ (Σχ. 12). Ἡ εὐθεῖα $\alpha_2\,(\alpha_2', \alpha_2'')$, ἔνθα $\alpha_2' \equiv \Sigma'_{12}\,\Sigma'_{22}$ καὶ $\alpha_2'' \equiv \alpha'' \equiv \Sigma_{12}''\,\Sigma_{22}''$, εἶναι ἡ ζητουμένη.



Σχ. 12

γ΄) Ἡ συμμετρικὴ τῆς εὐθείας α, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον e_{13}.

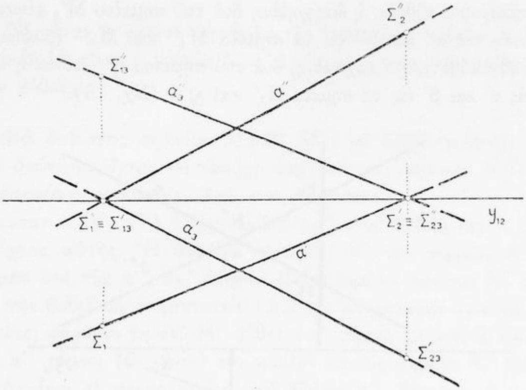
Τοῦ σημείου $M\,(x, y, z)$ τὸ συμμετρικόν, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας, εἶναι τὸ σημεῖον $M_3\,(z, y, x)$ (βλέπε ἄσκ. 4). Ἑπομένως, τὸ συμμετρικὸν τοῦ ἴχνους $\Sigma_1\,(x_1, y_1, o)$ εἶναι τὸ σημεῖον $\Sigma_{13}\,(o, y_1, x_1)$, τοῦ δὲ ἴχνους $\Sigma_2\,(o, y_2, z_2)$ εἶναι τὸ σημεῖον $\Sigma_{23}\,(z_2, y_2, o)$.

Εἰς τὸ Σχ. 13, τὰ μὲν σημεῖα $\Sigma'_{13} \equiv \Sigma_1''$ καὶ $\Sigma_{23}'' \equiv \Sigma_2'$ τὰ δὲ σημεῖα Σ_{13}'' καὶ Σ_{23}' εἶναι συμμετρικὰ ἀντιστοίχως τῶν σημείων Σ_1' καὶ Σ_2'', ὡς πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}. Ἡ εὐθεῖα $\alpha_3\,(\alpha_3', \alpha_3'')$, ἔνθα $\alpha_3' \equiv \Sigma_{13}'\,\Sigma_{23}'$ καὶ $\alpha_3'' \equiv \Sigma_{13}''\,\Sigma_{23}''$, εἶναι ἡ ζητουμένη.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει, ὅτι ἡ α_3' εἶναι συμμετρικὴ πρὸς τὴν α'' καὶ ἡ α''_3 εἶναι συμμετρικὴ πρὸς τὴν α', ὡς πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}.

δ) Ἡ συμμετρικὴ τῆς εὐθείας α, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον e_{24}.

Τοῦ σημείου $M\,(x, y, z)$ τὸ συμμετρικόν, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως, εἶναι τὸ σημεῖον $M_4\,(-z, y, -x)$ (βλέπε ἄσκ. 4).

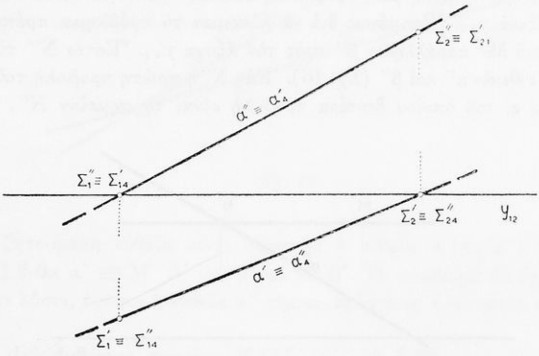


Σχ. 13

Ἐπομένως, τὸ συμμετρικὸν τοῦ ἴχνους $\Sigma_1 (x_1, y_1, o)$ εἶναι τὸ σημεῖον $\Sigma_{14} (o, y_1, -x_1)$, τοῦ δὲ ἴχνους $\Sigma_2 (o, y_2, z_2)$ εἶναι τὸ σημεῖον $\Sigma_{24} (-z_2, y_2, o)$.

Εἰς τὸ Σχ. 14 ἔχομεν $\Sigma_{14}{}' \equiv \Sigma_1{}''$, $\Sigma_{14}{}'' \equiv \Sigma_1{}'$, $\Sigma_{24}{}' \equiv \Sigma_2{}''$ καὶ $\Sigma_{24}{}'' \equiv \Sigma_2{}'$. Ἡ εὐθεῖα $\alpha_4 (\alpha_4{}', \alpha_4{}'')$, ἔνθα $\alpha_4{}' \equiv \Sigma_{14}{}' \Sigma_{24}{}'$ καὶ $\alpha_4{}'' \equiv \Sigma_{14}{}'' \Sigma_{24}{}''$, εἶναι ἡ ζητουμένη.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει, ὅτι ἡ $\alpha_4{}' \equiv \alpha''$ καὶ ἡ $\alpha_4{}'' \equiv \alpha'$.



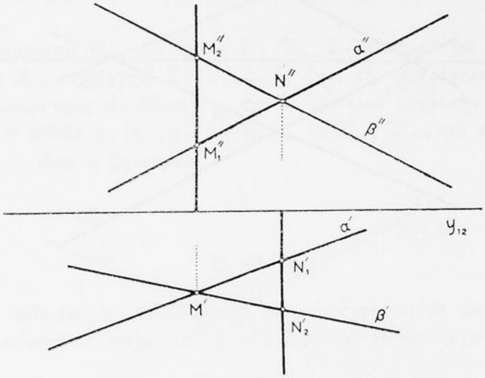
Σχ. 14

19) Νὰ κατασκευασθῇ κατακόρυφος (ἢ προσθία) εὐθεῖα, τέμνουσα δύο δοθείσας ἀσυμβάτους εὐθείας.

Ἔστωσαν α (α′, α″) καὶ β (β′, β″) αἱ δοθεῖσαι ἀσύμβατοι εὐθεῖαι, Μ′ καὶ Ν″ τὰ σημεῖα τομῆς τῶν εὐθειῶν α′, β′ καὶ α″, β″ ἀντιστοίχως.

Ἡ κατακόρυφος εὐθεῖα, ἡ διερχομένη διὰ τοῦ σημείου M′, εἶναι ἡ ζητουμένη, τέμνουσα τὰς α″ καὶ β″ εἰς τὰ σημεῖα M_1'' καὶ M_2'' (βλέπε Σχ. 15).

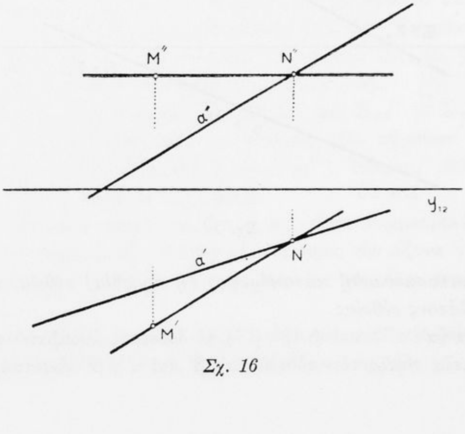
Ἡ προσθία εὐθεῖα, ἡ διερχομένη, διὰ τοῦ σημείου N″, εἶναι ἡ ζητουμένη τέμνουσα τὰς α′ καὶ β′ εἰς τὰ σημεῖα N_1' καὶ N_2' (Σχ. 15).



Σχ. 15

20) Διὰ σημείου M (M′, M″) νὰ ἀχθῇ ὁριζοντία ἢ μετωπικὴ εὐθεῖα, συναντῶσα δοθεῖσαν εὐθεῖαν α (α′, α″).

Ἡ δευτέρα προβολὴ μιᾶς ὁριζοντίας εὐθείας πρέπει νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}. Ἐπομένως διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ φέρωμεν ἐκ τοῦ M″ παράλληλον β″ πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}. Ἔστω N″ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν εὐθειῶν α″ καὶ β″ (Σχ. 16). Ἐὰν N′ ἡ πρώτη προβολὴ τοῦ σημείου τῆς εὐθείας α, τοῦ ὁποίου δευτέρα προβολὴ εἶναι τὸ σημεῖον N″, ἡ εὐθεῖα

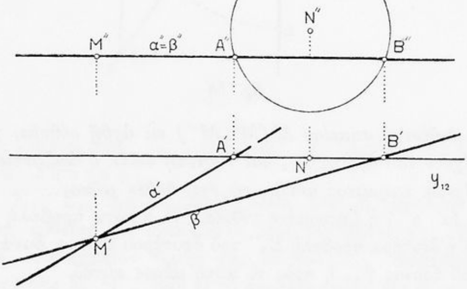


Σχ. 16

$\beta' \equiv M'\ N'$ εἶναι ἡ πρώτη προβολὴ τῆς ζητουμένης εὐθείας β, τῆς ὁποίας δευτέρα προβολὴ εἶναι ἡ εὐθεῖα β''. Ἀναλόγως λύεται τὸ πρόβλημα διὰ τὴν μετωπικὴν εὐθεῖαν.

21) Διὰ δοθέντος σημείου $M(M', M'')$ νὰ ἀχθῇ ὁριζοντία εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ δεύτερον ἴχνος νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ δοθέντος σημείου $N(N', N'')$ τοῦ δευτέρου ἐπιπέδου προβολῆς, δοθεῖσαν ἀπόστασιν.

Ἔστωσαν α (α', α'') ἡ ζητουμένη ὁριζοντία εὐθεῖα καὶ A (A', A'') τὸ δεύτερον ἴχνος αὐτῆς. Ἡ δευτέρα προβολὴ A'' τοῦ σημείου A θὰ κεῖται, ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐπὶ τῆς α'', ἀφ' ἑτέρου δὲ ἐπὶ κύκλου κέντρου N'' καὶ ἀκτῖνος ἴσης πρὸς τὴν δοθεῖσαν ἀπόστασιν d. Διὰ τὴν κατασκευὴν συνεπῶς τῆς ζητουμένης εὐθείας, φέρομεν ἐκ τοῦ M'' εὐθεῖαν α'' παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}. Ἡ εὐθεῖα α'' τέμνει (ἐν γένει) τὸν κύκλον εἰς δύο σημεῖα A'' καὶ B'' (Σχ. 17), τῶν ὁποίων αἱ προβολαὶ ἐπὶ τοῦ ἄξονος y_{12} ἔστωσαν A' καὶ B'.



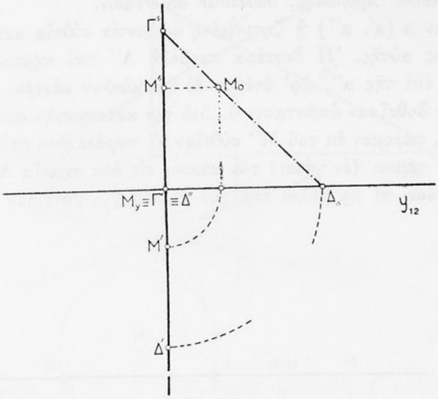
Σχ. 17

Ἡ ζητουμένη εὐθεῖα εἶναι συνεπῶς ἡ εὐθεῖα α (α', α'') ἢ ἡ εὐθεῖα β (β', β'') ἔνθα $\alpha' \equiv M'\ A'$ καὶ $\beta' \equiv M'\ B'$. Τὸ πρόβλημα θὰ ἔχῃ δύο, μίαν ἢ οὐδεμίαν λύσιν, ἐφόσον ἡ εὐθεῖα α'' τέμνει, ἐφάπτεται ἢ δὲν τέμνει τὸν κύκλον.

22) Διὰ δοθέντος σημείου $M(M', M'')$ νὰ ἀχθῇ ἐγκαρσία εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὰ ἴχνη ἀπέχουν ἀπὸ τὸν ἄξονα y_{12} ἀποστάσεις ἐχούσας δοθέντα λόγον.

Περιστρέφομεν τὸ διὰ τοῦ σημείου M κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα ἐπίπεδον περὶ τὴν εὐθεῖαν καθ' ἣν τοῦτο τέμνει τὸ ἐπίπεδον e_2, μέχρις ὅτου συμπέσῃ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πίνακος σχεδιάσεως.

Ἔστω M_0 ἡ θέσις τοῦ σημείου M, μετὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ ὡς ἄνω ἐπιπέδου (Σχ. 18). Διὰ τοῦ M_0 φέρομεν εὐθεῖαν $\Gamma''\ M_0\ \Delta_0$, τέμνουσαν εἰς τὰ σημεῖα Γ'' καὶ Δ_0, ἀφ' ἑνὸς μὲν τὴν ἐκ τοῦ Μ'' κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα καὶ ἀφ' ἑτέρου τὸν ἄξονα, οὕτως ὥστε $\frac{\overline{M_y\Gamma''}}{M_y\Delta_0}$ = δοθέντα λόγον. Ἐπὶ τῆς Μ'' Μ' λαμβάνομεν $M_y\,\Delta' = M_y\,\Delta_0$. Ἡ ζητουμένη ἐγκαρσία εὐθεῖα ἔχει πρῶτον ἴχνος τὸ Δ (Δ', Δ'') καὶ δεύτερον τὸ Γ (Γ', Γ'').



Σχ. 18

23) Διὰ δοθέντος σημείου Μ (Μ', Μ'') νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὰ ἴχνη νὰ ἰσαπέχουν τοῦ ἄξονος y_{12} καὶ τοιαύτη ὥστε ἡ ὁριζοντία προβολὴ τοῦ μεταξὺ τῶν ἰχνῶν τμήματος αὐτῆς, νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος.

Ἔστω α (α', α'') ἡ ζητουμένη εὐθεῖα. Ἡ πρώτη προβολὴ Σ_1' τοῦ πρώτου ἴχνους καὶ ἡ δευτέρα προβολὴ Σ_2'' τοῦ δευτέρου ἴχνους δυνατὸν νὰ κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ ἄξονος y_{12} ἢ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ.

α') Π ε ρ ί π τ ω σ ι ς, τὰ Σ_1' κ α ὶ Σ_2'' κ ε ῖ ν τ α ι ἑ κ α τ έ ρ ω θ ε ν τ ο ῦ ἄ ξ ο ν ο ς.

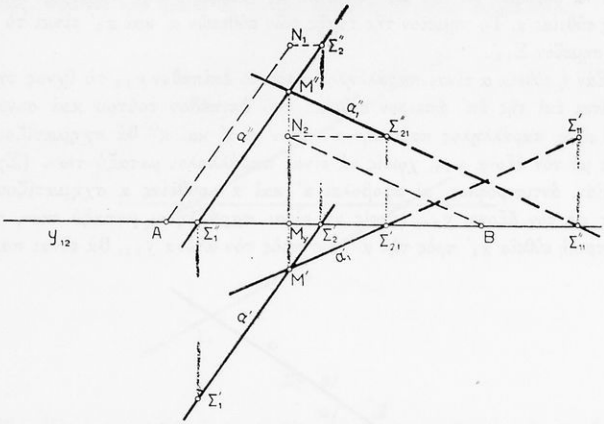
Ἐφόσον $\overline{\Sigma''_1\Sigma_1'}$ καὶ $\overline{\Sigma_2'\ \Sigma_2''}$ εἶναι ἴσα, αἱ προβολαὶ α' καὶ α'' τῆς ζητουμένης εὐθείας εἶναι παράλληλοι. (Σχ. 19). Ἔστω N_1 τὸ σημεῖον τομῆς τῆς ἐκ τοῦ Σ_2'' παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}, μετὰ τῆς Μ' Μ''. Ἐὰν Α τὸ σημεῖον τομῆς τῆς ἐκ τοῦ N_1 παραλλήλου πρὸς τὴν α'' μετὰ τοῦ ἄξονος y_{12}, θὰ ἔχωμεν : $\overline{M_y\ N_1} = \overline{\Sigma_2'\ \Sigma_2''}\ \overline{M'\ M''}$ καὶ $\overline{N_1\ A} = \overline{\Sigma_2''\ \Sigma_1''} = \overline{\Sigma_2'\ \Sigma_1'} = d$, ἔνθα d τὸ δοθὲν μῆκος τῆς ὁριζοντίας προβολῆς τοῦ μεταξὺ τῶν ἰχνῶν τμήματος τῆς εὐθείας α.

Ὁδηγούμεθα, συνεπῶς, εἰς τὴν ἑξῆς κατασκευήν :

Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς Μ' Μ'' τμῆμα $\overline{M''\ N_1} = \overline{M'\ M_y}$. Μὲ κέντρον τὸ N_1 καὶ ἀκτῖνα τὸ δοθὲν μῆκος d, γράφομεν κύκλον (N_1) τέμνοντα τὸν ἄξονα y_{12} εἰς Α. Ἐκ τῶν σημείων Μ' καὶ Μ'' φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν Ν, Α.

Αἱ παράλληλοι αὗται εἶναι αἱ προβολαὶ α' καὶ α'' τῆς ζητουμένης εὐθείας α.

Τὸ πρόβλημα ἔχει δύο, μίαν ἢ οὐδεμίαν λύσιν, ἐφόσον ὁ κύκλος (N_1) τέμνει, ἐφάπτεται ἢ δὲν τέμνει τὸν ἄξονα y_{12}. Εἰς τὸ Σχῆμα 19 ἔχει σημειωθῆ ἡ μία λύσις, ἡ ἄλλη λύσις δίδει εὐθεῖαν ἔχουσαν προβολὰς συμμετρικὰς τῶν προβολῶν τῆς α, ὡς πρὸς τὴν $M'\,M''$.



Σχ. 19

β') Περίπτωσις, Σ_1' καὶ Σ_2'' κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἄξονος.

Ἐφόσον $\overline{\Sigma_{11}''\Sigma_{11}'}$ καὶ $\overline{\Sigma_{21}'\Sigma_{21}''}$ εἶναι ἴσα, αἱ προβολαὶ α_2' καὶ α_2'' τῆς ζητουμένης εὐθείας α_1, ἰσοκλίνουν πρὸς τὸν ἄξονα y_{12} (Σχ. 19).

Ἔστω N_2 τὸ σημεῖον τομῆς τῆς ἐκ τοῦ Σ_{21}'' παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}, μετὰ τῆς $M'\,M''$. Ἐὰν B τὸ σημεῖον τομῆς τῆς ἐκ τοῦ N_2 παραλλήλου πρὸς τὴν α_1'', μετὰ τοῦ ἄξονος y_{12}, θὰ ἔχωμεν : $\overline{M_y\,N_2} = \overline{\Sigma_{21}'\Sigma''_{21}} = \overline{M_y\,M''} - \overline{M'\,M_y}$ καὶ $\overline{N_2\,B} = \overline{\Sigma_{21}''\,N_{11}''} = \overline{\Sigma_{21}'\,\Sigma_{11}'} = d$.

Ὁδηγούμεθα, συνεπῶς, εἰς τὴν ἑξῆς κατασκευήν : Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς $M'\,M''$ τμῆμα $\overline{M''\,N_2} = \overline{M_y\,M'}$. Μὲ κέντρον N_2 καὶ ἀκτῖνα τὸ δοθὲν μῆκος d γράφομεν κύκλον (N_2), τέμνοντα τὸν ἄξονα y_{12} εἰς B. Ἐκ τοῦ σημείου M'' φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν $N_2\,B$, ἐκ τοῦ σημείου δὲ M' ἰσοκλίνουσαν, ἀλλὰ μὴ παράλληλον, πρὸς τὸν ἄξονα, ὡς πρὸς τὴν $N_2\,B$.

Αἱ παράλληλοι αὗται εἶναι αἱ προβολαὶ α_1' καὶ α_1'' τῆς ζητουμένης εὐθείας α_1.

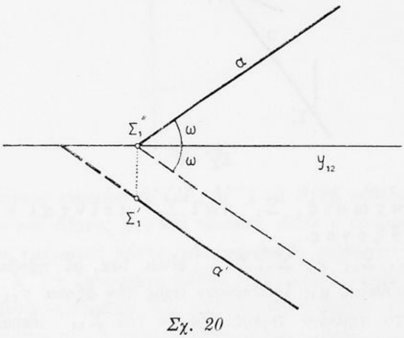
Τὸ πρόβλημα ἔχει δύο, μίαν ἢ οὐδεμίαν λύσιν, ἐφόσον ὁ κύκλος (N_2) τέμνει, ἐφάπτεται ἢ δὲν τέμνει τὸν ἄξονα y_{12}. Εἰς τὸ Σχ. 19 ἔχει σημειωθῆ ἡ μία λύσις, ἡ ἄλλη λύσις δίδει εὐθεῖαν ἔχουσαν προβολὰς συμμετρικὰς τῶν προβολῶν τῆς α_1, ὡς πρὸς τὴν $M'\,M''$.

24) Νὰ διατυπωθῇ ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, διὰ νὰ εἶναι μία μὴ ἐγκαρσία εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας ἢ πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως.

α΄) Ἔστω Σ_{13} τὸ ἴχνος μιᾶς μὴ ἐγκαρσίας εὐθείας α ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμμετρίας e_{13}. Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς πρώτης προβολῆς Σ_{13}' τοῦ ἴχνους τούτου, πρέπει νὰ φέρωμεν ἐκ τοῦ Σ_1'' εὐθεῖαν α_1' συμμετρικὴν πρὸς τὴν προβολὴν α΄΄ τῆς εὐθείας α. Τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν α΄ καὶ α_1' εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον Σ_{13}'.

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα **α** εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον e_{13} τὸ ἴχνος της Σ_{13}, θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπ' ἄπειρον εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου τούτου καὶ συνεπῶς ἡ α_1' θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν α΄, ὅθεν αἱ α΄ καὶ α΄΄ θὰ σχηματίζουν ἴσας γωνίας μὲ τὸν ἄξονα y_{12}, χωρὶς νὰ εἶναι παράλληλοι μεταξύ των. (Σχ. 20).

Ἐάν, ἀντιστρόφως, αἱ προβολαὶ α΄ καὶ α΄΄ εὐθείας α σχηματίζουν ἴσας γωνίας μὲ τὸν ἄξονα y_{12}, χωρὶς νὰ εἶναι παράλληλοι μεταξύ των, τότε ἡ συμμετρικὴ εὐθεῖα α_1' πρὸς τὴν α΄΄, ὡς πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}, θὰ εἶναι παράλλη-



Σχ. 20

λος πρὸς τὴν α΄, συναντῶσα αὐτὴν εἰς ἐπ' ἄπειρον σημεῖον Σ'_{13}.

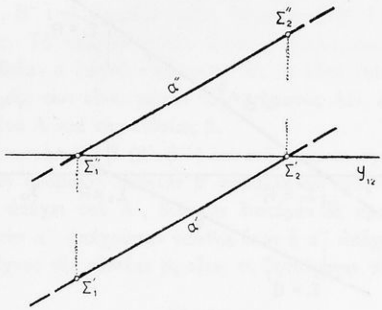
Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι τὸ ἴχνος Σ_{13} τῆς εὐθείας α ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_{13} εἶναι ἐπ' ἄπειρον σημεῖον αὐτοῦ, ὅτι δηλαδὴ ἡ α εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ e_{13}, ὅθεν προκύπτει ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη : Ἵνα μία, μὴ ἐγκαρσία εὐθεῖα, εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας, πρέπε. καὶ ἀρκεῖ αἱ προβολαὶ αὐτῆς νὰ σχηματίζουν ἴσας γωνίας πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}, χωρὶς νὰ εἶναι παράλληλοι μεταξύ των.

β΄) Ἔστω Σ_{24} τὸ ἴχνος μιᾶς μὴ ἐγκαρσίας εὐθείας α ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμπτώσεως e_{24}. Αἱ δύο προβολαὶ τοῦ Σ_{24} συμπίπτουν μετὰ τοῦ σημείου τομῆς τῶν προβολῶν α΄ καὶ α΄΄.

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα α εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον e_{24}, τὸ σημεῖον Σ_{24} θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπ' ἄπειρον εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου τούτου καὶ συνεπῶς αἱ α΄ καὶ α΄΄ θὰ εἶναι παράλληλοι. (Σχ. 21). Ἐάν, ἀντιστρόφως, αἱ προβολαὶ α΄

καὶ α'' εὐθείας α, εἶναι παράλληλοι, τὸ σημεῖον τομῆς των, συμπῖπτον μετὰ τῶν προβολῶν τοῦ ἴχνους Σ_{24} τῆς α ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_{24}, θὰ εἶναι ἐπ' ἄπειρον σημεῖον, δηλαδὴ ἡ α θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ e_{24}, ὅθεν προκύπτει ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη :

Ἵνα μία, μὴ ἐγκαρσία εὐθεῖα, εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ προβολαὶ αὐτῆς νὰ εἶναι παράλληλοι.



Σχ. 21

25) Νὰ διατυπωθῇ ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη διὰ νὰ εἶναι μία εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας (ἢ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως).

Ἐὰν μία εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας, θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην ἐγκαρσία, ὡς ἀσυμβάτως κάθετος πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}, τὰ δὲ ἴχνη αὐτῆς θὰ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα.

Ἐάν, ἀντιστρόφως, τὰ ἴχνη μιᾶς ἐγκαρσίας εὐθείας εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}, ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας, ὅθεν προκύπτει ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη :

Ἵνα μία εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὰ ἴχνη αὐτῆς νὰ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}.

Ἐὰν μία εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως, θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην ἐγκαρσία, ὡς ἀσυμβάτως κάθετος πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}, τὰ δὲ ἴχνη αὐτῆς θὰ συμπίπτουν.

Ἐάν, ἀντιστρόφως, τὰ ἴχνη μιᾶς ἐγκαρσίας εὐθείας συμπίπτουν, ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως, ὅθεν προκύπτει ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη :

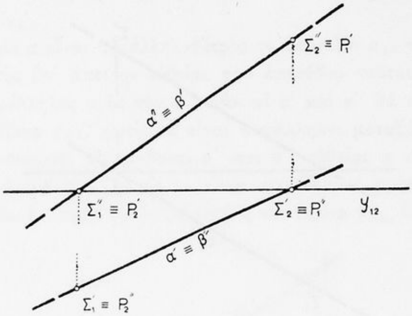
Ἵνα μία εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὰ ἴχνη αὐτῆς νὰ συμπίπτουν.

26) Ποία ἡ σχετικὴ πρὸς ἀλλήλας θέσις τῶν εὐθειῶν α(α', α'') καὶ β(β' ≡ α'', β'' ≡ α').

Ἔστωσαν Σ_1, Σ_2 τὰ ἴχνη τῆς εὐθείας α καὶ P_1, P_2 τὰ ἴχνη τῆς εὐθείας β.

Αἱ προβολαὶ τῶν ἰχνῶν τούτων ἔχουν σημειωθῆ εἰς τὸ Σχ. 22. Ἐφόσον τὸ σημεῖον Σ_1 συμπίπτει μετὰ τοῦ P_2'', ἕπεται ὅτι τὰ σημεῖα $\Sigma_1' \equiv \Sigma_1$ καὶ $P_2'' \equiv P_2$ δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς προβολαὶ ἑνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου συμπτώσεως καὶ ὅτι συνεπῶς τὰ σημεῖα Σ_1 καὶ P_2 εἶναι συμμετρικά, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι τὰ σημεῖα Σ_2 καὶ P_1 εἶναι



Σχ. 22

συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως. Ἐπειδὴ δὲ τῶν δύο εὐθειῶν α καὶ β, δύο σημεῖα τὰ Σ_1 καὶ Σ_2 τῆς πρώτης καὶ τὰ P_2 καὶ P_1 τῆς δευτέρας εἶναι ἀντιστοίχως συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως, ἕπεται ὅτι αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως.

27) Νὰ διατυπωθῇ ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη διὰ νὰ κεῖται μία εὐθεῖα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμμετρίας (ἢ τοῦ ἐπιπέδου συμπτώσεως).

Ἐὰν κεῖται μία εὐθεῖα α ἐπὶ ἐπιπέδου e, πρέπει νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον e καὶ ἓν σημεῖον της νὰ κεῖται ἐπ' αὐτοῦ καὶ ἀντιστρόφως.

Ἔχομεν διατυπώσει τὴν ἀναγκαίαν καὶ ἱκανὴν συνθήκην διὰ νὰ εἶναι μία μὴ ἐγκαρσία εὐθεῖα α (α', α'') παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον e_{13} (ἄσκησις 24). Διὰ νὰ κεῖται ἓν σημεῖον της M(M', M'') ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_{13} πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ προβολαὶ αὐτοῦ M' καὶ M'' νὰ εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον ἂν αἱ εὐθεῖαι α' καὶ α'' τέμνουν τὸν ἄξονα εἰς σημεῖα διάφορα, (Σχ. 20), ἑπομένως : Ἵνα μία μὴ ἐγκαρσία εὐθεῖα κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμμετρίας πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ προβολαὶ αὐτῆς νὰ εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}.

Διὰ συλλογισμῶν ἀναλόγων εὑρίσκομεν τὴν ἀναγκαίαν καὶ ἱκανὴν συνθήκην διὰ νὰ κεῖται μία εὐθεῖα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμπτώσεως :

Ἵνα μία μὴ ἐγκαρσία εὐθεῖα κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμπτώσεως πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ προβολαὶ αὐτῆς νὰ συμπίπτουν.

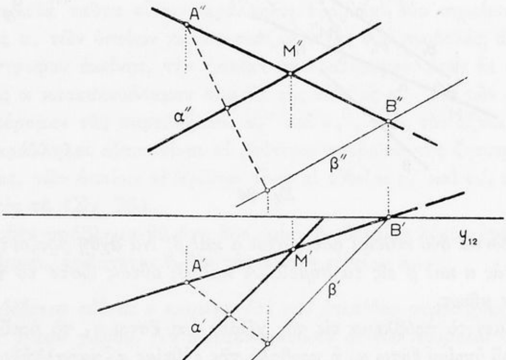
28) Δίδεται σημεῖον Α (Α΄, Α΄΄) καὶ εὐθεῖα α (α΄, α΄΄) μὴ ἐγκαρσία. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Β ἐπὶ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου προβολῆς, τοιοῦτον ὥστε ἡ εὐθεῖα Α Β νὰ τέμνῃ τὴν α, τὸ δὲ σημεῖον τομῆς νὰ εἶναι μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος Α Β.

Θεωροῦμεν τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον ὁρίζουν τὸ σημεῖον Α καὶ ἡ εὐθεῖα α. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου ὑπάρχει, ὡς εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς Γεωμετρίας, μία εὐθεῖα β, ἡ ὁποία ἀπέχει τῆς εὐθείας α, ὅσον ἀπέχει ἡ α τοῦ σημείου Α.

Ἔστω Β (Β΄, Β΄΄) τὸ σημεῖον τομῆς τῆς εὐθείας β καὶ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου προβολῆς. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον. Διότι, ἡ εὐθεῖα ΑΒ τέμνει τὴν εὐθεῖαν α (ἀφοῦ εὑρίσκεται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον μετ' αὐτῆς) καὶ τὸ σημεῖον τομῆς των εἶναι μέσον τοῦ τμήματος ΑΒ, ἐφόσον ἡ εὐθεῖα α ἰσαπέχει τοῦ σημείου Α καὶ τῆς εὐθείας β.

Διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς β (β΄, β΄΄) ἐπὶ τοῦ πίνακος σχεδιάσεως, φέρομεν διὰ τὴν πρώτην μὲν προβολὴν εὐθεῖαν β΄ παράλληλον πρὸς τὴν α΄, ἀπέχουσαν ταύτης ὅσον ἡ α΄ ἀπέχει τοῦ Α΄, διὰ τὴν δευτέραν δὲ προβολὴν εὐθεῖαν β΄΄ παράλληλον πρὸς τὴν α΄΄ ἀπέχουσαν ταύτης ὅσον ἡ α΄΄ ἀπέχει τοῦ Α΄΄.

Τὸ δεύτερον ἴχνος τῆς εὐθείας β, εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον Β (Β΄, Β΄΄) (Σχ. 23).



Σχ. 23

29) Δίδονται δύο εὐθεῖαι ἀσύμβατοι α καὶ β. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ παραλλήλως πρὸς τὴν β προβολὴ τῆς α, ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου καὶ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου προβολῆς.

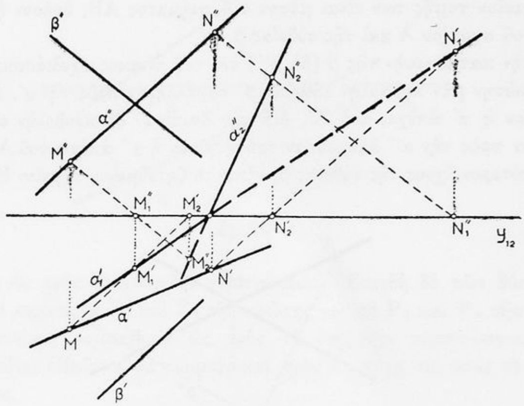
Ἔστω $α_1'$ ἡ προβολὴ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1 τῆς εὐθείας α παραλλήλως πρὸς τὴν β. Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ εὐθεῖα $α_1'$ εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν προβολῶν τῶν σημείων τῆς εὐθείας α, παραλλήλως πρὸς τὴν β. Ἑπομένως, διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν εὐθεῖαν $α_1'$ ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν τὰς προβολὰς δύο σημείων τῆς εὐθείας α, παραλλήλως πρὸς τὴν εὐθεῖαν β.

Εἰς τὸ Σχ. 24 ἐλήφθησαν τὰ σημεῖα $M (M', M'')$ καὶ $N (N', N'')$ τῆς εὐθείας $\alpha (\alpha', \alpha'')$ καὶ κατεσκευάσθησαν τὰ πρῶτα ἴχνη M_1' καὶ N_1' τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν εὐθεῖαν β τῶν διερχομένων διὰ τῶν σημείων M καὶ N.

Ἡ εὐθεῖα $M_1' N_1'$ εἶναι ἡ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου e_1, προβολὴ τῆς εὐθείας α παραλλήλως πρὸς τὴν εὐθεῖαν β (Σχ. 24).

Τὰ δεύτερα ἴχνη M_2'' καὶ N_2'' τῶν αὐτῶν ὡς ἄνω παραλλήλων, ὁρίζουν τὴν εὐθεῖαν $M''_2 N''_2$, προβολὴν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_2, τῆς εὐθείας α, παραλλήλως πρὸς τὴν εὐθεῖαν β.

Αἱ εὐθεῖαι $M_1' N_1'$ καὶ $M''_2 N''_2$ τέμνονται προφανῶς ἐπὶ τοῦ ἄξονος y_{12}.



Σχ. 24

30) Δίδονται δύο εὐθεῖαι ἀσύμβατοι α καὶ β. Νὰ ἀχθῇ ὁριζοντία εὐθεῖα ε συναντῶσα τὰς α καὶ β εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B, οὕτως ὥστε τὸ τμῆμα AB νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος.

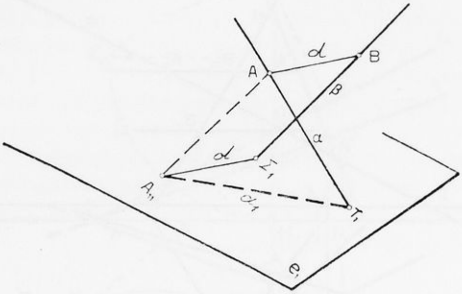
Θεωροῦμεν τὸ πρόβλημα εἰς τὸν χῶρον καὶ ἔστω e_1 τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἔστω α_1 ἡ προβολὴ τῆς εὐθείας α, παραλλήλως πρὸς τὴν εὐθεῖαν β (Σχ. 25).

Ἔστωσαν A καὶ B τὰ σημεῖα τομῆς τῆς ζητουμένης ὁριζοντίας εὐθείας ε μετὰ τῶν εὐθειῶν α καὶ β, τοιαῦτα ὥστε $AB = d$ τὸ δοθὲν μῆκος. Ἐὰν Σ_1 τὸ ἴχνος, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1, τῆς εὐθείας β καὶ ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου A παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν β, ἡ παράλληλος αὕτη θὰ συναντήσῃ τὴν α_1 εἰς σημεῖον A_{11} τοιοῦτον ὥστε : $A_{11}\ \Sigma_1 = AB = d$, λόγῳ τοῦ παραλληλογράμμου $A_1 A B \Sigma_1$.

Ἀλλὰ τότε τὸ σημεῖον A_{11} εἶναι γνωστόν, ὡς τομὴ τῆς γνωστῆς εὐθείας α_1 καὶ τοῦ κύκλου μὲ κέντρον Σ_1 καὶ ἀκτῖνα d.

Ἂς ἐφαρμόσωμεν τὴν κατασκευὴν ταύτην ἐπὶ τοῦ πίνακος σχεδιάσεως.

Κατασκευάζομεν τὴν εὐθεῖαν α_1, προβολὴν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1 τῆς εὐθείας α, παραλλήλως πρὸς τὴν εὐθεῖαν β (βλέπε ἄσκησιν 29). Εὑρίσκομεν τὸ πρῶτον ἴχνος $\Sigma_1' \equiv \Sigma_1$ τῆς εὐθείας β καὶ μὲ κέντρον τὸ σημεῖον τοῦτο καὶ ἀκτῖνα d γράφομεν κύκλον.



Σχ. 25

Ἔστωσαν A_{11} καὶ A_{21} τὰ σημεῖα τομῆς τοῦ κύκλου τούτου καὶ τῆς εὐθείας α_1.

Τὰ σημεῖα ταῦτα εἶναι παράλληλοι προβολαὶ δύο σημείων A_1 καὶ A_2 τῆς εὐθείας α, τῶν ὁποίων κατασκευάζομεν τὰς δύο προβολάς, ἀκολουθοῦντες ὁδὸν ἀντίστροφον ἐκείνης, τὴν ὁποίαν ἠκολουθήσαμεν, ὅταν ἐκ τῶν σημείων τῆς εὐθείας α κατεσκευάσαμεν σημεῖα τῆς εὐθείας α_1. Ἐκ τῶν σημείων A''_1 καὶ A_2'' φέρομεν τὰς παραλλήλους ε_1'' καὶ ε_2'', πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}.

Αἱ παράλληλοι αὗται εἶναι αἱ δεύτεραι προβολαὶ τῆς ζητουμένης ὁριζοντίας εὐθείας, τῶν ὁποίων αἱ πρῶται εἶναι αἱ εὐθεῖαι ε_1' καὶ ε_2', κατασκευαζόμεναι ὡς εἰς τὸ (Σχ. 26).

Τὸ δοθὲν πρόβλημα θὰ ἔχῃ δύο, μίαν ἢ οὐδεμίαν λύσιν, ἐφόσον ὁ κύκλος (Σ_1, d) τέμνει, ἐφάπτεται ἢ δὲν τέμνει τὴν εὐθεῖαν α_1.

31) Δίδεται εὐθεῖα ε κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμμετρίας καὶ σημεῖον M (M′, M″) τοῦ χώρου. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ τῆς ἐκ τοῦ M καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ε.

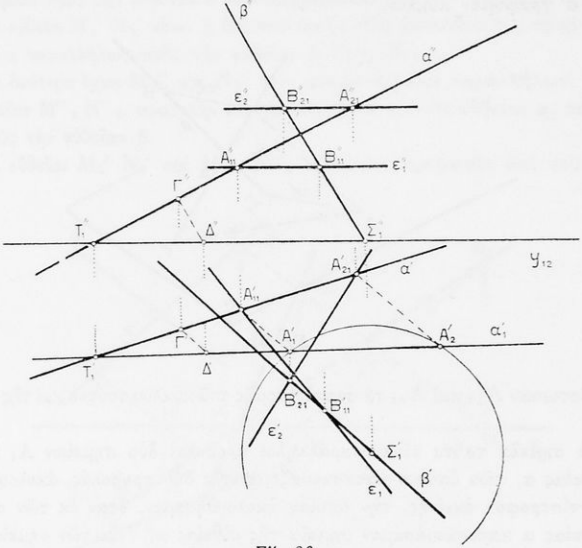
Θεωροῦμεν τὸ πρόβλημα εἰς τὸν χῶρον καὶ ἔστω e_{13} τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας. Ἐκ τοῦ σημείου M φέρομεν τὴν MN κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ε καὶ τὴν MA κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον e_{13}. Κατὰ τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων, ἡ εὐθεῖα NA (Σχ. 27) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ε.

Τὸ σημεῖον A δυνάμεθα νὰ τὸ κατασκευάσωμεν, γνωρίζοντες τὸ σημεῖον M (βλέπε Ἄσκησιν 12) καὶ συνεπῶς ἀπομένει νὰ φέρωμεν ἐκ τοῦ σημείου A κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ε.

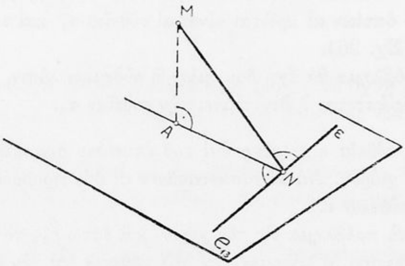
Πρὸς τοῦτο κατακλίνομεν τὸ ἐπίπεδον e_{13} ἐπὶ τοῦ πίνακος σχεδιάσεως καὶ ἐπὶ τῆς κατακλίσεως φέρομεν τὴν ζητουμένην κάθετον.

Ἄς ἐφαρμόσωμεν τὴν κατασκευὴν ἐπὶ τοῦ πίνακος σχεδιάσεως.

Ἐπὶ τῆς M′ M″ λαμβάνομεν $\overline{A' M_y} = \overline{M_y A''} = \overline{M' M''}/2$ (βλέπε Ἄσκ. 13).



Σχ. 26

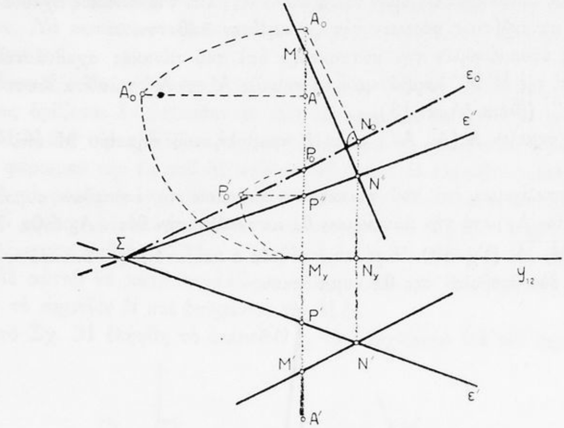


Σχ. 27

Τὸ σημεῖον A (A′, A″) εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ σημείου M ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_{14}. Κατακλίνομεν ἐπὶ τοῦ πίνακος σχεδιάσεως τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας· Τὸ σημεῖον A, μετὰ τὴν κατάκλισιν, θὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν A_0, ἔνθα $\overline{M_y A_0} = \overline{M_y A''}.\sqrt{2}$ (Σχ. 28).

Ἡ εὐθεῖα ε τοῦ ἐπιπέδου συμμετρίας θὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν $ε_0$, προσδιορισθεῖσα ἐκ τῆς κατακλίσεως P_0 ἑνὸς σημείου της P (P', P''), ἔνθα $\overline{M_y P_0} = \overline{M_y P''} . \sqrt{2}$.

Ἐκ τοῦ A_0 φέρομεν κάθετον $A_0 N_0$ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ε_0.



Σχ. 28

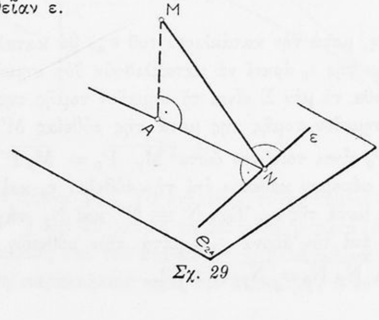
Ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ N_0 καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12}, εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα N', N'', προβολὰς τοῦ σημείου N τῆς εὐθείας ε, τοῦ ὁποίου ἡ κατάκλισις εἶναι τὸ σημεῖον N_0, καθόσον $\overline{N_y N_0}/N_y N'' = \overline{M_y P_0}/M_y P'' = \sqrt{2}$.

Ἑπομένως ἡ ζητουμένη κάθετος εἶναι ἡ εὐθεῖα M N ($M' N'$, $M'' N''$).

32) Δίδεται εὐθεῖα ε κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμπτώσεως καὶ σημεῖον M (M′, M″) τοῦ χώρου. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαί τῆς, ἐκ τοῦ M, καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ε.

Θεωροῦμεν τὸ πρόβλημα εἰς τὸν χῶρον καὶ ἔστω e_{24} τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως. Ἐκ τοῦ σημείου M φέρομεν τὴν M N κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ε καὶ τὴν M A κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον e_{24}.

Κατὰ τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων, ἡ εὐθεῖα N A (Σχ. 29) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ε.



Σχ. 29

Τὸ σημεῖον A δυνάμεθα νὰ τὸ κατασκευάσωμεν, ὅταν γνωρίζωμεν τὸ σημεῖον M (βλέπε Ἄσκ. 12) καὶ συνεπῶς ἀπομένει νὰ φέρωμεν ἐκ τοῦ σημείου A κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ε.

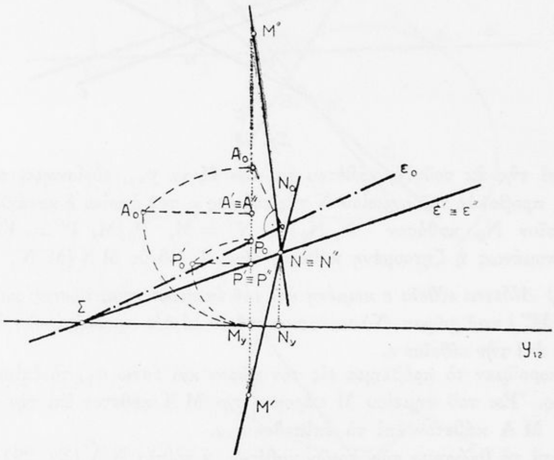
Πρὸς τοῦτο κατακλίνομεν τὸ ἐπίπεδον e_{24} ἐπὶ τοῦ πίνακος σχεδιάσεως καὶ ἐπὶ τῆς κατακλίσεως φέρομεν τὴν ζητουμένην κάθετον.

Ἂς ἐφαρμόσωμεν τὴν κατασκευὴν ἐπὶ τοῦ πίνακος σχεδιάσεως.

Ἐπὶ τῆς $M'\,M''$ λαμβάνομεν τὰ σημεῖα $A' \equiv A''$ τοιαῦτα ὥστε $\overline{M'\,A'} = \overline{A''\,M''}$. (βλέπε Ἄσκ. 13).

Τὸ σημεῖον A (A′, A″) εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ σημείου M ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_{24}.

Κατακλίνομεν ἐπὶ τοῦ πίνακος σχεδιάσεως τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως. Τὸ σημεῖον A, μετὰ τὴν κατάκλισιν θὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν A_0 ἔνθα $\overline{M_y\ A_0} = \sqrt{2}\ \overline{M_y\ A'}$ (Σχ. 30). Ἐφόσον ἡ εὐθεῖα ε κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμπτώσεως αἱ δύο προβολαί της θὰ συμπίπτουν.



Σχ. 30

Ἡ εὐθεῖα αὕτη, μετὰ τὴν κατάκλισιν τοῦ e_{24} θὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν ε_0.

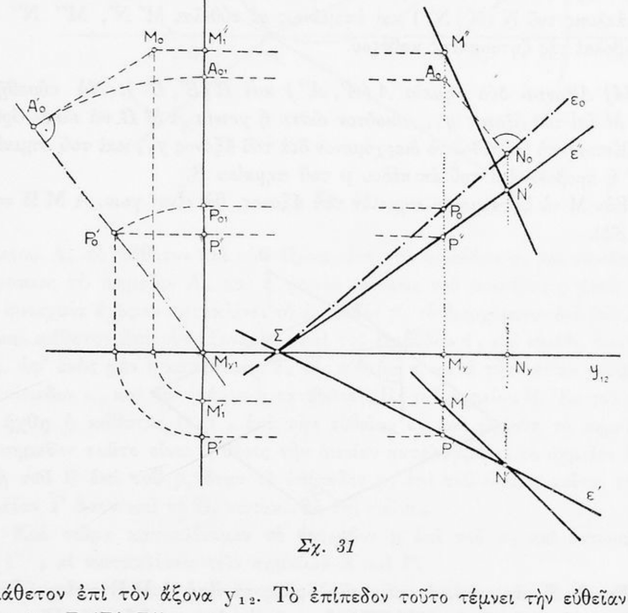
Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ε_0 ἀρκεῖ νὰ κατακλιθοῦν δύο σημεῖα τῆς ε, π.χ., τὰ σημεῖα Σ καὶ P, ἔνθα τὸ μὲν Σ εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς της μετὰ τοῦ ἄξονος y_{12}, τὸ δὲ P τὸ σημεῖον τομῆς της μετὰ τῆς εὐθείας $M'\,M''$. Τὸ σημεῖον $\Sigma \equiv \Sigma_0$, ἐνῷ τὸ P_0 εἶναι τοιοῦτον ὥστε $\overline{M_y\ P_0} = \overline{M_y\,P'}\ \sqrt{2}$. Καὶ τώρα ἐκ τοῦ σημείου A_0 φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ε_0 καὶ ἔστω N_0 ἡ τομὴ τῆς καθέτου ταύτης μετὰ τῆς ε_0. Ἐὰν $N' \equiv N''$ καὶ N_y τὰ σημεῖα τομῆς τῆς ἐκ τοῦ N_0 καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12}, μετὰ τῶν εὐθειῶν ε′ καὶ y_{12}, λόγῳ ὁμοιοθεσίας θὰ εἶναι $\overline{N_y\ N_0} = \overline{N_y\ N'}\ \sqrt{2}$.

Τὸ σημεῖον N_0 δηλαδή, θὰ εἶναι ἡ κατάκλισις τοῦ N καὶ ἑπομένως αἱ εὐθεῖαι M′ N′, M′′ N′′ εἶναι αἱ προβολαὶ τῆς ζητουμένης καθέτου.

33) Δίδεται εὐθεῖα ε συναντῶσα τὸν ἄξονα y_{12} καὶ σημεῖον M (M′, M′′) τοῦ χώρου. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ τῆς, ἐκ τοῦ M, καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ε.

Ἐφόσον ἡ εὐθεῖα ε συναντᾷ τὸν ἄξονα y_{12}, ὑπὸ τῆς εὐθείας ταύτης καὶ τοῦ ἄξονος ὁρίζεται ἓν ἐπίπεδον p. Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν ἐκ τοῦ M κάθετον M N ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ε, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον N. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν τὴν ἐκ τοῦ M κάθετον M A ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον p καὶ ἐκ τοῦ σημείου A νὰ φέρωμεν τὴν κάθετον A N ἐπὶ τὴν ε. (θεώρημα τριῶν καθέτων). Ὅθεν πρέπει ἐν πρώτοις νὰ κατασκευάσωμεν τὸ σημεῖον A καὶ κατόπιν νὰ κατακλίνωμεν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος y_{12} διερχόμενον ἐπίπεδον p, ἐπὶ τῆς κατακλίσεως δὲ αὐτοῦ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν κάθετον $A_0 N_0$, ὁρίζοντες τοιουτοτρόπως τὸ σημεῖον N καὶ ἑπομένως τὴν M N.

Εἰς τὸ Σχ. 31 ἐλήφθη τὸ ἐπίπεδον e, τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου M



Σχ. 31

καὶ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12}. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τὴν εὐθεῖαν ε εἰς τὸ σημεῖον P (P′, P′′) καὶ ἑπομένως τὸ ἐπίπεδον p κατὰ τὴν εὐθεῖαν M_y P. Τὸ ἐπίπεδον e κατεκλίθη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_2, ἀλλὰ διὰ νὰ μὴ γίνῃ σύγχυσις γραμμῶν, μετεφέρθη παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα y_{12} ἡ ἐν λόγῳ κατάκλισις, εἰς τὴν θέσιν M'_y. Κατὰ τὴν τοιαύτην κατάκλισιν τοῦ ἐπιπέδου ϱ ἡ εὐθεῖα $M_y P$ κατέλαβε τὴν θέσιν $M'_{y1} P_0'$ καὶ τὸ σημεῖον M κατέλαβεν τὴν θέσιν M_0.

Τὸ τμῆμα $\overline{M_{y\,1}\, P_0'}$ εἶναι τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῆς ἀποστάσεως $\overline{M_y\; P_0}$.

Ἐκ τοῦ σημείου M_0 φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν $M'_{y\,1}\, P_0'$, ἡ ὁποία τέμνει ταύτην εἰς τὸ σημεῖον A_0'. Τὸ τμῆμα $\overline{M_{y\,1}\, A_0'}$ εἶναι τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῆς ἀποστάσεως $\overline{M_y A}$ τοῦ σημείου M_y ἀπὸ τὸν πόδα A τῆς καθέτου, τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ M ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον p δηλαδὴ $\overline{M_{y\,1}\, A_0'} = \overline{M_y\; A}$.

Καὶ τώρα κατακλίνομεν τὸ ἐπίπεδον p ἐπὶ τοῦ πίνακος σχεδιάσεως.

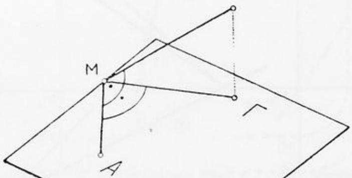
Τὸ σημεῖον P τῆς εὐθείας ε θὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν P_0, ἔνθα $\overline{M_y\, P_0} = \overline{M_{y1}\; P_{01}} = \overline{M_{y1}\; P_0'} = \overline{M_y\, P_0}$, ἐπομένως ἡ εὐθεῖα $\varepsilon \equiv \Sigma P$ θὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν $\varepsilon_0 \equiv \Sigma P_0$. Τὸ σημεῖον A θὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν A_0, ἔνθα $\overline{M_y A_0} = \overline{M_{y1} A_{0_1}} = \overline{M_{y1}\, A} = \overline{M_y A}$. Ἐκ τοῦ σημείου A_0 φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ε_0 καὶ ἔστω N_0 ἡ τομὴ τῶν δύο τούτων εὐθειῶν. Ἐὰν N', N'', N_y τὰ σημεῖα τομῆς, τῆς ἐκ τοῦ N_0 καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12}, μετὰ τῶν εὐθειῶν $\varepsilon'\; \varepsilon''$, y_{12}, λόγῳ ὁμοιοθεσίας θὰ εἶναι :

$\overline{N_y\, N_0} : \overline{M_y\, P_0} = \overline{N_y\;\; N''} : \overline{M_y\, P''} = \overline{N_y\;\; N'} : \overline{M_y\, P'}$. Τὸ σημεῖον N_0 θὰ εἶναι ἡ κατάκλισις τοῦ N (N', N'') καὶ ἐπομένως αἱ εὐθεῖαι $M'\, N'$, $M''\;\; N''$ εἶναι αἱ προβολαὶ τῆς ζητουμένης καθέτου.

34) Δίδονται δύο σημεῖα A (A', A'') καὶ B (B', B''). Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον M ἐπὶ τοῦ ἄξονος y_{12}, τοιοῦτον ὥστε ἡ γωνία A M B νὰ εἶναι ὀρθή.

Ἔστω p τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ ἄξονος y_{12} καὶ τοῦ σημείου A καὶ Γ ἡ προβολὴ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p τοῦ σημείου B.

Ἐὰν M τὸ ζητούμενον σημεῖον τοῦ ἄξονος, θὰ εἶναι γων. $A\,M\,B = \pi/2$ (Σχ. 32).



Σχ. 32

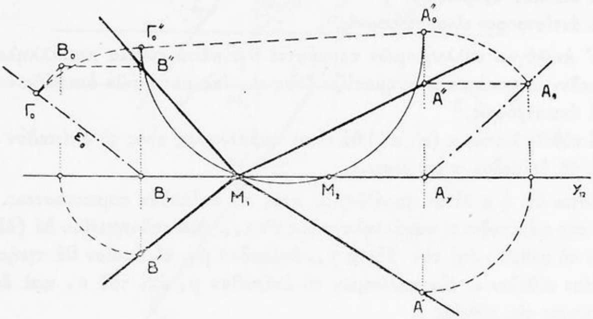
Ἐπειδὴ ἡ μία τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας A M B κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p, ἡ προβολὴ τῆς A M Γ θὰ εἶναι κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς Γεωμετρίας τοῦ Χώρου, ὀρθή, δηλαδὴ γων. $A\,M\,\Gamma = \pi/2$.

Διὰ τὴν εὕρεσιν, συνεπῶς τοῦ σημείου M, ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον

Γ τοῦ ἐπιπέδου p, ὁπότε τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ εὑρεθῇ σημεῖον M τοῦ ἄξονος y_{12} τοιοῦτον ὥστε ἡ γωνία, ἡ ὁποία σχηματίζεται ὑπὸ τῶν εὐθειῶν M A καὶ M Γ νὰ εἶναι ὀρθή, ἔνθα A καὶ Γ κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον μετὰ τοῦ ἄξονος y_{12}.

Τὸ νέον τοῦτο πρόβλημα λύεται, ἂν κατακλίνωμεν τὸ ἐπίπεδον $p \equiv \equiv (y_{12}, A\,B)$, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου σχεδιάσεως, ὁπότε ἂν A''_0 καὶ B''_0 καὶ αἱ κατακλίσεις τῶν σημείων A καὶ B, διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ σημείου M ἀρκεῖ νὰ γραφῇ κύκλος μὲ διάμετρον $A_0''\ B_0''$. Τὰ σημεῖα τομῆς τοῦ κύκλου τούτου καὶ τοῦ ἄξονος εἶναι τὰ ζητούμενα. Τὸ πρόβλημα θὰ ἔχῃ δύο, μίαν ἢ οὐδεμίαν λύσιν, ἐφόσον ὁ κύκλος τέμνει, ἐφάπτεται ἢ δὲν τέμνει τὸν ἄξονα y_{12}.

Εἰς τὸ Σχῆμα 33 ἔχομεν κατακλίνει τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ



Σχ. 33

σημείου A, τὸ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_2 καὶ εὑρέθη τοιουτοτρόπως τὸ σημεῖον A_0 καὶ ἡ γωνία κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου p μετὰ τοῦ e_2. Ἐν συνεχείᾳ ἔχομεν κατακλίνει τὸ ἐπίπεδον p_1 τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου B, καὶ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12} ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_2 καὶ εὑρέθη τοιουτοτρόπως, ἀφ' ἑνὸς μὲν ἡ κατάκλισις ε_0 τῆς εὐθείας ε, κατὰ τὴν ὁποίαν τέμνει τοῦτο τὸ ἐπίπεδον e_2 καὶ ἀφ' ἑτέρου ἡ κατάκλισις B_0 τοῦ σημείου B. Ἐκ τοῦ σημείου B_0 ἤχθη ἡ κάθετος $B_0\Gamma_0$ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ε_0 καὶ ὡρίσθη τὸ σημεῖον Γ_0. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι ἡ θέσις τὴν ὁποίαν καταλαμβάνει τὸ σημεῖον Γ, προβολὴ τοῦ B ἐπὶ τοῦ p, ὅταν τὸ ἐπίπεδον p_1 ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖται τόσον τὸ σημεῖον Γ ὅσον καὶ τὸ B, κατακλιθῇ ἐπὶ τοῦ e_2.

Καὶ τώρα κατακλίνομεν τὸ ἐπίπεδον p ἐπὶ τοῦ e_2 καὶ ἔστωσαν A''_0 καὶ Γ''_0 αἱ κατακλίσεις τῶν σημείων A καὶ Γ.

Τὸ μὲν σημεῖον A_0'' ἔχομεν εὕρει προηγουμένως, τὸ δὲ σημεῖον Γ_0'' ἀπέχει ἀπὸ τὸν ἄξονα y_{12} ἀπόστασιν $B_y\,\Gamma_0$.

Μὲ διάμετρον $A_0''\ \Gamma_0''$ γράφομεν κύκλον, ὁ ὁποῖος τέμνει τὸν ἄξονα εἰς τὰ ζητούμενα σημεῖα M_1 καὶ M_2.

35) Δίδεται σημεῖον $M(M', M'')$ καὶ γωνία ω. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ M καὶ σχηματίζει τὴν αὐτὴν γωνίαν ω, μὲ τὰ ἐπίπεδα προβολῆς.

Ἔστω α (α', α'') ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

Ὅπως ἀπεδείχθη εἰς τὴν Ἄσκησιν 27, ἐὰν μία εὐθεῖα κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμμετρίας, αἱ προβολαὶ αὐτῆς θὰ εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα καὶ ἑπομένως ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ σχηματίζῃ ἴσας γωνίας μετὰ τῶν ἐπιπέδων προβολῆς.

Ἀλλὰ τότε καὶ πᾶσα εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας θὰ σχηματίζῃ ἴσας γωνίας πρὸς τὰ ἐπίπεδα προβολῆς (ἐπειδὴ πᾶσα παράλληλος πρὸς αὐτὴν καὶ κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμμετρίας σχηματίζει ἴσας γωνίας πρὸς τὰ ἐπίπεδα προβολῆς).

Τὸ ἀντίστροφον εἶναι προφανές.

Δι' ἀναλόγων συλλογισμῶν προκύπτει ὅτι πᾶσα εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως, σχηματίζει ἴσας γωνίας μετὰ τῶν ἐπιπέδων προβολῆς καὶ ἀντιστρόφως.

Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν α (α', α'') θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας ἢ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως.

Ἔστω ὅτι ἡ α εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως. Φέρομεν διὰ τῆς α ἐπίπεδον p παράλληλον πρὸς τὸ e_{24}. Διὰ τοῦ σημείου M (M', M'') φέρομεν τὸ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12} ἐπίπεδον p_1, τὸ ὁποῖον θὰ τμήσῃ τὸ p κατὰ μίαν εὐθεῖαν ε. Κατακλίνομεν τὸ ἐπίπεδον p_1 ἐπὶ τοῦ e_2 καὶ ἔστω ε_0 ἡ κατάκλισις τῆς εὐθείας ε.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ε_0, ἀρκεῖ ἐκ τῆς κατακλίσεως M_0 τοῦ σημείου M τοῦ p_1, νὰ φέρωμεν εὐθεῖαν σχηματίζουσαν γωνίαν 45^0 πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}. Ὑπάρχουν δύο τοιαῦται, ἡ μία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως καὶ ἡ ἄλλη εἰς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας. (Σχ. 34).

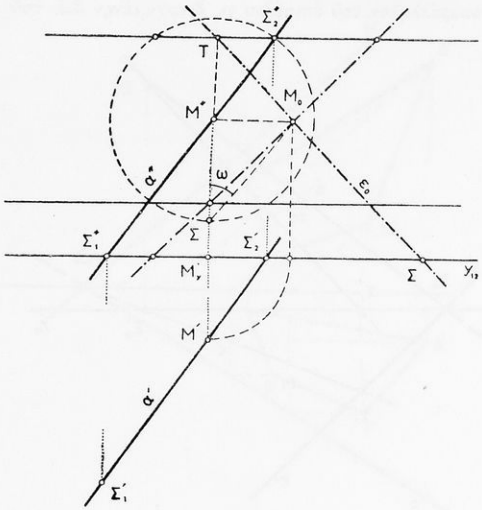
Ἐὰν Σ καὶ T τὰ σημεῖα τομῆς τῆς ε_0 μετὰ τοῦ ἄξονος y_{12} καὶ μετὰ τῆς εὐθείας $M' M''$, ἡ ἐκ τοῦ T παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα θὰ εἶναι τὸ ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου p ἐπὶ τοῦ e_2.

Ἐὰν Σ_2'' τὸ σημεῖον τομῆς τῆς εὐθείας α'' μετὰ τῆς παραλλήλου ταύτης, τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ δεύτερον ἴχνος τῆς εὐθείας α (ὡς κειμένης ἐπὶ τοῦ p).

Ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ εὐθεῖα α μετὰ τοῦ ἐπιπέδου e_2 εἶναι ἡ ὀξεῖα γωνία τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ καθέτους πλευρὰς $M'' \Sigma_2''$ καὶ $M' M_y$, ἡ ἔχουσα κορυφὴν τὸ Σ_2''. Ἂν ἑπομένως μὲ κάθετον πλευρὰν $\overline{M'' M_0} = \overline{M_y M'}$ καὶ ἀπέναντι ταύτης γωνίαν ω (τὴν δοθεῖσαν), κατασκευάσωμεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $M_0 M'' \Sigma$, ἡ κάθετος πλευρὰ $\overline{M'' \Sigma} = \overline{M'' \Sigma_2''}$.

Ἑπομένως δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὸ σημεῖον Σ_2, ὡς τομὴν τοῦ δευτέρου ἴχνους τοῦ p μετὰ τοῦ κύκλου κέντρου M'' καὶ ἀκτῖνος $\overline{M'' \Sigma}$, καὶ ἐν συνεχείᾳ τὴν Σ_2'' M'' $\equiv \alpha''$, δευτέραν προβολὴν τῆς α καὶ ἐπομένως καὶ τὴν α' παράλληλον, ἐκ τοῦ M', πρὸς τὴν α''.

Ἐὰν ὁ κύκλος τέμνῃ τὸ δεύτερον ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου εἰς δύο σημεῖα, θὰ ἔχωμεν δύο λύσεις, ἂν ἐφάπτεται μίαν, ἄλλως οὐδεμίαν.



Σχ. 34

Τὸ πρόβλημα δέχεται τὸ πολὺ τέσσαρας λύσεις, ὑπάρχουν δηλαδὴ δύο, τὸ πολύ, εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως καὶ δύο, τὸ πολύ, εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας, διερχόμεναι διὰ τοῦσημείου M καὶ σχηματίζουσαι τὴν αὐτὴν γωνίαν ω πρὸς τὰ ἐπίπεδα προβολῆς.

§ 3. Προβλήματα ἐπὶ τῆς παραστάσεως καὶ τοῦ καθορισμοῦ τῆς θέσεως ἐπιπέδου, ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα προβολῆς, συμμετρίας καὶ συμπτώσεως

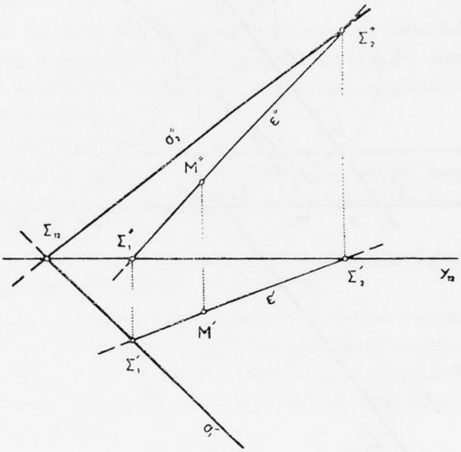
36) Δίδεται ἡ πρώτη προβολὴ σημείου M κειμένου ἐπὶ ἐπιπέδου p(σ_1', σ_2''). Εὕρετε τὴν δευτέραν προβολὴν τοῦ σημείου M. Ἐφαρμογή: Δίδεται ἡ πρώτη προβολὴ πολυγώνου (Π) κειμένου ἐπὶ ἐπιπέδου p (σ_1', σ_2''). Εὕρετε τὴν δευτέραν προβολὴν τοῦ πολυγώνου (Π).

Ἐὰν διὰ τοῦ σημείου M φέρομεν εὐθεῖαν ε κειμένην ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p, τὰ ἴχνη τῆς εὐθείας ταύτης θὰ κεῖνται ἐπὶ τῶν ὁμωνύμων ἰχνῶν τοῦ p.

Ἑπομένως, ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου M' φέρωμεν τὴν πρώτην προβολὴν ε' εὐθείας ε καὶ τέμνῃ αὕτη τὸν ἄξονα y_{12} εἰς τὸ σημεῖον Σ_2' καὶ τὸ πρῶτον ἴχνος τοῦ p εἰς τὸ σημεῖον Σ_1', ἡ δευτέρα Σ_2'' τοῦ δευτέρου ἴχνους τῆς εὐθείας ε θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ δευτέρου ἴχνους σ_2'' τοῦ ἐπιπέδου p ἡ δὲ δευτέρα προβολὴ τοῦ πρώτου ἴχνους Σ_1' τῆς εὐθείας ε θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος y_{12} (Σχ. 35).

Ἡ εὐθεῖα Σ_1'' Σ_2'' εἶναι ἡ δευτέρα προβολὴ τῆς εὐθείας Σ, ἐπ' αὐτῆς εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον M'', δευτέραν προβολὴν τοῦ σημείου M.

Δυνάμεθα, ἀντὶ τυχούσης διὰ τοῦ M εὐθείας ε, νὰ χρησιμοποιήσωμεν πρώτην ἢ δευτέραν ἰχνοπαράλληλον τοῦ ἐπιπέδου p, διερχομένην διὰ τοῦ σημείου M.



Σχ. 35

Εἰς τὸ Σχ. 36 ἐδόθη ἡ πρώτη προβολὴ ἑνὸς τετραπλεύρου, κειμένου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p (σ_1', σ_2'') καὶ τῇ βοηθείᾳ ἰχνοπαραλλήλων, κατεσκευάσθη ἡ δευτέρα προβολὴ τοῦ τετραπλεύρου.

*37) Ἐπιπέδου p δίδονται τὸ πρῶτον ἴχνος καὶ αἱ προβολαὶ ἑνὸς σημείου του. **Κατασκευάσατε** τὸ δεύτερον ἴχνος αὐτοῦ.*

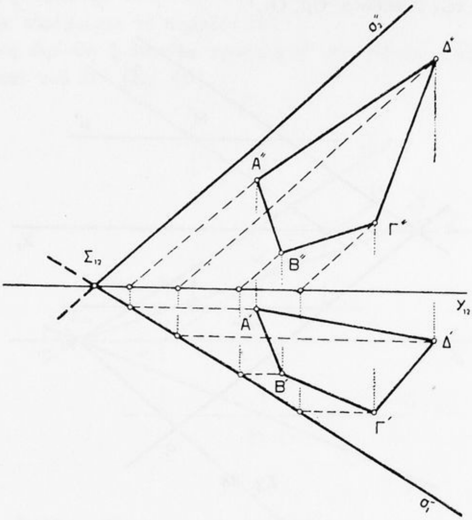
Ἔστω M (M', M'') τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ σ_1' τὸ δοθὲν ἴχνος. Διὰ τοῦ σημείου M φέρομεν μίαν πρώτην ἰχνοπαράλληλον i_1 (i_1' i_1'') καὶ ἔστω I_2'' ἡ δευτέρα προβολὴ τοῦ δευτέρου ἴχνους αὐτῆς. Ἡ εὐθεῖα Σ_{12} I_2'' εἶναι τὸ ζητούμενον δεύτερον ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου p (Σχ. 37)

38) Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ δοθέντος ἐπιπέδου p (σ_1', σ_2'') σημεῖον M_1, ἔχον δοθὲν ὑψόμετρον καὶ δοθεῖσαν ἀπόστασιν.

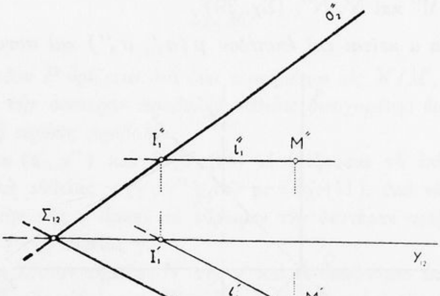
Φέρομεν τὰς παραλλήλους μ' καὶ μ'' πρὸς τὸν ἄξονα y_{12} ἀπεχούσας τούτου ἀποστάσεις ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὴν ἀπόστασιν καὶ τὸ ὑψόμετρον τοῦ σημείου M (Σχ. 38). Θεωροῦντες τὴν μ' ὡς πρώτην προβολὴν i_2' μιᾶς δευτέρας ἰχνοπαραλλήλου τοῦ ἐπιπέδου p εὑρίσκομεν τὴν δευτέραν προβολὴν αὐτῆς i_2''.

Ἡ τομὴ τῶν i_2'' καὶ μ'' δίδει τὴν δευτέραν προβολὴν M'' τοῦ σημείου M, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὴν πρώτην προβολὴν M'.

39) Προσδιορίσατε τὰ σημεῖα τομῆς μιᾶς κατακορύφου, μετὰ τῶν ἐπιπέδων συμμετρίας καὶ συμπτώσεως.



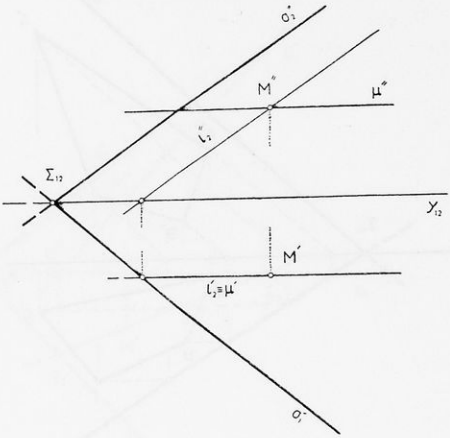
Σχ. 36



Σχ. 37

Ἔστω α (α′, α″) ἡ κατακόρυφος εὐθεῖα καὶ Μ καὶ Ν τὰ σημεῖα τομῆς της μετὰ τῶν ἐπιπέδων συμμετρίας καὶ συμπτώσεως.

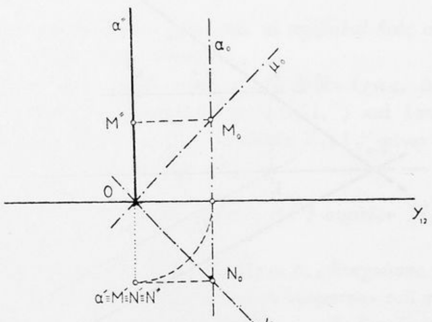
Διὰ τῆς α φέρομεν τὸ ἐγκάρσιον ἐπίπεδον καὶ ἔστωσαν Ομ Ον αἱ εὐθεῖαι τομῆς τοῦ ἐπιπέδου τούτου μετὰ τῶν ἐπιπέδων συμμετρίας καὶ συμπτώσεως. Κατακλίνομεν τὸ ἐγκάρσιον ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ e_2 καὶ ἔστωσαν $α_0$, $Ομ_0$, $Ον_0$ αἱ κατακλίσεις τῶν εὐθειῶν α, Ομ, Ον.



Σχ. 38

Αἱ κατακλίσεις $Μ_0$ καὶ $Ν_0$ τῶν σημείων τομῆς Μ καὶ Ν εἶναι τὰ σημεῖα, κατὰ τὰ ὁποῖα αἱ $Ομ_0$ καὶ $Ον_0$ τέμνουν τὴν $α_0$. Ἐκ τῶν $Μ_0$ καὶ $Ν_0$ προκύπτουν τὰ σημεῖα Μ′, Μ″ καὶ Ν′, Ν″. (Σχ. 39).

40) Εὐθεῖα α κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου p ($σ_1'$, $σ_2''$) καὶ συναντᾷ τὸν ἄξονα

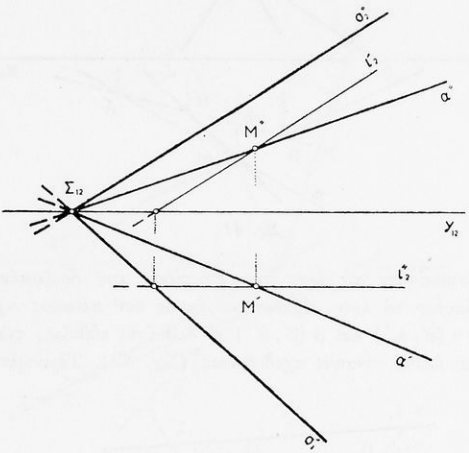


Σχ. 39

y_{12}, κατασκευάσατε τὴν δευτέραν προβολήν, γνωρίζοντες τὴν πρώτην προβολὴν τῆς εὐθείας α.

Ἐφόσον ἡ εὐθεῖα α κεῖται ἐπὶ τοῦ p καὶ συναντᾷ τὸν ἄξονα y_{12}, θὰ διέρχεται διὰ τοῦ ἴχνους Σ_{12} τοῦ p ἐπὶ τοῦ ἄξονος. Λαμβάνομεν ἓν σημεῖον M′ τῆς α′, ὡς προβολὴν σημείου M τῆς α, ἄρα καὶ τοῦ ἐπιπέδου p. Φέρομεν διὰ τοῦ M′ τὴν πρώτην προβολὴν τῆς δευτέρας ἰχνοπαραλλήλου i_2' τοῦ p καὶ ἐπὶ ταύτης εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον M″.

Ἑπομένως ὡρίσθη ἡ δευτέρα προβολὴ α″ τῆς εὐθείας α ὡς διερχομένης διὰ τοῦ Σ_{12} καὶ τοῦ M″ (Σχ. 40).

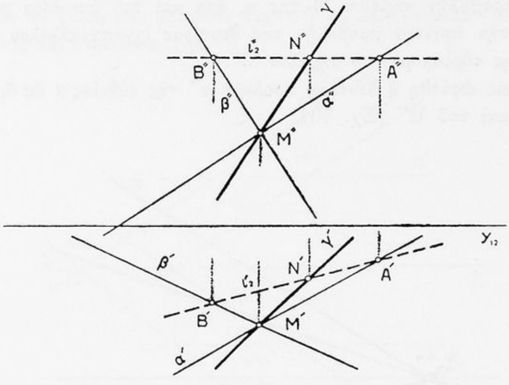


Σχ. 40

41) Ἐπίπεδον P ὁρίζεται διὰ δύο τεμνομένων εἰς M (M′, M″) εὐθειῶν. Κατασκευάσατε τὴν δευτέραν προβολὴν εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ M, τῆς ὁποίας δίδεται ἡ πρώτη προβολή.

Ἔστωσαν α (α′, α″) καὶ β (β′, β″) αἱ ὁρίζουσαι τὸ ἐπίπεδον εὐθεῖαι καὶ γ′ ἡ προβολὴ εὐθείας γ (γ′, γ″) τοῦ p. (Σχ. 41). Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν δευτέραν προβολὴν τῆς γ ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὴν δευτέραν προβολὴν σημείου τινὸς N (N′, N″) τῆς εὐθείας γ.

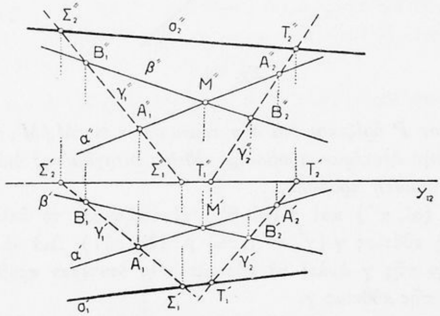
Λαμβάνομεν λοιπὸν σημεῖον N′ τῆς γ′ καὶ τὸ θεωροῦμεν ὡς πρώτην προβολὴν σημείου N τῆς εὐθείας γ. Ἐπειδὴ τὸ N κεῖται ἐπὶ τῆς γ καὶ συνεπῶς καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὴν δευτέραν προβολὴν αὐτοῦ θεωροῦντες τυχοῦσαν εὐθεῖαν διερχομένην δι᾽ αὐτοῦ (διάφορον τῆς γ), καὶ κειμένην ἐπὶ τοῦ p, π.χ. μίαν δευτέραν ἰχνοπαράλληλον i_2. Εἰς τὸ (Σχ. 41) ἤχθη ἡ i_2' παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα y_{12} καὶ ἐκ τῶν σημείων εἰς τὰ ὁποῖα τέμνει τὰς α′ καὶ β′, ἤχθησαν κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12} καὶ εὑρέθησαν τὰ σημεῖα A″ καὶ B″. Ἡ εὐθεῖα A″ B″ εἶναι ἡ δευτέρα προβολὴ τῆς i_2', ἐπ᾿ αὐτῆς εὑρέθη τὸ σημεῖον N″ καὶ ἑπομένως ἡ $\gamma'' \equiv$ M″ N″.



Σχ. 41

42) Κατασκευάσατε τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ δύο εὐθειῶν, τῶν ὁποίων τὰ ἴχνη εὑρίσκονται ἐκτὸς τοῦ πίνακος σχεδιάσεως.

Ἔστωσαν α (α′, α″) καὶ β (β′, β″) αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι, τῶν ὁποίων τὰ ἴχνη εὑρίσκονται ἐκτὸς πίνακος σχεδιάσεως (Σχ. 42). Τέμνομεν τὰς δοθεί-



Σχ. 42

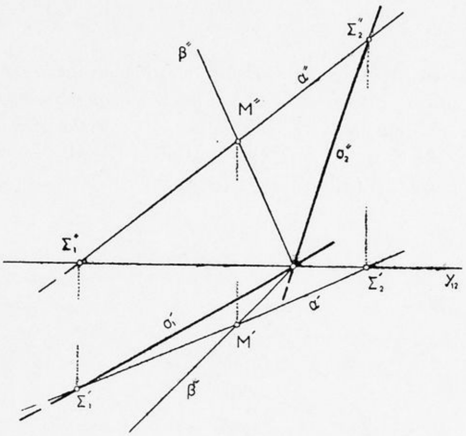
σας εὐθείας μὲ δύο ἄλλας, τοιαύτας ὥστε τὰ ἴχνη των νὰ εὑρίσκωνται ἐντὸς τοῦ πίνακος σχεδιάσεως. Τῶν νέων τούτων εὐθειῶν γ_1 καὶ γ_2 εὑρίσκομεν τὰ ἴχνη, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀντιστοίχως Σ_1 (Σ_1', Σ_1''), Σ_2 (Σ_2', Σ_2'') καὶ T_1 (T_1', T_1''), T_2 (T_2', T_2'').

Αἱ εὐθεῖαι $\Sigma_1' \, T_1'$ καὶ $\Sigma_2'' \, T_2''$ εἶναι ἀντιστοίχως τὰ ἴχνη σ_1' καὶ σ_2'' τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῶν εὐθειῶν α καὶ β.

43) Κατασκευάσατε τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ εὐθείας α (α′, α″) καὶ εὐθείας β (β′, β″) συναντώσης τὴν α καὶ τὸν ἄξονα y_{12}.

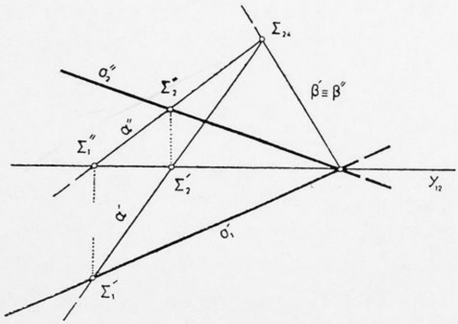
Ἔστω Σ_{12} τὸ σημεῖον κατὰ τὸ ὁποῖον ἡ β τέμνει τὸν ἄξονα y_{12}. Ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον p $(\sigma_1', \sigma_2'') \equiv (\alpha, \beta)$ διέρχεται διὰ τῆς β, θὰ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ Σ_{12}, ἑπομένως τὸ Σ_{12} εἶναι τὸ ἴχνος ἐπὶ τοῦ ἄξονος y_{12} τοῦ ἐπιπέδου p.

Ἐξ ἄλλου τὰ ἴχνη τοῦ p θὰ διέρχωνται ἀντιστοίχως διὰ τῶν ὁμωνύμων ἰχνῶν τῆς εὐθείας α, διὰ τῶν σημείων δηλαδὴ Σ_1' καὶ Σ_2'' (Σχ. 43).



Σχ. 43

Ἑπομένως τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου p εἶναι αἱ εὐθεῖαι $\sigma_1' \equiv \Sigma_{12} \Sigma_1'$ καὶ $\sigma_2'' \equiv \Sigma_{12} \Sigma_2''$.



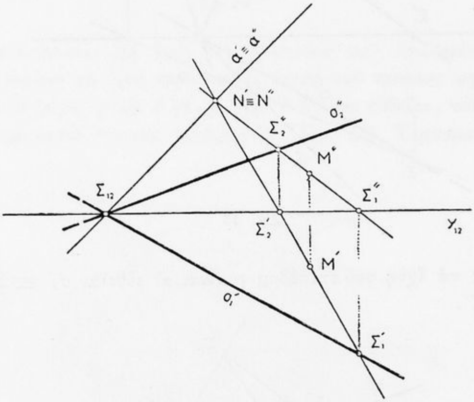
Σχ. 44

44) Κατασκευάσατε τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ εὐθείας α (α′, α″) καὶ εὐθείας β, συναντώσης τὴν α καὶ κειμένης ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμπτώσεως.

Ἐφόσον ἡ β κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμπτώσεως θὰ εἶναι $\beta' \equiv \beta''$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ εὐθεῖα α συναντᾷ τὴν β, τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμπτώσεως, θὰ εἶναι δηλαδὴ τὸ ἴχνος Σ_{24} τῆς εὐθείας α ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμπτώσεως. Ἐξ ἄλλου ἐφόσον ἡ β κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμπτώσεως, θὰ συναντᾷ τὸν ἄξονα y_{12} εἰς ἓν σημεῖον Σ_{12}, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι τὸ ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου p $(\sigma_1', \sigma_2'') \equiv (\alpha, \beta)$ ἐπὶ τοῦ ἄξονος (Σχ. 44). Τὰ ζητούμενα λοιπὸν ἴχνη τοῦ p ὁρίζονται ὑπὸ τοῦ Σ_{12} καὶ τῶν ὁμωνύμων ἰχνῶν Σ_1' καὶ Σ_2'' τῆς εὐθείας α.

45) Κατασκευάσατε τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ σημείου M (M′, M″) καὶ εὐθείας α κειμένης ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμπτώσεως.

Ἐὰν λάβωμεν ἓν σημεῖον N τῆς εὐθείας α, αἱ προβολαὶ αὐτοῦ θὰ συμπίπτουν, θὰ εἶναι δηλαδὴ $N' \equiv N''$. Ἡ εὐθεῖα MN (M′N′, M″N″) κεῖται προφανῶς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p $(\sigma_1', \sigma_2'') \equiv (\alpha, M)$.



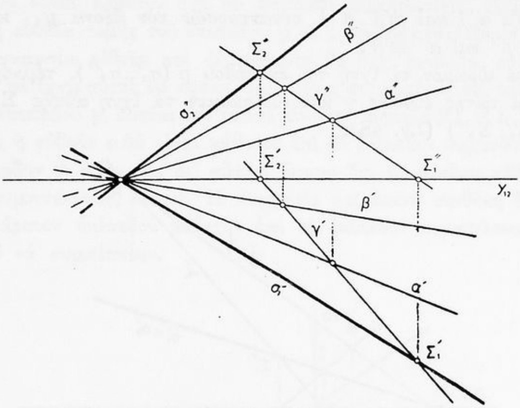
Σχ. 45

Ἐὰν $\Sigma_1 (\Sigma_1', \Sigma_1'')$, $\Sigma_2 (\Sigma_2', \Sigma_2'')$ καὶ Σ_{12} τὰ ἴχνη τῆς εὐθείας MN ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων προβολῆς καὶ τὸ ἴχνος τῆς εὐθείας α ἐπὶ τοῦ ἄξονος, τὰ ζητούμενα ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου p εἶναι αἱ εὐθεῖαι $\sigma_1' \equiv \Sigma_{12}\Sigma_1'$ καὶ $\sigma_2'' \equiv \Sigma_{12}\Sigma_2''$ (Σχ. 45).

46) Κατασκευάσατε τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ δύο εὐθειῶν α καὶ β συναντωμένων εἰς σημεῖον Σ_{12} τοῦ ἄξονος y_{12}.

Φέρομεν μίαν τρίτην εὐθεῖαν γ (γ', γ''), συναντῶσαν ἀμφοτέρας καὶ ἑπομένως κειμένην ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p τὸ ὁποῖον ὁρίζουν.

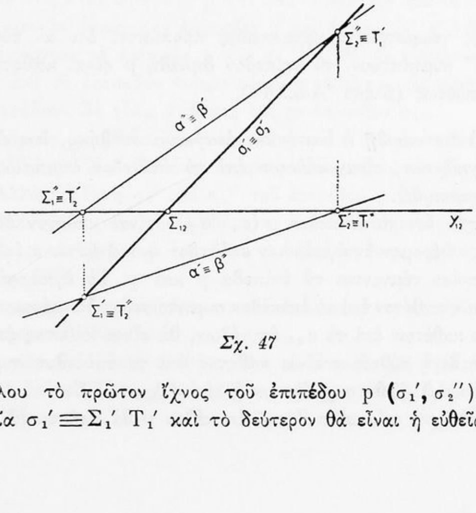
Ἐὰν Σ_1 (Σ_1', Σ_1'') καὶ Σ_2 (Σ_2', Σ_2'') τὰ ἴχνη τῆς εὐθείας γ, τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου p εἶναι αἱ εὐθεῖαι $\sigma_1' \equiv \Sigma_{12}\Sigma_1'$ καὶ $\sigma_2'' \equiv \Sigma_{12}\Sigma_2''$ (Σχ. 46).



Σχ. 46

*47) **Κ**ατασκευάσατε τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ δύο εὐθειῶν α (α', α'') καὶ β(β', β'') ἔνθα, ὅμως $\alpha' \equiv \beta''$ καὶ $\alpha'' \equiv \beta'$.*

Ἔστωσαν Σ_1, Σ_2 τὰ ἴχνη τῆς εὐθείας α καὶ T_1, T_2 τὰ ἴχνη τῆς εὐθείας β (Σχ. 47). Ἐπειδὴ $\alpha' \equiv \beta''$ καὶ $\alpha'' \equiv \beta'$, ἕπεται ὅτι $\Sigma_1' \equiv T_2''$ καὶ $\Sigma_2'' \equiv$ $\equiv T_1'$.



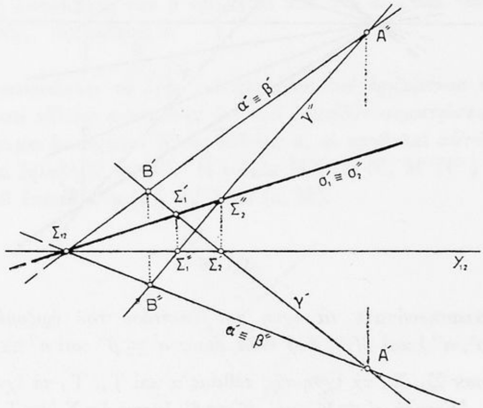
Σχ. 47

Ἐξ ἄλλου τὸ πρῶτον ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου p $(\sigma_1', \sigma_2'') \equiv (\alpha, \beta)$ θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα $\sigma_1' \equiv \Sigma_1' \, T_1'$ καὶ τὸ δεύτερον θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα $\sigma_2'' \equiv \Sigma_2''$

$T_2'' \equiv T_1'$ $\Sigma_1' \equiv \sigma_1'$. Τὰ ἴχνη δηλαδὴ τοῦ ἐπιπέδου p συμπίπτουν. Ἑπομένως, τὸ ἐπίπεδον p εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως (βλέπε Ἄσκ. 49).

48) Κατασκευάσατε τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ δύο εὐθειῶν α(α΄ α΄΄) καὶ β(β΄, β΄΄), συναντουσῶν τὸν ἄξονα y_{12} καὶ τοιούτων ὥστε $\alpha' \equiv \beta''$ καὶ $\alpha'' \equiv \beta'$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου p (σ_1', σ_2''), τέμνομεν τὰς δύο εὐθείας διὰ τρίτης εὐθείας γ καὶ εὑρίσκομεν τὰ ἴχνη αὐτῆς Σ_1 (Σ_1', Σ_1'') καὶ Σ_2 (Σ_2', Σ_2'') (Σχ. 48).



Σχ. 48

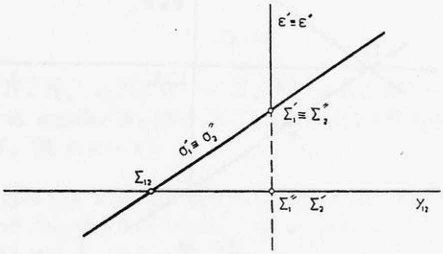
Ἐκ τῆς γεωμετρικῆς κατασκευῆς προκύπτει ὅτι αἱ εὐθεῖαι Σ_{12} Σ_1' καὶ Σ_{12} Σ_2'' συμπίπτουν, τὸ ἐπίπεδον δηλαδὴ p εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως (βλέπε Ἄσκ. 49).

49) Νὰ διατυπωθῇ ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα ἐπίπεδον p(σ'_1, σ_2''), μὴ ἐγκάρσιον, εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως ἢ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας.

α΄) Ἔστω ὅτι τὸ ἐπίπεδον p (σ_1', σ_2'') εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως. Φέρομεν ἓν ἐγκάρσιον ἐπίπεδον q καὶ ἔστω ε (ε΄, ε΄΄) ἡ εὐθεῖα κατὰ τὴν ὁποίαν τέμνονται τὰ ἐπίπεδα p καὶ q. Τὸ ἐγκάρσιον ἐπίπεδον q εἶναι προφανῶς κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως, ἑπομένως καὶ ἡ εὐθεῖα ε, ὡς τομὴ δύο καθέτων ἐπὶ τὸ e_{24} ἐπιπέδων, θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον e_{24}. Ἐπειδὴ δὲ ἡ εὐθεῖα ε εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως, τὰ ἴχνη τῆς Σ_1' καὶ Σ_2'' θὰ συμπίπτουν (βλέπε Ἄσκ. 25).

Ἀλλὰ τὰ ἴχνη σ_1' καὶ σ_2'' τοῦ ἐπιπέδου p θὰ πρέπει νὰ διέλθουν ἀντιστοίχως διὰ τῶν ἰχνῶν τῆς εὐθείας ε, διὰ τοῦ σημείου δηλαδὴ $\Sigma_1' \equiv \Sigma_2''$, συγχρόνως δὲ νὰ διέλθουν καὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Σ_{12} τοῦ ἄξονος y_{12}. Ἑπομένως τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου p θὰ συμπίπτουν (Σχ. 49).

Ἀντιστρόφως, ἂν ἐπιπέδου p (σ_1', σ_2'') τὰ ἴχνη συμπίπτουν, τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως. Πράγματι, ἂν ε (ε′, ε″) ἡ εὐθεῖα τομῆς τοῦ ἐπιπέδου p μὲ ἐγκάρσιον ἐπίπεδον q, ἡ εὐθεῖα ε θὰ εἶναι ἐγκαρσία εὐθεῖα καὶ ὡς τοιαύτη θὰ ἔχῃ προβολὰς συμπιπτούσας. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ἴχνη αὐτῆς θὰ πρέπει νὰ κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ὁμωνύμων ἰχνῶν τοῦ ἐπιπέδου p, ἔπεται ὅτι ταῦτα εἶναι τὰ σημεῖα $\Sigma_1' \equiv \Sigma_2''$ (Σχ. 49). Ἀλλὰ τότε ἡ εὐθεῖα ε θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως, ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐπίπεδον p διέρχεται δι' αὐτῆς, ἔπεται ὅτι τὸ p εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως, ὅθεν : Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη διὰ νὰ εἶναι ἓν μὴ ἐγκάρσιον ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως, εἶναι τὰ ἴχνη αὐτοῦ νὰ συμπίπτουν.



Σχ. 49

β) Ἔστω τώρα τὸ ἐπίπεδον p (σ_1', σ_2'') κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας. Φέρομεν ἓν ἐγκάρσιον ἐπίπεδον q καὶ ἔστω ε (ε′, ε″) ἡ εὐθεῖα κατὰ τὴν ὁποίαν τέμνονται τὰ ἐπίπεδα p καὶ q. Ἐπειδὴ τὸ ἐγκάρσιον ἐπίπεδον q εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας, ἡ εὐθεῖα ε, ὡς τομὴ δύο καθέτων ἐπὶ τὸ e_{13} ἐπιπέδων, θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον e_{13}.

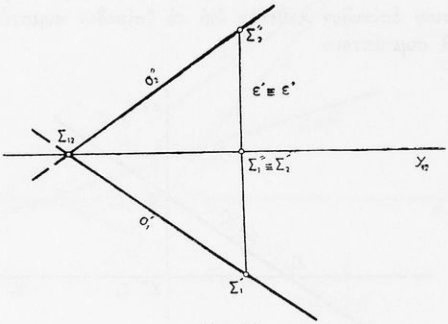
Ἐφόσον ὅμως ἡ εὐθεῖα ε εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας, τὰ ἴχνη αὐτῆς Σ_1' καὶ Σ_2'' θὰ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα y_{12} (βλέπε Ἄσκ. 25). Ἀλλὰ τὰ ἴχνη σ_1' καὶ σ_2'' τοῦ ἐπιπέδου p θὰ πρέπει νὰ διέλθουν ἀντιστοίχως διὰ τῶν ἰχνῶν τῆς εὐθείας ε, διὰ τῶν σημείων δηλαδὴ Σ_1' καὶ Σ_2''. Ἑπομένως τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου p θὰ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα y_{12} (Σχ. 50).

Τὸ ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται κατ' ἀνάλογον, πρὸς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, τρόπον, ὅθεν :

Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη διὰ νὰ εἶναι ἓν μὴ ἐγκάρσιον ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας, εἶναι τὰ ἴχνη αὐτοῦ νὰ εἶναι **συμμ**ετρικὰ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}.

50) Νὰ διατυπωθῇ ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα ἐπίπεδον $p(\sigma_1', \sigma_2'')$, εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως ἢ πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας.

α) Ἔστω ὅτι τὸ ἐπίπεδον p (σ_1', σ_2'') εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως. Τὸ ἐπίπεδον p, ὡς τοιοῦτον, θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας καὶ συγχρόνως παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}. Ἑπομένως τὰ ἴχνη του θὰ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸν ἄξονα y_{12} (βλέπε Ἄσκ. 49) καὶ παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}. Τὸ ἀντίστροφον εἶναι προφανές, ὅθεν :
Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη διὰ νὰ εἶναι ἓν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως, εἶναι τὰ ἴχνη αὐτοῦ νὰ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸ τὸν ἄξονα y_{12} καὶ παράλληλα πρὸς αὐτόν.



Σχ· 50

β') Ἔστω ὅτι τὸ ἐπίπεδον p (σ_1', σ_2'') εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας. Τὸ ἐπίπεδον p, ὡς τοιοῦτον, θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως καὶ συγχρόνως παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}.

Ἑπομένως τὰ ἴχνη του θὰ συμπίπτουν (βλέπε Ἄσκ. 49) καὶ θὰ εἶναι παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}. Τὸ ἀντίστροφον εἶναι προφανές, ὅθεν :

Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη διὰ νὰ εἶναι ἓν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας, εἶναι τὰ ἴχνη του νὰ συμπίπτουν καὶ νὰ εἶναι παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}.

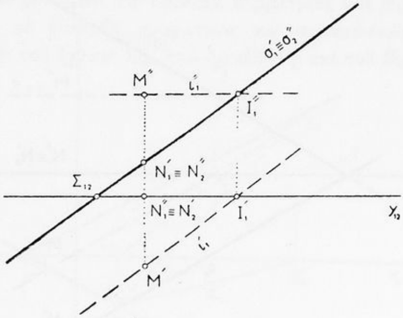
51) Τὰ ἴχνη τῶν ἐπιπέδων τῶν διερχομένων διὰ σημείου $M(x,y,z)$ καὶ καθέτων ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως, διέρχονται ἀντιστοίχως διὰ τῶν σημείων $N_1(x\text{-}z,y,0)$ καὶ $N_2(0,y,z\text{-}x)$.

Ἔστω p (σ_1', σ_2'') ἓν τῶν ἐπιπέδων τῶν διερχομένων διὰ τοῦ σημείου M καὶ καθέτων ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως.

Ἐφόσον τὸ ἐπίπεδον p εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως, τὰ ἴχνη αὐτοῦ θὰ συμπίπτουν. Θεωροῦμεν μίαν πρώτην ἰχνοπαράλληλον τοῦ p διερχομένην διὰ τοῦ σημείου M (Σχ. 51).

Τὰ τρίγωνα $M'' I_1'' N_1'$ καὶ $N_1'' I_1' M'$ εἶναι προφανῶς ἴσα.

Ἐπομένως $\overline{N_1'' N_1'} = \overline{N_1'' M''} - \overline{N_1' M''} = \overline{N_1'' M''} - \overline{M' N_1''} =$
$= z - x$, ἢ $\overline{N_1' N_1''} = x - z$. Δηλαδὴ τὸ σημεῖον $N_1 (N_1', N_1'')$ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἴχνους σ_1', εἶναι δὲ $N_1 \ (x - z, y, 0)$.



Σχ. 51

Ὁμοίως $\overline{N_2' N_2''} = \overline{N_2' M''} - \overline{N_2'' M''} = \overline{N_2' M''} - \overline{M' N_2'} = z - x$

Δηλαδὴ τὸ σημεῖον $N_2 (N_2', N_2'')$ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἴχνους σ_2'', εἶναι δὲ τὸ σημεῖον $N_2 \ (0, y, z - x)$.

52) Τὰ ἴχνη τῶν ἐπιπέδων τῶν διερχομένων διὰ σημείου $M(x,y,z)$ καὶ καθέτων ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας, διέρχονται ἀντιστοίχως διὰ τοῦ σημείου $N_1 (x+z,y,0)$ καὶ $N_2 (0,y,x+z)$.

Ἔστω $p \ (\sigma_1', \sigma_2'')$ ἓν τῶν ἐπιπέδων τῶν διερχομένων διὰ τοῦ σημείου M καὶ καθέτων ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας. Ἐφόσον τὸ ἐπίπεδον p εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας, τὰ ἴχνη αὐτοῦ θὰ εἶναι συμμετρικά, ὡς πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}. Θεωροῦμεν μίαν πρώτην ἰχνοπαράλληλον τοῦ p, διερχομένην διὰ τοῦ σημείου M (Σχ. 52). Τὰ τρίγωνα $I_1' M' N_2'$ καὶ $I_1'' N_2'' M''$ εἶναι προφανῶς ἴσα.

Ἐπομένως $\overline{N_2' N_2''} = \overline{N_2' M''} + \overline{M'' N_2''} = \overline{N_2' M''} + \overline{M' N_2'} = x + z$.

Δηλαδὴ τὸ σημεῖον $N_2 (N_2', N_2'')$ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἴχνους σ_2'', εἶναι δὲ $N_2 \ (o, y, x + z)$.

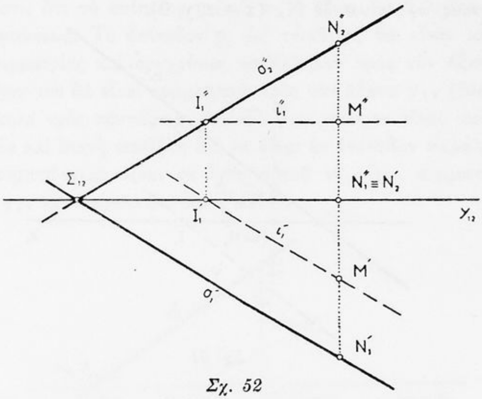
Ὁμοίως $\overline{N_1' N_1''} = \overline{N_1' M'} + \overline{M' N_1''} = \overline{N_1'' M''} + \overline{N' N_1''} = x + z$.

Δηλαδὴ τὸ σημεῖον $N_1 (N_1', N_1'')$ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἴχνους σ_1', εἶναι δὲ $N_1 \ (x + z, y, o)$.

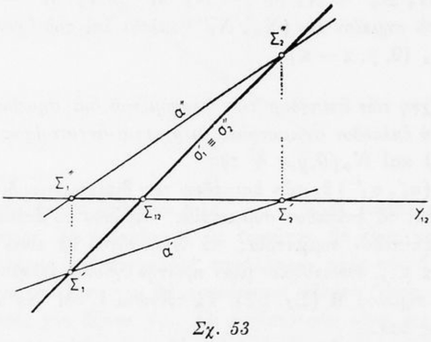
53) Διὰ δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως ἢ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας.

Ἔστωσαν $\Sigma_1 (\Sigma_1', \Sigma_1'')$ καὶ $\Sigma_2 (\Sigma_2', \Sigma_2'')$ τὰ ἴχνη τῆς δοθείσης εὐθείας $\alpha \ (\alpha', \alpha'')$.

α′) Τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τῆς α καὶ καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως, θὰ συμπίπτουν καὶ θὰ διέρχωνται διὰ τῶν σημείων Σ_1 καὶ Σ_2. Ἑπομένως τὰ ἴχνη τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου εἶναι τὰ $\sigma_1' \equiv \sigma_2'' \equiv \Sigma_1' \Sigma_2''$ (Σχ. 53).



Σχ. 52



Σχ. 53

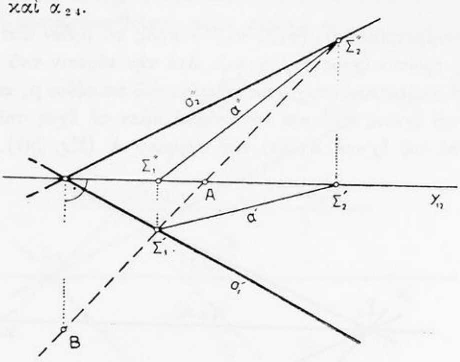
β') Τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τῆς α καὶ καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας θὰ σχηματίζουν ἴσας γωνίας μετὰ τοῦ ἄξονος y_{12} καὶ θὰ διέρχωνται διὰ τῶν σημείων Σ_1 καὶ Σ_2.

Ἐὰν Α τὸ σημεῖον τομῆς τῆς εὐθείας $\Sigma_1' \Sigma_2''$ μετὰ τοῦ ἄξονος y_{12}, λάβωμεν δὲ σημεῖον Β τῆς εὐθείας ταύτης, τοιοῦτον ὥστε :

$\dfrac{\overline{\Sigma_1' A}}{\overline{A \Sigma_2''}} = \dfrac{\overline{B \Sigma'_1}}{\overline{B \Sigma''_2}}$, ἡ εὐθεῖα Σ_{12} Β θὰ εἶναι ἐξωτερικὴ διχοτόμος τῆς γωνίας $\Sigma_1' \Sigma_{12} \Sigma_2''$ (Σχ. 54). Ἐὰν συνεπῶς μὲ διάμετρον Α Β γράψωμεν κύκλον, οὗτος θὰ τμήσῃ τὸν ἄξονα y_{12} εἰς τὸ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἴχνος Σ_{12} τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου.

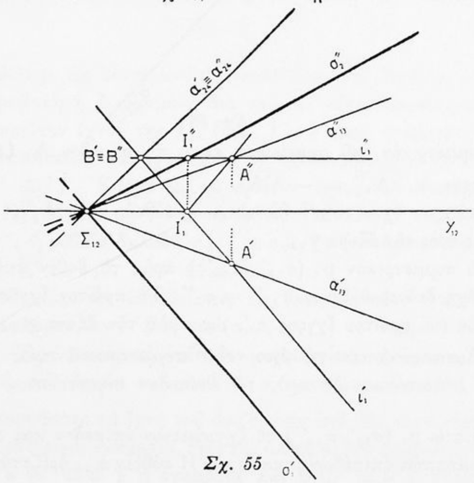
54) Κατασκευάσατε τὰς δύο προβολὰς τῆς εὐθείας κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ἐπίπεδον p (σ_1', σ_2'') τέμνει τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας ἢ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως.

Ἔστωσαν α_{13} $(\alpha_{13}', \alpha_{13}'')$ καὶ α_{24} $(\alpha'_{24}, \alpha''_{24})$ αἱ εὐθεῖαι κατὰ τὰς ὁποίας τὸ ἐπίπεδον p τέμνει τὰ ἐπίπεδα συμμετρίας καὶ συμπτώσεως, ἀντιστοίχως. Ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα συμμετρίας καὶ συμπτώσεως διέρχονται διὰ τοῦ ἄξονος y_{12}, διὰ τοῦ ἴχνους Σ_{12} τοῦ ἐπιπέδου p ἐπὶ τοῦ ἄξονος, θὰ διέλθουν αἱ εὐθεῖαι α_{13} καὶ α_{24}.



Σχ. 54

Ἐὰν θεωρήσωμεν τυχοῦσαν ἰχνοπαράλληλον i_1 (i_1', i_2'') τοῦ ἐπιπέδου p. Τὰ σημεῖα A καὶ B τομῆς τῆς εὐθείας ταύτης μετὰ τῶν ἐπιπέδων συμμετρίας καὶ συμπτώσεως ἀντιστοίχως, θὰ εἶναι σημεῖα τῶν εὐθειῶν α_{13} καὶ α_{24}

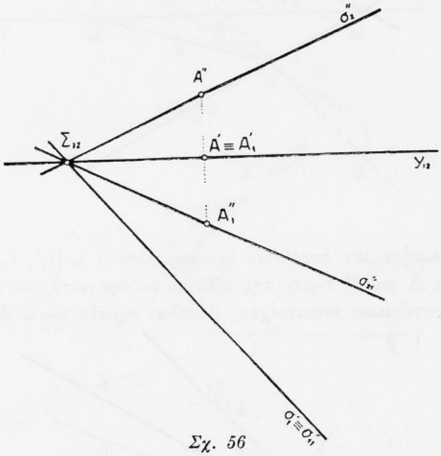


Σχ. 55

Εἰς τὸ Σχ. 55 τὸ σημεῖον $B' \equiv B''$ εὑρίσκεται ὡς ἡ τομὴ τῶν i_1' καὶ i_1''. Τὸ σημεῖον A'' εὑρίσκεται ὡς ἡ τομὴ τῆς συμμετρικῆς τῆς i_1' ὡς πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}, μετὰ τῆς i_1''. Ἐκ τοῦ σημείου A'' εὑρίσκεται τὸ σημεῖον A'. Ἡ εὐθεῖα α_{13} ἔχει προβολὰς $\alpha_{13}' \equiv \Sigma_{12} A'$ καὶ $\alpha_{13}'' \equiv \Sigma_{12} A''$, ἡ δὲ εὐθεῖα α_{24} ἔχει προβολὰς $\alpha_{24}' \equiv \alpha_{24}'' \equiv \Sigma_{12} B' \equiv \Sigma_{12} B''$.

55) Κατασκευάσατε τὰ ἴχνη τοῦ συμμετρικοῦ πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον $p(\sigma_1', \sigma_2'')$ ἐπιπέδου, ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἢ τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον προβολῆς.

α') Τὸ συμμετρικὸν $p_1(\sigma_{11}', \sigma_{21}'')$ πρὸς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, ὡς πρὸς τὸ e_1, θὰ ἔχῃ πρῶτον ἴχνος $\sigma_{11}' = \sigma_1'$. Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ δευτέρου ἴχνους λαμβάνομεν τὸ συμμετρικὸν τυχόντος σημείου τοῦ ἐπιπέδου p, π.χ., τοῦ σημείου A (A', A'') τοῦ ἴχνους σ_2'' καὶ κατασκευάζομεν τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τοῦ ἴχνους σ_1 καὶ τοῦ σημείου A (Σχ. 56).



Σχ. 56

Τὸ συμμετρικὸν τοῦ σημείου A εἶναι τὸ σημεῖον A_1 ($A_1' \equiv A'$, A_1'') μὲ ὑψόμετρον $\overline{A_1' A_1''} = -\overline{A'A''}$.

Τὸ δεύτερον ἴχνος σ_{21}'' θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα $\Sigma_{12} A_1''$, συμμετρικὴ τῆς $\Sigma_{12} A''$, ὡς πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}.

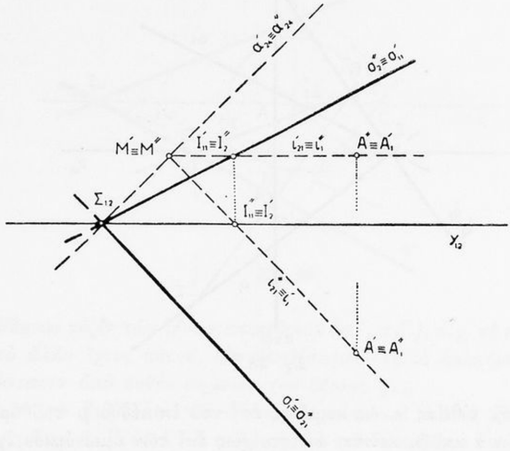
β) Τὸ συμμετρικὸν $p_2(\sigma_{12}', \sigma_{22}'')$ πρὸς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, ὡς πρὸς τὸ e_2 θὰ ἔχῃ δεύτερον ἴχνος $\sigma_{22}'' = \sigma_2''$. Τὸ πρῶτον ἴχνος αὐτοῦ θὰ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ πρώτου ἴχνους σ_1', ὡς πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}.

56) Κατασκευάσατε τὰ ἴχνη τοῦ συμμετρικοῦ πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον $p(\sigma_1', \sigma_2'')$ ἐπιπέδου, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως ἢ τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας.

α') Ἔστω $p_1(\sigma_{11}', \sigma_{21}'')$ τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον καὶ α_{24} (α_{24}', α_{24}'') ἡ εὐθεῖα τομῆς τῶν ἐπιπέδων p καὶ e_{24}. Ἡ εὐθεῖα α_{24} ὁρίζεται ἐκ τοῦ σημείου

Σ_{12} καὶ τοῦ σημείου τομῆς τῆς πρώτης καὶ δευτέρας προβολῆς τυχούσης ἰχνοπαραλλήλου τοῦ p π.χ. μιᾶς πρώτης ἰχνοπαραλλήλου (βλέπε Ἄσκ. 54).

Τὸ ἐπίπεδον p_1 θὰ διέλθῃ διὰ τῆς εὐθείας α_{24}, ὡς κειμένης ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_{24} καὶ ἐκ τοῦ συμμετρικοῦ A_1 τυχόντος σημείου A (A', A'') τοῦ ἐπιπέδου p (Σχ. 57), διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι $A_1' \equiv A''$, $A_1'' \equiv A'$ (βλέπε Ἄσκ. 4). Καὶ τώρα κατασκευάζομεν τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου p_1 τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῆς εὐθείας α_{24} ($\alpha_{24}' \equiv \alpha_{24}''$) καὶ τοῦ σημείου A_1 (A_1', A_1''). Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τὴν χρησιμοποιηθεῖσαν πρὸς εὕρεσιν τῆς α_{24} πρώτην ἰχνοπαράλ-



Σχ. 57

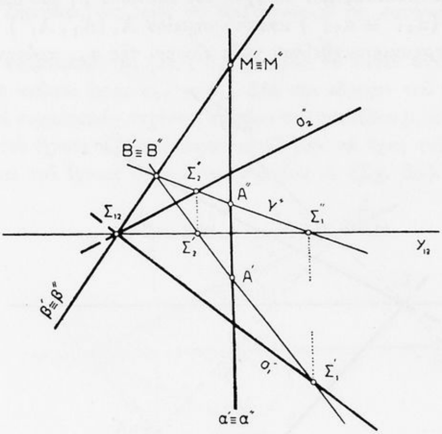
ληλον τοῦ ἐπιπέδου p, ὡς δευτέραν ἰχνοπαράλληλον τοῦ ἐπιπέδου p_1 (καθόσον ἡ πρώτη της προβολὴ ἡ διερχομένη διὰ τοῦ A_1' εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}. Τὸ πρῶτον ἴχνος της I_{11} (I_{11}', I''_{11}) εἶναι συμμετρικόν, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως, τοῦ ἴχνους I_2 τῆς ἰχνοπαραλλήλου i_1, διότι $I_{11}' \equiv$ $\equiv I_2''$ καὶ $I_{11}'' \equiv I_2'$. Ἑπομένως τὸ πρῶτον ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου p_1 εἶναι ἡ εὐθεῖα $\sigma_{11}' \equiv \Sigma_{12} I_{11}' \equiv \sigma_2''$, ἐνῶ τὸ δεύτερον εἶναι ἡ ἐκ τοῦ Σ_{12} παράλληλος πρὸς τὴν i_{21}'', ἡ εὐθεῖα δηλαδὴ $\sigma_{21}'' \equiv \sigma_1'$. Τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον εἶναι συνεπῶς τὸ p_1 ($\sigma_{11}' \equiv \sigma_2''$, $\sigma_{21}'' \equiv \sigma_1'$).

β) Ἐφαρμόζοντες τὴν ἐκτεθεῖσαν, ὡς ἄνω, μέθοδον διὰ τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας, εὑρίσκομεν ὅτι : Ἐὰν p_2 (σ_{12}', σ_{22}'') τὸ συμμετρικὸν τοῦ ἐπιπέδου p (σ_1', σ_2''), ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας, τὰ ἴχνη σ_{12}' καὶ σ_{22}'' εἶναι συμμετρικὰ τῶν ἰχνῶν σ_2'' καὶ σ_1' ἀντιστοίχως, ὡς πρὸς ἄξονα y_{12}.

*57) **Κατασκευάσατε** τὰ ἴχνη τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ δύο τεμνομένων εὐθειῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι ἐγκαρσία, ἐνῶ τῆς ἄλλης αἱ δύο προβολαὶ συμπίπτουν.*

Ἔστωσαν α ($\alpha' \equiv \alpha''$) ἡ ἐγκαρσία καὶ β ($\beta' \equiv \beta''$) ἡ ἄλλη εὐθεῖα, κειμένη προφανῶς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμπτώσεως καὶ M ($M' \equiv M''$) τὸ σημεῖον τομῆς των.

Ἡ ἐγκαρσία εὐθεῖα α ὁρίζεται διὰ τοῦ σημείου M καὶ ἑνὸς ἄλλου σημείου ἔστω A (A', A'') (Σχ. 58). Θεωροῦμεν εὐθεῖαν γ (γ', γ'') ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ σημείου A τῆς εὐθείας α καὶ τυχόντος σημείου B ($B' \equiv B''$) τῆς εὐθείας β.



Σχ. 58

Τὰ ἴχνη τῆς εὐθείας γ, ὡς κειμένης ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῶν εὐθειῶν α καὶ β, κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ὁμωνύμων ἰχνῶν τοῦ ἐπιπέδου p.

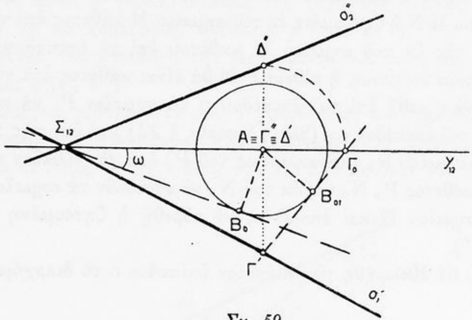
Εὑρίσκομεν ἑπομένως τὰ ἴχνη Σ_1 (Σ_1', Σ_1'') καὶ Σ_2 (Σ_2', Σ_2'') τῆς εὐθείας γ, ὁπότε ὁρίζονται τὰ ἴχνη $\sigma_1' \equiv \Sigma_{12}\ \Sigma_1'$ καὶ $\sigma_2'' \equiv \Sigma_{12}\ \Sigma_2''$ τοῦ ἐπιπέδου p.

58) Ἐπιπέδου p δίδεται τὸ ἓν ἴχνος π.χ. τὸ σ_1'. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ ἕτερον ἴχνος αὐτοῦ, ἐὰν ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει τὸ ἐπίπεδον μετὰ τοῦ ἄξονος y_{12} εἶναι δοθεῖσα γωνία ω.

Ἡ γωνία τοῦ ἄξονος y_{12} μετὰ τοῦ ἐπιπέδου p εἶναι ἡ γωνία τοῦ ἄξονος καὶ τῆν προβολῆς του. Φέρομεν ἐκ τυχόντος σημείου A ($A' \equiv A''$) τοῦ ἄξονος κάθετον AB ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον p καὶ κατακλίνομεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1 τὸ τρίγωνον Σ_{12} AB.

Εἰς τὸ Σχ. 59 κατεσκευάσθη ἡ κατάκλισις Σ_{12} A B_0 τοῦ τριγώνου Σ_{12} A B, γνωστῆς οὔσης τῆς ὑποτεινούσης Σ_{12} A καὶ τῆς γωνίας A Σ_{12} $B = \omega$. Θεωροῦμεν τὸ διὰ τοῦ σημείου A ἐγκάρσιον ἐπίπεδον καὶ ἔστω Γ (Γ', $\Gamma'' \equiv A$) τὸ σημεῖον κατὰ τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τὸ πρῶτον ἴχνος καὶ Δ ($\Delta' \equiv A$, Δ'') τὸ σημεῖον κατὰ τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ζητούμενον δεύτερον ἴχνος.

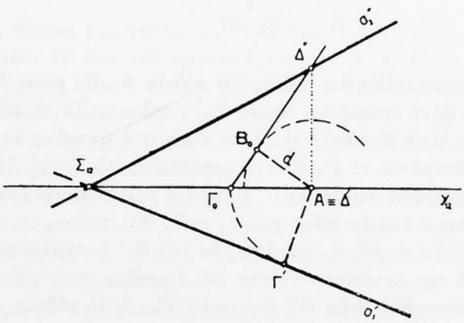
Τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου Γ′ Α Δ′′, συμπίπτει μετὰ τῆς καθέτου Α Β ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον p. Ἑπομένως, τοῦ τριγώνου τούτου εἶναι γνωστὴ ἡ κάθετος πλευρὰ Γ′ Α καὶ τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος Α Β. Κατακλίνομεν τὸ τρίγωνον τοῦτο ἐπὶ τοῦ e_1, εὑρίσκομεν τὴ κατάκλισιν $Δ_0$ τῆς κορυφῆς Δ, ἐξ ἧς $Δ_0$ εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον Δ′′ τοῦ δευτέρου ἴχνους $σ_2''$ τοῦ ἐπιπέδου p. Ὑπάρχουν δύο ἐπίπεδα πληροῦντα τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος.



Σχ. 59

59). *Δίδεται τὸ ἓν τῶν ἰχνῶν ἐπιπέδου p ($σ_1'$, $σ_2''$), π.χ. τὸ $σ_1'$, νὰ κατασκευασθῇ τὸ ἄλλο ἴχνος αὐτοῦ, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον ἀπέχει δοθεῖσαν ἀπόστασιν ἀπὸ δοθὲν σημεῖον τοῦ ἄξονος y_{12}.*

Ἔστω Α τὸ δοθὲν ἐπὶ τοῦ ἄξονος σημεῖον καὶ Α Β ἡ ἀπόστασις ἴση πρὸς δοθὲν τμῆμα d. Ἐὰν Γ′ ὁ ποῦς τῆς ἐκ τοῦ Α καθέτου ἐπὶ τὸ ἴχνος $σ_1'$ καὶ Δ′′ ἡ τομὴ τῆς εἰς Α καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα, μετὰ τοῦ ζητουμένου δευτέρου ἴχνους $σ_2''$, κατὰ τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων ἡ Δ′′ Γ′ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἴχνος $σ_1'$. Τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου Δ′′ Α Γ′ γνωρίζομεν τὴν κάθετον πλευρὰν Α Γ′ καὶ τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν Δ′′ Γ′ ὕψος Α Β = d. Εἰς τὸ Σχ. 60



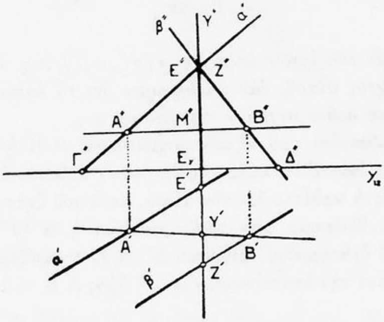
Σχ. 60

ἤχθη ἐκ τοῦ σημείου A κάθετος ἐπὶ τὸ ἴχνος σ_1', ἐλήφθη ἐπὶ τοῦ ἄξονος y_{12}, $A\Gamma_0 = A\Gamma''$ καὶ κατεσκευάσθη τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $A\Gamma_0\Delta''$ ἔχον ὕψος $AB_0 = d$. Ἡ εὐθεῖα $\Sigma_{12}\Delta''$ εἶναι τὸ ζητούμενον δεύτερον ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου p.

60). Δίδεται εὐθεῖα ε καὶ σημεῖον M (M′, M″) τοῦ χώρου. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ τῆς ἐκ τοῦ M καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ε.

Διὰ τῆς εὐθείας ε φέρομεν ἐπίπεδον p (σ_1', σ_2'') παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}. Ἔστω M N ἡ ζητουμένη ἐκ τοῦ σημείου M κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ε. Ἐὰν P ὁ ποῦς τῆς ἐκ τοῦ σημείου M καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον p, κατὰ τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων, ἡ εὐθεῖα P N θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ε. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p τὸ σημεῖον P, νὰ κατακλιθῇ τὸ ἐπίπεδον p ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_2 (βλέπε θεωρία § 22) καὶ ἐπὶ τῆς κατακλίσεως νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου P_0 (κατακλίσεως τοῦ P) ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ε_0 (κατακλίσεως τῆς ε), ἡ κάθετος P_0N_0 καὶ ἐκ τοῦ N_0 νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα N′ καὶ N″, προβολαὶ τοῦ σημείου N καὶ ἑπομένως νὰ εὑρεθῇ ἡ ζητουμένη εὐθεῖα M N (M′ N′, M″ N″).

Εἰς τὸ Σχ. 61 ἐθεωρήθη τὸ ἐγκάρσιον ἐπίπεδον e τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ



Σχ. 61

M, τὸ ὁποῖον καὶ κατεκλίθη ἐπὶ τοῦ e_2. Ἡ εὐθεῖα A_0B'' εἶναι ἡ κατάκλισις τῆς εὐθείας καθ' ἣν τὸ ἐπίπεδον e τέμνει τὸ ἐπίπεδον p. Τὸ σημεῖον M_0 εἶναι ἡ κατάκλισις τοῦ M, ἡ δὲ εὐθεῖα M_0P_0 ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ M_0 ἐπὶ τὴν A_0B'' καὶ ἑπομένως τὸ P_0 εἶναι ἡ κατάκλισις τοῦ P (τὸ ὁποῖον ἐπίσης κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐγκαρσίου ἐπιπέδου e). Ἡ εὐθεῖα σ_{10} προέκυψεν ἐκ τοῦ ἴχνους σ_1, διὰ κατακλίσεως τοῦ ἐπιπέδου p (σ_1', σ_2'') ἐπὶ τοῦ e_2.

Ἐλήφθη $B''A_0' = B''A_0$ καὶ ἤχθη ἐκ τοῦ B_0' ἡ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}. Κατὰ τὴν κατάκλισιν ταύτην τοῦ ἐπιπέδου p τὸ μὲν σημεῖον P_0 κατέλαβεν τὴν θέσιν P_0', ἔνθα $B''P_0' = B''P_0$, ἡ δὲ εὐθεῖα ε κατέλαβεν τὴν θέσιν $\varepsilon_0 \equiv \Sigma_2''\Sigma_{10}$, ἔνθα Σ_{10} ἡ κατάκλισις τοῦ σημείου Σ_1. Ἐκ τοῦ

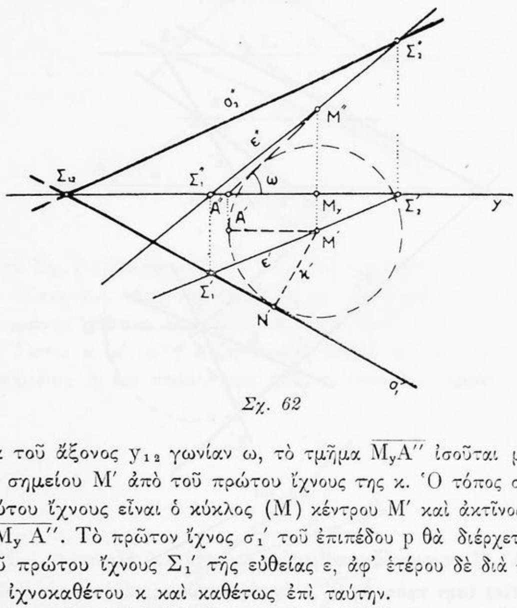
P_0' ἤχθη ἡ $P_0' N_0$ κάθετος ἐπὶ τὴν ε_0, ὁρισθέντος οὕτω τοῦ σημείου N_0, ἐκ τοῦ ὁποίου ὁρίζονται τὰ σημεῖα N' καὶ N'' ἐπὶ τῶν ε' καὶ ε'' ἀντιστοίχως.

Ἡ εὐθεῖα $M N$ ($M'N'$, $M''N''$) εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος.

61. Δίδεται εὐθεῖα ε καὶ γωνία ω. Νὰ κατασκευασθοῦν τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τῆς ε καὶ σχηματίζοντος γωνίαν ω μὲ τὸ ὁριζόντιον (κατακόρυφον) ἐπίπεδον προβολῆς.

Ἡ γωνία ω εἶναι ἡ γωνία κλίσεως τῆς τυχούσης πρώτης ἰχνοκαθέτου τοῦ ζητουμένου νὰ κατασκευασθῇ ἐπίπεδον p (σ_1', σ_2''). Ἂς λάβωμεν ὡς πρώτην ἰχνοκάθετον τοῦ ἐπιπέδου τὴν διερχομένην διά τινος σημείου M (M', M''), τῆς εὐθείας ε (ε', ε'').

Τῆς ἰχνοκαθέτου ταύτης κ (κ', κ'') γνωρίζοντες ἓν σημεῖον, τὸ M, καὶ τὴν γωνίαν κλίσεως ω, γνωρίζομεν τὴν ἀπόστασιν τοῦ πρώτου ἴχνους της ἀπὸ τοῦ σημείου M'. Εἰς τὸ Σχ. 62 ἐκ τοῦ M'' ἤχθη εὐθεῖα $M'' A''$ σχηματί-



Σχ. 62

ζουσα μετὰ τοῦ ἄξονος y_{12} γωνίαν ω, τὸ τμῆμα $\overline{M_y A''}$ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου M' ἀπὸ τοῦ πρώτου ἴχνους της κ. Ὁ τόπος συνεπῶς τοῦ πρώτου τούτου ἴχνους εἶναι ὁ κύκλος (M) κέντρου M' καὶ ἀκτῖνος ἴσης πρὸς τὸ τμῆμα $\overline{M_y A''}$. Τὸ πρῶτον ἴχνος σ_1' τοῦ ἐπιπέδου p θὰ διέρχεται, ἀφ' ἑνὸς μὲν διὰ τοῦ πρώτου ἴχνους Σ_1' τῆς εὐθείας ε, ἀφ' ἑτέρου δὲ διὰ τοῦ πρώτου ἴχνους τῆς ἰχνοκαθέτου κ καὶ καθέτως ἐπὶ ταύτην.

Ἐπομένως τὸ σ_1' θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Σ_1' καὶ θὰ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου (M). Τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται δύο ἐν γένει λύσεις, εἰς τὸ σχέδιον ἐσχεδιάσθη ἡ μία.

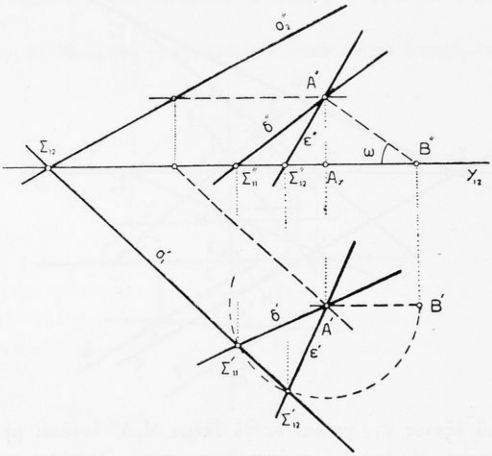
Τὸ δεύτερον ἴχνος σ_2'' εἶναι ἡ εὐθεῖα ἡ διερχομένη διὰ τοῦ Σ_{12} καὶ τοῦ δευτέρου ἴχνους Σ_2'' τῆς εὐθείας ε.

Τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν ἐὰν τὸ ἴχνος Σ_1' κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου (M). Ἐὰν δηλαδὴ ἡ γωνία κλίσεως τῆς εὐθείας ε, ὡς πρὸς τὸ e_1, εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ω. Ἐὰν ἡ γωνία κλίσεως τῆς εὐθείας ε, ὡς πρὸς τὸ e_1, ἰσοῦται μὲ τὴν γωνίαν ω, τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν ἡ εὐθεῖα δὲ ε εἶναι πρώτη ἰχνοκάθετος τοῦ ἐπιπέδου p. Ἀνάλογος εἶναι ἡ κατασκευὴ ὅταν πρόκειται διὰ τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον προβολῆς.

62) Δίδεται ἓν σημεῖον A (A′, A″) ἐπιπέδου p (σ_1', σ_2''). Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ τῆς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου p, τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου A καὶ σχηματιζούσης δοθεῖσαν γωνίαν ω, μετὰ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου προβολῆς.

Ἔστω Σ_1' τὸ πρῶτον ἴχνος τῆς ζητουμένης εὐθείας.

Ἡ ἀπόστασις $\overline{A' \Sigma_1'}$ εἶναι ἡ κάθετος πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου A A′ Σ_1', τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ $\overline{A' A} = \overline{A_y A''}$ εἶναι γνωστή, καθὼς καὶ ἡ γωνία A′ Σ_1' A = ω. Ἑπομένως ἡ $\overline{A' \Sigma_1'}$ εἶναι γνωστή. Εἰς τὸ Σχ. 63 ἐκ τοῦ



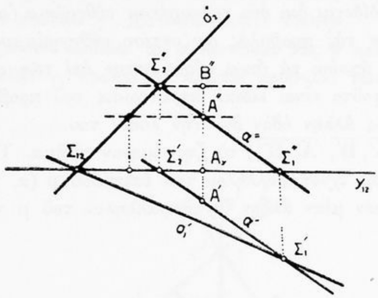
Σχ. 63

A″ ἤχθη ἡ A″ B″ σχηματίζουσα γωνίαν ω μετὰ τοῦ ἄξονος y_{12}. Μὲ κέντρον τὸ A′ καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς $\overline{A_y B''}$, ἐγράφη κύκλος τέμνων τὸ πρῶτον ἴχνος σ_1' τοῦ ἐπιπέδου p εἰς τὰ σημεῖα Σ_{11}' καὶ Σ_{12}'. Ἕκαστον τῶν σημείων τούτων δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πρῶτον ἴχνος τῆς ζητουμένης εὐθείας.

Ἔχουν σχεδιασθῆ καὶ αἱ δύο λύσεις εἶναι αἱ εὐθεῖαι δ (δ′, δ″) καὶ ε (ε′, ε″). Τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν, ἐὰν ἡ γωνία κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου p ὡς πρὸς τὸ e_1 ἰσοῦται μὲ τὴν γωνίαν ω, δὲν ἔχει δὲ λύσιν, ἐὰν ἡ γωνία κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου p ὡς πρὸς τὸ e_1 εἶναι μικροτέρα τῆς ω.

63. ***Κ**ατασκευάσατε τὰς δύο προβολὰς εὐθείας κειμένης ἐπὶ δοθέντος ἐπιπέδου p (σ'_1, σ''_2) διερχομένης διὰ σημείου A (A′, A″) αὐτοῦ καὶ παραλλήλου πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως ἢ τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας.*

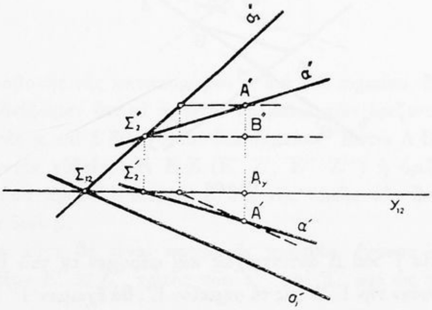
α′) Ἔστω α (α′, α″) ἡ ζητουμένη εὐθεῖα τοῦ p διερχομένη διὰ τοῦ σημείου A καὶ παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως. Ἐπειδὴ ἡ α εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως αἱ προβολαί της εἶναι παράλληλοι (βλέπε Ἄσκ. 24). Ἐάν, ἐπομένως, ἐπὶ τῆς A′ A″ ληφθῇ σημεῖον B″ τοιοῦτον ὥστε, $\overline{A'' B''} = \overline{A_y A'}$, εἶναι δὲ Σ_1 καὶ Σ_2 τὰ ἴχνη τῆς α, θὰ ἔχωμεν: $\overline{A' A''} = \overline{A'_y B''} = \overline{\Sigma'_2 \Sigma''_2}$.



Σχ. 64

Εἰς τὸ Σχ. 64 ἐλήφθη $\overline{A'' B''} = \overline{A_y A'}$ καὶ ἤχθη ἐκ τοῦ N″ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα y_{12} τέμνουσα τὸ ἴχνος σ''_2 εἰς σημεῖον Σ''_2, δεύτερον ἴχνος τῆς ζητουμένης εὐθείας, ἥτις εἶναι ἡ α (α′ ≡ Σ'_2 A′, α″ ≡ Σ''_2 A″).

β′) Ἔστω α (α′, α″) ἡ ζητουμένη εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου p, διερχομένη διὰ τοῦ σημείου **A** καὶ παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας.



Σχ. 65

Ἐπειδὴ ἡ α εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας αἱ προβολαί της θὰ σχηματίζουν ἴσας γωνίας μετὰ τὸν ἄξονα y_{12}, χωρὶς νὰ εἶναι παράλληλοι μεταξύ των (βλέπε Ἄσκ. 24). Ἐάν, ἑπομένως, ἐπὶ τῆς Α′ Α″ ληφθῇ σημεῖον Β″ τοιοῦτον ὥστε, $\overline{A''B''} = \overline{A'A_y}$, εἶναι δὲ Σ_1 καὶ Σ_2 τὰ ἴχνη τῆς α, θὰ ἔχωμεν : τὰ τρίγωνα $B''A''\Sigma_2''$ καὶ $A_yA'\Sigma_2'$ εἶναι ἴσα.

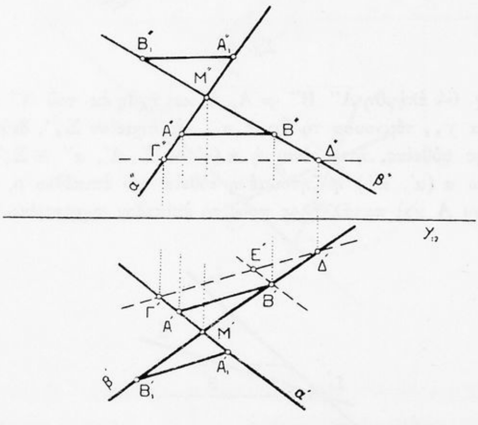
Εἰς τὸ Σχ. 65 ἐλήφθη $\overline{A''B''} = \overline{A'A_y}$ καὶ ἤχθη ἐκ τοῦ Β″ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}, τέμνουσα τὸ ἴχνος σ_2'' εἰς σημεῖον Σ_2'', δεύτερον ἴχνος τῆς ζητουμένης εὐθείας, ἥτις εἶναι ἡ α ($\alpha' \equiv \Sigma_2'A'$, $\alpha'' \equiv \Sigma_2''A''$).

64. Ἐπίπεδον δίδεται διὰ δύο τεμνομένων εὐθειῶν α (α′, α″) καὶ β (β′, β″). Κατασκευάσατε τὰς προβολὰς ὁριζοντίου εὐθυγράμμου τμήματος, δοθέντος μήκους, τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα εὑρίσκονται ἐπὶ τῶν εὐθειῶν α καὶ β.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ προβλήματος 29. Θὰ ἀκολουθήσωμεν ὅμως ἄλλην ὁδὸν διὰ τὴν λύσιν του.

Ἔστω $\overline{AB}$ ($\overline{A',B'}$, $\overline{A''B''}$) τὸ ζητούμενον τμῆμα. Τὸ τμῆμα τοῦτο θὰ κεῖται ἐπὶ πρώτης ἰχνοπαραλλήλου τοῦ ἐπιπέδου p (α, β).

Ἐὰν θεωρήσωμεν μίαν ἄλλην ἰχνοπαράλληλον τοῦ p τέμνουσαν τὰς α



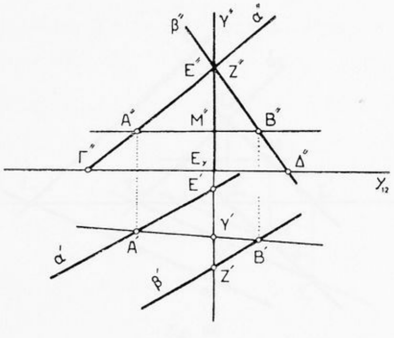
Σχ. 66

καὶ β εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ ἀντιστοίχως καὶ φέρομεν ἐκ τοῦ Β′ παράλληλον πρὸς τὴν α′, τέμνουσαν τὴν Γ′ Δ′ εἰς τὸ σημεῖον Ε′, θὰ ἔχωμεν $\overline{\Gamma'E'} = \overline{A'B'} =$ πρὸς τὸ δοθὲν τμῆμα (Σχ. 66). Ἑπομένως, διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ $\overline{AB}$, φέρομεν τυχοῦσαν πρώτην ἰχνοπαράλληλον Γ Δ καὶ ἐπὶ τῆς Γ′ Δ′ λαμβάνομεν $\overline{Γ′\ Ε′}$ = πρὸς τὸ δοθὲν τμῆμα. Ἐκ τοῦ Ε′ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν α′ καὶ εὑρίσκομεν ἐπὶ τῆς β′ σημεῖον Β′. Ἡ ἐκ τοῦ Β′ παράλληλος πρὸς τὴν Γ′ Δ′ ὁρίζει τὸ σημεῖον Α′ ἐπὶ τῆς α.

Ἔχομεν $\overline{Α′\ Β′} = \overline{Γ′\ Δ′}$ = πρὸς τὸ δοθὲν τμῆμα. Ἐκ τοῦ $\overline{Α′Β′}$, λαμβάνομεν τὸ $\overline{Α″\ \ Β″}$.

65. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι α (α′, α″) καὶ β (β′, β″), τῶν ὁποίων αἱ πρῶται προβολαὶ α′ καὶ β′ εἶναι παράλληλοι. Δείξατε ὅτι αἱ ὁριζόντιοι εὐθεῖαι τοῦ χώρου, αἱ συναντῶσαι τὰς εὐθείας α καὶ β, συναντοῦν καὶ μίαν κατακόρυφον εὐθεῖαν γ. Κατασκευάσατε ταύτην.

Ἐὰν αἱ ὁριζόντιοι εὐθεῖαι αἱ συναντῶσαι τὰς α καὶ β, συναντοῦν μίαν κατακόρυφον εὐθεῖαν γ, πρέπει αἱ πρῶται προβολαί των νὰ διέρχωνται διὰ



Σχ. 67

τῆς πρώτης προβολῆς τῆς κατακορύφου γ, διὰ τοῦ σημείου, δηλαδὴ γ′. Πρέπει λοιπὸν νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι αἱ πρῶται προβολαὶ τῶν ὁριζοντίων εὐθειῶν, τῶν συναντουσῶν τὰς α καὶ β διέρχονται διὰ σημείου. Ἔστω Α Β (Α′ Β′, Α″ Β″) τυχοῦσα ὁριζοντία εὐθεῖα καὶ Ε Ζ (Ε′ Ζ′, Ε″ Ζ″) ἡ ὁριζοντία εὐθεῖα τῆς ὁποίας ἡ δευτέρα προβολὴ διέρχεται διὰ τῆς τομῆς τῶν δευτέρων προβολῶν τῶν εὐθειῶν α καὶ β.

Ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ εἶναι προφανῶς προσθία, ἔχουσα ὡς δευτέραν προβολὴν τὸ σημεῖον Ε″ ≡ Ζ″ τομῆς τῶν α″ καὶ β″ καὶ ὡς πρώτην τὴν Ε′ Ζ′ (Σχ. 67).

Ἔστω γ′ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν Α′ Β′ καὶ Ε′ Ζ′. Λόγῳ τῆς παραλληλίας τῶν προβολῶν α′ καὶ β′ ἔχομεν :

$$\frac{\overline{\text{Α}'\,\gamma'}}{\overline{\gamma'\,\text{Β}'}} = \frac{\overline{\text{Ε}'\,\gamma'}}{\overline{\gamma'\,\text{Ζ}'}}.$$

Ἐξ ἄλλου $\dfrac{\overline{\text{Α}'\gamma'}}{\overline{\gamma'\text{Β}'}} = \dfrac{\overline{\text{Α}''\text{Μ}''}}{\overline{\text{Μ}''\text{Β}''}} = \dfrac{\overline{\Gamma''\text{Ε}_y}}{\overline{\text{Ε}_y\,\Delta''}}$ ἀνεξάρτητον τῆς ὁριζοντίας εὐθείας ΑΒ. Διὰ τοῦ σημείου, ἑπομένως, γ′ διέρχονται αἱ πρῶται προβολαὶ ὅλων τῶν ὁριζοντίων τῶν συναντουσῶν τὰς α καὶ β.

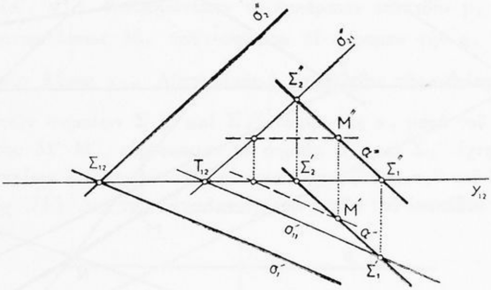
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

Προβλήματα ἐπὶ τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν ἐπιπέδων

§ 4. Γραμμικὰ καὶ μετρικὰ προβλήματα

66) Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον (πρόβλημα ἀόριστον).

Ἔστω M (M′, M″) τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ p (σ_1', σ_2'') τὸ δοθὲν ἐπίπεδον. Φέρομεν διὰ τοῦ σημείου M ἐπίπεδον p_1 (σ_{11}', σ_{21}'') παράλληλον πρὸς τὸ δοθὲν καὶ εὐθεῖαν α(α′, α″) κειμένην ἐπὶ τοῦ p_1 (Σχ. 68)



Σχ. 68

67) Δώσατε τὸ κριτήριον διὰ νὰ εἶναι εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον.

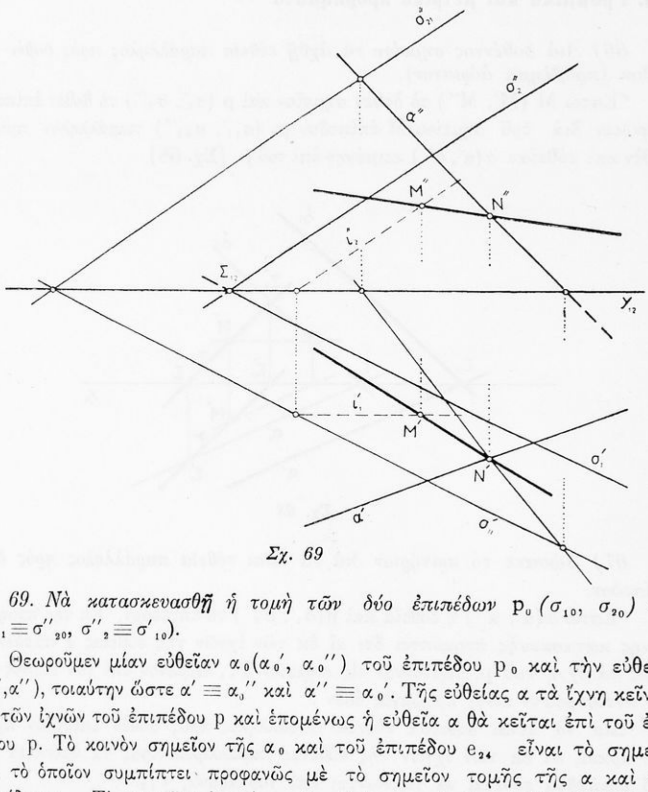
Ἔστω α(α′, α″) ἡ εὐθεῖα καὶ p(σ_1', σ_2'') τὸ ἐπίπεδον. Ἐκ τῆς προηγουμένης κατασκευῆς προκύπτει ὅτι αἱ ἐκ τῶν ἰχνῶν τῆς εὐθείας α παράλληλοι πρὸς τὰ ἴχνη τοῦ p, τέμνονται εἰς σημεῖον T_{12} κείμενον ἐπὶ τοῦ ἄξονος y_{12}. Τὸ ἀντίστροφον εἶναι προφανὲς ὅθεν :

Διὰ νὰ εἶναι δοθεῖσα εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον πρέπει καὶ ἀρκεῖ, αἱ ἐκ τῶν ἰχνῶν τῆς εὐθείας παράλληλοι πρὸς τὰ ὁμώνυμα ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου εὐθεῖαι νὰ τέμνωνται ἐπὶ τοῦ ἄξονος y_{12}.

68) Διὰ δοθέντος σημείου M (M′, M″) νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον p (σ'_1, σ''_2) συναντῶσα δοθεῖσαν εὐθεῖαν α (α′, α″).

Ἐκ τοῦ σημείου M φέρομεν ἐπίπεδον $p_1(\sigma_{11}', \sigma_{21}'')$ παράλληλον πρὸς τὸ p καὶ ἔστω N τὸ σημεῖον τομῆς τοῦ ἐπιπέδου p_1 καὶ τῆς εὐθείας α. Ἡ εὐθεῖα MN εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα, ὡς παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον p καὶ συναντῶσα τὴν εὐθεῖαν α. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον p_1 εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν α, τὸ σημεῖον N εἶναι τὸ ἐπ' ἄπειρον σημεῖον τῆς α καὶ ἑπομένως ἡ ζητουμένη εὐθεῖα θὰ εἶναι ἡ ἐκ τοῦ σημείου M παράλληλος πρὸς τὴν α.

Εἰς τὸ Σχ. 69 διὰ τοῦ σημείου M ἤχθη, μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ἰχνοπαραλλήλου i_2 (i_2', i_2'') τὸ ἐπίπεδον p_1 $(\sigma_{11}', \sigma_{21}'')$ παράλληλον πρὸς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον p. Εὑρέθη τὸ σημεῖον τομῆς N(N', N'') τοῦ p_1 μετὰ τῆς δοθείσης εὐθείας α (α', α'') καὶ ἤχθη ἡ ζητουμένη εὐθεῖα MN (M'N', M''N'').



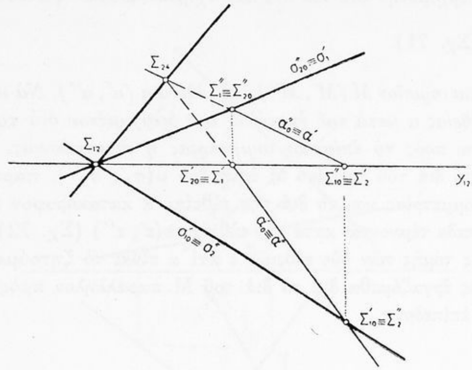
Σχ. 69

69. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τομὴ τῶν δύο ἐπιπέδων p_0 $(\sigma_{10}, \sigma_{20})$ *καὶ* $p(\sigma'_1 \equiv \sigma''_{20}, \sigma''_2 \equiv \sigma'_{10})$.

Θεωροῦμεν μίαν εὐθεῖαν $\alpha_0(\alpha_0', \alpha_0'')$ τοῦ ἐπιπέδου p_0 καὶ τὴν εὐθεῖαν α(α',α''), τοιαύτην ὥστε $\alpha' \equiv \alpha_0''$ καὶ $\alpha'' \equiv \alpha_0'$. Τῆς εὐθείας α τὰ ἴχνη κεῖνται ἐπὶ τῶν ἰχνῶν τοῦ ἐπιπέδου p καὶ ἑπομένως ἡ εὐθεῖα α θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p. Τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς α_0 καὶ τοῦ ἐπιπέδου e_{24} εἶναι τὸ σημεῖον Σ_{24}, τὸ ὁποῖον συμπίπτει προφανῶς μὲ τὸ σημεῖον τομῆς τῆς α καὶ τοῦ ἐπιπέδου e_{24}. Τὸ σημεῖον ἑπομένως Σ_{24} ἀνήκει καὶ εἰς τὰ δύο ἐπίπεδα p_0 καὶ p. Ἡ εὐθεῖα τομῆς συνεπῶς τῶν δύο ἐπιπέδων εἶναι ἡ $\Sigma_{12}\,\Sigma_{24}$, κεῖται δηλαδὴ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμπτώσεως (Σχ. 70).

70) Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας ἢ συμπτώσεως.

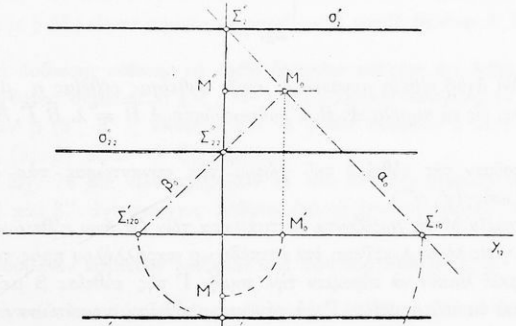
"Εστω $p(\sigma_1', \sigma_2'')$ τὸ ζητούμενον διὰ τοῦ σημείου $M(M', M'')$ ἐπίπεδον. Διὰ τοῦ M φέρομεν ἐγκάρσιον ἐπίπεδον p_1 τέμνον τὸ p κατὰ τὴν ἐγκαρσίαν



Σχ. 70

εὐθεῖαν $\alpha(\alpha', \alpha'')$. Κατακλίνομεν τὸ ἐγκάρσιον ἐπίπεδον p_1 ἐπὶ τοῦ e_2 καὶ ἐκ τῆς κατακλίσεως M_0 τοῦ σημείου M φέρομεν τὴν α_0 κλίνουσαν κατὰ $\frac{\pi}{4}$ πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}. Αὕτη εἶναι ἡ κατάκλισις τῆς εὐθείας α.

Ἐκ τῶν σημείων Σ_{10}' καὶ Σ_2'' τομῆς τῆς α_0 μετὰ τοῦ ἄξονος y_{12} καὶ τῆς καθέτου M' M'', εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα Σ_1' καὶ Σ_2'' ἴχνη τῆς εὐθείας α, διὰ τῶν ὁποίων διέρχονται τὰ ὁμώνυμα ἴχνη σ_1' καὶ σ_2'' τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου. (Σχ. 71). Διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν ἰχνῶν τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου



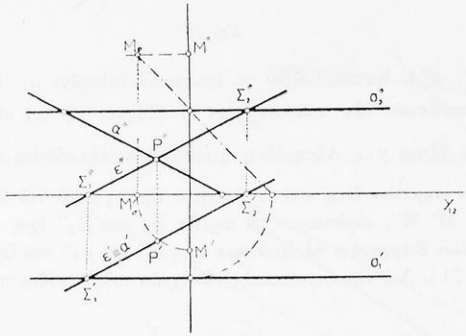
Σχ. 71

διὰ τοῦ Μ καὶ παραλλήλου πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας, φέρομεν τὴν ἑτέραν εὐθεῖαν τὴν διερχομένην διὰ τοῦ M_0 καὶ σχηματίζουσαν γωνίαν $\frac{\pi}{4}$ μετὰ τοῦ ἄξονος y_{12}. (Σχ. 71).

71. Δίδεται σημεῖον Μ (Μ′, Μ″) καὶ εὐθεῖα α (α′, α″). Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τομὴ τῆς εὐθείας α μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ σημείου Μ καὶ παραλλήλου πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας ἢ συμπτώσεως.

Φέρομεν τὸ διὰ τοῦ σημείου Μ ἐπίπεδον $p(\sigma_1', \sigma_2'')$, παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας καὶ τὸ διὰ τῆς εὐθείας α κατακόρυφον ἐπίπεδον. Τὰ δύο ταῦτα ἐπίπεδα τέμνονται κατὰ τὴν εὐθεῖαν ε(ε′, ε″) (Σχ. 72). Τὸ σημεῖον P(P′, P″) τῆς τομῆς τῶν δύο εὐθειῶν ε καὶ α εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον.

Ἀναλόγως ἐργαζόμεθα διὰ τὸ διὰ τοῦ Μ παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως, ἐπίπεδον.



Σχ. 72

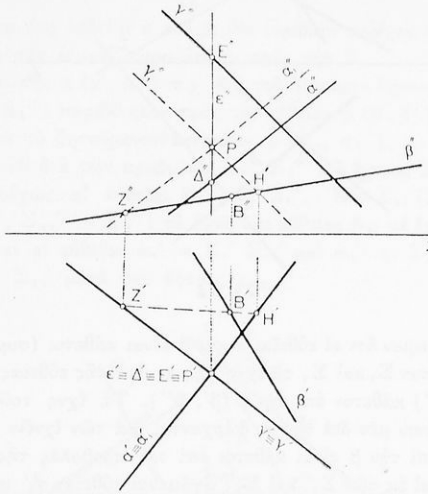
72. Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα συναντῶσα τρεῖς δοθείσας εὐθείας α, β, γ ἀνὰ δύο ἀσυμβάτους, εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, οὕτως ὥστε $\overline{AB} = \lambda.\ \overline{B\Gamma}$, ἔνθα λ δοθεὶς ἀριθμός.

Θεωροῦμεν τὰς εὐθείας τοῦ χώρου τὰς συναντώσας τὰς δύο εὐθείας α(α′, α″) καὶ γ(γ′, γ″).

Τὰ σημεῖα Μ τὰ χωρίζοντα τὰ τμήματα τῶν ὡς ἄνω εὐθειῶν, τὰ μεταξὺ τῶν α καὶ γ εἰς λόγον λ κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδου p παραλλήλου πρὸς τὰς εὐθείας α καὶ γ. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὴν τομὴν Γ τῆς εὐθείας β μετὰ τοῦ ἐπιπέδου p καὶ ἐκ τοῦ σημείου Γ νὰ φέρωμεν εὐθεῖαν συναντῶσαν τὰς εὐθείας α καὶ β.

Εἰς τὸ Σχ. 73 ἤχθη διὰ τοῦ σημείου τομῆς τῶν πρώτων προβολῶν τῶν εὐθειῶν α καὶ γ ἡ κατακόρυφος εὐθεῖα ε, τέμνουσα τὰς α καὶ γ εἰς τὰ σημεῖα Δ(Δ′, Δ″) καὶ Ε (Ε′, Ε″). Λαμβάνομεν τὸ σημεῖον P″ χωρίζον τὸ τμῆμα

$\Delta'' E''$, οὕτως ὥστε $\overline{\Delta'' P''} = \lambda \overline{P'' E''}$ καὶ ἐκ τοῦ P (P′, P′′) φέρομεν τὰς α_1 (α_1', α_1'') καὶ γ_1 (γ_1', γ_1'') παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς εὐθείας α καὶ γ.



Σχ. 73

Τὸ ἐπίπεδον p (α_1, γ_1) εἶναι τὸ ὡς ἄνω ἐπίπεδον. Ἡ τομὴ Γ (Γ′, Γ′′) τοῦ ἐπιπέδου τούτου μετὰ τῆς εὐθείας γ, εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον τῆς εὐθείας γ, διὰ τοῦ ὁποίου ἂν ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ἡ συναντῶσα τὰς α καὶ β, (βλέπε Στοιχεῖα Παραστατικῆς § 31) εἰς τὰ σημεῖα ἀντιστοίχως Α καὶ Β, θὰ εἶναι $\overline{A\Gamma} = \lambda \overline{\Gamma B}$.

73. *Διὰ δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον.*

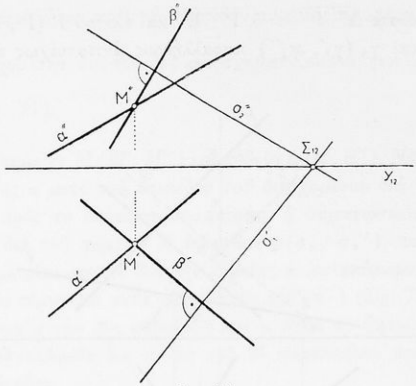
Διὰ τυχόντος σημείου Μ (Μ′, Μ′′) τῆς δοθείσης εὐθείας α (α′, α′′) φέρομεν εὐθεῖαν β (β′, β′′), κάθετον ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον p (σ_1', σ_2''). Τὸ ἐπίπεδον p_1 (α, β) εἶναι τὸ ζητούμενον.

Εἰς τὸ Σχ. 74 διὰ τῶν προβολῶν Μ′ καὶ Μ′′ τοῦ σημείου Μ ἤχθησαν αἱ εὐθεῖαι β′ καὶ β′′ ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τὰ ἴχνη σ_1' γαὶ σ_2'' τοῦ ἐπιπέδου p.

Τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον ὁρίζεται ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν α, β.

74. *Διὰ νὰ εἶναι δύο εὐθεῖαι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ συναντῶνται ἐπὶ τοῦ ἄξονος* y_{12} *αἱ κάθετοι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν ἰχνῶν τῆς μιᾶς ἐπὶ τὰς ὁμωνύμους προβολὰς τῆς ἄλλης.*

Ἔστωσαν α (α′, α′′) καὶ β (β′, β′′) αἱ δύο εὐθεῖαι, Σ_1, Σ_2 τὰ ἴχνη τῆς α καὶ T_1, T_2 τὰ ἴχνη τῆς β.



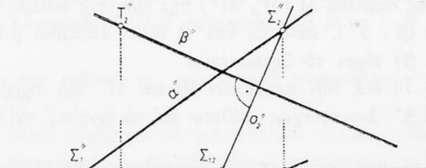
$\Sigma\chi$. 74

α') Ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι α καὶ β εἶναι κάθετοι (συμβατῶς ἢ ἀσυμβάτως) καὶ ἔστωσαν Σ_1 καὶ Σ_2 τὰ ἴχνη τῆς α. Διὰ τῆς εὐθείας α φέρομεν ἐπίπεδον $p(\sigma_1', \sigma_2'')$ κάθετον ἐπὶ τὴν β (β', β''). Τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου τούτου, ὡς διερχομένου μὲν διὰ τῆς α, διέρχονται διὰ τῶν ἰχνῶν της Σ_1 καὶ Σ_2, ὡς καθέτου δὲ ἐπὶ τὴν β εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς προβολὰς τῆς β' καὶ β''.

Ἑπομένως αἱ ἐκ τῶν Σ_1' καὶ Σ_2'' ἀγόμεναι εὐθεῖαι σ_1' καὶ σ_2'', κάθετοι ἐπὶ τὰς β' καὶ β'', τέμνονται ἐπὶ τοῦ ἄξονος y_{12}.

β) Ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ κάθετοι σ_1' καὶ σ_2'' αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν ἰχνῶν Σ_1 καὶ Σ_2 ἐπὶ τὰς προβολὰς β' καὶ β'' τῆς εὐθείας β, ἀντιστοίχως, τέμνονται εἰς σημεῖον Σ_{12} τοῦ ἄξονος.

Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι α καὶ β εἶναι κάθετοι συμβατῶς ἢ ἀσυμβάτως. Πράγματι, αἱ εὐθεῖαι σ_1' καὶ σ_2'' δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἴχνη ἑνὸς ἐπιπέδου p, ἐπειδὴ δὲ τὰ ἴχνη τοῦ p διέρχονται διὰ τῶν ἰχνῶν Σ_1', Σ_2''



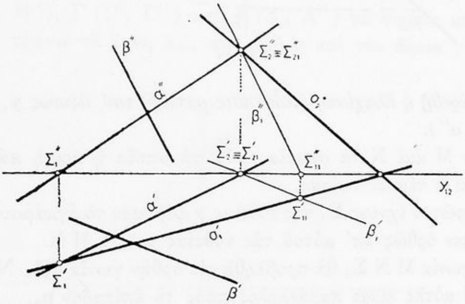
$\Sigma\chi$. 75

τῆς εὐθείας α, ἡ εὐθεῖα α κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p. Ἐξ ἄλλου ἐπειδὴ αἱ προβολαὶ β′ καὶ β′′ τῆς εὐθείας β εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰ ὁμώνυμα ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου p, ἡ εὐθεῖα β εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ p καὶ συνεπῶς κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν α.

75. Δίδονται δύο εὐθεῖαι α καὶ β. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τῆς α καὶ παραλλήλου πρὸς τὴν β.

Διὰ σημείου τῆς α (α′, α′′) π.χ. διὰ τοῦ δευτέρου ἴχνους αὐτῆς, φέρομεν εὐθεῖαν β_1 (β_1', β_1'') παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν β (β′, β′′). Αἱ δύο εὐθεῖαι α καὶ β_1, ὁρίζουν τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον p (σ'_1, σ_2'').

Εἰς τὸ Σχ. 76 διὰ τῶν προβολῶν Σ_2', Σ_2'' τοῦ ἴχνους Σ_2 τῆς εὐθείας α, ἤχθησαν ἀντιστοίχως αἱ εὐθεῖαι β_1' καὶ β_1''. Ἐὰν Σ_{11} (Σ_{11}', Σ_{11}'') καὶ Σ_{21} ($\Sigma_{21}' \equiv \Sigma_2'$, $\Sigma_{21}'' \equiv \Sigma_2''$) τὰ ἴχνη τῆς εὐθείας β_1, τὰ ἴχνη τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου εἶναι αἱ εὐθεῖαι $\sigma_1' = \Sigma_1' \Sigma_{11}'$ καὶ $\sigma_2'' \equiv \Sigma_2' \Sigma_{12}$, ἔνθα Σ_{12} ἡ τομὴ τῆς $\Sigma_1' \Sigma_{11}'$ μετὰ τοῦ ἄξονος y_{12}.



Σχ. 76

76. Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας νὰ εὑρεθῇ σημεῖον ἀπέχον τοῦ ἄξονος y_{12} *δοθεῖσαν ἀπόστασιν.*

Ἔστωσαν α (α′, α′′) ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ M (M′, M′′) τὸ ζητούμενον ἐπ᾽ αὐτῆς σημεῖον, ἀπέχον τοῦ ἄξονος y_{12} τὴν δοθεῖσαν ἀπόστασιν d.

Θεωροῦμεν τὸ διὰ τοῦ δευτέρου ἴχνους τῆς α ἐγκάρσιον ἐπίπεδον p·

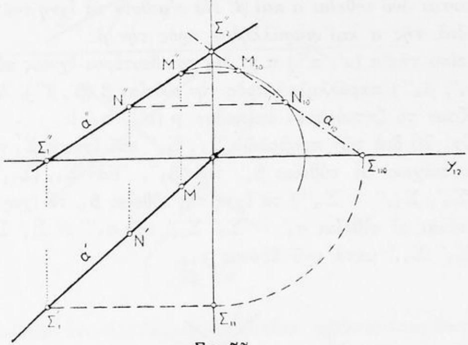
Ἡ προβολὴ M_1 τοῦ σημείου M ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p ἀπέχει τοῦ σημείου Σ_2', ἀπόστασιν d.

Ἐξ ἄλλου ὅμως τὸ σημεῖον τοῦτο M_1 θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς προβολῆς α_1 τῆς εὐθείας α, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p.

Εἰς τὸ Σχ. 77 τὸ ἐπίπεδον p κατεκλίθη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_2. Ἡ εὐθεῖα α_{10} εἶναι ἡ κατάκλισις τῆς εὐθείας α_1, τῆς ὁποίας τὸ πρῶτον ἴχνος Σ_{11} κατεκλίθη εἰς τὸ Σ_{110}, ἔνθα $\overline{\Sigma_2' \Sigma_{11}} = \overline{\Sigma_1'' \Sigma_1'}$.

Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Σ_2' καὶ ἀκτῖνα d ἐγράφη κύκλος, τέμνων τὴν $\Sigma_2'' \Sigma_{11}$ εἰς τὰ σημεῖα M_{10} καὶ N_{10}, ἐκ τῶν ὁποίων εὑρέθησαν τὰ M′′ καὶ

N'', δηλαδὴ τὰ σημεῖα Μ (Μ', Μ'') καὶ Ν (Ν', Ν''). Τὸ πρόβλημα ἔχει δύο, μίαν ἢ οὐδεμίαν λύσιν, ἐφόσον ὁ ὡς ἄνω κύκλος τέμνει εἰς δύο σημεῖα ἐφάπτεται ἢ δὲν τέμνει τὴν εὐθεῖαν α_{10}.



Σχ. 77

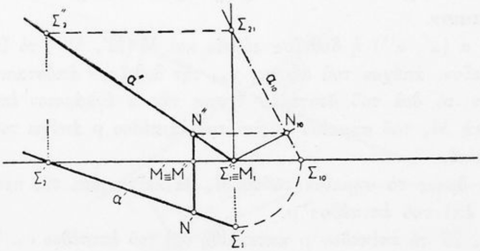
77. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις μεταξὺ τοῦ ἄξονος y_{12} *καὶ δοθείσης εὐθείας* $\alpha\,(\alpha', \alpha'')$.

Ἔστωσαν Μ καὶ Ν τὰ σημεῖα κατὰ τὰ ὁποῖα ἡ κοινὴ κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας y_{12} καὶ α τέμνει ταύτας.

Διὰ τοῦ πρώτου ἴχνους Σ_1 τῆς εὐθείας α φέρομεν τὸ ἐγκάρσιον ἐπίπεδον p_1 καὶ προβάλλομεν ὀρθῶς ἐπ' αὐτοῦ τὰς εὐθείας α καὶ Μ Ν.

Ἡ ὀρθὴ γωνία Μ Ν Σ_1 θὰ προβληθῇ εἰς ὀρθὴν γωνίαν $M_1\,N_1\,\Sigma_1$, καθόσον ἡ πλευρὰ Μ Ν αὐτῆς εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον p_1.

Κατακλίνομεν τὸ ἐπίπεδον p_1 ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_2. Ἡ $\Sigma_{21}\ \Sigma_{10} \equiv \alpha_{10}$ εἶναι ἡ κατάκλισις τῆς προβολῆς α_1, ἐπὶ τοῦ p_1, τῆς εὐθείας α (Σχ. 78).



Σχ. 78

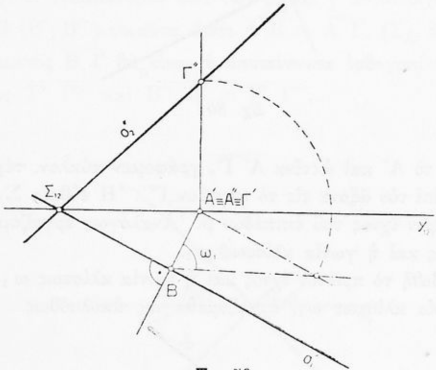
Ἐκ τοῦ $\Sigma_1'' \equiv M_1$ φέρομεν τὴν κάθετον $M_1\,N_{10}$, ἥτις εἶναι ἡ κατάκλισις τῆς προβολῆς $M_1\,N_1$ ἐπὶ τοῦ p_1, τῆς κοινῆς καθέτου Μ Ν. Ἐκ τοῦ N_{10} εὑρίσκομεν τὰ N'' καὶ N' καὶ ἐπομένως τὴν M N. Τὸ τμῆμα $\overline{M_{11} N_{10}}$ εἶναι τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῆς ἐλαχίστης ἀποστάσεως, αἱ δὲ M' N', M'' N'' αἱ δύο προβολαὶ τῆς κοινῆς καθέτου.

78. Εὑρεῖν τὴν ἀπόστασιν δύο δοθέντων παραλλήλων ἐπιπέδων.

Διὰ σημείου M (M', M'') τοῦ χώρου φέρομεν τὴν εὐθεῖαν α (α', α'') κάθετον ἐπὶ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα ρ (σ_1', σ_2'') καὶ ρ_1 (σ_{11}', σ_{21}'') καὶ εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα A καὶ A_1 τομῆς τῆς εὐθείας α μετὰ τῶν δύο ἐπιπέδων ρ καὶ ρ_1. Εὑρίσκομεν κατόπιν τὸ ἀληθὲς μέγεθος τοῦ τμήματος $\overline{A\,A_1}$, τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπόστασιν τῶν ἐπιπέδων ρ καὶ ρ_1.

79. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι κλίσεως δοθέντος διὰ τῶν ἰχνῶν τοῦ ἐπιπέδου.

Ἔστωσαν ω_1 καὶ ω_2 αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας σχηματίζει τὸ δοθὲν ἐπίπεδον ρ (σ_1', σ_2'') μετὰ τοῦ ὁριζοντίου καὶ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου προβολῆς. Θεωροῦμεν κατακόρυφον ἐπίπεδον ρ_1 κάθετον ἐπὶ τὸ πρῶτον ἴχνος τοῦ ρ καὶ ἔστωσαν B (B', B''), Γ (Γ', Γ'') καὶ A (A', A'') τὰ σημεῖα κατὰ τὰ ὁποῖα τὸ ἐπίπεδον ρ_1 τέμνει τὰ ἴχνη σ_1', σ_2'' τοῦ ρ καὶ τὸν ἄξονα y_{12} (Σχ. 79).



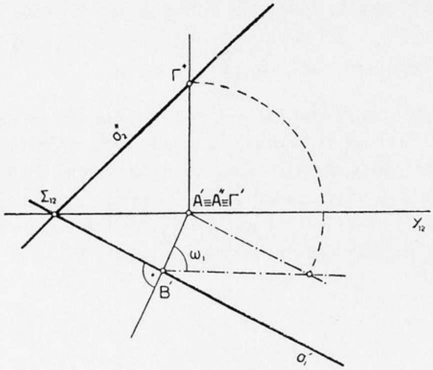
Σχ. 79

Σχηματίζεται οὕτω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον A B Γ τοῦ ὁποίου ἡ γωνία A B Γ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ω_1. Ἐὰν λοιπὸν κατακλίνωμεν τὸ τρίγωνον τοῦτο ἐπὶ τοῦ e_1, περιστρέφοντες αὐτὸ περὶ τὴν A B, προκύπτει τὸ τρίγωνον A' B' Γ_0 μὲ πλευρὰν $\overline{A'\,\Gamma_0} = \overline{A'\,\Gamma''}$. Ἡ γωνία A' B' Γ_0 = γωνία A B Γ = ω_1 Ἐργαζόμενοι κατ' ἀνάλογον τρόπον διὰ τὸ δεύτερον ἴχνος τοῦ ρ, εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν ω_2.

80. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ δεύτερον (πρῶτον) ἴχνος ἐπιπέδου, ὅταν δοθῇ τὸ πρῶτον (δεύτερον) καὶ ἡ γωνία κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὸ e_1 ἢ ὡς πρὸς τὸ e_2.

Ἔστωσαν σ_1' καὶ ω_1 τὸ δοθὲν πρῶτον ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου $p(\sigma_1', \sigma_2'')$ καὶ ἡ δοθεῖσα γωνία κλίσεως αὐτοῦ πρὸς τὸ e_1. Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου, ἐργαζόμεθα λοιπὸν ὡς ἑξῆς : Διὰ τυχόντος σημείου A ($A' \equiv A''$) τοῦ ἄξονος φέρομεν κάθετον A B ἐπὶ τὸ πρῶτον ἴχνος (Σχ. 80).

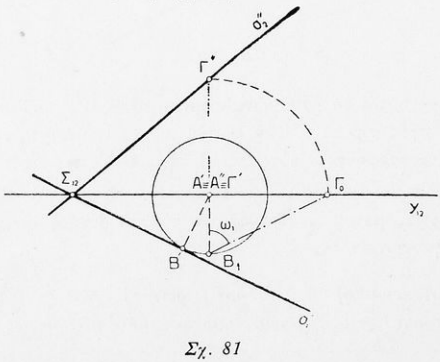
Κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $A'\ B'\ \Gamma_0$, ἔχον τὴν γωνίαν $A'\ B'\ \Gamma_0 = \omega_1$.



Σχ. 80

Μὲ κέντρον τὸ A' καὶ ἀκτῖνα $\overline{A'\ \Gamma_0}$ γράφομεν κύκλον, τέμνοντα τὴν ἐπὶ τοῦ A' κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα εἰς τὸ σημεῖον Γ''. Ἡ εὐθεῖα $\Sigma_{12}\ \Gamma''$ εἶναι τὸ ζητούμενον δεύτερον ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου p. Ἀναλόγως ἐργαζόμεθα ὅταν δοθῇ τὸ δεύτερον ἴχνος καὶ ἡ γωνία κλίσεως ω_2.

Ἐὰν τώρα δοθῇ τὸ πρῶτον ἴχνος καὶ ἡ γωνία κλίσεως ω_2 ἢ τὸ δεύτερον ἴχνος καὶ ἡ γωνία κλίσεως ω_1, ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως.



Σχ. 81

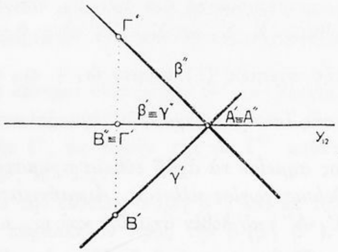
Ἔστω π.χ. ὅτι δίδεται τὸ δεύτερον ἴχνος $σ_2''$ καὶ ἡ γωνία κλίσεως $ω_1$. Φέρομεν τυχοῦσαν κάθετον $A''\ Γ''$ ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12} καὶ μὲ κέντρον A'' καὶ ἀκτῖνα $\overline{A''\ Γ''}$ γράφομεν κύκλον τέμνοντα τὸν ἄξονα y_{12} εἰς σημεῖον $Γ_0$.

Κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $A''\ B_1\ Γ_0$ μὲ γωνίαν $A''\ B_1\ Γ_0 = ω_1$ καὶ μὲ κέντρον A'' καὶ ἀκτῖνα $\overline{A''\ B_1}$ γράφομεν κύκλον.

Ἡ ἐκ τοῦ $Σ_{12}$ ἐφαπτομένη εἰς τὸν κύκλον τοῦτον εἶναι τὸ πρῶτον ἴχνος τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου (Σχ. 81).

81. Μία ὁριζοντία εὐθεῖα σχηματίζει μὲ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος y_{12} γωνίαν $\frac{\pi}{4}$ ὁμοίως μία μετωπικὴ εὐθεῖα σχηματίζει μὲ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος y_{12} γωνίαν $\frac{\pi}{4}$ Νὰ κατασκευασθῇ ἡ γωνία τῶν δύο τούτων εὐθειῶν.

Ἐκ τυχόντος σημείου Α τοῦ ἄξονος y_{12} φέρομεν τὰς εὐθείας β ($β' \equiv y_{12}$, $β''$) καὶ γ ($γ'$, $γ'' \equiv y_{12}$) παραλλήλους πρὸς τὴν ὁριζοντίαν καὶ τὴν μετωπικὴν εὐθεῖαν ἀντιστοίχως. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν β καὶ γ ἀντιστοίχως, τὰ σημεῖα Γ ($Γ'$, $Γ''$) καὶ Β (B', B'') τοιαῦτα ὥστε $\overline{A\ B} = \overline{A\ Γ}$. (Σχ. 82). Τὸ ἀληθὲς μέγεθος τοῦ τμήματος $\overline{B\ Γ}$ θὰ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ καθέτους πλευρὰς $\overline{Γ'\ Γ''}$ καὶ $\overline{B''\ B'} = \overline{Γ'\ Γ''}$.



Σχ. 82

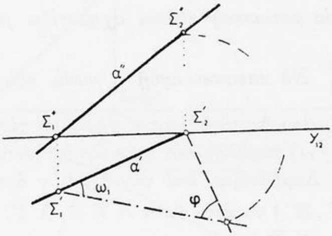
Τὸ ἀληθὲς ὅθεν μέγεθος τοῦ τμήματος $\overline{B\ Γ} = \overline{A\ B} = \overline{A\ Γ}$. Τὸ τρίγωνον ἑπομένως Α Β Γ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἡ γωνία τῶν β καὶ γ θὰ εἶναι ἴση πρὸς $\frac{\pi}{3}$.

82. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει μία εὐθεῖα μετὰ τῶν ἐπιπέδων προβολῆς, εἶναι μικρότερον ἢ τὸ πολὺ ἴσον μὲ μίαν ὀρθὴν γωνίαν.

Ἔστω α (α′, α″) τυχοῦσα εὐθεῖα τοῦ χώρου καὶ ω_1 καὶ ω_2 αἱ γωνίαι κλίσεως αὐτῆς, πρὸς τὸ ὁριζόντιον καὶ κατακόρυφον ἐπίπεδον προβολῆς.

Κατακλίνομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον Σ_1', Σ_2' Σ_2'', ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, στρέφοντες αὐτὸ περὶ τὴν Σ'_1 Σ_2' (Σχ. 83).

Ἔχομεν γωνίαν $\omega_1 +$ γων $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (1). Ἀλλὰ ἡ γωνία ω_2, ὡς γωνία τὴν



Σχ. 83

ὁποίαν σχηματίζει ἡ Σ_1 Σ_2 μετὰ τῆς προβολῆς της Σ_1'' Σ_2'', εἶναι μικροτέρα ἢ τὸ πολὺ ἴση μὲ τὴν γωνίαν τὴν ὁποίαν θὰ ἐσχημάτιζεν ἡ Σ_1 Σ_2 μεθ' οἱασδήποτε εὐθείας τοῦ e_2, διερχομένης διὰ τοῦ Σ_2, ὅπως π.χ. τῆς Σ_2'' Σ_2'. Ἀλλὰ ἡ γωνία τῶν εὐθειῶν Σ_1 Σ_2 καὶ Σ_2'' Σ_2' εἶναι ἡ γωνία φ, ὅθεν $\omega_2 < \varphi$ καὶ ἐπομένως ἐκ τῆς σχέσιως (1) ἔχομεν $\omega_1 + \omega_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Ἡ περίπτωσις τῆς ἰσότητος ἰσχύει δι' ἐγκαρσίαν εὐθεῖαν.

83. Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα σχηματίζουσα μετὰ τῶν ἐπιπέδων προβολῆς δοθείσας γωνίας κλίσεως. Διερεύνησις.

Ἔστωσαν Α (Α′, Α″) τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ ω_1, ω_2 αἱ δοθεῖσαι γωνίαι κλίσεως.

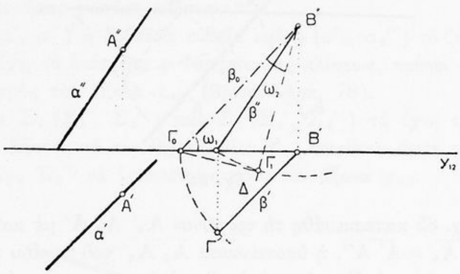
Αἱ γωνίαι αὗται ὀφείλουν νὰ πληροῦν τὴν συνθήκην $\omega_1 + \omega_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$. Ἐὰν ἐκ τυχόντος σημείου τοῦ χώρου π.χ. ἐκ σημείου Β (Β′, Β″), φέρωμεν εὐθεῖαν β παράλληλον πρὸς τὴν ζητουμένην εὐθεῖαν, ἡ παράλληλος αὕτη θὰ σχηματίζῃ τὰς αὐτὰς γωνίας μετὰ τῶν ἐπιπέδων e_1 καὶ e_2.

Τὸ πρόβλημα ὅμως ἁπλοποιεῖται εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ σημεῖον Β λαμβάνεται ἐπὶ ἐπιπέδου προβολῆς.

Ἀφοῦ κατασκευασθῇ κατόπιν ἡ εὐθεῖα β, φέρομεν ἐκ τοῦ σημείου Α εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν β (β′, β″). Ἑπομένως τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ φέρωμεν ἐκ τυχόντος σημείου B (B′, B″) τοῦ e_2, εὐθεῖαν β (β′, β″) σχηματίζουσαν γωνίας ω_1 καὶ ω_2 μετὰ τῶν ἐπιπέδων e_1 καὶ e_2.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ εἶναι Γ (Γ′, Γ″) τὸ ἄλλο ἴχνος τῆς εὐθείας β (Σχ. 84), τὸ ἀληθὲς μέγεθος τοῦ τμήματος $\overline{B\,\Gamma}$ εὑρίσκεται ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ κάθετον πλευρὰν $\overline{B'\,B''}$ (γνωστὴν) καὶ ὀξεῖαν γωνίαν ω_1.

Εἰς τὸ σχ. 84 κατεσκευάσθη τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον B″ B′ Γ_0, ἐκ τῆς πλευρᾶς του B′ B″ καὶ τῆς γωνίας B′ Γ_0 B″ = ω_1.



Σχ. 84

Γνωρίζοντες τώρα τὸ ἀληθὲς μέγεθος $\overline{B''\,\Gamma_0}$ τοῦ τμήματος $\overline{B\,\Gamma}$ καὶ τὴν γωνίαν ω_2, εὑρίσκομεν τὴν δευτέραν προβολὴν αὐτοῦ. Πρὸς τοῦτον κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν Γ_0 B″ Δ = ω_2 καὶ ἐκ τοῦ Γ_0 φέρομεν τὴν $\Gamma_0\,\Gamma_1$ κάθετον ἐπὶ τὴν B″ Δ. Τὸ τμῆμα B″ Γ_1 εἶναι ἴσον μὲ τὴν δευτέραν προβολὴν τοῦ τμήματος B Γ.

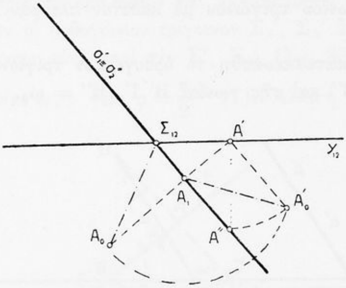
Ἐὰν λοιπὸν μὲ κέντρον τὸ σημεῖον B″ καὶ ἀκτῖνα τὴν B″ Γ_1 γράψωμεν κύκλον, ὁ κύκλος οὗτος τέμνει τὸν ἄξονα y_{12} εἰς Γ″ δευτέραν προβολὴν τοῦ Γ, ἐξ οὗ εὑρίσκομεν τὴν Γ′, ὡς τομὴν τῆς εἰς Γ″ καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12} μετὰ τοῦ κύκλου (B′, B″ Γ_0).

Ὁρίζομεν οὕτω τὴν εὐθεῖαν β (β′, β″) καὶ ἐκ τοῦ A (A′, A″) φέρομεν εὐθεῖαν α (α′, α″) παράλληλον πρὸς τὴν β (β′, β″). Ἐὰν ὁ κύκλος (B″, B″ Γ_1) τέμνῃ εἰς δύο, εἰς οὐδὲν ἢ ἐφάπτεται τοῦ ἄξονος y_{12} θὰ ἔχωμεν τέσσαρας (ἐφόσον ἡ ἐκ τοῦ σημείου Γ″ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12} τέμνει τὸν κύκλον (B′, B′ Γ_0) εἰς ἓν ἀκόμη σημεῖον, ἐκτὸς τοῦ Γ′), οὐδεμίαν ἢ δύο λύσεις.

84. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῆς γωνίας τῶν ἰχνῶν ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως.

Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον A (A′, A″) τοῦ δευτέρου ἴχνους καὶ ἐκ τῆς πρώτης πρώτης προβολῆς A′ αὐτοῦ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὸ πρῶτον ἴχνος σ_1', τέμνουσαν τοῦτο εἰς τὸ σημεῖον A_1 (Σχ. 85.)

Κατὰ τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων ἡ A A_1 θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἴχνος σ_1'. Ἡ γωνία ω τῶν δύο ἰχνῶν εἶναι ἡ γωνία $A\,\Sigma_{12}\,A_1$ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $A\,\Sigma_{12}\,A_1$, τοῦ ὁποίου ἡ κάθετος πλευρὰ $\overline{A\,A_1}$ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα τοῦ τριγώνου $A\,A_1\,A'$, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς καθέτους πλευρὰς $\overline{A'\,A_1}$ καὶ $\overline{A'\,A} = \overline{A'\,A''}$.



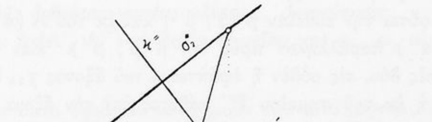
Σχ. 85

Εἰς τὸ Σχ. 85 κατεσκευάθη τὸ τρίγωνον $A_0'\,A_1\,A'$ μὲ καθέτους πλευρὰς $\overline{A'\,A_1}$ καὶ $\overline{A'\,A_0'} = \overline{A'\,A''}$, ἡ ὑποτείνουσα $\overline{A_1\,A_0'}$ τοῦ ὁποίου εἶναι ἡ κάθετος πλευρὰ τοῦ τριγώνου $A\,\Sigma_{12}\,A_1$, τὸ ὁποῖον ἐπίσης κατεσκευάσθη, εὑρεθείσης οὕτω τῆς γωνίας ω τῶν ἰχνῶν σ_1' καὶ σ_2'' τοῦ ἐπιπέδου p.

85. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει δοθὲν ἐπίπεδον (σ'_1, σ''_2) *μὲ τὸν ἄξονα* y_{12}.

Ἐκ τυχόντος σημείου A τοῦ ἄξονος φέρομεν εὐθεῖαν κ (κ', κ'') κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον p (σ_1', σ_2'') καὶ ἔστω M (M', M'') τὸ σημεῖον τομῆς της μετὰ τοῦ ἐπιπέδου p. Ἡ ζητουμένη γωνία εἶναι ἡ $A\,\Sigma_{12}\,M$, ἔνθα Σ_{12} τὸ ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου p ἐπὶ τοῦ ἄξονος y_{12}.

Διὰ νὰ εὑρεθῇ συνεπῶς ἡ γωνία αὕτη ἀρκεῖ νὰ κατασκευασθῇ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $A\,M\,\Sigma_{12}$.



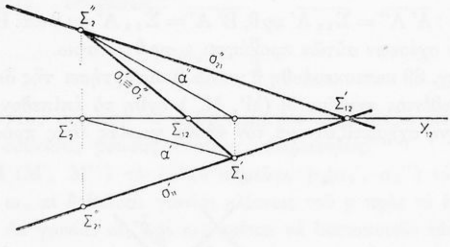
Σχ. 86

Εἰς τὸ Σχ. 86 ἤχθη ἡ εὐθεῖα κ καὶ εὑρέθη τὸ σημεῖον M (M′, M″). Τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς M τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου A M Σ_{12} ὕψος εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου M ἀπὸ τοῦ ἄξονος y_{12}, ἡ ὁποία εἶναι ἡ διαγώνιος $\overline{M_y\ M_0'}$ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μὲ πλευρὰς τὰς $\overline{M_y\ M'}$ καὶ $\overline{M_y\ M''}$. Ἐπὶ τῆς $M_y\ M''$ ἐλήφθη $\overline{M_y\ M_0} = \overline{M_y\ M'}$ καὶ κατεσκευάσθη οὕτως ἡ κατάκλισις $\overline{M_y\ M_0}$ τοῦ ὕψους $\overline{M\ M_y}$ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου A M Σ_{12} καὶ ἑπομένως καὶ ἡ κατάκλισις A M_0 Σ_{12} τοῦ ὀρθογωνίου τούτου τριγώνου. Ἡ γωνία A Σ_{12} M_0 εἶναι ἡ ζητουμένη γωνία.

86. Διὰ δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον σχηματίζον μετὰ τῶν ἐπιπέδων προβολῆς ἴσας γωνίας κλίσεως.

Ἔστω α (α′, α″) ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ p (σ'_1, σ''_2) τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον. Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ ἐπίπεδον p ἴσας γωνίας κλίσεως, πρέπει τὰ ἴχνη αὐτοῦ νὰ ἰσοκλίνουν πρὸς τὸν ἄξονα y_{12} (βλέπε Ἄσκ. 78).

Ὅθεν, ἐὰν Σ_1 (Σ_1', Σ_1'') καὶ Σ_2 (Σ_2', Σ_2'') τὰ ἴχνη τῆς εὐθείας α, πρέπει ἐπὶ τοῦ ἄξονος νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Σ_{12} τοιοῦτον ὥστε τὰ ἴχνη τοῦ p, $\Sigma_{12}\ \Sigma_1'$ καὶ $\Sigma_{12}\ \Sigma_2''$ νὰ ἰσοκλίνουν πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}.

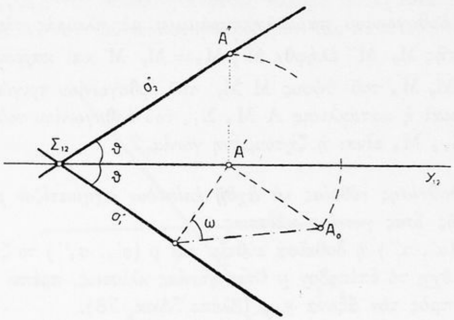


Σχ. 87

Τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται δύο λύσεις. Διὰ τὴν πρώτην (Σχ. 87) ἤχθη ἡ $\Sigma_1'\ \Sigma_2''$ καὶ εὑρέθη τὸ Σ_{12}. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ ἐπίπεδον ἔχει ἴχνη συμπίπτοντα, εἶναι δηλαδὴ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως. Διὰ τὴν δευτέραν, ἐλήφθη τὸ σημεῖον Σ_{21}'' συμμετρικὸν τοῦ Σ_2'' ὡς πρὸς τὸν ἄξονα y_{12} καὶ ἤχθη ἡ $\Sigma_{21}''\ \Sigma_1'$, τέμνουσα τὸν ἄξονα y_{12} εἰς τὸ σημεῖον Σ_{12}' εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ ἐπίπεδον ἔχει ἴχνη ἰσοκλίνοντα πρὸς τὸν ἄξονα y_{12} (ὄχι ὅμως καὶ συμπίπτοντα), εἶναι δηλαδὴ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας.

87. Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον σχηματίζον μετὰ τῶν ἐπιπέδων προβολῆς γωνίας κλίσεως ἴσας πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν.

Ἐφόσον τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον σχηματίζει τὴν αὐτὴν γωνίαν κλίσεως ω πρὸς τὰ ἐπίπεδα προβολῆς, τὰ ἴχνη αὐτοῦ θὰ σχηματίζουν τὴν αὐτὴν γωνίαν μετὰ τοῦ ἄξονος y_{12} ἔστω θ ἡ γωνία αὐτη.



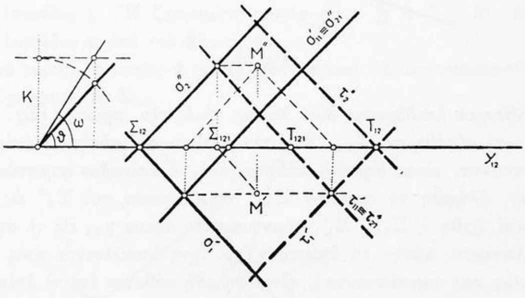
Σχ. 88

Ἐὰν ἔκ τινος σημείου A (A', A'') τοῦ δευτέρου ἴχνους φέρομεν τὴν A B' κάθετον ἐπὶ τὸ πρῶτον ἴχνος, ἡ γωνία ω θὰ εἶναι ἡ γωνία A B' A', τῆς ὁποίας ἡ κατάκλισις A_0 B' A' φαίνεται εἰς τὸ Σχ. 88.

Ἔχομεν : $\overline{A'A''} = \overline{\Sigma_{12}A'}$ εφ θ, $\overline{B'A'} = \overline{\Sigma_{12}A'}$ ημ θ καὶ $\overline{B'A'} = \overline{A'A_0}$σφω

Ἐκ τῶν σχέσεων αὐτῶν προκύπτει : συνθ = σφω.

Εἰς τὸ σχ. 89 κατεσκευάσθη ἡ γωνία θ συναρτήσει τῆς δοθείσης γωνίας ω καὶ ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου M (M', M'') ἤχθη τὸ ἐπίπεδον p (σ_1' σ''), τοῦ ὁποίου τὰ ἴχνη σχηματίζουν μὲ τὸν ἄξονα γωνίας ἴσας πρὸς τὴν εὑρεθεῖσαν γωνίαν θ.



Σχ. 89

Εἰς τὸ αὐτὸ σχέδιον κατεσκευάσθησαν ἐπίσης τὰ ἐπίπεδα q (τ_1', τ_2''), p_1 (σ_{11}', σ_{21}''), καὶ q_1 (τ'_{11}, τ''_{21}), ἱκανοποιοῦντα τὰς ἀπαιτήσεις τοῦ προβλήματος.

Τὸ ἐπίπεδον p εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας, ἐνῷ τὰ ἐπίπεδα p_1 καὶ q_1 εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως.

88. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων γωνιῶν τὰς ὁποίας σχηματίζει ἓν ἐπίπεδον μετὰ τῶν ἐπιπέδων προβολῆς, περιλαμβάνεται μεταξὺ μιᾶς καὶ δύο ὀρθῶν.

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι ἂν καλέσωμεν ω_1 καὶ ω_2 τὰς γωνίας κλίσεως τυχόντος ἐπιπέδου p, ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα προβολῆς, ἐπειδὴ γωνίαν κλίσεως ἑνὸς ἐπιπέδου πρὸς ἓν τῶν ἐπιπέδων προβολῆς καλοῦμεν τὴν ὀξεῖαν ἐκ τῶν γωνιῶν τὰς ὁποίας σχηματίζουν τὰ δύο ἐπίπεδα, ἕπεται ὅτι αἱ ω_1 καὶ ω_2 εἶναι ἀμφότεραι ὀξεῖαι, ὁπότε $\omega_1 + \omega_2 \leqslant \pi$ (1). Ἡ ἰσότης ἰσχύει ὅταν τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12}.

Ἐξ ἄλλου, ἐὰν ε εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον p, εἶναι δὲ φ_1 καὶ φ_2 αἱ γωνίαι κλίσεως αὐτῆς πρὸς τὰ ἐπίπεδα προβολῆς θὰ ἔχωμεν :

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1 \text{ καὶ } \omega_2 = \frac{\pi}{2} \varphi_1$$

ἑπομένως,

$$\omega_1 + \omega_2 = \pi - (\varphi_1 + \varphi_2).$$

Ἀλλὰ ὅπως ἔχομεν ἀποδείξει (Ἄσκ. 81) :

$\varphi_1 + \varphi_2 \leqslant \pi/2$, ἑπομένως :

$$\omega_1 + \omega_2 \geqslant \frac{\pi}{2}.$$

89. Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον σχηματίζον μετὰ τῶν ἐπιπέδων προβολῆς δοθείσας γωνίας κλίσεως. Διερεύνησις.

Ἔστωσαν Μ (Μ′, Μ″) τὸ δοθὲν σημεῖον, p (σ_1', σ_2'') τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον καὶ ω_1, ω_2 αἱ δοθεῖσαι γωνίαι κλίσεως τοῦ p πρὸς τὰ ἐπίπεδα προβολῆς e_1 καὶ e_2. Αἱ γωνίαι ω_1 καὶ ω_2 πρέπει νὰ ἱκανοποιοῦν τὰς συνθήκας :

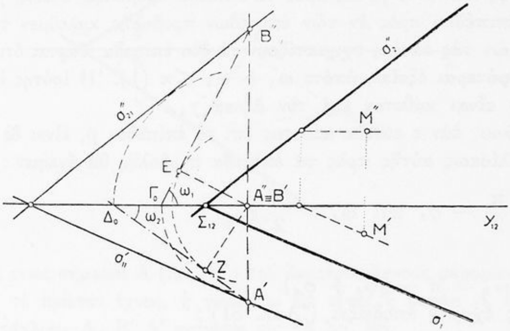
$$\frac{\pi}{2} \leqslant \omega_1 + \omega_2 \leqslant \pi.$$

Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ἔστωσαν Α (Α′, Α″) καὶ Β (Β′ ≡ Α″, Β″) σημεῖα ἐπὶ τῶν ἰχνῶν σ_1' καὶ σ_2'', καθὼς καὶ Β′ Γ′ καὶ Α″ Δ″ αἱ κάθετοι ἐκ τοῦ Α″ ≡ Β′ ἐπὶ τὰ ἴχνη σ_1' καὶ σ_2'' ἀντιστοίχως (Σχ. 90). Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα Β″ Β′ Γ′ καὶ Α′ Α″ Δ″, ἔχουν τὰ ἐπίπεδά των κάθετα ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰ ἴχνη σ_1' καὶ σ_2'' καὶ τέμνονται κατὰ τὴν κάθετον τὴν ἀγομένην ἐκ τοῦ σημείου Α″ ≡ Β′ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον p.

Ἔστω d ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Α″ ≡ Β′ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου p. Κατακλίνομεν τὰ τρίγωνα Β″ Β′ Γ′ καὶ Α′ Α″ Δ″ ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων e_2 καὶ e_1 ἀντιστοίχως στρέφοντες αὐτὰ περὶ τὰς εὐθείας Β″ Β′ καὶ Α′ Α″ καὶ ἔστωσαν Β″ Β′ Γ_0 καὶ Α′ Α″ Δ_0 αἱ κατακλίσεις τῶν τριγώνων τούτων. Τὰ ὕψη $\overline{B''\,E}$ καὶ $\overline{A''\,Z}$ τῶν τριγώνων τούτων εἶναι ἴσα πρὸς d, αἱ δὲ γωνίαι Β″ Γ_0 Β′

καὶ $A' \Delta_0 A''$ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς δοθείσας γωνίας ω_1 καὶ ω_2.

Ἡ θεώρησις αὕτη μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὴν κατασκευήν. Μὲ κέντρον τυχὸν σημεῖον $A'' \equiv B'$ τοῦ ἄξονος y_{12} καὶ ἀκτῖνα αὐθαίρετον τμῆμα d γράφομεν κύκλον καὶ φέρομεν δύο ἐφαπτομένας αὐτοῦ $\Delta_0 Z$ καὶ $\Gamma_0 E$, σχηματιζούσας ἀντιστοίχως μετὰ τοῦ ἄξονος y_{12} τὰς δοθείσας γωνίας ω_2 καὶ ω_1. Αἱ ἐφαπτόμεναι αὗται τέμνουν τὴν εἰς $A'' \equiv B'$ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα εἰς τὰ σημεῖα A' καὶ B''.



Σχ. 90

Κατασκευάζονται οὕτως ἐν κατακλίσει τὰ τρίγωνα $A' A'' \Delta_0$ καὶ $B'' B' \Gamma_0$ ἐκ τῶν ὁποίων κατασκευάζονται τὰ ἴχνη σ_{11}' καὶ σ_{21}'', ὡς αἱ ἐφαπτόμεναι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν σημείων A' καὶ B'' πρὸς τοὺς κύκλους ἀντιστοίχως $(A'', \overline{A'' \Gamma_0})$ καὶ $(B', \overline{B' \Delta_0})$. Κατεσκευάσθη οὕτως ἓν ἐπίπεδον p_1 $(\sigma_{11}', \sigma_{21}'')$, ἔχον γωνίας κλίσεως πρὸς τὰ ἐπίπεδα e_1 καὶ e_2, τὰς γωνίας ἀντιστοίχως ω_1 καὶ ω_2.

Ἐκ τοῦ δοθέντος τώρα σημείου M (M', M'') φέρομεν ἐπίπεδον p (σ_1', σ_2'') παράλληλον ἀντιστοίχως πρὸς τὸ ἐπίπεδον p_1 $(\sigma_{11}', \sigma_{21}'')$.

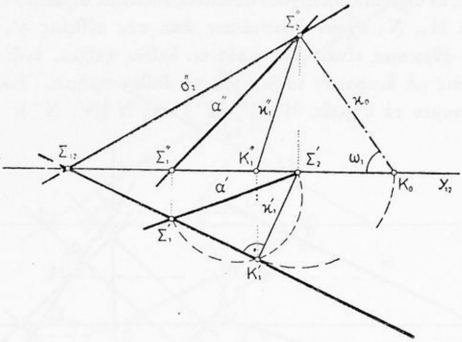
Δυνάμεθα ἀντὶ τῶν ἐφαπτομένων $\Delta_0 Z$ καὶ $\Gamma_0 E$ (Σχ. 90), νὰ φέρωμεν τὰς συμμετρικάς των, ὡς πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}, ὁπότε θὰ προκύψῃ ἄλλη λύσις.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα $A' A'' \Delta_0$ καὶ $B'' B' \Gamma_0$ δυνάμεθα νὰ κατακλίνωμεν κατὰ τὴν συμμετρικήν, ὡς πρὸς τὴν $B' B''$ θέσιν, ἕπεται ὅτι ἐξ ἑκάστης τῶν ὡς ἄνω λύσεων προκύπτουν δύο. Ὥστε εἶναι δυναταὶ τέσσαρες, δύο ἢ οὐδεμία λύσις.

90. Διὰ δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον σχηματίζον μετὰ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου προβολῆς δοθεῖσαν γωνίαν κλίσεως.

Ἔστωσαν α (α', α'') ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, ω_1 ἡ δοθεῖσα γωνία κλίσεως καὶ p (σ_1', σ_2'') τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον (Σχ. 91). Ἐὰν ἐκ τοῦ δευτέρου ἴχνους Σ_2'' τῆς εὐθείας α ἀχθῇ ἡ πρώτη ἰχνοκάθετος τοῦ p, ἡ γωνία κλίσεως τῆς ἰχνοκαθέτου ταύτης θὰ ἰσοῦται μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω_1.

Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $\Sigma_2'' K_2' K_1$ εἶναι κατασκευάσιμον, διότι γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν $\overline{\Sigma_2' \Sigma_2''}$ καὶ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς γωνίαν ἴσην μὲ τὴν ω_1 Ἑπομένως ἡ ἀπόστασις τοῦ ἴχνους σ_1' τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου ἀπὸ τοῦ Σ_2' εἶναι γνωστή.



Σχ. 91

Ἐξ ἄλλου τὸ σημεῖον K_1' κεῖται ἐπὶ κύκλου διαμέτρου $\overline{\Sigma_1' \Sigma_2'}$, ἄρα τὸ σημεῖον τοῦτο προσδιορίζεται. Ἀγόμεθα ἑπομένως εἰς τὴν ἑξῆς κατασκευήν :

Μὲ κάθετον πλευρὰν $\Sigma_2' \Sigma_2''$ κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $\Sigma_2' \Sigma_2'' K_0$, τοῦ ὁποίου γων. $\Sigma_2' K \Sigma_2'' = \omega_1$.

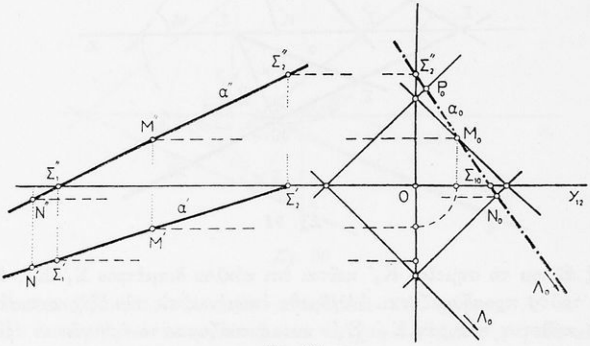
Μὲ κέντρον Σ'_2 καὶ ἀκτῖνα $\overline{\Sigma_2' K_0}$ γράφομεν κύκλον τέμνοντα τὸν κύκλον μὲ διάμετρον $\overline{\Sigma_1' \Sigma_2'}$ εἰς σημεῖον K_1'. Ἡ εὐθεῖα $\Sigma_1' K_1'$ εἶναι τὸ πρῶτον ἴχνος τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου, τὸ δεύτερον εἶναι ἡ εὐθεῖα $\Sigma_{12} \Sigma_2''$.

Τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται δύο λύσεις, μίαν ἢ οὐδεμίαν, ἐφόσον ὁ κύκλος $(\Sigma_2', \overline{\Sigma_2' K_0})$ τέμνει ἐφάπτεται ἢ δὲν τέμνει τὸν κύκλον διαμέτρου $\overline{\Sigma_1' \Sigma_2'}$.

91. Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας νὰ εὑρεθῇ σημεῖον τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων προβολῆς ἰσοῦται μὲ δοθὲν τμῆμα.

Ἔστω α (α′, α″) ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ Μ (Μ′, Μ″) τὸ ζητούμενον σημεῖον. Ἡ ἀπόστασις καὶ τὸ ὑψόμετρον τοῦ σημείου Μ παραμένουν ἀναλλοίωτα, ὡς πρὸς τὸ μέγεθος, ἐὰν ἡ εὐθεῖα α προβληθῇ ὀρθῶς ἐπὶ ἐγκαρσίου τινὸς ἐπιπέδου. Ἑπομένως, ἂν προβάλωμεν τὴν α ἐπὶ ἐγκαρσίου ἐπιπέδου p καὶ κατακλίνωμεν τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἐπὶ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου προβολῆς, τὸ τεθὲν πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ ἀναζητήσωμεν ἐπὶ τῆς κατακλίσεως α_0, τῆς προβολῆς ἐπὶ τοῦ p τῆς εὐθείας α, σημεῖον M_0 τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τοῦ ἄξονος y_{12} καὶ τοῦ κατακορύφου ἴχνους τοῦ p, ἰσοῦται μὲ τὸ δοθὲν τμῆμα. Εἰς τὸ Σχ. 92 εὑρέθη ἡ κατάκλισις α_0 τῆς εὐθείας α, διὰ τῆς προβολῆς ἐπὶ τοῦ p τῶν ἰχνῶν Σ_1' καὶ Σ_2 τῆς α καὶ κατακλίσεως αὐτῶν.

Ἐκ τῆς Γεωμετρίας τοῦ ἐπιπέδου εἶναι γνωστὸν ὅτι ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο καθέτων πρὸς ἀλλήλας εὐθειῶν (ἐν προκειμένῳ τῶν y_{12} καὶ Ο Σ_2'') ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τμῆμα ἀποτελεῖται ἀπὸ τέσσαρας εὐθείας, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἀποτέμνει ἀπὸ τῶν δύο εὐθειῶν τμήματα ἴσα πρὸς τὸ δοθὲν τμῆμα. Ἑκάστη τῶν εὐθειῶν τούτων τέμνει τὴν α_0 εἰς ἓν σημεῖον, ὑπάρχουν συνεπῶς τέσσαρα σημεῖα Λ_0, M_0, N_0, P_0. Ἐκ τούτων τὰ M_0, N_0 ἔχουν ἀποστάσεις ἀπὸ τὰς εὐθείας y_{12} καὶ Ο Σ_{12}'' τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν τμῆμα, ἐνῷ τὰ Λ_0 καὶ P_0 ἔχουν ἀποστάσεις μὲ διαφορὰν ἴσην πρὸς τὸ δοθὲν τμῆμα. Ἐκ τῶν σημείων M_0, N_0 λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Μ (Μ′, Μ″) καὶ Ν (Ν′, Ν″).



Σχ. 92

92. *Δίδεται ἐπίπεδον καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐκτὸς αὐτοῦ κείμενα. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοιοῦτον ὥστε ἡ τεθλασομένη γραμμὴ Α Μ Β νὰ ἔχῃ ἐλάχιστον μῆκος.*

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ σημεῖα Α καὶ Β κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ χώρου, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον p καὶ ἔστω B_1 (B_1', B_1'') τὸ συμμετρικὸν τοῦ σημείου Β (Β′, Β″) ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον p καὶ Μ τὸ σημεῖον τομῆς τῆς εὐθείας Α B_1 μετὰ τοῦ p.

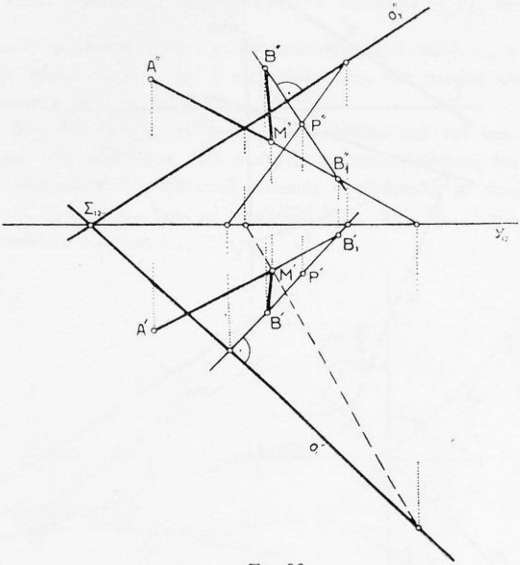
Τὸ ἄθροισμα τῶν τμημάτων $\overline{AM} + \overline{MB} = \overline{AM} + \overline{MB_1} = \overline{AB_1}$.

Διὰ κάθε ἄλλο σημεῖον Ν τοῦ ἐπιπέδου p τὸ ἄθροισμα τῶν τμημάτων $\overline{AN} + \overline{NB} = \overline{AN} + \overline{NB_1} > \overline{AB_1}$. Εἰς τὸ Σχ. 93 ἤχθη ἐκ τοῦ σημείου Β (Β′, Β″) κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον p, εὑρέθη τὸ σημεῖον τομῆς της P (P′, P″) μετ' αὐτοῦ καὶ ἐλήφθη τὸ σημεῖον B_1 (B_1', B_1'') συμμετρικὸν τοῦ Β ὡς πρὸς τὸ p. Εὑρέθη τὸ σημεῖον τομῆς Μ (Μ′, Μ″) τῆς εὐθείας Α B_1 (Α′ B_1', Α″ B_1'') μετὰ τοῦ ἐπιπέδου p καὶ ἤχθη ἡ τεθλασμένη γραμμὴ Α Μ Β.

Ἐὰν τὰ σημεῖα Α καὶ Β κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ p τότε τὸ σημεῖον Μ εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῆς Α Β μετὰ τοῦ p.

93. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι κλίσεως δοθείσης εὐθείας πρὸς τὰ ἐπίπεδα συμμετρίας καὶ συμπτώσεως.

Ἔστωσαν ω_{13} καὶ ω_{24} αἱ γωνίαι κλίσεως τῆς δοθείσης εὐθείας α (α′, α″) μετὰ τῶν ἐπιπέδων συμμετρίας καὶ συμπτώσεως.

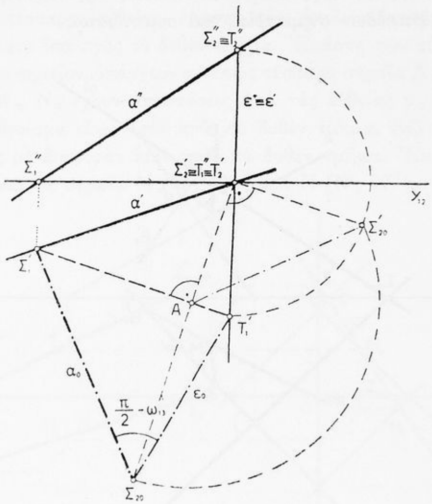


Σχ. 93

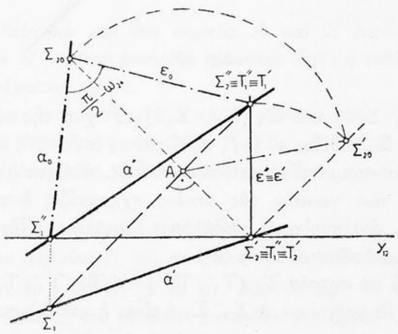
Ἐὰν Σ_1 (Σ_1', Σ_1'') καὶ Σ_2 (Σ_2', Σ_2'') τὰ ἴχνη τῆς εὐθείας α, ἀχθοῦν δὲ ἐκ τοῦ σημείου Σ_2 εὐθεῖαι ε_1 (ε_1', ε_1'') καὶ ε_2 (ε_2', ε_2'') κάθετοι ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα συμμετρίας καὶ συμπτώσεως, αἱ ζητούμεναι γωνίαι εἶναι συμπληρωματικαὶ τῶν γωνιῶν τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ εὐθεῖα α μὲ τὰς εὐθείας ε_1 καὶ ε_2 ἀντιστοίχως, πρόβλημα λελυμένον (Ἴδε Στοιχεῖα Παρ. Γεωμετρίας Π. Δ. Λαδοπούλου § 39).

Εἰς τὸ Σχ. 94 τὰ σημεῖα T_1 (T_1', T_1'') καὶ T_2 (T_2', T_2'') εἶναι τὰ ἴχνη τῆς εὐθείας ε_1, τὸ δὲ τρίγωνον Α Σ_2' Σ_{20}' εἶναι ἡ κατάκλισις τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου Α Σ_2' Σ_2. Μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα $\overline{A\,\Sigma_{20}'}$ ἐγράφη κύκλος τέμνων τὴν Σ_2' Α εἰς τὸ σημεῖον Σ_{20}. Τὸ τρίγωνον Σ'_1 Σ_{20} T_1' εἶναι ἡ κατάκλισις τοῦ τριγώνου Σ_1' Σ_2 T_1', ἑπομένως ἡ γων. Σ_1' Σ_{20} T_1', εἶναι ἴση πρὸς $\frac{\pi}{2} - \omega_{13}$

Εἰς τὸ Σχ. 95 τὰ σημεῖα T_1 (T_1', T_1'') καὶ T_2 (T_2', T_2'') εἶναι τὰ ἴχνη τῆς εὐθείας ε_2, τὸ δὲ τρίγωνον Α Σ_2' Σ_{20}' εἶναι ἡ κατάκλισις τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου Α Σ_2' Σ_2. Μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα $\overline{A\,\Sigma'_{20}}$ ἐγράφη κύκλος τέμνων τὴν Σ_2' Α εἰς τὸ σημεῖον Σ_{20}.



Σχ. 94



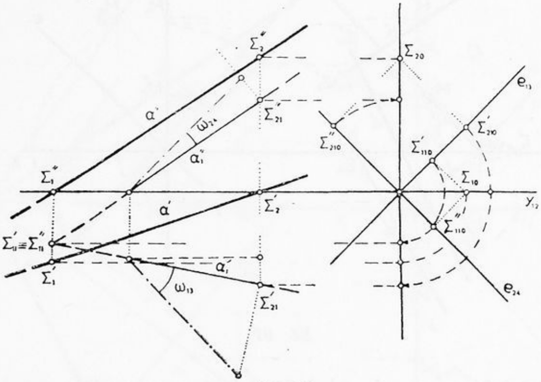
Σχ. 95

Τὸ τρίγωνον Σ_1' Σ_{20} T_1' εἶναι ἡ κατάκλισις τοῦ τριγώνου Σ_1' Σ_2 T_1', ἑπομένως ἡ γωνία Σ_1' Σ_{20} T_1' εἶναι ἴση πρὸς $\frac{\pi}{2} - \omega_{24}$.

Μία ἄλλη μέθοδος εἶναι ἡ ἀκόλουθος :

Θεωροῦμεν τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν α, ὡς πρὸς σύστημα ἀναφορᾶς τὸ ζεῦγος τῶν ἐπιπέδων συμμετρίας καὶ συμπτώσεως. Στρέφομεν τὸ σύστημα τῶν ἐπιπέδων τούτων μετὰ τῆς εὐθείας α στερεῶς συνδεδεμένης μὲ αὐτά, περὶ τὸν ἄξονα y_{12} κατὰ γωνίαν $\frac{\pi}{4}$ μέχρις ὅτου τὸ ἐπίπεδον $+\,e_{13}$ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου $+\,e_1$ ὁπότε τὸ $+\,e_{24}$ θὰ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ $+\,e_2$, ἡ δὲ εὐθεῖα α θὰ λάβῃ τὴν θέσιν α_1 (α_1', α_1'') καὶ εὑρίσκομεν τὰς γωνίας κλίσεως αὐτῆς κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς θεωρίας.

Εἰς τὸ Σχ. 96 ἐλήφθη ἓν ἐγκάρσιον ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁποίου προεβλήθησαν τὰ ἴχνη τῆς εὐθείας α. Ἐν συνεχείᾳ κατεσκευάσθησαν, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου κατακλιθέντος ἐπὶ τοῦ πίνακος σχεδιάσεως, αἱ προβολαὶ Σ_{210}' καὶ Σ_{210}'' τοῦ ἴχνους Σ_{20} καὶ αἱ προβολαὶ Σ_{110}' καὶ Σ_{110}'' τοῦ ἴχνους Σ_{10}, ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων e_{13} καὶ e_{24}.



Σχ. 96

Ἐστράφη τέλος τὸ σύστημα τῶν e_{13} καὶ e_{24} κατὰ γωνίαν $\frac{\pi}{4}$ κατόπιν δὲ τὸ e_{13} κατὰ $\frac{\pi}{2}$ καὶ εὑρέθησαν τὰ σημεῖα Σ_{21} (Σ_{21}', Σ_{21}'') καὶ Σ_{11} (Σ_{11}', Σ_{11}'') καὶ ἑπομένως ἡ εὐθεῖα α_1 (α_1', α_1'') τῆς ὁποίας αἱ γωνίαι μὲ τὰ ἐπίπεδα e_1 καὶ e_2, εἶναι αἱ ζητούμεναι γωνίαι τῆς α μετὰ τῶν ἐπιπέδων e_{13} καὶ e_{24}.

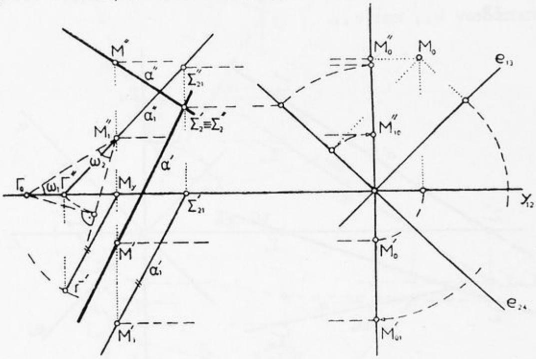
94. Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα σχηματίζουσα μετὰ τῶν ἐπιπέδων συμμετρίας καὶ συμπτώσεως δοθείσης γωνίας. Διερεύνησις.

Ἔστωσαν ω_{13} καὶ ω_{24} αἱ δοθεῖσαι γωνίαι τὰς ὁποίας ἡ ζητουμένη διὰ τοῦ σημείου Μ (Μ′, Μ″) εὐθεῖα α (α′, α″) θὰ σχηματίζῃ μετὰ τῶν ἐπιπέδων συμμετρίας καὶ συμπτώσεως. Θεωροῦμεν τὸ δοθὲν σημεῖον Μ ὡς πρὸς σύστημα ἀναφορᾶς τὸ ζεῦγος τῶν ἐπιπέδων συμμετρίας καὶ συμπτώσεως.

Στρέφομεν τὸ σύστημα τῶν ἐπιπέδων τούτων μετὰ τοῦ σημείου Μ, στερεῶς συνδεδεμένου μὲ αὐτά, περὶ τὸν ἄξονα y_{12} κατὰ γωνίαν $\frac{\pi}{4}$, μέχρις ὅτου τὸ ἐπίπεδον $+ e_{13}$ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου $+ e_1$ ὁπότε τὸ $+ e_{24}$ θὰ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ $+ e_2$, τὸ δὲ σημεῖον Μ θὰ λάβῃ τὴν θέσιν M_1 (M_1', M_1'').

Τὸ δοθὲν πρόβλημα ἀνάγεται τώρα εἰς τὸ ἑξῆς :

Διὰ δοθέντος σημείου M_1 νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα σχηματίζουσα μετὰ τῶν ἐπιπέδων προβολῆς δοθείσας γωνίας κλίσεως. Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐλύθη ἤδη εἰς τὴν § 82 τοῦ παρόντος. Εἰς τὸ Σχ. 97 ἤχθη ὡς ὑποδεικνύεται εἰς τὴν § 82, ἡ εὐθεῖα α_1 (α_1', α_1''), σχηματίζουσα μετὰ τῶν ἐπιπέδων προβολῆς δοθείσας γωνίας. Κατόπιν κατεσκευάσθησαν τὸ ἴχνος Σ_2 τῆς ζητουμένης εὐθείας α (α', α''), ἐκ τοῦ ὁμωνύμου ἴχνους Σ_{21} (Σ_{21}', Σ_{21}'') τῆς εὐθείας α_1 καὶ ἡ εὐθεῖα α ($\alpha' \equiv M' \, \Sigma_2'$, $\alpha'' \equiv M'' \, \Sigma_2''$).



Σχ. 97

95. Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον σχηματίζον μετὰ τῶν ἐπιπέδων συμμετρίας καὶ συμπτώσεως δοθείσας γωνίας. Διερεύνησις.

Ἔστωσαν ω_{13} καὶ ω_{24} αἱ δοθεῖσαι γωνίαι τὰς ὁποίας τὸ ζητούμενον διὰ τοῦ σημείου Μ (M', M'') ἐπίπεδον p (σ_1', σ_2'') θὰ σχηματίζῃ μετὰ τῶν ἐπιπέδων συμμετρίας καὶ συμπτώσεως.

Θεωροῦμεν τὸ δοθὲν σημεῖον Μ ὡς πρὸς σύστημα ἀναφορᾶς τὸ ζεῦγος τῶν ἐπιπέδων συμμετρίας καὶ συμπτώσεως.

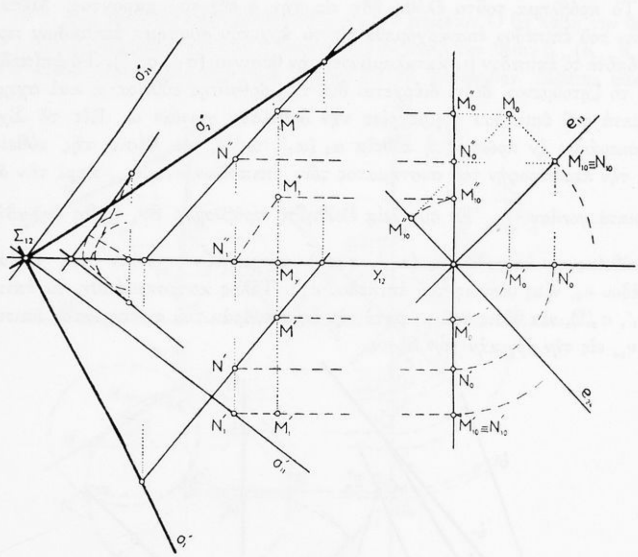
Στρέφομεν τὸ σύστημα τῶν ἐπιπέδων τούτων μετὰ τοῦ σημείου Μ, στερεῶς συνδεδεμένου μὲ αὐτά, περὶ τὸν ἄξονα y_{12} κατὰ γωνίαν $\frac{\pi}{4}$ μέχρις ὅτου τὸ ἐπίπεδον $+ e_{13}$ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου $+ e_1$, ὁπότε τὸ $+ e_{24}$ θὰ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ $+ e_2$, τὸ δὲ σημεῖον Μ θὰ λάβῃ τὴν θέσιν M_1 (M_1', M_1'').

Τὸ δοθὲν πρόβλημα ἀνάγεται πλέον εἰς τὸ ἀκόλουθον :

Διὰ δοθέντος σημείου M_1 νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον σχηματίζον μετὰ τῶν ἐπιπέδων προβολῆς δοθείσας γωνίας κλίσεως. Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐλύθη ἤδη εἰς τὴν § 88 τοῦ παρόντος. Εἰς τὸ Σχ. 98 ἤχθη ὡς ὑποδεικνύεται εἰς τὴν § 88 τὸ ἐπίπεδον p_1 (σ_{11}', σ_{21}'') σχηματίζον μετὰ τῶν ἐπιπέδων προβολῆς δοθείσας γωνίας.

Διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν ἰχνῶν τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου ἔχομεν δύο σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου τούτου τὸ M (M′, M″) καὶ τὸ ἴχνος του ἐπὶ τοῦ ἄξονος y_{12} τὸ ὁποῖον ταυτίζεται μὲ τὸ ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου p_1.

Ἀρκεῖ συνεπῶς νὰ εὕρωμεν τὴν νέαν θέσιν ἑνὸς τῶν σημείων τοῦ p, μετὰ τὴν ἐπαναφορὰν τούτου μετὰ τῶν ἐπιπέδων e_{13} καὶ e_{24} εἰς τὴν ἀρχικὴν των θέσιν. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τὸ πρῶτον ἴχνος N_1 (N_1', N_1'') τῆς δευτέρας ἰχνοπαραλλήλου $M_1 N_1$, ἡ ὁποία ἐχρησίμευσεν διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν ἰχνῶν τοῦ ἐπιπέδου p_1.



Σχ. 98

Τοῦ σημείου τούτου N_1 εὑρέθη τὸ ἀντίστοιχον μετὰ τὴν ἐπαναφοράν, σημεῖον N (N′, N″) τοῦ χώρου.

Τὰ ἴχνη τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου ὁρίζονται πλέον διὰ τῶν τριῶν σημείων M (M′, M″), N (N′, N″) καὶ Σ_{12}.

96. *Διὰ δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον σχηματίζον μετὰ τοῦ ἐπιπέδου συμμετρίας δοθεῖσαν γωνίαν.*

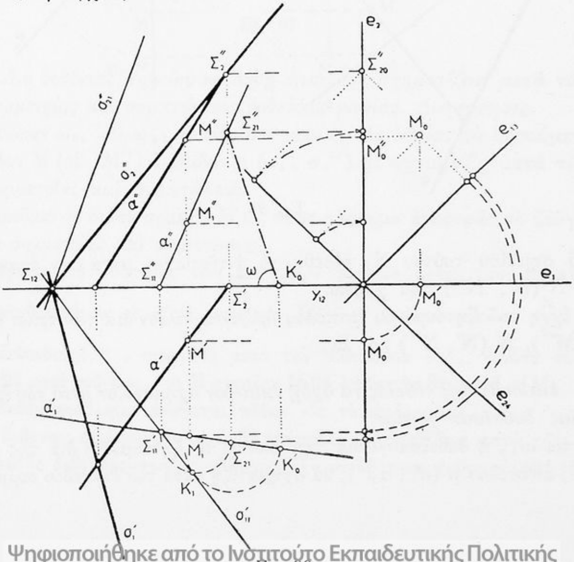
Ἔστω ω_{13} ἡ δοθεῖσα γωνία τὴν ὁποίαν τὸ ζητούμενον διὰ τῆς εὐθείας α (α′, α″) ἐπίπεδον p (σ_1', σ_2''), θὰ σχηματίζῃ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου συμμετρίας.

Θεωροῦμεν τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν α ὡς πρὸς σύστημα ἀναφορᾶς τὸ ζεῦγος τῶν ἐπιπέδων συμμετρίας καὶ συμπτώσεως. Στρέφομεν τὸ σύστημα τῶν ἐπιπέδων τούτων μετὰ τῆς εὐθείας α, στερεῶς συνδεδεμένης μὲ αὐτά, περὶ τὸν ἄξονα y_{12} κατὰ γωνίαν $\frac{\pi}{4}$ μέχρις ὅτου τὸ ἐπίπεδον $+\,e_{13}$ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου $+\,e_1$, ὁπότε τὸ $+\,e_{24}$, θὰ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ $+\,e_2$, ἡ δὲ εὐθεῖα α θὰ λάβῃ τὴν θέσιν α_1 (α_1', α_1'').

Τὸ τεθὲν πρόβλημα ἀνάγεται πλέον εἰς τὸ ἀκόλουθον :

Διὰ δοθείσης εὐθείας α_1 (α_1', α_1'') νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον p_1 $(\sigma_{11}', \sigma_{21}'')$ σχηματίζον μετὰ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου προβολῆς δοθεῖσαν γωνίαν κλίσεως ω_{13},

Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐλύθη ἤδη εἰς τὴν § 89 τοῦ παρόντος. Μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐπιπέδου ἐπανερχόμεθα εἰς τὸ ἀρχικὸν σύστημα ἐπιπέδων προβολῆς, ὁπότε τὸ ἐπίπεδον p_1 καταλαμβάνει τὴν θέσιν p (σ_1', σ_2''). Τὸ ἐπίπεδον p εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι διέρχεται διὰ τῆς δοθείσης εὐθείας α καὶ σχηματίζει μετὰ τοῦ ἐπιπέδου συμμετρίας τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω. Εἰς τὸ Σχ. 99 κατεσκευάσθη ἐν πρώτοις ἡ εὐθεῖα α_1 (α_1', α_1''), νέα θέσις τῆς εὐθείας α μετὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ συστήματος τῶν ἐπιπέδων e_{13}, e_{24}, περὶ τὸν ἄξονα y_{12} κατὰ γωνίαν $\frac{\pi}{4}$. Ἐν συνεχείᾳ ἐλύθη τὸ πρόβλημα 89, ἤχθη δηλαδὴ διὰ τῆς εὐθείας α_1 ἐπίπεδον p_1 $(\sigma_{11}', \sigma_{21}'')$ σχηματίζον γωνίαν ω_{13} μετὰ τοῦ ἐπιπέδου e_1, νέας θέσεως τοῦ ἐπιπέδου e_{13}. Τέλος κατεσκευάσθη τὸ ἐπίπεδον p (σ_1', σ_2''), νέα θέσις τοῦ p_1 μετὰ τὴν ἐπαναφορὰν τοῦ συστήματος ἐπιπέδων e_{13}, e_{24} εἰς τὴν ἀρχικήν των θέσιν.

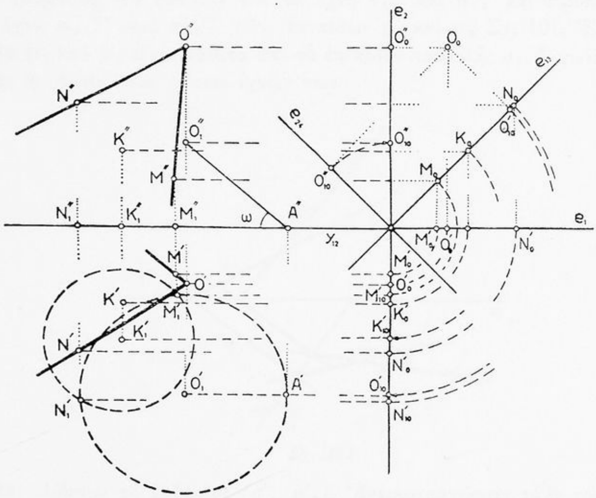


Σχ. 99

97. *Δίδεται κύκλος (Κ) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμμετρίας, ὁριζόμενος διὰ τῶν συντεταγμένων τοῦ κέντρου του καὶ τῆς ἀκτῖνος του, καὶ σημεῖον Ο (Ο′, Ο′′) τοῦ χώρου μὴ κείμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμμετρίας. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου Ο εὐθεῖα συναντῶσα τὸν κύκλον (Κ) καὶ σχηματίζουσα δοθεῖσαν γωνίαν μετὰ τοῦ ἐπιπέδου συμμετρίας.*

Ἔστωσαν Κ (Κ′, Κ′′) τὸ κέντρον τοῦ κύκλου (Κ), ρ ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ καὶ ω ἡ δοθεῖσα γωνία. Θεωροῦμεν τὸ σημεῖον Ο καὶ τὸν κύκλον (Κ), ὡς πρὸς σύστημα ἀναφορᾶς τὸ ζεῦγος τῶν ἐπιπέδων συμμετρίας καὶ συμπτώσεως. Στρέφομεν τὸ σύστημα τῶν ἐπιπέδων e_{13}, e_{24} μετὰ τοῦ σημείου Ο καὶ τοῦ κύκλου (Κ), στερεῶς συνδεδεμένων μὲ αὐτά, περὶ τὸν ἄξονα y_{12} κατὰ γωνίαν $\frac{\pi}{4}$ μέχρις ὅτου τὸ ἐπίπεδον $+e_{13}$ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου $+e_1$, ὁπότε τὸ $+e_{24}$ θὰ ταυτισθῇ μετὰ τοῦ $+e_2$, τὸ σημεῖον Ο θὰ λάβῃ τὴν θέσιν O_1 (O'_1, O''_1) καὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου (Κ) θὰ λάβῃ τὴν θέσιν K_1 (K_1',K_1'').

Τὸ δοθὲν πρόβλημα ἀνάγεται πλέον εἰς τὸ ἀκόλουθον. Δίδεται κύκλος



Σχ. 100

(K_1) ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου προβολῆς, ὁριζόμενος διὰ τοῦ κέντρου του K_1 καὶ τῆς ἀκτῖνος του καὶ σημεῖον Ο (Ο′, Ο′′) τοῦ χώρου μὴ κείμενον ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου O_1 εὐθεῖα συναντῶσα τὸν κύκλον (Κ) καὶ σχηματίζουσα γωνίαν ω μετὰ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου προβολῆς.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, θεωροῦμεν τὰ πρῶτα ἴχνη τῶν διὰ τοῦ O_1 εὐθειῶν τῶν ἐχουσῶν γωνίαν κλίσεως πρὸς τὸ e_1 τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω.

Τὰ πρῶτα ταῦτα ἴχνη θὰ κεῖνται ἐπὶ κύκλου κέντρου O_1' καὶ ἀκτῖνος h_0 σφω, ἔνθα h_0 τὸ ὑψόμετρον τοῦ σημείου O_1.

Εἰς τὸ Σχ. 100 ἤχθη διὰ τοῦ O_1'' εὐθεῖα O_1'' A'' σχηματίζουσα μὲ τὸν ἄξονα y_{12} γωνίαν ω καὶ εὑρέθη ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ O_1' παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα y_{12} τὸ σημεῖον A'. Ὁ κύκλος κέντρου O_1' καὶ ἀκτῖνος $\overline{O_1'\ A'}$ εἶναι ὁ γεωμ. τόπος τῶν πρώτων ἰχνῶν τῶν ὡς ἄνω εὐθειῶν. Ὁ κύκλος οὗτος τέμνει τὸν κύκλον (K_1') εἰς δύο ἐν γένει σημεῖα M_1', N_1'. Αἱ εὐθεῖαι O_1 M_1 (O_1' M_1', O_1'' M_1'') καὶ O_1 N_1 (O_1' N_1', O_1'' N_1'') εἶναι αἱ ζητούμεναι εὐθεῖαι.

Ἐπαναφέροντες τὰ ἐπίπεδα e_{13} καὶ e_{24} εἰς τὴν ἀρχικήν των θέσιν, εὑρίσκομεν τὰς ζητουμένας εὐθείας O M (O' M', O'' M'') καὶ O N (O' N', O'',N'').

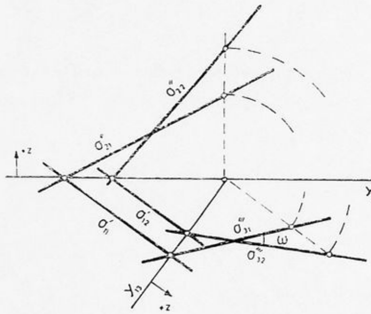
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

Συστηματικαὶ μέθοδοι διὰ τὴν ἐπίλυσιν προβλημάτων

§ 5. Προβλήματα λυόμενα τῇ βοηθείᾳ τῶν συστηματικῶν μεθόδων

97. Διὰ ἀλλαγῆς τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου προβολῆς, εὕρετε τὴν γωνίαν δύο ἐπιπέδων τῶν ὁποίων τὰ πρῶτα ἴχνη εἶναι παράλληλα.

Ἔστωσαν p_1 (σ_{11}', σ_{21}'') καὶ p_2 (σ_{12}', σ_{22}'') τὰ δύο δοθέντα ἐπίπεδα τῶν ὁποίων τὰ ἴχνη σ_{11}' καὶ σ_{12}' εἶναι παράλληλα. Εἰσάγομεν τρίτον ἐπίπεδον προβολῆς, e_3 κάθετον ἐπὶ τὰ ἴχνη σ_{11}' καὶ σ_{12}' καὶ εὑρίσκομεν τὰ τρίτα ἴχνη σ_{31}''' καὶ σ_{32}''' τῶν ἐπιπέδων p_1 καὶ p_2 Σχ. 101. Ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα p_1 καὶ p_2 εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον προβολῆς e_3, ἡ γωνία αὐτῶν ω εἶναι ἡ γωνία τῶν τρίτων ἰχνῶν των.



Σχ. 101

98. Δίδεται τὸ ἐπίπεδον (σ'_1, σ'_2). Ἀντικαταστήσατε τὸ ἓν τῶν ἐπιπέδων προβολῆς, οὕτως ὥστε τὰ νέα ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου νὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Ἔστω e_3 τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον θὰ ἀντικαταστήσῃ τὸ e_2 καὶ y_{13} ὁ νέος ἄξων, τέμνων τὸν y_{12} εἰς σημεῖον P′. Ἡ εἰς P′ κάθετος ἐπὶ τὸν y_{13} τέμνει τὸ δεύτερον ἴχνος σ_2'' τοῦ ἐπιπέδου p εἰς σημεῖον P″. Ἐὰν μὲ κέντρον τὸ P′ καὶ ἀκτῖνα $\overline{P'P''}$ γράψωμεν κύκλον, οὗτος θὰ τμήσῃ τὴν εἰς P′ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{13} εἰς σημεῖον P‴, ἀπὸ τοῦ ὁποίου, ὡς γνωστὸν (Στοιχεῖα Παραστατικῆς Π. Λαδοπούλου § 44), διέρχεται τὸ τρίτον ἴχνος σ_3''' τοῦ ἐπιπέδου p.

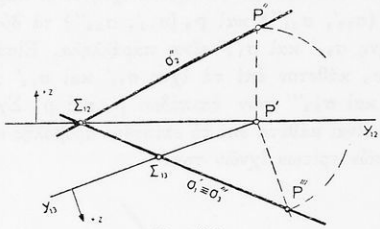
Ἐὰν Σ_{12} καὶ Σ_{13} τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου p ἐπὶ τῶν ἀξόνων y_{12} καὶ y_{13}, πρέπει αἱ ἡμιευθεῖαι Σ_{13} Σ_{12} καὶ Σ_{13} P''' νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ κατασκευή :

Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον τοῦ ἄξονος y_{12} καὶ μὲ κέντρον τὸ p' καὶ ἀκτῖνα $\overline{P'\,P''}$, ἔνθα P'' ἡ τομὴ τῆς εἰς P' καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12} μετὰ τοῦ ἴχνους σ_2'', γράφομεν κύκλον. Ὁ κύκλος οὗτος τέμνει τὸ ἴχνος σ_1' εἰς τὸ σημεῖον P'''.

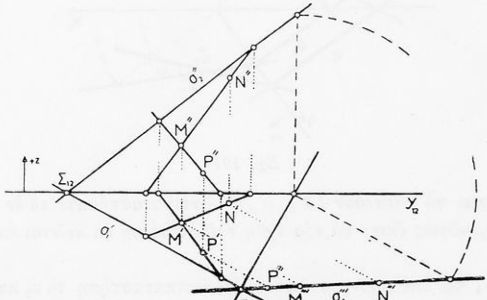
Ἡ εἰς P' κάθετος ἐπὶ τὴν $P'\,P'''$ εἶναι ὁ νέος ἄξων y_{13}.

Φέρομεν τὴν P''' Σ_{12} τέμνουσαν τὸν ἄξονα y_{13} εἰς τὸ σημεῖον Σ_{13}. Τὸ νέον ἐπίπεδον προβολῆς e_3 εἶναι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος y_{13} κάθετον ἐπὶ τὸ e_1, τὰ δὲ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου p εἰς τὸ νέον σύστημα προβολῆς e_1, e_3, εἶναι τὰ $\sigma_1' \equiv \Sigma_{12}\,\Sigma_{13}$ καὶ $\sigma_3''' \equiv \Sigma_{13}\,P'''$, κείμενα ἐπ' εὐθείας.



Σχ. 102

99. Δίδονται τρία σημεῖα κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Ἀντικαταστήσατε τὸ ἓν τῶν ἐπιπέδων προβολῆς, οὕτως ὥστε αἱ νέαι προβολαὶ τῶν σημείων νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.



Σχ. 103

Ἔστωσαν M (M', M''), N (N', N''), P (P', P'') τὰ δοθέντα σημεῖα.

Κατασκευάζομεν τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου p (σ_1', σ_2'') τὸ ὁποῖον ὁρίζουν τὰ τρία ταῦτα σημεῖα. Ἀντικαθιστῶμεν τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον προβολῆς καὶ εἰσάγομεν ἓν νέον ἐπίπεδον e_3, κάθετον ἐπὶ τὸ πρῶτον ἴχνος σ_1' τοῦ ἐπιπέδου p. (Σχ. 103).

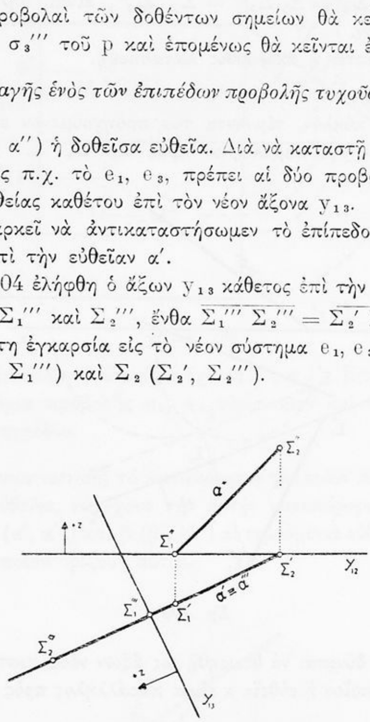
Αἱ τρίται προβολαὶ τῶν δοθέντων σημείων θὰ κεῖνται προφανῶς ἐπὶ τοῦ τρίτου ἴχνους σ_3''' τοῦ p καὶ ἑπομένως θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

100. Δι' ἀλλαγῆς ἑνὸς τῶν ἐπιπέδων προβολῆς τυχοῦσα εὐθεῖα νὰ καταστῇ ἐγκαρσία.

Ἔστω α (α', α'') ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα. Διὰ νὰ καταστῇ ἐγκαρσία εἰς τὸ νέον σύστημα προβολῆς π.χ. τὸ e_1, e_3, πρέπει αἱ δύο προβολαί της α' καὶ α''' νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸν νέον ἄξονα y_{13}.

Ἑπομένως ἀρκεῖ νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ ἐπίπεδον e_2 δι' ἑνὸς ἐπιπέδου e_3 καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν α'.

Εἰς τὸ Σχ. 104 ἐλήφθη ὁ ἄξων y_{13} κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν α' καὶ εὑρέθησαν τὰ σημεῖα Σ_1''' καὶ Σ_2''', ἔνθα $\overline{\Sigma_1''' \Sigma_2'''} = \overline{\Sigma_2' \Sigma_2''}$, ὁπότε ἡ εὐθεῖα α ($\alpha'$, α''') κατέστη ἐγκαρσία εἰς τὸ νέον σύστημα e_1, e_3, ὁριζομένη ὑπὸ τῶν σημείων Σ_1 (Σ_1', Σ_1''') καὶ Σ_2 (Σ_2', Σ_2''').



Σχ. 104

101. Δι' ἀλλαγῆς ἑνὸς τῶν ἐπιπέδων προβολῆς, τυχοῦσα εὐθεῖα νὰ καταστῇ παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας τοῦ νέου συστήματος ἐπιπέδων προβολῆς.

Ἔστω α (α', α'') ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἀναφερομένη, εἰς τὸ σύστημα τῶν ἐπιπέδων προβολῆς e_1, e_2. Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ἔστω y_{13}, ὁ νέος ἄξων. Ἐφόσον ἡ α εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας τοῦ νέου συστήματος προβολῆς e_1, e_3, αἱ προβολαὶ αὐτῆς α' καὶ α''' θὰ σχηματίζουν ἴσας γωνίας μετὰ τοῦ ἄξονος y_{13}, χωρὶς νὰ εἶναι παράλληλοι μεταξύ των (Σχ. 105).

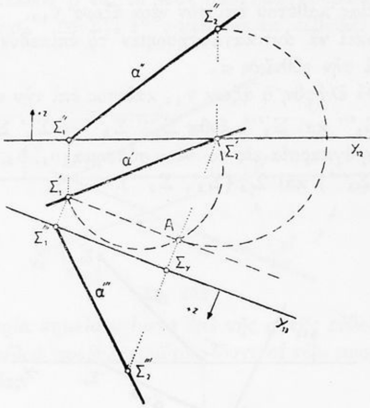
Ἐκ τοῦ ἴχνους Σ_1' τῆς εὐθείας α φέρομεν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα y_{13}

τέμνουσαν τὴν $\Sigma_2' \Sigma_2'''$ εἰς τὸ σημεῖον Α. Τὰ τρίγωνα $\Sigma_1''' \Sigma_y \Sigma_2'''$ καὶ $\Sigma_1' A \Sigma_2'$ εἶναι ἴσα. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τμῆμα $\overline{\Sigma_y \Sigma_2'''} = \overline{\Sigma_2' \Sigma_2''}$, ἕπεται ὅτι τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $\Sigma_1' A \Sigma_2'$ εἶναι γνωστὴ ἡ ὑποτείνουσα $\overline{\Sigma_1' \Sigma_2'}$ καὶ ἡ κάθετος πλευρὰ $\overline{A \Sigma_2'} = \overline{\Sigma_y \Sigma_2'''} = \overline{\Sigma_2' \Sigma_2''}$, εἶναι δηλαδὴ τὸ τρίγωνον τοῦτο κατασκευάσιμον.

Ἐντεῦθεν προκύπτει ἡ ἀκόλουθος κατασκευή.

Μὲ διάμετρον τὴν $\overline{\Sigma_1' \Sigma_2'}$ γράφομεν κύκλον. Μὲ κέντρον Σ_2' καὶ ἀκτῖνα $\overline{\Sigma_2' \Sigma_2'''}$ γράφομεν κύκλον, τέμνοντα τὸν προηγούμενον εἰς σημεῖον Α.

Φέρομεν εὐθεῖαν y_{13} παράλληλον πρὸς τὴν $\Sigma_1' A$.



Σχ. 105

Ἡ εὐθεῖα αὐτὴ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄξων νέου συστήματος προβολῆς e_1, e_3, ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον ἡ εὐθεῖα α εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας.

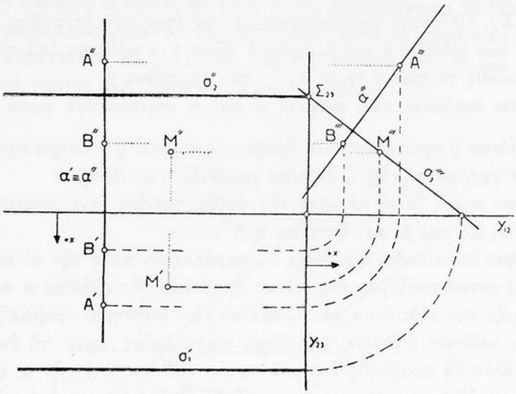
Πράγματι, ἂν Σ_1''', Σ_2''' αἱ τρίται προβολαὶ τῶν σημείων Σ_1, Σ_2 θὰ εἶναι $\overline{\Sigma_y \Sigma_2'''} = \overline{\Sigma_2' \Sigma_2''} = \overline{A \Sigma_2'}$, ὁπότε τὰ τρίγωνα $\Sigma_1''' \Sigma_y \Sigma_2'''$ καὶ $\Sigma_1' A \Sigma_2'$ εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως αἱ εὐθεῖαι α καὶ α''' ἰσοκλίνουν πρὸς τὸν ἄξονα y_{13} χωρὶς νὰ εἶναι παράλληλοι μεταξύ των.

102. Νὰ ἀχθῇ διὰ σημείου Μ (Μ', Μ'') ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ δοθεῖσαν ἐγκαρσίαν εὐθεῖαν.

Ἔστωσαν Α (Α', Α''), Β (Β', Β'') τὰ καθορίζοντα τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν α σημεῖα αὐτῆς (Σχ. 106).

Εἰσάγομεν ἐπίπεδον e_3 κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12} τέμνον τὸ ἐπίπεδον e_2 κατὰ τὴν εὐθεῖαν y_{23} εἰς τὸ νέον σύστημα e_2, e_3 ἡ εὐθεῖα α θὰ ἔχῃ προβολὰς α'', α''' καὶ τὸ σημεῖον Μ τὰς Μ'', Μ'''.

Ἐκ τοῦ σημείου Μ (Μ'', Μ''') φέρομεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν

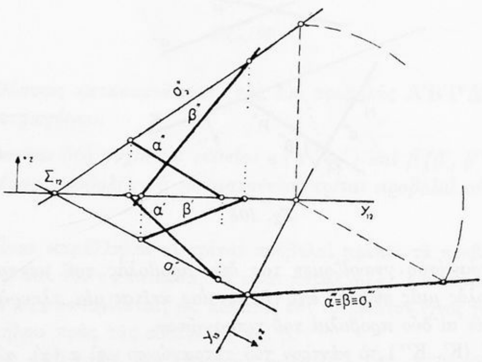


Σχ. 106

α (α'', α'''). Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἔχει ἴχνη σ_3''', σ_2''. Ἐπανερχόμενοι τώρα εἰς τὸ παλαιὸν σύστημα προβολῆς e_1, e_2 εὑρίσκομεν καὶ τὸ πρῶτον ἴχνος σ_1' τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου.

103. Νὰ ἀντικατασταθῇ τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον προβολῆς, οὕτως ὥστε δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι, νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν κατακόρυφον προβολήν.

Ἔστωσαν α (α', α'') καὶ β (β', β'') αἱ τεμνόμεναι εὐθεῖαι καὶ p (σ_1', σ_2'') τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον ὁρίζουν αὗται.



Σχ. 107

Διὰ νὰ ἔχουν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι τὴν αὐτὴν κατακόρυφον προβολὴν ἀρκεῖ τὸ νέον ἐπίπεδον προβολῆς e_3 νὰ ληφθῇ κάθετον ἐπὶ τὸ πρῶτον ἴχνος σ_1' τοῦ ἐπιπέδου p.

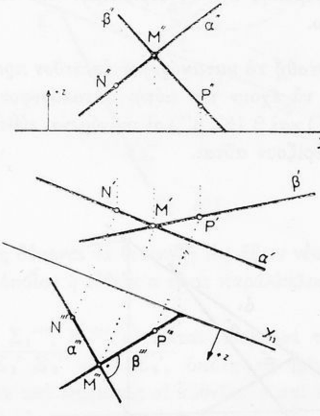
Εἰς τὸ Σχ. 107 ἀφοῦ κατεσκευάσθησαν τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου p τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῶν εὐθειῶν α καὶ β, ἤχθη ὁ ἄξων y_{13} κάθετος ἐπὶ τὸ ἴχνος σ_1' καὶ κατεσκευάσθη τὸ τρίτον ἴχνος σ_3''' τοῦ ἐπιπέδου p.

Αἱ τρίται προβολαὶ τῶν εὐθειῶν α καὶ β συμπίπτουν μετὰ τοῦ σ_3'''.

104. Δίδεται ἡ πρώτη προβολὴ ὀρθῆς γωνίας καὶ ἡ δευτέρα προβολὴ μιᾶς τῶν πλευρῶν της, νὰ εὑρεθῇ ἡ δευτέρα προβολὴ τῆς ἄλλης.

Ἔστωσαν α καὶ β αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας τῶν ὁποίων δίδονται αἱ προβολαὶ α′, α″ καὶ β′ καὶ ζητεῖται ἡ β″.

Θεωροῦμεν ἓν ἐπίπεδον προβολῆς e_3 παράλληλον πρὸς τὴν α′ καὶ κάθετον ἐπὶ τὸ e_1 καὶ κατασκευάζομεν τὰς τρίτας προβολὰς τῆς εὐθείας α καὶ τοῦ σημείου Μ, τομῆς τῶν εὐθειῶν α καὶ β. Εἰς τὸ νέον σύστημα προβολῆς e_1, e_3 ἡ μία τῶν δύο καθέτων εὐθειῶν, ἡ α, εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον e_3, ἑπομένως ἡ ἄλλη θὰ προβληθῇ ἐπὶ τοῦ e_3 ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν α (Σχ. 108). Ἐκ τοῦ σημείου Μ‴ συνεπῶς, φέρομεν εὐθεῖαν β‴ κάθετον ἐπὶ τὴν α‴ καὶ ἐν συνεχείᾳ κατασκευάζομεν τὴν δευτέραν προβολὴν β″ τῆς εὐθείας β.



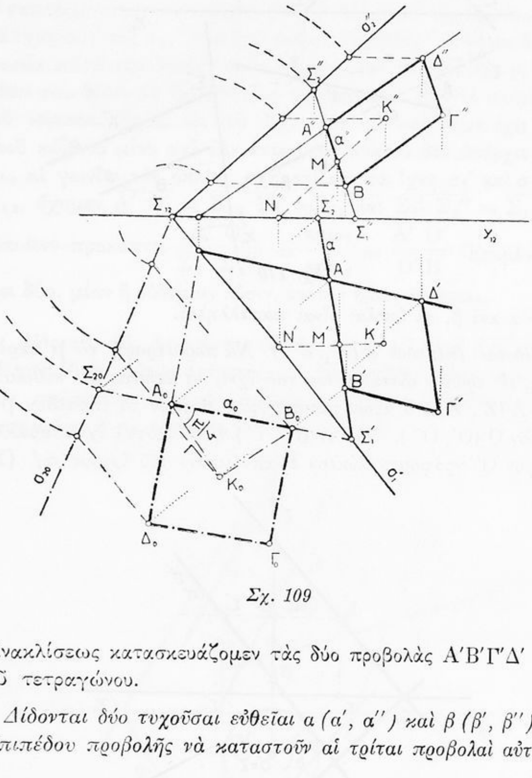
Σχ. 108

105. Τετραγώνου γνωρίζομεν τὰς δύο προβολὰς τοῦ κέντρου του καὶ τὰς δύο προβολὰς μιᾶς εὐθείας ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται μία πλευρὰ αὐτοῦ. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ τοῦ τετραγώνου.

Ἔστω Κ (Κ′, Κ″) τὸ κέντρον τοῦ τετραγώνου καὶ α (α′, α″) ἡ εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται μία τῶν πλευρῶν του.

Λαμβάνοντες τυχὸν σημεῖον Μ (Μ′, Μ″) τῆς εὐθείας α, φέρομεν τὴν

Κ Μ (Κ'Μ', Κ''Μ'') καὶ κατασκευάζομεν τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου p τοῦ ὁριζομένου διὰ τῶν εὐθειῶν α καὶ Κ Μ (Σχ. 109). Κατακλίνομεν τὸ ἐπίπεδον p ἐπὶ τοῦ e_1 καὶ κατασκευάζομεν ἐν τῇ κατακλίσει, κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς Γεωμετρίας, τὸ τετράγωνον A_0 B_0 Γ_0 Δ_0, ἐκ τοῦ κέντρου του K_0 καὶ ἐκ τῆς συνθήκης τοῦ νὰ κεῖται μία πλευρὰ του ἐπὶ τῆς α_0.



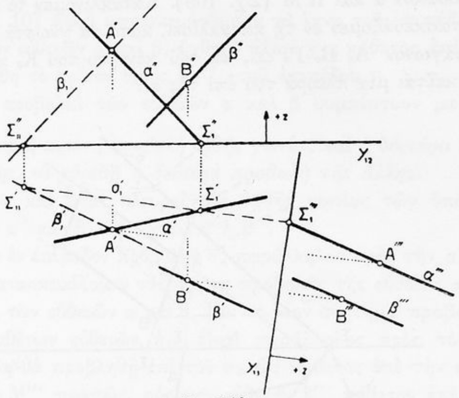
Σχ. 109

Δι' ἀνακλίσεως κατασκευάζομεν τὰς δύο προβολὰς Α'Β'Γ'Δ' καὶ Α''Β'' Γ''Δ'' τοῦ τετραγώνου.

106. Δίδονται δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι α (α', α'') καὶ β (β', β''). Διὰ μιᾶς ἀλλαγῆς ἐπιπέδου προβολῆς νὰ καταστοῦν αἱ τρίται προβολαὶ αὐτῶν παράλληλοι.

Διὰ νὰ εἶναι παράλληλοι αἱ τρίται προβολαὶ πρέπει τὰ προβάλλοντα τὰς εὐθείας α καὶ β ἐπὶ τοῦ e_3 ἐπίπεδα, νὰ εἶναι παράλληλα. Ἑπομένως ἡ διεύθυνσις τοῦ ἄξονος y_{13} καθορίζεται, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ πρῶτον ἴχνος τυχόντος ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς εὐθείας α καὶ β.

Εἰς τὸ σχ. 110 ἤχθη, διὰ τυχόντος σημείου Α (Α', Α''), τῆς εὐθείας α, εὐθεῖα β_1 (β_1', β_1'') παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν β καὶ κατεσκευάσθη τὸ πρῶτον ἴχνος σ_1' τοῦ ἐπιπέδου τῶν εὐθειῶν α καὶ β. Ὁ ἄξων y_{13} ἐλήφθη κάθετος ἐπὶ τὸ ἴχνος σ_1' καὶ κατεσκευάσθησαν αἱ τρίται προβολαὶ α''' καὶ β''',

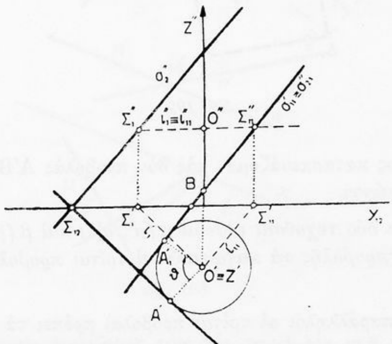


Σχ. 110

τῶν εὐθειῶν α καὶ β, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι.

107. Δίδεται ἐπίπεδον p (σ'_1, σ''_2). Νὰ περιστραφῇ τὸ p περὶ κατακόρυφον ἄξονα, εἰς τρόπον ὥστε τὰ νέα του ἴχνη νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἔστω Z (Z′, Z″) ὁ ἄξων περιστροφῆς τέμνων τὸ ἐπίπεδον p (σ′, σ″) εἰς τὸ σημεῖον O (O′, O″), καὶ i_1 (i_1', i'') ἡ δι' αὐτοῦ ἰχνοπαράλληλος τοῦ p. Μὲ κέντρον O′ γράφομεν κύκλον ἐφαπτόμενον τοῦ ἴχνους σ_1' (Σχ. 111).

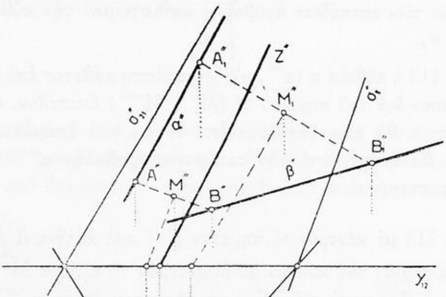


Σχ. 111

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι μετὰ περιστροφὴν κατὰ γωνίαν θ τὸ ἐπίπεδον p συνέπεσεν μετὰ τοῦ ἐπιπέδου p_1 $(\sigma_{11}', \sigma_{21}'')$, τοῦ ὁποίου τὰ ἴχνη συμπίπτουν. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν περιστροφὴν τὸ σημεῖον O παραμένει σταθερόν, ἔπεται ὅτι ἡ ἰχνοπαράλληλος i_{11} (i'_{11}, i''_{11}) αὐτοῦ, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον p_1, θὰ ἔχῃ δεύτερον ἴχνος Σ''_{11} κείμενον ἐπὶ τῶν ἰχνῶν $\sigma'_{11} \equiv \sigma''_{21}$. Ἀλλὰ τὸ ἴχνος σ'_{11} ἐφάπτεται τοῦ ὡς ἄνω κύκλου. Ἐὰν λοιπὸν B τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ἰχνῶν $\sigma'_{11} \equiv \sigma''_{21}$ μετὰ τῆς Z'', θὰ εἶναι $\overline{\Sigma'_{11}\,\Sigma''_{11}} = \overline{O'\,B} = \overline{\Sigma'_1\,\Sigma''_1}$. Ἐντεῦθεν προκύπτει ἡ ἑξῆς κατασκευή.

Ἐπὶ τῆς O' Z'' λαμβάνομεν τμῆμα $\overline{O'\,B} = \overline{\Sigma'_1\,\Sigma''_1}$ καὶ ἐκ τοῦ σημείου B φέρομεν ἐφαπτομένην εἰς τὸν κύκλον (O', O A'). Ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης ταύτης κεῖνται τὰ ἴχνη σ'_{11} καὶ σ''_{21} τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου. Ἡ γωνία $A'\,O'\,A'_1 = \theta$ εἶναι ἡ γωνία κατὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ στραφῇ τὸ ἐπίπεδον p, οὕτως ὥστε εἰς τὴν νέαν του θέσιν τὰ ἴχνη του νὰ συμπίπτουν. Ἐὰν τὸ σημεῖον B κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ὅπως εἰς τὸ Σχ. 111, τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, ἐὰν ἐπὶ τοῦ κύκλου μίαν καὶ ἐὰν ἐντὸς τοῦ κύκλου δὲν ὑπάρχει λύσις. Ἐὰν ω_1 καὶ ω_2 αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας σχηματίζουν τὰ ἴχνη σ'_1 καὶ σ''_2 μετὰ τοῦ ἄξονος y_{12}, ἔχομεν $\overline{A'\,O'} = \overline{\Sigma_{12}\,\Sigma'_1}\;\text{ημ}\omega_1$ καὶ $\overline{\Sigma'_1\,\Sigma''_1} = \overline{\Sigma_{12}\,\Sigma'_1}\;\text{εφ}\omega_2$, ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτει $\dfrac{\overline{A'\,O'}}{\overline{\Sigma'_1\,\Sigma''_2}} = \dfrac{\text{ημ}\omega_1}{\text{εφ}\omega_2} = \dfrac{\overline{A'\,O'}}{\overline{O'\,B}}$. Ἑπομένως τὸ πρόβλημα ἔχει δύο, μίαν ἢ οὐδεμίαν λύσιν, ἐφόσον $\text{ημ}\omega_1 \gtreqless \text{εφ}\omega_2$.

108. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι α (α', α'') καὶ β (β', β'') καὶ δύο σημεῖα A καὶ B ἐπ' αὐτῶν ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄξων περιστροφῆς περὶ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ στραφῇ ἡ εὐθεῖα α, διὰ νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν εὐθεῖαν β καὶ τὸ σημεῖον A νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ σημεῖον B.



Σχ. 112

Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς εὐθείας α σημεῖον A_1 καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας β σημεῖον B_1, τοιοῦτον ὥστε $\overline{A A_1} = \overline{B B_1}$. Ὑπάρχουν δύο σημεῖα ἐπὶ τῆς εὐθείας β ἱκανοποιοῦντα τὴν σχέσιν ταύτην. Ἔστω Z (Z′, Z″) ὁ ζητούμενος ἄξων.

Διὰ νὰ συμπέσῃ τὸ σημεῖον A ἐπὶ τοῦ B στρεφόμενον περὶ τὸν ἄξονα Z, πρέπει κάθε σημεῖον τοῦ ἄξονος νὰ ἰσαπέχῃ τῶν σημείων A καὶ B. Ἑπομένως ὁ ἄξων Z θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ μεσοκαθέτου ἐπὶ τὸ τμῆμα $\overline{A B}$ ἐπιπέδου.

Ὁμοίως διὰ νὰ συμπέσῃ τὸ σημεῖον A_1 ἐπὶ τοῦ B_1, στρεφόμενον περὶ τὸν ἄξονα Z, πρέπει κάθε σημεῖον τοῦ ἄξονος νὰ ἰσαπέχῃ τῶν σημείων A_1 καὶ B_1. Ἑπομένως ὁ ἄξων Z θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ μεσοκαθέτου ἐπὶ τὸ τμῆμα $\overline{A_1 B_1}$ ἐπιπέδου. Ὁ ἄξων, συνεπῶς, Z θὰ προκύψῃ ὡς ἡ τομὴ τῶν μεσοκαθέτων ἐπιπέδων ἐπὶ τὰ τμήματα $\overline{A B}$ καὶ $\overline{A_1 B_1}$.

Εἰς τὸ Σχ. 112 ἀφοῦ ἐλήφθη αὐθαιρέτως τὸ σημεῖον A_1, κατεσκευάσθη τὸ σημεῖον B_1 (B_1', B_1'') τοιοῦτον ὥστε $\overline{A A_1} = \overline{B B_1}$. Ἤχθησαν τὰ ἐπίπεδα p ($\sigma_1'$, σ_2'') καὶ p (σ_{11}', σ_{21}''), κάθετα ἀντιστοίχως εἰς τὰ μέσα M καὶ M_1 τῶν τμημάτων $\overline{A B}$ καὶ $\overline{A_1 B_1}$. Ἡ εὐθεῖα Z (Z′, Z″) τῆς τομῆς τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων εἶναι ὁ ζητούμενος ἄξων.

109. Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθεῖαν, δοθεῖσαν ἀπόστασιν. Διερεύνησις.

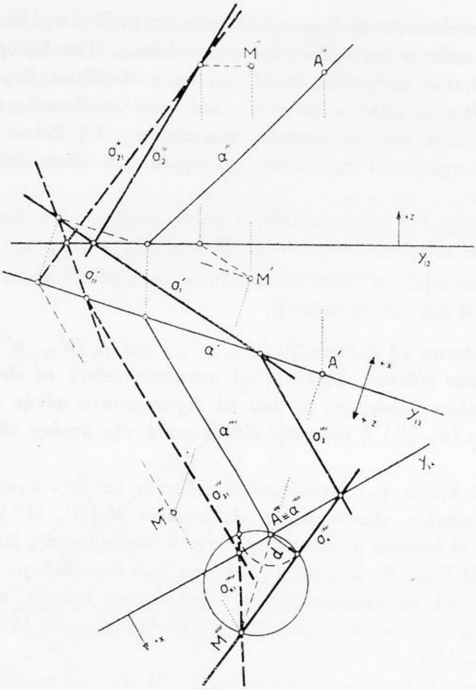
Ἔστω M (M′, M″) τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ α(α′, α″) ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα· Διὰ δύο ἀλλαγῶν τῶν ἐπιπέδων προβολῆς καθιστῶμεν τὴν εὐθεῖαν α κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον e_4.

Εἰς τὸ Σχ. 113 ἡ εὐθεῖα α (α‴, α⁗) κατέστη κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον e_4.

Τὸ ζητούμενον διὰ τοῦ σημείου M (M‴, M⁗) ἐπίπεδον, ὡς παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν α θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ e_4 καὶ ἑπομένως τὸ τέταρτον ἴχνος του σ_4'''' θὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τὴν τετάρτην προβολὴν α⁗ τῆς εὐθείας α, τὴν δοθεῖσαν ἀπόστασιν d.

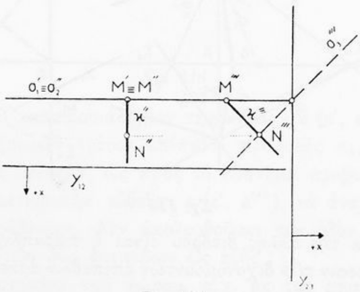
Εἰς τὸ Σχ. 113 μὲ κέντρον τὸ σημεῖον α⁗ καὶ ἀκτῖνα d ἐγράφη κύκλος. Ὁ κύκλος οὗτος τέμνει τὸν κύκλον μὲ διάμετρον τὸ τμῆμα $\overline{M'''' \alpha''''}$ εἰς σημεῖον τὸ ὁποῖον ὁρίζει μετὰ τοῦ M⁗ τὸ τέταρτον ἴχνος σ_4'''' τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου.

Τὸ πρόβλημα ἔχει δύο, μίαν ἢ οὐδεμίαν λύσιν, ἐφόσον ἡ δοθεῖσα ἀπόστασις d εἶναι μικροτέρα, ἴση ἢ μεγαλυτέρα τοῦ τμήματος $\overline{M'''' \alpha''''}$. Εἰς τὸ Σχῆμα εἶναι σχεδιασμέναι αἱ δύο λύσεις σ_4'''' καὶ σ_{41}''''. Τὰ τρίτα ἴχνη σ_3''' καὶ σ_{31}''' εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{34}. Ἐν συνεχείᾳ κατεσκευάσθησαν τὰ ἴχνη σ_1' καὶ σ_{11}' τῶν δύο ἐπιπέδων, συναρτήσει τῶν τρίτων ἰχνῶν των καὶ τῶν προβολῶν M′, M‴ τοῦ σημείου M. Τέλος κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον κατεσκευάσθησαν τὰ ἴχνη σ_2'', σ_{21}'' τῶν δύο ἐπιπέδων.



Σχ. 113

110. Ἐπιπέδου ρ τὰ ἴχνη εἶναι παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα y_{12} καὶ συμπίπτοντα ἐπὶ τοῦ πίνακος σχεδιάσεως. Σημείου Μ αἱ δύο προβολαὶ κεῖνται ἐπὶ τῶν ἰχνῶν τοῦ ἐπιπέδου ρ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Μ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ρ.



Σχ. 114

Διὰ νὰ συμπίπτουν τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου p ($\sigma_1' \equiv \sigma_2''$) πρέπει νὰ εἶναι, ὡς γνωστόν, κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως. Ἐπειδὴ ὅμως πρέπει τὰ ἴχνη αὐτὰ νὰ εἶναι συγχρόνως παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}, ἕπεται ὅτι τὸ ἐπίπεδον p θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ e_{24} καὶ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}, δηλαδὴ παράλληλα πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας. Ἐξ ἄλλου ἐπειδὴ αἱ δύο προβολαὶ τοῦ σημείου Μ συμπίπτουν, τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμπτώσεως.

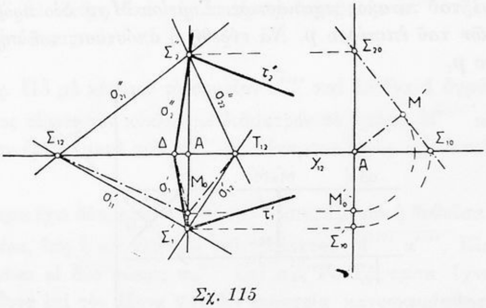
Εἰς τὸ Σχ. 114 κατεσκευάσθη ἡ τρίτη προβολὴ ἐπὶ ἐπιπέδου e_3 τοῦ σημείου Μ καὶ τὸ τρίτον ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου p. Ἐκ τοῦ σημείου Μ (Μ'', Μ''') ἤχθη ἡ κάθετος κ (κ'', κ''') ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον p καὶ εὑρέθη ἡ ἀπόστασις $\overline{M''' N'''}$ τοῦ σημείου Μ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου p.

111. Δίδονται τὰ ἐπίπεδα p_1 (σ'_{11}, σ''_{21}) καὶ p_2 (σ'_{12}, σ''_{22}), τεμνόμενα κατὰ ἐγκαρσίαν εὐθεῖαν. Ζητεῖται νὰ κατασκευασθοῦν αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι τῆς διέδρου γωνίας p_1, p_2 καὶ τὰ διχοτομοῦντα αὐτὴν ἐπίπεδα.

Ἔστω α (α', α'') ἡ ἐγκαρσία εὐθεῖα κατὰ τὴν ὁποίαν τέμνονται τὰ p_1 καὶ p_2.

Διὰ τοῦ ἄξονος y_{12} θεωροῦμεν τὸ κάθετον ἐπὶ τὴν ἐγκαρσίαν εὐθεῖαν α (α', α'') ἐπίπεδον, τέμνον ταύτην εἰς σημεῖον Μ (Μ', Μ''). Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τὰ ἐπίπεδα p_1 καὶ p_2 κατὰ τὴν ἀντίστοιχον τῆς διέδρου ἐπίπεδον γωνίαν $\Sigma_{12}\, M\, T_{12}$, ἔνθα Σ_{12} καὶ T_{12} τὰ ἴχνη τῶν ἐπιπέδων p_1 καὶ p_2 ἐπὶ τοῦ ἄξονος y_{12}. Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν γωνίαν ταύτην, εὑρίσκομεν διὰ μιᾶς προβολῆς ἐπὶ ἐγκαρσίου ἐπιπέδου, τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς Μ ὕψος Μ Α τοῦ τριγώνου $\Sigma_{12}\, M\, T_{12}$.

Εἰς τὸ σχ. 115 ἔχει γίνει ἡ κατάκλισις $\Sigma_{12}\, M_0\, T_{12}$ τοῦ τριγώνου $\Sigma_{12}\, M\, T_{12}$ καὶ ἔχει οὕτως εὑρεθῆ ἡ ἀντίστοιχος τῆς διέδρου ἐπίπεδος γωνία $\Sigma_{12}\, M_0\, T_{12}$.



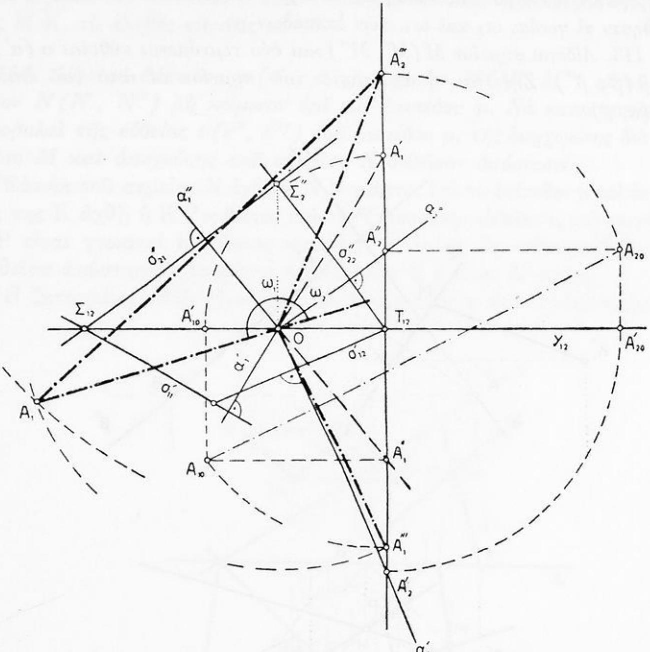
Σχ. 115

Ἡ ἐπίπεδος γωνία τῆς ἄλλης διέδρου εἶναι ἡ παραπληρωματικὴ τῆς εὑρεθείσης. Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν διχοτομούντων ἐπιπέδων ἀρκεῖ νὰ κατασκευασθοῦν τὰ ἴχνη αὐτῶν ἐπὶ τοῦ ἄξονος y_{12}.

Τὸ ἴχνος ἐπὶ τοῦ ἄξονος y_{12} τοῦ διχοτομοῦντος ἐπιπέδου τήν, εἰς τὴν κυρτὴν γωνίαν Σ_{12} M T_{12}, ἀντιστοιχοῦσαν δίεδρον, συμπίπτει μὲ τὸ ἴχνος τῆς διχοτόμου τῆς κατακλίσεως Σ_{12} M_0 T_{12} τῆς ἐπιπέδου γωνίας. Ὅθεν τὰ ἴχνη τοῦ διχοτομοῦντος τούτου ἐπιπέδου εἶναι τὰ Δ Σ_1' καὶ Δ Σ_2''.

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρέθησαν τὰ ἴχνη τ_1' καὶ τ_2'' τοῦ διχοτομοῦντος τὴν παραπληρωματικὴν τῆς διέδρου.

112. Δίδονται τὰ ἐπίπεδα p_1 (σ'_{11}, σ''_{21}) καὶ p_2 (σ'_{12}, σ''_{22}). Ζητεῖται νὰ κατασκευασθοῦν αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι τῆς διέδρου γωνίας p_1, p_2 καὶ τὰ διχοτομοῦντα αὐτὴν ἐπίπεδα.



Σχ. 116

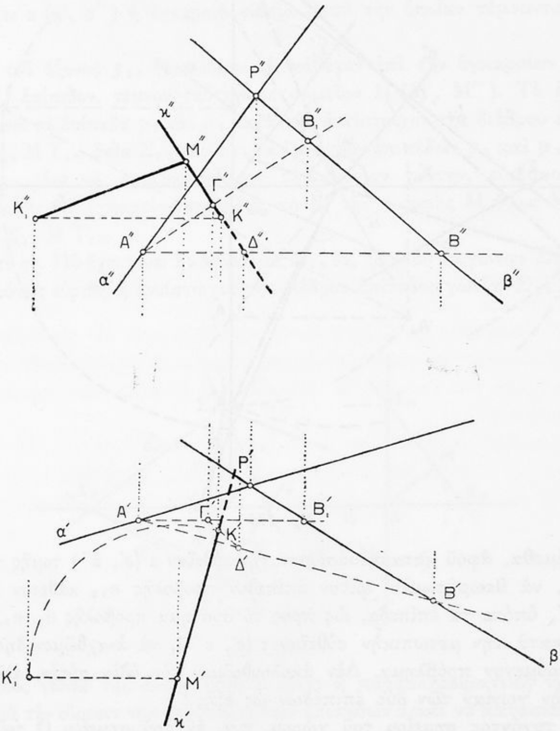
Δυνάμεθα, ἀφοῦ κατασκευάσωμεν τὴν εὐθεῖαν ε (ε', ε'') τομῆς τῶν δύο ἐπιπέδων, νὰ θεωρήσωμεν τρίτον ἐπίπεδον προβολῆς e_{13} κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ε', ὁπότε τὰ ἐπίπεδα, ὡς πρὸς τὸ σύστημα προβολῆς e_1, e_3, νὰ τέμνωνται κατὰ τὴν μετωπικὴν εὐθεῖαν ε (ε', ε'''), νὰ ἀναχθῶμεν δηλαδὴ εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα. Δὲν ἀκολουθοῦμεν τὸν ὁδὸν αὐτήν, ἀλλ' εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν τῶν δύο ἐπιπέδων ὡς ἑξῆς :

Ἐκ τυχόντος σημείου τοῦ χώρου, π.χ. ἐκ τοῦ σημείου Ο τοῦ ἄξονος (Σχ. 116), φέρομεν τὰς εὐθείας α_1 (α_1', α_1'') καὶ α_2 (α_2', α_2'') καθέτους ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα p_1 καὶ p_2. Αἱ γωνίαι τῶν δύο εὐθειῶν εἶναι παραπληρωματικαί, τῶν ἀντιστοίχων ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν διέδρων τῶν p_1 καὶ p_2.

Εἰς τὸ Σχ. 116 ἐθεωρήθη ἐγκάρσιον ἐπίπεδον τέμνον τὰς εὐθείας α_1 καὶ α_2 εἰς τὰ σημεῖα A_1 καὶ A_2 ἀντιστοίχως, τὸ ὁποῖον κατεκλίθη ἐπὶ τοῦ e_2. Τὰ σημεῖα A_{10} καὶ A_{20} εἶναι αἱ κατακλίσεις τῶν A_1 καὶ A_2.

Ἐλήφθη $\overline{T_{12}A_1'''} \equiv \overline{T_{12}A_{10}}$ καὶ εὑρέθη τὸ τμῆμα $\overline{OA_1'''}$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἀληθὲς μέγεθος τοῦ τμήματος $\overline{OA_1}$. Ὁμοίως, ἐλήφθη $\overline{T_{12}A_1'''} = \overline{T_{12}A_{20}}$ καὶ εὑρέθη τὸ τμῆμα $\overline{OA_2'''}$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἀληθὲς μέγεθος τοῦ τμήματος $\overline{OA_2}$. Τὸ τμῆμα τέλος $\overline{A_{10}A_{20}}$ εἶναι τὸ ἀληθὲς μέγεθος τοῦ τμήματος $\overline{A_1A_2}$. Τοῦ τριγώνου ἑπομένως OA_1A_2 γνωρίζομεν τὰς τρεῖς πλευράς. Τὸ τρίγωνον τοῦτο κατεσκευάσθη εἰς τὸ Σχ. 116 (εἶναι τὸ $OA_1'A_2'''$) καὶ εὑρέθησαν αἱ γωνίαι ω_1 καὶ ω_2, τῶν ἐπιπέδων p_1, p_2.

113. Δίδεται σημεῖον M (M′, M″) καὶ δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι α (α′, α″) καὶ β (β′, β″). Ζητεῖται ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου M ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου $p \equiv (\alpha, \beta)$.



Σχ. 117

Διὰ τοῦ σημείου Μ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν κ (κ', κ'') κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον p.

Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τυχοῦσαν πρώτην ἰχνοπαράλληλον τοῦ p π.χ. τὴν i_1 (i_1', i_1'') καὶ ἐκ τῆς προβολῆς Μ' τοῦ σημείου Μ, φέρομεν κάθετον κ' ἐπὶ τὴν i_1'. Ἐν συνεχείᾳ θεωροῦμεν τυχοῦσαν δευτέραν ἰχνοπαράλληλον i_2 (i_2', i_2'') καὶ ἐκ τῆς προβολῆς Μ'' τοῦ σημείου Μ, φέρομεν κάθετον κ'' ἐπὶ τὴν i_2'' (Σχ. 117).

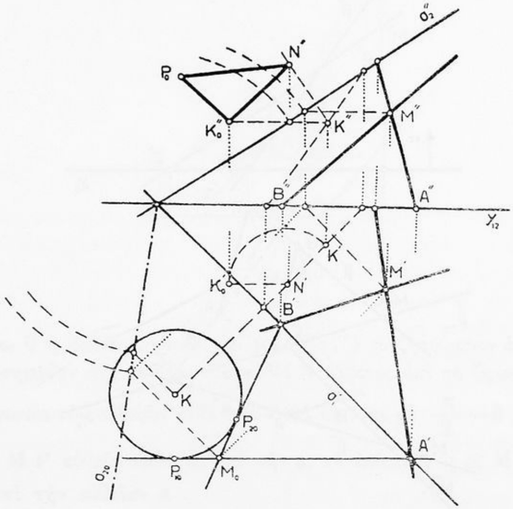
Ἡ εὐθεῖα κ (κ', κ'') εἶναι ἡ κάθετος ἐκ τοῦ σημείου Μ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον p.

Εἰς τὸ Σχῆμα εὑρέθη κατὰ τὰ γνωστὰ τὸ σημεῖον Κ (Κ', Κ''), τομὴ τῆς εὐθείας κ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου p καὶ ἐν συνεχείᾳ διὰ μιᾶς περιστροφῆς τοῦ τμήματος $\overline{\text{M K}}$, τὸ ἀληθὲς μέγεθος αὐτοῦ.

114. Δίδεται ἐπίπεδον p (σ'_1, σ''_2), σημεῖον Μ (Μ', Μ'') αὐτοῦ καὶ σημεῖον Ν (Ν', Ν'') μὴ κείμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ προβολαὶ τῆς εὐθείας ε (ε'', ε''') τοῦ ἐπιπέδου p, τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου Μ καὶ ἀπεχούσης τοῦ σημείου Ν δοθεῖσαν ἀπόστασιν.

Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Ν ἀχθῇ ἡ Ν Κ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον p καὶ ἐκ τοῦ ποδός της Κ ἀχθῇ ἡ Κ Ρ κάθετος ἐπὶ τὴν ζητουμένην εὐθεῖαν ε, τοῦ τριγώνου Ν Κ Ρ εἶναι γνωσταὶ ἡ κάθετος πλευρὰ $\overline{\text{N K}}$ καὶ ἡ ὑποτείνουσα $\overline{\text{N P}} = \text{d}$ (ἡ δοθεῖσα ἀπόστασις), ἑπομένως ἡ ἀπόστασις $\overline{\text{K P}}$ εἶναι ὡρισμένη.

Ἡ ζητουμένη εὐθεῖα εἶναι ἡ ἐκ τοῦ Μ ἐφαπτομένη εἰς τὸν κύκλον κέντρου



Σχ. 118

Κ καὶ ἀκτῖνος $\overline{K\,P}$. Εἰς τὸ Σχ. 118 ἤχθη ἡ ἐκ τοῦ σημείου Ν (Ν′, Ν″) κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον p καὶ εὑρέθη ὁ ποῦς Κ (Κ′, Κ″) τῆς καθέτου ταύτης.

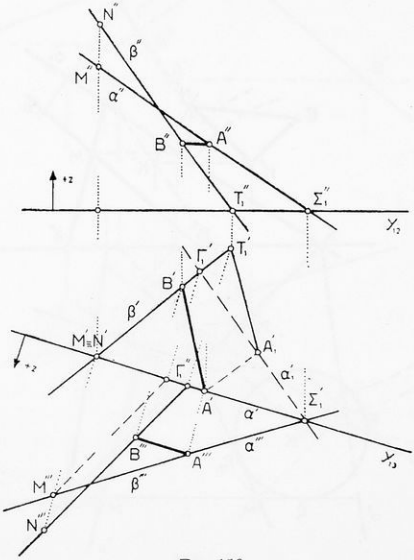
Διὰ μιᾶς περιστροφῆς περὶ κατακόρυφον ἄξονα διερχόμενον διὰ τοῦ Ν, κατεσκευάσθη τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῆς ἀποστάσεως $\overline{N\,K}$ τοῦ σημείου Ν ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου p. Εἰς τὸ σχέδιον εἶναι ἡ $\overline{N''\,K_0''}$.

Κατεσκευάσθη τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον Ν Κ Ρ ἐκ τῆς ὑποτεινούσης $\overline{N\,P} = d$ καὶ ἐκ τῆς καθέτου πλευρᾶς $\overline{N\,K}$ καὶ εὑρέθη ἡ πλευρὰ $\overline{K\,P}$, ἡ ἀπόστασις δηλαδὴ τῆς ζητουμένης διὰ τοῦ Μ εὐθείας τοῦ p ἀπὸ τοῦ σημείου Κ.

Ἐν συνεχείᾳ κατεκλίθη τὸ ἐπίπεδον p ἐπὶ τοῦ e_1 καὶ μὲ κέντρον K_0, κατάκλισιν τοῦ σημείου Κ καὶ ἀκτῖνα $\overline{K_0''\,P_0}$ ἐγράφη κύκλος. Ἐκ τῆς κατακλίσεως M_0 τοῦ σημείου Μ ἤχθησαν αἱ ἐφαπτόμεναι M_0P_{01} καὶ M_0P_{02} τοῦ κύκλου τούτου, τῶν ὁποίων κατόπιν δι᾽ ἀνακλίσεως εὑρέθησαν αἱ πρῶται καὶ δεύτεραι προβολαί. Αἱ εὐθεῖαι Μ Α (Μ′ Α′, Μ″ Α″) καὶ Μ Β (Μ′ Β′, Μ″ Β″) εἶναι αἱ ζητούμεναι εὐθεῖαι.

115. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι α (α′, α″) καὶ β (β′, β″). Νὰ ἀχθῇ ὁριζοντία εὐθεῖα ε τέμνουσα τὰς α καὶ β εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Β, εἰς τρόπον ὥστε τὸ τμῆμα $\overline{A\,B}$ νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχει λυθῇ εἰς τὴν § 30 τοῦ παρόντος. Ἔχει ὅμως δοθῇ ὡς πρόβλημα καὶ μετὰ τὰς Συστηματικὰς μεθόδους, διότι διὰ μιᾶς



Σχ. 119

ἀλλαγῆς ἐπιπέδου προβολῆς ἁπλοποιεῖται σημαντικῶς ἡ λύσις του. Πράγματι, λαμβάνομεν ὡς τρίτον ἐπίπεδον προβολῆς e_3, τὸ διερχόμενον διὰ τῆς πρώτης προβολῆς α′ τῆς εὐθείας α (Σχ. 119).

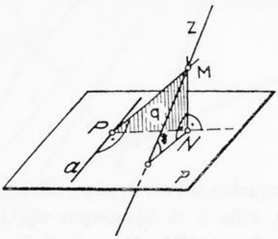
Εἰς τὸ σύστημα e_1, e_3, ἡ εὐθεῖα β ἔχει προβολὰς β′ καὶ β‴, ἐνῶ ἡ εὐθεῖα α κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_3 ἔχουσα προβολὰς $α' \equiv y_{13}$ καὶ α‴.

Εἰς τὸ Σχ. 119 ἐκ τοῦ σημείου Μ (Μ′, Μ‴) τῆς εὐθείας α ἤχθη παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν β, καὶ εὑρέθη τὸ πρῶτον ἴχνος $Γ_1$ ($Γ_1'$, $Γ_1'''$) τῆς παραλλήλου ταύτης.

Ἡ εὐθεῖα $Σ_1'$ $Γ_1'$ εἶναι τὸ πρῶτον ἴχνος τοῦ διὰ τῆς α (α′, α‴) ἐπιπέδου τοῦ παραλλήλου πρὸς τὴν εὐθεῖαν β (β′, β‴). Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον $Τ_1'$ καὶ ἀκτῖνα τὸ δοθὲν τμῆμα $\overline{AB}$ ἐγράφη κύκλος καὶ εὑρέθη ἐπὶ τοῦ ἴχνους $α_1'$ τὸ σημεῖον $Α_1'$. Ἐκ τοῦ $Α_1'$ ἤχθη ἡ $Α_1'$ Α′ παράλληλος πρὸς τὴν β′ καὶ ἡ Α′ Β′ παράλληλος καὶ ἴση πρὸς τὴν $Α_1'$ $Τ_1'$.

Ἐκ τῶν Α′ καὶ Β′ εὑρέθησαν τὰ Α″ καὶ Β″, καθὼς καὶ τὰ Α‴ καὶ Β‴. Τὸ τμῆμα $\overline{A\,B}$ ($\overline{A'\,B'}$, $\overline{A''\,B''}$) εἶναι τὸ ζητούμενον. Τὸ πρόβλημα θὰ ἔχῃ δύο, μίαν ἢ οὐδεμίαν λύσιν, ἐφόσον ὁ κύκλος ($Τ'_1$, $\overline{AB}$) τέμνει, ἐφάπτεται ἢ δέν τέμνει τὴν εὐθεῖαν $α_1'$. Εἰς τὸ Σχ. 119 ἔχει σχεδιασθῆ ἡ μία ἐκ τῶν δύο λύσεων.

116. Δίδεται εὐθεῖα α (α′, α″) καὶ κατακόρυφος εὐθεῖα Ζ (Ζ′, Ζ″). Νὰ κατασκευασθῇ ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς εὐθείας α καὶ σχηματίζον μετὰ τῆς εὐθείας Ζ γωνίαν δοθεῖσαν.



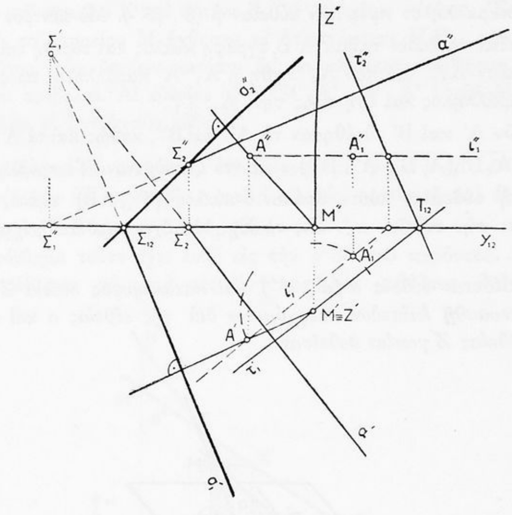
Σχ. 120

Ἔστω θ ἡ δοθεῖσα γωνία καὶ p ($σ_1'$ $σ_2''$) τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον. Ἐὰν Μ τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας Ζ καὶ Μ Ν κάθετος ἐπὶ τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον p, ἡ γωνία τῶν εὐθειῶν Μ Ν καὶ Ζ θὰ ἰσοῦται μὲ $\frac{\pi}{2} - \theta$ (Σχ. 120).

Ἐὰν Μ Ρ εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν α, τὸ ἐπίπεδον $q \equiv MNP$ θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν α.

Ἑπομένως δυνάμεθα νὰ τὸ κατασκευάσωμεν καὶ ἐπ' αὐτοῦ νὰ κατασκευάσωμεν εὐθεῖαν M N σχηματίζουσαν μετὰ τῆς εὐθείας Z γωνίαν ἴσην μὲ $\frac{\pi}{2} - \theta$ ἢ ὅπερ τὸ αὐτὸ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς e_1 γωνίαν θ.

Εἰς τὸ Σχ. 121 ἐλήφθη ἐπὶ τῆς εὐθείας Z (Z′, Z″) ἓν σημεῖον M (M′, M‴) (τὸ ἴχνος τῆς Z ἐπὶ τοῦ e_1) καὶ ἤχθη διὰ τοῦ σημείου M ἐπίπεδον q (τ_1', τ_2'') κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν α (α′, α″). Ἐπὶ τῆς τυχούσης ἰχνοπαραλλήλου i_1 (i_1', i''_1) τοῦ ἐπιπέδου q ἐλήφθη σημεῖον A (A′, A″), τοιοῦτον ὥστε ἡ εὐθεῖα M A σχηματίζει γωνίαν θ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς e_1.



Σχ. 121

Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ σημείου τούτου ἐγράφη κύκλος μὲ κέντρον τὸ σημεῖον M′ καὶ ἀκτῖνα ρ = υσφθ, ἔνθα υ τὸ ὑψόμετρον τῆς ἰχνοπαραλλήλου i_1, καὶ ὡρίσθη ἐπὶ τῆς i_1' τὸ σημεῖον A′. Ἐν συνεχείᾳ ἤχθη ἡ εὐθεῖα M A (M′ A′, M″ A″) καὶ τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον p (σ_1', σ_2'') τὸ διερχόμενον διὰ τῆς εὐθείας α καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν M A. Ἡ κατασκευὴ τῶν ἰχνῶν τοῦ ἐπιπέδου p ἐπιτυγχάνεται εὐκόλως, ἀρκεῖ νὰ ἀχθοῦν διὰ τῶν ἰχνῶν τῆς εὐθείας α εὐθεῖαι κάθετοι ἐπὶ τὰς προβολὰς τῆς εὐθείας M A, καθόσον αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι ἀσυμβάτως κάθετοι (βλέπε Ἄσκ. 74 τοῦ παρόντος).

Τὸ πρόβλημα δέχεται δύο, μίαν ἢ οὐδεμίαν λύσιν ἐφόσον, ὁ κύκλος κέντρου M′ καὶ ἀκτῖνος ρ = υσφθ τέμνει, ἐφάπτεται ἢ δὲν τέμνει τὴν προβολὴν i_1' τῆς ἰχνοπαραλλήλου i_1 (υ).

117. Δίδονται τὰ σημεῖα Α (50, 35, 0), Β (0, 0, 65), Γ (—40, 70,0) Δ (75, 0, 45). Διὰ τῆς εὐθείας Α Β ἄγεται ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας καὶ διὰ τῆς εὐθείας Γ Δ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως. Ζητοῦνται :

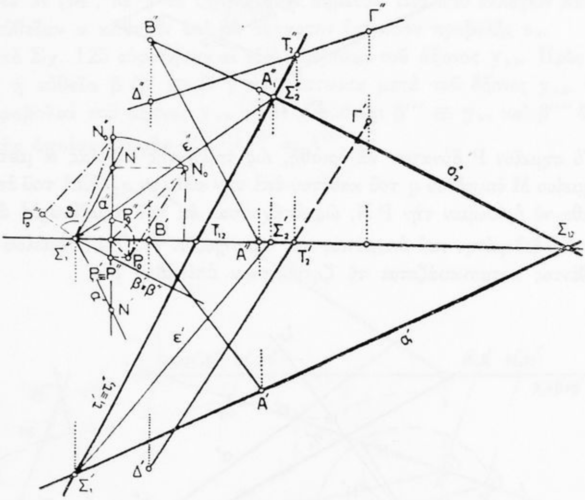
α΄) Αἱ δύο προβολαὶ τῆς τομῆς τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων.

β΄) Τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῆς ἀντιστοίχου ἐπιπέδου γωνίας, μιᾶς τῶν διέδρων.

Σημειοῦμεν ἐπὶ τοῦ πίνακος σχεδιάσεως τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Τὰ ἴχνη τοῦ διὰ τῆς Α Β ἐπιπέδου τοῦ καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας, θὰ διέρχωνται διὰ τῶν ὁμωνύμων ἰχνῶν τῆς Α Β καὶ θὰ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα.

Τὰ ἴχνη τοῦ διὰ τῆς Γ Δ ἐπιπέδου τοῦ καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως, θὰ διέρχωνται διὰ τῶν ἰχνῶν τῆς Γ Δ καὶ θὰ συμπίπτουν.

Εἰς τὸ Σχ. 122 τὰ ἴχνη ταῦτα εἶναι ἀντιστοίχως, τὰ σ_1', σ_2'' καὶ $Z_1' \equiv \tau_2''$.



Σχ. 122

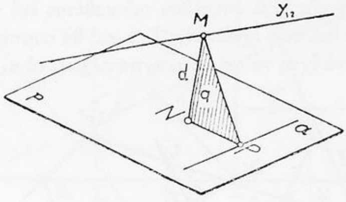
Ἡ ε (ε΄, ε΄΄) εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα τομῆς τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων.

Διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς ἀντιστοίχου ἐπιπέδου μιᾶς τῶν διέδρων τῶν δύο ὡς ἄνω ἐπιπέδων, ἤχθησαν ἐκ τοῦ σημείου Σ_1'' τοῦ ἄξονος y_{12} αἱ εὐθεῖαι α (α΄, α΄΄) καὶ β (β΄ ≡ β΄΄) κάθετοι ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα p (σ_1', σ_2'') καὶ q ($\tau_1' \equiv \tau_2''$) καὶ ἑπομένως κείμενα εἰς τὰ ἐπίπεδα συμμετρίας καὶ συμπτώσεως. Ἐλήφθη ἓν ἐγκάρσιον ἐπίπεδον μὴ διερχόμενον διὰ τοῦ Σ_1'' τέμνον τὰς εὐθείας α καὶ β εἰς τὰ σημεῖα Ν (Ν΄, Ν΄΄) καὶ Ρ (Ρ΄ ≡ Ρ΄΄), ἀντιστοίχως καὶ κατεκλίθη τὸ ἐγκάρσιον τοῦτο ἐπίπεδον, ἐπὶ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου προβολῆς. Ἐκ τῶν σημείων N_0 καὶ P_0 εὑρέθησαν τὰ ἀληθῆ μεγέθη $\overline{\Sigma_1'' N_0''}$ καὶ $\overline{\Sigma_1'' P_0''}$ τῶν τμημάτων $\overline{\Sigma_1'' N}$ καὶ $\overline{\Sigma_1'' P}$ καὶ κατεσκευάσθη τὸ ἀληθὲς σχῆμα τοῦ τριγώνου $\Sigma_1'' N P$.

Ἡ γωνία $N_0'' \Sigma_1'' P_0''$ εἶναι ἡ ζητουμένη ἐπίπεδος μιᾶς τῶν διέδρων.

118. Δίδεται εὐθεῖα α (α′, α″) καὶ σημεῖον M τοῦ ἄξονος y_{12}. *Νὰ ἀχθῇ διὰ τῆς εὐθείας α ἐπίπεδον ἀπέχον τοῦ σημείου M ἀπόστασιν δοθεῖσαν.*

Ἔστω p (σ_1', σ_2'') τὸ ζητούμενον διὰ τῆς εὐθείας α ἐπίπεδον, M N ἡ κάθετος ἐκ τοῦ σημείου M ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, καὶ M P ἡ κάθετος ἐκ τοῦ σημείου M ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν α. (Σχ. 123)



Σχ. 123

Τὸ σημεῖον P δύναται νὰ ὁρισθῇ, ὡς τομὴ τῆς εὐθείας α μετὰ τοῦ ἐκ τοῦ σημείου M ἐπιπέδου q τοῦ καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν α. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου q δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὴν P N, ὡς ἀπέχουσαν ἐκ τοῦ σημείου M ἀπόστασιν $\overline{MN} = d$ δεδομένην καὶ ἑπομένως καὶ τὸ σημεῖον N. Τοῦ σημείου N προσδιορισθέντος κατασκευάζεται τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον p.

Σχ. 124

Εἰς τὸ Σχ. 124, ἤχθη διὰ τοῦ σημείου Μ (Μ′ ≡ Μ′′) τὸ κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν α (α′, α′′) ἐπίπεδον q ($τ_1'$, $τ_2''$) καὶ εὑρέθη τὸ σημεῖον Ρ (Ρ′, Ρ′′) τομῆς τούτου καὶ τῆς εὐθείας α. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο κατεκλίθη ἐπὶ τοῦ e_1 καὶ ἐγράφη ἐν τῇ κατακλίσει ὁ κύκλος μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Μ καὶ ἀκτῖνα d.

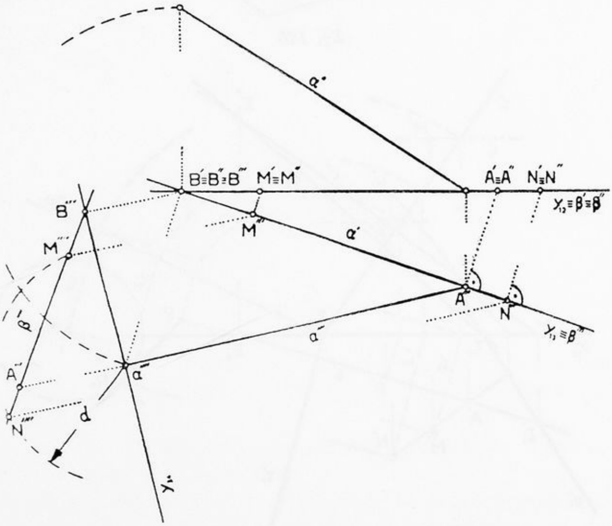
Ἐκ τῆς κατακλίσεως P_0 τοῦ σημείου Ρ, ἤχθη ἡ ἐφαπτομένη $P_0 N_0$ καὶ εὑρέθη τὸ σημεῖον N_0, ἐκ τοῦ ὁποίου καὶ κατεσκευάσθη δι' ἀνακλίσεως τὸ σημεῖον Ν (Ν′, Ν′′). Τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον p εἶναι τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς εὐθείας α καὶ τοῦ σημείου Ν καὶ εὑρέθησαν τὰ ἴχνη $σ_1'$ καὶ $σ_2''$ αὐτοῦ.

Τὸ πρόβλημα θὰ ἔχῃ δύο, μίαν ἢ οὐδεμίαν λύσιν, ἐφόσον τὸ σημεῖον P_0 κεῖται ἐκτός, ἐπὶ ἢ ἐντὸς τοῦ κύκλου (Μ′ ≡ Μ′′, d). Εἰς τὸ Σχ. 124 ἔχει σχεδιασθῆ ἡ μία ἐκ τῶν δύο λύσεων.

119. Δίδεται εὐθεῖα α (α′, α′′). Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον τοῦ ἄξονος y_{12} τοιοῦτον ὥστε ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τῆς εὐθείας α, νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τμῆμα.

Ἔστω Μ (Μ′, Μ′′) τὸ ζητούμενον σημεῖον. Διὰ δύο ἀλλαγῶν καθιστῶμεν τὴν εὐθεῖαν α κάθετον ἐπὶ τὸ τέταρτον ἐπίπεδον προβολῆς e_4.

Εἰς τὸ Σχ. 125 εὑρέθησαν αἱ νέαι προβολαὶ τοῦ ἄξονος y_{12}. Πρὸς τοῦτο ἐθεωρήθη ἡ εὐθεῖα β (β′ ≡ β′′) συμπίπτουσα μετὰ τοῦ ἄξονος y_{12}. Οὕτως αἱ νέαι προβολαὶ τοῦ ἄξονος y_{12} εἶναι αἱ εὐθεῖαι β′′′ ≡ y_{13} καὶ β′′′′ διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ὁποίας ἐλήφθη $\overline{α'''' A''''} = \overline{A''' A'}$.



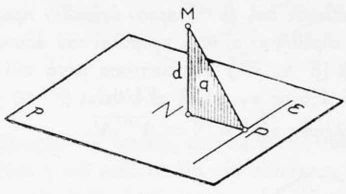
Σχ. 125

Ἡ ἐκ τοῦ σημείου M κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν α (α′, α″) μετὰ τὰς δύο ἀλλαγάς, θὰ προβάλλεται κατὰ τὸ ἀληθὲς μέγεθος, ἑπομένως τὸ σημεῖον M″″ θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς β″″ καὶ θὰ ἀπέχῃ τοῦ σημείου α″″, τετάρτης προβολῆς τῆς εὐθείας α, ἀπόστασιν d ἴσην πρὸς τὸ δοθὲν τμῆμα.

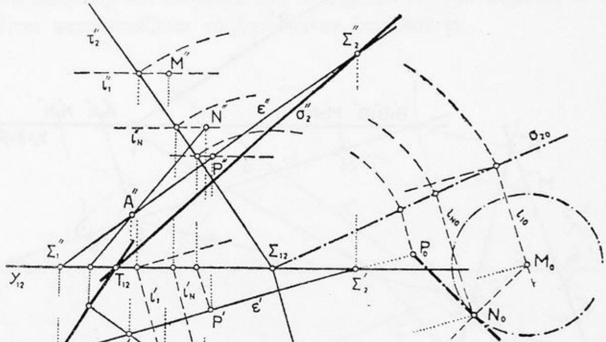
Μὲ κέντρον τὸ α″″ καὶ ἀκτῖνα d ἐγράφη κύκλος, ὅστις ἔτμησεν τὴν β″″ εἰς τὰ σημεῖα M″″ καὶ N″″. Ἐκ τῶν σημείων τούτων εὑρέθησαν τὰ σημεῖα M‴ καὶ N‴ ἐπὶ τῆς β‴ καὶ ἐν συνεχείᾳ τὰ σημεῖα $M' \equiv M''$ καὶ $N' \equiv N''$ ἐπὶ τοῦ ἄξονος $y_{12} \equiv \beta' \equiv \beta''$.

120. Δίδεται σημεῖον M (M′, M″) καὶ εὐθεῖα ε (ε′, ε″). Νὰ ἀχθῇ διὰ τῆς εὐθείας ε ἐπίπεδον p (σ_1, σ_2''), ἀπέχον τοῦ σημείου M ἀπόστασιν δοθεῖσαν.

Ἔστω p (σ_1', σ_2'') τὸ ζητούμενον διὰ τῆς εὐθείας ε ἐπίπεδον, M N ἡ κάθετος ἐκ τοῦ σημείου M ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο καὶ M P ἡ κάθετος ἐκ τοῦ σημείου M ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ε. Τὸ σημεῖον P δύναται νὰ ὁρισθῇ, ὡς τομὴ τῆς



Σχ. 126



Σχ. 127

εὐθείας ε μετὰ τοῦ ἐκ τοῦ σημείου M ἐπιπέδου q τοῦ καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ε. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου q δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὴν P N, ὡς ἀπέχουσαν ἐκ τοῦ σημείου M ἀπόστασιν $\overline{MN} = d$ (δεδομένην). Τοῦ σημείου N προσδιορισθέντος κατασκευάζεται τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον p (Σχ. 126).

Εἰς τὸ Σχ. 127 ἤχθη διὰ τοῦ σημείου M (M′, M‴) τὸ κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ε (ε′, ε″) ἐπίπεδον q (τ_1', τ_2'') καὶ εὑρέθη τὸ σημεῖον P (P′, P″) τομῆς τούτου καὶ τῆς εὐθείας ε. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο κατεκλίθη ἐπὶ τοῦ e_1 καὶ ἐγράφη ἐν τῇ κατακλίσει ὁ κύκλος μὲ κέντρον τὸ σημεῖον M_0 καὶ ἀκτῖνα d.

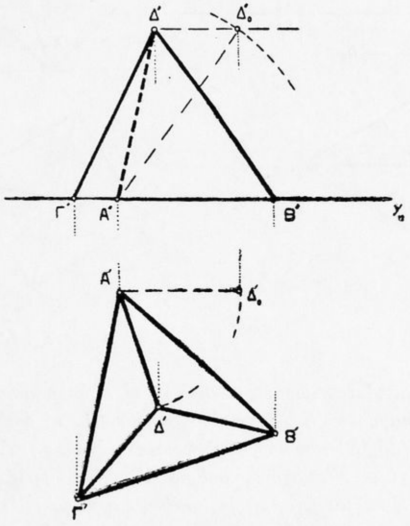
Ἐκ τῆς κατακλίσεως P_0 τοῦ σημείου P ἤχθη ἡ ἐφαπτομένη P_0 N_0 καὶ εὑρέθη τὸ σημεῖον N_0, ἐκ τοῦ ὁποίου καὶ κατεσκευάσθη δι' ἀνακλίσεως τὸ σημεῖον N (N′, N″). Τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον p εἶναι τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς εὐθείας ε καὶ τοῦ σημείου N, εὑρέθησαν δὲ τὰ ἴχνη σ_1' καὶ σ_2'' αὐτοῦ.

Τὸ πρόβλημα θὰ ἔχῃ δύο, μίαν ἢ οὐδεμίαν λύσιν, ἐφόσον τὸ σημεῖον P_0 κεῖται ἐκτός, ἐπὶ ἢ ἐντὸς τοῦ κύκλου (M_0, d). Εἰς τὸ Σχ. 127 ἔχει σχεδιασθῆ ἡ μία ἐκ τῶν δύο λύσεων.

§ 6. Ἐπὶ τῶν Πολυέδρων

*121. Κανονικοῦ τετραέδρου δίδονται αἱ κορυφ***αὶ** *Α (15, 0, 0) καὶ Β(38, 25, 0). Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ αὐτοῦ, ἂν ἡ μὲν κορυφὴ Γ κεῖται ἐπὶ τοῦ* ε_1*, ἔχουσα ἀπόστασιν μεγαλυτέραν ἐκείνης τῆς κορυφῆς Β, ἡ δὲ κορυφὴ Δ ἔχει θετικὸν ὑψόμετρον.*

Ἐκ τῶν δεδομένων κατασκευάζομεν τὰς δύο προβολὰς τῆς ἀκμῆς ΑΒ καὶ ἐκ τῆς συνθήκης $y_\Gamma > y_B$, κατασκευάζομεν τὰς δύο προβολὰς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ. Ἡ πρώτη προβολὴ τῆς κορυφῆς Δ θὰ εἶναι κέντρον



Σχ. 128

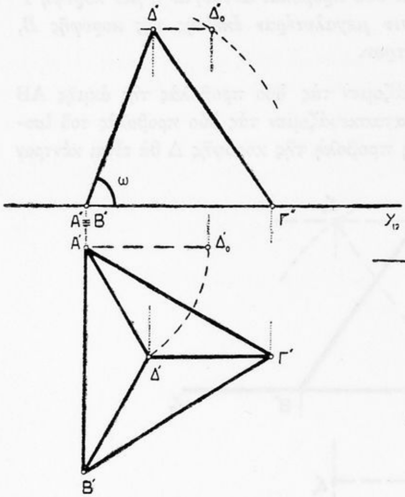
τοῦ τριγώνου Α′Β′Γ′. Γνωρίζοντες τὴν πρώτην προβολὴν τῆς κορυφῆς Δ καὶ τὸ μέγεθος τῆς ἀκμῆς ΑΔ = Α′Β′ κατασκευάζομεν τὴν δευτέραν προβολὴν τῆς κορυφῆς Δ.

Εἰς τὸ Σχ. 128 ἐλήφθη τὸ τμῆμα $Α'Δ_0'$ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα y_{12} καὶ ἴσον πρὸς τὸ τμῆμα Α′Δ′.

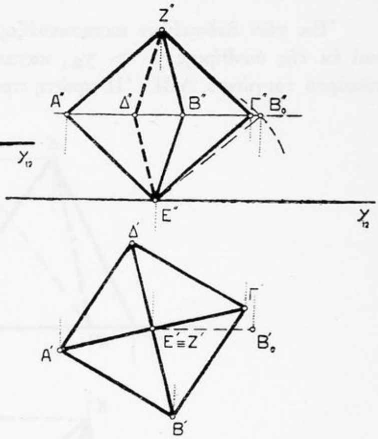
Μὲ κέντρον Α″ καὶ ἀκτῖνα Α′Β′ ἐγράφη κύκλος, ὅστις ἔτμησεν τὴν ἐκ τοῦ $Δ_0'$ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα εἰς σημεῖον $Δ''_0$ ἐκ τοῦ ὁποίου καὶ εὑρέθη τὸ σημεῖον Δ″.

122. Νὰ εὑρεθῇ ἡ δίεδρος γωνία κανονικοῦ τετραέδρου.

Κατασκευάζομεν ἓν κανονικὸν τετράεδρον ΑΒΓΔ εἰς εἰδικὴν θέσιν μὲ τὴν ἕδραν ΑΒΓ ἐπὶ τοῦ e_1 καὶ τὴν ἀκμὴν ΑΒ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12} (Σχ. 129). Ἡ γωνία ω = Γ″Α″Δ″ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος τῆς ζητουμένης διέδρου.



Σχ. 129



Σχ. 130

123. Κανονικοῦ ὀκταέδρου, εὑρισκομένου εἰς τὴν περιοχὴν I τοῦ χώρου καὶ ἔχοντος τὴν διαγώνιον ΕΖ κατακόρυφον, δίδονται αἱ ὁριζόντιοι προβολαὶ Α′ (25,0) καὶ Β′ (35,18) τῶν κορυφῶν Α καὶ Β αὐτοῦ, τῆς ἀκμῆς ΑΒ, οὔσης παραλλήλου πρὸς τὸ ε_1. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ τοῦ ὀκταέδρου, ἂν ἡ μὲν κορυφὴ Ε κεῖται ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ε_1, αἱ δὲ κορυφαὶ Γ καὶ Δ ἔχουν μικροτέρας ἀποστάσεις ἢ αἱ κορυφαὶ Α καὶ Β.

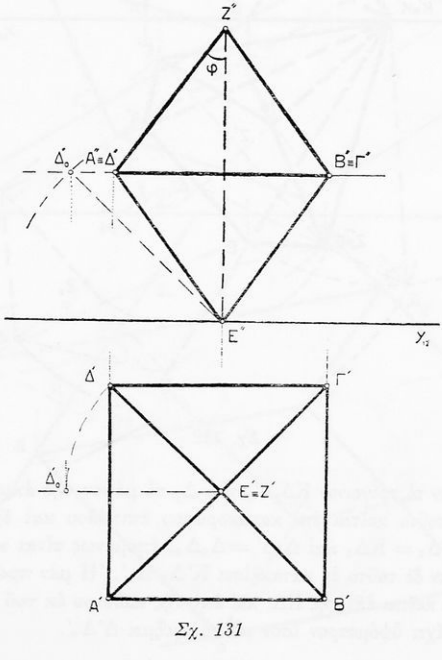
Κατασκευάζομεν τὰ σημεῖα Α′ καὶ Β′. Ἐπειδὴ ἡ διαγώνιος ΕΖ εἶναι κατακόρυφος τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ θὰ εἶναι ὁριζόντιον, ἑπομένως ἡ πρώτη προβολὴ αὐτοῦ Α′Β′Γ′Δ′ εἶναι τετράγωνον. Εἰς τὸ Σχ. 130 κατεσκευάσθη τὸ τετράγωνον τοῦτο, γνωστῆς οὔσης τῆς πλευρᾶς ΑΒ. Αἱ ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν Γ καὶ Δ εἶναι μικρότεραι τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν Α καὶ Β. Αἱ πρῶται προβολαὶ τῶν κορυφῶν Ε καὶ Ζ συμπίπτουν μετὰ τοῦ κέντρου τοῦ τετραγώνου Α′Β′Γ′Δ′. Ἡ δευτέρα προβολὴ τῆς κορυφῆς Β κατασκευάζεται κατὰ τὰ γνωστά, καθόσον γνωρίζομεν τὴν πρώτην προβολὴν Ε′Β′ τῆς πλευρᾶς ΕΒ, τὸ ἀληθὲς μέγεθος ταύτης, ἴσον πρὸς ΑΒ καὶ τὴν δευτέραν προβολὴν E'' τῆς κορυφῆς E. Ἐπὶ τῆς παραλλήλου τῆς ἀγομένης ἐκ τῆς δευτέρας προβολῆς B'' τῆς κορυφῆς B, θὰ κεῖνται αἱ δεύτεραι προβολαὶ τῶν κορυφῶν A, Γ, Δ. Ἡ δευτέρα προβολὴ Z'' τῆς κορυφῆς Z θὰ εἶναι συμμετρικὴ πρὸς τὴν E'' ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν A''B''Γ''Δ''.

124. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας σχηματίζει μία τῶν διαγωνίων κανονικοῦ ὀκταέδρου μεθ' ἑκάστης τῶν ἀκμῶν αὐτοῦ, καθὼς καὶ μεθ' ἑκάστης τῶν ἑδρῶν.

Ἑκάστη τῶν διαγωνίων τοῦ ὀκταέδρου τέμνει καθέτως τὰς ἄλλας δύο διαγωνίους αὐτοῦ, δύο δὲ διαγώνιοι αὐτοῦ εἶναι διαγώνιοι ἑνὸς τετραγώνου ἕπεται ὅτι ἑκάστη διαγώνιος σχηματίζει πρὸς τὰς ὀκτὼ ἀκμάς, αἱ ὁποῖαι συντρέχουν εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς γωνίας ἴσας πρὸς $\pi/4$, ἐνῷ βαίνει καθέτως πρὸς τὰς ἄλλας τέσσαρας ἀκμάς.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς γωνίας τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ διαγώνιος μετὰ τῶν ἑδρῶν τοῦ ὀκταέδρου ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν ἓν κανονικὸν ὀκτάεδρον ΑΒΓΔΕΖ εἰς εἰδικὴν θέσιν μὲ τὴν διαγώνιον ΕΖ κατακόρυφον καὶ τὴν ἀκμὴν ΑΒ παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον e_2.

Ἡ γωνία $\varphi = A''Z''E''$ εἶναι ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ διαγώνιος ΕΖ μετὰ τῆς ἕδρας ΑΖΔ καὶ ἑπομένως καὶ μὲ κάθε ἄλλην ἕδραν τοῦ ὀκταέδρου (Σχ. 131).

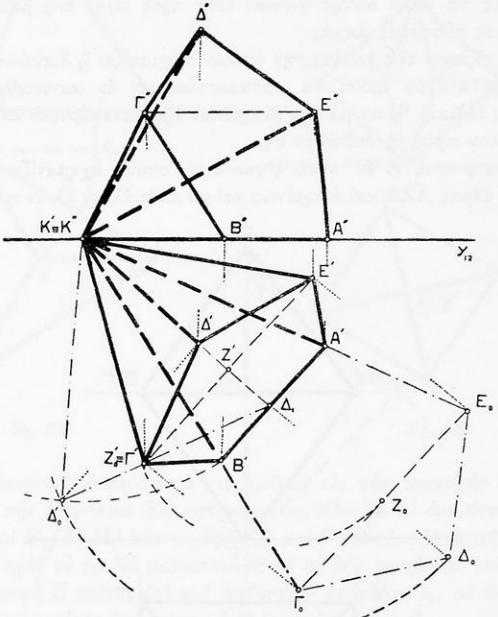


Σχ. 131

125. Ἰσοσκελοῦς πυραμίδος ἐχούσης ὡς βάσιν κανονικὸν πεντάγωνον καὶ εὑρισκομένης εἰς τὴν περιοχὴν I τοῦ χώρου, δίδονται ἡ κορυφὴ K (0, 10, 0) καὶ ἡ κορυφὴ A (18, 50, 0) τῆς βάσεως. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ αὐτῆς, δεδομένου ὅτι ἡ πλευρὰ AB τῆς βάσεως μήκους 25 χιλ. κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ε_1.

Ἐπειδὴ ἡ ἀκμὴ AB κεῖται ἐπὶ τοῦ e_1, ἡ ἕδρα KAB, ἡ ὁποία εἶναι ἰσοσκελὲς τρίγωνον, κεῖται ἐπίσης ἐπὶ τοῦ e_1, συνεπῶς εἶναι κατασκευάσιμος.

Μὲ πλευρὰν A′B′ κατασκευάζομεν ἐπὶ τοῦ e_1, κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς Γεωμετρίας, κανονικὸν πεντάγωνον $A'B'\Gamma_0\Delta_0E_0$, κατάκλισιν τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ τῆς ἰσοσκελοῦς πυραμίδος.



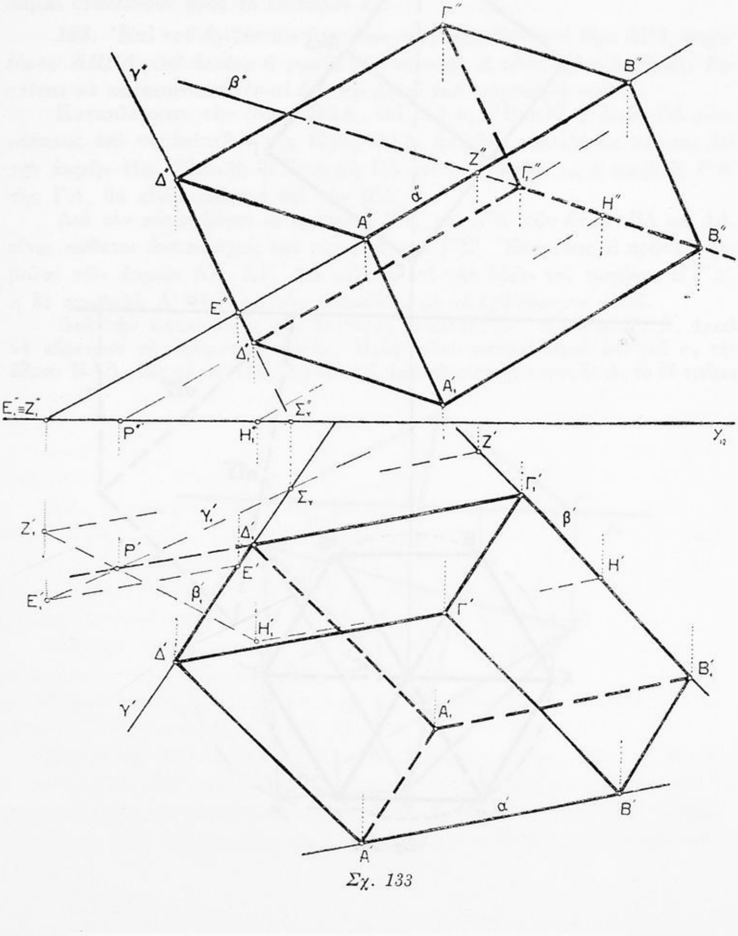
Σχ. 132

Θεωροῦμεν τὸ τρίγωνον $K\Delta_1\Delta'$, ἔνθα Δ_1 τὸ μέσον τῆς ἀκμῆς $A'B' \equiv AB$. Τὸ τρίγωνον τοῦτο κεῖται ἐπὶ κατακορύφου ἐπιπέδου καὶ ἔχει ὡς πλευρὰς $K\Delta = KA$, $K'\Delta_1 = K\Delta_1$ καὶ $\Delta_1\Delta' = \Delta_1\Delta_0$, ἑπομένως εἶναι κατασκευάσιμον, κατασκευάζομεν δὲ τοῦτο ἐν κατακλίσει $K'\Delta_1\,\Delta_0'$. Ἡ μὲν πρώτη προβολὴ Δ′ τῆς κορυφῆς Δ κεῖται ἐπὶ τῆς ΚΔ, καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου ἐκ τοῦ Δ_0' ἐπὶ ταύτην, ἡ δὲ δευτέρα ἔχει ὑψόμετρον ἴσον μὲ τὸ τμῆμα $\Delta'\Delta_0'$.

Ἔστω Ζ τὸ σημεῖον τομῆς τῆς $\Delta_1\Delta'$ μετὰ τῆς ΓΕ, παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΒ. Τὸ τμῆμα $\Delta_1 Z$ ἰσοῦται μὲ τὸ τμῆμα $\Delta_1 Z_0$. Τὸ σημεῖον Ζ κατὰ τὴν κατάκλισιν τοῦ τριγώνου $K\Delta_1\Delta$ λαμβάνει τὴν θέσιν Z_0' ἐπὶ τῆς $\Delta_1\Delta_0'$, τοιαύτην ὥστε $\Delta_1 Z'_0 = \overline{\Delta_1 Z_0}$. Ἐκ τοῦ Ζ' κατασκευάζομεν τὰ σημεῖα Γ' καὶ Ε', αἱ δεύτεραι προβολαὶ τῶν ὁποίων Γ'' καὶ Ε'' ἔχουν ὑψόμετρα ἴσα πρὸς τὸ τμῆμα $\overline{Z' Z_0'}$. Εἰς τὸ Σχ. 132 ἔχουν γίνει αἱ ὑποδεικνυόμεναι ἀνωτέρω κατασκευαὶ καὶ ἔχουν συμπληρωθῆ αἱ δύο προβολαὶ τῆς πυραμίδος.

126. Δίδονται τρεῖς ἀσύμβατοι εὐθεῖαι α (α', α'') β (β', β''), γ (γ', γ''). Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ τὸ παραλληλεπίπεδον τοῦ ὁποίου τρεῖς ἀκμαὶ κεῖνται ἐπὶ τῶν εὐθειῶν α, β, γ.

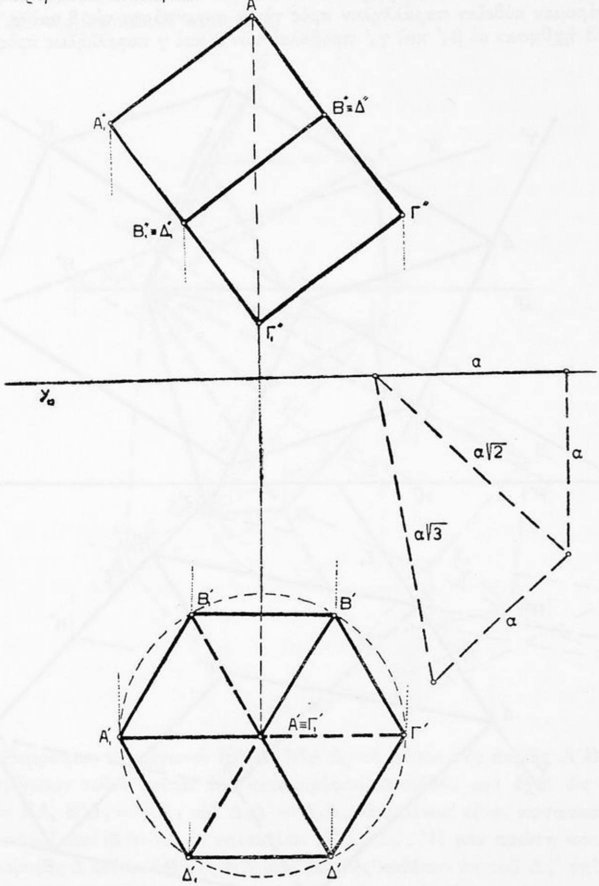
Φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν α συναντῶσαν τὰς β καὶ γ. Εἰς τὸ Σχ. 133 ἤχθησαν αἱ β_1' καὶ γ_1' προβολαὶ τῶν β καὶ γ παραλλήλως πρὸς τὴν α



Σχ. 133

ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1. Ἐκ τοῦ σημείου τομῆς P' τῶν β_1' καὶ γ_1' ἤχθη ἡ ζητουμένη εὐθεῖα τέμνουσα τὰς β καὶ γ εἰς τὰ σημεῖα $\Gamma_1(\Gamma_1', \Gamma_1'')$ καὶ $\Delta_1(\Delta_1', \Delta_1'')$. Εὑρέθησαν οὕτω δύο κορυφαὶ τοῦ παραλληλεπιπέδου. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἤχθη ἡ εὐθεῖα $A\Delta(A'\Delta', A''\Delta'')$ παράλληλος πρὸς τὴν β, τέμνουσα τὰς α καὶ γ εἰς τὰ σημεῖα $A(A'A'')$ καὶ $\Delta(\Delta', \Delta'')$. Ἐν συνεχείᾳ δὲ συνεπληρώθη τὸ παραλληλεπίπεδον $AB\Gamma\Delta A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$.

127. Ἡ κορυφὴ Α κύβου $AB\Gamma\Delta\ A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ ἀκμῆς 30 χιλιοστῶν ἔχει συντεταγμένας (60, 0,60), ἡ διαγώνιος $A\Gamma_1$ αὐτοῦ εἶναι κατακόρυφος, ἡ δὲ ἀκμὴ AA_1 εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἐπίπεδον ε_2. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ τοῦ κύβου.



Σχ 134

Μὲ πλευρὰν $\alpha = 30$ χιλ. κατασκευάζομεν τὸ τμῆμα $\alpha\sqrt{3} = 30\sqrt{3}$, τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ τὴν διαγώνιον $\mathrm{A}\Gamma_1$ τοῦ κύβου καὶ οὕτω κατασκευάζομεν τὴν δευτέραν προβολὴν Γ_1'' τῆς κορυφῆς Γ_1 τοῦ κύβου.

Ἐπειδὴ ἡ ἀκμὴ AA_1 εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ e_2, ἡ μὲν δευτέρα προβολή της θὰ εἶναι 30 χιλ., ἡ δὲ ὀρθὴ γωνία $\mathrm{AA}_1\Gamma_1$ θὰ προβληθῇ ἐπὶ τοῦ e_2 κατ' ὀρθήν.

Εἰς τὸ Σχ. 134 κατεσκευάσθησαν αἱ προβολαὶ τῶν κορυφῶν Α, A_1, Γ_1, καθὼς καὶ ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς Γ, διότι τὸ ὀρθογώνιον $\mathrm{AA}_1\Gamma_1\Gamma$ προβάλλεται κατ' ὀρθογώνιον. Συνεπληρώθη ἡ δευτέρα προβολὴ τοῦ κύβου, διὰ τῶν προβολῶν τῶν ἀκμῶν BB_1 καὶ $\Delta\Delta_1$.

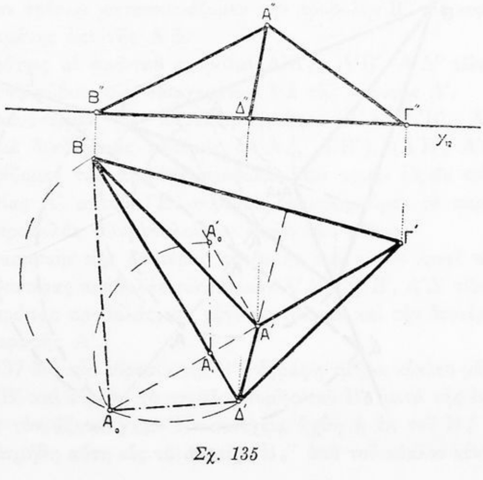
Ἡ πρώτη προβολὴ τοῦ κύβου ἔχει ὡς περίγραμμα κανονικὸν ἑξάγωνον, διότι τὰ μήκη τῶν προβολῶν τῶν ἀκμῶν τοῦ κύβου εἶναι ἴσα, καθόσον αἱ ἀκμαὶ ἰσοκλίνουν πρὸς τὸ ἐπίπεδον e_1.

128. Ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου προβολῆς δίδεται ἡ ἕδρα ΒΓΔ, τετραέδρου ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία τῆς κορυφῆς Α εἶναι τρισορθογώνιος. Ζητεῖται νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ τοῦ τετραέδρου τούτου.

Κατακλίνομεν τὴν ἕδραν ΒΔΑ, ἐπὶ τοῦ e_1. Ἐπειδὴ ἡ ἀκμὴ ΓΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς ἕδρας ΒΔΑ, θὰ εἶναι ἀσυμβάτως κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ΒΔ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀκμὴ ΒΔ κεῖται ἐπὶ τοῦ e_1, ἡ προβολὴ Γ'Α' τῆς ΓΑ, θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν Β'Δ'.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον αἱ προβολαὶ Β'Α' καὶ Δ'Α' τῶν ἀκμῶν ΒΑ καὶ ΔΑ, εἶναι κάθετοι ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς Γ'Δ' καὶ Γ'Β'. Ἑπομένως αἱ πρῶται προβολαὶ τῶν ἀκμῶν ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ κεῖνται ἐπὶ τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου Β'Γ'Δ', ἡ δὲ προβολὴ Α' τῆς κορυφῆς συμπίπτει μὲ τὸ ὀρθόκεντρον αὐτοῦ.

Διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς δευτέρας προβολῆς Α'' τῆς κορυφῆς Α, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ ὑψόμετρον αὐτῆς. Πρὸς τοῦτο κατακλίνομεν ἐπὶ τοῦ e_1 τὴν ἕδραν ΒΑΔ. Εἰς τὸ σχ.135, A_0 εἶναι ἡ κατάκλισις τῆς κορυφῆς Α, τὸ δὲ τμῆμα



Σχ. 135

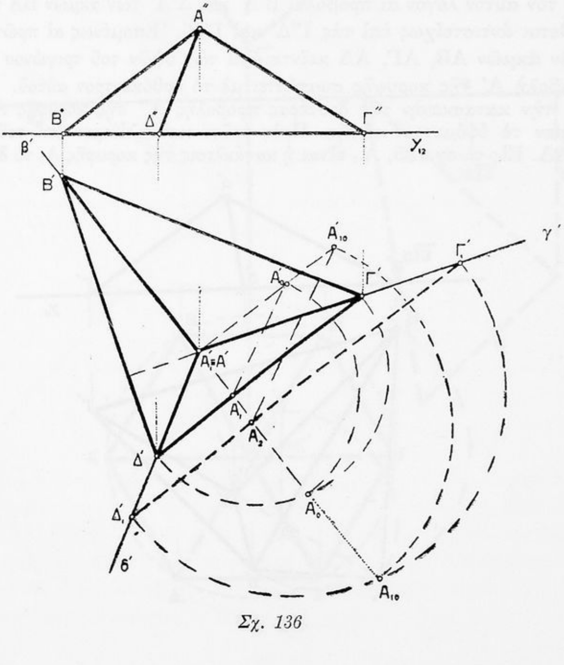
A_1A_0 εἶναι ἡ κατάκλισις τῆς ἐκ τοῦ Α καθέτου ἐπὶ τὴν ΒΔ, ἐπομένως τὸ ὑψόμετρον τοῦ Α εἶναι ἡ τρίτη πλευρὰ $A'A_0'$ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $A'A_1A_0'$, τοῦ ὁποίου ἡ ὑποτείνουσα $A_1A_0' = A_1A_0$ καὶ κάθετος πλευρὰ εἶναι ἡ A_1A'.

129. Τετράεδρον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία τῆς κορυφῆς Α εἶναι τρισορθογώνιος, ἑδράζεται ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου προβολῆς διὰ τῆς ἕδρας ΒΓΔ. Ζητεῖται νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ τοῦ τετραέδρου ἂν δίδωνται αἱ πρῶται προβολαὶ τῶν ἡμιευθειῶν ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ ἀκμαί, ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ καὶ τὸ ὑψόμετρον τῆς κορυφῆς Α.

Αἱ δοθεῖσαι ἡμιευθεῖαι $A'\beta'$, $A'\gamma'$, $A'\delta'$ πρέπει νὰ σχηματίζουν μεταξύ των γωνίας ἀμβλείας.

Ἐκ τυχόντος σημείου B_1' τῆς πρώτης προβολῆς τῆς ἀκμῆς ΑΒ φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὰς διευθύνσεις τῶν δύο ἄλλων προβολῶν τῶν ἀκμῶν καὶ λαμβάνομεν τὰς κορυφὰς Γ_1' καὶ Δ_1', τὸ ὑψόμετρον τῆς κορυφῆς A_1 εὑρίσκεται διὰ κατακλίσεως τῆς ἕδρας $A_1\Gamma_1\Delta_1$ κ.λ.π. ὡς εἰς προηγουμένην ἄσκησιν.

Εἰς τὸ Σχ. 136 τὸ ὑψόμετρον τῆς κορυφῆς εἶναι τὸ $A_1'A_{10}'$. Ἐπὶ τῆς εὐθείας $A_1'A_{10}'$ ἐλήφθη τμῆμα $\overline{A_1'A_0'} \equiv \overline{A'A_0'}$ ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν ὑψόμετρον τῆς κορυφῆς Α καὶ ἐκ τοῦ σημείου A_0' ἤχθη παράλληλος πρὸς τὴν $A_{10}'A_2$.



Σχ. 136

Ἡ παράλληλος αὕτη ἔτμησεν τὴν Α'β' εἰς τὸ σημεῖον A_1, ἐκ τοῦ ὁποίου ἡ ἀχθεῖσα κάθετος ἐπὶ τὴν Α'β' ἔτμησε τὰς Α'γ' καὶ Α'δ' ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Γ' καὶ Δ' πρώτας προβολὰς τῶν κορυφῶν Γ καὶ Δ τοῦ ζητουμένου τετραέδρου ἐκ τῶν ὁποίων εὑρέθη ἡ Β'. Ἡ κατασκευὴ τῆς δευτέρας προβολῆς τοῦ τετραέδρου εἶναι προφανής.

130. Κύβου ἀκμῆς 30 χιλιοστῶν, ἡ κορυφὴ Α ἔχει συντεταγμένας (50,0,0) αἱ δὲ ὁριζόντιοι προβολαὶ τῶν ἀκμῶν τῶν διερχομένων διὰ τῆς κορυφῆς Α, ἔχουν δοθείσας διευθύνσεις. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ τοῦ κύβου.

Ἔστωσαν Α'α', Α'β', Α'γ' αἱ δοθεῖσαι διευθύνσεις τῶν προβολῶν τριῶν ἀκμῶν τοῦ κύβου ἐπὶ τοῦ e_1. Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Κ' ἐπὶ τῆς Α'α' καὶ ἐκ τοῦ Κ' φέρομεν καθέτους πρὸς τὰς διευθύνσεις Α'β' καὶ Α'γ' καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν Α'γ' καὶ Α'β' ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Λ' καὶ Μ'.

Τὰ σημεῖα Κ', Λ', Μ' εἶναι αἱ πρῶται προβολαὶ τῶν σημείων τομῆς τῶν διευθύνσεων Α'α, Α'β, Α'γ τῶν ἀκμῶν τοῦ κύβου μετὰ ὁριζοντίου ἐπιπέδου p.

Κατακλίνομεν τὰς ἕδρας ΚΑ'Λ, ΛΑ'Μ, ΜΑ'Κ τῆς τριέδρου τρισορθογωνίου γωνίας Α'ΚΛΜ ἐπὶ τοῦ p καὶ εὑρίσκομεν τὰς προβολὰς ἐπὶ τοῦ e_1 τῶν κατακλίσεων τούτων. Ἡ $K'A_0M'$ εἶναι μία τοιαύτη προβολή.

Ἐὰν ἐπὶ τῶν A_0K' καὶ A_0M' λάβωμεν τὰ τμήματα A_0A_{10} καὶ $A_0\Delta_0$ ἴσα πρὸς τὴν δοθεῖσαν ἀκμὴν τοῦ κύβου, ἴσα δηλαδὴ πρὸς 30 χιλιοστά, τὰ σημεῖα A_{10} καὶ Δ_0 θὰ εἶναι αἱ κατακλίσεις δύο κορυφῶν A_1 καὶ Δ τοῦ κύβου κειμένων ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ἀκμῶν τοῦ κύβου τῶν ὁποίων αἱ πρῶται προβολαὶ κεῖνται ἐπὶ τῶν Α'α' καὶ Α'γ'. Ἐὰν συνεπῶς ἐκ τῶν σημείων A_{10} καὶ Δ_0 φέρωμεν καθέτους ἐπὶ τὴν Κ'Μ' θὰ ἔχωμεν ἐπὶ τῶν Α'α' καὶ Α'γ' τὰς πρώτας προβολὰς A'_1 καὶ Δ' τῶν κορυφῶν A_1 καὶ Δ τοῦ κύβου.

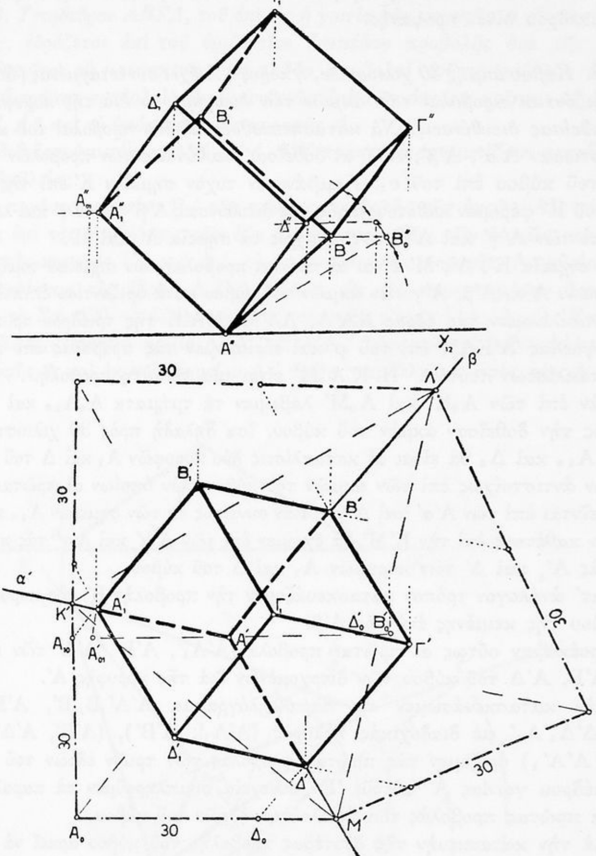
Κατ' ἀνάλογον τρόπον κατασκευάζομεν τὴν προβολὴν Β' τῆς κορυφῆς Β τοῦ κύβου τῆς κειμένης ἐπὶ τῆς Α'β.

Προέκυψαν οὕτως αἱ πρῶται προβολαὶ $A'A_1'$, Α'Β', Α'Δ' τῶν ἀκμῶν $A'A_1$ Α'Β, Α'Δ τοῦ κύβου τῶν διερχομένων διὰ τῆς κορυφῆς Α'.

Ἐὰν κατασκευάσωμεν τὰ παραλληλόγραμμα $A'A'_1B_1'B'$, Α'Β'Γ'Δ' καὶ $A'\Delta'\Delta_1'A_1'$ μὲ διαδοχικὰς πλευρὰς ($A'A_1'$, Α'Β'), (Α'Β', Α'Δ') καὶ (Α'Δ', $A'A'_1$) ὁρίζομεν τὰς πρώτας προβολὰς τῶν τριῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου τῆς τριέδρου γωνίας Α' αὐτοῦ. Ἐν συνεχείᾳ συμπληροῦμεν τὰ παραλληλόγραμμα πρώτας προβολὰς τῶν ὑπολοίπων ἑδρῶν τοῦ κύβου.

Διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς δευτέρας προβολῆς τοῦ κύβου ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν τὰς δευτέρας προβολὰς τῶν ἀκμῶν $A'A_1'$, Α'Β', Α'Δ' τῶν ὁποίων γνωρίζομεν τὰς πρώτας προβολάς, τὸ μέγεθος τούτων καὶ τὴν δευτέραν προβολὴν Α'' τῆς κορυφῆς Α'.

Εἰς τὸ Σχ. 137 διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς Β'', ἐγράφη τμῆμα κύκλου μὲ κέντρον Α' καὶ ἀκτῖνα Α'Β' καὶ εὑρέθη τὸ σημεῖον τομῆς τοῦ B_0' μετὰ τῆς ἐκ τοῦ Α' παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}. Ἐν συνεχείᾳ ἤχθη ἡ ἐκ τοῦ B_0' κάθετος ἐπὶ τοῦ y_{12} καὶ ἐτμήθη αὕτη εἰς τὸ σημεῖον B_0'' ὑπὸ τοῦ κύκλου κέντρου Α'' καὶ ἀκτῖνος 30 χιλ. Ἡ ἐκ τοῦ B_0'' παράλληλος πρὸς τὸν y_{12} ἔτμησεν τὴν ἐκ τοῦ B′ κάθετον ἐπ' αὐτὸν εἰς τὸ σημεῖον B″, δευτέραν προβολὴν τῆς κορυφῆς B τοῦ κύβου.



Σχ. 137

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον κατεσκευάσθησαν αἱ δεύτεραι προβολαὶ A_1'' καὶ B″ τῶν κορυφῶν A_1 καὶ B τοῦ κύβου. Ἐν συνεχείᾳ δὲ συνεπληρώθη ἡ δευτέρα προβολὴ τοῦ κύβου κατασκευασθέντων τῶν παραλληλογράμμων προβολῶν τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου .

131. Πυραμὶς ἔχουσα βάσιν τετράγωνον ΑΒΓΔ κείμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ε_1, εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς περιοχῆς Ι τοῦ χώρου. Δίδονται αἱ κορυφαὶ Α′ (10,0,0), Β (20,20,0) καὶ Κ (25,10,30) καὶ ζητοῦνται :

α′) αἱ δύο προβολαὶ τῆς τομῆς τῆς πυραμίδος ΚΑΒΓΔ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου Ρ, τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ μέσου τῆς ἀκμῆς ΚΔ καὶ καθέτου ἐπὶ ταύτην.

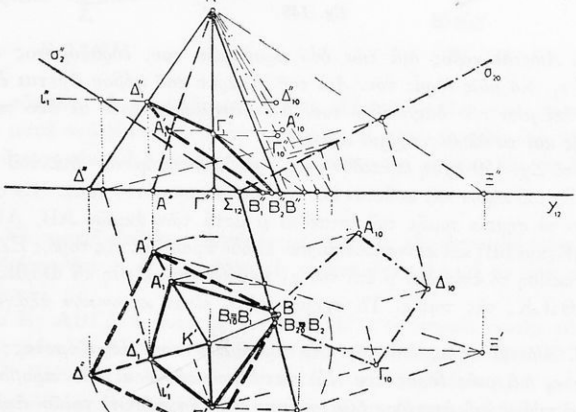
β′) Τὸ ἀληθὲς σχῆμα τῆς τομῆς ταύτης.

γ′) Τὸ ἀνάπτυγμα τῆς πυραμίδος καὶ ἡ μετεσχηματισμένη τῆς τομῆς.

Συμπληρώνομεν τὴν πρώτην προβολὴν τῆς βάσεως, μὲ τὴν παρατήρησιν ὅτι τὸ Δ′ πρέπει νὰ ἔχῃ ἀπόστασιν θετικήν, ἐφ' ὅσον ἡ πυραμὶς κεῖται εἰς τὴν περιοχὴν Ι.

Ἐν συνεχείᾳ συμπληρώνομεν τὰς δύο προβολὰς τῆς πυραμίδος.

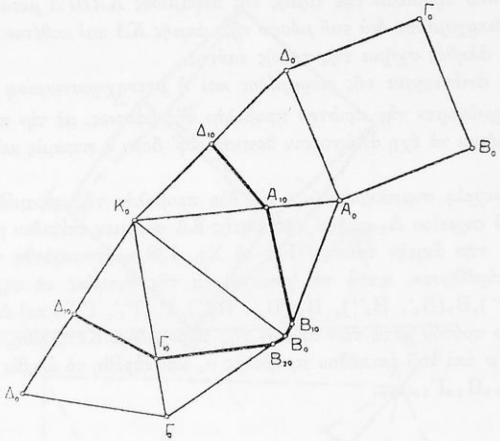
Διὰ τοῦ σημείου Δ_1 μέσου τῆς ἀκμῆς ΚΔ φέρομεν ἐπίπεδον p (σ_1, σ_2'') κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ταύτην. Εἰς τὸ Σχ. 138 κατεσκευάσθη τὸ ἐπίπεδον τοῦτο καὶ εὑρέθησαν, κατὰ τὰ γνωστά, ἐκ τῆς θεωρίας τὰ σημεῖα τομῆς $A_1(A_1', A_1'')$,$B_1(B_1', B_1'')$, $B_2(B_2', B_2'')$, $\Gamma_1(\Gamma_1', \Gamma_1'')$ καὶ $\Delta_1(\Delta_1',\Delta_1'')$ τοῦ ἐπιπέδου τούτου μετὰ τῶν ἀκμῶν τῆς πυραμίδος. Κατεκλίθη, ἐν συνεχείᾳ τὸ ἐπίπεδον p ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς e_1 καὶ εὑρέθη τὸ ἀληθὲς σχῆμα τῆς τομῆς $A_0B_{10}B_{20}\Gamma_{10}\Delta_{10}$.



Σχ. 138

Περιεστράφησαν κατόπιν αἱ ἀκμαὶ ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ περὶ τὴν κατακόρυφον τῆς κορυφῆς Κ καταστᾶσαι παράλληλοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον e_2, εὑρεθέντων οὕτω τῶν ἀληθῶν αὐτῶν μεγεθῶν.

Εἰς τὸ Σχ. 139 ἐκ τῶν ἀληθῶν μεγεθῶν, τῶν ἀκμῶν κατεσκευάσθη τὸ ἀνάπτυγμα τῆς πυραμίδος καὶ ἡ μετεσχηματισμένη τῆς τομῆς, ἐκ τῶν ἀληθῶν μεγεθῶν τῶν τμημάτων $K''A_{10}''$, $K''\Gamma_{10}''$, $K''\Delta_{10}''$, $A'B_{10}$ καὶ $\Gamma'B_{20}$.



Σχ. 139

132. Δίδεται κύβος διὰ τῶν δύο προβολῶν του, ἑδραζόμενος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ε_1, διὰ μιᾶς ἕδρας του. Διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύβου ἄγεται ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ μίαν τῶν διαγωνίων του. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ τῆς τομῆς καὶ τὸ ἀληθὲς σχῆμα αὐτῆς.

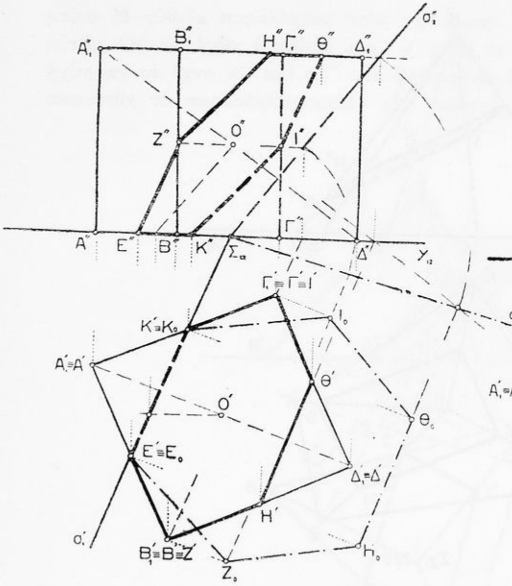
Εἰς τὸ Σχ. 140 ἤχθη ἐπίπεδον $p(\sigma_1', \sigma_2'')$ διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου $O(O', O'')$ τοῦ κύβου καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν διαγώνιον αὐτοῦ $A_1\Delta$. Ἐν συνεχείᾳ εὑρέθησαν τὰ σημεῖα τομῆς τοῦ ἐπιπέδου p μετὰ τῶν ἀκμῶν ΑΒ, ΑΓ, $\Gamma\Gamma_1$, $\Gamma_1\Delta_1$, Δ_1B_1 καὶ BB_1 καὶ κατεσκευάσθησαν αἱ δύο προβολαὶ τῆς τομῆς ΕΖΗΘΙΚ.

Κατεκλίθη τὸ ἐπίπεδον p ἐπὶ τοῦ e_1 καὶ κατεσκευάσθη τὸ ἀληθὲς σχῆμα $E_0Z_0H_0\Theta_0I_0K_0$ τῆς τομῆς. Τὸ σχῆμα τοῦτο εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον.

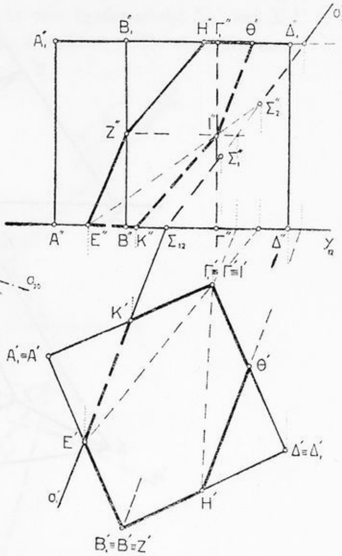
133. Δίδεται κύβος διὰ τῶν δύο προβολῶν του, ἑδραζόμενος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ε_1 διὰ μιᾶς ἕδρας του. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ τῆς τομῆς τοῦ κύβου ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῶν μέσων, τριῶν ἀκμῶν τοῦ κύβου, ἀνὰ δύο ἀσυμβάτων,

Εἰς τὸ Σχ. 141 ἐλήφθησαν ὡς τρεῖς, ἀσύμβατοι ἀνὰ δύο, ἀκμαὶ τοῦ κύβου αἱ ΑΒ, $\Gamma\Gamma_1$ καὶ $B_1\Delta_1$, διὰ τῶν μέσων Ε, Ι καὶ Η ἤχθη τὸ ἐπίπεδον $p(\sigma_1', \sigma_2'')$, τῇ βοηθείᾳ τῶν δευτέρων ἰχνῶν Σ_1'' καὶ Σ_2'' τῶν εὐθειῶν ΙΗ καὶ ΙΕ.

Εὑρέθησαν ἐν συνεχείᾳ τὰ σημεῖα τομῆς τοῦ ἐπιπέδου p μετὰ τῶν ἀκμῶν ΑΓ, $\Gamma\Delta_1$ καὶ BB_1. Τὸ ἑξάγωνον ΕΖΗΘΙΚ εἶναι ἡ ζητουμένη τομή.



Σχ. 140



Σχ. 141

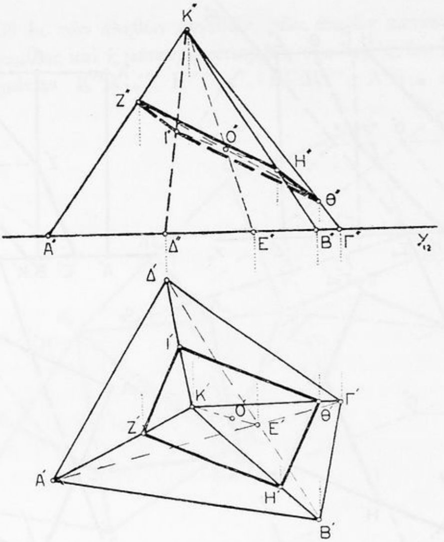
Εἶναι εὔκολον νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ ἑξάγωνον τοῦτο εἶναι κανονικόν, συμπῖπτον μετὰ τοῦ ἑξαγώνου κατὰ τὸ ὁποῖον τέμνεται ὁ κύβος ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύβου καὶ καθέτου ἐπὶ τὴν διαγώνιον ΑΔ.

134. Νὰ τμηθῇ δοθεῖσα τετραεδρικὴ πυραμίς, τῆς ὁποίας ἡ βάσις, κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ε_1, δι᾽ ἐπιπέδου, εἰς τρόπον ὥστε ἡ τομὴ νὰ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἔστω Κ, ΑΒΓΔ ἡ πυραμὶς καὶ Ε(Ε′, Ε″) τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων τῆς βάσεως ΑΓ καὶ ΒΔ. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Ο(Ο′, Ο″) τῆς εὐθείας ΚΕ. Ἐὰν διὰ τοῦ σημείου Ο καὶ ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων ΑΚΓ καὶ ΒΚΔ φέρομεν δύο εὐθείας ΗΟΙ καὶ ΖΟΘ, τοιαύτας ὥστε τὸ σημεῖον Ο νὰ εἶναι μέσον τῶν τμημάτων ΖΘ καὶ ΗΙ, ἔνθα Ι, Θ, Η, Ι σημεῖα ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΚΑ, ΚΓ, ΚΒ, ΚΔ, τὸ σχῆμα ΖΗΘΙ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ εἶναι ἡ ζητουμένη τομὴ τῆς τετραεδρικῆς πυραμίδος ὑπὸ ἐπίπεδον.

Εἰς τὸ Σχ. 142 ἐλήφθη ἐπὶ τῆς ΚΕ σημεῖον Ο(Ο′, Ο″) ἐκ τοῦ ὁποίου ἤχθησαν αἱ ΖΟΘ καὶ ΗΟΙ.

Ἡ κατασκευὴ τῆς ΖΟΘ καὶ ΗΟΙ ἐγένετο εἰς τὴν δευτέραν προβολήν. Οὕτω ἐκ τοῦ Ο″ μεταξὺ τῶν εὐθειῶν Κ″Α″ καὶ Κ″Γ″ ἤχθη ἡ Ζ″Ο″Θ″ τοιαύτη



Σχ. 142

ὥστε $Z''O'' = O''\Theta''$ (γνωστὴ ἡ κατασκευὴ ἐκ τῆς Στοιχ. Γεωμετρίας). Ὁμοίως μεταξὺ τῶν εὐθειῶν $K''B''$ καὶ $K''\Delta''$, ἤχθη ἡ $H''O''I''$ τοιαύτη ὥστε $\overline{H''O''} = \overline{O''I''}$. Τὸ σχῆμα $Z''H''\Theta''I''$ εἶναι ἡ δευτέρα προβολὴ τοῦ ζητουμένου παραλληλογράμμου. Ἐκ τῆς προβολῆς ταύτης εὑρέθη ἡ πρώτη $Z'H'\Theta'I'$.

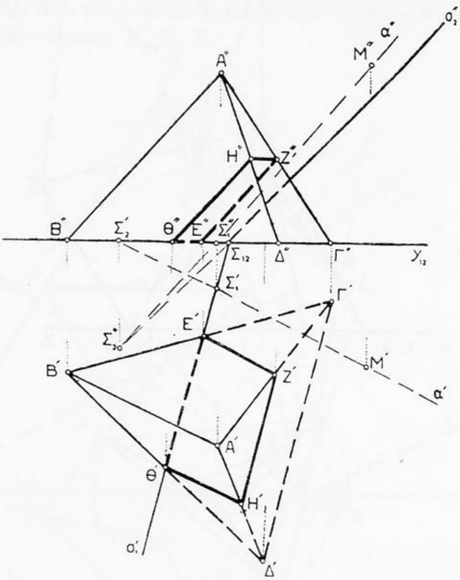
135. Δίδεται τετράεδρον ΑΒΓΔ τοῦ ὁποίου ἡ ἕδρα ΒΓΔ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ε_1 καὶ σημεῖον Μ, μὴ κείμενον ἐπὶ ἕδρας τοῦ τετραέδρου. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου Μ ἐπίπεδον, τέμνον τὸ τετράεδρον κατὰ παραλληλόγραμμον.

Ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς Γεωμετρίας τοῦ χώρου διὰ νὰ τέμνῃ ἐπίπεδον, δοθὲν τετράεδρον κατὰ παραλληλόγραμμον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ἐπίπεδον νὰ εἶναι παράλληλον πρὸς δύο ἀπέναντι ἀκμὰς τοῦ τετραέδρου.

Ἐντεῦθεν προκύπτει ἡ κατασκευή :

Ἐκ τοῦ σημείου Μ φέρομεν δύο εὐθείας παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς δύο ἀκμὰς τοῦ τετραέδρου καὶ ἔστω p τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον ὁρίζουν αὗται. Ἡ τομὴ τοῦ ἐπιπέδου τούτου (ἐφ' ὅσον ὑπάρχει τοιαύτη), μετὰ τοῦ τετραέδρου εἶναι παραλληλόγραμμον. Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται τρεῖς λύσεις, καθόσον τὸ τετράεδρον ἔχει τρία ζεύγη ἀπέναντι ἀκμῶν.

Εἰς τὸ Σχ. 143, ὡς ζεῦγος ἀπέναντι ἀκμῶν ἐλήφθη τὸ ζεῦγος ΑΒ, ΓΔ. Ἐπειδὴ ἡ ΓΔ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1, τὸ πρῶτον ἴχνος τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου θὰ εἶναι παράλληλον πρὸς αὐτήν, ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου Μ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν ἀκμὴν ΑΒ καὶ νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἴχνη αὐτῆς. Οὕτως ἤχθη ἡ εὐθεῖα α(α′, α′′) καὶ ἐκ τῶν ἰχνῶν αὐτῆς Σ_1' καὶ Σ_2'' ἤχθησαν τὰ ἴχνη σ_1' καὶ σ_2'' τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου. Ἐν συνεχείᾳ κατεσκευάσθη τὸ παραλληλόγραμμον τῆς τομῆς.



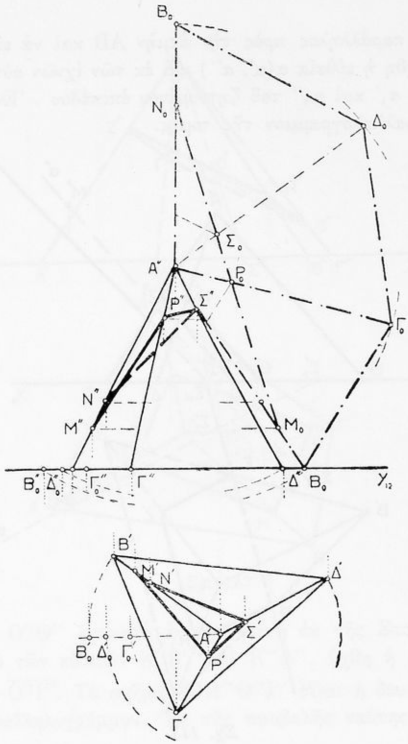
Σχ. 143

136. Ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ΑΒ τετραέδρου ΑΒΓΔ δίδονται δύο σημεῖα Μ καὶ Ν. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ τῆς τεθλασμένης γραμμῆς ἐλαχίστου μήκους, τῆς ἐχούσης ἀκραίας κορυφὰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ κεῖνται ἐπὶ τῶν ἑδρῶν τοῦ τετραέδρου (εἰδικὴ περίπτωσις $M \equiv N$). Διερεύνησις.

Ἔστω τὸ τετράεδρον ἑδραζόμενον ἐπὶ τοῦ p_1 διὰ τῆς ἕδρας τοῦ ΒΓΔ. Περιστρέφομεν τὰς ἀκμὰς ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ περὶ τὴν κατακόρυφον τοῦ Α, μέχρις ὅτου καταστοῦν παράλληλοι πρὸς τὸ e_2 καὶ λαμβάνομεν οὕτω τὰ ἀληθῆ μεγέθη αὐτῶν $A''B_0''$, $A''\Gamma_0''$, $A''\Delta_0''$.

Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_2 κατασκευάζομεν τὰ τρίγωνα $A''B_0\Gamma_0$, $A''\Gamma_0\Delta_0$, $A''\Delta_0B_0$, ἴσα ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ὁμωνύμους ἕδρας.

Εἰς τὸ Σχ. 144 ἐμφανίζονται αἱ κατασκευαὶ αὗται. Ἐπὶ τοῦ οὕτω κατασκευασθέντος ἀναπτύγματος ὁρίζομεν τὰ σημεῖα M_0 καὶ N_0 ἐπὶ τῶν ἀκραίων πλευρῶν $A''B_0$, $A''B_0$. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν M_0N_0 τέμνουσαν τὰς $A''\Gamma_0$ καὶ $A''\Delta_0$ εἰς τὰ σημεῖα P_0 καὶ Σ_0.



Σχ. 144

Ἡ τεθλασμένη $M_0P_0\Sigma_0N_0$ εἶναι ἡ μετεσχηματισμένη τῆς ζητουμένης τεθλασμένης ΜΡΣΝ ἐλαχίστου μήκους. Διότι πᾶσα ἄλλη τεθλασμένη ἐπὶ τῶν ἑδρῶν τοῦ τετραέδρου, θὰ ἔχῃ ὡς μετεσχηματισμένην μίαν τεθλασμένην διερχομένην διὰ τῶν M_0 καὶ N_0 μήκους μεγαλυτέρου ἐκείνου τῆς $M_0P_0\Sigma_0N_0$.

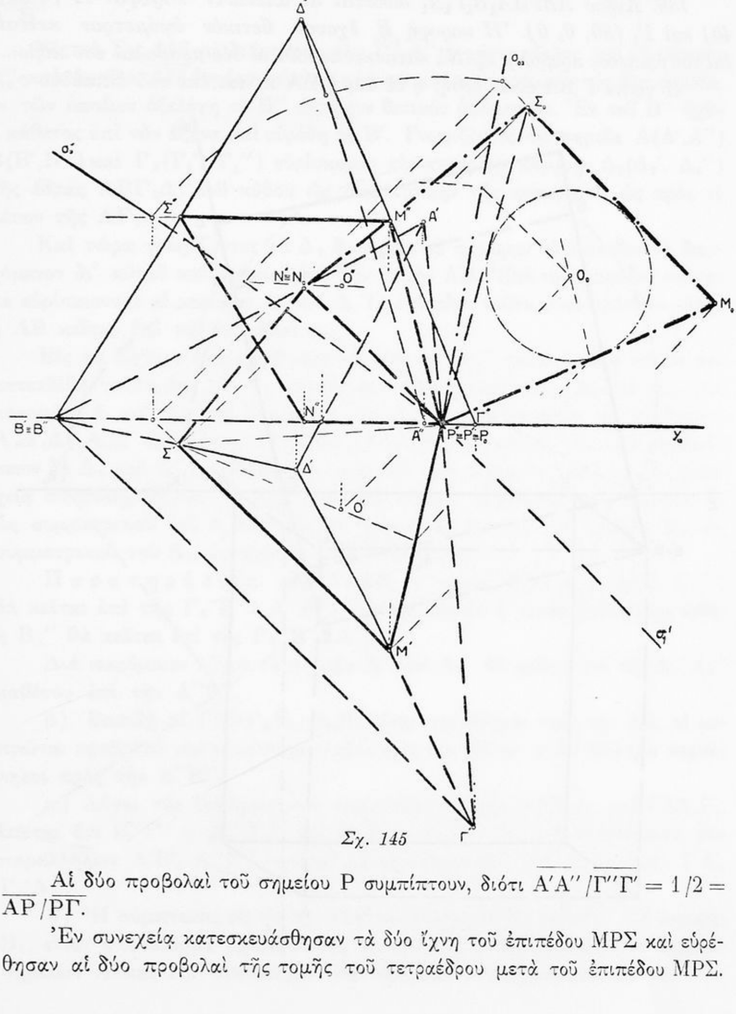
Δι' ἀναγωγῆς ἔχομεν κατασκευάσει εἰς τὸ Σχ. 144 ἐκ τῆς μετεσχηματισμένης τὰς δύο προβολὰς $M'P'\Sigma'N'$ καὶ $M''P''\Sigma''N''$ τῆς ζητουμένης τεθλασμένης.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ σχήματος ὑπάρχουν δύο λύσεις, προκύπτουσαι ἐκ τῶν δύο εὐθειῶν (μετεσχηματισμένων τῆς ζητουμένης τεθλαμένης), τῶν προκυπτουσῶν ἂν ληφθοῦν τὰ σημεῖα M_0 καὶ N_0 ἐναλλὰξ ἐπὶ τῆς πρώτης ἢ τελευταίας πλευρᾶς τοῦ ἀναπτύγματος.

137. Δίδεται τετράεδρον ΑΒΓΔ, ἔνθα Α (-40, 90, 0), Β (0, 20, 0), Γ (80, 100, 0) καὶ Δ (10, 65, 80). Ἔστωσαν Μ τὸ μέσον τῆς ἀκμῆς ΓΔ, Σ τὸ μέσον τῆς ἀκμῆς ΒΔ καὶ Ρ τὸ σημεῖον τῆς ἀκμῆς ΑΓ τοιοῦτον ὥστε

$\overline{ΓΡ}$: $\overline{ΡΑ}$ = 2. *Νὰ κατασκευασθοῦν α΄) αἱ δύο προβολαὶ τῆς τομῆς τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΜΣΡ, β΄) τὸ ἀληθὲς σχῆμα τῆς τομῆς, γ) αἱ δύο προβολαὶ τοῦ κέντρου Ο τοῦ εἰς τὸ τρίγωνον ΜΣΡ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ δ΄) τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ τετραέδρου καὶ ἡ μετεσχηματισμένη τῆς τομῆς.*

Εἰς τὸ Σχ. 145 κατεσκευάσθησαν αἱ δύο προβολαὶ τοῦ τετραέδρου καὶ αἱ προβολαὶ τῶν σημείων Μ, Ρ, Σ.



Σχ. 145

Αἱ δύο προβολαὶ τοῦ σημείου Ρ συμπίπτουν, διότι $\overline{\text{Α΄Α΄΄}}/\overline{\text{Γ΄΄Γ΄}} = 1/2 = \overline{\text{ΑΡ}}/\overline{\text{ΡΓ}}$.

Ἐν συνεχείᾳ κατεσκευάσθησαν τὰ δύο ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου ΜΡΣ καὶ εὑρέθησαν αἱ δύο προβολαὶ τῆς τομῆς τοῦ τετραέδρου μετὰ τοῦ ἐπιπέδου ΜΡΣ.

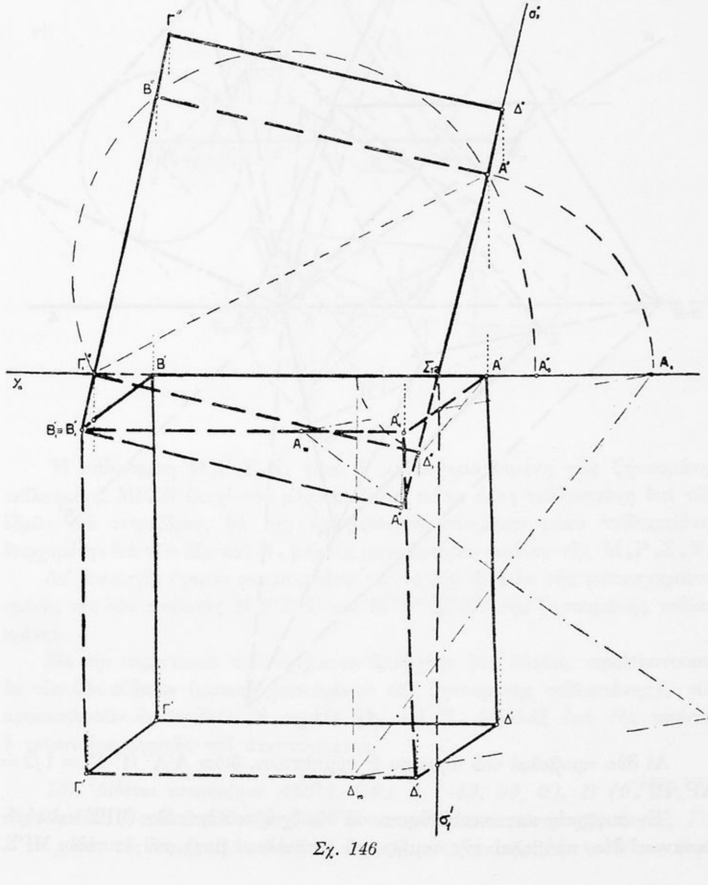
Κατεσκευάσθη ἐπίσης τὸ ἀληθὲς σχῆμα $M_0P_0N_0\Sigma_0$ τῆς τομῆς, διὰ κατακλίσεως τοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ e_1.

Εὑρέθη τὸ κέντρον O_0 τοῦ εἰς τὸ τρίγωνον ΜΣΡ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ δι' ἀναγωγῆς τοῦ O_0 εἰς τὰς προβολάς, εὑρέθησαν αἱ δύο προβολαὶ τοῦ Ο.

Εὐκόλως δύναται νὰ κατασκευασθῇ τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ τετραέδρου καὶ ἡ μετεσχηματισμένη τῆς τομῆς.

138. Κύβου $AB\Gamma\Delta A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ δίδονται αἱ ἀπέναντι κορυφαὶ Α (0,80, 40) καὶ Γ_1 (80, 0, 0). Ἡ κορυφὴ Β ἔχουσα θετικὸν ὑψόμετρον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς ε_2. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ τοῦ κύβου.

Ἡ γωνία Γ_1ΒΑ εἶναι ὀρθή, ἡ δὲ ἀκμὴ ΒΑ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_2,



Σχ. 146

ἑπομένως δευτέρα προβολὴ τῆς γωνίας $\Gamma_1 BA$ θὰ εἶναι ὀρθή. Ἐξ ἄλλου ἡ $\overline{A''B''} = \overline{AB} = \overline{\Gamma_1 A}/\sqrt{3}$.

Διὰ περιστροφῆς τοῦ τμήματος $\overline{\Gamma_1 A}$ περὶ ἄξονα τὴν $\Gamma'_1\Gamma_1''$, λαμβάνομεν τὸ ἀληθὲς μῆκος τοῦ τμήματος $\overline{\Gamma_1 A} = \overline{\Gamma_1' A_0''}$. Κατασκευάζομεν τὸν κύκλον τὸν περιγεγραμμένον ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς $\overline{\Gamma_1 A_0}''$. Ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τούτου ἰσοῦται πρὸς $\overline{\Gamma_1 A''}/\sqrt{3}$, ἰσοῦται δηλαδὴ μὲ τὴν ἀκμὴν $\overline{AB} = \overline{A''B''}$.

Εἰς τὸ Σχ. 146 μὲ διάμετρον τὴν $\overline{\Gamma''_1 A''}$ ἐγράφη κύκλος καὶ μὲ κέντρον A'' καὶ ἀκτῖνα $\overline{AB}$ ἐγράφη κύκλος τέμνων τὸν προηγούμενον εἰς δύο σημεῖα, ἐκ τῶν ὁποίων ἐξελέγη τὸ B'' ὡς ἔχον θετικὸν ὑψόμετρον. Ἐκ τοῦ B'' ἤχθη ἡ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα καὶ εὑρέθη τὸ B'. Γνωρίζοντες τὰ σημεῖα $A(A', A'')$ $B(B', B'')$ καὶ $\Gamma_1(\Gamma_1', \Gamma_1'')$ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην κορυφὴν $\Delta_1(\Delta_1', \Delta_1'')$ τῆς ἕδρας $AB\Gamma_1\Delta_1$ τοῦ κύβου ὡς συμμετρικὴν τῆς κορυφῆς B, ὡς πρὸς τὸ μέσον τῆς $A\Gamma_1$.

Καὶ τώρα γνωρίζοντες τὸ Δ_1 δυνάμεθα νὰ φέρωμεν τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον δι᾽ αὐτοῦ καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν AB. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου θὰ εὑρίσκωνται αἱ κορυφαὶ A_1 καὶ Δ. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἶναι πρόσθιον, ἀφοῦ ἡ AB κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_2.

Εἰς τὸ Σχῆμα 146 εὑρέθησαν τὰ ἴχνη σ_1', σ_2'' τοῦ ἐπιπέδου τούτου καὶ κατεκλίθη τοῦτο ἐπὶ τοῦ e_1, εὑρεθέντων τῶν κατακλίσεων A_0 καὶ Δ_{10} τῶν κορυφῶν A καὶ Δ_1. Μὲ διαγώνιον τὴν $A_0\Delta_{10}$ κατεσκευάσθη τὸ τετράγωνον $A_0\Delta_0\Delta_{10}A_{10}$, κατάκλισις τῆς ἕδρας $A\Delta\Delta_1 A_1$ τοῦ κύβου. Ἐκ τῶν κατακλίσεων δὲ Δ_0 καὶ A_1, εὑρέθησαν αἱ προβολαὶ τῶν κορυφῶν Δ καὶ A_1. Ἐν συνεχείᾳ συνεπληρώθησαν αἱ προβολαὶ τοῦ κύβου, εὑρεθέντος τοῦ σημείου Γ, ὡς συμμετρικοῦ τοῦ A, ὡς πρὸς τὸ μέσον τῆς BΔ καὶ τοῦ σημείου B_1, ὡς συμμετρικοῦ τοῦ Δ_1, ὡς πρὸς τὸ μέσον τῆς $A_1\Gamma_1$.

Π α ρ α τ η ρ ή σ ε ι ς. α) Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΓBA εἶναι ὀρθή, ἡ Γ'' θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς $\Gamma_1''B'' \perp A''B''$. Ἐπίσης ἐπειδὴ ἡ γωνία B_1BA εἶναι ὀρθή· ἡ B_1'' θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς $\Gamma_1''B'' \perp A''B''$.

Διὰ παρόμοιον λόγον τὰ σημεῖα Δ'' καὶ A_1'' θὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς $\Delta_1''A_1''$ καθέτου ἐπὶ τὴν $A''B''$.

β) Ἐπειδὴ αἱ ΓΔ, $\Gamma_1\Delta_1$, A_1B_1 εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν AB, αἱ μὲν πρῶται προβολαὶ των εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα, αἱ δὲ δεύτεραι παράλληλοι πρὸς τὴν $A''B''$.

γ) Λόγῳ τῆς ἰσότητος τῶν παραλλήλων ἑδρῶν ABB_1A_1 καὶ $\Gamma\Delta\Delta_1\Gamma_1$, ἕπεται ὅτι $B''\Gamma'' = B_1''\Gamma_1''$ καὶ $B_1'B' = \Gamma_1'\Gamma'$. Ἐπίσης ἡ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων $A'B'$, $A_1'B_1'$ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπόστασιν τῶν παραλλήλων $\Gamma'\Delta'$, $\Gamma_1'\Delta_1'$.

δ) Ἡ σύμπτωσις εἰς τὸ Σχ. 146 τῶν προβολῶν B_1' καὶ B_1'' τῆς κορυφῆς B_1, εἶναι ἀποτέλεσμα σχεδιαστικῆς ἀνακριβείας ἢ τῆς ἐκλογῆς τῶν ἀρχικῶν σημείων A καὶ Γ_1. Ἀποδείξατε τὴν ἀλήθειαν τοῦ ἰσχυρισμοῦ τούτου.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ
ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑ ΜΙΑΣ ΠΡΟΒΟΛΗΣ

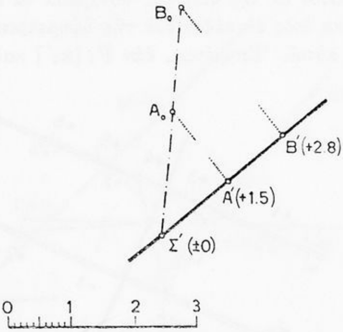
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

Παράστασις τῶν θεμελιωδῶν στοιχείων καὶ σχετικὰ προβλήματα

§ 7. Προβλήματα ἐπὶ τῆς παραστάσεως τῶν γεωμ. σχημάτων διὰ μιᾶς προβολῆς

139. Δίδονται τὰ σημεῖα A' $(+1{,}5)$ καὶ B' $(+2{,}8)$. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ ἴχνος τῆς εὐθείας AB.

Κατακλίνομεν τὴν εὐθεῖαν AB ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου σχεδιάσεως (Σχ. 145). Ἡ κατάκλισις ταύτης A_0 B_0 τέμνει τὴν προβολὴν A' B' εἰς τὸ ἴχνος Σ (± 0) τῆς εὐθείας AB.

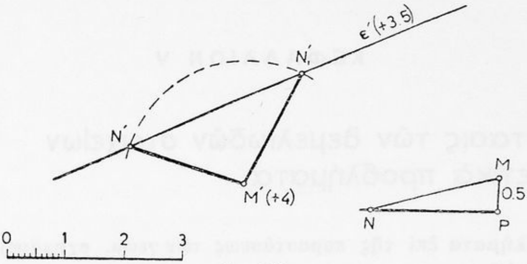


Σχ. 145

140. Δίδεται ὁριζοντία εὐθεῖα ε ὑψομέτρου + 3,5 καὶ σημεῖον M' $(+4)$ ἐκτὸς αὐτῆς. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου M εὐθεῖα τέμνουσα τὴν ε εἰς σημεῖον N, τοιοῦτον ὥστε τὸ τμῆμα $\overline{MN}$ νὰ ἔχῃ μῆκος α. Διερεύνησις.

Ἔστω ὅτι εὑρέθη τὸ σημεῖον N τῆς ε τοιοῦτον ὥστε $\overline{MN} = α$. Καλέσωμεν P τὸ σημεῖον κατὰ τὸ ὁποῖον τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον τῆς εὐθείας ε τέμνει τὴν ἐκ τοῦ M κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον σχεδιάσεως. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον

NMP κατασκευάζεται, διότι $\overline{MN} = \alpha$, $\overline{PM} = 0{,}5$, ἑπομένως εὑρίσκεται τὸ $\overline{PN} = \overline{M'N'}$. Εἰς τὸ Σχ. 146 κατεσκευάσθη τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον N M P καὶ μὲ κέντρον M′ καὶ ἀκτῖνα P N ἐγράφη κύκλος τέμνων τὴν εὐθεῖαν ε′ εἰς τὰ σημεῖα N′ καὶ N'_1. Ἡ εὐθεῖα M N ἢ ἡ MN_1 εἶναι ἡ ζητουμένη.

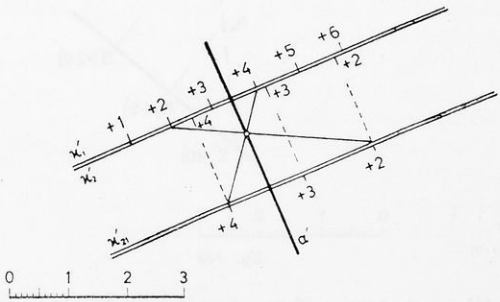


Σχ. 146

Τὸ πρόβλημα δέχεται δύο, μίαν ἢ οὐδεμίαν λύσιν ἐφόσον τὸ τμῆμα $\overline{PN}$ εἶναι μεγαλύτερον, ἴσον ἢ μικρότερον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου M′ ἀπὸ τῆς εὐθείας ε′.

141. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τομὴ δύο ἐπιπέδων τῶν ὁποίων αἱ ὑψομετρικαὶ κλίμακες κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ὡς εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς θεωρίας, δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὴν ὑψομετρικὴν κλίμακα ἑνὸς ἐπιπέδου διὰ τῆς ὑψομετρικῆς κλίμακος τυχούσης ἄλλης ἰχνοκαθέτου αὐτοῦ. Ἑπομένως, ἐὰν $P_1[\kappa_1']$ καὶ $p_2[\kappa_2']$ τὰ δύο ἐπί-

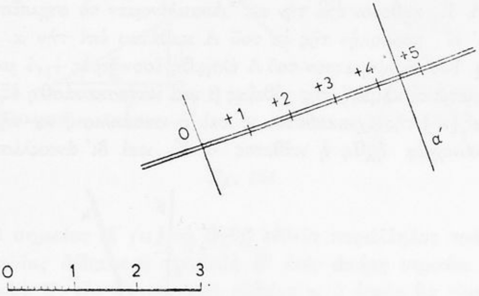


Σχ 147

πεδα, ἀντικαθιστῶμεν τὴν κλίμακα $[\kappa_2']$ διὰ τῆς κλίμακος $[\kappa'_{21}]$. Ἐπειδὴ δὲ αἱ ὑψομετρικαὶ κλίμακες τῶν δύο ἐπιπέδων εἶναι παράλληλοι, ἡ εὐθεῖα τομῆς τῶν δύο ἐπιπέδων θὰ εἶναι ἡ ὁριζοντία εὐθεῖα α (Σχ. 147) (βλέπε Στοιχ. Παραστατικῆς § 83).

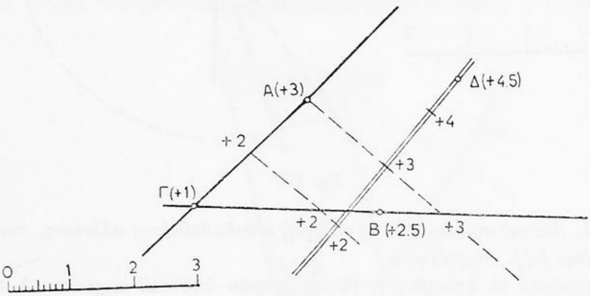
142. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τομὴ δύο ἐπιπέδων, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν εἶναι ὁριζόντιον καὶ τὸ ἄλλο τυχόν.

Ἔστωσαν p [υ] καὶ q [$\varkappa_1$] τὸ ὁριζόντιον καὶ τὸ τυχὸν ἐπίπεδον. Ἐὰν υ = + 4,5 τὸ ὑψόμετρον τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ἡ τομὴ αὐτοῦ καὶ τοῦ q θὰ εἶναι ἡ ὁριζοντία εὐθεῖα α τοῦ δευτέρου ὑψομέτρου + 4,5. Κατασκευάζομεν συνεπῶς τὴν ἰχνοπαράλληλον τοῦ q ὑψομέτρου + 4,5.



Σχ. 148

143. Ἔστωσαν Α′ (+ 3), Β′ (+ 2,5), Γ′ (+ 1) τρία σημεῖα καὶ Δ′ ἡ προβολὴ ἑνὸς τετάρτου σημείου Δ. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ ὑψόμετρον τοῦ σημείου Δ, ἐὰν τοῦτο κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Α Β Γ.



Σχ. 149

Κατασκευάζομεν τὰς ὑψομετρικὰς κλίμακας τῶν εὐθειῶν ΓΑ καὶ ΓΒ καὶ φέρομεν τὰς ἰχνοπαραλλήλους ὑψομέτρων 1, 2, 3, 4, ... τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ.

Ἐκ τοῦ σημείου Δ′ φέρομεν κάθετον κ′ ἐπὶ τῶν ἰχνοπαραλλήλων τούτων καὶ κατασκευάζομεν ἐπ' αὐτῆς τὴν ὑψομετρικὴν κλίμακα τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ, θεωροῦντες τὴν εὐθεῖαν ταύτην ὡς ἰχνοκάθετον τοῦ ἐπιπέδου (Σχ. 149).

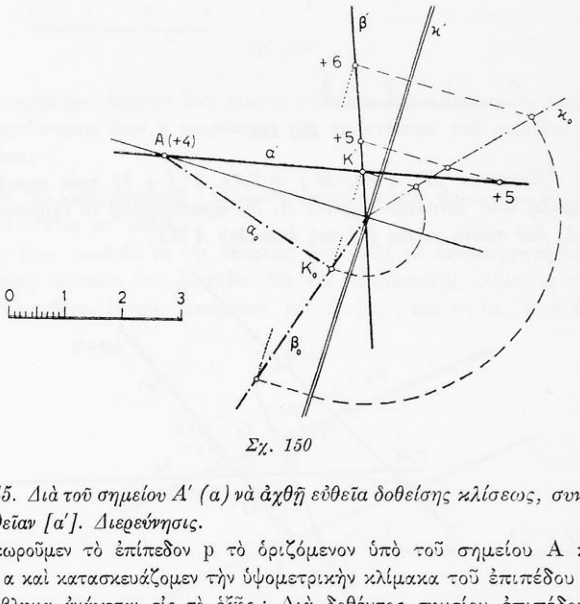
Ἐὰν τὸ σημεῖον Δ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς ἰχνοκαθέτου κ, ἐκ τῆς κλίμακος τῆς ὁποίας προσδιορίζομεν τὸ ὑψόμετρόν του.

144. Διὰ σημείου A′ (α) νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα α κάθετος ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν β [β′].

Θεωροῦμεν τὸ ἐπίπεδον p τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τοῦ σημείου A καὶ τῆς εὐθείας β καὶ κατασκευάζομεν μίαν ὑψομετρικὴν κλίμακα αὐτοῦ.

Κατακλίνομεν τὸ ἐπίπεδον p ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ σημείου A, περὶ τὴν διὰ τοῦ A ὁριζοντίαν τοῦ p. Καὶ ἐν τῇ κατακλίσει φέρομεν τὴν A′ K_0 κάθετον ἐπὶ τὴν $α_0$. Ἀνακλίνομεν τὸ σημεῖον K_0 καὶ εὑρίσκομεν τὴν A′ K′, προβολὴν τῆς ἐκ τοῦ A καθέτου ἐπὶ τὴν α.

Εἰς τὸ Σχ. 150 τὸ ὑψόμετρον τοῦ A ἐλήφθη ἴσον πρὸς + 4 μονάδες, ἐπίσης ἐλήφθη ἡ ὑψομετρικὴ κλίμαξ τῆς εὐθείας β καὶ κατεσκευάσθη ἐξ αὐτῶν ἡ ὑψομετρικὴ κλίμαξ [κ′] τῆς ἰχνοκαθέτου κ καὶ ἡ κατάκλισις $κ_0$ τῆς ἰχνοκαθέτου ταύτης. Ἐν συνεχείᾳ ἤχθη ἡ κάθετος A′ K_0 καὶ δι᾽ ἀνακλίσεως ἡ A′ K′.



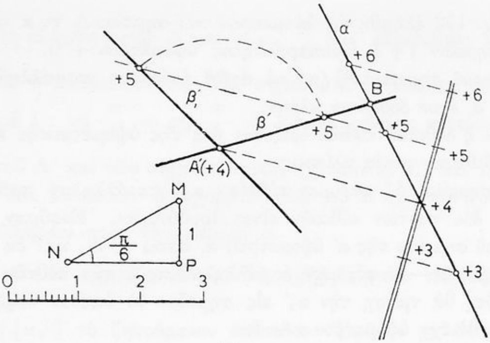
Σχ. 150

145. Διὰ τοῦ σημείου A′ (α) νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα δοθείσης κλίσεως, συναντῶσα τὴν εὐθεῖαν [α′]. Διερεύνησις.

Θεωροῦμεν τὸ ἐπίπεδον p τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τοῦ σημείου A καὶ τῆς εὐθείας α καὶ κατασκευάζομεν τὴν ὑψομετρικὴν κλίμακα τοῦ ἐπιπέδου τούτου. Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ ἑξῆς: Διὰ δοθέντος σημείου ἐπιπέδου p, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα κειμένη ἐπ᾽ αὐτοῦ, ἔχουσα δοθεῖσαν κλίσιν.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται εἰς τὴν § 82 τῶν Στοιχείων Παραστατικῆς Γεωμετρίας τοῦ καθηγητοῦ κ. Π. Λαδοπούλου.

Εἰς τὸ Σχ. 151 ἐλήφθη τὸ ὑψόμετρον τοῦ σημείου A ἴσον πρὸς + 4 καὶ ἡ γωνία κλίσεως δι᾽ αὐτοῦ εὐθείας ἴση πρὸς $\frac{\pi}{6}$ καὶ κατεσκευάσθη ἡ ζητουμένη εὐθεῖα. Εἰς τὸ σχῆμα ἐσχεδιάσθησαν καὶ αἱ δύο λύσεις ἡ β καὶ ἡ $β_1$.

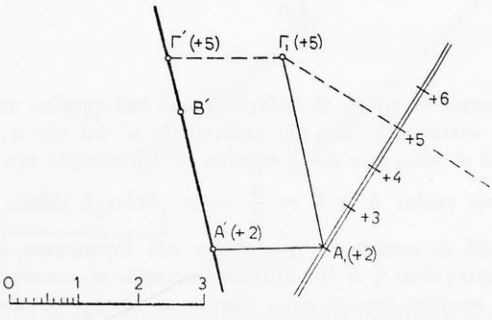


Σχ. 151

146. Διὰ σημείου A′ (α) νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον p *[κ′], τῆς ὁποίας δίδεται ἡ προβολὴ B′ ἑνὸς ἀκόμη σημείου της.*

Ἡ προβολὴ ε′ τῆς ζητουμένης εὐθείας ε, ἡ ὁποία θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον p, εἶναι ὡρισμένη, διὰ νὰ ὁρισθῇ ἡ ε, χρειάζεται νὰ κατασκευασθῇ ἡ ὑψομετρικὴ κλίμαξ αὐτῆς.

Πρὸς τοῦτο φέρομεν τὴν εὐθεῖαν τὴν ἑνοῦσαν τὸ σημεῖον A′ μετὰ τοῦ σημείου A_1' τῆς ὑψομετρικῆς κλίμακος κ′ ὑψομέτρου α καὶ ἐκ τοῦ σημείου A_1' φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν A′ B′ καὶ ἐπ' αὐτῆς θεωροῦμεν τὸ σημεῖον Γ_1' τομῆς της μετὰ τῆς ἰχνοπαραλλήλου τοῦ ἐπιπέδου p ὑψομέτρου γ.



Σχ. 152

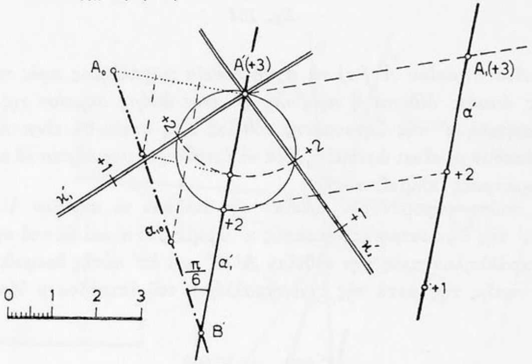
Ἡ εὐθεῖα $A_1 \Gamma_1$ κεῖται προφανῶς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p. Ἐκ τοῦ σημείου Γ_1, φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν A_1' A′ τέμνουσαν τὴν A′ B′ εἰς σημεῖον Γ καὶ ἀποδίδομεν εἰς αὐτὸ ὑψόμετρον γ. Ἡ εὐθεῖα A Γ ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τῶν σημείων A′ (α), Γ′ (γ) εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον p, διότι εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν $A_1 \Gamma_1$ τοῦ ἐπιπέδου p.

Εἰς τὸ Σχ. 152 ἐλήφθη ὡς ὑψόμετρον τοῦ σημείου Α τὸ $\alpha = +2$ καὶ ὡς ὁρίζουσα τὸ σημεῖον Γ_1 ἡ ἰχνοπαράλληλος ὑψομέτρου $+5$.

147. Διὰ τοῦ σημείου Α′ (α) νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν α, ἔχον δοθεῖσαν κλίσιν.

Ἔστω ὅτι ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ὁρίζεται διὰ τῆς ὑψομετρικῆς κλίμακός της [α′] καὶ ω ἡ δοθεῖσα γωνία κλίσεως.

Διὰ τοῦ σημείου Α′ φέρομεν εὐθεῖαν α_1' παράλληλον πρὸς τὴν α, αἱ κλίμακες τῶν δύο τούτων εὐθειῶν εἶναι ἰσοδύναμοι. Ἑνοῦμεν τὸ σημεῖον Α′ (α) μετὰ τοῦ σημείου τῆς α′ ὑψομέτρου α, ἔστω τὸ A_1 καὶ ἐκ τοῦ σημείου τῆς α′ ὑψομέτρου $\alpha - 1$ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν $A' A_1$. Ἡ παράλληλος αὕτη θὰ τμήσῃ τὴν α_1' εἰς σημεῖον τὸ ὁποῖον θεωρούμενον ὡς σημεῖον τῆς α_1 θὰ ἔχῃ ὑψόμετρον $\alpha - 1$.



Σχ. 153

Μὲ διάμετρον τὸ τμῆμα τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τοῦ σημείου τούτου καὶ τοῦ Α′ γράφομεν κύκλον (Κ). Ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς Α′ ἐπὶ τὴν α_1' λαμβάνομεν $A' A_0$ ἴσον μὲ τὸ ὑψόμετρον α τοῦ σημείου Α. Μὲ πλευρὰν τὴν $A' A_0$ κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν $A' A_0 B' = \dfrac{\pi}{2} - \omega$, ὁπότε ἡ εὐθεῖα $A_0 B'$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κατάκλισις ἰχνοκαθέτου τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου τῆς ὁποίας ἡ προβολὴ εἶναι ἡ Α′ Β′. Δυνάμεθα συνεπῶς νὰ κατασκευάσωμεν τὴν βαθμίδα τοῦ ἐπιπέδου ἴσην μὲ σφω. Ὁπότε μὲ κέντρον Α′ καὶ ἀκτῖνα τὴν βαθμίδα ταύτην γράφομεν κύκλον τέμνοντα τὸν (Κ) εἰς δύο, ἓν ἢ οὐδὲν σημεῖον, ἐφόσον ἡ βαθμὶς αὕτη εἶναι μικροτέρα, ἴση ἢ μεγαλυτέρα τῆς βαθμίδος τῆς εὐθείας α.

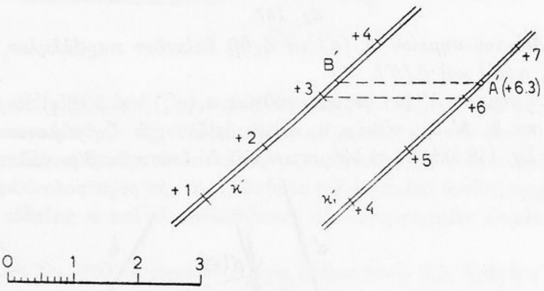
Ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὸ σημεῖον Α′ μὲ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν δύο κύκλων εἶναι ἡ προβολὴ τῆς ὑψομετρικῆς κλίμακος τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ὡς ἔχον βαθμίδα σφω ἔχει τὴν δοθεῖσαν κλίσιν καὶ ὡς περιλαμβάνον τὴν εὐθεῖαν α_1', εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν α.

Εἰς τὸ Σχ. 155 ἐλήφθη α=+ 3 καὶ w = $\frac{\pi}{6}$ καὶ ἐσχεδιάσθη ὁ κύκλος μὲ διάμετρον $\overline{A'\ 2}$, ἡ κατάκλισις A_0 τοῦ σημείου A, ἡ βαθμὶς τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου ἴση μὲ 1 : εφ $\frac{\pi}{6}$ = σφ $\frac{\pi}{6}$ = $\sqrt{3}$ καὶ ὁ κύκλος κέντρου A′ καὶ ἀκτῖνος $\sqrt{3}$. Διὰ τοῦ A′ καὶ τῶν σημείων τομῆς ἤχθησαν αἱ $\varkappa_1'$ καὶ $\varkappa_2'$, ὑψομετρικαὶ κλίμακες δύο ἐπιπέδων διερχομένων διὰ τοῦ A ἐχόντων γωνίαν κλίσεως $\frac{\pi}{6}$ καὶ παραλλήλων πρὸς τὴν εὐθεῖαν α.

148. Διὰ τοῦ σημείου A′ (α) νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον p [κ′].

Ἔστω q [$\varkappa_1'$] τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον. Ἐφόσον τὸ ἐπίπεδον q εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ p, θὰ ἔχῃ τὴν κλίμακα ἰσοδύναμον πρὸς τὴν τοῦ p, δηλαδὴ [$\varkappa_1'$] = [κ′].

Ἔστω ὅτι τὸ ὑψόμετρον α=k+0,1 λ ἔνθα k καὶ λ φυσικοὶ ἀριθμοί. Λαμβάνομεν μετὰ μίαν ἀκεραίαν διαίρεσιν τῆς κλίμακος κ′ τὸ σημεῖον B ἀπέχον ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς προηγουμένης ἀκεραίας διαιρέσεως, ἥτις ἔστω μ, 0,1 . λ τῆς βαθμίδος τῆς κλίμακος [κ′]. Φέρομεν τὴν A B καὶ ἐκ τοῦ σημείου τῆς ἀκεραίας διαιρέσεως μ τῆς κ′ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν A B. Ἡ παράλληλος αὕτη τέμνει τὴν $\varkappa_1'$ εἰς τὸ σημεῖον Γ ὑψομέτρου k, γνωρίζοντες δὲ τὴν βαθμίδα χαράσσομεν τὴν ὑψομετρικὴν κλίμακα $\varkappa_1'$.



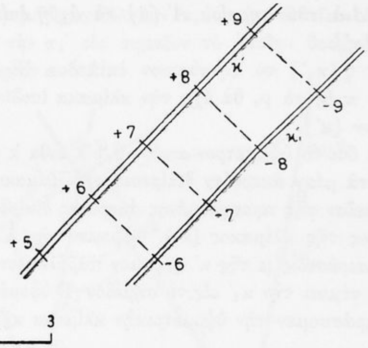
Σχ. 156

Εἰς τὸ Σχ. 156 τὸ ὑψόμετρον τοῦ A ἐλήφθη + 6,3 ὅθεν k = + 6, λ = 3. Ἐλήφθη ἐξ ἄλλου τὸ σημεῖον B τοιοῦτον ὥστε νὰ ἀπέχῃ τῆς διαιρέσεως 3 ἀπόστασιν $\overline{3B}$ = 0,3 . β ἔνθα β = $\overline{12}$ βαθμὶς τῆς ὑψομετρικῆς κλίμακος κ′, ὅθεν μ = 3. Ἐκ τοῦ σημείου 3 ἤχθη παράλληλος πρὸς τὴν A B καὶ εὑρέθη τὸ σημεῖον Γ τοῦ ὁποίου τὸ ὑψόμετρον θὰ εἶναι k =+ 6.

149. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ κλίμαξ τοῦ συμμετρικοῦ πρὸς τὸ ἐπίπεδον p [κ′], ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον προβολῆς.

Ἔστω q [κ₁′] τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον. Ἐπειδὴ τὰ δύο ταῦτα ἐπίπεδα ἰσοκλίνουν πρὸς τὸ ἐπίπεδον προβολῆς αἱ βαθμίδες αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἰχνοκάθετοι παράλληλοι.

Ἂν A′ (α) τυχὸν σημεῖον τοῦ p τὸ συμμετρικὸν του A'_1 (—α), ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον προβολῆς, θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ q, ἕπεται ὅτι ἡ ἰχνοπαράλληλος τοῦ p ὑψομέτρου α θὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν προβολὴν μὲ τὴν ἰχνοπαράλληλον ὑψομέτρου — α τοῦ ἐπιπέδου q. Ὅθεν αἱ ἰχνοπαράλληλοι ὑψομέτρων + 5, + 6, + 7 . . . τοῦ ἐπιπέδου p, ὁρίζουν ἐπὶ τῆς ἰχνοκαθέτου κ_1 τοῦ ἐπιπέδου q τὰ ὑψόμετρα — 5, — 6, — 7, . . . (Σχ. 157).

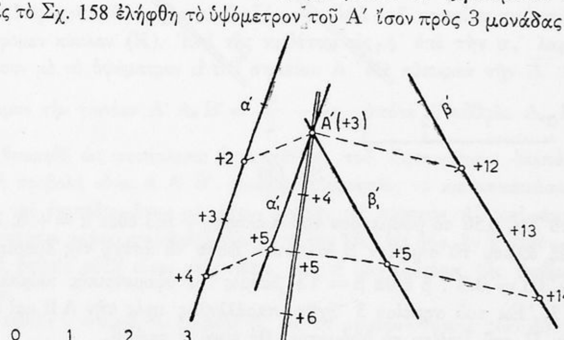


Σχ. 157

150. Διὰ τοῦ σημείου A′ (α) νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς ἀσυμβάτους α [α′] καὶ β [β′].

Ἐκ τοῦ σημείου A′ (α) φέρομεν εὐθείας $\alpha_1(\alpha'_1)$ καὶ $\beta_1(\beta'_1)$ παραλλήλους πρὸς τὰς α καὶ β. Αἱ δύο εὐθεῖαι α_1 καὶ β_1 ὁρίζουν τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον.

Εἰς τὸ Σχ. 158 ἐλήφθη τὸ ὑψόμετρον τοῦ A′ ἴσον πρὸς 3 μονάδας καὶ ἤχθη

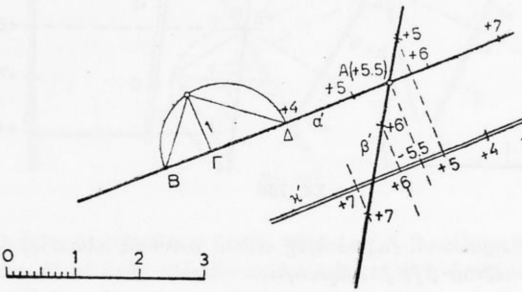


Σχ. 158

ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ σημεῖα ὑψομέτρων 5 τῶν δύο εὐθειῶν α_1 καὶ β_1. Ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι ἰχνοπαράλληλος τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου τοῦ ὁποίου ὑψομετρικὴ κλίμαξ εἶναι σημειωμένη ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ σημείου Α′ καθέτου ἐπὶ τὴν ὡς ἄνω ἰχνοπαράλληλον.

151. Δίδεται εὐθεῖα α [α′] καὶ ἡ προβολὴ β′ εὐθείας β τεμνούσης κατ᾽ ὀρθὴν γωνίαν τὴν εὐθεῖαν α. Ζητεῖται ἡ κλίμαξ τῆς εὐθείας β.

Ἔστω Α′ (υ) τὸ σημεῖον τομῆς τῶν εὐθειῶν α καὶ β. Ἐπειδὴ εἶναι γνωστὴ ἡ ὑψομετρικὴ κλίμαξ τῆς εὐθείας α τὸ ὑψόμετρον υ τοῦ σημείου Α εἶναι γνωστόν. Θεωροῦμεν τὸ ἐπίπεδον p [κ′] τὸ κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν α εἰς τὸ σημεῖον Α αὐτῆς. Ἐφόσον ἡ εὐθεῖα β εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν α, θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπι-



Σχ. 159

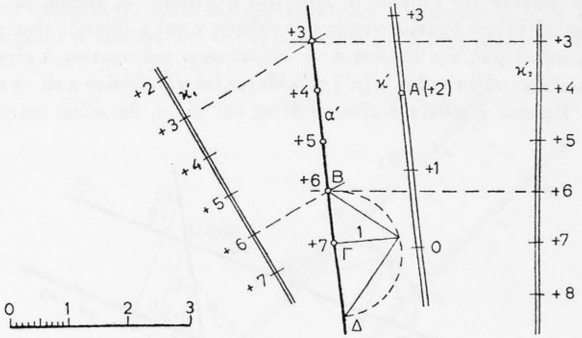
πέδου p. Ἑπομένως ἡ ζητουμένη ὑψομετρικὴ κλίμαξ της, θὰ προκύψῃ ἐκ τῶν ἰχνοπαραλλήλων τῆς ὑψομετρικῆς κλίμακος [κ′] τοῦ ἐπιπέδου p. Ἀλλὰ ἡ ὑψομετρικὴ κλίμαξ τοῦ ἐπιπέδου p κατασκευάζεται, διότι πρέπει ἡ κ′ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν α′, ἡ βαθμὶς τοῦ ἐπιπέδου ἀντίστροφος τῆς βαθμίδος τῆς εὐθείας α καὶ αἱ κατευθύνσεις τῶν ὑψομετρικῶν κλιμάκων νὰ εἶναι ἀντίθετοι.

Εἰς τὸ Σχ. 159 τὸ σημεῖον Α ἔχει ὑψόμετρον + 5,5, ἤχθη ἡ κ′ παράλληλος πρὸς τὴν α′ καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ Α′ ἐπὶ τὴν κ′ ἐσημειώθη τὸ ὑψόμετρον τοῦ ποδὸς ἴσον πρὸς + 5,5. Κατεσκευάσθη ἡ βαθμὶς $\overline{\text{Β Γ}}$ τοῦ ἐπιπέδου ἀντίστροφος τῆς βαθμίδος $\overline{\text{Γ Δ}}$ τῆς εὐθείας α καὶ δι᾽ αὐτῆς ἐχαράχθη ἡ ὑψομετρικὴ κλίμαξ τοῦ ἐπιπέδου διὰ τῶν ἰχνοπαραλλήλων τοῦ ὁποίου κατεσκευάσθη ἡ ὑψομετρικὴ κλίμαξ τῆς εὐθείας β.

152. Διὰ τοῦ σημείου Α′ (α) νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ δύο δοθέντα ἐπίπεδα p_1 [$κ'_1$] καὶ p_2 [$κ'_2$].

Ἔστω α [α′] ἡ εὐθεῖα τομῆς τῶν δύο ἐπιπέδων p_1 καὶ p_2. Τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον p [κ′] εἶναι τὸ ἐκ τοῦ σημείου Α κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν α.

Εἰς τὸ Σχ.158 τὸ ὑψόμετρον τοῦ Α ἐλήφθη $+2$. Κατεσκευάσθη ἡ εὐθεῖα α τομῆς τῶν ἐπιπέδων p_1 καὶ p_2 καὶ ἡ ὑψομετρικὴ κλίμαξ αὐτῆς. Κατεσκευάσθη ἡ βαθμὶς $\overline{\Gamma\Delta}$ τοῦ ἐπιπέδου p τοῦ καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν α, ὡς ἀντίστροφος τῆς βαθμίδος $\overline{B\Gamma}$ αὐτῆς καὶ ἐχαράχθη ἡ ὑψομετρικὴ κλίμαξ [κ′] τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου.



Σχ. 160

153. Διὰ σημείου Α′ (α) νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα δοθείσης κλίσεως, ὀρθογώνιος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν β [β′]. Διερεύνησις.

Διὰ τοῦ σημείου Α′ (α) φέρομεν ἐπίπεδον p [κ′] κάθετον ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν β [β′]. Ἡ ζητουμένη εὐθεῖα θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ p θὰ διέρχεται διὰ τοῦ Α καὶ θὰ ἔχῃ τὴν δοθεῖσαν κλίσιν πρὸς τὸ ἐπίπεδον προβολῆς. Ἐπομένως τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ γνωστὸν ἐκ τῆς θεωρίας πρόβλημα (βλέπε Στοιχεῖα Παραστατικῆς Γεωμετρίας Π. Λαδοπούλου § 82, 3).

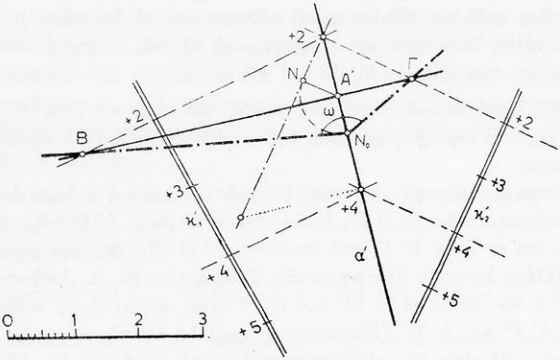
154. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ γωνία δύο δοθέντων ἐπιπέδων.

Ἔστωσαν $p_1[\kappa_1']$ καὶ $p_2[\kappa_2']$ τὰ δοθέντα ἐπίπεδα καὶ α [α′] ἡ εὐθεῖα τομῆς των.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν γωνίαν τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων, φέρομεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν α, τέμνον τὰ p_1 καὶ p_2 κατὰ δύο εὐθείας σχηματιζούσας τὴν ἀντίστοιχον τῆς διέδρου τῶν δύο ἐπιπέδων γωνίαν, καὶ κατακλίνομεν ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τὰς εὐθείας ταύτας.

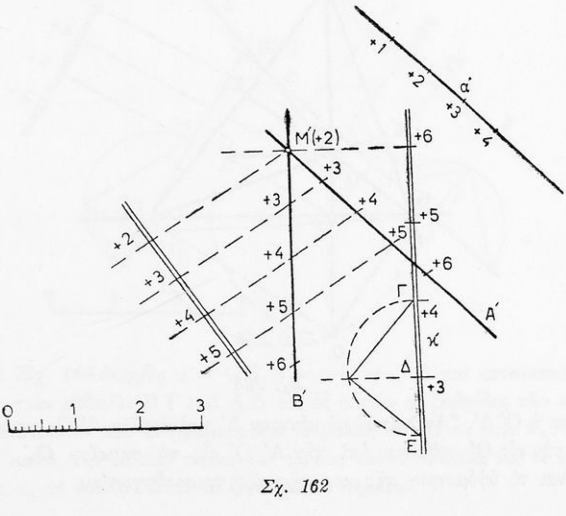
Εἰς τὸ Σχ. 160 ἤχθη ἐπίπεδον p κάθετον ἐπὶ τὴν α. Ἐλήφθη ἡ ἰχνοπαράλληλος ὑψομέτρου $+2$ τοῦ ἐπιπέδου p, ἥτις συνήντησε τὰς ἰχνοπαραλλήλους ὑψομέτρου $+2$ τῶν ἐπιπέδων p_1 καὶ p_2 εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Ἂν Α′ ἡ προβολὴ τοῦ σημείου τομῆς τῆς ἰχνοπαραλλήλου ὑψομέτρου $+2$ τοῦ p μετὰ τοῦ ἐπιπέδου (α, α′) καὶ Ν τὸ σημεῖον τομῆς τοῦ ἐπιπέδου p μετὰ τῆς εὐθείας α, ἡ εὐθεῖα Α′ Ν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν α καὶ δύναται νὰ κατασκευασθῇ. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ κατακλιθῇ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ὑψομέτρου $+2$

ἡ εὐθεῖα α καὶ νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ Α′ κάθετος Α′ Ν ἐπὶ ταύτην. Τὸ τμῆμα $\overline{A'N}$ εἶναι ἡ ζητουμένη ἀπόστασις τοῦ σημείου Α′ ἀπὸ τῆς εὐθείας α. Δὲν μένει τώρα παρὰ νὰ κατακλιθῇ τὸ τρίγωνον Β Ν Γ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ὑψομέτρου + 2, διὰ νὰ εὑρεθῇ ἡ ζητουμένη γωνία Β N_0 Γ τῶν δύο ἐπιπέδων.



Σχ. 161

155. *Δίδεται ἐπίπεδον p [κ′], εὐθεῖα α [α′] καὶ σημεῖον Μ (μ). Διὰ τοῦ σημείου Μ νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον p καὶ παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν α.*



Σχ. 162

Διὰ τοῦ σημείου Μ ἄγομεν εὐθεῖαν ΜΒ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον p [κ′[καὶ εὐθεῖαν ΜΑ παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν α.

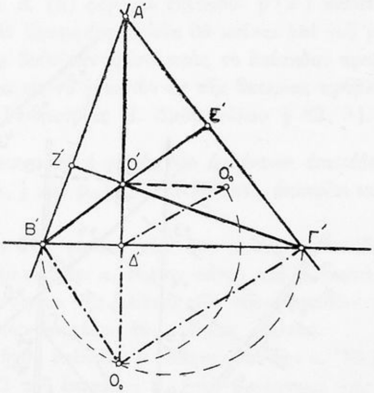
Αἱ δύο εὐθεῖαι ΜΑ, ΜΒ ὁρίζουν ἐπίπεδον p_1 [$κ_1$′] διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου Μ, παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν α καὶ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον p.

Εἰς τὸ Σχ. 162 ἐλήφθη Μ (+ 2) καὶ ἤχθησαν αἱ εὐθεῖαι Μ′Α′ καὶ Μ′Β′ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν α καὶ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον p, ἀντιστοίχως. Κατεσκευάσθη δὲ ἐν συνεχείᾳ ἡ ὑψομετρικὴ κλίμαξ κ′ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῶν εὐθειῶν Μ′ Α′ καὶ Μ′ Β′.

156. Τρισορθογωνίου τριέδρου γωνίας δίδονται τὰ ἴχνη Α′, Β′, Γ′ τῶν ἀκμῶν της. Νὰ εὑρεθῇ ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς της καὶ τὸ ὑψόμετρον αὐτῆς· Διερεύνησις.

Ἔστω Ο ἡ κορυφὴ τῆς τρισορθογωνίου, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα Α′ Ο εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Β′ Ο Γ′, ἕπεται ὅτι ἡ προβολὴ Α′ Ο′ τῆς Α′ Ο θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἴχνος Β′ Γ′ τοῦ ἐπιπέδου Β′ Ο Γ′, ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν, δηλαδή, Β′ Γ′ (βλέπε Στοιχεῖα Παραστατικῆς Γεωμετρίας Π. Δ. Λαδοπούλου § 34). Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον αἱ Β′ Ο′ καὶ Γ′ Ο′ εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τὰς εὐθείας Α′ Γ′ καὶ Α′ Β′. Ἑπομένως ἡ προβολὴ Ο′ τῆς κορυφῆς Ο τῆς τρισορθογωνίου θὰ εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου Α′ Β′ Γ′ (Σχ. 163).

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ὑψόμετρον τοῦ Ο, κατακλίνομεν τὸ τρίγωνον Β′ Ο Γ′ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου προβολῆς. Ἐν προκειμένῳ μὲ διάμετρον τὴν Β′ Γ′ γράφομεν κύκλον καὶ εὑρίσκομεν τὴν τομήν του μετὰ τῆς εὐθείας Α′ Ο′. Τὸ τμῆμα $\overline{Δ' O_0}$ εἶναι ἡ κατάκλισις τῆς ὑποτεινούσης $\overline{Δ' O}$, τῆς ὁποίας προ-



Σχ. 163

βολὴ εἶναι ἡ Ο′ Δ′. Ἂν λοιπὸν μὲ κέντρον Δ′ καὶ ἀκτῖνα Δ′ O_0 γραφῇ κύκλος τέμνων τὴν εἰς Ο′ κάθετον ἐπὶ τὴν Α′ Ο′ εἰς τὸ σημεῖον O_0', τὸ τμῆμα $\overline{O'O_0'}$ εἶναι τὸ ὑψόμετρον τῆς κορυφῆς τῆς τρισορθογωνίου.

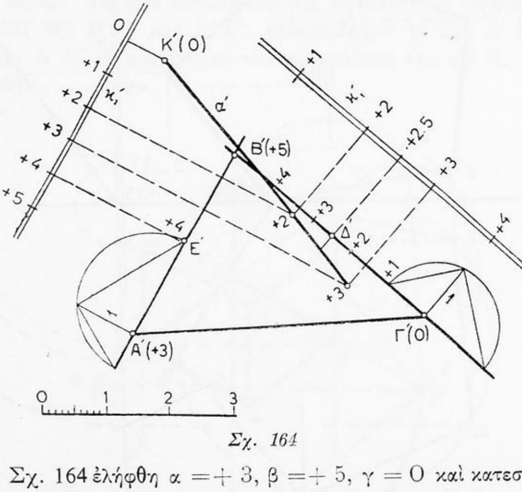
Διερεύνησις. Πρέπει τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' νὰ εἶναι ὀξυγώνιον.

157. Δίδονται τὰ σημεῖα Α' (α), Β' (β), Γ' (γ). Νὰ εὑρεθοῦν αἱ προβολαὶ τῶν διχοτόμων καὶ τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, καθὼς ἐπίσης καὶ ἡ προβολὴ καὶ τὸ ὑψόμετρον τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ κύκλου.

Κατασκευάζομεν μίαν ὑψομετρικὴν κλίμακα τοῦ ἐπιπέδου Α Β Γ καὶ κατακλίνομεν τὸ τρίγωνον Α Β Γ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τῆς ἰχνοπαραλλήλου τῆς κορυφῆς τοῦ τριγώνου τῆς ἐχούσης τὸ μικρότερον ὑψόμετρον. Ἐπὶ τῆς κατακλίσεως $A_0\,B_0\,\Gamma_0$ τοῦ τριγώνου κατασκευάζομεν τὰς διχοτόμους, τὰ ὕψη, τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ δι' ἀνακλίσεως εὑρίσκομεν τὰς προβολὰς τούτων.

158. Δίδονται τὰ σημεῖα Α' (α), Β' (β), Γ' (γ). Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς, ἀπέχον ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τὰς κορυφὰς ἢ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἐκ τῶν μέσων $\Delta'\left(\dfrac{\beta+\gamma}{2}\right)$ καὶ $E'\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τῶν πλευρῶν ΒΓ καὶ ΑΒ φέρομεν ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὰς πλευρὰς ταύτας καὶ εὑρίσκομεν τὴν εὐθεῖαν α τομῆς τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων. Τὸ ζητούμενον σημεῖον εἶναι τὸ σημεῖον τῆς εὐθείας α ὑψομέτρου μηδέν.



Σχ. 164

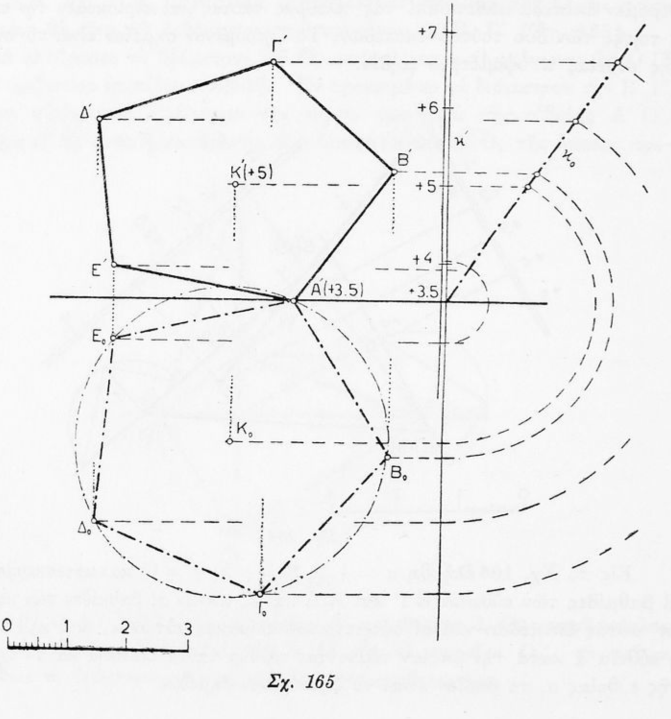
Εἰς τὸ Σχ. 164 ἐλήφθη α = + 3, β = + 5, γ = 0 καὶ κατεσκευάσθησαν αἱ βαθμίδες τῶν εὐθειῶν Β Γ καὶ Α Δ καὶ ἐξ αὐτῶν αἱ βαθμίδες τῶν καθέτων ἐπ' αὐτὰς ἐπιπέδων καὶ αἱ ὑψομετρικαὶ κλίμακες αὐτῶν κ_1' καὶ κ_2'. Εὑρέθη ἡ εὐθεῖα α κατὰ τὴν ὁποίαν τέμνονται τὰ δύο ταῦτα ἐπίπεδα καὶ τὸ ἴχνος Κ τῆς εὐθείας α, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον.

Διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ σημείου Λ τοῦ ἰσαπέχοντος τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου Α Β Γ, πρέπει νὰ κατακλιθῇ τὸ τρίγωνον Α Β Γ, ἐπὶ τῆς κατακλίσεως νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον O_0 τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου εἰς τὸ σημεῖον Ο. Τὸ ἴχνος τῆς εὐθείας ταύτης εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον.

159. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p *[κ′] δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Κ. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ προβολὴ τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου τοῦ ἔχοντος κέντρον τὸ σημεῖον Κ καὶ κορυφὴν τὸ σημεῖον Α.*

Κατακλίνομεν τὸ ἐπίπεδον p ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ σημείου Α′ (α) καὶ ἔστω K_0 ἡ κατάκλισις τοῦ σημείου Κ. Μὲ κέντρον K_0 καὶ ἀκτῖνα K_0 Α′ γράφομεν κύκλον καὶ κατασκευάζομεν τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτὸν κανονικὸν πεντάγωνον Α′ B_0 Γ_0 Δ_0 E_0. Ἀνακλίνομεν τὸ ἐπίπεδον p καὶ εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα Β′, Γ′, Δ′, Ε′. Τὰ ὑψόμετρα τῶν σημείων τούτων καθορίζονται διὰ τῶν δι᾽ αὐτῶν διερχομένων ἰχνοπαραλλήλων τοῦ p.

Εἰς τὸ Σχ. 165 ἐλήφθησαν ὡς ὑψόμετρα τῶν σημείων Α καὶ Κ ἀντιστοίχως τὰ + 3,5 καὶ + 5.



Σχ. 165

160. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p [κ′] τὰ σημεῖα A′ καὶ K′. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ προβολαὶ τῶν ἐκ τοῦ A ἐφαπτομένων τοῦ κύκλου τοῦ ἔχοντος κέντρον τὸ K καὶ ἀκτῖνα δοθεῖσαν.

Κατακλίνομεν ὡς καὶ εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν τὸ ἐπίπεδον p μετὰ τῶν σημείων A καὶ K. Μὲ κέντρον K_0 καὶ ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν γράφομεν κύκλον καὶ φέρομεν ἐκ τοῦ σημείου A_0 τὰς ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου (ἐφόσον τὸ A_0 κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου). Δι᾽ ἀνακλίσεως τῶν ἐφαπτομένων τούτων κατασκευάζομεν τὰς ζητουμένας προβολὰς τῶν ἐφαπτομένων.

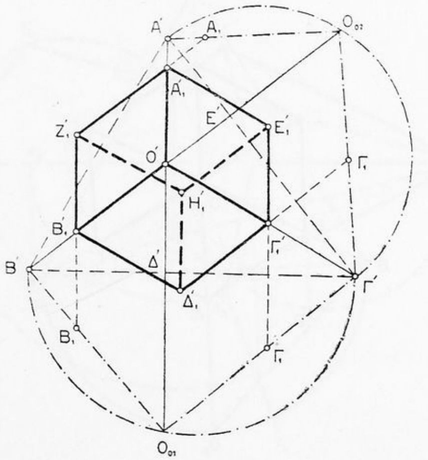
161. Δίδονται δύο μὴ παράλληλα ἐπίπεδα p_1 [κ'_1] καὶ p_2 [κ'_2]. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ γωνίαι τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων.

Ἡ κατασκευὴ ἐδόθη εἰς τὴν ἄσκησιν 154.

162. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ προβολὴ κύβου δοθείσης ἀκμῆς, τοῦ ὁποίου δίδονται τὰ ἴχνη τριῶν ἀκμῶν συνερχομένων εἰς τὴν αὐτὴν κορυφήν. Διερεύνησις.

Ἔστωσαν O A_1, O B_1, O Γ_1 αἱ τρεῖς ἀκμαὶ τοῦ κύβου τῶν ὁποίων δίδονται τὰ ἴχνη καὶ α τὸ μέγεθος τῆς ἀκμῆς.

Ὡς εἰς τὴν Ἄσκησιν 156 ἀπεδείχθη, ἡ προβολὴ O′ τῆς κορυφῆς O εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου τοῦ ὁποίου κορυφαὶ εἶναι τὰ ἴχνη τῶν ἀκμῶν O A_1, O B_1, O Γ_1. Κατακλίνομεν τὰς ἕδρας O A_1 B_1, O B_1 Γ_1, O Γ_1 A_1 ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου προβολῆς, στρέφοντες αὐτὰς περὶ τὰ ἴχνη τῶν ἐπιπέδων τῶν ἑδρῶν. Διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς κατακλίσεως γράφομεν δύο ἡμικύκλια ἓν ἐπὶ τῆς B′ Γ′ καὶ A′ Γ′, προεκτείνομεν τὰ ὕψη A′ Δ′ καὶ B′ E′ τοῦ τριγώνου A′ B′ Γ′ καὶ ἔχομεν τὰς κατακλίσεις O_{01} καὶ O_{02} τοῦ σημείου O (Σχ. 166).



Σχ. 166

Ἐπὶ τῆς κατακλίσεως $B'\ O_{01}\ Γ'$ τῆς ἕδρας $B'\ O\ Γ'$ λαμβάνομεν τὰ σημεῖα B_1 καὶ $Γ_1$ τοιαῦτα ὥστε $O_{01}\ B_1 = O_{01}Γ_1 = α$ καὶ εὑρίσκομεν τὰς προβολὰς B_1', $Γ_1'$ τῶν σημείων B_1, $Γ_1$. Ὁμοίως ἐκ τῆς κατακλίσεως $A'\ O^0_2\ Γ'$ τῆς ἕδρας $A'OΓ'$ λαμβάνομεν τὰ σημεῖα A_1 καὶ $Γ_1$ τοιαῦτα ὥστε $O_{02}\ A_1 = O_{02}\ Γ_1 = α$ καὶ εὑρίσκομεν τὴν προβολὴν A_1' τοῦ σημείου A_1.

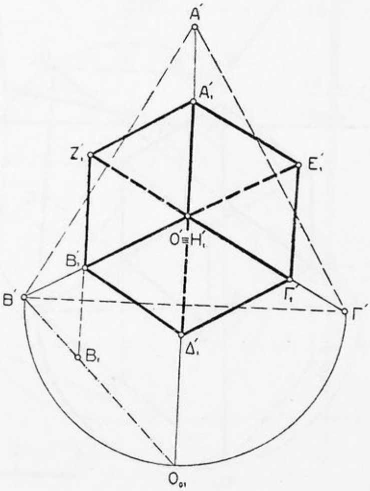
Ἔχομεν οὕτω κατασκευάσει τὰς προβολὰς $O\ A_1'$, $O\ B_1'$, $O\ Γ_1'$ τῶν τριῶν ἀκμῶν $O\ A$, $O\ B$, $O\ Γ$ τοῦ κύβου, τῇ βοηθείᾳ τῶν ὁποίων συμπληροῦμεν τὴν προβολὴν τοῦ κύβου (Σχ. 164).

163. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ προβολὴ κύβου ἔχοντος μίαν διαγώνιον κατακόρυφον.

Ἔστωσαν O καὶ H_1 δύο ἀπέναντι κορυφαὶ κύβου, $O\ A_1$, $O\ B_1$, $O\ Γ_1$ αἱ τρεῖς ἀκμαὶ αὐτοῦ αἱ συντρέχουσαι εἰς τὴν κορυφὴν O καὶ $H_1\ Δ_1$, $H_1\ E_1$, $H_1\ Z_1$ αἱ τρεῖς ἀκμαὶ αἱ συντρέχουσαι εἰς τὴν κορυφὴν H_1 καὶ $α$ τὸ μέγεθος τῆς ἀκμῆς τοῦ κύβου.

Τὸ τρίγωνον $A_1\ B_1\ Γ_1$ εἶναι ἰσόπλευρον, ἐπειδὴ δὲ ἡ διαγώνιος $O\ H_1$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον προβολῆς αἱ ἀκμαὶ $O\ A_1$, $O\ B_1$, $O\ Γ_1$ καθὼς καὶ αἱ $H_1\ Δ_1$, $H_1\ E_1$, $H_1\ Z_1$ ἰσοκλίνουν πρὸς τὸ ἐπίπεδον προβολῆς. Ἐπομένως αἱ $O'\ A_1'$, $O'\ B_1'$, $O'\ Γ_1'$ θὰ σχηματίζουν μεταξύ των ἴσας γωνίας, καθὼς καὶ αἱ $H_1'\ Δ_1'$, $H_1'\ E_1'$, $H_1'\ Z_1'$, γωνίας δηλαδὴ ἴσας πρὸς $\frac{2\pi}{3}$

Ἡ προβολὴ ὅθεν τῶν ἀκμῶν $A_1\ E_1$, $E_1\ Γ_1$, $Γ_1\ Δ_1$, $Δ_1\ B_1$, $B_1\ Z_1$, $Z_1\ A_1$



Σχ. 167

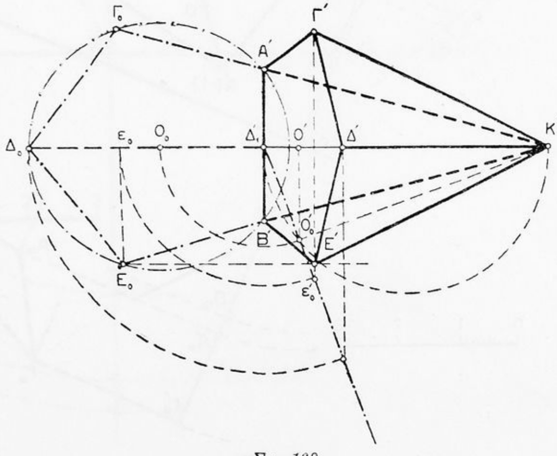
εἶναι πλευραὶ κανονικοῦ ἑξαγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι εἶναι αἱ προβολαὶ τῶν ὑπολοίπων ἀκμῶν, ἐνῷ τὰ ἴχνη τῶν ἀκμῶν $O\,A_1$, $O\,B_1$, $O\,\Gamma_1$ εἶναι κορυφαὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου.

Διὰ τὴν κατασκευὴν ὅθεν τῆς προβολῆς κύβου, τοῦ ὁποίου μία διαγώνιος, ἔστω ἡ $O\,H_1$, εἶναι κατακόρυφος, θεωροῦμεν ἰσόπλευρον τρίγωνον $A'\,B'\,\Gamma'$, τοῦ ὁποίου τὰς κορυφὰς θεωροῦμεν ὡς τὰ ἴχνη τῶν ἀκμῶν $O\,A$, $O\,B$, $O\,\Gamma$ (Σχ. 167) καὶ ἐργαζόμεθα ἐν συνεχείᾳ ὡς εἰς τὴν προηγουμένην Ἄσκησιν.

164. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ προβολὴ κανονικῆς πυραμίδος Κ, ΑΒΓΔΕ ἐχούσης βάσιν κανονικὸν πεντάγωνον, τῆς ὁποίας ἡ ἕδρα ΚΑΒ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς.

Κατακλίνομεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς τὴν βάσιν Α Β Γ Δ Ε τῆς πυραμίδος καὶ ἔχομεν τὸ κανονικὸν πεντάγωνον $A_0B_0\Gamma_0\Delta_0E_0$ κέντρου O_0. Ἡ Κ Ο εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν πενταγωνικὴν βάσιν τῆς πυραμίδος καὶ ἑπομένως καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν $\Delta_1\,O$, ἔνθα Δ_1 μέσον τῆς πλευρᾶς Α Β. Τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $K\,O\,\Delta_1$ γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν $\overline{K\Delta_1} = K'\,\Delta_1'$ καὶ τὴν κάθετον πλευρὰν $\overline{\Delta_1\,O} = \overline{\Delta_1'\,O_0}$.

Εἰς τὸ Σχ. 168 τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον κατεκλίθη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς εἰς τὸ $K'\,\Delta_1'\,O_0'$. Ὁ προβολὴ O' τοῦ O_0' ἐπὶ τῆς $K'\,\Delta_1'$, εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ κέντρου τοῦ πενταγώνου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς. Ἡ εὐθεῖα $\Delta_1'\,O_0'$ εἶναι ἡ κατάκλισις τῆς γραμμῆς κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος καὶ ἑπομένως ἡ κατασκευὴ τῶν προβολῶν τῶν ὑπολοίπων κορυφῶν τῆς πυραμίδος γίνεται εὐκόλως. Οὕτω διὰ τὴν κορυφὴν Ε, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς $\Delta_1'\,O_0'$ τμῆμα $\overline{\Delta_1'\,\varepsilon_0} = \overline{\Delta_1'\,\varepsilon_0'}$, ἐκ τοῦ ε_0' φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν



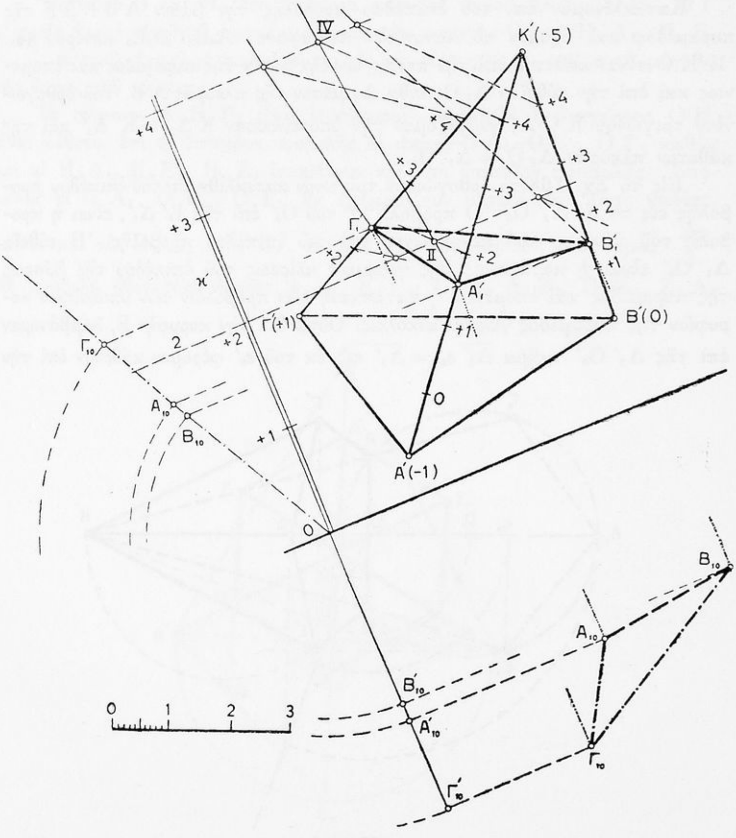
Σχ. 168

$K' \Delta_1'$ καὶ ἐκ τοῦ E_0 παράλληλον πρὸς τὴν $K' \Delta_1'$ καὶ εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον E' προβολὴν τῆς κορυφῆς E. Κατ' ἀνάλογον τρόπον κατασκευάζομεν καὶ τὰς προβολὰς τῶν κορυφῶν Γ' καὶ Δ'.

165. Δίδεται τριγωνικὴ πυραμὶς Κ, ΑΒΓ καὶ ἐπίπεδον p [κ']. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ προβολὴ τῆς τομῆς τῆς πυραμίδος ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου καὶ τὸ ἀληθὲς σχῆμα τῆς τομῆς.

Ἔστωσαν αἱ κορυφαὶ τῆς πυραμίδος A' (−1), B' (O), Γ' (+1) καὶ K (+5).

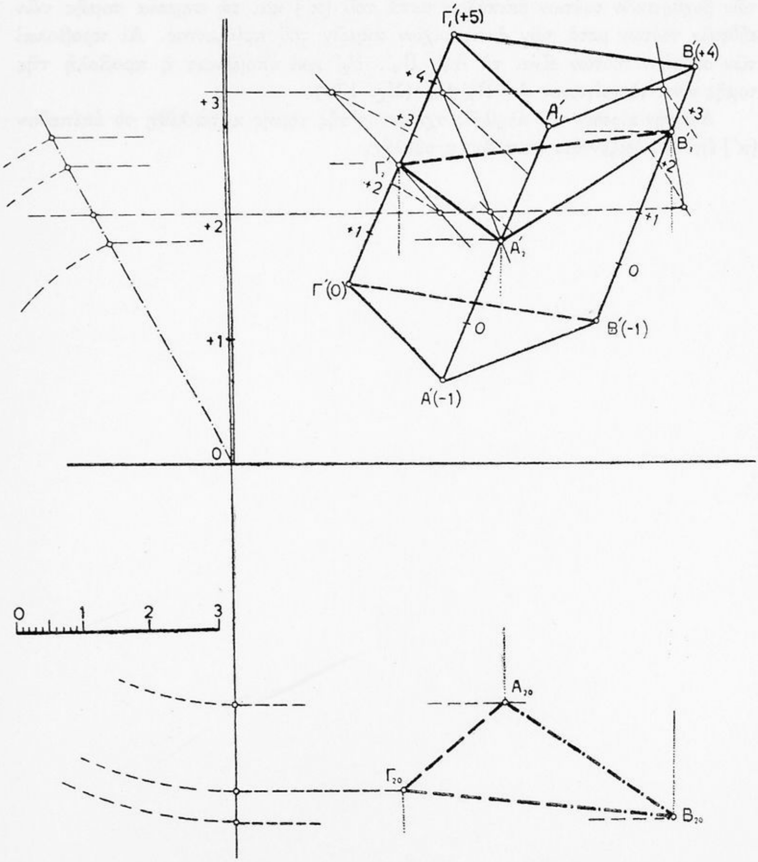
Εἰς τὸ Σχ. 169 κατεσκευάσθησαν αἱ τομαὶ τῶν ἀκμῶν Κ Α, Κ Β, Κ Γ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου [κ']. Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν διὰ τῶν ἀκμῶν τούτων ἤχθη-



Σχ. 169

σαν βοηθητικὰ ἐπίπεδα καὶ εὑρέθησαν αἱ εὐθεῖαι τομῆς τῶν βοηθητικῶν τούτων ἐπιπέδων μετὰ τοῦ ἐπιπέδου [κ′] καὶ τέλος αἱ τομαὶ τῶν εὐθειῶν τούτων μετὰ τῶν ἀντιστοίχων ἀκμῶν.

Οὕτως, ἐπὶ παραδείγματι, διὰ τῆς ἀκμῆς Κ Α ἤχθη βοηθητικὸν ἐπίπεδον ὁριζόμενον διὰ τῶν ἰχνοπαραλλήλων 4 IV καὶ 2 II, αἵτινες τέμνουν ἀντιστοίχως τὰς ἰχνοπαραλλήλους ὑψομέτρων + 4 καὶ + 2 τοῦ ἐπιπέδου [κ′] εἰς τὰ σημεῖα IV καὶ II. Ἡ εὐθεῖα IV II εἶναι ἡ τομὴ τοῦ διὰ τῆς Κ Α βοηθητικοῦ ἐπιπέδου, μετὰ τοῦ [κ′]. Τὸ σημεῖον τομῆς τῆς IV II καὶ τῆς Κ Α δίδει τὸ ζητούμενον σημεῖον A_1, τομῆς τῆς ἀκμῆς Κ Α καὶ τοῦ βοηθητικοῦ ἐπιπέδου.



Σχ. 170

Κατ' ἀνάλογον τρόπον εὑρέθησαν καὶ τὰ σημεῖα Β', καὶ Γ_1' καὶ ἐσχεδιάσθη ἡ τομή.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀληθοῦς σχήματος τῆς τομῆς κατεκλίθη τὸ ἐπίπεδον [κ'] ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου προβολῆς.

166. Δίδεται τριγωνικὸν πρῖσμα ΑΒΓ A_1, B_1, Γ_1, καὶ ἐπίπεδον p [κ']. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ προβολὴ τῆς τομῆς τοῦ πρίσματος ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου καὶ τὸ ἀληθὲς σχῆμα τῆς τομῆς.

Καὶ ἐδῶ ὅπως καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς πυραμίδος ἤχθησαν διὰ τῶν ἀκμῶν τοῦ πρίσματος βοηθητικὰ ἐπίπεδα, κατεσκευάσθησαν αἱ εὐθεῖαι τομῆς τῶν βοηθητικῶν τούτων ἐπιπέδων μετὰ τοῦ [κ'] καὶ τὰ σημεῖα τομῆς τῶν εὐθειῶν τούτων μετὰ τῶν ἀντιστοίχων ἀκμῶν τοῦ πρίσματος. Αἱ προβολαὶ τῶν σημείων τούτων εἶναι τὰ A_2', B_2', Γ_2' καὶ ἑπομένως ἡ προβολὴ τῆς τομῆς εἶναι τὸ τρίγωνον $A_2'\,B_2'\,\Gamma_2'$ (Σχ. 170).

Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀληθοῦς σχήματος τῆς τομῆς κατεκλίθη τὸ ἐπίπεδον [κ'] ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου προβολῆς.