

ΣΤΕΛΙΟΥ ΧΡ. ΠΑΧΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ — ΦΡΟΝΤΙΣΤΟΥ

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΤΕΥΧΟΣ Α'.

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

τῶν μαθητῶν τῶν Λυκείων, τῶν ὑποψηφίων διὰ τὰς Ἀνωτάτας Σχολάς καὶ τῶν Φοιτητῶν τῆς Φυσικομαθηματικῆς Σχολῆς

ΑΘΗΝΑΙ 1965

49228
21-6-2027

ΣΤΕΛΙΟΥ ΧΡ. ΠΑΧΗ
Μαθηματικού - Φροντιστού.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΤΕΥΧΟΣ Α:

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

τῶν μαθητῶν τῶν Λυκείων, τῶν Νποφηφίσων διάτας Ἀνωτάτας Σχολάς, και τῶν Φοιτητῶν τῆς Φυσικομαθηματικῆς Σχολῆς

«Τα' Μαθηματικά προκιζουν τὸν μαθηματικὸν μὲ μιᾶ καινούργα αἰδοῖς».

Καρόλος Νταρούν

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τό τεῦχος τούτο ἀποτελεῖ τό πρῶτον μιᾶς σειρᾶς ὅλοκλή -
ρου μονογραφιῶν ἐπὶ διαφόρων θεμάτων 'Αλγέβρας.

Τά εἰς ταύτας μελετῶμενα θέματα ἔξετάζονται μέσον τό
δυνατόν μεγαλυτέραν ἀκρίβειαν καὶ εἶναι ἐμπλουτισμένα μέ πλῆ-
θος ἀσκήσεων λελυμένων καὶ ἀλύτων, ὥστε ὁ χρησιμοποιῶν ταύτας
νά γίνεται κάτοχος τοῦ θέματος. "Εχω τὴν γνώμην ὅτι μέ τά μι-
κρά αὐτά τεύχη προσφέρω εἰς τούς ἀναγνώστας μου χρήσιμον βοή-
θημα διά τὴν μόρφωσίν των.

Σ.Χ. ΠΑΧΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- R.W. Brink College Algebra
Hall and Knight Higher Algebra
C. Smith A Treatise on Algebra
Σ. Κανέλλου "Αλγεβρα
Α. Πάλλα Μεγάλη "Αλγεβρα
Π.Δ.Ε.ΜΕ
journal Mathematiques Elementaires

Πάντα γρίγιοι ἀντίτυποι φέρει τὴν ὑπογραφήν τοῦ συγγραφέως.



μόνον ἐκ τῶν νόμων τῆς Λογικῆς, ἀλλά καὶ ἐκ τῶν τεθειμένων ἀξιωμάτων, ὑποθέσεων ἢ ἀποδειχθέντων θεωρημάτων.

'Η ἵστορία τῶν Μαθηματικῶν ἀναφέρει πλεῦστα ὅσα σφάλματα τά ὅποια διεπράχθησαν, διότι ἔχρησιμοποιήθησαν ἔννοιαι μή ὄρισθεισαι ἐπακριβῶς, ἢ ἔγιναν παραδεκτά προτάσεις τῶν ὅποιων ἢ ἀλήθεια ἡτο προφανής ἀνευ ἀποδείξεως¹. Π.χ. ὁ Fermat κατά τό 1640 ἴσχυρόσθη ὅτι ὁ ἀριθμός $2^{2^n} + 1$, διά $n=1,2,3,4$ διέδει πρώτους ἀριθμούς, διά κάθε τιμήν τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ n . Τοῦτο ὅμως ἀπεδείχθη τό 1732 ὑπό τὸν Euler ὃν φευδέσ. Διότι ὡς ἔδειξεν οὗτος ὁ $2^{2^n} + 1$ διά $n=5$ διέδει τὸν σύνθετον ἀριθμόν 6416700417.

Τὰ σφάλματα αὐτά ἔγιναν ἀφορμή ὥστε τά Μαθηματικά νάθεμελιώνονται δύονέν ἐπί στερεωτέρων βάσεων.

Τὴν τελείαν ἐπαγγήν μετεχειρίσθη εἰς τά Μαθηματικά μέσηκρίβειαν καὶ πληρότητα πρᾶτος ὁ Ἐλληνοϊταλός Francesco Maurolico (Μεσσήνη 1494-1575) ἔλαβε δέ τό ὄνομά της ἀπό τὸν J. Wallis (1656) καὶ De Morgan (1838). (Βλέπε History of Mathematics by D.E. Smith). Τὴν μέθοδον τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγγῆς χρησιμοποιοῦμεν διά νά ἀποδείξωμεν ὅτι : μία πρότασις ἢ ὅποια ἐνφράζεται τῇ βοηθείᾳ ἐνός φυσικοῦ ἀριθμοῦ n ἢ ἀπό τούς φυσικούς ἀριθμούς μ καὶ ν ἢ γενικώτερον ἐκ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν (n_1, n_2, \dots, n_p), καὶ ἐφ' ὅσον ἴσχύει διά μίαν ἐλαχίστην τιμήν τοῦ n , θά ἴσχύῃ δι' ὅλας τὰς τιμάς τὰς μεγαλυτέρας ἢ ἵσας πρός τὴν ἐλαχίστην τιμήν τοῦ n , ἢ τῶν μ καὶ ν, τὰς ὅποιας δύναται νά λάβῃ ὁ φυσι-

1. Ήταν τά Μαθηματικά αἱ ἀρχαὶ ἐκ τῶν ὅποιων ὅρμωμενα εἶναι αὐστηραὶ καὶ βέβαιαι καὶ , συνεπῶς, ἢ ἀπόδειξις εἶναι ἀπόλυτος· ἀκύταμάχητος. Διά τοῦτο ἡ μαθηματική ἀπόδειξις θεωρεῖται ὡς ὁ τέλειος τύπος τῆς ἀποδείξεως.

κός ἀριθμός ν ή οἱ φυσικοὶ μ καὶ ν, καὶ παρουσιάζεται ὑπό δύο μορφάς.

Καί η μέν πρώτη βασίζεται εἰς τὸ ἀξίωμα τοῦ Ρεανοῦ, η δέ δευτέρα εἰς τὴν ἀρχήν τοῦ ἐλαχίστου φυσικοῦ. 'Αλλ' ἐπειδή αἱ δύο αὐταὶ προτάσεις εἰναι ἰσοδύναμοι δυνάμεθα νά ἰσχυρισθῶμεν ὅτι η μέθοδος τῆς τελείας ἐπαγωγῆς στηρίζεται εἰς τὸ ἀξίωμα τοῦ Ρεανοῦ.

ΠΡΩΤΗ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΤΕΛΕΙΑΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

Θεώρημα τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς.

3. Η' Εάν μέν πρότασις $F(v)$ ἔξαρτωμένη ἐκ τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ v , ἀληθεύῃ διά $v=1$, καὶ μὲ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι η $F(v)$ ἀληθεύει διά $v=k$, ὅπου κ φυσικός, ἀληθεύει καὶ διά $v=k+1$, τότε θά ἀληθεύῃ καὶ διά κάθε φυσικόν ἀριθμόν".

'Απόδειξις Α. 'Αφοῦ η $F(v)$ ἀληθεύῃ διά $v=1$, τότε ἔνεκα τῆς προϋποθέσεως θά ἀληθεύῃ καὶ διά τὴν ἀμέσως ἐπομένην τιμήν τοῦ, δηλ. διά $v=2$. 'Αφοῦ ὅμως η $F(v)$ ἀληθεύῃ διά $v=2$, ἔνεκα τῆς προϋποθέσεως θά ἀληθεύῃ καὶ διά τὴν ἀμέσως ἐπομένην τιμήν τοῦ v , δηλ. διά $v=3$. Προχωροῦντες τοιουτορόπως, κατά μίαν μονάδα ἐκάστοτε, φθάνομεν εἰς οἰονδήποτε συγκεκριμένον φυσικόν ἀριθμόν θέλομεν. 'Επειδή ὅμως τό σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀπειροπληθές ὑποχρεούμεθα νά στηριχθῶμεν εἰς τὴν θεμελιώδη ἰδιότητα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν η ὅποια καλεῖται ἀξίωμα τῆς τελείας ὑπαγωγῆς (ἀξίωμα τοῦ Ρεανοῦ) κατά τὴν ὅποιαν "Κάθε σύνολον φυσικῶν ἀριθμῶν πού περιέχει τὸν 1 καὶ μαζί μὲ τὸν οἰονδήποτε δοθέντα ν περιέχει καὶ τὸν ἐπόμενον τοῦ $v+1$, περιέχει ὅλους τοὺς φυσικούς ἀριθμούς δηλ. συμπλητειμέ τό σύνολον τῶν φυσικῶν ἀρι-

θμῶν". "Ενεκα τούτων ἡ πρότασις $F(v)$ ισχύει δι' ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς.

'Απόδειξις B. 'Η ἀπόδειξις αὕτη γίνεται διά τῆς μεθόδου τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγγῆσι καὶ στηρίζεται ἐπὶ τῆς "ἀρχῆς τοῦ ἔλαχίστου φυσικοῦ ἀριθμοῦ" κατά τὴν ὁποῖαν, "εἰς κάθε σύνολον φυσικῶν ἀριθμῶν ὑπάρχει πάντοτε εἰς ἔλαχιστος" (δηλ. μικρότερος ὅλων τῶν ἄλλων).

"Εστω ὅτι ισχύουν αἱ προτάσεις α) 'Η πρότασις $F(v)$ ἀληθεύει διά $v=1$, β) "Αν ἡ πρότασις $F(v)$ ἀληθεύῃ διά κάποιαν τιμήν K τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ v , τότε ἀληθεύει καὶ διά τὴν ἀμέσως ἐπομένην τιμήν τοῦ v τὴν $v+1$, ἀλλά ἡ $F(v)$ δέν ἀληθεύει δι' ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς." Ας φαντασθῶμεν τότε, τό σύνολον ὅλων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν διά τούς ὁποῖους δέν ἀληθεύει ἡ πρότασις $F(v)$, ἔστω τό $\Sigma = \{a, a_1, a_2, \dots\}$. Εἰς τό σύνολον αὐτό Σ θά υπάρχῃ εἰς ἔλαχιστος, ἔστω ὁ a , διά τούς ὁποῖουν δέν ἀληθεύει ἡ πρότασις. Θά εἶναι δέ $a \geq 2$ διότι διά $v=1$ ἀληθεύει. 'Αφοῦ ὁ a εἶναι ὁ ἔλαχιστος φυσικός ἀριθμός διά τὸν ὁποῖον δέν ἀληθεύει ἡ πρότασις, ἔπειται ὅτι διά τούς μικροτέρους τοῦ x ἡ πρότασις θά ἀληθεύῃ. "Αρα θά ἀληθεύῃ καὶ διά $v=a-1$. 'Αφοῦ ὅμως ἀληθεύῃ διά $v=a-1$ δέν ἀληθεύει διά $v=a$, τό ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν β^{α} ὑπόθεσιν.

3. 'Η ἀνωτέρω ἀρχή μᾶς παρέχει ἀμέσως τὴν ἐπομένην ἀπόδειξηκήν πορείαν.

I. 'Αποδεικνύομεν ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει διά $v=1$, δηλ. ὅτι ἀληθεύει ἡ $F(1)$.

II. Δεχόμεθα ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει διά $v=\kappa$ (ὅπου κ εφ) καὶ ὡς συνέπειαν αὐτοῦ ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει καὶ διά $v=\kappa+1$, δηλ. δεχόμεθα ὡς ἀληθή τὴν $F(\kappa)$ καὶ ἀποδεικνύομεν τὴν

$F(n+1)$. Ούτω λοιπόν κατά τήν αρχήν της τελείας έπαγωγῆς ή πρότασις $F(v)$ ἀληθεύει διά κάθε φυσικόν ἀριθμόν v .

Παρατήρησις. Πολλάκις παρουσιάζονται περιπτώσεις κατά τάς διποίας ή ἔλαχίστη φυσική τιμή τοῦ v διά τήν ὅποιαν ή πρότασις $F(v)$ ἔχει νόημα δέν εἶναι ή $v=1$, ἀλλά ή $v=a$, ἔνθα φυσικὸς ἀριθμός μεγαλύτερος τοῦ 1. Εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς ἴσχυει πάλιν τό θεώρημα της τελείας έπαγωγῆς, διατυπούμενον πλέον ὡς ἔξης.
 "Εάν μέτα πρότασις $F(v)$ ἀληθεύει διά $v=a$, ὅπου α δοθεῖς φυσικός ἀριθμός, καὶ μέ τήν προϋπόθεσιν ὅτι ἀληθεύει διά $v=n$, ὅπουκ τυχόν ὥρισμένος φυσικός ἀριθμός μεγαλύτερος τοῦ a , ἀληθεύει ἐπίσης ἀναγκαστικῶς καὶ διά $v=n+1$, τότε η πρότασις ἀληθεύει δι' ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς τούς μή. μικροτέρους τοῦ a .

$$\text{Παράδειγμα 1ον. } \text{Έάν } v \neq \text{νά δειχθῇ ὅτι } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + v^3 = \\ = \left[\frac{v(v+1)}{2} \right]^2 \quad (1).$$

Η πρότασις διά $v=1$ ἀληθεύει. Διότι ἂν θέσωμεν $v=1$ τόπῳ των μέλος τῆς (1) ἔχει ἔνα μόνον ὅρον καὶ η (1) γίνεται $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2} \right)^2$ ή ὅποια εἶναι ἀληθῆς. Μέ τήν προϋπόθεσιν ὅτι ἀληθεύει διά $v=n$ που κεφ δηλ. ὅτι εἶναι $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$ θά δείξωμεν ὅτι ἀληθεύει διά $v=n+1$ δηλ. $S_{n+1} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2$. Άλλα $S_{n+1} = S_n + (n+1)^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 + \\ + (n+1)^3 = (n+1)^2 \left[\frac{n^2}{4} + n+1 \right] = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2$. "Αρα η (1) ἀληθεύει διά $v=n+1$ καὶ ἐπομένως κατά τήν αρχήν της τελείας έπαγωγῆς θά ἀληθεύῃ διά κάθε φυσικόν v .

$$\text{Παράδειγμα 2ον. } \text{Έάν } v \neq \text{νά δειχθῇ ὅτι } 2+2^2+2^3+\dots+2^v = \\ = 2(2^v-1) \quad (1).$$

Η πρότασις διά $v=1$ ἀληθεύει. Διότι ἂν θέσωμεν $v=1$ η (1) γίνεται $2+2(2-1)=2$, ή ὅποια εἶναι ἀληθῆς. "Εστω ὅτι η (1) ἀη-

Θεύει διά $n=\kappa$ ($\kappa \in \mathbb{N}$) δηλ. $S_{\kappa} = 2+2^2+2^3+\dots+2^{\kappa}=2(2^{\kappa}-1)$ (2). Θά δείξω μεν ότι μέ τήν προϋπόθεσιν αυτήν άληθεύει καί διά $n=\kappa+1$ δηλ. ότι $2+2^2+2^3+\dots+2^{\kappa}+2^{2\kappa+1}=2(2^{\kappa+1}-1)$ (3). Ή (3) ένεκα τῆς (2) γίνεται $2(2^{\kappa}-1)+2^{\kappa+1}=2(2^{\kappa+1}-1)$. "Αρα ή (1) άληθεύει καί διά $n=\kappa+1$, καί έπομένως κατά τήν άρχην τῆς τελείας έπαγωγῆς θά άληθεύῃ διά^{*} κάθε φυσικόν n .

ΔΙΠΛΗ ΤΕΛΕΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

4. Βάν μία πρότασις $F(\mu, n)$ έξαρταιται ὑπό δύο φυσικούς αριθμούς μ, n , εχομεν τότε τήν διπλήν ή τελείαν έπαγωγήν ή όποια στηρίζεται έπι τῆς άρχης του έλαχίστου φυσικοῦ άριθμοῦ.

Η άρχη αυτη μᾶς παρέχει άμεσως τήν έπομένην αποδεικτικήν πορείαν.

α)' Αποδεικνύομεν τήν πρότασιν διά $n=1$ ήτοι τήν $F(\mu, 1)$ διά κάθε μ . Μήρος τούτο αποδεικνύομεν κατά τά γνωστά πρῶτον τήν $F(1, 1)$ καί κατόπιν μέ τήν προϋπόθεσιν ότι ίσχυει ή $F(\mu, 1)$ διεικνύομεν ότι άληθεύει ή $F(\mu+1, 1)$ ὅπου $\mu \in \mathbb{N}$.

β) Γίνεται απλῆ τελεία έπαγωγῆ ως πρός n . Δηλ. ὑπό τήν προϋπόθεσιν ότι ίσχυει ή $F(\mu, n)$ αποδεικνύομεν ότι ίσχυει ή $F(\mu, n+1)$. Οπου μεφ καί ν αύθαίρετος.

Τά άνωτέρω άφορούν προτάσεις πού ως έλαχίστην τιμήν τῶν μ καί n εἶναι ή μονάς. Έφαρμόζομεν οἵμας τά άνωτέρω καί όταν οἱ μ καί n δέν καλύπτουν ὅλο τό σύνολον τῶν φυσικῶν άριθμῶν, άφετε οἵμας νά δειχθῇ ότι ή πρότασις άληθεύει διά τάς έλαχίστας τιμάς τῶν μ καί n .

Η μεσόδος αυτη έπειτείνεται προφανῶς καί εἰς περιπτώσεις τῆς μορφῆς $F(\mu, n, \rho, \sigma, \dots)$ ὅπου $\mu, n, \rho, \sigma, \dots \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 1ον. Έάν $\mu, v \in \Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $x^\mu \cdot x^v = x^{\mu+v}$ ($x \neq 0$). Επειδή κατά τὸν δοισμόν τῶν δυνάμεων εἰναι $x^\mu \cdot x^v = x^{\mu+1} \cdot x^{\mu+1} \cdots$ πεται ὅτι ἡ πρότασις ἴσχυει διά κάθε μ , καὶ $v=1$. Εστω ὅτι $x^\mu \cdot x^v = x^{\mu+v}$ δημου μ τυχών καὶ ν τυχών ἀλλ' ὑπεισμένος. Τότε ἐπειδή $x^\mu \cdot x^{v+1} = x^\mu (x^v \cdot x) = (x^\mu \cdot x^v) x^{\mu+v} \cdot x^{\mu+v+1}$ πεται ὅτι ἴσχυει καὶ ἡ $F(\mu, v+1)$. Άρα ἡ πρότασις $F(\mu, v)$ ἴσχυει δι' ὅλους τοὺς φυσικούς μ καὶ ν.

Παράδειγμα 2ον. Έάν x καὶ $\phi \in \Phi$, νά δειχθῇ ὅτι:

$$(x+\phi)^v > x^v + v x^{v-1} \phi \text{ διά κάθε } \Phi.$$

Διά $v=2$ ἡ ἀποδεικτέα ἀνισότης γίνεται $(x+\phi)^2 > x^2 + 2x^{2-1} \phi$ ἢ ὅποια εἰναι ἀληθῆς. Εστω ὅτι ἀληθεύει διά $x=\kappa$ δημου κεφ δηλ. ὅτι $(x+\phi)^n > x^n + n x^{n-1} \phi$ (1) καὶ θά δείξωμεν ὅτι ἀληθεύει καὶ διά $v=n+1$. Εκ τῆς (1) καὶ τῆς $x+\phi > 0$ ἔχομεν ὅτι $(x+\phi)^{n+1} > (x^n + n x^{n-1} \phi)(x+\phi)$ ἢ $(x+\phi)^{n+1} > x^{n+1} + n x^{n-1} \phi + x^n \phi + n x^{n-2} \phi^2 > 0$ ὅτε $(x+\phi)^{n+1} > x^{n+1} + (n+1)x^n \phi$. Άρα διά $v=n+1$ ἀληθεύει ἡ ἀνισότης. Άρα ἡ ἀποδεικτέα ἴσχυει διά πάντα φυσικόν ν.

ΔΕΥΤΕΡΑ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΤΕΛΕΙΑΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΟΣ

5. Θεώρημα τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγγελματος (Δευτέρα μορφή). Έάν μία πρότασις $F(v)$ ἐξαρτωμένη ἐκ τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν, ἀληθεύει διά $v=1$, καὶ μέ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἀληθεύει δι' ὅλους τοὺς φυσικούς ἀριθμούς τοὺς μικροτέρους ἀπό τυχόντα φυσικόν ἀριθμὸν κ, ἀληθεύει καὶ διά $v=k$, τότε θά ἀληθεύῃ, διά πάντα φυσικόν ἀριθμόν.

Ἀπόδειξις. Βεστω S , τό σύνολον ὅλων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, διά τοὺς ὅποίους δέν ἀληθεύει ἡ πρότασις $F(v)$. Εἰς τό σύνολον τοῦ S το θά ὑπάρχῃ εἰς ἐλάχιστος, ἔστω αὐτὸς 1. Τότε ἐνῷ ἡ $F(v)$ ἀληθεύ-

Ει διά τούς φυσικούς ἀριθμούς τούς μικροτέρους τοῦ α, δέν ἀληθεύει διά τόνα. Τοῦτο ὅμως είναι ἄτοπον, ἵπας ή $F(v)$ ἀληθεύει δι' ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς. Ἡ ἀνιατέρω ἀρχή μᾶς παρέχει τήν επομένην ἀποδεικτικήν πορείαν.

I. Ἀποδεικνύομεν ὅτι η πρότασις ἀληθεύει διά $v=1$, δηλ. ὅτι ἀληθεύει η $F(1)$.

II. Ἀποδεικνύομεν ὅτι η πρότασις ἀληθεύει διά $v=n$ δηλ. ὅτι ἀληθεύει $F(n)$ μέ τήν προϋπόθεσιν ὅτι η $F(v)$ ἀληθεύει δι' ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς τούς μικροτέρους τοῦ n .

Παράδειγμα. Νά δειχθῇ ὅτι η παράστασις $x^v + \psi^v$ διά $v \geq 2$ τίθεται ὑπό τήν μορφήν ἀνεράινου πολυωνύμου ὡς πρός $S = 4+x$ καὶ $P = \chi\psi$. Διά $v=2$ ἔχομεν $x^2 + \psi^2 = (x+\psi)^2 - 2x\psi = S^2 - 2P$. Διά $v=3$ ἔχομεν $x^3 + \psi^3 = (x+\psi)^3 - 3x\psi(x+\psi) = S^3 - 3PS$. "Αρα η πρότασις ἀληθεύει διά $v=2$, καὶ $v=3$. "Εστω ὅτι η πρότασις ἀληθεύει καὶ διά $v=n$ καὶ $v=n+1$, δηλαδή ὅτι $x^n + \psi^n = \Pi(S, P)$ (1) καὶ $x^{n+1} + \psi^{n+1} = \Lambda(S, P)$ (2). Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τά μέλη τῆς (2) ἐπί $x+\psi$ καὶ ἔχομεν $(x^{n+1} + \psi^{n+1})(x+\psi) = (x+\psi) \wedge (S, P)$ ή $x^{n+2} + \psi^{n+2} + x\psi^{n+1} + \psi^{n+1}\psi = S\Lambda(S, P)$ ή $x^{n+2} + \psi^{n+2} + x\psi(x^n + \psi^n) = S\Lambda(S, P)$. ή $x^{n+2} + \psi^{n+2} = S\Lambda(S, P) - P\Lambda(S, P) = F(S, P)$. "Αρα ἀληθεύει καὶ διά $v=n+2$. "Αφοῦ λοιπέν διληθεύει διά $v=1$ καὶ $v=2$ θά ἀληθεύῃ καὶ διά $v=3$. "Αληθεύουσα δέ διά $v=2$ καὶ $v=3$ θά ἀληθεύῃ καὶ διά $v=4$ κ.ο.κ. "Αρα καὶ διά πάντα $v \in \Phi$.

ΕΠΑΓΓΩΓΗ CAUCHY

6. 'Ο Cauchy ἔφερε σπουδαιοτάτην τροποποίησιν εἰς τάν ἐπαγγικήν μέθοδον παρατηρῶν ὅτι, κάθε φυσικός ἀριθμός ≥ 2 δύναται νά τεθῇ ὑπό τήν μορφήν $2^{\lambda}-1$ ὅπου $\lambda, \mu \in \Phi$. Οὕτω ἐδημιουργήσει τήν ἐξης ἀποδεικτικήν πορείαν η ὁποία ἔφαρμόζεται εἰς γενικάς προτάσεις $F(v)$ ὅπου $v \geq 2$.

α) Αποδεικνύομεν τήν πρότασιν διά $n=2$.

β) Δεχόμεθα τήν $F(x)$, σπου κα τυχών ἀλλ' ὠρισμένος φυσικός, ώς ἀληθή, καί ἐν τῆς προϋποθέσεως ταύτης ἀποδεικνύομεν τήν $F(2x)$.

γ) Δεχόμεθα τήν $F(x+1)$ καί ἀποδεικνύομεν τήν $F(x)$.

"Αρα ή πρότασις ἔνεκα τῶν (α) καί (β) ἴσχυει διά κάθε $n=2^m$ ἔνεκα ὅμως τῆς (γ) ἴσχυει διά κάθε φυσικόν $2^m\lambda$, ἐπομένως ή $F(v)$ ἴσχυει διά πάντα φυσικόν ἀριθμόν $v \geq 2$.

Παράδειγμα 1ον. Νά δειχθῇ ὅτι τό γινόμενον ν θετικῶν παραγόντων εἶναι μικρότερον ή ἵσον πρός τήν νιοστήν δύναμιν τοῦμέσου ὄρου των. (Θεώρημα Cauchy).

α)' Εκ τῆς ταυτότητος $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2 = x_1x_2$ ἔπειται ὅτι ἂν μέν $x_1 \neq x_2$ εἶναι $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 > x_1x_2$, ἂν δέ $x_1=x_2$ εἶναι $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 = x_1x_2$. Εἶναι λοιπόν $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \geq x_1x_2$. Ἀληθεύει λοιπόν ή πρότασις διά δύο ἀριθμούς.

β) "Εστωσαν τέσσαρες θετικοί ἀριθμοί x_1, x_2, x_3, x_4 . Προφανῶς εἶναι $\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} = \frac{\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_3+x_4}{2}}{2}$. Κατά τήν προαποδειχθεῖσαν

περίπτωσιν εἶναι $\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2}$, $\frac{x_3+x_4}{2} \geq \sqrt{x_3x_4}$ αρα

$\frac{\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_3+x_4}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{x_1x_2}}{2} + \frac{\sqrt{x_3x_4}}{2}$ (1). Εφαρμόζοντες τήν αὐτήν ἰδιότητα εἰς τούς ἀριθμούς $\frac{\sqrt{x_1x_2}}{2}$ καὶ $\frac{\sqrt{x_3x_4}}{2}$ ἔχομεν :

$\frac{\frac{\sqrt{x_1x_2}}{2} + \frac{\sqrt{x_3x_4}}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{\sqrt{x_1x_2} \cdot \sqrt{x_3x_4}}}{2} = \sqrt{\frac{x_1x_2x_3x_4}{16}}$

¹ Εξ αὐτῆς δέ καὶ τῆς (1) ἐπειταὶ κατά μείζονα λόγον ὅτι εἶναι

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} \geq \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} . \quad \text{Ἄρα } \left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} \right)^4 \geq x_1x_2x_3x_4.$$

^γ) "Εστωσαν ὄκτω θετικοί ἀριθμοί $x_1, x_2, x_3 \dots x_8$. Προφανῶς εἶ-

$$\text{καὶ } x_1+x_2+x_3+\dots+x_8 = \frac{\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_3+x_4}{2} + \dots + \frac{x_7+x_8}{2}}{4} = K \quad (1)$$

¹ Επειδὴ ὅμως $\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2} \dots \frac{x_7+x_8}{2} \geq \sqrt{x_7x_8}$ ἐπειταὶ ὅτι

$$K \geq \frac{\sqrt{x_1x_2}}{4} + \frac{\sqrt{x_3x_4}}{4} + \dots + \frac{\sqrt{x_7x_8}}{4} \quad (2)$$

¹ Άλλά κατά τὰ προηγούμενα εἶναι :

$$\frac{\sqrt{x_1x_2}}{4} + \frac{\sqrt{x_3x_4}}{4} + \frac{\sqrt{x_5x_6}}{4} + \frac{\sqrt{x_7x_8}}{4} \geq \frac{\sqrt[4]{\sqrt{x_1x_2} \cdot \sqrt{x_3x_4} \cdot \sqrt{x_5x_6} \cdot \sqrt{x_7x_8}}}{4}$$

$$\text{Ἄρα } \frac{\sqrt{x_1x_2}}{4} + \frac{\sqrt{x_3x_4}}{4} + \frac{\sqrt{x_5x_6}}{4} + \frac{\sqrt{x_7x_8}}{4} \geq \sqrt[8]{x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8}$$

¹ Εξ αὐτῆς καὶ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν $\frac{x_1+x_2+\dots+x_8}{8} \geq$

$$\sqrt[8]{x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8} \quad \text{καὶ συνεπῶς}$$

$$\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_8}{8} \right)^8 \geq x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8 \dots \quad \text{Ομοίως ἀποδεικνύεται καὶ} \\ \text{διά } v = 16, 32, \dots, 2^k.$$

^δ) "Εστω ἡδη ὅτι $\frac{x}{\sqrt{x_1x_2\dots x_n}}$ πρότασις ἀληθεύει διά $n+1$ θετικούς ἀρι-

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}{n+1} \right)^{n+1} \geq x_1 x_2 \dots x_n \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

$$'\text{Επειδή όμως } x_1 x_2 \dots x_n \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = \sqrt[n]{(x_1 x_2 \dots x_n)^{n+1}} =$$

$$= \left(\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \right)^{n+1} \text{ επειτα } \text{ στη}$$

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}{n+1} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \text{ στη κατά σειράν}$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \geq n \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} + \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \text{ ή}$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \text{ ή } \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

$$\text{καθ συνεπώς } \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^n \geq x_1 x_2 \dots x_n.$$

Αληθεύει λοιπόν η πρότασις κατ διά ν=κ.

ε) "Εστω τέλος όυ ν=ρ κατ στη 2^μ-λ=ρ. 'Επειδή η πρότασις άληθεύει διά ν=2^μ (γ. περ.) θά άληθεύει κατ διά ν=2^μ-1, ν=2^μ-2 κ.ο.κ. Άρα καί διά ν=2^μ-λ=ρ.

ΛΕΛΥΜΠΕΝΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) 'Εάν νεφ νά δειχθεί στη 1^2+2^2+3^2+...+ν^2 = 1/6 ν(ν+1)(2ν+1) - (1).

Δύσις. Διά ν=1 ή (1) γίνεται 1^2 = 1/6 1.2.3 = 1, οποιας άληθεύει. "Εστω στη ή (1) άληθεύει διά ν=κ (κεφ) δηλ. στη 1^2+2^2+3^2+...+κ^2 = 1/6 κ(κ+1)(2κ+1) (2). 'Υπό την προϋπόθεσιν αύτην θά δεξιώμεν στη άληθεύει καί διά ν=κ+1. Πράγματι έχομεν 1^2+2^2+3^2+...+κ^2+(κ+1)^2 = 1/6 κ(κ+1)(2κ+1)+(κ+1)^2 = $\frac{\kappa(\kappa+1)(2\kappa+1)+6(\kappa+1)^2}{6} =$

$$= \frac{(\kappa+1)(2\kappa^2+7\kappa+6)}{6} = \frac{1}{6} (\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3). \text{ Άρα η (1) άληθεύει κατ}$$

διά ν=κ+1, καί ἐπομένως κατά τήν ἀρχήν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς θά
ἀληθεύῃ καὶ διά κάθε ν∈Φ.

2) 'Εάν ν∈Φ νά δειχθῇ ὅτι $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2v-1)^3 = v^2(2v^2-1)$ (1)
Λύσις. Διά ν=1 ἢ (1) γίνεται $1^3 = 1^2(2 \cdot 1^2 - 1) = 1^2 \cdot 1$, ἕτοι ἀληθεύει. "Εστω ὅτι ἢ (1) ἀληθεύει διά ν=κ (κεφ) δηλ. ὅτι $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2k-1)^3 = k^2(2k^2-1)$ (2). 'Υπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν θά δείξωμεν ὅτι ἀληθεύει καὶ διά ν=κ+1. Προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τά μέλη τῆς (2) τὸ $(2k+1)^3$ εὑρίσκουμε $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2k-1)^3 + (2k+1)^3 = k^2(2k^2-1) + (2k+1)^3 = 2k^4 - k^2 + 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = (2k^4 + 8k^3 + 12k^2 + 8k + 2) - (k^2 + 2k + 1) = 2(k+1)^4 - (k+1)^2 = (k+1)^2 [2(k+1)^2 - 1]$. "Αρα ἢ (1) ἀληθεύει καὶ διά ν=κ+1 καὶ ἐπομένως κατά τήν ἀρχήν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς θά ἀληθεύῃ καὶ διά κάθε ν∈Φ.

3) 'Εάν ν∈Φ νά δειχθῇ ὅτι $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{v(v+1)} = \frac{v}{v+1}$ (1)
Λύσις. Διά ν=1 ἢ (1) γίνεται $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1+1}$, ἕτοι ἀληθεύει. "Εστω ὅτι ἢ (1) ἀληθεύει διά ν=κ (κεφ) δηλ. ὅτι $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{\kappa(\kappa+1)} = \frac{\kappa}{\kappa+1}$ (2). 'Υπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν θά δείξωμεν ὅτι ἀληθεύει καὶ διά ν=κ+1. Τότε ἐπειδή $\frac{1}{\kappa \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{\kappa(\kappa+1)} + \frac{1}{(\kappa+1)(\kappa+2)} = \frac{\kappa}{\kappa+1} + \frac{1}{(\kappa+1)(\kappa+2)} = \frac{1}{\kappa+1} \left[\kappa + \frac{1}{\kappa+2} \right] = \frac{1}{\kappa+1} \cdot \frac{\kappa^2 + 2\kappa + 1}{\kappa+2} = \frac{\kappa+1}{\kappa+2}$. "Αρα ἢ (1) ἀληθεύει καὶ διά ν=κ+1 καὶ πυνηπῶς θά ἀληθεύῃ καὶ διά κάθε ν∈Φ.

4) 'Εάν ν∈Φ νά δειχθῇ ὅτι $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 - \dots + (-1)^{v-1} \cdot v^2 = (-1)^{v-1} \cdot \frac{v(v+1)}{2}$ (1).

Λύσις. Διά ν=1 ἢ (1) γίνεται $(-1)^0 - 1 = 0$ δηλ. ἀληθεύει. "Εστω ὅτι ἢ (1) ἀληθεύει διά ν=κ (κεφ) δηλ. ὅτι $\sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n \cdot n^2 = (-1)^{k-1} \cdot k^2$

$$= (-I)^{n-I} \cdot \frac{n(n+I)}{2} \quad (2). \quad \text{'Υπό την προϋπόθεσιν αρτήν θα δείξωμεν ότι τα διληθεύσει να είναι } v = n+I. \quad \text{'Αλλα } S_{n+I} = S_n + (-I)^n (n+I) = (-I)^{n-I}. \\ \frac{n(n+I)}{2} + (-I)^n (n+I)^2 = (-I)^n \left[(n+I) - \frac{n}{2} \right] (n+I) = (-I)^n \frac{(n+I)(n+2)}{2}$$

*Αρα ή (I) διληθεύσει να είναι $v = n+I$, να συνεπάς ότι διληθεύση ή να είναι κάθε $v \in \Phi$.

$$5) \quad \text{'Εάν } v \in \Phi \quad \text{να δειχθή } \delta \tau v = \frac{(v+I)(v+2)(v+3)\dots 2v}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2v-I)} = 2^v \quad (I).$$

Λορδούσι. Διεί $v = I$ ή (I) γρίνεται $\frac{I+I}{1} = 2^I$ δηλ. διληθεύσει. Εστω δτv ή (I) διληθεύσει διεί $v = n$ ($n \in \Phi$) δηλ. δτv :

$$\frac{(n+I)(n+2)(n+3)\dots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-I)} = 2^n \quad (2). \quad \text{'Υπό την προϋπόθεσιν αρτήν θα δείξωμεν δτv διληθεύσει να είναι } v = n+I, \text{ δηλ. δτv :}$$

$$\frac{(n+2)(n+3)\dots 2n(2n+I)(2n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-I)(2n+I)} = 2^{n+I} \quad (3). \quad \text{'Αλλ' ή (2) γρίφεται } \frac{(n+2)(n+3)\dots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-I)} = \frac{2^n}{n+I} \quad \text{να } \delta \nu t i n a d i s t a w n t e s e s \text{ είς την (3) έμρι -} \\ \text{σκομεν } \frac{2^n}{n+I} \cdot \frac{(2n+I)(2n+2)}{2n+I} = \frac{2^n \cdot 2(n+I)}{n+I} = 2^{n+I}. \quad \text{*Αρα ή (I) διληθεύσει διεί } v = n+I \text{ να συνεπάς ότι διληθεύση } / \text{ να είναι κάθε } v \in \Phi.$$

$$6) \quad \text{'Εάν } v \in \Phi \quad \text{να δειχθή } \delta \tau v = I^4 + 2^4 + \dots + v^4 = \frac{I}{30} v(v+I)(6v^3 + 9v^2 + v - I) \quad (1).$$

Λορδούσι. Διεί $v = I$ ή (I) διληθεύσει. Εστω δτv ή (I) διληθεύσει διεί $v = n$ ($n \in \Phi$) δηλ. δτv $I^4 + 2^4 + \dots + v^4 = \frac{I}{30} n(n+I)(6n^3 + 9n^2 + n - I)$ (2). Θα δείξωμεν δτv όποια προϋπόθεσιν αρτήν ή (I) διληθεύσει να είναι $v = n+I$. Προσθέντοντες είς διμοδτερα τα μέλη της (2) τα $(n+I)^4$ λαμβάνομεν $I^4 + 2^4 + \dots + (n+I)^4 = \frac{I}{30} n(n+I)(6n^3 + 9n^2 + n - I) + (n+I)^4 =$ $= \frac{I}{30} (n+I) \left[n(6n^3 + 9n^2 + n - I) + 30(n+I)^3 \right] = \frac{I}{30} (n+I)(6n^4 + 39n^3 + 9In^2 +$ $+ 89n + 30) = \frac{I}{30} (n+I)(n+2)(6n^3 + 27n^2 + 37n + 15) = \frac{I}{30} (n+I)(n+2) \left[6(n+I)^3 + \right. \\ \left. + 9(n+I)^2 + (n+I) - I \right]. \quad \text{*Αρα ή (I) διληθεύσει διεί } v = n+I \text{ να συνεπάς ότι διληθεύση } / \text{ να είναι κάθε } v \in \Phi.$

$$7) \text{ Εάν } v \in \Phi \text{ να δειχθή } \text{ δτε } \frac{I^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{v^2}{(2v-I)(2v+I)} = \\ = \frac{v(v+1)}{2(2v+I)}.$$

Λόσιας. Διεύ $v = I$ ή (I) διληθείει. "Εστω δτε ή (I) διληθείει διεύ $v=n$ ($n \in \Phi$), δτε :

$$\frac{I^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-I)(2n+I)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+I)} \quad (2). \text{ Θα δειξω -}$$

μεν δτι υπό την προϋπόθεσιν αυτήν διληθείει καν διεύ $v = n+I$.

$$\text{Προσθέτοντες εις διμοδερα τα μέλη της (2) το } \frac{(n+I)^2}{(2n+I)(2n+3)} \text{ έ-} \\ \text{χομεν } \frac{I^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-I)(2n+I)} + \frac{(n+I)^2}{(2n+I)(2n+3)} = \frac{n(n+I)}{2(2n+I)} + \\ + \frac{(n+I)^2}{(2n+I)(2n+3)} = (n+I) \cdot \frac{n(2n+3)+2(n+I)}{2(2n+I)(2n+3)} = \frac{(n+I)(2n^2+5n+2)}{2(2n+I)(2n+3)} = \\ = \frac{(n+I)(n+2)}{2(2n+3)}. \text{ "Αρα ή (I) διληθείει διεύ } v = n+I \text{ καν συνεπῶς θα δ-} \\ \text{ιληθείη καν διεύ } n \in \Phi \text{ .}$$

$$8) \text{ Εάν } v \in \Phi \text{ να δειχθή } \text{ δτε } v \cdot I + (v-I) \cdot 2 + (v-2) \cdot 3 + \dots \\ \dots + 2(v-I) + I \cdot v = -\frac{I}{6} - v(v+I)(v+2) \quad (I).$$

Λόσιας. Διεύ $v=I$ ή (I) διληθείει. "Εστω δτε ή (I) διληθείει διεύ $v=n$ ($n \in \Phi$) δηλο. δτι $n \cdot I + (n-I) \cdot 2 + (n-2) \cdot 3 + \dots + 2(n-I) + I \cdot n =$
 $= -\frac{I}{6} n(n+I)(n+2)$ (2). Θα δειξωμεν δτι υπό την προϋπόθεσιν αυτήν ή (I) διληθείει καν διεύ $v = n+I$, ήτοι

$$(n+I) \cdot I + n \cdot 2 + (n-I) \cdot 3 + \dots + 2n+I(n+I) = -\frac{I}{6} - (n+I)(n+2)(n+3).$$

$$\text{"Εάν τα πρώτα μέλη των } \Sigma_{n+I} \text{ αντιστοίχως, θα έχωμεν } \Sigma_{n+I} = (n+I) \cdot I + n \cdot 2 + (n-I) \cdot 3 + \dots \\ \dots + 3(n-I) + 2n+I(n+I), / \quad \Sigma_n = n \cdot I + (n-I) \cdot 2 + \dots \\ \dots + 3(n-2) + 2(n-I) + I \cdot n, \text{ "Ωστε } \Sigma_{n+I} - \Sigma_n = (n+I) + n + (n-I) + \dots$$

$$\dots + 3 + 2 + 1 = -\frac{1}{2} - (n+1)(n+1) = -\frac{1}{2} - (n+1)(n+2) \text{ καὶ ἐπομέ-} \\ \text{νως } \Sigma_{n+1} = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2) + \frac{1}{2} (n+1)(n+2) = \frac{1}{6} (n+1)(n+2)(n+3) .$$

"Αρα ή (I) διληθεύεται ότι $v = n+1$ καὶ συνεπῶς οὐδὲ διληθεύεται καὶ διεκάθεται $v \in \Phi$.

$$9) \quad \text{'Εάν } v \in \Phi \text{ νὴ δειχθῆ ὅτι } \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{v(v+1)(v+2)(v+3)} = \frac{1}{18} - \frac{1}{3(v+1)(v+2)(v+3)}$$

$$\Delta \text{ στοιχίο. Διεκάθεται } v = 1 \text{ ἔχομεν } \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{24} \text{ καὶ } \frac{1}{18} - \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} =$$

$$= \frac{1}{24} \text{ δηλ. ή (I) διληθεύεται. "Εστω δὲ } v = n \text{ (}n \in \Phi\text{)} \\ \text{δηλ. διεκάθεται } \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} =$$

$$= \frac{1}{18} - \frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)} \text{ (2). Θεοῦ δεξιῶς διεκάθεται } \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \\ \text{μελη τῆς (2) τὸ } \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \text{ καὶ ἔχομεν } \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} +$$

$$+ \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} = \frac{1}{18} - \frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)} +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} = \frac{1}{18} - \frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} = \frac{1}{18} -$$

$$- \frac{1}{3(n+2)(n+3)(n+4)} . \text{"Αρα ή (I) διληθεύεται διεκάθεται } v = n+1 \text{ καὶ συνε-} \\ \text{πῶς οὐδὲ διληθεύεται καὶ διεκάθεται } v \in \Phi .$$

$$10) \quad \text{'Εάν } v \in \Phi \text{ νὴ δειχθῆ ὅτι } I \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + v \cdot v! = \\ = (v+1)! - 1 \text{ (I), διόπου με τὸ σύμβολον } v! \text{ παριστάνομεν τὸ γενδ-} \\ \text{μενον } I \cdot 2 \cdot 3 \cdots v .$$

$$\Delta \text{ στοιχίο. Διεκάθεται } v = 1 \text{ ἔχομεν } I \cdot 1! = (1+1)! - 1 \text{ δηλ. ή (I) } \\ \text{διληθεύεται. "Εστω διεκάθεται διεκάθεται } v = n \text{ (}n \in \Phi\text{)} \text{ δηλ. διεκάθεται } \\ I \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1 \text{ (2). Οὐδὲ δεξιῶς διεκάθεται } \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots v} .$$

την προσπόδεσιν αντικαν διληθεύει καν δια $v = n+I$, δηλαδή έτσι
 $I_1 I_2! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! + (n+I)(n+I)! = (n+2)! - I$ (3). Αλλά ή
(3) ξενεκα της (I) γίνεται $(n+I)! - I + (n+I)(n+I)! = (n+2)! - I =$
 $= (n+I)! [I + n+I] - I = (n+2)! - I$ ή $(n+I)(n+2) - I = (n+2)! - I$.
"Αρα ή (I) διληθεύει καν δια $v = n+I$ καν συνεπώς θα διληθεύει καν
δια $n \in \mathbb{N}$ ".

$$\text{II) } \text{'Εάν } v > I \text{ να δειχθή } \text{δτι } \frac{I}{v-I} + \frac{I}{v-2} + \frac{I}{v-3} + \dots + \frac{I}{2v} = \\ = I - \frac{I}{2} + \frac{I}{3} - \frac{I}{4} + \dots + \frac{I}{2v-I} - \frac{I}{2v}. \text{ Ταυτότητας του CATALAN.}$$

Λόσιος. Δια $v=I$ ή ταυτότητας γίνεται $\frac{I}{I-I} = I - \frac{I}{2}$ ήτοι διληθεύει. "Εστω ότι διληθεύει δια $v = n$ ($n \in \mathbb{N}$) δηλαδή θτι

$$\frac{I}{n+I} + \frac{I}{n+2} + \dots + \frac{I}{2n} = I - \frac{I}{2} + \frac{I}{3} - \frac{I}{4} + \dots - \frac{I}{2n}. \text{ Προσθέτομεν καν είς τα δύο μέλη της λεστητος τδν } \frac{I}{2n+I} - \frac{I}{2n+2} \text{ καν έχομεν :}$$

$$\frac{I}{(n+I)+I} + \frac{I}{(n+I)+2} + \dots + \frac{I}{(n+I)(n+I)} + \frac{I}{(n+I)+n} + \left(\frac{I}{n+I} - \frac{I}{2n+2} \right) = \\ = I - \frac{I}{2} + \frac{I}{3} - \frac{I}{4} + \dots + \frac{I}{2n-I} - \frac{I}{2n} + \frac{I}{2n+I} - \frac{I}{2n+2} \text{ ή } \text{Έπειδη}$$

$$\frac{I}{n+I} - \frac{I}{2n+2} = \frac{I}{n+I} - \frac{I}{2(n+I)} = \frac{I}{2(n+I)} \text{ θα έχωμεν :}$$

$$\frac{I}{(n+I)+I} + \frac{I}{(n+2)+2} + \dots + \frac{I}{2(n+I)} = I - \frac{I}{2} + \frac{I}{3} - \dots + \frac{I}{2(n+I)-I} - \frac{I}{2(n+I)} \\ \text{δηλ. } \text{ή } \text{πρότασις διληθεύει δια } v = n+I. \text{ Καν } \text{έπειδη διληθεύει} \\ \text{καν δια } v = I \text{ καν } \text{την} \text{} \text{άρχην} \text{ της} \text{ τελείας} \text{ έπαγωγής} \text{ θα διληθεύει} \text{ σιά} \\ \text{καθε } v \in \mathbb{N}.$$

$$\text{I2) } \text{Να δειχθή } \text{δτι } \text{το} \text{ γινόμενον } \Pi_v = (v+I)(v+2)\dots(2v-I)/2^v \\ \text{είναι διαιτρεύον δια } 2^v.$$

Λόσιος. Δια $v=1$ έχομεν $\Pi_1 = 2$ δηλ. $\Pi_1 = \text{πολ. } 2!$ "Εστω ότι διληθεύει ή πρότασις δια $v=n$ ($n \in \mathbb{N}$) δηλ. δτι $\Pi_n = (n+I)(n+2)\dots\dots\dots(2n-I)2^n = \text{πολ}^2^n$. Εσ δειξωμεν διληθεύει καν δια $v = n+I$ δηλ. δτι $\Pi_{n+I} = \text{πολ}^2^{n+I}$. "Έχομεν $\Pi_{n+I} = (n+2)(n+3)\dots(2n+I) \cdot 2(n+1) =$

$$= \frac{(n+I)(n+2)\dots(2n)(2n+I)(2n+2)}{n+1} = (n+I)(n+2)\dots(2n-I)2^{n+1} \frac{(2n+I)(2n+2)}{n+1},$$

\Rightarrow πολλαπλά $n+I$ $\times 2 = 2^{n+I}$ καθώς διηγείται διαδικασία διαληθεύσεων κατά την δρχήν της τελείας έπαγωγής διαδικασίας $v = I$ $\forall v \in \Phi$.

$$I3) \quad \text{Εάν } v \in \Phi \text{ να διειχθῆται } (I+x)(I+x^2)(I+x^4)\dots(I+x^{2^n}) = \\ = \frac{I-x^{2^{n+1}}}{I-x} \quad (I).$$

Λόγος είναι ότι $v = I$ διηγείται $I+x = \frac{I-x^2}{I-x} = I+x$ δηλ. διηγείται. Εστω διαδικασία διηγεύσεων διαδικασίας $v = n$ ($n \in \Phi$) δηλ. διηγείται.

$(I+x)(I+x^2)\dots(I+x^{2^n}) = \frac{I-x^{2^{n+1}}}{I-x} \quad (2)$. Θεωρούμενον διαδικασίαν προϋπόθεσιν αυτήν διηγεύσεων καθώς διαδικασία $v = n+I$. Πολλαπλάζοντες διμοφτέρα τα μέλη της (2) έπειτα $I+x^{2^{n+1}}$ έχουμεν :

$$\dots(I+x^{2^n})(I+x^{2^{n+1}}) = \frac{I-x^{2^{n+2}}}{I-x} \circ (I+x^{2^{n+1}}) = \frac{I+x^{2^{n+1}}}{I-x} \frac{x^{2^{n+1}}-x^{2^{n+2}}}{I-x} = \\ = \frac{I-x^{2^{n+2}}}{I-x} \quad . \quad \text{"Αρα διηγεύσεων καθώς διαδικασία } v = n+I \text{ καθώς συνεπώς διηγεύσεων διαδικασίας } v \in \Phi \text{ .}$$

$$I4) \quad \text{Εάν } v \in \Phi \text{ να διειχθῆται } (x^2+x+I)(x^2-x+I)(x^4-x^2+I)(x^8-x^4+I). \\ \dots(x^{2^v}-x^{2^{v-1}}+I) = x^{2^{v+1}}+x^{2^v}+I \quad (I).$$

Λόγος είναι ότι $v = I$ έχουμεν $(x^2+x+I)(x^2-x+I) = (x^2+I)^2 - x^2 = x^4 + x^2 + I$ δηλ. διηγείται. Εστω διαδικασία διηγεύσεων διαδικασίας $v = n$ ($n \in \Phi$) δηλ. διαδικασία $(x^2+x+I)(x^2-x+I)(x^4-x^2+I)\dots(x^{2^n}-x^{2^{n-1}}+I) = x^{2^{n+1}}+x^{2^n}+I$ (I). Θεωρούμενον διαδικασίαν προϋπόθεσιν αυτήν διηγεύσεων καθώς διαδικασία $v = n+I$.

Πολλαπλάζοντες διμοφτέρα τα μέλη της (I) έπειτα $x^{2^{n+1}}-x^{2^n}+I$ έχουμεν :

$$(x^2+x+I)(x^2-x+I)(x^4-x^2+I)\dots(x^{2^n}-x^{2^{n-1}}+I)(x^{2^{n+1}}-x^{2^n}+I) = \\ = (x^{2^{n+1}}+x^{2^n}+I)(x^{2^{n+1}}-x^{2^n}+I) = [(x^{2^{n+1}}+I)x^{2^n}] [(x^{2^{n+1}}+I)-x^{2^n}] = \\ = (x^{2^{n+1}}+I)^2 - (x^{2^n})^2 = x^{2^{n+2}}+2x^{2^{n+1}}+I-x^{2^{n+1}} = x^{2^{n+2}}+x^{2^{n+1}}+I \quad \text{δηλ. διηγεύσεων διαδικασίας } v = I \text{ .}$$

ή προτασις διληθεσεις κατ' οιδικον και κατά την Αρχήν της τελεθεσης έπαγωγής θε διληθεσή διαλέθεσε $v \in \Phi$.

$$15) \text{ Εστι} v \text{ λιγερατος να διευχθη οτι } \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1-x} + \frac{4}{1+x^2} f.$$

$$\dots + \frac{2^n}{1+x^n} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{x^{n+1}} \quad (I).$$

$$\text{Λογιστικο. Δια} v=0 \text{ ξ} \text{χομεν} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{1-x} = \frac{1}{1+x} \text{ δηλο. ή (I)}$$

διληθεσεις. "Εστω οτι ή (I) διληθεσεις δια $v=n$ ($n \in \mathbb{N}$) δηλο. οτι

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1-x} + \frac{4}{1+x^2} + \dots + \frac{2^n}{1+x^n} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{x^{n+1}} \quad (I). \text{ Θε δειξωμεν}$$

δια προϋπόθεσιν αυτην οτι διληθεσεις κατ' οιδικον $v=n+1$. Προσθετοντας εις αμφoterα το μελλον της (I) το $\frac{2^{n+1}}{x^{n+1}}$, ξχομεν :

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1-x} + \frac{4}{1+x^2} + \dots + \frac{2^n}{1+x^n} + \frac{2^{n+1}}{x^{n+1}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x} + \frac{2^{n+1}}{x^{n+1}} + \frac{2^{n+1}}{1+x^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+2}}{1-x^{n+2}}, \text{ δηλο. διληθεσεις δια} v=n+1, \text{ τοτε έπειδη διληθεσεις}$$

κατ' οιδικον $v=0$ κατά την Αρχήν της τελεθεσης έπαγωγής θε διληθεση κατ' οιδικον $v \in \Phi$.

$$16) \text{ Εστι} v \in \Phi \text{ να διευχθη οτι } F(v) = 3^{4v+2} + 2 \cdot 4^{3v+1} = \\ = \text{ πολ.} I7 \quad (I).$$

$$\text{Λογιστικο. Δια} v=1 \text{ ξχομεν} F(1) = 1241 = \text{ πολ.} I7 \quad \text{"Εστω} \\ \text{οτι ή (I) διληθεσεις δια} v=n \text{ ($n \in \mathbb{N}$) Κτοι} \text{ οτι} F(n) = 3^{4n+2} + 2 \cdot 4^{3n+1} = \\ = 17p \quad (2). \text{ Θε δειξωμεν} \text{ οτι διληθεσεις κατ' οιδικον} v=n+1. \text{ Ξχοι} \text{ ε} v \\ F(n+1) = 3^{4(n+1)+2} + 2 \cdot 4^{3(n+1)+1} = 3^{4n+6} + 2 \cdot 4^{3n+4} = 3^{4n+2} \cdot 3^4 + 2 \cdot \\ \cdot 4^{3n+1} \cdot 4^3 = 81 \cdot 3^{4n+2} + 64 \cdot 2 \cdot 4^{3n+1} = 3^{4n+2}(64+17) + 2 \cdot 4^{3n+1} \cdot 64 = \\ = 3^{4n+2} \cdot I7 + 64(3^{4n+2} + 2 \cdot 4^{3n+1}) \quad (3). \text{ Άλλη} \xi \text{νεικα} \text{ της} (2) \text{ ή} (3)$$

γνεται $F(n+I) = 17 \cdot 3^{4n+2} + 64$. $I7p = \text{πολ.} 17$.

17). Εάν $v \in \Phi$ να δειχθή δτι δ $F(v) = 7^{2n} + 16v - I =$
= πολ. 64. (I).

Λ σις. Δια ναΙ έχομεν $F(I) = 64$ ήτοι ή (I) δημοσιεύεται.
Έστω δτι ή (I) δημοσιεύεται δια νακ ($n \in \mathbb{Q}$), δτε $7^{2n} + 16n - I = 64\lambda(2)$.
Θα δειξωμεν δτι δημοσιεύεται κατ δια ν = n+I. Έχομεν τότε
 $7^{2n+2} + 16(n+I) - I = 49 \cdot 7^{2n} + 16n+15 = 49(64\lambda - 16n+I) + 16n+15 =$
 $= 49 \cdot 64\lambda - 49n+19 + 16n+15 = 49 \cdot 64\lambda - 48 \cdot 16n+64 = 49 \cdot 64\lambda - 12 \cdot 64n+64 =$
= πολ 64, δηλ. ή πρότασις δημοσιεύεται δια ν = n+I κατ συνεπώς κατ
την άρχην της τελειας έπαγωγής ή πρότασις θα δημοσιεύεται δια νάθε
 $v \in \Phi$.

18). Εάν $v \in \Phi$ να δειχθή δτι δ $F(v) = 2^{2n+I} + I =$
= πολ. 3 (I).

Λ σις. Δια ν=0 έχομεν $F(0) = 2+I = 3$ ήτοι ή (I) δημοσιεύεται.
Έστω δτι ή (I) δημοσιεύεται δια νακ ($n \in \mathbb{Q}$) δτε $2^{2n+I} + I =$
= 3λ (2) ($\lambda \in A$). Θα δειξωμεν δτι δημοσιεύεται δια ν = n+I δηλ. δτι
 $2^{2(n+I)+I} + I = 3p$ (3) ($p \in A$). Βι της (2) έχομεν $2^{2n+I} = 3\lambda - I$.
Αρα $2^{2(n+I)+I} + I = 2^{2n+I} \cdot 2^2 + I = (3\lambda - I)4 + I = 3 \cdot 4\lambda - 4 + I = 3(4\lambda - I)$.
Άλλα δ $4\lambda - I \in A$. Είναι λοιπόν $2^{2(n+I)+I} + I = 3p$. Αρα ή (3) δημοσιεύεται.
Άρα δ δοθείς άριθμος είναι πολ/σιου το 3 δια ν = 0 κατ
την άρχην της τελειας έπαγωγής είναι πολ/σιου το 3 δια νάθε νέο.

19). Εάν $v \in \Phi$ να δειχθή δτι δ άριθμος $F(v) = 2^{2v} + 15v - I = \text{πολ.} 9$.

Λ σις. Δια ν = I έχομεν $F(I) = 18 = \text{πολ.} 9$. Έστω δτι
δια νακ ($n \in \Phi$) δ δοθείς άριθμος είναι διαιρετός δια $\frac{9}{\lambda}$ ήτοι δτι
 $\varphi(n) = 2^{2n} + 15n - I = \text{πολ.} 9$ (I). Θα δειξωμεν δτι κατ δια ν =
= ν+I είναι $F(n+I) = \text{πολ.} 9$ (2). Έχομεν $F(n+I) = 2^{2n+2} + 15(n+I) - I =$

$= 4 \cdot 2^{2n} + 15n + 14$ (3). Πολ/ζοντες την (1) επει 4 κατ δρατιροῦντες έξ αρτης την (3) έχομεν $4F(n) - F(n+1) = 45n - 18 = 9(5n - 2) =$ πολ9. Αρα ή (2) δληθεσει. 'Επομένως δ δοθεις δριθμδς είναι πολ/σιουν του 9 διε την τελην ν=1-1 κατ έπειδη είναι πολ/σιουν του 9 διε ν=1, και τη την δρχην της τελειας έπαγωγής είναι πολ/σιουν του 9 διε πολ9 νεφ.

20) 'Εδν ν είναι δρτιος, νδ δειχθη δτι δ $F(v) = v^2 + 2v =$ πολ.8.

Λ σ ο 6 c. Διε ν=2 έχομεν $F(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 = 8 =$ πολ.8. "Εστω δτι διε ν=n, και δρτιος, είναι $F(n) = n^2 + 2n =$ πολ.8. Θε δεξιωμεν δτι κατ διε ν=n+2 είναι $F(n+2) =$ πολ8. Πρδγματι $F(n+2) = (n+2)^2 + 2(n+2) = n^2 + 6n + 8 = n^2 + 2n + 4n + 8 = F(n) + 4n + 8$. "Αλλα τδ 4n, έπειδη είναι δρτιος, είναι πολ/σιουν του 8. "Ωστε έδν τδ $F(n)$ είναι πολ/σιουν του 8 τδτε κατ τδ $F(n+2)$ θε είναι πολ/σιουν του 8 / και έπειδη είναι πολ/σιουν του 8 διε ν=2, κατα την δρχην έπαγωγής, είναι πολ/σιουν του 8 διακάθευτης ν δρτιον.

21) 'Εδν νεφ νδ δειχθη δτι δ δριθμδς $F(v) = 2 \cdot 4^{2v+1} + 3^{3v+1} =$ πολ.II.

Λ σ ο 6 c. Διε ν=1 είναι $F(1) = 2 \cdot 4^3 + 3^4 = 209 =$ πολ.II. "Εστω δτι δ $F(v)$ είναι πολ/σιουν του II διε ν=n(nεφ), ητοι $F(n) = 2 \cdot 4^{2n+1} + 3^{3n+1}$ πολ.II. Θε δεξιωμεν δτι κατ διε ν=n+1 είναι $F(n+1) =$ πολ.II. Έχομεν $F(n+1) = 2 \cdot 4^{2n+3} + 3^{3n+4} = 2 \cdot 4^{2n+1} \cdot 4^2 + 3^{3n+1}$. κατ $F(n+1) - F(n) = 2 \cdot 4^{2n+1} (4^2 - 1) + 3^{3n+1} (3^3 - 1) = 2 \cdot 4^{2n+1} \cdot 15 + 3^{3n+1} \cdot 26 = 2 \cdot 4^{2n+1} (II+4) + 3^{3n+1} (22+4) = II \cdot (2 \cdot 4^{2n+1} + 3^{3n+1} \cdot 2) + 4(2 \cdot 4^{2n+1} + 3^{3n+1})$. Ηαρατηροῦμεν λοιπόν δτι ή διαφορε $F(n+1) - F(n)$ είναι διαιρετη διε II. 'Επειδη θμως διετεθη δτι δ $F(n)$ είναι διαιρετη διε II, θποται δτι κατ δ $F(n+1)$ είναι διαιρετη διε II. "Η πρδασια λοιπόν δληθεσει διε ν=n+1 κατ έπειδη δληθεσει και δια ν=1, θε δληθεση κατ διε πολ9 νεφ.

22) 'Εδν νεφ νδ δειχθη δτι δ $F(v) = 2^{2v-1} \cdot 3^{v+2} + 1 =$ πολ.II.(I)

Λ Β Σ Ι Σ . Διεύ ν=I Εχομεν $F(I) = 2 \cdot 27 = 55$ = πολ. II. "Εστω δτι ή (I) διληθενει διεύ ν=κ (κεφ) δηλ. δτι $2^{2κ-I} \cdot 3^{κ+2} + I$ = πολ. II = $I2p$ (ρεφ), & ρα $2^{κ-I} = \frac{IIp-I}{3^{κ+2}}$. Θε δεξεωμεν υπό την προηποθεσιν αυτην δτι διληθενει κατ διεύ ν=κ+I, δηλ. δτι $2^{2κ+I} = \frac{4(IIp-I)}{3^{κ+2}}$ (2).

Πολ/ζοντες τη μελη της (2) επει $3^{κ+3}$ ευρεσομεν $2^{2κ+I} \cdot 3^{κ+3} = I2(IIp-1)$ & $2^{2κ+I} \cdot 3^{κ+3} = II \cdot I2p-II = II(I2p-1)$ δηλ. ή προτασις διληθενει κατ διεύ ν = κ+I κατ συνεπως θε διληθενη διεύ κεφε νεφ.

23) 'Εδν ν€Α» ο νδε δειχθη δτι διριθμδς $F(v) = 2^{4v+I} - 2^{2v} - I =$ = πολ. 9 (I).

Λ Β Σ Ι Σ . Διεύ ν=0 Εχομεν $F(0) = 0 \neq 9.0$ &ρα δ $F(v)$ είναι διαιτητικος διεύ 9. "Εστω δτι ή (I) είναι διληθης διεύ ν=κ(κεφ) δηλ. δτι $F(k) = 2^{4k+I} - 2^{2k} - I = 9\lambda$ (I) κατλεκ. Θε δεξεωμεν δτι υπό την προηποθεσιν αυτην ή (I) διληθενει κατ διεύ ν=κ+I δηλ. δτι $F(k+I) = 2^{4(k+I)+I} - 2^{2(k+I)} - I = 9p$ (2) δπου ρ€Α.

"Η (2) γράφεται $2^{4k+I} \cdot 2^4 - 2^{2k} \cdot 2^2 - I = 90$ (3). 'Αλλ'έκ της (I) Εχομεν $2^{4k+I} = 9\lambda + 2^{2k} + I$. "Αρα $2^{4k+I} \cdot 2^4 - 2^{2k} \cdot 2^2 - I = (9\lambda + 2^{2k} + I) \cdot 16 - 2^{2k}$. $\cdot 4 - I = 9 \cdot 16\lambda + 2^{2k} \cdot 16 + 16 - 2^{2k} \cdot 4 - I = 9 \cdot 16\lambda + 2^{2k} (16 - 4) + 15 = 9 \cdot 16\lambda + 2^{2k} \cdot 12 + 15 = 9 \cdot 16\lambda + 3(2^{2k} \cdot 2^2 + 5) = 9 \cdot 16\lambda + 3(2^{2k+2} + 5)$. "Αρα ή (2) θε διληθενη διν υπάρχει δικερατικος διριθμδς ρ τοιούτος ώστε νδε είναι $9 \cdot 16\lambda + 3(2^{2k+2} + 5) = 9p$. "Η $3 \cdot 16\lambda + 2^{2k+2} + 3 + 2 = 3p$. 'Αλλ' δ διριθμδς $3 \cdot 16\lambda + 3$ είναι διαιτητικος διεύ 3. "Αρα ή (3) θε διληθενη διν κατ κενον έδν δ δικερατικος $2^{2k+2} + 2 = 2(2^{2k+I} + I)$ είναι διαιτητικος διεύ 3. 'Αλλα πράγματι τούτο συμβαίνει (άσω. I8). "Αρα ή (3) διληθενει, &ρα κατ ή (2). "Αρα ή (I) διληθενει κατ ν=κ+I δταν διληθενει κατ διεύ ν=κ κατ συνεπως θε διληθενη διεύ κεφε νεφ.

24) Νδε δειχθη δτι διεύ ν>0 δ $F(v) = II^{v+2} + I2^{2v+I}$ είναι διαιτητικος διεύ I33.

Λ Β Σ Ι Σ . Διεύ ν=0 ή προτασις είναι διληθης. "Εστω δτι αυτη

Δληθεύει διεκ ν = n(n+1) δηλούστι οτι δ F(n) = $II^{n+2} + I2^{2n+1}$ πολI33.
 Ως δεξιώμεν ύπο την προϋπόθεσιν αντίτιν θτι τοῦτο δληθεύει κατ' διεκ
 $n = n+1$. Πρόγματι $A_{n+1} = II^{n+3} + I2^{2(n+1)+1} = II^{n+3} + I2^{2n+3} =$
 $= II \cdot II^{n+2} + I44 \cdot I2^{2n+1} = II \cdot II^{n+2} + I33 \cdot I2^{2n+1} + II \cdot I2^{2n+1} +$
 $+ I33 \cdot I2^{2n+1} = II F(n) + I33 \cdot I2^{2n+1}$. 'Αλλ'ή παρέστασις αντη είναι
 έπιθοτισμά δρού δρων ξαστος τῶν δποιων είναι διατρετός διεκ I33.
 "Αρα είναι διατρετή διεκ I33. 'Εδειχθη λοιπόν θτι δ F(n) είναι +
 διατρετός διεκ I33 κατ' διεκ n = n+1 με την προϋπόθεσιν θτι είναι +
 διατρετός διεκ n = n. "Αρα λοιπόν κατ' την δρχήν τῆς τελείας έπα-
 γωγής οι είναι διατρετός διεκ I33 διεκ κάθε $n \in \Phi$.

$$25) \quad \text{'Εδν } v \in \Phi, 2 \text{ νδεικθη } \theta \text{τι } \delta F(v) = 25 \cdot 7^{6v} \cdot v^3 - 25 \cdot 7^{6v} v + \\ + 343 \cdot 5^{4v} \sqrt{v^3} - 343 \cdot 5^{4v} \cdot v \text{ είναι διατρετός διεκ I8933600.}$$

$$\text{Λ σοις. 'Αναλόγωμεν κατ' την παρέστασιν εἰς γινόμενον κατ' τον δριθμόν εἰς πρώτους παράγοντας, θτι : } F(v) = \\ = 5^2 \cdot 7^{6v} \cdot v^3 - 5^2 \cdot 7^{6v} v^3 \cdot 5^{4v} \cdot v^3 \cdot 7^3 \cdot 5^{4v} \cdot v = \\ = 5^2 \cdot 7^{6v} v(v^2 - 1) + 7^3 \cdot 5^{4v} v(v^2 - 1) = (v-1)v(v+1)5^2 \cdot 7^3(7^{6v-3} + 5^{4v-2}), \\ \text{δ δε δριθμός γίνεται I8933600} = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^3, 23.$$

$$\text{'Επειδή το γινόμενον } (v-1)v(v+1)5^2 \cdot 7^3 \text{ διατρέπεται διεκ τοῦ γινόμενου } 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \text{ διδτι ατ } (v-1)v(v+1) \text{ είναι τρεῖς διαδοχικοὶ δριθμοί νδεικθημένοι διεκ } \delta \varphi(v) = 7^{6v-3} + 5^{4v-2} \text{ διατρέπεται διεκ } 23 \cdot 2^4 = 23 \cdot 16.$$

$$\Delta \text{εκ } n=1 \text{ έχομεν } \varphi(1) = 368 = 16 \cdot 23 = \text{πολ}23 \cdot 16, \text{ 'Εστω θτι } \\ \varphi(n) = 7^{6n-3} + 5^{4n-2} = \text{πολ}23 \cdot 16 \quad (1), \text{ Στε } \varphi(n+1) = 7^{6n+6-3} + 5^{4n+2} = \\ = 7^{6n-3} 7^6 + 5^{4n+2} / 7^6 (\text{πολ}23 \cdot 16 - 5^{4n-2}) + 5^{4n+2}, \text{ Άρα } \varphi(n+1) = \text{πολ}23 \cdot 16 - \\ - 5^{4n+2}(7^6 - 5^4) = \text{πολ}23 \cdot 16 - 5^{4n-2} \cdot 117024 = \text{πολ}23 \cdot 16 - 5^{4n-2} \cdot 23 \cdot 16 \cdot 318 = \\ = \text{πολ}23 \cdot 16. \text{ 'Αρα δληθεύει διεκ } n=n+1 \text{ έδν δληθεύεται διεκ } n=n \text{ κατ' αυ-} \\ \text{νεπώς θδ δληθεύεται κατ' διεκ κάθε } n \in \Phi.$$

26.) Εάν $I \leq \mu \leq v - I$ καὶ $\mu + I \leq \lambda \leq v$, νό δειχθῇ δτι

$$\left(\sum_{n=I}^{\mu} \alpha_n \right)^2 = \sum_{n=I}^v \alpha_n^2 + 2\sum_{\mu \leq n < \lambda} \alpha_n \quad (I).$$

Α δοւς. Διδ $v=3$ έχομεν $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$ δημαρχεῖται. Εοτώ δτι λ (I) δημαρχεῖται διδ $v=3$ δπου $\mu = 0$, δηλ. δτι: $\left(\sum_{n=I}^{\mu} \alpha_n \right)^2 = \sum_{n=I}^v \alpha_n^2 + 2\sum_{\mu \leq n < \lambda} \alpha_n$ (2) δποφ $I \leq \mu \leq v - I$ καὶ $\mu + I \leq \lambda \leq v$.

Θε δειξωμεν δτι δημαρχεῖται προποδησιν απόνδιατηθεῖται καὶ διδ $v=\mu+I$, δηλ. δτι: $\left(\sum_{n=I}^{\mu+I} \alpha_n \right)^2 = \sum_{n=I}^{v+I} \alpha_n^2 + 2\sum_{\mu+I \leq n < \lambda} \alpha_n$ (3) δπου

$I \leq \mu \leq v$ καὶ $\mu + I \leq \lambda \leq v + I$. Πράγματι έχομεν:

$$\left(\sum_{n=I}^{\mu+I} \alpha_n \right)^2 = \left(\sum_{n=I}^{\mu} \alpha_n + \alpha_{\mu+I} \right)^2 = \left(\sum_{n=I}^{\mu} \alpha_n \right)^2 + \alpha_{\mu+I}^2 + 2\alpha_{\mu+I} \sum_{n=I}^{\mu} \alpha_n$$

Άλλ' ενεκα τῆς (2) το δηθροισμα τοῦτο ισοῦται μέ:

$\sum_{n=I}^{\mu} \alpha_n^2 + \alpha_{\mu+I}^2 + 2\sum_{\mu \leq n < \lambda} \alpha_n + 2\alpha_{\mu+I} \sum_{n=I}^{\mu} \alpha_n$ δπου $I \leq \mu \leq v - I$ καὶ $\mu + I \leq \lambda \leq v$. Αρα ισοῦται καὶ πρός $\sum_{n=I}^{\mu+I} \alpha_n^2 + 2\sum_{\mu \leq n < \lambda} \alpha_n$ δπου τῶρα $I \leq \mu \leq v$ καὶ $\mu + I \leq \lambda \leq v + I$.

Άρα το πρῶτον μέλος τῆς (3) ισοῦται μέ το δεύτερον. Άρα τὸ πρότασις δημαρχεῖται διδ $v=\mu+I$ δταν δεχθῶμεν δτι δημαρχεῖται διδ $v=3$ καὶ συνεπῶς θε δημαρχεῖται διδ κάθε φυσικὸν $v \geq 3$.

27.) Εάν $v \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$ καὶ $I \leq \mu \leq v - I$, $\mu + I \leq \lambda \leq v$ νό δειχθῇ δτι $\sum_{n=I}^v \alpha_n^2 + \sum_{n=I}^v \beta_n^2 - \left(\sum_{n=I}^v \alpha_n \beta_n \right)^2 = \sum (\alpha_{\mu} \beta_{\lambda} - \alpha_{\lambda} \beta_{\mu})^2$ (I) (Ταυτότης LAGRANGE)

Α δούς. Διδ $v=3$ έχομεν $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) - (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3)^2 = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^2 + (\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1)^2 + (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2)^2$ δηλαδή δημαρχεῖται.

* Εστω δτι δληθερετ διδ $\nu = p$ δπου $p \in \Phi$. Θα δεξεωμεν υπο την προ-
υπόθεσιν αύτην δτι δληθερετ κατ διδ $\nu = p+I$, δηλω. δτι :

$$\sum_{n=1}^{p+I} \alpha_n^2 + \sum_{n=1}^{p+I} \beta_n^2 - \left(\sum_{n=1}^p \alpha_n \beta_n \right)^2 = \sum_{n=1}^p (\alpha_\mu \beta_\lambda - \alpha_\lambda \beta_\mu)^2 \quad (2).$$

Πρέγματι έχομεν :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{p+I} \alpha_n^2 + \sum_{n=1}^{p+I} \beta_n^2 &= \left(\sum_{n=1}^p \alpha_n^2 + \alpha_{n+I}^2 \right) \left(\sum_{n=1}^p \beta_n^2 + \beta_{n+I}^2 \right) = \\ &= \sum_{n=1}^p \alpha_n^2 \cdot \sum_{n=1}^p \beta_n^2 + \beta_{n+I}^2 \sum_{n=1}^p \alpha_n^2 + \alpha_{n+I}^2 \sum_{n=1}^p \beta_n^2 + \alpha_{n+I}^2 \beta_{n+I}^2 \end{aligned}$$

* Επίσης έχομεν :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^p \alpha_n \beta_n \right)^2 &= \left(\sum_{n=1}^p \alpha_n \beta_n + \alpha_{n+I} \beta_{n+I} \right)^2 = \sum_{n=1}^p \alpha_n \beta_n + 2\alpha_{n+I} \beta_{n+I} \cdot \\ &\cdot \sum_{n=1}^p \alpha_n \beta_n + \alpha_{n+I}^2 \beta_{n+I}^2. \end{aligned}$$

* Αρα το πρώτον μέλος της (2) ισούται με :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^p \alpha_n^2 + \sum_{n=1}^p \beta_n^2 - \left(\sum_{n=1}^p \alpha_n \beta_n \right)^2 + \beta_{n+I}^2 \sum_{n=1}^p \alpha_n^2 + \alpha_{n+I}^2 \sum_{n=1}^p \beta_n^2 - \\ - 2\alpha_{n+I} \beta_{n+I} \sum_{n=1}^p \alpha_n \beta_n \quad \text{ή λέγεται της (I)} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^p (\alpha_\mu \beta_\lambda - \alpha_\lambda \beta_\mu)^2 + \alpha_{n+I}^2 \sum_{n=1}^p \beta_n^2 + \beta_{n+I}^2 \sum_{n=1}^p \alpha_n^2 - 2\alpha_{n+I} \beta_{n+I}.$$

* $\sum_{n=1}^p \alpha_n \beta_n$. Η παράστασις δημοσιεύεται :

$$\sum_{n=1}^p (\alpha_\mu \beta_\lambda - \alpha_\lambda \beta_\mu)^2 + \sum_{n=1}^p (\alpha_n \beta_{n+I} - \beta_n \alpha_{n+I})^2$$

Το ξέροισμα δημοσιεύεται γράφεται : $\sum (\alpha_\mu \beta_\lambda - \alpha_\lambda \beta_\mu)^2$,

δημοσιεύεται $I \leq \mu \leq p$ κατ $n+I \leq \lambda \leq p+I$.

"Αρα το πρώτον μέλος της (2) είναι έπι ταυτότητος ίσον πρός το δεύτερον. Η (1) λοιπόν διληφθείται ότι $v = n+I$ καὶ συνεπῶς ότι $v = n+I$ καὶ $v \in \Phi$."

$$28) \text{ Εάν } v \in \Phi > 2 \text{ να διεκχωρήσει } \frac{1}{n+I} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24} \quad (1)$$

Λογοτελος. Διείδεται ότι $v=2$ έχουμε $\frac{7}{12} \neq \frac{14}{24}$. Καὶ τοις ἀλληλείσει.

"Εστω διείδεται ότι $v=n$ ($n \in \Phi$). Καὶ τοις $s_n > \frac{13}{24}$. Ως δείξωμεν όποια την προϋπόθεσιν αντίτιν διείδεται καὶ διείδεται καὶ $v = n+I$, καὶ τοις $s_{n+I} > \frac{13}{24}$. Εχουμεν $s_n = \frac{1}{n+I} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$

$$s_{n+I} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+I} + \frac{1}{2n+2}$$

"Αφαίροῦντες αντίτιν καὶ μελη λαμβάνομεν :

$$s_{n+I} - s_n = \frac{1}{2n+I} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+I} = \frac{1}{2(n+I)(2n+I)}$$

"Αλλαδιείδεται διείδεται καὶ διεκένδυν καὶ τοις κλάσμα $\frac{1}{2(n+I)(2n+I)}$ "

είναι θετικόν, ἐπειδή $s_{n+I} > s_n$. "Αλλαδιείδεται διείδεται καὶ διεκένδυν, ἐπειδή $s_n > \frac{13}{24}$, ἐπειδή $s_{n+I} > \frac{13}{24}$ ".

"Αρα της (1) διληφθείται διείδεται $v = n+I$ καὶ έπειδή ισχεῖται καὶ διείδεται $v = n$, έπειτα διείδεται, οὐδὲ διληφθείται διείδεται $v \in \Phi$.

$$29) \text{ Εάν } v \in \Phi > 5 \text{ να διεκχωρήσει } 2^v > v^2 \quad (1).$$

Λογοτελος. Διείδεται $v = 5$ της (1) διληφθείται. "Εστω διείδεται διείδεται $v = n$ ($n \in \Phi > 5$) καὶ τοις $2^n > n^2$ (2). Ως δείξωμεν διείδεται διείδεται $v = n+I$ δηλο. διείδεται $2^{n+I} > (n+I)^2$ (3) καὶ $2^n \cdot 2 > (n+I)^2$ (4). Πρός τοις διείδεται δηλο. διείδεται $2^n > (n+I)^2$ (5). Διείδεται καὶ μεταξύ λόγων οὐδὲ διληφθείται της (2).

"Η (5) γράφεται $n^2 - 2n - 1 > 0$ (6). Αν ρέσατο τούς τριώνδημου είναι $I \pm \sqrt{2}$ καλέποντας το n λαμβάνει διαφοράς καλθετικός τημές, διδύνει διληθεύει ή (6) πρέπει $n > I + \sqrt{2}$ ή $n > 3$ το δυον ου συμβαίνει έξι υποθέσεως. "Εστε ή (6) διληθεύει διεύ $n > 3$ κάρα καλή ή (4) καλή ή (3).

Με την προϋπόθεσιν ότι η διληθεύει ή (1) διεύ $n = n$ έδειχνη ότι εί διληθεύει καλ διεύ $n = n + 1$, καλ συνεπώς θα διληθεύει διεύ καλ θε $n \in \Phi \geq 5$.

$$30) \text{ Βαν } n \in \Phi \text{ νδ δειχθή } \text{ θτι } \frac{I + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{n} > \frac{2}{3} \sqrt{n} \quad (1)$$

Λ Θ Ο Ι Σ. Διεύ $n = I$ ή (1) διληθεύει. "Εστω ότι η (1) & - ληθεύει διεύ $n = n$ ($n \in \Phi$), ήτοι διεύ:

$$\frac{I + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{n} > \frac{2}{3} \sqrt{n} \quad (2). \text{ Ωδ δειχνωμεν ότι η διληθεύει καλ διεύ } n = n + 1 \text{ δηλ. ότι } \frac{I + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} + \sqrt{n+1}}{n+1} > \frac{2}{3} \sqrt{n+1} \quad (3).$$

$$\text{ "Η (2) γράφεται } \frac{I + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{n+1} > \frac{2}{3} \sqrt{n}, \quad (4),$$

(ήτοι πολ/ζομεν καλ τα δύο μέλη της έπει τούς θετικούς $\frac{n}{n+1}$). Προσθέτοντες καλ είς τα δύο μέλη της τούς $\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$, λαμβάνομεν :

$$\frac{I + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} + \sqrt{n+1}}{n+1} > \frac{2}{3} \sqrt{n} \frac{n}{n+1} + \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \quad (5).$$

"Ινα διληθευούσης της (5) διληθεύει καλ ή (3) αριετί νδ είναι $\frac{2\sqrt{n}}{3} \frac{n}{n+1} + \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} > \frac{2}{3} \sqrt{n+1}$ ή $2n\sqrt{n} > (2n-1)\sqrt{n+1}$. "Η τελευταία δινιστης διληθεύει, διεύτι ξν υφάσματα είς το τετράγωνον καλ τα δύο μέλη της ειδρεσκομεν $0 > -(3n-1)$ το δυοτον είναι διληθέσ.

$$31) \text{ Βαν } n \in \Phi > 2 \text{ νδ δειχθή } \text{ θτι } \frac{I}{\sqrt{1}} + \frac{I}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{I}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \quad (1)$$

Λ Θ Ο Ι Σ. Διεύ $n = 2$ ή (1) διληθεύει. "Εστω ότι διληθεύει διεύ $n = n$ ($n \in \Phi$), ήτοι $\frac{I}{\sqrt{1}} + \frac{I}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{I}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ (2). Ωδ δειχνωμεν θ-

$$\text{τι } \delta\lambda\eta\theta\epsilon\delta\epsilon\tau\text{ηαλ διε } v = n+I \text{ ήτοι ότι } -\frac{I}{\sqrt{1}} + \frac{I}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{I}{\sqrt{n}} + \frac{I}{\sqrt{n+I}} >$$

$$> \sqrt{n+I} \quad (3). \text{ 'Αλλ' είναι γνωστόν ότι } \frac{I}{\sqrt{n+I}} > \sqrt{n+I} - \sqrt{n} \quad (4), \text{ διε-}$$

τι η (4) προϋπτει ειν της άνιστητος $I + \sqrt{\frac{n}{n+I}} > I$ διε πολ/ σμού καλ τῶν δυο μελῶν της ἐπει $\sqrt{n-I} - \sqrt{n}$. Προσθέτοντες τας (2) καλ (4) ηατδ μελη εύρεσκομεν τὴν (3). 'Αφού λοιπόν ή (I) λοχδει διε $v = n+I$ καμέ την προϋπόθεσιν ότι λοχδει διε $v = n$, έπειτα οτι διε δληθεση διε κάθε $v \in \Phi$.

32) 'Εδν $v \in \Phi \geq 2$ οι δε δριθμοι $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v$ είναι θετικοι, καδ δειχθή διε $(I+\alpha_1)(I+\alpha_2)\dots(I+\alpha_v) > I + (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v) \quad (I)$.

('Ανιστης τοῦ WEIERSTRASS)

$$\Delta \sigma \nu \iota \varsigma \circ \text{ Διε } v=2 \text{ έχομεν } (I+\alpha_1)(I+\alpha_2) = I+\alpha_1 + 2\alpha_1\alpha_2,$$

καρα $(I+\alpha_1)(I+\alpha_2) > I + (\alpha_1 + \alpha_2)$ διετι $\alpha_1\alpha_2 > 0$ ήτοι δληθεσει. "Εστω ήδη διε η (I) δληθεσει διε $v=n$ ($n \in \Phi$) δηλ. διε:

$(I+\alpha_1)(I+\alpha_2)\dots(I+\alpha_n) > I + (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \quad (2)$. Ωδ δειξωμεν διε υπδ τὴν προϋπόθεσιν αιτην δληθεσει καλ διε $v = n+I$. "Αν πολ/σ ωμεν καλ τα δυο μελη τῆς (2) ἐπει τῶν θετικῶν δριθμῶν $(I+\alpha_{n+I})$ έχομεν: $(I+\alpha_1)(I+\alpha_2)\dots(I+\alpha_n)(I+\alpha_{n+I}) > I + (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \alpha_{n+I}) +$ $+ (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)\alpha_{n+I}$. 'Εδν διμως παραλεψώμεν εις τδ δεύτερον μελοτῶν θετικῶν προσθετέον $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)\alpha_{n+I}$, λαμβάνομεν ηατδ μελκονα λόγον $(I+\alpha_1)(I+\alpha_2)\dots(I+\alpha_n)(I+\alpha_{n+I}) > I + (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \alpha_{n+I})$. 'Η (I) λοιπόν δληθεσει καλ διε $v = n+I$. 'Αρα ηατδ τὴν δριχην τῆς τελειας έπαγωηης θδ δληθεση καλ διε πάντα $v \in \Phi$.

Σημείωσις.- 'Εδν $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_v = x$, η (I) γίνεται: $(I+x)^v > I + vx$. ('Ανιστης τοῦ BERNOULLI)

33) Εάν $n \in \mathbb{Q}$ > 2 οτι δεδικθμος $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ είναι θετικος κας μη πρότερο της μονάδος, να δειχθή θτι :

$$(I - \alpha_1)(I - \alpha_2) \dots (I - \alpha_n) > I - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \quad (1).$$

Λόγως • Διεύ $n = 2$ έχουμεν $(I - \alpha_1)(I - \alpha_2) = 1 - (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1\alpha_2$ κας αρα $(I - \alpha_1)(I - \alpha_2) > I - (\alpha_1 + \alpha_2)$ διετι $\alpha_1\alpha_2 > 0$. Ή (1) λοιπόν διληθεσει διεύ $n = 2$. Εστω ήδη θτι ή (1) διληθεσει διεύ $n = n$ ($n \in \mathbb{N}$), δηλαδή θτι : $(I - \alpha_1)(I - \alpha_2) \dots (I - \alpha_n) > I - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$ (2). Θε δεξιωμεν θτι ύπο την προσπόθεσιν αληθού διληθεσει κας διεύ $n = n+1$.

Πολύζομενας τι δεδο μέλη της (2) επει $I - \alpha_{n+1}$ δ δποτος είναι θετικος δριθμος διετι ύπετεση θτι $\alpha_{n+1} < I$. Θε έχωμεν τιτε την δνιστητα $(I - \alpha_1)(I - \alpha_2) \dots (I - \alpha_n)(I - \alpha_{n+1}) > I - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \alpha_{n+1}) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)\alpha_{n+1}$.

Εάν έκ τού δευτέρου μέλους αύτης παραλειψωμεν τον βρον $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)\alpha_{n+1}$ δ δποτος είναι θετικος, θε έχωμεν κατε μελονα λόγον $(I - \alpha_1)(I - \alpha_2) \dots (I - \alpha_n)(I - \alpha_{n+1}) > I - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \alpha_{n+1})$. Ή (1) λοιπόν διληθεσει κας διεύ $n = n+1$. Αρα κατε την δρχή της τελειας έπαγωης θε διληθεσή μελη πάντα $n \in \mathbb{N} > 2$.

34) Εάν $n \in \mathbb{Q}$ κας $I+x > 0$ να δειχθή θτι $(I+x)^n > I+nx$ (1).
(Ανιστηης τού J. BERNOULLI)

Λόγως • Διεύ $n=1$ ή (1) διληθεσει διετι γνεται λοστης. Διεύ $n=2$ έχουμεν $(I+x)^2 > I+2x$ ή δποτα προφανως διληθεσει. Εστω ήδη θτι ή (1) διληθεσει διεύ $n=n$ ($n \in \mathbb{N} > 2$) δηλ. θτι $(I+x)^n > I+nx$ (2). Θε δεξιωμεν θτι ύπο την προσπόθεσιν αύτην διληθεσει κας διεύ $n=n+1$. Πολύζομεν κας τι διστης μέλη έπειτην θετικον δριθμον $I+x$ κας έχουμεν:

$(1+x)^{n+1} > (1+nx)(1+x)$ ή $(1+x)^{n+1} > 1+x+nx+nx^2$ ή
 $(1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x+nx^2$ (3). Είναι όμως προφανές ότι $1+(n+1)x+nx^2 > 1+(n+1)x$ (4). Έκ τῶν (3) καὶ (4) ἔπειται ότι $(1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x$. Δηλ. ἡ (1) ἀληθεύει καὶ διά $n=k+1$. "Αρα κατά τήν ἀρχήν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς ἡ (1) θά ἀληθεύῃ καὶ διά πάντα $n \in \mathbb{N}$ > 2.

Σημείωσις. Η ἀνισότης τοῦ Bernouilli ἔχει πλείστας ὅσας ἐφαρμογάς, καὶ μᾶς διευκολύνει πολύ εἰς τήν ἀπόδειξιν ἀνισοτητῶν σχέσεων.

Ἐφαρμογὴ 1. Νά δειχθῇ ότι διά κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $(1-\alpha)^n > 1-n\alpha$, ἂν $\alpha < 1$.

Αὕτη ἀληθεύει λόγῳ τῆς (1) ἐπειδή $-\alpha > -1$, ἐξ οὗ $1+(-\alpha) > 0$.

Ἐφαρμογὴ 2. Νά δειχθῇ ότι ύπάρχει τιμή τοῦ n διά τήν ὥποιαν ἀληθεύει ἡ ἀνισότης $(1,01)^n > 10$.

Θέτομεν εἰς τὴν ἀνισότητα (1) $x=0,1$ ότε αὕτη γίνεται $(1+0,1)^{1+n \cdot 0,1} > 1 + \frac{n}{10}$. Θέλομεν δέ $1 + \frac{n}{10} = 10$ ότε εὐρίσκομεν $n=90$. "Αρα διά $n=90$ θά είναι $(1,01)^n > 10$.

Ἐφαρμογὴ 3. Νά δειχθῇ ότι διά κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $(1+\frac{1}{n})^n \geq 2$.

Αὕτη προκύπτει ἐκ τῆς (1) διά $x=\frac{1}{n}$.

Ἐφαρμογὴ 4. Νά δειχθῇ ότι διά κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $(1+\frac{1}{n})^{n+1} > 1 + \frac{1}{n+1}$

$(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}$ (α)

$$\text{Η (α) δρόσεται } \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}} > 1 + \frac{1}{n+1} \quad \left| \quad \text{ή } \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} \right)^{n+1} > 1 + \frac{1}{n+1}$$

$$\text{ή } \left[1 + \frac{1}{n(n+2)} \right]^{n+1} > 1 + \frac{1}{n+1}. \quad \text{Εἰς τήν ἀνισότητα τοῦ Bernouilli}$$

$$\text{θέτομε } x = \frac{1}{n(n+2)} \quad \text{καὶ } \text{έχομε } \left[1 + \frac{1}{n(n+2)} \right]^{n+1} > 1 + \frac{1}{n(n+2)} \quad (\beta)$$

Διά νά άληθεύῃ ή (2) ἀρκεί νά είναι $\frac{1}{v+1} < \frac{v+1}{v(v+2)}$ ή $v(v+2) < (v+1)^2$

ή $v^2 + 2v < v^2 + 2v + 1$ ή $1 > 0$, τό διότον είναι άληθές. "Αρα ή (β) άληθεύει και σωμας καλ ή (α).

Εφαρμογή 5. Νά δειχθῇ ότι διά κάθε $v \in \mathbb{N}$ είναι $\left(\frac{2v}{v+1}\right)^v > \frac{v+1}{2}$.

Έπειδή $\frac{2v}{v+1} = \frac{(v+1)+(v-1)}{v+1} = 1 + \frac{v-1}{v+1}$. "Αρα κατά τήν άνισότητα του Bernoulli είναι :

$\left(1 + \frac{v-1}{v+1}\right)^v > 1 + v\left(\frac{v-1}{v+1}\right) = \frac{v^2 + 1}{v+1}$. Διά τήν απόδειξιν λοιπόν της διθείσης άνισότητος, ἀρκετ νά δείξωμεν ότι $\frac{v^2 + 1}{v+1} > \frac{v+1}{2}$ ή ότι $2(v^2 + 1) > (v+1)^2$ ή $2v^2 + 2 - v^2 - 2v - 1 > 0$. Εξ αὐτῆς έχουμεν $(v-1)^2 > 0$ ή όποια προφανῶς άληθεύει.

Εφαρμογή 6. Βάν $1 < v < 11$ νά δειχθῇ ότι $0 < v^{1,4143} - v^{1,4142}$

$\frac{1,4142}{1000}$. "Αρκετ νά δείξωμεν ότι $0 < v^{1,4142} - v^{0,0001} - v^{1,4142}$.

$v^{1,4142}$ ή $0 < v^{0,0001} - 1 < \frac{1}{1000}$. Βάν $v > 1$ ή πρός τά άριστερά

άνισότης άληθεύει. Διά νά δειχθῇ η πρός τά δεξιά πρέπει νά δειχθῇ ότι $1 + \frac{1}{1000} > v^{0,0001}$ ή $\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{10000} > v$. "Αλλά κατά τήν άνισότητα του Bernoulli είναι $\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{10000} > 1 + \frac{1}{1000} \cdot 10.000 = 11 > v$.

ο.ε.δ.

35) Βάν $v \in \mathbb{N} > 1$ νά δειχθῇ ότι $2.4.6....(2v+2) < (v+2)^{v+1}$ (1).

Δύσις. Διά $v=2$ ή (1) γίνεται $2.4.6 < 4^3$ ή $48 < 64$ δηλ. άληθεύει. "Εστω ότι ή (1) άληθεύει διά $v=k$ ($k \in \mathbb{N}$) δηλ. ότι $2.4.6...$

$\dots 2(n+1) < (n+2)^{n+1}$ (2). Βάσεις ωμεν ύπο τήν προϋπόθεσιν αύτήν διαληθεύει και διά $n=k+1$ δηλ. στις:

$$2.4.6.\dots 2(n+1)(n+2)\dots 2 < (n+3)^{n+2}.$$

Πολλαπλασιάζοντες άμφοτερα τά μέλη της (2) έπι 2(n+2) έχουμεν $2.4.6.\dots 2(n+1)(n+2)2 < 2(n+2)^{n+2}$. Άρκετ λοιπόν νά δείξωμεν στις $(n+3)^{n+2} > 2(n+2)^{n+2}$ ή $\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n+2} > 2$, άλλ' αυτη ισχύει. (Έδει φαρμογή 3, άσενησις 34).

"Αρα ή πρότασις άληθεύει διά $n=k+1$ καί συνεπώς θά άληθεύη και διά κάθε $n \in \mathbb{N}$.

$$36.^{\circ} \text{Βάν } \alpha \text{ καί } v \text{ φυσικοί νά δειχθήσση στις } \alpha^{2v} + \alpha^{2v-1} + \dots + \alpha + 1 > (2v+1)\alpha^v \text{ (1).}$$

Δύστις. Διά $v=1$ έχουμεν $\alpha^2 + \alpha + 1 > 3\alpha$ ή $\alpha^2 + \alpha + 1 - 3\alpha > 0$ ή $(\alpha-1)^2 > 0$ δηλ. άληθεύει. "Εστω στις ή (1) άληθεύει διά $n=k(\in \mathbb{N})$ δηλ. στις $\alpha^{2k} + \alpha^{2k-1} + \dots + \alpha + 1 > (2k+1)\alpha^k$ (2). Βάσεις ωμεν στις ύπο τήν προϋπόθεσιν αύτην άληθεύει και διά $n=k+1$ δηλ. στις $\alpha^{2(k+1)} + \alpha^{2k+1} + \dots + \alpha + 1 > (2k+3)\alpha^{k+1}$ (3) ή στις $\alpha^{2(k+1)} + \alpha^{2k+1} + \dots + \alpha + 1 - 2\alpha^{k+1} > (2k+1)\alpha^{k+1}$ (3). Πολλαπλασιάζομεν άμφοτερυ τά μέλη (2) έπι α καί έχουμεν $\alpha^{2k+1} + \alpha^{2k} + \dots + \alpha^2 + \alpha > (2k+1)\alpha^{k+1}$. Άρκετ λοιπόν νά δείξωμεν στις $\alpha^{2(k+1)} + \alpha^{2k+1} + \dots + \alpha + 1 - 2\alpha^{k+1} > \alpha^{2k+1} + \alpha^{2k} + \dots + \alpha^2 + \alpha$ ή

$$\alpha^{2(k+1)} + \alpha^{2k+1} + \dots + \alpha + 1 - 2\alpha^{k+1} - \alpha^{2k+1} - \alpha^{2k} - \dots - \alpha^2 - \alpha > 0$$

$\alpha^{2(k+1)} - 2\alpha^{k+1} + 1 > 0$ ή $(\alpha^{k+1} - 1)^2 > 0$ δηλ. η πρότασις άληθεύει και διά $n=k+1$. Αρα θά άληθεύη και διά κάθε $n \in \mathbb{N}$.

$$37.^{\circ} \text{Βάν } n \in \mathbb{N} \geq 4 \text{ καί } 0 < \alpha < 1 \text{ νά δειχθήσση στις } (1-\alpha)^v > 1 - v\alpha + \frac{v(v-1)\alpha^2}{1 \cdot 2} - \frac{v(v-1)(v-2)\alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{ (1).}$$

Δύστις. Διά $v=4$ έχουμεν $(1-\alpha)^4 > 1 - 4\alpha + 6\alpha^2 - 4\alpha^3$ ή

$$1-4\alpha+6\alpha^2-4\alpha^3+\alpha^4 > 1-4\alpha+6\alpha^2-4\alpha^3 \quad \text{η} \quad \alpha^4 > 0 \quad \text{δηλ. } \alpha > 0.$$

"Εστω ότι ή (1) άληθεύει διά ν=κ (κεφ) δηλ. οτι $(1-\alpha)^{\kappa} > 1-\kappa\alpha$
 $+ \frac{\kappa(\kappa-1)}{1 \cdot 2} \alpha^2 - \frac{\kappa(\kappa-1)\kappa-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^3$. (1). Πολλαπλασιάζομεν καί τά δύο μέλη
της (1) επί $1-\alpha > 0$ καί λαμβάνομεν $(1-\alpha)^{\kappa+1} > 1-\kappa\alpha + \frac{\kappa(\kappa-1)\alpha^2}{1 \cdot 2} -$
 $- \frac{\kappa(\kappa-1)(\kappa-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^3 - \alpha + \kappa\alpha^2 - \frac{\kappa(\kappa-1)}{1 \cdot 2} \alpha^3 + \frac{\kappa(\kappa-1)(\kappa-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^4$ η μετά τήν αναγωγήν τῶν δύο μέλων λαμβάνομεν:

$$(1-\alpha)^{\kappa+1} > 1-(\kappa+1)\alpha + \left[\frac{\kappa(\kappa-1)}{1 \cdot 2} + \kappa \right] \alpha^2 - \left[\frac{\kappa(\kappa-1)}{1 \cdot 2} + \frac{\kappa(\kappa-1)(\kappa-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right] \alpha^3 + \\ + \frac{\kappa(\kappa-1)(\kappa-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^4 \quad \text{καί μετά τάς πράξεις είσι τάς ἀγκύλας λαμβάνομεν:}$$

$$(1-\alpha)^{\kappa+1} > 1-(\kappa+1)\alpha + \frac{\kappa(\kappa+1)}{1 \cdot 2} \alpha^2 - \frac{(\kappa-1)\kappa(\kappa+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^3 + \frac{\kappa(\kappa-1)(\kappa-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^4,$$

τότε κατά μείζονα λόγον θά έχωμεν καί

$$(1-\alpha)^{\kappa+1} > 1-(\kappa+1)\alpha + \frac{\kappa(\kappa+1)}{1 \cdot 2} \alpha^2 - \frac{(\kappa-1)\kappa(\kappa+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^3. \quad \text{Άληθεύει λοιπόν}$$

η πρότασις καί διά ν=κ+1 καί έπομένως καί διά κάθε κεφ.

$$38. \quad \text{"Εάν } \chi \neq 1 \text{ καί θετικός καί κεφ νά δειχθῇ οτι } \frac{1+\chi^2+\chi^4+\dots+\chi^{2v}}{\chi+\chi^2+\dots+\chi^v} > 1 + \frac{1}{v} \quad (1).$$

Λύσι. Διά ν=1 εχομεν $\frac{1+\chi^2}{\chi} > 1+1$ η $1+\chi^2 > 2\chi$, δηλ. η (1) άληθεύει.

"Εστω οτι ή (1) άληθεύει διά ν=κ (κεφ), δηλ. $\frac{1+\chi^2+\chi^4+\dots+\chi^{2k}}{\chi+\chi^2+\dots+\chi^k} > 1 + \frac{1}{k} \quad (2)$. Θά δείξωμεν οτι ίπστην προϋπόθεσιν αύτήν η (1) άληθεύει καί διά ν=κ+1 δηλ. οτι

$$\frac{1+\chi^2+\chi^4+\dots+\chi^{2k+2}}{\chi+\chi^2+\dots+\chi^k} > 1 + \frac{1}{k+1} \quad (3).$$

$$\text{Άντιστρέφομεν τάμελη της (2) καὶ ἔχομεν } \frac{x+x^3+\dots+x^{2n-1}}{1+x+\dots+x^n} < \frac{x}{x+1} \text{ καὶ}$$

πολλαπλασιάζοντες ἀριθμητήν καὶ παρονομαστήν τοῦ πρώτου μέλους ἐπὶ x λαμβάνομεν:

$$\frac{x+x^3+\dots+x^{2n}}{x+x^3+\dots+x^n} < \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} \text{ καὶ ἄλλασσοντες τὰ σημεῖα τῶν δύο μελῶν ἔχομεν } -\frac{x+x^3+\dots+x^{2n}}{x+x^3+\dots+x^n} > -1 + \frac{1}{x+1} \quad (4)$$

$$\text{'Αλλ' ἔξ ἄλλου ἀληθεύει προφανῶς ἡ } \frac{1+x^2}{x} > 2 \quad (5)$$

Προσθέτοντες κατά μέλη της (4) καὶ (5) λαμβάνομεν:

$$\frac{1+x^2}{x} - \frac{x+x^3+\dots+x^{2n}}{x+x^3+\dots+x^n} > 1 + \frac{1}{x+1} \quad (6)$$

Τὸ πρῶτον μέλος της (6) γράφεται διαδοχικῶς

$$\begin{aligned} & \frac{(1+x^2)(x+x^3+\dots+x^{2n+1}) - x(x^3+x^5+\dots+x^{2n+3})}{x(x+x^3+\dots+x^{2n+1})} = \\ & = \frac{(x+x^3+\dots+x^{2n+1}) + (x^3+x^5+\dots+x^{2n+1}+x^{2n+3}) - (x^3+x^5+\dots+x^{2n+1})}{x(x+x^3+\dots+x^{2n+1})} = \\ & = \frac{x+x^3+\dots+x^{2n+1}+x^{2n+3}}{x(x+x^3+\dots+x^{2n+1})} = \frac{1+x^2+x^4+\dots+x^{2n+2}}{1+x^3+\dots+x^{2n+1}}. \end{aligned}$$

'Επομένως ἡ (6) συμπίπτει μὲ τὴν ἀποδεικτέαν (2). "Ἄρα ἡ (1) ἀληθεύει διά $v = n+1$ καὶ συνεπῶς θά ἀληθεύῃ καὶ διά πάντα νεφ.

$$39)\text{Έάν } v \in \mathbb{N} \text{ καὶ } x > 0 \text{ νά δειχθῇ ὅτι } x^v + x^{v-2} + x^{v-4} + \dots + \frac{1}{x^{v-4}} + \frac{1}{x^{v-2}} + \frac{1}{x^v} \geq v+1 \quad (1)$$

Δύσις. Διά $v=1$ ή (1) γίνεται $1 + \frac{1}{x} \geq 2$ (2) ή $(x-1)^2 \geq 0$.
 Διά $v=2$ ή (1) γίνεται $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geq 3$ (3). Ή (2) άληθεύει διά κάτια.

Θε $x > 0$. Τούτο σημαίνει ότι ή (2) άληθεύει όταν ο x αντικατασταθεί διά x^2 κ.τ.λ. δηλ. $x + \frac{1}{x^2} \geq 2$. Προσθέτοντες 1 είναι άμφότερα τά μέλη της ανισότητος αύτης λαμβάνομεν την (3).

"Εστω ότι ή (1) άληθεύει διά $v=n$ (κεφ) δηλ. ότι $x + \frac{x}{x+1} + \dots + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x} \geq n+1$ (4). Θά δεξιώμεν ότι υπό την προϋπόθεσιν αυτήν ή (1) άληθεύει διά $v=n+2$, δηλ. $x + \frac{x}{x+1} + \frac{x-2}{x-1} + \dots + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} \geq n+3$ (5). Αντικαθιστώντες τό χ διά το x είναι την (2) λαμβάνομεν $x + \frac{1}{x+2} \geq 2$ (6). Προσθέτοντες κατά μέλη τάς (4) καὶ (6) λαμβάνομεν την (5). "Αρα ή (1) άληθεύει διά $v=n+2$.

Έλει τάς δύο πρώτας περιπτώσεις έδειχθη ότι ή (1) άληθεύει διά $v=1$ καὶ $v=2$. Έλει την τελευταίαν περίπτωσιν έδειχθη ότι ή άληθεια της (1) διά $v=n+2$ συνεπάγεται την άληθειαν της (1) διά $v=n$ δηλ. έχομεν κατ' εύθειαν μετάβασιν ἀπό $v=n$ είς τό $v=n+2$.

Τά ἀποτελέσματα της πρώτης καὶ της τελευταίας περιπτώσεως ιᾶς παρέχουν κατ' εύθειαν την βεβαιότητα ότι ή (1) άληθεύει διά κάθε περιτόν ἀριθμόν v . Ομοίως τά ἀποτελέσματα της δευτέρας καὶ τελευταίας περιπτώσεως μᾶς παρέχουν την βεβαιότητα ότι ή (1) άληθεύει διά κάθε ἄρτιον ἀριθμόν v . "Αρα ή (1) άληθεύει διά κάθε $v \in \mathbb{Z}$.

40) Εάν $v \in \mathbb{N}$ καὶ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ θετικοί νά δειχθεί ότι $\beta^{v+1} > (v+1)\alpha^v$
 $- v\alpha^{v+1}$ (1).

Δύσις. Διά $v=1$ ή (1) γίνεται $\beta^2 > 2\alpha\beta - \alpha^2$ ή $(\alpha-\beta)^2 > 0$, αρα

ἀληθεύειν. "Εστω ὅτι ἀληθεύει διά ν=κ δηλ. ὅτι εἶναι $\beta^{κ+1} > (κ+1)α^κ β - κα^{κ+1}$ (2). Θά δείξωμεν ὅτι ἀληθεύει καὶ διά ν=κ+1, δηλ. ὅτι εἶναι $\beta^{κ+2} \geq (κ+2)α^{κ+1}β - (κ+1)α^{κ+2}$ (3). Πολλαπλασιάζοντες τὴν (2) ἐπί β ἔχουμεν $\beta^{κ+2} \geq (κ+1)α^κ β^2 - κα^{κ+1}β$ (4). Διά νά δειχθῇ ἡ (3) ἀρκεῖ ἔνεκα τῆς (4) νά δειχθῇ ὅτι $(κ+1)α^κ β^2 - κa^{κ+1}β \geq (κ+2)α^{κ+1}β - (κ+1)α^{κ+2}$ ἢ
 $κa^{κ+2} + α^κ β^2 - κa^{κ+1}β - κa^{κ+1}β + κa^{κ+2} + α^{κ+2} \geq 0$ ἢ

$(κa^{κ+2} - 2κa^{κ+1}β + κa^{κ+2}) + (α^κ β^2 - 2α^{κ+1}β + α^{κ+2}) \geq 0$ ἢ $κa^κ(α-β)^2 + α^κ(α-β)^2 \geq 0$ ἢ $α^κ(α-β)^2(κ+1) \geq 0$ ἢ ἀνισότης αὐτη ἀληθεύει διότι εἶναι $α > 0$ καὶ $\kappa \in \mathbb{N}$. Άρα θά ἀληθεύῃ διά κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$.

$$41.^{\circ} \text{ Εάν } \nu \in \mathbb{N} > 1 \text{ νά δειχθῇ ὅτι } \frac{4^{\nu}}{\nu+1} < \frac{(2\nu)!}{(\nu!)^2} \quad (1).$$

Δύσις. Διά ν=2 ἢ (1) γίνεται $\frac{16}{3} < 6$ δηλ. ἀληθεύει. "Εστω ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διά ν=κ $(\kappa \in \mathbb{N}) \geq 2$ δηλ. ὅτι $\frac{4^{\kappa}}{\kappa+1} < \frac{(2\kappa)!}{(\kappa!)^2}$.

Έπειδή ὅμως διά κ>0 εἶναι $\frac{4^{(\kappa+1)}}{\kappa+2} < \frac{(2\kappa+1)(2\kappa+2)}{(\kappa+1)^2}$, τότε

$$\frac{4^{\kappa}}{\kappa+1} \cdot \frac{4^{(\kappa+1)}}{\kappa+2} < \frac{(2\kappa)!}{(\kappa!)^2} \cdot \frac{(2\kappa+1)(2\kappa+2)}{(\kappa+1)^2} \text{ ήτοι:}$$

$$\frac{4^{\kappa+1}}{\kappa+2} < \frac{(2\kappa+2)!}{[(\kappa+1)!]^2} \text{ ήτοι ἀληθεύει ἡ (1) καὶ διά ν=κ+1 καὶ συ-$$

νεπώς θά ἀληθεύῃ καὶ διά πάντα $\nu \in \mathbb{N} > 1$.

$$42.^{\circ} \text{ Εάν } \nu \in \mathbb{N} > 1 \text{ καὶ } \alpha + \beta > 0 \quad (\alpha \neq \beta) \text{ νά δειχθῇ ὅτι } 2^{\nu-1}(\alpha^{\nu} + \beta^{\nu}) > (\alpha + \beta)^{\nu} \quad (1).$$

Δύσις. α) Διά ν=2 ἢ (1) γίνεται $2(\alpha^2 + \beta^2) > (\alpha + \beta)^2$ (2)

Έάν $\alpha \neq \beta$ ἀληθεύει ἡ ἀνισότης $(\alpha - \beta)^2 > 0$ (3).

Προσθέτοντες τό $(\alpha + \beta)^2$ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (3) εὑρίσκομεν τὴν (2). "Άρα ἡ (1) ἀληθεύει διά ν=2.

$$\text{"Εστω ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διά ν=κ $(\kappa \in \mathbb{N})$ δηλ. ὅτι } 2^{\kappa-1}(\alpha^{\kappa} + \beta^{\kappa}) >$$

$(\alpha+\beta)^{\kappa}(4)$. Θά δείξωμεν ότι τήν προϋπόθεσιν αύτήν ή (1) ἀληθεύει εις καί διά $v=\kappa+1$. δηλ. ότι $2^{\kappa}(\alpha^{\kappa+1}+\beta^{\kappa+1}) > (\alpha+\beta)^{\kappa+1}$ (5)

Πολλαπλασιάζοντες καί τά δύο μέλη τῆς (4) ἐπί $\alpha+\beta$, καί ἐπειδή $\alpha+\beta > 0$ λαμβάνομεν $2^{\kappa-1}(\alpha^{\kappa}+\beta^{\kappa})(\alpha+\beta) > (\alpha+\beta)^{\kappa+1}$ (6). Διά νά δείξωμεν τήν λογικήν τῆς (5) ἀρκετ νά δείξωμεν ότι $2^{\kappa}(\alpha^{\kappa+1}+\beta^{\kappa+1}) > 2^{\kappa-1}(\alpha^{\kappa}+\beta^{\kappa})(\alpha+\beta)$ (7) ή ότι $\alpha^{\kappa+1}+\beta^{\kappa+1} > \alpha^{\kappa}\beta+\alpha\beta^{\kappa}$ (8). Ή (8) γράφεται $(\alpha^{\kappa}\beta)(\alpha-\beta) > 0$ (9). Ήστω ότι $\alpha > \beta$ τότε θά είναι $\alpha^{\kappa} > \beta^{\kappa}$ ότε τό πρῶτον μέλος τῆς (9) είναι γινόμενον θετικών ἀριθμῶν, δηλ. αὐτή ἀληθεύει.

"Εστω ότι $\alpha < \beta$ ότε $\alpha^{\kappa} < \beta^{\kappa}$ καί τότε τό πρῶτον μέλος τῆς (9) είναι γινόμενον δύο ἀρνητικῶν, δηλ. πάλιν ἀληθεύει. "Αρα καί εἰς τάς δύο περιπτώσεις ή (9) ἀληθεύει. "Αρα ή πρότασις ἀληθεύει καί διά $v=\kappa+1$, καί συνεπῶς θά ἀληθεύη διά κάθε $v \in \mathbb{N}$.

43) Εάν $\alpha > 0$ καί β ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς τοιοῦτος ώστε $\alpha+\beta > 0$ νά δειχθῇ ότι $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) < \alpha^{v+1}$ (1) ὅπου $v \in \mathbb{N}$.

Λύσις. Διά $v=1$ ἔχομεν $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) < \alpha^2$ ή δύοις είναι ἀληθῆς. "Εστω ότι η (1) είναι ἀληθής διά $v=\kappa$ ($\kappa \in \mathbb{N}$). Θά δείξωμεν ὑπότινη προϋπόθεσιν αύτήν ότι ἀληθεύει καί διά $v=\kappa+1$. Γράγματι διά $v=\kappa$ ἔχομεν $(\alpha+\beta)^{\kappa}(\alpha-\beta) < \alpha^{\kappa+1}$. Πολλαπλασιάζοντες καί τά δύο μέλη τῆς ἀνισότητος αύτῆς ἐπί α ἔχομεν $(\alpha+\beta)^{\kappa} [\alpha+\beta-(\kappa+1)\beta] [\alpha-\beta-\beta] < \alpha^{\kappa+2}$ ή $(\alpha+\beta)^{\kappa} [(\alpha+\beta)^2 - (\kappa+1)\beta(\alpha+\beta) - \beta(\alpha+\beta) + (\kappa+1)\beta^2] < \alpha^{\kappa+2}$ καί κατά μείζονα λόγων $(\alpha+\beta)^{\kappa} [(\alpha+\beta)^2 - (\kappa+2)\beta(\alpha+\beta)] < \alpha^{\kappa+2}$ ή $(\alpha+\beta)^{\kappa+1} [\alpha-(\kappa+1)\beta] < \alpha^{\kappa+2}$ αρα ή πρότασις ἀληθεύει καί διά $v=\kappa+1$ καί συνεπῶς καί διά κάθε $v \in \mathbb{N}$.

44) Εάν $v \in \mathbb{N}$ > 2 νά δειχθῇ $v^{v+1} > (v+1)^v$.

Λύσις. Διά $v=3$ ἔχομεν $3^4 > 4^3$ τό δύοτον είναι ἀληθές. "Εστω ότι η πρότασις ἀληθεύει διά $v=\kappa$ ($\kappa \in \mathbb{N}$) δηλ. ότι $\kappa^{\kappa+1} > (\kappa+1)^{\kappa}$ (1). Θά δείξωμεν ότι ὑπό τήν προϋπόθεσιν αύτήν η πρότασις ἀληθεύει καί

διά $v=n+1$. δηλ. ὅτι $(n+1)^{n+2} > (n+2)^{n+1}$. Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τά μέλη τῆς (1) ἐπί $(n+1)^{n+2}$ καὶ λαμβάνομεν $(n)^{n+1} (n+1)^{n+2} > (n+1)^{2n+2}$ ἢ $(n+1)^{n+2} > \frac{(n+1)^{2n+2}}{n^{n+1}}$. Ἀρκεῖ νά δειχθῇ ὅτι :

$$\frac{(n+1)^{2n+2}}{n^{n+1}} > (n+2)^{n+1} \text{ ἢ } (n+1)^{2n+2} > n^{n+1} (n+2)^{n+1} \text{ ἢ } (n+1)^2 > n(n+2),$$

τό διόποτον προφανῶς ἀληθεύει. Ἡ πρότασις λοιπόν ἀληθεύει καὶ διά $v=n+1$ καὶ συνεπῶς θά ἀληθεύη διά κάθε $v \in \mathbb{N}$ > 2.

$$45)\quad \text{Εάν } (v, \chi \in \mathbb{Q}) \text{ νά δειχθῇ ὅτι } \text{ ή παράστασις } v\chi^{v+1} - (v+1)\chi^{v+1} = \\ = \text{πολλ. } (\chi-1)^2.$$

Λύσις. Διά $v=1$ ἔχομεν $\chi^2 - 2\chi + 1 = (\chi-1)^2$ ἤτοι ή πρότασις ἀληθεύει. Εστω ὅτι αὕτη ἀληθεύει διά $v=k$ ($\chi \in \mathbb{Q}$) δηλ. ὅτι $k\chi^{k+1} - (k+1)\chi^k + 1 = p(\chi-1)^2$ (1). Θά δείξωμεν ὅτι ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ή πρότασις λισχύει καὶ διά $v=k+1$ δηλ. ὅτι $(k+1)\chi^{k+2} - (k+2)\chi^{k+1} + 1 = \lambda(\chi-1)^2$ (2). Ή (2) γράφεται $(k+1)\chi^{k+2} - k\chi^{k+1} - 2\chi^{k+1} + 1 = (k+1)\chi^{k+2} - 2k\chi^{k+1} + k\chi^{k+1} - 2\chi^{k+1} + 1$ (3). Άλλα λόγω τῆς (1) εἶναι $k\chi^{k+1} + 1 = p(\chi-1)^2 + (k+1)\chi^k$ ὅτε ή (2) γράφεται $(k+1)\chi^{k+2} + (k+1)\chi^k + p(\chi-1)^2 - 2\chi^{k+1} (k+1) = p(\chi-1)^2 + (k+1)\chi^k (\chi^2 + 1 - 2\chi) = p(\chi-1)^2 + (k+1)\chi^k (\chi-1)^2 = (\chi-1)^2 p - (\chi-1)^2 \lambda = (\chi-1)^2 (p-\lambda) = \text{πολ. } (\chi-1)^2$ δηλ. ή (2) ἀληθεύει καὶ διά $v=k+1$ καὶ συνεπῶς θά ἀληθεύῃ διά κάθε $v, \chi \in \mathbb{Q}$.

$$46)\quad \text{Εάν } v \geq 4 \text{ νά δειχθῇ ὅτι } \left(\frac{3}{2}\right)^v > v+1.$$

Λύσις. Διά $v=4$ ἔχομεν $\left(\frac{3}{2}\right)^4 > 4+1$ ή διόποια εἶναι ἀληθής. Βασικώς ὅτι $\left(\frac{3}{2}\right)^n > n+1$ (1) ($\chi \in \mathbb{Q} > 4$). Θά δείξωμεν ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ὅτι ἀληθεύει καὶ διά $v=k+1$ δηλ. Ήτούτη $\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} > k+2$. Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τά μέλη τῆς (1) ἐπί $\frac{3}{2}$ ἔχομεν $\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} > \frac{3}{2} (k+1)$. Δοά νά δείξωμεν ὅτι εἶναι $\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} > (k+1)+1$

Άρκετ νά δείξωμεν ότι $\frac{3}{2}(n+1) > (n+1)+1 \cdot \frac{3}{2}(n+1)-(n+1) > 1$ δηλ. $n+1 > 2$
 Έπειδή ή τελευταία άνισότης είναι άληθής επειταί ότι ή πρότασις άληθεύει διά $n+1$ και συνεπώς θά άληθεύηται κάθε $n \in \mathbb{N}$.

$$47) \text{ Εάν } n \in \mathbb{N} \text{ νά δειχθεί ότι } \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\text{Λύσις. Διά } n=1 \text{ εχομεν } \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ή } \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \text{ ή διότι άληθεύει.}$$

$$\text{Έστω ότι άληθεύει διά } n=k \text{ (κεφ) δηλ. ότι } \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2k} < \frac{1}{\sqrt{k+1}} \quad (1)$$

$$\text{Θά δείξωμεν υπό τήν προϋπόθεσιν αύτήν ότι άληθεύει και διά } n=k+1 \text{ δηλ. ότι } \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)(2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2k(2k+2)} < \frac{1}{\sqrt{k+2}} \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντες άμφοτερα τά μέλη της (1) επί $\frac{2k+1}{2k+2}$ εχομεν:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2}. \text{ Άρκετ λοιπόν νά δείξωμεν ότι}$$

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{k+2}} \text{ ή } \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+2}} \text{ ή } \left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^2 < \frac{k+1}{k+2} \text{ ή μετά}$$

τάς πράξεις $-3k < 2$ τό διότον άληθεύει διότι $k > 0$. "Άρα ή πρότασις ισχύει διά $n = k+1$ και συνεπώς θά ίσχυη διά κάθε $n \in \mathbb{N}$.

$$48) \text{ Εάν } x \in \mathbb{R} \text{ νά δειχθεί ότι } 2 < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < 3.$$

Υπόδ. Νά δειχθεί ότι έάν $x \in \mathbb{R}$ $1 + \frac{1}{x} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < 3$

$$1 + \frac{v}{x} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^v \leq 1 + \frac{v}{x} + \frac{v^2}{2x} \quad (1)$$

$$\text{Λύσις. Διά } n=1 \text{ εχομεν } 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} \text{ τό διότον}$$

είναι άληθης. "Έστω ότι ή (1) άληθεύει διά $n=k$ δηλ. ότι $1 + \frac{x}{k} \leq \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$
 $1 + \frac{x}{k} + \frac{x^2}{2k^2}$. Θά δείξωμεν υπό τήν προϋπόθεσιν αύτήν ότι ίσχυει και

διεύ ν = n + 1 . "Έχομεν :

$$(1 + \frac{1}{x})^{n+1} = (1 + \frac{1}{x})^n (1 + \frac{1}{x}) \geq (1 + \frac{n}{x})(1 + \frac{1}{x}) = 1 + \frac{n+1}{x} + \frac{n}{x^2} > 1 + \frac{n+1}{x} .$$

"Αφ' έτερου έχομεν $(1 + \frac{1}{x})^{n+1} = (1 + \frac{1}{x})^n (1 + \frac{1}{x}) < (1 + \frac{n}{x} + \frac{n^2}{x^2})(1 + \frac{1}{x}) =$

$$= 1 + \frac{n+1}{x} + \frac{n}{x^2} + \frac{n^2}{x^2} + \frac{n^2}{x^3} = 1 + \frac{n+1}{x} + \frac{n^2+2n+1}{x^2} - \frac{n+1}{x^2} + \frac{n^2}{x^3} = 1 + \frac{n+1}{x} +$$

$$+ \frac{(n+1)^2}{x^2} - \frac{x(n+1)-n^2}{x^3} < 1 + \frac{n+1}{x} + \frac{(n+1)^2}{x^2} , \text{ αφοῦ } x(n+1) \leq n^2 , \text{ αν } x \geq n .$$

"Εκ της σχέσεως ταστης προισπτει ή διοδεικτέα . "Λν θέσωμεν διτε
 $n = x , \text{ ή } (1)$ γίνεται $1 + \frac{x}{x} < (1 + \frac{1}{x})^2 < 1 + \frac{x}{x} + \frac{x^2}{x^2}$ ή
 $2 < (1 + \frac{1}{x})^2 < 3 .$

49) "Εάν $\nu \in \mathbb{N}$ καὶ α καὶ β πραγματικοὶ ἀριθμοὶ πληροῦντες τὰς σχέσεις $\alpha > 0$ καὶ $0 < \beta < 1$, νᾶ δειχθῆ διτε :

$$(\alpha+\beta)^\nu \leq \alpha^\nu + \beta \left[(\alpha+1)^\nu - \alpha^\nu \right] \quad (1)$$

Λύσις : "Η (1) διεύ $\nu = 1$ γίνεται $\alpha+\beta \leq \alpha+\beta$ το διόποιον διληθεύει . "Εστω διτε ή (1) διληθεύει διεύ $\nu = n$ (κεφ) δηλαδή διτε

$$(\alpha+\beta)^n \leq \alpha^n + \beta \left[(\alpha+1)^n - \alpha^n \right] \quad (2) .$$

Θε δεξαμεν ὑπό τὴν προϋπόθεσιν αὐτὴν διτε $\nu = n+1$, δηλαδή διτε $(\alpha+\beta)^{n+1} \leq$

$$\alpha^{n+1} + \beta \left[(\alpha+1)^{n+1} - \alpha^{n+1} \right] \quad (3) .$$

"Επειδή $\alpha+\beta > 0$ έκ της (2) ξεπεται :

$$(\alpha+\beta)^{n+1} \leq (\alpha+\beta) \left[\alpha^n + \beta \left[(\alpha+1)^n - \alpha^n \right] \right] = \alpha^{n+1} - \beta \alpha^{n+1} +$$

$$- \alpha \beta (\alpha+1)^n + \beta \left[\alpha^n + \beta (\alpha+1)^n - \beta \alpha^n \right] = \alpha^{n+1} - \beta \alpha^{n+1} + \alpha \beta (\alpha+1)^n + \beta \left[\alpha^n (1-\beta) - (1-\beta) \cdot \right]$$

$$\cdot (1+\alpha)^n + (1+\alpha)^n = \alpha^{n+1} - \beta \alpha^{n+1} + \alpha \beta (\alpha+1)^n + \beta \left[(\alpha+1)^n + (1-\beta) [\alpha^n - (\alpha+1)^n] \right] =$$

$$= \alpha^{n+1} - \beta \alpha^{n+1} - \alpha \beta (\alpha+1)^n + \beta (\alpha+1)^n + \beta (1-\beta) [\alpha^n - (\alpha+1)^n] < \alpha^{n+1} - \beta \alpha^{n+1} +$$

$$+ \alpha \beta (\alpha+1)^n + \beta (\alpha+1)^n = \alpha^{n+1} - \beta \alpha^{n+1} + \beta (\alpha+1)^{n+1} = \alpha^{n+1} + \beta \left[(\alpha+1)^{n+1} - \alpha^{n+1} \right] .$$

"Άρα ή (3) διληθεύει . "Άρα ή πρότασις διληθεύει καὶ διεύ $\nu = n+1$ καὶ συνεπῶς θε διληθεύη διεύ κάθε νεφ .

$$50) \text{ Εάν } \mu \neq 2 \text{ να δειχθῇ ότι } \frac{1}{\mu} + \sqrt{\mu} < 2 \quad (1)$$

Λύσης : Διεί μ = 2 έχομεν $\frac{1}{2} + \sqrt{2} < 2$ το δποήον είναι άληθες. Εστω ότι ή (1) άληθευει διεί μ=κ ήτοι ότι $-\frac{1}{\mu} + \sqrt{\mu} < 2$ ή $n+I < (2n-I)^n$ (2). Ωδ δεξιώμεν ύπο την προσπόθεσιν αύτην ότι ή πρότασις άληθευει καλ ότι $\mu = n+I$, δηλαδή ότι :

$$(n+I)^{n+2} < (2n+I)^{n+1} \quad (3). \text{ Εν της προφανούς δινεστητος } \frac{n+I}{n} \binom{2n+I}{2n-I} \text{ έχομεν, } \text{ ον } \text{ θέλουμεν εις την } n+I \text{ δύναμιν, ότε } \text{ έχωμεν :}$$

$$\frac{(n+I)^{n+I}}{n^{n+I}} < \frac{(2n+I)^{n+I}}{(2n-I)^{n+I}}, \text{ καλ } \text{ έχομεν : } \frac{(n+I)^{n+I}}{n^{n+I}} < \frac{(2n+I)^{n+I}}{(2n-I)^n(n+I)}$$

διδτι ένισχυεται ον εις την παρονομαστην τοῦ δευτέρου μλόματος άντι $2n-I$ θέλουμεν $n+I$ (διδτι $n+I < 2n-I$ οπου $n > 2$) .

Έχωμεν λοιπόν $\frac{(n+I)^{n+2}}{n^{n+I}} < \frac{(2n+I)^{n+I}}{(2n-I)^n}$ (4). Πολ/ζομεν κατά μέλη τάς (4) καλ (2) καλ έχομεν :

$$\frac{(n+I)^{n+2}}{n^{n+I}} \cdot n^{n+1} < \frac{(2n+I)^n(2n+I)^{n+1}}{(2n-I)^n} \text{ δηλ. } (n+I)^{n+2} < (2n+I)^{n+1}$$

51) Εάν $v \neq 1$ να δειχθῇ ότι :

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \dots + (-1)^v \frac{x(x-1)\dots(x-v-1)}{v!} = (-1)^v \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-v)}{v!} \quad (1)$$

Λ σο οις. Διεί $v=1$ έχομεν. $1 - \frac{x}{1!} = - \frac{x-1}{1!}$. Διεί $v=2$ έχομεν $1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} = - \frac{x-1}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} = \frac{(x-1)(x-2)}{2!}$ δηλ. άληθευει.

Εστω ότι ή (1) άληθευει διεί $v=n$ δηλ. ότι $1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \dots$

$$\dots + (-1)^n \frac{x(x-1)\dots(x-n-1)}{n!} = (-1)^n \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}{n!} \quad (2)$$

Ωδ δεξιώμεν ότι υπο την προσπόθεσιν αύτην άληθευει καλ διεί $v = n+I$ ($\mu \neq 1$). Εάν προσθέσωμεν καλ εις τα δύο μέλη της (1) την αριθμόν $(-1)^{n+I} \frac{x(x-1)\dots(x-n)}{(n+I)!}$, θα έχωμεν :

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x(x-1)\dots(x-n+I)}{n!} + (-1)^{n+1} \frac{x(x-1)\dots(x-n)}{(n+I)!} =$$

$$\begin{aligned}
 &= (-1)^n \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}{n!} + (-1)^{n+1} \frac{-x(x-1)\dots(x-n)}{(n+1)!} = \\
 &= (-1)^{n+1} \left[\frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}{n!} - \frac{x(x-1)\dots(x-n)}{(n+1)!} \right] = \\
 &= (-1)^{n+1} \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n)(x-n+1)}{(n+1)!} . \quad \text{Δηλαδή διληθεύει διε} \\
 &\quad \text{ν} = n+1 \text{ καὶ συνεπάρτησε διληθεύει διε } \nu \in \Phi .
 \end{aligned}$$

52) Εάν $\nu \in \Phi$ να δειχθῇ διτι $I+2(I-\chi)+3(I-\chi)(I-2\chi)+\dots+\nu(I-\chi)(I-2\chi)\dots[I-(n-I)\chi]+\frac{I}{\chi}(I-\chi)(I-2\chi)\dots(I-\nu\chi)=\frac{I}{\chi}$ (1)

Λύσομε. Διε $\nu=I$ έχομεν $I+\frac{I}{\chi}(I-\chi)=\frac{I}{\chi}$ το διπολονάλθεύει.
Εστω διτι ή (1) διληθεύει διε $\nu=n$ (κεφ), δηλαδή διτι :

$$\begin{aligned}
 &I+2(I-\chi)+\dots+(I-\chi)(I-2\chi)\dots[I-(n-I)\chi]+\frac{I}{\chi}(I-\chi)(I-2\chi)\dots(I-\nu\chi)= \\
 &= \frac{I}{\chi} \quad (2). \quad \text{Θα δειξωμεν ύπο την προύπρθευτην αύτην διτι διλη-} \\
 &\text{θεύει καὶ διε κάθε } \nu=n+1, \text{ δηλ. διτι :}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &I+2(I-\chi)+\dots+(I-\chi)(I-2\chi)\dots[I-(n-I)\chi]+(n+1)(I-\chi)(I-2\chi)\dots \\
 &\dots(I-\nu\chi)+\frac{I}{\chi}(I-\chi)(I-2\chi)\dots(I-\nu\chi)[I-(n+1)\chi]=\frac{I}{\chi} \quad (3).
 \end{aligned}$$

Θέτομεν $S=I+2(I-\chi)+\dots+(I-\chi)(I-2\chi)\dots[I-(n-I)\chi]$ καὶ
 $S_I=(I-\chi)(I-2\chi)\dots(I-\nu\chi)$ διτι αἱ (2) καὶ (3) γράφονται ἀντιστοί-
 χ ως $S+\frac{I}{\chi}S_I=\frac{I}{\chi}, S+(n+1)S_I+\frac{I}{\chi}S_I[I-(n+1)\chi]=\frac{I}{\chi}$. Αρνεῖ νέδει-
 χ θῇ διτι $S+\frac{I}{\chi}S_I=S+(n+1)S_I+\frac{I}{\chi}S_I[I-(n+1)\chi]$ ή $\frac{I}{\chi}S_I=$
 $= (n+1)S_I+\frac{I}{\chi}S_I-\frac{I}{\chi}S_I(n+1)\chi$. Το διπολον διληθεύει. Αρα ή (1)
 διληθεύει καὶ διε $\nu=n+1$ καὶ θε διληθεύει διε κάθε $\nu \in \Phi$.

53) Εάν $\nu \in \Phi$, να δειχθῇ διτι το διθροισμα τῶν ν δρων τῆς
 σειρᾶς $x+(x-2)x+\frac{(x-4)x}{2!}+\frac{(x-6)x(x-1)(x-2)}{3!}+\dots$

$$\text{είναι } \frac{x(x-1)\dots(x-\nu+1)}{(\nu-1)!}.$$

Λύσομε : Ο τυχῶν ($\rho^{\circ}\circ$) δρος τῆς σειρᾶς είναι :

$$\frac{-(x-2\rho+2)x(x-1)(x-2)\dots(x-\rho+2)}{(\rho-1)!}$$

"Εστω s_v το σύμβολο των νόρων. Τότε $s_2 = x + (x-2) = x(x-1)$. Ουτών δια ν=2 ή πρότασις είναι διληθής. "Εστω δτι διληθεύει δια ν=κ (νεφ). Τότε $x + (x-2)x + \frac{(x-4)(x-3)}{2} + \dots$ ένα η θρων = $= \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{(n-1)!}$. Θα δεξερωμεν όπως την προϋπόθεσιν αύτην δτι διληθεύει μαζί δια ν = κ+1, δηλαδή δτι :

$$s_{v+1} = s_v + \left[\frac{x-2(n+1)+2}{n!} \right] x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1) = \\ = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{(n-1)!} + \frac{(x-2n)x(x-1)}{n!} \frac{(x-2)\dots(x-n+1)}{n!} = \\ = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} [n \cancel{x-2n}] = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)(x-n)}{n!}$$

δηλ. ή πρότασις διληθεύει μαζί δια ν = κ+1 μαζί συνεπώς θα διληθεύει δια ν = κ+1 ν ∈ Φ.

54) Διει πάντα νεφ ≥ 2 να δειχθή δτι $5^{2^{\nu-2}} - 1 = \text{πολ} 2^\nu$ (I).

Λορδούς. Δια ν=2 έχουμεν $5^2 - 1 = 5-1 = 4 = \text{πολ} 2^2$, δηλ. άληθεύει. "Εστω δτι ή (1) άληθευει διά ν = κ (κεφ ≥ 2) δηλ. δτι $5^{2^{\nu-2}} - 1 = \text{πολ} 2^\nu$ Θα δεξερωμεν όπως την προϋπόθεσιν αύτην δτι άληθεύει μαζί διά ν = κ+1, δηλ. λαδή δτι: $5^{2^{\nu-1}} - 1 = \text{πολ} 2^{\nu+1}$ (3). Η (2) γράφεται $5^{2^{\nu-2}} = \text{πολ} 2^{\nu+1}$, μαζί ίψωνωντες άμφοτέρα τα μέλη είς το τετράγωνον, έχουμεν :

$$(5^{2^{\nu-2}})^2 = (\text{πολ} 2^\nu + 1)^2 \quad \text{ή} \quad 5^{2^{\nu-2}+2} = \text{πολ} 2^{\nu+2} + 2\text{πολ} 2^\nu + 1 = \\ = \text{πολ} 2^{\nu+1} + 1 \quad \text{ή} \quad 5^{2^{\nu-1}} = \text{πολ} 2^\nu + 1 \quad \text{ή} \quad 5^{2^{\nu-1}} - 1 = \text{πολ} 2^{\nu+1}, \text{ δηλ. ή (I) διληθεύει μαζί δια ν = κ+1 μαζί συνεπώς μαζί δια ν = κ+1 ν ∈ Φ.}$$

55) Βέν νεφ να δειχθή δτι $2.6.10.14\dots(4\nu-6)(4\nu-2)$ * $=$
 $= (\nu+1)(\nu+2)\dots(2\nu-1).2\nu$. (I)

Λορδούς. Δια ν=2 έχουμεν $2.6 = (2+1)(2+2)$, δηλ. άληθεύει. "Εστω δτι ή (1) διληθεύει δια ν=κ (νεφ), δηλαδή δτι $2.6.10\dots(4\nu-6)(4\nu-2) = (\nu+1)(\nu+2)\dots(2\nu-1) 2\nu$. Όπως την προϋπόθεσιν αύτην θα δεξερωμεν δτι διληθεύει μαζί δια ν = κ+1, δηλαδή δτι $2.6.10\dots(4\nu-6)(4\nu-2)(4\nu+2) = (\nu+2)(\nu+3)\dots2\nu(2\nu+1)(\nu+1).2$, το δεύτερον μέλος της (2) γράφεται $(\nu+2)(\nu+3)\dots2\nu(2\nu+1)(\nu+1).2$, ή $(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)\dots2\nu(2\nu+1).2$ ή $(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)\dots2\nu(4\nu+2)$.

Αλλά ή τελευταία λεύθηκε προηγότερι είκ της δρχικής ότιδε πολύσημο ο
τών μελῶν της έπει (4n+2). Δηλ. ή πρότασις άληθεύει κατ' αιδέν ν =
 $= n+I$ καθ συνεπῶς θετικής διαδ καθε ν ε φ.

56) Διαδ νεφ, νά δειχθῇ οτι το πολυώνυμον $\Pi_v(x) =$
 $= x^{6v-2} + x^{3v-1} + I$ διαιρεῖται δια $x^2 + x + I$.

Λ δ σ i c. Διαδ ν = I έχομεν $\Pi_I(x) = x^4 + x^2 + I = (x^2 + x + I)(x^2 - x + I)$
ήτοι ή πρότασις άληθεύει. Εστω οτι το $\Pi_n(x) = x^{6n-2} + x^{3n-1} + I$, δι-
αιρεῖται δια $x^2 + x + I$ (κεφ). Θα δεξειώμεν οτι διαιρεῖται έπεισης
κατ το $\Pi_{n+I}(x) = x^{6n+4} + x^{3n+2} + I$ διαδ τοῦ $x^2 + x + I$. Αρκεῖ προ-
φανῶς νά δεξειώμεν οτι αύτη συμβαίνει διαδ το $\Pi_{n+I}(x) - \Pi_n(x) =$
 $= x^{6n-2}(x^2 - I) + x^{3n-1}(x^3 - I) = x^{3n-1}(x^3 - I)[x^{3n-1}(x^3 + I) - I] =$
 $= (x^3 - I) \varphi(x) = (x^2 + x + I)(x - I) \varphi(x)$, πράγμα πού άποδεικνύει
το ζητούμενον. Άληθεύει λοιπόν ή πρότασις διαδ καθε φυσικόν ά-
ριθμόν.

57) Βέδν ν ε φ νά δειχθῇ οτι το $\varphi(x) = (x + I)^{6v-1} - x^{6v-1} - I$
διαιρεῖται δια $x^2 + x + I$.

Λ δ σ i c : Διαδ ν = I το $\varphi(x)$ γίνεται $(x + I)^5 - x^5 - I$ το δποι-
ον διαιρεῖται δια $x^2 + x + I$.

Εστω οτι ή πρότασις άληθεύει διαδ ν = n, δηλ. οτι, το $\varphi_n(x) =$
 $= (x + I)^{6n-1} - x^{6n-1} - I$ διαιρεῖται δια $x^2 + x + I$. Θα δεξειώμεν οτι δ
τήν προϋπόθεσιν αύτήν άληθεύει καθ διαδ ν = n+I, δηλαδή οτι κατ
το $\varphi_{n+I}(x) = (x + I)^{6n+5} - x^{6n+5} - I$ διαιρεῖται δια $x^2 + x + I$. Το $\varphi_{n+I}(x)$
γράφεται: $\varphi_{n+I}(x) = (x + I)^{6n-1} [(x - I)^2]^3 - x^{6n+5} - I$, το δε $x^2 + x + I$
γράφεται $(x + I)^2 - x$. Θέτομεν εις το $\varphi_{n+I}(x)$ διατού τοῦ $(x + I)^2$ το
x καθ λαμβάνομεν το πολυώνυμον $(x + I)^{6n-1} \cdot x^3 - x^{6n+5} - I$. Ή δι-
αίρεσις $\varphi(x) = x^2 - x + I$ δίσειτο αύτη διαδούλωιπον με τήν διαίρεσιν ν
 $(x + I)^{6n-1} \cdot x^3 - x^{6n+5} - I = x^2 - x + I$. Αρκεῖ λοιπόν νά δεξειώμεν οτι

το δύπλοι πομ της διαιρέσεως αύτης, είναι μηδέν.

Θεωρήσωμεν την διαιρέσιν $(x-I) \left[(x+I)^{6n-I} / x^3 - x^{6n+5-I} \right]$:
 $\therefore (x-I)(x^2+x+I)$ δηλ. την $(x-I) \left[(x+I)^{6n-I} / x^3 - x^{6n+5-I} (x^3)^2 - I \right]$: ξ³.
 Θετούμεν εις την διαιρεταίνων της άντε x^3 το I κατ λαμβάνομεν τη
 ύπολοιπον $(x-I) \left[(x+I)^{6n+I} / x^{6n-I} - I \right] = (x-I) \varphi_n(x)$. Η διαιρέ-
 σις έμιας $(x-I)\varphi_n(x) + x^3 - I$ ληφθειν έξι ύποθέσεως ύπολοιπον μηδέν,
 ήρα κατή $x_{n+1}^1(x^2+x+I)$ ληφθειν έπισης ύπολοιπον μηδέν. "Αρα ή
 πρότασις άληθευειν διειπάθειν νεφ.

58) Έδν νεά κατ νεφ νδ δειχθῆ δτι δ άριθμδς $\alpha^{n+1} - \alpha(n+1) + v$
 είναι διαιρετός διειδ θυμώς τοῦ α-Ι της δποιας παθορέσατε την
 μέγιστον έκθετην.

Λόσις. Διειδ $v=I$ έχομεν $\alpha^2 - 2\alpha + I = (\alpha - I)^2$ δηλ. άληθευει.
 Ήστω δτι ή πρότασις άληθευει διειδ $v=n$ (νεψ). δηλαδή δτι $\alpha^{n+1} - \alpha(n+I) + n =$ πολ($\alpha - I$)^X (Ι). Θδ δε έχωμεν ύπση την προύπθεισι ν
 αύτην δτι ή πρότασις άληθευει κατ διειδ $v=n+I$, δηλαδή δτι :
 $\alpha^{n+2} - \alpha(n+2) + (n+I) =$ πολ($\alpha - I$)^X (2). Η (2) γράφεται :
 $\alpha^{n+2} - \alpha(n+I) + n - \alpha + I$ κατ ένεκα της (Ι) $\alpha^{n+2} +$ πολ($\alpha - I$)^X - $\alpha^{n+1} - \alpha + I =$
 $= \alpha^{n+1}(\alpha - I) - (\alpha - I) +$ πολ($\alpha - I$)^X $= (\alpha - I)(\alpha^{n+1} - I) +$ πολ($\alpha - I$)^X =
 $= (\alpha - I)(\alpha - I)(\alpha^n + \alpha^{n-1} + \dots + I) +$ πολ($\alpha - I$)^X $= (\alpha - I)^2 \cdot$ θετικόν + πολ($\alpha - I$)^X =
 $= (\alpha - I)^X [p + (\alpha - I)^{2-X} \cdot$ θετικόν]. Ινα δ $(\alpha - I)^{2-X}$ είναι θετικός,
 πρέπει $2-x > 0$ ή $-x > -2$ κατ $x \leq 2$. "Αρα $x_{max} = 2$.

59) Έδν νεψ νδ δειχθῆ δτι ή πρότασις :

$$(x^2 + 2x - 2)^{2v+I} + 5^{2v+I} (x-2)^{v+2} \text{ είναι πολ/σιον της } x^2 - 3x + 3.$$

Λόσις. Διειδ $v=0$ ή δοθεῖσα πρότασις γίνεται :

$$x^2 + 2x - 5 + 5(x-2)^2 = 6(x^2 - 3x + 3) =$$
 πολ. $(x^2 - 3x + 3)$, δηλαδή άληθευει.

$$\begin{aligned} \text{Διειδ } v=I &\text{ ή δοθεῖσα παρδστασις γίνεται } (x^2 + 2x - 2)^3 + 5^3 (x-2)^3 \\ &= [(x^2 + 2x - 2) + 5(x-2)] \cdot [(x^2 + 2x - 2)^2 - 5(x^2 + 2x - 2)(x-2) + 25(x-2)^2] \\ &= (x^2 + 7x - 12)(x^2 + 2x + 28)(x^2 - 3x + 3) \text{ δηλαδή πδλιν άληθευει.} \end{aligned}$$

* Εστω δτι ή προτασις δληθεσει δια νεκ (νεφ), δηλαδή δτι :

$$(x^2+2x-2)^{2n+1} + 5^{2n+1}(x-2)^{n+2} = (x^2-3x+3)\Pi(x) \quad (I).$$

Ενθα $\Pi(x)$ διεργατον ως προς x πολυωνυμον του x βαθμου 4n. Θα δεξεωμεν όποιαν προσθεσειν αυτην δτι δληθεσει κατ δια $v = n+1$. Εχομεν:

$$(x^2+2x-2)^{2(n+1)+1} + 5^{2(n+1)+1}(x-2)^{(n+1)+2} = (x^2+2x-2)^2(x^2+2x-2)^{2n+1} + 25 \cdot 5^{2n+1}(x-2)(x-2)^{n+2} \quad (2).$$

Εν της (I) εχομεν : $(x^2+2x-2)^{2n+1} = \Pi(x)(x^2-3x+3) - 5^{2n+1}(x-2)^{n+2}$ κατ αντικαθιστωντες εις την (2), εχουμεν:

$$(x^2+2x-2)^{2(n+1)+1} + 5^{2(n+1)+1}(x-2)^{(n+1)+2} = (x^2+2x-2)^2 [\Pi(x)(x^2-3x+3) - 5^{2n+1}(x-2)^{n+2}] + 25 \cdot 5^{2n+1}(x-2)(x-2)^{n+2} = (x^2+2x-2)(x^2-3x+3)\Pi(x) - 5^{2n+1}(x-2)^{n+2} [(x^2+2x-2)^2 - 25(x-2)] = (x^2+2x-2)^2(x^2-3x+3)\Pi(x) - 5^{2n+1}(x-2)^{n+2}(x^4+4x^3-33x+54) = (x^2+2x-2)^2(x^2-3x+3)\Pi(x) - 5^{2n+1}(x-2)^{n+2}(x^2+7x+18)(x^2-3x+3) = [(x^2+2x-2)^2\Pi(x) - 5^{2n+1}(x-2)^{n+2}(x^2+7x+18)] (x^2-3x+3).$$

* Αρα ή προτασις δληθεσει κατ δια $v = n+1$ κατ συνεπως θα δληθεση κατ δια πάντα $v \in \Psi$.

60) Έαν νεφ νδ δειχθη δτι :

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{v} \right)^2 \leq v \left(2 - \frac{1}{v} \right).$$

Λοσις : Κατα την άντιστητα του SCHWARZ εχομεν :

$$(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \dots + \alpha_v\beta_v)^2 \leq (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_v^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_v^2) \quad (I)$$

Εις ταυτην ιστομεν $\alpha_1=1$, $\alpha_2=\frac{1}{2}$, $\alpha_3=\frac{1}{3}$, ..., $\alpha_v=\frac{1}{v}$ κατ $\beta_1=\beta_2=\dots=\beta_v=1$. Επειδη ή (I) δληθεσει ως Ιστης δταν είναι $-\frac{1}{\beta_1}-\frac{1}{\beta_2}-\dots-\frac{1}{\beta_v}=0$.

$\frac{\alpha_2}{\beta_2} = \dots = \frac{\alpha_v}{\beta_v}$, δταν είναι $v \geq 2$ οι δληθεση ως άντιστητης κατ θα εχωμεν :

$$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{v})^2 \leq (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2}).v. \quad (2).$$

Η (2) λοιπόν διληθεύει ότι σύστης όταν είναι $v = 1$. Εάν δεξερών μεν ότι είναι $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2} \leq 2 - \frac{1}{v}$ (3). Η (3) δι-

ληθεύει ότι σύστης διέ ν = 1 καὶ ότι σύστης διέ ν = 2. Εστω ότι διληθεύει διέ ν = n. Ήδη ξέχωμεν $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq 2 - \frac{1}{n}$

καὶ αὐτὸν εἰς διμορφότερα τὰ μέλη της προσθέσσαμεν τοῦ $\frac{1}{(n+1)}$ εύρε-

$$\text{σημειώνει} \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)} \quad (4).$$

$$\text{Έπειδή δεί είναι } 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)} = 2 - \frac{n^2+n+1}{n(n+1)} = 2 - \frac{n^2+n+1}{(n+1)(n^2+n)} =$$

$$= 2 - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2+n} < 2 - \frac{1}{n+1} \quad \text{διότι} \quad \frac{n^2+n+1}{n^2+n} > 1 \quad \text{ή (4) γίνεται}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{(n+1)} < 2 - \frac{1}{n+1}. \quad \text{Άρα ή (3) διληθεύει καὶ διέ ν = 1.}$$

Τὴν μεθόδον τῆς τελείας ἐπιπλωγῆς διέ κάθε $v \in \Phi$ ή δε (2) γί-

$$\text{νεται} \quad (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{v})^2 \leq v(2 - \frac{1}{v}), \quad \text{καὶ διληθεύει ότι σύστης}$$

$$\text{διέ ν = 1.}$$

61) Εάν $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_v > 0$ καὶ $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_v > 0$ δειχθῆ διέ $\frac{1}{v} \sum_{k=1}^v \alpha_k \cdot \frac{1}{v} \sum_{k=1}^v \beta_k \leq \frac{1}{v} \sum_{k=1}^v \alpha_k \beta_k$ (I) (σύστης TSCHEBYCHEF).

Λ Β Ο Σ Ι Τ Σ : Η (I) διέ ν = 2 προφανῶς διληθεύει. Εστω διέ αὐτη διληθεύει διέ ν = ν = 1, δηλαδή διέ :

$$\frac{1}{v-1} \sum_{k=1}^{v-1} \alpha_k \cdot \frac{1}{v-1} \sum_{k=1}^{v-1} \beta_k \leq \frac{1}{v-1} \sum_{k=1}^{v-1} \alpha_k \beta_k \quad \text{ή διέ}$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{v-1})(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{v-1}) \leq (v-1)(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_{v-1} \beta_{v-1})$$

Εφ δεξεωμεν ὑπό τὴν προϋπόθεσιν αὐτὴν διέ διληθεύει καὶ διέ ν = v,

$$\text{δηλ. } \sum_{v=1}^n (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v)(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_v) \leq v(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_v \beta_v) \quad (3).$$

$$\text{'Αλλά διότι } \alpha_v \beta_n + \alpha_n \beta_v \leq \alpha_n \beta_n + \alpha_v \beta_v \quad \text{καθ. συνεπώς } \sum_{n=1}^v (\alpha_v \beta_n + \alpha_n \beta_v) \leq \sum_{n=1}^v (\alpha_n \beta_n + \alpha_v \beta_v) \quad \text{ή διότι είναι λεσχύναμος μέση την}$$

$$\alpha_v(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{v-1}) + \beta_v(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{v-1}) \leq (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_{v-1} \beta_{v-1}) \quad (4).$$

Προσθέτοντες κατά μέλη τις (2) καθ (4) εύρουσιμον την (3) δηλ.

ή (I) άληθεύει καθ διέ ν = v καθ συνεπώς διέ ιδίας ν ∈ Φ.

$$62) \text{ 'Εάν ο } U_v \text{ παριστά τις } v^{\text{ον}} \text{ δρον του άθροισματος}$$

$$I + \frac{z^2}{I(I+2.z^2)} + \frac{z^2}{I(I+2.z^2)(I+2.z^2)} + \dots \text{ νδειχθή } \text{ διέ τις}$$

$$\text{άθροισμα των } v \text{ πρώτων δρων αύτου είναι } -\frac{3v^2-U_v}{2v^2}.$$

$$\text{Άνωτις: } 0^{\text{ος}} \text{ δρος του άθροισματος } U_v = \frac{z^2}{I(I+2.z^2)(I+2.z^2)\dots(I+2.v^2)}$$

Δεγομεν διέ τις τις άθροισμα των v πρώτων δρων είναι :

$$\frac{z}{2} \left[\frac{I \cdot (I+2.z^2)}{I(I+2.z^2)} + \frac{(I+2.z^2)}{I(I+2.z^2)(I+2.z^2)} + \dots + \frac{(I+2.v^2)}{I(I+2.z^2)\dots(I+2.v^2)} - I \right] \quad (I)$$

Έστω διέ ή (I) είναι τις άθροισμα των v πρώτων δρων του δοθέντος άθροισματος. Διέ νδειχθή είναι δε δ τύπος ούτος γενικός πρέπει νδειχθή διέ τις άθροισμα των v + I πρώτων δρων του είναι :

$$\frac{z}{2} \left[\frac{I \cdot (I+2.z^2)}{I(I+2.z^2)} + \dots + \frac{(I+2.v^2)}{I(I+2.z^2)} \left[\frac{I+2(v+I)^2}{(I+2(v+I))^2} - I \right] \right] \quad .$$

Πρός τούτο είς τούς v πρώτους δρους του άθροισματος αύτούνατε είς την (I) προσθέτομεν τις δρον

$$\frac{z}{v+I} = \frac{(v+I)^2}{I(I+2.z^2)(I+2.z^2)\dots(I+2.v^2)[(I+2(v+I))^2]}, \text{ τότε θά έχω -}$$

$$\text{μεν : } I + \frac{z^2}{I(I+2.z^2)} + \dots + \frac{(v+I)^2}{I(I+2.z^2)\dots(I+2.v^2)[(I+2(v+I))^2]} =$$

$$= \frac{z}{2} \left[\frac{I \cdot (I+2.z^2)}{I(I+2.z^2)} + \dots + \frac{(I+2.v^2)}{I(I+2.z^2)\dots(I+2.v^2)} \left[\frac{I+2(v+I)^2}{(I+2(v+I))^2} + \frac{2(v+I)^2}{(I+2(v+I))^2} \right] \right]$$

$$\begin{aligned} & \frac{I}{-2(I+2\cdot 2^2)(I+2\cdot 3^2)\dots(I+2v^2)} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{2\cdot I(I+2\cdot 2^2)}{I(I+2\cdot 2^2)(I+2v^2)}} \cdot \frac{\frac{2(v+I)^2 - [(I+2(v+I))^2]}{(I+2(v+I))^2}}{\frac{I+2(v+I)}{(I+2(v+I))^2}} \\ &= \frac{I}{2} \left[\frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{I+2\cdot 2^2}{I(I+2\cdot 2^2)} \dots \frac{I+2\cdot v^2}{I(I+2\cdot v^2)} \cdot \frac{I+2(v+I)^2 - I}{(I+2(v+I))^2}}{(v+I)^2} \right] = \frac{I}{2} \left[\frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{(v+I)^2 - 4v+I}{(v+I)^2}}{(v+I)^2} \right] \end{aligned}$$

Γιτοι ή (I) διληθεύει καν διδ $v + I$ καν συνεπῶς διδ πάθε $v \in \Phi$.

63) Διδεται η άκολουθα (U_I, U_2, \dots, U_v) , καν $v \in \Phi$.

$$\text{Έσω } U_{v+I} = 2U_v + 1 \text{ να δειχθή δτι } U_v = 2^{v-I} (U_I + I) - I.$$

Λ όσις. Διδ $v = I$ έχομεν $U_I = 2^{I-I}(U_I + I) - I = U_I$ δηλαδή διληθεύει. Εστω δτι ή πρότασις διληθεύει διδ $v = n$ ($n \in \Phi$), δηλ. δτι $U_n = 2^{n-I}(U_I + I) - I$ (I). Θα δεξεωμεν ύπση την προϋπόθεση σιν αύτην δτι ή πρότασις διληθεύει διδ $v = n+I$, δηλαδή δτι $U_{n+I} = 2^n(U_I + I) - I$ (2). Αλλ' εξ ύποθέσεως $U_{n+I} = 2U_n + I$ καν ένεκα της (I) έχομεν $U_{n+I} = 2[2^{n-I}(U_I + I) - 1] + 1 = 2 \cdot 2^{n-I}(U_I + I) - 2 + I = 2^n(U_I + I) - I$, δηλαδή ή πρότασις διληθεύει καν διδ $v = n+I$ καν συνεπῶς κατά την άρχιτης τελείας έπαγωγῆς θα διληθεύη καν διδ πάθε $v \in \Phi$.

$$64) \text{ Έσω } \alpha_2 \alpha_1 = \alpha_3 - \alpha_2 = \dots = \alpha_v - \alpha_{v-I} \text{ καν } \alpha_I = U_I, \alpha_2 = U_2 \text{ καν } U_v > 2U_{v-I} - U_{v-2} \text{ (I) καν } v \in \Phi \geq 3, \text{ να δειχθή δτι } U_v > \alpha_v \quad (2)$$

Λ όσις. Διδ $v=3$ έκ της (I) έχομεν $U_3 > 2U_2 - U_I = 2\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_3$ δηλ. ή (2) διληθεύει. Εστω δτι ή (2) διληθεύει διδ $v = n-I$ ($n \in \Phi$) δηλ. δτι $U_{n-I} > \alpha_{n-I}$ (3) καν θα δεξεωμεν δτι ύπση προϋπόθεσιν δτι διληθεύει διδ $v = n$ δηλ. δτι $U_n > \alpha_n$ (4)

Εκ της (I) διδ $v = 3, 4, \dots, n$ έχομεν $U_3 > 2U_2 - U_I, U_4 > 2U_3 - U_2, \dots, U_{n-I} > 2U_{n-2} - U_{n-3}, U_n > 2U_{n-I} - U_{n-2}$ καν διδ προσθέσεως κατ

μελη λαμβάνομεν $U_n > U_{n-1} - U_1 + U_2$ ή λόγω της (3) έχουμε :

$U_n + U_1 - U_2 > U_{n-1}$ ή $U_n > a_{n-1} + (a_2 - a_1)$ ή $U_n > a_n$. Άρα ή (2) διηθεστεί να διέ $n = n+1$ να συνεπώς θα διηθεύτηκε να διέ κάθε $n \in \Phi$.

$$65) \text{ Έδν } n \in \Phi \text{ να } 4 = \frac{3}{U_1} - \frac{3}{U_2} = U_1 + \frac{3}{U_2} \dots = U_{n-1} + \frac{3}{U_n} = a_n + \frac{3}{U_{n+1}} \quad (1)$$

να δειχθῇ δτι : $U_n = \frac{\frac{3}{U_{n+1}} - \frac{3}{U_1}}{3} \quad (2)$.

Λόγος εις. Διέ $n=I$ έχουμε $4 = \frac{3}{U_I} - \frac{3}{U_2}$ ή $U_I = \frac{3}{4}$. Αντικαθιστώντες είς την (2) εύρουσκομεν $U_I = \frac{\frac{3}{U_2} - \frac{3}{U_I}}{3} = \frac{3}{4}$, δηλ. διηθεστεί.

*Βοτα δτι ή (1) διηθεστεί διέ $n \neq I$ δηλ. δτι $4 = \frac{3}{U_1} - \frac{3}{U_2} = U_I + \frac{3}{U_{n+1}} - \frac{3}{U_{n+2}} = U_n + \frac{3}{U_{n+1}}$ (3). Θα δειξωμεν δτι δύποτε τέλος

προϋποθέσεις αύτα ή (1) διηθεστεί να διέ $n = n+1$, δηλαδή δτι $U_{n+1} = \frac{3^{n+2} - 3}{3^{n+2} - I}$ (4). Επειδή (3) έπειτα δτι $4 = U_n + \frac{3}{U_{n+1}}$ ή

$$U_{n+1} = \frac{3}{4 - \frac{3}{U_n}} \text{ ή ξενα της (2)} \quad U_{n+1} = \frac{3}{\frac{4(3^{n+1} - 3)}{3^{n+2} - I}} = \frac{3}{4(3^{n+1} - 3)} \cdot \frac{3^{n+2} - 3}{3^{n+2} - I} = \frac{3(3^{n+1} - 1)}{4(3^{n+1} - 3)} = \frac{3^{n+2} - 3}{3 \cdot 3^{n+1} - I} = \frac{3^{n+2} - 3}{3^{n+2} - I}, \text{ δηλ. διηθεστεί να } n+1 \text{ διέ } n = n+1 \text{ να συνεπώς διέ κάθε } n \in \Phi.$$

66) Διείσταται ή άνοιλουθα U_1, U_2, \dots, U_n διέ την δύο πολαν $U_1 = U_2 = I$ να $U_{n+1} = U_n + U_{n-1}$ ($n \in \Phi$). Ήδη δειχθῇ δτι $U_1 + U_2 + \dots + U_n = U_{n+2} - I$.

Λόγος εις. Διέ $n=2$ έχουμε $U_1 + U_2 = U_4 - I$ (1). Άλλα $U_4 =$

$= U_3 + U_2$ δτε ή (I) γίνεται $U_1 + U_2 + I = U_4 = U_3 + U_2$ ή $U_1 + I = U_2 + U_1$ καὶ ἐπειδὴ $U_1 = U_2 = I$ ἔπειτα δτι $U_2 = I$, ἀρα ἀληθεύει. Β-στω δτι ἀληθεύει διὰ $v = n$ ($n \in \Phi$) δηλ. $U_1 + U_2 + \dots + U_n = U_{n+2} - I$ (2). Θδ δεῖξωμεν ὑπὸ τῆς προϋπόθεσιν αὐτῆν δτι ἀληθεύει καὶ διὰ $v = n+I$ δηλ. δτι $U_1 + U_2 + \dots + U_n + U_{n+I} = U_{n+3} - I$ (3). Προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (I) τὸ U_{n+I} ἔχομεν $U_1 + U_2 + \dots + U_n + U_{n+I} = U_{n+2} - I + U_{n+I} = U_{n+3} - I$ διὸ δτι $U_{n+2} + U_{n+I} = U_{n+3}$ "Αρα ἀληθεύει διὰ $v = n+I$ καὶ συνεπῶς θδ ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμῆν τοῦ $v \in \Phi$.

67) Δεῖξεται ἡ ἀνολουθία U_1, U_2, \dots, U_v ὅπου $U_1 = U_2 = I$ καὶ $U_v = U_{v-I} + U_{v-2}$ (ἀνολουθία FIBONACCI) καὶ ($v \in \Phi \setminus 3$). Ν δειχθῆ δτι $U_1 U_2 + U_2 U_3 + \dots + U_{2v-1} U_{2v} = U_{2v}^2$ (I) διὰ $v \in \Phi$.

Λύσις. Διὰ $v=1$ ἡ (I) γίνεται $U_1 U_2 = U_2^2$. Ἀλλ' ἐπειδὴ $U_1 = U_2 = I$ θδ εἶναι $I \cdot I = I^2$. "Αρα διὰ $v = I$ ἡ (I) ἀληθεύει." Βστω δτι ἡ (I) ἀληθεύει διὰ $v = n$ ($n \in \Phi \setminus I$), δηλ. δτι εἰ $U_1 U_2 + U_2 U_3 + \dots + U_{2n-1} U_{2n} = U_{2n}^2$ (2). Θδ δεῖξωμεν δτι εἰ αὐτὴ ἀληθεύει διὰ $v = n+I$ ὑπὸ τόδη ἀνώ προϋποθέσεις, δηλ. δτι $U_1 U_2 + U_2 U_3 + \dots + U_{2n-I} U_{2n} + U_{2n} U_{2n+I} + U_{2n+I} U_{2n+2} = U_{2n+2}^2$ (3). Προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (2) τὸν ἀριθμὸν $U_{2n} \cdot U_{2n+I} + U_{2n+I} U_{2n+2}$ δτε ἔχομεν $U_1 U_2 + U_2 U_3 + \dots + U_{2n-1} U_{2n} + U_{2n} U_{2n+I} + U_{2n+I} U_{2n+2} = U_{2n+I} U_{2n+2} = U_{2n+I}^2$. "Αριεῖ λοιπὸν νδ δεῖξωμεν δτι $U_{2n}^2 + U_{2n} U_{2n+I} + U_{2n+I} U_{2n+2} = U_{2n+2}$ ή $U_{2n}^2 + U_{2n} U_{2n+I} = U_{2n+2}^2 - U_{2n+I} U_{2n+2}$ ή δτι $U_{2n} (U_{2n} + U_{2n+I}) = U_{2n+2} (U_{2n+2} - U_{2n+I})$ (4). Ἀλλ' ἐξ δρισμοῦ $U_{2n+2} = U_{2n+I} + U_{2n}$, ἐπομένως $U_{2n+2} - U_{2n+I} = U_{2n}$. "Αρα $U_{2n} (U_{2n} + U_{2n+I}) = U_{2n} U_{2n+2}$ καὶ $U_{2n+2} (U_{2n+2} - U_{2n+I}) = U_{2n+2} U_{2n}$, ἀρα ή (4))

ἀληθεύει καὶ συνεπῶς καὶ ἡ (3). Ἡ ἀποδεικτέα λοιπόν πρότασις
ἀληθεύει καὶ διὰ ν = n+I καὶ συνεπῶς καὶ διὰ κάθε ν ∈ Φ.

68) Δίδεται ἡ ἀκολουθία U_1, U_2, \dots, U_v ὅπου $U_2 = U_1^2 - I$ (1)
καὶ $U_v U_{v+2} = U_{v+I}^2 - I$ (2) καὶ ($v \in \Phi$). Νέο δειχθῆ δτι :

$$U_v + U_{v+2} = U_I U_{v+I} \quad (3)$$

Λεστικός. Διὰ ν = I ἡ (3) γίνεται $U_I + U_3 = U_I U_2$ (4)
ἢ $U_3 = U_I (U_2 - I)$ ἢ $U_I U_3 = U_I^2 (U_2 - I)$ καὶ ἔνεκα τῆς (1)
 $U_I U_3 = (U_2 + I)(U_2 - I) = U_I^2 - I$ (5). Ἀλλ' ἡ (5) ἀληθεύει ἔνεκα τῆς
(2) διὰ ν = I, καὶ ἐπειδή αἱ πρότεινες εἰναι ἀντιστρεπταῖς, ἐν
τῆς (4) μεταβαλνομένων εἴται τῆν (5). "Ἄρα ἀληθεύεται.

"Εστω δτι ἡ (3) ἀληθεύει διὰ ν = n, δηλαδή δτι
 $U_n + U_{n+2} = U_I U_{n+I}$ (6). Θέο δείξωμεν ὑπό τὴν προθέσειν αὐτήν
δτι λογικός εἰναι διὰ ν = n+I, δηλ. δτι $U_{n+I} + U_{n+3} =$
 $= U_I U_{n+2}$ (7). "Επι τῶν (6) καὶ (7), λαμβάνομεν :

$$U_I = \frac{U_n + U_{n+2}}{U_{n+I}} \quad \text{καὶ} \quad U_I = \frac{U_{n+I} - U_{n+3}}{U_{n+2}}$$

δτι λογικός εἰναι δείξωμεν δτι :

$$\frac{U_n + U_{n+2}}{U_{n+I}} = \frac{U_{n+I} + U_{n+3}}{U_{n+2}} \quad \text{ἢ} \quad U_n U_{n+2} + U_{n+2}^2 = U_{n+I}^2 + U_{n+I} U_{n+3} \quad (8)$$

"Αλλ' ἔνεκα τῆς (2) εἰναι $U_n U_{n+2} = U_{n+I}^2 - I$ καὶ $U_{n+I} U_{n+3} =$
 $= U_{n+2}^2 - I$, δτε ἡ (8) γίνεται $U_{n+I}^2 - I + U_{n+2}^2 = U_{n+I}^2 + U_{n+2}^2 - I$,
δηλ. ἀληθεύει καὶ διὰ ν = n+I καὶ συνεπῶς θα ἀληθεύῃ καὶ διὰ
κάθε ν ∈ Φ.

69) Δίδεται ἡ ἀκολουθία $U_1, U_2, \dots, U_v, \dots$ ὅπου $U_1 = U_2 = I$
καὶ $U_v = U_{v-I} + U_{v-2}$ διὰ κάθε $v \in \Phi \setminus \{3\}$. Νέο δειχθῆ δτι :

$$\alpha) \quad U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \dots + (-1)^{v-I} \cdot U_v = I + (-1)^{v-I} U_{v-I} \quad (1)$$

$$\beta) \quad U_{v+I}^3 - 4U_v^3 - U_{v-I}^3 = 3 (-1)^v U_v \quad (2).$$

Λόγοις. α) Διεύθυνται $v=3$ στη (1) διληθεύεται. Εστιαί διεύθυνται διεύθυνται $v=n$, δηλ. διεύθυνται $U_1 - U_2 + \dots + (-1)^{n-1} U_n = 1 + (-1)^{n-1} U_{n-1}$ (α).

Θέλειμεν διεύθυνται υπό την προϋπόθεσην αυτήν διληθεύεται κατά $n=n+I$.

Πράγματα προσθέτοντες είς διμοδέτερα τα μέλη της (α) του

$$(-1)^n U_{n+I} = (-1)^n (U_n + U_{n-I}) \text{ έχομεν}$$

$$U_1 - U_2 + \dots + (-1)^n U_{n+I} = I + (-1)^{n-I} U_{n-I} + (-1)^n U_n + (-1)^n U_{n-I} =$$

$= I + (-1)^n U_n$, δηλ. διληθεύεται κατά διεύθυνται $n = n+I$ κατά έπομενην ως κατά την αρχήν της τελείας, έπαγγελτης διληθεύεται διεύθυνται $n > 3$

$$\beta) \quad \text{Η (2) γράφεται } (U_{v+I}^3 - U_{v-I}^3) - 4U_v^3 = 3 (-1)^v U_v \quad \text{ή}$$

$$(U_{v+I} - U_{v-I})(U_{v+I}^2 + U_{v+I} U_{v-I} + U_{v-I}^2) - 4U_v^3 =$$

$$= 3 (-1)^v U_v, \quad \text{ή έπειδή } U_{v+I} - U_{v-I} = U_v, \quad U_{v+I} = U_v + U_{v-I},$$

$$\begin{aligned} &\text{άπλοποιεύοντες διεύθυνται } U_v \text{ έχομεν } (U_v + U_{v-I})^2 + (U_v + U_{v-I}) U_{v-I} + \\ &- U_{v-I}^2 - 4U_v^2 = 3 (-1)^v \quad \text{ή μετά τας πράξεις } -U_v^2 + U_{v-I}^2 + U_v U_{v-I} \\ &= (-1)^v \quad \text{ή δύοτα διληθεύεται διεύθυνται } v = 2. \end{aligned}$$

Εστιαί διεύθυνται αυτή διληθεύεται κατά διεύθυνται $v = n$, δηλαδή διεύθυνται $U_n^2 + U_{n-I}^2 + U_n U_{n-I} = (-1)^n$ (β). Θέλειμεν υπό την προϋπόθεσην αυτήν διεύθυνται κατά διεύθυνται $v = n+I$, δηλαδή διεύθυνται $-U_{n+I}^2 + U_n^2 + U_n U_{n+I} U_K = (-1)^{n+I}$ (5). Η (5) γράφεται :

$$-U_{n+I}^2 + U_n^2 + U_n U_{n+I} U_K = -(U_n + U_{n-I})^2 + U_n^2 + (U_n + U_{n-I}) U_n. \quad \text{Ενεκά της}$$

$$(\beta) \quad \text{ή } -(-U_n^2 + U_{n-I}^2 + U_n U_{n-I}) = -(-1)^n = (-1)^{n+I}, \quad \text{δηλ. διληθεύεται κατά διεύθυνται } v = n+I \text{ άρα διληθεύεται γενικώς.}$$

70) Δεδεται ή δικολουσα $U_1, U_2, U_3, \dots, U_{3v+2}$ ($v \in \Phi$) διε
την δποσαν είναι $U_1 = U_2 = I$ καλ $U_{v+I} = U_v + U_{v-I}$ ($v \geq 2$). Να
δειχθή δτι :

$$\alpha) U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_v^2 = U_v U_{v+I} \text{ καλ } \beta) U_3 + U_6 + U_9 + \dots \\ \dots + U_{3v} = -\frac{I}{2} (U_{3v+2} - I).$$

Λ δ σ τ ι c. α) Διε $v = I$ ή σχεσις $U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_v^2 =$
 $= U_v U_{v+I}$ δληθεύει διετι γίνεται $U_I^2 = U_I U_2$, έπειδη θμως
 $U_I = U_2 = I$ θα είναι τότε $I = I$, δηλαδή δληθεύει.

"Εστω δτι ή (α) δληθεύει διε $v = n$ ($n \in \Phi$), δηλαδή δτι
 $U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2 = U_n U_{n+I}$ (I). Θα δεξειριεν δτι υπό την προϋ-
πόθεσιν αυτήν δληθεύει καλ διε $v = n+I$ δηλ. δτι $U_1^2 + U_2^2 + \dots$
 $\dots + U_n^2 + U_{n+I}^2 = U_{n+I} U_{n+2}$ (2). Το β' αν μελος της (2) λαγω της
(I) γίνεται $U_n U_{n+I} + U_{n+I}^2 = U_{n+I} U_{n+2} = U_{n+I} (U_n + U_{n+I})$ (3)
(διετι $U_{n+2} = U_{n+I} U_n$) δηλ. ή (2) δληθεύει καλ διε $v = n+I$
καλ έπομενως κατά την άρχην της τελείας έπαγωγής θα δληθεύει διε
καθε $v \in \Phi \geq 2$.

β) Διε $v = I$ δληθεύει. "Εστω λοιπόν δτι δληθεύει κατόιδε
 $v = n+I$ δηλ. δτι είναι $U_3 + U_6 + \dots + U_{3n} = -\frac{I}{2} (U_{3n+2} - I)$ (I).
Θα δεξειριεν υπό την προϋπόθεσιν αυτήν δτι δληθεύει καλ διε $v =$
 $= n+I$ δηλ. δτι $U_3 + U_6 + \dots + U_{3n} + U_{3n+3} = -\frac{I}{2} (U_{3n+5} - I)$ (2)

$$\text{Η (2) λαγω της (I) γίνεται } U_3 + U_6 + \dots + U_{3n} + U_{3n+3} = \\ = -\frac{I}{2} (U_{3n+2} - I) + U_{3n+3} = -\frac{I}{2} (U_{3n+2} + 2U_{3n+3} - I) = \\ = -\frac{I}{2} (U_{3n+2} + U_{3n+3} + U_{3n+3} - I) = -\frac{I}{2} (U_{3n+4} + U_{3n+3} - I) = \frac{I}{2} (U_{3n+5} - I).$$

"Αρα δληθεύει καλ διε $v = n + I$ καλ έπομενως κατά την άρ-
χην της τελείας έπαγωγής θα δληθεύει καλ διε καθε $v \in \Phi$.

7I) Δεδεταί ή άνολουθά $(U_0, U_I, \dots, U_v, \dots)$ διεύ την διπολανείναι $U_0 = 0, U_I = I$ $U_{v+I} + U_{v-I} = \frac{4U_v}{U_v^2 + I}$, $v > I$ (I). Να

$$\text{δειχθή } \text{διεύ } \alpha) (U_v U_{v+I} - I) + (U_v - U_{v+I})^2 = 2 \quad (2).$$

β) δι U_v είναι ρητός. γ) διεύ ή παρέσυστασις $I + 4U_v^2 - U_v^4$ είναι τελειον τετράγωνον ρητοῦ δριθμοῦ.

$$\text{Δεύτερο. } \alpha) \text{ διεύ } v = 0 \text{ ή (2) γίνεται } (U_0 U_{-I} - I)^2 + (U_0 - U_I)^2 = 2 \text{ διεύ } U_0 = 0 \text{ καὶ } U_I = I, \text{ δηλ. } \text{Δληθερεί. } \text{ Εστώ } \text{διεύ } \text{Δληθερεί } \text{ διεύ } v = n \text{ δηλ. } \text{ διεύ } (U_n U_{n+I} - I)^2 + (U_n - U_{n+I})^2 = 2 \quad (3) \text{ Θέ } \text{δεξιώμεν } \text{ διεύ } \text{ ποδι } \text{ προπόθεσταν } \text{ αύτην } \text{ Δληθερεί } \text{ καὶ } \text{ διεύ } v = n+I \text{ Δηλ. } \text{ διεύ } (U_{n+I} U_{n+2} - I)^2 + (U_{n+I} - U_{n+2})^2 = 2 \quad (4). \text{ Το } \text{πρώτων } \text{ μέλος } \text{ της } (4) \text{ γράφεται } U_{n+I}^2 U_{n+2}^2 - 2U_{n+I} U_{n+2} + I + U_{n+I}^2 - 2U_{n+I} U_{n+2} + U_{n+2} = U_{n+2}^2 (U_{n+I}^2 + I) - 4U_{n+I} U_{n+2} + I + U_{n+I}^2 = U_{n+2} \left[U_{n+2} (U_{n+I}^2 + I) - 4U_{n+I} \right] + I + U_{n+I}^2. \text{ Αλλ. } \text{ ξενα } \text{ της } (1)$$

$$\text{Ξχομεν } U_{n+2} + U_n = \frac{4U_{n+I}}{U_{n+I}^2 + I} \text{ ή } U_{n+2} (U_{n+I}^2 + I) = \\ = 4U_{n+I} - U_n (U_{n+I}^2 + I), \text{ διεύ } \text{ προηγουμένη } \text{ γίνεται} \\ - U_n U_{n+2} (U_{n+I}^2 + I) + I + U_{n+I}^2 = -U_n \left[U_{n+2} (U_{n+I}^2 + I) \right] + I + U_{n+I}^2 = \\ = -U_n \left[4U_{n+I} - U_n (U_{n+I}^2 + I) \right] + I + U_{n+I}^2 = -4U_n U_{n+I} + U_n (U_{n+I}^2 + I) + \\ + I + U_{n+I}^2 = (U_n U_{n+I}^2 - 2U_n U_{n+I} + I) + (U_{n+I}^2 + U_n - 2U_n U_{n+I}) = \\ = (U_n U_{n+I} - I)^2 + (U_n - U_{n+I})^2 = 2 \text{ } \text{ ξενα } \text{ της } (3).$$

$$\beta) \text{ διεύ } v = I \text{ } \text{ έκ } \text{ της } (I) \text{ } \text{ Ξχομεν } U_2 = \frac{4U_I}{U_I^2 + I} - U_0 = \frac{\frac{4}{2}}{\frac{4}{2} + I} - 0 = 2$$

δηλ. ρητός. Διεσδέντων $v = 2$ δύμοιως έχομεν $U_3 = \frac{4U_2^2}{U_2^2 + I} - U_1 = \frac{8}{5} - I = \frac{3}{5}$ ρητός. "Αν λαμβιπόν στο U_{n+1} καὶ U_n είναι ρητοί θερετικοί καὶ διεσδέντων $U_{n+1} = \frac{4U_n^2}{U_n^2 + I} - U_{n-1}$, δηλ. δρέ-

ζεταὶ δὲ U_{n+1} διεσδέντων U_{n-1} καὶ U_n τῆς βοηθείας ρητῶν πράξεων.

$$\gamma) \text{ Η (2) γράφεται } U_{v+1}^2 (U_v^2 + I) - 4U_v U_{v+1} (U_v^2 + I) = 2 \text{ ἢ}$$

$$U_{v+1}^2 - U_{v+1} = \frac{4U_v^2}{U_v^2 + I} - \frac{2U_v^2}{U_v^2 + I} \text{ ἢ } U_{v+1}^2 - U_{v+1} = \frac{4U_v^2}{U_v^2 + I} - \frac{2U_v^2}{U_v^2 + I} + \left(\frac{-2U_v^2}{U_v^2 + I} \right) =$$

$$= \frac{1-U_v^2}{I+U_v^2} + \left(\frac{2U_v^2}{U_v^2 + I} \right)^2 \text{ ἢ } \left(U_{v+1} - \frac{2U_v^2}{U_v^2 + I} \right)^2 = \frac{I+4U_v^2-U_v^4}{(U_v^2+I)^2}, \text{ καὶ}$$

$$\text{έπομενως } I + 4U_v^2 - U_v^4 = \left(U_{v+1} - \frac{2U_v^2}{U_v^2+I} \right)^2 \cdot (U_v^2+I)^2, \text{ δηλαδή}$$

τέλειου τετράγωνου ρητοῦ ἀριθμοῦ.

$$72) \text{ Εἴναι } v \in \Psi \text{ καὶ } \Pi_v(x) = \frac{x(x+1)}{1 \cdot 2 \cdots v} \cdots \frac{(x+v-1)}{v},$$

$$\text{νέος ειχθῆ } \text{ δτι } \sum_{v=1}^{\mu} \Pi_v(x) = \Pi_{\mu}(x+I) - I \quad (\text{I}) \quad \text{καὶ}$$

$$0 < \Pi_v \left(\frac{I}{2} \right) = \frac{\frac{I}{2}}{\sqrt{2v+I}} \quad (2)$$

Δεσμοί. Διεσδέντων $v=2$ ἢ (I) γίνεται $\Pi_2(x) = \frac{x(x+1)}{1 \cdot 2}$ καὶ

$$\sum_{v=1}^2 = x + \frac{x(x+1)}{1 \cdot 2} = \frac{x(x+3)}{1 \cdot 2} = \frac{(x+I)(x+2)}{1 \cdot 2} - I = \frac{x(x+3)}{1 \cdot 2}.$$

"Αρα ἢ (I) διληθεῖσει διεσδέντων $v=2$. "Εστω δτι ἢ (I) διληθεῖσει διεσδέντων $v=n$, δηλ. δτι $\sum_{v=1}^n \Pi_v(x) = \Pi_n(x+I) - I$ (3), ξενθα κεφ. Θερετικοί διεσδέντων μόνοι προστιθέσειν αρτήν δτι διληθεῖσει καὶ διεσδέντων $v=n+1$ προσθέτομεν εἰς τὰ μελη τῆς (3) ταῦθα $\frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{1 \cdot 2 \cdots (n+1)}$

$$\text{καὶ } \sum_{v=I}^{n+I} \Pi_v(x) = \frac{(x+I)(x+2)\dots(x+n)}{(x+I)(x+2)\dots(x+n)(n+I)} + \frac{x(x+I)(x+2)\dots(x+n)}{x(x+I)\dots(x+n)} - I = \\ - I = \frac{I \cdot 2 \dots n(n+I)}{(x+I)(x+2)\dots(x+n)(x+n+I)} - \frac{I \cdot 2 \dots (n+I)}{I \cdot 2 \dots n(n+I)} - I = \Pi_{n+I}(x+I) - I, \text{ δηλ. } \#(I)$$

Δληθερειν καὶ διεὶς $\mu = n+I$ καὶ ἐπομένως θεὶς Δληθερόν καὶ διεὶς μέθε $v \in \Phi^+$ β) "Η $\Pi_v(\frac{I}{2}) > 0$ εἰναι προσανήσ." Βασι τινα $\# \Pi_v(\frac{I}{2}) < \frac{I}{\sqrt{2v+1}}$

εἰναι Δληθῆσο. "Αν πολ/σωμεν ταδ μελη της ἐπις $-\frac{2v+I}{2(v+I)}$ " θεὶς ξω -

$$\text{μεν } \frac{\frac{I \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2}}{\frac{I \cdot 2 \dots v}{2 \cdot 2 \dots v}} \cdot \frac{\frac{2v+I}{2}}{\frac{v+I}{2}} = \Pi_{v+I}(\frac{I}{2}) \text{ καὶ}$$

$$\frac{I}{\sqrt{2v+I}} \cdot \frac{2v+I}{2(v+I)} = \frac{\sqrt{2v+I}}{2(v+I)} = \sqrt{\frac{2v+I}{4v^2+8v+4}}. \text{ Άλλα}$$

$$4v^2 + 8v + 3 = (2v+3)(2v+I) < 4v^2 + 8v + 4. \text{ "Αρα}$$

$$\frac{2v+I}{4v^2+8v+4} < \frac{I}{\sqrt{2v+3}}. \text{ "Αρα } \Pi_{v+I}(\frac{I}{2}) < \frac{I}{\sqrt{2v+3}} \text{ δηλ.}$$

Η (2) Δληθερειν καὶ διεὶς $v=v+I$ καὶ ἐπομένως καὶ διεὶς μέθε $v \in \Phi^+$.

$$73) \text{ Με δειχθῆ τινα } \delta v^{\text{ος}} \text{ δρος τῆς άκολουθεας } U_1, U_2 \dots U_v \text{ θπου } U_1 = U_2 = I \text{ καὶ } U_v = U_{v-I} + U_{v-2} \text{ διεὶς μέθε } v \in A \geq 3 \text{ διδεται ἐκ} \\ \text{τῆς σχέσεως } U_v = \frac{I}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{I+\sqrt{5}}{2} \right)^v - \left(\frac{I-\sqrt{5}}{2} \right)^v \right] \quad (I).$$

$$\text{Λ δοι τις. Διεὶς } v = I, 2 \text{ ξωμεν } U_I = I, U_2 = I. \text{ "Βασι} \\ \text{δτιν εἰναι } U_{n+I} = \frac{I}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{I+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+I} + \left(\frac{I-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+I} \right] \quad \# \\ 2^{n+I} \sqrt{5} \cdot U_{n+I} = (I+\sqrt{5})^{n+I} - (I-\sqrt{5})^{n+I} \quad (2) \text{ καὶ } U_n = \frac{I}{\sqrt{5}}. \\ \left[\left(\frac{I+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{I-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \quad \# \quad 2^n \sqrt{5} \cdot U_n = (I+\sqrt{5})^n - (I-\sqrt{5})^n \quad (3)$$

Θα δεξέωμεν όποιας τάξης προϋποθέσεις αβτάς θανατώνται κατ

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \frac{-I}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{I+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{I-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] \sqrt{5} = \\ &= (I + \sqrt{5})^{n+1} - (I - \sqrt{5})^{n+1} \quad (4). \end{aligned}$$

Πολύχροντες τάξης (2) κατ' (3) άντιτοποιώνται στην 2^2 κατ' 2 κατ' προσθέτοντες έχουμεν $2^{n+1} \sqrt{5}(U_{n+1} + U_n) = (6+2\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^{n+1} - (6-2\sqrt{5})(1-\sqrt{5})^{n+1}$ ή τελικά $2^{n+1} \sqrt{5} U_{n+1} = (I + \sqrt{5})^{n+1} - (I - \sqrt{5})^{n+1}$ δηλαδή ή (4).

74) Εάν $x_0 = I$, $x_I = \alpha_I$, $\psi_0 = 0$ κατ' $\psi_I = I$ κατ' $n \in \mathbb{N} \geq 2$ είναι δε $x_v = \alpha_v x_{v-I} + x_{v-2}$, $\psi_v = \alpha_v \psi_{v-I} + \psi_{v-2}$ να δειχθεί θτι:

$$\begin{aligned} \text{αλλά } x_{v+1} \psi_v - x_v \psi_{v+1} &= (-I)^{v+1} (I) \quad \beta) \quad \frac{x_v}{\psi_v} = \alpha_I + \frac{I}{\psi_I \psi_2} + \frac{I}{\psi_2 \psi_3} + \\ &+ \dots + (-I) \frac{I}{\psi_{v-I} \psi_v} \quad (2). \end{aligned}$$

Δεσμός + Διεύθυνση $v = 2$ έχεμεν $x_3 \psi_2 - x_2 \psi_3 = (\alpha_3 x_2 + x_I)$.

$$\begin{aligned} &\circ (x_2 \psi_I + \psi_0) - (\alpha_2 x_I + x_0) \circ (\alpha_3 \psi_2 + \psi_I) = (\alpha_3 x_2 + \alpha_I) \alpha_2 - (\alpha_2 \alpha_I + I) = \\ &\circ (\alpha_3 \psi_2 + I) = [\alpha_3 (\alpha_2 x_I + x_0) + \alpha_I] \alpha_2 - (\alpha_I \alpha_2 + I) \circ [\alpha_3 (\alpha_2 \psi_I + \psi_0) + I] = \\ &= [\alpha_3 (\alpha_2 \alpha_I + I) + \alpha_I] \alpha_2 - (\alpha_I \alpha_2 + I)(\alpha_2 \alpha_3 + I) = \\ &= \alpha_I \alpha_2^2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_I \alpha_2 - \alpha_I \alpha_2^2 \alpha_3 - \alpha_I \alpha_2 - \alpha_2 \alpha_3 - I = (-I)^3 \\ &\text{Έστω θτι ή (I) διληθεύει διεύθυνση } n = k \text{ (} n \in \mathbb{N} \text{)} \text{ δηλ. θτι } x_{n+1} \psi_n - \\ &- x_n \psi_{n+1} = (-I)^{n+1}. \quad \text{Θα δεξέωμεν όποιας τάξης προϋποθέσεις αβτήν θ-} \\ &\text{τι διληθεύει κατ' διεύθυνση } v = n + 1, \text{ δηλ. θτι } x_{n+2} \psi_{n+1} - x_{n+1} \psi_{n+2} = \\ &= (-I)^{n+2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Πράγματι έχουμεν } x_{n+2} \psi_{n+1} - x_{n+1} \psi_{n+2} = (\alpha_{n+2} x_{n+1} - x_n) \cdot \\ &\cdot \psi_{n+1} - x_{n+1} (\alpha_{n+2} \psi_n + \psi_n) = x_n \psi_{n+1} - x_{n+1} \psi_n = -(-I)^{n+1} = \end{aligned}$$

$\equiv (-I)^{n+2}$. "Αρα ή διποδεικτέα δληθεσεις κατ' οντα $v = n + I$, κατ' συνεπώς, θα διληθεσης κατ' οντα κάθε $v \in \Phi \geq 2$.

$$\beta) \text{ Εχομεν } \frac{x_{n+I}}{\psi_{n+I}} - \frac{x_n}{\psi_n} = (-I)^{n+I} \cdot \frac{I}{\psi_n \psi_{n+I}} \text{ κατ'}$$

$$\frac{x_n}{\psi_n} - \frac{x_{n-I}}{\psi_{n-I}} = (-I)^n \frac{I}{\psi_{n+I} \psi_n} \text{. "Αρα :}$$

$$\sum_{n=2}^v \left(\frac{x_n}{\psi_n} - \frac{x_{n-I}}{\psi_{n-I}} \right) = \sum_{n=2}^v (-I)^n \cdot \frac{I}{\psi_{n-I} \psi_n} \text{ . Έτη}$$

$$\frac{x_v}{\psi_v} - \frac{x_I}{\psi_I} = \frac{I}{\psi_I \psi_2} - \frac{I}{\psi_2 \psi_3} + \dots + (-I)^v \frac{I}{\psi_{v-I} \psi_v} \text{ . Έτη}$$

$$\frac{x_v}{\psi_v} = \alpha_I + \frac{I}{\psi_I \psi_2} - \frac{I}{\psi_2 \psi_3} + \dots + (-I)^v \frac{I}{\psi_{v-I} \psi_v} \text{ .}$$

75) Δείξεται έν περιττόν πλήθος πραγματικών δριθμών $\alpha_I, \alpha_2, \dots, \alpha_{2v+I}$ δια τούς διποδους είναι $\alpha_2 = \alpha_I \leq \alpha_3 - \alpha_2 \leq \alpha_4 - \alpha_3 \leq \dots \leq \alpha_{2v+I} - \alpha_{2v}$. Δείξατε έπαγγικώς ότι ($v+I$).

$$(\alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2v}) \leq v (\alpha_I + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2v+I}) \quad (1).$$

Δείξατε έπεισης ότι είς την τελευταίαν σχέσιν το σημείον της λεράθητος ισχει τότε κατ' μόνον, όταν οι διθέντες δριθμοις διποτελούν δριθμητικήν πρόδοσον.

Λ σ ι σ ι σ. Δια το $v=I$ ή δικολουθία διποτελεῖται έν τῶν $\alpha_I, \alpha_2, \alpha_3$, λέγω δε τῆς μποθέσεως θα είναι $\alpha_2 - \alpha_I \leq \alpha_3 - \alpha_2$ ή $2\alpha_2 \leq \alpha_I - \alpha_3$ ή διποδα διληθεσεις. "Εστω ότι ή διποδεικτέα σχέσις ισχει δια το $(n \notin \Phi)$ δηλ. ότι διληθεσης ή $(n+I)(\alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2n}) \leq n(\alpha_I + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2n+I})$ (2). Ωθ διεξωμεν ότι με την προηπόθεσιν αύτην διληθεσης κατ' οντα $v = n+I$ δηλ. ότι

$$(n+2)(\alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2n} + \alpha_{2n+2}) \leq (n+I)(\alpha_I + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2n+3}) \quad (3)$$

*Εφαρμοζόντες την σχέσιν (2) είς $(2n+I)$ δρους τῆς δικολουθίας $\alpha_I, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n+I}, \alpha_{2n+2}, \alpha_{2n+3}$, τούς διποδους έκλεγομεν

έκδοσιται κατά τρόπον ώστε δύο τυχούσαι διμέδες να διαφέρουν πατέδι δύο έρους, καλ ούτω λαμβάνομεν ($n+I$) τὸ πλήθος ἀνισοτητῆς τὰς τῆς μορφῆς

$$(n+I)(\alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2n}) \leq n(\alpha_I + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2n+I}), \dots$$

Τὰς ισοτητας αὐτίς προσθέτομεν κατά μέλη καὶ έχομεν

$$n(n+I)(\alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2n} + \alpha_{2n+2}) \leq n^2(\alpha_I + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2n-1} + \alpha_{2n+3}) + (n+I)\alpha_{2n+1}$$

$$\text{ή } (n+I)(\alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2n} + \alpha_{2n+2}) \leq n(\alpha_I + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2n-1} + \alpha_{2n+3}) + (n+I)\alpha_{2n+1} \quad (3)$$

Άλλ' ένεμεν τῆς ύποθέσεως $\alpha_{\lambda} - \alpha_{\lambda+I} < \alpha_{\lambda+I} - \alpha_{\lambda}$ λαμβάνομεν $n+I$

$$\text{τὸ πλήθος } \Delta \text{ της μορφῆς } 2\alpha_2 \leq \alpha_I + \alpha_3, \quad 2\alpha_4 \leq \alpha_3 + \alpha_5 \dots \quad (4)$$

(φροντίζομεν ώστε ούδεμία τῶν Δινισοτήτων (4) να περιέχῃ τὸν δύον α_{2n+1}) αἰ δύοταν προστεθέμενα τὸ δύον

$$\alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2n} + \alpha_{2n+2} \leq \alpha_I + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2n+1} + \alpha_{2n+3} \quad (5). \text{ Προσθέτον-}$$

$$\text{τες τὰς (3) καὶ (5) λαμβάνομεν } (n+2)(\alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2n+2}) \leq (n+I).$$

$\cdot (\alpha_I + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2n+I} + \alpha_{2n+3})$, ήτοι ή πρότασις διληθεσει καὶ δια

$\nu = n+I$ καὶ συνεπῶς θε διληθεση διεκ πλέον ενεφ, θεν οἱ έρους τῆς Διολουθεῖας ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόδον, θηλαδῆ έν

$$\alpha_2 - \alpha_I = \alpha_3 - \alpha_2 = \dots \alpha_{2n+I} - \alpha_{2n} \text{ τότε αἰ διολουθεῖα } \alpha_1, \alpha_3, \alpha_5 \dots \alpha_{2n+I}$$

καὶ $\alpha_2, \alpha_4, \dots, \alpha_{2n}$ εἶναι ἀριθμητικὰ πρόδοντα. θε έχωμεν ἐπομένως

$$\text{τὰς ισοτητας } \alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2n} = \frac{\alpha_2 + \alpha_{2n}}{2}. \text{ ν καὶ } \alpha_I + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2n+I} + \alpha_{2n+1} = \frac{\alpha_I + \alpha_{2n+1}}{2} \neq$$

$$(n+I) \quad \text{ή τὰς } (\nu+I)(\alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2n}) = \frac{\alpha_2 + \alpha_{2n}}{2} \cdot \nu(n+I) \quad \left. \right\} \quad (a)$$

$$\nu \cdot (\alpha_I + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2n+I}) = \frac{\alpha_I + \alpha_{2n+I}}{2} \nu(n+I) \quad \left. \right\}$$

Επειδὴ δε $\alpha_2 - \alpha_I = \alpha_{2n+I} - \alpha_{2n}$ ή $\alpha_2 + \alpha_{2n} = \alpha_I + \alpha_{2n+I}$ εἰ, δι-
ποθέσεως ἐν τῶν ισοτήτων (a) λαμβάνομεν $(n+I)(\alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2n}) =$
 $= \nu \cdot (\alpha_I + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2n+I})$.

Παρατηροῦμεν δηλαδή ότι εἰς τὴν περιπτωσιν τῆς Δριθμητικῆς προβόσου λοχει ἐκ τῆς σχέσεως (I) μόνον ή Ισοτητῆς, εἰς καθεδὲ ἄλλην περιπτωσιν ή (a) ἀληθεύειν ως ἀνισοτητῆς ὡς φαίνεται ἐκτῶν (4) καὶ (5) .

76) Δίσονται ὡς δικολουθεῖσι $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_v, \dots$, $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_v, \dots$ διετ τῶν $\beta_0=1, \gamma_0 \neq 0, \beta_1 \neq \alpha_1, \gamma_1 \neq 1$, καὶ $\beta_{v+2} \neq \alpha_{v+2} \beta_{v+1} + \beta_v, \gamma_{v+2} \neq \alpha_{v+2} \cdot \gamma_{v+1} + \gamma_v$ διοτο $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v, \dots$ δοθέντες φυσικοί ἀριθμοί. Να δύεται (a) $\beta_{v+1} \gamma_v - \gamma_{v+1} \beta_v = (-1)^{v+1}$ (a) - β) τά μλασματα $\frac{\beta_v}{\gamma_v}$ εἶναι ἀνάγκα; γ) τά μλασματα ἀριζούν δείνουν βαίνουν ἐλαττάμενα ἢ φ' δοσον δ δείνητης βαίνεται αὐξανόμενος, ἐνῷ τα μλασματα περιττού δείκτου βαίνουν αὐξανόμενα καὶ εἶναι μικρότερα τῶν μλασμάτων δρτού δείκτου .

Λ Β Ο Σ Ι Σ . α) Ἡ σχέσης (a) διετ $v=0$: γνεται : $\beta_1 \gamma_0 - \gamma_1 \beta_0 = (-1)^1$ ή $\alpha_1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = (-1)^1$, ήτοι 4 - ληθεύειν. Εστω δτις αὕτη ἀληθεύειν διετ $v=n$ δηλαδή δτις $\beta_{n+1} \cdot \gamma_n - \gamma_{n+1} \cdot \beta_n = (-1)^{n+1}$ (I). Θα δείξεμεν δτις δληθεύειν καὶ διετ $v=n+1$, ήτοι $\beta_{n+2} \cdot \gamma_{n+1} - \gamma_{n+2} \cdot \beta_{n+1} = (-1)^{n+2} = (-1)^n$ (2). Εἰς τὴν (2) ἀντικαθιστῶμεν τα $\beta_{n+2}, \gamma_{n+2}$ ἐκ τῶν δοθεισῶν καὶ λαμβάνομεν $(\alpha_{n+2} \cdot \beta_{n+1} + \beta_n) \gamma_{n+1} - (\alpha_{n+2} \cdot \gamma_{n+1} + \gamma_n) \beta_{n+1} = (-1)^n$ ή $\beta_n \cdot \gamma_{n+1} - \beta_{n+1} \cdot \gamma_n = (-1)^n$ ή $\beta_{n+1} \gamma_n - \beta_n \gamma_{n+1} = (-1) \cdot (-1)^n = (-1)^{n+1}$, το δροτον δληθεύει ἔνεκα τῆς (I). β) Θα δείξειμεν δτις τα μλασμα $\frac{\beta_v}{\gamma_v}$ εἶναι ἀνδρώγονον. Πρόγματι διν οἱ β_v καὶ γ_v εἶχον κοινὸν τινα διαιρέτην, δ διαιρέτης αὐτὸς θε διείρῃ τα πρῶτον μέλος τῆς (a) ἐπομένως καὶ τα δεύτερον δηλ. τὴν μονάδα. Άρα δ β_v καὶ γ_v εἶναι πρῶτοι πρᾶς δληστούς καὶ τα μλασμα εἶναι διαγώνοι.

γ) Θεωροῦμεν τρία μλασματα $\frac{\beta_v}{\gamma_v}, \frac{\beta_{v+1}}{\gamma_{v+1}}, \frac{\beta_{v+2}}{\gamma_{v+2}}$. Βλημεν :

$$\frac{\beta_v + I}{\gamma_{v+I}} - \frac{\beta_v}{\gamma_v} = \frac{\beta_v + I \gamma_v - \beta_v \gamma_v + I}{\gamma_v \cdot \gamma_v + I} = \frac{(-I)^{v+I}}{\gamma_v \cdot \gamma_v + I} \quad (3)$$

*Αν λοιπόν δ ν είναι περιττός τότε $\frac{\beta_{v+I}}{\gamma_{v+I}} > \frac{\beta_v}{\gamma_v}$ καὶ ἐν δ ν είναι άρτιος $\frac{\beta_{v+I}}{\gamma_{v+I}} < \frac{\beta_v}{\gamma_v}$. *Άρα ἐν δύο διαδοχικῶν οὐλα- σμάτων, τὸ ιλλσμα ἀρτίου δεκτού είναι τὸ μεγαλύτερον.

$$\text{Θεωροῦμεν τῷρα τῇν διαφοράν } \frac{\beta_{v+2}}{\gamma_{v+2}} - \frac{\beta_v}{\gamma_v} = \frac{\beta_{v+2}\gamma_v - \beta_v\gamma_{v+2}}{\gamma_v\gamma_{v+2}} =$$

$$= \frac{\alpha_{v+2}(-I)^{v+I}}{\gamma_v\gamma_{v+2}} \text{ ἔνεια τῶν διθεισῶν καὶ τῆς (a). } \text{ *Ἄν ν } v \text{ άρτι-}$$

ος, τότε $\frac{\beta_{v+2}}{\gamma_{v+2}} < \frac{\beta_v}{\gamma_v}$, ἐπομένως τὸ ιλλσμα ἀρτίου δεκτού βανουν ἔλαττονμενα. *Άν ν περιττός τότε $\frac{\beta_{v+2}}{\gamma_{v+2}} > \frac{\beta_v}{\gamma_v}$ καὶ ἐ- πομένως τὸ ιλλσμα περιττοῦ δεκτού βανουν αὐξανόμενα μετὰ τοῦ δεκτοῦ ν.

$$\text{Λέγομεν τῷρα δτε είναι } A_v, v_p \in \Phi \quad \frac{\beta_{2v}}{\gamma_{2v}} > \frac{\beta_{2p+I}}{\gamma_{2p+I}}.$$

Γνωρίζομεν ήδη δτε είναι τοῦτο ἀληθές διδ $p = v$ ή $p = v - I$ Διδ $p > v$ τότε $\frac{\beta_{2v}}{\gamma_{2v}} > \frac{\beta_{2p}}{\gamma_{2p}} > \frac{\beta_{2p+I}}{\gamma_{2p+I}}$.

*Εάν $p < v - I$, τότε $\frac{\beta_{2p+I}}{\gamma_{2p+I}} < \frac{\beta_{2(p-I)+I}}{\gamma_{2(p-I)+I}} = \frac{\beta_{2v-I}}{\gamma_{2v-I}} < \frac{\beta_{2v}}{\gamma_{2v}}$ ο.ε.δ.

77) Νο δειχθῇ δτε διδ ιδθε ν $v \in \Phi$ 3 ἀληθεσει ή Ισθης

$$\begin{aligned} \alpha_I^3 + \alpha_2^3 + \dots + \alpha_v^3 &= 3\alpha_I \alpha_2 \alpha_3 + \dots + 3\alpha_I \alpha_2 \alpha_v + \dots + 3\alpha_{v-2} \alpha_{v-1} \alpha_v = \\ &= (\alpha_I + \alpha_2 + \dots + \alpha_v)(\alpha_I^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_v^2 - \alpha_I \alpha_2 \alpha_3 - \dots - \alpha_I \alpha_v - \alpha_2 \alpha_3 - \dots \\ &\quad - \alpha_{v-1} \alpha_v) \quad (I), \quad \text{ὅπου οἱ } \alpha_I, \alpha_2, \dots, \alpha_v \text{ πραγματικοὶ οἱ} \end{aligned}$$

φανταστικοί.

Λ θοւς. Διεύ ν = 3 ή (I) γίνεται $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 - 3\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_3)$ ή δημοσα ως γνωστόν
ἀληθεύει.

"Εστω δὲ ή (I) ἀληθεύει διεύ ν = n (n ∈ Φ > 3), δηλ. δτι :
 $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \dots + \alpha_n^3 - 3\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \dots - 3\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n =$
 $= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 - \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha_3 - \dots - \alpha_1\alpha_n - \alpha_2\alpha_3 - \dots - \alpha_{n-1}\alpha_n)$ (2). Θέτε δεξαμεν υπό την προύποδεσιν αὐτήν δτι ή(I)
ἀληθεύει καὶ διεύ ν = n+1, δηλ. δτι εἰναι :

$$\begin{aligned} &\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \dots + \alpha_n^3 + \alpha_{n+1}^3 - 3\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \dots - 3\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n - 3\alpha_1\alpha_2\alpha_{n+1} - \dots - 3\alpha_{n-1}\alpha_n \\ &\cdot \alpha_n\alpha_{n+1} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \alpha_{n+1})(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 + \alpha_{n+1}^2 - \alpha_1\alpha_2 - \dots - \alpha_{n-1}\alpha_n - \alpha_1\alpha_{n+1} - \dots - \alpha_n\alpha_{n+1}) \end{aligned} \quad (3).$$

Ἐδώ θέσωμεν $S_I = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-I} + \alpha_n$, $S_2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_{n-1}^2 + \alpha_n^2$,
 $S_3 = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \dots + \alpha_{n-I}^3 + \alpha_n^3$, $S'_I = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \alpha_{n+1} = S_I + \alpha_{n+1}$,
 $S'_2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 + \alpha_{n+1}^2 = S_2 + \alpha_{n+1}^2$, $S'_3 = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \dots + \alpha_n^3 + \alpha_{n+1}^3 = S_3 + \alpha_{n+1}^3$,
 $\Sigma_I = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-I}\alpha_n$,
 $\Sigma_2 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \dots + \alpha_1\alpha_2\alpha_n + \dots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n$, $\Sigma'_I = \alpha_1\alpha_2 + \dots + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_1\alpha_{n+1} + \dots + \alpha_n\alpha_{n+1} = \Sigma_I + \alpha_{n+1} S_I$ καὶ $\Sigma'_2 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \dots + \alpha_1\alpha_2\alpha_n + \alpha_1\alpha_2\alpha_{n+1} + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n\alpha_{n+1} = \Sigma_2 + \alpha_{n+1}\Sigma_I$,
τότε αἱ (2) καὶ (3) γράφονται :

$$S_3 - 3\Sigma_2 = S_I (S_2 - \Sigma_I) \quad (2') \quad S'_3 - 3\Sigma'_2 = S'_I (S'_2 - \Sigma'_I) \quad (3')$$

δπότε δρκεῖ να δεξαμεν δτι ἀληθεύει ή (3'), ἀν ἀληθεύει ή (2').

Ἐπειδὴ $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)^2 = \Sigma_I^2 + 2\Sigma_I\alpha_2$ θέτε εἰναι $S_I^2 = S_2 + 2\Sigma_I$
ή $2\Sigma_I + S_2 - S_I^2 = 0$. Διεύ να δημοσα δτι (3'), πρέπει καὶ δρκεῖ
 $\alpha_{n+1}^3 - 3\Sigma_2 - 3\Sigma_I\alpha_{n+1} = (S_I + \alpha_{n+1})(S_2^2 + \alpha_{n+1}^2 - \Sigma_I - S_I\alpha_{n+1})$ ή

$s_3 - 3\Sigma_2 + \alpha_{n+I}^3 - 3\Sigma_I \alpha_{n+I} = s_1 s_2 + s_1 \alpha_{n+I}^2 - s_1 \Sigma_I - s_1^2 \alpha_{n+I}^2 + s_2 \alpha_{n+I} + \alpha_{n+I}^3 -$
 $- s_1 \alpha_{n+I} - s_1 \alpha_{n+I}^2 \quad \text{ή} \quad s_3 - 3\Sigma_2 = s_1 s_2 - s_1 \Sigma_I + \alpha_{n+I} (2\Sigma_I + s_2 - s_v^2) \quad \text{ή}$
 $s_3 - 3\Sigma_2 = s_1 (s_2 - \Sigma_I) + \alpha_{n+I} (2\Sigma_I + s_2 - s_I^2), \quad \text{κατ' έπειδή}$
 $2\Sigma_I + s_2 - s_I^2 = 0, \quad \text{έπειτα τότε } s_3 - 3\Sigma_2 = s_1 (s_2 - \Sigma_I). \quad \text{Άρα } \text{άν } \text{ή}$
 $(2') \text{ δληθεύεται ότι } \delta \text{ δληθεύεται κατ' } \text{ή} (3'), \text{ ήτοι δληθεύεται } \text{ή} (I) \text{ διε } v =$
 $= n + I \text{ κατ' έπομπων } \delta \text{ δληθεύεται κατ' } \delta \text{ ιδ } v \in \Phi \gg 3.$

78) "Εάν οι δριθμοί $U_0, U_I, U_2, \dots, U_v, \dots$ πληρούν την σχέση
 $v 2(v+2)U_{v+2} - 3vU_{v+I} - (v-I)U_v = O(1)$ κατ' $U_0 = I$, να δειχθή τότε
 $U_v = \frac{I}{2^v} \quad \text{έστω } v \in \Phi.$

Λ δ σ τ ι ζ. Διε $v = 0$ κατ' $v=1$, λαμβάνομεν τας σχέσεις:

$$4U_2 - U_0 = 0 \quad \text{ή} \quad 4U_2 = U_0 = I \quad \text{ή} \quad U_2 = \frac{I}{4} = \frac{I}{2^2} \text{ κατ' } 6U_3 - 3U_2 = 0$$
 $\text{ή} \quad U_3 = \frac{U_2}{2} = \frac{I}{2^2} = \frac{I}{2^3}, \quad \text{δηλ. } \text{ή} \text{ προτασίς δληθεύεται.}$

"Εστω τότε $\text{ή} \text{ προτασίς δληθεύεται διε } v = n-I \text{ κατ' } \delta \text{ ιδ } v = n.$
 $\text{Θε } \delta \text{ δεξαμεν } \text{ύπο } \text{τας } \text{ προϋποθέσεις } \text{ αντίτοι } \text{ διε } \text{ δληθεύεται κατ' } \delta \text{ ιδ } v =$
 $= n+I.$ "Εάν είς την (I) θέσωμεν $\delta \text{ ιδ } v = n-I$, έχομεν :

$$2(n+I)U_{n+I} - 3(n-I)U_n + (n-2)U_{n-I} = 0 \quad \text{ή}$$

$$2(n+I)U_{n+I} = 3(n-I)U_n - (n-2)U_{n-I} = 3(n-I) \frac{1}{2^n} - (n-2) \frac{I}{2^{n-I}} = \frac{n+I}{2^n}.$$

$$\text{Άρα } U_{n+I} = \frac{n+I}{2(n+I) \cdot 2^n} = \frac{I}{2^{n+I}}. \quad \text{Άρα } \text{ή} \text{ προτασίς δληθεύεται}$$

κατ' διε $v = n+I$ κατ' έπειδή δληθεύεται διε $v = n-I$ κατ' $v = n$ κατ' την δρχήν της τελείας έπαγγητής, θε δληθεύεται κατ' διε $\text{ιδ } v \in \Phi.$

79) Δίδεται $\text{ή} \text{ άκολουθα } U_0, U_I, U_2, \dots$ διου $U_0 = 0, U_I = I$
 κατ' $U_{v+2} = U_{v+I} + U_v$ με $v \in \Phi.$ Θεωρούμεν κατ' την άκολουθαν
 V_0, V_I, V_2, \dots διου $V_0 = U, V_I = V$ κατ' $V_{v+2} = V_{v+I} + V_v.$ Να δειχθή

$$\text{Στις } \alpha) V_v = U_{v-I} U + U_v V, \beta) U_{v+\mu-I} = U_{v-I} U_{\mu-I} + U_v U_\mu \quad \gamma) U_{2n+I} = \\ = U_{n+I}^2 + U_n^2.$$

Λύσης. Διείσδυτο $v=I$ έχουμεν $V_I = U_0 U + U_1 V$ και $V = V$. Διείσδυτο $v=2$ έχουμεν $V_2 = U_1 U + U_2 V$ και $V_I + V_0 = U + (U_I + U_0)V$ και $U + V = U + V$. Εστω δτις ή πρότασης δληθεύει διείσδυτο $v=n$ ($n \in \Phi$) κατ' $v=n+I$ δηλ. δτις $V_n = U_{n-I} V + V_n V$ (1) κατ' $V_{n+I} = U_n U + U_{n+I} V$ (2) κατ' διείσδυμεν δτις δληθεύει κατ' διείσδυτο $v=n+2$ δηλ. δτις $V_{n+2} = U_{n+I} U + U_{n+2} V$ (3). Προσθέτομεν τάξις (1) κατ' (2) κατ' λαμβάνομεν:

$$V_{n+I} + V_n = (U_n + U_{n-I}) U + (U_{n+I} + U_n)V \quad \text{και} \quad V_{n+2} = U_{n+I} U + \\ + U_{n+2} V. \quad \text{Διείσδυτο } \mu=I \quad \text{έχουμεν } U_v = U_{v-I} U_0 + U_v U_I = U_v. \quad \text{Διείσδυτο } \mu=2 \\ \text{έχουμεν } U_{v+I} = U_{v-I} U_I + U_v U_2 = U_{v-I} + U_v, \quad \text{ή δηποτία δληθεύει } \text{χρήσης} \\ \text{θέσεως διά νάθε } v \in \Phi.$$

*Προσθέτομεν τάξις $U_{v+\mu-I} = U_{v-I} U_{\mu-I} + U_v U_\mu$ (1), $U_{v+\mu} = U_{v-I} U_\mu +$
 $+ U_v + U_{\mu-I}$ (2) κατ' θα διείσδυμεν δτις $U_{v+\mu+I} = U_{v-I} U_{\mu+I} + U_v U_{\mu+2}$.
 Προσθέτομεν τάξις (1) κατ' (2) κατ' λαμβάνομεν :

$$U_{v+\mu+I} = U_{v-I} (U_\mu + U_{\mu-I}) + U_v (U_{\mu+I} + U_\mu) = U_{v-I} U_{\mu+I} + U_v U_{\mu+2}.$$

γ) *Επειδή ή (β) δληθεύει διείσδυτο μ κατ' v θα δληθεύει κατ'

$$\text{διείσδυτο } v=\mu=n+I \quad \text{δτε λαμβάνομεν : } U_{2n+I} = U_{n+I}^2 + U_n^2.$$

80) *Βάν θέσωμεν $A_v = (3 + \sqrt{5})^v + (3 - \sqrt{5})^v$ οπου $v \in \Phi$
 και διειχθῆ δτις είναι $A_{v+1} = 6A_v - 4A_{v-1}$. β) δ A_v είναι διερατικός. γ)
 $\delta A_v = \text{πολ } 2^{v+I}$

$$\text{Λύσης. } \alpha) \text{ Διείσδυτο } v=I \quad \text{έχουμεν } A_I = (3 + \sqrt{5}) + (3 - \sqrt{5}) = 6, \\ \text{όπρα } 6A_v = [(3 + \sqrt{5}) + (3 - \sqrt{5})] [(3 + \sqrt{5})^v + (3 - \sqrt{5})^v] = \\ = (3 + \sqrt{5})^{v+I} + (3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})^v + (3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})^v + (3 - \sqrt{5})^{v+I} = \\ = (3 + \sqrt{5})^{v+I} + (3 - \sqrt{5})^{v+I} + (3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) [(3 - \sqrt{5})^{v-I} + (3 + \sqrt{5})^{v-I}] =$$

$$(3+\sqrt{5})^{v+I} + (3-\sqrt{5})^{v+I} + 4 \left[(3+\sqrt{5})^{v-I} + (3-\sqrt{5})^{v-I} \right] \quad \text{ή}$$

$$6A_v = A_{v+I} + 4A_{v-I} \quad \text{ή} \quad A_{v+I} = 6A_v - 4A_{v-I} \quad (\alpha) \quad .$$

β) Βασικά δτι A_v είναι άκερατος διότι $v = n-I$ καὶ διότι $v = n$ δηλ. δτι οἱ $A_{n-I} = (3+\sqrt{5})^{n-I} + (3-\sqrt{5})^{n-I}$ (I) καὶ $A_n = (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ (2), είναι άκερατοι. Θα δεῖξωμεν όποια τάξη προϋποθέσεις αντάξιας δτι διληθεύει καὶ διότι $v = n+I$.

Πολλούμεν την (I) ἐπειδὴ καὶ την (2) ἐπειδὴ 6 καὶ προσθέτοντες εύροισμεν $6A_n = 4A_{n-I}$ διποτοῖς είναι άκερατος ὡς διαφορὰ δύο ἀκεριῶν. Ἀλλ' ἔνεκα τῆς (I) διότι $6A_n - 4A_{n-I} = A_{n+I}$ δηλ. ἡ προτασία διληθεύει καὶ διότι $v = n+I$, ἅρα κατά την ἀρχήν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς θα διληθεύῃ διότι καθεὶς $v \in \Phi$.

γ) Θέτομεν $\alpha = 3+\sqrt{5}$ καὶ $\beta = 3-\sqrt{5}$ καὶ ξέτω δτι ἡ προτασία διληθεύει διότι $v = n-I$ ~~καὶ $v = n$~~ . Τότε θα είναι $\alpha^n + \beta^n = \lambda \cdot 2^n$ καὶ $\alpha^{n-I} + \beta^{n-I} = \mu 2^{n-I}$ διότι ($\lambda, \mu \in \Phi$).

$$\begin{aligned} \text{Άλλο } \xi\chi\omega\mu\eta\eta\text{ δτι } \alpha^{n+I} + \beta^{n+I} &= (\alpha + \beta)(\alpha^n + \beta^n) - \alpha\beta(\alpha^{n-I} + \beta^{n-I}) = \\ &= 6\lambda \cdot 2^n - 4\mu \cdot 2^{n-I} = (3\lambda - \mu) \cdot 2^{n-I} \quad (3) \end{aligned}$$

Άλλο διποτερόν διότι 2^{n+I} ήτοι διληθεύει καὶ διότι $v = n+I$ καὶ συνέπως κατά την χρήση τῆς τελείας ἐπαγωγῆς θα διληθεύῃ καθεὶς $v \in \Phi$.

ΒΙ) Τρεῖς ἀριθμοὶ α, β, γ , πληροῦν τάξη σχέσεις :
 $0 < \alpha - \beta \gamma < I$ (I) καὶ $\alpha^2 - \beta^2 \gamma = \mu 2^2$ (2). Υφίσιμοντερόν ἀριθμὸν $\alpha + \beta \sqrt{\gamma}$ είσι την v ($v \in \Phi$) καὶ λαμβάνομεν ἔναν ἀριθμὸν τῆς μορφῆς $\alpha' + \beta' \sqrt{\gamma}$. Να δειχθῇ δτι διότι καθεὶς v διαίται λοιπάται μὲ τὸν άκερατὸν ἀριθμὸν τὸν ἀμέσως μεγαλύτερον ἀπό τὸν $\beta' \sqrt{\gamma}$ καὶ δτι δικερατος ἀριθμὸς δικερατος μεγαλύτερος τοῦ $(\alpha + \beta \sqrt{\gamma})^v$ είναι πολλαπλάσιον τοῦ 2^v .

Λ σ σ ι η ζ . α) Ἡ προτασία ἔνεκα τῶν υποθέσεων είναι διληθήσις διότι $v = I$. Θα δεῖξωμεν, δτι ἐδών ἡ προτασία είναι διληθήσις διότι

τινά τιμήν τοῦ $v = v$ θα είναι διληθής καὶ διὰ $v = v+I$.

$$(\alpha' + \beta' \sqrt{Y})(\alpha + \beta \sqrt{Y}) = (\alpha + \beta \sqrt{Y})^{v+I} = \alpha \alpha' + \gamma \beta \beta' + (\alpha \beta' + \alpha' \beta) \sqrt{Y}.$$

Άριετ οὐδὲ εξώμεν τῆν διπλήν δινοστητα :

$$0 < \alpha \alpha' + \gamma \beta \beta' - (\alpha \beta' + \alpha' \beta) \sqrt{Y} < I, \quad \text{ή } 0 < (\alpha - \beta \sqrt{Y})(\alpha' - \beta' \sqrt{Y}) < I.$$

Ἡ πρότη δινοστητα είναι διληθής διότι $\alpha > \beta \sqrt{Y}$ καὶ $\alpha' > \beta' \sqrt{Y}$.

Ἡ δευτέρα είναι ἐπίσης διληθής διότι $\alpha - \beta \sqrt{Y} < I$, $\alpha' - \beta' \sqrt{Y} < I$.

β) Διεῖ $v = I$ δικέρατος δριθμός διμέσως μεγαλύτερος τοῦ $\alpha + \beta \sqrt{Y}$ είναι διὰ 2α , θηλ. πολ/σιου τοῦ 2^I . Διεῖ $v=2$ είναι $(\alpha + \beta \sqrt{Y})^2 =$

$$= \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\sqrt{Y}. \quad \text{Ο δικέρατος δριθμός διμέσως μεγαλύτερος είναι διὰ } 2(\alpha^2 + \beta^2), \text{ διότι } \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sqrt{Y} < I, \text{ (ένεκα τῆς (I)).}$$

'Αλλ' ένεκα τῆς (2) οἱ α^2 καὶ β^2 είναι τῆς αὐτῆς κατηγορίας, καὶ τοῦ διθροισμάτων θα είναι δρτιον καὶ διὰ $2(\alpha^2 + \beta^2) =$ πολ 2^2 .

'Εάν δεχθῶμεν διτι ή πρότασις είναι διληθής διὰ $v=v$ καὶ $v=v-I$ θα δεξέωμεν διτι διληθεῖται καὶ διὰ $v=v+I$.

$$\begin{aligned} & \text{'Αλλα } (\alpha + \beta \sqrt{Y})^v = \alpha' + \beta' \sqrt{Y}, \quad (\alpha + \beta \sqrt{Y})^v + \\ & + (\alpha - \beta \sqrt{Y})^v = 2\alpha' = 2^v p \text{ (I), διότι } \text{έξ υποθέσεως } \alpha' = \text{πολ } 2^{v-I}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{'Αλλα } (\alpha + \beta \sqrt{Y}) + (\alpha - \beta \sqrt{Y}) = 2\alpha \text{ (2). Πολ/ζοντες κατέ μελη } \\ & \text{τάξ (I) καὶ (2) } \text{έχομεν } [(\alpha + \beta \sqrt{Y})^v + (\alpha - \beta \sqrt{Y})^v] [(\alpha + \beta \sqrt{Y}) + \\ & + (\alpha - \beta \sqrt{Y})] = 2^{v+I} \text{ ἄρα } \text{έξ } (\alpha + \beta \sqrt{Y})^{v+I} + (\alpha - \beta \sqrt{Y})^{v+I} + \\ & + (\alpha + \beta \sqrt{Y}) (\alpha - \beta \sqrt{Y}) [(\alpha + \beta \sqrt{Y})^{v-I} + (\alpha - \beta \sqrt{Y})^{v-I}] = 2^{v+I} \text{ αρ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{'Αλλ' έξ υποθέσεως } (\alpha + \beta \sqrt{Y}) (\alpha - \beta \sqrt{Y}) = \alpha^2 - \beta^2 = \mu^2 \text{ καὶ δι-} \\ & \text{μοίως } (\alpha + \beta \sqrt{Y})^{v-I} + (\alpha - \beta \sqrt{Y})^{v-I} = 2^{v-I} p' \text{ καὶ } \text{έξ δινωτέρω πα-} \\ & \text{ρδστασις γίνεται } (\alpha + \beta \sqrt{Y})^{v+I} + (\alpha - \beta \sqrt{Y})^{v+I} + p' \mu^2 2^{v+I} = 2^{v+I} \text{ αρ} \\ & \text{ή τελικῶς } (\alpha + \beta \sqrt{Y})^{v+I} + (\alpha - \beta \sqrt{Y})^{v+I} = (ap - \mu p') 2^{v+I} = \Pi \cdot 2^{v+I}. \end{aligned}$$

62) 'Εάν οἱ α, β, γ, p είναι δικέρατοι καὶ έάν $\alpha^2 - \beta^2 \gamma = 4n(I)$ τότε διδριθμός $(\alpha + \beta \sqrt{Y})^v + (\alpha - \beta \sqrt{Y})^v$ είναι δικέρατον πολ/σιου τοῦ 2^v διὰ $v \in \Phi$.

$$\begin{aligned}
 & \text{Λορδούς. Αντε } v = I \text{ έχουμε } S_1 = (\alpha + \beta \sqrt{\gamma}) + (\alpha - \beta \sqrt{\gamma}) = 2\alpha = \\
 & = 2^I \alpha \text{ δηλ. } \delta\lambda\eta\theta\epsilon\nu\epsilon\nu. \text{ Αντε } v = 2 \text{ έχουμε } S_2 = (\alpha + \beta \sqrt{\gamma})^2 + (\alpha - \beta \sqrt{\gamma})^2 = \\
 & = [(\alpha + \beta \sqrt{\gamma}) + (\alpha - \beta \sqrt{\gamma})]^2 - 2(\alpha + \beta \sqrt{\gamma})(\alpha - \beta \sqrt{\gamma}) = (2\alpha)^2 - 2(\alpha^2 - \beta^2 \gamma) = \\
 & = 2^2 \alpha^2 - 2(\alpha^2 - \beta^2 \gamma) \text{ κατ } \text{ένεκα της (I) έχουμε } S_2 = 2\alpha^2 - 2 \cdot 4 \kappa = \\
 & = 2^2(\alpha^2 - 2\kappa).
 \end{aligned}$$

Σχηματίζομεν έξι σωστιν δευτέρου βαθμού έχουσαν ρίζας τας δι-ρεμόδις $\alpha + \beta \sqrt{\gamma}$ κατ $\alpha - \beta \sqrt{\gamma}$. Αυτη είναι ή $x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 - \beta^2 \gamma) = 0$

Έστω x_1 κατ x_2 είναι ως ρίζαι της, έχουμε :

$$x_1^2 - 2\alpha x_1 + (\alpha^2 - \beta^2 \gamma) = 0 \quad (2)$$

$$\text{κατ } x_2^2 - 2\alpha x_2 + (\alpha^2 - \beta^2 \gamma) = 0 \quad (3)$$

Πολλούμεν την (I) έπειτα x_1^v κατ την (2) έπειτα x_2^v κατ εύρεσημεν :

$$x_1^{v+2} - 2\alpha x_1^{v+1} + (\alpha^2 - \beta^2 \gamma) x_1^v = 0 \quad (4)$$

$$x_2^{v+2} - 2\alpha x_2^{v+1} + (\alpha^2 - \beta^2 \gamma) x_2^v = 0 \quad (5)$$

Προσθέτοντες τις (4) κατ (5) κατά μέλη λαμβάνομεν :

$$(x_1^{v+2} + x_2^{v+2}) - 2\alpha(x_1^{v+1} + x_2^{v+1}) + (\alpha^2 - \beta^2 \gamma)(x_1^v + x_2^v) = 0$$

$$\text{ήτοι : } s_{v+2} = 2\alpha s_{v+1} - (\alpha^2 - \beta^2 \gamma) s_v \text{ ή } s_{v+2} = 2\alpha s_{v+1} - 4\alpha s_v \quad (6)$$

Στοτούτες δια προτεσις διηθεσεις δια $v = n$ κατ δια $v = n+1$, δηλ. δια είναι $s_n = \text{πολ } 2^n$ κατ $s_{n+1} = \text{πολ } 2^{n+1}$. Θα διεξαγειν ίστο τις προϋποθέσεις αυτές δια διηθεσεις κατ δια $v = n+2$.

$$\begin{aligned}
 & \text{Αργω της (6) έχουμε } s_{n+2} = 2\alpha \text{ πολ } 2^{n+1} - 4n \text{ πολ } 2^n = \\
 & = \alpha \text{ πολ } 2^{n+2} - n \text{ πολ } 2^{n+2} = (\alpha - n) \text{ πολ } 2^{n+2} = \text{πολ } 2^{n+2}.
 \end{aligned}$$

"Αρα διηθεσεις κατ δια $v = n+2$ κατ συνεπώς κατά την διρκήν της τελείας έπαγωγής θα διηθεσή. δια καθε $v \in \Phi$.

$$83) \Delta\sigma\epsilon\tau\alpha\tau\alpha\text{ ή } \delta\kappa\text{o}\text{l}\text{o}\text{u}\text{m}\text{t}\text{a } u_0, u_1, \dots u_v \text{ έπου } u_0 = 2, u_1 = 3$$

καλ $U_{v+I} = 3U_v - 2U_{v-I}$ διότι κάθε $v \in \Phi$. Να δειχθή ότι διότι κάθε διεργατού λόγιθμον $v > 0$ είναι $U_v = 2^v + I$ καλ $\delta\tau_v: U_v^2 - 2U_v = U_{2v}$

Λόγος ε. α) διότι $v = 0$ είναι $2^v + I = 2^0 + 1 = 2 = U_0$ καλ διότι $v=I$ είναι $2^v + I = 2+I = 3 = U_I$, οπότε διότι $v=0$ καλ $v=I$ είναι πράγματι $U_v = 2^v + I$.

Θέλεισμεν ότι είσι την διοικουθείσαν τῶν λόγιθμῶν $U_0, U_I, \dots, U_{v-1}, U_v, U_{v+1}, U_{v+2}, \dots, U_{n+I}$ διότι $U_{v+I} = 3U_v - 2U_{v-I}$ διότι κάθε $v \in \Phi$, έναν είναι $U_n = 2^n + I$ καλ $U_{n+I} = 2^{n+I} + I$ διότι $n \in \Phi \Rightarrow 0$ θέλεισμεν $U_{n+2} = 2^{n+2} + I$ (1)

Έπειτα τελευταίας τῶν σχέσεων (1) διότι $v = n+I$ έχομεν $U_{n+2} = 3U_{n+I} - 2U_n$ καλ έπομένως λόγω τῶν δύο προτατων σχέσεων έπειτα $U_{n+2} = 3(2^{n+I} + I) - 2(2^n + I) = 3 \cdot 2^{n+I} + 3 - 2^{n+I} - 2 = 2^{n+I}(3-1) + I - 2^{n+I} + I = 2^{n+I} + I = 2^{n+2} + I$ (3). Άρα η προτασία διληφθείσει καλ διότι $v = n+I$ καλ συνεπώς θέλει διληφθείση καλ διότι κάθε διεργατού $v > 0$.

β) Έπειτα $U_v = 2^v + I$ έχομεν $U_v^2 - 2U_v = U_v(U_v - 2) = (2^v + I)(2^v + I - 2) = (2^v + I)(2^v - I) = (2^v)^2 - I = U_{2v}$.

84) Εάν $v \in \Phi \Rightarrow 2$ καλ x_1, x_2, \dots, x_v λόγιθμος θετικος να δειχθή ότι :

$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_v}{v} \geq \sqrt{ x_1 x_2 \dots x_v } \geq \frac{x_1+x_2+\dots+x_v}{x_1 + x_2 + \dots + x_v}$$

Λόγος. Διότι $v=2$ έχομεν $\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \text{ και } (x_1 + x_2)^2 \geq 4 x_1 x_2 \text{ και } (x_1 - x_2)^2 \geq 0$ η διότια διληφθείσει.

"Εστω διέλευσε διότι $v=n$ ($n \in \Phi$) δηλ. ότι $\sqrt{\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}} \geq \sqrt{x_1 x_2 \dots x_n}$ (1). Θέλεισμεν όποια προσποθεσίαν αύτην διέλευσε διληφθείσει καλ διότι $v = n+I$ δηλ. ότι $\frac{x_1+x_2+\dots+x_n+x_{n+I}}{n+I} \geq \sqrt{x_1 x_2 \dots x_n}$

$\sqrt[n+I]{x_1 \cdot x_2 \cdots \cdot x_n \cdot x_{n+I}}$ (2). Η (I) γράφεται $x_1 + x_2 + \cdots + x_n >$
 $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ καθι προσθέτοντες εις άμφοτερα τη μελη αντης

το x_{n+I} ξχομεν : $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+I} > x_{n+I} + \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$. Αρκει λοιπον νδε δεξωμεν οτι :

$$x_{n+I} + \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} > (n+I) \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+I}} \text{ η οτι:}$$

$x_{n+I} > (n+I) \cdot \sqrt[n+I]{x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+I}} - \sqrt[n+I]{x_{n+I} \cdot \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}$
 $\left(\sqrt[n+I]{x_{n+I}} \right)^{n+I} > (n+I) \sqrt[n(n+I)]{(x_1 x_2 \cdots x_n)^n} \cdot \sqrt[n+I]{x_{n+I}} - n \sqrt[n(n+I)]{(x_1 x_2 \cdots x_n)}$
 Εδν θεσωμεν :

$\sqrt[x(n+I)]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \alpha \text{ καθ} \quad \sqrt[n+I]{x_{n+I}} = \beta, \text{ η προηγουμε} \cdot$
 νη άντεστης γίνεται $\beta^{n+I} > (n+I) \alpha^n + \beta - n \alpha^{n+I} \text{ η όποια είναι ά} \cdot$
 ληθης (Ιδε δικησιν 40).

Εδν εις την ήδη διποδειχθεῖσαν θεσωμεν οντι $x_1 = \frac{I}{x_1},$

$x_2 = \frac{I}{x_2} \cdots x_v = \frac{I}{x_v}, \text{ ξχομεν :}$

$$\frac{\frac{I}{x_1} + \frac{I}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_v}}{v} \geq \sqrt[v]{\frac{I}{x_1} \cdot \frac{I}{x_2} \cdots \frac{I}{x_v}} \text{ η}$$

$$\sqrt[v]{x_1 x_2 \cdots x_v} \geq \frac{1}{\frac{I}{x_1} + \frac{I}{x_2} + \cdots + \frac{I}{x_v}}$$

$$85) \text{ Εδν } x, \psi \in \Phi \text{ νδειχθη οτι : } \frac{x^2 + \psi^2}{x + \psi} \geq \sqrt[x+\psi]{x^x \psi^\psi}$$

Λ σ σ ι ζ. Διαδ ν φυσινοδς άριθμοις άληθεσι η σκέσις :

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_v}{v} \geq \sqrt[v]{x_1 x_2 \cdots x_v} \text{ (I).}$$

*Εστω οτι $v = x + \psi$ καθ οτι $x_1 = x_2 = \cdots = x_\mu = x$ καθ $x_{\mu+1} = x_{\mu+2} =$

$\vdash \dots = x_v = \beta + \text{H}$ (I) γράφεται τότε :

$$\frac{x \text{ προσθέτει} \underbrace{\psi \text{ προσθέτει}}_{\substack{(x+x+\dots+x) + (\psi+\psi+\dots+\psi) \\ x+\psi}}}_{\substack{\text{---} \\ \text{---}}} \geq \sqrt{\frac{x+\psi}{(x+x+\dots+x)(\psi+\psi+\dots+\psi)}} \quad \text{---} \\ \frac{x^2 + \psi^2}{x+\psi} \geq \sqrt{x^x \psi^\psi} \quad \text{---}$$

86) Εάν $x > 0$ καὶ $v \in \Phi$ νῷ δειχθῆ ὅτι :

$$(x+v)^{2v-I} > (x+I)(x+2)\dots(x+2v-I).$$

Α δει τις. Θεωροῦμεν τοὺς ἀριθμοὺς $x+I, x+2, \dots, x+2v-I$. Οὗτοι εἰναι $(x+2v-I) - (x+I) + I = 2v - I$ τὸ πλῆθος. Ε- φαρμόζοντες εἰς αὐτοὺς τὸ θεώρημα τοῦ CAUCHY ἔχομεν :

$$\frac{(x+I) + (x+2) + \dots + (x+2v-I)}{2v-I} > \sqrt[2v-I]{(x+I)(x+2)\dots(x+2v-I)} \quad \text{---} \\ \frac{(x+I+x+2v-I)(2v-I)}{2(2v-I)} > \sqrt[2v-I]{(x+I)(x+2)\dots(x+2v-I)} \quad \text{---} \\ (x+v) > \sqrt[2v-I]{(x+I)(x+2)\dots(x+2v-I)} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ (x+v)^{2v-I} > (x+I)(x+2)\dots(x+2v-I).$$

$$87) \quad \text{Εάν } v \in \Phi \text{ νῷ δειχθῆ ὅτι : } 3v(3v+I)^2 > \sqrt[3v]{I \cdot 2 \cdot 3 \dots 3v}.$$

Α δει τις. Εφαρμόζομεν τὸ θεώρημα τοῦ CAUCHY εἰς τοὺς ἀριθμοὺς $I, 2, 3, \dots, 3v$ καὶ ἔχομεν :

$$\frac{I + 2 + 3 + \dots + 3v}{3v} > \sqrt[3v]{I \cdot 2 \cdot 3 \dots 3v} \quad \text{---} \quad \text{---}$$

$(I+3v) 3v > \sqrt[3v]{I \cdot 2 \cdot 3 \dots 3v}$. Υψώνοντες εἰς τὴν τρίτην δυ- ναμιν διδότερα τὴν μέλη τῆς ἀνεστιτος ἔχομεν :

$$\frac{(I+3v)^3 3v}{8} > \sqrt[3v]{I \cdot 2 \cdot 3 \dots 3v} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ (I+3v)^2 \frac{I+3v}{8} > \sqrt[3v]{I \cdot 2 \cdot 3 \dots 3v}$$

Άλλαξ $3v > \frac{I + 3v}{8}$ κατά μετένθεση λόγων θετικών :

$$3v (I + 3v)^2 > \sqrt{I \cdot 2 \cdot 3 \cdots 3v} .$$

88) Εάν $\Sigma = x_1 + x_2 + \cdots + x_v > 0$ κατά αλ. διαφορας $\Sigma = x_1, \Sigma = x_2, \dots \Sigma = x_v > 0$, να δειχθή δει :

$$\frac{\Sigma}{\Sigma - x_1} + \frac{\Sigma}{\Sigma - x_2} + \cdots + \frac{\Sigma}{\Sigma - x_v} \geq \frac{v^2}{v - I} .$$

Λύσης. Θεωρούμεν τα διαφορας a_1, a_2, \dots, a_v τοιούτους ώστε $a_1 = \frac{\Sigma}{\Sigma - x_1}, a_2 = \frac{\Sigma}{\Sigma - x_2}, \dots, a_v = \frac{\Sigma}{\Sigma - x_v}$ κατά την

πεισή $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_v}{v} \geq \frac{I}{a_1} + \frac{I}{a_2} + \cdots + \frac{I}{a_v}$, έχομεν :

$$\frac{\Sigma}{\Sigma - x_1} + \frac{\Sigma}{\Sigma - x_2} + \cdots + \frac{\Sigma}{\Sigma - x_v} \geq \frac{v}{\Sigma - x_1} + \frac{v}{\Sigma - x_2} + \cdots + \frac{v}{\Sigma - x_v}$$

$$\frac{\Sigma}{\Sigma - x_1} + \frac{\Sigma}{\Sigma - x_2} + \cdots + \frac{\Sigma}{\Sigma - x_v} \geq \frac{v}{\Sigma} .$$

$$\frac{\Sigma}{\Sigma - x_1} + \frac{\Sigma}{\Sigma - x_2} + \cdots + \frac{\Sigma}{\Sigma - x_v} \geq \frac{v^2}{v - I} .$$

89) Εάν $x_1, \psi_1, \omega_1, z > 0$ κατά διαίρεσης ισού μεταξύ των, ποτε σίνει : $(x+\psi)^{1/3} (\omega+z)^{2/3} > x^{1/3} \omega^{2/3} + \psi^{1/3} z^{2/3}$.

Λύσης. Κατά την τύπον του CAUCHY έχομεν :

$$\frac{\frac{1}{3} + \frac{x}{x+\psi} + \frac{2}{3} \frac{\omega}{\omega+z}}{-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} > \sqrt[3]{\left(\frac{x}{x+\psi}\right)^{1/3} \left(\frac{\omega}{\omega+z}\right)^{2/3}} \text{ κατ}$$

$$\frac{I}{3} \cdot \frac{\psi}{x+\psi} + \frac{2}{3} \cdot \frac{z}{\omega+z} > \left(\frac{\psi}{x+\psi} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{z}{\omega+z} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{I}{3} \cdot \frac{x}{x+\psi} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\omega}{\omega+z} > \left(\frac{x}{x+\psi} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\omega}{\omega+z} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{I}{3} \cdot \frac{\psi}{x+\psi} + \frac{2}{3} \cdot \frac{z}{\omega+z} > \left(\frac{\psi}{x+\psi} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{z}{\omega+z} \right)^{\frac{2}{3}}$$

καλ διεδ προσθέσσεως λαμβάνομεν :

$$\frac{I}{3} + \frac{2}{3} > \frac{x^{\frac{1}{3}} \omega^{\frac{2}{3}} + \psi^{\frac{1}{3}} z^{\frac{2}{3}}}{(x+\psi)^{\frac{1}{3}} (\omega+z)^{\frac{2}{3}}} \quad \text{ή } (x+\psi)^{\frac{1}{3}} \cdot (\omega+z)^{\frac{2}{3}} > x^{\frac{1}{3}} \cdot \omega^{\frac{2}{3}} + \psi^{\frac{1}{3}} \cdot z^{\frac{2}{3}}$$

90) Διεδ καθε ν, κα δειχθή δτι : $\Pi_I = \sigma v \alpha \sigma v 2 \alpha \sigma v 4 \alpha$.

$$\dots \sigma v 2 \alpha = \frac{\eta \mu 2^{v+I} \alpha}{2^{v+I} \eta \mu \alpha} \quad (I).$$

$$\Lambda \delta \sigma + \sigma \alpha \delta \sigma = \sigma v \alpha \sigma v 2 \alpha \sigma v 4 \alpha = \frac{\eta \mu 2 \alpha}{2 \eta \mu \alpha}$$

$2 \eta \mu \alpha \sigma v \alpha$

$$= \frac{4 \eta \mu \alpha \sigma v \alpha \sigma v 2 \alpha}{2 \eta \mu \alpha} = \sigma v \alpha \sigma v 2 \alpha. \quad \text{Εστω δτι ή (I) δληθεύει}$$

$$v = n, \text{ δηλω } \Pi_n = \sigma v \alpha \sigma v 2 \alpha \dots \sigma v 2^n \alpha = \frac{\eta \mu 2^{n+I} \alpha}{2^{n+I} \eta \mu \alpha}. \quad \text{Οδ δεξιώ - μεν ύποδ τές προϋποθέσεις αύτές δτι δληθεύει καλ διεδ } v = n + I.$$

$$\text{Πρόγραματι } \text{εχομεν } \Pi_{n+I} = \Pi_n \sigma v(2^{n+I} \alpha) \quad \text{ή } \Pi_{n+I} = \frac{\eta \mu 2^{n+I} \alpha}{2^{n+I} \eta \mu \alpha}.$$

$$\sigma v v 2^{n+I} \alpha = \frac{\eta \mu 2^{n+I} \alpha}{2^{n+I} \eta \mu \alpha} \quad \text{, } \frac{2 \sigma v v 2^{n+I} \alpha}{2} = \frac{2 \eta \mu 2^{n+I} \alpha \sigma v v 2^{n+I} \alpha}{2 \cdot 2^{n+I} \eta \mu \alpha} =$$

$$= \frac{\eta \mu [2 \cdot 2^{n+I} \alpha]}{2^{n+2} \eta \mu \alpha} = \frac{\eta \mu 2^{n+2} \alpha}{2^{n+2} \eta \mu \alpha}.$$

$$91) \text{ Έδν } v \in \Phi, \text{ νδ δειχθῆ δτε ημ } \alpha + \eta μ 2\alpha + \dots + \eta μ n\alpha = \\ = \frac{\eta μ \frac{v+I}{2} \alpha}{\eta μ \frac{\alpha}{2}} + \frac{\eta μ n\alpha}{2}.$$

Α δ σ τις. Διαδ $v = I$ ή προβασις δληθεσει. Έστω δτε δληθεσει διιδ $v = n$ ($n \in \Phi$) δηλο δτε $\eta μ \alpha + \eta μ 2\alpha + \dots + \eta μ n\alpha =$

$$= \frac{\eta μ \frac{n+I}{2} \alpha}{\eta μ \frac{\alpha}{2}} + \eta μ \frac{n\alpha}{2} \quad (I). \text{ Θδ δεξωμεν υπδ τήν προϋπδθεσιν αδτην δτε δληθεσει καδ διιδ } v = n+I. \text{ Προσθέτομεν εις δμφτερα τδ μελη τής (I) τδ } \eta μ(n+I)\alpha \text{ καδ ξχωμεν :}$$

$$\eta μ \alpha + \eta μ 2\alpha + \dots + \eta μ n\alpha + \eta μ(n+I)\alpha = \frac{\eta μ \frac{n+I}{2} \alpha}{\eta μ \frac{\alpha}{2}} + \eta μ(n+I)\alpha = \\ = \frac{\eta μ \frac{n+I}{2} \alpha}{\eta μ \frac{\alpha}{2}} + \eta μ \frac{n\alpha}{2} + 2\eta μ \frac{n+I}{2} \alpha + \eta μ \frac{n+I}{2} \alpha = \frac{\eta μ \frac{n+2}{2} \alpha}{\eta μ \frac{\alpha}{2}} + \eta μ \frac{n+I}{2} \alpha,$$

διδτι. ο 2 συν $\frac{n+I}{2} \alpha$ ημ $\frac{\alpha}{2}$ = ημ $\frac{n+2}{2} \alpha$ - ημ $\frac{n\alpha}{2}$. Ήτο δληθεσει καδ διιδ $v = n+I$ καδ συνεπως καδ διιδ καδ $v \in \Phi$.

$$92) \text{ Έδν } v \in \Phi \text{ νδ δειχθῆ δτε } \frac{I}{2} + \text{συν } \alpha + \text{συν } 2\alpha + \dots + \text{συν } n\alpha = \\ = \frac{\eta μ \frac{2v+I}{2} \alpha}{2\eta μ \frac{\alpha}{2}}.$$

Α δ σ τις. Διαδ $v = I$ ή προβασις δληθεσει, διδτι :

$$\frac{\eta μ \frac{3\alpha}{2}}{2\eta μ \frac{\alpha}{2}} = \frac{\eta μ \frac{\alpha}{2} + (\eta μ \frac{3\alpha}{2} - \eta μ \frac{\alpha}{2})}{2\eta μ \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{I}{2}}{2\eta μ \frac{\alpha}{2}} + \text{συν } \alpha.$$

Έστω δτε δληθεσει καδ διιδ $v = n$ ($n \in \Phi$), τδτε :

$$\frac{\frac{I}{2}}{2\eta μ \frac{\alpha}{2}} + \text{συν } \alpha + \text{συν } 2\alpha + \dots + \text{συν } n\alpha = \frac{\eta μ \frac{2n+I}{2} \alpha}{2\eta μ \frac{\alpha}{2}} \quad (I). \text{ Θδ δεξωμεν υπδ τήν προϋπδθεσιν αδτην δληθεσει καδ διιδ } v = n+I.$$

Προσθέτομεν εις δμφτερα τδ μελη τής (I) τδ συν($n+I$)α καδ ξχο -

$$\begin{aligned} \text{μεν } &: \frac{\mu}{2} + \sin(\alpha) + \sin(2\alpha) + \dots + \sin(n\alpha) + \sin((n+1)\alpha) = \frac{n\mu \frac{2n+1}{2}\alpha - \alpha}{2\eta\mu} + \\ &+ \sin((n+1)\alpha) = \frac{n\mu \frac{2n+1}{2}\alpha + 2\eta\mu \frac{\alpha}{2} \sin((n+1)\alpha)}{2\eta\mu} = \frac{n\mu \frac{2n+1}{2}\alpha + (\eta\mu \frac{2n+3}{2}\alpha - \eta\mu \frac{2n+1}{2}\alpha)}{2\eta\mu} = \\ &= \frac{\eta\mu \frac{2n+3}{2}\alpha}{2\eta\mu} - \frac{\alpha}{2}, \quad \text{ήτοι } \delta\lambda\eta\theta\epsilon\beta\epsilon\tau\eta \text{ να } \delta\text{id } n = n+1 \text{ να } \sin(n\alpha) \text{ να } \delta\text{id } \end{aligned}$$

$$93) \quad \text{Εδώ } v \in \Phi \text{ και δείχθη έτσι ότι } \eta \mu \alpha + 2\eta \mu 2\alpha + 3\eta \mu 3\alpha + \dots + \\ + v \eta \mu v\alpha = \frac{(v+1)\eta \mu v\alpha}{2} - v \frac{\eta \mu (v+1)\alpha}{2}.$$

λόστας. Αιδηνή προταστική είναι διπλής, έπειδη

$$\frac{2\eta\mu \alpha - \eta\mu^2\alpha}{4\eta\mu \frac{\alpha}{2}} = \frac{2\eta\mu \alpha(1 - \sigma\eta\mu \alpha)}{4\eta\mu \frac{\alpha}{2}} = \eta\mu \alpha \circ \text{Βστω } \delta\tau\iota \text{ & ληθεύει } \delta\iota\kappa$$

$v \equiv n \pmod{\Phi}$. Έτσι ημ $\alpha + 2\eta\mu^2\alpha + 3\eta\mu^3\alpha + \dots + n\eta\mu^n\alpha$ έχει συντελεστή $(n+1)\eta\mu^{n+1} - \eta\mu(n+1)$ και συγχρόνως έχει συντελεστή $4\eta\mu^2 \frac{\alpha}{2}$.

⁴ Υπό τήν προ θρόνου αυτήν θε δεξιώμεν οτι ἀληθεύει καὶ διὰ νηντί. Προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τὸ μελη τῆς (I) τὸ (n+I)ημ(n+I)α ἔχομεν

$$\eta\mu \alpha \rightarrow 2\eta\mu 2\alpha + \dots + \eta\mu (\kappa+I)\eta\mu (\kappa+I)\alpha \approx \frac{(\kappa+I)\eta\mu\alpha - \eta\mu(\kappa+I)\alpha}{4\eta\mu^2} + \dots + (\kappa+I) \eta\mu (\kappa+I) \alpha =$$

$$= \frac{(n+I)\mu n - n \mu(n+I)\alpha + 2(n+I) \mu (n+I) \alpha (I - \sigma u v \alpha)}{4\mu \frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{(\mu+2)\eta\mu(\mu+I)\alpha + (\mu+I)\eta\mu\eta\alpha}{4\eta\mu^2 - \frac{\alpha}{2}} - \frac{2(\mu+I)\sigma\eta\alpha}{4\eta\mu^2 - \frac{\alpha}{2}} \frac{\eta\mu(\mu+I)\alpha}{\eta\mu}$$

$$\frac{(n+2)\eta\mu(n+1)a - (n+1)\eta\mu na}{4\eta\mu} = \frac{(n+1)[\eta\mu(n+2)a + \eta\mu na]}{4\eta\mu}$$

$$= \frac{(n+2)\pi\mu(n+1)a}{2} - \frac{(n+1)\pi\mu(n+2)a}{2} \quad \text{ήτοι ή πρότασης δληθεύει να}$$

διεύ ν = n + I καθ συνεπώς κατ διεύ κάθε $v \in \Phi$.

$$94) \text{ На } \delta \epsilon \tau \chi \theta \rho \text{ от } \sigma u v a + 2 \sigma u v 2 \alpha + \dots + v \sigma u v a = \frac{(v+1) \sigma u v a - v \sigma u v (v+1) \alpha}{4 \pi \mu}.$$

Λ Β Σ Ι Σ . Διεύ ν=I ή πρότασις είναι άληθης διέτι

$$\frac{2\sin \alpha - \sin 2\alpha - I}{2 \cdot \frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin \alpha - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{4\eta \mu \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin(I-\sin \alpha)}{2\eta \mu \frac{\alpha}{2}} = \sin \alpha .$$

Έστω δτι άληθευει διεύ ν = n (n ∈ Φ), δηλού δτι :

$$\sin \alpha + 2\sin 2\alpha + \dots + n\sin n\alpha = \frac{(n+I)\sin \alpha - n\sin(n+I)\alpha - I}{2 \cdot \frac{\alpha}{2}} \quad (I) . \quad \text{Θα δει -} \\ \text{ξωμεν δτι άληθευει υπο: } \sin(n+I)\alpha = \frac{(n+I)\sin(n+I)\alpha - n\sin(n+I)\alpha - I}{2 \cdot \frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{Προσθέτοντες είς διμοτερατάκελη της (I) τό } (n+I)\sin \alpha - n\sin(n+I)\alpha + \\ \sin \alpha + 2\sin 2\alpha + \dots + n\sin n\alpha + (n+I)\sin \alpha - (n+I)\sin(n+I)\alpha +$$

$$+ (n+I)\sin(n+I)\alpha = \frac{(n+I)\sin \alpha - n\sin(n+I)\alpha - I}{2 \cdot \frac{\alpha}{2}} + \frac{2(n+I)\sin \alpha - (n+I)\alpha(I - \sin \alpha)}{4\eta \mu \frac{\alpha}{2}} .$$

$$= \frac{(n+2)\sin(n+I)\alpha + (n+I)\sin \alpha}{4\eta \mu \frac{\alpha}{2}} - \frac{2(n+I)\sin \alpha - (n+I)\alpha + I}{4\eta \mu \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{(n+2)\sin(n+I)\alpha + (n+I)\sin \alpha}{4\eta \mu \frac{\alpha}{2}} - \frac{(n+I)[\sin(n+2)\alpha + \sin \alpha] + I}{4\eta \mu \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{(n+2)\sin(n+I)\alpha - (n+I)\sin(n+2)\alpha - I}{4\eta \mu \frac{\alpha}{2}} \quad \text{ήτοι } \text{ ή πρότασις άληθευει}$$

καλ διεύ ν = n+I καν συνεπώς καν διεύ μέθε ν ∈ Φ .

$$95) \quad \text{Έδν } \alpha_v \text{ δπου } v \in \Phi \geqslant 2 \text{ είναι τοιαῦτα δστε } 0 < \alpha_v < \frac{\pi}{2} \\ \text{ κατ' ουδέτερη διεύ } \varepsilon \text{ φ } \alpha_I + \varepsilon \phi \alpha_2 + \dots + \varepsilon \phi \alpha_v > v \text{ εφ } \tau = \frac{\alpha_I + \alpha_2 + \dots + \alpha_v}{v} \quad (1), \text{ το } \\ \text{ δε } \varepsilon \text{ σον } \varepsilon \text{ σχέτει διεύ } \alpha_I = \alpha_2 = \dots = \alpha_v .$$

$$\text{Λ Β Σ Ι Σ . Διεύ } v=2 \text{ ή (1) γίνεται } \varepsilon \text{ φ } \alpha_I + \varepsilon \phi \alpha_2 > 2\varepsilon \phi \frac{\alpha_I + \alpha_2}{2}, \\ \text{ ημ } (\alpha_I + \alpha_2) > \frac{2\eta \mu (-\frac{\alpha_I + \alpha_2}{2})}{\sin \alpha_I \sin \alpha_2} \text{ ή } \frac{2\eta \mu (-\frac{\alpha_I + \alpha_2}{2})}{\sin \alpha_I \sin \alpha_2} > \frac{2\eta \mu (-\frac{\alpha_I + \alpha_2}{2})}{\sin \alpha (\frac{\alpha_I + \alpha_2}{2})} \\ \text{ ή } \sin^2 \left(\frac{\alpha_I + \alpha_2}{2} \right) > \sin \alpha_I \sin \alpha_2 \text{ διέτι } \eta \mu \left(\frac{\alpha_I + \alpha_2}{2} \right) > 0 \quad \text{ ή }$$

$$2\sigma_{uv}^2 \left(\frac{\alpha_I + \alpha_2}{2} \right) \geq 2\sigma_{uv}^2 \left(\frac{\alpha_I + \alpha_2}{2} \right) - I + \sigma_{uv} (\alpha_I - \alpha_2)$$

$\sigma_{uv}(\alpha_I - \alpha_2) \leq I$, ή δηλατεσεις και ειναι δηληθης ως ισοτης δταν $\alpha_I = \alpha_2$.

* Εστω $\frac{\alpha_I + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n}$ δηληθεσεις δια ν = n δηλο εφ α_I + εφ α_2 + ... + εφ α_n > $\frac{\alpha_{n+I} + \alpha_{n+2} + \dots + \alpha_{2n}}{n}$ (2). Θε δεξαμεν δτι μπδ την προσθεσιν αυτην δηληθεσεις και δια n=2n. * Εφαρμζομεν την (2) δια τδ τεξα $\alpha_{n+I}, \alpha_{n+2}, \dots, \alpha_{2n}$ δτε λαμβανομεν : εφ α_{n+I} + εφ α_{n+2} + ... + εφ α_{2n} > $\frac{\alpha_{n+I} + \alpha_{n+2} + \dots + \alpha_{2n}}{n}$ (2). Προσθετοντες τδς (2) και (3) υσι λαμβανομεν εφ α_I + εφ α_2 + ... + εφ α_{2n} > $\left[\frac{\alpha_I + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n} + \frac{\alpha_{n+I} + \alpha_{n+2} + \dots + \alpha_{2n}}{n} \right]$ (4)

* Επειδη δ (I) δηληθεσεις δια n=2 έχομεν : εφ $\frac{\alpha_I + \dots + \alpha_n}{n} + \frac{\alpha_{n+I} + \dots + \alpha_{2n}}{n} >$ $\frac{\alpha_I + \dots + \alpha_n}{n} + \frac{\alpha_{n+I} + \dots + \alpha_{2n}}{2}$

$$2\epsilon \phi \frac{\alpha_I + \dots + \alpha_n}{2} = 2\epsilon \phi \frac{\alpha_I + \dots + \alpha_{2n}}{2n}, \text{ επομενως ή (5) γε-$$

νεται : εφ α_I + εφ α_2 + ... + εφ α_{2n} > 2n εφ $\frac{\alpha_I + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2n}}{2n}$ = Δεχθμενοι την

$$\epsilon \phi \alpha_I + \epsilon \phi \alpha_2 + \dots + \epsilon \phi \alpha_{n+I} > (n+I) \epsilon \phi \frac{\alpha_I + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n+I}}{n+I} \quad (5), \text{ θε δεξαμεν τη n}$$

$$\epsilon \phi \alpha_I + \epsilon \phi \alpha_2 + \dots + \epsilon \phi \alpha_n > n \epsilon \phi \frac{\alpha_I + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n} \quad (6). \text{ Δια n δ μεταβωμεν δπδ}$$

την (5) εις την (6) εικλεγομεν τδ $\alpha_{n+I} = \frac{\alpha_I + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n}$ δτε ή (5) γε-

$$\text{νεται } \epsilon \phi \alpha_I + \dots + \epsilon \phi \alpha_n + \epsilon \phi \frac{\alpha_I + \dots + \alpha_n}{n} > (n+I) \epsilon \phi \frac{\alpha_I + \dots + \alpha_n}{n+I} + \frac{\alpha_I + \dots + \alpha_n}{n} =$$

$$= (n+I) \epsilon \phi \frac{\alpha_I + \dots + \alpha_n}{n} \text{ ή } \epsilon \phi \alpha_I + \dots + \epsilon \phi \alpha_n > n \epsilon \phi \frac{\alpha_I + \dots + \alpha_n}{n}. \text{ Αρα κατα την δρχη της τελεσας έπαγγης δηληθεσεις δια nθε n > 2.$$

$$96) \text{ Να δειχθη δτι : } \frac{\eta \mu x}{2\sigma_{uv}x-I} + \frac{2\eta \mu 2x}{2\sigma_{uv}2x-I} + \dots + \frac{2^{n-I}\eta \mu 2x}{2\sigma_{uv}^{n-I}2x-I} = \\ = \frac{2^v \eta \mu^2 x}{2\sigma_{uv}^v x-I} - \frac{\eta \mu x}{2\sigma_{uv}x-I} \quad (4).$$

Λ σσις. Διάνυτος είναι η μηχανή: $A_I = \frac{\eta\mu x}{2\sigma v x - I}$ και $B_I = \frac{2\eta\mu^2 x}{2\sigma v^2 x + I}$.
 $\frac{\eta\mu x}{2\sigma v x + I} = \eta\mu x \left[\frac{4\sigma v x}{4\sigma v^2 x - I} - \frac{I}{2\sigma v x + I} \right] = \eta\mu x \cdot \frac{2\sigma v x + I}{4\sigma v^2 x - I} = \frac{\eta\mu x}{2\sigma v x - I}$ (3)

(A_I και B_I καλούμεν το α'ν και β'ν μέλος της (I)). Άρα άληθευτικό.

Έστω δτι ή (1) άληθευτικό διαδικασία δηλ. δτι $A_n = B_n$. Ήδη δείχωμεν

ύπο την προϋπόθεσην αυτήν δτι άληθευτικό δτι $n = n+1$, δηλ. δτι:

$A_{n+1} = B_{n+1}$. Αριθμούμεν δτι $A_{n+1} - A_n = B_{n+1} - B_n$ (4). Άλλα δ

$$A_{n+1} - A_n = \frac{2^n \eta\mu^2 x}{2\sigma v^2 x - I} = \frac{2^n \eta\mu^2}{2\sigma v^2 \psi - I} \quad (5) \quad (\text{επειδη } 2^n x = \psi), \text{ και } B_{n+1} - B_n =$$

$$= \frac{2^{n+1} \eta\mu^2 x}{2\sigma v 2^{n+1} x + I} - \frac{2^n \eta\mu^2 x}{2\sigma v 2^n x + I} = \frac{2^{n+1} \eta\mu^2 \psi}{2\sigma v 2\psi + I} - \frac{2^n \eta\mu^2 \psi}{2\sigma v \psi + I} \quad (6).$$

Υψούμεν (5) και (6) γίνεται $\frac{\eta\mu \psi}{2\sigma v \psi - I} = \frac{2\eta\mu^2 \psi}{2\sigma v^2 \psi + I} - \frac{\eta\mu \psi}{2\sigma v \psi + I}$, το διαδικασία διαδικασία.

Άρα ή (I) άληθευτικό διαδικασία διαδικασία $v \in \Phi$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΔΥΣΙΝ

Η δειχθείση διαδικασία μεθόδου της τελείας έπαγωγής, δτι:

$$1) \quad I+2+3+\dots+v = \frac{v(v+1)}{2} \quad \text{ξνθα } v \in \Phi$$

$$2) \quad I+3+5+\dots+2v+1 = v^2 \quad -\#-\quad v \in \Phi$$

$$3) \quad I+2+3+4+\dots+v(v+1) = \frac{1}{3} v (v+1)(v+2) \quad -\#-\quad v \in \Phi$$

$$4) \quad 2+3+5+7+\dots+(v+1)(2v+1) = \frac{v(4v^2+15v+17)}{6} \quad -\#-\quad v \in \Phi$$

$$5) \quad I+2+3+4+\dots+v(v+1)(v+2) = \frac{v(v+1)(v+2)(v+3)}{4} \quad -\#-\quad v \in \Phi$$

$$6) \quad 2+2^2+3+2^2+\dots+v+2^v = 2^v (v-1) \quad -\#-\quad v \in \Phi \geq 2$$

$$7) \quad I+2^2+3^2+\dots+(v-1)v^2 = \frac{v(v+1)(3v^2-v-2)}{12} \quad -\#-\quad v \in \Phi \geq 1$$

$$8) \quad 3+7+11+\dots+(4v-1) = v (2v+1)^2 \quad -\#-\quad v \in \Phi \geq 1$$

$$9) \quad 2^2+4^2+6^2+\dots+(2v)^2 = \frac{2v(v+1)(2v+1)}{3} \quad -\#-\quad v \in \Phi \geq 1$$

$$10) \quad 2^3+4^3+6^3+\dots+(2v)^3 = 2v^2 (v+1)^2 \quad -\#-\quad v \in \Phi \geq 1$$

$$II) \quad \text{Έστω } v \in \Phi \text{ νδη δειχθείση δτι } 3 v(v+1)(2v+1)(3v^2+3v-1) = \text{πολ } 30$$

$$12) \quad " \quad " \quad " \quad " \quad 3^{4v+1} + 10 \cdot 3^v - 13 = \text{πολ } 260$$

- 13) 'Εάν $v \in \Phi$ να δειχθῇ δτι δ $\frac{4^{2v+I} + 3^{3v+I}}{5^{2v+I} + 2^{3v+I}} =$ πολ 7
- 14) " " " δ $\frac{3 \cdot 5^{2v+I} + 2^{3v+I}}{5^{2v+I}} =$ πολ 17
- 15) " " " δ $9^v - 8v-I =$ πολ 64
- 16) " " " δ $\frac{2^{2v-I} \cdot 3^{v+2} + I}{5^{v+2}} =$ πολ 11
- 17) " " " δ $\frac{2^{4(v+2)}}{5^{v+2}} - 15v - 31 =$ πολ 225
- 18) " " " δ $\frac{4^v (9v^2 + 2v + 2) - 2}{5^{v+2}} =$ πολ 54
- 19) " " " δ $v^5 - v =$ πολ 5
- 20) " " " δτι $\frac{\frac{3}{I^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{2v+I}{v^2(v+I)^2}}{\frac{v(v+2)}{(v+I)^2}} =$
- 21) 'Εάν $0 < x < I$ καὶ $v \in \Phi$ να δειχθῇ δτι $\alpha^x < I$ καὶ $\alpha^{-x} > I$
- 22) 'Εάν $v \in \Phi \geq I$, να δειχθῇ δτι $\frac{I}{2} + \frac{I}{2^2} + \frac{I}{2^3} + \dots + \frac{I}{2^v} = I - \frac{I}{2^v}$
- 23) " " " " δ $I + \frac{I}{2^2} + \frac{I}{2^4} + \dots + \frac{I}{2^{v-1}} = 2 - \frac{I}{2^{v-1}}$
- 24) " " " " δ $\frac{I}{2} \cdot \frac{2}{2^2} \cdot \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{v}{2^v} = 2 - \frac{v+2}{2^v}$
- 25) " " " " δ $\frac{I}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{I}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{v(v+I)(v+2)} = \frac{v(v+3)}{4(v+I)(v+2)}$
- 26) Ήδη δειχθῇ δτι, παντες δριθμοῦ N μή διαιρετοῦ δι' ξέλλου δ, ή νυοστή δύναμις εἶναι γενικῶς της μορφῆς N^v πολοδιγύρων οπου $v < \delta$ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ N διεῖ δ.
- 27) Ήδη δειχθῇ δτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου πολλαλῶν δριθμῶν διεῖ τὸν διαιρέτον τοῦ γινομένου μετὰ τοῦ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διεῖ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου τοῦ γινομένου τῶν ὑπολογίων ἐκμετου τῶν δριθμῶν διαιρουμένων χωριστά διεῖ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου.
- 28) 'Εάν εἰς δριθμὸς N εἶναι πολ/σιον τοῦ δ μεῖον 1, καὶ σαν αἱ δυνάμεις αὐτοῦ θεῖεν εἶναι πολ/σια τοῦ δ σαν I έάν εἶναι δριταί, μετον I δεῖ έάν εἶναι περιτταί.
- 29) Παντες δριθμοῦ N τῆς μορφῆς N = πολ δ - V ή νυοστή δύναμις εἶναι N^v = πολ δ + V καθέσσον δ ν εἶναι δρετος ή περιττός.
- 30) 'Εάν $v \in \Phi$ να δειχθῇ δτι ή παρδοτασίς $x^v - \alpha^v$ διαιρεῖται διεῖ

$x = a$, ή $\delta \epsilon x^v + a^v$ διαιρετικός δια $x + a$, έτσι ότι v είναι περιττός.
 3I) Εάν $v \in \mathbb{Q}$ και δειχθεί δτι το πολυώνυμο $x^{2v-1} + a^{2v-1}$ είναι διαιρετός από $x + a$.

$$32) \text{ } \forall v \in \Phi \geq 2 \text{ } \forall d \in \chi \exists t \in 2.6.10 \dots (4v-6)(4v-2) = (v+1)(v+2) \dots (2v-1) \text{ } 2v \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad \dots \quad \text{nat} \quad \text{nat}$$

33) $\text{Bd}\alpha U_1 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta}, \quad U_2 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta} \quad (\alpha \neq \beta),$ $\text{v}\delta \text{deix}\tilde{\eta} \text{ Bt}\alpha U_v = \frac{\alpha^{v+1} - \beta^{v+1}}{\alpha - \beta}$
 naf Bt\alpha \delta\alpha n\theta e n > 2 elva! $U_n = (\alpha + \beta) U_{n-1} - \alpha\beta U_{n-2}$

$$34) \text{ Edv } v \in \Phi, \text{ vd } \delta_{E^L X^R} \text{ vti } \frac{\alpha + \beta}{2} \geq (\frac{\alpha + \beta}{2})^{2v}$$

$$= \frac{x_v - I}{I + x_{v-I} \psi_{v-I}} \quad (1). \quad \text{Νές δειχθή δτι } x_v = \frac{x_v - I}{I + x_{v-I} \psi_{v-I}} \quad (2) \quad \text{προ:}$$

$$Z_\lambda = \psi_0 + \psi_1 + \dots + \psi_v \quad (3)$$

36) $N \in \mathbb{N}$ է չի բաժանվում $\sqrt{2}$ - ի համարի դեպքում:

$$37) \quad \text{BdV } v \in \Phi \text{ vde } \delta_{\tau_1} x^{\delta_{\tau_1}} \delta_{\tau_1} 2^v > v \text{ nat } \delta_{\tau_1} (v^2 + 1)^{2v} > v^{2v} (v-1)^{v-1} (v+1)^{v+1}$$

38) Едъ $v \in \Phi$ ≥ 2 и $\delta_{v1}x^{\theta_v}$ е $(v!)^2 > v^v$, наст. $\delta_{v1} I.3.5...$

$$\dots(2v-3)2^{v-1} = v(v+1)(v+2)\dots(2v-2).$$

$$39) \quad \text{Edv} \quad v \in \Phi \geq 3 \quad \text{vt} \quad \delta \leq v < \sqrt{3} \quad 2^v > \frac{v+2}{2} \quad \text{nat} \quad \delta v < \sqrt{v} < \sqrt[3]{3}.$$

$$40) \quad \text{Edv } v \in \Phi > I \text{ ved } \delta e t x \text{ iff } \delta t v = 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots \cdot 2v < (v+I)^v,$$

$$41) \text{ 'Edu } v \in \mathbb{Q} \geq 1 \text{ vd } \delta \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \frac{1}{1,2} + \frac{1}{2,3} + \dots + \frac{1}{v(v+1)} < I \text{ hal } \delta.$$

$$\tau_k = 1 + \frac{1}{2,3} + \frac{1}{3,4} + \dots + \frac{1}{n,n+1} < 2.$$

$$42) \quad \text{Se } v \in \mathbb{Q} \text{ e } \delta \in \chi^0_{\mathbb{Q}} \text{ se } 2^v > 1 + v \sqrt{2^{v-1}}$$

$$43) \text{ Edv } v \in \mathbb{Q} \geq 4 \text{ vñ } \text{ ñeñxqñ } \text{ ñt, } 3^{v-1} > v^2$$

$$44) \text{ If } v \in \Phi \text{ and } \delta_{\operatorname{rk}(\Phi)} \leq v - \frac{3.7.13...}{5.9.15...}(4v-1) < \sqrt{\frac{3}{4v+3}}$$

$$45) \text{ Edv } 0 < x < 1 \text{ naf } v \in \mathbb{Q} \text{ vi } \text{összegjelöl } 1+x+x^2+\dots+x^v < \frac{1}{1-x}$$

46) $\forall v \in \Psi \gg 10$ $v \neq 0$ $x^v \neq 0$ $2^v > 3^v$

$$47) \text{ If } x, a > 0 \text{ and } v \in \Phi \geq 2 \text{ and } \deg(x^v) \text{ is even, then } (x+a)^v > x^v + vax^{v-1}$$

$$46) \quad \text{Let } v \in \mathbb{C} \quad \text{then} \quad v \in \mathbb{S} \subseteq \mathbb{X}(\mathfrak{B}) \quad \text{if and only if} \quad \left(v + \frac{2v}{\sqrt{v^2 + 1}}\right)^2 < v^2 + 1$$

$$< \left(v + \frac{2v}{2} + \frac{I}{4v+I} \right)^2 .$$

49) Εάν $v \in \Phi$ καὶ $x > I$ νόμος δειχθῆ δτι $v \frac{2v+I}{2v-I} > \frac{x}{x-I}$.

50) Εάν $0 < a_1, a_2, \dots, a_v < I$ καὶ $s_v = a_1 + a_2 + \dots + a_v$, νόμος δειχθοῦν αἱ ἀνισότητες τοῦ WEIERSTRASS.

α) $(I-a_1)(I-a_2)\dots(I-a_v) > I-s_v$ β) $(I+a_1)(I+a_2)\dots(I+a_v) > I+s_v$

γ) $(I-a_1)(I-a_2)\dots(I-a_v) < \frac{I}{I+s_v}$ δ) $(I+a_1)(I+a_2)\dots(I+a_v) > \frac{I}{I-s_v}$ ε) $s_v < I$

51) Νόμος δειχθῆ δτι $\frac{I}{v+I} + \frac{I}{v+2} + \dots + \frac{I}{2v} < I$ διότι $v \in \Phi$.

52) Εάν $v \in \Phi$ $x \in \Phi$ νόμος δειχθῆ δτι $\frac{I}{x+I} v^{x+I} < I^{x+2} + \dots + v^x < \frac{I}{x+I} (v+I)^{x+I}$.

53) Εάν $v \in \Phi$ $x \in \Phi$ νόμος δειχθῆ δτι $\frac{I}{3v} > v - \frac{I}{3v} - \sqrt[3]{v^2} - I > 0$.

54) Εάν $v \in \Phi$ καὶ ἀφοῦ δειχθῆ δτι $I + \frac{I}{\sqrt{2}} + \frac{I}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{I}{\sqrt{v}} < 2\sqrt{v}$, νόμος δειχθῆ δτι $(\frac{I}{4}v)^v < v! < \frac{I}{6}(v+I)(v+2)^{\frac{1}{2}}$.

55) Εάν $\alpha > \beta > 0$ καὶ $v \in \Phi$ νόμος δειχθῆ δτι $(v+\beta)^v > \frac{\alpha^{v+\beta} - \beta^{v+\beta}}{\alpha - \beta} > (v+\beta)^v$.

56) Εάν $v \in \Phi$ νόμος δειχθῆ δτι $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_3} + \dots + \frac{\alpha_{v-1}}{\alpha_v} + \frac{\alpha_v}{\alpha_v} > v$.

57) Εάν $v \in \Phi$ καὶ $x_1, x_2, \dots, x_v \in \Phi$ νόμος δειχθῆ δτι $(I+x_1)(I+x_2)\dots(I+x_v) > 2^v \sqrt{x_1 x_2 \dots x_v}$.

58) Δίδεται ἡ ἀκολουθία $(U_1, U_2, \dots, U_v, \dots)$ διόπου $U_I = \sqrt{2}$, καὶ $U_{v+I} = \sqrt{2+U_v}$ ($v \geq I$). Νόμος δειχθῆ δτι $2-U_v < \frac{1}{2-I}$.

59) Οἱ ἀριθμοὶ a_1, a_2, \dots, a_v εἰναι δύνομοι. Αφοῦ δειχθῆ δτι $(a_1+a_2+\dots+a_v)(\frac{I}{a_1} + \frac{I}{a_2} + \dots + \frac{I}{a_v}) \geq v^2$ (I) νόμος δειχθῆ κατόπιν δτι εἰναι $\frac{1}{v+I} + \frac{1}{v+2} + \dots + \frac{1}{v+n} > 2$, δταν καὶ $\rightarrow \infty$.

- 60) Διεδ $v \in \Phi$ ο μαζι $\alpha, \beta > 0$ να δειχθή δτι $2^{v-I}(\alpha^v + \beta^v) \geq (\alpha + \beta)^v$.
- 61) 'Εδν $v \in \Phi$ να δειχθή δτι $2^{7v-3} + 3^{2v+3} \cdot 5^{4v+I} = πολ23.$
- 62) 'Εδν $v \in \Phi$ να δειχθή δτι $5^{2v+I} + 2^{v+4} + 2^{v+I} = πολ23.$
- 63) 'Εδν $v \in \Phi$ να δειχθή δτι $\frac{v}{3} \sqrt{\frac{v}{3}} v (v+I) < \frac{2(v+I)}{3}^3$
- 64) 'Εδν $v \in \Phi \geq 2$ μαζι x τυχόν θετικός να δειχθή δτι $x^v - I > v(x-I)$
- 65) 'Εδν $x > \psi > 0$ μαζι α μαζι β δικέρατοι μαζι τοιούτοι έστε $\alpha + \beta = I$,
να δειχθή δτι $x^\alpha \cdot \psi^\beta \geq \alpha x + \beta \psi$.
- 66) 'Εδν x_1, x_2, \dots, x_v είναι θετικοί μαζι $v \in \Phi \geq 2$ να δειχθή δτι

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_v}{v} > \sqrt[x]{x_1 x_2 \cdots x_v}.$$
- 67) 'Εδν $\mu, v \in \Phi$ να δειχθή δτι $F(\mu, v) = 3^\mu + 3^v + 2(3^\mu \mu^2 - 3^v v^2 - I)$
 $= πολ 4.$
- 68) Θεωρούμεν την διαλογιστικήν x_1, x_2, \dots, x_v δημού $x_v = x_{v-1} x_{v-2}$
μαζι $v \in \Phi \geq 3$. 'Εδν Π_v παριστά το γινόμενον τών ν δρων της,
να δειχθή δτι $\Pi_v = x_2 \Pi_{v-1} \Pi_{v-2}$.
- 69) Διστατι γεωμ. πρόδοσ με θετικούς δρους. Να δειχθή δτι δ με -
σος διριθμητικός τού ποντίου μαζι τού τελευταίου δρου είναι πάν.
τοτε μεγαλύτερος τών μέσου πριθμητικού δλων τών δρων της.
- 70) Να δειχθή δτι έδν το γινόμενον ν θετικών διριθμών ίσοτας με
I, τότε το διθροίσμα τών ν τοπιών διριθμών είναι μεγαλύτερον
τού v .
- 71) 'Εδν $v \in \Phi \geq 2$ μαζι $x^3 = x^2 + x + I$, να δειχθή δτι $x^{3v} = A_v x^2 +$
 $+ B_v x + \Gamma_v$ (I) Ενθα $A_{v+I} = 4A_v + 2B_v + \Gamma_v$, $B_{v+I} = 3A_v + 2B_v + \Gamma_v$ μαζι
 $\Gamma_{v+I} = 2A_v + B_v + \Gamma_v$ (2).
- 72) Να δειχθή δτι το διθροίσμα τών πέμπτων μαζι έβδόμην δινόμεων
τών ν πρώτων δικέρατων ίσοτας με το 2πλόσιον τού τετραγώνου
τού διθροίσματος τών κέβων τών αβτών διριθμών.
- 73) 'Εδν $v \in \Phi$ να δειχθή δτι $\frac{2}{3} v \sqrt{v} \left(\sqrt{I} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{v} \right) < \frac{4v+3}{6} \sqrt{v}$
- 74) 'Εδν $v \in \Phi$ να δειχθή δτι $I \cdot 2 + 2 \cdot \frac{I}{2} + 3 \cdot 4 \left(\frac{I}{2} \right)^2 + \dots + v(v+I) \left(\frac{I}{2} \right)^{v-I} =$
 $= 16 - \left(\frac{I}{2} \right)^{v-1} (v^2 + 5v + 8).$

75) Εάν $v \in \mathbb{N}$ να δειχθή δτι $I + \frac{\alpha_1}{x-\alpha_1} + \frac{\alpha_2 x}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)} + \dots$
 $\dots + \frac{\alpha_v x}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_v)} = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_v)^{-v}$ διότι

λας τας τιμές των γραμμάτων διεταί τας δημοσιεύσεις είναι μηδενικές.

76) Εάν $v, n \in \mathbb{N}, v \geq n+1$ και x, x_1, x_2, \dots, x_v θετικοί, να δειχθή δτι
 $\sum_{v=1}^n x_i \geq \sum_{v=1}^{n+1} x_i$.

77) Εάν α_1 είναι διάριθμης μέσος των x καὶ ψ , α_2 διάριθμος των α_1 καὶ ψ , α_3 διάριθμος των α_2 καὶ ψ , \dots καὶ $\alpha_v = [I - (-\frac{I}{2})^v]x + [2 + (-\frac{I}{2})^v]\psi$.

78) Εάν $v \in \mathbb{N}$ να δειχθή ότι $(I+x)^v(I+x^v) > 2^{v+1}x^v$.

79) Διδεταί ή δικολουθεία $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_v)$ δημοσιεύεται ότι $x_1 = x, x_2 =$
 $= (\frac{x_1^2 + x_2^2}{x+1})^{\frac{1}{2}} \dots x_v = (\frac{x_1^2 + x_{v-1}^2}{x+1})^{\frac{1}{2}}$. Να δειχθή δτι ή δικολουθεί είναι φραγμένη προς τα δυνάμεια, δηλ. ύπαρχει διάριθμος λόγος διαίρεσης $v > I$ να είναι $x_v < \lambda$ δημοσιεύεται $0 < \lambda < \psi$.

80) Εάν $v \in \mathbb{N}, v \geq 2$ καὶ $(v-I)^2 + 2(x_1 - x_v)\rho + x_1^2 + x_v^2 =$
 $= 2(x_1 x_2 + \dots + x_{v-1} x_v - x_2^2 - x_3^2 - \dots - x_{v-1}^2)$ να δειχθή δτι οι διάριθμοι x_1, x_2, \dots, x_v είναι διαδοχικοί δροι διάριθμης προδού με λόγον ρ .

81) Εάν $v \in \mathbb{N}$ καὶ τεθή $x + \frac{I}{x} = \psi$, να δειχθή δτι $x^v + \frac{I}{x^v}$ τεθεται ύπο την μορφήν δικερασίου πολυωνυμίου δια πρόβειο ψ .

82) Εάν $v \in \mathbb{N}, v \geq 1$ να δειχθή δτι $(v^2 + I)^{2v} > v^{2v}(v-I)^{v-1}(v+I)^{v+1}$.

83) Εάν $v \in \mathbb{N}$ να δειχθή δτι $(v!)^3 < v^v(\frac{v+I}{2})^{2v}$.

84) Εάν $v \in \mathbb{N}$ να δειχθή δτι $I \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2v-1) < v^v$.

85) Εάν $v \in \mathbb{N}$ καὶ οἱ αἱ καὶ βἱ θετικοὶ καὶ δικερασίοι τοιοῦτοι, ώστε δια καὶ $\alpha > \beta$ να δειχθή δτι $(I + \frac{x}{\alpha})^v > (I + \frac{x}{\beta})^v$.

86) 'Εάν $v \in \Phi$ ή 0 να δειχθῇ ότι το πολυνόμιον $x^{v+2} - (v+2)x + (v+1)$ έχει διπλήν ρίζαν.

87) 'Εάν $v \in \Phi$ να δειχθῇ ότι $2^{v(v+1)} > (v+1)^{v+1} \left(\frac{v}{1}\right)^v \left(\frac{v-1}{2}\right)^{v-1}$...
 $\dots \left(\frac{2}{v-1}\right)^2 \left(\frac{1}{v}\right)$.

88) 'Εάν $v \in \Phi$ να δειχθῇ ότι $\frac{v}{v+1} = \frac{v(v-1)}{(v+1)(v+2)} + \frac{v(v-1)(v-2)}{(v+1)(v+2)(v+3)} + \dots + \frac{v(v-1)(v-2)\dots 2\cdot 1}{(v+1)(v+2)\dots 2v} = \frac{1}{2}$.

89) 'Εάν $v \in \Phi$ να δειχθῇ ότι :

$$1 + 2(v-1) + 2^2 \frac{(v-2)(v-3)}{1 \cdot 2} + 2^3 \frac{(v-3)(v-4)(v-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \dots = \frac{1}{3} \left[2^{v+1} + (-1)^v \right].$$

90) 'Εάν $v \in \Phi$ κατ' $\alpha_v = (2 + \sqrt{2})^v + (2 - \sqrt{2})^v$ να δειχθῇ ότι διαίρεται από v είναι αρτιός κατ' ότι $(2 + \sqrt{2})^v = \alpha_v - 1$.

91) Διδεται η δικολουθία $U_1, U_2, \dots U_v, U_{v+1}$, ένθα $v \in \Phi$ κατ' οι διέ την δποιαν $U_{v+1} = \frac{1}{2} (U_v + \frac{1}{U_v})$ καθώς κατ' $U_1 > 1$.

$$\text{Να δειχθῇ ότι } U_1 > U_2 > \dots U_v > 1, \text{ κατ' άρα } \frac{U_{v+1}}{U_{v+1}} = \left(\frac{U_1 - 1}{U_1 + 1}\right)^2 < 1.$$

92) Διδονται οι αριθμοί $U_1, U_2, \dots U_v \dots$ δπου $U_1 = U_2 = 1$ κατ' $U_v = U_{v-1} - 2U_{v-2}$ κατ' $v \in \Phi$. Να δειχθῇ ότι οι αριθμοί U_v είναι περιττοί.

93) 'Εάν $v \in \Phi$ κατ' α θετικός κατ' ακεραίος, να εύρεθῃ το έθροισμα $\Sigma \frac{1}{(\alpha + v - 1)(\alpha + v)}$.

94) Να δειχθῇ ότι το γινόμενον ν διαδοχικών φυσικών διαιρετών διαιρετός είναι v .

95) Να δειχθῇ ότι $(\alpha + x)^v = \alpha^v + v\alpha^{v-1}x + \frac{v(v-1)}{2!} \alpha^{v-2} x^2 + \dots$

$$\dots + \frac{v(v-1)(v-2)\dots(v-p+2)}{(p-1)!} \cdot \alpha^{v-p+1} x^{p-1} + \dots + x^v, \quad \text{έδν } v \in \Phi.$$

96) Έδν $v \in \Phi$ καὶ $1 \leq v < \alpha + I$ Ενθα $\alpha \in A$ καὶ φυσικός, νᾶ δειχθῇ δτι τοῦ αριθμού $\frac{I}{v} - \frac{I}{v} = \frac{\alpha-v+I}{v+I} + \frac{I}{v} \cdot \frac{\alpha-v+I}{v+I} \cdot \frac{\alpha-v}{v+2} - \frac{I}{v}$.

$$\cdot \frac{\alpha-v+I}{v+1} \cdot \frac{\alpha-v}{v+2} \cdot \frac{\alpha-v+I}{v+3} + \dots \quad \text{έπλ } \alpha-v+2 \text{ ορων λεοῦται με } \frac{I}{\alpha+I}$$

97) Δέοεται ἢ ἀνολουθία τοῦ FIBONACI U_1, U_2, \dots, U_v οπού $U_1 = U_2 = I$ καὶ $U_v = U_{v-1} + U_{v-2}$ διδ καθε ἀκέραιον $v \geq 3$. Νᾶ ἐκφρασθῇ τοῦ αριθμοῦ $\Sigma = U_2 + U_5 + \dots + U_{3v-1}$ συναρτήσει τοῦ U_{3v+I} τῆς ἀνω ἀνολουθίας διδ καθε ἀκέραιαν καὶ θετικήν τιμήν τοῦ v .

$$98) \quad \text{Έδν } U_{v+2} = \frac{U_{v+I} + U_v}{2} \text{ καὶ } U_1 = U, \quad U_2 = \frac{U + V}{2}$$

τότε διδ καθε $v \in \Phi$ θει εἶναι $3U_v = U \left[I - \left(-\frac{I}{2} \right)^{v-I} \right] + V \left[2 + \left(-\frac{I}{2} \right)^{v-I} \right]$

$$99) \quad \text{Εἰς τὴν ἀνολουθίαν τοῦ FIBONACCI νᾶ δειχθῇ δτι}$$

$$U_{v-I}^2 + U_v^2 = U_{2v-I}, \quad I + U_2 U_4 + \dots + U_{2v} = U_{2v+I}, \quad U_v^2 - U_{v-I} U_{v+I} =$$

$$= (-I)^{v-I}.$$

$$100) \quad \text{Οἱ φυσικοὶ } \alpha, \beta, \mu, \rho, v \quad \text{έπλ } \tauῶν δποῶν δρ δέν εἰναι τέλειον τετράγωνον πληροῦν τοῖς σχέσεις } 0 < \alpha - \beta \sqrt{\rho} < I \text{ καὶ}$$

$$\alpha^2 - \beta^2 \rho = 4\mu. \quad \text{Έδν } \theta \text{σωμεν } (\alpha + \beta \sqrt{\rho})^v = \alpha_v + \beta_v \sqrt{\rho} \text{ καὶ συμβολισωμεν με } [x] \text{ τοῦ μεγιστον ἀκέραιον δ δποῖος πληροῦ τὴν}$$

$$[x] \leq x, \quad \text{νᾶ δειχθῇ δτι } \alpha_v = [\beta_I \sqrt{\rho}] + I, \text{ καὶ δτι } (\alpha + \beta \sqrt{\rho})^v + I = \text{πολ } 2^v.$$

$$101) \quad \text{Έδν εἰς μίαν ἀνολουθίαν εἶναι } U_1 = I, \quad U_2 = 2 \quad \text{καὶ}$$

$$U_\mu = U_{\mu-I} + U_{\mu-2} \quad \text{δπο } \mu \in \Phi \geq 3, \quad \text{νᾶ δειχθῇ δτι } U_I^2 + U_2^2 + \dots + U_v^2 =$$

$$= U_v U_{v+I}, \quad U_3 + U_6 + \dots + U_{3v} = \frac{I}{2} (U_{3v+2} - I) \quad \text{καὶ } U_1 + U_3 + U_5 + \dots$$

$$\dots + U_{2v+1} = U_{2v+2}$$

ΙΟ2) Εάν $\alpha > 0$ να δειχθή ότι είς την άκολουθαν $x_1 = \sqrt{\alpha}$, $x_2 = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha}}$, $x_3 = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha}}}$ υπάρχει άριθμός λόγος διέπιπτες $v > I$ να είναι $x_v < \lambda$.

ΙΟ3) Να δειχθή ότι το άθροισμα των v ορών γεωμ. προδόσου διέδεται από τον τύπο $\Sigma = \frac{\alpha(\omega^v - I)}{\omega - I}$, όπου α δη πρώτος ορος καθ' ω διάλυτος προδόσου.

ΙΟ4) Διέδεται ότι $\alpha + \beta = x$, $\alpha\beta = \psi$, $A_2 = x - \frac{\psi}{x - I}$, $A_3 = x - \frac{\psi}{x - I}$ κ.ο.κ. δηλαδή διέπιπτες $x > 1$ να είναι $A_{n+1} = x - \frac{\psi}{A_n}$ ($x \neq I$). Να δειχθή ότι $A_v = \frac{(\alpha^{v+I} - \beta^{v+I}) - (\alpha^v - \beta^v)}{(\alpha^v - \beta^v) - (\alpha^{v-I} - \beta^{v-I})}$.

ΙΟ5) Εάν $v \in \Phi$ να δειχθή ότι $(v!)^2 > v^v$.

ΙΟ6) Εάν $v \in \Phi \geq I$, να δειχθή ότι :

$$\frac{v^2}{2} < \sum_{v=I}^v < \frac{(v+I)^2}{2}.$$

ΙΟ7) Εάν $v \in \Phi$ να δειχθή ότι $\sum_{v=I}^v v^2 < \frac{(v+I)^3}{3}$.

ΙΟ8) Να δειχθή ότι $I \cdot 2 \cdot 3 \cdots \mu + \cdots + (v-I)v(v+I)\cdots(v+\mu-2) + v(v+I)\cdots(v+\mu-I) = \frac{v(v+I)\cdots(v+\mu)}{\mu+I}$.

ΙΟ9) Εάν $v \in \Phi \geq 2$ να δειχθή ότι $\sum_{\kappa=0}^{v-I} (v-\kappa)(v+\kappa) = \frac{v(v+I)(v+2)}{6}$.

ΙΙΟ) Εάν $\alpha_i, \beta_i > 0$ διέπιπτες $i = I, 2, \dots, v$ καθ' άναλογοι μεταξύ των καθ' διέπιπτες θετικούς άριθμούς α, β είναι $\alpha + \beta = I$,

$$\text{νδειχθή } \hat{\eta} \text{ δινεστης } \left(\sum_{n=1}^v \alpha_n \right)^\alpha \cdot \left(\sum_{n=1}^v \beta_n \right)^\beta > \sum_{n=1}^v (\alpha_n^\alpha \beta_n^\beta).$$

III) 'Εδν $v \in \Phi$ νδειχθή θτι :

$$I - 3v + \frac{3v(3v-3)}{1 \cdot 2} - \frac{3v(3v-4)(3v-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots = 2(-I)^v$$

II2) 'Εδν $v \in \varphi$ καν $\mu+v > 0$, νδειχθή θτι :

$$\frac{I}{\mu+I} = \frac{v-I}{(\mu+I)(\mu+2)} + \frac{(v-I)(v-2)}{(\mu+I)(\mu+2)(\mu+3)} - \dots = \frac{I}{\mu+V}$$

II3) Νδειχθή θτι $I + v + \frac{v(v+I)}{1 \cdot 2} + \frac{v(v+I)(v+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$

$$\dots = \frac{(v+\mu-I)!}{v!(\mu-I)!}, \text{ ξνθα μ δ } \delta\pi\iota\theta\mu\delta\varsigma \tau\bar{\omega}\nu \text{ δρων.}$$

II4) Νδειχθή θτι :

$$\frac{\mu}{\sum_{v=1}^{\mu}} \cdot \frac{v(v+I)(v+2) \dots (v+p-I)}{p!} =$$

$$= \frac{\mu(\mu+I)(\mu+2) \dots (\mu+p)}{(\mu+I)!}$$

II5) 'Εδν $v \in \Phi \geq 2$ νδειχθή θτι $\sum_{n=0}^{v-I} (v-n)(n+I) =$

$$= \frac{v(v+I)(v+2)}{6}$$

II6) 'Εδν $v \in \Phi$ νδειχθή θτι $\sum_{n=1}^{v-I} (x+n)2^{n-1} = 2^v v$

II7) 'Εδν $0 < \alpha \leq I$ καν $v \in \Phi$ νδειχθή θτι :

$$\sum_{n=1}^v \frac{n(v-\alpha)}{\alpha + v} < \frac{v(v+I)}{2\alpha}$$

II8) Εις τήν δικολουθίαν τοῦ FIBONACCI νδειχθή θτι :

$$\alpha) U_{v+2} - I = U_0 + U_1 + \dots + U_{v-I} + U_v \quad \beta) U_v^2 = U_{v-I} U_{v+I} \neq I.$$

II9) 'Εδν $U_1, U_2, U_3, \dots U_v \dots$ είναι οι δροι τής δικολου-

θέας τοῦ FIBONACCI ήταν x_1, x_2, \dots, x_v οι δροι τῆς ἀκολουθίας $\alpha, \beta, \alpha+\beta, \dots$ εἰς τὴν διπολαν ἔκαστος δρος εἶναι τὸ διδροισμα τῶν δύο προηγουμένων, να δειχθῇ δτι $x_{v+1} = U_v \alpha + U_{v+1} \beta$.

I20) Δειχταὶ ή ἀκολουθία U_0, U_1, \dots, U_v δην $U_0 = I, U_1 = I$ ηταν $U_v = U_{v-1} + U_{v-2}$, να δειχθῇ δτι :

$$U_v^6 - 2U_v^6 + (-I)^v = [2U_v U_{v-1} - (-I)^v]^3, \text{ εἰν } v \geq 2.$$

I21) Να δειχθῇ δια τῆς μεθόδου τῆς τελείας ἐπαγωγῆς ὁ τύπος τοῦ MOIVRÉ (συν $x + i\eta\mu x$)^v = συν(vx) + iημ(vx).

I22) Εάν $P_v = p_v$ (συν $x_v + i\eta\mu x_v$) ἔνθα $v \in \mathbb{Q}$ να δειχθῇ δτι $P_I P_2 \dots P_v = p_I p_2 \dots p_v [\text{συν } x_I + x_2 + \dots + x_v + i\eta\mu(x_I + x_2 + \dots + x_v)]$.

I23) Εάν α_v ηταν β_v εἶναι δύο θετινοὶ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι ὅτι $\alpha_v = -\frac{I}{2} - (\alpha_{v-1} + \beta_{v-1})$ ηταν $\alpha_v \beta_v = n^2$ δην κ σταθερὸς ηταν $v \in \mathbb{Q}$ ή μηδέν. Ηδ δειχθῇ δτι εάν α_0 ηταν β_0 εἶναι πρῶτοι ἀριθμοὶ ἐκδιπλωμένης τῶν ἀκολουθῶν αὐτῶν ηταν $\alpha_0 > \beta_0$, τότε : $\alpha_{v-1} > \alpha_v > \beta_v > \beta_{v-1}$ ηταν εάν $\alpha_v = n(I + 2\lambda_v)$ τότε $\lambda_v < \lambda_0^2$.

I24) Εστωσαν $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_v$ οι δροι γεωμετρικῆς προσδου με θετινοὺς δρους ηταν λόγον μεγαλύτερον ή μικρότερον τῆς μονάδος. Δειξατε τότε οι δροι μιᾶς ἀριθμητικῆς προσδου $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v$ τῆς διπολαν οἱ δύο πρῶτοι δροι εἶναι τίσοι με τὰς ἀντιστοῖχους τῶν τῆς γεωμετρικῆς, δηλ. $\alpha_1 = \gamma_1, \alpha_2 = \gamma_2$ εἶναι ἀπό τοῦ τρίτου δρου ηταν ἐφεξῆς μικρότεροι τῶν ἀντιστοῖχων δρων τῆς γεωμετρικῆς δηλ. $\alpha_3 < \gamma_3, \dots, \alpha_v < \gamma_v$ δην $v \geq 3$. Πρός τοῦτο στηριχθεῖτε εἰς τὴν πρότασιν, τὴν διπολαν ἀποδειξατε, δτι : " εάν εἰς

μέσαν άναλογιαν δεῖς δρος είναι μεγαλύτερος τῶν τριῶν ξλλων, τότε το διθροισμα τοῦ μεγαλυτέρου καὶ μικροτέρου δρου είναι μεγαλύτερον τοῦ διθροισμάτος τῶν δύο ξλλων".

$$I25) \Delta\delta\epsilon\tau\alpha\lambda\mu\delta\sigma F(v+I) = \frac{I}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{I+\sqrt{5}}{2} \right)^v - \left(\frac{I-\sqrt{5}}{2} \right)^v \right]$$

Ενθα νεφ. Άφού δειχθῆ ἡ σχέσις $F(v+I) = F(v) - F(v-I)$, νό δειχθῆ δτε διθροισμός $F(v)$ είναι διερατικός διά πάθε διερατικός τιμήν τοῦ v .

$$I26) \text{Έδν } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q} \text{ καὶ δχι καὶ οἱ τρεῖς ίσοι μεταξό των, νό δειχθῆ δτε : } (\alpha + \beta)^{\gamma} (\alpha + \gamma)^{\beta} (\beta + \gamma)^{\alpha} < \left[\frac{2}{3} (\alpha + \beta + \gamma) \right]^{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$I27) \text{Έδν } \alpha, \beta, \gamma, x > 0 \text{ καὶ δχι δλοι ίσοι μεταξό των, νό δειχθῆ δτε : } \alpha x^{\beta-x} + \beta x^{\gamma-\alpha} + \gamma x^{\alpha-\beta} > \alpha + \beta + \gamma.$$

$$I28) \text{Έδν } \alpha, \beta, \gamma \text{ είναι τρεῖς διερατικοί, νό δειχθῆ δτε : } \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}} \cdot \beta^{\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}} \cdot \gamma^{\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}} > \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$$

$$I29) \text{Νό δειχθῆ δτε } \frac{3}{\beta+\gamma+\delta} + \frac{3}{\gamma+\delta+\alpha} + \frac{3}{\delta+\alpha+\beta} + \frac{3}{\alpha+\beta+\gamma} > \frac{16}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$$

$$I30) \text{Έδν οἱ } \alpha, \beta, \gamma \dots \text{ καὶ } \kappa, \lambda, \mu \dots \text{ είναι δλοι θετικοί, νό δειχθῆ δτε : } \left(\frac{\kappa + \lambda + \mu + \gamma + \dots}{\alpha + \beta + \gamma + \dots} \right)^{\alpha + \beta + \gamma + \dots} > \kappa^{\alpha} \lambda^{\beta} \mu^{\gamma} \dots$$

$$I31) \text{Έδν } \mu \text{ καὶ } v \text{ είναι θετικοί δπου } \mu > v, \text{ νό δειχθῆ δτε : } \frac{\alpha_1^{\mu} + \alpha_2^{\mu} + \dots + \alpha_v^{\mu}}{\alpha_1^v + \alpha_2^v + \dots + \alpha_v^v} > \frac{\alpha_1^{\mu} + \alpha_2^{\mu} + \dots + \alpha_v^{\mu}}{\alpha_1^v + \alpha_2^v + \dots + \alpha_v^v}.$$

δπου οἱ $\alpha_1^v, \alpha_2^v, \dots, \alpha_v^v$ είναι θετικοί δριθμοί ή δε λειτης συμβαν-

I32) νετ δταν $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_v$

$$I32) \text{Έδν } U_v = (3 + \sqrt{5})^5 \text{ δπου } v \in \mathbb{Q} \text{ νό δειχθῆ δτε δ } U_v$$

είνατε της μορφής $\alpha + \beta\sqrt{5}$ κατ' όπι $(3 + \sqrt{5})^v \leftarrow I = πολ 2^v$.

I33) 'Εάν $v \in \Phi \gg 3$ κατ' ή διολουθεία $U_1, U_2, U_3 \dots$ διεύ την δύοταν $U_1 = I$, $U_2 = 4$ κατ' $U_v = 2U_{v-1} + U_{v-2} = 2$, να δειχθή ότι $U_v = v^2$.

I34) 'Εάν $x = \alpha_1$, $x = \alpha_2 \dots x = \alpha_v$ είνατε θετικοί δριθμοί σαν $v \in \Phi$

$$\text{κατ' } \alpha = \frac{\nu - I}{\nu}, \quad \text{να δειχθή ότι} : \quad \sum_{I=1}^v \frac{I}{x - \alpha_I} \gg \frac{\nu}{x - \alpha}.$$

I35) 'Εάν $v \in \Phi$ κατ' ουν $\theta = \kappa + \frac{I}{\chi}$, να δειχθή ότι :

$$2 \operatorname{συν}(v\theta) = U^v + \frac{I}{U^v}.$$

I36) 'Εάν δειχθή ότι $\frac{I}{2} \operatorname{εφ} \frac{\chi}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{εφ} -\frac{\chi}{2} + \dots$

$$\dots + \frac{I}{2^v} \operatorname{εφ} -\frac{\chi}{2^v} = \frac{I}{2^v} \operatorname{εφ} -\frac{\chi}{2^v} - \operatorname{εφ} \chi.$$

I37) Να δειχθή ότι $(I + i)^v = 2^{\frac{v}{2}} (\operatorname{συν} \frac{\sqrt{v}\Pi}{4} + i \operatorname{ημ} -\frac{v\Pi}{4})$.

I38) Διδούνται οι θετικοί δριθμοί α κατ' β, ένθα $\alpha < \beta$.

Θεωρούμεν την διολουθείαν τῶν ζευγῶν τῶν δριθμῶν $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \dots$

$$\dots (\alpha_v, \beta_v) \quad \text{όπου } \alpha_I = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \beta_I = \sqrt{\alpha_I \beta_I}, \quad \alpha_2 = \frac{\alpha_I + \beta_I}{2}, \quad \beta_2 = \sqrt{\alpha_2 \beta_I}$$

$$\text{κ. ο. κ. κατ' γενικώς } \alpha_v = \frac{\alpha_{v-I} + \beta_{v-I}}{2}, \quad \beta_v = \sqrt{\alpha_v \beta_{v-I}}, \quad \text{ένθα}$$

$\alpha = \beta$ συν ω , κατ' $0 < \omega < \frac{\Pi}{2}$. Να δειχθή ότι :

$$\beta_v = \beta \operatorname{συν} \frac{\omega}{2} \operatorname{συν} \frac{\omega}{2^2} \cdot \operatorname{συν} \frac{\omega}{2^v}.$$

I39) Να δειχθή ότι $\eta μ 2x + \eta μ 4x + \dots + \eta μ 2(v-I)x =$

$$= \frac{\eta μ}{\eta μ \alpha} \frac{(v-I)x}{2} \eta μ \frac{vx}{2}$$

I40) Να δειχθή ότι $\operatorname{συν} x + \operatorname{συν} 3x + \operatorname{συν} 5x + \dots$

$$\dots + \sigma_{uv} (2v-1)x = \frac{\eta \mu 2vx}{2\eta \mu x}.$$

I41) Να δειχθεί ότι : $\eta \mu^3 (3^{v-1}x) + 3\eta \mu^3 (3^{v-2}x) + 3^2 \eta \mu^3 (3^{v-3}x) + \dots + 3^{v-1} \eta \mu^3 x = -\frac{3^v \eta \mu^3 - 0 \cdot 3^v x}{4}$

$$\begin{aligned} I42) \quad \text{Να δειχθεί ότι : } & \sigma_{uv} 3^v x - 4 \left[\sigma_{uv} 3^v (3^{v-1}x) - 3 \sigma_{uv} 3^v (3^{v-2}x) + \right. \\ & \left. + 3^2 \sigma_{uv} 3^v (3^{v-3}x) + \dots + (-1)^{v-1} 3^v \sigma_{uv} 3^v x \right] = (-1)^v 3^v \sigma_{uv} x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I43) \quad \text{Να δειχθεί ότι : } & \eta \mu^3 \frac{x}{3} + 3\eta \mu^3 \frac{x}{3^2} + \dots + 3^{v-1} \eta \mu^3 \frac{x}{3^v} = \\ & = \frac{1}{4} \left[3^v \eta \mu \frac{x}{3^v} - \eta \mu x \right]. \end{aligned}$$

I44) Εάν $v \in \mathbb{Q}, v > 2$ οι δέ θετικοί αριθμοί α, β, γ , είναι διαδοχικοί δροις αριθμητικής τη γεωμετρικής τη μέρμονικής προσδόου, να δειχθεί ότι : $\alpha^v + \gamma^v > 2\beta^v$.

I45) Δείξεται η δικολούθια x_0, x_1, \dots, x_v διείσ την δύοσαν $x_{v+1} = \alpha x_v + \beta x_{v-1}$ διείσ κάθε φυσικόν v . Αν δ $\frac{x_1}{x_0}$ δύο $x_0 \neq 0$ είναι ρίζα της έξισσεως $\psi^2 - \alpha\psi - \beta = 0$, τότε η δικολούθια είναι γεωμετρική προδόος.

I46) Να δειχθεί ότι το γινόμενον $(x^{\mu-1})(x^{\mu-1}-1)\dots(x^{\mu+p-1}-1)$ είναι διαιρετόν διείσ $(x-1)(x^2-1)\dots(x^p-1)$.

I47) Εάν $v \in \mathbb{Q}$ καὶ x διέρθασ, να δειχθεί ότι :

$$\frac{v^{v+1}}{v+1} < 1^v + 2^v + \dots + v^v < \frac{(v+1)^{v+1}}{v+1}.$$

I48) Εάν $v \in \mathbb{Q}$, να δειχθεί ότι :

$$\alpha) \frac{v^3}{3} < 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + v(v+1) < \frac{2(v+1)^3}{3}$$

$$\beta) \frac{v^4}{4} < 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + v(v+1)(v+2) < \frac{3}{2} (v+1)^4.$$

I49) Είσ την δικολούθιαν x_1, x_2, \dots, x_v ($v \in \mathbb{N}, v \geq 3$) υφίσταται η σχέση διότι τῶν $x_1 = x_2 = 1$ καὶ $x_v = x_{v-1} + x_{v-2}$. Να δειχθεί ότι :

$$\begin{aligned} I) \quad x_{2v+3} \cdot x_v \cdot x_{v+3} &= 2x_{v+2}^2, \quad 2) \quad x_{2v+3} - x_v \cdot x_{v+3} = 2x_{v+1}^2, \\ 3) \quad x_v^2 \cdot x_{v+3}^2 + 4x_{v+1}^2 \cdot x_{v+2}^2 &= x_{2v+3}^2. \end{aligned}$$

I50) Έάν είσι μίαν δικολουθίαν δριθμών $x_0, x_1, x_2 \dots x_v$ ύφεσταται ή σχέσις $x_1x_{v-1} + x_2x_{v-2} + \dots + x_{v-1}x_v = (v-1)x_0x_1$ δηλου $v \in \mathbb{N} \geq 2$ τότε ή δικολουθία είναι γεωμετρική προσδοση.

I51) Έάν $v \in \mathbb{N}$ και δειχθή δτι δριθμός $(I - \sqrt{2})^2 + (I + \sqrt{2})^2$ είναι σύμμετρος.

I52) Έάν οι x_1, x_2, \dots, x_v διποτελούν δρμονική προσδοση, και δειχθή δτι $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{v-1}x_v = (v-1)x_1x_v$.

I53) Έάν οι x_1, x_2, x_3 είναι θετικοί και άνισοι είναι δε $x_1 + x_2 + x_3 = I$, και δειχθή δτι $\left(\frac{I}{x_1} - I\right)\left(\frac{I}{x_2} - I\right)\left(\frac{I}{x_3} - I\right) \geq 8$.

I54) Διδεται η δικολουθία x_1, x_2, \dots, x_v δια την δποσαν $x_1 = a$ και $x_2 = b$ και $2x_{v+2} = x_v + x_{v+1}$ δηλου $v \in \mathbb{N}$. Να δειχθή δτι:

$$x_v = b + (b-a) \left[-\frac{2}{3} + (-\frac{1}{2})^{v-1} - \frac{1}{3} \right].$$

I55) Έάν a_1, a_2, \dots, a_v είναι αι θετικα γωνια τοιαυται θστε:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_v < \frac{\pi}{2}, \text{ και δειχθή δτι:}$$

$$\eta \mu(a_1 + a_2 + \dots + a_v) < \eta \mu a_1 + \eta \mu a_2 + \dots + \eta \mu a_v.$$

I56) Να δειχθή δτι $\eta \mu \frac{\pi}{v} \frac{2\pi}{v} \frac{3\pi}{v} \dots \eta \mu \frac{(v-1)\pi}{v} = -\frac{v}{2^{v-1}}$ έάν $v \in \mathbb{N}$.

I57) Έάν $v \in \mathbb{N}$, και δειχθή δτι $\sin \frac{\pi}{2v+1} + \sin \frac{3\pi}{2v-1} + \dots + \frac{(v+2)\pi}{2v+1} = \frac{I}{2}$.

I58) Έάν $v \in \mathbb{N}$, και δειχθούν αι κάτωθι λογητες:

$$\alpha) \eta \mu 2\alpha + \eta \mu 2\alpha \cdot \eta \mu 3\alpha + \dots + \eta \mu(v\alpha) \cdot \eta \mu(v+1)\alpha = \frac{(v+1)\eta \mu 2\alpha - \eta \mu(2v+2\alpha)}{4\eta \mu \alpha}.$$

$$\beta) \sin \alpha \cdot \eta \mu 2\alpha + \eta \mu 2\alpha \cdot \sin 3\alpha + \dots + \eta \mu 2\alpha \cdot \sin(v+1)\alpha = \frac{\eta \mu(2v+2)\eta \mu 2\alpha}{2\eta \mu \alpha}.$$

$$\gamma) \eta \mu^2 \alpha + \eta \mu^2 2\alpha + \dots + \eta \mu^2 v\alpha = \frac{(2v+1)\eta \mu \alpha - \eta \mu(2v+1)\alpha}{4\eta \mu \alpha}.$$

$$\delta) I + \frac{\sin \alpha}{\eta \mu \alpha} + \frac{\sin 2\alpha}{\eta \mu 2\alpha} + \dots + \frac{\sin(v-1)\alpha}{\eta \mu(v-1)\alpha} = \frac{\eta \mu \alpha}{\eta \mu \alpha \cdot \sin v\alpha}.$$

$$\varepsilon) \frac{\eta \mu 3\alpha}{\eta \mu 2\alpha} + \frac{\eta \mu 6\alpha}{\eta \mu 4\alpha} + \dots \text{ έκ ν δρων} = \frac{\sin 2\alpha}{\eta \mu \alpha} - \frac{\sin 2^{v+1}\alpha}{\eta \mu 2^v \alpha}.$$

$$\sigma) v \sin \alpha + (v-1) \sin 2\alpha + \dots + 2 \sin(v-1)\alpha + \sin v\alpha = -\frac{v}{2} + \frac{\sin \alpha - \sin(v+1)\alpha}{2\eta \mu \alpha}.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΕΡΓΑ^τ ΤΟΥ ΙΔΙΟΥ

- 1) *Προβλήματα Πρακτικής Γεωμετρίας.* Πρός χρήσιν τῶν μαθητῶν τῶν Γυμνασίων καὶ τῶν Τεχνικῶν Σχολῶν καὶ τῶν ὑποψηφίων τῶν Σχολῶν Ἐμποροπλοιάρχων, Ἀσυμφατιστῶν, ΣΤΥΑ.
- 2) *Δογισμὸς.* (^τΑριθμητικὸς — ^τΑλγεβρικὸς — *Τριγωνομετρικός*). Πρός χρήσιν τῶν μαθητῶν τῶν Γυμνασίων, καὶ δὴ τῶν ὑποψηφίων τῆς Σχολῆς Δοκίμων.
- 3) *Γεωμετρία* (*Βιβλία Α—Β*). Πρός χρήσιν τῶν μαθητῶν τῶν Λυκείων, καὶ τῶν ὑποψηφίων διὰ τὸ ^τΑκαδημαϊκὸν ^τΑπολυτήριον Β' τύπου.

ΥΠΟ ΕΚΔΟΣΙΝ

- 1) *Φροντιστηριακὰ Θέματα* ^τΑλγέβρας. Τεῦχος Β. (Διαιρετότης, Πολυώνυμα).
- 2) *Γενικαὶ Ἀσκήσεις* ^τΑλγέβρας.
- 3) *Γενικαὶ Ἀσκήσεις Τριγωνομετρίας.*
- 4) ^τΑναλυτικὴ Γεωμετρία. — *Διανυσματικὸς Δογισμός.*