ΣΤΕΛΙΟΥ ΧΡ. ΠΑΧΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ — ΦΡΟΝΤΙΣΤΟΥ

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΤΕΥΧΟΣ Α΄.

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

τῶν μαθητῶν τῶν Λυκείων, τῶν ὑποψηφίων διὰ τὰς Ἀνωτάτας Σχολὰς καὶ τῶν Φοιτητῶν τῆς Φυσικομαθηματικῆς Σχολῆς

ΑΘΗΝΑΙ 1965

ΣΤΕΛΙΟΥ ΧΡ. ΠΑΧΗ
Μαθηματικοῦ-Φροντιστοῦ.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΤΕΥΧΟΣ Α'

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

τῶν μαθητῶν τῶν Λυκείων, τῶν ὑποψηφίων διά τάς 'Ανωτάτας Σχολάς, καί τῶν Φοιτητῶν τῆς Φυσικομαθηματικῆς Σχολῆς

«Τά Μαθηματικά προικίζουν τόν μαθηματικόν μέ μιά καινούργια αἴσθησι».

Κάρολος Νταρουΐν

Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Τό τεῦχος τοῦτο ἀποτελεῖ τό πρῶτον μιᾶς σειρᾶς ὁλοκλήρου μονογραφιῶν ἐπί διαφόρων θεμάτων Ἀλγέβρας.

Τά εἰς ταύτας μελετώμενα θέματα ἐξετάζονται μέ ὅσον τό δυνατόν μεγαλυτέραν ἀκρίβειαν καί εἶναι ἐμπλουτισμέναι μέ πλῆθος ἀσκήσεων λελυμμένων καί ἀλύτων, ὥστε ὁ χρησιμοποιῶν ταύτας νά γίνεται κάτοχος τοῦ θέματος. Ἔχω τήν γνώμην ὅτι μέ τά μικρά αὐτά τεύχη προσφέρω εἰς τούς ἀναγνώστας μου χρήσιμον βοήθημα διά τήν μόρφωσίν των.

Σ.Χ. ΠΑΧΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

R.W. Brink College Algebra

Hall and Knight Higher Algebra

C. Smith A Treatise on Algebra

Σ. Κανέλλου Ἄλγεβρα

Α. Πάλλα Μεγάλη Ἄλγεβρα

Π.Δ.Ε.ΜΕ

journal Mathematiques Elementaires

μόνον ἐκ τῶν νόμων τῆς Λογικῆς, ἀλλά καί ἐκ τῶν τεθειμένων ἀξιωμάτων, ὑποθέσεων ἤ ἀποδειχθέντων θεωρημάτων.

Ἡ ἱστορία τῶν Μαθηματικῶν ἀναφέρει πλεῖστα ὅσα σφάλματα τά ὁποῖα διεπράχθησαν, διότι ἐχρησιμοποιήθησαν ἔννοιαι μή ὁρισθεῖσαι ἐπακριβῶς, ἤ ἔγιναν παραδεκταί προτάσεις τῶν ὁποίων ἡ ἀλήθεια ἦτο προφανής ἄνευ ἀποδείξεως[1]. Π.χ. ὁ Fermat κατά τό 1640 ἰσχυρίσθη ὅτι ὁ ἀριθμός $2^{2^\nu}+1$, διά $\nu=1,2,3,4$ δίδει πρώτους ἀριθμούς, διά κάθε τιμήν τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν. Τοῦτο ὅμως ἀπεδείχθη τό 1732 ὑπό τόν Euler ὅν ψευδές. Διότι ὡς ἔδειξεν οὗτος ὁ $2^{2^\nu}+1$ διά $\nu=5$ δίδει τόν σύνθετον ἀριθμόν 6416700417.

Τά σφάλματα αὐτά ἔγιναν ἀφορμή ὥστε τά Μαθηματικά νά θεμελιώνονται ὁλονέν ἐπί στερεωτέρων βάσεων.

Τήν τελείαν ἐπαγωγήν μετεχειρίσθη εἰς τά Μαθηματικά μέ ἀκρίβειαν καί πληρότητα πρῶτος ὁ Ἑλληνοϊταλός Francesco Maurolyko (Μεσσήνη 1494-1575) ἔλαβε δέ τό ὄνομά της ἀπό τόν J. Wallis (1656) καί De Morgan (1838). (Βλέπε History of Mathematics by D.E. Smith). Τήν μέθοδον τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς χρησιμοποιοῦμεν διά νά ἀποδείξωμεν ὅτι : μία πρότασις ἡ ὁποία ἐκφράζεται τῇ βοηθείᾳ ἑνός φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν ἤ ἀπό τούς φυσικούς ἀριθμούς μ καί ν ἤ γενικώτερον ἐκ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν $(\nu_1, \nu_2, \ldots \ldots \nu_\rho)$, καί ἐφ'ὅσον ἰσχύει διά μίαν ἐλαχίστην τιμήν τοῦ ν, θά ἰσχύῃ δι'ὅλας τάς τιμάς τάς μεγαλυτέρας ἤ ἴσας πρός τήν ἐλαχίστην τιμήν τοῦ ν, ἤ τῶν μ καί ν, τάς ὁποίας δύναται νά λάβῃ ὁ φυσι-

---

1. Εἰς τά Μαθηματικά αἱ ἀρχαί ἐκ τῶν ὁποίων ὁρμώμεθα εἶναι αὐστηραί καί βέβαιαι καί , συνεπῶς, ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἀπόλυτος καί ἀκαταμάχητος. Διά τοῦτο ἡ μαθηματική ἀπόδειξις θεωρεῖται ὡς ὁ τέλειος τύπος τῆς ἀποδείξεως.

κός ἀριθμός ν ἤ οἱ φυσικοί μ καί ν, καί παρουσιάζεται ὑπό δύο μορφάς.

Καί ἡ μέν πρώτη βασίζεται εἰς τό ἀξίωμα τοῦ Peano, ἡ δέ δευτέρα εἰς τήν ἀρχήν τοῦ ἐλαχίστου φυσικοῦ. 'Αλλ'ἐπειδή αἱ δύο αὐταί προτάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι δυνάμεθα νά ἰσχυρισθῶμεν ὅτι ἡ μέθοδος τῆς τελείας ἐπαγωγῆς στηρίζεται εἰς τό ἀξίωμα τοῦ Peano.

ΠΡΩΤΗ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΤΕΛΕΙΑΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

Θεώρημα τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς.

3. "'Εάν μία πρότασις F(ν) ἐξαρτωμένη ἐκ τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν, ἀληθεύῃ διά ν=1, καί μέ τήν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ F(ν) ἀληθεύει διά ν=κ, ὅπου κ φυσικός, ἀληθεύει καί διά ν=κ+1, τότε θά ἀληθεύῃ καί διά κάθε φυσικόν ἀριθμόν".

'Απόδειξις Α. 'Αφοῦ ἡ F(ν) ἀληθεύη διά ν=1, τότε ἕνεκα τῆς προϋποθέσεως θά ἀληθεύῃ καί διά τήν ἀμέσως ἐπομένην τιμήν τοῦ ν, δηλ. διά ν=2. 'Αφοῦ ὅμως ἡ F(ν) ἀληθεύη διά ν=2, ἕνεκα τῆς προϋποθέσεως θά ἀληθεύῃ καί διά τήν ἀμέσως ἐπομένην τιμήν τοῦ ν, δηλ. διά ν=3. Προχωροῦντες τοιουτοτρόπως, κατά μίαν μονάδα ἑκάστοτε, φθάνομεν εἰς οἱονδήποτε συγκεκριμένον φυσικόν ἀριθμόν θέλομεν. 'Επειδή ὅμως τό σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀπειροπληθές ὑποχρεούμεθα νά στηριχθῶμεν εἰς τήν θεμελιώδη ἰδιότητα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἡ ὁποία καλεῖται ἀξίωμα τῆς τελείας ὑπαγωγῆς (ἀξιώμα τοῦ Peano) κατά τήν ὁποίαν "Κάθε σύνολον φυσικῶν ἀριθμῶν πού περιέχει τόν 1 καί μαζί μέ τόν οἱονδήποτε δοθέντα ν περιέχει καί τόν ἑπόμενον του ν+1, περιέχει ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς δηλ. συμπίπτειμέ τό σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν". Ἕνεκα τούτων ἡ πρότασις $F(\nu)$ ἰσχύει δι'ὅλους τούςφυσικούς ἀριθμούς.

Ἀπόδειξις Β. Ἡ ἀπόδειξις αὕτη γίνεται διά τῆς μεθόδου τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς καί στηρίζεται ἐπί τῆς "ἀρχῆς τοῦ ἐλαχίστου φυσικοῦ ἀριθμοῦ" κατά τήν ὁποίαν, "εἰς κάθε σύνολον φυσικῶν ἀριθμῶν ὑπάρχει πάντοτε εἷς ἐλάχιστος" (δηλ. μικρότερος ὅλων τῶν ἄλλων).

Ἔστω ὅτι ἰσχύουν αἱ προτάσεις α) Ἡ πρότασις $F(\nu)$ ἀληθεύει διά $\nu=1$, β) Ἄν ἡ πρότασις $F(\nu)$ ἀληθεύῃ διά κάποιαν τιμήν Κ τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν, τότε ἀληθεύει καί διά τήν ἀμέσως ἑπομένην τιμήν τοῦ ν τήν $\kappa+1$, ἀλλά ἡ $F(\nu)$ δέν ἀληθεύει δι' ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς. Ἄς φαντασθῶμεν τότε, τό σύνολον ὅλων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν διά τούς ὁποίους δέν ἀληθεύει ἡ πρότασις $F(\nu)$, ἔστω τό $\Sigma=\{\alpha,\alpha_1,\alpha_2\dots\}$. Εἰς τό σύνολον αὐτό Σ θά ὑπάρχῃ εἷς ἐλάχιστος, ἔστω ὁ α, διά τόν ὁποῖον δέν ἀληθεύει ἡ πρότασις. θά εἶναι δέ $\alpha\geqslant 2$ διότι διά $\nu = 1$ ἀληθεύει. Ἀφοῦ ὁ α εἶναι ὁ ἐλάχιστος φυσικός ἀριθμός διά τόν ὁποῖον δέν ἀληθεύει ἡ πρότασις, ἔπεται ὅτι διά τούς μικροτέρους τοῦ x ἡ πρότασις θά ἀληθεύῃ. Ἄρα θά ἀληθεύῃ καί διά $\nu=\alpha-1$. Ἀφοῦ ὅμως ἀληθεύῃ διά $\nu=\alpha-1$ δέν ἀληθεύει διά $\nu=\alpha$, τό ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τήν $\beta^{\underline{\alpha\nu}}$ ὑπόθεσιν.

3. Ἡ ἀνωτέρω ἀρχή μᾶς παρέχει ἀμέσως τήν ἑπομένην ἀποδεικτικήν πορείαν.

I. Ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει διά $\nu=1$, δηλ. ὅτι ἀληθεύει ἡ $F(1)$.

II. Δεχόμεθα ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει διά $\nu=\kappa$ (ὅπου $\kappa\in\varphi$)καί ὡς συνέπειαν αὐτοῦ ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει καί διά $\nu=\kappa+1$, δηλ. δεχόμεθα ὡς ἀληθῆ τήν $F(\kappa)$ καί ἀποδεικνύομεν τήν

$F(\varkappa+1)$. Οὕτω λοιπόν κατά τήν ἀρχήν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς ἡ πρότασις $F(\nu)$ ἀληθεύει διά κάθε φυσικόν ἀριθμόν ν.

Παρατήρησις. Πολλάκις παρουσιάζονται περιπτώσεις κατά τάς ὁποίας ἡ ἐλαχίστη φυσική τιμή τοῦ ν διά τήν ὁποίαν ἡ πρότασις $F(\nu)$ ἔχει νόημα δέν εἶναι ἡ $\nu=1$, ἀλλά ἡ $\nu=\alpha$, ἔνθα α φυσικὸς ἀριθμός μεγαλύτερος τοῦ 1. Εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς ἰσχύει πάλιν τό θεώρημα τῆς τελείας ἐπαγωγῆς, διατυπούμενον πλέον ὡς ἑξῆς. "Ἐάν μία πρότασις $F(\nu)$ ἀληθεύει διά $\nu=\alpha$, ὅπου α δοθείς φυσικός ἀριθμός, καί μέ τήν προϋπόθεσιν ὅτι ἀληθεύει διά $\nu=\varkappa$, ὅπου κ τυχόν ὡρισμένος φυσικός ἀριθμός μεγαλύτερος τοῦ α, ἀληθεύει ἐπίσης ἀναγκαστικῶς καί διά $\nu=\varkappa+1$, τότε ἡ πρότασις ἀληθεύει δι' ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς τούς μή μικροτέρους τοῦ α.

Παράδειγμα 1ον. Ἐάν $\nu\in\Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3 = \left[\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right]^2$ (1).

Ἡ πρότασις διά $\nu=1$ ἀληθεύει. Διότι ἄν θέσωμεν $\nu=1$ τό πρῶτον μέλος τῆς (1) ἔχει ἕνα μόνον ὅρον καί ἡ (1) γίνεται $1^3=\left(\frac{1.2}{2}\right)^2$ ἡ ὁποία εἶναι ἀληθής. Μέ τήν προϋπόθεσιν ὅτι ἀληθεύει διά $\nu=\varkappa$ ὅπου $\varkappa\in\Phi$ δηλ. ὅτι εἶναι $S_\varkappa= 1^3+2^3+3^3+\ldots+\varkappa^3 =\left[\frac{\varkappa(\varkappa+1)}{2}\right]^2$ θά δείξωμεν ὅτι ἀληθεύει διά $\nu=\varkappa+1$ δηλ. $S_{\varkappa+1}= 1^3+2^3+3^3+\ldots+\varkappa^3+(\varkappa+1)^3= \left[\frac{(\varkappa+1)(\varkappa+2)}{2}\right]^2$. Ἀλλά $S_{\varkappa+1} = S_\varkappa+(\varkappa+1)^3= \left[\frac{\varkappa(\varkappa+1)}{2}\right]^2 + (\varkappa+1)^3=(\varkappa+1)^2 \left[\frac{\varkappa^2}{4} + \varkappa+1\right] = \left[\frac{(\varkappa+1)(\varkappa+2)}{2}\right]^2$. Ἄρα ἡ (1) ἀληθεύει διά $\nu=\varkappa+1$ καί ἑπομένως κατά τήν ἀρχήν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς θά ἀληθεύῃ διά κάθε φυσικόν ν.

Παράδειγμα 2ον. Ἐάν $\nu\in\Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $2+2^2+2^3+\ldots+2^\nu = 2(2^\nu-1)$ (1).

Ἡ πρότασις διά ν-1 ἀληθεύει. Διότι ἄν θέσωμεν $\nu=1$ ἡ (1) γίνεται $2=2(2-1)=2$, ἡ ὁποία εἶναι ἀληθής. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἀλη -

θεύει διά ν=κ (κ∈Φ) δηλ. $S_κ=2+2^2+2^3+\ldots+2^κ=2(2^κ-1)$ (2). Θά δείξωμεν ὅτι μέ τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ἀληθεύει καί διά ν=κ+1 δηλ. ὅτι $2+2^2+2^3+\ldots+2^κ+2^{κ+1}=2(2^{κ+1}-1)$ (3). Ἡ (3) ἕνεκα τῆς (2) γίνεται $2(2^κ-1)+2^{κ+1}=2(2^{κ+1}-1)$. Ἄρα ἡ (1) ἀληθεύει καί διά ν= =κ+1, καί ἑπομένως κατά τήν ἀρχήν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς θά ἀληθεύῃ διά κάθε φυσικόν ν.

ΔΙΠΛΗ ΤΕΛΕΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

4. Ἐάν μία πρότασις F(μ,ν) ἐξαρτᾶται ἀπό δύο φυσικούς ἀριθμούς μ,ν, ἔχομεν τότε τήν διπλῆν ἤ τελείαν ἐπαγωγήν ἡ ὁποία στηρίζεται ἐπί τῆς ἀρχῆς τοῦ ἐλαχίστου φυσικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἡ ἀρχή αὕτη μᾶς παρέχει ἀμέσως τήν ἑπομένην ἀποδεικτικήν πορείαν.

α) Ἀποδεικνύομεν τήν πρότασιν διά ν=1 ἤτοι τήν F(μ,1) διά κάθε μ. Πρός τοῦτο ἀποδεικνύομεν κατά τά γνωστά πρῶτον τήν F(1,1) καί κατόπιν μέ τήν προϋπόθεσιν ὅτι ἰσχύει ἡ F(μ,1) δεικνύομεν ὅτι ἀληθεύει ἡ F(μ+1,1) ὅπου μ∈Φ.

β) Γίνεται ἁπλῆ τελεία ἐπαγωγή ὡς πρός ν. Δηλ. ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι ἰσχύει ἡ F(μ,ν) ἀποδεικνύομεν ὅτι ἰσχύει ἡ F(μ, ν+1). Ὅπου μ∈Φ καί ν αὐθαίρετος.

Τά ἀνωτέρω ἀφοροῦν προτάσεις πού ὡς ἐλαχίστην τιμήν τῶν μ καί ν εἶναι ἡ μονάς. Ἐφαρμόζομεν ὅμως τά ἀνωτέρω καί ὅταν οἱ μ. καί ν δέν καλύπτουν ὅλο τό σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἀρκεῖ ὅμως νά δειχθῇ ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει διά τάς ἐλαχίστας τιμάς τῶν μ καί ν.

Ἡ μέθοδος αὕτη ἐπεκτείνεται προφανῶς καί εἰς περιπτώσεις τῆς μορφῆς F(μ,ν,ρ,σ....) ὅπου μ,ν,ρ,σ,,.. ∈Φ.

Παράδειγμα 1ον. 'Εάν $\mu,\nu\in\Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $\chi^{\mu}.\chi^{\nu}=\chi^{\mu+\nu}$ $(\chi\neq 0)$. 'Επειδή κατά τόν ὁρισμόν τῶν δυνάμεων εἶναι $\chi^{\mu}.\chi^{1}=\chi^{\mu}.\chi=\chi^{\mu+1}$ ἕπεται ὅτι ἡ πρότασις ἰσχύει διά κάθε μ, καί $\nu=1$. Ἔστω ὅτι $\chi^{\mu}.\chi^{\nu}=\chi^{\mu+\nu}$ ὅπου μ τυχών καί ν τυχών ἀλλ'ὡρισμένος. Τότε ἐπειδή $\chi^{\mu}.\chi^{\nu+1}=\chi^{\mu}(\chi^{\nu}.\chi)=(\chi^{\mu}.\chi^{\nu})\chi=\chi^{\mu+\nu}.\chi=\chi^{\mu+\nu+1}$ ἕπεται ὅτι ἰσχύεικαί ἡ $F(\mu,\nu+1)$. Ἄρα ἡ πρότασις $F(\mu,\nu)$ ἰσχύει δι'ὅλους τούς φυσικούς μ καί ν.

Παράδειγμα 2ον. 'Εάν χ καί $\phi\in\Phi$, νά δειχθῇ ὅτι:

$$(\chi+\psi)^{\nu}>\chi^{\nu}+\nu\chi^{\nu-1}\psi \quad \text{διά κάθε } \Phi.$$

Διά $\nu=2$ ἡ ἀποδεικτέα ἀνισότης γίνεται $(\chi+\psi)^{2}>\chi^{2}+2\chi^{2-1}\psi$ ἡ ὁποία εἶναι ἀληθής. Ἔστω ὅτι ἀληθεύει διά $\chi=\kappa$ ὅπου $\kappa\in\Phi$ δηλ. ὅτι $(\chi+\psi)^{\kappa}>\chi^{\kappa}+\kappa\chi^{\kappa-1}\psi$ (1) καί θά δείξωμεν ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu=\kappa+1$. 'Εκ τῆς (1) καί τῆς $\chi+\psi>0$ ἔχομεν ὅτι $(\chi+\psi)^{\kappa+1}>(\chi^{\kappa}+\kappa\chi^{\kappa-1}\psi)(\chi+\psi)$ ἤ $(\chi+\psi)^{\kappa+1}>\chi^{\kappa+1}+\kappa\chi^{\kappa}\psi+\chi^{\kappa}\psi+\kappa\chi^{\kappa-1}\psi^{2}$. 'Αλλά $\kappa\chi^{\kappa-1}\psi^{2}>0$ ὅτε $(\chi+\psi)^{\kappa+1}>\chi^{\kappa+1}+(\kappa+1)\chi^{\kappa}\psi$. Ἄρα διά $\nu=\kappa+1$ ἀληθεύει ἡ ἀνισότης. Ἄρα ἡ ἀποδεικτέα ἰσχύει διά πάντα φυσικόν ν.

ΔΕΥΤΕΡΑ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΤΕΛΕΙΑΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

5. Θεώρημα τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς (Δευτέρα μορφή). "'Εάν μία πρότασις $F(\nu)$ ἐξαρτωμένη ἐκ τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν, ἀληθεύει διά $\nu=1$, καί μέ τήν προϋπόθεσιν ὅτι ἀληθεύει δι'ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς τούς μικροτέρους ἀπό τυχόντα φυσικόν ἀριθμόν κ, ἀληθεύει καί διά $\nu=\kappa$, τότε θά ἀληθεύῃ, διά πάντα φυσικόν ἀριθμόν.

'Απόδειξις. Ἔστω Σ, τό σύνολον ὅλων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν,διά τούς ὁποίους δέν ἀληθεύει ἡ πρότασις F ν). Εἰς τό σύνολον τοῦτο θά ὑπάρχῃ εἷς ἐλάχιστος, ἔστω $\alpha\neq 1$. Τότε ἐνῷ ἡ $F(\nu)$ ἀληθεύει διά τούς φυσικούς ἀριθμούς τούς μικροτέρους τοῦ α, δέν ἀληθεύει διά τόνα. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον, ἄρα ἡ $F(\nu)$ἀληθεύει δι' ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς. Ἡ ἀνωτέρω ἀρχή μᾶς παρέχει τήν ἑπομένην ἀποδεικτικήν πορείαν.

I. Ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει διά $\nu=1$, δηλ. ὅτι ἀληθεύει ἡ $F(1)$.

II. Ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει διά $\nu=\kappa$ δηλ. ὅτι ἀληθεύει $F(\kappa)$ μέ τήν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ $F(\nu)$ ἀληθεύει δι' ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς τούς μικροτέρους τοῦ κ.

<u>Παράδειγμα</u>. Νά δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $\chi^\nu+\psi^\nu$ διά $\nu\geqslant 2$ τίθεται ὑπό τήν μορφήν ἀκεραίου πολυωνύμου ὡς πρός $S=\psi+\chi$ καί $P=\chi\psi$. Διά $\nu=2$ ἔχομεν $\chi^2+\psi^2=(\chi+\psi)^2-2\chi\psi = S^2-2P$. Διά $\nu=3$ ἔχομεν $\chi^3+\psi^3=(\chi+\psi)^3-3\chi\psi(\chi+\psi)=S^3-3PS$. Ἄρα ἡ πρότασις ἀληθεύει διά $\nu=2$, καί $\nu=3$. Ἔστω ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει καί διά $\nu=\kappa$ καί $\nu=\kappa+1$, δηλαδή ὅτι $\chi^\kappa+\psi^\kappa=\Pi(S,P)$ (1) καί $\chi^{\kappa+1}+\psi^{\kappa+1}=\Lambda(S,P)$ (2). Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τά μέλη τῆς (2) ἐπί $\chi+\psi$ καί ἔχομεν $(\chi^{\kappa+1}+\psi^{\kappa+1})(\chi+\psi)=(\chi+\psi)\,\Lambda(S,P)$ ἤ $\chi^{\kappa+2}+\psi^{\kappa+2}+\chi\psi^{\kappa+1}+\chi^{\kappa+1}\psi=S\Lambda(S,P)$ ἤ $\chi^{\kappa+2}+\psi^{\kappa+2}+\chi\psi(\chi^\kappa+\psi^\kappa)=S\Lambda(S,P)$. ἤ $\chi^{\kappa+2}+\psi^{\kappa+2}=S\Lambda(S,P)-P\Pi(S,P)=$ $=F(S,P)$. Ἄρα ἀληθεύει καί διά $\nu=\kappa+2$. Ἀφοῦ λοιπόν ἀληθεύει διά $\nu=1$ καί $\nu=2$ θά ἀληθεύῃ καί διά $\nu=3$. Ἀληθεύουσα δέ διά $\nu=2$ καί $\nu=3$ θά ἀληθεύῃ καί διά $\nu=4$ κ.ο.κ. Ἄρα καί διά πάντα $\nu\in\Phi$.

ΕΠΑΓΩΓΗ CAUCHY

6. Ὁ Cauchy ἔφερε σπουδαιοτάτην τροποποίησιν εἰς τήν ἐπαγωγικήν μέθοδον παρατηρῶν ὅτι, κάθε φυσικός ἀριθμός $\geqslant 2$ δύναται νά τεθῇ ὑπό τήν μορφήν $2^\mu-\lambda$ ὅπου $\lambda,\mu\in\Phi$. Οὕτω ἐδημιούργησε τήν ἑξῆς ἀποδεικτικήν πορείαν ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται εἰς γενικάς προτάσεις $F(\nu)$ ὅταν $\nu\geqslant 2$.

α) 'Αποδεικνύομεν τήν πρότασιν διά $\nu=2$.

β) Δεχόμεθα τήν $F(\kappa)$, ὅπου κ τυχών ἀλλ' ὡρισμένος φυσικός, ὡς ἀληθή, καί ἐκ τῆς προϋποθέσεως ταύτης ἀποδεικνύομεν τήν $F(2\kappa)$.

γ) Δεχόμεθα τήν $F(\kappa+1)$ καί ἀποδεικνύομεν τήν $F(\kappa)$.

"Αρα ἡ πρότασις ἕνεκα τῶν (α) καί (β) ἰσχύει διά κάθε $\nu=2^{\mu}$ ἕνεκα ὅμως τῆς (γ) ἰσχύει διά κάθε φυσικόν $2^{\mu}-\lambda$, ἐπομένως ἡ $F(\nu)$ ἰσχύει διά πάντα φυσικόν ἀριθμόν $\nu\geq 2$.

<u>Παράδειγμα 1ον.</u> Νά δειχθῇ ὅτι τό γινόμενον ν θετικῶν παραγόντων εἶναι μικρότερον ἤ ἴσον πρός τήν νιοστήν δύναμιν τοῦ μέσου ὅρου των. (Θεώρημα Cauchy).

α)'Εκ τῆς ταυτότητος $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2 = x_1x_2$ ἕπεται ὅτι ἄν μέν $x_1 \neq x_2$ εἶναι $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 > x_1x_2$, ἄν δέ $x_1=x_2$ εἶναι $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 = x_1x_2$. Εἶναι λοιπόν $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \geq x_1x_2$. 'Αληθεύει λοιπόν ἡ πρότασις διά δύο ἀριθμούς.

β) "Εστωσαν τέσσαρες θετικοί ἀριθμοί x_1, x_2, x_3, x_4. Προφανῶς εἶναι $\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} = \frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2}$. Κατά τήν προαποδειχθεῖσαν περίπτωσιν εἶναι $\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2}$, $\frac{x_3+x_4}{2} \geq \sqrt{x_3x_4}$ ἄρα

$\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{x_1x_2}}{2} + \frac{\sqrt{x_3x_4}}{2}$ (1). 'Εφαρμόζοντες τήν αὐτήν ἰδιότητα εἰς τούς ἀριθμούς $\frac{\sqrt{x_1x_2}}{2}$ καί $\frac{\sqrt{x_3x_4}}{2}$ ἔχομεν :

$$\frac{\frac{\sqrt{x_1x_2}}{2}+\frac{\sqrt{x_3x_4}}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{\sqrt{x_1x_2}\cdot\sqrt{x_3x_4}}}{2} = \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}$$

'Εξ αὐτῆς δέ καί τῆς (1) ἕπεται κατά μείζονα λόγον ὅτι εἶναι

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} \geq \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} \quad . \quad \text{"Αρα } \left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)^4 \geq x_1x_2x_3x_4 .$$

γ)"Εστωσαν ὀκτώ θετικοί ἀριθμοί $x_1, x_2, x_3 \dots x_8$. Προφανῶς εἶναι $x_1+x_2+x_3+\dots+x_8 =$

$$\frac{\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_3+x_4}{2} + \dots + \frac{x_7+x_8}{2}}{4} = K \quad (1)$$

'Επειδή ὅμως $\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2} \dots \frac{x_7+x_8}{2} \geq \sqrt{x_7x_8}$ ἕπεται ὅτι

$$K \geq \frac{\sqrt{x_1x_2}}{4} + \frac{\sqrt{x_3x_4}}{4} + \dots + \frac{\sqrt{x_7x_8}}{4} \qquad (2)$$

'Αλλά κατά τά προηγούμενα εἶναι :

$$\frac{\frac{\sqrt{x_1x_2}}{4} + \frac{\sqrt{x_3x_4}}{4} + \frac{\sqrt{x_5x_6}}{4} + \frac{\sqrt{x_7x_8}}{4}}{4} \geq \frac{\sqrt[4]{\sqrt{x_1x_2} \cdot \sqrt{x_3x_4} \cdot \sqrt{x_5x_6} \cdot \sqrt{x_7x_8}}}{4}$$

ἄρα $$\frac{\sqrt{x_1x_2}}{4} + \frac{\sqrt{x_3x_4}}{4} + \frac{\sqrt{x_5x_6}}{4} + \frac{\sqrt{x_7x_8}}{4} \geq \sqrt[8]{x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8}$$

'Εξ αὐτῆς καί τῶν (1) καί (2) ἔχομεν $\frac{x_1+x_2+\dots+x_8}{8} \geq$

$\sqrt[8]{x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8}$ καί συνεπῶς

$\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_8}{8}\right)^8 \geq x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8$.. 'Ομοίως ἀποδεικνύεται καί διά $\nu = 16, 32 \dots 2^\mu$.

δ)"Εστω ἤδη ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει διά κ+1 θετικούς ἀριθμούς $x_1, x_2, \dots x_\kappa, \sqrt[\kappa]{x_1x_2\dots x_\kappa}$ δηλ. ὅτι ἰσχύει ἡ

$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_\varkappa+\sqrt[\varkappa]{x_1x_2\cdots x_\varkappa}}{\varkappa+1}\right)^{\varkappa+1} \geq x_1x_2\cdots x_\varkappa\sqrt[\kappa]{x_1x_2\cdots x_\varkappa}.$$

'Επειδή ὅμως $x_1x_2\cdots x_\varkappa\sqrt[\kappa]{x_1x_2\cdots x_\varkappa} = \sqrt[\kappa]{(x_1x_2\cdots x_\varkappa)^{\varkappa+1}} =$

$= \left(\sqrt[\kappa]{x_1x_2\cdots x_\varkappa}\right)^{\varkappa+1}$ ἕπεται ὅτι

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_\varkappa+\sqrt[\kappa]{x_1x_2\cdots x_\varkappa}}{\varkappa+1} \geq \sqrt[\kappa]{x_1x_2\cdots x_\varkappa}$$ ὅτε κατά σειράν

$x_1+x_2+\cdots+x_\varkappa+\sqrt[\kappa]{x_1x_2\cdots x_\varkappa} \geq \varkappa\sqrt[\kappa]{x_1x_2\cdots x_\varkappa}+\sqrt[\kappa]{x_1x_2\cdots x_\varkappa}$ ἤ

$x_1+x_2+\cdots+x_\varkappa \geq K\sqrt[\kappa]{x_1x_2\cdots x_\varkappa}$ ἤ $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_\varkappa}{\varkappa} \geq \sqrt[\kappa]{x_1x_2\cdots x_\varkappa}$

καί συνεπῶς $\left(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_\varkappa}{\varkappa}\right)^{\kappa} \geq x_1x_2\cdots x_\varkappa.$

'Αληθεύει λοιπόν ἡ πρότασις καί διά $\nu=\varkappa$.

ε) Ἔστω τέλος ὅτι $\nu=\rho$ καί ὅτι $2^\mu-\lambda=\rho$. 'Επειδή ἡ πρότασις ἀληθεύει διά $\nu=2^\mu$ (γ.περ.) θά ἀληθεύη καί διά $\nu=2^\mu-1$, $\nu=2^\mu-2$ κ.ο.κ. ἄρα καί διά $\nu=2^\mu-\lambda=\rho$.

ΛΕΛΥΜΕΝΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) 'Εάν $\nu\in\Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $1^2+2^2+3^2+\cdots+\nu^2=\frac{1}{6}\nu(\nu+1)(2\nu+1)$ (1).

Λ ύ σ ι ς . Διά $\nu=1$ ἡ (1) γίνεται $1^2=\frac{1}{6}\,1.2.3=1$, ἤτοι ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διά $\nu=\varkappa$ ($\varkappa\in\Phi$) δηλ. ὅτι $1^2+2^2+3^2+\cdots+\varkappa^2=\frac{1}{6}\varkappa(\varkappa+1)(2\varkappa+1)$ (2). 'Υπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν θά δείξωμεν ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu=\varkappa+1$. Πράγματι ἔχομεν $1^2+2^2+3^2+\cdots+\varkappa^2+(\varkappa+1)^2=\frac{1}{6}\varkappa(\varkappa+1)(2\varkappa+1)+(\varkappa+1)^2=\dfrac{\varkappa(\varkappa+1)(2\varkappa+1)+6(\varkappa+1)^2}{6}=$

$=\dfrac{(\varkappa+1)(2\varkappa^2+7\varkappa+6)}{6}=\frac{1}{6}(\varkappa+1)(\varkappa+2)(\varkappa+3)$. Ἄρα ἡ (1) ἀληθεύει καί διά $\nu=\varkappa+1$, καί ἐπομένως κατά τήν ἀρχήν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς θά ἀληθεύῃ καί διά κάθε $\nu\in\Phi$.

2) Ἐάν $\nu\in\Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2\nu-1)^3=\nu^2(2\nu^2-1)$ (1)

Λ ύ σ ι ς. Διά $\nu=1$ ἡ (1) γίνεται $1^3=1^2(2.1^2-1)=1^2.1$, ἤτοι ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διά $\nu=\varkappa$ ($\varkappa\in\Phi$) δηλ. ὅτι $1^3+3^3+5^3+$ $+\ldots+(2\varkappa-1)^3=\varkappa^2(2\varkappa^2-1)$ (2). Ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν θά δείξωμεν ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu=\varkappa+1$. Προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τά μέλη τῆς (2) τό $(2\varkappa+1)^3$ εὑρίσκομεν $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2\varkappa-1)^3+(2\varkappa+1)^3=$ $=\varkappa^2(2\varkappa^2-1)+(2\varkappa+1)^3=2\varkappa^4-\varkappa^2+8\varkappa^3+12\varkappa^2+6\varkappa+1=(2\varkappa^4+8\varkappa^3+12\varkappa^2+8\varkappa+2)-$ $-(\varkappa^2+2\varkappa+1)=2(\varkappa+1)^4-(\varkappa+1)^2=(\varkappa+1)^2\left[2(\varkappa+1)^2-1\right]$. Ἄρα ἡ (1) ἀληθεύει καί διά $\nu=\varkappa+1$ καί ἐπομένως κατά τήν ἀρχήν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς θά ἀληθεύῃ καί διά κάθε $\nu\in\Phi$.

3) Ἐάν $\nu\in\Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{\nu(\nu+1)}=\frac{\nu}{\nu+1}$ (1)

Λ ύ σ ι ς. Διά $\nu=1$ ἡ (1) γίνεται $\frac{1}{1.2}=\frac{1}{1+1}$, ἤτοι ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διά $\nu=\varkappa$ ($\varkappa\in\Phi$) δηλ. ὅτι $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots\ldots$ $\ldots+\frac{1}{\varkappa(\varkappa+1)}=\frac{\varkappa}{\varkappa+1}$ (2). Ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν θά δείξωμεν ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu=\varkappa+1$. Τότε ἐπειδή $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots\ldots+$ $+\frac{1}{\varkappa(\varkappa+1)}+\frac{1}{(\varkappa+1)(\varkappa+2)}=\frac{\varkappa}{\varkappa+1}+\frac{1}{(\varkappa+1)(\varkappa+2)}=\frac{1}{\varkappa+1}\left[\varkappa+\frac{1}{\varkappa+2}\right]=$ $=\frac{1}{\varkappa+1}\cdot\frac{\varkappa^2+2\varkappa+1}{\varkappa+2}=\frac{\varkappa+1}{\varkappa+2}$. Ἄρα ἡ (1) ἀληθεύει καί διά $\nu=\varkappa+1$ καί συνεπῶς θά ἀληθεύῃ καί διά κάθε $\nu\in\Phi$.

4) Ἐάν $\nu\in\Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $1-2^2+3^2-4^2-\ldots+(-1)^{\nu-1}\cdot\nu^2=(-1)^{\nu-1}\cdot$ $\cdot\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ (1).

Λ ύ σ ι ς. Διά $\nu=1$ ἡ (1) γίνεται $(-1)^0=1$ δηλ. ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διά $\nu=\varkappa$ ($\varkappa\in\Phi$) δηλ. ὅτι $S\varkappa=1-2^2+3^2\ldots+(-1)^{\varkappa-1}.\varkappa^2-$

$= (-I)^{\kappa-I}\cdot\frac{\kappa(\kappa+I)}{2}$ (2). Ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν θά δείξωμεν ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu=\kappa+I$. Ἀλλά $S_{\kappa+I}=S_\kappa+(-I)^{\kappa}(\kappa+I)^2=(-I)^{\kappa-I}\cdot$
$$\cdot\frac{\kappa(\kappa+I)}{2}+(-I)^{\kappa}(\kappa+I)^2 = (-I)^{\kappa}\left[(\kappa+I)-\frac{\kappa}{2}\right](\kappa+I)=(-I)^{\kappa}\frac{(\kappa+I)(\kappa+2)}{2}$$
Ἄρα ἡ (I) ἀληθεύει καί διά $\nu=\kappa+I$, καί συνεπῶς θά ἀληθεύῃ καί διά κάθε $\nu\in\Phi$.

5) Ἐάν $\nu\in\Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $\frac{(\nu+I)(\nu+2)(\nu+3)\ldots 2\nu}{I.2.3\ldots(2\nu-I)}=2^{\nu}$ (I).

Λύσις. Διά $\nu=I$ ἡ (I) γίνεται $\frac{I+I}{I}=2^{I}$ δηλ. ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἡ (I) ἀληθεύει διά $\nu=\kappa$ $(\kappa\in\Phi)$ δηλ. ὅτι:
$\frac{(\kappa+I)(\kappa+2)(\kappa+3)\ldots 2\kappa}{I.3.5\ldots(2\kappa-I)}=2^{\kappa}$ (2). Ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν θά δείξωμεν ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu=\kappa+I$, δηλ. ὅτι:
$\frac{(\kappa+2)(\kappa+3)\ldots 2\kappa(2\kappa+I)(2\kappa+2)}{I.3.5\ldots(2\kappa-I)(2\kappa+I)}=2^{\kappa+I}$ (3). Ἀλλ' ἡ (2) γράφεται
$\frac{(\kappa+2)(\kappa+3)\ldots 2\kappa}{I.3.5\ldots(2\kappa-I)}=\frac{2^{\kappa}}{\kappa+I}$ καί ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν (3) εὑρίσκομεν $\frac{2^{\kappa}}{\kappa+I}\cdot\frac{(2\kappa+I)(2\kappa+2)}{2\kappa+I}=\frac{2^{\kappa}.2(\kappa+I)}{\kappa+I}=2^{\kappa+I}$. Ἄρα ἡ (I) ἀληθεύει διά $\nu=\kappa+I$ καί συνεπῶς θά ἀληθεύῃ καί διά κάθε $\nu\in\Phi$.

6) Ἐάν $\nu\in\Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $I^4+2^4+\ldots+\nu^4=\frac{I}{30}\nu(\nu+I)(6\nu^3+9\nu^2+\nu-I)$ (1).

Λύσις. Διά $\nu=I$ ἡ (I) ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἡ (I) ἀληθεύει διά $\nu=\kappa(\kappa\in\Phi)$ δηλ. ὅτι $I^4+2^4+\ldots+\kappa^4=\frac{I}{30}\kappa(\kappa+I)(6\kappa^3+9\kappa^2+\kappa-I)$ (2). Θά δείξωμεν ὅτι ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ἡ (I) ἀληθεύει καί διά $\nu=\kappa+I$. Προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τά μέλη τῆς (2) τό $(\kappa+I)^4$ λαμβάνομεν $1^4+2^4+\ldots+\kappa^4+(\kappa+I)^4=\frac{I}{30}\kappa(\kappa+I)(6\kappa^3+9\kappa^2+\kappa-I)+(\kappa+I)^4=$
$=\frac{I}{30}(\kappa+I)\left[\kappa(6\kappa^3+9\kappa^2+\kappa-I)+30(\kappa+I)^3\right]=\frac{I}{30}(\kappa+I)(6\kappa^4+39\kappa^3+9I\kappa^2+$
$+89\kappa+30)=\frac{I}{30}(\kappa+I)(\kappa+2)(6\kappa^3+27\kappa^2+37\kappa+I5)=\frac{I}{30}(\kappa+I)(\kappa+2)\left[6(\kappa+I)^3+\right.$
$\left.+9(\kappa+I)^2+(\kappa+I)-I\right]$. Ἄρα ἡ (I) ἀληθεύει διά $\nu=\kappa+I$ καί συνεπῶς θά ἀληθεύῃ καί διά κάθε $\nu\in\Phi$.

7) Ἐάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $\frac{1^2}{1.3} + \frac{2^2}{3.5} + \dots + \frac{\nu^2}{(2\nu-1)(2\nu+1)} =$
$= \frac{\nu(\nu+1)}{2(2\nu+1)}$.

Λ ύ σ ι ς . Διά $\nu = 1$ ἡ (1) ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διά $\nu = \varkappa$ ($\varkappa \in \Phi$), ὅτε :

$$\frac{1^2}{1.3} + \frac{2^2}{3.5} + \dots + \frac{\varkappa^2}{(2\varkappa-1)(2\varkappa+1)} = \frac{\varkappa(\varkappa+1)}{2(2\varkappa+1)} \quad (2).$$

Θά δείξωμεν ὅτι ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ἀληθεύει καί διά $\nu = \varkappa+1$.

Προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τά μέλη τῆς (2) τό $\frac{(\varkappa+1)^2}{(2\varkappa+1)(2\varkappa+3)}$ ἔχομεν $\frac{1^2}{1.3} + \frac{2^2}{3.5} + \dots + \frac{\varkappa^2}{(2\varkappa-1)(2\varkappa+1)} + \frac{(\varkappa+1)^2}{(2\varkappa+1)(2\varkappa+3)} = \frac{\varkappa(\varkappa+1)}{2(2\varkappa+1)} +$
$+ \frac{(\varkappa+1)^2}{(2\varkappa+1)(2\varkappa+3)} = (\varkappa+1) . \frac{\varkappa(2\varkappa+3)+2(\varkappa+1)}{2(2\varkappa+1)(2\varkappa+3)} = \frac{(\varkappa+1)(2\varkappa^2+5\varkappa+2)}{2(2\varkappa+1)(2\varkappa+3)} =$
$= \frac{(\varkappa+1)(\varkappa+2)}{2(2\varkappa+3)}$. Ἄρα ἡ (1) ἀληθεύει διά $\nu = \varkappa+1$ καί συνεπῶς θά ἀληθεύῃ καί διά κάθε $\nu \in \Phi$.

8) Ἐάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $\nu.1+(\nu-1).2+(\nu-2).3+\dots$
$\dots+ 2(\nu-1)+1.\nu = \frac{1}{6} \nu(\nu+1)(\nu+2)$ (1) .

Λ ύ σ ι ς . Διά $\nu=1$ ἡ (1) ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διά $\nu=\varkappa$ ($\varkappa \in \Phi$) δηλ. ὅτι $\varkappa.1+(\varkappa-1).2+(\varkappa-2).3+\dots+2(\varkappa-1)+1.\varkappa =$
$= \frac{1}{6} \varkappa(\varkappa+1)(\varkappa+2)$ (2). Θά δείξωμεν ὅτι ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ἡ (1) ἀληθεύει καί διά $\nu = \varkappa+1$, ἤτοι

$(\varkappa+1).1 + \varkappa . 2+(\varkappa-1)3+\dots+2\varkappa+1(\varkappa+1) = \frac{1}{6}(\varkappa+1)(\varkappa+2)(\varkappa+3)$.

Ἐάν τά πρῶτα μέλη τῶν ἰσοτήτων αὐτῶν παραστήσωμεν μέ $\Sigma_\varkappa$ καί $\Sigma_{\varkappa+1}$ ἀντιστοίχως, θά ἔχωμεν $\Sigma_{\varkappa+1} = (\varkappa+1).1 + \varkappa.2+(\varkappa-1)3+\dots$
$\dots+ 3(\varkappa-1) + 2\varkappa + 1(\varkappa+1)$, $\Sigma_\varkappa = \varkappa.1 +(\varkappa-1).2+\dots$
$\dots+3(\varkappa-2) + 2(\varkappa-1) + 1.\varkappa$. Ὥστε $\Sigma_{\varkappa+1}-\Sigma_\varkappa = (\varkappa+1)+\varkappa+(\varkappa-1)+\dots$

$\ldots + 3 + 2 + 1 = \frac{1}{2}(\kappa+1)(\kappa+1+1) = \frac{1}{2}(\kappa+1)(\kappa+2)$ καί ἐπομένως $\Sigma_{\kappa+1} = \frac{1}{6}\kappa(\kappa+1)(\kappa+2) + \frac{1}{2}(\kappa+1)(\kappa+2) = \frac{1}{6}(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)$.
Ἄρα ἡ (1) ἀληθεύει διά $\nu = \kappa+1$ καί συνεπῶς θά ἀληθεύη καί διά κάθε $\nu \in \Phi$.

9) Ἐάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῆ ὅτι $\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \ldots$
$\ldots + \frac{1}{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} = \frac{1}{18} - \frac{1}{3(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}$

Λύσις. Διά $\nu = 1$ ἔχομεν $\frac{1}{1.2.3.4} = \frac{1}{24}$ καί $\frac{1}{18} - \frac{1}{3.2.3.4} = \frac{1}{24}$ δηλ. ἡ (1) ἀληθεύει. Ἔστωὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διά $\nu = \kappa (\kappa \in \Phi)$ δηλ. ὅτι $\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \ldots + \frac{1}{\kappa(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)} = \frac{1}{18} - \frac{1}{3(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)}$ (2). Θά δείξωμεν ὅτι ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ἀληθεύει καί διά $\nu = \kappa+1$. Προσθέτομεν καί εἰς τά δύο μέλη τῆς (2) τό $\frac{1}{(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)(\kappa+4)}$ καί ἔχομεν $\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \ldots + \frac{1}{(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)(\kappa+4)} = \frac{1}{18} - \frac{1}{3(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)} + \frac{1}{(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)(\kappa+4)} = \frac{1}{18} - \frac{\kappa+1}{3(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)(\kappa+4)} = \frac{1}{18} - \frac{1}{3(\kappa+2)(\kappa+3)(\kappa+4)}$. Ἄρα ἡ (1) ἀληθεύει διά $\nu = \kappa+1$ καί συνεπῶς θά ἀληθεύη καί διά κάθε $\nu \in \Phi$.

10) Ἐάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῆ ὅτι $1.1! + 2.2! + 3.3! + \ldots + \nu.\nu! = (\nu+1)! - 1$ (1), ὅπου μέ τό σύμβολον $\nu!$ παριστάνομεν τό γινόμενον $1.2.3\ldots\nu$.

Λύσις. Διά $\nu = 1$ ἔχομεν $1.1! = (1+1)! - 1$ δηλ. ἡ (1) ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διά $\nu = \kappa$ $(\kappa \in \Phi)$ δηλ. ὅτι $1.1! + 2.2! + \ldots + \kappa.\kappa! = (\kappa+1)! - 1$ (2). Θά δείξωμεν ὅτι ὑπό

τήν προϋπόθεσιν αυτήν αληθεύει καί διά $\nu = \kappa+I$, δηλαδή ότι $I.I! + 2.2! + \dots + \kappa.\kappa! + (\kappa+I)(\kappa+I)! = (\kappa+2)! - I$ (3). 'Αλλ' ή (3) ένεκα τής (I) γίνεται $(\kappa+I)! - I + (\kappa+I)(\kappa+I)! = (\kappa+2)! - I =$ $= (\kappa+I)!\left[I + \kappa+I\right] - I = (\kappa+2)! - I$ ή $(\kappa+I)!(\kappa+2) - I = (\kappa+2)! - I$.
Άρα ή (I) αληθεύει καί διά $\nu = \kappa+I$ καί συνεπώς θά αληθεύη καί διά κάθε $\nu \in \Phi$.

II) 'Εάν $\nu \geqslant I$ νά δειχθή ότι $\frac{I}{\nu+I} + \frac{I}{\nu+2} + \frac{I}{\nu+3} + \dots + \frac{I}{2\nu} = I - \frac{I}{2} + \frac{I}{3} - \frac{I}{4} + \dots + \frac{I}{2\nu-I} - \frac{I}{2\nu}$. Ταυτότης τού CATALAN.

Λ ύ σ ι ς. Διά $\nu = I$ ή ταυτότης γίνεται $\frac{I}{I+I} = I - \frac{I}{2}$ ήτοι αληθεύει. Έστω ότι αληθεύει διά $\nu = \kappa$ $(\kappa \in \Phi)$ δηλαδή ότι
$\frac{I}{\kappa+I} + \frac{I}{\kappa+2} + \dots + \frac{I}{2\kappa} = I - \frac{I}{2} + \frac{I}{3} - \frac{I}{4} + \dots - \frac{I}{2\kappa}$. Προσθέτομεν καί εις τά δύο μέλη τής ισότητος τόν $\frac{I}{2\kappa+I} - \frac{I}{2\kappa+2}$ καί έχομεν :

$$\frac{I}{(\kappa+I)+I} + \frac{I}{(\kappa+I)+2} + \dots + \frac{I}{(\kappa+I)+(\kappa-I)} + \frac{I}{(\kappa+I)+\kappa} + \left(\frac{I}{\kappa+I} - \frac{I}{2\kappa+2}\right) =$$
$$= I - \frac{I}{2} + \frac{I}{3} - \frac{I}{4} + \dots + \frac{I}{2\kappa-I} - \frac{I}{2\kappa} + \frac{I}{2\kappa+I} - \frac{I}{2\kappa+I}$$ ή επειδή

$\frac{I}{\kappa+I} - \frac{I}{2\kappa+2} = \frac{I}{\kappa+I} - \frac{I}{2(\kappa+I)} = \frac{I}{2(\kappa+I)}$ θά έχωμεν :

$$\frac{I}{(\kappa+I)+I} + \frac{I}{(\kappa+2)+2} + \dots + \frac{I}{2(\kappa+I)} = I - \frac{I}{2} + \frac{I}{3} - \dots + \frac{I}{2(\kappa+I)-I} - \frac{I}{2(\kappa+I)}$$

δηλ. ή πρότασις αληθεύει διά $\nu = \kappa+I$. Καί επειδή αληθεύει καί διά $\nu = I$ κατά τήν αρχήν τής τελείας επαγωγής θά αληθεύη διά κάθε $\nu \in \Phi$.

I2) Νά δειχθή ότι τό γινόμενον $\Pi_\nu = (\nu+I)(\nu+2)\dots(2\nu-I)2\nu$ είναι διαιρετόν διά 2^ν.

Λ ύ σ ι ς. Διά $\nu = I$ έχομεν $\Pi_I = 2$ δηλ. $\Pi_I =$ πολ.2! Έστω ότι αληθεύει ή πρότασις διά $\nu = \kappa$ $(\kappa \in \Phi)$ δηλ. ότι $\Pi_\kappa = (\kappa+I)(\kappa+2)\dots$ $\dots(2\kappa-I)2\kappa =$ πολ2^κ. Θά δείξωμεν ότι αληθεύει καί διά $\nu = \kappa+I$ δηλ. ότι $\Pi_{\kappa+I} =$ πολ$2^{\kappa+I}$. Έχομεν $\Pi_{\kappa+I} = (\kappa+2)(\kappa+3)\dots(2\kappa+I).2(\kappa+I) =$

$= \dfrac{(\kappa+I)(\kappa+2)\ldots 2\kappa(2\kappa+I)(2\kappa+2)}{\kappa+I} = (\kappa+I)(\kappa+2)\ldots(2\kappa-I)2\kappa\cdot\dfrac{(2\kappa+I)2(\kappa+I)}{\kappa+I},$

$=$ πολ$2^{\kappa}(\kappa+I)2 = 2^{\kappa+I}(\kappa+I)$ καί ἐπειδή ἀληθεύει διά $\nu=I$ θά ἀληθεύει κατά τήν ἀρχήν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς διά κάθε $\nu\in\Phi$.

I3) 'Εάν $\nu\in\Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $(I+\chi)(I+\chi^{2})(I+\chi^{4})\ldots(I+\chi^{2^{\nu}}) =$

$= \dfrac{I-\chi^{2^{\nu+I}}}{I-\chi}$ (I).

Λ ύ σ ι ς . Διά $\nu=I$ ἡ (I) γίνεται $I+\chi = \dfrac{I-\chi^{2}}{I-\chi} = I+\chi$ δηλ. ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἡ (I) ἀληθεύει διά $\nu = \kappa$ $(\kappa\in\Phi)$ δηλ. ὅτι

$(I+\chi)(I+\chi^{2})\ldots(I+\chi^{2^{\kappa}}) = \dfrac{I-\chi^{2^{\kappa+I}}}{I-\chi}$ (2). Θά δείξωμεν ὅτι ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ἀληθεύει καί διά $\nu=\kappa+I$. Πολ/ζοντες ἀμφότερα τά μέλη τῆς (2) ἐπί $I+\chi^{2^{\kappa+1}}$ ἔχομεν : $(I+\chi)(I+\chi^{2})\ldots$

$\ldots(I+\chi^{2^{\kappa}})(I+\chi^{2^{\kappa+I}}) = \dfrac{I-\chi^{2^{\kappa+I}}}{I-\chi}\cdot(I+\chi^{2^{\kappa+I}}) = \dfrac{I+\chi^{2^{\kappa+I}}-\chi^{2^{\kappa+I}}-\chi^{2^{\kappa+2}}}{I-\chi} =$

$= \dfrac{I-\chi^{2^{\kappa+2}}}{I-\chi}$. Ἄρα ἡ (I) ἀληθεύει καί διά $\nu = \kappa+I$ καί συνεπῶς θά ἀληθεύῃ διά κάθε $\nu\in\Phi$.

I4) 'Εάν $\nu\in\Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $(\chi^{2}+\chi+I)(\chi^{2}-\chi+I)(\chi^{4}-\chi^{2}+I)(\chi^{8}-\chi^{4}+I)\cdot$ $\ldots(\chi^{2^{\nu}}-\chi^{2^{\nu-I}}+I) = \chi^{2^{\nu+I}}+\chi^{2^{\nu}}+I$ (I).

Λ ύ σ ι ς . Διά $\nu=I$ ἔχομεν $(\chi^{2}+\chi+I)(\chi^{2}-\chi+I)=(\chi^{2}+I)^{2}-\chi^{2}=$ $=\chi^{4}+\chi^{2}+I$ δηλ. ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἡ (I) ἀληθεύει διά $\nu=\kappa$ $(\kappa\in\Phi)$ δηλ. ὅτι $(\chi^{2}+\chi+I)(\chi^{2}-\chi+I)(\chi^{4}-\chi^{2}+I)\ldots(\chi^{2^{\kappa}}-\chi^{2^{\kappa+I}}+I) = \chi^{2^{\kappa+I}}+\chi^{2^{\kappa}}+I$ (I). Θά δείξωμεν ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu=\kappa+I$. Πολ/ζοντες ἀμφότερα τά μέλη τῆς (I) ἐπί $\chi^{2^{\kappa+I}}-\chi^{2^{\kappa}}+I$ ἔχομεν :

$(\chi^{2}+\chi+I)(\chi^{2}-\chi+I)(\chi^{4}-\chi^{2}+I)\ldots(\chi^{2^{\kappa}}-\chi^{2^{\kappa-I}}+I)(\chi^{2^{\kappa+I}}-\chi^{2^{\kappa}}+I) =$

$= (\chi^{2^{\kappa+I}}+\chi^{2^{\kappa}}+1)(\chi^{2^{\kappa+I}}-\chi^{2^{\kappa}}+I) = \left[(\chi^{2^{\kappa+I}}+I)+\chi^{2^{\kappa}}\right]\left[(\chi^{2^{\kappa+I}}+I)-\chi^{2^{\kappa}}\right] =$

$= (\chi^{2^{\kappa+I}}+I)^{2}-(\chi^{2^{\kappa}})^{2} = \chi^{2^{\kappa+2}}+2\chi^{2^{\kappa+I}}+I-\chi^{2^{\kappa+I}} = \chi^{2^{\kappa+2}}+\chi^{2^{\kappa+I}}+I$ δηλ. ἡ ἡ πρότασις ἀληθεύει καί διά $\nu=\kappa+1$ καί κατά τήν ἀρχήν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς θά ἀληθεύῃ διά κάθε $\nu\in\Phi$.

15) Ἐάν ν ἀκέραιος νά δειχθῇ ὅτι $\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\ldots$
$\ldots+\frac{2^\nu}{1+x^{2^\nu}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{\nu+1}}{1-x^{2^{\nu+1}}}$ (1) .

Λ ύ σ ι ς . Διά $\nu=0$ ἔχομεν $\frac{1}{1+x}=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{1-x^2}=\frac{1}{1+x}$ δηλ. ἡ (1) ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διά $\nu=\kappa$ ($\kappa\in\Phi$) δηλ. ὅτι

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\ldots+\frac{2^\kappa}{1+x^{2^\kappa}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{\kappa+1}}{1-x^{2^{\kappa+1}}}$$ (1). Θά δείξωμεν

ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu=\kappa+1$. Προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τά μέλη τῆς (1) τό $\frac{2^{\kappa+1}}{1-x^{2^{\kappa+1}}}$, ἔχομεν :

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\ldots+\frac{2^\kappa}{1+x^{2^\kappa}}+\frac{2^{\kappa+1}}{1+x^{2^{\kappa+1}}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{\kappa+1}}{1-x^{2^{\kappa+1}}}+\frac{2^{\kappa+1}}{1+x^{2^{\kappa+1}}}$$

$=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{\kappa+2}}{1-x^{2^{\kappa+2}}}$, δηλ. ἀληθεύει διά $\nu=\kappa+1$, τότε ἐπειδή ἀληθεύει καί διά $\nu=0$ κατά τήν ἀρχήν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς θά ἀληθεύῃ καί διά κάθε $\nu\in\Phi$.

16) Ἐάν $\nu\in\Phi$ νά δειχθῇ ὅτι ὁ $F(\nu)=3^{4\nu+2}+2.4^{3\nu+1}=$ $=$ πολ.17 (1) .

Λ ύ σ ι ς . Διά $\nu=1$ ἔχομεν $F(1)=1241=$ πολ.17 Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διά $\nu=\kappa$ ($\kappa\in\Phi$) ἤτοι ὅτι $F(\kappa)=3^{4\kappa+2}+2.4^{3\kappa+1}=$ $=17\rho$ (2). Θά δείξωμεν ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu=\kappa+1$. Ἔχομεν $F(\kappa+1)=3^{4(\kappa+1)+2}+2.4^{3(\kappa+1)+1}=3^{4\kappa+6}+2.4^{3\kappa+4}=3^{4\kappa+2}.3^4+2.$ $.4^{3\kappa+1}.4^3=81.3^{4\kappa+2}+64.2.4^{3\kappa+1}=3^{4\kappa+2}(64+17)+2.4^{3\kappa+1}.64=$ $=3^{4\kappa+2}.17+64(3^{4\kappa+2}+2.4^{3\kappa+1})$ (3). Ἀλλ' ἕνεκα τῆς (2) ἡ (3) γίνεται $F(\varkappa+1) = 17\cdot3^{4\varkappa+2} + 64\cdot17\rho =$ πολ.17 .

17) Ἐάν $\nu\in\Phi$ νά δειχθῇ ὅτι ὁ $F(\nu) = 7^{2\nu} + 16\nu - 1 =$ $=$ πολ.64 (1).

Λύσις. Διά $\nu=1$ ἔχομεν $F(1) = 64$ ἤτοι ἡ (1) ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διά $\nu=\varkappa$ $(\varkappa\in\Phi)$, ὅτε $7^{2\varkappa}+16\varkappa-1=64\lambda$ (2). Θά δείξωμεν ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu=\varkappa+1$. Ἔχομεν τότε

$7^{2\varkappa+2}+16(\varkappa+1)-1 = 49\cdot7^{2\varkappa}+16\varkappa+15 = 49(64\lambda-16\varkappa+1)+16\varkappa+15 =$ $= 49\cdot64\lambda-49\varkappa+49+16\varkappa+15 = 49\cdot64\lambda-48\cdot16\varkappa+64 = 49\cdot64\lambda-12\cdot64\varkappa+64 =$ $=$ πολ 64, δηλ. ἡ πρότασις ἀληθεύει διά $\nu=\varkappa+1$ καί συνεπῶς κατά τήν ἀρχήν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς ἡ πρότασις θά ἀληθεύῃ διά κάθε $\nu\in\Phi$.

18) Ἐάν $\nu\in\Phi$ νά δειχθῇ ὅτι ὁ $F(\nu) = 2^{2\nu+1}+1 =$ $=$ πολ.3 (1) .

Λύσις. Διά $\nu=0$ ἔχομεν $F(0) = 2+1 = 3$ ἤτοι ἡ (1) ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διά $\nu=\varkappa$ $(\varkappa\in\Phi)$ ὅτε $2^{2\varkappa+1}+1 =$ $= 3\lambda$ (2) $(\lambda\in A)$. Θά δείξωμεν ὅτι ἀληθεύει διά $\nu=\varkappa+1$ δηλ. ὅτι $2^{2(\varkappa+1)+1}+1 = 3\rho$ (3) $(\rho\in A)$. Ἐκ τῆς (2) ἔχομεν $2^{2\varkappa+1}=3\lambda-1$. Ἄρα $2^{2(\varkappa+1)+1}+1 = 2^{2\varkappa+1}\cdot2^2+1 = (3\lambda-1)4+1 = 3\cdot4\lambda-4+1 = 3(4\lambda-1)$. Ἀλλά ὁ $4\lambda-1\in A$. Εἶναι λοιπόν $2^{2(\varkappa+1)+1}+1 = 3\rho$. Ἄρα ἡ (3) ἀληθεύει. Ἄρα ὁ δοθείς ἀριθμός εἶναι πολ/σιον τοῦ 3 διά $\nu=0$ κατά τήν ἀρχήν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς εἶναι πολ/σιον τοῦ 3 διά κάθε $\nu\in\Phi$.

19) Ἐάν $\nu\in\Phi$ νά δειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμός $F(\nu)=2^{2\nu}+15\nu-1=$ πολ9.

Λύσις. Διά $\nu=1$ ἔχομεν $F(1) = 18 =$ πολ.9. Ἔστω ὅτι διά $\nu=\varkappa$ $(\varkappa\in\Phi)$ ὁ δοθείς ἀριθμός εἶναι διαιρετός διά 9, ἤτοι ὅτι $\varphi(\varkappa) = 2^{2\varkappa}+15\varkappa-1 =$ πολ.9 (1). Θά δείξωμεν ὅτι καί διά $\nu=$ $=\varkappa+1$ εἶναι $F(\varkappa+1) =$ πολ.9 (2) . Ἔχομεν $F(\varkappa+1)=2^{2\varkappa+2}+15(\varkappa+1)-1=$

$= 4.2^{2\varkappa}+15\varkappa+14$ (3). Πολ/ζοντες τήν (I) έπί 4 καί άφαιροῦντες έξ αὐτῆς τήν (3) ἔχομεν $4F(\varkappa) - F(\varkappa+1) = 45\varkappa-18 = 9(5\varkappa-2) =$ πολ9. Ἄρα ἡ (2) ἀληθεύει. Ἑπομένως ὁ δοθείς ἀριθμός εἶναι πολ/σιον τοῦ 9 διά τήν τιμήν $\nu=\varkappa-1$ καί ἐπειδή εἶναι πολ/σιον τοῦ 9 διά $\nu=1$, κατά τήν ἀρχήν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς εἶναι πολ/σιον τοῦ 9 διά κάθε $\nu\in\Phi$.

20) Ἐάν ν εἶναι ἄρτιος, νά δειχθῆ ὅτι ὁ $F(\nu) = \nu^2+2\nu =$ = πολ.8.

Λύσις. Διά $\nu=2$ ἔχομεν $F(2) = 2^2+2.2 = 8 =$ πολ.8. Ἔστω ὅτι διά $\nu=\varkappa$, $\varkappa$=ἄρτιος, εἶναι $F(\varkappa)=\varkappa^2+2\varkappa=$πολ.8. Θά δείξωμεν ὅτι καί διά $\nu=\varkappa+2$ εἶναι $F(\varkappa+2) =$ πολ8. Πράγματι $F(\varkappa+2)=(\varkappa+2)^2 + 2(\varkappa+2) = \varkappa^2+6\varkappa+8 = \varkappa^2+2\varkappa+4\varkappa+8 = F(\varkappa)+4\varkappa+8$. Ἀλλά τό $4\varkappa$, ἐπειδή ὁ $\varkappa$ εἶναι ἄρτιος, εἶναι πολ/σιον τοῦ 8. Ὥστε ἐάν τό $F(\varkappa)$ εἶναι πολ/σιον τοῦ 8 τότε καί τό $F(\varkappa+2)$ θά εἶναι πολ/σιον τοῦ 8 / καί ἐπειδή εἶναι πολ/σιον τοῦ 8 διά $\nu=2$, κατά τήν ἀρχήν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς, εἶναι πολ/σιον τοῦ 8 διά κάθε ν ἄρτιον.

21) Ἐάν $\nu\in\Phi$ νά δειχθῆ ὅτι ὁ ἀριθμός $F(\nu)=2.4^{2\nu+1}+3^{3\nu+1} =$ = πολ.11.

Λύσις. Διά $\nu=1$ εἶναι $F(1) = 2.4^3+3^4 = 209 =$ πολ.11. Ἔστω ὅτι ὁ $F(\nu)$ εἶναι πολ/σιον τοῦ 11 διά $\nu=\varkappa(\varkappa\in\Phi)$, ἤτοι $F(\varkappa) = 2.4^{2\varkappa+1}+3^{3\varkappa+1} =$ πολ.11. Θά δείξωμεν ὅτι καί διά $\nu=\varkappa+1$ εἶναι $F(\varkappa+1)=$πολ.11. Ἔχομεν $F(\varkappa+1) = 2.4^{2\varkappa+3}+3^{3\varkappa+4} = 2.4^{2\varkappa+1}.4^2+3^{3\varkappa+1}$. καί $F(\varkappa+1)-F(\varkappa)=2.4^{2\varkappa+1}(4^2-1)+3^{3\varkappa+1}(3^3-1) = 2.4^{2\varkappa+1}.15+3^{3\varkappa+1}.26 = 2.4^{2\varkappa+1}(11+4)+3^{3\varkappa+1}(22+4) = 11.(2.4^{2\varkappa+1}+3^{3\varkappa+1}.2)+4(2.4^{2\varkappa+1}+3^{3\varkappa+1})$. Παρατηροῦμεν λοιπόν ὅτι ἡ διαφορά $F(\varkappa+1)-F(\varkappa)$ εἶναι διαιρετή διά 11. Ἐπειδή ὅμως ὑπετέθη ὅτι ὁ $F(\varkappa)$ εἶναι διαιρετός διά 11, ἕπεται ὅτι καί ὁ $F(\varkappa+1)$ εἶναι διαιρετός διά 11. Ἡ πρότασις λοιπόν ἀληθεύει διά $\nu=\varkappa+1$ καί ἐπειδή ἀληθεύει καί διά $\nu=1$, θά ἀληθεύῃ καί διά κάθε $\nu\in\Phi$.

22) Ἐάν $\nu\in\Phi$ νά δειχθῆ ὅτι ὁ $F(\nu)=2^{2\nu-1}.3^{\nu+2}+1 =$ πολ.11.(I)

Λ ύ σ ι ς . Διά ν=I ἔχομεν F(I) = 2.27 = 55 = πολ.II. Ἔστω ὅτι ἡ (I) ἀληθεύει διά ν=κ (κ∈Φ) δηλ. ὅτι $2^{2\kappa-I}.3^{\kappa+2}+I$ = πολ.II = IIρ (ρ∈Φ), ἄρα $2^{\kappa-T} = \frac{II\rho-I}{3^{\kappa+2}}$. Θά δείξωμεν ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ὅτι ἀληθεύει καί διά ν=κ+I, δηλ. ὅτι $2^{2\kappa+I} = \frac{4(II\rho-I)}{3^{\kappa+2}}$ (2).

Πολ/ζοντες τά μέλη τῆς (2) ἐπί $3^{\kappa+3}$ εὑρίσκομεν $2^{2\kappa+I}.3^{\kappa+3}$=I2(IIρ-1) ἤ $2^{2\kappa+I}.3^{\kappa+3}$= II.I2ρ-II = II(I2ρ-I) δηλ. ἡ πρότασις ἀληθεύει καί διά ν = κ+I καί συνεπῶς θά ἀληθεύῃ διά κάθε ν∈Φ.

23) Ἐάν ν∈A ≥ 0 νά δειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμός $F(\nu)=2^{4\nu+I}-2^{2\nu}-I$ = πολ.9 (I).

Λ ύ σ ι ς . Διά ν=0 ἔχομεν F(0)=0=9.0 ἄρα ὁ F(ν) εἶναι διαιρετός διά 9. Ἔστω ὅτι ἡ (I) εἶναι ἀληθής διά ν=κ(κ∈Φ) δηλ. ὅτι $F(\kappa) = 2^{4\kappa+I}-2^{2\kappa}-I = 9\lambda$ (I) καί λ∈A. Θά δείξωμεν ὅτι ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ἡ (I) ἀληθεύει καί διά ν=κ+I δηλ. ὅτι F(κ+I) = $2^{4(\kappa+I)+I}-2^{2(\kappa+I)}-I = 9\rho$ (2) ὅπου ρ∈A.

Ἡ (2) γράφεται $2^{4\kappa+I}.2^4-2^{2\kappa}.2^2-I = 9\rho$ (3). Ἀλλ' ἐκ τῆς (I) ἔχομεν $2^{4\kappa+I}= 9\lambda+2^{2\kappa}+I$. Ἄρα $2^{4\kappa+I}2^4-2^{2\kappa}.2^2-1 = (9\lambda+2^{2\kappa}+I)I6-2^{2\kappa}.4-I = 9.I6\lambda+2^{2\kappa}.I6+I6-2^{2\kappa}.4-I = 9.I6\lambda+2^{2\kappa}(I6-4)+I5 = 9.I6\lambda+2^{2\kappa}.I2+I5 = 9.I6\lambda+3(2^{2\kappa}.2^2+5) = 9.I6\lambda+3(2^{2\kappa+2}+5)$. Ἄρα ἡ (2) θά ἀληθεύῃ ἄν ὑπάρχει ἀκέραιος ἀριθμός ρ τοιοῦτος ὥστε νά εἶναι $9.I6\lambda+3(2^{2\kappa+2}+5) = 9\rho$. Ἡ $3.I6\lambda+2^{2\kappa+2}+3+2 = 3\rho$. Ἀλλ' ὁ ἀριθμός 3.I6λ+3 εἶναι διαιρετός διά 3. Ἄρα ἡ (3) θά ἀληθεύῃ ἄν καί μόνον ἐάν ὁ ἀκέραιος $2^{2\kappa+2}+2 = 2(2^{2\kappa+I}+I)$ εἶναι διαιρετός διά 3. Ἀλλά πράγματι τοῦτο συμβαίνει (ἄσκ. I8). Ἄρα ἡ (3) ἀληθεύει, ἄρα καί ἡ (2). Ἄρα ἡ (I) ἀληθεύει καί ν=κ+I ὅταν ἀληθεύει καί διά ν=κ καί συνεπῶς θά ἀληθεύῃ διά κάθε ν∈Φ .

24) Νά δειχθῇ ὅτι διά ν≥0 ὁ $F(\nu) = II^{\nu+2}+I2^{2\nu+I}$ εἶναι διαιρετός διά I33 .

Λ ύ σ ι ς . Διά ν=0 ἡ πρότασις εἶναι ἀληθής. Ἔστω ὅτι αὐτη

ἀληθεύει διά $\nu = \varkappa (\varkappa \in \Phi)$ δηλ. ὅτι ὁ $F(\varkappa) = 11^{\varkappa+2}+12^{2\varkappa+1}=$πολ$133$. Θά δείξωμεν ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ὅτι τοῦτο ἀληθεύει καί διά $\nu = \varkappa+1$. Πράγματι $A_{\varkappa+1} = 11^{\varkappa+3}+12^{2(\varkappa+1)+1} = 11^{\varkappa+3}+12^{2\varkappa+3} =$
$= 11 \cdot 11^{\varkappa+2}+144 \cdot 12^{2\varkappa+1} = 11 \cdot 11^{\varkappa+2}+133 \cdot 12^{2\varkappa+1}+11 \cdot 12^{2\varkappa+1} = 11(11^{\varkappa+2}+12^{2\varkappa+1})+$
$+ 133 \cdot 12^{2\varkappa+1} = 11\, F(\varkappa)+133 \cdot 12^{2\varkappa+1}$. Ἀλλ' ἡ παράστασις αὕτη εἶναι ἄθροισμα δύο ὅρων ἕκαστος τῶν ὁποίων εἶναι διαιρετός διά 133. Ἄρα εἶναι διαιρετή διά 133. Ἐδείχθη λοιπόν ὅτι ὁ $F(\nu)$ εἶναι διαιρετός διά 133 καί διά $\nu = \varkappa+1$ μέ τήν προϋπόθεσιν ὅτι εἶναι διαιρετός διά $\nu = \varkappa$. Ἄρα λοιπόν κατά τήν ἀρχήν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς θά εἶναι διαιρετός διά 133 διά κάθε $\nu \in \Phi$.

25) Ἐάν $\nu \in \Phi \geqslant 2$ νά δειχθῇ ὅτι ὁ $F(\nu) = 25 \cdot 7^{6\nu} \cdot \nu^3-25 \cdot 7^{6\nu}\nu +$ $+ 343 \cdot 5^{4\nu} \cdot \nu^3 - 343 \cdot 5^{4\nu} \cdot \nu$ εἶναι διαιρετός διά 18933600.

Λ ύ σ ι ς. Ἀναλύομεν καί τήν παράστασιν εἰς γινόμενον καί τόν ἀριθμόν εἰς πρώτους παράγοντας, ὅτε : $F(\nu) =$
$= 5^2 \cdot 7^{6\nu} \cdot \nu^3-5^2 \cdot 7^{6\nu}\nu+7^3 \cdot 5^{4\nu} \cdot \nu^3 \cdot 7^3 \cdot 5^{4\nu} \cdot \nu =$
$= 5^2 \cdot 7^{6\nu}\nu(\nu^2- 1)+7^3 \cdot 5^{4\nu}\nu\,(\nu^2-1) = (\nu-1)\nu(\nu+1)5^2 \cdot 7^3(7^{6\nu-3}+5^{4\nu-2})$,
ὁ δέ ἀριθμός γίνεται $18933600 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 23$.

Ἐπειδή τό γινόμενον $(\nu-1)\nu(\nu+1) \cdot 5^2 \cdot 7^3$ διαιρεῖται διά τοῦ γινομένου $2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^3$ διότι οἱ $(\nu-1)\nu(\nu+1)$ εἶναι τρεῖς διαδοχικοί ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι ὁ $\varphi(\nu) = 7^{6\nu-3}+5^{4\nu-2}$ διαιρεῖται διά $23 \cdot 2^4 = 23 \cdot 16$.

Διά $\nu=1$ ἔχομεν $\varphi(1) = 368 = 16 \cdot 23 =$ πολ$23 \cdot 16$. Ἔστω ὅτι $\varphi(\varkappa) = 7^{6\varkappa-3}+5^{4\varkappa-2}=$ πολ$23 \cdot 16$ (1), ὅτε $\varphi(\varkappa+1) = 7^{6\varkappa+6-3}+5^{4\varkappa+2} =$
$= 7^{6\varkappa-3}7^6+5^{4\varkappa+2} = 7^6($πολ$23 \cdot 16-5^{4\varkappa-2})+5^{4\varkappa+2}$, ἄρα $\varphi(\varkappa+1)=$πολ$23 \cdot 16-$
$-5^{4\varkappa+2}(7^6-5^4)=$πολ$23 \cdot 16-5^{4\varkappa-2} \cdot 117024 =$ πολ$23 \cdot 16-5^{4\varkappa-2} \cdot 23 \cdot 16 \cdot 318=$
$=$ πολ$23 \cdot 16$. Ἄρα ἀληθεύει διά $\nu=\varkappa+1$ ἐάν ἀληθεύῃ διά $\nu=\varkappa$ καί συνεπῶς θά ἀληθεύῃ καί διά κάθε $\nu \in \Phi$.

26) Ἐάν $I \leqslant \mu \leqslant \nu-I$ καί $\mu+I \leqslant \lambda \leqslant \nu$, νά δειχθῇ ὅτι

$$\left(\sum_{\varkappa=I}^{\nu} \alpha_\varkappa\right)^2 = \sum_{\varkappa=I}^{\nu} \alpha_\varkappa^2 + 2\Sigma\alpha_\mu\alpha_\lambda \quad (I).$$

Λ ύ σ ι ς . Διά $\nu=3$ ἔχομεν $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)$ ἄρα ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἡ (I) ἀληθεύει διά $\nu=\varkappa$ ὅπου $\varkappa \in \Phi \geqslant 3$, δηλ. ὅτι: $\left(\sum_{\varkappa=I}^{\varkappa} \alpha_\varkappa\right)^2 = \sum_{\varkappa=I}^{\varkappa} \alpha_\varkappa^2 + 2\Sigma\alpha_\mu\alpha_\lambda$ (2) ὅπου $I \leqslant \mu \leqslant \varkappa-I$ καί $\mu+I \leqslant \lambda \leqslant \varkappa$. Θά δείξωμεν ὅτι ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν αὕτη ἀληθεύει καί διά $\nu=\varkappa+I$, δηλ. ὅτι $\left(\sum_{\varkappa=I}^{\varkappa+I} \alpha_\varkappa\right)^2 = \sum_{\varkappa=I}^{\varkappa+I} \alpha_\varkappa^2 + 2\Sigma\alpha_\mu\alpha_\lambda$ (3) ὅπου $I \leqslant \mu < \varkappa$ καί $\mu+I \leqslant \lambda \leqslant \varkappa+I$. Πραγματι ἔχομεν :

$$\left(\sum_{\varkappa=I}^{\varkappa+I} \alpha_\varkappa\right)^2 = \left(\sum_{\varkappa=I}^{\varkappa} \alpha_\varkappa + \alpha_{\varkappa+I}\right)^2 = \left(\sum_{\varkappa=I}^{\varkappa} \alpha_\varkappa\right)^2 + \alpha_{\varkappa+I}^2 + 2\alpha_{\varkappa+I} \sum_{\varkappa=I}^{\varkappa} \alpha_\varkappa$$

Ἀλλ'ἕνεκα τῆς (2) τό ἄθροισμα τοῦτο ἰσοῦται μέ :

$\sum_{\varkappa=I}^{\varkappa} \alpha_\varkappa^2 + \alpha_{\varkappa+I}^2 + 2\Sigma\alpha_\mu\alpha_\lambda + 2\alpha_{\varkappa+I} \sum_{\varkappa=I}^{\varkappa} \alpha_\varkappa$ ὅπου $I \leqslant \mu \leqslant \varkappa-I$ καί $\mu+I \leqslant \lambda \leqslant \varkappa$. Ἄρα ἰσοῦται καί πρός $\sum_{\varkappa=I}^{\varkappa+I} \alpha_\varkappa^2 + 2\Sigma\alpha_\mu\alpha_\lambda$ ὅπου τώρα $I \leqslant \mu \leqslant \varkappa$ καί $\mu+I \leqslant \lambda < \varkappa+I$. Ἄρα τό πρῶτον μέλος τῆς (3) ἰσοῦται μέ τό δεύτερον. Ἄρα ἡ πρότασις ἀληθεύει διά $\nu=\varkappa+I$ ὅταν δεχθῶμεν ὅτι ἀληθεύει διά $\nu=\varkappa$ καί συνεπῶς θά ἀληθεύη διά κάθε φυσικόν $\nu \geqslant 3$.

27) Ἐάν $\nu \in \Phi \geqslant 3$ καί $I \leqslant \mu \leqslant \nu-I$, $\mu+I \leqslant \lambda \leqslant \nu$ νά δειχθῇ ὅτι

$$\sum_{\varkappa=I}^{\nu} \alpha_\varkappa^2 \cdot \sum_{\varkappa=I}^{\nu} \beta_\varkappa^2 - \left(\sum_{\varkappa=I}^{\nu} \alpha_\varkappa \beta_\varkappa\right)^2 = \Sigma\left(\alpha_\mu \beta_\lambda - \alpha_\lambda \beta_\mu\right)^2 \quad (I)$$

(Ταυτότης LAGRANGE)

Λ ύ σ ι ς . Διά $\nu=3$ ἔχομεν $(\alpha_I^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)(\beta_I^2+\beta_2^2+\beta_3^2)-(\alpha_I\beta_I + \alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)^2 = (\alpha_I\beta_2-\alpha_2\beta_I)^2+(\alpha_I\beta_3-\alpha_3\beta_I)^2+(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)^2$ δηλαδή ἀληθεύει.

Ἔστω ὅτι ἀληθεύει διά $\nu=\rho$ ὅπου $\rho\in\Phi \geqslant 3$. Θά δείξωμεν ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu=\rho+I$, δηλ. ὅτι :

$$\sum_{\varkappa=I}^{\rho+I} \alpha_\varkappa^2 \sum_{\varkappa=I}^{\rho+I} \beta_\varkappa^2 - \left(\sum_{\varkappa=I}^{\rho+I} \alpha_\varkappa \beta_\varkappa \right)^2 = \Sigma \left(\alpha_\mu \beta_\lambda - \alpha_\lambda \beta_\mu \right)^2 \quad (2).$$

Πράγματι ἔχομεν :

$$\sum_{\varkappa=I}^{\rho+I} \alpha_\varkappa^2 \cdot \sum_{\varkappa=I}^{\rho+I} \beta_\varkappa^2 = \left(\sum_{\varkappa=I}^{\rho} \alpha_\varkappa^2 + \alpha_{\varkappa+I}^2 \right) \left(\sum_{\varkappa=I}^{\rho} \beta_\varkappa^2 + \beta_{\varkappa+I}^2 \right) =$$

$$= \sum_{\varkappa=I}^{\rho} \alpha_\varkappa^2 \cdot \sum_{\varkappa=I}^{\rho} \beta_\varkappa^2 + \beta_{\varkappa+I}^2 \sum_{\varkappa=I}^{\rho} \alpha_\varkappa^2 + \alpha_{\varkappa+I}^2 \sum_{\varkappa=I}^{\rho} \beta_\varkappa^2 + \alpha_{\varkappa+I}^2 \beta_{\varkappa+I}^2$$

Ἐπίσης ἔχομεν :

$$\left(\sum_{\varkappa=I}^{\rho+I} \alpha_\varkappa \beta_\varkappa \right)^2 = \left(\sum_{\varkappa=I}^{\rho} \alpha_\varkappa \beta_\varkappa + \alpha_{\varkappa+I} \beta_{\varkappa+I} \right)^2 = \sum_{\varkappa=I}^{\rho} \alpha_\varkappa \beta_\varkappa + 2\alpha_{\varkappa+I} \beta_{\varkappa+I} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\varkappa=I}^{\rho} \alpha_\varkappa \beta_\varkappa + \alpha_{\varkappa+I}^2 \beta_{\varkappa+I}^2 .$$

Ἄρα τό πρῶτον μέλος τῆς (2) ἰσοῦται μέ :

$$\sum_{\varkappa=I}^{\rho} \alpha_\varkappa^2 \cdot \sum_{\varkappa=I}^{\rho} \beta_\varkappa^2 - \left(\sum_{\varkappa=I}^{\rho} \alpha_\varkappa \beta_\varkappa \right)^2 + \beta_{\varkappa+I}^2 \sum_{\varkappa=I}^{\rho} \alpha_\varkappa^2 + \alpha_{\varkappa+I}^2 \sum_{\varkappa=I}^{\rho} \beta_\varkappa^2 -$$

$$- 2\alpha_{\varkappa+I} \beta_{\varkappa+I} \sum_{\varkappa=I}^{\rho} \alpha_\varkappa \beta_\varkappa$$ ἤ λόγῳ τῆς (I)

$$\Sigma \left(\alpha_\mu \beta_\lambda - \alpha_\lambda \beta_\mu \right)^2 + \alpha_{\varkappa+I}^2 \sum_{\varkappa=I}^{\rho} \beta_\varkappa^2 + \beta_{\varkappa+I}^2 \sum_{\varkappa=I}^{\rho} \alpha_\varkappa^2 - 2\alpha_{\varkappa+I} \beta_{\varkappa+I} \cdot$$

$\cdot \sum_{\varkappa=I}^{\rho} \alpha_\varkappa \beta_\varkappa$. Ἡ παράστασις ὅμως αὕτη γράφεται :

$$\Sigma \left(\alpha_\mu \beta_\lambda - \alpha_\lambda \beta_\mu \right)^2 + \sum_{\varkappa=I}^{\rho} \left(\alpha_\varkappa \beta_{\varkappa+I} - \beta_\varkappa \alpha_{\varkappa+I} \right)^2$$

Τό ἄθροισμα ὅμως αὐτό γράφεται: $\Sigma (\alpha_\mu \beta_\lambda - \alpha_\lambda \beta_\mu)^2$,

ὅπου $I \leqslant \mu \leqslant \rho$ καί $\mu+I \leqslant \lambda \leqslant \rho+I$.

Ἄρα τὸ πρῶτον μέλος τῆς (2) εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσον πρὸς τὸ δεύτερον. Ἡ (I) λοιπὸν ἀληθεύει διὰ $\nu = \varkappa+1$ καὶ συνεπῶς διὰ κάθε $\nu \in \Phi \geqslant 3$.

28) Ἐὰν $\nu \in \Phi > 2$ νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{\nu+2} + \dots + \frac{1}{2\nu} > \frac{13}{24}$ (I)

Λ ύ σ ι ς . Διὰ $\nu=2$ ἔχομεν $\frac{7}{12} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24}$ ἤτοι ἡ (I) ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἡ (I) ἀληθεύει διὰ $\nu=\varkappa (\varkappa \in \Phi)$ ἤτοι $S_\varkappa > \frac{13}{24}$. Θὰ δείξωμεν ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν αὐτὴν ὅτι ἀληθεύει καὶ διὰ $\nu = \varkappa+1$, ἤτοι $S_{\varkappa+1} > \frac{13}{24}$. Ἔχομεν $S_\varkappa = \frac{1}{\varkappa+1} + \frac{1}{\varkappa+2} + \dots + \frac{1}{2\varkappa}$

$$S_{\varkappa+1} = \frac{1}{\varkappa+2} + \frac{1}{\varkappa+3} + \dots + \frac{1}{2\varkappa} + \frac{1}{2\varkappa+1} + \frac{1}{2\varkappa+2}$$

Ἀφαιροῦντες αὐτὰς κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$S_{\varkappa+1} - S_\varkappa = \frac{1}{2\varkappa+1} + \frac{1}{2\varkappa+2} - \frac{1}{\varkappa+1} = \frac{1}{2(\varkappa+1)(2\varkappa+1)}$$

Ἀλλὰ διὰ κάθε ἀκέραιον καὶ θετικὸν κ τὸ κλάσμα $\frac{1}{2(\varkappa+1)(2\varkappa+1)}$ εἶναιθετικόν, ἄρα $S_{\varkappa+1} > S_\varkappa$. Ἀλλὰ

$$S_\varkappa > \frac{13}{24} \quad , \quad \text{ἄρα καὶ} \quad S_{\varkappa+1} > \frac{13}{24}$$

Ἄρα ἡ (I) ἀληθεύει διὰ $\nu = \varkappa+1$ καὶ ἐπειδὴ ἰσχύει καὶ διὰ $\nu = \varkappa$, ἕπεται ὅτι, θὰ ἀληθεύῃ διὰ κάθε $\nu \in \Phi$.

29) Ἐὰν $\nu \in \Phi \geqslant 5$ νὰ δειχθῇ ὅτι $2^\nu > \nu^2$ (I) .

Λ ύ σ ι ς . Διὰ $\nu = 5$ ἡ (I) ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἀληθεύει διὰ $\nu = \varkappa$ $(\varkappa \in \Phi \geqslant 5)$ ἤτοι $2^\varkappa > \varkappa^2$ (2). Θὰ δείξωμεν ὅτι ἀληθεύει καὶ διὰ $\nu = \varkappa+1$ δηλ. ὅτι $2^{\varkappa+1} > (\varkappa+1)^2$ (3) ἢ $2^\varkappa . 2 > (\varkappa+1)^2$ (4). Πρὸς τοῦτοις ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ἀληθεύει ἡ $2\varkappa^2 > (\varkappa+1)^2$ (5) ὅτε κατὰ μείζονα λόγον θὰ ἀληθεύει ἡ (4) λόγῳ τῆς (2).

'Η (5) γράφεται $\kappa^2 - 2\kappa - I > 0$ (6). Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου εἶναι $I \pm \sqrt{2}$ καί ἐπειδή τό κ λαμβάνει ἀκεραίας καί θετικάς τιμάς, διά νά ἀληθεύει ἡ (6) πρέπει $\kappa > I + \sqrt{2}$ ἤ $\kappa > 3$ τό ὁποῖον συμβαίνει ἐξ ὑποθέσεως. Ὥστε ἡ (6) ἀληθεύει διά $\kappa > 3$ ἄρα καί ἡ (4) καί ἡ (3).

Μέ τήν προϋπόθεσιν ὅτι ἀληθεύει ἡ (I) διά $\nu = \kappa$ ἐδείχθη ὅτι θά ἀληθεύη καί διά $\nu = \kappa + I$, καί συνεπῶς θά ἀληθεύη διά κάθε $\nu \in \Phi \geqslant 5$.

30) Ἐάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $\dfrac{I + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{\nu}}{\nu} > \dfrac{2}{3}\sqrt{\nu}$ (I)

Λ ύ σ ι ς . Διά $\nu = I$ ἡ (I) ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἡ (I) ἀ- ληθεύει διά $\nu = \kappa$ $(\kappa \in \Phi)$, ἤτοι ὅτι:

$\dfrac{I + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{\kappa}}{\kappa} > \dfrac{2}{3}\sqrt{\kappa}$ (2). Θά δείξωμεν ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu = \kappa + I$ δηλ. ὅτι $\dfrac{I + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{\kappa} + \sqrt{\kappa + I}}{\kappa + I} > \dfrac{2}{3}\sqrt{\kappa + I}$ (3).

'Η (2) γράφεται $\dfrac{I + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{\kappa}}{\kappa + I} > \dfrac{2}{3}\sqrt{\kappa} \cdot \dfrac{\kappa}{\kappa + I}$ (4),

(ἤτοι πολ/ζομεν καί τά δύο μέλη της ἐπί τόν θετικόν $\dfrac{\kappa}{\kappa + I}$). Προσθέτοντες καί εἰς τά δύο μέλη της τόν $\dfrac{\sqrt{\kappa - I}}{\kappa + I}$, λαμβάνομεν :

$\dfrac{I + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{\kappa} + \sqrt{\kappa + I}}{\kappa + I} > \dfrac{2}{3}\sqrt{\kappa}\,\dfrac{\kappa}{\kappa + I} + \dfrac{\sqrt{\kappa + I}}{\kappa + I}$ (5) .

Ἵνα ἀληθευούσης τῆς (5) ἀληθεύει καί ἡ (3) ἀρκεῖ νά εἶναι $\dfrac{2\sqrt{\kappa}}{3}\,\dfrac{\kappa}{\kappa + I} + \dfrac{\sqrt{\kappa + I}}{\kappa + I} > \dfrac{2}{3}\sqrt{\kappa + I}$ ἤ $2\kappa\sqrt{\kappa} > (2\kappa - I)\sqrt{\kappa + I}$. 'Η τελευταία ἀνισότης ἀληθεύει, διότι ἄν ὑψώσωμεν εἰς τό τετράγωνον καί τά δύο μέλη της εὑρίσκομεν $0 > -(3\kappa - I)$ τό ὁποῖον εἶναι ἀληθές.

3I) Ἐάν $\nu \in \Phi > 2$ νά δειχθῇ ὅτι $\dfrac{I}{\sqrt{I}} + \dfrac{I}{\sqrt{2}} + \dots + \dfrac{I}{\sqrt{\nu}}\ \sqrt{\nu}$ (I)

Λ ύ σ ι ς . Διά $\nu = 2$ ἡ (I) ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἀληθεύει διά $\nu = \kappa$ $(\kappa \in \Phi)$, ἤτοι $\dfrac{I}{\sqrt{I}} + \dfrac{I}{\sqrt{2}} + \dots + \dfrac{I}{\sqrt{\kappa}} > \sqrt{\kappa}$ (2). Θά δείξωμεν ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu = \kappa+I$ ἤτοι ὅτι $\frac{I}{\sqrt{I}} + \frac{I}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{I}{\sqrt{\kappa}} + \frac{I}{\sqrt{\kappa+I}} >$

$> \sqrt{\kappa+I}$ (3). Ἀλλ'εἶναι γνωστόν ὅτι $\frac{I}{\sqrt{\kappa+I}} > \sqrt{\kappa+I} - \sqrt{\kappa}$ (4), διότι ἡ (4) προκύπτει ἐκ τῆς ἀνισότητος $I + \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa+I}} > I$ διά πολ/σμοῦ καί τῶν δύο μελῶν της ἐπί $\sqrt{\kappa-I} - \sqrt{\kappa}$. Προσθέτοντες τάς (2) καί (4) κατά μέλη εὑρίσκομεν τήν (3). Ἀφοῦ λοιπόν ἡ (I) ἰσχύει διά $\nu = \kappa+I$ καί μέ τήν προϋπόθεσιν ὅτι ἰσχύει διά $\nu = \kappa$, ἕπεται ὅτι θά ἀληθεύῃ διά κάθε $\nu \in \Phi$.

32) Ἐάν $\nu \in \Phi \geqslant 2$ οἱ δέ ἀριθμοί $\alpha_I, \alpha_2, \dots \alpha_\nu$ εἶναι θετικοί, νά δειχθῇ ὅτι $(I+\alpha_I)(I+\alpha_2)\dots(I+\alpha_\nu) > I+(\alpha_I+\alpha_2+\dots+\alpha_\nu)$ (I).

(Ἀνισότης τοῦ WEIERSTRASS)

Λύσις. Διά $\nu=2$ ἔχομεν $(I+\alpha_I)(I+\alpha_2) = I+\alpha_I+\alpha_2+\alpha_I\alpha_2$, ἄρα $(I+\alpha_I)(I+\alpha_2) > I+(\alpha_I+\alpha_2)$ διότι $\alpha_I\alpha_2 > 0$ ἤτοι ἀληθεύει. Ἔστω ἤδη ὅτι ἡ (I) ἀληθεύει διά $\nu=\kappa$ $(\kappa \in \Phi)$ δηλ. ὅτι :

$(I+\alpha_I)(I+\alpha_2)\dots(I+\alpha_\kappa) > I+(\alpha_I+\alpha_2+\dots+\alpha_\kappa)$ (2). Θά δείξωμεν ὅτι ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ἀληθεύει καί διά $\nu = \kappa+I$. Ἄν πολ/σωμεν καί τά δύο μέλη τῆς (2) ἐπί τόν θετικόν ἀριθμόν $(I+\alpha_{\kappa+I})$ ἔχομεν: $(I+\alpha_I)(I+\alpha_2)\dots(I+\alpha_\kappa)(I+\alpha_{\kappa+I}) > I+(\alpha_I+\alpha_2+\dots+\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa+I}) +$

$+ (\alpha_I+\alpha_2+\dots+\alpha_\kappa)\alpha_{\kappa+I}$. Ἐάν ὅμως παραλείψωμεν εἰς τό δεύτερον μέλος τόν θετικόν προσθετέον $(\alpha_I+\alpha_2+\dots+\alpha_\kappa)\alpha_{\kappa+I}$, λαμβάνομεν κατά μείζονα λόγον $(I+\alpha_I)(I+\alpha_2)\dots(I+\alpha_\kappa)(I+\alpha_{\kappa+I}) > I+(\alpha_I+\alpha_2+\dots+\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa+I})$.

Ἡ (I) λοιπόν ἀληθεύει καί διά $\nu = \kappa + I$. Ἄρα κατά τήν ἀρχήν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς θά ἀληθεύῃ καί διά πάντα $\nu \in \Phi$.

Σημείωσις.- Ἐάν $\alpha_I = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_\nu = \chi$, ἡ (I) γίνεται : $(I + \chi)^\nu > I + \nu\chi$.

(Ἀνισότης τοῦ BERNOUILLI)

33) 'Εάν $\nu \in \Phi \geqslant 2$ οἱ δέ ἀριθμοί $\alpha_I, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ εἶναι θετικοί καί μικρότεροι τῆς μονάδος, νά δειχθῇ ὅτι :

$$(I-\alpha_I)(I-\alpha_2)\ldots(I-\alpha_\nu) > I-(\alpha_I+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu) \qquad (I).$$

Λύσις. Διά $\nu = 2$ ἔχομεν $(I-\alpha_I)(I-\alpha_2) = 1-(\alpha_I+\alpha_2)+\alpha_I\alpha_2$ καί ἄρα $(I-\alpha_I)(I-\alpha_2) > I-(\alpha_I+\alpha_2)$ διότι $\alpha_I\alpha_2 > 0$. Ἡ (I) λοιπόν ἀληθεύει διά $\nu = 2$. Ἔστω ἤδη ὅτι ἡ (I) ἀληθεύει διά $\nu = \kappa$ $(\kappa \in \Phi)$, δηλαδή ὅτι : $(I-\alpha_I)(I-\alpha_2)\ldots(I-\alpha_\kappa) > I-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\kappa)$ (2). Θά δείξωμεν ὅτι ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu = \kappa+I$.

Πολ/ζομεν καί τά δύο μέλη τῆς (2) ἐπί $I-\alpha_{\kappa+I}$ ὁ ὁποῖος εἶναι θετικός ἀριθμός διότι ὑπετέθη ὅτι $\alpha_{\kappa+I} < I$. Θά ἔχωμεν τότε τήν ἀνισότητα $(I-\alpha_I)(I-\alpha_2)\ldots(I-\alpha_\kappa)(I-\alpha_{\kappa+I}) > I-(\alpha_I+\alpha_2+\ldots+\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa+I}) + (\alpha_I+\alpha_2+\ldots+\alpha_\kappa)\alpha_{\kappa+I}$.

'Εάν ἐκ τοῦ δευτέρου μέλους αὐτῆς παραλείψωμεν τόν ὅρον $(\alpha_I+\alpha_2+\ldots+\alpha_\kappa)\alpha_{\kappa+I}$ ὁ ὁποῖος εἶναι θετικός, θά ἔχωμεν κατά μείζονα λόγον $(I-\alpha_I)(I-\alpha_2)\ldots(I-\alpha_\kappa)(I-\alpha_{\kappa+I}) > I-(\alpha_I+\alpha_2+\ldots+\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa+I})$. Ἡ (I) λοιπόν ἀληθεύει καί διά $\nu=\kappa+I$. Ἄρα κατά τήν ἀρχήν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς θά ἀληθεύῃ καί πάντα $\nu \in \Phi \geqslant 2$.

34) 'Εάν $\nu \in \Phi$ καί $I+\chi > 0$ νά δειχθῇ ὅτι $(I+\chi)^\nu \geqslant I+\nu\chi$ (I).

('Ανισότης τοῦ J. BERNOUILLI)

Λύσις. Διά $\nu=I$ ἡ (I) ἀληθεύει διότι γίνεται ἰσότης. Διά $\nu=2$ ἔχομεν $(I+\chi)^2 > I+2\chi$ ἡ ὁποία προφανῶς ἀληθεύει. Ἔστω ἤδη ὅτι ἡ (I) ἀληθεύει διά $\nu=\kappa$ $(\kappa \in \Phi > 2)$ δηλ. ὅτι $(I+\chi)^\kappa > I+\kappa\chi$ (2). Θά δείξωμεν ὅτι ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ἀληθεύει καί διά $\nu=\kappa+I$. Πολ/ζομεν καί τά δύο της μέλη ἐπί τόν θετικόν ἀριθμόν $I+\chi$ καί ἔχομεν:

$(1+\chi)^{\varkappa+1} > (1+\varkappa\chi)(1+\chi)$ ἤ $(1+\chi)^{\varkappa+1} > 1+\chi+\varkappa\chi+\varkappa\chi^2$ ἤ $(1+\chi)^{\varkappa+1} > 1+(\varkappa+1)\chi+\varkappa\chi^2$ (3). Εἶναι ὅμως προφανές ὅτι $1+(\varkappa+1)\chi+\varkappa\chi^2 > 1+(\varkappa+1)\chi$ (4). Ἐκ τῶν (3) καί (4) ἕπεται ὅτι $(1+\chi)^{\varkappa+1} > 1+(\varkappa+1)\chi$. Δηλ. ἡ (1) ἀληθεύει καί διά $\nu=\varkappa+1$. Ἄρα κατά τήν ἀρχήν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς ἡ (1) θά ἀληθεύῃ καί διά πάντα $\nu\in\Phi > 2$.

<u>Σημείωσις</u>. Ἡ ἀνισότης τοῦ Bernoulli ἔχει πλείστας ὅσας ἐφαρμογάς, καί μᾶς διευκολύνει πολύ εἰς τήν ἀπόδειξιν ἀνισοτικῶν σχέσεων.

<u>Ἐφαρμογή 1</u>. Νά δειχθῇ ὅτι διά κάθε $\nu\in\Phi$ εἶναι $(1-\alpha)^\nu > 1-\nu\alpha$, ἄν $\alpha < 1$.

Αὕτη ἀληθεύει λόγῳ τῆς (1) ἐπειδή $-\alpha > -1$, ἐξ οὗ $1+(-\alpha) > 0$.

<u>Ἐφαρμογή 2</u>. Νά δειχθῇ ὅτι ὑπάρχει τιμή τοῦ ν διά τήν ὁποίαν ἀληθεύει ἡ ἀνισότης $(1,01)^\nu > 10$.

Θέτομεν εἰς τὴν ἀνισότητα (1) $\chi= 0,1$ ὅτε αὕτη γίνεται $(1+0,1) 1+\nu.0,1$ ἤ $(1+0,1)^\nu > 1+\frac{\nu}{10}$. Θέλομεν δέ $1+\frac{\nu}{10} = 10$ ὅτε εὑρίσκομεν $\nu=90$. Ἄρα διά $\nu=90$ θά εἶναι $(1,01)^\nu > 10$.

<u>Ἐφαρμογή 3</u>. Νά δειχθῇ ὅτι διά κάθε $\nu\in\Phi$ εἶναι $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu \geqslant 2$.

Αὕτη προκύπτει ἐκ τῆς (1) διά $\chi = \frac{1}{\nu}$.

<u>Ἐφαρμογή 4</u>. Νά δειχθῇ ὅτι διά κάθε $\nu\in\Phi$ εἶναι $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}$ $\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+2}$ (α)

Ἡ (α) γράφεται $\dfrac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}}{\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1}} > 1+\frac{1}{\nu+1}$ ἤ $\left(\dfrac{\nu^2+2\nu+1}{\nu^2+2\nu}\right)^{\nu+1} > 1+\frac{1}{\nu+1}$

ἤ $\left[1+\frac{1}{\nu(\nu+2)}\right]^{\nu+1} > 1+\frac{1}{\nu+1}$. Εἰς τήν ἀνισότητα τοῦ Bernoulli

θέτομε $\chi = \frac{1}{\nu(\nu+2)}$ καί ἔχομε $\left[1+\frac{1}{\nu(\nu+2)}\right]^{\nu+1} > 1+\frac{1}{\nu(\nu+2)}$ (β)

Διά νά ἀληθεύῃ ἡ (2) ἄρκει νά εἶναι $\frac{1}{\nu+1} < \frac{\nu+1}{\nu(\nu+2)}$ ἤ $\nu(\nu+2)<(\nu+1)^2$ ἤ $\nu^2+2\nu < \nu^2+2\nu+1$ ἤ $1>0$, τό ὁποῖον εἶναι ἀληθές. Ἄρα ἡ (β) ἀληθεύει καί συνεπῶς καί ἡ (α).

Ἐφαρμογή 5. Νά δειχθῇ ὅτι διά κάθε $\nu\in\Phi$ εἶναι $\left(\frac{2\nu}{\nu+1}\right)^\nu > \frac{\nu+1}{2}$.

Ἐπειδή $\frac{2\nu}{\nu+1} = \frac{(\nu+1)+(\nu-1)}{\nu+1} = 1 + \frac{\nu-1}{\nu+1}$. Ἄρα κατά τήν ἀνισότητα τοῦ Bernouilli εἶναι :

$\left(1+\frac{\nu-1}{\nu+1}\right)^\nu > 1+\nu\left(\frac{\nu-1}{\nu+1}\right) = \frac{\nu^2+1}{\nu+1}$. Διά τήν ἀπόδειξιν λοιπόν τῆς δοθείσης ἀνισότητος, ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι $\frac{\nu^2+1}{\nu+1} > \frac{\nu+1}{2}$ ἤ ὅτι $2(\nu^2+1)>(\nu+1)^2$ ἤ $2\nu^2+2-\nu^2-2\nu-1 > 0$. Ἐξ αὐτῆς ἔχομεν $(\nu-1)^2>0$ ἡ ὁποία προφανῶς ἀληθεύει.

Ἐφαρμογή 6. Ἐάν $1<\nu<11$ νά δειχθῇ ὅτι $0<\nu^{1,4143}-\nu^{1,4142}$ $\frac{\nu^{1,4142}}{1000}$. Ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι $0 < \nu^{1,4142}.\nu^{0,0001}-\nu^{1,4142}$ $\frac{\nu^{1,4142}}{1000}$ ἤ $0<\nu^{0,0001}-1<\frac{1}{1000}$. Ἐάν $\nu>1$ ἡ πρός τά ἀριστερά ἀνισότης ἀληθεύει. Διά νά δειχθῇ ἡ πρός τά δεξιά πρέπει νά δειχθῇ ὅτι $1+\frac{1}{1000} > \nu^{0,0001}$ ἤ $\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{10000} > \nu$. Ἀλλά κατά τήν ἀνισότητα τοῦ Bernouilli εἶναι $\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{10000} > 1+\frac{1}{1000}.10.000 =$

$=11>\nu$ ὅ.ἔ.δ.

35) Ἐάν $\nu\in\Phi > 1$ νά δειχθῇ ὅτι $2.4.6....(2\nu+2) < (\nu+2)^{\nu+1}$ (1).

Λ ύ σ ι ς . Διά $\nu=2$ ἡ (1) γίνεται $2.4.6 < 4^3$ ἤ $48 < 64$ δηλ. ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διά $\nu=\kappa$ $(\kappa\in\Phi)$ δηλ. ὅτι 2.4.6...

..$2(\varkappa+1) < (\varkappa+2)^{\varkappa+1}$ (2). Θά δείξωμεν ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu=\varkappa+1$ δηλ. ὅτι:

$2.4.6....2(\varkappa+1)(\varkappa+2).2 < (\varkappa+3)^{\varkappa+2}$.

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τά μέλη τῆς (2) ἐπί $2(\varkappa+2)$ ἔχομεν $2.4.6...2(\varkappa+1)(\varkappa+2)2 < 2(\varkappa+2)^{\varkappa+2}$. Ἀρκεῖ λοιπόν νά δείξωμεν ὅτι $(\varkappa+3)^{\varkappa+2} > 2(\varkappa+2)^{\varkappa+2}$ ἤ $\left(\frac{\varkappa+3}{\varkappa+2}\right)^{\varkappa+2} > 2$, ἀλλ' αὔτη ἰσχύει. (ἴδε ἐφαρμογή 3, ἄσκησις 34).

Ἄρα ἡ πρότασις ἀληθεύει διά $\nu=\varkappa+1$ καί συνεπῶς θά ἀληθεύη καί διά κάθε $\nu\in\Phi$.

36) Ἐάν α καί ν φυσικοί νά δειχθῇ ὅτι $\alpha^{2\nu}+\alpha^{2\nu-1}+...+\alpha+1 \geqslant (2\nu+1)\alpha^{\nu}$ (1).

Λ ύ σ ι ς. Διά $\nu=1$ ἔχομεν $\alpha^2+\alpha+1 > 3\alpha$ ἤ $\alpha^2+\alpha+1-3\alpha \geqslant 0$ ἤ $(\alpha-1)^2 \geqslant 0$ δηλ. ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διά $\nu=\varkappa(\varkappa\in\Phi)$ δηλ. ὅτι $\alpha^{2\varkappa}+\alpha^{2\varkappa-1}+...+\alpha+1 \geqslant (2\varkappa+1)\alpha^{\varkappa}$ (2). Θά δείξωμεν ὅτι ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ἀληθεύει καί διά $\nu=\varkappa+1$ δηλ. ὅτι $\alpha^{2(\varkappa+1)}+\alpha^{2\varkappa+1}+......+\alpha+1 \geqslant (2\varkappa+3)\alpha^{\varkappa+1}$ (3) ἤ ὅτι $\alpha^{2(\varkappa+1)}+\alpha^{2\varkappa+1}+...+\alpha+1-2\alpha^{\varkappa+1} \geqslant (2\varkappa+1)\alpha^{\varkappa+1}$ (3). Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τά μέλη (2) ἐπί α καί ἔχομεν $\alpha^{2\varkappa+1}+\alpha^{2\varkappa}+...+\alpha^2+\alpha \geqslant (2\varkappa+1)\alpha^{\varkappa+1}$. Ἀρκεῖ λοιπόν νά δείξωμεν ὅτι $\alpha^{2(\varkappa+1)}+\alpha^{2\varkappa+1}+...+\alpha+1-2\alpha^{\varkappa+1} \geqslant \alpha^{2\varkappa+1}+\alpha^{2\varkappa}+...+\alpha^2+\alpha$ ἤ

$$\alpha^{2(\varkappa+1)}+\alpha^{2\varkappa+1}+...+\alpha+1-2\alpha^{\varkappa+1}-\alpha^{2\varkappa+1}-\alpha^{2\varkappa}-...-\alpha^2-\alpha \geqslant 0 \text{ ἤ}$$

$\alpha^{2(\varkappa+1)}-2\alpha^{\varkappa+1}+1 > 0$ ἤ $(\alpha^{\varkappa+1}-1)^2 \geqslant 0$ δηλ. ἡ πρότασις ἀληθεύει καί διά $\nu=\varkappa+1$. Ἄρα θά ἀληθεύη καί διά κάθε $\nu\in\Phi$.

37. Ἐάν $\nu\in\Phi \geqslant 4$ καί $0<\alpha<1$ νά δειχθῇ ὅτι $(1-\alpha)^{\nu} > 1-\nu\alpha+\frac{\nu(\nu-1)\alpha^2}{1.2} - \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\alpha^3}{1.2.3}$ (1).

Λ ύ σ ι ς . Διά $\nu = 4$ ἔχομεν $(1-\alpha)^4 > 1-4\alpha+6\alpha^2-4\alpha^3$ ἤ

$1-4\alpha+6\alpha^2-4\alpha^3+\alpha^4 > 1-4\alpha+6\alpha^2-4\alpha^3$ ἤ $\alpha^4>0$ δηλ. ἀληθεύει.

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διά $\nu=\kappa$ ($\kappa\in\Phi$) δηλ. ὅτι $(1-\alpha)^{\kappa}>1-\kappa\alpha+\frac{\kappa(\kappa-1)}{1.2}\alpha^2-\frac{\kappa(\kappa-1)(\kappa-2)}{1.2.3}$ (1). Πολλαπλασιάζομεν καί τά δύο μέλη τῆς (1) ἐπί $1-\alpha>0$ καί λαμβάνομεν $(1-\alpha)^{\kappa+1}>1-\kappa\alpha+\frac{\kappa(\kappa-1)\alpha^2}{1.2}-\frac{\kappa(\kappa-1)(\kappa-2)}{1.2.3}\alpha^3-\alpha+\kappa\alpha^2-\frac{\kappa(\kappa-1)}{1.2}\alpha^3+\frac{\kappa(\kappa-1)(\kappa-2)}{1.2.3}\alpha^4$ ἤ μετά τήν ἀναγωγήν τῶν ὁμοίων ὅρων λαμβάνομεν:

$$(1-\alpha)^{\kappa+1}>1-(\kappa+1)\alpha+\left[\frac{\kappa(\kappa-1)}{1.2}+\kappa\right]\alpha^2-\left[\frac{\kappa(\kappa-1)}{1.2}+\frac{\kappa(\kappa-1)(\kappa-2)}{1.2.3}\right]\alpha^3+$$
$$+\frac{\kappa(\kappa-1)(\kappa-2)}{1.2.3}\alpha^4$$ καί μετά τάς πράξεις εἰς τάς ἀγκύλας λαμβάνομεν :

$$(1-\alpha)^{\kappa+1}>1-(\kappa+1)\alpha+\frac{\kappa(\kappa+1)}{1.2}\alpha^2-\frac{(\kappa-1)(\kappa)(\kappa+1)}{1.2.3}\alpha^3+\frac{\kappa(\kappa-1)(\kappa-2)}{1.2.3}\alpha^4,$$

τότε κατά μείζονα λόγον θά ἔχωμεν καί

$$(1-\alpha)^{\kappa+1}>1-(\kappa+1)\alpha+\frac{\kappa(\kappa+1)}{1.2}\alpha^2-\frac{(\kappa-1)\kappa(\kappa+1)}{1.2.3}\alpha^3.$$ Ἀληθεύει λοιπόν ἡ πρότασις καί διά $\nu=\kappa+1$ καί ἑπομένως καί διά κάθε $\nu\in\Phi$.

38. Ἐάν $\chi\neq1$ καί θετικός καί $\nu\in\Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $\frac{1+\chi^2+\chi^4+\ldots+\chi^{2\nu}}{\chi+\chi^3+\ldots+\chi^{2\nu-1}}>1+\frac{1}{\nu}$ (1).

Λ ύ σ ι ς. Διά $\nu=1$ ἔχομεν $\frac{1+\chi^2}{\chi}>1+1$ ἤ $1+\chi^2>2\chi$, δηλ. ἡ (1) ἀληθεύει.

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διά $\nu=\kappa$ ($\kappa\in\Phi$), δηλ. $\frac{1+\chi^2+\chi^4+\ldots+\chi^{2\kappa}}{\chi+\chi^3+\ldots+\chi^{2\kappa-1}}>1+\frac{1}{\kappa}$ (2). Θά δείξωμεν ὅτι ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ἡ (1) ἀληθεύει καί διά $\nu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι

$$\frac{1+\chi^2+\chi^4+\ldots+\chi^{2\kappa+2}}{\chi+\chi^3+\ldots+\chi^{2\kappa+1}}>1+\frac{1}{\kappa+1} \quad (3).$$

'Αντιστρέφομεν τά μέλη τῆς (2) καί ἔχομεν $\frac{\chi+\chi^3+\ldots+\chi^{2\kappa-1}}{1+\chi^2+\ldots+\chi^{2\kappa}} < \frac{\kappa}{\kappa+1}$ καί

πολλαπλασιάζοντες ἀριθμητήν καί παρονομαστήν τοῦ πρώτου μέλους ἐπί χ λαμβάνομεν:

$$\frac{\chi^2+\chi^4+\ldots+\chi^{2\kappa}}{\chi+\chi^3+\ldots+\chi^{2\kappa+1}} < \frac{\kappa}{\kappa+1} = \frac{\kappa+1-1}{\kappa+1} = 1-\frac{1}{\kappa+1}$$ καί ἀλλάσσοντες τά

σημεῖα τῶν δύο μελῶν ἔχομεν $-\frac{\chi^2+\chi^4+\ldots+\chi^{2\kappa}}{\chi+\chi^3+\ldots+\chi^{2\kappa+1}} > -1+\frac{1}{\kappa+1}$ (4)

'Αλλ' ἐξ ἄλλου ἀληθεύει προφανῶς ἡ $\frac{1+\chi^2}{\chi} > 2$ (5)

Προσθέτοντες κατά μέλη τῆς (4) καί (5) λαμβάνομεν:

$$\frac{1+\chi^2}{\chi}-\frac{\chi^2+\chi^4+\ldots+\chi^{2\kappa}}{\chi+\chi^3+\ldots+\chi^{2\kappa+1}} > 1+\frac{1}{\kappa+1} \quad (6)$$

Τό πρῶτον μέλος τῆς (6) γράφεται διαδοχικῶς

$$\frac{(1+\chi^2)(\chi+\chi^3+\ldots+\chi^{2\kappa+1})-\chi(\chi^2+\chi^4+\ldots+\chi^{2\kappa})}{\chi(\chi+\chi^3+\ldots+\chi^{2\kappa+1})} =$$

$$= \frac{(\chi+\chi^3+\ldots+\chi^{2\kappa+1})+(\chi^3+\chi^5+\ldots+\chi^{2\kappa+1}+\chi^{2\kappa+3})-(\chi^3+\chi^5+\ldots+\chi^{2\kappa+1})}{\chi(\chi+\chi^3+\ldots+\chi^{2\kappa+1})} =$$

$$= \frac{\chi+\chi^3+\ldots+\chi^{2\kappa+1}+\chi^{2\kappa+3}}{\chi(\chi+\chi^3+\ldots+\chi^{2\kappa+1})} = \frac{1+\chi^2+\chi^4+\ldots+\chi^{2\kappa+2}}{1+\chi^3+\ldots+\chi^{2\kappa+1}} .$$

'Επομένως ἡ (6) συμπίπτει μέ τήν ἀποδεικτέαν (2). Ἄρα ἡ (1) ἀληθεύει διά $\nu=\kappa+1$ καί συνεπῶς θά ἀληθεύῃ καί διά πάντα $\nu\in\Phi$.

39) Ἐάν $\nu\in\Phi$ καί $\chi>0$ νά δειχθῇ ὅτι $\chi^\nu+\chi^{\nu-2}+\chi^{\nu-4}+\ldots+\frac{1}{\chi^{\nu-4}}+\frac{1}{2^{\nu-2}}+$

$+\frac{1}{\chi^\nu} \geqslant \nu+1$ (1)

Λ ύ σ ι ς . Διά $\nu=1$ ἡ (1) γίνεται $1+\frac{1}{\chi}\geqslant 2$ (2) ἤ $(\chi-1)^2\geqslant 0$. Διά $\nu=2$ ἡ (1) γίνεται $\chi^2+1+\frac{1}{\chi^2}\geqslant 3$ (3). Ἡ (2) ἀληθεύει διά κάθε $\chi>0$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ (2) ἀληθεύει ὅταν ὁ χ ἀντικατασταθῇ διά χ^2 κ.τ.λ. δηλ. $\chi^2+\frac{1}{\chi^2}\geqslant 2$. Προσθέτοντες 1 εἰς ἀμφότερα τά μέλη τῆς ἀνισότητος αὐτῆς λαμβάνομεν τήν (3).

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διά $\nu=\kappa$ ($\kappa\in\Phi$) δηλ. ὅτι $\chi^\kappa+\chi^{\kappa-2}+\ldots$ $\ldots+\frac{1}{\chi^{\kappa-2}}+\frac{1}{\chi^\kappa}\geqslant \kappa+1$ (4). Θά δείξωμεν ὅτι ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ἡ (1) ἀληθεύει διά $\nu=\kappa+2$, δηλ. $\chi^{\kappa+2}+\chi^\kappa+\chi^{\kappa-2}+\ldots+\frac{1}{\chi^{\kappa-2}}+\frac{1}{\chi^\kappa}+$ $+\frac{1}{\chi^{\kappa+2}}\geqslant \kappa+3$ (5). Ἀντικαθιστῶντες τό χ διά τοῦ $\chi^{\kappa+2}$ εἰς τήν (2) λαμβάνομεν $\chi^{\kappa+2}+\frac{1}{\chi^{\kappa+2}}\geqslant 2$ (6). Προσθέτοντες κατά μέλη τάς (4) καί (6) λαμβάνομεν τήν (5). Ἄρα ἡ (1) ἀληθεύει διά $\nu=\kappa+2$.

Εἰς τάς δύο πρώτας περιπτώσεις ἐδείχθη ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διά $\nu=1$ καί $\nu=2$. Εἰς τήν τελευταίαν περίπτωσιν ἐδείχθη ὅτι ἡ ἀλήθεια τῆς (1) διά $\nu=\kappa+2$ συνεπάγεται τήν ἀλήθειαν τῆς (1) διά $\nu=\kappa$ δηλ. ἔχομεν κατ᾽εὐθεῖαν μετάβασιν ἀπό $\nu=\kappa$ εἰς τό $\nu=\kappa+2$.

Τά ἀποτελέσματα τῆς πρώτης καί τῆς τελευταίας περιπτώσεως μᾶς παρέχουν κατ᾽εὐθεῖαν τήν βεβαιότητα ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διά κάθε περιττόν ἀριθμόν ν. Ὁμοίως τά ἀποτελέσματα τῆς δευτέρας καί τελευταίας περιπτώσεως μᾶς παρέχουν τήν βεβαιότητα ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διά κάθε ἄρτιον ἀριθμόν ν. Ἄρα ἡ (1) ἀληθεύει διά κάθε $\nu\in\Phi$.

40) Ἐάν $\nu\in\Phi$ καί οἱ α καί β θετικοί νά δειχθῇ ὅτι $\beta^{\nu+1}\geqslant(\nu+1)\alpha^\nu\beta-\nu\alpha^{\nu+1}$ (1).

Λ ύ σ ι ς . Διά $\nu=1$ ἡ (1) γίνεται $\beta^2>2\alpha\beta-\alpha^2$ ἤ $(\alpha-\beta)^2>0$, ἄρα ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἀληθεύει διά $\nu=\kappa$ δηλ. ὅτι εἶναι $\beta^{\kappa+1}\geq(\kappa+1)\alpha^{\kappa}\beta -$ $-\kappa\alpha^{\kappa+1}$ (2). Θά δείξωμεν ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu=\kappa+1$, δηλ. ὅτι εἶναι $\beta^{\kappa+2}\geq(\kappa+2)\alpha^{\kappa+1}\beta-(\kappa+1)\alpha^{\kappa+2}$ (3). Πολλαπλασιάζοντες τήν (2) ἐπί β ἔχομεν $\beta^{\kappa+2}\geq(\kappa+1)\alpha^{\kappa}\beta^{2}-\kappa\alpha^{\kappa+1}\beta$ (4). Διά νά δειχθῇ ἡ (3) ἀρκεῖ ἕνεκα τῆς (4) νά δειχθῇ ὅτι $(\kappa+1)\alpha^{\kappa}\beta^{2}-\kappa\alpha^{\kappa+1}\beta\geq(\kappa+2)\alpha^{\kappa+1}\beta-(\kappa+1)\alpha^{\kappa+2}$ ἤ $\kappa\alpha^{\kappa}\beta^{2}+\alpha^{\kappa}\beta^{2}-\kappa\alpha^{\kappa+1}\beta-\kappa\alpha^{\kappa+1}\beta-2\alpha^{\kappa+1}\beta+\kappa\alpha^{\kappa+2}+\alpha^{\kappa+2}\geq 0$ ἤ $(\kappa\alpha^{\kappa}\beta^{2}-2\kappa\alpha^{\kappa+1}\beta+\kappa\alpha^{\kappa+2})+(\alpha^{\kappa}\beta^{2}-2\alpha^{\kappa+1}\beta+\alpha^{\kappa+2})\geq 0$ ἤ $\kappa\alpha^{\kappa}(\alpha-\beta)^{2}+\alpha^{\kappa}(\alpha-\beta)^{2}\geq 0$ ἤ $\alpha^{\kappa}(\alpha-\beta)^{2}(\kappa+1)\geq 0$ ἡ ἀνισότης αὕτη ἀληθεύει διότι εἶναι $\alpha>0$ καί $\kappa\in\Phi$. Ἄρα θά ἀληθεύῃ διά κάθε $\nu\in\Phi$.

41. Ἐάν $\nu\in\Phi>1$ νά δειχθῇ ὅτι $\frac{4^{\nu}}{\nu+1}<\frac{(2\nu)!}{(\nu!)^{2}}$ (1).

Λύσις. Διά $\nu=2$ ἡ (1) γίνεται $\frac{16}{3}<6$ δηλ. ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διά $\nu=\kappa$ $(\kappa\in\Phi)\geq 2$ δηλ. ὅτι $\frac{4^{\kappa}}{\kappa+1}<\frac{(2\kappa)!}{(\kappa!)^{2}}$.
Ἐπειδή ὅμως διά $\kappa>0$ εἶναι $\frac{4(\kappa+1)}{\kappa+2}<\frac{(2\kappa+1)(2\kappa+2)}{(\kappa+1)^{2}}$, τότε

$$\frac{4^{\kappa}}{\kappa+1}\cdot\frac{4(\kappa+1)}{\kappa+2}<\frac{(2\kappa)!}{(\kappa!)^{2}}\cdot\frac{(2\kappa+1)\,(2\kappa+2)}{(\kappa+1)^{2}}$$ ἤτοι:

$$\frac{4^{\kappa+1}}{\kappa+2}<\frac{(2\kappa+2)!}{[(\kappa+1)!]^{2}}$$ ἤτοι ἀληθεύει ἡ (1) καί διά $\nu=\kappa+1$ καί συνεπῶς θά ἀληθεύῃ καί διά πάντα $\nu\in\Phi>1$.

42) Ἐάν $\nu\in\Phi>1$ καί $\alpha+\beta>0$ $(\alpha\neq\beta)$ νά δειχθῇ ὅτι $2^{\nu-1}(\alpha^{\nu}+\beta^{\nu})>(\alpha+\beta)^{\nu}$ (1).

Λύσις. α) Διά $\nu=2$ ἡ (1) γίνεται $2(\alpha^{2}+\beta^{2})>(\alpha+\beta)^{2}$ (2)
Ἐάν $\alpha\neq\beta$ ἀληθεύει ἡ ἀνισότης $(\alpha-\beta)^{2}>0$ (3).
Προσθέτοντες τό $(\alpha+\beta)^{2}$ εἰς ἀμφότερα τά μέλη τῆς (3) εὑρίσκομεν τήν (2). Ἄρα ἡ (1) ἀληθεύει διά $\nu=2$.

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διά $\nu=\kappa$ $(\kappa\in\Phi)$ δηλ. ὅτι $2^{\kappa-1}(\alpha^{\kappa}+\beta^{\kappa})>$

$(\alpha+\beta)^{\varkappa}$(4). Θά δείξωμεν ὅτι ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ἡ (1) ἀληθεύει καί διά $\nu=\varkappa+1$. δηλ. ὅτι $2^{\varkappa}(\alpha^{\varkappa+1}+\beta^{\varkappa+1})>(\alpha+\beta)^{\varkappa+1}$ (5) Πολλαπλασιάζοντες καί τά δύο μέλη τῆς (4) ἐπί $\alpha+\beta$, καί ἐπειδή $\alpha+\beta>0$ λαμβάνομεν $2^{\varkappa-1}(\alpha^{\varkappa}+\beta^{\varkappa})(\alpha+\beta)>(\alpha+\beta)^{\varkappa+1}$ (6). Διά νά δείξωμεν τήν ἰσχύν τῆς (5) ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι $2^{\varkappa}(\alpha^{\varkappa+1}+\beta^{\varkappa+1})>2^{\varkappa-1}(\alpha^{\varkappa}+\beta^{\varkappa})(\alpha+\beta)$ (7) ἤ ὅτι $\alpha^{\varkappa+1}+\beta^{\varkappa+1}>\alpha^{\varkappa}\beta+\alpha\beta^{\varkappa}$ (8). Ἡ (8) γράφεται $(\alpha^{\varkappa}-\beta^{\varkappa})(\alpha-\beta)>0$ (9). Ἔστω ὅτι $\alpha>\beta$ τότε θά εἶναι $\alpha^{\varkappa}>\beta^{\varkappa}$ ὅτε τό πρῶτον μέλος τῆς (9) εἶναι γινόμενον θετικῶν ἀριθμῶν, δηλ. αὕτη ἀληθεύει.

Ἔστω ὅτι $\alpha<\beta$ ὅτε $\alpha^{\varkappa}<\beta^{\varkappa}$ καί τότε τό πρῶτον μέλος τῆς (9) εἶναι γινόμενον δύο ἀρνητικῶν, δηλ. πάλιν ἀληθεύει. Ἄρα καί εἰς τάς δύο περιπτώσεις ἡ (9) ἀληθεύει. Ἄρα ἡ πρότασις ἀληθεύει καί διά $\nu=\varkappa+1$, καί συνεπῶς θά ἀληθεύῃ διά κάθε $\nu\in\Phi$.

43) Ἐάν $\alpha>0$ καί β ἀλγεβρικός ἀριθμός τοιοῦτος ὥστε $\alpha+\beta>0$ νά δειχθῇ ὅτι $(\alpha+\beta)^{\nu}(\alpha-\nu\beta)<\alpha^{\nu+1}$ (1) ὅπου $\nu\in\Phi$.

Λ ύ σ ι ς. Διά $\nu=1$ ἔχομεν $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)<\alpha^2$ ἡ ὁποία εἶναι ἀληθής. Ἔστω ὅτι ἡ (1) εἶναι ἀληθής διά $\nu=\varkappa$ ($\varkappa\in\Phi$). Θά δείξωμεν ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu=\varkappa+1$. Πράγματι διά $\nu=\varkappa$ ἔχομεν $(\alpha+\beta)^{\varkappa}(\alpha-\varkappa\beta)<\alpha^{\varkappa+1}$. Πολλαπλασιάζοντες καί τά δύο μέλη τῆς ἀνισότητος αὐτῆς ἐπί α ἔχομεν $(\alpha+\beta)^{\varkappa}[\alpha+\beta-(\varkappa+1)\beta][\alpha-\beta-\beta]<\alpha^{\varkappa+2}$ ἤ $(\alpha+\beta)^{\varkappa}[(\alpha+\beta)^2-(\varkappa+1)\beta(\alpha+\beta)-\beta(\alpha+\beta)+(\varkappa+1)\beta^2]<\alpha^{u+2}$ καί κατά μείζονα λόγον $(\alpha+\beta)^{\varkappa}[(\alpha+\beta)^2-(\varkappa+2)\beta(\alpha+\beta)]<\alpha^{\varkappa+2}$ ἤ $(\alpha+\beta)^{\varkappa+1}[\alpha-(\varkappa+1)\beta]<\alpha^{\varkappa+2}$ ἄρα ἡ πρότασις ἀληθεύει καί διά $\nu=\varkappa+1$ καί συνεπῶς καί διά κάθε $\nu\in\Phi$.

44) Ἐάν $\nu\in\Phi>2$ νά δειχθῇ $\nu^{\nu+1}>(\nu+1)^{\nu}$.

Λ ύ σ ι ς. Διά $\nu=3$ ἔχομεν $3^4>4^3$ τό ὁποῖον εἶναι ἀληθές. Ἔστω ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει διά $\nu=\varkappa$ ($\varkappa\in\Phi$) δηλ. ὅτι $\varkappa^{\varkappa+1}>(\varkappa+1)^{\varkappa}$ (1). Θά δείξωμεν ὅτι ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ἡ πρότασις ἀληθεύει καί διά $\nu=\kappa+1$. δηλ. ὅτι $(\kappa+1)^{\kappa+2}>(\kappa+2)^{\kappa+1}$. Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τά μέλη τῆς (1) ἐπί $(\kappa+1)^{\kappa+2}$ καί λαμβάνομεν $(\kappa)^{\kappa+1}(\kappa+1)^{\kappa+2}>(\kappa+1)^{2\kappa+2}$ ἤ $(\kappa+1)^{\kappa+2}>\frac{(\kappa+1)^{2\kappa+2}}{\kappa^{\kappa+1}}$. Ἀρκεῖ νά δειχθῇ ὅτι :

$\frac{(\kappa+1)^{2\kappa+2}}{\kappa^{\kappa+1}}>(\kappa+2)^{\kappa+1}$ ἤ $(\kappa+1)^{2\kappa+2}>\kappa^{\kappa+1}(\kappa+2)^{\kappa+1}$ ἤ $(\kappa+1)^2>\kappa(\kappa+2)$, τό ὁποῖον προφανῶς ἀληθεύει. Ἡ πρότασις λοιπόν ἀληθέυει καί διά $\nu=\kappa+1$ καί συνεπῶς θά ἀληθεύῃ διά κάθε $\nu\in\Phi>2$.

45) Ἐάν $(\nu,\chi\in\Phi)$ νά δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $\nu\chi^{\nu+1}-(\nu+1)\chi^{\nu}+1=$ $=$ πολλ.$(\chi-1)^2$.

Λύσις. Διά $\nu=1$ ἔχομεν $\chi^2-2\chi+1=(\chi-1)^2$ ἤτοι ἡ πρότασις ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι αὐτη ἀληθεύει διά $\nu=\kappa$ $(\kappa\in\Phi)$ δηλ. ὅτι $\kappa\chi^{\kappa+1}-(\kappa+1)\chi^{\kappa}+1=\rho(\chi-1)^2$ (1). Θά δείξωμεν ὅτι ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ἡ πρότασις ἰσχύει καί διά $\nu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι $(\kappa+1)\chi^{\kappa+2}-(\kappa+2)\chi^{\kappa+1}+1=\lambda(\chi-1)^2$ (2). Ἡ (2) γράφεται $(\kappa+1)\chi^{\kappa+2}-\kappa\chi^{\kappa+1}-2\chi^{\kappa+1}+1=(\kappa+1)\chi^{\kappa+2}-2\kappa\chi^{\kappa+1}+$ $+\kappa\chi^{\kappa+1}-2\chi^{\kappa+1}+1$ (3). Ἀλλά λόγῳ τῆς (1) εἶναι $\kappa\chi^{\kappa+1}+1=\rho(\chi-1)^2+$ $+(\kappa+1)\chi^{\kappa}$ ὅτε ἡ (2) γράφεται $(\kappa+1)\chi^{\kappa+2}+(\kappa+1)\chi^{\kappa}+\rho(\chi-1)^2-2\chi^{\kappa+1}(\kappa+1)=$ $=\rho(\chi-1)^2+(\kappa+1)\chi^{\kappa}(\chi^2+1-2\chi)=\rho(\chi-1)^2+(\kappa+1)\chi^{\kappa}(\chi-1)^2=(\chi-1)^2\rho-(\chi-1)^2\lambda=$ $=(\chi-1)^2(\rho-\lambda)=$πολ. $(\chi-1)^2$ δηλ. ἡ (2) ἀληθεύει καί διά $\nu=\kappa+1$ καί συνεπῶς θά ἀληθεύῃ διά κάθε $\nu,\chi\in\Phi$.

46) Ἐάν $\nu\geq 4$ νά δειχθῇ ὅτι $\left(\frac{3}{2}\right)^{\nu}>\nu+1$.

Λύσις. Διά $\nu=4$ ἔχομεν $\left(\frac{3}{2}\right)^4>4+1$ ἡ ὁποία εἶναι ἀληθής. Ἔστω ὅτι ἀληθεύει διά $\nu=\kappa$ δηλ. ὅτι $\left(\frac{3}{2}\right)^{\kappa}>\kappa+1$ (1) $(\kappa\in\Phi>4)$. Θά δείξωμεν ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι $\left(\frac{3}{2}\right)^{\kappa+1}>\kappa+2$. Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τά μέλη τῆς (1) ἐπί 3/2 ἔχομεν $\left(\frac{3}{2}\right)^{\kappa+1}>\frac{3}{2}(\kappa+1)$. Ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι εἶναι $\left(\frac{3}{2}\right)^{\kappa+1}>(\kappa+1)+1$

ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι $\frac{3}{2}(\kappa+1) > (\kappa+1)+1$ ἤ $\frac{3}{2}(\kappa+1)-(\kappa+1)>1$ δηλ. $\kappa+1>2$
Ἐπειδή ἡ τελευταία ἀνισότης εἶναι ἀληθής ἕπεται ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει διά $\nu=\kappa+1$ καί συνεπῶς θά ἀληθεύῃ διά κάθε $\nu\in\Phi\geqslant 4$.

47) Ἐάν $\nu\in\Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $\frac{1.3.5\ldots(2\nu-1)}{2.4.6\ldots.2\nu} < \frac{1}{\sqrt{\nu+1}}$

Λ ύ σ ι ς . Διά $\nu=1$ ἔχομεν $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ἤ $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ ἡ ὁποία ἀληθεύει.

Ἔστω ὅτι ἀληθεύει διά $\nu=\kappa$ $(\kappa\in\Phi)$ δηλ. ὅτι $\frac{1.3.5\ldots(2\kappa-1)}{2.4.6\ldots2\kappa} < \frac{1}{\sqrt{\kappa+1}}$ (1)
θά δείξωμεν ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu=\kappa+1$ δηλ. ὅτι $\frac{1.3.5\ldots.(2\kappa-1)(2\kappa+1)}{2.4.6\ldots.2\kappa(2\kappa+2)} < \frac{1}{\sqrt{\kappa+2}}$ (2)

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τά μέλη τῆς (1) ἐπί $\frac{2\kappa+1}{2\kappa+2}$ ἔχομεν:
$\frac{1.3.5\ldots.(2\kappa-1)}{2.4.6\ldots.2\kappa}\cdot\frac{2\kappa+1}{2\kappa+2} < \frac{1}{\sqrt{\kappa+1}}\cdot\frac{2\kappa+1}{2\kappa+2}$. Ἀρκεῖ λοιπόν νά δείξωμεν ὅτι

$\frac{1}{\sqrt{\kappa+1}}\cdot\frac{2\kappa+1}{2\kappa+1} < \frac{1}{\sqrt{\kappa+2}}$ ἤ $\frac{2\kappa+1}{2\kappa+2} < \frac{\sqrt{\kappa+1}}{\sqrt{\kappa+2}}$ ἤ $\left(\frac{2\kappa+1}{2\kappa+2}\right)^2 < \frac{\kappa+1}{\kappa+2}$ ἤ μετά τάς πράξεις $-3\kappa<2$ τό ὁποῖον ἀληθεύει διότι $\kappa>0$. Ἄρα ἡ πρότασις ἰσχύει διά $\nu=\kappa+1$ καί συνεπῶς θά ἰσχύῃ διά κάθε $\nu\in\Phi$.

48) Ἐάν $\chi\in\Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $2 < \left(1+\frac{1}{\chi}\right)^{\chi} < 3$.

Ὑπόδ. Νά δειχθῇ ὅτι ἐάν $\nu\in\Phi\leqslant\chi$ ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$1+\frac{\nu}{\chi} \leqslant \left(1+\frac{1}{\chi}\right)^{\nu} < 1+\frac{\nu}{\chi}+\frac{\nu^2}{\chi^2} \quad (1)$$

Λ ύ σ ι ς . Διά $\nu=1$ ἔχομεν $1+\frac{1}{\chi} \leqslant 1+\frac{1}{\chi} \leqslant 1+\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}$ τό ὁποῖον εἶναι ἀληθές. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διά $\nu=\kappa$ δηλ. ὅτι $1+\frac{\kappa}{\chi}\leqslant\left(1+\frac{1}{\chi}\right)^{\kappa} <$ $1+\frac{\kappa}{\chi}+\frac{\kappa^2}{\chi^2}$. Θά δείξωμεν ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ὅτι ἰσχύει καί διά $\nu = \kappa + 1$. Ἔχομεν :

$$\left(1+\frac{1}{\chi}\right)^{\kappa+1} = \left(1+\frac{1}{\chi}\right)^{\kappa}\left(1+\frac{1}{\chi}\right) \geq \left(1+\frac{\kappa}{\chi}\right)\left(1+\frac{1}{\chi}\right) = 1+\frac{\kappa+1}{\chi}+\frac{\kappa}{\chi^2} > 1+\frac{\kappa+1}{\chi}.$$

Ἀφ' ἑτέρου ἔχομεν $\left(1+\frac{1}{\chi}\right)^{\kappa+1} = \left(1+\frac{1}{\chi}\right)^{\kappa}\left(1+\frac{1}{\chi}\right) < \left(1+\frac{\kappa}{\chi}+\frac{\kappa^2}{\chi^2}\right)\left(1+\frac{1}{\chi}\right) =$

$$= 1+\frac{\kappa+1}{\chi}+\frac{\kappa}{\chi^2}+\frac{\kappa^2}{\chi^2}+\frac{\kappa^2}{\chi^3} = 1+\frac{\kappa+1}{\chi}+\frac{\kappa^2+2\kappa+1}{\chi^2}-\frac{\kappa+1}{\chi^2}+\frac{\kappa^2}{\chi^3} = 1+\frac{\kappa+1}{\chi}+$$

$$+\frac{(\kappa+1)^2}{\chi^2}-\frac{\chi(\kappa+1)-\kappa^2}{\chi^3} < 1+\frac{\kappa+1}{\chi}+\frac{(\kappa+1)^2}{\chi},$$ ἀφοῦ $\chi(\kappa+1) \geq \kappa^2$, ἄν $\chi > \kappa$.

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης προκύπτει ἡ ἀποδεικτέα. Ἄν θέσωμεν ἀντί $\nu = \chi$, ἡ (1) γίνεται $1+\frac{\chi}{\chi} < \left(1+\frac{1}{\chi}\right)^2 < 1+\frac{\chi}{\chi}+\frac{\chi^2}{\chi^2}$ ἤ $2 < \left(1+\frac{1}{\chi}\right)^2 < 3$.

49) Ἐάν $\nu \in \phi$ καί α καί β πραγματικοί ἀριθμοί πληροῦντες τάς σχέσεις $\alpha > 0$ καί $0 < \beta < 1$, νά δειχθῇ ὅτι :

$$(\alpha+\beta)^{\nu} \leq \alpha^{\nu}+\beta\left[(\alpha+1)^{\nu}-\alpha^{\nu}\right] \qquad (1)$$

Λ ύ σ ι ς : Ἡ (1) διά $\nu=1$ γίνεται $\alpha+\beta \leq \alpha+\beta$ τό ὁποῖον ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διά $\nu=\kappa$ $(\kappa\in\phi)$ δηλαδή ὅτι $(\alpha+\beta)^{\kappa} \leq \alpha^{\kappa}+\beta\left[(\alpha+1)^{\kappa}-\alpha^{\kappa}\right]$ (2). Θά δείξωμεν ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ὅτι ἰσχύει καί διά $\nu=\kappa+1$, δηλαδή ὅτι $(\alpha+\beta)^{\kappa+1} \leq \alpha^{\kappa+1}+\beta\left[(\alpha+1)^{\kappa+1}-\alpha^{\kappa+1}\right]$ (3). Ἐπειδή $\alpha+\beta>0$ ἐκ τῆς (2) ἕπεται:

$$(\alpha+\beta)^{\kappa+1} \leq (\alpha+\beta)\left[\alpha^{\kappa}+\beta\left[(\alpha+1)^{\kappa}-\alpha^{\kappa}\right]\right] = \alpha^{\kappa+1}-\beta\alpha^{\kappa+1}+$$

$$-\alpha\beta(\alpha+1)^{\kappa}+\beta\left[\alpha^{\kappa}+\beta(\alpha+1)^{\kappa}-\beta\alpha^{\kappa}\right] = \alpha^{\kappa+1}-\beta\alpha^{\kappa+1}+\alpha\beta(\alpha+1)^{\kappa}+\beta\left[\alpha^{\kappa}(1-\beta)-(1-\beta)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot(1+\alpha)^{\kappa}+(1+\alpha)^{\kappa}\right] = \alpha^{\kappa+1}-\beta\alpha^{\kappa+1}+\alpha\beta(\alpha+1)^{\kappa}+\beta\left[(\alpha+1)^{\kappa}+(1-\beta)\left[\alpha^{\kappa}-(\alpha+1)^{\kappa}\right]\right\} =$$

$$= \alpha^{\kappa+1}-\beta\alpha^{\kappa+1}-\alpha\beta(\alpha+1)^{\kappa}+\beta(\alpha+1)^{\kappa}+\beta(1-\beta)\left[\alpha^{\kappa}-(\alpha+1)^{\kappa}\right] < \alpha^{\kappa+1}-\beta\alpha^{\kappa+1}+$$

$$+\alpha\beta(\alpha+1)^{\kappa}+\beta(\alpha+1)^{\kappa} = \alpha^{\kappa+1}-\beta\alpha^{\kappa+1}+\beta(\alpha+1)^{\kappa+1} = \alpha^{\kappa+1}+\beta\left[(\alpha+1)^{\kappa+1}-\alpha^{\kappa+1}\right].$$

Ἄρα ἡ (3) ἀληθεύει. Ἄρα ἡ πρότασις ἀληθεύει καί διά $\nu = \kappa+1$ καί συνεπῶς θά ἀληθεύῃ διά κάθε $\nu \in \phi$.

50) 'Εάν $\mu \in \phi \geq 2$ νά δειχθῇ ὅτι $\frac{I}{\mu} + \sqrt[\mu]{\mu} < 2$ (I)

Λύσις : Διά $\mu = 2$ ἔχομεν $\frac{I}{2} + \sqrt{2} < 2$ τό ὁποῖον εἶναι ἀληθές. Ἔστω ὅτι ἡ (I) ἀληθεύει διά $\mu = \varkappa$ ἤτοι ὅτι $\frac{I}{\varkappa} + \sqrt[\varkappa]{\varkappa} < 2$ ἤ $\varkappa^{\varkappa+I} < (2\varkappa-I)^{\varkappa}$ (2). Θά δείξωμεν ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει καί διά $\mu = \varkappa+I$, δηλαδή ὅτι : $(\varkappa+I)^{\varkappa+2} < (2\varkappa+I)^{\varkappa+1}$ (3). Ἐκ τῆς προφανοῦς ἀνισότητος $\frac{\varkappa+I}{\varkappa} < \frac{2\varkappa+I}{2\varkappa-I}$ ἔχομεν, ἄν ὑψώσωμεν εἰς τήν $\varkappa+I$ δύναμιν, ὅτε ἔχωμεν :

$$\frac{(\varkappa+I)^{\varkappa+I}}{\varkappa^{\varkappa+I}} < \frac{(2\varkappa+I)^{\varkappa+I}}{(2\varkappa-I)^{\varkappa+I}},$$ καί ἔχομεν: $$\frac{(\varkappa+I)^{\varkappa+I}}{\varkappa^{\varkappa+I}} < \frac{(2\varkappa+I)^{\varkappa+I}}{(2\varkappa-I)^{\varkappa}(\varkappa+I)}$$

διότι ἐνισχύεται ἄν εἰς τόν παρονομαστήν τοῦ δευτέρου κλάσματος ἀντί $2\varkappa-I$ θέσωμεν $\varkappa+I$ (διότι $\varkappa+I < 2\varkappa-I$ ὅπου $\varkappa > 2$) .

Ἔχωμεν λοιπόν $$\frac{(\varkappa+1)^{\varkappa+2}}{\varkappa^{\varkappa+I}} < \frac{(2\varkappa+I)^{\varkappa+I}}{(2\varkappa-I)^{\varkappa}}$$ (4). Πολ/ζομεν κατά μέλη τάς (4) καί (2) καί ἔχομεν :

$$\frac{(\varkappa+1)^{\varkappa+2}}{\varkappa^{\varkappa+I}} \cdot \varkappa^{\varkappa+I} < \frac{(2\varkappa+I)^{\varkappa}(2\varkappa+I)^{\varkappa+I}}{(2\varkappa-I)^{\varkappa}}$$ δηλ. $(\varkappa+I)^{\varkappa+2} < (2\varkappa+I)^{\varkappa+1}$.

51) 'Εάν $\nu \in \phi$ νά δειχθῇ ὅτι:

$$I - \frac{\chi}{I!} + \frac{\chi(\chi-I)}{2!} - \ldots + (-I)^{\nu} \frac{\chi(\chi-I)\ldots(\chi-\nu-I)}{\nu!} = (-I)^{\nu} \frac{(\chi-I)(\chi-2)\ldots(\chi-\nu)}{\nu!} \quad (1)$$

Λ ύ σ ι ς . Διά $\nu = I$ ἔχομεν. $I - \frac{\chi}{I!} = -\frac{\chi-I}{I}$. Διά $\nu = 2$ ἔχομεν $I - \frac{\chi}{I!} + \frac{\chi(\chi-I)}{2!} = -\frac{\chi-I}{I} + \frac{\chi(\chi-I)}{2} = \frac{(\chi-I)(\chi-2)}{2!}$ δηλ. ἀληθεύει.

Ἔστω ὅτι ἡ (I) ἀληθεύει διά $\nu = \varkappa$ δηλ. ὅτι $I - \frac{\chi}{I!} + \frac{\chi(\chi-I)}{2!} - \ldots$

$$\ldots + (-I)^{\varkappa} \frac{\chi(\chi-I)\ldots(\chi-\varkappa-I)}{\varkappa!} = (-I)^{\varkappa} \frac{(\chi-I)(\chi-2)\ldots(\chi-\varkappa)}{\varkappa!} \quad (2)$$

θά δείξωμεν ὅτι ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ἀληθεύει καί διά $\nu = \varkappa+I$ ($\varkappa \in \phi$). Ἐάν προσθέσωμεν καί εἰς τά δύο μέλη τῆς (I) τόν ἀριθμόν $(-I)^{\varkappa+I} \frac{\chi(\chi-I)\ldots(\chi-\varkappa)}{(\varkappa+I)!}$, θά ἔχωμεν :

$$I - \frac{\chi}{I!} + \frac{\chi(\chi-I)}{2!} - \ldots + (-I)^{\varkappa} \frac{\chi(\chi-I)\ldots(\chi-\varkappa+I)}{\varkappa!} + (-I)^{\varkappa+1} \frac{\chi(\chi-I)\ldots(\chi-\varkappa)}{(\varkappa+I)!} =$$

$$= (-I)^{\varkappa}\ \frac{(\chi-I)(\chi-2)\ldots(\chi-\varkappa)}{\varkappa!} + (-I)^{\varkappa+I}\ \frac{\chi(\chi-I)\ldots(\chi-\varkappa)}{(\varkappa+I)!} =$$

$$= (-I)^{\varkappa+I}\left[\frac{(\chi-I)(\chi-2)\ldots(\chi-\varkappa)}{\varkappa!}\right]\left[\frac{\chi}{\varkappa+I} - I\right] =$$

$$= (-I)^{\varkappa+I}\ \frac{(\chi-I)(\chi-2)\ldots(\chi-\varkappa)(\chi-\varkappa+I)}{(\varkappa+I)\ !}$$. Δηλαδή άληθεύει διά $\nu = \varkappa+I$ καί συνεπώς θά άληθεύη διά κάθε $\nu \in \Phi$.

52) Ἐάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῆ ὅτι $I+2(I-\chi)+3(I-\chi)(I-2\chi)+\ldots$
$\ldots+\nu(I-\chi)(I-2\chi)\ldots\left[I-(\nu-I)\chi\right] + \frac{I}{\chi}(I-\chi)(I-2\chi)\ldots(I-\nu\chi) = \frac{I}{\chi}$ (1)

Λ ύ σ ι ς . Διά $\nu=I$ ἔχομεν $I + \frac{I}{\chi}(I-\chi)=\frac{I}{\chi}$ τό ὁποῖον άληθεύει.
Ἔστω ὅτι ἡ (1) άληθεύει διά $\nu = \varkappa$ ($\varkappa\in\Phi$), δηλαδή ὅτι :

$$I+2(I-\chi)+\ldots+(I-\chi)(I-2\chi)\ldots\left[I-(\varkappa-I)\chi\right] + \frac{I}{\chi}(I-\chi)(I-2\chi)\ldots(I-\varkappa\chi) = \frac{I}{\chi} \quad (2).$$

Θά δείξωμεν ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ὅτι άληθεύει καί διά κάθε $\nu = \varkappa+I$, δηλ. ὅτι :

$$I+2(I-\chi)+\ldots+(I-\chi)(I-2\chi)\ldots\left[I-(\varkappa-I)\chi\right] +(\varkappa+I)(I-\chi)(I-2\chi)\ldots$$
$$\ldots(I-\varkappa\chi)+ \frac{I}{\chi}(I-\chi)(I-2\chi)\ldots(I-\varkappa\chi)\left[I-(\varkappa+I)\chi\right] = \frac{I}{\chi} \quad (3).$$

Θέτομεν $S = I+2(I-\chi)+\ldots+(I-\chi)(I-2\chi)\ldots\left[I-(\varkappa-I)\chi\right]$ καί $S_I = (I-\chi)(I-2\chi)\ldots(I-\varkappa\chi)$ ὅτε αἱ (2)καί (3) γράφονται ἀντιστοίχως $S+\frac{I}{\chi}S_I = \frac{I}{\chi}$, $S+(\varkappa+I)\ S_I+\frac{I}{\chi}S_I\left[I-(\varkappa+I)\chi\right] = \frac{I}{\chi}$. Ἀρκεῖ νάδειχθῆ ὅτι $S + \frac{I}{\chi}S_I = S+(\varkappa+I)\ S_I + \frac{I}{\chi}S_I\left[I-(\varkappa+I)\varkappa\right]$ ἤ $\frac{I}{\chi}S_I =$
$= (\varkappa+I)\ S_I + \frac{I}{\chi}S_I - \frac{I}{\chi}S_I(\varkappa+I)\chi$. Τό ὁποῖον άληθεύει. Ἄρα ἡ (I) άληθεύει καί διά $\nu = \varkappa+I$ καί θά άληθεύη διά κάθε $\nu \in \Phi$.

53) Ἐάν $\nu\in\Phi$, νά δειχθῆ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ν ὅρων τῆς σειρᾶς $\chi+(\chi-2)\chi + \frac{(\chi-4)\chi(\chi-I)}{2!} + \frac{(\chi-6)\chi(\chi-I)(\chi-2)}{3!} + \ldots$

εἶναι $\frac{\chi(\chi-I)\ldots(\chi-\nu+I)}{(\nu-I)!}$.

Λ ύ σ ι ς : Ὁ τυχών ($\rho^{o\varsigma}$) ὅρος τῆς σειρᾶς εἶναι :

$$\frac{(\chi-2\rho+2)\ \chi\ (\chi-I)(\chi-2)\ \ldots\ (\chi-\rho+2)}{(\rho-I)\ !}$$

Ἔστω S_ν τό ἄθροισμα τῶν ν ὅρων. Τό $S_2 = \chi+(\chi-2) = \chi(\chi-1)$. Οὕτω διά ν=2 ἡ πρότασις εἶναι ἀληθής. Ἔστω ὅτι ἀληθεύει διά ν=κ (κ∈Φ). Τότε $\chi+(\chi-2)\chi + \frac{(\chi-4)\chi(\chi-1)}{2!} + \dots$ ἐκ κ ὅρων $= \frac{\chi(\chi-1)\dots(\chi-\kappa+1)}{(\kappa-1)!}$. Θά δείξωμεν ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ὅτι ἀληθεύει καί διά ν = κ+1, δηλαδή ὅτι :

$$S_{\nu+1} = S_\nu + \frac{[\chi-2(\kappa+1)+2]\ \chi(\chi-1)(\chi-2)\dots(\chi-\kappa+1)}{\kappa!} =$$

$$= \frac{\chi(\chi-1)\dots(\chi-\kappa+1)}{(\kappa-1)!} + \frac{(\chi-2\kappa)\ \chi\ (\chi-1)\ (\chi-2)\dots(\chi-\kappa+1)}{\kappa!} =$$

$$= \frac{\chi(\chi-1)\dots(\chi-\kappa+1)}{\kappa!}\left[\kappa+\chi-2\kappa\right] = \frac{\chi(\chi-1)\dots(\chi-\kappa+1(\chi-\kappa)}{\kappa!}$$

δηλ. ἡ πρότασις ἀληθεύει καί διά ν= κ+1 καί συνεπῶς θά ἀληθεύῃ διά κάθε $\nu \in \Phi$.

54) Διά πάντα $\nu \in \Phi \geqslant 2$ νά δειχθῇ ὅτι $5^{2^{\nu-2}} - 1 = \text{πολ}2^\nu$ (I).

Λ ύ σ ι ς . Διά ν=2 ἔχομεν $5^{2^0} - 1 = 5-1 = 4 = \text{πολ}2^2$, δηλ. ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διά $\nu=\kappa$ $(\kappa\in\Phi\geqslant 2)$ δηλ. ὅτι $5^{2^{\kappa-2}} - 1 = \text{πολ}2^{\kappa}$ (2). Θά δείξωμεν ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu=\kappa+1$, δηλαδή ὅτι: $5^{2^{\kappa-1}} - 1 = \text{πολ}2^{\kappa+1}$ (3). Ἡ (2) γράφεται $5^{2^{\kappa-2}} = \text{πολ}2^{\kappa}+1$, καί ὑψώνοντες ἀμφότερα τά μέλη εἰς τό τετράγωνον, ἔχομεν :

$$\left(5^{2^{\kappa-2}}\right)^2 = (\text{πολ}\ 2^\kappa + 1)^2 \quad \text{ἤ} \quad 5^{2^{\kappa-2}\cdot 2} = \text{πολ}2^\kappa + 2\text{πολ}2^\kappa + 1 =$$

$$= \text{πολ}2^{\kappa+1}+1 \quad \text{ἤ} \quad 5^{2^{\kappa-1}} = \text{πολ}2^\kappa + 1 \quad \text{ἤ} \quad 5^{2^{\kappa-1}} - 1 = \text{πολ}2^{\kappa+1},$$

δηλ. ἡ (I) ἀληθεύει καί διά ν = κ+1 καί συνεπῶς καί διά κάθε ν ∈ Φ.

55) Ἐάν ν∈Φ νά δειχθῇ ὅτι $2.6.10.14\dots(4\nu-6)(4\nu-2) = (\nu+1)(\nu+2)\dots(2\nu-1).2\nu$. (I)

Λ ύ σ ι ς . Διά ν=2 ἔχομεν $2.6 = (2+1)(2+2)$, δηλ. ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἡ (I) ἀληθεύει διά ν=κ (κ∈Φ), δηλαδή ὅτι $2.6.10\dots(4\kappa-6)(4\kappa-2) = (\kappa+1)(\kappa+2)\dots(2\kappa-1)\,2\kappa$. Ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν θά δείξωμεν ὅτι ἀληθεύει καί διά ν = κ+1, δηλαδή ὅτι $2.6.10\dots(4\kappa-6)(4\kappa-2)(4\kappa+2) = (\kappa+2)(\kappa+3)\dots2\kappa(2\kappa+1)(2\kappa+2)$ (2). Τό δεύτερον μέλος τῆς (2) γράφεται $(\kappa+2)(\kappa+3)\dots2\kappa(2\kappa+1)(\kappa+1)\cdot 2$, ἤ $(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)\dots2\kappa(2\kappa+1).2$ ἤ $(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)\dots2\kappa(4\kappa+2)$.

'Αλλ'ἡ τελευταία ἰσότης προκύπτει ἐκ τῆς ἀρχικῆς διά πολ/σμοῦ τῶν μελῶν της ἐπί $(4\kappa+2)$. Δηλ. ἡ πρότασις ἀληθεύει καί διά $\nu = \kappa+1$ καί συνεπῶς θά ἀληθεύῃ διά κάθε $\nu \in \Phi$.

56) Διά $\nu\epsilon\Phi$, νά δειχθῇ ὅτι τό πολυώνυμον $\Pi_\nu(\chi) = \chi^{6\nu-2}+\chi^{3\nu-1}+1$ διαιρεῖται διά $\chi^2+\chi+1$.

Λ ύ σ ι ς. Διά $\nu = 1$ ἔχομεν $\Pi_1(\chi)=\chi^4+\chi^2+1=(\chi^2+\chi+1)(\chi^2-\chi+1)$ ἤτοι ἡ πρότασις ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι τό $\Pi_\kappa(\chi)=\chi^{6\kappa-2}+\chi^{3\kappa-1}+1$, διαιρεῖται διά $\chi^2+\chi+1$ $(\kappa\epsilon\Phi)$. Θά δείξωμεν ὅτι θά διαιρεῖται ἐπίσης καί τό $\Pi_{\kappa+1}(\chi) = \chi^{6\kappa+4}+\chi^{3\kappa+2}+1$ διά τοῦ $\chi^2+\chi+1$. Ἀρκεῖ προφανῶς νά δείξωμεν ὅτι αὐτό συμβαίνει διά τό $\Pi_{\kappa+1}(\chi)-\Pi_\kappa(\chi) = \chi^{6\kappa-2}(\chi^6-1)+\chi^{3\kappa-1}(\chi^3-1) = \chi^{3\kappa-1}(\chi^3-1)\left[\chi^{3\kappa-1}(\chi^3+1)-1\right] = (\chi^3-1)\,\varphi(\chi) = (\chi^2+\chi+1)(\chi-1)\,\varphi(\chi)$, πράγμα πού ἀποδεικνύει τό ζητούμενον. Ἀληθεύει λοιπόν ἡ πρότασις διά κάθε φυσικόν ἀριθμόν.

57) Ἐάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῇ ὅτι τό $\varphi(\chi)=(\chi+1)^{6\nu-1}-\chi^{6\nu-1}-1$ διαιρεῖται διά $\chi^2+\chi+1$.

Λ ύ σ ι ς: Διά $\nu = 1$ τό $\varphi(\chi)$ γίνεται $(\chi+1)^5-\chi^5-1$ τό ὁποῖον διαιρεῖται διά $\chi^2+\chi+1$.

Ἔστω ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει διά $\nu = \kappa$, δηλ. ὅτι, τό $\varphi_\kappa(\chi) = (\chi+1)^{6\kappa-1}-\chi^{6\kappa-1}-1$ διαιρεῖται διά $\chi^2+\chi+1$. Θά δείξωμεν ὅτι ὑ π ό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ἀληθεύει καί διά $\nu = \kappa+1$, δηλαδή ὅτι καί τό $\varphi_{\kappa+1}(\chi) = (\chi+1)^{6\kappa+5}-\chi^{6\kappa+5}-1$ διαιρεῖται διά $\chi^2+\chi+1$. Τό $\varphi_{\kappa+1}(\chi)$ γράφεται: $\varphi_{\kappa+1}(\chi) = (\chi+1)^{6\kappa-1}\left[(\chi+1)^2\right]^3-\chi^{6\kappa+5}-1$, τό δέ $\chi^2+\chi+1$ γράφεται $(\chi+1)^2-\chi$. Θέτομεν εἰς τό $\varphi_{\kappa+1}(\chi)$ ἀντί τοῦ $(\chi+1)^2$ τό χ καί λαμβάνομεν τό πολυώνυμον $(\chi+1)^{6\kappa-1}.\chi^3-\chi^{6\kappa+5}-1$. Ἡ διαίρεσις $\varphi(\chi) : \chi^2+\chi+1$ δίδει τό αὐτό ὑπόλοιπον μέ τήν διαίρεσιν $(\chi+1)^{6\kappa-1}.\chi^3-\chi^{6\kappa+5}-1 : \chi^2+\chi+1$. Ἀρκεῖ λοιπόν νά δείξωμεν ὅτι τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς, εἶναι μηδέν.

Θεωρήσωμεν τήν διαίρεσιν $(\chi-I)\left[(\chi+I)^{6\varkappa-I}\cdot\chi^{3}-\chi^{6\varkappa+5}-I\right]$: $:(\chi-I)(\chi^{2}+\chi+I)$ δηλ. τήν $(\chi-I)\left[(\chi+I)^{6\varkappa-I}\cdot\chi^{3}-\chi^{6\varkappa-I}(\chi^{3})^{2}-I\right]:\chi^{3}-1.$ Θέτομεν εἰς τόν διαιρετέον της ἀντί χ^{3} τό I καί λαμβάνομεν τό ὑπόλοιπον $(\chi-I)\left[(\chi+I)^{6\varkappa+I}-\chi^{6\varkappa-I}-I\right]=(\chi-I)\,\varphi_{\varkappa}(\chi)$. Ἡ διαίρεσις ὅμως $(\chi-I)\varphi_{\varkappa}(\chi):\chi^{3}-I$ ἀφήνει ἐξ ὑποθέσεως ὑπόλοιπον μηδέν, ἄρα καί ἡ $\varphi_{\varkappa+I}(\chi):\chi^{2}+\chi+I$ ἀφήνει ἐπίσης ὑπόλοιπον μηδέν. Ἄρα ἡ πρότασις ἀληθεύει διά κάθε $\nu\in\Phi$.

58) Ἐάν $\nu\in A$ καί $\nu\in\Phi$ νά δειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμός $\alpha^{\nu+I}-\alpha(\nu+I)+\nu$ εἶναι διαιρετός διά δυνάμεως τοῦ $\alpha-I$ τῆς ὁποίας καθορίσατε τόν μέγιστον ἐκθέτην.

Λύσις. Διά $\nu=I$ ἔχομεν $\alpha^{2}-2\alpha+I=(\alpha-I)^{2}$ δηλ. ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει διά $\nu=\varkappa$ $(\varkappa\in\Phi)$. δηλαδή ὅτι : $\alpha^{\varkappa+1}-\alpha(\varkappa+I)+\varkappa=\pi o\lambda(\alpha-I)^{\chi}$ (I). Θά δείξωμεν ὑπό τήν προϋπόθεσι ν αὐτήν ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει καί διά $\nu=\varkappa+I$, δηλαδή ὅτι : $\alpha^{\varkappa+2}-\alpha(\varkappa+2)+(\varkappa+I)=\pi o\lambda(\alpha-I)^{\chi}$ (2). Ἡ (2) γράφεται: $\alpha^{\varkappa+2}-\alpha(\varkappa+I)+\varkappa-\alpha+I$ καί ἕνεκα τῆς (I) $\alpha^{\varkappa+2}+\pi o\lambda(\alpha-I)^{\chi}-\alpha^{\varkappa+I}-\alpha+I=$

$$=\alpha^{\varkappa+I}(\alpha-I)-(\alpha-I)+\pi o\lambda(\alpha-I)^{\chi}=(\alpha-I)(\alpha^{\varkappa+I}-I)+\pi o\lambda(\alpha-I)^{\chi}=$$
$$=(\alpha-I)(\alpha-I)(\alpha^{\varkappa}+\alpha^{\varkappa-I}+\dots+I)+\pi o\lambda(\alpha-I)^{\chi}=(\alpha-I)^{2}\cdot\theta\varepsilon\tau\iota\varkappa\acute{o}\nu+\pi o\lambda(\alpha-I)^{\chi}=$$
$$=(\alpha-I)^{\chi}\left[\rho+(\alpha-I)^{2-\chi}.\theta\varepsilon\tau\iota\varkappa\acute{o}\nu\right].$$

Ἵνα ὁ $(\alpha-I)^{2-\chi}$ εἶναι θετικός, πρέπει $2-\chi>0$ ἤ $-\chi\geqslant-2$ καί $\chi\leqslant 2$. Ἄρα $\chi_{max}=2$.

59) Ἐάν $\nu\in\Phi$ νά δειχθῇ ὅτι ἡ πρότασις : $(\chi^{2}+2\chi-2)^{2\nu+I}+5^{2\nu+I}(\chi-2)^{\nu+2}$ εἶναι πολ/σιον τῆς $\chi^{2}-3\chi+3$.

Λύσις. Διά $\nu=0$ ἡ δοθεῖσα πρότασις γίνεται : $\chi^{2}+2\chi-5+5(\chi-2)^{2}=6(\chi^{2}-3\chi+3)=\pi o\lambda.(\chi^{2}-3\chi+3)$, δηλαδή ἀληθεύει.

Διά $\nu=I$ ἡ δοθεῖσα παράστασις γίνεται $(\chi^{2}+2\chi-2)^{3}+5^{3}(\chi-2)^{3}=$

$$=\left[(\chi^{2}+2\chi-2)+5(\chi-2)\right]\cdot\left[(\chi^{2}+2\chi-2)^{2}-5(\chi^{2}+2\chi-2)(\chi-2)+25(\chi-2)^{2}\right]=$$
$$=(\chi^{2}+7\chi-I2)(\chi^{2}+2\chi+28)(\chi^{2}-3\chi+3)$$

δηλαδή πάλιν ἀληθεύει.

Έστω ότι ή πρότασις άληθεύει διά $\nu=\kappa$ $(\kappa\in\Phi)$, δηλαδή ότι :

$(\chi^2+2\chi-2)^{2\kappa+1}+5^{2\kappa+1}(\chi-2)^{\kappa+2}=(\chi^2-3\chi+3)\Pi(\chi)$ (1). Ένθα $\Pi(\chi)$ άκέραιον ώς πρός χ πολυώνυμον τοῦ χ βαθμοῦ 4κ. Θά δείξωμεν ύπό τήν προϋπόθεσιν αύτήν ότι άληθεύει καί διά $\nu=\kappa+1$. Έχομεν:

$$(\chi^2+2\chi-2)^{2(\kappa+1)+1}+5^{2(\kappa+1)+1}\cdot(\chi-2)^{(\kappa+1)+2}=(\chi^2+2\chi-2)^2(\chi^2+2\chi-2)^{2\kappa+1}+$$
$$+25\cdot5^{2\kappa+1}(\chi-2)(\chi-2)^{\kappa+2}\quad(2)$$

Έκ τῆς (1) έχομεν : $(\chi^2+2\chi-2)^{2\kappa+1}=\Pi(\chi)(\chi^2-3\chi+3)-5^{2\kappa+1}(\chi-2)^{\kappa+2}$, καί άντικαθιστῶντες εἰς τήν (2), έχομεν:

$$(\chi^2+2\chi-2)^{2(\kappa+1)+1}+5^{2(\kappa+1)+1}(\chi-2)^{(\kappa+1)+2}=$$
$$=(\chi^2+2\chi-2)^2\left[\Pi(\chi)(\chi^2-3\chi+3)-5^{2\kappa+1}(\chi-2)^{\kappa+2}\right]+25\cdot5^{2\kappa+1}(\chi-2)(\chi-2)^{\kappa+2}=$$
$$=(\chi^2+2\chi-2)(\chi^2-3\chi+3)\Pi(\chi)-5^{2\kappa+1}(\chi-2)^{\kappa+2}\left[(\chi^2+2\chi-2)^2-25(\chi-2)\right]=$$
$$=(\chi^2+2\chi-2)^2(\chi^2-3\chi+3)\Pi(\chi)-5^{2\kappa+1}(\chi-2)^{\kappa+2}(\chi^4+4\chi^3-33\chi+54)=$$
$$=(\chi^2+2\chi-2)^2(\chi^2-3\chi+3)\Pi(\chi)-5^{2\kappa+1}(\chi-2)^{\kappa+2}(\chi^2+7\chi+18)(\chi^2-3\chi+3)=$$
$$=\left[(\chi^2+2\chi-2)^2\Pi(\chi)-5^{2\kappa+1}(\chi-2)^{\kappa+2}(\chi^2+7\chi+18)\right](\chi^2-3\chi+3).$$

Άρα ή πρότασις άληθεύει καί διά $\nu=\kappa+1$ καί συνεπῶς θά άληθεύη καί διά πάντα $\nu\in\Phi$.

60) Έάν $\nu\in\Phi$ νά δειχθῆ ότι :

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{\nu}\right)^2\leq\nu\left(2-\frac{1}{\nu}\right).$$

Λύσις : Κατά τήν άνισότητα τοῦ SCHWARZ έχομεν :

$$(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+\dots+\alpha_\nu\beta_\nu)^2\leq(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\dots+\alpha_\nu^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\dots+\beta_\nu^2)\ (1)$$

Είς ταύτην θέτομεν $\alpha_1=1$, $\alpha_2=\frac{1}{2}$, $\alpha_3=\frac{1}{3},\dots,\alpha_\nu=\frac{1}{\nu}$ καί $\beta_1=\beta_2=\dots=\beta_\nu=1$. Έπειδή ή (1) άληθεύει ώς ίσότης όταν είναι $\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\dots=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$, όταν είναι $\nu\geqslant2$ θά άληθεύη ώς άνισότης καί θά έχωμεν :

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{\nu}\right)^2 \leq \left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{\nu^2}\right)\cdot\nu. \quad (2).$$

Ἡ (2) λοιπὸν ἀληθεύει ὡς ἰσότης ὅταν εἶναι $\nu = 1$. Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{\nu^2}\leq 2-\frac{1}{\nu}$ (3). Ἡ (3) ἀληθεύει ὡς ἰσότης διὰ $\nu = 1$ καὶ ὡς ἀνισότης διὰ $\nu = 2$. Ἔστω ὅτι ἀληθεύει διὰ $\nu = \varkappa$. Θὰ ἔχωμεν $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{\varkappa^2}\leq 2-\frac{1}{\varkappa}$ καὶ ἂν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη της προσθέσωμεν τὸ $\frac{1}{(\varkappa+1)^2}$ εὑρίσκομεν $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{\varkappa^2}+\frac{1}{(\varkappa+1)^2}\leq 2-\frac{1}{\varkappa}+\frac{1}{(\varkappa+1)^2}$ (4).

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $2-\frac{1}{\varkappa}+\frac{1}{(\varkappa+1)^2} = 2-\frac{\varkappa^2+\varkappa+1}{\varkappa(\varkappa+1)^2} = 2-\frac{\varkappa^2+\varkappa+1}{(\varkappa+1)(\varkappa^2+\varkappa)} =$
$= 2-\frac{1}{\varkappa+1}\cdot\frac{\varkappa^2+\varkappa+1}{\varkappa^2+\varkappa} < 2-\frac{1}{\varkappa+1}$ διότι $\frac{\varkappa^2+\varkappa+1}{\varkappa^2+\varkappa} > 1$ ἡ (4) γίνεται
$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{(\varkappa+1)^2} < 2-\frac{1}{\varkappa+1}$. Ἄρα ἡ (3) ἀληθεύει κατὰ τὴν μέθοδον τῆς τελείας ἐπαγωγῆς διὰ κάθε $\nu \in \Phi$ ἡ δὲ (2) γίνεται $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{\nu}\right)^2 \leq \nu\left(2-\frac{1}{\nu}\right)$, καὶ ἀληθεύει ὡς ἰσότης διὰ $\nu = 1$.

61) Ἐὰν $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_\nu \geq 0$ καὶ $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_\nu \geq 0$ νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{1}{\nu}\sum_{\varkappa=1}^{\nu}\alpha_\varkappa \cdot \frac{1}{\nu}\sum_{\varkappa=1}^{\nu}\beta_\varkappa \leq \frac{1}{\nu}\sum_{\varkappa=1}^{\nu}\alpha_\varkappa\beta_\varkappa$ (1) (ἀνισότης TSCHEBYCHEF).

Λύσις: Ἡ (1) διὰ $\nu = 2$ προφανῶς ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι αὕτη ἀληθεύει διὰ $\nu = \nu-1$, δηλαδὴ ὅτι:

$$\frac{1}{\nu-1}\sum_{\varkappa=1}^{\nu-1}\alpha_\varkappa \cdot \frac{1}{\nu-1}\sum_{\varkappa=1}^{\nu-1}\beta_\varkappa \leq \frac{1}{\nu-1}\sum_{\varkappa=1}^{\nu-1}\alpha_\varkappa\beta_\varkappa$$ ἢ ὅτι

$$(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{\nu-1})(\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_{\nu-1}) \leq (\nu-1)(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\dots\alpha_{\nu-1}\beta_{\nu-1}) \quad (2)$$

Θὰ δείξωμεν ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν αὐτὴν ὅτι ἀληθεύει καὶ διὰ $\nu = \nu$, δηλ. ὅτι $(\alpha_I+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)(\beta_I+\beta_2+\ldots+\beta_\nu)\leq\nu(\alpha_I\beta_I+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_\nu\beta_\nu)$ (3).

'Αλλά ὡς γνωστόν $\alpha_\nu\beta_\varkappa+\alpha_\varkappa\beta_\nu\leqslant\alpha_\varkappa\beta_\varkappa+\alpha_\nu\beta_\nu$ καί συνεπῶς $\sum_{\varkappa=I}^{\nu-I}(\alpha_\nu\beta_\varkappa+\alpha_\varkappa\beta_\nu)\leqslant\sum_{\varkappa=I}^{\nu-I}(\alpha_\varkappa\beta_\varkappa+\alpha_\nu\beta_\nu)$ ἡ ὁποία εἶναι ἰσοδύναμος μέ τήν

$\alpha_\nu(\beta_I+\beta_2+\ldots+\beta_{\nu-I})+\beta_\nu(\alpha_I+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\nu-I})\leqslant(\alpha_I\beta_I+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_{\nu-I}\beta_{\nu-I})$ (4).

Προσθέτοντες κατά μέλη τάς (2) καί (4) εὑρίσκομεν τήν (3) δηλ. ἡ (I) ἀληθεύει καί διά $\nu=\nu$ καί συνεπῶς διά κάθε $\nu\in\Phi$.

62) 'Εάν ὁ U_ν παριστᾶ τόν $\nu^{ον}$ ὅρον τοῦ ἀθροίσματος

$$I+\frac{2^2}{I(I+2.2^2)}+\frac{3^2}{I(I+2.2^2)(I+2.3^2)}+\ldots$$

νά δειχθῆ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων αὐτοῦ εἶναι $\frac{3\nu^2-U_\nu}{2\nu^2}$.

<u>Λύσις</u>: Ὁ $\nu^{ος}$ ὅρος τοῦ ἀθροίσματος $U_\nu=\frac{\nu^2}{I(I+2.2^2)(I+2.3^2)\ldots(I+2\nu^2)}$

Λέγομεν ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων εἶναι :

$$\frac{3\left[I.(I+2.2^2).(I+2.3^2)\ldots(I+2.\nu^2)-I\right]}{2.\,I\,(I+2.2^2).(I+2.3^2)\ldots(I+2.\nu^2)}\quad (I)$$

Ἔστω ὅτι ἡ (I) εἶναι τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τοῦ δοθέντος ἀθροίσματος. Διά νά εἶναι δέ ὁ τύπος οὗτος γενικός πρέπει νά δειχθῆ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν $\nu+I$ πρώτων ὅρων του εἶναι:

$$\frac{3\left[I\,(I+2.2^2)\ldots(I+2\nu^2)\left[I+2(\nu+I)^2\right]-I\right]}{2.(I+2.2^2)\ldots(I+2\nu^2)\left[I+2(\nu+I)^2\right]}.$$

Πρός τοῦτο εἰς τούς ν πρώτους ὅρους τοῦ ἀθροίσματος αὐτοῦ καί εἰς τήν (I) προσθέτομεν τόν ὅρον

$$U_{\nu+I}=\frac{(\nu+I)^2}{I(I+2.2^2)(I+2.3^2)\ldots(I+2\nu^2)\left[I+2(\nu+I)^2\right]}$$

, τότε θά ἔχωμεν :

$$I+\frac{2^2}{I(I+2.2^2)}+\ldots+\frac{(\nu+I)^2}{I\,(I+2.2^2)\ldots(I+2\nu^2)\left[I+2(\nu+I)^2\right]}=$$

$$=\frac{3\left[I+(I+2.2^2)\ldots(I+2\nu^2)\left[I+2(\nu+I)^2\right]+2\,(\nu+I)^2\right.}{2.I(I+2.2^2)\ldots(I+2\nu^2)\left[I+2(\nu+I)^2\right]}-$$

$$-\frac{I}{2(I+2.2^2)(I+2.3^2)..(I+2\nu^2)} = \frac{3}{2} + \frac{2(\nu+I)^2-[(I+2(\nu+I)^2]}{2.I(I+2.2^2)..(I+2\nu^2[I+2(\nu+I)^2]} =$$

$$= \frac{I}{2}\left[\frac{3.(I+2.2^2)..(I+2.\nu^2)[I+2(\nu+I)^2]-I}{I(I+2.2^2)..(I+2\nu^2)[I+2(\nu+I)^2]}\right] = \frac{I}{2}\cdot\left[\frac{3.(\nu+I)^2-U_{\nu+I}}{(\nu+I)^2}\right]$$

ἤτοι ἡ (I) ἀληθεύει καί διά $\nu + I$ καί συνεπῶς διά κάθε $\nu \in \Phi$.

63) Δίδεται ἡ ἀκολουθία $(U_I, U_2, \ldots, U_\nu)$, καί $\nu \in \Phi$. Ἐάν $U_{\nu+I} = 2U_\nu + 1$ νά δειχθῇ ὅτι $U_\nu = 2^{\nu-I}(U_I + I) - I$.

Λ ύ σ ι ς . Διά $\nu = I$ ἔχομεν $U_I = 2^{I-I}(U_I+I)-I = U_I$ δηλαδή ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει διά $\nu = \kappa$ $(\kappa \in \Phi)$, δηλ. ὅτι $U_\kappa = 2^{\kappa-I}(U_I+I)-I$ (I). Θά δείξωμεν ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει διά $\nu = \kappa+I$, δηλαδή ὅτι $U_{\kappa+I} = 2^\kappa(U_I+I)-I$ (2). Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως $U_{\kappa+I} = 2U_\kappa + I$ καί ἕνεκα τῆς (I) ἔχομεν $U_{\kappa+I} = 2\left[2^{\kappa-I}(U_I+I)-1\right]+1 = 2.2^{\kappa-I}(U_I+I)-2+I =$ $= 2^\kappa(U_I+I) - I$, δηλαδή ἡ πρότασις ἀληθεύει καί διά $\nu = \kappa + I$ καί συνεπῶς κατά τήν ἀρχήν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς θά ἀληθεύῃ καί διά κάθε $\nu \in \Phi$.

64) Ἐάν $\alpha_2 - \alpha_I = \alpha_3 - \alpha_2 = \ldots = \alpha_\nu - \alpha_{\nu-I}$ καί $\alpha_I = U_I$, $\alpha_2 = U_2$ καί $U_\nu > 2U_{\nu-I} - U_{\nu-2}$ (I) καί $\nu \in \Phi \geq 3$, νά δειχθῇ ὅτι $U_\nu > \alpha_\nu$ (2)

Λ ύ σ ι ς . Διά $\nu = 3$ ἐκ τῆς (I) ἔχομεν $U_3 > 2U_2 - U_I = 2\alpha_2 - \alpha_I =$ $= \alpha_3$ δηλ. ἡ (2) ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἡ (2) ἀληθεύει διά $\nu = \kappa - I$ $(\kappa \in \Phi)$ δηλ. ὅτι $U_{\kappa-I} > \alpha_{\kappa-I}$ (3) καί θά δείξωμεν ὅτι ὑπό τήν ἄνω προϋπόθεσιν ὅτι ἀληθεύει διά $\nu = \kappa$ δηλ. ὅτι $U_\kappa > \alpha_\kappa$ (4)
Ἐκ τῆς (I) διά $\nu = 3,4,\ldots,\kappa$ ἔχομεν $U_3 > 2U_2 - U_I$, $U_4 > 2U_3 - U_2$, $\ldots U_{\kappa-I} > 2U_{\kappa-2} - U_{\kappa-3}$, $U_\kappa > 2U_{\kappa-I} - U_{\kappa-2}$ καί διά προσθέσεως κατ ά

μέλη λαμβάνομεν $U_{\varkappa} > U_{\varkappa-I} - U_I + U_2$ ἤ λόγῳ τῆς (3) ἔχομεν :
$U_{\varkappa} + U_I - U_2 > U_{\varkappa-I}$ ἤ $U_{\varkappa} > \alpha_{\varkappa-I} + (\alpha_2 - \alpha_I)$ ἤ $U_{\varkappa} > \alpha_{\varkappa}$. Ἄρα ἡ (2) ἀληθεύει καί διά $\nu = \varkappa+I$ καί συνεπῶς θά ἀληθεύῃ καί διά κάθε $\nu \in \Phi$.

65) Ἐάν $\nu \in \Phi$ καί $4 = \frac{3}{U_I} = U_I + \frac{3}{U_2} = \dots = U_{\nu-I} + \frac{3}{U_\nu} = \alpha_\nu + \frac{3}{U_{\nu+1}}$ (1)
νά δειχθῇ ὅτι : $U_\nu = \frac{3^{\nu+I} - 3}{3^{\nu+I} - I}$ (2) .

Λύσις. Διά $\nu = I$ ἔχομεν $4 = \frac{3}{U_I}$ ἤ $U_I = \frac{3}{4}$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν (2) εὑρίσκομεν $U_I = \frac{3^2-3}{3^2-I} = \frac{3}{4}$ δηλ. ἀληθεύει.
Ἔστω ὅτι ἡ (Ι) ἀληθεύει διά $\nu = \varkappa$ δηλ. ὅτι $4 = \frac{3}{U_I} = U_I + \frac{3}{U_2} = \dots = U_{\varkappa} + \frac{3}{U_{\varkappa+I}} = U_{\varkappa+I} + \frac{3}{U_{\varkappa+2}}$ (3). Θά δείξωμεν ὅτι ὑπό τάς προϋποθέσεις αὐτάς ἡ (Ι) ἀληθεύει καί διά $\nu = \varkappa+I$, δηλαδή ὅτι $U_{\varkappa+I} = \frac{3^{\varkappa+2} - 3}{3^{\varkappa+2} - I}$ (4). Ἐκ τῆς (3) ἔπεται ὅτι $4 = U_{\varkappa} + \frac{3}{U_{\varkappa+I}}$ ἤ $U_{\varkappa+I} = \frac{3}{4 - U_{\varkappa}}$ ἤ ἕνεκα τῆς (2) $U_{\varkappa+I} = \frac{3}{4\frac{3^{\varkappa+I} - 3}{3^{\varkappa-I} - I}} =$

$$= \frac{3\,(3^{\varkappa+I} - I)}{4(3^{\varkappa+I} - I) - 3^{\varkappa+I} + 3} = \frac{3^{\varkappa+2} - 3}{3.3^{\varkappa+I} - I} = \frac{3^{\varkappa+2} - 3}{3^{\varkappa+2} - I}$$, δηλ. ἀληθεύει καί διά $\nu = \varkappa+I$ καί συνεπῶς διά κάθε $\nu \in \Phi$.

66) Δίδεται ἡ ἀκολουθία $U_I, U_2, \dots, U_\nu$ διά τήν ὁποίαν $U_I = U_2 = I$ καί $U_{\nu+I} = U_\nu + U_{\nu-I}$ $(\nu \in \Phi \geq 2)$. Νά δειχθῇ ὅτι $U_I + U_2 + \dots + U_\nu = U_{\nu+2} - I$.

Λύσις. Διά $\nu = 2$ ἔχομεν $U_I + U_2 = U_4 - I$ (Ι). Ἀλλά $U_4 =$

$= U_3 + U_2$ ὅτε ἡ (I) γίνεται $U_I + U_2 + I = U_4 = U_3 + U_2$ ἢ $U_I + I = U_2 + U_I$ καί ἐπειδή $U_I = U_2 = I$ ἕπεται ὅτι $U_2 = I$, ἄρα ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἀληθεύει διά $\nu = \varkappa$ ($\varkappa \in \Phi$) δηλ. $U_I + U_2 + \ldots + U_\varkappa = U_{\varkappa+2} - I$ (2). Θά δείξωμεν ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu = \varkappa + I$ δηλ. ὅτι $U_I + U_2 + \ldots + U_\varkappa + U_{\varkappa+I} = U_{\varkappa+3} - I$ (3). Προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τά μέλη τῆς (I) τό $U_{\varkappa+I}$ ἔχομεν $U_I + U_2 + \ldots + U_\varkappa + U_{\varkappa+I} = U_{\varkappa+2} - I + U_{\varkappa+I} = U_{\varkappa+3} - I$ διότι $U_{\varkappa+2} + U_{\varkappa+I} = U_{\varkappa+3}$. Ἄρα ἀληθεύει διά $\nu = \varkappa + I$ καί συνεπῶς θά ἀληθεύῃ διά πᾶσαν τιμήν τοῦ $\nu \in \Phi$.

67) Δίδεται ἡ ἀκολουθία $U_I, U_2, \ldots, U_\nu$ ὅπου $U_I = U_2 = I$ καί $U_\nu = U_{\nu-I} + U_{\nu-2}$ (ἀκολουθία FIBONACCI) καί ($\nu \in \Phi \geqslant 3$). Νά δειχθῇ ὅτι $U_I U_2 + U_2 U_3 + \ldots U_{2\nu-1} U_{2\nu} = U_{2\nu}^2$ (I) διά κάθε $\nu \in \Phi$.

Λ ύ σ ι ς. Διά $\nu = 1$ ἡ (I) γίνεται $U_I U_2 = U_2^2$. Ἀλλ' ἐπειδή $U_I = U_2 = I$ θά εἶναι $I.I = I^2$. Ἄρα διά $\nu = I$ ἡ (I) ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἡ (I) ἀληθεύει διά $\nu = \varkappa$ ($\varkappa \in \Phi \geqslant I$), δηλ. ὅτι $U_I U_2 + U_2 U_3 + \ldots + U_{2\varkappa-I} U_{2\varkappa} = U_{2\varkappa}^2$ (2). Θά δείξωμεν ὅτι αὕτη ἀληθεύει διά $\nu = \varkappa + I$ ὑπό τάς ἄνω προϋποθέσεις, δηλ. ὅτι $U_I U_2 + U_2 U_3 + \ldots + U_{2\varkappa-I} U_{2\varkappa} + U_{2\varkappa} U_{2\varkappa+I} + U_{2\varkappa+I} U_{2\varkappa+2} = U_{2\varkappa+2}^2$ (3). Προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τά μέλη τῆς (2) τόν ἀριθμόν $U_{2\varkappa} \cdot U_{2\varkappa+I} + U_{2\varkappa+I} U_{2\varkappa+2}$ ὅτε ἔχομεν $U_I U_2 + U_2 U_3 + \ldots + U_{2\varkappa-I} U_{2\varkappa} + U_{2\varkappa} U_{2\varkappa+I} + U_{2\varkappa+I} U_{2\varkappa+2} = U_{2\varkappa}^2 + U_{2\varkappa} U_{2\varkappa+I} + U_{2\varkappa+I} U_{2\varkappa+2}$. Ἀρκεῖ λοιπόν νά δείξωμεν ὅτι $U_{2\varkappa}^2 + U_{2\varkappa} U_{2\varkappa+I} + U_{2\varkappa+I} U_{2\varkappa+2} = U_{2\varkappa+2}^2$ ἤ $U_{2\varkappa}^2 + U_{2\varkappa} U_{2\varkappa+I} = U_{2\varkappa+2}^2 - U_{2\varkappa+I} U_{2\varkappa+2}$ ἤ ὅτι $U_{2\varkappa}(U_{2\varkappa} + U_{2\varkappa+I}) = U_{2\varkappa+2}(U_{2\varkappa+2} - U_{2\varkappa+I})$ (4). Ἀλλ' ἐξ ὁρισμοῦ $U_{2\varkappa+2} = U_{2\varkappa+I} + U_{2\varkappa}$, ἐπομένως $U_{2\varkappa+2} - U_{2\varkappa+I} = U_{2\varkappa}$. Ἄρα $U_{2\varkappa}(U_{2\varkappa} + U_{2\varkappa+I}) = U_{2\varkappa} U_{2\varkappa+2}$ καί $U_{2\varkappa+2}(U_{2\varkappa+2} - U_{2\varkappa+I}) = U_{2\varkappa+2} U_{2\varkappa}$, ἄρα ἡ (4) ἀληθεύει καί συνεπῶς καί ἡ (3). Ἡ ἀποδεικτέα λοιπόν πρότασις ἀληθεύει καί διά $\nu = \kappa+I$ καί συνεπῶς καί διά κάθε $\nu \in \Phi$.

68) Δίδεται ἡ ἀκολουθία U_I , $U_2, \dots U_\nu$ ὅπου $U_2 = U_1^2 - I$ (I) καί $U_\nu U_{\nu+2} = U_{\nu+I}^2 - I$ (2) καί ($\nu\in\Phi$). Νά δειχθῇ ὅτι :

$$U_\nu + U_{\nu+2} = U_I U_{\nu+I} \quad (3)$$

Λ ύ σ ι ς . Διά $\nu = I$ ἡ (3) γίνεται $U_I + U_3 = U_I U_2$ (4) ἤ $U_3 = U_I (U_2 - I)$ ἤ $U_I U_3 = U_1^2 (U_2 - I)$ καί ἕνεκα τῆς (I) $U_I U_3 = (U_2+I)(U_2-I) = U_I^2 - I$ (5). Ἀλλ' ἡ (5) ἀληθεύει ἕνεκα τῆς (2) διά $\nu = I$, καί ἐπειδή αἱ πράξεις εἶναι ἀντιστρεπταί , ἐκ τῆς (4) μεταβαίνομεν εἰς τήν (5). Ἄρα ἀληθεύει.

Ἔστω ὅτι ἡ (3) ἀληθεύει διά $\nu = \kappa$, δηλαδή ὅτι $U_\kappa + U_{\kappa+2} = U_I U_{\kappa+I}$ (6) . Θά δείξωμεν ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ὅτι ἰσχύει καί διά $\nu = \kappa + I$, δηλ. ὅτι $U_{\kappa+I} + U_{\kappa+3} = U_I U_{\kappa+2}$ (7) . Ἐκ τῶν (6) καί (7) , λαμβάνομεν :

$$U_I = \frac{U_\kappa + U_{\kappa+2}}{U_{\kappa+I}} \quad \text{καί} \quad U_I = \frac{U_{\kappa+I} - U_{\kappa+3}}{U_{\kappa+2}}$$

ὅτε ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι :

$$\frac{U_\kappa + U_{\kappa+2}}{U_{\kappa+I}} = \frac{U_{\kappa+I} + U_{\kappa+3}}{U_{\kappa+2}} \quad \text{ἤ} \quad U_\kappa U_{\kappa+2} + U_{\kappa+2}^2 = U_{\kappa+I}^2 + U_{\kappa+I} U_{\kappa+3} \ (8)$$

Ἀλλ' ἕνεκα τῆς (2) εἶναι $U_\kappa U_{\kappa+2} = U_{\kappa+I}^2 - I$ καί $U_{\kappa+I} U_{\kappa+3} = U_{\kappa+2}^2 - I$, ὅτε ἡ (8) γίνεται $U_{\kappa+I}^2 - I + U_{\kappa+2}^2 = U_{\kappa+I}^2 + U_{\kappa+2}^2 - I$, δηλ. ἀληθεύει καί διά $\nu = \kappa+I$ καί συνεπῶς θά ἀληθεύῃ καί διά κάθε $\nu \in \Phi$.

69) Δίδεται ἡ ἀκολουθία $U_I, U_2, \dots, U_\nu \dots$ ὅπου $U_I = U_2 = I$ καί $U_\nu = U_{\nu-I} + U_{\nu-2}$ διά κάθε $\nu\in\Phi \geqslant 3$. Νά δειχθῇ ὅτι :

α) $U_I - U_2 + U_3 - U_4 + \dots + (-I)^{\nu-I}.U_\nu = I+(-I)^{\nu-I}U_{\nu-I}$ (I)

β) $U^3_{\nu+I} - 4U^3_\nu - U^3_{\nu-I} = 3\,(-I)^\nu\, U_\nu$ (2) .

Λύσις. α) Διά ν=3 ή (I) άληθεύει. Έστω ότι άληθεύει διά ν=κ , δηλ. ότι $U_I-U_2+\dots+(-1)^{\kappa-1}U_\kappa = 1+(-1)^{\kappa-1}U_{\kappa-1}$ (α).

θά δείξωμεν ότι ύπό τήν προϋπόθεσιν αύτήν άληθεύει καί διά ν=κ+I. Πράγματι προσθέτοντες είς άμφότερα τά μέλη τής (α) τόν $(-I)^\kappa U_{\kappa+I} = (-I)^\kappa (U_\kappa + U_{\kappa-I})$ έχομεν

$U_I-U_2+\dots+(-I)^\kappa U_{\kappa+I} = I+(-I)^{\kappa-I}U_{\kappa-I}+(-I)^\kappa U_\kappa+(-I)^\kappa U_{\kappa-I} =$

$= I + (-I)^\kappa U_\kappa$, δηλ. άληθεύει καί διά ν = κ+I καί έπομένως κατά τήν άρχήν τής τελείας έπαγωγής άληθεύει διά κάθε ν∈Φ ⩾ 3

β) Ή (2) γράφεται $(U^3_{\nu+I} - U^3_{\nu-I}) - 4U^3_\nu = 3\,(-I)^\nu \kappa_\nu$ ή

$(U_{\nu+I} - U_{\nu-I})(U^2_{\nu+I} + U_{\nu+I}U_{\nu-I} + U^2_{\nu-I}) - 4U^3_\nu =$

$= 3\,(-I)^\nu U_\nu$, ή έπειδή $U_{\nu+I} - U_{\nu-I} = U_\nu$, $U_{\nu+I} = U_\nu + U_{\nu-I}$,

άπλοποιοῦντες διά U_ν έχομεν $(U_\nu + U_{\nu-I})^2 + (U_\nu + U_{\nu-I})U_{\nu-I}$ -+ $- U^2_{\nu-I} - 4U^2_\nu = 3\,(-I)^\nu$ ή μετά τάς πράξεις $-U^2_\nu + U^2_{\nu-I} + U_\nu U_{\nu-I} = (-I)^\nu$ (4) ή όποία άληθεύει διά ν = 2 .

Έστω ότι αύτη άληθεύει καί διά ν = κ , δηλαδή ότι $U^2_\kappa + U^2_{\kappa-I} + U_\kappa U_{\kappa-I} = (-I)^\kappa$ (β). Θά δείξωμεν ύπό τήν προϋπόθεσιν αύτήν ότι άληθεύει καί διά ν = κ+I , δηλαδή ότι : $-U^2_{\kappa+I} + U^2_\kappa + U_{\kappa+I}U_K = (-I)^{\kappa+I}$ (5). Ή (5) γράφεται :

$-U^2_{\kappa+I} + U^2_\kappa + U_{\kappa+I}U_\kappa = -(U_\kappa + U_{\kappa-I})^2 + U^2_\kappa + (U_\kappa + U_{\kappa-I})U_\kappa$. Ένεκα τής (β) ή $-(-U^2_\kappa + U^2_{\kappa-I} + U_\kappa U_{\kappa-I}) = -(-I)^\kappa = (-I)^{\kappa+I}$, δηλ. άληθεύει καί διά ν = κ+I άρα άληθεύει γενικῶς .

70) Δίδεται ἡ ἀκολουθία $U_I, U_2, U_3, \ldots, U_{3\nu+2}$ $(\nu\in\Phi)$ διά τήν ὁποίαν εἶναι $U_I = U_2 = I$ καί $U_{\nu+I} = U_\nu + U_{\nu-I}$ $(\nu \geqslant 2)$. Νά δειχθῇ ὅτι :

α) $U_I^2 + U_2^2 + \ldots + U_\nu^2 = U_\nu U_{\nu+I}$ καί β) $U_3 + U_6 + U_9 + \ldots$
$\ldots + U_{3\nu} = \frac{I}{2}(U_{3\nu+2} - I)$.

Λύσις. α) Διά $\nu = I$ ἡ σχέσις $U_I^2 + U_2^2 \ldots + U_\nu^2 = U_\nu U_{\nu+I}$ ἀληθεύει διότι γίνεται $U_I^2 = U_I U_2$, ἐπειδή ὅμως $U_I = U_2 = I$ θά εἶναι τότε $I = I$, δηλαδή ἀληθές.

Ἔστω ὅτι ἡ (α) ἀληθεύει διά $\nu = \kappa$ $(\kappa\in\Phi)$, δηλαδή ὅτι $U_I^2 + U_2^2 + \ldots + U_\kappa^2 = U_\kappa U_{\kappa+I}$ (I). Θά δείξωμεν ὅτι ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ἀληθεύει καί διά $\nu = \kappa+I$ δηλ. ὅτι $U_I^2 + U_2^2 + \ldots$
$\ldots + U_\kappa^2 + U_{\kappa+I}^2 = U_{\kappa+I} U_{\kappa+2}$ (2). Τό β^{ον} μέλος τῆς (2) λόγῳ τῆς (I) γίνεται $U_\kappa U_{\kappa+I} + U_{\kappa+I}^2 = U_{\kappa+I} U_{\kappa+2} = U_{\kappa+I} (U_\kappa + U_{\kappa+I})$ (3) (διότι $U_{\kappa+2} = U_{\kappa+I} U_\kappa$) δηλ. ἡ (2) ἀληθεύει καί διά $\nu = \kappa+I$ καί ἑπομένως κατά τήν ἀρχήν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς θά ἀληθεύῃ διά κάθε $\nu \in \Phi \geqslant 2$.

β) Διά $\nu = I$ ἀληθεύει. Ἔστω λοιπόν ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu = \kappa+I$ δηλ. ὅτι εἶναι $U_3 + U_6 + \ldots + U_{3\kappa} = \frac{I}{2}(U_{3\kappa+2} - I)$ (I).
Θά δείξωμεν ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu = \kappa+I$ δηλ. ὅτι $U_3 + U_6 + \ldots + U_{3\kappa} + U_{3\kappa+3} = \frac{I}{2}(U_{3\kappa+5} - I)$ (2)

Ἡ (2) λόγῳ τῆς (I) γίνεται $U_3 + U_6 + \ldots + U_{3\kappa} + U_{3\kappa+3} =$
$= \frac{I}{2}(U_{3\kappa+2} - I) + U_{3\kappa+3} = \frac{I}{2}(U_{3\kappa+2} + 2U_{3\kappa+3} - I) =$
$= \frac{I}{2}(U_{3\kappa+2} + U_{3\kappa+3} + U_{3\kappa+3} - I) = \frac{I}{2}(U_{3\kappa+4} + U_{3\kappa+3} - I) = \frac{I}{2}(U_{3\kappa+5} - 1)$.

Ἄρα ἀληθεύει καί διά $\nu = \kappa + I$ καί ἑπομένως κατά τήν ἀρχήν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς θά ἀληθεύῃ καί διά κάθε $\nu \in \Phi$.

71) Δίδεται ἡ ἀκολουθία $(U_0, U_1, \dots, U_\nu, \dots)$ διά τήν ὁποίαν εἶναι $U_0 = 0$, $U_1 = 1$ $U_{\nu+1} + U_{\nu-1} = \dfrac{4U_\nu}{U_\nu^2+1}$, $\nu > 1$ (1). Νά δειχθῆ ὅτι α) $(U_\nu U_{\nu+1} - 1)^2 + (U_\nu - U_{\nu+1})^2 = 2$ (2). β) ὁ U_ν εἶναι ρητός. γ) ὅτι ἡ παράστασις $1 + 4U_\nu^2 - U_\nu^4$ εἶναι τέλειον τετράγωνον ρητοῦ ἀριθμοῦ.

Λύσις. α) Διά $\nu = 0$ ἡ (2) γίνεται $(U_0U_1-1)^2 + (U_0-U_1)^2 = 2$ διότι $U_0 = 0$ καί $U_1 = 1$, δηλ. ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἀληθεύει διά $\nu = \kappa$ δηλ. ὅτι $(U_\kappa U_{\kappa+1}-1)^2 + (U_\kappa - U_{\kappa+1})^2 = 2$ (3) θά δείξωμεν ὅτι ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ἀληθεύει καί διά $\nu = \kappa+1$ Δηλ. ὅτι $(U_{\kappa+1} U_{\kappa+2} - 1)^2 + (U_{\kappa+1} - U_{\kappa+2})^2 = 2$ (4). Τό πρῶτον μέλος τῆς (4) γράφεται $U_{\kappa+1}^2 U_{\kappa+2}^2 - 2U_{\kappa+1} U_{\kappa+2} + 1 + U_{\kappa+1}^2 - 2U_{\kappa+1} U_{\kappa+2} + U_{\kappa+2} = U_{\kappa+2}^2 (U_{\kappa+1}^2 + 1) - 4U_{\kappa+1} U_{\kappa+2} + 1 + U_{\kappa+1}^2 = U_{\kappa+2}\left[U_{\kappa+2}(U_{\kappa+1}^2 + 1) - 4U_{\kappa+1}\right] + 1 + U_{\kappa+1}^2$. Ἀλλ' ἕνεκα τῆς (1) ἔχομεν $U_{\kappa+2} + U_\kappa = \dfrac{4U_{\kappa+1}}{U_{\kappa+1}^2+1}$ ἤ $U_{\kappa+2}(U_{\kappa+1}^2 + 1) = 4U_{\kappa+1} - U_\kappa(U_{\kappa+1}^2 + 1)$, ὅτε ἡ προηγουμένη γίνεται

$$-U_\kappa U_{\kappa+2}(U_{\kappa+1}^2 + 1) + 1 + U_{\kappa+1}^2 = -U_\kappa\left[U_{\kappa+2}(U_{\kappa+1}^2 + 1)\right] + 1 + U_{\kappa+1}^2 =$$
$$= -U_\kappa\left[4U_{\kappa+1} - U_\kappa(U_{\kappa+1}^2 + 1)\right] + 1 + U_{\kappa+1}^2 = -4U_\kappa U_{\kappa+1} + U_\kappa^2(U_{\kappa+1}^2 + 1) +$$
$$+ 1 + U_{\kappa+1}^2 = (U_\kappa^2 U_{\kappa+1}^2 - 2U_\kappa U_{\kappa+1} + 1) + (U_{\kappa+1}^2 + U_\kappa^2 - 2U_\kappa U_{\kappa+1}) =$$
$$= (U_\kappa U_{\kappa+1} - 1)^2 + (U_\kappa - U_{\kappa+1})^2 = 2$$ ἕνεκα τῆς (3).

β) Διά $\nu = 1$ ἐκ τῆς (1) ἔχομεν $U_2 = \dfrac{4U_1}{U_1^2+1} - U_0 = \frac{4}{2} - 0 = 2$

δηλ. ρητός. Διά $\nu = 2$ όμοίως ἔχομεν $U_3 = \frac{4U_2}{U_2^2+I} - U_1 = \frac{8}{5} - I = \frac{3}{5}$ ρητός. Ἂν λοιπόν οἱ $U_{\kappa-I}$ καί U_κ εἶναι ρητοί θά εἶναι ρητός καί ὁ $U_{\kappa+I}$, διότι:

$$U_{\kappa+I} = \frac{4U_\kappa}{U_\kappa^2 + I} - U_{\kappa-I}$$

, δηλ. ὁρίζεται ὁ $U_{\kappa+I}$ διά τοῦ $U_{\kappa-I}$ καί U_κ τῇ βοηθείᾳ ρητῶν πράξεων.

γ) Ἡ (2) γράφεται $U_{\nu+I}^2 (U_\nu^2 + I) - 4U_\nu U_{\nu+I} (U_\nu^2 + I) = 2$ ἤ

$$U_{\nu+I}^2 - U_{\nu+I} \cdot \frac{4U_\nu}{U_\nu^2+I} = \frac{I-U_\nu^2}{U_\nu^2+I} \text{ ἤ } U_{\nu+I}^2 - U_{\nu+I} \cdot \frac{4U_\nu}{U_\nu^2+I} + \left(\frac{2U_\nu}{U_\nu^2+I}\right)^2 =$$

$$= \frac{I-U_\nu^2}{I+U_\nu^2} + \left(\frac{2U_\nu}{U_\nu^2+I}\right)^2 \text{ ἤ } \left(U_{\nu+I} - \frac{2U_\nu}{U_\nu^2+I}\right)^2 = \frac{I+4U_\nu^2-U_\nu^4}{(U_\nu^2+I)^2},$$

καί ἑπομένως $I + 4U_\nu^2 - U_\nu^4 = \left(U_{\nu+I} - \frac{2U_\nu}{U_\nu^2+I}\right)^2 \cdot (U_\nu^2+I)^2$, δηλαδή τέλειον τετράγωνον ρητοῦ ἀριθμοῦ.

72) Ἐάν $\nu \in \Phi$ καί $\Pi_\nu(x) = \frac{x(x+I)(x+2)\ldots(x+\nu-I)}{I\cdot2\ldots\nu}$,

νά δειχθῇ ὅτι

$$\sum_{\nu=I}^{\mu} \Pi_\nu(x) = \Pi_\mu(x+I) - I \quad (I) \quad \text{καί}$$

$$0 < \Pi_\nu\left(\frac{I}{2}\right) \quad \frac{I}{\sqrt{2\nu+I}} \quad (2)$$

Λ ύ σ ι ς . Διά $\nu=2$ ἡ (I) γίνεται $\Pi_2(x) = \frac{x(x+I)}{I.2}$ καί

$$\sum_{\nu=I}^{2} = x + \frac{x(x+I)}{I.2} = \frac{x(x+3)}{I.2} = \frac{(x+I)(x+2)}{I.2} - I = \frac{x(x+3)}{I.2} .$$

Ἄρα ἡ (I) ἀληθεύει διά $\nu = 2$. Ἔστω ὅτι ἡ (I) ἀληθεύει διά $\mu = \kappa$, δηλ. ὅτι $\sum_{\nu=I}^{\kappa} \Pi_\nu(x) = \Pi_\kappa(x+I) - I$ (3), ἔνθα $\kappa \in \Phi$. Θά δείξωμεν ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ὅτι ἀληθεύει καί διά $\mu = \kappa + I$

Προσθέτομεν εἰς τά μέλη τῆς (3) τόν ὅρον $\frac{x(x+I)(x+2)\ldots(x+\kappa)}{I\cdot2\ldots(\kappa+I)}$

καί ἔχομεν $\sum_{\nu=I}^{\kappa+I} \Pi_{\nu}(\chi) = \frac{(\chi+I)(\chi+2)\ldots(\chi+\kappa)}{I\cdot 2\ldots\ldots\kappa} + \frac{\chi(\chi+I)(\chi+2)\ldots(\chi+\kappa)}{I\cdot 2\cdot 3\ldots(\kappa+I)}$

$- I = \frac{(\chi+I)(\chi+2)\ldots(\chi+\kappa)(\kappa+I)}{I\cdot 2\ldots\ldots\kappa(\kappa+I)} + \frac{\chi(\chi+I)\ldots(\chi+\kappa)}{I\cdot 2\ldots(\kappa+I)} - I =$

$= \frac{(\chi+I)(\chi+2)\ldots(\chi+\kappa)(\chi+\kappa+I)}{I\cdot 2\ldots\ldots\kappa(\kappa+I)} - I = \Pi_{\kappa+I}(\chi+I) - I$, δηλ. ἡ (I) ἀληθεύει καί διά $\mu = \kappa+I$ καί ἑπομένως θά ἀληθεύῃ καί διά κάθε $\nu \in \Phi$.

β) Ἡ $\Pi_{\nu}\left(\frac{I}{2}\right) > 0$ εἶναι προφανής. Ἔστω ὅτι ἡ $\Pi_{\nu}\left(\frac{I}{2}\right) < \frac{I}{\sqrt{2\nu+I}}$ εἶναι ἀληθής. Ἄν πολ/σωμεν τά μέλη της ἐπί $\frac{2\nu+I}{2(\nu+I)}$ θά ἔχωμεν $\frac{\frac{I}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2\nu-I}{2}}{I\cdot 2\ldots\nu} \cdot \frac{\frac{2\nu+I}{2}}{\nu+I} = \Pi_{\nu+I}\left(\frac{I}{2}\right)$ καί

$\frac{I}{\sqrt{2\nu+I}} \cdot \frac{2\nu+I}{2(\nu+I)} = \frac{\sqrt{2\nu+I}}{2(\nu+I)} = \sqrt{\frac{2\nu+I}{4\nu^2+8\nu+4}}$. Ἀλλά $4\nu^2 + 8\nu + 3 = (2\nu+3)(2\nu+I) < 4\nu^2 + 8\nu + 4$. Ἄρα $\frac{2\nu+I}{4\nu^2+8\nu+4} < \frac{I}{\sqrt{2\nu+3}}$. Ἄρα $\Pi_{\nu+I}\left(\frac{I}{2}\right) < \frac{I}{\sqrt{2\nu+3}}$ δηλ. ἡ (2) ἀληθεύει καί διά $\nu=\nu+I$ καί ἑπομένως καί διά κάθε $\nu \in \Phi$.

73) Νά δειχθῇ ὅτι ὁ $\nu^{ος}$ ὅρος τῆς ἀκολουθίας $U_I, U_2 \ldots U_\nu$ ὅπου $U_I = U_2 = I$ καί $U_\nu = U_{\nu-I} + U_{\nu-2}$ διά κάθε $\nu \in A \geq 3$ δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως $U_\nu = \frac{I}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{I+\sqrt{5}}{2}\right)^{\nu} - \left(\frac{I-\sqrt{5}}{2}\right)^{\nu}\right]$ (I).

Λύσις. Διά $\nu = I, 2$ ἔχομεν $U_I = I$, $U_2 = I$. Ἔστω ὅτι εἶναι $U_{\kappa-I} = \frac{I}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{I+\sqrt{5}}{2}\right)^{\kappa-I} + \left(\frac{I-\sqrt{5}}{2}\right)^{\kappa-I}\right]$ ἤ $2^{\kappa-I}\sqrt{5}\cdot U_{\kappa-I} = (I+\sqrt{5})^{\kappa-I} - (I-\sqrt{5})^{\kappa-I}$ (2) καί $U_\kappa = \frac{I}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{I+\sqrt{5}}{2}\right)^{\kappa} + \left(\frac{I-\sqrt{5}}{2}\right)^{\kappa}\right]$ ἤ $2^{\kappa}\sqrt{5}\,U_\kappa = (I+\sqrt{5})^{\kappa} - (I-\sqrt{5})^{\kappa}$ (3)

θά δείξωμεν ὑπό τάς προϋποθέσεις αὐτάς ὅτι καί

$$U_{\kappa+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\kappa+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\kappa+1}\right] \text{ ἤ } 2^{\kappa+1}\sqrt{5}\,U_{\kappa+1} =$$

$$= (1+\sqrt{5})^{\kappa+1} - (1-\sqrt{5})^{\kappa+1} \quad (4).$$

Πολ/ζοντες τάς (2) καί (3) ἀντιστοίχως ἐπί 2^2 καί 2 καί προσθέτοντες ἔχομεν $2^{\kappa+1}\sqrt{5}(U_{\kappa-1}+U_{\kappa})=(6+2\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^{\kappa-1}$ - $(6-2\sqrt{5})(1-\sqrt{5})^{\kappa-1}$ ἤ τελικά $2^{\kappa+1}\sqrt{5}\,U_{\kappa+1}=(1+\sqrt{5})^{\kappa+1}-(1-\sqrt{5})^{\kappa+1}$ δηλαδή ἡ (4).

74). Ἐάν $\chi_0 = 1$, $\chi_1 = \alpha_1$, $\psi_0=0$ καί $\psi_1 = 1$ καί $\nu\in\Phi \geqslant 2$ εἶναι δέ $\chi_\nu = \alpha_\nu\chi_{\nu-1}+\chi_{\nu-2}$, $\psi_\nu=\alpha_\nu\psi_{\nu-1}+\psi_{\nu-2}$ νά δειχθῇ ὅτι :

α) $\chi_{\nu+1}\psi_\nu - \chi_\nu\psi_{\nu+1} = (-1)^{\nu+1}$ (1) β) $\frac{\chi_\nu}{\psi_\nu} = \alpha_1 + \frac{1}{\psi_1\psi_2} - \frac{1}{\psi_2\psi_3} + \dots + (-1)\frac{1}{\psi_{\nu-1}\psi_\nu}$ (2).

Λ ύ σ ι ς . Διά $\nu = 2$ ἔχομεν $\chi_3\psi_2-\chi_2\psi_3= (\alpha_3\chi_2+\chi_1)\cdot$ $\cdot(\chi_2\psi_1+\psi_0) - (\alpha_2\chi_1+\chi_0)\cdot(\alpha_3\psi_2+\psi_1) = (\alpha_3\chi_2+\alpha_1)\alpha_2 - (\alpha_2\alpha_1+1)\cdot$ $\cdot(\alpha_3\psi_2+1) = \left[\alpha_3(\alpha_2\chi_1+\chi_0)+\alpha_1\right]\alpha_2 - (\alpha_1\alpha_2+1)\cdot\left[\alpha_3(\alpha_2\psi_1+\psi_0)+1\right]=$ $=\left[\alpha_3(\alpha_2\alpha_1+1)+\alpha_1\right]\alpha_2 - (\alpha_1\alpha_2+1)(\alpha_2\alpha_3+1) =$ $=\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha_2^2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_3 - 1 = (-1)^3$

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διά $\nu=\kappa$ $(\kappa\in\Phi)$ δηλ. ὅτι $\chi_{\kappa+1}\psi_\kappa - \chi_\kappa\psi_{\kappa+1} = (-1)^{\kappa+1}$. Θά δείξωμεν ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu = \kappa+1$, δηλ. ὅτι $\chi_{\kappa+2}\psi_{\kappa+1}-\chi_{\kappa+1}\psi_{\kappa+2}=$ $= (-1)^{\kappa+2}$.

Πράγματι ἔχομεν $\chi_{\kappa+2}\psi_{\kappa+1} - \chi_{\kappa+1}\psi_{\kappa+2} = (\alpha_{\kappa+2}\chi_{\kappa+1}+\chi_\kappa)\cdot$ $\cdot\psi_{\kappa+1}-\chi_{\kappa+1}(\alpha_{\kappa+2}\psi_\kappa+\psi_\kappa) = \chi_\kappa\psi_{\kappa+1}-\chi_{\kappa+1}\psi_\kappa = -(-1)^{\kappa+1} =$

$= (- I)^{\varkappa+2}$. Ἄρα ἡ ἀποδεικτέα ἀληθεύει καί διά $\nu = \varkappa + I$, καί συνεπῶς θά ἀληθεύῃ καί διά κάθε $\nu \in \Phi \geqslant 2$.

β) Ἔχομεν $\frac{\chi_{\varkappa+I}}{\psi_{\varkappa+I}} - \frac{\chi_\varkappa}{\psi_\varkappa} = (-I)^{\varkappa+I} \cdot \frac{I}{\psi_\varkappa \psi_{\varkappa+I}}$ καί

$\frac{\chi_\varkappa}{\psi_\varkappa} - \frac{\chi_{\varkappa-I}}{\psi_{\varkappa-I}} = (-I)^\varkappa \frac{I}{\psi_{\varkappa+I}\ \psi_\varkappa}$. Ἄρα :

$$\sum_{\varkappa=2}^{\nu} \left(\frac{\chi_\varkappa}{\psi_\varkappa} - \frac{\chi_{\varkappa-I}}{\psi_{\varkappa-I}} \right) = \sum_{\varkappa=2}^{\nu} (-I)^\varkappa \cdot \frac{I}{\psi_{\varkappa-I}\ \psi_\varkappa} \quad \text{ἤ}$$

$$\frac{\chi_\nu}{\psi_\nu} - \frac{\chi_I}{\psi_I} = \frac{I}{\psi_I \psi_2} - \frac{I}{\psi_2\ \psi_3} + \dots + (-I)^\nu \frac{I}{\psi_{\nu-I}\ \psi_\nu} \quad \text{ἤ}$$

$$\frac{\chi_\nu}{\psi_\nu} = \alpha_I + \frac{I}{\psi_I\ \psi_2} - \frac{I}{\psi_2\ \psi_3} + \dots + (-I) \frac{I}{\psi_{\nu-I}\ \psi_\nu} \ .$$

75) Δίδεται ἕν περιττόν πλῆθος πραγματικῶν ἀριθμῶν α_I, α_2, ... $\alpha_{2\nu+I}$ διά τούς ὁποίους εἶναι $\alpha_2 - \alpha_I \leqslant \alpha_3 - \alpha_2 \leqslant \alpha_4 - \alpha_3 \leqslant \dots \leqslant \alpha_{2\nu+I} - \alpha_{2\nu}$. Δείξατε ἐπαγωγικῶς ὅτι $(\nu+I) . (\alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2\nu}) \leqslant \nu (\alpha_I + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2\nu+I})$ (I). Δείξατε ἐπίσης ὅτι εἰς τήν τελευταίαν σχέσιν τό σημεῖον τῆς ἰσότητος ἰσχύει τότε καί μόνον, ὅταν οἱ δοθέντες ἀριθμοί ἀποτελοῦν ἀριθμητικήν πρόοδον .

Λ ύ σ ι ς . Διά $\nu = I$ ἡ ἀκολουθία ἀποτελεῖται ἐκ τῶν α_I, α_2 α_3, λόγῳ δέ τῆς ὑποθέσεως θά εἶναι $\alpha_2 - \alpha_I \leqslant \alpha_3 - \alpha_2$ ἤ $2\alpha_2 \leqslant \alpha_I + \alpha_3$ ἡ ὁποία ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἡ ἀποδεικτέα σχέσις ἰσχύει διά $\nu = \varkappa$ $(\varkappa \in \Phi)$ δηλ. ὅτι ἀληθεύει ἡ $(\varkappa+I)(\alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2\varkappa}) \leqslant \varkappa(\alpha_I + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2\varkappa+I})$ (2). Θά δείξωμεν ὅτι μέ τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ἀληθεύει καί διά $\nu = \varkappa+I$ δηλ. ὅτι

$$(\varkappa+2)(\alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2\varkappa} + \alpha_{2\varkappa+2}) \leqslant (\varkappa+I)(\alpha_I + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2\varkappa+3}) \quad (3)$$

Ἐφαρμόζοντες τήν σχέσιν (2) εἰς (2κ+I) ὅρους τῆς ἀκολουθίας α_I, α_2, ..., $\alpha_{2\varkappa+I}$, $\alpha_{2\varkappa+2}$, $\alpha_{2\varkappa+3}$, τούς ὁποίους ἐκλέγομεν ἑκάστοτε κατά τρόπον ὥστε δύο τυχοῦσαι ὁμάδες νά διαφέρουν κατά δύο ὅρους, καί οὕτω λαμβάνομεν ($\varkappa+1$) τὸ πλῆθος ἀνισότητας τῆς μορφῆς

$$(\varkappa+1)(\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_{2\varkappa}) \leqslant \varkappa(\alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_{2\varkappa+1}),\ \ldots.$$

Τάς ἰσότητας αὐτάς προσθέτομεν κατά μέλη καί ἔχομεν

$$\varkappa(\varkappa+1)(\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_{2\varkappa}+\alpha_{2\varkappa+2}) \leqslant \varkappa^2(\alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_{2\varkappa-1}+\alpha_{2\varkappa+3})+\varkappa(\varkappa+1)\alpha_{2\varkappa+1}$$

$$\text{ἤ } (\varkappa+1)(\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_{2\varkappa}+\alpha_{2\varkappa+2}) \leqslant \varkappa(\alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_{2\varkappa-1}+\alpha_{2\varkappa+3})+(\varkappa+1)\alpha_{2\varkappa+1} \quad (3)$$

Ἀλλ' ἕνεκεν τῆς ὑποθέσεως $\alpha_\lambda-\alpha_{\lambda-1}\leqslant\alpha_{\lambda+1}-\alpha_\lambda$ λαμβάνομεν $\varkappa+1$ τό πλῆθος ἀνισότητος τῆς μορφῆς $2\alpha_2\leqslant\alpha_1+\alpha_3,\quad 2\alpha_4\leqslant\alpha_3+\alpha_5\ldots(4)$ (φροντίζομεν ὥστε οὐδεμία τῶν ἀνισοτήτων (4) νά περιέχῃ τόν ὅρον $\alpha_{2\varkappa+1}$) αἱ ὁποῖαι προστιθέμεναι δίδουν

$\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_{2\varkappa}+\alpha_{2\varkappa+2}\leqslant\alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_{2\varkappa+1}+\alpha_{2\varkappa+3}$ (5). Προσθέτοντες τάς (3) καί (5) λαμβάνομεν $(\varkappa+2)(\alpha_2+\alpha_4+\ldots\alpha_{2\varkappa+2})\leqslant(\varkappa+1)\cdot$ $\cdot(\alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_{2\varkappa+1}+\alpha_{2\varkappa+3})$, ἤτοι ἡ πρότασις ἀληθεύει καί διά $\nu=\varkappa+1$ καί συνεπῶς θά ἀληθεύῃ διά κάθε $\nu\in\Phi$, ὅταν οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας ἀποτελοῦν ἀριθμητικήν πρόοδον, δηλαδή ἐάν $\alpha_2-\alpha_1=\alpha_3-\alpha_2=\ldots\alpha_{2\nu+1}-\alpha_{2\nu}$ τότε αἱ ἀκολουθίαι $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5\ldots\alpha_{2\nu+1}$ καί $\alpha_2,\alpha_4,\ldots\alpha_{2\nu}$ εἶναι ἀριθμητικαί πρόοδοι. Θά ἔχωμεν ἐπομένως τάς ἰσότητας:

$\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_{2\nu}=\dfrac{\alpha_2+\alpha_{2\nu}}{2}\cdot\nu$ καί $\alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_{2\nu-1}+\alpha_{2\nu+1}=\dfrac{\alpha_1+\alpha_{2\nu+1}}{2}\cdot$ $(\nu+1)$ ἤ τάς

$$\left.\begin{aligned}(\nu+1)(\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_{2\nu})&=\frac{\alpha_2+\alpha_{2\nu}}{2}\cdot\nu(\nu+1)\\ \nu\ (\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2\nu+1})&=\frac{\alpha_1+\alpha_{2\nu+1}}{2}\ \nu(\nu+1)\end{aligned}\right\}\quad(\alpha)$$

Ἐπειδή δέ $\alpha_2-\alpha_1=\alpha_{2\nu+1}-\alpha_{2\nu}$ ἤ $\alpha_2+\alpha_{2\nu}=\alpha_1+\alpha_{2\nu+1}$ ἐξ ὑποθέσεως ἐκ τῶν ἰσοτήτων (α) λαμβάνομεν $(\nu+1)(\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_{2\nu})=$ $=\nu(\alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_{2\nu+1})$.

Παρατηροῦμεν δηλαδή ὅτι εἰς τήν περίπτωσιν τῆς ἀριθμητικῆς προόδου ἰσχύει ἐκ τῆς σχέσεως (I) μόνον ἡ ἰσότης, εἰς κάθε δέ ἄλλην περίπτωσιν ἡ (α) ἀληθεύει ὡς ἀνισότης ὡς φαίνεται ἐκ τῶν (4) καί (5) .

76) Δίδονται αἱ ἀκολουθίαι $\beta_0, \beta_I, \beta_2, \dots \beta_\nu, \dots$, $\gamma_0, \gamma_I, \gamma_2, \dots \gamma_\nu, \dots$ διά τῶν $\beta_0 = I$, $\gamma_0 = 0$, $\beta_I = \alpha_I$, $\gamma_I = I$, καί $\beta_{\nu+2} = \alpha_{\nu+2}\beta_{\nu+I} + \beta_\nu$, $\gamma_{\nu+2} = \alpha_{\nu+2}\cdot\gamma_{\nu+I} + \gamma_\nu$ ὅπου $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_\nu \dots$ δοθέντες φυσικοί ἀριθμοί. Νά δειχθῆ ὅτι α) $\beta_{\nu+1}\gamma_\nu - \gamma_{\nu+1}\beta_\nu = (-1)^{\nu+1}$ (α) β) τά κλάσματα $\frac{\beta_\nu}{\gamma_\nu}$ εἶναι ἀνάγωγα, γ) τά κλάσματα ἀρτίου δείκτου βαίνουν ἐλαττούμενα ἐφ'ὅσον ὁ δείκτης βαίνει αὐξανόμενος, ἐνῷ τά κλάσματα περιττοῦ δείκτου βαίνουν αὐξανόμενα καί εἶναι μικρότερα τῶν κλασμάτων ἀρτίου δείκτου .

Λ ύ σ ι ς . α) Ἡ σχέσις (α) διά $\nu = 0$ γίνεται : $\beta_1\gamma_0 - \gamma_1\beta_0 = (-I)^I$ ἤ $\alpha_1 0 - I . I = (-I)^I$, ἤτοι ἀ - ληθεύει. Ἔστω ὅτι αὐτή ἀληθεύει διά $\nu = \kappa$ δηλαδή ὅτι $\beta_{\kappa+I}\cdot\gamma_\kappa - \gamma_{\kappa+I}\cdot\beta_\kappa = (-I)^{\kappa+I}$ (I). Θά δείξωμεν ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu = \kappa+I$, ἤτοι $\beta_{\kappa+2}\cdot\gamma_{\kappa+I} - \gamma_{\kappa+2}\cdot\beta_{\kappa+I} = (-I)^{\kappa+2} = (-I)^\kappa$ (2). Εἰς τήν (2) ἀντικαθιστῶμεν τά $\beta_{\kappa+2}$, $\gamma_{\kappa+2}$ ἐκ τῶν δοθεισῶν καί λαμβάνομεν $(\alpha_{\kappa+2}\cdot\beta_{\kappa+I} + \beta_\kappa)\gamma_{\kappa+I} - (\alpha_{\kappa+2}\cdot\gamma_{\kappa+I} + \gamma_\kappa)\beta_{\kappa+I} =$
$= (-I)^\kappa$ ἤ $\beta_\kappa\cdot\gamma_{\kappa+I} - \beta_{\kappa+I}\cdot\gamma_\kappa = (-I)^\kappa$ ἤ $\beta_{\kappa+I}\gamma_\kappa - \beta_\kappa\gamma_{\kappa+I} =$
$= (-I)\cdot(-I)^\kappa = (-I)^{\kappa+I}$, τό ὁποῖον ἀληθεύει ἕνεκα τῆς (I).

β) Θά δείξωμεν ὅτι τό κλάσμα $\frac{\beta_\nu}{\gamma_\nu}$ εἶναι ἀνάγωγον. Πράγματι ἄν οἱ β_ν καί γ_ν εἶχον κοινόν τινα διαιρέτην, ὁ διαιρέτης αὐτός θά διήρη τό πρῶτον μέλος τῆς (α) ἑπομένως καί τό δεύτερον δηλ. τήν μονάδα. Ἄρα ὁ β_ν καί γ_ν εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους καί τό κλάσμα εἶναι ἀνάγωγον.

γ) Θεωροῦμεν τρία κλάσματα $\frac{\beta_\nu}{\gamma_\nu}$, $\frac{\beta_{\nu+I}}{\gamma_{\nu+I}}$, $\frac{\beta_{\nu+2}}{\gamma_{\nu+2}}$. Ἔχομεν :

$$\frac{\beta_{\nu+I}}{\gamma_{\nu+I}} - \frac{\beta_\nu}{\gamma_\nu} = \frac{\beta_{\nu+I}\gamma_\nu - \beta_\nu\cdot\gamma_{\nu+I}}{\gamma_\nu\cdot\gamma_{\nu+I}} = \frac{(-I)^{\nu+I}}{\gamma_\nu\cdot\gamma_{\nu+I}} \qquad (3)$$

Ἄν λοιπόν ὁ ν εἶναι περιττός τότε $\frac{\beta_{\nu+I}}{\gamma_{\nu+1}} > \frac{\beta_\nu}{\gamma_\nu}$ καί ἄν ὁ ν εἶναι ἄρτιος $\frac{\beta_{\nu+I}}{\gamma_{\nu+1}} < \frac{\beta_\nu}{\gamma_\nu}$. Ἄρα ἐκ δύο διαδοχικῶν κλασμάτων, τό κλάσμα ἀρτίου δείκτου εἶναι τό μεγαλύτερον.

Θεωροῦμεν τώρα τήν διαφοράν $\frac{\beta_{\nu+2}}{\gamma_{\nu+2}} - \frac{\beta_\nu}{\gamma_\nu} = \frac{\beta_{\nu+2}\gamma_\nu - \beta_\nu\gamma_{\nu+2}}{\gamma_\nu\gamma_{\nu+2}} =$

$= \frac{\alpha_{\nu+2}(-I)^{\nu+I}}{\gamma_\nu\gamma_{\nu+2}}$ ἕνεκα τῶν δοθεισῶν καί τῆς (α). Ἄν ν ἄρτιος, τότε $\frac{\beta_{\nu+2}}{\gamma_{\nu+2}} < \frac{\beta_\nu}{\gamma_\nu}$, ἑπομένως τά κλάσματα ἀρτίου δείκτου βαίνουν ἐλαττούμενα. Ἄν ν περιττός τότε $\frac{\beta_{\nu+2}}{\gamma_{\nu+2}} > \frac{\beta_\nu}{\gamma_\nu}$ καί ἑπομένως τά κλάσματα περιττοῦ δείκτου βαίνουν αὐξανόμενα μετά τοῦ δείκτου ν .

Λέγομεν τώρα ὅτι εἶναι $\forall_\nu, \forall_\rho \in \Phi$ $\quad \frac{\beta_{2\nu}}{\gamma_{2\nu}} > \frac{\beta_{2\rho+I}}{\gamma_{2\rho+I}}$.

Γνωρίζομεν ἤδη ὅτι εἶναι τοῦτο ἀληθές διά $\rho = \nu$ ἤ $\rho = \nu - I$

Διά $\rho > \nu$ τότε $\quad \frac{\beta_{2\nu}}{\gamma_{2\nu}} > \frac{\beta_{2\rho}}{\gamma_{2\nu}} > \frac{\beta_{2\rho+I}}{\gamma_{2\rho+I}}$.

Ἐάν $\rho < \nu - I$, τότε $\quad \frac{\beta_{2\rho+I}}{\gamma_{2\rho+I}} < \frac{\beta_{2(\rho-I)+I}}{\gamma_{2(\rho-I)+I}} = \frac{\beta_{2\nu-I}}{\gamma_{2\nu-I}} < \frac{\beta_{2\nu}}{\gamma_{2\nu}}$ ο.ε.δ.

77) Νά δειχθῇ ὅτι διά κάθε $\nu \in \Phi \geq 3$ ἀληθεύει ἡ ἰσότης

$$\alpha_I^3 + \alpha_2^3 + \ldots + \alpha_\nu^3 - 3\alpha_I\alpha_2\alpha_3 - \ldots - 3\alpha_I\alpha_2\alpha_\nu - \ldots - 3\alpha_{\nu-2}\alpha_{\nu-I}\alpha_\nu =$$

$$= (\alpha_I + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu)(\alpha_I^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_\nu^2 - \alpha_I\alpha_2 - \alpha_I\alpha_3 - \ldots - \alpha_I\alpha_\nu - \alpha_2\alpha_3 - \ldots$$

$$- \alpha_{\nu-I}\alpha_\nu) \quad (I),$$ ὅπου οἱ $\alpha_I, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ πραγματικοί ἤ φανταστικοί.

Λ ύ σ ι ς. Διά $\nu=3$ ἡ (I) γίνεται $\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3-3\alpha_1\alpha_2\alpha_3=$ $=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2-\alpha_1\alpha_2-\alpha_1\alpha_3-\alpha_2\alpha_3)$ ἡ ὁποία ὡς γνωστόν ἀληθεύει.

Ἔστω ὅτι ἡ (I) ἀληθεύει διά $\nu=\varkappa$ $(\varkappa\in\Phi>3)$, δηλ. ὅτι:
$\alpha_1^3+\alpha_2^3+\ldots+\alpha_\varkappa^3-3\alpha_1\alpha_2\alpha_3-\ldots-3\alpha_1\alpha_2\alpha_\varkappa-\ldots-3\alpha_{\varkappa-2}\alpha_{\varkappa-1}\alpha_\varkappa=$ $=(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\varkappa)(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\varkappa^2-\alpha_1\alpha_2-\alpha_1\alpha_3-\ldots-\alpha_1\alpha_\varkappa-\alpha_2\alpha_3-\ldots$ $\ldots-\alpha_{\varkappa-1}\alpha_\varkappa)$ (2). Θά δείξωμεν ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ὅτι ἡ(I) ἀληθεύει καί διά $\nu=\varkappa+1$, δηλ. ὅτι εἶναι:
$\alpha_1^3+\alpha_2^3+\ldots+\alpha_\varkappa^3+\alpha_{\varkappa+1}^3-3\alpha_1\alpha_2\alpha_3-\ldots-3\alpha_1\alpha_2\alpha_\varkappa-3\alpha_1\alpha_2\alpha_{\varkappa+1}-\ldots-3\alpha_{\varkappa-1}\cdot$ $\cdot\alpha_\varkappa\alpha_{\varkappa+1}=(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\varkappa+\alpha_{\varkappa+1})(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\varkappa^2+\alpha_{\varkappa+1}^2-\alpha_1\alpha_2-\ldots$ $\ldots-\alpha_1\alpha_\varkappa-\alpha_1\alpha_{\varkappa+1}-\ldots-\alpha_\varkappa\alpha_{\varkappa+1})$ (3).

Ἐάν θέσωμεν $S_1=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\varkappa-1}+\alpha_\varkappa$, $S_2=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_{\varkappa-1}^2+\alpha_\varkappa^2$, $S_3=\alpha_1^3+\alpha_2^3+\ldots+\alpha_{\varkappa-1}^3+\alpha_\varkappa^3$, $S_1'=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\varkappa+\alpha_{\varkappa+1}=S_1+\alpha_{\varkappa+1}$, $S_2'=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\varkappa^2+\alpha_{\varkappa+1}^2=S_2+\alpha_{\varkappa+1}^2$, $S_3'=\alpha_1^3+\alpha_2^3+\ldots+\alpha_\varkappa^3+\alpha_{\varkappa+1}^3=$ $=S_3+\alpha_{\varkappa+1}^3$, $\Sigma_1=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_1\alpha_\varkappa+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{\varkappa-1}\alpha_\varkappa$, $\Sigma_2=\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\ldots+\alpha_1\alpha_2\alpha_\varkappa+\ldots+\alpha_{\varkappa-2}\alpha_{\varkappa-1}\alpha_\varkappa$, $\Sigma_1'=\alpha_1\alpha_2+$ $+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_1\alpha_\varkappa+\alpha_1\alpha_{\varkappa+1}+\ldots+\alpha_\varkappa\alpha_{\varkappa+1}=\Sigma_1+\alpha_{\varkappa+1}S_1$ καί $\Sigma_2'=$ $=\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_1\alpha_2\alpha_\varkappa+\alpha_1\alpha_2\alpha_{\varkappa+1}+\ldots+\alpha_{\varkappa-1}\alpha_\varkappa\alpha_{\varkappa+1}=\Sigma_2+\alpha_{\varkappa+1}\Sigma_1$, τότε αἱ (2) καί (3) γράφονται:

$$S_3-3\Sigma_2=S_1(S_2-\Sigma_1)\quad(2')\qquad S_3'-3\Sigma_2'=S_1'(S_2'-\Sigma_1')\quad(3')$$

ὁπότε ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι ἀληθεύει ἡ (3'), ἄν ἀληθεύει ἡ (2').
Ἐπειδή $(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)^2=\Sigma\alpha_1^2+2\Sigma\alpha_1\alpha_2$ θά εἶναι $S_1^2=S_2+2\Sigma_1$ ἤ $2\Sigma_1+S_2-S_1^2=0$. Διά νά ἀληθεύει ἡ (3'), πρέπει καί ἀρκεῖ $S_3+\alpha_{\varkappa+1}^3-3\Sigma_2-3\Sigma_1\alpha_{\varkappa+1}=(S_1+\alpha_{\varkappa+1})(S_2+\alpha_{\varkappa+1}^2-\Sigma_1-S_1\alpha_{\varkappa+1})$ ἤ

$S_3 - 3\Sigma_2 + \alpha^3_{\kappa+I} - 3\Sigma_I\alpha_{\kappa+I} = S_IS_2 + S_I\alpha^2_{\kappa+I} - S_I\Sigma_I - S^2_I\alpha^2_{\kappa+I} + S_2\alpha_{\kappa+I} + \alpha^3_{\kappa+I} -$
$- \Sigma_I\alpha_{\kappa+I} - S_I\alpha^2_{\kappa+I}$ ἤ $S_3 - 3\Sigma_2 = S_IS_2 - S_I\Sigma_I + \alpha_{\kappa+I}(2\Sigma_I + S_2 - S^2_\nu)$ ἤ
$S_3 - 3\Sigma_2 = S_I(S_2 - \Sigma_I) + \alpha_{\kappa+I}(2\Sigma_I + S_2 - S^2_I)$, καί ἐπειδή
$2\Sigma_I + S_2 - S^2_I = 0$, ἕπεται ὅτι $S_3 - 3\Sigma_2 = S_I(S_2 - \Sigma_I)$. Ἄρα ἄν ἡ
$(2')$ ἀληθεύει θά ἀληθεύη καί ἡ $(3')$, ἤτοι ἀληθεύει ἡ (I) διά $\nu =$
$= \kappa + I$ καί ἐπομένως θά ἀληθεύει καί διά κάθε $\nu \in \Phi \geqslant 3$.

78) Ἐάν οἱ ἀριθμοί $U_0, U_I, U_2, \ldots U_\nu \ldots$ πληροῦν τήν σχέσιν $2(\nu+2)U_{\nu+2} - 3\nu U_{\nu+I} - (\nu-I)U_\nu = 0$ (1) καί $U_0 = I$, νά δειχθῇ ὅτι $U_\nu = \frac{I}{2^\nu}$ ἐάν $\nu \in \Phi$.

Λ ύ σ ι ς . Διά $\nu = 0$ καί $\nu = I$, λαμβάνομεν τάς σχέσεις:
$4U_2 - U_0 = 0$ ἤ $4U_2 = U_0 = I$ ἤ $U_2 = \frac{I}{4} = \frac{I}{2^2}$ καί $6U_3 - 3U_2 = 0$
ἤ $U_3 = \frac{U_2}{2} = \frac{I}{2.2^2} = \frac{I}{2^3}$, δηλ. ἡ πρότασις ἀληθεύει.

Ἔστω ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει διά $\nu = \kappa-I$ καί διά $\nu = \kappa$. Θά δείξωμεν ὑπό τάς προϋποθέσεις αὐτάς ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu =$ $= \kappa+I$. Ἐάν εἰς τήν (I) θέσωμεν ἀντί $\nu = \kappa-I$, ἔχομεν:
$2(\kappa + I)U_{\kappa+I} - 3(\kappa - I)U_\kappa + (\kappa - 2)U_{\kappa-I} = 0$ ἤ
$2(\kappa + I)U_{\kappa+I} = 3(\kappa-I)U_\kappa - (\kappa-2)U_{\kappa-I} = 3(\kappa-I)\frac{1}{2^\kappa} - (\kappa-2)\frac{I}{2^{\kappa-I}} = \frac{\kappa+I}{2^\kappa}$.

Ἄρα $U_{\kappa+I} = \frac{\kappa+I}{2(\kappa+I).2^\kappa} = \frac{I}{2^{\kappa+I}}$. Ἄρα ἡ πρότασις ἀληθεύει καί διά $\nu = \kappa+I$ καί ἐπειδή ἀληθεύει διά $\nu = \kappa-I$ καί $\nu = \kappa$ κατά τήν ἀρχήν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς, θά ἀληθεύη καί διά κάθε $\nu \in \Phi$.

79) Δίδεται ἡ ἀκολουθία $U_0, U_I, U_2 \ldots$ ὅπου $U_0 = 0$, $U_I = I$ καί $U_{\nu+2} = U_{\nu+I} + U_\nu$ μέ $\nu \in \Phi$. Θεωροῦμεν καί τήν ἀκολουθίαν $V_0, V_I, V_2 \ldots$ ὅπου $V_0 = U$, $V_I = V$ καί $V_{\nu+2} = V_{\nu+I} + V_\nu$. Νά δειχθῇ

ὅτι α) $V_\nu = U_{\nu-I}U + U_\nu V$. β) $U_{\nu+\mu-I} = U_{\nu-I}U_{\mu-I} + U_\nu U_\mu$ γ) $U_{2\kappa+I} = U^2_{\kappa+I} + U^2_\kappa$.

Λ ύ σ ι ς . Διά ν = I ἔχομεν $V_I = U_0 U + U_1 V$ ἤ $V = V$. Διά ν = 2 ἔχομεν $V_2 = U_I U + U_2 V$ ἤ $V_I + V_0 = U + (U_I + U_0)V$ ἤ $U+V = U+V$. Ἔστω ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει διά ν=κ (κ∈Φ) καί ν = κ+I δηλ. ὅτι $V_\kappa = U_{\kappa-I}V + V_\kappa V$ (I) καί $V_{\kappa+I} = U_\kappa U + U_{\kappa+I}V$ (2) καί θά δείξωμεν ὅτι ἀληθεύει καί διά ν = κ+2 δηλ. ὅτι $V_{\kappa+2} = U_{\kappa+I}U + U_{\kappa+2}V$ (3) . Προσθέτομεν τάς (I) καί (2) καί λαμβάνομεν:
$V_{\kappa+I} + V_\kappa = (U_\kappa + U_{\kappa-I})U + (U_{\kappa+I} + U_\kappa)V$ ἤ $V_{\kappa+2} = U_{\kappa+I}U + U_{\kappa+2}V$. Διά μ = I ἔχομεν $U_\nu = U_{\nu-I}U_0 + U_\nu U_I = U_\nu$. Διά μ = 2 ἔχομεν $U_{\nu+I} = U_{\nu-I}U_I + U_\nu U_2 = U_{\nu-I} + U_\nu$, ἡ ὁποία ἀληθεύει ἐξ ὑποθέσεως διά κάθε ν∈Φ.

Ὑποθέτομεν τάς $U_{\nu+\mu-I} = U_{\nu-I}U_{\mu-I} + U_\nu U_\mu$ (I), $U_{\nu+\mu} = U_{\nu-I}U_\mu + U_\nu + U_{\mu-I}$ (2) καί θά δείξωμεν ὅτι $U_{\nu+\mu+I} = U_{\nu-I}U_{\mu+I} + U_\nu U_{\mu+2}$.
Προσθέτομεν τάς (I) καί (2) καί λαμβάμομεν :
$U_{\nu+\mu+I} = U_{\nu-I}(U_\mu + U_{\mu-I}) + U_\nu(U_{\mu+I} + U_\mu) = U_{\nu-I}U_{\mu+I} + U_\nu U_{\mu+2}$.
γ) Ἐπειδή ἡ (β) ἀληθεύει διά κάθε μ καί ν θά ἀληθεύῃ καί διά ν = μ = κ+I ὅτε λαμβάνομεν : $U_{2\kappa+I} = U^2_{\kappa+I} + U^2_\kappa$.

80) Ἐάν θέσωμεν $A_\nu = (3+\sqrt{5})^\nu + (3-\sqrt{5})^\nu$ ὅπου ν∈Φ νά δειχθῇ ὅτι εἶναι $A_{\nu+1} = 6A_\nu - 4A_{\nu-1}$. β) ὁ A_ν εἶναι ἀκέραιος. γ) ὁ A_ν = πολ $2^{\nu+I}$

Λ ύ σ ι ς . α) Διά ν=I ἔχομεν $A_I = (3+\sqrt{5}) + (3-\sqrt{5}) = 6$, ἄρα $6A_\nu = \left[(3+\sqrt{5}) + (3-\sqrt{5})\right]\left[(3+\sqrt{5})^\nu + (3-\sqrt{5})^\nu\right] =$
$= (3+\sqrt{5})^{\nu+I} + (3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})^\nu + (3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^\nu + (3-\sqrt{5})^{\nu+I} =$
$= (3+\sqrt{5})^{\nu+I} + (3-\sqrt{5})^{\nu+I} + (3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})\left[(3-\sqrt{5})^{\nu-I} + (3+\sqrt{5})^{\nu-I}\right] =$

$(3+\sqrt{5})^{\nu+I} + (3-\sqrt{5})^{\nu+I} + 4\left[(3+\sqrt{5})^{\nu-I} + (3-\sqrt{5})^{\nu-I}\right]$ ἤ

$6A_\nu = A_{\nu+I} + 4A_{\nu-I}$ ἤ $A_{\nu+I} = 6A_\nu - 4A_{\nu-I}$ (α) .

β) Ἔστω ὅτι ὁ A_ν εἶναι ἀκέραιος διά $\nu = \varkappa-I$ καί διά $\nu = \varkappa$ δηλ. ὅτι οἱ $A_{\varkappa-I} = (3+\sqrt{5})^{\varkappa-I} + (3-\sqrt{5})^{\varkappa-I}$ (I) καί $A_\varkappa = (3+\sqrt{5})^\varkappa + (3-\sqrt{5})^\varkappa$ (2), εἶναι ἀκέραιοι. Θά δείξωμεν ὑπό τάς προϋποθέσεις αὐτάς ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu = \varkappa + I$.

Πολ/ζομεν τήν (I) ἐπί -4 καί τήν (2) ἐπί 6 καί προσθέτοντες εὑρίσκομεν $6A_\varkappa - 4A_{\varkappa-I}$ ὁ ὁποῖος εἶναι ἀκέραιος ὡς διαφορά δύο ἀκεραίων. Ἀλλ'ἕνεκα τῆς (I) ὁ $6A_\varkappa - 4A_{\varkappa-I} = A_{\varkappa+I}$ δηλ. ἡ πρότασις ἀληθεύει καί διά $\nu = \varkappa+I$, ἄρα κατά τήν ἀρχήν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς θά ἀληθεύῃ διά κάθε $\nu \in \Phi$.

γ) Θέτομεν $\alpha = 3+\sqrt{5}$ καί $\beta = 3-\sqrt{5}$ καί ἔστω ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει διά $\nu = \varkappa-I$ καί $\nu=\varkappa$. Τότε θά εἶναι $\alpha^\varkappa + \beta^\varkappa = \lambda.2^\varkappa$ καί $\alpha^{\varkappa-I} + \beta^{\varkappa-I} = \mu 2^{\varkappa-I}$ ὅπου ($\lambda, \mu \in \Phi$).

Ἀλλά ἔχομεν ὅτι $\alpha^{\varkappa+I} + \beta^{\varkappa+I} = (\alpha+\beta)(\alpha^\varkappa + \beta^\varkappa) - \alpha\beta\,(\alpha^{\varkappa-I} + \beta^{\varkappa-I}) =$
$= 6\lambda.2^\varkappa - 4\mu.2^{\varkappa-I} = (3\lambda-\mu)\, 2^{\varkappa-I}$ (3)

Ἀλλά ὁ $3\lambda-\mu$ εἶναι **ἀκέραιος.** Ὥστε **τό πρῶτον μέλος** τῆς (3) εἶναι διαιρετόν διά $2^{\varkappa+I}$ ἤτοι ἀληθεύει καί διά $\nu = \varkappa+I$ καί συνεπῶς κατά τήν ἀρχήν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς θά ἀληθεύῃ διά κάθε $\nu \in \Phi$.

8I) Τρεῖς ἀριθμοί α, β, γ, πληροῦν τάς σχέσεις : $0 < \alpha-\beta\gamma < I$ (I) καί $\alpha^2 - \beta^2\gamma = \mu 2^2$ (2). Ὑψώνομεν τόν ἀριθμόν $\alpha + \beta\sqrt{\gamma}$ εἰς τήν ν ($\nu \in \Phi$) καί λαμβάνομεν ἕναν ἀριθμόν τῆς μορφῆς $\alpha' + \beta'\sqrt{\gamma}$. Νά δειχθῇ ὅτι διά κάθε ν ὁ α΄ ἰσοῦται μέ τόν ἀκέραιον ἀριθμόν τόν ἀμέσως μεγαλύτερον ἀπό τόν $\beta'\sqrt{\gamma}$ καί ὅτι ὁ ἀκέραιος ἀριθμός ὁ ἀμέσως μεγαλύτερος τοῦ $(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})^\nu$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 2^ν .

Λ ύ σ ι ς . α) Ἡ πρότασις ἕνεκα τῶν ὑποθέσεων εἶναι ἀληθής διά $\nu = I$. Θά δείξωμεν, ὅτι ἐάν ἡ πρότασις εἶναι ἀληθής διά

τινα τιμήν τοῦ $\nu = \nu$ θά εἶναι ἀληθής καί διά $\nu = \nu+I$.
$(\alpha'+\beta'\sqrt{\gamma})(\alpha+\beta\sqrt{\gamma}) = (\alpha+\beta\sqrt{\gamma})^{\nu+I} = \alpha\alpha'+\gamma\beta\beta'+(\alpha\beta'+\alpha'\beta)\sqrt{\gamma}$.
Ἀρκεῖ νά δείξωμεν τήν διπλῆν ἀνισότητα :
$0<\alpha\alpha'+\gamma\beta\beta'-(\alpha\beta'+\alpha'\beta)\sqrt{\gamma}<I$, ἤ $0<(\alpha-\beta\sqrt{\gamma})(\alpha'-\beta'\sqrt{\gamma})<I$.

Ἡ πρώτη ἀνισότης εἶναι ἀληθής διότι $\alpha>\beta\sqrt{\gamma}$ καί $\alpha'>\beta'\sqrt{\gamma}$.
Ἡ δευτέρα εἶναι ἐπίσης ἀληθής διότι $\alpha-\beta\sqrt{\gamma}<I$, $\alpha'-\beta'\sqrt{\gamma}<I$.
β) Διά $\nu=I$ ὁ ἀκέραιος ἀριθμός ὁ ἀμέσως μεγαλύτερος τοῦ $\alpha+\beta\sqrt{\gamma}$ εἶναι ὁ 2α, δηλ. πολ/σιον τοῦ 2^I. Διά $\nu=2$ εἶναι $(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})^2 =$
$= \alpha^2+\gamma\beta^2+2\alpha\beta\sqrt{\gamma}$. Ὁ ἀκέραιος ἀριθμός ὁ ἀμέσως μεγαλύτερος εἶναι ὁ $2(\alpha^2+\gamma\beta^2)$, διότι $\alpha^2+\gamma\beta^2-2\alpha\beta\sqrt{\gamma}<I$, (ἕνεκα τῆς (I)).
Ἀλλ' ἕνεκα τῆς (2) οἱ α^2 καί $\beta^2\gamma$ εἶναι τῆς αὐτῆς κατηγορίας, καί τό ἄθροισμά των θά εἶναι ἄρτιον καί ὁ $2(\alpha^2+\gamma\beta^2) = \pi o\lambda 2^2$.

Ἐάν δεχθῶμεν ὅτι ἡ πρότασις εἶναι ἀληθής διά $\nu=\nu$ καί $\nu=\nu-I$ θά δείξωμεν ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu=\nu+I$. Ἀλλά $(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})^\nu =$
$= \alpha'+\beta'\sqrt{\gamma}$ καί συνεπῶς $(\alpha-\beta\sqrt{\gamma})^\nu = \alpha'-\beta'\sqrt{\gamma}$, $(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})^\nu +$
$+ (\alpha-\beta\sqrt{\gamma})^\nu = 2\alpha' = 2^\nu\cdot\rho$ (I), διότι ἐξ ὑποθέσεως $\alpha' = \pi o\lambda\ 2^{\nu-I}$.
Ἀλλά $(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})+(\alpha-\beta\sqrt{\gamma}) = 2\alpha$ (2). Πολ/ζοντες κατά μέλη τάς (I) καί (2) ἔχομεν $\left[(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})^\nu+(\alpha-\beta\sqrt{\gamma})^\nu\right]\left[(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})+\right.$
$\left.+(\alpha-\beta\sqrt{\gamma})\right] = 2^{\nu+I}\alpha\rho\alpha$ ἤ $(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})^{\nu+I}+(\alpha-\beta\sqrt{\gamma})^{\nu+I} +$
$+ (\alpha+\beta\sqrt{\gamma})(\alpha-\beta\sqrt{\gamma})\left[(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})^{\nu-I}+(\alpha-\beta\sqrt{\gamma})^{\nu-I}\right] = 2^{\nu+I}\alpha\rho$
Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως $(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})(\alpha-\beta\sqrt{\gamma}) = \alpha^2-\gamma\beta^2 = \mu 2^2$ καί ὁμοίως $(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})^{\nu-I}+(\alpha-\beta\sqrt{\gamma})^{\nu-I} = 2^{\nu-I}\rho'$ καί ἡ ἀνωτέρω παράστασις γίνεται $(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})^{\nu+I}+(\alpha-\beta\sqrt{\gamma})^{\nu+I}+\rho'\mu 2^{\nu+I} = 2^{\nu+I}\alpha\rho$
ἤ τελικῶς $(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})^{\nu+I}+(\alpha-\beta\sqrt{\gamma})^{\nu+I} = (\alpha\rho-\mu\rho')\,2^{\nu+I} = \Pi.2^{\nu+I}$.

82) Ἐάν οἱ $\alpha_I\beta_I\gamma_I\kappa$ εἶναι ἀκέραιοι καί ἐάν $\alpha^2-\beta^2\gamma = 4\kappa$(I) τότε ὁ ἀριθμός $(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})^\nu+(\alpha-\beta\sqrt{\gamma})^\nu$ εἶναι ἀκέραιον πολ/σιον τοῦ 2^ν διά κάθε $\nu\in\Phi$.

Λ ύ σ ι ς . Διά $\nu = I$ ἔχομεν $S_1 = (\alpha+\beta\sqrt{\gamma}) + (\alpha-\beta\sqrt{\gamma}) = 2\alpha =$
$= 2^I\alpha$ δηλ. ἀληθεύει. Διά $\nu = 2$ ἔχομεν $S_2 = (\alpha+\beta\sqrt{\gamma})^2 + (\alpha-\beta\sqrt{\gamma})^2 =$
$= \left[(\alpha+\beta\sqrt{\gamma}) + (\alpha-\beta\sqrt{\gamma})\right]^2 - 2(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})(\alpha-\beta\sqrt{\gamma}) = (2\alpha)^2 - 2(\alpha^2-\beta^2\gamma) =$
$= 2^2\alpha^2 - 2(\alpha^2-\beta^2\gamma)$ καί ἕνεκα τῆς (I) ἔχομεν $S_2 = 2\alpha^2 - 2.4\kappa =$
$= 2^2(\alpha^2 - 2\kappa)$.

Σχηματίζομεν ἐξίσωσιν δευτέρου βαθμοῦ ἔχουσαν ρίζας τούς ἀριθμούς $\alpha+\beta\sqrt{\gamma}$ καί $\alpha-\beta\sqrt{\gamma}$. Αὕτη εἶναι ἡ $x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2-\beta^2\gamma) = 0$

Ἐάν x_I καί x_2 εἶναι αἱ ρίζαι της, ἔχομεν :

$$x_I^2 - 2\alpha x_I + (\alpha^2 - \beta^2\gamma) = 0 \qquad (2)$$

καί

$$x_2^2 - 2\alpha x_2 + (\alpha^2 - \beta^2\gamma) = 0 \qquad (3)$$

Πολ/ζομεν τήν (I) ἐπί x_I^ν καί τήν (2) ἐπί x_2^ν καί εὑρίσκομεν :

$$x_I^{\nu+2} - 2\alpha x_I^{\nu+I} + (\alpha^2 - \beta^2\gamma)\, x_I^\nu = 0 \qquad (4)$$

$$x_2^{\nu+2} - 2\alpha x_2^{\nu+I} + (\alpha^2 - \beta^2\gamma)\, x_2^\nu = 0 \qquad (5)$$

Προσθέτοντες τάς (4) καί (5) κατά μέλη λαμβάνομεν :

$$(x_I^{\nu+2} + x_2^{\nu+2}) - 2\alpha\,(x_I^{\nu+I} + x_2^{\nu+I}) + (\alpha^2 - \beta^2\gamma)(x_I^\nu + x_2^\nu) = 0$$

ἤτοι : $S_{\nu+2} = 2\alpha S_{\nu+I} - (\alpha^2 - \beta^2\gamma)S_\nu$ ἤ $S_{\nu+2} = 2\alpha S_{\nu+I} - 4\kappa S_\nu$ (6)

Ἔστω ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει διά $\nu = \kappa$ καί διά $\nu = \kappa+I$, δηλ. ὅτι εἶναι $S_\kappa =$ πολ 2^κ καί $S_{\kappa+I} =$ πολ $2^{\kappa+I}$. Θά δείξωμεν ὑπό τάς προϋποθέσεις αὐτάς ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu = \kappa+2$.

Λόγῳ τῆς (6) ἔχομεν $S_{\kappa+2} = 2\alpha$ πολ$2^{\kappa+I} - 4\kappa$ πολ 2^κ =
$= \alpha$ πολ $2^{\kappa+2} - \kappa$ πολ $2^{\kappa+2} = (\alpha - \kappa)$ πολ $2^{\kappa+2} =$ πολ $2^{\kappa+2}$.

Ἄρα ἀληθεύει καί διά $\nu = \kappa+2$ καί συνεπῶς κατά τήν ἀρχήν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς θά ἀληθεύῃ διά κάθε $\nu \in \Phi$.

83) Δίδεται ἡ ἀκολουθία $U_0, U_I, \ldots U_\nu$ ὅπου $U_0 = 2$, $U_I = 3$

καί $U_{\nu+I} = 3U_\nu - 2U_{\nu-I}$ διά κάθε $\nu \in \Phi$. Νά δειχθῇ ὅτι διά κάθε ἀκέραιον ἀριθμόν $\nu \geqslant 0$ εἶναι $U_\nu = 2^\nu + I$ καί ὅτι $U_\nu^2 - 2U_\nu = U_{2\nu}$

Λύσις. α) διά $\nu = 0$ εἶναι $2^\nu + I = 2^0 + 1 = 2 = U_0$ καί διά $\nu = I$ εἶναι $2^\nu + I = 2 + I = 3 = U_I$, ἄρα διά $\nu = 0$ καί $\nu = I$ εἶναι πράγματι $U_\nu = 2^\nu + I$.

Θά δείξωμεν ὅτι εἰς τήν ἀκολουθίαν τῶν ἀριθμῶν $U_0, U_I, \ldots \ldots U_\nu \ldots$ ὅπου $U_{\nu+I} = 3U_\nu - 2U_{\nu-I}$ διά κάθε $\nu \in \Phi$, ἄν εἶναι $U_\kappa = 2^\kappa + I$ καί $U_{\kappa+I} = 2^{\kappa+I} + I$ ὅπου $\kappa \in \Phi \geqslant 0$ θά εἶναι $U_{\kappa+2} = 2^{\kappa+2} + I$ (I)

Ἐκ τῆς τελευταίας τῶν σχέσεων (I) διά $\nu = \kappa + I$ ἔχομεν $U_{\kappa+2} = 3U_{\kappa+I} - 2U_\kappa$ καί ἑπομένως λόγῳ τῶν δύο πρώτων σχέσεων ἕπεται $U_{\kappa+2} = 3(2^{\kappa+I} + I) - 2(2^\kappa + I) = 3.2^{\kappa+I} + 3 - 2^{\kappa+I} - 2 = 2^{\kappa+I}(3-I) + I - 2^{\kappa+I}\, 2 + I = 2^{\kappa+2} + I$ (3). Ἄρα ἡ πρότασις ἀληθεύει καί διά $\nu = \kappa + I$ καί συνεπῶς θά ἀληθεύῃ καί διά κάθε ἀκέραιον $\nu \geqslant 0$.

β) Ἐπειδή $U_\nu = 2^\nu + I$ ἔχομεν $U_\nu^2 - 2U_\nu = U_\nu(U_\nu - 2) = (2^\nu + I)(2^\nu + I - 2) = (2^\nu + I)(2^\nu - I) = (2^\nu)^2 - I = U_{2\nu}$.

84) Ἐάν $\nu \in \Phi \geqslant 2$ καί $x_I, x_2, \ldots x_\nu$ ἀριθμοί θετικοί νά δειχθῇ ὅτι:

$$\frac{x_I + x_2 + x \cdots + x_\nu}{\nu} \geqslant \sqrt[\nu]{x_I x_2 \cdots x_\nu} \geqslant \frac{\nu}{\frac{I}{x_I} + \frac{I}{x_2} + \cdots + \frac{I}{x_\nu}}$$

Λύσις. Διά $\nu = 2$ ἔχομεν $\frac{x_I + x_2}{2} \sqrt{x_I x_2}$ ἤ $(x_I + x_2)^2 \geqslant 4 x_I x_2$ ἤ $(x_I - x_2)^2 \geqslant 0$ ἡ ὁποία ἀληθεύει.

Ἔστω ὅτι ἀληθεύει διά $\nu = \kappa$ ($\kappa \in \Phi$) δηλ. ὅτι $\frac{x_I + x_2 + \cdots + x_\kappa}{\kappa} \geqslant \sqrt[\kappa]{x_I x_2 \cdots x_\kappa}$ (I). Θά δείξωμεν ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu = \kappa + I$ δηλ. ὅτι $\frac{x_I + x_2 + \cdots + x_\kappa + x_{\kappa+I}}{\kappa+I} \geqslant$

$\sqrt[\varkappa+I]{x_I\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_\varkappa\cdot x_{\varkappa+I}}$ (2). 'Η (Ι) γράφεται $x_I+x_2+\cdots+x_\varkappa \geqslant \varkappa\sqrt[\varkappa]{x_Ix_2\cdots x_\varkappa}$ καί προσθέτοντες είς άμφότερα τά μέλη αύτῆς

τό $x_{\varkappa+I}$ ἔχομεν : $x_I+x_2+\cdots+x_\varkappa+x_{\varkappa+I} \geqslant x_{\varkappa+I}+\varkappa\sqrt[\varkappa]{x_Ix_2\cdots x_\varkappa}$. 'Αρκεῖ λοιπόν νά δείξωμεν ὅτι:

$$x_{\varkappa+I}+\varkappa\sqrt[\varkappa]{x_Ix_2\cdots x_\varkappa} \geqslant (\varkappa+I)\sqrt[\varkappa+I]{x_Ix_2\cdots x_\varkappa x_{\varkappa+I}}$$ ἤ ὅτι:

$$x_{\varkappa+I} \geqslant (\varkappa+I)\cdot\sqrt[\varkappa+I]{x_Ix_2\cdots x_\varkappa x_{\varkappa+I}}\cdot\sqrt[\varkappa+I]{x_{\varkappa+I}} - \varkappa\sqrt[\varkappa]{x_Ix_2\cdots x_\varkappa}$$ ἤ

$$\left(\sqrt[\varkappa+I]{x_{\varkappa+I}}\right)^{\varkappa+I} \geqslant (\varkappa+I)\sqrt[\varkappa(\varkappa+I)]{(x_Ix_2\cdots x_\varkappa)^\varkappa}\cdot\sqrt[\varkappa+I]{x_{\varkappa+I}} - \varkappa\sqrt[\varkappa(\varkappa+I)]{(x_1x_2\cdots x_\varkappa)}$$

'Εάν θέσωμεν :

$\sqrt[\varkappa(\varkappa+1)]{x_I\, x_2\cdots x_\varkappa} = \alpha$ καί $\sqrt[\varkappa+1]{x_{\varkappa+I}} = \beta$, ἡ προηγουμένη ἀνισότης γίνεται $\beta^{\varkappa+I} \geqslant (\varkappa+I)\,\alpha^\varkappa\cdot\beta - \varkappa\alpha^{\nu+I}$ ἡ ὁποία εἶναι ἀληθής (ἴδε ἄσκησιν 40).

'Εάν είς τήν ἤδη ἀποδειχθεῖσαν θέσωμεν ἀντί $x_I = \frac{I}{x_I}$, $x_2 = \frac{I}{x_2}\cdots x_\nu = \frac{I}{x_\nu}$, ἔχομεν :

$$\frac{\frac{I}{x} + \frac{I}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_\nu}}{\nu} \geqslant \sqrt[\nu]{\frac{I}{x_1}\cdot\frac{I}{x_2}\cdots\frac{I}{x_\nu}}$$ ἤ

$$\sqrt[\nu]{x_Ix_2\cdots x_\nu} \geqslant \frac{\nu}{\frac{I}{x_I}+\frac{I}{x_2}+\cdots+\frac{I}{x_\nu}}$$

85) 'Εάν $x, \psi \in \Phi$ νά δειχθῆ ὅτι : $\frac{x^2+\psi^2}{x+\psi} \geqslant \sqrt[x+\psi]{x^x\,\psi^\psi}$

Λ ύ σ ι ς . Διά ν φυσικούς ἀριθμούς ἀληθεύει ἡ σχέσις :

$$\frac{x_I + x_2 + x_3 + \cdots + x_\nu}{\nu} \geqslant \sqrt[\nu]{x_I\, x_2 \cdots x_\nu} \qquad (\text{I}).$$

"Εστω ὅτι $\nu = x + \psi$ καί ὅτι $x_I = x_2 = \cdots = x_\mu = x$ καί $x_{\mu+I} = x_{\mu+2} =$

$= \dots = \chi_\nu = \beta$. Ἡ (I) γράφεται τότε :

$$\frac{\overbrace{(\chi+\chi+\chi+\dots+\chi)}^{\chi \text{ προσθετέοι}} + \overbrace{(\psi+\psi+\dots+\psi)}^{\psi \text{ προσθετέοι}}}{\chi+\psi} \geq \sqrt[\chi+\psi]{\overbrace{(\chi\cdot\chi \dots \chi)}^{\chi \text{ παράγοντες}}\overbrace{(\psi\cdot\psi \dots \psi)}^{\psi \text{ παράγοντες}}}$$

ἤ

$$\frac{\chi^2+\psi^2}{\chi+\psi} \geq \sqrt[\chi+\psi]{\chi^\chi \psi^\psi}$$

86) Ἐάν $\chi > 0$ καί $\nu \in \Phi$ νά δειχθῆ ὅτι :

$$(\chi+\nu)^{2\nu-I} > (\chi+I)(\chi+2)\dots(\chi+2\nu-I) .$$

Λ ύ σ ι ς . Θεωροῦμεν τούς ἀριθμούς $\chi+I, \chi+2, \dots \chi+2\nu-I$. Οὗτοι εἶναι $(\chi+2\nu-I)-(\chi+I)+I = 2\nu-I$ τό πλῆθος . Ἐφαρμόζοντες εἰς αὐτούς τό θεώρημα τοῦ CAUCHY ἔχομεν :

$$\frac{(\chi+I)+(\chi+2)+\dots+(\chi+2\nu-I)}{2\nu-I} > \sqrt[2\nu-I]{(\chi-I)(\chi+2)\dots(\chi+2\nu-I)}$$

ἤ $$\frac{(\chi+I+\chi+2\nu-I)(2\nu-I)}{2(2\nu-I)} > \sqrt[2\nu-I]{(\chi+I)(\chi+2)\dots(\chi+2\nu-I)}$$ ἤ

$$(\chi+\nu) > \sqrt[2\nu-1]{(\chi+I)(\chi+2)\dots(\chi+2\nu-I)} \text{ ἤ } (\chi+\nu)^{2\nu-I} > (\chi+I)(\chi+2)\dots(\chi+2\nu-I).$$

87) Ἐάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῆ ὅτι : $3\nu(3\nu+I)^2 > \sqrt[\nu]{I.2.3\dots3\nu}$.

Λ ύ σ ι ς . Ἐφαρμόζομεν τό θεώρημα τοῦ CAUCHY εἰς τούς ἀριθμούς $I, 2, 3, \dots 3\nu$ καί ἔχομεν :

$$\frac{I+2+3+\dots+3\nu}{3\nu} > \sqrt[3\nu]{I.2.3\dots3\nu}$$ ἤ

$$\frac{(I+3\nu)\,3\nu}{2\cdot3\nu} > \sqrt[3\nu]{I.2.3\dots3\nu}$$. Ὑψώνοντες εἰς τήν τρίτην δύναμιν ἀμφότερα τά μέλη τῆς ἀνισότητος ἔχομεν :

$$\frac{(I+3\nu)^3\,3\nu}{8} > \sqrt[\nu]{I.2.3\dots3\nu} \text{ ἤ } (I+3\nu)^2\,\frac{I+3\nu}{8} > \sqrt[\nu]{I.2.3\dots3\nu}$$

'Αλλά $3\nu > \frac{1+3\nu}{8}$ καί κατά μείζονα λόγον θά ἔχωμεν :

$$3\nu\,(1+3\nu)^2 > \sqrt[\nu]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 3\nu} \quad .$$

88) 'Εάν $\Sigma = x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu > 0$ καί αἱ διαφοραί $\Sigma - x_1$, $\Sigma - x_2, \ldots \Sigma - x_\nu > 0$, νά δειχθῇ ὅτι :

$$\frac{\Sigma}{\Sigma - x_1} + \frac{\Sigma}{\Sigma - x_2} + \cdots + \frac{\Sigma}{\Sigma - x_\nu} \geqslant \frac{\nu^2}{\nu - 1} \quad .$$

Λ ύ σ ι ς . Θεωροῦμεν τούς θετικούς ἀριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ τοιούτους ὥστε $\alpha_1 = \frac{\Sigma}{\Sigma - x_1}$, $\alpha_2 = \frac{\Sigma}{\Sigma - x_2} \cdots \alpha_\nu = \frac{\Sigma}{\Sigma - x_\nu}$ καί ἐπειδή

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu}{\nu} \geqslant \frac{\nu}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_\nu}} \text{ , ἔχομεν :}$$

$$\frac{\frac{\Sigma}{\Sigma - x_1} + \frac{\Sigma}{\Sigma - x_2} + \cdots + \frac{\Sigma}{\Sigma - x_\nu}}{\nu} \geqslant \frac{\nu}{\frac{\Sigma - x_1}{\Sigma} + \frac{\Sigma - x_2}{\Sigma} + \cdots + \frac{\Sigma - x_\nu}{\Sigma}} \quad \text{ἤ}$$

$$\frac{\frac{\Sigma}{\Sigma - x_1} + \frac{\Sigma}{\Sigma - x_2} + \cdots + \frac{\Sigma}{\Sigma - x_\nu}}{\nu} \geqslant \frac{\nu}{\frac{\nu\Sigma - \Sigma}{\Sigma}} \quad \text{ἤ}$$

$$\frac{\Sigma}{\Sigma - x_1} + \frac{\Sigma}{\Sigma - x_2} + \cdots + \frac{\Sigma}{\Sigma - x_\nu} \geqslant \frac{\nu^2}{\nu - 1}$$

89) 'Εάν $x_1, \psi_1, \omega_1, z > 0$ καί ὄχι ὅλοι ἴσοι μεταξύ των, τότε εἶναι : $(x+\psi)^{1/3}\,(\omega+z)^{2/3} > x^{1/3}\,\omega^{2/3} + \psi^{1/3}\,z^{2/3}$.

Λ ύ σ ι ς . Κατά τόν τύπον τοῦ CAUCHY ἔχομεν :

$$\frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{x}{x+\psi} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\omega}{\omega+z}}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} > \sqrt[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}]{\left(\frac{x}{x+\psi}\right)^{1/3} \left(\frac{\omega}{\omega+z}\right)^{2/3}} \quad \text{καί}$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\psi}{\chi+\psi}+\frac{2}{3}\cdot\frac{Z}{\omega+Z} > \sqrt[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}]{\left(\frac{\psi}{\chi+\psi}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{Z}{\omega+Z}\right)^{\frac{2}{3}}} \quad \text{ἤ}$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\chi}{\chi+\psi}+\frac{2}{3}\cdot\frac{\omega}{\omega+Z} > \left(\frac{\chi}{\chi+\psi}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\omega}{\omega+Z}\right)^{\frac{2}{3}} \quad \text{καί}$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\psi}{\chi+\psi}+\frac{2}{3}\cdot\frac{Z}{\omega+Z} > \left(\frac{\psi}{\chi+\psi}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{Z}{\omega+Z}\right)^{\frac{2}{3}}$$

καί διά προσθέσεως λαμβάνομεν :

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3} > \frac{\chi^{\frac{1}{3}}\omega^{\frac{2}{3}}+\psi^{\frac{1}{3}}Z^{\frac{2}{3}}}{(\chi+\psi)^{1/3}(\omega+Z)^{2/3}} \quad \text{ἤ} \quad (\chi+\psi)^{\frac{1}{3}}\cdot(\omega+Z)^{\frac{2}{3}} > \chi^{\frac{1}{3}}\cdot\omega^{\frac{2}{3}}+\psi^{\frac{1}{3}}\cdot Z^{\frac{2}{3}}$$

90) Διά κάθε ν, νά δειχθῆ ὅτι : Π_I = συν α συν2α συν4α. ...συν 2^{ν}α $= \dfrac{\text{ημ } 2^{\nu+I}\alpha}{2^{\nu+I}\text{ ημ } \alpha}$ (I) .

Λύσις. Διά $\nu=0$ ἡ (I) γίνεται Π_0=συνα $= \dfrac{\text{ημ}2\alpha}{2\text{ημ } \alpha} =$

$= \dfrac{2\text{ημ } \alpha \text{ συν } \alpha}{2\text{ημ } \alpha}$ = συν.α . Διά ν= I ἔχομεν Π_I=συνα συν2α$= \dfrac{\text{ημ}4\alpha}{4\text{ημ } \alpha} =$

$= \dfrac{4\text{ημ } \alpha \text{ συν } \alpha \text{ συν}2\alpha}{4\text{ημ } \alpha}$ = συν α συν2α. Ἔστω ὅτι ἡ (I) ἀληθεύει $\nu = \varkappa$, δηλ. $\Pi_\varkappa$ = συν α συν2α...συν$2^{\varkappa}$α $= \dfrac{\text{ημ}2^{\varkappa+I}\alpha}{2^{\varkappa+I}\text{ημ } \alpha}$. Θά δείξωμεν ὑπό τάς προϋποθέσεις αὐτάς ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu = \varkappa + I$.

Πράγματι ἔχομεν $\Pi_{\varkappa+I} = \Pi_\varkappa$συν$(2^{\varkappa+I}\alpha)$ ἤ $\Pi_{\varkappa+I} = \dfrac{\text{ημ}2^{\varkappa+I}\alpha}{2^{\varkappa+I}\text{ημ } \alpha}$.

. συν$2^{\varkappa+I}\alpha = \dfrac{\text{ημ}2^{\varkappa+I}\alpha}{2^{\varkappa+I}\text{ημ } \alpha} \cdot \dfrac{2\text{συν}2^{\varkappa-I}\alpha}{2} = \dfrac{2\text{ημ}2^{\varkappa+I}\alpha \text{ συν}2^{\varkappa+I}\alpha}{2.2^{\varkappa+I}\text{ημ } \alpha} =$

$= \dfrac{\text{ημ}\left[2.2^{\varkappa+I}\alpha\right]}{2^{\varkappa+2}\text{ημα}} = \dfrac{\text{ημ } 2^{\varkappa+2}\alpha}{2^{\varkappa+2}\text{ημ } \alpha}$.

9I) 'Εάν $\nu \in \Phi$, νά δειχθῆ ὅτι $\eta\mu\, \alpha + \eta\mu 2\alpha + \ldots + \eta\mu\, \nu\alpha =$

$$= \frac{\eta\mu \frac{\nu+1}{2}\alpha}{\eta\mu \frac{\alpha}{2}}\, \eta\mu \frac{\nu\alpha}{2} .$$

Λ ύ σ ι ς . Διά $\nu = 1$ ἡ πρότασις ἀληθεύει. Ἔστω ὅτι ἀληθεύει διά $\nu = \kappa$ $(\kappa \in \Phi)$ δηλ. ὅτι $\eta\mu\, \alpha + \eta\mu 2\alpha + \ldots + \eta\mu\, \kappa\alpha =$

$$= \frac{\eta\mu \frac{\kappa+1}{2}\alpha}{\eta\mu \frac{\alpha}{2}}\, \eta\mu \frac{\kappa\alpha}{2} \quad (1).$$ Θά δείξωμεν ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu = \kappa+1$. Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τά μέλη τῆς (I) τό $\eta\mu(\kappa + 1)\alpha$ καί ἔχωμεν :

$$\eta\mu\, \alpha + \eta\mu\, 2\alpha + \ldots + \eta\mu\, \kappa\alpha + \eta\mu(\kappa+1)\alpha = \frac{\eta\mu \frac{\kappa+1}{2}\alpha}{\eta\mu \frac{\alpha}{2}}\, \eta\mu \frac{\kappa\alpha}{2} + \eta\mu(\kappa+1)\alpha =$$

$$= \frac{\eta\mu \frac{\kappa+1}{2}\alpha}{\eta\mu \frac{\alpha}{2}}\, \eta\mu \frac{\kappa\alpha}{2} + 2\eta\mu \frac{\kappa+1}{2}\alpha\, \sigma\upsilon\nu \frac{\kappa+1}{2}\alpha = \frac{\eta\mu \frac{\kappa+2}{2}\alpha}{\eta\mu \frac{\alpha}{2}}\, \eta\mu \frac{\kappa+1}{2}\alpha ,$$

διότι : $2\, \sigma\upsilon\nu \frac{\kappa+1}{2}\alpha\, \eta\mu \frac{\alpha}{2} = \eta\mu \frac{\kappa+2}{2}\alpha - \eta\mu \frac{\kappa\alpha}{2}$. Ἤτοι ἀληθεύει καί διά $\nu = \kappa + 1$ καί συνεπῶς καί διά κάθε $\nu \in \Phi$.

92) 'Εάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῆ ὅτι $\frac{1}{2} + \sigma\upsilon\nu\, \alpha + \sigma\upsilon\nu\, 2\alpha + \ldots + \sigma\upsilon\nu\, \nu\alpha =$

$$= \frac{\eta\mu \frac{2\nu+1}{2}\alpha}{2\eta\mu \frac{\alpha}{2}} .$$

Λ ύ σ ι ς . Διά $\nu = 1$ ἡ πρότασις ἀληθεύει, διότι :

$$\frac{\eta\mu \frac{3\alpha}{2}}{2\eta\mu \frac{\alpha}{2}} = \frac{\eta\mu \frac{\alpha}{2} + \left(\eta\mu \frac{3\alpha}{2} - \eta\mu \frac{\alpha}{2}\right)}{2\, \eta\mu \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} + \sigma\upsilon\nu\, \alpha .$$

Ἔστω ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu = \kappa$ $(\kappa \in \Phi)$, τότε :

$$\frac{1}{2} + \sigma\upsilon\nu\, \alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \ldots + \sigma\upsilon\nu\, \kappa\alpha = \frac{\eta\mu \frac{2\kappa+1}{2}\alpha}{2\eta\mu \frac{\alpha}{2}} \quad (1).$$ Θά δείξωμεν ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ὅτι ἀληθεύει καί διά $\nu = \kappa + 1$. Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τά μέλη τῆς (I) τό $\sigma\upsilon\nu(\kappa+1)\alpha$ καί ἔχο -

μεν : $\frac{1}{2}+$ συν α + συν2α +...+συν κα + συν(κ+1)α $= \frac{ημ\frac{2κ+1}{2}α}{2ημ\frac{α}{2}}+$

$+$ συν(κ+1)α $= \frac{ημ\frac{2κ+1}{2}α+2ημ\frac{α}{2}\, συν(κ+1)α}{2ημ\frac{α}{2}} = \frac{ημ\frac{2κ+1}{2}α+(ημ\frac{2κ+3}{2}α-ημ\frac{2κ+1}{2}α)}{2ημ\frac{α}{2}} =$

$= \frac{ημ\frac{2κ+3}{2}α}{2ημ\frac{α}{2}}$, ἤτοι ἀληθεύει καί διά $ν=κ+1$ καί συνεπῶς καί διά κάθε $ν\in Φ$.

93) Ἐάν $ν\in Φ$ νά δειχθῇ ὅτι ημ α+2ημ2α + 3ημ3α+.... +
+ ν ημ να $=\frac{(ν+1)ημ\, να - ν\, ημ(ν+1)α}{4\, ημ^2\frac{α}{2}}$.

Λ ύ σ ι ς. Διά $ν = 1$ ἡ πρότασις εἶναι ἀληθής , ἐπειδή
$\frac{2ημ\, α-ημ2α}{4ημ^2\frac{α}{2}} = \frac{2ημ\, α(1 - συν\, α)}{4ημ^2\frac{α}{2}} =$ ημ α . Ἔστω ὅτι ἀληθεύει διά
$ν = κ$ $κ\in Φ$. δηλ. ὅτι ημ α+2ημ2α+3ημ3α+...+κημκα$=\frac{(κ+1)ημκα-κημ(κ+1)α}{4ημ^2\frac{α}{2}}$ (1)

Ὑπό τήν προ ὑπόθεσιν αὐτήν θά δείξωμεν ὅτι ἀληθεύει καί διά ν=κ+1.
Προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τά μέλη τῆς (1) τό (κ+1)ημ(κ+1)α ἔχομεν
ημ α +2ημ2α+...+κ ημ κα+(κ+1)ημ(κ+1)α $= \frac{(κ+1)ημκα-κημ(κ+1)α}{4ημ^2\frac{α}{2}}+$
$+$ (κ+1) ημ (κ+1) α =

$= \frac{(κ+1)ημ\, κα-κ\, ημ(κ+1)α + 2(κ+1)\, ημ\, (κ+1)\, α\, (1-συν\, α)}{4ημ^2\frac{α}{2}} =$

$= \frac{(κ+2)ημ(κ+1)α + (κ+1)ημ\, κα}{4ημ^2\frac{α}{2}} - \frac{2\, (κ+1)\, συν\, α\, ημ\, (κ+1)\, α}{4ημ^2\frac{α}{2}} =$

$= \frac{(κ+2)ημ(κ+1)α-(κ+1)ημ\, κα}{4ημ^2\frac{α}{2}} - \frac{(κ+1)[ημ(κ+2)α + ημ\, κα]}{4ημ^2\frac{α}{2}} =$

$= \frac{(κ+2)ημ(κ+1)α - (κ+1)ημ(κ+2)α}{4ημ^2\frac{α}{2}}$ ἤτοι ἡ πρότασις ἀληθεύει καί
διά $ν = κ + 1$ καί συνεπῶς καί διά κάθε $ν\in Φ$.

94) Νά δειχθῇ ὅτι συνα+2συν2α+...+νσυννα $= \frac{(ν+1)συννα-νσυν(ν+1)α-1}{4ημ^2\frac{α}{2}}$

Λ ύ σ ι ς . Διά ν=I ἡ πρότασις εἶναι ἀληθής διότι

$$\frac{2συνα-συν2α-I}{4ημ^2\frac{α}{2}} = \frac{2συνα-2συν^2α}{4ημ^2\frac{α}{2}} = \frac{συν(I-συνα)}{2ημ^2\frac{α}{2}} = συν\,α \; .$$

Ἔστω ὅτι ἀληθεύει διά $ν = κ$ $(κ \in Φ)$, δηλ. ὅτι :

$$συνα+2συν2α+\ldots+κσυνκα = \frac{(κ+I)συν\,κα-κσυν(κ+I)α-I}{4ημ^2\frac{α}{2}} \quad (I)$$

. Θά δείξωμεν ὅτι ἀληθεύει καί διά $ν=κ+1$.

Προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τά μέλη τῆς (I) τό $(κ+I)συν(κ+I)α$ ἔχομεν

$$συνα+2συν2α+\ldots+κσυνκα+(κ+I)συν(κ+I)α = \frac{(κ+I)συνκα-κσυν(κ+I)α-I}{4ημ^2\frac{α}{2}} +$$

$$+ (κ+I)συν(κ+I)α = \frac{(κ+I)συνκα-κσυν(κ+I)α-I}{ημ^2\frac{α}{2}} + \frac{2(κ+I)συν(κ+I)α(I-συνα)}{4ημ^2\frac{α}{2}} =$$

$$= \frac{(κ+2)συν(κ+I)α + (κ+I)συνκα}{4ημ^2\frac{α}{2}} - \frac{2(κ+I)συνασυν(κ+I)α + I}{4ημ^2\frac{α}{2}} =$$

$$= \frac{(κ+2)συν(κ+I)α + (κ+I)συν\,κα}{4ημ^2\frac{α}{2}} - \frac{(κ+I)[συν(κ+2)α + συνκα]+I}{4ημ^2\frac{α}{2}} =$$

$$= \frac{(κ+2)συν(κ+I)α - (κ+I)συν(κ+2)α - I}{4ημ^2\frac{α}{2}}$$

ἤτοι ἡ πρότασις ἀληθεύει καί διά $ν = κ+I$ καί συνεπῶς καί διά κάθε $ν \in Φ$.

95) Ἐάν $α_ν$ ὅπου $ν \in Φ \geqslant 2$ εἶναι τόξα τοιαῦτα ὥστε $0 < α_ν < \frac{Π}{2}$ νά δειχθῇ ὅτι $εφ\,α_I+εφ\,α_2+\ldots+εφα_ν \geqslant ν\,εφ\,\frac{α_I+α_ν+\ldots+α_ν}{ν}$ (1), τό δέ ἴσον ἰσχύει ὅταν $α_I = α_2 = \ldots = α_ν$.

Λ ύ σ ι ς . Διά ν=2 ἡ (I) γίνεται $εφ\,α_I + εφ\,α_2 \geqslant 2εφ\frac{α_I+α_2}{2}$,

$$ἤ \; \frac{ημ(α_I+α_2)}{συνα_Iσυνα_2} \geqslant \frac{2ημ(\frac{α_I+α_2}{2})}{συν(\frac{α_I+α_2}{2})} \; ἤ \; \frac{2ημ(\frac{α_I+α_2}{2})συν(\frac{α_I+α_2}{2})}{συνα_Iσυνα_2} \geqslant \frac{2ημ(\frac{α_I+α_2}{2})}{συν(\frac{α_I+α_2}{2})}$$

ἤ $συν^2\left(\frac{α_I+α_2}{2}\right) \geqslant συνα_Iσυνα_2$ διότι $ημ\left(\frac{α_I+α_2}{2}\right) > 0$ ἤ

$2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\alpha_I+\alpha_2}{2}\right) \geqslant 2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\alpha_I+\alpha_2}{2}\right) - I + \sigma\upsilon\nu(\alpha_I-\alpha_2)$ ἤ $\sigma\upsilon\nu(\alpha_I-\alpha_2) \leqslant I$, ἡ ὁποία ἀληθεύει καί εἶναι ἀληθής ὡς ἰσότης ὅταν $\alpha_I = \alpha_2$.

Ἔστω ὅτι ἡ (I) ἀληθεύει διά $\nu = \varkappa$ δηλ. $\varepsilon\varphi\,\alpha_I + \varepsilon\varphi\,\alpha_2 + \ldots + \varepsilon\varphi\alpha_\varkappa \geqslant \varkappa\varepsilon\varphi\frac{\alpha_I+\alpha_2+\ldots+\alpha_\varkappa}{\varkappa}$ (2). Θά δείξωμεν ὅτι ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ἀληθεύει καί διά $\nu=2\varkappa$. Ἐφαρμόζομεν τήν (2) διά τά τόξα $\alpha_{\varkappa+I}, \alpha_{\varkappa+2}, \ldots \alpha_{2\varkappa}$ ὅτε λαμβάνομεν : $\varepsilon\varphi\alpha_{\varkappa+I}+\varepsilon\varphi\alpha_{\varkappa+2}+\ldots+\varepsilon\varphi\alpha_{2\varkappa} \geqslant \varkappa\,\varepsilon\varphi\,\frac{\alpha_{\varkappa+I}+\alpha_{\varkappa+2}+\ldots+\alpha_{2\varkappa}}{\varkappa}$ (2). Προσθέτοντες τάς (2) καί (3) καὶ λαμβάνομεν

$$\varepsilon\varphi\alpha_I+\varepsilon\varphi\alpha_2+\ldots+\varepsilon\varphi\alpha_{2\varkappa} \geqslant \varkappa\left[\varepsilon\varphi\frac{\alpha_I+\alpha_2+\ldots+\alpha_\varkappa}{\varkappa} + \varepsilon\varphi\frac{\alpha_{\varkappa+I}+\alpha_{\varkappa+2}+\ldots+\alpha_{2\varkappa}}{\varkappa}\right] \quad (4)$$

Ἐπειδή ἡ (I) ἀληθεύει διά $\nu=2$ ἔχομεν: $\varepsilon\varphi\frac{\alpha_I+\ldots+\alpha_\varkappa}{\varkappa}+\varepsilon\varphi\frac{\alpha_{\varkappa+I}+\ldots+\alpha_{2\varkappa}}{\varkappa} \geqslant$
$2\varepsilon\varphi\dfrac{\frac{\alpha_I+\ldots+\alpha_\varkappa}{\varkappa}+\frac{\alpha_{\varkappa+I}+\ldots+\alpha_{2\varkappa}}{\varkappa}}{2} = 2\varepsilon\varphi\,\frac{\alpha_I+\ldots+\alpha_{2\varkappa}}{2\varkappa}$, ἐπομένως ἡ (5) γίνεται : $\varepsilon\varphi\alpha_I+\varepsilon\varphi\alpha_2+\ldots+\varepsilon\varphi\alpha_{2\varkappa} \geqslant 2\varkappa\,\varepsilon\varphi\frac{\alpha_I+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2\varkappa}}{2\varkappa}$. Δεχόμενοι τήν $\varepsilon\varphi\alpha_I+\varepsilon\varphi\alpha_2+\ldots+\varepsilon\varphi\alpha_{\varkappa+I} \geqslant (\varkappa+I)\varepsilon\varphi\,\frac{\alpha_I+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\varkappa+I}}{\varkappa+I}$ (5), θά δείξωμεν τή ν $\varepsilon\varphi\alpha_I+\varepsilon\varphi\alpha_2+\ldots+\varepsilon\varphi\alpha_\varkappa \geqslant \varkappa\varepsilon\varphi\frac{\alpha_I+\alpha_2+\ldots+\alpha_\varkappa}{\varkappa}$ (6). Διά νά μεταβῶμεν ἀπό τήν (5) εἰς τήν (6) ἐκλέγομεν τό $\alpha_{\varkappa+I} = \frac{\alpha_I+\alpha_2+\ldots+\alpha_\varkappa}{\varkappa}$ ὅτε ἡ (5) γίνεται $\varepsilon\varphi\alpha_I+\ldots+\varepsilon\varphi\alpha_\varkappa+\varepsilon\varphi\frac{\alpha_I+\ldots+\alpha_\varkappa}{\varkappa} \geqslant (\varkappa+I)\varepsilon\varphi\dfrac{\alpha_I+\ldots+\alpha_\varkappa+\frac{\alpha_I+\ldots+\alpha_\varkappa}{\varkappa}}{\varkappa+I} =$
$= (\varkappa+I)\varepsilon\varphi\,\frac{\alpha_I+\alpha_2+\ldots+\alpha_\varkappa}{\varkappa}$ ἤ $\varepsilon\varphi\alpha_I+\ldots+\varepsilon\varphi\alpha_\varkappa \geqslant \varkappa\varepsilon\varphi\,\frac{\alpha_I+\ldots+\alpha_\varkappa}{\varkappa}$. Ἄρα κατά τήν ἀρχήν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς ἀληθεύει διά κάθε $\nu \in \Phi \geqslant 2$.

96) Νά δειχθῇ ὅτι: $\frac{\eta\mu\chi}{2\sigma\upsilon\nu\chi-I} + \frac{2\eta\mu\,2\chi}{2\sigma\upsilon\nu 2\chi-I} + \ldots + \frac{2^{\nu-I}\eta\mu 2^{\nu-I}\chi}{2\sigma\upsilon\nu 2^{\nu-I}\chi-I} =$
$= \frac{2^\nu\eta\mu 2^\nu\chi}{2\sigma\upsilon\nu 2^\nu\chi-I} - \frac{\eta\mu\chi}{2\sigma\upsilon\nu\chi-I}$ (ι).

Λύσις. Διά ν=1 ἔχομεν: $A_I = \frac{\eta\mu\chi}{2\sigma\upsilon\nu\chi - I}$ καί $B_I = \frac{2\eta\mu 2\chi}{2\sigma\upsilon\nu 2\chi + I} -$

$- \frac{\eta\mu\chi}{2\sigma\upsilon\nu\chi + I} = \eta\mu\chi\left[\frac{4\sigma\upsilon\nu\chi}{4\sigma\upsilon\nu^2\chi - I} - \frac{I}{2\sigma\upsilon\nu\chi + I}\right] = \eta\mu\chi \cdot \frac{2\sigma\upsilon\nu\chi + 1}{4\sigma\upsilon\nu^2\chi - 1} = \frac{\eta\mu\chi}{2\sigma\upsilon\nu\chi - I}$ (3)

(A_I καί B_I καλοῦμεν τό $\alpha^{ον}$ καί $\beta^{ον}$ μέλος τῆς (I)). Ἄρα ἀληθεύει.

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διά ν=κ δηλ. ὅτι $A_\varkappa = B_\varkappa$. Θά δείξωμεν ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν ὅτι ἀληθεύει καί διά ν= κ+I, δηλ. ὅτι: $A_{\varkappa+I} = B_{\varkappa+I}$. Ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι $A_{\varkappa+I} - A_\varkappa = B_{\varkappa+I} - B_\varkappa$ (4). Ἀλλ᾽ ά

$A_{\varkappa+I} - A_\varkappa = \frac{2^\varkappa \eta\mu 2^\varkappa \chi}{2\sigma\upsilon\nu 2^\varkappa \chi - I} = \frac{2^\varkappa \eta\mu\psi}{2\sigma\upsilon\nu\psi - I}$ (5) (ἐτέθη $2^\varkappa\chi = \psi$), καί $B_{\varkappa+I} - B_\varkappa =$

$= \frac{2^{\varkappa+I}\eta\mu 2^{\varkappa+I}\chi}{2\sigma\upsilon\nu 2^{\varkappa+I}\chi + I} - \frac{2^\varkappa \eta\mu 2^\varkappa \chi}{2\sigma\upsilon\nu 2^\varkappa \chi + I} = \frac{2^{\varkappa+I}\eta\mu 2\psi}{2\sigma\upsilon\nu 2\psi + I} - \frac{2^\varkappa \eta\mu\psi}{2\sigma\upsilon\nu\psi + I}$ (6). Ἡ (4) λόγῳ τῶν (5) καί (6) γίνεται $\frac{\eta\mu\psi}{2\sigma\upsilon\nu\psi - I} = \frac{2\eta\mu 2\psi}{2\sigma\upsilon\nu 2\psi + I} - \frac{\eta\mu\psi}{2\sigma\upsilon\nu\psi + I}$, τό ὁποῖον ἀληθεύει. Ἄρα ἡ (I) ἀληθεύει διά κάθε $\nu \in \Phi$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

Νά δειχθῇ διά τῆς μεθόδου τῆς τελείας ἐπαγωγῆς, ὅτι :

I) $I+2+3+ \dots + \nu = \frac{\nu(\nu+I)}{2}$ ἔνθα $\nu \in \Phi$

2) $I+3+5+ \dots + 2\nu+I = \nu^2$ -"- $\nu \in \Phi$

3) $I.2+2.3+3.4+ \dots + \nu(\nu+I) = \frac{I}{3}\nu(\nu+I)(\nu+2)$ -"- $\nu \in \Phi$

4) $2.3+3.5+4.7+ \dots +(\nu+I)(2\nu+I) = \frac{\nu(4\nu^2+I5\nu+I7)}{6}$ -"- $\nu \in \Phi$

5) $I.2.3+2.3.4+ \dots +\nu(\nu+I)(\nu+2) = \frac{\nu(\nu+I)(\nu+2)(\nu+3)}{4}$ -"- $\nu \in \Phi$

6) $2.2^I+3.2^2+ \dots +\nu.2^{\nu-I} = 2^\nu(\nu-I)$ -"- $\nu \in \Phi \geq 2$

7) $I.2^2+2.3^2+ \dots + (\nu-I)\nu^2 = \frac{\nu(\nu+I)(3\nu^2-\nu-2)}{I2}$ -"- $\nu \in \Phi \geq 1$

8) $3+7+II+ \dots + (4\nu-I) = \nu(2\nu+I)^2$ -"- $\nu \in \Phi \geq 1$

9) $2^2+4^2+6^2 + \dots + (2\nu)^2 = \frac{2\nu(\nu+I)(2\nu+I)}{3}$ -"- $\nu \in \Phi \geq 1$

I0) $2^3+4^3+6^3+ \dots + (2\nu)^3 = 2\nu^2(\nu+I)^2$ -"- $\nu \in \Phi \geq 1$

II) Ἐάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῇ ὅτι ὁ $\nu(\nu+I)(2\nu+I)(3\nu^2+3\nu-I) =$ πολ 30

I2) " " " " ὁ $3^{4\nu+I} + I0.3^\nu - I3 =$ πολ 260

I3) 'Εάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῆ ὅτι ὁ $4^{2\nu+I} + 3^{3\nu+I}$ = πολ 7

I4) " " " " ὁ $3 \cdot 5^{2\nu+I} + 2^{3\nu+I}$ = πολ I7

I5) " " " " ὁ $9^{\nu} - 8\nu - I$ = πολ 64

I6) " " " " ὁ $2^{2\nu-I} \cdot 3^{\nu+2} + I$ = πολ II

I7) " " " " ὁ $2^{4(\nu+2)} - I5\nu - 3I$ = πολ 225

I8) " " " " ὁ $4^{\nu}(9\nu^2 + 3\nu + 2) - 2$ = πολ 54

I9) " " " " ὁ $\nu^5 - \nu$ = πολ 5

20) " " " " ὅτι $\frac{3}{I^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \ldots + \frac{2\nu+I}{\nu^2(\nu+I)^2} = \frac{\nu(\nu+2)}{(\nu+I)^2}$

2I) 'Εάν $0 < \chi < I$ καί $\nu \in \Phi$ νά δειχθῆ ὅτι $\alpha^{\chi} < I$ καί $\alpha^{-\chi} > I$

22) 'Εάν $\nu \in \Phi \geqslant I$, νά δειχθῆ ὅτι : $\frac{I}{2} + \frac{I}{2^2} + \frac{I}{2^3} + \ldots + \frac{I}{2^{\nu}} = I - \frac{I}{2^{\nu}}$

23) " " " " " $I + \frac{I}{2} + \frac{I}{4} + \ldots + \frac{I}{2^{\nu-I}} = 2 - \frac{I}{2^{\nu-I}}$

24) " " " " " $\frac{I}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{\nu}{2^{\nu}} = 2 - \frac{\nu+2}{2^{\nu}}$

25) " " " " " $\frac{I}{I \cdot 2 \cdot 3} + \frac{I}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{\nu(\nu+I)(\nu+2)} = \frac{\nu(\nu+3)}{4(\nu+I)(\nu+2)}$

26) Νά δειχθῆ ὅτι, παντός ἀριθμοῦ Ν μή διαιρετοῦ δι'ἄλλου δ, ἡ νυοστή δύναμις εἶναι γενικῶς τηῖ μορφῆς N^{ν} = πολ$\delta + \upsilon^{\nu}$ ὅπου $\upsilon < \delta$ εἶναι τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ Ν διά δ .

27) Νά δειχθῆ ὅτι τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομέ - νου πολλλῶν ἀριθμῶν διά τινος διαιρέτου ἰσοῦται μέ τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διά τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου τοῦ γινομένου τῶν ὑπολοί- πων ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν διαιρουμένων χωριστά διά τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου.

28) 'Εάν εἷς ἀριθμός Ν εἶναι πολ/σιον τοῦ δ μεῖον I, πᾶσαι αἱ δυνάμεις αὐτοῦ θά εἶναι πολ/σια τοῦ δ σύν I ἐάν εἶναι ἄρτιαι, μεῖ- ον I δέ ἐάν εἶναι περιτταί .

29) Παντός ἀριθμοῦ Ν τῆς μορφῆς Ν = πολ $\delta \pm V$ ἡ νυοστή δύναμις εἶ- ναι N^{ν} = πολ $\delta \pm V^{\nu}$ καθόσον ὁ ν εἶναι ἄρτιος ἤ περιττός .

30) 'Εάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῆ ὅτι ἡ παράστασις $\chi^{\nu} - \alpha^{\nu}$ διαιρεῖται διά

$\chi - \alpha$, ἡ δέ $\chi^{\nu} + \alpha^{\nu}$ διαιρεῖται διά $\chi + \alpha$, ἐάν ὁ ν εἶναι περιττός.

3I) Ἐάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῆ ὅτι τό πολυώνυμον $\chi^{2\nu-I} + \psi^{2\nu-I}$ εἶναι διαιρετόν διά $\chi+\psi$.

32) Ἐάν $\nu \in \Phi \geqslant 2$ νά δειχθῆ ὅτι $2.6.I0\ldots(4\nu-6)(4\nu-2) = (\nu+I)(\nu+2)\ldots(2\nu-I)\,2\nu$.

33) Ἐάν $U_I = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}$, $U_2 = \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}$ $(\alpha \neq \beta)$, νά δειχθῆ ὅτι $U_\nu = \frac{\alpha^{\nu+I}-\beta^{\nu+I}}{\alpha-\beta}$ καί ὅτι διά κάθε $\kappa > 2$ εἶναι $U_\kappa = (\alpha+\beta)\,U_{\kappa-I} - \alpha\beta\,U_{\kappa-2}$.

34) Ἐάν $\nu \in \Phi$, νά δειχθῆ ὅτι $\frac{\alpha^{2\nu}+\beta^{2\nu}}{2} \geqslant \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{2\nu}$

35) Δίδονται οἱ ἀριθμοί $\chi_0, \psi_0, \chi_I, \psi_I, \ldots \psi_\nu$ καί ὅτι $\chi_\nu = \frac{\chi_{\nu-I}}{I + \chi_{\nu-I}\psi_{\nu-I}}$ (I). Νά δειχθῆ ὅτι $\chi_\nu = \frac{\chi_0}{I + \chi_0 Z_{\nu-I}}$ (2) ὅπου : $Z_\lambda = \psi_0 + \psi_I + \ldots + \psi_\nu$ (3) .

36) Νά δειχθῆ ὅτι : $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \ldots < 2$ δι'ὁσαδήποτε ριζικά .

37) Ἐάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῆ ὅτι $2^\nu > \nu$ καί ὅτι $(\nu^2+I)^{2\nu} > \nu^{2\nu}(\nu-I)^{\nu-I}(\nu+1)^{\nu+1}$

38) Ἐάν $\nu \in \Phi \geqslant 2$ νά δειχθῆ ὅτι $(\nu!)^2 > \nu^\nu$, καί ὅτι $I.3.5\ldots(2\nu-3)2^{\nu-I} = \nu(\nu+I)(\nu+2)\ldots(2\nu-2)$.

39) Ἐάν $\nu \in \Phi \geqslant 3$ νά δειχθῆ ὅτι $2^\nu > \frac{\nu^2+\nu+2}{2}$ καί ὅτι $\sqrt[\nu]{\nu} < \sqrt[3]{3}$.

40) Ἐάν $\nu \in \Phi > I$ νά δειχθῆ ὅτι $2.4.6\ldots2\nu < (\nu+I)^\nu$,

4I) Ἐάν $\nu \in \Phi \geqslant I$ νά δειχθῆ ὅτι $\frac{I}{I.2} + \frac{I}{2.3} + \ldots + \frac{I}{\nu(\nu+I)} < I$ καί ὅτι $I + \frac{I}{2^2} + \frac{I}{3^2} + \ldots + \frac{I}{\nu^2} < 2$.

42) Ἐά $\nu \in \Phi$ νά δειχθῆ ὅτι $2^\nu > I + \nu\sqrt{2^{\nu-I}}$

43) Ἐάν $\nu \in \Phi \geqslant 4$ νά δειχθῆ ὅτι $3^{\nu-I} > \nu^2$

44) Ἐάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῆ ὅτι $\frac{3.7.II\ldots(4\nu-I)}{5.9.I3\ldots(4\nu+I)} < \sqrt{\frac{3}{4\nu+3}}$

45) Ἐάν $0 < \chi < I$ καί $\nu \in \Phi$ νά δειχθῆ ὅτι $I + \chi + \chi^2 + \ldots + \chi^\nu < \frac{1}{I-\chi}$

46) Ἐάν $\nu \in \Phi \geqslant I0$ νά δειχθῆ ὅτι $2^\nu > 3^\nu$

47) Ἐάν $\chi, \alpha > 0$ καί $\nu \in \Phi \geqslant 2$ νά δειχθῆ ὅτι $(\chi+\alpha)^\nu > \chi^\nu + \nu\alpha\chi^{\nu-I}$

48) Ἐάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῆ ὅτι $\left(\nu + \frac{2\nu}{4\nu^2+I}\right)^2 < \nu^2 + I <$

$< \left(\nu + \dfrac{2\nu}{4\nu^2+I} + \dfrac{I}{4\nu^2+I} \right)^2$.

49) 'Εάν $\nu \in \Phi$ καί $x > I$ νά δειχθῇ ὅτι $\nu \dfrac{x^{2\nu+I}+I}{x^{2\nu-I}} > \dfrac{x}{x-I}$.

50) 'Εάν $0 < \alpha_I, \alpha_2, \dots \alpha_\nu < I$ καί $S_\nu = \alpha_I + \alpha_2 + \dots + \alpha_\nu$, νά δειχθοῦν αἱ ἀνισότητες τοῦ WEIERSTRASS .

α) $(I-\alpha_I)(I-\alpha_2)\dots(I-\alpha_\nu) > I-S_\nu$ β) $(I+\alpha_I)(I+\alpha_2)\dots(I+\alpha_\nu) > I+S_\nu$

γ) $(I-\alpha_I)(I-\alpha_2)\dots(I-\alpha_\nu) < \dfrac{I}{I+S_\nu}$ δ) $(I+\alpha_I)(I+\alpha_2)\dots(I+\alpha_\nu) < \dfrac{I}{I-S_\nu}$ ἄν $S_\nu < I$

5I) Νά δειχθῇ ὅτι $\dfrac{I}{\nu+I} + \dfrac{I}{\nu+2} + \dots + \dfrac{I}{2\nu} < I$ διά $\nu \in \Phi$.

52) 'Εάν $\nu \in \Phi > I$ καί $x \in \Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $\dfrac{I}{x+I}\nu^{x+I} < I^x + 2^x + \dots$
$\dots + \nu^x < \dfrac{I}{x+I}(\nu+I)^{x+I}$.

53) 'Εάν $\nu \in \Phi > I$ νά δειχθῇ ὅτι $\dfrac{I}{3\nu^2} > \nu - \dfrac{I}{3\nu^2} - \sqrt[3]{\nu^3 - I} > 0$.

54) 'Εάν $\nu \in \Phi$ καί ἀφοῦ δειχθῇ ὅτι $I + \dfrac{I}{\sqrt{2}} + \dfrac{I}{\sqrt{3}} + \dots$
$\dots + \dfrac{I}{\sqrt{\nu}} < 2\sqrt{\nu}$, νά δειχθῇ ὅτι $\left(\dfrac{I}{4}\nu\right)^\nu < \nu! < \dfrac{I}{6}(\nu+I)(\nu+2)^{\frac{1}{2}}$.

55) 'Εάν $\alpha > \beta > 0$ καί $\nu \in \Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $(\nu+I)\alpha^\nu > \dfrac{\alpha^{\nu+I} - \beta^{\nu+I}}{\alpha-\beta} >$
$> (\nu+I)\beta^\nu$.

56) 'Εάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $\dfrac{\alpha_I}{\alpha_2} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_3} + \dots + \dfrac{\alpha_{\nu-I}}{\alpha_\nu} + \dfrac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu} \geq \nu$.

57) 'Εάν $\nu \in \Phi$ καί $x_I, x_2, \dots x_\nu \in \Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $(I+x_I)(I+x_2)\dots$
$\dots(I+x_\nu) \geq 2^\nu \sqrt{x_I x_2 \dots x_\nu}$.

58) Δίδεται ἡ ἀκολουθία $(U_1, U_2, \dots U_\nu \dots)$ ὅπου $U_I = \sqrt{2}$, καί
$U_{\nu+I} = \sqrt{2+U_\nu}$ $(\nu \geq I)$. Νά δειχθῇ ὅτι $2-U_\nu < \dfrac{2-U_1}{2^\nu - I}$.

59) Οἱ ἀριθμοί $\alpha_I, \alpha_2, \dots \alpha_\nu$ εἶναι ὁμόσημοι. 'Αφοῦ δειχθῇ ὅτι
$(\alpha_I + \alpha_2 + \dots + \alpha_\nu)\left(\dfrac{I}{\alpha_I} + \dfrac{I}{\alpha_2} + \dots + \dfrac{I}{\alpha_\nu}\right) \geq \nu^2$ (I) νά δειχθῇ κατόπιν ὅτι εἶναι $\dfrac{1}{\nu+I} + \dfrac{I}{\nu+2} + \dots + \dfrac{I}{\nu+\kappa} > 2$, ὅταν $\kappa \longrightarrow \infty$.

60) Διά $\nu \in \Phi > 0$ καί $\alpha, \beta > 0$ νά δειχθῇ ὅτι $2^{\nu-1}(\alpha^{\nu} + \beta^{\nu}) \geq (\alpha+\beta)^{\nu}$.

61) Ἐάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $2^{7\nu-3} + 3^{2\nu+3} \cdot 5^{4\nu+1} = \pi o\lambda 23$.

62) Ἐάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $5^{2\nu+1} + 2^{\nu+4} + 2^{\nu+1} = \pi o\lambda 23$.

63) Ἐάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $\frac{\nu^3}{3} < \sum_{\nu=1}^{\nu} \nu\,(\nu+1) < \frac{2(\nu+1)^3}{3}$

64) Ἐάν $\nu \in \Phi \geq 2$ καί χ τυχόν θετικός νά δειχθῇ ὅτι $\chi^{\nu} - 1 > \nu(\chi-1)$

65) Ἐάν $\chi \geq \psi > 0$ καί α καί β ἀκέραιοι καί τοιοῦτοι ὥστε $\alpha+\beta = 1$, νά δειχθῇ ὅτι $\chi^{\alpha} \cdot \psi^{\beta} \geq \alpha\chi + \beta\psi$.

66) Ἐάν $\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_{\nu}$ εἶναι θετικοί καί $\nu \in \varphi \geq 2$ νά δειχθῇ ὅτι

$$\frac{\chi_1 + \chi_2 + \ldots + \chi_{\nu}}{\nu} \geq \sqrt[\nu]{\chi_1\,\chi_2 \cdots \chi_{\nu}} \;.$$

67) Ἐάν $\mu, \nu \in \Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $F(\mu,\nu) = 3^{\mu} + 3^{\nu} + 2(3^{\mu}\mu^2 - 3^{\nu}\nu^2 - 1) = \pi o\lambda\ 4$.

68) Θεωροῦμεν τήν ἀκολουθίαν $\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_{\nu}$ ὅπου $\chi_{\nu} = \chi_{\nu-1}\chi_{\nu-2}$ καί $\nu \in \Phi \geq 3$. Ἐάν Π_{ν} παριστᾶ τό γινόμενον τῶν ν ὅρων της , νά δειχθῇ ὅτι $\Pi_{\nu} = \chi_2\ \Pi_{\nu-1}\ \Pi_{\nu-2}$.

69) Δίδεται γεωμ. πρόοδος μέ θετικούς ὅρους. Νά δειχθῇ ὅτι ὁ μέσος ἀριθμητικός τοῦ πρώτου καί τοῦ τελευταίου ὅρου εἶναι πάντοτε μεγαλύτερος τοῦ μέσου ἀριθμητικοῦ ὅλων τῶν ὅρων της.

70) Νά δειχθῇ ὅτι ἐάν τό γινομενον ν θετικῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται μέ 1, τότε τό ἄθροισμα τῶν ν τούτων ἀριθμῶν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ν .

71) Ἐάν $\nu \in \Phi \geq 2$ καί $\chi^3 = \chi^2 + \chi + 1$, νά δειχθῇ ὅτι $\chi^{3\nu} = A_{\nu}\chi^2 + B_{\nu}\chi + \Gamma_{\nu}$ (1) ἔνθα $A_{\nu+1} = 4A_{\nu} + 2B_{\nu} + \Gamma_{\nu}$, $B_{\nu+1} = 3A_{\nu} + 2B_{\nu} + \Gamma_{\nu}$ καί $\Gamma_{\nu+1} = 2A_{\nu} + B_{\nu} + \Gamma_{\nu}$ (2) .

72) Νά δειχθῇ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν πέμπτων καί ἑβδόμων δυνάμεων τῶν ν πρώτων ἀκεραίων ἰσοῦται μέ τό 2πλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀθροίσματος τῶν κύβων τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν.

73) Ἐάν $\nu \in \Phi \geq$ νά δειχθῇ ὅτι $\frac{2}{3}\nu\sqrt{\nu} < \sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{\nu} < \frac{4\nu+3}{6}\sqrt{\nu}$

74) Ἐάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3\,\frac{1}{2} + 3 \cdot 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \nu(\nu+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} = 16 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}(\nu^2 + 5\nu + 8)$.

75) 'Εάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $I + \frac{\alpha_I}{x-\alpha_I} + \frac{\alpha_2 x}{(x-\alpha_I)(x-\alpha_2)} + \cdots$
$\cdots + \frac{\alpha_\nu x^{\nu-I}}{(x-\alpha_I)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_\nu)} = \frac{x^\nu}{(x-\alpha_I)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_\nu)}$ δι' ὅλας τάς τιμάς τῶν γραμμάτων διά τάς ὁποίας δέν μηδενίζονται οἱ παρονομασταί .

76) 'Εάν $\nu, \varkappa \in \Phi \geqslant 2$ καί $x_1, x_2 \cdots x_\nu$ θετικοί, νά δειχθῇ ὅτι
$\nu \Sigma x_\nu^{\varkappa+I} \geqslant \Sigma x_\nu \, \Sigma x_\nu^{\varkappa+I}$.

77) 'Εάν α_I εἶναι ὁ ἀριθμητικός μέσος τῶν x καί ψ , α_2 ὁ ἀριθμ. μέσος τῶν α_I καί ψ, α_3 ὁ ἀριθμ. μέσος τῶν α_I καί y_2 κ. ο. κ. νά δειχθῇ ὅτι $3\alpha_\nu = \left[I - \left(-\frac{I}{2}\right)^\nu\right]x + \left[2 + \left(-\frac{I}{2}\right)^\nu\right]\phi$.

78) 'Εάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $(I + x)^\nu (I + x^\nu) > 2^{\nu+I} x^\nu$.

79) Δίδεται ἡ ἀκολουθία $(x_I, x_2, x_3 \cdots x_\nu)$ ὅπου $x_I = x$, $x_2 = \left(\frac{x\psi^2 + x_I^2}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdots x_\nu = \left(\frac{x\psi^2 + x_{\nu-I}}{x+I}\right)^{\frac{1}{2}}$. Νά δειχθῇ ὅτι ἡ ἀκολουθία εἶναι φραγμένη πρός τά ἄνω, δηλ. ὑπάρχει ἀριθμός λ ὥστε διά κάθε $\nu \geqslant I$ νά εἶναι $x_\nu < \lambda$ ὅπου $\psi > x > 0$.

80) 'Εάν $\nu \in \Phi \geqslant 2$ καί $(\nu - I)\rho^2 + 2(x_I - x_\nu)\rho + x_I^2 + x_\nu^2 =$
$= 2(x_I x_2 + \cdots + x_{\nu-I} x_\nu - x_2^2 - x_3^2 - \cdots - x_{\nu-I}^2)$ νά δειχθῇ ὅτι οἱ ἀριθμοί $x_I, x_2, \cdots x_\nu$ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου μέ λόγον ρ .

8I) 'Εάν $\nu \in \Phi$ καί τεθῇ $x + \frac{I}{x} = \psi$, νά δειχθῇ ὅτι $x^\nu + \frac{I}{x^\nu}$ τίθεται ὑπό τήν μορφήν ἀκεραίου πολυωνύμου ὡς πρός ψ .

82) 'Εάν $\nu \in \varphi > I$ νά δειχθῇ ὅτι $(\nu^2 + I)^{2\nu} > \nu^{2\nu} (\nu - I)^{\nu-I} (\nu+I)^{\nu+I}$.

83) 'Εάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $(\nu!)^3 < \nu^\nu \left(\frac{\nu+I}{2}\right)^{2\nu}$.

84) 'Εάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $I.3.5 \cdots\cdots (2\nu - I) < \nu^\nu$.

85) 'Εάν $\nu \in \Phi$ καί οἱ α καί β θετικοί καί ἀκέραιοι τοιοῦτοι ὥστε δια κάθε $\alpha > \beta$ νά δειχθῇ ὅτι $\left(I + \frac{x}{\alpha}\right)^\alpha > \left(I + \frac{x}{\beta}\right)^\beta$.

86) 'Εάν $\nu \in \Phi$ ή 0 νά δειχθῆ ὅτι τό πολυώνυμον $\chi^{\nu+2} - (\nu + 2)\chi + (\nu + I)$ ἔχει διπλῆν ρίζαν .

87) 'Εάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῆ ὅτι $2^{\nu(\nu+I)} > (\nu+I)^{\nu+I}\left(\frac{\nu}{I}\right)^{\nu}\left(\frac{\nu-I}{2}\right)^{\nu-I}\cdots$ $\cdots\left(\frac{2}{\nu-I}\right)^{2}\left(\frac{I}{\nu}\right)$.

88) 'Εάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῆ ὅτι $\frac{\nu}{\nu+I} - \frac{\nu(\nu-I)}{(\nu+I)(\nu+2)} + \frac{\nu(\nu-I)(\nu-2)}{(\nu+I)(\nu+2)(\nu+3)} + \cdots$ $\cdots + \frac{\nu(\nu-I)(\nu-2)\ldots 2.I}{(\nu+I)(\nu+2)\ldots\ldots 2\nu} = \frac{I}{2}$.

89) 'Εάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῆ ὅτι :

$$1 + 2(\nu-I) + 2^{2}\frac{(\nu-2)(\nu-3)}{I\,.\,2} + 2^{3}\frac{(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)}{I.2.3} + \cdots$$
$$+ \cdots = \frac{I}{3}\left[2^{\nu+I} + (-I)^{\nu}\right].$$

90) 'Εάν $\nu \in \Phi$ καί $\alpha_\nu = (2 + \sqrt{2})^\nu + (2 - \sqrt{2})^\nu$ νά δειχθῆ ὅτι ὁ α_ν εἶναι ἄρτιος καί ὅτι $(2 + \sqrt{2})^\nu = \alpha_\nu - I$.

91) Δίδεται ἡ ἀκολουθία $U_I, U_2, \ldots U_\nu, U_{\nu+I}$, ἔνθα $\nu \in \Phi$ καί διά τήν ὁποίαν $U_{\nu+I} = \frac{I}{2}\left(U_\nu + \frac{I}{U_\nu}\right)$ καθώς καί $U_1 > I$. Νά δειχθῆ ὅτι $U_I > U_2 > \ldots U_\nu > I$, καί ὅτι $\frac{U_{\nu-I}}{U_{\nu+I}} = \left(\frac{U_I-I}{U_I+I}\right)^{2^{\nu-I}}$

92) Δίδονται οἱ ἀριθμοί $U_I, U_2, \ldots U_\nu \ldots$ ὅπου $U_I = U_2 = I$ καί $U_\nu = U_{\nu-I} - 2U_{\nu-2}$ καί $\nu \in \Phi \geqslant 3$. Νά δειχθῆ ὅτι οἱ ἀριθμοί U_ν εἶναι περιττοί .

93) 'Εάν $\nu \in \Phi$ καί α θετικός καί ἀκέραιος, νά εὑρεθῆ τό ἄθροισμα $\Sigma \frac{I}{(\alpha + \nu - I)(\alpha + \nu)}$.

94) Νά δειχθῆ ὅτι τό γινόμενον ν διαδοχικῶν φυσικῶν διαιρεῖται διά ν. .

95) Νά δειχθῆ ὅτι $(\alpha + \chi)^\nu = \alpha^\nu + \nu\alpha^{\nu-I}\chi + \frac{\nu(\nu-I)}{2!}\alpha^{\nu-2}\chi^2 + \cdots$

$\ldots + \frac{\nu(\nu-I)(\nu-2)\ldots(\nu-\rho+2)}{(\rho-I)!} \cdot \alpha^{\nu-\rho+I}\chi^{\rho-I}+\ldots+\chi^{\nu}$, ἐάν $\nu \in \Phi$.

96) 'Εά $\nu \in \Phi$ καί $1 \leqslant \nu < \alpha+I$ ἔνθα $\alpha \in A$ καί φυσικός, νά δειχθῇ ὅτι τό ἄθροισμα $\frac{I}{\nu} - \frac{I}{\nu} \cdot \frac{\alpha-\nu+I}{\nu+I} + \frac{I}{\nu} \cdot \frac{\alpha-\nu+I}{\nu+I} \cdot \frac{\alpha-\nu}{\nu+2} - \frac{I}{\nu} \cdot \frac{\alpha-\nu+I}{\nu+I} \cdot \frac{\alpha-\nu}{\nu+2} \cdot \frac{\alpha-\nu+I}{\nu+3} + \ldots$ ἐκ $\alpha-\nu+2$ ὅρων ἰσοῦται μέ $\frac{I}{\alpha+I}$

97) Δίδεται ἡ ἀκολουθία τοῦ FIBONACI $U_1, U_2, \ldots U_\nu$ ὅπο υ $U_I = U_2 = I$ καί $U_\nu = U_{\nu-I} + U_{\nu-2}$ διά κάθε ἀκέραιον $\nu \geqslant 3$. Νά ἐκφρασθῇ τό ἄθροισμα $\Sigma = U_2 + U_5 + \ldots + U_{3\nu-I}$ συναρτήσει τοῦ $U_{3\nu+I}$ τῆς ἄνω ἀκολουθίας διά κάθε ἀκέραίαν καί θετικήν τιμή ν τοῦ ν .

98) 'Εάν $U_{\nu+2} = \frac{U_{\nu+I} + U_\nu}{2}$ καί $U_I = U$, $U_2 = \frac{U+V}{2}$ τότε διά κάθε $\nu \in \Phi$ θά εἶναι $3U_\nu = U\left[I - \left(-\frac{I}{2}\right)^{\nu-I}\right] + V\left[2+\left(-\frac{I}{2}\right)^{\nu-I}\right]$

99) Εἰς τήν ἀκολουθίαν τοῦ FIBONACCI νά δειχθῇ ὅτι $U_{\nu-I}^2 + U_\nu^2 = U_{2\nu-I}$, $I + U_2U_4 + \ldots + U_{2\nu} = U_{2\nu+I}$, $U_\nu^2 - U_{\nu-I}U_{\nu+I} = (-I)^{\nu-I}$.

IOO) Οἱ φυσικοί α, β, μ, ρ, ν ἐκ τῶν ὁποίων ὁ ρ δέν εἶναι τέλειον τετράγωνον πληροῦν τάς σχέσεις $0 < \alpha - \beta\sqrt{\rho} < I$ καί $\alpha^2 - \beta^2\rho = 4\mu$. 'Εάν θέσωμεν $(\alpha + \beta\sqrt{\rho})^\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu\sqrt{\rho}$ καί συμβολίσωμεν μέ $[\chi]$ τόν μέγιστον ἀκέραιον ὁ ὁποῖος πληροῖ τήν $[\chi] \leqslant \chi$, νά δειχθῇ ὅτι $\alpha_\nu = \left[\beta_I\sqrt{\rho}\right] + I$, καί ὅτι $(\alpha + \beta\sqrt{\rho})^\nu + I$ = πολ 2^ν .

IOI) 'Εάν εἰς μίαν ἀκολουθίαν εἶναι $U_I = I$, $U_2 = 2$ καί $U_\mu = U_{\mu-I} + U_{\mu-2}$ ὅπου $\mu \in \Phi \geqslant 3$, νά δειχθῇ ὅτι $U_I^2 + U_2^2 + \ldots + U_\nu^2 = U_\nu U_{\nu+I}$, $U_3 + U_6 + \ldots + U_{3\nu} = \frac{I}{2}(U_{3\nu+2} - I)$ καί $U_I + U_3 + U_5 + \ldots$

$\dots + U_{2\nu+I} = U_{2\nu+2}$.

I02) 'Εάν $\alpha > 0$ νά δειχθῆ ὅτι εἰς τήν ἀκολουθίαν $\chi_I = \sqrt{\alpha}$, $\chi_2 = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha}}$, $\chi_3 = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha}}}$ ὑπάρχει ἀριθμός λ ὥστε διά κάθε $\nu \geqslant I$ νά εἶναι $\chi_\nu < \lambda$.

I03) Νά δειχθῆ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ν ὅρων γεωμ. προόδου δίδεται ἀπό τόν τύπον $\Sigma = \frac{\alpha(\omega^\nu - I)}{\omega - I}$, ὅπου α ὁ πρῶτος ὅρος καί ω ὁ λόγος προόδου .

I04) Δίδεται ὅτι $\alpha + \beta = \chi$, $\alpha\beta = \psi$, $A_2 = \chi - \frac{\psi}{\chi - I}$, $A_3 = \chi - \frac{\psi}{\chi - \frac{\psi}{\chi - I}}$ κ. ο. κ.. δηλαδή διά κάθε $\kappa > 1$ νά εἶναι $A_{\kappa+I} = \chi - \frac{\psi}{A_\kappa}$ $(\chi \neq I)$. Νά δειχθῆ ὅτι $A_\nu = \frac{(\alpha^{\nu+I} - \beta^{\nu+I}) - (\alpha^\nu - \beta^\nu)}{(\alpha^\nu - \beta^\nu) - (\alpha^{\nu-I} - \beta^{\nu-I})}$.

I05) 'Εάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῆ ὅτι $(\nu!)^2 > \nu^\nu$.

I06) 'Εάν $\nu \in \Phi \geqslant I$, νά δειχθῆ ὅτι :

$$\frac{\nu^2}{2} < \sum_{\nu=I}^{\nu} \nu < \frac{(\nu + I)^2}{2} .$$

I07) 'Εάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῆ ὅτι $\frac{\nu^3}{3} \sum_{\nu=I}^{\nu} \nu^2 < \frac{(\nu + I)^3}{3}$.

I08) Νά δειχθῆ ὅτι $I.2.3.\dots.\mu + \dots + (\nu - I)\,\nu\,(\nu + I)\dots$ $\dots(\nu + \mu - 2) + \nu(\nu + I)\dots(\nu + \mu - I) = \frac{\nu(\nu + I)\dots(\nu + \mu)}{\mu + I}$.

I09) 'Εάν $\nu \in \Phi \geqslant 2$ νά δειχθῆ ὅτι $\sum_{\kappa=0}^{\nu-I} (\nu - \kappa)(\kappa + I) = \frac{\nu(\nu+I)(\nu+2)}{6}$.

II0) 'Εάν $\alpha_i, \beta_i > 0$ διά $i = I, 2, \dots \nu$ καί ὄχι ἀνάλογοι μεταξύ των καί διά τούς θετικούς ἀριθμούς α, β εἶναι $\alpha + \beta = I$, νά δειχθῇ ἡ ἀνισότης $\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_\kappa\right)^{\alpha} \cdot \left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} \beta_\kappa\right)^{\beta} > \sum_{\kappa=1}^{\nu} (\alpha_\kappa^{\alpha} \beta_\kappa^{\beta})$.

III) Ἐάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῇ ὅτι :

$$1 - 3\nu + \frac{3\nu(3\nu-3)}{1.2} - \frac{3\nu(3\nu-4)(3\nu-5)}{1.2.3} + \dots = 2(-1)^{\nu}$$

II2) Ἐάν $\nu \in \varphi$ καί $\mu+\nu > 0$, νά δειχθῇ ὅτι :

$$\frac{1}{\mu+1} - \frac{\nu-1}{(\mu+1)(\mu+2)} + \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)} - \dots = \frac{1}{\mu+\nu}$$

II3) Νά δειχθῇ ὅτι $1 + \nu + \frac{\nu(\nu+1)}{1.2} + \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{1.2.3} + \dots$

$\dots = \frac{(\nu+\mu-1)!}{\nu!(\mu-1)!}$, ἔνθα μ ὁ ἀριθμός τῶν ὅρων.

II4) Νά δειχθῇ ὅτι : $\sum_{\nu=1}^{\mu} \cdot \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+\rho-1)}{\rho!} =$

$$= \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)\dots(\mu+\rho)}{(\rho+1)!}$$

II5) Ἐάν $\nu \in \Phi \geq 2$ νά δειχθῇ ὅτι $\sum_{\kappa=0}^{\nu-1} (\nu-\kappa)(\kappa+1) =$

$$= \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{6}$$

II6) Ἐάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $\sum_{\kappa=1}^{\nu-1} (\kappa+1)2^{\kappa-1} = 2^{\nu}\nu$

II7) Ἐάν $0 < \alpha < 1$ καί $\nu \in \Phi$ νά δειχθῇ ὅτι :

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{\kappa(\nu-\alpha)}{\alpha^2+\nu} < \frac{\nu(\nu+1)}{2\alpha} .$$

II8) Εἰς τήν ἀκολουθίαν τοῦ FIBONACCI νά δειχθῇ ὅτι :

α) $U_{\nu+2} - 1 = U_0 + U_1 + \dots + U_{\nu-1} + U_\nu$ β) $U_\nu^2 = U_{\nu-1}U_{\nu+1} \mp 1$.

II9) Ἐάν $U_1, U_2, U_3, \dots U_\nu \dots$ εἶναι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας τοῦ FIBONACCI καί $\chi_I, \chi_2, \ldots \chi_\nu$ οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας α, β, α+β ... εἰς τήν ὁποίαν ἕκαστος ὅρος εἶναι τό ἄθροισμα τῶν δύο προηγουμένων, νά δειχθῇ ὅτι $\chi_{\nu+I} = U_\nu \alpha + U_{\nu+I}\beta$.

I20) Δίδεται ἡ ἀκολουθία $U_0, U_I, \ldots U_\nu$ ὅπου $U_0 = I$, $U_I = I$ καί $U_\nu = U_{\nu-I} + U_{\nu-2}$, νά δειχθῇ ὅτι :

$$2U_\nu^6 - 2U_\nu^6 + (-I)^\nu = \left[2U_\nu U_{\nu-1} - (-I)^\nu\right]^3, \text{ ἐάν } \nu \geqslant 2.$$

I2I) Νά δειχθῇ διά τῆς μεθόδου τῆς τελείας ἐπαγωγῆς ὁ τύπος τοῦ MOIVRE $(\sigma\upsilon\nu\, \chi + i\, \eta\mu\, \chi)^\nu = \sigma\upsilon\nu(\nu\chi) + i\,\eta\mu(\nu\chi)$.

I22) Ἐάν $\Pi_\nu = \rho_\nu\,(\sigma\upsilon\nu\, \chi_\nu + i\,\eta\mu\,\chi_\nu)$ ἔνθα $\nu \in \Phi$ νά δειχθῇ ὅτι $\Pi_I\Pi_2\ldots\Pi_\nu = \rho_I\rho_2\ldots\rho_\nu\left[\sigma\upsilon\nu\,(\chi_I + \chi_2 + \ldots + \chi_\nu) + i\,\eta\mu(\chi_I + \chi_2 + \ldots + \chi_\nu)\right]$.

I23) Ἐάν α_ν καί β_ν εἶναι δύο θετικοί ἀριθμοί τοιοῦτοι ὥστε $\alpha_\nu = \frac{I}{2}(\alpha_{\nu-I} + \beta_{\nu-I})$ καί $\alpha_\nu\beta_\nu = \kappa^2$ ὅπου κ σταθερός καί $\nu\in\Phi$ ἤ μηδέν. Νά δειχθῇ ὅτι ἐάν α_0 καί β_0 εἶναι πρῶτοι ἄρτιοι ἑκάστης τῶν ἀκολουθιῶν αὐτῶν καί ἐάν $\alpha_0 > \beta_0$, τότε : $\alpha_{\nu-I} > \alpha_\nu > \kappa > \beta_\nu > \beta_{\nu-I}$ καί ἄν $\alpha_\nu = \kappa(I + 2\lambda_\nu)$ τότε $\lambda_\nu < \lambda_0^{2^\nu}$.

I24) Ἔστωσαν $\gamma_I, \gamma_2, \ldots \gamma_\nu$ οἱ ὅροι γεωμετρικῆς προόδου μέ θετικούς ὅρους καί λόγον μεγαλύτερον ἤ μικρότερον τῆς μονάδος. Δείξατε τότε ὅτι οἱ ὅροι μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου $\alpha_I, \alpha_2 \ldots \alpha_\nu$ τῆς ὁποίας οἱ δύο πρῶτοι ὅροι εἶναι ἴσοι μέ τούς ἀντιστοίχους των τῆς γεωμετρικῆς, δηλ. $\alpha_I = \gamma_I$, $\alpha_2 = \gamma_2$ εἶναι ἀπό τοῦ τρίτου ὅρου καί ἑφεξῆς μικρότεροι τῶν ἀντιστοίχων ὅρων τῆς γεωμετρικῆς δηλ. $\alpha_3 < \gamma_3, \ldots \alpha_\nu < \gamma_\nu$ ὅπου $\nu \geqslant 3$. Πρός τοῦτο στηριχθεῖτε εἰς τήν πρότασιν, τήν ὁποίαν ἀποδείξατε, ὅτι: " ἄν εἰς μίαν ἀναλογίαν ὁ εἷς ὅρος εἶναι μεγαλύτερος τῶν τριῶν ἄλλων, τότε τό ἄθροισμα τοῦ μεγαλυτέρου καί μικροτέρου ὅρου εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων ".

Ι25) Δίδεται ἀριθμός $F(\nu+I)=\frac{I}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{I+\sqrt{5}}{2}\right)^{\nu}-\left(\frac{I-\sqrt{5}}{2}\right)^{\nu}\right]$

ἔνθα $\nu\in\Phi$. Ἀφοῦ δειχθῇ ἡ σχέσις $F(\nu+I)=F(\nu)-F(\nu-I)$, νά δειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμός $F(\nu)$ εἶναι ἀκέραιος διά κάθε ἀκεραίαν τιμήν τοῦ ν .

Ι26) Ἐάν $\alpha,\beta,\gamma\in\Phi$ καί ὄχι καί οἱ τρεῖς ἴσοι μεταξύ των, νά δειχθῇ ὅτι : $(\alpha+\beta)^{\gamma}(\alpha+\gamma)^{\beta}(\beta+\gamma)^{\alpha}<\left[\frac{2}{3}(\alpha+\beta+\gamma)\right]^{\alpha+\beta+\gamma}$.

Ι27) Ἐάν $\alpha,\beta,\gamma,\chi>0$ καί ὄχι ὅλοι ἴσοι μεταξύ των , νά δειχθῇ ὅτι : $\alpha\chi^{\beta-\chi}+\beta\chi^{\gamma-\alpha}+\gamma\chi^{\alpha-\beta}>\alpha+\beta+\gamma$.

Ι28) Ἐάν α,β,γ εἶναι τρεῖς ἀκέραιοι, νάδειχθῇ ὅτι :

$$\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}}\cdot\beta^{\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}}\cdot\gamma^{\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}}>\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

Ι29) Νά δειχθῇ ὅτι $\frac{3}{\beta+\gamma+\delta}+\frac{3}{\gamma+\delta+\alpha}+\frac{3}{\delta+\alpha+\beta}+\frac{3}{\alpha+\beta+\gamma}>\frac{16}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$

Ι30) Ἐάν οἱ $\alpha,\beta,\gamma\ldots$ καί $\kappa,\lambda,\mu\ldots$ εἶναι ὅλοι θετικοί, νά δειχθῇ ὅτι : $\left(\frac{\kappa\alpha+\lambda\beta+\mu\gamma+\ldots}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}\right)^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}>\kappa^{\alpha}\lambda^{\beta}\mu^{\gamma}\ldots$

Ι3Ι) Ἐάν μ καί ν εἶναι θετικοί ὅπου $\mu>\nu$, νά δειχθῇ ὅτι:

$$\frac{\alpha_I^{\mu}+\alpha_2^{\mu}+\ldots+\alpha_\nu^{\mu}}{\nu}\geqslant\frac{\alpha_I^{\kappa}+\alpha_2^{\kappa}+\ldots+\alpha_\nu^{\kappa}}{\nu}\cdot\frac{\alpha_I^{\mu-\kappa}+\alpha_2^{\mu-\kappa}+\ldots+\alpha_\nu^{\mu-\kappa}}{\nu}$$

ὅπου οἱ $\alpha_I,\alpha_2\ldots\alpha_\nu$ εἶναι θετικοί ἀριθμοί ἡ δέ ἰσότης συμβαίνει ὅταν $\alpha_I=\alpha_2=\ldots=\alpha_\nu$

Ι32)

Ι32) Ἐάν $U_\nu=(3+\sqrt{5})^5$ ὅπου $\nu\in\Phi$ νά δειχθῇ ὅτι ὁ U_ν

εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha + \beta\sqrt{5}$ καί ὅτι $(3 + \sqrt{5})^\nu + I = \text{πολ } 2^\nu$.

I33) Ἐάν $\nu \in \Phi \geqslant 3$ καί ἡ ἀκολουθία $U_I, U_2, U_3 \dots$ διά τήν ὁποίαν $U_I = I$, $U_2 = 4$ καί $U_\nu - 2U_{\nu-I} + U_{\nu-2} = 2$, νά δειχθῇ ὅτι $U_\nu = \nu^2$.

I34) Ἐάν $\chi - \alpha_I$, $\chi - \alpha_2 \dots \chi - \alpha_\nu$ εἶναι θετικοί ἀριθμοί καί $\nu \in \Phi \geqslant 2$ καί $\alpha = \dfrac{\sum\limits_{\nu=I}^{\nu} \alpha}{\nu}$, νά δειχθῇ ὅτι : $\sum\limits_{\nu=I}^{\nu} \dfrac{I}{\chi - \alpha_I} \geqslant \dfrac{\nu}{\chi - \alpha}$.

I35) Ἐάν $\nu \in \Phi$ καί $2\text{συν } \vartheta = \kappa + \dfrac{I}{\kappa}$, νά δειχθῇ ὅτι :

$$2 \text{ συν}(\nu\vartheta) = U^\nu + \frac{I}{U^\nu}.$$

I36) Ἐάν δειχθῇ ὅτι $\dfrac{I}{2} \text{ εφ } \dfrac{\chi}{2} + \dfrac{1}{2^2} \text{ εφ } \dfrac{\chi}{2^2} + \dots$

$$\dots + \frac{I}{2^\nu} \text{ εφ } \frac{\chi}{2^\nu} = \frac{I}{2^\nu} \text{ εφ } \frac{\chi}{2^\nu} - \text{εφ}\chi .$$

I37) Νά δειχθῇ ὅτι $(I + i)^\nu = 2^{\frac{\nu}{2}} \left(\text{συν} \dfrac{\nu\Pi}{4} + i \text{ ημ } \dfrac{\nu\Pi}{4}\right)$.

I38) Δίδονται οἱ θετικοί ἀριθμοί α καί β, ἔνθα $\alpha < \beta$. θεωροῦμεν τήν ἀκολουθίαν τῶν ζευγῶν τῶν ἀριθμῶν $(\alpha_1, \beta_I), (\alpha_2, \beta_2) \dots$ $\dots (\alpha_\nu, \beta_\nu)$ ὅπου $\alpha_I = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $\beta_I = \sqrt{\alpha_1 \beta}$, $\alpha_2 = \dfrac{\alpha_I + \beta_I}{2}$, $\beta_2 = \sqrt{\alpha_2 \beta_I}$ κ. ο. κ. καί γενικῶς $\alpha_\nu = \dfrac{\alpha_{\nu-I} + \beta_{\nu-I}}{2}$, $\beta_\nu = \sqrt{\alpha_\nu \beta_{\nu-I}}$, ἔνθα $\alpha = \beta \text{ συν } \omega$, καί $0 < \omega < \dfrac{\Pi}{2}$. Νά δειχθῇ ὅτι :

$$\beta_\nu = \beta \text{ συν } \frac{\omega}{2} \text{ συν } \frac{\omega}{2^2} \cdot \text{ συν } \frac{\omega}{2^\nu}.$$

I39) Νά δειχθῇ ὅτι $\text{ημ}2\chi + \text{ημ}4\chi + \dots + \text{ημ}2(\nu - I)\chi =$

$$= \frac{\text{ημ } (\nu - I)\chi \text{ ημ } \nu\chi}{\text{ημ } \alpha}$$

I40) Νά δειχθῇ ὅτι $\text{συν } \chi + \text{συν } 3\chi + \text{συν } 5\chi + \dots$

$$\ldots + \sigma\upsilon\nu\,(2\nu-1)\chi = \frac{\eta\mu\, 2\nu\chi}{2\eta\mu\chi}.$$

I4I) Νά δειχθῇ ὅτι : $\eta\mu^3(3^{\nu-I}\chi)+3\eta\mu^3(3^{\nu-2}\chi)+3^2\eta\mu^3(3^{\nu-3}\chi)+\ldots$

$$\ldots+3^{\nu-I}\eta\mu^3\chi = \frac{3^{\nu}\eta\mu\chi - \eta\mu 3^{\nu}\chi}{4}.$$

I42) Νά δειχθῇ ὅτι : $\sigma\upsilon\nu 3^{\nu}\chi - 4\Big[\sigma\upsilon\nu^3(3^{\nu-I}\chi) - 3\sigma\upsilon\nu^3(3^{\nu-2}\chi) +$

$+3^2\sigma\upsilon\nu^3(3^{\nu-3}\chi) + \ldots + (-I)^{-\nu}3^{\nu-I}\sigma\upsilon\nu^3\chi\Big] = (-I)^{\nu}3^{\nu}\sigma\upsilon\nu\ \chi.$

I43) Νά δειχθῇ ὅτι : $\eta\mu^3\frac{\chi}{3} + 3\eta\mu^3\frac{\chi}{3^2} + \ldots + 3^{\nu-I}\eta\mu^3\frac{\chi}{3^{\nu}} =$

$$= \frac{I}{4}\left[3^{\nu}\eta\mu\frac{\chi}{3^{\nu}} - \eta\mu\ \chi\right].$$

I44) Ἐάν $\nu\in\Phi \geqslant 2$ οἱ δέ θετικοί ἀριθμοί α,β,γ, εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς ἤ γεωμετρικῆς ἤ ἁρμονικῆς προόδου, νά δειχθῇ ὅτι : $\alpha^{\nu} + \gamma^{\nu} > 2\beta^{\nu}$.

I45) Δίδεται ἡ ἀκολουθία $\chi_0, \chi_I, \ldots, \chi_{\nu}$ διά τήν ὁποίαν $\chi_{\nu+I} = \alpha\chi_{\nu} + \beta\chi_{\nu-I}$ διά κάθε φυσικόν ν . Ἄν ὁ $\frac{\chi_I}{\chi_0}$ ὅπου $\chi_0 \neq 0$ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως $\psi^2 - \alpha\psi - \beta = 0$, τότε ἡ ἀκολουθία εἶναι γεωμετρική πρόοδος.

I46) Νά δειχθῇ ὅτι τό γινόμενον $(\chi^{\mu}-I)(\chi^{\mu-I}-I)\ldots(\chi^{\mu+\rho-I}-I)$ εἶναι διαιρετόν διά $(\chi-I)(\chi^2-I)\ldots(\chi^{\rho}-I)$.

I47) Ἐάν $\nu\in\Phi$ καί $\varkappa$ ἀκέραιος, νά δειχθῇ ὅτι :

$$\frac{\nu^{\varkappa+I}}{\varkappa+I} < I^{\varkappa}+2^{\varkappa}+\ldots+\nu^{\varkappa} < \frac{(\nu+I)^{\varkappa+I}}{\varkappa+I}.$$

I48) Ἐάν $\nu\in\Phi$, νά δειχθῇ ὅτι :

α) $\frac{\nu^3}{3} < I.2 + 2.3 + \ldots + \nu(\nu+I) < \frac{2(\nu+I)^3}{3}$

β) $\frac{\nu^4}{4} < I.2.3 + 2.3.4 + \ldots + \nu(\nu+I)(\nu+2) < \frac{3}{2}(\nu+I)^4$.

I49) Εἰς τήν ἀκολουθίαν $\chi_I, \chi_2, \ldots \chi_{\nu}$ $(\nu\in\Phi \geqslant 3)$ ὑφίσταται ἡ σχέσις διά τῶν $\chi_I=\chi_2=I$ καί $\chi_{\nu} = \chi_{\nu-I}+\chi_{\nu-2}$. Νά δειχθῇ ὅτι :

I) $\chi_{2\nu+3}+\chi_{\nu}\cdot\chi_{\nu+3} = 2\chi_{\nu+2}^2$, 2) $\chi_{2\nu+3}-\chi_{\nu}\cdot\chi_{\nu+3} = 2\chi_{\nu+I}^2$,

3) $\chi_{\nu}^2\cdot\chi_{\nu+3}^2 + 4\chi_{\nu+I}^2\cdot\chi_{\nu+2}^2 = \chi_{2\nu+3}^2$.

I50) 'Εάν εἰς μίαν ἀκολουθίαν ἀριθμῶν $x_0, x_I, x_2 \ldots x_\nu$ ὑφίσταται ἡ σχέσις $x_I x_{\nu-I} + x_2 x_{\nu-2} + \ldots + x_{\nu-I} x_\nu = (\nu-I) x_0 x_I$ ὅπου $\nu \in \Phi \geqslant 2$ τότε ἡ ἀκολουθία εἶναι γεωμετρική πρόοδος.

I5I) 'Εάν $\nu \in \Phi$ νά δειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμός $(I-\sqrt{2})^2 + (I+\sqrt{2})^2$ εἶναι σύμμετρος .

I52) 'Εάν οἱ $x_I, x_2, \ldots x_\nu$ ἀποτελοῦν ἁρμονικήν πρόοδον, νά δειχθῇ ὅτι $x_I x_2 + x_2 x_3 + \ldots + x_{\nu-I} x_\nu = (\nu-I) x_I x_\nu$.

I53) 'Εάν οἱ x_I, x_2, x_3 εἶναι θετικοί καί ἄνισοι εἶναι δέ $x_I + x_2 + x_3 = I$, νά δειχθῇ ὅτι $\left(\frac{I}{x_I} - I\right)\left(\frac{I}{x_2} - I\right)\left(\frac{I}{x_3} - I\right) \geqslant 8$.

I54) Δίδεται ἡ ἀκολουθία $x_I, x_2 \ldots x_\nu$ διά τήν ὁποίαν $x_I = \alpha$ καί $x_2 = \beta$ καί $2x_{\nu+2} = x_\nu + x_{\nu+I}$ ὅπου $\nu \in \Phi$. Νά δειχθῇ ὅτι:

$$x_\nu = \beta + (\beta - \alpha)\left[-\frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{\nu-I} - \frac{I}{3}\right].$$

I55) 'Εάν $\alpha_I, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ εἶναι αἱ θετικαί γωνίαι τοιαῦται ὥστε: $\alpha_I + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu < \frac{\Pi}{2}$, νά δειχθῇ ὅτι:

$$\eta\mu(\alpha_I + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu) < \eta\mu\alpha_I + \eta\mu\alpha_2 + \ldots + \eta\mu\alpha_\nu \quad .$$

I56) Νά δειχθῇ ὅτι $\eta\mu\frac{\Pi}{\nu}\eta\mu\frac{2\Pi}{\nu}\eta\mu\frac{3\Pi}{\nu}\ldots\eta\mu\frac{(\nu-I)\Pi}{\nu} = \frac{\nu}{2^{\nu-1}}$ ἐάν $\nu \in \Phi$.

157) 'Εάν $\nu \in \Phi$, νά δειχθῇ ὅτι $\sigma\upsilon\nu\frac{\Pi}{2\nu+I} + \sigma\upsilon\nu\frac{3\Pi}{2\nu-I} + \ldots$
$\ldots + \frac{(\nu+2)\Pi}{2\nu+I} = \frac{I}{2}$.

I58) 'Εάν $\nu \in \Phi$, νά δειχθοῦν αἱ κάτωθι ἰσότητες :

α) $\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha \cdot \eta\mu 3\alpha + \ldots + \eta\mu(\nu\alpha) \cdot \eta\mu(\nu+I)\alpha = \frac{(\nu+I)\eta\mu 2\alpha - \eta\mu(2\nu+2\alpha)}{4\eta\mu\alpha}$.

β) $\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu 3\alpha + \ldots + \eta\mu 2\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu(2\nu+I)\alpha = \frac{\eta\mu(2\nu+2)\alpha\eta\mu 2\nu\alpha}{2\eta\mu\alpha}$.

γ) $\eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2 2\alpha + \ldots + \eta\mu^2 \nu\alpha = \frac{(2\nu+I)\eta\mu\alpha - \eta\mu(2\nu+I)\alpha}{4\eta\mu\alpha}$.

δ) $I + \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} + \ldots + \frac{\sigma\upsilon\nu(\nu-I)\alpha}{\sigma\upsilon\nu^{\nu-I}\alpha} = \frac{\eta\mu\nu\alpha}{\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^{\nu-I}\alpha}$.

ε) $\frac{\eta\mu 3\alpha}{\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu^2 2\alpha} + \frac{\eta\mu 6\alpha}{\eta\mu 2\alpha \cdot \eta\mu^2 4\alpha} + \ldots$ ἐκ ν ὅρων $= \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\eta\mu^2\alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu 2^{\nu+I}\alpha}{\eta\mu^2 2^\nu\alpha}$.

στ) $\nu\sigma\upsilon\nu\alpha + (\nu-I)\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \ldots + 2\sigma\upsilon\nu(\nu-I)\alpha + \sigma\upsilon\nu\ \nu\alpha = -\frac{\nu}{2} + \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu(\nu+I)\alpha}{4\eta\mu\frac{2\alpha}{\nu}}$

ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΙΔΙΟΥ

1) ***Προβλήματα Πρακτικῆς Γεωμετρίας.*** Πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Γυμνασίων καὶ τῶν Τεχνικῶν Σχολῶν καὶ τῶν ὑποψηφίων τῶν Σχολῶν Ἐμποροπλοιάρχων, Ἀσυρματιστῶν, ΣΤΥΑ.
2) ***Λογισμός. (Ἀριθμητικὸς — Ἀλγεβρικὸς — Τριγωνομετρικός).*** Πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Γυμνασίων, καὶ δὴ τῶν ὑποψηφίων τῆς Σχολῆς Δοκίμων.
3) ***Γεωμετρία (Βιβλία Α—Β).*** Πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Λυκείων, καὶ τῶν ὑποψηφίων διὰ τὸ Ἀκαδημαϊκὸν Ἀπολυτήριον Β' τύπου.

ΥΠΟ ΕΚΔΟΣΙΝ

1) ***Φροντιστηριακὰ Θέματα Ἀλγέβρας.*** Τεῦχος Β. (Διαιρετότης, Πολυώνυμα).
2) ***Γενικαὶ Ἀσκήσεις Ἀλγέβρας.***
3) ***Γενικαὶ Ἀσκήσεις Τριγωνομετρίας.***
4) ***Ἀναλυτικὴ Γεωμετρία. — Διανυσματικὸς Λογισμός.***