ΑΛΚΙΝΟΟΥ Ε. ΜΑΖΗ

ΛΥΣΕΙΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ ΕΙΣ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟΝ "ΦΥΣΙΚΗ" ΤΟΥ Ο.Ε.Σ.Β.

ΔΙΑ ΤΗΝ Ε' ΤΑΞΙΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΡΙΤΗ

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ"
ΣΤΑΔΙΟΥ 38
ΑΘΗΝΑΙ 1963

ΑΛΚΙΝΟΟΥ Ε. ΜΑΖΗ

ΛΥΣΕΙΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΦΥΣΙΚΗΣ

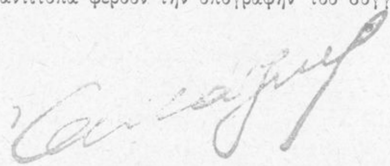
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ ΕΙΣ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟΝ "ΦΥΣΙΚΗ" ΤΟΥ Ο.Ε.Σ.Β.

ΔΙΑ ΤΗΝ Ζ' ΤΑΞΙΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΡΙΤΗ

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ"
ΙΩΑΝΝΟΥ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & ΣΙΑΣ Α.Ε.
38 ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ 38
ΑΘΗΝΑΙ 1962

Τὰ γνήσια ἀντίτυπα φέρουν τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.



ΕΚΔΟΣΙΣ ΜΕ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑΝ: ΚΑΡ. Ε. ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ

Ἐκτύπωσις ὑπό : Ἀδελφῶν Γ. Ρόδη, Κεραμεικοῦ 40 — Ἀθῆναι

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟΝ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Ἡ διδασκαλία τῆς Φυσικῆς ἔχει τεραστίαν μορφωτικὴν σημασίαν. Στηριζομένη εἰς τὸ πείραμα ὁδηγεῖ τὸν μαθητὴν εἰς τὴν ἀποκάλυψιν τῶν νόμων ποὺ διέπουν τὰ φαινόμενα τοῦ Σύμπαντος. Ἡ ἐκμετάλλευσις τῶν νόμων τούτων φέρει συνεχῶς τὴν ἀνθρωπότητα πρὸς νέους τρόπους ζωῆς.

Ὁ μαθητὴς τῆς Ζ' τάξεως θὰ ἐπιτύχῃ νὰ μάθῃ ἀνέτως τὴν Φυσικὴν τὴν διδασκομένην εἰς τὸ Γυμνάσιον καὶ θὰ ἐπιτύχῃ νὰ θέσῃ ἀσφαλεῖς βάσεις δι' εὐρυτέραν ἀπασχόλησίν του μὲ τὰς θετικὰς Ἐπιστήμας, ἂν ἐξ ἀρχῆς προσέξῃ ὡρισμένα βασικὰ στοιχεῖα τῆς διδασκαλίας τῆς Φυσικῆς. Οὕτω πρέπει πρῶτον νὰ ἐξοικειωθῇ μὲ τὴν μέθοδον, ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται κατὰ τὴν σπουδὴν τῶν φυσικῶν φαινομένων. Ἐπὶ πλέον πρέπει νὰ φροντίσῃ νὰ κατανοῇ πλήρως τὴν ἑκάστοτε διδασκομένην ὕλην ἐκ τῆς Φυσικῆς. Ἡ πλήρης κατανόησις καὶ ἡ ἐμπέδωσις τῆς διδαχθείσης ὕλης ἐπιτυγχάνεται ἀπολύτως μὲ τὴν μελέτην τῆς διδαχθείσης ὕλης ἐκ τοῦ διδακτικοῦ βιβλίου. Κατὰ τὴν μελέτην αὐτὴν πρέπει νὰ δοθῇ ἰδιαιτέρα προσοχὴ εἰς τὸν τρόπον τῆς φραστικῆς διατυπώσεως τῶν συλλογισμῶν, τῶν περιγραφῶν πειραμάτων ἢ τῆς διατυπώσεως ὁρισμῶν, νόμων, μονάδων κλπ. Μόνον μὲ τὴν προσεκτικὴν μελέτην ἐπιστημονικοῦ κειμένου θὰ ἀποκτήσῃ ὁ μαθητὴς τὴν ἱκανότητα νὰ χρησιμοποιῇ ὀρθὴν ἐπιστημονικὴν ἔκφρασιν καὶ τὴν ἀπαραίτητον ἱκανότητα νὰ διατυπώνῃ τὰς σκέψεις του μὲ συντομίαν, σαφήνειαν καὶ ἀκριβολογίαν.

Ἀπεδείχθη ὅτι ἡ βαθυτέρα κατανόησις τῶν φυσικῶν φαινομένων καὶ ἡ ἐμπέδωσις τῶν ἐννοιῶν τῆς Φυσικῆς ἐπιτυγχάνεται μὲ τὴν λύσιν καταλλήλων προβλημάτων. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον ἡ διδασκαλία τῆς Φυσικῆς συνοδεύεται ἀπαραιτήτως καὶ μὲ προβλήματα. Κατὰ τὴν λύσιν ἑνὸς προβλήματος ἐπιτυγχάνεται ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐμπέδωσις τῶν γνώσεών μας καὶ ἀφ' ἑτέρου ἔλεγχος τῶν γνώσεών μας.

Διὰ νὰ ἀποκτηθῇ ἡ ἱκανότης λύσεως τῶν προβλημάτων Φυσικῆς, πρέπει νὰ ἐξοικειωθῇ ἡ σκέψις μὲ τὴν μέθοδον, τὴν ὁποίαν ἐφαρμόζει ἡ Φυσικὴ κατὰ τὴν ἔρευναν τῶν φυσικῶν φαινομένων καὶ ἐπὶ πλέον πρέπει νὰ ἔχουν μελετηθῇ μὲ προσοχὴν ἐκ τοῦ διδακτικοῦ βιβλίου καὶ νὰ εἶναι τελείως γνωστὰ τὰ φαινόμενα εἰς τὰ ὁποῖα ἀναφέρεται τὸ πρόβλημα. Ἡ ἁπλῆ ἀπομνημόνευσις τῆς ἀλγεβρικῆς ἐκφράσεως τῶν νόμων τῆς Φυσικῆς δὲν ἐξασφαλίζει τὴν ἀπόκτησιν τῆς ἱκανότητος λύσεως προβλημάτων Φυσικῆς. Κάθε πρόβλημα Φυσικῆς ἀναφέρεται εἰς ἕνα ἢ περισσότερα φαινόμενα. Ἡ λύσις λοιπὸν ἑνὸς προβλήματος Φυσικῆς πρέπει νὰ περιλαμβάνῃ σειρὰν ὀρθῶν συλλογισμῶν, οἱ ὁποῖοι βασίζονται εἰς τὰς γνώσεις ἐπὶ τῶν φαινομένων, τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται εἰς τὸ πρόβλημα. Ἐξαιρετικῶς ἰδιαιτέρα προσοχὴ πρέπει νὰ δίδεται πάντοτε εἰς τὰς μονάδας μὲ τὰς ὁποίας θὰ μετρηθοῦν τὰ διάφορα φυσικὰ μεγέθη, τὰ ὁποῖα ὑπεισέρχονται εἰς τὸ ἐξεταζόμενον πρόβλημα.

Ἕνα πρόβλημα Φυσικῆς εἶναι πολλάκις δυνατὸν νὰ λυθῇ κατὰ διαφόρους τρόπους. Πρέπει ὅμως νὰ προτιμᾶται πάντοτε ἐκεῖνος ὁ τρόπος, ὁ ὁποῖος εἶναι ταχύτερος καὶ περιορίζει τοὺς κινδύνους σφαλμάτων. Εἰς τὸ ἀνὰ χεῖρας βιβλίον ὑποδεικνύονται τρόποι λύσεως τῶν προβλημάτων, τὰ ὁποῖα περιέχονται εἰς τὸ βιβλίον μου « ΦΥΣΙΚΗ » διὰ τὴν Ζ′ τάξιν τοῦ Γυμνασίου. Τὸ ἀνὰ χεῖρας βιβλίον ἐγράφη διὰ νὰ βοηθήσῃ τὸν μαθητὴν τῆς Ζ′ τάξεως νὰ ἐξοικειωθῇ μὲ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς Φυσικῆς. Διὰ νὰ ἐπιτευχθῇ ὅμως ὁ σκοπὸς αὐτὸς τοῦ βιβλίου πρέπει νὰ τηρηθῇ ἡ ἀκόλουθος σειρὰ ἐργασίας : Κατ' ἀρχὰς ὁ μαθητὴς θὰ προσπαθήσῃ νὰ λύσῃ μόνος του τὸ πρόβλημα. Ἂν ἐπιτύχῃ λύσιν, τότε θὰ συγκρίνῃ αὐτὴν μὲ τὴν λύσιν, ἡ ὁποία ὑποδεικνύεται εἰς τὸ ἀνὰ χεῖρας βιβλίον. Οὕτω ὁ μαθητὴς θὰ ἐξακριβώσῃ, ἂν οἱ συλλογισμοί, τοὺς ὁποίους ἔκαμεν, εἶναι ὀρθοὶ καὶ πλήρεις. Ἂν ὅμως δὲν κατορθώσῃ νὰ ἐπιτύχῃ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, τότε θὰ ἀναζητήσῃ εἰς τὴν ὑποδεικνυομένην λύσιν τὰ σημεῖα ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα ἀπέτυχεν ἡ προσπάθειά του. Συνήθως ἡ ἀποτυχία ὀφείλεται εἰς ἄγνοιαν ἢ εἰς ἐλλιπῆ κατανόησιν τμημάτων τῆς διδαχθείσης ὕλης. Τότε ὁ μαθητὴς πρέπει νὰ ἀνατρέξῃ εἰς τὸ διδακτικὸν βιβλίον, διὰ νὰ συμπληρώσῃ τὰς γνώσεις του καὶ ἔπειτα νὰ λύσῃ ἐκ νέου τὸ πρόβλημα.

Τὸ παρὸν βιβλίον, ἂν χρησιμοποιηθῇ καταλλήλως, δύναται νὰ ἀποβῇ πολύτιμον βοήθημα. Διότι μὲ τὸ βιβλίον τοῦτο ὁ μαθητὴς εἶναι εἰς θέσιν νὰ ἐξακριβώνῃ, πρὸ τῆς ἐξετάσεώς του εἰς τὴν τάξιν, τὴν ὀρθότητα καὶ τὴν πληρότητα τῶν γνώσεών του ἐκ τῆς Φυσικῆς.

Ἀθῆναι, Σεπτέμβριος 1955

Ὁ συγγραφεὺς

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1

Εἶναι γνωστὸν ὅτι εἶναι:

$$1\ \text{m} = 100\ \text{cm} = 1000\ \text{mm} \quad \text{καὶ} \quad 1\ \text{cm} = 10\ \text{mm}.$$

Ἄρα τὰ διδόμενα μήκη, ἂν ἐκφρασθοῦν εἰς mm, εἶναι:

$$7\ \text{cm} = \mathbf{70\ mm} \qquad 14{,}2\ \text{cm} = \mathbf{142\ mm}$$
$$\text{καὶ} \quad 1{,}07\ \text{m} = \mathbf{1070\ mm}$$

2

Τὰ διδόμενα μήκη ἐκφραζόμενα εἰς cm εἶναι:

$$2{,}04\ \text{m} = \mathbf{204\ cm}$$
$$3{,}4\ \text{km} = 3{,}4 \cdot 10^3\ \text{m} = 3{,}4 \cdot 10^5\ \text{cm} = \mathbf{340\ 000\ cm}$$
$$300\ 000\ \text{km} = 3 \cdot 10^8\ \text{m} = \mathbf{3 \cdot 10^{10}\ cm}$$

3

Εἶναι γνωστὸν ὅτι εἶναι:

$$1\ \text{m}^2 = 10^4\ \text{cm}^2 = 10^6\ \text{mm}^2 \quad \text{καὶ} \quad 1\ \text{cm}^2 = 10^2\ \text{mm}^2.$$

Ἄρα τὰ διδόμενα ἐμβαδὰ ἐπιφανειῶν ἐκφραζόμενα εἰς cm^2 εἶναι:

$$4\ \text{mm}^2 = \mathbf{0{,}04\ cm^2}$$
$$1{,}07\ \text{m}^2 = 1{,}07 \cdot 10^4\ \text{cm}^2 = \mathbf{10\ 700\ cm^2}$$

4

Εἶναι γνωστὸν ὅτι εἶναι:

$$1\ \text{m}^3 = 10^3\ \text{dm}^3 = 10^6\ \text{cm}^3 \quad \text{καὶ} \quad 1\ \text{cm}^3 = 10^3\ \text{mm}^3.$$

Ἄρα οἱ διδόμενοι ὄγκοι ἐκφραζόμενοι εἰς cm^3 εἶναι:

$$87\ \text{mm}^3 = \mathbf{0{,}087\ cm^3} \qquad 6\ \text{dm}^3 = \mathbf{6 \cdot 10^3\ cm^3}$$
$$3{,}2\ \text{m}^3 = 3{,}2 \cdot 10^6\ \text{cm}^3 = \mathbf{32 \cdot 10^5\ cm^3}$$

5

Γνωρίζομεν ὅτι γωνία 180^0 ἰσοῦται μὲ π rad. Ἄρα ἂν ἐκφρασθοῦν εἰς ἀκτίνια αἱ διδόμεναι γωνίαι, εὑρίσκομεν:

$$1^0 = \frac{\pi}{180^0} \text{ rad} = \mathbf{0{,}0175\ rad}$$

$$18^0 = \frac{\pi \cdot 18^0}{180^0} = \frac{\pi}{10} \text{ rad} = \mathbf{0{,}314\ rad}$$

$$60^0 = \frac{\pi \cdot 60^0}{180^0} = \frac{\pi}{3} \text{ rad} = \mathbf{1{,}047\ rad}$$

$$120^0 = \frac{\pi \cdot 120^0}{180^0} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad} = \mathbf{2{,}093\ rad}$$

$$135^0 = \frac{\pi \cdot 135^0}{180^0} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad} = \mathbf{2{,}355\ rad}$$

$$30' = 0{,}5^0 = 0{,}5 \cdot \frac{\pi}{180^0} \text{ rad} = \mathbf{0{,}0087\ rad}$$

6

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ μᾶζα (m) καὶ τὸ βάρος (B) ἑνὸς σώματος ἐκφράζονται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ὅταν ἡ μᾶζα εἶναι μετρημένη εἰς gr (ἢ kgr) καὶ τὸ βάρος εἶναι μετρημένον εἰς gr * (ἢ kgr *). Ὥστε ἕνα σῶμα τὸ ὁποῖον:

ἔχει βάρος $B = 2{,}17$ kgr *
ἔχει μᾶζαν $m = 2{,}17$ kgr = **2170 gr**
Ἐπίσης ἕνα σῶμα τὸ ὁποῖον:
ἔχει βάρος $B = 0{,}06$ kgr *
ἔχει μᾶζαν $m = 0{,}06$ kg = **60 gr**

7

Γνωρίζομεν ὅτι διὰ τὴν μέτρησιν τῶν δυνάμεων χρησιμοποιοῦμεν εἴτε τὰς πρακτικὰς μονάδας 1 gr * ἢ 1 kgr *, εἴτε τὴν μονάδα δυνάμεως C.G.S. δηλαδὴ τὴν 1 dyn. Ἐπίσης γνωρίζομεν ὅτι εἶναι :

$$1 \text{ gr}^* = 981 \text{ dyn} \quad \text{καὶ} \quad 1 \text{ kgr}^* = 981 \cdot 10^3 \text{ dyn}$$

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω ἔχομεν:

$$B = 600 \text{ gr}^* = 600 \cdot 981 = \mathbf{588\,600 \text{ dyn}}$$

$$B = 1{,}5 \text{ kgr}^* = 1{,}5 \cdot 981 \cdot 10^3 = \mathbf{1471{,}5 \cdot 10^3 \text{ dyn}}$$

8

Ἂν B εἶναι τὸ βάρος ἑνὸς σώματος καὶ V ὁ ὄγκος του, τότε τὸ εἰδικὸν βάρος ρ τοῦ σώματος (δηλαδὴ τὸ βάρος τοῦ σώματος κατὰ μονάδα ὄγκου) ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον:

$$\rho = \frac{B}{V} \qquad (1)$$

Δίδεται ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑδραργύρου εἶναι: $\rho = 13{,}6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$ καὶ ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ὑδραργύρου εἶναι $V = 1{,}4 \text{ dm}^3 = 1400 \text{ cm}^3$. Ἂν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (1) ὡς πρὸς B, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ βάρος τοῦ σώματος εἶναι:

$$B = V \cdot \rho = 1400 \cdot 13{,}6 \left(\text{cm}^3 \cdot \frac{\text{gr}^*}{\text{cm}^3}\right) = 19\,040 \text{ gr}^*$$

ἤτοι $\quad B = \mathbf{19{,}04 \text{ kgr}^*}$

Σημείωσις. Ἡ ἔννοια τοῦ εἰδικοῦ βάρους πρέπει νὰ κατανοηθῇ σαφῶς. Δηλαδή, ὅταν δίδεται ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑδραργύρου εἶναι $\rho = 13{,}6 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$, πρέπει χωρὶς κανένα δισταγμὸν νὰ ἐννοοῦμεν ὅτι 1 cm^3 ὑδραργύρου ἔχει βάρος $13{,}6 \text{ gr}^*$. Συνεπῶς ἕνας ὄγκος ὑδραργύρου $V = 1400 \text{ cm}^3$ θὰ ἔχῃ βάρος ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ εἰδικοῦ βάρους ἐπὶ τὸν ὄγκον τοῦ σώματος, ἤτοι θὰ εἶναι:

$$B = 13{,}6 \cdot 1400 = 19\,040 \text{ gr}^*$$

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι, ἂν κατανοηθοῦν σαφῶς ὡρισμέναι ἔννοιαι, τότε δὲν εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ περιορίζωμεν πάντοτε τὴν σκέψιν μας εἰς ἐξισώσεις.

9

Τὸ σῶμα ἔχει μᾶζαν $m = 6{,}2 \text{ kgr} = 6\,200 \text{ gr}$. Γνωρίζομεν ὅτι τὸ βάρος B τοῦ σώματος μετρημένον εἰς kgr* ἢ gr* ἐκφράζεται μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμόν, μὲ τὸν ὁποῖον ἐκφράζεται καὶ ἡ μᾶζα τοῦ σώματος μετρημένη εἰς kgr ἢ gr. Ἄρα εἰς gr* τὸ βάρος τοῦ σώματος εἶναι :

$$B = \mathbf{6\,200 \text{ gr}^*}$$

Ἐπειδὴ γνωρίζομεν ὅτι $1 \text{ gr}^* = 981 \text{ dyn}$, ἕπεται ὅτι εἰς dyn τὸ βάρος τοῦ σώματος εἶναι :

$$B = 6\,200 \cdot 981 = \mathbf{6\,082\,200 \text{ dyn}}$$

10

Ἡ πυκνότης d τοῦ ὕδατος εἶναι $d = 1\ gr/cm^3$. Ἄρα τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος εἶναι $\rho = 1\ gr^*/cm^3$ (διότι ἡ πυκνότης καὶ τὸ εἰδικὸν βάρος ἐκφράζονται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ὅταν τὸ εἰδικὸν βάρος μετρῆται εἰς gr^*/cm^3). Ὁ ὄγκος τοῦ ὕδατος εἶναι $V = 1\ m^3 = 10^6\ cm^3$. Ἄρα τὸ βάρος Β τοῦ $1\ m^3$ ὕδατος εἶναι:

$$B = V \cdot \rho = 10^6 \cdot 1 \left(cm^3 \cdot \frac{gr^*}{cm^3}\right) = \mathbf{10^6\ gr^*}$$

Εἰς kgr^* τὸ βάρος τοῦ $1\ m^3$ ὕδατος εἶναι:

$$B = 10^6 : 10^3 = 10^3\ kgr^* = \mathbf{1000\ kgr^*}$$

Σ η μ ε ί ω σ ι ς. Εἰς πολλὰ θέματα τῆς Φυσικῆς ὑπεισέρχεται τὸ ὕδωρ καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἀπαραίτητον νὰ δυνάμεθα νὰ ἐκτελοῦμεν ἁπλοὺς συλλογισμοὺς ἀναφερομένους εἰς τὸν ὄγκον, τὴν μᾶζαν καὶ τὸ βάρος τοῦ ὕδατος. Οὕτω πρέπει νὰ γνωρίζωμεν ὅτι:

ὄγκος $1\ cm^3$ ὕδατος ἔχει μᾶζαν $1\ gr$ καὶ βάρος $1\ gr^*$
ὄγκος $1\ dm^3$ ὕδατος ἔχει μᾶζαν $1\ kgr$ καὶ βάρος $1\ kgr^*$
ὄγκος $1\ m^3$ ὕδατος ἔχει μᾶζαν $1\ tn$ καὶ βάρος $1\ tn^*$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ὄγκος, ἡ μᾶζα καὶ τὸ βάρος τοῦ ὕδατος ἐκφράζονται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ὅταν ἐκλεγοῦν καταλλήλως αἱ μονάδες ὄγκου, μάζης καὶ βάρους. Οὕτω π.χ. ὕδωρ ἔχον βάρος $8{,}7\ kgr^*$, ἔχει μᾶζαν $8{,}7\ kgr$ καὶ ὄγκον $8{,}7\ dm^3$ (λίτρα).

11

Τὸ βάρος Β τοῦ σώματος εἰς kgr^*, gr^* καὶ dyn εἶναι:

$$B = 2{,}5\ tn^* = 2{,}5 \cdot 10^3\ kgr^* = \mathbf{2\,500\ kgr^*}$$

$$B = 2\,500\ kgr^* = 2500 \cdot 10^3\ gr^* = \mathbf{2{,}5 \cdot 10^6\ gr^*}$$

$$B = 2{,}5 \cdot 10^6\ gr^* = 2{,}5 \cdot 10^6 \cdot 981\ dyn = \mathbf{2\,452{,}5 \cdot 10^6\ dyn}$$

Ἡ μᾶζα m τοῦ σώματος τούτου εἶναι :

$$m = \mathbf{2\,500\ kgr} \quad \text{ἤ} \quad m = \mathbf{2{,}5 \cdot 10^6\ gr}$$

12

Τὸ σῶμα ἔχει βάρος $B = 88\ gr^*$, ἄρα ἡ μᾶζα τοῦ σώματος τούτου εἶναι $m = 88\ gr$. Τὸ σῶμα ἔχει ὄγκον $V = 10\ cm^3$. Γνωρίζομεν ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος ρ τοῦ σώματος καὶ ἡ πυκνότης d τοῦ σώματος εὑρίσκονται ἀπὸ τὰς σχέσεις:

$$\rho = \frac{B}{V} \quad \text{καὶ} \quad d = \frac{m}{V}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μὲν εἰδικὸν βάρος τοῦ σώματος εἶναι:

$$\rho = \frac{B}{V} = \frac{88}{10}\left(\frac{gr^*}{cm^3}\right) = \mathbf{8{,}8\ gr^*/cm^3}$$

ἡ δὲ πυκνότης τοῦ σώματος εἶναι:

$$d = \frac{m}{V} = \frac{88}{10}\left(\frac{gr}{cm^3}\right) = \mathbf{8{,}8\ gr/cm}$$

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

1. ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

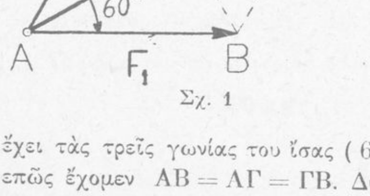
I. Δυνάμεις ἐφηρμοσμέναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου

13

α) Ὅταν αἱ δύο ἴσαι δυνάμεις $F_1 = F_2 = 8$ kgr* ἔχουν τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς, ἐνεργοῦν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν, τότε ἡ συνισταμένη των Σ ἰσοῦται μὲ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα αὐτῶν, ἤτοι εἶναι:

$$\Sigma = F_1 + F_2 = 8 + 8 = \mathbf{16\ kgr^*}$$

β) Ὅταν αἱ δύο ἴσαι δυνάμεις F_1 καὶ F_2 σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν 60^o (σχ. 1), τότε ἡ συνισταμένη των Σ ἰσοῦται μὲ τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα αὐτῶν, δηλαδὴ εἶναι ἡ διαγώνιος ΑΔ τοῦ ρόμβου, ὁ ὁποῖος ἔχει πλευρὰς τὰς δοθείσας δυνάμεις. Ἐκ τῆς Γεωμετρίας γνωρίζομεν ὅτι ἑκάστη τῶν γωνιῶν Γ καὶ Β τοῦ ρόμβου τούτου εἶναι ἴση μὲ 120^o καὶ ὅτι ἡ διαγώνιος ΓΒ τέμνει καθέτως καὶ εἰς τὸ μέσον της Μ τὴν διαγώνιον ΑΔ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει τὰς τρεῖς γωνίας του ἴσας (60^o), ἄρα εἶναι ἰσόπλευρον καὶ συνεπῶς ἔχομεν ΑΒ = ΑΓ = ΓΒ. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν διαγώνιον ΑΔ, ἀρκεῖ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΜ, ἡ ὁποία ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΔ. Ἡ εὐθεῖα ΑΜ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἑπομένως ἔχομεν:



Σχ. 1

$$(AM)^2 = (AB)^2 - (BM)^2 \quad \text{ἢ} \quad (AM)^2 = (AB)^2 - \left(\frac{B\Gamma}{2}\right)^2$$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι $B\Gamma = AB$, ἔχομεν:

$$(AM)^2 = (AB)^2 - \frac{(AB)^2}{4} \quad \text{ἢ} \quad (AM)^2 = \frac{3 \cdot (AB)^2}{4}$$

Ὥστε ἡ AM εἶναι: $AM = \frac{AB}{2} \cdot \sqrt{3}$

καὶ συνεπῶς ἡ διαγώνιος ΑΔ εἶναι:

$$A\Delta = 2 \cdot AM \quad \text{ἢ} \quad A\Delta = AB \cdot \sqrt{3}$$

Ἡ συνισταμένη λοιπὸν $\Sigma = A\Delta$ τῶν δύο ἴσων δυνάμεων F_1 καὶ F_2 εἶναι:

$$\Sigma = F_1 \cdot \sqrt{3} = 8 \cdot \sqrt{3} \text{ kgr*} \quad \text{ἢ} \quad \Sigma = \mathbf{13{,}84\ kgr*}$$

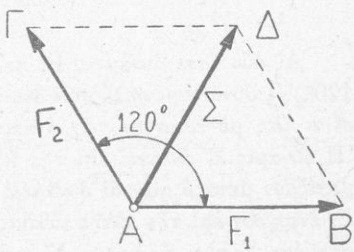
γ) Ὅταν αἱ δύο ἴσαι δυνάμεις F_1 καὶ F_2 σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν 90° (κατασκευάσατε τὸ σχῆμα), τότε ἡ συνισταμένη των Σ ἰσοῦται μὲ τὴν διαγώνιον τοῦ τετραγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν ἴσην μὲ τὴν δύναμιν F_1. Ἄρα εἶναι:

$$\Sigma^2 = F_1^2 + F_2^2 = 64 + 64 = 2 \cdot 64$$

καὶ $\Sigma = 8 \cdot \sqrt{2}$ kgr* ἢ $\Sigma = \mathbf{11{,}28\ kgr*}$

δ) Ὅταν αἱ δύο ἴσαι δυνάμεις F_1 καὶ F_2 σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν 120° (σχ. 2), τότε ἡ συνισταμένη των Σ ἰσοῦται μὲ τὴν διαγώνιον ΑΔ ἑνὸς ρόμβου. Τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ἔχει τὰς τρεῖς γωνίας του ἴσας (60°), ἄρα εἶναι ἰσόπλευρον καὶ συνεπῶς ἔχομεν:

$$A\Delta = AB$$



Σχ. 2

Ὥστε ἡ συνισταμένη Σ τῶν δύο δυνάμεων F_1 καὶ F_2 εἶναι:

$$\Sigma = F_1 = F_2 \quad \text{ἤτοι} \quad \Sigma = \mathbf{8\ kgr*}$$

ε) Τέλος ὅταν αἱ δύο ἴσαι δυνάμεις F_1 καὶ F_2 ἐνεργοῦν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ ἔχουν ἀντίθετον φοράν, τότε ἡ συνισταμένη των Σ ἰσοῦται μὲ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα αὐτῶν, ἤτοι εἶναι:

$$\Sigma = F_1 - F_2 = 8 - 8 = \mathbf{0}$$

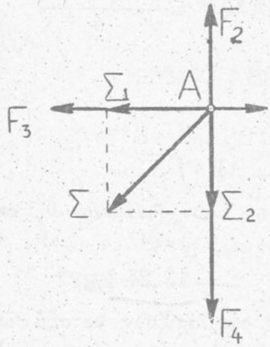
14

Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ δοθεῖσαι δυνάμεις ἀνὰ δύο ἐνεργοῦν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ κατ' ἀντίθετον φορὰν (σχ. 3). Εὑρίσκομεν τὴν συνισταμένην Σ_1 τῶν δυνάμεων F_1 καὶ F_3 :

$$\Sigma_1 = F_3 - F_1 = 3 - 1 = 2 \text{ kgr*}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν τὴν συνισταμένην Σ_2 τῶν δυνάμεων F_2 καὶ F_4:

$$\Sigma_2 = F_4 - F_2 = 4 - 2 = 2 \text{ kgr*}$$



Σχ. 3

Οὕτω τὸ σύστημα τῶν τεσσάρων δυνάμεων F_1, F_2, F_3, F_4 ἀνάγεται εἰς τὸ σύστημα τῶν δύο δυνάμεων Σ_1 καὶ Σ_2, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι καὶ κάθετοι μεταξύ των. Ἡ συνισταμένη Σ τῶν δύο δυνάμεων Σ_1 καὶ Σ_2 εἶναι ἡ διαγώνιος ἑνὸς τετραγώνου, εἰς τὸ ὁποῖον ἔχομεν:

$$\Sigma^2 = \Sigma_1^2 + \Sigma_2^2 = 2^2 + 2^2 = 2 \cdot 2^2$$

Ἄρα $\Sigma = 2 \cdot \sqrt{2}$ kgr* ἢ $\Sigma =$ **2,82 kgr***

15

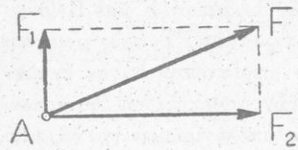
Αἱ δύο ἴσαι δυνάμεις F_1 καὶ F_3 σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν 120°. Ἡ συνισταμένη Σ′ τῶν δύο τούτων δυνάμεων (βλ. πρόβλ. 13 § δ) εἶναι ἴση μὲ ἑκάστην τῶν δυνάμεων, ἤτοι εἶναι : $\Sigma' = F_1 = 5$ kgr*. Ἡ δύναμις Σ′ ἐνεργεῖ ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν μεταξύ των αἱ δυνάμεις F_1 καὶ F_3. Οὕτω αἱ δυνάμεις Σ′ καὶ F_2 ἐνεργοῦν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν. Ἡ συνισταμένη Σ τῶν δυνάμεων Σ′ καὶ F_2 εἶναι ἡ συνισταμένη τοῦ συστήματος τῶν τριῶν δυνάμεων F_1, F_2, F_3 καὶ ἰσοῦται μέ:

$$\Sigma = \Sigma' + F_2 = 5 + 5 = \mathbf{10\ kgr^*}$$

16

Ἡ δύναμις F , ἡ ὁποία θὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο καθέτους συνιστώσας

F_1 καὶ F_2, εἶναι διαγώνιος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου (σχ. 4),



Σχ. 4

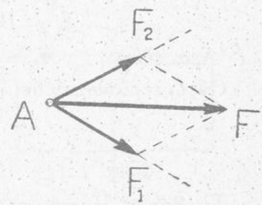
τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν μίαν κάθετον πλευρὰν $F_1 = 5$ kgr*, καὶ τὴν διαγώνιον $F = 13$ kgr *. Ἡ ἄλλη συνιστῶσα F_2 εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου :

$$F_2^2 = F^2 - F_1^2 = 13^2 - 5^2 = 163 - 25 = 144$$

ἄρα εἶναι: $F_2 = \sqrt{144}$ kgr* ἢ $F_2 = \mathbf{12\ kgr^*}$

17

Διὰ τὴν ἀνάλυσιν τῆς δυνάμεως F ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Φέρομεν ἐκ τοῦ A δύο εὐθείας, αἱ ὁποῖαι νὰ σχηματίζουν γωνίαν 30^0 μὲ τὴν διεύθυνσιν τῆς F (σχ. 5). Ἔπειτα ἐκ τοῦ ἄκρου τῆς F φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς δύο εὐθείας καὶ οὕτω σχηματίζεται ῥόμβος. Αἱ δύο ἴσαι συνιστῶσαι τῆς F, δηλαδὴ αἱ δυνάμεις F_1 καὶ F_2 σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν 60^0. Σκεπτόμενοι ὅπως εἰς περίπτωσιν τοῦ προβλήματος 13 § β, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ συνισταμένη F τῶν δύο ἴσων δυνάμεων F_1 καὶ F_2 εἶναι:



Σχ. 5

$$F = F_1 \cdot \sqrt{3}$$

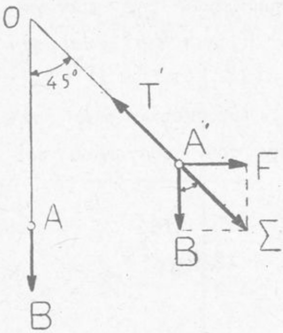
Ἄρα ἑκάστη τῶν ἴσων συνιστωσῶν τῆς δυνάμεως F εἶναι :

$$F_1 = \frac{F}{\sqrt{3}} = \frac{F \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{3} \text{ kgr*}$$

$$\text{ἢ} \quad F_1 = \mathbf{3{,}46\ kgr^*}$$

18

Διὰ νὰ ἀπομακρύνωμεν τὸ σῶμα ἀπὸ τὴν κατακόρυφον, πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν ἐπ' αὐτοῦ τὴν ὁριζοντίαν δύναμιν F (σχ. 6). Κατὰ τὴν ἰσορροπίαν τοῦ συστήματος ἡ γωνία ΑΟΑ' εἶναι 45^0. Τὸ βάρος Β τοῦ σώματος εἶναι δύναμις κατακόρυφος καὶ συνεπῶς αἱ δύο δυνάμεις F καὶ Β εἶναι κάθετοι μεταξύ των. Ὅταν τὸ σύστημα ἰσορροπῇ, ἡ συνισταμένη Σ τῶν δυνάμεων F καὶ B ἰσορροπεῖται ἀπὸ τὴν τάσιν T τοῦ νήματος. Οὕτω εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν ἰσορροπίαν τριῶν ὁμοεπιπέδων δυνάμεων (B, F, T). Θὰ ὑπολογίσωμεν τὴν δύναμιν F. Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον Α'ΒΣ ἡ γωνία ΒΑ'Σ εἶναι 45° (διότι αἱ εὐθεῖαι ΟΛ καὶ Α'Β εἶναι παράλληλοι καὶ τέμνονται ἀπὸ τὴν ΟΣ). Ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον Α'ΒΣ εἶναι ἰσοσκελές. Ἐκ τούτου συνάγεται ὅτι ἡ ὁριζοντία δύναμις F εἶναι ἴση μὲ τὸ βάρος Β τοῦ σώματος, ἤτοι εἶναι : $F = B$ ἢ $F = \mathbf{4\ kgr^*}$



Σχ. 6

Ἡ τάσις T τοῦ νήματος εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν συνισταμένην Σ τῶν δυνάμεων F καὶ B. Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον Α'ΒΣ ἔχομεν:

$$\Sigma^2 = B^2 + F^2 = 4^2 + 4^2 = 2 \cdot 4^2$$

Ἄρα εἶναι: $\Sigma = 4 \cdot \sqrt{2}\ \text{kgr}^* = 5{,}64\ \text{kgr}^*$

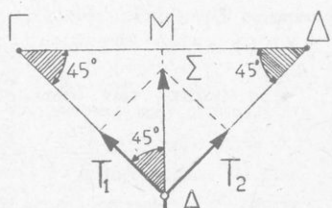
Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ἡ τάσις T τοῦ νήματος εἶναι: $T = \mathbf{5{,}64\ kgr^*}$

19

Τὸ βάρος Β τοῦ σώματος ἰσορροπεῖται ἀπὸ μίαν δύναμιν Σ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὸ βάρος Β (σχ. 7). Ἄρα ἡ δύναμις Σ εἶναι κατακόρυφος καὶ ἴση μέ :

$$\Sigma = 1000\ \text{kgr}^*.$$

Ἡ δύναμις Σ εἶναι συνισταμένη τῶν δύο τάσεων T_1 καὶ T_2, αἱ ὁποῖαι ἀναπτύσσονται ἐπὶ ἑκάστου σχοινίου. Ἐπειδὴ ἕκαστον σχοινίον σχηματίζει μὲ τὸ ἐπίπεδον ΓΔ τῆς ὀροφῆς γωνίαν 45°, ἕπεται ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΓΔ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ὀρθογώνιον κατὰ τὴν κορυφὴν Α. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΜ εἶναι κατακόρυφος, συνάγεται ὅτι ἡ δύναμις Σ εἶναι διαγώνιος τετραγώνου. Ἄρα αἱ δύο τάσεις T_1 καὶ T_2 τῶν δύο σχοινίων εἶναι ἴσαι, ἤτοι εἶναι : $T_1 = T_2$



Σχ. 7

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $ΑΣΤ_1$ ἔχομεν:

$$Σ^2 = T_1^2 + T_2^2 = 2 \cdot T_1^2 \qquad ἄρα \qquad Σ = T_1 \cdot \sqrt{2}$$

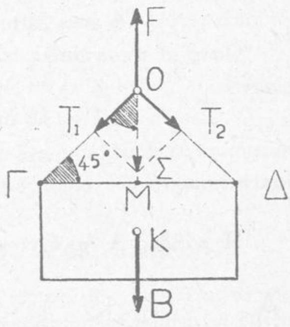
Ἡ ζητουμένη τάσις T_1 εἶναι:

$$T_1 = \frac{Σ}{\sqrt{2}} = \frac{Σ \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{1000 \cdot \sqrt{2}}{2} \text{ kgr*}$$

$$ἢ \quad T_1 = T_2 = \mathbf{705\ kgr*}$$

20

Ὅταν τὸ σύστημα ἰσορροπῇ, ἡ ἀνωτέρα πλευρὰ ΓΔ τῆς πλακὸς εἶναι ὁριζοντία (σχ. 8) καὶ τὸ τρίγωνον ΓΟΔ εἶναι ὀρθογώνιον ἰσοσκελές. Τὸ σύστημα ἰσορροπεῖ, διότι τὸ στήριγμα Ο ἀναπτύσσει ἀντίδρασιν F, ἴσην καὶ ἀντίθετον πρὸς τὴν συνισταμένην Σ τῶν δύο τάσεων T_1 καὶ T_2 τοῦ νήματος. Ἡ δύναμις Σ εἶναι ἴση μὲ τὸ βάρος τῆς πλακός, ἤτοι εἶναι: $Σ = 6$ kgr*.



Σχ. 8

Ἡ δύναμις Σ εἶναι κατακόρυφος καὶ διαγώνιος ἑνὸς τετραγώνου ἔχοντος πλευρὰν T_1 Ἄρα αἱ δύο τάσεις T_1 καὶ T_2 τῶν δύο τμημάτων τοῦ νήματος εἶναι ἴσαι:

$$T_1 = T_2.$$

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $ΟΣΤ_1$ ἔχομεν:

$$Σ^2 = T_1^2 + T_2^2 = 2 \cdot T_1^2 \qquad ἄρα \qquad Σ = T_1 \cdot \sqrt{2}$$

Ἡ ζητουμένη τάσις T_1 εἶναι:

$$T_1 = \frac{Σ}{\sqrt{2}} = \frac{Σ \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{2} \text{ kgr*}$$

$$ἢ \quad T_1 = \mathbf{4{,}23\ kgr*}$$

II. Δυνάμεις ἐφηρμοσμέναι εἰς διάφορα σημεῖα στερεοῦ σώματος

21

Ἡ ράβδος A_1A_2 ἔχει μῆκος 60 cm. Ἔστω ὅτι εἰς τὸ ἄκρον A_1

τῆς ράβδου ἐφαρμόζεται ἡ δύναμις $F_1 = 1$ kgr *, καὶ εἰς τὸ ἄκρον A_2 ἐφαρμόζεται ἡ δύναμις $F_2 = 4$ kgr*. Αἱ δυνάμεις F_1 καὶ F_2 εἶναι κατακόρυφοι (συνεπῶς παράλληλοι). Ἡ συνισταμένη Σ τῶν δύο δυνάμεων εἶναι καὶ αὐτὴ κατακόρυφος, ἔχει ἔντασιν:

$$\Sigma = F_1 + F_2 = 1 + 4 = \mathbf{5\ kgr^*}$$

καὶ ἐφαρμόζεται εἰς ἕνα σημεῖον Γ τῆς ράβδου, εὑρισκόμενον μεταξὺ τῶν σημείων A_1 καὶ A_2. Ἂν καλέσωμεν $A_1\Gamma = x$, τότε εἶναι $A_1\Gamma = 60 - x$. Εἶναι γνωστὸν ὅτι διὰ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς Γ τῆς συνισταμένης θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$F_1 \cdot A_1\Gamma = F_2 \cdot A_2\Gamma \quad \text{ἢ} \quad 1 \cdot x = 4 \cdot (60 - x)$$

Ἀπὸ τὴν εὑρεθεῖσαν ἐξίσωσιν λαμβάνομεν:

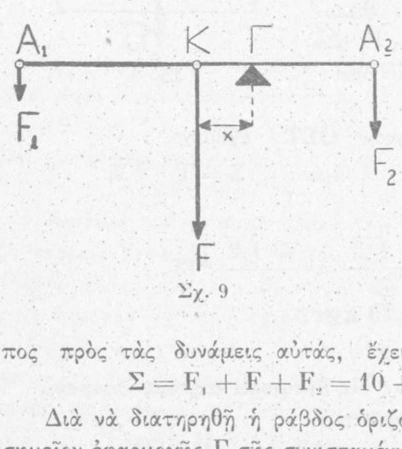
$$5\,x = 240 \qquad \text{ἄρα} \qquad x = 48\ \text{cm}.$$

Ὥστε αἱ ἀποστάσεις τοῦ σημείου Γ ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα τῆς ράβδου εἶναι:

$$A_1\Gamma = \mathbf{48\ cm} \quad \text{καὶ} \quad A_2\Gamma = \mathbf{12\ cm}$$

22

Ἡ ράβδος A_1A_2 ἔχει μῆκος 100 cm καὶ βάρος $F = 50$ gr *, τὸ ὁποῖον ἐφαρμόζεται εἰς τὸ μέσον Κ τῆς ράβδου, διότι αὐτὴ εἶναι ὁμογενὴς (σχ. 9). Εἰς τὰ δύο ἄκρα τῆς ράβδου ἐξαρτῶνται τὰ βάρη $F_1 = 10$ gr * καὶ $F_2 = 20$ gr*. Οὕτω ἐπὶ τῆς ράβδου ἐνεργοῦν τρεῖς ὁμοεπίπεδοι, παράλληλοι καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς δυνάμεις. Ἡ συνισταμένη Σ τῶν δυνάμεων F_1, F, F_2 εἶναι κατακόρυφος καὶ ὁμόρροπος πρὸς τὰς δυνάμεις αὐτάς, ἔχει δὲ ἔντασιν :



Σχ. 9

$$\Sigma = F_1 + F + F_2 = 10 + 50 + 20 = \mathbf{80\ gr^*}$$

Διὰ νὰ διατηρηθῇ ἡ ράβδος ὁριζοντία, πρέπει νὰ στηριχθῇ εἰς τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς Γ τῆς συνισταμένης Σ, ὥστε ἡ ἀντίδρασις τοῦ στηρίγματος νὰ ἰσορροπῇ τὴν συνισταμένην Σ τῶν τριῶν δυνάμεων. Τότε ἡ ράβδος θὰ ἀποτελῇ σῶμα στρεπτὸν περὶ ὁριζόντιον ἄξονα, κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῶν δυνάμεων καὶ διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου Γ.

Εὐκόλως συνάγεται ἐκ τοῦ σχήματος ὅτι τὸ σημεῖον Γ πρέπει νὰ εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν σημείων Κ καὶ A_2. Ἂν καλέσωμεν $ΓΚ = x$, τότε εἶναι $ΓA_1 = 50 + x$ καὶ $ΓA_2 = 50 - x$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν, σύμφωνα μὲ τὸ ὁποῖον ἡ ροπὴ τῆς συνισταμένης Σ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τὸν διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου Γ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν τριῶν δυνάμεων F_1, F, F_2 ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τοῦτον. Ἀλλὰ ἡ ροπὴ τῆς συνισταμένης εἶναι ἴση μὲ μηδέν, διότι ἡ διεύθυνσις τῆς Σ διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος. Οὕτω ἔχομεν:

$$F_1 \cdot (ΓA_1) + F \cdot x - F_2 \cdot (ΓA_2) = 0 \qquad (1)$$

Ἡ ροπὴ τῆς F_2 λαμβάνεται μὲ ἀντίθετον σημεῖον, διότι ἡ F_2 τείνει νὰ στρέψῃ τὴν ράβδον κατὰ φορὰν ἀντίθετον ἐκείνης, κατὰ τὴν ὁποίαν τείνουν νὰ στρέψουν τὴν ράβδον αἱ δυνάμεις F_1 καὶ F. Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) λαμβάνομεν:

$$10 \cdot (50 + x) + 50 \cdot x - 20 \cdot (50 - x) = 0 \qquad (2)$$

$$\text{καὶ} \quad x = 6{,}25 \text{ cm}$$

Ὥστε ἡ ράβδος πρέπει νὰ στηριχθῇ εἰς ἕνα σημεῖον Γ εὑρισκόμενον μεταξὺ τῶν σημείων Κ καὶ A_2, αἱ δὲ ἀποστάσεις τοῦ σημείου στηρίξεως ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς ράβδου εἶναι:

$$A_1Γ = \mathbf{56{,}25\ cm} \quad \text{καὶ} \quad A_2Γ = \mathbf{43{,}75\ cm}$$

Σημείωσις. Ἂν δὲν προεβλέπετο ὅτι τὸ σημεῖον Γ πρέπει νὰ εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν σημείων Κ καὶ A_2, ἀλλὰ ἐθεωρούσαμεν ὅτι τὸ σημεῖον Γ εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν σημείων Κ καὶ A_1, τότε ἀντὶ τῆς ἐξισώσεως (2) θὰ ἐλαμβάναμε τὴν ἐξίσωσιν:

$$-10 \cdot (50 - x) + 50 \cdot x + 20 \cdot (50 + x = 0$$

$$\text{ἄρα} \quad x = -6{,}25 \text{ cm}$$

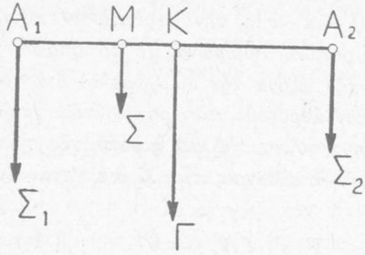
Τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον φανερώνει ὅτι τὸ σημεῖον Γ δὲν εἶναι πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Κ, ἀλλὰ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ Κ.

23

Ἡ γέφυρα A_1A_2 ἔχει μῆκος 45 m καὶ βάρος $F = 150$ tn*, τὸ ὁποῖον ἐφαρμόζεται εἰς τὸ μέσον Κ τῆς γεφύρας (σχ. 10). Τὸ βάρος F τῆς γεφύρας ἕνεκα τῆς συμμετρίας κατανέμεται ἐξ ἴσου εἰς τοὺς δύο στύλους, οἱ ὁποῖοι στηρίζουν τὴν γέφυραν. Οὕτω ἕκαστος στύλος φέρει μόνιμον φορτίον F′, ἴσον μέ:

$$F' = \frac{F}{2} = \frac{150}{2} \text{ tn*} \quad \text{ἢ} \quad F' = 75 \text{ tn*}$$

Ὅταν ἐπὶ τῆς γεφύρας εὑρίσκεται ὄχημα βάρους $\Sigma = 20$ tn*, τότε ἡ δύναμις Σ ἀναλύεται εἰς δύο συνιστώσας F_1 καὶ F_2, αἱ ὁποῖαι ἐφαρμόζονται ἀντιστοίχως εἰς τὰ ἄκρα A_1 καὶ A_2 τῆς γεφύρας. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ ἰσχύουν αἱ γνωσταὶ σχέσεις :



Σχ. 10

$$F_1 + F_2 = \Sigma \quad \text{καὶ}$$

$$F_1 \cdot (MA_1) = F_2 \cdot (MA_2)$$

ὅπου M εἶναι τὸ μέσον τοῦ ὀχήματος. Δίδεται ὅτι εἶναι: $MA_1 = 15$ m, ἄρα εἶναι $MA_2 = 45 - 15 = 30$ m. Οὕτω αἱ ἀνωτέρω δύο σχέσεις γράφονται :

$$F_1 + F_2 = 20 \quad \text{καὶ} \quad F_1 . 15 = F_2 \cdot 30 \quad \text{ἢ} \quad F_1 = 2\,F_2$$

Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $F_1 + F_2 = 20$ θέσωμεν $F_1 = 2F_2$, εὑρίσκομεν:

$$2F_2 + F_2 = 20$$

ἄρα $$F_2 = \frac{20}{3}\ \text{tn}^* = 6{,}67\ \text{tn}^* \quad \text{καὶ} \quad F_1 = 13{,}33\ \text{tn}^*$$

Ὥστε ὁ στύλος, ἐπὶ τοῦ ὁποίου στηρίζεται τὸ ἄκρον A_1 τῆς γεφύρας, φέρει φορτίον:

$$\Sigma_1 = F' + F_1 = 75 + 13{,}33 = \mathbf{88{,}33\ tn^*}$$

ὁ δὲ στύλος, ἐπὶ τοῦ ὁποίου στηρίζεται τὸ ἄκρον A_2 τῆς γεφύρας, φέρει φορτίον:

$$\Sigma_2 = F' + F_2 = 75 + 6{,}67 = \mathbf{81{,}67\ tn^*}$$

Τὸ ὅλον φορτίον, τὸ ὁποῖον φέρουν οἱ δύο στύλοι, εἶναι:

$$88{,}33 + 81{,}67 = 170\ \text{tn}^*$$

δηλαδὴ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βαρῶν τῆς γεφύρας καὶ τοῦ ὀχήματος.

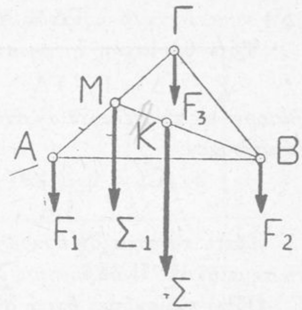
24

Αἱ τρεῖς ἴσαι καὶ παράλληλοι δυνάμεις F_1, F_2, F_3 ἐφαρμόζονται ἀντιστοίχως εἰς τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 11). Αἱ δυνάμεις F_1 καὶ F_3 ἔχουν συνισταμένην Σ_1, ἡ ὁποία ἔχει ἔντασιν: $\Sigma_1 = 2F_1$ εἶναι παράλληλος καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς πρὸς τὰς δυνάμεις

F_1, F_3 καὶ ἐφαρμόζεται εἰς τὸ μέσον M τῆς πλευρᾶς ΑΓ τοῦ τριγώνου, διότι αἱ δύο δυνάμεις F_1 καὶ F_3 εἶναι ἴσαι. Ἀπομένει τώρα νὰ συνθέσωμεν τὰς δύο παραλλήλους δυνάμεις F_2 καὶ Σ_1, αἱ ὁποῖαι ἐφαρμόζονται εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαμέσου ΒΜ τοῦ τριγώνου. Ἡ δύναμις Σ_1 εἶναι διπλασία τῆς F_2 δηλ. εἶναι $\Sigma_1 = 2F_2$. Ἡ συνισταμένη Σ τῶν δύο τούτων δυνάμεων ἔχει ἔντασιν:

$$\Sigma = \Sigma_1 + \mathbf{F}_2 = 2F_1 + F_2$$

$$\text{ἢ} \quad \Sigma = \mathbf{3\,F}_1$$



Σχ. 11

Ἡ Σ εἶναι παράλληλος καὶ ὁμόρροπος πρὸς τὰς δυνάμεις Σ_1 καὶ F_2, ἐφαρμόζεται δὲ εἰς ἕνα σημεῖον K τῆς διαμέσου ΒΜ, ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$\Sigma_1 \cdot (\mathrm{KM}) = F \cdot (\mathrm{KB})$$

Ἐπειδὴ εἶναι $\Sigma_1 = 2\,F_2$ ἡ ἀνωτέρω σχέσις γράφεται :

$$2F_2 \cdot (\mathrm{KM}) = F_2 \cdot (\mathrm{KB}) \quad \text{ἢ} \quad 2 \cdot \mathrm{KM} = \mathrm{KB}$$

$$\text{καὶ} \quad \frac{\mathrm{KM}}{\mathrm{KB}} = \frac{1}{2}$$

Ἡ τελευταία ἀναλογία δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\frac{\mathrm{KM}}{\mathrm{KB}+\mathrm{KM}} = \frac{1}{2+1} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\mathrm{KM}}{\mathrm{BM}} = \frac{1}{3} \quad \text{καὶ} \quad \mathrm{KM} = \mathbf{\frac{1}{3}\,BM}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς K τῆς συνισταμένης Σ τῶν τριῶν δυνάμεων F_1, F_2, F_3 εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν τριῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου.

25

Δίδεται ὅτι εἶναι AB = 40 cm καὶ ΒΓ = 80 cm. Ἄρα τὸ μῆκος τῆς ράβδου εἶναι ΑΓ = 40 + 80 = 120 cm. Ἡ συνισταμένη Σ_1 τῶν δύο παραλλήλων καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς δυνάμεων F_1 καὶ F_3 ἔχει ἔντασιν

$$\Sigma_1 = F_1 + F_3 = 2 + 1 = 3\ \text{kgr*}$$

Ἡ Σ_1 ἐφαρμόζεται εἰς ἕνα σημεῖον Δ τῆς ράβδου, τὸ ὁποῖον θὰ εὑρίσκεται πλησιέστερα πρὸς τὸ ἄκρον A τῆς ράβδου. Ἔστω ὅτι τὸ σημεῖον Δ εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β. Θὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἀπόστασιν ΑΔ. Ἡ ἀπόστασις ΓΔ θὰ εἶναι:

$$\Gamma\Delta = \mathrm{A}\Gamma - \mathrm{A}\Delta = 120 - \mathrm{A}\Delta.$$

Τότε θὰ ἰσχύῃ ἡ γνωστὴ σχέσις:

$$F_1 \cdot \mathrm{A}\Delta = F_3 \cdot \Gamma\Delta \quad \text{ἢ} \quad F_1 \cdot \mathrm{A}\Delta = F_3 \cdot (120 - \mathrm{A}\Delta)$$

Θέτομεν εἰς τὴν τελευταίαν σχέσιν $F_1 = 2$ kgr * καὶ $F_3 = 1$ kgr *, ὁπότε λαμβάνομεν:

$$2 \cdot \mathrm{A}\Delta = 1 \cdot (120 - \mathrm{A}\Delta) \quad \text{ἄρα} \quad 3 \cdot \mathrm{A}\Delta = 120$$

$$\text{καὶ} \quad \mathrm{A}\Delta = 40 \text{ cm}$$

Ὥστε τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς Δ τῆς συνισταμένης Σ_1 συμπίπτει μὲ τὸ σημεῖον Β. Ἡ δὲ δύναμις Σ_1 εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν δύναμιν F_2. Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ἡ δύναμις F_2 ἰσορροπεῖ τὴν συνισταμένην τῶν ἄλλων δύο δυνάμεων F_1 καὶ F_3 καὶ συνεπῶς ἡ συνισταμένη τῶν τριῶν δυνάμεων F_1, F_2, F_3, εἶναι ἴση μὲ μηδέν.

26

Ἡ ράβδος ΑΒ ἔχει μῆκος ΑΒ = 80 cm. Εἰς τὸ σημεῖον Γ τῆς ράβδου ἐφαρμόζεται ἡ δύναμις Σ = 6 kgr *. Δίδεται δὲ ὅτι εἶναι ΑΓ = 30 cm. Ἄρα εἶναι ΒΓ = 50 cm. Ζητεῖται νὰ ἀναλυθῇ ἡ δύναμις Σ εἰς δύο συνιστώσας F_1 καὶ F_2, αἱ ὁποῖαι νὰ εἶναι παράλληλοι, τῆς αὐτῆς φορᾶς καὶ νὰ ἐφαρμόζωνται ἀντιστοίχως εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Β τῆς ράβδου. Τότε θὰ ἰσχύουν αἱ γνωσταὶ σχέσεις:

$$\Sigma = F_1 + F_2 \quad \text{καὶ} \quad F_1 \cdot \mathrm{A}\Gamma = F_2 \cdot \mathrm{B}\Gamma$$

Ἂν εἰς τὰς δύο ἀνωτέρω σχέσεις θέσωμεν τὰς δοθείσας τιμάς, εὑρίσκομεν:

$$F_1 + F_2 = 6 \text{ kgr*} \quad \text{καὶ} \quad F_1 \cdot 30 = F_2 \cdot 50$$

Ἀπὸ τὴν δευτέραν σχέσιν ἔχομεν:

$$F_1 = \frac{5F_2}{3} \quad \text{ἄρα} \quad \frac{5F_2}{3} + F_2 = 6$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι:

$$F_2 = 18/6 \text{ kgr*} = \mathbf{2{,}25\ kgr^*}$$

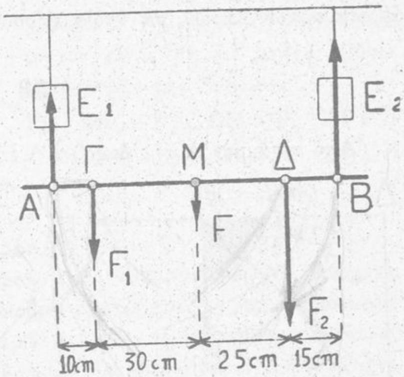
$$\text{καὶ} \quad F_1 = 6 - 2{,}25 = \mathbf{3{,}75\ kgr^*}$$

27

Εἰς τὰ σημεῖα Γ, Μ καὶ Δ τῆς ράβδου (σχ. 12) ἐνεργοῦν ἀντιστοίχως αἱ δυνάμεις:

$F_1 = 1$ kgr* $\quad F = 0{,}5$ kgr* $\quad F_2 = 2$ kgr*

Αἱ τρεῖς αὐταὶ δυνάμεις ἔχουν συνισταμένην $\Sigma_1 = 3{,}5$ kgr*. Ἡ ράβδος διατηρεῖται ὁριζοντία, διότι τὰ δυναμόμετρα ἀναπτύσσουν εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β τῆς ράβδου ἀντιστοίχως τὰς ἀντιδράσεις E_1 καὶ E_2, αἱ ὁποῖαι εἶναι δυνάμεις κατακόρυφοι μὲ φορὰν ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω. Οὕτω αἱ ἐνδείξεις τῶν δύο δυναμομέτρων εἶναι ἀντιστοίχως E_1 καὶ E_2. Ἐπὶ τῆς ράβδου ἐνεργοῦν λοιπὸν αἱ πέντε ὁμοεπίπεδοι καὶ παράλληλοι δυνάμεις E_1, E_2, F_1, F καὶ F_2.



Σχ. 12

Ἄς θεωρήσωμεν ὁριζόντιον ἄξονα, κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῶν δυνάμεων καὶ διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου Α. Θὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν. Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι αἱ πέντε δυνάμεις ἰσορροποῦν καὶ συνεπῶς ἡ ροπὴ τῆς συνισταμένης τῶν πέντε δυνάμεων ὡς πρὸς τὸν θεωρούμενον ἄξονα εἶναι ἴση μὲ μηδέν. Ὥστε καὶ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν πέντε δυνάμεων ὡς πρὸς τὸν θεωρούμενον ἄξονα θὰ εἶναι ἴσον μὲ μηδέν. Ἀπομένει νὰ χαρακτηρίσωμεν τὸ σημεῖον τῆς ροπῆς ἑκάστης δυνάμεως. Ἡ ροπὴ τῆς δυνάμεως E_2 εἶναι θετική, διότι ἡ δύναμις E_2 τείνει νὰ στρέψῃ τὴν ράβδον περὶ τὸν ἄξονα Α κατὰ φορὰν ἀντίθετον τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου. Αἱ ροπαὶ τῶν δυνάμεων F_1, F καὶ F_2 εἶναι ἀρνητικαί. Ἡ δὲ ροπὴ τῆς δυνάμεως E_1 ὡς πρὸς τὸν ἄξονα Α εἶναι ἴση μὲ μηδὲν (διότι ἡ διεύθυνσις τῆς E_1 διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος Α). Οὕτω ἔχομεν :

$$E_2 \cdot \mathrm{AB} - F_1 \cdot \mathrm{A\Gamma} - F \cdot \mathrm{AM} - F_2 \cdot \mathrm{A\Delta} = 0$$

ἤ $$E_2 \cdot 80 - 1 \cdot 10 - 0{,}5 \cdot 40 - 2 \cdot 65 = 0$$

καὶ $$E_2 \cdot 80 = 160 \quad \text{ἄρα} \quad E_2 = \mathbf{2\ kgr^*}$$

Ἄς θεωρήσωμεν ὁριζόντιον ἄξονα, κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῶν δυνάμεων καὶ διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου Β. Ἐφαρμόζοντες πάλιν τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$-E_1 \cdot \mathrm{BA} + F_2 \cdot \mathrm{B\Delta} + F \cdot \mathrm{BM} + F_1 \cdot \mathrm{B\Gamma} = 0$$

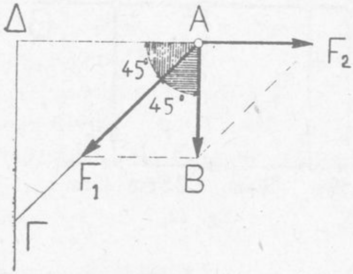
ἤ $$-E_1 \cdot 80 + 2 \cdot 15 + 0{,}5 \cdot 40 + 1 \cdot 70 = 0$$

καὶ $$E_1 \cdot 80 = 120 \quad \text{ἄρα} \quad E_1 = \mathbf{1{,}5\ kgr^*}$$

Ὥστε τὸ μὲν δυναμόμετρον τὸ ἐφαρμοζόμενον εἰς τὸ Α θὰ δεικνύῃ 1,5 kgr*, τὸ δὲ ἐφαρμοζόμενον εἰς τὸ Β θὰ δεικνύῃ 2 kgr*. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο αὐτῶν ἐνδείξεων εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βαρῶν, τὰ ὁποῖα φέρουν τὰ δύο δυναμόμετρα.

28

Ἀπὸ τὸ ἄκρον Α τῆς δοκοῦ ΔΑ ἐξαρτᾶται τὸ βάρος Β = 12 kgr* (σχ. 13). Ἀναλύομεν τὸ βάρος Β εἰς δύο συνιστώσας F_1 καὶ F_2 κατὰ τὰς διευθύνσεις τῶν δύο δοκῶν ΓΑ καὶ ΔΑ. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ μὲν δοκὸς ΓΑ συμπιέζεται ἀπὸ τὴν δύναμιν F_1, ἡ δὲ δοκὸς ΔΑ τείνεται ἀπὸ τὴν δύναμιν F_2. Θὰ ὑπολογίσωμεν τὰς δύο συνιστώσας F_1 καὶ F_2. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ABF_2 εἶναι ἰσοσκελές. Ἄρα εἶναι: $F_2 = B$ ἤτοι $F_2 =$ **12 kgr***



Σχ. 13

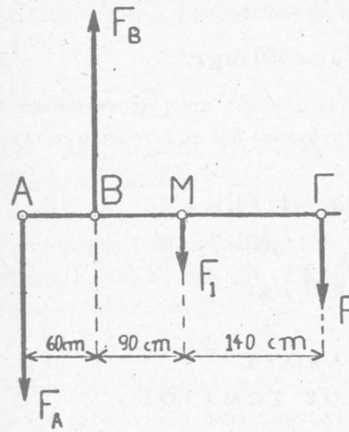
Οὕτω ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ABF_1 λαμβάνομεν:

$$F_1^2 = B^2 + F_2^2 \quad ἢ \quad F_1^2 = B^2 + B^2 = 2 \cdot B^2$$

καὶ $F_1 = B \cdot \sqrt{2} = 12 \cdot \sqrt{2}$ **kgr*** ἤτοι $F_1 =$ **16,92 kgr***

29

Εἰς τὸ μέσον Μ τῆς ἐξέδρας ἐνεργεῖ τὸ βάρος τῆς ἐξέδρας $F_1 = 50$ kgr*. Εἰς τὸ σημεῖον Γ ἐνεργεῖ τὸ βάρος τοῦ ἀνθρώπου $F_2 = 70$ kgr*. Οὕτω ἡ ἐξέδρα τείνει νὰ περιστραφῇ περὶ τὸ Β καὶ τὸ ἄκρον της Α τείνει νὰ ἀνυψωθῇ (σχ. 14). Τὸ στήριγμα ὅμως τῆς ἐξέδρας κατὰ τὸ ἄκρον Α ἀναπτύσσει ἐπὶ τῆς ἐξέδρας μίαν ἀντίδρασιν F_A, ἡ ὁποία εἶναι κατακόρυφος καὶ ἔχει φορὰν πρὸς τὰ κάτω. Ἀντιθέτως τὸ σημεῖον στηρίξεως Β ἀναπτύσσει ἐπὶ τῆς ἐξέδρας μίαν ἀντίδρασιν F_B, ἡ ὁποία εἶναι κατακόρυφος καὶ ἔχει φορὰν πρὸς τὰ ἄνω. Ἐπὶ τῆς ἐξέδρας ἐνεργοῦν λοιπὸν τέσσαρες ὁμοεπίπεδοι καὶ παράλληλοι δυνάμεις, αἱ F_1, F_2, F_A, καὶ F_B. Ἐπειδὴ ἡ ἐξέδρα ἰσορροπεῖ, ἔπεται ὅτι ἡ συνισταμένη τῶν τεσσάρων δυνάμεων εἶναι ἴση μὲ μηδέν. Θὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν ὡς πρὸς ἄξονα κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῶν δυνάμεων καὶ διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου στηρίξεως Β. Ἡ ροπὴ τῆς δυνάμεως F_B ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τοῦτον εἶναι ἴση μὲ μηδέν. Οὕτω λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν:



Σχ. 14

$$F_A \cdot BA - F_1 \cdot BM - F_2 \cdot B\Gamma = 0$$

ἢ $F_A \cdot 60 - 50 \cdot 90 - 70 \cdot 230 = 0$

καὶ $F_A \cdot 60 = 2060$

ἄρα $F_A = \mathbf{343\ kgr^*}$

Ἂν ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν καὶ ὡς πρὸς ἄξονα κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῶν δυνάμεων καὶ διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου στηρίξεως Α, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν:

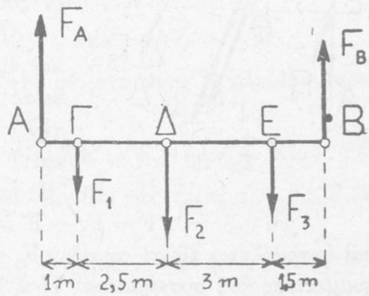
$$F_B \cdot AB - F_1 \cdot AM - F_2 \cdot A\Gamma = 0$$

ἢ $F_B \cdot 60 - 50 \cdot 150 - 70 \cdot 290 = 0$

καὶ $F_B \cdot 60 = 27\,800$ ἄρα $F_B = \mathbf{463\ kgr^*}$

30

Οἱ δύο στύλοι ἀναπτύσσουν εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Β τῆς γεφύρας τὰς ἀντιδράσεις F_A καὶ F_B, αἱ ὁποῖαι εἶναι κατακόρυφοι καὶ ἔχουν φορὰν πρὸς τὰ ἄνω (σχ. 15). Οὕτω ἐπὶ τῆς γεφύρας ἐνεργοῦν πέντε ὁμοεπίπεδοι καὶ παράλληλοι δυνάμεις ἐκ τῶν ὁποίων αἱ τρεῖς εἶναι γνωσταί: $F_1 = 300$ kgr*, $F_2 = 520$ kgr* καὶ $F_3 = 400$ kgr*. Ἂν ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν ὡς πρὸς ἄξονα κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῶν δυνάμεων καὶ διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου στηρίξεως Α, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν:



Σχ. 15

$$F_B \cdot AB - F_3 \cdot AE - F_2 \cdot A\Delta - F_1 \cdot A\Gamma = 0$$

ἢ $F_B \cdot 8 - 400 \cdot 6{,}5 - 520 \cdot 3{,}5 - 300 \cdot 1 = 0$

καὶ $F_B \cdot 8 = 4720$ ἄρα $F_B = \mathbf{590\ kgr^*}$

Ἂν θεωρήσωμεν τὰς ῥοπὰς τῶν δυνάμεων ὡς πρὸς ἄξονα κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῶν δυνάμεων καὶ διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου στηρίξεως B, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$-F_A \cdot BA + F_3 \cdot BE + F_2 \cdot B\Delta + F_1 \cdot B\Gamma = 0$$

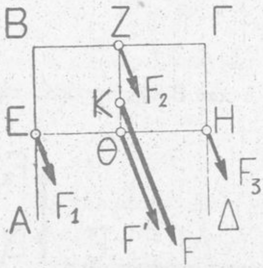
ἢ $-F_A \cdot 8 + 400 \cdot 1{,}5 + 520 \cdot 4{,}5 + 300 \cdot 7 = 0$

καὶ $F_A \cdot 8 = 5040$ ἄρα $F_A = \mathbf{630\ kgr^*}$

ΚΕΝΤΡΟΝ ΒΑΡΟΥΣ
ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

31

Ἑκάστη πλευρὰ τοῦ πλαισίου ἔχει μῆκος $\alpha = 10$ cm καὶ βάρος $F_1 = 10 \cdot 0{,}2 = 2$ gr *. Τὸ βάρος ἑκάστης πλευρᾶς ἐφαρμόζεται εἰς τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς (σχ. 16). Τὸ ζητούμενον κέντρον βάρους εἶναι τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης F τῶν τριῶν παραλλήλων, ὁμορρόπων καὶ ἴσων δυνάμεων $F_1 = F_2 = F_3$. Ἡ συνισταμένη F' τῶν δυνάμεων F_1 καὶ F_3 ἔχει ἔντασιν:



Σχ. 16

$$F' = F_1 + F_3 = 2 + 2 = 4\ gr^*$$

καὶ ἐφαρμόζεται εἰς τὸ μέσον Θ τῆς εὐθείας EH. Ἤδη ἀπομένει νὰ εὕρωμεν τὴν συνισταμένην F τῶν δυνάμεων F_2 καὶ F', ἤτοι τὸ βάρος τοῦ συστήματος. Ἡ συνισταμένη F ἔχει ἔντασιν:

$$F = F_2 + F' = 2 + 4 = 6\ gr^*$$

καὶ ἐφαρμόζεται εἰς τὸ σημεῖον K, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος συμμετρίας τοῦ συστήματος. Τότε θὰ ἰσχύῃ ἡ γνωστὴ σχέσις:

$$F' \cdot K\Theta = F_2 \cdot KZ$$

Ἔχομεν ὅτι $Z\Theta = 5$ cm ἄρα $K\Theta = 5 - KZ$.

Ὥστε ἡ ἀνωτέρω σχέσις γράφεται:

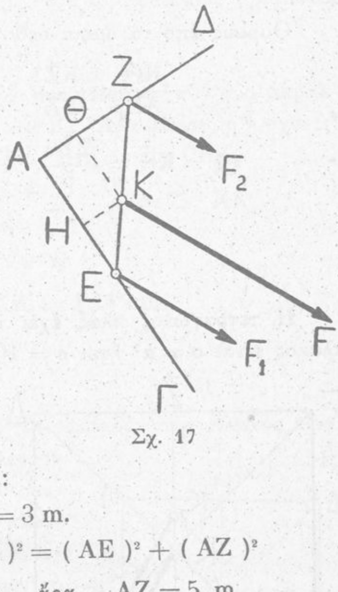
$4 \cdot (5 - KZ) = 2 \cdot KZ$. ἄρα $KZ = \mathbf{3{,}33\ cm}$

Τὸ κέντρον βάρους εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς καθέτου ἡ ὁποία ἄγεται εἰς τὸ μέσον Ζ τῆς πλευρᾶς ΒΓ καὶ εἰς ἀπόστασιν 3,33 cm ἀπὸ τὸ Ζ.

32

Αἱ δύο ράβδοι ἔχουν μῆκος ΑΓ = 8 m καὶ ΑΔ = 6 m (σχ. 17). Τὸ βάρος ἑκάστης ράβδου ἐφαρμόζεται εἰς τὸ μέσον της. Ἂν καλέσωμεν ρ τὸ βάρος 1 m τῆς ράβδου, τότε τὰ βάρη F_1 καὶ F_2 τῶν δύο ράβδων ΑΓ καὶ ΑΔ εἶναι ἀντιστοίχως:

$$F_1 = 8 \cdot \rho \quad \text{καὶ} \quad F_2 = 6 \cdot \rho$$



Σχ. 17

ἤτοι εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ μήκη τῶν ράβδων. Τὸ ὅλον βάρος F τοῦ συστήματος εἶναι :

$$F = F_1 + F_2 = 8 \cdot \rho + 6 \cdot \rho = 14 \cdot \rho$$

Ἡ δύναμις F ἐφαρμόζεται εἰς ἓν σημεῖον Κ τῆς εὐθείας ΕΖ, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος εὑρίσκεται ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΕΖ. Εἰς τὸ τρίγωνον τοῦτο γνωρίζομεν ὅτι εἶναι:

$$AE = 4 \text{ m} \qquad \text{καὶ } AZ = 3 \text{ m}.$$

Ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν : $(EZ)^2 = (AE)^2 + (AZ)^2$

εὑρίσκομεν $\quad (EZ)^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \quad$ ἄρα $\quad AZ = 5$ m

Διὰ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς Κ τῆς συνισταμένης F τῶν δύο παραλλήλων δυνάμεων θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$F_1 \cdot KE = F_2 \cdot KZ \quad \text{ἢ} \quad F_1 \cdot KE = F_2 \cdot (EZ - KE)$$

Ἂν εἰς τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν F_1, F_2 καὶ ΕΖ, εὑρίσκομεν:

$$8\rho \cdot KE = 6\rho \cdot (5 - KE) \quad \text{ἢ} \quad 8 \cdot KE = 6 \cdot (5 - KE)$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν:

$$KE = \mathbf{2{,}14\ m} \quad \text{καὶ} \quad KZ = 5 - 2{,}14 = \mathbf{2{,}86\ m}$$

Αἱ ἀποστάσεις τοῦ κέντρου βάρους Κ τοῦ συστήματος ἀπὸ ἑκάστην τῶν δύο ράβδων ΑΓ καὶ ΑΔ εἶναι ἀντιστοίχως ΚΗ καὶ ΚΘ. Αὗται ὑπολογίζονται εὔκολα. Ἀπὸ τὰ ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα ΕΚΗ καὶ ΕΖΑ ἔχομεν:

$$\frac{KH}{AZ} = \frac{KE}{EZ} \qquad \text{ἄρα} \qquad KH = \frac{KE}{EZ} \cdot AZ$$

$$\text{ἢ} \quad KH = \frac{2{,}14}{5} \cdot 3 \quad \text{καὶ} \quad KH = \mathbf{1{,}28\ m}$$

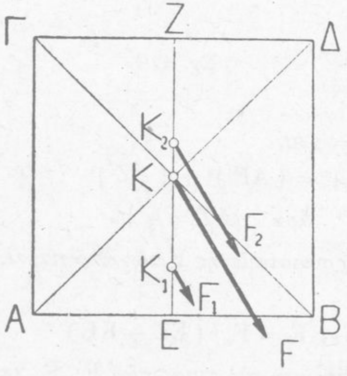
Ὁμοίως ἀπὸ τὰ ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα ΖΚΘ καὶ ΖΕΑ ἔχομεν:

$$\frac{K\Theta}{AE} = \frac{KZ}{EZ} \qquad \text{ἄρα} \qquad K\Theta = \frac{KZ}{EZ} \cdot AE$$

$$\text{ἢ} \quad K\Theta = \frac{2{,}86}{5} \cdot 4 \quad \text{ἄρα} \quad K\Theta = \mathbf{2{,}29\ m}$$

33

Ἡ τετράγωνος πλὰξ ἔχει πλευρὰν $\alpha = 10$ cm. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς πλακὸς εἶναι $\sigma = \alpha^2$ ἤτοι $\sigma = 100$ cm². Αἱ δύο διαγώνιοι χωρίζουν τὸ τετράγωνον εἰς τέσσαρα ἴσα τρίγωνα (σχ. 18), ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει ἐμβαδὸν $\sigma' = \sigma/4 = 25$ cm². Ἂν καλέσωμεν β τὸ βάρος 1 cm² τῆς πλακός, τότε ὁλόκληρος ἡ πλὰξ ἔχει βάρος F ἴσον μέ:



Σχ. 18

$$F = \sigma \cdot \rho \quad \text{ἤτοι} \quad F = 100 \cdot \rho$$

Ἕκαστον δὲ ἐκ τῶν τεσσάρων τριγώνων ἔχει βάρος F_1 ἴσον μέ:

$$F_1 = \sigma' \cdot \rho \quad \text{ἤτοι} \quad F_1 = 25 \cdot \rho$$

Ἀπὸ τὴν πλάκα θὰ ἀφαιρεθῇ τὸ τρίγωνον ΑΚΒ, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον βάρος K_1 εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς διαμέσου ΚΕ τοῦ τριγώνου καὶ ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τὸ κέντρον Κ τῆς πλακὸς εἶναι:

$$KK_1 = \frac{2}{3} \cdot KE$$

Τὸ μῆκος τῆς διαμέσου ΚΕ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς α τῆς πλακός, ἤτοι εἶναι $KE = \alpha/2 = 5$ cm. Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι:

$$KK_1 = \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{10}{3} \text{ cm} \quad ἢ \quad KK_1 = 3{,}33 \text{ cm}$$

Ὅταν ἀφαιρεθῇ τὸ τρίγωνον ΚΑΒ, τότε τὸ κέντρον βάρους K_2 τοῦ ἀπομείναντος τμήματος τῆς πλακὸς εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΚΖ, ἡ ὁποία εἶναι ἄξων συμμετρίας. Τὸ βάρος F_2 τοῦ ἀπομείναντος τμήματος τῆς πλακὸς εἶναι τριπλάσιον τοῦ βάρους τοῦ ἀφαιρεθέντος τριγώνου, ἤτοι εἶναι:

$$F_2 = 3 \cdot F_1 \quad καὶ \quad F_2 = 75 \cdot \rho$$

Τὸ ὅλον βάρος F τῆς πλακὸς ἦτο ἡ συνισταμένη τῶν δύο παραλλήλων καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς δυνάμεων F_1 καὶ F_2. Ἄρα θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$F_1 \cdot KK_1 = F_2 \cdot KK_2 \quad ἢ \quad 25\rho \cdot KK_1 = 75\rho \cdot KK_2$$

$$καὶ \quad 25 \cdot KK_1 = 75 \cdot KK_2 \quad ἢ \quad 25 \cdot \frac{10}{3} = 75 \cdot KK_2$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν:

$$KK_2 = \frac{10}{9} \text{ cm} \quad ἢ \quad KK_2 = \mathbf{1{,}11\ cm}$$

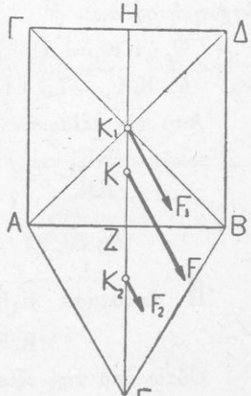
34

Ἡ πλὰξ ἔχει πλευρὰν $\alpha = 6$ cm. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς πλακὸς εἶναι $\sigma = \alpha^2$, ἤτοι $\sigma = 36$ cm². Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΕ (σχ. 19), τὸ ὁποῖον συνεννώνεται μὲ τὴν πλάκα ΑΒΓΔ ἔχει πλευρὰν $AB = \alpha = 6$ cm καὶ ὕψος ΕΖ. Θὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ὕψος ΕΖ, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου. Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΕΖ ἔχομεν:

$$(EZ)^2 = (AE)^2 - (AZ)^2$$

$$ἢ \quad (EZ)^2 = \alpha^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

$$ἄρα \quad (EZ)^2 = \frac{3 \cdot \alpha^2}{4} \quad καὶ \quad EZ = \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{3}$$



Σχ. 19

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου εἶναι:

$$EZ = 3 \cdot \sqrt{3} \text{ cm} \quad ἢ \quad EZ = 5{,}19 \text{ cm}$$

Τὸ ἐμβαδὸν σ′ τοῦ τριγώνου ΑΒΕ εἶναι :

$$\sigma' = \frac{AB \cdot EZ}{2} = \frac{6 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{2} = 9 \cdot \sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Ἄν καλέσωμεν ρ τὸ βάρος 1 cm² τῆς μεταλλικῆς αὐτῆς πλακός, τότε ἡ τετράγωνος πλὰξ ΑΒΓΔ ἔχει βάρος F_1 ἴσον μέ:

$$F_1 = \sigma \cdot \rho \quad \text{ἤτοι} \quad F_1 = 36 \cdot \rho_1$$

Τὸ βάρος F_1 ἐφαρμόζεται εἰς τὸ κέντρον K_1 τῆς πλακός. Ἡ τριγωνική πλὰξ ΑΒΕ ἔχει βάρος F_2 ἴσον μέ:

$$F_2 = \sigma' \cdot \rho \quad \text{ἢ} \quad F_2 = 9 \cdot \sqrt{3} \cdot \rho$$

Τὸ βάρος F_2 ἐφαρμόζεται εἰς τὸ κέντρον βάρους K_2 τῆς τριγωνικῆς πλακός. Τὸ σημεῖον K_2 εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς διαμέσου ΕΖ τοῦ τριγώνου καὶ ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τὴν βάσιν ΑΒ τοῦ τριγώνου εἶναι:

$$K_2Z = \frac{1}{3} \cdot EZ = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \sqrt{3}\ \text{cm} \quad \text{ἢ} \quad K_2Z = \sqrt{3}\ \text{cm}$$

Ἀπὸ τὴν συνένωσιν τῶν δύο πλακῶν προκύπτει ἡ πλὰξ ΑΕΒΔΓ, ἡ ὁποία ἔχει ἄξονα συμμετρίας τὴν εὐθεῖαν ΕΗ καὶ βάρος F, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δύο παραλλήλων καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς δυνάμεων F_1 καὶ F_2. Ἡ συνισταμένη F ἔχει ἔντασιν:

$$F = F_1 + F_2 = 36 \cdot \rho + 9 \, . \sqrt{3} \cdot \rho = 9\rho \cdot (4 + \sqrt{3})$$

καὶ ἐφαρμόζεται εἰς τὸ κέντρον βάρους Κ τοῦ συστήματος. Οὕτω θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$F_1 \cdot KK_1 = F_2 \cdot KK_2 \quad \text{ἢ} \quad 36\rho \cdot KK_1 = 9\sqrt{3} \cdot \rho \cdot KK_2$$

$$\text{καὶ} \quad 4 \cdot KK_1 = \sqrt{3} \cdot KK_2 \quad \text{ἢ} \quad 4 \cdot KK_1 = 1{,}73 \cdot KK_2 \qquad (1)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) λαμβάνομεν:

$$\frac{KK_1}{KK_2} = \frac{1{,}73}{4} \quad \text{ἢ} \quad \frac{KK_1}{KK_1 + KK_2} = \frac{1{,}73}{1{,}73+4}$$

$$\text{καὶ} \quad \frac{KK_1}{K_1K_2} = \frac{1{,}73}{5{,}73} \qquad (2)$$

Ἡ ἀπόστασις K_1K_2 εἶναι: $K_1K_2 = K_1Z + K_2Z$ ἤτοι εἶναι

$$K_1K_2 = 3 + \sqrt{3} = 4{,}73\ \text{cm}$$

Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι:

$$KK_1 = K_1K_2 \cdot \frac{1{,}73}{5{,}73} \quad \text{ἢ} \quad KK_1 = 4{,}73 \cdot \frac{1{,}73}{5{,}73}$$

$$\text{καὶ} \quad KK_1 = \mathbf{1{,}427\ cm}$$

35

Οἱ δύο βραχίονες τῆς φάλαγγος τοῦ ζυγοῦ ἔχουν μήκη $l_1 = 159{,}2$ mm καὶ $l_2 = 160{,}4$ mm. Ἐπὶ τοῦ δίσκου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὸν μακρότερον βραχίονα l_2 θέτομεν βάρος $B_2 = 120{,}5$ gr*. Διὰ νὰ ἰσορροπήσῃ ὁ ζυγός, θέτομεν ἐπὶ τοῦ ἄλλου δίσκου βάρος B_1. Τότε ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$B_1 \cdot l_1 = B_2 \cdot l_2 \quad \text{ἄρα} \quad B_1 = B_2 \cdot \frac{l_2}{l_1}$$

$$\text{καὶ} \quad B_1 = 120{,}5 \cdot \frac{160{,}4}{159{,}2} = \mathbf{121{,}4\ gr^*}$$

36

Ἄς καλέσωμεν B_α καὶ B_δ ἀντιστοίχως τὰ βάρη τοῦ ἀριστεροῦ καὶ τοῦ δεξιοῦ δίσκου. Ἐπίσης ἂς καλέσωμεν l_α καὶ l_δ ἀντιστοίχως τὰ μήκη τοῦ ἀριστεροῦ καὶ τοῦ δεξιοῦ βραχίονος τῆς φάλαγγος. Ὅταν οἱ δίσκοι εἶναι κενοί, ὁ ζυγὸς ἰσορροπεῖ καὶ ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$B_\alpha \cdot l_\alpha = B_\delta \cdot l_\delta \qquad (1)$$

Ἄν ἐπὶ τοῦ ἀριστεροῦ δίσκου θέσωμεν 100 gr* καὶ ἐπὶ τοῦ δεξιοῦ δίσκου θέσωμεν 101 gr*, ὁ ζυγὸς καὶ πάλιν ἰσορροπεῖ καὶ συνεπῶς ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$(100 + B_\alpha) \cdot l_\alpha = (101 + B_\delta) \cdot l_\delta$$

$$\text{ἢ} \quad 100 \cdot l_\alpha + B_\alpha \cdot l_\alpha = 101 \cdot l_\delta + B_\delta \cdot l_\delta \qquad (2)$$

Ἄν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) ἀφαιρέσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (1), εὑρίσκομεν:

$$100 \cdot l_\alpha = 101 \cdot l_\delta$$

Ἐπειδὴ δίδεται ὅτι εἶναι $l_\alpha = 15$ cm, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μῆκος l_δ τοῦ δεξιοῦ βραχίονος τῆς φάλαγγος εἶναι:

$$l_\delta = l_\alpha \cdot \frac{100}{101} = 15 \cdot \frac{100}{101}\ \text{cm} \quad \text{ἢ} \quad l_\delta = \mathbf{14{,}85\ cm}$$

ΚΙΝΗΣΙΣ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΣ ΚΙΝΗΣΙΣ

37

Ἡ ἁμαξοστοιχία, ἡ ὁποία ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὴν πόλιν Α, ἔχει ταχύτητα

$\upsilon_1 = 92$ km/h, ἡ δὲ ἁμαξοστοιχία, ἡ ὁποία ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὴν πόλιν B, ἔχει ταχύτητα $\upsilon_2 = 78$ km/h. Αἱ δύο ἁμαξοστοιχίαι ἐκκινοῦν συγχρόνως ἀπὸ τὰς πόλεις A καὶ B, κινούμεναι δὲ ἐπὶ τὸν αὐτὸν χρόνον t συναντῶνται εἰς ἕνα σημεῖον. Αἱ δύο ἁμαξοστοιχίαι διανύουν μέχρι τῆς συναντήσεώς των τὰ ἑξῆς διαστήματα :

ἡ ἀναχωρήσασα ἀπὸ τὴν πόλιν A : $\quad s_1 = \upsilon_1 \cdot t \qquad (1)$

ἡ ἀναχωρήσασα ἀπὸ τὴν πόλιν B : $\quad s_2 = \upsilon_2 \cdot t \qquad (2)$

Τὸ ἄθροισμα τῶν διανυθέντων διαστημάτων s_1 καὶ s_2 ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο πόλεων A καὶ B. Ἄρα εἶναι:

$$s_1 + s_2 = 203 \text{ km} \qquad (3)$$

Ἂν προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

$$s_1 + s_2 = \upsilon_1 \cdot t + \upsilon_2 \cdot t \quad \text{ἢ} \quad s_1 + s_2 = (\upsilon_1 + \upsilon_2) \cdot t$$

Ἂν εἰς τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν $s_1 + s_2$, υ_1 καὶ υ_2, εὑρίσκομεν :

$$203 = (92 + 78) \cdot t \quad \text{ἢ} \quad 203 = 170 \cdot t$$

Ἄρα αἱ δύο ἁμαξοστοιχίαι θὰ συναντηθοῦν μετὰ χρόνον :

$$t = \frac{203}{170} \text{ h} \quad \text{ἢ} \quad t = \mathbf{1\ h\ 11\ min\ 38\ sec}$$

Θὰ συναντηθοῦν δὲ εἰς ἀπόστασιν s_1 ἀπὸ τὴν πόλιν A :

$$s_1 = \upsilon_1 \cdot t = 92 \cdot \frac{203}{170} \text{ km} \quad \text{ἢ} \quad s_1 = \mathbf{109{,}85\ km}$$

Σημείωσις. Ἀνωτέρω ἐλάβομεν τὴν ταχύτητα εἰς km/h καὶ διὰ τοῦτο ὁ χρόνος t εὑρέθη εἰς ὥρας, διότι εἶναι:

$$t = \frac{203}{107} \left(\frac{\text{km}}{\text{km/h}} = \text{km} \cdot \frac{\text{h}}{\text{km}} = \text{h} \right)$$

Ἐπίσης ἐθεωρήσαμε τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τῶν ταχυτήτων υ_1 καὶ υ_2, καὶ οὕτω δὲν ἐλήφθη ὑπ' ὄψιν ὅτι οἱ ταχύτητες ἔχουν ἀντίθετον φοράν.

38

Ὁ χρόνος τῆς κινήσεως τῆς ἁμαξοστοιχίας εἶναι:

$$t = 8 \text{ h } 43 \text{ min} - 7 \text{ h } 05 \text{ min} = 1 \text{h } 38 \text{ min}$$

$$\text{ἢ} \quad t = 1\frac{38}{60} \text{ h}$$

Ἡ ἁμαξοστοιχία διατρέχει διάστημα $s = 129{,}5$ km. Μέση ταχύτης υ_μ τῆς ἁμαξοστοιχίας καλεῖται ἡ ταχύτης, τὴν ὁποίαν ἔπρεπε νὰ εἶχεν ἡ ἁμαξοστοιχία, διὰ νὰ διατρέξῃ αὔτη τὸ διάστημα s εἰς χρόνον t, κινουμένη εὐθυγράμμως καὶ ὁμαλῶς. Ἄρα:

$$\upsilon_\mu = \frac{s}{t} = 129{,}5 : 1\frac{38}{60} \text{ (km : h)}$$

$$\text{ἢ} \quad \upsilon_\mu = \mathbf{79{,}3\ km/h}$$

39

Αἱ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως τοῦ κινητοῦ εἶναι:

$$\upsilon = \gamma \cdot t \quad \text{καὶ} \quad s = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2$$

Δίδεται ὅτι εἶναι: $\gamma = 4$ cm/sec^2 καὶ $s = 50$ m $= 50 \cdot 10^2$ cm. Ὁ χρόνος τῆς κινήσεως τοῦ κινητοῦ εἶναι:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{\gamma}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50 \cdot 10^2}{4}} = \mathbf{50\ sec}$$

Σημείωσις. Ἐπειδὴ ἡ ἐπιτάχυνσις καὶ τὸ διάστημα μετροῦνται εἰς μονάδας C.G.S., ἕπεται ὅτι καὶ ὁ χρόνος μετρεῖται εἰς μονάδας C.G.S. ἤτοι εἰς δευτερόλεπτα. Τοῦτο συνάγεται καὶ ἂν θέσωμεν τὰς μονάδας τῶν γ καὶ s εἰς τὸν τύπον:

$$t = \sqrt{\frac{cm}{cm/sec^2}} = \sqrt{sec^2} = sec$$

40

Αἱ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως τοῦ κινητοῦ εἶναι:

$$\upsilon = \gamma \cdot t \quad \text{καὶ} \quad s = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2$$

Δίδεται ὅτι εἶναι $t = 20$ sec καὶ $s = 0{,}8$ km $= 800$ m. Ἡ ἐπιτάχυνσις γ εἶναι:

$$\gamma = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 800}{20^2}\left(\frac{m}{sec^2}\right) = \mathbf{4\ m/sec^2}$$

41

Αἱ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως εἶναι:

$$\upsilon = \gamma \cdot t \quad \text{καὶ} \quad s = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2$$

Δίδεται ὅτι ὁ χρόνος τῆς κινήσεως εἶναι: $t = 12\ \text{min} = 720\ \text{sec}$ καὶ ὅτι ἡ ταχύτης τῆς ἁμαξοστοιχίας εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου t εἶναι:

$$\upsilon = 108\ \text{km/h} = 108 \cdot 10^3\ \text{m/h} = \frac{108 \cdot 10^3}{3600}\ \text{m/sec} = 30\ \text{m/sec}$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $\upsilon = \gamma \cdot t$ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως εἶναι:

$$\gamma = \frac{\upsilon}{t} = \frac{30}{720}\left(\frac{\text{m/sec}}{\text{sec}}\right) = \frac{1}{24}\ \text{m/sec}^2$$

1) Ἐντὸς τοῦ πρώτου λεπτοῦ, ἤτοι ἐντὸς χρόνου $t = 1\ \text{min} = 60\ \text{sec}$, ἡ ἁμαξοστοιχία διέτρεξε διάστημα:

$$s_1 = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{24} \cdot 60^2 \left(\frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \cdot \text{sec}^2\right) = \mathbf{75\ m}$$

2) Ἐντὸς χρόνου $t = 2\ \text{min} = 120\ \text{sec}$ ἡ ἁμαξοστοιχία διέτρεξε διάστημα:

$$s_2 = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{24} \cdot 120^2 \left(\frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \cdot \text{sec}^2\right) = 300\ \text{m}$$

Ἄρα κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ δευτέρου λεπτοῦ ἡ ἁμαξοστοιχία διέτρεξε διάστημα:

$$s_2 - s_1 = 300\ \text{m} - 75\ \text{m} = \mathbf{225\ m}$$

3) Ἐντὸς χρόνου $t = 11\ \text{min} = 660\ \text{sec}$ ἡ ἁμαξοστοιχία διέτρεξε διάστημα:

$$s_{11} = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{24} \cdot 660^2 = 9075\ \text{m}$$

καὶ ἐντὸς χρόνου $t = 12\ \text{min} = 720\ \text{sec}$ διέτρεξεν:

$$s_{12} = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{24} \cdot 720^2 = 10\,800\ \text{m}$$

Ἄρα κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ δωδεκάτου λεπτοῦ ἡ ἁμαξοστοιχία διέτρεξε διάστημα:

$$s_{12} - s_{11} = 10\,800\ \text{m} - 9075\ \text{m} = \mathbf{1725\ m}$$

42

Τὸ βλῆμα κινεῖται ἐντὸς τοῦ σωλῆνος τοῦ πυροβόλου μὲ ἐπιτάχυνσιν γ. Ἐντὸς χρόνου t διανύει διάστημα $s = 2\ \mathrm{m} = 200\ \mathrm{cm}$ καὶ ἀποκτᾷ ταχύτητα $\upsilon = 400\ \mathrm{m/sec}$ ἢ $\upsilon = 4 \cdot 10^4\ \mathrm{cm/sec}$.

Αἱ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως τοῦ βλήματος εἶναι:

$$\upsilon = \gamma \cdot t \quad (1) \qquad s = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 \quad (2)$$

Ἂν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (1) ὡς πρὸς γ, λαμβάνομεν: $\gamma = \frac{\upsilon}{t}$.

Θέτοντες αὐτὴν τὴν τιμὴν τοῦ γ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν:

$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{\upsilon}{t} \cdot t^2 \quad \text{ἄρα} \quad t = \frac{2s}{\upsilon}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι τὸ βλῆμα ἐκινήθη ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ἐπὶ χρόνον:

$$t = \frac{2s}{\upsilon} = \frac{2 \cdot 2}{400}\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m/sec}}\right) = \mathbf{0{,}01\ sec}$$

Η ἐπιτάχυνσις τοῦ βλήματος εἶναι:

$$\gamma = \frac{\upsilon}{t} = \frac{400}{0{,}01}\left(\frac{\mathrm{m/sec}}{\mathrm{sec}}\right) = \mathbf{40\ 000\ m/sec^2}$$

$$\text{ἢ} \quad \gamma = \mathbf{40\ km/sec^2}$$

43

Τὰ δύο κινητά, τὰ ὁποῖα ἀναχωροῦν ἀπὸ τὰ ἄκρα Α καὶ Β τῆς εὐθείας ΑΒ ἔχουν ἀντιστοίχως ἐπιταχύνσεις $\gamma_A = 1\ \mathrm{m/sec^2}$ καὶ $\gamma_B = 2\ \mathrm{m/sec^2}$.

Τὰ δύο κινητὰ συναντῶνται εἰς τὸ σημεῖον Γ. Οὕτω τὸ κινητὸν τὸ ἀναχωρῆσαν ἀπὸ τὸ Β διήνυσεν ἐντὸς χρόνου t τὸ διάστημα $B\Gamma = s_B = 25\ \mathrm{m}$. Τὸ δὲ κινητὸν τὸ ἀναχωρῆσαν ἀπὸ τὸ Α διήνυσεν ἐντὸς χρόνου $t - 2$ τὸ διάστημα $A\Gamma = s_A$. Αἱ ἐξισώσεις τοῦ διαστήματος διὰ τὰ δύο κινητὰ εἶναι:

$$s_B = \frac{1}{2}\gamma_B \cdot t^2 \quad \text{ἢ} \quad 25 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t^2 \quad (1)$$

$$s_A = \frac{1}{2}\gamma_A \cdot (t-2)^2 \quad \text{ἢ} \quad s_A = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot (t-2)^2 \quad (2)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν ὅτι τὸ κινητὸν τὸ ἀναχωρῆσαν ἀπὸ τὸ ἄκρον B ἐκινήθη ἐπὶ χρόνον:

$$t = \sqrt{25}\ \text{sec} \quad \text{ἢ} \quad t = 5\ \text{sec}$$

Συνεπῶς τὸ κινητὸν τὸ ἀναχωρῆσαν ἀπὸ τὸ ἄκρον A ἐκινήθη ἐπὶ χρόνον $5 - 2 = 3$ sec. Ἄρα τὸ κινητὸν τοῦτο διήνυσε διάστημα:

$$s_A = \frac{1}{2}\gamma_A \cdot 3^2 \quad \text{ἢ} \quad s_A = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 9\left(\frac{m}{sec^2}\cdot sec^2\right)$$

$$\text{καὶ} \quad s_A = 4{,}5\ m$$

Τὸ μῆκος τῆς εὐθείας AB εἶναι:

$$AB = s_A + s_B = 4{,}5 + 25 = \mathbf{29{,}5\ m}$$

44

Τὸ κινητὸν ἔχει ἀρχικὴν ταχύτητα $\upsilon_0 = 10$ m/sec καὶ ὑφίσταται ἐπιτάχυνσιν $\gamma = 200\ cm/sec^2 = 2\ m/sec^2$. Ἐντὸς χρόνου t ἀποκτᾶ ταχύτητα υ καὶ διανύει διάστημα $s = 8$ m. Αἱ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως εἶναι:

$$\upsilon = \upsilon_0 + \gamma\cdot t \qquad s = s_0\cdot t + \frac{1}{2}\gamma\cdot t^2$$

Ἂν εἰς τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς θέσωμεν τὰς δοθείσας τιμὰς τῶν υ_0 γ καὶ s, εὑρίσκομεν:

$$\upsilon = 10 + 2t \quad (1) \qquad 8 = 10t + t^2 \quad (2)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν:

$$t^2 + 10t - 8 = 0 \quad \text{ἄρα} \quad t = \frac{-10 \pm \sqrt{100+32}}{2}$$

$$\text{καὶ} \quad t = \frac{-10 \pm 11{,}49}{2}$$

Ἡ θετικὴ ρίζα τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι $t = 0{,}745$ sec. Ἂν θέσωμεν αὐτὴν τὴν τιμὴν τοῦ t εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1), εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ταχύτης εἶναι:

$$\upsilon = 10\left(\frac{m}{sec}\right) + 2\cdot 0{,}745\left(\frac{m}{sec^2}\cdot sec\right) = \mathbf{11{,}43\ m/sec}$$

45

Θεωροῦμεν ὡς ἀρχὴν τῶν χρόνων τὴν στιγμήν, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ κινητὸν ἀρχίζει νὰ ὑφίσταται ἐπιτάχυνσιν $\gamma = 3\ \mathrm{m/sec^2}$. Κατὰ τὴν στιγμὴν ἐκείνην τὸ κινητὸν ἔχει ἀρχικὴν ταχύτητα $\upsilon_0 = 10\ \mathrm{m/sec}$. Αἱ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως εἶναι:

$$\upsilon = \upsilon_0 + \gamma \cdot t \qquad (1) \qquad\qquad s = \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) ἠμποροῦμε νὰ εὕρωμεν ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει νὰ κινηθῇ τὸ κινητὸν διὰ νὰ διπλασιασθῇ ἡ ταχύτης του, δηλ. διὰ νὰ γίνῃ $\upsilon = 2\upsilon_0$. Οὕτω εὑρίσκομεν:

$$2\upsilon_0 = \upsilon_0 + \gamma \cdot t \qquad \text{ἤτοι} \qquad 2\upsilon_0 - \upsilon_0 = \gamma \cdot t$$

$$\text{καὶ} \quad t = \frac{\upsilon_0}{\gamma} = \frac{10}{3}\left(\frac{\mathrm{m/sec}}{\mathrm{m/sec^2}}\right) = \frac{10}{3}\ \mathrm{sec}$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν τώρα πόσον διάστημα πρέπει νὰ διατρέξῃ τὸ κινητόν, διὰ νὰ διπλασιασθῇ ἡ ταχύτης του, δηλ. πόσον διάστημα διανύει ἐντὸς $t = 10/3$ sec:

$$s = 10 \cdot \frac{10}{3} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2 \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}} \cdot \mathrm{sec} + \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec^2}} \cdot \mathrm{sec^2}\right)$$

$$\text{ἤτοι} \qquad s = \frac{100}{3} + \frac{50}{3} = \mathbf{50\ m}$$

46

Τὸ σῶμα ἔχει ἀρχικὴν ταχύτητα $\upsilon_0 = 20\ \mathrm{m/sec}$ καὶ ὑφίσταται ἐπιβράδυνσιν $\gamma = 1{,}2\ \mathrm{m/sec^2}$. Αἱ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως εἶναι:

$$\upsilon = \upsilon_0 - \gamma \cdot t \qquad (1) \qquad\qquad s = \upsilon_0 \cdot t - \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 \qquad (2)$$

1) Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) ἠμποροῦμε νὰ εὕρωμεν ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει νὰ κινηθῇ τὸ κινητὸν διὰ νὰ ἐλαττωθῇ ἡ ταχύτης του εἰς τὸ ἥμισυ, δηλ. διὰ νὰ γίνῃ $\upsilon = \upsilon_0/2$. Οὕτω εὑρίσκομεν:

$$\frac{\upsilon_0}{2} = \upsilon_0 - \gamma \cdot t \qquad \text{ἤτοι} \qquad \gamma \cdot t = \upsilon_0 - \frac{\upsilon_0}{2} = \frac{\upsilon_0}{2}$$

$$\text{καὶ} \qquad t = \frac{\upsilon_0}{2} : \gamma = \frac{20}{2} : 1{,}2 \left(\frac{m}{sec} : \frac{m}{sec^2} \right)$$

$$\text{ἢ} \qquad t = \frac{10}{1{,}2}\ sec = \frac{25}{3}\ sec$$

'Από τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν τώρα πόσον διάστημα πρέπει νὰ διατρέξῃ τὸ κινητόν, διὰ νὰ ἐλαττωθῇ ἡ ταχύτης του εἰς τὸ ἥμισυ, δηλαδὴ πόσον διάστημα διανύει ἐντὸς χρόνου $t = \frac{25}{3}$ sec :

$$s = 20 \cdot \frac{25}{3} - \frac{1}{2} \cdot 1{,}2 \cdot \left(\frac{25}{3}\right)^2 \left(\frac{m}{sec} \cdot sec - \frac{m}{sec^2} \cdot sec^2 \right)$$

$$\text{ἤτοι} \quad s = \frac{500}{3} - \frac{125}{3} = \mathbf{125\ m}$$

2) Εἶναι γνωστὸν ὅτι εἰς τὴν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην κίνησιν εἶναι:

$$\text{διάρκεια τῆς κινήσεως: } t = \frac{\upsilon_0}{\gamma}$$

$$\text{ὁλικὸν διάστημα: } s = \frac{\upsilon_0^2}{2\gamma}$$

'Από τὴν δευτέραν σχέσιν εὑρίσκομεν ὅτι τὸ κινητὸν ἕως, ὅτου νὰ σταματήσῃ, θὰ διατρέξῃ διάστημα:

$$s = \frac{20^2}{2 \cdot 1{,}2} \frac{(m/sec)^2}{m/sec^2} = \frac{400}{2{,}4}\ m = \mathbf{166{,}66\ m}$$

47

Αἱ ἐξισώσεις τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα υ_0 εἶναι:

$$\upsilon = \upsilon_0 + g \cdot t \qquad (1) \qquad\qquad s = \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (2)$$

Τὸ σῶμα εἰς τὸ σημεῖον Α τῆς κατακορύφου τροχιᾶς του ἔχει μίαν ταχύτητα $\upsilon_0 = 40$ cm/sec, τὴν ὁποίαν ἠμποροῦμε νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἀρχικὴν ταχύτητα διὰ τὴν μετὰ τὸ σημεῖον Α πτῶσιν τοῦ σώματος. Εἰς τὸ σημεῖον Β τὸ σῶμα ἔχει ταχύτητα $\upsilon = 150$ cm/sec. Τὴν ἀπόστασιν ΑΒ = s διανύει τὸ κινητὸν εἰς χρόνον t μὲ ἐπιτάχυνσιν $g = 10$ m/sec².

'Από τὴν ἐξίσωσιν (1) ἠμποροῦμε νὰ εὕρωμεν τὸν χρόνον t, ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται διὰ νὰ μεταβῇ τὸ σῶμα ἀπὸ τὸ σημεῖον Α εἰς τὸ σημεῖον Β. Οὕτω εὑρίσκομεν:

$$t = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{g} = \frac{150 - 40}{10} \left(\frac{m/sec}{m/sec^2} \right) = 11 \text{ sec}$$

Ἤδη ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ἀπόστασις AB = s εἶναι:

$$s = 40 \cdot 11 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11^2 \left(\frac{cm}{sec} \cdot sec + \frac{cm}{sec^2} \cdot sec^2 \right)$$

ἤτοι $s = 440 + 605 \text{ cm} = \mathbf{1045\ cm}$ ἢ $s = \mathbf{10{,}45\ m}$

48

Τὸ βάθος τοῦ φρέατος εἶναι s = 180 m. Τὸ σῶμα Α πίπτον ἐλευθέρως μὲ ἐπιτάχυνσιν $g = 10 \text{ m/sec}^2$, διανύει τὸ διάστημα s εἰς χρόνον t, τὸν ὁποῖον δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν:

$$s = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad \text{ἄρα} \quad t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$$

$$\text{ἢ} \qquad t = \sqrt{\frac{2 \cdot 180}{10}} \left(\sqrt{\frac{m/sec^2}{m}} \right) = 6 \text{ sec}$$

Τὸ σῶμα Β ἀφήνεται νὰ πέσῃ ἐλευθέρως μετὰ 1 sec ἀπὸ τὴν στιγμὴν τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ σώματος Α. Ὥστε, ὅταν τὸ σῶμα Α φθάνῃ εἰς τὸν πυθμένα τοῦ φρέατος, τὸ σῶμα Β ἔχει κινηθῆ ἐπὶ χρόνον $t_1 = 5$ sec καὶ ἔχει διανύσει διάστημα:

$$s_1 = \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 \quad \text{ἢ} \quad s_1 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5^2 = 125 \text{ m}$$

δηλαδή, ὅταν τὸ σῶμα Α φθάνῃ εἰς τὸν πυθμένα τοῦ φρέατος, τὸ σῶμα Β εὑρίσκεται ἄνωθεν τοῦ πυθμένος εἰς ὕψος:

$$s - s_1 = 180 \text{ m} - 125 \text{ m} = \mathbf{55\ m}$$

49

Ἀρχικῶς ἡ ἀπόστασις τῶν δύο σωμάτων εἶναι h = 300 m.

1) Ἔστω ὅτι τὰ δύο σώματα θὰ συναντηθοῦν εἰς ἕνα σημεῖον Μ τῆς κατακορύφου, μετὰ χρόνον t ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεως τοῦ σώματος Β καὶ συνεπῶς μετὰ χρόνον t + 6 ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεως τοῦ σώματος Α. Οὕτω ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεώς των μέχρι τῆς συναντήσεώς των εἰς τὸ σημεῖον Μ ἕκαστον τῶν σωμάτων Α καὶ Β θὰ διανύσῃ ἀντιστοίχως διάστημα s_A καὶ s_B τὸ ὁποῖον εἶναι:

$$s_A = \frac{1}{2} g \cdot (t+6)^2 \quad \text{ἢ} \quad s_A = \frac{1}{2} g \cdot (t^2 + 36 + 12\,t)$$

$$s_B = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Ἂν ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἀνωτέρω δύο ἐξισώσεις εὑρίσκομεν:

$$s_A - s_B = \frac{1}{2} g \cdot (36 + 12\,t)$$

Ἡ διαφορὰ $s_A - s_B$ τῶν δύο διαστημάτων εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀρχικὴν ἀπόστασιν h τῶν δύο σωμάτων. Ἄρα ἔχομεν:

$$300 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (36 + 12\,t) \quad \text{ἢ} \quad 300 = 180 + 60\,t$$

Ὥστε τὰ δύο σώματα θὰ συναντηθοῦν μετὰ χρόνον: $t = \mathbf{2\ sec}$ ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεως τοῦ σώματος Β. Ἡ ζητουμένη ἀπόστασις τοῦ σημείου συναντήσεως Μ ἀπὸ τὸ σημεῖον ἐκκινήσεως τοῦ σώματος Α εἶναι:

$$s_A = \frac{1}{2} g \cdot (t+6)^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8^2 = \mathbf{320\ m}$$

2) Τὸ σῶμα Β φθάνει εἰς τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως Μ, ἀφοῦ ἐκινήθη ἐπὶ 2 sec. Ἄρα εἰς τὸ σημεῖον Μ τὸ σῶμα Β ἔχει ταχύτητα:

$$\upsilon_B = g \cdot t \quad \text{ἤτοι} \quad \upsilon_B = 10 \cdot 2 = 20\ \text{m/sec}$$

Τὸ σῶμα Α εἰς τὸ σημεῖον Μ ἔχει ἀποκτήσει ταχύτητα:

$$\upsilon_A = g \cdot (t + 6) \quad \text{ἤτοι} \quad \upsilon_A = 10 \cdot 8 = 80\ \text{m/sec}$$

Μετὰ τὸ σημεῖον Μ ἡ πτῶσις τῶν δύο σωμάτων συνεχίζεται μὲ ἀντιστοίχους ἀρχικὰς ταχύτητας υ_A καὶ υ_B. Ἔστω ὅτι μετὰ χρόνον t_1 ἀπὸ τῆς συναντήσεώς των ἡ ἀπόστασις τῶν δύο σωμάτων θὰ εἶναι πάλιν h = 300 m. Τότε ἕκαστον τῶν δύο σωμάτων Α καὶ Β θὰ ἔχῃ διανύσει, μετὰ τὴν συνάντησίν των, διάστημα:

$$s'_A = \upsilon_A \cdot t_1 + \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 \quad \text{ἢ} \quad s'_A = 80 \cdot t_1 + 5 \cdot t_1^2$$

$$s'_B = \upsilon_B \cdot t_1 + \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 \quad \text{ἢ} \quad s'_B = 20 \cdot t_1 + 5 \cdot t_1^2$$

Ἂν ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἀνωτέρω δύο ἐξισώσεις, εὑρίσκομεν:

$$s'_A - s'_B = 80 \cdot t_1 - 20 \cdot t_1 = 60 \cdot t_1$$

Ἡ διαφορὰ $s'_A - s'_B$ εἶναι ἴση μὲ 300 m. Ἄρα ἔχομεν:

$$300 = 60 \cdot t_1 \quad \text{καὶ} \quad t_1 = \mathbf{5\ sec}$$

Ὥστε μετὰ 5 sec ἀπὸ τῆς συναντήσεως τῶν δύο σωμάτων ἡ ἀπόστασις αὐτῶν θὰ εἶναι πάλιν 300 m.

50

Ὁ λίθος ἔχει ἀρχικὴν ταχύτητα $\upsilon_0 = 35$ m/sec, τὸ δὲ διανυόμενον διάστημα εἶναι s = 300 m. Αἱ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως τοῦ λίθου εἶναι:

$$\upsilon = \upsilon_0 + g \cdot t_0 \qquad s = \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ διαστήματος εὑρίσκομεν τὸν χρόνον t τῆς πτώσεως τοῦ λίθου, διότι ἔχομεν:

$$300 = 35\,t + 4{,}9\,t^2 \quad \text{ἢ} \quad 4{,}9\,t^2 + 35\,t - 300 = 0$$

$$\text{καὶ} \quad t = \frac{-35 \pm 84}{9{,}8}$$

Παραδεκτὴ εἶναι μόνον ἡ θετικὴ ρίζα: **t = 5 sec**

Κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἀφίξεώς του εἰς τὸ ἔδαφος, ὁ λίθος ἔχει ταχύτητα.

$$\upsilon = 35 + 9{,}8 \cdot 5 \left(\frac{m}{sec} + \frac{m}{sec^2} \cdot sec\right) = \mathbf{84\ m/sec}$$

51

Τὸ σῶμα θὰ διανύσῃ διάστημα s = 10 m εἰς χρόνον t = 1 sec μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα υ_0. Αἱ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως εἶναι:

$$\upsilon = \upsilon_0 + g \cdot t \qquad s = \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Θὰ λάβωμεν κατὰ προσέγγισιν g = 10 m/sec². Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ διαστήματος εὑρίσκομεν:

$$10 = \upsilon_0 \cdot 1 + 5 \cdot 1^2 \quad \text{ἄρα} \quad \upsilon_0 = \mathbf{5\ m/sec}$$

Τὸ σῶμα θὰ φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος μὲ ταχύτητα:

$$\upsilon = \upsilon_0 + g \cdot t = 5 + 10 \cdot 1 = \mathbf{15\ m/sec}$$

Η ΔΥΝΑΜΙΣ ΚΑΙ ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΥΤΗΣ

Α΄. ΑΙ ΑΡΧΑΙ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

52

Τὸ σῶμα ἔχει μᾶζαν $m = 19{,}62$ kgr καὶ κινεῖται μὲ ἐπιτάχυνσιν $\gamma = 1{,}5$ m/sec². Ἡ σταθερὰ δύναμις F, ἡ ὁποία προκαλεῖ τὴν κίνησιν τοῦ σώματος, δίδεται ἀπὸ τὴν θεμελιώδη ἐξίσωσιν τῆς δυναμικῆς:

$$F = m \cdot \gamma$$

Εἶναι ἀπαραίτητον νὰ κατανοηθῇ σαφῶς ὅτι εἰς ὅλα τὰ κατωτέρω προβλήματα καὶ μέχρις ὅτου γνωρίσωμεν καὶ ἄλλο σύστημα μονάδων ἡ θεμελιώδης ἐξίσωσις $F = m \cdot \gamma$ θὰ ἐφαρμόζεται εἰς τὸ σύστημα μονάδων C. G. S. ἤτοι θὰ ἔχωμεν:

$$F\ (\text{εἰς dyn}) = m\ (\text{εἰς gr}) \cdot \gamma\ (\text{εἰς cm/sec}^2)$$

Εἰς τὸ δοθὲν πρόβλημα ἔχομεν:

$$m = 19\,620 \text{ gr} \qquad \gamma = 150 \text{ cm/sec}^2$$

Ἄρα ἡ κινοῦσα δύναμις εἶναι:

$$F = 19\,620 \cdot 150 \left(\text{gr} \cdot \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}\right) = \mathbf{2\,943 \cdot 10^3\ dyn}$$

Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν τὴν δύναμιν F εἰς πρακτικὰς μονάδας δυνάμεως, ἤτοι εἰς gr* καὶ kgr*, θὰ λάβωμεν ὑπ᾿ ὄψιν ὅτι:

$$1 \text{ gr}^* = 981 \text{ dyn} \quad \text{καὶ} \quad 1 \text{ kgr}^* = 981 \cdot 10^3 \text{ dyn}$$

Ἄρα ἡ ἀνωτέρω εὑρεθεῖσα δύναμις F εἶναι:

$$F = \frac{2943 \cdot 10^3}{981 \cdot 10^3} = \mathbf{3\ kgr^*}$$

53

Τὸ σῶμα ἔχει μᾶζαν m καὶ κινεῖται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν σταθερᾶς δυνάμεως F. Ἡ ἐπιτάχυνσις γ τῆς κινήσεως τοῦ σώματος εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν θεμελιώδη ἐξίσωσιν:

$$F = m \cdot \gamma \quad \text{ἄρα} \quad \gamma = \frac{F}{m}$$

Εἰς μονάδας C. G. S. ἡ δύναμις $F = 1{,}5$ kgr* καὶ ἡ μᾶζα $m = 2$ kgr εἶναι:

$$F = 1{,}5 \text{ kgr}^* = 1{,}5 \cdot 981 \cdot 10^3 \text{ dyn}$$
$$m = 2 \text{ kgr} = 2 \cdot 10^3 \text{ gr}$$

Ἡ ζητουμένη λοιπὸν ἐπιτάχυνσις γ εἶναι:

$$\gamma = \frac{F}{m} = \frac{1{,}5 \cdot 981 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3} = \mathbf{735{,}75\ cm/sec^2}$$

$$\text{ἢ} \quad \gamma = \mathbf{7{,}357\ m/sec^2}$$

54

Τὸ σῶμα ἔχει μᾶζαν m = 10 gr. Ἡ δύναμις F = 2 gr* ἐνεργεῖ συνεχῶς ἐπὶ τοῦ σώματος ἐπὶ χρόνον t = 4 sec καὶ τοῦ προσδίδει ἐπιτάχυνσιν γ, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν F = m · γ. Εἰς μονάδας C. G. S. ἡ δύναμις F εἶναι:

$$F = 2\ gr^* = 2 \cdot 981\ dyn$$

Ἄρα ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως εἶναι:

$$\gamma = \frac{F}{m} = \frac{2 \cdot 981}{10} = 196{,}2\ cm/sec^2$$

Ἐπὶ χρόνον t = 4 sec, ἤτοι ἐφ' ὅσον ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ σώματος ἡ σταθερὰ δύναμις F, ἡ κίνησις τοῦ σώματος εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη καὶ τὸ σῶμα ἐντὸς τοῦ χρόνου τούτου διανύει διάστημα:

$$s = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 = \frac{1}{2}\, 196{,}2 \cdot 4^2 \left(\frac{cm}{sec^2} \cdot sec^2\right)$$

$$\text{ἤτοι} \quad s = 1569{,}6\ cm$$

Εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου t = 4 sec τὸ σῶμα ἔχει ἀποκτήσει ταχύτητα:

$$\upsilon = \gamma\,.\, t = 196{,}2\,.\,4 \left(\frac{cm}{sec^2} \cdot sec\right)$$

$$\text{ἤτοι} \quad \upsilon = 784{,}8\ cm/sec$$

Εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου t = 4 sec ἡ δύναμις παύει νὰ ἐνεργῇ. Σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς ἀδρανείας τὸ σῶμα ἐξακολουθεῖ νὰ κινῆται εὐθυγράμμως καὶ ὁμαλῶς, δηλαδὴ μὲ ταχύτητα υ = 784,8 cm/sec. Οὕτω ἐντὸς χρόνου t′ = 2 sec, μετὰ τὴν κατάργησιν τῆς δυνάμεως F, τὸ σῶμα διανύει ὁμαλῶς διάστημα:

$$s' = \upsilon \cdot t' = 784{,}8 \cdot 2 \left(\frac{cm}{sec} \cdot sec\right)$$

$$\text{ἤτοι} \quad s' = 1569{,}6\ cm$$

Ὥστε τὸ σῶμα κατὰ τὰ 6 δευτερόλεπτα τῆς κινήσεώς του διανύει ὁλικὸν διάστημα:

$$s_{ολ} = s + s' = 1569,6 + 1569,6 = \mathbf{3\,139,2\ cm}$$

$$\text{ἤ} \quad s_{ολ} = \mathbf{31,392\ m}$$

55

Τὸ βλῆμα ἔχει μᾶζαν m = 1 kgr καὶ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν σταθερᾶς δυνάμεως F διατρέχει τὸν σωλῆνα τοῦ πυροβόλου, ὁ ὁποῖος ἔχει μῆκος s = 3 m, ἐντὸς χρόνου t. Εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου t τὸ βλῆμα ἔχει ἀποκτήσει ταχύτητα υ = 850 m/sec. Ἡ κίνησις τοῦ βλήματος ἐντὸς τοῦ σωλῆνος εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη καὶ συνεπῶς ἰσχύουν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

$$F = m \cdot \gamma \quad (1) \qquad \upsilon = \gamma \cdot t \quad (2) \qquad s = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 \quad (3)$$

Ἂν ἐκφράσωμεν τὰ δοθέντα μεγέθη m, s καὶ υ εἰς μονάδας C. G. S. ἔχομεν:

$$m = 1\ \text{kgr} = 10^3\ \text{gr}$$
$$s = 3\ \text{m} = 3 \cdot 10^2\ \text{cm}$$
$$\upsilon = 850\ \text{m/sec} = 85 \cdot 10^3\ \text{cm/sec}$$

1) Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἐπιτάχυνσιν γ λύομεν τὴν ἐξίσωσιν (2) ὡς πρὸς t καὶ τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ t θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3). Οὕτω λαμβάνομεν:

$$t = \frac{\upsilon}{\gamma} \quad \text{καὶ} \quad s = \frac{1}{2}\gamma \cdot \frac{\upsilon^2}{\gamma^2} = \frac{\upsilon^2}{2\gamma}$$

$$\text{ἄρα} \quad \gamma = \frac{\upsilon^2}{2s} = \frac{85^2 \cdot 10^6}{2 \cdot 3 \cdot 10^2}\left[\frac{(\text{cm/sec})^2}{\text{cm}}\right]$$

$$\text{ἤτοι} \quad \gamma = \mathbf{1204 \cdot 10^4\ cm/sec^2} \quad \text{καὶ} \quad \gamma = \mathbf{120,4\ km/sec^2}$$

2) Ἡ δύναμις F εὑρίσκεται ἤδη εὔκολα ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1), ἀπὸ τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν:

$$F = m \cdot \gamma = 10^3 \cdot 1204 \cdot 10^4 = \mathbf{1204 \cdot 10^7\ dyn}$$

Ἂν κατὰ προσέγγισιν λάβωμεν 1 kgr* = 10^6 dyn, τότε ἡ ἐνεργοῦσα ἐπὶ τοῦ βλήματος δύναμις F εἶναι:

$$F = \frac{1204 \cdot 10^7}{10^6}\ \text{kgr*} \quad \text{ἢ} \quad F = \mathbf{12\,040\ kgr*}$$

56

Τὸ βλῆμα ἔχει μᾶζαν m = 200 gr καὶ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς σταθερᾶς δυνάμεως F = 25 tn * διατρέχει τὸν σωλῆνα τοῦ ὅπλου, ὁ ὁποῖος ἔχει μῆκος $s = 50$ cm, ἐντὸς χρόνου t. Τὸ βλῆμα κινούμενον μὲ ἐπιτάχυνσιν γ ἀποκτᾷ εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου t ταχύτητα υ. Ἐντὸς τοῦ σωλῆνος τὸ βλῆμα ἔχει κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην καὶ συνεπῶς ἰσχύουν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

$$F = m \cdot \gamma \quad (1) \qquad \upsilon = \gamma \cdot t \quad (2) \qquad s = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad (3)$$

Ἂν ἐκφράσωμεν τὰ δοθέντα μεγέθη m, s καὶ F εἰς μονάδας C. G. S. ἔχομεν:

$$m = 200 \text{ gr} \qquad s = 50 \text{ cm}$$

$$F = 25 \text{ tn}^* = 25 \cdot 10^6 \text{ gr}^* = 25 \cdot 10^9 \text{ dyn}$$

λαμβάνοντες κατὰ προσέγγισιν ὅτι εἶναι $1 \text{ gr}^* = 10^3$ dyn.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ταχύτητα υ, πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἐπιτάχυνσιν γ καὶ τὸν χρόνον t τῆς κινήσεως τοῦ βλήματος ἐντὸς τοῦ σωλῆνος. Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις γ εἶναι:

$$\gamma = \frac{F}{m} \quad \text{ἢ} \quad \gamma = \frac{25 \cdot 10^9}{200} \left(\frac{\text{C. G. S.}}{\text{C. G. S.}} \right) = 125 \cdot 10^6 \text{ cm/sec}^2$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (3) εὑρίσκομεν ὅτι τὸ βλῆμα κινεῖται ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ἐπὶ χρόνον:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{\gamma}}$$

Ἄρα ἡ ταχύτης τοῦ βλήματος, ὅταν τοῦτο ἐξέρχεται ἀπὸ τὴν κάνην, εἶναι:

$$\upsilon = \gamma \cdot t = \gamma \cdot \sqrt{\frac{2s}{\gamma}} = \sqrt{\frac{2s \cdot \gamma^2}{\gamma}} = \sqrt{2s \cdot \gamma}$$

$$\text{ἤτοι} \quad \upsilon = \sqrt{2 \cdot 50 \cdot 125 \cdot 10^6 \left(\text{cm} \cdot \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2} \right)}$$

$$\text{καὶ} \quad \upsilon = \mathbf{11{,}18 \cdot 10^4 \text{ cm/sec}} \quad \text{ἢ} \quad \boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{1118 \text{ m/sec}}$$

57

Τὸ σῶμα ἔχει μᾶζαν m καὶ ἐπ' αὐτοῦ ἐνεργεῖ σταθερὰ δύναμις $F = 4500$ dyn. Κατὰ μίαν χρονικὴν στιγμὴν t, τὸ σῶμα ἔχει ταχύτητα $\upsilon_1 = 60$ cm/sec καὶ μετὰ 8 sec, δηλαδὴ κατὰ τὴν στιγμὴν t_2 ἔχει ταχύτητα $\upsilon_2 = 105$ cm/sec. Ἡ δύναμις F προσδίδει εἰς τὸ σῶμα σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν γ, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν. Διότι γνωρίζομεν ὅτι ἐπιτάχυνσις καλεῖται ἡ σταθερα μεταβολὴ τῆς ταχύτητος κατὰ μονάδα χρόνου. Ἄρα εἶναι:

$$\gamma = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t_2 - t_1} = \frac{105 - 60}{8} \left(\frac{\text{cm/sec}}{\text{sec}} \right) = \frac{45}{8} \ \text{cm/sec}^2$$

Ἡ μᾶζα m τοῦ σώματος εὑρίσκεται ἤδη ἀπὸ τὴν θεμελιώδη ἐξίσωσιν $F = m \cdot \gamma$ ἀπὸ τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν:

$$m = \frac{F}{\gamma} = 4500 : \frac{45}{8} = \mathbf{800\ gr}$$

Β΄. ΤΡΙΒΗ

58

Τὸ σῶμα ἔχει βάρος B = 100 kgr *, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁποίου ὀλισθαίνει τὸ σῶμα. Ἐπὶ τοῦ σώματος ἐνεργοῦν δύο ὁριζόντιοι δυνάμεις: α) ἡ δύναμις F = 10 kgr * ἡ ὁποία σύρει τὸ σῶμα καὶ β) ἡ τριβὴ ὀλισθήσεως $T = \eta . F_K$ ἡ ὁποία ἀντιτίθεται εἰς τὴν κίνησιν τοῦ σώματος καὶ εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν δύναμιν, ἡ ὁποία ἐνεργεῖ καθέτως πρὸς τὸ ἐπίπεδον ὀλισθήσεως. Εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν ἡ δύναμις F_K εἶναι τὸ βάρος B τοῦ σώματος. Ἄρα ἡ τριβὴ εἶναι:

$$T = \eta \cdot B = 0{,}04 \cdot 100 = 4 \text{ kgr}^*$$

Οὕτω τὸ σῶμα κινεῖται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς συνισταμένης F′ τῶν δυνάμεων F καὶ T, δηλαδὴ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς σταθερᾶς δυνάμεως:

$$F' = F - T = 10 - 4 = \mathbf{6\ kgr^*}$$

Ἄρα τὸ σῶμα ἔχει κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην.

Ἡ ἐπιτάχυνσις γ τῆς κινήσεως δύναται νὰ εὑρεθῇ εὔκολα ἀπὸ τὴν θεμελιώδη ἐξίσωσιν: $F' = m \cdot \gamma$ ἀπὸ τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν:

$$\gamma = \frac{F'}{m}$$

Εἰς μονάδας C. G. S. ἔχομεν:

$$F' = 6 \text{ kgr}^* = 6 \cdot 981 \cdot 10^3 \text{ dyn}$$
$$m = 100 \text{ kgr} = 100 \cdot 10^3 \text{ gr}$$

Ἄρα ἡ ἐπιτάχυνσις γ εἶναι:

$$\gamma = \frac{6 \cdot 981 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^3} \text{ C.G.S} = \mathbf{58,86\ cm/sec^2}$$

59

Ἄς καλέσωμεν υ_o τὴν ζητουμένην ἀρχικὴν ταχύτητα. Τὸ σῶμα ἔχει βάρος $B = m \cdot g$ τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ὀλισθαίνει τὸ σῶμα. Ἐπὶ τοῦ σώματος ἐνεργεῖ ἡ τριβὴ T ἡ ὁποία εἶναι ἴση μέ:

$$T = \eta \cdot B \qquad \text{ἢ} \qquad T = \eta \cdot m . g \qquad (1)$$

Ἡ τριβὴ T προσδίδει εἰς τὸ σῶμα κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην. Ἡ ἐπιτάχυνσις γ (ἐνταῦθα ἀρνητικὴ διότι ἔχει φορὰν ἀντίθετον πρὸς τὴν φορὰν τῆς ταχύτητος υ_o) εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν θεμελιώδη ἐξίσωσιν $F = m \cdot \gamma$, ἡ ὁποία εἰς τὴν παροῦσαν περίπτωσιν γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$T = m \cdot \gamma \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν:

$$m \cdot \gamma = \eta \cdot m \cdot g \qquad \text{ἄρα} \qquad \gamma = \eta \cdot g \qquad (3)$$

Ὁ συντελεστὴς τριβῆς εἶναι $\eta = 0,01$· ἄρα ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως εἶναι:

$$\gamma = 0,01 \cdot 981 \left(\frac{cm}{sec^2}\right) = 9,81\ cm/sec^2$$

Εἶναι γνωστὸν ὅτι εἰς τὴν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην κίνησιν τὸ διανυόμενον ὁλικὸν διάστημα s εἶναι:

$$s = \frac{\upsilon_o^2}{2\gamma} \qquad (4)$$

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δίδεται ὅτι τὸ σῶμα θὰ διανύσῃ διάστημα $s = 100\ m = 10^4\ cm$. Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (4) θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν γ καὶ s, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ἀρχικὴ ταχύτης εἶναι :

$$\upsilon_o = \sqrt{2\gamma \cdot s} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 10^4} \quad \left(\sqrt{\frac{cm}{sec^2} . cm}\right)$$

$$\text{καὶ} \qquad \upsilon_o = 10^2 \cdot \sqrt{19,62}\ cm/sec = \mathbf{442,9\ cm/sec}$$

$$\text{ἢ} \qquad \upsilon_o = \mathbf{4,429\ m/sec}$$

60

Τὸ σῶμα ἔχει μᾶζαν $m = 20\ gr$ καὶ σύρεται ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ἀπὸ δύναμιν $F = 800$ dyn. Ἐπὶ τοῦ σώματος ἐνεργεῖ καὶ ἡ τριβὴ T, ἡ ὁποία ἔχει φορὰν ἀντίθετον πρὸς τὴν φορὰν τῆς δυνάμεως F. Ἄρα τὸ σῶμα κινεῖται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς συνισταμένης F' τῶν δυνάμεων F καὶ T καὶ συνεπῶς κινοῦσα δύναμις εἶναι ἡ $F' = F - T$ (1). Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως F' τὸ σῶμα ἀποκτᾶ ἐπιτάχυνσιν γ καὶ οὕτω ἔχομεν τὴν γνωστὴν σχέσιν:

$$F' = m \cdot \gamma \qquad (2)$$

Τὸ σῶμα ἔχει βάρος $B = 20$ gr *, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον. Ἄρα ἡ δύναμις τριβῆς T εἶναι:

$$T = \eta \cdot F_K \quad \text{ἢ} \quad T = \eta \cdot B \qquad (3)$$

Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως F' τὸ σῶμα κινεῖται μὲ ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν καὶ εἰς χρόνον $t = 4$ sec διανύει διάστημα $s = 200$ cm. Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$s = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 \quad \text{λαμβάνομεν} \quad \gamma = \frac{2s}{t^2}$$

$$\text{ἢ} \quad \gamma = \frac{2 \cdot 200}{4^2}\left(\frac{cm}{sec^2}\right) = 25\ cm/sec^2$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ κινοῦσα δύναμις F' εἶναι:

$$F' = m \cdot \gamma = 20 \cdot 25\left(gr.\frac{cm}{sec^2}\right) = 500\ dyn$$

Ἤδη ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν τὴν τριβὴν T, διότι ἔχομεν:

$$T = F - F' = 800\ dyn - 500\ dyn$$

$$\text{ἢ} \qquad T = \mathbf{300\ dyn}$$

Τέλος ὁ συντελεστὴς τριβῆς η εὑρίσκεται εὔκολα ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (3), ἂν εἰς αὐτὴν θέσωμεν τὸ βάρος B τοῦ σώματος ἐκπεφρασμένον εἰς δύνας. Οὕτω λαμβάνομεν:

$$\eta = \frac{T}{B} = \frac{300}{20 \cdot 981} \quad \text{καὶ} \quad \eta = \mathbf{0{,}015}$$

61

Τὸ ἕλκηθρον ἔχει βάρος $B = 600$ kgr * τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον τοῦ ἐδάφους. Ἡ τριβὴ εἶναι:

$$T = \eta \cdot F_K \quad \text{ἤτοι} \quad T = \eta \cdot B = 0{,}06 \cdot 600 = 36\ kgr\,^*$$

Ἐπειδὴ τὸ ἕλκηθρον κινεῖται μὲ σταθερὰν ταχύτητα, δηλαδὴ ὁμαλῶς, ἕπεται ὅτι ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι ἐνεργοῦν ἐπὶ τοῦ σώματος εἶναι ἴση μὲ μηδέν. Ὥστε ἡ δύναμις F, ἡ ὁποία ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ σώματος εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν τριβὴν T, ἤτοι εἶναι:

$$\mathbf{F = 36\ kgr^*}$$

62

Ἡ ταχύτης τοῦ αὐτοκινήτου εἶναι:

$$\upsilon = 108\ \mathrm{km/h} = \frac{108 \cdot 10^5}{3\,600}\ \mathrm{cm/sec} = 3 \cdot 10^3\ \mathrm{cm/sec}$$

Ὅταν μὲ τὴν βοήθειαν τῶν τροχοπεδῶν οἱ τροχοὶ τοῦ αὐτοκινήτου παύουν νὰ στρέφωνται, τότε τὸ αὐτοκίνητον ὀλισθαίνει ἐπὶ τῆς ὁδοῦ καὶ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως T ἀποκτᾶ ἐπιτάχυνσιν γ, ἡ ὁποία ἔχει φορὰν ἀντίθετον πρὸς τὴν φορὰν τῆς ταχύτητος υ. Οὕτω τὸ αὐτοκίνητον ἀποκτᾶ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην. Ἂν m εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ αὐτοκινήτου, τότε ἰσχύει ἡ γνωστὴ θεμελιώδης ἐξίσωσις:

$$T = m \cdot \gamma \qquad (1)$$

Τὸ αὐτοκίνητον ἔχει βάρος $B = m \cdot g$ καὶ συνεπῶς ἡ τριβὴ T εἶναι:

$$T = \eta \cdot B \qquad \text{ἤτοι} \qquad T = \eta \cdot m \cdot g \qquad (2)$$

Ἂν ἐξισώσωμεν τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

$$m \cdot \gamma = \eta \cdot m \cdot g \qquad \text{ἤτοι} \qquad \gamma = \eta \cdot g \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ δίδεται ὅτι ὁ συντελεστὴς τριβῆς ὀλισθήσεως εἶναι $\eta = 0{,}3$ δυνάμεθα ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (3) νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιτάχυνσιν γ.

Οὕτω εὑρίσκομεν:

$$\gamma = 0{,}3 \cdot 981 = 294{,}3\ \mathrm{cm/sec^2}$$

Γνωρίζομεν ὅτι εἰς τὴν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην κίνησιν τὸ ὁλικὸν διάστημα s εἶναι:

$$s = \frac{\upsilon^2}{2\gamma} \qquad \text{ἄρα} \qquad s = \frac{(3 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 294{,}3}\left[\frac{(\mathrm{cm/sec})^2}{\mathrm{cm/sec^2}}\right]$$

$$\text{καὶ} \qquad s = \mathbf{15\,290\ cm} \qquad \text{ἢ} \qquad s = \mathbf{152{,}90\ m}$$

63

Τὸ κιβώτιον ἔχει βάρος B = 800 kgr*. Κατὰ τὴν μετακίνησίν του ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐδάφους ἀναπτύσσεται τριβὴ T, ἡ ὁποία εἶναι ὁριζοντία καὶ ἴση μέ:

$$T = \eta \cdot B \quad \text{ἄρα} \quad T = 0{,}4 \cdot 800 = 320 \text{ kgr}^*$$

1) Διὰ νὰ μετακινηθῇ τὸ κιβώτιον, πρέπει νὰ ἐνεργήσῃ ἐπ' αὐτοῦ μία ὁριζοντία δύναμις F, ἡ ὁποία πρέπει νὰ εἶναι τουλάχιστον ἴση μὲ τὴν τριβὴν T, ὁπότε τὸ κιβώτιον, μετὰ τὴν ἐκκίνησίν του, θὰ κινῆται ἰσοταχῶς. Ἄρα ἡ μικροτέρα δυνατὴ τιμὴ τῆς δυνάμεως F εἶναι :

$$F = \mathbf{320\ kgr^*}$$

2) Ἐντὸς χρόνου t τὸ κιβώτιον θὰ διανύσῃ διάστημα $s = 10$ m $= 1\,000$ cm. Ἐπὶ τοῦ σώματος ἐνεργεῖ τώρα μία δύναμις $F_1 = 360$ kgr* μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν τριβὴν $T = 320$ kgr*. Ἡ συνισταμένη F' τῶν δυνάμεων F_1 καὶ T θὰ προσδώσῃ εἰς τὸ σῶμα ἐπιτάχυνσιν γ. Τότε ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

κινοῦσα δύναμις : $F' = F_1 - T$ (1) καὶ $F' = m \cdot \gamma$ (2)

ταχύτης μετὰ χρόνον t : $\upsilon = \gamma \cdot t$ (3)

διάστημα μετὰ χρόνον t : $s = \dfrac{1}{2}\gamma \cdot t^2$ (5)

Τὸ κιβώτιον ἔχει μᾶζαν $m = 800 \cdot 10^3$ gr. Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ κινοῦσα δύναμις F' εἶναι:

$$F' = 360 - 320 = 40 \text{ kgr}^*$$

Ἄν λάβωμεν ὅτι εἶναι 1 kgr* $= 10^6$ dyn τότε ἡ κινοῦσα δύναμις F' εἶναι:

$$F' = 40 \cdot 10^6 \text{ dyn}$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις γ εἶναι:

$$\gamma = \frac{F'}{m} = \frac{40 \cdot 10^6}{800 \cdot 10^3}\left(\frac{\text{dyn}}{\text{gr}}\right) = 50 \text{ cm/sec}^2$$

Διὰ νὰ μετακινηθῇ τὸ κιβώτιον κατὰ διάστημα $s = 10$ m ἢ $s = 1000$ cm, κινούμενον μὲ ἐπιτάχυνσιν $\gamma = 50$ cm/sec², ἀπαιτεῖται χρόνος t, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$s = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 \quad \text{ἄρα} \quad t = \sqrt{\frac{2s}{\gamma}}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν :

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000}{50}\left(\frac{\text{cm}}{\text{cm/sec}^2}\right)} = \sqrt{40} = \mathbf{6{,}32\ sec}$$

ΕΡΓΟΝ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

64

Ὁ μεταφερόμενος σάκκος ἔχει βάρος $B = 80$ kgr*, τὸ δὲ βάρος τοῦ ἐργάτου εἶναι $B' = 70$ kgr*. Ὁ ἐργάτης ἀνερχόμενος εἰς ὕψος $h = 12$ m μετατοπίζει κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω συνολικῶς βάρος $B'' = B + B'$ ἤτοι: $B'' = 80 + 70 = 150$ kgr*.

Οὕτω διὰ τὴν μεταφορὰν τοῦ σάκκου εἰς ὕψος 12 m ὁ ἐργάτης καταβάλλει ἔργον W, τὸ ὁποῖον ὑπολογίζεται ἀπὸ τὸν τύπον τοῦ ἔργου:

$$W = F \cdot s$$

ἂν εἰς τοῦτον θέσωμεν $F = B'' = 150$ kgr* καὶ $s = h = 12$ m. Οὕτω λαμβάνομεν:

$$W = 150 \cdot 12 \;(\text{kgr}^* \cdot \text{m}) = \mathbf{1800\ kgr^*m}$$

65

Ἐπὶ τοῦ σώματος ἐφαρμόζεται ἡ ὁριζοντία δύναμις $F = 5$ kgr* ἡ ὁποία μετακινεῖ τὸ σῶμα ἐπὶ τοῦ δαπέδου κατὰ διάστημα $s = 4$ m. Τὸ παραγόμενον ὑπὸ τῆς δυνάμεως ἔργον W εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν τύπον τοῦ ἔργου:

$$W = F \cdot s$$

Οὕτω εὑρίσκομεν:

$$W = 5 \cdot 4 \;(\text{kgr}^* \cdot \text{m}) = \mathbf{20\ kgr^*m}$$

Γνωρίζομεν ὅτι εἶναι: $1 \text{ kgr}^*\text{m} = 9{,}81$ Joule

Ἄρα τὸ ἀνωτέρω εὑρεθὲν ἔργον, ἂν ἐκφρασθῇ εἰς Joule, εἶναι:

$$W = 20 \cdot 9{,}81 = \mathbf{196{,}20\ Joule}$$

Ἐπειδὴ εἶναι 1 Joule $= 10^7$ erg τὸ ἀνωτέρω ἔργον, ἂν ἐκφρασθῇ εἰς ἔργια, εἶναι:

$$W = 196{,}20 \cdot 10^7 \text{ erg} \quad \text{ἢ} \quad W = \mathbf{1962 \cdot 10^6\ erg}$$

66

Τὸ σῶμα ἔχει μᾶζαν $m = 4$ kgr $= 4 \cdot 10^3$ gr καὶ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως F κινεῖται μὲ ἐπιτάχυνσιν $\gamma = 5$ cm/sec². Ἄρα ἡ δύναμις, ἡ ὁποία μετατοπίζει τὸ σῶμα, εἶναι:

$$F = m \cdot \gamma \quad \text{ἤτοι} \quad F = 4 \cdot 10^3 \cdot 5 \left(gr \cdot \frac{cm}{sec^2} \right)$$

$$\text{καὶ} \quad F = 20 \cdot 10^3 \ dyn$$

Ἡ δύναμις F μετατοπίζει τὸ σῶμα κατὰ διάστημα $s = 15$ m ἢ $s = 15 \cdot 10^2$ cm. Ἄρα τὸ παραγόμενον ὑπὸ τῆς δυνάμεως ἔργον W, μετρημένον εἰς ἔργια, εἶναι:

$$W = F \cdot s = 20 \cdot 10^3 \cdot 15 \cdot 10^2 \ (dyn \cdot cm)$$

$$\text{ἢ} \quad \mathbf{W = 3 \cdot 10^7 \ erg} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{W = 3 \ Joule}$$

67

Τὸ αὐτοκίνητον ἔχει ταχύτητα:

$$\upsilon = 72 \ km/h = \frac{72 \cdot 10^5}{3\,600} \left(\frac{cm}{sec} \right) = 2 \cdot 10^3 \ cm/sec$$

Ὅταν διακοπῇ ἡ λειτουργία τῆς μηχανῆς του, τὸ αὐτοκίνητον ἀποκτᾶ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην μὲ ἐπιτάχυνσιν γ καὶ σταματᾶ ἐντὸς χρόνου $t = 20$ sec. Γνωρίζομεν ὅτι εἰς τὴν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην κίνησιν ἡ ὅλη διάρκεια τῆς κινήσεως εἶναι:

$$t = \frac{\upsilon}{\gamma}$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιτάχυνσιν γ, διότι ἔχομεν:

$$\gamma = \frac{\upsilon}{t} \quad \text{ἤτοι} \quad \gamma = \frac{2 \cdot 10^3}{20} \left(\frac{cm/sec}{sec} \right)$$

$$\text{καὶ} \quad \gamma = 100 \ cm/sec^2$$

Τὸ διανυόμενον λοιπὸν διάστημα s, μετὰ τὴν διακοπὴν τῆς λειτουργίας τῆς μηχανῆς του, εἶναι:

$$s = \frac{\upsilon^2}{2\gamma} \quad \text{ἤτοι} \quad s = \frac{(2 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 100} \left[\frac{(cm/sec)^2}{cm/sec^2} \right]$$

$$\text{καὶ} \quad s = 2 \cdot 10^4 \ cm$$

Ἡ μᾶζα τοῦ αὐτοκινήτου εἶναι: $m = 1{,}5$ tn $= 1{,}5 \cdot 10^6$ gr. Ἄρα ἡ δύναμις τῆς τριβῆς F, ἡ προσδίδουσα εἰς τὸ αὐτοκίνητον τὴν ἐπιτάχυνσιν γ, εἶναι:

$$F = m \cdot \gamma \quad \text{ἤτοι} \quad F = 1{,}5 \cdot 10^6 \cdot 100 \left(gr \cdot \frac{cm}{sec^2} \right)$$

$$\text{καὶ} \quad F = 15 \cdot 10^7 \ dyn$$

Τὸ ἔργον τῆς τριβῆς εἶναι:

$$W = F \cdot s \quad \text{ἤτοι} \quad W = 15 \cdot 10^7 \cdot 2 \cdot 10^4 \ erg$$

$$\text{καὶ} \quad W = \mathbf{3 \cdot 10^{12} \ erg} \quad \text{ἢ} \quad W = \mathbf{3 \cdot 10^5 \ Joule}$$

Ἂν κατὰ προσέγγισιν θεωρήσωμεν ὅτι εἶναι: 1 kgr*m = 10 Joule, τότε τὸ ἀνωτέρω εὑρεθὲν ἔργον εἶναι:

$$W = 30\,000 \ kgr^*m$$

68

Τὸ βλῆμα ἔχει βάρος B = 10 gr* καὶ συνεπῶς ἔχει μᾶζαν m = 10 gr. Τὸ βλῆμα ἐκσφενδονίζεται μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $\upsilon = 800$ m/sec $= 8 \cdot 10^4$ cm/sec. Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια W τοῦ βλήματος εἶναι:

$$W = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2$$

Ἂν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν m καὶ υ εἰς μονάδας C.G.S. εὑρίσκομεν τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν τοῦ βλήματος εἰς ἔργια. Οὕτω λαμβάνομεν:

$$W = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (8 \cdot 10^4)^2 = \mathbf{32 \cdot 10^9 \ erg}$$

Ἡ ἀνωτέρω κινητικὴ ἐνέργεια εἰς Joule εἶναι:

$$W = \frac{32 \cdot 10^9}{10^7} = 32 \cdot 10^2 \ Joule \quad \text{ἢ} \quad W = \mathbf{3\,200 \ Joule}$$

Καὶ εἰς χιλιογραμμόμετρα ἡ ἀνωτέρω κινητικὴ ἐνέργεια εἶναι:

$$W = \frac{3\,200}{9{,}81} = \mathbf{326{,}2 \ kgr^*m}$$

69

Ὁ ὀρειβάτης ἔχει βάρος B = 70 kgr* καὶ ἐντὸς χρόνου t = 4 h ἢ t = 14 400 sec ἀνέρχεται εἰς ὕψος s = 2040 m. Οὕτω ὁ ὀρειβάτης πραγματοποιεῖ ἐντὸς τοῦ χρόνου τούτου ἔργον:

$$W = F \cdot s \quad \text{ἤτοι} \quad W = 70 \cdot 2040 \ (kgr^* \cdot m)$$

$$\text{καὶ} \quad W = \mathbf{142\,800 \ kgr^*m}$$

Κατὰ δευτερόλεπτον ὁ ὀρειβάτης πραγματοποιεῖ ἔργον:

$$w = \frac{W}{t} = \frac{142\,800}{14\,400} \left(\frac{kgr^*m}{sec} \right)$$

ἤτοι $\quad w = \mathbf{9{,}91\ kgr^*m/sec}$

70

Τὸ σῶμα ἔχει βάρος $B = 1$ kgr* καὶ συνεπῶς ἔχει μᾶζαν $m = 10^3$ gr. Ὅταν τὸ σῶμα εὑρίσκεται εἰς ὕψος $h = 347$ m ἄνωθεν τοῦ ἐδάφους, τότε τὸ σῶμα ἔχει δυναμικὴν ἐνέργειαν W_Δ. Ἂν ὑπολογίσωμεν αὐτὴν εἰς χιλιογραμμόμετρα, εὑρίσκομεν:

$$W_\Delta = B \cdot h \quad \text{ἤτοι} \quad W_\Delta = 1 \cdot 347\ (\,kgr^* \cdot m\,)$$

καὶ $\quad W_\Delta = 347\ kgr^*m$

Ἐπειδὴ τὸ σῶμα ἐκσφενδονίζεται μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $\upsilon = 7\ m/sec = 7 \cdot 10^2\ cm/sec$ ἕπεται ὅτι κατὰ τὴν ἐκκίνησίν του τὸ σῶμα, ἐκτὸς τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας W_Δ, ἔχει καὶ κινητικὴν ἐνέργειαν W_K, ἡ ὁποία μετρημένη εἰς ἔργια, εἶναι:

$$W_K = \frac{1}{2}\, m \cdot \upsilon^2 \quad \text{ἤτοι} \quad W_K = \frac{1}{2} \cdot 10^3 \cdot (\,7 \cdot 10^2\,)^2\ erg$$

καὶ $\quad W_K = 24{,}5 \cdot 10^7\ erg = 24{,}5$ Joule

ἢ κατὰ προσέγγισιν $\quad W_K = 2{,}45\ kgr^*m$

Ὥστε κατὰ τὴν ἐκκίνησίν του τὸ σῶμα ἔχει δυναμικὴν καὶ κινητικὴν ἐνέργειαν. Ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια $W_{o\lambda}$ τοῦ σώματος κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἐκκινήσεως εἶναι:

$$W_{o\lambda} = W_\Delta + W_K \quad \text{ἢ} \quad W_{o\lambda} = 347 + 2{,}45 = 349{,}45\ kgr^*m$$

Σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας, ὅταν τὸ σῶμα φθάνῃ εἰς τὸ ἔδαφος, ἔχει τόσην κινητικὴν ἐνέργειαν, ὅση ἦτο ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια $W_{o\lambda}$ τοῦ σώματος κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἐκκινήσεως του ἀπὸ τὸ ὕψος h. Τὸ σῶμα εἰσχωρεῖ ἐντὸς τοῦ ἐδάφους κατὰ διάστημα $s = 65\ cm = 0{,}65\ m$. Εἰς τὴν τοιαύτην διείσδυσιν τοῦ σώματος ἐντὸς τοῦ ἐδάφους ἀντιδρᾷ ἡ ἀντίστασις F τοῦ ἐδάφους. Τὸ ἔργον W_A τῆς ἀντιστάσεως F εἶναι:

$$W_A = F \cdot s\ (\,kgr^* \cdot m\,)$$

Οὕτω, σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας, ὁλόκληρος ἡ κινητικὴ ἐνέργεια $W_{o\lambda}$ τοῦ σώματος δαπανᾶται διὰ τὴν ὑπερνίκησιν τοῦ ἔργου W_A τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἐδάφους καὶ συνεπῶς ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$W_A = W_{ολ} \quad ἢ \quad F \cdot s = 349{,}45$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν τὴν ἀντίστασιν F τοῦ ἐδάφους, ἂν θέσωμεν s = 0,65 m. Οὕτω λαμβάνομεν:

$$F = \frac{349{,}45}{0{,}65}\left(\frac{kgr^* \cdot m}{m}\right) = \mathbf{537{,}61\ kgr^*}$$

Παρατήρησις. Κατὰ τὴν ἀνωτέρω λύσιν προετιμήθη ἡ μέτρησις τῆς ὁλικῆς ἐνεργείας $W_{ολ}$ εἰς χιλιογραμμόμετρα, διότι οὕτω ἡ ἀντίστασις F τοῦ ἐδάφους εὑρίσκεται ἀμέσως εἰς χιλιόγραμμα βάρους. Ἐπίσης διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας εἰς χιλιογραμμόμετρα ἐλήφθη χάριν ἁπλότητος ὅτι εἶναι:

$$1\ kgr^*m = 10\ Joule$$

ἐνῶ γνωρίζομεν ὅτι ἀκριβῶς εἶναι:

$$1\ kgr^*m = 9{,}81\ Joule$$

Εἰς μονάδας C.G.S. ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος εἶναι:

$$W_Δ = m \cdot g \cdot h = 10^3 \cdot 981 \cdot 347 \cdot 10^2\ erg$$

$$ἢ \quad W_Δ = 9{,}81 \cdot 347 \cdot 10^7\ erg$$

Καὶ ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος εἶναι:

$$W_{ολ} = W_Δ + W_K = (9{,}81 \cdot 347 + 24{,}5) \cdot 10^7\ erg$$

Τότε τὸ ἔργον W_A τῆς ἀντιστάσεως F τοῦ ἐδάφους εἶναι :

$$W_{ολ} = W_A = F \cdot s\ (dyn \cdot cm)$$

καὶ ἡ ζητουμένη δύναμις F εἶναι:

$$F = \frac{W_{ολ}}{s}\left(\frac{dyn \cdot cm}{cm}\right)$$

δηλαδὴ ἡ δύναμις F θὰ εὑρεθῇ τότε εἰς δύνας.

71

Τὸ βλῆμα διατρέχει ἐντὸς τοῦ σωλῆνος τοῦ πυροβόλου διάστημα s = 80 cm ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν σταθερᾶς δυνάμεως F, ἡ ὁποία προσδίδει εἰς τὸ βλῆμα ἐπιτάχυνσιν γ. Ἡ μᾶζα τοῦ βλήματος εἶναι m = 4 kgr ἢ $m = 4 \cdot 10^3$ gr. Ἐντὸς τοῦ σωλῆνος τὸ βλῆμα ἔχει κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην καὶ εἰς χρόνον t ἀποκτᾷ ταχύτητα :

$$υ = 420\ m/sec = 42 \cdot 10^3\ cm/sec.$$

1) Ἐντὸς τοῦ χρόνου t ἡ δύναμις F παράγει ἔργον W_F τὸ ὁποῖον εἶναι :

$$W_F = F \cdot s$$

Σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας τὸ ἔργον τῆς δυνάμεως F ἀποταμιεύεται ἐπὶ τοῦ βλήματος ὑπὸ μορφὴν κινητικῆς ἐνεργείας W_K ἡ ὁποία εἶναι:

$$W_K = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2$$

Οὕτω ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἀρχῆς τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$F \cdot s = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 \qquad (1)$$

Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) θέσωμεν τὰς δοθείσας τιμὰς τῶν s, m, υ εἰς μονάδας C.G.S. εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην δύναμιν F εἰς δύνας. Οὕτω εὑρίσκομεν:

$$F = \frac{m \cdot \upsilon^2}{2s} \quad \text{ἤτοι} \quad F = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot (42 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 80}$$

καὶ $$F = \mathbf{44{,}1 \cdot 10^9\ dyn}$$

Ἂν κατὰ προσέγγισιν λάβωμεν ὅτι εἶναι 1 kgr* = 10^6 dyn, τότε ἡ ἀνωτέρω εὑρεθεῖσα δύναμις F εἶναι:

$$F = \frac{44{,}1 \cdot 10^9}{10^6} = 44{,}1 \cdot 10^3\ kgr^* \quad \text{ἢ} \quad F = \mathbf{44{,}1\ tn^*}$$

2) Αἱ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως τοῦ βλήματος ἐντὸς τοῦ σωλῆνος τοῦ πυροβόλου εἶναι:

$$\upsilon = \gamma \cdot t \quad (2) \qquad \text{καὶ} \qquad s = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὰς δύο αὐτὰς ἐξισώσεις δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν χρόνον t, κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ βλῆμα κινεῖται ἐντὸς τοῦ σωλῆνος, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἐπιτάχυνσιν γ τῆς κινήσεως τοῦ βλήματος. Ἡ ἐπιτάχυνσις γ εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν θεμελιώδη ἐξίσωσιν:

$$F = m \cdot \gamma$$

ἂν εἰς αὐτὴν θέσωμεν F = $44{,}1 \cdot 10^9$ dyn καὶ m = $4 \cdot 10^3$ gr. Οὕτω εὑρίσκομεν:

$$\gamma = \frac{F}{m} = \frac{44{,}1 \cdot 10^9}{4 \cdot 10^3} = 11{,}025 \cdot 10^6\ cm/sec^2$$

Ἤδη ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ζητούμενος χρόνος t εἶναι:

$$t = \frac{\upsilon}{\gamma} \quad \text{ἤτοι} \quad t = \frac{42 \cdot 10^3}{11{,}025 \cdot 10^6} \left(\frac{\text{cm/sec}}{\text{cm/sec}^2} \right)$$

$$\text{καὶ} \quad t = \mathbf{0{,}0038\ sec}$$

72

Τὸ ὄχημα ἔχει βάρος $B = 27$ tn* καὶ συνεπῶς ἡ μᾶζα τοῦ ὀχήματος εἶναι $m = 27$ tn $= 27 \cdot 10^6$ gr. Τὸ ὄχημα ἀρχικῶς ἔχει ταχύτητα $\upsilon_1 = 7$ m/sec $= 7 \cdot 10^2$ cm/sec. Ἐντὸς χρόνου $t = 4$ min ἤτοι $t = 240$ sec ἡ ταχύτης τοῦ ὀχήματος γίνεται $\upsilon_2 = 14 \cdot 10^2$ cm/sec ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν μιᾶς σταθερᾶς δυνάμεως F. Ἡ ἐπιτάχυνσις γ, τὴν ὁποίαν προσδίδει ἡ δύναμις F, εἶναι:

$$\gamma = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t} = \frac{14 \cdot 10^2 - 7 \cdot 10^2}{240} \left(\frac{\text{cm/sec}}{\text{sec}} \right)$$

$$\text{ἤτοι} \quad \gamma = \frac{35}{12}\ \text{cm/sec}^2$$

Ἡ δύναμις F εὑρίσκεται τώρα ἀπὸ τὴν θεμελιώδη ἐξίσωσιν:

$$F = m \cdot \gamma \quad \text{ἤτοι} \quad F = 27 \cdot 10^6 \cdot \frac{35}{12}\ \text{dyn}$$

$$\text{καὶ} \quad F = \mathbf{78{,}75 \cdot 10^6\ dyn}$$

ἢ κατὰ προσέγγισιν $F = \mathbf{78{,}75\ kgr^*}$

73

Γνωρίζομεν ὅτι μηχανὴ ἰσχύος 1 ἵππου παράγει ἔργον 75 kgr*m/sec. Ἄρα ἡ θεωρουμένη μηχανὴ παράγει ἔργον:

$$5 \cdot 75 = 375\ \text{kgr*m/sec}$$

Καὶ εἰς χρόνον $t = 100$ min $= 6\,000$ sec παράγει ἔργον:

$$W = 375 \cdot 6\,000 \left(\frac{\text{kgr*m}}{\text{sec}} \cdot \text{sec} \right)$$

$$\text{ἤτοι} \quad W = \mathbf{2\,250\,000\ kgr^*m}$$

Ἐπειδὴ εἶναι 1 kgr*m = 9,81 Joule ἕπεται ὅτι τὸ ἀνωτέρω ἔργον, μετρημένον εἰς Joule, εἶναι:

$$W = 2\,250\,000 \cdot 9{,}81 = \mathbf{22\,072\,500\ Joule}$$

Εἰς ἔργια τὸ ἀνωτέρω ἔργον εἶναι:

$$W = \mathbf{22\,072\,500 \cdot 10^7\ erg}$$

Παρατήρησις. Ἡ ἰσχὺς P τῆς μηχανῆς, μετρημένη εἰς kgr*m/sec, εἶναι:

$$P = 5 \cdot 75\ \text{kgr*m/sec} = 375\ \text{kgr*m/sec}$$

Ἀπὸ τὸν γνωστὸν τύπον τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἰσχύος:

$$P = \frac{W}{t} \quad \text{ἔχομεν} \quad W = P \cdot t$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ζητούμενον ἔργον εἶναι:

$$W = 375 \cdot 6\,000 \left(\frac{\text{kgr*m}}{\text{sec}} \cdot \text{sec}\right) = 2\,250\,000\ \text{kgr*m}$$

74

Ὁ κινητὴρ τοῦ ἀεροπλάνου ἔχει ἰσχύν:

$$P = 1000\ \text{CV} = 1000 \cdot 75\ \text{kgr*m/sec}$$

$$\text{ἢ} \quad P = 75\,000\ \text{kgr*m/sec}$$

Ὥστε ὁ κινητὴρ τοῦ ἀεροπλάνου παράγει κατὰ δευτερόλεπτον ἔργον ἴσον μὲ 75 000 kgr*m. Κατὰ τὴν ὁριζοντίαν πτῆσιν τοῦ ἀεροπλάνου ἡ ταχύτης του υ διατηρεῖται σταθερά. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ δύναμις ἕλξεως F_K τὴν ὁποίαν ἀναπτύσσει ὁ κινητὴρ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν δύναμιν F_A τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος, ἡ ὁποία δίδεται ὅτι εἶναι $F_A = 500$ kgr *. Ἡ ταχύτης υ τοῦ ἀεροπλάνου φανερώνει τὸ κατὰ δευτερόλεπτον διανυόμενον διάστημα. Ἄς ἐκφράσωμεν τὴν ταχύτητα υ εἰς m/sec. Τὸ κατὰ δευτερόλεπτον παραγόμενον ὑπὸ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος ἔργον W_A εἶναι:

$$W_A = F_A \cdot \upsilon \left(\text{kgr*} \cdot \frac{\text{m}}{\text{sec}}\right)$$

Τὸ ὑπὸ τοῦ κινητῆρος παραγόμενον κατὰ δευτερόλεπτον ἔργον δαπανᾶται διὰ τὴν ὑπερνίκησιν τοῦ ὑπὸ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος παραγομένου ἔργου. Ἄρα ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$P = F_A \cdot \upsilon$$

Ἀπὸ τὴν εὑρεθεῖσαν σχέσιν δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ταχύτητα υ τοῦ ἀεροπλάνου:

$$\upsilon = \frac{P}{F_A} \quad \text{ἢ} \quad \upsilon = \frac{75\,000}{500} \left(\frac{kgr^*m/sec}{kgr^*} \right)$$

$$\text{ἤτοι} \quad \upsilon = \mathbf{150\ m/sec}$$

Τὸ ἀεροπλάνον κινούμενον ὁμαλῶς μὲ ταχύτητα υ διανύει διάστημα $s = 30\ km = 30\,000\ m$ εἰς χρόνον t τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν τῆς ὁμαλῆς κινήσεως:

$$s = \upsilon \cdot t$$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν:

$$t = \frac{s}{\upsilon} = \frac{30\,000}{150} \left(\frac{m}{m/sec} \right) = \mathbf{200\ sec}$$

$$\text{ἢ} \quad t = \mathbf{3\ min\ \ 20\ sec}$$

75

Ὁ ὀρειβάτης ἔχει βάρος $B = 80\ kgr^*$ καὶ ἐντὸς χρόνου $t = 1{,}5\ h$ ἀνέρχεται εἰς ὕψος $h = 800\ m$. Ἄρα ὁ ὀρειβάτης ἐκτελεῖ ἔργον:

$$W = B \cdot h \quad \text{ἤτοι} \quad W = 80 \cdot 800\ (kgr^*m)$$

$$\text{καὶ} \quad W = 64\ 000\ kgr^*m$$

Κατὰ μέσον ὅρον ἡ ἰσχὺς P τοῦ ὀρειβάτου (θεωρουμένου ὡς μηχανὴ) εἶναι:

$$P = \frac{W}{t} \quad \text{ἤτοι} \quad P = \frac{64\,000}{5\,400} \left(\frac{kgr^*m}{sec} \right)$$

$$\text{καὶ} \quad P = 11{,}85\ kgr^*m/sec.$$

Ἐπειδὴ εἶναι $1\ CV = 75\ kgr^*m/sec$, ἕπεται ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἰσχὺς τοῦ ὀρειβάτου, μετρημένη εἰς ἵππους (CV), εἶναι:

$$P = \frac{11{,}85}{75} = \mathbf{0{,}158\ CV}$$

Γνωρίζομεν ὅτι εἶναι $1\ CV = 0{,}736\ kW$.

Ἄρα ἡ ἀνωτέρω ἰσχύς, μετρημένη εἰς κιλοβὰτ (kW), εἶναι:

$$P = 0{,}158 \cdot 0{,}736 = \mathbf{0{,}116\ kW}$$

76

Ἡ ἐνέργεια τὴν ὁποίαν παράγει ὁ στρόβιλος ἔχει ἰσχύν:

$$P_\Sigma = 10\,000\ CV = 10\,000 \cdot 75 = 75 \cdot 10^4\ kgr^*m/sec$$

Ἂν P_Y εἶναι ἡ ἰσχὺς τῆς ὑδατοπτώσεως, τότε ἡ ἀπόδοσις A τοῦ στροβίλου εἶναι ὁ λόγος τῆς ὠ φ ε λ ί μ ο υ ἰσχύος (δηλαδὴ τῆς ἰσχύος τοῦ στροβίλου) πρὸς τὴν δ α π α ν ω μ έ ν η ν ἰσχὺν (δηλαδὴ τὴν ἰσχὺν τῆς ὑδατοπτώσεως).

Ἄρα ἔχομεν :

$$A = \frac{P_\Sigma}{P_\Upsilon} \quad \text{καὶ} \quad P_\Upsilon = \frac{P_\Sigma}{A}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἰσχὺς P τῆς ὑδατοπτώσεως εἶναι :

$$P_\Upsilon = \frac{75 \cdot 10^4}{0{,}75} \text{ kgr*m/sec} \quad \text{ἢ} \quad P_\Upsilon = 10^6 \text{ kgr*m/sec}$$

Τὸ ὕδωρ πίπτει ἀπὸ ὕψος h = 80 m. Ἄς καλέσωμεν B τὸ βάρος τοῦ ὕδατος (εἰς kgr*), τὸ ὁποῖον κ α τ ὰ δ ε υ τ ε ρ ό λ ε π τ ο ν πίπτει ἀπὸ ὕψος h. Τότε ἡ ἰσχὺς P_Υ τῆς ὑδατοπτώσεως (δηλαδὴ τὸ ἔργον τὸ παραγόμενον ὑπὸ τοῦ ὕδατος κατὰ δευτερόλεπτον) εἶναι:

$$P_\Upsilon = B \cdot h \left(\frac{\text{kgr*}}{\text{sec}} \cdot \text{m} \right)$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν ὅτι κατὰ δευτερόλεπτον ὁ στρόβιλος καταναλίσκει βάρος ὕδατος:

$$B = \frac{P_\Upsilon}{h} = \frac{10^6}{80} \left[\left(\frac{\text{kgr*}}{\text{sec}} \cdot \text{m} \right) : \text{m} \right]$$

$$\text{ἤτοι} \quad B = 12{,}5 \cdot 10^3 \text{ kgr*/sec}$$

Καὶ κ α τ ὰ λ ε π τ ὸ ν ὁ στρόβιλος καταναλίσκει βάρος ὕδατος:

$$B' = 12{,}5 \cdot 10^3 \cdot 60 \left(\frac{\text{kgr*}}{\text{sec}} \cdot \text{sec} \right)$$

$$\text{ἢ} \quad B' = \mathbf{750 \cdot 10^3 \text{ kgr*}} \quad \text{καὶ} \quad B' = \mathbf{750 \text{ tn*}}$$

Ἐπὶ τοῦ στροβίλου πίπτουν κατὰ λεπτὸν 750 m^3 ὕδατος.

77

Τὸ αὐτοκίνητον ἔχει βάρος B = 1000 kgr * καὶ κινεῖται μὲ ταχύτητα :

$$\upsilon = 72 \text{ km/h} = \frac{72 \cdot 10^3}{3600} \left(\frac{\text{m}}{\text{sec}} \right) = 20 \text{ m/sec}$$

Ἡ τριβὴ T εἶναι :

$$T = \eta \cdot B \quad \text{ἤτοι} \quad T = 0{,}02 \cdot 1\,000 = 20 \text{ kgr*}.$$

Ἡ ἀντίστασις F_A τοῦ ἀέρος εἶναι $F_A = 10$ kgr *. Ἐπειδὴ τὸ αὐτοκίνητον κινεῖται μὲ σταθερὰν ταχύτητα, ἕπεται ὅτι ἡ δύναμις F_K, τὴν ὁποίαν ἀναπτύσσει ὁ κινητήρ, εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν συνισταμένην τῶν δυνάμεων T καὶ F_A, δηλαδὴ εἶναι:

$$F_K = T + F_A \quad \text{ἤτοι} \quad F_K = 20 + 10 = 30 \text{ kgr*}$$

Οὕτω τὸ κατὰ δευτερόλεπτον παραγόμενον ἔργον ὑπὸ τῆς F_K δαπανᾶται διὰ τὴν ὑπερνίκησιν τοῦ ἔργου τῶν ἀντιστάσεων T καὶ F_A. Τὸ κατὰ δευτερόλεπτον παραγόμενον ὑπὸ τοῦ κινητῆρος ἔργον, ἤτοι ἡ ἰσχὺς P τοῦ κινητῆρος, εἶναι:

$$P = F_K \cdot \upsilon \left(\text{kgr*} \cdot \frac{\text{m}}{\text{sec}}\right)$$

$$\text{ἢ} \qquad P = 20 \cdot 30 \left(\text{kgr*} \cdot \frac{\text{m}}{\text{sec}}\right) = 600 \text{ kgr*m/sec}$$

Εἰς ἵππους ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος εἶναι:

$$P = \frac{600}{75} = \mathbf{8\ CV}$$

78

Γνωρίζομεν ὅτι ἂν m_0 εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ σώματος, ὅταν τοῦτο ἠρεμῇ, τότε ἡ μᾶζα m τοῦ σώματος, ὅταν τοῦτο κινῆται μὲ ταχύτητα υ, δίδεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν τοῦ Einstein:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{V^2}}}$$

ὅπου $V = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ φωτός εἰς τὸ κενόν.

Δίδεται ὅτι ἡ μᾶζα τοῦ μετεωρίτου ἐν ἠρεμίᾳ εἶναι $m_0 = 10^3$gr. Ὅταν οὗτος κινῆται μὲ ταχύτητα: $\upsilon = 0{,}9 \cdot V$, ἡ μᾶζα m τοῦ μετεωρίτου, σύμφωνα μὲ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν, εἶναι:

$$m = \frac{10^3}{\sqrt{1 - \frac{(0{,}9 \cdot V)^2}{V^2}}} = \frac{10^3}{\sqrt{1 - 0{,}81}} = \frac{10^3}{\sqrt{0{,}19}}$$

$$\text{καὶ} \qquad m = \frac{1000}{0{,}436} = \mathbf{2294\ gr} \quad \text{ἢ} \quad m = \mathbf{2{,}294\ kgr}$$

79

Σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς ἰσοδυναμίας μάζης καὶ ἐνεργείας, μία μᾶζα m ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν W, ἡ ὁποία δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$W = m \cdot V^2 \qquad (1)$$

ὅπου $V = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς εἰς τὸ κενόν.

Δίδεται ὅτι κατὰ τὴν διάσπασιν ἑνὸς γραμμομορίου οὐρανίου, ἤτοι 235 gr οὐρανίου, ἐλευθερώνεται ἐνέργεια:

$$W = 19{,}26 \cdot 10^{12} \text{ Joule} = 19{,}26 \cdot 10^{19} \text{ erg}$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν ὅτι κατὰ τὴν διάσπασιν ταύτην ἐξαφανίζεται ἰσοδύναμος μᾶζα:

$$m = \frac{W}{V^2} \quad \text{ἢ} \quad m = \frac{19{,}26 \cdot 10^{19}}{(3 \cdot 10^{10})^2} = \frac{19{,}26 \cdot 10^{19}}{9 \cdot 10^{20}}$$

καὶ

$$m = \mathbf{0{,}214\ gr}$$

80

Δίδεται ὅτι μᾶζα 1 gr ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν $9 \cdot 10^{13}$ Joule. Εἶναι γνωστὸν ὅτι 1 kWh $= 36 \cdot 10^5$ Joule. Ἄρα ἡ παραγομένη ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια εἰς Joule εἶναι:

$$W = 650 \cdot 10^6 \text{ kWh} = 650 \cdot 10^6 \cdot 36 \cdot 10^5 \text{ Joule}$$

ἢ

$$W = 234 \cdot 10^{13} \text{ Joule}$$

Ἡ ἐνέργεια αὐτὴ ἰσοδυναμεῖ μὲ μᾶζαν

$$m = \frac{234 \cdot 10^{13}}{9 \cdot 10^{13}} = \mathbf{26\ gr}$$

Ὥστε ἀπὸ τὴν ἐξαφάνισιν μόνον 23 gr ὕλης θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ἐξασφαλισθῇ ἡ ἀπαιτουμένη κατ' ἔτος ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια.

ΑΠΛΑΙ ΜΗΧΑΝΑΙ

81

Ἕκαστος τῶν βραχιόνων τοῦ μοχλοῦ ἔχει μῆκος $\beta = 0{,}8$ m $= 80$ cm καὶ $\alpha = 2{,}4 - 0{,}8 = 1{,}6$ m ἢ $\alpha = 160$ cm.

Ἡ ἀντίστασις εἶναι $F_2 = 30$ kgr*. Ἡ ζητουμένη κινητήριος δύναμις εἶναι F_1. Γνωρίζομεν ὅτι κατὰ τὴν ἰσορροπίαν τοῦ μοχλοῦ τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν δυνάμεων F_1 καὶ F_2 ὡς πρὸς τὸν ἄξονα εἶναι μηδέν, ἤτοι

$$F_1 \cdot \alpha - F_2 \cdot \beta = 0 \quad \text{ἢ} \quad F_1 \cdot \alpha = F_2 \cdot \beta \qquad (1)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ δύναμις F_1 εἶναι :

$$F_1 = F_2 \cdot \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{ἤτοι} \quad F_1 = 30 \cdot \frac{80}{160} \left(\text{kgr*} \cdot \frac{\text{cm}}{\text{cm}} \right)$$

καὶ

$$F_1 = \mathbf{15\ kgr^*}$$

82

Ἡ ἀντίστασις εἶναι $F_2 = 10$ kgr *, ὁ δὲ βραχίων τῆς ἀντιστάσεως εἶναι $\beta = 3$ m. Ὁ βραχίων τῆς κινητηρίου δυνάμεως F_1 εἶναι $\alpha = 1$ m. Κατὰ τὴν ἰσορροπίαν τοῦ μοχλοῦ ἰσχύει ἡ γνωστὴ σχέσις:

$$F_1 \cdot \alpha = F_2 \cdot \beta$$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη δύναμις F_1 εἶναι:

$$F_1 = F_2 \cdot \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{ἤτοι} \quad F_1 = 10 \cdot \frac{3}{1} \left(\text{kgr*} \cdot \frac{\text{m}}{\text{m}} \right)$$

καὶ

$$F_1 = \mathbf{30\ kgr^*}$$

83

Ἡ ράβδος ἀποτελεῖ μοχλὸν μὲ δύο βραχίονας. Ὁ βραχίων τῆς ἀντιστάσεως F_2 εἶναι $\beta = 30$ cm. Ὁ δὲ βραχίων τῆς κινητηρίου δυνάμεως $F_1 = 25$ kgr * εἶναι $\alpha = 240 - 30 = 210$ cm. Κατὰ τὴν ἰσορροπίαν τοῦ μοχλοῦ ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$F_1 \cdot \alpha = F_2 \cdot \beta$$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀντίστασις F_2 εἶναι:

$$F_2 = F_1 \cdot \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{ἢ} \quad F_2 = 25 \cdot \frac{210}{30} \left(\text{kgr*} \cdot \frac{\text{cm}}{\text{cm}} \right)$$

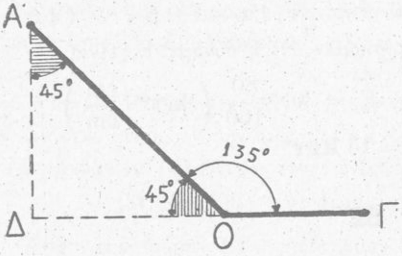
καὶ

$$F_2 = \mathbf{175\ kgr^*}$$

84

Ἡ ἀπόστασις τῆς δυνάμεως B_2 ἀπὸ τὸν ἄξονα περιστροφῆς O εἶναι

ΟΓ, ἡ δὲ ἀπόστασις τῆς δυνάμεως B_1 ἀπὸ τὸν ἄξονα Ο εἶναι ΟΔ (σχ. 20).



Σχ. 20

Δίδεται ὅτι ἡ γωνία ΑΟΓ εἶναι 135°. Ἄρα ἡ γωνία ΑΟΔ εἶναι 45° καὶ συνεπῶς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΟΔ εἶναι ἰσοσκελὲς (ΟΔ = ΑΔ). Ἡ πλευρὰ ΟΔ εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν:

$$(\mathrm{OA})^2 = (\mathrm{A\Delta})^2 + (\mathrm{O\Delta})^2$$

ἢ $(\mathrm{OA})^2 = 2 \cdot (\mathrm{O\Delta})^2$

ἄρα $\mathrm{O\Delta} = \dfrac{\mathrm{OA}}{\sqrt{2}}$

$$\text{ἢ} \quad \mathrm{O\Delta} = \frac{\mathrm{OA}}{2} \cdot \sqrt{2} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δίδεται ὅτι εἶναι $\mathrm{OA} = 2 \cdot \mathrm{O\Gamma}$, λαμβάνομεν:

$$\mathrm{O\Delta} = \frac{2 \cdot \mathrm{O\Gamma}}{2} \cdot \sqrt{2} \quad \text{ἢ} \quad \mathrm{O\Delta} = \mathrm{O\Gamma} \cdot \sqrt{2} \qquad (2)$$

Γνωρίζομεν ὅτι κατὰ τὴν ἰσορροπίαν τοῦ μοχλοῦ ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$B_1 \cdot \mathrm{O\Delta} = B_2 \cdot \mathrm{O\Gamma} \quad \text{ἢ} \quad B_1 \cdot \mathrm{O\Gamma} \cdot \sqrt{2} = B_2 \cdot \mathrm{O\Gamma}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ζητούμενος λόγος τῶν βαρῶν εἶναι:

$$\frac{B_2}{B_1} = \sqrt{2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{B_2}{B_1} = \mathbf{1{,}41}$$

85

Εἰς τὴν ἀκίνητον τροχαλίαν, ὅταν αὕτη ἰσορροπῇ, αἱ δύο δυνάμεις F_1 καὶ F_2 αἱ ἐνεργοῦσαι εἰς τὰ ἄκρα τοῦ σχοινίου εἶναι ἴσαι, διότι αἱ δύο δυνάμεις ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸν ἄξονα περιστροφῆς. Ἄρα ἔχομεν $F_1 = F_2 = 30$ kgr*.

α) Ὅταν αἱ διευθύνσεις τῶν δύο τμημάτων τοῦ σχοινίου σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν 0°, τότε αἱ δύο δυνάμεις F_1 καὶ F_2 εἶναι παράλληλοι καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς. Ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης F εἶναι:

$$F = F_1 + F_2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad F = 30 + 30 = 60 \text{ kgr*}$$

καὶ λόγῳ τῆς συμμετρίας ἐφαρμόζεται εἰς τὸν ἄξονα Ο τῆς τροχαλίας.

Ὥστε εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ δύναμις F, ἡ ἐφαρμοζομένη εἰς τὸν ἄξονα τῆς τροχαλίας, εἶναι: $F = \mathbf{60\ kgr^*}$

β) Ὅταν αἱ διευθύνσεις τῶν δύο τμημάτων τοῦ σχοινίου σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν 90°, τότε ἡ διεύθυνσις τῆς συνισταμένης F τῶν δυνάμεων F_1 καὶ F_2 διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῶν δύο σχοινίων, δηλαδὴ διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος τῆς τροχαλίας. Ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης F εὑρίσκεται (βλ. πρόβλημα 13, γ) ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 \qquad \text{ἢ} \qquad F = \sqrt{2 \cdot F_1^2} = F_1 \cdot \sqrt{2}$$

Ὥστε εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ δύναμις F, ἡ ἐφαρμοζομένη εἰς τὸν ἄξονα τῆς τροχαλίας, εἶναι:

$$F = 30 \cdot \sqrt{2} = 30 \cdot 1{,}41\ \text{kgr}^* \quad \text{ἢ} \quad F = \mathbf{42{,}30\ kgr^*}$$

γ) Ὅταν αἱ διευθύνσεις τῶν δύο σχοινίων σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν 120°, τότε ἡ διεύθυνσις τῆς συνισταμένης F τῶν δυνάμεων F_1 καὶ F_2 διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῶν δύο σχοινίων, δηλαδὴ διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος τῆς τροχαλίας. Ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης F (βλ. πρόβλημα 13, δ) εἶναι ἴση μὲ τὴν ἔντασιν ἑκάστης τῶν δύο συνιστωσῶν F_1 καὶ F_2. Ὥστε εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ δύναμις F, ἡ ἐφαρμοζομένη εἰς τὸν ἄξονα τῆς τροχαλίας, εἶναι:

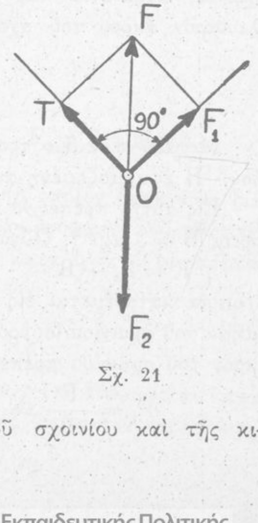
$$F = F_1 = F_2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad F = \mathbf{30\ kgr^*}$$

86

α) Ὅταν τὰ δύο σχοινία σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν 0°, τότε τὰ δύο τμήματα τοῦ σχοινίου εἶναι παράλληλα. Κατὰ τὴν ἰσορροπίαν τῆς τροχαλίας ἡ ἐφαρμοζομένη εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τοῦ σχοινίου κινητήριος δύναμις F_1 εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀντιστάσεως F_2 ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται ἐπὶ τῆς τροχαλιοθήκης. Ἄρα ἡ ζητουμένη δύναμις F_1 εἶναι:

$$F_1 = \frac{F_2}{2} = \frac{80}{2}\ \text{kgr}^*$$

$$\text{ἢ} \qquad F_1 = \mathbf{40\ kgr}$$



Σχ. 21

β) Ὅταν τὰ δύο σχοινία σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν 90°, τότε ἡ ἀντίστασις F_2 ἰσορροπεῖται ἀπὸ τὴν συνισταμένην F τῶν δύο ἴσων δυνάμεων τῆς τάσεως T τοῦ σχοινίου καὶ τῆς κινητηρίου δυνάμεως F_1 (σχ. 21). Ἄρα εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν:

$$F_1 = T \qquad F = F_2 \qquad F^2 = F_1^2 + T^2 = 2 \cdot F_1^2$$

Ἡ ζητουμένη δύναμις F_1 εἶναι:

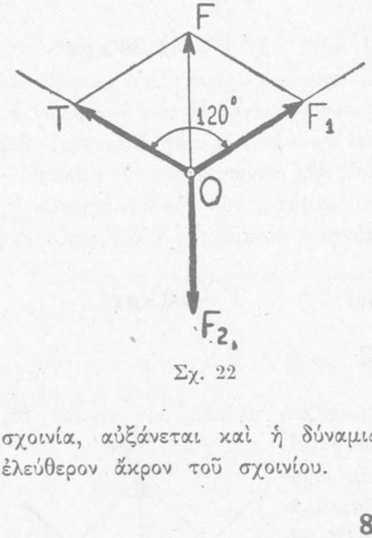
$$F_1 = \sqrt{\frac{F^2}{2}} = \frac{F}{\sqrt{2}} = \frac{F}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{F_2}{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$\text{καὶ} \quad F_1 = \frac{80}{2} \cdot \sqrt{2} \text{ kgr*} \quad \text{ἢ} \quad F_1 = \mathbf{56{,}40 \text{ kgr*}}$$

γ) Ὅταν τὰ δύο σχοινία σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν 120°, τότε ἡ ἀντίστασις F_2 ἰσορροπεῖται ἀπὸ τὴν συνισταμένην F τῶν δύο ἴσων δυνάμεων T καὶ F_1 (σχ. 22). Τὸ σχηματιζόμενον τετράπλευρον $OTFF_1$ εἶναι ρόμβος, τοῦ ὁποίου ἡ διαγώνιος F εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευράν του F_1. Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη δύναμις F_1 εἶναι:

$$F_1 = F = F_2$$

$$\text{ἤτοι} \quad F_1 = \mathbf{80 \text{ kgr*}}$$



Σχ. 22

Παρατηροῦμεν ὅτι αὐξανομένης τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν μεταξύ των τὰ δύο σχοινία, αὐξάνεται καὶ ἡ δύναμις F_1 ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τοῦ σχοινίου.

87

Μεταξὺ τῶν δύο τροχαλιοθηκῶν τείνονται 6 τμήματα τοῦ σχοινίου. Ἡ ἐφαρμοζομένη ἀντίστασις εἶναι $F_2 = 45$ kgr*.

Εἰς αὐτὴν πρέπει νὰ προστεθῇ καὶ τὸ βάρος τῆς κινητῆς τροχαλιοθήκης $B = 3$ kgr*. Οὕτω ἐπὶ τοῦ πολυσπάστου ἐνεργεῖ δύναμις:

$$F' = F_2 + B \qquad \text{ἤτοι} \qquad F' = 45 + 3 = 48 \text{ kgr*}$$

ἡ ὁποία κατανέμεται εἰς τὰ 6 τμήματα τοῦ σχοινίου. Συνεπῶς κάθε τμῆμα τοῦ σχοινίου ἰσορροπεῖ τὸ 1/6 τῆς δυνάμεως F'. Εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τοῦ σχοινίου πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν δύναμιν F_1 ἴσην μέ:

$$F_1 = \frac{F'}{6} = \frac{48}{6} \text{ kgr*} \quad \text{ἢ} \quad F_1 = \mathbf{8 \text{ kgr*}}$$

88

Ὁ στρόφαλος τοῦ βαρούλκου ἔχει μῆκος $\alpha = 54$ cm, ἡ δὲ ἀκτὶς τοῦ κυλίνδρου εἶναι $\beta = 6$ cm. Ἡ ἐφαρμοζομένη κατὰ τὴν ἐφαπτομένην τοῦ κυλίνδρου ἀντίστασις εἶναι $F_2 = 30$ kgr*. Ἡ δὲ ἐφαρμοζομένη εἰς τὸ ἄκρον τοῦ στροφάλου καὶ καθέτως πρὸς αὐτὸν κινητήριος δύναμις εἶναι F_1. Κατὰ τὴν ἰσορροπίαν τοῦ βαρούλκου αἱ ῥοπαὶ τῶν δυνάμεων F_1 καὶ F_2 ὡς πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ μηδέν. Ἄρα ἔχομεν:

$$F_1 \cdot \alpha - F_2 \cdot \beta = 0 \quad \text{ἢ} \quad F_1 \cdot \alpha = F_2 \cdot \beta$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη δύναμις F_1 εἶναι:

$$F_1 = F_2 \cdot \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{ἢ} \quad F_1 = 30 \cdot \frac{6}{54} \left(\text{kgr*} \cdot \frac{\text{cm}}{\text{cm}} \right)$$

καὶ $\quad F_1 = \mathbf{3{,}33\ kgr^*}$

89

Ὁ στρόφαλος ἔχει μῆκος $\alpha = 60$ cm, ὁ δὲ κύλινδρος ἔχει ἀκτῖνα $\beta = 15$ cm. Τὰ 10 λίτρα ὕδατος ἔχουν ὡς γνωστὸν βάρος 10 kgr *. Ἄρα ἡ ἐφαρμοζομένη ἐπὶ τοῦ βαρούλκου ἀντίστασις εἶναι $F_2 = 10$ kgr*. Διὰ τὴν ἰσορροπίαν τοῦ βαρούλκου πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὸ ἄκρον τοῦ στροφάλου καὶ καθέτως πρὸς αὐτὸν δύναμις F_1. Τότε (βλ. πρόβλ. 88) θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$F_1 \cdot \alpha = F_2 \cdot \beta \quad (1) \qquad \text{ἄρα} \quad F_1 = F_2 \cdot \frac{\beta}{\alpha}$$

καὶ $\quad F_1 = 10 \cdot \frac{15}{60} \left(\text{kgr*} \cdot \frac{\text{cm}}{\text{cm}} \right) \quad$ ἤτοι $\quad F_1 = \mathbf{2{,}5\ kgr^*}$

Θὰ ὑπολογίσωμεν κατ' ἀρχὰς τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον δαπανᾶται διὰ τὴν ἄντλησιν 10 λίτρων ὕδατος, δηλαδὴ διὰ μίαν ἀνύψωσιν τοῦ πλήρους ὕδατος δοχείου. Διὰ νὰ ἀνυψωθῇ τὸ δοχεῖον κατὰ $h = 10$ m, πρέπει ὁ κύλινδρος νὰ ἐκτελέσῃ:

$$\nu = \frac{h}{2\pi\beta} \text{ στροφὰς}$$

διότι εἰς ἑκάστην στροφὴν τοῦ κυλίνδρου τὸ δοχεῖον ἀνυψώνεται κατὰ $2\pi\beta$. Τόσας ὅμως στροφὰς θὰ ἐκτελέσῃ καὶ τὸ ἄκρον τοῦ στροφάλου, ὅπου ἐφαρμόζεται ἡ κινητήριος δύναμις F_1. Αὕτη κατὰ μίαν στροφὴν τοῦ στροφάλου ἐκτελεῖ ἔργον:

$$F_1 \cdot 2\pi\alpha$$

καὶ συνεπῶς διὰ τὴν ἀνύψωσιν τοῦ δοχείου κατὰ h ἐκτελεῖ ἔργον:

$$W = \nu \cdot F_1 \cdot 2\pi\alpha \quad \text{ἢ} \quad W = \frac{h}{2\pi\beta} \cdot F_1 \cdot 2\pi\alpha$$

καὶ

$$W = F_1 \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot h \qquad (2)$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι:

$$W = 2{,}5 \cdot \frac{60}{15} \cdot 10 \left(kgr^* \cdot \frac{cm}{cm} \cdot m \right)$$

ἤτοι

$$W = 100 \text{ kgr}^*\text{m}$$

Εἰς τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο ἦτο δυνατὸν νὰ καταλήξωμεν πολὺ ταχύτερα, ἂν ὑπολογίσωμεν τὸ ἔργον τῆς ἀντιστάσεως F_2, τὸ ὁποῖον σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἔργον τῆς κινητηρίου δυνάμεως F_1. Οὕτω ἔχομεν:

$$W = F_2 \cdot h = 10 \cdot 10 \ (kgr^* \cdot m) \quad \text{ἤτοι} \quad W = 100 \text{ kgr}^*\text{m}$$

Πράγματι ἡ ἐξίσωσις (2) φανερώνει τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας. Διότι, ἂν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (1) ὡς πρὸς F_2, λαμβάνομεν: $F_2 = F_1 \cdot \dfrac{\alpha}{\beta}$ καὶ συνεπῶς ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται:

$$W = F_2 \cdot h$$

Ὥστε διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Διὰ τὴν ἀνύψωσιν 100 λίτρων ὕδατος, ἤτοι βάρους $B = 100$ kgr* κατὰ $h = 10$ m δαπανᾶται ἔργον:

$$W_1 = B \cdot h = 100 \cdot 10 \ (kgr^* \cdot m) \quad \text{ἢ} \quad W_1 = \mathbf{1000 \ kgr^*m}$$

Διὰ τὴν ἄντλησιν 1 m^3 ὕδατος, δηλαδὴ 1000 kgr* ὕδατος δαπανᾶται ἔργον:

$$W_2 = 1000 \cdot 10 \ (kgr^* \cdot m) = 10\,000 \text{ kgr}^*\text{m}$$

Ἐπειδὴ εἶναι 1 kgr*m = 9,81 Joule ἕπεται ὅτι τὸ ἀνωτέρω ἔργον W_2 μετρημένον εἰς Joule εἶναι:

$$W_2 = 9{,}81 \cdot 10^4 \text{ Joule}$$

Τὸ ἔργον τοῦτο παράγεται εἰς χρόνον $t = 1$ h $= 3600$ sec. Ἄρα ἡ μέση ἰσχὺς εἶναι:

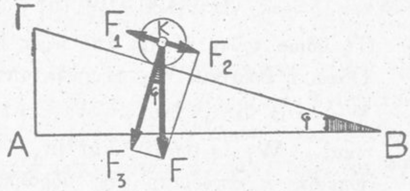
$$P = \frac{W_2}{t} \quad \text{ἤτοι} \quad P = \frac{9{,}81 \cdot 10^4}{3\,600} \left(\frac{\text{Joule}}{\text{sec}} \right)$$

καὶ

$$P = \mathbf{27{,}25 \ Watt}$$

90

Ὅταν τὸ βαρέλιον ἰσορροπῇ ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου (σχ. 23), ἡ δύναμις F_1 τοῦ ἐργάτου εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν συνιστῶσαν F_2 τοῦ βάρους τοῦ σώματος, ἤτοι εἶναι $F_1 = F_2$. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα KFF_3 καὶ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια καὶ ἰσχύει ἡ σχέσις:



Σχ. 23

$$\frac{ΓΒ}{F} = \frac{ΑΓ}{F_2}$$

$$\text{ἄρα} \quad ΓΒ = ΑΓ \cdot \frac{F}{F_2} \qquad (1)$$

Δίδεται ὅτι εἶναι:

$ΑΓ = 1{,}10$ m $\qquad F = 240$ kgr* $\qquad F_2 = F_1 = 40$ kgr*

Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μῆκος ΓΒ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου εἶναι:

$$ΓΒ = 1{,}10 \cdot \frac{240}{40} \left(\text{m} \cdot \frac{\text{kgr*}}{\text{kgr*}} \right)$$

$$\text{ἢ} \qquad ΓΒ = \mathbf{6{,}60\ m}$$

91

Τὸ βῆμα τοῦ κοχλίου εἶναι $\beta = 5$ cm, τὸ δὲ μῆκος τοῦ μοχλοῦ εἶναι $l = 50$ cm. Ἡ ἐφαρμοζομένη ἐπὶ τοῦ κοχλίου ἀντίστασις εἶναι $F_2 = 200$ kgr*, ἡ δὲ ἐφαρμοζομένη κινητήριος δύναμις εἶναι F_1. Γνωρίζομεν ὅτι εἰς τὸν κοχλίαν, σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας, ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$2\pi l \cdot F_1 = F_2 \cdot \beta \qquad \text{ἄρα} \qquad F_1 = F_2 \cdot \frac{\beta}{2\pi l}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη δύναμις F_1 εἶναι:

$$F_1 = 200 \cdot \frac{5}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 50} \left(\text{kgr*} \cdot \frac{\text{cm}}{\text{cm}} \right)$$

$$\text{ἢ} \qquad F_1 = \mathbf{3{,}18\ kgr*}$$

92

Διὰ τοῦ στροβίλου διαβιβάζονται ἐτησίως $120 \cdot 10^6$ m^3 ὕδατος, τὸ ὁποῖον ἔχει βάρος:

$$B = 120 \cdot 10^6 \ tn^* = 120 \cdot 10^9 \ kgr^*$$

Τὸ ὕδωρ τοῦτο πίπτει ἀπὸ ὕψος $h = 500$ m.

Οὕτω ἡ ἐνέργεια W_Y τῆς ὑδατοπτώσεως εἶναι:

$$W_Y = B \cdot h \qquad \text{ἤτοι} \qquad W_Y = 120 \cdot 10^9 \cdot 500 \ (kgr^* \cdot m)$$

$$\text{καὶ} \quad W_Y = 6 \cdot 10^{13} \ kgr^*m$$

Ἐπειδὴ ἡ ἀπόδοσις τῆς ὑδροηλεκτρικῆς ἐγκαταστάσεως εἶναι $A = 0{,}60$ ἕπεται ὅτι ἡ λαμβανομένη ὠφέλιμος ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια W_H εἶναι:

$$W_H = A \cdot W_Y \qquad \text{ἢ} \qquad W_H = 0{,}60 \cdot 6 \cdot 10^{13} \ kgr^*m$$

$$\text{καὶ} \qquad W_H = 3{,}6 \cdot 10^{13} \ kgr^*m$$

Ἂν κατὰ προσέγγισιν λάβωμεν ὅτι εἶναι $1 \ kgr^*m = 10$ Joule, τότε ἡ ἀνωτέρω ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια, μετρημένη εἰς Joule, εἶναι:

$$W_H = 3{,}6 \cdot 10^{14} \ \text{Joule}$$

Γνωρίζομεν ὅτι εἶναι $1 \ kWh = 36 \cdot 10^5$ Joule.

Ἄρα ἡ λαμβανομένη ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια, μετρημένη εἰς κιλοβατώρια εἶναι:

$$W_H = \frac{3{,}6 \cdot 10^{14}}{36 \cdot 10^5} \ kWh \qquad \text{ἢ} \qquad \mathbf{W = 10^8 \ kWh}$$

δηλαδὴ ἡ λαμβανομένη ἐτησίως ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια ἀνέρχεται εἰς 100 ἑκατομμύρια κιλοβατώρια.

Ἐπειδὴ τὰ γενικὰ ἔξοδα τῆς ἐγκαταστάσεως ἀνέρχονται ἐτησίως εἰς $19{,}62 \cdot 10^6$ δραχμάς, ἕπεται ὅτι ἕκαστον κιλοβατώριον κοστίζει:

$$\frac{19{,}62 \cdot 10^6}{10^8} = \mathbf{0{,}1962} \ \textbf{δραχμάς}$$

ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΤΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΝ

93

Τὸ πλοῖον ἐκτελεῖ συγχρόνως δύο εὐθυγράμμους καὶ ὁμαλὰς κινήσεις. Ἄς λάβωμεν ὡς σύστημα ἀναφορᾶς τὴν ἀκίνητον ὄχθην τοῦ ποταμοῦ. Ἡ ταχύτης τοῦ πλοίου εἶναι καθ' ἑκάστην στιγμὴν ἴση μὲ τὴν συνισταμένην τῶν ταχυτήτων τῶν δύο συνιστωσῶν κινήσεων. Ὅταν τὸ πλοῖον ἀναπλέῃ τὸν ποταμόν, ἡ ταχύτης του ὡς πρὸς τὴν ὄχθην τοῦ ποταμοῦ εἶναι $\upsilon_\alpha = 2\ \mathrm{m/sec}$. Ἡ ταχύτης αὐτὴ εἶναι ἡ συνισταμένη τῆς ταχύτητος υ_Π τοῦ πλοίου ὡς πρὸς τὸ ὕδωρ καὶ τῆς ταχύτητος υ_Υ τοῦ ὕδατος ὡς πρὸς τὴν ὄχθην τοῦ ποταμοῦ. Ὅταν τὸ πλοῖον ἀναπλέῃ τὸν ποταμόν, αἱ ταχύτητες υ_Π καὶ υ_Υ ἔχουν ἀντίθετον φορὰν καὶ συνεπῶς εἶναι :

$$\upsilon_\Pi - \upsilon_\Upsilon = \upsilon_\alpha \qquad \text{ἢ} \qquad \upsilon_\Pi - \upsilon_\Upsilon = 2\mathrm{m/sec} \qquad (1)$$

Ὅταν τὸ πλοῖον κατέρχεται, ἡ ταχύτης του ὡς πρὸς τὴν ὄχθην τοῦ ποταμοῦ, δηλαδὴ ἡ ταχύτης τῆς συνισταμένης κινήσεως τοῦ πλοίου, εἶναι $\upsilon_\varkappa = 6\ \mathrm{m/sec}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ ταχύτητες υ_Π καὶ u_Υ ἔχουν τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ συνεπῶς εἶναι:

$$\upsilon_\Pi + \upsilon_\Upsilon = \upsilon_\varkappa \qquad \text{ἢ} \qquad \upsilon_\Pi + \upsilon_\Upsilon = 6\ \mathrm{m/sec} \qquad (2)$$

Ἂν προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2), λαμβάνομεν : $2 \cdot \upsilon_\Pi = 8$

Ἄρα ἡ ταχύτης υ_Π τοῦ πλοίου ὡς πρὸς τὸ ὕδωρ εἶναι:

$$\upsilon_\Pi = \mathbf{4\ m/sec}$$

καὶ συνεπῶς ἡ ταχύτης υ_Υ τοῦ ὕδατος ὡς πρὸς τὴν ὄχθην τοῦ ποταμοῦ εἶναι:

$$\upsilon_\Upsilon = \mathbf{2\ m/sec}$$

94

α) Ὅταν ἐπικρατῇ νηνεμία τὸ ἀεροπλάνον κινεῖται μὲ ταχύτητα $\upsilon = 50\ \mathrm{m/sec}$. Διὰ νὰ διανύσῃ τὸ ἀεροπλάνον ὁμαλῶς ἀπόστασιν 6 km καὶ νὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀφετηρίαν του, ἤτοι διὰ νὰ διατρέξῃ διάστημα $s = 12\ \mathrm{km} = 12\,000\ \mathrm{m}$ χρειάζεται χρόνον t, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τῆς ὁμαλῆς κινήσεως:

$$s = \upsilon \cdot t \qquad \text{ἄρα} \qquad t = \frac{s}{\upsilon}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ζητούμενος χρόνος t εἶναι:

$$t = \frac{12\,000}{50}\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m/sec}}\right) \qquad \text{ἢ} \qquad t = \mathbf{240\ sec = 4\ min}$$

β) Ὅταν πνέῃ σταθερὸς δυτικὸς ἄνεμος, ἔχων ταχύτητα $\upsilon_A = 20\ \mathrm{m/sec}$, τότε τὸ ἀεροπλάνον κατὰ μὲν τὴν μετάβασίν του ἔχει ταχύτητα:

$$\upsilon_1 = \upsilon - \upsilon_A = 50 - 20 = 30\ \mathrm{m/sec}$$

κατὰ δὲ τὴν ἐπιστροφήν του ἔχει ταχύτητα:

$$\upsilon_2 = \upsilon + \upsilon_A = 50 + 20 = 70\ \mathrm{m/sec}$$

Οὕτω διὰ μὲν τὴν μετάβασίν του χρειάζεται χρόνον:

$$t_1 = \frac{6\,000}{30}\left(\frac{m}{m/sec}\right) = 200\,sec$$

διὰ δὲ τὴν ἐπιστροφήν του χρειάζεται χρόνον:

$$t_2 = \frac{6\,000}{70}\left(\frac{m}{m/sec}\right) = 86\ sec \quad \text{περίπου}$$

Ὥστε εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ ζητούμενος χρόνος t′ εἶναι:

$$t' = t_1 + t_2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad t' = \mathbf{286\ sec = 4\ min\ \ 46\ sec}$$

95

Ὅταν ἕνα σῶμα βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα υ_o, τότε τὸ σῶμα ἐκτελεῖ συγχρόνως δύο εὐθυγράμμους κινήσεις. Ἡ συνισταμένη κίνησις εἶναι κίνησις ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι:

ἡ διάρκεια τῆς ἀνόδου: $$t = \frac{\upsilon_o}{g} \qquad (1)$$

τὸ μέγιστον ὕψος: $$H = \frac{\upsilon_o^2}{2g} \qquad (2)$$

Δίδεται ὅτι εἶναι:

$$H = 3\,920\ m = 392 \cdot 10^3\ cm \qquad g = 980\ cm/sec^2$$

Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης υ_o τοῦ βλήματος εἶναι:

$$\upsilon_o = \sqrt{2g \cdot H} \qquad \text{ἢ} \qquad \upsilon_o = \sqrt{2 \cdot 980 \cdot 392 \cdot 10^3 \left(\frac{cm}{sec^2} \cdot cm\right)}$$

καὶ $\upsilon_o = \mathbf{27\ 636\ cm/sec = 276{,}36\ m/sec}$

Ἡ ἄνοδος τοῦ βλήματος διαρκεῖ ἐπὶ χρόνον:

$$t = \frac{\upsilon_o}{g} \qquad \text{ἢ} \qquad t = \frac{27\,636}{980}\left(\frac{cm/sec}{cm/sec^2}\right)$$

ἄρα $$t = 28{,}20\ sec$$

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ κάθοδος τοῦ βλήματος διαρκεῖ, ὅσον καὶ ἡ ἄνοδος αὐτοῦ. Ὥστε ἀπὸ τὴν στιγμὴν τῆς ἐκσφενδονίσεως τοῦ βλήματος μέχρι τῆς στιγμῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ βλῆμα θὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὸ ἔδαφος, παρέρχεται χρόνος:

$$t' = 2t \qquad \text{ἤτοι} \qquad t' = \mathbf{56{,}40\ sec}$$

96

Ὁ λίθος ἐκσφενδονίζεται ἀπὸ ὕψος $h = 45$ m μὲ ὁριζοντίαν ἀρχικὴν ταχύτητα $\upsilon_o = 20$ m/sec. Εἶναι γνωστὸν ὅτι ὁ λίθος θὰ ἐκτελέσῃ συγχρόνως δύο κινήσεις (ἐλευθέραν πτῶσιν καὶ ὁριζοντίαν ὁμαλὴν κίνησιν) ἐπὶ χρόνον t, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐλευθέρας πτώσεως τοῦ λίθου:

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

ἄρα $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ ἢ $t = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 45}{10} \left(\dfrac{m}{m/sec^2} \right)} = 3 \text{ sec}$

Ὁ λίθος θὰ κινηθῇ ὁμαλῶς καὶ ὁριζοντίως ἐπὶ χρόνον $t = 3$ sec μὲ ταχύτητα υ_o καὶ θὰ συναντήσῃ τὸ ἔδαφος εἰς ἀπόστασιν s ἀπὸ τὸ σημεῖον ἐκσφενδονίσεώς του. Ὥστε τὸ ὁριζόντιον βεληνεκὲς s εἶναι:

$$s = \upsilon_o \cdot t \quad \text{ἤτοι} \quad s = 20 \cdot 3 \left(\frac{m}{sec} \cdot sec \right) = \mathbf{60\ m}$$

Ἡ ταχύτης V μὲ τὴν ὁποίαν ὁ λίθος φθάνει εἰς τὸ ἔδαφος εἶναι ἡ συνισταμένη τῆς ἀρχικῆς ὁριζοντίας ταχύτητος υ_o καὶ τῆς κατακορύφου ταχύτητος υ τὴν ὁποίαν ὁ λίθος ἀποκτᾷ κατὰ τὴν πτῶσιν του ἐπὶ χρόνον t. Ὁ λίθος κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἐκσφενδονίσεώς του ἔχει ὁλικὴν ἐνέργειαν:

$$W_{o\lambda} = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_o^2$$

ἡ ὁποία, ὅταν ὁ λίθος φθάνῃ εἰς τὸ ἔδαφος, ἔχει μετατραπῆ εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν:

$$W_{o\lambda} = \frac{1}{2} m \cdot V^2$$

Σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας ἔχομεν:

$$\frac{1}{2} m \cdot V^2 = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_o^2 \quad \text{ἄρα} \quad V = \sqrt{2g \cdot h + \upsilon_o^2}$$

Ἂν εἰς τὴν τελευταίαν σχέσιν θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν g, h καὶ υ_o εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ζητουμένης ταχύτητος V εἶναι:

$$V = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 45 + 20^2 \left[\frac{m}{sec^2} \cdot m + \left(\frac{m}{sec} \right)^2 \right]}$$

ἢ $V = \sqrt{1300}$ m/sec καὶ $V = \mathbf{36\ m/sec}$

97

Εἰς τὴν πλαγίαν βολὴν τὸ μέγιστον βεληνεκὲς ἀντιστοιχεῖ εἰς γωνίαν κλίσεως 45°. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ βεληνεκὲς εἶναι:

$$s = \frac{\upsilon_o^2}{g}$$

ὅπου υ_o εἶναι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ βλήματος. Δίδεται ὅτι τὸ ὕδωρ ἐκσφενδονίζεται μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $\upsilon_o = 30$ m/sec. Ἂν κατὰ προσέγγισιν λάβωμεν $g = 10$ m/sec², τότε ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω σχέσιν εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μέγιστον βεληνεκὲς τῆς ἀκτῖνος τοῦ ὕδατος εἶναι:

$$s = \frac{30^2}{10}\left[\frac{(\mathrm{m/sec})^2}{\mathrm{m/sec^2}}\right] \quad \text{ἤτοι} \quad s = \mathbf{90\ m}$$

98

Τὸ ἀεροπλάνον κινεῖται εἰς σταθερὸν ὕψος $h = 6\,000$ m μὲ ὁριζοντίαν ταχύτητα $\upsilon_o = 40$ m/sec. Συνεπῶς τὸ σῶμα, τὸ ὁποῖον ἀφήνεται ἐλεύθερον ἀπὸ τὸ ἀεροπλάνον, ἔχει ὁριζοντίαν ταχύτητα υ_o, διότι μέχρι τῆς στιγμῆς ἐκείνης μετεῖχε τῆς κινήσεως τοῦ ἀεροπλάνου. Ζητεῖται λοιπὸν τὸ ὁριζόντιον βεληνεκὲς τοῦ σώματος, τὸ ὁποῖον βάλλεται ἀπὸ ὕψος h. Θὰ λάβωμεν κατὰ προσέγγισιν $g = 10$ m/sec². Τὸ σῶμα θὰ κινηθῇ ἐπὶ χρόνον t, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἐλευθέρας πτώσεως τοῦ σώματος:

$$h = \frac{1}{2}\, g \cdot t^2$$

$$\text{Ἄρα} \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \text{ἢ} \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot 6\,000}{10}\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m/sec^2}}\right)} = 34{,}6\ \mathrm{sec}$$

Τὸ σῶμα θὰ κινηθῇ ὁμαλῶς καὶ ὁριζοντίως ἐπὶ χρόνον t μὲ ταχύτητα υ_o. Ὥστε τὸ ὁριζόντιον βεληνεκὲς s εἶναι:

$$s = \upsilon_o \cdot t \quad \text{ἤτοι} \quad s = 40 \cdot 34{,}6\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}} \cdot \mathrm{sec}\right) = \mathbf{1384\ m}$$

Ἡ ταχύτης V μὲ τὴν ὁποίαν τὸ σῶμα φθάνει εἰς τὸ ἔδαφος (βλ. πρόβλημα 96) εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$V = \sqrt{2g \cdot h + \upsilon_o^2}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ταχύτητος V εἶναι:

$$V = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 6\,000 + 40^2 \left[\frac{m}{sec^2} \cdot m + \left(\frac{m}{sec} \right)^2 \right]}$$

ἢ $$V = \sqrt{1216 \cdot 10^2} \; m/sec = \mathbf{348\ m/sec}$$

ΟΡΜΗ ΚΑΙ ΚΡΟΥΣΙΣ

99

Τὸ αὐτοκίνητον ἔχει μᾶζαν $m = 1\ tn = 10^6\ gr$ καὶ κινεῖται μὲ σταθερὰν ταχύτητα $\upsilon_1 = 8\ m/sec = 8 \cdot 10^2\ cm/sec$. Ἡ ὁρμὴ τοῦ αὐτοκινήτου (εἰς μονάδας C.G.S.) εἶναι :

$$J_1 = m \cdot \upsilon_1$$

Ἐντὸς χρόνου $t = 2\ sec$ ἡ ταχύτης τοῦ αὐτοκινήτου μεταβάλλεται ἀπὸ υ_1 εἰς $\upsilon_2 = 18\ m/sec = 18 \cdot 10^2\ cm/sec$. Οὕτω ἡ ὁρμὴ τοῦ αὐτοκινήτου ἐντὸς τοῦ χρόνου t μεταβάλλεται ἀπὸ J_1 εἰς:

$$J_2 = m \cdot \upsilon_2$$

Ἡ μεταβολὴ τῆς ὁρμῆς ὀφείλεται εἰς τὴν δρᾶσιν μιᾶς δυνάμεως F. Ὅπως δὲ εἶναι γνωστὸν ἡ μεταβολὴ τῆς ὁρμῆς τοῦ σώματος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὸν χρόνον. Ἄρα ἔχομεν:

$$F \cdot t = J_2 - J_1 \quad \text{ἢ} \quad F \cdot t = m \cdot \upsilon_2 - m \cdot \upsilon_1 \qquad (1)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐνεργήσασα ἐπὶ τοῦ σώματος δύναμις F εἶναι (εἰς μονάδας C.G.S.) :

$$F = \frac{m(\upsilon_2 - \upsilon_1)}{t} \quad \text{ἢ} \quad F = \frac{10^6 \cdot (18 \cdot 10^2 - 8 \cdot 10^2)}{2}\ dyn$$

καὶ $$\mathbf{F = 5 \cdot 10^8\ dyn}$$

Ἂν κατὰ προσέγγισιν λάβωμεν ὅτι εἶναι $1\ kgr^* = 10^6\ dyn$, τότε ἡ εὑρεθεῖσα δύναμις F εἶναι :

$$F = \mathbf{500\ kgr^*}$$

100

Τὸ ὅπλον ἔχει μᾶζαν $m_o = 2\ kgr = 2 \cdot 10^3\ gr$, τὸ δὲ ἐκσφενδονιζόμενον βλῆμα ἔχει μᾶζαν $m_\beta = 10\ gr$. Τὸ βλῆμα, κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἐξόδου του ἀπὸ τὴν κάνην τοῦ ὅπλου, ἔχει ταχύτητα $\upsilon_\beta = 800\ m/sec$ ἤτοι $\upsilon_\beta = 8 \cdot 10^4\ cm/sec$. Σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς τὸ ὅπλον ἀποκτᾷ μίαν ταχύτητα ἀνακρούσεως υ_o καὶ ἰσχύει τότε ἡ σχέσις:

$$m_o \cdot \upsilon_o + m_\beta \cdot \upsilon_\beta = 0 \quad \text{ἢ} \quad m_o \cdot \upsilon_o = - m_\beta \cdot \upsilon_\beta \quad (1)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ταχύτης υ_o ἀνακρούσεως τοῦ ὅπλου εἶναι:

$$\upsilon_o = - \frac{m_\beta}{m_o} \cdot \upsilon_\beta$$

$$\text{ἢ} \quad \upsilon_o = - \frac{10}{2 \cdot 10^3} \cdot 8 \cdot 10^4 \left(\frac{gr}{gr} \cdot \frac{cm}{sec} \right)$$

$$\text{καὶ} \quad \upsilon_o = \mathbf{400\ cm/sec = 4\ m/sec}$$

101

Ἡ σφαῖρα ἔχει μᾶζαν m = 0,5 kgr * = 500 gr.

Ὅταν ἡ σφαῖρα βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ κάτω ἀπὸ ὕψος h = 5 m = 500 cm μὲ ταχύτητα $\upsilon_o = 10$ m/sec $= 10^3$ cm/sec, τότε ἡ σφαῖρα ἔχει δυναμικὴν ἐνέργειαν: $W_\Delta = m \cdot g \cdot h$

καὶ κινητικὴν ἐνέργειαν: $W_K = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_o^2$

Ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια τῆς σφαίρας εἶναι:

$$W_{o\lambda} = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_o^2 \quad \text{ἢ} \quad W_{o\lambda} = m \left(\frac{2g \cdot h + \upsilon_o^2}{2} \right) \quad (1)$$

Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) θέσωμεν:

m = 500 gr $g = 10^3$ cm/sec^2 h = 500 cm $\upsilon_o = 10^3$ cm/sec

εὑρίσκομεν τὴν ὁλικὴν ἐνέργειαν τῆς σφαίρας εἰς μονάδας C.G.S ἤτοι εἰς ἔργια:

$$W_{o\lambda} = 500 \cdot \left[\frac{2 \cdot 10^3 \cdot 10^3 + (10^3)^2}{2} \right] \text{erg}$$

$$\text{ἢ} \quad W_{o\lambda} = 500 \cdot \frac{2 \cdot 10^6 + 10^6}{2} = 750 \cdot 10^6 \text{ erg}$$

Ὅταν ἡ σφαῖρα προσκρούῃ ἐπὶ τῆς πλακός, ὁλόκληρος ἡ ἀρχικὴ ἐνέργεια τῆς σφαίρας ἔχει μετατραπῆ εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν. Τὰ 0,20 τῆς κινητικῆς ἐνεργείας $W_{o\lambda}$ τῆς σφαίρας μεταβάλλονται εἰς θερμότητα.

Οὕτω ἀπομένουν ἐπὶ τῆς σφαίρας τὰ 0,80 τῆς ἀρχικῆς ἐνεργείας της ὑπὸ μορφὴν κινητικῆς ἐνεργείας W_1 ἡ ὁποία εἶναι:

$$W_1 = 0{,}80 \cdot W_{ολ} = 0{,}80 \cdot 750 \cdot 10^6 \text{ erg}$$
$$\text{ἢ} \quad W_1 = 600 \cdot 10^6 \text{ erg}$$

Ἕνεκα αὐτῆς τῆς κινητικῆς ἐνεργείας W_1 ἡ σφαῖρα ἀνέρχεται εἰς ὕψος h_1 ὅπου ὁλόκληρος ἡ κινητικὴ ἐνέργειά της ἔχει μετατραπῆ εἰς δυναμικὴν ἐνέργειαν. Οὕτω λαμβάνομεν τὴν σχέσιν:

$$W_1 = m \cdot g \cdot h_1 \quad \text{ἢ} \quad 600 \cdot 10^6 = 500 \cdot 10^3 \cdot h_1$$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν τὸ ὕψος h_1 εἰς μονάδας C.G.S. ἤτοι εἰς ἑκατοστόμετρα:

$$h_1 = \frac{600 \cdot 10^6}{500 \cdot 10^3} \text{ cm} \quad \text{ἢ} \quad h_1 = \mathbf{1\,200\ cm = 12\ m}$$

Ἡ σφαῖρα, μετὰ τὴν κροῦσιν της, ἀνέρχεται εἰς ὕψος μεγαλύτερον ἀπὸ ἐκεῖνο ἐκ τοῦ ὁποίου ἐρρίφθη, διότι ἡ σφαῖρα ἐβλήθη πρὸς τὰ κάτω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $υ_0 = 10$ m/sec.

102

Ἡ σφαῖρα Α ἔχει μᾶζαν $m_1 = 100$ gr καὶ ταχύτητα $υ_1 = 20$ cm/sec. Ἡ σφαῖρα Β ἔχει μᾶζαν $m_2 = 25$ gr καὶ ταχύτητα $υ_2 = 50$ cm/sec. Δίδεται ὅτι αἱ δύο σφαῖραι κινούμεναι κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν συγκρούονται μεταξύ των. Ἄρα προηγεῖται ἡ σφαῖρα Α καὶ ἕπεται ἡ σφαῖρα Β ἡ ὁποία καταφθάνει τὴν σφαῖραν Α. Πρὸ τῆς κρούσεως ἡ ὁρμὴ τοῦ συστήματος τῶν δύο σφαιρῶν εἶναι:

ὁρμὴ πρὸ τῆς κρούσεως: $m_1 \cdot υ_1 + m_2 \cdot υ_2$

Μετὰ τὴν κροῦσιν αἱ δύο πλαστικαὶ σφαῖραι ἐνσωματώνονται ἡ μία μὲ τὴν ἄλλην καὶ ἀποτελοῦν ἕνα σῶμα Γ, τὸ ὁποῖον ἔχει μᾶζαν $m_1 + m_2$ καὶ ταχύτητα υ. Οὕτω ἔχομεν:

ὁρμὴ μετὰ τὴν κροῦσιν: $(m_1 + m_2) \cdot υ$

Σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς, πρέπει ἡ ὁρμὴ τοῦ συστήματος νὰ διατηρῆται σταθερά. Ἑπομένως ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$m_1 \cdot υ_1 + m_2 \cdot υ_2 = (m_1 + m_2) \cdot υ$$

Ἀπὸ τὴν εὑρεθεῖσαν ἐξίσωσιν δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ταχύτητα υ τοῦ σώματος Γ, τὸ ὁποῖον προέκυψε μετὰ τὴν κροῦσιν:

$$υ = \frac{m_1 \cdot υ_1 + m_2 \cdot υ_2}{(m_1 + m_2)}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν:

$$υ = \frac{100 \cdot 20 + 25 \cdot 50}{100 + 25} \left[\frac{gr \cdot \frac{cm}{sec}}{gr} \right]$$

ἤτοι $υ = \mathbf{26\ cm/sec}$

Παρατήρησις. Πρὸ τῆς κρούσεως ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ συστήματος τῶν δύο σφαιρῶν ἦτο :

$$\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 20^2 + \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 50^2$$

ἢ $$20\,000 + 31\,250 = 51\,250 \text{ erg}$$

Μετὰ τὴν κροῦσιν ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ προκύψαντος σώματος Γ εἶναι :

$$\frac{1}{2} \cdot (100 + 25) \cdot 26^2 = 41\,000 \text{ erg}$$

Ἡ διαφορὰ τῆς κινητικῆς ἐνεργείας εἶναι ἴση μὲ 10 250 erg. Ἡ ἐνέργεια αὐτὴ μετετράπη εἰς θερμότητα, διότι κατὰ τὴν κροῦσιν πλαστικῶν σωμάτων παρατηρεῖται πάντοτε μετατροπὴ μέρους τῆς κινητικῆς ἐνεργείας τοῦ συστήματος εἰς θερμότητα.

103

Αἱ ταχύτητες τῶν σφαιρῶν Α καὶ Β πρὸ τῆς κρούσεως ἦσαν ἀντιστοίχως $υ_1$ καὶ $υ_2$. Ἐπειδὴ αἱ σφαῖραι εἶναι ἀπολύτως ἐλαστικαί, ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα τῆς κινητικῆς ἐνεργείας τῶν δύο σφαιρῶν πρὸ τῆς κρούσεως καὶ μετὰ τὴν κροῦσιν διατηρεῖται σταθερόν. Ἄρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot υ_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot υ_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot V_2^2$$

ἢ $$m_1 \cdot (υ_1^2 - V_1^2) = m_2 \cdot (V_2^2 - υ_2^2) \qquad (1)$$

Ἐξ ἄλλου σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς, ἡ ὁρμὴ τοῦ συστήματος πρὸ καὶ μετὰ τὴν κροῦσιν διατηρεῖται σταθερά. Ἄρα ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$m_1 \cdot υ_1 + m_2 \cdot υ_2 = m_1 \cdot V_1 + m_2 \cdot V_2$$

ἢ $$m_1 \cdot (υ_1 - V_1) = m_2 \cdot (V_2 - υ_2) \qquad (2)$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν:

$$υ_1 + V_1 = V_2 + υ_2 \qquad (3)$$

Ἂν λύσωμεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) λαμβάνομεν :

$$\upsilon_1 = \frac{2m_2 \cdot V_2 + (m_1 - m_2) \cdot V_1}{m_1 + m_2} \qquad (4)$$

$$\upsilon_2 = \frac{2m_1 \cdot V_1 + (m_2 - m_1) \cdot V_2}{m_1 + m_2} \qquad (5)$$

Ἂν εἰς τὰς ἐξισώσεις (4) καὶ (5) θέσωμεν:

$$m_1 = 3 \text{ gr} \qquad m_2 = 4 \text{ gr}$$

$$V_1 = 20 \text{ m/sec} = 2 \cdot 10^3 \text{ cm/sec} \qquad V_2 = 10 \text{ m/sec} = 10^3 \text{ cm/sec}$$

εὑρίσκομεν ὅτι αἱ ταχύτητες τῶν σφαιρῶν A καὶ B πρὸ τῆς κρούσεως ἦσαν ἀντιστοίχως :

$$\upsilon_1 = \frac{8 \cdot 10^3 + (3 - 4) \cdot 2 \cdot 10^3}{7} \left(\frac{\text{gr} \cdot \text{cm/sec}}{\text{gr}} \right)$$

ἢ $\upsilon_1 = \mathbf{857\ cm/sec = 8{,}57\ m/sec}$

$$\upsilon_2 = \frac{6 \cdot 2 \cdot 10^3 + (4 - 3) \cdot 10^3}{7} \left(\frac{\text{gr} \cdot \text{cm/sec}}{\text{gr}} \right)$$

ἢ $\upsilon_2 = \mathbf{1857\ cm/sec = 18{,}57\ m/sec}$

ΚΥΚΛΙΚΗ ΟΜΑΛΗ ΚΙΝΗΣΙΣ

104

Ὁ τροχὸς ἔχει ἀκτῖνα R = 50 cm. Ἡ συχνότης ν τῆς κινήσεως εἶναι :

$$\nu = \frac{1800}{60} = \mathbf{30\ Hz}$$

Ἡ περίοδος T τῆς κινήσεως εἶναι:

$$T = \frac{1}{\nu} = \mathbf{\frac{1}{30}\ sec}$$

Ἡ γωνιακὴ ταχύτης ω τῆς κινήσεως εἶναι:

$$\omega = 2\pi \cdot \nu = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 30 = \mathbf{188{,}40\ rad/sec}$$

Ἡ γραμμικὴ ταχύτης υ τῶν σημείων τῆς περιφερείας τοῦ τροχοῦ εἶναι :

$$\upsilon = \omega \cdot R = 188{,}40 \cdot 50 = \mathbf{9\,420\ cm/sec} \quad ἢ \quad \upsilon = \mathbf{94{,}20\ m/sec}$$

105

Ὁ τροχὸς τοῦ αὐτοκινήτου ἔχει ἀκτῖνα $R = 30$ cm. Ἐντὸς χρόνου $t = 20$ min $= 1200$ sec τὸ αὐτοκίνητον θὰ διατρέξῃ διάστημα $s = 7536$ m ἢ $s = 7536 \cdot 10^2$ cm. Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας δ τοῦ τροχοῦ εἶναι :

$$\delta = 2\pi \cdot R = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 30 = 188{,}40 \text{ cm}$$

Ὅταν ὁ τροχὸς ἐκτελῇ μίαν στροφήν, τὸ αὐτοκίνητον προχωρεῖ κατὰ διάστημα ἴσον μὲ τὸ μῆκος δ τῆς περιφερείας τοῦ τροχοῦ. Διὰ νὰ διατρέξῃ τὸ αὐτοκίνητον τὸ διάστημα s, πρέπει ὁ τροχος νὰ ἐκτελέσῃ ἀριθμὸν N στροφῶν:

$$N = \frac{s}{\delta} = \frac{7536 \cdot 10^2}{188{,}40} = 4\,000 \text{ στροφὰς}$$

Ἄρα ἡ συχνότης ν τῆς κινήσεως τοῦ τροχοῦ (δηλαδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν στροφῶν κατὰ δευτερόλεπτον) εἶναι:

$$\nu = \frac{N}{t} = \frac{4000}{1200} = \frac{10}{3} = \mathbf{3{,}33\ Hz}$$

Ἡ ταχύτης υ τοῦ αὐτοκινήτου εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τῆς ὁμαλῆς κινήσεως:

$$s = \upsilon \cdot t \qquad \text{ἄρα} \qquad \upsilon = \frac{s}{t}$$

καὶ $$\upsilon = \frac{7536 \cdot 10^2}{1200} \left(\frac{\text{cm}}{\text{sec}}\right) = \mathbf{628\ cm/sec = 6{,}28\ m/sec}$$

Ἡ γραμμικὴ ταχύτης υ' τῶν σημείων τῆς περιφερείας τοῦ τροχοῦ εἶναι :

$$\upsilon' = 2\pi \cdot R \cdot \nu = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 30 \cdot \frac{10}{3} = \mathbf{628\ cm/sec}$$

δηλαδὴ εἶναι ἴση μὲ τὴν ταχύτητα τοῦ αὐτοκινήτου. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εἶναι προφανές, διότι εἴδομεν ὅτι κατὰ μίαν στροφὴν τοῦ τροχοῦ τὸ αὐτοκίνητον προχωρεῖ κατὰ διάστημα ἴσον μὲ τὸ μῆκος τῆς περιφεφερείας τοῦ τροχοῦ.

106

Ὁ τροχὸς ἔχει ἀκτῖνα $R = 1{,}2$ m $= 120$ cm καὶ ἐκτελεῖ 1200 στροφὰς ἐντὸς 60 sec. Ἄρα ἡ συχνότης τῆς κινήσεως τοῦ τροχοῦ εἶναι:

$$\nu = \frac{1200}{60} = 20 \text{ Hz}$$

Ἡ γωνιακὴ ταχύτης ω τοῦ τροχοῦ εἶναι:

$$\omega = 2\pi \cdot \nu = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 20 = \mathbf{125{,}60\ rad/sec}$$

Ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις γ, ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται εἰς τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας τοῦ τροχοῦ, εἶναι:

$$\gamma = \omega^2 \cdot R = 125{,}60^2 \cdot 120 = \mathbf{1\,893 \cdot 10^3\ cm/sec^2}$$

107

Ἡ περίοδος τῆς περιστροφικῆς κινήσεως τῆς Γῆς εἶναι $T = 24$ h, ἡ δὲ ἀκτὶς τοῦ ἰσημερινοῦ αὐτῆς εἶναι $R = 6370$ km. Ἡ γραμμικὴ ταχύτης υ, μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται ἕνα σημεῖον τοῦ ἰσημερινοῦ τῆς Γῆς, εἶναι:

$$\upsilon = \frac{2\pi \cdot R}{T} \quad \text{ἤτοι} \quad \upsilon = \frac{2\pi \cdot 6370}{24} \left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$$

καὶ $\upsilon = \mathbf{1666{,}8\ km/h}$

Ἄν ἡ ἀνωτέρω γραμμικὴ ταχύτης υ μετρηθῆ εἰς m/sec, ἔχομεν:

$$\upsilon = \frac{1\,666\,800}{3\,600} \left(\frac{\text{m}}{\text{sec}}\right) = \mathbf{463\ m/sec}$$

108

Ὁ σφόνδυλος ἔχει ἀκτῖνα $R = 2\,\text{m} = 200$ cm καὶ συχνότητα:

$$\nu = \frac{150}{60} = 2{,}5 \text{ Hz}$$

Ἡ γραμμικὴ ταχύτης υ ἑνὸς σημείου τῆς περιφερείας τοῦ σφονδύλου εἶναι:

$$\upsilon = 2\pi \cdot R \cdot \nu$$

ἤτοι $\upsilon = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 200 \cdot 2{,}5 = \mathbf{3140\ cm/sec = 31{,}4\ m/sec}$

Ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις γ, τὴν ὁποίαν ἔχουν τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας τοῦ σφονδύλου, εἶναι:

$$\gamma = \frac{\upsilon^2}{R} \quad \text{ἤτοι} \quad \gamma = \frac{3140^2}{200} \, \frac{(\text{cm/sec})^2}{\text{cm}}$$

καὶ $\gamma = \mathbf{49\,298\ cm/sec^2 = 492{,}98\ m/sec^2}$

Ἂν συγκρίνωμεν τὴν κεντρομόλον ἐπιτάχυνσιν γ τοῦ σφονδύλου πρὸς τὴν ἐπιτάχυνσιν τῆς βαρύτητος g, εὑρίσκομεν:

$$\frac{\gamma}{g} = \frac{49\,298}{980}\left(\frac{cm/sec^2}{cm/sec^2}\right) = \mathbf{50,3}$$

109

Τὸ σῶμα ἔχει μᾶζαν m = 150 gr καὶ διαγράφει ὁμαλῶς κύκλον ἀκτῖνος R = 50 cm μὲ ταχύτητα υ = 2 m/sec = 200 cm/sec. Ἐπὶ τοῦ σώματος ἐνεργεῖ κεντρομόλος δύναμις F, ἡ ὁποία εἶναι:

$$F = \frac{m \cdot \upsilon^2}{R}$$

Ἂν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν m, υ καὶ R εἰς μονάδας C. G. S. εὑρίσκομεν τὴν δύναμιν F εἰς δύνας. Οὕτω λαμβάνομεν:

$$F = \frac{150 \cdot 200^2}{50}\ dyn \quad ἢ \quad F = \mathbf{12 \cdot 10^4\ dyn}$$

Ἂν θεωρήσωμεν ὅτι εἶναι 1 gr* = 10^3 dyn, τότε ἡ ἀνωτέρω δύναμις F εἶναι:

$$F = \frac{12 \cdot 10^4}{10^3}\ gr^* \quad ἢ \quad F = \mathbf{120\ gr^*}$$

Ἡ περίοδος T τῆς κινήσεως εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\upsilon = \frac{2\pi \cdot R}{T} \quad ἄρα \quad T = \frac{2\pi \cdot R}{\upsilon}$$

$$καὶ \quad T = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 50}{200}\left(\frac{cm}{cm/sec}\right) = 1,57\ sec$$

Ὥστε, ὅταν ἡ περίοδος εἶναι T = 1,57 sec, ἐπὶ τοῦ σώματος ἐνεργεῖ δύναμις F = 12 · 10^4 dyn καὶ ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$F = \frac{4\pi^2 \cdot m \cdot R}{T^2} \qquad (1)$$

Ἂν ἡ περίοδος τῆς κινήσεως γίνῃ T_1 = 1,5 sec, τότε ἐπὶ τοῦ σώματος ἐνεργεῖ δύναμις F_1 καὶ ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$F_1 = \frac{4\pi^2 \cdot m \cdot R}{T_1^2} \qquad (2)$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (2) καὶ (1), εὑρίσκομεν:

$$\frac{F_1}{F} = \frac{T^2}{T_1^2} \qquad \text{ἄρα} \qquad F_1 = F \cdot \frac{T^2}{T_1^2}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ δύναμις F_1 εἶναι:

$$F_1 = 12 \cdot 10^4 \cdot \frac{1,57^2}{1,5^2}\left(\text{dyn} \cdot \frac{\text{sec}^2}{\text{sec}^2}\right) = \mathbf{131\,640\ dyn}$$

ἢ κατὰ προσέγγισιν $F_1 = \mathbf{131,64\ gr^*}$

110

Ἡ σφαῖρα ἔχει μᾶζαν $m = 1$ kgr $= 10^3$ gr καὶ διαγράφει κυκλικὴν τροχιὰν ἀκτῖνος $R = 1$ m $= 10^2$ cm. Ἐπὶ τῆς σφαίρας ἐνεργεῖ κεντρομόλος δύναμις $F = 10$ kgr* $= 981 \cdot 10^4$ dyn, ἡ ὁποία συναρτήσει τῆς συχνότητος ν δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$F = 4\pi^2 \cdot \nu^2 \cdot m \cdot R$$

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ συχνότης τῆς κινήσεως (εἰς μονάδας C. G. S.) εἶναι:

$$\nu = \sqrt{\frac{F}{4\pi^2 \cdot m \cdot R}}$$

$$\text{ἤτοι} \qquad \nu = \sqrt{\frac{981 \cdot 10^4}{4 \cdot 3,14 \cdot 10^3 \cdot 10^2}} = \sqrt{2,5}\ \text{Hz}$$

$$\text{καὶ} \qquad \nu = \mathbf{1,58\ Hz}$$

111

Τὸ βλῆμα θὰ ἐκσφενδονισθῇ μὲ ἀρχικὴν ὁριζοντίαν ταχύτητα υ. Ἀλλ' ἐπὶ τοῦ βλήματος θὰ ἐνεργῇ συνεχῶς τὸ βάρος τοῦ βλήματος:

$$F = m \cdot g \qquad (1)$$

Ἡ δύναμις αὐτὴ διευθύνεται σταθερῶς πρὸς τὸ κέντρον τῆς Γῆς καὶ συνεπῶς ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ βλήματος ὡς κεντρομόλος δύναμις, ἡ ὁποία ἐξασφαλίζει τὴν κυκλικὴν κίνησιν τοῦ βλήματος. Οὕτω διὰ τὴν δύναμιν F ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$F = \frac{m \cdot \upsilon^2}{R} \qquad (2)$$

Ἂν ἐξισώσωμεν τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2), λαμβάνομεν:

$$\frac{m \cdot \upsilon^2}{R} = m \cdot g \quad \text{καὶ} \quad \frac{\upsilon^2}{R} = g$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ταχύτης υ εἶναι:

$$\upsilon = \sqrt{g \cdot R} \quad \text{ἢ} \quad \upsilon = \sqrt{10 \cdot 6\,370 \cdot 10^3 \left(\frac{m}{sec^2} \cdot m\right)}$$

καὶ $\upsilon = \mathbf{7981\ m/sec}$

112

Τὸ σῶμα ἔχει μᾶζαν $m = 200$ gr καὶ διαγράφει κύκλον ἀκτῖνο $R = 40$ cm μὲ ταχύτητα $\upsilon = 2$ m/sec $= 200$ cm/sec. Ἡ συχνότης ν τῆς περιστροφῆς εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\upsilon = 2\pi \cdot R \cdot \nu \quad \text{ἄρα} \quad \nu = \frac{\upsilon}{2\pi \cdot R}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι:

$$\nu = \frac{200}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 40}\left(\frac{cm/sec}{cm}\right) = \frac{5}{6{,}28}\left(\frac{1}{sec}\right)$$

ἤτοι $\nu = \mathbf{0{,}79\ Hz}$

Ἐπὶ τῆς χειρὸς ἐνεργεῖ ἡ φυγόκεντρος δύναμις F, ἡ ὁποία εἶναι:

$$F = \frac{m \cdot \upsilon^2}{R} \quad \text{ἤτοι} \quad F = \frac{200 \cdot 200^2}{40}\ dyn = 2 \cdot 10^5\ dyn$$

Ὅταν τὸ σῶμα διέρχεται ἀπὸ τὸ κατώτατον σημεῖον τῆς τροχιᾶς του, τότε τὸ νῆμα εἶναι κατακόρυφον καὶ συνεπῶς ἡ φυγόκεντρος δύναμις F εἶναι κατακόρυφος ἔχουσα φορὰν πρὸς τὰ κάτω. Κατ' ἐκείνην δηλαδὴ τὴν στιγμὴν ἡ φυγόκεντρος δύναμις F καὶ τὸ βάρος B τοῦ σώματος ἔχουν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν καὶ φοράν. Οὕτω ἐπὶ τῆς χειρὸς μας ἐνεργεῖ τότε δύναμις:

$$F' = F + B$$

Τὸ βάρος τοῦ σώματος εἶναι $B = 200$ gr* ἢ κατὰ προσέγγισιν εἶναι :

$$B = 200 \cdot 10^3\ dyn = 2 \cdot 10^5\ dyn$$

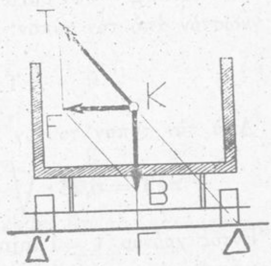
Ὥστε κατὰ τὴν θεωρουμένην στιγμὴν ἐπὶ τῆς χειρός μας ἀσκεῖται δύναμις :

$$F' = 2 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^5 = \mathbf{4 \cdot 10^5\ dyn}$$

ἢ κατὰ προσέγγισιν : $$F' = \mathbf{400\ gr^*}$$

113

Ἐὰν K εἶναι τὸ κέντρον βάρους (σχ. 24), τότε εἶναι $K\Gamma = 100$ cm. Ἐπίσης δίδεται ὅτι εἶναι $\Delta\Delta' = 120$ cm καὶ ἑπομένως εἶναι $\Gamma\Delta = 60$ cm. Τὸ αὐτοκίνητον κινεῖται ἐπὶ ὁριζοντίας ὁδοῦ καὶ πρόκειται νὰ διαγράψῃ στροφήν, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος εἶναι $R = 40$ m $= 4 \cdot 10^3$ cm. Κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς στροφῆς ἐνεργοῦν ἐπὶ τοῦ αὐτοκινήτου δύο δυνάμεις, τὸ βάρος B καὶ ἡ ἀντίδρασις T τῆς ὁδοῦ. Αἱ δυνάμεις B καὶ T πρέπει νὰ ἔχουν συνισταμένην τὴν ὁριζοντίαν δύναμιν F, ἡ ὁποία ἐνεργεῖ ὡς κεντρομόλος δύναμις. Τὸ αὐτοκίνητον διαγράφει ἀσφαλῶς τὴν στροφήν, ὅταν ἡ διεύθυνσις τῆς ἀντιδράσεως T τῆς ὁδοῦ τέμνῃ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς ὁδοῦ μεταξὺ τῶν σημείων Γ καὶ Δ. Οὕτω ἡ ὁρικὴ διεύθυνσις τῆς δυνάμεως T εἶναι ἡ εὐθεῖα ἡ διερχομένη διὰ τῶν σημείων K καὶ Δ. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα KFT καὶ KΔΓ εἶναι ὅμοια καὶ ἑπομέ ως ἔχομεν τὴν σχέσιν :



Σχ. 24

$$\frac{F}{\Gamma\Delta} = \frac{B}{\Gamma K} \quad \text{ἄρα} \quad F = B \cdot \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma K} \qquad (1)$$

Ἂν m εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ αὐτοκινήτου καὶ υ ἡ ταχύτης του, τότε εἶναι :

κεντρομόλος δύ αμις : $$F = \frac{m \cdot \upsilon^2}{R}$$ βάρος : $$B = m \cdot g$$

Οὕτω ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται:

$$\frac{m \cdot \upsilon^2}{R} = m \cdot g \cdot \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma K} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\upsilon^2}{R} = g \cdot \frac{60}{100} \quad \text{καὶ} \quad \upsilon^2 = \frac{3}{5} R \cdot g \quad (2)$$

Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) θέσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ R καὶ κατὰ προσέγγισιν λάβωμεν $g = 10^3$ cm/sec², εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην ταχύτητα υ τοῦ αὐτοκινήτου:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{3}{5} \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \left(\mathrm{cm} \cdot \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}^2}\right)} = 10^3 \cdot \sqrt{2{,}4}\ \mathrm{cm/sec}$$

καὶ $$\upsilon = \mathbf{1549\ cm/sec = 15{,}49\ m/sec}$$

ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΙΣ — ΕΚΚΡΕΜΕΣ

114

Τὸ ἐκκρεμὲς ἔχει μῆκος $l = 6$ m $= 600$ cm καὶ αἰωρεῖται εἰς τόπον ὅπου εἶναι $g = 981$ cm/sec². Ἡ περίοδος T τοῦ ἐκκρεμοῦς δίδεται ὡς γνωστὸν ἀπὸ τὸν τύπον:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Ἀπὸ τὸν τύπον τοῦτον εὑρίσκομεν:

$$T = 6{,}28 \cdot \sqrt{\frac{600}{981}\left(\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{cm/sec^2}}\right)} = 4{,}90\ \mathrm{sec}$$

Ἐντὸς χρόνου $t = 1$ min $= 60$ sec τὸ ἐκκρεμὲς τοῦτο ἐκτελεῖ N πλήρεις αἰωρήσεις, αἱ ὁποῖαι εἶναι:

$$N = \frac{t}{T} = \frac{60}{4{,}90} = \mathbf{12{,}2\ \text{αἰωρήσεις/min}}$$

115

Τὸ ἐκκρεμὲς ἔχει μῆκος l_1 καὶ περίοδον T_1. Δίδεται ὅτι εἰς χρόνον $t = 1$ min $= 60$ sec τὸ ἐκκρεμὲς ἐκτελεῖ $N_1 = 60$ αἰωρήσεις. Ἄρα ἡ περίοδος τοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι:

$$T_1 = \frac{t}{N_1} = \frac{60}{60} = 1\ \mathrm{sec}$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν:

$$T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} \qquad (1)$$

Ὅταν τὸ ἐκκρεμὲς ἐκτελῇ $N_2 = 90$ αἰωρήσεις εἰς χρόνον $t = 60$ sec, τότε ἡ περίοδος T_2 τοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι:

$$T_2 = \frac{t}{N_2} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3} \text{ sec}$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς ἐλαττώνεται κατὰ x ἑκατοστόμετρα καὶ γίνεται $l_1 - x$. Τότε ἔχομεν :

$$T_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_1 - x}{g}} \qquad (2)$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l_1 - x}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{l_1}{l_1 - x} \qquad (3)$$

Ἂν τὴν ἐξίσωσιν (3) θέσωμεν $T_1 = 1$ sec καὶ $T_2 = 2/3$ sec, ἔχομεν:

$$\frac{9}{4} = \frac{l_1}{l_1 - x} \quad \text{ἄρα} \quad x = \frac{5}{9} l_1 \qquad (4)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν:

$$l_1 = T_1^2 \cdot \frac{g}{4\pi^2} \quad \text{ἢ} \quad l_1 = 1 \cdot \frac{g}{4\pi^2} = \frac{g}{4\pi^2}$$

Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (4) εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ζητούμενον μῆκος x εἶναι :

$$x = \frac{5}{9} \cdot \frac{g}{4\pi^2} \quad \text{ἢ} \quad x = \frac{5}{9} \cdot \frac{981}{39{,}48} \text{ cm}$$

καὶ $\quad$ $x = \mathbf{13{,}8\ cm}$

116

Τὸ ἐκκρεμὲς ἔχει μῆκος $l = 125$ cm, ἡ δὲ μᾶζα τῆς ἐξηρτημένης σφαίρας εἶναι m = 500 gr. Ἄρα ἡ σφαῖρα ἔχει βάρος B = 500 gr* (σχ. 25). Τὸ πλάτος αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι 45°. Συνεπῶς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΔΓ εἶναι ἰσοσκελές, δηλαδὴ εἶναι ΟΔ = ΓΔ.

α) Ὅταν ἡ σφαῖρα εὑρίσκεται εἰς τὸ ἀνώτερον σημεῖον Γ τῆς διαδρομῆς της, τότε ἡ τάσις T τοῦ νήματος εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν συνιστῶσαν F_2 τοῦ βάρους B τῆς σφαίρας. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $ΓBF_2$ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ συνεπῶς ἰσχύει ἡ σχέσις:

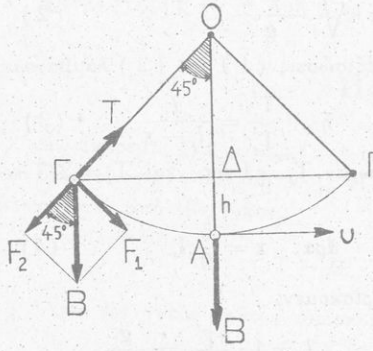
$$F_1 = F_2 \quad \text{καὶ} \quad B^2 = F_1^2 + F_2^2 \quad \text{ἢ} \quad B^2 = 2 \cdot F_2^2$$

Ἡ ζητουμένη δύναμις F_2 εἶναι :

$$F_2 = \frac{B}{\sqrt{2}} = \frac{B}{2} \cdot \sqrt{2} \quad \text{ἤτοι} \quad F_2 = \frac{500}{2} \cdot \sqrt{2}\ \text{gr*}$$

καὶ $$F_2 = T = \mathbf{352{,}50\ gr}$$

β) Ὅταν ἡ σφαῖρα διέρχεται διὰ τῆς κατακορύφου ΟΑ, τότε ἡ σφαῖρα ἔχει ἀποκτήσει ταχύτητα υ καὶ ἐπὶ τῆς σφαίρας ἐνεργεῖ κεντρομόλος δύναμις:



Σχ. 25

κεντρομόλος δύναμις:

$$F = \frac{m \cdot \upsilon^2}{l}$$

Τόση ὅμως φυγόκεντρος δύναμις ἀσκεῖται ἐκ μέρους τῆς σφαίρας ἐπὶ τοῦ ἄξονος Ο. Κατὰ τὴν θεωρουμένην στιγμὴν ἐπὶ τοῦ ἄξονος Ο ἐνεργοῦν διὰ μέσου τοῦ νήματος δύο κατακόρυφοι καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς δυνάμεις, αἱ ἑξῆς:

ἡ φυγόκεντρος δύναμις : $F = \dfrac{m \cdot \upsilon^2}{l}$

τὸ βάρος τῆς σφαίρας : $B = m \cdot g$.

Αἱ δυνάμεις αὐταὶ ἔχουν συνισταμένην F' ἴσην μέ :

$$F' = F + B \quad \text{ἢ} \quad F' = \frac{m \cdot \upsilon^2}{l} + m \cdot g \qquad (1)$$

Ὅταν λοιπὸν ἡ σφαῖρα διέρχεται διὰ τῆς κατακορύφου, ἡ τάσις τοῦ νήματος εἶναι ἴση μὲ τὴν δύναμιν F' ἡ ὁποία ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ ἄξονος Ο. Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) θὰ εὕρωμεν τὴν τάσιν F' τοῦ νήματος, ἂν προηγουμένως ὑπολογίσωμεν τὴν ταχύτητα υ, τὴν ὁποίαν ἔχει ἡ σφαῖρα ὅταν αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Α. Ἡ ταχύτης υ εὑρίσκεται ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἀρχῆς τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας ὡς ἑξῆς:

Εἰς τὴν θέσιν Γ ἡ σφαῖρα ἔχει δυναμικὴν ἐνέργειαν:

$$W_\Delta = m \cdot g \cdot h$$

ἡ ὁποία εἰς τὴν θέσιν Α μεταβάλλεται ὁλόκληρος εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν:

$$W_K = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2$$

Οὕτω, σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας, ἔχομεν :

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 \quad \text{ἤτοι} \quad \upsilon^2 = 2 g \cdot h \qquad (2)$$

Τὸ ὕψος $h = ΔA$ εἶναι :

$$ΔA = OA - OΔ \quad \text{ἢ} \quad h = l - OΔ$$

Ἡ ἀπόστασις ΟΔ εὑρίσκεται ἀπὸ τὸ ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΔΓ εἰς τὸ ὁποῖον ἔχομεν:

$$(OΓ)^2 = (OΔ)^2 + (ΓΔ)^2 \quad \text{ἢ} \quad (OΓ)^2 = 2 \cdot (OΔ)^2$$

ἄρα
$$OΔ = \frac{OΓ}{\sqrt{2}} = \frac{l}{2} \cdot \sqrt{2}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι :

$$h = l - \frac{l\sqrt{2}}{2} = \frac{2l - l\sqrt{2}}{2} = \frac{l(2 - \sqrt{2})}{2}$$

καὶ
$$h = 0{,}295\, l$$

Ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν (2) γράφεται:

$$\upsilon^2 = 2g \cdot 0{,}295\, l \quad \text{ἢ} \quad \upsilon^2 = 0{,}59\, g \cdot l \qquad (3)$$

Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) ἀντικαταστήσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ υ^2 ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (3), λαμβάνομεν:

$$F' = \frac{m}{l} \cdot 0{,}59\, g \cdot l + m \cdot g$$

ἢ
$$F' = 0{,}59\, m \cdot g + m \cdot g = 1{,}59\, m \cdot g$$

ἢ
$$F' = 1{,}59 \cdot B = 1{,}59 \cdot 500 \text{ gr}^* \quad \text{καὶ} \quad F' = \mathbf{795\ gr^*}$$

Παρατήρησις : Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (3) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ταχύτητος υ εἶναι :

$$\upsilon = \sqrt{0{,}59 \cdot 981 \cdot 125} = \mathbf{269\ cm/sec}$$

117

Τὸ ἐκκρεμὲς ἔχει μῆκος $l = 98$ cm καὶ περίοδον $T = 2$ sec. Ἀπὸ τὸν τύπον τοῦ ἐκκρεμοῦς:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{εὑρίσκομεν} \quad g = \frac{4\pi^2 \cdot l}{T^2}$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη τιμὴ τοῦ g εἶναι:

$$g = \frac{39{,}48 \cdot 98}{2^2}\left(\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}\right) = \mathbf{967{,}26\ cm/sec^2}$$

118

Τὸ ἐκκρεμὲς θὰ ἔχῃ περίοδον $T = 1\ \text{min} = 60\ \text{sec}$. Τὸ μῆκος l τοῦ ἐκκρεμοῦς τὸ εὑρίσκομεν ἀπὸ τὸν τύπον:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

ἀπὸ τὸν ὁποῖον λαμβάνομεν:

$$l = \frac{g \cdot T^2}{4\pi^2} \quad \text{ἤτοι} \quad l = \frac{980 \cdot 60^2}{39{,}48}\left(\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2} \cdot \text{sec}^2\right)$$

καὶ $$l = \frac{98 \cdot 36 \cdot 10^5}{3\,948}\ \text{cm} = \mathbf{89 \cdot 10^3\ cm}$$

Δηλαδὴ τὸ ἐκκρεμὲς τοῦτο ἔπρεπε νὰ ἔχῃ μῆκος $l = 890$ m.

119

Ἄν l εἶναι τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς, τότε εἰς τὸν τόπον Α, ὅπου εἶναι $g_A = 980\ \text{cm/sec}^2$, ἡ περίοδος τοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι $T_A = 2$ sec καὶ ἰσχύει ὁ τύπος:

$$T_A = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_A}} \qquad (1)$$

Ὅταν τὸ ἐκκρεμὲς μεταφερθῇ εἰς τὸν τόπον Β, ὅπου εἶναι $g_B = 974\ \text{cm/sec}^2$, ἡ περίοδος τοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι T_B καὶ ἰσχύει ὁ τύπος:

$$T_B = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_B}} \qquad (2)$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (2) καὶ (1) λαμβάνομεν:

$$\frac{T_B}{T_A} = \sqrt{\frac{g_A}{g_B}} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{T_B}{2} = \sqrt{\frac{980}{974}} = \sqrt{1{,}006}$$

καὶ $$T_B = 2 \cdot \sqrt{1{,}006} = 2 \cdot 1{,}003 = 2{,}006\ \text{sec}$$

Οὕτω τὸ ἐκκρεμὲς εἰς τὸν τόπον Β καθυστερεῖ εἰς ἑκάστην αἰώρησιν κατὰ $\Delta t = 0{,}006$ sec.

Γνωρίζομεν ὅτι εἰς 24 ὥρας ἀντιστοιχοῦν $24 \cdot 3600 = 86\,400$ sec. Ὅταν λοιπὸν τὸ ὡρολόγιον εὑρίσκεται εἰς τὸν τόπον Α, τὸ ἐκκρεμὲς ἐντὸς 24 ὡρῶν ἐκτελεῖ:

$$N = \frac{86\,400}{2} = 43\,200 \text{ αἰωρήσεις}$$

Ἂν τὸ ὡρολόγιον μεταφερθῇ εἰς τὸν τόπον Β, σημειώνομεν παρέλευσιν 24 ὡρῶν, ὅταν τὸ ἐκκρεμὲς ἐκτελέσῃ πάλιν $N = 43\,200$ αἰωρήσεις. Ἀλλ' εἰς τὸν τόπον Β ἑκάστη αἰώρησις τοῦ ἐκκρεμοῦς διαρκεῖ $T_B = 2{,}006$ sec. Ὥστε εἰς τὸν τόπον Β τὸ ὡρολόγιον θὰ σημειώσῃ τὴν παρέλευσιν 24 ὡρῶν, ὅταν εἰς τὴν πραγματικότητα ἔχουν παρέλθει:

$$2{,}006 \cdot 43\,200 = 86\,659 \text{ sec}$$

Οὕτω ἐντὸς 24 ὡρῶν τὸ ὡρολόγιον καθυστερεῖ κατά:

$$86\,659 - 86\,400 = \mathbf{259\ sec} = \mathbf{4\ min\ 19\ sec}$$

Παρατήρησις : Εἰς τὸν τόπον Β τὸ ἐκκρεμὲς τοῦ ὡρολογίου ἐντὸς 24 ὡρῶν ἐκτελεῖ :

$$N' = \frac{86\,400}{2{,}006} = 43\,070 \text{ αἰωρήσεις}$$

Ὅταν ὅμως τὸ ἐκκρεμὲς θὰ ἔχῃ ἐκτελέσει 43070 αἰωρήσεις, τὸ ὡρολόγιον δὲν θὰ δεικνύῃ τὴν παρέλευσιν 24 ὡρῶν. Διότι ὁ ὡρολογιακὸς μηχανισμὸς δεικνύει παρέλευσιν 24 ὡρῶν, ὅταν τὸ ἐκκρεμὲς ἐκτελέσῃ

$$N = \frac{86\,400}{T_A} = 43\,200 \text{ αἰωρήσεις}$$

120

Τὸ ἐκκρεμὲς ἔχει μῆκος l καὶ εἰς τὸν τόπον, ὅπου εἶναι $g = 980$ cm ἡ περίοδος τοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι $T = 2$ sec καὶ ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{ἢ} \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{980}} \qquad (1)$$

Εἰς τὸν ἰσημερινὸν εἶναι $g_I = 978 \text{ cm/sec}^2$ καὶ ἡ περίοδος τοῦ ἐκκρεμοῦς τούτου γίνεται:

$$T_I = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_I}} \quad \text{ἢ} \quad T_I = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{978}} \qquad (2)$$

Ἂν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

$$\frac{T_I}{T} = \sqrt{\frac{980}{978}} = \sqrt{1{,}002054} = 1{,}0015$$

Ἄρα εἰς τὸν ἰσημερινὸν ἡ περίοδος T_I εἶναι:

$$T_I = 2 \cdot 1{,}0015 = \mathbf{2{,}0030\ sec}$$

Εἰς τὸν πόλον εἶναι $g_\Pi = 983\ cm/sec^2$ καὶ ἡ περίοδος τοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι:

$$T_\Pi = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_\Pi}} \quad ἢ \quad T_\Pi = 2 \cdot \sqrt{\frac{l}{983}} \qquad (3)$$

Ἂν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (3), λαμβάνομεν :

$$T_\Pi = \sqrt{\frac{980}{983}} = \sqrt{0{,}9969} = 0{,}998$$

Ἄρα εἰς τὸν πόλον ἡ περίοδος T_Π εἶναι:

$$T_\Pi = 2 \cdot 0{,}998 = \mathbf{1{,}996\ sec}$$

ΠΑΓΚΟΣΜΙΟΣ ΕΛΞΙΣ—ΒΑΡΥΤΗΣ

121

Γνωρίζομεν ὅτι μεταξὺ δύο σωμάτων, τὰ ὁποῖα ἔχουν μάζας m_1 καὶ m_2 καὶ τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν r, ἀσκεῖται μεταξὺ αὐτῶν ἀμοιβαία ἕλξις F, ἡ ὁποία σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Νεύτωνος εἶναι:

$$F = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

ὅπου k εἶναι ἡ σταθερὰ τῆς παγκοσμίου ἕλξεως:

$$k = 6{,}68 \cdot 10^{-8}\ C.G.S.$$

Προκειμένου περὶ ὁμογενοῦς σφαίρας (ὅπως ὑπεθέσαμεν καὶ τὴν Γῆν) ἡ μᾶζα τῆς σφαίρας θεωρεῖται ὅτι εἶναι συγκεντρωμένη εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.

Αἱ δύο σφαῖραι μολύβδου, ἐπειδὴ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα r, ἔχουν καὶ τὸν αὐτὸν ὄγκον $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Συνεπῶς ἔχουν καὶ τὴν αὐτὴν μᾶζαν:

$$m = m_1 = m_2 \quad \text{ἤτοι} \quad m = d \cdot V$$

$$\text{καὶ} \quad m = d \cdot \frac{4\pi r^3}{3}$$

Ἡ μεταξὺ τῶν δύο ἴσων σφαιρῶν ἀσκουμένη ἕλξις εἶναι:

$$F = k \cdot \frac{m^2}{(2r)^2} \quad \text{ἢ} \quad F = k \cdot \frac{\left(d \cdot \frac{4\pi r^3}{3}\right)^2}{4r^2}$$

$$\text{καὶ} \quad F = \frac{k \cdot (d \cdot 4\pi r^3)^2}{9 \cdot 4r^4} \quad \text{ἤτοι} \quad F = \frac{k \cdot d^2 \cdot 4\pi^2 r^4}{9}$$

Ἂν εἰς τὴν τελευταίαν σχέσιν θέσωμεν τὰ διάφορα μεγέθη εἰς μονάδας C. G. S. θὰ εὕρωμεν τὴν δύναμιν F εἰς δύνας. Δίδεται ὅτι εἶναι:

$$d = 11 \ gr/cm^3 \quad \text{καὶ} \quad r = 1 \ m = 10^2 \ cm$$

Ἄρα ἡ ἀσκουμένη μεταξὺ τῶν δύο σφαιρῶν ἕλξις εἶναι:

$$F = \frac{6{,}68 \cdot 10^{-8} \cdot 11^2 \cdot 4\pi^2 \cdot 10^8}{9} \ dyn$$

$$\text{ἢ} \quad F = \frac{6{,}68 \cdot 121 \cdot 4 \cdot 9{,}87}{9} \ dyn$$

Εἶναι γνωστὸν ὅτι $1 \ gr^* = 981$ dyn. Ἂν κατὰ προσέγγισιν λάβωμεν ὅτι εἶναι $1 \ gr^* = 987$ dyn, τότε ἡ ἀνωτέρω δύναμις F, μετρημένη εἰς gr*, εἶναι:

$$F = \frac{6{,}68 \cdot 121 \cdot 4 \cdot 9{,}87}{9 \cdot 987} \ gr^* \quad \text{ἢ} \quad F = \mathbf{3{,}59 \ gr^*}$$

122

Ἡ μᾶζα m θὰ ἰσορροπῇ ὅταν αἱ ἐπ' αὐτῆς ἀσκούμεναι ἕλξεις ἐκ μέρους τῶν δύο μαζῶν m_1 καὶ m_2 εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι. Ἡ συνθήκη αὐτὴ ἰσχύει, ὅταν ἡ μᾶζα εὑρίσκεται εἰς ἕνα σημεῖον B τῆς εὐθείας $A_1A_2 = \alpha$. Ἂν καλέσωμεν x τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου B ἀπὸ τὸ ἄκρον A_1 τῆς εὐθείας, τότε ἔχομεν:

$$A_1B = x \qquad A_2B = \alpha - x$$

Κατὰ τὴν ἰσορροπίαν τῆς μάζης m αἱ ἐπ' αὐτῆς ἀσκούμεναι ἕλξεις εἶναι :

ἐκ μέρους τῆς μάζης m_1 : $F_1 = k \cdot \dfrac{m_1 \cdot m}{x^2}$

ἐκ μέρους τῆς μάζης m_2 : $F_2 = k \cdot \dfrac{m_2 \cdot m}{(\alpha - x)^2}$

Ἐπειδὴ αἱ δύο ἕλξεις εἶναι ἴσαι, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν:

$$k \cdot \frac{m_1 \cdot m}{x^2} = k \cdot \frac{m_2 \cdot m}{(\alpha - x)^2}$$

$$\text{ἤ} \quad \frac{m_1}{x^2} = \frac{m_2}{(\alpha - x)^2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{x_2}{(\alpha - x)^2}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν:

$$\frac{x}{\alpha - x} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$$

Λύοντες τὴν εὑρεθεῖσαν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς x λαμβάνομεν:

$$x \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\right) = \alpha \cdot \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \quad \text{ἄρα} \quad x = \frac{\alpha \cdot \sqrt{\dfrac{m_1}{m_2}}}{1 + \sqrt{\dfrac{m_1}{m_2}}}$$

123

Ἄς καλέσωμεν α τὴν ἀπόστασιν τῶν κέντρων τῆς Γῆς καὶ τῆς Σελήνης. Ἕνα σῶμα μάζης m θὰ ἰσορροπῇ μεταξὺ τῆς Γῆς καὶ τῆς Σελήνης, ὅταν αἱ ἐπ' αὐτοῦ ἀσκούμεναι ἕλξεις ἐκ μέρους τῆς Γῆς καὶ τῆς Σελήνης εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι. Δίδεδαι ὅτι εἶναι $\alpha = 60$ R καὶ ὅτι ἂν m_Γ καὶ m_Σ εἶναι ἀντιστοίχως αἱ μᾶζαι τῆς Γῆς καὶ τῆς Σελήνης, τότε ὁ λόγος τῶν μαζῶν τῶν δύο τούτων σωμάτων εἶναι: $\dfrac{m_\Gamma}{m_\Sigma} = 81$.

Τὸ σῶμα μάζης m ἰσορροπεῖ, ὅταν εὑρεθῇ εἰς ἀπόστασιν x ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς Γῆς. Τότε ἡ ἀπόστασις τοῦ σώματος ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς Σελήνης εἶναι $\alpha - x$ ἤτοι $60\text{R} - x$. Κατὰ τὴν ἰσορροπίαν τῆς μάζης m αἱ ἐπ' αὐτῆς ἀσκούμεναι ἕλξεις εἶναι :

ἐκ μέρους τῆς Γῆς : $F = k \cdot \dfrac{m_\Gamma \cdot m}{x^2}$

ἐκ μέρους τῆς Σελήνης : $F = k \cdot \dfrac{m_\Sigma \cdot m}{(60\text{R} - x)^2}$

Ἐπειδὴ αἱ δύο ἕλξεις εἶναι ἴσαι, ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$k \cdot \frac{m_\Gamma \cdot m}{x^2} = k \cdot \frac{m_\Sigma \cdot m}{(60R - x)^2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{m_\Gamma}{x^2} = \frac{m_\Sigma}{(60R - x)^2}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν:

$$\frac{x^2}{(60R - x)^2} = \frac{m_\Gamma}{m_\Sigma} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{x}{60R - x} = \sqrt{81}$$

Λύοντες τὴν εὑρεθεῖσαν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς x λαμβάνομεν:

$$x = 9 \cdot (60R - x) \quad \text{ἄρα} \quad x = \mathbf{54\ R}$$

124

Ἂν m_Γ καὶ m_Σ εἶναι ἀντιστοίχως ἡ μᾶζα τῆς Γῆς καὶ τῆς Σελήνης, τότε εἶναι:

$$m_\Sigma = 0{,}0123 \cdot m_\Gamma \quad \text{ἢ} \quad m_\Sigma = 0{,}0123 \cdot 6 \cdot 10^{27}\ \text{gr}$$

$$\text{καὶ} \quad m_\Sigma = 738 \cdot 10^{23}\ \text{gr}$$

Ἡ ἀκτὶς τῆς Σελήνης εἶναι:

$$r = 1738\ \text{km} = 1738 \cdot 10^5\ \text{cm}$$

Ἕνα σῶμα μάζης m, εὑρισκόμενον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς Σελήνης ἕλκεται ὑπ' αὐτῆς καὶ θὰ ἔχῃ βάρος $B = m \cdot g_\Sigma$. Τὸ βάρος τοῦτο τοῦ σώματος ὀφείλεται εἰς τὴν ἕλξιν τῆς Σελήνης καὶ συνεπῶς ἰσχύει ἡ γνωστὴ σχέσις:

$$m \cdot g_\Sigma = k \cdot \frac{m_\Sigma \cdot m}{r^2} \quad \text{ἤτοι} \quad g_\Sigma = k \cdot \frac{m_\Sigma}{r^2}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν:

$$g_\Sigma = 6{,}68 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{738 \cdot 10^{23}}{(1738 \cdot 10^5)^2}\ \text{C.G.S.}$$

$$\text{ἤτοι} \quad g_\Sigma = \mathbf{163\ cm/sec^2}$$

125

Εἰς τὴν Γῆν τὸ σῶμα πίπτει μὲ ἐπιτάχυνσιν $g = 981\ \text{cm/sec}^2$. Τὸ σῶμα εὑρισκόμενον εἰς ὕψος $h = 100\ \text{m} = 10^4\ \text{cm}$ ἔχει δυναμικὴν ἐνέργειαν:

$$W_\Delta = m \cdot g \cdot h$$

Ὅταν τὸ σῶμα φθάνει εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς Γῆς, ὁλόκληρος ἡ δυναμική του ἐνέργεια ἔχει μετατραπῆ εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν:

$$W_K = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2$$

ὅπου υ εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ σώματος κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἀφίξεώς του εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς Γῆς. Οὕτω ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 = m \cdot g \cdot h \qquad \text{ἄρα} \qquad \upsilon = \sqrt{2g \cdot h} \qquad (1)$$

Ἂν καλέσωμεν g_Σ τὴν ἐπιτάχυνσιν τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων εἰς τὴν Σελήνην, τότε σῶμα πίπτον εἰς τὴν Σελήνην ἀπὸ ὕψος Η φθάνει εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς Σελήνης μὲ ταχύτητα:

$$\upsilon = \sqrt{2g_\Sigma \cdot H} \qquad (2)$$

Ἂν ἐξισώσωμεν τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν:

$$\sqrt{2g_\Sigma \cdot H} = \sqrt{2g \cdot h} \qquad \text{ἢ} \qquad g_\Sigma \cdot H = g \cdot h$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον ὕψος Η, ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν (βλ. προηγούμενον πρόβλημα 124) ὅτι εἶναι $g_\Sigma = 163 \text{ cm/sec}^2$. Οὕτω λαμβάνομεν:

$$H = h \cdot \frac{g}{g_\Sigma} \qquad \text{ἢ} \qquad H = 10^4 \cdot \frac{981}{163} \left(\text{cm} \cdot \frac{\text{cm/sec}^2}{\text{cm/sec}^2} \right)$$

$$\text{καὶ} \qquad H = \mathbf{6 \cdot 10^4\ cm} \qquad \text{ἤτοι} \qquad H = \mathbf{600\ m}$$

126

Τὸ πλοῖον ἔχει μᾶζαν m = 40 000 tn. Ἐπειδὴ τὸ πλοῖον μετέχει τῆς περιστροφικῆς κινήσεως τῆς Γῆς, διὰ τοῦτο ἐπὶ τοῦ πλοίου ἀναπτύσσεται φυγόκεντρος δύναμις F, ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν κεντρομόλον δύναμιν. Ἡ δύναμις αὐτὴ εἶναι:

$$F = \frac{4\pi^2 \cdot m \cdot R}{T^2} \qquad (1)$$

ὅπου R εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς Γῆς καὶ T εἶναι ὁ χρόνος μιᾶς περιστροφῆς τῆς Γῆς περὶ τὸν ἄξονά της. Δίδεται ὅτι εἶναι:

μᾶζα τοῦ πλοίου : $m = 4 \cdot 10^{10}$ gr
ἀκτὶς περιφορᾶς πλοίου: $R = 6\,370 \cdot 10^5$ cm
περίοδος κινήσεως : $T = 86\,400$ sec

Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη φυγόκεντρος δύναμις εἶναι:

$$F = \frac{39{,}48 \cdot 4 \cdot 10^{10} \cdot 6370 \cdot 10^{5}}{86\,400^{2}} \text{ dyn}$$

καὶ $F = 13{,}5 \cdot 10^{10}$ dyn

Ἐπειδὴ εἶναι 1 kgr* $= 10^{6}$ dyn, ἡ ἀνωτέρω δύναμις εἶναι :

$F = 13{,}5 \cdot 10^{4}$ kgr* ἢ **F = 135 tn***

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΟΝΑΔΩΝ

127

Τὸ σῶμα ἔχει μᾶζαν m = 9,81 tn = $9{,}81 \cdot 10^{3}$ kgr. Γνωρίζομεν ὅτι 1 μονὰς μάζης τοῦ τεχνικοῦ συστήματος ἰσοῦται μὲ 9,81 kgr. Ὥστε ἡ μᾶζα τοῦ σώματος τούτου εἰς τὸ τεχνικὸν σύστημα εἶναι:

$$m = \frac{9{,}81 \cdot 10^{3}}{9{,}81} = 1\,000 \text{ μονάδες Τ.Σ.}$$

128

Τὸ σῶμα ἔχει βάρος B = 100 kgr* καὶ συνεπῶς ἔχει μᾶζαν m = 100 kgr = 10^{5} gr., Ἂν τὸ σῶμα μεταφερθῇ εἰς ὕψος h = 20 m ἤτοι h = $2 \cdot 10^{3}$ cm τότε τὸ σῶμα ἀποκτᾷ δυναμικὴν ἐνέργειαν, ἡ ὁποία εἰς τὸ σύστημα C. G. S. εἶναι:

$W_{\Delta} = m \cdot g \cdot h$ ἤτοι $W = 10^{5} \cdot 981 \cdot 2 \cdot 10^{3}$ erg

καὶ **W = 1962 · 10⁸ erg**

Εἰς τὸ τεχνικὸν σύστημα ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος εἶναι:

$W = B \cdot h$ ἤτοι $W = 100 \cdot 20$ (kgr* · m)

καὶ **W = 2000 kgr*m**

129

Τὸ αὐτοκίνητον ἔχει βάρος B = 2 tn * = $2 \cdot 10^{3}$ kgr* καὶ κινεῖται μὲ ταχύτητα:

$$\upsilon = 72 \text{ km/h} = \frac{72\,000}{3600}\left(\frac{\text{m}}{\text{sec}}\right) = 20 \text{ m/sec}$$

Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ αὐτοκινήτου δίδεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν:

$$W = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 \qquad (1)$$

Διὰ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εἰς τὸ τεχνικὸν σύστημα, πρέπει ἡ μὲν ταχύτης νὰ ἐκφράζεται εἰς m/sec ἡ δὲ μᾶζα νὰ ἐκφράζεται εἰς μονάδας μάζης τοῦ τεχνικοῦ συστήματος. Ἡ μᾶζα m τοῦ αὐτοκινήτου εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν: $B = m \cdot g$ ἂν ἡ δύναμις B εἶναι εἰς kgr* καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις g εἶναι εἰς m/sec^2. Θὰ λάβωμεν κατὰ προσέγγισιν $g = 10\ m/sec^2$. Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $B = m \cdot g$ λαμβάνομεν:

$$m = \frac{B}{g} \quad ἤτοι \quad m = \frac{2 \cdot 10^3}{10} \left(\frac{kgr^*}{m/sec^2} \right) = 200 \text{ μονάδες Τ.Σ.}$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν τώρα τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν τοῦ αὐτοκινήτου εἰς τὸ τεχνικὸν σύστημα (δηλαδὴ εἰς kgr*m) :

$$W = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 20^2 \left[\frac{kgr^*}{m/sec^2} \cdot \left(\frac{m}{sec} \right)^2 \right] = \mathbf{40\,000\ kgr^*m}$$

130

Τὸ σῶμα ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως F ἀποκτᾷ ἐπιτάχυνσιν $\gamma = 4\ m/sec^2$. Ἂν m εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ σώματος, τότε ἰσχύει ἡ θεμελιώδης ἐξίσωσις : $F = m \cdot \gamma$ (1)

Εἰς τὸ τεχνικὸν σύστημα ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις ἰσχύει, ὅταν ἡ δύναμις F μετρῆται εἰς kgr*, ἡ ἐπιτάχυνσις γ μετρῆται εἰς m/sec^2 καὶ ἡ μᾶζα m μετρῆται εἰς μονάδας μάζης τοῦ τεχνικοῦ συστήματος. Δίδεται ὅτι εἶναι m = 19,62 kgr. Γνωρίζομεν ὅτι:

1 μονὰς μάζης Τ.Σ. = 9,81 kgr

Ἄρα ἡ μᾶζα τοῦ σώματος εἶναι:

$$m = \frac{19,62}{9,81} = 2 \text{ μονάδες Τ.Σ.}$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐνεργοῦσα ἐπὶ τοῦ σώματος δύναμις εἶναι:

$$F = 2 \cdot 4 \left(\frac{kgr^*}{m/sec^2} \cdot m/sec^2 \right)$$

$$ἤτοι \quad F = \mathbf{8\ kgr^*}$$

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΤΩΝ ΥΓΡΩΝ

131

Εἶναι γνωστὸν ὅτι στήλη ὑγροῦ ἔχουσα ὕψος h ἀσκεῖ ὑδροστατικὴν πίεσιν p ἴσην μέ:

$$p = h \cdot \rho$$

ὅπου ρ εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑγροῦ. Ἂν τὸ ὕψος h τοῦ ὑγροῦ μετρῆται εἰς cm καὶ τὸ εἰδικὸν βάρος ρ τοῦ ὑγροῦ μετρῆται εἰς gr^*/cm^3, τότε ἡ ὑδροστατικὴ πίεσις μετρεῖται εἰς gr^*/cm^2, διότι ἔχομεν:

$$p = h \cdot \rho \left(cm \cdot \frac{gr^*}{cm^3} \right) \quad \text{ἤτοι} \quad p = h \cdot \rho \quad gr^*/cm^2 \qquad (1)$$

Γνωρίζομεν ὅτι $1\ gr^* = 981\ dyn$. Ἄρα ἡ διδομένη πίεσις $p = 5\,000\ dyn/cm^2$ μετρημένη εἰς gr^*/cm^2 εἶναι :

$$p = \frac{5\,000}{981} = 5{,}097\ gr^*/cm^2$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) ἠμποροῦμε τώρα νὰ εὕρωμεν πόσον εἶναι τὸ ὕψος h στήλης ὑγροῦ, ἡ ὁποία ἐπιφέρει πίεσιν p. Οὕτω εὑρίσκομεν:

α) Ἡ στήλη τοῦ ὑδραργύρου ἔχει ὕψος:

$$h = \frac{p}{\rho} \quad \text{ἢ} \quad h = \frac{5{,}097}{13{,}6} \left(\frac{gr^*/cm^2}{gr^*/cm^3} \right)$$

$$\text{καὶ} \quad h = \mathbf{0{,}37\ cm} = \mathbf{3{,}7\ mm}$$

β) Ἡ στήλη τοῦ ὕδατος ἔχει ὕψος:

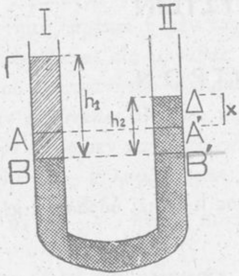
$$h = \frac{5{,}097}{1} \left(\frac{gr^*/cm^2}{gr^*/cm^3} \right) \quad \text{ἤτοι} \quad h = \mathbf{5{,}097\ cm}$$

γ) Ἡ στήλη τοῦ οἰνοπνεύματος ἔχει ὕψος:

$$h = \frac{5{,}097}{0{,}8} \left(\frac{gr^*/cm^2}{gr^*/cm^3} \right) \quad \text{ἤτοι} \quad h = \mathbf{6{,}37\ cm}$$

132

Ἀρχικῶς ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος ἐντὸς τῶν δύο βραχιόνων τοῦ δοχείου εἶναι τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον ΑΑ′. (σχ. 26). Ὅταν ἐντὸς τοῦ ἑνὸς βραχίονος εἰσαχθῇ τὸ παραφινέλαιον, τοῦτο σχηματίζει στήλην ὕψους $ΑΓ = h_1 = 5$ cm. Τὰ δύο διαφορετικὰ ὑγρὰ (παραφινέλαιον καὶ ὕδωρ) ἰσορροποῦν, καὶ συνεπῶς ἐπὶ τῆς ὁριζοντίας διαχωριστικῆς ἐπιφανείας ΒΒ′ ἀσκοῦνται ἴσαι πιέσεις ἐκ μέρους τῶν ἄνωθεν τῆς ἐπιφανείας ταύτης ὑγρῶν. Τὰ εἰδικὰ βάρη τοῦ παραφινελαίου καὶ τοῦ ὕδατος, εἶναι ἀντιστοίχως :



Σχ. 26

$$\rho_1 = 0{,}8 \text{ gr}^*/\text{cm}^3 \quad \text{καὶ} \quad \rho_2 = 1 \text{ gr}^*/\text{cm}^3.$$

Κατὰ τὴν ἰσορροπίαν τῶν δύο ὑγρῶν ἐντὸς τῶν δύο συγκοινωνούντων δοχείων ἡ πίεσις εἰς τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας ΒΒ′ εἶναι:

$$p = h_1 \cdot \rho_1 = h_2 \cdot \rho_2$$

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω σχέσιν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ὕψος h_2 τοῦ ὕδατος ἄνωθεν τῆς διαχωριστικῆς ἐπιφανείας ΒΒ′. Οὕτω λαμβάνομεν:

$$h_2 = h_1 \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \qquad \text{ἢ} \qquad h_2 = 5 \cdot \frac{0{,}8}{1} \left(\text{cm} \cdot \frac{\text{gr}^*/\text{cm}^3}{\text{gr}^*/\text{cm}^3} \right)$$

$$\text{καὶ} \qquad h_2 = 4 \text{ cm}$$

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ πόσον θὰ ἀνυψωθῇ ἡ ἐπιφάνεια Α′ τοῦ ὕδατος, ὅταν ἐντὸς τοῦ ἄλλου βραχίονος εἰσαχθῇ τὸ παραφινέλαιον, δηλαδὴ ζητεῖται τὸ ὕψος $Α'Δ = x$. Δίδεται ὅτι οἱ δύο βροχίονεξ ἔχουν τὴν αὐτὴν τομὴν σ. Ἐξ ἄλλου εἶναι γνωστὸν ὅτι τὰ ὑγρὰ εἶναι ἀσυμπίεστα. Ὅταν λοιπὸν εἰσαχθῇ τὸ παραφινέλαιον, ἐπειδὴ τὸ ὕδωρ εἶναι ἀσυμπίεστον, ἐκδιώκεται ἀπὸ τὸν βραχίονα Ι ἕνας ὄγκος ὕδατος V, ὁ ὁποῖος εἶναι:

$$V = \sigma \cdot ΒΑ$$

Ὁ ὄγκος αὐτὸς τοῦ ὕδατος ἔρχεται εἰς τὸν βραχίονα ΙΙ καὶ προκαλεῖ τὴν ἀνύψωσιν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος ἀπὸ τὴν στάθμην Α′ εἰς τὴν στάθμην Δ. Οὕτω ὁ ἄνωθεν τῆς ἐπιφανείας Α′ ὄγκος τοῦ ὕδατος εἶναι:

$$V = \sigma \cdot Α'Δ$$

καὶ ἴσος μὲ τὸν ὄγκον τοῦ ὕδατος, τὸ ὁποῖον ἐξεδιώχθη ἀπὸ τὸν βραχίονα I. Ἂν γράψωμεν τὴν ἰσότητα αὐτὴν τῶν δύο ὄγκων, λαμβάνομεν:

$$\sigma \cdot BA = \sigma \cdot A'\Delta \qquad \text{ἄρα} \qquad BA = A'\Delta \qquad (1)$$

Ἡ ἀρχικὴ ἐπιφάνεια ΑΑ′ τοῦ ὕδατος καὶ ἡ διαχωριστικὴ ἐπιφάνεια ΒΒ′ τῶν δύο ὑγρῶν εἶναι ὁριζόντια ἐπίπεδα (συνεπῶς εἶναι παράλληλα). Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι τὰ ὕψη ΒΑ καὶ Β′Α′ εἶναι ἴσα, δηλαδὴ εἶναι :

$$BA = B'A' \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι :

$$B'A' = A'\Delta \qquad \text{ἄρα} \qquad A'\Delta = \frac{B'\Delta}{2} = \frac{h_2}{2}$$

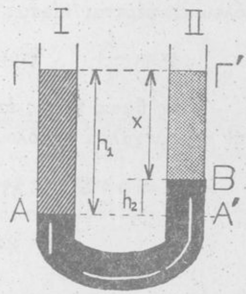
Ἡ ζητουμένη λοιπὸν ἀνύψωσις $A'\Delta = x$ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος εἶναι :

$$x = \frac{h_2}{2} \qquad \text{ἤτοι} \qquad x = \frac{4 \text{ cm}}{2} = \mathbf{2\ cm}$$

Παρατήρησις. Καθ' ὅμοιον τρόπον σκεπτόμεθα καὶ ἂν οἱ δύο βραχίονες δὲν ἔχουν τὴν αὐτὴν τομήν. Τὸ οὐσιῶδες εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι ὅτι λόγῳ τοῦ ἀσυμπιέστου τῶν ὑγρῶν ὁ ὄγκος τοῦ ὑγροῦ ποὺ ἐκδιώκεται ἀπὸ τὸν ἕνα βραχίονα εἶναι ἴσος μὲ τὸν ὄγκον τοῦ ὑγροῦ ποὺ εὑρίσκεται ἄνωθεν τῆς παλαιᾶς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ εἰς τὸν ἄλλον βραχίονα.

133

Ἐντὸς τοῦ σκέλους I χύνομεν θειϊκὸν ὀξὺ τὸ ὁποῖον σχηματίζει στήλην ὕψους $h_1 = 20$ cm. Ἐντὸς δὲ τοῦ ἄλλου σκέλους II χύνομεν ὕδωρ (σχ. 27) Ὅταν αἱ ἐλεύθεραι ἐπιφάνειαι τοῦ θειϊκοῦ ὀξέος καὶ τοῦ ὕδατος εὑρεθοῦν εἰς τὸ αὐτὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον ΓΓ′, τότε τὸ ὕδωρ σχηματίζει στήλην ὕψους x, ὁ δὲ ὑδράργυρος ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ σκέλους σχηματίζει στήλην ὕψους h_2 ἄνωθεν τῆς ὁριζοντίας διαχωριστικῆς ἐπιφανείας ΑΑ′. Κατὰ τὴν ἰσορροπίαν τοῦ συστήματος τῶν τριῶν ὑγρῶν ἐπὶ τῆς ὁριζοντίας διαχωριστικῆς ἐπιφανείας ΑΑ′ ἀσκοῦνται ἴσαι πιέσεις. Τὰ εἰδικὰ βάρη τῶν ὑγρῶν εἶναι :



Σχ. 27

τοῦ θειϊκοῦ ὀξέος : $\rho_1 = 1{,}84$ gr*/cm³

τοῦ ὑδραργύρου : $\rho_2 = 13{,}6\ gr^*/cm^3$
τοῦ ὕδατος : $\rho = 1\ gr^*/cm^3$

Οὕτω κατὰ τὴν ἰσορροπίαν τοῦ συστήματος ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις:

$$h_1 \cdot \rho_1 = h_2 \cdot \rho_2 + x \cdot \rho \qquad (1)$$

Εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ἔχομεν δύο ἀγνώστους, τὸ ὕψος h_2 καὶ τὸ ὕψος x. Παρατηροῦμεν ὅμως εἰς τὸ σχῆμα ὅτι εἶναι :

$$x + h_2 = h_1 \quad \text{ἄρα} \quad h_2 = h_1 - x$$

Οὕτω ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται

$$h_1 \cdot \rho_1 = (h_1 - x) \cdot \rho_2 + x \cdot \rho$$

Ἄν λύσωμεν τὴν εὑρεθεῖσαν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς x λαμβάνομεν :

$$x = h_1 \cdot \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 - \rho}$$

Ἄρα τὸ ζητούμενον ὕψος x εἶναι :

$$x = 20 \cdot \frac{13{,}6 - 1{,}84}{13{,}6 - 1} \left(cm \cdot \frac{gr^*/cm^3}{gr^*/cm^3} \right)$$

$$\text{καὶ} \quad x = \mathbf{18{,}67\ cm}$$

134

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μικροῦ ἐμβόλου εἶναι $\sigma = 3\ cm^2$, ἡ δὲ ἐπιφάνεια τοῦ μεγάλου ἐμβόλου εἶναι: $\Sigma = 1{,}8\ dm^2 = 180\ cm^2$. Ἐπὶ τοῦ μικροῦ ἐμβόλου ἐνεργεῖ δύναμις $f = 4\ kgr^*$ καὶ συνεπῶς ἐπὶ τοῦ μικροῦ ἐμβόλου ἐπιφέρεται πίεσις:

$$p = \frac{f}{\sigma} \quad \text{ἤτοι} \quad p = \frac{4\,(kgr^*)}{3\,(cm^2)} = \frac{4}{3}\ kgr^*/cm^2$$

Τόση ὅμως πίεσις ἐπιφέρεται καὶ ἐπὶ τοῦ μεγάλου ἐμβόλου. Ἄρα ἐπὶ τοῦ μεγάλου ἐμβόλου ἐνεργεῖ δύναμις F ἡ ὁποία εἶναι:

$$F = p \cdot \Sigma \quad \text{ἤτοι} \quad F = \frac{4}{3} \cdot 180 \left(\frac{kgr^*}{cm^2} \cdot cm^2 \right)$$

$$\text{καὶ} \quad F = \mathbf{240\ kgr^*}$$

135

Ἡ βάσις τοῦ δοχείου ἔχει ἐπιφάνειαν $\sigma = 100\ cm^2$. Ἕκαστον τῶν δύο ὑγρῶν τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται ἐντὸς τοῦ δοχείου σχηματίζει κύλινδρον ἔχοντα βάσιν σ καὶ ὄγκον $V = 1\ dm^3 = 1\,000\ cm^3$. Ἄρα ἕκαστον τῶν δύο ὑγρῶν σχηματίζει στήλην ἔχουσαν ὕψος :

$$h = \frac{V}{\sigma} \qquad \text{ἢ} \qquad h = \frac{1\,000}{100}\left(\frac{cm^3}{cm^2}\right) = 10\ cm$$

Τὰ εἰδικὰ βάρη τῶν δύο ὑγρῶν εἶναι :

τοῦ ὑδραργύρου : $\rho_1 = 13{,}6\ gr^*/cm^3$
τοῦ ὕδατος : $\rho_2 = 1\ gr^*/cm^3$

Εἰς ἕκαστον σημεῖον τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου ἐπιφέρεται πίεσις:

$$p = h \cdot \rho_1 + h \cdot \rho_2 \qquad \text{ἢ} \qquad p = h \cdot (\rho_1 + \rho_2)$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη πίεσις p εἶναι:

$$p = 10 \cdot (13{,}6 + 1)\left[cm \cdot \frac{gr^*}{cm^3}\right]$$

ἄρα $\qquad p = \mathbf{146\ gr^*/cm^2}$

Ἐπὶ τοῦ πυθμένος ἐνεργεῖ δύναμις F ἡ ὁποία εἶναι :

$$F = p \cdot \sigma \qquad \text{ἤτοι} \qquad F = 146 \cdot 100\left(\frac{gr^*}{cm^2} \cdot cm^2\right)$$

ἄρα $\qquad F = \mathbf{14\,600\ gr^* = 14{,}6\ kgr^*}$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ δύναμις F εἶναι ἴση μὲ τὸ βάρος τῶν περιεχομένων δύο ὑγρῶν, διότι εἶναι :

βάρος ὑδραργύρου : $V \cdot \rho_1 = 1000 \cdot 13{,}6 = 13\,600\ gr^*$
βάρος ὕδατος : $V \cdot \rho_2 = 1000 \cdot 1 = 1\,000\ gr^*$

136

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ δύναμις F, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ ὑγρὸν ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου πυθμένος δοχείου, εἶναι ἴση μὲ τὸ βάρος μιᾶς κατακορύφου στήλης ὑγροῦ ἐχούσης βάσιν (σ) τὸν πυθμένα καὶ ὕψος (h) τὴν ἀπόστασιν τοῦ πυθμένος ἀπὸ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ, δηλαδὴ εἶναι :

$$F = h \cdot \sigma \cdot \rho$$

ὅπου ρ εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑγροῦ.

Δίδεται ὅτι ὁ πυθμὴν τῆς δεξαμενῆς ἔχει ἐπιφάνειαν:

$$\sigma = 10\ m \cdot 4\ m = 40\ m^2 \qquad \text{ἢ} \qquad \sigma = 40 \cdot 10^4\ cm^2$$

Τὸ ὕδωρ ἔχει εἰδικὸν βάρος $\rho = 1\ gr^*/cm^3$ καὶ σχηματίζει στήλην ὕψους :

$$h = 2\ m = 2 \cdot 10^2\ cm$$

Ἄρα ἡ δύναμις, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ ὑγρὸν ἐπὶ τοῦ πυθμένος, εἶναι :

$$F = 2 \cdot 10^2 \cdot 40 \cdot 10^4 \cdot 1 \left(cm \cdot cm^2 \cdot \frac{gr^*}{cm^3} \right)$$

ἢ $\quad \mathbf{F = 80 \cdot 10^6\ gr^*} \quad$ καὶ $\quad \mathbf{F = 80\ tn^*}$

Ἑκάστη τῶν κατακορύφων πλευρῶν τῆς δεξαμενῆς ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου. Αἱ δύο ἀπέναντι πλευραὶ ἔχουν ἐπιφάνειαν :

$$\Sigma_1 = 10\ m \cdot 2\ m = 20\ m^2 \quad ἢ \quad \Sigma_1 = 20 \cdot 10^4\ cm^2$$

Αἱ δὲ ἄλλαι δύο ἀπέναντι πλευραὶ ἔχουν ἐπιφάνειαν:

$$\Sigma_2 = 4\ m \cdot 2\ m = 8\ m^2 \quad ἢ \quad \Sigma_2 = 8 \cdot 10^4\ cm^2$$

Ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους τῶν κατακορύφων πλευρῶν τῆς δεξαμενῆς ἀπὸ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ εἶναι:

$$h_K = 1\ m = 10^2\ cm$$

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ συνισταμένη F τῶν πιέσεων, τὰς ὁποίας ἐξασκεῖ τὸ ὑγρὸν ἐπὶ πλαγίου ἐπιπέδου τοιχώματος, εἶναι κάθετος πρὸς τὸ τοίχωμα καὶ ἴση μὲ τὸ βάρος στήλης ὑγροῦ, ἡ ὁποία ἔχει βάσιν τὴν πιεζομένην ἐπιφάνειαν (Σ) τοῦ τοιχώματος καὶ ὕψος τὴν ἀπόστασιν (h_K) τοῦ κέντρου βάρους τῆς ἐπιφανείας ἀπὸ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ, δηλαδὴ εἶναι :

$$F = \Sigma \cdot h_K \cdot \rho$$

Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως εὑρίσκομεν ὅτι ἐπὶ τῶν δύο μὲν κατακορύφων πλευρῶν τῆς δεξαμενῆς ἐνεργοῦν ὁριζόντιοι δυνάμεις, ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι :

$$F_1 = \Sigma_1 \cdot h_K \cdot \rho \quad ἢ \quad F_1 = 20 \cdot 10^4 \cdot 10^2 \cdot 1 \left(cm^2 \cdot cm \cdot \frac{gr^*}{cm^3} \right)$$

καὶ $\quad \mathbf{F_1 = 20 \cdot 10^6\ gr^*} \quad$ ἢ $\quad \mathbf{F_1 = 20\ tn^*}$

ἐπὶ ἑκάστης δὲ τῶν ἄλλων δύο κατακορύφων πλευρῶν ἐνεργεῖ ὁριζοντία δύναμις:

$$F_2 = \Sigma_2 \cdot h_K \cdot \rho \quad ἢ \quad F_2 = 8 \cdot 10^4 \cdot 10^2 \cdot 1 \left(cm^2 \cdot cm \cdot \frac{gr^*}{cm^3} \right)$$

καὶ $\quad \mathbf{F_2 = 8 \cdot 10^6\ gr^*} \quad$ ἢ $\quad \mathbf{F_2 = 8\ tn^*}$

137

Ἡ βάσις τοῦ κυλινδρικοῦ δοχείου ἔχει ἀκτῖνα $r = 50$ cm. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἶναι:

$$\sigma = \pi \cdot r^2 = 3{,}14 \cdot 50^2\ (\mathrm{cm}^2) = 7\,850\ \mathrm{cm}^2$$

α) Ὅταν ὁ ἄξων τοῦ κυλίνδρου εἶναι κατακόρυφος, τότε τὸ ὕψος τοῦ ὑγροῦ εἶναι:

$$h = 1{,}20\ \mathrm{m} = 120\ \mathrm{cm}$$

Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἐλαιολάδου εἶναι $\rho = 0{,}9\ \mathrm{gr}^*/\mathrm{cm}^3$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν κάθε σημεῖον τῆς βάσεως τοῦ δοχείου δέχεται πίεσιν:

$$p = h \cdot \rho \qquad \text{ἢ} \qquad p = 120 \cdot 0{,}9 \left(\mathrm{cm} \cdot \frac{\mathrm{gr}^*}{\mathrm{cm}^3}\right)$$

καὶ $$p = 108\ \mathrm{gr}^*/\mathrm{cm}^2$$

Ἐφ' ὁλοκλήρου τῆς βάσεως τοῦ δοχείου ἐνεργεῖ δύναμις F, ἡ ὁποία εἶναι:

$$F = p \cdot \sigma \qquad \text{ἤτοι} \qquad F = 108 \cdot 7\,850 \left(\frac{\mathrm{gr}^*}{\mathrm{cm}^2} \cdot \mathrm{cm}^2\right)$$

καὶ $\mathbf{F = 847\,800\ gr^* = 847{,}8\ kgr^*}$

β) Ὅταν ὁ ἄξων τοῦ κυλίνδρου εἶναι ὁριζόντιος, τότε ἐπὶ ἑκάστης βάσεως τοῦ κυλίνδρου ἐνεργεῖ ὁριζοντία δύναμις F (βλ. πρόβλημα 136), ἡ ὁποία εἶναι:

$$F = \sigma \cdot h_K \cdot \rho$$

ὅπου h_K εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους τῆς βάσεως ἀπὸ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ· εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι $h_K = r = 50$ cm. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι ἐπὶ ἑκάστης κατακορύφου βάσεως τοῦ δοχείου ἐνεργεῖ δύναμις.

$$F = 7\,850 \cdot 50 \cdot 0{,}9 \left(\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{cm} \cdot \frac{\mathrm{gr}^*}{\mathrm{cm}^3}\right)$$

ἤτοι $\mathbf{F = 353\,250\ gr^* = 353{,}25\ kgr^*}$

138

Ἐπειδὴ ἑκατέρωθεν τῆς θύρας τοῦ ὑδροφράκτου ἡ στάθμη τοῦ ὕδατος ἀνέρχεται εἰς ὕψος 3 m καὶ 2,8 m, ἔπεται ὅτι τὸ ὕδωρ πιέζει ἐπὶ ἑκάστης τῶν δύο ὄψεων τῆς θύρας μίαν ἐπιφάνειαν ἡ ὁποία ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου. Τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης πιεζομένης ἐπιφανείας εἶναι:

$$\sigma_1 = 6\,\text{m} \cdot 3\,\text{m} = 18\,\text{m}^2 = 18 \cdot 10^4\,\text{cm}^2$$

$$\sigma_2 = 6\,\text{m} \cdot 2{,}8\,\text{m} = 16{,}8\,\text{m}^2 = 16{,}8 \cdot 10^4\,\text{cm}^2$$

Ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους τῆς ἐπιφανείας σ_1 ἀπὸ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος εἶναι:

$$h_1 = \frac{3}{2}\,\text{m} = 150\,\text{cm}$$

ἡ δὲ ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους τῆς ἐπιφανείας σ_2 ἀπὸ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος εἶναι:

$$h_2 = \frac{2{,}8}{2}\,\text{m} = 140\,\text{cm}$$

Ἐπὶ ἑκάστης τῶν δύο ὄψεων τῆς θύρας τοῦ ὑδροφράκτου ἐνεργεῖ ὁριζοντία δύναμις:

$$F = \sigma \cdot h_K \cdot \rho$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ἐπὶ τῶν δύο ὄψεων τῆς θύρας τοῦ ὑδροφράκτου ἐνεργοῦν αἱ δύο ὁριζόντιοι δυνάμεις:

α) $F_1 = \sigma_1 \cdot h_1 \cdot \rho$ ἢ $F_1 = 18 \cdot 10^4 \cdot 150 \cdot 1 \left(\text{cm}^2 \cdot \text{cm} \cdot \dfrac{\text{gr}^*}{\text{cm}^3}\right)$

καὶ $F_1 = \mathbf{27 \cdot 10^6\,gr^* = 27\,tn^*}$

β) $F_2 = \sigma_2 \cdot h_2 \cdot \rho$ ἢ $F_2 = 16{,}8 \cdot 10^4 \cdot 140 \cdot 1 \left(\text{cm}^2 \cdot \text{cm} \cdot \dfrac{\text{gr}^*}{\text{cm}^3}\right)$

καὶ $F_2 = \mathbf{23{,}52 \cdot 10^6\,gr^* = 23{,}52\,tn^*}$

139

Τὸ πλοῖον ἔχει βάρος $B = 10^4\,\text{tn}^*$ ἤτοι $B = 10^4 \cdot 10^6\,\text{gr}^*$. Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ θαλασσίου ὕδατος εἶναι $\rho_\theta = 1{,}028\,\text{gr}^*/\text{cm}^3$ ἐνῶ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος τοῦ ποταμοῦ εἶναι $\rho_\pi = 1\,\text{gr}^*/\text{cm}^3$. Ὅταν τὸ πλοῖον ἐπιπλέῃ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης, ἐκτοπίζει ἕνα ὄγκον V_θ θαλασσίου ὕδατος, τὸ ὁποῖον ἔχει βάρος ἴσον μὲ τὸ βάρος B τοῦ πλοίου, δηλαδὴ ἰσχύει τότε ἡ σχέσις:

$$B = V_\theta \cdot \rho_\theta$$

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ἐκτοπιζομένου θαλασσίου ὕδατος εἶναι:

$$V_\theta = \frac{B}{\rho_\theta} \quad \text{ἤτοι} \quad V_\theta = \frac{10^4 \cdot 10^6}{1{,}028} \left(\frac{\text{gr}^*}{\text{gr}^*/\text{cm}^3}\right)$$

καὶ $V_\theta = 9\,737 \cdot 10^6\,\text{cm}^3 = 9\,727\,\text{m}^3$

Ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ βυθισμένου ἐντὸς τῆς θαλάσσης μέρους τοῦ πλοίου εἶναι :

$$V_0 = \mathbf{9\,727\ m^3}$$

Ὅταν τὸ πλοῖον ἐπιπλέῃ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ποταμοῦ, τότε ἐκτοπίζει ἕνα ὄγκον V_π ποταμίου ὕδατος καὶ ἰσχύει πάλιν ἡ σχέσις :

$$B = V_\pi \cdot \rho_\pi$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ἐκτοπιζομένου ποταμίου ὕδατος εἶναι:

$$V_\pi = \frac{B}{\rho_\pi} \qquad \text{ἤτοι} \qquad V_\pi = \frac{10^4 \cdot 10^6}{1}\left(\frac{gr^*}{gr^*/cm^3}\right)$$

$$\text{καὶ} \qquad V_\pi = 10^4 \cdot 10^6\ cm^3 = 10^4\ m^3$$

Ἄρα, ὅταν τὸ πλοῖον εἰσέλθῃ ἐντὸς ποταμοῦ, ὁ ὄγκος τοῦ βυθισμένου ἐντὸς τοῦ ποταμοῦ μέρους τοῦ πλοίου γίνεται:

$$V_\pi = \mathbf{10\,000\ m^3}$$

δηλαδὴ ὅταν τὸ πλοῖον εἰσέρχεται ἐντὸς τοῦ ποταμοῦ, τὸ βυθισμένον ἐντὸς τοῦ ὕδατος μέρος τοῦ πλοίου αὐξάνεται κατά:

$$V_\pi - V_0 = 10\,000 - 9\,727 = \mathbf{273\ m^3}$$

140

Εἰς τὸν ἀέρα τὸ σῶμα ἔχει βάρος $B = 40{,}47\ gr^*$, ἐνῶ ὅταν βυθίζεται ἐντὸς ὕδατος ἔχει βάρος $B_1 = 34{,}77\ gr^*$. Ὥστε τὸ σῶμα βυθιζόμενον ἐντὸς ὕδατος ὑφίσταται ἄνωσιν A_1 ἴσην μέ :

$$A_1 = B - B_1 \qquad \text{ἤτοι} \qquad A_1 = 40{,}47 - 34{,}77 = 5{,}70\ gr^*$$

Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος εἶναι $\rho_1 = 1\ gr^*/cm^3$. Ἂν V εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ σώματος, τότε γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἄνωσις A_1 εἶναι ἴση μὲ τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ, δηλαδὴ εἶναι:

$$A_1 = V \cdot \rho_1$$

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ὄγκος V τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος (συνεπῶς καὶ ὁ ὄγκος τοῦ σώματος) εἶναι:

$$V = \frac{A_1}{\rho_1} \qquad \text{ἤτοι} \qquad V = \frac{5{,}70}{1}\left(\frac{gr^*}{gr^*/cm^3}\right)$$

$$\text{καὶ} \qquad V = 5{,}70\ cm^3$$

Ὅταν τὸ σῶμα βυθίζεται ἐντὸς οἰνοπνεύματος, τοῦ ὁποίου τὸ εἰδικὸν βάρος εἶναι $\rho_2 = 0{,}79\ gr^*/cm^3$, τὸ σῶμα ἐκτοπίζει ἕνα ὄγκον V οἰνοπνεύματος καὶ ὑφίσταται ἄνωσιν A_2 ἴσην μέ:

$$A_2 = V \cdot \rho_2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad A_2 = 5{,}70 \cdot 0{,}79 \left(cm^3 \cdot \frac{gr^*}{cm^3} \right)$$

$$\text{καὶ} \quad A_2 = 4{,}503\ cm^3$$

Ὥστε, ὅταν τὸ σῶμα βυθισθῇ ἐντὸς οἰνοπνεύματος, τότε τὸ βάρος τοῦ σώματος γίνεται B_2 ἴσον μέ:

$$B_2 = B - A_2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad B_2 = 40{,}47 - 4{,}503 = \mathbf{35{,}967\ gr^*}$$

141

Τὸ βάρος τῆς σφαίρας εἰς τὸν ἀέρα εἶναι $B = 160\ gr^*$. Ὅταν ἡ σφαῖρα βυθισθῇ ἐντὸς ὕδατος, αὕτη ἔχει βάρος $B_1 = 100\ gr^*$. Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος εἶναι $\rho = 1\ gr^*/cm^3$. Ὅταν ἡ σφαῖρα βυθίζεται ἐντὸς τοῦ ὕδατος, αὕτη ὑφίσταται ἄνωσιν A ἴσην μέ:

$$A = B - B_1 \qquad \text{ἤτοι} \qquad A = 160 - 100 = 60\ gr^*$$

Ἂν V εἶναι ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας (συνεπῶς καὶ ὁ ὄγκος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος), τότε ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$A = V \cdot \rho$$

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω σχέσιν εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εἶναι:

$$V = \frac{A}{\rho} \qquad \text{ἤτοι} \qquad V = \frac{60}{1} \left(\frac{gr^*}{gr^*/cm^3} \right)$$

$$\text{καὶ} \quad V = 60\ cm^3$$

Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὀρειχάλκου εἶναι $\rho_1 = 8\ gr^*/cm^3$, ὁ δὲ ὀρείχαλκος, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖ τὴν σφαῖραν, ἔχει βάρος $B = 160\ gr^*$. Ἂν ἡ σφαῖρα ἦτο συμπαγής, τότε ὁ ὀρείχαλκος θὰ εἶχεν ὄγκον V_1 καὶ θὰ ἴσχυεν ἡ σχέσις:

$$B = V_1 \cdot \rho_1$$

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν, ὅτι ἂν ἡ σφαῖρα ἦτο συμπαγής, τότε θὰ εἶχεν ὄγκον:

$$V_1 = \frac{B}{\rho_1} \qquad \text{ἤτοι} \qquad V_1 = \frac{160}{8} \left(\frac{gr^*}{gr^*/cm^3} \right)$$

$$\text{καὶ} \quad V_1 = 20\ cm^3$$

Ἄρα ἡ σφαῖρα εἶναι κοίλη καὶ ὁ ὄγκος τῆς κοιλότητος εἶναι:

$$V - V_1 = 60 - 20 = \mathbf{40\ cm^3}$$

A=B

142

Ἡ συμπαγὴς καὶ ὁμογενὴς σφαῖρα τοῦ σιδήρου ἔχει ὄγκον V. Τὸ εἰδικὰ βάρη τοῦ σιδήρου, τοῦ ὕδατος καὶ τοῦ ὑδραργύρου εἶναι:

τοῦ σιδήρου : $\rho_\Sigma = 7{,}8\ gr^*/cm^3$
τοῦ ὕδατος : $\rho_N = 1\ gr^*/cm^3$
τοῦ ὑδραργύρου : $\rho_\Upsilon = 13{,}6\ gr^*/cm^3$

Ἡ σφαῖρα τοῦ σιδήρου ἔχει βάρος :

$$B = V \cdot \rho_\Sigma$$

Δίδεται ὅτι ἡ σφαῖρα ἰσορροπεῖ βυθιζομένη ἐν μέρει ἐντὸς τοῦ ὕδατος καὶ ἐν μέρει ἐντὸς τοῦ ὑδραργύρου. Ἔστω x ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας ὁ ὁποῖος βυθίζεται ἐντὸς τοῦ ὑδραργύρου. Τότε ἐντὸς τοῦ ὕδατος βυθίζεται ὄγκος τῆς σφαίρας ἴσος μὲ $V - x$.

Ἡ σφαῖρα ὑφίσταται ἐκ μέρους τῶν δύο ὑγρῶν δύο μερικὰς ἀνώσεις, αἱ ὁποῖαι εἶναι :

ἄνωσις ἐκ μέρους τοῦ ὑδραργύρου : $A_\Upsilon = x \cdot \rho_\Upsilon$
ἄνωσις ἐκ μέρους τοῦ ὕδατος : $A_N = (V - x) \cdot \rho_N$

Ἡ σφαῖρα ἰσορροπεῖ, διότι τὸ βάρος της B εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο μερικῶν ἀνώσεων A_Υ καὶ A_N, δηλαδὴ ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$B = A_\Upsilon + A_N \qquad \text{ἢ} \qquad V \cdot \rho_\Sigma = x \cdot \rho_\Upsilon + (V - x) \cdot \rho_N$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν:

$$V \cdot (\rho_\Sigma - \rho_N) = x \cdot (\rho_\Upsilon - \rho_N) \qquad \text{καὶ} \qquad x = \frac{\rho_\Sigma - \rho_N}{\rho_\Upsilon - \rho_N} \cdot V$$

Ἄρα εἶναι :

$$x = \frac{7{,}8 - 1}{13{,}6 - 1} \cdot V \qquad \text{ἢ} \qquad x = \mathbf{0{,}54 \cdot V}$$

Ἐντὸς τοῦ ὑδραργύρου βυθίζονται τὰ 0,54 τοῦ ὅλου ὄγκου τῆς σφαίρας.

143

Ὁ ὄγκος τοῦ ξύλου εἶναι $V = 1000\ cm^3$.

Τὰ εἰδικὰ βάρη τοῦ ξύλου, τοῦ ὕδατος καὶ τοῦ ἐλαίου εἶναι :

εἰδικὸν βάρος ξύλου : $\rho_\Xi = 0{,}6\ gr^*/cm^3$
εἰδικὸν βάρος ὕδατος : $\rho_N = 1\ gr^*/cm^3$
εἰδικὸν βάρος ἐλαίου : $\rho_E = 0{,}8\ gr^*/cm^3$

Τὸ βάρος B τοῦ ξύλου εἶναι :

$$B = V \cdot \rho_{\Xi} \qquad \text{ἤτοι} \qquad B = 1000 \cdot 0{,}6 \left(cm^3 \cdot \frac{gr^*}{cm^3} \right)$$

$$\text{καὶ} \qquad B = 600 \; gr^*$$

α) Ὅταν τὸ ξύλον ἰσορροπῇ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος, τότε ἐντὸς τοῦ ὕδατος βυθίζεται ὄγκος V' τοῦ ξύλου καὶ ἰσχύει ἡ σχέσις:

βάρος σώματος = βάρος ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ

$$\text{ἤτοι} \qquad B = V' \cdot \rho_N$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ὄγκος V' εἶναι:

$$V' = \frac{B}{\rho_N} \qquad \text{ἤτοι} \qquad V' = \frac{600}{1} \left(\frac{gr^*}{gr^*/cm^3} \right)$$

$$\text{καὶ} \qquad V' = 600 \; cm^3$$

Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ ξύλινος κύβος ἐπιπλέει ἔχων δύο ἕδρας τοῦ παραλλήλους πρὸς τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ καὶ καλέσωμεν x τὸ βυθισμένον ἐντὸς τοῦ ὕδατος μέρος τῆς ἀκμῆς τοῦ κύβου, τότε ὁ ὄγκος V' εἶναι ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχοντος βάσιν $100 \; cm^2$ καὶ ὕψος x. Ἄρα ἔχομεν:

$$V' = 100 \cdot x \qquad \text{ἤτοι} \qquad x = \frac{600}{100} \left(\frac{cm^3}{cm^2} \right)$$

$$\text{καὶ} \qquad x = 6 \; cm$$

Ὥστε ἐκτὸς τοῦ ὕδατος εὑρίσκεται μῆκος τῆς ἀκμῆς τοῦ κύβου ἴσον μέ :

$$10 - 6 = \mathbf{4 \; cm}$$

β) Ὅταν τὸ ξύλον ἰσορροπῇ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐλαίου, τότε ἐντὸς τοῦ ἐλαίου βυθίζεται ὄγκος V'' τοῦ ξύλου καὶ ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$B = V'' \cdot \rho_E \qquad \text{ἄρα} \qquad V'' = \frac{600}{0{,}8} \left(\frac{gr^*}{gr^*/cm^3} \right)$$

$$\text{και} \qquad V'' = 750 \; cm^3$$

Ἂν y εἶναι τὸ βυθισμένον ἐντὸς τοῦ ἐλαίου μέρος τῆς ἀκμῆς τοῦ κύβου, τότε ἔχομεν:

$$V'' = 100 \cdot y \qquad \text{ἤτοι} \qquad y = \frac{750}{100} \left(\frac{cm^3}{cm^2} \right)$$

$$\text{καὶ} \qquad y = 7{,}5 \; cm$$

Ὥστε ἐκτὸς τοῦ ἐλαίου εὑρίσκεται μῆκος τῆς ἀκμῆς τοῦ κύβου ἴσον μέ :

$$10 - 7{,}5 = \mathbf{2{,}5 \; cm}$$

144

Τὸ σῶμα Α ἔχει βάρος β_A, εἰδικὸν βάρος ρ_A καὶ ὄγκον V_A. Τὸ σῶμα Β ἔχει βάρος $\beta_B = 10$ gr*, εἰδικὸν βάρος $\rho_B = 8$ gr*/cm³ καὶ ὄγκον V_B τὸν ὁποῖον δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\beta_B = V_B \cdot \rho_B \qquad \text{ἄρα} \qquad V_B = \frac{\beta_B}{\rho_B}$$

$$\text{καὶ} \quad V_B = \frac{10}{8}\left(\frac{gr^*}{gr^*/cm^3}\right) = 1{,}25 \ cm^3$$

Ὅταν τὰ δύο σώματα Α καὶ Β εὑρίσκωνται εἰς τὸν ἀέρα, ὁ ζυγὸς ἰσορροπεῖ καὶ συνεπῶς τὰ δύο σώματα ἔχουν ἴσα βάρη. ἄρα εἶναι :

$$\beta_A = \beta_B \qquad \text{καὶ} \qquad \beta_A = 10 \ gr^*$$

Βυθίζομεν τὸ σῶμα Α ἐντὸς ὕδατος, τοῦ ὁποίου τὸ εἰδικὸν βάρος εἶναι $\rho_1 = 1$ gr*/cm³, τὸ δὲ σῶμα Β ἐντὸς ὑγροῦ, τοῦ ὁποίου τὸ εἰδικὸν βάρος εἶναι $\rho_2 = 0{,}88$ gr*/cm³. Τὰ σώματα Α καὶ Β ὑφίστανται τότε ἀντιστοίχως ἀνώσεις A_A καὶ A_B αἱ ὁποῖαι εἶναι:

ἄνωσις τοῦ ὕδατος ἐπὶ τοῦ Α : $A_A = V_A \cdot \rho_1$

ἄνωσις τοῦ ὑγροῦ ἐπὶ τοῦ Β : $A_B = V_B \cdot \rho_2$

Ἡ ἄνωσις ἡ ἐφαρμοζομένη ἐπὶ τοῦ σώματος Β εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι:

$$A_B = 1{,}25 \cdot 0{,}88 \left(cm^3 \cdot \frac{gr^*}{cm^3}\right) = 1{,}10 \ gr^*$$

Ὅταν τὰ δύο σώματα εἶναι βυθισμένα ἐντὸς τῶν δύο ὑγρῶν, τότε ὁ ζυγὸς καὶ πάλιν ἰσορροπεῖ. Τὰ φαινόμενα λοιπὸν βάρη τῶν δύο σωμάτων εἶναι ἴσα, ἤτοι:

$$\beta_A - A_A = \beta_B - A_B$$

Ἐπειδὴ ὅμως εἰς τὸν ἀέρα τὰ δύο σώματα ἔχουν ἴσα βάρη ($\beta_A - \beta_B$), ἕπεται ὅτι τὰ δύο σώματα ὑφίστανται ἴσας ἀνώσεις, ἤτοι εἶναι :

$$A_A = A_B \qquad \text{ἄρα} \qquad A_A = 1{,}10 \ gr^*$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $A_A = V_A \cdot \rho_1$ εὑρίσκομεν τώρα ὅτι ὁ ὄγκος V_A τοῦ σώματος Α εἶναι :

$$V_A = \frac{A_A}{\rho_1} \qquad \text{ἤτοι} \qquad V_A = \frac{1{,}10}{1}\left(\frac{gr^*}{gr^*/cm^3}\right) = 1{,}10 \ cm^3$$

Τὸ ζητούμενον εἰδικὸν βάρος ρ_A εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν: $\beta_A = V_A \cdot \rho_A$. Οὕτω λαμβάνομεν :

$$\rho_A = \frac{\beta_A}{V_A} \qquad \text{ἢ} \qquad \rho_A = \frac{10}{1{,}10}\left(\frac{gr^*}{cm^3}\right)$$

$$\text{καὶ} \qquad \rho_A = \mathbf{9{,}09 \ gr^*/cm^3}$$

145

Τὸ μέταλλον εἰς τὸν ἀέρα ἔχει βάρος $B_M = 40{,}05$ gr * καὶ εἰς τὸ ὕδωρ ἔχει βάρος $B_1 = 35{,}55$ gr *. Τὸ μέταλλον ἔχει ὄγκον V_M, τὸ δὲ ὕδωρ ἔχει εἰδικὸν βάρος $\rho_1 = 1$ gr*/cm³. Ἡ ἄνωσις A_M, τὴν ὁποίαν ὑφίσταται τὸ μέταλλον ἐκ μέρους τοῦ ὕδατος εἶναι :

$$A_M = B_M - B_1 \quad \text{ἤτοι} \quad A_M = 40{,}05 - 35{,}55 = 4{,}50 \text{ gr*}$$

Τὸ τεμάχιον τῆς παραφίνης, τὸ ὁποῖον συνενώνεται μὲ τὸ μέταλλον, ἔχει βάρος B_Π, ὄγκον V_Π καὶ εἰδικὸν βάρος ρ_Π. Τὸ σύστημα μέταλλον — παραφίνη εἰς τὸν ἀέρα ἔχει βάρος $B_\Sigma = 47{,}88$ gr *, ἐνῶ εἰς τὸ ὕδωρ ἔχει βάρος $B' = 34{,}38$ gr*. Οὕτω τὸ σύστημα ὑφίσταται ἄνωσιν A_Σ ἴσην μέ :

$$A_\Sigma = B_\Sigma - B' \quad \text{ἢ} \quad A_\Sigma = 47{,}88 - 34{,}38 = 13{,}50 \text{ gr*}$$

Ἡ ἄνωσις A_Σ, τὴν ὁποίαν ὑφίσταται τὸ σύστημα, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς ἀνώσεως A_M τὴν ὁποίαν ὑφίσταται τὸ μέταλλον καὶ τῆς ἀνώσεως A_Π τὴν ὁποῖαν ὑφίσταται ἡ παραφίνη. Οὕτω ἔχομεν :

$$A_\Sigma = A_M + A_\Pi \quad \text{ἄρα} \quad A_\Pi = A_\Sigma - A_M$$

$$\text{καὶ} \quad A_\Pi = 13{,}50 - 4{,}50 = 9 \text{ gr*}$$

Ἀλλὰ ἡ ἄνωσις A_Π εἶναι ἴση μὲ τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος, δηλαδὴ εἶναι :

$$A_\Pi = V_\Pi \cdot \rho_1$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ὄγκος V_Π τῆς παραφίνης εἶναι :

$$V_\Pi = \frac{A_\Pi}{\rho_1} \quad \text{ἢ} \quad V_\Pi = \frac{9}{1}\left(\frac{\text{gr*}}{\text{gr*/cm}^3}\right) = 9 \text{ cm}^3$$

Τὸ βάρος B_Π τῆς παραφίνης εἶναι :

$$B_\Pi = B_\Sigma - B_M \quad \text{ἤτοι} \quad B_\Pi = 47{,}88 - 40{,}05 = 7{,}83 \text{ gr*}$$

Ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν :

$$B_\Pi = V_\Pi \cdot \rho_\Pi$$

εὑρίσκομεν ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος τῆς παραφίνης εἶναι :

$$\rho_\Pi = \frac{B_\Pi}{V_\Pi} \quad \text{ἤτοι} \quad \rho_\Pi = \frac{7{,}83}{9}\left(\frac{\text{gr*}}{\text{cm}^3}\right)$$

$$\text{καὶ} \quad \rho_\Pi = \mathbf{0{,}87\ gr^*/cm^3}$$

146

Ἔστω B_Λ τὸ βάρος τῆς ληκύθου, ὅταν αὐτὴ εἶναι κενή. Τὸ βάρος τοῦ περιεχομένου ὕδατος εἶναι B_Y, τὸ δὲ βάρος τοῦ περιεχομένου ἐλαίου εἶναι B_E. Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος εἶναι $\rho_Y = 1$ gr*/cm³, τοῦ δὲ ἐλαίου εἶναι $\rho_E = 0{,}9$ gr*/cm³.

α) Δίδεται ὅτι εἶναι :

$$B_\Lambda + B_Y = 130 \text{ gr*} \qquad (1)$$
$$B_\Lambda + B_E = 120 \text{ gr*} \qquad (2)$$

Ἂν ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν :

$$B_Y - B_E = 10 \text{ gr*} \qquad (3)$$

Ἐντὸς τῆς ληκύθου περιέχεται ὁ αὐτὸς ὄγκος V ὕδατος καὶ ἐλαίου. Ἄρα ἔχομεν τὰς σχέσεις :

$$B_Y = V \cdot \rho_Y \qquad (4)$$
$$B_E = V \cdot \rho_E \qquad (5)$$

Ἂν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (4) καὶ (5) λαμβάνομεν :

$$\frac{B_Y}{B_E} = \frac{\rho_Y}{\rho_E} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{B_Y}{B_E} = \frac{1}{0{,}9}\left(\frac{\text{gr*/cm}^3}{\text{gr*/cm}^3}\right)$$

$$\text{Ἄρα} \quad \frac{B_Y}{B_E} = \frac{10}{9} \quad \text{καὶ} \quad B_E = 0{,}9 \cdot B_Y$$

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) θέτομεν $B_E = 0{,}9 \cdot B_Y$ ὁπότε λαμβάνομεν :

$$B_Y - 0{,}9 \cdot B_Y = 10 \text{ gr*} \quad \text{ἄρα} \quad B_Y = 100 \text{ gr*}$$

Ὥστε τὸ μὲν βάρος τοῦ περιεχομένου ὕδατος εἶναι $B_Y = 100$ gr*, τὸ δὲ βάρος τοῦ περιεχομένου ἐλαίου εἶναι $B_E = 90$ gr*. Τὸ ζητούμενον βάρος B τῆς ληκύθου εἶναι :

$$B_\Lambda = 130 - B_Y \quad \text{ἤτοι} \quad B_\Lambda = \mathbf{30\ gr*}$$

β) Ὅταν ἡ λήκυθος εἶναι πλήρης μὲ ὕδωρ, τότε τὸ βάρος τοῦ περιεχομένου ὕδατος εἶναι $B_Y = 100$ gr*. Ἄρα ἡ χωρητικότης τοῦ δοχείου εἶναι $V = 100$ cm³. Ὁ σίδηρος, ὁ ὁποῖος εἰσάγεται ἐντὸς τῆς ληκύθου, ἔχει ὄγκον V_2, εἰδικὸν βάρος $\rho_2 = 7{,}7$ gr*/cm³ καὶ βάρος :

$$B_\Sigma = V_\Sigma \cdot \rho_\Sigma$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ ὄγκος τοῦ περιεχομένου ὕδατος εἶναι $100 - V_\Sigma$.

Τὸ σύστημα λήκυθος, σίδηρος καὶ ὕδωρ ἔχει βάρος 398 gr*. Συνεπῶς ἔχομεν τὴν ἀκόλουθον σχέσιν τῶν βαρῶν :

$$B_\Lambda + V_\Sigma \cdot \rho_\Sigma + (100 - V_\Sigma) \cdot \rho_Y = 398$$
$$\text{ἢ} \quad 30 + V_\Sigma \cdot 7{,}7 + (100 - V_\Sigma) \cdot 1 = 398$$

Ἀπὸ τὴν εὑρεθεῖσαν ἐξίσωσιν λαμβάνομεν :

$$6{,}7 \cdot V_\Sigma = 268 \qquad \textit{καὶ} \qquad V_\Sigma = \mathbf{40\ cm^3}$$

147

Τὸ βάρος τοῦ ἀλουμινίου εἰς τὸν ἀέρα εἶναι $B = 270$ gr*. Ὅταν τὸ σῶμα βυθισθῇ ἐντὸς ὕδατος ἔχοντος εἰδικὸν βάρος $\rho' = 0{,}9986$ gr*/cm³ τὸ σῶμα ἔχει βάρος $B'_A = 170{,}4$ gr*. Τὸ σῶμα ὑφίσταται ἄνωσιν ἴσην μὲ τὸ βάρος B' τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος· ἤτοι τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ὕδατος εἶναι :

$$B_Y = B_\Sigma - B'_A = 270 - 170{,}4 = 99{,}6 \text{ gr*}$$

Γνωρίζομεν ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος ρ ἑνὸς σώματος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ εἰδικοῦ βάρους ρ′ τοῦ ὕδατος ἐπὶ τὸ σχετικὸν εἰδικὸν βάρος τοῦ σώματος ὡς πρὸς τὸ ὕδωρ, δηλαδὴ εἶναι :

$$\rho = \rho' \cdot \frac{B_\Sigma}{B_Y} \qquad \text{ἢ} \qquad \rho = 0{,}9986 \cdot \frac{270}{99{,}6}\left(\frac{\text{gr*}}{\text{cm}^3} \cdot \frac{\text{gr*}}{\text{gr*}}\right)$$

$$\textit{καὶ} \qquad \rho = \mathbf{2{,}7\ gr^*/cm^3}$$

148

Ὁ κύβος τοῦ πάγου ἔχει ἀκμὴν 3 cm καὶ συνεπῶς ἔχει ὄγκον $V = 27$ cm³. Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ πάγου εἶναι $\rho_\pi = 0{,}92$ gr*/cm³. Ἄρα τὸ τεμάχιον τοῦ πάγου ἔχει βάρος :

$$B_\pi = V \cdot \rho_\pi \qquad \text{ἤτοι} \qquad B_\pi = 27 \cdot 0{,}92 \left(\text{cm}^3 \cdot \frac{\text{gr*}}{\text{cm}^3}\right)$$

$$\textit{καὶ} \qquad B_\pi = 24{,}84 \text{ gr*}$$

α) Ἔστω ρ_Δ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ διαλύματος. Διὰ νὰ βυθισθῇ ἐξ ὁλοκλήρου ὁ πάγος ἐντὸς τοῦ διαλύματος, θέτομεν ἐπὶ τῆς ἀνωτέρας ἐπιφανείας του βάρος $\beta = 7{,}56$ gr*. Τότε τὸ βάρος τοῦ συστήματος (πάγος — σταθμὰ) εἶναι ἴσον μὲ τὸ βάρος B τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ. Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ὄγκος τοῦ διαλύματος $V = 27$ cm³ ἔχει βάρος :

$$B_\Delta = 24{,}86 + 7{,}56 = 32{,}40 \text{ gr*}$$

Οὕτω ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν : $B_\Delta = V \cdot \rho_\Delta$

εὑρίσκομεν ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος ρ_Δ τοῦ διαλύματος εἶναι :

$$\rho_\Delta = \frac{B_\Delta}{V} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \rho_\Delta = \frac{32{,}40}{27}\left(\frac{\text{gr*}}{\text{cm}^3}\right)$$

$$\textit{καὶ} \qquad \rho_\Delta = 1{,}20 \text{ gr*/cm}^3$$

β) Ὅταν ἀφαιρέσωμεν τὸ βάρος β, τότε τὸ ἐκτοπιζόμενον διάλυμα ἔχει βάρος ἴσον μὲ τὸ βάρος B_π τοῦ πάγου καὶ ὄγκον V'. Εἰς τὴν περίπτωσιν λοιπὸν αὐτὴν ἔχομεν :

$$B_\pi = V' \cdot \rho_\Delta \quad \text{ἄρα} \quad V' = \frac{B_\pi}{\rho_\Delta}$$

$$\text{καὶ} \quad V' = \frac{24{,}84}{1{,}20}\left(\frac{gr^*}{gr^*/cm^3}\right) = 20{,}7 \text{ cm}^3$$

Ὁ ὄγκος V' ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ἔχοντος βάσιν 3 cm · 3 cm = 9 cm² καὶ ὕψος x. Ἄρα εἶναι :

$$V' = 9 \cdot x \quad \text{ἤτοι} \quad x = \frac{V'}{9}$$

$$\text{καὶ} \quad x = \frac{20{,}7}{9}\left(\frac{cm^3}{cm^2}\right) = 2{,}3 \text{ cm}$$

Ὥστε ἐντὸς τοῦ διαλύματος βυθίζεται μέρος τῆς ἀκμῆς τοῦ κύβου ἴσον μέ :

$$\mathbf{x = 2{,}3 \text{ cm}}$$

149

Ἡ κοίλη μεταλλικὴ σφαῖρα ἔχει βάρος B_Σ. Ἂν R εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ ἀκτὶς τῆς σφαίρας καὶ r ἡ ἐσωτερικὴ ἀκτὶς αὐτῆς, τότε ὁ ὄγκος V_Σ τοῦ μετάλλου εἶναι :

$$V_\Sigma = \frac{4\pi}{3}(R^3 - r^3)$$

Ἂν ρ_Σ εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος, τότε ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$B_\Sigma = V_\Sigma \cdot \rho_\Sigma \quad \text{ἤτοι} \quad B_\Sigma = \frac{4\pi}{3}(R^3 - r^3) \cdot \rho_\Sigma \qquad (1)$$

Ἡ σφαῖρα θέλομεν νὰ βυθίζεται κατὰ τὸ ἥμισυ ἐντὸς τοῦ ὕδατος, ὁπότε τὸ ἐκτοπιζόμενον ὕδωρ ἔχει ὄγκον V_Y ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας. Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος εἶναι ρ_Y. Τότε ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$B_\Sigma = \frac{V_\Sigma}{2} \cdot \rho_Y \quad \text{ἤτοι} \quad B_\Sigma = \frac{4\pi}{6} \cdot R^3 \cdot \rho_Y \qquad (2)$$

Τὸ πάχος τῶν τοιχωμάτων τῆς σφαίρας εἶναι :

$$x = R - r \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν :

$$R^3 - r^3 = \frac{3\,B_\Sigma}{4\pi \cdot \rho_\Sigma} \qquad (4)$$

Καὶ ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν :

$$R^3 = \frac{6\,B_\Sigma}{4\pi \cdot \rho_Y} \quad ἢ \quad R^3 = \frac{3\,B_\Sigma}{2\pi \cdot \rho_Y} \qquad (5)$$

Οὕτω ἡ ἐξίσωσις (4) γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$\frac{3\,B_\Sigma}{2\pi \,.\, \rho_Y} - r^3 = \frac{3\,B_\Sigma}{4\pi \cdot \rho_\Sigma}$$

Λύοντες τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ὡς πρὸς r^3 λαμβάνομεν :

$$r^3 = \frac{3\,B_\Sigma}{2\pi \cdot \rho_Y} - \frac{3\,B_\Sigma}{4\pi \cdot \rho_\Sigma}$$

ἢ

$$r^3 = \frac{3\,B_\Sigma}{2\pi}\left(1 - \frac{1}{2\,\rho_\Sigma}\right) \qquad (6)$$

Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν R^3 καὶ r^3 ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (5) καὶ (6), εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ζητούμενον πάχος x τῶν τοιχωμάτων εἶναι :

$$\mathbf{x = \sqrt[3]{\frac{3\,B_\Sigma}{2\pi \cdot \rho_Y}} - \sqrt[3]{\frac{3\,B_\Sigma}{2\,\pi}\left(1 - \frac{1}{2\,\rho_\Sigma}\right)}}$$

Ἐ φ α ρ μ ο γ ή. Ἂν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν θέσωμεν :

$B_\Sigma = 30$ kgr* $= 3 \cdot 10^4$ gr*

$\rho_\Sigma = 9$ gr*/cm³

$\rho_Y = 1$ gr*/cm³

εὑρίσκομεν ὅτι τὸ πάχος τῶν τοιχωμάτων τῆς μεταλλικῆς σφαίρας πρέπει νὰ εἶναι :

$$x = \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 10^4}{6{,}28}} - \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 10^4}{6{,}28}\left(1 - \frac{1}{18}\right)}$$

$$ἢ \quad x = \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 10^4}{6{,}28}}\left(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{18}}\right) = \mathbf{0{,}458\ cm}$$

καὶ $\qquad x = \mathbf{4{,}58\ mm}$

ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΤΩΝ ΑΕΡΙΩΝ

150

Ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀέρος εἶναι :

$$\rho = 1{,}293 \text{ gr}^* / \text{dm}^3$$

Γνωρίζομεν ὅτι εἶναι $1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$. Ἄρα τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀέρος εἰς gr^*/cm^3 εἶναι :

$$\rho = \frac{1{,}293}{1000}\left(\frac{\text{gr}^*}{\text{cm}^3}\right) \quad \text{ἤτοι} \quad \rho = 0{,}001293 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$$

Συνεπῶς ἡ πυκνότης d τοῦ ἀέρος, ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας εἶναι :

$$d = \mathbf{0{,}001293 \ gr/cm^3}$$

Εἶναι γνωστὸν ὅτι 1 λίτρον ὕδατος ἔχει βάρος 1000 gr*, ἐνῶ 1 λίτρον ἀέρος ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας ἔχει βάρος 1,293 gr*. Ὁ λόγος τοῦ βάρους τοῦ ὕδατος πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ἀέρος εἶναι :

$$\frac{1\,000}{1{,}293} = 773$$

Ἄρα ὁ ἀὴρ εἶναι ἐλαφρότερος ἀπὸ ἴσον ὄγκον ὕδατος κατά :

773 φορὰς

151

Δίδεται ὅτι κατὰ τὴν στιγμὴν τοῦ πειράματος ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι :

$$p = 76 \text{ cm Hg}$$

Ἐπειδὴ εἶναι $1 \text{ cm Hg} = 13{,}6 \text{ gr}^*/\text{cm}^2$, ἕπεται ὅτι ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι :

$$p = 76 \cdot 13{,}6 = 1033 \text{ gr}^*/\text{cm}^2$$

Τὸ εἰδικὸν βάρος τῆς γλυκερίνης εἶναι $\rho = 1{,}25 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$. Ζητεῖται πόσον θὰ εἶναι τὸ ὕψος h μιᾶς στήλης γλυκερίνης, ἡ ὁποία θὰ ἀσκῇ πίεσιν ἴσην μὲ τὴν ἀτμοσφαιρικήν. Γνωρίζομεν ὅτι ἡ πίεσις αὐτὴ τῆς γλυκερίνης εἶναι :

$$p = h \cdot \rho \quad \text{ἄρα} \quad h = \frac{p}{\rho}$$

$$\text{καὶ} \quad h = \frac{1033}{1{,}25}\left(\frac{\text{gr}^*/\text{cm}^2}{\text{gr}^*/\text{cm}^3}\right) \quad \text{ἢ} \quad h = \mathbf{826{,}4 \ cm}$$

152

Ὅταν ἡ φυσαλὶς εὑρίσκεται εἰς βάθος $h_1 = 40$ cm, τότε ἔχει ὄγκον $V_1 = 0{,}5\ cm^3$. Εἰς τὸ σημεῖον ἐκεῖνο ἡ ὑδροστατικὴ πίεσις, μετρημένη εἰς cm Hg, εἶναι $p' = 40$ cm Hg. Ἄρα εἰς βάθος 40 cm ἡ πίεσις p_1 τοῦ ἐντὸς τῆς φυσαλίδος ἀέρος εἶναι :

$$p_1 = p + p' \qquad \text{ἤτοι} \qquad p_1 = 75 + 40 = 115\ \text{cm Hg}$$

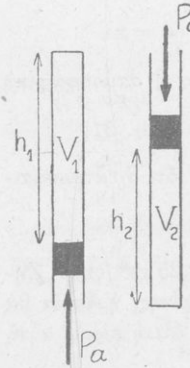
Ὅταν ἡ φυσαλὶς φθάσῃ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑδραργύρου, ὁ ἐντὸς τῆς φυσαλίδος ἀὴρ ἔχει ὄγκον V_2 καὶ πίεσιν p_2 ἴσην μὲ τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν, ἤτοι $p_2 = 75$ cm Hg. Σύμφωνα μὲ τὸν νόμον Boyle — Mariotte ἔχομεν :

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 \qquad \text{ἄρα} \qquad V_2 = V_1 \cdot \frac{p_1}{p_2}$$

$$\text{καὶ} \qquad V_2 = 0{,}5 \cdot \frac{115}{75}\left(cm^3 \cdot \frac{\text{cm Hg}}{\text{cm Hg}}\right) = \mathbf{0{,}77\ cm^3}$$

153

Ἡ σταγὼν τοῦ ὑδραργύρου ἔχει μῆκος 5 cm καὶ συνεπῶς αὕτη ἐπιφέρει πίεσιν $p' = 5$ cm Hg. Ἂν σ εἶναι ἡ τομὴ τοῦ σωλῆνος καὶ p_α εἶναι ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις κατὰ τὴν στιγμὴν τοῦ πειράματος (σχ. 28), τότε διὰ τὸν ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ἀέρα ἔχομεν :



Σχ. 28

εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν :

ὄγκος ἀέρος: $V_1 = h_1 \cdot \sigma$ ἢ $V_1 = 25{,}6 \cdot \sigma\ cm^3$

πίεσις ἀέρος: $p_1 = p_\alpha - 5$ cm Hg

εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν :

ὄγκος ἀέρος: $V_2 = h_2 \cdot \sigma$

ἢ $V_2 = 22{,}4 \cdot \sigma\ cm^3$

πίεσις ἀέρος: $p_2 = p_\alpha + 5$ cm Hg

Ἂν διὰ τὴν μᾶζαν αὐτὴν τοῦ ἀέρος ἐφαρμόσωμεν τὸν νόμον Boyle — Mariotte, λαμβάνομεν τὴν σχέσιν :

$$V_1 \cdot p_1 = V_2 \cdot p_2 \qquad \text{ἢ} \qquad 25{,}6 \cdot \sigma \cdot (p_\alpha - 5) = 22{,}4 \cdot \sigma \cdot (p_\alpha + 5)$$

$$\text{καὶ} \qquad 25{,}6 \cdot (p_\alpha - 5) = 22{,}4 \cdot (p_\alpha + 5) \qquad \text{ἄρα} \qquad p_\alpha = \mathbf{75\ cm\ Hg}$$

154

Εἰς $0^{\circ}C$ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀέρος ὑπὸ πίεσιν $p_1 = 76$ cm Hg εἶναι $\rho_1 = 1{,}293$ gr*/dm³ καὶ ὑπὸ πίεσιν $p_2 = 73$ cm Hg εἶναι ρ_2. Γνωρίζομεν ὅτι, ἂν ἡ θερμοκρασία ἑνὸς ἀερίου διατηρῆται σταθερά, ἡ πυκνότης αὐτοῦ μεταβάλλεται ἀναλόγως πρὸς τὴν πίεσιν τοῦ ἀερίου, δηλαδὴ εἶναι :

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad \text{ἄρα εἶναι καὶ} \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀέρος ὑπὸ πίεσιν $p_2 = 73$ cm Hg εἶναι :

$$\rho_2 = \rho_1 \cdot \frac{p_2}{p_1} \quad \text{ἤτοι} \quad \rho_2 = 1{,}293 \cdot \frac{73}{76} \left(\frac{gr^*}{dm^3} \cdot \frac{cm\,Hg}{cm\,Hg}\right)$$

καὶ $\rho_2 = 1{,}241\ gr^*/dm^3$

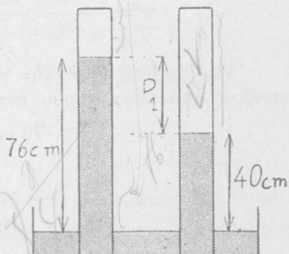
Ἕνας λοιπὸν ὄγκος ἀέρος $V = 2\ m^3 = 2000\ dm^3$, εὑρισκόμενος εἰς $0^{\circ}C$ καὶ ὑπὸ πίεσιν 73 cm Hg, ἔχει βάρος B ἴσον μέ :

$$B = V \cdot \rho_2 \quad \text{ἤτοι} \quad B = 2000 \cdot 1{,}241 \left(dm^3 \cdot \frac{gr^*}{dm^3}\right)$$

καὶ $B = \mathbf{2482\ gr^* = 2{,}482\ kgr^*}$

155

Ὁ σωλὴν ἔχει τομὴν 2 cm², ὁ δὲ ἄνωθεν τοῦ ὑδραργύρου κενὸς χῶρος ἔχει ὕψος 8 cm. Ἄρα τὸ ἐκτὸς τοῦ ὑδραργύρου τῆς λεκάνης μῆκος τοῦ σωλῆνος εἶναι 84 cm. Ὁ ἐξωτερικὸς ἀὴρ ἔχει πίεσιν $p = 76$ cm Hg. (σχ. 29). Ἔστω V ὁ ὄγκος τοῦ ἐξωτερικοῦ ἀέρος, ὁ ὁποῖος θὰ εἰσαχθῇ ἐντὸς τοῦ βαρομετρικοῦ σωλῆνος, διὰ νὰ γίνῃ ἡ στήλη τοῦ ὑδραργύρου 40 cm. Ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ὁ ἀὴρ θὰ σχηματίσῃ στήλην ἔχουσαν ὕψος $84 - 40 = 44$ cm καὶ τομὴν 2 cm². Οὕτω ὁ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος εἰσαχθεὶς ἀὴρ θὰ ἀποκτήσῃ:



Σχ. 29

ὄγκον : $V_1 = 2\ cm^2 \cdot 44\ cm = 88\ cm^3$

καὶ πίεσιν : $p_1 = 76$ cm Hg $-$ 40 cm Hg $=$ 36 cm Hg

Σύμφωνα μὲ τὸν νόμον Boyle—Mariotte ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$V \cdot p = V_1 \cdot p_1 \qquad \text{ἄρα} \qquad V = V_1 \cdot \frac{p_1}{p}$$

Ὁ ζητούμενος λοιπὸν ὄγκος τοῦ ἀέρος εἶναι :

$$V = 88 \cdot \frac{36}{76} \left(cm^3 \cdot \frac{cm\ Hg}{cm\ Hg} \right) \qquad \text{καὶ} \qquad V = \mathbf{41{,}68\ cm^3}$$

156

Τὸ ἐκτὸς τοῦ ὑδραργύρου τῆς λεκάνης μῆκος τοῦ βαρομετρικοῦ σωλῆνος εἶναι $75 + 9 = 84$ cm. Ὁ ἐξωτερικὸς ἀήρ, ὁ εἰσαγόμενος ἐντὸς τοῦ σωλῆνος, ἔχει πίεσιν $p = 75$ cm Hg καὶ ὄγκον $V = 4\ cm^3$. Ὅταν ὁ ἀὴρ οὗτος εἰσαχθῇ ἐντὸς τοῦ βαρομετρικοῦ σωλῆνος, τότε ἡ στήλη τοῦ ὑδραργύρου κατέρχεται κατὰ x ἑκατοστόμετρα καὶ τὸ ὕψος τῆς στήλης τοῦ ὑδραργύρου εἶναι $(75 - x)$ cm. Ὁ εἰσαχθεὶς ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ἀὴρ σχηματίζει στήλην ἔχουσαν ὕψος $(9 + x)$ cm καὶ τομὴν $2\ cm^2$. Οὕτω ὁ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος εἰσαχθεὶς ἀὴρ θὰ ἀποκτήσῃ :

ὄγκον : $V_1 = 2\ cm^2 \cdot (9 + x)\ cm = 2 \cdot (9 + x)\ cm^3$

καὶ πίεσιν : $p_1 = x$ cm Hg

Σύμφωνα μὲ τὸν νόμον Boyle — Mariotte ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$V \cdot p = V_1 \cdot p_1 \qquad \text{ἢ} \qquad 4 \cdot 75 = 2 \cdot (9 + x) \cdot x$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν ὡς πρὸς x λαμβάνομεν :

$$x = \frac{-9 \pm 26{,}09}{2} \qquad \text{καὶ} \qquad x = 8{,}54\ cm$$

Ἡ ἀρνητικὴ ρίζα τῆς ἐξισώσεως ἀπορρίπτεται. Οὕτω τὸ ὕψος τῆς στήλης τοῦ ὑδραργύρου ἐντὸς τοῦ σωλῆνος θὰ γίνῃ :

$$75 - 8{,}54 = \mathbf{66{,}46\ cm}$$

157

α) Ἡ τομὴ τοῦ σωλῆνος εἶναι $\sigma = 4\ cm^2$. Ἂν p εἶναι ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις κατὰ τὴν στιγμὴν τοῦ πειράματος, τότε ὁ ἀρχικῶς ἐντὸς τοῦ βαρομετρικοῦ σωλῆνος εὑρισκόμενος ἀὴρ ἔχει :

ὄγκον : $V_1 = 12{,}2\ cm \cdot \sigma\ cm^2 = 12{,}2\ \sigma\ cm^3$

πίεσιν : $p_1 = p - 74{,}8$ cm Hg

Μετὰ τὴν ἀνύψωσιν τοῦ σωλῆνος ὁ ἐντὸς αὐτοῦ εὑρισκόμενος ἀὴρ ἔχει :

ὄγκον : $V_2 = 14{,}1 \text{ cm} \cdot \sigma \text{ cm}^2 = 14{,}1\, \sigma \text{ cm}^3$

πίεσιν : $p_2 = p - 75 \text{ cm Hg}$

Σύμφωνα μὲ τὸν νόμον Boyle — Mariotte ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$V_1 \cdot p_1 = V_2 \cdot p_2 \quad \text{ἢ} \quad 12{,}2\, \sigma \cdot (p - 74{,}8) = 14{,}1\, \sigma \cdot (p - 75)$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη πίεσις p εἶναι:

$$p = \mathbf{76{,}3 \text{ cm Hg}} = \mathbf{763 \text{ mm Hg}}$$

β) Δίδεται ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀέρος ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας εἶναι $\rho_0 = 0{,}001293 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$. Ὁ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος εὑρισκόμενος ἀὴρ ἔχει ἀρχικῶς :

ὄγκον : $V_1 = 12{,}2 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm}^2 = 48{,}8 \text{ cm}^3$

πίεσιν : $p_1 = 76{,}3 - 74{,}8 = 1{,}5 \text{ cm Hg}$

Ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας ὁ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος εὑρισκόμενος ἀὴρ ἔχει :

ὄγκον : V_0

πίεσιν : $p_0 = 76 \text{ cm Hg}$

Σύμφωνα μὲ τὸν νόμον Boyle — Mariotte θὰ ἰσχύῃ τότε ἡ σχέσις :

$$V_0 \cdot p_0 = V_1 \cdot p_1 \quad \text{ἄρα} \quad V_0 = V_1 \cdot \frac{p_1}{p_0}$$

$$\text{καὶ} \quad V_0 = 48{,}8 \cdot \frac{1{,}5}{76} \left(\text{cm}^3 \cdot \frac{\text{cm Hg}}{\text{cm Hg}} \right) = 0{,}963 \text{ cm}^3$$

Τὸ βάρος λοιπὸν B τοῦ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος εὑρισκομένου ἀέρος εἶναι :

$$B = V_0 \cdot \rho_0 = 0{,}963 \cdot 0{,}001293 \left(\text{cm}^3 \cdot \frac{\text{gr}^*}{\text{cm}^3} \right)$$

$$\text{ἤτοι} \quad B = \mathbf{0{,}001245 \text{ gr}^*} \quad \text{καὶ} \quad B = \mathbf{1{,}245 \text{ mgr}^*}$$

75x
4
300

158

Ἡ φυσαλὶς εὑρίσκεται εἰς βάθος h = 10 cm. Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος εἶναι $\rho_Y = 1 \text{ gr}^*/\text{cm}^3$. Ὥστε εἰς βάθος h ἐπικρατεῖ ὑδροστατικὴ πίεσις p_Y ἴση μέ :

$$p_Y = h \cdot \rho_Y \quad \text{ἤτοι} \quad p_Y = 10 \cdot 1 \left(\text{cm} \cdot \frac{\text{gr}^*}{\text{cm}^3} \right) = 10 \text{ gr}^*/\text{cm}^2$$

Εἰς βάθος h ὁ ὄγκος τῆς φυσαλίδος εἶναι : $V_1 = 0{,}02 \text{ cm}^3$. Ἡ δὲ πίεσις p_1 τοῦ ἐντὸς αὐτῆς περιεχομένου ἀέρος εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως $p_\alpha = 74$ cm Hg καὶ τῆς ὑδροστατικῆς πιέσεως $p_Y = 10$ gr*/cm², δηλαδὴ εἶναι :

$$p_1 = p_\alpha + p_Y \quad \text{ἤτοι} \quad p_1 = 74 \cdot 13{,}6 + 10 = 1016{,}4 \text{ gr*/cm}^2$$

Ὅταν ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις αὐξηθῇ εἰς 77 cm Hg, τότε ὁ ὄγκος τῆς φυσαλίδος ἐλαττώνεται καὶ γίνεται V_2 ἡ δὲ πίεσις τοῦ ἐντὸς τῆς φυσαλίδος ἀέρος γίνεται p_2 ἴση μέ :

$$p_2 = 77 \cdot 13{,}6 + 10 = 1057{,}2 \text{ gr*/cm}^2$$

Σύμφωνα μὲ τὸν νόμον Boyle — Mariotte ἔχομεν :

$$V_1 \cdot p_1 = V_2 \cdot p_2 \quad \text{ἄρα} \quad V_2 = V_1 \cdot \frac{p_1}{p_2}$$

$$\text{ἤτοι} \quad V_2 = 0{,}02 \cdot \frac{1016{,}4}{1057{,}2} \left(\text{cm}^3 \cdot \frac{\text{gr*/cm}^2}{\text{gr*/cm}^2} \right)$$

$$\text{καὶ} \quad V_2 = \mathbf{0{,}0194\ cm^3}$$

159

Γνωρίζομεν ὅτι ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας, δηλαδὴ εἰς 0°C καὶ ὑπὸ πίεσιν $p_0 = 1$ Atm, τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀέρος εἶναι $\rho_0 = 1{,}293$ gr*/dm³. Ἐπίσης ὅμως γνωρίζομεν ὅτι ἡ πυκνότης ἑνὸς ἀερίου, ἄρα καὶ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀερίου εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὴν πίεσιν τοῦ ἀερίου. Ἂν λοιπὸν ρ εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀέρος εἰς 0°C καὶ ὑπὸ πίεσιν $p = 50$ Atm, τότε ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} \quad \text{ἄρα} \quad \rho = \rho_0 \cdot \frac{p}{p_0}$$

$$\text{ἤτοι} \quad \rho = 1{,}293 \cdot \frac{50}{1} \left(\frac{\text{gr*}}{\text{dm}^3} \cdot \frac{\text{Atm}}{\text{Atm}} \right) = 64{,}65 \text{ gr*/dm}^3$$

Ὥστε 1 λίτρον (1 dm³) ἀέρος εἰς 0°C καὶ ὑπὸ πίεσιν 50 Atm, ἔχει βάρος :

$$B = \mathbf{64{,}65\ gr^*}$$

160

Εἰς 0°C καὶ ὑπὸ πίεσιν $p_0 = 76$ cm Hg τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀέρος εἶναι $\rho_0 = 1{,}293$ gr*/dm³. Ὑπὸ πίεσιν $p = 85$ cm Hg τὸ εἰδικὸν βάρος ρ τοῦ ἀέρος εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} \quad \text{ἤτοι} \quad \rho = \rho_0 \cdot \frac{p}{p_0}$$

καὶ $$\rho = 1{,}293 \cdot \frac{85}{76}\left(\frac{gr^*}{dm^3} \cdot \frac{cm\ Hg}{cm\ Hg}\right) = 1{,}445\ gr^*/dm^3$$

Ὁ ἀὴρ ἔχει βάρος $B = 25$ gr* καὶ ὄγκον V τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$B = V \cdot \rho \qquad \text{ἤτοι} \qquad V = \frac{B}{\rho}$$

καὶ $$V = \frac{25}{1{,}445}\left(\frac{gr^*}{gr^*/dm^3}\right) = \mathbf{17{,}3\ dm^3}$$

161

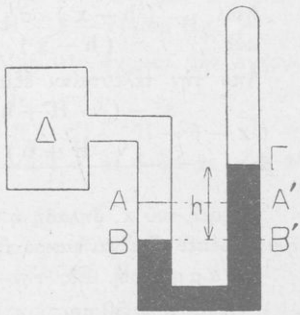
Ὅταν ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι $p_0 = 76$ cm Hg, τότε αἱ ἐπιφάνειαι τοῦ ὑδραργύρου εἰς τοὺς δύο σωλῆνας εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ΑΑ′ (σχ. 30).

Τότε ὁ ἀποκεκλεισμένος ἐντὸς τοῦ ἑνὸς σωλῆνος ἀὴρ ἔχει :

πίεσιν : $p_0 = 76$ cm Hg

ὄγκον : $V_0 = 50 \cdot \sigma$ cm³

ὅπου σ εἶναι ἡ τομὴ τοῦ σωλῆνος.



Σχ. 30

Ὅταν ὁ ὑδράργυρος θὰ ἀνέλθῃ κατὰ 10 cm ἐντὸς τοῦ κλειστοῦ σωλῆνος καὶ θὰ κατέλθῃ κατὰ 10 cm ἐντὸς τοῦ ἄλλου σωλῆνος, τότε ὁ ἀποκεκλεισμένος ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ἀὴρ ἔχει :

πίεσιν : p_1

ὄγκον : $V_1 = 40 \cdot \sigma$ cm³

Σύμφωνα μὲ τὸν νόμον Boyle — Mariotte ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$V_1 \cdot p_1 = V_0 \cdot p_0 \qquad \text{ἄρα} \qquad p_1 = p_0 \cdot \frac{V_0}{V_1}$$

καὶ $$p_1 = 76 \cdot \frac{50 \cdot \sigma}{40 \cdot \sigma}\left(cm\ Hg \cdot \frac{cm^3}{cm^3}\right) = 95\ cm\ Hg$$

Ἡ ζητουμένη λοιπὸν πίεσις p, ἡ ὁποία ἐνεργεῖ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας Β τοῦ ὑδραργύρου, εἶναι:

$$p = p_1 + h \qquad \text{ἤτοι} \qquad p = 95 + 20 = \mathbf{115\ cm\ Hg}$$

162

Ἔστω σ ἡ τομὴ τοῦ κλειστοῦ σωλῆνος τοῦ μανομέτρου. Ὁ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ἀποκεκλεισμένος ἀὴρ ἀρχικῶς ἔχει :

ὄγκον : $V_1 = h \cdot \sigma \ \ cm^3$

πίεσιν : $p_1 = H \ \ cm\ Hg$.

Ὅταν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑδραργύρου τῆς λεκάνης ἐνεργῇ πίεσις p ἴση μὲ ν ἀτμοσφαίρας, δηλαδὴ

$$p = \nu \cdot p_1 \quad \text{ἢ} \quad p = \nu \cdot H$$

τότε ὁ ὑδράργυρος ἀνέρχεται ἐντὸς τοῦ κλειστοῦ σωλῆνος κατὰ x καὶ ὁ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ἀποκεκλεισμένος ἀὴρ ἔχει :

ὄγκον : $V_2 = (h - x) \cdot \sigma \ \ cm^3$

πίεσιν : $p_2 = p - x = \nu \cdot p_1 - x \ cm\ Hg$ ἢ $p_2 = \nu \cdot H - x$

Σύμφωνα μὲ τὸν νόμον Boyle — Mariotte θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$V_2 \cdot p_2 = V_1 \cdot p_1$$

ἤτοι $(h - x) \cdot \sigma \cdot (\nu \cdot H - x) = h \cdot \sigma \cdot H$

καὶ $(h - x) \cdot (\nu \cdot H - x) = h \cdot H$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν λαμβάνομεν :

$$x^2 - (\nu \cdot H + h)\, x + h \cdot H\, (\nu - 1) = 0$$

ἄρα $$x = \frac{(\nu \cdot H + h) \pm \sqrt{(\nu \cdot H - h)^2 + 4hH}}{2} \qquad (1)$$

Ἡ τιμὴ τοῦ x, δηλαδὴ ἡ ἀνύψωσις τοῦ ὑδραργύρου ἐντὸς τοῦ σωλῆνος, πρέπει νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ὕψους h τοῦ σωλῆνος ($x < h$).

Ἐ φ α ρ μ ο γ ή. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) θέτομεν :

$$h = 50\ cm \qquad H = 76\ cm\ Hg \qquad \nu = 6$$

Ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι πρέπει νὰ εἶναι $x < h$, τότε ἔχομεν :

$$x = \frac{(6 \cdot 76 + 50) - \sqrt{(6 \cdot 76 - 50)^2 + 4 \cdot 50 \cdot 76}}{2}$$

ἄρα $$x = \mathbf{40{,}85\ cm}$$

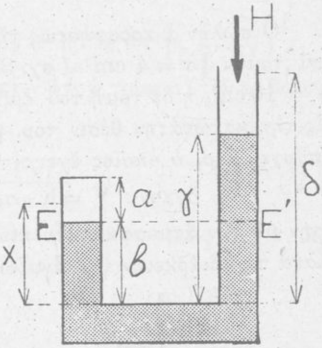
163

Ἔστω σ ἡ τομὴ τοῦ σωλῆνος. Ὁ ἐντὸς τοῦ κλειστοῦ βραχίονος ἀποκεκλεισμένος ἀὴρ ἀρχικῶς ἔχει :

ὄγκον : $V = \sigma \cdot \alpha \ \ cm^3$

πίεσιν : $p = H + (\gamma - \beta) = (H + \gamma - \beta)\ cm\ Hg$

Ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ΕΕ′ (σχ. 31) ἐπιφέρονται αἱ ἴσαι πιέσεις, ἀφ' ἑνὸς μὲν ἡ πίεσις p τοῦ ἀποκεκλεισμένου ἀέρος καὶ ἀφ' ἑτέρου ἡ πίεσις $H + (\gamma - \beta)$ cm Hg. Ὅταν τὸ ὕψος τῆς στήλης τοῦ ὑδραργύρου ἐντὸς τοῦ ἀνοικτοῦ βραχίονος γίνῃ δ, τότε τὸ ὕψος τῆς στήλης τοῦ ὑδραργύρου ἐντὸς τοῦ κλειστοῦ βραχίονος γίνεται x. Τὸ ὕψος τοῦ κλειστοῦ βραχίονος εἶναι $\alpha + \beta$. Ἄρα τὸ ὕψος τῆς στήλης τοῦ ἀέρος γίνεται εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν $(\alpha + \beta) - x$. Ὁ ἐντὸς τοῦ κλειστοῦ βραχίονος ἀποκεκλεισμένος ἀὴρ ἔχει τότε :



Σχ. 31

ὄγκον : $V_1 = \sigma \cdot [\,(\alpha + \beta) - x\,] = \sigma \cdot (\alpha + \beta - x)\ cm^3$

πίεσιν : $p_1 = H + (\delta - x) = (H + \delta - x)$ cm Hg

Σύμφωνα μὲ τὸν νόμον Boyle — Mariotte ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$V \cdot p = V_1 \cdot p_1$$

ἢ $\quad \sigma \cdot \alpha \cdot (H + \gamma - \beta) = \sigma \cdot (\alpha + \beta - x) \cdot (H + \delta - x)$

καὶ $\quad \alpha \cdot (H + \gamma - \beta) = (\alpha + \beta - x) \cdot (H + \delta - x) \qquad (1)$

Δίδεται ὅτι εἶναι :

$\alpha = 8$ cm $\qquad \beta = 17$ cm $\qquad \gamma = 43$ cm

$\delta = 60$ cm $\qquad H = 76$ cm Hg

Ἂν λοιπὸν θέσωμεν τὰς ἀνωτέρω τιμὰς εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1), λαμβάνομεν :

$816 = (25 - x) \cdot (136 - x)$ ἄρα $x^2 - 161\,x + 2584 = 0$

Λύοντες τὴν εὑρεθεῖσαν ἐξίσωσιν λαμβάνομεν :

$$x = \frac{161 \pm 125}{2} \left< \begin{array}{l} 143 \text{ cm} \\ 18 \text{ cm} \end{array} \right.$$

Παραδεκτὴ εἶναι ἡ τιμὴ $x = 18$ cm, διότι πρέπει νὰ εἶναι $x < 25$ cm δηλαδὴ ἡ τιμὴ τοῦ x πρέπει νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ὕψους τοῦ κλειστοῦ βραχίονος ($\alpha + \beta = 25$ cm). Ὥστε τὸ ζητούμενον ὕψος τῆς στήλης τοῦ ὑδραργύρου εἶναι :

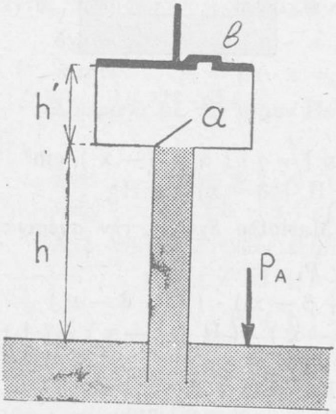
$$x = \mathbf{18\ cm}$$

164

Ὁ σωλὴν ἀναρροφήσεως τῆς ἀντλίας ἔχει ὕψος $h = 5\ m = 500\ cm$ καὶ τομὴν $\sigma = 4\ cm^2$ (σχ. 32). Ἡ διαδρομὴ τοῦ ἐμβόλου εἶναι $h' = 10\ cm$, ἡ δὲ τομὴ τοῦ ἐμβόλου ἔστω σ'. Θεωροῦμεν τὸ ἔμβολον εἰς τὴν κατωτάτην θέσιν του. Τότε ἐντὸς τοῦ ἀναρροφητιοῦ σωλῆνος ὑπάρχει ἀήρ, ὁ ὁποῖος ἔχει :

ὄγκον : $V = h \cdot \sigma$ πίεσιν : p_A

ἴσην μὲ τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν κατὰ τὴν στιγμὴν τοῦ πειράματος. Κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἀνυψώσεως τοῦ ἐμβόλου ὁ ἐντὸς τοῦ ἀναρροφητικοῦ σωλῆνος ἀὴρ εἰσέρχεται εἰς τὸν κύλινδρον. Ὅταν δὲ συμπληρωθῇ ἡ πρώτη ἀνύψωσις τοῦ ἐμβόλου, τότε ὅλος ὁ ἀὴρ τοῦ σωλῆνος ἔχει εἰσέλθει εἰς τὸν κύλινδρον καὶ ὁ ἀναρροφητικὸς σωλὴν ἔχει γεμίσει μὲ ὕδωρ. Ὁ ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου συγκεντρωθεὶς τώρα ἀὴρ ἔχει :



Σχ. 32

ὄγκον : $V' = h' \cdot \sigma'$

πίεσιν : $p' = p_A - p_Y$

διότι ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις p_A ἰσορροπεῖ τὸ ἄθροισμα τῆς πιέσεως p' τοῦ ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου ἀέρος καὶ τῆς πιέσεως p_Y τὴν ὁποίαν ἐπιφέρει στήλη ὕδατος ὕψους h. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν πίεσιν p' πρέπει νὰ ἐκφράσωμεν τὰς πιέσεις p_A καὶ p_Y εἰς τὰς αὐτὰς μονάδας πιέσεως. Ἡ πίεσις p_Y εἶναι :

$$p_Y = h \cdot \rho \quad \cdot \text{ἤτοι} \quad p_Y = 500 \cdot 1 \left(cm \cdot \frac{gr^*}{cm^3} \right)$$

$$\text{καὶ} \quad p_Y = 500\ gr^*/cm^2$$

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι $1\ cm\ Hg = 13{,}6\ gr^*/cm^2$. Ἄρα ἡ πίεσις p_Y μετρημένη εἰς cm Hg εἶναι :

$$p_Y = \frac{500}{13{,}6} = 36{,}76\ cm\ Hg$$

Ἂν ἐφαρμόσωμεν τὸν νόμον Boyle — Mariotte διὰ τὴν μᾶζαν τοῦ ἀέρος, τὴν εὑρισκομένην ἀρχικῶς ἐντὸς τοῦ ἀναρροφητικοῦ σωλῆνος, λαμβάνομεν τὴν σχέσιν :

$$V \cdot p_A = V' \cdot p' \quad \text{ἢ} \quad h \cdot \sigma \cdot p_A = h' \cdot \sigma' \cdot (p_A - p_Y)$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ τομὴ σ′ τοῦ ἐμβόλου πρέπει νὰ εἶναι :

$$\sigma' = \sigma \cdot \frac{h}{h'} \cdot \frac{p_A}{p_A - p_Y} \qquad (2)$$

Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) θέσωμεν τὰς δοθείσας τιμὰς τῶν σ, h, h′ καὶ λάβωμεν $p_A = 76$ cm Hg, τότε εὑρίσκομεν :

$$\sigma' = 4 \cdot \frac{500}{10} \cdot \frac{76}{76 - 36{,}76} \left(\mathrm{cm}^2 \cdot \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{cm}} \cdot \frac{\mathrm{cm\,Hg}}{\mathrm{cm\,Hg}} \right)$$

$$\text{καὶ} \quad \sigma' = 387\ \mathrm{cm}^2$$

Ἂν καλέσωμεν δ τὴν ζητουμένην διάμετρον τοῦ ἐμβόλου, τότε εἶναι :

$$\sigma' = \pi \cdot \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \quad \text{ἢ} \quad \sigma' = \frac{\pi \cdot \delta^2}{4}$$

Ἡ ζητουμένη λοιπὸν διάμετρος δ τοῦ ἐμβόλου εἶναι :

$$\delta = \sqrt{\frac{4 \cdot \sigma'}{\pi}} \quad \text{ἢ} \quad \delta = 2 \cdot \sqrt{\frac{388\ (\mathrm{cm})^2}{3{,}14}}$$

$$\text{καὶ} \quad \boldsymbol{\delta = 22{,}2\ \mathrm{cm}}$$

165

Ὅταν κλείσωμεν μὲ τὸν δάκτυλον τὸ ἀνώτερον ἄκρον τοῦ σωλῆνος ἀποκλείεται ἐντὸς τοῦ σωλῆνος μία μᾶζα ἀέρος ὑπὸ τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν $p_A = 75$ cm Hg.

α) Ἡ στήλη τοῦ ἀέρος ἔχει ἀρχικῶς ὕψος h = 10 cm. Ἂν σ εἶναι ἡ τομὴ τοῦ σωλῆνος, τότε ὁ ἀποκλεισθεὶς ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ἀὴρ ἔχει :

ὄγκον : $V = \sigma \cdot h = 10 \cdot \sigma\ \mathrm{cm}^3$ πίεσιν : $p_A = 75$ cm Hg

Ὅταν ἀνασύρωμεν τὸν σωλῆνα ἐκτὸς τῆς λεκάνης τοῦ ὑδραργύρου, τότε ἀναγκαστικῶς θὰ ἐκρεύσῃ μία ποσότης ὑδραργύρου, διὰ νὰ αὐξηθῇ ὁ ὄγκος τοῦ περιεχομένου ἀέρος τόσον, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῆς πιέσεως p′ τοῦ ἀέρος καὶ τῆς πιέσεως p_Y τῆς στήλης τοῦ ὑδραργύρου νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν p_A. Ἡ ἐκροὴ τοῦ ὑδραργύρου σταματᾷ, ὅταν γίνῃ :

$$p_A = p' + p_Y$$

β) Ὅταν σταματήσῃ ἡ ἐκροὴ τοῦ ὑδραργύρου, ὁ ἀπομείνας ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ὑδράργυρος σχηματίζει στήλην ἔχουσαν ὕψος p_Y cm. Τότε ὁ ἀὴρ σχηματίζει στήλην ἔχουσαν ὕψος $h' = (20 - p_Y)$ cm. Ὥστε, ὅταν σταματήσῃ ἡ ἐκροὴ τοῦ ὑδραργύρου, ὁ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ἀὴρ ἔχει :

ὄγκον : $V' = h' \cdot \sigma = (20 - p_Y) \cdot \sigma$

πίεσιν : $p' = p_A - P_Y = 75 - p_Y$ cm Hg

Σύμφωνα μὲ τὸν νόμον Boyle — Mariotte ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$V \cdot p_A = V' \cdot p'$ ἢ $10 \cdot \sigma \cdot 75 = (20 - p_Y) \cdot \sigma \cdot (75 - p_Y)$

ἢ $10 \cdot 75 = (20 - p_Y) \cdot (75 - p_Y)$ καὶ $p_Y^2 - 95p_Y + 750 = 0$

Ἂν λύσωμεν τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν λαμβάνομεν :

$$p_Y = \frac{95 \pm 77{,}6}{2} \begin{cases} 86{,}1 \text{ cm} \\ 8{,}7 \text{ cm} \end{cases}$$

Παραδεκτὴ εἶναι μόνον ἡ τιμὴ $p_Y = 8{,}7$ cm ἡ ὁποία εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὸ ὕψος $h = 10$ cm. Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ὕψος τῆς στήλης τοῦ ὑδραργύρου ἐντὸς τοῦ σωλῆνος θὰ εἶναι τελικῶς ἴσον μέ :

$$p_Y = \mathbf{8{,}7\ cm}$$

Τότε ἡ πίεσις p' τοῦ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ἀέρος θὰ εἶναι :

$$p' = 75 - 8{,}7 = \mathbf{66{,}3\ cm\ Hg}$$

166

Ὅταν ζυγίζωμεν εἰς τὸν ἀέρα ἕνα σῶμα, τότε εὑρίσκομεν τὸ φαινόμενον βάρος τοῦ σώματος. Τὸ βάρος τοῦτο εἶναι τὸ ἀπόλυτον βάρος τοῦ σώματος ἠλαττωμένον κατὰ τὸ βάρος τοῦ ὑπὸ τοῦ σώματος ἐκτοπιζομένου ἀέρος. Ὅταν λοιπὸν ζυγίζωμεν ἕνα σῶμα εἰς τὸν ἀέρα, τότε ἰσορροποῦν τὰ φαινόμενα βάρη τοῦ σώματος καὶ τῶν σταθμῶν. Ἂς καλέσωμεν :

B τὸ ἀπόλυτον βάρος τοῦ σώματος

B' τὸ ἀπόλυτον βάρος τῶν σταθμῶν

A τὴν ἄνωσιν τὴν ὁποίαν ὑφίσταται τὸ σῶμα

A' τὴν ἄνωσιν τὴν ὁποίαν ὑφίστανται τὰ σταθμὰ

ρ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σώματος

ρ' τὸ εἰδικὸν βάρος τῶν σταθμῶν

ρ_α τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀέρος.

Τὰ σταθμὰ ἔχουν μᾶζαν $m = 58{,}64$ gr. Ἄρα τὸ ἀπόλυτον βάρος τῶν σταθμῶν ἰσοῦται ἀριθμητικῶς μὲ τὴν μᾶζαν αὐτῶν, δηλαδὴ εἶναι $B' = 58{,}64\ gr^*$. Ὁ ὄγκος τῶν σταθμῶν εἶναι : $V' = \frac{B'}{\rho'}$. Ἡ ἄνωσις λοιπόν, τὴν ὁποίαν ὑφίστανται τὰ σταθμά, εἶναι :

$$A' = V' \cdot \rho_\alpha \qquad \text{ἢ} \qquad A' = \frac{B'}{\rho'} \cdot \rho_\alpha$$

Ὥστε τὸ βάρος τῶν σταθμῶν εἰς τὸν ἀέρα, δηλαδὴ τὸ φαινόμενον βάρος B'_φ τῶν σταθμῶν, εἶναι :

$$B'_\varphi = B' - A' \qquad \text{ἤτοι} \qquad B'_\varphi = B' - \frac{B'}{\rho'} \cdot \rho_\alpha \qquad (1)$$

Κατὰ προσέγγισιν ὁ ὄγκος τοῦ σώματος εἶναι: $V = \frac{B'}{\rho}$

Ἡ ἄνωσις λοιπόν, τὴν ὁποίαν ὑφίσταται τὸ σῶμα, εἶναι :

$$A = V \cdot \rho_\alpha \qquad \text{ἢ} \qquad A = \frac{B'}{\rho} \cdot \rho_\alpha$$

Ὥστε τὸ βάρος τοῦ σώματος εἰς τὸν ἀέρα, δηλαδὴ τὸ φαινόμενον βάρος τοῦ σώματος, εἶναι :

$$B_\varphi = B - A \qquad \text{ἤτοι} \qquad B_\varphi = B - \frac{B'}{\rho} \cdot \rho_\alpha \qquad (2)$$

Ὅταν ὁ ζυγὸς ἰσορροπῇ τὰ φαινόμενα βάρη τοῦ σώματος καὶ τῶν σταθμῶν εἶναι ἴσα, δηλαδὴ εἶναι ἴσα τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) καὶ συνεπῶς ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$B - \frac{B'}{\rho} \cdot \rho_\alpha = B' - \frac{B'}{\rho'} \cdot \rho_\alpha$$

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἀπόλυτον βάρος B τοῦ σώματος εἶναι :

$$B = B' - \frac{B'}{\rho'} \cdot \rho_\alpha + \frac{B'}{\rho} \cdot \rho_\alpha$$

$$\text{ἢ} \qquad B = B' \cdot \left(1 - \frac{\rho_\alpha}{\rho'} + \frac{\rho_\alpha}{\rho}\right)$$

Ἂν εἰς τὴν εὑρεθεῖσαν ἐξίσωσιν θέσωμεν :

$B' = 58{,}64\ gr^* \qquad \rho = 2{,}3\ gr^*/cm^3 \qquad \rho' = 8{,}4\ gr^*/cm^3$

$\rho_\alpha = 1{,}29\ gr^*/dm^3 = 0{,}00129\ gr^*/cm^3$

λαμβάνομεν ὅτι τὸ ζητούμενον ἀπόλυτον βάρος B τοῦ σώματος εἶναι :

$$B = 58{,}64 \cdot \left(1 - \frac{0{,}00129}{8{,}4} + \frac{0{,}00129}{2{,}3}\right) \text{gr}^*$$

καὶ $$B = \mathbf{58{,}6634\ gr^*}$$

167

Ἡ σφαῖρα ἔχει ὄγκον $V = 7{,}5$ dm³, τὸ δὲ περίβλημα αὐτῆς ἔχει βάρος $B_\Sigma = 5{,}2$ gr*. Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑδρογόνου εἶναι $\rho_Y = 0{,}09$ gr*/dm³. Ὥστε τὸ βάρος τοῦ περιεχομένου ὑδρογόνου εἶναι:

$$B_Y = V \cdot \rho_Y \quad \text{ἤ} \quad B_Y = 7{,}5 \cdot 0{,}09 \left(\text{dm}^3 \cdot \frac{\text{gr}^*}{\text{dm}^3}\right)$$

καὶ $$B_Y = 0{,}675 \text{ gr}^*$$

Οὕτω τὸ ὁλικὸν βάρος $B_{o\lambda}$ τῆς σφαίρας εἶναι :

$$B_{o\lambda} = B_Y + B_\Sigma \quad \text{ἤτοι} \quad B_{o\lambda} = 0{,}675 + 5{,}2 = 5{,}875 \text{ gr}^*$$

Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀέρος εἶναι $\rho_A = 1{,}293$ gr*/dm³. Ἄρα ἡ ἄνωσις A, τὴν ὁποίαν ὑφίσταται ἡ σφαῖρα, εἶναι :

$$A = V \cdot \rho_A \quad \text{ἤ} \quad A = 7{,}5 \cdot 1{,}293 \left(\text{dm}^3 \cdot \frac{\text{gr}^*}{\text{dm}^3}\right)$$

καὶ $$A = 9{,}6975 \text{ gr}^*$$

Ἐπὶ τῆς σφαίρας ἐνεργεῖ ἀνυψωτικὴ δύναμις F ἴση μέ :

$$F = A - B_{o\lambda} \quad \text{ἤ} \quad F = 9{,}6975 - 5{,}875 = \mathbf{3{,}8225\ gr^*}$$

168

Ἡ σφαῖρα τοῦ ἀεροστάτου ἔχει ἀκτῖνα $r = 1$ m. Ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ ἀεροστάτου εἶναι :

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 1^3 = 4{,}187 \text{ m}^3$$

ἤ $$V = 4\,187 \text{ dm}^3$$

Τὸ βάρος τοῦ περιεχομένου ὑδρογόνου εἶναι :

$$B_Y = V \cdot \rho_Y \quad \text{ἤ} \quad B_Y = 4187 \cdot 0{,}09 \left(\text{dm}^3 \cdot \frac{\text{gr}^*}{\text{dm}^3}\right)$$

καὶ $$B_Y = 376{,}83 \text{ gr}^*$$

Τὸ περίβλημα καὶ τὰ ἐξαρτήματα ἔχουν βάρος 100 gr*. Ἄρα τὸ ὁλικὸν βάρος $B_{ολ}$ τῆς συσκευῆς εἶναι :

$$B_{ολ} = 376{,}83 + 100 = 476{,}83 \text{ gr*}$$

Τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ἀέρος, δηλαδὴ ἡ ἄνωσις A, εἶναι:

$$A = V \cdot \rho_A \quad ἢ \quad A = 4\,187 \cdot 1{,}29 \left(\text{dm}^3 \cdot \frac{\text{gr*}}{\text{dm}^3} \right)$$

καὶ

$$A = 5\,401{,}25 \text{ gr*}$$

Τὸ ἀερόστατον δύναται νὰ ἀνυψώσῃ βάρος ἴσον μὲ τὴν ἀνυψωτικὴν δύναμιν F, ἡ ὁποία ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ ἀεροστάτου καὶ ἡ ὁποία εἶναι :

$$F = A - B_{ολ} \quad ἢ \quad F = 5\,401{,}25 - 476{,}83 = \mathbf{4\,924{,}42 \text{ gr*}}$$

ΜΟΡΙΑΚΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ

169

Ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας θερμοκρασίας καὶ πιέσεως εἰς 1 cm³ παντὸς ἀερίου περιέχεται σταθερὸς ἀριθμὸς μορίων, ὁ ὁποῖος δίδεται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τοῦ Loschmidt :

$$N_L = 26{,}87 \cdot 10^{18} \text{ μόρια/cm}^3$$

Ὁ πληθυσμὸς τῆς Γῆς εἶναι $N = 2{,}5 \cdot 10^9$ ἄνθρωποι. Ἴσος ἀριθμὸς μορίων ὑδρογόνου, εὑρισκομένου ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας, περιέχεται ἐντὸς ὄγκου V ὑδρογόνου, ὁ ὁποῖος εἶναι ἴσος μέ :

$$V = \frac{N}{N_L} \quad ἢ \quad V = \frac{2{,}5 \cdot 10^9}{26{,}87 \cdot 10^{18}} \left(\frac{\text{μόρια}}{\text{μόρια/cm}^3} \right)$$

καὶ

$$V = \frac{0{,}093}{10^9} \text{ cm}^3 = \mathbf{\frac{93}{10^{12}} \text{ cm}^3}$$

170

Ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας θερμοκρασίας καὶ πιέσεως εἰς 1 cm³ ὀξυγόνου περιέχεται ἀριθμὸς μορίων ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν τοῦ Loschmidt :

$$N_L = 26{,}87 \cdot 10^{18} \text{ μόρια/cm}^3$$

Ἄρα εἰς ὄγκον ὀξυγόνου $V = 1\ m^3$ ἤτοι $V = 10^6\ cm^3$ περιέχονται N μόρια, τὰ ὁποῖα εἶναι :

$$N = V \cdot N_L \quad \text{ἤτοι} \quad N = 10^6 \cdot 26{,}87 \cdot 10^{18} \left(cm^3 \cdot \frac{\text{μόρια}}{cm^3}\right)$$

καὶ $$N = \mathbf{26{,}87 \cdot 10^{24}}\ \textbf{μόρια}$$

171

Ἡ κινητικὴ θεωρία ἀπέδειξεν ὅτι ἡ πίεσις p ἑνὸς ἀερίου εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν πυκνότητα d τοῦ ἀερίου καὶ ἀνάλογος πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ταχύτητος υ τῶν μορίων τοῦ ἀερίου. Τὸ συμπέρασμα τοῦτο δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$p = \frac{1}{3} d \cdot \upsilon^2 \qquad (1)$$

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν τὴν ταχύτητα υ τῶν μορίων τοῦ ἀέρος ὑπὸ τὰς κανονικὰς συνθήκας, πρέπει νὰ ἐκφράσωμεν τὰ μεγέθη p καὶ d εἰς μονάδας τοῦ συστήματος C. G. S. Οὕτω ἔχομεν :

$$d = 1{,}293\ gr/dm^3 = 0{,}001293\ gr/cm^3$$

$$p = 76\ cm\ Hg = 76 \cdot 13{,}6 \cdot 981\ dyn/cm^2$$

ἤτοι $$p = 1\,013\,373\ dyn/cm^3$$

Κατὰ προσέγγισιν ἠμποροῦμε νὰ λάβωμεν :

$$p = 10^6\ dyn/cm^2$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ταχύτης υ τῶν μορίων τοῦ ἀέρος εἶναι :

$$\upsilon = \sqrt{\frac{3p}{d}} \quad \text{ἤτοι} \quad \upsilon = \sqrt{\frac{3 \cdot 10^6}{0{,}001293}}\ \text{C.G.S.}$$

καὶ $$\upsilon = \sqrt{\frac{10^{12}}{431}}\ \text{C.G.S.} \quad \text{ἢ} \quad \upsilon = \mathbf{481 \cdot 10^2\ cm/sec = 481\ m/sec}$$

ΑΝΤΙΣΤΑΣΙΣ ΤΟΥ ΑΕΡΟΣ

172

Ὅταν ἕνα σῶμα βάρους Β πίπτῃ μὲ τὴν ὁρικὴν ταχύτητα υ, τότε τὸ βάρος τοῦ σώματος εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀντίστασιν τοῦ ἀέρος, δηλαδὴ ἰσχύει τότε ἡ σχέσις :

$$K \cdot \sigma \cdot \upsilon^2 = B$$

Δίδεται ὅτι διὰ τὸ ἀλεξίπτωτον εἶναι :

$K = 0{,}123 \qquad \upsilon = 3{,}5\ \mathrm{m/sec} \qquad B = 95\ \mathrm{kgr^*}$

'Απὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν τῆς πτώσεως σώματος μὲ τὴν ὁρικὴν ταχύτητα εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη μετωπικὴ ἐπιφάνεια σ τοῦ ἀλεξιπτώτου, μετρημένη εἰς m^2, εἶναι :

$$\sigma = \frac{B}{K \cdot \upsilon^2} \quad \text{ἢ} \quad \sigma = \frac{95}{0{,}123 \cdot 3{,}5^2}\ \mathrm{m^2}$$

καὶ $\quad \boldsymbol{\sigma = 63{,}3\ m^2}$

173

῾Η σταγὼν τῆς βροχῆς ἔχει ἀκτῖνα r καὶ μετωπικὴν ἐπιφάνειαν $\sigma = \pi r^2$. Τὸ βάρος τῆς σταγόνος εἶναι B. "Οταν ἡ σταγὼν πίπτῃ μὲ τὴν ὁρικὴν ταχύτητα, τότε ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος $R = K \cdot \sigma \cdot \upsilon^2$ εἶναι ἴση μὲ τὸ βάρος B τῆς σταγόνος, δηλαδὴ ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$B = K \cdot \sigma \cdot \upsilon^2 \qquad (1)$$

Γνωρίζομεν ὅτι ὁ συντελεστὴς ἀντιστάσεως K ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ σχῆμα τοῦ σώματος. "Ωστε διὰ τὴν σφαιρικὴν σταγόνα τῆς βροχῆς καὶ διὰ τὴν ἄλλην σφαῖραν, ἡ ὁποία ἔχει ἀκτῖνα $r_\sigma = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ \mathrm{m}$, ἡ τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ ἀντιστάσεως K εἶναι ἡ ἰδία. ῾Η δευτέρα αὐτὴ σφαῖρα ἔχει μετωπικὴν ἐπιφάνειαν $\sigma' = \pi r_\sigma^2$. Δίδεται δὲ ὅτι, ἂν ἡ σφαῖρα αὐτὴ πίπτῃ μὲ ταχύτητα $\upsilon_\sigma = 1\ \mathrm{m/sec}$, τότε ἐπὶ τῆς σφαίρας ἀναπτύσσεται ἀντίστασις τοῦ ἀέρος : $\quad R_\sigma = 0{,}03\ \mathrm{kgr^*}$.

Η ἀντίστασις αὐτὴ R_σ δίδεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν :

$$R_\sigma = K \cdot \sigma' \cdot \upsilon_\sigma^2 \qquad (2)$$

"Αν εἰς τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν θέσωμεν :

$$R_\sigma = 0{,}03\ \mathrm{kgr^*} \qquad \upsilon_\sigma = 1\ \mathrm{m/sec} \qquad \sigma' = \pi r_\sigma^2 = \pi \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = 1\ \mathrm{m^2}$$

εὑρίσκομεν ὅτι ὁ συντελεστὴς ἀντιστάσεως K ἔχει τὴν τιμήν :

$$K = \frac{R_\sigma}{\sigma' \cdot \upsilon_\sigma^2} \quad \text{ἤτοι} \quad K = \frac{0{,}03}{1 \cdot 1^2}\left(\frac{\mathrm{kgr^*}}{\mathrm{m^2 \cdot (\ m/sec\ )^2}}\right)$$

$$\text{καὶ} \quad K = 0{,}03\ \frac{\mathrm{kgr^*}}{\mathrm{m^2 \cdot (\ m/sec\ )^2}}$$

Αὐτὴν τὴν τιμὴν τοῦ Κ θὰ θέσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) ἀπὸ τὴν ὁποίαν θὰ εὕρωμεν τὴν ὁρικὴν ταχύτητα υ, ἀρκεῖ νὰ ἐκφράσωμεν τὴν μετωπικὴν ἐπιφάνειαν σ τῆς σταγόνος εἰς m^2 καὶ τὸ βάρος Β τῆς σταγόνος εἰς kgr*. Δίδεται ὅτι εἶναι :

$$r = 0{,}2\ \mathrm{cm} = 0{,}002\ \mathrm{m}$$

Ἄρα ἡ μὲν μετωπικὴ ἐπιφάνεια εἶναι :

$$\sigma = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{2}{10^3}\right)^2 = \frac{4\pi}{10^6}\ \mathrm{m}^2$$

Ὁ δὲ ὄγκος τῆς σταγόνος εἶναι :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{2}{10^3}\right)^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{8}{10^9}\ \mathrm{m}^3$$

Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος εἶναι :

$$\rho_Y = 1\ \mathrm{gr^*/cm^3} = 1\ \mathrm{kgr^*/dm^3} = 1000\ \mathrm{kgr^*/m^3}$$

Τὸ βάρος λοιπὸν τῆς σταγόνος, μετρημένον εἰς kgr*, εἶναι :

$$B = V \cdot \rho_Y \quad \text{ἢ} \quad B = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{8}{10^9} \cdot 1000 \left(\mathrm{m^3} \cdot \frac{\mathrm{kgr^*}}{\mathrm{m^3}}\right)$$

$$\text{καὶ} \quad B = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{8}{10^6}\ \mathrm{kgr^*}$$

Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν Β, Κ καὶ σ, λαμβάνομεν :

$$\frac{4\pi}{3} \cdot \frac{8}{10^6} = 0{,}03 \cdot \frac{4\pi}{10^6} \cdot \upsilon^2 \quad \text{ἢ} \quad \frac{8}{3} = 0{,}03 \cdot \upsilon^2$$

Ἡ ζητουμένη ὁρικὴ ταχύτης υ τῆς σταγόνος τῆς βροχῆς εἶναι :

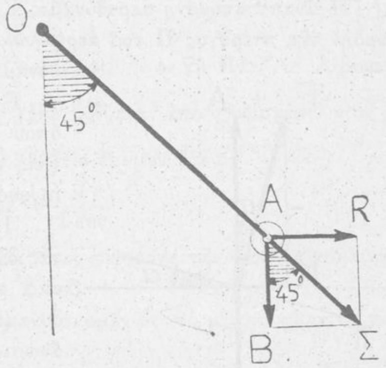
$$\upsilon = \sqrt{\frac{8}{3 \cdot 0{,}03}}\ \mathrm{m/sec} \quad \text{ἢ} \quad \upsilon = \mathbf{9{,}43\ m/sec}$$

174

Ἐπὶ τῆς σφαίρας ἐνεργοῦν δύο δυνάμεις τὸ βάρος Β τῆς σφαίρας καὶ ἡ ἀντίστασις R τοῦ ἀέρος (σχ. 34). Ὅταν ἡ σφαῖρα ἰσορροπῇ, τότε ἡ ράβδος ΟΑ σχηματίζει γωνίαν 45° μὲ τὴν κατακόρυφον. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΣ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ συνεπῶς ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος R εἶναι ἴση μὲ τὸ βάρος R τῆς σφαίρας, ἤτοι εἶναι :

$$B = R$$

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι ἡ σφαῖρα, ἂν πίπτῃ ἐντὸς ἠρεμοῦντος ἀέρος, ἀποκτᾷ τὴν ὁρικὴν ταχύτητα υ, ὅταν τὸ βάρος Β τῆς σφαίρας γίνῃ ἴσον μὲ τὴν ἀντίστασιν R τοῦ ἀέρος. Ἑπομένως ἡ ζητουμένη ὁρικὴ ταχύτης υ τῆς σφαίρας εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ ἀνέμου κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς παρατηρήσεως, δηλαδὴ εἶναι :



Σχ. 34

$$\upsilon = \mathbf{10\ m/sec}$$

175

Γνωρίζομεν ὅτι εἰς μὲν τὴν κάτω ἐπιφάνειαν τῆς πτέρυγος τοῦ ἀεροπλάνου ἀνταπτύσσεται ὑπερπίεσις, εἰς δὲ τὴν ἄνω ἐπιφάνειαν ἀναπτύσσεται ὑποπίεσις. Ἕνεκα τῆς τοιαύτης διαφορᾶς πιέσεως μεταξὺ τῆς κατωτέρας καὶ τῆς ἀνωτέρας ἐπιφανείας τῆς πτέρυγος καθίσταται δυνατὴ ἡ στήριξις τοῦ ἀεροπλάνου εἰς τὸν ἀέρα.

Δίδεται ὅτι τὸ φορτίον F, τὸ ὁποῖον ὑποβαστάζει μία πτέρυξ ἀεροπλάνου ἀνέρχεται εἰς $F = 50$ kgr*/m². Ἑπομένως ἡ διαφορὰ πιέσεως Δp μεταξὺ τῆς κατωτέρας καὶ τῆς ἀνωτέρας ἐπιφανείας τῆς πτέρυγος εἶναι :

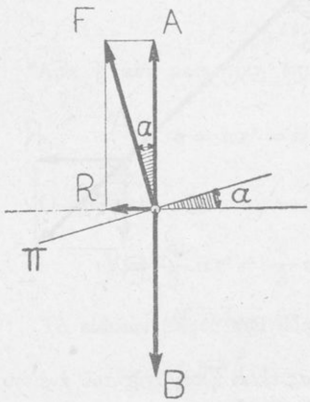
$$\Delta p = \frac{F}{\sigma} \qquad \text{ἢ} \qquad \Delta p = \frac{50\,000}{10\,000}\left(\frac{gr^*}{cm^2}\right)$$

$$\Delta p = \frac{F}{\sigma} \qquad \text{ἢ} \qquad \Delta p = \frac{50\ kgr^*}{1\ m^2} = \frac{50\,000}{10\,000}\left(\frac{gr^*}{cm^2}\right)$$

$$\text{καὶ} \quad \Delta p = \mathbf{5\ gr^*/cm^2}$$

176

Ἡ ἀναπτυσσομένη ἀεροδύναμις F εἶναι περίπου κάθετος πρὸς τὴν χορδὴν τῆς πτέρυγος Π τοῦ ἀεροπλάνου (σχ. 34).Δίδεται ὅτι ἡ ἀεροδύναμις F εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:



Σχ. 34

$$F = 0{,}03 \cdot \Sigma \cdot \upsilon^2 \text{ kgr*} \qquad (1)$$

ὅπου Σ εἶναι ἡ φέρουσα ἐπιφάνεια (εἰς m^2) καὶ υ ἡ ταχύτης (εἰς m/sec).

Ἡ ἀεροδύναμις F ἀναλύεται εἰς τὰς δύο καθέτους μεταξύ των συνιστώσας, τὴν δυναμικὴν ἄνωσιν A καὶ τὴν δυναμικὴν ἀντίστασιν R. Ἡ δυναμικὴ ἄνωσις A εἶναι κατακόρυφος. Τὸ ἀεροπλάνον θὰ ἀπογειωθῆ, ὅταν ἡ δυναμικὴ ἄνωσις γίνῃ ἴση μὲ τὸ βάρος B τοῦ ἀεροπλάνου, δηλαδὴ ὅταν γίνῃ:

$$A = B \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ ἡ γωνία προσβολῆς α εἶναι πολὺ μικρά, ἠμποροῦμεν κατὰ προσέγγισιν νὰ θεωρήσωμεν τὴν δυναμικὴν ἄνωσιν A ἴσην μὲ τὴν ἀεροδύναμιν F. Τότε ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται :

$$F = B \quad \text{ἤτοι} \quad 0{,}03 \cdot \Sigma \cdot \upsilon^2 = B \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (3) εὑρίσκομεν τὴν ταχύτητα υ, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἀποκτήσῃ τὸ ἀεροπλάνον διὰ νὰ ἀπογειωθῆ :

$$\upsilon = \sqrt{\frac{B}{0{,}03 \cdot \Sigma}}$$

Δίδεται ὅτι εἶναι B = 6400 kgr* καὶ Σ = 60 m^2. Ἄρα εἶναι :

$$\upsilon = \sqrt{\frac{6400}{0{,}03 \cdot 60}} = \mathbf{59{,}63\ m/sec} \quad \text{καὶ} \quad \upsilon = \mathbf{214{,}67\ km/h}$$

ΚΥΜΑΝΣΕΙΣ

177

Ἡ ταχύτης διαδόσεως υ, ἡ συχνότης ν καὶ τὸ μῆκος κύματος λ τῆς κυμάνσεως συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως :

$$\upsilon = \nu \cdot \lambda .$$

Ἀπὸ τὴν θεμελιώδη αὐτὴν ἐξίσωσιν τῶν κυμάνσεων εὑρίσκομεν :

$$\lambda = \frac{\upsilon}{\nu} \qquad (1)$$

Δίδεται ὅτι εἶναι $\upsilon = 300$ m/sec καὶ $\nu = 75$ Hz. Ἄς λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ μονὰς συχνότητος 1 Hz ὁρίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν $\nu = \frac{1}{T}$ ἂν εἰς αὐτὴν θέσωμεν $T = 1$ sec. Οὕτω ἔχομεν ὅτι :

$$1 \text{ Hz} = \frac{1}{1 \text{ sec}}$$

ἤτοι ὡς μονὰς συχνότητος λαμβάνεται ἡ συχνότης τῆς ὁμαλῆς κυκλικῆς κινήσεως, ἡ ὁποία ἔχει περίοδον 1 sec.

Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μῆκος κύματος τῆς κυμάνσεως εἶναι :

$$\lambda = \frac{300}{75}\left(\frac{\text{m/sec}}{1/\text{sec}}\right) \qquad \text{ἤτοι} \qquad \lambda = \mathbf{4\ m}$$

178

Ἡ συχνότης τῆς κυμάνσεως εἶναι $\nu = 2\,500$ Hz, τὸ δὲ μῆκος κύματος αὐτῆς εἶναι $\lambda = 2$ cm. Ἡ ταχύτης διαδόσεως υ τῆς κυμάνσεως δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$\upsilon = \nu \cdot \lambda$$

Θέτοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν τὰς δοθείσας τιμὰς (βλ. πρόβλ. 177 διὰ τὴν μονάδα 1 Hz) εὑρίσκομεν :

$$\upsilon = 2\,500 \cdot 2\left(\frac{1}{\text{sec}} \cdot \text{cm}\right)$$

$$\text{ἤτοι} \qquad \upsilon = \mathbf{5\,000\ cm/sec = 50\ m/sec}$$

179

Τὸ μῆκος κύματος τῆς κυμάνσεως εἶναι $\lambda = 400$ m, ἡ δὲ ταχύτης διαδόσεως υ τῆς κυμάνσεως εἶναι $\upsilon = 300\,000$ km/sec. Ἀπὸ τὴν θεμελιώδη ἐξίσωσιν τῶν κυμάνσεων :

$$\upsilon = \nu \cdot \lambda$$

εὑρίσκομεν ὅτι ἡ συχνότης τῆς κυμάνσεως εἶναι :

$$\nu = \frac{\upsilon}{\lambda} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \nu = \frac{300 \cdot 10^6}{400}\left(\frac{\text{m/sec}}{\text{m}}\right)$$

$$\text{καὶ} \quad \nu = 75 \cdot 10^4 \left(\frac{1}{\text{sec}}\right) \quad \text{ἢ} \quad \nu = 75 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ μονὰς 1 Hertz (1 Hz) καλεῖται καὶ 1 κύκλος (1 c). Ἐπίσης γνωρίζομεν ὅτι εἶναι: 1 μεγάκυκλος (1 Mc) $= 10^6$ c

Ἄρα ἡ εὑρεθεῖσα συχνότης ἐκπεφρασμένη εἰς κύκλους εἶναι :

$$\nu = 75 \cdot 10^4 \text{ c}$$

καὶ εἰς μεγακύκλους εἶναι :

$$\nu = \frac{75 \cdot 10^4}{10^6} = \mathbf{0{,}75\ Mc}$$

180

Ἡ εὐθεῖα AB ἔχει μῆκος $l = 10$ m, τὸ δὲ μῆκος κύματος τῆς κυμάνσεως εἶναι $\lambda = 40$ cm. Τὸ μῆκος τῆς εὐθείας AB, μετρημένον εἰς μήκη κύματος τῆς κυμάνσεως, ἰσοῦται μέ :

$$\text{x} = \frac{l}{\lambda} \quad \text{ἢ} \quad \text{x} = \frac{1000}{40}\left(\frac{\text{cm}}{\text{cm}}\right)$$

$$\text{καὶ} \quad \text{x} = \mathbf{25}\ \textbf{μήκη κύματος}$$

Ἡ κύμανσις, ἀναχωροῦσα ἀπὸ τὸ ἄκρον A τῆς εὐθείας, φθάνει εἰς τὸ ἄκρον B τῆς εὐθείας μετὰ παρέλευσιν 25 περιόδων.

181

Τὸ ἐκκρεμὲς ἔχει μῆκος $l = 60$ cm καὶ περίοδον T, ἡ ὁποία προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἐκκρεμοῦς :

$$\text{T} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{\text{g}}}$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν :

$$\text{T} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{60}{980}\left(\frac{\text{cm}}{\text{cm/sec}^2}\right)} \quad \text{ἤτοι} \quad \text{T} = \mathbf{1{,}57\ sec}$$

Εἶναι γνωστὸν ὅτι δύο ταλαντευόμενα συστήματα εὑρίσκονται εἰς συντονισμόν, ὅταν τὰ δύο συστήματα ἔχουν τὴν αὐτὴν συχνότητα. Τὸ δοθὲν ἐκκρεμὲς ἔχει συχνότητα :

$$\nu = \frac{1}{\text{T}} = \frac{1}{1{,}57}\left(\frac{1}{\text{sec}}\right) = 0{,}64 \text{ Hz}$$

Ὥστε τὸ δοθὲν ἐκκρεμὲς θὰ διεγερθῇ συντονιζόμενον, ἂν ἡ διεγείρουσα συχνότης εἶναι :

$$\nu = \mathbf{0{,}64\ Hz}$$

ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ

ΔΙΑΔΟΣΙΣ ΤΟΥ ΗΧΟΥ - ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΩΝ ΗΧΩΝ

182

Εἰς τὸν ἀέρα ἡ ταχύτης υ τοῦ ἤχου εἰς θερμοκρασίαν θ°C δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$\upsilon = 331 \cdot \sqrt{1 + \frac{\theta}{273}} \qquad (1)$$

Δίδεται ὅτι εἰς θ°C ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἶναι $\upsilon = 350$ m/sec. Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) ἠμποροῦμε νὰ εὕρωμεν τὴν θερμοκρασίαν θ, διότι, ἂν ὑψώσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως εἰς τὸ τετράγωνον, λαμβάνομεν:

$$\upsilon^2 = 331^2 \cdot \left(1 + \frac{\theta}{273}\right) \qquad (2)$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν (2) ὡς πρὸς θ ἔχομεν :

$$\theta = \left(\frac{\upsilon^2}{331^2} - 1\right) \cdot 273 \quad \text{ἢ} \quad \theta = \left(\frac{350^2 - 331^2}{331^2}\right) \cdot 273 \cdot$$

καὶ $\theta = \mathbf{32{,}2^\circ\ C}$

183

Εἰς θερμοκρασίαν 15°C ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἶναι $\upsilon_{15} = 340$ m/sec καὶ δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\upsilon_{15} = 331 \cdot \sqrt{1 + \frac{15}{273}} \qquad (1)$$

Εἰς θερμοκρασίαν 10°C ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἶναι υ_{10} καὶ δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\upsilon_{10} = 331 \cdot \sqrt{1 + \frac{10}{273}} \qquad (2)$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

$$\frac{\upsilon_{10}}{\upsilon_{15}} = \sqrt{\frac{273+10}{273} : \frac{273+15}{273}}$$

$$\text{ἢ} \qquad \frac{\upsilon_{10}}{\upsilon_{15}} = \sqrt{\frac{283}{288}} = 0{,}991.$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη ταχύτης υ_{10} τοῦ ἤχου εἰς 10°C εἶναι:

$$\upsilon_{10} = 0{,}991 \cdot \upsilon_{15}$$

ἤτοι $\upsilon_{10} = 0{,}991 \cdot 340$ m/sec καὶ $\upsilon_{10} =$ **336,9 m/sec**

184

Ἄς καλέσωμεν Α καὶ Β τὰ δύο παράλληλα ὄρη, τὰ ὁποῖα περιβάλλουν τὴν κοιλάδα καὶ Π τὴν θέσιν τοῦ παρατηρητοῦ. Ἔστω ΠΑ ἡ ἀπόστασις τοῦ παρατηρητοῦ ἀπὸ τὸ πλησιέστερον ὄρος Α. Ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἶναι $\upsilon = 340$ m/sec.

α) Ὁ παρατηρητὴς ἀκούει τὴν πρώτην ἠχὼ 0,5 sec μετὰ τὸν πυροβολισμόν. Ἄρα ἐντὸς χρόνου $t = 0{,}5$ sec ὁ ἦχος διέτρεξε δύο φορὰς τὴν ἀπόστασιν ΠΑ καὶ συνεπῶς ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$2 \cdot \Pi A = \upsilon \cdot t \qquad \text{ἢ} \qquad 2 \cdot \Pi A = 340 \cdot 0{,}5 \left(\frac{m}{sec} \cdot sec\right)$$

καὶ $$\Pi A = 85 \text{ m}$$

Ὁ παρατηρητὴς ἀκούει καὶ δευτέραν ἠχὼ 1 sec μετὰ τὸν πυροβολισμόν. Ἡ ἠχὼ αὐτὴ προέρχεται ἐκ τῆς ἀνακλάσεως τοῦ ἤχου ἐπὶ τοῦ μακρύτερον εὑρισκομένου ὄρους Β καὶ συνεπῶς ἐντὸς χρόνου $t' = 1$ sec ὁ ἦχος διέτρεξε δύο φορὰς τὴν ἀπόστασιν ΠΒ· ἄρα εἶναι:

$$2 \cdot \Pi B = \upsilon \cdot t' \qquad \text{ἢ} \qquad 2 \cdot \Pi B = 340 \cdot 1 \left(\frac{m}{sec} \cdot sec\right)$$

καὶ $$\Pi B = 170 \text{ m}$$

Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο ὀρέων εἶναι:

$$AB = \Pi A + \Pi B \qquad \text{ἢ} \qquad AB = 85 + 170 = \mathbf{225\ m}$$

β) Ὁ ἐπὶ τοῦ ὄρους Α ἀνακλώμενος ἦχος διατρέχει τὴν ἀπόστασιν 2 ΠΑ ἐντὸς 0,5 sec καὶ ἐξακολουθεῖ ἔπειτα τὴν διάδοσίν του πρὸς τὸ ὄρος Β ἐπὶ τοῦ ὁποίου ὑφίσταται δευτέραν ἀνάκλασιν καὶ ἐπιστρέφει πάλιν εἰς τὸν παρατηρητήν. Οὕτω ὁ παρατηρητὴς θὰ ἀκούσῃ καὶ τρίτην ἠχώ. Ὁ ἦχος, τὸν ὁποῖον θὰ ἀκούσῃ τότε ὁ παρατηρητής, ὑπέστη δύο διαδοχικὰς ἀνακλάσεις καὶ διέτρεξε:

τὴν ἀπόστασιν 2 ΠΑ ἐντὸς 0,5 sec

τὴν ἀπόστασιν 2 ΠΒ ἐντὸς 1 sec.

Ἄρα ὁ παρατηρητὴς θὰ ἀκούσῃ τὴν τρίτην ἠχὼ 1,5 sec μετὰ τὸν πυροβολισμόν. Ὁμοίως ὁ ἐπὶ τοῦ ὄρους Β ἀνακλώμενος ἦχος διατρέχει τὴν ἀπόστασιν 2 ΠΒ ἐντὸς 1 sec, ἐξακολουθεῖ τὴν διάδοσίν του πρὸς τὸ ὄρος Α, ἐκεῖ ἀνακλᾶται διὰ δευτέραν φορὰν καὶ ἐπιστρέφει εἰς τὸν παρατηρητήν. Ὁ ἦχος, τὸν ὁποῖον θὰ ἀκούσῃ τότε ὁ παρατηρητής, ὑπέστη δύο διαδοχικὰς ἀνακλάσεις καὶ διέτρεξε:

τὴν ἀπόστασιν 2 ΠΒ ἐντὸς 1 sec

τὴν ἀπόστασιν 2 ΠΑ ἐντὸς 0,5 sec.

Ἄρα ὁ ἦχος οὗτος φθάνει εἰς τὸν παρατηρητὴν 1,5 sec μετὰ τὸν πυροβολισμόν. Ἡ τρίτη λοιπὸν ἠχὼ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν σύγχρονον ἄφιξιν εἰς τὸν παρατηρητὴν δύο ἤχων.

185

Ἔστω x ἡ ἀπόστασις τοῦ πλοίου ἀπὸ τὸν παρατηρητήν. Ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἶναι $\upsilon_A = 340$ m/sec, ἡ δὲ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὴν θάλασσαν εἶναι $\upsilon_\Theta = 1440$ m/sec. Ὁ διὰ μέσου τοῦ ἀέρος διαδιδόμενος ἦχος φθάνει εἰς τὴν ἀκτήν, ἀνακλᾶται ἐπ' αὐτῆς καὶ ἐπιστρέφει εἰς τὸ πλοῖον μετὰ χρόνον t_A ἀπὸ τὴν στιγμὴν τῆς ἐκπομπῆς τοῦ ἠχητικοῦ σήματος. Οὕτω διὰ τὸν ἐντὸς τοῦ ἀέρος διαδιδόμενον ἦχον ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$2x = \upsilon_A \cdot t_A \qquad \text{ἄρα} \qquad t_A = \frac{2x}{\upsilon_A}$$

Ὁμοίως ὁ διὰ μέσου τῆς θαλάσσης διαδιδόμενος ἦχος φθάνει εἰς τὴν ἀκτήν, ἀνακλᾶται ἐπ' αὐτῆς καὶ ἐπιστρέφει εἰς τὸ πλοῖον μετὰ χρόνον t_Θ ἀπὸ τὴν στιγμὴν τῆς ἐκπομπῆς τοῦ ἠχητικοῦ σήματος καὶ συνεπῶς ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$2x = \upsilon_\Theta \cdot t_\Theta \qquad \text{ἄρα} \qquad t_\Theta = \frac{2x}{\upsilon_\Theta}$$

Ἐπειδὴ εἶναι $\upsilon_\Theta > \upsilon_A$ ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι $t_A > t_\Theta$ δηλαδὴ εἰς τὸ πλοῖον ἐπιστρέφει πρῶτος ὁ διὰ μέσου τῆς θαλάσσης διαδιδόμενος ἦχος. Δίδεται ὅτι εἰς τὸ πλοῖον οἱ ἐξ ἀνακλάσεως ἀκουόμενοι δύο ἦχοι ἀπέχουν μεταξύ των χρονικῶς κατὰ 13 sec. Ἄρα ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$t_A - t_\Theta = 13 \text{ sec}$$

Ἂν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν θέσωμεν τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τῶν t_A καὶ t_Θ λαμβάνομεν:

$$\frac{2x}{\upsilon_A} - \frac{2x}{\upsilon_\Theta} = 13$$

Λύοντες τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ὡς πρὸς x εὑρίσκομεν:

$$x = \frac{13 \cdot \upsilon_A \cdot \upsilon_\Theta}{2 \cdot (\upsilon_\Theta - \upsilon_A)} \quad \text{ἤτοι} \quad x = \frac{13 \cdot 340 \cdot 1440}{2 \cdot (1440 - 340)} \left[\frac{\text{sec} \cdot (\text{m/sec})^2}{\text{m/sec}} \right]$$

$$\text{καὶ} \quad x = \mathbf{2893\ m}$$

186

Ὁ ἦχος ἔχει συχνότητα $\nu = 400$ Hz. Ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἶναι $\upsilon_A = 340$ m/sec καὶ εἰς τὸν χάλυβα εἶναι $\upsilon_X = 5000$ m/sec. Τὰ ἀντίστοιχα μήκη κύματος ἐντὸς τῶν δύο τούτων ἐλαστικῶν μέσων εἶναι λ_A καὶ λ_X. Ἂν ἐφαρμόσωμεν τὴν θεμελιώδη ἐξίσωσιν τῶν κυμάνσεων:

$$\upsilon = \nu \cdot \lambda$$

εἰς τὰς δύο ἀνωτέρω περιπτώσεις, λαμβάνομεν τὰς σχέσεις:

διὰ τὸν ἀέρα : $\upsilon_A = \nu \cdot \lambda_A$ (1)

διὰ τὸν χάλυβα : $\upsilon_X = \nu \cdot \lambda_X$ (2)

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι:

α) μῆκος κύματος εἰς τὸν ἀέρα:

$$\lambda_A = \frac{\upsilon_A}{\nu} \quad \text{ἢ} \quad \lambda_A = \frac{340}{400} \left(\frac{\text{m/sec}}{1/\text{sec}} \right) = \mathbf{0{,}85\ m}$$

β) μῆκος κύματος εἰς τὸν χάλυβα:

$$\lambda_X = \frac{\upsilon_X}{\nu} \quad \text{ἢ} \quad \lambda_X = \frac{5000}{400} \left(\frac{\text{m/sec}}{1/\text{sec}} \right) = \mathbf{12{,}50\ m}$$

187

Ὁ δίσκος τῆς σειρῆνος φέρει $\kappa = 10$ ὀπὰς καὶ ἐκτελεῖ $\mu = 26$ στροφὰς κατὰ δευτερόλεπτον. Γνωρίζομεν ὅτι ὁ δίσκος τῆς σειρῆνος προκαλεῖ περιοδικὰς διαταράξεις εἰς τὸν ἀέρα καὶ οὕτω παράγεται ἦχος, ὁ ὁποῖος ἔχει συχνότητα:

$$\nu = \kappa \cdot \mu$$

Ὥστε εἰς τὴν δοθεῖσαν σειρῆνα ὁ παραγόμενος ἦχος ἔχει συχνότητα :

$$\nu = 10 \cdot 26 = \mathbf{260\ Hz}$$

188

Οἱ δίσκοι τῶν σειρήνων A καὶ B φέρουν ἀντιστοίχως:

$$\varkappa_A = 50 \text{ ὀπὰς} \qquad \varkappa_B = 80 \text{ ὀπὰς}$$

Ὁ δίσκος τῆς σειρῆνος A ἐκτελεῖ : $\mu_A = 8$ στροφὰς/sec

Ἄρα ὁ παραγόμενος ὑπὸ τῆς σειρῆνος A ἦχος ἔχει συχνότητα:

$$\nu_A = \varkappa_A \cdot \mu_A = 50 \cdot 8 = 400 \text{ Hz}$$

Ὁ δίσκος τῆς σειρῆνος B θὰ ἐκτελῇ: μ_B στροφὰς/sec

καὶ ὁ παραγόμενος ὑπὸ τῆς σειρῆνος B ἦχος θὰ ἔχῃ συχνότητα:

$$\nu_B = \varkappa_B \cdot \mu_B$$

Ὁ ἦχος τῆς σειρῆνος B θὰ εἶναι ὁ δεύτερος ἁρμονικὸς τοῦ ὑπὸ τῆς σειρῆνος A παραγομένου ἤχου. Δηλαδὴ ἡ συχνότης τοῦ ὑπὸ τῆς σειρῆνος B παραγομένου ἤχου θὰ εἶναι:

$$\nu_B = 2 \cdot \nu_A = 800 \text{ Hz}$$

Ἄρα ὁ δίσκος τῆς σειρῆνος B πρέπει νὰ ἐκτελῇ:

$$\mu_B = \frac{\nu_B}{\varkappa_B} = \frac{800}{80} = \mathbf{10\ \text{στροφὰς/sec}}$$

189

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ συχνότης τοῦ la_3 ὡρίσθη ἴση μὲ 440 Hz καὶ ὅτι εἰς τὴν συγκεκραμένην κλίμακα ὑπάρχουν 5 τόνοι καὶ 2 ἡμιτόνια, τῶν ὁποίων τὰ διαστήματα εἶναι ἀντιστοίχως 1,121 καὶ 1,059. Οὕτω εἶναι:

$$\frac{si_3}{la_3} = 1{,}121 \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{do_4}{si_3} = 1{,}059$$

Τὰ σύμβολα τῶν φθόγγων σημαίνουν καὶ τὰς ἀντιστοίχους συχνότητας. Ἐπὶ πλέον, χάριν ἁπλότητος, θὰ θεωρήσωμεν μόνον τὰς ἀκεραίας τιμὰς τῶν συχνοτήτων. Ἂν πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη τὰς δύο ἀνωτέρω σχέσεις, εὑρίσκομεν:

$$\frac{do_4}{la_3} = 1{,}187 \qquad \text{ἄρα} \qquad do_4 = la_3 \cdot 1{,}187$$

$$\text{ἢ} \qquad do_4 = 440 \cdot 1{,}187 \qquad \text{καὶ} \qquad do_4 = \mathbf{522\ Hz}$$

Ὁ φθόγγος do_3 εἶναι κατὰ μίαν ὀγδόην βαρύτερος καὶ συνεπῶς ἡ συχνότης τοῦ do_3 εἶναι:

$$do_3 = \frac{522}{2}\ \text{Hz} \qquad \text{ἤτοι} \qquad do_3 = \mathbf{261\ Hz}$$

Αἱ συχνότητες τῶν ὑπολοίπων φθόγγων τῆς κλίμακος εὑρίσκονται τώρα εὔκολα. Οὕτω ἔχομεν:

$$do_3 = \mathbf{261\ Hz}$$

$$\frac{re_3}{do_3} = 1{,}121 \quad \text{ἄρα} \quad re_3 = 261 \cdot 1{,}121 = \mathbf{292\ Hz}$$

$$\frac{mi_3}{re_3} = 1{,}059 \quad \text{ἄρα} \quad mi_3 = 292 \cdot 1{,}059 = \mathbf{309\ Hz}$$

$$\frac{fa_3}{mi_3} = 1{,}121 \quad \text{ἄρα} \quad fa_3 = 309 \cdot 1{,}121 = \mathbf{346\ Hz}$$

$$\frac{sol_3}{fa_3} = 1{,}121 \quad \text{ἄρα} \quad sol_3 = 346 \cdot 1{,}121 = \mathbf{385\ Hz}$$

$$la_3 = \mathbf{440\ Hz}$$

$$\frac{si_3}{la_3} = 1{,}121 \quad \text{ἄρα} \quad si_3 = 440 \cdot 1{,}121 = \mathbf{493\ Hz}$$

$$do_4 = \mathbf{522\ Hz}$$

190

Ὁ δίσκος τῆς σειρῆνος φέρει εἰς τὴν ἐξωτερικὴν σειρὰν $\varkappa = 40$ ὀπὰς καὶ εἰς τὴν ἐσωτερικὴν σειρὰν φέρει $\varkappa'$ ὀπάς. Ὅταν ὁ δίσκος τῆς σειρῆνος ἐκτελῇ μ στροφὰς κατὰ δευτερόλεπτον, τότε παράγονται δύο ἦχοι τῶν ὁποίων αἱ συχνότητες εἶναι:

$$\nu = \varkappa \cdot \mu \qquad \text{καὶ} \qquad \nu' = \varkappa' \cdot \mu$$

Θέλομεν τὸ διάστημα τῶν συγχρόνως παραγομένων δύο ἤχων νὰ εἶναι 3/2, ἤτοι θέλομεν νὰ εἶναι:

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{3}{2}$$

Ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω σχέσεις εὑρίσκομεν:

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{\varkappa' \cdot \mu}{\varkappa \cdot \mu} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \frac{\nu'}{\nu} = \frac{\varkappa'}{\varkappa}$$

$$\text{ἄρα} \qquad \frac{\varkappa'}{\varkappa} = \frac{3}{2} \qquad \text{καὶ} \qquad \varkappa' = \varkappa \cdot \frac{3}{2}$$

Ἡ ἐσωτερικὴ λοιπὸν σειρὰ πρέπει νὰ φέρει:

$$\varkappa' = 40 \cdot \frac{3}{2} = \mathbf{60}\ \textbf{ὀπὰς}$$

191

Ἡ συχνότης τοῦ ἤχου εἶναι $\nu = 440$ Hz, ἡ δὲ ταχύτης διαδόσεως αὐτοῦ εἰς τὸν ἀέρα εἶναι $\upsilon = 340$ m/sec. Τὸ μῆκος κύματος λ τοῦ ἤχου εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν θεμελιώδη ἐξίσωσιν:

$$\upsilon = \nu \cdot \lambda$$

ὅτι εἶναι:

$$\lambda = \frac{\upsilon}{\nu} = \frac{340}{440}\left(\frac{\text{m/sec}}{1/\text{sec}}\right) = \frac{17}{22}\ \text{m}$$

Ἡ εὐθεῖα AB ἔχει μῆκος $l = 10$ m καὶ μετρημένη εἰς μήκη κύματος τοῦ δοθέντος ἤχου εἶναι:

$$x = \frac{l}{\lambda} \qquad \text{ἤτοι} \qquad x = \frac{10}{17/22}$$

ἤτοι $\quad x = \mathbf{12{,}94}$ **μήκη κύματος**

ΠΗΓΑΙ ΜΟΥΣΙΚΩΝ ΗΧΩΝ

192

Ἡ συχνότης ν τοῦ θεμελιώδους ἤχου, τὸν ὁποῖον δίδει ἡ χορδή, εἶναι:

$$\nu = \frac{1}{2l \cdot r} \cdot \sqrt{\frac{F}{\pi \cdot d}}$$

ὅπου l εἶναι τὸ μῆκος τῆς χορδῆς, r ἡ ἀκτὶς αὐτῆς, d ἡ πυκνότης τῆς χορδῆς καὶ F ἡ δύναμις μὲ τὴν ὁποίαν τείνεται ἡ χορδή. Διὰ νὰ ἐφαρμόσωμεν γενικῶς τὸν τύπον τῶν χορδῶν, θὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι τὰ μεγέθη l, r, d καὶ F θὰ ἐκφράζωνται πάντοτε εἰς μονάδας τοῦ συστήματος C. G. S.

Εἰς τὴν θεωρουμένην χορδὴν δίδεται ὅτι εἶναι:

$$l = 1\ \text{m} = 100\ \text{cm} \qquad r = 0{,}5\ \text{mm} = 0{,}05\ \text{cm}$$

$$d = 8\ \text{gr/cm}^3 \qquad F = 50\ \text{kgr}^* = 50 \cdot 981 \cdot 10^3\ \text{dyn}$$

Ἂν θέσωμεν τὰς τιμὰς αὐτὰς εἰς τὸν τύπον τῶν χορδῶν, λαμβάνομεν:

$$\nu = \frac{1}{2 \cdot 100 \cdot 0,05} \cdot \sqrt{\frac{50 \cdot 981 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 8}} \text{ Hz}$$

καὶ $\nu = \mathbf{139,6\ Hz}$

193

Ἡ συχνότης ν τοῦ θεμελιώδους ἤχου, τὸν ὁποῖον δίδει ἡ χορδή, εἶναι:

$$\nu = \frac{1}{2l \cdot r} \cdot \sqrt{\frac{F}{\pi \cdot d}}$$

Διὰ τὴν θεωρουμένην χορδὴν δίδεται ὅτι εἶναι:

$$l = 0,6 \text{ m} = 60 \text{ cm} \qquad r = 0,4 \text{ mm} = 0,04 \text{ cm}$$
$$d = 6 \text{ gr/cm}^3 \qquad F = 10 \text{ kgr}^* = 10 \cdot 981 \cdot 10^3 \text{ dyn}$$

Ἂν θέσωμεν τὰς ἀνωτέρω τιμὰς εἰς τὸν τύπον τῶν χορδῶν, λαμβάνομεν:

$$\nu = \frac{1}{2 \cdot 60 \cdot 0,04} \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot 981 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 6}} \text{ Hz}$$

καὶ $\nu = \mathbf{151,2\ Hz}$

194

Ἡ χορδὴ ἔχει μῆκος $l = 80$ cm καὶ δίδει τὸν τέταρτον ἁρμονικόν. Γνωρίζομεν ὅτι ἡ χορδὴ πάλλεται οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίζωνται ἐπ' αὐτῆς στάσιμα κύματα. Ὁ ἀριθμὸς τῶν στασίμων κυμάτων ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τάξιν τοῦ παραγομένου ἁρμονικοῦ. Οὕτω, ὅταν ἡ χορδὴ παράγῃ τὸν 4ον ἁρμονικόν, τότε ἐπὶ τῆς χορδῆς σχηματίζονται 4 στάσιμα κύματα. Τότε ἐπὶ τῆς χορδῆς σχηματίζονται 5 δεσμοί, ἐκ τῶν ὁποίων 2 εἰς τὰ ἄκρα καὶ 3 δεσμοὶ ἐνδιάμεσοι. Ἕκαστον στάσιμον κῦμα εἶναι ἴσον μὲ $l/4 = 20$ cm. Ἄρα ἡ ζητουμένη ἀπόστασις μεταξὺ δύο διαδοχικῶν δεσμῶν εἶναι:

$$x = \mathbf{20\ cm}$$

195

Ἡ συχνότης ν τοῦ παραγομένου θεμελιώδους ἤχου δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$\nu = \frac{1}{2l \cdot r} \cdot \sqrt{\frac{F}{\pi \cdot d}}$$

Ἡ ζητουμένη διάμετρος δ τῆς χορδῆς εἶναι $\delta = 2\,r$. Οὕτω ὁ ἀνωτέρω τύπος γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$\nu = \frac{1}{l \cdot \delta} \cdot \sqrt{\frac{F}{\pi \cdot d}}$$

Ἂν λύσωμεν τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς δ, λαμβάνομεν:

$$\delta = \frac{1}{l \cdot \nu} \cdot \sqrt{\frac{F}{\pi \cdot d}} \qquad (1)$$

Δίδεται ὅτι εἶναι:

$$l = 36\text{ cm} \qquad \nu = 440\text{ Hz} \qquad d = 2{,}88\text{ gr/cm}^3$$
$$F = 10\text{ kgr}^* = 10 \cdot 981 \cdot 10^3\text{ dyn}$$

Θέτοντες τὰς ἀνωτέρω τιμὰς εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη διάμετρος εἶναι:

$$\delta = \frac{1}{36 \cdot 440} \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot 981 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 2{,}88}}\text{ cm}$$

καὶ $\quad \delta = \mathbf{0{,}066\ cm} \quad$ ἢ $\quad \delta = \mathbf{0{,}66\ mm}$

196

Ὁ σωλὴν ἔχει μῆκος $l = 68$ cm, ἡ δὲ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἶναι $\upsilon = 340$ m/sec. Τὸ ὕψος τοῦ θεμελιώδους ἤχου, τὸν ὁποῖον παράγει κλειστὸς ἠχητικὸς σωλήν, εἶναι:

$$\nu = \frac{\upsilon}{4l}$$

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι:

$$\nu = \frac{340}{4 \cdot 0{,}68}\left(\frac{\text{m/sec}}{\text{m}}\right) = 125\left(\frac{1}{\text{sec}}\right) = \mathbf{125\ Hz}$$

197

Ὁ κλειστὸς ἠχητικὸς σωλὴν ἔχει μῆκος l καὶ δίδει θεμελιώδη ἦχον συχνότητος $\nu = 260$ Hz. Ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα τοῦ σωλῆνος εἶναι $\upsilon = 340$ m/sec. Ἡ συχνότης ν τοῦ παραγομένου θεμελιώδους ἤχου δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$\nu = \frac{\upsilon}{4l}$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν ὡς πρὸς l λαμβάνομεν:

$$l = \frac{\upsilon}{4\nu} \qquad \text{ἤτοι} \qquad l = \frac{340}{4 \cdot 260}\left(\frac{\text{m/sec}}{1/\text{sec}}\right)$$

καὶ $$l = 0{,}327 \text{ m} \qquad \text{ἢ} \qquad l = \mathbf{32{,}7\ cm}$$

198

Ὁ κλειστὸς ἠχητικὸς σωλὴν ἔχει μῆκος l καὶ ὅταν ὁ ἐντὸς αὐτοῦ ἀὴρ ἔχῃ θερμοκρασίαν 0°C, ὁ σωλὴν δίδει θεμελιώδη ἦχον συχνότητος $\nu_o = 400$ Hz. Εἰς 0°C ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἶναι υ_o καὶ ἡ συχνότης τοῦ παραγομένου θεμελιώδους ἤχου εἶναι τότε:

$$\nu_o = \frac{\upsilon_o}{4l}$$

Εἰς 37°C ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα γίνεται:

$$\upsilon = \upsilon_o \cdot \sqrt{1 + \frac{37}{273}} \qquad \text{ἢ} \qquad \upsilon = \upsilon_o \cdot \sqrt{\frac{310}{273}}$$

Ἡ συχνότης ν τοῦ παραγομένου τότε θεμελιώδους ἤχου εἶναι:

$$\nu = \frac{\upsilon}{4l} \qquad (2)$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν:

$$\frac{\nu}{\nu_o} = \frac{\upsilon}{\upsilon_o} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \frac{\nu}{\nu_o} = \frac{\upsilon_o \cdot \sqrt{\frac{310}{273}}}{\upsilon_o}$$

καὶ $$\frac{\nu}{\nu_o} = \sqrt{\frac{310}{273}}$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη συχνότης εἶναι:

$$\nu = \nu_o \cdot \sqrt{\frac{310}{273}} \qquad \text{ἢ} \qquad \nu = 400 \cdot \sqrt{\frac{310}{273}}$$

καὶ $$\nu = \mathbf{426\ Hz}$$

199

Ὁ ἀνοικτὸς ἠχητικὸς σωλὴν ἔχει μῆκος $l = 62$ cm. Ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἶναι $\upsilon = 340$ m/sec. Τὸ ὕψος τοῦ παραγομένου θεμελιώδους ἤχου εἶναι:

$$\nu = \frac{\upsilon}{2l}$$

Ἂν εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν θέσωμεν τὰς δοθείσας τιμάς, εὑρίσκομεν:

$$\nu = \frac{340}{2 \cdot 0{,}62}\left(\frac{\text{m/sec}}{\text{m}}\right) = 274\left(\frac{1}{\text{sec}}\right)$$

$$\text{ἤτοι} \qquad \nu = \mathbf{274\ Hz}$$

200

Ὁ κλειστὸς σωλὴν ἔχει μῆκος $l_\varkappa = 60$ cm, ὁ δὲ ἀνοικτὸς σωλὴν ἔχει μῆκος l_α. Ἡ συχνότης τοῦ θεμελιώδους ἤχου, τὸν ὁποῖον παράγει ἕκαστος τῶν σωλήνων τούτων εἶναι:

ὁ κλειστὸς σωλήν: $$\nu_\varkappa = \frac{\upsilon}{4 l_\varkappa} \qquad (1)$$

ὁ ἀνοικτὸς σωλήν: $$\nu_\alpha = \frac{\upsilon}{2 l_\alpha} \qquad (2)$$

Ὁ κλειστὸς σωλὴν παράγει ὑψηλότερον ἦχον, τὸ δὲ διάστημα τῶν παραγομένων δύο ἤχων εἶναι 3/2, δηλαδὴ εἶναι:

$$\frac{\nu_\varkappa}{\nu_\alpha} = \frac{3}{2}$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

$$\frac{\nu_\varkappa}{\nu_\alpha} = \frac{l_\alpha}{2 l_\varkappa} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \frac{l_\alpha}{2 l_\varkappa} = \frac{3}{2}$$

Ἄρα τὸ μῆκος τοῦ ἀνοικτοῦ σωλῆνος εἶναι:

$$l_\alpha = 2 l_\varkappa \cdot \frac{3}{2} \qquad \text{καὶ} \qquad l_\alpha = 120 \cdot \frac{3}{2}\ \text{cm}$$

$$\text{ἤτοι} \qquad l_\alpha = \mathbf{180\ cm}$$

201

Τὸ ἐκτὸς τοῦ ὕδατος τμῆμα τοῦ σωλῆνος ἀποτελεῖ κλειστὸν ἠχητικὸν σωλῆνα. Ἑπομένως ὁ σωλὴν οὗτος δύναται νὰ παράγῃ ἦχον, ὅταν τὸ μῆκος l τοῦ σωλῆνος εἶναι ἴσον μὲ περιττὸν ἀριθμὸν $\lambda/4$, δηλαδὴ ὅταν εἶναι:

$$l = (2\varkappa + 1) \cdot \frac{\lambda}{4}$$

Τότε εἰς μὲν τὸ κλειστὸν ἄκρον τοῦ σωλῆνος παράγεται δεσμός, εἰς δὲ τὸ ἀνοικτὸν ἄκρον παράγεται κοιλία.

Ὁ σωλὴν παράγει ἦχον μόνον, ὅταν τὸ ἐκτὸς τοῦ ὕδατος τμῆμα τοῦ σωλῆνος ἔχῃ μῆκος 51 cm ἢ 85 cm καὶ διὰ καμμίαν ἄλλην ἐνδιάμεσον τιμὴν τοῦ μήκους τοῦ σωλῆνος. Ἄρα τὰ μήκη 51 cm καὶ 85 cm εἶναι δύο διαδοχικαὶ τιμαὶ τοῦ μήκους τοῦ σωλῆνος διὰ τὰς ὁποίας ὑπάρχει συντονισμὸς τοῦ σωλῆνος. Ἄρα ἔχομεν τὰς σχέσεις:

$$51 = (2\varkappa + 1) \cdot \frac{\lambda}{2} \qquad 85 = (2\varkappa + 3) \cdot \frac{\lambda}{2}$$

Ἂν ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς δύο αὐτὰς ἐξισώσεις εὑρίσκομεν:

$$85 - 51 = \frac{\lambda}{2} \quad \text{ἢ} \quad 34 = \frac{\lambda}{2} \quad \text{καὶ} \quad \lambda = 68 \text{ cm}$$

Ἡ ταχύτης λοιπὸν υ τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἶναι:

$$\upsilon = \nu \cdot \lambda \quad \text{ἤτοι} \quad \upsilon = 512 \cdot 64 \left(\frac{1}{\text{sec}} \cdot \text{cm} \right)$$

$$\text{καὶ} \quad \upsilon = \mathbf{34\,816\ cm/sec = 348,16\ m/sec}$$

202

Ἔστω l τὸ μῆκος τοῦ σωλῆνος καὶ υ_5 ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου, ὅταν ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀέρος εἶναι 5°C. Ὅταν ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀέρος γίνῃ θ°C, τότε ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἶναι υ_θ. Εἶναι γνωστὸν ὅτι αἱ ταχύτητες τοῦ ἤχου υ_5 καὶ υ_θ δίδονται ἀπὸ τὰς σχέσεις:

$$\upsilon_5 = 331 \cdot \sqrt{1 + \frac{5}{273}} \quad \text{ἢ} \quad \upsilon_5 = 331 \cdot \sqrt{\frac{278}{273}}$$

$$\upsilon_\theta = 331 \cdot \sqrt{1 + \frac{\theta}{273}} \quad \text{ἢ} \quad \upsilon_\theta = 331 \cdot \sqrt{\frac{273 + \theta}{273}}$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις λαμβάνομεν:

$$\frac{\upsilon_\theta}{\upsilon_5} = \sqrt{\frac{273 + \theta}{278}}$$

Ἂς καλέσωμεν ν_5 καὶ ν_θ τὰς συχνότητας τῶν παραγομένων θεμελιωδῶν ἤχων, ὅταν ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀέρος τοῦ σωλῆνος εἶναι ἀντιστοίχως 5°C καὶ θ°C. Τότε ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$\nu_5 = \frac{\upsilon_5}{4l} \qquad \text{καὶ} \qquad \nu_\theta = \frac{\upsilon_\theta}{4l}$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις, λαμβάνομεν:

$$\frac{\nu_\theta}{\nu_5} = \frac{\upsilon_\theta}{\upsilon_5} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \frac{\nu_\theta}{\nu_5} = \sqrt{\frac{273+\theta}{278}} \qquad (1)$$

Ὅταν ἡ θερμοκρασία εἶναι θ°C τότε ὁ παραγόμενος θεμελιώδης ἦχος εἶναι ὑψηλότερος κατὰ ἓν ἡμιτόνιον, δηλαδὴ θὰ εἶναι:

$$\frac{\nu_\theta}{\nu_5} = 1{,}059 \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν:

$$\sqrt{\frac{273+\theta}{278}} = 1{,}059$$

Ὑψώνομεν εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως, ὁπότε ἔχομεν:

$$\frac{273+\theta}{278} = 1{,}059^2 \qquad \text{ἄρα} \qquad \theta^0 = 38{,}36^\circ\mathrm{C}$$

Ὥστε διὰ νὰ γίνῃ ὁ θεμελιώδης ἦχος ὑψηλότερος κατὰ ἓν ἡμιτόνιον, πρέπει νὰ ὑψωθῇ ἡ θερμοκρασία κατά:

$$\Delta\theta = 38{,}36^0 - 5^0 = \mathbf{33{,}36^0\ C}$$

203

Ἕκαστος τῶν δύο σωλήνων ἔχει μῆκος $l = 85$ cm. Ὁ σωλὴν Α, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀέρα θερμοκρασίας 15°C, παράγει θεμελιώδη ἦχον συχνότητος:

$$\nu_A = \frac{\upsilon_{15}}{2l} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \nu_A = \frac{340}{2\cdot 0{,}85}\left(\frac{\mathrm{m/sec}}{\mathrm{m}}\right)$$

$$\text{καὶ} \qquad \nu_A = \mathbf{200\ Hz}$$

Ὁ σωλὴν Β περιέχει ἀέρα θερμοκρασίας 18°C. Ἀπὸ τὰς γνωστὰς σχέσεις :

$$\upsilon_{15} = 331 \cdot \sqrt{1 + \frac{15}{273}} \quad \text{ἢ} \quad \upsilon_{15} = 331 \cdot \sqrt{\frac{288}{273}}$$

$$\upsilon_{18} = 331 \cdot \sqrt{1 + \frac{18}{273}} \quad \text{ἢ} \quad \upsilon_{18} = 331 \cdot \sqrt{\frac{291}{273}}$$

λαμβάνομεν τὴν σχέσιν:

$$\frac{\upsilon_{18}}{\upsilon_{15}} = \sqrt{\frac{291}{288}} = 1{,}0052$$

Ἄρα ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς 18°C εἶναι:

$$\upsilon_{18} = \upsilon_{15} \cdot 1{,}0052 = 340 \cdot 1{,}0052 \text{ m/sec} \quad \text{καὶ} \quad \upsilon_{18} = 341{,}768 \text{ m/sec}$$

Ἡ συχνότης τοῦ θεμελιώδους ἤχου, τὸν ὁποῖον παράγει ὁ σωλὴν Β, εἶναι :

$$\nu_B = \frac{\upsilon_{18}}{2l} \quad \text{ἤτοι} \quad \nu_B = \frac{341{,}768}{2 \cdot 0{,}85}\left(\frac{\text{m/sec}}{\text{m}}\right)$$

$$\text{καὶ} \quad \nu_B = 201{,}04 \text{ Hz}$$

Ὅταν οἱ δύο σωλῆνες Α καὶ Β παράγουν συγχρόνως τοὺς ἀντιστοίχους θεμελιώδεις ἤχους, τότε ὁ λόγος τῶν συχνοτήτων των εἶναι:

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = \frac{\upsilon_{18}}{\upsilon_{15}} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\nu_B}{\nu_A} = \mathbf{1{,}0052}$$

ΘΕΡΜΟΤΗΣ

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ

204

Γνωρίζομεν ὅτι C βαθμοὶ Κελσίου καὶ F βαθμοὶ Fahrenheit συνδέονται μεταξύ των διὰ τῆς σχέσεως:

$$\frac{C}{F-32}=\frac{5}{9} \quad \text{ἄρα} \quad C=(F-32)\cdot\frac{5}{9}$$

Θὰ τρέψωμεν ἐνδείξεις (F) τῆς κλίμακος Fahrenheit εἰς ἐνδείξεις (C) τῆς κλίμακος Κελσίου.

α) Διὰ $F=-15^{\circ}$ ἔχομεν:

$$C=(F-32)\cdot\frac{5}{9} \quad \text{ἄρα} \quad C=-47\cdot\frac{5}{9}=\mathbf{-26{,}11^{\circ}\ C}$$

β) Διὰ $F=50^{\circ}$ ἔχομεν:

$$C=(F-32)\cdot\frac{5}{9} \quad \text{ἄρα} \quad C=18\cdot\frac{5}{9}=\mathbf{10^{\circ}\ C}$$

γ) Διὰ $F=200^{\circ}$ ἔχομεν :

$$C=(F-32)\cdot\frac{5}{9} \quad \text{ἄρα} \quad C=168\cdot\frac{5}{9}=\mathbf{93{,}33^{\circ}\ C}$$

205

Διὰ νὰ τρέψωμεν ἐνδείξεις (C) τῆς κλίμακος Κελσίου εἰς ἐνδείξεις (F) τῆς κλίμακος Fahrenheit ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον:

$$\frac{C}{F-32}=\frac{5}{9}$$

Ἂν λύσωμεν τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ὡς πρὸς F, λαμβάνομεν:

$$F=C\cdot\frac{9}{5}+32$$

α) Διὰ $C = -22^\circ$ ἔχομεν:

$$F = -22 \cdot \frac{9}{5} + 32 \qquad \text{ἄρα} \qquad F = -39{,}6 + 32 = \mathbf{-7{,}6^\circ\ F}$$

β) Διὰ $C = 36^\circ$ ἔχομεν:

$$F = 36 \cdot \frac{9}{5} + 32 \qquad \text{ἄρα} \qquad F = 64{,}8 + 32 = \mathbf{96{,}8^\circ\ F}$$

γ) Διὰ $C = 87^\circ$ ἔχομεν:

$$F = 87 \cdot \frac{9}{5} + 32 \qquad \text{ἄρα} \qquad F = 156{,}5 + 32 = \mathbf{188{,}5^\circ\ F}$$

206

Ἔστω ὅτι αἱ ἐνδείξεις τῶν δύο κλιμάκων θὰ εἶναι αἱ αὐταὶ εἰς τὴν θερμοκρασίαν x μετρουμένην εἰς βαθμοὺς Κελσίου. Τότε ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν:

$$\frac{C}{F - 32} = \frac{5}{9} \qquad \text{λαμβάνομεν} \qquad \frac{x}{x - 32} = \frac{5}{9}$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν ὡς πρὸς x εὑρίσκομεν ὅτι αἱ ἐνδείξεις τῶν δύο κλιμάκων θὰ εἶναι αἱ αὐταὶ εἰς θερμοκρασίαν:

$$x = \mathbf{-40^\circ\ C}$$

207

Ἡ θερμοκρασία 77° F εἰς βαθμοὺς Κελσίου εἶναι:

$$C = (F - 32) \cdot \frac{5}{9} \qquad \text{ἄρα} \qquad C = 45 \cdot \frac{5}{9} = \mathbf{25^\circ\ C}$$

Ἡ δὲ θερμοκρασία 20° C εἰς βαθμοὺς Fahrenheit εἶναι:

$$F = C \cdot \frac{9}{5} + 32 \qquad \text{ἄρα} \qquad F = 36 + 32 = \mathbf{68^\circ\ F}$$

Ὁ κάτοικος τῶν Ἀθηνῶν, μετρῶν τὰς θερμοκρασίας εἰς βαθμοὺς Κελσίου, εὑρίσκει ὅτι κατὰ τὴν ἡμέραν ἐκείνην μεταξὺ τῶν δύο πόλεων ὑπάρχει διαφορὰ θερμοκρασίας ἴση μέ:

$$25^\circ\ C - 20^\circ\ C = \mathbf{5^\circ\ C}$$

Ὁ δὲ κάτοικος τοῦ Λονδίνου, μετρῶν τὰς θερμοκρασίας εἰς βαθμοὺς

Fahrenheit, εὑρίσκει ὅτι κατὰ τὴν ἡμέραν ἐκείνην μεταξὺ τῶν δύο πόλεων ὑπάρχει διαφορὰ θερμοκρασίας ἴση μέ:

$$77^{\circ}\,\mathrm{F} - 69^{\circ}\,\mathrm{F} = \mathbf{9^{\circ}\,F}$$

ΔΙΑΣΤΟΛΗ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

208

Μία ράβδος ἔχουσα εἰς 0° C μῆκος l_o, ὅταν θερμανθῇ εἰς θ° C, ἀποκτᾷ μῆκος l, τὸ ὁποῖον εἶναι:

$$l = l_o \cdot (1 + \lambda \cdot \theta)$$

ὅπου λ εἶναι ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ ὑλικοῦ τῆς ράβδου. Ἐπειδὴ ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς εἶναι γενικῶς πολὺ μικρός, διὰ τοῦτο ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις ἰσχύει καὶ ὅταν ἡ θερμοκρασία τῆς ράβδου μεταβάλλεται ἀπὸ θ_1 εἰς θ_2, δηλαδὴ γενικῶς ὅταν ἔχωμεν μεταβολὴν τῆς θερμοκρασίας κατὰ $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$. Τότε, ἂν εἰς θερμοκρασίαν θ_1 τὸ μῆκος τῆς ράβδου εἶναι l_1, εἰς θερμοκρασίαν θ_2 τὸ μῆκος τῆς ράβδου εἶναι:

$$l_2 = l_1 \cdot (1 + \lambda \cdot \Delta\theta)$$

Εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν θέτομεν:

$$l_1 = 20\ \mathrm{m} \qquad \Delta\theta = 40^{\circ} - (-15^{\circ}) = 55^{\circ}\ \mathrm{grad}$$

$$\lambda = 12 \cdot 10^{-6} \cdot \mathrm{grad}^{-1}$$

Οὕτω λαμβάνομεν ὅτι ἡ ἐπιμήκυνσις τῆς ράβδου εἶναι:

$$l_2 - l_1 = l_1 \cdot \lambda \cdot \Delta\theta$$

ἤτοι $$l_2 - l_1 = 20 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 55 \left(\mathrm{m} \cdot \frac{1}{\mathrm{grad}} \cdot \mathrm{grad}\right)$$

καὶ $$l_2 - l_1 = \mathbf{132 \cdot 10^{-4}\ m} \quad \text{ἢ} \quad l_2 - l_1 = \mathbf{1{,}32\ cm}$$

209

Δίδεται ὅτι εἰς 18°C τὸ μῆκος τῆς ράβδου εἶναι $l = 20$ cm. Τὸ μῆκος l_o τῆς ράβδου εἰς θερμοκρασίαν 0°C εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τῆς γραμμικῆς διαστολῆς:

$$l = l_o \cdot (1 + \lambda \cdot \theta)$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι:

$$l_o = \frac{l}{1+\lambda \cdot \theta} \quad \text{ἤτοι} \quad l_o = \frac{20}{1+13 \cdot 10^{-6} \cdot 18}\left[\frac{\text{cm}}{\frac{1}{\text{grad}} \cdot \text{grad}}\right]$$

$$\text{καὶ} \quad l_o = \mathbf{19{,}955\ cm}$$

210

Εἰς 0°C ἡ ὑάλινη ράβδος ἔχει μῆκος $l_o = 412{,}5$ mm. Ὅταν θερμανθῇ εἰς 98,5°C θὰ ἔχῃ μῆκος l. Δίδεται ὅτι ἡ ἐπιμήκυνσις τῆς ράβδου εἶναι $l - l_o = 0{,}329$ mm.

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἐπιμήκυνσις μιᾶς ράβδου δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$l - l_o = l_o \cdot \lambda \cdot \Delta\theta$$

ὅπου $\Delta\theta$ εἶναι ἡ μεταβολὴ τῆς θερμοκρασίας. Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς συντελεστὴς λ τῆς ράβδου εἶναι:

$$\lambda = \frac{l - l_o}{l_o \cdot \Delta\theta} \quad \text{ἤτοι} \quad \lambda = \frac{0{,}329}{412{,}5 \cdot 98{,}5}\left(\frac{\text{mm}}{\text{mm} \cdot \text{grad}}\right)$$

$$\text{καὶ} \quad \lambda = \mathbf{8{,}1 \cdot 10^{-6}\ grad^{-1}}$$

211

Εἰς θερμοκρασίαν 20° C μετροῦμεν τὴν ράβδον μὲ τὸν κανόνα καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἔχει μῆκος $l = 80$ cm. Ὁ κανὼν ὅμως ἔχει βαθμολογηθῇ εἰς 0° C. Ἄρα εἰς 20° C ἑκάστη διαίρεσις τοῦ κανόνος ἔχει ὑποστῇ ἐπιμήκυνσιν:

$$1 + \lambda \cdot \theta \quad \text{ἤτοι} \quad 1 + \lambda \cdot 20$$

Ὥστε αἱ 80 διαιρέσεις τῆς κλίμακος τοῦ κανόνος ἔχουν ὑποστῇ ἐπιμήκυνσιν:

$$80 \cdot (1 + \lambda \cdot 20)$$

Τὸ ἀκριβὲς λοιπὸν μῆκος l_α τῆς ράβδου εἰς 20° C εἶναι:

$$l_\alpha = l \cdot (1 + \lambda \cdot \theta)$$

$$\text{ἤτοι} \quad l_\alpha = 80 \cdot \left(1 + \frac{19}{10^6} \cdot 20\right)\left[\text{cm} \cdot \frac{1}{\text{grad}} \cdot \text{grad}\right]$$

$$\text{καὶ} \quad l_\alpha = \mathbf{80{,}03\ cm}$$

212

Εἰς 0° C αἱ δύο ράβδοι τῆς ὑάλου καὶ τοῦ χάλυβος ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος l_o. Ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τῆς ὑάλου εἶναι $\lambda_1 = 8 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}, τοῦ δὲ χάλυβος εἶναι $\lambda_2 = 12 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}. Εἰς 100° C τὰ μήκη τῶν δύο ράβδων εἶναι ἀντιστοίχως:

τῆς ὑάλου: $l_1 = l_o \cdot (1 + 100 \cdot \lambda_1)$ (1)

τοῦ χάλυβος: $l_2 = l_o \cdot (1 + 100 \cdot \lambda_2)$ (2)

Δίδεται ὅτι εἰς τὴν θερμοκρασίαν 100° C τὰ μήκη τῶν δύο ράβδων διαφέρουν κατὰ 1 mm. Ἐπειδὴ εἶναι $\lambda_2 > \lambda_1$ ἔπεται ὅτι εἰς 100° C ἡ ράβδος τοῦ χάλυβος ἔχει τὸ μεγαλύτερον μῆκος, ἤτοι εἶναι:

$$l_2 - l_1 = 1 \text{ mm} \qquad (3)$$

Ἂν ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν:

$$l_2 - l_1 = l_o \cdot (1 + 100 \cdot \lambda_2) - l_o \cdot (1 + 100 \cdot \lambda_1) \qquad (4)$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (3) καὶ (4) συνάγεται ἡ ἀκόλουθος σχέσις:

$$l_o \cdot (1 + 100 \cdot \lambda_2) - l_o \cdot (1 + 100 \cdot \lambda_1) = 1$$

ἢ

$$100 \cdot l_o \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) = 1$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκεται ὅτι τὸ ζητούμενον μῆκος l_o τῶν δύο ράβδων εἰς 0° C εἶναι:

$$l_o = \frac{1}{100 \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)} \quad \text{ἢ} \quad l_o = \frac{1}{100 \cdot 4 \cdot 10^{-6}} \left(\frac{\text{mm}}{\text{grad} \cdot 1/\text{grad}} \right)$$

καὶ $l_o = \mathbf{2500\ mm = 250\ cm}$

213

Εἰς 5° C αἱ δύο πλευραὶ τῆς ὀρθογωνίου πλακὸς ἔχουν ἀντιστοίχως μήκη $l_1 = 80$ cm καὶ $l_2 = 150$ cm. Ἄρα εἰς 5° C ἡ ἐπιφάνεια E_5 τῆς πλακὸς εἶναι:

$$E_5 = l_1 \cdot l_2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad E_5 = 80 \cdot 150 = 12\,000 \text{ cm}^2\cdot$$

Ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ χαλκοῦ εἶναι: $\lambda = 14 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}. Ὅταν ἡ θερμοκρασία τῆς πλακὸς ὑψωθῇ ἀπὸ 5° C εἰς 45° C, δηλαδὴ ὅταν ἡ θερμοκρασία τῆς πλακὸς μεταβληθῇ κατά:

$$\Delta\theta = 45^\circ - 5^\circ = 40^\circ \text{ C}$$

τότε αἱ δύο πλευραὶ τῆς πλακὸς ἔχουν ἀντιστοίχως μήκη L_1 καὶ L_2, τὰ ὁποῖα εἶναι:

$$L_1 = l_1 \cdot (1 + \lambda \cdot \Delta\theta) \quad \text{καὶ} \quad L_2 = l_2 \cdot (1 + \lambda \cdot \Delta\theta)$$

Εἰς 45° C ἡ ἐπιφάνεια τῆς πλακὸς εἶναι:

$$E_{45} = L_1 \cdot L_2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad E_{45} = l_1 \cdot l_2 \cdot (1 + \lambda \cdot \Delta\theta)^2$$

$$\text{ἢ} \qquad E_{45} = E_5 \cdot (1 + \lambda \cdot \Delta\theta)^2$$

Ἡ εὑρεθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται:

$$E_{45} = E_5 \cdot [\,1 + 2\lambda \cdot \Delta\theta + \lambda^2 \cdot (\Delta\theta)^2\,]$$

Ἐπειδὴ τὸ λ εἶναι πολὺ μικρόν, δυνάμεθα πρακτικῶς νὰ λάβωμεν $\lambda^2 = 0$, ὁπότε ἡ τελευταία ἐξίσωσις γράφεται:

$$E_{45} = E_5 \cdot (1 + 2\lambda \cdot \Delta\theta)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ αὔξησις τῆς ἐπιφανείας τῆς πλακὸς εἶναι:

$$E_{45} - E_5 = E_5 \cdot (1 + 2\lambda \cdot \Delta\theta)$$

$$\text{ἢ} \quad E_{45} - E_5 = \Delta E = 12000 \cdot 2 \cdot 14 \cdot 10^{-6} \cdot 40 \left(\mathrm{cm}^2 \cdot \frac{1}{\mathrm{grad}} \cdot \mathrm{grad}\right)$$

$$\text{καὶ} \qquad \Delta E = \mathbf{13{,}4\ cm^2}$$

214

Εἰς 0° C ἡ διάμετρος τοῦ κυκλικοῦ δίσκου εἶναι $l_o = 100$ mm. Εἶναι γνωστὸν ὅτι διὰ τὸν χαλκὸν εἶναι $\lambda = 14 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{grad}^{-1}$. Ζητεῖται εἰς ποίαν θερμοκρασίαν θ° C ἡ διάμετρος τοῦ δίσκου θὰ ὑποστῇ ἐπιμήκυνσιν Δl ἴσην μὲ 1 mm. Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἐπιμήκυνσις εἶναι:

$$\Delta l = l_o \cdot \lambda \cdot \theta$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη θερμοκρασία εἶναι :

$$\theta = \frac{\Delta l}{l_o \cdot \lambda} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \theta = \frac{1}{100 \cdot 14 \cdot 10^{-6}} \left(\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{mm} \cdot \mathrm{grad}^{-1}}\right)$$

$$\text{ἄρα} \qquad \theta = \mathbf{714{,}3^\circ\ C}$$

Εἰς 0° C ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυκλικοῦ δίσκου εἶναι $E_o = \dfrac{\pi l_o^2}{4}$. Ὅταν ὁ δίσκος θερμανθῇ εἰς θ° C, ἡ αὔξησις ΔE τῆς ἐπιφανείας του εἶναι :

$$\Delta E = E_o \cdot 2\lambda \cdot \theta$$

Ἂν εἰς τὴν τελευταίαν σχέσιν θέσωμεν:

$$E_o = \frac{\pi l_o^2}{4} \quad \text{καὶ} \quad \theta = \frac{\Delta l}{l_o \cdot \lambda}$$

εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη αὔξησις τῆς ἐπιφανείας τοῦ δίσκου εἶναι:

$$\Delta E = \frac{\pi l_o^2}{4} \cdot 2\lambda \cdot \frac{\Delta l}{l_o \cdot \lambda} \quad \text{ἢ} \quad \Delta E = \frac{\pi}{2} \cdot l_o \cdot \Delta l$$

$$\text{ἄρα} \quad \Delta l = \frac{3{,}14}{2} \cdot 100 \cdot 1 \ (\text{mm} \cdot \text{mm})$$

$$\text{καὶ} \quad \Delta E = \mathbf{157\ mm^2 = 1{,}57\ cm^2}$$

215

Εἰς 0° C ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας ἔχει μῆκος $l_o = 19$ mm. Εἰς θερμοκρασίαν θ° C ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας γίνεται ἴση μὲ τὴν διάμετρον $l = 19{,}04$ mm τοῦ δακτυλίου. Ἄρα ὅταν ἡ θερμοκρασία τῆς σφαίρας ὑπερβῇ τὴν θερμοκρασίαν θ° C, τότε ἡ σφαῖρα δὲν διέρχεται διὰ τοῦ δακτυλίου. Θὰ ὑπολογίσωμεν τὴν θερμοκρασίαν θ° C. Ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τῆς σφαίρας εἶναι $\lambda = 12 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}. Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἐπιμήκυνσις τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι:

$$\Delta l = l - l_o = 19{,}04 - 19 = 0{,}04 \text{ mm}$$

Ἡ ἐπιμήκυνσις ὅμως αὐτὴ δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\Delta l = l_o \cdot \lambda \cdot \theta$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη θερμοκρασία θ εἶναι:

$$\theta = \frac{\Delta l}{l_o \,.\, \lambda} \qquad (1)$$

$$\text{ἤτοι} \quad \theta = \frac{0{,}04}{19 \cdot 12 \cdot 10^{-6}} \left(\frac{\text{mm}}{\text{mm} \cdot 1/\text{grad}} \right)$$

$$\text{καὶ} \quad \theta = \mathbf{175{,}4^\circ\ C}$$

Εἰς 0° C ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εἶναι:

$$V_o = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{l_o}{2} \right)^3 \quad \text{ἢ} \quad V_o = \frac{\pi}{6} \cdot l_o^3 \qquad (1)$$

Ὅταν ἡ σφαῖρα θερμανθῇ εἰς θ° C, ἡ αὔξησις ΔV τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας εἶναι:

$$\Delta V = V_o \cdot \varkappa \cdot \theta$$

Ἐπειδὴ εἶναι $\varkappa = 3\lambda$ ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις γράφεται:

$$[\Delta V = V_o \cdot 3\lambda \cdot \theta \qquad (3)$$

Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν V_o καὶ θ ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν:

$$\Delta V = \frac{\pi}{6} \cdot l_o^3 \cdot 3\lambda \cdot \frac{\Delta l}{l_o \cdot \lambda} \quad \text{ἤτοι} \quad \Delta V = \frac{\pi}{2} \cdot l_o^2 \cdot \Delta l$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη αὔξησις τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας εἶναι:

$$\Delta V = \frac{3{,}14}{2} \cdot 19^2 \cdot 0{,}04 \ (\mathrm{mm}^2 \cdot \mathrm{mm})$$

$$\text{καὶ} \quad \Delta V = \mathbf{22{,}7\ mm^3}$$

216

Εἰς μίαν θερμοκρασίαν θ^o C τὸ τεμάχιον τῆς ὑάλου ἔχει ὄγκον V. Ἂν ἡ θερμοκρασία τῆς ὑάλου αὐξηθῇ κατὰ Δθ, τότε καὶ ὁ ὄγκος τῆς ὑάλου ὑφίσταται αὔξησιν ΔV, ἡ ὁποία εἶναι:

$$\Delta V = V \cdot \varkappa \cdot \Delta\theta \quad \text{ἢ} \quad \Delta V = V \cdot 3\lambda \cdot \Delta\theta \qquad (1)$$

Ἡ αὔξησις τοῦ ὄγκου θέλομεν νὰ εἶναι:

$$\Delta V = 0{,}001 \cdot V$$

Δίδεται ὅτι διὰ τὴν ὕαλον ἐκ χαλαζίου εἶναι $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{grad}^{-1}$. Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν ζητουμένην αὔξησιν τῆς θερμοκρασίας:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta V}{V \cdot 3\lambda} \quad \text{ἢ} \quad \Delta\theta = \frac{0{,}001 \cdot V}{V \cdot 3\lambda} = \frac{0{,}001}{3\lambda}$$

$$\text{ἄρα} \quad \Delta\theta = \frac{0{,}001}{3 \cdot 6 \cdot 10^{-7}} \left(\frac{1}{1/\mathrm{grad}}\right)$$

$$\text{καὶ} \quad \Delta\theta = \mathbf{555{,}5^o\ C}$$

217

Εἰς 10^oC ἡ φιάλη ἔχει ὄγκον $V_{10} = 100\ \mathrm{cm}^3$. Ὅταν ἡ θερμοκρασία γίνῃ 100^o C, ἡ φιάλη ἔχει ὄγκον V_{100} ὁ ὁποῖος δίδεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν τῆς κυβικῆς διαστολῆς:

$$V_{100} = V_{10} \cdot [\,1 + \varkappa \cdot (100^o - 10^o)\,]$$

$$\text{ἢ} \quad V_{100} = V_{10} \cdot [\,1 + 3\lambda \cdot 90^o\,]$$

Δίδεται ὅτι εἶναι $\lambda = 8 \cdot 10^{-6}\,\text{grad}^{-1}$. Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν λαμβάνομεν:

$$V_{100} = 100 \cdot [\,1 + 3 \cdot 8 \cdot 10^{-6} \cdot 90\,]\left(\text{cm}^3 \cdot \frac{1}{\text{grad}} \cdot \text{grad}\right)$$

$$\text{καὶ} \qquad V_o = \mathbf{100{,}216\ cm^3}$$

218

Ὁ συντελεστὴς ἀπολύτου διαστολῆς τοῦ ὑδραργύρου εἶναι $\gamma = 180 \cdot 10^{-6}\,\text{grad}^{-1}$. Ἂν d_o εἶναι ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου εἰς 0^oC, τότε ἡ πυκνότης d εἰς θ^oC δίδεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν:

$$d = \frac{d_o}{1 + \gamma \cdot \theta} \qquad (1)$$

α) Δίδεται ὅτι εἰς 18^o C ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου εἶναι $d_{18} = 13{,}551\ \text{gr/cm}^3$. Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ πυκνότης d_o εἰς 0^oC εἶναι:

$$d_o = d \cdot (1 + \gamma \cdot \theta) \qquad \text{ἢ} \qquad d_o = d_{18} \cdot (+\gamma \cdot 18^o)$$

$$\text{Ἄρα} \qquad d_o = 13{,}551 \cdot [\,1 + 181 \cdot 10^{-6} \cdot 18\,]\left(\frac{\text{gr}}{\text{cm}^3} \cdot \frac{1}{\text{grad}} \cdot \text{grad}\right)$$

$$\text{καὶ} \qquad d_o = \mathbf{13{,}595\ gr/cm^3}$$

β) Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου εἰς 100^oC εἶναι:

$$d_{100} = \frac{d_o}{1 + \gamma \cdot 100}$$

$$\text{ἤτοι} \quad d_{100} = \frac{13{,}595}{1 + 181 \cdot 10^{-6} \cdot 100}\left(\frac{\text{gr/cm}^3}{\text{grad}^{-1} \cdot \text{grad}}\right)$$

$$\text{καὶ} \qquad d_{100} = \mathbf{13{,}353\ gr/cm^3}$$

γ) Εἰς μίαν θερμοκρασίαν θ^oC ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου εἶναι ἀκριβῶς $d_o = 13{,}60\ \text{gr/cm}^3$. Ἡ θερμοκρασία αὐτὴ θ^o δύναται νὰ εὑρεθῇ ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$d_\theta = \frac{d_o}{1 + \gamma \cdot \theta} \qquad \text{ἄρα} \qquad \theta = \frac{d_o - d_\theta}{d_\theta \cdot \gamma}$$

Ἂν εἰς τὴν τελευταίαν σχέσιν θέσωμεν τὰς γνωστὰς τιμὰς τῶν d_o, d_θ καὶ γ, εὑρίσκομεν:

$$\theta = \frac{13{,}595 - 13{,}60}{13{,}60 \cdot 181 \cdot 10^{-6}}\left(\frac{\text{gr/cm}^3}{\text{gr/cm}^3 \cdot \text{grad}^{-1}}\right)$$

$$\text{καὶ} \qquad \theta = \mathbf{-2{,}03^o\ C}$$

219

Εἰς θ°C ἡ πυκνότης τοῦ ὑγροῦ εἶναι $d_o = 0{,}92\ gr/cm^3$ καὶ εἰς 100°C ἡ πυκνότης αὐτοῦ εἶναι $d_{100} = 0{,}81\ gr/cm^3$. Ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν:

$$d = \frac{d_o}{1 + \gamma \cdot \theta}$$

δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν ἀπόλυτον συντελεστὴν διαστολῆς γ τοῦ ὑγροῦ μεταξὺ τῶν θερμοκρασιῶν 0°C καὶ 100°C. Οὕτω λύοντες τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ὡς πρὸς γ, λαμβάνομεν:

$$\gamma = \frac{d_o - d}{d \cdot \theta} \quad \text{ἤτοι} \quad \gamma = \frac{0{,}92 - 0{,}81}{0{,}81 \cdot 100}\left(\frac{gr/cm^3}{gr/cm^3 \cdot grad}\right)$$

$$\text{καὶ} \quad \gamma = \mathbf{1\,358 \cdot 10^{-4}\ grad^{-1}}$$

220

Εἰς 0°C ὁ ὄγκος τοῦ ὑαλίνου σωλῆνος εἶναι :

$$V_o = 100\ cm \cdot 1\ cm^2 = 100\ cm^3.$$

Εἰς 0°C ὁ ὄγκος τοῦ περιεχομένου ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ὑδραργύρου εἶναι:

$$V'_o = 96\ cm \cdot 1\ cm^2 = 96\ cm^3$$

Οἱ συντελεσταὶ διαστολῆς εἶναι:

τοῦ ὑδραργύρου : $\gamma = 18 \cdot 10^{-5}\ grad^{-1}$

τῆς ὑάλου : $\varkappa = 24 \cdot 10^{-6}\ grad^{-1}$

Εἰς μίαν θερμοκρασίαν θ°C τὸ δοχεῖον θὰ εἶναι πλῆρες ὑδραργύρου. Δηλαδὴ εἰς θ°C ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου καὶ ὁ ὄγκος τοῦ περιεχομένου ὑδραργύρου θὰ εἶναι ἴσοι :

εἰς θ°C : ὄγκος ὑδραργύρου = ὄγκος δοχείου

$$V'_o \cdot (1 + \gamma \cdot \theta) = V_o \cdot (1 + \varkappa \cdot \theta)$$

$$\text{ἤτοι} \quad 96 \cdot (1 + \gamma \cdot \theta) = 100 \cdot (1 + \varkappa \cdot \theta)$$

Λύοντες τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς θ, λαμβάνομεν :

$$\theta \cdot (96\,\gamma - 100\,\varkappa) = 100 - 96$$

$$\text{καὶ} \quad \theta = \frac{4}{96\gamma - 100\varkappa}\left(\frac{cm^3}{cm^3 \cdot grad^{-1}}\right)$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη θερμοκρασία εἶναι:

$$\theta = \frac{4}{96 \cdot 18 \cdot 10^{-5} - 100 \cdot 24 \cdot 10^{-6}}\ grad \quad \text{ἤτοι} \quad \theta = \mathbf{269^0\ C}$$

221

Εἰς $0^o C$ ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου εἶναι $d_o = 13{,}6\ gr/cm^3$, ἡ δὲ μᾶζα τοῦ ὑδραργύρου, ὁ ὁποῖος περιέχεται ἐντὸς τοῦ δοχείου εἶναι $m_o = 500$ gr. Εἰς $0^o C$ ὁ ὄγκος τοῦ ὑδραργύρου εἶναι:

$$V_o = \frac{m}{d_o} \quad ἢ \quad V_o = \frac{500}{13{,}6}\left(\frac{gr}{gr/cm^3}\right) = \frac{500}{13{,}6}\ cm^3$$

Τόσος εἶναι καὶ ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου, διότι εἰς $0^o C$ τὸ δοχεῖον εἶναι πλῆρες μὲ ὑδράργυρον. Ἂν τὸ σύστημα (δοχεῖον—ὑδράργυρος) θερμανθῇ εἰς $\theta^o C$, θὰ χυθοῦν 10 gr ὑδραργύρου καὶ συνεπῶς ἐντὸς τοῦ δοχείου θὰ ἀπομείνῃ μᾶζα ὑδραργύρου $m_\theta = 500 - 10 = 490$ gr. Τὸ δοχεῖον θὰ ἐξακολουθήσῃ νὰ εἶναι πλῆρες μὲ ὑδράργυρον. Εἰς $\theta^o C$ ἡ πυκνότης d τοῦ ὑδραργύρου εἶναι:

$$d_\theta = \frac{d_o}{1 + \gamma \cdot \theta}$$

Συνεπῶς εἰς $\theta^o C$ ὁ ὄγκος τοῦ ὑδραργύρου, ὁ ὁποῖος ἀπέμεινεν ἐντὸς τοῦ δοχείου, εἶναι:

$$V_\theta = \frac{m_\theta}{d_\theta} \quad ἢ \quad V_\theta = \frac{490 \cdot (\ 1 + \gamma \cdot \theta\ )}{d_o}\ cm^3$$

$$καὶ \quad V_\theta = \frac{490 \cdot (\ 1 + \gamma \cdot \theta\ )}{13{,}6}$$

Ἀλλὰ εἰς $\theta^o C$ ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου εἶναι:

$$V_\theta = V_o \cdot (\ 1 + \varkappa \cdot \theta\ ) \quad ἢ \quad V_\theta = \frac{500}{13{,}6} \cdot (1 + \varkappa \cdot \theta)\ cm^3$$

Ἐπειδὴ εἰς $\theta^o C$ ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου καὶ ὁ ὄγκος τοῦ ὑδραργύρου εἶναι ἴσοι, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{500}{13{,}6} \cdot (\ 1 + \varkappa \cdot \theta\ ) = \frac{490 \cdot (\ 1 + \gamma \cdot \theta\ )}{13{,}6}$$

$$καὶ \quad 50 \cdot (\ 1 + \varkappa \cdot \theta\ ) = 49 \cdot (\ 1 + \gamma \cdot \theta\ )$$

Ἂν λύσωμεν τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς θ, εὑρίσκομεν:

$$\theta = \frac{50 - 49}{49\,\gamma - 50\,\varkappa}\left(\frac{gr}{gr \cdot grad^{-1}}\right)$$

Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν αὐτὴν τὰς τιμὰς τῶν γ καὶ κ εὑρίσκομεν:

$$\theta = \frac{1}{49 \cdot 181 \cdot 10^{-6} - 50 \cdot 27 \cdot 10^{-6}} \text{ grad}$$

$$\text{καὶ} \quad \theta = \frac{1}{0{,}00752} \text{ grad} \quad \text{ἢ} \quad \theta = \mathbf{133^0\ C}$$

222

Εἰς $0^\circ C$ ἡ μᾶζα τοῦ ἀέρος ἔχει ὄγκον $V_o = 200$ cm³. Ὅταν ὁ ἀὴρ θερμανθῇ ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν εἰς $\theta^\circ C$, τότε ὁ ὄγκος του γίνεται V. Γνωρίζομεν ὅτι ἡ διαστολὴ ἀερίου ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν ἐκφράζεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως:

$$V = V_o \cdot (1 + \alpha \cdot \theta) \qquad (1)$$

ὅπου α εἶναι ὁ συντελεστὴς διαστολῆς τῶν ἀερίων, σταθερὸς δι' ὅλα τὰ ἀέρια καὶ ἴσος μὲ $\alpha = \frac{1}{273}$ grad^{-1}. Δίδεται ὅτι εἰς $\theta^\circ C$ ὁ ὄγκος V εἶναι $V = 2\,V_o$. Ἄρα ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται:

$$2\,V_o = V_o \cdot (1 + \alpha \cdot \theta) \quad \text{ἤτοι} \quad 2 = 1 + \alpha \cdot \theta$$

Λύοντες τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς θ εὑρίσκομεν:

$$\theta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{1/273} \left(\frac{1}{\text{grad}^{-1}} \right)$$

$$\text{ἄρα} \quad \theta = \mathbf{273^\circ\ C}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρος εὔκολα διπλασιάζεται, διότι ὁ συντελεστὴς διαστολῆς τῶν ἀερίων ἔχει ἀρκετὰ μεγάλην τιμήν.

223

Ἡ μᾶζα τοῦ ὑδρογόνου εἰς $\theta = 17^\circ$ C ἔχει ὄγκον $V = 4$ dm³. Τὸ ἀέριον διαστέλλεται ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν (p = σταθ) καὶ εἰς $\theta_1 = 57^\circ$ C ἀποκτᾷ ὄγκον V_1. Τότε ἰσχύουν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις διὰ τὴν ἀρχικὴν καὶ τὴν τελικὴν κατάστασιν τοῦ ἀερίου:

$$V = V_o \cdot (1 + \alpha\theta)$$
$$V_1 = V_o \cdot (1 + \alpha\theta_1)$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς δύο ἐξισώσεις εὑρίσκομεν:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{1 + \alpha\theta_1}{1 + \alpha\theta} \quad \text{ἄρα} \quad V_1 = V \cdot \frac{1 + \alpha\theta_1}{1 + \alpha\theta}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν λαμβάνομεν:

$$V_1 = 4 \cdot \frac{330/273}{290/273} \left(\mathrm{dm}^3 \cdot \mathrm{grad}^{-1} \cdot \mathrm{grad} \right)$$

ἤτοι $V_1 = 4 \cdot \frac{33}{29}\,\mathrm{dm}^3$ καὶ $V_1 = \mathbf{4{,}552\ dm^3}$

224

Τὸ ἀέριον εἰς $\theta = -13^\circ$ C ἔχει ὄγκον $V = 60\ \mathrm{cm}^3$. Τὸ ἀέριον διαστέλλεται ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν καὶ εἰς $\theta_1 = 117^\circ$ C ἀποκτᾶ ὄγκον V_1. Διὰ τὴν ἀρχικὴν καὶ τὴν τελικὴν κατάστασιν τοῦ ἀερίου ἰσχύουν τότε αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

$$V = V_o \cdot (1 + \alpha\theta)$$
$$V_1 = V_o \cdot (1 + \alpha\theta_1)$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς δύο ἐξισώσεις εὑρίσκομεν:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{1 + \alpha\theta_1}{1 + \alpha\theta} \qquad \text{ἄρα} \qquad V_1 = V \cdot \frac{1 + \alpha\theta_1}{1 + \alpha\theta}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν:

$$V_1 = 60 \cdot \frac{1 + \frac{117}{273}}{1 - \frac{13}{273}} = 60 \cdot \frac{390/273}{260/273} \left(\mathrm{cm}^3 \cdot \mathrm{grad}^{-1} \cdot \mathrm{grad} \right)$$

καὶ $V_1 = 60 \cdot \frac{39}{26}\,\mathrm{cm}^3$ ἤτοι $V_1 = \mathbf{90\ cm^3}$

225

Εἰς 0° C ἡ μᾶζα τοῦ ὀξυγόνου ἔχει ὄγκον $V_o = 40\ \mathrm{cm}^3$ καὶ πίεσιν $p_o = 76$ cm Hg. Τὸ ἀέριον τοῦτο εἰς $\theta = 30^\circ$ C ἔχει πίεσιν $p = 70$ cm Hg καὶ ὄγκον V, τὸν ὁποῖον δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τῶν τελείων ἀερίων:

$$p \cdot V = p_o \cdot V_o \cdot (1 + \alpha \cdot \theta)$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν ὡς πρὸς V ἔχομεν:

$$V = \frac{p_o \cdot V_o \cdot (1 + \alpha \cdot \theta)}{p}$$

$$\text{ἤτοι}\quad V = \frac{76 \cdot 40 \cdot \left(1 + \frac{30}{273}\right)}{70} \left[\frac{\text{cm Hg} \cdot \text{cm}^3 \cdot \text{grad}^{-1} \cdot \text{grad}}{\text{cm Hg}}\right]$$

$$\text{καὶ}\quad V = \mathbf{48{,}2\ cm^3}$$

226

Τὸ ἀέριον θερμαίνεται ἀπὸ $\theta = 27^\circ$ C εἰς θ_1^0 C. Ἡ ἀρχικὴ καὶ ἡ τελικὴ κατάστασις τοῦ ἀερίου εἶναι ἡ ἀκόλουθος:

ἀρχικὴ κατάστασις : $\theta^0 = 27^\circ$ C $\quad p = 762$ mm Hg $\quad V = 35$ cm³

τελικὴ κατάστασις : θ_1^0 $\quad p_1 = 760$ mm Hg $\quad V_1 = 38$ cm³

Γνωρίζομεν ὅτι δι' ὡρισμένην μᾶζαν ἀερίου τὸ πηλίκον τοῦ γινομένου τῆς πιέσεως ἐπὶ τὸν ὄγκον τοῦ ἀερίου διὰ τοῦ διωνύμου τῆς διαστολῆς εἶναι σταθερόν, ἤτοι :

$$\frac{p \cdot V}{1 + \alpha \cdot \theta} = \frac{p_1 \cdot V_1}{1 + \alpha \cdot \theta_1}$$

Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν θέσωμεν τὰς δοθείσας τιμάς, εὑρίσκομεν:

$$\frac{762 \cdot 35}{1 + \frac{27}{273}} = \frac{760 \cdot 38}{1 + \frac{\theta_1}{273}}$$

$$\text{ἢ}\quad \frac{762 \cdot 35 \cdot 273}{300} = \frac{760 \cdot 38 \cdot 273}{273 + \theta_1}$$

$$\text{καὶ}\quad \theta_1 = \frac{760 \cdot 38 \cdot 300}{762 \cdot 35} - 273 \qquad \text{ἤτοι}\quad \theta_1 = \mathbf{51{,}8^\circ\ C}$$

227

Εἰς $\theta = 35^\circ$ C καὶ ὑπὸ πίεσιν $p = 78$ cm Hg τὸ ἀέριον ἔχει ὄγκον $V = 2$ m³. Ὑπὸ τὰς κανονικὰς συνθήκας, ἤτοι εἰς 0° C καὶ ὑπὸ πίεσιν $p_0 = 76$ cm Hg, τὸ ἀέριον ἔχει ὄγκον V_0 τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τῶν τελείων ἀερίων:

$$p \cdot V = p_0 \cdot V_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \theta)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν λαμβάνομεν:

$$V_0 = \frac{p \cdot V}{p_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \theta)}$$

Θέτοντες εἰς τὴν τελευταίαν σχέσιν τὰς δοθείσας τιμὰς ἔχομεν:

$$V_o = \frac{78 \cdot 2}{76 \cdot \left(1 + \frac{35}{273}\right)} \left[\frac{\text{cm Hg} \cdot \text{m}^3}{\text{cm Hg} \cdot \text{grad}^{-1} \cdot \text{grad}}\right]$$

ἤτοι $$V_o = \mathbf{1{,}819\ m^3}$$

ΘΕΡΜΙΔΟΜΕΤΡΙΑ

228

Ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὕδατος εἶναι $c = 1$ cal/gr. grad. Ἀναμιγνύομεν μᾶζαν ὕδατος $m_1 = 200$ gr καὶ θερμοκρασίας $\theta_1 = 10^o$ C μὲ μᾶζαν ὕδατος $m_2 = 500$ gr καὶ θερμοκρασίας $\theta_2 = 45^o$ C. Τὸ σχηματιζόμενον μεῖγμα ἔχει μᾶζαν $m_1 + m_2 = 700$ gr καὶ θερμοκρασίαν θ_τ^o C.

Ἡ μᾶζα τοῦ θερμοῦ ὕδατος ἀ π ο β ά λ λ ε ι ποσότητα θερμότητος:

$$m_2 \cdot c \cdot (\theta_2 - \theta_\tau)$$

ἡ δὲ μᾶζα τοῦ ψυχροῦ ὕδατος π ρ ο σ λ α μ β ά ν ε ι ποσότητα θερμότητος:

$$m_1 \cdot c \cdot (\theta_\tau - \theta_1)$$

Αἱ δύο αὐταὶ ποσότητες θερμότητος εἶναι ἴσαι καὶ συνεπῶς ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$m_1 \cdot c \cdot (\theta_\tau - \theta_1) = m_2 \cdot c \cdot (\theta_2 - \theta_\tau)$$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ τελικὴ θερμοκρασία θ_τ τοῦ μείγματος εἶναι:

$$\theta_\tau = \frac{m_1 \cdot \theta_1 + m_2 \cdot \theta_2}{m_1 + m_2}$$

ἤτοι $$\theta_\tau = \frac{200 \cdot 10 + 500 \cdot 45}{700} \left(\frac{\text{gr} \cdot \text{grad}}{\text{gr}}\right)$$

καὶ $$\theta_\tau = \mathbf{35^o\ C}$$

229

Ἔστω m_1 ἡ μᾶζα τοῦ ὕδατος θερμοκρασίας $\theta_1 = 17^o$ C καὶ m_2 ἡ μᾶζα τοῦ ὕδατος θερμοκρασίας $\theta_2 = 80^o$ C τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἀναμείξωμεν διὰ νὰ λάβωμεν μᾶζαν ὕδατος $m = 50$ kgr θερμοκρασίας

$\theta_\tau = 35^0$ C. Ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὕδατος εἶναι c. Ἡ ποσότης θερμότητος, τὴν ὁποίαν ἀποβάλλει ἡ μᾶζα m_2 τοῦ ὕδατος, εἶναι ἴση μὲ τὴν ποσότητα θερμότητος, τὴν ὁποίαν προσλαμβάνει ἡ μᾶζα m_1 τοῦ ὕδατος καὶ συνεπῶς ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$m_1 \cdot c \cdot (\theta_\tau - \theta_1) = m_2 \cdot (\theta_2 - \theta_\tau)$$

ἢ $$m_1 \cdot (\theta_\tau - \theta_1) = m_2 \cdot (\theta_2 - \theta_\tau) \quad (1)$$

Ἐξ ἄλλου δίδεται ὅτι εἶναι:

$$m_1 + m_2 = 50 \text{ kgr} \quad (2)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν:

$$m_1 \cdot (35^0 - 17^0) = m_2 \cdot (80^0 - 35^0) \quad \text{ἢ} \quad m_1 \cdot 18^0 = m_2 \cdot 45^0 \quad (3)$$

Ἂν λύσωμεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) εὑρίσκομεν:

$$m_1 = \mathbf{35{,}7\ kgr} \qquad m_2 = \mathbf{14{,}3\ kgr}$$

230

Ἡ γλυκερίνη ἔχει μᾶζαν m_Γ καὶ θερμοκρασίαν $\theta_1 = 14{,}5^0$ C, ὁ δὲ ψευδάργυρος ἔχει μᾶζαν m_Ψ καὶ θερμοκρασίαν $\theta_2 = 98{,}3^0$ C. Ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μείγματος εἶναι $\theta_\tau = 19{,}6^0$ C. Αἱ εἰδικαὶ θερμότητες τῆς γλυκερίνης καὶ τοῦ ψευδαργύρου εἶναι ἀντιστοίχως:

$$c_\Gamma = 0{,}57 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad} \qquad c_\Psi = 0{,}092 \text{ cal/gr} \cdot \text{grad}$$

Δίδεται ὅτι εἶναι: $m_\Gamma + m_\Psi = 400$ gr (1)

Σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῶν ποσοτήτων θερμότητος θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν:

$$m_\Gamma \cdot c_\Gamma \cdot (\theta_\tau - \theta_1) = m_\Psi \cdot c_\Psi \cdot (\theta_2 - \theta_\tau)$$

ἢ $$m_\Gamma \cdot 0{,}57 \cdot 5{,}1 = m_\Psi \cdot 0{,}092 \cdot 78{,}7$$

καὶ $$m_\Gamma \cdot 2{,}907 = m_\Psi \cdot 7{,}240 \quad (2)$$

Ἂν λύσωμεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν

$$m_\Gamma = \mathbf{285\ gr} \qquad m_\Psi = \mathbf{115\ gr}$$

231

Αἱ μᾶζαι τοῦ χαλκοῦ, τοῦ πετρελαίου καὶ τοῦ μολύβδου εἶναι ἀντιστοίχως:

$$m_X = 200 \text{ gr} \qquad m_\Pi = 300 \text{ gr} \qquad m_M = 100 \text{ gr}$$

Αἱ εἰδικαὶ θερμότητες τῶν τριῶν ἀνωτέρω σωμάτων εἶναι ἀντιστοίχως:

$c_X = 0{,}092$ cal/gr · grad $\quad c_\Pi \quad c_M = 0{,}031$ cal/gr · grad

Ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία τοῦ θερμιδομέτρου εἶναι $\theta_1 = 18{,}5^\circ$ C, ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία τοῦ μολύβδου εἶναι $\theta_2 = 100$ C°, ἡ δὲ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ συστήματος εἶναι $\theta_\tau = 20^\circ$ C.

Ὁ μόλυβδος ἀποβάλλει ποσότητα θερμότητος:

$$m_M \cdot c_M \cdot (\theta_2 - \theta_\tau)$$

τὴν ὁποίαν προσλαμβάνουν τὸ χάλκινον δοχεῖον καὶ τὸ πετρέλαιον:

$$m_X \cdot c_X \cdot (\theta_\tau - \theta_1) + m_\Pi \cdot c_\Pi \cdot (\theta_\tau - \theta_1)$$

Οὕτω λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$m_X \cdot c_X \cdot (\theta_\tau - \theta_1) + m_\Pi \cdot c_\Pi \cdot (\theta_\tau - \theta_1) = m_M \cdot c_M \cdot (\theta_2 - \theta_\tau)$$

Ἂν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν ὡς πρὸς c_Π ἔχομεν:

$$c_\Pi = \frac{m_M \cdot c_M \cdot (\theta_2 - \theta_\tau) - m_X \cdot c_X \cdot (\theta_\tau - \theta_1)}{m_\Pi \cdot (\theta_\tau - \theta_1)}$$

Θέτοντες εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν τὰς δοθείσας τιμὰς εὑρίσκομεν ὅτι ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ πετρελαίου εἶναι:

$$c_\Pi = \frac{100 \cdot 0{,}031 \cdot 80^\circ - 200 \cdot 0{,}092 \cdot 1{,}5^\circ}{300 \cdot 1{,}5^\circ} \left[\frac{gr \cdot \dfrac{cal}{gr \cdot grad} \cdot grad}{gr \cdot grad} \right]$$

καὶ $\quad c_\Pi = \mathbf{0{,}49\ cal/gr \cdot grad}$

232

Τὸ ὕδωρ τὸ περιεχόμενον ἐντὸς τοῦ θερμιδομέτρου ἔχει μᾶζαν $m_1 = 210$ gr. Ἔστω m_Δ ἡ μᾶζα τοῦ δοχείου τοῦ θερμιδομέτρου καὶ C_Δ ἡ εἰδικὴ θερμότης αὐτοῦ. Τότε ἡ θερμοχωρητικότης Κ τοῦ δοχείου εἶναι:

$$K = m_\Delta \cdot C_\Delta \,(gr \cdot cal/gr \cdot grad)$$

δηλαδὴ εἶναι Κ cal/grad

Ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία τοῦ συστήματος δοχεῖον — ὕδωρ εἶναι $\theta_1 = 11{,}3^\circ$C. Προσθέτομεν ἐντὸς τοῦ δοχείου μᾶζαν ὕδατος $m_2 = 245$ gr θερμοκρασίας $\theta_2 = 31{,}5^\circ$C καὶ μετὰ τὴν ἀποκατάστασιν θερμικῆς ἰσορροπίας εὑρίσκομεν ὅτι ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ συστήματος εἶναι $\theta_\tau = 21{,}7^\circ$C.

Ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὕδατος εἶναι $c_Y = 1$ cal/gr · grad.

Τὸ θερμὸν ὕδωρ ἀποβάλλει ποσότητα θερμότητος:

$$m_2 \cdot c_Y \cdot (\theta_2 - \theta_\tau)$$

τὴν ὁποίαν προσλαμβάνει τὸ δοχεῖον καὶ τὸ ψυχρὸν ὕδωρ:

$$K \cdot (\theta_\tau - \theta_1) + m_1 \cdot c_Y \cdot (\theta_\tau - \theta_1)$$

Οὕτω λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$K \cdot (\theta_\tau - \theta_1) + m_1 \cdot c_Y \cdot (\theta_\tau - \theta_1) = m_2 \cdot c_Y \cdot (\theta_2 - \theta_\tau)$$

Ἂν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν ὡς πρὸς K, ἔχομεν:

$$K = \frac{m_2 \cdot c_Y \cdot (\theta_2 - \theta_\tau) - m_1 \cdot c_Y \cdot (\theta_\tau - \theta_1)}{(\theta_\tau - \theta_1)}$$

Θέτοντες εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν τὰς δοθείσας τιμὰς εὑρίσκομεν ὅτι ἡ θερμοχωρητικότης τοῦ δοχείου εἶναι:

$$K = \frac{245 \cdot 1 \cdot 9{,}8 - 210 \cdot 1 \cdot 10{,}4}{10{,}4} \left[\frac{gr \cdot \dfrac{cal}{gr \cdot grad} \cdot grad}{grad} \right]$$

καὶ $\quad K = \mathbf{21\ cal/grad}$

233

Ἡ θερμοχωρητικότης τοῦ θερμομέτρου εἶναι $K_1 = 1{,}84$ cal/grad. Τὸ θερμόμετρον βυθίζεται ἐντὸς ὕδατος καὶ ἀποκτᾷ θερμοκρασίαν $\theta_1 = 73{,}6^\circ$C. Τὸ θερμιδόμετρον ἔχει θερμοχωρητικότητα $K_2 = 90{,}5$ cal/grad καὶ θερμοκρασίαν $\theta_2 = 14{,}5^\circ$C. Ὅταν τὸ θερμόμετρον βυθισθῇ ἐντὸς τοῦ θερμιδομέτρου, τότε τὸ θερμόμετρον ἀποβάλλει ποσότητα θερμότητος καὶ ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ συστήματος γίνεται θ_τ τὴν ὁποίαν καὶ θὰ δεικνύῃ τότε τὸ θερμόμετρον. Ἄρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$K_1 \cdot (\theta_1 - \theta_\tau) = K_2 \cdot (\theta_\tau - \theta_2)$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν ὡς πρὸς θ_τ λαμβάνομεν:

$$\theta_\tau = \frac{K_2 \cdot \theta_2 + K_1 \cdot \theta_1}{K_2 + K_1}$$

Θέτοντες εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν τὰς δοθείσας τιμὰς εὑρίσκομεν ὅτι μετὰ τὴν ἀποκατάστασιν θερμικῆς ἰσορροπίας ἡ ἔνδειξις τοῦ θερμομέτρου εἶναι:

$$\theta_\tau = \frac{90{,}5 \cdot 14{,}5 + 1{,}84 \cdot 73{,}6}{00{,}5 + 1{,}84} \left(\frac{cal/grad \cdot grad}{cal/grad} \right)$$

ἄρα $\quad \theta_\tau = \mathbf{15{,}67^0\ C}$

234

Γνωρίζομεν ὅτι 1 λίτρον ὕδατος ἔχει μᾶζαν $m = 1000$ gr. Ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὕδατος εἶναι $c = 1$ cal/gr. grad. Ἐπομένως 1 λίτρον ὕδατος ἔχει θερμοχωρητικότητα:

$$K = 1000 \cdot 1 \left(gr \cdot \frac{cal}{gr \cdot grad} \right) = 1\,000 \ cal/grad$$

Ἄς καλέσωμεν m_1, m_2, m_3, τὰς μάζας τοῦ σιδήρου, τοῦ μολύβδου καὶ τοῦ ἀλουμινίου, αἱ ὁποῖαι ἔχουν θερμοχωρητικότητα $K = 1000$ cal/grad. Τότε ἰσχύουν αἱ ἀκόλουθοι σχέσεις:

διὰ τὸν σίδηρον: $K = m_1 \cdot c_1$ ἄρα $m_1 = \dfrac{K}{c_1}$

διὰ τὸν μόλυβδον: $K = m_2 \cdot c_2$ ἄρα $m_2 = \dfrac{K}{c_2}$

διὰ τὸ ἀλουμίνιον: $K = m_3 \cdot c_3$ ἄρα $m_3 = \dfrac{K}{c_3}$

Ἄς καλέσωμεν V_1, V_2, V_3 τοὺς ὄγκους τῶν τριῶν μετάλλων, οἱ ὁποῖοι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς μάζας m_1, m_2, m_3. Τότε λαμβάνομεν τὰς σχέσεις:

$$m_1 = V_1 \cdot d_1 \qquad m_2 = V_2 \cdot d_2 \qquad m_3 = V_3 \cdot d_3$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι οἱ ζητούμενοι ὄγκοι τῶν τριῶν μετάλλων εἶναι:

τοῦ σιδήρου: $V_1 = \dfrac{m_1}{d_1}$ ἢ $V_1 = \dfrac{K}{d_1 \cdot c_1}$

τοῦ μολύβδου: $V_2 = \dfrac{m_2}{d_2}$ ἢ $V_2 = \dfrac{K}{d_2 \cdot c_2}$

τοῦ ἀλουμινίου: $V_3 = \dfrac{m_3}{d_3}$ ἢ $V_3 = \dfrac{K}{d_3 \cdot c_3}$

Ἄν εἰς τὰς τελευταίας τρεῖς σχέσεις θέσωμεν τὰς δοθείσας τιμάς, εὑρίσκομεν:

$$V_1 = \frac{1\,000}{7{,}5 \cdot 0{,}12} \left(\frac{cal/grad}{gr/cm^3 \cdot cal/gr \cdot grad} \right)$$

ἤτοι $V_1 = \mathbf{1111\ cm^3 = 1{,}111\ dm^3}$

$$V_2 = \frac{1\,000}{11{,}4 \cdot 0{,}031} = \mathbf{2830\ cm^3 = 2{,}830\ dm^3}$$

$$V_3 = \frac{1\,000}{2{,}7 \cdot 0{,}22} = \mathbf{1683\ cm^3 = 1{,}683\ dm^3}$$

235

Τὸ τεμάχιον τοῦ σιδήρου ἔχει μᾶζαν $m_\Sigma = 6{,}85$ gr καὶ εἰδικὴν θερμότητα $c_\Sigma = 0{,}12$ cal/gr. grad. Τὸ τεμάχιον τοῦ σιδήρου, θερμαίνεται διὰ τῆς φλογὸς τοῦ λύχνου Bunsen καὶ ἀποκτᾶ τὴν θερμοκρασίαν θ_2 τῆς φλογός. Τὸ χάλκινον δοχεῖον τοῦ θερμιδομέτρου ἔχει μᾶζαν $m_X = 152{,}8$ gr καὶ εἰδικὴν θερμότητα $c_X = 0{,}092$ cal/gr · grad. Τὸ δὲ ὕδωρ τοῦ θερμιδομέτρου ἔχει μᾶζαν $m_Y = 300$ gr.

Ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία τοῦ θερμιδομέτρου εἶναι $\theta_1 = 18{,}4^\circ$ C. Μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ σιδήρου ἐντὸς τοῦ θερμιδομέτρου, ἡ θερμοκρασία τοῦ συστήματος γίνεται $\theta_\tau = 21{,}3^\circ$ C. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις:

$$m_\Sigma \cdot c_\Sigma \cdot (\theta_2 - \theta_\tau) = m_X \cdot c_X \cdot (\theta_\tau - \theta_1) + m_Y \cdot c_Y \cdot (\theta_\tau - \theta_1)$$

ἢ $$m_\Sigma \cdot c_\Sigma \cdot (\theta_2 - \theta_\tau) = (m_X \cdot c_X + m_Y \cdot c_Y) \cdot (\theta_\tau - \theta_1)$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν λαμβάνομεν:

$$\theta_2 = \frac{(m_X \cdot c_X + m_Y \cdot c_Y) \cdot (\theta_\tau - \theta_1) + m_\Sigma \cdot c_\Sigma \cdot \theta_\tau}{m_\Sigma \cdot c_\Sigma}$$

Θέτοντες εἰς τὴν εὑρεθεῖσαν ἐξίσωσιν τὰς δοθείσας τιμὰς εὑρίσκομεν:

$$\theta_2 = \frac{(152{,}8 \cdot 0{,}092 + 300 \cdot 1) \cdot 2{,}9 + 6{,}85 \cdot 0{,}12 \cdot 21{,}3}{6{,}85 \cdot 0{,}12} \text{ grad}$$

καὶ κατὰ προσέγγισιν : $\theta_2 = \mathbf{1\,200^\circ\ C}$

ΜΕΤΑΒΟΛΑΙ ΤΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

236

Ἀρχικῶς ἐντὸς τοῦ δοχείου ὑπάρχει μᾶζα πάγου m_Π καὶ μᾶζα ὕδατος m_Y. Τὸ σύστημα πάγος — ὕδωρ ἔχει προφανῶς θερμοκρασίαν 0° C. Δίδεται ὅτι εἶναι:

$$m_\Pi + m_Y = 400 \text{ gr}$$

Ἐντὸς τοῦ δοχείου προσθέτομεν μᾶζαν ὕδατος m = 300 gr θερμοκρασίας $\theta = 80^\circ$ C. Ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ συστήματος εἶναι $\theta_\tau = 10^\circ$C. Τὸ προστεθὲν θερμὸν ὕδωρ ἀπέβαλε ποσότητα θερμότητος:

$$Q = m \cdot c \cdot (\theta_\tau - \theta)$$

ἤτοι $$Q = 300 \cdot 1 \cdot 70 \left(\text{gr} \cdot \frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot \text{grad}} \cdot \text{grad}\right)$$

καὶ $$Q = 21\,000 \text{ cal}$$

Ἡ ποσότης αὐτὴ τῆς θερμότητος ἐδαπανήθη ἀφ' ἑνὸς μὲν διὰ τὴν τῆξιν τῆς μάζης m_Π τοῦ πάγου καὶ ἀφ' ἑτέρου διὰ τὴν ὕψωσιν τῆς θερμοκρασίας 400 gr ὕδατος ἀπὸ 0° C εἰς 10° C.

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ θερμότης τήξεως τοῦ πάγου εἶναι $\tau = 80$ cal/gr

Ἄρα διὰ τὴν τῆξιν τοῦ πάγου ἐδαπανήθη ποσότης θερμότητος:

$$Q_1 = m_\Pi \cdot \tau \qquad \text{ἤτοι} \qquad Q_1 = m_\Pi \cdot 80 \text{ cal}$$

Μετὰ τὴν τῆξιν τοῦ πάγου προέκυψεν ἴση μᾶζα ὕδατος 0° C.

Ἄρα διὰ τὴν ὕψωσιν τῆς θερμοκρασίας τῶν 400 gr ὕδατος ἀπὸ 0° C εἰς 10° C ἐδαπανήθη ποσότης θερμότητος:

$$Q = 400 \cdot 1 \cdot 10 = 4\,000 \text{ cal}$$

Ἐπειδὴ εἴδομεν ὅτι πρέπει νὰ εἶναι: $Q = Q_1 + Q_2$

εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν: $21\,000 = m_\Pi \cdot 80 + 4\,000$

Ἄρα ἡ ζητουμένη μᾶζα τοῦ πάγου εἶναι:

$$m_\Pi = \frac{21\,000 - 4\,000}{80} \left(\frac{\text{cal}}{\text{cal/gr}}\right)$$

καὶ $$m_\Pi = \mathbf{212{,}5\ gr}$$

237

Ἔστω m_π ἡ μᾶζα τοῦ πάγου θερμοκρασίας -15° C ἡ ὁποία δύναται νὰ τακῇ ἀπὸ 1 000 gr ὕδατος 60° C. Τὸ ὕδωρ τοῦτο θὰ ἀποβάλῃ ποσότητα θερμότητος:

$$Q = 1\,000 \cdot 1 \cdot 60 = 60\,000 \text{ cal}$$

ἡ ὁποία θὰ δαπανηθῇ ἀφ' ἑνὸς μὲν διὰ νὰ ὑψωθῇ ἡ θερμοκρασία τοῦ πάγου ἀπὸ -15° C εἰς 0° C καὶ ἀφ' ἑτέρου διὰ τὴν τῆξιν τοῦ πάγου. Γνωρίζομεν ὅτι ἡ μὲν εἰδικὴ θερμότης τοῦ πάγου εἶναι $c = 0{,}58$ cal/gr. grad ἡ δὲ θερμότης τήξεως αὐτοῦ εἶναι $\tau = 80$ cal/gr. Οὕτω διὰ μὲν τὴν ὕψωσιν τῆς θερμοκρασίας τοῦ πάγου δαπανᾶται ποσότης θερμότητος:

$$Q_1 = m_\pi \cdot 0{,}58 \cdot 15 \text{ cal} \qquad \text{ἢ} \qquad Q_1 = m_\pi \cdot 8{,}70 \text{ cal}$$

διὰ δὲ τὴν τῆξιν τοῦ πάγου δαπανᾶται ποσότης θερμότητος:

$$Q_2 = m_\pi \cdot 80 \text{ cal}$$

Ἐπειδὴ εἶναι $Q = Q_1 + Q_2$ εὑρίσκομεν τὴν ἀκόλουθον ἐξίσωσιν:

$$60\,000 = m_\pi \cdot 8{,}70 + m_\pi \cdot 80$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη μᾶζα τοῦ πάγου εἶναι:

$$m_\pi = \frac{60\,000}{88{,}70} \text{ gr} \qquad \text{ἢ} \qquad m_\pi = \mathbf{676{,}4\ gr}$$

238

Ἄς καλέσωμεν θ^0 τὴν τελικὴν θερμοκρασίαν τοῦ συστήματος. Τὸ δοχεῖον τοῦ θερμιδομέτρου ἔχει μᾶζαν 350 gr. Τὸ θερμιδόμετρον ψύχεται ἀπὸ 20°C εἰς θ°C, ἄρα ἀποβάλλει ποσότητα θερμότητος:

$$Q = 350 \cdot 0{,}1 \cdot (20 - \theta) + 1000 \cdot 1 \cdot (20 - \theta)$$

ἤτοι $$Q = 1035 \cdot (20 - \theta) \text{ cal}$$

Αὐτὴ ἡ ποσότης θερμότητος δαπανᾶται ὡς ἑξῆς:

α) διὰ τὴν τῆξιν τῶν 115 gr πάγου

$$Q_1 = 115 \cdot 80 \text{ cal} \quad \text{ἤ} \quad Q_1 = 9\,200 \text{ cal}$$

β) διὰ τὴν ὕψωσιν τῆς θερμοκρασίας τῶν 115 gr ὕδατος, τὰ ὁποῖα προκύπτουν ἀπὸ τὴν τῆξιν τοῦ πάγου, ἀπὸ 0°C εἰς θ°C

$$Q_2 = 115 \cdot 1 \cdot \theta \text{ cal} \quad \text{ἤ} \quad Q_2 = 115 \cdot \theta \text{ cal}$$

Ἐπειδὴ εἶναι $Q = Q_1 + Q_2$ ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$1035 \cdot (20 - \theta) = 9200 + 115 \cdot \theta$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν ὡς πρὸς θ εὑρίσκομεν:

$$\theta = \mathbf{10^0\ C}$$

239

Ἐντὸς χρόνου $t = 11{,}33$ min εἰσρέει εἰς τὸ θιρμιδόμετρον μᾶζα m_1 θερμοῦ ὕδατος ἴση μέ:

$$m_1 = 50 \left(\frac{\text{gr}}{\text{min}}\right) \cdot 11{,}33 \text{ (min)} = 566{,}5 \text{ gr}$$

Τὸ ὕδωρ τοῦτο ψύχεται ἀπὸ 80°C εἰς 0°C καὶ συνεπῶς ἀποβάλλει ποσότητα θερμότητος:

$$Q = 566{,}5 \cdot 1 \cdot 80 \left(\text{gr} \cdot \frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot \text{grad}} \cdot \text{grad}\right)$$

ἤτοι $$Q = 45\,320 \text{ cal}$$

Αὐτὴ ἡ ποσότης θερμότητος δαπανᾶται: α) διὰ τὴν ὕψωσιν τῆς θερμοκρασίας τοῦ θερμιδομέτρου καὶ τοῦ πάγου ἀπὸ —20°C εἰς 0°C καὶ β) διὰ τὴν τῆξιν τοῦ πάγου. Ἄν λοιπὸν τ εἶναι ἡ θερμότης τήξεως τοῦ πάγου, τότε ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις:

α) $Q_1 = 500 \cdot 0{,}1 \cdot 20 + 500 \cdot 0{,}5 \cdot 20 = 6\,000$ cal

β) $Q_2 = 500 \cdot \tau$ cal

Ἐπειδὴ εἶναι $Q = Q_1 + Q_2$ λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$45\,320 = 6\,000 + 500\,\tau$$

ἄρα $\tau = \dfrac{45\,320 - 6\,000}{500}\left(\dfrac{cal}{gr}\right)$ καὶ $\tau = \mathbf{78{,}64\ cal/gr}$

Ὅταν τακῇ ὅλος ὁ πάγος καὶ γίνῃ ὕδωρ 0°C, τότε ἐντὸς τοῦ θερμιδομέτρου ὑπάρχει μᾶζα ὕδατος:

$$m_2 = 566{,}5 + 500 = 1066{,}5\ gr$$

Ἔστω m ἡ μᾶζα τοῦ ὕδατος 80° C, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται διὰ νὰ γίνῃ ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ συστήματος 20°C. Ἡ μᾶζα αὐτὴ θὰ ἀποβάλῃ ποσότητα θερμότητος:

$$Q_4 = m \cdot 1 \cdot (80^\circ - 20^\circ) = m \cdot 60\ cal$$

ἡ ὁποία θὰ ὑψώσῃ τὴν θερμοκρασίαν τοῦ συστήματος ἀπὸ 0°C εἰς 20°. Διὰ τὴν ὕψωσιν αὐτὴν τῆς θερμοκρασίας ἀπαιτεῖται ποσότης θερμότητος:

$$Q_5 = 500 \cdot 0{,}1 \cdot 20 + 1066{,}5 \cdot 1 \cdot 20 = 22\,330\ cal$$

Ἐπειδὴ εἶναι $Q_4 = Q_5$ ἔχομεν:

$$m \cdot 60 = 22\,330$$

ἄρα $m = \dfrac{22\,330}{60}\,gr$ καὶ $m = 372{,}16\ gr$

Ὁ ζητούμενος χρόνος t εἶναι:

$$t = \frac{372{,}16}{50}\left(\frac{gr}{gr/min}\right) \quad \text{ἢ} \quad t = \mathbf{7{,}44\ min}$$

240

Διὰ νὰ τακοῦν 0,72 gr πάγου 0°C πρέπει νὰ δαπανηθῇ ποσότης θερμότητος:

$$Q = 0{,}72 \cdot 80\left(gr \cdot \frac{cal}{gr}\right) = 57{,}60\ cal$$

Αὐτὴ ἡ ποσότης θερμότητος προσφέρεται ἀπὸ τὰ 6,33 gr ψευδαργύρου, τὰ ὁποῖα ψύχονται ἀπὸ 98,5° εἰς 0°C καὶ οὕτω ἀποβάλλουν ποσότητα θερμότητος:

$$Q = 6{,}33 \cdot c \cdot 98{,}5\ cal$$

ὅπου c εἶναι ἡ ζητουμένη εἰδικὴ θερμότης τοῦ ψευδαργύρου. Οὕτω λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$6{,}33 \cdot c \cdot 98{,}5 = 57{,}60$$

$$\text{ἄρα} \quad c = \frac{57{,}60}{6{,}33 \cdot 98{,}5} \left(\frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot \text{grad}}\right)$$

$$\text{καὶ} \quad c = \mathbf{0{,}092\ cal/gr \cdot grad}$$

241

Ἐπὶ 1 cm² τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς, ὑπάρχει ὄγκος πάγου:

$$V = 1\ (\text{cm}^2) \cdot 2\ (\text{cm}) = 2\ \text{cm}^3$$

Ὁ ὄγκος αὐτὸς τοῦ πάγου ἔχει μᾶζαν:

$$m = V \cdot d = 2 \cdot 0{,}917\ (\text{cm}^3 \cdot \text{gr/cm}^3)$$

$$\text{ἤτοι} \quad m = 1{,}834\ \text{gr}$$

Διὰ τὴν τῆξιν αὐτῆς τῆς μάζης τοῦ πάγου ἀπαιτεῖται ποσότης θερμότητος:

$$Q = m \cdot \tau \qquad \text{ἤτοι} \qquad Q = 1{,}834 \cdot 80\ (\text{gr} \cdot \text{cal/gr})$$

$$\text{ἄρα} \quad Q = 146{,}72\ \text{cal}$$

Ἐπειδὴ ἐπιφάνεια 1 cm² δέχεται κατὰ λεπτὸν ποσότητα θερμότητος 1,5 cal, ἕπεται ὅτι διὰ τὴν τελείαν τῆξιν τοῦ στρώματος τοῦ πάγου ἀπαιτεῖται χρόνος:

$$t = \frac{146{,}72}{1{,}5} \left(\frac{\text{cal}}{\text{cal/min}}\right)$$

$$\text{καὶ} \quad t = \mathbf{97{,}813\ min = 1h\ 37\ min\ 48{,}78\ sec}$$

242

Ἡ θερμοχωρητικότης τοῦ δοχείου εἶναι K = 8 cal/grad, ἡ δὲ ἀρχικὴ θερμοκρασία τοῦ συστήματος δοχεῖον—πάγος εἶναι -20° C. Ἡ μᾶζα τοῦ προστιθεμένου θερμοῦ ὕδατος ψύχεται ἀπὸ 32° C εἰς 12° C καὶ συνεπῶς ἀποβάλλει ποσότητα θερμότητος:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta\theta$$

$$\text{ἤτοι} \quad Q = 267{,}8 \cdot 1 \cdot 20 \left(\text{gr} \cdot \frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot \text{grad}} \cdot \text{grad}\right)$$

$$\text{καὶ} \quad Q = 5\,356\ \text{cal}$$

Αὐτὴ ἡ ποσότης θερμότητος δαπανᾶται ὡς ἑξῆς:

α) Διὰ τὴν ὕψωσιν τῆς θερμοκρασίας τοῦ δοχείου καὶ τοῦ πάγου ἀπὸ -20° C εἰς 0° C:

$$Q_1 = 8 \cdot 20 + 50 \cdot c \cdot 20 = 160 + 1\,000 \cdot c \text{ cal}$$

ὅπου c εἶναι ἡ ζητουμένη εἰδικὴ θερμότης τοῦ πάγου.

β) Διὰ τὴν τῆξιν τοῦ πάγου:

$$Q_2 = 50 \cdot 80 = 4\,000 \text{ cal}$$

γ) Διὰ τὴν ὕψωσιν τῆς θερμοκρασίας τοῦ δοχείου καὶ τοῦ σχηματισθέντος ὕδατος ἀπὸ 0° C εἰς 12° C:

$$Q_3 = 8 \cdot 12 + 50 \cdot 1 \cdot 12 = 692 \text{ cal}$$

Ἐπειδὴ εἶναι $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ ἔχομεν:

$$5\,356 = 160 + 1\,000 \cdot c + 692$$

ἄρα $c = \mathbf{0{,}504\ cal/gr \cdot grad}$

243

Ἔστω m ἡ μᾶζα τοῦ πάγου -26° C, ἡ ὁποία πρέπει νὰ τεθῇ ἐντὸς τοῦ δοχείου. Ὅταν ἀποκατασταθῇ θερμικὴ ἰσορροπία, ἡ θερμοκρασία τοῦ συστήματος θὰ εἶναι 0° C (διότι θὰ συνυπάρχῃ ὕδωρ καὶ πάγος), ἀλλὰ συγχρόνως 85 gr ὕδατος θὰ ἔχουν μεταβληθῆ εἰς πάγον 0° C.

Τὰ 1800 gr ὕδατος ψυχόμενα ἀπὸ 8° C εἰς 0° C ἀποβάλλουν ποσότητα θερμότητος:

$$Q_1 = 1\,800 \cdot 1 \cdot 8 = 14\,400 \text{ cal}$$

Τὰ 85 gr ὕδατος 0° C, ὅταν μεταβάλλωνται εἰς πάγον 0° C, ἀποβάλλουν ποσότητα θερμότητος:

$$Q_2 = 85 \cdot 80 = 6\,800 \text{ cal}$$

Ἄρα ἡ δαπανωμένη ποσότης θερμότητος εἶναι:

$$Q = Q_1 + Q_2 = 14\,400 + 6\,800 = 21\,200 \text{ cal}$$

Αὐτὴ ἡ ποσότης θερμότητος θὰ προσληφθῇ ἀπὸ τὴν μᾶζαν m τοῦ πάγου διὰ νὰ ὑψωθῇ ἡ θερμοκρασία του ἀπὸ -26° C εἰς 0° C. Ἄρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$m \cdot 0{,}5 \cdot 26 = 21\,200$$

καὶ $$m = \frac{21\,200}{0{,}5 \cdot 26} \left[\frac{\text{cal}}{\frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot \text{grad}} \cdot \text{grad}} \right]$$

ἤτοι $m = \mathbf{1631\ gr}$

244

Ἐντὸς τοῦ δοχείου ὑπάρχει εἰς κατάστασιν ὑστερήσεως πήξεως (ὑπερτήξεως) μᾶζα ὕδατος $m = 120$ gr ἔχουσα θερμοκρασίαν -18^0 C. Ἂν ἀναταράξωμεν τὸ δοχεῖον, τότε ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος θὰ ἀνέλθῃ εἰς 0^0C καὶ μέρος τοῦ ὕδατος θὰ στερεοποιηθῇ. Ἔστω m_Π ἡ μᾶζα τοῦ πάγου, ὁ ὁποῖος θὰ σχηματισθῇ.

Οὕτω ἐντὸς τοῦ δοχείου θὰ ἀπομείνῃ μᾶζα ὕδατος $m - m_\Pi$. Διὰ τὴν ὕψωσιν τῆς θερμοκρασίας τοῦ ἀπομείναντος ὕδατος ἀπὸ -18^0 C εἰς 0^0 C ἀπαιτεῖται ποσότης θερμότητος:

$$Q_1 = (m - m_\Pi) \cdot c \cdot \Delta\theta$$

ἤτοι $$Q_1 = (120 - m_\Pi) \cdot 1 \cdot 18 \left(gr \cdot \frac{cal}{gr \cdot grad} \cdot grad \right)$$

καὶ $$Q_1 = 2\,160 - 18 \cdot m_\Pi \text{ cal}$$

Αὐτὴ ἡ ποσότης θερμότητος προέρχεται ἀπὸ τὴν θερμότητα, τὴν ὁποίαν ἀποβάλλει ἡ μᾶζα m_Π τοῦ ὕδατος, ὅταν μεταβάλλεται εἰς πάγον. Ἡ ποσότης αὐτὴ τῆς θερμότητος εἶναι:

$$Q = m_\Pi \cdot \tau \quad \text{ἤτοι} \quad Q = m_\Pi \cdot 80 \left(gr \cdot \frac{cal}{gr} \right)$$

καὶ $$Q = 80 \cdot m_\Pi \text{ cal}$$

Πρὸς στιγμὴν ἐντὸς τοῦ δοχείου ὑπάρχουν:

μᾶζα ὕδατος: $120 - m_\Pi$ καὶ μᾶζα πάγου: m_Π

Τὸ σύστημα πρὸς στιγμὴν ἔχει θερμοκρασίαν -18^0 C καὶ ἔπειτα ἀποκτᾶ θερμοκρασίαν 0^0 C. Διὰ τὴν ὕψωσιν τῆς θερμοκρασίας τοῦ σχηματισθέντος πάγου ἀπὸ -18^0 C εἰς 0^0 C δαπανᾶται ποσότης θερμότητος:

$$Q_2 = m_\Pi \cdot 0{,}5 \cdot 18 \left(gr \cdot \frac{cal}{gr \cdot grad} \cdot grad \right) \text{ ἤτοι } Q_2 = 9 \cdot m_\Pi \text{ cal}$$

Ἐπειδὴ εἶναι $Q = Q_1 + Q_2$ ἔχομεν:

$$80 \cdot m_\Pi = 2\,160 - 18 \cdot m_\Pi + 9 \cdot m_\Pi$$

ἄρα $$m_\Pi = \mathbf{24{,}3\ gr}$$

245

Γνωρίζομεν ὅτι οἱ ἀκόρεστοι ἀτμοὶ ἀκολουθοῦν τοὺς νόμους τῶν ἀερίων, ἡ δὲ τάσις των εἶναι πάντοτε μικροτέρα ἀπὸ τὴν μεγίστην τάσιν, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν θερμοκρασίαν τῶν ὑδρατμῶν. Ἡ θεωρουμένη μᾶζα τῶν ὑδρατμῶν εἰς 30^0 C ἔχει :

ὄγκον $V_1 = 10\ dm^3$ τάσιν $p_1 = 12$ mm Hg

Ὑπὸ σταθερὰν θερμοκρασίαν ἡ μᾶζα αὐτὴ τῶν ὑδρατμῶν ἀποκτᾷ :

ὄγκον $V_2 = 4\ dm^6$ τάσιν p_2

Σύμφωνα μὲ τὸν νόμον Boyle — Mariotte ἰσχύει τότε ἡ σχέσις:

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 \quad \text{ἤτοι} \quad p_2 = \frac{p_1 \cdot V_1}{V_2}$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη τάσις εἶναι:

$$p_2 = \frac{12 \cdot 10}{4}\left(\frac{\text{mm Hg} \cdot dm^3}{dm^3}\right) \quad \text{καὶ} \quad p_2 = \mathbf{30\ mm\ Hg}.$$

Δίδεται ὅτι εἰς 30^0 C ἡ μεγίστη τάσις τῶν ὑδρατμῶν εἶναι $F_{30} = 31{,}6$ mm Hg. Ἐπειδὴ εἶναι $p_2 < F_{30}$ συνάγεται ὅτι οἱ θεωρούμενοι ὑδρατμοὶ καὶ ὅταν καταλάβουν ὄγκον 4 dm^3 ἐξακολουθοῦν νὰ εἶναι ἀκόρεστοι.

246

Ἡ μᾶζα τῶν ὑδρατμῶν εἰς 35^0 C ἔχει :

ὄγκον $V_1 = 50\ dm^8$ τάσιν $p_1 = 20$ mm Hg

Οἱ ὑδρατμοὶ εἶναι ἀκόρεστοι, διότι ἡ τάσις των εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὴν ἀντίστοιχον μεγίστην τάσιν. Θερμαινόμενοι ὑπὸ σταθερὰν θερμοκρασίαν ἀποκτοῦν:

ὄγκον $V_2 = 10\ dm^3$ τάσιν p_2

Σύμφωνα μὲ τὸν νόμον Bouyle — Mariotte ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 \quad \text{ἤτοι} \quad p_2 = \frac{p_1 \cdot V_1}{V_2}$$

$$\text{καὶ} \quad p_2 = \frac{20 \cdot 50}{10}\left(\frac{\text{mm Hg} \cdot dm^3}{dm^3}\right) \quad \text{ἢ} \quad p_2 = 100\ \text{mm Hg}$$

Τὸ εὑρεθὲν ἐξαγόμενον εἶναι ἀδύνατον. Διότι εἰς 35^0C ἡ μεγίστη τάσις τῶν ὑδρατμῶν εἶναι $F_{35} = 42{,}2$ mm Hg. Ἄρα ὅταν ὁ ὄγκος τῶν ὑδρατμῶν γίνῃ 10 dm^3, τότε οἱ ὑδρατμοὶ γίνονται κεκορεσμένοι καὶ ἡ τάσις των εἶναι ἴση μὲ τὴν μεγίστην τάσιν 42,2 mm Hg. Μέρος τῶν ὑδρατμῶν ἀναγκαστικῶς ὑγροποιεῖται. Ἄρα ἡ ζητουμένη τάσις εἶναι:

$$p_2 = \mathbf{42{,}2\ mm\ Hg}$$

247

Ἀρχικῶς συνυπάρχουν 100 gr ὕδατος καὶ 100 gr πάγου. Ἡ θερμοκρασία τοῦ συστήματος εἶναι 0°C. Διὰ νὰ ὑψωθῇ ἡ θερμοκρασία τοῦ συστήματος ἀπὸ 0°C εἰς 18°C ἀπαιτοῦνται αἱ ἑξῆς ποσότητες θερμότητος:

α) Διὰ τὴν τῆξιν τῶν 100 gr πάγου:

$$Q_1 = 100 \cdot 80\left(gr \cdot \frac{cal}{gr}\right) \quad \text{ἢ} \quad Q_1 = 8\,000\ cal$$

β) Διὰ τὴν ὕψωσιν τῆς θερμοκρασίας τῶν 100 gr ὕδατος, τὸ ὁποῖον ὑπῆρχεν ἀρχικῶς καὶ τῶν 100 gr ὕδατος, τὸ ὁποῖον θὰ προκύψῃ ἀπὸ τὴν τῆξιν τῶν 100 gr πάγου:

$$Q_2 = (100 + 100) \cdot 1 \cdot 18\left(gr \cdot \frac{cal}{gr \cdot grad} \cdot grad\right)$$

$$\text{ἢ} \qquad Q_2 = 3\,600\ cal$$

Οὕτω διὰ τὴν θέρμανσιν τοῦ συστήματος ἀπὸ 0°C εἰς 18°C ἀπαιτεῖται ποσότης θερμότητος:

$$Q = Q_1 + Q_2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad Q = 8\,000 + 3\,600 = 11\,600\ cal$$

Αὐτὴν τὴν ποσότητα θερμότητος θὰ τὴν προσφέρῃ εἰς τὸ σύστημα μία μᾶζα m ὑδρατμοῦ, θερμοκρασίας 100°C. Ἡ μᾶζα m τῶν ὑδρατμῶν θὰ ἀποδώσῃ τὰς ἑξῆς ποσότητας θερμότητος:

α) Κατὰ τὴν ὑγροποίησίν των, δηλαδὴ κατὰ τὴν μεταβολήν των εἰς ὕδωρ 100°C, ἡ μᾶζα m τῶν ὑδρατμῶν ἀποδίδει ποσότητα θερμότητος:

$$Q_3 = m \cdot A \qquad \text{ἤτοι} \qquad Q_3 = m \cdot 539\left(gr \cdot \frac{cal}{gr}\right)$$

$$\text{καὶ} \qquad Q_3 = 539 \cdot m\ \ cal$$

Εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν τὸ A παριστᾶ, ὡς γνωστόν, τὴν θερμότητα ἐξαερώσεως τοῦ ὕδατος ($A = 539\ cal/gr$).

β) Κατὰ τὴν ψῦξιν τῆς μάζης m τοῦ ὕδατος, τὸ ὁποῖον θὰ προκύψῃ ἀπὸ τὴν ὑγροποίησιν τῶν ὑδρατμῶν, ἀποβάλλεται ποσότης θερμότητος:

$$Q_4 = m \cdot 1 \cdot (100 - 18)$$

$$\text{ἤτοι} \qquad Q_4 = m \cdot 1 \cdot 82\left(gr \cdot \frac{cal}{gr \cdot grad} \cdot grad\right)$$

$$\text{καὶ} \qquad Q_4 = 82 \cdot m\ \ cal$$

Οὕτω κατὰ τὴν ψῦξιν τῆς μάζης m τῶν ὑδρατμῶν ἀπὸ 100°C εἰς 18°C ἀποβάλλεται ποσότης θερμότητος:

$$Q' = Q_3 + Q_4 \quad \text{ἤτοι} \quad Q' = 539 \cdot m + 32 \cdot m \text{ cal}$$

$$\text{καὶ} \quad Q' = 621 \cdot m \text{ cal}$$

Ἐπειδὴ εἶναι $Q' = Q$, ἔχομεν:

$$621 \cdot m = 11\,600 \quad \text{ἄρα} \quad m = \mathbf{18{,}6\ gr}$$

248

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ θερμότης ἐξαερώσεως τοῦ ὕδατος εἶναι $A = 539$ cal/gr, ἡ δὲ θερμότης τήξεως τοῦ πάγου εἶναι $\tau = 80$ cal/gr. Ἡ μᾶζα τοῦ πάγου εἶναι $m_\pi = 50$ gr, ἡ δὲ μᾶζα τῶν ὑδρατμῶν εἶναι $m_\Upsilon = 500$ gr. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ μᾶζα τῶν ὑδρατμῶν εἶναι δέκα φορὰς μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν μᾶζαν πάγου. Ἄρα ὁ πάγος θὰ τακῇ ἐξ ὁλοκλήρου Οὕτω διὰ τῆξιν τῶν 50 gr πάγου ἀπαιτεῖται ποσότης θερμότητος:

$$Q_1 = 50 \cdot 80 \ (\text{gr} \cdot \text{cal/gr}) = 4\,000 \text{ cal}$$

Ἀπὸ τῆξιν τοῦ πάγου προκύπτουν 50 gr ὕδατος 0°C καὶ διὰ νὰ ὑψωθῇ ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος τούτου ἀπὸ 0°C εἰς 100°C ἀπαιτεῖται ποσότης θερμότητος:

$$Q_2 = 50 \cdot 1 \cdot 100 \left(\text{gr} \cdot \frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot \text{grad}} \cdot \text{grad} \right) \quad \text{ἤτοι} \quad Q_2 = 5\,000 \text{ cal}$$

Οὕτω διὰ τὴν μεταβολὴν τῶν 50 gr πάγου 0°C εἰς ὕδωρ 100°C ἀπαιτεῖται ποσότης θερμότητος:

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad \text{ἢ} \quad Q = 4\,000 + 5\,000 = 9\,000 \text{ cal}$$

Ἡ θερμότης αὐτὴ προσφέρεται ἀπὸ τὴν μεταβολὴν μάζης m ὑδρατμῶν 100°C εἰς ὕδωρ 100°C.

Ἄρα ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$Q = m \cdot A \quad \text{ἤτοι} \quad m = \frac{Q}{A} = \frac{9\,000}{539} \left(\frac{\text{cal}}{\text{cal/gr}} \right)$$

$$\text{καὶ } m = 16{,}7 \text{ gr}$$

Οὕτω τελικῶς θὰ ἔχωμεν:

μᾶζαν ὕδατος 100° : $50 + 16{,}7 =$ **66,7 gr**

μᾶζαν ὑδρατμῶν 100° : $500 - 16{,}7 =$ **483,3 gr**

249

Ἀρχικῶς τὸ σύστημα ἔχει θερμοκρασίαν 0° C, διότι συνυπάρχουν ὕδωρ καὶ πάγος. Ἡ θερμότης τήξεως τοῦ πάγου εἶναι $\tau = 80$ cal/gr ἡ δὲ θερμότης ἐξαερώσεως τοῦ ὕδατος εἶναι $A = 539$ cal/gr. Διὰ νὰ τακῇ ὁλόκληρος ὁ ἐντὸς τοῦ δοχείου πάγος, δηλαδὴ διὰ νὰ τακοῦν 2000 gr πάγου 0° C, ἀπαιτεῖται ποσότης θερμότητος:

$$Q_1 = 2\,000 \cdot 80 \left(\mathrm{gr} \cdot \frac{\mathrm{cal}}{\mathrm{gr}}\right) = 160\,000 \text{ cal}$$

Εἰς τὸ δοχεῖον διοχετεύομεν 80 gr ὑδρατμοῦ 100° C. Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ ὑδρατμὸς οὗτος μεταβάλλεται εἰς ὕδωρ 0° C, τότε ἀποβάλλει ποσότητα θερμότητος:

$$Q_2 = 80 \cdot 539 + 80 \cdot 1 \cdot 100 = 51\,120 \text{ cal}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν ὁ ὑδρατμὸς 100° C μεταβληθῇ εἰς ὕδωρ 0° C, ἀποβάλλει ποσότητα θερμότητος, ἡ ὁποία δὲν ἐπαρκεῖ διὰ νὰ τακῇ ὁλόκληρος ἡ μᾶζα τοῦ πάγου, ἀλλὰ μόνον μία μᾶζα m πάγου, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μέ:

$$m = \frac{Q_2}{\tau} \qquad \text{ἤτοι} \qquad m = \frac{51\,120}{80}\left(\frac{\mathrm{cal}}{\mathrm{cal/gr}}\right) \text{ καὶ } \quad m = 639 \text{ gr}$$

Οὕτω τὸ σύστημα θὰ ἐξακολουθήσῃ νὰ ἔχῃ θερμοκρασίαν:

$$\theta = \mathbf{0^o\ C}$$

μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἐντὸς τοῦ θερμιδομέτρου θὰ περιέχωνται τώρα:

πάγος : $2000 - 639 = 1361$ gr $= 1{,}361$ kgr
ὕδωρ : $5000 + 639 + 80 = 5719$ gr $= 5{,}719$ kgr

250

Τὸ ὕδωρ ἔχει θερμοκρασίαν 60° C. Διὰ νὰ ἐξαερωθῇ ὡρισμένη μᾶζα τοῦ ὕδατος τούτου, πρέπει ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος νὰ ὑψωθῇ ἀπὸ 60° C εἰς 100° C. Δι' αὐτὴν τὴν ὕψωσιν τῆς θερμοκρασίας τοῦ ὕδατος ἀπαιτεῖται ποσότης θερμότητος:

$$Q = 500 \cdot 1 \cdot 40^o \left(\mathrm{gr} \cdot \frac{\mathrm{cal}}{\mathrm{gr \cdot grad}} \cdot \mathrm{grad}\right) \text{ ἤτοι } \quad Q = 20\,000 \text{ cal}$$

Αὐτὴν τὴν ποσότητα θερμότητος θὰ προσφέρῃ μᾶζα ἀργιλλίου 1000 gr, ὅταν ψυχθῇ ἀπὸ 180° C εἰς 100° C. Κατὰ τὴν ψῦξιν αὐτὴν τοῦ ἀργιλλίου ἀποβάλλεται ποσότης θερμότητος:

$$Q = 1\,000 \cdot 0{,}21 \cdot 80^o \left(\mathrm{gr} \cdot \frac{\mathrm{cal}}{\mathrm{gr \cdot grad}} \cdot \mathrm{grad}\right)$$

ἤτοι $$Q' = 16\,800 \text{ cal}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ποσότης θερμότητος Q', τὴν ὁποίαν θὰ ἀποβάλλῃ ἡ μᾶζα τοῦ ἀργιλλίου, ψυχομένη ἀπὸ 180° C εἰς 100° C, δὲν εἶναι ἀρκετὴ διὰ νὰ ὑψώσῃ τὴν θερμοκρασίαν τῶν 500 gr τοῦ ὕδατος ἀπὸ 60° C εἰς 100° C. Ἄρα δὲν θὰ λάβῃ χώραν ἐξαέρωσις τοῦ ὕδατος, ἀλλὰ τὸ μεῖγμα (ἀργίλλιον—ὕδωρ) θὰ ἀποκτήσῃ μίαν θερμοκρασίαν θ° C μικροτέραν τῶν 100° C. Τὴν τελικὴν θερμοκρασίαν θ° C τοῦ μείγματος δυνάμεθα νὰ τὴν ὑπολογίσωμεν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$500 \cdot 1 \cdot (\theta - 60^\circ) = 1\,000 \cdot 0{,}21 \cdot (180^\circ - \theta)$$

ἄρα $$\theta = \mathbf{95{,}5^\circ\ C}$$

251

Οἱ περιεχόμενοι ἐντὸς τῆς αἰθούσης ὑδρατμοὶ ἔχουν θερμοκρασίαν $\theta = 20^\circ$ C καὶ ὄγκον $V = 15\,000\ m^3$. Ἡ μεγίστη τάσις τῶν ὑδρατμῶν εἰς 20° C εἶναι $F = 17{,}5$ mm Hg. Ἡ σχετικὴ ὑγρασία τοῦ ἀέρος εἶναι $\Delta = 0{,}80$. Γνωρίζομεν ὅτι σχετικὴ ὑγρασία τοῦ ἀέρος καλεῖται ὁ λόγος τῆς μάζης m τῶν ὑδρατμῶν, οἱ ὁποῖοι ὑπάρχουν εἰς 1 m³ ἀέρος πρὸς τὴν μᾶζαν M τῶν ὑδρατμῶν, οἱ ὁποῖοι θὰ ὑπῆρχον εἰς 1 m³ ἀέρος, ἐὰν ὁ ἀὴρ ἦτο κεκορεσμένος. Ἄρα ἔχομεν: $\Delta = \dfrac{m}{M}$ καὶ $m = \Delta \cdot M$ (1)

Εἶναι γνωστὸν ὅτι, ἂν d_o εἶναι ἡ πυκνότης ἑνὸς ἀερίου ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας (0° C, $p_o = 76$ cm Hg), τότε ἡ πυκνότης d τοῦ ἀερίου εἰς θ° C καὶ ὑπὸ πίεσιν p δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$d = d_o \cdot \frac{p}{p_o \cdot (1 + \alpha \cdot \theta)} \qquad (2)$$

Εἰς θερμοκρασίαν θ° ἡ μεγίστη τάσις τῶν ὑδρατμῶν εἶναι F. Τότε οἱ ὑδρατμοὶ εἶναι κεκορεσμένοι καὶ ἔχουν μίαν πυκνότητα d_K ἡ ὁποία σύμφωνα μὲ τὴν ἐξίσωσιν (2) εἶναι:

$$d_K = d_o \cdot \frac{F}{p_o \cdot (1 + \alpha \cdot \theta)}$$

Ἡ μεγίστη μᾶζα M τῶν ὑδρατμῶν, τοὺς ὁποίους δύναται νὰ περιέχῃ εἰς θερμοκρασίαν θ° ὄγκος $V' = 1\ m^3$ κεκορεσμένου ἀέρος εἶναι:

$$M = V' \cdot d_K \qquad \text{ἤτοι} \qquad M = V' \cdot d_o \cdot \frac{F}{p_o \cdot (1 + \alpha \cdot \theta)} \qquad (3)$$

Ἂν θέσωμεν τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ M εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1), εὑρίσκομεν ὅτι εἰς 1 m^3 ἀέρος τῆς αἰθούσης περιέχεται μᾶζα ὑδρατμῶν:

$$m = \Delta \cdot V' \cdot d_o \cdot \frac{F}{p_o \cdot (1 + \alpha \cdot \theta)} \qquad (4)$$

Ἡ πυκνότης d_o τῶν ὑδρατμῶν ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας εἶναι:

$$d_o = 0{,}806 \ gr/dm^3 \qquad \text{ἤ} \qquad d_o = 0{,}806 \ kgr/m^3$$

Ἄν λοιπὸν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (4) θέσωμεν τὰς δοθείσας τιμὰς τῶν Δ, V', d_o, F καὶ θ, εὑρίσκομεν:

$$m = 0{,}80 \cdot 1 \cdot 0{,}806 \cdot \frac{17{,}5}{760 \cdot \left(1 + \frac{20}{273}\right)}$$

ἤ

$$m = 0{,}0139 \ kgr/m^3.$$

Ἄρα οἱ ἐντὸς τῆς αἰθούσης περιεχόμενοι ὑδρατμοὶ ἔχουν μᾶζαν m_1 ἴσην μέ:

$$m_1 = m \cdot V \qquad \text{ἤτοι} \qquad m_1 = 0{,}0139 \cdot 15\,000 \left(\frac{kgr}{m^3} \cdot m^3\right)$$

καὶ

$$m_1 = \mathbf{208{,}5 \ kgr}$$

252

Ἡ πυκνότης τοῦ ξηροῦ ἀέρος ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας εἶναι $D_o = 1{,}239$ gr/dm^3. Εἰς θερμοκρασίαν $\theta = 20^\circ$ C καὶ ὑπὸ πίεσιν $p = 720$ mm Hg ἡ πυκνότης D τοῦ ξηροῦ ἀέρος εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν:

$$D = D_o \cdot \frac{p}{p_o \cdot (1 + \alpha \cdot \theta)}$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη πυκνότης τοῦ ξηροῦ ἀέρος εἶναι:

$$D = 1{,}293 \cdot \frac{720}{760 \cdot \left(1 + \frac{20}{273}\right)} \left[\frac{gr}{dm^3} \cdot \frac{cm\ Hg}{cm\ Hg \cdot \frac{grad}{grad}}\right]$$

καὶ

$$D = \mathbf{1{,}141 \ gr/dm^3}$$

Ὁ ἀήρ, ὁ ὁποῖος εἰς θερμοκρασίαν $\theta = 20^\circ$ C εἶναι κεκορεσμένος μὲ ὑδρατμούς, ἔχει πίεσιν $p = 720$ mm Hg. Αὐτὴν τὴν πίεσιν θὰ δεικνύῃ τὸ βαρόμετρον κατὰ τὴν στιγμὴν ἐκείνην. Ἀλλὰ ἐντὸς τοῦ ἀέρος ὑπάρχουν τότε κεκορεσμένοι ὑδρατμοὶ ἔχοντες πίεσιν p_u ἴσην μὲ τὴν μεγίστην τάσιν, δηλαδὴ $p_u = 17{,}5$ mm Hg. Ἡ πίεσις λοιπὸν p, τὴν ὁποίαν δεικνύει τὸ βαρόμετρον, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς πιέσεως p_α τοῦ ξηροῦ ἀέρος καὶ τῆς πιέσεως p_υ τῶν ὑδρατμῶν, ἤτοι εἶναι:

$$p = p_\alpha + p_\upsilon$$

Ἄρα ἡ μερικὴ πίεσις τοῦ ξηροῦ ἀέρος εἶναι:

$$p_\alpha = p - p_\upsilon \qquad \text{ἢ} \qquad p_\alpha = 720 - 17{,}5 = 702{,}5 \text{ mm Hg}$$

Ἡ ζητουμένη πυκνότης d τοῦ κεκορεσμένου μὲ ὑδρατμοὺς ἀέρος εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς πυκνότητος d_α τοῦ ξηροῦ ἀέρος καὶ τῆς πυκνότητος d_υ τῶν κεκορεσμένων ὑδρατμῶν.

Ἡ πυκνότης d_α τοῦ ξηροῦ ἀέρος εἰς $\theta = 20^\circ C$ καὶ ὑπὸ πίεσιν $p_\alpha = 702{,}5$ mm Hg εἶναι:

$$d_\alpha = 1{,}293 \cdot \frac{702{,}5}{760 \cdot \left(1 + \frac{20}{273}\right)} = 1{,}114 \text{ gr/dm}^3$$

Ἡ πυκνότης d_o τῶν ὑδρατμῶν εἶναι $d_o = 0{,}806$ gr/dm³. Ἄρα ἡ πυκνότης d_υ τῶν κεκορεσμένων ὑδρατμῶν εἰς $\theta = 20^\circ C$ καὶ ὑπὸ πίεσιν $p_\upsilon = 17{,}5$ mm Hg εἶναι:

$$d_\upsilon = 0{,}806 \cdot \frac{17{,}5}{760 \cdot \left(1 + \frac{20}{273}\right)} = 0{,}017 \text{ gr/dm}^3$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη πυκνότης d τοῦ κεκορεσμένου μὲ ὑδρατμοὺς ἀέρος εἶναι:

$$d = d_\alpha + d_\upsilon \qquad \text{ἤτοι} \qquad d = 1{,}114 + 0{,}017 = \mathbf{1{,}131 \text{ gr/dm}^3}$$

253

Ἐπειδὴ δίδεται ὅτι ἡ σχετικὴ ὑγρασία τοῦ ἀέρος εἶναι $\Delta = 0{,}60$ συνάγομεν ὅτι ἐντὸς τοῦ ἀέρος ὑπάρχουν ἀκόρεστοι ἀτμοί. Ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας αἱ πυκνότητες τοῦ ἀέρος καὶ τῶν ὑδρατμῶν εἶναι:

ἀέρος : $D_o = 1{,}293$ gr/dm³ ὑδρατμῶν : $d_o = 0{,}806$ gr/dm³

Εἰς θερμοκρασίαν $\theta^\circ C$ ἡ μεγίστη τάσις τῶν ὑδρατμῶν εἶναι F καὶ οἱ κεκορεσμένοι ὑδρατμοὶ ἔχουν μίαν πυκνότητα $d_\varkappa$ ἡ ὁποία εἶναι:

$$d_\varkappa = d_o \cdot \frac{F}{p_o \cdot (1 + \alpha \cdot \theta)}$$

Ἡ μεγίστη μᾶζα M τῶν ὑδρατμῶν, τοὺς ὁποίους δύναται νὰ περιέχῃ εἰς θερμοκρασίαν θ° ἕνας ὄγκος $V = 1\ m^3$ κεκορεσμένου ἀέρος εἶναι:

$$M = V \cdot d_\kappa \qquad \text{ἤτοι} \qquad M = V \cdot d_o \cdot \frac{F}{p_o \cdot (1 + \alpha \cdot \theta)} \qquad (1)$$

Ἂν εἰς θερμοκρασίαν θ°C οἱ ὑδρατμοὶ εἶναι ἀκόρεστοι, τότε ἡ τάσις των f κατὰ δεδομένην στιγμὴν εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὴν μεγίστην τάσιν F. Ἡ πυκνότης d_α τῶν ἀκορέστων ὑδρατμῶν εἰς θ°C καὶ ὑπὸ τάσιν f εἶναι:

$$d_\upsilon = d_o \cdot \frac{f}{p_o \cdot (1 + \alpha \cdot \theta)}$$

Ἡ μᾶζα m τῶν ἀκορέστων ὑδρατμῶν, τοὺς ὁποίους περιέχει ὄγκος $V = 1\ m^3$ ἀκορέστου ἀέρος εἶναι:

$$m = V \cdot d_\upsilon \qquad \text{ἤτοι} \qquad m = V \cdot d_o \cdot \frac{f}{p_o \cdot (1 + \alpha \cdot \theta)} \qquad (2)$$

Ἂν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν:

$$\frac{m}{M} = \frac{f}{F}$$

Ἀλλὰ ὁ λόγος m/M γνωρίζομεν ὅτι ἐκφράζει τὴν σχετικὴν ὑγρασίαν τοῦ ἀέρος. Ἄρα ἔχομεν:

$$\Delta = \frac{f}{F} \qquad \text{ἤτοι} \qquad f = \Delta \cdot F \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν (3) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ τάσις f τῶν ἀκορέστων ὑδρατμῶν εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ προβλήματος τούτου εἶναι:

$$f = 0{,}60 \cdot 1{,}75\ \text{cm Hg} = 1{,}05\ \text{cm Hg}$$

Ἡ δὲ πίεσις p_α τοῦ ξηροῦ ἀέρος εἶναι:

$$p_\alpha = 75\ \text{cm Hg} - 1{,}05\ \text{cm Hg} = 73{,}95\ \text{cm Hg}$$

Ἡ πυκνότης τοῦ ξηροῦ ἀέρος εἰς 20°C καὶ ὑπὸ πίεσιν p_α εἶναι:

$$D_\alpha = 1{,}293 \cdot \frac{73{,}95}{76 \cdot \left(1 + \frac{20}{273}\right)}\ \text{gr/dm}^3$$

Ἡ δὲ πυκνότης τῶν ἀκορέστων ὑδρατμῶν εἰς 20°C καὶ ὑπὸ τάσιν f εἶναι:

$$d_\upsilon = 0{,}806 \cdot \frac{1{,}05}{76 \cdot \left(1 + \frac{20}{273}\right)}\ \text{gr/dm}^3$$

Ἡ ζητουμένη μᾶζα m′ ὄγκου ἀέρος $V' = 1\ dm^3$ ἰσοῦται τότε μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς μάζης m_α τοῦ ξηροῦ ἀέρος καὶ τῆς μάζης m_υ τῶν ἀκορέστων ὑδρατμῶν, οἱ ὁποῖοι περιέχονται εἰς τὸ 1 λίτρον τοῦ ἀέρος, ἤτοι εἶναι:

$$m' = m_\alpha + m_\upsilon$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι:

$$m' = V' \cdot D_\alpha + V' \cdot d_\upsilon \quad \text{ἤτοι} \quad m' = V' \cdot (\, D_\alpha + d_\upsilon \,)$$

$$\text{ἢ} \quad m' = 1 \cdot \left[1{,}293 \cdot \frac{73{,}95}{76 \cdot \left(1 + \dfrac{20}{273}\right)} + 0{,}806 \cdot \frac{1{,}05}{76 \cdot \left(1 + \dfrac{20}{273}\right)} \right]$$

$$\text{ἄρα} \quad m' = \mathbf{1{,}182\ gr}$$

254

Ὁ πάγος ἔχει μᾶζαν $m = 100$ gr. Τὸ μέταλλον ἔχει μᾶζαν $m_\mu = 150$ gr καὶ θερμοκρασίαν $\theta = 100\,^\circ C$. Ἀφοῦ τήκεται μέρος μόνον τῆς μάζης τοῦ πάγου, ἕπεται ὅτι ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ συστήματος θὰ εἶναι $0^\circ C$. Ἡ μᾶζα τοῦ μετάλλου, ψυχομένη ἀπὸ $100^\circ C$ εἰς $0^\circ C$, ἀποδίδει ποσότητα θερμότητος:

$$Q = m_\mu \cdot c_\mu \cdot \Delta\theta \quad \text{ἤτοι} \quad Q = 150 \cdot 0{,}12 \cdot 100 \left(gr \cdot \frac{cal}{gr \cdot grad} \cdot grad \right)$$

$$\text{καὶ} \quad Q = 1800 \text{ cal}$$

Ἡ ποσότης θερμότητος Q δαπανᾶται διὰ τὴν τῆξιν m' γραμμαρίων πάγου, τοῦ ὁποίου ἡ θερμότης τήξεως εἶναι $\tau = 80$ cal/gr. Ἄρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$Q = m' \cdot \tau$$

Ἄρα ἡ τηκομένη μᾶζα τοῦ πάγου εἶναι:

$$m' = \frac{Q}{\tau} \quad \text{ἢ} \quad m = \frac{1800}{80} \left(\frac{cal}{cal/gr} \right)$$

$$\text{καὶ} \quad m' = \mathbf{22{,}5\ gr}$$

Ὁ ὄγκος τοῦ συστήματος πάγος—ὕδωρ ἐλαττώνεται, διότι τὰ m' γραμμάρια τοῦ πάγου, μετὰ τὴν τῆξιν των καταλαμβάνουν μικρότερον ὄγκον. Ἡ πυκνότης τοῦ πάγου εἶναι $d_\pi = 0{,}92$ gr/cm³. Τὰ m' γραμμάρια τοῦ πάγου ἔχουν ὄγκον:

$$V' = \frac{m'}{d_\pi} \quad \text{ἤτοι} \quad V' = \frac{22{,}5}{0{,}92} \left(\frac{gr}{gr/cm^3} \right)$$

$$\text{καὶ} \quad V' = 24{,}4 \text{ cm}^3$$

Ἀπὸ τὴν τῆξιν τῶν $m' = 22{,}5$ gr πάγου προκύπτουν m′ γραμμάρια ὕδατος 0° C, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὄγκον:

$$V'' = 22{,}5 \text{ cm}^3$$

Ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ συστήματος πάγος—ὕδωρ ἐλαττώνεται κατά:

$$\Delta V = V' - V'' \quad \text{ἤτοι} \quad \Delta V = 24{,}4 - 22{,}5 = \mathbf{1{,}9\ cm^3}$$

255

Κατὰ τὴν ἠλεκτρόλυσιν τὸ ὑδρογόνον ἐκλύεται εἰς τὴν κάθοδον τοῦ βολταμέτρου καὶ ὅταν ἀνέρχεται ἄνωθεν τοῦ ὕδατος θὰ εἶναι κεκορεσμένον ἀπὸ ὑδρατμούς, οἱ ὁποῖοι ἔχουν μερικὴν πίεσιν $p_\alpha = 1{,}27$ cm Hg. Ἡ πίεσις τοῦ ἀερίου, τὸ ὁποῖον συνελέγη, εἶναι $p = 76{,}5$ cm Hg. Αὕτη εἶναι ἄθροισμα τῆς πιέσεως p_α τῶν ὑδρατμῶν καὶ τῆς πιέσεως p_υ τοῦ ὑδρογόνου, ἤτοι εἶναι:

$$p = p_\upsilon + p_\alpha$$

Ὥστε ἡ μερικὴ πίεσις τοῦ ὑδρογόνου εἶναι:

$$p_\upsilon = p - p_\alpha \quad \text{ἤτοι} \quad p_\upsilon = 76{,}5 - 1{,}27 = 75{,}23 \text{ cm Hg}$$

Εἰς 15° C καὶ ὑπὸ πίεσιν $p_\upsilon = 75{,}23$ cm Hg ἡ πυκνότης τοῦ ὑδρογόνου εἶναι:

$$d_\upsilon = 0{,}000\,089 \cdot \frac{75{,}23}{76 \cdot \left(1 + \frac{15}{273}\right)} \text{ gr/cm}^3$$

Εἰς τὸν ὄγκον $V = 1 \text{ dm}^3 = 10^3 \text{ cm}^3$ περιέχεται μᾶζα ξηροῦ ὑδρογόνου:

$$m_\upsilon = V \cdot d_\upsilon \quad \text{ἤτοι} \quad m_\upsilon = \frac{10^3 \cdot 0{,}000\,089 \cdot 75{,}23 \cdot 273}{76 \cdot 288} \text{ gr}$$

$$\text{καὶ} \quad m_\upsilon = \frac{0{,}089 \cdot 75{,}23 \cdot 273}{76 \cdot 288} \text{ gr}$$

Δίδεται ὅτι ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας ἡ πυκνότης τῶν ὑδρατμῶν εἶναι 9 φορὰς μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν πυκνότητα τοῦ ὑδρογόνου, δηλαδὴ εἶναι:

$$0{,}000\,089 \cdot 9 \text{ gr/cm}^3$$

Εἰς 15°C καὶ ὑπὸ πίεσιν $p_\alpha = 1{,}27$ cm Hg ἡ πυκνότης τῶν ὑδρατμῶν εἶναι:

$$d_\alpha = 0{,}000\,089 \cdot 9 \cdot \frac{1{,}27}{76 \cdot \left(1 + \frac{15}{273}\right)} \text{ gr/cm}^3$$

Εἰς τὸν ὄγκον $V = 1\ dm^3 = 10^3\ cm^3$ τοῦ ὑδρογόνου, τὸ ὁποῖον συλλέγομεν, περιέχονται καὶ ὑδρατμοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουν μᾶζαν:

$$m_\alpha = V \cdot d_\alpha \quad \text{ἤτοι} \quad m_\alpha = 10^3 \cdot 0{,}000\,089 \cdot 9 \cdot \frac{1{,}27}{76 \cdot \left(1 + \frac{15}{273}\right)}\ gr$$

$$\text{καὶ} \quad m_\alpha = \frac{0{,}089 \cdot 9 \cdot 1{,}27 \cdot 273}{76 \cdot 288}\ gr$$

Ἑπομένως τὸ 1 λίτρον τοῦ ἀερίου, τὸ ὁποῖον συλλέγομεν, ἔχει μᾶζαν m, ἴσην μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς μάζης m_υ τοῦ ξηροῦ ὑδρογόνου καὶ τῆς μάζης m_α τῶν περιεχομένων ὑδρατμῶν:

$$m = m_\upsilon + m_\alpha \quad \text{ἤτοι} \quad m = \frac{0{,}089 \cdot 273}{76 \cdot 288}\left(75{,}23 + 9 \cdot 1{,}27\right) gr$$

$$\text{καὶ} \quad m = \mathbf{0{,}0962\ gr}$$

256

Τὸ δοχεῖον Α ἔχει ὄγκον $V = 10\ dm^3$ ἢ $V = 10^4\ cm^3$. Ὁ ἐντὸς τοῦ δοχείου ἀὴρ ἔχει πίεσιν $p = 76$ cm Hg. Αὕτη εἶναι ἄθροισμα τῆς πιέσεως $p_\upsilon = 1{,}6$ cm Hg τῶν ὑδρατμῶν καὶ τῆς πιέσεως p_α τοῦ ξηροῦ ἀέρος, ἤτοι εἶναι:

$$p = p_\upsilon + p_\alpha$$

Ὥστε ἡ μερικὴ πίεσις τοῦ περιεχομένου ἀέρος εἶναι:

$$p_\alpha = p - p_\upsilon \quad \text{ἤτοι} \quad p_\alpha = 76\ cm\ Hg - 1{,}6\ cm\ Hg = 74{,}4\ cm\ Hg$$

1) Εἰς 20^0 C καὶ ὑπὸ πίεσιν $p_\alpha = 74{,}4$ cm Hg ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος εἶναι:

$$d_\alpha = 1{,}3 \cdot \frac{74{,}4}{76 \cdot \left(1 + \frac{20}{273}\right)}\ gr/dm^3$$

Εἰς τὸν ὄγκον $V = 10\ dm^3$ περιέχεται μᾶζα ξηροῦ ἀέρος:

$$m_\alpha = V \cdot d_\alpha \quad \text{ἤτοι} \quad m_\alpha = 10 \cdot 1{,}3 \cdot \frac{74{,}4 \cdot 273}{76 \cdot 293}\ gr$$

$$\text{καὶ} \quad m_\alpha = 11{,}86\ gr$$

Ἡ σχετικὴ πυκνότης δ τῶν ὑδρατμῶν ὡς πρὸς τὸν ἀέρα εἶναι $\delta = 0{,}62$ καὶ ὅπως γνωρίζομεν ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν πυκνοτήτων τῶν δύο ἀερίων, ὅταν τὰ δύο αὐτὰ ἀέρια εὑρίσκωνται ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας θερμοκρασίας καὶ πιέσεως. Ἂν λοιπὸν d_o εἶναι ἡ πυκνότης τῶν ὑδρατμῶν ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας, τότε ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς σχετικῆς πυκνότητος ἀερίου ἔχομεν:

$$\delta = \frac{d_o}{1,3} \quad \text{καὶ συνεπῶς} \quad d_o = \delta \cdot 1,3 \ gr/dm^3$$

Εἰς 20°C καὶ ὑπὸ πίεσιν $p_\upsilon = 1,6$ cm Hg ἡ πυκνότης τῶν ὑδρατμῶν εἶναι:

$$d_\upsilon = 0,62 \cdot 1,3 \cdot \frac{1,6}{76 \cdot \left(1 + \frac{20}{273}\right)} \ gr/dm^3$$

Εἰς τὸν ὄγκον $V = 10$ dm³ περιέχεται μᾶζα ὑδρατμῶν:

$$m_\upsilon = V \cdot d_\upsilon \quad \text{ἤτοι} \quad m_\upsilon = 10 \cdot 0,62 \cdot 1,3 \cdot \frac{1,6 \cdot 273}{76 \cdot 293} \ gr$$

καὶ $$m_\upsilon = \mathbf{0,158\ gr}$$

2) Εἰς τὸν ὄγκον $V = 10$ dm³ περιέχεται μᾶζα m ἀερίου, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς μάζης m_α τοῦ ξηροῦ ἀέρος καὶ τῆς μάζης m_υ τῶν ὑδρατμῶν:

$$m = m_\alpha + m_\upsilon \quad \text{ἤτοι} \quad m = 11,86 + 0,158 = 12,018 \ gr$$

Ὁ ἐντὸς τοῦ δοχείου Α ἀὴρ ἔχει θερμοκρασίαν 20° C καὶ πίεσιν 76 cm Hg. Ἡ πυκνότης τοῦ ὑγροῦ τούτου ἀέρος εἶναι:

$$d_1 = \frac{m_\alpha + m_\upsilon}{V} \quad \text{ἢ} \quad d_1 = \frac{1,3 \cdot 273 \cdot (\,74,4 + 0,62 \cdot 1,6\,)}{76 \cdot 293} \ gr/dm^3$$

Εἰς 20° C καὶ ὑπὸ πίεσιν 76 cm Hg ἡ πυκνότης τοῦ ξηροῦ ἀέρος εἶναι:

$$d_2 = 1,3 \cdot \frac{76}{76 \cdot \left(1 + \frac{20}{273}\right)} \quad \text{ἢ} \quad d_2 = \frac{1,3 \cdot 273}{293} \ gr/dm^3$$

Ὁ ζητούμενος λόγος τῆς πυκνότητος τοῦ ὑγροῦ ἀέρος πρὸς τὴν πυκνότητα τοῦ ξηροῦ ἀέρος (ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας θερμοκρασίας καὶ πιέσεως 20° C καὶ 76 cm Hg) εἶναι:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{74,4 + 0,62 \cdot 1,6}{76} \quad \text{ἢ} \quad \frac{d_1}{d_2} = \frac{75,39}{76} = \mathbf{0,992}$$

ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΘΕΡΜΟΤΗΤΟΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

257

Τὸ σῶμα ἔχει βάρος $B = 4\ kgr^*$ καὶ ὅταν εὑρίσκεται εἰς ὕψος $h = 106{,}75\ m$ ἔχει δυναμικὴν ἐνέργειαν:

$$W_\Delta = B \cdot h \quad \text{ἤτοι} \quad W_\Delta = 4 \cdot 105{,}75\ (kgr^* \cdot m)$$

καὶ
$$W_\Delta = 427\ kgr^*m$$

Τὸ σῶμα κατὰ τὴν ἄφιξίν του εἰς τὸ ἔδαφος ἔχει κινητικὴν ἐνέργειαν W_K ἴσην μὲ τὴν ἀρχικὴν δυναμικήν του ἐνέργειαν, δηλαδὴ εἶναι:

$$W_K' = 427\ kgr^*m$$

Ὁλόκληρος ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος μεταβάλλεται εἰς θερμότητα. Γνωρίζομεν ὅτι 1 kcal ἰσοδυναμεῖ μὲ 427 kgr*m. Ἄρα ἡ ἀναπτυσσομένη ποσότης θερμότητος εἶναι:

$$Q = \mathbf{1\ kcal}$$

258

Ἡ θερμότης τήξεως τοῦ πάγου εἶναι $\tau = 80\ cal/gr$. Ἂν m εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ πάγου, θερμοκρασίας $0^o\,C$, τότε διὰ τὴν τῆξιν τοῦ πάγου ἀπαιτεῖται ποσότης θερμότητος:

$$Q = m \cdot \tau \quad \text{ἤτοι} \quad Q = m \cdot 80 \left(gr \cdot \frac{cal}{gr} \right)$$

καὶ
$$Q = m \cdot 80\ cal$$

Αὐτὴ ἡ ποσότης θερμότητος θὰ ἀναπτυχθῇ κατὰ τὴν κροῦσιν τοῦ πάγου ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἐκ τῆς μετατροπῆς τῆς κινητικῆς ἐνεργείας W_K τοῦ πάγου εἰς θερμότητα. Ἀλλὰ διὰ νὰ ἀποκτήσῃ ὁ πάγος κινητικὴν ἐνέργειαν W_K, πρέπει ὁ πάγος νὰ ἀφεθῇ ἐλεύθερος ἀπὸ ὕψος h. Εἰς τὸ ὕψος τοῦτο ὁ πάγος θὰ ἔχῃ δυναμικὴν ἐνέργειαν:

$$W_\Delta = m \cdot g \cdot h\ erg \quad \text{ἢ} \quad W_\Delta = \frac{m \cdot g \cdot h}{10^7}\ Joule$$

Σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς ἰσοδυναμίας θερμότητος καὶ μηχανικῆς ἐνεργείας θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$W_\Delta = J \cdot Q$$

ὅπου J εἶναι τὸ μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι: $J = 4{,}19$ Joule/cal. Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν W_Δ καὶ Q, λαμβάνομεν:

$$\frac{m \cdot g \cdot h}{10^7} = 4{,}19 \cdot m \cdot 80 \quad \text{ἢ} \quad h = \frac{4{,}19 \cdot 80 \cdot 10^7}{g}\ \text{cm}$$

Ἂν κατὰ προσέγγισιν λάβωμεν $g = 10^3\ \text{cm/sec}^2$, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ὕψος h εἶναι:

$$h = \frac{4{,}19 \cdot 80 \cdot 10^7}{10^3}\ \text{cm} \quad \text{καὶ} \quad h = \mathbf{335{,}2 \cdot 10^4\ cm = 33\,520\ m}$$

259

Τὸ τεμάχιον τοῦ μολύβδου ἔχει μᾶζαν m καὶ θερμοκρασίαν $\theta = 20^\circ$ C. Διὰ νὰ τακῇ ὁ μόλυβδος, πρέπει νὰ προσλάβῃ τὰς ἑξῆς ποσότητας θερμότητος:

α) διὰ νὰ ὑψωθῇ ἡ θερμοκρασία του ἀπὸ 20° C εἰς 327° C:

$$m \cdot 0{,}03 \cdot \left(327^\circ - 20^\circ\right)\left[gr \cdot \frac{cal}{gr \cdot grad} \cdot grad\right] \quad \text{ἤτοι} \quad 9{,}21 \cdot m\ cal$$

β) διὰ νὰ τακῇ καὶ νὰ μεταβληθῇ εἰς ὑγρὸν μόλυβδον 327° C:

$$m \cdot 5\left(gr \cdot \frac{cal}{gr}\right) \quad \text{ἤτοι} \quad 5 \cdot m\ cal$$

Ἄρα διὰ τὴν τῆξιν τοῦ μολύβδου ἀπαιτεῖται ποσότης θερμότητος:

$$Q = 9{,}21 \cdot m + 5 \cdot m\ cal \quad \text{ἢ} \quad Q = 14{,}21 \cdot m\ cal$$

Αὐτὴ ἡ ποσότης θερμότητος ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν:

$$W = J \cdot Q \quad \text{ἤτοι} \quad W = 4{,}19 \cdot 14{,}21 \cdot m\left(\frac{Joule}{cal} \cdot cal\right)$$

καὶ

$$W = 59{,}54 \cdot m\ \text{Joule}$$

Ἡ ἀνωτέρω ἐνέργεια, μετρημένη εἰς ἔργια, εἶναι:

$$W = 59{,}54 \cdot 10^7 \cdot m\ \text{erg}$$

Ὥστε διὰ νὰ τακῇ ὁ μόλυβδος, πρέπει νὰ ἀφεθῇ ἐλεύθερος ἀπὸ ἕνα ὕψος h, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ δυναμικὴν ἐνέργειαν ἴσην μὲ τὴν ἐνέργειαν, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται διὰ τὴν τῆξιν τοῦ μολύβδου. Οὕτω λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν:

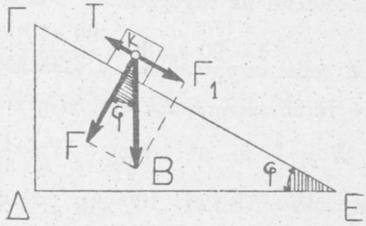
$$m \cdot g \cdot h = 59{,}54 \cdot 10^7 \cdot m$$

Τὸ ζητούμενον ὕψος h εἶναι:

$$h = \frac{59{,}54 \cdot 10^7}{981}\ \text{cm} \quad \text{ἤτοι} \quad h = \mathbf{6{,}07 \cdot 10^5\ cm = 6\,070\ m}$$

260

Τὸ μῆκος ΓΕ $= s$ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου εἶναι $s = 10$ m, ἡ δὲ κλίσις του εἶναι $\varphi = 30^0$ (σχ. 35). Ἐκ τῆς Γεωμετρίας εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ πλευρὰ ΓΔ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΔΕ θὰ εἶναι τότε ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης. Ἄρα εἶναι ΓΔ $= 5$ m.



Σχ. 35

Τὸ κιβώτιον ὀλισθαίνει ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς συνισταμένης τῶν δυνάμεων F_1 καὶ T, ὅπου T εἶναι ἡ τριβή: $T = \eta \cdot F$

Τὸ ἔργον τὸ παραγόμενον ὑπὸ τῆς τριβῆς εἶναι:

$$W_\tau = T \cdot s \qquad \text{ἤτοι} \qquad W_\tau = \eta \cdot F \cdot s$$

Τὸ ἔργον τοῦτο μεταβάλλεται ὁλόκληρον εἰς θερμότητα Q καὶ σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς ἰσοδυναμίας θερμότητος καὶ μηχανικῆς ἐνεργείας ἔχομεν:

$$W_\tau = J \cdot Q \qquad \text{ἄρα} \qquad Q = \frac{W_\tau}{J}$$

Θὰ ὑπολογίσωμεν τὴν συνιστῶσαν F τοῦ βάρους, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἔργον τῆς τριβῆς W_τ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα KBF καὶ ΕΓΔ εἶναι ὅμοια καὶ ἐπομένως ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$\frac{F_1}{B} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma E} \qquad \text{ἄρα} \qquad \frac{F_1}{B} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\text{καὶ} \quad F_1 = \frac{B}{2} = \frac{80}{2}\ \text{kgr*} \qquad \text{ἢ} \qquad F_1 = 40\ \text{kgr*}$$

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον KBF εὑρίσκομεν τώρα τὴν συνιστῶσαν F, διότι ἔχομεν:

$$F^2 = B^2 - F_1^2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad F^2 = 80^2 - 40^2 = 4\,800$$

$$\text{καὶ} \qquad F = 69{,}2\ \text{kgr*}$$

Ὥστε τὸ ἔργον τῆς τριβῆς εἶναι:

$$W_\tau = \eta \cdot F \cdot s = 0{,}4 \cdot 69{,}2 \cdot 10\ (\text{kgr*} \cdot \text{m})$$

$$\text{ἢ} \qquad W_\tau = 276{,}8\ \text{kgr*m}$$

Ἡ ἀναπτυσσομένη ποσότης θερμότητος εἶναι:

$$Q = \frac{276{,}8}{427}\left(\frac{\text{kgr*m}}{\text{kgr*m/kcal}}\right) \qquad \text{ἢ} \qquad Q = \mathbf{0{,}648\ kcal}$$

261

Ἡ αὐτοκινητάμαξα ἔχει μᾶζαν:

$$m = 250 \text{ tn} = 250 \cdot 10^6 \text{ gr}$$

καὶ κινεῖται μὲ ταχύτητα:

$$\upsilon = 90 \text{ km/h} = \frac{90 \cdot 10^5 \text{ cm}}{3600 \text{ sec}} = 25 \cdot 10^2 \text{ cm/sec}$$

Ἡ αὐτοκινητάμαξα ἔχει κινητικὴν ἐνέργειαν:

$$W = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 \quad \text{ἤτοι} \quad W = \frac{1}{2} \cdot 250 \cdot 10^6 \,(25 \cdot 10^2)^2 \text{ erg}$$

καὶ $W = 78\,125 \cdot 10^{10}$ erg ἢ $W = 78\,125 \cdot 10^3$ Joule

Ὅταν ἡ αὐτοκινητάμαξα ἀναγκάζεται νὰ σταματήσῃ μὲ τὴν βοήθειαν τῶν φρένων της, τότε ὁλόκληρος ἡ κινητική της ἐνέργεια μετατρέπεται εἰς ἰσοδύναμον ποσότητα θερμότητος Q, σύμφωνα μὲ τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν:

$$W = J \cdot Q$$

Ἡ ζητουμένη λοιπὸν ποσότης θερμότητος εἶναι:

$$Q = \frac{W}{J} \quad \text{ἤτοι} \quad Q = \frac{78\,125 \cdot 10^3}{4{,}19} \left(\frac{\text{Joule}}{\text{Joule/cal}} \right)$$

καὶ $\mathbf{Q = 186 \cdot 10^5\ cal = 18\,600\ kcal}$

262

Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα εὑρέθη ὅτι ἡ ἀναπτυσσομένη ποσότης θερμότητος εἶναι:

$$Q = 186 \cdot 10^5 \text{ cal}$$

Αὐτὴ ἡ ποσότης θερμότητος δύναται νὰ θερμάνῃ μᾶζαν m γραμμαρίων ὕδατος ἀπὸ 0°C εἰς 100°C καὶ θὰ ἰσχύῃ τότε ἡ σχέσις:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta\theta$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ δυναμένη νὰ θερμανθῇ μᾶζα τοῦ ὕδατος εἶναι:

$$m = \frac{Q}{c \cdot \Delta\theta} \quad \text{ἤτοι} \quad m = \frac{186 \cdot 10^5}{1 \cdot 100} \left[\frac{\text{cal}}{\frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot \text{grad}} \cdot \text{grad}} \right]$$

καὶ $m = 186 \cdot 10^3$ gr

Ἡ μᾶζα αὐτὴ τοῦ ὕδατος ἔχει ὄγκον $V = 186 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$. Ὥστε ὁ ζητούμενος ὄγκος ὕδατος εἶναι:

$$V = \mathbf{186\ dm^3}$$

263

Ἔστω m ἡ μᾶζα τοῦ ὕδατος, ἡ ὁποία πίπτει ἀπὸ ὕψος $h = 40 \text{ m} = 4 \cdot 10^3 \text{ cm}$. Εἰς τὸ ὕψος τοῦτο ἡ μᾶζα τοῦ ὕδατος ἔχει δυναμικὴν ἐνέργειαν:

$$W = m \cdot g \cdot h \ \text{erg}$$

Ἂν κατὰ προσέγγισιν λάβωμεν $g = 10^3 \text{ cm/sec}^2$, εὑρίσκομεν:

$$W = m \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^3 = m \cdot 4 \cdot 10^6 \ \text{erg}$$

$$\text{ἢ} \quad W = \frac{m \cdot 4 \cdot 10^6}{10^7} \ \text{Joule} \quad \text{καὶ} \quad W = 0{,}4 \cdot m \ \text{Joule}$$

Κατὰ τὴν πτῶσιν τοῦ ὕδατος ὁλόκληρος ἡ δυναμική του ἐνέργεια μετατρέπεται εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν. Ἐκ τῆς ἐνεργείας αὐτῆς W τὰ 0,35 μετατρέπονται εἰς ἰσοδύναμον ποσότητα θερμότητος Q, ἡ ὁποία παραμένει ἐπὶ τῆς μάζης m τοῦ ὕδατος καὶ προκαλεῖ τὴν ὕψωσιν τῆς θερμοκρασίας του κατὰ $\Delta\theta^0$. Ὥστε εἰς θερμότητα μετατρέπεται ἐνέργεια.:

$$W_\theta = 0{,}35 \cdot W \quad \text{ἢ} \quad W_\theta = 0{,}35 \cdot 0{,}4 \cdot m \ \text{Joule}$$

$$\text{καὶ} \quad W_\theta = 0{,}14 \cdot m \ \text{Joule}$$

Αὐτὴ ἡ ἐνέργεια ἰσοδυναμεῖ μὲ ποσότητα θερμότητος Q, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν:

$$W_\theta = J \cdot Q$$

Ὥστε ἐπὶ τῆς μάζης m τοῦ ὕδατος ἀναπτύσσεται ποσότης θερμότητος:

$$Q = \frac{W_\theta}{J} \quad \text{ἤτοι} \quad Q = \frac{0{,}14 \cdot m}{4{,}19} \left(\frac{\text{Joule}}{\text{Joule/cal}} \right)$$

$$\text{καὶ} \quad Q = \frac{14}{419} \cdot m \ \text{cal}$$

Τὴν ὕψωσιν τῆς θερμοκρασίας τοῦ ὕδατος κατὰ $\Delta\theta^0$ εὑρίσκομεν τώρα ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τῆς θερμιδομετρίας:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta\theta$$

Οὕτω ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν λαμβάνομεν:

$$\Delta\theta = \frac{Q}{m \cdot c} \quad \text{ἤτοι} \quad \Delta\theta = \frac{\frac{14}{419} \cdot m}{m \cdot 1} \left[\frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot \frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot \text{grad}}}\right]$$

$$\text{καὶ} \quad \Delta\theta = \frac{14}{419} \text{ grad} \quad \text{ἢ} \quad \Delta\theta = \mathbf{0{,}033^{\circ}\,C}$$

264

Ἡ σταγὼν τοῦ ὕδατος πίπτει μὲ τὴν ὁρικὴν ταχύτητα, δηλαδὴ μὲ σ τ α θ ε ρ ὰ ν ταχύτητα υ. Ἄρα ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τῆς σταγόνος διατηρεῖται σταθερά. Ἀλλὰ κατὰ τὴν πτῶσιν τῆς σταγόνος, ἡ δυναμική της ἐνέργεια βαίνει συνεχῶς ἐλαττουμένη. Ἐπειδὴ δὲν ἐπέρχεται ἀντίστοιχος αὔξησις τῆς κινητικῆς ἐνεργείας τῆς σταγόνος, συνάγεται ὅτι κατὰ τὴν πτῶσιν τῆς σταγόνος, ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια αὐτῆς μεταβάλλεται εἰς θερμότητα, ἡ ὁποία παραμένει ἐπὶ τῆς μάζης τοῦ ὕδατος. Οὕτω ἡ πίπτουσα μὲ τὴν ὁρικὴν ταχύτητα σταγὼν τῆς ὁμίχλης θερμαίνεται.

Ἔστω h τὸ ὕψος, ἀπὸ τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ πέσῃ ἡ σταγών, διὰ νὰ ὑψωθῇ ἡ θερμοκρασία της κατὰ $\Delta\theta = 0{,}1^{\circ}\text{C}$. Διὰ τὴν θέρμανσιν τῆς μάζης m τῆς σταγόνος τοῦ ὕδατος ἀπαιτεῖται ποσότης θερμότητος:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta\theta \ \text{ cal}$$

ἡ ὁποία ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν: $W = J \cdot Q$

$$\text{ἤτοι} \quad W = 4{,}19 \cdot m \cdot 1 \cdot 0{,}1^{\circ} \left[\frac{\text{Joule}}{\text{cal}} \cdot \text{gr} \cdot \frac{\text{cal}}{\text{gr} \cdot \text{grad}} \cdot \text{grad}\right]$$

$$\text{καὶ} \quad W = 0{,}419 \cdot m \text{ Joule}$$

Τόση ἀκριβῶς πρέπει νὰ εἶναι ἡ μεταβολὴ τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας τῆς σταγόνος, ὅταν αὐτὴ θὰ πέσῃ ἀπὸ ὕψος h. Οὕτω ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$W = m \cdot g \cdot h \qquad (1)$$

Θὰ λάβωμεν κατὰ προσέγγισιν $g = 10^3$ cm/sec². Ἡ ἐνέργεια W, μετρημένη εἰς ἔργια, εἶναι:

$$W = 0{,}419 \cdot m \cdot 10^7 \text{ erg} \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

$$m \cdot g \cdot h = 0{,}419 \cdot m \cdot 10^7 \quad \text{ἢ} \quad g \cdot h = 0{,}419 \cdot 10^7$$

Ἄρα τὸ ζητούμενον ὕψος εἶναι:

$$h = \frac{0{,}419 \cdot 10^7}{10^3} \text{ cm} \quad \text{ἤτοι} \quad h = \mathbf{4190\ cm = 41{,}90\ m}$$

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΟΣ ΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΝ ΕΝΕΡΓΕΙΑΝ

265

Ἡ μηχανὴ ἔχει ἰσχὺν $P = 20$ CV. Ἄρα ἡ μηχανὴ εἰς 1 h παράγει ἔργον:

$$W = P \cdot t \quad \text{ἤτοι} \quad W = 20 \cdot 1 \ (\text{CV} \cdot \text{h})$$
$$\text{καὶ} \quad W = 20 \ \text{CVh}$$

Δίδεται ὅτι ἡ μηχανὴ καταναλίσκει 1 kgr γαιάνθρακος καθ' ὡριαῖον ἵππον. Ἄρα εἰς 1 h ἡ μηχανὴ καταναλίσκει 20 kgr γαιάνθρακος. Κατὰ δευτερόλεπτον ἡ μηχανὴ καταναλίσκει μᾶζαν m γαιάνθρακος, ἴσην μέ:

$$m = \frac{20}{3\,600}\left(\frac{\text{kgr}}{\text{sec}}\right) = \frac{1}{180}\ \text{kgr/sec}$$

Ἡ θερμότης καύσεως τοῦ γαιάνθρακος εἶναι 8000 kcal/kgr. Ἡ μᾶζα m τοῦ γαιάνθρακος δίδει κατὰ τὴν καῦσιν της ποσότητα θερμότητος:

$$Q = \frac{1}{180} \cdot 8\,000 \left(\frac{\text{kgr}}{\text{sec}} \cdot \frac{\text{kcal}}{\text{kgr}}\right) = \frac{400}{9}\ \text{kcal/sec}$$

Ἡ ποσότης θερμότητος Q ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν κατὰ δευτερόλεπτον, δηλαδὴ μὲ ἰσχύν:

$$P' = J \cdot Q \quad \text{ἤτοι} \quad P' = 427 \cdot \frac{400}{9}\left[\frac{\text{kgr*m}}{\text{kcal}} \cdot \frac{\text{kcal}}{\text{sec}}\right]$$

$$\text{καὶ} \quad P' = \frac{427 \cdot 400}{9}\ \text{kgr*m/sec}$$

Ἡ ἰσχὺς αὐτὴ P', μετρημένη εἰς ἵππους, εἶναι:

$$P' = \frac{427 \cdot 400}{9 \cdot 75} = \text{CV} \quad \text{ἢ} \quad P' = \mathbf{253\ CV}$$

266

Τὸ βλῆμα ἔχει μᾶζαν m καὶ ἀποκτᾶ ταχύτητα υ. Δίδεται ὅτι εἶναι:

$$m = 1\ \text{tn} = 10^6\ \text{gr} \qquad \upsilon = 600\ \text{m/sec} = 6 \cdot 10^4\ \text{cm/sec}$$

Ἄρα τὸ βλῆμα ἀποκτᾷ κινητικὴν ἐνέργειαν:

$$W_\omega = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2$$

ἤτοι $W_\omega = \frac{1}{2} \cdot 10^6 \cdot 36 \cdot 10^8 \text{ erg} = 18 \cdot 10^7 \text{ Joule}$

Ἀπὸ τὴν καῦσιν τῶν 300 kgr τῆς ἐκρηκτικῆς ὕλης ἐλευθερώνεται ποσότης θερμότητος:

$$Q = 300 \cdot 10^3 \cdot 2\,000 \left(\text{gr} \cdot \frac{\text{cal}}{\text{gr}} \right) \quad \text{ἢ} \quad Q = 6 \cdot 10^8 \text{ cal}$$

Αὐτὴ ἡ ποσότης θερμότητος Q ἰσοδυναμεῖ μὲ μηχανικὴν ἐνέργειαν:

$$W_\delta = J \cdot Q \quad \text{ἤτοι} \quad W_\delta = 4{,}19 \cdot 6 \cdot 10^8 \left(\frac{\text{Joule}}{\text{cal}} \cdot \text{cal} \right)$$

καὶ $$W_\delta = 25{,}14 \cdot 10^8 \text{ Joule}$$

Οὕτω εἰς τὸ τηλεβόλον δαπανᾶται θερμότης ἰσοδύναμος μὲ μηχανικὴν ἐνέργειαν W_δ καὶ λαμβάνεται ὡς ὠφέλιμον ἔργον ἡ κινητικὴ ἐνέργεια W_ω τοῦ βλήματος. Ἂν θεωρήσωμεν τὸ τηλεβόλον ὡς μηχανήν, αὕτη θὰ ἔχῃ βιομηχανικὴν ἀπόδοσιν:

$$A = \frac{W_\omega}{W_\delta} \quad \text{ἤτοι} \quad A = \frac{18 \cdot 10^7}{25{,}14 \cdot 10^8} = \mathbf{0{,}07}$$

267

Ὁ κινητὴρ ἔχει ἰσχὺν P = 303 CV καὶ ἑπομένως εἰς 1 h παράγει ὠφέλιμον ἔργον:

$$W_\omega = P \cdot t \quad \text{ἤτοι} \quad W_\omega = 303 \cdot 1 \text{ (CV} \cdot \text{h)} = 303 \text{ CVh}$$

Γνωρίζομεν ὅτι εἶναι:

$$1 \text{ CVh} = 75 \text{ kgr*m/sec} \cdot 3\,600 \text{ sec} = 270\,000 \text{ kgr*m}$$

Ἄρα ὁ κινητὴρ εἰς μίαν ὥραν παράγει ὠφέλιμον ἔργον:

$$W_\omega = 303 \cdot 270\,000 = 8\,181 \cdot 10^4 \text{ kgr*m}$$

Εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον, δηλαδὴ εἰς μίαν ὥραν, ὁ κινητὴρ καταναλίσκει 72 kgr βενζίνης. Κατὰ τὴν καῦσιν τῆς βενζίνης ἐλευθερώνεται ποσότης θερμότητος:

$$Q = 72 \cdot 11\,000 \left(\text{kgr} \cdot \frac{\text{kcal}}{\text{kgr}} \right) = 792 \cdot 10^3 \text{ kcal}$$

Αὐτὴ ἡ ποσότης θερμότητος ἰσοδυναμεῖ μὲ μηχανικὴν ἐνέργειαν:

$$W_\delta = J \cdot Q \qquad \text{ἤτοι} \qquad W_\delta = 427 \cdot 792 \cdot 10^3 \left(\frac{\text{kgr*m}}{\text{kcal}} \cdot \text{kcal} \right)$$

καὶ

$$W_\delta = 338\,184 \cdot 10^3 \text{ kgr*m}$$

Ἄρα ἡ βιομηχανικὴ ἀπόδοσις τοῦ κινητῆρος εἶναι:

$$A = \frac{W_\omega}{W_\delta} \qquad \text{ἤτοι} \qquad A = \frac{8\,181 \cdot 10^4}{338\,184 \cdot 10^3} = \mathbf{0{,}24}$$

268

Ἡ ἀτμομηχανὴ ἔχει ἰσχὺν $P = 2000$ CV καὶ βιομηχανικὴν ἀπόδοσιν $A = 0{,}16$. Ἂν ἡ μηχανὴ λειτουργήσῃ ἐπὶ χρόνον $t = 24\text{h}$, τότε παράγει ὠφέλιμον ἔργον:

$$W_\omega = P \cdot t \qquad \text{ἤτοι} \qquad W_\omega = 2\,000 \cdot 24 \,(\text{CV} \cdot \text{h}) = 48 \cdot 10^3 \text{ CVh}$$

Ἐπειδὴ εἶναι $1\text{CVh} = 27 \cdot 10^4$ kgr*m, ἕπεται ὅτι τὸ παραγόμενον ὠφέλιμον ἔργον εἶναι:

$$W_\omega = 48 \cdot 10^3 \cdot 27 \cdot 10^4 \text{ kgr*m} \qquad \text{ἢ} \qquad W_\omega = 48 \cdot 27 \cdot 10^7 \text{ kgr*m}$$

Τὸ δαπανώμενον ἔργον W_δ δυνάμεθα νὰ τὸ ὑπολογίσωμεν ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$A = \frac{W_\omega}{W_\delta} \qquad \text{ἄρα} \qquad W_\delta = \frac{W_\omega}{A}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι:

$$W_\delta = \frac{48 \cdot 27 \cdot 10^7}{0{,}16} \left(\text{kgr*m} \right) = 81 \cdot 10^9 \text{ kgr*m}$$

Τὸ ἔργον W_δ ἰσοδυναμεῖ μὲ ποσότητα θερμότητος Q ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται κατὰ τὴν καῦσιν μάζης m γαιάνθρακος. Ἡ ποσότης θερμότητος Q εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$W_\delta = J \cdot Q$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ἡ δαπανηθεῖσα ποσότης θερμότητος εἶναι:

$$Q = \frac{W_\delta}{J} \qquad \text{ἤτοι} \qquad Q = \frac{81 \cdot 10^9}{427} \left[\frac{\text{kgr*m}}{\text{kgr*m/kcal}} \right]$$

καὶ

$$Q = 19 \cdot 10^7 \text{ kcal}$$

Δίδεται ὅτι ἡ θερμότης καύσεως τοῦ γαιάνθρακος εἶναι: $\varkappa = 7000$ kcal/kgr. Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς ποσότητος θερμότητος Q καίεται μᾶζα m γαιάνθρακος ἴση μέ:

$$m = \frac{Q}{\varkappa} \quad \text{ἤτοι} \quad m = \frac{19 \cdot 10^7}{7 \cdot 10^3} \left[\frac{\text{kcal}}{\text{kcal/kgr}}\right]$$

καὶ $$m = \mathbf{27\,143\ kgr = 27{,}143\ tn}$$

269

Ὁ βενζινοκινητὴρ ἔχει ἰσχὺν $P = 1000$ CV καὶ βιομηχανικὴν ἀπόδοσιν $A = 0{,}30$. Εἰς χρόνον $t = 1$ h ἡ μηχανὴ παράγει ὠφέλιμον ἔργον:

$$W_\omega = P \cdot t \quad \text{ἤτοι} \quad W_\omega = 1\,000 \cdot 1\ (\text{CV} \cdot \text{h}) = 10^3\ \text{CVh}$$

ἢ $$W_\omega = 10^3 \cdot 270\,000 = 27 \cdot 10^7\ \text{kgr*m}$$

Τὸ δαπανώμενον ἔργον W_δ θὰ τὸ ὑπολογίσωμεν ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$A = \frac{W_\omega}{W_\delta} \quad \text{ἄρα} \quad W_\delta = \frac{W_\omega}{A}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι:

$$W_\delta = \frac{27 \cdot 10^7}{0{,}30}\ \text{kgr*m} = 9 \cdot 10^8\ \text{kgr*m}$$

Τὸ ἔργον W_δ ἰσοδυναμεῖ μὲ ποσότητα θερμότητος Q ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται κατὰ τὴν καῦσιν μάζης m βενζίνης. Ἡ ποσότης θερμότητος Q εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$W_\delta = J \cdot Q$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ἡ δαπανηθεῖσα ποσότης θερμότητος εἶναι:

$$Q = \frac{W_\delta}{J} \quad \text{ἤτοι} \quad Q = \frac{9 \cdot 10^8}{427} \left[\frac{\text{kgr*m}}{\text{kgr*m/kcal}}\right]$$

καὶ $$Q = 21 \cdot 10^5\ \text{kcal}$$

Δίδεται ὅτι ἡ θερμότης καύσεως τῆς βενζίνης εἶναι:

$$\varkappa = 10\,000\ \text{cal/gr} \quad \text{ἤτοι} \quad \varkappa = 10^4\ \text{kcal/kgr.}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς ποσότητος θερμότητος Q καίεται μᾶζα m βενζίνης ἴση μέ:

$$m = \frac{Q}{\varkappa} \quad \text{ἤτοι} \quad m = \frac{21 \cdot 10^5}{10^4} \left[\frac{\text{kcal}}{\text{kcal/kgr}}\right]$$

καὶ $$m = 210\ \text{kgr}$$

Δίδεται ὅτι ἡ βενζίνη ἔχει πυκνότητα:

$$d = 0{,}72\ \text{gr/cm}^3 \quad \text{ἄρα} \quad d = 0{,}72\ \text{kgr/dm}^3$$

Ὁ ζητούμενος ὄγκος V τῆς καταναλισκομένης μάζης m τῆς βενζίνης εἶναι :

$$V = \frac{m}{d} \quad \text{ἤτοι} \quad V = \frac{210}{0{,}72}\left[\frac{\text{kgr}}{\text{kgr/dm}^3}\right]$$

$$\text{καὶ} \quad V = \mathbf{291{,}7\ dm^3}$$

270

1) Ἡ θεωρουμένη ἀτμομηχανὴ εἶναι ἡ ἀτμομηχανή, τὴν ὁποίαν ἐξητάσαμεν εἰς τὸ πρόβλημα 265. Ἐκεῖ εὕρομεν ὅτι, ἂν ὁλόκληρος ἡ ἐκ τῆς καύσεως τοῦ γαιάνθρακος παραγομένη θερμότης μετετρέπετο εἰς μηχανικὴν ἐνέργειαν, τότε ἡ ἀτμομηχανὴ θὰ εἶχεν ἰσχύν :

$$P' = \mathbf{253\ CV}$$

2) Ἐὰν ἡ μηχανὴ ἦτο τελεία, τότε ἡ θεωρητικὴ ἀπόδοσις τῆς μηχανῆς θὰ ἦτο :

$$A_\Theta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \qquad (1)$$

Δίδεται ὅτι ὁ λέβης ἔχει θερμοκρασίαν 180°C, ὁ δὲ συμπυκνωτὴς 40°C. Οὕτω αἱ θερμοκρασίαι τῆς θερμῆς καὶ τῆς ψυχρᾶς πηγῆς εἶναι :

$$T_1 = 273 + 180 = 453^\circ\ K \qquad T_2 = 273 + 40 = 313^\circ\ K$$

Ἂν θέσωμεν τὰς ἀνωτέρω θερμοκρασίας εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1), εὑρίσκομεν ὅτι, ἂν ἡ μηχανὴ ἦτο τελεία, θὰ εἶχεν ἀπόδοσιν :

$$A_\Theta = \frac{453 - 313}{453}\left(\frac{\text{grad}}{\text{grad}}\right) \quad \text{ἤτοι} \quad A = \frac{140}{453} = 0{,}3$$

Ἡ εὑρεθεῖσα ἀπόδοσις φανερώνει ὅτι, ἂν ἡ μηχανὴ ἦτο τελεία θὰ μετέτρεπεν εἰς ὠφέλιμον μηχανικὴν ἰσχὺν P_ω τὰ 0,3 τῆς δαπανωμένης ἰσχύος. Εἰς τὴν θεωρουμένην ἀτμομηχανὴν εὑρέθη ὅτι ἡ δαπανωμένη θερμότης ἰσοδυναμεῖ μὲ ἰσχὺν P' = 253 CV. Ἄρα, ἂν ἡ ἀτμομηχανὴ ἦτο τελεία, θὰ εἶχεν ἰσχύν :

$$P_\omega = 0{,}3 \cdot P \quad \text{ἤτοι} \quad P_\omega = 0{,}3 \cdot 253\ CV$$

$$\text{καὶ} \quad P_\omega = \mathbf{76\ CV}$$

Ἡ πραγματικὴ ἰσχὺς (P = 20 CV) εἶναι πολὺ μικροτέρα τῆς θεωρητικῆς ἰσχύος τῆς μηχανῆς (P = 76 CV).

271

1) Ὁ ὀρειβάτης ἔχει βάρος $B = 95$ kgr* καὶ ἐντὸς χρόνου $t = 4\,h$ ἀνέρχεται εἰς ὕψος $h = 1200$ m. Οὕτω ὁ ὀρειβάτης ἐκτελεῖ ἔργον :

$$W = B \cdot h \qquad \text{ἤτοι} \qquad W = 95 \cdot 1\,200 \;(\text{kgr}^* \cdot \text{m})$$

$$\text{καὶ} \qquad W = 114\,000 \;\text{kgr}^*\text{m}$$

Τὸ ἔργον τοῦτο ἐκτελεῖται εἰς χρόνον $t = 4 \cdot 3600$ sec. Ἄρα ἡ μέση ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος, ὁ ὁποῖος θὰ ἔδιδε τὸ ἔργον W εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον, εἶναι :

$$P = \frac{W}{t} \qquad \text{ἢ} \qquad P = \frac{114\,000}{4 \cdot 3\,600} \left(\frac{\text{kgr}^*\text{m}}{\text{sec}} \right)$$

$$\text{καὶ} \qquad P = \mathbf{7{,}92\;kgr^*m/sec}$$

Ἡ ἀνωτέρω ἰσχύς, μετρημένη εἰς ἵππους, εἶναι :

$$P = \frac{7{,}92}{75} = \mathbf{0{,}105\;CV}$$

Ἂν ὁ ὀργανισμὸς τοῦ ὀρειβάτου θεωρηθῇ ὡς τελεία θερμικὴ μηχανή, τότε ἡ μηχανὴ αὐτὴ θὰ εἶχε θεωρητικὴν ἀπόδοσιν :

$$A = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \qquad \text{ἤτοι} \qquad A = \frac{37^0 - 7^0}{310^0} = \frac{30}{31}$$

Ὁ ὀρειβάτης παράγει ὠφέλιμον ἔργον $W_\omega = 114\,000$ kgr*m. Ἂν ὁ ὀρειβάτης θεωρηθῇ ὡς τελεία θερμικὴ μηχανή, τότε τὸ δαπανώμενον ἔργον W_δ θὰ εὑρεθῇ ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$A = \frac{W_\omega}{W_\delta} \qquad \text{ἄρα} \qquad W_\delta = \frac{W_\omega}{A}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ἡ δαπανωμένη μηχανικὴ ἐνέργεια εἶναι :

$$W_\delta = \frac{114\,000}{30/310} \left(\text{kgr}^*\text{m} \right) = 1178 \cdot 10^3 \;\text{kgr}^*\text{m}$$

Ἡ ἐνέργεια αὐτὴ W_δ ἰσοδυναμεῖ μὲ ποσότητα θερμότητος :

$$Q = \frac{W_\delta}{J} \qquad \text{ἤτοι} \qquad Q = \frac{1178 \cdot 10^3}{427} \left[\frac{\text{kgr}^*\text{m}}{\text{kgr}^*\text{m/kcal}} \right]$$

$$\text{καὶ} \qquad Q = \mathbf{2\,760\;kcal}$$

Τόσαι θερμίδες πρέπει νὰ δοθοῦν εἰς τὸν ὀργανισμὸν τοῦ ὀρειβάτου διὰ τὴν ἀναπλήρωσιν τοῦ ὑπ' αὐτοῦ παραχθέντος ἔργου.

272

Τὸ ὕδωρ τῆς λίμνης ἔχει ὄγκον :

$$V = 400\,000 \text{ m}^2 \cdot 60 \text{ m} = 24 \cdot 10^6 \text{ m}^3$$

Εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος εἶναι $\rho = 1 \text{tn}^*/\text{m}^3$. Ἄρα τὸ ὕδωρ τῆς λίμνης ἔχει βάρος :

$$B = V \cdot \rho \qquad \text{ἤτοι} \qquad B = 24 \cdot 10^6 \cdot 1 \left[\text{m}^3 \cdot \frac{\text{tn}^*}{\text{m}^3} \right]$$

$$\text{καὶ} \qquad B = 24 \cdot 10^6 \text{ tn}^* \qquad \text{ἢ} \qquad B = 24 \cdot 10^9 \text{ kgr}^*$$

1) Ἐπειδὴ τὸ ὕδωρ τῆς λίμνης εὑρίσκεται 800 m ὑψηλότερα ἀπὸ τὸν στρόβιλον, συνάγεται ὅτι τὸ ὕδωρ τῆς λίμνης ἔχει (ἐν σχέσει μὲ τὸν στρόβιλον) δυναμικὴν ἐνέργειαν:

$$W_\Delta = 24 \cdot 10^9 \cdot 800 \text{ (kgr}^* \cdot \text{m)} = 192 \cdot 10^{11} \text{ kgr}^*\text{m}$$

$$\text{ἢ} \qquad W_\Delta = 18{,}816 \cdot 10^{13} \text{ Joule}$$

Τόσην ἐνέργειαν δύναται νὰ προμηθεύσῃ ἡ λίμνη εἰς τὸ ἐργοστάσιον ἠλεκτροπαραγωγῆς. Γνωρίζομεν ὅτι εἶναι :

$$1 \text{ kWh} = 36 \cdot 10^5 \text{ Joule}$$

Ἄρα ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τοῦ ὕδατος τῆς λίμνης, μετρημένη εἰς κιλοβατώρια, εἶναι :

$$W_\Delta = \frac{18{,}816 \cdot 10^{13}}{36 \cdot 10^5} = 5{,}23 \cdot 10^7 \text{ kWh}$$

Ἡ ἰσχὺς τῆς παραγομένης ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας εἶναι τὰ 0,80 τῆς ἰσχύος, τὴν ὁποίαν παρέχει ἡ λίμνη εἰς τὸ ἐργοστάσιον. Ἡ ἰσχὺς τῆς παραγομένης ὠφελίμου ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας εἶναι $P_\omega = 5\,000$ kW. Ἄρα ἡ δαπανωμένη ἰσχὺς P_δ, τὴν ὁποίαν παρέχει ἡ λίμνη, εἶναι :

$$P_\delta = \frac{P_\omega}{0{,}80} \qquad \text{ἤτοι} \qquad P_\delta = \frac{5\,000}{0{,}80} = 6\,250 \text{ kW}$$

Ὥστε ἡ λίμνη δύναται νὰ τροφοδοτήσῃ τὸ ἐργοστάσιον ἐπὶ χρόνον :

$$t = \frac{W_\Delta}{P_\delta} \qquad \text{ἤτοι} \qquad t = \frac{5{,}23 \cdot 10^7}{6\,250} \left(\frac{\text{kW} \cdot \text{h}}{\text{kW}} \right)$$

$$\text{καὶ} \qquad t = \mathbf{8\,368 \text{ h}}$$

2) Κατὰ τὸν χρόνον τοῦτον τὸ ἐργοστάσιον θὰ παραγάγῃ ἠλεκτρικὴν ἐνέργειαν W_1 ἴσην μὲ τὰ 0,80 τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας τοῦ ὕδατος τῆς λίμνης, ἤτοι :

$$W_1 = 0{,}80 \cdot W_\Delta \qquad \text{καὶ} \qquad W_1 = 0{,}80 \cdot 18{,}816 \cdot 10^{13} \text{ Joule}$$

Ἂν τὸ ποσὸν αὐτὸ τῆς ἐνεργείας θέλωμεν νὰ τὸ λάβωμεν ἀπὸ μίαν θερμικὴν μηχανήν, ἔχουσαν βιομηχανικὴν ἀπόδοσιν 0,14, τότε πρέπει ἀπὸ τὴν καῦσιν τοῦ γαιάνθρακος νὰ παραχθῇ ποσότης θερμότητος Q ἰσοδύναμος μὲ μηχανικὴν ἐνέργειαν W_2. Ἐπειδὴ ἡ ἀπόδοσις εἶναι 0,14 εὑρίσκομεν ὅτι ἡ δαπανωμένη ἐνέργεια W_2 εἶναι ἴση μέ:

$$W_2 = \frac{W_1}{0,14} \qquad \text{ἤτοι} \qquad W_2 = \frac{0,80 \cdot 18,816 \cdot 10^{13}}{0,14} \text{ Joule}$$

$$\text{καὶ} \qquad W_2 = 107 \cdot 10^{13} \text{ Joule}$$

Κατὰ τὴν καῦσιν 1 τόννου γαιάνθρακος ἐλευθερώνεται ποσότης θερμότητος :

$$Q' = 8\,000 \cdot 1\,000 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{kgr}} \cdot \text{kgr} \right) = 8 \cdot 10^6 \text{ kcal}$$

$$\text{ἢ} \qquad Q' = 8 \cdot 10^9 \text{ cal}$$

Αὐτὴ ἡ ποσότης θερμότητος ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν :

$$W' = J \cdot Q' \qquad \text{ἤτοι} \qquad W' = 4,19 \cdot 8 \cdot 10^9 \left(\frac{\text{Joule}}{\text{cal}} \cdot \text{cal} \right)$$

$$\text{καὶ} \qquad W' = 33,44 \cdot 10^9 \text{ Joule}$$

Ὥστε, διὰ νὰ λάβωμεν τὴν ἰδίαν ἠλεκτρικὴν ἐνέργειαν ἀπὸ μίαν θερμικὴν μηχανήν, πρέπει νὰ καῇ μᾶζα m γαιάνθρακος, ἴση μέ :

$$m = \frac{W_2}{W'} \qquad \text{ἢ} \qquad m = \frac{107 \cdot 10^{13}}{33,44 \cdot 10^9} = \mathbf{32\,000 \text{ tn}}$$

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΤΙΜΑΙ

Μέγεθος	Ἀριθμητικὴ τιμὴ	Μέγεθος	Ἀριθμητικὴ τιμὴ
$\sqrt{2}$	1,41	$\pi/2$	1,57
$\sqrt{3}$	1,73	$\pi/3$	1,05
$\sqrt{5}$	2,24	$\pi/4$	0,79
$\sqrt{6}$	2,45	$1/\pi$	0,32
$\sqrt{7}$	2,65	$1/\sqrt{\pi}$	0,56
$\sqrt{8}$	2,83	π^2	9,87
$\sqrt{10}$	3,16	$4\pi^2$	39,48

ΑΙ ΜΟΝΑΔΕΣ ΤΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΟΣ

Μέγεθος καὶ ἐξίσωσις ὁρισμοῦ	Μονὰς
Μᾶζα (m)	1 χιλιόγραμμον—μάζης (1 kgr) 1 γραμμάριον—μάζης (1 gr)
Βάρος (Β)	1 χιλιόγραμμον—βάρους (1 kgr*) 1 γραμμάριον—βάρους (1 gr*)
Πυκνότης (d) $d = \frac{m}{V}$	$1\ gr/cm^3 = \frac{1\ gr}{1\ cm^3}$
Εἰδικὸν βάρος (ρ) $\rho = \frac{B}{V}$	$1\ gr^*/cm^3 = \frac{1\ gr^*}{1\ cm^3}$
Χρόνος (t)	1 δευτερόλεπτον (1 sec)
Μῆκος (s)	1 ἑκατοστόμετρον (1 cm)
Ταχύτης (υ) $\upsilon = \frac{s}{t}$	$1\ cm/sec = \frac{1\ cm}{1\ sec}$
Ἐπιτάχυνσις (γ) $\gamma = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t}$	$1\ cm/sec^2 = \frac{1\ cm/sec}{1\ sec}$
Δύναμις (F) $F = m \cdot \gamma$	1 δύνη (1 dyn) $1\ dyn = 1\ gr \cdot 1\ cm/sec$
Ἔργον (W) $W = F \cdot s$	1 ἔργιον (1 erg) $1\ erg = 1\ dyn \cdot 1\ cm$ $1\ Joule = 10^7\ erg$ $1\ kgr^*m = 9{,}81\ Joule$ $1\ Wh = 3\ 600\ Joule$ $1\ KWh = 36 \cdot 10^5\ Joule$ $1\ CVh = 270\ 000\ kgr^*m$
Ἰσχὺς (P) $P = \frac{W}{t}$	$1\ erg/sec = \frac{1\ erg}{1\ sec}$ $1\ Watt = \frac{1\ Joule}{1\ sec}$ $1\ kW = 10^3\ Watt$ $1\ CV = 75\ kgr^*m/sec$
Πίεσις (p) $p = \frac{F}{\sigma}$	$1\ dyn/cm^2 = \frac{1\ dyn}{1\ cm^2}$ $1\ at = \frac{1\ kgr^*}{1\ cm^2}$ $1\ cm\ Hg = 13{,}6\ gr^*/cm^2$ $1\ mm\ Hg = 1{,}36\ gr^*/cm^2$

ΑΙ ΜΟΝΑΔΕΣ ΤΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΟΣ

Μέγεθος καὶ ἐξίσωσις ὁρισμοῦ	Μονὰς
Συχνότης (ν) $\nu = \frac{1}{T}$	1 Hertz (1 Hz ἢ 1 c) $1\ Hz = \frac{1}{1\ sec}$
Γωνιακὴ ταχύτης (ω) $\omega = \frac{2\pi}{T}$	$1\ rad/sec = \frac{1\ rad}{1\ sec}$
Θερμοκρασία (θ^0)	1 βαθμὸς (1 grad 1^oC)
Θερμότης (Q)	1 θερμὶς (1 cal) $1\ kcal = 10^3\ cal$

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ